



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# Θέματα Θεωρίας Αλγεβρών Banach και Αλγεβρών Τελεστών

Το ριζικό Jacobson μιας Άλγεβρας Nest  
και ενός Ημισταυρωτού Γινομένου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντός Ε. Κωνσταντίνος

Ειδίκευση: Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιβλέπων: Δοδός Παντελής  
Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Αθήνα, 2019



## Πρόλογος

Η διπλωματική μου εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών με τριμελή εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τον κ. Δοδό Παντελή, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών ως επιβλέποντα και μέλη αυτής, τους κ. Κατάβολο Αριστείδη, Ομότιμο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, και κ. Ανούση Μιχαήλ, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Αριστείδη Κατάβολο για την παρότρυνσή του, την καθοδήγησή του, τις υποδείξεις του, το πολύτιμο επιστημονικό υλικό που μου προσέφερε καθώς, επίσης, και για το προσωπικό χρόνο που αφιέρωσε για την προσεκτική μελέτη της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, σημαντική ήταν η συμβολή των κ. Δ. Γατζούρα και κ. Ε. Κακαριάδη. Επιπλέον, ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς επιτροπής για την συμμετοχή τους και για τον χρόνο που αφιέρωσαν.

Τέλος, κρίνω σκόπιμο να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους γονείς μου για τη στήριξη τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κωνσταντός Κωνσταντίνος  
Αθήνα, 2019



## Βασικοί συμβολισμοί

|                              |                                                                                                       |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                 | : Το σύνολο των φυσικών αριθμών.                                                                      |
| $\mathbb{Z}$                 | : Το σύνολο των ακεραιών αριθμών.                                                                     |
| $\mathbb{Q}$                 | : Το σύνολο των ρητών αριθμών.                                                                        |
| $\mathbb{R}$                 | : Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.                                                                  |
| $\mathbb{C}$                 | : Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.                                                                    |
| $C(X)$                       | : Το σύνολο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων στο τοπολογικό χώρο $X$ .                               |
| $C_0(X)$                     | : Το σύνολο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων στο τοπολογικό χώρο $X$ που μηδενίζονται στο άπειρο.    |
| $\mathbb{B}(X)$              | : Το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων απεικονίσεων στο χώρο με νόρμα $X$ .                          |
| $\mathbf{L}(X)$              | : Το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων στο γραμμικό χώρο $X$ .                                        |
| $A_1$                        | : Η μοναδοποίηση μιας άλγεβρας $A$ .                                                                  |
| $\sigma_A(x)$                | : Το φάσμα ενός στοιχείου $x$ μιας άλγεβρας $A$ .                                                     |
| $r_A(x)$                     | : Η φασματική ακτίνα ενός στοιχείου $x$ μιας άλγεβρας $A$ .                                           |
| $\mathbf{M}(A)$              | : Το σύνολο των μεγιστικών ιδεωδών μιας άλγεβρας $A$ .                                                |
| $\mathbf{m}(A)$              | : Το φάσμα μιας άλγεβρας $A$ .                                                                        |
| $\mathcal{G}$                | : Η απεικόνιση Gelfand.                                                                               |
| $\widehat{A}$                | : Η άλγεβρα των μετασχηματισμών Gelfand μιας μεταθετικής άλγεβρας Banach $A$ .                        |
| $x^*$                        | : Η ενέλιξη ενός στοιχείου $x$ μιας άλγεβρας $A$ .                                                    |
| $C^*(S)$                     | : Η $C^*$ -υπό-άλγεβρα μιας $C^*$ -άλγεβρας $A$ που παράγεται από το $S \subseteq A$ .                |
| $SOT$                        | : Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology) στον $\mathbb{B}(H)$ .                       |
| $WOT$                        | : Η ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology) στον $\mathbb{B}(H)$ .                        |
| $S'$                         | : Ο μεταθέτης του $S \subseteq \mathbb{B}(H)$ .                                                       |
| $P(M)$                       | : Η προβολή επί του κλειστού υποχώρου $M$ .                                                           |
| $M^\perp$                    | : Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός συνόλου $M$ .                                                          |
| $\bigwedge_{i \in I} M_i$    | : Η τομή μιας οικογένειας κλειστών υποχώρων $(M_i)_{i \in I}$ .                                       |
| $\bigvee_{i \in I} M_i$      | : Η κλειστή γραμμική θήκη μιας οικογένειας κλειστών υποχώρων $(M_i)_{i \in I}$ .                      |
| $\bigwedge_{i \in I} P(M_i)$ | : Η προβολή στο χώρο $\bigwedge_{i \in I} M_i$ μιας οικογένειας κλειστών υποχώρων $(M_i)_{i \in I}$ . |
| $\bigvee_{i \in I} P(M_i)$   | : Η προβολή στο χώρο $\bigvee_{i \in I} M_i$ μιας οικογένειας κλειστών υποχώρων $(M_i)_{i \in I}$ .   |
| $ T $                        | : Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του τελεστή $T^*T$ .                                             |

|                                       |                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \otimes y^*$                       | : Η απεικόνιση $x \otimes y^*: H \rightarrow H$ με τύπο $(x \otimes y^*)(z) = \langle z, y \rangle x$ , για κάθε $x, y, z \in H$ .                 |
| $x \circ y$                           | : Το ψευδο-γινόμενο δύο στοιχείων $x$ και $y$ μιας άλγεβρας $A$ .                                                                                  |
| $q\text{-Inv}(A)$                     | : Το σύνολο των ψευδο-αντιστρέψιμων στοιχείων μιας άλγεβρας $A$ .                                                                                  |
| $\ker(x)$                             | : Ο πυρήνας ενός στοιχείου $x$ ενός αριστερού $A$ -προτύπου, όπου $A$ άλγεβρα.                                                                     |
| $\text{id}(x)$                        | : Ο σταθεροποιητής ενός στοιχείου $x$ ενός αριστερού $A$ -προτύπου, όπου $A$ άλγεβρα.                                                              |
| $L : A$                               | : Το ιδεώδες $\{a \in A : aA \subset L\}$ , όπου $L$ ένα αριστερό ιδεώδες μιας άλγεβρας $A$ .                                                      |
| $\text{rad}(A)$                       | : Το ριζικό <i>Jacobson</i> μιας άλγεβρας $A$ .                                                                                                    |
| $\mathcal{N}$                         | : Nest σ' ένα χώρο Hilbert                                                                                                                         |
| $\mathcal{T}(\mathcal{N})$            | : Η άλγεβρα nest του nest $\mathcal{N}$ .                                                                                                          |
| $N_-$                                 | : Η κλειστή γραμμική θήκη της οικογένειας $\{N' \in \mathcal{N} : N' < N\}$ , όπου $N \in \mathcal{N}$ .                                           |
| $N_+$                                 | : Η τομή της οικογένειας $\{N' \in \mathcal{N} : N' > N\}$ , όπου $N \in \mathcal{N}$ .                                                            |
| $A \ominus B$                         | : Ο υπόχωρος $A \cap B^\perp$ , όπου $A, B$ υποσύνολα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο.                                                            |
| $\text{co}(\mathcal{M})$              | : Το μικρότερο nest που περιέχει μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων $\mathcal{M}$ .                                                                     |
| $\text{Lat}(A)$                       | : Το σύνολο των κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert $H$ που είναι αναλλοίωτοι από κάθε τελεστή ενός συνόλου $A$ φραγμένων τελεστών του $H$ .      |
| $\text{Alg}(L)$                       | : Το σύνολο των φραγμένων τελεστών ενός χώρου Hilbert $H$ που αφήνουν αναλλοίωτο κάθε κλειστό υπόχωρο ενός συνόλου $L$ κλειστών υποχώρων του $H$ . |
| $\mathcal{P}(\mathcal{N})$            | : Το σύνολο των προβολών στα στοιχεία του $\mathcal{N}$ .                                                                                          |
| $\mathcal{N}^\perp$                   | : Το nest των ορθογώνιων συμπληρωμάτων των στοιχείων του $\mathcal{N}$ .                                                                           |
| $\mathcal{D}(\mathcal{N})$            | : Η διαγώνιος άλγεβρα της $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ .                                                                                             |
| $\text{core}\mathcal{T}(\mathcal{N})$ | : Η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ .                                                                          |
| $C^*(\mathcal{N})$                    | : Η $C^*$ -υπόάλγεβρα του $\mathbb{B}(H)$ που παράγεται από το $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ .                                                        |
| $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$           | : Ο χώρος των μεγιστικών ιδεωδών της άλγεβρας $C^*(\mathcal{N})$ .                                                                                 |
| <b>2</b>                              | : Ο σύνδεσμο $\{0, 1\}$ .                                                                                                                          |
| $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ | : Το σύνολο των ομομορφισμών συνδέσμων από το $\mathcal{N}$ επί του <b>2</b> .                                                                     |
| $\mathcal{E}_\varphi$                 | : Το σύνολο των διαστημάτων $E$ ενός nest ώστε $\varphi(E) = 1$ , όπου $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ .                                   |
| $I_\varphi$                           | : Το διαγώνιο ιδεώδες, όπου $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ .                                                                              |
| $\mathcal{D}_\varphi$                 | : Η διαγώνιος άλγεβρα που σχετίζεται με το $I_\varphi$ , όπου $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ .                                            |
| $\Delta_{\mathcal{N}}(T)$             | : Η διαγώνιος του τελεστή $T$ ως προς το nest $\mathcal{N}$ .                                                                                      |
| $c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$        | : Ο χώρος που αποτελείται από στοιχεία με πεπερασμένο φορέα, δηλαδή στοιχεία της μορφής $\sum_{n=0}^t U^n c_n$ με $c_n \in C_0(X)$ .               |

- $C_0(X) \times_{\phi} \mathbb{Z}^+$  : Το ημισταυρωτό γινόμενο.  
 $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  : Η άλγεβρα Banach που αποτελείται από όλες τις ακολουθίες  $c = (c_n) = (n \mapsto c_n)$  με στοιχεία  $c_n \in C_0(X)$  οι οποίες είναι απολύτως αθροίσιμες.  
 $X_r$  : Το σύνολο των επανερχόμενων σημείων ενός δυναμικού συστήματος  $(X, \phi)$ .  
 $\mathcal{S}(\mathbf{n})$  : Το σύνολο των εκθετών μιας ακολουθίας  $\mathbf{n} \subseteq \mathbb{Z}^+$ .  
 $C_c(Y^c)$  : Το ιδεώδες όλων των  $f \in C_o(X)$  που έχουν συμπαγή φορέα ξένο με το  $Y$ .





## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία περιγράφεται το ριζικό Jacobson μιας άλγεβρας nest και ενός ημισταυρωτού γινομένου. Αρχικά, δίνονται διαφορετικοί χαρακτηρισμοί του ριζικού Jacobson μιας αυθαίρετης άλγεβρας. Στη συνέχεια, περιγράφεται ο χαρακτηρισμός του ριζικού Jacobson μιας άλγεβρας nest χρησιμοποιώντας το ριζικό Jacobson μιας άλγεβρας nest με πεπερασμένο nest. Τέλος, χαρακτηρίζουμε το ριζικό Jacobson ενός ημισταυρωτού γινομένου χρησιμοποιώντας βασικά αποτελέσματα από την θεωρία των δυναμικών συστημάτων.

**Λέξεις-Κλειδιά:** Ριζικό Jacobson, Nest, Άλγεβρα nest, Ημισταυρωτό γινόμενο.



# Abstract

In this MSc thesis the Jacobson radical of a nest algebra and of a semi-crossed product are fully described. First, various characterizations of the Jacobson radical of an arbitrary algebra are given. Afterwards, Ringrose's characterization of the radical of a nest algebra is described using the Jacobson radical of a nest algebra of a finite nest. Finally, we characterise the Jacobson radical of a semicrossed product using basic results from the theory of dynamical systems.

**Key - Words:** Jacobson radical, Nest, Nest algebra, Semicrossed product.



## Πίνακας Περιεχομένων

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Βασικοί συμβολισμοί .....  | 5  |
| Περίληψη .....             | 9  |
| Πίνακας Περιεχομένων ..... | 13 |
| Εισαγωγή .....             | 15 |

### Κεφάλαιο 1

|                                                      |           |
|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Στοιχεία Αλγεβρών Banach και Θεωρίας Τελεστών</b> | <b>17</b> |
| 1.1 Άλγεβρες Banach .....                            | 17        |
| 1.2 $C^*$ –Άλγεβρες .....                            | 22        |
| 1.3 Φραγμένοι Τελεστές .....                         | 24        |

### Κεφάλαιο 2

|                                              |           |
|----------------------------------------------|-----------|
| <b>Το ριζικό Jacobson</b>                    | <b>31</b> |
| 2.1 Πρότυπα και Αναπαραστάσεις .....         | 31        |
| 2.2 Χαρακτηρισμοί του ριζικού Jacobson ..... | 38        |

### Κεφάλαιο 3

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Το ριζικό Jacobson μιας Άλγεβρας Nest</b>                    | <b>43</b> |
| 3.1 Εισαγωγή στα Nests και τις Άλγεβρες Nest .....              | 43        |
| 3.2 Ανακλαστικότητα και Συμπάγεια των Nests .....               | 48        |
| 3.3 Παραδείγματα Nests και Αλγεβρών Nest .....                  | 56        |
| 3.4 Χαρακτηρισμός του ριζικού Jacobson μιας Άλγεβρας Nest ..... | 58        |

### Κεφάλαιο 4

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Το ριζικό Jacobson ενός Ημισταυρωτού Γινομένου</b>                 | <b>73</b> |
| 4.1 Κατασκευή Ημισταυρωτού Γινομένου .....                            | 73        |
| 4.2 Επανερχόμενα σημεία .....                                         | 80        |
| 4.3 Περιπλανώμενα σύνολα και Ημιαπλότητα .....                        | 84        |
| 4.4 Χαρακτηρισμός του ριζικού Jacobson ενός Ημισταυρωτού Γινομένου .. | 85        |

|                    |    |
|--------------------|----|
| Βιβλιογραφία ..... | 91 |
|--------------------|----|

## Εισαγωγή

Η θεωρία των αλγεβρών Banach ήρθε ως φυσική εξέλιξη της θεωρίας των χώρων Banach οι οποίοι θεμελιώθηκαν το 1920-1922 από τον ίδιο τον Banach. Μια άλγεβρα Banach είναι ένας χώρος Banach  $(E, \| \cdot \|)$  εφοδιασμένος με πολλαπλασιασμό δακτυλίου ο οποίος είναι συμβιβαστός με την τοπολογία που ορίζει η νόρμα, δηλαδή

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \| (*)$$

για κάθε  $x, y \in E$ . Παρά το γεγονός ότι πολλά από τα παραδείγματα χώρων Banach που χρησιμοποιούσε ο ίδιος ο Banach, αλλά και άλλοι μαθηματικοί, ήταν συγχρόνως και άλγεβρες Banach, κανένας δεν αναφερόταν, ούτε χρησιμοποιούσε αυτή την επιπρόσθετη δομή. Ήδη βέβαια από το 1929 και μετά υπάρχει ένας αριθμός εργασιών από τους von Neumann, Murray, Yoshida και Nagumo, στις οποίες αξιοποιείται η επιπρόσθετη δομή δακτυλίου ενός χώρου Banach, χωρίς όμως να δίνεται με σαφήνεια η σημασία των χρησιμοποιούμενων αλγεβρικών μεθόδων. Ακόμα η ανισότητα (\*) είχε εντοπισθεί το 1932 από τον Wiener σε κάποιο παράδειγμα χωρίς όμως να επακολουθήσει παραπέρα επεξεργασία της. Την έννοια μιας αφηρημένης άλγεβρας Banach φαίνεται να έχει χρησιμοποιήσει πρώτος ο Nagumo, από το 1936, υιοθετώντας τον όρο γραμμικός μετρικός δακτύλιος. Έτσι φθάνουμε στο 1939 για να έχουμε πλέον την θεμελίωση των αλγεβρών Banach από τον μαθηματικό Gelfand, μαθητή του Kolmogorov, με τη γνωστή και κλασική δημοσίευση του on normed rings. Η εργασία αυτή ανακοινώθηκε το 1939 στη Σοβιετική Ακαδημία Επιστημών και δημοσιεύτηκε το 1941 στο περιοδικό Mathematics Sbornik. Ο Gelfand περιέγραψε τη δομή των αλγεβρών Banach χρησιμοποιώντας συστηματικά, στοιχειώδη θεωρία ιδεωδών. Ένα από τα πρώτα σημαντικά αποτελέσματα του Gelfand είναι η ταύτιση, ως προς ένα ισομορφισμό, μιας ημιαπλής μεταθετικής άλγεβρας Banach με μονάδα, με μια άλγεβρα συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων πάνω σε ένα συμπαγή χώρο Hausdorff. Ακόμα ο Gelfand χρησιμοποίησε τη θεωρία του για να δώσει μια πολύ κομψή απόδειξη στο θεώρημα του Wiener (η αντίστροφη μιας απόλυτα συγχλίνουσας σειράς Fourier που δεν μηδενίζεται πουθενά, είναι επίσης απόλυτα συγχλίνουσα), γεγονός που προσείλκυσε το ενδιαφέρον ενός μεγάλου αριθμού μαθηματικών προς τις άλγεβρες Banach.

Μια ιδιαίτερη κλάση αλγεβρών Banach είναι οι  $*$ -άλγεβρες Banach και οι  $C^*$ -άλγεβρες, των οποίων η θεμελίωση έγινε το 1943 από τους Gelfand, Naimark. Οι  $C^*$ -άλγεβρες είναι ουσιαστικά γενίκευση των αλγεβρών φραγμένων γραμμικών τελεστών πάνω σε ένα χώρο Hilbert, οι οποίες άρχισαν να

μελετώνται το 1930 από τους von Neumann και Murray. Ένα από τα πρώτα βασικά αποτελέσματα των Gelfand, Naimark είναι η ταύτιση μιας  $C^*$ -άλγεβρας, ως προς ένα ισομετρικό  $*$ -ισομορφισμό, με μια κλειστή  $*$ -υπόάλγεβρα φραγμένων γραμμικών τελεστών πάνω σε ένα χώρο Hilbert. (Από την εισαγωγή των σημειώσεων [22].)

Η παρούσα διπλωματική εργασία απαρτίζεται από 4 κεφάλαια. Σ' αυτήν περιγράφεται το ριζικό Jacobson μιας άλγεβρας nest και ενός ημισταυρωτού γινομένου.

Το κεφάλαιο 1 αναφέρεται σε στοιχεία αλγεβρών Banach και θεωρίας τελεστών. Δίνονται βασικοί ορισμοί, προτάσεις και παραδείγματα αλγεβρών Banach και  $C^*$ -άλγεβρών. Επίσης, παρουσιάζονται διάφορα αποτελέσματα για φραγμένους τελεστές αλλά και συγκεκριμένα για τις προβολές ενός χώρου Hilbert.

Το κεφάλαιο 2 αναφέρεται στο ριζικό Jacobson μιας τυχαίας άλγεβρας. Δίνεται η σχέση μεταξύ μιας αναπαράστασης μιας άλγεβρας σ' ένα γραμμικό χώρο ή χώρο με νόρμα με τα αριστερά πρότυπα αυτής της άλγεβρας καθώς επίσης και χαρακτηρισμοί των πρωταρχικών ιδεωδών μιας άλγεβρας. Επίσης, χαρακτηρίζεται το ριζικό Jacobson με πρωταρχικά ιδεώδη, στοιχεία τα οποία ψευδο-αντιστρέφονται και με στοιχεία που έχουν μηδενική φασματική ακτίνα.

Το κεφάλαιο 3 περιγράφει το ριζικό Jacobson μιας άλγεβρας nest. Αρχικά δίνονται ορισμοί και αποτελέσματα των nests και αλγεβρών nest και αποδεικνύεται η ύπαρξη του μικρότερου nest που περιέχει μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων. Στην συνέχεια δείχνεται η ανακλαστικότητα και η συμπάγεια των nests και δίνονται παραδείγματα αυτών. Τέλος, περιγράφεται ο χαρακτηρισμός του ριζικού Jacobson μιας άλγεβρας nest χρησιμοποιώντας το ριζικό Jacobson μιας άλγεβρας nest με πεπερασμένο nest.

Το κεφάλαιο 4 αναφέρεται στο ριζικό Jacobson ενός ημισταυρωτού γινομένου. Αρχικά, περιγράφεται η κατασκευή του ημισταυρωτού γινομένου. Στην συνέχεια δίνεται το κρίσιμο λήμμα που δίνει την σχέση των επανερχόμενων σημείων ενός δυναμικού συστήματος με στοιχεία που δεν ανήκουν στο ριζικό Jacobson και ένας χαρακτηρισμός της ημιαπλότητας. Τέλος, χρησιμοποιώντας το κέντρο ενός δυναμικού συστήματος δίνεται ο χαρακτηρισμός του ριζικού Jacobson του ημισταυρωτού γινομένου.



# Κεφάλαιο 1

## Στοιχεία Αλγεβρών Banach και Θεωρίας Τελεστών

### 1.1 Άλγεβρες Banach

**1.1.1 Ορισμός.** Έστω  $A$  ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Ο  $A$  καλείται *άλγεβρα* αν είναι εφοδιασμένος με έναν πολλαπλασιασμό, δηλαδή μια διγραμμική απεικόνιση  $A \times A \rightarrow A$  με τις παρακάτω ιδιότητες :

- (1)  $x(yz) = (xy)z$ , για κάθε  $x, y, z \in A$ .
- (2)  $x(y + z) = xy + xz$ ,  $(x + y)z = xz + yz$ , για κάθε  $x, y, z \in A$ .
- (3)  $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $x, y \in A$ .

**1.1.2 Ορισμός.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο άλγεβρες.

- (1) Ένας γραμμικός υπόχωρος  $F$  της  $A$  καλείται *υπόαλγεβρα* της  $A$  αν περιέχει το γινόμενο οποιουδήποτε ζεύγους στοιχείων του.
- (2) Η  $A$  καλείται *μεταθετική άλγεβρα* αν ο πολλαπλασιασμός της πληροί την ακόλουθη σχέση

$$xy = yx$$

για κάθε  $x, y \in A$ .

- (3) Η  $A$  καλείται *άλγεβρα με μονάδα* αν υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο  $e \in A$ , που λέγεται *μονάδα*, έτσι ώστε

$$xe = ex = x$$

για κάθε  $x \in A$ . Αν μια άλγεβρα έχει μονάδα, τότε αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη και θα συμβολίζουμε αυτή με  $e$ .

- (4) Μια απεικόνιση  $f: A \rightarrow B$  καλείται *ομομορφισμός* αλγεβρών αν είναι γραμμική και πολλαπλασιαστική. Ένας ομομορφισμός από μια άλγεβρα στον εαυτό της καλείται *ενδομορφισμός*. Επίσης, η  $f$  λέγεται *μονομορφισμός* αν είναι 1-1

και επιμορφισμός αν είναι επί. Στην περίπτωση που η  $f$  είναι 1-1 και επί καλείται ισομορφισμός. Ένας ισομορφισμός από μια άλγεβρα στον εαυτό της καλείται αυτομορφισμός.

**1.1.3 Ορισμός.** Μια άλγεβρα  $A$  καλείται *νορμαρισμένη* αν είναι εφοδιασμένη με μια συνάρτηση  $\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

- (1)  $\|x\| \geq 0$ , για κάθε  $x \in A$  και  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $x \in A$  (απόλυτη ομογένεια).
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , για κάθε  $x, y \in A$  (υποπροσθετική ιδιότητα).
- (4)  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ , για κάθε  $x, y \in A$  (υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα).

**1.1.4 Παρατήρηση.** Σε μία νορμαρισμένη άλγεβρα οι διανυσματικές πράξεις και ο πολλαπλασιασμός είναι συμβιβαστές με την τοπολογία που ορίζει η νόρμα, με την έννοια ότι είναι συνεχείς.

**1.1.5 Ορισμός.** Μια άλγεβρα  $A$  καλείται *άλγεβρα Banach* αν είναι πλήρης νορμαρισμένη άλγεβρα.

**1.1.6 Παραδείγματα.** (α) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  το σύνολο  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$  είναι άλγεβρα Banach ως προς τις πράξεις κατά συντεταγμένη και την νόρμα

$$\|(x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

Επίσης, είναι μεταθετική άλγεβρα με μονάδα  $(1, \dots, 1)$ .

(β) Έστω  $X$  ένας συμπαγής και Hausdorff χώρος και  $C(X)$  όλες οι συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις στο  $X$ . Ορίζουμε πράξεις στο  $C(X)$  κατά σημείο και έχουμε ότι  $f + g, \lambda f, fg \in C(X)$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $f, g \in C(X)$ . Έτσι, το σύνολο  $C(X)$  εφοδιασμένο με τις κατά σημείο οριζόμενες αλγεβρικές πράξεις είναι μια μεταθετική άλγεβρα με μονάδα την σταθερή συνάρτηση 1. Επίσης, η νόρμα supremum

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

στο  $C(X)$  είναι πλήρης και υποπολλαπλασιαστική. Συνεπώς, η μεταθετική άλγεβρα με μονάδα  $C(X)$  είναι επιπλέον *Banach*.

(γ) Έστω  $X$  χώρος Banach. Το σύνολο  $\mathbb{B}(X)$  των γραμμικών και φραγμένων απεικονίσεων  $T: X \rightarrow X$  αποτελεί χώρο *Banach* αν εφοδιασθεί με την νόρμα

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Επίσης, αν ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό να είναι η σύνθεση ο απεικονίσεων, τότε η νόρμα είναι υποπολλαπλασιαστική. Συνεπώς, το  $\mathbb{B}(X)$  είναι μη μεταθετική (εκτός αν  $X = \mathbb{C}$ ) άλγεβρα Banach με μονάδα τον ταυτοτικό τελεστή  $I$ .

(δ) Έστω  $X$  τοπικά συμπαγής και Hausdorff χώρος. Ονομάζουμε  $C_0(X)$  το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  που μηδενίζονται στο άπειρο.

Δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  ανήκει στο  $C_0(X)$  εξ ορισμού αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει συμπαγές  $K \subseteq X$  ώστε

$$x \notin K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Αν εφοδιάσουμε το  $C_0(X)$  με τη νόρμα

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

τότε το  $C_0(X)$  είναι μεταθετική άλγεβρα *Banach* και δεν έχει μονάδα εκτός αν ο  $X$  είναι συμπαγής.

**1.1.7 Παρατήρηση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα χωρίς μονάδα και  $A_1 = A \oplus \mathbb{C}$ . Με γραμμικές πράξεις οριζόμενες κατά συντεταγμένη το  $A_1$  είναι ένας γραμμικός χώρος. Επίσης, αν ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu),$$

για κάθε  $(x, \lambda), (y, \mu) \in A_1$  το  $A_1$  γίνεται άλγεβρα με μονάδα το στοιχείο  $e_1 = (0, 1)$ . Στην περίπτωση που η  $A$  είναι άλγεβρα *Banach*, η  $A_1$  γίνεται επίσης *Banach*, εφοδιασμένη με την νόρμα

$$\|(x, \lambda)\|_1 = \|x\| + |\lambda|,$$

για κάθε  $(x, \lambda) \in A_1$ .

**1.1.8 Ορισμός.** Αν  $A$  και  $A_1$  είναι όπως στην παρατήρηση 1.1.7, τότε η  $A_1$  καλείται *μοναδοποίηση* της  $A$ .

**1.1.9 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα με μονάδα. Ένα στοιχείο  $x$  της  $A$  καλείται *αντιστρέψιμο* αν υπάρχει  $y \in A$ , έτσι ώστε

$$xy = yx = e.$$

Το μονοσήμαντα ορισμένο στοιχείο  $y$  της προηγούμενης σχέσεως καλείται *αντίστροφο* του  $x$  και συμβολίζεται με  $x^{-1}$ .

**1.1.10 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα με μονάδα και  $x$  στοιχείο της  $A$ . Το *φάσμα* του στοιχείου  $x$  συμβολίζεται με  $\sigma_A(x)$  και ορίζεται να είναι το υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών  $\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ δεν αντιστρέφεται}\}$ . Αν η  $A$  δεν έχει μονάδα ορίζουμε  $\sigma_A(x) = \sigma_{A_1}(x, 0)$ , όπου  $A_1$  η μοναδοποίηση της  $A$ .

**1.1.11 Παρατήρηση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και  $x$  στοιχείο της  $A$ . Δεν ισχύει πάντα ότι το φάσμα  $\sigma_A(x)$  του στοιχείου  $x$  είναι μη κενό και φραγμένο. Στην περίπτωση όμως που η  $A$  είναι νορμαρισμένη άλγεβρα το  $\sigma_A(x)$  είναι

μη κενό και αν επιπλέον είναι πλήρης το  $\sigma_A(x)$  είναι φραγμένο και συμπαγές υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών  $\mathbb{C}$ . Επίσης, αν  $\varphi: A \rightarrow B$  ομομορφισμός αλγεβρών και  $x \in X$ , τότε  $\sigma_B(\varphi(x)) \subseteq \sigma_A(x)$ .

**1.1.12 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα Banach και  $x$  στοιχείο της  $A$ . Τον μη αρνητικό αριθμό

$$r_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\}$$

καλούμε *φασματική ακτίνα* του στοιχείου  $x$ . Επίσης, η φασματική ακτίνα του  $x$  δίνεται και από την σχέση  $r_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ .

**1.1.13 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και υποσύνολο  $I$  της  $A$ . Το  $I$  καλείται *αριστερό ιδεώδες* (αντίστοιχα *δεξιό*) της  $A$  αν είναι διανυσματικός υπόχωρος με την ιδιότητα  $xy \in I$  (αντίστοιχα  $yx \in I$ ), για κάθε  $x \in A$  και  $y \in I$ . Αν το  $I$  είναι αριστερό και δεξιό ιδεώδες της  $A$ , τότε το  $I$  καλείται *ιδεώδες* της  $A$ . Επίσης, αν υπάρχει φυσικός αριθμός  $n$  ώστε το  $I^n$  να είναι το μηδενικό ιδεώδες, τότε το  $I$  καλείται *μηδενοδύναμο ιδεώδες*. Επίσης, το  $I$  καλείται *γνήσιο ιδεώδες* αν  $I \neq A$  και *μεγιστικό ιδεώδες* αν το  $I$  δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα γνήσιο ιδεώδες. Το σύνολο όλων των μεγιστικών ιδεωδών της  $A$  θα συμβολίζεται με  $\mathbf{M}(A)$ .

**1.1.14 Θεώρημα (Krull).** Αν  $A$  είναι μια άλγεβρα με μονάδα, κάθε (αριστερό, δεξιό ή αμφίπλευρο) γνήσιο ιδεώδες της  $A$  περιέχεται σε ένα μεγιστικό ιδεώδες.

**1.1.15 Ορισμός.** Αν  $A$  είναι μια άλγεβρα μια μη μηδενική μιγαδική γραμμική μορφή επί της  $A$  που είναι επιπλέον πολλαπλασιαστική καλείται *χαρακτήρας* της  $A$ . Το σύνολο όλων των χαρακτήρων της  $A$  συμβολίζεται με  $\mathbf{m}(A)$  και καλείται *φάσμα* της  $A$ .

**1.1.16 Παρατήρηση.** Αν η  $A$  είναι άλγεβρα με μονάδα ο πυρήνας  $\ker(f)$ , όπου  $f$  χαρακτήρας της  $A$  είναι μεγιστικό ιδεώδες της  $A$  και αν επιπλέον η  $A$  είναι πλήρης κάθε μεγιστικό ιδεώδες είναι κλειστό. Επίσης, αν η  $A$  είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα έχουμε ότι το φάσμα της  $A$  είναι μη κενό, κάθε χαρακτήρας της  $A$  είναι συνεχής και η απεικόνιση

$$f \mapsto \ker(f): \mathbf{m}(A) \rightarrow \mathbf{M}(A)$$

είναι 1-1 και επί.

**1.1.17 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και  $\mathbf{m}(A)$  το φάσμα της  $A$ . Ορίζουμε στο  $\mathbf{m}(A) \subseteq A^*$  την σχετική  $w^*$ -τοπολογία του δυικού χώρου  $A^*$  της  $A$ . Η τοπολογία αυτή καλείται *τοπολογία Gelfand*, ενώ ο τοπολογικός χώρος  $(\mathbf{m}(A), w^* | \mathbf{m}(A))$  καλείται *χώρος Gelfand* ή *χώρος μεγιστικών ιδεωδών*.

**1.1.18 Παρατήρηση.** Έστω  $A$  μια μεταθετική άλγεβρα *Banach* με μονάδα. Για κάθε  $x \in A$  ορίζεται η απεικόνιση  $\hat{x}: \mathbf{m}(A) \rightarrow \mathbb{C}$  με

$$\hat{x}(f) = f(x),$$

η οποία είναι συνεχής. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε την άλγεβρα  $C(\mathbf{m}(A))$  όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του  $\mathbf{m}(A)$  και έτσι θα έχουμε  $\hat{x} \in C(\mathbf{m}(A))$ , για κάθε  $x \in A$ . Επομένως, ορίζεται η απεικόνιση  $\mathcal{G}: A \rightarrow C(\mathbf{m}(A))$  με

$$\mathcal{G}(x) = \hat{x},$$

για κάθε  $x \in A$ .

**1.1.19 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια μεταθετική άλγεβρα *Banach* με μονάδα. Για κάθε  $x \in A$  η απεικόνιση  $\hat{x}: \mathbf{m}(A) \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\hat{x}(f) = f(x)$  καλείται *μετασχηματισμός Gelfand* του  $x$  και η απεικόνιση  $\mathcal{G}: A \rightarrow C(\mathbf{m}(A))$  με  $\mathcal{G}(x) = \hat{x}$  καλείται *απεικόνιση Gelfand* της  $A$ .

**1.1.20 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια μεταθετική άλγεβρα *Banach* με μονάδα. Ισχύουν τα εξής :

- (i) Ο χώρος  $\mathbf{m}(A)$  είναι συμπαγής και Hausdorff.
- (ii) Η απεικόνιση Gelfand της  $A$  είναι ομομορφισμός αλγεβρών.
- (iii) Η απεικόνιση Gelfand της  $A$  είναι συνεχής και μάλιστα  $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$ , για κάθε  $x \in A$ .
- (iv)  $\|f\| = 1$ , για κάθε  $f \in \mathbf{m}(A)$ .
- (v) Το  $\text{im}(\mathcal{G})$  χωρίζει τα σημεία του  $\mathbf{m}(A)$ .
- (vi) Ένα στοιχείο  $x$  της  $A$  αντιστρέφεται αν και μόνον αν  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $f \in \mathbf{m}(A)$ .
- (vii)  $\sigma_A(x) = \hat{x}(\mathbf{m}(A))$ , για κάθε  $x \in A$ .
- (viii)  $r_A(x) = \|\hat{x}\|$ , για κάθε  $x \in A$ .

**1.1.21 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια μεταθετική άλγεβρα *Banach* με μονάδα. Το  $\text{im}(\mathcal{G})$  είναι μια υπάλγεβρα της  $C(\mathbf{m}(A))$  και καλείται *άλγεβρα των μετασχηματισμών Gelfand* της  $A$ . Συμβολίζουμε αυτή με  $\hat{A}$ .

**1.1.22 Παρατήρηση.** Αν  $A$  είναι μια άλγεβρα και  $I$  ένα ιδεώδες της  $A$ , τότε ο γραμμικός χώρος πηλίκο  $A/I$  είναι άλγεβρα με πολλαπλασιασμό

$$(x + I)(y + I) = xy + I,$$

για κάθε  $x + I, y + I \in A/I$ .

**1.1.23 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα *Banach* και  $I$  ένα κλειστό ιδεώδες της  $A$ . Τότε, το πηλίκο  $A/I$ , εφοδιασμένο με τη νόρμα πηλίκο

$$\|x + I\| = \inf\{\|x + i\| : i \in I\},$$

$x \in A$ , είναι επίσης μια άλγεβρα *Banach*.

## 1.2 $C^*$ — Άλγεβρες

**1.2.1 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και απεικόνιση  $*$ :  $A \rightarrow A$  με

$$x \longmapsto x^*.$$

Η απεικόνιση  $*$  καλείται *ενέλιξη* αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :

- (1)  $(x + y)^* = x^* + y^*$ , για κάθε  $x, y \in A$ .
- (2)  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $x \in A$ .
- (3)  $(xy)^* = y^*x^*$ , για κάθε  $x, y \in A$ .
- (4)  $(x^*)^* = x$ , για κάθε  $x \in A$ .

Η άλγεβρα  $A$  εφοδιασμένη με μια τέτοια απεικόνιση καλείται  *$*$ -άλγεβρα*.

**1.2.2 Ορισμός.** Ένας ομομορφισμός μεταξύ  $*$ -άλγεβρών καλείται  *$*$ -ομομορφισμός* αν διατηρεί την ενέλιξη.

**1.2.3 Παρατήρηση.** Αν  $A$  είναι μια άλγεβρα παρατηρούμε ότι η ενέλιξη είναι 1-1, επί, αφήνει αναλλοίωτο το μηδενικό στοιχείο  $0^* = 0$  και αν επιπλέον η  $A$  έχει μονάδα τότε  $e^* = e$ .

**1.2.4 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια  $*$ -άλγεβρα Banach. Η  $A$  καλείται  *$C^*$ -άλγεβρα* αν η νόρμα ικανοποιεί την  *$C^*$ -ιδιότητα*, δηλαδή

$$\|xx^*\| = \|x\|^2,$$

για κάθε  $x \in A$ .

**1.2.5 Παρατήρηση.** (1) Σε μια  $C^*$ -άλγεβρα  $A$  η ενέλιξη είναι αυτομάτως συνεχής, μάλιστα είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε  $x \in A$  έχουμε  $\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$ , άρα  $\|x\| \leq \|x^*\|$ . Εφαρμόζοντας την ανισότητα αυτή στο  $x^*$  προκύπτει  $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$ . Συνεπώς,  $\|x^*\| = \|x\|$ .

(2) Η ανισότητα  $\|x\|^2 \leq \|xx^*\|$ , για  $x \in A$  αρκεί για να εξασφαλίσει την ισχύ της  $C^*$ -ιδιότητας, όταν η νόρμα της άλγεβρας είναι υποπολλαπλασιαστική. Πράγματι, από την ανισότητα αυτή έπεται, όπως μόλις παρατηρήσαμε, ότι  $\|x^*\| = \|x\|$  για κάθε  $x \in A$ , οπότε  $\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$  άρα ισχύει ισότητα.

**1.2.6 Παραδείγματα.** (α) Το  $\mathbb{C}$  είναι  $C^*$ -άλγεβρα με ενέλιξη το μιγαδικό συζυγή.

(β) Έστω  $X$  ένας συμπαγής και Hausdorff χώρος. Η άλγεβρα  $C(X)$ , όπως ορίστηκε στο παράδειγμα 1.1.6 (β), είναι  $C^*$ -άλγεβρα με ενέλιξη οριζόμενη μέσω του μιγαδικού συζυγούς, δηλαδή  $*$ :  $C(X) \rightarrow C(X)$  με  $f \longmapsto f^*$ , όπου

$$f^*(x) = \overline{f(x)},$$

για κάθε  $x \in X$ .

(γ) Έστω  $H$  ένας χώρος Hilbert. Η άλγεβρα  $\mathbb{B}(H)$ , όπως ορίστηκε στο παράδειγμα 1.1.6 (γ), είναι  $C^*$ -άλγεβρα με ενέλιξη οριζόμενη από τον συζυγή ενός τελεστή ο οποίος ορίζεται ως εξής : για κάθε  $T \in \mathbb{B}(H)$  υπάρχει ο  $T^* \in \mathbb{B}(H)$ , έτσι ώστε

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle,$$

για κάθε  $x, y \in H$ .

(δ) Έστω  $X$  τοπικά συμπαγής και Hausdorff χώρος. Η άλγεβρα  $C_0(X)$ , όπως ορίστηκε στο παράδειγμα 1.1.6 (δ), είναι  $C^*$ -άλγεβρα με ενέλιξη οριζόμενη μέσω του μιγαδικού συζυγούς, δηλαδή  $*$ :  $C_0(X) \rightarrow C_0(X)$  με  $f \mapsto f^*$ , όπου

$$f^*(x) = \overline{f(x)},$$

για κάθε  $x \in X$ .

**1.2.7 Ορισμός.** Αν  $S$  είναι υποσύνολο μιας  $C^*$ -άλγεβρας  $A$ , τότε γράφουμε  $C^*(S)$  την μικρότερη  $C^*$ -υπόάλγεβρα της  $A$  που περιέχει το  $S$ . Η  $C^*(S)$  καλείται η  $C^*$ -υπόάλγεβρα της  $A$  που παράγεται από το  $S$ .

**1.2.8 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια  $C^*$ -άλγεβρα και  $S \subseteq A$ . Η γραμμική θήκη των στοιχείων της μορφής

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k},$$

για  $k \geq 1$ ,  $n_1, \dots, n_k \geq 1$  και  $a_i \in S$  ή  $a_i^* \in S$  με  $1 \leq i \leq k$  είναι πυκνή στο  $C^*(S)$ .

**1.2.9 Θεώρημα.** (Gelfand-Naimark) Αν  $A$  είναι μια μεταθετική  $C^*$ -άλγεβρα με μονάδα, τότε η απεικόνιση Gelfand είναι ένας ισομετρικός  $*$ -ισομορφισμός.

**1.2.10 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια  $*$ -άλγεβρα Banach. Μια γραμμική μορφή  $f$  επί της  $A$  καλείται θετική αν  $f(x^*x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in A$ .

**1.2.11 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια  $C^*$ -άλγεβρα και  $H$  ένας χώρος Hilbert. Ένας  $*$ -ομομορφισμός της  $A$  στην  $\mathbb{B}(H)$  καλείται  $*$ -αναπαράσταση της  $A$  επί του  $H$ .

**1.2.12 Θεώρημα.** (GNS- κατασκευή) Έστω  $A$  μια  $*$ -άλγεβρα Banach με μονάδα και  $f$  μια θετική γραμμική μορφή επί της  $A$ . Τότε υπάρχει μια  $*$ -αναπαράσταση  $\pi_f$  της  $A$  επί ενός χώρου Hilbert  $H_f$  και ένα διάνυσμα  $x_f \in H_f$ , έτσι ώστε

$$f(x) = \langle \pi_f(x)(x_f), x_f \rangle,$$

για κάθε  $x \in A$ .

**1.2.13 Θεώρημα.** (Gelfand-Naimark) Αν  $A$  είναι μια  $C^*$ -άλγεβρα, τότε είναι ισομετρικά  $*$ -ισόμορφη με μια υπόάλγεβρα της  $\mathbb{B}(H)$ , όπου  $H$  ένας χώρος Hilbert.

## 1.3 Φραγμένοι Τελεστές

**Σημείωση.** Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε με  $H$  ένα χώρο Hilbert.

**1.3.1 Ορισμός.** Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology, SOT) στον  $\mathbb{B}(H)$  είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον  $H$ , δηλαδή ένα δίκτυο  $(T_i)_{i \in I}$  στον  $\mathbb{B}(H)$  συγκλίνει ως προς την SOT τοπολογία σε ένα στοιχείο  $T \in \mathbb{B}(H)$  αν και μόνον αν  $\|T_i x - T x\| \rightarrow 0$ , για κάθε  $x \in H$ . Μια βάση περιοχών ενός  $K \in \mathbb{B}(H)$  για την SOT τοπολογία είναι η οικογένεια

$$W = \{W(K, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) : n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, x_1, \dots, x_n \in H\},$$

όπου

$$W(K, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) = \{T \in \mathbb{B}(H) : \|(T - K)x_k\| < \varepsilon, k = 1, \dots, n\}.$$

Η SOT τοπολογία είναι ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμας και είναι Hausdorff.

**1.3.2 Παρατήρηση.** Αν  $x, y$  στοιχεία του  $H$ , θέτουμε  $\omega_{x,y} : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$  με

$$\omega_{x,y}(T) = \langle Tx, y \rangle.$$

Η γραμμική μορφή  $\omega_{x,y}$  είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας στον  $\mathbb{B}(H)$  και συγκεκριμένα  $\|\omega_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$ .

**1.3.3 Ορισμός.** Η ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology, WOT) στον  $\mathbb{B}(H)$  είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία οι  $\omega_{x,y}$  για κάθε  $x, y \in H$  είναι συνεχείς. Ένα δίκτυο  $(T_i)_{i \in I}$  στον  $\mathbb{B}(H)$  συγκλίνει ως προς την WOT τοπολογία σε ένα στοιχείο  $T \in \mathbb{B}(H)$  αν και μόνον αν  $\langle T_i x - T x, y \rangle \rightarrow 0$ , για κάθε  $x, y \in H$ . Επίσης, η WOT τοπολογία είναι ασθενέστερη από την SOT τοπολογία.

**1.3.4 Ορισμός.** Έστω  $S$  ένα τυχαίο υποσύνολο του  $\mathbb{B}(H)$ . Ορίζουμε τον μεταθέτη  $S'$  του  $S$  να είναι το σύνολο

$$S' = \{T \in \mathbb{B}(H) : TK = KT, \forall K \in S\}.$$

Ο μεταθέτης  $S'$  του  $S$  είναι άλγεβρα με μονάδα τον ταυτοτικό τελεστή και είναι WOT-κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{B}(H)$ . Επίσης, αν το  $S$  είναι αυτοσυζυγές, δηλαδή αν  $T \in S$  τότε  $T^* \in S$ , έχουμε ότι ο μεταθέτης  $S'$  του  $S$  είναι  $C^*$ -υπόάλγεβρα της  $\mathbb{B}(H)$ .

**1.3.5 Ορισμός.** Ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο  $M$  του  $\mathbb{B}(H)$  για το οποίο ισχύει  $M = M''$  καλείται *άλγεβρα von Neumann* στον  $H$ .



**1.3.6 Ορισμός.** Έστω  $S$  ένα τυχαίο υποσύνολο του  $\mathbb{B}(H)$ . Το σύνολο  $(S \cup S^*)''$  καλείται η *άλγεβρα von Neumann* που παράγεται από το  $S$  και είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann που περιέχει το  $S$ .

**1.3.7 Παρατήρηση.** Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι  $C^*$ -άλγεβρα με μονάδα και είναι  $WOT$ -κλειστή. Επίσης, ο χώρος  $\mathbb{B}(H)$  είναι άλγεβρα von Neumann.

**1.3.8 Θεώρημα.** (von Neumann) Αν  $A$  είναι μια αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του  $\mathbb{B}(H)$  που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, τότε

$$A'' = \overline{A}^{SOT} = \overline{A}^{WOT}.$$

Επίσης, η  $A$  είναι άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν είναι  $WOT$ -κλειστή αν και μόνον αν είναι  $SOT$ -κλειστή.

**1.3.9 Ορισμός.** Έστω  $T$  ένα στοιχείο του  $\mathbb{B}(H)$ .

- (1) Ο  $T$  καλείται *ταυτοδύναμος* αν  $T^2 = T$ .
- (2) Ο  $T$  καλείται *αυτοσυζυγής* αν  $T^* = T$ .
- (3) Ο  $T$  καλείται *θετικός* αν  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ , για κάθε  $x \in H$ . Γράφουμε τότε  $T \geq 0$ .
- (4) Ο  $T$  καλείται *φυσιολογικός* αν  $T^*T = TT^*$ .

**1.3.10 Ορισμός.** Έστω  $M$  κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ . Τότε  $H = M \oplus M^\perp$ . Δηλαδή, κάθε  $x \in H$  γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$x = x_1 + x_2,$$

όπου  $x_1 \in M$  και  $x_2 \in M^\perp$ . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει  $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$  και συνεπώς  $\|x_1\|^2 \leq \|x\|^2$ . Η απεικόνιση  $P(M): H \rightarrow H$  με

$$P(M)(x) = P(M)(x_1 + x_2) = x_1$$

καλείται *προβολή επί του  $M$*  και είναι γραμμική, συνεχής με  $\|P(M)\| = 1$ , όταν  $M \neq \{0\}$ .

**1.3.11 Πρόταση.** Έστω  $T \in \mathbb{B}(H)$  ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

- (i)  $\ker T \perp \operatorname{im} T$ .
- (ii) Ο  $T$  είναι η ορθή προβολή επί του  $\operatorname{im} T$ .
- (iii)  $\|T\| = 1$ .
- (iv) Ο  $T$  είναι θετικός.
- (v) Ο  $T$  είναι αυτοσυζυγής.
- (vi) Ο  $T$  είναι φυσιολογικός.

**1.3.12 Ορισμός.** Αν  $T$  και  $S$  είναι αυτοσυζυγείς τελεστές, ορίζουμε  $T \geq S$  αν  $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$  για κάθε  $x \in H$ , αν δηλαδή ο  $T - S$  είναι θετικός τελεστής. Στο σύνολο των αυτοσυζυγών τελεστών η σχέση  $\geq$  είναι σχέση μερικής διάταξης.

**1.3.13 Πρόταση.** Αν  $M$  και  $N$  είναι κλειστοί υπόχωροι του  $H$  και  $P(M)$ ,  $P(N)$  είναι οι προβολές επί των  $M$  και  $N$  αντίστοιχα, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

- (i)  $P(M) \leq P(N)$ .
- (ii)  $\|P(M)x\| \leq \|P(N)x\|$ , για κάθε  $x \in H$ .
- (iii)  $M \subseteq N$ .
- (iv)  $P(N)P(M) = P(M)$ .
- (v)  $P(M)P(N) = P(M)$ .

**1.3.14 Πρόταση.** Αν  $M$  και  $N$  είναι κλειστοί υπόχωροι του  $H$  και  $P(M)$ ,  $P(N)$  είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε ο τελεστής  $P(M) - P(N)$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $N \subseteq M$ . Τότε  $P(M) - P(N) = P(M \cap N^\perp)$ .

**1.3.15 Παρατήρηση.** (1) Η απεικόνιση  $M \mapsto P(M)$  είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλειστών υποχώρων του  $H$  και του συνόλου των προβολών

$$\mathcal{P}(H) = \{P \in \mathbb{B}(H) : P^2 = P^* = P\}$$

με αντίστροφη την  $P \mapsto \text{im} P$ . Επίσης, παρατηρούμε ότι  $P(\{0\}) = 0$ ,  $P(H) = I$  και  $P(M^\perp) = I - P(M)$ , όπου  $I$  ο ταυτοτικός τελεστής. Το σύνολο των κλειστών υποχώρων του  $H$  και το σύνολο των προβολών  $\mathcal{P}(H)$  είναι μερικά διατεταγμένα ως προς τις σχέσεις  $\subseteq$  και  $\leq$  αντίστοιχα. Από την πρόταση 1.3.13 η αντιστοιχία από το σύνολο των κλειστών υποχώρων του  $H$  στο σύνολο των προβολών που ορίσαμε προηγουμένως διατηρεί την διάταξη, δηλαδή

$$P(M) \leq P(N) \Leftrightarrow M \subseteq N.$$

(2) Αν  $M$  και  $N$  είναι κλειστοί υπόχωροι του  $H$ , τότε ο κλειστός υπόχωρος  $M \cap N$  είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχεται και στον  $M$  και στον  $N$ . Επίσης, η κλειστή γραμμική θήκη του  $M \cup N$  είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχει και τον  $M$  και τον  $N$ . Συμβολίζουμε αυτούς ως εξής

$$M \wedge N = M \cap N$$

και

$$M \vee N = \overline{\text{span}\{M \cup N\}}.$$

(3) Αν  $(M_i)_{i \in I}$  είναι μια οικογένεια κλειστών υποχώρων του  $H$ , τότε ο κλειστός υπόχωρος  $\bigcap_{i \in I} M_i$  είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχεται σε κάθε  $M_i$ . Επίσης, η κλειστή γραμμική θήκη του  $\bigcup_{i \in I} M_i$  είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχει κάθε  $M_i$ . Συμβολίζουμε αυτούς ως εξής

$$\bigwedge_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} M_i$$

και

$$\bigvee_{i \in I} M_i = \overline{\text{span}\{\bigcup_{i \in I} M_i\}}.$$

**1.3.16 Ορισμός.** Έστω  $(M, \leq)$  ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και  $N = \{m_i : i \in I\}$  μια οικογένεια στοιχείων του  $M$ . Καλούμε *ελάχιστο άνω φράγμα* του  $N$  ένα στοιχείο  $m$  του  $M$ , αν  $m_i \leq m$  για κάθε  $i \in I$  και αν  $m'$  στοιχείο του  $M$  με  $m_i \leq m'$  για κάθε  $i \in I$ , τότε  $m \leq m'$ . Επίσης, καλούμε *μέγιστο κάτω φράγμα* του  $N$  ένα στοιχείο  $m$  του  $M$ , αν  $m \leq m_i$  για κάθε  $i \in I$  και αν  $m'$  στοιχείο του  $M$  με  $m' \leq m_i$  για κάθε  $i \in I$ , τότε  $m' \leq m$ . Συμβολίζουμε (αν υπάρχουν) το ελάχιστο άνω φράγμα της οικογένειας  $N$  με

$$\bigvee_{i \in I} m_i$$

και το μέγιστο κάτω φράγμα της οικογένειας  $N$  με

$$\bigwedge_{i \in I} m_i.$$

Το μερικά διατεταγμένο σύνολο  $M$  καλείται *σύνδεσμος* αν για κάθε  $m, n \in M$  υπάρχουν τα  $m \wedge n$  και  $m \vee n$ . Στην περίπτωση όπου για οποιαδήποτε οικογένεια στοιχείων  $\{m_i : i \in I\}$  του  $M$  υπάρχουν τα  $\bigvee_{i \in I} m_i$  και  $\bigwedge_{i \in I} m_i$  το  $M$  καλείται *πλήρης σύνδεσμος*.

**1.3.17 Πρόταση.** Το σύνολο προβολών  $\mathcal{P}(H)$  του  $H$  με την σχέση  $\leq$  είναι πλήρης σύνδεσμος και μάλιστα αν  $(M_i)_{i \in I}$  είναι μια οικογένεια κλειστών υποχώρων του  $H$  με  $P(M_i)$ ,  $i \in I$  οι αντίστοιχες προβολές επί των  $M_i$ ,  $i \in I$  έχουμε ότι  $\bigwedge_{i \in I} P(M_i)$  είναι η προβολή στο χώρο  $\bigwedge_{i \in I} M_i$  και  $\bigvee_{i \in I} P(M_i)$  είναι η προβολή στο χώρο  $\bigvee_{i \in I} M_i$ .

**1.3.18 Ορισμός.** Μια απεικόνιση  $\Phi: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  με τις παρακάτω ιδιότητες :

- (1) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε  $y \in H$  η απεικόνιση  $x \mapsto \Phi(x, y) : H \rightarrow \mathbb{C}$  είναι γραμμική.
- (2) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε  $x \in H$

η απεικόνιση  $y \mapsto \overline{\Phi(x, y)} : H \rightarrow \mathbb{C}$  είναι γραμμική.  
καλείται *sesquilinear μορφή*. Αν επιπλέον έχει την ιδιότητα

$$\sup\{|\Phi(x, y)| : x, y \in H, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < +\infty$$

καλείται *φραγμένη sesquilinear μορφή*.

**1.3.19 Πρόταση.** Κάθε φραγμένη *sesquilinear* μορφή  $\Phi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  ορίζει μοναδικό φραγμένο τελεστή  $T \in \mathbb{B}(H)$  από την σχέση

$$\Phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle,$$

για κάθε  $x, y \in H$ . Επίσης,

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : x, y \in H, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

**1.3.20 Πρόταση.** Έστω  $T \in \mathbb{B}(H)$ .

- (i) Ο  $T$  είναι θετικός αν και μόνον αν υπάρχει  $A \in \mathbb{B}(H)$  ώστε  $T = A^*A$ .
- (ii) Ο  $T$  είναι θετικός αν και μόνον αν υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής  $A \in \mathbb{B}(H)$  ώστε  $T = A^2$ .

**1.3.21 Ορισμός.** (1) Ο μοναδικός θετικός τελεστής  $A \in \mathbb{B}(H)$  ώστε  $T = A^2$  της πρότασης 1.3.20 (ii) καλείται *θετική τετραγωνική ρίζα* του  $T$ .  
(2) Έστω  $T \in \mathbb{B}(H)$ . Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του  $T^*T$  συμβολίζεται με  $|T|$ .

(3) Ένας τελεστής  $T \in \mathbb{B}(H)$  καλείται *μερική ισομετρία* αν ο περιορισμός της στον υπόχωρο  $K = (\ker T)^\perp$  είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος  $K$  καλείται *αρχικός χώρος* και ο υπόχωρος  $T(K)$  καλείται *τελικός χώρος* της  $T$ .

**1.3.22 Πρόταση.** Έστω  $T \in \mathbb{B}(H)$ . Τότε υπάρχει μια μερική ισομετρία  $V$  με αρχικό χώρο  $\overline{|T|(H)}$  και τελικό χώρο  $\overline{T(H)}$  ώστε

$$T = V|T|.$$

**1.3.23 Ορισμός.** (1) Αν  $T \in \mathbb{B}(H)$ , τότε η γραφή του  $T$  ως σύνθεση μιας μερικής ισομετρίας και ενός θετικού τελεστή όπως της πρότασης 1.3.22 καλείται *πολική αναπαράσταση* του  $T$ .

(2) Ένας τελεστής  $T \in \mathbb{B}(H)$  καλείται *τάξης  $n$* , όπου  $n \in \mathbb{N}$ , αν ο υπόχωρος  $\text{im}(T)$  έχει διάσταση  $n$ .

(3) Για  $x, y \in H$  ορίζουμε την απεικόνιση  $x \otimes y^* : H \rightarrow H$  με τύπο

$$(x \otimes y^*)(z) = \langle z, y \rangle x.$$

Η απεικόνιση  $x \otimes y^*$  είναι φραγμένος τελεστής και

$$\|x \otimes y^*\| = \|x\| \|y^*\|.$$

Επίσης, κάθε τελεστής πρώτης τάξης είναι της μορφής  $x \otimes y^*$  με  $x, y \in H$ .

**1.3.24 Πρόταση** Έστω  $A \subseteq \mathbb{B}(H)$  μια άλγεβρα von Neumann και  $X \in A$ .  
Αν

$$X = U|X|$$

είναι η πολική αναπαράσταση του  $X$ , τότε  $U$  και  $|X|$  ανήκουν στην  $A$ .

**1.3.25 Θεώρημα** (Fejer) Αν  $f \in C([-\pi, \pi])$  και  $f(-\pi) = f(\pi)$ , τότε η ακολουθία  $(\sigma_n(f))$  όπου

$$\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m S_n(f),$$

$m \in \mathbb{N}$  συγκλίνει στην  $f$  ομοιόμορφα στο  $[-\pi, \pi]$ , όπου

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k,$$

με  $e_k(t) = \exp(ikt)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$  και

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt) dt.$$

Το θεώρημα του Fejer ισχύει εξίσου καλά για συναρτήσεις με τιμές σε χώρο Banach.

**1.3.26 Παρατήρηση** Αν  $t \in [-\pi, \pi]$ , τότε

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) K_m(s) ds,$$

όπου

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

Η ακολουθία  $(K_m)$  καλείται *πυρήνας του Fejer*.

**1.3.27 Ορισμός** Έστω  $X$  χώρος Banach και  $f: [a, b] \rightarrow X$  συνεχής συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t) dt \in X$$

ορίζεται ως το  $\|\cdot\|_X$ - όριο των μερικών αθροισμάτων :

Αν  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  είναι διαμέριση του  $[a, b]$  ορίζουμε

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Η ομοιόμορφη συνέχεια της  $f$  στο  $[a, b]$  δείχνει ότι το δίκτυο  $\{S(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}}$  συγκλίνει και το ολοκλήρωμα  $\int_a^b f(t) dt \in X$  είναι εξ ορισμού το όριο του.



## Κεφάλαιο 2

### Το ριζικό Jacobson

#### 2.1 Πρότυπα και Αναπαραστάσεις

**2.1.1 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και  $x, y$  στοιχεία της  $A$ . Ορίζουμε το *ψευδο-γινόμενο* των  $x$  και  $y$  να είναι το στοιχείο  $x \circ y$  της  $A$  το οποίο ορίζεται ως

$$x \circ y = x + y - xy.$$

**2.1.2 Παρατήρηση.** Αν  $A$  είναι μια άλγεβρα, τότε το ζεύγος  $(A, \circ)$  είναι ημιομάδα με ουδέτερο στοιχείο το μηδενικό στοιχείο  $0$  της άλγεβρας  $A$ .

**2.1.3 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και  $x$  ένα στοιχείο της  $A$ . Τα στοιχεία  $y$  και  $z$  της  $A$  καλούνται *αριστερό ψευδο-αντίστροφο* αντίστοιχα *δεξιό ψευδο-αντίστροφο* του  $x$  αν  $y \circ x = 0$  και  $x \circ z = 0$ . Ένα στοιχείο καλείται *ψευδο-αντίστροφο* του  $x$  αν είναι αριστερό και δεξιό ψευδο-αντίστροφο του  $x$ . Επίσης, αν το  $x$  έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο το  $y$  και δεξιό ψευδο-αντίστροφο το  $z$ , τότε  $y = z$ . Επιπλέον, ένα στοιχείο της  $A$  καλείται *ψευδο-αντιστρέψιμο* αν έχει ψευδο-αντίστροφο και συμβολίζουμε το σύνολο των ψευδο-αντιστρέψιμων στοιχείων της  $A$  με  $q\text{-Inv}(A)$ .

**2.1.4 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και  $x, y$  στοιχεία της  $A$ . Αν το  $xy$  είναι αριστερά ψευδο-αντιστρέψιμο (δεξιά), τότε το  $yx$  είναι αριστερά ψευδο-αντιστρέψιμο (δεξιά).

**Απόδειξη.** Έστω  $z$  το αριστερό ψευδο-αντίστροφο του  $xy$ . Τότε  $z \circ xy = 0$ . Παρατηρούμε ότι  $(yzx - yx) \circ yx = y(z \circ xy)x$  και έτσι  $(yzx - yx) \circ yx = 0$ . Άρα, το  $yx$  είναι αριστερά ψευδο-αντιστρέψιμο. Τώρα αν το  $xy$  είναι δεξιό ψευδο-αντιστρέψιμο και  $xy \circ w = 0$ , τότε επειδή  $yx \circ (ywx - yx) = y(xy \circ w)x$  έχουμε  $yx \circ (ywx - yx) = 0$  και έτσι το  $yx$  είναι δεξιό ψευδο-αντιστρέψιμο.  $\square$

**2.1.5 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα Banach και  $x$  ένα στοιχείο της  $A$ . Αν  $r_A(x) < 1$ , τότε το  $x$  είναι ψευδο-αντιστρέψιμο και το ψευδο-αντίστροφο του  $x$

είναι το  $-\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ .

**Απόδειξη.** Θα δείξουμε καταρχήν ότι η σειρά  $-\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  είναι απόλυτα συγκλίνουσα, άρα συγκλίνουσα. Θεωρούμε την αντίστοιχη αριθμητική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|$  και έστω  $\theta$  ώστε  $r_A(x) < \theta < 1$ . Τότε για αρκετά μεγάλο  $n$  έχουμε  $\|x^n\| < \theta^n$ . Έπεται ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|$  συγκλίνει, οπότε η σειρά  $-\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  συγκλίνει. Τώρα θα δείξουμε ότι το  $x$  είναι ψευδο-αντιστρέψιμο με ψευδο-αντίστροφο το  $-\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ . Έχουμε

$$x \circ \left(-\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = 0$$

και

$$\left(-\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) \circ x = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n + x + \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)x = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n + x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = 0.$$

Άρα, το  $-\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  είναι το ψευδο-αντίστροφο του  $x$ .  $\square$

**2.1.6 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα.

- (1) Ένα στοιχείο  $u$  της  $A$  καλείται *δεξιά modular μονάδα* για ένα γραμμικό υπόχωρο  $E$  της  $A$  αν  $a - au \in E$ , για κάθε  $a \in A$ .
- (2) Ένα αριστερό ιδεώδες  $I$  της  $A$  καλείται *modular αριστερό ιδεώδες* αν έχει δεξιά *modular* μονάδα.

**2.1.7 Παρατήρηση.** Αν  $A$  είναι μια άλγεβρα με μονάδα το στοιχείο  $e$ , τότε το  $e$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για κάθε γραμμικό υπόχωρο της  $A$ .

**2.1.8 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα.

- (i) Αν  $u$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για ένα γραμμικό υπόχωρο  $E$  της  $A$ , τότε είναι δεξιά *modular* μονάδα για κάθε γραμμικό υπόχωρο  $F$  της  $A$  που περιέχει τον  $E$ .
- (ii) Αν  $u$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για ένα γνήσιο αριστερό ιδεώδες  $I$  της  $A$ , τότε  $u \notin I$ .
- (iii) Κάθε γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$ , περιέχεται σε μεγιστικό αριστερό ιδεώδες.
- (iv) Κάθε μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$  είναι μεγιστικό αριστερό ιδεώδες.

**Απόδειξη.**

- (i) Έστω  $u$  δεξιά *modular* μονάδα για ένα γραμμικό υπόχωρο  $E$  της  $A$  και έστω γραμμικός υπόχωρο  $F$  της  $A$  που περιέχει τον  $E$ . Τότε  $a - au \in E$ , για κάθε  $a \in A$ , και αφού  $E \subseteq F$  έχουμε  $a - au \in F$ , για κάθε  $a \in A$ . Άρα, το  $u$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για το  $F$ .



(ii) Έστω  $u$  δεξιά *modular* μονάδα για ένα γνήσιο αριστερό ιδεώδες  $I$  της  $A$ . Θα δείξουμε ότι  $u \notin I$ . Ας υποθέσουμε ότι  $u \in I$ . Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι για κάθε  $a \in A$  έχουμε  $a = (a - au) + au \in I$ . Άρα,  $I = A$ . Αυτό όμως είναι άτοπο διότι  $I \neq A$ . Άρα, έχουμε  $u \notin I$ .

(iii) Έστω  $I$  ένα γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$  και  $u$  δεξιά *modular* μονάδα για το  $I$ . Θα δείξουμε ότι το  $I$  περιέχεται σε ένα μεγιστικό αριστερό ιδεώδες της  $A$ . Θεωρούμε  $K$  το σύνολο όλων των γνήσιων αριστερών ιδεωδών  $J$  της  $A$  με  $I \subseteq J$ . Από το (i) το  $u$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για κάθε  $J \in K$  και έτσι από το (ii) έχουμε ότι  $u \notin J$ , για κάθε  $J \in K$ . Το σύνολο  $K$  με την σχέση εγκλεισμού  $\subseteq$  είναι μη κενό διότι περιέχει το  $I$  και είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. Τώρα θα δείξουμε ότι κάθε αλυσίδα στο  $K$  έχει άνω φράγμα στο  $K$ . Έστω  $\{I_i\}_{i \in B}$  μια αλυσίδα στο  $K$ . Θέτουμε  $J = \cup_{i \in B} I_i$  και παρατηρούμε ότι το  $J$  είναι αριστερό ιδεώδες που περιέχει το  $I$ . Επίσης, το  $J$  είναι γνήσιο ιδεώδες διότι αν δεν ήταν θα είχαμε  $J = A$  και έτσι  $u \in J$  που σημαίνει  $u \in I_i$ , για κάποιο  $i \in B$ . Αυτό όμως είναι άτοπο από το (ii). Άρα, το  $J$  είναι άνω φράγμα της αλυσίδας  $\{I_i\}_{i \in B}$  στο  $K$ . Έτσι από το λήμμα του Zorn το  $K$  έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω  $I_1$ . Το  $I_1$  είναι και το μεγιστικό αριστερό ιδεώδες της  $A$  που περιέχει το  $I$  διότι αν  $I_2$  ένα γνήσιο αριστερό ιδεώδες με  $I_1 \subseteq I_2$  θα είχαμε ότι το  $I_2$  θα ήταν στοιχείο του  $K$  και από το γεγονός ότι το  $I_1$  είναι μεγιστικό στοιχείο του  $K$  θα είχαμε  $I_1 = I_2$ . Άρα, το  $I_1$  είναι μεγιστικό αριστερό ιδεώδες της  $A$  που περιέχει το  $I$ .

(iv) Έστω  $I$  μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$ . Το  $I$  είναι μεγιστικό αριστερό ιδεώδες. Πράγματι, αν  $I_1$  είναι ένα γνήσιο αριστερό ιδεώδες με  $I \subseteq I_1$ , τότε το  $I_1$  είναι και γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες και συνεπώς  $I = I_1$ .  $\square$

**2.1.9 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα Banach,  $I$  ένα γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$  και  $u$  δεξιά *modular* μονάδα για το  $I$ . Τότε :

(i)  $\|u - x\| \geq 1$ , για κάθε  $x \in I$ .

(ii) Η κλειστή θήκη του  $I$  είναι γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$ .

**Απόδειξη.**

(i) Θα δείξουμε ότι  $\|u - x\| \geq 1$ , για κάθε  $x \in I$ . Υποθέτουμε ότι το  $I$  περιέχει ένα στοιχείο  $x$  με την ιδιότητα  $\|u - x\| < 1$ . Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Αφού  $\|u - x\| < 1$  θα έχουμε και  $r_A(u - x) < 1$ . Έτσι από την πρόταση 2.1.5 το στοιχείο  $u - x$  έχει ψευδο-αντίστροφο  $y$ . Συνεπώς, έχουμε

$$u = x - y + y(u - x) = x - yx - (y - yu) \in I,$$

διότι  $x, yx, y - yu \in I$ . Αυτό όμως αντιτίθεται στην πρόταση 2.1.8 (ii). Άρα, ισχύει  $\|u - x\| \geq 1$ , για κάθε  $x \in I$ .

(ii) Θα δείξουμε ότι η κλειστή θήκη  $\bar{I}$  του  $I$  είναι γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$ . Παρατηρούμε ότι το  $\bar{I}$  είναι αριστερό ιδεώδες και επειδή  $I \subseteq \bar{I}$  έχουμε ότι το  $\bar{I}$  είναι *modular*. Μένει να δείξουμε ότι το  $\bar{I}$  είναι γνήσιο. Αν υποθέσουμε ότι το  $\bar{I}$  δεν είναι γνήσιο, τότε  $A = \bar{I}$ . Επειδή  $u \in A$  θα έχουμε και  $u \in \bar{I}$ . Άρα,  $\|u - x_n\| \rightarrow 0$  για ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $I$ . Άρα, υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να έχουμε  $\|u - x_n\| < 1$ . Αυτό όμως είναι άτοπο από το (i). Συνεπώς, το  $\bar{I}$  είναι γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$ .  $\square$

**2.1.10 Πρόρισμα.** Κάθε μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες μιας άλγεβρας Banach είναι κλειστό.

**Απόδειξη.** Έστω  $I$  ένα μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες μιας άλγεβρας Banach  $A$ . Θα δείξουμε ότι το  $I$  είναι κλειστό. Αν υποθέσουμε ότι δεν είναι κλειστό θα έχουμε  $I \subsetneq \bar{I}$ . Από την πρόταση 2.1.9 (ii) το  $\bar{I}$  είναι γνήσιο *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$ . Άτοπο, διότι το  $I$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες. Άρα, το  $I$  είναι κλειστό.  $\square$

**2.1.11 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και  $M$  γραμμικός χώρος. Ο  $M$  καλείται *αριστερό  $A$ -πρότυπο* αν ορίζεται μια απεικόνιση  $A \times M \rightarrow M$  με

$$(a, m) \mapsto a \cdot m$$

που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :

- (1) Για κάθε  $a \in A$ , η απεικόνιση  $m \mapsto am$  είναι γραμμική στο  $M$ .
- (2) Για κάθε  $m \in M$ , η απεικόνιση  $a \mapsto am$  είναι γραμμική στο  $A$ .
- (3)  $a_1(a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$ , για κάθε  $a_1, a_2 \in A$  και  $m \in M$ .

Η απεικόνιση  $(a, m) \mapsto a \cdot m$  καλείται *πολλαπλασιασμός προτύπου*.

**2.1.12 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και  $M$  αριστερό  $A$ -πρότυπο. Ένας γραμμικός υπόχωρος  $F$  του  $M$  καλείται *αριστερό  $A$ -υποπρότυπο* του  $M$  αν  $am \in F$ , για κάθε  $a \in A$  και  $m \in F$ .

**2.1.13 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια νορμαρισμένη άλγεβρα και  $M$  χώρος με νόρμα. Ο  $M$  καλείται *νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -πρότυπο* αν είναι αριστερό  $A$ -πρότυπο και υπάρχει θετική σταθερά  $K > 0$  τέτοια ώστε

$$\|am\| \leq K\|a\|\|m\|,$$

για κάθε  $a \in A$  και  $m \in M$ . Αν επιπλέον ο  $M$  είναι πλήρης το νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -πρότυπο  $M$  καλείται *Banach αριστερό  $A$ -πρότυπο*.

**2.1.14 Παρατήρηση.** Έστω  $A$  μια νορμαρισμένη άλγεβρα και  $M$  νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -πρότυπο. Παρατηρούμε ότι αν  $F$  είναι αριστερό  $A$ -υποπρότυπο του  $M$ , τότε το  $F$  είναι και νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -υποπρότυπο του  $M$ , δηλαδή είναι  $A$ -υποπρότυπο του  $M$  και υπάρχει θετική σταθερά  $K > 0$

τέτοια ώστε  $\|am\| \leq K\|a\|\|m\|$ , για κάθε  $a \in A$  και  $m \in F$ . Αν επιπλέον το  $F$  είναι πλήρης θα είναι και Banach αριστερό  $A$ -υποπρότυπο του  $M$ .

**2.1.15 Παραδείγματα.** Έστω  $A$  μια νορμαρισμένη άλγεβρα.

(α) Αν  $I$  είναι αριστερό ιδεώδες της  $A$ , τότε το  $I$  είναι νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -πρότυπο.

(β) Αν  $I$  είναι κλειστό αριστερό ιδεώδες της  $A$ , τότε ο γραμμικός χώρος πηλίκου  $A/I$  με την νόρμα πηλίκου είναι νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -πρότυπο με πολλαπλασιασμό προτύπου  $A \times (A/I) \rightarrow A/I$ , όπου

$$a(x + I) = ax + I,$$

για κάθε  $a, x \in A$ .

**2.1.16 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα. Αναπαράσταση της  $A$  σε ένα γραμμικό χώρο  $X$  καλείται ένας ομομορφισμός αλγεβρών  $\Pi: A \rightarrow \mathbf{L}(X)$ , όπου  $\mathbf{L}(X)$  η άλγεβρα των γραμμικών απεικονίσεων από τον  $X$  στον εαυτό του με πολλαπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων.

**2.1.17 Παρατήρηση.** Έστω  $\Pi$  αναπαράσταση μιας άλγεβρας  $A$  σε ένα γραμμικό χώρο  $X$ . Το  $X$  είναι αριστερό  $A$ -πρότυπο με πολλαπλασιασμό προτύπου  $A \times X \rightarrow X$ , όπου

$$ax = \Pi(a)x,$$

για κάθε  $a \in A$  και  $x \in X$ . Επίσης, αν  $X$  είναι ένα αριστερό  $A$ -πρότυπο, τότε η απεικόνιση  $\Pi: A \rightarrow \mathbf{L}(X)$  με

$$\Pi(a)x = ax,$$

για κάθε  $a \in A$  και  $x \in X$  είναι αναπαράσταση της  $A$  στον γραμμικό χώρο  $X$ .

**2.1.18 Ορισμός.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα και  $X$  ένα αριστερό  $A$ -πρότυπο. Το  $X$  καλείται μη τετριμμένο αν

$$AX = \{ax : a \in A, x \in X\} \neq \{0\}.$$

Αν επιπλέον τα μόνα αριστερά  $A$ -υποπρότυπα του  $X$  είναι τα  $\{0\}$  και  $X$ , το  $X$  καλείται αλγεβρικά ανάγωγο. Επίσης, αν  $\Pi$  είναι αναπαράσταση της  $A$  σε ένα γραμμικό χώρο  $X$ , η  $\Pi$  θα λέγεται αλγεβρικά ανάγωγη αν το αριστερό  $A$ -πρότυπο  $X$  που προκύπτει από την  $\Pi$  σύμφωνα με την παρατήρηση 2.1.17 είναι αλγεβρικά ανάγωγο.

**2.1.19 Παρατήρηση.** (1) Αν  $\Pi$  είναι αναπαράσταση μιας άλγεβρας  $A$  σε ένα γραμμικό χώρο  $X$ , τότε προκύπτει ότι ο πυρήνας της  $\Pi$  είναι

$$\ker \Pi = \{a \in A : \Pi(a) = 0\} = \{a \in A : \Pi(a)x = 0, \forall x \in X\} =$$

$$\{a \in A : ax = 0, \forall x \in X\} = \{a \in A : aX = \{0\}\}.$$

(2) Έστω  $A$  μια νορμαρισμένη άλγεβρα και  $X$  ένα νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -πρότυπο. Για την αναπαράσταση  $\Pi$ , όπου  $\Pi$  όπως την παρατήρηση 2.1.17, παρατηρούμε ότι  $\Pi(a) \in \mathbb{B}(X)$ , για κάθε  $a \in A$  και η  $\Pi$  είναι συνεχής από τη σχέση  $\|am\| \leq K\|a\|\|m\|$ , για κάθε  $a \in A$ ,  $m \in M$  και κάποιο  $K > 0$ .

(3) Έστω  $A$  νορμαρισμένη άλγεβρα,  $X$  χώρος με νόρμα και  $\Pi: A \rightarrow \mathbf{L}(X)$  ομομορφισμός αλγεβρών. Αν η  $\Pi$  είναι συνεχής και  $\Pi(a) \in \mathbb{B}(X)$ , για κάθε  $a \in A$  τότε το  $X$  είναι νορμαρισμένο αριστερό  $A$ -πρότυπο.

**Σημείωση.** Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα συμβολίζουμε με  $A$  μια άλγεβρα. Αν επιπλέον η  $A$  έχει κάποια επιπρόσθετη δομή θα αναφέρεται σε κάθε περίπτωση.

**2.1.20 Ορισμός.** Έστω  $X$  ένα αριστερό  $A$ -πρότυπο και  $x_0$  ένα στοιχείο του γραμμικού χώρου  $X$ . Καλούμε *πυρήνα του στοιχείου  $x_0$*  και συμβολίζουμε αυτό με  $\ker(x_0)$ , το αριστερό ιδεώδες της  $A$ ,

$$\ker(x_0) = \{a \in A : ax_0 = 0\}.$$

Επίσης, ονομάζουμε *σταθεροποιητή του στοιχείου  $x_0$*  και συμβολίζουμε αυτό με  $\text{id}(x_0)$ , το σύνολο

$$\text{id}(x_0) = \{a \in A : ax_0 = x_0\}.$$

Επιπλέον, το στοιχείο  $x_0$  καλείται *αλγεβρικά κυκλικό* αν  $Ax_0 = X$ .

**2.1.21 Πρόταση.** Έστω  $X$  ένα αριστερό  $A$ -πρότυπο και  $x_0 \in X$  με  $x_0 \neq 0$ . Τότε :

- (i) Κάθε στοιχείο του  $\text{id}(x_0)$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για το  $\ker(x_0)$ .
- (ii) Αν το  $x_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό, τότε το  $\ker(x_0)$  είναι *modular* αριστερό ιδεώδες.
- (iii) Αν το  $X$  είναι αλγεβρικά ανάγωγο, τότε το  $x_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό και το  $\ker(x_0)$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες.

**Απόδειξη.**

(i) Έστω  $b$  στοιχείο του  $\text{id}(x_0)$ . Θα δείξουμε ότι το  $b$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για το  $\ker(x_0)$ . Πράγματι, για κάθε  $a \in A$  έχουμε  $a - ab \in \ker(x_0)$ , διότι

$$(a - ab)x_0 = ax_0 - abx_0 = ax_0 - ax_0 = 0.$$

(ii) Έστω ότι το  $x_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό. Θα δείξουμε ότι το  $\ker(x_0)$  είναι *modular* αριστερό ιδεώδες. Παρατηρούμε ότι το  $\ker(x_0)$  είναι αριστερό ιδεώδες. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το  $\ker(x_0)$  είναι *modular*. Αφού το  $x_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό έχουμε  $Ax_0 = X$  και συνεπώς υπάρχει  $b \in A$  ώστε  $bx_0 = x_0$ , δηλαδή  $b \in \text{id}(x_0)$ . Έπεται από το (i) ότι το  $\ker(x_0)$  είναι *modular*.

(iii) Έστω ότι το  $X$  είναι αλγεβρικά ανάγωγο. Θα δείξουμε ότι το  $x_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό και ότι το  $\ker(x_0)$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες. Επειδή το  $Ax_0$  είναι αριστερό  $A$ -υποπρότυπο του  $X$  είτε  $Ax_0 = \{0\}$  είτε  $Ax_0 = X$ . Αν  $Ax_0 = \{0\}$ , θέτουμε

$$N = \{x \in X : Ax = \{0\}\}.$$

Το  $N$  είναι αριστερό  $A$ -υποπρότυπο του  $X$  και μη μηδενικό διότι υπάρχει  $x_0 \neq 0$  ώστε  $Ax_0 = \{0\}$ . Συνεπώς,  $N = X$ . Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το  $X$  είναι μη τετριμμένο ως αλγεβρικά ανάγωγο. Άρα,  $Ax_0 = X$  και έτσι το  $x_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό. Έπεται από το (ii) ότι το  $\ker(x_0)$  είναι *modular* αριστερό ιδεώδες. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι το  $\ker(x_0)$  είναι μεγιστικό. Έστω  $J$  αριστερό ιδεώδες της  $A$  με  $\ker(x_0) \subsetneq J$ . Τότε το  $Jx_0$  είναι αριστερό  $A$ -υποπρότυπο του  $X$  και μη μηδενικό διότι αν ήταν μηδενικό θα είχαμε  $J \subseteq \ker(x_0)$  το οποίο είναι άτοπο. Άρα,  $Jx_0 = X$  και έστω  $b \in J \cap \text{id}(x_0)$ . Έπεται από το (i) ότι το  $b$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για το  $\ker(x_0)$  και συνεπώς για το  $J$ . Όμως επειδή το  $b \in J$  έχουμε  $J = A$ . Άρα, το  $\ker(x_0)$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες.  $\square$

**2.1.22 Ορισμός.** Έστω  $L$  ένα αριστερό ιδεώδες της  $A$ . Συμβολίζουμε με  $L : A$  το ιδεώδες

$$L : A = \{a \in A : aA \subset L\}.$$

Αν το  $L$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες το  $L : A$  καλείται *πρωταρχικό ιδεώδες*.

**2.1.23 Πρόταση.** (i) Αν  $L$  είναι ένα *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$ , τότε  $(L : A) \subset L$  και το  $L : A$  είναι πυρήνας της αναπαράστασης  $\Pi : A \rightarrow \mathbf{L}(A/L)$ , όπου

$$\Pi(a)(x + L) = ax + L.$$

(ii) Τα πρωταρχικά ιδεώδη της  $A$  είναι πυρήνες αλγεβρικά ανάγωγων αναπαράστασεων της  $A$ .

(iii) Ένα πρωταρχικό ιδεώδες είναι η τομή των μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών που περιέχουν αυτό.

**Απόδειξη.**

(i) Έστω  $L$  ένα *modular* αριστερό ιδεώδες της  $A$  και  $u$  δεξιά *modular* μονάδα για το  $L$ . Αρχικά, θα δείξουμε ότι  $(L : A) \subset L$ . Αν  $a \in L : A$  έχουμε  $aA \subseteq L$ . Αφού  $a - au \in L$  και  $au \in L$  έχουμε  $a \in L$ . Άρα,  $(L : A) \subset L$ . Τώρα θα δείξουμε ότι το  $L : A$  είναι πυρήνας της αναπαράστασης  $\Pi : A \rightarrow \mathbf{L}(A/L)$ , όπου  $\Pi(a)(x + L) = ax + L$ . Έχουμε

$$\ker \Pi = \{a \in A : a(x + L) = L, \forall x \in A\} = \{a \in A : ax + L = L, \forall x \in A\} =$$

$$\{a \in A : ax \in L, \forall x \in A\} = \{a \in A : aA \subset L\} = L : A.$$

Άρα,  $L : A = \ker \Pi$ .

(ii) Έστω  $P$  ένα πρωταρχικό ιδεώδες. Θα δείξουμε ότι το  $P$  είναι πυρήνας αλγεβρικά ανάγωγης αναπαράστασης της  $A$ . Έχουμε  $P = L : A$ , όπου  $L$  μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες. Τότε από το (i) το  $P$  είναι πυρήνας της αναπαράστασης  $\Pi : A \rightarrow \mathbf{L}(A/L)$  η οποία είναι αλγεβρικά ανάγωγη. Αντίστροφα, έστω  $X$  ένα αλγεβρικά ανάγωγο αριστερό  $A$ -πρότυπο και  $x_0 \in X$  με  $x_0 \neq 0$ . Θα δείξουμε ότι ο πυρήνας της αλγεβρικά ανάγωγης αναπαράστασης που επάγει το αριστερό  $A$ -πρότυπο  $X$  είναι πρωταρχικό ιδεώδες. Από την πρόταση 2.1.21 (iii) το  $x_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό και το  $\ker(x_0)$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες. Όμως, το  $\ker \Pi = \{a \in A : aX = \{0\}\}$  ισούται με  $\ker(x_0) : A$ , διότι

$$aX = \{0\} \Leftrightarrow aAx_0 = \{0\} \Leftrightarrow aA \subset \ker(x_0) \Leftrightarrow a \in \ker(x_0) : A.$$

Άρα, ο πυρήνας της αλγεβρικά ανάγωγης αναπαράστασης που επάγει το αριστερό  $A$ -πρότυπο  $X$  είναι πρωταρχικό ιδεώδες.

(iii) Έστω  $P$  ένα πρωταρχικό ιδεώδες. Θα δείξουμε ότι το  $P$  είναι η τομή των μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών που περιέχουν αυτό. Από το (ii) υπάρχει αλγεβρικά ανάγωγο αριστερό  $A$ -πρότυπο  $X$  ώστε

$$P = \{a \in A : aX = \{0\}\}.$$

Έπεται ότι

$$P = \cap \{\ker(x) : x \in X, x \neq 0\}$$

και κάθε  $\ker(x)$  με  $x \in X, x \neq 0$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες που περιέχει το  $P$ . Αν  $N$  είναι η τομή όλων των μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών που περιέχουν το  $P$ , τότε αφού κάθε  $\ker(x)$  με  $x \in X, x \neq 0$  είναι μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες που περιέχει το  $P$  έχουμε

$$P \subseteq N \subseteq \cap \{\ker(x) : x \in X, x \neq 0\} = P.$$

Άρα,  $P = N$ , δηλαδή το  $P$  είναι η τομή των μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών που περιέχουν αυτό.  $\square$

## 2.2 Χαρακτηρισμοί του ριζικού Jacobson

**Σημείωση.** Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε με  $A$  μια άλγεβρα. Αν επιπλέον η  $A$  έχει κάποια επιπρόσθετη δομή θα αναφέρεται σε κάθε περίπτωση.

**2.2.1 Ορισμός.** Το ριζικό Jacobson της  $A$  συμβολίζεται με  $\text{rad}(A)$  και ορίζουμε να είναι η τομή των πυρήνων όλων των αλγεβρικά ανάγωγων αναπαραστάσεων της  $A$ . Στην περίπτωση που η  $A$  δεν έχει αλγεβρικά ανάγωγη αναπαραστάση το ριζικό Jacobson θα ισούται με  $A$ . Αν  $\text{rad}(A) = \{0\}$  η  $A$  θα λέγεται ημιαπλή.

**2.2.2 Πρόσισμα.** (i) Το ριζικό Jacobson της  $A$  είναι η τομή των πρωταρχικών ιδεωδών της  $A$ .

(ii) Το ριζικό Jacobson της  $A$  είναι η τομή των μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών της  $A$ .

**Απόδειξη.**

(i) Από την πρόταση 2.1.23 (ii) τα πρωταρχικά ιδεώδη της  $A$  είναι πυρήνες αλγεβρικά ανάγωγων αναπαραστάσεων της  $A$ . Άρα, αφού το  $\text{rad}(A)$  είναι η τομή των πυρήνων όλων των αλγεβρικά ανάγωγων αναπαραστάσεων της  $A$  έχουμε ότι το  $\text{rad}(A)$  είναι η τομή των πρωταρχικών ιδεωδών της  $A$ .

(ii) Από την πρόταση 2.1.23 (iii) ένα πρωταρχικό ιδεώδες είναι η τομή των μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών που περιέχουν αυτό. Επίσης, από το (i) το  $\text{rad}(A)$  είναι η τομή των πρωταρχικών ιδεωδών της  $A$ . Έτσι το  $\text{rad}(A)$  είναι η τομή των μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών της  $A$ .  $\square$

**2.2.3 Πρόταση.** Αν κάθε στοιχείο ενός αριστερού ιδεώδες  $I$  της  $A$  έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο, τότε  $I \subset q\text{-Inv}(A)$

**Απόδειξη.** Έστω  $a$  στοιχείο του  $I$  με αριστερό ψευδο-αντίστροφο στοιχείο το  $b \in A$ . Θα δείξουμε ότι το  $a$  είναι ψευδο-αντιστρέψιμο. Επειδή  $b \circ a = 0$  έχουμε  $b = ba - a \in I$ . Άρα, το  $b$  έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο. Επίσης, έχει δεξιό ψευδο-αντίστροφο το  $a$ . Συνεπώς, το  $b$  έχει ψευδο-αντίστροφο το  $a$  και έτσι το  $a$  έχει ψευδο-αντίστροφο το  $b$ . Άρα,  $a \in q\text{-Inv}(A)$ . Επειδή το  $a$  ήταν τυχαίο έχουμε  $I \subset q\text{-Inv}(A)$ .  $\square$

**2.2.4 Πρόταση.** (i)  $\text{rad}(A) \subset q\text{-Inv}(A)$ .

(ii)  $\text{rad}(A) = \{q \in A : Aq \subset q\text{-Inv}(A)\}$ .

**Απόδειξη.**

(i) Έστω  $s$  στοιχείο της  $A$  το οποίο δεν έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο. Θα δείξουμε ότι το  $s$  δεν ανήκει στο ριζικό Jacobson της  $A$ . Θέτουμε

$$J = \{as - a : a \in A\}.$$

Το  $J$  είναι *modular* αριστερό ιδεώδες με δεξιό *modular* μονάδα το  $s$ . Το  $s$  δεν ανήκει στο  $J$  διότι αν  $s \in J$  έχουμε  $s = as - a$ , για κάποιο  $a \in A$  και συνεπώς  $a + s - as = 0$ . Άρα, το  $s$  έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο το οποίο είναι άτοπο. Από το λήμμα του Zorn υπάρχει ένα μεγιστικό *modular* αριστερό

ιδεώδες  $M$  ώστε  $J \subset M$  και το  $s$  να μην ανήκει στο  $M$ . Συνεπώς, από το πόρισμα 2.2.2 (ii) το  $s$  δεν ανήκει στο  $\text{rad}(A)$ . Άρα, κάθε στοιχείο του  $\text{rad}(A)$  έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο και επειδή το  $\text{rad}(A)$  είναι αριστερό ιδεώδες από την πρόταση 2.2.3 έχουμε  $\text{rad}(A) \subset q\text{-Inv}(A)$ .

(ii) Αν  $q$  στοιχείο του  $\text{rad}(A)$ , τότε επειδή το  $\text{rad}(A)$  είναι ιδεώδες έχουμε  $Aq \subset \text{rad}(A)$  και από το (i) έχουμε  $Aq \subset q\text{-Inv}(A)$ . Έστω τώρα  $q \notin \text{rad}(A)$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο  $a$  στην  $A$  ώστε το  $aq$  να μην είναι ψευδο-αντιστρέψιμο. Επειδή  $q \notin \text{rad}(A)$  υπάρχει αλγεβρικά ανάγωγο αριστερό  $A$ -πρότυπο  $X$  ώστε  $qX \neq \{0\}$ . Επιλέγουμε  $x_0 \in X$  ώστε  $qx_0 \neq 0$ . Τότε το  $qx_0$  είναι αλγεβρικά κυκλικό και συνεπώς υπάρχει στοιχείο  $a$  στην  $A$  ώστε  $aqx_0 = x_0$ . Επειδή  $aq \in \text{id}(x_0)$  από την πρόταση 2.1.21 (i) έχουμε ότι το  $aq$  είναι δεξιά *modular* μονάδα για το  $\ker(x_0)$ . Όμως το  $aq$  δεν έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο διότι αν είχε, έστω  $z$ , θα είχαμε  $z \circ aq = 0$  και έτσι  $z + aq - zaq = 0$ . Συνεπώς,  $-aq = z - zaq$  και  $-aq \in \ker(x_0)$ , δηλαδή  $aq \in \ker(x_0)$ . Άρα,  $aqx_0 = 0$  και επειδή  $aqx_0 = x_0$  θα είχαμε  $x_0 = 0$  το οποίο είναι άτοπο. Έτσι,  $aq \notin q\text{-Inv}(A)$ .  $\square$

**2.2.5 Πόρισμα.**  $\text{rad}(A) = \{q \in A : qA \subset q\text{-Inv}(A)\}$ .

**Απόδειξη.** Αν το  $qa$  έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο, τότε από την πρόταση 2.1.4 το  $aq$  έχει αριστερό ψευδο-αντίστροφο. Όμοια αν το  $qa$  έχει δεξιά ψευδο-αντίστροφο, τότε το  $aq$  έχει δεξιά ψευδο-αντίστροφο. Συνεπώς,

$$\{q \in A : qA \subset q\text{-Inv}(A)\} = \{q \in A : Aq \subset q\text{-Inv}(A)\}.$$

Άρα, από την πρόταση 2.2.4 (ii) έχουμε  $\text{rad}(A) = \{q \in A : qA \subset q\text{-Inv}(A)\}$ .  $\square$

**2.2.6 Πόρισμα.** Αν  $A$  είναι μια άλγεβρα Banach, τότε τόσο τα πρωταρχικά ιδεώδη της  $A$  όσο και το ριζικό Jacobson της  $A$  είναι κλειστά.

**Απόδειξη.** Από το πόρισμα 2.1.10 κάθε μεγιστικό *modular* αριστερό ιδεώδες είναι κλειστό. Επειδή το  $\text{rad}(A)$  και κάθε πρωταρχικό ιδεώδες είναι τομή μεγιστικών *modular* αριστερών ιδεωδών έχουμε ότι είναι κλειστά.  $\square$

**2.2.7 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα. Αν  $q \in \text{rad}(A)$ , τότε  $r_A(q) = r_A(aq) = r_A(qa) = 0$ , για κάθε  $a \in A$ .

**Απόδειξη.** Αν η  $A$  δεν έχει μονάδα, τότε θεωρούμε το  $q$  ως στοιχείο της μοναδοποίησης (υπενθυμίζουμε ότι έτσι ορίζεται το  $\sigma_A(q)$ ). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι η  $A$  έχει μονάδα. Επειδή το  $\text{rad}(A)$  είναι ιδεώδες αρκεί να δείξουμε ότι  $r_A(q) = 0$ . Παρατηρούμε για κάθε  $z$  μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό ότι  $z^{-1}q \in q\text{-Inv}(A)$ . Έστω  $x$  το αριστερό ψευδο-αντίστροφο του  $z^{-1}q$ . Τότε  $x \circ z^{-1}q = 0$  και έτσι  $(e - x)(e - z^{-1}q) = e$ . Άρα, το  $e - z^{-1}q$  αντιστρέφεται.



Συνεπώς, το  $ze - q$  αντιστρέφεται, δηλαδή  $z \notin \sigma_A(q)$ . Έτσι αν  $z \in \sigma_A(q)$ , τότε  $z = 0$ . Άρα,  $\sigma_A(q) = \{0\}$  και συνεπώς  $r_A(q) = 0$ .  $\square$

**2.2.8 Πρόταση.** Έστω  $A$  μια άλγεβρα Banach και  $q \in A$ . Αν  $r_A(aq) = 0$ , για κάθε  $a \in A$  ή  $r_A(qa) = 0$ , για κάθε  $a \in A$ , τότε  $q \in \text{rad}(A)$ .

**Απόδειξη.** Αν  $r_A(aq) = 0$ , για κάθε  $a \in A$ , τότε από την πρόταση 2.1.5 έχουμε  $aq \in q\text{-Inv}(A)$ , για κάθε  $a \in A$ . Άρα,  $Aq \subset q\text{-Inv}(A)$  και έτσι από την πρόταση 2.2.4 (ii) έπεται  $q \in \text{rad}(A)$ . Αν  $r_A(qa) = 0$  για κάθε  $a \in A$ , τότε το συμπέρασμα έπεται απο το πόρισμα 2.2.5.  $\square$



## Κεφάλαιο 3

# Το ριζικό Jacobson μιας Άλγεβρας Nest

### 3.1 Εισαγωγή στα Nests και τις Άλγεβρες Nest

Έστω  $H$  ένας μιγαδικός χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης, έστω  $n$  και  $T$  φραγμένος τελεστής από τον  $H$  στον εαυτό του. Υπάρχει ορθοκανονική βάση  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ώστε οι υπόχωροι  $N_i = \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ , για  $1 \leq i \leq n$  να είναι αναλλοίωτοι ως προς  $T$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο πίνακας που αντιστοιχεί στον  $T$  να είναι άνω τριγωνικός και συνεπώς το φάσμα του  $T$  να είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα που αντιστοιχεί στον  $T$ . Είναι φυσικό να ερωτηθεί κανείς τι γίνεται όταν ο χώρος Hilbert  $H$  είναι απειροδιάστατος και διαχωρισίμος, δηλαδή προκύπτει το ερώτημα αν υπάρχει ορθοκανονική βάση  $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$  ώστε οι υπόχωροι  $N_i = \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ , για  $i \in \mathbb{N}$  να είναι αναλλοίωτοι ως προς  $T$ . Η ερώτηση αυτή όμως είναι κάπως απαιτητική καθώς απαιτεί από τον  $T$  να έχει αρκετές ιδιοτιμές την στιγμή που υπάρχουν τελεστές που δεν έχουν καμία ιδιοτιμή. Αντ' αυτού προκύπτει το πρόβλημα εύρεσης αλυσίδας κλειστών αναλλοίωτων υποχώρων και έτσι έπεται η ανάγκη να συστηθούν οι έννοιες των nests και των αλγεβρών nest. Η μελέτη των τριγωνικών μορφών για τελεστές ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του 50 και αρχές της δεκαετίας του 60 από τον Ringrose και την Ρώσικη σχολή με τους Gohberg, Krein κλπ. Ο Ringrose ξεκίνησε την μελέτη της άλγεβρας όλων των τελεστών με δεδομένη τριγωνική μορφή. Αυτός επινόησε τον όρο άλγεβρα nest επειδή ο πιο κατάλληλος όρος τριγωνική άλγεβρα είχε χρησιμοποιηθεί από τους Kadison, Singer.

**Σημείωση.** Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε με  $H$  ένα χώρο Hilbert.

**3.1.1 Ορισμός.** Μια αλυσίδα  $\mathcal{N}$  κλειστών υποχώρων του  $H$  καλείται nest του  $H$  αν ικανοποιεί τα παρακάτω :

- (1) Οι υποχώροι  $\{0\}$  και  $H$  ανήκουν στο  $\mathcal{N}$ .
- (2) Η  $\mathcal{N}$  είναι κλειστή ως προς την τομή και την κλειστή γραμμική θήκη οποιασδήποτε υποοικογένειας του  $\mathcal{N}$ , δηλαδή αν  $M_0 \subseteq \mathcal{N}$  έχουμε  $\bigwedge_{N \in M_0} N$ ,  $\bigvee_{N \in M_0} N \in \mathcal{N}$ .

**3.1.2 Ορισμός.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$ . Το σύνολο

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}) = \{T \in \mathbb{B}(H) : T(N) \subseteq N, \quad \forall N \in \mathcal{N}\}$$

καλείται *άλγεβρα nest*.

**3.1.3 Ορισμός.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$  και  $N \in \mathcal{N}$ . Ορίζουμε

$$N_- = \bigvee \{N' \in \mathcal{N} : N' < N\}$$

και

$$N_+ = \bigwedge \{N' \in \mathcal{N} : N' > N\},$$

όπου  $<$  ο γνήσιος εγκλεισμός. Παρατηρούμε ότι  $N_-, N_+ \in \mathcal{N}$ . Επίσης, αν  $N \in \mathcal{N}$ , έχουμε  $N_- \leq N$ . Στην περίπτωση που  $N_- < N$ , το  $N_-$  είναι αμέσως προηγούμενος του  $N$  και  $(N_-)_+ = N$ .

**3.1.4 Παρατήρηση.** (1) Στους ορισμούς 3.1.1, 3.1.2 και 3.1.3 αντί για χώρο Hilbert μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χώρο Banach.

(2) Στον ορισμό 3.1.2 η άλγεβρα nest  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι πράγματι άλγεβρα. Αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση αλγεβρών τελεστών που αφήνουν αναλλοίωτο ένα σύνολο κλειστών υποχώρων του  $H$ .

(3) Αν  $\mathcal{N}$  είναι ένα nest του  $H$  και  $T \in \mathbb{B}(H)$ , τότε  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  αν και μόνον αν για κάθε  $N \in \mathcal{N}$  έχουμε

$$TP(N) = P(N)TP(N)$$

αν και μόνον αν για κάθε  $N \in \mathcal{N}$  έχουμε

$$P(N)^\perp T = P(N)^\perp TP(N)^\perp.$$

**3.1.5 Πρόταση.** Αν  $\mathcal{N}$  είναι ένα nest του  $H$ , τότε η άλγεβρα nest  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι *WOT* κλειστή στο  $\mathbb{B}(H)$ .

**Απόδειξη.** Θα δείξουμε ότι η  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι *WOT* κλειστή στο  $\mathbb{B}(H)$ . Έστω  $(T_i)_{i \in I}$  δίκτυο στο  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  με  $T_i \rightarrow T$ , ως προς την *WOT* τοπολογία και  $T \in \mathbb{B}(H)$ . Αρκεί να δείξουμε ότι το  $T$  είναι στοιχείο της άλγεβρας nest

$\mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Έστω τυχαίο  $N \in \mathcal{N}$ . Αφού  $T_i \rightarrow T$ , ως προς την  $WOT$  τοπολογία έχουμε  $\langle T_i x - Tx, y \rangle \rightarrow 0$ , για κάθε  $x, y \in H$ . Αν τώρα  $x \in N$  έχουμε  $\langle T_i x, y \rangle \rightarrow \langle Tx, y \rangle$ , για κάθε  $y \in N^\perp$ . Άρα,  $\langle Tx, y \rangle = 0$ , για κάθε  $y \in N^\perp$  και έτσι  $Tx \in N$ . Συνεπώς,  $T(N) \subseteq N$  και το  $N$  ήταν τυχαίο. Αυτό σημαίνει ότι το  $T$  είναι στοιχείο της  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Έτσι η  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι  $WOT$  κλειστή στο  $\mathbb{B}(H)$ .  $\square$

**3.1.6 Ορισμός.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$  και  $N \in \mathcal{N}$ .

- (1) Αν  $N_- \neq N$ , τότε ο χώρος  $N \ominus N_- = N \cap N_-^\perp$  καλείται *άτομο* του  $\mathcal{N}$ . Το άτομο  $N \ominus N_-$  δεν είναι απαραίτητα στοιχείο του  $\mathcal{N}$ .
- (2) Αν η κλειστή γραμμική θήκη όλων των ατόμων του  $\mathcal{N}$  είναι ο χώρος  $H$ , τότε το nest  $\mathcal{N}$  καλείται *ατομικό*.
- (3) Αν το nest  $\mathcal{N}$  δεν έχει άτομα, τότε το  $\mathcal{N}$  καλείται *συνεχές*.

**3.1.7 Πρόταση.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$ .

- (i) Διαφορετικά άτομα είναι κάθετα μεταξύ τους.
- (ii) Ένα άτομο  $N \ominus N_-$ , όπου  $N \in \mathcal{N}$  είναι στοιχείο του  $\mathcal{N}$  αν και μόνον αν  $N_- = \{0\}$ .

**Απόδειξη.**

(i) Έστω  $M, N \in \mathcal{N}$  με  $M \neq N$  και  $M_- < M$ ,  $N_- < N$ . Θα δείξουμε ότι τα άτομα  $M \ominus M_-$  και  $N \ominus N_-$  είναι κάθετα μεταξύ τους. Έστω  $x \in M \ominus M_-$  και  $y \in N \ominus N_-$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $x \perp y$ . Αφού  $M, N \in \mathcal{N}$  χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $M < N$ . Επειδή το  $x$  είναι στοιχείο του  $M \ominus M_-$  έχουμε  $x \in M$  και έτσι  $x \in N$ . Αν δείξουμε ότι  $x \in N_-$ , τότε  $x \perp y$  διότι  $y \in N_-^\perp$ . Πράγματι,  $x \in N_-$  διότι  $M < N$  και  $M \leq N_-$ .

(ii) Αν  $N_- = \{0\}$ , τότε προφανώς το άτομο  $N \ominus N_-$  ανήκει στο  $\mathcal{N}$ . Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι  $N \ominus N_- \in \mathcal{N}$ . Θα δείξουμε ότι  $N_- = \{0\}$ . Υποθέτουμε ότι  $N_- \neq \{0\}$  και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Έχουμε  $N \ominus N_- < N$  και έτσι  $N \ominus N_- \leq N_-$ . Συνεπώς,  $N = N \ominus N_- + N_- \leq N_-$ , το οποίο είναι άτοπο. Άρα,  $N_- = \{0\}$ .  $\square$

**3.1.8 Ορισμός.** (1) Μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων καλείται *μεγιστική* αν δεν περιέχεται σε γνησίως μεγαλύτερη αλυσίδα κλειστών υποχώρων. Από το λήμμα του Zorn κάθε αλυσίδα κλειστών υποχώρων περιέχεται σε μεγιστική αλυσίδα κλειστών υποχώρων.

(2) Ένα nest καλείται *μεγιστικό* αν δεν περιέχεται σε γνησίως μεγαλύτερο nest.

**3.1.9 Παρατήρηση.** (1) Κάθε μεγιστική αλυσίδα κλειστών υποχώρων είναι nest. Πράγματι, αν  $\mathcal{M}$  είναι μια μεγιστική αλυσίδα κλειστών υποχώρων του  $H$ , τότε τα  $\{0\}, H \in \mathcal{M}$  γιατί αν δεν ανήκουν το  $\mathcal{M} \cup \{\{0\}, H\}$  είναι αλυσίδα με  $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M} \cup \{\{0\}, H\}$  το οποίο είναι άτοπο αφού η  $\mathcal{M}$  είναι μεγιστική αλυσίδα.

Επίσης, αν  $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ , τότε τα  $\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$  και  $\bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$  ανήκουν στην  $\mathcal{M}$  διότι αν υποθέσουμε ότι δεν ανήκουν το  $\mathcal{M} \cup \{\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M, \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M\}$  είναι αλυσίδα και  $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M} \cup \{\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M, \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M\}$ . Το  $\mathcal{M} \cup \{\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M, \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M\}$  είναι αλυσίδα διότι αν  $M \in \mathcal{M}$  έχουμε είτε  $M \geq M_1$  για κάθε  $M_1 \in \mathcal{M}_0$  οπότε  $M \geq \bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$  και  $M \geq \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$  είτε  $M \leq M_1$  για κάθε  $M_1 \in \mathcal{M}_0$  οπότε  $M \leq \bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$  και  $M \leq \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$  είτε θα υπάρχουν  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_0$  με  $M_1 \leq M \leq M_2$  οπότε  $\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M \leq M \leq \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$ . Άρα, το  $\mathcal{M} \cup \{\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M, \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M\}$  είναι αλυσίδα και  $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M} \cup \{\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M, \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M\}$  το οποίο όμως είναι άτοπο αφού η  $\mathcal{M}$  είναι μεγιστική αλυσίδα. Έτσι η  $\mathcal{M}$  είναι nest.

(2) Έστω  $\mathcal{M}$  μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων του  $H$ . Υπάρχει μεγιστική αλυσίδα κλειστών υποχώρων που περιέχει την  $\mathcal{M}$  η οποία θα είναι και nest. Άρα, υπάρχει το μικρότερο nest στον  $H$  που περιέχει την  $\mathcal{M}$  το οποίο ορίζεται ως η τομή όλων των nest που περιέχουν την  $\mathcal{M}$ . Συμβολίζουμε αυτό με  $\text{co}(\mathcal{M})$ .

**3.1.10 Πρόταση.** Αν  $\mathcal{N}$  είναι ένα συνεχές nest του  $H$ , τότε είναι μεγιστικό.

**Απόδειξη.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα συνεχές nest. Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{N}$  είναι μεγιστικό. Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος του  $H$  συγκρίσιμος με το  $\mathcal{N}$ , δηλαδή για κάθε  $N \in \mathcal{N}$  είτε  $N \leq M$  είτε  $M < N$ . Θέτουμε

$$N_0 = \bigvee \{N \in \mathcal{N} : N \leq M\}$$

και

$$N_1 = \bigwedge \{N \in \mathcal{N} : N \geq M\}.$$

Παρατηρούμε ότι  $N_0 \leq M \leq N_1$  και  $N_0, N_1 \in \mathcal{N}$ . Επίσης, αν  $P \in \mathcal{N}$  έχουμε  $P \leq M$  ή  $P \geq M$  και έτσι  $P \leq N_0$  ή  $P \geq N_1$ . Άρα, αν  $P \in \mathcal{N}$  με  $P < N_1$ , τότε  $P \leq N_0$  και έτσι  $(N_1)_- \leq N_0$ . Επειδή το  $\mathcal{N}$  είναι συνεχές nest έχουμε  $(N_1)_- = N_1$  και συνεπώς  $N_1 \leq N_0 \leq M \leq N_1$ . Άρα,  $M = N_1 \in \mathcal{N}$  και έτσι το  $\mathcal{N}$  δεν μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερο nest. Συνεπώς, το  $\mathcal{N}$  είναι μεγιστικό.  $\square$

**3.1.11 Πρόταση.** Αν  $\mathcal{N}$  είναι ένα nest του  $H$  που περιέχει άτομα, τότε είναι μεγιστικό αν και μόνον αν κάθε άτομο του  $\mathcal{N}$  έχει διάσταση 1.

**Απόδειξη.** Έστω ότι κάθε άτομο του  $\mathcal{N}$  έχει διάσταση 1. Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{N}$  είναι μεγιστικό. Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος του  $H$  συγκρίσιμος με το  $\mathcal{N}$ . Θέτουμε

$$N_0 = \bigvee \{N \in \mathcal{N} : N \leq M\}$$

και

$$N_1 = \bigwedge \{N \in \mathcal{N} : N \geq M\}.$$

Παρατηρούμε όπως την πρόταση 3.1.10 ότι  $N_0 \leq M \leq N_1$  με  $N_0, N_1 \in \mathcal{N}$  και  $(N_1)_- \leq N_0$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν  $N_0 = N_1$ , τότε  $N_0 = M$  και έτσι  $M \in \mathcal{N}$ . Αν τώρα  $N_0 < N_1$ , τότε  $N_0 \leq (N_1)_-$  και έτσι  $(N_1)_- = N_0$ . Άρα,  $(N_1)_- \neq N_1$  και επειδή κάθε άτομο του  $\mathcal{N}$  έχει διάσταση 1 έχουμε  $\dim(N_1 \ominus (N_1)_-) = 1$ , δηλαδή  $\dim(N_1 \ominus N_0) = 1$ . Από αυτό προκύπτει ότι  $M = N_0$  ή  $M = N_1$  και συνεπώς  $M \in \mathcal{N}$ . Έτσι και στις δύο περιπτώσεις  $M \in \mathcal{N}$ . Άρα, το  $\mathcal{N}$  δεν μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερο nest. Συνεπώς, το  $\mathcal{N}$  είναι μεγιστικό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το  $\mathcal{N}$  είναι μεγιστικό. Θα δείξουμε ότι κάθε άτομο είναι μονοδιάστατο. Έστω ότι υπάρχει κάποιο άτομο  $N \ominus N_-$  με  $\dim(N \ominus N_-) \geq 2$ . Τότε υπάρχει κλειστός υπόχωρος  $M$  ώστε  $N_- < M < N$ . Όμως, το  $M$  είναι συγκρίσιμο με το nest  $\mathcal{N}$  διότι αν  $M_1 \in \mathcal{N}$  είτε  $M_1 < N$ , δηλαδή  $M_1 \leq N_-$  οπότε  $M_1 \leq M$  είτε  $M_1 \geq N$  οπότε  $M \leq M_1$ . Άρα, το  $\mathcal{N}$  με τον υπόχωρο  $M$  είναι μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων. Έτσι περιέχεται σε μεγιστική αλυσίδα  $\mathcal{M}$  που είναι αυτομάτως και nest. Συνεπώς, υπάρχει nest  $\mathcal{M}$  με  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ . Αυτό όμως είναι άτοπο από το γεγονός ότι το  $\mathcal{N}$  είναι μεγιστικό.  $\square$

**3.1.12 Πρόταση.** Αν  $\mathcal{M}$  είναι μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων του  $H$ , τότε το  $\text{co}(\mathcal{M})$  αποτελείται από τα σύνολα  $\{0\}$ ,  $H$  και τους υπόχωρους της μορφής

$$\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$$

και

$$\bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M,$$

όπου  $\mathcal{M}_0$  τυχαία υποοικογένεια του  $\mathcal{M}$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $\mathcal{M}_1$  η οικογένεια που αποτελείται από τα  $\{0\}$ ,  $H$  και τους υπόχωρους της μορφής  $\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$  και  $\bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$ , όπου  $\mathcal{M}_0$  τυχαία υποοικογένεια του  $\mathcal{M}$ . Αφού το  $\text{co}(\mathcal{M})$  είναι nest έχουμε  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \text{co}(\mathcal{M})$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $\text{co}(\mathcal{M}) \leq \mathcal{M}_1$ . Έστω  $M \in \text{co}(\mathcal{M})$ . Θα δείξουμε ότι  $M \in \mathcal{M}_1$ . Ορίζουμε

$$L_1 = \bigvee \{L \in \mathcal{M} : L \leq M\}$$

και

$$L_2 = \bigwedge \{L \in \mathcal{M} : L \geq M\}$$

και παρατηρούμε ότι  $L_1 \leq M \leq L_2$ . Θέτουμε  $\mathcal{M}_2 = \{L \in \text{co}(\mathcal{M}) : L \leq L_1 \text{ ή } L_2 \leq L\}$ . Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{M}_2$  είναι nest. Έστω  $(L_i)_{i \in I}$  μια υποοικογένεια του  $\mathcal{M}_2$ . Αν  $L_i \leq L_1$ , για κάθε  $i \in I$  έχουμε  $\bigwedge_{i \in I} L_i \leq L_1$  και  $\bigvee_{i \in I} L_i \leq L_1$ . Άρα,  $\bigwedge_{i \in I} L_i, \bigvee_{i \in I} L_i \in \mathcal{M}_2$ . Αν  $L_i \geq L_2$ , για κάθε  $i \in I$  έχουμε  $\bigwedge_{i \in I} L_i \geq L_2$  και  $\bigvee_{i \in I} L_i \geq L_2$ . Άρα,  $\bigwedge_{i \in I} L_i, \bigvee_{i \in I} L_i \in \mathcal{M}_2$ . Έστω τώρα ότι υπάρχουν  $i, j \in I$  ώστε  $L_i \leq L_1$  και  $L_j \geq L_2$ . Τότε  $\bigwedge_{i \in I} L_i \leq L_i \leq L_1$  και  $\bigvee_{i \in I} L_i \geq L_j \geq L_2$ .

Άρα,  $\bigwedge_{i \in I} L_i, \bigvee_{i \in I} L_i \in \mathcal{M}_2$ . Επίσης, αν  $N \in \mathcal{M}$ , τότε  $N \in \text{co}(\mathcal{M})$  και έτσι  $M \leq N$  ή  $N \leq M$ . Άρα,  $L_2 \leq N$  ή  $N \leq L_1$ , το οποίο οδηγεί στο  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_2$  και συνεπώς  $\text{co}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}_2$ . Επειδή  $M \in \mathcal{M}_2$  έχουμε  $M \geq L_2$  ή  $M \leq L_1$ , και από την σχέση  $L_1 \leq M \leq L_2$  έχουμε  $M = L_2$  ή  $M = L_1$ , δηλαδή  $M \in \mathcal{M}_1$ . Άρα,  $\text{co}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$ .  $\square$

**3.1.13 Πρόταση.** Αν  $\mathcal{M}$  είναι μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων του  $H$ , τότε  $\text{Alg}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}(\text{co}(\mathcal{M}))$ , όπου  $\text{Alg}(\mathcal{M})$  είναι η άλγεβρα των φραγμένων τελεστών του  $H$  που αφήνουν αναλλοίωτο κάθε υπόχωρο του  $\mathcal{M}$ .

**Απόδειξη.** Αφού  $\mathcal{M} \subseteq \text{co}(\mathcal{M})$  έχουμε  $\mathcal{T}(\text{co}(\mathcal{M})) \subseteq \text{Alg}(\mathcal{M})$ . Έστω τώρα  $T \in \text{Alg}(\mathcal{M})$ . Θα δείξουμε ότι  $T \in \mathcal{T}(\text{co}(\mathcal{M}))$ . Αν  $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$  αρκεί να δείξουμε ότι

$$T(\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M) \subseteq \bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$$

και

$$T(\bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M) \subseteq \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M.$$

Αν  $x \in \bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$ , τότε  $x \in M$ , για κάθε  $M \in \mathcal{M}_0$ . Άρα,  $Tx \in M$ , για κάθε  $M \in \mathcal{M}_0$  και έτσι  $Tx \in \bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$ . Άρα,  $T(\bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M) \subseteq \bigwedge_{M \in \mathcal{M}_0} M$ . Αν  $x \in \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$ , τότε  $x = \lim x_n$  και επειδή η  $\mathcal{M}_0$  είναι αλυσίδα έχουμε  $x_n \in M$  για κάποιο  $M \in \mathcal{M}_0$ . Άρα,  $Tx_n \in M$ . Συνεπώς,  $Tx_n \in \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$  και αφού  $Tx = \lim Tx_n$  έχουμε  $Tx \in \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$ . Άρα,  $T(\bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M) \subseteq \bigvee_{M \in \mathcal{M}_0} M$ .  $\square$

## 3.2 Ανακλαστικότητα και Συμπάγεια των Nests

**Σημείωση.** Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε με  $H$  ένα χώρο Hilbert.

**3.2.1 Ορισμός.** (1) Έστω  $A$  ένα σύνολο φραγμένων τελεστών του  $H$ . Συμβολίζουμε με  $\text{Lat}(A)$  το σύνολο των κλειστών υποχώρων του  $H$  που είναι αναλλοίωτοι από κάθε τελεστή του συνόλου  $A$ .

(2) Έστω  $L$  ένα σύνολο κλειστών υποχώρων του  $H$ . Συμβολίζουμε με  $\text{Alg}(L)$  το σύνολο των φραγμένων τελεστών του  $H$  που αφήνουν αναλλοίωτο κάθε υπόχωρο του συνόλου  $L$ .

**3.2.2 Ορισμός.** (1) Ένας σύνδεσμος  $L$  κλειστών υποχώρων του  $H$  καλείται *ανακλαστικός* αν  $L = \text{LatAlg}(L)$ .

(2) Μια άλγεβρα  $A$  φραγμένων τελεστών του  $H$  καλείται *ανακλαστική* αν  $A = \text{AlgLat}(A)$ .

**3.2.3 Παρατήρηση.** (1) Αν  $L$  είναι ένα σύνολο κλειστών υποχώρων του  $H$ , τότε το σύνολο  $\text{Alg}(L)$  είναι άλγεβρα με μονάδα τον ταυτοτικό τελεστή και



είναι  $WOT$  κλειστό. Επίσης, ισχύουν τα παρακάτω :

$$L \subset \text{LatAlg}(L)$$

και

$$A \subset \text{AlgLat}(A).$$

(2) Κάθε άλγεβρα nest είναι ανακλαστική.

**3.2.4 Πρόταση.** Αν  $\mathcal{N}$  είναι ένα nest του  $H$ , τότε είναι ανακλαστικό.

**Απόδειξη.** Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{N}$  είναι ανακλαστικό, δηλαδή  $\mathcal{N} = \text{LatAlg}(\mathcal{N})$ .  
Αρκεί να βρούμε ένα σύνολο τελεστών  $R \subseteq \mathbb{B}(H)$  ώστε

$$\mathcal{N} = \text{Lat}(R).$$

Πράγματι, αν  $R \subseteq \mathbb{B}(H)$  ώστε  $\mathcal{N} = \text{Lat}(R)$  έχουμε  $R \subseteq \text{Alg}(\mathcal{N})$  και έτσι

$$\mathcal{N} = \text{Lat}(R) \supseteq \text{LatAlg}(\mathcal{N}) \supseteq \mathcal{N}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο

$$R = \{P(N)TP(N)^\perp : N \in \mathcal{N}, T \in \mathbb{B}(H)\}$$

ικανοποιεί την σχέση  $\mathcal{N} = \text{Lat}(R)$ . Αρχικά θα δείξουμε ότι  $\mathcal{N} \subseteq \text{Lat}(R)$ . Έστω  $M \in \mathcal{N}$  και  $P(N)TP(N)^\perp \in R$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι  $P(N)TP(N)^\perp(M) \subseteq M$ . Αν  $N \leq M$  έχουμε  $P(N)TP(N)^\perp(M) \subseteq N \subseteq M$ , ενώ αν  $M < N$ , δηλαδή  $M \leq N_-$  προκύπτει ότι  $P(N)^\perp(M) = \{0\}$  και έτσι  $P(N)TP(N)^\perp(M) = \{0\} \subseteq M$ .

Τώρα θα δείξουμε ότι  $\text{Lat}(R) \subseteq \mathcal{N}$ . Έστω  $M \in \text{Lat}(R)$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι  $M \in \mathcal{N}$ . Ισχυριζόμαστε πρώτα ότι το  $M$  συγκρίνεται με το  $\mathcal{N}$ , δηλαδή για κάθε  $N \in \mathcal{N}$ , είτε  $N \leq M$  είτε  $M < N$ . Πράγματι, αν  $M \not\leq N_-$ , υπάρχει  $e \in M$  με  $P(N)^\perp e = e_1 \neq 0$ , έστω  $\|e_1\| = 1$ . Αν  $f \in N$ , γράφουμε  $T = f \otimes e^*$ . Παρατηρούμε ότι  $P(N)TP(N)^\perp \in R$  και

$$P(N)TP(N)^\perp(e) = P(N)(f \otimes e^*)(P(N)^\perp e) = \langle P(N)^\perp e, e \rangle P(N)f =$$

$$\langle P(N)^\perp e, P(N)^\perp e \rangle P(N)f = \|P(N)^\perp e\|^2 f = f.$$

Επειδή όμως  $(P(N)TP(N)^\perp)(M) \subseteq M$  έχουμε  $f \in M$  και συνεπώς  $N \leq M$ . Ισχυριζόμαστε τώρα ότι  $M \in \mathcal{N}$ . Αν θέσουμε

$$N^0 = \wedge \{N \in \mathcal{N} : N_- \geq M\}$$

έχουμε  $M \leq N^0$ . Αν  $K \in \mathcal{N}$  με  $K \not\leq N^0$ , τότε  $K_- \not\leq M$  διότι αν  $K_- \geq M$  θα έχουμε  $N^0 \leq K$  το οποίο είναι άτοπο αφού  $K \not\leq N^0$ . Έτσι  $K_- \leq M$ .

Συνεπώς,  $N_-^0 \leq M \leq N^0$ . Όμως επειδή το  $M$  συγκρίνεται με το  $\mathcal{N}$  έχουμε είτε  $M = N^0$  είτε  $M = N_-^0$ , δηλαδή  $M \in \mathcal{N}$ .  $\square$

**3.2.5 Παρατήρηση.** Χρησιμοποιήσαμε μόνο τελεστές πρώτης τάξης. Δηλαδή δείξαμε το ισχυρότερο

$$\mathcal{N} = \text{Lat}\{f \otimes e^* : f \otimes e^* \in \text{Alg}(\mathcal{N})\}.$$

Αυτό διότι ισχύει το παρακάτω λήμμα :

**3.2.6 Λήμμα.** Αν  $e, f$  στοιχεία του  $H$  και  $f \otimes e^*$  τελεστής πρώτης τάξης, τότε  $f \otimes e^* \in \text{Alg}(\mathcal{N})$  αν και μόνον αν υπάρχει  $N \in \mathcal{N}$  ώστε  $f \in N$  και  $e \perp N_-$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $f \otimes e^* \in \text{Alg}(\mathcal{N})$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει  $N \in \mathcal{N}$  ώστε  $f \in N$  και  $e \perp N_-$ . Θέτουμε

$$N = \wedge\{L \in \mathcal{N} : f \in L\}.$$

Παρατηρούμε ότι  $f \in N$  και λόγω πληρότητας  $N \in \mathcal{N}$ . Αν  $M \in \mathcal{N}$  με  $M < N$ , τότε  $f \notin M$ , αλλά για κάθε  $x \in M$ , πρέπει  $(f \otimes e^*)(x) \in M$ . Αλλά  $(f \otimes e^*)(x) = \langle x, e \rangle f \in M$ , οπότε  $\langle x, e \rangle = 0$ , δηλαδή  $e \perp M$ . Αφού το  $M$  ήταν τυχαίο έχουμε  $e \perp M$ , για κάθε  $M \in \mathcal{N}$  με  $M < N$ . Άρα,  $e \perp N_-$ .

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει  $N \in \mathcal{N}$  ώστε  $f \in N$  και  $e \perp N_-$ . Θα δείξουμε ότι  $f \otimes e^* \in \text{Alg}(\mathcal{N})$ . Όμως από την πρόταση 3.2.4, έχουμε

$$f \otimes e^* = N(f \otimes e^*)N_-^\perp \in R \subseteq \text{Alg}(\mathcal{N}),$$

αφού  $\mathcal{N} \subseteq \text{Lat}(R)$ .  $\square$

**3.2.7 Παρατήρηση.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$ .

(1) Συμβολίζουμε με  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  το σύνολο των προβολών στα στοιχεία του  $\mathcal{N}$ , δηλαδή

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}) = \{P(N) : N \in \mathcal{N}\}.$$

Το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  είναι πλήρης σύνδεσμος.

(2) Αν  $N \in \mathcal{N}$  και  $T \in \mathbb{B}(H)$ , τότε  $T(N) \subseteq N$  αν και μόνον αν  $T^*(N^\perp) \subseteq N^\perp$ .

(3) Το  $\mathcal{N}^\perp = \{N^\perp : N \in \mathcal{N}\}$  είναι nest του  $H$ .

**3.2.8 Ορισμός.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$ . Η άλγεβρα von Neumann

$$\mathcal{D}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{N}^\perp)$$

καλείται *διαγώνιος άλγεβρα* της  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ .

**3.2.9 Πρόταση.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$ . Τότε

$$\mathcal{D}(\mathcal{N}) = \mathcal{P}(\mathcal{N})',$$

όπου  $\mathcal{P}(\mathcal{N})'$  είναι ο μεταθέτης του  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $T \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$ . Θα δείξουμε ότι  $T \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$ . Αν  $N \in \mathcal{N}$  έχουμε

$$\begin{aligned} TP(N) &= P(N)TP(N) = (P(N)T^*P(N))^* = \\ &= (T^*P(N))^* = P(N)T. \end{aligned}$$

Άρα,  $TP(N) = P(N)T$ , για κάθε  $N \in \mathcal{N}$ , δηλαδή  $T \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$ .

Αντίστροφα, έστω  $T \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$ . Θα δείξουμε ότι  $T \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$ . Αν  $N \in \mathcal{N}$  έχουμε

$$TP(N) = P(N)TP(N)$$

και

$$TP(N^\perp) = P(N^\perp)TP(N^\perp).$$

Άρα,  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  και  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N}^\perp)$ , δηλαδή  $T \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$ .  $\square$

**3.2.10 Ορισμός.** Αν  $\mathcal{N}$  είναι ένα nest του  $H$ , ορίζουμε  $\text{core}\mathcal{T}(\mathcal{N})$  την άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ , δηλαδή

$$\text{core}\mathcal{T}(\mathcal{N}) = \mathcal{P}(\mathcal{N})''.$$

**3.2.11 Παρατήρηση.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$ .

(1) Το ζεύγος  $(\mathcal{N}, <)$ , όπου  $<$  ο γνήσιος εγκλεισμός είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο. Άρα, το  $\mathcal{N}$  γίνεται τοπολογικός χώρος με την τοπολογία της διάταξης. Βάση αυτής είναι η  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$  με :

$$B_1 = \{(N, M) : N < M, N, M \in \mathcal{N}\},$$

$$B_2 = \{(N, H] : N \in \mathcal{N}\}$$

και

$$B_3 = \{[\{0\}, N) : N \in \mathcal{N}\},$$

όπου  $(N, M) = \{Z \in \mathcal{N} : N < Z < M\}$ ,  $(N, H] = \{Z \in \mathcal{N} : Z > N\}$  και  $[\{0\}, N) = \{Z \in \mathcal{N} : Z < N\}$ .

(2) Το  $\mathcal{P}(\mathcal{N}) \subseteq \mathbb{B}(H)$  γίνεται τοπολογικός χώρος με τον περιορισμό της  $SOT$  τοπολογίας.

(3) Η απεικόνιση  $N \mapsto P(N)$  είναι 1-1 και επί. Επίσης, αυτή και η αντίστροφη της διατηρούν την διάταξη.

**3.2.12 Πρόταση.** Στο σύνολο  $\mathcal{P}(H)$  των προβολών του  $\mathbb{B}(H)$  οι τοπολογίες  $SOT$  και  $WOT$  ταυτίζονται.

**Απόδειξη.** Η  $WOT$  είναι ασθενέστερη τοπολογία από την  $SOT$ . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν το δίκτυο  $(P_i)_{i \in I}$  συγχλίνει στο  $P$ , ως προς την  $WOT$  τοπολογία θα συγχλίνει στο  $P$  και ως προς την  $SOT$  τοπολογία. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \|(P - P_i)x\|^2 &= \langle (P - P_i)x, Px \rangle - \langle Px, P_i x \rangle + \langle P_i x, P_i x \rangle = \\ \langle (P - P_i)x, Px \rangle - \langle Px, P_i x \rangle + \langle P_i x, x \rangle &\longrightarrow -\langle Px, Px \rangle + \langle Px, x \rangle = \\ -\langle Px, x \rangle + \langle Px, x \rangle &= 0, \end{aligned}$$

για κάθε  $x \in H$  αφού  $\langle (P - P_i)x, Px \rangle \longrightarrow 0$  από την  $WOT$  σύγκλιση. Άρα, οι τοπολογίες  $SOT$  και  $WOT$  στο σύνολο  $\mathcal{P}(H)$  ταυτίζονται.  $\square$

**3.2.13 Πρόταση.** Αν  $\{P_a\}_{a \in A}$  αύξον δίκτυο προβολών, τότε  $P_a \longrightarrow P$ , όπου  $P = \vee_{a \in A} P_a$ , ως προς την  $SOT$  τοπολογία. Όμοια για φθίνον δίκτυο.

**Απόδειξη.** Έστω  $B_a(\xi, \eta) = \langle P_a \xi, \eta \rangle$ . Το δίκτυο  $B_a(\xi, \xi)$  είναι αύξον δίκτυο θετικών αριθμών και φράσσεται από  $\langle P \xi, \xi \rangle$ . Συνεπώς συγχλίνει. Αλλά

$$B_a(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \frac{i^n}{4} B_a(\xi + i^n \eta, \xi + i^n \eta)$$

και επομένως συγχλίνει, έστω  $\lim_a B_a(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)$ . Είναι άμεσο ότι η  $B(\xi, \eta)$  είναι sesquilinear μορφή και φραγμένη άρα από την πρόταση 1.3.19 υπάρχει μοναδικός τελεστής  $Q$  ώστε  $B(\xi, \eta) = \langle Q \xi, \eta \rangle$ , δηλαδή  $\lim_a \langle P_a \xi, \eta \rangle = \langle Q \xi, \eta \rangle$ . Επειδή  $0 \leq \langle P_a \xi, \xi \rangle \leq \langle P \xi, \xi \rangle$  έπεται  $0 \leq \langle Q \xi, \xi \rangle \leq \langle P \xi, \xi \rangle$ . Άρα,  $Q \leq P$ . Τώρα για κάθε  $a \in A$  έχουμε

$$\langle Q \xi, P_a \eta \rangle = \lim_b \langle P_b \xi, P_a \eta \rangle = \lim_{b \geq a} \langle P_a P_b \xi, \eta \rangle = \langle P_a \xi, \eta \rangle,$$

δηλαδή  $P_a Q = Q$  και

$$\langle Q^2 \xi, \eta \rangle = \lim_a \langle P_a Q \xi, \eta \rangle = \lim_a \langle P_a \xi, \eta \rangle = \langle Q \xi, \eta \rangle.$$

Επομένως,  $Q^2 = Q$  και επειδή  $Q = Q^*$  η  $Q$  είναι προβολή. Τώρα επειδή  $Q \geq P_a$ , για κάθε  $a \in A$  έχουμε  $Q \geq P$  και αφού  $Q \leq P$  έχουμε  $Q = P$ . Επίσης,  $P_a \longrightarrow P$  ως προς την  $WOT$  τοπολογία. Άρα, από την πρόταση 3.2.12  $P_a \longrightarrow P$  και ως προς την  $SOT$  τοπολογία.  $\square$

**3.2.14 Πρόταση.** Έστω  $\mathcal{N}$  μια αλυσίδα κλειστών υποχώρων του  $H$  με  $\{0\}, H \in \mathcal{N}$ . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

- (i) Το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  είναι  $WOT$ -κλειστό.
- (ii) Ο χώρος  $(\mathcal{P}(\mathcal{N}), SOT)$  είναι συμπαγής.
- (iii) Ο χώρος  $(\mathcal{N}, \tau)$ , όπου  $\tau$  είναι η τοπολογία της διάταξης είναι συμπαγής.
- (iv) Το  $\mathcal{N}$  είναι πλήρης σύνδεσμος.

### Απόδειξη.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω ότι το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  είναι  $WOT$ -κλειστό στο  $\mathbb{B}(H)$ . Θα δείξουμε ότι ο χώρος  $(\mathcal{P}(\mathcal{N}), SOT)$  είναι συμπαγής. Το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  περιέχεται στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του  $\mathbb{B}(H)$ , η οποία είναι  $WOT$ -συμπαγής. Επειδή το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  είναι  $WOT$ -κλειστό θα είναι και  $WOT$ -συμπαγής. Έστω  $\{P_i\}$  δίκτυο στο  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ . Από την  $WOT$ -συμπάγεια του  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  υπάρχει υποδίκτυο  $\{P_{i,j}\}$  του  $\{P_i\}$  που συγκλίνει  $WOT$  μέσα στο  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ , δηλαδή σε προβολή  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ . Από την πρόταση 3.2.12 έχουμε ότι το  $\{P_{i,j}\}$  συγκλίνει  $SOT$  στο  $P$ . Άρα, ο χώρος  $(\mathcal{P}(\mathcal{N}), SOT)$  είναι συμπαγής.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Έστω ότι ο χώρος  $(\mathcal{P}(\mathcal{N}), SOT)$  είναι συμπαγής. Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{N}$  είναι συμπαγές. Επειδή το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  είναι  $SOT$ -συμπαγές αν δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$(\mathcal{P}(\mathcal{N}), SOT) \longrightarrow (\mathcal{N}, \tau) : P(N) \longmapsto N$$

είναι συνεχής θα έχουμε ότι ο χώρος  $(\mathcal{N}, \tau)$  είναι συμπαγής. Γί αυτό αρκεί να δείξουμε ότι αντιστρέφει κλειστά σύνολα του  $\mathcal{N}$  σε κλειστά σύνολα του  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ . Έστω  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$   $\tau$ -κλειστό. Θα δείξουμε ότι το  $\{P(N) : N \in \mathcal{F}\}$  είναι  $SOT$ -κλειστό. Αρκεί να το δείξω για  $\mathcal{F} = [M, N]$  γιατί κάθε κλειστό παράγεται από τέτοια. Έστω δίκτυο  $\{L_a\}_{a \in A}$  στο  $[M, N]$  ώστε  $P(L_a) \longrightarrow P(L)$ , ως προς την  $SOT$  τοπολογία. Τότε για κάθε  $\xi$  έχουμε

$$\langle P(M)\xi, \xi \rangle \leq \langle P(L_a)\xi, \xi \rangle \leq \langle P(N)\xi, \xi \rangle$$

άρα και

$$\langle P(M)\xi, \xi \rangle \leq \langle P(L)\xi, \xi \rangle \leq \langle P(N)\xi, \xi \rangle.$$

Επομένως  $P(L) \in [P(M), P(N)]$  και έτσι το  $[P(M), P(N)]$  είναι  $SOT$ -κλειστό.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Έστω ότι το  $\mathcal{N}$  είναι συμπαγές. Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{N}$  είναι πλήρης σύνδεσμος. Έστω  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{N}$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν τα  $\bigwedge \mathcal{D}$  και  $\bigvee \mathcal{D}$  και είναι στοιχεία του  $\mathcal{N}$ . Έστω  $\mathcal{U}$  το σύνολο των άνω φραγμάτων του  $\mathcal{D}$  στο  $\mathcal{N}$ . Είναι μη κενό αφού ο χώρος Hilbert  $H$  είναι άνω φράγμα του  $\mathcal{D}$ . Το σύνολο των κλειστών διαστημάτων

$$\{[S, U] : S \in \mathcal{D}, U \in \mathcal{U}\}$$

έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Πράγματι,

$$\bigcap_{i=1}^n [S_i, U_i] = [\bigvee_{i=1}^n S_i, \bigwedge_{i=1}^n U_i] \neq 0$$

αφού  $\bigvee_{i=1}^n S_i \in \mathcal{D}$  και  $\bigwedge_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}$ . Συνεπώς, από την συμπάγεια υπάρχει  $L \in \mathcal{N}$  ώστε  $L \in [S, U]$ , για κάθε  $S \in \mathcal{D}$  και  $U \in \mathcal{U}$ . Δηλαδή για κάθε  $S \in \mathcal{D}$  έχουμε

$S \leq L$ , άρα το  $L$  φράσσει το  $\mathcal{D}$  και για κάθε  $U \in \mathcal{U}$  έχουμε  $L \leq U$ , δηλαδή το  $L$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. Όμοια υπάρχει το  $\wedge \mathcal{D}$  και  $\wedge \mathcal{D} \in \mathcal{N}$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Έστω ότι το  $\mathcal{N}$  είναι πλήρης σύνδεσμος. Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  είναι  $WOT$ -κλειστό στο  $\mathbb{B}(H)$ . Έστω δίκτυο  $\{P_i\}_{i \in I}$  στο  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  που συγκλίνει  $WOT$  στο  $Q$ . Θα δείξουμε ότι  $Q = \wedge_i (\vee_{j \geq i} P_j)$  και θα έχουμε τελειώσει, διότι το δεύτερο μέλος ανήκει στο  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  λόγω πληρότητας. Έστω  $\varepsilon > 0$  και  $\xi \in H$ . Τότε υπάρχει  $i_0 \in I$  ώστε

$$i \geq i_0 \Rightarrow |\langle P_i \xi, \xi \rangle - \langle Q \xi, \xi \rangle| < \varepsilon.$$

Για  $i \in I$  θέτουμε

$$I_i = \{j \in I : j \geq i\}$$

και  $\mathcal{J}_i$  το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του  $I_i$ . Επίσης, θέτουμε

$$Q_i = \vee_{j \in I_i} P_j$$

και λόγω πληρότητας  $Q_i \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ . Για  $J \in \mathcal{J}_i$  γράφουμε  $R_J = \vee_{j \in J} P_j$ . Παρατηρούμε ότι το δίκτυο  $\{R_J : J \in \mathcal{J}_i\}$  είναι αύξον και έτσι από την πρόταση 3.2.13 συγκλίνει  $SOT$  στο supremum του που είναι το  $Q_i$ . Δηλαδή υπάρχει  $J_i \in \mathcal{J}_i$  ώστε

$$J \in \mathcal{J}_i, J \supseteq J_i \Rightarrow |\langle R_J \xi, \xi \rangle - \langle Q_i \xi, \xi \rangle| < \varepsilon.$$

Αλλά  $R_{J_i} = \vee_{j \in J_i} P_j$  και έτσι υπάρχει  $j(i) \in J_i$  ώστε  $R_{J_i} = P_{j(i)}$ . Άρα, υπάρχει  $j(i) \in I_i$  ώστε  $|\langle P_{j(i)} \xi, \xi \rangle - \langle Q_i \xi, \xi \rangle| < \varepsilon$ . Έστω τώρα  $i \geq i_0$ . Υπάρχει  $j(i) \geq i$  ώστε

$$|\langle P_{j(i)} \xi, \xi \rangle - \langle Q_i \xi, \xi \rangle| < \varepsilon.$$

Επειδή  $j(i) \geq i \geq i_0$  έχουμε

$$|\langle P_{j(i)} \xi, \xi \rangle - \langle Q \xi, \xi \rangle| < \varepsilon$$

και συνεπώς,

$$|\langle Q_i \xi, \xi \rangle - \langle Q \xi, \xi \rangle| < 2\varepsilon$$

και αφού ισχύει για κάθε  $i \geq i_0$  έχουμε  $\langle Q_i \xi, \xi \rangle \longrightarrow \langle Q \xi, \xi \rangle$ . Από την άλλη μεριά όμως, το  $\{Q_i\}_{i \in I}$  είναι φθίνον δίκτυο, συνεπώς συγκλίνει  $SOT$  στο  $\wedge_{i \in I} Q_i = Q_0$ . Λόγω πληρότητας  $Q_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$  και αφού για κάθε  $\xi \in H$  έχουμε  $\langle Q_0 \xi, \xi \rangle = \langle Q \xi, \xi \rangle$  ισχύει  $Q = Q_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ .  $\square$

**3.2.15 Παρατήρηση.** Αν  $\mathcal{N}$  είναι ένα nest του  $H$ , τότε τα i, ii, iii της πρότασης 3.2.14 ισχύουν αφού το nest είναι εζ' ορισμού και πλήρης σύνδεσμος.

**3.2.16 Ορισμός.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$  και  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$  με  $N_1 < N_2$ . Ο υπόχωρος  $E = N_2 \ominus N_1$  καλείται *διάστημα* του  $\mathcal{N}$ .

**3.2.17 Πρόταση.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest του  $H$  και  $E$  διάστημα του  $\mathcal{N}$ . Η απεικόνιση  $\Phi_E: \mathcal{T}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{B}(E)$  που ορίζεται ως εξής

$$\Phi_E(T) = ETE$$

είναι ομομορφισμός αλγεβρών. Επίσης, η απεικόνιση  $\Phi_E$  είναι  $\|\cdot\|$ -συνεχής.

**Απόδειξη.** Έστω  $E = N_2 \ominus N_1$ , όπου  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$  με  $N_1 < N_2$ . Αν  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_E(T_1 T_2) &= N_2(N_1^\perp T_1)(T_2 N_2)N_1^\perp = N_2(N_1^\perp T_1 N_1^\perp)(N_2 T_2 N_2)N_1^\perp \\ &= (ET_1 E)(ET_2 E) = \Phi_E(T_1)\Phi_E(T_2) \end{aligned}$$

και

$$\Phi_E(\lambda T_1 + T_2) = E(\lambda T_1 + T_2)E = \lambda ET_1 E + ET_2 E = \lambda \Phi_E(T_1) + \Phi_E(T_2).$$

Άρα, η  $\Phi_E$  είναι ομομορφισμός αλγεβρών. Επίσης, αν  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  έχουμε  $\|\Phi_E(T)\| = \|ETE\| \leq \|T\|$ , δηλαδή  $\|\Phi_E\| \leq 1$ . Άρα, η  $\Phi_E$  είναι  $\|\cdot\|$ -συνεχής.  $\square$

**3.2.18 Πρόταση.** Έστω  $\mathcal{A}$  μια υπάλγεβρα του  $\mathbb{B}(H)$  και  $N$  κλειστός υπόχωρος του  $H$ . Αν  $P$  η προβολή στον υπόχωρο  $N$  ώστε η απεικόνιση

$$A \longrightarrow PAP \mid_N$$

διατηρεί το γινόμενο στην  $\mathcal{A}$ , τότε υπάρχουν  $\mathcal{A}$ -αναλλοίωτοι υπόχωροι  $K \subseteq L$  ώστε

$$N = L \ominus K.$$

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε ότι η υπάλγεβρα  $\mathcal{A}$  περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή  $I$ . Σε διαφορετική περίπτωση θεωρούμε την μοναδοποίηση της  $\mathcal{A}$ . Ονομάζουμε  $L$  τον μικρότερο  $\mathcal{A}$ -αναλλοίωτο κλειστό υπόχωρο του  $H$  που περιέχει το  $N$ . Δηλαδή

$$L = \overline{\text{span}}\{Ax : A \in \mathcal{A}, x \in N\}.$$

Θέτουμε επίσης

$$K = L \ominus N$$

οπότε οι  $K$  και  $N$  είναι κάθετοι υπόχωροι και  $K \oplus N = L$ , άρα  $N = L \ominus K$ . Μένει ναδειχθεί ότι ο  $K$  είναι  $\mathcal{A}$ -αναλλοίωτος. Έστω  $A, B \in \mathcal{A}$ . Από την υπόθεση έχουμε

$$PABP = (PAP)(PBP)$$

$$0 = PABP - PAPBP = PA(I - P)BP$$

$$PA(I - P)Bx = 0,$$

για κάθε  $x \in N$ . Αλλά η κλειστή γραμμική θήκη του  $\{Bx : B \in \mathcal{A}, x \in N\}$  είναι ο  $L$  και άρα (εφόσον η  $I - P$  είναι η προβολή στον  $N^\perp \subseteq L$ ) η κλειστή γραμμική θήκη του  $\{(I - P)Bx : B \in \mathcal{A}, x \in N\}$  είναι ο  $N^\perp \cap L$ , δηλαδή ο  $K$ . Επομένως,  $PAy = 0$ , για κάθε  $y \in K$ . Έστω  $y \in K$ . Δείχνουμε ότι  $Ay \in K$ . Παρατηρούμε ότι  $Ay \in L$ , γιατί  $y \in K \subseteq L$  και  $L^\perp AL = 0$ . Γράφουμε

$$Ay = PAy + (I - P)Ay$$

οπότε  $PAy \in N \cap L$  και  $(I - P)Ay \in N^\perp \cap L$  και αφού  $PAy = 0$  έχουμε  $Ay = (I - P)Ay \in N^\perp \cap L = K$ . Επειδή το  $A$  ήταν τυχαίο έχουμε ότι ο υπόχωρος  $K$  είναι  $\mathcal{A}$ -αναλλοίωτος.  $\square$

### 3.3 Παραδείγματα Nests και Αλγεβρών Nest

**3.3.1 Παράδειγμα.** [6] Έστω  $H$  ένας χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης, έστω  $n$  και ορθοκανονική βάση  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Το σύνολο

$$\mathcal{N} = \{\{0\}, \text{span}\{e_1\}, \text{span}\{e_1, e_2\}, \dots, \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}, H\}$$

είναι nest. Η άλγεβρα nest του  $\mathcal{N}$  είναι η άλγεβρα των τελεστών του  $\mathbb{B}(H)$  των οποίων οι πίνακες ως προς την ορθοκανονική βάση είναι άνω τριγωνικοί. Η διαγώνιος  $\mathcal{D}(\mathcal{N})$  της  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι το σύνολο των τελεστών των οποίων οι πίνακες ως προς την ορθοκανονική βάση είναι διαγώνιοι.

**3.3.2 Παράδειγμα.** [6] Έστω  $H$  ένας χώρος Hilbert διάστασης 4 με ορθοκανονική βάση  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Το σύνολο

$$\mathcal{N} = \{\{0\}, \text{span}\{e_1, e_2\}, \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}, H\}$$

είναι nest. Η άλγεβρα nest του  $\mathcal{N}$  είναι η άλγεβρα των τελεστών του  $\mathbb{B}(H)$  των οποίων οι πίνακες ως προς την ορθοκανονική βάση είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$

όπου  $*$  τυχαίος μιγαδικός αριθμός. Επίσης, η διαγώνιος  $\mathcal{D}(\mathcal{N})$  της  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι το σύνολο των τελεστών των οποίων οι πίνακες ως προς την ορθοκανονική



βάση είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

**3.3.3 Παράδειγμα.** [6] Έστω  $H$  ένας χώρος Hilbert διάστασης 4 με ορθοκανονική βάση  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Το σύνολο

$$\mathcal{N} = \{\{0\}, \text{span}\{e_1, e_2\}, H\}$$

είναι nest. Η άλγεβρα nest του  $\mathcal{N}$  είναι η άλγεβρα των τελεστών του  $\mathbb{B}(H)$  των οποίων οι πίνακες ως προς την ορθοκανονική βάση είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Επίσης, η διαγώνιος  $\mathcal{D}(\mathcal{N})$  της  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι το σύνολο των τελεστών των οποίων οι πίνακες ως προς την ορθοκανονική βάση είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

**3.3.4 Παράδειγμα.** [7] Έστω  $H$  ένας χώρος Hilbert και  $M_n$ ,  $n \geq 1$ , μια αύξουσα ακολουθία υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης ώστε η ένωση τους να είναι πυκνή στον  $H$ . Τότε το σύνολο

$$\mathcal{N} = \{M_n : n \geq 1\} \cup \{\{0\}, H\}$$

είναι nest. Το nest  $\mathcal{N}$  είναι μεγιστικό ακριβώς όταν  $\dim M_n = n$ , για κάθε  $n \geq 1$ .

**3.3.5 Παράδειγμα.** [7] Έστω  $\mathbb{Q}$  το σύνολο των ρητών αριθμών και  $H = \ell^2(\mathbb{Q})$ . Για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  θέτουμε

$$\mathbb{Q}_t^+ = \{f \in \ell^2(\mathbb{Q}) : f(x) = 0, x > t\}$$

και

$$\mathbb{Q}_t^- = \{f \in \ell^2(\mathbb{Q}) : f(x) = 0, x \geq t\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν το  $t$  είναι άρρητος έχουμε

$$\mathbb{Q}_t^- = \mathbb{Q}_t^+,$$

ενώ αν το  $t$  είναι ρητός έχουμε

$$\mathbb{Q}_t^+ \ominus \mathbb{Q}_t^- = \text{span}\{\delta_t\},$$

όπου  $\delta_t$  η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $t$ . Αν θέσουμε  $\mathbb{Q}_{-\infty} = \{0\}$  και  $\mathbb{Q}_{+\infty} = H$ , τότε το σύνολο

$$\mathcal{N} = \{\mathbb{Q}_t^-, \mathbb{Q}_t^+ : -\infty \leq t \leq +\infty\}$$

είναι nest και είναι γνωστό ως Cantor nest.

**3.3.6 Παράδειγμα.** [7] Έστω  $H = L^2(0, 1)$  με το μέτρο Lebesgue. Για κάθε  $t \in [0, 1]$  έστω  $N_t$  το σύνολο των συναρτήσεων  $f$  στο  $L^2(0, 1)$  ώστε  $f = 0$  σχεδόν παντού στο  $[t, 1]$ . Τότε το σύνολο

$$\mathcal{N} = \{N_t : 0 \leq t \leq 1\}$$

είναι nest και είναι γνωστό ως Volterra nest.

## 3.4 Χαρακτηρισμός του ριζικού Jacobson μιας Άλγεβρας Nest

**Σημείωση.** Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{N}$  ένα nest σε ένα χώρο Hilbert  $H$ .

**3.4.1 Ορισμός.** Ορίζουμε με  $C^*(\mathcal{N})$  την  $C^*$ -υπάλγεβρα του  $\mathbb{B}(H)$  που παράγεται από το  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ . Επειδή

$$P(N)^* = P(N), P(N)P(M) = P(N \cap M),$$

για κάθε  $N, M \in \mathcal{N}$  και  $P(N)^n = P(N)$  για  $n \in \mathbb{N}$ , έχουμε

$$C^*(\mathcal{N}) = \overline{\text{span}}\{P(N) : N \in \mathcal{N}\}.$$

Επίσης,  $P(H) = I$  και προκύπτει ότι η  $C^*(\mathcal{N})$  είναι μεταθετική. Άρα, η  $C^*(\mathcal{N})$  είναι μεταθετική  $C^*$ -άλγεβρα με μονάδα τον ταυτοτικό τελεστή  $I$ . Έτσι από το θεώρημα 1.2.9 (Gelfand-Naimark) η απεικόνιση Gelfand από την  $C^*(\mathcal{N})$  στην  $C(\mathcal{M}_{\mathcal{N}})$ , όπου  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  είναι ο χώρος των μεγιστικών ιδεωδών είναι ισομετρικός \*-ισομορφισμός.

**3.4.2 Ορισμός.** Συμβολίζουμε με  $\mathbf{2}$  τον σύνδεσμο  $\{0, 1\}$  και με  $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  το σύνολο των ομομορφισμών συνδέσμων από το  $\mathcal{N}$  επί του  $\mathbf{2}$ .

**3.4.3 Παρατήρηση.** Αν  $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ , τότε ο  $\varphi$  είναι μη μηδενικός και διατηρεί την διάταξη. Επίσης, για  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  ορίζουμε

$$\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \varphi(N) \leq \psi(N),$$

για κάθε  $N \in \mathcal{N}$ . Η σχέση αυτή στο  $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  είναι ολικής διάταξης. Πράγματι, αν  $\varphi \not\leq \psi$  υπάρχει  $N \in \mathcal{N}$  ώστε  $\varphi(N) \not\leq \psi(N)$ , δηλαδή  $\varphi(N) > \psi(N)$ . Άρα,  $\varphi(N) = 1$  και  $\psi(N) = 0$ . Έτσι αν  $M \in \mathcal{N}$  είτε  $M \leq N$  οπότε  $\psi(M) = 0$  και συνεπώς  $\varphi(M) \geq \psi(M)$  είτε  $M > N$  οπότε  $\varphi(M) = 1$  και άρα  $\psi(M) \leq \varphi(M)$ . Επομένως,  $\varphi \geq \psi$ . Συνεπώς, το  $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  γίνεται τοπολογικός χώρος με την τοπολογία της διάταξης. Για  $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  θεωρούμε τα παρακάτω σύνολα

$$L_\varphi = \{\psi \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2}) : \psi < \varphi\}$$

και

$$U_\varphi = \{\psi \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2}) : \psi > \varphi\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  με  $\varphi < \psi$ , τότε

$$(\varphi, \psi) = U_\varphi \cap L_\psi.$$

Έτσι τα σύνολα  $L_\varphi$  και  $U_\varphi$  είναι βασικά του τοπολογικού χώρου  $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ .

**3.4.4 Θεώρημα.** Ο χώρος των μεγιστικών ιδεωδών  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  είναι ομοιομορφικός με τον χώρο  $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Έχουμε

$$\varphi(P(N)) = \varphi(P(N)^2) = \varphi(P(N))^2,$$

για κάθε  $N \in \mathcal{N}$ . Άρα,  $\varphi(P(N)) = 0$  ή  $1$ , για κάθε  $N \in \mathcal{N}$ . Επίσης, αν  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$  με  $N_1 < N_2$ , τότε

$$\varphi(P(N_2) - P(N_1)) = \varphi(P(N_2) - P(N_1))^2 \geq 0.$$

Άρα, η  $\varphi$  είναι αύξουσα στο  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ . Ορίζουμε  $\bar{\varphi}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{2}$  με

$$\bar{\varphi}(N) = \varphi(P(N)).$$

Το  $\bar{\varphi}$  είναι ομομορφισμός συνδέσμων και έτσι  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ . Έστω τώρα  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ . Ορίζουμε

$$\varphi(P(N)) = \bar{\varphi}(N).$$

Επεκτείνουμε γραμμικά την  $\varphi$  στην γραμμική θήκη  $\text{span}\{P(N) : N \in \mathcal{N}\}$ . Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε την  $\varphi$  στην κλειστή θήκη του υπόχωρου  $\text{span}\{P(N) : N \in \mathcal{N}\}$ , δηλαδή στην  $C^*(\mathcal{N})$ . Έστω  $A$  γραμμικός συνδυασμός των  $P(N_i)$ , με  $i = 1, \dots, n$  και  $\{0\} = N_0 < N_1 < \dots < N_n = H$ . Θέτουμε  $E_i = P(N_i) - P(N_{i-1})$ , όπου  $i = 1, \dots, n$ . Έτσι ο  $A$  γράφεται στην μορφή

$$A = \sum_{i=1}^n a_i E_i.$$

Έχουμε  $\varphi(A) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(E_i)$ . Υπάρχει  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  ώστε  $\bar{\varphi}(N_{i_0}) = 1$  και  $\bar{\varphi}(N_{i_0-1}) = 0$ . Έτσι  $\varphi(E_{i_0}) = 1$  και  $\varphi(E_i) = 0$ , για κάθε  $i \neq i_0$ . Έπεται

$$|\varphi(A)| = |a_{i_0}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = \|A\|.$$

Άρα, η  $\varphi$  επεκτείνεται στην  $C^*(\mathcal{N})$ . Τώρα θα δείξουμε ότι η γραμμική και φραγμένη  $\varphi: C^*(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{C}$  είναι χαρακτήρας. Επειδή  $\varphi(I) = 1$  για να δείξουμε ότι η  $\varphi$  είναι χαρακτήρας αρκεί να δείξουμε ότι είναι πολλαπλασιαστική. Η  $\varphi$  στο  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  είναι πολλαπλασιαστική γιατί αν  $N, M \in \mathcal{N}$  με  $N \leq M$  έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(P(N)P(M)) &= \varphi(P(N \cap M)) = \bar{\varphi}(M \cap N) = \bar{\varphi}(N) \\ &= \bar{\varphi}(N)\bar{\varphi}(M) = \varphi(P(N))\varphi(P(M)). \end{aligned}$$

Έστω τώρα  $A \in \text{span}\{P(N) : N \in \mathcal{N}\}$ . Έχουμε  $A = \sum_{i=1}^n a_i E_i$  με  $E_i = P(N_i) - P(N_{i-1})$ , όπου  $i = 1, \dots, n$  και  $\{0\} = N_0 < N_1 < \dots < N_n = H$ . Παρατηρούμε ότι αν  $N \in \mathcal{N}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(E_i P(N)) &= \varphi((P(N_i) - P(N_{i-1}))P(N)) = \varphi(P(N_i)P(N) - P(N_{i-1})P(N)) = \\ &= \varphi(P(N_i)P(N)) - \varphi(P(N_{i-1})P(N)) = \varphi(P(N_i))\varphi(P(N)) - \varphi(P(N_{i-1}))\varphi(P(N)) \\ &= \varphi(P(N))\varphi(P(N_i)) - \varphi(P(N))\varphi(P(N_{i-1})) = \varphi(E_i)\varphi(P(N)), \end{aligned}$$

για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Άρα,  $\varphi(AP(N)) = \varphi(A)\varphi(P(N))$  και έτσι αν  $A, B \in \text{span}\{P(N) : N \in \mathcal{N}\}$  προκύπτει ότι  $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ . Έστω  $A \in C^*(\mathcal{N})$  και  $B \in \text{span}\{P(N) : N \in \mathcal{N}\}$ . Έχουμε  $A = \lim_n A_n$ , όπου  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία στον  $\text{span}\{P(N) : N \in \mathcal{N}\}$  και

$$\varphi(AB) = \varphi(\lim_n A_n B) = \varphi(\lim_n A_n B) =$$

$$\lim_n \varphi(A_n B) = (\lim_n \varphi(A_n))\varphi(B) = \varphi(A)\varphi(B).$$

Έτσι αν  $A, B \in C^*(\mathcal{N})$  έχουμε  $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ . Άρα, η  $\varphi$  είναι πολλαπλασιαστική στην  $C^*(\mathcal{N})$  και συνεπώς  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Η  $\varphi$  είναι μοναδικά καθορισμένη

από την  $\bar{\varphi}$ , διότι αν υπήρχε  $\varphi'$  τέτοια ώστε  $\varphi = \varphi'$  στο  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  θα είχαμε και  $\varphi = \varphi'$  στο  $C^*(\mathcal{N})$ . Έστω  $\Phi: \mathcal{M}_{\mathcal{N}} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  με

$$\Phi(\varphi) = \bar{\varphi}.$$

Η  $\Phi$  είναι 1-1 και επί από τον συμπαγή χώρο  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  στον Hausdorff χώρο  $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  και έτσι αν δείξουμε ότι η  $\Phi$  είναι συνεχής θα έχουμε δείξει ότι η  $\Phi$  είναι ομοιομορφισμός. Θα δείξουμε ότι η  $\Phi$  αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά. Αν  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$  θέτουμε

$$N_{\varphi} = \sup\{N \in \mathcal{N} : \bar{\varphi}(N) = 0\}.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

Αν  $\bar{\varphi}(N_{\varphi}) = 0$ , τότε

$$\bar{\varphi}(N) = 0 \Leftrightarrow N \leq N_{\varphi}.$$

Έτσι

$$U_{\varphi} = \{\bar{\psi} : \bar{\psi} > \bar{\varphi}\} = \{\bar{\psi} : \bar{\psi}(N_{\varphi}) = 1\}$$

και

$$L_{\varphi} = \{\bar{\psi} : \bar{\psi} < \bar{\varphi}\} = \{\bar{\psi} : N_{\psi} > N_{\varphi}\} = \cup_{N > N_{\varphi}} \{\bar{\psi} : \bar{\psi}(N) = 0\}.$$

Αν  $\bar{\varphi}(N_{\varphi}) = 1$ , τότε

$$\bar{\varphi}(N) = 0 \Leftrightarrow N < N_{\varphi}.$$

Έτσι

$$U_{\varphi} = \{\bar{\psi} : \bar{\psi} > \bar{\varphi}\} = \{\bar{\psi} : N_{\psi} < N_{\varphi}\} = \cup_{N < N_{\varphi}} \{\bar{\psi} : \bar{\psi}(N) = 1\}$$

και

$$L_{\varphi} = \{\bar{\psi} : \bar{\psi} < \bar{\varphi}\} = \{\bar{\varphi} : \bar{\varphi}(N_{\varphi}) = 0\}.$$

Όμως, τα

$$\Phi^{-1}(\{\bar{\psi} : \bar{\psi}(N) = 0\}) = \{\psi : \psi(P(N)) < 1\}$$

και

$$\Phi^{-1}(\{\bar{\psi} : \bar{\psi}(N) = 1\}) = \{\psi : \psi(P(N)) > 0\}$$

είναι ανοικτά στο  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Άρα, τα  $\Phi^{-1}(U_{\varphi})$  και  $\Phi^{-1}(L_{\varphi})$  είναι ανοικτά στο  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ , για κάθε  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ . Συνεπώς, η  $\Phi$  είναι συνεχής και έτσι το  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  είναι ομοιομορφικό με το  $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2})$ .  $\square$

**3.4.5 Ορισμός.** (1) Για κάθε  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}_{\varphi}$  το σύνολο όλων των διαστημάτων  $E = P(N_1) - P(N_2)$ , όπου  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$  με  $N_1 > N_2$  ώστε

$\varphi(E) = 1$ .

(2) Αν  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ , ορίζουμε την ημινόρμα

$$\|T\|_{\varphi} = \inf\{\|ETE\| : E \in \mathcal{E}_{\varphi}\},$$

για κάθε  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ .

(3) Αν  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ , συμβολίζουμε με  $I_{\varphi}$  το σύνολο όλων των τελεστών  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  με  $\|T\|_{\varphi} = 0$ . Το  $I_{\varphi}$  καλείται *διαγώνιο ιδεώδες*.

**3.4.6 Πρόταση.** Αν  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ , τότε

$$I_{\varphi} = \overline{\cup_{E \in \mathcal{E}_{\varphi}} \ker \Phi_E}.$$

Επίσης, το  $I_{\varphi}$  είναι κλειστό ιδεώδες.

**Απόδειξη.** Αρχικά θα δείξουμε ότι  $I_{\varphi} = \overline{\cup_{E \in \mathcal{E}_{\varphi}} \ker \Phi_E}$ . Έστω  $T \in I_{\varphi}$ . Έχουμε  $\|T\|_{\varphi} = 0$  και έτσι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχει  $E_n \in \mathcal{E}_{\varphi}$  ώστε  $\|E_n T E_n\| < \frac{1}{n}$ . Ορίζουμε  $T_n = T - E_n T E_n$ . Παρατηρούμε  $\|T - T_n\| < \frac{1}{n}$  και  $\Phi_{E_n}(T_n) = 0$ . Άρα, υπάρχει ακολουθία  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $\cup_{E \in \mathcal{E}_{\varphi}} \ker \Phi_E$  με  $\lim_n \|T - T_n\| = 0$ . Συνεπώς,  $T \in \overline{\cup_{E \in \mathcal{E}_{\varphi}} \ker \Phi_E}$ . Έστω τώρα  $T \in \overline{\cup_{E \in \mathcal{E}_{\varphi}} \ker \Phi_E}$ . Υπάρχει ακολουθία  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $\cup_{E \in \mathcal{E}_{\varphi}} \ker \Phi_E$  με  $\lim_n \|T - T_n\| = 0$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχει  $E_n \in \mathcal{E}_{\varphi}$  ώστε  $T_n \in \ker \Phi_{E_n}$ . Οπότε  $\|T_n\|_{\varphi} \leq \|E_n T E_n\| = 0$  και έτσι  $\|T_n\|_{\varphi} = 0$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Για  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$\|T\|_{\varphi} = \|T - T_n + T_n\|_{\varphi} \leq \|T - T_n\|_{\varphi} + \|T_n\|_{\varphi} = \|T - T_n\|_{\varphi} \leq \|T - T_n\|$$

και επειδή  $\|T - T_n\| \rightarrow 0$  έχουμε  $\|T\|_{\varphi} = 0$ . Άρα,  $T \in I_{\varphi}$  και έτσι  $I_{\varphi} = \overline{\cup_{E \in \mathcal{E}_{\varphi}} \ker \Phi_E}$ . Παρατηρούμε ότι το  $I_{\varphi}$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Επίσης, το  $I_{\varphi}$  είναι ιδεώδες της άλγεβρας *nest*  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  διότι αν  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  και  $T \in I_{\varphi}$  έχουμε

$$\|AT\|_{\varphi} = \inf\{\|EATE\| : E \in \mathcal{E}_{\varphi}\} = \inf\{\|(EAE)(ETE)\| : E \in \mathcal{E}_{\varphi}\} \leq$$

$$\inf\{\|(EAE)\| : E \in \mathcal{E}_{\varphi}\} \inf\{\|(ETE)\| : E \in \mathcal{E}_{\varphi}\} = \|A\|_{\varphi} \|T\|_{\varphi} = 0.$$

Άρα,  $\|AT\|_{\varphi} = 0$  και ανάλογα προκύπτει ότι  $\|TA\|_{\varphi} = 0$ . Συνεπώς, το  $I_{\varphi}$  είναι κλειστό ιδεώδες.  $\square$

**3.4.7 Ορισμός.** Έστω  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Συμβολίζουμε με  $\mathcal{D}_{\varphi}$  την άλγεβρα πηλίκου

$$\mathcal{D}_{\varphi} = \mathcal{T}(\mathcal{N})/I_{\varphi}$$

και με  $\Phi_{\varphi}$  την απεικόνιση πηλίκου επί της  $\mathcal{D}_{\varphi}$ . Η άλγεβρα πηλίκου  $\mathcal{D}_{\varphi}$  καλείται *διαγώνιος άλγεβρα* που σχετίζεται με το  $I_{\varphi}$ .

**3.4.8 Πρόταση.** Για κάθε  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  ισχύει  $\|T\|_{\varphi} = \|T + I_{\varphi}\|$ .

**Απόδειξη.** Για  $E \in \mathcal{E}_\varphi$  παρατηρούμε  $ETE - T \in I_\varphi$  και άρα  $\|T + I_\varphi\| \leq \|ETE\|$ . Συνεπώς  $\|T + I_\varphi\| \leq \|T\|_\varphi$ . Επίσης,  $\|T\|_\varphi \leq \|T + I_\varphi\|$  διότι αν  $S \in I_\varphi$  και  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $E \in \mathcal{E}_\varphi$  ώστε  $\|ESE\| < \varepsilon$  και

$$\|T + S\| \geq \|E(T + S)E\| \geq \|ETE\| - \|ESE\| \geq \|T\|_\varphi - \varepsilon.$$

Άρα,  $\|T\|_\varphi = \|T + I_\varphi\|$ .  $\square$

**3.4.9 Παρατήρηση.** Έστω  $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}$ .

(1) Έστω  $A$  άτομο στο nest  $\mathcal{N}$ . Το  $A$  είναι της μορφής  $A = N \ominus N_-$  με  $N \in \mathcal{N}$ . Υποθέτουμε ότι  $\varphi(A) = 1$ . Επειδή  $P(A) = P(N) - P(N_-)$  προκύπτει  $\varphi(P(N)) = 1$ , δηλαδή  $\overline{\varphi}(N) = 1$ . Άρα, αν το  $A$  είναι άτομο και  $\varphi(A) = 1$  έχουμε  $A \in \mathcal{E}_\varphi$ . Έστω  $E \in \mathcal{E}_\varphi$  και  $A$  άτομο με  $\varphi(A) = 1$ . Έχουμε  $A = N \ominus N_-$  με  $N \in \mathcal{N}$  και  $E = P(N_2) - P(N_1)$ , όπου  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$  με  $N_1 < N_2$ . Τότε  $N_1 \leq N_-$  και  $N \leq N_2$ . Συνεπώς, αν το  $A$  είναι άτομο με  $\varphi(A) = 1$ , τότε η προβολή  $P(A)$  είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου  $\mathcal{E}_\varphi$  με την προηγούμενη έννοια.

(2) Υποθέτουμε ότι ο  $\varphi$  ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\overline{\varphi}(N) = 0 \Leftrightarrow N \leq N_\varphi,$$

όπου  $N_\varphi = \sup\{N \in \mathcal{N} : \overline{\varphi}(N) = 0\}$ ,  $N \in \mathcal{N}$ , και για κανένα άτομο  $A$  στο nest δεν ισχύει η ισότητα  $\varphi(A) = 1$ . Τότε  $N_\varphi = (N_\varphi)_+$  και

$$\|T\|_\varphi = \inf_{N > N_\varphi} \|(P(N) - P(N_\varphi))T(P(N) - P(N_\varphi))\|.$$

(3) Υποθέτουμε ότι ο  $\varphi$  ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\overline{\varphi}(N) = 0 \Leftrightarrow N < N_\varphi,$$

όπου  $N_\varphi = \sup\{N \in \mathcal{N} : \overline{\varphi}(N) = 0\}$ ,  $N \in \mathcal{N}$  και για κανένα άτομο  $A$  στο nest δεν ισχύει η ισότητα  $\varphi(A) = 1$ . Τότε  $N_\varphi = (N_\varphi)_-$  και

$$\|T\|_\varphi = \inf_{N < N_\varphi} \|(P(N_\varphi) - P(N))T(P(N_\varphi) - P(N))\|.$$

**3.4.10 Παραδείγματα.** (α) Έστω  $M_n$ ,  $n \geq 1$ , μια αύξουσα ακολουθία υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης στον χώρο Hilbert  $H$  ώστε η ένωση τους να είναι πυκνή στον  $H$ . Το σύνολο

$$\mathcal{N} = \{\{0\}, M_n, H\}$$

είναι nest στον  $H$ . Για  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , ορίζουμε  $\varphi_n: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{2}$  με

$$\varphi_n(M_m) = 0 \Leftrightarrow m < n$$

Τότε

$$\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2}) = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}.$$

(β) Έστω  $\mathcal{N}$  ένα συνεχές nest. Για  $N \in \mathcal{N} \setminus \{\{0\}, H\}$  ορίζουμε  $\varphi_N^- : \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{2}$  και  $\varphi_N^+ : \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{2}$  με

$$\varphi_N^-(M) = 1 \Leftrightarrow N \leq M$$

και

$$\varphi_N^+(M) = 0 \Leftrightarrow M \leq N$$

αντίστοιχα. Τότε

$$\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathbf{2}) = \{\varphi_N^-, \varphi_N^+ : N \in \mathcal{N} \setminus \{\{0\}, H\} \cup \{\varphi_H^-, \varphi_{\{0\}}^+\}.$$

**3.4.11 Ορισμός.** Έστω διάστημα  $E = P(N_1) - P(N_2)$ . Συμβολίζουμε με  $\mathcal{O}_E$  το παρακάτω σύνολο

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_E &= \{\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}} : E \in \mathcal{E}_{\varphi}\} = \{\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}} : \bar{\varphi}(N_1) = 1, \bar{\varphi}(N_2) = 0\} \\ &= \{\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}} : \bar{\varphi}(N_1) > 0, \bar{\varphi}(N_2) < 1\}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι το  $\mathcal{O}_E$  είναι ανοικτό στο  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$

**3.4.12 Πρόταση.** Έστω διαστήματα  $E_1, \dots, E_n$ . Τα  $\mathcal{O}_{E_1}, \dots, \mathcal{O}_{E_n}$  αποτελούν ανοικτό πεπερασμένο κάλυμμα του  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  αν και μόνον αν  $\sum_{i=1}^n E_i \geq I$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $\mathcal{O}_{E_1}, \dots, \mathcal{O}_{E_n}$  ανοικτό πεπερασμένο κάλυμμα του  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Θα δείξουμε ότι  $\sum_{i=1}^n E_i \geq I$ . Για κάθε  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  υπάρχει διάστημα  $E_i = N_1^i - N_2^i$  με  $N_2^i < N_1^i$  ώστε  $\varphi(N_1^i) = 1$  και  $\varphi(N_2^i) = 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Παρατηρούμε,  $\sum_{i=1}^n \varphi(E_i) \geq 1$ . Άρα, για κάθε  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  έχουμε  $\varphi(\sum_{i=1}^n E_i - I) \geq 0$  και συνεπώς  $\sum_{i=1}^n E_i \geq I$ . Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι  $\sum_{i=1}^n E_i \geq I$  και θα δείξουμε ότι τα  $\mathcal{O}_{E_1}, \dots, \mathcal{O}_{E_n}$  αποτελούν ανοικτό πεπερασμένο κάλυμμα του  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Επειδή  $\sum_{i=1}^n E_i \geq I$  έχουμε  $\sum_{i=1}^n E_i - I \geq 0$ . Άρα, για κάθε  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  έχουμε  $\sum_{i=1}^n \varphi(E_i) \geq 1$ . Έτσι για κάθε  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$  υπάρχει διάστημα  $E_i$  ώστε  $\varphi(E_i) = 1$ , δηλαδή  $\varphi \in \mathcal{O}_{E_i}$ . Άρα,  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} \subseteq \cup_{i=1}^n \mathcal{O}_{E_i}$ .  $\square$

**3.4.13 Πρόταση.** Έστω  $\mathcal{F}$  ένα πεπερασμένο nest. Τότε

$$\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) = \{T \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) : \Delta(T) = 0\},$$

όπου  $\Delta(T)$  είναι η διαγώνιος του  $T$  ως προς το nest  $\mathcal{F}$ .

**Απόδειξη.** Έχουμε ότι το nest  $\mathcal{F}$  είναι πεπερασμένο και υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του είναι διατεταγμένα όπως παρακάτω

$$\{0\} = N_0 < N_1 < \dots < N_n = H.$$



Η άλγεβρα nest  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$  αποτελείται από τελεστές των οποίων οι πίνακες είναι μπλόκ άνω τριγωνικοί  $n \times n$ . Αν  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ , τότε ο πίνακας του  $T$  έχει την παρακάτω μορφή

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

όπου  $A_{ij}$  είναι οι πίνακες των τελεστών  $E_j T E_i$  και  $E_i = N_i - N_{i-1}$  με  $i, j = 1, \dots, n$ . Έτσι

$$E_j T E_i = (N_j - N_{j-1})T(N_i - N_{i-1}) = N_j N_{j-1}^\perp N_i T N_i N_{i-1}^\perp.$$

Άρα, αν  $j > i$  έχουμε  $E_j T E_i = 0$  και συνεπώς ο πίνακας  $A_{ij}$  είναι ο μηδενικός. Έστω  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  με  $\Delta(T) = 0$ . Θα δείξουμε ότι  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ . Αν  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  έχουμε

$$\begin{aligned} N_{k-1}^\perp T A N_k &= N_{k-1}^\perp T N_{k-1}^\perp A N_k = N_{k-1}^\perp T N_{k-1}^\perp N_k A N_k \\ &= N_{k-1}^\perp T N_k N_{k-1}^\perp A N_k = N_{k-1}^\perp N_k T N_k N_{k-1}^\perp A N_k \\ &= (N_k - N_{k-1})T(N_k - N_{k-1})A N_k = 0 \end{aligned}$$

επειδή για κάθε  $m$  έχουμε  $E_m T E_m = 0$  και συνεπώς  $TA(N_k) \subseteq N_{k-1}$  για κάθε  $k$ . Έτσι  $(TA)^n(H) \subseteq (TA)^{n-1}(N_{n-1}) \subseteq (TA)^{n-2}(N_{n-2}) \subseteq \cdots \subseteq (TA)(N_1) \subseteq \{0\}$ . Συνεπώς,  $(AT)^n = 0$  και άρα  $\sigma(AT) = \{0\}$ . Επειδή το  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  ήταν τυχαίο έχουμε  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ . Επομένως,

$$\{T \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) : \Delta(T) = 0\} \subseteq \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})).$$

Τώρα θα δείξουμε ότι  $\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \subseteq \{T \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) : \Delta(T) = 0\}$ . Έστω  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ . Υποθέτουμε ότι  $\Delta(T) \neq 0$ . Έχουμε  $\Delta(T) = \sum_{m=1}^n E_m T E_m$ . Επίσης,

$$E_m N_k = N_m N_k - N_{m-1} N_k = \begin{cases} N_m - N_{m-1}, & (k \geq m) \\ N_k - N_k, & (k < m). \end{cases} = N_k E_m$$

Άρα

$$\Delta(T) N_k = \sum_{m=1}^n E_m T E_m N_k = \sum_{m=1}^k E_m T E_m$$

και

$$N_k \Delta(T) = \sum_{m=1}^n N_k E_m T E_m = \sum_{m=1}^k E_m T E_m.$$

Συνεπώς,  $\Delta(T) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}^\perp)$ . Θέτοντας τώρα  $A = \Delta(T^*) \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < \|\Delta(T)\|_2 &= \|\Delta(T)^* \Delta(T)\| = \|(\Delta(T)^* \Delta(T))^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \|(\Delta(\Delta(T^*)T)^n)\|^{\frac{1}{n}} = \|(\Delta(AT))^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\Delta((AT)^n)\|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \|(AT)^n\|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

επειδή ο  $\Delta$  είναι πολλαπλασιαστικός στους άνω τριγωνικούς πίνακες. Άρα,  $\sigma(AT) \neq \{0\}$  και έτσι  $T \notin \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ . Άτοπο, διότι υποθέσαμε  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ .  $\square$

**3.4.14 Ορισμός.** Έστω  $\mathcal{N}$  ένα nest και  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$ . Το  $\mathcal{F}$  καλείται υπο-nest του  $\mathcal{N}$  αν περιέχει τους υποχώρους  $\{0\}, H$  καθώς επίσης την τομή και την κλειστή γραμμική θήκη οποιασδήποτε υποοικογένειας του  $\mathcal{F}$ .

**3.4.15 Πρόταση.** Αν  $\mathcal{F}$  είναι ένα πεπερασμένο υπο-nest του  $\mathcal{N}$ , τότε

$$\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \subseteq \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N})).$$

**Απόδειξη.** Το nest  $\mathcal{F}$  είναι πεπερασμένο και υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του είναι διατεταγμένα όπως παρακάτω

$$\{0\} = N_0 < N_1 < \dots < N_n = H.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι αν  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ , τότε  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Αν  $N \in \mathcal{N}$  έστω  $N_k$  το μικρότερο στοιχείο του  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$  τέτοιο ώστε  $N \subseteq N_k$ . Έπεται  $N_{k-1} \subseteq N \subseteq N_k$ . Όμως,  $T(N_k) \subseteq N_{k-1}$  διότι

$$\begin{aligned} N_{k-1}^\perp T N_k &= N_{k-1}^\perp N_k T N_k = N_k N_{k-1}^\perp T N_k = N_k N_{k-1}^\perp T N_{k-1}^\perp N_k \\ &= (N_k - N_{k-1})T(N_k - N_{k-1}) = 0. \end{aligned}$$

Άρα,  $T(N) \subseteq T(N_k) \subseteq N_{k-1} \subseteq N$  και έτσι  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ .

Έστω τώρα  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ . Θα δείξουμε ότι  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ . Έστω  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $\sigma(AT) = \{0\}$ . Όμως  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  και επειδή  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$  έχουμε  $\sigma(AT) = \{0\}$ . Άρα,  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ .  $\square$

**3.4.16 Λήμμα.** Έστω  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  και  $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Τότε υπάρχει τελεστής  $A$  στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  τέτοιος ώστε

$$\|(AT)^n\|_\varphi = \|T\|_\varphi^n,$$

για  $n \geq 1$ .

**Απόδειξη.** Έστω ότι υπάρχει άτομο  $E$  στο  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  με  $\varphi(E) = 1$ . Είναι  $E = N \ominus N_-$ , όπου  $N \in \mathcal{N}$  με  $\varphi(N) = 1$  και  $\varphi(N_-) = 0$ . Αν  $L \in \mathcal{N}$  είτε

$L \geq N$ , οπότε  $LE = EL = E$  είτε  $L \leq N_-$ , οπότε  $LE = EL = 0$ . Άρα,  $(ETE)L = L(ETE)$ , για κάθε  $L \in \mathcal{N}$  διότι αν  $L \geq N$  είναι

$$(ETE)L = E(TEL) = ETE = (LET)E = L(ETE)$$

ενώ αν  $L \leq N_-$  έχουμε

$$(ETE)L = L(ETE) = 0.$$

Συνεπώς,  $ETE \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$ . Έστω τώρα  $ETE = UP$ , η πολική αναπαράσταση του τελεστή  $ETE$ . Αφού  $ETE \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$  έχουμε και  $UP \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$  και επειδή η άλγεβρα  $\mathcal{P}(\mathcal{N})'$  είναι von Neumann από την πρόταση 1.3.24 ισχύει ότι  $U, P \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$ . Έτσι,  $U^* \in \mathcal{P}(\mathcal{N})'$  και επειδή  $\mathcal{P}(\mathcal{N})' \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{N})$  έχουμε  $U^* \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Τώρα επειδή η απεικόνιση  $\Phi_E(T) = ETE$  είναι ομομορφισμός αλγεβρών και

$$\begin{aligned} U^*E &= U^*(N - N_-) = U^*N - U^*N_- \\ &= NU^* - N_-U^* = EU^* \end{aligned}$$

έχουμε

$$\Phi_E(U^*T) = EU^*TE = EU^*ETE = U^*ETE = P.$$

Επίσης, αφού ο  $P$  είναι θετικός ισχύει

$$\|T\|_\varphi^2 = \|ETE\|^2 = \|ET^*ETE\| = \|P^2\| = \|P\|^2.$$

Άρα,  $\|T\|_\varphi = \|P\|$  και θέτοντας  $A = U^*$  έχουμε

$$\begin{aligned} \|(U^*T)^n\|_\varphi &= \|E(U^*T)^nE\| = \|(EU^*TE)^n\| \\ &= \|P^n\| = \|P\|^n = \|T\|_\varphi^n. \end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι δεν υπάρχει άτομο  $E$  στο  $\mathcal{N}$  ώστε  $\varphi(E) = 1$ . Υποθέτουμε για τον  $\varphi$  ότι  $\varphi(N) = 0$  αν και μόνον αν  $N < N_\varphi$ , όπου

$$N_\varphi = \sup\{N \in \mathcal{N} : \overline{\varphi}(N) = 0\}.$$

Τότε

$$\|T\|_\varphi = \inf_{N < N_\varphi} \|(N_\varphi - N)T(N_\varphi - N)\| \quad (1)$$

και  $N_\varphi = (N_\varphi)_-$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\|T\|_\varphi > 0$  και κανονικοποιώντας υποθέτουμε ότι  $\|T\|_\varphi = 1$ . Αν  $N < N_\varphi$ , έχουμε  $1 \leq \|(N_\varphi - N)T(N_\varphi - N)\|$ . Θα κατασκευάσουμε ακολουθίες  $\{N_1, N_2, \dots\}$  και  $\{x_1, x_2, \dots\}$  ώστε για κάθε  $n \geq 1$

$$N_n \in \mathcal{N}, \quad N_n \subset N_{n+1} \subset N_\varphi, \quad x_n \in N_{n+1} \ominus N_n, \quad \|x_n\| = 1,$$

$$\|(N_\varphi - N_n)T(N_\varphi - N_n)\| < (1 + \frac{1}{2n^2})^{\frac{1}{2}}$$

και

$$\|(N_{n+1} - N_n)T(N_{n+1} - N_n)\| > (1 - \frac{1}{2n^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Η κατασκευή θα γίνει με επαγωγή. Από την (1) υπάρχει  $N_1$  με  $N_1 < N_\varphi$  ώστε  $\|(N_\varphi - N_1)T(N_\varphi - N_1)\| < (1 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ . Υποθέτουμε τώρα ότι για καποιο ακέραιο  $p \geq 1$  έχουμε κατασκευάσει υποχώρους  $N_n$  με  $1 \leq n \leq p$  και διανύσματα  $x_n$  με  $1 \leq n < p$  ώστε να ικανοποιούνται οι ζητούμενες σχέσεις. Για  $p = 1$  ισχύει από την παραπάνω επιλογή του  $N_1 < N_\varphi$ . Τώρα θα δείξουμε ότι υπάρχει κατάλληλος υπόχωρος  $N_{p+1}$  και διάνυσμα  $x_p$ . Από την (1) έχουμε  $\|(N_\varphi - N_p)T(N_\varphi - N_p)\| \geq 1$ . Άρα, υπάρχει  $g \in N_\varphi \ominus N_p$  με  $\|g\| = 1$  ώστε

$$\|(N_\varphi - N_p)T(N_\varphi - N_p)g\| > (1 - \frac{1}{2p^2})^{\frac{1}{2}} \quad (2).$$

Όμως

$$N_\varphi \ominus N_p = (N_\varphi)_- \ominus N_p = \vee \{N \ominus N_p : N \in \mathcal{N}, N_p \subset N \subset N_\varphi\}.$$

Αφού  $g \in N_\varphi \ominus N_p$  υπάρχει ακολουθία  $(x_m)$  με  $\|x_m\| = 1$  και

$$x_m \in \cup \{N \ominus N_p : N \in \mathcal{N}, N_p \subset N \subset N_\varphi\}$$

ώστε  $g = \lim x_m$ . Έτσι υπάρχει ένα  $x_p$  ώστε να ισχύει η (2) αν αντικαταστήσουμε το  $g$  με το  $x_p$ . Επιλέγουμε  $L_1 \in \mathcal{N}$  με  $N_p \subset L_1 \subset N_\varphi$  ώστε  $x_p \in L_1 \ominus N_p$ . Από την (1) υπάρχει  $L_2 \subset N_\varphi$  ώστε να ισχύει

$$\|(N_\varphi - L_2)T(N_\varphi - L_2)\| < (1 + \frac{1}{2(p+1)^2})^{\frac{1}{2}} \quad (3).$$

Θέτουμε  $N_{p+1} = L_1 \vee L_2$ . Τότε  $N_p \subset N_{p+1} \subset N_\varphi$  και  $x_p \in N_{p+1} \ominus N_p$ . Αφού  $L_2 \subseteq N_{p+1}$  από την (3) έχουμε  $\|(N_\varphi - N_{p+1})T(N_\varphi - N_{p+1})\| < (1 + \frac{1}{2(p+1)^2})^{\frac{1}{2}}$ . Επίσης,  $x_p = (N_{p+1} - N_p)x_p = N_{p+1}x_p$ . Άρα,

$$\begin{aligned} (N_\varphi - N_p)T(N_\varphi - N_p)x_p &= (N_\varphi - N_p)Tx_p = (N_\varphi - N_p)TN_{p+1}x_p = \\ &= (N_\varphi - N_p)N_{p+1}TN_{p+1}x_p = (N_{p+1} - N_p)Tx_p. \end{aligned}$$

Από την σχέση αυτή και την ισχύ της (2) όταν  $g = x_p$  έχουμε  $\|(N_{p+1} - N_p)Tx_p\| > (1 - \frac{1}{2p^2})^{\frac{1}{2}}$ . Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε κατασκευάσει ακολουθίες  $\{N_k\}$  και  $\{x_k\}$  ώστε

$$N_k \in \mathcal{N}, \quad N_k \subset N_{k+1} \subset N_\varphi,$$

$$x_k \in H, \quad \|x_k\| = 1, \quad x_k = (N_{k+1} \ominus N_k)x_k$$

και

$$\|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\| > (1 - \frac{1}{2k^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Θέτουμε  $y_k = \frac{(N_{k+1} - N_k)Tx_k}{\|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\|}$ . Έχουμε  $y_k \in N_{k+1} \ominus N_k$  και

$$\begin{aligned} \langle Tx_k, y_k \rangle &= \langle Tx_k, \frac{(N_{k+1} - N_k)Tx_k}{\|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\|} \rangle = \frac{1}{\|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\|} \langle Tx_k, (N_{k+1} - N_k)Tx_k \rangle \\ &= \frac{1}{\|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\|} \langle (N_{k+1} - N_k)Tx_k, (N_{k+1} - N_k)Tx_k \rangle = \frac{\|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\|^2}{\|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\|} \\ &= \|(N_{k+1} - N_k)Tx_k\| > (1 - \frac{1}{2k^2})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Τώρα επειδή  $x_k \in N_{k+1}$  και  $y_{k+1} \in N_{k+2} \ominus N_{k+1} \subseteq N_{k+1}^\perp$  έχουμε ότι  $x_k \in N_{k+1}$  και  $y_{k+1} \in (N_{k+1})^\perp$ . Άρα,  $x_k \otimes y_{k+1}^* \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Έστω  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_{k+1}^*$ . Παρατηρούμε ότι  $S_n \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Για κάθε  $x \in H$  η  $S_n(x)$  είναι Cauchy και συνεπώς συγκλίνει, έστω στο  $Ax = \lim S_n(x)$ . Η απεικόνιση  $A: H \rightarrow H$  με  $Ax = \lim S_n(x)$  είναι φραγμένος τελεστής και η ακολουθία  $S_n$  συγκλίνει *SOT* στον  $A$ . Παρατηρούμε ότι ο  $A$  θα είναι της μορφής  $A = \sum_{k=1}^\infty x_k \otimes y_{k+1}^*$  και αφού η  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$  είναι *SOT* κλειστή έχουμε  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Επιπλέον,

$$A^*A = (\sum_{n \geq 1} y_{n+1} \otimes x_n^*)(\sum_{k \geq 1} x_k \otimes y_{k+1}^*) = \sum_{n, k \geq 1} (y_{n+1} \otimes x_n^*)(x_k \otimes y_{k+1}^*) = \sum_{k \geq 1} y_k \otimes y_k^*.$$

Άρα, επειδή τα  $y_k$  είναι ανά δυο κάθετα έχουμε  $\|A^*A\| = \sup_k \|y_k \otimes y_k^*\| = 1$  και έτσι  $\|A\| = 1$ .

Τώρα θα δείξουμε ότι  $AT(N_{k+1} \ominus N_k) \subseteq N_k$ , για κάθε  $k \geq 1$ . Έστω  $z \in N_{k+1} \ominus N_k$ . Έχουμε

$$ATz = \sum_{k \geq 1} (x_n \otimes y_{n+1}^*)Tz = \sum_{n \geq 1} \langle Tz, y_{n+1} \rangle x_n.$$

Παρατηρούμε  $Tz \in N_{k+1}$  και  $y_{k+1} \in N_{k+1}^\perp$ . Άρα,  $\langle Tz, y_{k+1} \rangle = 0$ . Όμως,  $\langle Tz, y_n \rangle = 0$ , για κάθε  $n \geq k+1$  διότι  $y_n \in N_{k+1}^\perp$  και  $Tz \in N_{k+1}$ . Άρα,  $ATz = \sum_{n=1}^{k-1} \langle Tz, y_{n+1} \rangle x_n \in N_k$ . Επίσης, ισχύει  $(N_k - N_{k-1})ATx_{k+1} = \langle Tx_{k+1}, y_{k+1} \rangle x_k$ . Πράγματι,  $Tx_{k+1} \in N_{k+2}$  και  $y_n \in N_{k+2}^\perp$ , για κάθε  $n \geq k+2$ , δηλαδή  $Tx_{k+1} \perp y_n$ , για κάθε  $n \geq k+2$  ενώ  $(N_k - N_{k-1})x_n = 0$ , για κάθε  $n \leq k-1$ . Άρα,

$$(N_k - N_{k-1})ATx_{k+1} = (N_k - N_{k-1}) \sum_{n \geq 1} \langle Tx_{k+1}, y_{n+1} \rangle x_n =$$

$$(N_k - N_{k-1})\langle Tx_{k+1}, y_{k+1} \rangle x_k = \langle Tx_{k+1}, y_{k+1} \rangle x_k.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \langle (AT)^2 x_{k+2}, x_k \rangle &= \langle AT N_{k+2} N_{k+1}^\perp AT x_{k+2}, x_k \rangle = \\ \langle Tx_{k+2}, y_{k+2} \rangle \langle AT x_{k+1}, x_k \rangle &= \langle Tx_{k+2}, y_{k+2} \rangle \langle Tx_{k+1}, y_{k+1} \rangle \\ &> (1 - \frac{1}{2(k+2)^2})^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2(k+1)^2})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Επαγωγικά έχουμε

$$\langle (AT)^n x_{k+n}, x_k \rangle \geq \prod_{j=1}^n (1 - \frac{1}{2(k+j)^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Αν τώρα  $N < N_\varphi$  παρατηρούμε  $x_k \in N_\varphi \ominus N$ , για  $k$  αρκετά μεγάλο. Επίσης, για  $N < N_\varphi$  έχουμε

$$\|(N_\varphi - N)(AT)^n(N_\varphi - N)\| \geq \|(N_\varphi - N)(AT)^n x_{k+n}\| \geq$$

$$\langle (N_\varphi - N)(AT)^n x_{k+n}, x_k \rangle = \langle (AT)^n x_{k+n}, (N_\varphi - N)x_k \rangle = \langle (AT)^n x_{k+n}, x_k \rangle.$$

Άρα,

$$\|(N_\varphi - N)(AT)^n(N_\varphi - N)\| \geq \lim_k \prod_{j=1}^n (1 - \frac{1}{2(k+j)^2})^{\frac{1}{2}} \geq 1.$$

Αφού το  $N < N_\varphi$  ήταν τυχαίο έχουμε  $1 \leq \|(AT)^n\|_\varphi$ . Όμως  $\|(AT)^n\|_\varphi \leq \|A\|^n \|T\|_\varphi^n \leq \|T\|_\varphi^n = 1$ . Άρα,  $\|(AT)^n\|_\varphi = \|T\|_\varphi^n$ . Στην περίπτωση τώρα που ο  $\varphi$  ικανοποιεί την σχέση  $\varphi(N) = 0$  αν και μόνον αν  $N \leq N_\varphi$  η απόδειξη είναι ανάλογη.  $\square$

**3.4.17 Πρόρισμα.** Έστω  $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}$ . Η διαγώνιος άλγεβρα  $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{T}(\mathcal{N})/I_\varphi$  που σχετίζεται με το  $I_\varphi$  είναι ημιαπλή.

**Απόδειξη.** Έστω  $T + I_\varphi \neq I_\varphi$ , δηλαδή  $T \notin I_\varphi$ . Για να δείξουμε ότι η άλγεβρα  $\mathcal{D}_\varphi$  είναι ημιαπλή, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει  $A + I_\varphi$  στην  $\mathcal{D}_\varphi$  ώστε το  $AT + I_\varphi$  να μην έχει φασματική ακτίνα 0. Αφού  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$  από το λήμμα 3.4.16 υπάρχει τελεστής  $A$  ώστε  $\|(AT)^n\|_\varphi = \|T\|_\varphi^n$ , για  $n \geq 1$  και επειδή από την πρόταση 3.4.8 έχουμε

$$\lim_n \|(AT + I_\varphi)^n\|^\frac{1}{n} = \lim_n \|(AT)^n + I_\varphi\|^\frac{1}{n} = \|T\|_\varphi > 0$$

το  $AT + I_\varphi$  δεν έχει φασματική ακτίνα 0, δηλαδή  $T + I_\varphi \notin \text{rad}(\mathcal{D}_\varphi)$ .  $\square$

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί τον χαρακτηρισμό του ριζικού Jacobson μιας άλγεβρας Nest και οφείλεται στον Ringrose [18].

**3.4.18 Θεώρημα.** Έστω  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

- (i)  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ .
- (ii)  $T \in \cap \{I_\varphi : \varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}\}$ .
- (iii) Ο  $T$  ανήκει στην κλειστή θήκη του

$$\cup \{\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) : \mathcal{F} \text{ πεπερασμένο υπο-nest του } \mathcal{N}\}.$$

(iv) Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει ένα πεπερασμένο υπο-nest  $\mathcal{F}$  του  $\mathcal{N}$  τέτοιο ώστε  $\|\Delta_\mathcal{F}(T)\| < \varepsilon$ .

(Η συνθήκη αυτή καλείται συνθήκη του Ringrose.)

**Απόδειξη.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Έστω  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ . Θα δείξουμε ότι  $T \in \cap \{I_\varphi : \varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}\}$ . Αν  $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}$  για να δείξουμε ότι  $T \in I_\varphi$  αρκεί να δείξουμε ότι  $\|T\|_\varphi = 0$ . Υποθέτουμε ότι  $\|T\|_\varphi > 0$ . Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Από το λήμμα 3.4.16 υπάρχει τελεστής  $A$  ώστε  $\|(AT)^n\|_\varphi = \|T\|_\varphi^n$ , για  $n \geq 1$ . Συνεπώς,

$$\lim_n \|(AT)^n\|_\varphi^{\frac{1}{n}} \geq \lim_n \|(AT)^n\|_\varphi^{\frac{1}{n}} = \|T\|_\varphi.$$

Επειδή όμως έχουμε υπόθεση ότι  $\|T\|_\varphi > 0$  ο τελεστής  $AT$  έχει μη-μηδενική φασματική ακτίνα και έτσι ο τελεστής  $T$  δεν ανήκει στο  $\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ . Αυτό όμως είναι άτοπο από την υπόθεση.

(ii)  $\Rightarrow$  (iv) Έστω  $T \in \cap \{I_\varphi : \varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}\}$  και  $\varepsilon > 0$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο υπο-nest  $\mathcal{F}$  του  $\mathcal{N}$  ώστε  $\|\Delta_\mathcal{F}(T)\| < \varepsilon$ . Για  $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}$  υπάρχει  $E_\varphi \in \mathcal{E}_\varphi$  με  $\|E_\varphi T E_\varphi\| < \varepsilon$ . Άρα, η οικογένεια  $\{\mathcal{O}_{E_\varphi} : \varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}\}$  είναι ανοικτό κάλυμμα του  $\mathcal{M}_\mathcal{N}$  διότι για κάθε  $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{N}$  υπάρχει  $E_\varphi \in \mathcal{E}_\varphi$ . Από την συμπάγεια του  $\mathcal{M}_\mathcal{N}$  υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα  $\mathcal{O}_{E_1}, \dots, \mathcal{O}_{E_n}$ . Έτσι από την πρόταση 3.4.12 έχουμε  $\sum_{i=1}^n E_i \geq I$ . Ονομάζουμε  $\mathcal{F}$  το πεπερασμένο υπο-nest του  $\mathcal{N}$  που αποτελείται από τα άκρα των  $E_i$ . Για κάθε διάστημα  $E$  του  $\mathcal{F}$  υπάρχει διάστημα  $E_i$  ώστε  $E \leq E_i$  και έτσι  $\|ETE\| \leq \|E_i T E_i\|$ . Συνεπώς,

$$\|\Delta_\mathcal{F}(T)\| = \max \|ETE\| < \varepsilon.$$

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) Έστω ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει πεπερασμένο υπο-nest  $\mathcal{F}$  του  $\mathcal{N}$  τέτοιο ώστε  $\|\Delta_\mathcal{F}(T)\| < \varepsilon$ . Θα δείξουμε ότι το  $T$  ανήκει στην κλειστή θήκη του  $\cup \{\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) : \mathcal{F} \text{ πεπερασμένο υπο-nest του } \mathcal{N}\}$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχει πεπερασμένο υπο-nest  $\mathcal{F}_n$  του  $\mathcal{N}$  ώστε  $\|\Delta_{\mathcal{F}_n}(T)\| < \frac{1}{n}$ . Άρα,  $\lim_n \|\Delta_{\mathcal{F}_n}(T)\| = 0$  και συνεπώς  $T = \lim_n (T - \Delta_{\mathcal{F}_n}(T))$ . Όμως για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  από την πρόταση 3.4.13 έχουμε  $T - \Delta_{\mathcal{F}_n}(T) \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F}_n))$  διότι  $\Delta_{\mathcal{F}_n}(T - \Delta_{\mathcal{F}_n}(T)) = 0$  και  $T - \Delta_{\mathcal{F}_n}(T) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_n)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Έστω ότι το  $T$  ανήκει στην κλειστή θήκη του  $\cup \{\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) : \mathcal{F} \text{ πεπερασμένο υπο-nest του } \mathcal{N}\}$ . Θα δείξουμε ότι  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ . Για

κάθε πεπερασμένο υπο-nest  $\mathcal{F}$  του  $\mathcal{N}$  έχουμε  $\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \subseteq \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$  και επειδή το  $\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$  είναι κλειστό ιδεώδες έχουμε ότι η κλειστή θήκη του  $\cup \{\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) : \mathcal{F} \text{ πεπερασμένο υπο-nest του } \mathcal{N}\}$  περιέχεται στο  $\text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ . Άρα,  $T \in \text{rad}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ .  $\square$



## Κεφάλαιο 4

# Το ριζικό Jacobson ενός Ημισταυρωτού Γινομένου

### 4.1 Κατασκευή Ημισταυρωτού Γινομένου

Υπάρχει μια πλούσια αλληλεπίδραση μεταξύ των αλγεβρών τελεστών και των δυναμικών συστημάτων την οποία πρώτοι έφεραν στο φώς με το έργο τους οι Murray και von Neumann στη δεκαετία του 1930. Τα σταυρωτά γινόμενα εξακολουθούν να παρέχουν θεμελιώδη παραδείγματα αλγεβρών von Neumann και  $C^*$ -αλγεβρών. Σχετικά πρόσφατα, ο Arveson [2] το 1967 εισήγαγε μια κατασκευή ενός μη αυτοσυζυγούς σταυρωτού γινομένου που ονομάζεται ημισταυρωτό γινόμενο το οποίο έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα να κωδικοποιεί όλες τις πληροφορίες για το δυναμικό σύστημα.

Η κατασκευή αρχίζει με ένα δυναμικό σύστημα  $(X, \phi)$ , δηλαδή έναν τοπικά συμπαγή Hausdorff χώρο  $X$  και μια συνεχή, γνήσια και επί απεικόνιση  $\phi: X \rightarrow X$ . Τα στοιχεία του  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  είναι της μορφής  $\sum_{n \geq 0} U^n f_n$ . Ορίζοντας πολλαπλασιασμό στο  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  το ημισταυρωτό γινόμενο  $C_0(X) \times_{\phi} \mathbb{Z}^+$  είναι μια κατάλληλη πλήρωση της άλγεβρας  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ . Η ιδιότητα που αναφέρθηκε παραπάνω είναι ότι δύο ημισταυρωτά γινόμενα είναι ισομορφικά ως άλγεβρες αν και μόνον αν τα αντίστοιχα δυναμικά συστήματα είναι τοπολογικά συζυγή, το οποίο οφείλεται στους Davidson-Katsoulis [8].

Το αρχικό έργο του Arveson [2] ήταν για ασθενώς κλειστές άλγεβρες τελεστών και οι Arveson και Josephson στο [4] έδωσαν μια επέκταση σε *norm*-κλειστές άλγεβρες τελεστών. Επίσης, έθεσαν το πρόβλημα αν τα ημισταυρωτά γινόμενα είναι πάντα ημιαπλά. Αυτό το πρόβλημα ώθησε αρκετά προς την μελέτη της δομής των ιδεωδών ενός ημισταυρωτού γινομένου. Ο αρχικός ορισμός του ημισταυρωτού γινομένου οφείλεται στον J. Peters [15].

Για να αναφέρουμε το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου θα πρέπει πρώτα

να ορίσουμε τα επανερχόμενα σημεία ενός δυναμικού συστήματος  $(X, \phi)$ . Ένα σημείο  $x \in X$  είναι επανερχόμενο για το  $(X, \phi)$  αν για κάθε περιοχή  $V$  του  $x$  υπάρχει  $n \geq 1$  ώστε  $\phi^n(x) \in V$ . Αν τώρα ο  $X$  είναι μετρικός χώρος, τότε ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με το να υπάρχει αποκλίνουσα ακολουθία  $(n_k)$  ώστε η  $\phi^{n_k}x$  να συγκλίνει στο  $x$ . Το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι

$$\text{rad}(C_0(X) \times_{\phi} \mathbb{Z}^+) = \left\{ \sum_{n \geq 1} U^n f_n \in C_0(X) \times_{\phi} \mathbb{Z}^+ : f_n|_{\overline{X_r}} = 0 \ \forall n \right\},$$

όπου  $X_r$  είναι το σύνολο των επανερχόμενων σημείων του  $(X, \phi)$  [9].

Για τον παραπάνω χαρακτηρισμό σημαντική ήταν η συμβολή ενός αριθμού μαθηματικών. Στο [12] ο Muhly έδωσε δύο συνθήκες, η μία για την ημιαπλότητα του ημισταυρωτού γινομένου και η άλλη για το ριζικό του ημισταυρωτού γινομένου να είναι μη μηδενικό. Η ικανή συνθήκη για μη μηδενικό ριζικό είναι το δυναμικό σύστημα  $(X, \phi)$  να έχει περιπλανώμενα σύνολα, όπου περιπλανώμενο σύνολο είναι ένα ανοικτό σύνολο  $U \subseteq X$  έτσι ώστε  $U, \phi^{-1}(U), \phi^{-2}(U), \dots$  να είναι ξένα ανά δύο.

**Σημείωση.** Στα παρακάτω θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα  $(X, \phi)$ , δηλαδή έναν τοπικά συμπαγή Hausdorff χώρο  $X$  και μια συνεχή, γνήσια και επί απεικόνιση  $\phi: X \rightarrow X$ .

**4.1.1 Πρόταση.** Έστω  $(X, \phi)$  ένα δυναμικό σύστημα. Η  $\phi$  επάγει ένα ισομετρικό \*-ενδομορφισμό  $\alpha$  του  $C_0(X)$  με  $\alpha(f) = f \circ \phi$ .

**Απόδειξη.** Αρχικά θα δείξουμε ότι είναι ενδομορφισμός. Αν  $f, g \in C_0(X)$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$  έχουμε

$$\alpha(\lambda f + g) = (\lambda f + g) \circ \phi = \lambda(f \circ \phi) + g \circ \phi = \lambda\alpha(f) + \alpha(g)$$

και

$$\alpha(fg) = (fg) \circ \phi = (f \circ \phi)(g \circ \phi) = \alpha(f)\alpha(g).$$

Επίσης, αν  $f \in C_0(X)$  έχουμε  $\alpha(f) = f \circ \phi \in C_0(X)$ . Πράγματι, αν  $f \in C_0(X)$  για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $L \subseteq X$  συμπαγές ώστε  $|f(x)| < \varepsilon$  για κάθε  $x \notin L$ , δηλαδή αν  $|f(x)| \geq \varepsilon$ , τότε  $x \in L$ . Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $K \subseteq X$  συμπαγές ώστε  $|f(\phi(x))| < \varepsilon$  για κάθε  $x \notin K$ , δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι αν  $|f(\phi(x))| \geq \varepsilon$ , τότε  $x \in K$ . Θέτουμε  $K = \phi^{-1}(L)$ . Επειδή η  $\phi$  είναι γνήσια το  $K$  είναι συμπαγές. Όμως αν  $|f(\phi(x))| \geq \varepsilon$ , τότε  $\phi(x) \in L$  και έτσι  $x \in \phi^{-1}(L) = K$ . Άρα,  $\alpha(f) \in C_0(X)$ . Επίσης, ο  $\alpha$  διατηρεί την ενέλιξη διότι για κάθε  $x \in X$  έχουμε  $\alpha(f^*)(x) = f^*(\phi(x)) = \overline{f(\phi(x))}$  και

$\alpha(f)^*(x) = \overline{f(\phi(x))}$ , δηλαδή  $\alpha(f^*) = \alpha(f)^*$ . Μένει να δείξουμε ότι είναι ισομετρία. Αν  $f \in C_0(X)$ , τότε

$$\|\alpha(f)\| = \sup_{x \in X} \|f(\phi(x))\| = \sup_{y \in X} \|f(y)\| = \|f\|,$$

επειδή η  $\phi$  είναι επί.  $\square$

**4.1.2 Ορισμός.** Ο χώρος Banach  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  αποτελείται από όλες τις ακολουθίες  $c = (c_n) = (n \mapsto c_n)$  με στοιχεία  $c_n \in C_0(X)$  οι οποίες είναι απολύτως αθροίσιμες, δηλαδή  $\sum_n \|c_n\|_{C_0(X)} < \infty$ . Γράφουμε τα στοιχεία του χώρου Banach  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  ως απολύτως συγκλίνουσες σειρές

$$c = \sum_{n \geq 0} U^n c_n$$

με νόρμα

$$\|c\|_1 = \sum_n \|c_n\|_{C_0(X)}.$$

**4.1.3 Παρατήρηση.** Ο υπόχωρος  $c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  που αποτελείται από στοιχεία με πεπερασμένο φορέα, δηλαδή στοιχεία της μορφής  $\sum_{n=0}^{n_c} U^n c_n$ , είναι  $\|\cdot\|_1$ -πυκνός στον  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ .

**4.1.4 Ορισμός.** Ορίζουμε πολλαπλασιασμό στον  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  με

$$U^n f U^m g = U^{m+n}(\alpha^m(f)g)$$

και τον επεκτείνουμε γραμμικά. Τώρα αν  $\sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n, \sum_{k=0}^{m_2} U^k g_k \in c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  έχουμε

$$\left( \sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n \right) \left( \sum_{k=0}^{m_2} U^k g_k \right) = \sum_{n=0}^{m_1} \sum_{k=0}^{m_2} U^{n+k} (\alpha^k(f_n)g_k)$$

και επειδή

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n \right) \left( \sum_{k=0}^{m_2} U^k g_k \right) \right\|_1 &\leq \sum_{n=0}^{m_1} \sum_{k=0}^{m_2} \|(\alpha^k(f_n)g_k)\| \leq \sum_{n=0}^{m_1} \sum_{k=0}^{m_2} \|f_n\| \|g_k\| = \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n \right\|_1 \left\| \sum_{k=0}^{m_2} U^k g_k \right\|_1 \end{aligned}$$

ο πολλαπλασιασμός επεκτείνεται στον  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ . Άρα, ο  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  με τον παραπάνω πολλαπλασιασμό γίνεται άλγεβρα Banach.

**4.1.5 Ορισμός.** Έστω οι χώροι Hilbert  $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$  και  $\mathcal{H}$ , όπου ο  $\mathcal{H}$  είναι τυχαίος. Ο χώρος Hilbert  $\ell^2(\mathbb{Z}^+) \otimes \mathcal{H}$  αποτελείται από όλες τις ακολουθίες  $(x_n)$  με  $x_n \in \mathcal{H}$  που είναι τετραγωνικά αθροίσσιμες, δηλαδή  $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2 < \infty$ . Τα στοιχεία του γράφονται ως  $\sum_{n \geq 0} e_n \otimes x_n$ . Ο υπόχωρος που αποτελείται από στοιχεία με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός στον  $\ell^2(\mathbb{Z}^+) \otimes \mathcal{H}$ .

**4.1.6 Πρόταση.** Η άλγεβρα Banach  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  δέχεται πιστή (1-1) αναπαράσταση η οποία είναι και συστολή στον χώρο Hilbert  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^+) \otimes H_0$ , όπου  $H_0$  είναι ένας χώρος Hilbert.

**Απόδειξη.** Έστω  $\Pi_0$  πιστή αναπαράσταση της  $C^*$ -άλγεβρας  $C_0(X)$  στο χώρο Hilbert  $H_0$ . Ορίζουμε

$$\Pi(U^n f)(e_k \otimes x) = e_{k+n} \otimes \Pi_0(\alpha^k(f))x$$

με  $n, k \in \mathbb{Z}^+$  και  $x \in H_0$ . Αρχικά θα δείξουμε ότι  $\Pi(U^n f) \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ . Επεκτείνουμε γραμμικά την  $\Pi(U^n f)$ , δηλαδή αν  $\sum_{k=0}^{n_1} e_k \otimes x_k$ , θέτουμε

$$\Pi(U^n f)\left(\sum_{k=0}^{n_1} e_k \otimes x_k\right) = \sum_{k=0}^{n_1} \Pi(U^n f)(e_k \otimes x_k) = \sum_{k=0}^{n_1} e_{k+n} \otimes \Pi_0(\alpha^k(f))x_k.$$

Έτσι αν  $\|\sum_{k=0}^{n_1} e_k \otimes x_k\| \leq 1$ , τότε

$$\begin{aligned} \|\Pi(U^n f)\left(\sum_{k=0}^{n_1} e_k \otimes x_k\right)\|^2 &= \left\|\sum_{k=0}^{n_1} e_{k+n} \otimes \Pi_0(\alpha^k(f))x_k\right\|^2 = \sum_{k=0}^{n_1} \|\Pi_0(\alpha^k(f))x_k\|^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_1} \|\Pi_0(\alpha^k(f))\|^2 \|x_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n_1} \|f\|^2 \|x_k\|^2 = \|f\|^2 \sum_{k=0}^{n_1} \|x_k\|^2 \leq \|f\|^2, \end{aligned}$$

δηλαδή  $\|\Pi(U^n f)\| \leq \|f\|$ .

Άρα, αφού ο υπόχωρος  $c_{00}(\mathbb{Z}^+, H_0)$  των στοιχείων της μορφής  $\sum_{k=0}^{n_1} e_k \otimes x_k$  είναι πυκνός στον  $\mathcal{H}$  έχουμε  $\Pi(U^n f) \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ . Επεκτείνουμε την  $\Pi$  γραμμικά: Αν  $\sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n \in c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ , θέτουμε

$$\Pi\left(\sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n\right)(e_k \otimes x_k) = \sum_{n=0}^{m_1} \Pi(U^n f_n)(e_k \otimes x_k).$$

Άρα, από την παρατήρηση 4.1.3 και από το γεγονός ότι  $\|\Pi(\sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n)\| < \infty$  επεκτείνουμε την  $\Pi$  στην άλγεβρα Banach  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ . Άρα, η  $\Pi: \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X)) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$  είναι γραμμική. Για να δείξουμε ότι η  $\Pi$  είναι πολλαπλασιαστική αρ- κεί να δείξουμε ότι είναι πολλαπλασιαστική στα μονώνυμα. Αν  $U^n f, U^m g \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ , τότε

$$\Pi(U^n f U^m g)(e_k \otimes x) = \Pi(U^{n+m} \alpha^m(f)g)(e_k \otimes x) = e_{n+m+k} \otimes \Pi_0(\alpha^k(\alpha^m(f)g))x =$$

$$e_{n+m+k} \otimes \Pi_0(\alpha^{k+m}(f)\alpha^k(g))x$$

και

$$\begin{aligned} \Pi(U^n f)\Pi(U^m g)(e_k \otimes x) &= \Pi(U^n f)(e_{k+m} \otimes \Pi_0(\alpha^k(g))x) = \\ e_{n+m+k} \otimes \Pi_0(\alpha^{k+m}(f))\Pi_0(\alpha^k(g))x &= \\ e_{n+m+k} \otimes \Pi_0(\alpha^{k+m}(f))\alpha^k(g)x. \end{aligned}$$

Αφού τα  $e_k \otimes x$  παράγουν τον  $\mathcal{H}$  έχουμε  $\Pi(U^n f U^m g) = \Pi(U^n f)\Pi(U^m g)$ . Άρα, η  $\Pi$  είναι αναπαράσταση. Τώρα θα δείξουμε ότι είναι συστολή. Αφού  $\|\Pi(U^n f)\| \leq \|U^n f\|$  αν  $a \in c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  με  $a = \sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n$ , τότε

$$\begin{aligned} \|\Pi(a)\| &= \|\Pi(\sum_{n=0}^{m_1} U^n f_n)\| = \|\sum_{n=0}^{m_1} \Pi(U^n f_n)\| \leq \sum_{n=0}^{m_1} \|\Pi(U^n f_n)\| \leq \\ \sum_{n=0}^{m_1} \|U^n f_n\|_1 &= \sum_{n=0}^{m_1} \|f_n\| = \|a\|_1. \end{aligned}$$

Άρα, η  $\Pi$  είναι συστολή στον  $c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  και άρα επεκτείνεται σε συστολή στον  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ . Μένει να δείξουμε ότι η  $\Pi$  είναι πιστή. Έστω  $a = \sum_{n \geq 0} U^n f_n \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  και  $x, y \in H_0$ . Είναι

$$\begin{aligned} \langle \Pi(a)(e_0 \otimes x), e_k \otimes y \rangle &= \langle \sum_{n \geq 0} \Pi(U^n f_n)(e_0 \otimes x), e_k \otimes y \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle \Pi(U^n f_n)(e_0 \otimes x), e_k \otimes y \rangle \\ &= \sum_{n \geq 0} \langle e_n \otimes \Pi_0(f_n)x, e_k \otimes y \rangle = \langle \Pi_0(f_k)x, y \rangle. \end{aligned}$$

Άρα,  $\|\Pi(a)\| \geq \|f_k\|$ . Έτσι αν  $\Pi(a) = 0$ , τότε  $f_k = 0$  και επειδή το  $k$  ήταν τυχαίο έχουμε  $a = 0$ . Επομένως, η  $\Pi$  είναι πιστή.  $\square$

**4.1.7 Ορισμός.** Το ημισταυρωτό γινόμενο  $\mathcal{A} = C_0(X) \times_{\phi} \mathbb{Z}^+$  ή  $C_0(X) \times_{\alpha} \mathbb{Z}^+$  είναι η κλειστή θήκη της εικόνας της αναπαράστασης της άλγεβρας Banach  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  στον  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ , δηλαδή

$$\mathcal{A} = \overline{\Pi(\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X)))}^{\|\cdot\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})}} \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H}).$$

Ταυτίζουμε την  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  με την εικόνα της στον  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ . Έπεται ότι το  $U^n f$  ορίζει φραγμένο τελεστή του  $\mathcal{H}$ .

**4.1.8 Παρατήρηση** Ο χώρος  $c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  είναι  $\|\cdot\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})}$ -πυκνός στην  $\mathcal{A}$ . Πράγματι, έχουμε  $\mathcal{A} = \overline{\Pi(\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X)))}^{\|\cdot\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})}} \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ . Άρα, αν  $T \in \mathcal{A}$  και  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $x \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  ώστε  $\|T - \Pi(x)\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Αφού  $x \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  υπάρχει  $y \in c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  ώστε  $\|x - y\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ . Άρα,

$\|T - \Pi(y)\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} = \|T - \Pi(y) + \Pi(x) - \Pi(y)\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} \leq \|T - \Pi(x)\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} + \|\Pi(x) - \Pi(y)\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} < \frac{\varepsilon}{2} + \|x - y\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Συνεπώς,  $\mathcal{A} = \overline{c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))}^{\mathbb{B}(\mathcal{H})}$ .

**4.1.9 Ορισμός.** Έστω  $t \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε απεικόνιση  $\theta_t: \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X)) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  με

$$\theta_t\left(\sum_n U^n a_n\right) = \sum_n U^n (e^{itn} a_n).$$

Επειδή  $\|\sum_{n \geq 0} U^n e^{itn} a_n\|_1 = \|\sum_{n \geq 0} U^n a_n\|_1$  η  $\theta_t$  είναι καλά ορισμένη και φραγμένη.

**4.1.10 Πρόταση.** Η απεικόνιση  $\theta_t$  του ορισμού 4.1.9 είναι ισομετρικός αυτομορφισμός στην  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ . Έπεται ότι επεκτείνεται σε ισομετρικό αυτομορφισμό της  $\mathcal{A}$ .

**Απόδειξη.** Η  $\theta_t$  είναι γραμμική και αν δείξουμε ότι είναι πολλαπλασιαστική στα μονώνυμα θα είναι πολλαπλασιαστική στην  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  και έτσι η  $\theta_t$  θα είναι ομομορφισμός. Αν  $U^n f, U^m g \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ , τότε

$$\begin{aligned} \theta_t(U^n f U^m g) &= \theta_t(U^{n+m} \alpha^m(f)g) = U^{n+m} e^{it(n+m)} \alpha^m(f)g = \\ &= \theta_t(U^n) \theta_t(U^m g), \end{aligned}$$

και έτσι είναι πολλαπλασιαστική στα μονώνυμα. Επίσης, είναι επιμορφισμός διότι αν  $\sum_n U^n a_n \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ , τότε υπάρχει  $\sum_n U^n e^{-itn} a_n \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  ώστε  $\theta_t(\sum_n U^n e^{-itn} a_n) = \sum_n U^n a_n$ . Τώρα αν  $\sum_n U^n a_n \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  έχουμε  $\|\theta_t(\sum_n U^n a_n)\|_1 = \|\sum_n U^n e^{itn} a_n\|_1 = \sum_n \|e^{itn} a_n\| = \sum_n \|a_n\| = \|\sum_n U^n a_n\|_1$ . Άρα, η  $\theta_t$  είναι ισομετρία. Επομένως, η  $\theta_t$  είναι ισομετρικός αυτομορφισμός της  $\ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ .

Θα δείξουμε τώρα ότι επεκτείνεται σε ισομετρικό αυτομορφισμό της  $\mathcal{A}$ . Γράφουμε  $z = e^{it}$  για συντομία. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$V_z: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}: \sum_{m=0}^{\infty} e_m \otimes x_m \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} z^m e_m \otimes x_m$$

που προφανώς είναι ισομετρία επί. Κατά συνέπεια η απεικόνιση

$$T \rightarrow V_z T V_z^*: \mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

είναι ισομετρία.

Παρατηρούμε όμως ότι, αν  $A = \sum_n U^n f_n$ , τότε  $\theta_t(A) = V_z A V_z^*$ . Πράγματι, για κάθε  $\xi = \sum_k e_k \otimes x_k$  έχουμε

$$\theta_t(A)\xi = \sum_{n,k} z^n e_{k+n} \otimes \alpha^k(f_n) x_k V_z A V_z^*(\xi) = V_z A \sum_k z^{-k} e_k \otimes x_k$$

$$\begin{aligned}
&= V_z \sum_{n,k} z^{-k} e_{k+n} \otimes \alpha^k(f_n) x_k = \sum_{n,k} z^{-k} V_z e_{k+n} \otimes \alpha^k(f_n) x_k \\
&= \sum_{n,k} z^{-k} z^{n+k} e_{k+n} \otimes \alpha^k(f_n) x_k = \sum_{n,k} z^n e_{k+n} \otimes \alpha^k(f_n) x_k \\
&= \left( \sum_n z^n U^n f_n \right) \left( \sum_k e_k \otimes x_k \right) = \theta_t(A) \xi.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι  $\|\theta_t(A)\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} = \|V_z A V_z^*\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} = \|A\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})}$  για κάθε  $A \in c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  και συνεπώς η  $\theta_t$  επεκτείνεται σε ισομετρία από την  $\mathcal{A}$  στην  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**4.1.11 Πρόταση.** Για κάθε  $A \in \mathcal{A}$  η απεικόνιση  $t \rightarrow \theta_t(A) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  είναι συνεχής ως προς την νόρμα της  $\mathcal{A}$ .

**Απόδειξη.** Θέτουμε  $A = U^n f$ . Έχουμε ότι  $\|\theta_t(A) - \theta_s(A)\| \leq n|t - s| \|A\|$  διότι  $\|\theta_t(A) - \theta_s(A)\| = \|U^n e^{itn} f - U^n e^{isn} f\| = |e^{itn} - e^{isn}| \|A\|$  και  $|e^{itn} - e^{isn}|^2 = |(\cos(tn) - \cos(sn)) + i(\sin(tn) - \sin(sn))|^2 = 2 - 2\cos((t-s)n) = 4\sin^2(n(\frac{t-s}{2})) \leq 4\frac{n^2|t-s|^2}{4} = n^2|t-s|^2$ , δηλαδή  $|e^{itn} - e^{isn}| \leq n|t-s|$ . Άρα, για  $A = U^n f$  η  $t \rightarrow \theta_t(A)$  είναι συνεχής. Συνεπώς, θα είναι συνεχής και για  $A = \sum_{n=0}^{n_c} U^n f_n \in c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$ . Έστω  $A \in \mathcal{A}$ . Άρα, υπάρχει ακολουθία  $(A_i)$  στην  $c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  τέτοια ώστε  $\|A_i - A\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$  και έτσι  $\|\theta_t(A_i) - \theta_t(A)\|_{\mathcal{A}} = \|A_i - A\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$  ομοιόμορφα ως προς  $t$ . Αφού η απεικόνιση  $t \rightarrow \theta_t(A)$  είναι ομοιόμορφο όριο ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων θα είναι συνεχής συνάρτηση.  $\square$

**4.1.12 Ορισμός.** Για  $A = \sum U^n a_n \in \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  ορίζουμε  $E_n(A) = a_n$ . Το  $E_n$  καλείται *n-οστός συντελεστής Fourier* του  $A$ . Η  $E_n : \ell^1(\mathbb{Z}^+, C_0(X)) \rightarrow C_0(X)$  είναι συστολή με την νόρμα της  $\mathcal{A}$  επειδή από την πρόταση 4.1.6 έχουμε  $\|a_n\|_{C_0(X)} \leq \|A\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})}$  και έτσι επεκτείνεται σε συστολή  $E_n : \mathcal{A} \rightarrow C_0(X)$ .

**4.1.13 Πρόταση.** Για τους συντελεστές Fourier ενός  $A \in \mathcal{A}$  έχουμε ότι

$$U^m E_m(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_t(A) e^{-imt} dt,$$

όπου το ολοκλήρωμα μπορεί να ορισθεί ως το  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ -όριο των μερικών αθροισμάτων και αυτό διότι η απεικόνιση  $t \rightarrow \theta_t(A) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  είναι συνεχής ως προς την νόρμα της  $\mathcal{A}$ .

**Απόδειξη.** Αν  $A = \sum_{n=0}^k U^n a_n$  έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_t(A) e^{-imt} dt = \sum_{n=0}^k U^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \right) a_n = U^m E_m(A).$$

Επίσης, αν  $A \in \mathcal{A}$ , τότε υπάρχει ακολουθία  $(A_i)$  στην  $c_{00}(\mathbb{Z}^+, C_0(X))$  τέτοια ώστε  $\|A_i - A\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$  και έτσι  $\|\theta_t(A_i) - \theta_t(A)\|_{\mathcal{A}} = \|A_i - A\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$  ομοιόμορφα ως προς  $t$  και έτσι έπεται ότι  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_t(A_i) e^{-imt} dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_t(A) e^{-imt} dt$ .  $\square$

#### 4.1.14 Παρατήρηση Θέτουμε

$$\sigma_n(A) = \sum_{m=0}^n U^m \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) E_m(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^n \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) \theta_t(A) e^{-imt} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_t(A) K_n(t) dt,$$

όπου  $(K_n)$  είναι ο πυρήνας Fejer. Από το θεώρημα Fejer έχουμε

$$\|\sigma_n(A) - A\| \rightarrow 0.$$

Πράγματι, αν  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{A}$  με  $f(t) = \theta_t(A)$  έχουμε  $\sigma_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_t(A) K_n(t) dt$  και από το θεώρημα Fejer το  $\sigma_n(f)(0)$  συγκλίνει στο  $f(0) = A$ .

Έτσι οι συντελεστές Fourier ενός  $A \in \mathcal{A}$  καθορίζουν μοναδικά τον  $A$  διότι αν όλοι οι συντελεστές Fourier του  $A$  είναι μηδέν έχουμε  $\sigma_n(A) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και συνεπώς  $A = \lim_n \sigma_n(A) = 0$ .

**4.1.15 Πρόταση.** Έστω  $J \subseteq \mathcal{A}$  κλειστό και αναλλοίωτο από αυτομορφισμούς της  $\mathcal{A}$  ιδεώδες της  $\mathcal{A}$ . Αν  $A = \sum_{n \geq 0} U^n E_n(A) \in \mathcal{A}$ , τότε  $A = \sum_{n \geq 0} U^n E_n(A)$  ανήκει στο  $J$  αν και μόνον αν κάθε  $U^n E_n(A)$  ανήκει στο  $J$ .

**Απόδειξη.** Αν  $A = \sum_{n \geq 0} U^n E_n(A)$  ανήκει στο  $J$  και  $m \in \mathbb{Z}^+$ , τότε  $\theta_t(A) \in J$  και συνεπώς  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_t(A) e^{-imt} dt \in J$ , δηλαδή  $U^m E_m(A) \in J$ .

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι κάθε  $U^n E_n(A)$  ανήκει στο  $J$ . Όμως  $\|\sigma_n(A) - A\| \rightarrow 0$ ,  $\sigma_n(A) \in J$  και το  $J$  είναι κλειστό. Άρα,  $A \in J$ .  $\square$

## 4.2 Επανερχόμενα σημεία

**Σημείωση.** Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{A}$  το ημισταυρωτό γινόμενο  $C_0(X) \times_{\phi} \mathbb{Z}^+$  (ή  $C_0(X) \times_{\alpha} \mathbb{Z}^+$ ).

**4.2.1 Ορισμός.** Ένα σημείο  $x \in X$  καλείται *επανερχόμενο* σημείο για το δυναμικό σύστημα  $(X, \phi)$  αν για κάθε περιοχή  $U$  του  $x$  υπάρχει  $n \geq 1$  ώστε  $\phi^n(x) \in U$ .



**4.2.2 Ορισμός.** Έστω ακολουθία  $\mathbf{n} = (n_k) \subseteq \mathbb{Z}^+$ . Καλούμε σύνολο των εκθετών της  $\mathbf{n}$  και συμβολίζουμε αυτό με  $\mathcal{S}(\mathbf{n})$  το σύνολο  $\mathcal{S}(\mathbf{n}) = \cup_{i \geq 0} S_i$  με  $S_0 = \{0\}, S_1 = \{n_1\}$  και

$$S_{k+1} = \{n_{k+1} + m_k + j : j \in \cup_{i=0}^k S_i\},$$

όπου  $m_k = \max S_k$ .

**4.2.3 Πρόταση.** Αν  $x$  είναι ένα επανερχόμενο σημείο για το  $(X, \phi)$ , τότε για κάθε περιοχή  $V$  του  $x$  και κάθε  $l \in \mathbb{Z}^+$  υπάρχει μια ακολουθία  $\mathbf{n} = (n_k) \subseteq \mathbb{Z}^+$  με  $n_k \geq l$  για κάθε  $k$  τέτοια ώστε  $\phi^s(x) \in V$  για κάθε  $s$  στο σύνολο των εκθετών  $\mathcal{S}(\mathbf{n})$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $x$  ένα επανερχόμενο σημείο για το  $(X, \phi)$ ,  $V$  περιοχή του  $x$  και  $l \in \mathbb{Z}^+$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία  $\mathbf{n} = (n_k) \subseteq \mathbb{Z}^+$  με  $n_k \geq l$  για κάθε  $k$  τέτοια ώστε  $\phi^s(x) \in V$  για κάθε  $s \in \mathcal{S}(\mathbf{n})$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν το  $x$  είναι περιοδικό για την  $\phi$ , δηλαδή  $\phi^p(x) = x$  για κάποιο  $p$ , τότε επιλέγοντας τα  $n_k$  να είναι πολλαπλάσια του  $p$  και τέτοια ώστε  $n_k \geq l$  για κάθε  $k$  έχουμε  $\phi^s(x) \in V$  διότι κάθε  $s$  στο σύνολο των εκθετών  $\mathcal{S}(\mathbf{n})$  θα είναι πολλαπλάσιο του  $p$ .

Υποθέτουμε τώρα ότι το  $x$  δεν είναι περιοδικό σημείο για την  $\phi$ . Αρχικά θα κατασκευάσουμε ακολουθία ακεραιών  $(n_k)$  με  $n_k \geq l$  και ακολουθία  $V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \dots$  περιοχών του  $x$  ώστε για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  να έχουμε  $\phi^{n_k+m_{k-1}}(V_k) \subseteq V_{k-1}$ . Θέτουμε  $V_0 = V$ . Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει  $V_{k-1} \subseteq V_{k-2} \subseteq \dots \subseteq V$  περιοχές του  $x$  και ακέραιους  $n_i \geq l$  για  $i < k$  για τα οποία να ισχύει η ζητούμενη σχέση. Έχουμε  $\phi^{n_{k-1}+m_{k-2}}(V_{k-1}) \subseteq V_{k-2}$ . Αφού τα μονοσύνολα είναι κλειστά παρατηρούμε ότι το  $V_{k-1} \setminus \{\phi(x), \dots, \phi^{m_{k-1}+l-1}(x)\}$  είναι περιοχή του  $x$ . Άρα, υπάρχει  $n_k \in \mathbb{Z}^+$  ώστε  $n_k \geq l$  και  $\phi^{n_k+m_{k-1}}(x) \in V_{k-1}$ . Έτσι από την συνέχεια της  $\phi$  υπάρχει ανοικτή περιοχή  $V_k$  του  $x$  που περιέχεται στο  $V_{k-1}$  ώστε  $\phi^{n_k+m_{k-1}}(V_k) \subseteq V_{k-1}$ . Τώρα ισχυριζόμαστε ότι  $\phi^s(V_k) \subseteq V$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}^+$  και  $s \in \cup_{i=0}^k S_i$ . Θα το δείξουμε με επαγωγή στο  $k$ . Για  $k = 0$  έχουμε  $s = 0$  και έτσι  $\phi^0(V_0) \subseteq V$ . Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για  $k < l$ . Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει  $\phi^s(V_l) \subseteq V$  για  $s \in S_l$  διότι αν  $s \in S_i$  για  $i < l$  έχουμε  $\phi^s(V_l) \subseteq \phi^s(V_{l-1}) \subseteq V$ . Αφού  $s \in S_l$  θα είναι της μορφής  $s = n_l + m_{l-1} + j$  για  $j \in \bigcup_{i=0}^{l-1} S_i$ . Έτσι

$$\phi^s(V_l) = \phi^j(\phi^{n_l+m_{l-1}}(V_l)) \subseteq \phi^j(V_{l-1}) \subseteq V$$

από την επαγωγική υπόθεση και την σχέση  $\phi^{n_l+m_{l-1}}(V_l) \subseteq V_{l-1}$  της προηγούμενης κατασκευής. Από τον ισχυρισμό αυτό έπεται το ζητούμενο καθώς αν  $s \in \mathcal{S}(\mathbf{n})$  θα περιέχεται σε κάποιο  $S_k$  και αφού  $x \in V_k$  έχουμε  $\phi^s(x) \in V$ .  $\square$

**4.2.4 Λήμμα.** Έστω  $f \in C_0(X)$  και  $x$  επανερχόμενο σημείο του  $(X, \phi)$ . Αν  $f(x) \neq 0$ , τότε  $U^l f \notin \text{rad}(\mathcal{A})$ , για κάθε  $l \in \mathbb{Z}^+$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $f \in C_0(X)$ ,  $l \in \mathbb{Z}^+$  και  $f(x) \neq 0$ , όπου  $x$  επανερχόμενο σημείο του  $(X, \phi)$ . Θα δείξουμε ότι  $U^l f \notin \text{rad}(\mathcal{A})$ . Υποθέτουμε ότι  $U^l f \in \text{rad}(\mathcal{A})$ . Από την συνέχεια της  $f$  και από το γεγονός ότι ο χώρος  $X$  είναι τοπικά συμπαγής έχουμε ότι υπάρχει ανοικτό σχετικά συμπαγές σύνολο  $V$  ώστε πολλαπλασιάζοντας την  $f$  με κατάλληλη θετική σταθερά να έχουμε  $|f(y)| \geq 1$  για κάθε  $y \in V$ . Επειδή  $U^l |f|^2 = (U^l f) f^* \in \text{rad}(\mathcal{A})$  μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $f \geq 0$  και  $f(y) \geq 1$  για κάθε  $y \in V$ . Επειδή το  $x$  είναι επανερχόμενο σημείο του  $(X, \phi)$  από την πρόταση 4.2.3 υπάρχει μια ακολουθία  $\mathbf{n} = (n_k) \subseteq \mathbb{Z}^+$  με  $n_k \geq l$  για κάθε  $k$  τέτοια ώστε  $\phi^s(x) \in V$  για κάθε  $s$  στο σύνολο των εκθετών  $\mathcal{S}(\mathbf{n})$ . Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει μη αρνητική συνεχής συνάρτηση  $h \in C_0(X)$  ώστε  $h(\phi^l(y)) = 1$  για κάθε  $y \in V$ . Θεωρούμε τώρα το στοιχείο

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} U^{n_k-l} \frac{h}{2^{k-1}}.$$

Επειδή η σειρά συγκλίνει απολύτως έχουμε ότι το  $B$  είναι στοιχείο του  $\mathcal{A}$ . Για το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι το στοιχείο  $A = BU^l f$  έχει γνήσια θετική φασματική ακτίνα. Παρατηρούμε ότι

$$A = \sum U^{n_k} \frac{f(h \circ \phi^l)}{2^{k-1}} = \sum U^{n_k} \frac{g}{2^{k-1}},$$

όπου  $g = f(h \circ \phi^l)$ . Αφού  $f(y) \geq 1$  και  $h(\phi^l(y)) = 1$  για κάθε  $y \in V$  έχουμε  $g(y) \geq 1$  για κάθε  $y \in V$ . Επειδή κάθε συντελεστής Fourier  $E_n(A^m)$  του  $A^m$  είναι πεπερασμένο άθροισμα μη αρνητικών συναρτήσεων έπεται ότι η νόρμα κάθε συντελεστή Fourier  $E_n(A^m)$  θα είναι μεγαλύτερη από την νόρμα κάθε προσθετέου του αθροίσματος. Επίσης,  $\|A^{2^{k-1}}\| \geq \|E_n(A^{2^{k-1}})\|$  διότι κάθε  $E_n$  είναι συστολή. Άρα, για να δείξουμε ότι το στοιχείο  $A = BU^l f$  έχει γνήσια θετική φασματική ακτίνα αρκεί να βρούμε  $\varepsilon > 0$  ώστε για κάθε  $k$  να υπάρχει  $n$  ώστε η νόρμα κάποιου προσθετέου του  $E_n(A^{2^{k-1}})$  να είναι μεγαλύτερη από  $\varepsilon^{2^{k-1}}$ . Έχουμε

$$A^3 = A \left( \sum U^{n_k} \frac{g}{2^{k-1}} \right) A = \sum A \left( U^{n_k} \frac{g}{2^{k-1}} \right) A.$$

Ένας όρος της σειράς αυτής είναι

$$P_2 = U^{n_1} g \left( U^{n_2} \frac{g}{2} \right) U^{n_1} g.$$

Επίσης, ένας όρος της σχέσης  $A^7 = A^3 A A^3$  είναι  $P_3 = P_2 \left( U^{n_3} \frac{g}{2^2} \right) P_2$  και γενικά ένας όρος της σχέσης  $A^{2^k-1} = A^{2^{k-1}-1} A A^{2^{k-1}-1}$  είναι

$$P_k = P_{k-1} \left( U^{n_k} \frac{g}{2^{k-1}} \right) P_{k-1}.$$

Τώρα ισχυριζόμαστε ότι αν  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_{k+1} = \lambda_k^2/2^k$ , τότε θέτοντας  $P_1 = U^{n_1}g$ , έχουμε

$$P_k = U^{m_k} \lambda_k \left( \prod_s g \circ \phi^s \right),$$

όπου  $m_k$  είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του  $\cup_{i=0}^k S_i$  και το γινόμενο εξαρτάται από το  $s \in (\cup_{i=0}^k S_i) \setminus \{m_k\}$ . Θα το δείξουμε με επαγωγή στο  $k$ . Για  $k = 1$  επειδή  $(S_0 \cup S_1) \setminus \{m_1\} = \{0\}$  έχουμε  $P_1 = U^{n_1}g$ . Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει για κάποιο  $k$ . Έχουμε

$$P_{k+1} = P_k \left( U^{n_{k+1}} \frac{g}{2^k} \right) P_k = U^{m_k} \lambda_k \left( \prod_s g \circ \phi^s \right) \left( U^{n_{k+1}} \frac{g}{2^k} \right) U^{m_k} \lambda_k \left( \prod_t g \circ \phi^t \right),$$

όπου  $s, t \in (\cup_{i=0}^k S_i) \setminus \{m_k\}$ . Έτσι

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= U^{m_k} \frac{\lambda_k^2}{2^k} \left( \prod_s g \circ \phi^s \right) U^{m_k+n_{k+1}} (g \circ \phi^{m_k}) \left( \prod_t g \circ \phi^t \right) \\ &= U^{2m_k+n_{k+1}} \frac{\lambda_k^2}{2^k} \left( \prod_s g \circ \phi^{s+n_{k+1}+m_k} \right) (g \circ \phi^{m_k}) \left( \prod_t g \circ \phi^t \right) \\ &= U^{2m_k+n_{k+1}} \frac{\lambda_k^2}{2^k} \left( \prod_{s'} g \circ \phi^{s'} \right) \left( \prod_{t'} (g \circ \phi^{t'}) \right) U^{2m_k+n_{k+1}}, \end{aligned}$$

όπου  $t' \in (\cup_{i=0}^k S_i)$  και  $s' \in \{n_{k+1} + m_k + s\}$  για  $s \in (\cup_{i=0}^k S_i) \setminus \{m_k\}$ , δηλαδή  $s' \in S_{k+1} \setminus \{m_{k+1}\}$ . Συνεπώς,  $P_{k+1} = U^{m_{k+1}} \lambda_{k+1} \left( \prod_s g \circ \phi^s \right)$  για  $s$  στο  $(\cup_{i=0}^{k+1} S_i) \setminus \{m_{k+1}\}$ . Έτσι αποδείχθηκε ο ισχυρισμός.

Για κάθε  $s \in (\cup_{i=0}^{k+1} S_i) \setminus \{m_{k+1}\}$  έχουμε  $\phi^s(x) \in V$  και έτσι  $\|g \circ \phi^s\| \geq |g(\phi^s(x))| \geq 1$  για κάθε  $s$ , καθώς  $g|_V \geq 1$ . Από τον ισχυρισμό έπεται ότι  $\|P_k\| \geq \lambda_k$  και έτσι

$$\|A^{2^{k-1}}\| \geq \|E_n(A^{2^{k-1}})\| \geq \|P_k\| \geq \lambda_k.$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε  $\lambda_k \geq (\frac{1}{2})^{2^k-1}$  ή ισοδύναμα  $\log_2 \lambda_k^{-1} \leq 2^k - 1$  για κάθε  $k$ . Θέτοντας  $\mu_k = \log_2 \lambda_k^{-1}$  από τις σχέσεις  $\lambda_{k+1} = \lambda_k^2/2^k$  και  $\lambda_1 = 1$  έχουμε  $\mu_{k+1} = 2\mu_k + k$  και  $\mu_1 = 0$ . Συνεπώς,  $\mu_k = 2^k - k - 1$  και έτσι  $\mu_k \leq 2^k - 1$  για κάθε  $k$ .  $\square$

## 4.3 Περιπλανώμενα σύνολα και Ημιαπλότη- τα

**4.3.1 Ορισμός.** (1) Ένα ανοικτό σύνολο  $V \subset X$  καλείται *περιπλανώμενο* αν τα  $V, \phi^{-1}(V), \phi^{-2}(V), \dots$  είναι ξένα ανά δύο.

(2) Ένα σημείο του  $X$  καλείται *περιπλανώμενο* αν έχει περιοχή που είναι περιπλανώμενο σύνολο.

**4.3.2 Λήμμα.** Αν  $V \subseteq X$  είναι ένα σχετικά συμπαγές περιπλανώμενο σύνολο και  $g \in C_0(X)$  μια μη μηδενική συνάρτηση που φέρεται στο  $V$ , τότε το  $Ug$  παράγει ένα μη μηδενικό μηδενοδύναμο ιδεώδες της  $\mathcal{A}$ .

**Απόδειξη.** Θέτουμε  $\mathcal{A}_0$  την πυκνή υπάλγεβρα της  $\mathcal{A}$  που αποτελείται από πολυώνυμα του  $U$ . Αν  $B = Ug$ , τότε για κάθε στοιχείο της μορφής  $C = U^k h$  έχουμε

$$BCB = UgU^k hUg = UgU^{k+1}\alpha(h)g = U^{k+2}\alpha^{k+1}(g)\alpha(h)g$$

το οποίο είναι μηδέν αφού η  $g$  φέρεται στο  $V$  ενώ το  $\alpha^{k+1}(g)$  φέρεται στο  $\phi^{-k-1}(V)$  και  $\phi^{-k-1}(V) \cap V = \emptyset$  διότι το  $V$  είναι περιπλανώμενο σύνολο. Αν τώρα  $a, b, c, d \in \mathcal{A}_0$  έχουμε  $(aBb)(cBd)$  είναι άθροισμα γινομένων μονωνύμων τα οποία από τον προηγούμενο υπολογισμό είναι μηδέν. Άρα,  $(\mathcal{A}_0 B \mathcal{A}_0)^2 = 0$  και έτσι  $(ABA)^2 = 0$ , δηλαδή το ιδεώδες  $ABA$  είναι μηδενοδύναμο. Επίσης, το  $ABA$  είναι ιδεώδες της  $\mathcal{A}$  καθώς είναι γραμμικός υπόχωρος και αν  $A, C, D \in \mathcal{A}$  έχουμε  $(ABC)D = AB(CD) \in ABA$  και  $D(ABC) = (DA)BC \in ABA$ . Μένει να δείξουμε ότι το ιδεώδες  $ABA$  είναι μη μηδενικό. Από το λήμμα του Urysohn υπάρχουν  $f, h \in C_0(X)$  ώστε  $f = 1$  στο  $\phi^{-1}(V)$  και  $h = 1$  στο  $\phi(V)$ . Άρα,  $Uh(Ug)Uf = U^3\alpha(g) \neq 0$  και έτσι το  $ABA$  είναι μη μηδενικό.  $\square$

**4.3.3 Πρόταση.** Υποθέτουμε ότι ο  $X$  είναι τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και  $\phi: X \rightarrow X$  συνεχής και γνήσια. Αν το  $(X, \phi)$  δεν έχει περιπλανώμενα σύνολα, τότε τα επανερχόμενα σημεία είναι πυκνά στο  $X$ .

**Απόδειξη.** Αφού ο χώρος είναι τοπικά συμπαγής αρκεί να δείξουμε ότι αν  $V$  είναι τυχαίο μη κενό σχετικά συμπαγές ανοικτό σύνολο θα περιέχει επανερχόμενο σημείο. Από την υπόθεση αφού το  $V$  είναι μη περιπλανώμενο σύνολο υπάρχει φυσικός  $n_1 > 0$  ώστε  $\phi^{-n_1}(V) \cap V \neq \emptyset$ . Άρα, υπάρχει μη κενό σχετικά συμπαγές ανοικτό σύνολο  $V_1$  με  $\text{diam}(V_1) < 1$  ώστε  $\overline{V_1} \subseteq \phi^{-n_1}(V) \cap V$ . Επειδή τώρα το  $V_1$  είναι μη περιπλανώμενο σύνολο υπάρχει φυσικός  $n_2 > 0$  με  $n_2 \geq n_1$  ώστε  $\phi^{-n_2}(V_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ . Επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθία ανοικτών συνόλων  $V_k$  και αύξουσα ακολουθία φυσικών  $(n_k)$  ώστε  $\overline{V_k} \subseteq \phi^{-n_k}(V_{k-1}) \cap V_{k-1}$  και  $\text{diam}(V_k) < \frac{1}{k}$ . Όλα τα  $\overline{V_k}$  περιέχονται στο συμπαγή μετρικό χώρο  $\overline{V}$  και επειδή η ακολουθία  $\{V_k\}$  είναι φθίνουσα με  $\text{diam}(V_k) \rightarrow 0$  από το θεώρημα του

Cantor έχουμε  $\bigcap_{n \geq 1} \overline{V_n} = \{x\}$ , για κάποιο  $x \in \overline{V}$ . Επειδή  $x \in \overline{V_k} \subseteq \phi^{-n_k}(V_{k-1})$  έχουμε  $\phi^{n_k}(x) \in V_{k-1}$  για κάθε  $k$  και έτσι  $\phi^{n_k}(x) \rightarrow x$ . Άρα, το  $x$  είναι επανερχόμενο και είναι στοιχείο του  $V$ .  $\square$

**4.3.4 Παρατήρηση.** Το ριζικό Jacobson του ημισταυρωτού γινομένου  $\mathcal{A}$  είναι κλειστό αφού η  $\mathcal{A}$  είναι πλήρης. Επίσης, είναι αναλλοίωτο από αυτομορφισμούς της  $\mathcal{A}$ . Πράγματι, αν  $A \in \text{rad}(\mathcal{A})$  και  $\theta$  αυτομορφισμός της  $\mathcal{A}$ , τότε  $\theta(A) \in \text{rad}(\mathcal{A})$  αφού για κάθε  $q \in \mathcal{A}$  έχουμε  $r_{\mathcal{A}}(Aq) = 0$  και έτσι  $r_{\mathcal{A}}(\theta(A)q) = r_{\mathcal{A}}(\theta(A)\theta(q_1)) = r_{\mathcal{A}}(\theta(Aq_1)) \leq r_{\mathcal{A}}(Aq_1) = 0$ .

**4.3.5 Θεώρημα.** Αν  $X$  τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος, τότε τα επανερχόμενα σημεία είναι πυκνά στο  $X$  αν και μόνον αν η  $\mathcal{A}$  είναι ημιαπλή.

**Απόδειξη.** Έστω ότι τα επανερχόμενα σημεία είναι πυκνά στο  $X$ . Θα αποδείξουμε ότι η  $\mathcal{A}$  είναι ημιαπλή. Αν  $f \in C_0(X)$  και  $U^l f \in \text{rad}(\mathcal{A})$ , με  $l \in \mathbb{Z}^+$  από το λήμμα 4.2.4 έχουμε  $f = 0$  στα επανερχόμενα σημεία και επειδή η  $f$  είναι συνεχής έχουμε  $f = 0$  στο  $X$ . Επίσης, ένα στοιχείο  $\sum_n U^n f_n$  της  $\mathcal{A}$  ανήκει στο  $\text{rad}(\mathcal{A})$  αν και μόνον αν κάθε  $U^n f_n$  ανήκει στο  $\text{rad}(\mathcal{A})$ . Έτσι  $\text{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$ , δηλαδή η  $\mathcal{A}$  είναι ημιαπλή.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι η  $\mathcal{A}$  είναι ημιαπλή. Θα δείξουμε ότι τα επανερχόμενα σημεία είναι πυκνά στο  $X$ . Από την πρόταση 4.3.3 αρκεί να δείξουμε ότι το  $(X, \phi)$  δεν έχει περιπλανώμενα σύνολα. Έστω ότι υπάρχει περιπλανώμενο σύνολο  $V$ . Αφού ο χώρος είναι τοπικά συμπαγής μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $V$  είναι σχετικά συμπαγές περιπλανώμενο σύνολο. Αν τώρα  $g \in C_0(X)$  μια μη μηδενική συνάρτηση που φέρεται στο  $V$  από το λήμμα 4.3.2 έχουμε ότι το  $Ug$  παράγει ένα μη μηδενικό μηδενοδύναμο ιδεώδες  $I$  της  $\mathcal{A}$ . Όμως  $I \subseteq \text{rad}(\mathcal{A})$  και  $I$  μη μηδενικό. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η  $\mathcal{A}$  είναι ημιαπλή.  $\square$

## 4.4 Χαρακτηρισμός του ριζικού Jacobson ενός Ημισταυρωτού Γινομένου

**Σημείωση.** Στις προτάσεις 4.4.1 μέχρι και 4.4.5 θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα  $(X, \phi)$  με  $X$  μετρικό χώρο,  $\phi$  συνεχή και γνήσια και  $X_r$  τα επανερχόμενα σημεία του  $(X, \phi)$ .

**4.4.1 Πρόταση.** Το  $\overline{X_r}$  είναι το μεγαλύτερο κλειστό αναλλοίωτο υποσύνολο του  $X$  που δεν περιέχει περιπλανώμενα σημεία.

**Απόδειξη.** Έχουμε ότι το  $\overline{X_r}$  είναι κλειστό. Επίσης είναι αναλλοίωτο υποσύνολο του  $X$  διότι αν  $x \in X_r$  υπάρχει  $(n_k)$  ώστε  $\phi^{n_k}(x) \rightarrow x$  και αν  $y = \phi(x)$  έχουμε  $\phi^{n_k+1}(y) = \phi(\phi^{n_k}(x)) \rightarrow y$  και έτσι  $y \in X_r$ . Άρα, το  $X_r$  είναι αναλλοίωτο και επειδή η  $\phi$  είναι συνεχής το  $\overline{X_r}$  είναι αναλλοίωτο. Επίσης, δεν περιέχει

περιπλανώμενα σημεία γιατί αν είχε  $x \in X$  περιπλανώμενο σημείο θα υπήρχε περιοχή  $V$  του  $x$  η οποία θα ήταν περιπλανώμενο σύνολο και έτσι  $\phi^{-n}(V) \cap V = \emptyset$ , για κάθε φυσικό  $n$ . Αφού το  $x$  είναι όριο επανερχόμενων σημείων η περιοχή  $V$  θα περιέχει τουλάχιστον ένα, έστω  $y$ . Τότε από τον ορισμό του επανερχόμενου σημείου υπάρχει φυσικός  $n$  με  $\phi^n(y) \in V$  και έτσι  $y \in \phi^{-n}(V) \cap V$ . Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς έχουμε υποθέσει ότι το  $V$  είναι περιπλανώμενο σύνολο.

Μένει να δείξουμε ότι το  $\overline{X_r}$  είναι το μεγαλύτερο από τα κλειστά αναλλοίωτα υποσύνολο του  $X$  που δεν περιέχουν περιπλανώμενα σημεία. Έστω  $Y \subseteq X$  κλειστό αναλλοίωτο υποσύνολο που δεν περιέχει περιπλανώμενα σημεία. Θα δείξουμε ότι  $Y \subseteq \overline{X_r}$ . Αφού το  $Y$  δεν έχει περιπλανώμενα σημεία από την πρόταση 4.3.3 έχουμε ότι το  $Y_r$  είναι πυκνό στο  $Y$ , όπου  $Y_r$  είναι το σύνολο των επανερχόμενων σημείων του  $(Y, \phi|_Y)$ . Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι  $Y_r \subseteq X_r$ . Αν  $y \in Y_r$  και  $V$  περιοχή του  $y$  στο  $X$ , τότε υπάρχει φυσικός  $n$  με  $\phi^n(y) \in V \cap Y$ , δηλαδή  $\phi^n(y) \in V$ . Συνεπώς,  $y \in X_r$  και έτσι  $Y_r \subseteq X_r$ .  $\square$

**4.4.2 Πρόταση.** Αν  $U \subseteq X$  είναι η ένωση των περιπλανώμενων υποσυνόλων του  $X$ , τότε το  $X_1 = X \setminus U$  είναι κλειστό και αναλλοίωτο.

**Απόδειξη.** Θα δείξουμε ότι το  $X_1 = X \setminus U$  είναι κλειστό και αναλλοίωτο. Το  $X_1$  είναι κλειστό ως συμπλήρωμα ανοικτού. Τώρα θα δείξουμε ότι είναι αναλλοίωτο. Αν  $x \in X_1$  θέτουμε  $y = \phi(x)$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $y \in X_1$ . Έστω  $V$  περιοχή  $y$ . Τότε το  $\phi^{-1}(V)$  είναι περιοχή του  $x$  και επειδή  $x \notin U$  υπάρχει φυσικός  $n$  ώστε  $\phi^{-n}(\phi^{-1}(V)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Τότε  $\phi^{-1}(\phi^{-n}(V) \cap V) \neq \emptyset$  και έτσι  $\phi^{-n}(V) \cap V \neq \emptyset$ , δηλαδή  $y \in X_1$ .  $\square$

**4.4.3 Ορισμός.** Αν  $U \subseteq X$  είναι η ένωση των περιπλανώμενων υποσυνόλων του  $X$  και  $X_1$  το κλειστό και αναλλοίωτο σύνολο  $X \setminus U$  θεωρούμε το δυναμικό σύστημα  $(X_1, \phi_1)$ , με  $\phi_1 = \phi|_{X_1}$ . Έστω  $X_2$  το σύνολο των μη περιπλανώμενων σημείων του  $(X_1, \phi_1)$ . Το  $X_2$  είναι κλειστό και αναλλοίωτο και έτσι θεωρούμε το δυναμικό σύστημα  $(X_2, \phi_2)$  με  $\phi_2 = \phi|_{X_2} = \phi_1|_{X_2}$ . Από την αρχή της υπερπεπερασμένης αναδρομής για διατακτικούς αριθμούς κατασκευάζουμε μια φθίνουσα οικογένεια  $(X_\gamma, \phi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  δυναμικών συστημάτων όπου αν το  $(X_\gamma, \phi_\gamma)$  έχει οριστεί, θέτουμε  $X_{\gamma+1} \subseteq X_\gamma$  το σύνολο των μη περιπλανώμενων σημείων του  $(X_\gamma, \phi_\gamma)$  και ορίζουμε  $\phi_{\gamma+1} = \phi|_{X_{\gamma+1}}$ . Αν τώρα το  $(X_\gamma, \phi_\gamma)$  έχει οριστεί για κάθε  $\gamma < \beta$ , τότε θέτουμε  $X_\beta = \bigcap_{\gamma < \beta} X_\gamma$  και  $\phi_\beta = \phi|_{X_\beta}$ , όπου  $X_0 = X$  και  $\phi_0 = \phi$ . Αυτή η διαδικασία όμως έχει τέλος καθώς δεν μπορεί ο πληθάρημος της οικογένειας  $\{X_\gamma\}$  να ξεπερνά αυτόν του δυναμοσυνόλου του  $X$ . Συνεπώς, υπάρχει ο μικρότερος διατακτικός αριθμός  $\gamma$  ώστε  $X_{\gamma+1} = X_\gamma$ .

**4.4.4 Ορισμός.** Έστω  $\gamma$  ο μικρότερος διατακτικός αριθμός του προηγούμενου ορισμού ώστε  $X_{\gamma+1} = X_\gamma$ . Το σύνολο  $X_\gamma$  καλείται *κέντρο* του δυναμικού συστήματος και ο αντίστοιχος διατακτικός αριθμός καλείται *βάθος* του κέντρου.

**4.4.5 Πρόταση.** Το κέντρο του δυναμικού συστήματος είναι η κλειστή θήκη των επανερχόμενων σημείων.

**Απόδειξη.** Αρχικά θα δείξουμε ότι αν  $Y \subseteq X$  κλειστό και αναλλοίωτο, τότε για το δυναμικό σύστημα  $(Y, \phi|_Y)$  έχουμε  $Y_r = X_r \cap Y$ . Πρώτα θα δείξουμε ότι  $Y_r \subseteq X_r \cap Y$ . Αν  $y \in Y_r$  τότε για κάθε περιοχή  $V$  του  $y$  το  $V \cap Y$  είναι περιοχή του  $y$  στο  $Y$  και έτσι υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $\phi^n(y) \in V \cap Y$ . Άρα,  $\phi^n(y) \in V$ . Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αν  $y \in Y \cap X_r$  τότε για κάθε περιοχή  $V \cap Y$  του  $y$ , επειδή η  $V$  είναι περιοχή του  $y$  στο  $X$  υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $\phi^n(y) \in V$ . Αφού  $y \in Y$  και  $Y$  αναλλοίωτο, έχουμε  $\phi^n(y) \in V \cap Y$ . Έτσι  $Y_r = X_r \cap Y$ .

Επίσης, ένα επανερχόμενο σημείο δεν είναι περιπλανώμενο. Πράγματι, αν  $x$  είναι ένα επανερχόμενο σημείο που είναι και περιπλανώμενο θα έχει περιοχή  $V$  που θα είναι περιπλανώμενο σύνολο και επειδή για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε  $\phi^n(x) \in V$  το  $x$  θα ανήκει στο  $\phi^{-n}(V) \cap V$ , το οποίο είναι άτοπο αφού το  $V$  είναι περιπλανώμενο σύνολο. Έτσι  $X_r \subseteq X_1$ .

Θα δείξουμε ότι  $X_r \subseteq \bigcap_{\gamma} X_{\gamma}$ . Δείξαμε ότι  $X_r \subseteq X_1$ . Έστω τώρα  $X_r \subseteq X_{\gamma}$  για κάποιο  $\gamma$ . Από τα προηγούμενα έχουμε  $(X_{\gamma})_r = X_r \cap X_{\gamma}$ , άρα  $(X_{\gamma})_r = X_r$ . Αλλά τα σημεία του  $(X_{\gamma})_r$  δεν είναι περιπλανώμενα για το δυναμικό σύστημα  $(X_{\gamma}, \phi|_{X_{\gamma}})$ , δηλαδή  $(X_{\gamma})_r \subseteq X_{\gamma+1}$  και έτσι  $X_r \subseteq X_{\gamma+1}$ . Επίσης, αν  $\gamma$  είναι ένας οριακός διατακτικός αριθμός, αφού  $X_r \subseteq X_{\delta}$  για κάθε  $\delta < \gamma$ , έχουμε  $X_r \subseteq \bigcap_{\delta < \gamma} X_{\delta} = X_{\gamma}$ . Άρα,  $X_r \subseteq \bigcap_{\gamma} X_{\gamma}$ .

Έστω τώρα  $\gamma_0$  το βάθος του κέντρου του δυναμικού συστήματος. Αφού  $\bigcap_{\gamma} X_{\gamma} = X_{\gamma_0}$  και το  $X_{\gamma_0}$  είναι κλειστό και αναλλοίωτο, έχουμε  $\overline{X_r} \subseteq X_{\gamma_0}$ . Επίσης, το δυναμικό σύστημα  $(X_{\gamma_0}, \phi|_{X_{\gamma_0}})$  δεν έχει περιπλανώμενα σημεία διότι  $X_{\gamma_0+1} = X_{\gamma_0}$ , ενώ  $(X_{\gamma_0})_r = X_r$ . Έτσι από την πρόταση 4.4.1 έχουμε  $X_{\gamma_0} = \overline{X_r}$ .  $\square$

**4.4.6 Ορισμός.** Αν  $Y$  είναι ένας κλειστός και αναλλοίωτος υπόχωρος του  $X$ , τότε ορίζουμε

$$\mathcal{R}_Y = \{A \in \mathcal{A} : E_0(A) = 0, E_n(A)|_Y = 0 \forall n \geq 1\}.$$

**4.4.7 Πρόταση.** Έστω  $f \in C_0(X)$  και  $Y \subseteq X$  κλειστό στο οποίο μηδενίζεται η  $f$ . Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $g \in C_c(X)$  ώστε να μηδενίζεται σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το  $Y$  και  $\|f - g\| \leq \varepsilon$ .

**Απόδειξη.** Για  $\varepsilon > 0$ , αφού  $f \in C_0(X)$  υπάρχει συμπαγές υποσύνολο  $K_{\varepsilon}$  του  $X$  ώστε  $|f(x)| < \varepsilon$  για κάθε  $x \notin K_{\varepsilon}$ . Επειδή το κλειστό σύνολο  $C_{\varepsilon} := \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$  περιέχεται στο  $K_{\varepsilon}$  έχουμε ότι το  $C_{\varepsilon}$  είναι συμπαγές υποσύνολο του  $X$  που περιέχεται στο ανοικτό  $Y^c$  και έτσι από την τοπική συμπίεση υπάρχει συμπαγές σύνολο  $F$  ώστε  $C_{\varepsilon} \subseteq F^{\circ} \subseteq F \subseteq Y^c$  και από το λήμμα του Urysohn υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση  $h : X \rightarrow [0, 1]$  ώστε  $h(x) = 1$  για κάθε  $x \in C_{\varepsilon}$

και  $h(x) = 0$  για κάθε  $x \notin F^\circ$ . Ορίζουμε τώρα  $g := fh$ . Η  $g$  έχει συμπαγή φορέα που περιέχεται στο  $Y^c$ , επειδή η  $h$  έχει συμπαγή φορέα που περιέχεται στο  $Y^c$  και είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, αν  $|f(x) - g(x)| = |f(x)||1 - h(x)| > 0$ , τότε  $h(x) \neq 1$ , δηλαδή  $x \notin C_\varepsilon$  και  $f(x) \neq 0$ , δηλαδή  $x \notin Y^c$ . Αλλά τότε  $|f(x) - g(x)| = |f(x)||1 - h(x)| \leq |f(x)| < \varepsilon$ . Συνεπώς, για κάθε  $x \in X$  έχουμε  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  και έτσι  $\|f - g\| \leq \varepsilon$ .  $\square$

Η απόδειξη αυτή οφείλεται στον κ. Δ. Γατζούρα. Την παραθέτω με τις ευχαριστίες μου.

**4.4.8 Πρόταση.** Αν  $Y$  είναι ένας κλειστός και αναλλοίωτος υπόχωρος του  $X$ , τότε το  $\mathcal{R}_Y$  είναι ιδεώδες της  $\mathcal{A}$  και  $\mathcal{R}_Y = \overline{\text{span}\{U^k g : k \geq 1, g \in C_c(Y^c)\}}$ , όπου  $C_c(Y^c)$  είναι το ιδεώδες όλων των  $f \in C_o(X)$  που έχουν συμπαγή φορέα ξένο με το  $Y$ .

**Απόδειξη.** Αρχικά θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{R}_Y$  είναι ιδεώδες της  $\mathcal{A}$ . Αν  $A, B \in \mathcal{R}_Y$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ , τότε  $E_0(\lambda A + B) = \lambda E_0(A) + E_0(B) = 0$  και  $E_k(\lambda A + B)|_Y = \lambda E_k(A)|_Y + E_k(B)|_Y = 0$ . Επίσης, αν  $A \in \mathcal{A}$  και  $B \in \mathcal{R}_Y$  έχουμε ότι το  $E_k(AB)$  είναι άθροισμα γινομένων της μορφής  $\alpha^m(E_k(A))E_n(B)$  και από το γεγονός ότι κάθε  $E_n(B)|_Y = 0$  έχουμε  $E_k(AB)|_Y = 0$ . Άρα,  $AB \in \mathcal{R}_Y$ . Επίσης,  $BA \in \mathcal{R}_Y$  διότι το  $E_k(BA)$  είναι άθροισμα γινομένων της μορφής  $\alpha^n(E_k(B))E_n(A)$  και από το γεγονός ότι το  $Y$  είναι αναλλοίωτος υπόχωρος έχουμε  $E_k(BA)|_Y = 0$ . Άρα, το  $\mathcal{R}_Y$  είναι ιδεώδες της  $\mathcal{A}$ .

Τώρα θα δείξουμε ότι  $\mathcal{R}_Y = \overline{\text{span}\{U^k g : k \geq 1, g \in C_c(Y^c)\}}$ . Αν  $U^k g$  με  $k \geq 1$  και  $g \in C_c(Y^c)$  έχουμε  $E_0(U^k g) = 0$  και  $E_k(U^k g)|_Y = g|_Y = 0$ , δηλαδή  $U^k g \in \mathcal{R}_Y$ . Έτσι αφού  $U^k g \in \mathcal{R}_Y$  έχουμε  $\overline{\text{span}\{U^k g : k \geq 1, g \in C_c(Y^c)\}} \subseteq \mathcal{R}_Y$  και από το γεγονός ότι κάθε συντελεστής Fourier είναι συστολή στην  $\mathcal{A}$  έχουμε  $\overline{\text{span}\{U^k g : k \geq 1, g \in C_c(Y^c)\}} \subseteq \mathcal{R}_Y$ . Έστω τώρα  $U^k g \in \mathcal{R}_Y$ . Αφού η  $g$  μηδενίζεται στο  $Y$ , η  $g$  προσεγγίζεται από ακολουθία συναρτήσεων  $g_n \in C_c(Y^c)$ . Όμως  $U^k g_n \in \{U^k g : k \geq 1, g \in C_c(Y^c)\}$  για κάθε  $n$  και  $U^k g_n$  συγχλίνει στο  $U^k g$ . Άρα,  $U^k g \in \overline{\text{span}\{U^k g : k \geq 1, g \in C_c(Y^c)\}}$  και έτσι  $\mathcal{R}_Y \subseteq \overline{\text{span}\{U^k g : k \geq 1, g \in C_c(Y^c)\}}$ .  $\square$

**4.4.9 Πρόταση.** Για κάθε διατακτικό αριθμό  $\gamma$  το ιδεώδες  $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}_{X_\gamma}$  περιέχεται στο  $\text{rad}(\mathcal{A})$ .

**Απόδειξη.** Αρκεί να δείξουμε ότι αν  $f \in C_o(X)$  έχει συμπαγή φορέα  $K \subseteq X_\gamma^c$  και  $k \geq 1$ , τότε  $U^k f$  ανήκει στο  $\text{rad}(\mathcal{A})$ . Για  $\gamma = 1$  το  $K$  είναι περιπλανώμενο, άρα το αποτέλεσμα έπεται από το λήμμα 4.3.2. Έστω τώρα ότι το ζητούμενο έχειδειχθεί για κάθε διατακτικό μικρότερο από κάποιον  $\gamma$ . Αν ο  $\gamma$  είναι οριακός έχουμε  $X_\gamma = \bigcap_{\delta < \gamma} X_\delta$ . Αφού  $K \subseteq X_\gamma^c = \bigcup_{\delta < \gamma} X_\delta^c$  έπεται ότι το  $K$  μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένα το πλήθος  $X_\delta^c$  και επειδή η ακολουθία  $X_\delta$  είναι φθίνουσα έχουμε ότι το  $K$  μπορεί να καλυφθεί από ένα από αυτά. Έτσι η  $f$  έχει



συμπαγή φορέα που περιέχεται σε κάποιο  $X_\delta^c$  με  $\delta < \gamma$  και από την επαγωγική υπόθεση έχουμε  $U^k f \in \text{rad}(\mathcal{A})$ .

Έστω τώρα ότι ο  $\gamma$  είναι επόμενος,  $\gamma = \delta + 1$ . Αφού ο χώρος είναι τοπικά συμπαγής υπάρχει σχετικά συμπαγές ανοικτό σύνολο  $V$  ώστε  $K \subseteq V \subseteq X_{\delta+1}^c$ . Έτσι  $V \cap X_\delta \subseteq X_\delta \setminus X_{\delta+1}$  και από την κατασκευή της ακολουθίας  $\{X_\gamma\}$  το  $V \cap X_\delta$  είναι περιπλανώμενο στο δυναμικό σύστημα  $(X_\delta, \phi_\delta)$ . Άρα, τα σύνολα  $V \cap X_\delta, \phi^{-1}(V \cap X_\delta), \phi^{-2}(V \cap X_\delta), \dots$  είναι ξένα ανά δύο. Επίσης, αν  $n, m = 0, 1, \dots$  με  $n \neq m$  έχουμε  $\phi^{-n}(V) \cap \phi^{-m}(V) \subseteq X_\delta^c$ . Πράγματι, γιατί αν  $x \in X_\delta$  και  $x \in \phi^{-n}(V) \cap \phi^{-m}(V)$ , τότε  $\phi^n(x) \in V$  και  $\phi^m(x) \in X_\delta$ . Άρα,  $\phi^n(x) \in X_\delta \cap V$  και όμοια  $\phi^m(x) \in X_\delta \cap V$ . Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το  $V \cap X_\delta$  είναι περιπλανώμενο.

Έχουμε ότι η  $f$  φέρεται στο ανοικτό σχετικά συμπαγές  $V \subseteq X_{\delta+1}^c$ . Θα δείξουμε ότι  $B = U^k f \in \text{rad}(\mathcal{A})$ . Ισχυριζόμαστε ότι  $BAB \subseteq \text{rad}(\mathcal{A})$ . Αν  $C = U^m g$ , τότε  $BCB = U^{2k+m} h$  με  $h = \alpha^{k+m}(f) \alpha^k(g) f$ . Αφού η  $h$  φέρεται στο  $V \cap \phi^{-k-m}(V) \subseteq X_\delta^c$  από την επαγωγική υπόθεση έχουμε  $BCB \in \text{rad}(\mathcal{A})$  και αφού τα μονώνυμα παράγουν την  $\mathcal{A}$  συμπεραίνουμε ότι  $BAB \subseteq \text{rad}(\mathcal{A})$ . Τώρα αν  $C \in \mathcal{A}$ , έχουμε  $BCB \in \text{rad}(\mathcal{A})$  και  $(BC)^2 = (BCB)C$ . Έτσι  $r_{\mathcal{A}}((BC)^2) = 0$  και  $r_{\mathcal{A}}(BC)^2 = r_{\mathcal{A}}((BC)^2) = 0$ . Άρα, έχουμε  $r_{\mathcal{A}}(BC) = 0$  και αφού το  $C$  ήταν τυχαίο το  $B$  ανήκει στο  $\text{rad}(\mathcal{A})$ .  $\square$

**4.4.10 Θεώρημα.** Αν  $X$  τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος, τότε

$$\text{rad}(C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}^+) = \left\{ \sum_{n \geq 1} U^n f_n \in C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}^+ : f_n|_{\overline{X_r}} = 0 \ \forall n \right\}.$$

**Απόδειξη.** Έστω  $U^k f$  με  $f$  να έχει συμπαγή φορέα  $K$  που περιέχεται στο  $(\overline{X_r})^c = \cup_\gamma X_\gamma^c$ . Αφού το  $K$  είναι συμπαγές περιέχεται σε πεπερασμένα το πλήθος  $X_\gamma^c$  και συνεπώς σε ένα από αυτά. Άρα, από την πρόταση 4.4.9 έχουμε  $U^k f \in \text{rad}(C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}^+)$  και από την πρόταση 4.4.8 έχουμε  $\mathcal{R}_{\overline{X_r}} \subseteq \text{rad}(C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}^+)$ . Για την αντίστροφη κατεύθυνση επειδή το ριζικό της  $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}^+$  παράγεται από τα μονώνυμα που περιέχει και κάθε μονώνυμο είναι όριο μονωνύμων  $U^n f$  με  $f$  να έχει συμπαγή φορέα ξένο με το  $\overline{X_r}$  έχουμε  $\text{rad}(C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}^+) \subseteq \mathcal{R}_{\overline{X_r}}$ .  $\square$



# Βιβλιογραφία

- [1] G.R. Allan, *Introduction to Banach Spaces and Algebras* , Prepared for publication and with a preface by H.G. Dales, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 20. Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [2] W.B. Arveson, *Analyticity in operator algebras*, Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.
- [3] W.B. Arveson, *An Invitation to  $C^*$ -Algebras*, Springer-Verlag, 1976.
- [4] W.B. Arveson and K.B. Josephson, *Operator algebras and measure preserving transformations II*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 100–134.
- [5] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras* , Springer-Verlag, 1973.
- [6] J.B. Conway and B.B. Morrel, *Surveys of some recent results in operator theory*, Volume II, Longman Scientific and Technical, New York, 1988.
- [7] K.R. Davidson, *Nest Algebras*, Longman Scientific and Technical, New York, 1988.
- [8] K. R. Davidson and E. G. Katsoulis, *Operator algebras for multivariable dynamics*, Mem. Amer. Math. Soc. **209**(2011), no. 982, viii+53pp.
- [9] A.P. Donsig, A. Katavolos and A. Manoussos, *The Jacobson radical for analytic crossed products*, J. Funct. Anal. **187** (2001), 129–145.
- [10] W.H. Gottschalk and G.A. Hedlund, *Topological dynamics*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1955.
- [11] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras ( Volume 1)*, Academic Press, 1983.
- [12] P.S. Muhly, *Radicals, crossed products, and flows*, Ann. Polon. Math. **43** (1983), 35–42.

- [13] G. Murphy, *C\*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1994.
- [14] T. W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of \*-Algebras*, Cambridge University Press, 1990.
- [15] J. Peters, *Semicrossed products of C\*- algebras*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 498–534.
- [16] J. Peters, *The ideal structure of certain nonselfadjoint operator algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 333–352.
- [17] C.E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Krieger Publishing Co., 1974.
- [18] J.R. Ringrose, *On some algebras of operators*, Proc. London. Math. Soc. **(3) 15**, 61-83, 1965.
- [19] Δ. Γεωργίου, Σ. Ηλιάδης, *Γενική Τοπολογία*, Πάτρα, 2008.
- [20] Α. Κατάβολος, *Εισαγωγή στην Θεωρία Τελεστών*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008.
- [21] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Αθήνα, 1988.
- [22] Μ.Γ. Φραγκουλοπούλου, *Στοιχεία της Θεωρίας των Αλγεβρών Banach*, (<https://eclass.uoa.gr/modules/document/?course=MATH304>), Αθήνα, 1988.