Ελεύθερες Ομάδες και η Τοπολογία των Πεπερασμένων Γραφημάτων

Πέτρος Κολυβάς

Τριμελής Επιτροπή:
Δημήτριος Βάρσος
Ευάγγελος Ράπτης
Μιχαήλ Συκιώτης(Επιβλέπων)

Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

19 Οκτωβρίου 2019

Στη μνήμη του παππού μου Γεωργίου Ι. Πρωτόππα

Περιεχόμενα

1 Εσαγωγικές Έννοιες **11**

1.1 Εισαγωγή στις Ελεύθερες Ομάδες 11

1.2 Η Δομή Πηλίκο 17

1.3 Εισαγωγή στα Γραφήματα 17

1.4 Εφέλκηση και Εξώθηση 23

1.5 Θεμελειώδης Ομάδα Γραφήματος 25

2 Δράσεις Ομάδων σε Γραφήματα **29**

2.1 Δράσεις και γραφήματα *Cayley* 29

2.2 Δράσεις Ομάδων σε Δένδρα και Ελεύθερες Ομάδες 33

3 Καλύμματα και Εμβαπτίσεις Γραφημάτων **41**

3.1 Διπλώσεις 42

3.2 Ιδιότητες Καλυμμάτων 44

3.3 Ιδιότητες εμβαπτίσεων 53

4 Τα βασικά Θεωρήματα **59**

4.1 Το Θεώρημα του Howson 59

4.2 Γραφήματα Πυρήνες και η Ανισότητα της Hanna Neumann . . . 66

Βιβλιογραφία **77**

Περίληψη

Η μελέτη των ελεύθερων ομάδων πολλές φορές παρουσιάζει δυσκολίες όταν γίνεται με αμιγώς ομαδοθεωρητικά εργαλεία. Χρησιμοποιώντας όμως τα γραφήματα και ειδικούς μορφισμούς μεταξύ τους, για να μελετήσουμε τις ελεύθερες ομάδες, μεγάλο πλήθος σημαντικών αποτελεσμάτων προκύπτει μέσω κομψών και διαισθητικών αποδείξεων. Στην παρούσα εργασία ακολουθώντας το άρθρο του *Stallings* [1] αποδεικνύονται μερικά πολύ σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν ελεύθερες ομάδες. Μεταξύ άλλων παρουσιάζονται τα θεωρήματα του *Howson* και του *M. Hall*.

Summary

In the study of free groups, in many cases difficulties arise if someone uses group-theoretic tools only. By using graphs and some special morphisms between them, as tools for this study, we can prove in an intuitive manner several crucial results on free groups. In this master thesis we follow Stallings' paper [1] and we provide proofs on some of those results, such as the theorems of Howson and of M. Hall.

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία έχει στον πυρήνα της τις ιδέες στου *John R. Stallings* όπως αυτές παρουσιάζονται στο [1]. Η βασική του παρατήρηση είναι η συχνότητα με την οποία η έννοια του τοπικού μονομορφισμού μεταξύ γραφημάτων ανακύπτει κατά τη μελέτη των Ελευθέρων Ομάδων μέσω γραφημάτων.

Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται γενικώς βασικές έννοιες της Θεωρίας Ομάδων με πυρήνα τον ορισμό και την κατασκευή της ελεύθερης ομάδας επί ενός συνόλου. Επιπλέον παρουσιάζονται βασικές έννοιες όπως το πηλίκο, η εφέλκηση και η εξώθηση. Τέλος παρουσιάζονται βασικές οι έννοιες που αφορούν τα γραφήματα.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι δράσεις ομάδων σε γραφήματα. Επιπλέον ορίζεται το γράφημα *Cayley* και αποδεικνύονται κάποια πρώτα αποτελέσματα ώστε να συνδεθούν οι έννοιες της ελεύθερης ομάδας με συγκεκριμένες δράσεις σε γραφήματα καθώς και με τα ίδια γραφήματα τα οποία τις έχουν ως θεμελειώδεις ομάδες.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται οι έννοιες της δίπλωσης και των τοπικών μορφισμών μεταξύ γραφημάτων. Στη συνέχεια αναφερόμαστε σε κάποια βασικά αποτελέσματα που αφορούν τα καλύμματα και τις εμβαπτίσεις γραφημάτων. Τέλος παρουσιάζεται ένας πολύ βασικός αλγόριθμος ο οποίος μας βρίσκει για κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας μια "κατάλληλη" εμβάπτιση.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται όλα τα βασικά Θεωρήματα για τα οποία προετοίμαζαν τα προηγούμενα κεφάλαια. Εδώ υπάρχουν κομψές αποδείξεις εμπνευσμένες από τις ιδέες του *Stallings* για τα Θεωρήματα *Howson*, *M.Hall* καθώς και για την ανισότητα της $HannaNeumann$ με της οποίας την απόδειξη ολοκληρώνεται η εργασία.

Η παρούσα εργασία θα ήταν αδύνατον να έχει ολοκληρωθεί χωρίς την αμέριστη βοήθεια του επιβλέποντος καθηγητή Μιχαήλ Συκιώτη, τον οποίον ευχαριστώ θερμά. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών Παναγή Καραζέρη για τις ατέλειωτες συζητήσεις γύρω από τα μαθηματικά και όχι μόνο, οι οποίες έχουν υπάρξει καθοριστικές στη διαμόρφωσή μου ως μαθηματικό και ως άνθρωπο γενικότερα.

Κεφάλαιο 1

Εσαγωγικές Έννοιες

1.1 Εισαγωγή στις Ελεύθερες Ομάδες

Αρχίζουμε με τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας επί ενός συνόλου γεννητόρων, μιας και είναι αυτό το αντικείμενο ενδιαφέροντος στην παρούσα εργασία.

Ορισμός 1.1.1. (Ελεύθερη Ομάδα)
Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια ομάδα F καλείται **ελεύθερη** πάνω από το X αν υπάρχει εμφύτευση $i : X \hookrightarrow F$ τέτοια ώστε για κάθε άλλη ομάδα G και κάθε απεικόνιση $f : X \longrightarrow G$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός ομάδων $\tilde{f} : F \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, two heads, "\tilde{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Αν το X είναι κενό, τότε ορίζουμε $F(X) = \{1\}$.

Παρατήρηση 1.1.2. Έστω ότι F είναι μια ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X. Εφόσον το X εμφυτεύεται στην F το ταυτίζουμε με την εικόνα του $i(X)$ μέσα στην F.

Στην περίπωση που το X είναι κενό, εκ του ορισμού, η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ υπάρχει. Αν το X είναι μονοσύνολο, τότε εύκολα βλέπει κανείς πως η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ είναι η $(Z,+)$. Το φυσικό ερώτημα είναι αν για τυχαίο σύνολο X υπάρχει ομάδα η οποία να πληροί τη ζητούμενη καθολική ιδιότητα. Προς απάντηση του ερωτήματος αυτού ακολουθεί η αντίστοιχη κατασκευή.

Ορισμός 1.1.3. Έστω X ένα σύνολο. Θεωρούμε το σύνολο $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$, το οποίο είναι ισοπληθικό και ξένο με το σύνολο X. **Λέξη** στο αλφάβητο X καλείται μια πεπερασμένη ακολουθία $w = x_1x_2...x_n$ στοιχείων $x_i \in X \sqcup X^{-1}$ ενώ **μήκος** της λέξης είναι το n. Το σύνολο των λέξεων στο X το συμβολίζουμε με $W(X)$. Θεωρούμε δε ότι υπάρχει η κενή λέξη η οποία έχει μηδενικό μήκος.

Από το σύνολο $W(X)$ θα κρατήσουμε τα στοιχεία που μας επιτρέπουν τα αξιώματα της ομάδας να κρατήσουμε. Παραδείγματος χάριν η λέξη $xyy^{-1}xy$ θα πρέπει να ταυτιστεί με την xxy. Προς τούτο θα ορίσουμε μια διαδικασία ταυτοποίησης κάθε λέξης με κάποια ομαδοθεωρητικά ισοδύναμή της.

Ορισμός 1.1.4. Θεωρούμε την απεικόνιση $r : W(X) \longrightarrow W(X)$ με $r(w)$ να είναι η λέξη η οποία προκύπτει από τη λέξη w αν διαγραφεί το πρώτο από τα αριστερά ζεύγος "αντίστροφων" γραμμάτων xx^{-1} ή $x^{-1}x$. Η διαγραφή ενός τέτοιου ζεύγους **καλείται στοιχειώδης αναγωγή** και μια λέξη η οποία δεν περιέχει κάποιο ζεύγος αντίστροφων γραμμάτων καλείται **ανηγμένη**.

Παράδειγμα 1.1.5. Αν $X = \{a, b\}$, τότε $r(abb^{-1}ab) = aab$ η οποία είναι ανηγμένη και $r(a^{-1}a^{-1}aab^{-1}b) = a^{-1}ab^{-1}b$ η οποία δεν είναι ανηγμένη λέξη.

Παρατήρηση 1.1.6. Για μια λέξη w είναι προφανές ότι είναι ανηγμένη αν και μόνο αν $r(w) = w$.

Λήμμα 1.1.7. Αν μια λέξη $w \in W(X)$ έχει μήκος $l(w) = n$, τότε η λέξη $r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(w)$ είναι ανηγμένη λέξη, όπου $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός m ώστε $m \leq \frac{n}{2}$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Έστω ότι $r(w) = w$. Σε αυτή την περίπτωση η λέξη w είναι ανηγμένη οπότε για κάθε θετικό ακεραιο $r^k(w) = w$.

Έστω ότι $r(w) \neq w$. Για το μήκος της $r(w)$ έχουμε $l(r(w)) = l(w) - 2$. Αν η $r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(w)$ δεν είναι ανηγμένη, τότε για κάθε $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ η λέξη $r^k(w)$ δεν είναι ανηγμένη. Οπότε $l(r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(w)) = l(w) - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq 1$ πράγμα άτοπο εφόσον οι λέξεις μήκους 0 ή 1 είναι εξ ορισμού ανηγμένες. □

Ορισμός 1.1.8. Έστω X ένα σύνολο και $W(X)$ το σύνολο των λέξεων στο X. Ορίζουμε τη μονομελή πράξη της **αναγωγής** $R : W(A) \longrightarrow W(A)$, όπου αν $l(w) = n$, τότε $R(w) = r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(w)$. Θέτουμε δε την εικόνα της R, $Im(R) = F(X)$ η οποία είναι ακριβώς το σύνολο των ανηγμένων λέξεων.

Παράδειγμα 1.1.9. Έστω $a, b \in X$, $R(a^{-1}aa^{-1}a^{-1}ba^{-1}ab^{-1}) = r^4(a^{-1}aa^{-1}a^{-1}ba^{-1}ab^{-1}) = a^{-1}a^{-1}$ και $R(aa^{-1}aa^{-1}a^{-1}ba^{-1}ab^{-1}a) = ( )$.

Ορισμός 1.1.10. Στο σύνολο των ανηγμένων λέξεων $F(X)$ ορίζουμε τη διμελή πράξη του **πολλαπλασιασμού** ή αλλιώς της παράθεσης λέξεων μετ΄ επαγωγής. Αν $w_1, w_2 \in F(X)$, ορίζουμε $w_1 \cdot w_2 = R(w_1 w_2)$. Δηλαδή το αποτέλεσμα της επαγωγής σε ανηγμένη λέξη της παράθεσης των δύο λέξεων w_1 και w_2.

Πρόταση 1.1.11. Το ζεύγος $(F(X), \cdot)$ είναι ομάδα. Επιπλέον είναι ελεύθερη επί του συνόλου X.

Απόδειξη. Πρώτον ο πολλαπλασιασμός είναι πράγματι προσεταιριστικός καθώς και η παράθεση είναι προσεταιριστική και όπως φαίνεται από το Λήμμα 1.1.7 και την απόδειξή του η αναγωγή είναι επίσης προσεταιριστική. Οπότε και η σύνθεση των δύο αυτών πράξεων είναι προσεταιριστική.
Δεύτερον η κενή λέξη αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο.
Τρίτον αν $w = a_1 a_2 ... a_n$, $a_i \in X \sqcup X^{-1}$ είναι μια ανηγμένη λέξη στο X, τότε η επίσης ανηγμένη στο X λέξη $w^{-1} = a_1^{-1} a_2^{-1} ... a_n^{-1}$ είναι αντίστροφή της.
Παρατηρούμε τώρα ότι το X είναι σύνολο γεννητόρων της $F(X)$ εξ ορισμού της. Τέλος αν $f : X \longrightarrow G$ είναι μια απεικόνιση του συνόλου X σε μια ομάδα G, τότε εφόσον κάθε ομομορφισμός ομάδων $F(X) \longrightarrow G$ καθορίζεται από τις τιμές που λαμβάνει στους γεννήτορες της $F(X)$, ο μοναδικός που κάνει

το ζητούμενο διάγραμμα αντιμεταθετικό είναι ο $\tilde{f} : F(X) \longrightarrow G$ ο οποίος απεικονίζει κάθε $x \in X$ στο $f(x)$. □

Θεώρημα 1.1.12. Κάθε ομάδα G είναι επιμορφική εικόνα κάποιας ελεύθερης ομάδας. Δηλαδή κάθε ομάδα είναι πηλίκο ελεύθερης ομάδας.

Απόδειξη. Έστω X ένα σύνολο γεννητόρων της ομάδας G και $F(X)$ η ελεύθερη επί του X ομάδα. Ο μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\tilde{i}_G : F(X) \longrightarrow G$ ο οποίος επάγεται από τις εμφυτεύσεις $i_G : X \hookrightarrow G$ και $i : X \hookrightarrow F(X)$ είναι επιμορφισμός καθώς στην εικόνα του περιέχεται το σύνολο γεννητόρων X της G. □

Πρόταση 1.1.13. Έστω X, Y δυο σύνολα και $F(X), F(Y)$ οι αντίστοιχες ελεύθερες ομάδες. Αν τα σύνολα X και Y είναι ισοπληθικά, τότε οι ομάδες $F(X)$ και $F(Y)$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Έστω ότι $|X| = |Y|$, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $g : X \longrightarrow Y$ από το σύνολο γεννητόρων της $F(X)$ σε αυτό της $F(Y)$ οπότε η $F(X)$ εμφυτεύεται στην $F(Y)$. Αντίστοιχα και η $F(Y)$ εμφυτεύτεται στην $F(X)$ και είναι άμεσο για τις δυο εμφυτεύσεις είναι η μια αντίστροφη της άλλης. Άρα οι ομάδες είναι ισόμορφες.

□

Ισχύει και το αντίστροφο. Αλλά πρωτού το αποδείξουμε χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 1.1.14. Έστω a ο πληθάριθμος ενός συνόλου X. Το ελεύθερο γινόμενο (συνγινόμενο) $*_{x\in X} Z_x$ είναι ισόμορφο με την ελεύθερη ομάδα $F(X)$ επί του X.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το συνγινόμενο ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων.
Έστω λοιπόν ομάδα G και απεικόνιση $f : X \longrightarrow G$. Αρχικά θεωρούμε την ένθεση $i : X \longrightarrow *_{x\in X} Z_x$ η οποία αντιστοιχεί κάθε $x \in X$ στην ακολουθία η οποία έχει όλες της εγγραφές της ίσες με 0, εκτός από εκείνη στη θέση x η

οποία είναι ίση με 1. Η εικόνα της i τετριμμένα αποτελεί σύνολο γεννητόρων της $*_{x\in X}Z_x$. Ορίζουμε στο σύνολο γεννητόρων $\tilde{f}(i(x)) = f(x)$. Οπότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ο οποίος κάνει το διάγραμμα μεταθετικό, ο $\tilde{f}$. □

Θεώρημα 1.1.15. *Έστω X, Y δυο σύνολα και $F(X), F(Y)$ οι αντίστοιχες ελεύθερες ομάδες. Αν οι ομάδες $F(X)$ και $F(Y)$ είναι ισόμορφες, τότε τα σύνολα X και Y είναι ισοπληθικά.*

Απόδειξη. Εφόσον οι $F(X)$ και $F(Y)$ είναι ισόμορφες, οι αβελιανοποιήσεις τους είναι επίσης ισόμορφες: $F(X)/(F(X))' \cong F(Y)/(F(Y))'$. Οπότε από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε

$$*_{x\in X}Z_x/(*_{x\in X}Z_x)' \cong *_{y\in Y}Z_y/(*_{y\in Y}Z_y)' \Longrightarrow$$

$$\oplus_{x\in X}(Z/Z') \cong \oplus_{y\in Y}(Z/Z')$$

οπότε πράγματι $|X| = |Y|$. □

Οπότε η κατασκευή που κάναμε οδηγεί στη "μοναδική" ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X και δεν υπάρχει άλλη τέτοια (ως προς ισομορφισμό).

Ορισμός 1.1.16. Ο πληθάριθμος του συνόλου X καλείται **τάξη** της ελεύθερης ομάδας $F(X)$.

Θεώρημα 1.1.17. *Έστω G μια ομάδα και X ένα υποσύνολο της G. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
1. Η ομάδα G είναι ελεύθερη επί του συνόλου X
2. Η G παράγεται από το σύνολο X και κάθε μη τετριμμένη ανηγμένη λέξη στο αλφάβητο X είναι διάφορη του ουδετέρου.
3. Η G παράγεται από το X Και κάθε στοιχείο της ομάδας G παρίσταται από μοναδική ανηγμένη λέξη στο X.

Απόδειξη. (1. $\Rightarrow$ 2.) Εφόσον η G είναι ελεύθερη επί του συνόλου X παράγεται από αυτό. Επιπλέον από την κατασκευή της ελεύθερης ομάδας επί του X μόνο η κενή λέξη είναι μια ανηγμένη λέξη η οποία ταυτίζεται με το ουδέτερο.
(2. $\Rightarrow$ 3.) Ένα στοιχείο της ομάδας G παρίσταται από κάποια ανηγμένη

λέξη στο X καθώς η G παράγεται από αυτό. Έστω $w_1 = x_{11}x_{12}...x_{1n}$ και $w_2 = x_{21}x_{22}...x_{2m}$ δυο ανηγμένες λέξεις στο X η οποίες αναπαριστούν το ίδιο στοιχείο της ομάδας $g \in G$. Δηλαδή στη G έχουμε $w_1 = w_2 = g$. Έπεται ότι $w_1{w_2}^{-1} = 1_G$, οπότε η λέξη $w_1{w_2}^{-1}$ δεν είναι ανηγμένη. Από την υπόθεση ότι οι λέξεις w_1 και w_2 είναι ανηγμένες έπεται ότι $x_{1n} = x_{2m}, ..., x_{12} = x_{22}, x_{11} = x_{21}$ και άρα $w_1 = w_2$ πράγμα άτοπο.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Εφόσον κάθε στοιχείο $g \in G$ γράφεται ως ανηγμένη λέξη στο X, έχουμε από κατασκευής της $F(X)$ ότι $G \subseteq F(X)$. Επιπλέον αν $f \in F(X)$, τότε το f είναι μια ανηγμένη λέξη στο X η οποία είναι στοιχείο της G και καθώς είναι μοναδική ως προς την αναπαράστασή της ως ανηγμένη λέξη στο X, ορίζεται ο αντίστοιχος μονομορφισμός $F(X) \longrightarrow G$. Οπότε οι ομάδες G και $F(X)$ είναι ισόμορφες, άρα η G είναι ελεύθερη επί του X. □

Ορισμός 1.1.18. Ένα υποσύνολο μιάς ελεύθερης ομάδας το οποίο πληροί τη συνθήκη 2 του παραπάνω Θεωρήματος καλείται **ελεύθερο σύνολο γεννητόρων**.

Πρόταση 1.1.19. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα F περιέχεται ως υποομάδα στην ελεύθερη ομάδα τάξης 2, F_2.

Απόδειξη. Έστω F_n η ελεύθερη ομάδα τάξης n και $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων της, δηλαδή ένα σύνολο επί του οποίου είναι ελεύθερη και έστω F_2 η ελεύθερη ομάδα τάξης 2 επί του $\{a, b\}$. Θεωρούμε τον ομομορφισμό $f : F_n \longrightarrow F_2$ ο οποίος προκύπτει από την ακόλουθη απεικόνιση των γεννητόρων της F_n.

$$x_k \mapsto a \overbrace{a \; \ldots \; a}^{k-times} b.$$

Αυτή η απεικόνιση είναι μονομορφισμός η ύπαρξη του οποίου ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ομοίως αποδεικνύεται η πρόταση 1.1.19 για αριθμήσιμα παραγόμενες ελεύθερες ομάδες.

1.2 Η Δομή Πηλίκο

Θεώρημα 1.2.1. Έστω G μια ομάδα, N μια κανονική υποομάδα της G και $\pi : G \longrightarrow G/N$ ο φυσικός επιμορφισμός. Αν $f : G \longrightarrow H$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων τέτοιος ώστε για κάθε $g_1, g_2 \in G$ ισχύει $\pi(g_1) = \pi(g_2) \Longrightarrow f(g_1) = f(g_2)$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\overline{f} : G/N \longrightarrow H$ τέτοις ώστε $f = \overline{f} \circ \pi$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\overline{f} : G/N \longrightarrow H$, $\overline{f}(gN) = f(g)$. Έστω $g_1, g_2 \in G$
Η $\overline{f}$ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $g_1N = g_2N$, τότε $\pi(g_1) = \pi(g_2)$. Οπότε $\overline{f}(g_1N) = f(g_1) = f(g_2) = \overline{f}(g_2N)$.
Η $\overline{f}$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Πράγματι,

$$\overline{f}(g_1Ng_2N) = \overline{f}(g_1g_2N) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \overline{f}(g_1N)\overline{f}(g_2N)$$

Τέλος εξ ορισμού του ο $\overline{f}$ είναι η μοναδική απεικόνιση για την οποία $f = \overline{f} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & G/N \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
H &
\end{tikzcd}$$

□

1.3 Εισαγωγή στα Γραφήματα

Ορισμός 1.3.1. (Γράφημα)
Ένα **γράφημα** Γ συνιστάται από τα εξής:

1. Δύο σύνολα, εκείνο των κορυφών Γ^0 και εκείνο των ακμών Γ^1.

2. Τρεις απεικονίσεις $\alpha : \Gamma^1 \to \Gamma^0$, $\omega : \Gamma^1 \to \Gamma^0$ και $- : \Gamma^1 \to \Gamma^1$

έτσι ώστε για κάθε ακμή $e \in \Gamma^1$ να ισχύει: $\overline{\overline{e}} = e$, $\overline{e} \neq e$ και $\alpha(e) = \omega(\overline{e})$.

Για κάθε ακμή $e \in \Gamma^1$, η κορυφή α(e) καλείται αρχή, η κορυφή ω(e) καλείται πέρας και η ακμή $\overline{e}$ αντίστροφη ακμή της e

Έστω Γ ένα γράφημα. Θεωρούμε την ξένη ένωση

$$T = \Gamma^0 \bigsqcup (\Gamma^1 \times [0,1]).$$

Στο T ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας ως εξής:

$$\alpha(e) \equiv (e,0), \omega(e) \equiv (e,1).$$

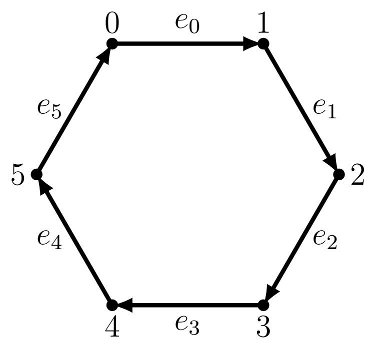
Δηλαδή ταυτίζουμε την αρχή μιας ακμής και το πέρας της με το 0 και το 1 αντίστοιχα. Επιπλέον θεωρούμε ότι

$$(e,t) \equiv (\bar{e}, 1-t).$$

Ο χώρος πηλίκο $T/\equiv$ καλείται **γεωμετρική αναπαράσταση του γραφήματος** Γ και είναι $CW - complex$ διάστασης ≤ 1.

Ορισμός 1.3.2. (Υπογράφημα)
Ένα **υπογράφημα** Γ_1 ενός γραφήματος Γ συνίσταται από δύο υποσύνολα $\Gamma_1^0 \subseteq \Gamma^0$ και $\Gamma_1^1 \subseteq \Gamma^1$ τα οποία πληρούν την εξής συνθήκη. Αν $e \in \Gamma_1^1$, τότε η αρχή $\alpha(e)$ της e είναι στο Γ_1^0 και η αντίστροφη ακμή του $e, \overline{e}$ είναι στο Γ_1^1.
Ένα υπογράφημα καλείται **πλήρες** αν κάθε ακμή του Γ με άκρα στο Γ_1 ανήκει στο Γ_1.

Ορισμός 1.3.3. (Προσανατολισμός)
Ένας **προσανατολισμός** O ενός γραφήματος Γ, είναι μια επιλογή ανάμεσα στα στοιχεία $e, \overline{e} \in \Gamma^1$, για κάθε $e \in \Gamma^1$.
Δηλαδή είναι ένα υποσύνολο O του συνόλου των ακμών Γ^1 έτσι ώστε για κάθε ακμή e η τομή $O \cap \{e, \overline{e}\}$ να αποτελείται ακριβώς από ένα στοιχείο ή ισοδύναμα $|O \cup \{e, \overline{e}\}| = 1$.
Κάθε ακμή $e \in O$ τη λέμε **θετικά προσανατολισμένη** ακμή του Γ.
Ένα γράφημα το οποίο φέρει κάποιον προσανατολισμό καλείται **προσανατολισμένο**.



Σχήμα 1.1: Κανονικό εξάγωνο

Παρατήρηση 1.3.4. Αποδεχόμενοι το αξίωμα της επιλογής προκύπτει άμεσα ότι κάθε γράφημα επιδέχεται προσανατολισμό. Αντιστοίχως αποδεχόμαστε και το Λήμμα του $Zorn$ το οποίο χρησιμοποιείται παρακάτω.

Παράδειγμα 1.3.5. Ένα βασικό παράδειγμα γραφήματος είναι τα κυκλώματα C_n:
Έστω $n \in Z$, ορίζουμε ως C_n το γράφημα με κορυφές το σύνολο των αριθμών $C_n^0 = \{0, 1, ..., n-1\}$ και ακμές $C_n^1 = \{e_0, e_1, ..., e_{n-1}\}$, όπου για κάθε $i \in C_n^0$ τα άκρα της e_i είναι α(e_i)=i και ω(e_i)= $i +_n 1$, όπου $+_n$ είναι η πρόσθεση $Modn$. Το κύκλωμα C_6 απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα.

Ορισμός 1.3.6. (Μορφισμός Γραφημάτων)
Έστω Γ και Δ δύο γραφήματα. Μια απεικόνιση $f : \Gamma \to \Delta$ καλείται **μορφισμός γραφημάτων** αν απεικονίζει τις κορυφές του Γ σε κορυφές του Δ, τις ακμές του Γ σε ακμές του Δ και είναι συμβιβαστή με τις απεικονίσεις α , ω και $^-$.
Δηλαδή:

1. Η f αποτελείται από δύο απεικονίσεις $f^0 : \Gamma^0 \to \Gamma^0$ και $f^1 : \Gamma^1 \to \Gamma^1$.

2. Για κάθε ακμή $e \in \Gamma^1$ ισχύει $\alpha(f(e)) = f(\alpha(e))$ και $\overline{f(e)} = f(\overline{e})$.

   Έπεται άμεσα ότι $\omega(f(e)) = f(\omega(e))$.

Ορισμός 1.3.7. (Μονοπάτι)
Έστω Γ ένα γράφημα. Μια ακολουθία ακμών $p = e_1, e_2...., e_n$ καλείται **μονοπάτι** εφόσον το πέρας κάθε ακμής e_i συμπίπτει με την αρχή της e_{i+1}, δηλαδή για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ έχουμε $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$.

Μήκος ενός μονοπατιού p είναι το πλήθος των ακμών που το απαρτίζουν. Θα το συμβολίζουμε δε είτε με $|p|$, είτε με $l(p)$, αναλόγως των συμφραζομένων. Για κάθε κορυφή $v \in \Gamma$ θεωρούμε επίσης το μοναδικό μονοπάτι μηδενικού μήκους με αρχή και τέλος την ακμή v. Το μονοπάτι αυτό θα το συμβολίζουμε είτε με 1_v είτε με $Ł_v$. $|L_v| = 0$ και $\alpha(L_v) = \omega(L_v) = v$.
Για κάθε μονοπάτι $p = e_1, e_2, ..., e_n$ του Γ, θεωρούμε το "αντίστροφο" μονοπάτι $p^{-1} = \overline{e_n}, ...\overline{e_2}, \overline{e_1}$.

Ορισμός 1.3.8. (Δένδρο/ Δάσος)
Ένα γράφημα το ονομάζουμε **δάσος** αν δεν περιέχει κάποιο κυκλώμα ως υπογράφημα. Αν επιπλέον είναι συνεκτικό, τότε το λέμε **δένδρο**.

Πρόταση 1.3.9. Κάθε γράφημα Γ περιέχει μεγιστικό δάσος.

Απόδειξη. Την απόδειξη θα την κάνουμε με χρήση του Λήμματος του $Zorn$. Έστω $F_1 \subseteq F_2 \subseteq ...$ μια αλυσίδα δασών του Γ. Τότε το σύνολο $F = \cup_{i \in Z} F_i$ αφενώς περιέχει όλα τα δάση F_i, αφετέρου είναι δάσος.
Πράγματι, το F είναι δάσος καθώς, εξ ορισμού του, για κάθε ανηγμένο μονοπάτι p μέσα στο F, υπάρχει δείκτης $k \in Z$, τέτοιος ώστε το $p \in F_k$. Οπότε εάν $c \in F$ είναι ένα κύκλωμα στο F, τότε το c θα βρίσκεται μέσα σε κάποιο F_k. Τούτο όμως είναι άτοπο καθώς κάθε F_i είναι δάσος. Καταλήγουμε ότι το F είναι δάσος. Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Λήμματος του $Zorn$, οπότε υπάρχει μεγιστικό δάσος στο Γ □

Παρατήρηση 1.3.10. Έστω F ένα μεγιστικό δάσος ενός γραφήματος Γ. Το F είναι με τη σειρά του γράφημα άρα μπορούμε να αναφερόμαστε στις συνεκτικές του συνιστώσες $F_1, F_2, ..., F_n$ οι οποίες με τη σειρά τους η κάθε μια αποτελεί μεγιστικό δένδρο κάθε μιας συνεκτικής συνιστώσας του Γ.

Πρόταση 1.3.11. Κάθε μεγιστικό δάσος (αντίστοιχα δένδρο) περιέχει όλες της κορυφές του γραφήματος Γ (αντ/χα συνεκτικής συνηστώσας που το περιέχει).

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 1.3.10 αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση κατά την οποία το γράφημα Γ είναι συνεκτικό και άρα κάθε δάσος του Γ είναι δένδρο. Έστω T ένα μεγιστικό δένδρο του Γ.
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
1. Το Γ είναι το κενό γράφημα, δηλαδή $|\Gamma| = 0$.
Τότε δεν υπάρχει κορυφή $v \in \Gamma^0$ οπότε τετριμένα κάθε πρόταση που αφορά καθολικά ποσοδεικτούμενη μεταβλητή μέσα στο Γ^0 ($\forall v \in \Gamma^0$) είναι αληθής.
2. Το γράφημα Γ περιέχει ακριβώς μια κορυφή, δηλαδή $|\Gamma| = 1$.
Έστω $\Gamma^0 = \{v\}$, τότε το $T' = \langle T'^0 = \{v\}, T'^1 = \{1_v\}\rangle$ είναι δένδρο. Από τη μεγιστικότητα του T προκύπτει το ζητούμενο $\Gamma^0 \subseteq T^0$, καθώς είτε $v \in T$, είτε $v \notin T$ οπότε $T = \emptyset$ και άρα $T \subset T'$ το οποίο είναι άτοπο από τη μεγιστικότητα του T.
3. Το γράφημα Γ περιέχει περισσότερες από μια κορυφές, δηλαδή $|\Gamma| \geq 2$.
Έστω $u \in T$, τούτο το υποθέτουμε καθώς από το επιχείρημα στην περίπτωση 2 προκύπτει ότι $T \neq \emptyset$. Έστω $v \in \Gamma^0$ μια κορυφή του Γ η οποία δεν ανήκει στο T. Τότε υπάρχει μονοπάτι $p = e_1e_2...e_n$ με αρχή α(p)=u και πέρας ω(p)=v. Έστω $k \leq n$ ένας φυσικός αριθμός. Αν για κάθε $i \leq k$ έχουμε α(e_i) ∈T, τότε και ω(e_k)∈T. Πράγματι, αν $\omega(e_k) \notin T$, τότε δεν υπάρχει μονοπάτι μέσα στο T που να καταλήγει στην κορυφή ω(e_k), οπότε το $T \cup \{e_k\}$ είναι δένδρο το οποίο εμπεριέχει το T, πράγμα άτοπο λόγω της μεγιστικότητας του T. Άρα η κορυφή ω(e_k) είναι μέσα στο T και ως τέτοια για $k = n$ είναι και η v. □

Πρόταση 1.3.12. Αν ένα γράφημα Γ είναι συνεκτικό, τότε κάθε μεγιστικό δάσος του είναι δένδρο.

Απόδειξη. Έστω F ένα μεγιστικό μη συνεκτικό δάσος του συνεκτικού γραφήματος Γ. Έστω $v, u \in \Gamma^0 = F^0$ δυο κορυφές του δάσους F οι οποίες βρίσκονται σε δυο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του F, F_v και F_u αντιστοίχως.

Θεωρούμε το ανηγμένο μονοπάτι p του Γ με αρχή v και πέρας u. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος του μονοπατιού p.
Αν $|p| = 0$, τότε $u = v$ πράγμα άτοπο καθώς υποτέθησαν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος F.
Αν $|p| = 1$, τότε $p = e \in \Gamma^1$ περίπτωση κατά την οποία το $F \cup \{e\}$ είναι δάσος πράγμα άτοπο από την υπόθεση της μεγιστικότητας του F .
Πράγματι, $F \cup \{e\}$ είναι δάσος αφού μέσα στο F δεν υπάρχει μονοπάτι αρχής v και πέρατος u, πράγμα που καθιστά την ακμή e το μοναδικό πέρασμα μεταξύ των δύο συνεκτικών συνιστωσών και άρα δε δημιουργείται κάποιο κύκλωμα στο $F \cup \{e\}$.
Έστω ότι καταλήγουμε σε άτοπο για κάθε μονοπάτι p' μήκους $|p'| < n$ και $p = e_1 e_2 ... e_n$.
Έστω $i \in Z$ ο πρώτος θετικός ακέραιος για τον οποίον $\omega(e_i) \in F_u$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
1. Αν $i \neq n + 1$, τότε από την υπόθεση επαγωγής για τα μονοπάτια $e_1 e_2 ... e_i$ και $e_i e_{i+1} ... e_n$, αυτά έχουν το καθένα αρχή και πέρας στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Οπότε:
$F_v \ni \alpha(p) = \alpha(e_1 e_2 ... e_i) \Rightarrow F_v \ni \omega(e_1 e_2 ... e_i) = \alpha(e_{i+1} e_{i+2} ... e_n) \Rightarrow \omega(p) = \omega(e_{i+1} e_{i+2} ... e_n) \in F_v$, άρα $F_v = F_u$ πράγμα άτοπο.
2 .Αν $i = n + 1$, (από την υπόθεση επαγωγής και) από την περίπτωση $|p| = n = 1$ προκύπτει το ζητούμενο και έτσι κλείνει η επαγωγή και η απόδειξη της πρότασης. $\square$

Ολοκληρώνουμε την παρούσα παράγραφο με τους ακόλουθο ορισμό ο οποίος παίζει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια.

Ορισμός 1.3.13. (Άστρο Κορυφής)
Έστω $v \in \Gamma^0$ μια κορυφή του γραφήματος Γ. Το σύνολο όλων των ακμών με αρχή το v καλείται **άστρο του** v και συμβολίζεται:
$S(v, \Gamma) = \{v \in \Gamma^1 | \alpha(e) = v\}$
Ο πληθάριθμος του $S(v, \Gamma)$ καλείται σθένος ή ισχύς της v στο Γ.

1.4 Εφέλκηση και Εξώθηση

Ορισμός 1.4.1. Έστω μια κατηγορία $\mathbf{C}$ και ένα διάγραμμα $C_1 \to D \leftarrow C_2$ αυτής . Μια καθολική λύση $C_2 \leftarrow C \to C_1$ καλείται εφέλκηση (*pullback*).

Παράδειγμα 1.4.2. Στα γραφήματα υπάρχει πάντα εφέλκηση και είναι πολύ εύκολη η κατασκευή της. Έστω $\Gamma_1 \xrightarrow{b_1} \Delta \xleftarrow{b_2} \Gamma_2$ ένα διάγραμμα στην κατηγορία των γραφημάτων. Ορίζουμε γράφημα Γ_3 ως εξής:
${\Gamma_3}^0 := \{(v_1, v_2)|v_1 \in {\Gamma_1}^0, v_2 \in {\Gamma_2}^0, b_1(v_1) = b_2(v_2)\}$ και
${\Gamma_3}^1 := \{(e_1, e_2)|e_1 \in {\Gamma_1}^1, e_2 \in {\Gamma_2}^1, b_1(e_1) = b_2(e_2)\}$.

Οι μορφισμοί γραφημάτων $f_i : \Gamma_3 \to \Gamma_i$ ορίζονται ως περιορισμοί των προβολών του γινομένου γραφημάτων $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \to \Gamma_i$ στο Γ_3.
Έτσι παίρνουμε το ακόλουθο διάγραμμα εφέλκησης:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_3 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "b_1"] \\ \Gamma_2 \arrow[r, "b_2"] & \Delta \end{tikzcd}$$

Η δυική κατασκευή της εφέλκησης παρουσιάζει σοβαρό ενδιαφέρον στα αντικείμενα (γραφήματα) που πραγματευόμαστε στο παρόν κείμενο.

Ορισμός 1.4.3. (Εξώθηση)

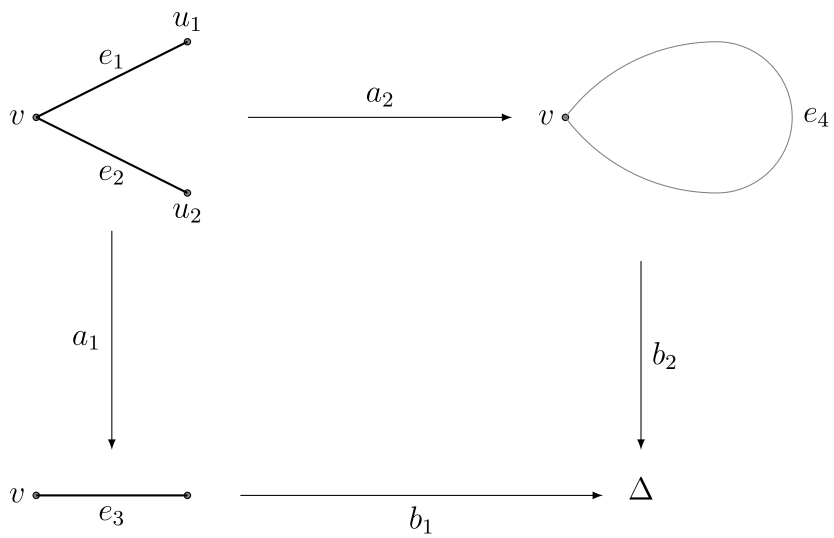
Έστω μια κατηγορία $\mathbf{C}$ και $C_2 \leftarrow D \to C_1$, ένα διάγραμμα αυτής. Μια καθολική λύση $C_1 \to C \leftarrow C_2$ του διαγράμματος αυτού στη $\mathbf{C}$ καλείται εξώθηση (*pushout*).

Παράδειγμα 1.4.4. Στην κατηγορία των ομάδων υπάρχει πάντα η εξώθηση, όμως η κατασκευή της δεν είναι ιδιαιτέρως απλή. Έστω $G_1 \xleftarrow{a_1} H \xrightarrow{a_2} G_2$ ένα διάγραμμα στην κατηγορία των ομάδων. Η εξώθηση αυτού του διαγράμματος είναι το ελεύθερο γινόμενο των G_1, G_2 με αμάλγαμα την ομάδα H. Αυτό ορίζεται ώς το πηλίκο του ελευθέρου γινομένου $G_1 * G_2$ προς την κανονική υποομάδα N που παράγεται από το σύνολο $\{g|g \in G_1 * G_2, a_1(g) = a_2(g)\}$. Η καθολικότητα της κατασκευής αυτής προκύπτει από την καθολικότητα των

κατασκευών του ελευθέρου γινομένου και του πηλίκου.
Το διάγραμμα εξώθησης είναι το ακόλουθο:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"'] & G_1 \arrow[d, "f_1"] \\ G_2 \arrow[r, "f_2"] & (G_1 *_H G_2)/N \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 1.4.5. Η εξώθηση δεν υπάρχει πάντα στην κατηγορία των γραφημάτων.
Πράγματι, θεωρούμε το γράφημα Γ_1 το οποίο αποτελείται ακριβώς από ένα παραδεκτό ζεύγος (γεωμετρικών) ακμών e_1, e_2, το Δ_1 που αποτελείται από μια (γεωμετρκή) ακμή e_3 και δυο κορυφές και το Δ_2 που αποτελείται από μια (γεωμετρική) ακμή και μια κορυφή. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $a_1 : \Gamma \longrightarrow \Delta_1$ με $a_1(e_1) = a_1(e_2) = e_3$ και $a_2 : \Gamma \longrightarrow \Delta_2$ όπου $a_2(e_1) = e_4$ και $a_2(e_2) = \overline{e}_4$.
Έστω ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι ένα διάγραμμα εξώθησης.



Τότε $b_2(a_2(e_2)) = b_1(a_1(e_2))$ και $b_2(a_2(e_1)) = b_1(a_1(e_1))$ οπότε $b_2(\overline{e}_4) = b_1(e_3) = b_2(e_4)$ το οποίο δε μπορεί να συμβαίνει σε γράφημα.

1.5 Θεμελειώδης Ομάδα Γραφήματος

Στο εξής θα συμβολίζουμε με $P(\Gamma)$ το σύνολο των μονοπατιών του γραφήματος Γ. Δυο μονοπάτια p, q ενός γραφήματος Γ συντίθενται δια της παράθεσης αν το πρώτο p καταλήγει εκεί όπου το δεύτερο q ξεκινά. Το αποτέλεσμα μιας τέτοιας σύνθεσης είναι ένα νέο μονοπάτι το γινόμενό τους pq.

Η διαδικασία της παράθεσης των μονοπατιών αποτελεί μερική πράξη επί του συνόλου των μονοπατιών ενός γραφήματος.

Ορισμός 1.5.1. Έστω $p = e_1e_2...e_n$ ένα μονοπάτι ενός γραφήματος Γ έτσι ώστε για κάποιο i, $e_i = \overline{e}_{i+1}$. Αν $p' = e_1e_2...e_{i-1}e_{i+2}...e_n$ είναι το μονοπάτι που προκύπτει από το p αν διαγράψουμε την **παλινδρόμηση** $e_i\overline{e_{i+1}}$, τότε γράφουμε $p \searrow^{\Gamma} p'$.
Κάθε τέτοια διαγραφή παλινδρόμησης καλείται **στοιχειώδης αναγωγή**.
Αν ένα μονοπάτι δεν περιέχει παλινδρομήσεις, τότε καλείται **ανηγμένο**.
Η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται στο σύνολο των μονοπατιών του Γ από τη σχέση $\searrow^{\Gamma}$ καλείται **σχέση ομοτοπίας και τη συμβολίζουμε με $\sim$.**

Ορισμός 1.5.2. Θεωρούμε τη σχέση $\sim$ επί του συνόλου των μονοπατιών $P(\Gamma)$ ενός γραφήματος Γ. Αν $p_1, p_2 \in P(\Gamma)$, τότε $p_1 \sim p_2$ αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι $p \in P(\Gamma)$ τέτοιο ώστε $p \searrow^{\Gamma} p_1$ και $p \searrow^{\Gamma} p_2$.

Η όλη ιστορία εδώ, εκτός όλων των άλλων, αντιστοιχεί και στην κατασκευή της ελεύθερης ομάδας πάνω από κάποιο σύνολο. Αν κάποιος είναι εξοικιωμένος με αυτό το κομμάτι της Θεωρίας Ομάδων μπορεί να σκέπτεται τα μονοπάτια ως λέξεις. Αν πάλι κάποιος δεν είναι, όταν θα έρθει σε επαφή για πρώτη φορά με Συνδυαστική Θεωρία Ομάδων εκτός του παρόντος, μπορεί να σκέπτεται τις λέξεις ως μονοπάτια.

Παρατήρηση 1.5.3. Η μερική πράξη της παράθεσης μονοπατιών είναι συμβιβαστή με τη σχέση ομοτοπίας οπότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\pi(\Gamma) := P(\Gamma)/\sim$ εφοδιασμένο με την παράθεση είναι κατηγορία. Επιπλέον κάθε στοιχείο του $\pi(\Gamma)$ έχει αντίστροφο, οπότε το $\pi(\Gamma)$ είναι ομαδοϊδές, το λεγόμενο θεμελειώδες ομαδοϊδές του γραφήματος Γ.

Ορισμός 1.5.4. Έστω v μια κορυφή ενός γραφήματος Γ. Το υποσύνολο $\pi_1(\Gamma, v)$ του $\pi(\Gamma)$ το οποίο αποτελείται ακριβώς από της κλάσεις ομοτοπίας των μονοπατιών τα οποία είναι κυκλώματα στο v, καλείται θεμελειώδης ομάδα του Γ στο v.

Το γεγονός ότι είναι πράγματι μονάδα προκύπτει από το ότι εφόσον όλα τα μονοπάτια έχουν κοινή αρχή και πέρας, η διαδικασία της παράθεσής τους καθίσταται πράξη.

Παρατήρηση 1.5.5. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένας μορφισμός γραφημάτων. Επάγονται από αυτόν απεικονίσεις:

$$f_\pi : \pi(\Gamma) \longrightarrow \pi(\Delta)$$

$$f_{\pi_1} : \pi_1(\Gamma, v) \longrightarrow \pi_1(\Delta, f(v))$$

Η μεν f_π είναι μορφισμός ομαδοϊδών, άρα και συναρτητής. Η δε f_{π_1} είναι ομομορφισμός ομάδων (και συναρτητής προφανώς).

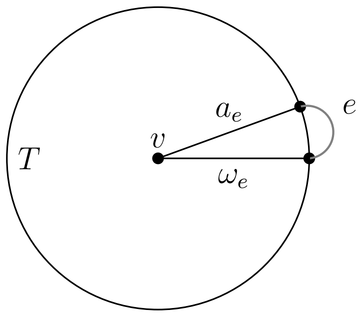
Κάπου σε αυτό το σημείο λοιπόν αναφέρεται από τον *Stallings* ότι η περίπτωση που το γράφημα Γ έχει μόνο μια κορυφή είναι κλασική γενικώς καθώς το $P(\Gamma)$ είναι το ελεύθερο μονοϊδές.

Επίσης αναφέρεται (και θα δειχθεί στη συνέχεια) πως στην ίδια περίπτωση, αν ο O είναι ένας προσανατολισμός του γραφήματος Γ, τότε η $\pi(\Gamma) = \pi_1(\Gamma, v)$ είναι η ελεύθερη ομάδα πάνω στο O.

Από τους προηγούμενους ορισμούς προκύπτει η ακόθουλη πρόταση.

Πρόταση 1.5.6. Αν Γ είναι ένα συνεκτικό γράφημα, τότε για κάθε κορυφή του v έχουμε $\pi(\Gamma) = \pi_1(\Gamma, v)$. Δηλαδή η θεμελειώδης ομάδα ενός συνεκτικού γραφήματος δεν εξαρτάται , ως προς ισομορφισμό, από το σημείο αναφοράς.

Θεώρημα 1.5.7. Έστω $v \in \Gamma^0$ μια κορυφή ενός συνεκτικού γραφήματος Γ και O ένας προσανατολισμός αυτού. Αν το T είναι ένα μεγιστικό δένδρο του γραφήματος Γ, τότε η ομάδα ομοτοπίας $\pi_1(\Gamma, v)$ είναι ελεύθερη με βάση τις ακμές του συνόλου $O \setminus T$.



Σχήμα 1.2:

Απόδειξη. Η απόδειξη που παρουσιάζεται εδώ αναπαρίσταται γραφικά στο α-κόλουθο σχήμα.

Για κάθε ακμή $e \in O \setminus T$ θεωρούμε μέσα στο T το μονοπάτι
$p = [v, \alpha(e)]_\Gamma e[\omega(e), v]_\Gamma$, όπου $\alpha_e = [v, \alpha(e)]_\Gamma$ και $\omega_e = [\omega(e), v]_\Gamma$.
Θεωρούμε λοιπόν την εμφύτευση: $i : O \setminus T \hookrightarrow \pi_1(\Gamma, v) : e \mapsto p_e$.
Προς το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε τα εξής δυο:
1. Το σύνολο $i(O \setminus T)$ παράγει την ομάδα $\pi_1(\Gamma, v)$.
2. Κάθε μη τετριμμένη ανηγμένη λέξη στο $i(O \setminus T)$ είναι διάφορη της μονάδος.
Πράγματι,
1. Εάν $p \in \pi_1(\Gamma, v), p \neq 1$, τότε εξ ορισμού της $\pi_1(\Gamma, v)$ το p δεν περιέχεται στο T καθώς το T δεν περιέχει κυκλώματα. Οπότε αν $p = e_1 e_2 ... e_n$, τότε τουλάχιστον μια εκ των ακμών e_i θα είναι στο $O \setminus T$. Θέτοντας $p_{i_1} = e_1 ... e_{i-2} e_{i-1}$ και $p_{i_2} = \overline{e}_{i-1} \overline{e}_{i-2} ... \overline{e}_1$ έχουμε ότι $p_{i_1} = [v, \alpha(e_i)]$ και $p_{i_2} = [\omega(e_i), v]$. Επιπλέον γράφοντας κάθε $e_i = \overline{e}_{i-2} \overline{e}_{i-1} ... e_{i-1} e_{i-2} e_i$ προκύπτει η εξής γραφή για το μονοπάτι: $p = p_{e_1} p_{e_2} ... p_{e_n}$.
Γράφοντας έτσι το p μπορούμε να διαγράψουμε κάθε p_{e_i} εφόσον $e_i \in T$. Έτσι θεωρώντας $e_{k_1}, ..., e_{k_m}$ ακριβώς εκείνες τις ακμές του p που βρίσκονται εκτός του δένδρου T μπορούμε να γράψουμε:
$p = p_{e_{k_1}} p_{e_{k_2}} ... p_{e_{k_m}}$, όπου για κάθε e_{k_i} έχουμε $(e_{k_i} \in O \setminus T)$ ή $(\overline{e}_{k_i} \in O \setminus T)$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

2. Έστω $p = p_{e_1}^{\epsilon_1}...p_{e_n}^{\epsilon_n}$, όπου $\epsilon_i = \pm 1$ μια ανηγμένη λέξη στο αλφάβητο $O \setminus T \equiv i(O \setminus T)$ μήκους > 1.

Γράφουμε τώρα $p = p_1 e_1^{\pm 1} p_2 e_2^{\pm 1} ... p_n e_n^{\pm 1}$ όπου, $e_i \in O \setminus T$ και $p_i \subseteq T$ ανηγμένα ως προς το αλφάβητο T^0. Εφόσον η αρχική λέξη είναι $O \setminus T$-ανηγμένη, αν $e_i = e_{i+1}$, τότε $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$. Οπότε για κάθε i για το οποίο $p_{i+1} = 1_{\omega(e_{i+1})}$ θα έχουμε αναγκαστικά $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ και $e_i \neq \overline{e}_{i+1}$.

Οπότε η λέξη ύστερα από τις T^1 -αναγωγές λαμβάνει τη μορφή $p = p_{k_1} e_{k_1}^{a_{k_1}} p_{k_2} e_{k_2}^{a_{k_2}} ... p_{k_m} e_{k_m}^{a_{k_m}}$ για κάποιο μη μηδενικό $m \leq n$.

Όντας ανηγμένο Γ-μονοπάτι μη μηδενικού μήκους, είναι διάφορο του τετριμμένου 1_v που είναι και το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 2

Δράσεις Ομάδων σε Γραφήματα

2.1 Δράσεις και γραφήματα *Cayley*

Σε τούτο το σημείο θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές έννοιες πολύ σημαντικές για τη συνέχεια.

Ορισμός 2.1.1. (Δράση Ομάδος σε Γράφημα)

Έστω G ομάδα και Γ ένα γράφημα. (Αριστερή) **Δράση** της ομάδας G στο γράφημα Γ : $G \curvearrowright \Gamma$, καλείται ένα ζεύγος (αριστερών) δράσεων στα σύνολα κορυφών Γ^0 και ακμών Γ^1 τέτοιων ώστε για κάθε $g \in G$ και κάθε $e \in \Gamma^1$ να ισχύει $g\alpha(e) = \alpha(ge)$ και $g\overline{e} = \overline{ge}$. Αν έχουμε μια δράση $G \curvearrowright \Gamma$, τότε το Γ το λέμε $G-$γράφημα.

Λέμε δε ότι η G δρα στο Γ **άνευ αναστροφών** αν για κάθε $g \in G$ και κάθε $e \in \Gamma^1$ έχουμε $ge \neq \overline{e}$.

Τέλος μια δράση $G \curvearrowright \Gamma$ καλείται **ελεύθερη** αν για κάθε κορυφή v του Γ και κάθε μη τετριμμένο στοιχείο g της G ισχύει ότι $gv \neq v$.

Παρατήρηση 2.1.2. Ο παραπάνω ορισμός ταυτίζεται με τον αναμενόμενο ορισμό δράσης ομάδας σε κάποιο αντικείμενο κάποιας κατηγορίας. Δηλαδή, μια δράση $G \curvearrowright \Gamma$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων: $\varphi : G \rightarrow AUT(\Gamma)$, όπου $AUT(\Gamma)$ είναι η ομάδα των αυτομορφισμών του γραφήματος Γ.

Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι κάθε δράση είναι άνευ αναστροφών.

Ορισμός 2.1.3. (Τροχιά Δράσης)

Τροχιά ενός $x \in \Gamma$ μέσω της δράσης $G \curvearrowright \Gamma$ καλείται το σύνολο $O(x) = \{gx | g \in G\}$.

Ορισμός 2.1.4. (Γράφημα πηλίκο προς Δράση)

Έστω $G \curvearrowright \Gamma$ μια δράση. Ορίζουμε ως γράφημα πηλίκο $G \setminus^{\curvearrowright} \Gamma$ εκείνο το γράφημα που έχει ως κορυφές τις τροχιές $O(v)$ των κορυφών $v \in \Gamma^0$ και ως ακμές τις τροχιές $O(e)$ τών ακμών $e \in \Gamma^1$, όπου, αφενώς η αρχή $\alpha(O(e))$ της τροχιάς $O(e)$ είναι η τροχιά $O(\alpha(e))$ της αρχής της e και αφετέρου η αντίστροφη της τροχιάς $O(e)$ είναι η τροχιά της αντίστροφης: $O(\overline{e})$.

Εφόσον παίρνουμε τις δράσεις άνευ αναστροφών έχουμε $O(e) \neq O(\overline{e})$, οπότε το γράφημα πηλίκο είναι καλώς ορισμένο. Αν $\pi : \Gamma \to \Gamma \setminus G$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός του πηλίκου τον οποίον καλούμε προβολή, τότε για κάθε $y \in \Gamma \setminus G$ η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(y)$ καλείται ανύψωση (ή ανάκτηση) του y μέσω της π.

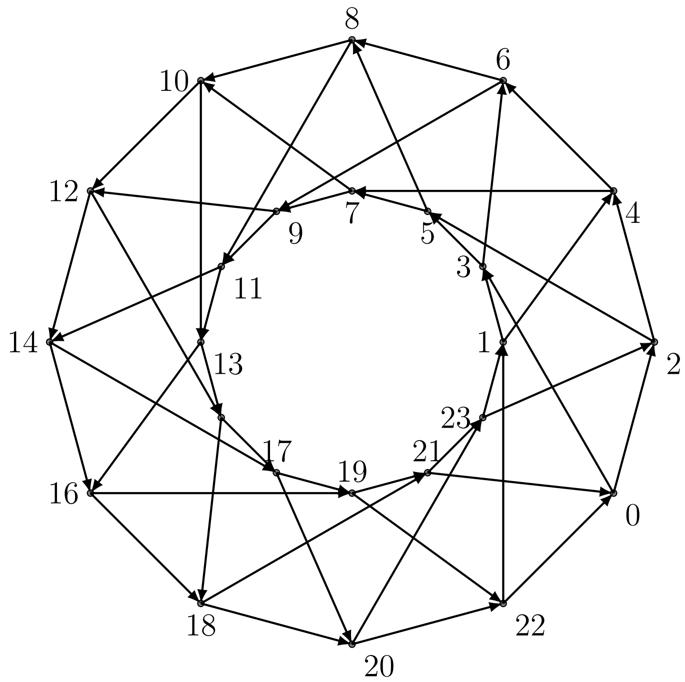
Πρόταση 2.1.5. Έστω $G \curvearrowright \Gamma$ μια δράση και $\pi : \Gamma \longrightarrow \Gamma/G$ ο φυσικός επιμορφισμός. Αν T' είναι ένα δένδρο στο γράφημα πηλίκο Γ/G, τότε υπάρχει ανύψωσή του μέσω του π είναι επίσης δένδρο.

Απόδειξη. Έστω v' μια κορυφή του T' και v μια ανύψωση της v'. Για κάθε κορυφή u' του T' υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $p'_{u'}$ στο T' αρχής v' και πέρατος u'. Από την επιμορφικότητα του π κάθε τέτοιο μονοπάτι ανυψώνεται σε μονοπάτι p_u αρχής v και πέρατος u, όπου u είναι μια ανύψωση του u'. Θεωρούμε T το υπογράφημα του X που περιέχει ακριβώς αυτές τις ανυψώσεις των $p'_{u'}$ για όλες τις κορυφές u' του T'. Εξ ορισμού του το T' είναι συνεκτικό και αποτελεί ανύψωση του T'. Έστω ότι περιέχει κάποιο κύκλωμα q. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι το q είναι κύκλωμα στην κορυφή v. Εφόσον ο π είναι μορφισμός γραφημάτων το $\pi(q)$ είναι κύκλωμα στο $\pi(v) = v'$ πράγμα άτοπο καθώς το T' είναι δένδρο. $\square$

Ορισμός 2.1.6. (Γράφημα *Cayley* Ομαδας G)

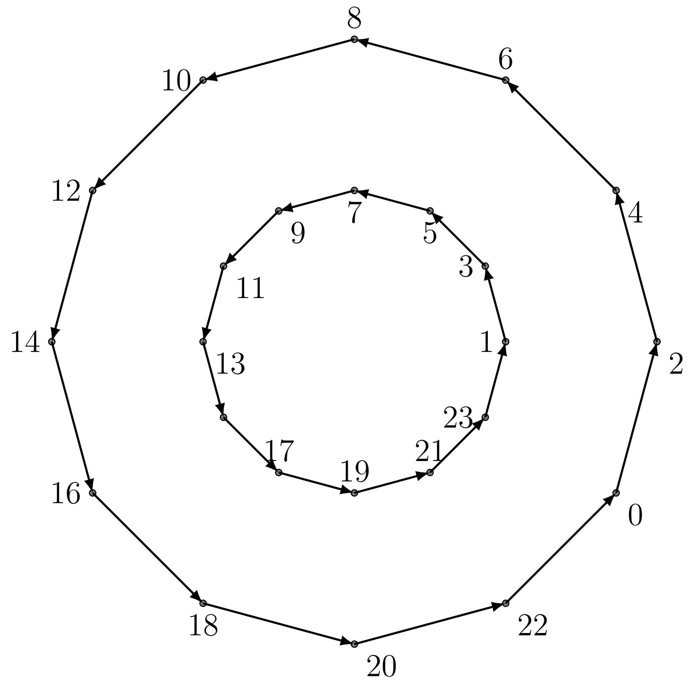
Έστω $S \subset G$. Ορίζουμε ως $\Gamma(G,S)$ το γράφημα με σύνολο κορυφών το G, Σύνολο ακμών το $G \times S \times \{1,-1\}$ ώστε αρχή κάθε ακμής να είναι η κορυφή $\alpha(g,s,1) = g$, πέρας $\omega(g,s,1) = gs$ και αντίστροφη ακμή $\overline{(g,s,\epsilon)} = (g,s,-\epsilon)$. Το ως άνω ορισθέν $\Gamma(G,S)$ καλείται γράφημα *Cayley* της G ως προς το σύνολο S.

Μπορούμε να θεωρούμε τον προσανατολισμό του γραφήματος *Cayley* $\Gamma(G,S)$ εκείνον που περιέχει τις ακμές $(g,s,1)$ και να παραλείπουμε το ϵ από τη γραφή μας. Κάτι τέτοιο θα πράτουμε άνευ προηγούμενης αναφοράς όποτε κρίνεται βολικό.



Σχήμα 2.1: $\Gamma(Z_{24},\{2,3\})$

Πρόταση 2.1.7. Η Διαδικασία κατασκευής του γραφήματως *Cayley* επάγει συναρτητή από την κατηγορία των ομάδων με ένα υποσύνολό τους σημειωμένο σε αυτήν των γραφημάτων.



Σχήμα 2.2: $\Gamma(Z_{24}, \{2\})$

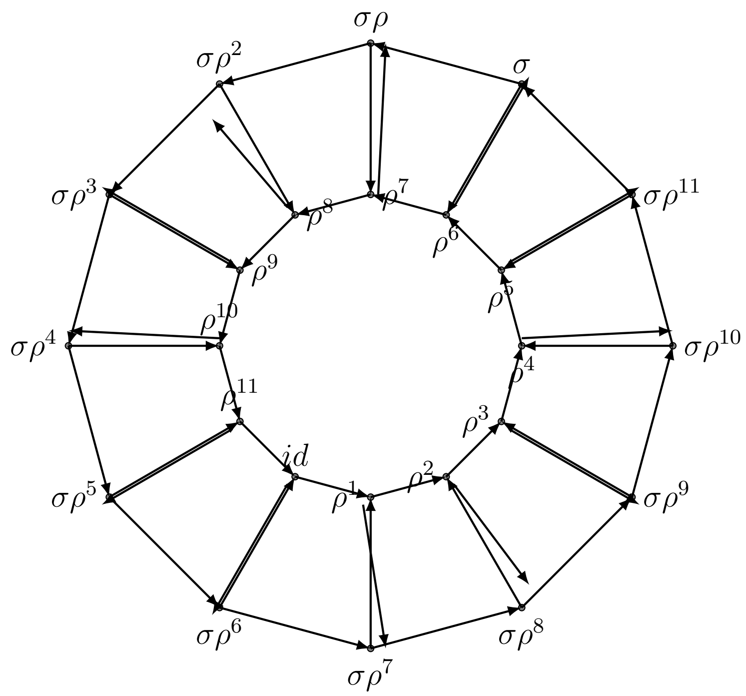
Απόδειξη. Έστω G, H ομάδες, S και R τα αντίστοιχα υποσύνολα και $f : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομάδων τέτοις ώστε $f(S) \subseteq R$.
Ορίζουμε στις ακμές του $\Gamma(G, S)$: $f_\Gamma(g, s) = (f(g), f(s))$. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ομομορφισμός ομάδων αντιστοιχίζεται σε μορφισμό γραφημάτων από τον Γ και ότι επιπλέον ο Γ διατηρεί τις συνθέσεις. Αν $e = (g, s)$ είναι μια ακμή του $\Gamma(G, S)$, τότε $f_\Gamma(\alpha(g, s)) = f(g) = \alpha(f(g), f(s))$ και $f_\Gamma(\overline{(g, s)}) = f_\Gamma(gs, s^{-1}) = (f(g)f(s), f(s)^{-1}) = \overline{(f(g), f(s)} = \overline{f_\Gamma(g, s)}$ Τώρα αν

$$G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$$

είναι δύο ομομορφισμοί ομάδων, τότε για κάθε ακμή (γ,ς) έχουμε: $f \circ g_\Gamma(g, s) = (f \circ g(g), f \circ g(s)) = (f(g(g)), f(g(s))) = f_\Gamma(g(g), g(s)) = f_\Gamma(g_\Gamma(g, s)) = f_\Gamma \circ g_\Gamma(g, s)$. □

Πόρισμα 2.1.8. Οι ομάδες S_4 και Z_{24} δεν είναι ισόμορφες.

Φυσικά δεν περιμέναμε από το γράφημα *Cayley* και τη συναρτητικότητά του για να δούμε ότι η κυκλική Z_{24} δεν είναι ισόμορφη με την S_4. Σε κάποια

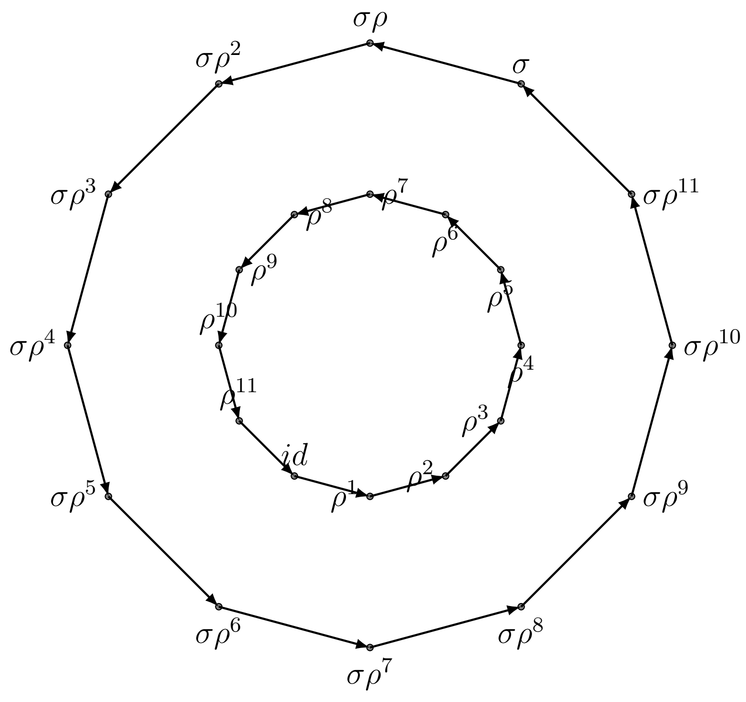


Σχήμα 2.3: $\Gamma(S_4, \{\sigma, \rho\})$

άλλη περίπτωση τα πράγματα στην κατηγορία των ομάδων ίσως να μην είναι τόσο απλά. Τότε θα έχουμε τη δυνατότητα να κοιτάξουμε στην κατηγορία των γραφημάτων. Αντιστοίχως θα ερχόμαστε από τα Γραφήματα στις Ομάδες σε άλλες περιστάσεις με την Θεμελειώδη Ομάδα. Τέλος, για τον αναγνώστη ο οποίος δεν έχει ασχοληθεί με κάποιον από τους δυο αυτούς συναρτητές, στη συνέχεια θα γίνει ξεκάθαρο πως δεν είναι "αντίστροφοι" ακόμα και στην περίπτωση όπου $S = \{\bullet\}$.

2.2 Δράσεις Ομάδων σε Δένδρα και Ελεύθερες Ομάδες

Έστω G μια ομάδα και S ένα σύνολο γεννητόρων της. Η G δρα με φυσικό τρόπο στο γράφημα $Cayley$ της $\Gamma(G, S)$ με τον πολλαλασιασμό που αυτή φέρει.



Σχήμα 2.4: $\Gamma(S_4, \{\rho\})$

Μια τέτοια δράση δεν κάνει τίποτα περισσότερο και πολυπλοκότερο από το να μετατοπίζει το γράφημα. Ιδιαίτερης σημασίας είναι οι περιπτώσεις κατά τις οποίες από τις δράσεις αυτές εξάγουμε συμπεράσματα γενικότερης ισχύος από αυτήν της εκάστοτε περιπτώσεως.

Θεώρημα 2.2.1. Έστω G ομάδα και S ένα υποσύνολο της G. Το γράφημα $Cayley$ $\Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της ομάδας G.

Απόδειξη. Έστω ότι το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της G. Αν $g_1, g_2 \in G$, τότε εφόσον το S γεννά την G $g_1{}^{-1}g_2 = s_1 s_2 ... s_n$ όπου $s_i \in S^{\stackrel{+}{-}1}$ για κάθε i. Έτσι το μονοπάτι $(g_1, s_1)(g_1 s_1, s_2)...(g_1 s_1 s_2 ... s_{n-1}, s_n)$ είναι ένα μονοπάτι του $\Gamma(G, S)$ με αρχή g_1 και πέρας g_2.

Έστω τώρα ότι το γράφημα $Caley, \Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό. Αν $g \in G$, τότε υπάρχει μονοπάτι από το 1_G στο g. Αν $(1, s_1{}^{\epsilon_1})(s_1{}^{\epsilon_1}, s_2{}^{\epsilon_2})...(s_1{}^{\epsilon_1} s_2{}^{\epsilon_2} ... s_{n-1}{}^{\epsilon_{n-1}}, s_n{}^{\epsilon_n})$ είναι αυτό το μονοπάτι, τότε $g = s_1{}^{\epsilon_1} s_2{}^{\epsilon_2} ... s_n{}^{\epsilon_n}$. Άρα το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της G. □

Θεώρημα 2.2.2.

Έστω F μια ομάδα και $S \subseteq F$. Το γράφημα *Cayley* $\Gamma(F, S)$ είναι δένδρο αν και μόνο αν η ομάδα F είναι ελεύθερη επί του S.

Απόδειξη. Έστω ότι η F είναι ελεύθερη επί του S. Από το παραπάνω έχουμε ότι το γράφημα $\Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό. Μένει να αποδείξουμε ότι δεν έχει κυκλώματα.

Αν $(g, s_1)(gs_1, s_2)...(gs_1s_2...s_{n-1}, s_n)$, όπου για κάθε $i, s_i \in S \cup S^{-1}$, είναι ένα μονοπάτι με αρχή και πέρας g, τότε $g = gs_1s_2...s_n \Rightarrow s_1s_2...s_n = 1_G$. Οπότε $n = 0$ εφόσον τα s_i στο $S \cup S^{-1}$ και άρα δεν υπάρχει μη τετριμμένο κύκλωμα στο $\Gamma(G, S)$.

Έστω τώρα ότι το γράφημα *Cayley* $\Gamma(F, S)$ είναι δένδρο. Εφόσον είναι συνεκτικό το σύνολο S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της G. Έστω $1 = {s_1}^{\epsilon_1}{s_2}^{\epsilon_2}...{s_n}^{\epsilon_n}$ το ουδέτερο γραμμένο πάνω στο $S \cup S^{-1}$.

Το μονοπάτι $(1, {s_1}^{\epsilon_1})({s_1}^{\epsilon_1}, {s_1}^{\epsilon_1}{s_2}^{\epsilon_2})({s_1}^{\epsilon_1}...{s_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}, {s_n}^{\epsilon_n})$ είναι κύκλωμα αρχής και τέλους 1. Το μονοπάτι p δε μπορεί να είναι ανηγμένο καθώς το $\Gamma(G, S)$ είναι δένδρο. Άρα το ουδέτερο δε μπορεί να γραφτεί ως ανηγμένη λέξη πάνω στο S. Το S λοιπόν είναι ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων της F. □

Πόρισμα 2.2.3. Κάθε ελεύθερη ομάδα δρα ελεύθερα και άνευ αναστροφών σε κάποιο δένδρο.

Απόδειξη. Το ζητούμενο προκύπτει από τα παραπάνω για το γράφημα *Cayley* της ομάδας. □

Τι γίνεται όταν μια ομάδα δρα σε τυχαίο δένδρο και όχι στο γράφημα *Cayley* της;

Θεώρημα 2.2.4. Κάθε ομάδα G η οποία δρα ελεύθερα και άνευ αναστροφών πάνω σε κάποιο δένδρο T είναι ελεύθερη.

Απόδειξη. Έστω $\pi : T \to T/G$ ο φυσικός επιμορφισμός, R' ένα μεγιστικό δένδρο του T/G και R η ανάκτηση (ανύψωση) αυτού από την π. Εφόσον η π είναι επί και το R' περιέχει όλες τις κορυφές του $\pi(X)$, κάθε τροχιά κορυφών της δράσης θα έχει αντιπρόσωπο μεταξύ των κορυφών του R και μάλιστα μοναδικό, καθώς κάθε δυο κορυφές του R, εξ ορισμού του ιδίου, ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές. Έστω O' το σύνολο των γεωμετρικών ακμών (ή ισοδύναμα ένας προσανατολισμός) του T/G και O ο επαγώμενος από τον O' προσανατολισμός του T.

Έστω E' το σύνολο των γεωμετρικών ακμών του T/G που κείνται εκτός του μεγιστικού δένδρου R'. Για κάθε τέτοια ακμή $e' \in E'$ ανακτάται μοναδική ακμή e μέσω της π, η αρχή της οποίας κείται εντός του R καθώς αν υπήρχε και δεύτερη τέτοια e_1, τότε οι e, e_1 θα είχαν κοινό κάποιο άκρο τους v και θα ήταν στην ίδια τροχιά οπότε θα είχαμε $v = gv$ για κάποιο $g \in G$, το οποίο δεν είναι δυνατό καθώς η δράση είναι ελεύθερη. Παρατηρούμε επίσης ότι το άλλο άκρο της e κείται εκτός του R καθώς διαφορετικά η e θα έκειτο στο R και άρα η $e' = \pi(e)$ θα έκοιτο στο R'.

Έστω E το σύνολο όλων των θετικά προσανατολισμένων ακμών του T με αρχή στο R και πέρας εκτός του R. Εκ των ορισμών των E, E', η π απεικονίζει μονομορφικά το E επί του E'.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως για κάθε ακμή $e \in E$, η πέρας της που κείται εκτός του R είναι στην τροχιά ακριβώς μιας κορυφής του R την οποία θα συμβολίζουμε v_e. Επιπλέον το στοιχείο g_e της ομάδας G για το οποίο $g_e\alpha(e) = \omega(e)$ είναι μοναδικό, πάλι από την ελευθερία της δράσης.
Η ομάδα G είναι ελεύθερη επί του $S = \{g_e | e \in E\}$. Πράγματι, για κάθε $g \in G$ τα υποδένδρα gR είναι ξένα ανά δύο και το σύνολο των κορυφών τους καλύπτει όλες τις κορυφές του T. Αν σ είναι μια ακμή εκτός των δένδρων αυτών, τότε τα άκρα της θα κείνται σε δυο διαφορετικά τέτοια g_1R, g_2R. Συμπτύσσοντας κάθε δένδρο gR σε σημείο ορίζεται νέο δένδρο το T_R. Μένει τώρα να δείξουμε πως το T_R είναι ισόμορφο με γράφημα το $Cayley$ της G ως προς το σύνολο S. Προς τούτο θεωρούμε τον ακόλουθο μορφισμό:

$$f : T_R \to \Gamma(G, S),\ {T_R}^0 \ni [gR] \mapsto g \text{ και } {T_R}^1 \ni \sigma \mapsto (g_1, s := {g_1}^{-1}g_2)$$

όπου σ χαρακτηρίζεται ως η μοναδική ακμή που συνδέει τα g_1R, g_2R. Επιπλέον το στοιχείο ${g_1}^{-1}g_2$ ανήκει πράγματι στο S καθώς η ακμή ${g_1}^{-1}\sigma$ συνδέει τα υποδένδρα R και ${g_1}^{-1}g_2R$.

Ο μορφισμός αυτός είναι ένα προς ένα και επί, οπότε από το 2.2.1 η G είναι ελεύθερη. □

Πρόταση 2.2.5. Έστω G μια ομάδα η οποία δρα ελεύθερα και άνευ αναστροφών επί ενός δένδρου T. Αν O είναι ένας προσανατολισμός του T/G, τότε η ομάδα G είναι ελεύθερη με τάξη $rk(G) = |O| - |(T/G)^0| + 1$.

Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.4 και το ακόλουθο Λήμμα.

Παρατήρηση 2.2.6. Έστω ότι το Γ είναι ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα. Αν έχουμε τη δράση της θεμελειώδους ομάδας $\pi_1(\Gamma)$ επί ενός μεγιστικού δένδρου του ιδίου του γραφήματος Γ, τότε εφόσον αυτή είναι ελεύθερη και άνευ αντιστροφών ο παραπάνω τύπος γίνεται

$$rk(\pi_1(\Gamma)) = |O| - |\Gamma^0| + 1$$

Ένα δένδρο μπορεί να εφοδιαστεί με μια σχέση μερικής διάταξης η οποία είναι σε αντιστοιχία με κάποιον προσανατολισμό. Πράγματι, αν T είναι ένα δένδρο και O ένας προσανατολισμός του T τέτοιος ώστε για κάθε $e_1 \in O$ και κάθε $e_2 \in T^1$ να έχουμε $\omega(e_1) = \alpha(e_2) \Rightarrow e_2 \in O$. Αν τώρα O είναι ένας τέτοιος προσανατολισμός η ακόλουθη σχέση είναι σχέση διάταξης στο O:
$e_1 < e_2$ αν υπάρχει μονοπάτι ακμών του O με αρχή $\alpha(e_1)$ και πέρας $\alpha(e_2)$.
Οποιονδήποτε προσανατολισμό ο οποίος πληροί την παραπάνω συνθήκη θα το λέμε προσανατολισμό διάταξης.

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει άμεσα από το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.2.7. Κάθε πεπερασμένο δένδρο T έχει πλήθος γεωμετρικών ακμών κατά ένα λιγότερο από το πλήθος των κορυφών του. Δηλαδή, ${T^1}_+ = T^0 - 1$.

Απόδειξη. Έστω O ένας προσανατολισμός διάταξης και v μια ελαχιστική ακμή του $(T, <_O)$. Αν u είναι μια ακμή μεγαλύτερη από το v και υπάρχουν τρεις γεωμετρικές ακμές που φυτρώνουν από αυτήν, τότε θεωρούμε νέο δένδρο T_1

στο οποίο έχει αποκοληθεί από το u ένα από τα δυο κομμάτια του δένδρου T τα οποία φυτρώνουν στο u και δεν περιέχουν το v και έχει συγκολληθεί στο v. Το T_1 έχει ίδιο πλήθος ακμών ίδιο πλήθος κορυφών με το T και είναι εξ ορισμού δένδρο. Εφαρμόζωντας επαγωγικά την κατασκευη αυτή, καταλήγουμε μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων σε δένδρο το οποίο έχει ίδιο πλήθος ακμών και κορυφών με το αρχικό και είναι ισόμορφο με το $C_{|T_0|}$. □

Θεώρημα 2.2.8. (Το θεώρημα των $Nielsen - Schreier$)
Κάθε υποομάδα ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη.

Απόδειξη. Έστω F μια ελεύθερη επί ενός συνόλου S ομάδα. Η F δρα ελεύθερα και άνευ αναστροφών στο γράφημα $Cayley$ $\Gamma(G, S)$. Αν H είναι μια υποομάδα της F, τότε και αυτή δρα ελεύθερα και άνευ αναστροφών επί του $\Gamma(G, S)$, οπότε και αυτή είναι ελεύθερη. □

Πόρισμα 2.2.9. (Ο Τύπος του $Schreier$) Έστω G μια ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης τάξης και H Μια υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτου $(G : H) = n$. Για τις τάξεις των G, H ισχύει ο ακόλουθος τύπος:
$rk(H) - 1 = n(rk(G) - 1)$.

Απόδειξη. Έστω S μια βάση της G και $H\backslash G$ το σύνολο των δεξιών συμπλόκων της H στην G. Θεωρόντας τη συνήθη δράση της H στο $\Gamma(G, S)$ παίρνουμε το γράφημα πηλίκο $\Gamma(G, S)/H$ με ακμές το σύνολο $H \setminus G$ και γεωμετρικές κορυφές το σύνολο $(H \setminus G) \times S$. Από το 2.2.5 έχουμε:
$rk(H) = |O_{\Gamma(G,S)/H}| - |(\Gamma(G, S)/H)^0| + 1 = n|O_{\Gamma(G,S)}| - n\Gamma(G, S)^0 + 1 = n(|O_{\Gamma(G,S)}| - \Gamma(G, S)^0 + 1 - 1) = n(rk(G) - 1) + 1$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Εγκυκλοπαιδικά παραθέτουμε και κάποια ανάλογα αποτελέσματα για το ελεύθερο γινόμενο ομάδων με αμάλγαμα.

Θεώρημα 2.2.10. Έστω Γ ένα G-γράφημα όπου το γράφημα πηλίκο της δράσης Γ/G αποτελείται ακριβώς από μια γεωμετρική ακμή και δυό κορυφές. Έστω e η ακμή και $\alpha(e) = u, \omega(e) = v$ οι κορυφές του γραφήματος Γ/G. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Το γράφημα Γ είναι δένδρο.
2. Η ομάδα G είναι το *pushout* του διαγράμματος $Stab([u]) \leftarrow Stab([e]) \rightarrow Stab([u])$.

Θεώρημα 2.2.11. Έστω H, G, G_1, G_2 ομάδες. Αν η G να είναι το *pushout* του διαγράμματος $G_1 \leftarrow H \rightarrow G_2$, τότε υπάρχει $G-$δένδρο T τέτοιο ώστε το γράφημα πηλίκο της δράσης T/G να αποτελείται ακριβώς από μια ακμή και δυο κορυφές. Επιπλέον οι σταθεροποιούσες ομάδες των δύο κορυφών είναι οι συζυγείς υποομάδες των G_1 και G_2 αντίστοιχα, ενω η σταθεροποιούσα της κορυφής είναι συζυγείς υποομάδες της H.

Κεφάλαιο 3

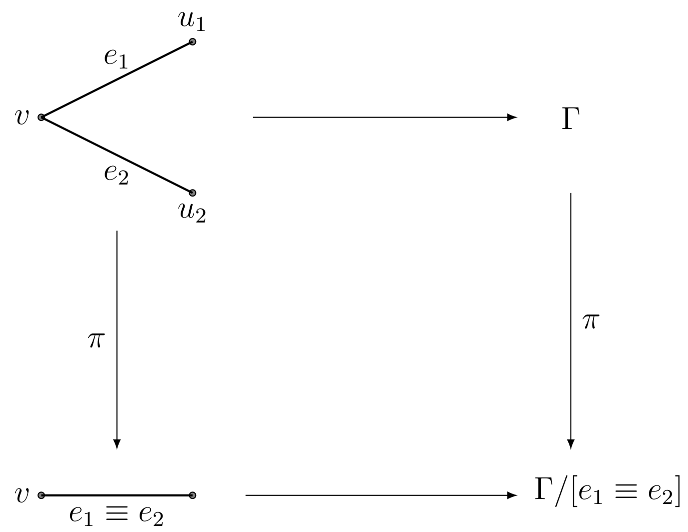
Καλύμματα και Εμβαπτίσεις Γραφημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσουμε μέρος της θεωρίας των καλυμάτων και των εμβαπτίσεων. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες που έχουμε παρουσιάσει ώστε να αποδείξουμε κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα στη θεωρία ομάδων.

Ορισμός 3.0.1. (Τοπικοί μορφισμοί - Κάλυμμα) Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένας μορφισμός γραφημάτων και $v \in \Gamma^0$ μια κορυφή του Γ. Θεωρούμε τον περιορισμό $f_v : S(v, \Gamma) \to S(f(v), \Delta)$ της f στο $S(v, \Gamma)$.
Αν για καθε κορυφή v του γραφήματος Γ η f_v είναι:
α. ένα προς ένα, τότε η f καλείται **εμβάπτιση** ($immersion$)
β. επί, τότε η f καλείται **τοπικός επιμορφισμός**
γ. ένα προς ένα, επί (και επιπλέον η ίδια η f είναι επί του Δ), τότε το ζεύγος (Γ, f) καλείται **κάλυμμα** του γραφήματος Δ από το γράφημα Γ.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια φυσική πηγή παραδειγμάτων καλυμμάτων.

Πρόταση 3.0.2. Έστω G μια ομάδα και μια ελεύθερη και άνευ αντιστροφών δράση της επί ενός γραφήματος Γ. Ο φυσικός επιμορφισμός της δράσης $\Gamma \longrightarrow \Gamma/G$ είναι κάλυμμα.



Σχήμα 3.1:

Απόδειξη. Έστω v μια ακμή του γραφήματος Γ. Αν e_1, e_2 είναι δυο κορυφές στο άστρο της v τέτοιος ώστε $\pi(e_1) = \pi(e_2)$, τότε υπάρχει $g \in G$ ώστε $ge_1 = e_2$, οπότε $gv = v$ το οποίο είναι άτοπο αφού η δράση είναι ελεύθερη. □

3.1 Διπλώσεις

Ορισμός 3.1.1. (Παραδεκτό Ζεύγος Ακμών)
Ένα ζεύγος (e_1, e_2) ακμών ενός γραφήματος Γ καλείται παραδεκτό (*admissible*) αν $\alpha(e_1) = \alpha(e_2)$ και $e_1 \neq \overline{e_2}$. Δηλαδή έχουν κοινή αρχή v και η μία δεν ισούται με την αντίστροφη της άλλης.

Εάν (e_1, e_2) είναι ένα παραδεκτό ζεύγος ακμών, τότε θεωρούμε το γράφημα πηλίκο $\Gamma/[e_1 \equiv e_2]$. Αυτό είναι το αποτέλεσμα της δίπλωσης (*folding*) των δύο παραδεκτών ακμών.

Παρατήρηση 3.1.2. Το διάγραμμα $\{v, e = [e_1] = e[_2]\} \to \Gamma/[e_1, e_2] \leftarrow \Gamma$ είναι η εξώθηση του $\{v, e = [e_1] = [e_2]\} \leftarrow \Gamma/[e_1 \equiv e_2] \to \Gamma$, καθιστώντας το παρακάτω σχήμα διάγραμμα εξώθησης.

Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένας μορφισμός γραφημάτων και e_1, e_2 δυο ακμές του Γ τέτοιες ώστε $\alpha(e_1) = \alpha(e_2)$ και $f(e_1) = f(e_2)$, τότε, το ζεύγος (e_1, e_2) είναι παραδεκτό και η f παραγοντοποιείται μέσα από το $\Gamma/[e_1 \equiv e_2]$. Η f λέμε ότι διπλώνει στο (ή το) παραδεκτό αυτό ζεύγος ακμών.
Πράγματι, εφόσον η f είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε αν $e \sim_{[e_1=e_2]} e'$ να ισχύει $f(e) = f(e')$, από την καθολική ιδιότητα του πηλίκου έχουμε τη ζητούμενη μονοσήμαντη παραγοντοποίηση.

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\forall f"'] & \Gamma/[e_1 \equiv e_2] \arrow[dl, "\exists! \hat{f}"] \\ \Delta & \end{tikzcd}$$

Δηλαδή η f παραγοντοποιείται μονοσήμαντα ως εξής: $f = \hat{f} \circ \pi$
Πιο γενικά ισχύει το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.1.3. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένας μορφισμός γραφημμάτων. Αν ο f δεν είναι εμβάπτιση, τότε διπλώνει κάποιο παραδεκτό ζεύγος ακμών του γραφήματος Γ.

Απόδειξη. Η άρνηση του ορισμού της εμβάπτισης έχει ως εξής: Υπάρχει κορυφή $v \in \Gamma^0$ τέτοια ώστε ο περιορισμός $f|_{S(v,\Gamma)}$ να μήν είναι 1-1.

Δηλαδή υπάρχουν διαφορετικές ακμες $e_1, e_2 \in S(v, \Gamma)$ τέτοιες ώστε $f(e_1) = f(e_2)$. □

Θεώρημα 3.1.4. Έστω Γ ένα πεπερασμένο γράφημα. Κάθε μορφισμός γραφημάτων $f : \Gamma \to \Delta$ αναλύεται σε πεπερασμένο γινόμενο διπλώσεων ακολουθούμενο από μια εμβάπτιση.

Απόδειξη. Θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη πεπερασμένης ακολουθίας:

$$\Gamma \xrightarrow{f_1} \Gamma_1 \xrightarrow{f_2} \quad \cdots \quad \xrightarrow{f_n} \Gamma_n \xrightarrow{\overline{f}} \Delta,$$

τέτοιας ώστε κάθε f_i να είναι δίπλωση και ο $\overline{f}$ να είναι εμβάπτιση.
Χρησιμοποιούμε επαγωγή.
Αν η f είναι εμβάπτιση, τότε δεν υπάρχει κάτι να κάνουμε.

Αν η f δεν είναι εμβάπτιση, τότε από το παραπάνω Λήμμα, η f διπλώνει κάποιο παραδεκτό ζεύγος ακμών e_1, e_1' του Γ και από την παραπάνω παρατήρηση η f παραγοντοποιείται μονοσήμαντα μέσα από το $\Gamma_1 := \Gamma/[e_1, e_1']$ δίνοντάς μας μια ακολουθία:

$$\Gamma \xrightarrow{f_1} \Gamma_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \Delta,$$

όπου η f_1 είναι δίπλωση.

Έστω τώρα ότι έχουμε ορίσει ακολουθία:

$$\Gamma \xrightarrow{f_1} \Gamma_1 \xrightarrow{f_2} \quad \cdots \quad \xrightarrow{f_i} \Gamma_i \xrightarrow{\overline{f_i}} \Delta,$$

όπου οι $f_1, f_2, ..., f_i$ είναι διπλώσεις αλλά η $\overline{f_i}$ δεν είναι εμβάπτιση.

Δουλεύοντας όπως στην περίπτωση $(n = 1)$ προκύπτει ακολουθία:

$$\Gamma \xrightarrow{f_1} \Gamma_1 \xrightarrow{f_2} \quad \cdots \quad \xrightarrow{f_{i+1}} \Gamma_{i+1} \xrightarrow{\overline{f_{i+1}}} \Delta,$$

όπου οι $f_1, f_2, ..., f_{i+1}$ είναι διπλώσεις. Αν η $\overline{f_{i+1}}$ είναι εμβάπτιση, τότε θέτουμε $\overline{f} := \overline{f_{i+1}}$ και έχουμε τη ζητούμενη ακολουθία.

Αν η $\overline{f_{i+1}}$ δεν είναι εμβάπτιση, τότε επαναλαμβάνουμε το επαγωγικό βήμα.

Η περιγραφείσα διαδικασία δεν είναι ατέρμονη καθώς $\infty > |\Gamma|$ και για κάθε i το οποίο πληροί τη συνθήκη επανάληψης του επαγωγικού βήματος έχουμε: $|\Gamma_i| > |\Gamma_{i+1}|$. □

3.2 Ιδιότητες Καλυμμάτων

Η έννοια των καλυμμάτων είναι πολύ χρήσιμη στην τοπολογία γενικώς και στα γραφήματα ειδικότερα. Παρότι ασθενέστερη έννοια αυτής του ισομορφισμού γραφημάτων, οι απόρροιες της ύπαρξης ενός καλύμματος είναι πολύ σημαντικές. Τα ακόλουθα αποτελέσματα θα καταστήσουν σαφή τούτο τον ισχυρισμό.

Λήμμα 3.2.1. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένα κάλυμμα του γραφήματος Δ από το γράφημα Γ και v μια κορυφή του γραφήματος Γ. Εάν p είναι ένα μονοπάτι στο Δ με αρχή την κορυφή $u = f(v)$, τότε υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $\tilde{p}$ στο γράφημα Γ με αρχή την κορυφή v τέτοιο ώστε $f(\tilde{p}) = p$.

Απόδειξη. Έστω $p = e_1 e_2 ... e_n$ ένα μονοπάτι στο γράφημα Δ με $\alpha(p) = u \in \Delta^0$. Εφόσον η f είναι κάλυμμα του Δ η $f_v : S(\Gamma, v) \to S(\Delta, u)$ είναι ένα προς ένα και επί, άρα υπάρχει $\tilde{e}_1 \in \Gamma^1$ ώστε $\alpha(\tilde{e}_1) = v$ και $f(\tilde{e}_1) = e_1$ και είναι μοναδικό. Επαγωγικά θα ορίσουμε και κάθε επόμενη ακμή για να κατασκευάσουμε το $\tilde{p}$. Εφόσον $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ και η $f_{\omega(\tilde{e}_i)}$ είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει $\tilde{e}_{i+1} \in \Gamma^1$ ώστε $\alpha(\tilde{e}_{i+1}) = \omega(\tilde{e}_i)$ και $f(\tilde{e}_{i+1}) = e_{i+1}$ και είναι μοναδικό. Ό.Έ.Δ. $\square$

Το μονοπάτι $\tilde{p}$ όπως πριν, καλείται **ανύψωση** το μονοπατιού p. Όπως το παραπάνω Λήμμα μας δείχνει, μπορούμε μέσω ενός καλύμματος να "ανακτούμε" μονοπάτια. Όπως θα δούμε άμεσα, τα μονοπάτια δεν είναι τα μόνα που μπορούμε να ανακτούμε μέσω ενός καλύμματος.

Λήμμα 3.2.2. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένα κάλυμμα του γραφήματος Δ από το γράφημα Γ. Αν p_1, p_2 είναι δύο ομοτοπικά μονοπάτια του γραφήμματος Δ, τότε οι αντίστοιχες ανυψώσεις $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ είναι ομοτοπικά μονοπάτια του γραφήματος Γ.

Απόδειξη. Προς το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $p \searrow^{\Delta} p'$, τότε $\tilde{p} \searrow^{\Gamma} \tilde{p'}$.
Έστω $p \searrow^{\Delta} p'$ και $\tilde{p}, \tilde{p'}$ τα ανακτηθέντα από τα p, p' μονοπάτια στο Γ. Έστω $p = e_1 e_2 ... e\bar{e} ... e_n$, $p' = e_1 e_2 ... e_n$, $\tilde{p} = \tilde{e}_1 \tilde{e}_2 ... \tilde{e}\tilde{\bar{e}} ... \tilde{e}_n$ και $\tilde{p'} = \tilde{e}_1 \tilde{e}_2 ... \tilde{e}_n$. Εφόσον η f είναι μορφισμός γραφημμάτων, θα πρέπει $f(\tilde{\bar{e}}) = \bar{e}$
$f(\tilde{\bar{e}}) = \bar{e} \Rightarrow \overline{f(\tilde{\bar{e}})} = e \Rightarrow f(\bar{\tilde{\bar{e}}}) = e \Rightarrow f(\bar{\tilde{\bar{e}}}) = f(\tilde{e}) \overset{3.2.1}{\Rightarrow} f_{\alpha(\tilde{e})}(\bar{\tilde{\bar{e}}}) = f_{\alpha(\tilde{e})}(\tilde{e}) \Rightarrow$ $\bar{\tilde{\bar{e}}} = \tilde{e} \Rightarrow \tilde{\bar{e}} = \bar{\tilde{e}}$.
Οπότε έχουμε ότι $\tilde{p} = \tilde{e}_1 \tilde{e}_2 ... \tilde{e}\tilde{\bar{e}} ... \tilde{e}_n = \tilde{e}_1 \tilde{e}_2 ... \tilde{e}\bar{\tilde{e}} ... \tilde{e}_n \searrow^{\Delta} \tilde{e}_1 \tilde{e}_2 ... \tilde{e}_n = \tilde{p}'$ το οποίο είναι και το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 3.2.3. Έστω Γ, Δ δυο γραφήματα, Θ ένα συνεκτικό γράφημα και $f : \Gamma \to \Delta$ ένα κάλυμμα του γραφήματος Δ. Για κάθε μορφισμό γραφημάτων $g : \Theta \to \Delta$ και κορυφές $u \in \Gamma^0, v \in \Theta^0$ τέτοιες ώστε $f(u) = g(v)$, υπάρχει μορφισμός γραφιμάτων: $\tilde{g} : \Theta \to \Gamma$ τέτοιος ώστε $\tilde{g}(v) = u$ και $f \circ \tilde{g} = g$ αν και μόνο αν $g(\pi_1(\Theta, v)) \subseteq f(\pi_1(\Gamma, u))$. Επιπλέον αν η $\tilde{g}$ υπάρχει, τότε είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $\tilde{g} : \Theta \to \Gamma$ τέτοια ώστε $f \circ \tilde{g} = g$ και $\tilde{g}(v) = u$. Κάθε μορφισμός γραφημάτων z επάγει ομομορφισμό ομάδων

z_{π_1} μεταξύ αντίστοιχων Θεμελειωδών ομάδων (Παρατήρηση 1.5.5). Έστω $[p]_\Delta \in g(\pi_1(\Theta, v)) = g_{\pi_1}(\pi_1(\Theta, v))$ η οποία είναι υποομάδα της $\pi_1(\Delta, g(v))$. Τότε υπάρχει $[q]_\Theta \in \pi_1(\Theta, v)$ τέτοιο ώστε $g_{\pi_1}([q]) = [p]$. Επιπλέον έχουμε $f_{\pi_1}(\tilde{g}_{\pi_1}([q])) = [f(\tilde{g}(q))] = [g(q)] = g_{\pi_1}([q]) = [p]$.
Δηλαδή υπάρχει στοιχείο της $\pi_1(\Gamma, u)$, το $x = [\tilde{g}(q)]$ για το οποίο $f_{\pi_1}(x) = [p]$
Οπότε πράγματι $g(\pi_1(\Theta, v)) \subseteq f(\pi_1(\Gamma, u))$.
Έστω τώρα ότι $g(\pi_1(\Theta, v)) \subseteq f(\pi_1(\Gamma, u))$. Θα ορίσουμε την $\tilde{g}$.
Καταρχήν ορίζουμε $\tilde{g}(v) := u$.
Έστω $w \in \Theta^0$ μια κορυφή του Θ διάφορη από το v. Εφόσον το Θ είναι συνεκτικό υπάρχει μονοπάτι p στο Θ με αρχή v και πέρας w. Αυτό απεικονίζεται από τον g στο μονοπάτι $g(p)$ το οποίο έχει αρχή $g(v) = f(u)$.
Από το 3.2.1 ανακτούμε μοναδικό μονοπάτι $\widetilde{g(p)}$ αρχής u για το οποίο $f(\widetilde{g(p)}) = g(p)$. Το πέρας αυτού του μονοπατιού είναι η ζητούμενη ακμή. Οπότε θέτουμε $\tilde{g}(w) := \omega(\widetilde{g(p)})$.
Τώρα θα δείξουμε ότι αυτός ο ορισμός της $\tilde{g}$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του μονοπατιού p.
Έστω p' εταιρο μονοπάτι αρχής v και πέρατος w στο Θ. Το μονοπάτι $p\overline{p'}$ θα είναι ένα κύκλωμα αρχής και πέρατος v στο Θ, άρα στοιχείο (εκπρόσωπος στοιχείου) της ομάδας $\pi_1(\Theta, v)$. Από την υπόθεση ότι $g(\pi_1(\Theta, v)) \subseteq f(\pi_1(\Gamma, u))$ προκύπτει ότι $g(p\overline{p'}) \in f(\pi_1(\Gamma, u))$. Οπότε υπάρχει κύκλωμα q του Γ αρχής και πέρατος u, τέτοιο ώστε $f(q) = g(p\overline{p'})$. Από το Λήμμα 3.2.1 υπάρχει μοναδικό μονοπάτι αρχής u στο Γ που να απεικονίζεται στο $f(q)g(p') = g(p)$, άρα $\widetilde{f(q)g(p')} = \widetilde{f(q)}\widetilde{g(p')} = q\widetilde{g(p')} = \widetilde{g(p)}$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα μονοπάτια $\widetilde{g(p')}, \widetilde{g(p)}$ έχουν το ίδιο πέρας και έτσι ο ορισμός της g στο Θ^0 είναι πράγματι ανεξάρτητος της επιλογής μονοπατιού.
Μένει να ορίσουμε τον $\tilde{g}$ στο σύνολο Θ^1.
Έστω $e \in \Theta^1$ και p ένα μονοπάτι του Θ αρχής v και πέρατος $\alpha(e)$. Έστω $\widetilde{g(pe)}$ η ανύψωση μέσω της f του μονοπατιου $g(pe)$. Αυτό θα είναι της μορφής $\widetilde{g(p)}q$ όπου $\widetilde{g(p)}$ η ανύψωση του $g(p)$ και q κάποιο μονοπάτι στο Γ με $f(q) = g(e)$. Αφού το $g(e)$ είναι ακμή, ακμή είναι και το q. Τούτο ισχύει διότι ο f είναι κάλυμμα και άρα δε μπορεί να διπλώσει κάποιο ζεύγος ακμών ώστε

να απεικονίσει μονοπάτι μήκους > 1 σε ακμή.
Η μοναδικότητα της $\tilde{g}$ απορέει από τη μοναδικότητα καθε φορά της ανάκτησης μέσω της f.
Τέλος προς το γεγονός ότι η $\tilde{g}$ είναι πράγματι μορφισμός γραφημάτων έχουμε το εξής:

$$\alpha(\tilde{g}(e)) = \alpha(\widetilde{g(e)}) = \widetilde{\alpha(g(e))} = \widetilde{g(\alpha(e)} = \tilde{g}(\alpha(e)).$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (\Gamma, u) \arrow[d, "f"] & & \pi_1(\Gamma, u) \arrow[d, "f_{\pi_1}"] \\
(\Theta, v) \arrow[urr, "\exists!\tilde{g}"] \arrow[rr, "\forall g"'] & & (\Delta, f(u) = g(v)) & & f(\pi_1(\Gamma, u)) \arrow[d, hook, "\subseteq"] \\
\pi_1(\Theta, v) \arrow[rr, "g_{\pi_1}"'] & & g(\pi_1(\Theta, v)) \arrow[urr, hook, "\subseteq"] \arrow[rr, hook, "\subseteq"'] & & \pi_1(\Delta, f(u) = g(v))
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 3.2:

□

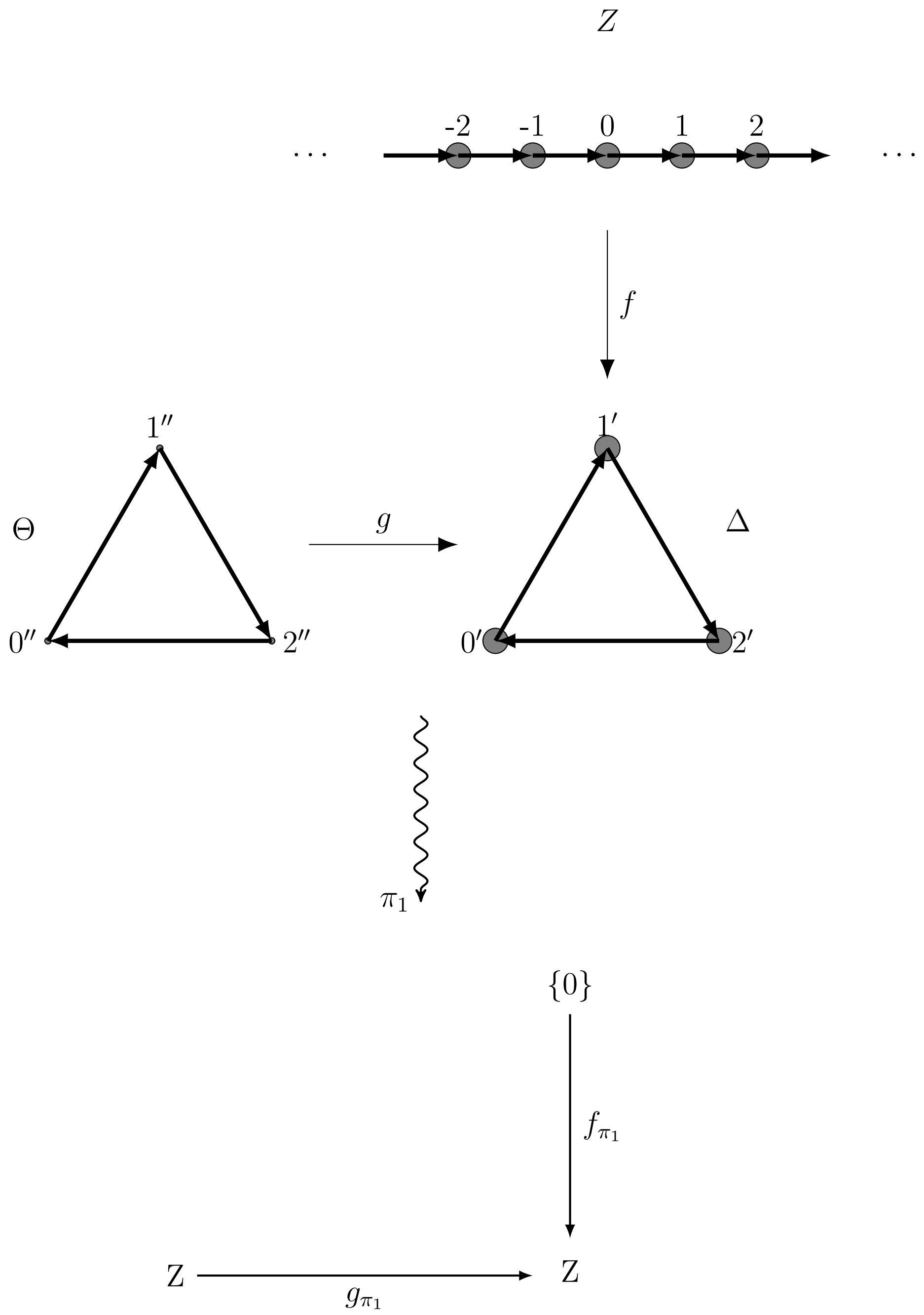
Ακολουθεί ένα παράδειγμα στο οποίο αναλύεται το παραπάνω αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 3.2.4. Ας πάρουμε $(\Gamma, u) = (Z, 0)$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, $(\Theta, v) = (0''\overset{\triangle}{1''}2'', 0'')$ ένα τρίγωνο γράφημα και $\Delta = (0'\overset{\triangle}{1'}2', 0') \cong \Theta$. Έστω $g :\cong 1_\Theta : \Theta \ni i'' \mapsto i' \in \Delta$ η ταυτοτική και $f(n) = [n]_3$, όπου $[n]_i$ η κλάση ισοδυναμίας μόντουλο i.

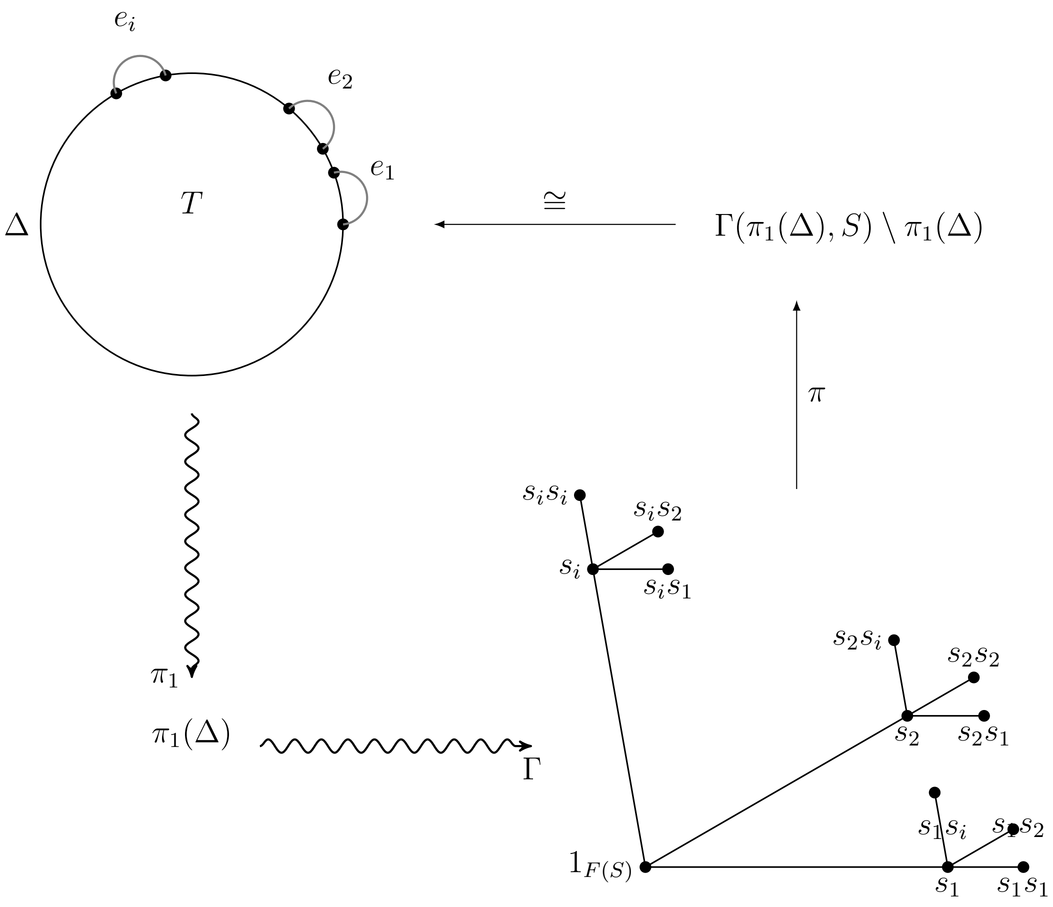
Σε τούτη την περίπτωση έχουμε ότι $g(\pi_1(\Theta, 0'')) = \pi_1(\Delta, 0') \cong Z$ και $|f(\pi_1(Z, 0))| \leq |\pi_1(Z, 0)| = |\{0\}| = 1$.

Δηλαδή η Θεμελειώδης ομάδα του τριγώνου είναι η ελεύθερη διάστασης ένα, ενώ εκείνη του Z είναι η τετριμμένη.

Η περιγραφείσα κατάσταση παρουσιάζεται και στο παραπάνω σχήμα, όπου επιδεικνύουμε μέσω συμβολισμού και το γεγονός ότι η π_1 είναι ένας συναρτητής από την κατηγορία των γραφημάτων σε αυτή των ομάδων.



Σχήμα 3.3:



Σχήμα 3.4:

Λήμμα 3.2.5. Αν Δ είναι ένα συνεκτικό γράφημα, T ένα μεγιστικό δένδρο του Δ και S είναι το σύνολο των γεωμετρικών ακμών του Δ που βρίσκονται εκτός του T, τότε το γράφημα πηλίκο $\Gamma(\pi_1(\Delta), S)/\pi_1(\Delta)$ είναι ισόμορφο με το γράφημα που προκύπτει από το Δ αν θεωρήσουμε το T ως μια κορυφή.

Απόδειξη. Από την κατασκευή του γραφήματος *Cayley* και της θεμελειώδους ομάδας είναι άμεσο. Εμείς απλώς θα κάνουμε ένα σχήμα που αναπαριστά την κατάσταση.

□

Λήμμα 3.2.6. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένα κάλυμμα του Δ. Για κάθε ακμή u του γραφήματος Γ, ο επαγόμενος ομομορφισμός ομάδων $f_{\pi_1} : \pi_1(\Gamma, u) \to \pi_1(\Delta, f(u))$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $[p], [p'] \in \pi_1(\Gamma, v)$ δυο κλάσεις ομοτοπίας τέτοιες ώστε $f_{\pi_1}([p]) = f_{\pi_1}([p'])$. Θα έχουμε $[f(p)] = [f(p')] \Rightarrow f(p) \backsim f(p') \overset{3.2.2}{\Rightarrow} p \backsim p' \Rightarrow [p] = [p']$. □

Θεώρημα 3.2.7. Έστω Δ ένα συνεκτικό γράφημα και v μια κορυφή του. Αν H είναι μια υποομάδα της $\pi_1(\Delta, v)$, τότε υπάρχει κάλυμμα $f : \Gamma \to \Delta$, όπου Γ συνεκτικό γράφημα και u μια κορυφή του, τέτοια ώστε $f(u) = v$, $f(\pi_1(\Gamma, u)) = H$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ως Δ ένα συνεκτικό γράφημα μιας κορυφής. Έστω $s_1, ...s_n$ οι γεωμετρικές ακμές του Δ και F η θεμελειώδης ομάδα του. Αφού το Δ είναι συνεκτικό, η ομάδα F είναι ελεύθερη επί του $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$. Άρα το γράφημα *Cayley* της $\Gamma(F, S) := \tilde{\Delta}$ είναι δένδρο επί του οποίου η F δρά ελεύθερα και άνευ αναστροφών. Θεωρώντας την δράση περιορισμένη στην υποομάδα H παίρνουμε το γράφημα πηλίκο και τον αντίστοιχο φυσικό επιμορφισμό $\pi_H : F \to \tilde{\Delta}/H$. Επιπλέον το $\tilde{\Delta}$ είναι κατά τετριμμένο τρόπο κάλυμμα του Δ μέσω της $\pi_F : \tilde{\Delta} \to \Delta$, αφού $\Delta = \tilde{\Delta}/F$. Εφόσον για κάθε $g, g' \in F : \pi_F(g) = \pi_F(g') \Rightarrow \pi_H(g) = \pi_H(g')$, από την καθολική ιδιότητα του πηλίκου υπάρχει μοναδικός μορφισμός γραφημάτων $f : \tilde{\Delta} \to \Delta$ τέτοιος ώστε $f \circ \pi_H = \pi_F$. Το $f : \tilde{\Delta}/H \to \Delta$, είναι το ζητούμενο κάλυμμα και $u = [v]_H = Hv$ η ζητούμενη κορυφή. Από το 3.2.6 έχουμε ότι $|f(\pi_1(\Gamma, u))| = |H|$. □

Ένα κάλυμμα $f : (\tilde{\Gamma}, u) \to (\Gamma, v)$ καλείται 1-καθολικό ή απλώς καθολικό αν η $f(\pi_1(\tilde{\Gamma}))$ είναι τετριμμένη. Αντιστοίχως αν $H \leqslant G$ το κάλυμμα καλείται $H-$καθολικό αν $f(\pi_1(\tilde{\Gamma})) = H$. Στην περίπτωση αυτή λέμε πως το κάλυμμα αντιτοιχεί στην υποομάδα H. Όπως είδαμε για οποιαδήποτε κορυφή v του Γ η G δρα ελεύθερα επί του $\tilde{\Gamma}$ και το κάλυμμα είναι ακριβώς η προβολή στο πηλίκο της δράσης $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$.

Το παραπάνω Θεώρημα συμπληρώνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.8. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένα κάλυμμα του συνεκτικού γραφήματος Δ από το συνεκτικό γράφημα Γ. Για κάθε κορυφή v του γραφήματος Δ ισχύει η ακόλουθη ισότητα:
$(\pi_1(\Delta, v) : f(\pi_1(\Gamma, \tilde{v}))) = |f^{-1}(v)|$, όπου $\tilde{v}$ είναι μια κορυφή τέτοια ώστε $f(\tilde{v}) = v$.
Δηλαδή ο δείκτης της εικόνας της θεμελειώδους ομάδας του Γ μέσω της f στην θεμελειώδη ομάδα του Δ ισούται με το πληθικότητα του νήματος οποιασδήποτε κορυφής.

Απόδειξη. Έστω $H = f(\pi_1(\Gamma, \tilde{v}))$. Ορίζουμε απεικόνιση από το σύνολο των δεξιών συμπλόκων της H στο νήμα του v, $\phi : H \setminus \pi_1(\Delta, v) \to f^{-1}(v)$ ως εξής $\phi(Hg) = \omega(\tilde{g})$. Δηλαδή απεικονίζει κάθε σύμπλοκο στο πέρας της ανύψωσης κάθε αντιπροσώπου του η οποία είναι κύκλωμα στο v.
Η ϕ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω $g_1, g_2 \in \pi_1(\Delta, v)$ ανηγμένα κυκλώματα στο v τέτοια ώστε $Hg_1 = Hg_2$. Δηλαδή υπάρχει ανηγμένο $h \in H$ τέτοιο ώστε $g_1 = hg_2$. Έστω $\tilde{g_1}, \tilde{g_2}, \tilde{h}$ οι μοναδικές ανυψώσεις των g_1, g_2, h αντιστοίχως, με αρχή $\tilde{v}$. Αυτές είναι ανηγμένα μονοπάτια και επιπλέον το $\tilde{h}$ είναι κύκλωμα στο $\tilde{v}$, οπότε έχει νόημα το γινόμενο $\tilde{h}\tilde{g_2}$ το οποίο είναι ανύψωση του hg_2. Εφόσον $f(\tilde{g_1}) = g_1 = hg_2 = f(\widetilde{hg_2})$ θα έχουμε ότι $\tilde{g_1} = \widetilde{hg_2}$ οπότε και $\phi(Hg_1) = \omega(\tilde{g_1}) = \omega(\widetilde{hg_2}) = \omega(g_2) = \phi(Hg_2)$.
Η ϕ είναι επί. Πράγματι, έστω $\tilde{u} \in f^{-1}(v)$ και p ένα μονοπάτι αρχής v και πέρτατος u. Το $f(p)$ είναι κύκλωμα στο v, οπότε $\phi(Hf(p)) = \omega(\widetilde{f(p)}) = \omega(p)$.
Η ϕ είναι ένα προς ένα. Πράγματι, έστω $\phi(Hg_1) = \phi(Hg_2)$. Αν $\tilde{g_1}, \tilde{g_2}$ είναι οι αντίστοιχες ανυψώσεις με αρχή v, τότε $\omega(\tilde{g_1}) = \omega(\tilde{g_2})$, οπότε $\tilde{g_1}\overline{\tilde{g_2}} \in \pi_1(\Gamma, v)$.
Άρα $f(\tilde{g_1}\overline{\tilde{g_2}}) \in H \Rightarrow g_2\overline{g_2} \in H \Rightarrow Hg_2 = Hg_1$. □

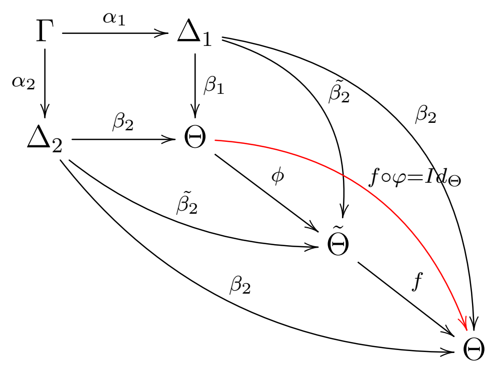
Πρόταση 3.2.9. Έστω Γ ένα $G-$γράφημα. Ο φυσικός επιμορφισμός $\pi : \Gamma \to \Gamma/G$ είναι εμβάπτιση.

Απόδειξη. Έστω v μια κορυφή του γραφήματος Γ και e_1, e_2 δυο ακμές στο άστρο $S(v, \Gamma)$, τέτοιες ώστε $\pi(e_1) = \pi(e_2)$. Από την υπόθεση αυτή προκύπτει ότι υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $ge_1 = e_2$ οπότε έχουμε και $g\alpha(e_1) = \alpha(e_2) \Rightarrow gv = v$. Από το γεγονός ότι η δράση είναι ελεύθερη προκύπτει ότι $g = 1$ και άρα ότι $e_1 = e_2$, το οποίο αποδεικνύει και το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.2.10. Κάθε φυσικός επιμορφισμός $\Gamma \to \Gamma/G$ είναι κάλυμμα.

Πρόταση 3.2.11. (Η εξώθηση αναπαριστά γινόμενο υποομάδων) Έστω ότι τα $\Gamma, \Delta_1, \Delta_2$ είναι συνεκτικά διαγράμματα. Αν $(\Delta_2, v_2) \xrightarrow{\beta_2} (\Theta, w) \xleftarrow{\beta_1} (\Delta_1, v_1)$ είναι η εξώθηση του $(\Delta_2, v_2) \xleftarrow{\alpha_2} (\Gamma, u) \xrightarrow{\alpha_1} (\Delta, v_1)$ στην κατηγορία των σημειωμένων γραφημάτων, τότε ισχύει η ισότητα:
$\pi_1(\Theta) = \beta_1(\pi_1(\Delta_1, v_1)) \vee \beta_2(\pi_1(\Delta_2, v_2))$,
όπου $\beta_1(\pi_1(\Delta_1, v_1)) \vee \beta_2(\pi_1(\Delta_2, v_2))$ είναι η υποομάδα της $\pi_1(\Theta)$ η οποία παράγεται από τα $A := \beta_1(\pi_1(\Delta_1, v_1)), B := \beta_2(\pi_1(\Delta_2, v_2))$.

Απόδειξη. Έστω $f : \tilde{\Theta} \longrightarrow \Theta$ το καθολικό $A \bigvee B-$κάλυμμα του Θ και $\tilde{\beta}_1 : \Delta \longrightarrow \Theta, \tilde{\beta}_2 : \Delta \longrightarrow \Theta$ οι $f-$ανακτήσεις (ανυψώσεις) των $\beta_1.\beta_2$ αντιστοίχως, για τις οποίες έχουμε $f \circ \tilde{\beta}_i = \beta_i$. Οι αντίστοιχες $f-$ανακτήσεις των $\beta_i \circ \alpha_i$ λόγω της μοναδικότητάς τους θα είναι $\tilde{\beta}_i \circ \alpha_i : \Gamma \longrightarrow \tilde{\Theta}$, οπότε $\tilde{\beta}_1 \circ \alpha_1 = \tilde{\beta}_2 \circ \alpha_2$. από την καθολική ιδιότητα της εξώθησης, υπάρχει μοναδικός μορφισμός γραφημάτων $\varphi : \Theta \longrightarrow \tilde{\Theta}$ τέτοιος ώστε $\varphi \circ \beta_1 = \tilde{\beta}_1$ και $\varphi \circ \beta_2 = \tilde{\beta}_2$.
Εκ των παραπάνω έχουμε ότι ο $f \circ \varphi$ είναι ένας μορφισμός $\Theta \longrightarrow \Theta$ τέτοιος ώστε $(f \circ \varphi) \circ \beta_i = \beta_i$ για $i = 1, 2$. Απο τη μονάδικότητα τέτοιου μορφισμού $\Theta \longrightarrow \Theta$ προκύπτει αναγκαστικά $f \circ \varphi = Id_\Theta$. Οπότε ο φ είναι ένα προς ένα και άρα ο φ_{π_1} είναι ένα προς ένα. Αυτό μας δίνει ότι $\varphi_{\pi_1}(\pi_1(\Theta)) \leqslant \pi_1(\tilde{\Theta})$ και σε συνδυασμό με την αρχική υπόθεση που δίνει $f_{\pi_1}(\pi_1(\tilde{\Theta})) = A \bigvee B \leq \pi_1(\Theta)$ και το γεγονός ότι η f_{π_1} είναι ένα προς ένα προκύπτει και το ζητούμενο.



∎

Πόρισμα 3.2.12. Έστω e_1, e_2 δυο παραδεκτές ακμές ενός συνεκτικού γραφήματος Γ. Αν $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma/[e_1 \equiv e_2]$ είναι η δίπλωση των e_1, e_2, τότε η αντίστοιχη f_{π_1} είναι επιμορφισμός των αντίστοιχων θεμελειωδών ομάδων.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η εξώθηση του διαγράμματος γραφημάτων
$\{e_1 \equiv e_2\} \twoheadleftarrow \{e_1, e_2\} \hookrightarrow \Gamma$ είναι το διάγραμμα $\{e_1 \equiv e_2\} \hookrightarrow \Gamma/[e_1 \equiv e_2] \twoheadleftarrow \Gamma$. εφαρμόζοντας το 3.2.11 για αυτό το διάγραμμα εξώθησης προκύπτουν οι ακόλουθες δυο περιπτώσεις.
1. Αν $\omega(e_1) \neq \omega(e_2)$, τότε $\pi(\Gamma/[e_1 \equiv e_2]) = \Gamma *_{\{e_1 \equiv e_2\}} \{e_1, e_2\} = \{1\} \bigvee \pi_1(\Gamma)$, οπότε η f είναι επί.
2. Αν $\omega(e_1) = \omega(e_2)$, τότε $\pi(\Gamma/[e_1 \equiv e_2]) = \Gamma *_{\{e_1 \equiv e_2\}} \{e_1, e_2\} = Z \bigvee \pi_1(\Gamma)$. □

3.3 Ιδιότητες εμβαπτίσεων

Η υπόθεση της επιμορφικότητας των καλυμμάτων σε κάθε άστρο κορυφής μπορεί να είναι περιοριστική. Τα καλά νέα είναι ότι πολύ μεγάλο αντίκτυπο στα ισχύοντα έχει η ιδιότητα των εμβαπτίσεων. Μάλιστα είναι πολύ σημαντικά κάποια από τα αποτελέσματα που προκύπτουν ακριβώς από την χαρακτηριστική ιδιότητα των εμβαπτίσεων. Πρώτα θα δείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των εμβαπτίσεων οι οποίες ουσιαστικά είναι κομμάτι των αντίστοιχων των καλυμμάτων.

Πρόταση 3.3.1. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ μια εμβάπτιση γραφημάτων. Ισχύουν τα ακόλουθα.
1. (Διατήρηση ανηγμένων μονοπατιών)
Αν p είναι ένα ανηγμένο μονοπάτι στο Γ, τότε το $f(p)$ είναι ανηγμένο μονοπάτι στο Δ.
2. (Μοναδικότητα ανάκτησης (ανύψωσης) μονοπατιού)
Αν p, q είναι μονοπάτια στο Γ κοινής αρχής v και $f(p) = f(q)$, τότε $p = q$.
3. (Μοναδικότητα ανάκτησης (ανύψωσης))
Αν (Θ, v) είναι ένα συνεκτικό γράφημα και $g_1, g_2 : \Theta \to \Gamma$ είναι απεικονίσεις τέτοιες ώστε $f \circ g_1 = f \circ g_2$, τότε $g_1 = g_2$.

Απόδειξη. 1. Έστω $p = e_1e_2...e_n$ ένα ανηγμένο μονοπάτι του Γ τέτοιο που το $f(p)$ να μην είναι ανηγμένο. Εφόσον το $f(p)$ δεν είναι ανηγμένο θα υπάρχει i τέτοιο ώστε $f(e_{i+1}) = \overline{f(e_i)} \Rightarrow f(e_{i+1}) = f(\overline{e_i})$. Στην τελευταία ισότητα οι δυο ακμές έχουν κοινή αρχή οπότε $e_{i+1} = e_i$, το οποίο είναι άτοπο.
2. Έστω $p = e_1e_2...e_n$ και $q = s_1s_2...s_m$ δυο μονοπάτια του Γ κοινής αρχής v τέτοια ώστε $f(p) = f(q)$. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο μήκος των μονοπατιών. Έστω ότι $p = e_1$ με $f(e_1) = f(q)$ και $e_1 \neq q$. Θα έχουμε δυο περιπτώσεις.
α. Αν $q = s_1 \neq e_1$, τότε η f παρουσιάζει δίπλωση στο σημείο v το οποίο είναι άτοπο αφού η f είναι εμβάπτιση.
β. Αν $|q| > 1$, τότε η f παρουσιάζει κάποια δίπλωση αφού απεικονίζει ένα μονοπάτι μήκους μεγαλύτερο από 1 σε μια ακμή και έχουμε πάλι άτοπο.
Με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε και την ταύτιση κάθε επόμενης ακμής του q με την αντίστοιχη του p.
3. Είναι άμεση συνέπεια του 2. □

Πρόταση 3.3.2. (Μοναδικότητα ανηγμένων μονοπατιών ως προς ομοτοπία)
Έστω p, q δυο ανηγμένα μονοπάτια ενός γραφήματος Γ. Αν τα p, q είναι ομοτοπικά, τότε $p = q$.

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \Gamma/\Gamma^0$ το γράφημα που προκύπτει από την ταύτιση όλων των κορυφών του Γ και π ο φυσικός επιμορφισμός του πηλίκου. Εφόσον η π είναι ένα προς ένα στις ακμές, θα είναι εμβάπτιση. Επιπλέον εφόσον $p \sim q$ έχουμε ότι $f(p) \sim f(q)$ και από την 3.3.1 ότι είναι ανηγμένα. Από το γεγονός ότι η $\pi_1(\Delta)$ είναι ακριβώς η ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου των ακμών του Δ και άρα κάθε ανηγμένη λέξη αναπαριστά μονοσήμαντα ένα στοιχείο της, θα πρέπει $f(p) = f(q)$. Οπότε και πάλι από την 3.3.1, θα έχουμε $p = q$. □

Η απόδειξη αυτή είναι πολύ κομψή και χαρακτηριστική του τρόπου που δουλεύουμε στην Άλγεβρα, χρησιμοποιώντας τους εκάστοτε μορφισμούς για να αντλούμε πληροφορίες για το ένα αντικείμενο από το άλλο.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των εμβαπτίσεων

Πρόταση 3.3.3. Αν η $f : \Gamma \to \Delta$ είναι μια εμβάπτιση γραφημάτων και $v \in \Gamma$, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός ομάδων $f_{\pi_1} : \pi_1(\Gamma, v) \to \pi_1(\Delta, f(v))$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $g \in \pi_1(\Gamma, v) \setminus \{1\}$ και $f_{\pi_1}(g) = 1$. Αν p είναι το ανηγμένο μονοπάτι που αντιπροσωπεύει το g, τότε $l(p) > 1$ αφού $g \neq 1$. Επιπλέον ισχύει ότι και το $f(p)$ είναι ανηγμένο και εφόσον η f δεν διπλώνει ουδε μία ακμή, $l(f(p)) = l(p) \geq 1$ το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση ότι $f_{\pi_1}(g) = 1$. □

Αλγόριθμος 3.3.4. Έστω ένα πεπερασμένο υποσύνολο $A := \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ της θεμελειώδους ομάδας $\pi_1(\Delta, v)$ ενός γραφήματος Δ μιας κορυφής. Η υποομάδα H της $\pi_1(\Delta, v)$ που παράγεται από το A αναπαρίσται μονοσήμαντα από κάποια εμβάπτιση $f : \Gamma \to \Delta$, τέτοια ώστε $f(\pi_1(\Gamma, w)) = H$.

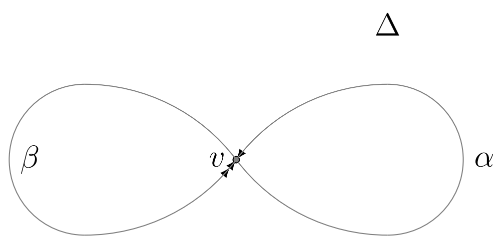
Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε για κάθε a_i έναν αντιπρόσωπο p_i, ο οποίος είναι κύκλωμα αρχής και τέλους v. Πρώτα θεωρούμε $I_1, I_2, ..., I_n$ τα κανονικά τόξα της ευθείας, όπου $l(I_i) = l(p_i)$ και Γ_1 την ξένη ένωση αυτών. Το ως άνω ορισθέν Γ_1 απεικονίζεται φυσικά στο Δ στέλνοντας κάθε τόξο I_i στο αντίστοιχο μονοπάτι p_i. Έστω $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta$ αυτός ο μορφισμός. Ύστερα θεωρούμε το γράφημα $\Gamma_2 := \Gamma_1 / \sim_1$ που προκύπτει από το Γ_1 αν ταυτίσουμε όλες τις κορυφές που είναι τα άκρα των τόξων I σε μια κορυφή, την u. Τούτη η κατασκευή φέρει και τον φυσικό επιμορφισμό $\pi_2 : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. Έστω $f_2 : \Gamma_2 \longrightarrow \Delta$ ο μοναδικός μορφισμός γραφημάτων που προκύπτει από την καθολική ιδιότητα του πηλίκου, ώστε $f_1 = f_2 \circ \pi_2$ Αν f_2 είναι εμβάπτιση, τότε είναι και η ζητούμενη καθώς εκ κατασκευής $\pi_1(\Gamma_2, u) \cong H$ και η $f_{2_{\pi_1}}$ είναι μονομορφισμός ομάδων. Αν η f_2 δεν είναι εμβάπτιση, τότε υπάρχει ακολουθία μορφισμών:

$$\Gamma_2 \xrightarrow{\pi_3} \Gamma_3 \xrightarrow{\pi_4} \quad \cdots \quad \xrightarrow{\pi_n} \Gamma_n \xrightarrow{f} \Delta,$$

όπου οι $\pi_3, \pi_4, ..., \pi_n$ είναι διπλώσεις, η f είναι εμβάπτιση και $f_2 = f \circ \pi_n \circ ... \circ \pi_3$. Γράφουμε $\Gamma := \Gamma_n$, $\pi^\star := \pi_n \circ ... \circ \pi_3$ και θεωρούμε $w := \pi^\star(u)$. Από το 3.2.12 έχουμε ότι κάθε π_i, ως δίπλωση, επάγει επιμορφισμό ομάδων, ενώ από το 3.2.6 έχουμε ότι η $\pi_1(\Gamma, w)$ εμφυτεύεται μέσω της f στη $\pi_1(\Delta, v)$. Δηλαδή $f(\pi_1(\Gamma, v)) = H$, αφού $\pi^\star(\pi_1(\Gamma_2, u)) \cong H$.

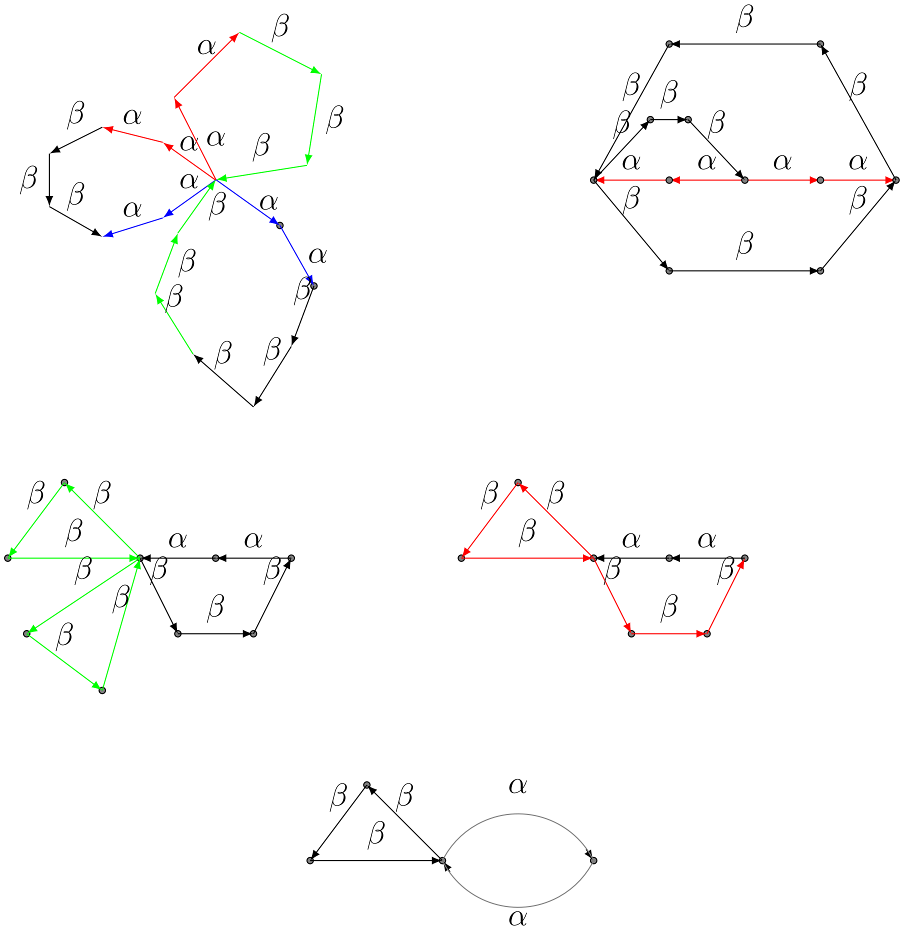
Καταλήγουμε βρίσκοντας μια βάση για την H επιλέγοντας ένα μεγιστικό δένδρο στο Γ και μεταφέροντας τη βάση της $\pi_1(\Gamma, w)$ μέσω της f στο Δ.

Παράδειγμα 3.3.5. Έστω H η υποομάδα της Ελεύθερης ομάδας $F = F(a,b)$ η οποία παράγεται από το σύνολο $A = \{a^2b^3, a^2b^6, a^2b^{-3}a^{-2}\}$. Χρησημοποιώντας το μηχανισμό των αλεπάλληλών διπλώσεων όπως στον αλγόριθμο, θα υπολογίσουμε μια ελεύθερη βάση της H.
Έστω γράφημα το Δ μιας κορυφής v και δυο ακμών a, b το οποίο αναπαριστά την ομάδα $F(a,b)$.



Θεωρούμε επίσης το ακόλουθο γράφημα μιας κορυφής και τριών μονοπατιών τα οποία αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο του συνόλου A και εφαρμόζουμε αλεπάλληλες διπλώσεις σε αυτό, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Το τελευταίο γράφημα του σχήματος δεν επιδέχεται περαιτέρω διπλώσεων και έτσι βλέπουμε πως μια βάση για την H είναι το σύνολο $\{\alpha^2, \beta^3\}$.



Σχήμα 3.5: Παράδειγμα 3.3.5

Θεώρημα 3.3.6. (Η εφέλκηση εμβάπτισης αναπαριστά τομή)
Έστω ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι διάγραμμα εφέλκησης γραφημάτων όπου f_1, f_2 είναι εμβαπτίσεις.

$$\begin{tikzcd} \Gamma_3 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "f_1"] \\ \Gamma_2 \arrow[r, "f_2"] & \Delta \end{tikzcd}$$

Έστω v_1, v_2 κορυφές των γραφημάτων Γ_1, Γ_2 αντίστοιχα τέτοιες ώστε $f_1(v_1) = f_2(v_2) = w \in \Delta$ και v_3 μια κορυφή του Γ_3 τέτοια ώστε $g_i(v_3) = v_i$. Αν $f_3 = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 : \Gamma_3 \to \Delta$ και $H_i := f_i(\pi_1(\Gamma_i, v_i))$ για $i = 1, 2, 3$, τότε

$H_3 = H_1 \bigcap H_2$. Επιπλέον οι g_1, g_2 είναι εμβαπτίσεις.

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε το απλό μέρος $H_3 \subseteq H_1 \bigcap H_2$.
$H_3 = f_3(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = f_1 \circ g_1(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) \subseteq f_1(\pi_1(\Gamma_1, v_1)) = H_1$, οπότε $H_3 \subseteq H_1$. Αντίστοιχα $H_3 \subseteq H_2$, οπότε και $H_3 \subseteq H_1 \bigcap H_2$.
Έστω τώρα ότι $a \in H_1 \bigcap H_2$ και p_1, p_2 τα ανηγμένα μονοπότια που αντιπροσωπεύουν την προεικόνα του a στα Γ_1 και Γ_2 αντίστοιχα ώστε τα $f(p_i)$ να ανήκουν στην κλάση ομοτοπίας a για $i = 1, 2$ Από το 3.3.1 τα $f(p_i), i = 1, 2$ θα είναι επίσης ανηγμένα μονοπάτια. Οπότε έχουμε επιπλέον ότι $f(p_1) = f(p_2)$. Έστω $p_3 := (p_1, p_2)$ το μονοπάτι του Γ_3 από το οποίο "έρχονται" τα p_1, p_2. Για τούτο ισχύει $f_3(p_3) = f_1 \circ g_1(p_3) = f_1(p_1) = f(p_2)$. Άρα $a = [f_1(p_1)] = [f_2(p_2)] \in f_3(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = H_3$ οπότε πράγματι $H_3 = H_1 \bigcap H_2$.
Ως προς τον δεύτερο ισχυρισμό, έστω $(e_1, e_2), (y_1, y_2)$ δύο ακμές του Γ_3 τέτοιες ώστε $g_1(e_1, e_2) = g_1(y_1, y_2)$. Εξ ορισμού της g_1 και εκ της υποθέσεως έχουμε ότι $e_1 = g(e_1, e_2) = g(y_1, y_2) = y_1$. Επιπλέον έχουμε $f_1 \circ g_1(e_1, e_2) = f_2 \circ g_2(e_1, e_2)$ και $f_1 \circ g_1(e_1, e_2) = f_1 \circ g_1(y_1, y_2)$, οπότε έχουμε $f_1(e_1) = f_2(e_2)$ και $f_2 \circ g_2(e_1, e_2) = f_1 \circ g_1(y_1, y_2)$ το οποίο μας δίνει επιπλέον $f_1(y_1) = f_2(y_2)$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες καταλήγουμε στο ότι $f_2(e_2) = f_1(e_1) = f_1(y_1) = f_2(y_2)$. Εφόσον τώρα η f_2 είναι εμβάπτιση και εξ υποθέσεως οι ακμές e_2, y_2 έχουν κοινή αρχή, προκύπτει ότι $e_2 = y_2$. Τελικά $(e_1, e_2) = (y_1, y_2)$ και η g_1 είναι πράγματι εμβάπτιση. Αναλόγως αποδεικνύεται ότι η g_2 είναι εμβάπτιση. $\square$

Κεφάλαιο 4

Τα βασικά Θεωρήματα

4.1 Το Θεώρημα του Howson

Πρόταση 4.1.1. (Το Θεώρημα του *Howson*)
Έστω H_1, H_2 δυο υποομάδες μιας ελεύθερης ομάδας F. Αν οι H_1, H_2 είναι πεπερασμένα παραγόμενες, τότε και τομή τους η $H_1 \bigcap H_2$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενη.

Απόδειξη. Αναπαριστούμε την ελεύθερη ομάδα F ως τη θεμελειώδη ομάδα $\pi_1(\Delta)$ ενός συνεκτικού γραφήματος Δ με μια μονάχα κορυφή v και ακμές $\{s_i | i \in I\}$ τους γεννήτορες της F. Έστω $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta$ και $f_2 : \Gamma_2 \to \Delta$ οι εμβαπτίσεις οι οποίες αναπαριστούν τις υποομάδες H_1 και H_2 αντιστοίχως, όπου τα Γ_1, Γ_2 είναι πεπερασμένα και συνεκτικά γραφήματα από κατασκευής. Θεωρούμε την εφέλκηση $\Gamma_1 \overset{g_1}{\leftarrow} \Gamma_3 \overset{g_2}{\to} \Gamma_2$ του δαγράμματος $\Gamma_1 \overset{f_1}{\to} \Delta \overset{f_e}{\leftarrow} \Gamma_2$. Το γράφημα Γ_3 είναι επίσης πεπερασμένο (και συνεκτικό) από κατασκευής. Έστω η κορυφή $v_3 \in \Gamma_3$ για την οποία $g_1(v_3) = v_1, g_2(v_3) = v_2$ και $f_3(v_3) = f_1 \circ g_1(v_3) = f_2 \circ g_2(v_3) = v$. Από το θεώρημα 3.3.6 έχουμε ότι $H_3 = f_3(\pi_1(\Gamma_3, v_3))$ και επιπλέον η $\pi_1(\Gamma_3, v_3)$ είναι ακριβώς η θεμελειώδης ομάδα της συνεκτικής συνιστώσας C_3 του Γ_3 στην οποία κείται η v_3. Εφόσον οι f_1, f_2 είναι εμβαπτίσεις και η f_3 είναι εμβάπτιση. Συνεπώς, αν T είναι ένα μεγιστικό δένδρο της συνεκτικής συνιστώσας C_3, τότε η ελεύθερη βάση της $\pi_1(\Gamma_3, v_3)$ είναι ελεύθερη βάση και της H_3. Οπότε η $H_3 = H_1 \bigcap H_2$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. $\square$

Παρατήρηση 4.1.2. Μια ελεύθερη βάση της $H_1 \bigcap H_2$ υπολογίζεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον Αλγόριθμο 3.3.4.

Η *Hanna Neumann* στο [3] είχε αποδείξει για την τάξη της ομάδας $H_1 \cap H_2$ την ακόλουθη ανισότητα:

$$r(H_1 \cap H_2) - 1 \leqslant 2(r(H_1) - 1)(r(H_2) - 1) \quad (1).$$

Η ίδια ισχυρίστηκε πως το 2 στην παραπάνω ανισότητα είναι περιττό το οποίο έχει πλέον αποδειχθεί προσφάτως, ανεξάρτητα από τον *JoelFriedman* [7] και τον *IgorMinevev* [8]. Στην επόμενη παράγραφό παρουσιάζεται μια απόδειξη της ανισότητας (1).

Ορισμός 4.1.3. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένας μορφισμός γραφημάτων. Ένας αυτομορφισμός γραφημάτων $g : \Gamma \to \Gamma$ για τον οποίον $f \circ g = f$, καλείται μετασχηματισμός της f.

Το σύνολο $G(f)$ όλων των μετασχηματισμών της f είναι υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών $Aut(\Gamma)$ του γραφήματος Γ. Η $G(f)$ δρα επί του γραφήματος Γ με τρόπο τέτοιον που η f παραγοντοποιείται μέσα από το πηλίκο της δρασης $\pi : \Gamma \to \Gamma/G(f)$.
Πράγματι, αν $[e_1] = [e_2]$, τότε υπάρχει $g \in G(f)$ τέτοιο ώστε $g(e_1) = e_2$. Εφόσον $f \circ g = f$, έχουμε $f(e_2) = f(g(e_1)) = f(e_1)$. Από την καθολική ιδιότητα του πηλίκου υπάρχει μοναδικός μορφισμός γραφημάτων $\varphi : \Gamma/G(f) \to \Delta$ τέτοιος ώστε $f = \varphi \circ \pi$.

Πρόταση 4.1.4. Αν $f : \Gamma \to \Delta$ είναι μια εμβάπτιση γραφημάτων, τότε η ομάδα $G(f)$ δρά ελεύθερα επί του γραφήματος Γ.

Απόδειξη. Έστω g ένας μετασχηματισμός του f και v μια κορυφή του Γ τέτοια ώστε $g(v) = v$. Εφόσον $f \circ g = f \circ id$, από τη μοναδικότητα της ανάκτησης (ανύψωσης) μορφισμών έχουμε $g = id$. □

Λήμμα 4.1.5. Έστω $f : \Gamma \longrightarrow \Delta$ το καθολικό κάλυμμα και v μια κορυφή του Δ. Για κάθε ζεύγος κορυφών $v_1, v_2 \in f^{-1}(v)$, υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός $g \in G(f)$ τέτοιος ώστε $g(v_1) = v_2$. Δηλαδή η δράση της $G(f)$ στο νήμα f^{-1} είναι μεταβατική.

Απόδειξη. Από το 3.2.3 υπάρχει μορφισμός γραφημάτων $g : \Gamma \to \Gamma$ τέτοιος ώστε $g(v_1) = v_2$ και $f \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd} & (\Gamma, v_2) \arrow[dl, bend right, "\exists! g_1"'] \arrow[d, "f"] \\ (\Gamma, v_1) \arrow[ur, "\exists! g"] \arrow[r, "\forall f"'] & (\Delta, v) \end{tikzcd}$$

Σχήμα 4.1:

Αντίστοιχα υπάρχει και $g_1 : \Gamma \to \Gamma$ τέτοιος ώστε $g_1(v_2) = v_1$, οπότε $g_1(g(v_1)) = v_1$ και από τη μοναδικότητα της κάθε μιας προκύπτει ότι $g_\circ g = Id_\Gamma$. Αντίστοιχα $g \circ g_1 = Id_\Gamma$. Οπότε ο g είναι ισομορφισμός και $f \circ g = g$, οπότε $g \in G(g)$. $\square$

Θεώρημα 4.1.6. (Θεώρημα του *Marshall Hall*) Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ μια εμβάπτιση γραφημάτων, όπου το Δ είναι ένα γράφημα μιας κορυφής v_Δ και Γ ένα γράφημα το οποίο έχει πεπερασμένου πλήθους κορυφές. Η f επεκτείνεται σε κάλυμμα $f : \Gamma' \to \Delta$ έτσι ώστε το γράφημα $\Gamma' \setminus \Gamma$ να περιέχει μόνο ακμές.

Απόδειξη. Έστω O ένας προσανατολισμός του Δ. Για κάθε ακμή $e \in O$ θεωρούμε το σύνολο $R_e = \{(u, v) \in \Gamma^0 \times \Gamma^0 | \exists e_1 \in \Gamma^1 : f(e_1) = e$ και $\alpha(e_1) = u$ και $\omega(e_1) = v\}$.

Η R_e είναι καλά ορισμένη απεικόνιση. Πράγματι, έστω $(u, v_1), (u, v_2) \in R_e$. Υπάρχουν ακμές $e_1 \in \Gamma^1$ και $e_2 \in \Gamma^1$ τετοιες ώστε $f(e_1) = f(e_2) = e$ και $\alpha(e_1) = \alpha(e_2) = u$ και $\omega(e_1) = v_1$ ενώ $\omega(e_2) = v_2$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η $f_{S(\Gamma,u)} : S(\Gamma, v) \to f(S(\Gamma, u))$ είναι ένα προς ένα.

Κάθε προβολή $R_e \to \Gamma^0$ είναι ένα προς ένα.

Πράγματι, αν $(u_1, v), (u_2, v) \in R_e$, τότε υπάρχουν ακμές $e_1 \in \Gamma^1$ και $e_2 \in \Gamma^1$

τετοιες ώστε $f(e_1) = f(e_2) = e$ και $\omega(e_1) = \omega(e_2) = v$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η $f_{S(\Gamma,v)} : S(\Gamma, v) \to f(S(\Gamma, v))$ είναι ένα προς ένα.
Οπότε η R_e, είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από κάποιο υποσύνολο V_1 του R_e σε κάποιο άλλο V_2. . Εφόσον το Γ^0 είναι πεπερασμένο, η αμφιμονοσήμαντη R_e επεκτείνεται σε αμφιμονοσήμαντη $S_e : \Gamma^0 \to \Gamma^0$.
Ορίζουμε το σύνολο κορυφών του γραφήματος Γ' να είναι το $\Gamma'^0 = \Gamma^0$.
Ορίζουμε το σύνολο των ακμών του Γ' να είναι $\Gamma'^1 = \{(u, v, e) : u, v \in \Gamma^0, e \in \Delta^1$ όπου αν $e \in O$, τότε$(u, v) \in S_e$ αλλίως αν $\overline{e} \in O$, τότε $(v, u) \in S_e\}$. Ορίζουμε για κάθε ακμή $\epsilon = (u, v, e)$ την αντίθετη ακμή $\overline{\epsilon} = (v, u), \overline{\epsilon})$ την αρχή $\alpha(\epsilon) = u$ και το πέρας $\omega(\epsilon) = v$.
Τώρα ορίζουμε $f' : \Gamma' \to \Delta : v \mapsto v_\Delta$ και $\epsilon = (u, v, e) \mapsto e$. Τούτος ο μορφισμός είναι πράγματι κάλυμμα. Έστω u μια κορυφή του Γ' και $f'|_{S(u,\Gamma')} : S(u, \Gamma') \to S(f'(u), \Delta)$ ο περιορισμός της f' στο άστρο της u. Ο $f'|_{S(u,\Gamma')}$ είναι ένα προς ένα. Έστω $(u, v_1, e_1), (u, v_2, e_2) \in S(u, \Gamma')$ τέτοια ώστε $f'(u, v_1, e_1) = f'(u, v_2, e_2)$. Εξ ορισμού της f' θα έχουμε $e_1 = e_2$ οπότε και $v_1 = v_2$.
Ο $f'|_{S(u,\Gamma')}$ είναι επί. Έστω $e \in \Delta$, τότε (u, v, e) είναι ακμή του Γ' στο άστρο του u τέτοια ώστε $g'(u, v, e) = e$.

Τέλος εμφυτεύουμε το Γ στο Γ' μέσω της $\iota : v \mapsto v$ και $e_1 \longmapsto (\alpha(e_1), \omega(e_1), f(e_1))$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη δείχνοντας ότι η f' είναι επέκταση της f καθώς $f = f' \circ \iota$. $\square$

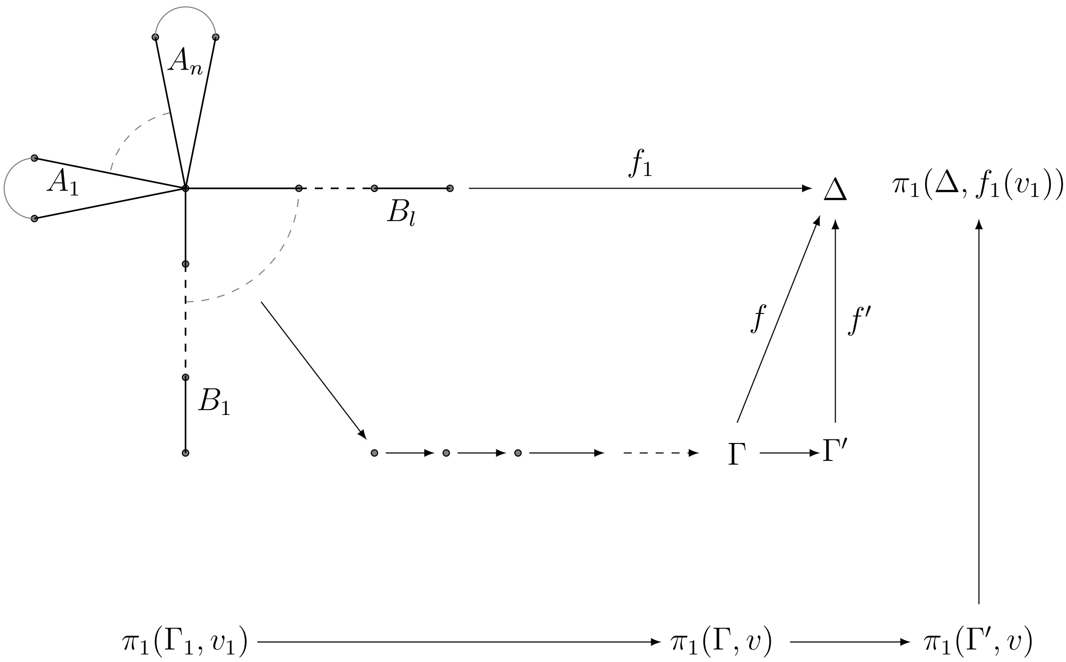
Το θεώρημα 4.1.6 έχει σπουδαίες εφαρμογές στη θεωρία ομάδων. Μια από αυτές είναι ο υπολογισμός των υποομάδων ελεύθερης ομάδας οι οποίες είναι πεπερασμένου συγκεκριμένου δείκτη. Το μόνο που μένει για να είμαστε σε θέση να κάνουμε τους υπολογισμούς μας είναι η ακόλουθη πρόταση η οποία αιτιολογεί ένα βήμα στη μέθοδο που θα επιδείξουμε στο παρακάτω παράδειγμα.

Πόρισμα 4.1.7. (Θεώρημα Hall, Burns)
Έστω $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_l$ στοιχεία μιας ελεύθερης ομάδας F τέτοια ώστε η υποομάδα H της F που παράγεται από τα $a_1, ..., a_n$ να μην περιέχει τα $b_1, ..., b_l$. Υπάρχει υποομάδα $H' \leqslant F$ πεπερασμένου δείκτη στην F η οποία περιέχει την H και δεν περιέχει τα στοιχεία $b_1, ..., b_l$. Επιπλέον η H' έχει ελεύθερη βάση ένα σύνολο το οποίο περιέχει τα $a_1, ..., a_n$.

Απόδειξη. Αναπαριστούμε την ελεύθερη ομάδα F ως τη θεμελειώδη ομάδα $\pi_1(\Delta)$ ενός γραφήματος Δ μιας κορυφής. Θεωρούμε το γράφημα Γ_1 ως τη σφήνα l διαστημάτων $B_1, ..., B_l$ μήκους $|B_i| = |b_i|$ και n κύκλων $A_1, ..., A_n$ μήκους $|A_i| = |a_i|$. Άμεσα μπορούμε να θεωρήσουμε και το μορφισμό γραφημάτων $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta$ ο οποίος απεικονίζει κάθε κύκλο A_i στο μονοπάτι του γραφήματος Δ το οποίο αντιστοιχεί στο στοιχείο a_i και κάθε B_i στο μονοπάτι του γραφήματος Δ το οποίο αντιστοιχεί στο στοιχείο b_i. Εφόσον το Γ είναι συνεκτικό επιλέγοντας οποιοδήποτε σημείο του v_1 για τη θεμελειώδη ομάδα του έχουμε $f_1(\pi_1(\Gamma_1, v_1)) = H$. Επιπλέον το Γ_1 είναι πεπερασμένο, οπότε η f_1 από το 3.1.4 παραγοντοποιείται σε σύνθεση διπλώσεων ακολουθούμενη από μια εμβάπτιση $f : \Gamma \to \Delta$ έτσι ώστε $f(\pi_1(\Gamma, v)) = H$, όπου v είναι η εικόνα του v_1. Εφόσον για κάθε i το b_i είναι εκτός της H η εικόνα κάθενός B_i δεν είναι κύκλωμα στο Γ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα επέκτασης στην $f : \Gamma' \to \Delta$, την επεκτείνουμε σε κάλυμμα $f' : \Gamma' \to \Delta$ άνευ προσθήκης κορυφών. Αν ορίσουμε $H' := f'(\pi_1(\Gamma', v))$, τότε από το 3.2.8 προκύπτει ότι ο δείκτης $(F : H')$ είναι ίσος με τον αριθμό των κορυφών του Γ, δηλαδή πεπερασμένος. Εξ ορισμού, $H \subseteq H'$.

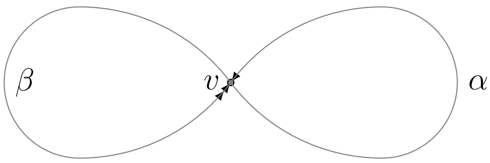
Τέλος, αν T είναι ένα μεγιστιτκό δένδρο του Γ, τότε η εικόνα του T' θα είναι μεγιστικό δένδρο του Γ', δηλαδή εκ της κατασκευής του Γ' μπορούμε να βρίσκουμε μεγιστικό δένδρο αυτού, πράγμα που ισοδυναμεί με την εύρεση ελεύθερης βάσης για τη θεμελειώδη ομάδα του η οποία είναι ισόμορφη με την H' καθώς η τελεύταία είναι εικόνα της πρώτης μέσω εμβάπτισης.

$\square$

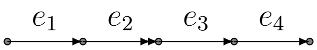


Παράδειγμα 4.1.8. Έστω $F = F(a, b)$ η ελεύθερη ομάδα τάξης 2 με ελεύθερους γεννήτορες a, b και $g = abaa \in F$. Θα βρούμε υποομάδα H' της F πεπερασμένου δείκτη τέτοια ώστε $g \notin H'$.
Έστω Δ το γράφημα μιας κορυφής και δυο ακμών με θεμελειώδη ομάδα την F.

Δ



Θεωρούμε $H = \{1\}$ την τετριμμένη υποομάδα της F και Γ το παρακάτω γράφημα, όπου τις ακμές e_1, e_3, e_4 τις αντιστοιχούμε στον γεννήτορα a και την ακμή e_2 στον γεννήτορα b μέσω της απεικόνισης $f : \Gamma \to \Delta$.



Η f είναι εμβάπτιση. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.1.6 θα επεκτείνουμε την f σε κάλυμμα $f' : \Gamma \to \Delta$ με τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος, ώστε το σύνολο κορυφών του γραφήματος Γ' είναι το ίδιο με αυτό του γραφήματος Γ. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος έχουμε:

$$R_a : 0 \longmapsto 1, \quad 2 \longmapsto 3, \quad 3 \longmapsto 4$$

και

$$R_b : 1 \longmapsto 2$$

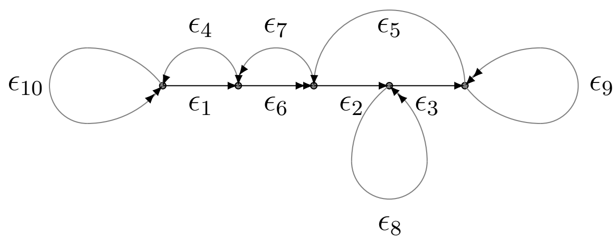
Επεκτείνουμε τις R_a και R_b σε $S_a : \Gamma^0 \to \Gamma^0$ και $S_b : \Gamma^0 \to \Gamma^0$ αντίστοιχα ως εξής.

$$S_a : 0 \longmapsto 1, \quad 1 \longmapsto 0, \quad 2 \longmapsto 3, \quad 3 \longmapsto 4, \quad 4 \longmapsto 2$$

και

$$S_b : 0 \longmapsto 0, \quad 1 \longmapsto 2, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 3, \quad 4 \longmapsto 4.$$

Οπότε πράγματι έχουμε $\Gamma^0 = \Gamma'^0$ και οι θετικά προσανατολισμένες ακμές του Γ' είναι οι $\epsilon_1 = (0, 1, a), \epsilon_2 = (2, 3, a), \epsilon_3 = (3, 4, a)$ και $\epsilon_6 = (1, 2, b)$ οι οποίες προκύπτουν από τις R_a, R_b και οι $\epsilon_4 = (1, 0, a), \epsilon_5 = (4, 2, a)$ και $\epsilon_7 = (2, 1, b), \epsilon_8 = (3, 3, b), \epsilon_9 = (4, 4, b), \epsilon_10 = (0, 0, b)$, οι οποίες προκύπτουν από τις επεκτάσεις S_a, S_b.
Η f απεικονίζει κάθε κορυφή του Γ' στη μοναδική κορυφή του Δ, και τις ακμές $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$ τις απεικονίζει στην ακμή a ενώ τις $\epsilon_6, \epsilon_7, \epsilon_8, \epsilon_9, \epsilon_{10}$ στην ακμή b.



Επιλέγουμε ως μεγιστικό δένδρο του Γ' το υποδένδρο Γ, πράγμα το οποίο δείχνει άμεσα ότι η θεμελειώδης ομάδα του Γ' είναι η ελεύθερη ομάδα τάξης 6, και θέτουμε $H' = \pi_1(\Gamma')$. Επιπλέον επιλέγοντας την κορυφή 0 βλέπουμε ότι μια ελεύθερη βάση της $\pi_1(\Gamma')$ είναι η

$$S_{H'} = \{\epsilon_{10}, \epsilon_1\epsilon_4, \epsilon_1\epsilon_6\epsilon_7\epsilon_1^{-1}, \epsilon_1\epsilon_6\epsilon_2\epsilon_8\epsilon_2^{-1}\epsilon_6^{-1}\epsilon_1^{-1}, \epsilon_1\epsilon_6\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_9\epsilon_3^{-1}\epsilon_2^{-1}\epsilon_6^{-1}\epsilon_1^{-1}, \epsilon_1\epsilon_6\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5\epsilon_6^{-1}\epsilon_1^{-1}\}.$$

Οπότε η υποομάδα $f'(H')$ της $F_2 = \pi_1(\Delta)$ είναι η $\langle f'(S_{H'}) \rangle$, η οποία έχει ώς ελεύθερη βάση την

$$f'(S_{H'}) = \{\beta, \alpha^2, \alpha\beta^2\alpha^{-1}, \alpha\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, \alpha\beta\alpha^2\beta\alpha^{-2}\beta^{-1}\alpha^{-1}, \alpha\beta\alpha^3\beta^{-1}\alpha^{-1}\}.$$

Μάλιστα εφόσον το Γ' είναι πεπερασμένο, το κάλυμμα f' έχει πεπερασμένα νήματα και άρα η $f'(\pi_1(H'))$ είναι πράγματι πεπερασμένου δείκτη ίσου με 5.

Από τα προηγούμενα προκύπτει άμεσα το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.9. Κάθε (πεπερασμένα παραγόμενη) ελεύθερη ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Υπενθυμίζουμε ότι μια ομάδα G λέγεται προσεγγιστικά πεπερασμένη (residually finite) αν κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της επιβιώνει σε κάποια πεπερασμένη επιμορφική εικόνα της. Ισοδύναμα, για κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της υπάρχει υποομάδα πεπερασμένου δείκτη η οποία δεν το περιέχει.

4.2 Γραφήματα Πυρήνες και η Ανισότητα της Hanna Neumann

Την παρούσα παράγραφο θα την ξεκινήσουμε αναπαράγοντας μια αλγοριθμική μέθοδο υπολογισμού του πυρήνα ενός πεπερασμένου συνεκτικού γραφήματος, όπως ακριβώς κάνει και ο Stallings στο [1].
Κάθε συνεκτικό γράφημα περιέχει έναν πυρήνα όπου συγκεντρώνεται η θεμελειώδης ομάδα του. Το αρχικό γράφημα δε, είναι ακριβώς ο πυρήνας του με κάποια δένδρα συνημμένα σε αυτόν.
Έστω Γ ένα συνεκτικό γράφημα. Η ιδέα του υπολογισμού του πυρήνα του Γ είναι να κουρέψουμε τα δένδρα που φυτρώνουν σε αυτόν. Τούτο το κάνουμε κουρεύοντας με επαναλαμβανόμενα βήματα τις εξωτερικές ακμές του γραφήματος, δηλαδή τις ακμές εκείνες από το ένα άκρο των οποίων δε φυτρώνουν άλλες ακμές.
1. Οπότε αν ένα γράφημα δεν περιέχει κάποια κορυφή μοναδιαίας ισχύος

(πλήθος των ακμών που την έχουν ως αρχή), τότε αυτό ταυτίζεται με τον πυρήνα του.
2. Αν ένα γράφημα Γ έχει μια κορυφή v ισχύος 1, τότε αφαιρώντας την κορυφή v και τη γεωμετρική ακμή που φυτρώνει σε αυτή, προκύπτει νέο γράφημα Γ' το οποίο περιέχεται γνησίως στο αρχικό γράφημα Γ. Όταν το Γ είναι πεπερασμένο, ύστερα από πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις του βήματος 2, προκύπτει γράφημα C το οποίο δεν έχει κάποια κορυφή μοναδιαίας ισχύος και είναι ακριβώς ο πυρήνας του αρχικού γραφήματος Γ.
Όλα αυτά τυποποιούνται ως ακολούθως.

Ορισμός 4.2.1. *i*) Ένα κύκλωμα $p = e_1 e_2 ... e_n$ ενός γραφήματος Γ καλείται **κυκλικά ανηγμένο** αν είναι ανηγμένο ως μονοπάτι και $e_1 \neq \overline{e_n}$, ή αλλίως αν είναι εικόνα του κυκλώματος C_n μέσω κάποιας εμβαπτίσεως.
ii) Το γράφημα Γ καλείται **γράφημα πυρήνας**, αν είναι συνεκτικό, έχει τουλάχιστον μια ακμή και κάθε ακμή του περιέχεται σε κάποιο κυκλικά ανηγμένο μονοπάτι.
iii) Αν η θεμελειώδης ομάδα του γραφήματος Γ είναι μη-τετριμμένη, τότε κάθε ακμή του η οποία περιέχεται σε κάποιο κυκλικά ανηγμένο μονοπάτι καλείται **ουσιώδης** (ή θεμέλεια) ακμή του γραφήματος.
iv) Τέλος, ο **πυρήνας** του γραφήματος Γ είναι το σύνολο των ουσιωδών (θεμέλειων) ακμών του μαζί με τα άκρα τους.

Πρόταση 4.2.2. Ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα Γ είναι γράφημα πυρήνας αν και μόνο αν η ισχύς κάθε κορυφής του είναι τουλάχιστον 2.

Απόδειξη. Έστω ότι το γράφημα Γ είναι γράφημα πυρήνας και v μια κορυφή του. Η κορυφή v έχει μη μηδενική ισχύ, καθώς το γράφημα Γ είναι συνεκτικό. Έστω $e \in St(v, \Gamma)$, μια ακμή στο άστρο της κορυφής v. Η ακμή e περιέχεται σε κάποιο κυκλικά ανηγμένο μονοπάτι του Γ, από κάθε κορυφή του οποίο φυτρώνουν τουλάχιστον δυο γεωμετρικές ακμές ως κορυφή κυκλικά ανηγμένου μονοπατιού. Ιδιαιτέρως από την κορυφή v φυτρώνουν τουλάχιστον δυο γεωμετρικές ακμές.
Αντίστροφα, έστω τώρα ότι κάθε κορυφή έχει ισχύ τουλάχιστον 2 και e_1 μια

ακμή του γραφήματος Γ αρχής v. Έστω e_2 μια έταιρη ακμή αρχής v και v_1, v_2 τα πέρατα των ακμών e_1, e_2 αντίστοιχα. Αν u είναι μια ακμή του συνεκτικού γραφήματος Γ, τότε υπάρχουν ανηγμένα μονοπάτια p_1, p_2 αρχής v_1 και v_2 αντιστοίχως και πέρατος u. Θεωρούμε u' την πρώτη κοινή κορυφή των μονοπατιών p_1, p_2 και p_1', p_2' τα κομμάτια των μονοπατιών $p-1, p_2$ αντίστοιχα τα οποία έχουν ως πέρας την ακμή u'. Το μονοπάτι $e_1 p_1' \overline{p_2' e_2}$ είναι κυκλικά ανηγμένο μονοπάτι ττο οποίο περιέχει την ακμή e_1, άρα το γράφημα Γ είναι γράφημα πυρήνας. $\square$

Πρόταση 4.2.3. Έστω Γ ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα με μη τετριμμένη θεμελειώδη ομάδα. Αν Γ' είναι ο πυρήνας του γραφήματος Γ, τότε το Γ' είναι γράφημα πυρήνας. Επιπλέον, αν v είναι μια κορυφή του πυρήνα Γ, τότε η ένθεση $\pi_1(\Gamma', v) \hookrightarrow \pi_1(\Gamma, v)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Αν Γ' είναι ο πυρήνας του γραφήματος Γ, τότε εξ ορισμού κάθε ακμή του Γ' περιέχεται σε κάποιο κυκλικά ανηγμένο μονοπάτι, δηλαδή είναι ουσιώδης. Οπότε το γράφημα Γ' είναι γράφημα πυρήνας.
Έστω v μια κορυφή του πυρήνα $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Έστω $\Gamma_0 := \Gamma \hookleftarrow \Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2 \hookleftarrow ... \hookleftarrow \Gamma_n := \Gamma'$ η ακολουθία κουρεμάτων του Γ όπως παρουσιάστηκε στην αρχή της παρούσας παραγράφου. Για κάθε $i = 1, 2, ..., n-1$ η ένθεση $\pi_1(\Gamma_{i+1}, v) \hookrightarrow \pi_1 \Gamma_i, v)$ είναι ισομορφισμός, καθώς δεν αφαιρεί ακμή η οποία αποτελεί κομμάτι κάποιου κυκλώματος. Άρα και η σύνθεση αυτών είναι ισομορφισμός ώστε να προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 4.2.4. Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G. Λέμε ότι η H πληροί τη συνθήκη του *Burnside* αν για κάθε στοιχείο g της ομάδας G υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $g^n \in H$.

Παρατήρηση 4.2.5. Προφανώς αν μια υποομάδα H μιας ομάδας G πληροί τη συνθήκη του *Burnside*, τότε και κάθε συζυγής της υποομάδα την πληροί.

Πρόταση 4.2.6. Έστω Γ, Δ δύο συνεκτικά γραφήματα και $f : \Gamma \to \Delta$ ένα πεπερασμένων νημάτων κάλυμμα, δηλαδή ένα κάλυμμα τέτοιο ώστε κάθε του νήμα $f^{-1}(v)$ να είναι πεπερασμένο. Για κάθε κορυφή v η υποομάδα $f(\pi_1(\Gamma, v))$ της θεμελειώδους ομάδας $\pi_1(\Delta, f(v))$ πληροί τη συνθήκη του *Burnside*.

Απόδειξη. Εφόσον το νήμα $f^{-1}(v)$ είναι πεπερασμένο από το 3.2.8 προκύπτει ότι η υποομάδα $H := f(\pi_1(\Gamma, v))$ είναι πεπερασμένου δείκτη στην $G := \pi_1(\Delta, f(v))$. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι αν μια υποομάδα μιας ομάδας είναι πεπερασμένου δείκτη, τότε πληροί τη συνθήκη του *Burnside*. Εφόσον η H είναι πεπερασμένου δείκτη στην G, περιέχει κανονική υποομάδα N στη G επίσης πεπερασμένου δείκτη n στη G. Στην πεπερασμένη ομάδα πηλίκο G/N έχουμε ότι $(gN)^n = N$ ισοδύναμα $g^n \in N$ και άρα στην H. □

Πρόταση 4.2.7. Έστω Γ και Δ δύο συνεκτικά γραφήματα και $f : \Gamma \to \Delta$ μια εμβάπτιση. Αν το Δ είναι γράφημα πυρήνας και για μια κορυφή v του γραφήματος Γ, η υποομάδα $H := f(\pi_1(\Gamma, v))$ της ομάδας $\pi_1(\Delta, f(v))$ πληροί τη συνθήκη του *Burnside*, τότε ο μορφισμός $f : \Gamma \to \Delta$ είναι κάλυμμα.

Απόδειξη. Έστω w μια κορυφή του γραφήματος Γ και e μια ακμή στο άστρο $St(f(w), \Delta)$. Εφόσον τα γραφήματα Γ και Δ είναι συνεκτικά, οι θεμελειώδεις ομάδες τους είναι ανεξάρτητες των κορυφών βάσης και η εικόνα $f(\pi_1(\Gamma, w))$ είναι συζυγής της $f(\pi_1(\Gamma, v))$, έχουμε ότι και η τελευταία πληροί τη συνθήκη του *Burnside*. Επιπλέον, εφόσον το Δ είναι γράφημα πυρήνας, υπάρχει κυκλικά ανηγμένο μονοπάτι p το οποίο περιέχει την ακμή e. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέτουμε ότι η ακμή e είναι η πρώτη ακμή του p. Οπότε το p είναι κύκλωμα στην κορυφή $f(w)$ και άρα στοιχείο της θεμελειώδους ομάδας $\pi_1(\Delta, f(w))$. Οπότε, πληρούσης της συνθήκης του *Burnside*, υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $[p]^n \in f(\pi_1(\Gamma, w))$. Επιπλέον δεδομένου ότι το p είναι κυκλικά ανηγμένο, το μονοπάτι p^n είναι ανηγμένο μονοπάτι αρχής w. Από το 3.3.1 υπάρχει ανηγμένο μονοπάτι q αρχής w στο γράφημα Γ τέτοιο ώστε $[f(q)] = [p^n]$. Τέλος το μονοπάτι $f(q)$ είναι ανηγμένο διότι η f είναι εμβάπτιση και άρα $f(q) = p^n$. Οπότε αν $q = e_1 e_2 ... e_k$, τότε $f(e_1) = e$. □

Εφαρμογή 4.2.8. Αν H είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας F, τότε μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ή όχι πεπερασμένου δείκτη.

Πράγματι, θεωρούμε γράφημα Δ μιας κορυφής του οποίου η θεμελιώδης ομάδα είναι η F και $f : \Gamma \to \Delta$ η $H-$εμβάπτιση, όπου εκ κατασκευής το γράφημα Γ είναι πεπερασμένο.

Αν η εμβάπτιση f είναι κάλυμμα, τότε η υποομάδα H είναι πεπερασμένου δείκτη από την πρόταση 3.2.8 με δείκτη ίσο με το πλήθος των κορυφών του Γ. Αν η f δεν είναι κάλυμμα, τότε από την προηγούμενη πρόταση 4.2.7 η υποομάδα H δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του *Burnside*, οπότε δεν είναι πεπερασμένου δείκτη.

Λήμμα 4.2.9. Έστω Γ ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα m κορυφών και n γεωμετρικών ακμών. Αν συμβολίσουμε με $V(i)$ το πλήθος των κορυφών ισχύος i, τότε ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$2(r(\pi_1(\Gamma)) - 1) = \sum_{i=1}^{\infty}(i-2)V(i)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι εξ ορισμού ισχύουν οι ισότητες:

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} V(i), \quad 2n = \sum_{i=1}^{\infty} iV(i).$$

Από το 2.2.6 έχουμε ότι

$$rk(\pi_1(\Gamma)) = |O| - |\Gamma^0| + 1$$

Οπότε,

$$rk(\pi_1(\Gamma)) = n - m + 1 \Rightarrow 2(rk(\pi_1(\Gamma)) - 1) = 2n - 2m$$

Και από την παρατήρηση μας για τα $V(i)$, έχουμε:

$$2(rk(\pi_1(\Gamma))-1) = \sum_{i=1}^{\infty} iV(i) - 2\sum_{i=1}^{\infty} V(i) \Rightarrow 2(rk(\pi_1(\Gamma))-1) = \sum_{i=1}^{\infty}(i-2)V(i).$$

□

Παρατήρηση 4.2.10. Αν το γράφημα Γ είναι γράφημα πυρήνας και η μέγιστη ισχύς κάθε μιας εκ των κορυφών του είναι μικρότερη από 5, τότε ιδιαιτέρως ισχύει η ακόλουθη ισότητα.

$$2(rk(\pi_1(\Gamma)) - 1) = V_3 + 2V_4.$$

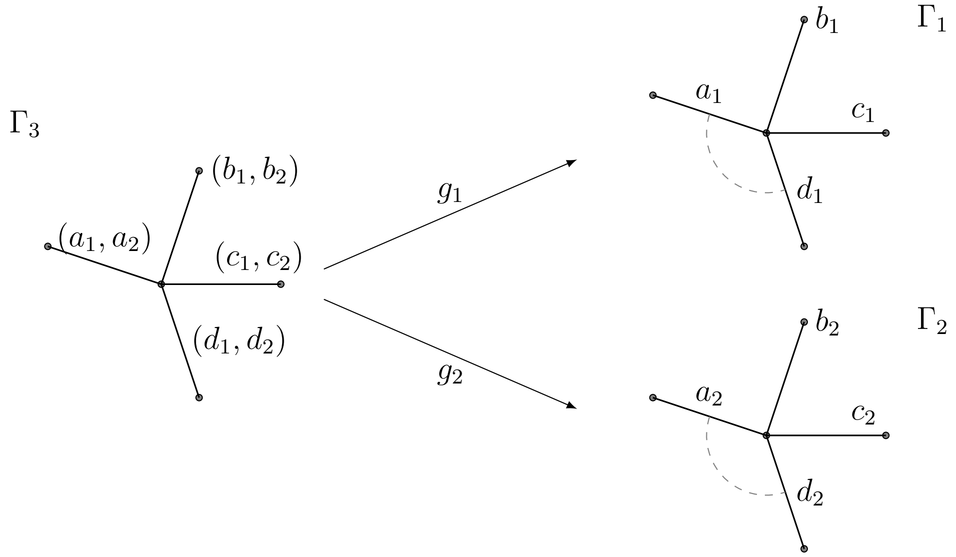
Θεώρημα 4.2.11. (*Hanna Neumann*) Έστω H_1 και H_2 δυο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες μιας ελεύθερης ομάδας F. Καταρχήν η τομή τους $H_1 \cap H_2$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη (Θεώρημα του $Howson$ 4.1.1). Για τις τάξεις των υποομάδων ισχύει η ακόλουθη ανισότητα!

$$rk(H_1 \cap H_2) - 1 \leq 2rk(H_1) - 1)(rk(H_2) - 1).$$

Απόδειξη. Αφού οι H_1 και H_2 είναι πεπερασμένα παραγόμενες, περιέχονται σε κάποια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα H της ελεύθερης ομάδας F ($H \subseteq \langle H_1, H_2 \rangle$). Εφόσον με τη σειρά της η H είναι πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, περιέχεται στην ελεύθερη ομάδα F_2 τάξης 2. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $F = F_2 = \langle a, b \rangle$. Θεωρούμε το γράφημά Δ μιας κορυφής και δύο ακμών το οποίο έχει ως θεμελειώδη ομάδα την F_2. Επίσης θεωρούμε της εμβαπτίσεις $f_1 : \Gamma_1' \to \Delta$ και $f_2 : \Gamma_2' \to \Delta$ οι οποίες αναπαριστούν της υποομάδες H_1 και H_2 αντίστοιχα καθώς και την εφέλκησή τους $\Gamma_1' \xleftarrow{g_1} \Gamma_3' \xrightarrow{g_2} \Gamma_2'$ η οποία γεννά την εμβάπτιση $f_3 = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 : \Gamma_3' \longrightarrow \Delta$ η οποία αναπαριστά την τομή $H_1 \cap H_2$. Υπενθιμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι για $i = 1, 2$ οι απεικονίσεις $g_i \Gamma_3' \longrightarrow \Gamma_i'$ είναι εμβαπτίσεις. Έστω v μια κορυφή του γραφήματος Γ_3' για την οποία $f_3(v) = v_\Delta$ και Γ_3 ο πυρήνας της συνεκτικής συνιστώσας του γγραφήματος Γ_3' που περιέχει την κορυφή v. Αντιστοίχως έστω ότι Γ_1 και Γ_2 είναι οι πυρήνες των γραφημάτων Γ_1' και Γ_2' αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι εκ κατασκευής τα Γ_1' και Γ_2' είναι πεπερασμένα και συνεκτικά. Περιοριζόμαστε λοιπόν στο ακόλουθο διάγραμμα το οποίο διατηρεί τη μεταθετικότητα του διαγράμματος εφέλκησης καθώς και την ιδιότητα των εμβαπτίσεων για κάθε βέλος που το απαρτίζει.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_3 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "f_1"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, "f_2"] & \Delta
\end{tikzcd}$$

Εφόσον κάθε γράφημα στο παραπάνω διάγραμμα είναι γράφημα πυρήνας, κάθε κορυφή των γραφημάτων αυτών έχει ισχύ τουλάχιστον 2.
Από την άλλη, η μοναδική ακμή v_Δ του γραφήματος Δ έχει ισχύ $Val(v_\Delta) = 4$.



Σχήμα 4.2: Άστρα των $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

Οπότε δεδομένου ότι οι f_1, f_2 και f_3 είναι εμβαπτίσεις η ισχύς κάθε κορυφής u εκ των γραφημάτων Γ_i είναι $Val(u) \leq 4$.
Τώρα αν (v_1, v_2) είναι μια κορυφή του Γ_3 ισχύος $Val(v_1, v_2) = k$, τότε εκ κατασκευής της εφέλκησης γραφημάτων έχουμε για $i = 1, 2$ ότι $f_i(v_1, v_2) = v_i$ και δεδομένου ότι οι g_1 και g_2 είναι εμβαπτίσεις έχουμε γενικά ότι $Val(V_1, v_2) \leq Val(v_i)$. Ιδιαιτέρως αν $Val(v_1, v_2) = 4$, τότε $Val(v_1) = Val(v_2) = 4$. Συνεπώς έχουμε:

$$V_4(\Gamma_3) \leq V_4(\Gamma_1)V_4(\Gamma_2),$$

το οποίο το αναπαριστούμε στο παρακάτω σχήμα.

Αντίστοιχα για το πλήθος των κορυφών του γραφήματος Γ_3 με ισχύ ίση με 3 έχουμε

$$V_3(\Gamma_3) \leq V_4(\Gamma_1)V_3(\Gamma_2) + V_3(\Gamma_1)V_4(\Gamma_2) + V_3(\Gamma_1)V_3(\Gamma_2).$$

Εφαρμόζοντας αυτές τις ανισότητες πάνω στο αποτέλεσμα του Λήμματος 4.2 έχουμε τα ακόλουθα.

$$2(rk(H_1 \cap H_2) - 1) = V_3(\Gamma_3) + 2V_4(\Gamma_3)) \leq$$

$$V_4(\Gamma_1)V_3(\Gamma_2) + V_3(\Gamma_1)V_4(\Gamma_2) + V_3(\Gamma_1)V_3(\Gamma_2) + 2V_4(\Gamma_1)V_4(\Gamma_2) \leq$$

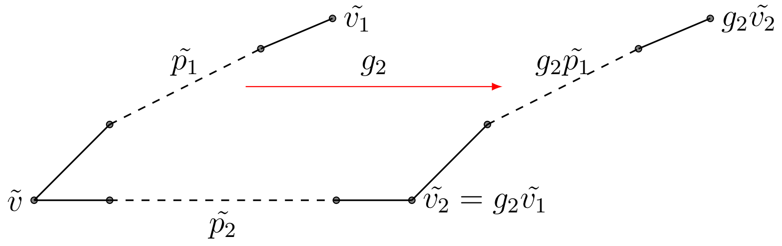
$$(V_3(\Gamma_1 + 2V_4(\Gamma_1))(V_3(\Gamma_2)2V_4(\Gamma_2)) \Rightarrow$$

$$rk(H_1 \cap H_2) - 1 = 2(rk(H_1) - 1)(rk(H_2) - 1),$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.2.12. Έστω $f : (\Gamma, \tilde{v}) \longrightarrow (\Delta, v)$ το καθολικό κάλυμμα του σημειωμένου στο v γραφήματος Δ. Η ομάδα μετασχηματισμών $G(f)$ του καλύμματος f είναι ισόμορφη με την θεμελειώδη ομάδα $\pi_1(\Delta, v)$.

Απόδειξη. Έστω $[p] \in \pi_1(\Delta, v)$. Αφού p είναι ένα κύκλωμα στην κορυφή v και από το 3.2.1 υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $\tilde{p}$ του γραφήματος Γ αρχής v τέτοιο ώστε $f(\tilde{p}) = p$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi : \pi_1(\Delta, v) \longrightarrow G(f)$, $\varphi([p]) := g$, όπου $g \in G(f)$ είναι ένας μετασχηματισμός του f τέτοιος ώστε $g(\alpha(\tilde{p})) = \omega(\tilde{p})$ (βλέπε Λήμμα 4.1.5. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση φ είναι ισομορφισμός. Η απεικόνιση $\varphi : \pi_1(\Delta, v) \longrightarrow G(f)$ είναι καλά ορισμένη.
Πράγματι, αν $p_1 \sim p_2$, τότε από το 3.2.2 οι ανυψώσεις $\tilde{p_1}$ και $\tilde{p_2}$ των μονοπατιών p_1 και p_2 αντίστοιχα είναι επίσης ομοτοπικά μονοπάτια, $\tilde{p_1} \sim \tilde{p_2}$. Ιδιαιτέρως είναι κυκλώματα στο $\tilde{v}$ και $\omega(\tilde{p_1}) = \omega(\tilde{p_2}) = \tilde{v}$. Αν $g = \varphi([p_1])$, τότε $g(\alpha(\tilde{p_2})) = g(\alpha(\tilde{p_1}) = \omega(\tilde{p_1}) = \omega(\tilde{p_2})$. Δηλαδή $\varphi([p_2]) = g = \varphi([p_1])$ και η ως ορισθείσα φ είναι καλώς ορισμένη.
Η απεικόνιση $\varphi : \pi_1(\Delta, v) \longrightarrow G(f)$ είναι ομομορφισμός ομάδων.



Σχήμα 4.3:

Πράγματι, έστω $[p_1], [p_2] \in \pi_1(\Delta, v)$, δυο κλάσεις ομοτοπίας όπου τα μονοπάτια p_1, p_2 έχουν αρχή v_1 και v_2 και ανυψώσεις $\tilde{p_1}$ και $\tilde{p_2}$ αντίστοιχα. Αν $g_2 \in$

$G(f)$ είναι ένας μετασχηματισμός του καλύμματος f τέτοιος ώστε $g_2(\tilde{v_1}) = \tilde{v_2}$, όπου $\tilde{v_1}$ και $\tilde{v_2}$ είναι οι αρχές των ανυψώσεων $\tilde{p_1}$ και $\tilde{p_2}$ αντίστοιχα και ιδιαιτέρως είναι ανυψώσεις των κορυφών v_1 και v_2 αντίστοιχα, τότε ορίζεται το γινόμενο $\tilde{p_2} \cdot g_2\tilde{p_1}$ το οποίο είναι ανύψωση του $p_2 \cdot p_1$, αφού $g_2 \in G(f)$ και $f(\tilde{p_2} \cdot g_2\tilde{p_1}) = f(\tilde{p_2}) \cdot f(g_2\tilde{p_1}) = f(\tilde{p_2}) \cdot f(\tilde{p_1}) = p_2 \cdot p_1$. Αν επιπλέον $g_1 \in G(f)$ είναι ένας μετασχηματισμός του καλύμματος f τέτοιος ώστε $\varphi([p_1]) = g_1$, τότε $g_1(\tilde{v_1}) = \tilde{v_2}$, οπότε $\omega(\tilde{p_2} \cdot g_2\tilde{p_1}) = \omega(g_2\tilde{p_1}) = g_2\omega(\tilde{p_1}) = g_2\tilde{v_2} = g_2g_1(\tilde{v_1})$. Τελικά $\varphi([p_1p_2]) = g_2 \circ g_1 = \varphi[p_1])\varphi([p_2])$.

Ο $\varphi : \pi_1(\Delta, v) \longrightarrow G(f)$ είναι μονομορφισμός.

Πράγματι, έστω $[p] \in Ker\varphi$. Έχουμε ότι $\varphi([p]) = id_\Delta$, οπότε $\alpha(\tilde{p}) = \omega(\tilde{p})$. Δηλαδή το $\tilde{p}$ είναι κύκλωμα στο $\tilde{v}$ του γραφήματος Γ και εφόσον $\pi_1(\Gamma, \tilde{v}) = \{1_{\tilde{v}}\}$ έχουμε ότι $[\tilde{p}] = 1_{\tilde{v}}$ και συνεπώς $[p] = 1_{\tilde{v}}$.

Τέλος ο $\varphi : \pi_1(\Delta, v) \longrightarrow G(f)$ είναι επιμορφισμός και άρα ισομορφισμός.

Έστω $g \in G(f)$ και $\tilde{p}$ ένα μονοπάτι του γραφήματος Γ αρχής $\tilde{v}$ και πέρατος $g(\tilde{v})$. Θέτουμε $p = f(\tilde{p})$, οπότε $[p] \in \pi_1(\Delta, v)$ και $\varphi([p]) = g$. Δηλαδή ο φ είναι όντως επιμορφισμός. □

Θεώρημα 4.2.13. Έστω H_1 και H_2 δυο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες μιας ελεύθερης ομάδας F. Αν η τομή τους $H_1 \cap H_2$ είναι πεπερασμένου δείκτη στην H_1 και στην H_2, τότε είναι πεπερασμένου δείκτη και στην $H_1 \vee H_2$.

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του 4.2.11, θεωρούμε το παρακάτω υποδιάγραμμα της εφέλκησης (Γ_3, g_1, g_2) των εμβαπτίσεων $f_1 : \Gamma_1' \longrightarrow \Delta$ και $f_2 : \Gamma_2' \longrightarrow \Delta$ οι οποίες αναπαριστούν τις υποομάδες H_1 και H_2 αντίστοιχα, όπου Δ είναι το γράφημα μιας κορυφής και δύο ακμών με θεμελειώδη ομάδα την ελεύθερη ομάδα F_2 τάξης 2, επί της οποίας εργαζόμαστε αντί επί της τυχούσας ελεύθερης ομάδας F, καθώς η τελευταία εμφυτεύεται στην F_2. Επιπλέον δουλεύουμε απευθείας στους πυρήνες Γ_1, Γ_2 και Γ_3 των γραφημάτων Γ_1', Γ_2' και Γ_3' αντίστοιχα.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_3 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] \arrow[dr, "f_3"] & \Gamma_1 \arrow[d, "f_1"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, "f_2"] & \Delta
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τα σημεία βάσης $v_1 \in \Gamma_1, v_2 \in \Gamma_2, v_3 \in \Gamma_3$ και $w \in \Delta$, ώστε $g_1(v_3) = v_1, g_2(v_3) = v_2$ και $f_3(v_3) = f_2(v_2) = f_1(v_1) = w$. Εφόσον η εφέλκηση αναπαριστά τομή και στο γράφημα πυρήνα Γ_3 συγκεντρώνεται η θεμελειώδης ομάδα του γραφήματος Γ_3, έχουμε $H_3 := f_3(\pi_1(H_1 \cap H_2)) \cong H_1 \cap H_2$. Θεωρούμε το καθολικό κάλυμμα του πυρήνα Γ_3 : $r : \tilde{\Gamma_3} \longrightarrow \Gamma_3$ και τις συνθέσεις $\tilde{g_1} : \tilde{\Gamma_3} \longrightarrow \Gamma_1$ και $\tilde{g_2} : \tilde{\Gamma_3} \longrightarrow \Gamma_2$. Ισχύει αφενός ότι οι μορφισμοί $\tilde{g_1}$ και $\tilde{g_2}$ είναι καλύμματα των γραφημάτων Γ_1 και Γ_2 αντίστοιχα ως συνθέσεις καλυμμάτων και δη καθολικά καθώς από την υπόθεση της καθολικότητας του καλύμματος r, η θεμελειώδης ομάδα $\pi_1(\tilde{\Gamma_3}, \tilde{v_3})$ του γραφήματος $\tilde{\Gamma_3}$ είναι η τετριμένη. Αφετέρου από το 4.2.12 ισχύει ότι οι ομάδες μετασχηματισμών των καλυμμάτων $G(\tilde{g_1})$ και $G(\tilde{g_2})$ είναι ισόμορφες με τις υποομάδες H_1 και H_2 αντίστοιχα. Δηλαδή $G(\tilde{g_1}) \cong H_1$ και $G(\tilde{g_2}) \cong H_2$.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\Gamma_3} \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{g_1}"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{g_2}"'] & & \\
& \Gamma_3 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] \arrow[dr, "f_3"] & \Gamma_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& \Gamma_2 \arrow[r, "f_2"] & \Delta
\end{tikzcd}
$$

Η f_3 είναι εμβάπτιση ως σύνθεση τέτοιων, οπότε και η $f_3 \circ r\tilde{\Gamma_3} \longrightarrow \Delta$ είναι εμβάπτιση ως σύνθεση τέτοιων. Θεωρούμε $h := f_3 \circ r$. Αν $\sigma \in G(\tilde{g_1})$ ένας μετασχηματισμός του $\tilde{g_1}$, τότε $\tilde{g_1}\sigma = \tilde{g_1} \Rightarrow g_1 r\sigma = g_1 r \Rightarrow f_1 g_1 r\sigma = f_1 g_1 r \Rightarrow f_3 r\sigma = f_3 r \Rightarrow h\sigma = h$. Δηλαδή κάθε μετασχηματισμός της $\tilde{g_1}$ είναι μετασχηματισμός της $h = f_3 \circ r$. Αντίστοιχα κάθε μετασχηματισμός της $\tilde{g_2}$ είναι και μετασχηματισμός της h. Δηλαδή $G(\tilde{g_1}), G(\tilde{g_2}) \leq G(h)$.

Αν τώρα $K = \langle G(\tilde{g_1}), G(\tilde{g_2}) \rangle_{G(h)}$ είναι η υποομάδα της ομάδας μετασχηματισμών $G(h)$ που παράγεται από τις υποομάδες $G(\tilde{g_1})$ και $G(\tilde{g_2})$, τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Gamma}_3 \arrow[r, "\tilde{g_1}"] \arrow[d, "\tilde{g_2}"'] \arrow[dr, "t_3"] & \Gamma_1 \arrow[d, "t_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
\Gamma_2 \arrow[r, "t_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & \tilde{\Gamma}_3/K \arrow[dr, "s"] & \\
 & & \Delta
\end{tikzcd}$$

Όπου από το 3.2.11 το $(\tilde{\Gamma}_3/K, t_1, t_2)$ είναι η εξώθηση των $\tilde{g_1} : \tilde{\Gamma}_3 \longrightarrow \Gamma_1 \cong \tilde{\Gamma}_3/G(\tilde{g_2}) \cong H_1$ και $\tilde{g_2} : \tilde{\Gamma}_3 \longrightarrow \Gamma_2 \cong \tilde{\Gamma}_3/G(\tilde{g_1}) \cong H_2$.

Το t_3 είναι κάλυμμα του $\tilde{\Gamma}_3/K$ ως φυσική προβολή στο πηλίκο $\tilde{\Gamma}_3/K$ το οποίο προκύπτει από την ελεύθερη δράση της ομάδας K επί του γραφήματος $\tilde{\Gamma}_3$. Επίσης οι t_1 και t_2 είναι καλύμματα του γραφήματος $\tilde{\Gamma}_3/K$ καθώς οι $\tilde{g_1}$ και $\tilde{g_2}$ είναι καλύμματα του. Επιπλέον το t_1 είναι πεπερασμένων νημάτων καθώς το πεδίο ορισμού του Γ_1 είναι εξ ορισμού πεπερασμένο. Οπότε η υποομάδα H_1 είναι πεπερασμένου δείκτη στην ομάδα $\pi_1(\tilde{\Gamma}_3/K)$. Ιδιαιτέρως, εφόσον η ένωση $H_1 \cup H_2$ περιέχεται στην $\pi_1(\tilde{\Gamma}_3/K)$, ο δείκτης $(H_1 \vee H_2 : H_1)$ είναι επίσης πεπερασμένος. Τελικά έχουμε

$$(H_1 \vee H_2 : H_1 \cap H_2) = (H_1 \vee H_2 : H_1)(H_1 : H_1 \cap H_2) < \infty.$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] R. John Stallings, *Topology of Finite Graphs*, Inventiones mathematicae **71** (1983), 551-565.

[2] Michail Sykiotis, *Group Theory I and II*, Notes **1, 2** (2015).

[3] Hanna Neumann, *On the intersection of finitely generated free groups*, Publicationes Mathematicae **4** (1956), 186-189.

[4] Oleg Bogopolski, *Introduction to Group Theory*, EMS Textbooks in Mathematics (2008).

[5] Paolo Aluffi, *Algebra Chapter 0*, Graduate Studies in Mathematics **104** (2009).

[6] Daniel E. Cohen, *Combinatorial Group Theory: a topological approach*, London Mathematical Society Student Texts **14** (1989).

[7] Joel Friedman, *Sheaves on Graphs, Their Homological Invariants and a Proof of the Hanna Neumann Conjecture: with apprendix by Warren Dicks*, Mem. Amer. Math. Soc. **233** (2015).

[8] Igor Minevev, *Submultiplicativity and the Hanna Neumann Conjecture*, Annal of Mathematics **175** (2012), 393-414.