



Εθνικό
και
Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο
Αθηνών

Τοπολογική Χειρουργική σε 3-πολλαπλότητες

Φοιτητής: Κοκκινάκης Αναστάσιος

Καθηγητής: Κοντογεώργης Αριστείδης

Επιτροπή Παρακολούθησης:

Λαμπροπούλου Σοφία

Συκιώτης Μιχαήλ

16 Νοεμβρίου 2019

Στην παρούσα διπλωματική θα ασχοληθούμε με 3-πολλαπλότητες και πως αυτές προκύπτουν μέσω τις διαδικασίας της τοπολογικής χειρουργικής. Θα ορίσουμε έννοιες όπως *Heegaard Splitting*, *Dehn Twists*, ακέραια και ρητή χειρουργική. Θα δούμε πως κάθε κλειστή (συμπαγής, συνεκτική και χωρίς σύνορο) 3-πολλαπλότητα προκύπτει από χειρουργική στην S^3 πάνω σε κρίκους ή κόμβους (Θεώρημα *Lickorish-Wallace*), θα ορίσουμε πλαισίωση για έναν κρίκο σε μια 3-πολλαπλότητα και θα δούμε πως οι πλαισιωμένοι κρίκοι περιγράφουν χειρουργική στην S^3 και πως η τροποποίηση τους αλλάζει την πολλαπλότητα (Λογισμός *Kirby*). Τέλος θα δώσουμε κάποια παραδείγματα και εφαρμογές των παραπάνω.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, καθώς και τους καθηγητές μου
αλφαβητικά

Τον κύριο Κοντογεώργη για τις παρατηρήσεις και τη διόρθωση του κειμένου
Την κυρία Λαμπροπούλου για την καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε
Τον κύριο Συκίωτη για τη βοήθεια που μου πρόσφερε μέσα από τα μαθήματα που
δίδαξε

Περιεχόμενα

1	Heegaard Decomposition	5
1.1	Heegaard Splittings	5
1.2	Διαγράμματα Heegaard	8
1.3	Φακοειδείς χώροι $L(p, q)$	16
2	Ομοιομορφισμοί επιφανειών	22
2.1	Στοιχεία Θεωρίας Πλεξίδων	23
2.2	Το θεώρημα Dehn-Lickorish	28
2.3	Το θεώρημα Lickorish-Wallace	34
3	Ακέραια και ρητή χειρουργική	38
3.1	Ρητή χειρουργική σε κόμβους	38
3.2	Linking numbers	44
3.3	Ακέραια χειρουργική και φακοειδείς χώροι	47
3.4	Λογισμός Kirby	53
4	Παράρτημα	61
5	Βιβλιογραφία	65

Εισαγωγή

Στα μαθηματικά, ένα από τα σπουδαιότερα και πιο χρήσιμα θεωρήματα είναι τα θεωρήματα ταξινόμησης. Ειδικότερα στην τοπολογία και τη γεωμετρία, τεράστιας σημασίας είναι τα θεωρήματα ταξινόμησης πολλαπλοτήτων. Στην τοπολογία οι πολλαπλότητες χωρίζονται σε χαμηλών και υψηλών διαστάσεων και ανάλογα το είδος της πολλαπλότητας αλλάζουν και τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε για να τις προσεγγίσουμε. Διαφορετικών διαστάσεων πολλαπλότητες μπορούν να απαιτούν πολύ διαφορετική προσέγγιση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η διάσημη εικασία του Poincaré (1904), που στη γενικευμένη μορφή της μας λέει πως: *Κάθε συμπαγής 3-πολλαπλότητα χωρίς σύνορο ομοιομορφικά ισοδύναμη με την 3-σφαίρα S^3 , είναι αναγκαστικά ομοιομορφική με αυτήν.* Το συγκεκριμένο ερώτημα, γενικευμένο επιπλέον σε κάθε διάσταση n και στην λεία και την κατά-τμήματα-γραμμική κατηγορία, ξεκίνησε να αποδυναμώνεται το 1960 από τον Stephen Smale για λείες και κατά τμήματα γραμμικές πολλαπλότητες διάστασης $n \geq 7$ και στην συνέχεια επεκτάθηκε από τον ίδιο για διαστάσεις $n \geq 5$ και για τη δουλειά του αυτή τιμήθηκε με το μετάλλιο Fields το 1966. Στη συνέχεια ήρθε ο Max Newman και έδειξε το αποτέλεσμα στην Τοπολογική κατηγορία, πάλι για διαστάσεις $n \geq 5$. Ο Michael Friedman έδειξε το τοπολογικό αποτέλεσμα για $n = 4$ το 1982 και τέσσερα χρόνια αργότερα βραβεύτηκε κι αυτός με το μετάλλιο Fields. Παρόλα αυτά το αρχικό ερώτημα του Poincaré για $n = 3$ (όπου οι τρεις κατηγορίες είναι ισοδύναμες) έμενε ανοιχτό μέχρι το 2003 όπου ένας μυστικοπαθής ρώσος μαθηματικός με το όνομα Grisha Perelman δημοσίευσε μια απόδειξη για τη 3-διάστατη εκδοχή του θεωρήματος στην οποία χρησιμοποίησε την τεχνική της τοπολογικής χειρουργικής. Ο Perelman για αυτό του το επίτευγμα βραβεύτηκε και ο ίδιος με το μετάλλιο Fields και παρόλο που ο ίδιος αρνήθηκε, το κατόρθωμα του παραμένει ένα από τα σημαντικότερα των σύγχρονων μαθηματικών. Τι ήταν όμως αυτό που έκανε την αρχική εικασία, στη διάσταση 3 να αντιστέκεται για σχεδόν έναν αιώνα; Η πιο βασική διαφορά είναι η ίδια η διάσταση. Παραδείγματος χάρι ενώ στον $\mathbb{R}^2$ οι ομοιομορφικές εμφυτεύσεις της S^1 είναι όλες ομοιομορφικές μέσα στον $\mathbb{R}^2$ λόγω του θεωρήματος Jordan, στον $\mathbb{R}^3$ υπάρχει ολόκληρος κλάδος των μαθηματικών, η λεγόμενη Θεωρία Κόμβων, και η ταξινόμηση των ομοιομορφικών εμφυτεύσεων παραμένει ανοιχτό πρόβλημα ακόμα και σήμερα. Στον $\mathbb{R}^4$ κάθε κόμβος λύνεται λόγω της παράπανω διάστασης οπότε στην ουσία έχουμε πάλι έναν τετριμμένο κύκλο. Βλέπουμε λοιπόν ότι η διάσταση παίζει τεράστιο ρόλο, για αυτό και το πρόβλημα ταξινόμησης των πολλαπλοτήτων χωρίζεται ανά διάσταση σε χαμηλές και υψηλές διαστάσεις. Χαμηλές για $n \leq 4$ και υψηλές για $n \geq 5$.

1 Heegaard Decomposition

1.1 Heegaard Splittings

Ορισμός 1.1.1 Σώμα με g το πλήθος χερούλια (*handlebody*) ονομάζεται η 3-πολλαπλότητα με σύνορο που προκύπτει από την D^3 όταν της κολλήσουμε g το πλήθος αντίτυπα του $D^2 \times [0, 1]$. Ο αριθμός g ονομάζεται *γένος* του σώματος με χερούλια.

Ορισμός 1.1.2 Σφαίρα με g το πλήθος χερούλια ονομάζουμε το σύνορο ενός σώματος με g χερούλια.

Ορισμός 1.1.3 Μια 3-πολλαπλότητα M λέμε ότι έχει *Heegaard Splitting* γένους g αν και μόνο αν υπάρχουν σώματα με g χερούλια H_1, H_2 , με $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 = \partial H_2$ και ομοιομορφισμός

$$f : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$$

ώστε

$$M = H_1 \cup_f H_2$$

Με άλλα λόγια η 3-πολλαπλότητα M λέμε ότι έχει Heegaard Splitting γένους g αν μπορεί να γραφεί ως συγκόλληση δύο σωμάτων με g χερούλια πάνω στο σύνορο τους.

Πρόταση 1.1.4 Η συγκόλληση δύο σωμάτων με χερούλια ίδιου γένους πάνω στο σύνορο τους είναι μια προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα.

Απόδειξη: Κάθε σώμα με χερούλια είναι μια 3-πολλαπλότητα με σύνορο, άρα επειδή η συγκόλληση θα γίνει στο σύνορο των χερουλιών, τα μη συνοριακά σημεία δεν θα ταυτιστούν με κάποια άλλα, άρα ένα τέτοιο σημείο μετά τη συγκόλληση θα διατηρήσει την ομοιομορφική περιοχή του με μια ανοιχτή μπάλα στον $\mathbb{R}^3$. Ας δούμε τι γίνεται με συνοριακά σημεία. Αφού το σύνορο μιας 3-πολλαπλότητας είναι μια 2-πολλαπλότητα, ένα συνοριακό σημείο p έχει μια περιοχή U ομοιομορφική με έναν ανοιχτό δίσκο και το $f(U)$ θα είναι κι αυτό ένας ανοιχτός δίσκος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, γιατί αν χρειαστεί μπορούμε να μικρύνουμε κατάλληλα τη περιοχή U , αυτές οι περιοχές είναι βάσεις δύο ανοιχτών ημιμπαλών. Η συγκόλληση αυτών των δύο ημιμπαλών στη βάση

τους μέσω της f θα μας δώσει στο χώρο ταύτισης μια περιοχή του $p \sim f(p)$ ομοιομορφική με μια ανοιχτή μπάλα.

Για την προσανατολισσιμότητα θα χρησιμοποιήσουμε την μακρά ακριβή ακολουθία Mayer-Vietoris (βλ. Παράρτημα 4.11). Αν H_1, H_2 τα σώματά μας γένους g και $M = H_1 \cup_f H_2$, μπορούμε να βρούμε ανοιχτές περιοχές U, V των H_1, H_2 αντίστοιχα, ώστε να υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση των περιοχών στα H_1, H_2 . Πράγματι αν $C_i = \partial H_i \times [0, 1)$ μια περιοχή των ∂H_i για $i = 1, 2$, με $\partial H_i = \partial H_i \times \{0\}$, τότε $U = H_1 \cup_f C_2$ και $V = C_1 \cup_f H_2$. Από Mayer-Vietoris θα έχουμε:

$$H_3(U) \oplus H_3(V) \rightarrow H_3(M) \rightarrow H_2(U \cap V) \rightarrow H_2(U) \oplus H_2(V)$$

Όμως $H_n(U) = H_n(V) = H_n(\vee_{j=1}^g S^1)$ και $H_n(U \cap V) = H_n(S_g)$ όπου S_g είναι η σφαίρα με g χερούλια. Άρα η παραπάνω ακολουθία θα γίνει

$$0 \rightarrow H_3(M) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

και από ακρίβεια έχουμε πως $H_3(M) = \mathbb{Z}$ που μας δίνει το ζητούμενο. (βλ. Παράρτημα 4.4). $\square$

Πρόταση 1.1.5 Κάθε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα έχει Heegaard Splitting.

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης θα χρειαστούμε τα εξής λήμματα:

Λήμμα 1.1.6 Κάθε συνεκτικό γράφημα X περιέχει ένα μεγιστικό δέντρο T . Επιπλέον το T περιέχει κάθε κορυφή του X .

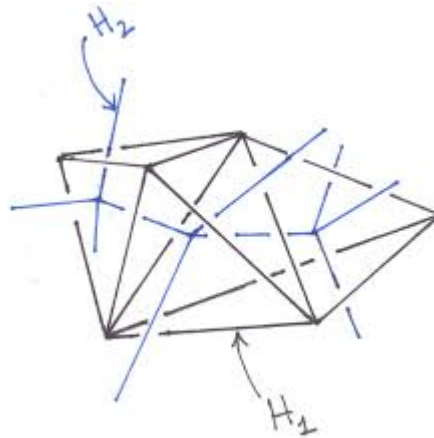
Απόδειξη. Έστω $A = \{Y \subset X : Y \text{ δέντρο}\}$. Το A δεν είναι κενό αφού κάθε κορυφή είναι δέντρο. Ορίζουμε μερική διάταξη την σχέση του περιέχεται. Έστω $C \subset A$ αλυσίδα. Τότε το $\cup C$ είναι δέντρο και άνω φράγμα της αλυσίδας. Πράγματι το $\cup C$ είναι συνεκτικό και αν υπάρχει κύκλωμα στο $\cup C$ τότε λόγω της πλήρους διάταξης του C αναγκαστικά θα περιέχεται σε κάποιο στοιχείο του. Όμως τα στοιχεία του C είναι δέντρα, άρα άτοπο. Από το λήμμα του Zorn, έχουμε μεγιστικό δέντρο T στο A . Μένει να δούμε ότι το T περιέχει κάθε κορυφή του X . Αν υπάρχει κορυφή που δεν ανήκει στο T τότε λόγω συνεκτικότητας θα υπάρχει ακμή e που δεν ανήκει στο T με μια μόνο από της κορυφές της ακμής μέσα στο T έστω $i(e) \in T$ (η αρχή). Τότε όμως το $T \cup \{e, e^{-1}, \tau(e)\}$ είναι δέντρο του X . Άτοπο λόγω μεγιστικότητας του T . $\square$

Λήμμα 1.1.7 Κάθε πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα εμφυτευμένο σε μια 3-πολλαπλότητα μας δίνει ένα σώμα με χερούλι.

Απόδειξη. Κάθε πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό δέντρο. Φουσκώνοντας το δέντρο μέσα στην πολλαπλότητα μας παίρνουμε μια κλειστή μπάλα. Τα χερούλια μας θα είναι παρόμοια φουσκώματα των ακμών που δεν ανήκουν στο μεγιστικό δέντρο. (ο.ε.δ.)

Απόδειξη Πρότασης 1.1.5. Έστω M η πολλαπλότητα μας. Από το Θεώρημα τριγωνισιμότητας των 3-πολλαπλοτήτων του Moise παίρνουμε μια τριγωνοποίηση της M . Ο 1-σκελετός της τριγωνοποίησης μας είναι ένα γράφημα μέσα στην M το οποίο θα μας δώσει ένα σώμα με χερούλια. Για να βρούμε το δεύτερο σώμα θα χρειαστεί να βρούμε ένα δεύτερο γράφημα μέσα στην M . Για να το κάνουμε αυτό αρκεί να τοποθετήσουμε μια κορυφή στο κέντρο κάθε 3-simplex και στην συνέχεια να ενώσουμε με ακμές τις νέες κορυφές. Το νέο γράφημα θα μας δώσει το σώμα που ψάχνουμε (βλ. σχήμα 1). Εφόσον η πολλαπλότητα δεν έχει σύνορο τα σώματα θα έχουν τομή το κοινό σύνορο τους και άρα θα είναι ομοιομορφικά, άρα ίδιου γένους. $\square$

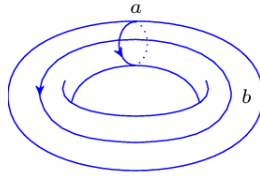
Σχήμα 1. Ο τρόπος που θα πάρουμε τα γραφήματα μας



1.2 Διαγράμματα Heegaard

Ορισμός 1.2.1 Έστω ένας συμπαγής τόρος. Μεσημβρινός του τόρου ονομάζεται το σύνορο του $D^2 \times \{e^{it}\}, t \in [0, 2\pi]$. Παράλληλος του τόρου ονομάζεται ένα υποσύνολο της μορφής $\{z\} \times S^1, z \in \partial D^2$.

Μεσημβρινός α και παράλληλος b



Παρατηρούμε πως ο μεσημβρινός είναι μια καμπύλη στο σύνορο που φράζει δίσκο στο εσωτερικό του τόρου. Μεσημβρινούς ενός σώματος με g χερούλια θα λέμε αντίστοιχες καμπύλες σε κάθε χερούλι του σώματος, δηλώνοντας τα χερούλια στα οποία ανήκουν.

Ορισμός 1.2.2 Έστω $M = H_1 \cup_f H_2$ μια 3-πολλαπλότητα και ένα Heegaard splitting αυτής γένους g . Ας υποθέσουμε πως το H_2 είναι φυσιολογικά εμφυτευμένο μέσα στην S^3 . Έστω $D_i, i = 1, \dots, g$ δίσκοι στα χερούλια του H_2 ώστε $C_i = \partial D_i$ να είναι μεσημβρινοί των χερούλιών και $l_i = f(C_i) \subset H_1$. Το H_1 μαζί με τα l_i λέμε ότι είναι ένα *διάγραμμα Heegaard* του M το οποίο θα συμβολίζουμε με $(H_1, \{l_1, \dots, l_g\})$.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, κάθε 3-πολλαπλότητα μας δίνει ένα διάγραμμα Heegaard. Έστω τώρα ότι N_i είναι κυλινδρικές ανοιχτές περιοχές των C_i ξένες ανά δύο μεταξύ τους, δηλαδή $N_i = C_i \times (0, 1)$, όπου $C_i \cong C_i \times \{\frac{1}{2}\}$. Καλούμε τον χώρο $\partial H_2 - \cup_{i=1}^n N_i$ το αποτέλεσμα του να κόψουμε το ∂H_2 κατά μήκος των C_i . Παρατηρούμε ότι $\partial H_2 - \cup_{i=1}^n N_i$ είναι μια σφαίρα με $2g$ τρύπες ομοιομορφική μέσω της f με το $\partial H_1 - \cup_{i=1}^n f(N_i)$.

Αντίστροφα, αν έχουμε ένα Heegaard διάγραμμα $(H_1, \{l_1, \dots, l_g\})$ και M_i ανοιχτές περιοχές των l_i , ξένες ανά δυο μεταξύ τους, ώστε $\partial H_1 - \cup_{i=1}^n M_i$ να είναι ομοιομορφικό με μια σφαίρα με $2g$ τρύπες, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μια 3-πολλαπλότητα. Έστω H_2 ένα σώμα με χερούλια φυσιολογικά εμφυτευμένο

μέσα στην S^3 . Παίρνοντας τους αντίστοιχους μεσημβρινούς C_i , τους στέλνουμε με έναν ομοιομορφισμό f στα l_i . Στη συνέχεια επεκτείνοντας ταυτοτικά ως προς τη δεύτερη συντεταγμένη παίρνουμε έναν ομοιομορφισμό των $N_i = C_i \times (0, 1)$ με τα M_i . Όμως τα $\partial H_2 = \cup_{i=1}^n N_i$ και $\partial H_1 = \cup_{i=1}^n M_i$ είναι ομοιομορφικά ως σφαίρες με $2g$ τρύπες, άρα μπορούμε να επεκτείνουμε με έναν ομοιομορφισμό που να συμφωνεί με τον ομοιομορφισμό στις περιοχές των C_i . Το αποτέλεσμα είναι μια 3-πολλαπλότητα που έχει Heegaard διάγραμμα το $(H_1, \{l_1, \dots, l_g\})$.

Θα δώσουμε μερικά τοπολογικά αποτελέσματα και παραδείγματα για να κατανοήσουμε καλύτερα τις έννοιες που μόλις ορίσαμε.

Λήμμα 1.2.3 (Alexander) Κάθε ομοιομορφισμός $f : S^n \rightarrow S^n$ μπορεί να επεκταθεί σε ομοιομορφισμό $F : D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $F(0) = 0$ και $F(x) = |x|f(\frac{x}{|x|})$ για $x \in D^{n+1} - \{0\}$ είναι η ζητούμενη επέκταση.

Θεώρημα 1.2.4 Αν $M = D_1 \cup_f D_2$, όπου $D_1, D_2 = D^{n+1}$ και $f : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ ομοιομορφισμός, τότε το M είναι ομοιομορφικό με την S^{n+1} .

Απόδειξη. Εφόσον ∂D_1 και ∂D_2 είναι η S^n , η f επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό $F : D_1 \rightarrow D_2$. Αν $p : D_1 \rightarrow S_+^{n+1}$ και $q : D_2 \rightarrow S_-^{n+1}$ οι φυσικοί ομοιομορφισμοί των δίσκων με τα άνω και κάτω ημισφαίρια αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση:

$$T(x) = \begin{cases} p(x) & \text{αν } x \in D_1, \\ q \circ F^{-1}(x) & \text{αν } x \in D_2 \end{cases}$$

θα μας επάγει τον ομοιομορφισμό που θέλουμε. $\square$

Με ακριβώς όμοιο τρόπο έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πρόταση 1.2.5 Αν η D^{n+1} είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της M , τότε $M - D^{n+1} \cup_f D^{n+1} \cong M$, όπου $f : S^n \rightarrow S^n$ ομοιομορφισμός.

Πρόταση 1.2.6 Έστω $(H_1, \{l_1, \dots, l_g\})$ ένα διάγραμμα Heegaard μιας 3-πολλαπλότητας M και $(H'_1, \{l'_1, \dots, l'_g\})$ ένα διάγραμμα Heegaard μιας 3-πολλαπλότητας M' . Αν υπάρχει $f : H_1 \rightarrow H'_1$ ομοιομορφισμός ώστε $f(l_i) = l'_i$ τότε τα M και

M' είναι ομοιομορφικά.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε κατάλληλο ομοιομορφισμό $p : H_2 \rightarrow H'_2$. Αν $M = H_1 \cup_h H_2$ και $M' = H'_1 \cup_{h'} H'_2$, ο ομοιομορφισμός $H = h'^{-1} \circ f \circ h : \partial H_2 \rightarrow \partial H'_2$ στέλνει τα C_i στα C'_i , όπου $C_i = h^{-1}(l_i)$ και $C'_i = h'^{-1}(l'_i)$. Αφού όμως τα C_i, C'_i φράζουν δίσκους, από το λήμμα 1.2.3 μπορούμε να επεκτείνουμε τον H στο εσωτερικό των δίσκων. Επεκτείνοντας ταυτοτικά ως προς την δεύτερη συντεταγμένη, παίρνουμε έναν ομοιομορφισμό των συμπαγών κυλινδρικών περιοχών των δίσκων με σύνορο τα C_i και C'_i . Όμως τώρα αν κόψουμε αυτές τις κυλινδρικές περιοχές από τα H_2 και H'_2 μας μένουν κλειστές μπάλες και ο H είναι ομοιομορφισμός των συνόρων αυτών των μπαλών. Εφαρμόζοντας άλλη μια φορά το λήμμα 1.2.3 επεκτείνουμε τον H στο εσωτερικό και έχουμε τον απαιτούμενο ομοιομορφισμό των H_2 και H'_2 . Μπορούμε πλέον να επάγουμε ομοιομορφισμό μεταξύ των M_2 και M'_2 . $\square$

Πρόταση 1.2.7 Αν H_1 και H_2 σώματα με χερούλια ίδιου γένους και $f, h : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$ ισοτοπικοί ομοιομορφισμοί, τότε $H_1 \cup_f H_2 \cong H_1 \cup_h H_2$.

Απόδειξη: Έστω $f_t : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$, οικογένεια ομοιομορφισμών που συνδέει τους f και h αντίστοιχα. Παίρνοντας μια περιοχή του ∂H_1 , τέτοια ώστε $C \subset H_1$ και $C \cong \partial H_1 \times [0, 1]$ ώστε $\partial H_1 = \partial H_1 \times \{0\}$, θα κατασκευάσουμε κατάλληλη απεικόνιση ώστε να μας επάγει τον ζητούμενο ομοιομορφισμό. Ορίζουμε την απεικόνιση T ως εξής:

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \notin C, \\ (h \circ f_t^{-1}(y), t) & \text{αν } x = (y, t), y \in \partial H_1 \end{cases}$$

Η T είναι καλά ορισμένη και αν $\pi_f : H_1 \cup H_2 \rightarrow H_1 \cup_f H_2$ και $\pi_h : H_1 \cup H_2 \rightarrow H_1 \cup_h H_2$ οι φυσικές προβολές, η απεικόνιση $\pi_h \circ T$ είναι σταθερή στα νήματα $\pi_f^{-1}([x]_f)$, άρα επάγει τον ζητούμενο ομοιομορφισμό. $\square$

Ορισμός 1.2.8 Δυο διαγράμματα Heegaard $(H_1, \{l_1, \dots, l_g\})$ και $(H_1, \{l'_1, \dots, l'_g\})$ του ίδιου σώματος με χερούλια καλλούνται ισοτοπικά αν υπάρχει οικογένεια ομοιομορφισμών $f_t : \partial H_1 \rightarrow \partial H_1$, ώστε $f_0 = id_{\partial H_1}$ και $f_1(l_i) = l'_i$.

Πρόταση 1.2.9 Αν $(H_1, \{l_1, \dots, l_g\})$ και $(H_1, \{l'_1, \dots, l'_g\})$ είναι ισοτοπικά διαγράμματα και $h_1, h_2 : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$ ομοιομορφισμοί με $h_1(C_i) = l_i$,

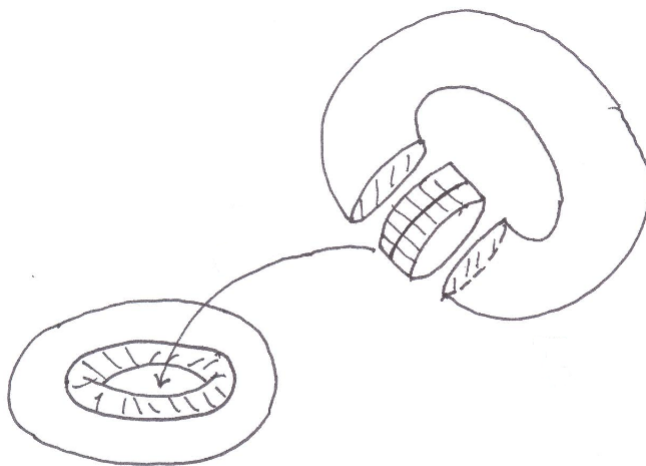
$h_2(C_i) = l'_i$ αντίστοιχα, τότε $H_1 \cup_{h_1} H_2 \cong H_1 \cup_{h_2} H_2$.

Απόδειξη. Αν $f_t : \partial H_1 \rightarrow \partial H_1$ οικογένεια ομοιομορφισμών όπως στον ορισμό 1.2.8, τότε ο ομοιομορφισμός $h_3 = f_1 \circ h_1$ είναι ισοτοπικός με τον h_1 μέσω της $f_t \circ h_1$ και από την πρόταση 1.2.7 τα $H_1 \cup_{h_1} H_2$ και $H_1 \cup_{h_3} H_2$ είναι ομοιομορφικά. Όμως από πρόταση 1.2.6 τα $H_1 \cup_{h_2} H_2$ και $H_1 \cup_{h_3} H_2$ είναι ομοιομορφικά αφού προέρχονται από το ίδιο διάγραμμα Heegaard. $\square$

Το Θεώρημα 1.2.4 ουσιαστικά μας λέει ότι η S^3 έχει Heegaard splitting γένους 0. Θα δείξουμε με χρήση των παραπάνω πως η S^3 έχει Heegaard splitting κάθε γένους.

Πράγματι, έστω πως έχουμε δυο σώματα με g χερούλια, H_1 και H_2 . Έστω επίσης C_i για $i = 1, \dots, g$ είναι μεσημβρινοί των χερουλιών του H_2 και l_i είναι καμπύλες που πάνε γύρω από τις τρύπες του H_1 , όπως οι παράλληλοι σε έναν τόρο, χωρίς να τέμνονται ανα δύο. Αφαιρώντας κυλινδρικές περιοχές των C_i και κολλώντας τις, ως προς το σύνορο τους, στην επιφάνεια του H_1 με ομοιομορφισμούς f_i που στέλνουν τα C_i στα l_i κλείνουμε τις τρύπες του H_1 (σχήμα 2). Στη συνέχεια κολλάμε αυτό που έμεινε από το H_2 στην επιφάνεια του νέου μας σχήματος, προσέχοντας η συγκόλληση να γίνει σωστά, δηλαδή τα σύνορα των κυλινδρικών περιοχών να κολλήσουν με το υπόλοιπο της H_2 εκεί που κοπήκαν εξαρχής. Παρατηρούμε όμως ότι αυτού του είδους η συγκόλληση είναι στην ουσία δυο κλειστές μπάλες που κολλάνε στο σύνορο τους. Από το θεώρημα 1.2.4 έχουμε ότι το αποτέλεσμα της συγκόλλησης θα είναι η S^3 . Ένα διάγραμμα Heegaard της S^3 για την παραπάνω διαδικασία θα είναι το $(H_1, \{l_1, \dots, l_g\})$.

Σχήμα 2. Κλείνοντας την τρύπα ενός τόρου

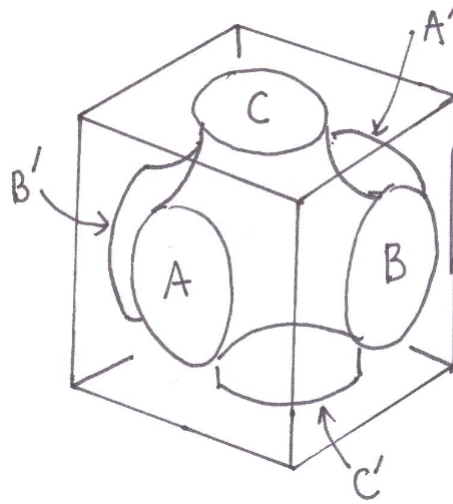


Βλέπουμε λοιπόν πως μια 3-πολλαπλότητα μπορεί να έχει πάνω από ένα Heegaard splittings.

Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα διαγραμμάτων Heegaard για 3-πολλαπλοτήτες.

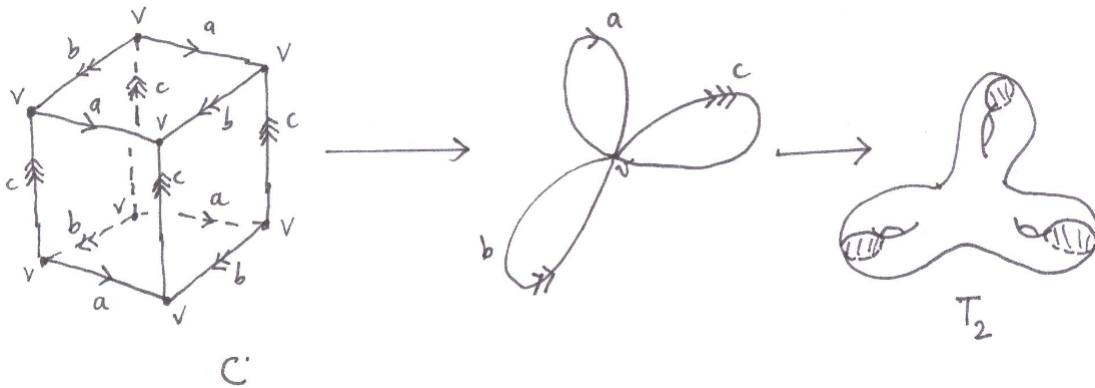
Παράδειγμα 1 Ένα από τα προτεινόμενα μοντέλα για το πιθανό σχήμα του σύμπαντος μας είναι αυτό του 3-τόρου. Δηλαδή της 3-πολλαπλότητας $S^1 \times S^1 \times S^1$. Ένας άλλος τρόπος να δούμε τον 3-τόρο είναι ταυτίζοντας ανα δυο τις απέναντι έδρες του κύβου $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Για να βρούμε ένα Heegaard splitting θα πρέπει να τοποθετήσουμε ένα εξάποδο "πλάσμα" στο εσωτερικό του κύβου μας όπως στο σχήμα 3.

Σχήμα 3. Το εξάποδο πλάσμα



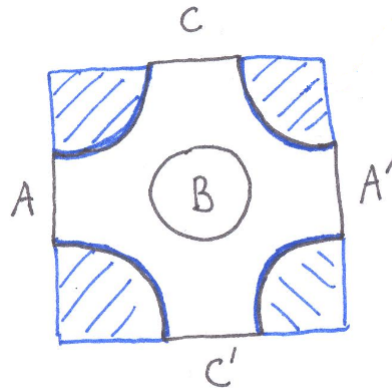
Ταυτίζοντας το A με το A' , το B με το B' και το C με το C' παίρνουμε ένα σώμα με τρία χερούλια H_1 . Για να βρούμε το δεύτερο σώμα παρατηρούμε ότι το συμπλήρωμα του κύβου μείον το εξάποδο "πλάσμα" συστέλλεται σε ένα μπουκέτο τριών κύκλων με μια κορυφή, το οποίο θα μας δώσει το δεύτερο σώμα με τρία χερούλια, H_2 . (σχήμα 4)

Σχήμα 4. Το δεύτερο σώμα με τρία χερούλια

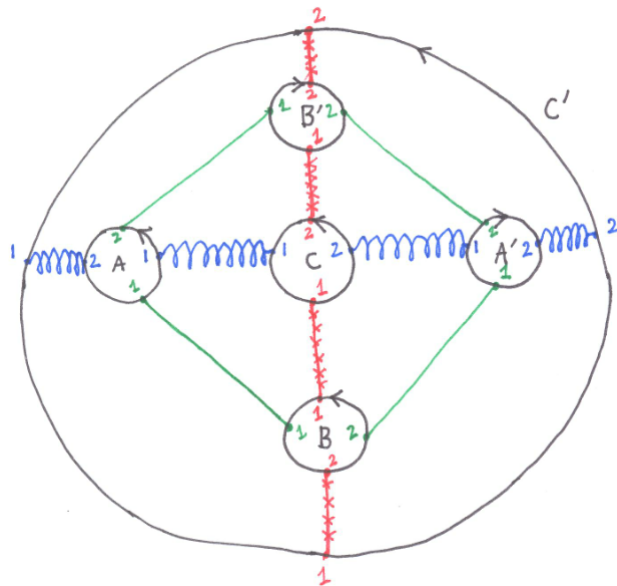


Η τομή του H_1 και ενός δίσκου με σύνορο έναν μεσημβρινό του H_2 είναι όπως στο σχήμα 5. Για να μπορέσουμε να δούμε καλύτερα το διάγραμμα Heegaard του 3-τόρου θα αφαιρέσουμε τα χερούλια από το H_1 και θα τον παρουσιάσουμε ως σφαίρα με έξι τρύπες (σχήμα 6). Οι χρωματιστές γραμμές δείχνουν πως ταξιδεύουν γύρω από τα χερούλια οι τρεις μεσημβρινοί του H_2 .

Σχήμα 5. Δίσκος με σύνορο έναν μεσημβρινό



Σχήμα 6. Διάγραμμα Heegaard για τον 3-τόρο

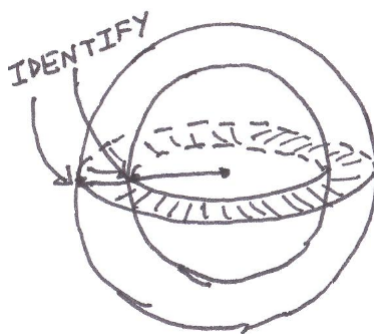


Παράδειγμα 2 Διάγραμμα Heegaard για την $S^2 \times S^1$.

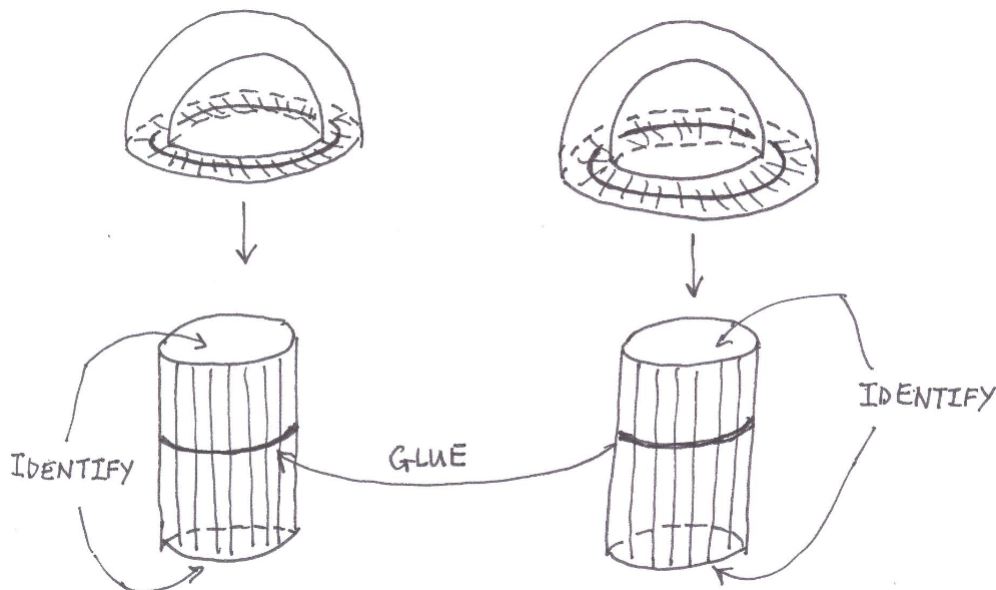
Ένας τρόπος να φανταστούμε την $S^2 \times S^1$ είναι να πάρουμε μια κλειστή μπάλα και να αφαιρέσουμε μια ανοιχτή μπάλα μικρότερης ακτίνας από το εσωτερικό της. Στη συνέχεια ταυτίζουμε τα σημεία στην επιφάνεια της μεγάλης

σφαίρας με τα σημεία στην επιφάνεια της μικρής που ανήκουν στην ίδια ακτίνα (βλ. σχήμα 7). Στη συνέχεια αν κόψουμε κατά μήκος του ισημερινού παρατηρούμε ότι παίρνουμε δύο κύλινδρους που όταν γίνει η ταύτιση θα γίνουν συμπαγείς τόροι, κολλημένοι κατά μήκος δυο μεσημβρινών. Με άλλα λόγια για να πάρουμε την $S^2 \times S^1$ αρκεί να κολλήσουμε δύο συμπαγείς τόρους στην επιφάνεια με έναν ομοιομορφισμό των συνόρων τους που στέλνει τον μεσημβρινό του ενός στον μεσημβρινό του άλλου (σχήμα 8).

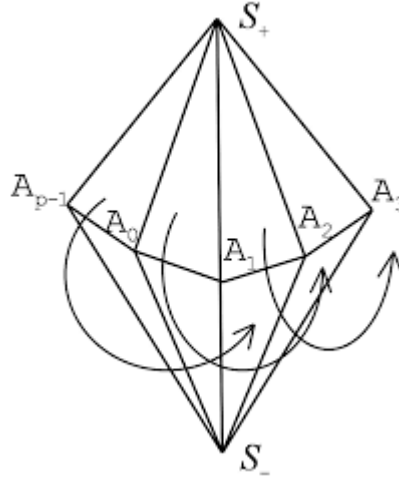
Σχήμα 7. Ένας τρόπος να φανταστούμε την $S^2 \times S^1$



Σχήμα 8. Heegaard splitting για την $S^2 \times S^1$



1.3 Φακοειδείς χώροι $L(p, q)$



Έστω p και q δυο σχετικά πρώτοι θετικοί ακέραιοι. Η ομάδα $\mathbb{Z}_p$ είναι κυκλική τάξεως p . Αν $\langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}_p$, ορίζουμε δράση της $\mathbb{Z}_p$ πάνω στην $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ εξής:

$$(\sigma, (z, w)) \rightarrow \sigma(z, w) = (ze^{\frac{2\pi i}{p}}, we^{\frac{2\pi qi}{p}})$$

Ο χώρος πηλίκου ως προς την παραπάνω δράση $S^3/\mathbb{Z}_p$ ονομάζεται φακοειδής χώρος και συμβολίζεται με $L(p, q)$.

Πρόταση 1.3.1 Ο $L(p, q)$ είναι μια 3-πολλαπλότητα.

Απόδειξη. Κάθε απεικόνιση πηλίκου είναι εξ' ορισμού συνεχής και επί. Εφόσον λοιπόν η S^3 είναι συμπαγής και συνεκτική τότε θα είναι και ο $L(p, q)$. Παρατηρούμε ότι η δράση μας δεν σταθεροποιεί σημεία. Πράγματι αν $\sigma^k(z, w) = (z, w)$ αφού $(p, q) = 1$ αναγκαστικά θα έχουμε $k \equiv 0 \pmod{p}$. Εφόσον λοιπόν η δράση δεν σταθεροποιεί σημεία, αν $[z, w]$ η κλάση ισοδυναμίας του (z, w) αντιπροσώπου και (U, ϕ) χάρτης ώστε U ομοιομορφική με το $\mathbb{R}^3$, μπορούμε να βρούμε κατάλληλη ανοιχτή περιοχή V του (z, w) ώστε $V \cap \sigma^k V = \emptyset$ για κάθε $k = 0, \dots, p-1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, γιατί αν χρειαστεί μπορούμε να τμήσουμε με το U , υποθέτουμε πως $V \subset U$. Αν τώρα $\pi : S^3 \rightarrow L(p, q)$ ο φυσικός επιμορφισμός, η π είναι ανοιχτή απεικόνιση αφού είναι απεικόνιση πηλίκου και $\pi^{-1}(\pi(V)) = \cup_{k=0}^{p-1} \sigma^k V$ ανοιχτό. Άρα $\pi(V)$ ανοιχτό. Αφού η π είναι ανοιχτή απεικόνιση, ο περιορισμός της σε ένα ανοιχτό σύνολο θα είναι απεικόνιση πηλίκου και τότε η ϕ περιορισμένη στο V θα μας

δώσει κατάλληλο ομοιομορφισμό $\hat{\phi} : \pi(V) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Με παρόμοια επιλογή της περιοχής V δείχνουμε πως ο $L(p, q)$ είναι Hausdorff. Επίσης είναι δεύτερα αριθμήσιμος χώρος εφόσον η απεικόνιση πηλίκου είναι ανοιχτή και η S^3 είναι δεύτερη αριθμήσιμη $\square$

Πρόταση 1.3.2 $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}_p$

Για την απόδειξη της πρότασης 1.3.2. θα χρειαστούμε τα ακόλουθα

Ορισμός 1.3.3 Η δράση μια ομάδας G σε έναν τοπολογικό χώρο ονομάζεται *δράση επικάλυψης* αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή U του x ώστε $g_1U \cap g_2U = \emptyset$ για $g_1 \neq g_2$. Ισοδύναμα αν υπάρχει αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή U του x ώστε αν $g_1U \cap g_2U \neq \emptyset$ τότε $g_1 = g_2$.

Παραδείγμα Η προηγούμενη δράση της $\mathbb{Z}_p$ στην S^3 είναι μια δράση επικάλυψης.

Θεώρημα 1.3.3 Αν η δράση της ομάδας G στον X είναι δράση επικάλυψης, τότε η φυσική προβολή $p : X \rightarrow X/G$ είναι προβολή επικάλυψης.

Απόδειξη. Έστω $[x] \in X/G$. Υπάρχει $U \subset X$ ανοιχτό ώστε $x \in U$ και $g_1U \cap g_2U = \emptyset$ για κάθε $g_1 \neq g_2$. Τότε το $p^{-1}(p(U))$ είναι ξένη ένωση των gU για $g \in G$, και άρα $p(U)$ ανοιχτό. Η p είναι επίσης ανοιχτή αφού αν V ανοιχτό στο X , για $x \in V$ υπάρχει W όπως πάνω ώστε $p^{-1}(p(W)) = \cup_{g \in G} gW$ ξένη ένωση. Τέμνοντας με το V έχουμε ότι $p^{-1}(p(V \cap W)) = \cup_{g \in G} gV \cap W$, άρα $(p(V \cap W)) \subset (p(V))$. Άρα p ανοιχτή και άρα ο περιορισμός της p στο gU είναι ομοιομορφισμός. $\square$

Πρόταση 1.3.4 Αν πεπερασμένη ομάδα G δρα ελεύθερα σε χώρο Hausdorff, τότε είναι δράση επικάλυψης.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Αφού η G δρα ελεύθερα τότε για κάθε $g \neq 1$ θα έχουμε $gx \neq x$. Αφού X Hausdorff θα έχουμε U, U_g περιοχές των x, gx ξένες μεταξύ τους. Τότε $x \in W_g = U \cap g^{-1}U_g$ ανοιχτό. Το $V = \cap_{g \neq 1} W_g$ είναι το ζητούμενο σύνολο. Πράγματι αν $g_1 \neq g_2$ και $g_1V \cap g_2V \neq \emptyset$, θα υπάρχουν $a, b \in V$ ώστε $g_1a = g_2b$. Όμως $a, b \in U$ και $a \in (g_2^{-1}g_1)^{-1}U_{g_2^{-1}g_1}$, άρα υπάρχει $h \in U_{g_2^{-1}g_1}$ ώστε $a = (g_2^{-1}g_1)^{-1}h$, όμως τότε $b = h$ και $U_{g_2^{-1}g_1} \cap U \neq \emptyset$, άτοπο. $\square$

Θεώρημα 1.3.5 X κατά τόξα συνεκτικός και η δράση της G στον X είναι δράση επικάλυψης, $x_0 \in X$ και $p : X \rightarrow X/G$. Ορίζουμε απεικόνιση $\phi : \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ ως εξής: Αν $[f] \in \pi_1(X/G, p(x_0))$ υπάρχει ανύψωση $\hat{f}$ της f στο X με $\hat{f}(0) = x_0$ και $\hat{f}(1) \in p^{-1}(p(x_0))$. Άρα $\hat{f}(1) = gx_0$ για $g \in G$. Ορίζω $\phi([f]) = g$. Τότε ο ϕ είναι καλά ορισμένος επιμορφισμός.

Απόδειξη. 1ο βήμα. Ο ϕ είναι καλά ορισμένος. Έστω f και h ομοτοπικές θηλειές και $\hat{f}, \hat{h}$ οι αντίστοιχες ανυψώσεις τους, $\hat{f}(0) = \hat{h}(0) = x_0$. Τότε οι $\hat{f}$ και $\hat{h}$ είναι ομοτοπικές με κοινά άκρα. Άρα $\hat{f}(1) = \hat{h}(1)$.

2ο βήμα. Ο ϕ είναι επί. Αν $g \in G$, εφόσον κατά τόξα συνεκτικός υπάρχει μονοπάτι $\hat{f}$ που ενώνει τα x_0, gx_0 . Τότε η ζητούμενη θηλεία είναι η $p \circ \hat{f}$.

3ο βήμα. Ο ϕ είναι ομομορφισμός. Αν $[f], [h] \in \pi_1(X/G, p(x_0))$ και $\hat{f}, \hat{h}$ ανυψώσεις με αρχή το x_0 , έχουμε $\hat{f}(1) = g_1x_0$ και $\hat{h}(1) = g_2x_0$. Ορίζουμε $\phi_{g_1} : X \rightarrow X$ με τύπο $\phi_{g_1}(x) = g_1x$. Τότε η $\hat{f} * (\phi_{g_1} \circ \hat{h})$ είναι ανύψωση του $f * h$ καθώς $p \circ \hat{f} * (\phi_{g_1} \circ \hat{h}) = p \circ \hat{f} * p \circ (\phi_{g_1} \circ \hat{h}) = p \circ \hat{f} * p \circ \hat{h} = f * h$ με αρχή το x_0 . Από μοναδικότητα ανυψώσεων έχουμε ότι $\hat{f} * h = \hat{f} * (\phi_{g_1} \circ \hat{h})$ και άρα $\hat{f} * h(1) = \phi_{g_1} \circ \hat{h}(1) = g_1g_2x_0$. Άρα ϕ ομομορφισμός. $\square$

Παρατήρηση $\phi([f]) = 1 \iff \hat{f}(1) = x_0 \iff \hat{f}$ είναι θηλεία στο x_0 . Άρα $\ker \phi = p_*(\pi_1(X, x_0))$. Άρα από το 1ο θεώρημα ισομορφισμού έχουμε πως $\pi_1(X/G, p(x_0))/p_*(\pi_1(X, x_0)) = G$

Απόδειξη πρότασης 1.3.2. Από τα παραπάνω έχουμε ότι $L(p, q) = S^3/\mathbb{Z}_p$ όπου η $\mathbb{Z}_p$ δρα ελεύθερα επί της S^3 . Άρα $\pi_1(S^3/\mathbb{Z}_p)/\pi_1(S^3) = \mathbb{Z}_p$. Όμως αφού $\pi_1(S^3) = 1$ τότε έχουμε πως $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}_p$. $\square$

Παρατηρούμε πως αν $p \neq p'$ τότε οι $L(p, q)$ και $L(p', q)$ δεν είναι ποτέ ομοιομορφικοί, για οποιοδήποτε q . Όμως για σταθερό p και $q' \equiv \pm q \pmod{p}$ τότε εύκολα προκύπτει πως $L(p, q) \cong L(p, q')$.

Θα δείξουμε πως το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Επιστρέφοντας στο Heegaard splitting του $L(p, q)$, αν $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, θα χωρίσουμε την S^3 σε p το πλήθος n -κελιά, όπου $n = 0, 1, 2, 3$. Υπενθυμίζουμε πως ένα n -κελί είναι ένας χώρος ομοιομορφικός

με έναν n -δίσκο. Άρα έχουμε για $k = 0, \dots, p-1$ τα:

$$0\text{-κελιά } e_k^0 = \{(0, e^{\frac{2\pi i k}{p}})\}$$

$$1\text{-κελιά } e_k^1 = \{(0, e^{2\pi i \phi}) : \frac{k}{p} \leq \phi \leq \frac{k+1}{p}\}$$

$$2\text{-κελιά } e_k^2 = \{(re^{\frac{2\pi i k}{p}}, w) : 0 \leq r \leq 1, |w|^2 = 1 - r^2\}$$

$$3\text{-κελιά } e_k^3 = \{(re^{2\pi i \phi}, w) : 0 \leq r \leq 1, |w|^2 = 1 - r^2, \frac{k}{p} \leq \phi \leq \frac{k+1}{p}\}$$

Για να δούμε ότι τα e_k^3 είναι πράγματι κλειστές μπάλες ορίζουμε απεικόνιση $f : e_k^3 \rightarrow D^3$ με τύπο:

$$f(re^{2\pi i \phi}, w) = (Re(w), Im(w), r(2k+1-2p\phi))$$

Πράγματι $Re(w)^2 + Im(w)^2 + r^2(2k+1-2p\phi)^2 = |w|^2 + r^2(2k+1-2p\phi)^2 \leq 1$ αφού $\frac{k}{p} \leq \phi \leq \frac{k+1}{p}$. Εύκολα μπορούμε να βρούμε αντίστροφη απεικόνιση λύνοντας ως προς r, w, ϕ . Για $(x_1, x_2, x_3) \in D^3$ ορίζω:

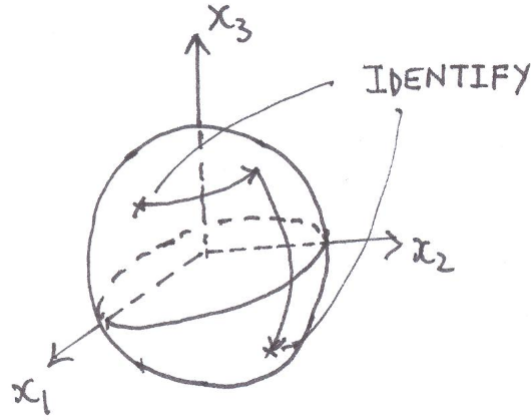
$$g(x) = \begin{cases} (0, x_1 + ix_2) & \text{αν } |x_1 + ix_2| = 1, \\ (\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} e^{2\pi i \frac{1}{2p}(2k+1-\frac{x_3}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}})}, x_1 + ix_2) & \text{αν } |x_1 + ix_2| < 1 \end{cases}$$

Έχουμε ότι $f \circ g = id$ και $g \circ f = id$, g συνεχής, D^3 συμπαγής και e_k^3 Hausdorff, άρα έχουμε ομοιομορφισμό.

Παρατηρούμε πως για $(x_1, x_2, x_3) \in \partial D^3$ με $x_3 > 0$ έχουμε ότι $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \iff r^2(2k+1-2p\phi)^2 = r^2 \iff |2k+1-2p\phi| = 1 \iff \phi = \frac{k}{p}$ ή $\phi = \frac{k+1}{p}$. Άρα $x_3 > 0$ αν και μόνο αν $\phi = \frac{k}{p}$ και $x_3 < 0$ αν και μόνο αν $\phi = \frac{k+1}{p}$. Αν $x_3 = 0$ τότε $r = 0$.

Κάθε 3-κελί περιέχει τα αντίστοιχα κελιά μικρότερης διάστασης, άρα για να πάρουμε τον $L(p, q)$ αρκεί να πάρουμε ένα 3-κελί και να ταυτίσουμε τα σημεία στο σύνορο του ως εξής: Κάθε σημείο στο σύνορο του κελιού θα στρίψει κατά $\frac{2\pi q}{p}$ και θα ταυτιστεί με το συμμετρικό του ως προς το επίπεδο $x_1 x_2$ (σχήμα 9)

Σχήμα 9. Η ταύτιση στο σύνορο ενός 3-κελιού



Πιο αναλυτικά έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.6 Στην $D^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $x \sim y \iff x = y$ ή αν το x ανήκει στο πάνω ημισφαίριο του συνόρου της D^3 , τότε το y είναι το συμμετρικό, ως προς το επίπεδο x_1, x_2 , του x στραμμένο κατά γωνία q/p στο επίπεδο x_1, x_2 και αντίστοιχα για το y . Τότε $L(p, q) \cong D^3 / \sim$.

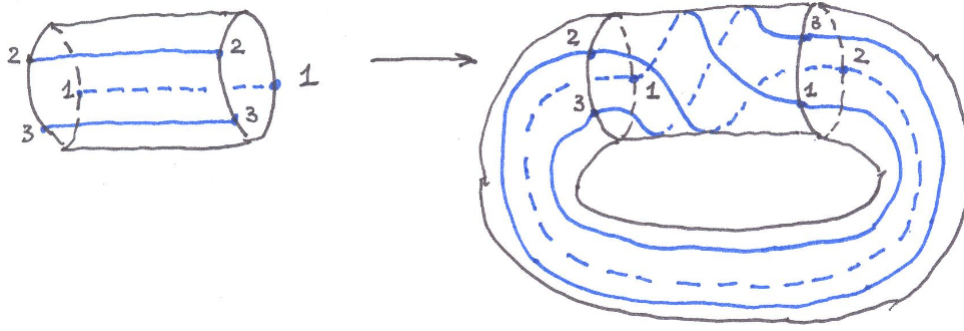
Απόδειξη. Έστω $\pi : S^3 \rightarrow L(p, q)$ και $\lambda : D^3 \rightarrow D^3 / \sim$ οι απεικονίσεις πηλίκων. Μέσω της $f : e_0^3 \rightarrow D^3$ που ορίσαμε πιο πάνω θα ορίσουμε απεικόνιση $h : S^3 \rightarrow D^3 / \sim$ ως εξής: αν $(z, w) \in e_0^3$ ορίζω $h(z, w) = \pi \circ f(z, w)$, αν $(z, w) \in e_k^3$ τότε $h(z, w) = \pi \circ f(\sigma^{p-k}(z, w))$. Η απεικόνιση h είναι σταθερή στα νήματα $\pi^{-1}(\pi(z, w))$ και επάγει τον επιθυμητό ομοιομορφισμό. $\square$

Για να βρούμε το Heegaard splitting θα πάρουμε την τομή του $L(p, q)$ με τον κύλινδρο ακτίνας $\rho \leq \frac{1}{2}$. Απομονώνοντας τον κύλινδρο παρατηρούμε ότι οι πάνω και κάτω πλευρές του χωρίζονται σε p το πλήθος κομμάτια και το i κομμάτι θα ταυτιστεί με το $(i + q) \pmod{p}$ κομμάτι. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε έναν συμπαγή τόρο T_1 ελαφρώς "στριμμένο". Κοιτώντας το μέρος του $L(p, q)$ που έμεινε μετά την αφαίρεση του κυλίνδρου, παρατηρούμε ότι έχουμε p το πλήθος τετράεδρα των οποίων τις έδρες καλούμε T, B, L, R από τις λέξεις Top, Bottom, Left και Right αντίστοιχα. Για να δούμε ότι το συμπλήρωμα του κυλίνδρου στο D^3 μετά την ταύτιση είναι συμπαγής τόρος θα ταυτίσουμε τα τετράεδρα πρώτα ως προς τις πάνω και κάτω έδρες τους. Έτσι θα ταυτιστούν τα T_i με $B_{(i+q) \pmod{p}}$ για να πάρουμε ένα κύλινδρο πάνω και κάτω πλευρές τις δεξιές και αριστερές

έδρες των τετραέδρων αντίστοιχα. Στη συνέχεια τα R_i θα ταυτιστούν με τα $L_{(i+1) \pmod p}$ για να πάρουμε τον δεύτερο τόρο T_2 .

Για να βρούμε το διάγραμμα του $L(p, q)$ θα πάρουμε έναν μεσημβρινό στον T_2 και παρατηρούμε ότι ο μεσημβρινός αυτός θα αντιστοιχεί σε ευθύγραμμα τμήματα που θα τρέχουν τον κύλινδρο στην περιφέρεια του, ένα σε κάθε κομμάτι του κυλίνδρου (ο κύλινδρος λόγω της ταύτισης είχε χωριστεί σε p κομμάτια) και θα ταυτίζονται $(i + q) \pmod p$. Έτσι παρατηρούμε ότι ο μεσημβρινός του T_2 θα κολλήσει σε μια καμπύλη στο σύνορο του T_1 που τρέχει p φορές γύρω από έναν παράλληλο και q φορές γύρω από έναν μεσημβρινό του T_2 . (βλ. σχήμα 10)

Σχήμα 10. Διάγραμμα Heegaard για τον $L(3, 2)$



Εφαρμογή Heegaard splitting για τον πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{RP}^3$.

Ένας τρόπος για να δούμε τον $\mathbb{RP}^3$ είναι ως την $S^3/x \sim -x$. Δηλαδή ως την S^3 ταυτίζοντας αντιποδικά σημεία. Μια προσεκτικότερη παρατήρηση όμως μας δείχνει ότι το $(z, w) \in S^3$ θα ταυτιστεί με το $(ze^{\frac{2\pi i}{2}}, we^{\frac{2\pi i}{2}}) = (-z, -w)$. Με άλλα λόγια ο $\mathbb{RP}^3$ δεν είναι τίποτα άλλο από τον φακοειδή χώρο $L(2, 1)$. Άρα από τα προηγούμενα ο $\mathbb{RP}^3$ μπορεί να γραφτεί ως το Heegaard splitting δυο συμπαγών τόρων όπου ταυτίζουμε τον μεσημβρινό του ενός με μια καμπύλη που τρέχει δυο φορές έναν παράλληλο και μια φορά έναν μεσημβρινό.

Παρατήρηση Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.4 ο $\mathbb{RP}^3$ είναι προσανατολίσιμος, σε αντίθεση με το $\mathbb{RP}^2$. Άρα $H_3(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}$.

Πρόταση 1.3.7 Αν $qq' \equiv \pm 1 \pmod p$ τότε $L(p, q) \cong L(p, q')$.

Απόδειξη. Είδαμε πως μπορούμε να δούμε τον $L(p, q)$ ως μια κλειστή τρισδιάστατη μπάλα χωρισμένη σε p κομμάτια και ταυτίζοντας σημεία του συνόρου στο άνω ημισφαίριο με σημείο του κάτω ημισφαιρίου κάνοντας μια στροφή κατά q και ανάκλαση ως προς το επίπεδο xy . Κάνοντας πάλι την ίδια διαμέριση θα έχουμε τετράεδρα $X_1, \dots, X_p$ στα οποία η πάνω έδρα του i τετράεδρου ταυτίζεται με την κάτω πλευρά του $(i + q) \pmod{p}$. Έτσι έχουμε μια ακολουθία των X_i με $1, 1+q, \dots, X_2, \dots$ όπου πάντα οι μεταφορές είναι modulo p . Η νέα κατασκευή είναι ένας φακοειδής χώρος $L(p, q')$ και είναι ομοιομορφική με την προηγούμενη γιατί δεν αλλάξαμε το που συγκολλάμε, αλλά αλλάζουμε το τι συγκολλάμε πρώτα (στην αρχική κατασκευή συγκολλούνται οι αριστερές και δεξιές έδρες του τετραέδρου πρώτα και μετά οι πάνω και κάτω). Όμως τώρα τα τετράεδρα X_1, X_2 θα απέχουν από τη μια πλευρά q' βήματα (modulo p) και $q' - p$ από την άλλη. Όμως το $X_2 = X_{2+kp}$. Αυτό σημαίνει πως $1 + qq' = 2 + kp$ ή $1 + q(q' - p) = 2 + kp$. Και έτσι έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Συνοψίζοντας έχουμε πως δυο φακοειδείς χώροι $L(p, q)$ και $L(p', q')$ είναι ομοιομορφικοί αν $p = p'$ και $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \pmod{p}$. Ισχύει και το αντίστροφο αλλά δεν θα το δούμε εδώ.

2 Ομοιομορφισμοί επιφανειών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως κάθε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα μπορεί να γραφτεί ως συγκόλληση δυο σωμάτων με χερούλια H_1, H_2 στο σύνορο τους με έναν ομοιομορφισμό $f : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$. Μάλιστα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε τον ομοιομορφισμό f να διατηρεί τους προσανατολισμούς. Πράγματι, αν ο ομοιομορφισμός g πάει το σώμα με χερούλια στο συμμετρικό του ως προς το κέντρο συμμετρίας τότε ο g αντιστρέφει τους προσανατολισμούς. Αν ο f αντιστρέφει κι αυτός τους προσανατολισμούς τότε παίρνοντας την σύνθεση $g \circ f$ η συγκόλληση δεν θα επηρεαστεί. Όμως $g \circ f$ διατηρεί τους προσανατολισμούς.

Από το θεώρημα ταξινόμησης επιφανειών, κάθε προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι συνεκτικό άθροισμα τόρων T^2 . Κάθε κλειστή απλή καμπύλη c στην επιφάνεια έχει κυλινδρική περιοχή $A = S^1 \times [0, 1]$ όπου $c = S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$. Κόβοντας την επιφάνεια κατά μήκος της c , στρίβοντας τον κύλινδρο στη μια άκρη κατά 2π τα σημεία στο σύνορο του κυλίνδρου επιστρέφουν στην αρχική τους θέση. Άρα όταν ξανακολλήσουμε τον A πίσω θα πάρουμε μια επιφάνεια ομοιομορφική με

την αρχική . Ο συγκεκριμένος ομοιομορφισμός καλείται *στροφή Dehn ως προς την c* και δίνεται από τον τύπο (ως προς ισοτοπία)

$$\tau_c(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \notin A, \\ (ze^{i2\pi t}, t) & \text{αν } x = (z, t) \in A, z \in S^1 \end{cases}$$

Παρατήρηση Μια στροφή Dehn κατά μήκος ενός μεσημβρινού του τόρου δεν είναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. Πράγματι, γνωρίζουμε πως η θεμελιώδης ομάδα του τόρου είναι η $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ας πάρουμε έναν παράλληλο του τόρου που στη θεμελιώδη ομάδα αντιπροσωπεύεται από το στοιχείο $(0, 1)$. Μια στροφή κατά μήκος ενός μεσημβρινού θα την πάει σε μια καμπύλη που πάει μια φορά γύρω από τον μεσημβρινό και μια φορά γύρω από τον παράλληλο. Δηλαδή σε μια καμπύλη τύπου $(1, 1)$. Αν η στροφή αυτή ήταν ισοτοπική με την ταυτοτική οι καμπύλες θα αντιστοιχούσαν στα ίδια στοιχεία της θεμελιώδης ομάδας.

Θεώρημα 2.1.1 (Dehn-Lickorish) Κάθε ομοιομορφισμός μιας προσανατολισίμης επιφάνειας στον εαυτό της που διατηρεί τους προσανατολισμούς είναι ισοτοπικός με σύνθεση στροφών Dehn και ομοιομορφισμών ισοτοπικών με την ταυτοτική.

Το θεώρημα 2.1.1 είναι ένα από τα πιο κεντρικά θεωρήματα της παρουσίασης και για την απόδειξη του θα χρειαστούμε αποτελέσματα Θεωρίας Κόμβων και Πλεξίδων.

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Πλεξίδων

Θεώρημα 2.1.2 (Alexander) Κάθε ομοιομορφισμός $f : D^n \rightarrow D^n$ ώστε $f(x) = x$ για κάθε $x \in \partial D^n$, είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη. Θέτοντας $F : D^n \times [0, 1] \rightarrow D^n$

$$F(x, t) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 \leq t < |x| \\ 0 & \text{αν } 0 = t = |x| \\ tf(\frac{x}{t}) & \text{αν } 0 \leq |x| < t \\ f(x) & \text{αν } t = |x| = 1 \end{cases}$$

έχουμε την απαιτούμενη ισοτοπία. $\square$

Ορισμός 2.1.3 Συμβολίζουμε με H_n την ομάδα κλάσεων ισοτοπίας αυτο-ομοιομορφισμών του δίσκου D^2 με n τρύπες που είναι ταυτοτικές στο σύνορο, με πράξη τη σύνθεση.

Το θεώρημα 2.1.2 μας λέει πως η H_0 είναι τετριμμένη.

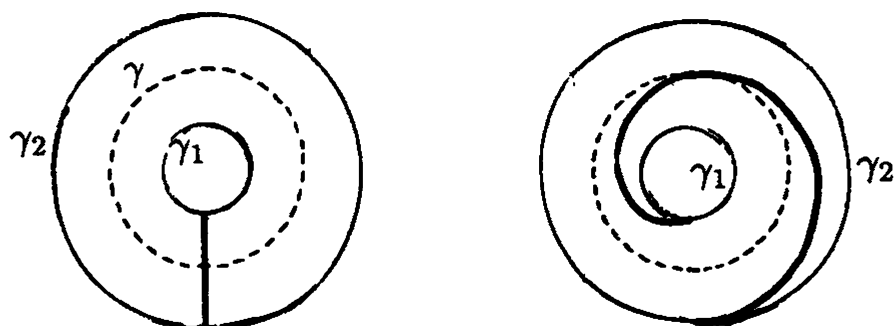
Έστω τώρα ο δίσκος με n τρύπες και ένας αυτο-ομοιομορφισμός f , ταυτοτικός στο σύνορο. Επεκτείνοντας την f ταυτοτικά στις τρύπες παίρνουμε έναν ομοιομορφισμό του δίσκου ο οποίος είναι ταυτοτικός στο σύνορο. Από το θεώρημα 2.1.2, υπάρχει μια οικογένεια ομοιομορφισμών του δίσκου f_t που συνδέει την f με την ταυτοτική. Παίρνοντας $x_1, \dots, x_n$ τα κέντρα των τρυπών, το σύνολο σημείων

$$\{(f_t(x_i), t) : t \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$$

θα μας δώσει μια αμιγή πλεξίδα μέσα στον κύλινδρο $D^2 \times [0, 1]$. Αν επιπλέον συμπεριλάβουμε και τα σημεία πάνω στο σύνορο των τρυπών, θα πάρουμε κυλινδρικές επιφάνειες που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Διαλέγοντας y_i , $i = 1, \dots, n$ σημεία στο σύνορο των τρυπών τότε οι κυλινδρικές επιφάνειες μαζί με τα τόξα $(f_t(y_i), t)$ λέμε ότι μας δίνουν μια *πεπαχυμένη πλεξίδα*. Οι πεπαχυμένες πλεξίδες είναι ομάδα με πράξη παρόμοια με την πρόσθεση απλών πλεξίδων.

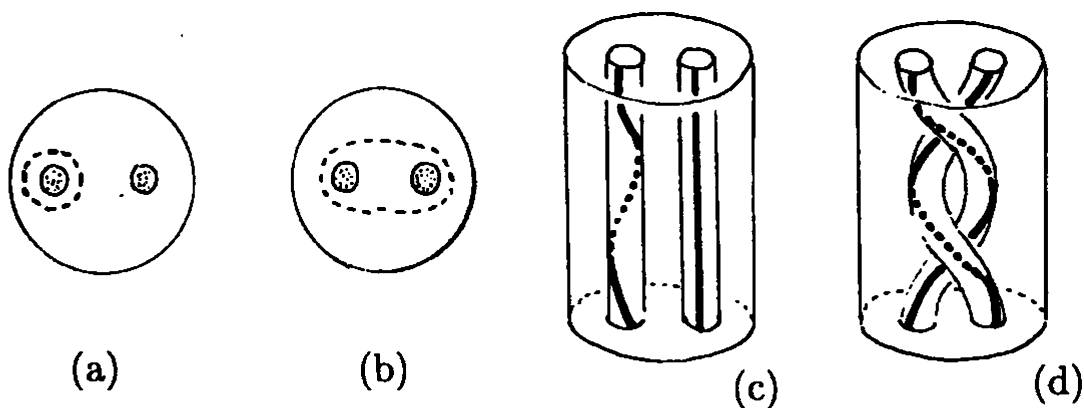
Ας υποθέσουμε τώρα πως γ είναι μια κλειστή απλή καμπύλη στο εσωτερικό του δίσκου με τρύπες και C μια κλειστή ϵ -περιοχή αυτής. Αν γ_1 και γ_2 οι συνοριακές συνιστώσες της C , στρίβοντας την γ_2 κατά 360 μοίρες και διατηρώντας την γ_1 σταθερή πέρνουμε έναν ομοιομορφισμό του δίσκου με τρύπες ο οποίος διατηρεί τα σύνορα. Καλούμε αυτόν τον ομοιομορφισμό *στροφή γύρω από την γ* (σχήμα 11). Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση θα πάρουμε μια πεπαχυμένη πλεξίδα.

Σχήμα 11. Στροφή γύρω από την γ



Παρατηρούμε πως στροφές γύρω από τις διακεκομμένες καμπύλες (a) και (b) που κυκλώνουν τρύπες μας δίνουν τις εξής πυκνές πλεξίδες (c) και (d) αντίστοιχα (σχήμα 12).

Σχήμα 12.



Είδαμε πως μπορούμε να πάρουμε μια πυκνή πλεξίδα από έναν ομοιομορφισμό. Ας δούμε τώρα το αντίστροφο.

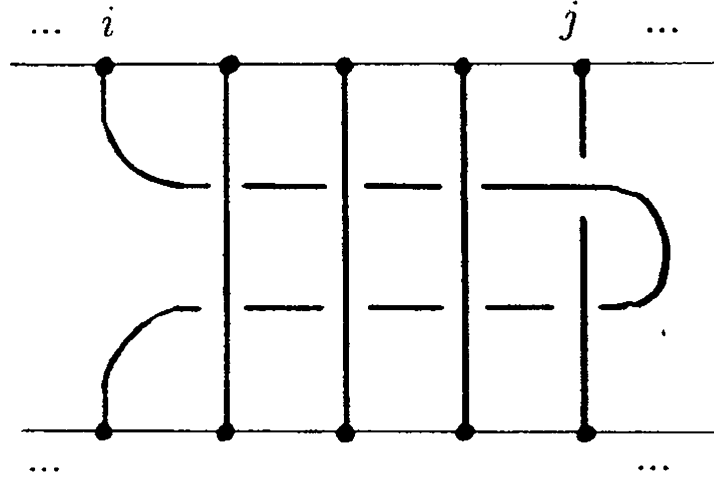
Έστω ότι έχουμε μια πεπαχυμένη πλεξίδα. Θυμίζουμε ότι μια πεπαχυμένη πλεξίδα έχει τόξα που ξεκινάνε και τελειώνουν στο ίδιο σημείο αλλά σε διαφορετικό χρόνο, στα κυλινδρικά νήματα που την χαρακτηρίζουν. Ας υποθέσουμε ότι η πάνω επιφάνεια του κυλίνδρου που περιέχει την πλεξίδα είναι φτιαγμένη από ελαστικό. Αρχίζοντας να κατεβάζουμε το πάνω επίπεδο του κυλίνδρου επιτρέπουμε στα κυλινδρικά νήματα να περιστρέφονται σύμφωνα με

το χαρακτηριστικό τους τόξο. Τα γειτονικά σημεία ακολουθούν την κίνηση των τόξων. Όταν φτάσουμε στο κατώτατο επίπεδο η κίνηση αυτή θα μας δώσει τον επιθυμητό ομοιομορφισμό.

Παρατηρούμε ότι κάθε πεπαχυμένη πλεξίδα μπορεί να περιγραφεί από μια αμιγής πλεξίδα συν μια n -αδα ακεραίων η οποία περιγράφει το πόσες στροφές κάνει κάθε τόξο πάνω στο κυλινδρικό νήμα. Με άλλα λόγια η ομάδα των πεπαχυμένων πλεξίδων είναι η $K_n \oplus \mathbb{Z}^n$, όπου K_n η ομάδα των αμιγών πλεξίδων σε n νήματα. Με άλλα λόγια αποδείξαμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.4 $H_n = K_n \oplus \mathbb{Z}^n$, όπου H_n η ομάδα των κλάσεων ισοτοπίας ομοιομορφισμών του D^2 με n -τρύπες.

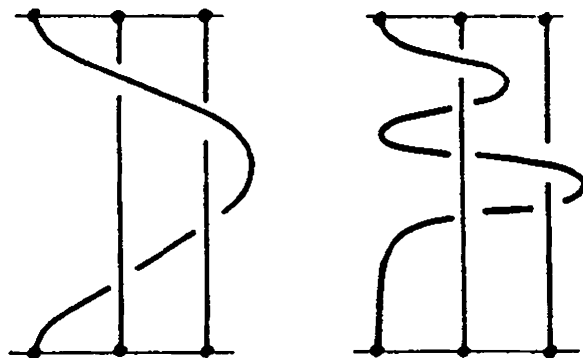
Θεώρημα 2.1.5 Η ομάδα των αμιγών πλεξίδων με n -νήματα K_n έχει πεπερασμένο αριθμό γεννητόρων, τις πλεξίδες b_{ij} :



Απόδειξη: Με επαγωγή στο n . Για $n = 2$ το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να ισιώσουμε το δεύτερο νήμα και έχουμε ότι κάθε πλεξίδα είναι της μορφής b_{12}^k , $k \in \mathbb{Z}$. Για $n + 1$, έστω μια αμιγής πλεξίδα $d_{n+1} \in K_{n+1}$. Σβήνοντας το πρώτο νήμα πέρνουμε μια αμιγή πλεξίδα $a_n \in K_n$. Δημιουργούμε τώρα την νέα πλεξίδα $c_{n+1} = d'_{n+1}d_{n+1}$, όπου d'_{n+1} είναι η πλεξίδα που προκύπτει από την a_n^{-1} προσθέτοντας της ένα νήμα στην αρχή που δεν μπλέκεται με τα άλλα. Τότε υπάρχει μια ισοτοπία που ισιώνει τα n τελευταία νήματα της c_{n+1} και το πρώτο νήμα τυλίγεται γύρω από τα άλλα. Τραβώντας το πρώτο νήμα κατάλληλα μπορούμε να το φέρουμε ώστε η c_{n+1} να παράγεται από τα b_{1j}^k ,

$j = 2, \dots, n + 1$ (σχήμα 13). Επίσης μπορούμε να δούμε την d'_{n+1} μέσα στο K_n αφού το πρώτο νήμα δεν επιρρεάζει την πλεξίδα και άρα από επαγωγική υπόθεση η d'_{n+1} παράγεται από τα b_{ij} για $i, j > 2$. Άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

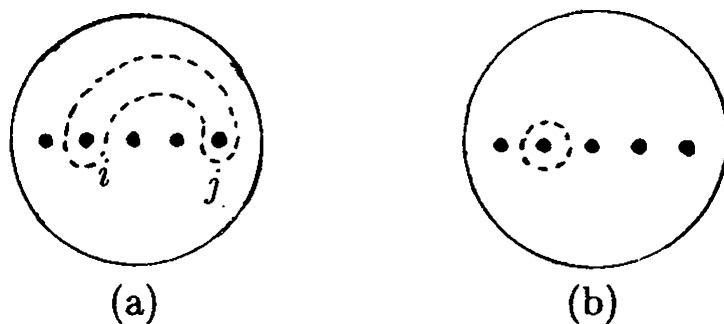
Σχήμα 13



Θεώρημα 2.1.6 Η H_n παράγεται από πεπερασμένο αριθμό στροφών γύρω από απλές κλειστές καμπύλες στο εσωτερικό του δίσκου με n τρύπες.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 2.1.4 είδαμε πως ένας ομοιομορφισμός (ως προς ισοτοπία) μπορεί να γραφεί ως $a_n + (k_1, \dots, k_n)$ όπου $a_n \in K_n$ και $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Η a_n όμως παράγεται από τα b_{ij} σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.5. Παρατηρούμε επίσης ότι τα b_{ij} αντιστοιχούν σε στροφές γύρω από καμπύλες όπως στο σχήμα 14a, συν κάποια n -αδα ακεραίων πιθανώς διαφορετική από αυτήν που θα θέλαμε. Όμως για να πάρουμε την επιθυμητή n -αδα αρκεί να κάνουμε στροφές γύρω από καμπύλες όπως στην εικόνα 14b. $\square$

Σχήμα 14



2.2 Το θεώρημα Dehn-Lickorish

Είναι πιο βολικό να αποδείξουμε το θεώρημα 2.1.1 σε μια πιο γενική μορφή που περιλαμβάνει επιφάνειες με σύνορο. Γνωρίζουμε από το θεώρημα ταξινόμησης επιφανειών, πως κάθε προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι συνεκτικό άθροισμα τόρων με τρύπες. Οι τρύπες ονομάζονται συνοριακές συνιστώσες της επιφάνειας με σύνορο. Να τονίσουμε επίσης πως ένας ομοιομορφισμός από μια προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο στον εαυτό της, ο οποίος είναι η ταυτοτική σε μια συνοριακή συνιστώσα, αναγκαστικά διατηρεί τον προσανατολισμό. Πράγματι ας υποθέσουμε πως f είναι ο ομοιομορφισμός μας. Εφόσον οι συνοριακές συνιστώσες είναι η S^1 από το λήμμα 1.2.3 μπορούμε να επεκτείνουμε τον f σε έναν ομοιομορφισμό της επιφάνειας (χωρίς σύνορο τώρα αφού βουλώσαμε τις τρύπες). Μάλιστα ο $\hat{f}$ έχει επεκταθεί ταυτοτικά στο εσωτερικό της συνιστώσας που ο f είναι ο ταυτοτικός. Γνωρίζουμε τώρα πως αφού η επιφάνεια είναι προσανατολισίμη, η δεύτερη ομάδα ομολογίας της θα είναι το $\mathbb{Z}$. Κάθε ομοιομορφισμός επάγει ισομορφισμό στις ομάδες ομολογίας και αφού υπάρχουν μόνο δυο αυτομορφισμοί του $\mathbb{Z}$, τότε ο $\hat{f}$ θα διατηρεί ή θα αντιστρέφει προσανατολισμούς. Όμως ο $\hat{f}$ είναι ταυτοτικός σε περιοχή της επιφάνειας άρα δεν μπορεί να αντιστρέφει προσανατολισμούς, άρα το ίδιο και ο f . Ας διατυπώσουμε τώρα τη νέα μορφή του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.2.1 Έστω F μια συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο. Τότε κάθε ομοιομορφισμός $h : F \rightarrow F$, ταυτοτικός στο ∂F , είναι ισοτοπικός με σύνθεση στροφών Dehn (στην περίπτωση που η επιφάνεια δεν έχει σύνορο, συμπληρώνουμε τις υποθέσεις με το ο h να διατηρεί τους προσανατολισμούς).

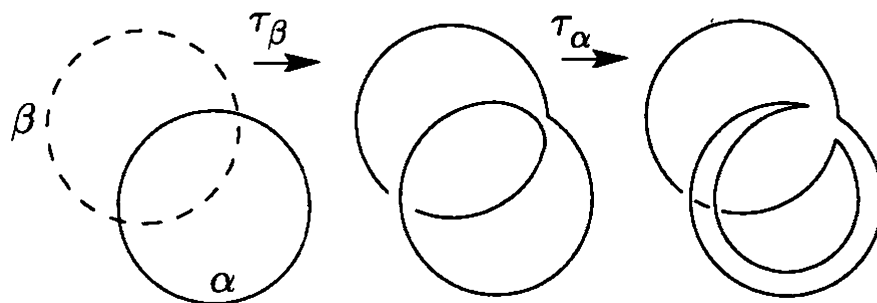
Για ευκολία θα καλούμε έναν ομοιομορφισμό που είναι σύνθεση Dehn στροφών και ομοιομορφισμών ισοτοπικών με την ταυτοτική ως τ -ομοιομορφισμό. Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.2.2 Αν α και β είναι απλές κλειστές καμπύλες στην επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο) F , ώστε καμία να μην χωρίζει την F σε δυο συνεκτικές συνιστώσες, τότε υπάρχει ένας τ -ομοιομορφισμός της F που πηγαίνει την α στην β .

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1η περίπτωση. Ας υποθέσουμε πως οι α και β τέμνονται εγκάρσια σε ένα μόνο σημείο. Τότε κάνοντας διαδοχικά μια τ_β στροφή κατά την β και στη συνέχεια μια τ_α στροφή κατά καμπύλη α , καταλλήλουμε σε μια καμπύλη όπως στην τρίτη εικόνα του σχήματος 15. Όμως τώρα μπορούμε να μαζέψουμε την $\tau_\alpha \circ \tau_\beta(\alpha)$ με έναν ομοιομορφισμό ισοτοπικό με την ταυτοτική στην β . Αυτό γίνεται γιατί η β δεν διαχωρίζει την πολλαπλότητα F .

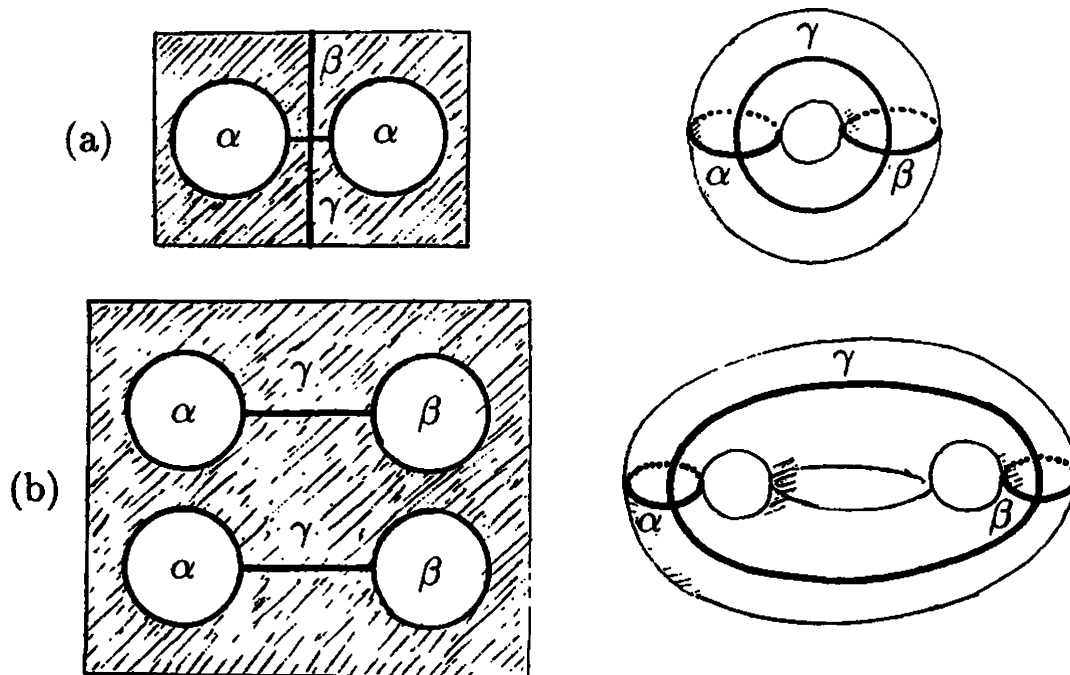
Σχήμα 15



2η περίπτωση. Οι α και β δεν τέμνονται. Ας υποθέσουμε πως αν κόψουμε την F κατά μήκος της α και στη συνέχεια κόβοντας την F κατά μήκος της β η επιφάνεια διαχωρίζεται τότε η καμπύλη γ (σχήμα 16a) τέμνει τις α και β εγκάρσια σε ένα μόνο σημείο και άρα από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε το ζητούμενο.

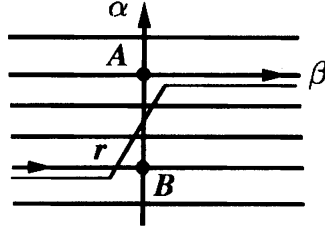
Αν τώρα κόψουμε την F κατά μήκος της α και στη συνέχεια κόβοντας την F κατά μήκος της β η επιφάνεια δεν διαχωρίζεται τότε για καμπύλη γ όπως στο σχήμα 16b πάλι έχουμε το ζητούμενο από την 1η περίπτωση.

Σχήμα 16



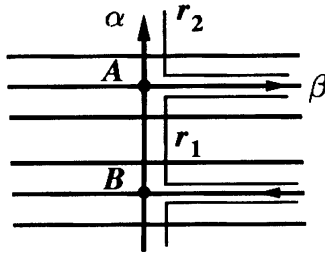
3η περίπτωση. Οι α και β τέμνονται πάνω από μια φορά. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, γιατί αλλιώς μπορούμε να μετακινήσουμε μια από τις καμπύλες λίγο με έναν ομοιομορφισμό ισοτοπικό με την ταυτοτική, μπορούμε να υποθέσουμε πως οι α και β τέμνονται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων. Θα δουλέψουμε με επαγωγή στο πλήθος τομών των καμπυλών. Έστω λοιπόν πως έχουμε $n > 1$ σημεία τομής. Διαλέγουμε δυο διαδοχικά σημεία τομής A και B κατά μήκος της β . Ας υποθέσουμε πως η β συναντάει την α στα A, B με την ίδια φορά. Τότε η καμπύλη r όπως φαίνεται στο σχήμα 17, συναντάει την α σε ένα σημείο και την β σε λιγότερα από n σημεία. Επίσης η r δεν διαχωρίζει την επιφάνεια γιατί αλλιώς για να πάμε από τη μια συνιστώσα στην άλλη αναγκαστικά θα περνάγαμε από την α ή την β . Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί γιατί οι α και β δεν διαχωρίζουν την επιφάνεια.

Σχήμα 17



Έστω τώρα πως η β διέρχεται από τα A και B με αντίθετες φορές. Τότε παίρνοντας καμπύλες r_1 και r_2 όπως στο σχήμα 18 παρατηρούμε ότι οι r_1 και r_2 τέμνουν τις α και β λιγότερο από $n - 2$ φορές. Πράγματι η r_2 τέμνει την β σε $n - 4$ σημεία και την α πουθενά, ενώ η r_1 τέμνει την β σε $n - 2$ σημεία και την α πουθενά. Επίσης τουλάχιστον μια από τις r_1 και r_2 δεν διαχωρίζουν την F . Πράγματι αν κόψουμε κατα μήκος της r_2 και στη συνέχεια κατα μήκος της r_1 και διαχωρίζεται η F τότε κόβοντας κατά μήκος της α η F διαχωρίζεται, άτοπο. $\square$

Σχήμα 18



Πόρισμα 2.2.3 Αν $p_1, \dots, p_n$ απλές κλειστές καμπύλες στην επιφάνεια F (πιθανώς με σύνορο) που δεν τέμνονται ανά δυο και η ένωση τους δεν διαχωρίζει την F . Αν $q_1, \dots, q_n$ καμπύλες με τις ίδιες ιδιότητες, τότε υπάρχει ένας τ -ομοιομορφισμός h της F ώστε $h(p_i) = q_i$, για $i = 1, 2, \dots, n$.

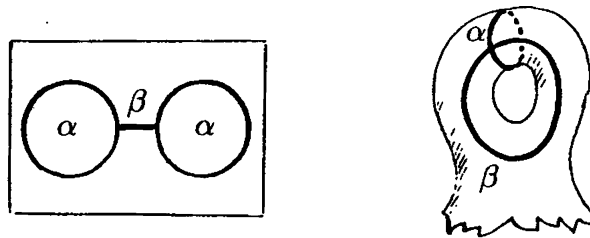
Απόδειξη. Εφόσον οι p_1 και q_1 δεν διαχωρίζουν την F από τα προηγούμενα, υπάρχει ένας τ -ομοιομορφισμός h_1 ώστε $h_1(p_1) = q_1$. Κόβοντας τις επιφάνειες F και $h_1(F)$ κατά μήκος των p_1 και q_1 αντίστοιχα δημιουργούμε σύνοριακές συνιστώσες. Τώρα η $p'_2 = h_1(p_2)$ πάλι δεν διαχωρίζει την επιφάνεια (την κομμένη). Άρα υπάρχει ένας τ -ομοιομορφισμός h_2 ώστε $h_2(p'_2) = q_2$. Όμως ο h_2 δεν πειράζει τα σύνορα αφού οι στροφές πραγματοποιούνται σε ϵ -περιοχές καμπυλών, άρα αν ξανακολλήσουμε την επιφάνεια εκεί που κόψαμε θα έχουμε

ότι ο $h = h_2 \circ h_1$ πάει την p_1 στην q_1 και την p_2 στην q_2 . Κόβοντας κατά μήκος των $p_1 \cup p_2$ και $q_1 \cup q_2$ έχουμε το αποτέλεσμα για το p_3 . Επαγωγικά έχουμε το αποτέλεσμα για n . $\square$

Απόδειξη του θεωρήματος 2.2.1. Ας υποθέσουμε ότι η επιφάνεια μας με σύνορο είναι συνεκτικό άθροισμα g τόρων με n τρύπες. Παίρνουμε μεσημβρινούς $m_1, \dots, m_g$. Παρατηρούμε πως αν κόψουμε την επιφάνεια κατά μήκος των $m_1, \dots, m_g$, τότε παίρνουμε έναν δίσκο με $n + 2g - 1$ τρύπες. Διαλέγουμε πρώτα την m_1 χωρίς να διαλέξουμε τους άλλους μεσημβρινούς. Εφόσον η m_1 δεν διαχωρίζει την επιφάνεια τότε το ίδιο θα κάνει και η $h(m_1)$. Από το λήμμα 2.2.2 όμως υπάρχει ένας τ -ομοιομορφισμός τ_1 ώστε που μας πηγαίνει την $h(m_1)$ στην m_1 και δεν επηρεάζει τις υπόλοιπες συνοριακές συνιστώσες. Όμως η $\tau_1 \circ h(m_1)$ μπορεί να έχει αντίστροφο προσανατολισμό από την m_1 . Ας υποθέσουμε για αρχή πως αυτό δεν ισχύει. Τότε στρίβοντας εν ανάγκη κατάλληλα μπορούμε να υποθέσουμε πως η $\tau_1 \circ h$ μετακινεί την m_1 ταυτοτικά. Επειδή ο $\tau_1 \circ h$ διατηρεί τους προσανατολισμούς και είναι ταυτοτικός στην m_1 τότε τα σημεία αριστερά και δεξιά σε μια περιοχή της m_1 θα παραμείνουν αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Επομένως κόβοντας κατά μήκος της m_1 και μετακινώντας ισοτοπικά προς την ταυτοτική αν χρειαστεί ο $\tau_1 \circ h$ είναι ταυτοτικός και στις νέες συνοριακές συνιστώσες που δημιουργήθηκαν. Διαλέγοντας τώρα m_2 και κάνοντας την ίδια διαδικασία, επαγωγικά έχουμε έναν $\tau_g \circ \dots \circ \tau_1 \circ h$ ομοιομορφισμό του δίσκου με $n + 2g - 1$ που είναι ταυτοτικός στο σύνορο. Από το θεώρημα 2.1.6 $\tau_g \circ \dots \circ \tau_1 \circ h$ είναι σύνθεση στροφών και άρα το ίδιο και ο h .

Μένει να δούμε τι γίνεται αν η $\alpha = \tau_1 \circ h(m_1)$ έχει αντίστροφο προσανατολισμό. Εφόσον η α δεν διαχωρίζει την F , υπάρχει καμπύλη β που τέμνει την α εγκάρσια σε ένα μόνο σημείο (σχήμα 19). Τότε κατάλληλες στροφές κατά τις καμπύλες α και β μπορούμε να πάμε την α στην α με αντίστροφο προσανατολισμό. Τότε επιστρέψαμε στην αρχική περίπτωση και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Σχήμα 19



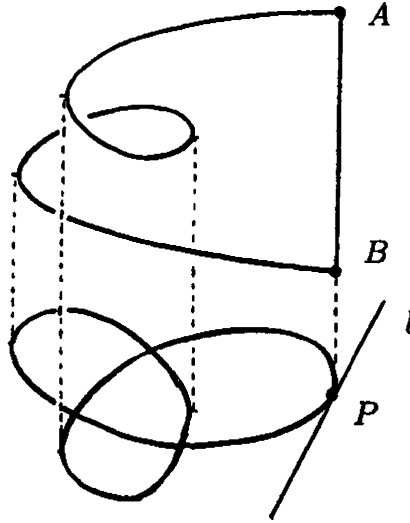
Παρατήρηση Ο τ -ομοιομορφισμός μας πήγε την α στην α με αντίστροφο προσανατολισμό, όμως τ -ομοιομορφισμός διατηρεί τους προσανατολισμούς. Πράγματι ο τ -ομοιομορφισμός είναι σύνθεση στροφών οι οποίες πραγματοποιούνται μακριά από το σύνορο και είδαμε πως τέτοιοι ομοιομορφισμοί διατηρούν προσανατολισμούς. Αυτό δεν είναι αντίφαση γιατί ο προσανατολισμός της F καθορίζεται ταυτόχρονα από την α και την β . Μια προσεκτική ματιά στις στροφές θα μας δείξει ότι αντιστρέφεται και ο προσανατολισμός της β μαζί με την α .

Θα κλείσουμε την συγκεκριμένη ενότητα με ένα αποτέλεσμα της Θεωρίας Κόμβων, συγκεκριμένα ότι κάθε κόμβος λύνεται μετά από κατάλληλο αριθμό αλλαγών στις διασταυρώσεις.

Θεώρημα 2.2.4 Κάθε κρίκος L με m συνιστώσες μπορεί να λυθεί με κατάλληλο αριθμό αλλαγών στις διασταυρώσεις.

Απόδειξη. Υποθέτουμε για αρχή πως το L είναι κόμβος, δηλαδή $m = 1$. Παίρνοντας ένα διάγραμμα του L και προβάλλοντας στο επίπεδο πέρνουμε την σκιά του L . Έστω τώρα ευθεία l πάνω στο επίπεδο που βρίσκεται η σκιά και η οποία εφάπτεται σε ένα σημείο της σκιάς χωρίς να τέμνει τον κόμβο σε κανένα άλλο σημείο. Στο σημείο που εφάπτεται η l φέρνουμε κάθετη ημιευθεία προς το επίπεδο και διαλέγουμε σημεία A και B σε διαφορετικά ύψη της κάθετης ημιευθείας, έστω A το ανώτερο σημείο. Ξεκινώντας από το A ακολουθούμε την σκιά του κόμβου με τη διαφορά ότι διαρκώς κατεβαίνουμε προς το B σχήμα 20. Όταν φτάσουμε στο B η καμπύλη που σκιαγραφίσαμε μαζί με το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι ο τετριμμένος κόμβος. Όμως αυτή η διαδικασία είναι ακριβώς η κατάλληλη αλλαγή των διασταυρώσεων αφού οι διασταυρώσεις που είναι κάτω από την καμπύλη που διαγράφουμε παραμένουν από κάτω, ενώ όσες είναι από πάνω αλλάζουν. Για την περίπτωση που $m > 1$ η ίδια διαδικασία μας δίνει το αποτέλεσμα με την προσοχή ότι τα διαστήματα $A_i B_i$ να βρίσκονται σε διαφορετικά ύψη και να μην τέμνονται. $\square$

Σχήμα 19 Λύνοντας τον trefoil με αλλαγή στις διασταυρώσεις.



2.3 Το θεώρημα Lickorish-Wallace

Θεώρημα 2.3.1 Κάθε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα M προκύπτει αφαιρώντας συμπαγείς τόρους από την S^3 και στη συνέχεια ξανακολλώντας τους αλλά με διαφορετικούς ομοιομορφισμούς των συνόρων τους. Επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως οι συμπαγείς αυτοί τόροι δεν κάνουν κόμπους, δηλαδή είναι εμφυτευμένοι στην S^3 στην κανονική τους μορφή.

Απόδειξη. Έστω ένα Heegaard splitting της πολλαπλότητας $M = H_1 \cup_f H_2$, γένους g . Έχουμε δει πως η S^3 έχει Heegaard splitting κάθε γένους, άρα $S^3 = H_1 \cup_{f_0} H_2$, για κάποιον ομοιομορφισμό f_0 . Ο ομοιομορφισμός $f^{-1} \circ f_0$ είδαμε πως είναι ισοτοπικός με σύνθεση στροφών Dehn. Για ευκολία, καθώς η απόδειξη είναι παρόμοια, ας υποθέσουμε ότι ο $f^{-1} \circ f_0$ είναι ισοτοπικός με μια στροφή Dehn τ_γ κατά καμπύλη γ . Ζωγραφίζουμε την καμπύλη μας γ στο ∂H_2 και την σπρώχνουμε μέσα στο εσωτερικό του H_2 . Στην συνέχεια αφαιρούμε μια κυλινδρική περιοχή της γ , την οποία καλούμε T στο εσωτερικό του H_2 την οποία υποθέτουμε λυμμένη. Παρατηρούμε ότι το T είναι ένας συμπαγής τόρος. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε έναν ομοιομορφισμό του $H_2 - T$ στον εαυτό του που είναι η στροφή κατά γ στο σύνορο ως εξής: Η περιοχή του H_2 ακριβώς από πάνω από τον τόρο που αφαιρέσαμε είναι της μορφής $A \times [0, 1]$, όπου A μια περιοχή της γ στο σύνορο. Κάνοντας μια στροφή Dehn κατά γ σε κάθε επίπεδο $A \times \{t\}$

παίρνουμε τον επιθυμητό ομοιομορφισμό h όπου στο σύνορο της H_2 είναι η τ_γ . Αν δείξουμε ότι τα $S^3 - T$ και $M - T$ είναι ομοιομορφικά έχουμε τελειώσει γιατί για να περάσουμε από την S^3 στην M αρκεί να κολλήσουμε τον T με τον κατάλληλο ομοιομορφισμό.

Λήμμα 2.3.2 Έστω X, X', Y, Y' πολλαπλότητες με σύνορο και $Z = X \cup_f Y$, $f : \partial X \rightarrow \partial Y$, ομοιομορφισμός. Αν $h_1 : X \rightarrow X'$ και $h_2 : Y \rightarrow Y'$, ομοιομορφισμοί τότε για $h = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ έχουμε πως τα $X \cup_f Y$ και $X' \cup_h Y'$ είναι ομοιομορφικά.

Απόδειξη λήμματος 2.3.2. Πράγματι η απεικόνιση $r : X \cup Y \rightarrow X' \cup Y'$ με τύπο

$$r(z) = \begin{cases} h_1(z) & \text{αν } z \in X \\ h_2(z) & \text{αν } z \in Y \end{cases}$$

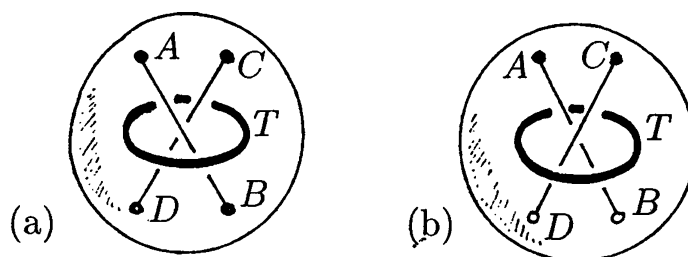
θα μας δώσει απεικόνιση $\pi_h \circ r$ σταθερή στα νήματα $\pi_f^{-1}([z]_f)$, όπου π_h, π_f οι φυσικές απεικονίσεις πηλίκων. Άρα επάγεται έτσι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός. (ο.ε.δ)

Συνεχίζοντας την απόδειξη του θεωρήματος, αν στο λήμμα έχουμε $X = X' = H_2 - T$, $Y = Y' = H_1$ και $h : H_2 - T \rightarrow H_2 - T$, $id : H_1 \rightarrow H_1$, τότε $S^3 - T = H_1 \cup_{f_0} H_2 - T \cong H_1 \cup_{f_0 \circ \tau_\gamma^{-1}} H_2 - T$. Όμως η τ_γ είναι ισοτοπική με την $f^{-1} \circ f_0$, άρα η τ_γ^{-1} είναι ισοτοπική με την $f_0^{-1} \circ f$ και από Πρόταση 1.2.7 έχουμε πως $S^3 - T = H_1 \cup_{f_0} H_2 - T \cong H_1 \cup_f H_2 - T = M - T$.

Μένει να δείξουμε ότι η υπόθεση να πάρουμε τον T ξεμπλεγμένο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Αυτό θα γίνει με την βοήθεια του παρακάτω λήμματος.

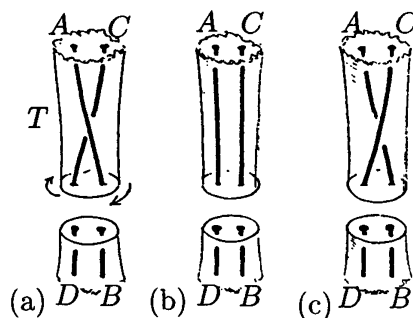
Λήμμα 2.3.3 Έστω $D^3 \subset \mathbb{R}^3$, η τρισδιάστατη κλειστή μπάλα και T ο συμπαγής τόρος όπως στο σχήμα 20a. Τότε υπάρχει ομοιομορφισμός του $\mathbb{R}^3 - T$ στον εαυτό του ώστε να πηγαίνει τις καμπύλες AB και CD στο σχήμα 20a, στις καμπύλες AB και CD του σχήματος 20b και να είναι ταυτοτικός εκτός της D^3 .

Σχήμα 20



Απόδειξη. Η διασταύρωση μας βρίσκεται μέσα στη τρύπα του τόρου. Πριν αφαιρέσουμε τον τόρο, αφαιρούμε μια συμπαγή κυλινδρική περιοχή της διασταύρωσης, που να κλείνει την τρύπα του τόρου. Αφαιρώντας τώρα τον τόρο, στρίβουμε την κυλινδρική περιοχή κατά 360 μοίρες. Αυτό θα έχει αποτέλεσμα οι άνω και κάτω δίσκοι να επιστρέψουν στην ίδια θέση αλλά η διασταύρωση να αντιστραφεί (σχήμα 21). Εφόσον έχουμε αφαιρέσει τον τόρο στον οποίο εφάπτεται το κυλινδρικό σύνορο της περιοχής μας, μπορούμε να κολλήσουμε πίσω τον συμπαγή κύλινδρο στους δίσκους και να πάρουμε έναν ομοιομορφισμό του $D^3 - T$ στον εαυτό του που είναι ταυτοτικός στο ∂D^3 . Τότε επεκτείνοντας ταυτοτικά στο $\mathbb{R}^3 - D^3$ παίρνουμε τον ζητούμενο αυτό-ομοιομορφισμό του $\mathbb{R}^3 - T$. $\square$

Σχήμα 21 Αλλάζοντας τη διασταύρωση



Το λήμμα 2.3.3 ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 καθώς ακόμα και ο τόρος μας να κάνει διασταυρώσεις, σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.3, κάθε κόμβος λύνεται με κατάλληλες αλλαγές στις διασταυρώσεις, επομένως αφαιρώντας επιπλέον τόρους μπορούμε να λύσουμε τον αρχικό μας τόρο.

Ας περιγράψουμε λίγο πιο αναλυτικά την διαδικασία χειρουργικής που ακολουθήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3.1. Ξεκινήσαμε με μια

3-πολλαπλότητα M και ένα Heegaard splitting αυτής. Στη συνέχεια αφαιρέσαμε έναν κατάλληλο τόρο από την S^3 με παράλληλο γ . Αν α ο μεσημβρινός του τόρου που αφαιρέσαμε, παραμετρικοποιημένος ως $T = S^1 \times D^2$ και β ο μεσημβρινός του τόρου που θα κολλήσουμε πίσω στην S^3 παρατηρούμε ότι στέλνουμε την β σε μια καμπύλη στο $\partial S^3 - T$ που τρέχει μια φορά γύρω από την γ και μια φορά γύρω από την α . Όμως ο $S^3 - T$ είναι κι αυτός ένας συμπαγής τόρος μάλιστα με μεσημβρινό γ . Κάνοντας μια στροφή κατά γ μπορούμε να ταυτίσουμε την καμπύλη β με έναν παράλληλο χωρίς να αλλάξουμε την πολλαπλότητα σύμφωνα με την πρόταση 1.2.5. Επομένως αυτή η χειρουργική διαδικασία μας αντιστρέφει μεσημβρινούς με παράλληλους και επομένως μπορούμε να παραμετρήσουμε τον τόρο που κολλάμε πίσω ως $D^2 \times S^1$. Γενικεύοντας αυτή τη χειρουργική διαδικασία έχουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 2.3.4 Χειρουργική σε n -πολλαπλότητες. Αν M μια πολλαπλότητα διάστασης n . Καλούμε r -χερούλι, για $r \leq n$, ένα σύνολο της μορφής $D^r \times D^{n-r}$. Παρατηρούμε πως οι πολλαπλότητες $D^{p+1} \times S^q$ και $S^p \times D^{q+1}$ όπου p, q θετικοί ακεραίοι, έχουν το ίδιο σύνορο $S^p \times S^q$. Αν αφαιρέσουμε ένα αντίτυπο του $S^r \times D^{n-r}$ από την M και στη θέση του βάλουμε ένα αντίτυπο του $D^{r+1} \times S^{n-r-1}$, καλούμε τη διαδικασία αυτή ως στοιχιώδη r -χειρουργική στην M . Μια r -Χειρουργική εν γένει είναι μια ακολουθία στοιχειωδών r -χειρουργιών.

Έστω πως έχουμε μια $p + q + 1$ -πολλαπλότητα M_1 , όπου p, q θετικοί ακέραιοι. Αφαιρώντας αντίτυπα του $D^{p+1} \times S^q$ και κολλώντας $S^p \times D^{q+1}$ στο κοινό τους σύνορο παίρνουμε μια νέα πολλαπλότητα M_2 .

Λήμμα 2.3.5 Υπάρχει $(n + 1)$ -πολλαπλότητα W με σύνορο, όπου $n = p + q + 1$, ώστε το ∂W να είναι η ξένη ένωση των M_1 και M_2 .

Απόδειξη. Παίρνω την $(n + 1)$ -πολλαπλότητα με σύνορο $W_1^{n+1} = M_1 \times [0, 1]$. Το ∂W_1^{n+1} αποτελείται από τα $M_1 \times \{0\}$ και $M_1 \times \{1\}$. Ταυτίζουμε το M_1 με το $M_1 \times \{0\}$, δηλαδή $M_1 = M_1 \times \{0\}$ και στη συνέχεια αφαιρώντας αντίτυπα του $D^{p+1} \times S^q$ και κολλώντας $S^p \times D^{q+1}$ στο κοινό τους σύνορο πάμε από το $M_1 \times \{1\} = M_1$ στο M_2 . $\square$

Η παραπάνω συζήτηση μας δίνει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.6 Κάθε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα είναι το σύνορο μιας 4-πολλαπλότητας με σύνορο.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πως η 3-πολλαπλότητα M προκύπτει από την S^3 αν αφαιρέσουμε ένα $S^1 \times D^2$ συμπαγή τόρο και κολλήσουμε έναν $D^2 \times S^1$ μέσω ενός ομοιομορφισμού f των συνόρων τους. Έστω η συμπαγής τετραδιάστατη μπάλα D^4 . Τότε αφαιρώντας από το σύνορο της τον παραπάνω $S^1 \times D^2$ και κολλώντας με την f τον $D^2 \times S^1$ παίρνουμε την 4-πολλαπλότητα $W = (D^4 - S^1 \times D^2) \cup_f (D^2 \times S^1)$ παίρνουμε μια πολλαπλότητα με σύνορο την M . Η διαδικασία για πιο πολύπλοκες χειρουργικές είναι η ίδια. $\square$

3 Ακέραια και ρητή χειρουργική

3.1 Ρητή χειρουργική σε κόμβους

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως κάθε προσανατολίσιμη συμπαγής 3-πολλαπλότητα προκύπτει από την S^3 αφαιρώντας και κολλώντας τετριμένους τόρους στους οποίους αντιστρέψαμε μεσημβρινούς με παράλληλους. Επίσης είδαμε πως η πολλαπλότητα που προκύπτει εξαρτάται μόνο από το πως γίνεται η συγκόλληση του μεσημβρινού α στην εικόνα του J , μέσω του ομοιομορφισμού συγκόλλησης. Η καμπύλη J είναι μια κλειστή καμπύλη πάνω στο σύνορο του συμπαγούς τόρου, δηλαδή στην επιφάνεια του τόρου. Γνωρίζουμε επίσης πως η θεμελιώδης ομάδα της επιφάνειας του τόρου είναι $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Άρα η καμπύλη J αντιπροσωπεύεται από το στοιχείο $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, που σημαίνει ότι η J τρέχει p φορές γύρω από τον μεσημβρινό α και q φορές γύρω από τον παράλληλο β . Θα συμβολίζουμε την $J = p\alpha + q\beta$.

Πρόταση 3.1.1 a) Αν η $J = p\alpha + q\beta$ είναι κλειστή και δεν έχει αυτοτομές τότε οι p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους ή κάποιος είναι 0 και ο άλλος ± 1 .

b) Δυο απλές κλειστές καμπύλες στην επιφάνεια του τόρου είναι ομοτοπικές αν και μόνο αν είναι ισοτοπικές.

Απόδειξη. a) Το $\mathbb{R}^2$ είναι ο καθολικός χώρος επικάλυψης του τόρου, με προβολή επικάλυψης $(t, s) \mapsto (e^{2\pi ti}, e^{2\pi si})$. Επομένως κάθε κλειστή καμπύλη στον τόρο προκύπτει από την ταύτιση των σημείων (x, y) και $(x + m, y + n)$ για m, n θετικούς ακέραιους. Θα δείξουμε πρώτα τον εξής ισχυρισμό: αν d είναι φυσικός αριθμός, τότε για κάθε καμπύλη γ στον $\mathbb{R}^2$ με αρχή και τέλος τα σημεία A, B αντίστοιχα, υπάρχουν $P, Q \in \gamma$ ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα AB και PQ να είναι παράλληλα και $|PQ| = \frac{|AB|}{d}$.

Ας δούμε πρώτα πως ο ισχυρισμός μας δίνει το αποτέλεσμα. Πράγματι, έστω πως η $J = p\alpha + q\beta$ δεν έχει αυτοτομές. Η καμπύλη μας προκύπτει ταυτίζοντας σημεία που οι συντεταγμένες τους απέχουν p και q αντίστοιχα. Αν $\text{MK}\Delta(p, q) = d > 1$ τότε από τον ισχυρισμό θα υπάρχουν σημεία P, Q πάνω στην καμπύλη που θα έχουν διαφορά συντεταγμένων $\frac{p}{d}$ και $\frac{q}{d}$ αντίστοιχα. Όμως αφού $\frac{p}{d}, \frac{q}{d} \in \mathbb{Z}$, τότε μέσω της προβολής επικάλυψης τα P και Q θα αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο στην καμπύλη, που σημαίνει ότι η J θα έχει αυτοτομές, άτοπο.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, τον επαναδιατυπώνουμε χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο ορισμό: Σε μια καμπύλη στο επίπεδο με αρχή A και τέλος B , λέμε ότι η απόσταση n πραγματοποιείται αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με το AB , με άκρα πάνω στην καμπύλη. Θέλουμε λοιπόν να αποδείξουμε ότι η απόσταση $|AB|/d$ πραγματοποιείται για κάθε τέτοια καμπύλη. Θα δείξουμε πρώτα πως για $0 < \delta < 1$, τουλάχιστον μια από τις αποστάσεις $\delta|AB|$ και $(1 - \delta)|AB|$ πραγματοποιείται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $|AB|$ βρίσκεται πάνω στον άξονα των x με άκρα τα 0 και 1, δηλαδή $|AB| = 1$. Έστω ότι υπάρχει γ_0 καμπύλη ώστε τα δ και $1 - \delta$ δεν πραγματοποιούνται. Μεταφέροντας την καμπύλη κατά $\delta, 1 - \delta$ και 1 παίρνουμε καμπύλες $\gamma_\delta, \gamma_{1-\delta}, \gamma_1$. Παρατηρούμε πως οι γ_δ και $\gamma_{1-\delta}$ δεν τέμνουν την γ_0 , λόγω της υπόθεσης ότι οι αποστάσεις δ και $1 - \delta$ δεν πραγματοποιούνται, ενώ οι γ_0, γ_1 τέμνονται στα άκρα τους. Επίσης για τον ίδιο λόγο η γ_δ δεν τέμνει την γ_1 . Θα κατασκευάσουμε καμπύλη L ως εξής: Από σημείο πάνω στην γ_δ με μέγιστη τεταγμένη y , φαίρνουμε ημιευθεία παράλληλη στον άξονα των y προς το $+\infty$. Συνεχίζουμε κατά μήκος της γ_δ μέχρι να βρούμε σημείο ελάχιστης τεταγμένης και φέρνουμε ημιευθεία, παράλληλη στον άξονα των y , προς το $-\infty$. Η συγκεκριμένη καμπύλη χωρίζει το επίπεδο σε δυο συνεκτικές συνιστώσες, ξένες μεταξύ τους. Όμως τώρα παρατηρούμε πως οι καμπύλες γ_0, γ_1 δεν τέμνουν την L και βρίσκονται σε διαφορετικές συνιστώσες. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού οι γ_0 και γ_1 τέμνονται.

Για την γενική περίπτωση θα κάνουμε επαγωγή στο d . Προφανώς για $d = 1$ ισχύει ισχυρισμός για κάθε καμπύλη. Έστω πως για κάθε καμπύλη ο ισχυρισμός για $d - 1$ ισχύει. Τότε έχουμε ότι θα πραγματοποιείται τουλάχιστον μια από τις αποστάσεις $\frac{1}{d}|AB|$ και $\frac{d-1}{d}|AB|$. Αν ισχύει η πρώτη περίπτωση, τελειώσαμε. Αν ισχύει το δεύτερο τότε, από επαγωγική υπόθεση, για την καμπύλη που ενώνει τα

άκρα με απόσταση $\frac{d-1}{d}|AB|$ θα πραγματοποιείται η απόσταση

$$\frac{1}{d-1} \frac{d-1}{d} |AB| = \frac{|AB|}{d}$$

□

b) Η απόδειξη θα γίνει σε 4 βήματα:

1ο βήμα. Οι καμπύλες μπορούν να θεωρηθούν ομοτοπικές με έναν μεσημβρινό. Για απλές καμπύλες της μορφής (p, q) από το a) έχουμε ότι $\text{MK}\Delta(p, q) = 1$ άρα υπάρχουν ακέραιοι s, r ώστε $ps - qr = 1$. Τότε η γραμμική απεικόνιση

$$(1, 0) \mapsto (p, q)$$

$$(0, 1) \mapsto (r, s)$$

μας ορίζει ομοιομορφισμό του τόρου $S^1 \times S^1$ ο οποίος πάει μια καμπύλη τύπου $(1, 0)$ σε μια καμπύλη τύπου (p, q) . Συγκεκριμένα ο f έχει τύπο

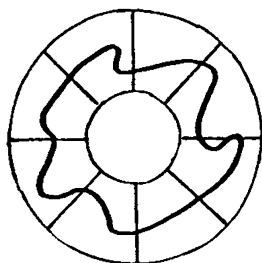
$$f(e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}) = (e^{i2\pi(xp+yr)}, e^{i2\pi(xq+ys)})$$

Εύκολα βλέπουμε πως ο f είναι ομοιομορφισμός. Άρα το πρόβλημα μας μπορεί να αναχθεί σε καμπύλες τύπου $(1, 0)$.

2ο βήμα. Αρκεί να δείξουμε ότι καμπύλες τύπου $(1, 0)$ χωρίς αυτοτομές, είναι ισοτοπικές με έναν μεσημβρινό. Πράγματι η σχέση ισοτοπίας είναι μεταβατική.

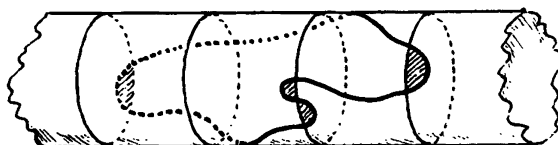
3ο βήμα. Αρκεί να δείξουμε ότι μια καμπύλη τύπου $(1, 0)$ είναι ισοτοπική με μια καμπύλη που δεν τέμνει τον μεσημβρινό. Πράγματι, ας αφαιρέσουμε μια ανοιχτή κυλινδρική περιοχή του μεσημβρινού U , αρκετά μικρή ώστε η καμπύλη μας να βρίσκεται στο $T^2 - U$. Τότε το $T^2 - U$ είναι ένας δακτύλιος και η καμπύλη μας δεν τέμνει το σύνορο και είναι ομοτοπική με τις συνοριακές συνιστώσες. Τότε υπάρχει μια ισοτοπία του δίσκου που μας πάει την καμπύλη μας στον κεντρικό κύκλο του δακτυλίου.

Σχήμα 22



4ο βήμα. Μένει να δείξουμε το βήμα 3 με τη διαφορά ότι τώρα θα έχουμε τομές με τον μεσημβρινό. Θα δουλέψουμε επαγωγικά. Έστω ότι η καμπύλη μας γ τύπου $(1, 0)$ έχει $n > 0$ τομές με τον μεσημβρινό. Κόβοντας τον τόρο κατά μήκος του μεσημβρινού αποκτάμε έναν κύλινδρο. Κολλώντας άπειρα αντίτυπα αυτού του κύλινδρου αποκτάμε ένα χώρο επικάλυψης του τόρου. Πάνω σε αυτόν τον κύλινδρο έχουμε άπειρες ανυψώσεις γ_m της καμπύλης μας. Έστω γ_0 μια από αυτές. Η καμπύλη αυτή θα κόβει τον μεσημβρινό και θα δημιουργεί "βουνά" με τα σύνορα των πεπερασμένων κυλίνδρων (σχήμα 23). Επαγωγικά πρέπει να καταστρέψουμε βουνά μέσω ισοτοπιών, προσέχοντας να μην τέμνουμε με τις ισοτοπίες τις άλλες ανυψώσεις. Όμως επειδή ο τομός με τον μεσημβρινό είναι πεπερασμένες, θα υπάρχει ένα βουνό ελαχίστου ύψους. Καταστρέφοντας αυτό το βουνό (δηλαδή γλιστρώντας το να φύγει από τον μεσημβρινό) δεν τέμνουμε τις άλλες ανυψώσεις γιατί αλλιώς η καμπύλη θα είχε αυτοτομές. Επαγωγικά μπορούμε να καταστρέψουμε όλα τα βουνά και να μεταφέρουμε αυτή την ισοτοπία μέσω της προβολής στον τόρο. $\square$

Σχήμα 23 Τα βουνά στον άπειρο κύλινδρο



Παρατηρούμε πως αν κολλήσουμε έναν στερεό τόρο στον εαυτό του μέσω ενός ομοιομορφισμού που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του μεσημβρινού το αποτέλεσμα δεν θα αλλάξει από το η συγκόλληση να γίνει χωρίς αντιστροφή του μεσημβρινού. Επομένως ας υποθέσουμε ότι η συγκόλληση γίνεται στέλνοντας τον μεσημβρινό α στην καμπύλη $p\alpha + q\beta$. Τότε το αποτέλεσμα δεν θα αλλάξει αν κολλήσουμε τον α στην καμπύλη $-p\alpha - q\beta$. Καταλλήγουμε λοιπόν στον εξής ορισμό

Ορισμός 3.1.2 Έστω η χειρουργική στην S^3 κατά μήκος του τετριμμένου κόμβου J , όπου αφαιρώντας μια συμπαγή ϵ -περιοχή του J με μεσημβρινό α και κατάλληλο παράλληλο β , κολλάμε έναν νέο τόρο T στέλνοντας τον μεσημβρινό του T στην καμπύλη $p\alpha + q\beta$ που βρίσκεται στο σύνορο της περιοχής του J που αφαιρέσαμε από την S^3 . Από τα παραπάνω η συγκεκριμένη χειρουργική καθορίζεται πλήρως από τον ρητό αριθμό $r = \frac{p}{q}$. Ο r καλείται *πλαίσιο* του κόμβου J . Η συγκεκριμένη διαδικασία θα λέγεται *ρητή χειρουργική στην S^3 με πλαίσιο r* .

Πρόταση 3.1.3 Ρητή χειρουργική στην S^3 με πλαίσιο $r = 0/1 = 0$ στο τετριμμένο κόμβο μας δίνει την $S^1 \times S^2$.

Απόδειξη. Έστω γ_2 ο τόρος που αφαιρούμε από την S^3 και $T_1 = S^3 - T_2$ ο δεύτερος τόρος. Αν α ο μεσημβρινός του γ_2 και β ο παράλληλος του, τότε το framing μας λέει πως ο τόρος T που πρέπει να κολλήσουμε, κολλάει στέλνοντας τον μεσημβρινό γ του T στον παράλληλο β του T_2 . Όμως ο β είναι μεσημβρινός στον T_1 (θυμόμαστε πως η S^3 είναι το αποτέλεσμα συγκόλλησης δυο τόρων στέλνοντας μεσημβρινούς σε παράλληλους). Άρα στέλνουμε τον μεσημβρινό του T στον μεσημβρινό του T_1 . Όμως από το παράδειγμα 2, κεφάλαιο 1.2 είδαμε πως αυτό το διάγραμμα Heegaard μας δίνει την $S^1 \times S^2$. $\square$

Πρόταση 3.1.4 Ρητή χειρουργική στην S^3 στο τετριμμένο κόμβο με πλαίσιο $r = p/q$ μας δίνει τον $L(p, q)$.

Απόδειξη. Έστω γ_2 ο τόρος που αφαιρούμε από την S^3 και $T_1 = S^3 - T_2$ ο δεύτερος τόρος. Αν α ο μεσημβρινός του γ_2 και β ο παράλληλος του, τότε το framing μας λέει πως ο τόρος T που πρέπει να κολλήσουμε, κολλάει στέλνοντας τον μεσημβρινό γ του T σε μια καμπύλη που τρέχει p φορές γύρω από τον μεσημβρινό του T^2 και q φορές γύρω από τον παράλληλο. Όπως αναφέραμε και στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, η S^3 είναι το αποτέλεσμα συγκόλλησης δυο τόρων στέλνοντας μεσημβρινούς σε παράλληλους. Άρα ο α είναι παράλληλος στον T_1 και ο β μεσημβρινός. Επομένως κολλάμε τον T στον T_1 στέλνοντας τον γ σε μια καμπύλη που τρέχει q φορές έναν μεσημβρινό και p φορές έναν παράλληλο. Από το κεφάλαιο 1.3 αυτό το διάγραμμα Heegaard μας δίνει τον $L(p, q)$. $\square$

Πρόταση 3.1.5 Ρητή χειρουργική στην S^3 στο τερτριμμένο κόμβο με πλαίσιο $r = \pm 1/n$ μας δίνει την S^3 .

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση η συγκεκριμένη χειρουργική μας δίνει τον $L(\pm 1, n)$. Όμως μια πιο προσεκτική ματιά μας δείχνει ότι η ταύτιση που γίνεται στον χώρο πηλίκο είναι η ταυτοτική. Άρα παίρνουμε την S^3 . $\square$

Πρόταση 3.1.6 Ρητή χειρουργική στην S^3 στο τερτριμμένο κόμβο με πλαίσιο $r = \infty = 1/0$ μας δίνει την S^3 .

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 3.1.5. $\square$

Πρόταση 3.1.7 Ρητή χειρουργική στην S^3 στο τερτριμμένο κόμβο με πλαίσιο $r = p/q$ και $1/(\pm n + \frac{1}{r})$ μας δίνουν ομοιορφοικούς χώρους.

Απόδειξη. Η πρώτη χειρουργική μας δίνει τον $L(p, q)$. Μένει να παρατηρήσουμε πως $1/(\pm n + \frac{1}{r}) = \frac{p}{q \pm np}$ και πως η ταύτιση στο χώρο πηλίκο είναι

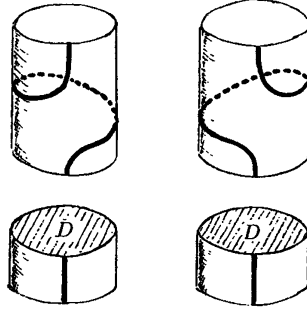
$$(z, w) \mapsto (ze^{\frac{i2\pi}{p}}, we^{\frac{i2\pi(q \pm np)}{p}}) = (ze^{\frac{i2\pi}{p}}, we^{\frac{i2\pi q}{p}})$$

$\square$

Η προηγούμενη πρόταση μας λέει πως $L(p, q) \cong L(p, q \pm np)$. Στην πραγματικότητα ο συγκεκριμένος ομοιομορφισμός δεν είναι ιδιαίτερα προφανής αν χρησιμοποιήσουμε απευθείας τον ορισμό της ρητής χειρουργικής για αυτό θα τον δούμε λίγο αναλυτικότερα.

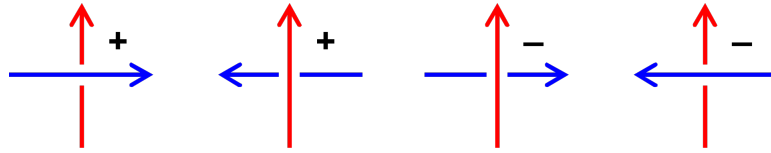
Έχουμε δει πως παίρνουμε τον $L(p, q)$ κολλώντας δυο συμπαγείς τόρους T_1, T_2 μέσω ενός ομοιομορφισμού που στέλνει τον μεσημβρινό α του T_2 σε μια καμπύλη $q\alpha + p\beta$, δηλαδή σε μια καμπύλη που τρέχει q φορές τον μεσημβρινό και p τον παράλληλο του τόρου T_1 . Αφαιρούμε μια κυλινδρική περιοχή ενός μεσημβρινού του T_1 . Η καμπύλη $q\alpha + p\beta$ τέμνει τον μεσημβρινό p το πλήθος φορές. Κάνοντας μια στροφή Dehn κατά τον μεσημβρινό, ανάλογα την φορά που έχουμε ορίσει ως θετική ή αρνητική, όταν ξανακολλήσουμε την κυλινδρική περιοχή έχουμε περάσει ομοιομορφικά σε μια καμπύλη που τρέχει $q \pm p$ φορές τον μεσημβρινό και p φορές τον παράλληλο. Άρα παίρνουμε στον $L(p, q \pm p)$. Μετά από n τέτοιες στροφές θα πάρουμε τον $L(p, q \pm np)$.

Σχήμα 24 Στροφές Dehn με θετική και αρνητική φορά



3.2 Linking numbers

Ορισμός 3.2.1 Έστω δυο κόμβοι K και J , και $L = K \cup J$ ο δεσμός που αποτελούν. Χρωματίζουμε τον έναν κόμβο κόκκινο και τον άλλο μπλε. Αν n_1, n_2, n_3, n_4 είναι το πλήθος των παρακάτω διασταυρώσεων αντίστοιχα:



Τότε ο *linking number* των K και J συμβολίζεται $\text{lk}(K, J)$ και δίνεται από τον τύπο $\text{lk}(K, J) = \frac{n_1 + n_2 - n_3 - n_4}{2}$.

Παρατηρούμε πως οι K και J είναι απλές κλειστές καμπύλες. Οπότε αν φανταστούμε την μπλε καμπύλη να βρίσκεται σε ένα επίπεδο, τότε από το θεώρημα Jordan η μπλε καμπύλη φράζει ένα φραγμένο και ένα μη φραγμένο χωρίο. Τότε αν ο n_1 συμβολίζει το πόσες φορές η κόκκινη καμπύλη διαπερνά το φραγμένο χωρίο, η n_3 συμβολίζει πόσες φορές διαπερνά το μη φραγμένο χωρίο. Ομοίως τα n_2, n_4 . Άρα $n_1 + n_3 = n_2 + n_4$. Η συγκεκριμένη παρατήρηση μας οδηγεί στον παρακάτω ισοδύναμο ορισμό του linking number.

Ορισμός 3.2.2 $\text{lk}(K, J) = n_1 - n_4 = n_2 - n_3$. Δηλαδή αρκεί να αθροίσουμε, με τα κατάλληλα πρόσημα, τις πάνω διασταυρώσεις για έναν από τους δύο κόμβους, δεν έχει σημασία ποιόν.

Οι παραπάνω ισοδύναμοι ορισμοί του linking number μας δίνουν πολλά βολικά αποτελέσματα και θα γίνεται χρήση οποιουδήποτε ορισμού είναι πιο

βολικός στην κάθε περίπτωση.

Πόρισμα 3.2.3 $\text{lk}(K, J) = \text{lk}(J, K)$ και αν $-J$ είναι ο κόμβος J με αντίθετο προσανατολισμό τότε $\text{lk}(K, -J) = -\text{lk}(K, J)$.

Απόδειξη. Μια προσεκτική ματιά στον ορισμό 3.2.1 μας δείχνει πως είναι συμμετρικός και πως αν αλλάξει ο προσανατολισμός μιας συνιστώσας του κρίκου, τότε θα αλλάξουν τα πρόσημα των n_1, n_2, n_3, n_4 . $\square$

Θεώρημα 3.2.4 Ο linking number είναι αναλλοίωτος του διαγράμματος του κρίκου $J \cup K$.

Απόδειξη. Η Reidemeister 1 κίνηση δεν θα αλλάξει τον lk καθώς αφορά μόνο μια συνιστώσα του κρίκου. Το ίδιο και η Reidemeister 3 καθώς δεν θα αλλάξει τις φορές τον διασταυρώσεων. Τέλος η Reidemeister 2 θα μας δείνει πάντα ένα $+1$ και ένα -1 . $\square$

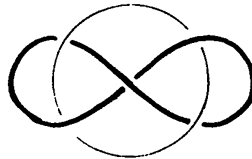
Ορισμός 3.2.5 Θα λέμε πως δυο κόμβοι είναι άδετοι, αν υπάρχει μια ambient ισοτοπία που να τους πηγαίνει σε δυο κόμβους που βρίσκονται στο εσωτερικό δυο D^3 που δεν τέμνονται.

Θεώρημα 3.2.6 Αν $\text{lk}(K, J)$ τότε οι K, J είναι αναγκαστικά δεμένοι.

Απόδειξη. Αν ήταν άδετοι τότε θα υπήρχε μια ambient ισοτοπία που πηγαίνει τους κόμβους σε K', J' μέσα σε δυο κλειστούς τρισδιάστατους δίσκους που δεν τέμνονται. Όμως τότε από το θεώρημα 3.2.4 $\text{lk}(K, J) = \text{lk}(K', J') = 0$, άτοπο. $\square$

Δυστυχώς η συνθήκη $\text{lk}(K, J) = 0$ δεν μας εξασφαλίζει πως δυο κόμβοι είναι άδετοι μεταξύ τους. Πχ σχήμα 25.

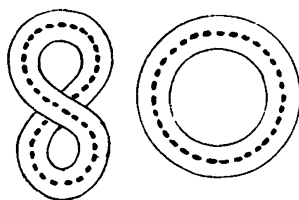
Σχήμα 25 Μη άδετος κρίκος με linking number 0



Πράγματι, ένας σύντομος υπολογισμός του πολωνύμου Jones του κρίκου στο σχήμα 25 θα μας δώσει πολυώνυμο $-t^{-\frac{11}{4}} - t^{\frac{5}{4}} + t^{-\frac{7}{4}} + t^{\frac{1}{4}} - t^{-\frac{3}{4}}$ σε αντίθεση με δυο άδετους τετριμμένους κόμβους που έχουν πολυώνυμο Jones $t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{5}{4}}$.

Η παραπάνω συζήτηση θα μας επιτρέψει να αποφύγουμε ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα για την επιλογή παραλλήλου στην χειρουργική κατα μήκος κόμβου J . Όταν ο κόμβος είναι τετριμμένος τότε η επιλογή του μεσημβρινού γίνεται με τον φυσικό τρόπο. Όμως παρατηρούμε πως ακόμα και στην περίπτωση του τετριμμένου κόμβου η επιλογή του παράλληλου είναι προβληματική. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ο κόμβος μαζί με την σωληνοειδή περιοχή του, κάνει μια δίπλωση, όπως στη κίνηση Reidemeister 1. Τότε αν επιλέξουμε απλά έναν παράλληλο K στην επιφάνεια του συμπαγή τόρου, ο οποίος ακολουθεί τον κόμβο τότε θα παρατηρήσουμε πως ο κρίκος που αποτελείται από τους K και J δεν είναι απαραίτητα άδετος. Πράγματι ο παράλληλος στο σχήμα 26, με τον κόμβο στο εσωτερικό του τόρου θα έχουν linking number 1 και άρα αποκλείεται να είναι άδετοι.

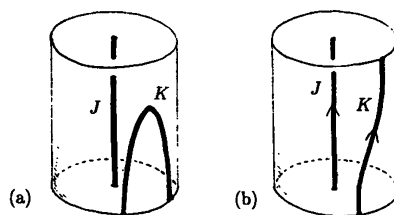
Σχήμα 26



Βλέπουμε λοιπόν πως η επιλογή διαγράμματος του κόμβου επηρεάζει τον παράλληλο. Ο ακόλουθος ορισμός μας λύνει το πρόβλημα που παρουσιάζεται.

Ορισμός 3.2.7 Εστω J κόμβος και πάρουμε μια σωληνοειδή συμπαγή περιοχή του. Ένας επιθυμητός παράλληλος στην επιφάνεια του τόρου είναι μια καμπύλη K που έχει την ίδια φορά με τον J (σχήμα 27b και όχι το 27a) και $\text{lk}(K, J) = 0$.

Σχήμα 27



3.3 Ακέραια χειρουργική και φακοειδείς χώροι

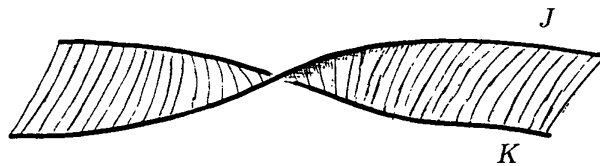
Είδαμε στις προηγούμενες ενότητες πως η χειρουργική στην S^3 καθορίζεται από έναν κόμβο J και το πλαίσιο του $r = p/q$. Εφόσον μπορέσαμε να ορίσουμε κατάλληλους μεσημβρινούς και παράλληλους, ας εξετάσουμε την περίπτωση το πλαίσιο r του κόμβου να είναι ακέραιος. Χειρουργική τέτοιου είδους καλείται *ακέραια*.

Θεώρημα 3.3.1 Κάθε 3-πολλαπλότητα M προκύπτει από την S^3 με ακέραια χειρουργική στον τετριμμένο κόμβο.

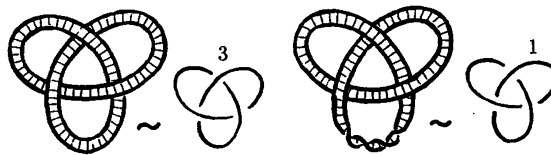
Απόδειξη. Το παραπάνω θεώρημα είναι απλά μια αλλαγή της εκφώνησης του θεωρήματος Lickorish-Wallace καθώς όταν αλλάζουμε μεσημβρινούς σε παράλληλους έχουμε πλαίσιο $r = 0$. $\square$

Ορισμός 3.3.2 Στην ακέραια χειρουργική σε μια συνιστώσα J ενός κρίκου, στέλνουμε τον μεσημβρινό α σε μια καμπύλη $K = p\alpha + \beta$ που τρέχει p φορές τον μεσημβρινό α και μια φορά τον παράλληλο β . Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας (γιατί η χειρουργική εξαρτάται από τον λόγο p/q) υποθέτουμε ότι οι K και J έχουν την ίδια φορά. Τότε από τον τρόπο επιλογής των α και β έχουμε πως $\text{lk}(J, K) = \text{lk}(J, p\alpha + \beta) = p$. Στην προκειμένη περίπτωση οι καμπύλες J, K ορίζουν μια κορδέλα με αυτές ως συνοριακές συνιστώσες (σχήμα 28). Ο τρόπος αυτός για να ορίσουμε την ακέραια χειρουργική θα ονομάζεται *χειρουργική σε κορδέλα*.

Σχήμα 28 Η κορδέλα που σχηματίζουν οι J και K



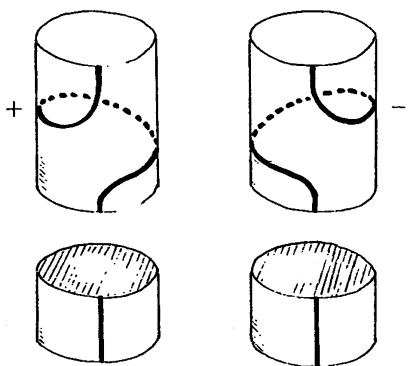
Σχήμα 29 Παραδείγματα χειρουργικής σε κορδέλες



Παρατήρηση Χειρουργική στην S^3 σε διαφορετικούς πλαισιωμένους μπορεί να μας δώσουν την ίδια πολλαπλότητα. Δυο τέτοιες χειρουργικές θα λέγονται *ισοδύναμες*.

Στα παρακάτω θετικές θα χαρακτηρίζονται οι στροφές προς τα αριστερά και αρνητικές προς τα δεξιά. (σχήμα 30)

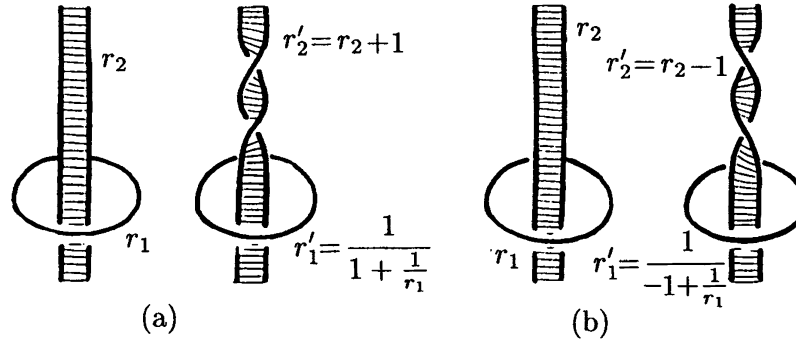
Σχήμα 30 Θετική και αρνητική στροφή



Ας δούμε τώρα όταν η χειρουργική γίνεται όχι μόνο ως προς τον κόμβο J αλλά ως προς έναν κρίκο που έχει τον J ως συνιστώσα του, πως επηρεάζονται τα πλαίσια των κόμβων. Στην ενότητα 3.1 περιγράψαμε τον ομοιομορφισμό που μας πηγαίνει από τον $L(p, q)$ στον $L(p, q \pm np)$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πλαίσιο του τετριμμένου κόμβου άλλαξε από p/q σε $1/(\pm n + q/p)$.

Ας υποθέσουμε πως η χειρουργική επηρεάζει τις συνιστώσες του κρίκου όπως στο σχήμα 31. Τότε μια θετική στροφή ως προς τον κόμβο με πλαίσιο r_1 θα αυξήσει το πλαίσιο r_2 κατά 1 (αντίστοιχα μια αρνητική στροφή θα μειώσει το r_2 κατά 1). Αυτό γίνεται γιατί αυξάνεται το linking number των συνιστωσών της κορδέλας (υπενθυμίζουμε πως η μια συνιστώσα της κορδέλας αντιπροσωπεύει τον επιθυμητό παράλληλο ως προς τον κόμβο που εκπροσωπεί η άλλη συνοριακή συνιστώσα). Ταυτόχρονα το πλαίσιο r_1 του κόμβου όπου γίνεται η στροφή θα αλλάξει σε $1/(1 + \frac{1}{r_1})$ (αντίστοιχα $1/(-1 + \frac{1}{r_1})$). Όταν πραγματοποιούνται n τέτοιες στροφές τα πλαίσια αλλάζουν με τον αναμενόμενο τρόπο $1/(\pm n + \frac{1}{r_1})$.

Σχήμα 31 Αλλαγή στα πλαίσια



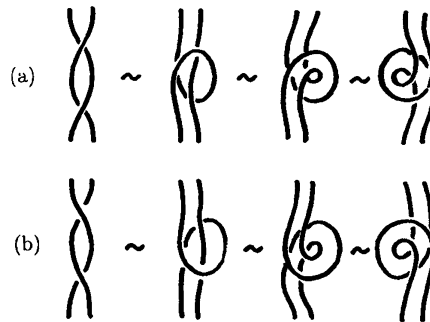
Παράδειγμα Θα αποδείξουμε πως οι παρακάτω χειρουργικές είναι ισοδύναμες. Η πρώτη χειρουργική είναι πάνω στον Hopf κρίκο με πλαίσια 1 και n και η δεύτερη είναι πάνω στον τετριμμένο κόμβο με πλαίσιο $n - 1$.

$$1 \bigcirc \bigcirc^n \sim \bigcirc^{n-1}$$

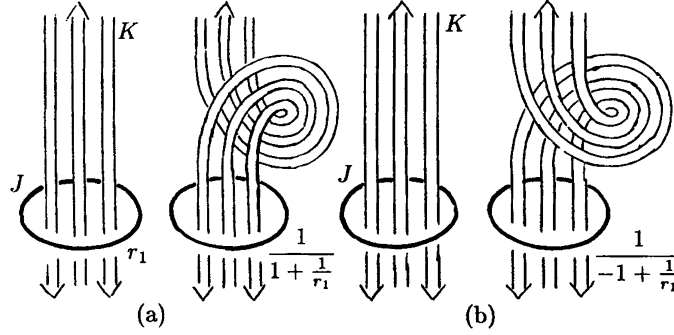
Πράγματι κάνοντας μια αρνητική στροφή ως προς τον κόμβο με πλαίσιο 1 θα πάρουμε νέο πλαίσιο $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{\infty}$. Όμως χειρουργική με αυτό το πλαίσιο μας δίνει την S^3 , οπότε δεν θα επηρεάσει την πολλαπλότητα. Το πλαίσιο n θα ελαττωθεί κατά 1 και έχουμε το αποτέλεσμα.

Τώρα υπάρχει περίπτωση να διαπερνάνε τον δίσκο που φράζει ο τετριμμένος κόμβος J που γίνεται η στροφή, περισσότερα από έναν νήματα του άλλου κόμβου K . Τα παρακάτω σχήματα μας δίνουν έναν βολικό τρόπο να βρίσκουμε τις αλλαγές στα πλαίσια όταν δεν είναι τόσο προφανές.

Σχήμα 32



Σχήμα 33

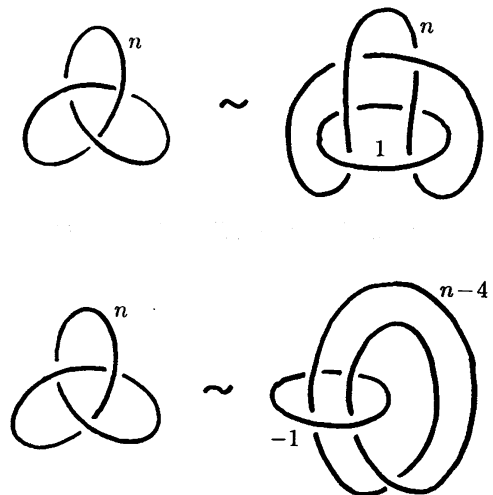


Ας δούμε λοιπόν πως θα μεταβληθούν τα πλαίσια των κόμβων.

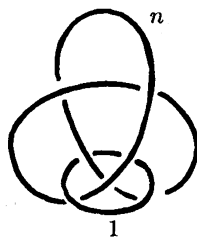
Το πλαίσιο του J θα μεταβληθεί όπως συζητήσαμε παραπάνω $1/(\pm 1 + \frac{1}{r_1})$. Για να βρούμε το πλαίσιο του K ας υποθέσουμε ότι u το πλήθος νήματα περνάνε μέσα από τον J με φορά προς τα πάνω και d το πλήθος νήματα προς τα κάτω. Τότε $\text{lk}(J, K) = u - d$. Ας ονομάσουμε την άλλη συνοριακή συνιστώσα της κορδέλας μας λ . Τότε κάθε φορά που ένα νήμα του K , με φορά προς τα πάνω, περνάει πάνω από ένα νήμα ίδιας φοράς συνεισφέρει στο linking number $+1$ ενώ όταν περνάει πάνω από νήμα αντίθετης φοράς μας δίνει ένα -1 . Αντίστοιχα ένα νήμα με φορά προς τα κάτω όταν περνάει από νήμα ίδιας φοράς συνεισφέρει στο linking number -1 ενώ όταν περνάει πάνω από νήμα αντίθετης φοράς μας δίνει ένα $+1$. Άρα με βάση τα παραπάνω ένα νήμα με φορά προς τα πάνω μετά την στροφή θα συνεισφέρει στο linking number $u - d$, ενώ ένα νήμα με φορά προς τα κάτω $d - u$. Αν λάβουμε υπόψη τον αριθμό των νημάτων, τότε το πλαίσιο θα αυξηθεί κατά $u(u - d) + d(d - u) = u^2 - 2ud + d^2 = (u - d)^2 = \text{lk}(J, K)^2$. Άρα το νέο πλαίσιο θα είναι $r_2 + \text{lk}(J, K)^2$. Για αρνητικές στροφές θα έχουμε $r_2 - \text{lk}(J, K)^2$. Όταν πραγματοποιηθούν n στροφές θα έχουμε $r_2 \pm n \text{lk}(J, K)^2$.

Πριν ξαναπεράσουμε στους φακοειδείς χώρους ας δούμε δυο παραδείγματα ισοδύναμων χειρουργιών πάνω στην προηγούμενη συζήτηση.

Σχήμα 34 Δυο ισοδύναμες χειρουργικές

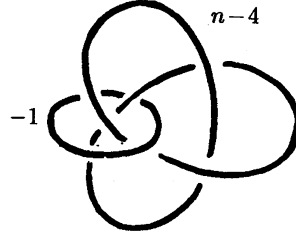


Πράγματι παρατηρούμε πως στο πάνω δεξιό σχήμα το linking number των κόμβων είναι 0. Κάνοντας μια Reidemeister 1 κίνηση φέρνουμε το σχήμα στη μορφή:



Στη συνέχεια κάνοντας μια αρνητικής φοράς στροφή αλλάζουμε τη διασταύρωση μέσα στο κόμβο με πλαίσιο 1 παίρνοντας τον trefoil. Όμως το πλαίσιο του τετριμμένου κόμβου θα γίνει $\frac{1}{\infty}$ ενώ του άλλου κόμβου θα παραμείνει n .

Για το δεύτερο παράδειγμα, βρίσκουμε πρώτα ότι το linking number των κόμβων ισούται με 2. Στη συνέχεια τραβάμε με μια ισοτοπία το μέσα νήμα του κόμβου με πλαίσιο $n - 4$ ώστε να φέρουμε το σχήμα στη μορφή:



Τώρα για να ακυρώσουμε τον τετριμμένο κόμβο κάνουμε μια θετική περιστροφή, αλλάζοντας ταυτόχρονα τη διασταύρωση και το πλαίσιο του άλλου κόμβου σε $n - 4 + 2^2 = n$, ώστε να πάρουμε τον trefoil με πλαίσιο n .

Τώρα θα δούμε δυο ακόμα τρόπους χειρουργικής για να πάρουμε τον $L(p, q)$.

Πρόταση 3.3.3 Αν $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $L(mn - 1, n) = L(mn - 1, m)$ και μάλιστα προκύπτουν με χειρουργική στον κρίκο με πλαίσιο



Απόδειξη. Έστω r_1, r_2 τα πλαίσια του αριστερά και δεξιά κόμβου αντίστοιχα και τυχαίοι ακέραιοι κ και λ . Κάνοντας στον δεξιά κόμβο κ περιστροφές αλλάζουμε τα πλαίσια σε $r'_1 = \kappa + m$ και $r'_2 = 1/(\kappa + \frac{1}{n})$. Τώρα θα κάνουμε λ περιστροφές στον αριστερά κόμβο αλλάζοντας τα πλαίσια σε $r''_1 = 1/(\lambda + \frac{1}{\kappa+m})$ και $r''_2 = \lambda + 1/(\kappa + \frac{1}{n})$. Αν διαλέξουμε $\kappa = 1 - m$ και $\lambda = -1$ τότε ακυρώνουμε τον δεξιά κόμβο γιατί θα πάρουμε πλαίσιο $\frac{1}{\infty}$ και μας μένει χειρουργική στον τετριμμένο κόμβο με πλαίσιο $\frac{nm-1}{n-(nm-1)}$ που θα μας δώσει τον $L(nm - 1, n - (nm - 1)) \cong L(nm - 1, n)$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και το άλλο ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 3.3.4 Αν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ και $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$ τότε



όπου το

$$\frac{p}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots - \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}}$$

Απόδειξη. Ας κάνουμε $t = -(a_n + 1)$ περιστροφές στον κόμβο με πλαίσιο a_{n+1} , αλλάζοντας τα πλαίσια του n κύκλου σε $a'_n = -1$ και του $n+1$ κύκλου σε $a'_{n+1} = \frac{1}{-a_n - 1 + 1/a_{n+1}}$. Τα πλαίσια των άλλων κύκλων δεν επηρεάζονται. Τώρα μπορούμε να καταστρέψουμε τον n κύκλο κάνοντας μια θετική στροφή και αλλάζοντας το πλαίσιο του $n-1$ κύκλου σε $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$ και του $n+1$ κύκλου σε

$$a''_{n+1} = 1 + a'_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}$$

. Όμως τώρα έχουμε n κύκλους οπότε μετονομάζουμε το a''_{n+1} σε a'_n . Συνεχίζοντας επαγωγικά καταλήγουμε με έναν κύκλο με πλαίσιο

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots}}}}$$

όμως αν $r = \frac{p}{q}$ όπως στην εκφώνηση τότε το πλαίσιο μας είναι ίσο με το $1/(1 + \frac{1}{r})$. Όμως αυτή η χειρουργική είναι ισοδύναμη με χειρουργική στον τετριμμένο κόμβο με πλαίσιο r . $\square$

3.4 Λογισμός Kirby

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως οι φακοειδείς χώροι μπορούν να έχουν ποικίλες χειρουργικές παραστάσεις. Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε κάποιες τεχνικές με τις οποίες θα μπορούμε να μεταβάλλουμε τους πλαισιομένους κρίκους μας και να μην αλλάζουμε την πολλαπλότητα.

Ορισμός 3.4.1 Η *πρώτη κίνηση Kirby* περιλαμβάνει την εισαγωγή (ή αφαίρεση), στο πλαισιομένο κρίκο, ενός τετριμμένου κόμβου με πλαίσιο ± 1 , με την προϋπόθεση ότι είναι ασύνδετος με τον αρχικό κρίκο L . Δηλαδή υπάρχει μια ανοιχτή μπάλα μέσα στην S^3 που περιέχει τον τετριμμένο κόμβο και δεν τέμνει τον αρχικό κρίκο L . Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ακέραια χειρουργική στο τετριμμένο κόμβο μας δίνει πάλι την S^3 . Στη χειρουργική κατά μήκος κορδελών, η πρώτη κίνηση Kirby αναπαρίσταται από μια κορδέλα με μια πλήρη στροφή (θετική ή αρνητική). Άρα βλέπουμε ότι πράγματι η πρώτη

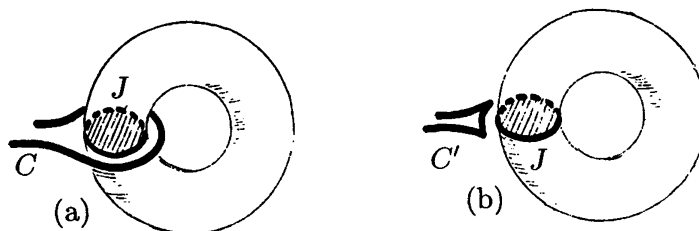
κίνηση Kirby δεν αλλάζει την πολλαπλότητα μας. Γραφικά η πρώτη κίνηση Kirby αναπαρίσταται με το παρακάτω διάγραμμα.

Σχήμα 35 Η πρώτη κίνηση Kirby



Θα περιγράψουμε τώρα τη δεύτερη κίνηση Kirby. Ας υποθέσουμε πως έχουμε έναν κρίκο L με ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Η συνιστώσα K του L , με την πλαισίωση της, μας δίνει μια καμπύλη J στην επιφάνεια μιας κλειστής ϵ -περιοχής της K ομοιομορφικής με έναν συμπαγή τόρο. Η χειρουργική κατά μήκος της συνιστώσας K αποτελείται από την αφαίρεση της ανοιχτής ϵ -περιοχής και στη συνέχεια την συγκόλληση ενός συμπαγούς τόρου με έναν ομοιομορφισμό που θα στείλει τον μεσημβρινό του τόρου στην καμπύλη J . Ο μεσημβρινός του νέου τόρου φράσει έναν δίσκο D^2 όπου πλέον μετά τη συγκόλληση έχει ως σύνορο την καμπύλη J στη νέα πολλαπλότητα. Αυτό σημαίνει πως στη νέα πολλαπλότητα M_1^3 , κάθε συνιστώσα C του κρίκου L η οποία τρέχει παράλληλα (σχήμα 36a) στην J μπορούμε να την "γλυστρίσουμε" πάνω στον μεσημβρινό δίσκο και να πάρουμε μια ισοτοπική καμπύλη C' . Η ισοτοπία εδώ αφορά την πολλαπλότητα M_1^3 και όχι την S^3 , καθώς δεν είναι απαραίτητο η J να φράσει δίσκο στο $S^3 - K$. Παρόλα αυτά θα δούμε πως μπορούμε να τροποποιήσουμε το πλαίσιο του κρίκου ώστε μετά την χειρουργική κατά μήκος της K , η καμπύλη C να βρίσκεται στη θέση C' ώστε να πάρουμε την ίδια πολλαπλότητα.

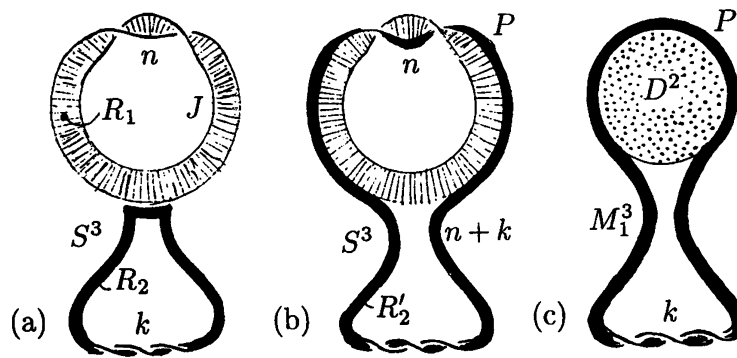
Σχήμα 36 Ισοτοπία μετά την χειρουργική



Θα περιγράψουμε την παραπάνω κίνηση χρησιμοποιώντας κορδέλες. Στη συγκεκριμένη περιγραφή θα υποθέσουμε τις κορδέλες μας ασύνδετες για να μπορέσουμε να περιγράψουμε καλύτερα την μετατροπή στο πλαίσιο της νέας κορδέλας. Ας υποθέσουμε πως έχουμε δυο ασύνδετες κορδέλες R_1 και R_2 με πλαίσια n και k αντίστοιχα όπως στο σχήμα 37a. Θα δείξουμε πως η πολλαπλότητα που προκύπτει από χειρουργική στις δυο αυτές κορδέλες είναι ισοδύναμη με χειρουργική στις κορδέλες R_1 και R'_2 , όπου η R'_2 είναι ίδια με την R_2 εκτός από την περιοχή P των στροφών της R_1 , στην οποία ακολουθεί παράλληλα και εφαπτόμενα (εδώ εννοούμε πως η συνοριακή συνιστώσα της R_1 που βρίσκεται στο σύνορο του τόρου και η συνοριακή συνιστώσα της R'_2 που βρίσκεται στο σύνορο του αντίστοιχου τόρου, εφάπτοται στην περιοχή P) την R_1 κάνοντας τις ίδιες στροφές με την R_1 και αποκτώντας νέο πλαίσιο $n + k$ (σχήμα 37b).

Για να το δείξουμε, αρκεί να κάνουμε χειρουργική στο διάγραμμα κορδελών $\{R_1, R'_2\}$ πρώτα κατά μήκος της R_1 . Στη συνέχεια, όταν κολλήσουμε τον νέο τόρο, το κομμάτι της R'_2 που ακολουθούσε την R_1 θα ταυτιστεί με τον μεσημβρινό του νέου τόρου που κολλάμε και επομένως θα φράσει δίσκο (σχήμα 37c). Όμως έτσι οι n επιπλέον στροφές χάνονται και μπορούμε να γλιστρήσουμε, με μια ισοτοπία της νέας πολλαπλότητας, την R'_2 στην θέση της R_2 . Όμως οι ισοτοπικές αυτές κορδέλες θα μας δώσουν την ίδια πολλαπλότητα μετά την χειρουργική κατά μήκος τους. $\square$

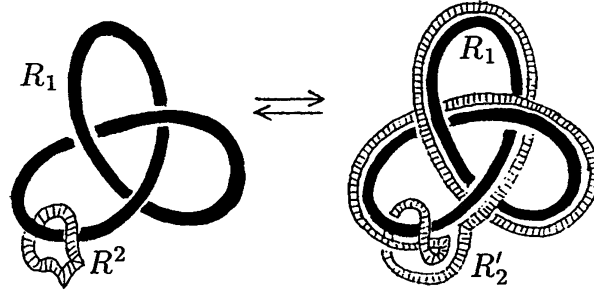
Σχήμα 37



Ορισμός 3.4.2 Η διαδικασία αντικατάστασης του διαγράμματος κορδελών $\{R_1, R_2\}$ με το $\{R_1, R'_2\}$ και αντίστροφα ονομάζεται *δεύτερη κίνηση Kirby*.

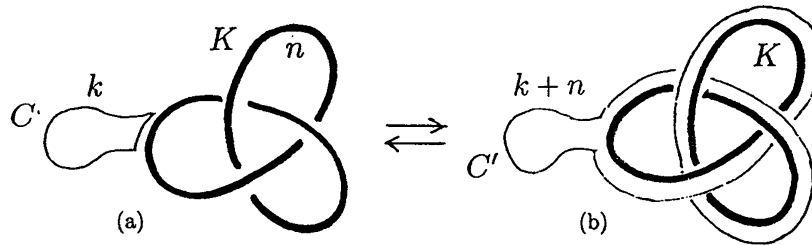
Η περίπτωση οι κορδέλες να είναι έχουν μη μηδενικό *linking number* διαφέρει στο ότι δεν είναι τόσο εύκολο να βρούμε το πλαίσιο της R'_2 . Θα αναφέρουμε απλά πως σε μια τέτοια περίπτωση η κορδέλα R'_2 θα πρέπει να κάνει τόσα twists όσα και το διπλάσιο του *linking number* των κορδελών (σχήμα 38).

Σχήμα 38 Παράδειγμα της γενικής περίπτωσης για τη δεύτερη κίνηση Kirby



Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε τη δεύτερη κίνηση Kirby στη γλώσσα των πλαισιωμένων κρίκων. Πράγματι αν έχουμε έναν κρίκο L και δυο ασύνδετες συνιστώσες C και με πλαίσια k και n αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την συνιστώσα C με την C' με πλαίσιο $n + k$, η οποία θα ακολουθεί θα είναι ίδια με την C σε μια περιοχή και θα ακολουθεί παράλληλα την K σε μια άλλη περιοχή (σχήμα 39).

Σχήμα 39 Η δεύτερη κίνηση Kirby για πλαισιωμένους κρίκους

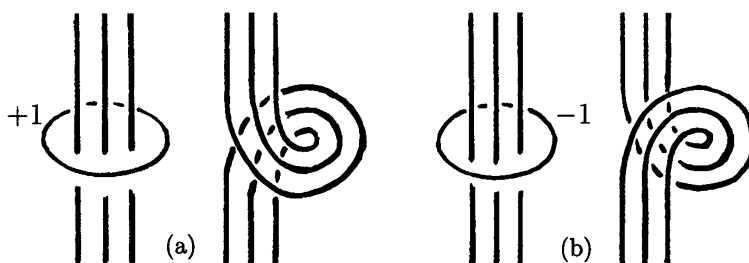


Τα παραπάνω μας δίνουν την μια κατεύθυνση του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.4.3 Θεώρημα Kirby. Δυο ακέραια πλαισιομένοι κρίκοι εμφυτευμένοι στην S^3 παράγουν την ίδια 3-πολλαπλότητα μετά από χειρουργική αν και μόνο αν συνδέονται με μια πεπερασμένη ακολουθία ισοτοπιών και κινήσεων Kirby.

Ορισμός 3.4.4 Η κίνηση *Fenn-Rourke*. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το πλαισιομένο διάγραμμα κρίκου όπου έχουμε έναν τετριμμένο κύκλο με πλαίσιο ± 1 και k το πλήθος νήματα των υπόλοιπων συνιστωσών του κρίκου να διέρχονται μέσα από τον κύκλο. Η κίνηση *Fenn-Rourke*, που στην ουσία είναι γενίκευση της πρώτης κίνησης Kirby για $k = 0$, αποτελείται από την διαγραφή του κύκλου με την αλλαγή στα πλαίσια και αντίστροφα (σχήμα 40).

Σχήμα 40 Η κίνηση *Fenn-Rourke*

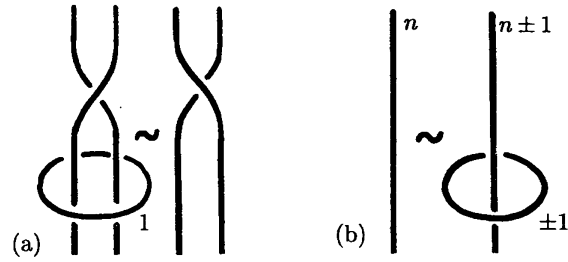


Η κίνηση *Fenn-Rourke* είναι κάτι παραπάνω από απλή γενίκευση της πρώτης κίνησης Kirby. Συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.5 *Θεώρημα Fenn-Rourke* Δυο ακέραια πλαισιομένα διαγράμματα κρίκων συνδέονται με κινήσεις Kirby αν και μόνο αν συνδέονται με την κινήσεις *Fenn-Rourke*.

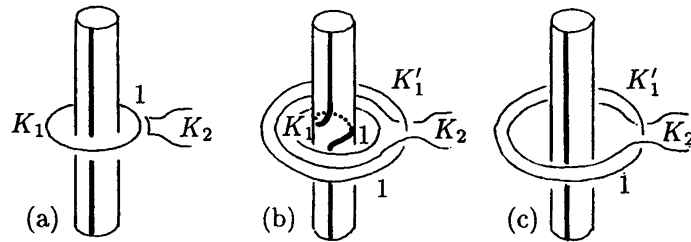
Απόδειξη. Για τη μια κατεύθυνση αρκεί να δείξουμε πως η δεύτερη κίνηση Kirby είναι σύνθεση κινήσεων *Fenn-Rourke*. Πράγματι ας υποθέσουμε πως έχουμε δυο κορδέλες, K_1 και K_2 , και θέλουμε να προσθέσουμε στην K_2 μια κορδέλα που να κινείται σε ένα μέρος της παράλληλα με την K_1 και η υπόλοιπη να ταυτίζεται με την K_2 . Σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.4, κάθε κόμβος μπορεί να λυθεί με κατάλληλες αλλαγές στις διασταυρώσεις. Οπότε με κινήσεις *Fenn-Rourke* όπως στο σχήμα 41, μπορούμε να υποθέσουμε πως ο κόμβος που μας δίνει την κορδέλα K_1 είναι ο τετριμμένος με πλαίσιο 1.

Σχήμα 41



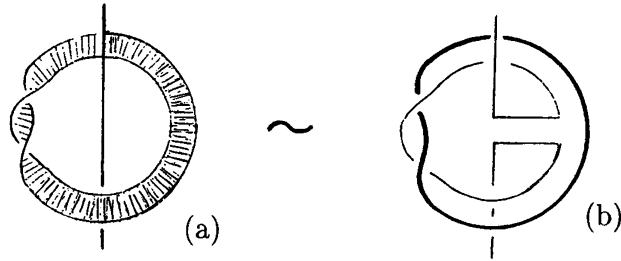
Έστω λοιπόν πως ο K_1 είναι τετριμμένος με πλαίσιο 1 και έστω ότι περνάει έναν νήμα του κρίκου μέσα από τον K_1 όπως στο σχήμα 42a (αυτό δεν χρειάζεται σαν υπόθεση αλλά θα μας βοηθήσει να δούμε καλύτερα την αλλαγή στα πλαίσια). Εισάγοντας έναν τετριμμένο κύκλο K'_1 με πλαίσιο 1, παράλληλο με τον K_1 και να συνδέεται με τον K_2 παίρνουμε το σχήμα 42b όπου ο K_2 θα τ. Τώρα μένει να αφαιρέσουμε τον κύκλο K_1 με μια κίνηση Fenn-Rourke αρνητικής φοράς αυτή τη φορά και το πλαίσιο του νήματος που διαπερνά τους K_1 και K'_1 επανέρχεται στην αρχική του τιμή και παίρνουμε την δεύτερη κίνηση Kirby.

Σχήμα 42



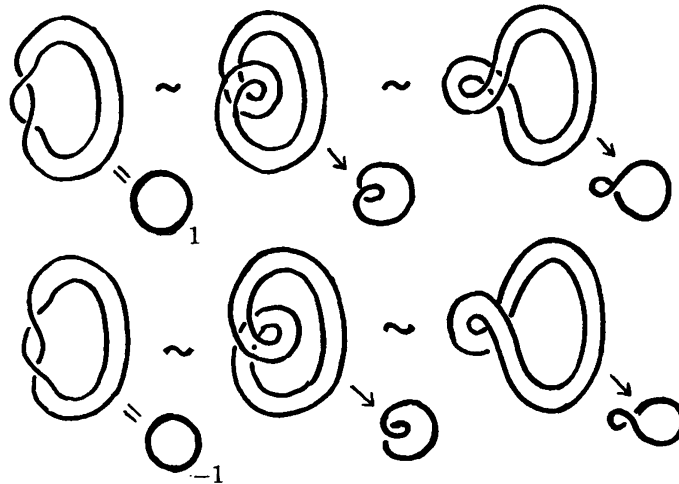
Μένει να δούμε ότι μια κίνηση Fenn-Rourke μπορεί να γραφεί ως σύνθεση κινήσεων Kirby. Ας υποθέσουμε πως έχουμε έναν τετριμμένο κύκλο με πλαίσιο 1 και για ευκολία ότι ένα νήμα του κρίκου περνά μέσα από τον κύκλο. Τότε η δεύτερη κίνηση Kirby θα κινήσει το νήμα παράλληλα στον τετριμμένο κύκλο όπως στο σχήμα 42b. Τώρα όμως ο κύκλος και το νήμα μπορούν να χωριστούν και με την πρώτη κίνηση Kirby αφαιρούμε το κύκλο χωρίς να επηρεάσουμε το νήμα παίρνοντας έτσι την κίνηση Fenn-Rourke. $\square$

Σχήμα 43



Παρατηρούμε πως ένας τετριμιμένος κύκλος με πλαίσιο ± 1 μπορεί να παραστεί γραφικά χωρίς την αναφορά στο πλαίσιο με έναν κύκλο στον οποίο έχουμε κάνει μια Reidemeister 1 (R_1) κίνηση (σχήμα 44). Οι κινήσεις Reidemeister 2 (R_2) και 3 (R_3) δεν αλλάζουν την πλαισίωση του κρίκου άρα δεν επηρεάζουν την χειρουργική. Όμως η R_1 αλλάζει το πλαίσιο της συνιστώσας του κρίκου κατά ± 1 . Επομένως αν αντικαταστήσουμε την R_1 με την R'_1 όπου κάνουμε ταυτόχρονα δυο R_1 αντίθετης φοράς, η χειρουργική παραμένει αναλλοίωτη. Επομένως έχουμε αποδείξει το παρακάτω θεώρημα.

Σχήμα 44



Θεώρημα 3.4.6 Δυο ακέραια πλαισιωμένοι κρίκοι L_1 και L_2 μας δίνουν ομοιομορφικές πολλαπλότητες μετά από χειρουργική αν και μόνο αν οι κρίκοι συνδέονται με κινήσεις R'_1, R_2, R_3 .

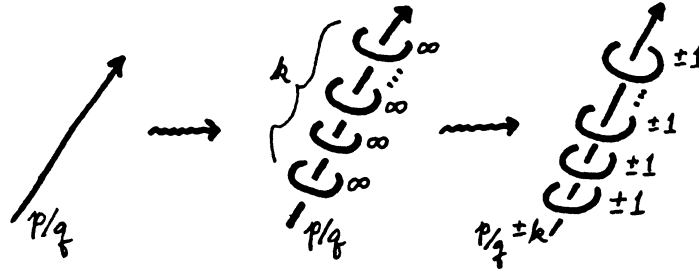
Παρατηρούμε πως μέχρι τώρα ο λογισμός Kirby ορίζεται για ακέραια

πλαισιωμένους κρίκους και δεν έχει γίνει καμία αναφορά για ρητή χειρουργική. Το ακόλουθο λήμμα μας εξηγεί το γιατί.

Λήμμα 3.4.7 (Rolfsen) Κάθε ρητή χειρουργική πάνω σε ένα κρίκο είναι ισοδύναμη με ακέραια χειρουργική σε κάποιον άλλο κρίκο.

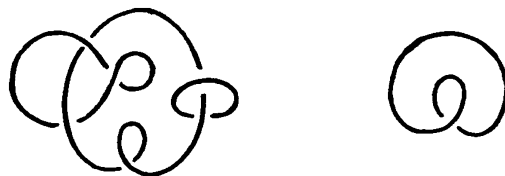
Αποδείξη. Έστω ένας πλαισιωμένος κρίκος $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ με πλαίσια συνιστωσών p_i/q_i για $i = 1, \dots, n$. Αν κάθε $q_i = 1$ τότε έχουμε ακέραια χειρουργική. Δουλεύουμε επαγωγικά στη τιμή του $q > 1$. Εισάγοντας κύκλους με πλαίσιο ± 1 σε κατάλληλες διασταυρώσεις μπορούμε να λύσουμε τον κόμβο. Μπορεί το αρχικό πλαίσιο να αλλάξει αλλά δεν θα αλλάξει ο παρανομαστής q . Στη συνέχεια μπορούμε να υποθέσουμε πως $p < q$. Πράγματι αν $p \geq q$ τότε κάνοντας τη διαίρεση έχουμε $p = kq + b$ με $0 < b < q$. Τότε εισάγοντας k το πλήθος κύκλους, όπως στο σχήμα 45, με πλαίσιο ± 1 μπορώ να κάνω το πλαίσιο b/q .

Σχήμα 45 Τροποποιώντας το πλαίσιο modulo q



Τέλος κάνοντας μια αρνητική στροφή κατά μήκος του λυμένου κόμβου μας δημιουργούμε νέο πλαίσιο $\frac{1}{-1+q/p} = \frac{p}{q-p}$. Όμως $0 < q - p < q$ και από επαγωγική υπόθεση έχουμε το αποτέλεσμα. Δουλεύοντας έτσι σε κάθε συνιστώσα του κρίκου L μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακέραια χειρουργική ισοδύναμη με την αρχική $\square$

Θα κλείσουμε την αναφορά μας στον λογισμό Kirby με μια εφαρμογή. Θα δείξουμε πως οι παρακάτω κρίκοι μας δίνουν την ίδια πολλαπλότητα.



Αρχικά με ισοτοπίες μπορούμε να φέρουμε το πρώτο σχήμα να μοιάζει ως δυο νήματα που διαπερνάνε τον μεσσαίο κύκλο με πλαίσιο $+1$. Κάνοντας μια κίνηση Fenn-Rourke αρνητικής φοράς, αφαιρούμε τον μεσσαίο κύκλο δημιουργώντας πλαίσια -1 στον αριστερά και δεξιά κύκλο. Όμως ο αριστερά κύκλος έχει ήδη πλαίσιο $+1$ άρα μπορούν να εξουδετερωθούν με μια R_2 κίνηση που δεν επηρεάζει την πολλαπλότητα. Με ισοτοπίες φτιάχνουμε το σχήμα να μοιάζει σαν ο αριστερά κύκλος να τρυπάει τον δεξί ο οποίος έχει πλαίσιο -1 από πριν. Όμως με μια Fenn-Rourke κίνηση θετικής φοράς καταστρέφουμε τον δεξί κύκλο και παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα.

4 Παράρτημα

Ορισμός 4.1 Με τον όρο πολλαπλότητα διάστασης n αναφερόμαστε σε έναν συμπαγές συνεκτικό Hausdorff τοπολογικό χώρο με αριθμήσιμη βάση, όπου κάθε σημείο p του χώρου έχει μια περιοχή U και έναν ομοιομορφισμό $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 4.2 Με τον όρο πολλαπλότητα διάστασης n με σύνορο εννοούμε μια πολλαπλότητα όπως πριν, που όμως έχει σημεία p που έχουν περιοχές U και ομοιομορφισμούς $\phi : U \rightarrow \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$ και $\phi(p) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ Το σύνολο των σημείων που έχουν τέτοιες περιοχές ονομάζεται σύνορο της πολλαπλότητας και είναι εύκολο να δούμε πως είναι μια πολλαπλότητα (χωρίς σύνορο) διάστασης $n - 1$.

Το παρακάτω θεώρημα μας λέει πως τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνορο μιας πολλαπλότητας με σύνορο είναι ανεξάρτητα του χάρτη. Με άλλα λόγια το σύνορο μιας πολλαπλότητας είναι καλά ορισμένο.

Θεώρημα 4.3 Invariance of Domain. Αν U υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, ομοιομορφισμός, τότε το U είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^n$.

Στην παρούσα εργασία όταν μια πολλαπλότητα πιθανώς να έχει σύνορο θα αναφερόμαστε σε αυτό. Δηλαδή μια πολλαπλότητα θα είναι μια πολλαπλότητα χωρίς σύνορο.

Ορισμός 4.4 Μια προσανατολίσιμη n -πολλαπλότητα M θα ονομάζουμε μια πολλαπλότητα με τη n -οστη ομάδα ομολογίας της να είναι το $H_n(M) = \mathbb{Z}$. Ένας κυκλικός γεννήτορας στην $H_n(M)$ θα λέγεται *προσανατολισμός* της M . Ένας ομοιομορφισμός $f : M \rightarrow M$ θα λέμε πως διατηρεί τους προσανατολισμούς αν ο αυτομορφισμός που επάγει στην $H_n(M)$ είναι ο ταυτοτικός. Αλλιώς θα λέμε ότι αντιστρέφει τους προσανατολισμούς.

Ορισμός 4.5 Μια *τριγωνοποίηση* ενός τοπολογικού χώρου X είναι ένα πλεγματοσύμπλεγμα K μαζί με έναν ομοιομορφισμό $f : K \rightarrow X$. Αν υπάρχει τέτοια τριγωνοποίηση, ο X θα λέγεται *τριγωνοποιήσιμος*.

Θεώρημα 4.6 *Moise*. Κάθε τοπολογική 3-πολλαπλότητα έχει μια μοναδική (ως προς ομοιομορφισμό) τριγωνοποίηση.

Στην εισαγωγή της εργασίας μιλήσαμε για το πόσο σημαντικά είναι τα θεωρήματα ταξινόμησης στα μαθηματικά. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα ταξινόμησης επιφανειών (2-πολλαπλοτήτων) με ή χωρίς σύνορο.

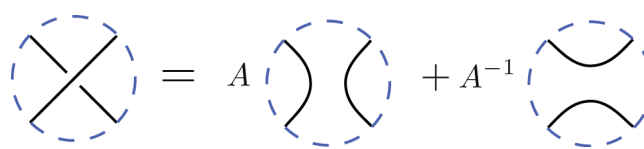
Θεώρημα 4.7 *Ταξινόμησης επιφανειών* Κάθε προσανατολίσιμη επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο) (κλειστή) είναι συνεκτικό άθροισμα τόρων $S^1 \times S^1$ με τρύπες. Κάθε μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο) είναι συνεκτικό άθροισμα προβολικών επιπέδων $\mathbb{RP}^2$ με τρύπες. Αν ο αριθμός των τρυπών είναι 0 η επιφάνεια δεν έχει σύνορο. Ο αριθμός των τόρων ή των προβολικών επιπέδων λέγεται *γένος* της επιφάνειας και ο αριθμός τρυπών είναι το πλήθος των συνοριακών συνιστωσών.

Ορισμός 4.8 Μια τοπολογική εμφύτευση του S^1 μέσα στην S^3 (ή ισοδύναμα στον $\mathbb{R}^3$) ονομάζεται *κόμβος*. *Κρίκος* είναι ξένη ένωση δύο ή περισσότερων κόμβων. Ένας *προσανατολισμός* στον κρίκο είναι μια επιλογή προσανατολισμού σε κάθε συνιστώσα του κρίκου.

Ορισμός 4.9 Έστω πως έχουμε έναν προσανατολισμένο κρίκο L . Το άθροισμα των θετικών διασταυρώσεων μείον το άθροισμα των αρνητικών διασταυρώσεων

ονομάζεται *writhe* του κρίκου.

Ορισμός 4.10 Αγκύλη Kauffman, πολυώνυμο Kauffman και Jones. Η αγκύλη Kauffman ενός κρίκου $\langle L \rangle$ (χωρίς να έχουμε ορίσει προσανατολισμό στις συνιστώσες) είναι ένα πολυώνυμο ως προς μεταβλητή A που υπακούει στις εξής σχέσεις:

$$\langle O \rangle = 1$$


$$\langle O \cup L \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$$

όπου O ο τετριμμένος κόμβος. Το πολυώνυμο Kauffman ενός προσανατολισμένου κρίκου δίνεται από τον τύπο

$$X(L) = (-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle$$

όπου $w(L)$ είναι το *writhe* του κρίκου και $|L|$ είναι ο μη προσανατολισμένος κρίκος. Αν στο τύπο του πολυώνυμου Kauffman αντικαταστήσουμε την μεταβλητή A με $t^{-\frac{1}{4}}$ τότε έχουμε το πολυώνυμο Jones $V(L)$ του κρίκου L .

Ορισμός 4.11 Ας υποθέσουμε πως μέσα στον $\mathbb{R}^3$, παίρνουμε τα σημεία $A_i = (i, 0, 0), i = 0, \dots, n+1$. Στη συνέχεια παίρνουμε τον κλειστό κύλινδρο $K = D(A_{\frac{n+1}{2}}, \frac{n+1}{2}) \times [0, 1]$. Μια *πλεξίδα* n -νημάτων ονομάζεται μια οικογένεια n το πλήθος καμπυλών μέσα στον κύλινδρο, με αρχές τα σημεία $(i, 0, 1)$ και τέλη τα σημεία $(j, 0, 0)$ για $i, j = 1, \dots, n$ ώστε να είναι μονότονες ως προς την z συντεταγμένη. Μια *αμιγής πλεξίδα* θα ονομάζεται μια πλεξίδα όπου κάθε νήμα i έχει για αρχή το σημείο $(i, 0, 1)$ και τέλος το $(i, 0, 0)$.

Ορισμός 4.12 Δυο συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \rightarrow Y$ θα λέγονται *ομοτοπικές* αν υπάρχει οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $f_t : X \rightarrow Y$, με $t \in [0, 1]$ ώστε $f_0 = f, f_1 = g$. Δυο χώροι X, Y θα λέγονται ομοτοπικά ισοδύναμοι αν υπάρχουν $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow X$, ώστε οι συνθέσεις $f \circ g, g \circ f$ να είναι ομοτοπικές με τις αντίστοιχες ταυτοτικές id_Y, id_X αντίστοιχα.

Ορισμός 4.13 Μια (καθολική) *ισοτοπία* μεταξύ δυο τοπολογικών υποχώρων, ενός τοπολογικού χώρου είναι μια οικογένεια ομοιομορφισμών f_t , ώστε η f_0 να

είναι ταυτοτική στον A και η $f_1(A) = B$. Στη παρούσα εργασία μιλάμε πάντα για καθολικές ισοτοπίες, οπότε θα αναφερόμαστε σε αυτές απλά ως *ισοτοπίες*.

Θεώρημα 4.14 *Ακολουθία Mayer-Vietoris* Έστω X τοπολογικός χώρος και $A, B \subset X$ ώστε $X = \text{int}A \cup \text{int}B$. Τότε υπάρχει μακρά ακριβής ακολουθία

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

όπου

$$i_* \oplus j_* : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$$

με i_*, j_* οι επαγόμενες των ενθέσεων $i, j : A \cap B \rightarrow A, B$ αντίστοιχα,

$$k_* - l_* : H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X)$$

όπου k_*, l_* οι επαγόμενες των ενθέσεων $k, l : A, B \rightarrow X$ αντίστοιχα και

$$\partial_* : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$$

ο συνοριακός ομομορφισμός.

5 Βιβλιογραφία

- [1] Bloch E.D. *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*. Birkhauser Boston, 1997
- [2] Bredon G.E. *Topology and Geometry*. Springer, 1993
- [3] Fomenko A.T and Matveev S.V. *Algorithmic and Computer Methods for 3-Manifolds*. Springer, 1997
- [4] Hatcher A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002
- [5] Kirby R. *A Calculus for Framed Links in S^3* . Inven. Math. 1978
- [6] Lickorish W.B.R. *Introduction to Knot Theory*. Springer, 1997
- [7] Massey W.S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer, 1967
- [8] Moise E. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer, 1977
- [9] Prasolov V.V. and Sossinsky A.B. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds. An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*. American Mathematical Society, 1997
- [10] Rolfsen D. *Knots and Links* AMS Chelsea Publishing, 2003
- [11] Saveliev N. *Lectures on the Topology of 3-Manifolds*. De Gruyter, 2010
- [12] Seifert H. and Threlfall *A Textbook of Topology*. Elsevier 1980
- [13] Seifert H. *Topology of 3-dimensional Fibered Spaces*. Elsevier 1980