



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών  
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ  
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΠΟ  
ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΒΑΒΥΛΩΝΑ ΕΩΣ ΤΟ ARS MAGNA - 1545 μ.Χ.  
(GIROLAMO CARDANO)

---

Παναγιώτα Φουσέκη

Δ201625

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Σταύρος Γ. Παπασταυρίδης

Ομότιμος Καθηγητής

Αθήνα

Ιανουάριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία  
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών  
για την απόκτηση του

## **Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη  
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την 24η Ιανουαρίου 2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από  
τους :

| <b>Ονοματεπώνυμο</b>       | <b>Βαθμίδα</b>        |
|----------------------------|-----------------------|
| ▪ Σταύρος Γ. Παπασταυρίδης | Ομότιμος καθηγητής    |
| ▪ Ευάγγελος Ράπτης         | Καθηγητής             |
| ▪ Διονύσιος Λάππας         | Αναπληρωτής Καθηγητής |

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την  
καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

| <b>Ονοματεπώνυμο</b>       | <b>Βαθμίδα</b>        |
|----------------------------|-----------------------|
| ▪ Σταύρος Γ. Παπασταυρίδης | Ομότιμος Καθηγητής    |
| ▪ Ευάγγελος Ράπτης         | Καθηγητής             |
| ▪ Διονύσιος Λάππας         | Αναπληρωτής Καθηγητής |

## Περιεχόμενα

|                                                                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ .....                                                                                | 2         |
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....                                                                                                           | 8         |
| ABSTRACT .....                                                                                                           | 9         |
| ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ .....                                                                                                     | 9         |
| ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ .....                                                                                                        | 10        |
| <b>1 ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ .....</b>                                                                                                 | <b>11</b> |
| 1.1 ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΑΙΓΥΠΤΙΩΝ.....                                                                             | 11        |
| 1.1.1 Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση στους Αιγύπτιους και κάποια παραδείγματα. ....                                    | 15        |
| 1.2 ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΠΥΡΟ ΤΟΥ RHIND. ....                                                                | 19        |
| 1.2.1 Το πρόβλημα 3 του πάπυρου του Rhind. (Katz V. J., 2009, p. 5).....                                                 | 19        |
| 1.3 ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΚΑΙ Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΥΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ. ....                                                | 20        |
| 1.3.1 Το πρόβλημα 19 από τον Πάπυρο της Μόσχας – ο τρόπος επίλυσης του ομοιάζει με σήμερα. (Katz V. J., 2009, p. 7)..... | 20        |
| 1.3.2 Το πρόβλημα 35 από τον Πάπυρο του Rhind– ο τρόπος επίλυσης του ομοιάζει με σήμερα. (Katz V. J., 2009, p. 7).....   | 21        |
| 1.3.3 Το πρόβλημα 26 από τον Πάπυρο του Rhind. (Katz V. J., 2009, pp. 7-9) .....                                         | 21        |
| 1.3.4 Το πρόβλημα 24 του πάπυρου του Rhind. (Katz & Parshall, 2014, p. 15).....                                          | 22        |
| 1.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ. ....                                                                                       | 23        |
| 1.4.1 Το πρόβλημα από τον Πάπυρο του Βερολίνου. (Katz & Parshall, 2014, pp. 15-16).....                                  | 23        |
| 1.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΥΣ ΑΙΓΥΠΤΙΟΥΣ .....                                                                                     | 25        |
| 1.5.1 Το πρόβλημα 50 από τον πάπυρο του Rhind (Katz V. J., 2009, p. 9).....                                              | 25        |
| 1.5.2 Ο υπολογισμός του όγκου μιας truncated πυραμίδας.....                                                              | 26        |
| 1.5.3 Το πρόβλημα 14 του πάπυρου της Μόσχας (Katz V. J., 2009, pp. 9-10) .....                                           | 26        |
| <b>2 ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ - ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ .....</b>                                                                                  | <b>28</b> |
| 2.1 ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑΣ .....                                                                         | 30        |
| 2.2 ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΒΑΒΥΛΩΝΙΩΝ .....                                                                                | 31        |
| 2.3 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΥΣ ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΥΣ .....                                                                                  | 31        |
| 2.4 Η ΆΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΒΑΒΥΛΩΝΙΩΝ.....                                                                                        | 33        |
| 2.4.1 Το πρόβλημα 5 από τον πίνακα AO 8862 (Waerden B. V., 1975, pp. 63-65) μεταφρασμένο από το ΜΚΤ Ι, p 113.....        | 34        |
| 2.4.2 Το πρόβλημα από τον πίνακα VAT8389 μεταφρασμένο από το ΜΚΤ Ι, p 323 (Waerden B. V., 1975, pp. 66-68).....          | 39        |

|          |                                                                                                                              |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4.3    | Το πρόβλημα από τον πίνακα BM 13901 - MKT III, p.8 no 14 (Waerden B. V., 1975, pp. 68-70)                                    | 42        |
| 2.5      | ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....                                                                                                | 43        |
| 2.5.1    | Τετραγωνικές ρίζες και κυβικές ρίζες στους Βαβυλωνίους.....                                                                  | 44        |
| 2.6      | ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....                                                                                                       | 46        |
| 2.6.1    | Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.....                                                                                      | 47        |
| 2.6.2    | Ο πίνακας BM 85200 και οι εξισώσεις 3 <sup>ου</sup> βαθμού .....                                                             | 48        |
| 2.7      | ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΥΣ ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΥΣ ΚΑΙ ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΕΣ ΤΡΙΑΔΕΣ.....                                                      | 54        |
| <b>3</b> | <b>ΤΑ ΚΙΝΕΖΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ .....</b>                                                                                          | <b>55</b> |
| 3.1      | ΑΡΧΑΙΑ ΚΙΝΕΖΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΕΙΜΕΝΑ .....                                                                                     | 55        |
| 3.1.1    | Chu boshu (περίπου 300 π.Χ) .....                                                                                            | 56        |
| 3.1.2    | Mawangdui, Changsha, Hunan (186-168 π.Χ) .....                                                                               | 57        |
| 3.1.3    | Han Bamboo Slips από το Zhangjiashan (Suan Shu Shu or Book of Numbers and Computations) – 186 π.Χ.....                       | 57        |
| 3.1.4    | Ο πίνακας πολλαπλασιασμού από την περίοδο της Δυναστείας των Qin. ....                                                       | 59        |
| 3.1.5    | Το έργο Shu εποχής από την Δυναστεία Qin <sup>21</sup> .....                                                                 | 60        |
| 3.1.6    | Tsinghua Bamboo Slips (περίπου 305 π.Χ ± 30 χρόνια) .....                                                                    | 60        |
| 3.1.7    | Jiuzhang suanshu (Nine Chapters on the Art of Mathematics) .....                                                             | 61        |
| 3.2      | Η ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.....                                                                           | 66        |
| 3.2.1    | Αρίθμηση και μέτρηση .....                                                                                                   | 68        |
| 3.2.2    | Βασικές αριθμητικές πράξεις .....                                                                                            | 69        |
| 3.2.3    | Αρνητικοί αριθμοί .....                                                                                                      | 70        |
| 3.2.4    | Πράξεις με κλάσματα .....                                                                                                    | 72        |
| 3.2.5    | Η μέθοδος “out-in” .....                                                                                                     | 73        |
| 3.2.6    | Η μέθοδος “gou-gu - 勾股” – Πυθαγόρειο Θεώρημα κατά τους Κινέζους .....                                                        | 75        |
| 3.2.7    | Η μέθοδος “ying bu zu” (της ψευδούς αντικατάστασης από τους αρχαίους Κινέζους) 78                                            |           |
| 3.3      | ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ 7 ΚΑΙ 8 ΤΟΥ JIUZHANG SUANSHU .....                                                           | 78        |
| 3.3.1    | Η μέθοδος “ying bu zu” για την επίλυση γραμμικών συστημάτων 2x2 .....                                                        | 78        |
| 3.3.2    | Η μέθοδος “fang cheng” για την επίλυση συστημάτων.....                                                                       | 82        |
| 3.4      | ΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΤΟΥ JIUZHANG SUANSHU (ΕΝΝΕΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΗΣ) ..... | 89        |

|          |                                                                                                                                                                                    |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.4.1    | Το πρόβλημα 53(方田 Fang tian: Square Fields) του Suan Shu Shu (Dauben, 算数書 Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary, 2008, pp. 152-153) | 89         |
| 3.4.2    | Η μέθοδος για την εύρεση τετραγωνικής ρίζας (kai fang) από το κεφάλαιο 4 του “Jiu zhang suan shu – The Nine Chapters”                                                              | 91         |
| 3.4.3    | Η μέθοδος για την εύρεση κυβικής ρίζας (kai li fang) από το κεφάλαιο 4 του “Jiu zhang suan shu – The Nine Chapters”                                                                | 99         |
| 3.5      | ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^2 + bx = c$                                                                                                                         | 104        |
| 3.5.1    | Το πρόβλημα 9.20                                                                                                                                                                   | 105        |
| 3.6      | ΜΕΣΑΙΩΝΙΚΑ ΚΙΝΕΖΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ                                                                                                                                                     | 106        |
| 3.6.1    | Επίλυση δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων                                                                                                                                  | 108        |
| <b>4</b> | <b>ΑΡΧΑΙΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΟΣ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ</b>                                                                                                                                                | <b>121</b> |
| 4.1      | ΟΙ ΕΠΙΡΡΟΕΣ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ                                                                                                                            | 121        |
| 4.2      | ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ                                                                                                                                                  | 122        |
| 4.2.1    | Οι Υπολογιστικοί πίνακες και οι ψηφίδες                                                                                                                                            | 125        |
| 4.2.2    | Κλάσματα στην αρχαία Ελλάδα                                                                                                                                                        | 126        |
| 4.3      | ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ, Ο ΠΡΩΤΟΣ ΈΛΛΗΝΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ                                                                                                                                     | 129        |
| 4.4      | ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ                                                                                                                                                                        | 131        |
| 4.4.1    | Πυθαγόρειοι και Γεωμετρία                                                                                                                                                          | 132        |
| 4.5      | ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ                                                                                                                                                                          | 134        |
| 4.5.1    | Δομή των Στοιχείων του Ευκλείδη                                                                                                                                                    | 134        |
| 4.5.2    | Το βιβλίο I των Στοιχείων και η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος                                                                                                                | 135        |
| 4.5.3    | Το βιβλίο II των Στοιχείων και η λεγόμενη «Γεωμετρική Άλγεβρα»                                                                                                                     | 138        |
| 4.5.4    | Οι προτάσεις II.5 και II.6 των Στοιχείων                                                                                                                                           | 141        |
| 4.5.5    | Πρόταση II.11 – άκρος μέσος λόγος                                                                                                                                                  | 147        |
| 4.5.6    | Πρόταση II.14 – Κατασκευή μέσης ανάλογης                                                                                                                                           | 149        |
| 4.5.7    | Παραβολή χωρίων κατ’ έλλειψην και παραβολή χωρίων κατ’ υπερβολήν – επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων                                                                                | 150        |
| 4.6      | ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ                                                                                                                                                       | 153        |
| 4.6.1    | Το Θυμαρίδειον επάνθημα                                                                                                                                                            | 154        |
| 4.7      | ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ                                                                                                                                                    | 156        |
| 4.8      | ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ                                                                                                                                                                          | 158        |

|          |                                                                                                                        |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.8.1    | Βιογραφία.....                                                                                                         | 158        |
| 4.8.2    | Αριθμητικά .....                                                                                                       | 159        |
| 4.8.3    | Οι μέθοδοι επίλυσης του Διόφαντου .....                                                                                | 161        |
| <b>5</b> | <b>ΙΝΔΙΑ.....</b>                                                                                                      | <b>170</b> |
| 5.1      | ΑΡΧΑΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΕΙΜΕΝΑ .....                                                                                        | 171        |
| 5.1.1    | <i>Āryabhaṭīya</i> και <i>Brāhmasphuṭa-siddhānta</i> (6 <sup>ος</sup> και 7 <sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ αντίστοιχα) ..... | 171        |
| 5.2      | ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ .....                                                                                            | 172        |
| 5.2.1    | Αρνητικοί αριθμοί και το μηδέν .....                                                                                   | 173        |
| 5.3      | ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ .....                                                                                 | 177        |
| 5.3.1    | Η μέθοδος των τριών , το verse 2.26 του <i>Āryabhaṭīya</i> . (Keller, 2006, pp. 107-108) ....                          | 177        |
| 5.3.2    | Γενικός κανόνας επίλυσης γραμμικών εξισώσεων - verse 2.30 του <i>Āryabhaṭa</i> (Katz & Parshall, 2014, p. 109).....    | 179        |
| 5.4      | ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ .....                                                                                   | 179        |
| 5.5      | ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ.....                                                                                           | 181        |
| 5.5.1    | Verse II.5 του “ <i>Baudhāyana-sulba-sūtra</i> ” (Katz & Parshall, 2014, p. 110).....                                  | 181        |
| 5.5.2    | Verse II.19 του “ <i>Āryabhaṭīya</i> ” (Keller, 2006, pp. 93-97) .....                                                 | 182        |
| 5.5.3    | Αναφορές στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων .....                                                             | 183        |
| 5.6      | ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΡΙΤΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.....                                                                               | 185        |
| 5.7      | Η ΣΧΟΛΗ ΤΗΣ ΚΕΡΑΛΑ (14 <sup>ο</sup> - 17 <sup>ο</sup> Μ.Χ ΑΙΩΝΑ) .....                                                 | 186        |
| 5.8      | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ – ΣΧΟΛΙΑ .....                                                                                              | 186        |
| 5.9      | Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΝΔΙΑ ΣΤΟ ΙΣΛΑΜ .....                                                                               | 187        |
| <b>6</b> | <b>ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΙΣΛΑΜ – ΑΡΑΒΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.....</b>                                                               | <b>189</b> |
| 6.1      | ΑΡΑΒΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ .....                                                                                                   | 191        |
| 6.2      | ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ.....                                                                                           | 193        |
| 6.2.1    | Ο όρος <i>al-jabr</i> .....                                                                                            | 193        |
| 6.2.2    | Ο όρος <i>al-muqābala</i> .....                                                                                        | 193        |
| 6.3      | AL-KHWĀRIZMĪ .....                                                                                                     | 194        |
| 6.3.1    | Δευτεροβάθμιες εξισώσεις από τον <i>al-Khwārizmī</i> .....                                                             | 195        |
| 6.4      | ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ABŪ KĀMIL SHUJĀʿ IBN ASLAM .....                                                       | 201        |
| 6.5      | ΑΌΡΙΣΤΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ (INDETERMINATE EQUATIONS) ΑΠΟ ΤΟΝ ABŪ KĀMIL SHUJĀʿ IBN ASLAM.....                                    | 203        |
| 6.6      | THĀBIT IBN QURRA (MATHEMATICS IN MEDIAVAL ISLAM, 2007, p. 547) .....                                                   | 204        |
| 6.7      | ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ .....                                                                                                        | 205        |

|          |                                                                                                                         |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.7.1    | <i>Al-Karajī</i> .....                                                                                                  | 205        |
| 6.7.2    | <i>Al-Samaw'al Ibn Yahya Al-Maghribi</i> .....                                                                          | 206        |
| 6.8      | OMAR KHAYYAM (1048-1131 M.X) (KATZ & PARSHALL, 2014, p. 165).....                                                       | 208        |
| 6.8.1    | <i>Η Άλγεβρα του Omar Khayyam</i> .....                                                                                 | 209        |
| 6.9      | SHARAF AL-DIN AL-TUSI (C. 1135-1213 M.X).....                                                                           | 211        |
| 6.10     | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....                                                                                                      | 212        |
| <b>7</b> | <b>ΜΕΣΑΙΩΝΙΚΗ ΕΥΡΩΠΗ .....</b>                                                                                          | <b>213</b> |
| 7.1      | LEONARDO DE PISA – FIBONACCI (C. 1170 – 1240 M.X).....                                                                  | 215        |
| 7.1.1    | <i>Πρόβλημα 1</i> .....                                                                                                 | 215        |
| 7.1.2    | <i>Πρόβλημα 2</i> .....                                                                                                 | 216        |
| 7.1.3    | <i>Liber abaci</i> .....                                                                                                | 216        |
| 7.1.4    | <i>Αναφορές σε άλλα έργα του Fibonacci</i> .....                                                                        | 221        |
| 7.2      | ΟΙ ΤΡΕΙΣ ABBACISTS ΤΗΣ ΦΛΩΡΕΝΤΙΑΣ .....                                                                                 | 222        |
| 7.3      | Η ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΙΤΑΛΙΑ .....                                                          | 223        |
| 7.3.1    | <i>Fond. Princ II.V. 152</i> .....                                                                                      | 224        |
| 7.3.2    | <i>Conv. Sopp. G.7.1135</i> .....                                                                                       | 224        |
| 7.4      | LUCA PACIOLI.....                                                                                                       | 225        |
| 7.5      | MASTER DARDI OF PISA .....                                                                                              | 226        |
| 7.6      | SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526 BOLOGNA) .....                                                                            | 228        |
| 7.7      | NICOLLO TARTAGLIA OF BRESCIA (1499-1557) – ANTONIO MARIA FIORE – GEROLAMO CARDANO Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΟΠΟΙΗΣΗΣ .....    | 229        |
| 7.8      | ΣΥΝΤΟΜΗ ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ – CARDANO (1501-1576).....                                                                            | 231        |
| 7.9      | ARS MAGNA - THE GREAT ART OR THE RULES OF ALGEBRA .....                                                                 | 232        |
| 7.9.1    | <i>Η λύση από το κεφάλαιο 11 του Ars Magna για την <math>x^3 + px = q</math>, (Cardano, 1545/1968, pp. 96-99)</i> ..... | 233        |
| 7.10     | Ο CARDANO ΚΑΙ Η ΠΡΩΤΗ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.....                                                                   | 238        |
|          | <b>ΙΔΕΕΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ .....</b>                                                                   | <b>239</b> |
|          | <b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....</b>                                                                                               | <b>239</b> |
|          | <b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ .....</b>                                                                                            | <b>241</b> |
|          | <b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....</b>                                                                                           | <b>245</b> |
|          | <b>ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ.....</b>                                                                                                   | <b>249</b> |
|          | <b>ΠΙΝΑΚΕΣ.....</b>                                                                                                     | <b>250</b> |
|          | <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>                                                                                               | <b>251</b> |

## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να παρακολουθήσει πως αναπτύχθηκαν και πως εξελίχθηκαν οι εξισώσεις δευτέρου και τρίτου βαθμού από την αρχαιότητα έως και το *Ars Magna*. Οι εξισώσεις έκαναν την εμφάνισή τους στα μαθηματικά από την αρχαιότητα ακόμα και πιο συγκεκριμένα από την περίοδο του Αιγυπτιακού πολιτισμού. Ο Ελληνικός Πολιτισμός είναι αυτός που διαφοροποιήθηκε σε σχέση με τους υπόλοιπους καθώς εισήγαγε την έννοια της απόδειξης. Στην αρχή αναπτύχθηκαν κυρίως μέσα από την γεωμετρία και η προσπάθεια επίλυσης τους γίνεται γεωμετρικά. Η μη ύπαρξη και χρήση συμβόλων έκανε την διαχείρισή τους δύσκολη και μόνο μετά την εισαγωγή του Ινδικού συστήματος αρίθμησης έγινε πιο εύκολος ο τρόπος διαχείρισης. Η μη ύπαρξη – αποδοχή των αρνητικών αριθμών, αλλά και των μιγαδικών (οι οποίοι ανακαλύφθηκαν πολύ αργά τον 16<sup>ο</sup> αιώνα μ. Χ περίπου) αποτελούσε ένα ακόμα εμπόδιο στην ανάπτυξή τους. Οι Άραβες ήταν οι πρώτοι που άρχισαν να έχουν μια προσέγγιση πιο αλγεβρική, παρόλα αυτά οι επιρροές τους από την αρχαία Ελλάδα και η ανάγκη για γεωμετρική απόδειξη τους οδήγησε -περιορίσε στην μη χρήση αρνητικών αριθμών. Στην Ευρώπη η επιστημονική αναγέννηση ξεκίνησε από την Ιταλία. Η ανάπτυξη του εμπορίου, οδήγησε πολλούς Ιταλούς εμπόρους να ταξιδέψουν και να έρθουν σε επαφή με τον Αραβικό κυρίως πολιτισμό. Ο Ιταλός *Fibonacci* στα ταξίδια του ήρθε σε επαφή με την άλγεβρα των Αράβων αλλά και το Ινδικό – Αραβικό σύστημα αρίθμησης. Αυτό το σύστημα αρίθμησης διευκόλυνε κατά πολύ τους υπολογισμούς και έγινε σύντομα αποδεκτό. Το έργο του *Liber abaci* αποτέλεσε έργο σταθμό. Η μετάφραση των Αραβικών κειμένων στα Λατινικά βοήθησε στην περαιτέρω ανάπτυξη της Αραβικής άλγεβρας και σταδιακά οδήγησε στην επίλυση των τριτοβάθμιων εξισώσεων από τον *Cardano* στο έργο του *Ars Magna*. Στο *Ars Magna* μας δίνεται επίσης και η λύση μιας μορφής των τεταρτοβάθμιων, όπως όμως αυτή έχει περιγράψει από τον *Ludovico Ferrari* μαθητή και υπηρέτη του *Cardano*. Ακόμα φαίνεται να υπάρχει μια σύνδεση των εξισώσεων με την γεωμετρία καθώς ο *Cardano* στο *Ars Magna* δίνει και γεωμετρική προσέγγιση εκτός από την αλγεβρική.



## Abstract

The purpose of this thesis is to monitor how the second- and third-degree equations evolved from antiquity to *Ars Magna*. The equations made their appearance in mathematics from antiquity even more specifically from the period of Egyptian civilization. The Greek civilization is the one that differed in relation to the others as it introduced the concept of proof. In the beginning they developed mainly through geometry and the effort to solve them, became geometric. The non-existence of symbols made them difficult to manage and it became easier only after the introduction of the Indian numbering system. The non-existence and non - acceptance of negative numbers and complex numbers (which were discovered very late in the 16th century approx.) was another obstacle to their development. The Arabs were the first to start having a more algebraic approach, yet their influences from ancient Greece and the need for geometric proof led them-limited to the non-use of negative numbers. In Europe, the scientific renaissance began in Italy. The development of trade led many Italian traders to travel and become acquainted mainly with the Arab culture, which at that time was descending. The Italian *Fibonacci* in his travels met the algebra of the Arabs and the Indian-Arabic numbering system. This numbering system greatly facilitated the calculations and soon became widely acceptable. *Liber Abbaci* was very influential to the forthcoming mathematicians. The translation of Arabic texts into Latin helped to the further development of algebra and gradually led to the resolution of the cubic equations from *Cardano* in his work *Ars Magna*. In *Ars Magna* we are also given the solution of a form of quartic equations, by *Ludovico Ferrari* pupil and servant of *Cardano*. At that time, it still seems to be a link between equations and geometry as *Cardano* in *Ars Magna* gives a geometric approach in addition to algebraic.

## Λέξεις κλειδιά

Δευτεροβάθμιες εξισώσεις, τριτοβάθμιες εξισώσεις, Quadratic, cubic, *Ars Magna*

## Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όσους ανθρώπους μου συμπαραστάθηκαν και με βοήθησαν σε αυτή την διαδρομή. Θα ήθελα όμως ιδιαίτερα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με ανέχτηκαν όταν οι υποχρεώσεις μου στο μεταπτυχιακό απαιτούσαν αρκετές ώρες μελέτης, αλλά και απουσίας μου από το σπίτι. Κατά τη διάρκεια της παρούσης διπλωματικής ο επιβλέπων κύριος Σταύρος Παπασταυρίδης, ήταν πάντα πρόθυμος να με συμβουλέψει, να με καθοδηγήσει και να μου λύσει τις όποιες απορίες. Τέλος, θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους κυρίους Λάππα και Ράπτη για την συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή της παρούσας διπλωματικής. Η συμβολή όλων των καθηγητών του μεταπτυχιακού και των συμφοιτητών υπήρξε πολύτιμη και οι γνώσεις που μας παρείχαν θα είναι το έναυσμα για περαιτέρω μελέτη και επαγγελματική και προσωπική εξέλιξη.

## 1 Αιγύπτιοι

Η αρχή της γεωργίας στην κοιλάδα του Νείλου στην Αίγυπτο, χρονολογείται περίπου πριν 7000 χρόνια. Η πρώτη δυναστεία, η οποία κυβέρνησε τόσο το Βασίλειο της Πάνω Αιγύπτου (η κοιλάδα του ποταμού), όσο και το κάτω Βασίλειο (το δέλτα του Νείλου) χρονολογείται περίπου το 3100 π.Χ. Η κληρονομιά των πρώτων Φαραώ περιλαμβάνει μια ανώτερη κάστα (*elite*) από αξιωματούχους και ιερείς, μια πολυτελή αυλή και τους ίδιους τους βασιλείς (*Φαραώ*), οι οποίοι κατείχαν έναν ενδιάμεσο ρόλο μεταξύ θνητών και θεών.

Ο ρόλος αυτός των βασιλέων ενίσχυσε την ανάπτυξη των Αιγυπτιακών μνημείων αρχιτεκτονικής, στα οποία περιλαμβάνονται οι πυραμίδες, οι οποίες κατασκευάστηκαν ως βασιλικά ταφικά μνημεία και τους μεγάλους ναούς του *Luxor* και του *Karnak*.

Εκείνη την περίοδο, ξεκίνησε να αναπτύσσεται και η γραφή. Πολλά από τα πρώτα γραπτά, αφορούν την λογιστική και την καταγραφή διαφόρων αγαθών. Υπήρχαν πολλά συστήματα μέτρησης, ανάλογα με ποιο αγαθό μετρούσαν. Δεδομένου όμως ότι υπήρχαν λίγα σύμβολα, πολλά από αυτά σήμαιναν διαφορετικά πράγματα, ανάλογα με το σύστημα μέτρησης. Οι γραφείς ήταν αυτοί που προήγαγαν την ανάπτυξη των μαθηματικών τεχνικών. (Katz V. J., 2009, pp. 2-3)

### 1.1 Το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων

Δυο διαφορετικά είδη Αιγυπτιακής γραφής αναπτύχθηκαν. Τα *ιερογλυφικά* – που χρησιμοποιούνταν στις επιγραφές των μνημείων και τα *ιερατικά* (*γραφή των ιερέων*) που γινόταν με ένα πινέλο και μελάνι, πάνω σε πάπυρο. Αυτά τα δυο είδη γραφής έχουν συσχετιστεί και με δυο αριθμητικά συστήματα.

Το πρώτο είναι ένα δεκαδικό σύστημα, με ομάδες και διαφορετικά σύμβολα για το 1, 10, 100, 1000 κτλ. Το δεύτερο, επίσης δεκαδικό, ήταν ένα κρυπτογραφημένο σύστημα με διαφορετικά σύμβολα για τους αριθμούς 1 έως 10 και μετά διαφορετικά σύμβολα για κάθε πολλαπλάσιο του 10 μέχρι το 100 κτλ. Εκτός από το κλάσμα  $\frac{2}{3}$ , όλα τα υπόλοιπα εκφράζονταν ως άθροισμα κλασματικών μονάδων. Για παράδειγμα  $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ .

Τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν με βάση δυο πυλώνες:

- Την Αρχιτεκτονική και
- την Διακυβέρνηση - Διοίκηση.

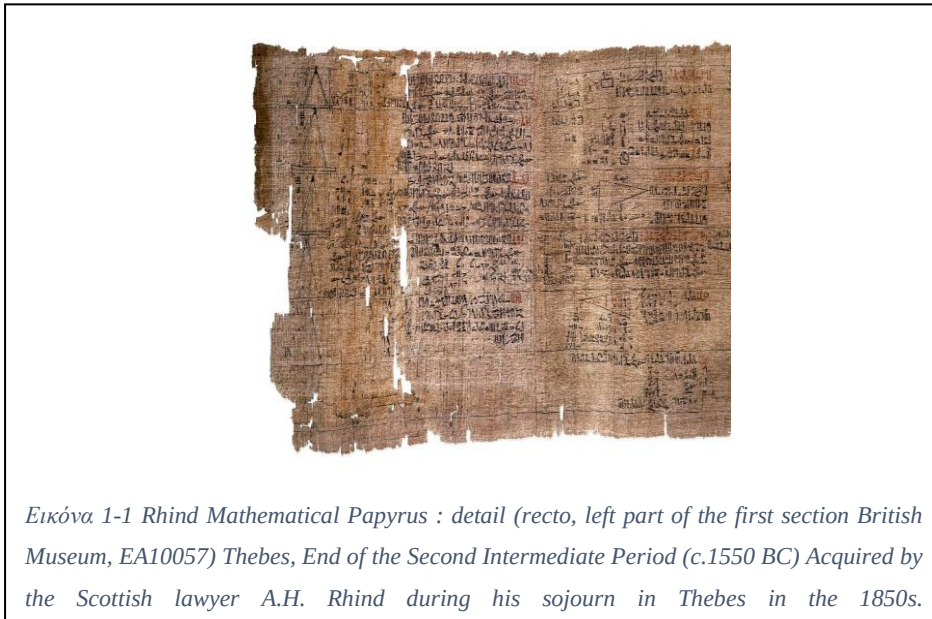
Σχετικά με τις Αρχιτεκτονική και τα όσα ευρήματα έχουμε, παρατηρούμε ότι οι χτίστες χρησιμοποιούσαν τον σχεδιασμό υπό κλίμακα, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατείχαν μαθηματικές τεχνικές που σχετίζονταν με την **αναλογία** και τις χρησιμοποιούσαν τόσο στον σχεδιασμό, όσο και την κατασκευή.

Οι γραφείς υποστήριζαν την διακυβέρνηση των Φαραώ ασχολούμενοι με την συλλογή και τον διαμοιρασμό των αγαθών, τον υπολογισμό του ημερολογίου, την απόδοση των φόρων και την πληρωμή μισθών, ως συνέπεια είναι πιθανό να ανέπτυξαν και αρκετές μαθηματικές τεχνικές.

Κύρια πηγή για τα μαθηματικά της εποχής αποτελούν οι μοναδικοί διασωθέντες πάπυροι, που περιέχουν μαθηματικά προβλήματα και τις λύσεις τους:

### 1. **Ο πάπυρος του Rhind**

αγοράστηκε στο Luxor το 1858 από τον *Alexander H. Rhind* (1833-1863)



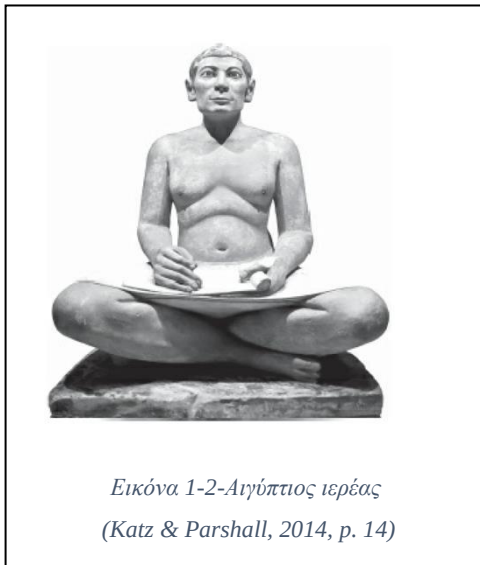
*Εικόνα 1-1 Rhind Mathematical Papyrus : detail (recto, left part of the first section British Museum, EA10057) Thebes, End of the Second Intermediate Period (c.1550 BC) Acquired by the Scottish lawyer A.H. Rhind during his sojourn in Thebes in the 1850s.*

### 2. **Ο πάπυρος της Μόσχας**

αγοράστηκε το 1893 από τον *Vladimir S. Golenishchev* (1856-1947)

Σε αυτούς τους δυο πάπυρους μπορούμε να δούμε αριθμητικές μεθόδους και τεχνικές που χρησιμοποιούσαν οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι, αλλά η σημαντικότερη μαθηματική έννοια που εμφανίζεται είναι η **αναλογία**. Τα Αιγυπτιακά προβλήματα τα οποία στηρίζονται στην έννοια της αναλογίας, αποτελούν ίσως τα πρώτα προβλήματα που θα μπορούμε να πούμε ότι εντάσσονται στα “σχολικά” μαθηματικά και τα οποία απαιτούν τον προσδιορισμό μιας άγνωστης ποσότητας. Συνεπώς, το γεγονός ότι εμφανίζονται στους σωζόμενους

Αιγυπτιακούς πάπυρους, τα καθιστά τα αρχαιότερα και απλούστερα αλγεβρικά προβλήματα που υπάρχουν. (Katz & Parshall, 2014, pp. 12-13)



Εικόνα 1-2-Αιγύπτιος ιερέας  
(Katz & Parshall, 2014, p. 14)

Σύμφωνα με τους Αρχαίους Έλληνες οι ρίζες των μαθηματικών φέρονται να είναι στον Αιγυπτιακό πολιτισμό. (Waerden B. V., 1975, p. 15) Σχετικές αναφορές έχουν ο Αριστοτέλης στα Μεταφυσικά Α 1 [981b](#):

“ὅθεν ἤδη πάντων τῶν τοιούτων  
κατεσκευασμένων αἱ μὴ πρὸς ἡδονὴν μηδὲ πρὸς  
τάναγκαῖα τῶν ἐπιστημῶν εὐρέθησαν, καὶ πρῶτον ἐν  
τούτοις τοῖς τόποις οὗ πρῶτον ἐσχόλασαν· διὸ περὶ  
Αἴγυπτον αἱ μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνέστησαν,  
ἐκεῖ γὰρ ἀφείθη σχολάζειν τὸ τῶν ἱερέων ἔθνος.”

#### Μετάφραση:

“Και όταν πια όλες αυτές οι επινοήσεις ολοκληρώθηκαν, ανακαλύφθηκαν οι γνώσεις που δεν συνδέονται ούτε με την ευχαρίστηση, ούτε με τις ανάγκες, και αυτό έγινε για πρώτη φορά σε εκείνες τις περιοχές όπου ακριβώς οι άνθρωποι είχαν ελευθερία χρόνου<sup>i</sup>. Έτσι οι μαθηματικές τέχνες ξεκίνησαν πρώτα στα μέρη της Αιγύπτου<sup>ii</sup>, γιατί εκεί δόθηκε η δυνατότητα τηςσχόλης στην κάστα των ιερέων” (Κάλφας, 2009).

ο Ηρόδοτος στο II 108,4-109,3<sup>1</sup>:

[2.108.4] κατέταμνε δὲ τοῦδε εἵνεκα τὴν χώραν ὁ βασιλεύς· ὅσοι τῶν Αἰγυπτίων μὴ ἐπὶ τῷ ποταμῷ ἔκτηντο τὰς πόλεις ἀλλ’ ἀναμέσους, οὗτοι, ὅκως [τε] ἀπίοι ὁ ποταμὸς, σπανίζοντες ὑδάτων πλατυτέροισι ἐχρέωντο τοῖσι πόμασι, ἐκ φρεάτων χρεώμενοι. τούτων μὲν δὴ εἵνεκα κατετμήθη ἡ Αἴγυπτος. [2.109.1] κατανεῖμαι δὲ τὴν χώραν Αἰγυπτίοισι ἅπασι τοῦτον ἔλεγον τὸν βασιλέα, κλῆρον ἴσον ἐκάστῳ τετράγωνον διδόντα, καὶ ἀπὸ τούτου τὰς προσόδους ποιήσασθαι, ἐπιτάξαντα ἀποφορὴν ἐπιτελέειν κατ’ ἐνιαυτόν. [2.109.2] εἰ δέ τινας τοῦ κλήρου ὁ ποταμὸς τι παρέλοιτο, ἐλθὼν ἂν πρὸς αὐτὸν ἐσήμεινε τὸ γεγενημένον· ὁ δὲ ἔπεμπε τοὺς ἐπισκεψομένους καὶ ἀναμετρήσοντας ὅσῳ ἐλάσσων ὁ χῶρος γέγονε, ὅκως τοῦ λοιποῦ κατὰ λόγον τῆς τεταγμένης ἀποφορῆς τελείῃ. [2.109.3] δοκέει δέ μοι ἐνθεῦτεν

---

<sup>1</sup> Ψηφιακή βιβλιοθήκη της Αρχαίας Ελληνικής Γραμματείας - [http://www.greek-language.gr/digitalResources/ancient\\_greek/library/browse.html?text\\_id=30&page=56](http://www.greek-language.gr/digitalResources/ancient_greek/library/browse.html?text_id=30&page=56)

γεωμετρίη εύρεθεῖσα ἐς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν. πόλον μὲν γὰρ καὶ γνώμονα καὶ τὰ δώδεκα μέρηα τῆς ἡμέρης παρὰ Βαβυλωνίων ἔμαθον οἱ Ἕλληνες.

#### Μετάφραση:

[2.108.4] Τη χώρα πάντως ο βασιλιάς την κομματιάσε για τούτον τον λόγο: όσοι από τους Αιγυπτίους είχαν τις πόλεις τους όχι κοντά στον ποταμό αλλά στα ενδότερα, όταν ο ποταμός αποσυρόταν, είχαν έλλειψη νερού και έπιναν γλυφότερο, από τα πηγάδια που χρησιμοποιούσαν. Γι' αυτόν τον λόγο κομματιάστηκε η Αίγυπτος.

[2.109.1] Και μου είπαν ότι αυτός ο βασιλιάς μοίρασε τη γη σε όλους τους Αιγυπτίους δίνοντας στον καθένα από έναν ίσο τετράγωνο κλήρο, και με αυτόν εξασφάλισε τα δημόσια έσοδα ορίζοντας να καταβάλλεται κάθε χρόνο ένας φόρος. [2.109.2] Αν όμως τύχαινε ο ποταμός να παρασύρει κάποιο μέρος από τον κλήρο κανενός, αυτός πήγαινε στον βασιλιά και του ανέφερε το γεγονός, και ο βασιλιάς έστελνε επιθεωρητές και μετρούσαν πόσο είχε λιγοστέψει το χωράφι ώστε από εκεί και πέρα ο ιδιοκτήτης να πληρώνει το ανάλογο μέρος του ορισμένου φόρου. [2.109.3] Και έχω τη γνώμη ότι έτσι ανακαλύφθηκε η γεωμετρία και ανέβηκε στην Ελλάδα. Όσο για το ηλιακό ρολόι και τον γνώμονα και τα δώδεκα μέρη της ημέρας οι Έλληνες τα έμαθαν από τους Βαβυλωνίους.

και ο Δημόκριτος γράφει:

*«Κανείς δεν με ξεπερνά στις κατασκευές γραμμών με αποδείξεις, ούτε αυτοί που τέντωναν τα σχοινιά στην Αίγυπτο.»*

Αυτοί που τέντωναν τα σχοινιά στην Αίγυπτο πρέπει να είναι οι λεγόμενοι Αρπεδοναύτες, των οποίων το βασικό εργαλείο ήταν μια τεντωμένη χορδή. (Gandz, Die Harpenodapten, p. B I 255)



Εικόνα 1-3- Αρπεδονάπτες (Rowe, 2018, pp. 243-251)

Ήταν σωστή η υπόθεση του Αριστοτέλη ότι οι ιερείς ήταν οι κύριοι υπεύθυνοι για την ανάπτυξη των μαθηματικών; Υποθέτει σωστά, πως η ελευθερία χρόνου, τους οδήγησε στην ανακάλυψη γνώσεων που δεν συνδέονται ούτε με την ευχαρίστηση, ούτε με τις καθημερινές ανάγκες των ανθρώπων; Όπως γινόταν με τους Έλληνες σύγχρονους του

Αριστοτέλη ή μήπως η σωστή άποψη είναι αυτή του Ηροδότου και του Δημόκριτου, ότι αυτοί οι οποίοι “καλλιέργησαν” την γεωμετρία ήταν οι άνθρωποι που ενδιαφέρονταν για την εφαρμογή της;

Στο παλιό Βασίλειο των Αιγυπτίων (3200-2000 π. Χ) και ακόμα και κατά τη διάρκεια του Μεσαίου Βασιλείου (2000-1800 π. Χ), την περίοδο δηλαδή που χρονολογούνται οι δυο διασωθέντες πάπυροι του Rhind και την Μόσχας, με τους οποίους θα ασχοληθούμε, δεν υπήρχε καλά οργανωμένη τάξη - κάστα ιερέων. Τα καθήκοντα των ιερέων ασκούσαν από λαϊκούς, μαζί με τα κανονικά τους επαγγέλματα.

Συνεπώς, ο Αριστοτέλης ξεκινά από μια εντελώς “εσφαλμένη” θεώρηση. Θα παρατηρήσουμε ότι τα γεωμετρικά προβλήματα των κειμένων μας είναι εξ’ ολοκλήρου σχεδιασμένα και βασισμένα σε πρακτικά ζητήματα. Δεν ζητείτε η απόδειξη ή η κατασκευή κάποιου θεωρήματος, προβλήματος, αλλά μας απασχολεί ο υπολογισμός εμβαδών σε κομμάτια γης ή ο υπολογισμός του όγκου μιας αποθήκης για την αποθήκευση σιτηρών. Προβλήματα τέτοιου είδους απασχολούν κάποιον αξιωματούχο ή κατασκευαστή που έχει να αναγείρει μια σιταποθήκη και όχι κάποιον ιερέα. (Waerden B. V., 1975, pp. 16-17)

Ας δούμε όμως αρχικά κάποια στοιχεία για την αριθμητική των Αιγυπτίων και τις υπολογιστικές τους μεθόδους.

### 1.1.1 Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση στους Αιγύπτιους και κάποια παραδείγματα.

Η πρόσθεση δεν παρουσίαζε κάποια δυσκολία, ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει ο τρόπος που χρησιμοποιούσαν για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση.

Προκειμένου να πολλαπλασιάσουν και να διαιρέσουν διπλασίαζαν ή υποδιπλασίαζαν την αρχική ποσότητα και μετά υπολόγιζαν τα αθροίσματα.

|                                                           |                                                |                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} \text{II} \text{N} \\ 21 \end{array}$   | $\begin{array}{r} \text{I} \\ 1 \end{array}$   | $\begin{array}{r} 1 \quad 12 \\ 2 \quad 24 \\ 4 \quad 48 \\ 8 \quad 96 \\ \hline \text{Sum } 144 \end{array}$ |
| $\begin{array}{r} \text{III} \text{N} \\ 42 \end{array}$  | $\begin{array}{r} \text{II} \\ 2 \end{array}$  |                                                                                                               |
| $\begin{array}{r} \text{III} \text{N} \\ 84 \end{array}$  | $\begin{array}{r} \text{III} \\ 4 \end{array}$ |                                                                                                               |
| $\begin{array}{r} \text{III} \text{N} \\ 441 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \text{III} \\ 6 \end{array}$ |                                                                                                               |

Εικόνα 1-4- Rhind πρόβλημα 32 (Waerden B. V., 1975,

#### 1.1.1.1 Το πρόβλημα 32 του πάπυρου του Rhind. (Waerden B. V., 1975, p. 18)

“Να υπολογισθεί το γινόμενο  $12 \times 12$ .”



Με χρήση του σύγχρονου τρόπου γραφής και διαβάζοντας κατά στήλη από αριστερά προς τα δεξιά, έχουμε τον παρακάτω υπολογισμό.

|          |           |
|----------|-----------|
| 1        | 12        |
| 2        | 24        |
| 4        | 48        |
| 8        | 96        |
| Άθροισμα | 48+96=144 |
| 4+8=12   |           |

Table 1-1

#### 1.1.1.2 Το πρόβλημα 69 του πάπυρου του Rhind. (Waerden B. V., 1975, p. 19)

“Πολλαπλασίασε το 80 μέχρι να βρεις 1120.”

Σήμερα το παραπάνω πρόβλημα θα μεταφραζόταν έως:

*Ποιο είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του 1120 με το 80 και θα το συμβολίζαμε με 1120:80.*

Για τους Αρχαίους Αιγύπτιους όμως ο παραπάνω υπολογισμός γινόταν ως εξής:

|          |              |
|----------|--------------|
| 1        | 80           |
| 10       | 800          |
| 2        | 160          |
| 4        | 320          |
| Άθροισμα | 800+320=1120 |
| 10+4=14  |              |

Table 1-2

Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού των γινομένων και των πηλίκων διατηρήθηκε μέχρι και τον Μεσαίωνα. Το “*duplicatio*” – διπλασιασμός και το “*mediatio*” – υποδιπλασιασμός κατείχαν ξεχωριστή θέση ως υπολογιστικοί μέθοδοι. (Waerden B. V., 1975, pp. 16-19)

Ας δούμε όμως και κάποια προβλήματα που σχετίζονται με την έννοια της αναλογίας και παρουσιάζονται τόσο στον πάπυρο της Μόσχας, όσο και στον πάπυρο του Rhind και είναι πιο “σύνθετα” υπολογιστικά.



#### 1.1.1.3 Το πρόβλημα 72 του πάπυρου του Rhind. (Katz & Parshall, 2014, p. 14)

Ζητά να υπολογισθεί πόσα καρβέλια  $resu^2$  30, μπορούμε να φτιάξουμε από την ίδια ποσότητα αλεύρι που φτιάξαμε 155 καρβέλια  $resu$  20.

Μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι το παραπάνω πρόβλημα απαιτεί την επίλυση της εξίσωσης:

$$\frac{x}{30} = \frac{155}{20}.$$

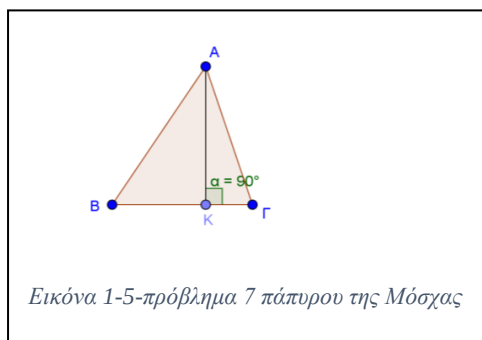
Equation 1-1

Ο Αιγύπτιος γραφέας προκειμένου να επιλύσει το παραπάνω πρόβλημα εκτελεί πρώτα την διαίρεση 155:20 και μετά πολλαπλασιάζει το αποτέλεσμα με το 30 για να βρει  $232\frac{1}{2}$ .

Από τον τρόπο με τον οποίο χειρίζονταν προβλήματα σαν το παραπάνω μπορούμε να αντιληφθούμε ότι κατανοούσαν την έννοια της ισότητας δυο ανάλογων ποσών και επιπλέον ήταν σε θέση να εφαρμόσουν το “χιαστί” γινόμενο. Αντιλαμβάνονταν δηλαδή ότι όταν δυο λόγοι είναι ίσοι, τότε τα χιαστί γινόμενά τους είναι ίσα.

Ας δούμε ένα ακόμα πρόβλημα που αφορά τα ανάλογα ποσά, ελαφρώς πιο δύσκολο από το προηγούμενο. Ασχολείται με ένα τρίγωνο και την εύρεση της βάσης και του ύψους του, χωρίς να είναι δοσμένο μέσα σε ρεαλιστικό πλαίσιο. Φαίνεται σαν ένα πρόβλημα πιο “σχολικό”, το οποίο δίνεται για εξάσκηση.

#### 1.1.1.4 Το πρόβλημα 7 του πάπυρου της Μόσχας. (Katz & Parshall, 2014, p. 15)



“Δοθέντος ενός τριγώνου με εμβαδόν 20 και λόγο ύψους προς την βάση ίσο με  $2\frac{1}{2}$ , να βρεθούν το ύψος και η βάση του τριγώνου.”

Για την επίλυση του ο γραφέας ξεκίνησε πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν με το 2, ώστε να βρει 40 που είναι το εμβαδόν του αντίστοιχου ορθογωνίου.

---

<sup>2</sup>1  $resu = \frac{\text{number of loaves}}{\text{number of hekats}}$ , μονάδα μέτρησης των Αιγυπτίων.

Επίσης το 1  $hekat = \frac{1}{8}$  bushel (Katz & Parshall, 2014, p. 14)

Σε αυτό το σημείο φαίνεται πως αντιλαμβανόμαστε πως ήταν σε θέση να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου και ενός τριγώνου και κατανοούσαν την σχέση που τα συνδέει.

Στη συνέχεια ο ιερέας – γραφέας, γνωρίζοντας ότι το γινόμενο που βρήκε και ο λόγος του ύψους προς την βάση ισούται με το τετράγωνο του ύψους, βρίσκει ότι το τετράγωνο του ύψους είναι 100 και το ύψος είναι 10.

Πολλαπλασιάζοντας το 10 με τον αντίστροφο του  $2\frac{1}{2}$ , υπολογίζει πως η βάση είναι 4.

Με τον σύγχρονο τρόπο γραφής το παραπάνω πρόβλημα θα ήταν ως εξής:

“Δοθέντος ενός τριγώνου με εμβαδόν 20 και λόγο ύψους προς την βάση ίσο με  $2\frac{1}{2}$ , να βρεθούν το ύψος και η βάση του τριγώνου”.

$$\frac{AK}{BF} = 2\frac{1}{2}$$

$(ABF) = 20$ , άρα  $BF \times AK = 40$ , σε αυτό το σημείο φαίνεται πως γνώριζαν την σχέση που συνέδεε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με το εμβαδόν ενός τριγώνου με την αυτή βάση και το αυτό ύψος.

Επειδή :

$$AK \cdot BF = 40$$

Equation 1-2

και

$$\frac{AK}{BF} = 2\frac{1}{2}$$

Equation 1-3

έχουμε:

Από την εξίσωση 1-3 έχουμε:

$$BF = \frac{2}{5} AK$$

Equation 1-4

Αντικαθιστώντας την 1-4 στην 1-2 έχουμε:

$$\frac{2}{5} AK \cdot AK = 40$$

$$2AK^2 = 200$$

$$AK^2 = 100,$$

$$AK = 10$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι “πρακτικό”, αλλά φαίνεται ότι μπορούσαν να λύσουν και πιο “αφηρημένα” προβλήματα όπως το πρόβλημα 24 από τον πάπυρο του Rhind<sup>3</sup>.

## 1.2 Εξισώσεις πρώτου βαθμού από τον πάπυρο του Rhind.

Το παρακάτω πρόβλημα μας οδηγεί σε μια εξίσωση πρώτου βαθμού και αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για τον τρόπο που οι Αιγύπτιοι αντιμετώπιζαν τα κλάσματα.

### 1.2.1 Το πρόβλημα 3 του πάπυρου του Rhind. (Katz V. J., 2009, p. 5)

“Πως θα χωρίσουμε 6 καρβέλια ψωμί σε 10 άντρες;”

Η απάντηση που δίνεται είναι ότι κάθε άντρας θα πάρει  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ . Ο γραφέας προκειμένου να ελέγξει την λύση πολλαπλασιάζει το παραπάνω με το 10. Η παραπάνω απάντηση μπορεί να μας φαίνεται πιο προβληματική σε σχέση με την δική μας απάντηση που θα ήταν  $\frac{3}{5}$ , αναπαριστά όμως τον τρόπο σκέψης των Αιγυπτίων και πως χειρίζονταν τέτοια προβλήματα. Έχουμε 6 καρβέλια ψωμί. Θα χωρίσουμε τα 5 σε 2 ίσα μέρη, οπότε κάθε άντρας θα έχει λάβει το  $\frac{1}{2}$  από ένα καρβέλι. Το 6<sup>ο</sup> καρβέλι ψωμί που απομένει, θα το χωρίσουμε σε 10 ίσα μέρη και ο καθένας θα πάρει από  $\frac{1}{10}$ . Τελικά, κάθε άντρας θα πάρει  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$  δηλαδή  $\frac{12}{20} = \frac{6}{10}$ .

Πώς θα λύναμε το παραπάνω πρόβλημα σήμερα; Θα οδηγούμασταν στην εξίσωση:

$$\frac{6}{x} = 10$$

Equation 1-5

$$6 = 10x$$

$$x = \frac{6}{10}$$

Οι Αιγύπτιοι όμως περιορίζονταν στις κλασματικές μονάδες και δεν θα μπορούσαν να οδηγηθούν στην παραπάνω λύση, εάν και γνώριζαν την έννοια της αναλογίας και χρησιμοποιούσαν τα “χιαστί” γινόμενα, όπως έχουμε ήδη δει στην παράγραφο 1.1.1.3.

---

<sup>3</sup> Ο πάπυρος του Rhind περιέχει αρκετά προβλήματα τα οποία ανάγονται σε γραμμικές εξισώσεις.

### 1.3 Εξισώσεις πρώτου βαθμού και η μέθοδος της ψευδούς αντικατάστασης.

Τόσο ο πάπυρος του Rhind όσο και της Μόσχας που έχουν διασωθεί, περιέχουν προβλήματα που σήμερα κάποιος θα τα κατέτασσε στις κατηγορίες των γραμμικών εξισώσεων, των αναλογιών και της γεωμετρίας.

Σχετικά με την επίλυση των εξισώσεων του πρώτου βαθμού παρουσιάζονται δυο διαφορετικές μέθοδοι. Η πρώτη μέθοδος ομοιάζει με τον τρόπο που εμείς θα επιλύαμε μια εξίσωση πρωτοβάθμια, ενώ η δεύτερη είναι η **μέθοδος της ψευδούς αντικατάστασης**.

#### 1.3.1 Το πρόβλημα 19 από τον Πάπυρο της Μόσχας – ο τρόπος επίλυσης του ομοιάζει με σήμερα. (Katz V. J., 2009, p. 7)

“Να βρεθεί ο αριθμός που αν ληφθεί  $1\frac{1}{2}$  φορές και του προστεθεί το 4, το άθροισμα θα είναι 10.”

Σήμερα θα γράφαμε:

Να βρεθεί ο αριθμός  $x$  για τον οποίο ισχύει  $1\frac{1}{2}x + 4 = 10$ .

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, ο Αιγύπτιος γραφέας ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζει την διαφορά  $10-4=6$
2. Βρίσκει τον αριθμό για τον οποίο  $1\frac{1}{2}y = 6$ , δηλαδή τον αντίστροφο του  $1\frac{1}{2}$ , που είναι το  $\frac{2}{3}$
3. Υπολογίζει το γινόμενο  $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ .
4. Άρα η λύση είναι το 4.

Σήμερα, η διαδικασία που θα ακολουθούσαμε για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος δεν διαφέρει από αυτή που χρησιμοποίησαν οι Αιγύπτιοι.

$$\begin{aligned}1\frac{1}{2}x + 4 &= 10 \Leftrightarrow \\1\frac{1}{2}x &= 10 - 4 \Leftrightarrow \\1\frac{1}{2}x &= 6 \Leftrightarrow \\x &= \frac{6}{1\frac{1}{2}} = 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow \\x &= 4\end{aligned}$$

Με τρόπο που μοιάζει με τον δικό μας τρόπο επίλυσης, βλέπουμε και την λύση του προβλήματος 35 από τον πάπυρο του Rhind.

*1.3.2 Το πρόβλημα 35 από τον Πάπυρο του Rhind– ο τρόπος επίλυσης του ομοιάζει με σήμερα. (Katz V. J., 2009, p. 7)*

“Να βρεθεί το μέγεθος μιας σέσουλας που απαιτεί  $3\frac{1}{3}$  διαδρομές για να γεμίσει ένα δοχείο μεγέθους 1 hekat”

Προκειμένου να επιλυθεί το παραπάνω πρόβλημα διαίρεσαν απευθείας το 1 με το  $3\frac{1}{3}$  και έδωσαν την απάντηση  $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ .

Πώς θα το επιλύαμε το συγκεκριμένο πρόβλημα σήμερα:

Θα οδηγούμασταν στην εξίσωση:

$$\frac{10}{3}x = 1$$

*Equation 1-6*

Άρα  $x = \frac{3}{10}$ , δηλαδή  $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος επίλυσης εξισώσεων όμως από τους Αιγυπτίους δεν ήταν αυτός, αλλά η μέθοδος της **ψευδούς αντικατάστασης**. Ήταν μια πολύ συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης εξισώσεων εκείνη την εποχή, αλλά και σε μεταγενέστερους λαούς. Σε αυτή την μέθοδο, υπέθεταν ως λύση μια τιμή που ήταν “βολική”, συνήθως όμως λανθασμένη και την προσάρμοζαν χρησιμοποιώντας την έννοια της αναλογίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα το παρακάτω πρόβλημα.

*1.3.3 Το πρόβλημα 26 από τον Πάπυρο του Rhind. (Katz V. J., 2009, pp. 7-9)*

«Να βρεθεί ο αριθμός στον οποίο εάν προστεθεί το  $\frac{1}{4}$  αυτού, το άθροισμα να είναι 15»

Προκειμένου να επιλύσει αυτό το πρόβλημα ο Αιγύπτιος ιερέας, υπέθεσε πως η λύση του είναι το 4. Είναι ένας αριθμός ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί με το  $\frac{1}{4}$ , δίνει ακέραια τιμή, άρα «βολική». Υποθέτει ότι η λύση λοιπόν είναι το 4 και παρατηρεί ότι  $1\frac{1}{4} \cdot 4 = 5$ . Πολλαπλασιάζει τότε το 4 με τον λόγο  $\frac{15}{5}$  και οδηγείται στην σωστή λύση που είναι το 3.

Ένα ακόμα πρόβλημα στο οποίο χρησιμοποιείται η **μέθοδος της ψευδούς αντικατάστασης** είναι το πρόβλημα 24 από τον πάπυρο του Rhind.

### 1.3.4 Το πρόβλημα 24 του πάπυρου του Rhind. (Katz & Parshall, 2014, p. 15)

“Να βρεθεί μια ποσότητα τέτοια ώστε όταν προστεθεί στο  $\frac{1}{7}$  του εαυτού της να ισούται με 19.”

Προκειμένου να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα ο γραφέας πραγματοποιεί τους εξής χειρισμούς:

Ας υποθέσουμε ότι η απάντηση είναι το 7. Τότε  $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$ . Πρέπει να πολλαπλασιάσω το 8 με μια ποσότητα ώστε να βρω 19. Η απάντηση είναι  $2(\frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ . Εάν πολλαπλασιάσω αυτό με τον αριθμό 7, τότε η απάντηση είναι  $16(\frac{1}{2} + \frac{1}{8})$ .

Ποιος θα μπορούσε να είναι ο τρόπος σκέψης του, σε αυτή την περίπτωση:

Ξεκινά την επίλυση του προβλήματος δίνοντας μια πιθανή απάντηση τυχαία, χρησιμοποιεί, δηλαδή την **μέθοδο της ψευδούς αντικατάστασης**.

Θέτει το 7 ως μια πιθανή απάντηση και αφού αντικαταστήσει στην εξίσωση προσπαθεί να διορθώσει την απόκλιση – το σφάλμα που έχει. Παρατηρεί ότι  $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$  και όχι 19 που είναι το ζητούμενο. Πολλαπλασιάζει το 8 με έναν αριθμό ώστε να βρει 19 και βρίσκει ότι η απάντηση είναι  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ . Πολλαπλασιάζει αυτή την απάντηση με το 7. Τότε η απάντηση είναι  $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ .

Στα σύγχρονα μαθηματικά η λύση του παραπάνω προβλήματος θα ήταν η λύση της εξίσωσης:

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

Equation 1-7

Για την επίλυση της ο γραφέας υπέθεσε ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι το 7. Επέλεξε αυτό ως λύση, καθώς το  $\frac{1}{7}$  του 7, είναι ακέραιος αριθμός. Παρατήρησε όμως ότι  $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$ , το οποίο δεν αποτελεί την ζητούμενη λύση. Για το λόγο αυτό και επειδή κατανοούσε ότι τα ποσά  $x + \frac{1}{7}x$  και  $x$  είναι ανάλογα, προσπάθησε να βρει το πολλαπλάσιο του 8 που ισούται με 19. Στο επόμενο βήμα βρήκε πως αυτή η τιμή είναι το  $2(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 2\frac{3}{8}$  και πολλαπλασιάζοντας αυτή την τιμή με το 7, κατέληξε ότι η λύση της εξίσωσης είναι  $16(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = 16\frac{5}{8}$ .

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 1.1 οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν μόνο κλασματικές μονάδες και όλα τα κλάσματα τα παρουσίαζαν ως άθροισμα κλασματικών μονάδων. Το μόνο κλάσμα το οποίο δεν παρουσιαζόταν ως κλασματική μονάδα ήταν το  $\frac{2}{3}$ .

Η επίλυση βήμα-βήμα μπορεί να θεωρηθεί ως αλγόριθμος για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων αυτής της μορφής από τους Αιγυπτίους, δεν γίνεται όμως αναφορά, ούτε από πού προήλθε, ούτε και γιατί θεωρήθηκε σωστή και αποτελεσματική. Αποτελεί όμως απόδειξη για τον τρόπο που αντιλαμβάνονταν τα ανάλογα ποσά.

#### 1.4 Πρόβλημα δευτέρου βαθμού.

Το πρόβλημα από τον πάπυρο του Βερολίνου<sup>4</sup> αποτελεί και το μοναδικό πρόβλημα δευτέρου βαθμού το οποίο σώζεται. Προκειμένου να το επιλύσουν χρησιμοποιούν και εδώ την **μέθοδο της ψευδούς αντικατάστασης**.

##### 1.4.1 Το πρόβλημα από τον Πάπυρο του Βερολίνου. (Katz & Parshall, 2014, pp. 15-16)

«Να διαιρεθεί μια τετράγωνη περιοχή εμβαδού 100 τετραγωνικών cubits<sup>5</sup> σε δυο άλλες τετράγωνες περιοχές, όπου ο λόγος των πλευρών των δυο τετραγώνων είναι 1 προς  $\frac{3}{4}$ .»

Ο γραφέας προκειμένου να επιλύσει το παραπάνω πρόβλημα ξεκινά υποθέτοντας ότι οι πλευρές των ζητούμενων τετραγώνων είναι 1 και  $\frac{3}{4}$  αντίστοιχα. Μετά υπολόγισε το άθροισμα των εμβαδών τους  $1^2 + (\frac{3}{4})^2 = 1\frac{9}{16}$ . Το ζητούμενο άθροισμα όμως είναι ίσο με 100. Σε αυτό το σημείο αντιλαμβάνεται ότι ο λόγος των εμβαδών δεν έχει την ίδια αναλογία με τις πλευρές και ότι πρέπει να συγκρίνει τις πλευρές των τετραγώνων. Παίρνει λοιπόν την τετραγωνική ρίζα του  $1\frac{9}{16}$ , περίπου  $1\frac{1}{4}$  και το συνέκρινε με την τετραγωνική ρίζα του 100, έστω το 10. Επειδή το 10 είναι 8 φορές μεγαλύτερο από το  $1\frac{1}{4}$ , κατέληξε ότι οι ζητούμενες πλευρές πρέπει να είναι 8πλάσιες των υποτιθέμενων, άρα 8 cubits και 6 cubits αντίστοιχα.

Βλέπουμε πως αντιλαμβάνεται την σχέση που συνδέει τις δυο πλευρές, δηλαδή ότι ο λόγος  $\frac{4}{3}$  δεν μπορεί να μεταφερθεί και στα εμβαδά και ανάγει την πληροφορία του στις πλευρές. Βρίσκει ότι εάν προσθέσει τα εμβαδά, με τις πλευρές που έχει υποθέσει δηλαδή 1

---

<sup>4</sup> Ένα μικρό τμήμα παπύρου, που χρονολογείτε περίπου την ίδια εποχή με τον πάπυρο του Rhind και της Μόσχας.

<sup>5</sup> Ένα Αιγυπτιακό cubit ισούται με 18 inches = 45.72 cm.

και  $\frac{3}{4}$ , τότε το άθροισμα των εμβαδών θα είναι  $1\frac{9}{16}$  και όχι 100 που είναι το ζητούμενο. Δεν συγκρίνει ευθέως όμως το 100 με το  $1\frac{9}{16}$ , αφού ο λόγος που γνωρίζει είναι ο λόγος των πλευρών και όχι των εμβαδών.

Ας γράψουμε το παραπάνω πρόβλημα με την σημερινή του μορφή και ας δούμε πως θα ήταν ένας τρόπος λύσης του.

Έστω  $x$  και  $y$  οι πλευρές των δυο ζητούμενων τετραγώνων αντίστοιχα. Τότε:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & (1) \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} & (2) \end{cases}$$

*Equation 1-8*

Από την σχέση 2 έχουμε ότι:  $x = \frac{4y}{3}$  (3)

Αντικαθιστώντας την σχέση (3) στην σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4y}{3}\right)^2 + y^2 &= 100 \Leftrightarrow \\ \frac{16y^2}{9} + \frac{9y^2}{9} &= 100 \Leftrightarrow \\ \frac{25y^2}{9} &= 100 \Leftrightarrow \\ 25y^2 &= 900 \Leftrightarrow \\ y^2 &= 36 \end{aligned}$$

*Equation 1-9*

Αρά  $y = 6$ , αφού πρόκειται για μήκος πλευράς τετραγώνου και συνεπώς η τιμή πρέπει να είναι θετική.

Αντικαθιστώντας για  $y = 6$  στην (2) προκύπτει ότι  $x = 8$ .

Είναι εύκολο κάποιος να παρατηρήσει τον διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων. Στην σύγχρονη λύση για παράδειγμα απορρίψαμε την λύση  $y = -6$ , επειδή πρόκειται για πλευρά τετραγώνου, όταν ο Αιγύπτιος ιερέας όμως στην δική του λύση χρησιμοποιεί την τετραγωνική ρίζα του 100 και την τετραγωνική ρίζα του  $1\frac{1}{4}$  δεν έχει την ανάγκη να απορρίψει κάποια λύση και δεν γνωρίζει ότι μπορεί να υπάρχει και κάποια άλλη. Στον σύγχρονο τρόπο λύσης επίσης δεν αναφερόμαστε κάπου στην έννοια την αναλογίας, δεν την χρησιμοποιούμε αντιθέτως με την μέθοδο των Αιγυπτίων.



Παρατηρούμε λοιπόν ότι με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης και επιστήμης, οι τρόποι αντιμετώπισης και επίλυσης ακόμα και τόσο απλών προβλημάτων έχουν αλλάξει και σήμερα υπερτερεί ο αλγεβρικός τρόπος σκέψης και επίλυσης.

Τα παραπάνω “Αλγεβρικά” παραδείγματα, αποτελούν τις μοναδικές μαρτυρίες στο σύνολο των διασωθέντων Αιγυπτιακών παπύρων. Δεν γνωρίζουμε κατά πόσο οι Αιγύπτιοι γνώριζαν και άλλες “αλγεβρικές” έννοιες. (Katz & Parshall, 2014, p. 16)

Όπως είδαμε από τους Αιγύπτιους έχει διασωθεί ένα και μοναδικό πρόβλημα δευτέρου βαθμού. Οι ερμηνεία είναι διττή. Εύκολα μπορεί κάποιος να συμπεράνει ότι δεν έχουν διασωθεί άλλα ευρήματα, λόγω και της ευαισθησίας του πάπυρου ως υλικού ή πολύ απλά ίσως και να μην είχαν καταφέρει να αναπτύξουν περισσότερο τις εξισώσεις.

### 1.5 Γεωμετρία στους Αιγυπτίους

Αν και σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι η μελέτη των εξισώσεων δεν θα μπορούσε κάποιος να μην αναφερθεί έστω και λίγο στην Γεωμετρία. Η Γεωμετρία δημιουργήθηκε πολύ νωρίς και προέκυψε από την καθημερινότητα των ανθρώπων. Όπως ορίζεται και ετυμολογικά είναι η τέχνη της μέτρησης της γης. Οι Αιγύπτιοι ήταν σε θέση να γνωρίζουν πώς να υπολογίσουν τον εμβαδά ορθογωνίων, τριγώνων και τραπεζίων όπως και εμείς και όπως είδαμε παραπάνω γνώριζαν την σχέση που συνέδεε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με το εμβαδόν ενός τριγώνου.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος που υπολόγιζαν το εμβαδόν του κύκλου.

#### 1.5.1 Το πρόβλημα 50 από τον πάπυρο του Rhind (Katz V. J., 2009, p. 9)

«Σε μια κυκλική περιοχή διαμέτρου 9, ποιο είναι το εμβαδόν;»

Προκειμένου να γίνει ο παραπάνω υπολογισμός ο γραφέας αφαιρεί το  $\frac{1}{9}\delta$ , από το  $\delta$ , όπου  $\delta$  η διάμετρος και βρίσκει υπόλοιπο 8. Υπολογίζει το  $8^2$  και καταλήγει ότι το εμβαδόν είναι ίσο με 64. Η παραπάνω διαδικασία θα μπορούσε να περιγράψει από τον τύπο

$$E = \left( \delta - \frac{1}{9} \delta \right)^2 = \left( \frac{8}{9} \delta \right)^2.$$

Equation 1-10

Εάν συγκρίνουμε τον παραπάνω τύπο με τον σημερινό, δηλαδή με το  $E = \frac{\pi}{4} \delta^2$ , προκύπτει πως οι Αιγύπτιοι είχαν βρει μια προσέγγιση του  $\pi \approx 3,16049$ . Δεν γνωρίζουμε

όμως πως προέκυψε και γιατί υπολογιζόταν ως τετράγωνο του  $\frac{8}{9}\delta$  και όχι ως πολλαπλάσιο του τετραγώνου της διαμέτρου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το παραπάνω πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού ενός κύκλου δεν είναι ένα μεμονωμένο πρόβλημα. Στο πάπυρο του Rhind υπάρχουν αρκετά προβλήματα που χρησιμοποιούν τον τύπο  $V = Bh$  για τον υπολογισμό του όγκου του κυλίνδρου, όπου  $B$  είναι το εμβαδόν της κυκλικής βάσης. Φαίνεται επίσης πως μπορούσαν να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός παραλληλεπιπέδου γνωρίζοντας τα μήκη των 3 διαστάσεων του μήκους, του πλάτους και του ύψους.

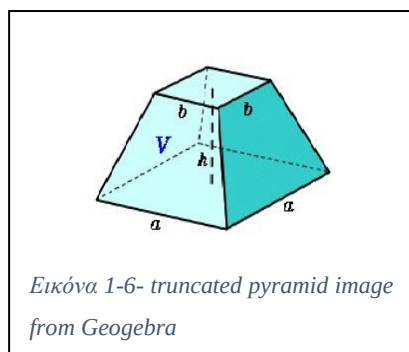
### 1.5.2 Ο υπολογισμός του όγκου μιας truncated πυραμίδας.

Δεδομένου, ότι στην Αίγυπτο χτίστηκαν πυραμίδες, θα ήταν αναμενόμενο ότι γνώριζαν με κάποιον τρόπο να υπολογίζουν τον όγκο της πυραμίδας. Δεν έχουν βρεθεί όμως σχετικά ευρήματα που να το αποδεικνύουν. Υπάρχει όμως ένα πρόβλημα στον πάπυρο του Rhind σχετικά με τον υπολογισμό του *seked* (slope= κλίση) μιας πυραμίδας και υπολογίζεται ως τις οριζόντιες μονάδες προς 1 κάθετη μονάδα ύψους. Οι χτίστες θα έπρεπε να γνωρίζουν αυτή την τιμή κατά την κατασκευή.

Το *seked* επηρεάζει την συνεφαπτομένη της γωνίας κλίσης των εδρών της πυραμίδας και κάποιος εύκολα μπορεί να τις υπολογίσει από τις τιμές που δίνονται στα προβλήματα. Οι τιμές αυτές συνήθως είναι προσεγγίσεις (ή κοντινές) αυτών που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των 3 μεγάλων πυραμίδων της Γκίζας.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα 14 από τον πάπυρο της Μόσχας που περιέχει έναν τύπο υπολογισμού του όγκου μιας *truncated* πυραμίδας. Μιας πυραμίδας με τετράγωνη βάση, δηλαδή που έχει κοπεί το πάνω μέρος της. (Katz V. J., 2009, p. 9)

### 1.5.3 Το πρόβλημα 14 του πάπυρου της Μόσχας (Katz V. J., 2009, pp. 9-10)



“Εάν κάποιος σου πει ότι μια *truncated* (κούλουρη) πυραμίδα έχει 6 για ύψος, μήκος πλευράς μεγάλης βάσης 4 και πλευρά βάσης 2 στην κορυφή, θα τετραγωνίσεις το 4 και το αποτέλεσμα είναι 16. Εάν διπλασιάσεις το 4, το αποτέλεσμα είναι 8. Αν τετραγωνίσεις το 2, το αποτέλεσμα είναι 4. Προσθέτεις  $16 + 8 + 4$  και βρίσκεις 28. Παίρνεις το  $\frac{1}{3}$  του 6 και βρίσκεις 2. Παίρνεις 2 φορές το 28 και βρίσκεις 56, θα δεις ότι είναι σωστό.”

56, θα δεις ότι είναι σωστό.”

Σήμερα, γνωρίζουμε ότι ο όγκος μιας truncated (κούλουρης) πυραμίδας δίνεται από τον τύπο:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

*Equation 1-11*

όπου  $a$  το μήκος της πλευράς της βάσης,  $h$  το ύψος και  $b$  το μήκος της πλευράς της πάνω βάσης. Συνεπώς για την παραπάνω πυραμίδα θα είχαμε:

Έστω 6 το ύψος, 4 το μήκος της πλευράς της κάτω βάσης και 2 η πλευρά της πάνω βάσης, τότε αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο βλέπουμε ότι:

$$V = \frac{6}{3}(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = \frac{6}{3}(16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = 56.$$

*Equation 1-12*

Παρατηρούμε ότι, πρόκειται για την διαδικασία που περιέγραψε ο Αιγύπτιος ιερέας. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως ο τρόπος που περιέγραφαν ένα πρόβλημα και την λύση του δεν είχε την μορφή που δίνουμε σήμερα με συγκεκριμένα βήματα και τύπους. Δεν γίνεται τέτοιου είδους αναφορά. Ο τρόπος είναι περιγραφικός, χωρίς να εξηγείται ο τρόπος σκέψης ή η προέλευση της λύσης.

Σήμερα, ο όγκος μιας πυραμίδας με τετράγωνη βάση δίνεται από τον τύπο:

$$V = \frac{1}{3}a^2h$$

*Equation 1-13*

,όπου  $a$  είναι η πλευρά του τετραγώνου της βάσης και  $h$  το ύψος.

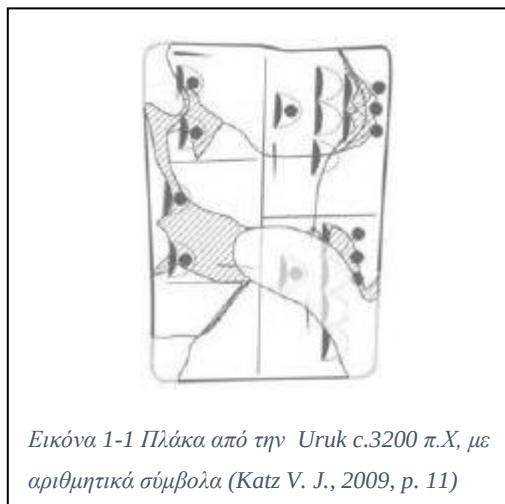
Δεν έχει βρεθεί αναφορά στον παραπάνω τύπο του όγκου μιας πυραμίδας με τετράγωνη βάση, είναι εύκολο όμως να οδηγηθείς σε αυτόν, εάν στον τύπο που προκύπτει από το παραπάνω πρόβλημα, αντικαταστήσεις το  $b$ , το μήκος δηλαδή της πλευράς της πάνω βάσης με  $b = 0$ . Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι μάλλον τον γνώριζαν. Δεν γνωρίζουμε όμως, πως κατέληξαν σε αυτόν τον τύπο και ποια η προέλευσή του. (Katz V. J., 2009, p. 10)

Ο Αιγυπτιακός πολιτισμός είναι ο πρώτος που άφησε κάποιου είδους μαθηματική κληρονομιά στους μετέπειτα λαούς. Τα μαθηματικά εκείνης της περιόδου θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν εμπειρικά. Δεν υπάρχουν ευρήματα μαθηματικών αποδείξεων και αλγορίθμων με την έννοια της δομημένης και αυστηρής λύσης όπου ακολουθούνται συγκεκριμένα βήματα. Δεν αποκλείεται να είχαν στο νου τους κάποιου είδους συλλογισμό ή

να ακολουθούσαν δεδομένα βήματα, αλλά δεν έχει βρεθεί κάπου αυτό καταγεγραμμένο. Οι λύσεις δίνονται περιγραφικά και τα προβλήματα εστιάζονται κυρίως σε προβλήματα που προέρχονται από την καθημερινότητα. Μπορούμε να δούμε ότι χειρίζονταν εξαιρετικά τα κλάσματα και την έννοια της αναλογίας δυο μεγεθών και στην γεωμετρία είχαν την ικανότητα να υπολογίσουν μέχρι και τον όγκο κάποιων στερεών, όπως η κούλουρη πυραμίδα που αναφέρθηκε παραπάνω.

Εάν και χαρακτηριστικό της περιόδου όπως προαναφέρθηκε είναι ότι τα προβλήματα που περιέχονται στους σωζόμενους πάπυρους προήλθαν κυρίως από την καθημερινότητα και ήταν εμπειρικά, κάποιος εύκολα μπορεί να αντιληφθεί ότι προβλήματα όπως το πρόβλημα 14 από τον πάπυρο της *Μόσχας* που αναφέρεται στην παράγραφο 1.5.3 είναι πιο τεχνικό και δύσκολα θα προήλθε αποκλειστικά από την καθημερινότητα. Κάποιοι από αυτούς τους όγκους μπορεί να προήλθαν από την ανάγκη υπολογισμού όγκου σιταποθηκών.

## 2 Βαβυλώνιοι - Μεσοποταμία



Εικόνα 1-1 Πλάκα από την Uruk c.3200 π.Χ, με αριθμητικά σύμβολα (Katz V. J., 2009, p. 11)

Ο πολιτισμός της Μεσοποταμίας είναι ενδεχομένως ελαφρώς αρχαιότερος από τον Αιγυπτιακό πολιτισμό. Αναπτύχθηκε στην κοιλάδα των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη, ξεκινώντας κάπου την 5<sup>η</sup> χιλιετία π.Χ. Στην αρχή υπήρχαν πολλές μικρές πόλεις - κράτη, αλλά μετά η περιοχή ενοποιήθηκε υπό την δυναστεία των Akkad, η οποία διήρκεσε περίπου από το 2350 έως το 2150 π. Χ. Σχεδόν αμέσως μετά η Τρίτη δυναστεία των Ur άρχισε να εξαπλώνεται ώσπου απέκτησε σχεδόν τον πλήρη έλεγχο της Νότιας Μεσοποταμίας. Αυτή η δυναστεία δημιούργησε ένα μεγάλο κεντρικό και γραφειοκρατικό κράτος. Συγκεκριμένα δημιούργησε ένα μεγάλο σύστημα από σχολές γραφέων που εκπαιδεύαν “μέλη της κυβέρνησης” (members of the bureaucracy). Αν και η δυναστεία των Ur κατέρρευσε περίπου το 2000 π.Χ, τα μικρά κρατίδια (πόλεις – κράτη) που την διαδέχθηκαν συνέχισαν να έχουν ανάγκες από γραφείς (numerate scribes). Στην περιοχή ήκμασαν πολλά βασίλεια, ένα εκ των οποίων ήταν και το Βασίλειο της Βαβυλώνας και το οποίο με βασιλιά τον Χαμουραμί το 1800 π. Χ περίπου κατέκτησε όλα τα υπόλοιπα.

Η γραφή την Μεσοποταμία ξεκίνησε πιθανόν στην πόλη *Uruk*, περίπου την ίδια εποχή με την Αίγυπτο, κάπου στο τέλος της 4<sup>ης</sup> χιλιετίας π.Χ. Η γραφή ξεκίνησε και εκεί, όπως και στην Αίγυπτο κυρίως από τις ανάγκες της καταγραφής των αγαθών, της απόδοσης φόρων και της λογιστικής. Ο ναός, η κατοικία του προστάτη θεού (της προστάτιδας θεάς) της κάθε πόλης, κατείχε μεγάλα κομμάτια καλλιεργήσιμης γης και πολλά κοπάδια ζώων όπως κατσίκες και πρόβατα. Οι ιερείς του ναού διαχειρίζονταν αυτά τα υπάρχοντα για να παρέχουν τα απαραίτητα αγαθά για τη διαβίωση του θεού (της θεάς) και των πιστών ακολούθων. Στον ναό της θεάς *Inana* της πόλης *Uruk*, οι ιερείς συμβόλιζαν τα νούμερα με *εικονογράμματα* πάνω σε μικρές πήλινες πλάκες. Αναπαριστούσαν τα αντικείμενα που καταμετρήθηκαν ή μετρήθηκαν σε βάρος ή μήκος. Για παράδειγμα 5 *onoïds* συμβόλιζαν 5 δοχεία λαδιού. Το αρχαιότερο εύρημα που αφορά Μαθηματικά και μάλιστα φαίνεται να είναι “*σχολικά*” μαθηματικά είναι από εκείνη την χρονική περίοδο ο πίνακας W1908,76<sup>6</sup>. Σε αυτό τον πίνακα χρησιμοποιούνται 3 διαφορετικά μαθηματικά σύμβολα για να αναπαραστήσουν το μήκος καθώς γίνεται ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας. Τα νούμερα είναι τέτοια (όλα πολλαπλάσια του 60) που μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για “*σχολικά*” μαθηματικά. Οι φόροι που επιβάλλονταν, το εμπόριο που αναπτύχθηκε και η ανακάλυψη της γραφής ως εργαλείο λογιστικής και καταγραφής από την κυβέρνηση, δημιούργησαν πρόσφορο έδαφος για την ανάπτυξη των μαθηματικών.

Η γραφή γινόταν σε πήλινα πλακίδια με τη χρήση γραφίδας. Κάποια από αυτά τα πήλινα πλακίδια έχουν διασωθεί και μεταφραστεί. Πολλά από αυτά περιλάμβαναν μαθηματικά προβλήματα και τις λύσεις τους ή μαθηματικούς πίνακες. Η μεγάλη πλειονότητα των πινακίδων ανάγεται στην εποχή του Χαμουραμπί, ενώ μικρότερες συλλογές ανάγονται στην περίοδο των απαρχών του πολιτισμού της Μεσοποταμίας, περί το 1000 π.Χ και στην εποχή των Σελευκιδών, περί το 300 π.Χ. (Katz V. J., 2009, pp. 10-12)

Πρέπει να λάβουμε υπόψη μας, ότι όπως και οι Αιγύπτιοι, έτσι και οι Βαβυλώνιοι δεν είχαν κάποιο συμβολισμό για τις πράξεις και τις άγνωστες ποσότητες. Οι λύσεις δίνονται καθαρά με λέξεις και περιγραφικά. Είχαν διαφορετικό τρόπο σκέψης από τον δικό μας και οι μέθοδοί τους αν και σωστές, μπορεί σε εμάς να φαίνονται περίεργες. (Katz V. J., 2009, p. 15)

---

<sup>6</sup> *Iraq Museum, Baghdad, Uruk excavations*

## 2.1 Το αριθμητικό σύστημα της Μεσοποταμίας

Στην Μεσοποταμία (Βαβυλώνα) χρησιμοποιούσαν ως αριθμητικό σύστημα ένα θεσιακό σύστημα με βάση το 60. Δεν γνωρίζουμε τον λόγο που τους οδήγησε σε αυτή την επιλογή, μια πιθανή όμως εξήγηση σύμφωνα με τον Katz (Katz V. J., 2009, p. 11) φαίνεται να είναι πως το 60 έχει αρκετούς μικρούς διαιρέτες, ως αποτέλεσμα ήταν εύκολο να εκφράσουν διάφορες κλασματικές μονάδες ως ακέραιες. Την 3<sup>η</sup> χιλιετία π.Χ αυτό το σύστημα αρίθμησης έγινε το standard σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται σε όλη την Μεσοποταμία. Αυτό το σύστημα χρησιμοποιούταν κυρίως για τους «μαθηματικούς» υπολογισμούς, ενώ υπήρχαν και άλλα αριθμητικά συστήματα, μη εξηκονταδικά που αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιούνταν από τους γραφείς – ιερείς, τα οποία χρησιμοποιούσαν κυρίως για τις οικονομικές συναλλαγές και την διοίκηση (Høyrup, 1992, p. 321) και τα οποία μετά τα μετέτρεπαν σε αριθμούς του εξηκονταδικού συστήματος. Οι γραφείς κατέγραφαν τους αριθμούς μεταξύ του 1 και του 60 με τη χρήση δυο διαφορετικών συμβόλων, ένα για το 1 και ένα για το 10 και τα ομαδοποιούσαν. Στην Μεσοποταμία δεν υπήρχε σύμβολο για το 0 και κάποιες φορές άφηναν ένα κενό στην θέση του ψηφίου που έλειπε. (Katz & Parshall, 2014, p. 18)

Στην συνέχεια της παρούσας εργασίας, όπου γίνεται αναφορά σε Βαβυλωνιακά προβλήματα θα χρησιμοποιείτε το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης και μέσα σε παρένθεση θα μετατρέπετε σε δεκαδικό. Δυο σημαντικοί συγγραφείς και ερευνητές ο Van den Waerden στο έργο του Science Awakening και ο Victor Katz στο έργο του History of Mathematics ακολουθούν διαφορετική τακτική κατά την μετάφραση των προβλημάτων από τις Βαβυλωνιακές πλάκες. Ο Van den Waerden στηρίζεται σε μεταφράσεις που έχουν γίνει από τον O. Neugebauer στο βιβλίο του *Mathematische Keilschrifttexte* εκδόσεις *Quellen und Studien* και χρησιμοποιεί το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης και το Victor J. Katz μεταφράζει τα προβλήματα στο δεκαδικό σύστημα.

Επέλεξα στην συνέχεια της παρούσης να ακολουθήσω τον Van Den Waerden, προσπαθώντας να μην αλλοιώσω όσο το δυνατό το περιεχόμενο των μεταφράσεων. Προκειμένου να είναι κατανοητό από τον αναγνώστη αναφέρω ότι η τάξη των ψηφίων θα διαχωρίζεται με κόμμα, εάν κάποια τάξη είναι κενή θα χρησιμοποιείται το μηδέν στην θέση του, καταχρηστικά όμως αφού οι Βαβυλώνιοι δεν είχαν σύμβολο για το μηδέν και για αυτό το λόγο άφηναν ένα μεγαλύτερο κενό μεταξύ των ψηφίων ή έπρεπε από το υπόλοιπο περιεχόμενο να αντιληφθείς την τάξη των αριθμών.

Για παράδειγμα:

$$20,3 = 20 \cdot 60^1 + 3 \cdot 60^0 = 1200 + 3 = 1.203$$

$$4,0,30 = 40 \cdot 60^2 + 30 \cdot 60^0 = 1200 + 30 = 144.030$$

Για να αναπαραστήσουμε δεκαδικούς αριθμούς, θα χρησιμοποιούμε το ; στην θέση της υποδιαστολής.

Για παράδειγμα:

$$20;30 = 20 \cdot 60^0 + 30 \cdot 60^{-1} = 20 + \frac{30}{60} = 20 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 4,0;30,20 &= 4 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 + 30 \cdot 60^{-1} + 20 \cdot 60^{-2} = 240 + 0 + \frac{30}{60} + \frac{20}{3600} \\ &= 240 + \frac{1}{2} + \frac{1}{180} \end{aligned}$$

## 2.2 Μονάδες μέτρησης των Βαβυλωνίων

Οι μονάδες μέτρησης που θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια του κειμένου είναι αυτές που χρησιμοποιούνταν για την μέτρηση απόστασης, επιφανειών (εμβαδού) και όγκου (χωρητικότητας).

Η «βασική μονάδα μέτρησης» μήκους για οριζόντιες επιφάνειες ήταν το *nindan* (ή “rod”) το οποίο είναι περίπου ίσο με 6 m. Χωρίζεται σε 12 *kus* (ή *cubits*), το καθένα εκ των οποίων είναι περίπου ίσο με 50 cm – την απόσταση από την άκρη των δακτύλων μας στον αγκώνα- και που αποτελεί την “βασική μονάδα μέτρησης για κάθετες αποστάσεις”, όπως το ύψος και το βάθος.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού σε «οριζόντιες» επιφάνειες, «βασική μονάδα» είναι το *sar* το οποίο είναι ίσο με 1 *square nindan*. Για τον όγκο “βασική μονάδα” είναι ένα block με διαστάσεις 1 *nindan* x 1 *nindan* x 1 *kus*, το οποίο επίσης αποκαλείτε *sar*.

Τις “βασικές μονάδες μέτρησης” πολλές φορές δεν τις αναφέρουν στα προβλήματα, τις θεωρούν δεδομένες και μπορεί κάποιος να νομίζει ότι οι αριθμοί που δίνονται είναι σκέτα νούμερα. Σε περίπτωση που χρησιμοποιούν κάποια άλλη μονάδα από την συνηθισμένη, αυτή αναφέρεται. (Høyrup, 1992, σ. 322)

## 2.3 Η Γεωμετρία στους Βαβυλώνιους

Ο τομέας των μαθηματικών, ο οποίος αναπτύχθηκε από τους Αρχαίους πολιτισμούς από πολύ νωρίς ήταν η Γεωμετρία. Η ανάγκη για τον διαχωρισμό των εδαφών, για τη μέτρηση της γης και για τον υπολογισμό της παραγωγής οδήγησε από πολύ νωρίς στην ανάπτυξη της. Οι Βαβυλώνιοι ήταν σε θέση να υπολογίζουν εμβαδά και όγκους σε αρκετά και διαφορετικά σχήματα και στερεά. Γνώριζαν πως να υπολογίσουν τετραγωνικές ρίζες και

μπορούσαν να επιλύουν προβλήματα που σήμερα θα τα αναγάγαμε σε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού. Γενικά, οι διασωθείσες πλάκες περιέχουν την λύση προβλημάτων, στα οποία εφαρμόζονται διάφορες μαθηματικές τεχνικές. Θα παρατηρήσουμε ότι πολλά από αυτά τα προβλήματα προέρχονται από την τεχνική “*cut and paste*” την οποία εφαρμόζαν οι αξιωματούχοι για να μετρήσουν εδάφη, χωράφια και να κατασκευάσουν δημόσια έργα. Όπως θα δούμε, η μέθοδος τους αυτή, σύντομα αναπτύχθηκε τόσο σε μεθόδους εύρεσης τετραγωνικών ριζών και Πυθαγορείων τριάδων, όσο και σε αυτό που σήμερα θα αναφέραμε ως “*Άλγεβρα*.” (Katz V. J., 2009, pp. 14-15)

Οι Βαβυλώνιοι προκειμένου να συγκρίνουν τα εμβαδά χωραφιών, τα σκέφτονταν ως τετράγωνα και ορθογώνια και μπορούσαν νοητά να τα αναδιατάξουν. Μέσα από αυτή την πρακτική αναπτύχθηκε η λεγόμενη “*γεωμετρική άλγεβρα*”, μια μέθοδος διαχείρισης των εδαφών (*cut and paste*) για τον προσδιορισμό του μήκους και του πλάτους. Όπως θα δούμε παρακάτω τα προβλήματα της “*γεωμετρικής άλγεβρα*” είναι τεχνητά προβλήματα, υπό την έννοια ότι δεν αντιστοιχούν σε προβλήματα της καθημερινότητας τα οποία έπρεπε να επιλυθούν από τους γραφείς- ιερείς.

Φαίνεται λοιπόν πως υπήρχαν “*μαθηματικοί*” οι οποίοι ήταν ικανοί να αναπτύξουν νέες μεθόδους και μοτίβα από προβλήματα της καθημερινότητας και να πάνε ένα βήμα παραπάνω. Επειδή η λεγόμενη “*γεωμετρική άλγεβρα*” προέρχεται από την διαχείριση περιοχών δυο-διαστάσεων, οι μέθοδοί της περιλαμβάνουν αυτό που εμείς σκεφτόμαστε και ορίζουμε ως προβλήματα δευτέρου βαθμού. Σε αυτό το σημείο να αναφερθεί ότι στην Μεσοποταμία οι γραφείς μπορούσαν επίσης να διαχειρίζονταν γραμμικές εξισώσεις, όπως και οι Αιγύπτιοι και τις επιλύαν χρησιμοποιώντας και εκείνοι μεθόδους και την έννοια της αναλογίας. (Katz & Parshall, 2014, pp. 17-18)

Για να καταλάβουμε λίγο τον τρόπο σκέψης τους, ας δούμε την διαδικασία που ακολουθούσαν για να προσδιορίσουν μήκη και εμβαδά. Γενικά, αντί των δικών μας τύπων για τον υπολογισμό των ζητούμενων ποσοτήτων, χρησιμοποιούσαν λίστες με συντελεστές (*coefficients*) και λίστες με σταθερές (*constants*) οι οποίες περιέγραφαν την μαθηματική σχέση που συνέδεε δυο μεγέθη. Για παράδειγμα:

- Το νούμερο  $0;52,30 (= \frac{7}{8})$  ως συντελεστής στο ύψος ενός τριγώνου, σημαίνει ότι το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούται με τα  $\frac{7}{8}$  της βάσης.



- Το νούμερο  $0;26,15 (= \frac{7}{16})$  ως συντελεστής στο εμβαδόν μιας περιοχής, σημαίνει ότι το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι τα  $\frac{7}{16}$  του τετραγώνου της πλευράς του.

Αξίζει να σημειωθεί ότι και τα δυο αυτά νούμερα είναι κοντά στην πραγματική τιμή, δεδομένου ότι και τα δυο προσεγγίζουν την  $\sqrt{3}$  με το  $\frac{7}{4}$ . Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε ότι η ποσότητα η οποία χρησιμοποιείται για τον ορισμό του τριγώνου είναι το μήκος της πλευράς του. Σήμερα και εμείς θα χρησιμοποιούσαμε το μήκος της πλευράς ενός ισόπλευρου τριγώνου ως την βασική μονάδα μέτρησης.

Εκεί που παρουσιάζεται ιδιαίτερη διαφορά στον τρόπο σκέψης και προσέγγισης είναι ο κύκλος. Για τον κύκλο, εμείς σήμερα θα χρησιμοποιούσαμε την ακτίνα του κύκλου ως βάση και μονάδα μέτρησης της περιφέρειας και του εμβαδού. Οι Βαβυλώνιοι όμως χρησιμοποιούσαν την περιφέρεια του κύκλου ως βασικό στοιχείο του. Ως αποτέλεσμα, δίνουν δυο σταθερές στον κύκλο, για παράδειγμα  $0;20 (= \frac{1}{3})$  για την διάμετρο, δηλαδή η διάμετρος είναι ίση με το  $\frac{1}{3}$  της περιφέρειας και  $(= \frac{1}{12})$  για το εμβαδόν, δηλαδή το εμβαδόν ισούται με το  $\frac{1}{12}$  του τετραγώνου της περιφέρειας. (Katz V. J., 2009, p. 15)

## 2.4 Η Άλγεβρα των Βαβυλωνίων

Όπως ήδη έχει αναφερθεί πολλά από τα προβλήματα που έχουν διασωθεί σε διάφορες πλάκες φαίνονται να είναι τεχνητά, πιθανόν λοιπόν να υπήρχαν “μαθηματικοί” που μπορούσαν να δημιουργήσουν πιο αφηρημένα προβλήματα, πιο σύνθετα από αυτά που θα χρειάζονταν για την αντιμετώπιση των προβλημάτων της πραγματικής ζωής. Δεδομένου ότι αυτά τα προβλήματα περιλάμβαναν τον χειρισμό επιφανειών δυο διαστάσεων, οι μέθοδοι επίλυσης αυτών συμπεριλαμβάνουν αυτό που εμείς ορίζουμε ως *δευτεροβάθμιες εξισώσεις*.

Οι Βαβυλώνιοι, όπως και οι Αιγύπτιοι ήξεραν πως να χειριστούν *γραμμικές εξισώσεις* και το έπρατταν κατά τον ίδιο τρόπο, δηλαδή με χρήση των αναλογιών. (Katz & Parshall, 2014, pp. 17-18)

Για την επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων της μορφής  $ax = b$ , που συνήθως εμφανιζόταν κατά τη διαδικασία επίλυσης πιο σύνθετων προβλημάτων, γνώριζαν ότι η λύση μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με τον αντίστροφο του  $a$ <sup>7</sup>. Σε πιο

---

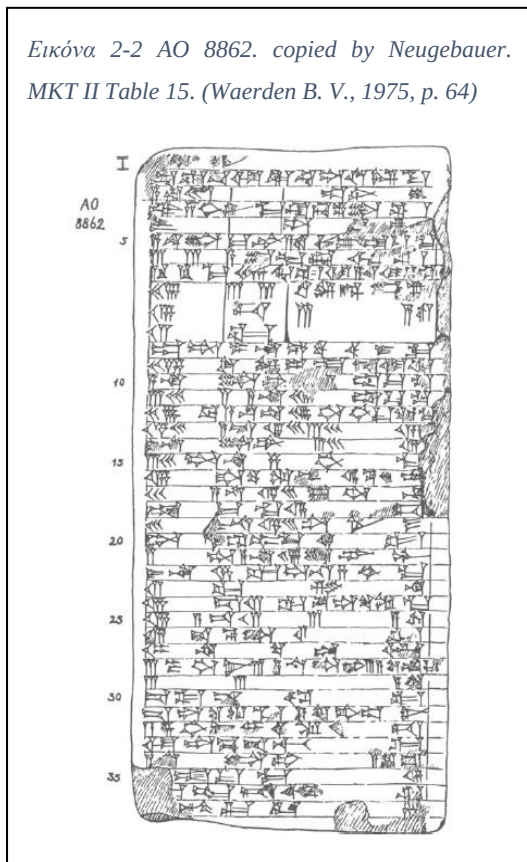
<sup>7</sup> Για αυτό το λόγο είχαν δημιουργήσει αρκετά εκτενείς πίνακες με αριθμούς και τους αντίστροφους τους.

σύνθετα προβλήματα, όπου απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων ( $2 \times 2$ ), τότε όπως και οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν την μέθοδο της *ψευδούς αντικατάστασης*. (Katz & Parshall, 2014, p. 18)

Ας μελετήσουμε κάποια από πιο χαρακτηριστικά προβλήματα που έχουν διασωθεί σε Βαβυλωνιακές πλάκες προκειμένου να αντιληφθούμε τον τρόπο σκέψης τους και τις γνώσεις τους.

#### 2.4.1 Το πρόβλημα 5 από τον πίνακα AO 8862<sup>8</sup> (Waerden B. V., 1975, pp. 63-65) μεταφρασμένο από το MKT<sup>9</sup> I, p 113

Εικόνα 2-2 AO 8862. copied by Neugebauer.  
MKT II Table 15. (Waerden B. V., 1975, p. 64)



“Length, width. I have multiplied length and width, thus obtaining the area. Then I added to the area, the excess of the length over the width: 3,3 (i.e. 183 was the result). Moreover, I have added length and width: 27. Required length, width and area.

(given:) 27 and 3,3, the sums

(result:) 15 length 3,0 area. 12 width

One follows this method:

$$27 + 3,3 = 3,30$$

$$2 + 27 = 29.$$

Take one half of 29 (this gives 14;30).

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$

$$3,30;15 - 3,30 = 0;15.$$

The square root of 0; 15 is 0;30.

$$14;30 + 0;30 = 15 \text{ length}$$

$$14;30 - 0;30 = 14 \text{ width.}$$

Subtract 2, which has been added to 27, from 14, the width. 12 is the actual width.

<sup>8</sup> The Département des Antiquités Orientales, Louvre, Paris

<sup>9</sup> O. Neugebauer στο βιβλίο του *Mathematische Keilschrifttexte* εκδόσεις Quellen und Studien, A 3, Berlin 1935 supplemented by Thureau - Danguin, *Textes mathématiques babyloniens* Leiden 1938.

*I have multiplied 15 length by 12 width.*

$$15 \times 12 = 3,0 \text{ area.}$$

$$15 - 12 = 3$$

$$3,0 + 3 = 3,3.$$

*Μήκος, πλάτος. Πολλαπλασίασα το μήκος και το πλάτος και βρήκα το εμβαδόν. Μετά πρόσθεσα στο εμβαδόν, την υπεροχή του μήκους έναντι του πλάτους: 3,3 ( το αποτέλεσμα ήταν 183) . Πρόσθετα πρόσθεσα το μήκος και πλάτος: 27 Ζητούνται το μήκος, το πλάτος και το εμβαδόν.*

Για να δούμε τον τρόπο επίλυσης του παραπάνω προβλήματος από τους Βαβυλωνίους:

Στις πρώτες γραμμές προσπαθεί να ορίσει το πρόβλημα. Κάθε άγνωστη ποσότητα την αναπαριστά με ένα σύμβολο, χρησιμοποιεί τα σύμβολα “*us*” και “*sag*” για το μήκος και τα πλάτος αντίστοιχα. Τα παραπάνω σύμβολα τα χρησιμοποιούν όπως και εμείς σήμερα. Παραμένουν άκλιτα και σταθερά. Μπορούμε λοιπόν να δημιουργήσουμε για το παραπάνω πρόβλημα τις παρακάτω δυο εξισώσεις. Θα χρησιμοποιήσω τα σύμβολα  $x$  και  $y$  για το μήκος και το πλάτος αντίστοιχα, τα οποία μας είναι πιο οικεία, όπως και οι αριθμοί έχουν μετατραπεί στο δεκαδικό σύστημα.

$$(\Sigma) \begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

*Equation 2-1*

Οι 4 τελευταίες γραμμές του κειμένου επιβεβαιώνουν ότι η λύση που βρήκε , δηλαδή ότι  $x = 15$  και  $y = 12$  είναι σωστή και ικανοποιεί τις παραπάνω. Στην συνέχεια βλέπουμε ότι γίνεται μια προσπάθεια προκειμένου να απλοποιηθεί το παραπάνω σύστημα. Εισάγει λοιπόν μια νέα μεταβλητή την  $y'$ , στην θέση της  $y$ .

$$y' = y + 2 \Rightarrow y = y' - 2$$

*Equation 2-2*

Αυτή η αντικατάσταση, όντως απλοποιεί το πρόβλημα. Το νέο σύστημα θα γίνει:

$$(\Sigma') \begin{cases} xy' = 183 + 27 = 210 \\ x + y' = 27 + 2 = 29 \end{cases}$$

*Equation 2-3*

Η πρώτη εξίσωση στο σύστημα  $(\Sigma')$  προκύπτει εάν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος  $(\Sigma)$  και αντικαταστήσουμε το  $y$ .

Την παραπάνω μετατροπή μπορούμε να την δούμε ευκρινώς στο Βαβυλωνιακό κείμενο ως εξής:

*One follows this method:*

$$27 + 3,3 = 3,30$$

$$2 + 27 = 29$$

Μετά ακολουθεί η επίλυση του απλοποιημένου συστήματος. Προκειμένου να το επιλύσει χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη “συνταγή” η οποία εμφανίζεται πολλές φορές σε Βαβυλωνιακές πλάκες για την επίλυση συστημάτων αυτής της μορφής. Δηλαδή συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους όπου γνωρίζουμε το γινόμενο και το άθροισμά τους. Οι Βαβυλώνιοι δεν αναφέρουν ή γράφουν κάποιον τύπο ακολουθούν όμως πολύ συγκεκριμένα βήματα με χρήση αριθμών αποκλειστικά, τα οποία με τον σημερινό τρόπο γραφής θα μπορούσαμε να το αναπαραστήσουμε ως εξής:

$$\begin{cases} xy' = P \\ x + y' = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + w \\ y' = \frac{1}{2}a - w \\ w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P} \end{cases}$$

*Equation 2-4*

Ας δούμε την αντιστοιχία στο παραπάνω τρόπο λύσης:

|                                                 |                                                                                              |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Take one half of 29 (this gives 14; 30).</i> | <i>Πάρε το μισό του 29, δηλαδή <math>a = 29</math> ( αυτό σου δίνει 14; 30)</i>              |
| $14;30 \times 14;30 = 3,30;15$                  | <i>Βρίσκει το τετράγωνο του <math>\frac{1}{2}a</math>, το χρειάζεται στο <math>w</math>.</i> |
| $3,30;15 - 3,30 = 0;15.$                        | <i>Αφαιρεί το <math>P = 3;30</math></i>                                                      |
| <i>The square root of 0; 15 is 0;30.</i>        | <i>Βρίσκει την τετραγωνική ρίζα, άρα έχει προσδιορίσει το <math>w</math>.<sup>10</sup></i>   |
| $14;30 + 0;30 = 15 \text{ length}$              | <i>Εδώ βρίσκει το <math>x</math></i>                                                         |
| $14;30 - 0;30 = 14 \text{ width.}$              | <i>Εδώ βρίσκει το <math>y'</math></i>                                                        |

<sup>10</sup> Εδώ βρίσκει μόνο την θετική ρίζα και όχι την αρνητική.

|                                                                                        |                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Subtract 2, which has been added to 27,<br>from 14, the width. 12 is the actual width. | Μετά βρίσκει το $y$ , αφού το είχε<br>αντικαταστήσει με την μεταβλητή $y'$ . |
| I have multiplied 15 length by 12 width.                                               | Στις τέσσερις αυτές τελευταίες<br>γραμμές επαληθεύει τα αποτελέσματά του.    |
| $15 \times 12 = 3,0$ area.                                                             |                                                                              |
| $15 - 12 = 3$                                                                          |                                                                              |
| $3,0 + 3 = 3,3$ .                                                                      |                                                                              |

Παρατηρώντας κανείς τον παραπάνω τρόπο λύσης και αναλογιζόμενος τον τρόπο λύσης που θα ακολουθούσαμε σήμερα είναι εύκολο να παρατηρήσει την διαφορετική αντιμετώπιση που έχουμε σήμερα και τον διαφορετικό τρόπο σκέψης. Ας δούμε λοιπόν πως θα επιλύαμε το συγκεκριμένο πρόβλημα σήμερα:

Αρχικά το σύστημα που έπρεπε να επιλυθεί ήταν το

$$(\Sigma) \begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

Equation 2-5

Προκειμένου να το επιλύσουμε ένας τρόπος λύσης είναι να λύσουμε την δεύτερη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και να αντικαταστήσουμε στην πρώτη. Ακολουθώντας αυτόν τον τρόπο επίλυσης, η 1<sup>η</sup> εξίσωση θα μετατραπεί σε δευτεροβάθμια, συγκεκριμένα:

$$(\Sigma') \begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x = 27 - y \end{cases}$$

Equation 2-6

Αντικαθιστώντας έχω:

$$\begin{aligned} (27 - y)y + 27 - y + y &= 183 \Leftrightarrow \\ 27y - y^2 + 27 - 2y &= 183 \Leftrightarrow -y^2 + 25y = 156 \Leftrightarrow \\ -y^2 + 25y - 156 &= 0 \Leftrightarrow y^2 - 25y + 156 = 0 \end{aligned}$$

Equation 2-7

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επιλέξουμε δυο διαφορετικούς τρόπους λύσης. Ο ένας είναι με την χρήση της διακρίνουσας και ο άλλος είναι να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του Viète και να βρούμε δυο πραγματικούς αριθμούς με άθροισμα 25 και γινόμενο

156. Όποιοι τρόποι και να επιλέξουμε οι λύσεις που θα προκύψουν στην συγκεκριμένη εξίσωση είναι 2 θετικοί ακέραιοι αριθμοί, οι  $y_1 = 13$  και  $y_2 = 12$ .

Εδώ αμέσως εντοπίζουμε μια ακόμα διαφορά. Οι Βαβυλώνιοι δεν γνώριζαν την ύπαρξη δεύτερης ρίζας, ήταν ικανοποιημένοι με την εύρεση μιας λύσης και όπως είναι εδώ φανερό βρίσκει μια λύση την  $y_2 = 12$ . Δεν αναζητά καθόλου δεύτερη ρίζα. Δεν είναι και σε θέση να την αναζητήσει, καθώς αγνοώντας την ύπαρξη αρνητικών αριθμών, δεν μπορεί να βρει την αρνητική τετραγωνική ρίζα του  $w$ , ώστε να οδηγηθεί στην δεύτερη λύση.

Θα μπορούσαμε άραγε να ακολουθήσουμε κάποιον τρόπο λύσης παρόμοιο με των Βαβυλωνίων; Εάν αντί για την μέθοδο της αντικατάστασης στην επίλυση του συστήματος  $(\Sigma)$ , εισάγουμε μια νέα μεταβλητή όπως και οι Βαβυλώνιοι θα οδηγηθούμε στο σύστημα  $(\Sigma')$ . Για την επίλυσή του θα μπορούσαμε είτε να δημιουργήσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση με  $S = 210$  και  $P = 27$  και να την επιλύσουμε με όποιο τρόπο επιθυμούμε ή να επιλέξουμε έναν άλλο τρόπο λύσης και τέλος να «διορθώναμε» την λύση μας, κάνοντας την αντικατάσταση που είχαμε υποθέσει αρχικά.

Αυτός ο δεύτερος τρόπος λύσης, αν και μας είναι γνωστός δεν είναι κάτι το οποίο σήμερα θα συνηθίζαμε για ένα σύστημα τόσο απλό μαθηματικά για εμάς. Η επίλυση του σήμερα δεν παρουσιάζει καμία ιδιαίτερη δυσκολία, ενώ για τους Βαβυλωνίους ήταν αναγκαία η απλοποίησή του. Είναι λοιπόν εμφανής ο διαφορετικός τρόπος σκέψης και η διαφορετική διαχείριση τέτοιων προβλημάτων. Ας δούμε και κάποια ακόμα.

Όπως είδαμε προκειμένου να επιλύσουν συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους όπως το παραπάνω οι Βαβυλώνιοι, είχαν μια μέθοδο την οποία αν και δεν την ανέφεραν κάπου ρητά, την ακολουθούσαν συστηματικά. Την ίδια μέθοδο και τον ίδιο τρόπο λύσης χρησιμοποιούσαν και στην περίπτωση που το σύστημα ήταν της μορφής :

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$$

*Equation 2-8*

όπου δηλαδή δινόταν η διαφορά και το γινόμενο δυο μεγεθών και ότι το άθροισμα και το γινόμενο.

Στην περίπτωση που ήταν γνωστό το άθροισμα δυο αριθμών και το γινόμενο για την επίλυση χρησιμοποιούσαν την παρακάτω μέθοδο:

$$\begin{cases} xy = P \\ x + y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + w \\ y = \frac{1}{2}a - w \\ w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P} \end{cases}$$

Equation 2-9

Στην περίπτωση που ήταν γνωστή η διαφορά, τότε η διαφοροποίηση γινόταν ως εξής:

$$\begin{cases} xy = P \\ x - y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + w \\ y = \frac{1}{2}a - w \\ w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + P} \end{cases}$$

Equation 2-10

Ένα τέτοιο παράδειγμα υπάρχει στον πίνακα VAT6598 (μεταφρασμένοι από το MKT I, p.280). Με τον ίδιο τρόπο χειρίζονταν και τα γραμμικά συστήματα, ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα.

2.4.2 Το πρόβλημα από τον πίνακα VAT8389<sup>11</sup> μεταφρασμένο από το MKT<sup>12</sup> I, p 323 (Waerden B. V., 1975, pp. 66-68)

“Per bur (surface unit) I have harvested 4 gur of grain. From a second bur I have harvested 3 gur of grain. The yield of the first field was 8,20 more than that of the second. The areas of the two fields were together 30,0. How large were the fields?”

“Μάζεψα 4 gur<sup>13</sup> ανά bur<sup>14</sup> σπόρους σιτηρών. Από ένα δεύτερο bur μάζεψα 3 gur σπόρους σιτηρών. Η παραγωγή του πρώτου χωραφιού ήταν 8,20 ( $8 \cdot 60^1 + 20 \cdot 60^0 = 480 +$

---

<sup>11</sup> The Vorderasiatischer Museum, Berlin (VAT)

<sup>12</sup> O. Neugebauer στο βιβλίο του Mathematische Keilschrifttexte εκδόσεις Springer Quellen und Studien, A 3, Berlin 1935 supplemented by Thureau - Dangin, Textes mathématiques babyloniens Leiden 1938.

<sup>13</sup> 1 gur=5,0 sila=5 · 60<sup>1</sup> + 0 · 60<sup>0</sup> = 300 sila, που ήταν η βασική μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας.

<sup>14</sup> 1 bur= 30,0 sar= 30 · 60<sup>1</sup> + 0 · 60<sup>0</sup>=1800 sar , όπου sar η βασική μονάδα μέτρησης του μήκους.

20 = 500) (περισσότερο από το δεύτερο. Η συνολική επιφάνεια και των δυο χωραφιών μαζί ήταν 30,0 sar ( $30 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 1800$ ). Πόσο μεγάλο ήταν το κάθε χωράφι;”

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα με 2 αγνώστους. Ας δούμε τι εξισώσεις θα προκύψουν από αυτό πριν μελετήσουμε τον τρόπο επίλυσης του από τους Βαβυλωνίους.

Το πρώτο χωράφι παράγει  $4 gur = 20,0 \frac{sila}{bur}$  ή  $20,0 \frac{sila}{30,0} sar$   
 $(20,0 = 20 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 1200 sila \text{ και } 30,0 = 30 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 1800 sar)$  και το  
 δεύτερο χωράφι παράγει  $3gur = \frac{15,0sila}{bur}$  ή  $\frac{15,0sila}{30,0sar}$   
 $(15,0 = 15 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 900 sila \text{ και } 30,0 = 30 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 1800 sar)$

Έστω ότι  $x$  και  $y$  οι επιφάνειες των ζητούμενων χωραφιών εκφραζόμενες σε sar. Τότε οι εξισώσεις που προκύπτουν, στην σημερινή μορφή θα ήταν:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$

Equation 2-11

όπου  $x$  και  $y$  τα ζητούμενα εμβαδά.

Εμείς προκειμένου να επιλύσουμε το παραπάνω σύστημα θα χρησιμοποιούσαμε πιθανά την μέθοδο της αντικατάστασης, ως προς  $x$  ή  $y$  ή την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Οι Βαβυλώνιοι είχαν τις απαραίτητες γνώσεις για να το λύσουν με την μέθοδο της αντικατάστασης, όπως προκύπτει από τον χειρισμό άλλων προβλημάτων που βρίσκονται στην ίδια πλάκα, στο οποίο όμως η δεύτερη εξίσωση είναι η διαφορά και όχι το άθροισμα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα προτίμησαν την μέθοδο της ψευδούς αντικατάστασης, όπως θα έκαναν και οι Αιγύπτιοι.

Ξεκίνησαν διαιρώντας την συνολική επιφάνεια σε 2 ίσα μέρη

(Divide 30,0, the sum of the areas, into two parts: 15,0. Thus take 15,0 and again 15,0.)

Στην συνέχεια υπολόγισαν την παραγωγή του καθενός εάν ήταν ίσης έκτασης. Πολλαπλασίασαν τον αντίστροφο του  $\frac{30,0}{20,0}$  για να βρουν την «λανθασμένη» παραγωγή.

Η παραγωγή του πρώτου χωραφιού θα ήταν:

$$0;40 \times 15,0 = 10,0 \quad (10,0 = 10 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 600)$$

("Keep this in mind", the text says)

Κρατούν ως δεδομένο το παραπάνω και προχωρούν στον υπολογισμό της παραγωγής του δεύτερου χωραφιού. Προκύπτει λοιπόν ότι η παραγωγή θα ήταν 7,30 bur για τα 15,0 sar.



Η διαφορά τους θα ήταν σε αυτή την περίπτωση  $10,0 - 7,30 = 2,30 (= 150)$ . Γνωρίζουμε όμως ότι η διαφορά είναι  $8,20 (= 500)$ .

*("Subtract", the text says).*

Βρίσκουν λοιπόν την διαφορά  $8,20 - 7,30 = 5,50 (500 - 150 = 350)$ .

*(Keep 5,50 in mind", the text says)*

Συνεχίζει τον υπολογισμό ως εξής:

$$0; 40 + 0; 30 = 1; 10.$$

*(I don't know the reciprocal of  $1;10$ . What must I multiply by  $1;10$  to obtain 5,50?*

*Take 5,0, since  $5,0 \times 1 : 10 = 5,50$ . Subtract this 5,0 from one of the areas of 15,0 and add it to the other. The first is 20,0. the second 10,0. So 20,0 is the area of the first field, 10,0 that of the other.)*

Δεν γνωρίζω ποιος είναι ο αντίστροφος του  $1; 10$ . Με τι πρέπει να το πολλαπλασιάσω για να βρω 5,50; Έστω 5,0, αφού  $5,0 \times 1 : 10 = 5,50$ . Αφαίρεσε αυτό το 5,0 από μια από τις περιοχές και προσθέτοντάς το στην άλλη. Η πρώτη θα γίνει 20,0 (= 1200) και η δεύτερη 10,0 (= 600).

Θεώρησαν ότι και τα δυο χωράφια είχαν έκταση  $\frac{30,0}{2}=15,0 = 900 sar$  το καθένα. Στη συνέχεια υπολόγισαν την παραγωγή του καθενός, εάν είχαν έκταση 15,0. Από το πρώτο χωράφι συλλέξαμε 600 sar και από το δεύτερο 450 sar καρπού, διαφορά δηλαδή 150. Η ζητούμενη όμως διαφορά είναι 500, άρα έπρεπε να αναπροσαρμόσει τις τιμές κατάλληλα. Αντιλήφθηκε πως η μεταφορά 1 sar από το δεύτερο χωράφι στο πρώτο είχε ως συνέπεια να αυξήσει την παραγωγή κατά  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{6}$ , άρα έπρεπε να διαιρέσει το 350 που ήταν η τωρινή διαφορά, με το  $1\frac{1}{6}$ , για να μπορέσει να προσδιορίσει ποιο πολλαπλάσιο του  $1\frac{1}{6}$  ισούται με 350. Αφού η απάντηση ήταν 300, τότε η απάντηση ήταν ότι το πρώτο χωράφι έχει έκταση  $900 + 300 = 1200 sar$  και το δεύτερο  $900 - 300 = 600 sar$ .

Παρατηρούμε ότι η επίλυση του συστήματος δεν ομοιάζει με την σημερινή μέθοδο. Ο Βαβυλώνιος γραφέας χρησιμοποίησε την μέθοδο της ψευδούς αντικατάστασης και μετά προσπάθησε να διορθώσει και να αναπροσαρμόσει τα αποτελέσματα.

Από το προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι οι Βαβυλώνιοι, όταν γνώριζαν ότι  $x + y = 2h$ , έθεταν  $x = h + w$ ,  $y = h - w$  και προσπαθούσαν να προσδιορίσουν το  $w$ . Στο παραπάνω παράδειγμα  $x + y = 2 \cdot 900$ , συνεπώς  $h = 900$ . Ως αποτέλεσμα  $x = 900 + w$  και  $y = 900 - w$ . Υπέθεσαν δηλαδή ότι τα 2 χωράφια ήταν ίσα και προσπάθησαν να διορθώσουν το "σφάλμα".

Εάν εκτός από το άθροισμα δινόταν και το γινόμενο  $xy = p$ , τότε μπορούσαν να προσδιορίσουν την τιμή του  $w$  από την εξίσωση  $xy = (h + w)(h - w) = h^2 - w^2 = p$ , έτσι ώστε  $w^2 = h^2 - p$ .

Μπορούμε να πούμε ότι γνώριζαν τον παραπάνω τύπο της διαφοράς τετραγώνου; Που τον χρησιμοποιούσαν;

Η γνώση του παραπάνω τύπου γίνεται σαφής και από άλλα προβλήματα που έχουν διασωθεί από τους Βαβυλωνίους, όπως το πρόβλημα από τον πίνακα BM 85194 (μετάφραση MKT I, p.154) όπου ζητείται η κατασκευή ενός αναχώματος (*the profile of a dike*) σε μορφή ισοσκελούς τραπεζίου, γνωρίζοντας την βάση  $a$  και την κλίση.

#### 2.4.3 Το πρόβλημα από τον πίνακα BM 13901<sup>15</sup> - MKT III, p.8 no 14 (Waerden B. V., 1975, pp. 68-70)

Οι τύποι του τετραγώνου του αθροίσματος  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  και της διαφοράς  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$  πρέπει επίσης να ήταν γνωστοί στους Βαβυλωνίους, καθώς στον παραπάνω πίνακα υπάρχει το εξής πρόβλημα:

*“I have added the areas of my two squares: 25,25. (The side of) the second square is  $\frac{2}{3}$  of that of the first plus 5 gar.”*

*Πρόσθεσα τις περιοχές (το εμβαδόν δηλαδή) των δυο τετραγώνων μου: 25,25. (η πλευρά) του δεύτερου τετραγώνου είναι ίση με τα  $\frac{2}{3}$  του πρώτου συν 5 gar.*

Ας προσπαθήσουμε να γράψουμε με εξισώσεις το παραπάνω πρόβλημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25,25 \\ y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 5 \end{cases}$$

Equation 2-12

Προκειμένου να αντικαταστήσουμε το  $y$  στην πρώτη εξίσωση, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο τύπος με το τετράγωνο του αθροίσματος:

$$(0; 40x + 5)^2 = (0; 40)^2 x^2 + 2 \cdot 0; 40 \cdot 5x + 5^2$$

---

<sup>15</sup> Αυτή η πλάκα του Βρετανικού Μουσείου, περιλαμβάνει ένα από τα αρχαιότερα και σημαντικότερα μαθηματικά κείμενα των Βαβυλωνίων. Χρονολογείται την εποχή της πρώτης Βαβυλωνιακής δυναστείας, δηλ περίπου το 2000π. Χ. Μας εντυπωσιάζει και φαίνεται να είναι ένα σχολικό βιβλίο ή μαθηματικό εγχειρίδιο που ασχολείται με δευτεροβάθμιες εξισώσεις. (Gandz, *The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra*, 1937, p. 94)

Αυτό μας οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής  $ax^2 + 2bx = c$ , με  $a = 1 + (0; 40)^2$ ,  $b = 5 \cdot 0; 40$  και  $c = 25; 25$  και τελικά βρίσκει το  $x$  με χρήση του τύπου  $x = a^{-1}\sqrt{ac + b^2} - b$  και αντικαθιστώντας στο  $y$  βρίσκει το ζητούμενο.

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της απαλοιφής. Εάν συγκρίνουμε τον τύπο  $x = a^{-1}\sqrt{ac + b^2} - b$  με τον τύπο που γνωρίζουμε σήμερα για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η λύση που ήταν σε θέση να βρουν οι Βαβυλώνιοι προσεγγιστικά είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα.

Παρατηρούμε επίσης ότι ενώ εμείς σήμερα δεν δίνουμε σημασία στην σειρά εκτέλεσης της πράξης  $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$  και το  $-b$  γράφεται ως πρώτο μέλος, κάτι τέτοιο δεν συνέβαινε στους Βαβυλωνίους και κατά την σειρά εκτέλεσης των πράξεων κάνουν τον υπολογισμό  $\sqrt{ac + b^2} - b$ . Θα αποτελούσε πρόβλημα η περίπτωση όπου η λύση θα ήταν αρνητικός αριθμός.

Τέλος, εμείς σήμερα γνωρίζουμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει το πολύ 2 πραγματικές ρίζες και αν η τιμή της διακρίνουσας είναι μηδενική, τότε η ρίζα που προκύπτει είναι πολλαπλότητας 2. Οι Βαβυλώνιοι όμως δεν ήταν σε θέση να γνωρίζουν ότι επειδή η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού, τότε θα έπρεπε να υπάρχουν 2 ρίζες, σίγουρα δεν μπορούσαν να γνωρίζουν για την ύπαρξη άλλων ριζών εκτός των πραγματικών και ήταν αδιανόητο για εκείνους ότι θα μπορούσε να προκύψει αρνητική ρίζα. Συνεπώς ήταν ικανοποιημένοι με την εύρεση μιας και μοναδικής λύσης για το  $x$ .

## 2.5 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

|     |                                           |
|-----|-------------------------------------------|
| i   | $x^2 + x = 0; 45$                         |
| ii  | $x^2 - x = 14,30$                         |
| vi  | $x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right) = 0; 35$ |
| vii | $11x^2 + 7x = 6; 15$                      |

Table 2-1

Το προηγούμενο πρόβλημα που συζητήσαμε ήταν από τον πίνακα BM 13901, στον ίδιο πίνακα μπορεί κάποιος να βρει και την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Βαβυλωνίους όπως οι παρακάτω: (MKT III, p.6) (Waerden B. V., 1975, p. 70)

Ας δούμε ποια λύση δίνουν για την (ii):

*“Take 1, the coefficient (of x). Divide 1 into two parts. 0;30 x 0;30 = 0; 15. you add to 14,30 and 14.30;15 has the root 29;30. You add to 29;30 the 0;30 which you have multiplied by itself. and 30 is (the side of) the square.”*

*“Πάρε 1, τον συντελεστή (του x). Διαίρεσέ το σε 2 ίσα μέρη 0;30 x 0;30 = 0; 15 ( $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ). Το προσθέτεις στο 14,30 και το 14,30;15 έχει ως ρίζα 29;30. Προσθέτεις στο 29;30 το 0;30 το οποίο έχεις πολλαπλασιάσει με τον εαυτό του και τελικά 30 είναι το τετράγωνο (η πλευρά του).”*

Ποιος είναι άραγε ο τρόπος σκέψης εδώ; Ποιο είναι το σκεπτικό πίσω από αυτό τον τρόπο λύσης; Σύμφωνα με τον Van den Waerden ένα πιθανός τρόπος σκέψης εδώ είναι η μετατροπή του πρώτου μέλος (αριστερής πλευράς) της ισότητας σε τέλειο τετράγωνο.

Ας δούμε την γενική περίπτωση, δηλαδή την  $x^2 \pm ax = b$ . Τότε σύμφωνα με τον Van den Waerden σκοπός των Βαβυλωνίων ήταν η μετατροπή της παραπάνω στην μορφή:

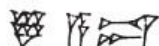
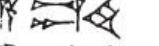
$$(x^2 \pm \frac{1}{2}a)^2 = b + (\frac{1}{2}a)^2$$

*Equation 2-13*

Αυτό εφαρμόζεται και στο παραπάνω παράδειγμα.

### 2.5.1 Τετραγωνικές ρίζες και κυβικές ρίζες στους Βαβυλωνίους

Οι Βαβυλώνιοι είχαν υπολογιστικούς πίνακες για να μπορούν να υπολογίζουν γινόμενα μεταξύ αριθμών, όπως και πίνακες αντιστρόφων για να μπορούν να υπολογίζουν τις κλασματικές μονάδες. Οι πίνακες μπορεί να ήταν μονοί ή να περιείχαν και γινόμενα περισσοτέρων του ενός αριθμών. Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα δούμε τον πίνακα που περιέχει τα γινόμενα με το 7 (=7) και γινόμενα με το 16,40 (=1.000). Η λέξη *a-ra* σημαίνει «φορές», δηλαδή δείχνει το γινόμενο. 1 a-ra 7 σημαίνει το γινόμενο του 1 με το 7.

| Table of 7 and of 16,40.                                                          |               |                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------|--------------------|
|  | 7 a-rá 1 7    | a-rá 1 16, 40      |
|  | a-rá 2 14     | a-rá 2 33, 20      |
|  | a-rá 3 21     | a-rá 3 50          |
|  | a-rá 19 2, 13 | a-rá 19 5, 16, 40  |
|  | a-rá 20 2, 20 | a-rá 20 5, 33, 20  |
|  | a-rá 30 3, 30 | a-rá 30 8, 20      |
|  | a-rá 40 4, 40 | a-rá 40 11, 6, 40  |
|  | a-rá 50 5, 50 | a-rá 50 13, 53, 20 |

Εικόνα 2-3- Πίνακας γινομένου του 7 και του 1000 (Waerden B. V., 1975, p. 42)

Σε πίνακες μπορούσαμε να βρούμε τα τετράγωνα, αλλά και τις τετραγωνικές ρίζες, όπως και τις κυβικές ρίζες αριθμών. Η λέξη *ib-si* σημαίνει τετραγωνική ρίζα και η λέξη *ba-si* χρησιμοποιείται για να συμβολίζει την ρίζα, μιας εξίσωσης, τόσο σε εξισώσεις της μορφής  $x^3 = a$ , όσο και σε εξισώσεις της μορφής  $x^3(x + 1) = a$ .

|                    |
|--------------------|
| 1-e 1 ba-si        |
| 8-e 2 ba-si        |
| 27-e 3 ba-si, etc. |

Εικόνα 2-5 κυβικές ρίζες Βαβυλωνίων  
(Waerden B. V., 1975, p. 44)

|                            |
|----------------------------|
| 1-e 1 ib-si                |
| (i.e.: of 1 is 1 the root) |
| 4-e 2 ib-si                |
| 9-e 3 ib-si.               |

Εικόνα 2-4 τετραγωνικές ρίζες Βαβυλώνιοι  
(Waerden B. V., 1975, p. 44)

|                  |
|------------------|
| 1 a-rá 1 1       |
| 2 a-rá 2 4       |
| 3 a-rá 3 9       |
| ...              |
| 59 a-rá 59 58, 1 |

Εικόνα 2-6 πίνακας τετραγώνων (Waerden B. V., 1975, p. 44)

|                    |
|--------------------|
| 2-e 1 ba-si        |
| 12-e 2 ba-si       |
| 36-e 3 ba-si, etc. |

Εικόνα 2-7 κυβικές ρίζες για την εξίσωση  $x^3(x + 1) = a$  Βαβυλωνίων (Waerden B. V., 1975, p. 44)

(Waerden B. V., 1975, pp. 42-44)

## 2.6 Επίλυση εξισώσεων

Ιστορικά, σύμφωνα με τον *Gandz* ίσως θα έπρεπε να μιλάμε για *rectangular* (ορθογώνιες) εξισώσεις και όχι *quadratic* (τετραγωνικές- δηλαδή δευτέρου βαθμού), αφού το πρόβλημα του υπολογισμού των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι αυτό που περιλαμβάνει δυο αγνώστους και όχι του τετραγώνου, όπου η άγνωστη πλευρά είναι μια. Εάν κάποιος γνωρίζει την πλευρά του τετραγώνου, μπορεί να υπολογίσει το εμβαδόν του και το αντίστροφο, εξάλλου οι Βαβυλώνιοι είχαν και τους αντίστοιχους πίνακες, όπως προαναφέρθηκε, ενώ για την περίπτωση του ορθογωνίου κάποιος πρέπει να γνωρίζει και το μήκος και το πλάτος για τον υπολογισμό του εμβαδού ή όπως οι Βαβυλώνιοι το αποκαλούσαν το μπροστινό μέρος (*front*) και η πλευρά (*flank*). (*Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and EarlyArabic Algebra, 1937, pp. 7-8*)

Αν και η γενικότερη άποψη είναι πως ο όρος *quadratic* προέρχεται από το  $x^2$ , που υποδηλώνει τον υπολογισμό του εμβαδού τετραγώνου πλευράς  $x$ , και το *qubic* από το  $x^3$ , ο *Gandz* προτείνει την παραπάνω μια εναλλακτική ονοματολογία για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις και συγκεκριμένα τον όρο *rectangular*.

Θα μπορούσαμε να κατηγοριοποιήσουμε τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού που ήταν σε θέση να επιλύσουν οι Βαβυλώνιοι και να τις ομαδοποιήσουμε στις παρακάτω κατηγορίες. (*Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and EarlyArabic Algebra, 1937, pp. 2-8*)

|      |                                |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                               |
|------|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I.   | $x + y = a$<br>$xy = b$        | Αυτές οι δυο μορφές θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως βασικές, αφού ο τρόπος λύσης τους θεωρείται δεδομένος και δεν αναφέρεται πουθενά. Τα πιο «σύνθετα» προβλήματα ανάγονται σε αυτές τις δυο μορφές. | Οι αποκαλούμενοι « <b>Διοφαντικοί</b> » τύποι, επειδή μας έχουν γίνει γνωστές από τα Αριθμητικά του Διόφαντου |
| II.  | $x - y = a$<br>$xy = b$        |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                               |
| III. | $x + y = a$<br>$x^2 + y^2 = b$ |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                               |
| IV.  | $x - y = a$<br>$x^2 + y^2 = b$ |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                               |
| V.   | $x + y = a$<br>$x^2 - y^2 = b$ |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                               |
| VI.  | $x - y = a$<br>$x^2 - y^2 = b$ |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                               |

|       |                |                                                                          |                                                                                                      |
|-------|----------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| VII.  | $x^2 + ax = b$ |                                                                          | Οι αποκαλούμενοι « <b>Αραβικοί</b> » τύποι, επειδή μας έγιναν γνωστοί μέσω του <i>Al- Khawarizmi</i> |
| VIII. | $x^2 - ax = b$ |                                                                          |                                                                                                      |
| IX.   | $x^2 + b = ax$ | Τύπος γνωστός στους Βαβυλωνίους. Χρησιμοποιείτε πολύ σπάνια έως καθόλου. |                                                                                                      |

Table 2-2

- ✓ Η **πρώτη κατηγορία** είναι οι εξισώσεις I,II, όπου δίνεται το εμβαδόν του ορθογωνίου και το άθροισμα ή η διαφορά των δυο πλευρών. Παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα του πίνακα ΑΟ 8862 από την παράγραφο 2.4.1
- ✓ Η **δεύτερη κατηγορία** είναι οι εξισώσεις III, IV, όπου δίνεται η διαγώνιος και το άθροισμα ή η διαφορά των πλευρών.
- ✓ Η **τρίτη κατηγορία** είναι οι εξισώσεις V,VI όπου δεδομένης της μιας πλευράς μας δίνεται το άθροισμα ή η διαφορά της διαγώνιου και η άλλη πλευρά.

### 2.6.1 Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους

Στον πίνακα BM 13901 (MKT III,p. 9, no 18) βλέπουμε ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Το σύστημα είναι:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 23,20 \\ x - y = 10 \\ y - z = 10 \end{cases}$$

Equation 2-14

Προκειμένου οι Βαβυλώνιοι να επιλύσουν το παραπάνω σύστημα, έκαναν ουσιαστικά απαλοιφή του ενός αγνώστου. Εξέφρασαν το x και το y, συναρτήσκει το z και τότε προέκυψε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς z. Έχουμε ήδη συζητήσει για τον τρόπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Βαβυλωνίους.

Στο παραπάνω παράδειγμα όμως η δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις είναι:

$$3z^2 + 60z = 900$$

Equation 2-15

Πως αντιμετώπιζαν οι Βαβυλώνιοι την επίλυση της παραπάνω μορφής δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπου ο δευτεροβάθμιος όρος έχει συντελεστή διάφορο του 1; Εμείς σήμερα, θα ακολουθούσαμε την μέθοδο που ακολουθεί και ο *Al-Khwarizmi* στην άλγεβρά του και θα διαιρούσαμε με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου (αν και είμαστε σε θέση να το επιλύσουμε και χωρίς αυτή την απλοποίηση, θα μπορούσε κάποιος να επιλέξει την απαλοιφή του συντελεστή για λόγους ευκολίας) πριν από την επίλυση του.

Σύμφωνα με τον S. Gandz (Gandz, *The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra*, 1937, pp. 97,104), οι Βαβυλώνιοι συνήθιζαν να κατασκευάζουν μια εξίσωση για το  $ax$ , όπου  $a$  ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου. Στην παραπάνω εξίσωση θα είχαμε:

$$3z^2 + 60z = 900 \Rightarrow (3z)^2 + 60 \cdot (3z) = 3 \cdot 900$$

*Equation 2-16*

Στην συνέχεια φέρνει τον τύπο στην μορφή  $ax^2 + 2bx = c$ , για την παραπάνω εξίσωση έχω:  $a = 3, b = 30, c = 900$  και ως άγνωστη ποσότητα το  $3z$ .

Και μετά χρησιμοποιεί τον τύπο  $z = a^{-1}\sqrt{ac + b^2} - b$ , συνεπώς

$$z = \frac{1}{3}(\sqrt{3 \cdot 900 + 30^2} - 30 = 10.$$

(Waerden B. V., 1975, p. 69)

Με αντικατάσταση στις δοθείσες εξισώσεις προκύπτει ότι  $x = 30, y = 20$  και  $z = 10$ .

### 2.6.2 Ο πίνακας BM 85200 και οι εξισώσεις 3<sup>ου</sup> βαθμού

Ο πίνακας BM 85200 σύμφωνα με τον *Neugebauer* φαίνεται να είναι μεταγενέστερος από όσους έχουμε αναφέρει έως τώρα, χρονολογείται όμως στην παλιά Βαβυλωνιακή περίοδο. (c. 1600 π.Χ). Το κείμενο περιλαμβάνει 30 προβλήματα, τα οποία όλα ασχολούνται με την εκσκαφή ορθογώνιων παραλληλεπιδέδων (*cellar*). Κάποια από αυτά τα προβλήματα έχουν την δομή δευτεροβάθμιων εξισώσεων και για την επίλυσή τους χρησιμοποιείται κυρίως η τεχνική του “cut and paste” που έχουμε αναφέρει και κάποια δομούν εξισώσεις 3<sup>ου</sup> βαθμού και επιλύονται με άλλους τρόπους (όπως παραγοντοποίηση και η αναφορά σε πίνακες). Είναι προφανές πως οι Βαβυλώνιοι ήταν σε θέση να διαχωρίσουν τα δυο είδη εξισώσεων. (Høyrup, 1992, p. 323)

Σκοπός του πίνακα δεν είναι η διδασκαλία του τρόπου επίλυσης δευτεροβάθμιων και γραμμικών εξισώσεων, αλλά πως μπορεί ο “μαθητής” να τις φέρει σε μια γνωστή μορφή. Για τις εξισώσεις τρίτου βαθμού, σκοπός είναι να μας δείξει πως και τα δυο μέλη της εξίσωσης



θα έρθουν σε μορφή τέτοια, ώστε οι συντελεστές των αγνώστων ποσοτήτων και οι δυνάμεις που είναι υψωμένες οι γνωστές ποσότητες να μας βοηθήσουν να αναγνωρίσουμε με την πρώτη ματιά την ισότητα που θα προκύψει και την λύση. Όλα τα προβλήματα του πίνακα *BM 85200* που ανάγονται σε εξισώσεις τρίτου βαθμού μπορούν να χωριστούν σε 3 κατηγορίες:

|      |                           |                        |
|------|---------------------------|------------------------|
| i.   | $x^3 = a^3$               | (πρόβλημα 22)          |
| ii.  | $x^3 + x^2 = a^3 + a^2$   | (προβλήματα 5 και 23)  |
| iii. | $x^3 + 7x^2 = a^3 + 7a^2$ | (προβλήματα 20 και 21) |

Table 2-3

(Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra, 1937, p. 148)

#### 2.6.2.1 Το πρόβλημα 22 του πίνακα *BM 85200* (Høyrup, 1992, p. 333)

Το πρόβλημα 22 αποτελεί οδηγεί στην απλούστερη μορφή εξίσωσης τρίτου βαθμού.  
*“A cellar. So much as I have made confront itself, the depth. 1;30 of earth I have torn out. Length, width and depth, what -Ένα cellar. Όσο είναι το μήκος του είναι το πλάτος του και η γη η οποία έσκαψα (το ύψος – βάθος του). 1;30 είναι όλα. Πόσο είναι το μήκος, το πλάτος και το ύψος;”*

Το παραπάνω πρόβλημα εάν το μεταφράζαμε στην σημερινή γλώσσα θα ήταν :

$$12x^3 = 1;30$$

Δεν βλέπουμε κάπου στην εκφώνηση να εμφανίζεται ο αριθμός 12. Για να καταλάβουμε πως προέκυψε ο τύπος πρέπει να θυμηθούμε τις μονάδες μέτρησης των Βαβυλωνίων και να θυμηθούμε ότι το ύψος (βάθος) το μετράνε σε *kus* ,και όχι σε *nindam*. Αρκεί να θυμηθούμε ότι  $12 \text{ kus} = 1 \text{ midam}$ .

Για να δούμε τον τρόπο σκέψης των Βαβυλωνίων:

- *You, the igi of 12 detach, 0;5 you see. 0;5 to 1;30 raise, 0;7,30 you see*  
*Βρες τον αντίστροφο του 12 (igi). Είναι 0;5. Πολλαπλασίασε με το 1;30, θα βρεις 0;7,30.*
- *0;30 the equilateral. 0;30 to 1 raise, 0;30 confronts itself. 0;30 to 12 raise, 6 the depth.*

0;30 το ισόπλευρο (εννοεί μάλλον το τετράγωνο της βάσης), 0;30 πολλαπλασίασε με το 1 και αντιμετωπίζει τον εαυτό του. Πολλαπλασίασε 0;30 με το 12, άρα 6 είναι το βάθος.

- *The having has been made.*

Φαίνεται ξεκάθαρα ο τρόπος σκέψης. Πως υπολόγισαν όμως την κυβική ρίζα; Δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι, αλλά μια πιθανή εξήγηση είναι ότι χρησιμοποίησαν κάποιον πίνακα για να βρουν την κυβική ρίζα του.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο τρόπος επίλυσης που θα χρησιμοποιούσαμε σήμερα δεν διαφοροποιείται. Σήμερα είναι πιθανότερο όμως να κατασκευάζαμε την εξίσωση ως προς  $z$  και να μην την κατασκευάζαμε ως προς  $x$  απαραίτητα.

Οι Βαβυλώνιοι όμως γενικά προτιμούσαν την επίλυση ως προς  $x$  (δηλαδή ως προς το μήκος), όπου αυτό ήταν δυνατό. Σε περίπτωση που με αυτό τον τρόπο δεν οδηγούνταν σε αποτέλεσμα, τότε οπωσδήποτε προσπαθούσαν να επιλύσουν ως προς  $z$ . (το βάθος). (Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra, 1937, p. 149) Για να δούμε λοιπόν ένα τέτοιο πρόβλημα.

#### 2.6.2.2 Το πρόβλημα 23 του πίνακα BM 85200 (Høyrup, 1992)

“A cellar. So much as I have confront itself, and 1 kus, going beyond: the depth. 1;45 of earth I have torn out. - Ένα cellar. Όσο είναι το μήκος του είναι το πλάτος του, και το βάθος του πάει 1 kus παραπάνω. 1;45 η γη η οποία έσκαψα”

Το παραπάνω πρόβλημα εάν το μεταφράσουμε στην σημερινή αλγεβρική μορφή είναι το σύστημα:

$$\begin{cases} x = y \\ z = x + 1 \\ V = xyz = 1;45 \end{cases}$$

Equation 2-17

Βλέπουμε ότι εδώ θέτει  $z = x + 1$  και δεν επιλύει (συμβολίζει) ως προς  $x$ . Το  $x$  από την τετράγωνη βάση του  $x^2$  θα ήταν ίσο με  $\frac{x}{12}$  kus. Τότε έχει:

$$V = x^2 z = \frac{x^2}{144} (x + 1) = \frac{7}{4}$$

$$x^2 (x + 1) = 144 \cdot \frac{7}{4}$$

$$x^3 + x^2 = \frac{144}{4} \cdot 7 = 36 \cdot 7$$

$$x^3 + x^2 = 6^2(6 + 1) = 6^3 + 6^2$$

$$\text{Άρα } x = 6, z = 7, \frac{x}{12} = \frac{1}{2}$$

Οι άλλες δυο ρίζες που προκύπτουν από την επίλυση της παραπάνω τριτοβάθμιας εξίσωσης είναι μιγαδικές. Είναι δηλαδή οι  $x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{119}i$  και η συζυγής της  $x_3 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{119}i$ . Οι Βαβυλώνιοι δεν ήταν να θέσει να γνωρίζουν και να εντοπίσουν τις παραπάνω μιγαδικές ρίζες. Η έννοια του μιγαδικού αριθμού εισήχθη τον 16<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ, περίπου 30 αιώνες αργότερα!

Σε αυτό το σημείο αξίζει να γίνει αναφορά στον διαφορετικό τρόπο που έχουνε ερμηνεύσει τον παραπάνω τρόπο λύσης 3 ερευνητές. Οι *Van de Waerden*, *S. Gandz* και ο *J. Høyrup*. Τόσο ο *Van den Waerden*, όσο και ο *Høyrup* πιστεύουν ότι σε αυτό το πρόβλημα έχει γίνει χρήση πινάκων για τον προσδιορισμό της κυβικής ρίζας, ενώ ο *Gandz* έχει μια διαφορετική άποψη. Για να δούμε τι υποστηρίζει ο καθένας:

**Van den Waerden** (Waerden B. V., 1975, p. 71)

*The next problem no 23 leads to a mixed cubic*

$$x^2(12x + 1) = 1;45$$

*By multiplying both sides  $12^2$  the author obtains*

$$(12x^2)(12x+1)=4,12$$

*And from this he obtains, without any further ado,  $12x = 6$ . **Where did he get this result? From a table, of course.** Indeed, we know that tables existed, which gave the “roots”  $n$  of numbers of the form  $n^2(n + 1)$ .*

*By means of their tables, the Babylonians were therefore able to solve mixed cubics of the form*

$$x^2(\mu x + 1) = V$$

*Equation 2-18*

*As readily as pure quadratics or pure cubics.*

Βλέπουμε ότι ο *Van de Waerden* έχει λύσει την εξίσωση με μονάδα μέτρησης το *kus* και άρα το  $z = 12x + 1$  και διατυπώνει ξεκάθαρα (***Where did he get this result? From a table, of course – Πώς βρήκε αυτό το αποτέλεσμα; Από πίνακα φυσικά***) ότι ο Βαβυλώνιος γραφέας έχει πάρει την λύση του από πίνακα. Γνωρίζουμε ότι υπήρχαν πίνακες οι οποίοι μας έδιναν της “ρίζες”  $n$ , εξισώσεων της μορφής  $n^2(n + 1)$ . Με χρήση αυτών των πινάκων οι Βαβυλώνιοι ήταν σε θέση να επιλύσουν κυβικές εξισώσεις της μορφής

$$x^2(\mu x + 1) = V$$

Equation 2-19

**Høyrup** (Høyrup, 1992, p. 342)

*...A tabulation of  $n^2(n + 1)$  is actually known (VAT8492, [MKT] 1,76), which identifies only one number (  $n$ ) as the equilateral; furthermore, the only other problem of the present tablet which might be solved by means of such a table (N° 5) also lists only one equilateral, while all others making use of a quotient volume indicate three. It is thus highly plausible that the phrase '1' from the equilateral, 1 append" **refers either to the designation of such a table or to its content, and that a table has indeed been used for the solution of these (and only these) two problems.** Since *ina*, beyond "from", also means "in" and "by means of", the phrase should perhaps be interpreted "in/by means of [the table] 'equilaterals, [with] 1 appended', 6 [is found as the) equilateral"*

Και εδώ βλέπουμε ξεκάθαρα πως ο Høyrup δηλώνει την χρήση πινάκων σε αυτό το πρόβλημα όσο και στο πρόβλημα 5 αυτής της πλάκας και σε κανένα άλλο πρόβλημα. Στηρίζοντας την άποψή του και στην άποψη του Neugebauer (MKT I, 210f). Σχολιάζει μάλιστα ότι στο πρόβλημα αυτό, όπως και στο πρόβλημα 5 που έχει γίνει χρήση τέτοιου πίνακα και τα 2 δίνουν μια μοναδική λύση, δίνουν ένα μόνο ισόπλευρο σχήμα, ενώ άλλα προβλήματα τα οποία βρίσκουν το πηλίκο του όγκου βρίσκουν 3 λύσεις.

Αντίθετα με τους παραπάνω ερευνητές ο **S. Gandz** υποστηρίζει ότι δεν χρειάστηκε καν να χρησιμοποιηθούν πίνακες σε αυτό το πρόβλημα και ότι έχει γίνει μια πολύ προσεκτική ανάλυση σε παράγοντες. Για να δούμε την οπτική του:

(Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and EarlyArabic Algebra, 1937, p. 151)

*It is true that the text says simply:  $144 \cdot \frac{7}{4} = 252$ . **But he must have recognized at once,***

**without any tables**, *that  $144 \cdot \frac{7}{4}$  contains the square number  $\frac{144}{4} = 36$  and the prime number 7 as the two highest factors. Hence, he got:*

$$x^2z = 6^2 \cdot 7 \text{ and } x^2(x + 1) = 6^2(6 + 1)$$

Equation 2-20

*Hence all we see here, is an equation for  $z$  and a clever and skillful factorial analysis, which was facilitated through the occurrence of the prime number 7 as a factor. The same obtains also for problems 20 and 21.*

Σύμφωνα λοιπόν με τον Gandz, ο Βαβυλώνιος γραφέας, έχει επιλύσει αυτό το πρόβλημα χωρίς την χρήση πινάκων, παρατηρώντας ότι το γινόμενο  $144 \cdot \frac{7}{4} = 36 \cdot 7$  και μπόρεσε αμέσως να επιλύσει την εξίσωση.

Πώς πραγματικά κινήθηκε σε αυτή την περίπτωση ο Βαβυλώνιος γραφέας δεν θα μπορέσουμε να το μάθουμε. Είναι δεδομένο πως έχουμε βρει πλάκες που αποδεικνύουν ότι υπάρχουν πίνακες για τον υπολογισμό των ρίζων εξισώσεων της μορφής  $n^2(n + 1)$  (Waerden B. V., 1975, pp. 44-45).

Εάν ο Βαβυλώνιος γραφέας που έγραψε την συγκεκριμένη πλάκα ήταν ικανός να αναγνωρίσει το γινόμενο παραγόντων που προέκυπτε και να το αντικαταστήσει επειδή θυμόταν ότι  $6^2 = 36$ , δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε και ούτε να το αποκλείσουμε. Γεγονός όμως είναι, ότι η πληροφορία  $6^2 = 36$  προέρχεται και αυτή από πίνακα και ότι στην πλειονότητα των περιπτώσεων, έχοντας έτοιμους τους πίνακες ήταν πολύ εύκολο απλά να ανατρέξει στην λύση και να μην χρειάζεται τέτοιου είδους χειρισμούς.

Αυτή η παρατήρηση, ότι δηλαδή υπήρχαν πίνακες έτοιμοι για εξισώσεις της μορφής  $n^2(n + 1)$ , όπως και πίνακες για τον υπολογισμό τετραγωνικών και κυβικών ριζών μας κάνουν να αναρωτιόμαστε μήπως και το παραπάνω παράδειγμα ήταν ένα “στημένο” παράδειγμα. Μήπως δηλαδή τα νούμερα και η μορφή της εξίσωσης στην οποία οδηγεί ήταν επιλεγμένα με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση να προέρχεται από τους πίνακες που είχαν; Γιατί υπήρχαν πίνακες μόνο για το  $n^2(n + 1)$ , εκτός από το  $x^2$  και το  $x^3$ ;

Μια πιθανή εξήγηση θα μπορούσε να είναι ότι η εξίσωση της μορφής  $n^2(n + 1)$  ήταν σημαντική για τους Βαβυλωνίους, είχε προκύψει από κάποιου είδους πρόβλημα και για αυτό είχαν δημιουργηθεί και οι σχετικοί πίνακες. Τα προβλήματα 5 και το 23 από τον πίνακα BM 85200, που αποτελούν και τα μοναδικά προβλήματα με εξισώσεις τέτοιας μορφής που έχουν μια και μοναδική λύση, μπορεί να είναι προβλήματα κατασκευασμένα επίτηδες, ώστε να διευκολύνουν την εκμάθηση, είτε αυτής της μορφής επίλυσης ή ακόμα και της χρήσης πινάκων.

Μπορούμε όμως να ισχυριστούμε ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν πώς να επιλύουν τριτοβάθμιες εξισώσεις; Μπορούμε να πούμε ότι ήταν σε θέση να τις κατασκευάσουν. Μπορούμε να πούμε ότι από πρακτικούς λόγους είχαν καταφύγει στην κατασκευή πινάκων τριτοβάθμιων όρων, δεν μπορούμε όμως να υποστηρίξουμε ότι είχαν καταφέρει να επιλύουν τριτοβάθμιες εξισώσεις.

## 2.7 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στους Βαβυλωνίους και οι πυθαγόρειες τριάδες

Στον πίνακα BM 85196 (Waerden B. V., 1975, pp. 76-77) βρίσκουμε το παρακάτω πρόβλημα:

“A *patu* (beam?) of length 0;30 (stands against a wall). The upper end has slipped down a distance 0;6. How far did the lower end move? - Ένας στύλος μήκους 0;30(=  $\frac{1}{2}$ ) ακουμπάει στον τοίχο. Το πάνω άκρο γλίστρησε προς τα κάτω σε απόσταση 0;6 (=  $\frac{1}{10}$ ). Πόσο μακριά μετακινήθηκε το κάτω άκρο;”

Το πρόβλημα αυτό μας οδηγεί να υποθέσουμε ότι σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο από τον τοίχο και τον στύλο, στο οποίο γνωρίζουμε την υποτείνουσα (το μήκος του στύλου)  $d = 0;30$  και την μια κάθετη πλευρά  $d - h = 0;30 - 0;6 = 0;24$ . Την άλλη πλευρά την καθορίζουν χρησιμοποιώντας το «πυθαγόρειο» θεώρημα και χρησιμοποιώντας για τον υπολογισμό τον τύπο

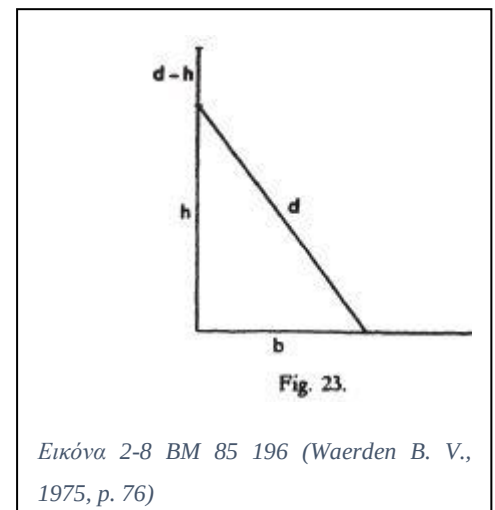
$$b = \sqrt{d^2 - h^2}$$

Equation 2-21

Όπως αποδεικνύεται και από το πρόβλημα του περιέχεται στον πίνακα BM 34 568 (μετάφραση MKT III, p.22) , ο οποίος χρονολογείται από την εποχή των Σελευκιδών <sup>16</sup> οι Βαβυλώνιοι συνέχισαν να χρησιμοποιούν για 1500 περίπου χρόνια αυτή την μέθοδο. Στον πίνακα BM 34568 περιέχονται μικρά προβλήματα που αφορούν την εύρεση μήκους, πλάτους και διαγώνιων ορθογώνιων.

Σε όλα αυτά τα προβλήματα κοινό χαρακτηριστικό είναι η επαναλαμβανόμενη χρήση του «Πυθαγόρειου Θεωρήματος», όπου αλλάζουν οι «αλγεβρικές» απαιτήσεις. Για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα δίνεται η υποτείνουσα και η μια πλευρά και ζητείται η άλλη, σε άλλο πρόβλημα δίνεται η μια κάθετη πλευρά και το άθροισμα της υποτείνουσας με την άλλη. Στο τελευταίο και πιο σύνθετο δίνεται το άθροισμα των 2 πλευρών και το γινόμενο της υποτείνουσας με την μια κάθετη.

Αυτό το οποίο αξίζει να αναφερθεί είναι ότι οι 3 πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου κάθε φορά δεν έχει σταθερή αναλογία 3:4:5, αλλά μπορεί κάποιος να βρει και σχέσεις με



Εικόνα 2-8 BM 85 196 (Waerden B. V., 1975, p. 76)

---

<sup>16</sup> Μετά το 310 π.Χ. Οι Σελευκίδες ήταν διάδοχοι του Μεγάλου Αλεξάνδρου

αναλογία 5:12:13, 8:15:17, 20:21:29. Οι πρώτες 3 αναλογίες πλευρών ορθογωνίων τριγώνων έχουν επίσης βρεθεί και σε κείμενα του Ήρων του Αλεξανδρείας<sup>17</sup>. (Waerden B. V., 1975, p. 77)

Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσει κανείς ότι οι παραπάνω αναλογίες αποτελούν πυθαγόρειες τριάδες και ίσως θα μπορούσαμε να πούμε πως οι Βαβυλώνιοι είχαν κάποια μέθοδο εύρεσης πυθαγόρειων τριάδων ή είχαν βρει κάποιες από αυτές.

Οι Βαβυλώνιοι φαίνεται να μην ήταν βιρτουόζοι μόνο στην Άλγεβρα, αλλά και στην θεωρία αριθμών. Ο Neugebauer στο τέλος του έργου του “*Mathematische Keilschrift-Texte*” εκφράζει την πεποίθηση – ελπίδα ότι μπορεί να μάθουμε περισσότερα πράγματα σχετικά με κάποια εισαγωγικά στοιχεία της «στοιχειώδους» αριθμοθεωρίας που μπορεί υπήρχαν στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά. Αυτή η εικασία του, μπορεί να υποστηριχθεί και από ένα εύρημα μεταγενέστερο τον πίνακα «Plimpton 322». (Waerden B. V., 1975, p. 77)

Είναι μάλλον γεγονός ότι τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων αποτελούσαν μια παρακαταθήκη για τα μαθηματικά των μεταγενέστερων και ίσως οι Αρχαίοι Έλληνες στο βαθμό που αυτό ήταν εφικτό να ήταν γνώστες κάποιων τεχνικών και να στηρίχθηκαν σε αυτές. Δεν είναι εύκολο όμως να γνωρίζουμε ακριβώς σε ποιο βαθμό αυτή η πληροφορία μπορούσε να διαχυθεί και πόση ήταν η επιρροή που ασκήθηκε.

Ας δούμε τι συνέβαινε στα Μαθηματικά εκείνη περίπου την περίοδο στην Κίνα, όπου μάλλον η επιρροή των Βαβυλωνίων ήταν δύσκολο να υπάρξει.

### 3 Τα κινεζικά Μαθηματικά

#### 3.1 Αρχαία Κινεζικά Μαθηματικά κείμενα

Τα τελευταία 75 περίπου χρόνια έχει γίνει ένας μεγάλος αριθμός αρχαιολογικών ανακαλύψεων στην Κίνα που μας έχουν βοηθήσει να επεκτείνουμε τις γνώσεις μας στην ιστορία των Αρχαίων Κινεζικών Μαθηματικών. Μέχρι πρόσφατα, οι μόνες γνωστές πηγές για μελέτη περιορίζονταν κυρίως σε αυτές που ονομάζουμε “*Ten classics of Chinese Mathematics*”<sup>18</sup> τα οποία περιλαμβάνουν κείμενα όπως τα “*Zhou bi suan jing*”, “*The Jiu*

---

<sup>17</sup> Διάσημος Έλληνας και μηχανικός Γεωμέτρης γεννημένος στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Έζησε περίπου το 10-75 μ.Χ. ( [Mac Tutor history of Mathematics Archive](#))

<sup>18</sup> “*Zhoubi suanjing (Zhou Shadow Gauge Manual)*”, “*Jiuzhang suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art)*”, “*Haidao suanjing (Sea Island Mathematical Manual)*”, “*Sunzi suanjing (Sun Zi's Mathematical Manual)*”, “*Wucaosuanjing (Mathematical Manual of the Five Administrative Departments)*”,

*zhang suan shu*”, “*Hai dao suan jing*”, “*Sunzi suan jing*” και άλλα. Αυτά είχαν τυπωθεί σε μια έκδοση που έχει μερικώς διατηρηθεί από την εποχή της Νότιας δυναστείας των Song (1127–1279 μ.Χ), η οποία βασίστηκε σε εκδοχές (versions) αρχαίων έργων που είχαν μαζευτεί από τον *LI Chunfeng*<sup>19</sup> και τους συνεργάτες του την εποχή της δυναστείας Tang. Εκείνη την εποχή τα 10 έργα, γνωστά και ως “*Ten Classics*” προορίζονταν ως τα βασικά εγχειρίδια – βιβλία που οι μαθητές έπρεπε να κατέχουν ώστε να πετύχουν στις Αυτοκρατορικές εξετάσεις για το Εθνικό Πανεπιστήμιο.

### 3.1.1 *Chu boshu* (περίπου 300 π.Χ)

Στο τέλος περίπου του Δευτέρου Παγκοσμίου πολέμου και του Δεύτερου Σινοϊαπωνικού πολέμου (περίπου το 1945 μ.Χ) στην περιοχή *Zidanku*, ανατολικά της *Changsha* στο *Hunan* ανακαλύφθηκε το “*Chu boshu*”, ένα κείμενο πάνω σε μετάξι το οποίο χρονολογήθηκε από τους αρχαιολόγους περίπου το 300 π .Χ. – Εκείνη την εποχή στην Αρχαία Ελλάδα ο Ευκλείδης έγραψε τα “*Στοιχεία*”. Το *Chu boshu* ασχολείται με την αστρονομία, την αστρολογία, τις κινήσεις των ουράνιων σωμάτων, τις αλλαγές των εποχών και την περιγραφή των ευοίωνων και δυσοίωνων ημερών. Αναφέρει επίσης τις μυθικές θεότητες *Fuxi* και *Nuwa*<sup>20</sup> και περιλαμβάνει απεικονίσεις θεοτήτων που σχετίζονται με τους 12 μήνες. Το κείμενο υπερτονίζει την σημασία των μαθηματικών σε διάφορες εφαρμογές στην αρχαία Κίνα. (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 25)

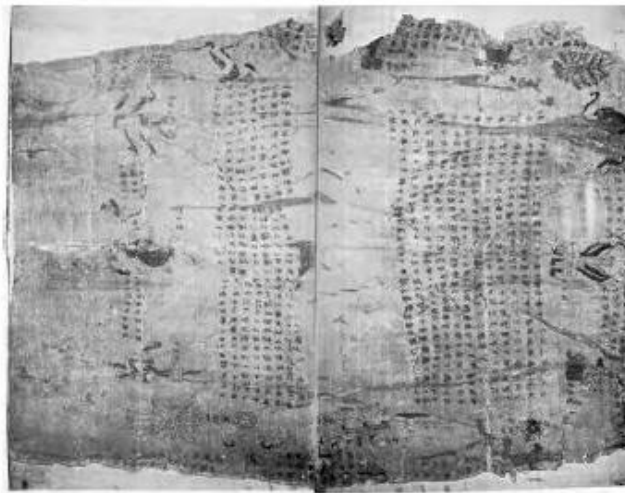
---

*Xiahou Yang suanjing* ([Xiahou Yang's Mathematical Manual](#)),” *Zhang Qiuqian suanjing* ([Zhang Qiuqian's Mathematical Manual](#)),” *Wujing suanshu* (*Arithmetic methods in the Five Classics*),” *Jigu suanjing* (*Continuation of Ancient Mathematics*),” *Shushu jiyi* (*Notes on Traditions of Arithmetic Methods*),” *Zhui shu* (*Method of Interpolation*),” *Sandeng shu* (*Art of the Three Degrees; Notation of Large Numbers*)” ([https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Ten\\_classics.html](https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Ten_classics.html))

<sup>19</sup> Κινέζος μαθηματικός, αστρονόμος, ιστορικός και πολιτικός ο οποίος γεννήθηκε στο σημερινό *Baoji Shaanxi* το 602 μ.Χ και έζησε κατά την διάρκεια των δυναστειών *Sui* και *Tang*. Πέθανε στην *Chang'an* το 670 μ.Χ. Βοήθησε στην βελτίωση του Κινέζικου ημερολογίου (*Linde calendar*) και στην έκδοση αυτών που αποκαλούμε σήμερα “*Ten classics*” το 1084 που είναι μια συλλογή μαθηματικών έργων. ([https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Li\\_Chunfeng.html](https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Li_Chunfeng.html))

<sup>20</sup> Οι *Fuxi* και *Nuwa* είναι μυθικές φιγούρες που σχετίζονται με την δημιουργία των μαθηματικών στην Αρχαία Κίνα. (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 25)





Εικόνα 3-1 Chu boshu - Warring States Period (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 26)

### 3.1.2 Mawangdui, Changsha, Hunan (186-168 π.Χ)

Το 1972 με 1973 μ.Χ, ανακαλύφθηκαν τρία ταφικά μνημεία από την Δυναστεία των πρώτων Δυτικών Han (c. 206 π.Χ – 9 μ.Χ) . Στον τάφο νο 3 βρέθηκαν ευρήματα με ένα από τα αρχαιότερα αντίγραφα του “Zhou yi - Divination of Astrological and Meteorological Phenomena” και το “Divination by Five Stars” που αποτελείται από δυο μέρη το “Diagrams and Movements of Five Stars” και το “Divination of Five Stars”.

Τα έργα που ανακαλύφθηκαν στο Mawangdui είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στους ιστορικούς των Μαθηματικών καθώς αναφέρουν τις αρχαίες μονάδες μέτρησης του βάρους και του μήκους και εφαρμογές της μεθόδου των τριών (*Rule of Three*) που χρησιμοποιούνταν στις εμπορικές συναλλαγές και την καθημερινότητα. (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 26)

### 3.1.3 Han Bamboo Slips από το Zhangjiashan (Suan Shu Shu or Book of Numbers and Computations) – 186 π.Χ

Το 1983-1984 κατά τη διάρκεια ανασκαφών στην περιοχή Zhangjiashan της επαρχίας Jiangling, στο Hubei, περιοχή της Δυτικής Δυναστείας των Han, ανακαλύφθηκε ένας αριθμός βιβλίων γραμμένων σε λωρίδες από bamboo, που περιλάμβαναν κείμενα σχετικά με τους νόμους, την στρατιωτική πολιτική και την ιατρική. Ανάμεσα σε αυτά βρισκόταν και ένα

άγνωστο μέχρι τότε μαθηματικό έργο το “*Suan Shu Shu (or Book of Numbers and Computations)*”. Είχε έκταση περίπου 200 λωρίδες. Με βάση άλλα έργα που βρέθηκαν σε μαζί, οι αρχαιολόγοι κατάφεραν να χρονολογήσουν τον τάφο περίπου το 186 π. Χ.

Το “*Suan Shu Shu (or Book of Numbers and Computations)*” είναι το αρχαιότερο έργο που έχει ως τώρα (2014) ανακαλυφθεί και χρονολογηθεί, το οποίο αναφέρεται αποκλειστικά στα μαθηματικά της Αρχαίας Κίνας.

Το έργο αυτό ασχολείται με πρακτικά θέματα, όπως ο υπολογισμός του εμβαδού και του όγκου, η τιμολόγηση αγαθών και η κατανομή των φόρων (Katz & Parshall, 2014, p. 81). Τέλος περιλαμβάνεται και ένας αριθμός από λωρίδες που αφορά μόνο τους πολλαπλασιασμούς, αρχικά με κλάσματα μικρά όπως το  $\frac{1}{9}$  και μετά δυνάμεις του 10 έως το  $10^7$ . (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 27)



*Εικόνα 3-2 Suan Shu Shu bamboo strips. Στο τέρμα δεξιά καλάμι πάνω-πάνω εμφανίζεται ο τίτλος του κειμένου. (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 27)*

### 3.1.4 Ο πίνακας πολλαπλασιασμού από την περίοδο της Δυναστείας των Qin<sup>21</sup>.

Το 2002 στα πλαίσια ανασκαφών στα ανατολικά του ποταμού *Youshui* βρέθηκαν πάνω από 30,000 λωρίδες bamboo και ξύλινες πλάκες, όλα πολύ καλά διατηρημένα. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον για εμάς είναι ένας πίνακας πολλαπλασιασμού διαστάσεων 22 cm x 4,5 cm, που έχει χρονολογηθεί από την περίοδο της Δυναστείας των Qin. Ενδιαφέρον επίσης αποτελεί ότι είμαι όμοιος με πολλαπλασιαστικούς πίνακες που περιέχονται στο *Suan shu shu*. (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of*



Εικόνα 3-3 πίνακας πολλαπλασιασμού από την Δυναστεία των Qin (221-206 π.Χ) (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 27)

Mathematics, 2014, p. 28)

---

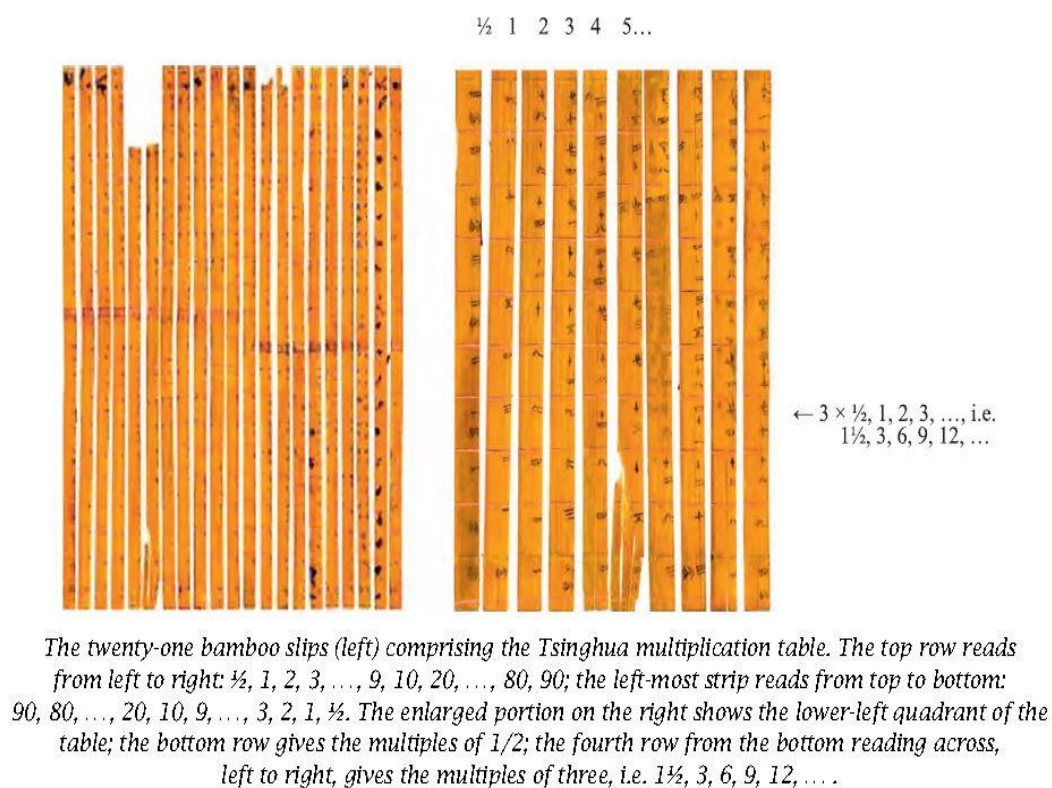
<sup>21</sup> Η πρώτη δυναστεία της αυτοκρατορικής Κίνας, περίπου από το 221 έως 206 π.Χ.

### 3.1.5 Το έργο Shu εποχής από την Δυναστεία Qin<sup>21</sup>

Τον Δεκέμβριο του 2007 η Ακαδημία Yuelu του πανεπιστημίου του Hunan, απέκτησε περισσότερες από 1300 λωρίδες bamboo χρονολογημένες από την εποχή της Δυναστείας των Qin. Πίσω από την λωρίδα [0956] υπάρχει ένας χαρακτήρας που αποτελεί τον τίτλο “Shu” (Numbers) για μια συλλογή μαθηματικών προβλημάτων που υπάρχει σε 231 λωρίδες bamboo. Σε αυτές τις λωρίδες φέρεται να υπάρχουν 73 υπολογιστικά προβλήματα με 60 μεθόδους επίλυσης. (Dauben, The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, 2014, p. 28)

### 3.1.6 Tsinghua Bamboo Slips (περίπου 305 π.Χ ± 30 χρόνια)

Το 2008 το πανεπιστήμιο του Tsinghua απέκτησε 2388 λωρίδες bamboo, οι οποίες με ραδιοχρονολόγηση τοποθετήθηκαν στην εποχή των Warring States και πιο συγκεκριμένα το 305 π.Χ με απόκλιση 30 χρόνων. Για την ιστορία των μαθηματικών το πιο αξιοσημείωτο περιεχόμενο είναι 21 λωρίδες που περιλαμβάνουν έναν ολόκληρο πίνακα πολλαπλασιασμού από το  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$  έως το  $9 \times 9$  και μετά πολλαπλάσια του 10 από το 10 έως το 90 (Εικόνα 3-4).



Εικόνα 3-4 (Dauben, The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, 2014, p. 29)

Βρέθηκαν επίσης και άλλοι πίνακες πολλαπλασιασμού, όπως αυτό στην επαρχία Gurendi, Zhangjiajie, Hunan που ξεκινάει από το  $9 \times 9$  και φτάνει στο  $1 \times 1$ . (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 28)

### 3.1.7 *Jiuzhang suanshu (Nine Chapters on the Art of Mathematics)*

Το “*Jiuzhang suanshu - Nine Chapters on the Art of Mathematics*” αποτελούσε το κεντρικό μαθηματικό έργο για τα Κινέζικα μαθηματικά για πολλούς αιώνες. Όπως χαρακτηριζόταν αναφέρεται:

*“Το έργο The Nine Chapters on the Mathematical Art κυριάρχησε (dominated) στην ιστορία των Κινεζικών μαθηματικών. Χρησίμευε ως εγχειρίδιο μαθηματικών, όχι μόνο στην Κίνα, αλλά και στις γειτονικές χώρες και περιοχές μέχρι που εισήχθη η Δυτική επιστήμη από την Άπω Ανατολή, περίπου το 1600 μ.Χ.”*

Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα πότε γράφηκε. Ο Liu Hui (περίπου 3<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ) είναι ένας από τους βασικούς σχολιαστές του. Έγραψε σχόλια στο *Jiuzhang saunshu* περίπου το 263μ.Χ. Θεωρεί ότι έχει γραφεί περίπου το 1000π.Χ και ότι σε αυτό έχουν ενσωματωθεί πολλά μεταγενέστερα στοιχεία. Γράφει χαρακτηριστικά:

*“In the past, the tyrant Qin<sup>22</sup> burnt written documents, which led to the destruction of classical knowledge. Later, Zhang Cang, Marquis of Peiping and Geng Shouchang, Vice-President of the Ministry of Agriculture, both became famous through their talent for calculation. Because of the ancient texts had deteriorated, Zhang Cang and his team produced a new version removing the poor parts and filling in the missing parts. Thus, they revised some parts with the result that these were different from the old parts ...”*

#### Μετάφραση:

*«Στο παρελθόν, ο τύραννος Qin έκαψε όλα τα γραπτά κείμενα, το οποίο οδήγησε στην καταστροφή της κλασσικής γνώσης. Αργότερα, ο Zhang Cang, μαρκήσιος του Peiping και ο Geng Shouchang, αντιπρόεδρος του υπουργείου Γεωργίας και οι δυο έγιναν διάσημοι για το ταλέντο τους στους υπολογισμούς. Επειδή τα αρχαία κείμενα είχαν επιδεινωθεί, ο Zhang Cang*

---

<sup>22</sup> Η Δυναστεία των Qin προηγήθηκε αυτής των Han dynasty και ο Shih Huang Ti των Qin, προσπάθησε να αναμορφώσει την εκπαίδευση, καταστρέφοντας όλα τη προηγούμενη γνώση. Διέταξε να καούν όλα τα βιβλία το 213 π.Χ και ο Zhang Cang έκανε την ανοικοδόμησή του περίπου το 170 π.Χ.( [http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Nine\\_chapters.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters.html))



και η ομάδα του έφτιαξαν μια νέα έκδοση αφαιρώντας κομμάτια «φτωχά» και γεμίζοντας κενά κομμάτια. Ως αποτέλεσμα, κάποια κομμάτια διέφεραν από τα παλιά...»

Πολλοί ιστορικοί όμως δεν πιστεύουν ότι το αρχικό κείμενο είναι τόσο παλιό, όσο λέει ο Liu Hui. Είναι πιθανό να γράφηκε μετά το 200 π.Χ και την καύση των βιβλίων από τον Shih Huang Ti, άλλοι το χρονολογούν μεταξύ 100 π.Χ και 50 μ.Χ. (O'Connor & Robertson, 2003)

Ο Liu Hui έχει κάνει εκτενέστατα σχόλια στο βιβλίο αυτό, πρόσθεσε ακόμα και ένα 10<sup>ο</sup> κεφάλαιο, το οποίο τώρα είναι γνωστό ως “*The Sea Island Mathematical Manual*”. Ο Li Chunfeng είναι ένας ακόμα σχολιαστής του έργου, ο οποίος μας βοήθησε να καταλάβουμε και την εξέλιξη των μαθηματικών ανάμεσα στην εποχή που γράφτηκε το βιβλίο και την εποχή του σχολιασμού του (περίπου το 640μ.Χ). (Katz V. J., 2009, p. 196)

Το βιβλίο αυτό περιέχει τόσο πρακτικά θέματα, όπως ο υπολογισμός του εμβαδού και του όγκου, η τιμολόγηση αγαθών και η κατανομή των φόρων, όσο και κάποια λιγότερο πρακτικά, τα οποία όμως έχουν προκύψει από προβλήματα της καθημερινότητας. (Katz & Parshall, 2014, p. 81).

Το “*Jiu Zhang Suan Shu – The Nine Chapters of Mathematical Art*” όπως είναι και εμφανές από τον τίτλο του είναι διαχωρισμένα σε 9 κεφάλαια και περιέχει 246 προβλήματα. Τα διάφορα αντικείμενα είναι συστηματικά οργανωμένα και ομαδοποιημένα, παρόλα αυτά ο τίτλος του κάθε κεφαλαίου δεν περιγράφει απαραίτητα όλο το περιεχόμενο του κεφαλαίου, πολύ συχνά το κεφάλαιο παίρνει το όνομά του από τη θεματολογία του πρώτου προβλήματος. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 6)

Τα κεφάλαια είναι τα εξής:

**i. Κεφάλαιο 1: 方田 – Fang tian (μέτρηση επιφανειών)**

Περιέχει 38 προβλήματα. Εάν μεταφραστεί ακριβώς από τα Κινεζικά ο τίτλος του κεφαλαίου είναι «τετράγωνες επιφάνειες – περιοχές» και συνήθως σε έργα των Κινεζικών μαθηματικών αναφέρεται με αυτό τον τίτλο. Αυτό το κεφάλαιο που είναι και το πρώτο του βιβλίου, ξεκινάει εκεί που ολοκληρώνεται – τελειώνει το “*Suan Shu Shu*” και συγκεκριμένα, με το αντίστροφο του προβλήματος 53 του “*Suan Shu Shu*” το οποίο και εξετάζουμε σε επόμενη παράγραφο. Το πρόβλημα αφορά τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ορθογωνίου χωραφίου. Στην συνέχεια ασχολείται με μια σειρά

προβλημάτων που σχετίζονται με τον υπολογισμό κλασμάτων, περιλαμβάνοντας βασικές αριθμητικές πράξεις για τα κλάσματα και την μέθοδο για την απλοποίησή τους – “*yue fen- 约分*” (όπου περιγράφεται μια μέθοδος ανάλογη της Ευκλείδειας)<sup>23</sup>. Για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων, χρησιμοποιείται μια τεχνική γνωστή με το όνομα “*uniformizing and homogenizing*”. Σε αυτή την μέθοδο για να προσθέσεις ή να αφαιρέσεις κλάσματα, δίνονται κοινοί παρονομαστές (*uniformizing*) και μετά προσαρμόζονται κατάλληλα οι αριθμητές (*homogenizing*) στη συνέχεια γίνονται οι υπολογισμοί. Η μέθοδος αναλύεται από τον Liu και θα την δούμε παρακάτω. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με 20 προβλήματα που αφορούν τον υπολογισμό εμβαδού. Τα χωρία όμως αυτά παρά τον τίτλο του κεφαλαίου δεν είναι μόνο τετράγωνα, αλλά ορθογώνια, τρίγωνα, τραπέζια, κύκλοι, δακτύλιοι ακόμα και κυκλικοί τομείς. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, σσ. 231-232)

## ii. Κεφάλαιο 2: 粟米 – *Su mi* (Κεχρί και ρύζι - σπόροι)

Το κεφάλαιο περιέχει 46 προβλήματα και ξεκινά δίνοντάς μας έναν πίνακα μετατροπών μεταξύ διάφορων σπόρων και των διάφορων μορφών που ήταν διαθέσιμα. Αυτό το κεφάλαιο δεν αφορά αποκλειστικά τον υπολογισμό της ισοδυναμίας των διαφόρων σιτηρών, αλλά περιλαμβάνει και αρκετά άλλα αγαθά, όπως τα τούβλα, το bamboo και το μετάξι (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 240). Τα περισσότερα από τα προβλήματα εδώ λύνονται με την μέθοδο των τριών ή όπως αλλιώς είναι γνωστή την χρυσή μέθοδο. Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στην μέθοδο αυτή, η οποία ήταν πολύ διαδεδομένη και συνηθισμένη στο εμπόριο κατά τους αρχαίους και μεσαιωνικούς χρόνους. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 14) Τα τελευταία 9 προβλήματα δεν

---

<sup>23</sup> Η μέθοδος περιλαμβάνει μια σειρά από διαδοχικές αφαιρέσεις, ξεκινώντας με τον παρονομαστή και τον αριθμητή μέχρι να βρεθεί ένα ζευγάρι από ίσους αριθμούς που ονομάζεται *deng shu- 等数*. Αυτός ο αριθμός είναι και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή. Διαιρώντας με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη το κλάσμα γίνεται ανάγωγο. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 9) Εύκολα μπορεί κάποιος να αντιληφθεί την ομοιότητα με την ανθυφαιρετική μέθοδο που μας δίνει ο Ευκλείδης στις προτάσεις του 7.1 – 7.2 για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη.

περιέχουν λόγους. Σε αυτά παρουσιάζονται δυο ακόμα μέθοδοι τη *Jinglu* (αναγωγή στη μονάδα) και *Qilu* (ένας κανόνας για την εύρεση του κόστους και των ποσών δύο διαφορετικών βαθμών ενός δεδομένου προϊόντος δοθείσης της συνολική τιμή τους). Σε αυτά τα προβλήματα δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος των τριών, αλλά αποδέχονται ότι η διαφορά της τιμής μεταξύ του ακριβότερου και του φθηνότερου προϊόντος είναι ίση με ένα νόμισμα. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 240-241)

iii. *Κεφάλαιο 3: 摧分 – cui fen (διαμοιρασμός σε ανάλογα μέρη)*

Το 20 προβλήματα τα οποία περιέχονται σε αυτό το κεφάλαιο αφορούν τις αναλογίες. Αναφέρεται σε ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα, αλλά και σε σύνθετες αναλογίες. Κάποια από αυτά λύνονται με την μέθοδο των τριών η οποία περιλαμβάνεται στο κεφάλαιο 2. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 244) Στο κεφάλαιο 3 περιλαμβάνονται 9 προβλήματα τα οποία χρησιμοποιούν την μέθοδο “*cui fen*”, δηλαδή τον διαμοιρασμό σε ανάλογα μέρη. Παρακάτω θα δούμε ένα παράδειγμα από αυτή την μέθοδο.

iv. *Κεφάλαιο 4: 少度 – shao guang (κοντό πλάτος)*

Περιέχει 24 προβλήματα. Τα πρώτα 11 προβλήματα ασχολούνται με την εύρεση της πλευράς ενός χωρίου. Όλα τα χωρία έχουν ορθογώνιο σχήμα και την μικρή πλευρά – δηλαδή το κοντό πλάτος ίσο με 1 *bu*. Η μέθοδος επίλυσής αυτών των προβλημάτων γνωστή ως “*Shao guang*” μας δείχνει ότι οι Κινέζοι γνώριζαν πώς να προσδιορίζουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 2 ή περισσότερων αριθμών. Στην συνέχεια τα προβλήματα 12 με 16 ασχολούνται με την εύρεση της πλευράς ενός τετραγώνου όταν γνωρίζουμε το εμβαδό του. Ουσιαστικά πρόκειται για την εύρεση τετραγωνικής ρίζας. Η μέθοδος υποδεικνύεται μετά από το πρόβλημα 16 και ονομάζεται *kai fang*.

v. *Κεφάλαιο 5: 商功 – Shang gong (συζητώντας την δουλειά)*

Στο κεφάλαιο αυτό περιέχονται 28 προβλήματα. Σκοπός του κεφαλαίου είναι ο υπολογισμός του όγκου διαφόρων στερεών με την χρήση γνωστών τύπων. Ορισμένα από τα προβλήματα αφορούν επίσης τον υπολογισμό των αναγκών σε ανθρώπινο δυναμικό για την κατασκευή δομών με σχήμα κάποιο γνωστό στερεό, σε διαφορετικές εποχές του έτους. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 46).



vi. *Κεφάλαιο 6: 均輸 – jun shu (δίκαιη μεταφορά)*

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει 28 προβλήματα. Τα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου μας δίνουν την εικόνα μιας δίκαιης κοινωνίας. Το πρώτο πρόβλημα για παράδειγμα ασχολείται με έναν δίκαιο τρόπο μεταφοράς κεχριού. Το επόμενο με ένα δίκαιο τρόπο μεταφοράς στρατιωτών. Η βάση δεδομένων αυτών των προβλημάτων είναι μεγάλη και είναι προβλήματα τα οποία θα ήταν πολύ χρήσιμα στους διοικούντες. Τα προβλήματα είναι κυρίως προβλήματα με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά και κάποια από αυτά σχετίζονται με την μέση απόσταση και μέση ταχύτητα. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 46)

vii. *Κεφάλαιο 7: 盈不足 – ying bu zu (πλεονάσμα και έλλειμμα)*

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει συνολικά 20 προβλήματα. Τα πρώτα 8 προβλήματα σχετίζονται με τις έννοιες του ελλείμματος και του πλεονάσματος. Η κύρια μέθοδος που εφαρμόζεται είναι η μέθοδος “ying bu zu” και χρησιμοποιείται σε αρκετά από τα προβλήματα στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Στο “Jiu zhang suanshu”, όλο το κεφάλαιο 7 ονομάζεται “ying bu zu” και είναι αφιερωμένο σε αυτή την μέθοδο. Το κεφάλαιο δεν ξεκινάει άμεσα με την εφαρμογή της μεθόδου. Τα πρώτα 8 προβλήματα σχετίζονται με το πλεονάσμα και το έλλειμμα. Τα προβλήματα αυτά είναι σε 3 κατηγορίες και οδηγούν αντίστοιχα σε προβλήματα γραμμικών εξισώσεων, συστημάτων 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 30-31) Προβλήματα από αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε και περαιτέρω στην συνέχεια.

viii. *Κεφάλαιο 8: 方程 – fang cheng (ορθογώνιος πίνακας - κυριολεκτικά τετράγωνη μέθοδος)*

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει 18 προβλήματα. Το περιεχόμενο των προβλημάτων είναι συστήματα εξισώσεων. Οι Κινέζοι προκειμένου να επιλύσουν τα συστήματα των εξισώσεων χρησιμοποιούσαν τις αριθμητικές ράβδους. Τα τοποθετούσαν στην μορφή πίνακα (*matrix*). Η μέθοδος επίλυσης που χρησιμοποιούσαν ονομαζόταν “fang cheng”. Ο χειρισμός του πίνακα (*matrix*) γινόταν με τέτοιο τρόπο ώστε, πολλαπλασιάζοντας μια στήλη με κατάλληλο αριθμό και μια σειρά αφαιρέσεων μεταξύ των στηλών, να

προκύπτει ένας τριγωνικός πίνακας (*transformed matrix with the remaining numerals forming a triangle*). Εδώ φαίνεται και η υπεροχή του συστήματος με τις αριθμητικές ράβδους των Κινέζων για μια ακόμα φορά. Η μέθοδος “*fang cheng*” οδήγησε και σε μια ακόμα μαθηματική οντότητα, τους αρνητικούς αριθμούς. Αφαιρώντας μια στήλη του πίνακα από μια άλλη, ήταν αναπόφευκτό να προκύπτουν και αρνητικοί αριθμοί. Οι Κινέζοι τους ονόμαζαν “*fu*” για να τους ξεχωρίζουν από τους θετικούς αριθμούς που ονομάζονταν “*zheng*”. Σε αυτό το κεφάλαιο περιέχονται επίσης κανόνες για την πρόσθεση και την αφαίρεση μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 47)

Από τα 18 προβλήματα του κεφαλαίου, 8 σχετίζονται με συστήματα  $2 \times 2$ , 6 με συστήματα  $3 \times 3$ , 2 με συστήματα  $4 \times 4$ . Το πρόβλημα 18 είναι  $5 \times 5$ , ενώ το πρόβλημα 13 είναι  $5 \times 6$ , το οποίο για να λυθεί δέχεται και μια ενδιάμεση λύση. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 35)

**ix. *Κεφάλαιο 9: 勾股 - gou gu (μικρές και μεγάλες κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου – Πυθαγόρειο θεώρημα κατά τους Κινέζους)***

Το 9<sup>ο</sup> και τελευταίο κεφάλαιο περιέχει 24 προβλήματα. Το κεφάλαιο αυτό σχετίζεται με τα ορθογώνια τρίγωνα και προϋποθέτει ότι γνωρίζουμε αυτό που σήμερα αποκαλείται Πυθαγόρειο Θεώρημα. Τα δεδομένα των προβλημάτων είναι διάφορες αριθμητικές παραλλαγές που σχετίζονται με τις πλευρές ενός τριγώνου. Υπάρχουν ακόμα και κάποια προβλήματα που σχετίζονται με όμοια ορθογώνια τρίγωνα. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 46)

### *3.2 Η εμφάνιση της γραφής και τα πρώτα μαθηματικά.*

Η γραφή και τα πρώτα γραπτά αριθμητικά σύμβολα, εμφανίστηκαν στην Κίνα στο τέλος της Δυναστείας των Shang<sup>24</sup>. Η αρχαιολογική μελέτη στο Xiaotun, στα βορειοδυτικά του Anyang στο Henan, εκεί που βρισκόταν η τελευταία πρωτεύουσα της δυναστείας των

---

<sup>24</sup> Κυβέρνησε την κοιλάδα του Κίτρινου ποταμού περίπου την 2<sup>η</sup> χιλιετία π.Χ (1766 π.Χ με 1122 π.Χ).

*Shnag*, έφερε το 1899 μ.Χ περίπου, στο φως στοιχεία αυτής της εποχής, όταν οι αρχαιολόγοι ανακάλυψαν χιλιάδες χαραγμένα κόκκαλα και καβούκια από χελώνες.

Νέα ευρήματα τον τελευταίο αιώνα, πρόσθεσαν δεκάδες χιλιάδες τέτοια παραδείγματα. Ανάμεσα στους 5000 χαρακτήρες που αναπαρίστανται στα κόκαλα που έχουν βρεθεί, βρίσκονται και οι πρώτα καταγεγραμμένα αριθμητικά σύμβολα της Κίνας. Αυτά συμβολίζουν εκτός άλλων των αριθμό τον αιχμαλώτων πολέμου, τον αριθμό των πεσόντων κατά τη διάρκεια μάχης, πολέμου, τον αριθμό των θηραμάτων, τον αριθμό των ζώων που θυσιάστηκαν και άλλα.

Τα νούμερα που έχουν βρεθεί είναι μεταξύ του 1 και του 30.000, με ειδικούς χαρακτήρες για το 10,100,1.000 και το 10.000.

Από την Δυναστεία των *Han*<sup>25</sup> και μετά εδραιώθηκαν οι χαρακτήρες και ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται ως αριθμητικό σύστημα στην Κίνα ακόμα και σήμερα. Οι αριθμοί γράφονται στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Για παράδειγμα ο αριθμός 5263 γραφόταν και γράφεται ως εξής **五千二百六十三**, το οποίο σημαίνει:

Πέντε (**五**) χιλιάδες (**千**),

Δυο (**二**) εκατοντάδες (**百**)

Έξι (**六**) δεκάδες (**十**),

Τρία (**三**) (τρεις μονάδες)

Αυτός ο τρόπος γραφής έκανε εύκολη την αναπαράσταση των αριθμών και για εκεί που σήμερα χρησιμοποιούμε τα μηδέν. Δεν έγραφαν απλά την τάξη των αριθμών. Για παράδειγμα το 5006 θα το έγραφαν «πέντε χιλιάδες και 6» και δεν υπήρχε κίνδυνος σύγχυσης με το 56. Οι Κινέζοι δεν είχαν ανάγκη από έναν ειδικό χαρακτήρα για το μηδέν με αυτό τον τρόπο γραφής, αφού κάθε αριθμός ακολουθούταν από την δεκαδική τάξη που ανήκει. Επίσης με αυτό τον τρόπο ήταν δυνατό να αναπαραστήσουν πολύ μεγάλους αριθμούς όπου αυτό ήταν αναγκαίο. Για παράδειγμα στο πρόβλημα 25 από το 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο του *Nine Chapters* δίνεται ο όγκος μιας σφαίρας ίσος με 1.644.866.437.500. Το σύστημα εκτός από δεκαδικό ήταν και θεσιακό. Οι υπολογισμοί με αριθμούς γραμμένους σε αυτή την μορφή είναι αρκετά εύκολοι και σε αυτό τους διευκόλυνε και ο υπολογιστικός πίνακας που είχαν αναπτύξει, όπου σε κάθε στήλη αναπαριστούσαν και μια δύναμη του 10 με αύξουσα

---

<sup>25</sup> 206π.Χ – 220 μ.Χ

σειρά από δεξιά προς τα αριστερά, όπως δηλαδή κάνουμε και εμείς σήμερα. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 189-190).

Τι ήταν αυτό που οδήγησε στην ανάπτυξη και δημιουργία των μαθηματικών όμως στην Αρχαία Κίνα; Όπως και στους άλλους λαούς που έχουμε δει μέχρι τώρα έναυσμα για την ανάπτυξη των μαθηματικών δόθηκε από πρακτικούς λόγους όπως η καλλιέργεια της γης, υπήρχε όμως και έντονη χρήση των μαθηματικών στην αστρονομία, όπου κρατούσαν αρχεία για τις παρατηρήσεις τους σε ουράνια σώματα σαν τους κομήτες. Οι αριθμοί χρειάζονταν για να καταγραφεί ο αριθμός των φορών που εμφανίστηκαν ή η διάρκειά τους και επίσης για τον καθορισμό των ημερολογίων. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 191)

Ποιοι είναι οι Κινέζοι Μαθηματικοί; Ποιο ήταν το κοινό τους; Για ποιο λόγο έγραψαν τα εγχειρίδια τους, τα οποία διασώθηκαν από τους πολέμους, από το κάψιμο των βιβλίων και από τις φυσικές καταστροφές; Είναι ερωτήματα τα οποία δεν μπορούμε να τα απαντήσουμε. Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό για μεγάλους μαθηματικούς όπως ο *Liu Hui*, πόσο μάλλον για τους μαθητές τους ή για τις συνθήκες κάτω από τις οποίες έγραψε τα έργα του ή τα σχόλιά του.

Αυτό που μπορούμε να πούμε από τα έργα που έχουν διασωθεί και μεταφραστεί είναι ότι εξυπηρετούσαν δυο κυρίως σκοπούς, την καταγραφή της μαθηματικής γνώσης και προόδου που γινόταν από τις διαδοχικές γενεές μαθηματικών και ως βιβλία διδασκαλίας για εκείνους που δίδασκαν τα μαθηματικά. Πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά από τα διασωθέντα κείμενα είναι τόσο σύντομα και λακωνικά που χωρίς την βοήθεια ενός δασκάλου, ένας αρχάριος μαθητής ή ένας μη-ειδικός θα είχε μεγάλη δυσκολία να κατανοήσει τις διαδικασίες και τις μεθόδους που περιγράφονται στα προβλήματα που δίνονται και τις λύσεις τους. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 193)

### 3.2.1 Αρίθμηση και μέτρηση

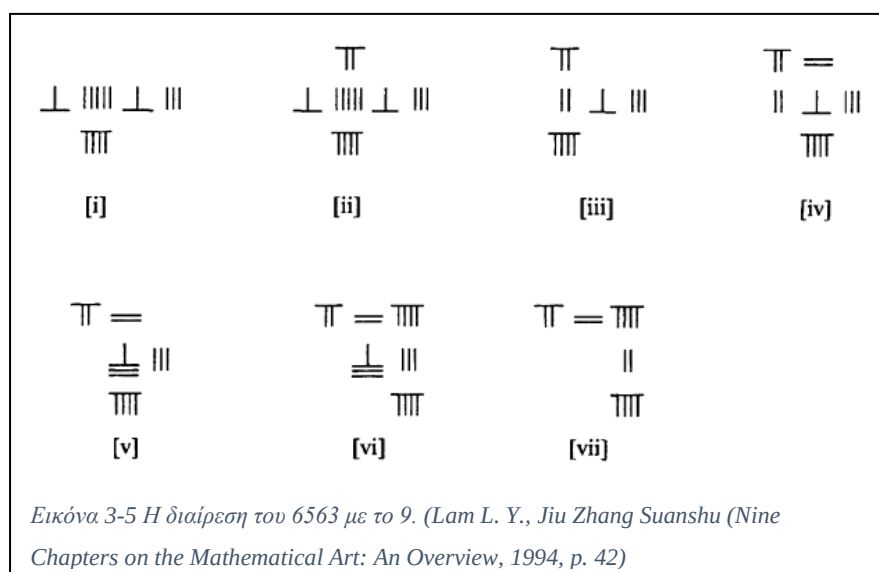
Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των Κινέζικων μαθηματικών είναι η χρήση ράβδων απλωμένων πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια ή σε αριθμητικό πίνακα προκειμένου να κάνουν υπολογισμούς. Αυτός ο τρόπος οδήγησε στην ανάπτυξη αλγορίθμων που επέτρεπαν γρήγορους και εύκολους υπολογισμούς με μεγάλη ακρίβεια, όχι μόνο για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση, αλλά και για τον υπολογισμό τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Η φύση του αριθμητικού πίνακα και οι διαδικασίες που επέτρεπε να γίνουν, οδήγησαν τους Κινέζους μαθηματικούς να εισάγουν την έννοια των αρνητικών αριθμών και πολύ εύκολες και γρήγορες (very flexible) μεθόδους επίλυσης, τόσο των γραμμικών εξισώσεων

όσο και μεγαλύτερου βαθμού με πολλούς αγνώστους. Τα πρώτα από τα κλασσικά μαθηματικά κείμενα υπέθεταν ότι ο αναγνώστης – μαθητής γνώριζε πώς να χρησιμοποιεί τον υπολογιστικό πίνακα και γενικά είχε μια εξοικείωση με τους υπολογισμούς με ράβδους. Μόνο δυο από τα αρχαία μαθηματικά κείμενα εξηγούν πως αυτό γινόταν. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 195)

### 3.2.2 Βασικές αριθμητικές πράξεις

Η ανάπτυξη των περισσότερων εννοιών του “*Jiu zhang suanshu*” εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το αριθμητικό σύστημα με τις ράβδους και την ικανότητα εκτέλεσης των 4 βασικών αριθμητικών πράξεων με αυτές. Παρόλα αυτά το βιβλίο δεν αναφέρει τον μηχανισμό εκτέλεσης των πράξεων, ούτε καν το αριθμητικό σύστημα. Θεωρεί δεδομένο ότι ο αναγνώστης γνωρίζει το αριθμητικό σύστημα και τον τρόπο εκτέλεσης υπολογισμών. Επιπλέον γράφεται με την βοήθεια ενός άλλου αριθμητικού συστήματος και ένας σύγχρονος αναγνώστης, ο οποίος γνωρίζει μόνο επιφανειακά το βιβλίο, μπορεί έτσι να παραπλανηθεί και να αγνοήσει την πρωταρχική σημασία του συστήματος αριθμητικών ράβδων και του ζωτικού του ρόλου για την εκτέλεση των τεσσάρων θεμελιωδών πράξεων της αριθμητικής.

Μια τέτοια κατάσταση είναι παρόμοια με το ενδεχόμενο κάποιος να μελετάει την ιστορία της αριθμητικής μας, χωρίς το Ινδό-Αραβικό σύστημα αρίθμησης. Οι Κινέζοι επινόησαν μια μέθοδο εκτέλεσης της διαίρεσης με της χρήση αριθμητικών ράβδων. Η διαίρεση μεταξύ δυο αριθμών, κάποιες φορές μας αφήνει υπόλοιπο. Η μέθοδος με τις αριθμητικές ράβδους όχι μόνο κάνει το υπόλοιπο να είναι εμφανές, αλλά τονίζει και την σχέση του με τον διαιρέτη. Από αυτή την μέθοδο προέκυψε και ο συμβολισμός του κλάσματος.



Για να δούμε ένα παράδειγμα:

“Να διαιρεθεί το 6563 με το 9”

Στην διπλανή εικόνα στο βήμα i, βλέπουμε ότι ο διαιρέτης – “*fa*” (9) τοποθετείται ακριβώς από κάτω από τον διαιρετέο – “*shi*”

(6563). Η στήλη που καταλαμβάνει το ψηφίο των μονάδων καθορίζει την τάξη του ψηφίου του πηλίκου, το οποίο τοποθετείται στην ίδια στήλη και μια σειρά πάνω από τον διαιρετέο. Η τάξη του ψηφίου του πηλίκου είναι η ίδια με την τάξη του ψηφίου του διαιρετέου που βρίσκεται από κάτω. Βλέπε βήμα[ii].

Μετά από κάθε υπολογισμό ο διαιρέτης “*fa*” μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά μια θέση κάθε φορά. Βλέπε βήμα [iv]. Το τελευταίο βήμα [vii] δείχνει την απάντηση  $729\frac{2}{9}$ . Παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο βρίσκεται ακριβώς πάνω από τον διαιρέτη στην δεύτερη γραμμή και είναι ίσο με 2. Τα δυο αυτά νούμερα– το υπόλοιπο (2) και ο διαιρέτης (9)- μας δίνουν τον συμβολισμό ενός κλάσματος. Υπό αυτή την έννοια επινοήθηκε μια πολύ ακριβής απεικόνιση για το κλάσμα. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 41-42)

### 3.2.3 *Αρνητικοί αριθμοί*

Η μέθοδος “*fang cheng*” είναι μια γενική μέθοδος η οποία χρησιμοποιήθηκε κυρίως στο κεφάλαιο 8 του “*Juizhang suan shu*” για την πραγματοποίηση πράξεων σε έναν πίνακα. Προϋποθέτει την αφαίρεση μεταξύ των όρων δυο στηλών του πίνακα. Δεδομένου ότι αυτή είναι γενική μέθοδος, θα υπήρχαν περιπτώσεις, όπου ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο. Αυτό το διαφορετικό αποτέλεσμα έπρεπε λοιπόν, κάπως να διαχωρίζεται από τα υπόλοιπα και να συμβολίζεται κατάλληλα, ώστε να μπορεί να προχωρήσει η διαδικασία της απαλοιφής των όρων. Αυτό οδήγησε σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε αρνητικούς αριθμούς, στους κανόνες που αφορούν την πρόσθεση και την αφαίρεσή τους, καθώς και στον καθορισμό της σχέσης τους με τους θετικούς αριθμούς.

Οι Κινέζοι ονόμαζαν αυτούς τους αριθμούς “*fu* - 負” και τους θετικούς αριθμούς “*zheng* - 正”. Οι κανόνες που διέπουν την σχέση τους περιγράφονται πολύ αναλυτικά στο πρόβλημα 8.3. *Ας δούμε την μέθοδο zheng fu, όπως αυτή περιγράφεται.*

#### 3.2.3.1 *Η μέθοδος “zheng fu – θετικοί και αρνητικοί” στην πρόσθεση και την αφαίρεση.*

Στο κεφάλαιο 8 του “*Juizhang suan shu*” και πιο συγκεκριμένα μετά το πρόβλημα 3, περιγράφεται η μέθοδος “*zheng fu*” που περιγράφει πως γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Η μέθοδος λέει:

«Όταν τα ονόματα είναι ίδια, τότε αφάιρεσε αμοιβαία, όταν τα ονόματα είναι διαφορετικά τότε πρόσθεσε αμοιβαία. Θετικό από τίποτα γίνεται αρνητικό, αρνητικό από

*τίποτα γίνεται θετικό. Όταν τα ονόματα είναι διαφορετικά αφαίρεσε αμοιβαία, όταν τα ονόματα είναι ίδια πρόσθεσε αμοιβαία. Θετικό και τίποτα γίνεται θετικό, αρνητικό και τίποτα γίνεται αρνητικό»*

Η περιγραφή του παραπάνω κανόνα γίνεται πολύ σύντομα, η διατύπωσή του είναι σε μια μορφή ευθύ και αντίστροφου, ώστε να είναι εύκολη η απομνημόνευσή του. Τα ονόματα τα οποία αναφέρει είναι οι όροι “zheng” και “fu”. Όταν κάποιος αντιληφθεί ότι εκφράζει δυο κανόνες, τον πρώτο της αφαίρεσης και τον δεύτερο για την πρόσθεση αριθμών, τότε φαίνεται και πόσο ακριβής είναι η μέθοδος. Εάν συμβολίσουμε με τον σημερινό τρόπο την περιγραφή της μεθόδου τότε έχουμε:

Έστω  $a$  και  $b$  να είναι δυο οποιοιδήποτε αριθμοί,  $\text{sgn } a$  το πρόσημο του  $a$  και  $|a|$  η απόλυτη τιμή του.

Τότε ο πρώτος κανόνας σχετικά με την αφαίρεση των αριθμών λέει:

*“Όταν τα ονόματα είναι ίδια τότε αφαίρεσε αμοιβαία, όταν τα ονόματα είναι διαφορετικά τότε πρόσθεσε αμοιβαία.”*

Δηλαδή:

- Όταν  $\text{sgn } a = \text{sgn } b$ ,  $a - b = (|a| - |b|) \text{sgn } a$ .
- Όταν  $\text{sgn } a = -\text{sgn } b$ ,  $a - b = (|a| + |b|) \text{sgn } a$ .
- Θετικό από τίποτα κάνει αρνητικό, αρνητικό από τίποτα κάνει θετικό, δηλαδή:  $0 - b = -|b| \text{sgn } b$ .

Ο δεύτερος κανόνας σχετικά με την πρόσθεση των αριθμών λέει:

*“Όταν τα ονόματα είναι διαφορετικά τότε αφαίρεσε αμοιβαία, όταν τα ονόματα είναι ίδια τότε πρόσθεσε αμοιβαία.”*

Δηλαδή:

- Όταν  $\text{sgn } a = -\text{sgn } b$ ,  $a + b = (|a| - |b|) \text{sgn } a$ .
- Όταν  $\text{sgn } a = \text{sgn } b$ ,  $a + b = (|a| + |b|) \text{sgn } a$ .
- Θετικό και τίποτα κάνει θετικό, αρνητικό και τίποτα κάνει αρνητικό, δηλαδή:  $0 + b = |b| \text{sgn } b$ .

Σύμφωνα με τα σχόλια του Liu Hui, οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί διαχωρίζονται με τη χρήση διαφορετικού χρώματος ράβδων. Οι θετικές είναι κόκκινες και οι αρνητικές μαύρες. Όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό χρώμα, τότε ο αρνητικός

αριθμός ξεχωρίζει με μια έξτρα ράβδο τοποθετημένη διαγώνια πάνω από το τελευταίο μη-μηδενικό ψηφίο από αριστερά.

Για παράδειγμα το -32 συμβολίζεται με  $\equiv \text{ㄣ}$ .

(Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 36-37)

### 3.2.4 Πράξεις με κλάσματα

Με την χρήση ενός κλάσματος μη καταχρηστικού, ο συγγραφέας ή οι συγγραφείς του “Jiu zhang suanshu” περιγράφουν την διαδικασία απλοποίησής του, έως ότου να προκύψει ένα ανάγωγο κλάσμα. Συνέχισαν περιγράφοντας όλες τις άλλες απαραίτητες μεθόδους για τον χειρισμό τέτοιων κλασμάτων και αυτό φαινόταν από τις εικόνες – αναπαραστάσεις των παραδειγμάτων. Οι αρχαίοι Κινέζοι μπορούσαν να εκτελούν τις 4 βασικές αριθμητικές πράξεις μεταξύ των κλασμάτων με χρήση των αριθμητικών ράβδων. Κατά την ανάπτυξη των μεθόδων για τα κλάσματα στην προσοχή τους υπέπεσαν και τα 3 είδη κλασμάτων που μπορούν να προκύψουν μέσω αυτού του συμβολισμού, δηλαδή τα κλάσματα, τα καταχρηστικά κλάσματα και οι μεικτοί αριθμοί.

Η αριθμητική, αναπτύχθηκε στην Κίνα από τα πρακτικά ζητήματα της καθημερινότητας. Οι μετρήσεις του μήκους, του πλάτους, του εμβαδού και του βάρους ποίκιλαν. Ο υπολογισμός αυτών των μετρήσεων δεν μπορούσε να περιοριστεί μόνο σε ακέραιους αριθμούς και ένας τρόπος έκφρασης των υπολειπόμενων κλασματικών μερών αναπτύχθηκε. Οι αρχαίοι μαθηματικοί αντελήφθησαν τον ρόλο και την ύπαρξη των κλασμάτων, όπως αυτά προέκυψαν κατά την διαδικασία της διαίρεσης στον αριθμητικό πίνακα και με την χρήση αυτού του συμβολισμού προχώρησαν στην μελέτη των κλασμάτων.

Η θέση που τοποθετείται ένας αριθμός σε σχέση με έναν άλλο, συχνά παίζει ένα βασικό ρόλο στους υπολογισμούς με τις ράβδους. Με ανάλογο τρόπο η θέση των ράβδων που αναπαριστούν τους αριθμητές ή τους παρονομαστές των κλασμάτων βοήθησε αποτελεσματικά στην ανάπτυξη των υπολογιστικών μεθόδων. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 42-43)

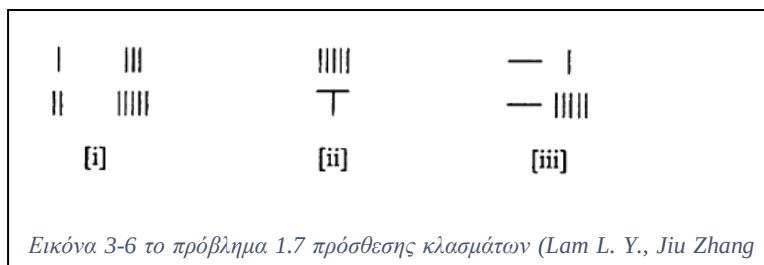
#### 3.2.4.1 Το πρόβλημα 1.7 για τον υπολογισμό του αθροίσματος δυο κλασμάτων.

«Να προστεθούν το  $\frac{1}{3}$  και το  $\frac{2}{5}$ »

Τα δυο κλάσματα τοποθετούνται σε δυο στήλες όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα στο βήμα [i]. Στην μέθοδο που περιγράφεται στο “Jiu zhang suanshu” για την



πρόσθεση κλασμάτων, ζητείτε να πολλαπλασιαστεί αμοιβαία ο αριθμητής κάθε κλάσματος με τον παρονομαστή(ες) του άλλου (άλλων). Η τοποθέτηση των κλασμάτων στο βήμα [i] μας οδηγεί στον χιαστί πολλαπλασιασμό και τα αποτελέσματα 5 και 6, όπως φαίνονται στο βήμα [ii] παρακάτω. Το άθροισμα του 5 και του 6 είναι ο διαιρέτέος που ονομάζεται “*shi*”, και το γινόμενο των παρονομαστών είναι ο διαιρέτης που ονομάζεται “*fa*”. Το “*fa*” τότε τοποθετείται κάτω από το “*shi*” και προκύπτει το αποτέλεσμα  $\frac{11}{15}$ , όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα στο βήμα [iii]. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 42-43)

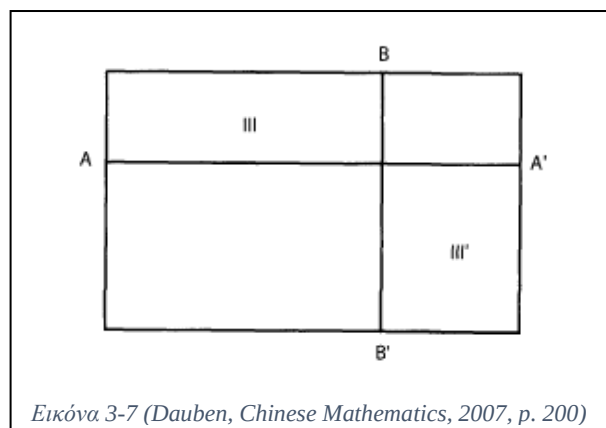


### 3.2.5 Η μέθοδος “out-in”

Τα Κινεζικά μαθηματικά συχνά περιγράφονται ως αλγοριθμικά, ότι ασχολούνται με τους υπολογισμούς με την χρήση ράβδων ακολουθώντας συγκεκριμένα βήματα, τα οποία είναι προσεκτικά σχεδιασμένα, όπως θα έκανε σήμερα ένα υπολογιστικό πρόγραμμα.

Μια όμως πολύ απλή, αλλά ταυτόχρονα και πολύπλευρη τεχνική, ειδικά εάν περιέχεται σε αποδείξεις, βρίσκεται στον τομέα της γεωμετρίας. Η μέθοδος “out-in” είναι ανάλογη με μια μέθοδο των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, όπου αποδεικνύεται η ισότητα εμβαδών. Αποδείχθηκε ότι είναι εξίσου δυνατή. Η μέθοδος και η αποτελεσματικότητά της γίνονται αμέσως κατανοητές από ένα απλό διάγραμμα.

“Δοθέντος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, κάτω υπό ποιες συνθήκες θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι περιοχές III και III’ οι οποίες δημιουργούνται από τις κάθετες γραμμές AA’ και BB’ είναι ίσες;”



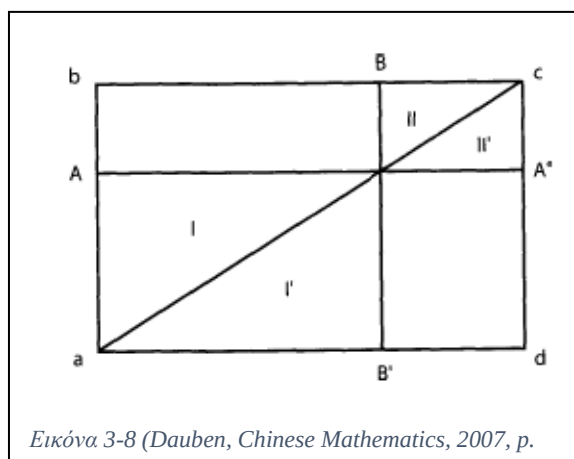
Η απάντηση είναι εύκολο να δοθεί εάν κάποιος κατανοήσει το βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου “out-in”, το οποίο ισχύει όταν δυο κάθετες γραμμές, εδώ οι  $AA'$  και  $BB'$  τέμνονται πάνω στην διαγώνιο του ορθογωνίου.

Σύμφωνα με τον Ευκλείδη και συγκεκριμένα με την πρόταση 1.43 «Εάν  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμο και  $E$  τυχόν σημείο επί της διαμέτρου (διαγωνίου)  $ΑΓ$ , τότε τα συμπληρώματα – παραπληρώματα ως προς την διαγώνιο είναι ίσα (ως προς το εμβαδόν)».

Στην εικόνα 3-8  $I=I'$  και  $II=II'$  άρα  $III=III'$ .

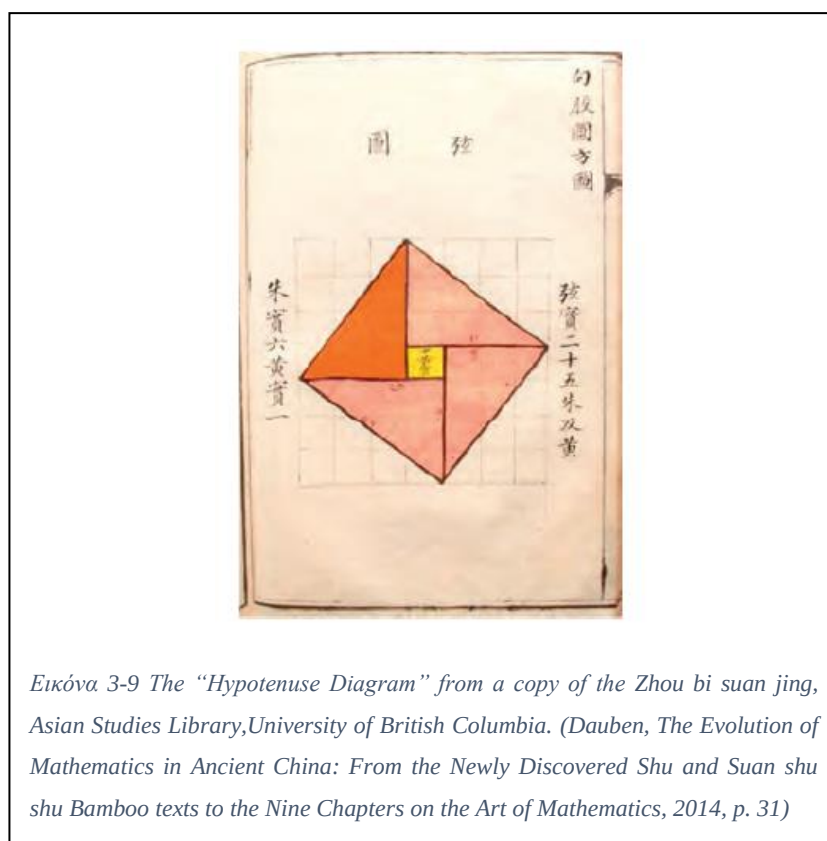
Για τους Κινέζους μαθηματικούς η παραπάνω πρόταση είναι προφανής, δεν την ανέφεραν ρητά ως πρόταση ή αξίωμα, παρόλα αυτά την χρησιμοποιούσαν κατ' αυτό τον τρόπο και εάν από ίσα αφαιρείς ίσα, τότε όσα απομένουν είναι ίσα.

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις στην Κινεζική κλασσική



μαθηματική βιβλιογραφία (*Chinese mathematical classics*). Η ορολογία προέρχεται εάν θεωρήσουμε το τμήμα του ορθογωνίου κάτω από την διαγώνιο ως “out” και το τμήμα πάνω από την διαγώνιο ως “in”. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 200-201)

Η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιείται για την απόδειξη της Κινεζικής εκδοχής του Πυθαγόρειου θεωρήματος για τα ορθογώνια τρίγωνα. Η πρώτη φορά που εμφανίστηκε στα Κινεζικά μαθηματικά κάποιο επιχείρημα σχετικά με τα ορθογώνια τρίγωνα είναι στο έργο “*Zhou bi suan jing* - (Astronomy and Mathematics)”, το οποίο συνοδευόταν από ένα αρχικά κατεστραμμένο διάγραμμα, το οποίο αργότερα αποκαταστάθηκε σε διάφορες εκδοχές, μια εκ των οποίων είναι το παρακάτω διάγραμμα και στο οποίο βασίστηκαν τα επιχειρήματα.



(Dauben, The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, 2014, pp. 30-31)

### 3.2.6 Η μέθοδος “gou-gu - 勾股” – Πυθαγόρειο Θεώρημα κατά τους Κινέζους

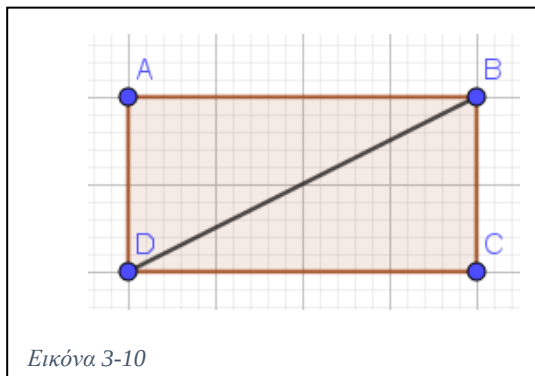
Όπως έχει ήδη αναφερθεί το 9<sup>ο</sup> κεφάλαιο από το “*Jiu zhang suanshu*” είναι αφιερωμένο σε προβλήματα *gou-gu*, δηλαδή προβλήματα τα οποία επιλύονται με την χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, όπως αυτό είχε διατυπωθεί από τους Κινέζους μαθηματικούς της Αρχαιότητας. Η μέθοδος “*gou gu*” (κυριολεκτικά μικρή και μεγάλη ορθογώνια πλευρά) λέει:

“Τετραγώνισε (zì cheng δηλ. πολλαπλασίασε με τον εαυτό του) κάθε ένα από τα *gou* και *gu*, πρόσθεσε και βγάλε την τετραγωνική ρίζα (kai fang chu zhi) για να βρεις το *xian*.”

Η παραπάνω μέθοδος περιγράφει την σχέση  $a^2 + b^2 = c^2$ , όπου *gou* είναι το *a*, *gu* είναι το *b* και *xian* είναι η υποτείνουσα *c*. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994)

### 3.2.6.1 Απόδειξη της σχέσης “gou-gu 勾股” (Πυθαγόρειο θεώρημα) με την μέθοδο out-in.

Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και έχουμε φέρει την διαγώνιό

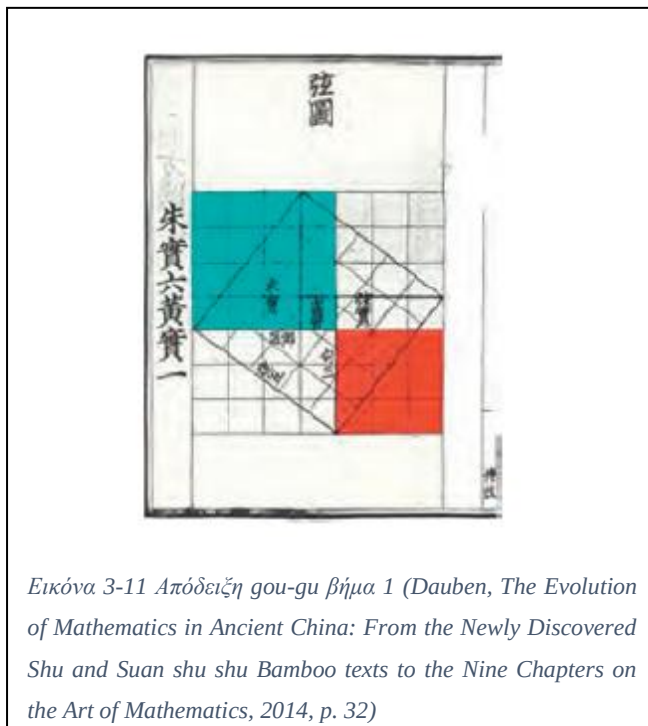


Εικόνα 3-10

του. Ας πάρουμε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίστηκαν. Η μεγαλύτερη από τις κάθετες πλευρές του ονομάζεται *gu*, η μικρότερη από τις κάθετες πλευρές του ονομάζεται *gou*. Με πορτοκαλί χρώμα σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με το *gu*. Με τρκουάζ χρώμα ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους *gou*. Τα δυο

τετράγωνα που σχεδίασα καλύπτουν μια επιφάνεια του τετραγώνου πλευράς *xian*, δηλαδή μήκους όσο η υποτείνουσα του αρχικού ορθογωνίου τριγώνου.

Εάν οι χρωματισμένες περιοχές που καλύπτουν μέρους του τετραγώνου πλευράς *xian*, θεωρηθούν ως εσωτερικές (“in”) και οι περιοχές που βρίσκονται έξω από το τετράγωνο



Εικόνα 3-11 Απόδειξη gou-gu βήμα 1 (Dauben, The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, 2014, p. 32)

*xian* θεωρηθούν ως εξωτερικές (“out”), τότε προκύπτει το παρακάτω σχήμα.

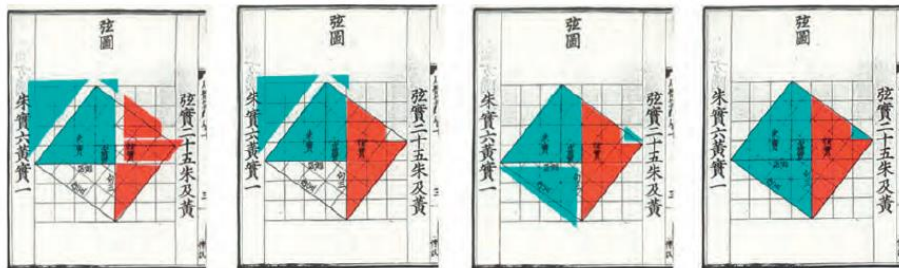
Σύμφωνα με το πνεύμα της αρχής “out-in”, οι περιοχές που είναι εκτός (*out*) μπορούν να μεταφερθούν εσωτερικά του τετραγώνου *xian* με τέτοιο τρόπο ώστε, ο **Liu Hui** συχνά αναφέρει στα σχόλιά του:

«Το πλεόνασμα γεμίζει το κενό»



Εικόνα 3-12 Απόδειξη gou-gu βήμα 2 (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 32)

Αυτή η αναδιάταξη μετατρέπει τα δυο προηγούμενα τετράγωνα πλευράς *gou* και *gu* αντίστοιχα σε ένα τετράγωνο πλευράς *xian*, όπου ο **Liu Hui** εξηγεί την ισότητα  $a^2 + b^2 = c^2$ , αφαιρώντας ίσες περιοχές από το εξωτερικό και προσθέτοντας ίσες περιοχές στο εσωτερικό. Έτσι προκύπτει το τετράγωνο πλευράς *xian*.



Εικόνα 3-13 Απόδειξη gou-gu τελικό βήμα (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 33)

Η παραπάνω αρχή “out-in” και η απόδειξη του Πυθαγορείου από τους Κινέζους θα μας βοηθήσουν παρακάτω να κατανοήσουμε προβλήματα *gou-gu* από το κεφάλαιο 9 του “Nine Chapters”. (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, pp. 32-33)

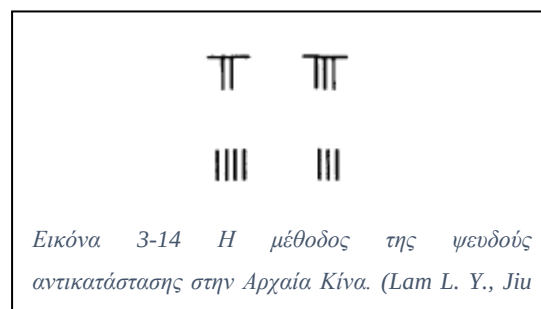
### 3.2.7 Η μέθοδος “ying bu zu” (της ψευδούς αντικατάστασης από τους αρχαίους Κινέζους)

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή στην δύση, ως η «μέθοδος της ψευδούς αντικατάστασης». Ήταν γνωστή στην αρχαιότητα, πριν την ανακάλυψη του αλγεβρικού συμβολισμού για την επίλυση προβλημάτων. Χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση προβλημάτων, όταν οι άνθρωποι δεν είχαν φτάσει ακόμα στο επίπεδο της μοντελοποίησης ή της αφαίρεσης με τη χρήση μαθηματικών συμβολισμών. Η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε από τους αρχαίους Αιγύπτιους, όπως έχουμε δει και στην ενότητα 1.3 της παρούσης, τους Βαβυλωνίους και αργότερα στην Ευρώπη κατά τον Μεσαίωνα, αλλά και στην Αρχαία Κίνα.

Η μέθοδος όμως των Κινέζων έχει ένα χαρακτηριστικό που την κάνει σημαντική και διαφορετική από τις άλλες. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι η χρήση και ο τρόπος τοποθέτησης των αριθμητικών ράβδων.

Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω ότι το 8 δίνει ένα πλεόνασμα 3 και το 7 ένα πλεόνασμα 7 τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής:



Η θέση του κάθε αριθμού συμβολίζει και την σημασία του. Οι πάνω θέσεις είναι οι προτεινόμενες τιμές, ενώ οι κάτω το αντίστοιχο πλεόνασμα ή έλλειμμα. Η τοποθέτηση επίσης των αριθμών κατά αυτό τον τρόπο εξυπηρετεί και στον πολλαπλασιασμό χιαστί, που χρησιμοποιείτε σε αυτή την μέθοδο. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, p. 46)

### 3.3 Επίλυση συστημάτων στα κεφάλαια 7 και 8 του Jui Zhang suanshu

#### 3.3.1 Η μέθοδος “ying bu zu” για την επίλυση γραμμικών συστημάτων 2x2

Η μέθοδος “ying bu zu” (πλεόνασμα και έλλειμα) λέει:

Τοποθέτησε τις προτεινόμενες τιμές (suo chu lü) και κάτω από κάθε μια, το αντίστοιχο πλεόνασμα ή έλλειμα. Πολλαπλασίασε χιαστί (wei cheng) τα τελευταία και τις

δοθείσες τιμές, και πρόσθεσε τα προϊόντα ώστε να βρεις το *shi*. Πρόσθεσε το πλεόνασμα και το έλλειμμα για να σχηματίσεις το *fa*. Διαίρεσε το *shi* με το *fa*. Εάν είναι κλάσματα τότε, "communicate" (*tong*). Σε περιπτώσεις όπου το πλεόνασμα και το έλλειμμα σχετίζονται άμεσα με άτομα που αγοράζουν αγαθά, βάλε τις προτεινόμενες τιμές κάτω και αφάιρεσε το μικρότερο από το μεγαλύτερο. Διαίρεσε το *shi* και το *fa* με το υπόλοιπο. Η διαίρεση του *shi* δίνει το κόστος των αγαθών και η διαίρεση του *fa* δίνει τον αριθμό των ατόμων.

Ας δούμε κάποια προβλήματα που χρησιμοποιούν την παραπάνω μέθοδο για να την κατανοήσουμε καλύτερα.

### 3.3.1.1 Το πρόβλημα 7.2 με χρήση της μεθόδου *ying bu zu* για την επίλυση γραμμικού συστήματος $2 \times 2$

*"Now chickens are purchased jointly; everyone contributes 9, the excess is 11; everyone contributes 6, the deficit is 16. Tell: the number of people, the chicken price, what is each? Answer: 9 people, chicken price 70.-Τώρα αγοράστηκαν κοτόπουλα ταυτόχρονα. Όλοι συνεισφέρουν 9, το πλεόνασμα είναι 11, όλοι συνεισφέρουν 6, το έλλειμμα είναι 16. Βρες: τον αριθμό των ανθρώπων, την τιμή των κοτόπουλων, πόσο είναι το καθένα; Απάντηση: 9 άνθρωποι και η τιμή του κοτόπουλου 70."*

Για να δούμε πως εφαρμόστηκε η παραπάνω μέθοδος στην επίλυση του προβλήματος 7.2 και τί θα κάναμε εμείς σήμερα.

Η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση μιας πληθώρας προβλημάτων, όπου οι αριθμοί που εμπλέκονται τοποθετούνται σε έναν αριθμητικό πίνακα και διατάσσονται έτσι ώστε να πάρουν μια μορφή ανάλογη με αυτό που σήμερα ονομάζουμε πίνακα (*matrix*). Σε αυτό τον πίνακα γίνονται διάφορες πράξεις με σκοπό την απαλοιφή μεταβλητών μέχρι που το ισοδύναμο ενός από τους αγνώστους μένει στον πίνακα μαζί με την λύση του. Μετά οδηγούμαστε στις άλλες λύσεις με μια ή περισσότερες αντικαταστάσεις, ανάλογα με το πρόβλημα.

Εάν γράψουμε το πρόβλημα, όπως θα το γράφαμε σήμερα, τότε το πρόβλημα 7.2 ζητά την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} 9n - 11 = p \\ 6n + 16 = p \end{cases}$$

*Equation 3-1*

, όπου *n* είναι ο αριθμός των ατόμων και *p* είναι η τιμή των κοτόπουλων.

Ας δούμε πρώτα πως έλυσαν το παραπάνω οι Κινέζοι.

Η μέθοδος “ying bu zu” για το πλεόνασμα και το έλλειμμα πρώτα λέει πως οι δοθείσες τιμές (9 και 6) πρέπει πρώτα να “ομογενοποιηθούν” πολλαπλασιάζοντας χιαστί. Δηλαδή πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το έλλειμμα της δεύτερης και την δεύτερη με το πλεόνασμα της πρώτης.

$$\begin{cases} (16)(9n) - (16)(11) = 16p \\ (11)(6n) + (11)(16) = 11p \end{cases}$$

Equation 3-2

Ποιος ο λόγος αυτού του πολλαπλασιασμού; Αυτό εξυπηρετεί προκειμένου να γίνει απαλοιφή του πλεονάσματος και του ελλείμματος μας λένε οι Κινέζοι. Το παραπάνω σύστημα θα πάρει λοιπόν την μορφή:

$$210n = 27p.$$

Equation 3-3

Σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι οι Κινέζοι έχουν προσθέσει κατά μέλη της δυο εξισώσεις και έχουν κάνει απαλοιφή του σταθερού όρου.

Απλοποιούμε την παραπάνω εξίσωση, διαιρώντας με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη και έχουμε:

$$70n = 9p$$

Equation 3-4

Για την οποία η λύση  $n = 9$  and  $p = 70$  μας δίνει άμεσα μια λύση του παραπάνω συστήματος.

Η αιτιολόγηση της Κινεζικής μεθόδου είναι παρόμοια με την αλγεβρική λύση την οποία μόλις δώσαμε με τον μοντέρνο τρόπο γραφής, αλλά έχει γίνει με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο στον αριθμητικό πίνακα και ο Liu Hui στα σχόλιά του, μας λέει ακριβώς τι πρέπει να κάνουμε.

Πρώτα βάλε κάτω τις δοθείσες τιμές και κάτω από αυτές το αντίστοιχο πλεόνασμα ή έλλειμμα. Στον αριθμητικό πίνακα με την χρήση ράβδων και διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά και αρχίζοντας με τις δοθείσες τιμές (contributed rates) πάνω και το έλλειμμα και το πλεόνασμα κάτω έχουμε:

6 9

16 11

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί έχουμε:

66 144



Οι “ομογενοποιημένοι” τότε όροι προστίθενται για να μας φτιάξουν τον διαιρετέο (*shi*) που είναι 210 και το έλλειμμα και το πλεόνασμα προστίθενται για να φτιάξουν τον διαιρέτη (*fa*) , το οποίο στον αριθμητικό πίνακα τώρα θα φαίνεται ως:

210

27

Ο κανόνας συνεχίζει λέγοντας ότι η διαφορά των δοθέντων τιμών, εδώ  $9 - 6 = 3$  χρησιμεύει ως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους για να μειώσουμε τους αριθμούς και έτσι έχουμε:

70

9

Συνεπώς όπως μας λέει ο παραπάνω κανόνας: “Το “*shi*” ,ο διαιρετέος δηλαδή, απλοποιημένος είναι η τιμή του ενός αντικειμένου. Ο απλοποιημένος διαιρέτης “*fa*” είναι ο αριθμός των ανθρώπων και τελικά η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι 9 άνθρωποι και 70 η τιμή του ενός κοτόπουλου.

Η μέθοδος για το Πλεόνασμα και το Έλλειμμα στο “*Juizhang suanshu*” περιγράφεται ως εξής:

Δείξε το ποσοστό συμμετοχής (contribution rates); Γράψε από κάτω το αντίστοιχο πλεόνασμα και έλλειμμα. Πολλαπλασίασε χιαστί τις δοθείσες τιμές και συνδύασέ τις ως διαιρετέο; Συνδύασε το πλεόνασμα και το έλλειμμα ως διαιρέτη. Διάρεσε το διαιρετέο με τον διαιρέτη. Εάν είναι κλάσματα, απλοποίησέ τα. Για να συσχετιστεί η υπέρβαση και το έλλειμμα για τα είδη που αγοράστηκαν ταυτόχρονα: καθορίστε τα ποσοστά εισφορών. Αφαιρέστε το μικρότερο από το μεγαλύτερο, πάρτε το υπόλοιπο για να απλοποιήσετε τον διαιρέτη και το μέρισμα. Το μειωμένο μέρισμα είναι η τιμή ενός αντικειμένου. Ο μειωμένος διαιρέτης είναι ο αριθμός των ανθρώπων.

Τα σχόλια του *Liu* είναι:

*Liu*: Πολλαπλασίασε χιαστί τους κάτω όρους με τους πάνω; Συνδύασε και ομογενοποίησε με τον κοινό παρονομαστή. Εάν δεν απλοποιείτε πολλαπλασίασε με τον κοινό παρονομαστή. Βάλε κάτω τα ποσοστά συμμετοχής. Αφαίρεσε το μικρότερο από το μεγαλύτερο, αυτό ονομάζεται η πιθανή διαφορά (assumed difference), η οποία λαμβάνεται ως η μικρότερη υπόθεση. (which is taken to be the lesser assumption). Μετά συνδύασε το πλεόνασμα και το έλλειμμα και χαρακτήρισέ τα ως τον διαιρετέο. Τελικά η μείωση του διαιρετέου με την μικρότερη υπόθεση είναι ο αριθμός των ανθρώπων και μειώνοντας τον

διαίρετη δίνει την τιμή του αντικειμένου. Το άθροισμα του ελλείμματος και του πλεονάσματος σχετίζονται με την μικρότερη υπόθεση. Εάν δεν μειώνεται (απλοποιείτε), τότε πολλαπλασίασε το ως παρονομαστή με την πιθανή διαφορά η οποία χρησιμοποιείτε για να απλοποιηθεί ο διαίρετης και ο διαιρετέος.

(Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 270-271)

Αργότερα μαθηματικοί όπως ο Yang Hui πρότειναν εναλλακτικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων όπως το παραπάνω. Για περισσότερα μπορεί κάποιος να δει το (Lam L. Y., Yang Hui's commentary on the Ying nu chapter of the Chiu Saun Shu, 1974). Στη χρήση της μεθόδου “*ying bu zu*” τα δεδομένα έπρεπε να απεικονίζονται στον αριθμητικό πίνακα σε 2 στήλες. Αυτό ενέπνευσε έναν μαθηματικό συμβολισμό στον πίνακα, ο οποίος οδήγησε στην λύση αυτών που σήμερα αποκαλούμε δυο γραμμικές εξισώσεις με 2 αγνώστους. Στο επόμενο κεφάλαιο, το κεφάλαιο 8 του “*Jiuzhang Suan Shu*” αυτός ο τρόπος χρησιμοποιήθηκε και επεκτάθηκε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με περισσότερους αγνώστους. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 33-35)

### 3.3.2 Η μέθοδος “*fang cheng*” για την επίλυση συστημάτων

Το κεφάλαιο 8 του “*Jiuzhang Suan Shu*” περιλαμβάνει ίσως το πιο πρωτότυπα και πιο ανεπτυγμένα μαθηματικά των αρχαίων Κινεζικών μαθηματικών. Το περιεχόμενο του είναι η χρήση πινάκων (matrices) και η χρήση μεθόδων για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Οι μέθοδοι αυτές φαίνεται να σχετίζονται με τις μεθόδους επίλυσης που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 7 για το έλλειμμα και το πλεόνασμα και μαζί με την μέθοδο της διπλής ψευδούς αντικατάστασης, οδήγησαν στην επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων. Η μεθοδολογία των πινάκων, όπως αυτή περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο οδήγησε τους Κινέζους μαθηματικούς να εισάγουν την έννοια των αρνητικών αριθμών για πρώτη φορά. Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονταν κατά την μετατροπή πινάκων σε τριγωνική μορφή κατά την διαδικασία απαλοιφής μεταβλητών.

Σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνονταν 18 προβλήματα με τα πιο απαιτητικά να απαιτούν την επίλυση γραμμικού συστήματος  $5 \times 5$  (το 8.18) και το πρόβλημα 8.13 το οποίο περιλαμβάνει 5 εξισώσεις με 6 αγνώστους το οποίο όμως έχει μια ακαθόριστη λύση. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 274-275)

Η μέθοδος για την επίλυση αυτών των προβλημάτων ονομάζεται “*fang cheng*”, το οποίο κυριολεκτικά σημαίνει διάταξη σε τετραγωνικό πίνακα. Η μέθοδος περιγράφεται αμέσως μετά το πρόβλημα 8.1 και αναμένεται ο αναγνώστης να μπορεί να εφαρμόσει την ίδια μέθοδο και στα υπόλοιπα προβλήματα του κεφαλαίου. (Lam L. Y., Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 34-35)

Ας δούμε το πρόβλημα 8.1 για να δούμε πως εφαρμόζοταν η μέθοδος:

### 3.3.2.1 Το πρόβλημα 8.1 με την μέθοδο “*fang cheng*”

“Δίνονται 3 δέσμες ορυζώνων υψηλής ποιότητας, 2 δέσμες μέτριας ποιότητας και 1 δέσμη χαμηλής ποιότητας. Απόδοση: 39 dou καρπού (ρυζιού). 2 δέσμες υψηλής ποιότητας, 3 δέσμες μέτριας ποιότητας και 1 δέσμη χαμηλής ποιότητας, απόδοση 34 dou. 1 δέσμη υψηλής ποιότητας, 2 δέσμες μέτριας ποιότητας και 3 δέσμες χαμηλής ποιότητας, απόδοση: 26 dou. Βρες: Πόσο καρπό περιέχει 1 δέσμη από κάθε κατηγορία; Απάντηση: Η υψηλή ποιότητα αποδίδει  $9\frac{1}{4}$  dou ανά δέσμη, το μέτριας ποιότητας  $4\frac{1}{4}$  dou και το χαμηλής ποιότητας  $2\frac{3}{4}$  dou.”

Το πρόβλημα όπως περιγράφεται παραπάνω σήμερα θα το γράφαμε ως εξής:

$$\begin{cases} 3h + 2m + 1l = 39 \\ 2h + 3m + 1l = 34 \\ 1h + 2m + 3l = 26 \end{cases}$$

Equation 3-5

, όπου  $h$  η υψηλής ποιότητας δέσμη ρυζιού, το  $m$  μεσαίας ποιότητας και το  $l$  χαμηλής ποιότητας.

#### Ο κανόνας των πινάκων:

[Ας λειτουργήσει το πρόβλημα 1 ως παράδειγμα] Βάλε κάτω στην δεξιά στήλη τις 3 δέσμες υψηλής ποιότητας, 2 δέσμες μέτριας ποιότητας και 1 δέσμη χαμηλής ποιότητας. Απόδοση 39 dou καρπού. Ομοίως για την μεσαία και την αριστερή στήλη.

Σε αυτό το βήμα η περιγραφή ζητάει από τον αναγνώστη να κάνει την ακόλουθη κατάταξη στον αριθμητικό πίνακα:

|     |    |    |
|-----|----|----|
| III | II | I  |
| 1   | 2  | 3  |
| 2   | 3  | 2  |
| 3   | 1  | 1  |
| 26  | 34 | 39 |

### **Σχόλια:**

Δοθέντων διαφορετικών ειδών ενός αντικειμένου, δείξε το πλήθος ως έναν αριθμό σε έναν πίνακα με τα αθροίσματά τους στο τέλος. Θεώρησε τις τιμές κάθε στήλης ως αναλογίες, 2 αντικείμενα αντιστοιχεί σε διπλάσια ποσότητα, 3 αντικείμενα σε τριπλάσια ποσότητα, έτσι ο αριθμός του κάθε αντικειμένου είναι ίσος με την ανάλογη ποσότητα. Τοποθετούνται σε στήλες από τα δεξιά προς τα αριστερά και αυτές οι τιμές βασίζονται σε παραδείγματα από την καθημερινή πρακτική. Αυτός είναι ο γενικός κανόνας για τους πίνακες. Είναι δύσκολο να το αντιληφθείς με απλά λόγια, για αυτό χρησιμοποιούμε δέσμες ρυζιού για να το ξεκαθαρίσουμε. Τοποθέτησε την μεσαία και την αριστερή στήλη, όπως την δεξιά.”

### **Μέθοδος:**

Χρησιμοποίησε τον αριθμό των δεσμών υψηλής ποιότητας της δεξιάς στήλης για να πολλαπλασιάσεις την μεσαία στήλη και μετά ένωσέ τες»

### **Σχόλια:**

Liü: Η σημασία αυτού του κανόνα είναι: αφαίρεσε την στήλη με την μικρότερη [τιμή στην πρώτη γραμμή] επανειλημμένα από τις άλλες στήλες [με τις μεγαλύτερες τιμές στην πρώτη γραμμή], μέχρι αυτό το στοιχείο [με την μικρότερη τιμή] να εξαφανισθεί. Με την πάνω τιμή να έχει φύγει, η στήλη έχει ένα στοιχείο να λείπει [λιγότερο]. Παρόλα αυτά, εάν οι λόγοι [rates] σε μια στήλη αφαιρεθούν από μια άλλη, αυτό δεν επηρεάζει την αναλογία των υπολοίπων. Εξαλείφοντας την πάνω τιμή, σημαίνει να παραλείπεις ένα στοιχείο από το άθροισμα (*shi*).

Με αυτόν τον τρόπο, αφαιρείς γειτονικές στήλες την μια από την άλλη. Καθόρισε [εάν το άθροισμα] είναι θετικό ή αρνητικό. Τότε κάποιος μπορεί να πάρει την απάντηση. Πρώτα πάρε «το πάνω στοιχείο στην δεξιά στήλη και πολλαπλασίασε την μεσαία στήλη». Αυτό σημαίνει να ομογενοποιείς και να τα κάνεις ομοιόμορφα. Για να τα κάνεις ομοιόμορφα και ομογενοποιημένα πρέπει το στοιχείο στην πάνω γραμμή στην μεσαία γραμμή, επίσης να πολλαπλασιάζει την δεξιά στήλη. Για λόγους απλότητας δεν θα λέμε για να ομογενοποιήσεις και να τα κάνεις ομοιόμορφα από εδώ και στο εξής. Από την πλευρά της ομογενοποίησης και της ομοιομορφίας ο συλλογισμός είναι φυσιολογικός, σωστός.

Τι έχει καταφέρει να κάνει μέχρι αυτό στο σημείο, εάν το βλέπαμε με την σημερινή μορφή γραμμένο;

|            |           |          |                                |            |           |          |                            |            |           |          |
|------------|-----------|----------|--------------------------------|------------|-----------|----------|----------------------------|------------|-----------|----------|
| <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |                                | <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |                            | <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |
| 1          | 2         | 3        |                                | 1          | 6         | 3        |                            | 1          | 0         | 3        |
| 2          | 3         | 2        | $\overrightarrow{II \times 3}$ | 2          | 9         | 2        | $\overrightarrow{II - 2I}$ | 2          | 5         | 2        |
| 3          | 1         | 1        |                                | 3          | 3         | 1        |                            | 3          | 1         | 1        |
| 26         | 34        | 39       |                                | 26         | 102       | 39       |                            | 26         | 24        | 39       |

Equation 3-6

Με αυτόν τον τρόπο, έχει ξεκινήσει την διαδικασία τριγωνοποίησης του πίνακα. Μια διαδικασία που μας ομοιάζει με τις γραμμοπράξεις που εκτελούμε και εμείς σήμερα.

### Μέθοδος:

Συνέχισε πολλαπλασιάζοντας κυκλικά και τα επόμενα.

### Σχόλια:

*Λιυ:* Κάνε απαλοιφή και του πρώτου στοιχείου της αριστερής στήλης.

|            |           |          |                                 |            |           |          |                            |            |           |          |
|------------|-----------|----------|---------------------------------|------------|-----------|----------|----------------------------|------------|-----------|----------|
| <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |                                 | <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |                            | <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |
| 1          | 0         | 3        |                                 | 3          | 0         | 3        |                            | 0          | 0         | 3        |
| 2          | 5         | 2        | $\overrightarrow{III \times 3}$ | 6          | 5         | 2        | $\overrightarrow{III - I}$ | 4          | 5         | 2        |
| 3          | 1         | 1        |                                 | 9          | 1         | 1        |                            | 8          | 1         | 1        |
| 26         | 24        | 39       |                                 | 78         | 24        | 39       |                            | 39         | 24        | 39       |

Equation 3-7

### Μέθοδος:

Μετά χρησιμοποίησε το υπόλοιπό της δέσμης ρυζιού της μεσαίας ποιότητας στην μεσαία στήλη για να πολλαπλασιάσεις την αριστερή στήλη και να το μηδενίσεις.

### Σχόλια:

*Λιυ:* Πάλι χρησιμοποίησε τις δυο γειτονικές στήλες για να εξαλείψεις την δέσμη του καρπού μεσαίας ποιότητας.

|            |           |          |                         |            |           |          |                              |            |           |          |
|------------|-----------|----------|-------------------------|------------|-----------|----------|------------------------------|------------|-----------|----------|
| <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |                         | <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |                              | <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> |
| 0          | 0         | 3        |                         | 0          | 0         | 3        |                              | 0          | 0         | 3        |
| 4          | 5         | 2        | $\overrightarrow{5III}$ | 20         | 5         | 2        | $\overrightarrow{III - 4II}$ | 0          | 5         | 2        |
| 8          | 1         | 1        |                         | 40         | 1         | 1        |                              | 36         | 1         | 1        |
| 39         | 24        | 39       |                         | 195        | 24        | 39       |                              | 99         | 24        | 39       |

Equation 3-8

### Μέθοδος:

“Το υπόλοιπο της δέσμης του καρπού χαμηλής ποιότητας στην αριστερή στήλη είναι ο διαιρέτης, το στοιχείο από κάτω είναι ο διαιρετέος. Το πηλίκο είναι η ποσότητα δεσμών χαμηλής ποιότητας καρπού που ζητούσαμε.”

Σε αυτό το σημείο μας λέει ότι το ο αριθμός 99 είναι ο διαιρετέος και το 36 ο διαιρέτης που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να βρούμε πόσες δέσμες χαμηλής ποιότητας ρυζιού έχουμε. Πράγματι εάν τον παραπάνω πίνακα που έχει προκύψει μετά την τριγωνοποίηση τον μεταφράσουμε σε εξισώσεις, τότε:

$$36l = 99 \text{ άρα } l = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4} \text{ dou}$$

Equation 3-9

### Σχόλια:

“Liu: Μετά την απαλοιφή του καρπού υψηλής ποιότητας και του καρπού μεσαίας ποιότητας, το υπολειπόμενο [χαμηλής ποιότητας- είναι η παραγωγή και όχι μόνο μια δέσμη χαμηλής ποιότητας ρυζιού. Για να μειώσει την παραγωγή σε όλες τις δέσμες κάποιος πρέπει να πάρει τον αριθμό των δεσμών του καρπού ως διαιρέτη. Δείξε αυτό. Πάρε τον αριθμό των δεσμών του καρπού χαμηλής ποιότητας και πολλαπλασίασε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης. Ένωσε, και κάνε απαλοιφή των στοιχείων του καρπού της χαμηλής ποιότητας. Το shi (διαιρετέος) διαιρείται τότε με τον αριθμό των δεσμών για να βρούμε τον αριθμό (πλήθος) των dou της μεσαίας ποιότητας καρπού. Οι υπολογισμοί που χρειάζονται είναι πολύπλοκοι και μη αποτελεσματικοί για αυτό και ένας εναλλακτικός κανόνας δίνεται για να γίνουν πιο απλοί. Εάν παρόλα αυτά πρέπει να ακολουθηθεί η παλαιά μέθοδος, τότε αυτή είναι μια παραλλαγή.”

Τι ακριβώς περιγράφει σε αυτό το σχόλιο ο Liu Hui;

Ο πίνακας μέχρι αυτό το σημείο έχει γίνει τριγωνικός και στην πρώτη στήλη έχει γίνει απαλοιφή των καρπών της υψηλής και μεσαίας ποιότητας με αποτέλεσμα να μπορεί κάποιος πολύ εύκολα να υπολογίσει την παραγωγή για τον καρπό χαμηλής ποιότητας. Σε αυτό του το σχόλιο ο Liu Hui περιγράφει με ποιον τρόπο μπορώ να κάνω απαλοιφή στην δεύτερη στήλη του στοιχείου της χαμηλής ποιότητας, ώστε να μπορέσω εύκολα να υπολογίσω της μεσαίας ποιότητας. Στην ουσία ξεκινά μια διαδικασία όπως θα λέγαμε σήμερα διαγωνοποίησης του πίνακα για να απλοποιηθούν περαιτέρω οι εξισώσεις που προκύπτουν και να λυθεί το σύστημα ευκολότερα. Φαίνεται πως για εκείνη την εποχή οι πράξεις αυτές θα ήταν δύσκολες και για αυτό λέει πως δίνεται μια εναλλακτική μέθοδος. Λέει όμως στον αναγνώστη, ότι μπορεί να ακολουθεί και αυτή την μέθοδο, την παλαιά, εάν μπορεί. Όπως το περιγράφει όμως μέχρι αυτό το σημείο ο πίνακας θα είχε πάρει αυτή την μορφή.

|            |           |          |                         |           |          |            |                             |          |
|------------|-----------|----------|-------------------------|-----------|----------|------------|-----------------------------|----------|
| <i>III</i> | <i>II</i> | <i>I</i> | <i>III</i>              | <i>II</i> | <i>I</i> | <i>III</i> | <i>II</i>                   | <i>I</i> |
| 0          | 0         | 3        | 0                       | 0         | 3        | 0          | 0                           | 3        |
| 0          | 5         | 2        | $\overrightarrow{36II}$ | 0         | 180      | 2          | $\overrightarrow{II - III}$ | 0        |
| 36         | 1         | 1        | 36                      | 36        | 1        | 36         | 0                           | 1        |
| 99         | 24        | 39       | 99                      | 864       | 39       | 99         | 765                         | 39       |

Equation 3-10

Για να βρεθεί η λύση για τον καρπό μεσαίας ποιότητας πρέπει να διαιρέσω το 756 με το 180 λέει ο Liu. Πράγματι η εξίσωση που προκύπτει από αυτή την στήλη με τα σημερινά δεδομένα θα ήταν:

$$180m = 765$$

Και η λύση της είναι:

$$m = \frac{756}{180} = 4\frac{1}{4} \text{ dou}$$

### Μέθοδος:

“Για την επίλυση του καρπού μεσαίας ποιότητας, χρησιμοποίησε τον διαιρέτη [της αριστερής στήλης] για να πολλαπλασιάσεις το shi στη μεσαία στήλη, μετά αφάιρεσε την τιμή από αυτόν της χαμηλής ποιότητας.”

### Σχόλια:

“Αυτές είναι οι τιμές της παραγωγής για τον καρπό μεσαίας και χαμηλής ποιότητας. Υπολόγισε την παραγωγή για μια δέσμη χαμηλής ποιότητας πρώτα. Αντικατέστησε στην μεσαία στήλη για να βρεις την παραγωγή της μεσαίας ποιότητας. Πρώτα πάρε την τιμή που φαίνεται. Αφαίρεσε το shi [που είναι στην αριστερή στήλη]. Παρόλο που η παραγωγή μιας δέσμης καρπού χαμηλής ποιότητας δίνεται στην αριστερή στήλη παίρνοντας τον διαιρέτη ως παρονομαστή, από την πλευρά των λόγων αυτό δεν είναι δυνατό. Ως εκ τούτου πρώτα πάρε τον διαιρέτη και πολλαπλασίασε την σταθερά στην μεσαία στήλη και να ομογενοποιήσεις και χρησιμοποίησε τον διαιρέτη ως κοινό παρονομαστή, μετά αφάιρεσε την σταθερά της παραγωγής χαμηλής ποιότητας. Πάρε την παραγωγή μια δέσμης χαμηλής ποιότητας καρπού. Πολλαπλασίασε μετά τον αριθμό των δεσμών χαμηλής ποιότητας της μεσαίας στήλης. Αυτό ονομάζεται lieshi και δείχνει την παραγωγή χαμηλής ποιότητας στην μεσαία στήλη. Αφαίρεσε από το shi, που είναι η τιμή για την παραγωγή μεσαίας ποιότητας.”

### Μέθοδος:

“Για να επιλύσεις για τον καρπό υψηλής ποιότητας πάρε τον διαιρέτη και πολλαπλασίασε το shi της δεξιάς στήλης. Μετά αφάιρεσε το από τις τιμές της χαμηλής και μεσαίας παραγωγής.”

### Σχόλια:

“Αυτές είναι οι τιμές και για τα 3 είδη παραγωγής στην δεξιά στήλη. Τώρα η τιμή της χαμηλής ποιότητας και της μεσαίας ποιότητας έχουν βρεθεί. Ας πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των δεσμών της παραγωγής στην δεξιά στήλη. Τότε όπως και πριν αφαίρεση το *lieshi* από την δεξιά στήλη από τις τιμές που βρήκες.”

### Μέθοδος:

“Διαίρεσε τον αριθμό των δεσμών της παραγωγής υψηλής ποιότητας. Αυτή είναι η παραγωγή της υψηλής ποιότητας καρπού. Οι σταθερές διαιρούνται με τους διαιρέτες. Κάθε ένα από αυτά δίνει πόσα *dou* είναι η παραγωγή.”

### Σχόλια:

“*Liu*: Αντιμετώπισε και τις 3 τιμές όμοια. Εάν το υπόλοιπο είναι μικρότερο από τον διαιρέτη, πάρε τον τελευταίο ως παρονομαστή. Απλοποίησε τους παρονομαστές και τους αριθμητές όπου αυτό είναι δυνατό.”

Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα για την παραγωγή μεσαίας και υψηλής ποιότητας ο *Liu* προτείνει τελικά την αντικατάσταση των τιμών κάθε φορά και τον υπολογισμό. Στο παραπάνω πρόβλημα η τελική λύση είναι:

$$l = 2\frac{3}{4} \text{ dou}, m = 4\frac{1}{4} \text{ dou} \text{ και } h = 9\frac{1}{4} \text{ dou}.$$

Στην συνέχεια ο *Liu* στα σχόλιά του περιγράφει τον κανόνα των προσήμων για τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Ο κανόνας των προσήμων για την πρόσθεση και την αφαίρεσης θετικών και αρνητικών αριθμών έχει ήδη αναφερθεί και στην παράγραφο 3.2.3. Εδώ περιγράφει όλη την διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για να κάνει τον πίνακα τριγωνικό, ακόμα και στην περίπτωση που προκύψουν αρνητικά στοιχεία.

(Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 277-281)

Βλέπουμε ότι η διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω για την επίλυση του γραμμικού συστήματος, όπως θα το λέγαμε σήμερα, ομοιάζει με τις σημερινές μεθόδους που χρησιμοποιούμε στην γραμμική άλγεβρα για να επιλύσουμε παρόμοια προβλήματα. Η ιδέα – έμπνευση στους Κινέζους προήλθε από τον τρόπο που διατάσσονταν στον αριθμητικό πίνακα και μέσα από αυτό προέκυψαν και οι αρνητικοί αριθμοί. Είναι πραγματικά εντυπωσιακή η χρονική στιγμή που έγιναν αυτά στην Κίνα. Υπενθυμίζουμε πως το *Juinhang suanshu* είναι ένα έργο το οποίο χρονολογείται κάπου μεταξύ του 200 με 50 π.Χ. Ας μελετήσουμε στην συνέχεια τον τρόπο εύρεσης τετραγωνικών και κυβικών ριζών, όπως και



τις μεθόδους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων και τριτοβάθμιων εξισώσεων με χρήση αυτών των μεθόδων.

### 3.4 Οι τετραγωνικές ρίζες και κυβικές ρίζες από το κεφάλαιο 4 του Jiuzhang suanshu (Εννέα κεφάλαια της μαθηματικής τέχνης)

Υπολογισμός τετραγωνικών και κυβικών ριζών εμφανίζεται τόσο στο “Suan Shu Shu” όσο και στο “Jiuzhang suanahu”. Ας δούμε πως γίνονται οι υπολογισμοί της τετραγωνικής και κυβικής ρίζας σε αυτά τα 2 έργα.

#### 3.4.1 Το πρόβλημα 53(方田 Fang tian: Square Fields) του Suan Shu Shu (Dauben, 算数書 Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary, 2008, pp. 152-153)

“(Given) a field of 1 mu, how many (square) bu are there?

(The answer) says:  $15\frac{15}{31}$  (square) bu<sup>26</sup>. The method says<sup>27</sup>: a square 15 bu (on each side) is deficient (in area) by 15 (square) bu; a square 16 bu (on each side) is in excess (in area) by 16 (square) bu. (The method) says: combine the excess and deficiency as the divisor; (taking) the deficiency numerator multiplied by the excess denominator and the excess numerator times the deficiency denominator, combine them as the dividend. Repeat this, as in the “method of finding the width.”

Μετάφραση:

“(Δοθέντος) ενός χωραφίου 1 mu, πόσα (τετραγωνικά) bu υπάρχουν;»

---

<sup>26</sup> Σε αυτό το πρόβλημα θεωρούν ότι 1 mu=240 square bu. Αυτές ήταν και οι βασικές μονάδες μέτρησης την εποχή που γράφηκε το Suan Shu Shu. Το bu ήταν μονάδα μέτρησης του μήκους και στο κείμενο δεν διαφοροποιείτε με κάποιο τρόπο όταν χρησιμοποιείται για την μέτρηση επιφανειών, δηλαδή ως τετραγωνικό bu. Το mu είναι μονάδα μέτρησης εμβαδού, όπως το εκτάριο (acre) και έτσι εδώ μπορούμε να πούμε ότι το πρόβλημα είναι παρόμοιο με τον υπολογισμό των τετραγωνικών ποδιών ή μέτρων ανά εκτάριο. (Dauben, 算数書 Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary, 2008, p. 153)

<sup>27</sup> Εδώ σε αυτό το σημείο δεν αρχίζει πραγματικά να αναλύει την μέθοδο επίλυσης του προβλήματος, το οποίο στην ουσία κάνει με την επόμενη πρόταση, αλλά κάνει μια απλή αναφορά στην έλλειψη ή την περίσσια σε σχέση με το 1 mu, του εμβαδού τετραγώνων πλευράς 14 και 15 bu αντίστοιχα. (Dauben, 算数書 Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary, 2008, p. 154)

(Η απάντηση) λέει:  $15\frac{15}{31}$  (τετραγωνικά) bu. Η μέθοδος λέει: ένα τετράγωνο 15 bu (σε κάθε πλευρά) υπολείπεται (σε εμβαδόν) κατά 15 (τετραγωνικά) bu. Ένα τετράγωνο 16 bu (σε κάθε πλευρά) υπερέχει (σε εμβαδόν) κατά 16 (τετραγωνικά) bu. (Η μέθοδος) λέει: Συνδύασε την περίσσια και το έλλειμμα (δηλαδή το άθροισμά τους) ως διαιρέτη, (παίρνοντας) τον αριθμητή του ελλείμματος πολλαπλασιασμένο με τον παρονομαστή του πλεονάσματος και τον αριθμητή του πλεονάσματος με τον παρονομαστή του ελλείμματος, συνδύασέ τα ως διαιρετέο.

Η μέθοδος που περιγράφεται εδώ, ουσιαστικά αντανakλά τον τρόπο επίλυσης του παραπάνω προβλήματος στον υπολογιστικό πίνακα. Εάν τοποθετήσουμε τους αριθμούς για την «έλλειψη» κάθετα στα αριστερά και εκείνους που αφορούν την «περίσσια» στα δεξιά, οι

|                        |              |    |    |            |                    |
|------------------------|--------------|----|----|------------|--------------------|
| deficiency numerator   | 不足子 bu zu zi | 15 | 16 | 贏子 ying zi | excess numerator   |
| deficiency denominator | 不足母 bu zu mu | 15 | 16 | 贏母 ying mu | excess denominator |

Εικόνα 3-15 διάταξη του προβλήματος 53 του Shuan shu shu (Dauben, 算数書 Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary, 2008, p. 154)

πάνω αριθμοί είναι το μήκος των δυο τετραγώνων με πλευρές 15 και 16 bu το καθένα. Κάτω από αυτούς είναι η περίσσια και το έλλειμμα που παρουσιάζει το καθένα. Η δομή φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

Η κατάλληλη μέθοδος επίλυσης ουσιαστικά φαίνεται στο πρόβλημα 65 “Qi cong – Finding the length”, παρά στο πρόβλημα 64 “Qi guang – Finding the width”. Σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράφεται εδώ, η μέθοδος “excess and deficiency” που περιγράφεται εδώ οδηγεί στον παρακάτω υπολογισμό:

$$\frac{(15 \times 16) + (16 \times 15)}{16 + 15} = \frac{480}{31} = 15\frac{15}{31} bu$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιείτε σε αυτό το πρόβλημα δείχνει για μια ακόμα φορά πόσο προηγείται χρονολογικά το “Suan Shu Shu” από το “Juizhang shuan shu – The Nine Chapters of Mathematical Art”. Σε αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιείται η μέθοδος “excess and deficiency”, ενώ στο “Juizhang shuan shu – The Nine Chapters of Mathematical Art” για την εύρεση τετραγωνικών ριζών έχει αναπτυχθεί αλγόριθμός, ο οποίος έχει αποκτήσει και δικό του χαρακτηριστικό όνομα ως “Kai fang Shu” ή “Μέθοδος εύρεσης τετραγωνικής ρίζας”, σε ακριβή μετάφραση από τα Κινεζικά “Η μέθοδος ανοίγματος του τετραγώνου”. (Dauben, 算数書 Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary, 2008, pp. 153-154)

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι ενώ το πρόβλημα 53 εμφανίζεται προς το τέλος του “*Suan Shu Shu*”, στο “*Juizhang shuan shu*” εμφανίζεται ως το πρόβλημα 1 του κεφαλαίου 1, αν και θα μπορούσαμε να πούμε ότι εμφανίζεται αντεστραμμένο.

Το πρόβλημα 1 του κεφαλαίου 1 του “*Nine Chapters*” ζητάει να βρεθεί το εμβαδόν μιας περιοχής ορθογωνίου σχήματος, με μήκος της μιας πλευράς ίσο με 15 *bu* και της άλλης ίσο με 16 *bu*. Η απάντηση που είναι 1 *mu* δείχνει την σχέση που συνδέει τα δυο αυτά προβλήματα. (Dauben, 算数書 *Suan Shu Shu* A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary, 2008, p. 99)

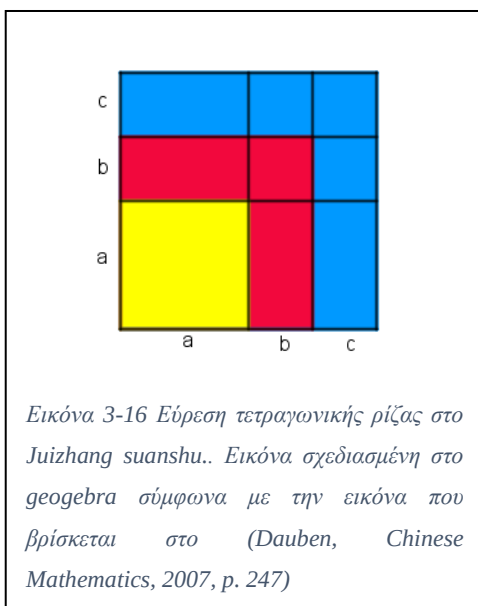
### 3.4.2 Η μέθοδος για την εύρεση τετραγωνικής ρίζας (*kai fang*) από το κεφάλαιο 4 του “*Jiu zhang suan shu – The Nine Chapters*”

Η μέθοδος εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας είναι γνωστή ως ***kai fang*** (σε ακριβή μετάφραση σημαίνει το άνοιγμα του τετραγώνου) και περιγράφεται μετά το πρόβλημα 16 του κεφαλαίου 4. Χρησιμοποιήθηκε από τους Κινέζους προκειμένου να μπορούν να επιλύουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις της μορφής  $x^2 = a$ . Είναι παρόμοια με την μέθοδο που χρησιμοποιούσαμε και εμείς, μέχρι την ανάπτυξη και την διάδοση των μικρών υπολογιστικών μηχανών, η οποία βασίζεται στον τύπο του διώνυμου  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . (Katz & Parshall, 2014, p. 90) Η περιγραφή της μεθόδου σχετικά με τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού με την χρήση ράβδων είναι πολύ και γεμάτη με τεχνικούς όρους. Την έχουν γράψει με μόλις 125 χαρακτήρες, όπου οι Wang & Needham (Wang & Needham, 1954, pp. 350-356) χρειάστηκαν 7 σελίδες για να μεταφράσουν – εξηγήσουν αυτό το απόσπασμα. Το κείμενο επίσης αναφέρεται σε ρίζες μη ακέραιων αριθμών. Οι Κινέζοι γνώριζαν πώς να υπολογίζουν την ρίζα ενός μη-ακέραιου αριθμού όπως και ακέραιων αριθμών ανεξάρτητα πόσο μεγάλοι ήταν. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό από την διατύπωση των προβλημάτων 4.15 [Δίνεται μια περιοχή  $564752\frac{1}{4}$  *bu*. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου. Απάντηση  $751\frac{1}{2}$ ] και 4.16. [Δίνεται μια περιοχή 3972150625 *bu*. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου. Απάντηση 6325]. Στα προβλήματα 17 και 18 η μέθοδος εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της περιφέρειας ενός κύκλου, όπου η προσέγγιση του  $\pi$  δίνεται ίση με τον αριθμό 3. (Lam L. Y., *Jiu Zhang Suanshu* (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview, 1994, pp. 22-23)

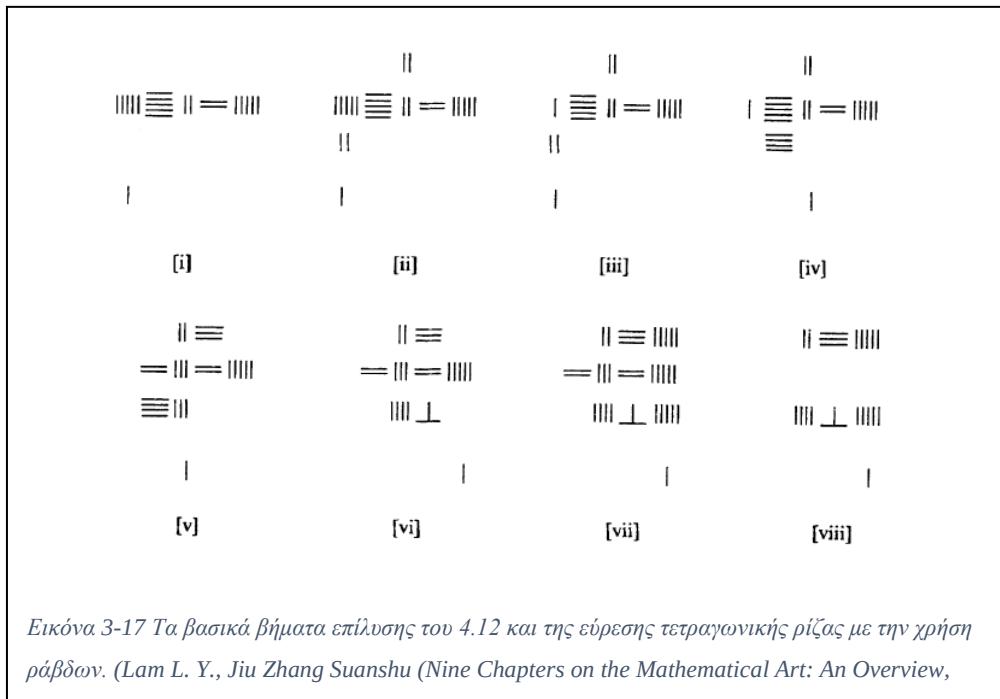
Ο «αλγόριθμός» για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας  $s$  ξεκινάει καθορίζοντας τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό  $a$  του οποίου το τετράγωνο είναι μικρότερο από την δοθείσα περιοχή  $S$ , για παράδειγμα,  $a^2 \leq S$ . Εάν  $a^2 = S$ , τότε το  $a$  είναι η τετραγωνική ρίζα του  $S$ . Θεωρώντας το  $a^2 < S$ , παίρνουμε το  $a$  ως την πρώτη προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του  $S$ , αυτό που υπολείπεται από το τετράγωνο  $S$  είναι ο γνόμενος που στο σχήμα της εικόνας 3.16 φαίνεται με κόκκινο και μπλε. Ο Liu Hui στα σχόλιά του σχετικά με την μέθοδο εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας, αναφέρεται στην δοθείσα περιοχή  $S$  ως *shi*, και στην πρώτη προσέγγιση  $a$ , ως *fa*. Αυτή η ορολογία πηγάζει άμεσα από το λεξιλόγιο της διαίρεσης όπου τα *shi* και *fa* είναι ο διαιρετέος και ο διαιρέτης αντίστοιχα και δείχνει την στενή σχέση ανάμεσα στην διαίρεση και την μέθοδο εύρεσης τετραγωνικών ριζών. Η πρώτη προσέγγιση ή αλλιώς η περιοχή  $a^2$ , είναι η «κίτρινη» περιοχή στην οποία αναφέρεται ο Liu Hui. Η δεύτερη προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας προϋποθέτει τον υπολογισμό του  $2a$  (ο Liu Hui το αποκαλεί το “καθορισμένο *fa*”) και μετά την εύρεση του μεγαλύτερου ακέραιου  $b$  τέτοιου ώστε  $a^2 + 2ab + b^2 < S$ . Ο γνόμενος που αντιπροσωπεύει την περιοχή  $2ab + b^2$  είναι αυτό που ο Liu Hui αποκαλεί την κόκκινη περιοχή στο διάγραμμα. Η λογική πίσω από την υπολογιστική διαδικασία είναι εμφανής από το σχήμα.

Εάν  $a^2 + 2ab + b^2 = S$ , τότε η εύρεση της ρίζας έχει ολοκληρωθεί, αλλά εάν  $a^2 + 2ab + b^2 < S$ , τότε ο αλγόριθμός προχωράει στην εύρεση της μεγαλύτερης τιμής  $c$  τέτοιας ώστε  $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 < S$  (ο γνόμενος  $2ac + 2bc + c^2$

είναι αυτό που ο Liu Hui καθορίζει ως μπλε στο διάγραμμά του). (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, σ. 247) . Ας δούμε το πρόβλημα 4.12 για να καταλάβουμε καλύτερα τον μηχανισμό της εύρεσης τετραγωνικής ρίζας.



### 3.4.2.1 Το πρόβλημα 4.12



Το πρόβλημα 4.12 επιλέγεται ως το πλέον χαρακτηριστικό για να καταλάβει κάποιος τον μηχανισμό εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας. Ας το δούμε πιο αναλυτικά.

“Now given an area 55,525 [square] bu. Tell: what is the side of the square? Answer: 235 bu.”

Το κλειδί για την λύση του παραπάνω προβλήματος φαίνεται στο διάγραμμα που έχει ανακατασκευάσει ο μαθηματικός *Dai Zhen* για την εγκυκλοπαίδεια των *Ming*, *Yongle dadian*<sup>28</sup> (1403-1408 μ. Χ)

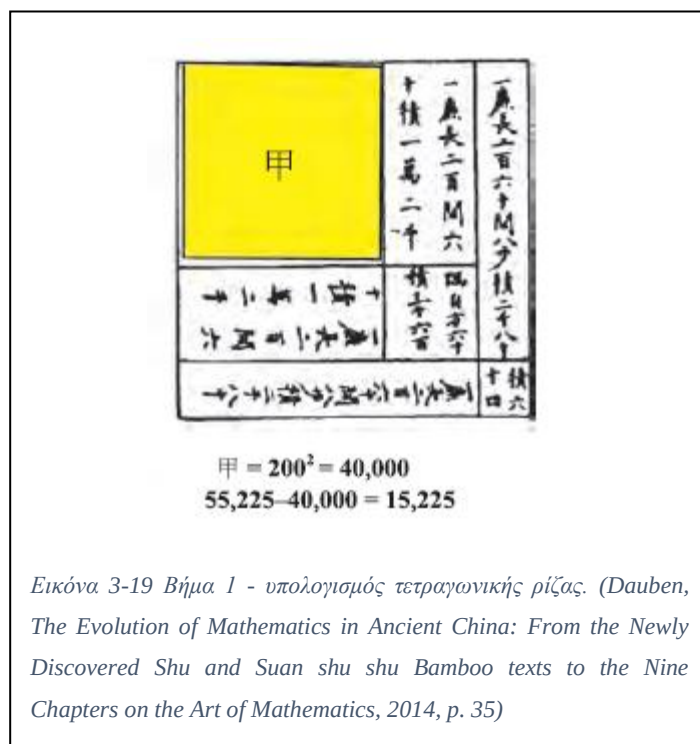


(Lam and Ang 1992: 76).

Εικόνα 3-18 Το διάγραμμα του 4.12 για το Yongle Dadian από τον Dai Zhen (Dauben, *The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 2014, p. 35)

<sup>28</sup> Ο αυτοκράτορας Yongle ήταν ο τρίτος αυτοκράτορας της Δυναστείας των Ming και βασίλευσε από το 1402 έως το 1424 μ.Χ. Διέταξε την σύνταξη του Yongle Dadian (“Great Canon of the Yongle Reign”) το 1402, το οποίο ολοκληρώθηκε το 1408. Αποτελούταν από 22,877 κεφάλαια σε 11,095 τόμους. Εάν και η τυπογραφία είχε ήδη αναπτυχθεί εκείνη την περίοδο, το Yongle Dadian γράφηκε στο χέρι λόγω του μεγάλου μεγέθους του – μήκους του. Το περιεχόμενό του κάλυπτε όλες τις πτυχές της παραδοσιακής Κινεζικής γνώσης και περιείχε όλα τα σημαντικά κείμενα που ήταν διαθέσιμα εκείνη την εποχή, από την ιστορία και το θέατρο έως και τις τεχνικές της γεωργίας. Η πρώτη έκδοση (1408) καταστράφηκε ή χάθηκε και δεν είναι διαθέσιμη σήμερα. Σήμερα, περίπου το 3% της δεύτερης του χειρόγραφης έκδοσης είναι διαθέσιμο. Η Βρετανική βιβλιοθήκη έχει 24 τόμους, που αντιστοιχούν σε 49 κεφάλαια. (<https://www.bl.uk/collection-items/yongle-dadian>)

Η μέθοδος για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ξεκινάει κάνοντας την παρατήρηση ότι πρέπει να βρίσκεται μεταξύ του 200 και του 300, αφού  $200^2 = 40,000 < 55,225 < 300^2 = 90,000$ . Το πρώτο βήμα είναι να καθοριστεί το πρώτο ψηφίο  $a$  της

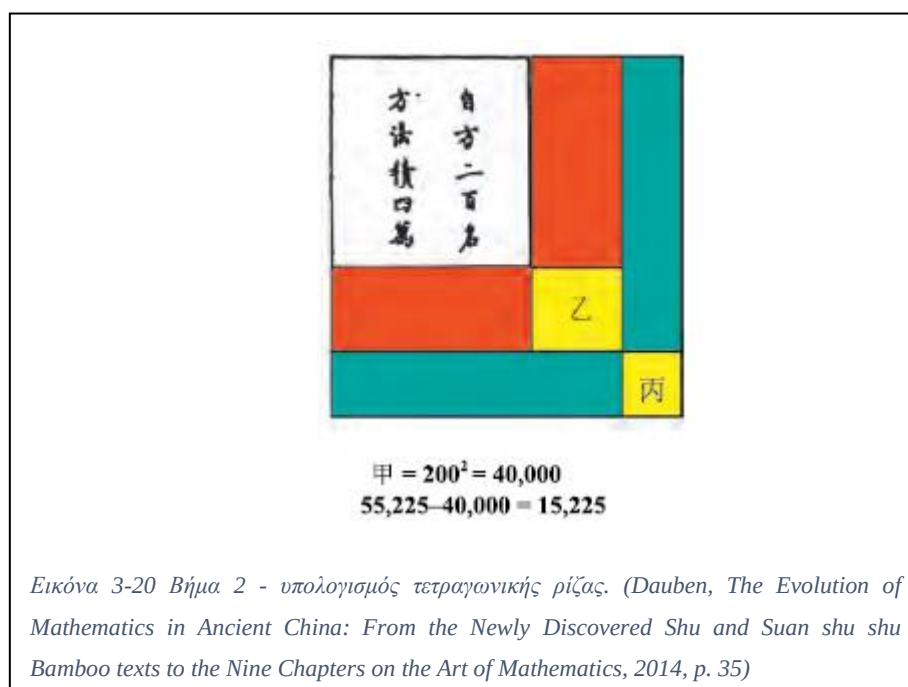


τετραγωνικής ρίζας  $abc$ , έτσι ώστε  $(abc)^2 = 55,225$ . Είναι ξεκάθαρο ότι το πρώτο ψηφίο της ρίζας είναι  $a=2$ . Παίρνουμε το 200 ως μια πρώτη προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας και αφαιρούμε το  $200^2 = 40,000$  από το 55,225.  $55,225 - 40,000 = 15,225$ . Εάν κοιτάξουμε την αντιστοιχία στο διάγραμμα είναι σαν να αφαιρούμε την μεγάλη κίτρινη περιοχή  $jia$  (40,000) από το μεγαλύτερο τετράγωνο (55,225).

Αυτό αφήνει ένα γνόμονα από 2 πορτοκαλί ορθογώνια ένα μικρότερο κίτρινο τετράγωνο το  $yí$  ανάμεσά τους και μετά 2 μπλε-πράσινα ορθογώνια και το ακόμα μικρότερο κίτρινο τετράγωνο  $bing$  ανάμεσά τους. Αυτά μαζί αναπαριστούν τους γνόμονες που περιβάλλουν το μεγάλο κίτρινο τετράγωνο και είναι ίσο με την περιοχή  $55,225 - 40,000 = 15,225$ . Τώρα έχει υπολογισθεί και το δεύτερο ψηφίο της τετραγωνικής ρίζας.

Αυτή τη φορά η πλευρά του μεγάλου κίτρινου τετραγώνου ήδη καθορίζει τη μια πλευρά των δυο κόκκινων ορθογώνιων, το καθένα 200 και το επόμενο βήμα της μεθόδου είναι ο υπολογισμός του ψηφίου  $b$  της τετραγωνικής ρίζας  $abc$  τέτοιο ώστε  $2(10b)(200) + (10b)^2 \leq 15,225$ . Επειδή  $2(40)(200) + (40)^2 = 17,600 < 15,225$  και  $2(30)(200) + (30)^2 = 12,900 < 15,225$  το δεύτερο ψηφίο της τετραγωνικής ρίζας είναι το 3. Αφαιρώντας 12,900 από το 15,225 μένει 2,325 να είναι το εμβαδόν της εναπομείνουσας περιοχής του εξωτερικού γνώμονα που αποτελείται από τα 2 μπλε- πράσινα ορθογώνια και το μικρότερο κίτρινο τετράγωνο  $bing$  ανάμεσά τους. Το τελικό βήμα της μεθόδου είναι ο καθορισμός τους τελευταίου ψηφίου  $c$ , της τετραγωνικής ρίζας  $abc$ . Πάλι, το μήκος των δυο μπλε-πράσινων ορθογώνιων είναι προκαθορισμένο από το μήκος των δυο πορτοκαλί ορθογώνιων και την πλευρά του κίτρινου τετραγώνου,  $y_i$  που βρίσκεται ανάμεσά τους, δηλαδή 230. Το πρόβλημα είναι τώρα να καθορισθεί το ψηφίο  $c$  τέτοιο ώστε  $2(230)c + c^2 \leq 2,325$ . Φαίνεται πως το  $c = 5$ , και το εμβαδόν των δυο μπλε- πράσινων ορθογώνιων θα είναι  $2(230)(5) = 2,300$  και  $c^2 = 25$ . Συνεπώς  $2(230)(5) + c^2 = 2,300 + 25 = 2,325$ . Άρα η τετραγωνική ρίζα του 55,225 βρέθηκε και είναι ίση με το 235 ακριβώς.

Αυτή η μέθοδος μας περιγράφει τον τρόπο υπολογισμού των τετραγωνικών ριζών σε κάθε γενική περίπτωση, σε όποιο βαθμό ακρίβειας επιθυμούμε. Προφανώς και υπερέχει της μεθόδου που περιγράφεται στο “*Suan shu shu*” που αναφέραμε στην παράγραφο 3.3.2 Δουλεύοντας μέσα σε ένα παρόμοιο πλαίσιο με αυτό του “*Suan shu shu*”, αυτό της πρόβλεψης και εκτίμησης, το “*Juizhang Suan Shu*” κατάφερε κυριολεκτικά να ανοίξει το τετράγωνο, δηλαδή να αναλύσει τον μηχανισμό πίσω από την μέθοδο εύρεσης της





τετραγωνικής ρίζας, καταφέροντας ένα θεωρητικό επίπεδο κατανόησης που επιτρέπει τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας βήμα – βήμα, είτε με ακρίβεια, είτε όσο κοντά κάποιος επιθυμεί. (Dauben, The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, 2014, pp. 34-35)

Για να δούμε με σύγχρονο συμβολισμό τη μέθοδο που προτείνει ο *Liu Hui*:

- ✓ Η εξίσωση που πρέπει να λυθεί είναι η  $x^2 = 55.225$
- ✓ Αρχικά θέλει να προσδιορίσει το πρώτο ψηφίο της λύσης  $x$ . Για να το πετύχει αυτό μειώνει το  $x$  σε  $x_1$ , θεωρώντας τον ως:  $x_1 = \frac{x}{100}$  και έτσι η εξίσωση γίνεται:  $10.000x_1^2 = 55.225$
- ✓ Έτσι εκτιμά το ακέραιο μέρος του  $x_1$ ,  $[x_1] = 2$ , που είναι και το πρώτο ψηφίο του ζητούμενου αποτελέσματος.
- ✓ Μετά αφαιρεί από το  $x_1$  το  $[x_1]$  και θεωρεί  $y = x_1 - [x_1] = x_1 - 2$  και η εξίσωση γίνεται  $10.000(y + 2)^2 = 55.225$  δηλαδή  $10.000y^2 + 40.000y = 15.225$
- ✓ Στην συνέχεια αυξάνει το  $y$ , θεωρώντας ως  $y_1 = 10y$  και η εξίσωση γίνεται:  $100y_1^2 + 4.000y_1 = 15.225$
- ✓ Μετά εκτιμά το ακέραιο μέρος του  $y_1$  και έχει  $[y_1] = 3$
- ✓ Στη συνέχεια όμως, όπως και πριν αφαιρεί από το  $y_1$ , το ακέραιο μέρος του και έχει  $z = y_1 - [y_1] = y_1 - 3$  και η εξίσωση γίνεται:  $100(z + 3)^2 + 4.000(z + 3) = 15.225$ , δηλαδή  $100z^2 + 4600z = 2.325$
- ✓ Ομοίως με πριν αυξάνει το  $z$  θεωρώντας ως  $z_1 = 10z$  και η εξίσωση γίνεται  $z_1^2 + 460z_1 = 2.325$
- ✓ Ομοίως πάλι εκτιμά το ακέραιο μέρος του  $z_1$  και έχει  $[z_1] = 5$ .
- ✓ Όμως επειδή το  $z_1$  είναι και ίσο με το 5 ακριβώς τελειώνει η διαδικασία και τότε δίνει:

$$x = 100[x_1] + 10[y_1] + [z_1] = 100 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 = 235$$

Πώς οι υπολογισμοί αυτοί εκτελούνταν με τις αριθμητικές ράβδους ας δούμε το παρακάτω:

**Table 4.6** *Extracting the square root of 55 225 using counting rods (Problem 12).*

| (i)             | (ii)            | (iii)           | (iv)            |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <u>Y</u>        | <u>Y</u>        | <u>Y 200</u>    | <u>Y 200</u>    |
| S 55 225        | S 55 225        | S 55 225        | S 55 225        |
| F               | F               | F               | F 20 000        |
| <u>J 1</u>      | <u>J 10 000</u> | <u>J 10 000</u> | <u>J 10 000</u> |
|                 |                 |                 |                 |
| (v)             | (vi)            | (vii)           | (viii)          |
| <u>Y 200</u>    | <u>Y 200</u>    | <u>Y 200</u>    | <u>Y 230</u>    |
| S 15 225        | S 15 225        | S 15 225        | S 15 225        |
| F 20 000        | F 40 000        | F 4000          | F 4000          |
| <u>J 10 000</u> | <u>J 10 000</u> | <u>J 100</u>    | <u>J 100</u>    |
|                 |                 |                 |                 |
| (ix)            | (x)             | (xi)            | (xii)           |
| <u>Y 230</u>    | <u>Y 230</u>    | <u>Y 230</u>    | <u>Y 235</u>    |
| S 15 225        | S 2325          | S 2325          | S 2325          |
| F 4300          | F 4300          | F 4600          | F 460           |
| <u>J 100</u>    | <u>J 100</u>    | <u>J 100</u>    | <u>J 1</u>      |

Εικόνα 3-21 το πρόβλημα 4.12 στον υπολογιστικό πίνακα (Δούκα, 2011, p. 59)

Η βασική ιδέα που διέπει όλα τα προηγούμενα είναι η ταυτότητα:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a + b)$$

Equation 3-11

Θέλουμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του 55.225

$$55.225 = 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$(10^n x + a)^2 = 10^{2n} x^2 + 2 \cdot 10^n a + a^2 = 10^{2n} x^2 + a(2 \cdot 10^n x + a)$$

Equation 3-12

Στην ζητούμενη περίπτωση  $n = 2$ , δηλαδή:

$$(10^2 x + a)^2 = 10^4 x^2 + 2 \cdot 10^2 a + a^2 = 10^4 x^2 + a(2 \cdot 10^2 x + a),$$

Equation 3-13

αναζητούμε ένα  $x$  από 1 έως το 9, το πρώτο ψηφίο της ζητούμενης λύσης (τις εκατοντάδες) τέτοιο ώστε το  $10^4 x^2$  να είναι όσο κοντά γίνεται στο 55.225, αλλά μικρότερο από αυτό. Συνεπώς  $x^2 = 4$ , άρα  $x = 2$ .

Στη συνέχεια από το 55.225 αφαιρούμε το  $10^4 x^2 = 40.000$  και έχουμε  $55.225 - 40.000 = 15.225$ .

Καταλήγουμε ότι  $a(2 \cdot 10^2 x + a) = 15.225$ , δηλαδή  $a(400 + a) = 15.225$ . Αν  $y$  είναι το πρώτο ψηφί του  $a$ , τότε  $10y \cdot (400 + 10y) \leq 15.225$  από όπου παίρνουμε,  $4.000y + y^2 \leq 15.225$  και άρα  $4.000 \leq 15.225$ .

Πάλι προσεγγιστικά βρίσκουμε έναν αριθμό  $y$ , από το 1 έως το 9, το δεύτερο δηλαδή ψηφίο της λύσης που ψάχνουμε (τις δεκάδες), ο οποίος πρέπει να ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη και αυτός είναι ο  $y = 3$ .

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να βρούμε ακριβώς την τετραγωνική ρίζα του αριθμού ή μια καλή προσέγγιση αυτής. (Δούκα, 2011, pp. 59-60)

### 3.4.3 Η μέθοδος για την εύρεση κυβικής ρίζας (kai li fang) από το κεφάλαιο 4 του “Jiu zhang suan shu – The Nine Chapters”

Οι Wang και Needham στο άρθρο τους “*Horner's method in Chinese mathematics : its origins in the root-extraction procedures of the Han dynasty*” αναπτύσσουν την μέθοδο *kai li fang*, όπως αυτή εμφανίζεται στο κεφάλαιο 4 του “Jiu zhang suan shu”. Μέσα σε παρένθεση μπαίνουν οι φράσεις που σύμφωνα με τους συγγραφείς πιθανόν να εννοούνται στο κείμενο.

#### **Πρώτη φάση:**

**Βήμα 1:** Βάλε τον (γνωστό) κύβο (ενός συγκεκριμένου άγνωστου αριθμού) (στην

|                                                     |         |                             |            |
|-----------------------------------------------------|---------|-----------------------------|------------|
|                                                     |         |                             | C/r        |
|                                                     |         |                             | Li-fang    |
| Put the known cube in this row (step 1) . . . . .   | 1860867 | Shih                        |            |
|                                                     |         |                             |            |
|                                                     |         |                             |            |
|                                                     |         |                             |            |
|                                                     |         |                             |            |
|                                                     |         |                             |            |
| Put one counting-rod in this row (step 2) . . . . . | 1       | Chieh-suan<br>(Preliminary) | Chieh-suan |

Εικόνα 3-22 βήμα 1 - Κυβική ρίζα (Wang & Needham, 1954, p. 356)

δεύτερη γραμμή από την κορυφή του αριθμητικού πίνακα) να είναι το Shih, ο διαιρετέος και μια αριθμητική ράβδος στην τελευταία γραμμή (chieh – suan).

Βήμα 2: Χρησιμοποίησε μια αριθμητική ράβδο (και τοποθέτησέ την στην τελευταία γραμμή του αριθμητικού πίνακα) (στην τελευταία στήλη ψηφίων στα δεξιά). [Αυτή η ράβδος αποκαλείται το αρχικό Chieh-suan].

Βήμα 3: Μετακίνησε αυτή την αριθμητική ράβδο ( απο δεξιά προς τα αριστερά) σε βήματα των 3 θέσεων κάθε φορά, χωρίς να ξεπεράσεις το πιο αριστερή θέση του διαιρετέου. Αυτή η αριθμητική ράβδος, σε αυτή την νέα θέση, ονομάζεται Chieh-suan.

|         |            |            |     |
|---------|------------|------------|-----|
|         |            |            | C/2 |
|         | Li-fang    |            |     |
| 1860867 | Shih       |            |     |
|         |            |            |     |
|         |            |            |     |
|         |            |            |     |
|         |            |            |     |
|         |            |            |     |
| 1000000 | Chieh-suan | Chieh-suan |     |

*Εικόνα 3-23βήμα 2 - Κυβική ρίζα (Wang & Needham, 1954, p. 357)*

Εδώ η ράβδος μετακινήθηκε 2 φορές κατά 3 θέσεις κάθε φορά.

Βήμα 4: (Η πρώτη τιμή της ρίζας επιλέγεται με δοκιμή, παίρνοντας διαδοχικά 1,2,3, κτλ) Ας συζητήσουμε για το So – te. (So – te) είναι το γινόμενο του πρώτου ψηφίου της

|         |            |            |
|---------|------------|------------|
| 1       | Li-fang    |            |
| 1860867 | Shih       |            |
| 1000000 |            |            |
| 1000000 | I'a        | Fa         |
|         |            |            |
|         |            |            |
|         |            |            |
| 1000000 | So-té      | Chieh-suan |
| 1000000 | Chieh-suan |            |

*Εικόνα 3-24 βήμα 3 - κυβική ρίζα (Wang & Needham, 1954, p. 357)*

ρίζας, το οποίο προέκυψε από δοκιμή με το *Chieh-suan*. (Τι εννοεί με τον όρο “συζητήσουμε”; Όταν ο αριθμός που έχουμε επιλέξει πολλαπλασιαστεί με το *So-te* δυο φορές, τότε το γινόμενο δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τον διαιρέτέο, ταυτόχρονα επιλέγεται η μεγαλύτερη πιθανή τιμή για την ρίζα). (Η επιλεγμένη φιγούρα τοποθετείτε στην πάνω – πάνω γραμμή του αριθμητικού πίνακα. Αυτή η γραμμή ονομάζεται *Li – fang*, η οποία τελικά θα περιλαμβάνει την απάντηση). Η πρώτη δοκιμή για να επιλέξουμε το πρώτο ψηφίο της ρίζας.

Πρώτη Δοκιμή: Πάρε το 1 ως το πρώτο ψηφίο της ρίζας

- c.  $1000000 (fa) \times 1 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας}) = 1000000$
- b.  $1000000 (So-te) \times 1 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας}) = 1000000 (fa)$
- a.  $1000000 (Chieh - suan) \times 1 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας}) = 1000000 (so-te)$

Επειδή το 1000000 που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή απο την κορυφή δεν είναι μεγαλύτερο απο το 1860867, το 1 είναι ένα πιθανό πρώτο ψηφίο για την ζητούμενη ρίζα.

Δεύτερη δοκιμή για τον προσδιορισμό του πρώτου ψηφίου: πάρε το 2 ως πρώτο ψηφίο της ρίζας.

- c.  $4000000 (fa) \times 2 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας}) = 8000000$
- b.  $2000000 (So-te) \times 2 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας}) = 4000000 (fa)$
- a.  $1000000 (Chieh - suan) \times 2 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας}) = 2000000 (so-te)$

Επειδή το 8000000 που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή απο την κορυφή είναι μεγαλύτερο από το 1860867, το 2 δεν μπορεί να είναι πρώτο ψηφίο για την ζητούμενη ρίζα, άρα το 1 είναι το πρώτο ψηφίο της ζητούμενης κυβικής ρίζας.

Βήμα 5: Το *Chieh – suan* πολλαπλασιάζεται δυο φορές με το πρώτο ψηφίο της ρίζας. Το γινόμενο είναι ο διαιρέτης (*fa*), το οποίο μπαίνει στην τρίτη γραμμή από την κορυφή. (Παρατήρησε ότι οι τιμές του *fa* και του *so-te* δεν είναι ίδιες) Μετά από τις δοκιμές 1 και 2 του προηγούμενου βήματος, το 1 έχει επιλεγεί ως πρώτο ψηφίο της ζητούμενης ρίζας.

|         |            |            |
|---------|------------|------------|
| 2       | Li-fang    |            |
| 1860867 | Shih       |            |
| 8000000 |            |            |
| 4000000 | Fa         | Fa         |
|         |            |            |
|         |            |            |
|         |            |            |
| 2000000 | So-te      | Chieh-suan |
| 1000000 | Chieh-suan |            |

Εικόνα 3-25 βήμα 4 - κυβική ρίζα (Wang & Needham, 1954, p. 358)

$$1860867 (shih) \div 1000000 (fa) = 1 + 860867 (\text{πρώτο υπόλοιπο})$$

$$1000000 (chieh - suan) \times 1 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας}) \times 1 (\text{πρώτο ψηφίο της ρίζας})$$

$$= 1000000 (fa)$$

|         |               |            |
|---------|---------------|------------|
|         | Li-fang       |            |
| I       |               |            |
| 860867  | 1st remainder |            |
| 1000000 | Fa            | Fa         |
|         |               |            |
|         |               |            |
|         |               |            |
|         |               |            |
| 1000000 | Chieh-suan    | Chieh-suan |

Εικόνα 3-26 βήμα 5 - κυβική ρίζα (Wang & Needham, 1954, p. 358)

Βήμα 6: Αυτός ο διαιρέτης (*fa*) χρησιμοποιείται για να διαιρέσει τον διαιρετέο (*Shih*) (και το υπόλοιπο τοποθετείτε στην δεύτερη γραμμή από την κορυφή στον αριθμητικό πίνακα). Αυτό ονομάζεται πρώτο υπόλοιπο.

Βήμα 7:

- Αφού γίνει η διαίρεση, ο διαιρέτης *fa*, πολλαπλασιάζεται με το 3 για να φτιάξει το *Ting -fa*.
- Το γινόμενο μειώνεται κατά μια θέση, (πάει πίσω ένα ψηφίο) [ και αυτό το ονομάζεται πρώτος σταθερός διαιρέτης – *Ting -fa*] κατά την προετοιμασία για την επόμενη διαίρεση.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                | <table> <tr><th>1</th><th>Li-fang</th></tr> <tr><td>860867</td><td>1st remainder</td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>3000000</td><td>Ting-fa</td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>3000000</td><td>Chung</td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>1000000</td><td>Hsia</td></tr> </table>                               | 1 | Li-fang | 860867 | 1st remainder |  |  | 3000000 | Ting-fa              |  |  | 3000000 | Chung              |  |  | 1000000 | Hsia              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------|--------|---------------|--|--|---------|----------------------|--|--|---------|--------------------|--|--|---------|-------------------|
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                              | Li-fang                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 860867                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1st remainder                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 3000000                                                                                                                                                                                                                                                                        | Ting-fa                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 3000000                                                                                                                                                                                                                                                                        | Chung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 1000000                                                                                                                                                                                                                                                                        | Hsia                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| $1000000 \text{ (Fa)} \times 3 = 3000000 \text{ (Ting-fa) (step 7a)}$<br>$1000000 \text{ (Chieh-suan)} \times 1 \text{ (root fig.)} \times 3 = 3000000$<br>$\text{So-te} \quad \text{(Chung) (step 8)}$<br>Retain the Chieh-suan of step 3 (step 9a) . . .                     | C/7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| $3000000 \text{ (Ting-fa)} \div 10 = 300000 \text{ (Ting-fa}_1\text{)}$<br>(step 7b) . . . . .<br>$3000000 \text{ (Chung)} \div 100 = 30000 \text{ (Chung}_1\text{)} \text{ (step 9b)}$<br>$1000000 \text{ (Hsia)} \div 1000 = 1000 \text{ (Hsia}_1\text{)} \text{ (step 9c)}$ | <table> <tr><th>1</th><th>Li-fang</th></tr> <tr><td>860867</td><td>1st remainder</td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>300000</td><td>Ting-fa<sub>1</sub></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>30000</td><td>Chung<sub>1</sub></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>1000</td><td>Hsia<sub>1</sub></td></tr> </table> | 1 | Li-fang | 860867 | 1st remainder |  |  | 300000  | Ting-fa <sub>1</sub> |  |  | 30000   | Chung <sub>1</sub> |  |  | 1000    | Hsia <sub>1</sub> |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                              | Li-fang                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 860867                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1st remainder                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 300000                                                                                                                                                                                                                                                                         | Ting-fa <sub>1</sub>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 30000                                                                                                                                                                                                                                                                          | Chung <sub>1</sub>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |
| 1000                                                                                                                                                                                                                                                                           | Hsia <sub>1</sub>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |         |        |               |  |  |         |                      |  |  |         |                    |  |  |         |                   |

Βήμα 8: Το *So – te* πολλαπλασιάζεται με το 3. Το γινόμενο τοποθετείτε στην μεσαία σειρά (δεύτερη γραμμή από το τέλος) και ονομάζεται *Chung hang*.

Βήμα 9:

- Πάλι πάρε μια αριθμητική ράβδο στην τελευταία γραμμή την *Hsia hang* (στην ίδια θέση με το *Chieh – suan*) [διατήρησε το *Chieh – suan*]. Αυτό ονομάζεται *Hsia*.
- Μετακίνησε το *Chung* δυο θέσεις (προς τα δεξιά). [Αυτό τώρα ονομάζεται *Chung<sub>1</sub>*]
- Μετακίνησε το *Hsia* τρεις θέσεις (προς τα δεξιά). [Αυτό τώρα ονομάζεται *Hsia<sub>1</sub>*]

Αυτή η διαδικασία ξεκινάει τώρα στην δεύτερη φάση από την αρχή προκειμένου να προσδιορισθεί το δεύτερο ψηφίο της ζητούμενης ρίζας. Η διαδικασία ολοκληρώνεται σε 19 βήματα συνολικά. Ολόκληρη η διαδικασία βρίσκεται στο (Wang & Needham, 1954, pp. 356-364)

### 3.4.3.1 Το πρόβλημα 4.19

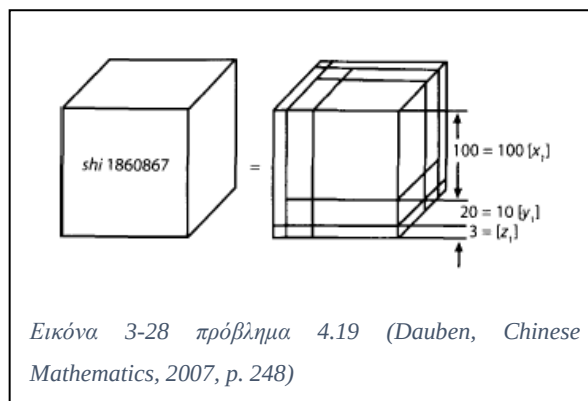
Στο κεφάλαιο 4 του “*Jiu zhang suan shu*” και συγκεκριμένα στο πρόβλημα 4.19 μπορεί κάποιος να δει μια επέκταση της μεθόδου “*kai fang*” για την εύρεση της

τετραγωνικής ρίζας, ώστε να είναι δυνατή η εύρεση της κυβικής ρίζας. Η τεχνική για την εύρεση της κυβικής ρίζας χρησιμοποιείται για την επίλυση εξισώσεων της μορφής  $x^3 = b$  και βασίζεται στο ανάπτυγμα του κύβου αθροίσματος, δηλαδή στο  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ . (Katz & Parshall, 2014, p. 91)

Το πρόβλημα 4.19 επεκτείνει την μέθοδο “*kai fang*” που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών σε μια εντελώς ανάλογη μέθοδο για την εύρεση της κυβικής ρίζας γνωστή ως “*kai li fang*,” ή “άνοιγμα του κύβου”. Ζητάει τον υπολογισμό της πλευράς ενός κύβου, δεδομένου του όγκου του.

«Να βρεθεί η πλευρά του κύβου με όγκο 1,860,867 [κυβικά] *chi*”.

Η μέθοδος για την επίλυσή του ξεκινά με τον υπολογισμό κατά προσέγγιση του μεγαλύτερου ακέραιου  $a$  τέτοιου ώστε  $a^3 < S$  (σε αυτή την περίπτωση  $a = 100$ ), όπου αφαιρώντας τον κύβο του από τον όγκο του δοθέντος κύβου, αφήνει ένα γνόμενο 3 διαστάσεων ίσο με 860,867. Η δεύτερη προσέγγιση της κυβικής ρίζας  $b$ , είναι τέτοια ώστε  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \leq S$  μας δίνει ως  $b = 20$  και έναν υπολειπόμενο γνόμενο τριών



διαστάσεων όγκου 132,867. Το τελικό βήμα καταλήγει στον υπολογισμό της κυβικής ρίζας του 1,860,867 να είναι ακριβώς ίση με το 123. Στο παραπάνω διάγραμμα το  $x_1$  αντιπροσωπεύει το ψηφίο των εκατοντάδων,  $y_1$  το ψηφίο των δεκάδων, και το  $z_1$  το ψηφίο των μονάδων. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 248).

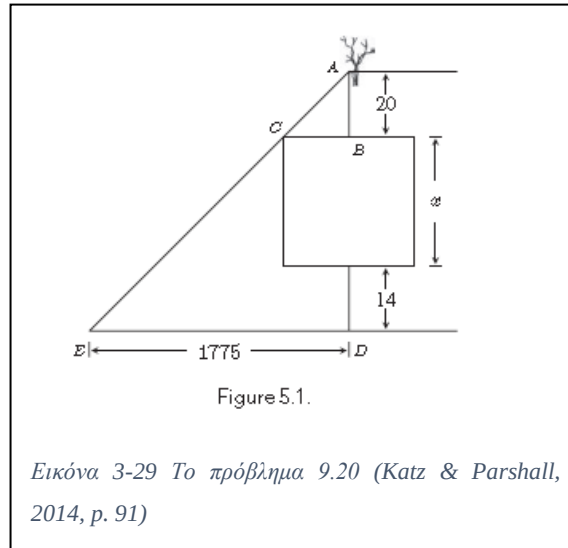
### 3.5 Επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων της μορφής $x^2 + bx = c$

Αν και στο “*Juizhang suanshu*” υπάρχουν αρκετά προβλήματα σχετικά με την εύρεση τετραγωνικής και κυβικής ρίζας, δηλαδή επίλυσης εξισώσεων της μορφής  $x^2 = a$  και  $x^3 = b$ , υπάρχει μόνο ένα πρόβλημα που οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής  $x^2 + bx = c$ , όπου  $b, c$  είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και αυτό είναι συγκεκριμένα το πρόβλημα 9.20 το οποίο βρίσκεται στο κεφάλαιο 9 που σχετίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα ορθογώνια τρίγωνα. (Katz & Parshall, 2014, p. 91)



### 3.5.1 Το πρόβλημα 9.20

“Σε μια τετράγωνη πόλη με άγνωστο μήκος πλευράς, τα ανοίγματα για τις πύλες βρίσκονται στο μέσον, 20 bu από την βόρεια πύλη βρίσκεται ένα δέντρο, το οποίο είναι ορατό όταν κάποιος πηγαίνει 14 bu από την νότια πύλη και μετά 1775 bu προς τα δυτικά. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς της τετράγωνης πόλης;”



Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, ο συγγραφέας λέει:

“Πάρε την απόσταση από την βόρεια πύλη και πολλαπλασίασε την με την απόσταση προς τα δυτικά, δηλαδή  $20 \times 1775 = 35,500$ . Διπλασίασε το γινόμενο και θεώρησέ το shi [71,000]. Πάρε το άθροισμα της απόστασης από την βόρεια και την νότια πύλη ως τον γραμμικό συντελεστή, δηλαδή  $20 + 14 = 34$ . ”

Με άλλα λόγια, εάν γράφαμε το πρόβλημα αυτό με τον σημερινό συμβολισμό τότε το πρόβλημα οδηγεί σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής

$$x^2 + 34x = 71,000$$

Equation 3-14

,όπου το  $x$  είναι το μήκος της άγνωστης πλευράς της τετράγωνης πόλης. 71,000 ήταν ο σταθερός όρος (shi) και 34 ο γραμμικός συντελεστής, δηλαδή ο συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου.

Στην παραπάνω εικόνα είναι εμφανές ότι το πάνω τρίγωνο ABC και το ολόκληρο μεγάλο τρίγωνο AED είναι όμοια. Έτσι ο λόγος  $\frac{20}{\frac{x}{2}} = \frac{(34+x)}{1775}$  μας οδηγεί στην δοθείσα δευτεροβάθμια εξίσωση  $x^2 + 34x = 71,000$ . Σε αυτό το σημείο όμως ο συγγραφέας απλώς

αναφέρει, υπολόγισε την τετραγωνική ρίζα για να βρεις το μήκος της πλευράς της πόλης, χωρίς να αναφέρει την μέθοδο υπολογισμού. Παραθέτει απλά την απάντηση 250 *bu*. Ο Liu και αυτός στα σχόλιά του, αν και εξηγεί πως προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση, δεν καταφέρνει να υποδείξει τον τρόπο λύσης. (Katz & Parshall, 2014, p. 91)

Σήμερα είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι η παραπάνω εξίσωση Equation 3-14 έχει δυο ρίζες. Έχει μια θετική την  $x_1 = 250$ , την οποία γνώριζαν και έδωσαν και οι Κινέζοι και την  $x_2 = -284$ . Σήμερα επειδή το πρόβλημα αναφέρεται σε μήκος αυτή την λύση θα την απορρίπταμε και θα αποδεχόμασταν μόνο την θετική, αλλά θα την αναφέραμε και θα αιτιολογούσαμε την απόρριψη. Οι Κινέζοι αρκούσαν στην πρώτη θετική λύση που θα έβρισκαν.

### 3.6 Μεσαιωνικά Κινεζικά Μαθηματικά

Όταν τα 10 κλασσικά μαθηματικά έργα των Κινεζικών μαθηματικών (παράγραφος 3.1 της παρούσης) είχαν τυπωθεί για πρώτη φορά από την Βόρεια δυναστεία των Song<sup>29</sup>, όπως και στην δυναστεία των Tang<sup>30</sup> σκοπός τους ήταν να χρησιμοποιηθούν για την διδασκαλία των μαθηματικών στην αυτοκρατορική ακαδημία και για τις εθνικές εξετάσεις.

Τα μαθηματικά όμως δεν διδάσκονταν συστηματικά και φαίνεται να μην είχαν κάποια ιδιαίτερη θέση, για αυτό το λόγο δεν υπήρχε σταθερότητα στην θέση τους στο πρόγραμμα σπουδών. Για παράδειγμα το 1084, όταν με αυτοκρατορικό διάταγμα το μάθημα εισήχθη εκ νέου στο πρόγραμμα, τα κτήρια του μαθηματικού ινστιτούτου, τα οποία ήταν σε άσχημη κατάσταση, ανακαινίστηκαν. Σε λιγότερο όμως από 2 χρόνια αποφασίσθηκε να αφαιρεθεί το μάθημα εκ νέου, καθώς μετά την εισαγωγή των μαθηματικών, την στελέχωση της σχολής και το στήσιμο των κρατικών εξετάσεων (στα μαθηματικά), υπήρξε ένα συναίσθημα ότι όλα αυτά ήταν υπερβολικά και δεν βοηθούσαν στην διοίκηση της χώρας.

Στην δυναστεία των Song, τα μαθηματικά καταργήθηκαν και δεν αποκαταστάθηκαν ξανά. Κάτω από αυτές τις συνθήκες δεν υπάρχει λόγος να αναρωτηθεί κανείς, γιατί δεν υπήρχε ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και είναι εύκολο να καταλάβουμε γιατί ακόμα και τα πιο διάσημα έργα του “Ten classics” τελικά χάθηκαν και εκτός από το “*Zhou bi*” ήταν όλα σχεδόν άγνωστα.

---

<sup>29</sup> 4 February 960 - 20 March 1127 μ.Χ ([https://en.wikipedia.org/wiki/Northern\\_Song\\_Dynasty](https://en.wikipedia.org/wiki/Northern_Song_Dynasty))

<sup>30</sup> 618 – 907 μ. Χ ([https://en.wikipedia.org/wiki/Tang\\_dynasty](https://en.wikipedia.org/wiki/Tang_dynasty))

Όταν ο στρατός των Jin, κατέλαβε την πρωτεύουσα της δυναστείας των Βορείων Song το 1127 μ.Χ, τα ξύλινα πλακίδια που χρησιμοποιούνταν για την έκδοση των μαθηματικών, μαζί με πολλά άλλα έργα καταστράφηκαν και η αυτοκρατορική βιβλιοθήκη διαλύθηκε. Σύντομα, η Νότια δυναστεία των Song εδραιώθηκε και οι Μογγόλοι ανέβηκαν στην εξουσία στον Βορρά. Παρά όμως την διαίρεση της χώρας, υπήρξαν 4 μαθηματικοί των οποίων τα έργα έδωσαν νέα πνοή στα Κινεζικά μαθηματικά.

Στον νότο, ο Qin Jiushao έγραψε το έργο του “*Shushu jiuzhang - Mathematical Treatise in Nine Sections*” το 1247 μ.Χ, ενώ στον βορρά ο Li Zhi έγραψε διάφορα έργα τα οποία άσκησαν επιρροή, ανάμεσα σε αυτά και το “*Ceyuan haijing - Sea Mirror of Circle Measurements*” το 1248 μ.Χ και το “*Yigu yanduan -New Steps in Computation*” το 1259 μ.Χ. Το τελευταίο αποτέλεσε μια εισαγωγή κάποιων εννοιών του προηγούμενου.

Τον Qin Jiushao, διαδέχθηκε στον βορρά ο Yang Hui, του οποίου το πρώτο έργο που άσκησε επιρροή ήταν μια προσεκτική μελέτη του “*Juizhang suan shu – The Nine Chapters of Mathematical Art*”, το “*Xiangjie jiuzhang suanfa - A Detailed Analysis of the Mathematical Methods in the Nine Chapters*” το 1261 μ. Χ. Σχεδόν αμέσως μετά, το 1262 μ.Χ , εκτυπώθηκε το έργο του “*Riyong suanfa - Computing Methods for Daily Use*” και κάτι περισσότερο από μια δεκαετία μετά, το 1274—1275 μ. Χ εμφανίστηκε το έργο του “*Yang Hui suanfa -Yang Hui’s Methods of Computation*”. Τέλος, στον βορρά αρκετές δεκαετίες αργότερα, το 1299 μ.Χ, ο Zhu Shijie δημοσίευσε το έργο του “*Suanxue qimeng -Introduction to Mathematical Studies*” και το 1303 μ.Χ το “*Siyuan yujian - Precious Mirror of the Four Elements*”.

Ανάμεσα στο μεγάλα επιτεύγματα αυτών των έργων βρίσκονται εντυπωσιακές μέθοδοι που ασχολούνται με την επίλυση εξισώσεων μεγάλου βαθμού και νέες μέθοδοι επίλυσης του Κινεζικού θεωρήματος των υπολοίπων. Αυτές περιλαμβάνουν την μέθοδο εύρεσης ριζών σε πολυώνυμα - “method of the celestial element”- και την μέθοδο των 4 αγνώστων - “method of four unknowns,” οι οποίες χρησιμοποιούν αλγεβρικές μεθόδους και μεθόδους απαλοιφής των αγνώστων για την επίλυση συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων μεγάλου βαθμού.

Όπως είναι αναμενόμενο σε μια κοινωνία όπου το εμπόριο και επιχειρηματικότητα παίζουν σημαντικό ρόλο, ένας μεγάλος αριθμός μαθηματικών έργων ασχολείται με την αριθμητική του εμπορίου. Τα μαθηματικά συνέχισαν να είναι αναντικατάστατα στην δουλειά των αστρονόμων, των επιθεωρητών της γης και των μηχανικών. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 308-309)

### 3.6.1 Επίλυση δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων

Ο Qin Jiushao (1202–1261) γεννήθηκε στο Sichuan και μεγάλωσε στην πρωτεύουσα της Νότιας δυναστείας των Song, το σημερινό Hangzhou. Αργότερα κατέλαβε κυβερνητικές θέσεις και για κάποιο καιρό υπηρέτησε και ως περιφερειάρχης στην επαρχία του Sichuan. Ήταν μια ταραχώδης περίοδος κατά την οποία μέρος της επαρχίας που ήταν περιφερειάρχης καταλήφθηκε από το στρατό των Μογγόλων. Κάτω από αυτές τις δύσκολες συνθήκες ο Qin Jiushao βρήκε τον χρόνο και την έμπνευση να γράψει το “*Mathematical Treatise in Nine Sections*”. Ίσως στα μαθηματικά να έβρισκε την ηρεμία που χρειαζόταν. Δεδομένης της λατρείας του για τους αριθμούς και την νουμερολογία, όπως αυτή εμφανίζεται στο “*Zhou yi (Yi jing)*”, μάλλον δεν αποτελεί έκπληξη και δεν είναι τυχαίο ότι το έργο του “*Mathematical Threatis*” είναι διαιρεμένο σε 9 τμήματα – κεφάλαια, όπου το καθένα περιέχει 9 προβλήματα.

Το έργο του Qin’s περιλαμβάνει αρκετά προβλήματα τα οποία οδηγούν στην επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού, τρίτου βαθμού (το πρόβλημα 6.6) , τετάρτου βαθμού (τα προβλήματα 3.1, 3.8, 4.6, και ακόμα και ένα δέκατου βαθμού το πρόβλημα 4.5. Οι συντελεστές μπορεί να είναι τόσο θετικοί, όσο και αρνητικοί, ακέραιοι ή δεκαδικοί, αλλά η μέθοδος εύρεσης των ριζών είναι τελείως γενική. Για την επεξήγηση των λύσεων ο Qin Jiushao συχνά δίνει διαγράμματα, όπου αναφέρει λεπτομερώς τον χειρισμό των αριθμητικών ράβδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων και την εύρεση των ριζών βήμα – βήμα. Το πρόβλημα Problem 3.8, για παράδειγμα, περιέχει 21 διαγράμματα για να επιδείξει την λύση. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 308-310)

#### 3.6.1.1 Το τρίγωνο του Pascal

Στα μέσα του 11<sup>ου</sup> αιώνα, ο Jia Xian κατάλαβε ότι οι αριθμοί οι οποίοι αργότερα στην Δύση θα ονομάζονταν το τρίγωνο του Pascal, μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να γενικεύσουν τις μεθόδους εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας όπως αυτές παρουσιάζονταν στο “*Jiuzhang Shuan shu*”. Θεωρούσε πως αυτή η ιδέα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να επιλύσει πολυωνυμικές εξισώσεις οποιουδήποτε βαθμού. Το έργο του Jia έχει χαθεί, αλλά μια βελτιωμένη έκδοση της μεθόδου του για την επίλυση εξισώσεων παρουσιάζεται στο *Shushu jiuzhang* (or *Mathematical Treatise in Nine Sections*) (1247) του Qin Jiushao. Το πρόβλημα 3.8 που ακολουθεί στην παράγραφο 3.6.1.3 χρησιμοποιεί αυτή την μέθοδο για την επίλυση της διτετράγωνης εξίσωσης που προκύπτει. Ας δούμε ποια ήταν η μέθοδος αυτή:

“Δοθείσας μια πολυωνυμικής εξίσωσης  $p(x) = 0$ , το πρώτο βήμα, όπως και στην περίπτωση που έπρεπε να υπολογισθεί η τετραγωνική ρίζα, ήταν να προσδιορισθεί το πλήθος των ψηφίων του ακέραιου μέρους της απάντησης (έστω ότι τα ψηφία είναι  $n+1$  στο πλήθος) και να βρεθεί το πρώτο ψηφίο. “

Για παράδειγμα ο Qin σε μια άλλη παρόμοια εξίσωση με αυτή του προβλήματος 3.8 την εξίσωση:

$$-x^4 + 763,200x^2 - 40,642,560,000 = 0$$

*Equation 3-15*

προσδιόρισε ότι η απάντηση θα ήταν ένα αριθμός 3 ψηφίος, ο οποίος θα ξεκινούσε από 8.

Αυτός ο προσδιορισμός έχει προκύψει μάλλον μέσα από ένα συνδυασμό εμπειρίας και δοκιμής (a combination of experience and trial). Εφόσον το πρώτο ψηφίο  $a$  της απάντησης προσδιορίστηκε, τότε ο Qin θέτει  $x = 10^n a + y$  και αντικαθιστά αυτή την τιμή στην εξίσωση, όπου προκύπτει μια νέα εξίσωση ως προς  $y$ , η λύση της οποίας έχει ένα μόνο λιγότερο ψηφίο από την αρχική απάντηση. Σε αυτή την περίπτωση θέτοντας  $x = 800 + y$  και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, τότε προκύπτει η εξίσωση  $-y^4 - 3200y^3 - 3,076,800y^2 - 826,880,000y + 38,205,440,000 = 0$ . Το επόμενο βήμα είναι να προσπαθήσει να προσδιορίσει το πρώτο ψηφίο του  $y$  και να επαναλάβει την ως άνω διαδικασία.

Εφόσον οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν δεκαδικό σύστημα, θα μπορούσαν να εφαρμόσουν την παραπάνω διαδικασία όσο συχνά χρειάζεται για να βρουν την ρίζα της εξίσωσης στην επιθυμητή ακρίβεια. Παρόλα αυτά συχνά, μόλις προσδιόριζαν το ακέραιο μέρος, εξέφραζαν το υπόλοιπο ως κλάσμα.

Οι Κινέζοι μαθηματικοί εκείνης της εποχής δεν ήταν σε θέση να αντικαταστήσουν το  $x = 10^n a + y$  στην αρχική εξίσωση, αλλά έστηναν το πρόβλημα στον αριθμητικό πίνακα, όπου κάθε γραμμή συμβόλιζε και μια συγκεκριμένη δύναμη για την άγνωστη ποσότητα. Τα αποτελέσματα των αντικαταστάσεων προέρχονταν από αυτό που σήμερα αποκαλείται επαναλαμβανόμενη συνθετική διαίρεση του αρχικού πολυωνύμου με το  $x - 10^n a = y$ .

Εφόσον οι συντελεστές της εξίσωσης ως προς  $y$  είχαν προσδιορισθεί, τότε η διαδικασία ξεκινούσε εκ νέου με τον προσδιορισμό του πρώτου ψηφίου  $b$  του  $y$ . Παρόλο που οι αριθμοί από το τρίγωνο του Pascal είναι εμφανής στην διαδικασία λόγω της επαναλαμβανόμενης επιλογής διωνύμων ο Qin δεν αναφέρεται στο τρίγωνο ο ίδιος, έλυνε όμως 26 διαφορετικά προβλήματα στο έργο του *Nine Sections* με αυτό τον τρόπο και αρκετοί

σύγχρονοι του χρησιμοποίησαν την ίδια μέθοδο για την επίλυση παρόμοιων προβλημάτων. Είναι εμφανές πως τόσο αυτός, όσο και η ευρύτερη μαθηματική κοινότητα της εποχής είχαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων προβλημάτων.

Υπάρχουν κάποια στοιχεία αυτών των λύσεων τα οποία και αξίζει να αναφερθούν περαιτέρω. Πρώτον, για τον Qin, οι εξισώσεις πηγάζουν από γεωμετρικά προβλήματα ή άλλα προβλήματα τα οποία επιδέχονται μοναδική λύση. Η λύση λοιπόν αυτή ήταν και αυτή που δίνεται στο κείμενο, ακόμα και όταν υπήρχαν περισσότερες από μια θετικές ρίζες. Για παράδειγμα ο Qin, δίνει ως λύση για την παραπάνω πολυωνυμική εξίσωση το 840, αν και το 240 αποτελεί επίσης λύση. Όσο για τους αρνητικούς αριθμούς αν και οι Κινέζοι τους γνώριζαν πολύ καλά και τους χρησιμοποιούσαν κατά την διαδικασία των υπολογισμών, αυτοί δεν εμφανίζονταν ποτέ ως τελική απάντηση, ρίζα μιας εξίσωσης.

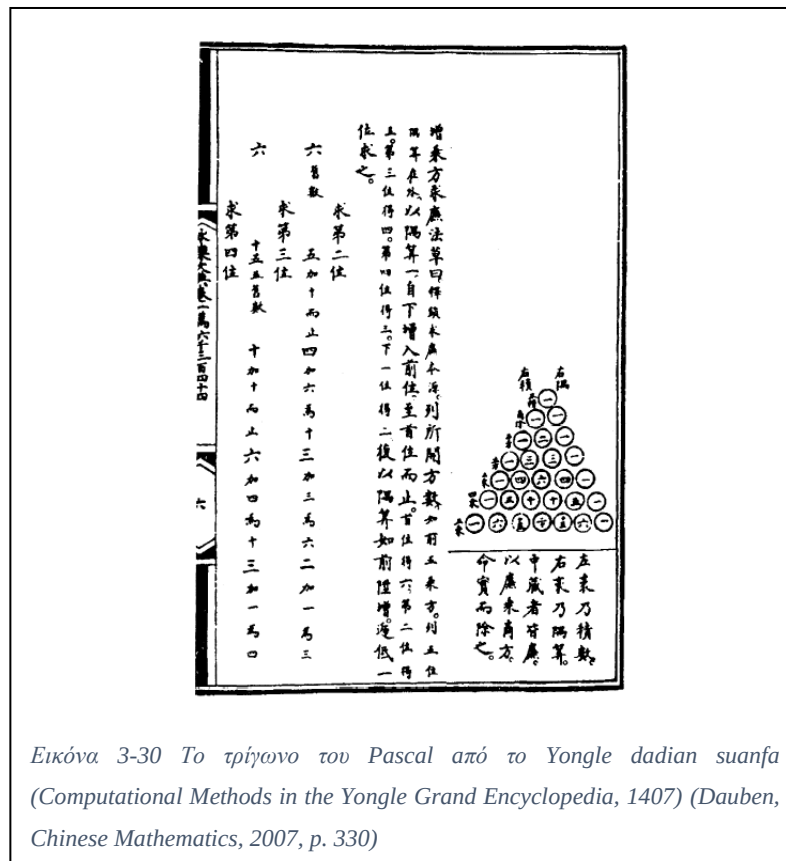
Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι Κινέζοι δεν βρήκαν ποτέ κάποιο τύπο για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, τόσο αλγεβρικά, όσο και γεωμετρικά. Αντί αυτού, είχαν γενικεύσει την μεθοδό τους για την εύρεση τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού σε μια σύνθετη μέθοδο που τους επέτρεπε να βρίσκουν προσεγγιστικά λύσεις – ρίζες οποιασδήποτε πολυωνυμικής εξίσωσης. (Katz & Parshall, 2014, pp. 93-94)

#### 3.6.1.2 *Yang Hui και το τρίγωνο του Pascal*

Για τον *Yang Hui* ελάχιστα πράγματα γνωρίζουμε για την ζωή του. Γεννήθηκε και μεγάλωσε στην περιοχή που σήμερα ονομάζεται Hangzhou και έζησε περίπου το 1238-1298 μ.Χ)<sup>31</sup>. Στα μαθηματικά κύριο έργο του ήταν το μάζεμα πολλών χαμένων μαθηματικών έργων, το οποίο πραγματοποιήθηκε κατά την έρευνά του για υπολογιστικές μεθόδους, όπως η μέθοδος εξαγωγής ριζών με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς. Κύριο ενδιαφέρον του ήταν η εύρεση απλοποιημένων μεθόδων για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση. Ανάμεσα στο βασικά χαρακτηριστικά του πιο γνωστού και χαρακτηριστικού του έργου “*A Detailed Analysis of the Mathematical Methods in the Nine Chapters*” είναι ένα διάγραμμα που δίνει, το οποίο είναι ισοδύναμο με αυτό που σήμερα αποκαλούμε το τρίγωνο του Pascal. Το χαρακτηρίζει ως “την πηγή της μεθόδου για την εύρεση ριζών”. Ο *Yang Hui* λέει πως το διάγραμμα οφείλεται στον *Jia Xian* και εμφανίζεται στο έργο του “*The Key to Mathematics - Shi suo suan shu*”, το οποίο μας επιτρέπει να τοποθετήσουμε χρονικά την μέθοδο στον 11<sup>ο</sup> αιώνα.

---

<sup>31</sup> Περισσότερες πληροφορίες για τον *Yang Hui* μπορούμε να δούμε [εδώ](#).



Εικόνα 3-30 Το τρίγωνο του Pascal από το Yongle dadian suanfa (Computational Methods in the Yongle Grand Encyclopedia, 1407) (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 330)

Στο παραπάνω διάγραμμα, κάθε γραμμή του διαγράμματος αναπαριστά τους συντελεστές του αναπτύγματος  $(a + b)^n$ . Είναι πολύ εύκολο κάποιος να διακρίνει τους συντελεστές του  $(a + b)^4$ . Για παράδειγμα το  $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ , διακρίνεται στην Πέμπτη γραμμή του αριθμητικού τριγώνου ως 1 4 6 4 1.

Υπάρχει επίσης ένα διάγραμμα το οποίο και αυτό μοιάζει πολύ με το προηγούμενο στο έργο του Zhu Shijie <sup>32</sup> (1260-1320 μ.Χ) “Precious Mirror of the Four Elements”, το οποίο αναπτύσσει το αριθμητικό τρίγωνο μέχρι και το  $(a + b)^8$ . Το διάγραμμα αυτό δίνεται με τον τίτλο “η μέθοδος των 7 φορών - seven times method (qi cheng fang)”, αφού όταν πολλαπλασιαστεί το  $(a + b)$  με τον εαυτό του 7 φορές μας δίνει την τελευταία γραμμή του διαγράμματος. Επειδή η μέθοδος εξαγωγής ρίζας με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς εύκολα μας οδηγεί στους συντελεστές του αναπτύγματος  $(a + b)^n$  για οποιοδήποτε n, συμπεραίνουμε ότι οι Κινέζοι μαθηματικοί της εποχής γνώριζαν πώς να χρησιμοποιήσουν αυτούς τους συντελεστές για να προσδιορίσουν την ρίζα οποιασδήποτε τάξης. Μάλιστα, μπορούν να το χρησιμοποιήσουν “το διωνυμικό τρίγωνο” χωρίς να χρειάζεται να το

<sup>32</sup> [http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhu\\_Shijie.html](http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhu_Shijie.html)

κατασκευάσουν. Αυτό οφείλεται στον Yang Hui, ο οποίος βρήκε τον τρόπο να απλουστεύσει την διαδικασία με την πρόσθεση των στοιχείων του αριθμητικού τριγώνου, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα να τα καταγράψεις εκ των προτέρων.

Ανάμεσα στα προβλήματα του “*Detailed Analysis of the Mathematical Methods in the Nine Chapters*” υπάρχει και ένα πρόβλημα για την εύρεση της ρίζας τετάρτου βαθμού του 1.336.336. Αυτό γίνεται αντιληπτό ως η ανάγκη εύρεσης της ρίζας της εξίσωσης  $x^4 = 1.336.336$ . Η μόνη θετική πραγματική ρίζα που προκύπτει είναι η  $x=34$ .

Αρχικά οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνταν από τους Κινέζους μαθηματικούς για την επίλυση εξισώσεων απαιτούσαν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου να είναι ίσος με την μονάδα και οι υπόλοιποι συντελεστές θετικοί. Ο πρώτος ο οποίος φαίνεται να ξεπέρασε αυτό το εμπόδιο είναι ο Liu Yi στα τέλη του 12<sup>ου</sup> με αρχές του 13<sup>ου</sup> αιώνα, του οποίου το έργο “*Discussion on the Old Sources*”, που σχετίζεται με αυτό το πεδίο, δυστυχώς έχει χαθεί, αλλά κάποια από τα προβλήματα και τις μεθόδους του περιλαμβάνονται στο έργο του “*Practical Rules of Arithmetic for Surveying*”. (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, pp. 329-331)

### 3.6.1.3 Το πρόβλημα 3.8 από το “*Shushu jiuzhang - Mathematical Treatise in Nine Sections*” του Qin Jiushao – διτετράγωνη εξίσωση.

Αυτό το πρόβλημα ζητάει να υπολογισθεί το εμβαδόν ενός κυκλικού χωρίου (annulus), όπου η διάμετρος του εξωτερικού κύκλου είναι ίση με  $\sqrt{90}$  και του εσωτερικού κύκλου 8. Ο Qin κατασκευάζει την παρακάτω εξίσωση για την ζητούμενη περιοχή  $x$ ,

$$-x^4 + 15245x^2 - 6262506.25 = 0 \quad (1)$$

Equation 3-16

όπου  $C = \sqrt{10D^2}$  και  $A = \sqrt{\frac{D^2C^2}{16}}$  για να δείξει την σχέση που συνδέει την περιφέρεια του κύκλου  $C$ , την διάμετρο  $D$  και το εμβαδόν  $A$ .

Εδώ αξίζει να αναφερθεί ότι ο πρώτος τύπος δείχνει πως ο Qin χρησιμοποιεί την τιμή  $\sqrt{10}$  για το  $\pi$ , αφού όπως γνωρίζουμε σήμερα ο τύπος της περιφέρειας του κύκλου είναι ίσος με  $L = \pi d$ , όπου  $d$  η διάμετρος του κύκλου. Άρα θεωρεί ότι  $\pi = \sqrt{10}$ .

Τα διαγράμματα που δίνει ο Qin προκειμένου να επιλύσει την παραπάνω εξίσωση φαίνονται στις παρακάτω εικόνες.

Στα παρακάτω διαγράμματα έχουμε ότι:



$Q$  είναι η ρίζα (*Shang*),  $a$  ο σταθερός όρος,  $b$  ο συντελεστής του  $x$ ,  $c$  ο συντελεστής του  $x^2$ ,  $d$  ο συντελεστής του  $x^3$  και  $e$  ο συντελεστής του  $x^4$ .

| Diagram 1                                                                                          |                                                                    | Diagram 2                          |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------|--|
| $Q$                                                                                                | Quotient (root), called <i>shang</i>                               | $Q$                                |  |
| 0                                                                                                  | Position reserved for root                                         | 00                                 |  |
| $a$                                                                                                | Constant term ( <i>shi</i> )                                       | $a$                                |  |
| 626250625                                                                                          |                                                                    | 626250625                          |  |
| 0                                                                                                  | Coefficient of $x$ ( <i>fang</i> )                                 | 0                                  |  |
| $b$                                                                                                |                                                                    | $b$                                |  |
| 15245                                                                                              | Positive ( <i>cong</i> ) coefficient of $x^2$ (upper <i>lian</i> ) | 15245                              |  |
| $c$                                                                                                |                                                                    | $c$                                |  |
| 0                                                                                                  | Coefficient of $x^3$ (lower <i>lian</i> )                          | 0                                  |  |
| $d$                                                                                                |                                                                    | $d$                                |  |
| 1                                                                                                  | Negative coefficient of $x^4$ ( <i>yi yu</i> )                     | 1                                  |  |
| $e$                                                                                                |                                                                    | $e$                                |  |
| The <i>cong shang lian</i> is shifted by two ranks.<br>The <i>yi yu</i> is shifted by three ranks. |                                                                    | Then set 20 <i>bu</i> as quotient. |  |

Εικόνα 3-31 πρόβλημα 3.8 βήμα 1 (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 319)

Στο διάγραμμα 2 βλέπουμε ότι το  $c$  έχει μετατοπισθεί κατά 2 θέσεις, το  $e$  κατά 4 στήλες και το  $Q$  κατά 1 στήλη,

| Diagram 3                             | Diagram 4                                                   | Diagram 5                                                                                                      | Diagram 6                                                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $Q$                                   | $Q$                                                         | $Q$                                                                                                            | $Q$                                                                           |
| 20                                    | 20                                                          | 20                                                                                                             | 20                                                                            |
| $a$                                   | 626250625                                                   | 626250625                                                                                                      | 626250625                                                                     |
| 626250625                             | $a$                                                         | $a$                                                                                                            | $a$                                                                           |
| 0                                     | 0                                                           | 0                                                                                                              | 0                                                                             |
| $b$                                   | $b$                                                         | $b$                                                                                                            | $b$                                                                           |
| 15245                                 | 15245 $c$                                                   | 15245 $c$                                                                                                      | 14845                                                                         |
| $c$                                   |                                                             | 400 $c'$                                                                                                       | $c$                                                                           |
| 0                                     | 20                                                          | 20                                                                                                             | 20                                                                            |
| $d$                                   | $d$                                                         | $d$                                                                                                            | $d$                                                                           |
| 1                                     | 1                                                           | 1                                                                                                              | 1                                                                             |
| $e$                                   | $e$                                                         | $e$                                                                                                            | $e$                                                                           |
| Multiply $Q$ by $e$ .<br>Add to $d$ . | The lower <i>lian</i> produce<br>the negative <i>lian</i> . | The positive and<br>negative <i>lian</i> destroying<br>one another, obtain<br>the positive upper <i>lian</i> . | Multiply the <i>fang</i> using<br>the quotient and the<br>upper <i>lian</i> . |

Εικόνα 3-32 πρόβλημα 3.8 βήμα 2 (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 320)

Το πρώτο αποτέλεσμα της ρίζας είναι το 20. Πολλαπλασίασε αυτόν τον αριθμό με το e και πρόσθεσε το στο d. Μετά πολλαπλασίασε το d με το Q και πάρε το c' (negative lian). Αφαίρεσε από το c και πάρε το positive upper lian. Πολλαπλασίασε το fang (b) με το Q και μετά με το upper lian c.

| Diagram 7                                                                    | Diagram 8                                                                  | Diagram 9                                                              | Diagram 10                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Q                                                                            | Q                                                                          | Q                                                                      | Q                                                                  |
| 20                                                                           | 20                                                                         | 20                                                                     | 20                                                                 |
| 626250625                                                                    | 32450625                                                                   | 32450625                                                               | 32450625                                                           |
| a                                                                            | r                                                                          | r                                                                      | r                                                                  |
| 296900                                                                       | 296900                                                                     | 296900                                                                 | 296900                                                             |
| a'                                                                           | b                                                                          | b                                                                      | b                                                                  |
| 14845                                                                        | 14845 c                                                                    | 14845 c                                                                | 14845c                                                             |
| c                                                                            |                                                                            |                                                                        | 800 c'                                                             |
| 20                                                                           | 20                                                                         | 40                                                                     | 40                                                                 |
| d                                                                            | d                                                                          | d                                                                      | d                                                                  |
| 1                                                                            | 1                                                                          | 1                                                                      | 1                                                                  |
| e                                                                            | e                                                                          | e                                                                      | e                                                                  |
| Take the fang fa in order to call the quotient to reduce the dividend (shi). | Then multiply the quotient by the yu and add the result to the lower lian. | Multiply the negative upper lian with the lower lian and the quotient. | The negative upper lian and the positive lian destroy one another. |

*Εικόνα 3-33 πρόβλημα 3.8 βήμα 3 (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 320)*

Το αποτέλεσμα είναι το α', θετικό. Πάρε το fang fa (b) για να καλέσεις το Q και να μειώσεις το διαιρετέο (shi), δηλαδή στο αρνητικό a, πρόσθεσε το θετικό α'. Το υπόλοιπό είναι ένας θετικός σταθερός όρος που καλείται huan-ku (r). Πολλαπλασίασε το Q με το e και πρόσθεσε στον d (πρώτη μεταμόρφωση). Πολλαπλασίασε με το lower lian (d) και το Q. Μετέφερε το πάνω από το (c) Πρόσθεσε τον αρνητικό c' με το c.

| Diagram 11                                        | Diagram 12                                                                                  | Diagram 13                                                 |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| Q                                                 | Q                                                                                           | Q                                                          |
| 20                                                | 20                                                                                          | 20                                                         |
| 32450625                                          | 32450625                                                                                    | 32450625                                                   |
| r                                                 | r                                                                                           | r                                                          |
| 296900                                            | 577800                                                                                      | 577800                                                     |
| b                                                 | b                                                                                           | b                                                          |
| 14045                                             | 14045                                                                                       | 14045                                                      |
| c                                                 | c                                                                                           | c                                                          |
| 40                                                | 40                                                                                          | 60                                                         |
| d                                                 | d                                                                                           | d                                                          |
| 1                                                 | 1                                                                                           | 1                                                          |
| e                                                 | e                                                                                           | e                                                          |
| The quotient and the upper lian produce the fang. | The quotient and the yu are multiplied by one another and incorporated into the lower lian. | The quotient and the lower lian produce the negative lian. |

*Εικόνα 3-34 πρόβλημα 3.8 βήμα 4 (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 321)*

Το πηλίκo Q και το upper lian c και πρόσθεσε στο fang b. Πρόσθεσε το γινόμενο του Q και του e στο d. (δεύτερη μεταμόρφωση). Πολλαπλασίασε το Q με το d και δημιούργησε το negative lian (c').

| Diagram 14                                                                 | Diagram 15                                                                                  | Diagram 16                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Q<br>20                                                                    | Q<br>20                                                                                     | Q<br>20                                                                                                              |
| 32450625<br>r                                                              | 32450625<br>r                                                                               | 32450625<br>r                                                                                                        |
| 577800<br>b                                                                | 577800<br>b                                                                                 | 577800<br>b                                                                                                          |
| 14045 c<br>1200 c'                                                         | 12845<br>c                                                                                  | 12845<br>c                                                                                                           |
| 60<br>d                                                                    | 60<br>d                                                                                     | 80<br>d                                                                                                              |
| 1<br>e                                                                     | 1<br>e                                                                                      | 1<br>e                                                                                                               |
| The negative <i>lian</i> and the positive <i>lian</i> destroy one another. | The quotient and the <i>yu</i> are multiplied and incorporated into the lower <i>lian</i> . | The <i>fang</i> moves back a rank; the upper <i>lian</i> two ranks; the lower <i>lian</i> three; the <i>yu</i> four. |

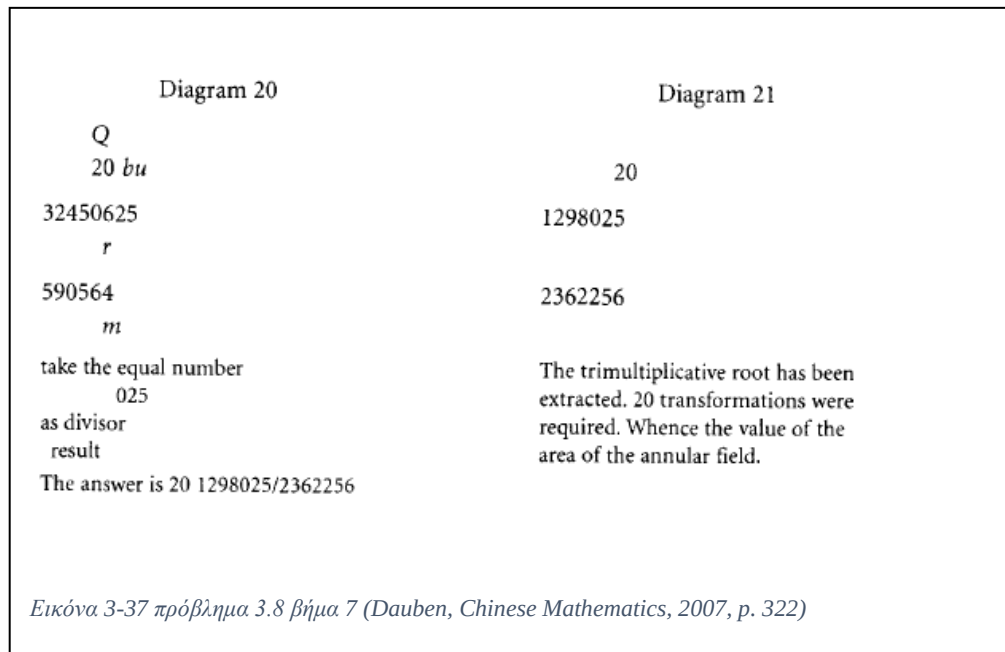
Εικόνα 3-35 πρόβλημα 3.8 βήμα 5 (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 321)

Πρόσθεσε το c με το c'. Πολλαπλασίασε το Q με το e και πρόσθεσε το d (τρίτη μεταμόρφωση). Μετέφερε το fang (b) μια στήλη πίσω, το upper lian (c) δυο στήλες πίσω, το lower lian (d) τρεις στήλες και το yu (e) τέσσερις – τέταρτη μεταμόρφωση.

| Diagram 17                                                                                                                                               | Diagram 18                                                                                                                                        | Diagram 19                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Q<br>20                                                                                                                                                  | Q<br>20 <i>bu</i>                                                                                                                                 | Q<br>20 <i>bu</i>                         |
| 32450625<br>r                                                                                                                                            | 32450625<br>r                                                                                                                                     | 32450625<br>r                             |
| 577800<br>b                                                                                                                                              | 590645 c, b                                                                                                                                       | 590564<br>m                               |
| 12845<br>c                                                                                                                                               | 0                                                                                                                                                 | 0                                         |
| 80<br>d                                                                                                                                                  | 81 e, d                                                                                                                                           | 0                                         |
| 1<br>e                                                                                                                                                   | 0                                                                                                                                                 | 0                                         |
| No quotient (the second figure of the root is zero). Incorporate the upper <i>lian</i> into the <i>fang</i> , the <i>yu</i> into the lower <i>lian</i> . | Add the negative <i>yu</i> to the negative <i>lian</i> and subtract the result from the positive <i>lian</i> and a <i>fang</i> , giving "mother." | Find the equal and simplify the fraction. |

Εικόνα 3-36 πρόβλημα 3.8 βήμα 6 (Dauben, Chinese Mathematics, 2007, p. 322)

Δεν υπάρχει πηλίκο (το δεύτερο ψηφίο της ζητούμενης ρίζας είναι 0). Ένωσε το c με το b και το e με το d. Πρόσθεσε το αρνητικό yu με το αρνητικό lian και αφάιρεςέ το αποτέλεσμα από το θετικό lian και το fang, παίρνοντας την “μαμά”. Βρες το ίσο και απλοποίησε το κλάσμα.



Η απάντηση είναι  $20 \frac{1298025}{2362256}$ . Η τρίτη ρίζα βρέθηκε. 20 μετασχηματισμοί χρειάστηκαν. Από αυτή είναι η τιμή του εμβαδού της δακτυλιοειδούς περιοχής.

Οι υπολογισμοί στα παραπάνω διαγράμματα φαίνονται πολύπλοκοι. Στο αριθμητικό – υπολογιστικό πίνακα οι πράξεις όμως αυτές εκτελούνται εύκολα και γρήγορα. Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές της εξίσωσης τοποθετούνται κάθετα κατά αύξουσα σειρά και επίσης τοποθετούνται θεσιακά σύμφωνα με το δεκαδικό σύστημα.

Πως μπορούμε να μεταφράσουμε την παραπάνω διαδικασία στο σημερινό συμβολισμό; Η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$-x^4 + 15245x^2 - 6262506.25 = 0 \quad (1)$$

*Equation 3-17*

Στα διαγράμματα 1 και 2 ο Qin Jiushao καθορίζει το πλήθος των ψηφίων της λύσης (δηλαδή του ακέραιου μέρους της), εκτελώντας ουσιαστικά πολλαπλασιασμούς με δυνάμεις του 10 και καταλήγει ότι η λύση έχει 2 ψηφία.

Στην συνέχεια με την μέθοδο της δοκιμής και του λάθους, βρίσκει το πρώτο ψηφίο της λύσης, δηλαδή αυτό των δεκάδων ότι είναι το 2. Άρα η λύση είναι της μορφής  $x=10p$ .

Έτσι μπορούμε να θέσουμε  $x = 20 + y$  ή  $y = 20 - x$ .

Η (1) γίνεται:  $-(10p)^4 + 15245(10p)^2 - -6262506.25 = 0$  ή

$$-1 \cdot 10^4 p^4 + 15245 \cdot 10^2 p^2 - -6262506.25 = 0$$

Δηλαδή στον υπολογιστικό πίνακα θα είχαμε:

|             |   |        |
|-------------|---|--------|
| 20          | Q |        |
| -6262506.25 | a |        |
| 00          | b | $10^1$ |
| 1524500     | c | $10^2$ |
| 0000        | d | $10^3$ |
| - 10000     | e | $10^4$ |

Table 3-1

Τα μηδενικά στα προηγούμενα διαγράμματα καθορίζονται από την θέση του αριθμού στον υπολογιστικό πίνακα.

Η επίλυση της εξίσωσης σύμφωνα με τον σύγχρονο τρόπο γραφής είναι ως εξής:

Πρώτη εκτέλεση:

|    |       |       |       |        |             |     |
|----|-------|-------|-------|--------|-------------|-----|
| Q  | e     | d     | c     | b      | a           | (7) |
|    |       | -20   | -400  | 296900 | 5938000     |     |
| 20 | -1    | 0     | 15245 | 0      | -6262506.25 |     |
|    | -1    | -20   | 14845 | 296900 | -324506.25  |     |
|    |       | (4)   | (5)   | (6)    | (8)         |     |
|    | $x^3$ | $x^2$ | $x$   | C      | R           |     |

Table 3-2

Στην 2<sup>η</sup> γραμμή είναι οι συντελεστές των δυνάμεων του  $x$  της αρχικής εξίσωσης. Το C είναι ο σταθερός όρος του πολυνόμου που προκύπτει και το R είναι το υπόλοιπο. Οι αριθμοί στις παρενθέσεις δείχνουν την αντιστοιχία με τα διαγράμματα. Οι προτάσεις σε κάθε διάγραμμα υποδεικνύουν ακριβώς αυτούς τους χειρισμούς που παριστάνονται εδώ, έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$(x - 20)(-x^3 - 20x^2 + 14845x + 296900) - 324506.25 = 0$$

Equation 3-18

Θέτοντας  $x = 20 + y$  ή  $y = x - 20$  έχουμε:

$$y(-x^3 - 20x^2 + 14845x + 296900) - 324506.25 = 0$$

Equation 3-19

Τώρα διαιρούμε το πηλίκο με το  $y = x - 20$  και έχουμε:

Δεύτερη εκτέλεση:

|    |       |     |       |        |
|----|-------|-----|-------|--------|
| Q  | e     | d   | c     | b (12) |
|    |       | -20 | -800  | 280900 |
| 20 | -1    | -20 | 14845 | 296900 |
|    | -1    | -40 | 14045 | 577800 |
|    |       | (9) | (11)  | (13)   |
|    | $x^2$ | $x$ | $C$   | $R$    |

Table 3-3

Η εξίσωση γίνεται:

$$(x - 20)(-x^2 - 40x + 14045) + 577800 = 0$$

Equation 3-20

Θέτοντας  $x = 20 + y$  ή  $y = x - 20$  έχουμε:

$$y(-x^2 - 40x^2 + 14045) + 577800 = 0$$

Equation 3-21

Τώρα διαιρούμε το ξανά με το  $y = x - 20$  και έχουμε:

Τρίτη εκτέλεση:

|    |     |      |       |
|----|-----|------|-------|
| Q  | e   | d    | c     |
|    |     | -20  | -1200 |
| 20 | -1  | -40  | 14045 |
|    | -1  | -60  | 12845 |
|    |     | (14) | (15)  |
|    | $x$ | $C$  | $R$   |

Table 3-4

Η εξίσωση γίνεται:

$$(x - 20)(-x - 60) + 12845 = 0$$

Equation 3-22

Θέτοντας  $x = 20 + y$  ή  $y = x - 20$  έχουμε:

$$y(-x - 60) + 12845 = 0$$

Equation 3-23

Τώρα διαιρούμε το ξανά με το  $y = x - 20$  και έχουμε:

Τέταρτη εκτέλεση:

|    |    |      |
|----|----|------|
| Q  | e  | d    |
|    |    | -20  |
|    | -1 | -60  |
|    | -1 | -80  |
| 20 |    | (16) |
|    | C  | R    |

Table 3-5

Έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$(x - 20)\{(x - 20)\{(x - 20)[(x - 20)(-1) - 80] + 12845\} + 577800\} - 324506.25 = 0$$

Equation 3-24

ή εάν θέσουμε όπως και προηγουμένως  $y = x - 20$  έχουμε:

$$y\{y\{y[y(-1) - 80] + 12845\} + 577800\} - 324506.25 = 0$$

Equation 3-25

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε :

$$(x - 20)\{(x - 20)\{(x - 20)[(x - 20)(-1) - 80] + 12845\} + 577800\} - 324506.25 = 0 \Leftrightarrow -y^4 - 80y^3 + 12545y^2 + 577800y - 324506.25 = 0$$

Equation 3-26

Μετά βρίσκει ότι το ψηφίο των μονάδων της ρίζας, με την μέθοδο της δοκιμής δηλαδή και του λάθους) είναι 0, άρα έχει τελειώσει τους υπολογισμούς.

Παρατηρούμε εδώ αυτό που είχε αναφερθεί και παραπάνω. Παρόλο που θα μπορούσαν να συνεχίσουν την διαδικασία σε όποιο βαθμό ακρίβειας επιθυμούσαν στο δεκαδικό μέρος, μόλις προσδιόρισαν το ακέραιο μέρος της λύσης, το υπόλοιπο το εξέφρασαν έως κλάσμα. Δίνουν λοιπόν ως μοναδική λύση της εξίσωσης

$$-x^4 + 15245x^2 - 6262506.25 = 0, \text{την } x = 20 \frac{1298025}{2362256}.$$

Σήμερα γνωρίζουμε ότι οι λύσεις τις παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$x_1 = 77\sqrt{\frac{5}{2}}, x_2 = -77\sqrt{\frac{5}{2}}, x_3 = 13\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ και } x_4 = -13\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Η μόνη λύση που δίνεται στο παραπάνω πρόβλημα από τους Κινέζους είναι η  $x_3$ . Η μια από τις 2 θετικές ρίζες του πολωνύμου και θεωρούσαν ότι είναι και η μοναδική. Δεν ήταν

σε θέση να κατανοήσουν ότι μπορεί να υπάρχουν και άλλες ρίζες και παρά την άνεση που είχαν στους υπολογισμούς με αρνητικούς αριθμούς, οι αρνητικοί αριθμοί δεν μπορούσαν να είναι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Τα προβλήματά από τα οποία προκύπταν ήταν συνήθως γεωμετρικά ή προβλήματα της καθημερινότητας τα οποία “απαιτούσαν” την ύπαρξη μοναδικής ρίζας και μάλιστα θετικής.

Ο *Qin Juishao*, λύνει συνολικά 26 προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση εξισώσεων 2<sup>ου</sup>, 3<sup>ου</sup>, 4<sup>ου</sup> και 5<sup>ου</sup> βαθμού με την παραπάνω μέθοδο. Η μέθοδος αυτή όπως παρατηρούμε μοιάζει πολύ με την μέθοδο του *Horner* και μπορεί εύκολα να γενικευτεί για τις πολυωνυμικές εξισώσεις οποιουδήποτε βαθμού.

Η βασική αρχή που διέπει τις μεθόδους του *Qin Juishao* και του *Horner* είναι η ίδια, δηλαδή η εκτέλεση προσθέσεων ή αφαιρέσεων με τέτοιο τρόπο, ώστε να χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα που έχουμε ήδη βρει.

Σε τι όμως διαφέρουν οι δυο μέθοδοι; Ο *Horner* κατέληξε σε αυτή τη μέθοδο μέσα από την διωνυμική θεωρία, όπως αυτή εκφράστηκε αλγεβρικά. Οι Κινέζοι μαθηματικοί έφτασαν σε αυτή γεωμετρικά. Η μέθοδος του *Horner* γενικεύτηκε πλήρως, όπως είναι και ήταν και αναμενόμενο να γίνει τον 19<sup>ο</sup> αιώνα, ενώ την εποχή των Κινέζων μαθηματικών της δυναστείας των Han, 2000 χρόνια πριν από τον *Horner* ήταν απλά μια εφαρμογή μια παρόμοιας μεθόδου, στην οποία και έφτασαν εμπειρικά. Στην εφαρμογή δηλαδή της μεθόδου της εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας και δευτεροβάθμιων εξισώσεων με θετικούς συντελεστές και με θετικό σταθερό όρο από την δεξιά πλευρά του ίσον, δηλαδή σε ένα περιορισμένο πεδίο εφαρμογής. Όπως γνωρίζουμε την εποχή της Δυναστείας των Sung δηλαδή τον 12<sup>ο</sup> και 13<sup>ο</sup> αιώνα, έγινε ευρεία εφαρμογή της μεθόδου. (Yang Hui - 13<sup>ος</sup> αιώνας και Zhu Shijie -13<sup>ος</sup> αιώνας). (Wang & Needham, 1954, pp. 398-399)

Μπορούμε να πούμε ότι τα μαθηματικά τόσο στον αρχαίο, όσο και στον μεσαιωνικό Κινεζικό πολιτισμό, είχαν φτάσει σε ένα πολύ υψηλό επίπεδο. Αναφορικά με την επίλυση εξισώσεων παρατηρούμε ότι αρχικά ήταν ικανοί να επιλύουν μόνο εξισώσεις της μορφής  $x^2 = a$  και  $x^3 = a$ , όπου το  $a$  ήταν πάντα θετικός αριθμός και για την λύση, χρησιμοποιούσαν τις μεθόδους υπολογισμού των τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Αργότερα μπόρεσαν να αναπτύξουν αυτές τις μεθόδους και να χρησιμοποιήσουν μια μέθοδο, η οποία ομοιάζει με την μέθοδο του *Horner* για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων. Αξίζει να αναφερθεί όμως ότι οι συντελεστές και οι σταθεροί όροι ήταν πάντα θετικοί αριθμοί, παρόλο που γνώριζαν και χειρίζονταν αρνητικούς και η λύση που έβρισκαν ήταν πάντα μια θετική. Δεν ήταν σε θέση να γνωρίζουν για την ύπαρξη περισσότερων ριζών και



δεν μπορούσαν να αποδεχτούν αρνητικές ρίζες. Έφτασαν στις μεθόδους τους εμπειρικά και δεν υπήρχε η έννοια της απόδειξης και της δομημένης θεωρίας, όπως έγινε στον Ελληνικό πολιτισμό και επηρέασε την Ευρώπη.

## 4 Αρχαίος Ελληνικός Πολιτισμός

### 4.1 Οι επιρροές του Ελληνικού πολιτισμού και η ανάπτυξή του

Στην Ελλάδα πριν τον 4ο αιώνα π.Χ μια νέα προσέγγιση των μαθηματικών εμφανίστηκε. Δεν αρκούσε πλέον η αριθμητική επίλυση των προβλημάτων, έπρεπε να αποδεικνύεται και η ορθότητα των αποτελεσμάτων. Αυτή η μεγάλη αλλαγή στη φύση των μαθηματικών ξεκίνησε περίπου το 600 π.Χ και σχετίζεται με τις μεγάλες διαφορές μεταξύ του τότε ανερχόμενου Ελληνικού πολιτισμού και των προγενέστερων Βαβυλωνιακού και Αιγυπτιακού, από τους οποίους οι Έλληνες έμαθαν.

Τα γεωγραφικά χαρακτηριστικά της Ελλάδας, που αποτελείται από πολλά βουνά και νησιά δεν επιτρέπουν μεγάλης έκτασης γεωργικές καλλιέργειες, πιθανόν αυτή να είναι και η αιτία που δεν δημιουργήθηκε κεντρική διοίκηση στην αρχαία Ελλάδα. Τα πολιτικά καθεστώτα είτε δημοκρατικά, είτε μοναρχικά είτε τυραννικά, δεν ήταν τελείως αυθαίρετα. (Π.χ. Στον Όμηρο στις συνελεύσεις των βασιλέων, υπήρχαν ίχνη «δημοκρατικών» στοιχείων. ) Κάθε καθεστώς υπάκουε σε νόμους, πράγμα που έδινε κίνητρο στους πολίτες να αναπτύξουν την επιχειρηματολογία και τη συζήτηση. Εξαιτίας ίσως αυτού του χαρακτηριστικού να αναπτύχθηκε και η ανάγκη για μαθηματικές αποδείξεις.

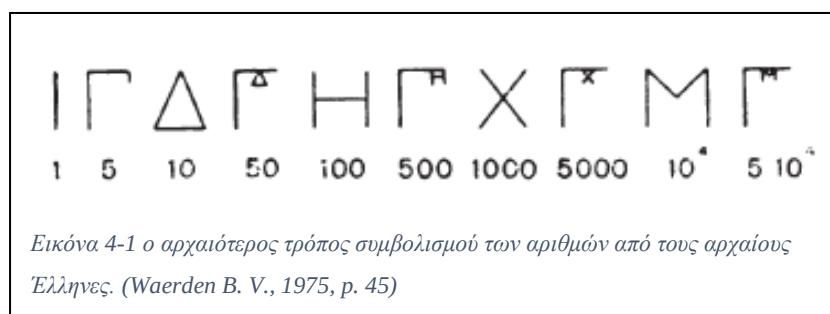
Σχεδόν όλες οι πόλεις είχαν πρόσβαση στη θάλασσα και η εμπορική δραστηριότητα, τόσο μεταξύ των Ελληνικών πόλεων, όσο και με άλλους πολιτισμούς ήταν συνεχής. Οι αρχαίοι Έλληνες ως αποτέλεσμα ήρθαν σε επαφή με άλλους πολιτισμούς και εγκαταστάθηκαν σε άλλες περιοχές της ανατολικής Μεσογείου. Η άνοδος του βιοτικού επιπέδου στις περιοχές τους, οδηγούσε σε αυτές, ανθρώπους και από άλλα μέρη του κόσμου. Κατά συνέπεια οι Έλληνες ήταν σε θέση να μελετούν τις διαφορετικές απαντήσεις που δόθηκαν σε θεμελιώδη ερωτήματα στα διάφορα μέρη του κόσμου και άρχισαν να διαμορφώνουν τις δικές τους απαντήσεις. Πίστευαν (από τον 6<sup>ο</sup> αιώνα και μετά) ότι αξίζει η μελέτη της φύσης και ότι τα μαθηματικά ήταν μια από τις πρωταρχικές επιστήμες και η βάση για κάθε μελέτη του φυσικού κόσμου. Στα Ελληνικά μαθηματικά βρίσκεται η βάση των σύγχρονων μαθηματικών και κατ' επέκταση τα θεμέλια του σύγχρονου τεχνολογικού πολιτισμού. (V. Katz, History of Mathematics, pp 33-34)

Εάν κάποιος εξετάσει τα μαθηματικά της Αιγύπτου στο σύνολο τους δεν μπορεί παρά να απογοητευτεί σε ένα βαθμό από το γενικότερο μαθηματικό επίπεδο, θα πρέπει όμως να εκτιμήσει και κάποια από τα επιτεύγματά τους. Στους παπύρους δεν έχει βρεθεί κάποιο ίχνος από την

κατασκευή γραμμών με αποδείξεις, στις οποίες ο *Δημόκριτος* λέγεται ότι είχε ξεπεράσει ακόμα και τους *Αρπεδοναύτες*, υπάρχουν μόνο υπολογιστικοί κανόνες. Μπορούμε σχεδόν βέβαια να πούμε ότι οι Έλληνες έμαθαν από τους Αιγύπτιους πώς να πολλαπλασιάζουν και πώς να χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς τους τις κλασματικές μονάδες, τις οποίες μεθόδους ανέπτυξαν και περαιτέρω. Σχετικά στοιχεία μπορεί κάποιος να βρει στον πάπυρο του Akhmen από την Ελληνιστική περίοδο. Οι υπολογισμοί όμως δεν είναι μαθηματικά. Οι Έλληνες μπορεί επίσης να πήραν από τους Αιγυπτίους τους κανόνες για τον υπολογισμό του εμβαδού και του όγκου σχημάτων και στερρών, αλλά για τους Έλληνες αυτοί οι κανόνες δεν ήταν μαθηματικά. Τους οδήγησαν να αναρωτηθούν, πως μπορεί κάποιος να τους αποδείξει;

Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί, όπως κάνει ο Stuve, ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν περισσότερα, πολλά περισσότερα από όσα βλέπουμε στα κείμενα τους, που έχουν διασωθεί και πως οι Έλληνες τα γνώριζαν. Σε αυτή όμως την υπόθεση μπορούμε να προβάλουμε 2 βασικά αντεπιχειρήματα. Πρώτον, το βασικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών γνώσεων που κάποιος έχει στην διάθεσή του παραμένει το ίδιο, είτε μιλάμε για κείμενο με βασικές μαθηματικές έννοιες, είτε για κείμενο πιο προχωρημένων μαθηματικών. Οι υπολογισμοί, τα δεκαδικά κλάσματα, η ανάλυση των διαφορών και η Καρτεσιανή γεωμετρία, τα οποία αποτελούν χαρακτηριστικά των Δυτικών μαθηματικών, θα μπορούσε κάποιος να τα εξάγει από ένα βιβλίο για μηχανικούς, όπως και από το “*Mathematische Annalen*”. Χαρακτηριστικό όμως των Αιγυπτιακών μαθηματικών είναι οι ελεύθεροι υπολογισμοί με κλάσματα, το οποίο όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποτελεί την βάση για ανώτερη άλγεβρα όπως και ότι ο χειρισμός της γεωμετρίας ως εφαρμοσμένη αριθμητική. Δεύτερον, μπορούμε να πούμε πως τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά αποτέλεσαν μια βάση για τα Ελληνικά μαθηματικά. Από την στιγμή που γνωρίζουμε τι αποτέλεσε την βάση και το έναυσμα για τα Ελληνικά μαθηματικά, δεν χρειάζεται να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με χαμένα ανώτερα Αιγυπτιακά μαθηματικά. Δεν είμαστε σε θέση να υποστηρίξουμε μια τέτοια εικασία. (Waerden B. V., 1975, pp. 35-36)

## 4.2 Το αριθμητικό σύστημα των Ελλήνων



Το αριθμητικό σύστημα των αρχαίων Ελλήνων, συγκριτικά με των Βαβυλωνίων φαίνεται να είναι μια παλινδρόμηση,

να είναι κατώτερο. Στην πιο απομακρυσμένη αρχαιότητα είχαν έναν συμβολισμό, ο οποίος έμοιαζε πολύ με τα Ρωμαϊκά νούμερα. Τα γράμματα Π, Δ, Η, Χ, Μ ήταν τα αρχικά των αντίστοιχων ελληνικών λέξεων για τα 5, 10, 100, 1.000, 10.000. Αργότερα σε μια προσπάθεια να τα γράψουν με πιο σύντομο τρόπο εισήχθη ένας νέος τρόπος συμβολισμού.

|             |                           |                        |
|-------------|---------------------------|------------------------|
| 1 – 9       | α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ | (6 = ς = Vau)          |
| 10 – 90     | ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ς | (90 = ς = Koppa)       |
| 100 – 900   | ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϗ | (900 = ϗ = Sampi)      |
| 1000 – 9000 | α, β, etc.                | (accent at lower left) |

Εικόνα 4-2 ο τρόπος που συμβόλιζαν τα νούμερα οι αρχαίοι Έλληνες στην πιο πρόσφατη αρχαιότητα. (Waerden B. V., 1975, p. 46)

Προκειμένου να μπορούν να ξεχωρίσουν τους αριθμούς από τις λέξεις στο τέλος του αριθμού πρόσθεταν έναν τόνο, η μια παύλα πάνω από τον αριθμό. Για παράδειγμα :

$$\overline{\alpha\tau\epsilon} \text{ ή } \alpha\tau\epsilon' = 1305$$

Οι αριθμοί μεγαλύτεροι του  $10^4$  διακρίνονταν από την χρήση του συμβόλου Μ , για παράδειγμα:

$$\overset{\kappa\epsilon}{\text{M}}\mu\gamma' = \kappa\epsilon\mu\gamma' = 250\,043$$

Ο Αρχιμήδης<sup>33</sup> και ο Απολλώνιος<sup>34</sup> για αριθμούς μεγαλύτερους από την τάξη των χιλιάδων συνέχισαν να χρησιμοποιούν διαφορετικό συμβολισμό.

<sup>33</sup> Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε περίπου το 287 π.Χ στις Συρακούσες και πέθανε περίπου το 212/211 π.Χ στις Συρακούσες. Είναι ο διασημότερος μαθηματικός και εφευρέτης από την αρχαία Ελλάδα.. Είναι ιδιαίτερα γνωστός για την ανακάλυψή του σχετικά με την σχέση που συνδέει την επιφάνεια και τον όγκο μιας σφαίρας και του περιγεγραμμένου κυλίνδρου. Είναι επίσης γνωστός για την βασική του αρχή στην υδροστατική, την [Αρχή του Αρχιμήδους](#) και για συσκευή η οποία αυξάνει την στάθμη του νερού τον λεγόμενο [Ατέρμων κοχλία](#), ο οποίος ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται από τις αναπτυσσόμενες χώρες. [πηγή:](#) <https://www.britannica.com/biography/Archimedes>

<sup>34</sup> Ο Απολλώνιος ο Περγαίος, γεννήθηκε περίπου το 240 π. Χ στην Πέργα, και πέθανε περίπου το 190 π. Χ στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Ήταν γνωστός στους σύγχρονούς του ως ο μεγάλος γεωμέτρης, του οποίου το έργο του “Κωνικά” αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά έργα της Αρχαιότητας. Τα περισσότερα από τα έργα του έχουν σήμερα χαθεί, παρόλα αυτά οι τίτλοι τους και μια γενική περιγραφή – ένδειξη για το περιεχόμενό τους έχει διασωθεί από μεταγενέστερους και κυρίως από τον Πάππο τον Αλεξανδρεύς (περίπου 320μΧ). Το έργο

Αυτός ο τρόπος γραφής δεν μπορούσε να βοηθήσει ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της “άλγεβρας”. Δεν άφηνε το περιθώριο να χρησιμοποιηθούν τα γράμματα για τον συμβολισμό, όπως κάνουμε εμείς σήμερα. Μέχρι και την εποχή του Αρχύτα (390 π. Χ) τα γράμματα χρησιμοποιούνταν με έναν κάπως αόριστο τρόπο. Για παράδειγμα ο Αρχύτας, συμβολίζει με ΓΔ το άθροισμα των αριθμών Γ και Δ. Εάν κάποιος πρόσθετε ένα πρόσημο για τον πολλαπλασιασμό, ένα σύμβολο για το μείον και ένα σύμβολο για τα κλάσματα, τότε μπορεί να έφτιαχνε μια πολύ καλή θεωρητική βάση για την αριθμητική. Ακόμα και ο Ευκλείδης (300 π.Χ) είχε εγκαταλείψει αυτό τον απλοϊκό τρόπο συμβολισμού για τα αθροίσματα, πιθανόν για να αποφύγει την σύγχυση με τους αριθμούς. Όταν ο Ευκλείδης θέλει να προσθέσει δυο αριθμούς, τους αναπαριστά με ευθύγραμμα τμήματα και ως άθροισμα είναι το άθροισμα αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων.

Στο έργο του “Ψαμμίτης”, ο Αρχιμήδης περιγράφει έναν κανόνα ο οποίος σε σύγχρονο τρόπο γραφής θα ήταν  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ , τον οποίο τον χρειαζόταν για την διαχείριση μεγάλων αριθμών, μεγαλύτερων των χιλιάδων. Για παράδειγμα εάν κάποιος ήθελε να κάνει τον πολλαπλασιασμό σ' επί τ', δηλαδή  $200 \cdot 300$ , σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα έπρεπε πρώτα να βρει το γινόμενο  $2 \times 3$  και μετά σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα να βρει ότι  $10^2 10^2 = 10^4$ , άρα το αποτέλεσμα είναι  $6 \cdot 10^4 = 60.000$ ,

|                                                                |          |         |        |       |
|----------------------------------------------------------------|----------|---------|--------|-------|
| τὰ δὲ $\overline{\sigma\xi\epsilon}$                           | i.e.     | 265     |        |       |
| ἐπὶ $\overline{\sigma\xi\epsilon}$                             | times    | 265     |        |       |
| $\overset{\delta}{M} \overset{\alpha}{M}, \beta, \bar{\alpha}$ |          | 40 000  | 12 000 | 1 000 |
| $\overset{\alpha}{M}, \beta, \overline{\gamma\chi\tau}$        |          |         | 12 000 | 3 600 |
| $\overset{\alpha}{M}, \beta, \overline{\gamma\chi\tau}$        |          |         | 1 000  | 300   |
| ὁμοῦ $\overset{\zeta}{M} \overline{\sigma\kappa\epsilon}$      | together | 70 225. |        |       |

Εικόνα 4-3 πολλαπλασιασμός 265x265 (Waerden B. V., 1975, p. 47)

δηλαδή 6 Μυριάδες. Αυτού του είδους ο πολλαπλασιασμός ήταν εύκολος για αριθμούς οι οποίοι αποτελούνταν από ένα γράμμα, για τους αριθμούς με περισσότερα γράμματα ο πολλαπλασιασμός γινόταν σύμφωνα με το παρακάτω παράδειγμα. Στον Ευτόκιο τον

---

του Απολλώνιου ενέπνευσε πολλούς και βοήθησε στην ανάπτυξη της γεωμετρίας στον Ισλαμικό κόσμο κατά τον μεσαίωνα. Η ανακάλυψη των Κονικών στην Ευρώπη της Αναγέννησης έθεσε μια καλή μαθηματική βάση στην επιστημονική επανάσταση. [πηγή: https://www.britannica.com/biography/Apollonius-of-Perga](https://www.britannica.com/biography/Apollonius-of-Perga)

Ασκαλωνίτη<sup>35</sup> βλέπουμε τον λεγόμενο “Ελληνικό πολλαπλασιασμό”, με παράδειγμα το γινόμενο  $265 \cdot 265 = 70.225$ . Το παράδειγμα βρίσκεται στην εικόνα 4-3. (Waerden B. V., 1975, pp. 45-47)

#### 4.2.1 Οι Υπολογιστικοί πίνακες και οι ψηφίδες.

Τα βότσαλα ή όπως αποκαλούνταν “*ψηφοί*” διατάσσονταν σε παράλληλες γραμμές στον υπολογιστικό πίνακα (ή ακόμα και σε ένα απλό τραπέζι στο οποίο έχουν σχεδιαστεί γραμμές). Οι *ψηφοί* στην τελευταία γραμμή ήταν οι μονάδες, είχαν αξία 1, αυτοί στην επόμενη γραμμή οι δεκάδες κτλ. Υπήρχαν ξεχωριστές γραμμές για τις νομισματικές μονάδες, όπως οι οβολοί.

Σχόλια που γίνονται σε έργα διάφορων συγγραφέων δείχνει πόσο γενικευμένη ήταν η χρήση του “*Άβακα*” στην αρχαιότητα. Είναι επίσης ενδιαφέρον ότι η λέξη που χρησιμοποιούταν για να δηλώσουν ότι θα υπολογίσουν κάτι ήταν η λέξη “*ψηφίζειν*” η οποία προέρχεται από την λέξη “*ψηφός*” του άβακα.



Εικόνα 4-4 Η “μάχη” του Πυθαγόρα και του Βοήθιου. (Waerden B. V., 1975, p. 60)

Στην Ρωμαϊκή εποχή εκτός από τον μεγάλο υπολογιστικό πίνακα, βρίσκουμε και ένα μικρό σε μέγεθος του χεριού άβακα, ο οποίος περιλαμβάνει συγκεκριμένο αριθμό από *ψηφούς*, ή καλύτερα βότσαλα, τα οποία μετακινούνται μπρος και πίσω πάνω σε τεντωμένα καλώδια. Μέχρι και τα τέλη του Μεσαίωνα, στην Δυτική Ευρώπη, ο υπολογιστικός πίνακας χρησιμοποιούταν ευρέως. Άρχισε να εγκαταλείπεται μετά την εμφάνιση του σύγχρονου τρόπου γραφής των αριθμών, αφού δεν ήταν αναγκαίος πλέον. (Waerden B. V., 1975, p. 48)

Τον 15<sup>ο</sup> αιώνα υπήρχαν έντονες διαφωνίες μεταξύ “*των υποστηρικτών του άβακα – abacists*” και των “*Αλγοριθμικών - Algorithmici*”. Μια εικόνα σε

<sup>35</sup> Ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης είναι Αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, ο οποίος γεννήθηκε περίπου το 480 μ.Χ και πέθανε περίπου το 540 μ. Χ στο Άσκαλων (σημερινό Ashqelon), στο σημερινό Ισραήλ. Έχει γράψει σχόλια σε 3 έργα του Αρχιμήδη και επεξεργάστηκε και έγραψε σχόλια στα πρώτα 4 βιβλία των Κωνικών του Απολλώνιου. [πηγή http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eutocius.html](http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eutocius.html)

ένα βιβλίο αριθμητικής του 1504 αναπαριστά αυτή την κόντρα με ένα πολύ διασκεδαστικό τρόπο. Στα δεξιά διακρίνεται ο Πυθαγόρας, θεωρούμενος ως ο εφευρέτης του άβακα και αριστερά ο Βοήθιος μπροστά από ένα δίσκο με Αραβικά νούμερα, τα οποία υποτίθεται ότι εφηύρε. Η Dame Arithmetica παίζει τον ρόλο του δικαστή. Το θλιμμένο ύφος του Πυθαγόρα, δείχνει ότι αυτός είναι ο χαμένος.

Πήρε λίγους ακόμα αιώνες μέχρι να σταματήσει η χρήση του άβακα. Ποιος μπορεί άλλωστε να πιστέψει ότι 500 χρόνια πριν , σχεδόν όλοι όσοι κατοικούσαν βόρεια των Άλπεων, ακόμα εκτελούσαν τους υπολογισμούς τους με άβακα και τα Ρωμαϊκά σύμβολα των αριθμών. (Waerden B. V., 1975, p. 61)

#### 4.2.2 Κλάσματα στην αρχαία Ελλάδα

Γνωρίζουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν τα κλάσματα και τα χρησιμοποιούσαν. Αυτό αποδεικνύεται από τα έργα των Αρχιμήδη, Ήρων και Διόφαντο και από πάπυρους. Τα κλάσματα  $\frac{m}{n}$  τα χώριζαν σε κλασματικές μονάδες για  $n = 3, 4, \dots, 20$  και για διάφορες τιμές του  $m$ . Για παράδειγμα  $\frac{3}{7} = \frac{1}{12} + \frac{1}{17} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$ . Επίσης για το  $\frac{1}{3}$  θα χρησιμοποιούσαν την φράση “το τρίτον” ή αλλιώς θα έγραφαν  $\gamma^{\text{ον}}$  ή ακόμα με πιο σύντομο τρόπο  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  ή κάτι παρόμοιο. Πολύ συχνά ο παρονομαστής τοποθετούταν πάνω από τον αριθμητή και έτσι για παράδειγμα  $\frac{3}{5}$ . Σύμφωνα με τον Vogel, αυτό ο συμβολισμός άρχισε να χρησιμοποιείται περίπου την εποχή του Αρχιμήδη (3<sup>ος</sup> αιώνας π. Χ). Ένας πάπυρος από τον 1<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ περιέχει την αντίστροφη μορφή, τον αποκαλούμενο “Ινδικό συμβολισμό” όπου  $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{3}{5}$ , ο οποίος οδήγησε και στον δικό μας τρόπο γραφής των κλασμάτων.

Από τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι οι Έλληνες δεν περιορίζονταν μόνο στην χρήση κλασματικών μονάδων, όπως έκαναν αντίστοιχα οι Αιγύπτιοι πριν από αυτούς. Αληθεύει ότι συχνά μπορεί να έγραφαν αθροίσματα από κλασματικές μονάδες όπως και οι Αιγύπτιοι, αφού είχαν δεχθεί κάποια επιρροή, αλλά δεν περιορίζονταν μόνο σε αυτό. Για παράδειγμα ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι η περιφέρεια του κύκλου είναι μεταξύ  $3\frac{10}{71}$  και  $3\frac{1}{7}$  φορές την διάμετρο, όπως και ο σύγχρονός του Ερατοσθένης χρησιμοποιεί το κλάσμα  $\frac{11}{83}$  για να χαρακτηρίσει την κλίση του άξονα της γης.

Τα Ελληνικά μαθηματικά πριν από τον Αρχιμήδη δεν περιλάμβαναν κλάσματα. Ο λόγος δεν είναι ότι δεν ήταν γνωστά, αλλά επειδή δεν ήθελαν να τα γνωρίζουν. Όπως ο ίδιος



ο Πλάτωνας γράφει στην Πολιτεία<sup>36</sup>, 525<sup>D-E</sup> οι ειδικοί στην τέχνη των μαθηματικών όποιον επιχειρήσει να διαιρέσει την μονάδα τον περιγελούν και δεν θέλουν να ακούσουν τίποτα. Τα κλάσματα τα έβλεπαν ως λόγους αριθμών (φυσικών). Ίχνη κλασμάτων βλέπουμε στο βιβλίο VII των Στοιχείων. Το βιβλίο VII φέρεται να είναι Πυθαγόρειο και να έχει γραφεί περίπου το 400 π. Χ. Σε αυτό βλέπουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὃ ἐλάσσω τῷ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

Εικόνα 4-6 Ορισμός 7.3 από τα Στοιχεία (Heath T. L., 1908, p. 280)

Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

Εικόνα 4-5 Ορισμός 7.4 από τα Στοιχεία (Heath T. L., 1908, p. 280)

Τι εννοούν με τους όρους “μέρος” και “μέρη”;

<sup>36</sup> [ τούς λογισμούς μαθήματος, ὡς κομψὸν ἐστὶ καὶ πολλαχῇ χρησίμῳ ἡμῖν πρὸς ὃ βουλόμεθα, ἐὰν τοῦ γνωρίζειν ἕνεκά τις αὐτὸ ἐπιτηδεύῃ ἀλλὰ μὴ τοῦ καπηλεύειν.

Πῇ δὴ;

ἔφη. Τοῦτό γε, ὃ νυνδὴ ἐλέγομεν, ὡς σφόδρα ἄνω ποι ἄγει τὴν ψυχὴν καὶ περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἀναγκάζει διαλέγεσθαι, οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον ἐάν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἀπτά σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγηται. οἷσθα γάρ που τοὺς περὶ ταῦτα δεινοὺς αὖ ὥς, ἐάν τις αὐτὸ τὸ [525e] ἐν ἐπιχειρῇ τῷ λόγῳ τέμνειν, καταγελωσί τε καὶ οὐκ ἀποδέχονται, ἀλλ’ ἐὰν σὺ κερματίζῃς αὐτό, ἐκεῖνοι πολλαπλασιοῦσιν, εὐλαβοῦμενοι μὴ ποτε φανῇ τὸ ἐν μὴ ἐν ἀλλὰ πολλὰ μόρια.

Ἀληθέστατα, ἔφη, λέγεις.]

Μετάφραση: Και νά τώρα που συνέπεσε ο λόγος για [525d] το μάθημα της λογιστικής, βάζω και στο νου μου καλύτερα πόσο έμορφο είναι αυτό και χρήσιμο για το σκοπό που ζητούμε, αν καταγίνεται κανείς σ’ αυτό μόνο για τη γνώση και όχι να το χρησιμοποιεί για τις αγοραπωλησίες του.

Πώς δα;

Πρώτα πρώτα, αυτό που λέγαμε και τώρα, ότι έχει την ιδιότητα να οδηγεί την ψυχή κάπου πολύ ψηλά και την αναγκάζει να φιλοσοφεί και να συζητεί για τους καθαυτό αριθμούς και να μην ανέχεται να της παρουσιάζουν στη συζήτηση αριθμούς με ορατά και αισθητά αντικείμενα· γιατί γνωρίζεις βέβαια πως οι φημισμένοι για τη δεινότητά τους σ’ αυτή την τέχνη, αν κανείς [525e] επιχειρήσει να διαιρεί τη μονάδα με το λογισμό, τον περιγελούν και δε θέλουν ν’ ακούσουν τίποτα, αλλ’ αν εσύ την κομματιάσεις σε μέρη, εκείνοι θα την πολλαπλασιάσουν από το φόβο τους μήπως το ένα φανεί έξαφνα όχι ένα αλλά πολλά μόρια.

Έχεις πολύ δίκιο. (Κέντρο Ελληνικής Γλώσσας, 2012)

Με τον όρο “**μέρος**” εννοείται ότι ένα  $a < \beta$ , τότε το  $a$  είναι μέρος του  $\beta$  εάν υπάρχει αριθμός  $\kappa$ , τέτοιος ώστε  $\beta = \kappa \cdot \alpha$ , δηλαδή το  $a$  είναι διαιρέτης του  $\beta$ . Δηλαδή το  $a$  είναι το  $\nu$ -οστό μέρος του  $\beta$ .

Με τον όρο “**μέρη**” εννοείται ότι ένα  $a < \beta$ , τότε το  $a$  είναι μέρη του  $\beta$  εάν δεν είναι μέρος, δηλαδή δεν υπάρχει αριθμός  $\kappa$ , τέτοιος ώστε  $\beta = \kappa \cdot \alpha$ . Είναι δηλαδή ένα κλασματικό μέρος του  $\beta$ . Το  $a$  είναι το  $\nu$ -οστό μέρος του  $\beta$ .

Στην συνέχεια υπάρχει και ο ορισμός της αναλογίας.

*Ἄριθμοι ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκῃς ἢ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ᾖσιν.*

*Εικόνα 4-7 Ορισμός 7.20 από τα Στοιχεία (Heath T. L., 1908, p. 292)*

Τι σημαίνει ο ορισμός 7.20;

Εάν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  φυσικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

αν και μόνο αν  $\alpha$  είναι πολλαπλάσιο του  $\beta$  και το  $\gamma$  ίσο πολλαπλάσιο του  $\delta$ .

αν το  $\alpha$  είναι μέρος του  $\beta$  και  $\gamma$  το αυτό μέρος του  $\delta$

αν το  $\alpha$  είμαι μέρη του  $\beta$  και  $\gamma$  τα αυτά μέρη του  $\delta$ .

Στην συνέχεια του βιβλίου 7 υπάρχει μια εξήγηση για το πώς απλοποιούμε τα κλάσμα και τα κάνουμε ανάγωγα, η όπως θα λέγαμε σήμερα, η απλοποίηση ενός κλάσματος με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του αριθμητή και του παρονομαστή. Ακολουθούν οι προτάσεις 7.34-36 όπου αναπτύσσονται οι ιδιότητες του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου.

Η ορολογία η οποία χρησιμοποιείται στην Πυθαγόρεια θεωρία για την αρμονία – μουσική είναι μια ακόμη ένδειξη ότι αυτοί οι λόγοι ήταν ουσιαστικά κλάσματα. Ο λόγος 4:3 ο οποίος αντιστοιχεί στο διάστημα του τετάρτου, ονομαζόταν «*επίτριτον ή συλλαβή*», το οποίο σημαίνει “*πλέονασμα  $\frac{1}{3}$* ” και ο τόνος που είναι το 9:8 ονομαζόταν “*επόγδοο*”, δηλαδή “*πλέονασμα  $\frac{1}{8}$* ”.

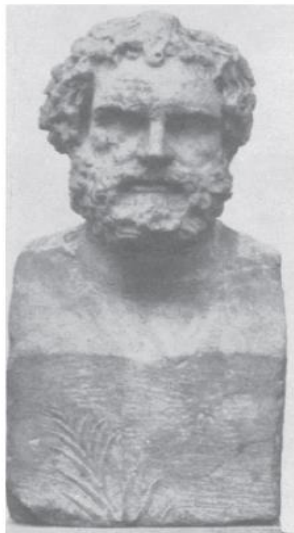
Η αρχαιότερη αναφορά σε κλάσματα γίνεται από τον Όμηρο στην Ιλιάδα στο βιβλίο Κ και στον στίχο 253:

“ἄστρα δὲ δὴ προβέβηκε, παροίχωκεν δὲ πλέων νύξ  
τῶν δύο μοιράων, τριτάτη δ’ ἔτι μοῖρα λέλειπται.”

Μετάφραση:

« τ’ ἄστρα επροχώρησαν πολύ, και της νυκτός τα δύο  
μέρη επεράσαν κι ἔμεινε μόλις το τρίτο ακόμη»





Εικόνα 4-8 Έλληνας φιλόσοφος, πιθανόν ο Θαλής ο Μιλήσιος. (Waerden B. V., 1975, p. plate12)

(Κέντρο Ελληνικής Γλώσσας, 2012)

Στηριζόμενοι σε αυτή την αναφορά καταλήγουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες από την πιο απομακρυσμένη αρχαιότητα γνώριζαν τα κλάσματα και ότι από τον 5<sup>ο</sup> αιώνα, το αργότερο, μπορούσαν να εκτελούν πράξεις με κλάσματα, όπως η απλοποίηση, η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός κ.α

Σε αντίθεση με τους Αιγυπτίους οι πράξεις με κλάσματα, δεν αποτέλεσαν εμπόδιο στον δρόμο τους για την ανάπτυξη των μαθηματικών.

Εκτός από τα δεκαδικά κλάσματα, συνέχισαν όμως να χρησιμοποιούν και κλάσματα εξηκονταδικά, κυρίως στην αστρονομία. Με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν κλάσματα με παρονομαστές δυνάμεις του 60. (Waerden B. V., 1975, pp. 48-50)

#### 4.3 Θαλής ο Μιλήσιος, ο πρώτος Έλληνας Μαθηματικός

*«Ο Θαλής ήταν ο πρώτος που πήγε στην Αίγυπτο και έφερε επιστρέφοντας στην Ελλάδα τη σπουδή αυτή [τη γεωμετρία], αλλά και ο ίδιος ανακάλυψε πολλές προτάσεις και αποκάλυψε τις αρχές στις οποίες βασίζονται πολλές άλλες στους συνεχιστές του, και η μέθοδος άλλες φορές ήταν γενική και άλλες φορές εμπειρική»* (Inor, 1957, p. 146)

(Πρόκλου Σύνοψις – περί το 450μ. Χ της Ιστορίας του Εύδημου – περί το 320 μ.Χ)

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (c. 624-547 π.Χ) ήταν ο πρώτος από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας. Ήταν μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, μηχανικός, μετεωρολόγος. Ιδρυτής της Ιωνικής σχολής, της φυσικής φιλοσοφίας στην Μίλητο. Κατά τον Ηρόδοτο είχε Φοινικική καταγωγή, κατ' άλλους Μιλήσιος αριστοκρατικής καταγωγής. Σύμφωνα με την “Σύνοψις” του Πρόκλου, έφερε την Γεωμετρία από την Αίγυπτο. Πριν από αυτόν υπήρχαν οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι (οι δυο αυτοί πολιτισμοί όπως είδαμε ήταν σχεδόν σύγχρονοι) .

Τόσο τα Αιγυπτιακά μαθηματικά, όσο και τα Βαβυλωνιακά είναι εμπειρικά και περιγράφουν την διαδικασία επίλυσης χωρίς να αναφέρουν ούτε τον τρόπο επίλυσης, ούτε πως και από που αυτός προήλθε.

Ο Θαλής ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την απόδειξη στα μαθηματικά. Ο Αριστοτέλης διηγείται ότι κάποτε ο Θαλής κατηγορήθηκε ότι σπαταλά τον χρόνο του σε άχρηστες

μελέτες. Οπότε εκείνος, όταν από κάποιες παρατηρήσεις αντιλήφθηκε ότι μια ορισμένη χρονιά η ελαιοφορία θα ήταν πλούσια αθόρυβα αγόρασε πολλά πιεστήρια. Όταν η μεγάλη σοδιά ήρθε οι ελαιοκαλλιεργητές αναγκάστηκαν να προστρέξουν σε αυτόν για πιεστήρια. Απέδειξε έτσι ότι ένας φιλόσοφος ή μαθηματικός ήταν σε θέση να βγάλει χρήματα εάν το θεωρούσε άξιο. Εάν αυτή ή άλλες ιστορίες για τον Θαλή αληθεύουν ή όχι δεν είναι γνωστό. Σε κάθε περίπτωση, τόσο οι Έλληνες του 4ου αιώνα π. Χ , όσο και οι μεταγενέστεροι θεωρούμε ότι η ελληνική μαθηματική παράδοση ξεκινά από τον Θαλή. Σε αυτόν αποδίδεται η απαρχή ολόκληρου του Ελληνικού επιστημονικού εγχειρήματος, που ξεκινά με την κατανόηση ότι τα υλικά φαινόμενα κυβερνώνται από νόμους που μπορούμε να ανακαλύψουμε. (Katz V. J., 2009, p. 36)

Όπως αναφέρει ο Αριστοτέλης στα Μεταφυσικά Α 1 981b:

*«Και όταν πια όλες αυτές οι επινοήσεις ολοκληρώθηκαν, ανακαλύφθηκαν οι γνώσεις που δεν συνδέονται ούτε με την ευχαρίστηση, ούτε με τις ανάγκες, και αυτό έγινε για πρώτη φορά σε εκείνες τις περιοχές όπου ακριβώς οι άνθρωποι είχαν ελευθερία χρόνου<sup>iii</sup>. Έτσι οι μαθηματικές τέχνες ξεκίνησαν πρώτα στα μέρη της Αιγύπτου, γιατί εκεί δόθηκε η δυνατότητα τηςσχόλης στην κάστα των ιερέων»* (Κάλφας, 2009)

Παρόλο που ο Αριστοτέλης αναφέρεται μόνο στην Αίγυπτο, πίστευε σίγουρα πως και στην Ελλάδα τα Μαθηματικά ήταν προνόμια μόνο της ανώτερης τάξης, αντικείμενο μελέτης ανθρώπων που δεν είχαν να ασχοληθούν με τόσο τετριμμένα θέματα όπως οι μετρήσεις και η λογιστική. Συνεπώς, στην Ελλάδα, όπως και στην Αίγυπτο τα μαθηματικά ήταν ασχολία μιας πολύ περιορισμένης ομάδας – τάξης ανθρώπων, κυρίως μελών της άρχουσας τάξης. Τα θεωρητικά αυτά μαθηματικά αποτελούσαν κεντρικό πυρήνα στην εκπαίδευση όσων θα κυβερνούσαν. (Katz V. J., 2009, p. 36)

Ο Θαλής φαίνεται να γνώριζε Βαβυλωνιακά μαθηματικά. Σύμφωνα με τα σχόλια του Πρόκλου<sup>37</sup> στο βιβλίο I των Στοιχείων του Ευκλείδη στο Θαλή αποδίδονται οι παρακάτω προτάσεις και ορισμοί.

Ορισμός 1.17 – Κάθε διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε 2 ίσα μέρη

---

<sup>37</sup>Ο Πρόκλος γεννήθηκε περίπου το 410 μ.Χ στην Κωνσταντινούπολη και πέθανε περίπου το 485 μ. Χ στην Αθήνα. Θεωρείται ο τελευταίος από τους μεγάλους φιλοσόφους της Αρχαιότητας. (<https://www.britannica.com/biography/Proclus>) Ο Πρόκλος αντλεί τα στοιχεία του από την Ιστορία των Μαθηματικών του Εύδημου, η οποία δεν έχει διασωθεί. (Waerden B. V., 1975, p. 87)

Πρόταση 1.5 ( η απόδειξη όμως δεν αποδίδεται στον Θαλή, αλλά στον Πάππο) –Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, οι παρά τη βάση γωνίες είναι ίσες.

Πρόταση 1.15 – Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες

Πρόταση 1.26 (μόνο η α περίπτωση) –Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά τους ίση και δυο γωνίες τους αντίστοιχα ίσες, τότε όλα τα στοιχεία είναι ίσα.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Θαλής χρησιμοποίησε την πρόταση 1.26 για να υπολογίσει την απόσταση ενός πλοίου στην θάλασσα από την ξηρά. (Waerden B. V., 1975, p. 87)

#### 4.4 *Πυθαγόρειοι*

Σήμερα όταν κάποιος ακούει το όνομα Πυθαγόρας, αμέσως στο μυαλό του έρχεται το Πυθαγόρειο θεώρημα και αυτομάτως τον χαρακτηρίζει ως μαθηματικό. Στην αρχαιότητα όμως ήταν τελείως διαφορετικά. Ο Ηρόδοτος τον αποκαλεί έναν “σημαντικό σοφιστή”, με την έννοια του σοφού και του επαΐοντα.

Ο Πυθαγόρας από τους σύγχρονους του θεωρούνταν βασικά ένας θρησκευτικός προφήτης. Ο Πυθαγόρας τι ήταν τελικά; Ήταν φιλόσοφος, ήταν προφήτης, ήταν άγιος ή τσαρλατάνος; Ίσως να είχε κάποιες ιδιότητες από καθένα από αυτά.

Για τους ακόλουθούς του ήταν η προσωποποίηση του υψηλότερου βαθμού θεϊκής σοφίας, ο Ηράκλειτος όμως μιλάει «για πολύ γνώση χωρίς διάνοια». Δίδασκε την αθανασία της ψυχής και είχε εγκαθιδρύσει ένα πολύ αυστηρό καθεστώς για τους ακολούθους του. Ίδρυσε μια αδελφότητα από πιστούς του, την σχολή – τάγμα των Πυθαγορείων, το οποίο φαίνεται να έπαιξε σημαντικό ρόλο στην πολιτική ζωή των πόλεων της Κ. Ιταλίας. Μετά από μια δοκιμαστική περίοδο και μετά από αυστηρή επιλογή, τα μέλη της αδελφότητας επιτρεπόταν να ακούσουν την φωνή του δασκάλου πίσω από μια κουρτίνα. Μετά από κάποια χρόνια και αφού οι ψυχές τους είχαν καθαρίσει – εξαγνιστεί μέσω της μουσικής και ζώντας στην φτώχεια, σύμφωνα με τους κανόνες, τους επιτρεπόταν να τον δουν. Ο δρόμος των Πυθαγορείων για την ψυχική ανάταση και την ένωση με τον Θεό περνούσε μέσα από τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά ήταν μέρος της φιλοσοφίας τους – θρησκείας τους.

Το δόγμα τους υποστηρίζει ότι ο Θεός δημιούργησε το σύμπαν μέσω των αριθμών. Ο Θεός είναι η μονάδα, ο κόσμος το πλήθος και αποτελείται από δομικές μονάδες. Η αρμονία είναι αυτή που αποκαθιστά την ενότητα στα αντιμαχόμενα κομμάτια και που τα ενσωματώνει σε έναν κόσμο. Η αρμονία είναι θεϊκή και αποτελείται από αριθμητικούς λόγους. Όποιος αποζητά να κατανοήσει πλήρως την αρμονία, γίνεται θεϊκός και αθάνατος.

Η μουσική, η αρμονία και οι αριθμοί είναι τα δομικά στοιχεία της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας. (Waerden B. V., 1975, pp. 92-94)

#### 4.4.1 Πυθαγόρειοι και Γεωμετρία

Σήμερα όποιος ακούει το όνομα Πυθαγόρας, αυτομάτως σκέφτεται το διάσημο Πυθαγόρειο θεώρημα για τα ορθογώνια τρίγωνα. Παρόλα αυτά, τα στοιχεία που τα συνδέουν δεν είναι απολύτως σίγουρα.

Στα σχόλιά του για την πρόταση 1.47 των Στοιχείων (το Πυθαγόρειο θεώρημα) ο Πρόκλος λέει:

*“Εάν ακούσουμε αυτούς που επιθυμούν να ανακατασκευάσουν την αρχαία ιστορία, θα βρούμε κάποιους από αυτούς να αποδίδουν αυτό το θεώρημα στον Πυθαγόρα και να υποστηρίζουν ότι θυσίασε ένα βόδι προς τιμήν της ανακάλυψης”*

Ο Πλούταρχος σχολιάζει σε ένα δίστιχο και λέει:

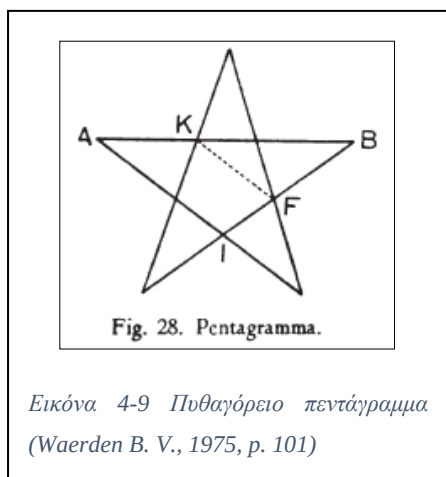
*“Όταν ο Πυθαγόρας ανακάλυψε την διάσημη εικόνα του για το οποίο θυσίασε έναν ταύρο”* και λέει ότι η εικόνα που αναφέρει δεν είναι ξεκάθαρο ποια είναι, είναι είτε το τετράγωνο της υποτεινουσας, είτε η προσαρμογή των εμβαδών. Ο Βιτρούβιος πιστεύει ο ταύρος θυσιάστηκε κατά την ανακάλυψη της Πυθαγόρειας τριάδας 3,4,5. Η όλη όμως ιστορία είναι απίθανη. Ο Πυθαγόρας ήταν αντίθετος στην θανάτωση των ζώων και την θυσία τους, ιδίως των βοοειδών.

Θεωρήθηκε ότι το θεώρημα μπορεί να μην ήταν γνωστό κατά τους χρόνους του Πυθαγόρα, δηλαδή κατά τα πρώτα βήματα της γεωμετρίας, αλλά αυτή η εικασία καταρρίπτεται με την ανακάλυψη πινακιδίων που το περιλαμβάνουν που χρονολογούνται 1200 χρόνια πριν τον Πυθαγόρα. Είναι πολύ πιθανό ο Πυθαγόρας να το έμαθε όταν βρέθηκε στην Βαβυλώνα. Σύμφωνα με τον Πρόκλο στον Πυθαγόρα αποδίδεται επίσης η κατασκευή κανονικών πολύεδρων, αλλά ένα σχόλιο στο 13<sup>ο</sup> βιβλίο των Στοιχείων αναφέρει ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν μόνο 3 κανονικά πολύεδρα, τον κύβο, το τετράεδρο και το

δωδεκάεδρο και πως ο Θεαίτητος<sup>38</sup> ανακάλυψε τα άλλα δυο. Οι έδρες του δωδεκάεδρου είναι κανονικά πεντάγωνα. Οι διαγώνιοι του κανονικού πενταγώνου κατασκευάζουν έναν πεντάγωνο σαν αστέρι. Αυτό το σύμβολο, το σύμβολο της υγείας, έπαιζε τον ρόλο του διακριτικού ανάμεσα στους Πυθαγόρειους.

Λέγεται πως ένας από αυτούς σε μια ξένη χώρα όταν πέθαινε και δεν μπορούσε να ξεπληρώσει τον άντρα που τον φρόντιζε μέχρι το τέλος του, τον συμβούλεψε να ζωγραφίσει ένα τέτοιο πεντάγωνο έξω από τον τοίχο του σπιτιού του και όταν κάποιος Πυθαγόρειος περάσει από εκεί το δει θα τον ξεπληρώσει. Ένας Πυθαγόρειος πέρασε από το σπίτι πολλά χρόνια αργότερα και ο άντρας ανταμείφθηκε πλουσιοπάροχα.

Για την κατασκευή του πενταγώνου αυτού οι Πυθαγόρειοι θα πρέπει να χρησιμοποίησαν το γεγονός ότι κάθε μια από αυτές τις 5 γραμμές, χώριζε κάθε άλλη σε αναλογία άκρου μέσου λόγου (χρυσή τομή). Στο παρακάτω σχήμα το  $AK = a - x$  είναι



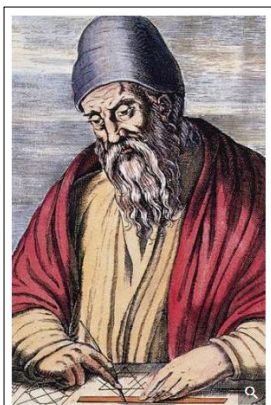
Εικόνα 4-9 Πυθαγόρειο πεντάγραμμα  
(Waerden B. V., 1975, p. 101)

προς το μεγαλύτερο τμήμα  $KB = x$ , ότι το KB είναι σε ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα  $AB = a$ .

Η ορθότητα του ισχυρισμού προκύπτει από τα όμοια τρίγωνα AIB και KFB. Ο λόγος BI:BA ή αλλιώς  $(a - x):x = x:a$ , οδηγεί στην δευτεροβάθμια εξίσωση  $x^2 = a(a - x)$ , την οποία οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν πολύ καλά πώς να την λύσουν. Το σχήμα αυτό ήταν επίσης γνωστό στους Βαβυλωνίους, αφού εμφανίζεται σε Βαβυλωνιακά σχέδια. Αποτελεί ένα ακόμα κοινό

σημείο επαφής μεταξύ των Βαβυλωνίων και των Πυθαγορείων. (Waerden B. V., 1975, pp. 100-101)

<sup>38</sup> Ο Θεαίτητος έζησε περίπου το 415- 369 π. Χ. Ήταν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του Πλάτωνα. Καταγόταν από το Σούνιο. Υπήρξε μαθητής του Θεόδωρου του Κυρηναίου και ήταν πάντα στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Η κύρια συνεισφορά του στα μαθηματικά έχει να κάνει με τους άρρητους αριθμούς και οι μελέτες του συνοψίζονται στο βιβλίο 10 των Στοιχείων, του οποίου είναι και συγγραφέας. Πιθανόν να είναι και συγγραφέας του βιβλίου 13 για την μελέτη των κανονικών στερεών. (Στ. Νεγρεπόντης μάθημα Ιστορίας των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών)



Εικόνα 4-10 Ευκλείδης -χρωματιστή ξυλογραφία 1584 μ.Χ  
(<https://www.britannica.com/biography/Euclid-Greek-mathematician>)

## 4.5 Ευκλείδης

Ο Ευκλείδης έζησε περίπου το 300 π.Χ στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, την εποχή του Πτολεμαίου του πρώτου. Αναφέρεται ότι ο Πτολεμαίος κάποτε ρώτησε τον Ευκλείδη αν υπάρχει οδός προς την γεωμετρία συντομότερη της «Στοιχειώσεως» και αυτός απάντησε πως δεν υπάρχει βασιλική οδός προς την γεωμετρία. Όλα τα μαθηματικά που καλλιεργήθηκαν στην σχολή του Πλάτωνος

συγκεντρώθηκαν στο έργο του Ευκλείδη, κατά τρόπο υποδειγματικό. Μάζεψε όλα τα Στοιχεία (πολλά του Ευδόξου και του Θεαίτητου) και τελειοποίησε όσες αποδείξεις ήταν “μαλακές”. Είναι πολύ δύσκολο να πούμε ποιες είναι οι πρωτότυπες ανακαλύψεις του, που ο ίδιος προσέθεσε στο έργο των προγενέστερών του.

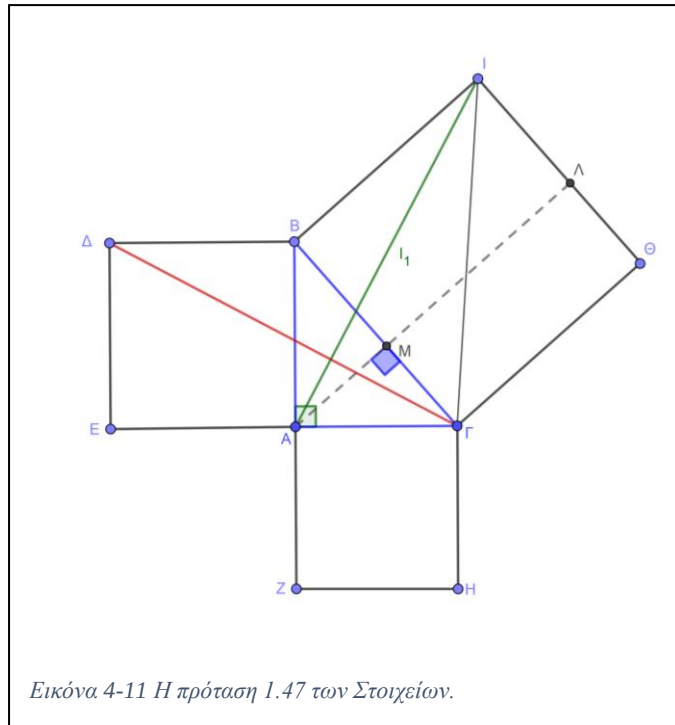
### 4.5.1 Δομή των Στοιχείων του Ευκλείδη

Table 4-1 Δομή των Στοιχείων του Ευκλείδη

|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Βιβλία<br>I-VI        | <ul style="list-style-type: none"> <li>• I-II περιέχουν προτάσεις για ευθύγραμμα σχήματα.</li> <li>• III-IV περιέχουν προτάσεις για κύκλους</li> <li>• V-VI στηρίζονται θεωρία λόγων - μεγεθών του Ευδόξου.</li> </ul>                                                                          |
| Βιβλία<br>VII-IX      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Αριθμητικά βιβλία. Το βιβλίο 7 είναι Πυθαγόρειο και βελτιωμένο απο τον Θεαίτητο.</li> <li>• Το βιβλίο 8 αποδίδεται στον Αρχύτα.</li> <li>• Το βιβλίο 9 και συγκεκριμένα η πρόταση 9.20 έχει το θεώρημα περί ύπαρξης άπειρων πρώτων αριθμών.</li> </ul> |
| Βιβλία<br>X -<br>XIII | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Το X περιλαμβάνει την θεωρία των άλογων γραμμών.</li> <li>• Το XI περιέχει βασικές προτάσεις στερεομετρίας.</li> <li>• Το XII περιέχει όγκους και επιφάνειες</li> <li>• Το XIII περιέχει την θεωρία για τα κανονικά στερεά.</li> </ul>                 |

#### 4.5.2 Το βιβλίο I των Στοιχείων και η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Ο Πρόκλος εις Ευκλείδην, στα σχόλια του για το βιβλίο I και συγκεκριμένα για την πρόταση I.47 (Πυθαγόρειο θεώρημα) λέει πως η απόδειξη που περιλαμβάνεται δεν είναι η



Εικόνα 4-11 Η πρόταση 1.47 των Στοιχείων.

αρχική απόδειξη των Πυθαγορείων, αλλά είναι το Ευκλείδη. Η πρόταση I.47 όπως αυτή αναφέρεται στα Στοιχεία και η απόδειξή της είναι:

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με  $\hat{A}$  ορθή γωνία. Χρησιμοποιούμε την πρόταση 1.46 (Δοθείσης ευθείας  $\alpha$  να κατασκευασθεί τετράγωνο πλευράς  $\alpha$ ) για να κατασκευάσουμε τα τετράγωνα ABΔΕ, BIΘΓ και ΑΓΗΖ.

Φέρουμε την ΑΙ και την ΓΔ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$AB^2 = \gamma^2 = (AB\Delta E) = (M\Lambda IB)$$

Equation 4-1

$$\text{και } A\Gamma^2 = \beta^2 = (A\Gamma H Z) = (M\Gamma\Theta\Lambda).$$

Equation 4-2

Για τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΒΙ έχουμε:

$$\begin{cases} B\Delta = AB \\ B\Gamma = BI \\ \hat{\Delta B\Gamma} = \hat{A B I} \end{cases}$$

Equation 4-3

Από την πρόταση I.4 τα τρίγωνα είναι ίσα, δηλαδή έχουν ίσα εμβαδά.

Από την πρόταση I.41 έχουμε ότι:

$$\begin{cases} \gamma^2 = 2(B\Gamma\Delta) \\ (B M \Lambda I) = 2(AB I) \end{cases}$$

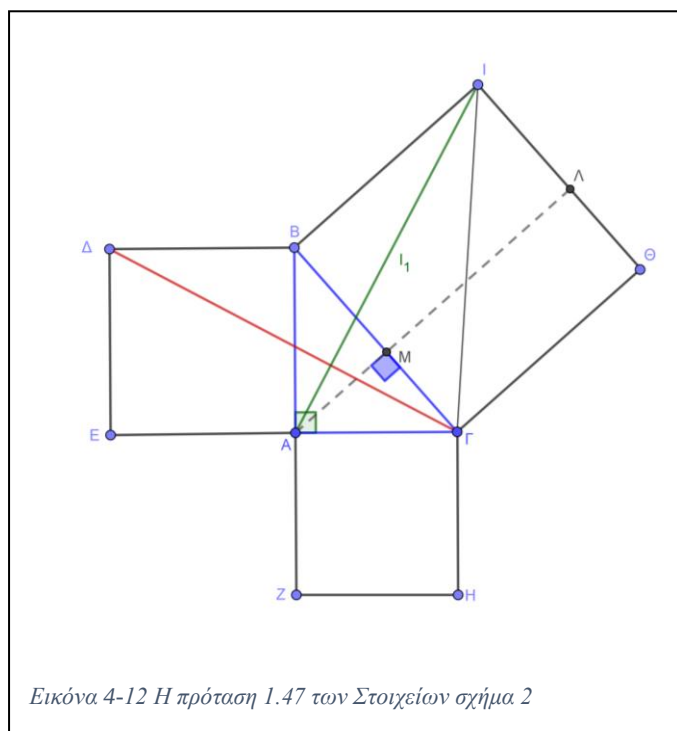
Equation 4-4

$$\text{Άρα } \gamma^2 = (B M \Lambda I).$$



Θα δείξουμε ότι:  $\beta^2 = (A\Gamma ZH) = (\Gamma M \Lambda \Theta)$ .

Equation 4-5



Για τα τρίγωνα ΗΓΒ και ΘΑΓ.

$$\begin{cases} \Gamma H = A\Gamma \\ \Gamma B = \Gamma \Theta \\ \angle A\hat{\Gamma}\Theta = \angle B\hat{\Gamma}H \end{cases}$$

Equation 4-6

Από την πρόταση Ι.4 τα τρίγωνα είναι ίσα, δηλαδή έχουν ίσα εμβαδά.

Από την πρόταση Ι.41 έχουμε ότι:

$$\begin{cases} \beta^2 = 2(H\Gamma B) \\ (\Gamma M \Lambda \Theta) = 2(A\Gamma \Theta) \end{cases}$$

Equation 4-7

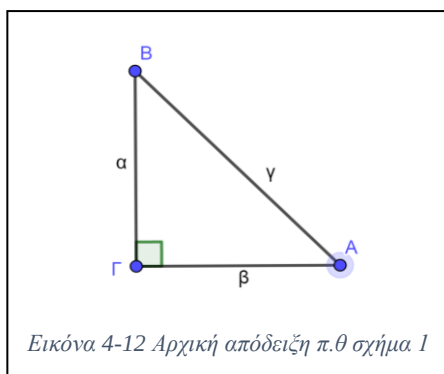
Άρα  $\beta^2 = (\Gamma M \Lambda \Theta)$ .

Από την πρόταση ΙΙ.3

έχουμε  $(B\Gamma\Theta) = (A\Gamma HZ) + (B\Delta EA)$  κι επομένως  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Η παραπάνω απόδειξη φέρεται να είναι του Ευκλείδη και όχι των Πυθαγορείων. Ο Πλάτων στον διάλογο *Μένων* (84d-85b), ο οποίος πιθανολογείται πως γράφτηκε μεταξύ 427-347 π.Χ και συνεπώς είναι πιο κοντά χρονικά στους Πυθαγορείους, παρά στη συγγραφή των *Στοιχείων*, κάνει εκτενέστατη αναφορά στο Πυθαγόρειο Θεώρημα για ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα. Ο Πλάτωνας στο *Μένων* αναφέρει το Πυθαγόρειο θεώρημα για ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα. Εφόσον ο *Μένων* γράφτηκε πολύ πριν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, η απόδειξη αυτής της ειδικής περίπτωσης είναι πολύ παλαιότερη από αυτή που δίνει ο Ευκλείδης. Η αρχική Πυθαγόρεια απόδειξη φέρεται να είναι η εξής:

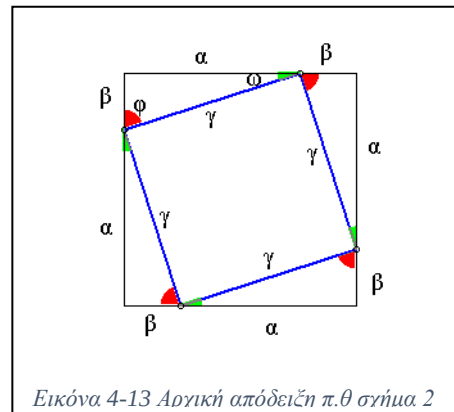
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές α,β και υποτείνουσα γ. Θέλουμε





να αποδείξουμε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ .

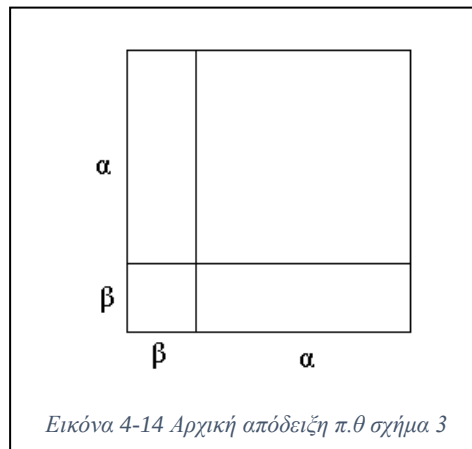
Σχηματίζουμε τετράγωνο με πλευρά  $\alpha + \beta$  ως εξής.



Από την πρόταση 1.32 γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ . Άρα  $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 1$  ορθή. Συνεπώς το τετράπλευρο με πλευρές  $\gamma$  είναι τετράγωνο. Το εμβαδόν του εξωτερικού τετραγώνου είναι

$$(\alpha + \beta)^2 = \gamma^2 + 2\alpha\beta$$

Equation 4-8



Μπορούμε τώρα να ανακατασκευάσουμε το τετράγωνο αυτό ως εξής:

Από την πρόταση II.4 έχουμε ότι  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Equation 4-9

Από τις σχέσεις Equation 4-8 και Equation 4-9 έχουμε:

$$\gamma^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \text{ που σημαίνει ότι } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Η δεύτερη απόδειξη, όπως αυτή προκύπτει από τον διάλογο *Μένων* χρησιμοποιεί την πρόταση II.4 είναι πολύ βασική στο βιβλίο II των Στοιχείων και αποτελεί μια μέθοδο για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, όπως θα δούμε παρακάτω.

Βλέπουμε ότι η απόδειξη του Πυθαγορείου από τους αρχαίους Έλληνες περίπου το 400 π. Χ χρησιμοποιεί την έννοια του γνώμονα και την κάλυψη επιφανειών. Αντίστοιχα οι Κινέζοι την δική τους εκδοχή του πυθαγόρειου θεωρήματος, είχαν μια απόδειξη η οποία πρόκυπτε και αυτή από την κάλυψη επιφανειών. Η απόδειξη δεν είναι ίδια, αλλά η λογική τους ομοιάζει. Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι Κινέζοι γνώριζαν την απόδειξη του Πυθαγόρα, αφού κάτι τέτοιο μοιάζει αδύνατο. Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε την ομοιότητα στον συλλογισμό των δυο αποδείξεων.

#### 4.5.3 Το βιβλίο II των Στοιχείων και η λεγόμενη «Γεωμετρική Άλγεβρα»

Μπορεί τα στοιχεία που έχουμε σήμερα για την ζωή του Ευκλείδη να είναι ελάχιστα και να μην γνωρίζουμε ποιος ακριβώς ήταν ο Ευκλείδης, αυτό όμως που μπορούμε να πούμε είναι ότι αποδεδειγμένα βάσισε τα *Στοιχεία* στις αρχές του Αριστοτέλη<sup>39</sup>. Το κείμενό του σύντομα αποτέλεσε πρότυπο για τον σωστό τρόπο γραφής των μαθηματικών – με ορισμούς, αξιώματα και λογικές αποδείξεις – ένα μοντέλο που διατηρείτε μέχρι σήμερα. Τα “*Στοιχεία*” περιέχουν όχι μόνο τα βασικά θεωρήματα της επιπεδομετρίας, η οποία ακόμα διδάσκεται στα σχολεία ανά τον κόσμο, αλλά και υλικό σχετικά με την στοιχειώδη θεωρία αριθμών και την στερεομετρία. Εάν τα “*Στοιχεία*” περιέχουν άλγεβρα είναι ένα θέμα το οποίο έχει δημιουργήσει αντιπαράθεση ειδικά μετά τα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα. Η διαμάχη επικεντρώνεται κυρίως γύρω από την ερμηνεία και τον σκοπό του βιβλίου II. Υπό κάποια έννοια, η αντιπαράθεση εστιάστηκε γύρω από δυο κεντρικούς άξονες, πρώτον την ιστορία γύρω από το πώς και γιατί γράφηκε και δεύτερον την ερμηνεία του και την χρήση του κατά την διάρκεια των χρόνων, μέχρι σήμερα. (Katz & Parshall, 2014, pp. 34-35)

Το βιβλίο II των *Στοιχείων* περιέχει μια σειρά προτάσεων, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά γεωμετρικές διατυπώσεις αλγεβρικών τύπων. Για παράδειγμα η πρόταση II.1 λέει:

---

<sup>39</sup> Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ) αποτελεί μια πολύ σημαντική προσωπικότητα σχετικά με την συζήτηση βάσει επιχειρημάτων. Κωδικοποίησε τις αρχές των λογικών επιχειρημάτων και επέμενε πως η ανάπτυξη κάθε είδους γνώσης πρέπει να ξεκινάει με τον ορισμό των εννοιών και την διατύπωση των αξιωμάτων, τα οποία αποτελούν την διατύπωση της αλήθειας. Έδινε επίσης έμφαση στην συλλογιστική ως δομικό λίθο των λογικών επιχειρημάτων. (Katz & Parshall, 2014, p. 34)

### Πρόταση II.1

Έστω ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha, \beta$ . Αν το  $\beta$  διαιρεθεί σε οσαδήποτε τμήματα, τότε το ορθογώνιο που ορίζουν τα  $\alpha, \beta$  είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των ορθογωνίων που ορίζουν

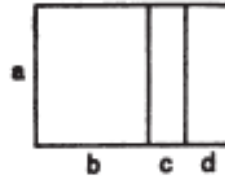


Fig. 33.

Εικόνα 4-15 Πρόταση II.1 (Waerden B. V., 1975, p. 118)

το  $a$  με καθένα από τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το  $\beta$ .

Οι προτάσεις 2 και 3 αποτελούν ειδικές μορφές της παραπάνω. Η πρόταση II.4 είναι πολύ βασική και σημαντική, σε αυτή στηρίζονται πολλές από τις προτάσεις του βιβλίου II. Η πρόταση II αντιστοιχεί στον τύπο  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ . Η πρόταση διατυπώνεται ως εξής:

### Πρόταση II.4

$$(a + b)^2 = a^2 + \Gamma, \text{ όπου } \Gamma = b^2 + 2ab$$

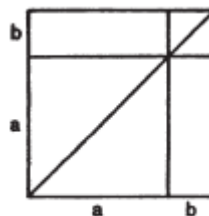


Fig. 34.

Εικόνα 4-16 Πρόταση II.4 (Waerden B. V., 1975, p. 118)

Η απόδειξη προκύπτει πολύ εύκολα από το δοθέν σχήμα.

Αντίστοιχα στην πρόταση II.7 μπορεί κάποιος να αναγνωρίσει τον τύπο:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

Με βάση τα παραπάνω ο Van Der Waerden υποστηρίζει ότι θα πρέπει να μιλήσουμε για την αρχή ενός βιβλίου άλγεβρας, με γεωμετρική μορφή, δηλαδή για γεωμετρική άλγεβρα.

Τα μεγέθη είναι πάντα ευθύγραμμα τμήματα και στην θέση του  $a^2$  οι Έλληνες έλεγαν το τετράγωνο πλευράς  $a$ , το  $\alpha\beta$  είναι το ορθογώνιο πλευρών  $a$  και  $\beta$ .

Το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας των πολυγώνων και πολύεδρων βασίζονται σε αυτές τις προτάσεις, επίσης όλη η θεωρία των κωνικών τομών. Ο Θεαίτητος τον 4<sup>ο</sup> αιώνα, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος τον 3<sup>ο</sup> αιώνα μπορούσαν πολύ καλά να χειριστούν αυτές τις προτάσεις.

Σύμφωνα με τον Van den Waerden η “γεωμετρική άλγεβρα” των Ελλήνων αποτελεί συνέχεια της Άλγεβρας των Βαβυλωνίων. Οι Βαβυλώνιοι όπως έχουμε ήδη δει στην παράγραφο 2 της παρούσης, χρησιμοποιούσαν και αυτοί τους όρους «ορθογώνιο» αντί του  $xy$  και «τετράγωνο» αντί του  $x^2$ , αλλά εκτός από αυτά εμφανίζονται επίσης αριθμητικές εκφράσεις, όπως πολλαπλασιασμός, εξαγωγή ρίζας κλπ.. Οι Έλληνες, από την άλλη πλευρά, αποφεύγουν με συνέπεια τέτοιες εκφράσεις, εκτός αν πρόκειται για πράξεις με ακεραίους ή απλά κλάσματα και το καθετί είναι μεταφρασμένο σε γεωμετρική ορολογία. (Waerden B. V., 1975, pp. 118-119)

Σύμφωνα με αυτά όσα έχουμε δει ως τώρα για του Βαβυλωνίους, για να λύσουν οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις της μορφής  $x^2 \pm ax = \beta$ , ακολουθούσαν τις παρακάτω μεθόδους.

- Μετασχημάτιζαν το πρώτο μέρος, ώστε να γίνει τέλειο τετράγωνο  $\left(x \pm \frac{1}{2}a\right)^2 = \beta + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$ .

Equation 4-10

- Ένας άλλος τρόπος λιγότερο διαδεδομένος ήταν να χρησιμοποιούν ένα δεύτερο άγνωστο  $y = x \pm a$ , οπότε είχαν τη διαφορά  $a$  των  $x$  και  $y$  και το γινόμενο  $xy = x(x \pm a) = \beta$  και επομένως το ανήγαγαν στην περίπτωση αυτή στην

$$\begin{cases} xy = \beta \\ x - y = a \end{cases}$$

Equation 4-11

Παρατηρούμε ότι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις της μορφής  $x^2 \pm ax = \beta$  θυμίζουν πολύ την Πυθαγόρεια παραβολή τετραγωνικών χωρίων  $x(a \pm x) = \mu^2$ , δηλαδή τις προτάσεις VI.28 και VI.29 των Στοιχείων, τις οποίες θα αναλύσουμε παρακάτω. Μια σημαντική διαφορά όμως είναι ότι, ενώ οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούν το τετράγωνο του ευθύγραμμου τμήματος  $\mu$ , οι Βαβυλώνιοι, που έχουν πρωτίστως αλγεβρική σκέψη, χρησιμοποιούν τον αριθμό  $\beta$ . Μια ομοιότητα είναι ότι και οι δύο χρησιμοποιούν το  $\frac{a}{2}$  οι μεν για να κατασκευάσουν κατάλληλο ορθογώνιο τρίγωνο και οι δε για να συμπληρώσουν το τέλειο τετράγωνο.

Δύο τυπικά Βαβυλωνιακά προβλήματα συστήματος εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι τα:

$$\begin{array}{lll} \text{Equation 4-12} & \begin{cases} x + y = \alpha \\ xy = \beta \end{cases} & \begin{array}{l} \text{που έχει λύση} \\ x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \\ y = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \end{array} \\ \text{και} & & \\ \text{Equation 4-13} & \begin{cases} x - y = \alpha \\ xy = \beta \end{cases} & \begin{array}{l} \text{που έχει λύση} \\ x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} + \frac{\alpha}{2} \\ y = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} - \frac{\alpha}{2} \end{array} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι τα προβλήματα αυτά και οι λύσεις τους είναι εντελώς ανάλογα προς τις προτάσεις II.5, II.6, αλλά και τις VI.28, VI.29, δηλαδή την Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων.

Ας δούμε λοιπόν ποιες είναι οι παραπάνω προτάσεις.

#### 4.5.4 Οι προτάσεις II.5 και II.6 των Στοιχείων.

Ο επόμενος τύπος που θα περίμενε κανείς είναι η διαφορά τετραγώνων  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$  ή, μιας και ο Ευκλείδης αποφεύγει να αφαιρεί επιφάνειες, ο  $\alpha^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + \beta^2$ . Πράγματι, στις προτάσεις II.5 και II.6 συναντάμε αυτόν ακριβώς τον τύπο, αλλά με μια αξιοσημείωτη διπλή μορφή.

Συγκεκριμένα:

##### **Πρόταση II.5:**

“Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ

Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από το μέσο του σε δύο ίσα τμήματα και από ένα σημείο του σε δύο άνισα τμήματα, το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα μαζί με το τετράγωνο που έχει πλευρά το τμήμα με άκρα τα σημεία διαίρεσης είναι ίσα με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό του αρχικού τμήματος.”

Με πιο σύγχρονο τρόπο, η πρόταση II.5 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αν  $a, x$  δύο ευθύγραμμα τμήματα και  $\frac{a}{2} > x$ , τότε  $x(a - x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ .

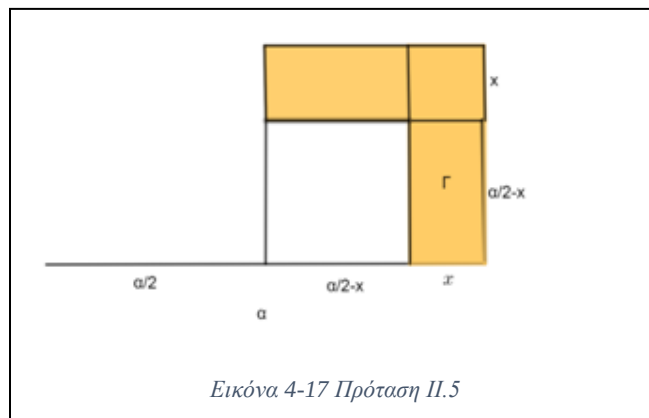
Επίσης, αν συμβολίσουμε το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα της πρότασης II.5 με  $2\alpha$  και το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία διαίρεσης με  $\beta$ , τότε μπορούμε να διατυπώσουμε τη II.5 με τον τύπο  $\alpha^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + \beta^2$ .

### Απόδειξη:

Μέχρι τώρα στην ιστορία όσων λαών έχουμε εξετάσει δεν έχει βρεθεί η απόδειξη των μεθόδων που χρησιμοποιούσαν. Όλοι τους περιέγραφαν την διαδικασία που ακολουθούσαν προκειμένου να επιλύσουν κάτι, χωρίς όμως να αναφέρουν πως αυτό έχει προκύψει και να το βασίζονται κάτι. Στους Κινέζους για παράδειγμα ενώ βλέπουμε να επιλύουν μια δευτεροβάθμια εξίσωση στο Nine Chapters της μορφής  $x^2 + bx = c$ , όπου  $b, c$  είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα IX.20, δεν γίνεται καμία αναφορά στον τρόπο λύσης και ακόμα και ο σχολιαστής Lui Hui, ενώ αναλύει τον τρόπο που έχει προκύψει η εξίσωση, δεν αναφέρει τίποτα για τον τρόπο λύσης, παρά μόνο το αποτέλεσμα.

Αυτό μας κάνει να αναρωτιόμαστε αν όντως γνώριζαν τον τρόπο λύσης ή το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν απλώς διατυπωμένο γνωρίζοντας την λύση από πριν.

Στα “Στοιχεία” όμως βλέπουμε έναν τελείως διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης. Ο Ευκλείδης μετά από κάθε πρόταση, παραθέτει και την αντίστοιχη απόδειξη. Η απόδειξη που δίνεται για την παραπάνω πρόταση είναι η εξής:



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + \Gamma \\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + x\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) + x\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) + x^2 \\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + 2x\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) + x^2 \\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + 2x\frac{\alpha}{2} - 2x^2 + x^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + ax - x^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 - x(a - x)$$

Επομένως:

$$x(a - x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Equation 4-14

Αν τώρα ονομάσουμε  $x$  και  $y$  τα δύο άνισα μέρη στα οποία διαιρείται η  $2a$  στη II.5, τότε η II.5 μπορεί να εκφραστεί με τον τύπο

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2, \text{ δηλαδή } \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy.$$

Παρατηρούμε ότι μπορεί λοιπόν να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Συγκεκριμένα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση εξισώσεων της μορφής

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

Equation 4-15

(Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra, 1937, p. 460)

### **Πρόταση 2.6:**

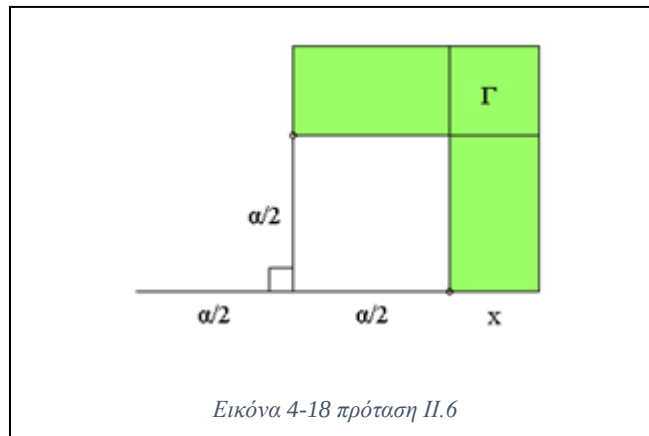
*Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.*

*Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθῇ σε δύο ἴσα μέρη και προστεθῇ στην προέκτασή του ἓνα ευθύγραμμο τμήμα, το ορθογώνιο που περιέχεται ἀπὸ το ὅλο ευθύγραμμο τμήμα και την προέκταση, μαζί με το τετράγωνο ἀπὸ το μισό του ευθύγραμμου τμήματος, εἶναι ἴσο με το τετράγωνο που ἔχει πλευρά το μισό του ευθύγραμμου τμήματος και την προέκταση.*

Με πιο σύγχρονο τρόπο, η πρόταση II.6 μπορεί να διατυπωθεῖ ως εξής:

Αν  $a, x$  δύο ευθύγραμμα τμήματα ισχύει ὅτι  $x(a + x) = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ .

**Απόδειξη:**



$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \Gamma \\ \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x\left(\frac{a}{2}\right) + x\left(\frac{a}{2}\right) + x^2 \\ \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2x\frac{a}{2} + x^2 \\ \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ax + x^2 \\ \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x(a + x)\end{aligned}$$

Επομένως:

$$x(a + x) = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

*Equation 4-16*

Αν όμως χρησιμοποιήσουμε το  $x$  για να συμβολίσουμε το άθροισμα του δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος και της προέκτασής του στη II.6 και το  $y$  για να συμβολίσουμε την προέκταση, τότε και η II.6 μπορεί να εκφραστεί με τον τύπο αυτό.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2, \text{ δηλαδή } \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy.$$

Παρατηρούμε ότι μπορεί λοιπόν να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Συγκεκριμένα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση εξισώσεων της μορφής

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$$

*Equation 4-17*



Βλέπουμε όμως ότι τόσο η II.5, όσο και η II.6 οδηγούν στον ίδιο τύπο. Γιατί ο Ευκλείδης δίνει δυο διαφορετικές προτάσεις που οδηγούν στον ίδιο τύπο;

Για να κατανοήσουμε γιατί ο Ευκλείδης δίνει δύο προτάσεις για τον ίδιο τύπο, πρέπει να δούμε πώς χρησιμοποιούνται οι προτάσεις αυτές στα *Στοιχεία* και σε άλλα έργα του Ευκλείδη. Στο έργο του “*Δεδομένα*”, στις προτάσεις 84 και 85, το θέμα που εξετάζεται είναι πώς να αποδειχθεί ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα  $x$  και  $y$  είναι γνωστά, όταν δίνονται το άθροισμα  $x + y$  ή η διαφορά τους  $x - y$  και επίσης το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από αυτά. Όταν δίνεται το άθροισμα  $x + y = 2\alpha$ , τότε εφαρμόζεται η II.5 προκειμένου να προσδιοριστεί η ημιδιαφορά  $\frac{1}{2}(x - y) = \beta$ . Εάν δίνεται η διαφορά, τότε χρησιμοποιείται η II.6 προκειμένου να υπολογιστεί το ημιάθροισμα από τον τύπο:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Equation 4-18

Είναι φανερό ότι οι II.5 και II.6 δεν είναι προτάσεις, αλλά **λύσεις προβλημάτων**. Στη II.5 ζητείται να κατασκευαστούν ευθύγραμμα τμήματα  $x$  και  $y$ , όταν δίνεται το άθροισμα και το γινόμενο, ενώ στη II.6 όταν δίνεται η διαφορά και το γινόμενο.

Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα και από το πώς χρησιμοποιούνται οι προτάσεις αυτές στα *Στοιχεία*. Στη II.11 ζητείται να διαιρεθεί ένα τμήμα σε άκρο και μέσο λόγο. Ο τρόπος επίλυσης που ακολουθεί ο Ευκλείδης είναι ακριβώς η Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων καθ’ υπερβολήν, δηλαδή με χρήση της II.6. Οι προτάσεις VI.28 και VI.29, που είναι γενικεύσεις των II.5 και II.6, είναι διατυπωμένες καθαρά ως προβλήματα. Επιπλέον, στο βιβλίο X των *Στοιχείων*, που πραγματεύεται τη θεωρία των άρρητων τμημάτων, μια σημαντική κατασκευή (X 33-35) εξαρτάται από την παραβολή χωρίων κατ’ έλλειψιν. (Waerden B. V., 1975, pp. 120-121)

Τι εννοούμε με τους όρους κατ’ έλλειψιν και κατ’ υπερβολήν;

Είναι το παραλληλόγραμμο ενός δοθέντος σχήματος, το οποίο είτε λείπει, είτε πλεονάζει, αντίστοιχα κατ’ έλλειψιν και κατ’ υπερβολήν. Η εφαρμογή αυτού σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ενός παραλληλογράμμου δοθείσας περιοχής ονομάζεται παραβολή. Ο Πρόκλος στα σχόλια του στον Ευκλείδη και συγκεκριμένα για την πρόταση I.44<sup>40</sup> γράφει:

---

<sup>40</sup> Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. (Heiberg, 2007, p. 43)

«Αυτά τα πράγματα, λέει ο Εύδημος, είναι αρχαία και είναι ανακαλύψεις της Πυθαγόρειας μούσας, εννοώ την παραβολή των χωρίων, την υπερβολή και την έλλειψη. Είναι από τους Πυθαγορείους που οι μεταγενέστεροι γεωμέτρεις – π.χ Απολλόνιος – πήραν τα ονόματα για τις κωνικές γραμμές, χρησιμοποιώντας μια για την παραβολή (εφαρμογή), άλλη για την υπερβολή (περίσσεια) και άλλη για την έλλειψη (έλλειμμα), όπου αυτοί οι θεϊκοί άνθρωποι από παλιά είδαν πράγματα που χαρακτηρίζονταν από αυτές τις λέξεις στις κατασκευές, στο επίπεδο, χωρίων πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Όταν έχεις ένα ευθύγραμμο τμήμα και θέτεις την δοθείσα περιοχή ακριβώς παράλληλα με ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα, τότε λένε ότι παραβάλλειν την περιοχή, όταν κάνεις το μήκος της περιοχής μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο τμήματα, τότε λέγεται ότι υπερβάλλειν την ζητούμενη περιοχή, ενώ όταν κάνεις το μήκος της περιοχής λιγότερο, δηλαδή υπάρχει ένα μέρος της γραμμής που είναι μεγαλύτερο από το μήκος της περιοχής τότε λέγεται ότι ελλείπειν. Ο Ευκλείδης, ο ίδιος, στο βιβλίο VI, μιλάει κατ' αυτόν τον τρόπο για «κατ' έλλειψην και κατ' υπερβολήν, αλλά σε αυτό το σημείο χρειαζόταν μόνο την εφαρμογή, αφού ήθελε σε μια ευθεία γραμμή δοθείσα να εφαρμόσει μια περιοχή ίση με ένα δοθέν τρίγωνο έτσι ώστε να κατέχουμε όχι μόνο την σύστασις του παραλληλογράμμου ίσου με το δοθέν τρίγωνο, αλλά και την εφαρμογή του σε ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Για παράδειγμα ένα έχουμε ένα δοθέν τρίγωνο εμβαδού 12 ποδιών και μια ευθεία γραμμή (ευθύγραμμο τμήμα) 4 ποδιών, να βρούμε πόσα πόδια πρέπει να είναι το πλάτος για να κατασκευάσουμε ένα παραλληλόγραμμο ίσο (ισεμβαδικό) με το τρίγωνο. Σε αυτή την περίπτωση, βρίσκουμε ότι το πλάτος πρέπει να είναι 3 πόδια και πολλαπλασιάζουμε το μήκος με το πλάτος, υποθέτοντας ότι η γωνία που σχηματίζουν είναι ορθή, τότε έχουμε την περιοχή. Αυτή είναι λοιπόν η εφαρμογή όπως διασώθηκε από τον πρώτο καιρό των Πυθαγορείων.» (Heath T. L., 1908, p. 343)

Για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων οι αρχαίοι Έλληνες, τις μετατρέπουν σε μια από τις παρακάτω μορφές:

$$x(x + a) = F, \quad x(a - x) = F, \quad x(x - a) = F$$

Equation 4-19

για την λύση των οποίων χρησιμοποιούν τις παραπάνω προτάσεις. Για την πρώτη και την τρίτη μορφή δίνονται δυο ευθύγραμμο τμήματα, το  $x$  και το  $x \pm a$ , των οποίων δίνεται η διαφορά και το γινόμενο, οπότε χρησιμοποιείτε η πρόταση II.6, δηλαδή το τετράγωνο κατ' υπερβολήν, στην δεύτερη περίπτωση, δίνονται δυο ευθύγραμμο τμήματα τα  $x$  και  $a - x$ ,

των οποίων το άθροισμα και το γινόμενο είναι γνωστά, αυτό οδηγεί στην μέθοδο του τετραγώνου κατ' έλλειψην, δηλαδή την II.5. (Waerden B. V., 1975, p. 123)

Ο Ευκλείδης δεν αναφέρει πουθενά ότι οι προτάσεις II.5 και II.6 που προαναφέρθηκαν είναι για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Σε τι όμως χρησίμευαν;

Για να το καταλάβουμε ας δούμε που χρησιμοποιούνται. Στην πρόταση II.11 ζητείται η κατασκευή άκρου μέσου λόγου και χρησιμοποιείται στην απόδειξη η πρόταση II.6.

#### 4.5.5 Πρόταση II.11 – άκρος μέσος λόγος

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος  $\alpha$  να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα  $x$  ώστε  $\alpha^2 = x(\alpha + x)$ .

Ο τρόπος επίλυσης που ακολουθεί ο Ευκλείδης είναι ακριβώς η Πυθαγόρεια παραβολή τετραγωνικών χωρίων καθ' υπερβολήν με  $\mu = \alpha$ .

#### Απόδειξη:

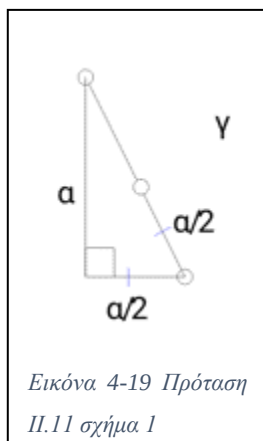
Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές το  $\alpha$  και το  $\frac{\alpha}{2}$ .

Έστω  $\gamma$  η υποτείνουσα.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$$\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \gamma^2$$

Βέβαια  $\gamma > \frac{\alpha}{2}$



Από την πρόταση 1.3 σχηματίζουμε το  $\frac{\alpha}{2}$  πάνω στη  $\gamma$ . Θέτουμε

$$x = \gamma - \frac{\alpha}{2}.$$

Ισχυρισμός:

$$x(\alpha + x) = \alpha^2.$$

Equation 4-20

Από την πρόταση II.6 έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + x(\alpha + x)$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + x(\alpha + x)$$

$$x(a+x) = \gamma^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2$$

Άρα το  $x$  είναι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα. Έχουμε:

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4\alpha^2 + \alpha^2}}{2} = \frac{\sqrt{5\alpha^2}}{2}$$

Συνεπώς:

$$x = \frac{\sqrt{5\alpha^2} - \alpha}{2}$$

Σκοπός της παραπάνω πρότασης είναι να βρεθεί ένα σημείο  $H$  σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, τέτοιο ώστε το ορθογώνιο που θα περιέχεται μεταξύ των  $AB$  και  $HB$  να είναι ίσο (ισεμβαδικό) με το τετράγωνο πλευράς  $AH$ . Αυτό το πρόβλημα ζητάει να βρεθεί μια άγνωστη ποσότητα, δεδομένης της σχέσης της με γνωστές ποσότητες. Υπό αυτό το πρίσμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι ένα αλγεβρικό πρόβλημα. Για να το μεταφράσουμε σε σύγχρονο συμβολισμό και ορολογία, έστω  $AB = \alpha$  και  $AH = x$ . Τότε  $HB = \alpha - x$  και το πρόβλημα οδηγεί στην επίλυση της εξίσωσης:

$$\alpha(\alpha - x) = x^2 \text{ ή}$$

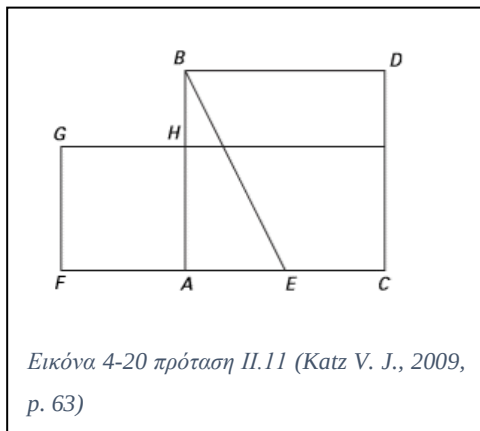
$$x^2 + ax = a^2$$

Equation 4-21

Η λύση που θα έδιναν οι Βαβυλώνιοι σε αυτό το πρόβλημα θα ήταν:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Equation 4-22



Η λύση – απόδειξη του Ευκλείδη, οδηγεί σε αυτόν τον τύπο. Για να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του

αθροίσματος δυο τετραγώνων, η προφανής μέθοδος θα ήταν να χρησιμοποιήσεις την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι οι ρίζες των δοθέντων τετραγώνων. Σε αυτή την περίπτωση  $a$  και  $\frac{a}{2}$ . Συνεπώς ο Ευκλείδης σχεδίασε ένα τετράγωνο επί του  $AB$  και μετά διχοτόμησε το  $AC$  στο  $E$ . Προκύπτει μετά ότι  $EB$  είναι η ζητούμενη υποτείνουσα. Για να αφαιρέσει  $\frac{a}{2}$  από αυτό το μήκος, έφερε την  $EF$  ίση με την  $EB$  και αφαίρεσε από την  $AE$  για να βρει την  $AF$ . Αυτή είναι η ζητούμενη τιμή  $x$ . Επειδή ήθελε το μήκος επί της  $AB$ , βρήκε σημείο  $H$ , τέτοιο ώστε  $AH = HF$ . Για να βρει το  $H$ , ο Ευκλείδης

επικαλέστηκε την πρόταση II.6. Η AC έχει διχοτομηθεί και η AF έχει προστεθεί σε αυτή. Συνεπώς το ορθογώνιο με πλευρές FC και AF συν το τετράγωνο επί της AE ισούται με το τετράγωνο FE. Το τετράγωνο του FE ισούται με το τετράγωνο επί της EB, το οποίο είναι το άθροισμα των τετραγώνων με πλευρές AE και AB. Τα ορθογώνια με πλευρές FC και AF (ίσο με το ορθογώνιο με πλευρές FC και FG) είναι ίσο με το τετράγωνο επί της AB. Αφαιρώντας από το ορθογώνιο AK, παίρνουμε το τετράγωνο AH ίσο με το ορθογώνιο με πλευρές HB και AB, που ήταν το ζητούμενο.

Με αυτό τον τρόπο ο Ευκλείδης έλυσε αυτό που εμείς σήμερα ονομάζουμε δευτεροβάθμια εξίσωση, με γεωμετρική όμως προσέγγιση και “ενδυμασία”, με τον ίδιο τρόπο που θα το έλυναν και οι Βαβυλώνιοι. Ενδιαφέρον αποτελεί ότι έλυσε το ίδιο πρόβλημα ξανά μέσα στα Στοιχεία στην πρόταση VI.30. Εκεί ζητούσε να τμηθεί δοθέν ευθύγραμμο τμήμα σε άκρο- μέσο λόγο, δηλαδή δοθέντος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB να βρεθεί σημείο H τέτοιο ώστε  $AB : AH = AH : HB$ . Όπως είναι κατανοητό αυτό το πρόβλημα οδηγεί αλγεβρικά στην επίλυση ξανά της παραπάνω εξίσωσης. Ο λόγος  $\alpha : x$  από την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή το  $(\sqrt{5} + 1) : 2$ , είναι γενικά γνωστό ως η χρυσή τομή. (Katz V. J., 2009, pp. 62-63)

#### 4.5.6 Πρόταση II.14 – Κατασκευή μέσης ανάλογης

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο προς δεδομένο ευθύγραμμο σχήμα.

Από την πρόταση 1.45 γνωρίζουμε ότι για κάθε ευθύγραμμο χωρίο E υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει το ίδιο εμβαδό με το E. Συνεπώς, η πρόταση II.14 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Δοθέντων δύο ευθύγραμμων τμημάτων  $\varphi, \omega$ , να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα  $\mu$  ώστε

$$\varphi \cdot \omega = \mu^2.$$

Η απόδειξη που δίνει ο Ευκλείδης στα Στοιχεία είναι η εξής.

Αν  $\varphi = \omega$ , τότε  $\mu = \varphi$ .

Έστω  $\varphi > \omega$ . Θέτουμε  $\alpha = \varphi + \omega$  και  $x = \omega$ .

Τότε  $\frac{\alpha}{2} > x$

Εφαρμόζουμε την πρόταση II.5 κι έχουμε

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + x(\alpha - x)$$

$$\left(\frac{\varphi + \omega}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varphi + \omega}{2} - \omega\right)^2 + \omega \cdot (\varphi + \omega - \omega)$$

$$\left(\frac{\varphi + \omega}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varphi - \omega}{2}\right)^2 + \omega \cdot \varphi$$

Χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο θεώρημα για το τρίγωνο

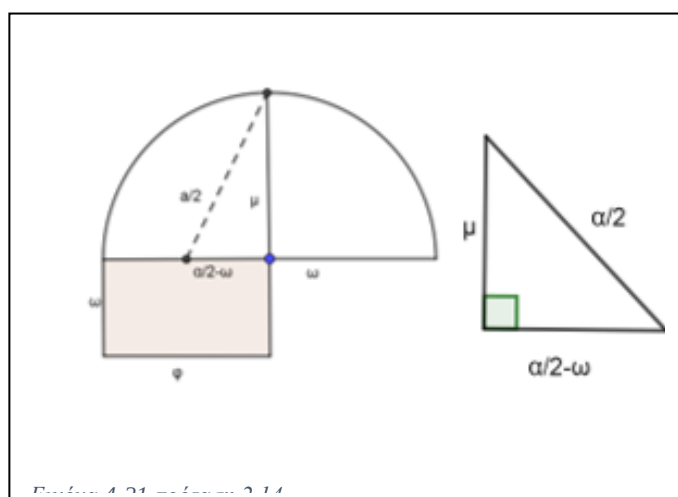
Κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα  $\mu$ , ώστε

$$\mu^2 + \left(\frac{\varphi - \omega}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varphi + \omega}{2}\right)^2$$

Άρα:

$$\mu^2 = \omega \cdot \varphi$$

Equation 4-23



Μπορούμε και αυτή την πρόταση να την δούμε ως αλγεβρικό πρόβλημα, αφού μας ζητείτε να βρούμε την άγνωστη πλευρά ενός τετραγώνου που ικανοποιεί δεδομένες συνθήκες. Σε σύγχρονη ορολογία μας ζητείτε να λύσουμε την  $x^2 = cd$ , όπου  $c$  και  $d$  είναι τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου που κατασκευάζεται με χρήση της I.45,

ισεμβαδικού με το παραπάνω σχήμα. Όπως και την πρόταση II.11 ο Ευκλείδης λύνει και το παραπάνω πρόβλημα και δεύτερη φορά χρησιμοποιώντας την πρόταση VI.13. Στο βιβλίο VI ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τις μεθόδους κατ' έλλειψην και κατ' υπερβολήν, οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες στην συνέχεια για τις κωνικές τομές. (Katz V. J., 2009, pp. 63-64)

Για να τις δούμε:

#### 4.5.7 Παραβολή χωρίων κατ' έλλειψην και παραβολή χωρίων κατ' υπερβολήν – επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Ο Ευκλείδης στο βιβλίο VI στις προτάσεις του VI.28 και VI.29 επιλύει δυο τύπους δευτεροβάθμιων εξισώσεων γεωμετρικά. Ποιες είναι αυτές οι προτάσεις;

##### Πρόταση VI.28 – κατ' έλλειψην

Δοθέντων δύο ευθύγραμμων τμημάτων  $\alpha$  και  $\mu$ , ώστε  $\frac{\alpha}{2} > \mu$ . Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα  $x$  τέτοιο, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη  $\mu^2 = x(\alpha - x)$ .

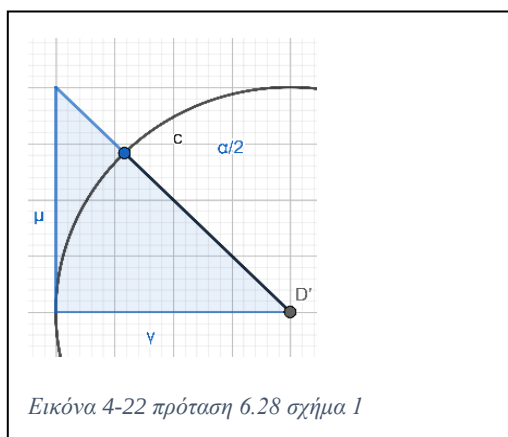
### Απόδειξη

Βήμα 1: Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με μια κάθετη πλευρά τη  $\mu$  και υποτείνουσα  $\frac{\alpha}{2}$ .

Έστω  $\gamma$  η άλλη κάθετη πλευρά. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\mu^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Equation 4-24



Βέβαια  $\frac{\alpha}{2} > \gamma$ . Από την πρόταση I.3 σχηματίζουμε το  $\gamma$  πάνω στην υποτείνουσα  $\frac{\alpha}{2}$ .

Βήμα 2: Θέτουμε  $x = \frac{\alpha}{2} - \gamma$

Βήμα 3: Αποδεικνύουμε ότι:  $x(\alpha - x) = \mu^2$ .

Από την πρόταση II.5 έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + x(\alpha - x)$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \gamma^2 + x(\alpha - x)$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \gamma^2 = x(\alpha - x)$$

$$\mu^2 = x(\alpha - x).$$

$$\text{Έχουμε } \gamma = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\mu^2}{2}}$$

$$\text{Άρα } x = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\mu^2}}{2}$$

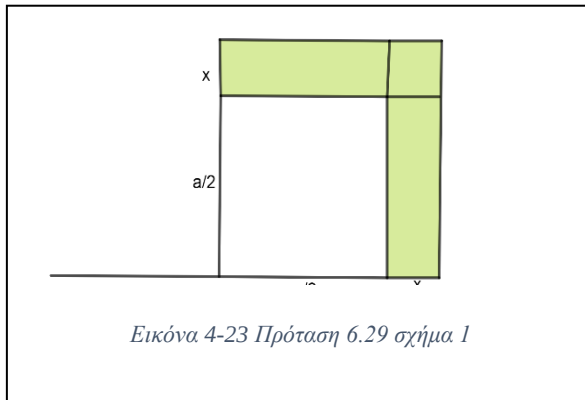
Equation 4-25

### Πρόταση VI.29 – κατ' υπερβολήν

Δοθέντων δύο ευθύγραμμων τμημάτων  $\alpha$  και  $\mu$  να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα  $x$ , ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη  $\mu^2 = x(\alpha + x)$ .

Η απόδειξη αυτή γίνεται σε 4 βήματα:

Βήμα 1: Παίρνω την  $\alpha$  και την διαιρώ σε 2 ίσα μέρη. Σχηματίζω τετράγωνο πλευράς  $\frac{\alpha}{2}$



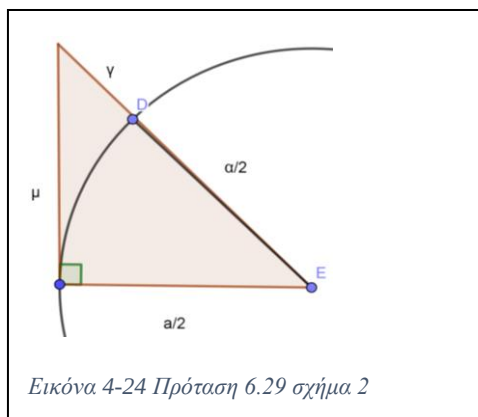
**Βήμα 2:** Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές το  $\frac{a}{2}$  και το  $\mu$ . Έστω  $\gamma$  η υποτείνουσα. Εφαρμόζω το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι

$$\mu^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \gamma^2.$$

Βέβαια  $\gamma > \frac{a}{2}$ .

Από την πρόταση Ι.3 σχηματίζουμε το  $\frac{a}{2}$  πάνω στη  $\gamma$ .



**Βήμα 3:** Θέτουμε  $x = \gamma - \frac{a}{2}$ .

**Βήμα 4:** Αποδεικνύουμε ότι

$$x(\alpha + x) = \mu$$

Από την πρόταση ΙΙ.6 έχουμε

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 +$$

$$x(\alpha + x)$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x(\alpha + x)$$

$$\text{Έχουμε } \gamma = \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4\mu^2 + a^2}}{2}$$

$$\text{Άρα } x = \frac{\sqrt{4\mu^2 + a^2} - a}{2}$$

Equation 4-26

Υπάρχει μια διαμάχη σχετικά με το αν η “γεωμετρική άλγεβρα” στον Ευκλείδη πηγάζει από κάποιο μετασχηματισμό των Βαβυλωνιακών σχεδόν αλγεβρικών αποτελεσμάτων σε αυστηρή γεωμετρική μορφή. Οι λύσεις του Ευκλείδη σε κάποια κατασκευαστικά προβλήματα καθρεπτίζουν τις αντίστοιχες Βαβυλωνιακές λύσεις. Κάποιος



θα μπορούσε να σχολιάσει ότι η προσαρμογή στην γεωμετρική οπτική των Ελλήνων, δεδομένης της αναγκαιότητας για απόδειξη, συσχετιζόταν με την ανακάλυψη ότι δεν μπορεί κάθε ευθύγραμμο τμήμα να αναπαρασταθεί με έναν “αριθμό”. Με την ανακάλυψη δηλαδή της ασυμμετρίας από τους Έλληνες. Κάποιος θα μπορούσε επίσης να πει ότι αφού το υλικό των Βαβυλωνίων μεταφράστηκε σε γεωμετρική γλώσσα, θα μπορούσε να διατυπώσει και να αποδείξει κάποιες από αυτές τις προτάσεις εκτός από τα παραλληλόγραμμα, αλλά και σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, χωρίς ιδιαίτερο κόπο. Ένα ακόμα επιχείρημα θα ήταν ότι η μετατροπή – μετάφραση από τα αρχικά Βαβυλωνιακά κείμενα (μεθοδολογία) ήταν εύκολη να γίνει αφού η Βαβυλωνιακή μεθοδολογία προερχόταν από μια «βασική» γεωμετρική μορφή και εύκολα θα μπορούσε να προσαρμοστεί στο αυστηρό Ελληνικό γεωμετρικό πλαίσιο. (Katz V. J., 2009, p. 65)

Θα μπορούσε ο Ευκλείδης να είχε μεταφράσει τα Βαβυλωνιακά προβλήματα σε γεωμετρική μορφή; Ήταν σε θέση να γνωρίζει τις μεθόδους των Βαβυλωνίων;

Παρά τις όποιες εικασίες γίνονται για μεταφορά γνώσεων από τους Βαβυλωνίους προς τους Έλληνες, δεν υπάρχει κάποιο εύρημα που να δείχνει κάποια μεταφορά μαθηματικών γνώσεων πριν από τον 4<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ ή και κατά την διάρκειά του.

Θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι παρόλο που οι αρχαίοι Έλληνες εφάρμοσαν διαδικασίες τις οποίες εμείς χαρακτηρίζουμε ως αλγεβρικές, ο δικός τους τρόπος σκέψης ήταν καθαρά γεωμετρικός και οι διαδικασίες, μέθοδοι που σκέπτονταν αυτομάτως δημιουργούνταν υπό αυτό το πρίσμα. Οι αρχαίοι Έλληνες, πριν το 300 π. Χ δεν είχαν κανενός είδους αλγεβρικό συμβολισμό και δεν είχαν τρόπο να διαχειριστούν εκφράσεις που εξέφραζαν μεγέθη, παρά μόνο εάν τα εξέφραζαν με γεωμετρικούς όρους. Είναι γεγονός πως οι Έλληνες μαθηματικοί ήταν πολύ ικανοί στην διαχείριση γεωμετρικών οντοτήτων. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι δεν υπήρχε άλλος τρόπος έκφρασης άρρητων ποσοτήτων και λύσεων δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Έλληνες, παρά μόνο ο γεωμετρικός. (Katz V. J., 2009, p. 66)

#### 4.6 Επίλυση συστήματος εξισώσεων

Ο *Θυμαρίδας ο Πάριος* γεννήθηκε περίπου το 400 π. Χ στην Πάρο και πέθανε περίπου το 350 π.Χ. Δεν γνωρίζουμε πολλά για την ζωή του. Ήταν Πυθαγόρειος και ασχολήθηκε με τους πρώτους αριθμούς. Ο Ιάμβλιχος μας λέει ότι ο Θυμαρίδας αποκαλούσε τους πρώτους αριθμούς ευθύγραμμους γιατί μπορούσε να τους αναπαραστήσει μόνο με μια διάσταση.

Στον Θυμαρίδα αποδίδεται από τον Ιάμβλιχο, ένα θέμα από την άλγεβρα το οποίο σήμερα θα λέγαμε πως αντιστοιχεί σε επίλυση συστήματος εξισώσεων πρώτου βαθμού. (<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thymaridas.html>)

#### 4.6.1 Το Θυμαρίδειον επάνθημα

Ο Ιάμβλιχος στο έργο του “Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής” μας αναφέρει πως ο Θυμαρίδας ο Πάριος βρήκε μια “έφοδο”, δηλαδή μέθοδο για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων ειδικής μορφής. Μπορούσε με την μέθοδο του να επιλύσει συστήματα οποιουδήποτε αριθμού εξισώσεων με τον ίδιο αριθμό αγνώστων, της μορφής:

$$\begin{aligned}x + x_1 &= a_1 \\x + x_2 &= a_2 \\&\dots \\x + x_{n-1} &= a_{n-1} \\x + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &= s\end{aligned}$$

Equation 4-27

Η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$x = \frac{(a_1 + \dots + a_{n-1}) - s}{n - 2}$$

Equation 4-28

Η μεθοδός του είναι γνωστή ως το “Θυμαρίδειον επάνθημα”. Είναι διατυπωμένη με γενικούς όρους, χωρίς την χρήση συμβόλων, αλλά το περιεχόμενο είναι καθαρά αλγεβρικό. Ο Θυμαρίδας διαχωρίζει τις ποσότητες σε “άοριστον”, που είναι οι άγνωστοι και στις ποσότητες “ώρισμένον” για τα γνωστά. Σε αυτές τις εκφράσεις αντιστοιχεί και η φράση του Διόφαντου “πλήθος μονάδων άοριστον”, όπου προσδιορίζει έναν άοριστο αριθμό μονάδων, με τον οποίο περιγράφει το  $x$ .

Ο Ιάμβλιχος αναπτύσσει περαιτέρω την μέθοδο, προκειμένου να μας δείξει πως άλλες μορφές εξισώσεων μπορούν να αναχθούν σε αυτόν τον κανόνα, για να μην “τρεκλίζουμε” - «ού παρέλκει» σε αυτές τις περιπτώσεις. Μπορούμε να φέρουμε ένα σύστημα της παρακάτω μορφής, τριών γραμμικών εξισώσεων, τεσσάρων αγνώστων στην μορφή του Θυμαρίδα ως εξής:

Έστω ότι

$$x + y = a(z + u)$$

$$x + z = b(u + y)$$

$$x + u = c(y + z)$$

Equation 4-29

Τότε από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$x + y + z + u = (a + 1)(z + u)$$

Equation 4-30

από το οποίο προκύπτει ότι εάν τα  $x, y, z, u$  είναι όλοι ακέραιοι, τότε το άθροισμα  $x + y + z + u$  πρέπει να έχει ως παράγοντα το  $a + 1$ , ομοίως πρέπει να περιέχει και τα  $b + 1$  και  $c + 1$ , ως παράγοντες.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι :

$$x + y + z + u = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Equation 4-31

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$(x + y) \left(1 + \frac{1}{a}\right) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) \text{ ή}$$

$$x + y = a(b + 1)(c + 1)$$

Ομοίως:

$$x + z = b(c + 1)(a + 1)$$

$$x + u = c(a + 1)(b + 1)$$

Και οι εξισώσεις τότε είναι στην μορφή που χρειάζεται για να εφαρμοστεί το “Θυμαρίδειον επάνθημα”. Συνεπώς από τον κανόνα

$$x = \frac{a(b + 1)(c + 1) + \dots - (a + 1)(b + 1)(c + 1)}{2}$$

Equation 4-32

Για να εξασφαλίσουμε ότι το  $x$  είναι πάντα ακέραιος θα πρέπει απαραίτητα να υποθέσουμε ότι:

$$x + y + z + u = 2(a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Equation 4-33

Ο συντελεστής 2, καθορίζεται από τον αριθμό των αγνώστων, καθορίζεται γενικά από τον τύπο  $n - 2$  , εάν έχουμε  $n$  αριθμό αγνώστων.

Το Ιάμβλιχος παραθέτει και μια συγκεκριμένη περίπτωση όπου  $a = 2$ ,  $b = 3$  και  $c =$   
 4. Εφαρμόζει την παραπάνω μέθοδο στο σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = \frac{k}{l}(z + u) \\ x + z = \frac{m}{n}(u + y) \\ x + u = \frac{p}{q}(y + z) \end{cases}$$

Equation 4-34

, όπου  $\frac{k}{l} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$  και  $\frac{p}{q} = \frac{5}{4}$ .

(Heath T. L., 1910, pp. 115-116)

#### 4.7 Εμφάνιση τριτοβάθμιων εξισώσεων

Ο Αρχιμήδης έζησε περίπου το 297 με 212 π.Χ. Θεωρείται από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Γεννήθηκε και έζησε στις Συρακούσες της Κ. Ιταλίας, που εκείνη την περίοδο ήταν Ελληνική αποικία. Χρονικά έζησε ανάμεσα στους δυο μαθηματικούς Ευκλείδη και Απολλώνιο και σύμφωνα με αναφορές ταξίδεψε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, όπου σπούδασε μαζί με τους διάδοχους – συνεχιστές του Ευκλείδη. Συνέχισε να τους στέλνει προσωπικά μηνύματα, ειδικά προς τον Κώνων τον Σάμιο (c. 280-220 π.Χ.)<sup>41</sup>, τον οποίο εκτός από σημαντικό μαθηματικό, θεωρούσε και προσωπικό φίλο.<sup>42</sup>

Όπως και ο Απολλώνιος, κατά την παραμονή του στην Αλεξάνδρεια ήρθε σε επαφή με τις Κωνικές τομές και τις οποίες χρησιμοποίησε αρκετά συχνά στα γεωμετρικά του έργα. Ας δούμε την παρακάτω πρόταση από το έργο του “Περί σφαίρας και κυλίνδρου” στον β’ τόμο.

#### **Πρόταση 4:**

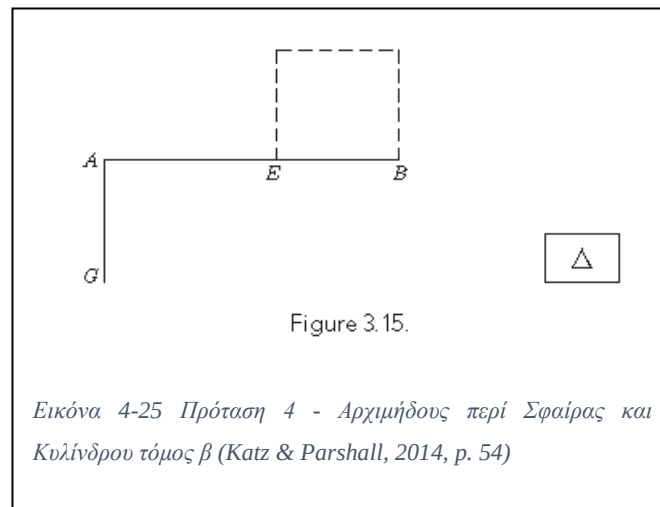
Να τμηθεί δοθείσα σφαίρα σε δοθέν λόγο.

Προκειμένου να επιλύσει το παραπάνω πρόβλημα, ο Αρχιμήδης όχι μόνο επέδειξε το αναμφισβήτητο μαθηματικό του ταλέντο, αλλά χρησιμοποίησε τις κωνικές τομές κατά τέτοιο τρόπο ώστε οδήγησε σε μια γενική μέθοδο επίλυσης τριτοβάθμιων εξισώσεων.

<sup>41</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Conon.html>

<sup>42</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes.html>

Χρησιμοποιώντας προγενέστερα αποτελέσματα, ο Αρχιμήδης ανήγαγε το πρόβλημα σε ειδική κατηγορία ενός γενικότερου σεναρίου σχετικά με ευθείες, όπως βλέπουμε στην επόμενη εικόνα.



“Να τμηθεί δοθείσα ευθεία γραμμή (ευθύγραμμο τμήμα)  $AB$  σε σημείο  $E$ , τέτοιο ώστε  $AE:AG = \Delta:BE^2$ , όπου  $AG$  είναι δοθέν ευθύγραμμο τμήμα (στο παραπάνω σχήμα έχει σχεδιαστεί κάθετα στο  $AB$  και  $\Delta$  δοθείσα περιοχή – εμβαδόν. Θέτοντας  $AB=a$ ,  $BE=x$ ,  $AG=d$ , και  $\Delta = c^2$ , μπορούμε να μεταφράσουμε το παραπάνω πρόβλημα σε πρόβλημα εύρεσης του  $x$ , τέτοιο ώστε  $(a-x):d = c^2:x^2$ , το οποίο ισοδυναμεί στην τριτοβάθμια εξίσωση  $x^2(a-x) = c^2d$ .”

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί το πρώτο που εμφανίζεται στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά και μπορεί να αναχθεί σε εξίσωση τρίτου βαθμού, αν το γράψουμε με την σύγχρονη μορφή. Ο Αρχιμήδης, δεν είδε αυτό το πρόβλημα αλγεβρικά, όπως θα το βλέπαμε ίσως εμείς σήμερα, αλλά το έλυσε με την χρήση κωνικών τομών, γεωμετρικά. (Katz & Parshall, 2014, pp. 53-54)

Ολόκληρος ο τρόπος λύσης είναι διαθέσιμος στην παρακάτω πηγή (Archimedes & Netz, 2004, pp. 202-208). Αποτελεί αγγλική μετάφραση του έργου του Αρχιμήδους “Περί σφαίρας και κυλίνδρου” και φέρει τα σχόλια του Εύδημου. Έχει μεταφραστεί και σχολιαστεί από τον Reviel Netz.

Συχνά λέγεται με αφορμή το παραπάνω πρόβλημα, πως ο Αρχιμήδης έλυσε μια κυβική εξίσωση. Αυτό όμως έγινε για μια συγκεκριμένη εξίσωση με συγκεκριμένους συντελεστές. Βρήκε τα όρια στα οποία βρίσκονται οι ρίζες, έδειξε ότι μπορεί να λυθεί ως τομή μιας παραβολής και μιας υπερβολής και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή θα μπορούσε να έχει λύση. Ο Αρχιμήδης δεν είχε ως σκοπό να λύσει μια εξίσωση. Στο νου του

πρέπει να είχε να κατασκευάσει την λύση, ενός ενδιαφέροντος γεωμετρικού προβλήματος. Όλες οι εκφράσεις που χρησιμοποιεί για την λύση είναι γεωμετρικές, συμπεριλαμβανομένων και των κωνικών τομών. Επίσης δεν επιχείρησε να γενικεύσει την λύση σε κανενός είδους άλλο πρόβλημα τρίτου βαθμού, όπως θα έκανε κάποιος που προσπαθούσε να βρει μια μέθοδο επίλυσης μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης. Θα ήταν λοιπόν δίκαιο να πούμε πως το πρόβλημα για τον Αρχιμήδη και μέχρι τους Άραβες μαθηματικούς ήταν γεωμετρικό. Οι Άραβες μαθηματικοί μελέτησαν την λύση και τελικά την γενίκευσαν ώστε να ταιριάζει σε άλλες παρόμοιες κυβικές εξισώσεις, άρα η “κληρονομιά” του προβλήματος αυτού είναι αλγεβρική. (Katz & Parshall, 2014, p. 56)

## 4.8 Διόφαντος

### 4.8.1 Βιογραφία

Σχετικά με την βιογραφία, την ζωή και το έργο του Διόφαντου, λίγα πράγματα μας είναι γνωστά. Δεν ήταν εύκολο να προσδιοριστεί ο χρόνος ζωής του, αλλά σήμερα φαίνεται να έχουμε καταλήξει σε ένα συμπέρασμα.

Στην προσπάθεια να προσδιορίσουμε πότε έζησε ο Διόφαντος, μπόρεσαν να μουν δυο όρια. Το πρώτο όριο, ήταν ότι έζησε μετά το 150 π.Χ. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγουμε ο Διόφαντος στο έργο του Πολυγωνικοί Αριθμοί σχολιάζει τον *Υψικλή* τον Αλεξανδρεύς (190-120 π.Χ). Το πάνω όριο προέκυψε από το γεγονός ότι ο *Θέων ο Αλεξανδριεύς*, σχολιάζει τον Διόφαντο, άρα γράφει πριν το 350 μ.Χ. Παραμένει ένα εύρος όμως 500 χρόνων.

Το εύρος των 500 αυτών χρόνων μπορούμε να το κλείσουμε λίγο ακόμα. Υπάρχει γράμμα του Μιχαήλ Ψελλού, Βυζαντινού λόγιου και ιστορικού του 11<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ (1018-1078 μ.Χ) όπου αναφέρονται ο Διόφαντος και ο Ανατόλιος ο Αλεξανδρεύς (3<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ). Ο Ανατόλιος ο Αλεξανδρεύς ήταν φιλόσοφος και έγινε επίσκοπος της Λαοδικείας περίπου το 280 μ.Χ, Έγραφε περίπου το 270 μ.Χ. Αναφέρεται ότι εργάστηκαν και οι δυο στην Αιγυπτιακή Αριθμητική και πως ο Ανατόλιος αφιέρωσε την διατριβή του στην Αριθμητική στον Διόφαντο. Θεωρώντας ότι μια διατριβή συνήθως αφιερώνεται σε εν ζωή ανθρώπους, θεωρούμε τον Διόφαντο δάσκαλό του και ότι ο τελευταίος “άνθισε” περίπου το 250 μ.Χ.

Η χρονολογία αυτή φαίνεται να επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι ο Διόφαντος δεν αναφέρεται από τον *Νικόμαχο* (100 μ.Χ) , *Θέων των Σμυρνεύς* (130 μ.Χ) και *Ιάμβλιχο* (τέλος του 3<sup>ου</sup> μΧ αιώνα)

Σχετικά με την διάρκεια της ζωής του, το μοναδικό στοιχείο που υπάρχει προκύπτει από την Ανθολογία, η οποία μας καταδεικνύει ότι ο Διόφαντος έζησε 84 χρόνια. Η επιγραφή λέει:

Η παιδική του ηλικία διήρκεσε το  $\frac{1}{6}$  της ζωής του, έβγαλε γενειάδα στο  $\frac{1}{12}$  της ζωής του μετά. Παντρεύτηκε στο  $\frac{1}{7}$  της ζωής του και μετά από 5 χρόνια απέκτησε ένα γιο. Ο γιος έζησε το  $\frac{1}{2}$  της ζωής του πατέρα και 4 χρόνια μετά το θάνατο του γιου του πέθανε και ο πατέρας.

Το έργο που έχει διασωθεί από τον Διόφαντο είναι τα *Αριθμητικά* (6 μόνο από τα 13 βιβλία) και οι *Πολυγωνικοί Αριθμοί*, όπου έχει διασωθεί μόνο μέρος τους. (Heath T. L., 1910, pp. 2-3)

Μέσα σε ένα πολυπολιτισμικό περιβάλλον στην Αλεξάνδρεια του 3<sup>ου</sup> μ. Χ αιώνα, ο Διόφαντος έγραψε το έργο του *Αριθμητικά* του οποίου η κληρονομιά και η ιστορία είναι αλγεβρική. (Katz & Parshall, 2014, p. 60)

#### 4.8.2 *Αριθμητικά*

Τα “*Αριθμητικά*” του Διόφαντου, όπως ο ίδιος αναφέρει στην εισαγωγή του είχαν ως σκοπό να αποτελέσουν ένα εργαλείο για του προχωρημένους μαθητές, οι οποίοι ήταν αγχωμένοι να μάθουν πώς να επιλύουν και ερευνούν αριθμητικά προβλήματα. Όπως ο Διόφαντος εξηγεί προσπάθησε “ξεκινώντας από τα θεμέλια στα οποία έχει χτιστεί η επιστήμη να προχωρήσει περαιτέρω....την φύση και την δύναμη των αριθμών, αλλά επίσης λέει πως το θέμα εμφανίζεται μάλλον δύσκολα, αφού δεν είναι μέχρι τώρα γνωστό.”

Το υλικό που παρουσίασε ο Διόφαντος στα “*Αριθμητικά*” δεν ήταν η Ευκλείδεια γεωμετρία των Στοιχείων, υλικό με το οποίο οι αναγνώστες ήταν εξοικειωμένοι. Ήταν ένα συστηματικό τετράδιο εργασιών, που διαχειρίζονταν όλες τις σχέσεις μεταξύ ρητών αριθμών και ειδικά των τετράγωνων και των κύβων – και πώς να βρει κάποιος a priori ρητούς αριθμούς που ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις. (Katz & Parshall, 2014, p. 60)

##### 4.8.2.1 *Συμβολισμός στα Αριθμητικά*

Ακολουθώντας την φιλοσοφία των Στοιχείων ο Διόφαντος ξεκινάει τα Αριθμητικά του με μια σειρά από ορισμούς για τα “είδη - species” των αριθμών, καθώς και κάποιους συμβολισμούς που χρησιμοποιεί στο κείμενο. Για τον Διόφαντο το  $x^2$  ονομάζεται “δύναμις” και συμβολίζεται με  $\Delta^y$ , το δικό μας  $x^3$  ονομάζεται “κύβος” και συμβολίζεται με  $K^y$ .

Χαρακτηριστικό του γεγονότος ότι ο Διόφαντος είχε αρχίσει να σκέφτεται αλγεβρικά και έκανε ένα βήμα προς τα εκεί αποτελεί το γεγονός ότι έσπασε το φράγμα των τριών διαστάσεων, του τρίτου βαθμού, που μπορεί να ερμηνευθεί γεωμετρικά και συνέχισε να δίνει ορισμούς και συμβολισμούς για δυνάμεις μέχρι και 6<sup>ου</sup> βαθμού. Με αυτό τον τρόπο το  $x^4$  ονομαζόταν «τετράγωνο – τετράγωνο» και συμβολιζόταν με  $\Delta^Y \Delta$ , το  $x^5$  ονομαζόταν τετράγωνος – κύβος και συμβολιζόταν  $\Delta K^Y$  και τέλος το  $x^6$  ονομαζόταν «κύβος – κύβος» και συμβολιζόταν με  $KK^Y$ . “Αλλά ο αριθμός που δεν έχει κανένα από αυτά τα χαρακτηριστικά, αλλά έχει μέσα του ένα ενδιάμεσο πλήθος από μονάδες [αυτό είναι το  $x$ ] καλείται ἄριθμός και συμβολίζεται με  $s$ ”. Τέλος προσδιόρισε ότι η μονάδα συμβολίζεται με  $\overset{\circ}{M}$ .

Με αυτούς του συμβολισμούς ο Διόφαντος προχώρησε στον προσδιορισμό των αντίστοιχών αντίστροφων των δυνάμεων έτσι “ἄριθμοστόν” είναι το  $\frac{1}{x}$  και συμβολίζεται με  $s^x$ , το  $\frac{1}{x^2}$  ήταν το “δυναμοστόν” και συμβολιζόταν με  $\Delta^Y X$  κτλ”

Για παράδειγμα η εξίσωση  $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$  στον Διόφαντο θα γραφόταν

$$K^Y \bar{\alpha} s \bar{\eta} \wedge \Delta^Y \bar{\epsilon} \overset{\circ}{M} \bar{\alpha},$$

Αυτός ο τρόπος γραφής με συμβολισμούς αποδείχθηκε πολύ αποτελεσματικός για τους Ευρωπαίους μαθηματικούς όπως ο *Raphael Bombelli* και ο *Francois Viète*, τον 16<sup>ο</sup> αιώνα.

Στο κεφάλαιο I, αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο σε μια εξίσωση πρέπει να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και πως θα κάνουμε απαλοιφή των όρων. Ιδανικά για τον Διόφαντο όλες οι εξισώσεις θα έπρεπε να οδηγούνται στην μορφή  $ax^m = b$ . (Katz & Parshall, 2014, pp. 61-62)

Αυτό που αξίζει να σχολιάσουμε είναι ότι ενώ μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα προβλήματα που περιλαμβάνονται στα βιβλία του Διόφαντου, δεν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για τις λύσεις του. Δεν υπάρχει κάποιο ίχνος γενίκευσης των μεθόδων και των τρόπων λύσης από τον Διόφαντο και κάθε πρόβλημα έχει ως λύση μια μοναδική μέθοδο, η οποία δεν θα μπορέσει να χρησιμοποιηθεί ούτε για προβλήματα πολύ κοντινά σε αυτό. (Heath T. L., 1910, p. 54)



### 4.8.3 Οι μέθοδοι επίλυσης του Διόφαντου

Ο Διόφαντος μπορούσε χωρίς δυσκολία να επιλύσει πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Εξίσωση τρίτου βαθμού στα Αριθμητικά εμφανίζεται μόνο μια, ένα μόνο παράδειγμα ειδικής μορφής. Για να δούμε τις μεθόδους του:

#### 4.8.3.1 Εξισώσεις όπου ο άγνωστος εμφανίζεται μόνο σε μια δύναμη (οποιοδήποτε βαθμού)

Η λύση αυτών των εξισώσεων είναι η ίδια ανεξάρτητα από τον βαθμό της δύναμης, ο Διόφαντος τις αντιμετωπίζει ως απλές πρωτοβάθμιες εξισώσεις.

Περιγράφει έναν γενικό κανόνα, για αυτού του είδους τις εξισώσεις ανεξαρτήτως βαθμού.

*Ορισμός II:*

*“Εάν το πρόβλημα οδηγεί σε μια εξίσωση στην οποία κάποιοι όροι τις είναι ίσοι με άλλους, αλλά με διαφορετικούς συντελεστές, τότε πρέπει να αφαιρέσουμε όμοια από όμοια, μέχρι να πάρουμε έναν όρο σε κάθε πλευρά. Εάν όμως σε μια ή και στις δυο πλευρές υπάρχει κάποιος αρνητικός όρος, τότε τους υπολειπόμενους όρους πρέπει να τους προσθέσουμε και στις δυο πλευρές μέχρι να έχουμε θετικούς όρους παντού. Τότε αφαιρούμε όμοια από όμοια μέχρι να μείνει ένας όρος σε κάθε πλευρά.”*

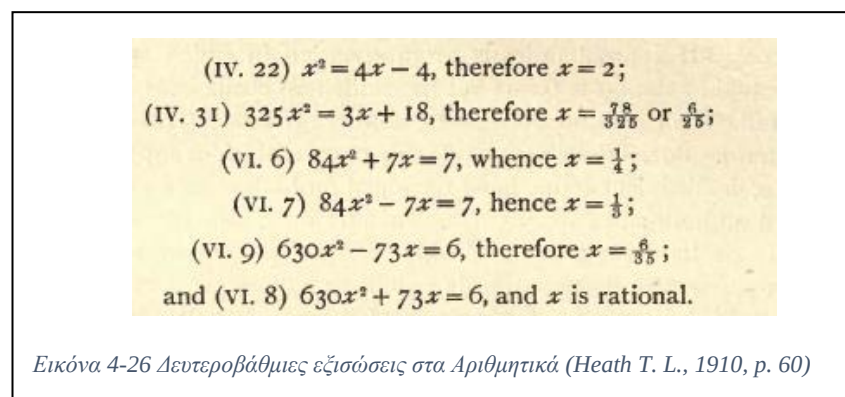
Εφόσον γίνουν οι παραπάνω διαδικασίες και στις δυο πλευρές, τότε θα προκύψει μια εξίσωση της μορφής  $Ax^m = B$  και θεωρούμε ότι λύθηκε. Οι περιπτώσεις που εμφανίζονται στον Διόφαντο είναι περιπτώσεις όπου οι ρίζες είναι ρητοί αριθμοί, είτε κλασματικοί, είτε ακέραιοι. Ο Διόφαντος αναγνωρίζει μόνο μια ρίζα του  $x$  κάθε φορά και σε περίπτωση που το  $m$  είναι άρτιος αριθμός, δέχεται μόνο την θετική ρίζα, απορρίπτοντας την αρνητική ως «αδύνατη». Κατά τον ίδιο τρόπο, όταν μια εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε μικρότερου βαθμού διαιρώντας με το κάποια δύναμη του  $x$ , τότε οι πιθανές ρίζες της μορφής  $x = 0$ , δεν λαμβάνονται υπόψιν. Συνεπώς μια εξίσωση της μορφής  $x^2 = ax$ , που στα πρώτα βιβλία εμφανίζεται πολύ συχνά, θεωρείται ισοδύναμη με την  $x = a$ . Στην πλειοψηφία των προβλημάτων του πρώτου βιβλίου είναι τέτοια ώστε εμφανίζονται περισσότερες από μια άγνωστες ποσότητες. Ο Διόφαντος είναι αρκετά επιδέξιος ώστε όχι μόνο συστήματα  $2x2$ , αλλά και  $3x3$  ή  $4x4$  να τα ανάγει σε μια εξίσωση με έναν άγνωστο. (Heath T. L., 1910, pp. 58-59)

#### 4.8.3.2 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις σε πλήρη μορφή (mixed quadratic equations)

Μετά τον ορισμό 11 που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο ο Διόφαντος κάνει την εξής δήλωση:

“Θα σας δείξω στην συνέχεια πως σε περίπτωση που δυο όροι απομένουν ίσοι με έναν όρο, θα μπορέσετε να λύσετε μια τέτοια εξίσωση.”

Υπόσχεται δηλαδή να εξηγήσει πώς να επιλύονται δευτεροβάθμιες εξισώσεις σε πλήρη μορφή. Στα διασωθέντα όμως κείμενα από τα Αριθμητικά δεν εκπληρώνει αυτή την υπόσχεσή του. Υπάρχει ένας αριθμός εξισώσεων στις οποίες δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση μαζί με την λύση της ή μαζί με την ένδειξη ότι η λύση, ρίζα είναι ρητός αριθμός. Δεν καταγράφεται κάποιος τρόπος - μέθοδος επίλυσης. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι ο Διόφαντος ίσως είχε κάποιο τρόπο να φτάνει στην λύση, αλλά δεν μπορούμε να πούμε ποια ήταν αυτή η μέθοδος. Θα μπορούσαν βέβαια οι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων να έχουν προέλθει από δοκιμή, αλλά η ποικιλομορφία τους, το καθιστά μάλλον δύσκολο.



Το γεγονός ότι η επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τον Διόφαντο δεν γίνεται εμπειρικά φαίνεται και από την λύση που προτείνει για το πρόβλημα V.30. Σε παρόμοιες περιπτώσεις που εμφανίζονται στο βιβλίο V, οι εξισώσεις έχουν δυο θετικές ρίζες και πρέπει να καταλάβουμε γιατί ο Διόφαντος δεν έλαβε υπόψη του τις μικρότερες. Σε αυτό το σημείο προκύπτει ο ερώτημα εάν ο Διόφαντος ήταν σε θέση να γνωρίζει μόνο την λύση που έχει θετικό πρόσημο μπροστά από την τετραγωνική ρίζα.

Δεν μπορούμε όμως να εξάγουμε ένα ασφαλές συμπέρασμα σχετικά. Σύμφωνα με την άποψη του Heath ο Διόφαντος μάλλον γνώριζε την ύπαρξη δυο πραγματικών ριζών. Η αριθμητική επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Έλληνες, είτε προηγούνταν είτε ακολουθούταν από την γεωμετρική λύση.

Βρίσκουμε γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τον 5<sup>ο</sup> αιώνα π. Χ, από τον Ιπποκράτη τον Χίο<sup>43</sup> στο έργο του για τον τετραγωνισμό των μηνίσκων και συγκεκριμένα της  $x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax = a^2$ . Η πλήρης γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιων δίνεται από τον Ευκλείδη στις προτάσεις VI.28-VI.30 που έχουν προαναφερθεί.

Είναι γεγονός πως και ο Ήρων<sup>44</sup> δεν χρησιμοποιεί όμως το αρνητικό πρόσημο μπροστά από την ρίζα, όπως και ο Διόφαντος. Ο συγγραφέας της αποκαλούμενης Γεωμετρίας του Ήρων, ουσιαστικά δηλώνει ότι η λύση της εξίσωσης  $\frac{11}{14}x^2 + 22x = 212$  στην μορφή  $x = \frac{\sqrt{(154 \cdot 212 + 841) - 29}}{11}$  δείχνει ξεκάθαρα ότι ο κανόνας ακολουθείται αφού η εξίσωση γραφεί στην μορφή  $121x^2 + 638x = 212 \cdot 154$ .

Δεν μπορούμε να χρεώσουμε στον Διόφαντο ότι δεν ασχολήθηκε με την εύρεση και των δυο ριζών όταν και οι δυο είναι πραγματικές. Θα πρέπει να θυμηθούμε ότι δεν έγραφε ένα βιβλίο άλγεβρας και ο στόχος του είναι να βρει μια λύση για το κάθε πρόβλημα, ούτε να πολλαπλασιάσει λύσεις ούτε να δείξει πόσες μπορούν να βρεθούν σε κάθε περίπτωση. Από τον κανόνα 11 που προαναφέραμε είναι προφανές ότι ο Διόφαντος έφτιαχνε έτσι τις εξισώσεις του, ώστε όλοι οι όροι να είναι θετικοί. Για τον Διόφαντο λοιπόν υπάρχουν 3 μορφές δευτεροβάθμιων εξισώσεων:

i.  $mx^2 + px = q$  και η ρίζα της είναι  $x = \frac{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mp}}{m}$  κατά τον Διόφαντο.

Για παράδειγμα στο πρόβλημα VI.6 λύνει την  $6x^2 + 3x = 7$ . Η λύση βρίσκεται στον (Heath T. L., 1910, pp. 228-229)

ii.  $mx^2 = px + q$  και η ρίζα της για τον Διόφαντο είναι  $x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mp}}{m}$ .

Παράδειγμα η IV.39 ,όπου επιλύει την  $2x^2 > 6x + 18$ . Η λύση βρίσκεται ολόκληρη στον (Heath T. L., 1910, pp. 197-198)

iii.  $mx^2 + q = px$  και η ρίζα της για τον Διόφαντο είναι  $x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - mp}}{m}$ .

Παράδειγμα η V.10 ,όπου επιλύει την  $17x^2 + 17 < 72x$ . Η λύση βρίσκεται ολόκληρη στον (Heath T. L., 1910, pp. 207-208)

<sup>43</sup>Ιπποκράτης ο Χίος: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hippocrates.html>

<sup>44</sup> Ήρων ο Αλεξανδριεύς <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heron.html>

#### 4.8.3.3 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις σε πλήρη μορφή (mixed quadratic equations)

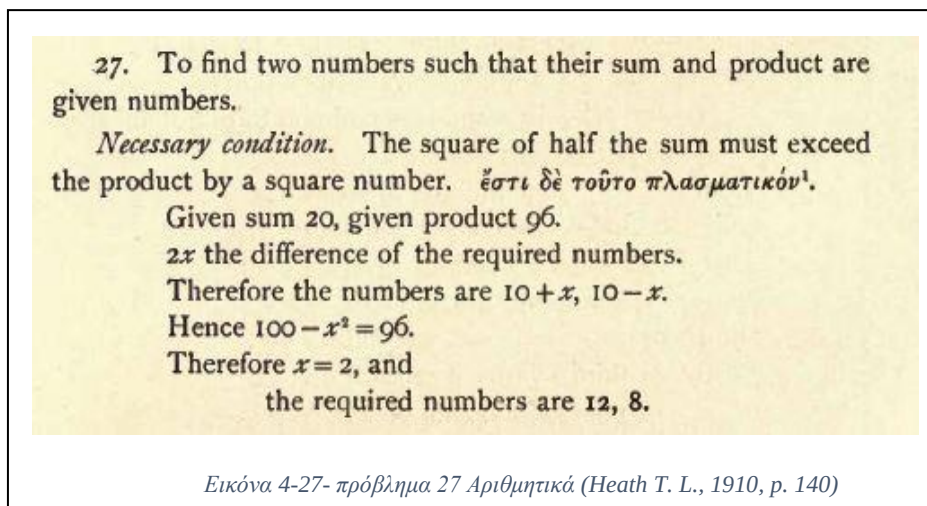
Στα Αριθμητικά του Διόφαντου, βιβλίο I προβλήματα 27-30 (Heath T. L., 1910, pp. 140-141), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ασχολείται με τις παρακάτω εξισώσεις:

- I.  $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$  (πρόβλημα 27)
- II.  $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$  (πρόβλημα 28)
- III.  $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$  (πρόβλημα 29)
- IV.  $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$  (πρόβλημα 30)

Προκειμένου να τις επιλύσει χρησιμοποιεί τις μεθόδους των Βαβυλωνίων. Εισάγει μια νέα μεταβλητή, έστω  $z$ , μέσω της οποία οδηγείται σε καθαρά δευτεροβάθμιες εξισώσεις και στην περίπτωση της πρότασης 29 (παράδειγμα III) σε μια γραμμική εξίσωση. (Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra, 1937, pp. 13-14)

#### **Πρόβλημα I. 27**

“Να βρεθούν δυο αριθμοί που το άθροισμά τους και το γινόμενά τους είναι γνωστοί αριθμοί.



Απαραίτητη προϋπόθεση: Το τετράγωνο του ημι-αθροίσματος πρέπει να υπερβαίνει το γινόμενο κατά ένα τετράγωνο αριθμό.<sup>45</sup>

Έστω ότι το άθροισμα είναι 20 και το γινόμενο 96. Τότε  $2x$  είναι η διαφορά των ζητούμενων αριθμών. Άρα οι αριθμοί είναι  $10 + x$  και  $10 - x$ . Συνεπώς  $100 - x^2 = 96$  και άρα  $x = 2$  και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι το 12 και το 8.

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τι κάνει ο Διόφαντος σε αυτό το πρόβλημα. Ποιος είναι ο τρόπος σκέψης του;

Να βρεθούν δυο αριθμοί που το άθροισμά τους και το γινόμενά τους είναι γνωστοί αριθμοί, δηλαδή  $x + y = a$  και  $xy = b$ .

Απαραίτητη προϋπόθεση: Το τετράγωνο του ημι-αθροίσματος πρέπει να υπερβαίνει το γινόμενο κατά ένα τετράγωνο αριθμό.

Έστω ότι το άθροισμα είναι 20 και το γινόμενο 96. Τότε  $2z$  είναι η διαφορά των ζητούμενων αριθμών. Άρα οι αριθμοί είναι  $10 + z$  και  $10 - z$ . Συνεπώς  $100 - z^2 = 96$  και άρα  $z = 2$  και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι το 12 και το 8.

Εάν δίνεται το άθροισμα  $x + y = a$ , τότε ο Διόφαντος προτείνει να θέσουμε το  $x - y = 2z$  και το  $\frac{x-y}{2} = z$ . Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιεί τη μέθοδο της ψευδούς αντικατάστασης. Υποθέτει ότι τα  $x$  και  $y$  είναι ίσα και έστω ότι  $x = y = \frac{a}{2}$ . Δεδομένου ότι δεν είναι ίσα, τότε το μεγαλύτερο από τα δυο, δηλαδή το  $x$  θα είναι μεγαλύτερο από το  $\frac{a}{2}$  κατά μια ποσότητα  $z$  και το μικρότερο μέρος το  $y$  θα είναι και αυτό μικρότερο από το  $\frac{a}{2}$

---

<sup>45</sup>«**Εστὶ δὲν τούτων πλασματικόν**» Αυτή η φράση έχει δεχθεί διάφορες ερμηνείες. Οι. Xylander, Bachet, Cossali, Schulz, Nesselmann, έχουν όλοι προσπαθήσει να την ερμηνεύσουν. Ο Xylander την μετέφρασε ως: "effictum aliunde.". Ο Bachet, απορρίπτει αυτή την ερμηνεία και αφήνει την λέξη χωρίς μετάφραση, σχολιάζει πως έχει περισσότερο ενεργό παρά παθητικό ρόλο και λέει πως δεν είναι κάτι που έχει «κατασκευαστεί» (effictum) αλλά κάτι "**a quo aliud quippiam effingi et plasmari potest**," δηλαδή «κάτι από το οποίο μπορεί να προκύψει κάτι άλλο» και αυτό το ερμηνεύει από τις συνθήκες που χρησιμοποιήθηκε ο όρος σε συνδυασμό με τις λύσεις των προβλημάτων στα οποία εμφανίζεται, ο τρόπος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων μπορεί να προκύψει. Από τις δυο αυτές απόψεις πιθανότερη θεωρώ του Xylander. "πλασματικόν» πρέπει να σημαίνει «από τη φύση ενός πλάσματος», όπως αντίστοιχα το «δραματικόν» σημαίνει κάτι που έχει σχέση με ένα δράμα. Τα πλάσμα σημαίνει κάτι δομημένο, άρα η έκφραση αυτή φαίνεται να σημαίνει «αυτό έχει την μορφή τύπου» υπαινίσσοντας ότι η formula δεν είναι δύσκολο να βρεθεί, κατασκευαστεί. Ο Nesselmann όπως και ο Xylander, δίνει μια παρόμοια ερμηνεία μεταφράζοντας: "**das lasst sich aber bewerkstelligen**." Ο Tannery μεταφράζει το «πλασματικό» με τον όρο "formativum.". (Heath T. L., 1910, p. 140)

κατά μια ποσότητα  $z$ . Επειδή η ποσότητα  $x + y = a$  είναι σταθερή το  $x$  μπορεί να αυξηθεί, όσο θα μειωθεί το  $y$ .

Συνεπώς:

$$\begin{cases} x = \frac{20}{2} + z \\ y = \frac{20}{2} - z \\ x + y = 2z \end{cases}$$

Equation 4-35

Εάν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω στην εξίσωση  $xy = 96$ , τότε:

$$\left(\frac{20}{2} + z\right)\left(\frac{20}{2} - z\right) = 96 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{20}{2}\right)^2 - z^2 = 96 \Rightarrow$$

$$z^2 = 10^2 - 96 \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{4},$$

$$x = 10 + 2 = 12$$

$$y = 10 - 2 = 8$$

Ομοίως στην περίπτωση που δίνεται η διαφορά  $x - y = a$ , όπως στο πρόβλημα 28.

Συνεπώς οι παραπάνω προτάσεις του Διόφαντου είναι μέθοδοι οι οποίες έχουν διασωθεί από την εποχή των Βαβυλωνίων και έχουν συμπεριληφθεί από τον Διόφαντο στα Αριθμητικά. (Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra, 1937, p. 14)

#### 4.8.3.4 Κυβική εξίσωση

Δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ο Διόφαντος, γνώριζε κάποια μέθοδο για αλγεβρική επίλυση των κυβικών εξισώσεων. Υπήρχε μια και μοναδική κυβική εξίσωση στα “Αριθμητικά”, αλλά ήταν πολύ συγκεκριμένη. Ήταν στο πρόβλημα VI.17 η εξίσωση

$$x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$$

και ο Διόφαντος απλά αναφέρει ότι το  $x$  είναι ίσο με το 4. Εάν προσπαθήσουμε λίγο να δούμε πως σκέφτηκε ο Διόφαντος, το πρώτο που θα έπρεπε να κάνουμε είναι να την φέρουμε στην μορφή που χρησιμοποιούσε, δηλαδή να είναι όλοι οι συντελεστές θετικοί ακολουθώντας τον ορισμό 11 που αναφέρθηκε παραπάνω. Η παραπάνω εξίσωση θα γίνει:

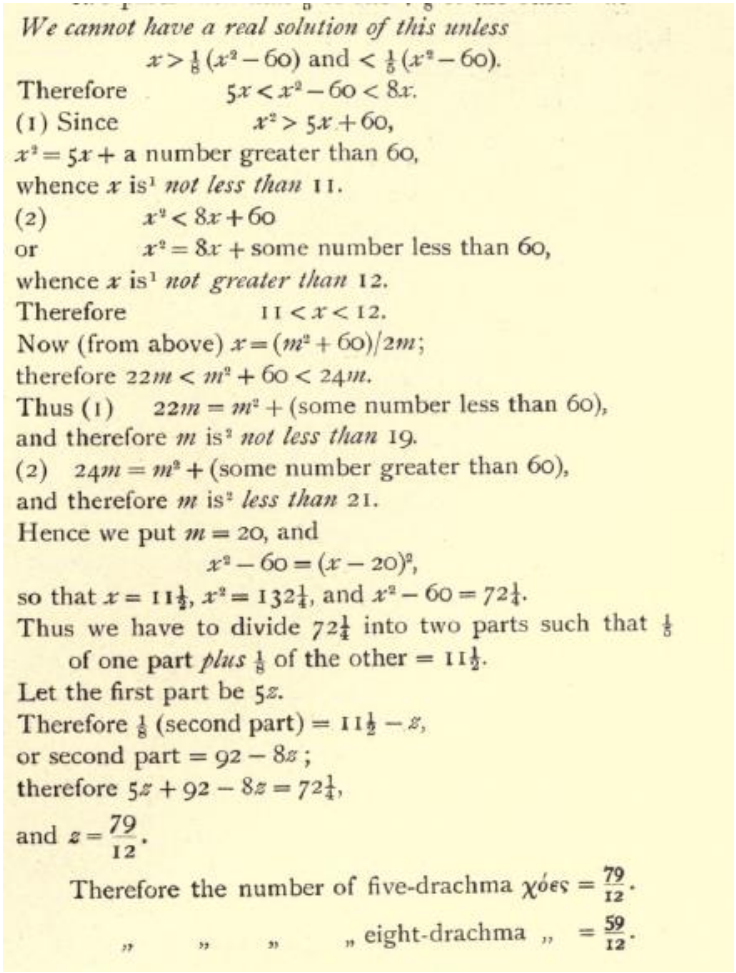
$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$

Η οποία είναι ισοδύναμη με την:

$$x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$$

Ο Διόφαντος σε αυτό το σημείο εύκολα θα εντόπισε τον κοινό παράγοντα και στις δυο πλευρές της εξίσωσης και διαιρώντας και τα δυο μέλη με αυτό, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι  $x = 4$ . Τις άλλες δυο λύσεις δεν τις αξιολογεί καν, αφού απλοποιεί. Δεν μπορούμε λοιπόν να βγάλουμε συμπέρασμα σχετικά με τις εξισώσεις 3<sup>ου</sup> βαθμού από αυτό το παράδειγμα. (Heath T. L., 1910, pp. 66-67)

#### 4.8.3.5 Πρόβλημα V.30 (Heath T. L., 1910, pp. 222-223)



*We cannot have a real solution of this unless*  
 $x > \frac{1}{8}(x^2 - 60)$  and  $< \frac{1}{8}(x^2 - 60)$ .  
 Therefore  $5x < x^2 - 60 < 8x$ .  
 (1) Since  $x^2 > 5x + 60$ ,  
 $x^2 = 5x +$  a number greater than 60,  
 whence  $x$  is<sup>1</sup> not less than 11.  
 (2)  $x^2 < 8x + 60$   
 or  $x^2 = 8x +$  some number less than 60,  
 whence  $x$  is<sup>1</sup> not greater than 12.  
 Therefore  $11 < x < 12$ .  
 Now (from above)  $x = (m^2 + 60)/2m$ ;  
 therefore  $22m < m^2 + 60 < 24m$ .  
 Thus (1)  $22m = m^2 +$  (some number less than 60),  
 and therefore  $m$  is<sup>2</sup> not less than 19.  
 (2)  $24m = m^2 +$  (some number greater than 60),  
 and therefore  $m$  is<sup>2</sup> less than 21.  
 Hence we put  $m = 20$ , and  
 $x^2 - 60 = (x - 20)^2$ ,  
 so that  $x = 11\frac{1}{2}$ ,  $x^2 = 132\frac{1}{4}$ , and  $x^2 - 60 = 72\frac{1}{4}$ .  
 Thus we have to divide  $72\frac{1}{4}$  into two parts such that  $\frac{1}{8}$   
 of one part *plus*  $\frac{1}{8}$  of the other =  $11\frac{1}{2}$ .  
 Let the first part be  $5z$ .  
 Therefore  $\frac{1}{8}$  (second part) =  $11\frac{1}{2} - z$ ,  
 or second part =  $92 - 8z$ ;  
 therefore  $5z + 92 - 8z = 72\frac{1}{4}$ ,  
 and  $z = \frac{79}{12}$ .  
 Therefore the number of five-drachma  $\chi\acute{o}\epsilon\varsigma = \frac{79}{12}$ .  
 „ „ „ „ eight-drachma „ =  $\frac{59}{12}$ .

*Εικόνα 4-28 Πρόβλημα V.30 Αριθμητικά (Heath T. L., 1910, p. 225)*

Σε αυτό το πρόβλημα ο Διόφαντος δείχνει ότι μπορεί να προσεγγίσει την λύση ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν είναι ρητή. Ας δούμε τι λέει:



“Ένας άντρας αγόρασε έναν συγκεκριμένο αριθμό από χόες<sup>46</sup> κρασιού, κάποιες για 8 δραχμές και κάποιες για 5 δραχμές την κάθε μια. Πλήρωσε έναν τετράγωνο αριθμό δραχμών και αν προσθέσεις 60 σε αυτόν τον αριθμό, τότε το αποτέλεσμα είναι ένα τετράγωνο, με πλευρά ίση με τον συνολικό αριθμό των αγορών. Βρες πόσα αγόρασε από κάθε είδος.”

### Λύση:

Έστω  $x$  ο συνολικός αριθμός των χοών, τότε  $x^2 - 60$  είναι τα χρήματα που πλήρωσε, το οποίο είναι ένα τετράγωνο, έστω  $(x - m)^2$ . Τώρα το  $\frac{1}{5}$  της τιμής των χοών των 5 δραχμών  $+ \frac{1}{8}$  της τιμής των χοών των 8 δραχμών είναι ίσο με  $x$ , τέτοιο ώστε  $x^2 - 60$ , να είναι η συνολική τιμή και να διαιρεθεί σε δυο τμήματα έτσι ώστε  $\frac{1}{5}$  του ενός και  $\frac{1}{8}$  του άλλου να ισούται με  $x$ .

Δεν μπορούμε να έχουμε πραγματική λύση σε αυτό εκτός και αν  $x > \frac{1}{8}(x^2 - 60)$  και  $< \frac{1}{5}(x^2 - 60)$ .

Ο Διόφαντος βλέπουμε ότι καταλήγει πως  $x^2 = 5x + \text{κάποιον αριθμό μεγαλύτερο του } 60$ , δηλαδή  $x > 11$  και ομοίως  $x^2 = 8x + \text{κάποιον αριθμό μικρότερο του } 60$  και άρα  $x < 12$ .

Λύνοντας τις παραπάνω για τις θετικές ρίζες έχουμε ότι:

$$x > \frac{1}{2}(5 + \sqrt{265}) \text{ και } x < 4 + \sqrt{76} \text{ ή ομοίως } x > 10.6394 \text{ και } x < 12.7177$$

Είναι εμφανές ότι οι περιορισμοί του Διόφαντου δεν είναι πολύ ακριβής. Προφανώς αυτό έχει να κάνει με την ανάγκη του να βρει ακέραιες τιμές στα όρια και έτσι επέλεξε το 11 και το 12.

Στην παραπάνω εξίσωση οι άλλες ρίζες που προκύπτουν θέτοντας αρνητικό πρόσημο, είναι αρνητικές και δεν είναι αποδεκτές από τον Διόφαντο.

#### 4.8.3.6 Οι μέθοδοι επίλυσης του Διόφαντου για τις αόριστες εξισώσεις

Ο Διόφαντος στα βιβλία των Αριθμητικών, όπως αυτά έχουν διασωθεί δεν ασχολείται με εξισώσεις αόριστες πρώτου βαθμού, φαίνεται πως δεν παρουσίαζαν κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον και έτσι ξεκινάει από τις αόριστες εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Στις αόριστες εξισώσεις δευτέρου βαθμού, όπως η  $Ax^2 + Bx + C = y^2$ , μπορεί και διαχειρίζεται μόνο όσες το  $A$  ή το  $C$  μηδενίζονται και οι μέθοδοι που εφαρμόζονται μας επιτρέπουν να λύσουμε

---

<sup>46</sup> <http://www.theogonia.gr/latreia/xoes.htm>



εξισώσεις πιο γενικής μορφής, τις  $Ax^2 + C = y^2$  και  $Ax^2 + Bx + C = y^2$ , όπου το  $A$  ή το  $C$  ή το  $\frac{1}{4}B^2 - AC$  είναι θετικό και τετράγωνος αριθμός ή στην περίπτωση του  $Ax^2 \pm C = y^2$  είναι γνωστή η μια λύση.

Στην περίπτωση του συστήματος δυο εξισώσεων δευτέρου βαθμού ο Διόφαντος έχει μια μέθοδο, όταν ο συντελεστής του  $x^2$  και στις δυο εξισώσεις εξαφανίζεται, αυτό όμως είναι εφικτό μόνο κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις.

Για τις αόριστες εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού από τον δεύτερο, ο Διόφαντος δεν έχει κάποια γενικευμένη μέθοδο, αλλά τις επιλύει ανάλογα με τις συνθήκες.

Ο Διόφαντος ασχολείται επίσης με τον προσδιορισμό Πυθαγόρειων τριάδων. Αυτό που θα μπορούσε να ειπωθεί ως γενικό χαρακτηριστικό είναι, ότι χρησιμοποιεί μόνο αυτές που και οι 3 αριθμοί – πλευρές του τριγώνου μπορούν να αναπαρασταθούν με ρητούς αριθμούς. Αυτό αποτελεί έναν τρόπο να προσδιορίσεις δυο τετράγωνους αριθμούς, το άθροισμα των οποίων είναι τετράγωνος αριθμός. Η γενική μορφή που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος σε αυτές τις εξισώσεις είναι όταν οι πλευρές του τριγώνου – οι αριθμοί είναι της μορφής:

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$

*Equation 4-36*

(Heath T. L., 1910, pp. 93-94)

### **Συμπέρασμα**

Οι Έλληνες είχαν γεωμετρικό τρόπο σκέψης και αντιμετώπιζαν την επίλυση εξισώσεων κατ' αυτό τον τρόπο. Για τους αρχαίους Έλληνες, η λύση ήταν γεωμετρική. Στους Πυθαγορείους, μέσα από τον Ευκλείδη, βλέπουμε γεωμετρική λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, εξισώσεων μάλιστα που συναντάμε και στους Βαβυλωνίους σύμφωνα με τον Van den Waerden. Ο Απολλώνιος και ο Αρχιμήδης προσπαθούν να επιλύσουν και τριτοβάθμιες εξισώσεις γεωμετρικά, μέσω των κωνικών τομών. Οι λύσεις που προσφέρουν είναι γεωμετρικές και ουσιαστικά πρόκειται για κατασκευές. Το ζητούμενο για αυτούς είναι να κατασκευάσουν το ζητούμενο και όχι να το προσδιορίσουν – επιλύσουν όπως θα κάναμε σήμερα. Δεν θεωρούν ότι πρέπει να αναζητήσουν περισσότερες λύσεις από μια και δεν μπορούν να αποδεχθούν αρνητικές ρίζες. Ο Διόφαντος τις απορρίπτει ως αδύνατες. Ο Διόφαντος κάνει κάποια βήματα προς την Άλγεβρα. Χρησιμοποιεί συμβολισμούς και επιλύει εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Η μέθοδος του όμως και πάλι δεν είναι γενική, προσδιορίζεται ανάλογα την περίπτωση. Τριτοβάθμιες εξισώσεις φαίνεται να μην επιλύει στο έργο του

“Αριθμητικά”, καθώς αναφέρει μόνο μια όπως είδαμε και αυτή πολύ συγκεκριμένης μορφής. Ας δούμε πως συνεχίστηκε αυτή η προσπάθεια από τους Άραβες και τους Ινδούς.

## 5 Ινδία

Τα μαθηματικά τα οποία γνωρίζουμε ως Ινδικά προέρχονται από την περιοχή που σήμερα αποκαλούμε Νότια Ασία, δηλαδή την σημερινή Ινδία, το Πακιστάν, το Νεπάλ, το Μπαγκλαντές και την Σρι Λάνκα. Η γλώσσα στην οποία έχουν καταγραφεί είναι τα Σανσκριτικά, η οποία είναι και η γλώσσα του “*Bhagavad Gita*”, και του “*Upanisads*” καθώς και άλλων διάσημων μαθηματικών κειμένων.

Πολλά από τα κείμενα της αρχαίας περιόδου, δηλαδή της 2<sup>ης</sup> χιλιετίας π.Χ είναι δύσκολο να αναδομηθούν. Δεν υπάρχουν αρκετές χρονολογικές ενδείξεις στα πρώτα έργα που έχουν βρεθεί και είναι ελάχιστα τα μέχρι τώρα ευρήματα. Επίσης η γραφή εκείνης της περιόδου, δεν έχει ακόμα αποκρυπτογραφηθεί.

Τα Σανσκριτικά ήταν περισσότερα μια γλώσσα που την μιλούσαν, παρά γραπτή. Ίσως μάλιστα η γραφή να περιορίστηκε αρχικά σε άλλες διαλέκτους της γλώσσας και όχι τα Σανσκριτικά. Το πρώτο κείμενο σε μορφή Σανσκριτικής γραφής που γνωρίζουμε σήμερα είναι το “*Vedas* - κυριολεκτικά σημαίνει *η γνώση*” ένα σύνολο από ύμνους, προσευχές και διαδικασίες για θρησκευτικές τελετές. Τα κείμενα είναι γενικά γραμμένα σε μορφή σύντομου έμμετρου ποιήματος (*verse*) ή μικρών προτάσεων που ονομάζονται *sutras* για να μπορούν να απομνημονεύονται πολύ εύκολα. Τα μάθαιναν, τα απομνημόνευαν και τα περνούσαν στις επόμενες γενεές προφορικά. Εκτός από τους ύμνους και άλλη θρησκευτική γνώση, επίσης περιελάμβανε κανονικά κείμενα σχετικά με τα 6 θέματα που θεωρούνταν “*οι πνεύμονες του Vedas*”, αυτά ήταν:

1. Φωνητικά, σχετικά με τον τρόπο που έπρεπε να προφέρονται τα αρχαϊκά Σανσκριτικά
2. Γραμματική, για την δομή των προτάσεων.
3. Μέτρο, με το οποίο έπρεπε να γράφονται τα *verses*
4. Ετυμολογία, η οποία εξηγούσε το λεξιλόγιο
5. Αστρονομία ή ημερολόγια, τα οποία ρύθμιζαν τις ημερήσιες, μηνιαίες και εποχιακές θυσίες και τέλος
6. Θρησκευτική πρακτική, η οποία εξασφάλιζε την συνέχεια και την ορθότητα των θρησκευτικών παραδόσεων.

Σε αυτό το αρχαίο κείμενο μπορούμε να δούμε τα πρώτα Ινδικά μαθηματικά. (Plofker, *Mathematics in India*, 2007, pp. 385-386)

### 5.1 Αρχαία Μαθηματικά κείμενα

Αντίθετα με την Κίνα, η Ινδία δεν ενοποιήθηκε ποτέ κατά την διάρκεια της Αρχαίας ή Μεσαιωνικής περιόδου. Συχνά κάποιοι κυβερνήτες, σε κάποιο από τα μικρά βασίλεια της Ινδικής περιοχής κατάφερναν να κατακτήσουν μεγαλύτερες περιοχές και να εγκαθιδρύσουν κάποια αυτοκρατορία, αλλά αυτό σπάνια διαρκούσε για περισσότερο από έναν αιώνα. Για παράδειγμα, αμέσως μετά τον θάνατο του Μέγα Αλέξανδρου το 323 π.Χ, ο *Chandragupta Maurya* (περίπου 340-298 π.Χ) ένωσε την βόρεια Ινδία, ενώ ο εγγονός του *Ashoka* (304-232 π.Χ) επέκτεινε την διακυβέρνηση του στο μεγαλύτερο μέρος της Ινδικής περιοχής, αφήνοντας διατάγματα που περιλάμβαναν τα πρώτα δείγματα γραφής Ινδικών αριθμών σε κατασκευές σε όλο τα βασίλειο. Μετά το θάνατο του, οι γιοι του πολέμησαν για την κληρονομιά και η αυτοκρατορία διαλύθηκε σύντομα.

Οι πρώτες μαθηματικές ιδέες οι οποίες μπορούν να αποδοθούν σε Ινδικές πηγές βρίσκονται στο “*Śulba-sūtras*”, το οποίο χρονολογείται κάπου την πρώτη χιλιετία π.Χ, η οποία περιγράφει το σύστημα θυσιών των βραχμάνων. Οι περισσότερες από τις ιδέες που περιλαμβάνονται σε αυτά τα κείμενα είναι γεωμετρικές και πολλά από τα προβλήματα θα μπορούσαν να θεωρηθούν “*γεωμετρική άλγεβρα*”, με τον ίδιο τρόπο που χαρακτηρίζεται το βιβλίο II του Ευκλείδη.

Τα Ινδικά μαθηματικά του 1<sup>ου</sup> μ.Χ αιώνα όμως δεν αναφέρονται στην “*άλγεβρα*” του “*Śulba-sūtras*”, αντιθέτως πιστεύουμε ότι η άλγεβρα σε εκείνα τα Ινδικά κείμενα είναι καθαρά αλγοριθμική. (Katz & Parshall, 2014, pp. 105-106)

#### 5.1.1 *Āryabhaṭīya* και *Brāhmasphuṭa-siddhānta* (6<sup>ος</sup> και 7<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ αντίστοιχα)

Το πρώτο δείγμα άλγεβρας ήρθε από στο έργο *Āryabhaṭīya* ( $\approx$  500 μ.Χ), το οποίο όπως τα περισσότερα έργα που περιέχουν μαθηματικά (*ganita*) στα επόμενα χίλια χρόνια, αφορούσε κυρίως θέματα σχετικά με την αστρονομία και ανήκε στην γενιά του *siddhānta* “ή αλλιώς αστρονομική πραμάτεια”. Ο συγγραφέας του, ο *Āryabhaṭa* <sup>47</sup>(γεννήθηκε περίπου το 476 μ.Χ), παρόλο που δεν διεκδίκησε την πατρότητα του έργου του, φαίνεται πως υπήρξε

---

<sup>47</sup> Περισσότερες πληροφορίες μπορεί κάποιος να δει εδώ. <https://famous-mathematicians.com/aryabhata/>

μέλος μιας πολύ καλά δομημένης μαθηματικής παράδοσης. Ο ίδιος είπε πως οι αλγεβρικές ιδέες που περιέχονται στο έργο του είναι εμπνευσμένες από τον θεό, η αλήθεια είναι ότι δεν γνωρίζουμε την αρχική τους προέλευση, γνωρίζουμε όμως ότι τόσο αυτός, όσο και οι συνεχιστές του ήταν μαθηματικοί δημιουργικοί, οι οποίοι πήγαν πέρα από την επίλυση προβλημάτων του *siddhānta*, στην ανάπτυξη νέων πεδίων των μαθηματικών και κυρίως της άλγεβρας, η οποία προσέλκυσε το ενδιαφέρον τους.

Κλειδί του μαθηματικού αυτού έργου αποτελεί επίσης η μορφή του. Όπως τα περισσότερα μεσαιωνικά Ινδικά κείμενα είναι γραμμένο σε Σανσκριτικά. Στα μέσα της πρώτης χιλιετίας μ.Χ τα Σανσκριτικά εξελίχθηκαν στην κύρια γλώσσα γραφής λόγιων κειμένων (a shared language of Indian scholarship). Υπηρετούσαν δηλαδή, τον ίδιο σκοπό με τα Λατινικά. Τα κείμενα ήταν συχνά γραμμένα σε ποιητικό ύφος, κάτι που πολλές φορές τα έκανε δυσνόητα με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλά σχόλια σε πρόζα, τόσο από τον ίδιο τον συγγραφέα, όσο και από τους σχολιαστές του.

Το δεύτερο κεφάλαιο του κειμένου είναι το κατεξοχήν μαθηματικό κεφάλαιο και περιλαμβάνει σύντομους κανόνες υπολογισμού. Η ανάγκη για ποιητική γραφή έκανε κάποιους από αυτούς τους κανόνες ιδιαίτερα δύσκολους (*cryptic*), αλλά με την βοήθεια των σχολίων από τον *Bhāskara I* (αρχές 7<sup>ου</sup> μ.Χ αιώνα) και των δυο μαθηματικών κεφαλαίων του “*Brāhmasphuṭa-siddhānta*” από τον *Brahmagupta*<sup>48</sup> (αρχές 7<sup>ου</sup> μ.Χ αιώνα), τα οποία γράφηκαν και τα δυο το 628 μ. Χ, έγινε το κείμενο του *Āryabhaṭa* κατανοητό. (Katz & Parshall, 2014, pp. 155-156)

## 5.2 Το αριθμητικό σύστημα

Πότε ακριβώς και πως αναπτύχθηκε το Ινδικό δεκαδικό και θεσιακό σύστημα αρίθμησης, όπως και το πως εισήχθη το σύμβολο για το μηδέν, παραμένει ένα μυστήριο. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι έχει τις ρίζες του στα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν οι Κινέζοι στους αριθμητικούς – υπολογιστικούς πίνακές τους, από τα μέσα ακόμα της πρώτης χιλιετίας π.Χ. Περισσότερες πληροφορίες για τον τρόπο που έκαναν υπολογισμούς οι Κινέζοι και την χρήση του υπολογιστικού πίνακα υπάρχουν στο κεφάλαιο 3 της παρούσης.

---

<sup>48</sup>Περισσότερες πληροφορίες για τον *Brahmagupta* μπορεί κάποιος να δει εδώ: [https://www.storyofmathematics.com/indian\\_brahmagupta.html](https://www.storyofmathematics.com/indian_brahmagupta.html)

Οι Ινδοί αντίστοιχα είχαν τα *counting pits*, τα οποία ήταν από πηλό. Ο Βουδιστής φιλόσοφος *Vasumitra* , περίπου τον πρώτο αιώνα μ. Χ χρησιμοποιεί κάτι ανάλογο για το εμπόριο, και λέει:

“Όταν [το ίδιο] κομμάτι πηλού, *-clay counting piece* – βρίσκεται στην θέση των μονάδων, τότε λαμβάνεται ως μια μονάδα, όταν είναι στην θέση των εκατοντάδων τότε σαν μια εκατοντάδα”.

Μια τέτοια δήλωση υπονοεί ότι οι αναγνώστες είναι εξοικειωμένοι με τα αριθμητικά σύμβολα, τα οποία αναπαριστούν διαφορετικές δυνάμεις του 10, ανάλογα με την θέση που βρίσκονται. Δεν μπορούμε όμως με μια τέτοια δήλωση να βγάλουμε συμπέρασμα σχετικά με το πότε αναπτύχθηκε χρονολογικά αυτή η μέθοδος. (Plofker, *Mathematics in India*, 2009, p. 46)

Σε αυτούς τους υπολογιστικούς πίνακες χρησιμοποιούσαν τα πήλινα κομμάτια για να τοποθετήσουν σε στήλες, τους αριθμούς, σε κάθε στήλη τοποθετούσαν έναν αριθμό από το 1 έως το 9 και όταν μια στήλη ήταν κενή, τότε συμβόλιζε το μηδέν.

Οι Ινδοί μπορούσαν να έχουν μάθει για αυτό το σύστημα από τους Κινέζους Βουδιστές ταξιδιώτες (*pilgrims* – για θρησκευτικούς λόγους ταξίδευαν δηλαδή), ή άλλους ταξιδιώτες, ή μπορεί και να ανέπτυξαν το ίδιο σενάριο ανεξάρτητα από την εξέλιξη των προγενέστερων μη - θεσιακών αριθμητικών συστημάτων που είχαν. Δεν υπάρχουν όμως σχετικά στοιχεία που να μας επιτρέπουν να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα. Μια ακόμα υπόθεση σχετικά με την προέλευση για το σύμβολο του μηδέν θα μπορούσε να είναι ότι η χρήση του μηδέν σε δεκαδικά νούμερα και το χαρακτηριστικό στρογγυλό του σχήμα μπορεί να προήλθε από τα στρογγυλά σημάδια για το μηδέν στο εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης, το οποίο έφτασε στους Ινδούς μέσω των Ελληνικών αστρονομικών και αστρολογικών κειμένων. (Plofker, *Mathematics in India*, 2009, p. 48)

Μπορεί κάποιος να διαβάσει περισσότερα στοιχεία σχετικά με την εικασία ότι το αριθμητικό σύστημα των Ινδών έχει τις ρίζες του στο Κινεζικό σύστημα αρίθμησης, καθώς και για τον τρόπο που μπορεί να έφτασε στους Ινδούς, στο (Lam & Ang, 2004, pp. 176-185)

### 5.2.1 *Αρνητικοί αριθμοί και το μηδέν*

Όπως έχει ήδη προαναφερθεί, το πως και το πότε εντάχθηκε το μηδέν στο αριθμητικό σύστημα των Ινδών δεν μας είναι γνωστό. Στο βιβλίο του “*Brāhmasphuṭa-siddhānta*” ο *Brahmagupta* και πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 18 (*pulverizer* – mathematics of quantities) ασχολείται με το μηδέν, τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, τις άγνωστες

ποσότητες, την απαλοιφή του μεσαίου όρου, την απαλοιφή των όμοιων όρων - the reduction to one [variable], το γινόμενο δυο αγνώστων, την φύση των τετραγώνων – δευτεροβάθμιες εξισώσεις γενικής μορφής, δηλαδή τεχνικές διαχείρισης των άγνωστων ποσοτήτων. (Plofker, *Mathematics in India*, 2007, p. 419)

Στους *verse* 18.30 έως 18.35 ο *Brahmagupta* περιγράφει τους κανόνες που αφορούν τις πράξεις με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, όπως και με το μηδέν.

Τον 9<sup>ο</sup> αιώνα μ. Χ, ένας μελετητής του *Jain*<sup>49</sup> με το όνομα *Mahavira* έγραψε αυτό που είναι σήμερα γνωστό ως το αρχαιότερο μαθηματικό βιβλίο, γραμμένο στα Σανσκριτικά, το οποίο έχει διασωθεί ολοκληρωμένο. Η κατηγοριοποίηση των πράξεων και των κανόνων στο έργο του *Ganitasarasangraha* ή αλλιώς “*Epitome of Calculation*” κατά κάποιο τρόπο

18.30. [The sum] of two positives is positive, of two negatives negative; of a positive and a negative [the sum] is their difference; if they are equal it is zero. The sum of a negative and zero is negative, [that] of a positive and zero positive, [and that] of two zeros zero.

18.31. [If] a smaller [positive] is to be subtracted from a larger positive, [the result] is positive; [if] a smaller negative from a larger negative, [the result] is negative; [if] a larger [negative or positive is to be subtracted] from a smaller [positive or negative, the algebraic sign of] their difference is reversed—negative [becomes] positive and positive negative.

18.32. A negative minus zero is negative, a positive [minus zero] positive; zero [minus zero] is zero. When a positive is to be subtracted from a negative or a negative from a positive, then it is to be added.

18.33. The product of a negative and a positive is negative, of two negatives positive, and of positives positive; the product of zero and a negative, of zero and a positive, or of two zeros is zero.

18.34. A positive divided by a positive or a negative divided by a negative is positive; a zero divided by a zero is zero; a positive divided by a negative is negative; a negative divided by a positive is [also] negative.

18.35. A negative or a positive divided by zero has that [zero] as its divisor, or zero divided by a negative or a positive [has that negative or positive as its divisor]. The square of a negative or of a positive is positive; [the square] of zero is zero. That of which [the square] is the square is [its] square-root.

Εικόνα 5-1 Οι κανόνες για τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς από τον *Brahmagupta* (Plofker, *Mathematics in India*, 2007, p. 429)

<sup>49</sup> Περισσότερα για την θρησκεία των *Jain* μπορεί κάποιος να δει εδώ

<http://fore.yale.edu/religion/jainism/>

συναντάται και στο έργο του *Brahmagupta*, αλλά είναι πολύ πιο λεπτομερές.

Το τεχνικό κομμάτι του κειμένου ξεκινάει με ορισμούς των μονάδων από το “*infinitely minute*” το οποίο τονίζει το μεταφυσικό ενδιαφέρον των *Jain* στα διάφορα είδη του απείρου, όπως τα απείρως μεγάλα ή απείρως μικρά. Ο *Mahavira* συνεχίζει με τις 8 βασικές πράξεις από τις οποίες όμως παραλείπει την πρόσθεση και την αφαίρεση, μάλλον ως πολύ βασικές και στις αντικαθιστά με το άθροισμα και την διαφορά σειρών. Στην αρχή του *Ganitasarasangraha*, ο συγγραφέας κάνει μια λυρική ωδή για την σημασία και την πανταχού παρουσία των μαθηματικών υπολογισμών.

**General rules in regard to zero and positive and negative quantities**

1.49. A number multiplied by zero is zero, and that [number] remains unchanged when it is divided by, combined with [or] diminished by zero. Multiplication and other operations in relation to zero [give rise to] zero; and in the operation of addition, the zero becomes the same as what is added to it.

1.50. In multiplying as well as dividing two negative [or] two positive [quantities, one by the other], the result is a positive [quantity]. But it is a negative quantity in relation to two [quantities], one [of which is] positive and other negative. In adding a positive and a negative [quantity, the result] is [their] difference.

1.51. The addition of two negative [quantities or] of two positive [quantities gives rise to] a negative or positive [quantity] in order. A positive [quantity] which has to be subtracted from a [given] number becomes negative, and a negative [quantity] which has to be [so] subtracted becomes positive.

1.52. The square of a positive as well as of a negative [quantity] is positive; and the square roots of those [square quantities] are positive and negative in order. As in the nature of things, a negative [quantity] is not a square [quantity]; it has therefore no square root. [...]

*Εικόνα 5-2 Οι κανόνες των πρόσθετων και η τετραγωνική ρίζα αρνητικών αριθμών από τον Mahavira (Plofker, Mathematics in India, 2007, p. 445)*



Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι κανόνες του *Bhaskara II* (1114 -1185 μ.Χ) στο έργο του “*Bijaganita*”, σχόλια στο οποίο έχει κάνει ο *Suryadasa* σχετικά με την διαίρεση με το μηδέν. (Plofker, *Mathematics in India*, 2007, pp. 470-471)

10a–b. In the multiplication and so on of zero [by a quantity the result is] zero. In the multiplication [of a quantity] by zero [the result is] zero. And a quantity divided by zero becomes [a quantity] having zero as its divisor.

In the multiplication and so on of *kha*—[that is,] of zero [by a quantity], a *kha*—[that is,] a zero—is [i.e., results]. The meaning is that [it is a fact] that, when zero is multiplied by any number whatsoever, zero is [the product] because a number multiplied by zero is zero because of the non-existence of its being in the sphere of counting by reason of its independence. Here by the word “*ādi*” [“and so on”] it is to be known that division, square, and square roots are the same. In this way Nārāyaṇa also has defined this incidentally by means of a poetic utterance in his algebra as follows: “On account of multiplication by zero a quantity goes to the state of being zero. But, when it is divided by zero, it does not return to its previous condition [non-zero finite quantity] because it is absorbed in that [infinite] just as a serious yogi who has attained the unique bliss-giving place of Brahma which consists of pure

10c–d. Tell me [the results when] zero is multiplied by two [and] divided by three, [when] three is divided by zero, and the square and square root of zero.

**It has a clear meaning.**

Now he shows that in the science of computation there is another name, infinite, for the number which has a zero as its divisor. Then he skillfully defines the infinity of this [with the verse beginning]: “In this.”

11. In this quantity also, which has zero as its divisor, there is no change even when many [quantities] have entered into it or come out [of it] just as at the time of destruction and of creation, when throngs of creatures enter into and come out of [him, there is no change] in the infinite and unchanging one [i.e., Viṣṇu].

In this quantity which has zero as its divisor, even when many numbers have entered into or come out of [it], there is no change. The meaning is that of whatever [quantity] the divisor is zero, when a fractional number is being combined with that [*khahara*, zero-divided] which has the same denominator, there is zeroness in the denominator and the numerator. If [it is asked]: “Surely, since one sees change in the quantity having zero as its divisor at the beginning of its combination with a number divided by one, two, three, and so on, how is it said that no change occurs?,” it is true that since it follows from the meaning of the words, there is no change of its state of being [a quantity] which has zero as its divisor in the quantity which has zero as its divisor. Or else the word “*ankeṣu*” [i.e., in numbers] here is to be understood “in non-fractional [numbers].”



Now he shows how wonderful his poetry is by confirming the infinity of [the quantity] which has zero as its divisor by the example of Viṣṇu because of the sameness of [his] infinity [with the lines beginning]: “Just as.” “Just as at the time of destruction and creation when many throngs of beings enter into and come out of [him], there is no change in the infinite and unchanging [Viṣṇu], so [there is no change in the *khahara*].” The idea is that, when at the time of destruction, beings enter into Viṣṇu and at the time of creation come out of Viṣṇu, there is no change [in him] since he is infinite. This has been stated in the [*Mahā*] *Bhārata* in the *Śāntiparvan* in a conversation between Bhīṣma and Yudhiṣṭhira: “From whom all beings are born at the coming of the first *yuga* and in whom they go to destruction again at the end of the *yuga*.”

**Thus the six-fold [operation] of zero. [...]**

*Εικόνα 5-3 κανόνες διαίρεσης και πολλαπλασιασμού με το 0 από τον Bhaskara II (Plofker, Mathematics in India, 2007, pp. 470-471)*

### 5.3 Γραμμικές εξισώσεις και αναλογίες

Κεντρικό ρόλο στα Ινδικά μαθηματικά, όπως φαίνεται από το *Āryabhaṭīya*, .Για τον προσδιορισμό άγνωστων ποσοτήτων κύρια μέθοδος στις γραμμικές εξισώσεις υπήρξε η μέθοδος των τριών.

#### 5.3.1 Η μέθοδος των τριών , το verse 2.26 του *Āryabhaṭīya*. (Keller, 2006, pp. 107-108)

“Τώρα όταν κάποιος έχει πολλαπλασιάσει αυτή την ποσότητα φρούτων με την μέθοδο των τριών με την επιθυμητή ποσότητα, αυτό το οποίο παίρνει διαιρούμενο με το μέτρο, πρέπει να είναι το φρούτο που επιθυμεί. - Now when one has multiplied that fruit quantity of the rule of three by the desire quantity, what has been obtained from that divided by the measure should be this fruit of the desire.”

Ο Bhāskara I , εξηγεί:

“Μας δίνεται η ποσότητα για το μέτρο (measure quantity)  $m$ , η οποία παράγει μια ποσότητα φρούτων (fruit quantity)  $p$  και μια επιθυμητή ποσότητα (desired quantity) , από την οποία θέλουμε να μάθουμε το φρούτο που επιθυμούμε (fruit of desire)  $x$ . ”

Εάν το μεταφράσουμε αυτό σε μοντέρνα ορολογία τότε αυτό στο οποίο καταλήγουμε είναι η αναλογία  $m:p = q:x$  και η λύση της  $x = \frac{pq}{m}$ , αυτό δηλαδή που ο *Āryabhaṭa* υπέδειξε ως λύση. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι ο *Āryabhaṭa* ανέφερε την μέθοδο των τριών

ως μια πολύ κοινή διαδικασία και συνηθισμένη τακτική. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι ήταν μια πρακτική ήδη γνωστή στους αναγνώστες του.

Ο *Bhāskara I*<sup>50</sup> (c. 600-680 μ.Χ) έδωσε και άλλα παραδείγματα στα σχόλιά του για την μέθοδο των τριών, όπως το παράδειγμα 3 από το (Keller, 2006, p. 110). Ο *Bhāskara I*, επίσης έκανε μια γενίκευση της μεθόδου των τριών σε κανόνα των 5,7 όπου όπως και στον κανόνα των τριών έχουμε μια απλή μέθοδο που περιλαμβάνει πολλαπλασιασμό και διαίρεση για να προσδιορίσει την απάντηση. Τόσο ο *Bhāskara I*, όσο και ο *Brahmagupta* ο οποίος μάλιστα εκτός από την μέθοδο των τριών, δίνει και μια αντίστροφη, δεν εξήγησαν την διαδικασία. Την θεώρησαν προφανή. Μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ήταν ένα βασικό βήμα. (Katz & Parshall, 2014, p. 157)

#### 5.3.1.1 Ο κανόνας των 5 από τον Bhāskara I (Keller, 2006, pp. 112-113)

[The Rule of Five]

An example in the Rule of Five:

**8. The interest (*vṛddhi*) of one hundred in a month should be five. Say, how great is the interest of twenty invested for six months, if you understand (*Ārya*)bhaṭṭa's mathematics||**

p.120,  
line 1

|               |        |
|---------------|--------|
| 100           | 20     |
| Setting down: | 1    6 |
|               | 5      |

Procedure: The first Rule of Three is 100, 5, 20. What has been obtained is *rūpaka*, 1. The second Rule of Three: "If with one month a *rūpaka* (has obtained), with six (months), how much (will be obtained)?" What has been obtained is six *rūpakas*.

This very (series of) computation(s) performed simultaneously is a Rule of Three. And here, "of a hundred in a month" (gives) the two measure quantities, [a hundred and one], "five" is the fruit quantity, "what is (the interest obtained) with twenty by means of a six months (loan)?" Thus, twenty and six are the desire quantities. Here, exactly as before, the desire quantity(ies) multiplied by the fruit quantity(ies) (are) divided by the two measure quantities<sup>310</sup>, the fruit (has been obtained) exactly as earlier. This is nothing but a Rule of Three arranged twice. Further:

<sup>50</sup> Για την ζωή του και το έργο του περισσότερα μπορεί κάποιος να βρει [εδώ](#)

### 5.3.2 Γενικός κανόνας επίλυσης γραμμικών εξισώσεων - verse 2.30 του Āryabhaṭa (Katz & Parshall, 2014, p. 109)

Ο γενικός κανόνας που παρουσιάζεται από τον Āryabhaṭa για την επίλυση εξισώσεων της μορφής  $ax + c = bx + d$ , είναι ο  $x = \frac{d-c}{a-b}$ .

Στο verse 2.30 λέει:

*“One should divide the difference of coins belonging to two men by the difference of beads. The result is the price of a bead, if what is made into money for each man is equal.”*

Εδώ περιγράφεται η ιδέα ξανά από τον Bhāskara I, το “bead” συμβολίζει γενικά ένα αντικείμενο με άγνωστη αξία/τιμή και το πρόβλημα ζητά να βρεθεί αυτή η τιμή.

Για παράδειγμα: “Ο πρώτος έμπορος έχει 7 αλόγα, με αξιοσημείωτη δύναμη και χωρίς σημάδια και έχω δει 100 dravyas στα χέρια του. Εννέα αλόγα και 80 dravyas ανήκουν στον δεύτερο έμπορο. Η τιμή του ενός αλόγου και το αντίστοιχο κόστος των δυο εμπορών θα πρέπει να βρεθεί, θεωρώντας ότι όλα τα αλόγα έχουν την ίδια τιμή.”

Εφόσον η περιουσία και των δυο αντρών ήταν η ίδια, η εξίσωση που πρέπει να λυθεί είναι:  $7x + 100 = 9x + 80$ , όπου  $x$  είναι η τιμή του ενός αλόγου. Για να το κάνεις αυτό διαίρεσε την διαφορά των χρημάτων ( $100 - 80$ ) από την διαφορά των αγαθών - beads ( $9 - 7$ ) για να βρεις  $20 \div 2 = 10$  dravyas να είναι η τιμή του κάθε αλόγου.

Παρόμοιο κανόνα δίνει και ο Brahmagupta:

*“The difference between rūpas, when inverted and divided by the difference of the unknowns, is the unknown in the equation”* – Η διαφορά ανάμεσα στα rūpas, όταν αντιστραφεί και διαιρεθεί με την διαφορά των άγνωστων, είναι ο άγνωστος της εξίσωσης. (Katz & Parshall, 2014, p. 109)

### 5.4 Τετραγωνικές και κυβικές ρίζες

Στα verse **Error! Bookmark not defined.** 4 και 5 του Āryabhaṭīya περιγράφουν τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούσαν για την εύρεση τετραγωνικών και κυβικών ριζών.

Table 5.1 Finding the square root of 341,056 by Āryabhaṭa's method.

|                                                                    |    |    |    |   |     |
|--------------------------------------------------------------------|----|----|----|---|-----|
|                                                                    |    | □  | □  | □ |     |
| Set out the number:                                                | 3  | 4  | 1  | 0 | 5 6 |
| Subtract [largest] square from square place:                       | -2 | 5  |    |   |     |
|                                                                    |    | 9  | 1  |   |     |
| Divide non-square place by 2× root:<br>$91 \div (2 \cdot 5) = 9$   |    |    |    |   |     |
| Subtract product $9 \cdot (2 \cdot 5)$ from non-sq. place:         | -9 | 0  |    |   |     |
|                                                                    |    |    | 1  | 0 |     |
| Subtract square [of 9] from square place:                          |    | -8 | 1  |   |     |
| Oops. Start over.                                                  |    |    |    |   |     |
| Set out the number:                                                | 3  | □  | □  | □ |     |
| Subtract [largest] square from square place:                       | -2 | 5  |    |   |     |
|                                                                    |    | 9  | 1  |   |     |
| Divide non-square place by 2× root:<br>$91 \div (2 \cdot 5) = 8$   |    |    |    |   |     |
| Subtract product $8 \cdot (2 \cdot 5)$ from non-sq. place:         | -8 | 0  |    |   |     |
|                                                                    |    | 1  | 1  | 0 |     |
| Subtract square [of 8] from square place:                          |    | -6 | 4  |   |     |
|                                                                    |    |    | 4  | 6 | 5   |
| Divide non-square place by 2× root:<br>$465 \div (2 \cdot 58) = 4$ |    |    |    |   |     |
| Subtract product $4 \cdot (2 \cdot 58)$ from non-sq. place:        | -4 | 6  | 4  |   |     |
|                                                                    |    |    |    | 1 | 6   |
| Subtract square [of 4] from square place:                          |    |    | -1 | 6 |     |
| <b>Final square root:</b> 584.                                     |    |    |    |   |     |

Εικόνα 5-5 Εύρεση της τετραγωνικής ρίζας του 584 με την μέθοδο του Āryabhaṭīya (Plofker, *Mathematics in India*, 2009, pp. 123-124)

Table 5.2 Finding the cube root of 103,823 by Āryabhaṭa's method.

|                                                                                          |    |    |    |   |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|---|-----|
|                                                                                          |    |    | •  |   | •   |
| Set out the number:                                                                      | 1  | 0  | 3  | 8 | 2 3 |
| Subtract [largest] cube from cube place:                                                 | -6 | 4  |    |   |     |
|                                                                                          |    | 3  | 9  | 8 |     |
| Divide 2nd non-cube place by $3 \cdot (\text{root})^2$ :<br>$398 \div (3 \cdot 4^2) = 8$ |    |    |    |   |     |
| Subtract product $7 \cdot (3 \cdot 4^2)$ from 2nd non-cube:                              | -3 | 3  | 6  |   |     |
|                                                                                          |    |    | 6  | 2 | 2   |
| Subtract product $7^2 \cdot (3 \cdot 4)$ from 1st non-cube:                              |    | -5 | 8  | 8 |     |
|                                                                                          |    |    |    | 3 | 4 3 |
| Subtract cube [of 7] from cube place:                                                    |    |    | -3 | 4 | 3   |
| <b>Final cube root:</b> 47.                                                              |    |    |    |   |     |

Εικόνα 5-6 Εύρεση της κυβικής ρίζας του 103.823 με την μέθοδο του Āryabhaṭīya (Plofker, *Mathematics in India*, 2009, p. 126)

### Τετραγωνική ρίζα:

“Κάποιος πρέπει να διαιρεί, συνεχώς, την μη- τετράγωνη [θέση] με το διπλάσιο της τετραγωνικής ρίζας. Όταν το τετράγωνο έχει αφαιρεθεί από την τετράγωνη [θέση]. Το πηλίκο είναι ίσο με την ρίζα σε διαφορετική θέση. - One should divide, constantly, the non-square [place] by twice the square root. When the square has been subtracted from the square [place], the quotient is the root in a different place.”

### Κυβική ρίζα:

“Κάποιος πρέπει να διαιρέσει τον δεύτερο μη-κύβο [σε θέση], με τριπλάσιο του τετραγώνου της κυβικής ρίζας. Το τετράγωνο [του πηλίκου] πολλαπλασιασμένο με το τρία και η προηγούμενη [ποσότητα] πρέπει να αφαιρεθούν από την πρώτη [μη-κυβική] θέση και ο κύβος από την κυβική [θέση].- One should divide the second non-cube [place] by three times the

square of the root of the cube. The square [of the quotient] multiplied by three and the former [quantity] should be subtracted from the first [non-cube place] and the cube from the cube [place].

Περισσότερες λεπτομέρειες για τις παραπάνω μεθόδους μπορεί κάποιος να βρει στο (Plofker, Mathematics in India, 2009, pp. 123-125)

## 5.5 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Το “*Baudhāyana-sulba-sūtra* (600 π.Χ περίπου)” χρησιμοποιεί “γεωμετρική άλγεβρα” για την επίλυση εξισώσεων που σήμερα χαρακτηρίζονται ως δευτεροβάθμιες. Πιο συγκεκριμένα εκεί βλέπουμε ένα πρόβλημα μετατροπής ενός ορθογωνίου σε ισεμβαδικό τετράγωνο. Εάν  $x$  είναι το μήκος της πλευράς του ζητούμενου τετραγώνου και  $c$  και  $d$  οι πλευρές του δοθέντος ορθογωνίου, τότε με τον σημερινό συμβολισμό αυτό το πρόβλημα αντιστοιχεί στην λύση της εξίσωσης:

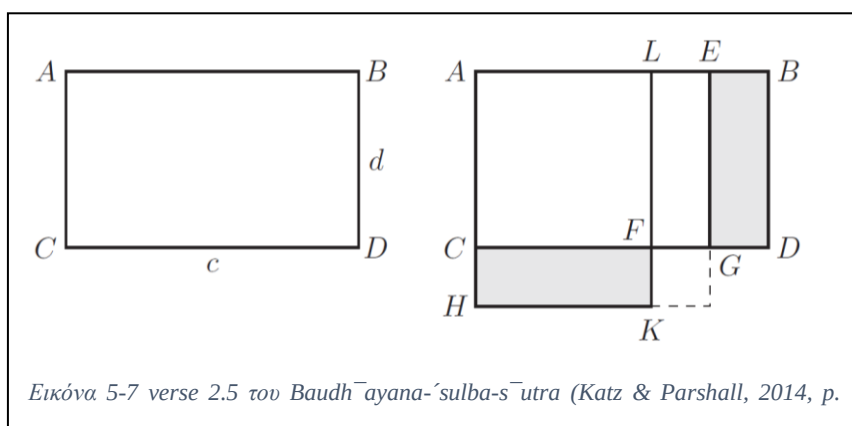
$$x^2 = cd$$

Equation 5-1

Το πρόβλημα αυτό αντίστοιχα στους Έλληνες το βλέπουμε στην πρόταση II.14 των Στοιχείων, με την κατασκευή της μέσης ανάλογης. Υπάρχει στην παράγραφο 4.5.6 της παρούσης. Αυτό που διαφοροποιείτε μεταξύ του Ευκλείδη και του συγγραφέα του “*Baudhāyana-sulba-sūtra*” είναι ο τρόπος προσέγγισης.

Η λύση από τους Ινδούς στο παραπάνω πρόβλημα βρίσκεται στο *verse* II.5 του “*Baudhāyana-sulba-sūtra*”. (Katz & Parshall, 2014, p. 109)

### 5.5.1 Verse II.5 του “*Baudhāyana-sulba-sūtra*” (Katz & Parshall, 2014, p. 110)



Εάν κάποιος επιθυμεί να μετασχηματίσει ένα ορθογώνιο σε ένα τετράγωνο, το πλάτος πρέπει να πάρει ως πλευρά τετραγώνου [και το τετράγωνο με αυτή την πλευρά «κόβεται» από το ορθογώνιο]. Το

υπόλοιπο ορθογώνιο διαιρείται σε δυο ίσα μέρη τα οποία τοποθετούνται στις δυο πλευρές,

[ένα κομμάτι στην κάθε μια]. Η άδεια περιοχή [στην γωνία] γεμίζει με ένα [τετράγωνο] κομμάτι. Η αφαίρεση αυτού του κομματιού [του τετράγωνου κομματιού από το τετράγωνο μας δίνει το ζητούμενο] έχει περιγράψει [στην II.2]<sup>51</sup>. Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

Κόβουμε δηλαδή την πλευρά  $CF = BD = d$  από το αρχικό ορθογώνιο με μήκος  $c = CD$ , διαίρεσε το ορθογώνιο που έμεινε δια 2 και τοποθέτησε κάθε τμήμα σε μια πλευρά του τετραγώνου. Έχουμε έτσι μετατρέψει το ορθογώνιο σε ισεμβαδικό γνώμονα. Συμπληρώνουμε μετά το τετράγωνο με ένα νέο τετράγωνο πλευράς  $GF = \frac{c-d}{2}$ . Με αυτό τον τρόπο έχουμε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα που μας οδηγεί η πρόταση II.6 των “Στοιχείων”, δηλαδή ότι

$$cd + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2$$

Equation 5-2

Το ορθογώνιο εκφράστηκε ως διαφορά δυο τετραγώνων.

### 5.5.2 Verse II.19 του “*Āryabhaṭīya*” (Keller, 2006, pp. 93-97)

Μια χιλιετία μετά το “*Baudhāyana-sulba-sūtra*”, μπορούμε να δούμε ότι η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων στην Ινδία είχε αλλάξει. Ο τρόπος σκέψης δεν ήταν πλέον καθαρά γεωμετρικός και ο τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων είναι αλγεβρικός. Στο verse II.19 του “*Āryabhaṭīya*” ζητείται το άθροισμα  $S_n$  μιας αριθμητικής προόδου με αρχικό όρο  $a$  και βήμα  $d$ .

$$S_n = n \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right) d + a \right] = \frac{n}{2} [a + (a + (n-1)d)]$$

Equation 5-3

Στο επόμενο όμως verse, προσδιορίζει ότι “η τετραγωνική ρίζα της αξίας των όρων ένα πολλαπλασιαστεί με το  $\delta$  και το βήμα  $d$ , αυξανόμενο κατά το τετράγωνο της διαφοράς του διπλάσιου του πρώτου όρου και την κοινή διαφορά - βήμα -, μειώνεται από το διπλάσιο του πρώτου όρου, διαιρείται με την κοινή διαφορά, αυξανόμενο κατά ένα και υποδιπλασιάζεται [είναι ο αριθμός των όρων]”

---

<sup>51</sup> H 2.2 περιγράφεται στο (Plofker, *Mathematics in India*, 2009, pp. 20-21)

Γνωρίζοντας δηλαδή το άθροισμα  $S_n$ , το πλήθος των  $n$  όρων δίνεται από τον αλγόριθμό:

$$n = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{8S_n + (2a - d)^2} - 2a}{d} + 1 \right]$$

Equation 5-4

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ένα γράψουμε την 5-4 ως δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς  $n$ , τότε αυτή γίνεται:

$$dn^2 + (2a - d)n + 2S_n = 0$$

Equation 5-5

Εάν λύσουμε την 5-5 ως προς  $n$ , χρησιμοποιώντας τον τύπο που γνωρίζουμε σήμερα για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις θα δούμε ότι προκύπτει ο τύπος 5-4. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι ο *Āryabhaṭa* γνώριζε τον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων και τον χρησιμοποιούσε. (Katz & Parshall, 2014, p. 112)

### 5.5.3 Αναφορές στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Στο verse 2.24 ο *Āryabhaṭa* επιλύει το  $2 \times 2$  σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} xy = c \\ x - y = b \end{cases}$$

Equation 5-6

και πως οι δυο ποσότητες είναι:

$$x = \frac{\sqrt{4c+b^2}+b}{2}$$

Equation 5-7

$$\text{και } y = \frac{\sqrt{4c+b^2}-b}{2}$$

Equation 5-8

Αναλυτικότερα μπορεί το δει κάποιος στο (Keller, 2006, p. 104) Η σύγκριση με τον τύπο που γνωρίζουμε σήμερα είναι αναπόφευκτη. Η ομοιότητα των δυο τύπων είναι εμφανής, παρόλα αυτά αξίζει να παρατηρήσουμε ότι δίνεται μόνο μια τιμή για το  $x$  και μια τιμή για  $y$  και ότι δεν παρουσιάζεται κάπου αρνητικό πρόσημο. Ο *Bhāskara I* στα σχόλια του, δεν αναφέρει πως ο συγγραφέας μπορεί να έφτασε σε αυτούς τους τύπους και δεν τους γενικεύει για την επίλυση οποιασδήποτε δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Για το παραπάνω



σύστημα ο *Brahmagupta* έδωσε και αυτός τον ίδιο κανόνα, δίνοντας όμως μόνο κανόνες και όχι αριθμητικά παραδείγματα.

Ο *Brahmagupta* στο “*Brāhmasphuṭa-siddhānta*”, παρουσίασε όμως έναν γενικό τύπο επίλυσης για δευτεροβάθμιες εξισώσεις και συγκεκριμένα εξισώσεις της μορφής  $ax^2 + bx = c$ . Περιγράφει:

*“diminish by the middle [number] the square root of the  $r^-$ upas multiplied by four times the square and increased by the square of the middle [number]; divide [the remainder] by twice the square. [The result is] the middle [number]. – απλοποίησε με το μεσαίο [αριθμό] την τετραγωνική ρίζα των  $r^-$ upas πολλαπλασιασμένη με τέσσερις φορές το τετράγωνο και αυξημένη κατά το τετράγωνο του μεσαίου [αριθμού]; Διαίρεσε [το υπόλοιπο] με το διπλάσιο του τετραγώνου. [ Το αποτέλεσμα είναι] ο μεσαίος [αριθμός]”*

Εδώ με τον όρο *μεσαίο αριθμό*, εννοεί την σταθερά  $b$  και την άγνωστη ποσότητα, ο όρος  $r^-$ upas είναι ο σταθερός όρος  $c$  και το “τετράγωνο” είναι η σταθερά  $a$ . Μπορούμε να μεταφράσουμε τα παραπάνω στον εξής τύπο:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Equation 5-9

Τόσο ο *Brahmagupta* όσο και ο σχολιαστής του έργου του *Prthudakasvamin* (τον 9<sup>ο</sup> μ.Χ αιώνα), ο οποίος χρησιμοποίησε τον παραπάνω τύπο για την επίλυση ενός αριθμητικού παραδείγματος του  $x^2 - 10x = -9$ , δεν αναφέρουν την πιθανότητα ύπαρξης και δεύτερης θετικής ρίζας στην εξίσωση, ούτε δίνουν στοιχεία για το πως οδηγήθηκαν σε αυτόν τον τύπο. (Katz & Parshall, 2014, p. 113)

Ο *Bhaskara II*<sup>52</sup> (1114-1185 μ.Χ) ήταν ο πρώτος που θεώρησε ότι μια δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να έχει δυο ρίζες. Στην περίπτωση όμως που οι ρίζες ήταν μια θετική και μια αρνητική, τότε προσδιόριζε μόνο την θετική ρίζα. Τα παραδείγματά του σχετικά με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις δεν είχαν ποτέ δυο αρνητικές, ή μιγαδικές ή άρρητες ρίζες. Όλα τα προβλήματα του είχαν ρητές θετικές ρίζες. Δεδομένου ότι γνώριζε πως να επιλύσει δευτεροβάθμιες εξισώσεις αλγοριθμικά και ότι σίγουρα κατανοούσε πως έμοιαζε ένα διώνυμο που ήταν τέλειο τετράγωνο, είναι μάλλον περίεργο ότι δεν έδωσε καμία ρίζα με

---

<sup>52</sup> Για την βιογραφία του και το έργο του

[http://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Bhaskara\\_II.html](http://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Bhaskara_II.html)



άρρητο αριθμό. Σίγουρα κατά την εργασία του θα είχε πέσει στην αντίληψή του κάποιο αντίστοιχο παράδειγμα, αλλά αποφάσισε να δημοσιεύσει μόνο προβλήματα, όπου οι ρίζες ήταν ρητοί αριθμοί. Εξάλλου, επειδή τα προβλήματα προέρχονταν από την καθημερινότητα και δεν ήταν αφηρημένα, πως θα μπορούσαμε να έχουμε άρρητο αριθμό μαϊμούδων σε μια ομάδα; Μπορεί κάποιος να δει παραδείγματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τον *Bhaskara II* στο (Katz & Parshall, 2014, pp. 113-114)

### 5.6 Εξισώσεις τρίτου και τέταρτου βαθμού

Ο *Bhaskara II* στο έργο του *Bija-ganita* (περίπου 1160 μ.Χ) εκτός από δευτεροβάθμιες εξισώσεις έδωσε και έναν αριθμό εξισώσεων 3<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> βαθμού, οι οποίες μπορούσαν να αντιμετωπιστούν συμπληρώνοντας την τρίτη ή την τέταρτη δύναμη αντίστοιχα. Για παράδειγμα:

*“what quantity, the square of the square of which, diminished by the quantity multiplied by two hundred, increased by the square of the quantity, and multiplied by two, is ten thousand diminished by one? Tell this quantity if you know the operations of algebra. Ποια είναι η ποσότητα της οποίας εάν από το τετράγωνο του τετραγώνου, αφαιρέσεις το γινόμενο της ποσότητας με το 200, αυξημένο κατά το τετράγωνο της ποσότητας και πολλαπλασιασμένο με το 2 είναι ίση με 10.000 μειωμένο κατά 1. Πες αυτή την ποσότητα αν γνωρίζεις τις διαδικασίες τις άλγεβρας.”*

Σε σύγχρονο συμβολισμό αυτό γράφεται:

$$x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999 \text{ ή}$$

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

*Equation 5-10*

Ο *Bhaskara II* για την επίλυση της 5.10 μας λέει:

Εάν προσθέσουμε  $400x + 1$  και στις δυο πλευρές, η αριστερή πλευρά θα γίνει τετράγωνο, αλλά όχι η δεξιά. Στην συνέχεια όμως προσθέτει και στις δυο πλευρές το  $4x^2 + 400x + 1$ , και έτσι η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$(x^2 + 1)^2 = [2(x + 50)]^2$$

*Equation 5-11*

Παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες από κάθε πλευρά οδηγείται στο συμπέρασμα ότι:

$$x^2 + 1 = 2x + 100 \text{ ή}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 100 \text{ ή}$$

$$(x - 1)^2 = 100, \text{ δηλαδή } x = 11$$

Equation 5-12

Ο *Bhaskara II*, δεν αναφέρει το λόγο που πήρε μόνο τις θετικές τετραγωνικές ρίζες, αλλά μάλλον προκύπτει από το γεγονός ότι οι αρνητικές θα οδηγούσαν σε αρνητική ρίζα. (Katz & Parshall, 2014, p. 116)

### 5.7 Η σχολή της Kerala<sup>53</sup> (14<sup>ο</sup> - 17<sup>ο</sup> μ.Χ αιώνα)

Αν και ο *Bhaskara II* φαίνεται από τον χειρισμό του παραπάνω ότι κατανοούσε τον μηχανισμό της συμπλήρωσης τετραγώνου που χρησιμοποίησε δεν τον απέδειξε. Η απόδειξη στα Ινδικά μαθηματικά ήρθε από την σχολή της *Kerala*, ιδρυτής της οποίας υπήρξε ο *Madhava*<sup>54</sup> (περίπου 1350-1425 μ.Χ). (Plofker, Mathematics in India, 2009, pp. 217-218). Βλέπουμε όμως ότι παρά την τάση τους να χρησιμοποιούν αλγεβρικές μεθόδους και να αποδεικνύουν τις λύσεις τους, ακόμα και στις αρχές του 16<sup>ου</sup> αιώνα ο *Citrabhanu* για να βρει την λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x - y = b \\ x^3 - y^3 = g \end{cases}$$

Equation 5-13

χρησιμοποίησε γεωμετρική απόδειξη, σε αντίθεση με αντίστοιχα συστήματα με εξισώσεις δευτέρου βαθμού, που τα απόδειξε όλα αλγεβρικά. (Katz & Parshall, 2014, pp. 115-118)

### 5.8 Συμπέρασμα – Σχόλια

Οι μαθηματικοί της Ινδίας, ενώ ξεκίνησαν να αντιμετωπίζουν τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με γεωμετρική οπτική, περίπου το 600 μ.Χ ο τρόπος αντιμετώπισης και επίλυσης τους έγινε αλγεβρικός. Δεν γνωρίζουμε πως έφτασαν εκείνη την περίοδο στον αλγεβρικό τρόπο λύσης και στον τύπο που χρησιμοποιούσαν, αφού χρησιμοποιούν την μέθοδο και τον τρόπο λύσης, χωρίς να σχολιάζουν πως προήλθαν. Αξίζει να σχολιαστεί ότι δεν αποδέχονται – αναφέρουν αρνητικές ρίζες και μέχρι τον *Bhaskara II* ο οποίος είναι ο πρώτος που κάνει αναφορά για την ύπαρξη δυο ριζών, σε κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση δίνουν μόνο μια λύση. Ακόμα και ο *Bhaskara II* παρόλα αυτά δεν αποδέχεται αρνητικές ή άρρητες ρίζες.

---

<sup>53</sup> Για την σχολή της Kerala, αναλυτικές πληροφορίες μπορεί κάποιος να βρει στο (Plofker, Mathematics in India, 2009) στο κεφάλαιο 7.

<sup>54</sup> Στοιχεία για την βιογραφία του <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Madhava.html>

Παρατηρούμε όμως ότι στις εξισώσεις 3<sup>ου</sup> βαθμού, μέχρι και τον 16<sup>ο</sup> αιώνα η αντιμετώπιση τους ήταν γεωμετρική.

### 5.9 Η μετάβαση από την Ινδία στο Ισλάμ

Τα μαθηματικά της Ινδίας, δεν αναπτύχθηκαν αποκομμένα από τον υπόλοιπο κόσμο και την ιστορία, αλλά γνωρίζουμε ελάχιστα σχετικά με την αλληλεπίδραση τους με άλλες μαθηματικές παραδόσεις- κουλτούρες. Κάποια από τα αντικείμενα που πραγματεύονταν, όπως η τριγωνομετρία των χορδών, την οποία οι Ινδοί αστρονόμοι εξέλιξαν στα ημίτονα, προήλθαν – εμπνεύστηκαν από την επαφή τους με την Βαβυλωνιακή και Ελληνική αστρονομία και αστρολογία και αντίστοιχα ξένοι σπουδαστές – μελετητές απορρόφησαν κάποιες Ινδικές ανακαλύψεις.

Για παράδειγμα, κάποιοι Βουδιστές ταξιδιώτες μετέφεραν την Ινδική αστρονομία στην Κεντρική Ασία και την Κίνα στους πρώτους αιώνες μ.Χ. Τα ελάχιστα διασωθέντα αποσπάσματα από την αστρονομία και την αστρολογία στο Ιράν, πριν το Ισλάμ, δείχνουν ότι κατείχαν αρκετά Σανσκριτικά έργα. Είναι πιθανό, μέσω των Ινδών εμπόρων οι μελετητές της Δυτικής Ασίας να ήρθαν σε επαφή με τις Ινδικές «πολύτιμες μεθόδους υπολογισμού» συμπεριλαμβανομένων το δεκαδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης και τις ανακαλύψεις τους στην αστρονομία, όπως είπε και ο *Severus Sebokht* είπε το 662 μ.Χ. .

Την ραγδαία εξάπλωση του Ισλάμ ακολούθησε και πιο άμεση επαφή, μετάδοση γνώσεων από την Ινδία στην Δυτική Ασία. Μέρη της βορειοδυτικής Ινδίας ήταν υπό τον έλεγχο των Μουσουλμάνων από τις αρχές του 8<sup>ου</sup> αιώνα, όταν οι Μουσουλμάνοι έμποροι ήταν ήδη παρόντες στις ακτές του *Malabar* στα νοτιοδυτικά και σε άλλες περιοχές. Στο δεύτερο μισό του 8<sup>ου</sup> αιώνα, μια αντιπροσωπία από την Ινδία, έφτασε στο νέο χαλιφάτο της Βαγδάτης με ένα *siddhanta* (ιερό κείμενο στα Σανσκριτικά) το οποίο ανήκε στην σχολή του *Brahmagupta*, το οποίο οι λόγιοι της αυλής του χαλιφάτου μετέφρασαν και προσάρμοσαν στα Αραβικά. Οι πρώτες μεταφράσεις από τα Σανσκριτικά ενέπνευσαν αρκετά αστρονομικά/αστρολογικά έργα στα Αραβικά και κάποια μιμήθηκαν και την Σανσκριτική πρακτική να γράφουν τεχνικά κείμενα και όρους σε ρήμα (verse). Δυστυχώς τα πρώτα κείμενα αυτής της τάσης έχουν πλέον σχεδόν ολοκληρωτικά χαθεί, και μας είναι γνωστά μόνο μέσα από αποσπάσματα και αναφορές από μεταγενέστερα έργα. Είναι ενδεικτικά της υιοθέτησης πολλών Ινδικών παραμέτρων, κοσμολογικών μοντέλων και υπολογιστικών τεχνικών, όπως τα ημίτονα από την ανερχόμενη Αραβική αστρονομία

Αυτές οι Ινδικές επιρροές σύντομα παραγκωνίστηκαν, αν και δεν είναι σαφές γιατί, από τα Ελληνικά μαθηματικά και αστρονομικά κείμενα, τα οποία μεταφράστηκαν στα Αραβικά από το χαλιφάτο των Αββασιδών<sup>55</sup>. Πιθανόν η υιοθέτηση να οφείλεται στην μεγάλη διαθεσιμότητα Ελληνικών έργων στην ευρύτερη περιοχή, όπως και από εργάτες (practitioners) οι οποίοι τα αντιλαμβάνονταν, έκανε την μαθηματική παράδοση ευρέως αποδεκτή. Πιθανόν το γεγονός ότι ήταν γραμμένα σε πρόζα και η παρουσίαση μέσω συμπερασμάτων τα καθιστούσαν πιο εύκολα και κατανοητά σε ξένους μελετητές σε σχέση με τα Σανσκριτικά verse. Όποια και να ήταν η αιτία, η αστρονομία που εμπνεύστηκε από τους Ινδούς και στα Σανσκριτικά κείμενα σύντομα σχεδόν εξαλείφθηκε από την αποκαλούμενη “Ελληνο – Ισλαμική” επιστήμη, που ιδρύθηκε πάνω σε Ελληνιστικά δοκίμια.

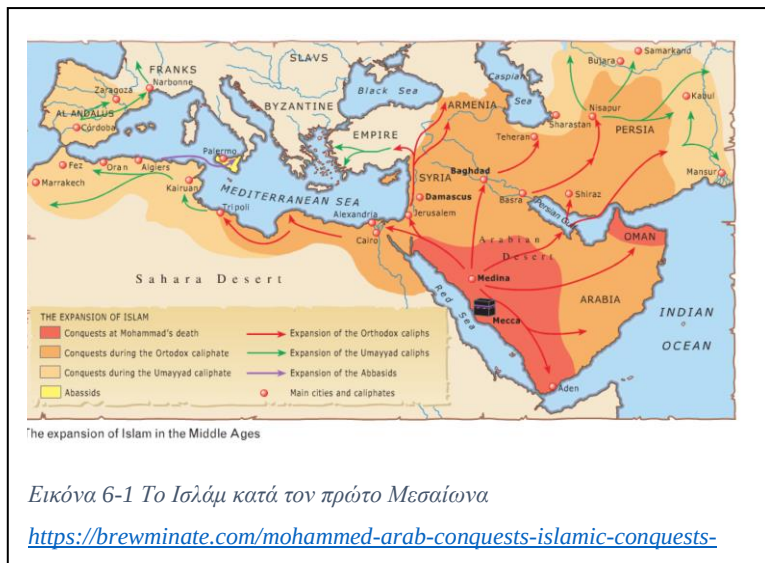
Το δεκαδικό – θεσιακό σύστημα αρίθμησης, παρόλα αυτά διατήρησε την θέση του, ως κρίσιμο μαθηματικό εργαλείο, όπως διατήρησε και τον χαρακτηρισμό του ως “Ινδικό υπολογιστικό -Indian computation.” Η Αραβική άλγεβρα μπορεί επίσης να επηρεάστηκε από τεχνικές των Ινδών, σχετικά με τους υπολογισμούς με αγνώστους, αν και οι διασύνδεση δεν είναι ξεκάθαρη: για παράδειγμα, θα αναμέναμε να δούμε μια εμπνευσμένη από τους Ινδούς αλγεβρική παράδοση (όρους όπως αυτούς του έδωσε ο *Brahmagupta*) σχετικά με τις σχέσεις μεταξύ θετικών και αρνητικών ποσοτήτων, αλλά η άλγεβρα του Ισλάμ γενικά δεν αποδέχεται τους αρνητικούς αριθμούς. Πολλές άλλες υπολογιστικές τεχνικές σε Αραβικά δοκίμια (όπως η “μέθοδος των τριών” και οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι, οφείλονται σε ένα βαθμό σε Ινδικές πηγές, αλλά μέχρι τώρα οι διασυνδέσεις τους δεν έχουν καταγραφεί ρητά.

Σε κάθε περίπτωση, οι Μουσουλμάνοι μαθηματικοί σύντομα υιοθέτησαν την μεθοδολογία και την φιλοσοφία των Ελληνικών μαθηματικών και πιθανόν να έγιναν λιγότερο δεκτικοί σε διαφορετικές προσεγγίσεις. (Plofker, *Mathematics in India*, 2007, p. 435)

---

<sup>55</sup> *Abbasid Caliphate* (750 – 1258 μ. Χ και 1261 – 1517 μ.Χ), το τρίτο Ισλαμικό χαλιφάτο. Ιδρύθηκε από ένα απόγονο ενός θείου του προφήτη Muhammad τον Abbas ibn Abdul-Mutallib (566-653 μ. Χ). Κυβέρνησαν ως χαλίφηδες για την μεγαλύτερη περίοδο του χαλιφάτου στην πρωτεύουσα Βαγδάτη του σημερινού Ιρακ. ([https://en.wikipedia.org/wiki/Abbasid\\_Caliphate](https://en.wikipedia.org/wiki/Abbasid_Caliphate))

## 6 Τα μαθηματικά του Ισλάμ – Αραβικά μαθηματικά



Όταν μιλάμε για τα μαθητικά του μεσαιωνικού Ισλάμ, τότε κάνουμε λόγο για τα μαθηματικά, τόσο την θεωρία, όσο και τις πρακτικές που αναπτύχθηκαν και άνθισαν στην περιοχή που κυρίαρχη θρησκεία ήταν το Ισλάμ. Η ιστορική περίοδος που αναφερόμαστε είναι περίπου

από το 750 έως το 1450 μ.Χ. Τα πρώτα γραπτά έργα χρονολογούνται περίπου το 825 μ.Χ. Γεωγραφικά εκτείνεται από την Ιβηρική χερσόνησο και μέσω της Βόρειας Αφρικής και της Μέσης Ανατολής, έως τα κράτη της πρώην Σοβιετικής Ένωσης, το Αφγανιστάν, το Ιράν και κάποια κομμάτια της Ινδίας.

Τα μαθηματικά κείμενα είναι γραμμένα σε διάφορες γλώσσες, όπως τα Περσικά και τα Τουρκικά, αλλά βασική γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε ήταν τα Αραβικά και για αυτό το λόγο αποκαλούνται και Αραβικά Μαθηματικά. Χρησιμοποιώντας όμως αυτόν τον χαρακτηρισμό κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι οι μαθηματικοί εκείνης της περιόδου ήταν μόνο Άραβες, γεγονός μη αληθινό καθώς πολλοί από αυτούς ήταν (για παράδειγμα) Ιρανοί, Αιγύπτιοι, Μαροκινοί και άλλα. Συνεπώς ο χαρακτηρισμός Ισλαμικά Μαθηματικά είναι ορθότερος και προτιμότερος. (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 515)

Τα μαθηματικά προήλθαν κυρίως από τρεις παραδόσεις. Η πρώτη ήταν από τα Ελληνικά μαθηματικά, από τα μεγάλα γεωμετρικά κλασικά έργα του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και του Αρχιμήδη, μέσα από τις αριθμητικές λύσεις των αόριστων προβλημάτων στα Αριθμητικά του Διόφαντου και με τα πρακτικά εγχειρίδια του Ήρωνα. Αλλά, όπως επεσήμανε ο Επίσκοπος Severus Sebokht<sup>56</sup> στα μέσα του έβδομου μ.Χ αιώνα, «υπάρχουν και άλλοι που ξέρουν κάτι». Ο Sebokht αναφερόταν στους Ινδούς, με το ευφύες αριθμητικό σύστημά τους να βασίζεται σε εννέα μόνο σύμβολα και μια τελεία για ένα

<sup>56</sup> <https://muslimheritage.com/people/scholars/severus-sebokht/>

μηδενικό μέρος. Συνέβαλαν επίσης στις αλγεβρικές μεθόδους, σε μια νέα τριγωνομετρία, και σε μεθόδους της στερεομετρίας για την επίλυση προβλημάτων στην αστρονομία. Η τρίτη παράδοση ήταν αυτό που κάποιος μπορεί να αποκαλέσει τα μαθηματικά των επαγγελματιών. Τοπογράφοι, χτίστες, τεχνίτες εμπλέκονταν στον σχεδιασμό με την χρήση γεωμετρίας και τα κρατικά στελέχη εμπλέκονταν στην φορολογία και τα οικονομικά. Τέλος χρήση των μαθηματικών γινόταν και από τους εμπόρους. Ως μέρος μιας προφορικής παράδοσης, αυτά τα μαθηματικά ξεπέρασαν εθνοτικές διαιρέσεις και αποτέλεσαν κοινή κληρονομιά σε αρκετά από τα εδάφη τα οποία προσαρτήθηκαν στον Ισλαμικό κόσμο. (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 516)

Το 762 μ.Χ, ο Χαλίφης *Al-Mansur* ίδρυσε μια νέα πρωτεύουσα στη Βαγδάτη, μια πόλη που γρήγορα έγινε ένα ακμάζον εμπορικό και πνευματικό κέντρο. Καθώς οι αρχικές παρορμήσεις της Ισλαμικής Ορθοδοξίας αντικαταστάθηκαν από μια πιο ανεκτική ατμόσφαιρα, τα πνευματικά επιτεύγματα όλων των κατοίκων του χαλιφάτου καλωσορίστηκαν και ενθαρρύνθηκαν. Ο χαλίφης *Halun al- Rshid*, ο οποίος κυβέρνησε από το 786 έως το 809 μ.Χ, ξεκίνησε ένα πρόγραμμα μετάφρασης χειρόγραφων από διάφορες γλώσσες στα Αραβικά. Κείμενα — μεταξύ αυτών πολλά πρωτότυπα κλασικά αρχαία Ελληνικά έργα, ιδίως, πολλά μαθηματικά και επιστημονικά κείμενα — συλλέχθηκαν από τις ακαδημίες στην Εγγύς Ανατολή, που είχαν συσταθεί από επιστήμονες που εκδιώχθηκαν από τις αρχαίες ακαδημίες της Αθήνας και της Αλεξάνδρειας. Πηγές από την Περσία και την Ινδία επίσης χρησιμοποιήθηκαν και περιλάμβαναν πραγματείες στα Περσικά, Συριακή έκδοση Ελληνικών έργων, και κείμενα στα Σανσκριτικά. Ο διάδοχός του, ο χαλίφης *Al-Mamun* (βασίλευε μεταξύ 813 – 833 μ.Χ), ίδρυσε μια βιβλιοθήκη, το *Bayt al- Hikma* (ή το σπίτι της Σοφίας), όπου αποθηκεύτηκαν τα χειρόγραφα και έλαβε χώρα η μακρά διαδικασία αντιγραφής και μετάφρασης. Από το τέλος του ένατου αιώνα, οι μεταφραστές είχαν παραγάγει αραβικές εκδόσεις σε πολλά από τα κυριότερα έργα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Διόφαντου, του Πτολεμαίου και άλλων Ελλήνων μαθηματικών. Οι Άραβες μελετητές είχαν επίσης απορροφήσει με κάποιο τρόπο τις αρχαίες μαθηματικές παραδόσεις των γραφών - ιερέων της Μεσοποταμίας και, επιπλέον, είχαν διδαχθεί κάποια από τα μαθηματικά των Ινδών, ειδικά την τριγωνομετρία και το δεκαδικό – θεσιακό αριθμητικό σύστημα.

Εκτός από τη λήψη αυτών των "επιστημονικών" κειμένων από δύο μείζονες πολιτισμούς, το Ισλάμ έμαθε από τις συχνά αποκαλούμενες "υπό-επιστημονικές" πηγές. Έτσι παραδείγματα "ψυχαγωγικών – recreational" προβλημάτων — όπως το διάσημο πρόβλημα

το οποίο ασχολείται με το πόσοι σπόροι σιταριού υπάρχουν σε μια σκακίερα αν υπάρχει 1 στο πρώτο τετράγωνο, 2 στο δεύτερο, 4 στο τρίτο, 8 στο τέταρτο, και ούτω καθεξής μέχρι και το 64<sup>ο</sup> τετράγωνο, έχουν βρεθεί στο Ισλάμ. Παρόμοια προβλήματα υπάρχουν σχεδόν σε κάθε κουλτούρα, συμπεριλαμβανομένης της αρχαίας Μεσοποταμίας και της Κίνας στην αρχή της εποχής μας. Αν και είναι μάλλον άσκοπο να ψάξουμε για τις ρίζες των προβλημάτων αυτών, η μετάδοση κατά μήκος των δρόμων του Μεταξιού αποτελεί μια πιθανή εξήγηση. Υπήρχαν επίσης πηγές ισλαμικών μαθηματικών στην εμπορική αριθμητική και στη γεωμετρία των τοπογράφων και των αρχιτεκτόνων. (Katz & Parshall, 2014, pp. 133-134)

Είναι χρήσιμο, όταν ασχολούμαστε με το κεφάλαιο των Ισλαμικών μαθηματικών να έχουμε κατά νου ότι η μαθηματική ευημερία στα Ισλαμικά μαθηματικά διήρκησε περισσότερο από την περίοδο της Ελληνικής κλασικής μαθηματικής αρχαιότητας και της εποχής των “μοντέρνων μαθηματικών”. Με διάφορες διαβαθμίσεις σχετικά με την ένταση της δημιουργικότητας και ανάπτυξης, τα Ισλαμικά μαθηματικά αναπτύσσονταν για μια περίοδο 600 περίπου χρόνων. Σε αυτή την περίοδο, αναπτύχθηκαν μαθηματικά σε διάφορα κέντρα, ανάλογα με τα δίκτυα επικοινωνίας, κυρίως με την χρήση της Αραβικής γλώσσας, η οποία παρά την γενική απουσία πολιτικής ενότητας, παρέμεινε η βασική γλώσσα.

Η Βαγδάτη, το πρώτο μεγάλο κέντρο, φιλοξένησε πολλούς από τους πρώτους Άραβες μαθηματικούς. Το Κάιρο και η Περσία λειτούργησαν ως κέντρα της μαθηματικής δραστηριότητας μετά τον 9<sup>ο</sup> αιώνα, ενώ η Ισπανία έπαιξε σημαντικό ρόλο στην επιστημονική δραστηριότητα μεταξύ 8<sup>ου</sup> και 12<sup>ου</sup> αιώνα. Τέλος, το *Marrakech* στην Βόρεια Αφρική είχε ένα μεγάλο αριθμό μαθηματικών τον 12<sup>ο</sup> και τον 13<sup>ο</sup> αιώνα. Ενώ γενικά δεν είναι εύκολο να εντοπίσουμε τις διασυνδέσεις και τις επιρροές μεταξύ αυτών των κέντρων, είναι εύκολο να δούμε λίγο μέσα στα μονοπάτια που κινήθηκαν οι μαθηματικές ιδέες του μεσαιωνικού Ισλάμ, παρακολουθώντας την χρήση συγκεκριμένων θεωρημάτων και παραδειγμάτων. (Katz & Parshall, 2014, p. 136)

### 6.1 Αραβικές πηγές

Γνωρίζουμε για τα μεσαιωνικά Αραβικά μαθηματικά κυρίως μέσα από κείμενα γραμμένα στην Αραβική γλώσσα με μελάνι σε χαρτί. Κινέζοι όμηροι από την μάχη της *Atlatkh* (περίπου το 750 μ.Χ) δίδαξαν στους μουσουλμάνους, πως να φτιάχνουν χαρτί και αυτή η γνώση σύντομα διαδόθηκε σε όλο τον Αραβικό κόσμο. Τα μαθηματικά δοκίμια του μεσαιωνικού Ισλάμ, βρίσκονται σε βιβλιοθήκες και ιδιωτικές συλλογές ανά τον κόσμο, αλλά οι μεγαλύτερες συλλογές είναι αυτές που βρίσκονται σε χώρες οι οποίες παλιά ήταν μέρος



του μεσαιωνικού Ισλαμικού κόσμου. Ένα επίσης σημαντικό μέρος, αλλά δευτερεύον, βρίσκεται σε συλλογές σε χώρες όπως η Αγγλία, η Γαλλία, η Γερμανία και η Ρωσία, οι οποίες εκείνη την περίοδο αποτελούσαν κυρίαρχες δυνάμεις.

Τα δοκίμια αυτά είναι συνήθως στην μορφή που θα συναντούσε κάποιος σήμερα σε μαθηματικά βιβλία και δημοσιεύσεις, αλλά υπάρχει και ένας πολύ μεγάλος αριθμός από υπολογιστικούς πίνακες, κάποιες με εκατοντάδες – χιλιάδες δεδομένα, τα οποία είχαν υπολογισθεί κυρίως για την αστρονομία, σύμφωνα με τις μαθηματικές μεθόδους και αρχές. Σε αυτές δεν αναφέρεται σχεδόν ποτέ η υπολογιστική μέθοδος, αλλά σημερινοί επιστήμονες με την χρήση των σύγχρονων υπολογιστών και στατιστικών δεδομένων μπορούν να προβούν σε κάποια συμπεράσματα.

Τέλος, τα μαθηματικά κείμενα δεν είναι οι μοναδικές μας πηγές. Χειροποίητα αντικείμενα, όπως μαθηματικά και αστρονομικά εργαλεία, όπως και παγκόσμιοι χάρτες στην μορφή κυκλικών δίσκων<sup>57</sup> μπορούν να αποτελέσουν σημαντικές πηγές μαθηματικής γνώσης με συστηματική δουλειά. (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, pp. 515-516)

Ένα έργο, ίσως του 9<sup>ου</sup> αιώνα, το οποίο έχει γραφεί από έναν γενικά άγνωστο μελετητή τον *Abu Bakr* και το οποίο τον 12<sup>ο</sup> αιώνα μεταφράστηκε στα Λατινικά με τον τίτλο *Liber mensurationum*, περιελάμβανε προβλήματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων γραμμένα σε γλώσσα όμοια με αυτή που χρησιμοποιούνταν από τους Βαβυλωνίους στις πλάκες τους. Οι όροι που χρησιμοποιούσε ήταν γεωμετρικοί και όχι αλγεβρικοί. Για παράδειγμα χρησιμοποιούσε τον όρο “πλευρά” και όχι “πράγμα - *shay*” και τον όρο “τετράγωνο” αντί για “πλούτος – *wealth - mal*”. Κάποια από τα προβλήματα εμφανίζονται με διπλή λύση, μια γεωμετρική και μια “αλγεβρική”, όπως αυτή προκύπτει από το έργο του *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī*<sup>58</sup>.

Την ίδια περίπου χρονική στιγμή που γραφόταν το έργο *Liber mensurationum* στα Αραβικά, τα μεγαλύτερα Ελληνικά μαθηματικά έργα μεταφράζονταν στα Αραβικά και οι Άραβες μαθηματικοί τα μελετούσαν και έγραφαν σχόλια. Η μεγαλύτερη ιδέα η οποία έφτασε

---

<sup>57</sup> Έχουν σχεδιαστεί για να επιτρέπουν στους χρήστες τους να βρίσκουν την κατεύθυνση της ιερής πόλης των Μουσουλμάνων της Μέκκα, από μια δοθείσα τοποθεσία απλά περιστρέφοντας έναν χάρακα γύρω από το κέντρο του κυκλικού δίσκου. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης όλων των πιθανών ιστορικών πηγών για την εποχή των Αραβικών μαθηματικών (μαθηματικά κείμενα, πίνακες και μαθηματικά εργαλεία)

<sup>58</sup> *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī* ( c.780-850 μ.Χ)

[https://www.storyofmathematics.com/islamic\\_alkhwarizmi.html](https://www.storyofmathematics.com/islamic_alkhwarizmi.html)



μέσω των Ελληνικών έργων ήταν η διαδικασία της απόδειξης με την χρήση αξιωμάτων. Υιοθέτησαν την φιλοσοφία - συνήθεια ότι ένα μαθηματικό πρόβλημα δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει λυθεί, εάν δεν αποδειχθεί η ορθότητα της λύσης. Το πρόβλημα όμως ήταν, ποια είναι η σωστή και πλήρης απόδειξη για ένα αλγεβρικό πρόβλημα; Η απάντηση ήταν προφανής για αυτούς. Αυτό το οποίο βρήκαν στα Ελληνικά έργα ήταν γεωμετρία, άρα οι μόνες πραγματικές και σωστές αποδείξεις ήταν οι γεωμετρικές. Συνεπώς, άρχισαν να αναζητούν τρόπους να αποδεικνύουν τους αλγεβρικούς κανόνες (είτε αυτούς που βρήκαν από τους Βαβυλωνίους, είτε όσα οι ίδιοι ανακάλυψαν) γεωμετρικά. (Katz & Parshall, 2014, pp. 137-138)

## 6.2 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Η πιο σημαντική συνεισφορά των Αράβων είναι στον τομέα της Άλγεβρας. Μπορούμε να πούμε ότι σε όσα μαθηματικά γνώριζαν από την αρχαία Μεσοποταμία και την Αρχαία Ελλάδα, τους έδωσαν έναν διαφορετικό προσανατολισμό, σε αυτό που εμείς σήμερα θα αποκαλούσαμε αλγεβρικό. Τα ενέταξαν σε μια νέα επιστήμη την αποκαλούμενη *al-jabr*.

Ένα από τα πρώτα Αραβικά αλγεβρικά κείμενα ήταν το “*al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābala – the compendious Book on the calculation of al-jabr and al-muqābala*”, το οποίο γράφηκε περίπου το 825 μ.Χ από τον *Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī* και το οποίο άσκησε έντονη επιρροή, τόσο στον Ισλαμικό κόσμο, όσο και την Ευρώπη. (Katz & Parshall, 2014, p. 138)

### 6.2.1 Ο όρος *al-jabr*

Ο όρος *al-jabr* μπορεί να μεταφραστεί ως επαναφορά (*restoring*) και αναφέρεται στην διαδικασία κατά την οποία μεταφέρουμε μια ποσότητα αρνητική (*subtracted quantity*) από την μια πλευρά μιας εξίσωσης στην άλλη, στην οποία γίνεται θετική.

Για παράδειγμα:

$$3x + 2 = 4 - 2x \text{ γίνεται } 3x + 2x + 2 = 4 \text{ και μετά σε } 5x + 2 = 4$$

### 6.2.2 Ο όρος *al-muqābala*

Ο όρος *al-muqābala* μπορεί να μεταφραστεί ως ισορρόπηση (*balancing*) και αναφέρεται στην απαλοιφή ενός θετικού όρου, αφαιρώντας ίσες ποσότητες και από τις δυο πλευρές μιας εξίσωσης.

Για παράδειγμα:

$$\text{Το } 5x + 2 = 4 \text{ γίνεται } 5x + 2 - 2 = 4 - 2 \text{ δηλαδή } 5x = 2$$

Ο *al-Khwārizmī* βέβαια δεν έχει αυτά τα σύμβολα και όσα δείχνουμε παραπάνω είναι με τον σημερινό τρόπο γραφής. Η σημερινή μας λέξη “*algebra*”, αποτελεί μια παράφραση της Αραβικής *al-jabr* και χρησιμοποιείται πλέον για να αποδώσει στο σύνολο το έργο του *al-Khwārizmī* και την επιστήμη στην οποία αντιστοιχεί.

### 6.3 *Al-Khwārizmī*

Ο *al-Khwārizmī* γράφει στην εισαγωγή του έργου του:

*“That fondness for science, by which God has distinguished the Imam al-Mamun, the*



Εικόνα 6-2 Γραμματόσημο το οποίο εκδόθηκε στις 6 Σεπτεμβρίου 1983, στην πρώην Σοβιετική ένωση, για τα 1200 (περίπου) χρόνια από την γέννηση του *al-Khwārizmī*'s.

[https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Muhammad\\_ibn\\_M%C5%ABs%C4%81\\_al](https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Muhammad_ibn_M%C5%ABs%C4%81_al)

*Commander of the Faithful, . . . that affability and condescension which he shows to the learned, that promptitude with which he protects and supports them in the elucidation of obscurities and in the removal of difficulties, has encouraged me to compose a short work on calculating by al-jabr and al- muqābala, confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, law-suits, and trade, and in all their dealings with one another, or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation, and other objects of various sorts and kinds are concerned -Αυτή η συμπάθεια για την επιστήμη, με την οποία ο Θεός έχει διακρίνει τον ιμάμη al-Mamun, τον διοικητή των πιστών,... Αυτή η καταδεκτικότητα και η συγκατάβαση που επιδεικνύει σε όσους μαθαίνουν, η προθυμία με την οποία τους προστατεύει και τους στηρίζει στη*

διευκρίνιση του ασαφειών και στην άρση των δυσκολιών, με ενθάρρυνε να συντάξω μια σύντομη εργασία για τον υπολογισμό με το *Al-Jabr* και το *Al - muqāBala*, περιορίζοντας το σε ό,τι είναι ευκολότερο και πιο χρήσιμο στην αριθμητική, όπως οι άνδρες απαιτούν συνεχώς σε περιπτώσεις κληρονομιάς, κληροδοτήματα, διαμοιρασμών, νομικών διεκδικήσεων, και το εμπόριο, και σε όλες τις ανά μεταξύ τους συναλλαγές, ή όπου η μέτρηση των εκτάσεων, το άνοιγμα καναλιών, ο γεωμετρικός υπολογισμός, και άλλα αντικείμενα διαφόρων ειδών το απαιτεί.” (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 542)

Όπως κάποιος μπορεί να καταλάβει ο *al-Khwārizmī* ενδιαφερόταν κυρίως να γράψει ένα πρακτικό εγχειρίδιο, όχι ένα θεωρητικό, αλλά επηρεάστηκε αρκετά από την εμφάνιση των Ελληνικών μαθηματικών στην Βαγδάτη, ώστε ένιωσε υποχρεωμένος να δώσει γεωμετρικές αποδείξεις στις αλγεβρικές του διαδικασίες. Αυτές όμως οι αποδείξεις δεν είναι όπως οι Ελληνικές. Μοιάζουν αρκετά με των Βαβυλωνίων και τα επιχειρήματα που αυτοί χρησιμοποιούν με αποτέλεσμα οι αλγεβρικοί αλγόριθμοι να αναπτυχθούν. Όπως και οι Βαβυλώνιοι πρόγονοι του έδωσε αρκετά παραδείγματα, αλλά η Ελληνική επιρροή διαφαίνεται στην συστηματική κατηγοριοποίηση των προβλημάτων, όπως και στις πολύ λεπτομερείς περιγραφές των μεθόδων του.

Ξεκινάει το κείμενό του με την φράση:

“*What people generally want in calculating ... is a number*” (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 543) το οποίο είναι η λύση μιας εξίσωσης. Το κείμενο του συνεπώς είναι ένα εγχειρίδιο για την επίλυση εξισώσεων. Έδωσε τεχνικά ονόματα στις ποσότητες με τις οποίες κατά κύριο λόγο ασχολούταν, έτσι:

- *māl* (wealth) είναι το τετράγωνο του αγνώστου
- *jibr* (root) για τον άγνωστο, λογικά σκεπτόμενος σαν την ρίζα του *māl* και
- *'adad mufrad* (simple number) για τον σταθερό όρο

Αργότερα ο όρος *jibr* αντικαταστάθηκε από τους διαδόχους του με *shay* (thing) και τον όρο *dirhem*, για τον σταθερό όρο. Αυτό όμως που είναι σημαντικό είναι ότι αυτοί οι όροι δεν είναι γεωμετρικοί και αυτό τους διαφοροποιεί από τους όρους που χρησιμοποιούταν μέχρι τότε. Είναι εκείνη την περίοδο που γίνεται το βήμα από το γεωμετρικό τρόπο σκέψης να πάμε σε έναν αλγοριθμικό τρόπο σκέψης για την επίλυση εξισώσεων. (Katz & Parshall, 2014, p. 139)

### 6.3.1 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις από τον *al-Khwārizmī*

Ο *al-Khwārizmī* χωρίζει τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις σε 6 περιπτώσεις. Τις πρώτες τρεις θα τις χαρακτηρίσουμε ως απλές, αφού ο *al-Khwārizmī* ονομάζει τις άλλες τρεις ως σύνθετες. Οι τύποι είναι:

|          |     |                 |                              |
|----------|-----|-----------------|------------------------------|
| απλές    | I   | $ax^2 = bx$     | Squares are equal to roots   |
|          | II  | $ax^2 = c$      | Squares are equal to numbers |
|          | III | $bx = c$        | Roots are equal to numbers   |
| σύνθετες | IV  | $ax^2 + bx = c$ | Squares and roots are equal  |

|  |    |                 |                                         |
|--|----|-----------------|-----------------------------------------|
|  |    |                 | to numbers                              |
|  | V  | $ax^2 + c = bx$ | Squares and numbers are equal to roots  |
|  | VI | $bx + c = ax^2$ | Roots and numbers are equal to squares. |

Table 6-1

Τα τρία πρώτα είδη των απλών εξισώσεων τα λύνει μέσω παραδειγμάτων και αναμένει από τον αναγνώστη – μαθητή να απομνημονεύσει τα παραδείγματα και δεν δίνει κανόνες για την επίλυση των απλών εξισώσεων, εκτός από έναν:

*“if the coefficient of the unknown is greater or less than unity, divide or multiply all terms be the inverse of the coefficient to reach unity. – Εάν ο συντελεστής του αγνώστου είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από την μονάδα, τότε διαιρέσε ή πολλαπλασίασε με τον αντίστροφο του συντελεστή για να βρεις την μονάδα.”* (Hughes, 1986, p. 213)

Για τα 3 είδη των απλών εξισώσεων δίνει τα παρακάτω παραδείγματα με τις λύσεις τους:

***"Square is equal to five roots of the same"; the root of the square is five, and the square is twenty-five, which is equal to five times its root."*** (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 543) το οποίο αντιστοιχεί στο παρακάτω παράδειγμα εάν το μεταφράσουμε στην σύγχρονη γλώσσα:

$x^2 = 5x$  τότε  $x = 5$  και  $x^2 = 25$ , το οποίο είναι το πενταπλάσιο της ρίζας.

***"one third of the square is equal to four roots"; then the whole square is equal to twelve roots; that is a hundred and forty-four; and its root is twelve."*** (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 543) το οποίο αντιστοιχεί στο παρακάτω παράδειγμα εάν το μεταφράσουμε στην σύγχρονη γλώσσα:

$$\frac{x^2}{3} = 4x \text{ τότε } x^2 = 12x \text{ και } x^2 = 144 \text{ και } x = 12.$$

***"five squares are equal to ten roots"; then one square is equal to two roots; the root of the square is two, and its square is four."*** (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 543) το οποίο αντιστοιχεί στο παρακάτω παράδειγμα εάν το μεταφράσουμε στην σύγχρονη γλώσσα:

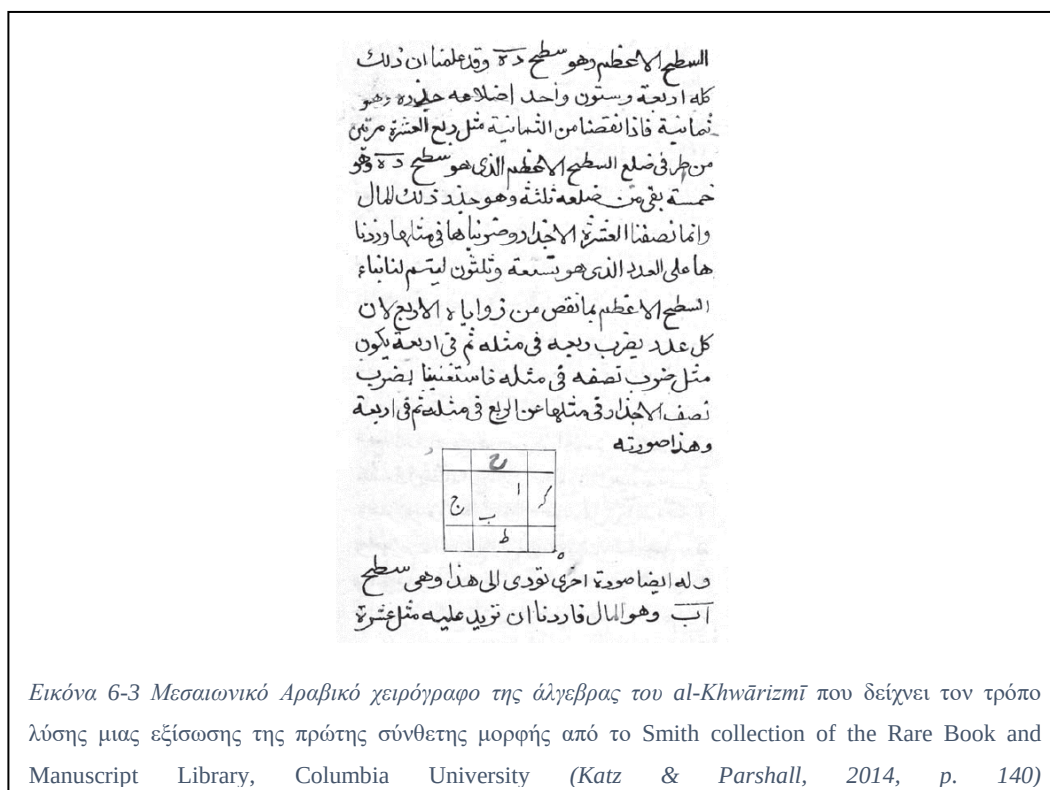
$$5x^2 = 10x \text{ τότε } x^2 = 2x \text{ και } x^2 = 4 \text{ και } x = 2.$$

Παρατηρούμε ότι ο *al-Khwārizmī* αρκείται να βρει μια μοναδική ρίζα και ότι αυτή είναι η θετική. Δεν γνώριζε την ύπαρξη αρνητικής ρίζας. (Gandz, The Origin and

Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra, 1937, p. 7)

Μια γεωμετρική δομή συνοδεύει όλα τα παραδείγματα εξισώσεων, τόσο τα απλά όσο και τα σύνθετα ως απόδειξη για την μέθοδο που μόλις ακολούθησε. Η στρατηγική που ακολουθούμε σήμερα να μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και να θέτουμε την εξίσωση ίση με το μηδέν δεν εμφανίστηκε μέχρι τον 17<sup>ο</sup> αιώνα. (Hughes, 1986, p. 213)

Μια πιθανή εξήγηση, για το γεγονός ότι μέχρι τον 17<sup>ο</sup> αιώνα δεν έφερε κανείς όλους τους όρους μιας εξίσωσης στο πρώτο μέλος, ίσως να είναι ότι η ανάγκη για γεωμετρική απόδειξη καθιστούσε δύσκολο να το ερμηνεύσουν. Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι στα 3 σύνθετα είδη του *al-Khwārizmī*, έχουμε ουσιαστικά την δευτεροβάθμια εξίσωση με όλους τους όρους, σήμερα δεν θα μιλούσαμε για 3 μορφές, αλλά την δευτεροβάθμια εξίσωση απλά.



Ο *al-Khwārizmī* περιοριζόταν από την ανάγκη του να μην εμφανίσει το μηδέν στο δεύτερο μέλος ώστε να μην έχει αρνητικά μέλη για να μπορέσει να την ερμηνεύσει γεωμετρικά. Οι Άραβες αντίθετα με τους Ινδούς δεν χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς. Η επιρροή από τους Έλληνες και η γεωμετρική ερμηνεία που έδιναν, πιθανόν λοιπόν να τους δημιουργούσε αυτούς τους περιορισμούς. Τόσο οι συντελεστές, όσο και οι ρίζες πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί.

Η σημερινή μορφή  $ax^2 + bx + c = 0$ , δεν θα είχε νόημα για τον *al-Khwārizmī*, αφού στην περίπτωση που όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί, τότε δεν έχει θετικές ρίζες, το οποίο είναι απαραίτητο για τους Άραβες. Ας δούμε τις λύσεις του έδινε ο *al-Khwārizmī* για τους έξι τύπους του.

Οι τρεις πρώτοι τύποι είναι απλοί όπως λέει και ο ίδιος και δίνει λύση μέσα από τα παραδείγματα όπως αναφέραμε. Αξίζει όμως να σχολιάσουμε ότι στον τύπο I δεν δέχεται το μηδέν ως λύση. (Katz & Parshall, 2014, p. 141)

Ας δούμε ένα παράδειγμα για τον τύπο V δηλαδή τον  $ax^2 + c = bx$ : (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 544)

*"a square and twenty-one in numbers are equal to ten roots of the same square." What must be the amount of a square, which, when twenty-one dirhams are added to it, becomes equal to the equivalent of ten roots of that square?*

*Solution: Halve the number of the roots; the half is five. Multiply this by itself; the product is twenty-five. Subtract from this the twenty-one which are connected with the square; the remainder is four. Extract its root; it is two. Subtract this from the half of the roots, which is five; the remainder is three. This is the root of the square which you required, and the square is nine. Or you may add the root to the half of the roots; the sum is seven; this is the root of the square which you sought for, and the square itself is forty-nine.*

*When you meet with an instance which refers you to this case, try its solution by addition, and if that does not serve, then subtraction certainly will. For in this case both addition and subtraction may be employed, which will not answer in any other of the three cases in which the number of the roots must be halved. And know, that, when in a question belonging to this case you have halved the number of the roots and multiplied the half by itself, if the product be less than the number of dirhams connected with the square, then the instance is impossible; but if the product be equal to the dirhams by themselves, then the root of the square is equal to the half of the roots alone, without either addition or subtraction."*

Η παραπάνω εξίσωση εάν γραφεί με χρήση του σημερινού συμβολισμού είναι:

$$x^2 + 21 = 10x$$

*Equation 6-1*

Ας δούμε πως την λύνει:

1. Διαιρέσε τον αριθμό των ριζών με το 2, άρα  $\frac{10}{2} = 5$ , δηλαδή ( $\frac{b}{2} = 5$ )



2. Πολλαπλασιάσε το με τον εαυτό του, το γινόμενο είναι 25, δηλαδή  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 25$
3. Αφαίρεσε από αυτό τον αριθμό 21, είναι συνδεδεμένα με το τετράγωνο, το υπόλοιπο είναι 4 δηλαδή  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = 4$
4. Βρες την ρίζα του, που είναι το 2. Δηλαδή  $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 2$
5. Αφαίρεσέ το από το μισό της ρίζας, δηλαδή  $\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 3$
6. Αυτή είναι η ρίζα από το τετράγωνο που ζητούσες, άρα  $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 3$
7. Και το τετράγωνο που ζητούσες είναι το 9.
8. Η μπορείς να προσθέσεις την ρίζα στο μισό των ριζών και το άθροισμα είναι 7, δηλαδή  $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 7$
9. Άρα το τετράγωνο που ζητούσες είναι το 49.

Βλέπουμε λοιπόν ότι εδώ ο *al-Khwārizmī* εδώ μας δίνει μια διπλή ρίζα. Δίνει λοιπόν έως τύπο για την επίλυση της  $x^2 + c = bx$ , τις ρίζες

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Equation 6-2

Ο *al-Khwārizmī* συνεχίζει κάνοντας κάποιες υποδείξεις και λέει:

Όταν συναντηθείτε με μια παρουσία που σας παραπέμπει σε αυτή την υπόθεση, δοκιμάστε τη λύση της με την πρόσθεση, και αν αυτό δεν λειτουργήσει, τότε σίγουρα θα λειτουργήσει η αφαίρεση. Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο η πρόσθεση όσο και η αφαίρεση, η οποία δεν θα απαντά σε καμία από τις τρεις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός των ριζών πρέπει να μειωθεί κατά το ήμισυ. Και να ξέρετε, ότι, όταν σε μια ερώτηση που ανήκει σε αυτή την περίπτωση έχετε το ήμισυ του αριθμού των ριζών και αυτό είναι πολλαπλασιασμένο με τον εαυτό του, αν το προϊόν (αποτέλεσμα) είναι μικρότερο από τον αριθμό των ντιράμ (σταθερού όρου) που συνδέονται με το τετράγωνο, τότε η λύση είναι αδύνατη; Αλλά αν το προϊόν είναι ίσο με τα ντιράμ από μόνα τους, τότε η ρίζα του τετραγώνου είναι ίση με το ήμισυ των ριζών μόνο, χωρίς προσθήκη ή αφαίρεση.

Εδώ ουσιαστικά μας λέει πότε μπορεί να μην έχει δυο ρίζες μια εξίσωση και εξηγεί στον αναγνώστη τις περιπτώσεις. Στο τέλος τονίζει το εξής:

Εάν  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$  τότε δεν έχει ρίζα η εξίσωση, καταλαβαίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η υπόρριζη ποσότητα είναι αρνητική και θα οδηγούμασταν σε μιγαδική λύση, κάτι το οποίο ήταν παντελώς άγνωστο τότε και επίσης

Εάν  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$  τότε  $x = \frac{b}{2}$ , όπως γνωρίζουμε εμείς σήμερα το  $x = \frac{b}{2}$  θα αποτελούσε διπλή ρίζα, αλλά η πολλαπλότητα των ριζών δεν ήταν κάτι που απασχολούσε τον *al-Khwārizmī*.

Αμέσως μετά την παραπάνω αλγεβρική λύση ο *al-Khwārizmī*, δίνει όπως ήδη έχουμε αναφέρει και την αντίστοιχη γεωμετρική, η οποία όπως θα δούμε ακολουθεί την λύση που θα έδιναν οι Βαβυλώνιοι και δεν είναι όπως θα ήταν μια λύση των Ελλήνων. Ακολουθεί την μέθοδο “*cut and paste*”, των Βαβυλωνίων η οποία έχει αναφερθεί στην παράγραφο 2.3 της παρούσης.

Την γεωμετρική λύση μπορεί κάποιος να την δει αναλυτικά στο (Mathematics in Mediaval Islam, 2007, p. 545)

Αυτό που αξίζει να ειπωθεί είναι ότι παρά τις γεωμετρικές αποδείξεις του, έστρεψε το ενδιαφέρον του και εστίασε στην επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ανεξάρτητα από την εύρεση πλευρών τετραγώνων. Την εστίασε στην εύρεση αριθμών που ικανοποιούν μια συνθήκη. Επίσης δεν έδινε την γεωμετρική απόδειξη του σε κάθε παράδειγμα. Την ανέφερε στο πρώτο παράδειγμα από ένα είδος και μετά απλά εφάρμοζε την μέθοδο του για την εύρεση της λύσης σε διάφορα παραδείγματα. Ξεκαθάρισε ότι βρίσκοντας την λύση μιας δευτεροβάθμιας δεν έβρισκε πλευρές τετραγώνου. Ας δούμε τον ορισμό που έδινε για τις ρίζες:

“Μια ρίζα είναι οτιδήποτε μπορεί να συντεθεί από μονάδες, το οποίο μπορεί να πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του ή οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από την μονάδα πολλαπλασιασμένος με τον εαυτό του ή αυτός ο οποίος φαίνεται να εξαλείφεται μικρότερος από την μονάδα, όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του”. (Katz & Parshall, 2014, p. 143)

Πως έλυνε τις υπόλοιπες “σύνθετες” δευτεροβάθμιες ο *al-Khwārizmī*; Εάν είχαν συντελεστή μπροστά από το  $x^2$ , όπως έχουμε ήδη αναφέρει τον απλοποιούσε και μετά προχωρούσε όπως προηγούμενως.

Ο *al-Khwārizmī*, έδωσε μια σειρά προβλημάτων εκ των οποίων στα πιο σύνθετα εφάρμοζε τους κανόνες της άλγεβράς του, προκειμένου να τα φέρει σε μια από τις 6 μορφές



που είχε ως βασικές. Οι κανόνες που αναφέρει μας αποδεικνύουν ότι ήξερε να χειρίζεται τα πρόσημα στον πολλαπλασιασμό, αφού για την επιμεριστική ιδιότητα των  $(a \pm b)(c \pm d)$  είπε πως χρειάζονται τέσσερις πολλαπλασιασμοί και πως εάν οι μονάδες (b και d) είναι θετικές, τότε ο τελευταίος πολλαπλασιασμός είναι θετικός, εάν είναι και οι δυο αρνητικές, τότε είναι σαν θετικός και εάν ένας από αυτούς είναι αρνητικός, τότε ο τέταρτος πολλαπλασιασμός είναι αρνητικός. (Katz & Parshall, 2014, p. 146)

#### 6.4 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις από τον *Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam*<sup>59</sup>

Οι συνεχιστές του *al-Khwārizmī*, μέσα στα επόμενα 50 χρόνια αποφάσισαν να υιοθετήσουν την αλγεβρική του γλώσσα, αλλά ότι οι γεωμετρικές αποδείξεις τους πρέπει να στηρίζονται στο έργο του Ευκλείδη και όχι στον προγόνον τους. Έτσι λοιπόν βρήκαν τις αποδείξεις που ζητούσαν στις προτάσεις II.5 και II.6 των Στοιχείων, μπορεί κάποιος να τις δει στην παράγραφο 4.5.4 της παρούσης.

Ο Αιγύπτιος μαθηματικός *Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam* (ca 850-930) στο έργο του “*Kitāb fī al-jabr wa al-muqābala - Book on al-Jabr and al- muqāBala*” λέει δείχνει πως θα έλυνε την ίδια εξίσωση που αναφέραμε προηγουμένως από τον *al-Khwārizmī*, την 6.1 με χρήση της πρότασης II.6 των Στοιχείων. Αναλυτικά η μέθοδος βρίσκεται στο (Katz & Parshall, 2014, p. 148).

Ο *Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam* ακολούθησε τον διαχωρισμό των δευτεροβάθμιων εξισώσεων του *al-Khwārizmī*, αλλά εξέλιξε τις μεθόδους, αποδεχόμενος ως λύσεις αλλά και ως συντελεστές και άρρητους αριθμούς. Για παράδειγμα:

##### 6.4.1.1 Το πρόβλημα 37 του *Kitāb fī al-jabr wa al-muqābala - Book on al-Jabr and al- muqābala* (Katz & Parshall, 2014, p. 148)

“If one says that 10 is divided into two parts, and one part is multiplied by itself and the other by the root of 8, and subtracts the quantity of the product of one part times the root of 8 from. . . the product of the other part multiplied by itself, it gives 40.”

Στην σημερινή γλώσσα αυτό μεταφράζεται ως εξής:

$$(10 - x)(10 - x) - x\sqrt{8} = 40$$

---

<sup>59</sup> [http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abu\\_Kamil.html](http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abu_Kamil.html)

Για να την επιλύσει αναφέρει με λόγια ότι η 6.3 μπορεί να γραφεί, αναπαρασταθεί και ως :

$$x^2 + 60 = 20x + \sqrt{8x^2} = ((20 + \sqrt{8})x)$$

Ακολούθησε τον αλγόριθμο για την μέθοδο “τετράγωνα και αριθμοί ίσοι με ρίζες ” κατέληξε ότι  $x = 10 + \sqrt{2} - \sqrt{42 + \sqrt{800}}$  και ότι το άλλο μέρος είναι ίσο με  $\sqrt{42 + \sqrt{800}} - \sqrt{2}$ .

Σε άλλο πρόβλημα, το πρόβλημα 45 μας δείχνει πως να επιλύσουμε ένα πρόβλημα που οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής:

$$\left(\frac{x}{10-x}\right)^2 - \left(\frac{10-x}{x}\right)^2 = 2$$

και το οποίο επιλύει με την μέθοδο της αντικατάστασης. Η λύση αναλυτικά βρίσκεται στο (Katz & Parshall, 2014, p. 149)

Ο Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam έφτασε στο σημείο να επιλύει και συστήματα εξισώσεων όπως το :

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \end{cases}$$

Προκειμένου να το επιλύσει χρησιμοποίησε μια μέθοδο γνωστή από τους Βαβυλωνίους, την μέθοδο της ψευδούς αντικατάστασης. Θέτοντας  $x = 1$  στην δεύτερη και την τρίτη εξίσωση, το σύστημα απλοποιήθηκε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Αναλυτικά η λύση είναι στο (Katz & Parshall, 2014, p. 149) και στο (Mathematics in Medieval Islam, 2007, pp. 550-551)

Μπορούμε να αντιληφθούμε ότι ο Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam μπορούσε να εφαρμόσει τις αλγεβρικές μεθόδους του *al-Khwārizmī*, χρησιμοποιώντας και άρρητους αριθμούς. Για τον Abū Kāmil, η λύση μιας δευτεροβάθμιας δεν ήταν μόνο ένα ευθύγραμμο τμήμα, ήταν ένας “αριθμός”, αν και δεν θα μπορούσε ίσως να δώσει έναν σωστό ορισμό για αυτόν. (Katz & Parshall, 2014, p. 149)

Ένα ανώνυμο Αραβικό κείμενο που χρονολογείται περίπου το 1004 μ.Χ, επηρέασε ουσιαστικά τις κατασκευές των γεωμετρικών αποδείξεων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων της μορφής IV-VI. Χρησιμοποίησε για την απόδειξή τους τις προτάσεις VI.28 και VI.29 των Στοιχείων. Μπορεί κάποιος να τις δει αναλυτικά τις αποδείξεις αυτών των προτάσεων στην παράγραφο 4.5.7 της παρούσης. Για μια ακόμα φορά είναι κατανοητό ότι η κληρονομιά αυτών των προτάσεων είναι αλγεβρική και ότι κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει τις κατασκευαστικές μεθόδους προκειμένου να βρει λύση σε μια εξίσωση η οποία έχει διατυπωθεί λεκτικά. Για παράδειγμα η περίπτωση V πάλι των δευτεροβάθμιων εξισώσεων “τετράγωνα και αριθμοί ίσα με ρίζες -  $ax^2 + c = bx$ ” μπορούσε να μετασχηματιστεί στην μορφή  $x(b - x) = c$ . Με αυτό τον τρόπο αντιστοιχεί στην παραβολή χωρίων κατ’ έλλειψη, δηλαδή την πρόταση VI.28. Μπορούμε λοιπόν να σκεφτούμε αυτό το πρόβλημα ως την εφαρμογή ενός ορθογωνίου με γνωστό εμβαδόν  $c$  σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή (ευθύγραμμο τμήμα)  $AB$ , μήκους  $b$  το οποίο είναι μικρότερο (*deficient*) κατά ένα τετράγωνο. (Katz & Parshall, 2014, p. 153)

## 6.5 Αόριστες εξισώσεις (Indeterminate equations) από τον *Abū Kāmil Shujā‘ ibn Aslam*

Ο *Abū Kāmil*, τόσο στο βιβλίο του της άλγεβρας, όσο και σε ένα πιο σύντομο βιβλίο του το “*Kitāb al-tarā‘if fi’l-ḥisāb – Book of Rare Things in the Art of Calculation*”, ασχολήθηκε με αόριστες εξισώσεις, κάποιες στην μορφή που είχε και ο Διόφαντος στα “*Αριθμητικά*” καθώς και με κάποιες που θύμιζαν Ινδικά κείμενα. Στα αντίστοιχα Ινδικά κείμενα οι συγγραφείς απλά ανέφεραν ότι οι εξισώσεις αυτές είχαν πολλαπλές λύσεις, χωρίς να προσδιορίζουν το πλήθος των λύσεων. Ο *Abū Kāmil* αναφέρει συγκεκριμένα τον αριθμό των λύσεων. Όπως γράφει ο ίδιος για το πιο σύνθετο πρόβλημα που ασχολήθηκε:

*“I found myself before a problem that I solved and for which I discovered a great many solutions; looking deeper for its solutions, I obtained two thousand six hundred and seventy-six correct ones.”*

Το πρόβλημα στο οποίο αναφέρεται στην επίλυση των παρακάτω εξισώσεων:

$$\begin{cases} d + c + p + w + l = 100 \\ 2d + c + \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}w + \frac{1}{4}l = 100 \end{cases}$$

*Equation 6-7*

Η λύση του *Abū Kāmil* για τις παραπάνω, μπορεί να βρεθεί στο (Katz & Parshall, 2014, pp. 154-155).

Στο κείμενο του ο *Abū Kāmil* ασχολείται με 38 προβλήματα δευτέρου βαθμού (*indeterminate quadratic problems*). Παρά το γεγονός ότι τα *Αριθμητικά* μεταφράστηκαν στο τέλος του 9<sup>ου</sup> αιώνα από τον *Qusṭā ibn Lūqā* (9<sup>ος</sup> αιώνας) στα Αραβικά, είναι σχεδόν σίγουρο ότι ο *Abū Kāmil* δεν γνώριζε το έργο του *Διόφαντου*, αφού δεν χρησιμοποίησε την ορολογία του *Διόφαντου* για να ονομάσει τις δυνάμεις και δεν ασχολήθηκε με αρνητικούς εκθέτες στους αγνώστους. Το γεγονός ότι οι λύσεις που προτείνει μοιάζουν με αυτές του *Διόφαντου* δείχνει ότι υπάρχει κάποιου είδους συνεχιζόμενη παράδοση στην Αίγυπτο, τουλάχιστον σχετικά με την επίλυση τέτοιων εξισώσεων.

#### 6.6 *Thābit ibn Qurra* (*Mathematics in Mediaval Islam*, 2007, p. 547)



Εικόνα 6-4 *Thābit ibn Qurra*

<https://www.famousscientists.org/thabit-ibn-qurra/>

Ο *Thābit ibn Qurra*<sup>60</sup> (836-901 μ.Χ) ήταν από το *Harran* της βόρειας Μεσοποταμίας και κατά μια εκδοχή ο *Banu Musa* όταν τον γνώρισε εντυπωσιασμένος από τις γνώσεις του και τις ικανότητές του, τον πήρα μαζί του στην Βαγδάτη για να δουλέψουν μαζί στο σχολείο της σοφίας. Ο *Thābit* έδειξε πως οι

διαδικασίες της Άλγεβρας όπως αυτές του *al-Khwārizmī*, για την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού, μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά και να αποδειχθούν με την χρήση των προτάσεων II.5 και II.6, των Στοιχείων.

Η σειρά με την οποία ο *Thābit* κατατάσσει τις 3 σύνθετες μορφές δευτεροβάθμιων εξισώσεων είναι η ίδια που χρησιμοποιεί και ο *al-Khwārizmī* στην Άλγεβρά του. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για την περίπτωση V,  $x^2 + c = bx$ , αναφέρει και εκείνος όπως και ο *al-Khwārizmī* ότι έχει δυο λύσεις – ρίζες. Αναλυτικά οι αποδείξεις του *Thābit*, βρίσκονται στο (*Mathematics in Mediaval Islam*, 2007, pp. 548-549)

---

<sup>60</sup>Περισσότερα για την ζωή και το έργο του στο <https://muslimheritage.com/thabit-ibn-qurra/>

## 6.7 Πολυώνυμα

Η διαδικασία που ξεκίνησε με τα έργα του *al-Khwārizmī*, ώστε να συσχετιστεί η αριθμητική με την άλγεβρα, δηλαδή να θεωρηθεί η αριθμητική ως “γενικευμένη άλγεβρα”, συνεχίστηκε στον Ισλαμικό κόσμο από τα έργα του *Al-Karajī*<sup>61</sup> (περίπου 953-1029 μ.Χ) και του *Al-Samaw’al Ibn Yahya Al-Maghribi* (1125-1174 μ.Χ).

Οι δυο αυτοί μαθηματικοί ήταν πολύ ικανοί στην εφαρμογή των κανόνων της αριθμητικής στην άλγεβρα και αντίστροφα στο να επιδείξουν ότι οι ιδέες της άλγεβρας μπορούσαν να εφαρμοστούν στην διαχείριση των αριθμών.

### 6.7.1 *Al-Karajī*

Για τον *Al-Karajī* ο σκοπός της άλγεβρας είναι γενικά “*the determination of unknowns starting with knowns*”. Για να επιτύχει αυτόν τον σκοπό χρησιμοποίησε τις βασικές τεχνικές της αριθμητικής προσαρμοσμένες ώστε να αποτελέσουν τεχνικές διαχείρισης των αγνώστων.

Ξεκίνησε με μια συστηματική μελέτη της άλγεβρας των εκθετών. Χρησιμοποίησε την ορολογία του Διόφαντου για τις δυνάμεις (παράγραφος 4.8) και σημείωσε ότι μπορούσε με αυτόν τον τρόπο να ονομάσει οποιαδήποτε δύναμη (*continue this process indefinitely*). Ονόμασε τους συντελεστές των δυνάμεων “*μέρη - parts*”. Στην συνέχεια έδωσε γενικές διαδικασίες για την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό μονώνυμων και πολυώνυμων για παράδειγμα:

“*Το γινόμενο 2 πραγμάτων με 3 μέρη τετραγώνου είναι ίσο με 6 μέρη ενός πράγματος*”

Το οποίο στην σημερινή συμβολική γλώσσα είναι:

$$2x \times \frac{3}{x^2} = \frac{6}{x}$$

*Equation 6-8*

Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω μέθοδοι δεν ήταν ολοκληρωμένες, αφού δεν ασχολήθηκε καθόλου με τις μηδενικές δυνάμεις. Δεν μπορούσε λοιπόν να διατυπώσει ένα γενικό κανόνα για τους εκθέτες, εν μέρη επειδή δεν μπορούσε να διαχειριστεί αρνητικούς αριθμούς και επειδή δεν είχε καθόλου συμβολική γλώσσα και όλα ήταν διατυπωμένα λεκτικά.

Ανέπτυξε μια μέθοδο για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός πολυωνύμου, αλλά η μέθοδος του είχε εφαρμογή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Εφάρμοσε τις

---

<sup>61</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html>

αριθμητικές μεθόδους του σε άρρητες ποσότητες, αλλά και στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Για παράδειγμα στο παρακάτω πρόβλημα το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ίσως το

|       |       |       |       |       |       |     |   |               |               |               |                |                |                |                 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|---|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 7     | 6     | 5     | 4     | 3     | 2     | 1   | 0 | 1             | 2             | 3             | 4              | 5              | 6              | 7               |
| $x^7$ | $x^6$ | $x^5$ | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x$ | 1 | $x^{-1}$      | $x^{-2}$      | $x^{-3}$      | $x^{-4}$       | $x^{-5}$       | $x^{-6}$       | $x^{-7}$        |
| 128   | 64    | 32    | 16    | 8     | 4     | 2   | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{128}$ |

*Εικόνα 6-5 (Katz & Parshall, 2014, p. 161)*

πρώτο στην ιστορία που αναφέρεται σε ταξίδια και αποστάσεις η λύση που έδωσε είναι η

$$x = \sqrt{220\frac{1}{4} + 10\frac{1}{2}} \approx 25.34 .$$

Η αρχική εξίσωση ήταν:

$$\frac{1}{2}(x^2 + x) = 11x + 55 \text{ ή}$$

$$x^2 = 21x + 110$$

*Equation 6-9*

Ο *Al-Karajī* δεν ασχολήθηκε καθόλου με το γεγονός ότι η λύση που έδωσε δεν μπορούσε να αποτελεί ρεαλιστική λύση, καθώς αναφερόταν σε αριθμό ημερών και δεν θα μπορούσαμε να έχουμε άρρητο αριθμό ημερών. Αναλυτικά το πρόβλημα βρίσκεται στο (Katz & Parshall, 2014, pp. 158-159)

### 6.7.2 *Al-Samaw'al Ibn Yahya Al-Maghribi*<sup>62</sup>

Ο *Al-Samaw'al Ibn Yahya Al-Maghribi* , τον 12<sup>ο</sup> αιώνα γεννήθηκε στην Βαγδάτη, όπου πλέον δεν υπήρχαν μαθηματικοί που μπορούσαν να τον διδάξουν και ταξίδεψε σε άλλες περιοχές του Ισλαμικού κόσμου για να μελετήσει. Στο έργο του *Al-Bahir fi'l-hisab* (or *The Shining Book of Calculation*) συνέχισε το έργο του *Al-Karajī*, εισάγοντας αρνητικούς συντελεστές. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του για τους αρνητικούς συντελεστές μπορούσε εύκολα να προσθέσει και να αφαιρέσει πολυώνυμα κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων. Για τον πολλαπλασιασμό χρειαζόταν κάποιον κανόνα για τους εκθέτες.

Αποφάσισε πως αυτός ο κανόνας μπορούσε να εκφραστεί καλύτερα με τη χρήση πίνακα που να αποτελείται από στήλες, όπου η κάθε μια αναπαριστούσε μια διαφορετική δύναμη ή έναν αριθμό ή έναν άγνωστο. Αντιλήφθηκε ότι μπορούσε να εργαστεί με δυνάμεις

<sup>62</sup> <https://www2.stetson.edu/~efriedma/periodictable/html/Sb.html>

του  $\frac{1}{x}$  το ίδιο εύκολα όπως και με δυνάμεις του  $x$  και επίσης ότι η μηδενική δύναμη είναι ίση με την μονάδα και μεταξύ των θετικών εκθετών του  $x$  και τις δυνάμεις του  $\frac{1}{x}$ .

Στην παρακάτω εικόνα 6-5 μπορούμε να δούμε πως είχε διατάξει τις δυνάμεις του  $x$ , μαζί με το παράδειγμα που το ακολουθούσε με τις δυνάμεις του 2.

Στο βιβλίο περιεχόταν επίσης και το διωνυμικό θεώρημα, δηλαδή όπως θα γράφαμε σήμερα το

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Equation 6-10

Για τους συντελεστές του διώνυμου ο *Al-Samaw'al* έφτιαξε έναν πίνακα σαν αυτό που αποδίδουμε σήμερα στον Pascal. Πρέπει να τονίσουμε ότι όλα τα παραπάνω ο *Al-Samaw'al* τα έκανε περιφραστικά και όχι με σύμβολα. Ο πίνακας του *Al-Samaw'al* ήταν:

| $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ | $x^7$ | $x^8$ | $x^9$ | $x^{10}$ | $x^{11}$ | $x^{12}$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| 1   | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1        | 1        | 1        |
| 1   | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10       | 11       | 12       |
| 1   | 3     | 6     | 10    | 15    | 21    | 28    | 36    | 45    | 55       | 66       |          |
| 1   | 4     | 10    | 20    | 35    | 56    | 84    | 120   | 165   | 220      |          |          |
| 1   | 5     | 15    | 35    | 70    | 126   | 210   | 330   | 495   |          |          |          |
| 1   | 6     | 21    | 56    | 126   | 252   | 462   | 792   |       |          |          |          |
| 1   | 7     | 28    | 84    | 210   | 462   | 924   |       |       |          |          |          |
| 1   | 8     | 36    | 120   | 330   | 792   |       |       |       |          |          |          |
| 1   | 9     | 45    | 165   | 495   |       |       |       |       |          |          |          |
| 1   | 10    | 55    | 220   |       |       |       |       |       |          |          |          |
| 1   | 11    | 66    |       |       |       |       |       |       |          |          |          |
| 1   | 12    |       |       |       |       |       |       |       |          |          |          |
| 1   |       |       |       |       |       |       |       |       |          |          |          |

Εικόνα 6-6 οι συντελεστές του διωνυμικού θεωρήματος από τον *Al-Samaw'al* (Katz & Parshall, 2014, p. 163)

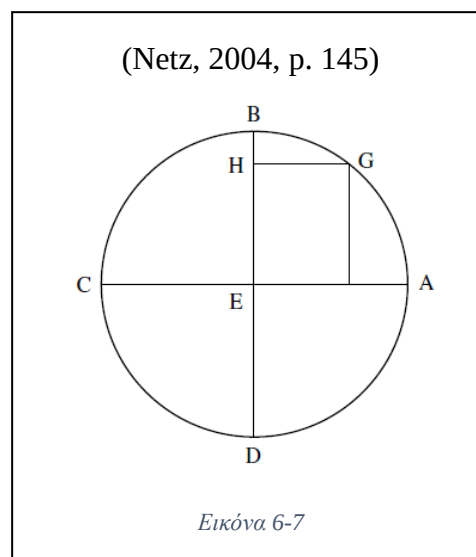
Για να δούμε πως οι Άραβες μαθηματικοί αντιμετώπισαν τις τριτοβάθμιες εξισώσεις. (Katz & Parshall, 2014, pp. 161-163)

## 6.8 Omar Khayyam (1048-1131 μ.Χ) (Katz & Parshall, 2014, p. 165)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 4.7, ο Αρχιμήδης ασχολούμενος με μια πρόταση από το έργο του “Περί σφαίρας και κυλίνδρου” κατάφερε να λύσει γεωμετρικά μια συγκεκριμένη εξίσωση τρίτου βαθμού. Η λύση που έδωσε ήταν η τομή δυο επιπέδων και στόχος του Αρχιμήδη δεν ήταν η επίλυση εξίσωσης, αλλά η κατασκευή της γεωμετρικής λύσης ενός ενδιαφέροντος προβλήματος. Πολλοί Άραβες μαθηματικοί τον 11<sup>ο</sup> αιώνα μετέτρεψαν την λύση του Αρχιμήδη σε αυτό το γεωμετρικό πρόβλημα σε αλγεβρικό και προσπάθησαν να το γενικεύσουν ώστε να επιλύουν τριτοβάθμιες εξισώσεις. Πολλοί επίσης Άραβες μαθηματικοί ασχολήθηκαν και με το πρόβλημα της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας και βρήκαν κάποιες κατασκευές, που δεν υπήρχαν στους Έλληνες, ενός κανονικού επτάγωνου. Ο Omar Khayyam ήταν αυτός ο οποίος πρώτος συστηματικά ομαδοποίησε και προχώρησε στην λύση τριτοβάθμιων εξισώσεων με χρήση δυο κωνικών τομών. Σε ένα από τα πρώτα έργα του, το “The Division of a Quadrant of a Circle” επιχειρεί την λύση ενός προβλήματος, το οποίο αφορά την εύρεση ενός σημείου G στο τεταρτοκύκλιο AB τέτοιο ώστε (εάν  $GH \perp EB$ )  $AE:GH = EH:HB$  και μας οδηγεί στην εξίσωση:

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$$

Equation 6-11



Αναλυτικότερα μπορεί κάποιος να δει το παραπάνω πρόβλημα στο (Katz & Parshall, 2014, pp. 166-167)



Ο Omar Khayyam απογοητεύτηκε που δεν μπόρεσε να βρει αλγεβρική μέθοδο για την επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων, ανάλογη με τους τρεις σύνθετους τύπους που υπήρχαν για τις δευτεροβάθμιες από τον *al-Khwārizmī*.

Ο ίδιος αναφέρει:

*“when. . . the object of the problem is an absolute number, neither we, nor any of those who are concerned with algebra, have been able to solve this equation—perhaps others who follow us will be able to fill the gap.”* (Katz & Parshall, 2014, p. 168)

### 6.8.1 Η Άλγεβρα του Omar Khayyam

Ξεκινάει το έργο του ακολουθώντας το ίδιο στυλ με τον *al-Khwārizmī*, ομαδοποιώντας όλες τις εξισώσεις, μέχρι και του 3<sup>ου</sup> βαθμού. Έχει τον ίδιο περιορισμό που έχουν και οι προγενέστεροί του, ότι όλοι οι αριθμοί ήταν θετικοί, άρα έπρεπε να βάλει ξεχωριστά τους διάφορους τύπους τριτοβάθμιων εξισώσεων, οι οποίες μπορεί να είχαν θετικές ρίζες. Τα χώρισε σε 3 group ανάλογα με το πλήθος των όρων τους:

Table 6-2

|                     |                       |
|---------------------|-----------------------|
| <b>1 διώνυμο</b>    | $x^3 = d$             |
| <b>6 τριώνυμα</b>   | $x^3 + cx = d$        |
|                     | $x^3 + d = cx$        |
|                     | $x^3 = cx + d$        |
|                     | $x^3 + bx^2 = d$      |
|                     | $x^3 + d = bx^2$      |
|                     | $x^3 = bx^2 + d$      |
| <b>7 με 4 όρους</b> | $x^3 + bx^2 + cx = d$ |
|                     | $x^3 + bx^2 + d = cx$ |
|                     | $x^3 + cx + d = bx^2$ |
|                     | $x^3 = bx^2 + cx + d$ |
|                     | $x^3 + bx^2 = cx + d$ |
|                     | $x^3 + cx = bx^2 + d$ |
|                     | $x^3 + d = bx^2 + cx$ |

Για κάθε μια από αυτές τις εξισώσεις περιέγραψε τις κωνικές τομές που είναι απαραίτητες για την επίλυσή τους, αποδεικνύοντας ότι η μεθοδός του είναι σωστή και

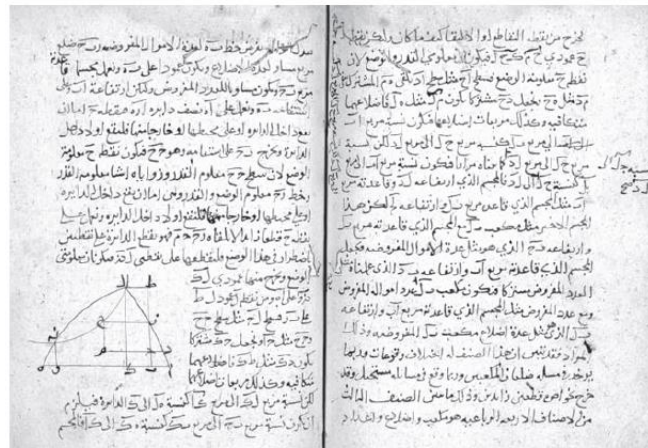


Figure 7.12. Manuscript page from a thirteenth-century manuscript of al-Khayyami's *Algebra*, copied in Lahore, containing a solution of one of the cases of a cubic equation, from the Smith Collection of the Rare Book and Manuscript Library, Columbia University.

*Eikóna 6-8 (Katz & Parshall, 2014, p. 170)*

συζητώντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να μην υπάρχουν λύσεις ή περισσότερες από μια λύσεις.

Αυτή η ομαδοποίηση μας δείχνει πόσο είχε αλλάξει ο τρόπος σκέψης από την εποχή του Αρχιμήδη μέχρι και του *Omar Khayyam*. Στόχος του δεν ήταν η επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος, αλλά η εύρεση μιας γενικής μεθόδου για όλα τα είδη προβλημάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε μια εξίσωση κάποιας μορφής από τις παραπάνω.

Ο *Omar Khayyam* έλυσε όλες του τις εξισώσεις με παρόμοιο τρόπο (τομή επιπέδων). Στις περιπτώσεις που δεν υπήρχε πάντα μια θετική ρίζα, σημείωνε πως υπάρχουν μηδέν, μια ή δυο ρίζες ανάλογα με το αν οι κωνικές τομές που χρειαζόνταν για την επίλυση τέμνονταν και σε πόσα σημεία τέμνονταν. Μια αποτυχία του σε αυτή την ανάλυση έγκειται στην εξίσωση

$$x^3 + cx = bx^2 + d$$

*Equation 6-12*

, όπου δεν μπόρεσε να εντοπίσει την πιθανότητα αυτή να έχει 3 θετικές ρίζες. Γενικά όμως δεν συσχετίζε το πλήθος των ριζών με το είδος των συντελεστών. (Katz & Parshall, 2014, pp. 169-171)

## 6.9 Sharaf al-Din al-Tusi<sup>63</sup> (c. 1135-1213 μ.Χ)

Τις μεθόδους του Omar Khayyam εξέλιξε ο Sharaf al-Din al-Tusi. Όπως και ο Khayyam ομαδοποίησε τις κυβικές εξισώσεις, με κριτήριο όμως τον αριθμό των ριζών τους, όπως αυτός εξαρτάται από τους συντελεστές τους. Ως συνέπεια η ομαδοποίηση του ήταν διαφορετική. Στην ομαδοποίηση του έχει πάλι τρεις ομάδες:

- Η πρώτη ομάδα περιείχε την  $x^3 = d$  και όσες εξισώσεις μπορούσαν να αναχθούν σε δευτεροβάθμιες.
- Η δεύτερη ομάδα περιείχε όσες είχαν τουλάχιστον μια θετική ρίζα και τέλος
- Η τρίτη ομάδα, είχε όσες μπορεί να είχαν ή και να μην είχαν καθόλου θετικές ρίζες ανάλογα με τις τιμές των συντελεστών τους.

Ο Sharaf al-Din al-Tusi, λύνει τις εξισώσεις της δεύτερης ομάδας σχεδόν όπως και ο Omar Khayyam, πηγαίνοντας όμως ένα βήμα παραπέρα σχολιάζοντας κάθε φορά προσεκτικά γιατί οι δυο κωνικές τομές που οδηγούν στην (θετική) λύση τέμνονται.

Η μεγαλύτερη του όμως συνεισφορά έχει να κάνει με τις εξισώσεις που ανήκαν στην τελευταία ομάδα. Ας δούμε συγκεκριμένα για την εξίσωση:

$$x^3 + d = bx^2,$$

Equation 6-13

ο χειρισμός της οποία ήταν τυπικός για τον τρόπο αντιμετώπισης των εξισώσεων όλης της ομάδας.

1. Την έφερε στην μορφή  $x^2(b - x) = d$
2. Μετά σχολιάζει ότι προκειμένου εάν υπάρχει λύση στην παραπάνω εξαρτάται από το εάν η “συνάρτηση”  $f(x) = x^2(b - x)$ , φτάνει την τιμή  $d$  ή όχι.
3. Αποδεικνύει τότε ότι η τιμή  $x_0 = \frac{2b}{3}$ , είναι η μέγιστη τιμή για την  $f(x)$ , για οποιαδήποτε τιμή του  $0 < x < b$  και ότι  $x^2(b - x) \leq \left(\frac{2b}{3}\right)^2 \left(\frac{b}{3}\right) = \frac{4b^3}{27}$ .
4. Στην συνέχεια λέει πως εάν  $\frac{4b^3}{27} < d$ , τότε η εξίσωση 6-12 δεν έχει λύση.
5. Εάν  $\frac{4b^3}{27} = d$ , τότε έχει μια μοναδική λύση (θετική), την  $x = \frac{2b}{3}$

---

<sup>63</sup> [http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi\\_Sharaf.html](http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi_Sharaf.html)

6. Εάν  $\frac{4b^3}{27} > d$ , τότε έχει δυο (θετικές) ρίζες,  $x_1$  και  $x_2$ , όπου  $0 < x_1 < \frac{2b}{3} < x_2 < b$ .

Δεν αναφέρει από που βρήκε αυτή την λύση, αλλά μια πιθανή ερμηνεία είναι από προσεκτική μελέτη της γεωμετρική λύσης που είχε δώσει ο Αρχιμήδης στην παραπάνω.

Φαίνεται πως ο *Sharaf al-Din al-Tusi* είχε ένα καλό επίπεδο κατανόησης της φύσης των κυβικών εξισώσεων και την σχέση του είδους των ριζών τους και των συντελεστών τους, αν και δεν κατάφερε να προσδιορίσει τις λύσεις με έναν αλγεβρικό αλγόριθμο. Κατάφερε παρόλα αυτά να λύσει κυβικές εξισώσεις αριθμητικά με την χρήση της παραπάνω προσεγγιστικής μεθόδου. Ένα παράδειγμα φαίνεται στην παρακάτω εικόνα 6-8. (Katz & Parshall, 2014, pp. 170-172)

techniques, however.<sup>48</sup> For example, he considered the equation  $x^3 + 14,837,904 = 465x^2$ . By the above method, he first calculated that  $\frac{4b^3}{27} = 14,895,500$ . Since this value is greater than  $d = 14,837,904$ , there are two solutions  $x_1, x_2$ , with  $0 < x_1 < 310$  and  $310 < x_2 < 465$ . To find  $x_2$ , he needed to solve  $x^3 + 465x^2 = 57,596$ . He found that 11 is a solution and therefore that  $x_2 = \frac{2b}{3} + 11 = 310 + 11 = 321$ . To find  $x_1$ , he had to solve the quadratic equation  $x^2 + 144x = 46,224$ . The (positive) solution is an irrational number approximately equal to 154.73, a solution he found by a numerical method. The solution  $x_1$  of the original equation is then 298.73.

Εικόνα 6-9 Επίλυση κυβικής εξίσωσης προσεγγιστικά από τον Al-Tusi (Katz & Parshall, 2014, p. 172)

## 6.10 Συμπεράσματα

Τον 15<sup>ο</sup> αιώνα τα Αραβικά μαθηματικά ήταν σε μια κατάσταση παρακμής, σε αντίθεση με την Ευρώπη όπου η μαθηματική δραστηριότητα είχε αρχίσει να ακμάζει. Βασική αιτία αυτής της άνηθης στην Ευρώπη ήταν το έργο μεταφραστών του 12<sup>ου</sup> αιώνα, οι οποίοι μετέφρασαν ένα μέρος των Αραβικών έργων, με σημαντικότερο αυτό του *al-Khwārizmī*. Ο *Fibonacci* στο έργο του *Liber abbaci* (1202) αναφέρει αρκετά από τα προβλήματα που έργου του *Abu Kamil*.

Τα πιο ανεπτυγμένα μαθηματικά έργα των *Al-Karajī* και *Al-Samaw'al* φαίνεται να μην έφτασαν στην Ευρώπη πριν την Ευρωπαϊκή Αναγέννηση, ούτε και το έργο του *Omar Khayyam* ή του *Sharaf al-Din al-Tusi* για τις κυβικές εξισώσεις.

Θα ήταν αρκετά δύσκολο κάποιος να μελετήσει και τις παραπάνω μεθόδους, λόγω της έλλειψης συμβολισμών και της λεκτικής περιγραφής των μεθόδων. Οι Αραβικές μέθοδοι, ίσως να είχαν περισσότερη ανάπτυξη έχοντας σύμβολα και εάν είχαν καταφέρει να αποδεσμευτούν από την εξάρτησή τους στην γεωμετρία των Ελλήνων. Η εξάρτηση τους από την γεωμετρία δεν τους άφηνε να δουν και πιθανές γενικεύσεις σε αρνητικούς αριθμούς.

Στην Ευρώπη, εάν και έφεραν την κληρονομιά της Ελληνικής γεωμετρίας και είχαν λάβει τα Ισλαμικά κείμενα χωρίς την χρήση συμβολισμών, οι μαθηματικοί της περιόδου κατάφεραν να υπερβούν τα παραπάνω εμπόδια και να αναπτύξουν την άλγεβρα περαιτέρω. (Katz & Parshall, 2014, p. 173)

## 7 Μεσαιωνική Ευρώπη

Το 500 μ.Χ η Ρωμαϊκή αυτοκρατορία είχε ήδη παρακμάσει. Η κεντρική της διοίκηση, τα εμπορικά της δίκτυα και η όποια σταθερότητα την χαρακτήριζε μέχρι τότε, είχε αντικατασταθεί από αστάθεια, συχνές εισβολές των γερμανικών φυλών τόσο από τα βόρεια, όσο και από τα δυτικά και κατά τον 7<sup>ο</sup> και 8<sup>ο</sup> αιώνα από την επέλαση των Αράβων (του Ισλάμ) στην βόρεια Αφρική και στην Ιβηρική χερσόνησο.

Στην Δυτική Ευρώπη (Latin West) ξεκίνησε τότε μια περίοδος 500 χρόνων, η οποία έχει χαρακτηριστεί ως “Σκοτεινά χρόνια”, ο πρώιμος Μεσαίωνας. Κύριο χαρακτηριστικό αυτής της περιόδου είναι η επιστροφή του πληθυσμού από τις πόλεις στην επαρχία και η κυριαρχία της Καθολικής εκκλησίας. Ο David Lindberg μιλώντας για την ιστορία των επιστημών εκείνη την περίοδο και την σχέση της Καθολικής εκκλησίας λέει:

*“The contribution of the religious culture of the early Middle Ages to the scientific movement was....one of preservation and transmission. The monasteries served as the transmitters of literacy and a thin version of the classical tradition (including science and natural philosophy) through a period when literacy and scholarship were severely threatened”* (Lindberg, 1992, p. 157)

Η κατάσταση τόσο σε πολιτικό επίπεδο, όσο και σε επίπεδο εκπαίδευσης άρχισε να σταθεροποιείται κάπου μετά το 800 μ.Χ, όταν ο πάπας Καρλομάγνος (ca 742-814) κατά την προσπάθειά του να ελέγξει την περιοχή κυριαρχίας του (Carolingian Empire<sup>64</sup>) εγκαθίδρυσε την πρώτη κεντρική διοίκηση μετά την πτώση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας και έκανε

---

<sup>64</sup> <http://www.holyromanempireassociation.com/carolingian-empire.html>

εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, ζητώντας την δημιουργία μοναστηριών και καθεδρικών σχολείων στην επικράτειά του έκανε τα μοναστήρια και τα καθολικά σχολεία. Αν και στόχος του ήταν να ενδυναμώσει την κρατική διοίκηση και τον κλήρο, αυτή η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή μιας εκπαιδευτικής παράδοσης στην Δυτική Ευρώπη. Δυστυχώς η σταθερότητα διήρκεσε λίγο. Στα τέλη του 9<sup>ου</sup> αιώνα, η αυτοκρατορία του Καρλομάγνου διασπάστηκε, αλλά η καθολική εκκλησία και τα σχολεία τα οποία είχε ιδρύσει, συνέχισαν να παίζουν κεντρικό ρόλο στην εκπαίδευση. (Katz & Parshall, 2014, p. 174)

Τον 13<sup>ο</sup> αιώνα ο χαρακτήρας της οικονομίας άρχισε να αλλάζει σταδιακά. Η πρόοδος που είχε πραγματοποιηθεί στην ναυσιπλοΐα μείωσε του κινδύνους των θαλάσσιων ταξιδιών. Η όλο και αυξανόμενη κυκλοφορία νομισμάτων έκανε την Ευρωπαϊκή οικονομία κυρίως νομισματική. Η ανακάλυψη των χαρτονομισμάτων, των επιταγών, της λογιστικής και της τήρησης λογιστικών βιβλίων βοήθησε την άνοδο των τραπεζικών και της διεθνούς οικονομίας. Όλες αυτές οι αλλαγές, οδήγησαν στην ανάπτυξη μιας νέας τάξης εμπορών που ζούσαν στα μεγάλα εμπορικά και οικονομικά κέντρα. Πολλοί από αυτούς είχαν τα κεντρικά τους γραφεία σε κάποια Ιταλική πόλη όπως η Lucca, η Sienna και η Φλωρεντία.

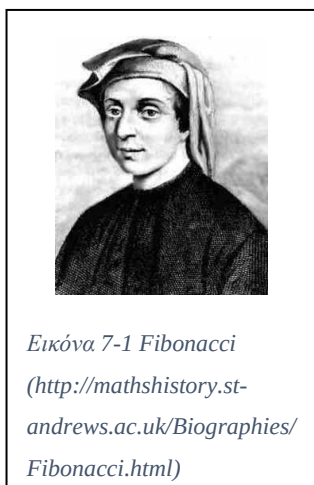
Η ζωή αυτής της νέας τάξης εμπορών ήταν τελείως διαφορετική από τους προκατόχους τους, έγραφαν και λάμβαναν γράμματα, επιταγές, αναφορές, παραγγελίες. Έπρεπε να υπολογίζουν τιμές, τις πληρωμές τους, τα κέρδη αλλά και τη ζημία, σε αντίθεση με τους προκατόχους τους οι οποίοι είχαν όλη την πληροφορία που χρειαζόνταν είτε σε ένα κομμάτι πρόχειρο χαρτί, ή στο μυαλό τους.

Προκειμένου να μπορούν να διαχειριστούν το εμπόριό τους χρειαζόνταν ένα αποτελεσματικό και εύκολο σύστημα να γράφουν αριθμούς και να υπολογίζουν. Οι υπολογισμοί με την χρήση άβακα ή νοητά όπως έκαναν οι προκάτοχοι τους δεν ήταν πλέον αποδεκτοί. Το Ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης δεν ήταν εύκολο. Η λύση ήρθε με το Ινδο – Αραβικό σύστημα αρίθμησης το οποίο ήταν πιο αποτελεσματικό. Τα εύσημα για την ανάπτυξη αυτού του αριθμητικού συστήματος και την υιοθέτησή του στις εμπορικές πρακτικές ανήκει σε μια συγκεκριμένη ομάδα ανθρώπων που αποκαλούνται “*abbacists*”<sup>65</sup>. (Waerden V. D., 1985, pp. 32-33)

---

<sup>65</sup> Με τον όρο *abbacists* δεν αναφερόμαστε στους χρήστες του άβακα, αλλά προέρχεται από την Ιταλική λέξη *abbaco* που σημαίνει πρακτική αριθμητική.

## 7.1 Leonardo de Pisa – Fibonacci<sup>66</sup> (c. 1170 – 1240 μ.Χ)



Ο *Leonardo* αποκαλούσε τον εαυτό του “*filio Bonacci* – γιο του *Bonacci*” από το οποίο προέκυψε και το όνομα *Fibonacci*, με το οποίο είναι γνωστός σήμερα. Το 1192 περίπου, ο πατέρας του που ήταν γραμματέας της Δημοκρατίας της Pisa, στάλθηκε στην *Bugia* (σημερινή *Bougie*) της Αλγερίας για να διευθύνει την εμπορική εταιρεία της Pisa. Προσδοκώντας ο γιος του να γίνει έμπορος τον πήρε μαζί του. Εκεί ο *Fibonacci* έμαθε να κάνει υπολογισμούς με τα Ινδο-Αραβικά νούμερα. Λόγω των επαγγελματικών του ταξιδιών πήγε στην Αίγυπτο, στην Συρία, το Βυζάντιο, την Σικελία και την νότια Γαλλία. Περίπου το 1200 επέστρεψε στην Pisa. Για τα επόμενα 25 χρόνια, έγραψε διάφορα μαθηματικά έργα 5 εκ των οποίων είναι:

1. *Liber abbaci* (1202, αναθεωρημένο το 1228),
2. *Practica geometriae* (1220),
3. Ένα βιβλίο με τίτλο “*Flos*” (1225),
4. Ένα γράμμα στον φιλόσοφο Θεόδωρο, ο οποίος ζούσε στην Σικελία στην αυλή του αυτοκράτορα Frederick II του Hohenstaufen,
5. *Liber quadratorum* (1225).

Περίπου το 1225 ο Frederick II κάλεσε αυλικούς στην Pisa, όπου ο Αστρονόμος *Dominicus* παρουσίασε τον *Leonardo* στον αυτοκράτορα. Σε αυτή την παρουσίαση ο *Giovanni da Palermo* (μαθηματικός της αυτοκρατορικής αυλής) έθεσε δυο προβλήματα στον *Leonardo*, τα οποία εκείνος έλυσε εύκολα. Τα προβλήματα είναι τα παρακάτω:

### 7.1.1 Πρόβλημα 1

Να βρεθεί ένας αριθμός  $x$ , τέτοιος ώστε το  $x^2 + 5$  και το  $x^2 - 5$  να είναι τετράγωνοι αριθμοί.

Ο *Leonardo* έδωσε μια λύση την  $x = 3\frac{5}{12}$ ,  $x^2 + 5 = \left(4\frac{1}{12}\right)^2$  και  $x^2 - 5 = \left(2\frac{7}{12}\right)^2$ .

Το πρόβλημα αυτό το παρουσίασε στο βιβλίο του *Flos*, χωρίς απόδειξη και αργότερα στο “*Liber quadratorum*”.

---

<sup>66</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci.html>



Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος όπως αυτή δόθηκε από τον *Leonardo* μπορεί κάποιος να δει το (Waerden V. D., 1985, pp. 40-41)

Από την λύση που δίνει στο παραπάνω πρόβλημα, είναι εμφανές ότι γνώριζε τα Αραβικά μαθηματικά που έμαθε κατά την διάρκεια των ταξιδιών του. Στο έργο του “*Liber quadratorum*” ο *Leonardo* γράφει σχετικά με την θεωρία αριθμών. Μέχρι την επανεμφάνιση του έργου του Διόφαντου “*Αριθμητικά*” στην Ευρώπη αρκετούς αιώνες αργότερα, δεν υπήρχε διάδοχός στο έργο αυτό. (Katz V. J., 2009, p. 347)

### 7.1.2 Πρόβλημα 2

Να βρεθεί η λύση της  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ .

Στο έργο του *Flos*, αποδεικνύει ότι η λύση δεν είναι ούτε ακέραιος, ούτε κλάσμα, αλλά ούτε και κάποιος από του άρρητους αριθμούς που παρουσιάζει ο Ευκλείδης στο βιβλίο *X των Στοιχείων*. Δίνει μια προσεγγιστική λύση σε εξηκονταδική μορφή την:

1; 22,7,42,33,4,40

(Waerden V. D., 1985, p. 34)

Ποια μέθοδο όμως μπορεί να ακολούθησε προκειμένου να επιλύσει το παραπάνω πρόβλημα όμως;

Σύμφωνα με τον Vogel η λύση που δίνει στο έργο *Flos* για την παραπάνω εξίσωση έχει απόκλιση κατά  $1\frac{1}{2}$  από την σωστή απάντηση, άρα η ακρίβεια του *Leonardo* είναι πολύ μεγάλη. Εάν είχε εφαρμόσει την μέθοδο της “διπλής ψευδούς αντικατάστασης - *double false position*” την οποία ο ίδιος εξηγεί στο κεφάλαιο 13 του έργου του “*Liber abbaci*”, η μέθοδος όμως αυτή, η οποία είναι η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής μεταξύ δυο τιμών  $x_1$  και  $x_2$ , θα τον οδηγούσε σε ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια. Είναι πιθανό να χρησιμοποίησε την λεγόμενη μέθοδο του Horner. Όπως έχουμε δει η μέθοδος αυτή ήταν γνωστή τόσο στους Κινέζους, όσο και στους Άραβες, από τον μαθηματικό *lamshid al-Kashi*. Η μέθοδος αυτή μετά ανακαλύφθηκε ξανά από τους *Paolo Ruffini* (1804) και *W.G. Horner* (1819). (Waerden V. D., 1985, p. 34)

### 7.1.3 Liber abbaci

Όσοι κατείχαν τις μεθόδους υπολογισμού στην Ιταλία αποκαλούνταν “*maestri d' abbaco*”. Με αυτή την έννοια χρησιμοποιείται και στον τίτλο του έργου ο όρος *abacchi*. Η πρώτη εμφάνιση του έργου έγινε το 1202 και μια δεύτερη έκδοση, όπου προστέθηκε υλικό, αλλά αφαιρέθηκε και κάποιο πλεονάζον κυκλοφόρησε το 1228. (Waerden V. D., 1985, p. 35)



Ο *Leonardo* χρησιμοποιεί πολύ συχνά αρνητικούς αριθμούς στο “*Liber abbaci*”. Ήταν σε θέση να αποδεχθεί τους αρνητικούς αριθμούς ως λύσεις σε εξισώσεις, όταν αυτοί ήταν αποδεκτοί από τις συνθήκες του προβλήματος. Ως αποτέλεσμα, διατυπώνει και μάλιστα δίνοντας κατάλληλη απόδειξη τους κανόνες για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό θετικών και αρνητικών αριθμών, τους οποίους και χρησιμοποιεί εκτεταμένα στο κεφάλαιο 13. (Pisa, 2002, p. 9)

Στα κεφάλαια 1 έως 7 παρουσιάζει τους Ινδο – Αραβικούς αριθμούς και μεθόδους υπολογισμούς με ακέραιους και κλάσματα. Στα κεφάλαια 8-11 εμπεριέχονται προβλήματα τα οποία αφορούν εμπόρους.

### 7.1.3.1 Το πρόβλημα με τα 30 πτηνά – *Liber abbaci* (Pisa, 2002, p. 256)

Ένα από τα προβλήματα που παρουσιάζονται σε αυτά τα κεφάλαια είναι και το πρόβλημα με τα 30 πτηνά. Είναι ένα πρόβλημα που είναι παρόμοιο με το πρόβλημα των 100

*On a Man Who Buys Thirty Birds of Three Kinds for 30 Denari.*

A certain man buys 30 birds which are partridges, pigeons and sparrows, for 30 denari. A partridge he buys for 3 denari, a pigeon for 2 denari, and 2 sparrows for 1 denari, namely 1 sparrow for  $\frac{1}{2}$  denari. It is sought how many birds he buys of each kind; you divide the 30 denari by the 30 birds; the quotient will be 1 denari. You therefore say, I have money with  $\frac{1}{2}$ , and money with 2, and money with 3, and I wish to make money with 1. Indeed in similar problems the proceeding is by the method of alloys, as we have an integral number of birds. Therefore, so that the cheapest kind of bird is equal in number to the most expensive kind, you say, I have money with  $\frac{1}{2}$ , and money with 2, and money with 3, and I wish to make money with 1; that is, I have money with 1, and money with 4, and money with 6, and I wish to make money with 2; you make of the sparrows and the partridges the first alloy, and there will be 5 birds for 5 denari, namely 4 sparrows and 1 partridge, and you make a second alloy of the sparrows and the pigeons, and you will have 3 birds for 3 denari, namely 2 sparrows and 1 pigeon; next so that you have 30 birds in the alloy, you put in the first alloy three times, in which there will be 12 sparrows and 3 partridges, and there will remain 15 birds to alloy, for which you put in the second alloy five times, and you will have 10 sparrows and 5 pigeons, and thus of the aforesaid 30 birds there will be 22 sparrows and 5 pigeons and 3 partridges, as is shown in the problem. And you know that because of the abovementioned you can have an integral number of birds in any amounts that he will wish for with 15 denari and higher, but below 15 denari he can have only 13 or 11 or 8 birds. For with 13 birds the first alloy occurs twice, and the second once, and for 11 birds the second alloy occurs twice and the first once, and for 8 birds each alloy occurs once.

| partridges    | sparrus |
|---------------|---------|
| 1             | 4       |
| first mixture |         |
| 1             | 4       |
| 6             | 1       |
| 2             |         |

| pigeons        | sparrus |
|----------------|---------|
| 1              | 1       |
| second mixture |         |
| 1              | 2       |
| 4              | 1       |
| 2              |         |

| partr. | pig.          | spar.         |
|--------|---------------|---------------|
| 2      | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

| partridges    | sparrus       |
|---------------|---------------|
| 3             | 4             |
| first mixture |               |
| 2             | $\frac{1}{4}$ |
| 1             |               |

*Εικόνα 7-2 το πρόβλημα των 30 πτηνών - Liber Abacci (Pisa, 2002, p. 256)*

πτηνών που συναντάμε σε Κινέζικα, Ινδικά και Αραβικά έργα. Το πρόβλημα οδηγεί σε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους και πρέπει η λύση του να είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, λόγω της φύσης του.

Το σύστημα αυτό επιδέχεται μοναδική λύση την  $x = 3, y = 5, z = 22$ . Το σύστημα που έπρεπε να επιλυθεί ήταν το:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30 \end{cases}$$

*Equation 7-1 problem of the 30 birds - Liber abbaci*

Τα κεφάλαια 12 και 13 αφορούν προβλήματα τα οποία οδηγούν σε γραμμικές εξισώσεις ή συστήματα 2 ή 3 γραμμικών εξισώσεων με 2 ή 3 αγνώστους. Προκειμένου να τα επιλύσει αυτά τα προβλήματα ο Fibonacci εισάγει έναν νέο άγνωστο και κάνει απαλοιφή. Για παράδειγμα προκειμένου να επιλύσει το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}(y + z) = s \\ y + \frac{1}{4}(x + z) = s \\ z + \frac{1}{5}(x + y) = s \end{cases}$$

*Equation 7-2 3x3 στο Liber abbaci*

Εισάγει μια νέα μεταβλητή την:

$$x + y + z = t$$

*Equation 7-3*

Αφαιρώντας κάθε μια από τις εξισώσεις του συστήματος 7-2 από την 7-3 τότε έχουμε:

$$\frac{2}{3}(y + z) = \frac{3}{4}(x + z) = \frac{4}{5}(x + y) = t - s = D$$

*Equation 7-4*

και άρα:

$$\begin{cases} y + z = \frac{3}{2}D \\ (x + z) = \frac{4}{3}D \\ (x + y) = \frac{5}{4}D \end{cases}$$

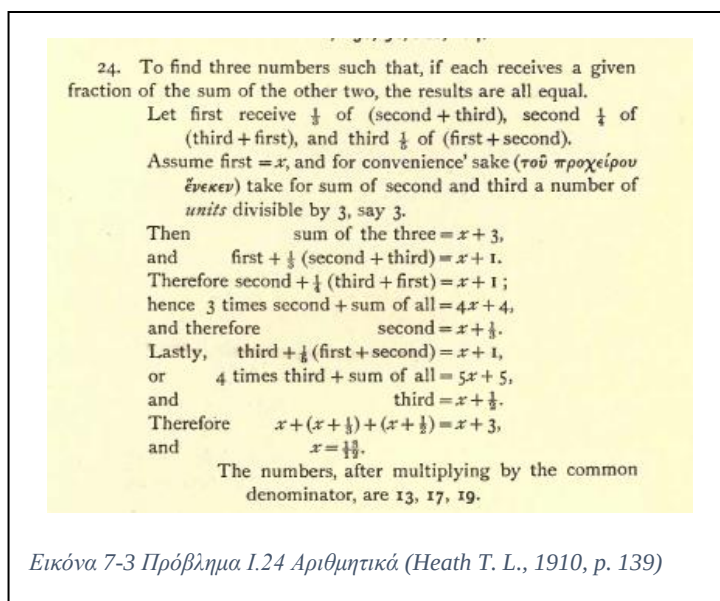
*Equation 7-5*

Για να βρει ακέραια λύση, θέτει  $D = 24$ , και το παραπάνω σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} y + z = 36 \\ (x + z) = 32 \\ (x + y) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 17 \\ z = 19 \end{cases}$$

Equation 7-6

Το ίδιο σύστημα το έχει επιλύσει και ο Διόφαντος στα *Αριθμητικά* I στο πρόβλημα 24. (Heath T. L., 1910, p. 139)



Το κεφάλαιο 14 είναι αφιερωμένο στον υπολογισμό τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Ξεκινά με την παρουσίαση θεωρημάτων από το βιβλίο II σε αριθμητική μορφή, παραλείποντας τις αποδείξεις, αφού βρίσκονται όλες στον Ευκλείδη όπως λέει.

Για την εύρεση τετραγωνικών ριζών χρησιμοποιεί τον τύπο:

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a}$$

Equation 7-7 Εύρεση τετραγωνικής ρίζας από τον Fibonacci

Για τις κυβικές ρίζες παρουσιάζει μια πρώτη προσέγγιση από τον τύπο:

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \sim a + \frac{r}{(a + 1)^3 - a^3} = a_1$$

Equation 7-8 Εύρεση κυβικής ρίζας πρώτος τύπος από τον Fibonacci

Και μια δεύτερη προσέγγιση μετά την:

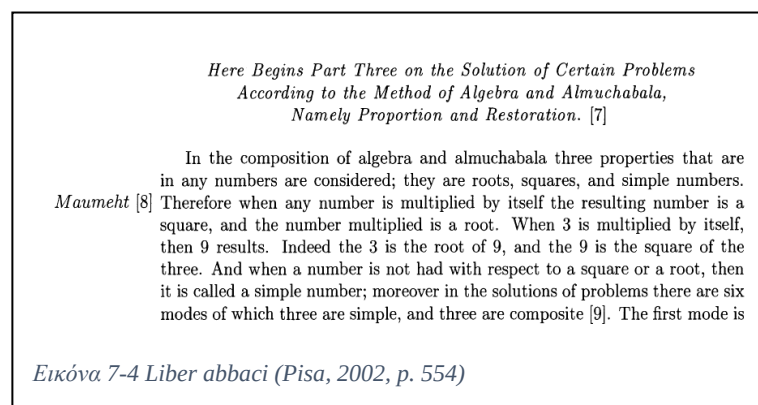
$$a_2 = a_1 + \frac{r_1}{3a_1(a + 1)}, r_1 = a - a_1^3$$

Equation 7-9 Εύρεση κυβικής ρίζας δεύτερος τύπος από τον Fibonacci – μάλλον χρησιμοποιώντας την μέθοδο της διπλής ψευδούς αντικατάστασης.

(Waerden V. D., 1985, pp. 36-37)

Το κεφάλαιο 15 παρουσιάζει ενδιαφέρον. Είναι χωρισμένο σε 3 ενότητες. Στην πρώτη ενότητα χρησιμοποιεί αναλογίες και μια συλλογή γεωμετρικών προβλημάτων. Στην δεύτερη ενότητα κάνει χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, όπως και κάποιους βασικούς τύπους για την εύρεση εμβαδών και όγκων. Στην τρίτη και τελευταία ενότητα του κεφαλαίου χρησιμοποιεί τις τεχνικές της άλγεβρας για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων αντί για γραμμικών. Αυτή τη φορά ο τρόπος παρουσίασης διαφέρει λίγο από αυτή του *al-Khwārizmī* στην άλγεβρά του. Φαίνεται να ακολουθεί την παράδοση προηγούμενων έργων. Κάνει

αναφορά στον *al-Khwārizmī* για να δείξει ότι η μέθοδος είναι δικιά του γράφοντας στο πλάϊ *Maumeht*[8]. Επιλύει τις 6 μορφές της δευτεροβάθμιας, [παράγραφος 6.3.1]όπως αυτές προκύπτουν υποθέτοντας ότι όλοι οι συντελεστές είναι μη-αρνητικοί και δίνει και έναν



αριθμό από προβλήματα. Για την επίλυση των προβλημάτων που είναι στις 6 μορφές που δίνει στην άλγεβρα του και ο *al-Khwārizmī*, η τεχνική η οποία χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου. Η περιγραφή γίνεται λεκτικά, χωρίς την χρήση συμβολισμών και δίνεται μόνο ένα σχήμα στο περιθώριο του βιβλίου. Γενικά, αναφέρονται μόνο θετικές ρίζες, αλλά ο *Fibonacci* φέρεται να γνωρίζει την ύπαρξη δυο ριζών. (Pisa, 2002, p. 10)

Στην αρχή του κεφαλαίου στην πρώτη ενότητα επιλύει ένα σύστημα εξισώσεων. Το σύστημα είναι το :

$$\begin{cases} 6: x = y: 9 \\ x + y = 21 \end{cases}$$

Equation 7-10

Το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

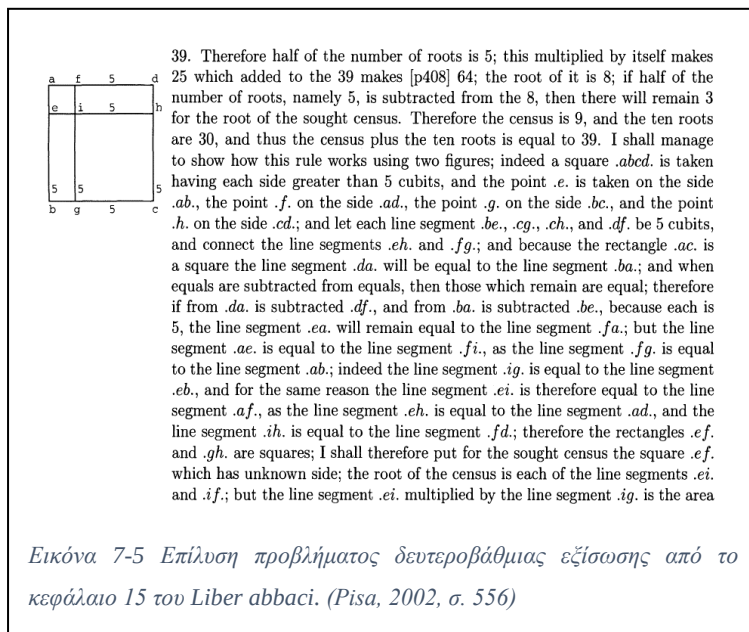
$$\begin{cases} xy = 54 \\ x + y = 21 \end{cases}$$

Equation 7-11

Συστήματα όπως το 7-11 έχουμε δει να αντιμετωπίζονται πολλές φορές στο παρελθόν. Ο τρόπος που επιλέγει ο *Fibonacci* για να το αντιμετωπίσει – λύσει είναι η μέθοδος που προκύπτει από τον Ευκλείδη. Χρησιμοποιεί λοιπόν την πρόταση II.5 (4.5.4 της παρούσης). Στην δεύτερη ενότητα ασχολείται με προβλήματα που χρειάζονται το Πυθαγόρειο θεώρημα και στα οποία δίνει τόσο γεωμετρική όσο και αριθμητική λύση. Για παράδειγμα στο πρόβλημα [on two birds flying from two towers] που βρίσκεται (Pisa, 2002, p. 544). Στο τρίτο και τελευταίο μέρος, όπως ήδη αναφέρθηκε διαχειρίζεται τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Η λύση γίνεται περιγραφικά και με την χρήση σχημάτων. Το πρώτο παράδειγμα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης σε πλήρη μορφή είναι ίδιο με το παράδειγμα που είχε ο *al-Khwārizmī* στην άλγεβρά του. Είναι η εξίσωση:

$$x^2 + 10x = 39$$

Equation 7-12



Η λύση όπως φαίνεται και στην εικόνα 7-5 δίνεται και γεωμετρικά. Ο *Fibonacci* περιλαμβάνει και εξισώσεις οι οποίες μπορεί να αναχθούν σε δευτεροβάθμιες, όπως η

$$x^8 + 100x^4 = 10000$$

Equation 7-13

Δεν γίνεται καμία αναφορά σε κυβικές εξισώσεις και δεν δίνεται κάτι ανάλογο.

#### 7.1.4 Αναφορές σε άλλα έργα του Fibonacci

Στο έργο του “*Liber abbaci*” ο *Fibonacci* δεν κάνει καμία αναφορά σε εξισώσεις 3<sup>ου</sup> βαθμού. Στο έργο του όμως “*Practica geometriae*” κάνει αναφορές στην προσπάθεια

διπλασιασμού του κύβου από τον Αρχύτα, τον Φίλων τον Βυζαντινό και τον Πλάτωνα, όπως περιγράφονται από τον Ευτόκιο, χωρίς αναφορά στις πηγές.

Στο έργο του “*Flos*”, ο *Fibonacci* αναφέρει όπως έχουμε ήδη πει τις λύσεις από τα δυο προβλήματα που το έθεσε ο ο *Giovanni da Palermo* (παράγραφοι 7.1.1, 7.1.2). Επιπλέον, το βιβλίο περιέχει κάποια παραδείγματα αόριστων εξισώσεων. Οι περισσότερες από αυτές περιέχονται ήδη στο “*Liber abbaci*”, αυτό όμως που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι δίνει και ερμηνεύει αρνητικές λύσεις ως χρέη.

Το υλικό από τα έργα του “*Liber abbaci*” και “*Practica geometriae*” χρησιμοποιήθηκε από τους Ιταλούς “*maestri d’ abaco*”, οι οποίοι επηρεασμένοι έφεραν στην Ιταλία για τους επόμενους αιώνες μια αίσθηση ανανέωσης των μαθηματικών. Πήρε όμως 300 και πλέον χρόνια, ώστε αυτή η ανανεωμένη μαθηματική γνώση να εξελιχθεί τόσο, ώστε να δημιουργηθούν νέες μαθηματικές ιδέες και έννοιες. (Katz V. J., 2009, p. 347)

## 7.2 Οι τρεις *abbacists* της Φλωρεντίας

Στην συνέχεια αξίζει να αναφερθούμε σε 3 *abbacists* από την Φλωρεντία του 14<sup>ου</sup> και 15<sup>ου</sup> αιώνα. Ο πρώτος ο οποίος θα αναφερθούμε είναι ο *Maestro Benedetto* με το έργο του “*Trattato di pratticha d’arismetica*” (1463). Όπως αναφέρουν οι *Franci και Toti Rigatelli* στο paper “*Maestro Benedetto e la Storia dell’ Algebra*” (p.300) το έργο αποτελεί μια Ιταλική μετάφραση της άλγεβρας του *al-Khwārizmī*. Παρουσιάζει την λύση των 6 τύπων των δευτεροβάθμιων και των γραμμικών εξισώσεων, δίνει κάποιες συντομογραφίες για τις δυνάμεις του *x* και παρουσιάζει τους κανόνες του πολλαπλασιασμού των δυνάμεων και των ριζών δευτέρου και 3<sup>ου</sup> βαθμού. Στην συνέχεια αναφέρει κάποιες εξισώσεις που επιλύονται είτε με αναγωγή σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού, είτε απευθείας με ρίζες. Δεν παρουσιάζει κάτι διαφορετικό από όσα έχουν ήδη αναφερθεί. Ο *Maestro Benedetto* το βιβλίο 14 από το *Trattato* παρουσιάζει 140 αριθμητικά προβλήματα από το χαμένο έργο του *Maestro Biaggio* (πέθανε περίπου το 1340). Ένα από αυτά τα προβλήματα οδηγεί στην εξίσωση:

$$\frac{1}{12}x^2 + \left(2 + \frac{1}{12}\right)x + 12 = x$$

Equation 7-14

στην οποία όμως ο *Biaggio* και ο *Benedetto* σχολιάζουν “*non puo essere*”- δηλαδή δεν μπορώ να το βρω. Είναι γεγονός ότι αυτή η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στο βιβλίο 15 από το *Trattato*, ο *Maestro Benedetto* κάνει αναφορά στον *Maestro Antonio* (πέθανε περίπου το 1390). Από το έργο του *Antonio*, ο *Benedetto* σχολιάζει κάποια σχετικά δύσκολα προβλήματα. Για παράδειγμα το παρακάτω:

To find numbers in continuous proportions such that their sum is 19 and the sum of their squares 40.

In modern notation, the conditions for the three numbers  $x, y, z$  are

$$\begin{aligned}x + y + z &= 10 \\x : y &= y : z \\x^2 + y^2 + z^2 &= 40.\end{aligned}$$

From these equations one derives first

$$\begin{aligned}2xy + 2xz + 2yz &= 100 - 40 = 60 \\xz &= y^2\end{aligned}$$

and next, replacing the term  $xz$  by  $y^2$ ,

$$\begin{aligned}2(x + y + z)y &= 60 \\y &= 3\end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned}x + z &= 7 \\x^2 + z^2 &= 31\end{aligned}$$

hence

$$x = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{13}), \quad z = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{13}).$$

*Εικόνα 7-6 πρόβλημα από τον Maestro Antonio (Waerden V. D., 1985, σ.*

Φαίνεται πως ο *Maestro Antonio* ήταν ο πρώτος που εισήγαγε και κάποιο άλλο όνομα εκτός από τον όρο *cosa* που χρησιμοποιούνταν παραδοσιακά. Ένα ακόμα πρόβλημα το οποίο μας δείχνει και την μαθηματική ικανότητα του είναι το :

“Να βρεθούν δυο αριθμοί με άθροισμα 18 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 27.” Υποθέτει ότι το πρώτο νούμερο είναι “*una cosa meno la radice d’alchuna quantita*” και το δεύτερο “*una cosa piu la radice d’alchuna quantita*”, δηλαδή οι δυο αριθμοί που ψάχνει είναι της μορφής  $x - \sqrt{y}$  και  $x + \sqrt{y}$ . Σύμφωνα με τους *Franci* και *Toti Rigatelli* πολλές από τις αλγεβρικές μεθόδους που αποδίδονται στον *Luca Pacioli* φαίνεται να ήταν γνωστές από τους 3 *abaccists* της Φλωρεντίας. (Waerden V. D., 1985, pp. 43-44)

### 7.3 Η εμφάνιση των πρώτων τριτοβάθμιων εξισώσεων στην Ιταλία

Στην Εθνική βιβλιοθήκη της Φλωρεντίας, υπάρχουν δυο Ιταλικά χειρόγραφα τα οποία είναι ανώνυμα. Αυτά τα χειρόγραφα τα οποία είναι το *Fond. Princ II.V. 152* και το *Conv. Sopp. G.7.1135* παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού περιέχουν μεθόδους επίλυσης κυβικών εξισώσεων. Είναι η πρώτη τους εμφάνιση σε Ιταλικά κείμενα.



### 7.3.1 Fond. Princ II.V. 152

Περιλαμβάνει μια σειρά από 22 εξισώσεις οι οποίες μπορούν να αναχθούν σε δευτεροβάθμιες ή σε καθαρές κυβικές εξισώσεις (pure cubic). Μετά από αυτές περιέχει 3 κυβικές εξισώσεις διαφορετικής μορφής, οι εξισώσεις αυτές είναι:

|    |                   |
|----|-------------------|
| 1. | $ax^3 + bx^2 = c$ |
| 2  | $ax^3 = bx^2 + c$ |
| 3  | $ax^3 + c = bx^2$ |

Table 7-1 Οι πρώτες κυβικές εξισώσεις από τους Ιταλούς του 14ου αιώνα

Για την επίλυση τους ο συγγραφέας παρουσιάζει κάποιες “συνταγές”.

Βήμα 1: Διαίρεση με το  $a$ .

Βήμα 2: η πρώτη τώρα από τις 3 έρχεται στην μορφή  $x^3 + px^2 = q$ .

Βήμα 3: εισάγεται ένας νέος άγνωστος το  $x + \frac{1}{3}p$ , θα το αποκαλούμε  $y$ .

Βήμα 4: η εξίσωση 1 γίνεται  $y^3 = ry + s$

Βήμα 5: Εάν  $y$  είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης, τότε “το  $y$  αποκαλείται κυβική ρίζα του  $s$ , με συμπλήρωμα  $r$ ” (*la radice cubica di  $s$  con l’aggiunta di  $r$* )

Βήμα 6: Εάν το συμπλήρωμα δεν καθορίζεται τότε μπορούμε πάντα να βρούμε την ρίζα: θα πρέπει να βρούμε τον αριθμό  $y$ , τέτοιο ώστε το  $y^3$  να υπερβαίνει το  $s$ , αλλά εάν το πλεόνασμα – συμπλήρωμα μας δίνεται τότε πρέπει να προχωρήσουμε με την μέθοδο trial and error. Στην περίπτωση που στην εξίσωση του βήματος 4 το  $s$  είναι αρνητικό, ο συγγραφέας μας λέει ότι πρέπει να βρούμε την κυβική ρίζα του χρέους με συμπλήρωμα  $r$ . Οι αρνητικοί αριθμοί λαμβάνονται ως χρέος.

Για παράδειγμα:

Στην εξίσωση  $2x^3 + 36x^2 = 704$  διαιρούμε με το 2 και έχουμε  $x^3 + 18x^2 = 352$  και για  $y = x + 6$  η εξίσωση γίνεται  $y^3 = 108y - 80$ . Με την μέθοδο trial and error η λύση του παραπάνω συστήματος είναι  $y = 10$ .

### 7.3.2 Conv. Sopp. G.7.1135

Το δεύτερο από τα χειρόγραφα πραγματεύεται και αυτό τα 22 είδη εξισώσεων που οδηγούν σε δευτεροβάθμιες ή καθαρά κυβικές εξισώσεις αρχικά και δυο ακόμα τύπους που αντιστοιχούν στον 1<sup>ο</sup> και στον 3<sup>ο</sup> τύπο από τον πίνακα Table 7-1 Οι πρώτες κυβικές εξισώσεις από τους Ιταλούς του 14ου αιώνα. Οι μέθοδοι επίλυσης είναι οι ίδιες με του



προηγούμενου χειρόγραφου διαφέρουν μόνο τα παραδείγματα. (Waerden V. D., 1985, pp. 44-46)

#### 7.4 Luca Pacioli<sup>67</sup>

Είναι ο πιο γνωστός μαθηματικός της εποχής εκείνης. Το έργο του "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita*" (1487) άσκησε μεγάλη επιρροή. Σε σχέση με τον *Fibonacci* χρησιμοποιεί πιο απλό αλγεβρικό συμβολισμό. Για παράδειγμα το  $R\sqrt{40}mR320$  είναι το  $\sqrt{40} - \sqrt{320}$ . Ο συμβολισμός είναι R για την τετραγωνική ρίζα, V για να δείξει πως ό,τι ακολουθεί είναι υπόρριξη ποσότητα, m για την αφαίρεση. (Waerden V. D., 1985, σσ. 46-47)

Σχολιάζει πως εάν οποιοδήποτε από τους έξι γνωστούς τύπους γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων, τον πολλαπλασιάσουμε με μια δοθείσα δύναμη της άγνωστης ποσότητας, τότε προκύπτει μια επιλύσιμη εξίσωση μεγαλύτερης τάξης. Ταξινομεί 8 περιπτώσεις εξισώσεων τετάρτου βαθμού και τις γράφει ως:

- (1) "censo de censo equale a numero" or  $ax^4 = e$ ,
- (2) "censo de censo equale a cosa" or  $ax^4 = dx$ ,
- (3) "censo de censo equale a censo" or  $ax^4 = dx^2$ ,
- (4) "censo de censo e censo equale a cosa" or  $ax^4 + cx^2 = dx$ ,
- (5) "censo de censo e cosa equale a censo" or  $ax^4 + dx = cx^2$ ,
- (6) "censo de censo e numero equale a censo" or  $ax^4 + e = cx^2$ ,
- (7) "censo de censo e censo equale a numero" or  $ax^4 + cx^2 = e$ , and
- (8) "censo de censo equale a numero e censo" or  $ax^4 = e + cx^2$ .

Εικόνα 7-7οι εξισώσεις 4ου βαθμού του Pacioli (Katz & Parshall, 2014, p. 214)

Για τις περιπτώσεις 4 και 5 λέει ότι είναι "αδύνατες", επειδή απλοποιούνται σε εξισώσεις 3<sup>ου</sup> βαθμού που περιλαμβάνουν τους όρους του πρώτου και του τρίτου βαθμού της άγνωστης ποσότητας.

Στο τέλος του βιβλίου του αναφέρει ότι για τις εξισώσεις:

---

<sup>67</sup> Luca Pacioli <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pacioli.html>

|                               |                    |
|-------------------------------|--------------------|
| Numero, cosa e cubo           | $n, x$ και $x^3$   |
| Numero, censo e cubo          | $n, x^2$ και $x^3$ |
| Numero, cubo e censo de censo | $n, x^3$ και $x^4$ |

Table 7-2

“Δεν ήταν δυνατό μέχρι τώρα να σχηματιστούν γενικοί κανόνες”. (Waerden V. D., 1985, pp. 46-47) Πιο συγκεκριμένα:

*“But of number, cosa and cubo how ever they are compound[ed], or of number, censo and cubo, or of number, cubo and censo de censo nobody until now has formed general rules, because they are not proportional among them. . . And therefore, until now, for their equations, one cannot give general rules, except that, sometimes, by trial (as I have said above) in some particular cases, . . . and therefore when in your equations you find terms with different intervals without proportion, you shall say that the art, until now, has not given the solution to this case. . . Even if the case may be possible.”* (Katz & Parshall, 2014, p. 215)

## 7.5 Master Dardi of Pisa

Για τον Master Dardi of Pisa, όπως και για το έργο του με τίτλο “Aliabrea argibra” δεν είναι γνωστά πολλά πράγματα. Ο Warren Van Egmond γράφει:

*“This article presents a summary list of 198 different types of equations and their rules of solution found in an algebra text of the 14th century, which is attributed to an otherwise unknown master Dardi of Pisa. The text is especially noteworthy for its unusual length, its adept handling of complex equations involving radicals and powers up to the 12th degree, and its correct solution of four irreducible cubic and quartic equations.”*

(Waerden V. D., 1985, p. 47)

Στο έργο του περιλαμβάνει 4 περιπτώσεις εξισώσεων κυβικών και τετάρτου βαθμού, οι οποίες δεν μπορούν να αναχθούν σε δευτεροβάθμιες ή να επιλυθούν απλά με την χρήση ριζικών. Αυτές οι εξισώσεις έχουν τις παρακάτω μορφές:

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1 | $cx + bx^2 + ax^3 = n$        |
| 2 | $dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 = n$ |
| 3 | $dx + cx^2 + ax^4 = n + bx^3$ |
| 4 | $dx + ax^4 = n + cx^2 + bx^3$ |

Table 7-3

Ο *Dardi* αναφέρει κανόνες για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων, αλλά όπως και ο ίδιος σχολιάζει οι τύποι που δίνει δεν είναι γενικευμένοι, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Σε όλες τις περιπτώσεις το πρώτο βήμα είναι να διαιρεί με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Για την περίπτωση 1 τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^3 + bx^2 + cx = n$$

Equation 7-15

Για την επίλυση της εξίσωσης 7-15 δίνει τον τύπο

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + n} - \frac{c}{b}$$

Equation 7-16 ο τύπος για τις εξισώσεις τρίτου βαθμού από τον *Dardi*

Πώς όμως έφτασε σε αυτόν τον τύπο; Δεν αναφέρει κάτι, δεν δίνει κάποια απόδειξη, άρα το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι υποθέσεις. Μια πιθανή εξήγηση αποτελεί να “μιμήθηκε” τον *al-Khwārizmī* και τον *Fibonacci*. Στα έργα και των δυο η δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής  $x^2 + bx = c$ , επιλύεται με την συμπλήρωση κατάλληλης σταθεράς, ώστε να προκύψει τέλειο τετράγωνο της μορφής  $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ .

Αν προσπαθήσουμε να συμπληρώσουμε κατάλληλη σταθερή ποσότητα στην εξίσωση 7-15, ώστε να προκύψει τέλειος κύβος της μορφής  $(x + L)^3$ , τότε προκύπτει η λύση 7-16 του *Dardi*. Όλη η διαδικασία με την συμπλήρωση της σταθερής ποσότητας και τον τρόπο που φτάνουμε στον τύπο του *Dardi*, βρίσκεται στο (Waerden V. D., 1985, pp. 48-49)

Για την εξίσωση 2 του πίνακα 7-3 ο *Dardi* δίνει τον ίδιο τρόπο επίλυσης όπως στην περίπτωση 1, μόνο που εξάγει ρίζα τετάρτου βαθμού. Εκεί που διαφοροποιείται για τις εξισώσεις της μορφής 3 και 4. Και στις δυο περιπτώσεις για  $a = 1$ , δηλαδή αφού διαιρέσει με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, τότε δίνει ως λύση τον παρακάτω τύπο:

$$x = \sqrt[4]{\left(\frac{c}{4}\right)^2 + n} + \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{d}{2b}}$$

Equation 7-17 Επίλυση εξίσωσης 4<sup>ου</sup> βαθμού από τον *Dardi*

Πώς έφτασε σε αυτόν τον τύπο; Ο *Dardi* πάλι δεν δίνει τον τρόπο που το βρήκε, ούτε και κάποια απόδειξη. Μπορεί πάλι μόνο να γίνει κάποια εικασία. Μια υπόθεση για τον τρόπο

που έφτασε σε αυτόν τον τύπο ο *Dardi* μπορεί να βρεθεί στο (Waerden V. D., 1985, pp. 49-52)

Αξίζει όμως σε αυτό το σημείο να τονίσουμε στην μαθηματική ικανότητα του *Dardi* και στο τρόπο που έφτασε στον τύπο 7-17, χωρίς την χρήση του σύγχρονου τρόπου συμβολισμού.

Οι εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού στις αρχές του 16<sup>ου</sup> αιώνα πυροδότησαν το ενδιαφέρον. Η λύση τους δημιούργησε το πρώτο σημαντικό Ευρωπαϊκό επίτευγμα μετά από την άλγεβρα που υπήρχε στο “*Liber abbaci*” του *Fibonacci*. Έως το τέλος του 16<sup>ου</sup> αιώνα η αλγεβρική σκέψη, τόσο μέσα από τη δουλειά που είχε γίνει για την επίλυση εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού, αλλά και μέσα από τη δουλειά που είχε γίνει με στόχο την βελτιστοποίηση του περιεχομένου, αναπτύχθηκε σημαντικά. (Katz & Parshall, 2014, p. 215)

## 7.6 *Scipione del Ferro (1465-1526 Bologna)*<sup>68</sup>

Ο *Scipione del Ferro*, υπήρξε καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Bologna από το 1496 και μετά. Ήταν αυτός ο οποίος πραγματοποίησε το πρώτο σημαντικό άλμα στην επίλυση των τριτοβάθμιων εξισώσεων. Κάποια στιγμή τις πρώτες 2 δεκαετίες του 16<sup>ου</sup> αιώνα κατάφερε να δώσει μια γενική λύση για τις κυβικές εξισώσεις τρίτου βαθμού της μορφής:

$$x^3 + px = q$$

*Equation 7-18 γενική μορφή τριτοβάθμιας εξίσωσης που λύθηκε από τον Scipione*

Πρέπει να θυμηθούμε ότι εκείνη την περίοδο οι μαθηματικοί δεν χρησιμοποιούν τους αρνητικούς αριθμούς, ούτε ως συντελεστές στις εξισώσεις και ότι υπήρχαν 13 περιπτώσεις κυβικών εξισώσεων, ανάλογα με την θέση που βρίσκονταν οι (θετικοί) όροι της εξίσωσης, όπως και το πλήθος των όρων. Ο *del Ferro* κατάφερε λοιπόν να ξεκινήσει την διαδικασία της επίλυσης των κυβικών εξισώσεων με την λύση που έδωσε για μια από τις περιπτώσεις. Ο *del Ferro* όμως, καθώς οι ακαδημαϊκές πρακτικές εκείνη την εποχή, ήταν τελείως διαφορετικές από την σημερινή δεν δημοσίευσε την λύση του. Την κράτησε σε ένα σημειωματάριο το οποίο και έδωσε πριν το θάνατό του στο μαθητή του *Antonio Maria Fiore* και στον διάδοχό του στην Bologna, *Annibale della Nave (1500-1558)*. (Katz V. J., 2009, p. 399)

---

<sup>68</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ferro.html>

Ποια είναι όμως η λύση που έδωσε ο del Ferro; Εάν μεταφράσουμε στον σύγχρονο τρόπο συμβολισμού, τότε η παραπάνω εξίσωση λύνεται με τον τύπο:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

Equation 7-19 η λύση του del Ferro για τις κυβικές εξισώσεις

(Katz & Parshall, 2014, p. 216)

Δεν αναφέρει πουθενά πως έφτασε σε αυτή την λύση. Θα δούμε στο κεφάλαιο 7.9 πως ο Cardano στο έργο του “*Ars Magna, sive de regularis algebraicis*” (Nurnberg, 1545) αποδεικνύει την παραπάνω μέθοδο.

## 7.7 Nicollo Tartaglia of Brescia<sup>69</sup> (1499-1557) – Antonio Maria Fiore<sup>70</sup> – Gerolamo Cardano<sup>71</sup> η ιστορία της δημοσιοποίησης

Σήμερα όταν κάποιος κάνει μια σημαντική επιστημονική ανακάλυψη, τότε την δημοσιεύει το συντομότερο δυνατό για να κατοχυρώσει την πατρότητά της. Στις αρχές του 16<sup>ου</sup> όμως αιώνα η διαδικασία ήταν ελαφρώς διαφορετική. Στο πανεπιστήμιο οι ακαδημαϊκές θέσεις δεν ήταν μόνιμες. Οι θέσεις ήταν προσωρινές και η ανανέωση τους γινόταν περιοδικά από το συμβούλιο του Πανεπιστημίου. Ένας τρόπος ώστε ένας καθηγητής να αποδείξει ότι ήταν άξιος να συνεχίσει να κατέχει την θέση ήταν να κερδίσει δημόσιους διαγωνισμούς – προκλήσεις. Οι δυο διεκδικητές για μια θέση, έδιναν ο ένας στον άλλο κάποια προβλήματα και μετά από ένα προαποφασισμένο χρονικό διάστημα καλούνταν δημόσια να ανακοινώσουν τις λύσεις στα προβλήματα του άλλου. Πολλές φορές εκτός από την πανεπιστημιακή θέση το έπαθλο μπορεί να ήταν και ένα σημαντικό χρηματικό ποσό. Συνεπώς εάν κάποιος ανακάλυπτε μια μέθοδο, ήταν προτέρημα για αυτόν να την κρατήσει κρυφή, ώστε να την χρησιμοποιήσει σε μια τέτοια “μονομαχία”.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο del Ferro, έδωσε την λύση του στον μαθητή του Antonio Maria Fiore και τον διάδοχό του, γαμπρό του Annibale della Nave. Ένας άλλος μαθηματικός εκείνη την περίοδο ο Nicollo Tartaglia είπε πως είχε ανακαλύψει την λύση από κάποιο είδος κυβικών εξισώσεων της μορφής:

<sup>69</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html>

<sup>70</sup> [https://proofwiki.org/wiki/Mathematician:Antonio\\_Maria\\_del\\_Fiore](https://proofwiki.org/wiki/Mathematician:Antonio_Maria_del_Fiore)

<sup>71</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan.html>

$$x^3 + bx^2 = d.$$

*Equation 7-20 Τριτοβάθμιες εξισώσεις από τον Tartaglia*

Το 1535 ο *Fiore* προκάλεσε τον *Tartaglia* σε ένα δημόσιο διαγωνισμό με σκοπό να νικήσει χρησιμοποιώντας την γνώση που είχε από τον *del Ferro*. Όλα τα προβλήματα και τα 30 που έδωσε στον αντίπαλο του *Tartaglia* ήταν προβλήματα που οδηγούσαν σε εξισώσεις της μορφής 7-18. Ο *Tartaglia* ως καλύτερος μαθηματικός κατάφερε να βρει την λύση στα προβλήματα που του τέθηκαν, όπως ο ίδιος υποστηρίζει το βράδυ στις 12 Φεβρουαρίου 1535. Ο αντίπαλός του δεν τα κατάφερε και άρα ο νικητής της διαμάχης ήταν ο *Tartaglia*.

Τα νέα σχετικά με τον διαγωνισμό και τις νέες λύσεις των τριτοβάθμιων εξισώσεων έφτασαν στο Μιλάνο και το *Gerolamo Cardano*, που εκείνη την περίοδο έδινε δημόσιες διαλέξεις μαθηματικών, ζήτησε από τον *Tartaglia* να του δείξει τον τρόπο λύσης, ώστε να το συμπεριλάβει στο αριθμητικό έργο που ετοίμαζε, αναφέροντας όμως τον *Tartaglia* ως αυτόν που το ανακάλυψε. Ενώ αρχικά ο *Tartaglia* αρνήθηκε, αλλά μετά από την επιμονή του *Cardano* και την υπόσχεση ότι θα τον παρουσιάσει τόσο αυτόν όσο και τις ανακαλύψεις του σχετικά με τα όλα στην Μιλανέζικη αυλή, τελικά δέχθηκε και πήγε στο Μιλάνο το 1539.

Ο *Tartaglia* αφού απέσπασε έναν όρκο από τον *Cardano* (στις 25 Μαρτίου του 1539 (Waerden V. D., 1985, σ. 55)) , ότι δεν θα δημοσιεύσει τα ευρήματά του, του έδωσε τις λύσεις σε 3 διαφορετικές μορφές τριτοβάθμιων εξισώσεων υπό την μορφή ποιήματος:

Για την  $x^3 + cx = d$ , το ποίημα είναι:

*When the cube and its things near  
Add to a new number, discrete,  
Determine two new numbers different  
By that one; this feat  
Will be kept as a rule  
Their product always equal, the same,  
To the cube of a third  
Of the number of things named.  
Then, generally speaking,  
The remaining amount  
Of the cube roots subtracted  
Will be your desired count*

(Katz V. J., 2009, pp. 399-400)

## 7.8 Σύντομη βιογραφία – Cardano (1501-1576)

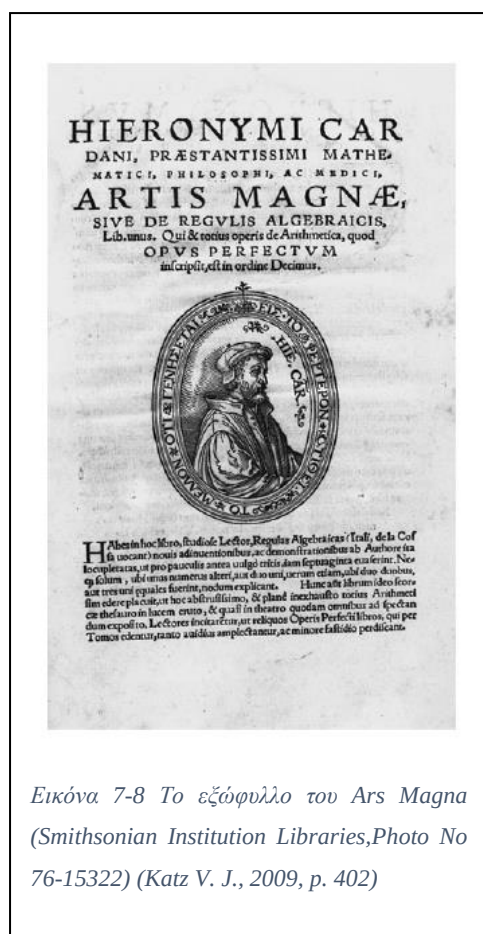
Ο *Cardano* γεννήθηκε στο Μιλάνο περίπου το 1501. Κατά τη γέννησή του οι γονείς του δεν είχαν παντρευτεί και θεωρήθηκε νόθος. Κατά συνέπεια, ενώ σπούδασε γιατρός, για αρκετά χρόνια το κολλέγιο των γιατρών του Μιλάνου, δεν του επέτρεπε την εγγραφή του. Άσκησε την ιατρική σε μια μικρή πολύ κοντά στην Padua, επιστρέφοντας στο Μιλάνο το 1533, όπου παρακολουθούσε ιδιωτικά ασθενείς και έδινε διαλέξεις μαθηματικών, επίσης έγραψε ένα βιβλίο αριθμητικής. Τελικά κατάφερε να γίνει αποδεκτός από το κολλέγιο των Ιατρών.

Ο *Cardano* αμέσως μετά την εγγραφή του στον ιατρικό σύλλογο (κολλέγιο των ιατρών) έγινε ένας από τους πιο γνωστούς γιατρούς στο Μιλάνο και με μεγάλη ζήτηση από όλη την Ευρώπη. Ο πιο γνωστός (σημαντικός) ίσως, ασθενής του ήταν ο *John Hamilton*, ο Αρχιεπίσκοπος της Σκωτίας, ο οποίος το 1551 ζήτησε τις υπηρεσίες του *Cardano*, ώστε να ξεπεράσει τις συνεχώς επιδεινούμενες κρίσεις άσματος που είχε. Ο *Cardano* μετά από ένα μήνα, όπου τον πέρασε παρατηρώντας τα συμπτώματα, αλλά και τις συνήθειες του Αρχιεπισκόπου κατέληξε ότι έχει σοβαρή αλλεργία στα φτερά που έχει το κρεβάτι του. Του πρότεινε επίσης να αλλάξει τα σεντόνια του σε μεταξωτά και το μαξιλάρι του σε λινό. Η υγεία του Αρχιεπισκόπου αμέσως καλυτέρευσε και αυτός παρέμεινε ευγνώμων στον *Cardano* για το υπόλοιπο της ζωής του, προσφέροντάς του λεφτά ή όποια άλλη βοήθεια μπορεί να χρειαζόταν. Στην διάρκεια της επιστροφής του από την Σκωτία μέσω της Αγγλίας, απέτυχε να προβλέψει το ωροσκόπιο του νεαρού βασιλιά *Edward VI* . Προέβλεψε μακροημέρευση, ενώ δυστυχώς ο 16χρονος βασιλιάς πέθανε σύντομα.

Η προσωπική του ζωή, ήταν γεμάτη τραγωδίες. Αποκορύφωμα αυτών ο θάνατος της γυναίκας του το 1546 και η εκτέλεση του γιου του για τον φόνο, της ίδιας του της γυναίκας το 1560. Το τελικό χτύπημα που δέχτηκε ήταν το 1570, όταν κατηγορήθηκε ως αιρετικός. Ευτυχώς η καταδίκη του ήταν επιεικής και έτσι πέρασε τα τελευταία χρόνια του στην Ρώμη, όπου έγραψε την αυτοβιογραφία του *De Propria Vita*. (Katz V. J., 2009, p. 401)



## 7.9 Ars Magna - The Great Art or The Rules of Algebra



Εικόνα 7-8 Το εξώφυλλο του *Ars Magna* (Smithsonian Institution Libraries, Photo No 76-15322) (Katz V. J., 2009, p. 402)

Ο *Cardano* κράτησε την υπόσχεσή του σχετικά με την μη – δημοσιοποίηση των ευρημάτων του *Tartaglia*. Ξεκίνησε τότε και ο ίδιος να ασχολείται με αυτό το πρόβλημα, μαζί με τον μαθητή – υπηρέτη του *Lodovico Ferrari*<sup>72</sup> (1522-1565). Μέσα στα επόμενα χρόνια κατάφερε να λύσει και να αποδείξει όλες τις περιπτώσεις των κυβικών ριζών. Ο *Ferrari* κατάφερε να λύσει και τις εξισώσεις τετάρτου βαθμού. Όλο αυτό το διάστημα ο *Tartaglia*, δεν είχε ακόμα δημοσιοποιήσει τις λύσεις του για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις. Ο *Cardano* δεν ήθελε να καταπατήσει τον όρκο του, αλλά ήθελε να δημοσιοποιήσει τις μεθόδους του για την επίλυση των τριτοβάθμιων εξισώσεων.

Έχοντας ακούσει ότι αρχικά η ανακάλυψη είχε γίνει από τον *del Ferro*, πήγε μαζί με τον *Ferrari* στη *Bologna*, όπου παίρνοντας την άδεια του *della Nave* έψαξαν τα χειρόγραφα του *del Ferro* σχετικά.

Βρίσκοντας ότι όντως ο *del Ferro* είχε κάνει την σχετική ανακάλυψη 20 χρόνια πριν από τον *Tartaglia*, ένοιωσε ότι δεν σπάει τον όρκο του και προχώρησε στην δημοσιοποίηση.

Το 1545 λοιπόν δημοσίευσε το πολύ σημαντικό μαθηματικό έργο “*Ars Magna, sive de regularis algebraicis*”, το οποίο κατά κύριο λόγο αφορά εξισώσεις 3<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> βαθμού. Ο *Tartaglia* νιώθοντας προδομένος από την δημοσιοποίηση προκάλεσε τον *Ferrari* σε ένα δημόσιο διαγωνισμό και στον οποίο έχασε. Μέχρι σήμερα ο τύπος επίλυσης των τριτοβάθμιων εξισώσεων είναι γνωστός ως *Cardano's formula*. (Katz V. J., 2009, pp. 400-401)

Το “*Ars Magna*” ξεκινάει με την επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού και στην συνέχεια ασχολείται με εξισώσεις τρίτου βαθμού. Ολοκληρώνεται με τις εξισώσεις τετάρτου βαθμού. Η λύση για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις δίνεται στο κεφάλαιο 11.

<sup>72</sup> <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ferrari.html>



Στην εισαγωγή του γράφει:

*“Although a long series of rules 12 might be added and a long discourse given about them, we conclude our detailed consideration with the cubic, others being merely mentioned, even if generally, in passing. For as positio [the first power] refers to a line, quadratum [the square] to a surface, and cubum [the cube] to a solid body, it would be very foolish for us to go beyond this point. Nature does not permit it. Thus, it will be seen, all those matters up to and including the cubic are fully demonstrated, but the others which we will add, either by necessity or out of curiosity, we do not go beyond barely setting out. In everything, however, the worth of the preceding books [of this work], especially the third and fourth books, should be kept in mind, lest I be thought trifling when I repeat or obscure when I skip over something.”* (Cardano, 1545/1968, p. 9)

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ακόμα αναφέρεται στην σύνδεση με την γεωμετρία. Χρησιμοποιεί την γεωμετρική απόδειξη, μια παράδοση που πάει τόσο πίσω, όσο ο Ευκλείδης. Συνδέει τις εξισώσεις με τα αντίστοιχα γεωμετρικά σχήματα και δείχνει πόσο περίεργο ήταν για την εποχή το βήμα να προχωρήσει σε εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του τρία.

#### 7.9.1 Η λύση από το κεφάλαιο 11 του *Ars Magna* για την $x^3 + px = q$ , (Cardano, 1545/1968, pp. 96-99)

Στο κεφάλαιο 11 ο Cardano παρουσιάζει στην λύση των κυβικών εξισώσεων της παραπάνω μορφής, που ήταν και η αιτία όλης αυτής της διαμάχης με τον Tartaglia. Στην αρχή του κεφαλαίου είναι πολύ προσεκτικός για μια ακόμη φορά και κάνει αναφορά στον Tartaglia, προσέχοντας όμως να διαχωρίσει την πατρότητα του κανόνα για την επίλυση αλγοριθμικά και της γεωμετρικής ερμηνείας.

*“Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirty years ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccoli> Tartaglia of Brescia gave Niccoli> occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in response to my entreaties, though withholding the demonstration. Armed with this assistance, I sought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.”* (Cardano, 1545/1968, p. 96)

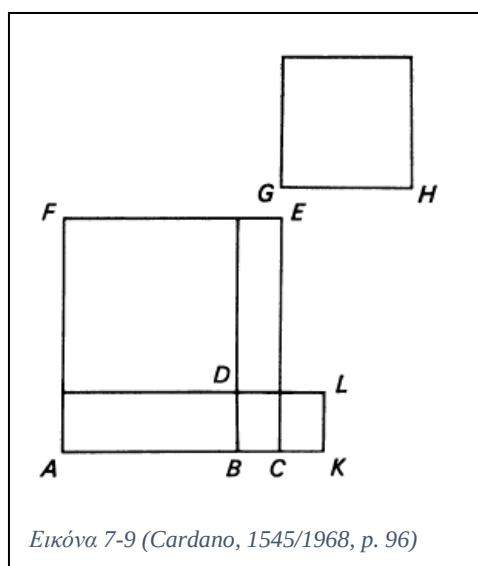
Ξεκινάει δίνοντας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα και το οποίο αρχικά το εξηγεί γεωμετρικά. Ως πρώτο παράδειγμα, δίνει την λύση της εξίσωσης:

$$x^3 + 6x = 20$$

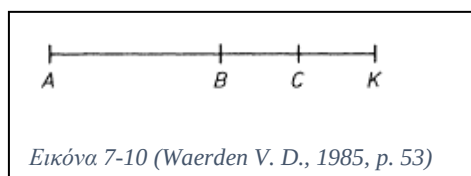
Μετά διατυπώνει έναν γενικό κανόνα και στο τέλος την λύνει και αλγεβρικά. Η ιδέα για την λύση της παραπάνω είναι να επιλυθεί η Equation 7-21 είναι να θέσει  $x = u - v$ .

Για να δούμε την γεωμετρική λύση που δίνει αρχικά:

*“let  $GH^3$  plus six times its side  $GH$  equal 20, and let  $AE$  and  $CL$  be two cubes the difference between which is 20 and such that the product of  $AC$ , the side [of one], and  $CK$ , the side [of the other], is 2, namely one-third the coefficient of  $x$ . Marking off  $BC$  equal to  $CK$ , I say that, if this is done, the remaining line  $AB$  is equal to  $GH$  and is, therefore, the value of  $x$ , for  $GH$  has already been given as [equal to  $x$ ].”* (Cardano, 1545/1968, p. 96)



Σε γεωμετρική ορολογία αυτό μεταφράζεται ως εξής: Συμβολίζουμε το  $u$  με ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AC$  και το  $v$  με ένα ευθύγραμμο τμήμα  $CK$ . Στην συνέχεια στο ευθύγραμμο τμήμα  $AC$ , κατασκευάζουμε  $BC = CK = v$ , τότε το  $AB = x$ .



Έχοντας δώσει μια γενική περιγραφή της κατασκευής, τότε ο Cardano δίνει όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες και την απαραίτητη απόδειξη. Για να αποδείξει το ζητούμενο, συμπληρώνει τους κύβους και τα άλλα 6 στερεά το οποία προκύπτουν αν θεωρήσει τα σχήματα της εικόνας 7-9 σε στερεά. Χρησιμοποίησε τότε κάποιες ταυτότητες τις οποίες είχε

αποδείξει νωρίτερα για να ανακατασκευάσει τα κομμάτια και να αποδείξει το ζητούμενο. Η πλήρης απόδειξη βρίσκεται στο (Cardano, 1545/1968, pp. 96-98)

Ας δούμε αλγεβρικά τι απέδειξε ο Cardano. Αντικαθιστώντας στην Equation 7-18 αντικαταστήσουμε το  $x = u - v$ , και άρα  $u^3 - v^3 = q$ , και  $u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$  τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x^3 + px &= (u - v)^3 + p(u - v) = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3uv(u - v) \\ &= u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 3uv(u - v) = q \end{aligned}$$

Equation 7-22

Ο τρόπος που ο Cardano εξηγεί γεωμετρικά το παραπάνω είναι δυσνόητος, αλλά η βασική ιδέα είναι η ίδια. Διατυπώνει έναν γενικό κανόνα και στη συνέχεια δίνει παραδείγματα και εφαρμόζει τον γενικό κανόνα που διατύπωσε. Ο γενικός κανόνας που διατυπώνει ο Cardano είναι:

*“Cube one third the “number of sides” (i.e. one-third the coefficient of x). Add to it the square of one-half the constant of the equation, and take the square root of the whole. You will put this twice, and to one of the two you add one-half the number you have squared and from the other you subtract one half the same. You will then have a binomium ( $\sqrt{108 + 10}$ ) and its apotome ( $\sqrt{108 - 10}$ ). Then, subtracting the cube root of the apotome from the cube root of the binomium, the remainder is the required side.”* (Cardano, 1545/1968, pp. 98-99)

Ο τύπος που προκύπτει από τον παραπάνω κανόνα είναι:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

Equation 7-23 Ο τύπος για την επίλυση κυβικών εξισώσεων από τον Cardano για την περίπτωση 1.

Είναι προφανές ότι είναι ο ίδιος με του del Ferro.

Το πρώτο παράδειγμα που δίνει είναι:

$$x^3 + 6x = 20$$

Equation 7-24

Το οποίο στην Λατινική εκδοχή το γράφει:

$$cub9 p : 6 reb9 æqlis 20,$$

Equation 7-25 η λατινική διατύπωση της 7-23

Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι η εξίσωση Equation 7-24, έχει ως λύση την  $x = 2$ , παρόλα αυτά ο αλγόριθμος που μας υπαγορεύει ο Cardano, ο τύπος Equation 7-19 μας οδηγεί σε μια πολύπλοκη μορφή της λύσης την:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Equation 7-26

Ο Cardano στο τέλος του κεφαλαίου όμως μας επισημαίνει ότι η λύση είναι ίση με 2, χωρίς να εξηγεί πως το υπολόγισε. (Cardano, 1545/1968, p. 100)

Στην συνέχεια αφιερώνει μια σειρά από κεφάλαια στα οποία αναλύει την λύση όλων των μορφών τριτοβάθμιων εξισώσεων. Στο κεφάλαιο 12 ασχολείται με την επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων της μορφής:

$$x^3 = px + q$$

Equation 7-27

ή όπως ο ίδιος το περιγράφει “*On the cube Equal to the first power and number*”. Ο τρόπος αντιμετώπισης είναι ο ίδιος και εδώ. Ξεκινάει με την επίδειξη της γεωμετρικής λύσης. Δίνει λοιπόν έναν γενικό κανόνα ελαφρώς διαφορετικό από τον προηγούμενο. Ο γενικός κανόνας που διατυπώνει ο Cardano είναι:

*“The rule, therefore, is: When the cube of one-third the coefficient of  $x$  is not greater than the square of one-half the constant of the equation, subtract the former from the latter and add the square root of the remainder to one-half the constant of the equation and, again, subtract it from the same half, and you will have, as was said, a binomium and its apotome, the sum of the cube roots of which constitutes the value of  $x^3$ ”*

Ο τύπος που προκύπτει από τον παραπάνω κανόνα είναι:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Equation 7-28 Ο τύπος για την επίλυση κυβικών εξισώσεων από τον Cardano για την περίπτωση 2

Μετά από την διατύπωση αυτού του γενικού κανόνα, τον εφαρμόζει σε δυο παραδείγματα: το πρώτο παράδειγμα είναι το  $x^3 = 6x + 40$  και το δεύτερο είναι το  $x^3 = 6x + 6$ .

Αμέσως όμως μετά την λύση αυτών των δυο παραδειγμάτων ο *Cardano* συνειδητοποιεί ένα πρόβλημα που μπορεί να παρουσιαστεί. Το πρόβλημα είναι  $\left(\frac{p}{3}\right)^2 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$ . Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να υπολογίσει την τετραγωνική ρίζα.

*“When the cube of one-third the coefficient of  $x$  is greater than the square of one-half the constant of the equation, which happens whenever the constant is less than three-fourths of this cube or when two-thirds of the coefficient of  $x$  multiplied by the square root of one third the same number is greater than the constant of the equation, then the solution of this can be found by the aliza problem which is discussed in the book of geometrical problems. But if you wish to avoid such a difficulty you may, for the most part, be satisfied by Chapter XXV of this work.”* (*Cardano, 1545/1968, p. 103*)

Προκειμένου να αποφύγει αυτή την δυσκολία στο κεφάλαιο XXV αναφέρει ένα σύνολο από ειδικές περιπτώσεις για την επίλυση της παραπάνω μορφής. Οι περιπτώσεις αυτές είναι στο (*Cardano, 1545/1968, pp. 160-165*)

Η περίπτωση κατά την οποία εμφανίζεται αρνητικός αριθμός κάτω από την ρίζα αποκαλείται “*casus irreducibilis*” και σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να βρεθεί πραγματική τετραγωνική ρίζα. Παρόλα αυτά η εξίσωση μπορεί να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Μπορεί ακόμα να υπάρχουν και 3 πραγματικές ρίζες. Πως είναι αυτό δυνατό;

Στην Equation 7-28 μπορούμε να θέσουμε  $w = \sqrt{-c}$ , όπου  $c = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ . Τότε το  $\frac{q}{2} - w$  και το  $\frac{q}{2} + w$ , όπως προκύπτουν από τον Equation 7-28 είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Επειδή ισχύει ότι  $3uv = p$ , θα πρέπει να πάρουμε την δεύτερη κυβική ρίζα ως συζυγή της πρώτης, ώστε το γινόμενο να είναι πάντα πραγματικός αριθμός. (*Waerden V. D., 1985, p. 56*)

Ο *Cardano* γνωρίζοντας αυτές τις δυσκολίες εξ’ αρχής ξεκινάει το έργο του *Ars Magna* με κάποιους γενικούς κανόνες, περιλαμβάνοντας και μια πλήρη αναφορά στον αριθμό και το είδος των ριζών μιας κυβικής εξίσωσης. Γνωρίζουμε ότι ο *Sharaf al-Din al-Tusi* είχε δώσει μια παρόμοια κριτήρια με αυτά του *Cardano* για την ύπαρξη των θετικών ριζών των εξισώσεων, εάν ο *Cardano* βασίστηκε σε αυτό δεν το γνωρίζουμε, αλλά σίγουρα έδωσε περισσότερες πληροφορίες από τον *Sharaf al-Din al-Tusi*, καθώς έλαβε υπόψιν του και τις αρνητικές ρίζες. Τέλος, ήταν επίσης ικανός να κατανοήσει, αλλά όχι να αποδείξει ότι εάν υπάρχουν 3 πραγματικές ρίζες σε μια κυβική εξίσωση, τότε αυτές είναι ίσες με το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. (*Katz V. J., 2009, p. 403*)

### 7.10 Ο Cardano και η πρώτη εμφάνιση μιγαδικών αριθμών.

Στο *Ars Magma* υπάρχουν όμως και κάποια πράγματα ακόμα εξίσου ενδιαφέροντα. Το πρώτο είναι το κεφάλαιο 39, όπου ο Cardano αναφέρει πως έχει πάρει ολόκληρο από τον μαθητή του Ludovico Ferrari και αφορά τον τρόπο επίλυσης εξισώσεων τετάρτου βαθμού, όπου καταγράφει 20 περιπτώσεις και αναφέρει μια γενική μέθοδο επίλυσης.

Το δεύτερο σημαντικό σημείο, το οποίο αποδεικνύει το βαθμό που είχε κατανοήσει τους αρνητικούς αριθμούς και το γεγονός ότι μπορεί να υπάρχουν αρνητικές λύσεις σε προβλήματα, είναι ο κανόνας II στο κεφάλαιο 37. Σε αυτό τον κανόνα εμφανίζει ως λύσεις για πρώτη φορά, μιγαδικούς αριθμούς! Αυτοί οι αριθμοί προκύπτουν ως λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Παρόλο όμως του επιβεβαίωσε ότι οι ρίζες που βρήκε επιβεβαιώνουν την εξίσωση, δεν ικανοποιήθηκε με αυτές. (Katz V. J., 2009, p. 404) Το πρόβλημα όπου εμφανίζονται οι μιγαδικοί αριθμοί είναι το εξής:

*“The second species of negative assumption involves the square root of a negative. I will give an example: If it should be said, divide 10 into two parts the product of which is 10 or 40, it is clear that this case is impossible. Nevertheless, we will work thus: We divide 10 into two equal parts, making each 5. These we square, making 25. Subtract 40, if you will, from the 25 thus produced, as I showed you in the chapter on operations in the sixth 3 book, leaving a remainder of -15, the square root of which added to or subtracted from 5 gives parts the product of which is 40. These will be  $5 + \sqrt{-15}$  and  $5 - \sqrt{-15}$ ”* (Cardano, 1545/1968, p. 219)

Ο Cardano δίνει και μια γεωμετρική ερμηνεία για το παραπάνω, από την οποία και δεν ικανοποιείται. Ολόκληρη η γεωμετρική απόδειξη βρίσκεται στο (Cardano, 1545/1968, σσ. 219-220). Δεν γίνεται καμία άλλη αναφορά σε μιγαδικούς αριθμούς Ο πρώτος ο οποίος αναφέρεται στους μιγαδικούς αριθμούς είναι ο Rafael Bombelli.

Το *Ars Magna* αποτελεί ένα έργο που άσκησε επιρροή στα μαθηματικά και ακόμα και ο ίδιος ο συγγραφέας του γράφει στην τελευταία του σελίδα:

*“WRITTEN IN FIVE YEARS, MAY IT LAST AS MANY THOUSANDS. THE END OF THE GREAT ART ON THE RULES OF ALGEBRA BY GIROLAMO CARDANO”* (Cardano, 1545/1968, p. 261)

## Ιδέες και σχόλια για Διδακτική παρέμβαση

Θεωρούμε πως το παραπάνω υλικό έχει μια πληθώρα παραδειγμάτων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για διδακτική παρέμβαση. Θα μπορούσε το παραπάνω υλικό να αποτελέσει ιδέα και αφορμή για περαιτέρω έρευνα και μελέτη στον τομέα της Διδακτικής στο μέλλον.

## Συμπεράσματα

Τα μαθηματικά είναι άμεσα συνδεδεμένα με την καθημερινότητά μας. Αναπτύχθηκαν από τους πρώτους πολιτισμούς και η εξέλιξη τους ήταν συνεχής. Κάθε πολιτισμός είχε να προσφέρει στα μαθηματικά την δική του οπτική και όσα προκύπταν μέσα από τις δικές τους ιδιαιτερότητες και ανάγκες.

Οι εξισώσεις δεν αναπτύχθηκαν από την αρχή. Τα μαθηματικά ξεκίνησαν πρώτα με την ανάγκη της απαρίθμησης και της καταγραφής (προϊόντων, φόρων, αντικειμένων), πολύ σύντομα όμως έκανε την εμφάνισή της και η γεωμετρία. Στους πρώτους πολιτισμούς, δηλαδή της Αιγύπτου και των Βαβυλωνίων, οι οποίοι ιστορικά είναι και σχεδόν παράλληλοι οι εξισώσεις ήταν αρκετά απλές. Η αφορμή για την δημιουργία τους ήταν κυρίως μέσα από την γεωμετρία.

Στην συνέχεια ο επόμενος πολιτισμός που εξετάσαμε είναι ο Κινεζικός πολιτισμός. Λόγω της γεωγραφικής απόστασης που τον χώριζε από τους προηγούμενους και τις δυσκολίες μεταφοράς και ταξιδιού εκείνη την περίοδο δεν φαίνεται να υπήρχε κάποιου είδους ανταλλαγής γνώσης ανάμεσά τους. Στον Κινεζικό πολιτισμό τα μαθηματικά αρχικά εμφανίζονταν για τον υπολογισμό των ημερολογίων και για τις ανάγκες της αστρονομίας. Τα επιτεύγματα των Κινέζων στις εξισώσεις σε σχέση με των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων ήταν πολύ πιο ανεπτυγμένα και πιο σημαντικά και έφτασαν με την πάροδο των αιώνων σε ένα πολύ καλό επίπεδο. Συγκεκριμένα για τις δευτεροβάθμιες και τριτοβάθμιες εξισώσεις οι Κινέζοι κατά την περίοδο του 11<sup>ου</sup> και 12<sup>ου</sup> μ.Χ αιώνα είχαν αναπτύξει μια μέθοδο παρόμοια με αυτή που σήμερα είναι γνωστή ως μέθοδο του Horner.

Επόμενος πολιτισμός ο οποίος εξετάσαμε είναι ο Ελληνικός. Οι Έλληνες ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν την έννοια της απόδειξης. Η απόδειξη όμως για τους Έλληνες ήταν πάντα γεωμετρική. Δεν υπήρχε η έννοια της αλγεβρικής δομής και απόδειξης, κάτι το οποίο αναπτύχθηκε πολύ αργότερα. Οι πρώτες εμφανίσεις δευτεροβάθμιων εξισώσεων γίνονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Θεωρούμε ότι ο Ευκλείδης στις σχετικές προτάσεις δεν είχε ως στόχο την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, αλλά την επίλυση ενδιαφερόντων

γεωμετρικών προβλημάτων. Το ίδιο μπορούμε να ισχυριστούμε και την επίλυση ενός προβλήματος που σήμερα θα μας οδηγούσε σε μια τριτοβάθμια εξίσωση από τον Αρχιμήδη. Ο Αρχιμήδης βρήκε την λύση της, υπολογίζοντας τα σημεία τομής μιας παραβολής και μιας υπερβολής.

Η κληρονομιά των Ελλήνων και η επιρροή τους ήταν όμως πολύ έντονη. Οι Ινδοί ο επόμενος χρονικά πολιτισμός που ανέπτυξε τα μαθηματικά κατάφεραν να μελετήσουν τόσο εξισώσεις δευτεροβάθμιες, όσο και εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού από μια πιο αλγεβρική οπτική, αλλά αυτό δεν ήταν αρκετό ώστε οι Άραβες να αναπτύξουν αυτόν τον τρόπο σκέψης στις αποδείξεις τους.

Οι Άραβες επηρεασμένοι από την Ελληνική κληρονομιά ένοιωθαν την ανάγκη να αποδείξουν τις αλγεβρικές τους μεθόδους για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Η μέθοδος όμως που ακολούθησαν δεν μπορούσε παρά να είναι γεωμετρική. Η γεωμετρική όμως οπτική ήταν και αυτή η οποία τους έβαζε και αρκετούς φραγμούς.

Ποιοι ήταν όμως αυτοί οι φραγμοί; Ο πρώτος φραγμός που θα μπορούσε να αναφέρει κάποιος είναι η μη ύπαρξη αρνητικών αριθμών και του μηδέν. Τόσο οι αρνητικοί αριθμοί, όπως και το μηδέν πως θα μπορούσαν να ερμηνευτούν στην γεωμετρία; Πως θα μπορούσε να αναπαρασταθεί για παράδειγμα ο αριθμός  $-1$  ως μήκος; Τι έννοια θα έχει το μηδενικό μέρος της εξίσωσης; Χαρακτηριστικό είναι ότι ενώ οι Ινδοί αποδέχονταν τους αρνητικούς αριθμούς, οι Άραβες οι οποίοι επηρεάστηκαν σε μεγάλο βαθμό από τους Έλληνες, παρά το γεγονός ότι ήταν συνεχιστές των Ινδών τους απέρριψαν. Δεν μπορούσαν να τους εντάξουν στο γεωμετρικό πλαίσιο των αποδείξεών τους.

Ποιο άλλο στοιχείο ήταν ανασταλτικό για την επίλυση των εξισώσεων; Ο τρόπος γραφής και αναπαράστασης των εξισώσεων δεν βοηθούσε στην επίλυση τους. Το Ινδο-αραβικό σύστημα αρίθμησης ήταν αυτό που βοήθησε να οδηγηθούν σε έναν τρόπο αναπαράστασης και λύσης.

Τέλος, ο χώρος που μας περιβάλλει και αντιλαμβανόμαστε είναι τριών διαστάσεων. Σε τι θα μπορούσε να αντιστοιχεί μια εξίσωση όμως 4<sup>ου</sup> ή μεγαλύτερου βαθμού;

Χρειάστηκαν πολλά χρόνια μέχρι να αρθούν τα παραπάνω εμπόδια και ο τρόπος αντιμετώπισης να αλλάξει, ώστε να μην είναι πλέον αυστηρά γεωμετρικός. Σήμερα αυτός ο τρόπος σκέψης μας φαίνεται τελείως διαφορετικός και δύσκολος, ίσως στο μέλλον ο δικός μας τρόπος σκέψης να φαίνεται και αυτός περίεργος και πολύπλοκος...



## Πίνακας Εικόνων

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ΕΙΚΟΝΑ 1-1 RHIND MATHEMATICAL PAPYRUS : DETAIL (RECTO, LEFT PART OF THE FIRST SECTION BRITISH MUSEUM, EA10057) THEBES, END OF THE SECOND INTERMEDIATE PERIOD (C.1550 BC) ACQUIRED BY THE SCOTTISH LAWYER A.H. RHIND DURING HIS SOJOURN IN THEBES IN THE 1850S. <a href="https://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details.aspx?assetId=766120001&amp;objectId=117389&amp;partId=1">HTTPS://WWW.BRITISHMUSEUM.ORG/RESEARCH/COLLECTION_ONLINE/COLLECTION_OBJECT_DETAILS.ASPX?ASSETID=766120001&amp;OBJECTID=117389&amp;PARTID=1</a> ..... | 12 |
| ΕΙΚΟΝΑ 1-2 ΑΙΓΥΠΤΙΟΣ ΙΕΡΕΑΣ (KATZ AND PARSHALL 2014, 14).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 13 |
| ΕΙΚΟΝΑ 1-3- ΑΡΠΕΔΟΝΑΠΤΕΣ (ROWE 2018, 243-251) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 14 |
| ΕΙΚΟΝΑ 1-4- RHIND ΠΡΟΒΛΗΜΑ 32 (B. V. WAERDEN 1975, 18).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 15 |
| ΕΙΚΟΝΑ 1-5-ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7 ΠΑΠΥΡΟΥ ΤΗΣ ΜΟΣΧΑΣ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 17 |
| ΕΙΚΟΝΑ 1-6- TRUNCATED PYRAMID IMAGE FROM GEOGEBRA.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 26 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-1 ΠΛΑΚΑ ΑΠΟ ΤΗΝ URUK C.3200 Π.Χ, ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ (V. J. KATZ 2009, 11).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 28 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-2 ΑΟ 8862. COPIED BY NEUGEBAUER. MKT II TABLE 15. (B. V. WAERDEN 1975, 64) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 34 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-3- ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ 7 ΚΑΙ ΤΟΥ 1000 (B. V. WAERDEN 1975, 42).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 45 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-4 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ (B. V. WAERDEN 1975, 44) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 45 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-5 ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΒΑΒΥΛΩΝΙΩΝ (B. V. WAERDEN 1975, 44) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 45 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-6 ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (B. V. WAERDEN 1975, 44) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 45 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-7 ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ $x^3x + 1 = a$ ΒΑΒΥΛΩΝΙΩΝ (B. V. WAERDEN 1975, 44) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 45 |
| ΕΙΚΟΝΑ 2-8 BM 85 196 (B. V. WAERDEN 1975, 76) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 54 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-1 CHU BOSU - WARRING STATES PERIOD (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 26) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 57 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-2 SUAN SHU SHU BAMBOO STRIPS. ΣΤΟ ΤΕΡΜΑ ΔΕΞΙΑ ΚΑΛΑΜΙ ΠΑΝΩ- ΠΑΝΩ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ Ο ΤΙΤΛΟΣ ΤΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ. (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 27) .....                                                                                                                                                                                                                                                                           | 58 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-3 ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΥΝΑΣΤΕΙΑ ΤΩΝ QIN (221-206 Π.Χ) (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 27).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 59 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-4 (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 29).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 60 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-5 Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΤΟΥ 6563 ΜΕ ΤΟ 9. (L. Y. LAM, JIU ZHANG SUANSHU (NINE CHAPTERS ON THE MATHEMATICAL ART: AN OVERVIEW 1994, 42) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 69 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-6 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.7 ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ (L. Y. LAM, JIU ZHANG SUANSHU (NINE CHAPTERS ON THE MATHEMATICAL ART: AN OVERVIEW 1994, 43) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 73 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-7 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 200) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 74 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-8 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 201) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 74 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| EIKONA 3-9 THE “HYPOTENUSE DIAGRAM” FROM A COPY OF THE ZHOU BI SUAN JING, ASIAN STUDIES LIBRARY, UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA. (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 31) ..... | 75  |
| EIKONA 3-10.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 76  |
| EIKONA 3-11 ΑΠΟΔΕΙΞΗ GOU-GU ΒΗΜΑ 1 (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 32) .                                                                                                   | 76  |
| EIKONA 3-12 ΑΠΟΔΕΙΞΗ GOU-GU ΒΗΜΑ 2 (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 32) .                                                                                                   | 77  |
| EIKONA 3-13 ΑΠΟΔΕΙΞΗ GOU-GU ΤΕΛΙΚΟ ΒΗΜΑ (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 33) .....                                                                                          | 77  |
| EIKONA 3-14 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΥΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΚΙΝΑ. (L. Y. LAM, JIU ZHANG SUANSHU (NINE CHAPTERS ON THE MATHEMATICAL ART: AN OVERVIEW 1994, 47) .....                                                                                                                                                | 78  |
| EIKONA 3-15 ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 53 ΤΟΥ SHUAN SHU SHU (DAUBEN, 算数書 SUAN SHU SHU A BOOK ON NUMBERS AND COMPUTATIONS: ENGLISH TRANSLATION WITH COMMENTARY 2008, 154).....                                                                                                                                          | 90  |
| EIKONA 3-16 ΕΥΡΕΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΣΤΟ JUIZHANG SUANSHU.. ΕΙΚΟΝΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΕΝΗ ΣΤΟ GEOGEBRA ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΙΚΟΝΑ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΣΤΟ (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 247) .....                                                                                                                                  | 92  |
| EIKONA 3-17 ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ 4.12 ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΡΑΒΔΩΝ. (L. Y. LAM, JIU ZHANG SUANSHU (NINE CHAPTERS ON THE MATHEMATICAL ART: AN OVERVIEW 1994, 45) .....                                                                                                            | 93  |
| EIKONA 3-18 ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ 4.12 ΓΙΑ ΤΟ YONGLE DADIAN ΑΠΟ ΤΟΝ DAI ZHEN (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 35) .....                                                          | 94  |
| EIKONA 3-19 ΒΗΜΑ 1 - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ. (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 35) .....                                                                             | 95  |
| EIKONA 3-20 ΒΗΜΑ 2 - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ. (DAUBEN, THE EVOLUTION OF MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA: FROM THE NEWLY DISCOVERED SHU AND SUAN SHU SHU BAMBOO TEXTS TO THE NINE CHAPTERS ON THE ART OF MATHEMATICS 2014, 35) .....                                                                             | 96  |
| EIKONA 3-21 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.12 ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΙΝΑΚΑ (ΔΟΥΚΑ 2011, 59) .....                                                                                                                                                                                                                                        | 98  |
| EIKONA 3-22 ΒΗΜΑ 1 - ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ (WANG AND NEEDHAM 1954, 356).....                                                                                                                                                                                                                                                  | 99  |
| EIKONA 3-23 ΒΗΜΑ 2 - ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ (WANG AND NEEDHAM 1954, 357) .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 100 |
| EIKONA 3-24 ΒΗΜΑ 3 - ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ (WANG AND NEEDHAM 1954, 357) .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 100 |
| EIKONA 3-25 ΒΗΜΑ 4 - ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ (WANG AND NEEDHAM 1954, 358) .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 101 |
| EIKONA 3-26 ΒΗΜΑ 5 - ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ (WANG AND NEEDHAM 1954, 358) .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 102 |
| EIKONA 3-27 ΒΗΜΑ 6 ΚΑΙ 7 - ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ (WANG AND NEEDHAM 1954, 359).....                                                                                                                                                                                                                                            | 103 |
| EIKONA 3-28 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.19 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 248) .....                                                                                                                                                                                                                                             | 104 |
| EIKONA 3-29 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.20 (KATZ AND PARSHALL 2014, 91) .....                                                                                                                                                                                                                                                     | 105 |

|                                                                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ΕΙΚΟΝΑ 3-30 ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL ΑΠΟ ΤΟ YONGLE DADIAN SUANFA (COMPUTATIONAL METHODS IN THE YONGLE GRAND ENCYCLOPEDIA, 1407) (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 330)..... | 111 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-31 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.8 ΒΗΜΑ 1 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 319) .....                                                                                             | 113 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-32 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.8 ΒΗΜΑ 2 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 320) .....                                                                                             | 113 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-33 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.8 ΒΗΜΑ 3 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 320) .....                                                                                             | 114 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-34 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.8 ΒΗΜΑ 4 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 321) .....                                                                                             | 114 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-35 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.8 ΒΗΜΑ 5 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 321) .....                                                                                             | 115 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-36 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.8 ΒΗΜΑ 6 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 322) .....                                                                                             | 115 |
| ΕΙΚΟΝΑ 3-37 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.8 ΒΗΜΑ 7 (DAUBEN, CHINESE MATHEMATICS 2007, 322) .....                                                                                             | 116 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-1 Ο ΑΡΧΑΙΟΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΡΧΑΙΟΥΣ ΈΛΛΗΝΕΣ. (B. V. WAERDEN 1975, 45) 122                                                           |     |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-2 Ο ΤΡΟΠΟΣ ΠΟΥ ΣΥΜΒΟΛΙΖΑΝ ΤΑ ΝΟΥΜΕΡΑ ΟΙ ΑΡΧΑΙΟΙ ΈΛΛΗΝΕΣ ΣΤΗΝ ΠΙΟ ΠΡΟΣΦΑΤΗ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ. (B. V. WAERDEN 1975, 46) .....                                             | 123 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ 265x265 (B. V. WAERDEN 1975, 47).....                                                                                                          | 124 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-4 Η "ΜΑΧΗ" ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ ΚΑΙ ΤΟΥ ΒΟΗΘΙΟΥ. (WAERDEN B. V., 1975, P. 60) .....                                                                                      | 125 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-5 ΟΡΙΣΜΟΣ 7.4 ΑΠΟ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (T. L. HEATH 1908, 280).....                                                                                                       | 127 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-6 ΟΡΙΣΜΟΣ 7.3 ΑΠΟ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (T. L. HEATH 1908, 280).....                                                                                                       | 127 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-7 ΟΡΙΣΜΟΣ 7.20 ΑΠΟ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (T. L. HEATH 1908, 292).....                                                                                                      | 128 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-8 ΈΛΛΗΝΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΣ, ΠΙΘΑΝΟΝ Ο ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ. (WAERDEN B. V., 1975, P. PLATE12) .....                                                                         | 129 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-9 ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΠΕΝΤΑΓΡΑΜΜΑ (B. V. WAERDEN 1975, 101) .....                                                                                                         | 133 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-10 ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ -ΧΡΩΜΑΤΙΣΤΗ ΞΥΛΟΓΡΑΦΙΑ 1584 Μ.Χ (HTTPS://WWW.BRITANNICA.COM/BIOGRAPHY/EUCLID-GREEK-MATHEMATICIAN) .....                                             | 134 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-11 Η ΠΡΟΤΑΣΗ 1.47 ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....                                                                                                                             | 135 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-12 ΑΡΧΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ Π.Θ ΣΧΗΜΑ 1.....                                                                                                                              | 136 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-13 ΑΡΧΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ Π.Θ ΣΧΗΜΑ 2.....                                                                                                                              | 137 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-14 ΑΡΧΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ Π.Θ ΣΧΗΜΑ 3.....                                                                                                                              | 137 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-15 ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.1 (B. V. WAERDEN 1975, 118).....                                                                                                                   | 139 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-16 ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.4 (B. V. WAERDEN 1975, 118) .....                                                                                                                  | 139 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-17 ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.5 .....                                                                                                                                            | 142 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-18 ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.6.....                                                                                                                                             | 144 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-19 ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.11 ΣΧΗΜΑ 1 .....                                                                                                                                   | 147 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-20 ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.11 (V. J. KATZ 2009, 63) .....                                                                                                                     | 148 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-21 ΠΡΟΤΑΣΗ 2.14.....                                                                                                                                             | 150 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-22 ΠΡΟΤΑΣΗ 6.28 ΣΧΗΜΑ 1.....                                                                                                                                     | 151 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-23 ΠΡΟΤΑΣΗ 6.29 ΣΧΗΜΑ 1 .....                                                                                                                                    | 152 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-24 ΠΡΟΤΑΣΗ 6.29 ΣΧΗΜΑ 2 .....                                                                                                                                    | 152 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-25 ΠΡΟΤΑΣΗ 4 - ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΤΟΜΟΣ Β (KATZ AND PARSHALL 2014, 54).....                                                                   | 157 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-26 ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ (T. L. HEATH 1910, 60) .....                                                                                          | 162 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ΕΙΚΟΝΑ 4-27- ΠΡΟΒΛΗΜΑ 27 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ (T. L. HEATH 1910, 140) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 164 |
| ΕΙΚΟΝΑ 4-28 ΠΡΟΒΛΗΜΑ V.30 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ (T. L. HEATH 1910, 225) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 167 |
| ΕΙΚΟΝΑ 5-1 ΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟΝ BRAHMAGUPTA (PLOFKER, MATHEMATICS IN INDIA 2007, 429) .....                                                                                                                                                                                                                                         | 174 |
| ΕΙΚΟΝΑ 5-2 ΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΗΜΩΝ ΚΑΙ Η ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ MAHAVLRA (PLOFKER, MATHEMATICS IN INDIA 2007, 445) .....                                                                                                                                                                                                                                | 175 |
| ΕΙΚΟΝΑ 5-3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕ ΤΟ 0 ΑΠΟ ΤΟΝ BHASKARA II (PLOFKER, MATHEMATICS IN INDIA 2007, 470-471) .....                                                                                                                                                                                                                                                                | 177 |
| ΕΙΚΟΝΑ 5-4 (KELLER 2006, 112-113) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 178 |
| ΕΙΚΟΝΑ 5-5 ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΤΟΥ 584 ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ĀRYABHAṬĪYA (PLOFKER, MATHEMATICS IN INDIA 2009, 123-124) .....                                                                                                                                                                                                                                          | 180 |
| ΕΙΚΟΝΑ 5-6 ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΤΟΥ 103.823 ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ĀRYABHAṬĪYA (PLOFKER, MATHEMATICS IN INDIA 2009, 126) .....                                                                                                                                                                                                                                               | 180 |
| ΕΙΚΟΝΑ 5-7 VERSE 2.5 ΤΟΥ BAUDHĀYANA-SULBA-SĪTRA (KATZ AND PARSHALL 2014, 110) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 181 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-1 ΙΣΛΑΜ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΠΡΩΤΟ ΜΕΣΑΙΩΝΑ <a href="https://brewminate.com/mohammed-arab-conquests-islamic-conquests-and-civil-war-in-the-early-middle-ages/">HTTPS://BREWMINATE.COM/MOHAMMED-ARAB-CONQUESTS-ISLAMIC-CONQUESTS-AND-CIVIL-WAR-IN-THE-EARLY-MIDDLE-AGES/</a> .....                                                                                              | 189 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-2 ΓΡΑΜΜΑΤΟΣΗΜΟ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΚΔΟΘΗΚΕ ΣΤΙΣ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1983, ΣΤΗΝ ΠΡΩΗΝ ΣΟΒΙΕΤΙΚΗ ΕΝΩΣΗ, ΓΙΑ ΤΑ 1200 (ΠΕΡΙΠΟΥ) ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΟΥ AL-KHWARIZMĪ'S. <a href="https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Muhammad_ibn_M%C5%AB%C4%81_al-Khw%C4%81rizm%C4%AB">HTTPS://WWW.NEWWORLDCYCLOPEDIA.ORG/ENTRY/MUHAMMAD_IBN_M%C5%AB%C4%81_AL-KHW%C4%81RIZM%C4%AB</a> ..... | 194 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-3 ΜΕΣΑΙΩΝΙΚΟ ΑΡΑΒΙΚΟ ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΟ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΟΥ AL-KHWĀRIZMĪ ΠΟΥ ΔΕΙΧΝΕΙ ΤΟΝ ΤΡΟΠΟ ΛΥΣΗΣ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΑΠΟ ΤΟ SMITH COLLECTION OF THE RARE BOOK AND MANUSCRIPT LIBRARY, COLUMBIA UNIVERSITY (KATZ AND PARSHALL 2014, 140) .....                                                                                                        | 197 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-4 THĀBIT IBN QURRA <a href="https://www.famousscienists.org/thabit-ibn-qurra/">HTTPS://WWW.FAMOUSSCIENTISTS.ORG/THABIT-IBN-QURRA/</a> .....                                                                                                                                                                                                                        | 204 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-5 (KATZ AND PARSHALL 2014, 161) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 206 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-6 ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ AL-SAMAW'AL (KATZ AND PARSHALL 2014, 163) .....                                                                                                                                                                                                                                                                 | 207 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-7 (KATZ AND PARSHALL 2014, 170) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 210 |
| ΕΙΚΟΝΑ 6-8 ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΑ ΑΠΟ ΤΟΝ AL-TUSI (KATZ AND PARSHALL 2014, 172) .....                                                                                                                                                                                                                                                                       | 212 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-1 FIBONACCI ( <a href="http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/biographies/fibonacci.html">HTTP://MATHSHISTORY.ST-ANDREWS.AC.UK/BIOGRAPHIES/FIBONACCI.HTML</a> ) .....                                                                                                                                                                                                | 215 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-2 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ 30 ΠΤΗΝΩΝ - LIBER ABACCI (PISA 2002, 256) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 217 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ I.24 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ (T. L. HEATH 1910, 139) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 219 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-4 LIBER ABBACI (PISA 2002, 554) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 220 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15 ΤΟΥ LIBER ABBACI. (PISA 2002, 556) ..                                                                                                                                                                                                                                                             | 221 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-6 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟ ΤΟΝ MAESTRO ANTONIO (V. D. WAERDEN 1985, 44) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 223 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-7 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 4ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΤΟΥ PACIOLI (KATZ AND PARSHALL 2014, 214) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 225 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-8 ΤΟ ΕΞΟΦΥΛΛΟ ΤΟΥ ARS MAGNA (SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES, PHOTO NO 76-15322) (V. J. KATZ 2009, 402) .....                                                                                                                                                                                                                                                    | 232 |
| ΕΙΚΟΝΑ 7-9 (CARDANO 1545/1968, 96) .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 234 |

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| EIKONA 7-10 (V. D. WAERDEN 1985, 53)..... | 234 |
|-------------------------------------------|-----|

## Πίνακας Εξισώσεων

|                    |    |
|--------------------|----|
| EQUATION 1-1.....  | 17 |
| EQUATION 1-2.....  | 18 |
| EQUATION 1-3.....  | 18 |
| EQUATION 1-4.....  | 18 |
| EQUATION 1-5.....  | 19 |
| EQUATION 1-6.....  | 22 |
| EQUATION 1-7.....  | 24 |
| EQUATION 1-8.....  | 24 |
| EQUATION 1-9.....  | 25 |
| EQUATION 1-10..... | 27 |
| EQUATION 1-11..... | 27 |
| EQUATION 1-12..... | 27 |
| EQUATION 2-1.....  | 35 |
| EQUATION 2-2.....  | 35 |
| EQUATION 2-3.....  | 35 |
| EQUATION 2-4.....  | 36 |
| EQUATION 2-5.....  | 37 |
| EQUATION 2-6.....  | 37 |
| EQUATION 2-7.....  | 37 |
| EQUATION 2-8.....  | 38 |
| EQUATION 2-9.....  | 39 |
| EQUATION 2-10..... | 39 |
| EQUATION 2-11..... | 40 |
| EQUATION 2-12..... | 42 |
| EQUATION 2-13..... | 44 |
| EQUATION 2-14..... | 47 |
| EQUATION 2-15..... | 47 |
| EQUATION 2-16..... | 50 |
| EQUATION 2-17..... | 51 |
| EQUATION 2-18..... | 52 |
| EQUATION 2-19..... | 52 |
| EQUATION 2-20..... | 54 |
| EQUATION 3-1.....  | 79 |
| EQUATION 3-2.....  | 80 |

|                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| EQUATION 3-3.....  | 80                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-4.....  | 80                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-5.....  | 83                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-6.....  | 85                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-7.....  | 85                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-8.....  | 85                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-9.....  | 86                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-10..... | 87                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-11..... | 98                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-12..... | 98                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-13..... | 98                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| EQUATION 3-14..... | 109                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-15..... | 112                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-16..... | 116                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-17..... | 117                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-18..... | 117                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-19..... | 118                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-20..... | 118                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-21..... | 118                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-22..... | 118                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-23..... | 119                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-24..... | 119                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 3-25..... | 119                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-1.....  | 135                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-2.....  | 135                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-3.....  | 135                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-4.....  | 135                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-5.....  | 136                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-6.....  | 136                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-7.....  | 136                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-8.....  | 137                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-9.....  | 137                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-10..... | 140                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-11..... | 140                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| EQUATION 4-12      | $\left. \begin{array}{l} x + y = \alpha \\ xy = \beta \end{array} \right\} \text{ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ } \left. \begin{array}{l} x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \\ y = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \end{array} \right\} \text{ ΚΑΙ } \dots$ |
|                    | 141                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

|               |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               |     |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| EQUATION 4-13 | $\left. \begin{array}{l} x - y = \alpha \\ xy = \beta \end{array} \right\}$ | ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ | $\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} + \frac{\alpha}{2} \\ y = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} - \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\}$ | 141 |
| EQUATION 4-14 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 143 |
| EQUATION 4-15 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 143 |
| EQUATION 4-16 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 144 |
| EQUATION 4-17 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 144 |
| EQUATION 4-18 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 145 |
| EQUATION 4-19 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 146 |
| EQUATION 4-20 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 147 |
| EQUATION 4-21 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 148 |
| EQUATION 4-22 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 148 |
| EQUATION 4-23 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 150 |
| EQUATION 4-24 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 151 |
| EQUATION 4-25 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 151 |
| EQUATION 4-26 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 152 |
| EQUATION 4-27 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 154 |
| EQUATION 4-28 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 154 |
| EQUATION 4-29 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 155 |
| EQUATION 4-30 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 155 |
| EQUATION 4-31 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 155 |
| EQUATION 4-32 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 155 |
| EQUATION 4-33 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 156 |
| EQUATION 4-34 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 166 |
| EQUATION 4-35 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 169 |
| EQUATION 5-1  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 181 |
| EQUATION 5-2  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 182 |
| EQUATION 5-3  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 182 |
| EQUATION 5-4  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 183 |
| EQUATION 5-5  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 183 |
| EQUATION 5-6  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 183 |
| EQUATION 5-7  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 183 |
| EQUATION 5-8  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 183 |
| EQUATION 5-9  |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 184 |
| EQUATION 5-10 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 185 |
| EQUATION 5-11 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 185 |
| EQUATION 5-12 |                                                                             |               |                                                                                                                                                                                               | 186 |

|                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| EQUATION 5-13.....                                                                                                                             | 186 |
| EQUATION 6-1.....                                                                                                                              | 198 |
| EQUATION 6-2.....                                                                                                                              | 199 |
| EQUATION 6-3.....                                                                                                                              | 202 |
| EQUATION 6-4.....                                                                                                                              | 202 |
| EQUATION 6-5.....                                                                                                                              | 202 |
| EQUATION 6-6.....                                                                                                                              | 202 |
| EQUATION 6-7.....                                                                                                                              | 203 |
| EQUATION 6-8.....                                                                                                                              | 205 |
| EQUATION 6-9.....                                                                                                                              | 206 |
| EQUATION 6-10.....                                                                                                                             | 207 |
| EQUATION 6-11.....                                                                                                                             | 208 |
| EQUATION 6-12.....                                                                                                                             | 210 |
| EQUATION 6-13.....                                                                                                                             | 211 |
| EQUATION 7-1 PROBLEM OF THE 30 BIRDS - LIBER ABBACI .....                                                                                      | 218 |
| EQUATION 7-2 3x3 ΣΤΟ LIBER ABBACI .....                                                                                                        | 218 |
| EQUATION 7-3.....                                                                                                                              | 218 |
| EQUATION 7-4.....                                                                                                                              | 218 |
| EQUATION 7-5.....                                                                                                                              | 218 |
| EQUATION 7-6.....                                                                                                                              | 219 |
| EQUATION 7-7 ΕΥΡΕΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΑΠΟ ΤΟΝ FIBONACCI .....                                                                                 | 219 |
| EQUATION 7-8 ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΠΡΩΤΟΣ ΤΥΠΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ FIBONACCI .....                                                                         | 219 |
| EQUATION 7-9 ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΥΠΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ FIBONACCI – ΜΑΛΛΟΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΔΙΠΛΗΣ ΨΕΥΔΟΥΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ. .... | 220 |
| EQUATION 7-10.....                                                                                                                             | 220 |
| EQUATION 7-11.....                                                                                                                             | 221 |
| EQUATION 7-12.....                                                                                                                             | 221 |
| EQUATION 7-13.....                                                                                                                             | 221 |
| EQUATION 7-14.....                                                                                                                             | 222 |
| EQUATION 7-15.....                                                                                                                             | 227 |
| EQUATION 7-16 Ο ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΡΙΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΠΟ ΤΟΝ DARDI.....                                                                       | 227 |
| EQUATION 7-17 ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 4 <sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ ΑΠΟ ΤΟΝ DARDI .....                                                                      | 227 |
| EQUATION 7-18 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΠΟΥ ΛΥΘΗΚΕ ΑΠΟ ΤΟΝ SCIPIONE .....                                                             | 228 |
| EQUATION 7-19 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ DEL FERRO ΓΙΑ ΤΙΣ ΚΥΒΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ .....                                                                             | 229 |
| EQUATION 7-20 ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟΝ TARTAGLIA.....                                                                                    | 230 |
| EQUATION 7-21.....                                                                                                                             | 234 |
| EQUATION 7-22.....                                                                                                                             | 235 |



|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| EQUATION 7-23 Ο ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΥΒΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ CARDANO ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1..... | 235 |
| EQUATION 7-24.....                                                                               | 235 |
| EQUATION 7-25 Η ΛΑΤΙΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ 7-23 .....                                                | 235 |
| EQUATION 7-26.....                                                                               | 236 |
| EQUATION 7-27.....                                                                               | 236 |
| EQUATION 7-28 Ο ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΥΒΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ CARDANO ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2..... | 236 |

## Λεξιλόγιο

|                             |                                                                                          |                                 |                         |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| "a-r" "a" '.....            | 43                                                                                       | Brāhmasphuṭa-siddhānta.....     | 170, 171, 174, 181      |
| <i>“cui fen”</i> .....      | 63                                                                                       | bur .....                       | 34                      |
| <i>Abu Bakr</i> .....       | 190                                                                                      | cellar .....                    | 47, 49                  |
| <i>Abū Kāmil</i> .....      | 199, 200, 201, 202                                                                       | Chu boshu .....                 | 55                      |
| <i>Al- Mamun</i> .....      | 188                                                                                      | Citrabhanu.....                 | 184                     |
| <i>al-jabr</i> .....        | 191, 192, 199                                                                            | <i>cubits</i> .....             | 21, 40                  |
| <i>Al-Karajī</i> .....      | 203, 204, 210                                                                            | <i>cut and paste</i> .....      | 40                      |
| <i>al-Khwārizmī</i> .....   | 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 202, 206, 210, 218, 219, 220, 225 | <i>Dai Zhen</i> .....           | 93                      |
| <i>Al-Maghribi</i> .....    | 203, 204                                                                                 | <i>dirhem</i> .....             | 193                     |
| <i>Al-Mansur</i> .....      | 187                                                                                      | duplicatio .....                | 15                      |
| <i>al-muqābalā</i> .....    | 191                                                                                      | <i>fa</i> 69, 72, 78, 80, 91    |                         |
| <i>Al-Samaw'al</i> .....    | 203, 204, 205, 210                                                                       | <i>fang cheng</i> .....         | 64, 65, 69, 81, 82      |
| <i>al-Tusi</i> .....        | 208, 209, 210, 235                                                                       | <i>Ganitasarasangraha</i> ..... | 173                     |
| <i>Āryabhaṭa</i> .....      | 170, 171, 175, 176, 180                                                                  | <i>gou</i> .....                | 65, 74, 75, 76          |
| <i>Āryabhaṭīya</i> .....    | 170, 175, 177, 180                                                                       | <i>gu</i> .....                 | 65, 74, 75, 76          |
| <i>Bayt al- Hikma</i> ..... | 188                                                                                      | <i>gur</i> .....                | 34                      |
| <i>Bhāskara I</i> .....     | 171, 176, 181                                                                            | <i>gou</i> .....                | 75                      |
| <i>Bhaskara II</i> .....    | 174, 182, 183, 184                                                                       | <i>Halun al- Rshid</i> .....    | 187                     |
| <i>Bhāskara I</i> .....     | 175, 176                                                                                 | <i>ibn Aslam</i> .....          | 199, 200, 201           |
| <i>Bhaskara II</i> .....    | 183                                                                                      | <i>ibn Qurra</i> .....          | 202                     |
| <i>Bijaganita</i> .....     | 174                                                                                      | <i>Jiu zhang suanshu</i> .....  | 64, 68, 71              |
| <i>Brahmagupta</i> .....    | 171, 172, 173, 175, 177, 181, 182, 185, 186                                              | <i>Kerala</i> .....             | 183                     |
|                             |                                                                                          | <i>Khayyam</i> .....            | 205, 206, 208, 209, 210 |
|                             |                                                                                          | <i>kus</i> .....                | 40                      |

|                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| <i>Liber abbaci</i>                 | 210, 213, 214, 215, 216, 220, 226 |
| <i>Liber mensurationum</i>          | 190                               |
| Liu Hui                             | 60, 61, 67, 71, 75, 76, 79, 91    |
| Madhava                             | 183                               |
| Mahavira                            | 173                               |
| Malabar                             | 185                               |
| mediatio                            | 15                                |
| nindam                              | 48                                |
| nindan                              | 40                                |
| out-in                              | 72, 73, 75, 76                    |
| Prthudakasvamin                     | 182                               |
| Qin Jiushao                         | 105, 106, 107, 111                |
| rod                                 | 40                                |
| sar                                 | 34                                |
| Sebokht                             | 187                               |
| seked                               | 24                                |
| Severus Sebokht                     | 185, 187                          |
| shay                                | 193                               |
| shi                                 | 69, 72, 78, 80, 91                |
| Shu                                 | 56, 59                            |
| siddhanta                           | 185                               |
| silā                                | 34                                |
| Suan shu shu                        | 56, 58                            |
| Suan Shu Shu                        | 56, 62, 88, 89, 90                |
| Śulba-sūtras                        | 170                               |
| Suryadasa                           | 174                               |
| Ten classics of Chinese Mathematics | 54                                |
| Thābit                              | 202                               |

## Πίνακες

|           |    |
|-----------|----|
| TABLE 1-1 | 16 |
| TABLE 1-2 | 16 |
| TABLE 2-1 | 43 |

|                                          |                                                                 |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <i>truncated πυραμίδα</i>                | 24                                                              |
| <i>uniformizing and homogenizing</i>     | 62                                                              |
| verse                                    | 172, 175, 176, 177, 179, 180, 185                               |
| xian                                     | 75, 76                                                          |
| ying bu zu                               | 64, 77, 78, 79, 81                                              |
| Zhou yi                                  | 56                                                              |
| άκρος μέσος λόγος                        | 146                                                             |
| <b>αναλογία</b>                          | 11                                                              |
| Αριθμητικά                               | 44, 158, 159, 160, 161, 162, 165, 168, 187, 201, 214, 217       |
| Αρπεδοναύτες                             | 13                                                              |
| Αρχιμήδης                                | 122, 123, 125, 139, 155, 156, 157, 168, 205, 209                |
| γεωμετρική άλγεβρα                       | 40, 41, 138, 139, 152, 170, 178                                 |
| Διόφαντος                                | 157, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 168, 201, 217 |
| Θυμαρίδειον επάνθημα                     | 153, 154                                                        |
| κατ' έλλειψην                            | 144, 146, 149, 150                                              |
| κατ' υπερβολήν                           | 144, 145, 146, 149, 150, 151                                    |
| <b>μέθοδο της ψευδούς αντικατάστασης</b> | 17, 28, 35, 36, 164                                             |
| μέθοδος της ψευδούς αντικατάστασης       | 19, 20, 77                                                      |
| <b>Ο πάπυρος της Μόσχας</b>              | 11                                                              |
| <b>Ο πάπυρος του Rhind</b>               | 11                                                              |
| πάπυρο του Βερολίνου                     | 21                                                              |

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| TABLE 2-2.....                                                              | 47  |
| TABLE 2-3.....                                                              | 49  |
| TABLE 3-1.....                                                              | 117 |
| TABLE 3-2.....                                                              | 117 |
| TABLE 3-3.....                                                              | 118 |
| TABLE 3-4.....                                                              | 118 |
| TABLE 3-5.....                                                              | 119 |
| TABLE 6-1.....                                                              | 209 |
| TABLE 7-1 ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΚΥΒΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΙΤΑΛΟΥΣ ΤΟΥ 14ΟΥ ΑΙΩΝΑ ..... | 224 |
| TABLE 7-2.....                                                              | 226 |
| TABLE 7-3.....                                                              | 226 |

## Βιβλιογραφία

1. Archimedes, & Netz, R. (2004). *The works of Archimedes The Two Books On the Sphere and the Cylinder: Translation and Commentary*. Cambridge University Press.
2. Cardano, G. (1545/1968). *Ars Magna - The Great Art or The Rules of Algebra*. (T. R. Witmer, Επιμ.) New York: Dover Publications.
3. Dauben, J. W. (2007). Chinese Mathematics. Στο J. Dauben, *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam A Sourcebook* (σσ. 187-380). Princeton, New Jersey: Victor J. Katz.
4. Dauben, J. W. (2008, March). 算数書 Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary. *Archive for History of Exact Sciences*, 62(2), 91-178. Retrieved from JSTOR, [www.jstor.org/stable/41134274](http://www.jstor.org/stable/41134274)
5. Dauben, J. W. (2014, July). The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered Shu and Suan shu shu Bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics. *Notices on the ICCM*, 2(2), 24-51.
6. Gandz, S. (1937). The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra. *History of Science Society*, p. 154.
7. Gandz, S. (χ.χ.). *Die Harpenodapten*. Quellen und studien zur Geschichte der Mathematik.
8. Heath, T. L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Τόμ. I). Cambridge: Cambridge University Press.

9. Heath, T. L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge: Cambridge University Press.
10. Heath, T. L. (1910). *Diophantus of Alexandria: a study in the history of Greek algebra*. Cambridge : University Press.
11. Heiberg, J. L. (2007). *Euclid's Elements of Geometry*. Richard Fitzpatrick.
12. Høyrup, J. (1992). The Babylonian Cellar Text BM 85200 + VAT 6599 Retranslation and Analysis. Στο S. S. Demidov, D. Rowe, M. Folkerts, & C. J. Scriba, *Amphora* (σ. 44). Basel: Birkhäuser, Basel.
13. Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī 's al-jabr: a critical edition. *Mediaeval Studies*(48), 211-263.
14. Ivor, T. (1957). *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Τόμ. 1). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
15. Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics, An introduction 3rd edition*. University of the District of Columbia: Addison - Wesley imprint for Pearson Education.
16. Katz, V. J., & Parshall, K. H. (2014). *Taming the Unknown - A History from Antiquity to the Early Twentieth Century*. Princeton University Press.
17. Keller, A. (2006). *Expounding the Mathematical Seed - The translation - A translation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of Āryabhaṭīya* (Τόμ. 1). Basel - Boston - Berlin: Birkhauser Verlag.
18. Lam, L. Y. (1974). Yang Hui's commentary on the Ying nu chapter of the Chiu Saun Shu. *Historia Mathematica*, 1, 47-64.
19. Lam, L. Y. (1994, June). Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art: An Overview. *Archive for History of Exact Sciences*, 47(1), 1-51.
20. Lam, L., & Ang, T. (2004). *Fleeting Footsteps - Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China*. NEW JERSEY • LONDON • SINGAPORE • SHANGHAI • HONG KONG • TAIPEI • CHENNAI: World Scientific.
21. Lindberg, D. C. (1992). *The Beginnings of western science The European Scientific Tradition in Philosophical, Religious, and Institutional Context, 600 b.c. to a.d. 1450*. Chicago and London: The University of Chicago Press.
22. Mathematics in Mediaval Islam. (2007). In L. J. Berggren, *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook* (pp. 515-675). Princeton: Princeton University Press.

23. Netz, R. (2004). *The Transformation of Mathematics in the Early Mediterranean World: From Problems to Equations*. Faculty of Classics, University of Cambridge: Cambridge University Press.
24. O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2003, December). *MacTutor History*. Retrieved from Nine Chapters on the Mathematical Art: [http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Nine\\_chapters.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters.html)
25. Pisa, L. o. (2002). *Liber abbaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. (L. Sigler, Μεταφρ.) New York: Springer-Verlag.
26. Plofker, K. (2007). Mathematics in India. In P. Kim, & V. J. Katz (Ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam, a Sourcebook* (pp. 385-510). Princeton: Princeton University Press.
27. Plofker, K. (2009). *Mathematics in India*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.
28. Rowe, D. E. (2018). *A richer picture of Mathematics*. Springer Cham.
29. unknown. (n.d.). *British Library collection items - Yongle Dadian*. Retrieved from British Library: <https://www.bl.uk/collection-items/yongle-dadian>
30. Waerden, B. V. (1975). *Science Awakening I* (Vol. I). (A. Dresden, Trans.) New Jersey: Nooedhoff International.
31. Waerden, V. D. (1985). *A History of Algebra from Al Khwarizmi to Emmy Noether*. Berlin Heidelberg: Springer - Verlag.
32. Wang, L., & Needham, J. (1954). Homer's method in Chinese mathematics: Its origins in the Root-Extraction procedures of the Han Dynasty. *T' oung Pao*, 43(1), 345-401.
33. Δούκα, Α. (2011). Προβλήματα λογισμού και γεωμετρίας στα κινέζικα μαθηματικά: μια ιστορική προσέγγιση με διδακτικές προεκτάσεις. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
34. Κάλφας, Β. (2009). *Αριστοτέλης, "Μετά τα φυσικά βιβλίο Α"*. Αθήνα: Πόλις.
35. Κέντρο Ελληνικής Γλώσσας. (2012). *Μνημοσύνη - Ψηφιακή Βιβλιοθήκη της Αρχαίας Ελληνικής Γραμματείας*. Ανάκτηση από Ψηφίδες για την Ελληνική γλώσσα και τη γλωσσική εκπαίδευση: [http://www.greek-language.gr/digitalResources/ancient\\_greek/library/browse.html?text\\_id=111&page=94](http://www.greek-language.gr/digitalResources/ancient_greek/library/browse.html?text_id=111&page=94)

---

<sup>i</sup> Γραφή Jaeger. Βλ. Πλάτων, *Θεαίτητος* 172d, για τη σύνδεση φιλοσοφίας και «σχολής». Πρβ. *Ηθικά Νικομάχεια* 1177b4-6, για την αναγκαία σχέση θεωρητικής ζωής, ευδαιμονίας και «σχολής». Η αναδρομή στη γέννηση των θεωρητικών τεχνών, δίνει και ένα έμμεσο επιχείρημα ότι η «σοφία» ανήκει στις θεωρητικές επιστήμες, αφού αυτές οι επιστήμες αποτελούν ύψιστο αντικείμενο θαυμασμού.

<sup>ii</sup> Πρβ. Πλάτων, *Φαίδρος* 274c, Ηρόδοτος II. 109.

<sup>iii</sup> Γραφή Jaeger. Βλ. Πλάτων, *Θεαίτητος* 172d, για τη σύνδεση φιλοσοφίας και «σχολής». Πρβ. *Ηθικά Νικομάχεια* 1177b4-6, για την αναγκαία σχέση θεωρητικής ζωής, ευδαιμονίας και «σχολής». Η αναδρομή στη γέννηση των θεωρητικών τεχνών, δίνει και ένα έμμεσο επιχείρημα ότι η «σοφία» ανήκει στις θεωρητικές επιστήμες, αφού αυτές οι επιστήμες αποτελούν ύψιστο αντικείμενο θαυμασμού.