

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημιουργία νοημάτων για τις έννοιες των πιθανοτήτων
από μαθητές που παίζουν και διασκευάζουν
ένα ψηφιακό παιχνίδι

Construction of meanings for probability concepts by students
who play and modify a digital game

Σπυρίδων Σωτηρόπουλος

Δ201730

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Χρόνης Κυνηγός

Καθηγητής

Αθήνα

Ιανουάριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 23 Ιανουαρίου 2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Χ. Κυνηγό (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Χ. Κυνηγό (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

Τον Καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό, για την ευκαιρία που μου έδωσε, το σημαντικό χρόνο που διέθεσε και την καθοδήγησή του για την ανακάλυψη των κλειδιών της διδακτικής έρευνας. Οι παρεμβάσεις του ήταν δυναμικές και όχι στατικές και ως τέτοιες θα συνεχίσουν να με επηρεάζουν.

Την Καθηγήτρια κα. Δέσποινα Πόταρη για την ουσιαστική διδακτική της συμβολή καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Γιώργο Ψυχάρη για τις πολύτιμες συμβουλές του, τη στήριξή του και την πολύ σημαντική και καθοριστική βοήθειά του κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Την Καθηγήτρια κα. Θεοδοσία Προδρόμου για τις πολύτιμες συμβουλές και τις κατευθυντήριες γραμμές για την εκπόνηση της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τον συνάδελφο και εκπαιδευτικό Δημήτρη Διαμαντίδη για τις πολύτιμες συμβουλές του και το χρόνο που αφιέρωσε για να με βοηθήσει καθώς και όλα τα μέλη του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας για την υποστήριξη τους.

Τέλος ευχαριστώ και ευγνωμονώ τους γονείς μου και τα υπόλοιπα συγγενικά πρόσωπα που είναι δίπλα μου σε κάθε μου βήμα και με στηρίζουν ώστε να καταφέρω να πραγματοποιήσω όλα τα όνειρά μου. Δεν θα ήμουν εδώ χωρίς αυτούς.

Την εργασία αυτή αφιερώνω στην μητέρα μου, καθηγήτρια μαθηματικών, που η ζωή της με ενέπνευσε να ακολουθήσω το όμορφο ταξίδι στο κόσμο των μαθηματικών και της διδασκαλίας.

«Ο Αρχιμήδης θα μνημονευθεί όταν ο Αισχύλος θα έχει λησμονηθεί, διότι οι γλώσσες πεθαίνουν, μα οι μαθηματικές ιδέες όχι.» G.Hardy

Περιεχόμενα

EYPETHPIO EIKONΩN	σελ.9
Περίληψη	σελ.10
Abstract	σελ.11
Πρόλογος	σελ.12
1. Οι έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων	σελ.14
1.1. Ιστορία Πιθανοτήτων	σελ.14
1.2. Ορισμοί της έννοιας της πιθανότητας	σελ.18
1.3 Ορισμοί των εννοιών της θεωρίας πιθανοτήτων	σελ.23
1.4 Προσεγγίσεις της έννοιας της Πιθανότητας	σελ.30
1.5 Η χρησιμότητα των Πιθανοτήτων	σελ.32
2. Θεωρητικό Πλαίσιο	σελ.33
2.1 Η Διδακτική των πιθανοτήτων	σελ.33
2.1.1 Σημαντικές έρευνες πάνω στην διδακτική πιθανοτήτων	σελ.36
2.1.2 Ψηφιακές Τεχνολογίες στη διδακτική πράξη των Μαθηματικών	σελ.40
2.1.3 Οι παρανοήσεις των μαθητών γύρω από τις πιθανότητες	σελ.41
2.2 Η έννοια του παιχνιδιού	σελ.46
2.3 Τα ψηφιακά παιχνίδια ως περιβάλλοντα μάθησης	σελ.49
2.3.1 Ο ορισμός των ψηφιακών παιχνιδιών	σελ.49
2.3.2 Σοβαρά ψηφιακά παιχνίδια	σελ.51
2.3.3 Μάθηση βασισμένη στο ψηφιακό παιχνίδι	σελ.53
2.3.4 Τα ψηφιακά παιχνίδια και οι πιθανότητες	σελ.57
2.4 Το λογισμικό CHOICO	σελ.59
2.4.1 Τροποποίηση παιχνιδιών	σελ.62
2.4.2 Σχεδιασμός παιχνιδιών	σελ.65
2.5 Δημιουργία νοημάτων και Constructionism	σελ.71
2.5.1 Η έννοια της έννοιας	σελ.75
2.5.2 Συνεργατική μάθηση σε ψηφιακό περιβάλλον	σελ.76
2.6 Η έννοια της αειφορίας	σελ.78
2.6.1 Το ChoiCo και η αειφορία	σελ.80
2.6.2 Η έννοια του ρίσκου	σελ.83
3. Η Ερευνητική Διαδικασία	σελ.87
3.1 Αντικείμενο της έρευνας	σελ.87
3.2 Η «έρευνα σχεδιασμού» ως ερευνητική μέθοδος	σελ.88
3.3 Ερευνητικά ερωτήματα	σελ.91
3.4 Διδακτικό όφελος από την έρευνα	σελ.92
3.5 Οι δραστηριότητες στο ChoiCo	σελ.93
4. Μεθοδολογία της έρευνας	σελ.93
4.1 Εισαγωγή	σελ.93
4.2 Περιγραφή δείγματος	σελ.94

4.3 Εκπαιδευτικό Περιεχόμενο	σελ.95
4.4 Μέσα συλλογής δεδομένων	σελ.95
4.5 Μέθοδος Ανάλυσης	σελ.97
4.6 Το παιδαγωγικό πλάνο	σελ.97
4.6.1 Σκεπτικό σεναρίου	σελ.98
4.6.2 Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης	σελ.99
4.6.3 Διδακτικοί στόχοι	σελ.101
4.6.4 Καινοτομία	σελ.103
4.6.5 Προστιθέμενη αξία	σελ.106
4.6.6 Η δραστηριότητα	σελ.107
4.6.7 Ανάλυση δραστηριότητας	σελ.107
5. Αποτελέσματα	σελ.114
5.1 Εισαγωγή	σελ.114
5.2 Αποτελέσματα από την πιλοτική έρευνα	σελ.114
5.3 Αποτελέσματα από το Pre-test	σελ.115
5.4 Αποτελέσματα της κύριας έρευνας	σελ.116
5.4.1 Δημιουργία νοημάτων για βασικές έννοιες των πιθανοτήτων	σελ.116
5.4.2 Δημιουργία νοημάτων μέσα από το ChoiCo	σελ.122
5.4.3 Δημιουργία νοημάτων μέσα από την τροποποίηση του παιχνιδιού	σελ.137
5.5 Αποτελέσματα από το Post-test	σελ.147
6. Συμπεράσματα-Συζήτηση	σελ.149
7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	σελ.153
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α (Pre test και Post test)	σελ.163
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β (Φύλλο εργασίας 1 και 2)	σελ.166

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1	Pierre de Fermat (1601- 1665)	σελ 15
Εικόνα 2	Blaise Pascal (1623 – 1662)	σελ 15
Εικόνα 3	Το περιβάλλον του ChoiCo	σελ 66
Εικόνα 4	Το περιβάλλον σχεδιασμού του ChoiCo	σελ 67
Εικόνα 5	ChoiCo Initial Settings	σελ 68
Εικόνα 6	ChoiCo Gameplay Rules	σελ 68
Εικόνα 7	ChoiCo End Rules	σελ 69
Εικόνα 8	Το 2ο Πειραματικό Γυμνάσιο	σελ 94
Εικόνα 9	Λανθασμένη απάντηση μαθητή στην ερώτηση 2	σελ 121
Εικόνα 10	Καταγραφή τιμών του παιχνιδιού κάθε επιλογής των μαθητών	σελ 124
Εικόνα 11	Καταγραφή τιμών του παιχνιδιού για εύρεση στρατηγικής	σελ 124
Εικόνα 12	Αιτιολόγηση εύρεσης της πιο ευνοϊκής στρατηγικής	σελ 134
Εικόνα 13	Υπολογισμός πιθανοτήτων από μαθητή	σελ 134
Εικόνα 14	Απαντήσεις μαθητή στις ερωτήσεις 6, 7 και 8	σελ 135
Εικόνα 15	Προσπάθεια εύρεσης ελάχιστης τιμής και αιτιολόγηση	σελ 142

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ζούμε σε έναν κόσμο περίπλοκο όπου σε κάθε μας βήμα καλούμαστε να πάρουμε αποφάσεις, με αβέβαιη έκβαση, που επηρεάζουν την ζωή μας, αλλά και των υπολοίπων συνανθρώπων μας. Οι παράμετροι που πρέπει να αξιολογήσουμε είναι πολλές και συνήθως μεταβαλλόμενες ταχύτατα και οι αποφάσεις μας εμπεριέχουν ένα ρίσκο που πρέπει να συνεκτιμήσουμε. Η εκπαίδευση πρέπει να παρέχει τα εφόδια στους αυριανούς πολίτες να αντιμετωπίζουν κάθε πρόβλημα της καθημερινότητας τους μέσα από το πρίσμα των πιθανοτήτων. Η σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών με ρεαλιστικά πλαίσια και καταστάσεις αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια αντικείμενο της έρευνας στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Στην παρούσα έρευνα επιχειρούμε να αναδείξουμε τις συνδέσεις ανάμεσα στη διδακτική πιθανοτήτων και τα ψηφιακά παιχνίδια εστιάζοντας στην χρήση πραγματικών δεδομένων από την καθημερινή ζωή καθώς οι μαθητές παίζουν ένα ψηφιακό παιχνίδι αποφάσεων με αβέβαιες συνέπειες στο ασφαλές περιβάλλον ChoiCo. Η διδακτική προσέγγιση που προτείνουμε είναι σύμφωνη με τις αρχές του κονστрукτιβισμού για την κατασκευή της γνώσης, τη δημιουργία νοημάτων για τις έννοιες των πιθανοτήτων από τους μαθητές μέσα από ένα κατάλληλα σχεδιασμένο εκπαιδευτικό παιχνίδι που δεν μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί με τυπικά μέσα. Επιδιώκεται η ανάδειξη των διαδικασιών με τις οποίες οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στις πιθανότητες για να λάβουν αποφάσεις αξιολογώντας τα δεδομένα του παιχνιδιού.

Λέξεις κλειδιά: διδακτική πιθανοτήτων, ChoiCo, κονστρακτιονισμός, μάθηση μέσω ψηφιακών παιχνιδιών, τροποποίηση ψηφιακών παιχνιδιών

Abstract

We live in a complex world where in every step we take we have to make decisions, with uncertain outcome, affecting our lives, but also the rest of our fellow human beings. The parameters should be seen as a great many, usually changing rapidly and our decisions involve a risk we should bear in mind. The school shall provide supplies for tomorrow's citizens to face any problems of everyday life by using possibilities. The connection of teaching mathematics in realistic context with real life situations has for many years been the subject of research in the field of teaching of Mathematics. In the present research we try to highlight the connections between teaching probabilities and digital games focusing on the use of actual data from everyday life, when students play a digital game making decisions with uncertain consequences in a secure environment called ChoiCo. The teaching approach we propose is consistent with the principles of constructivism for the construction of knowledge, the creation of meaning for the concepts of probability by the students through an appropriately designed educational game that can not easily be implemented with standard instruments. The aim is to highlight the procedures by which students will use their knowledge of probabilities to make decisions by assessing the data from the game.

Keywords: teaching possibilities, ChoiCo, constructionism, game based learning, game modding

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην εποχή μας υπάρχει καταγίγισμός πληροφοριών, λόγω των μέσων μαζικής ενημέρωσης (ΜΜΕ), του διαδικτύου και των μέσων κοινωνικής δικτύωσης, για κάθε τομέα της ζωής του ανθρώπου, που έχει ως συνέπεια την αύξηση της αβεβαιότητας και των ρίσκων στη λήψη αποφάσεων. Έτσι λοιπόν, η έννοια της πιθανότητας παίζει σημαντικό ρόλο στην καθημερινότητα μας καθώς χρησιμοποιούμε τις πιθανότητες, είτε συνειδητά, είτε όχι για τη λήψη σημαντικών ή και μικρών καθημερινών αποφάσεων. Ως κλάδος των μαθηματικών, οι πιθανότητες έχουν τις ρίζες τους στα τυχερά παιχνίδια, καθώς το 1654 οι Fermat και Pascal κλήθηκαν να απαντήσουν στο ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει καθένας από τους δύο παίκτες ενός τυχερού παιχνιδιού με τραπουλόχαρτα της εποχής τους.

Οι μαθητές ως μελλοντικοί πολίτες πρέπει να έχουν κατανοήσει τις πιθανότητες και την χρήση τους στην μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων ώστε να μπορούν να αντιμετωπίσουν την αβεβαιότητα και να λάβουν αποφάσεις στην σύγχρονη κοινωνία. Το εκπαιδευτικό σύστημα εισάγει τους μαθητές στην έννοια της τυχαιότητας, ήδη από το δημοτικό, μέσα από απλά προβλήματα υπολογισμού πιθανότητας ενδεχομένων, οπότε δεν έρχονται σε επαφή με την πραγματικότητα και δεν δίνεται έμφαση στον πειραματισμό με ρεαλιστικά προβλήματα με υψηλή αβεβαιότητα, όπως είναι τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου που θα κληθούν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές, οι οποίοι φεύγοντας από το εκπαιδευτικό σύστημα δεν αποκτούν εννοιολογική γνώση γύρω από τις πιθανότητες.

Οι πιθανότητες είναι ένα πολύπλοκο γνωστικό πεδίο για την διδασκαλία των Μαθηματικών με άμεση επαφή με τον πραγματικό κόσμο. Συνδυάζει διάφορα είδη αναπαραστάσεων στατικών αλλά και δυναμικών. Τη δυνατότητα δυναμικών χειρισμών και αναπαραστάσεων δίνουν σήμερα οι νέες τεχνολογίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδακτική πράξη, κατάλληλα σχεδιασμένα μαθησιακά περιβάλλοντα στον υπολογιστή που προσφέρουν ευκαιρίες μάθησης και επηρεάζουν τον τρόπο που σκέφτονται, αλληλεπιδρούν και που μαθαίνουν τα παιδιά πιθανότητες όταν έρχονται σε επαφή με αυτές. Παρόμοια περιβάλλοντα χρησιμοποιούνται και ως ερευνητικά εργαλεία στη διδακτική των μαθηματικών, καθώς κατάλληλα σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία αποτελούν για τους μαθητές το μέσο που χρειάζονται, για να εκφράσουν τα προσωπικά τους νοήματα.

Στην παρούσα έρευνα ένα τέτοιο λογισμικό λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας που φέρουν γνωστές και άγνωστες συνέπειες καθώς και ένα αρκετά δύσκολο και προκλητικό πρόβλημα χρησιμοποιείται ως αντικείμενο συζήτησης μιας ομάδας μαθητών που δουλεύει συνεργατικά. Η λύση του χρειάζεται συλλογή και επεξεργασία δεδομένων για τη λήψη αποφάσεων και σχεδιασμό και επανασχεδιασμό στρατηγικής ανάλογα με τις συνέπειες της κάθε απόφασης. Στόχος είναι να αναδειχθούν υπό το πρίσμα της δημιουργίας προσωπικών νοημάτων, αντιλήψεις για την έννοια της πιθανότητας και για τον τρόπο χρήσης των πιθανολογικών σχέσεων από τους μαθητές. Ο χώρος των πιθανοτήτων παράγει πρόσθετη πολυπλοκότητα για το πρόβλημα, καθώς τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης δεν είναι γνωστά και δεν μπορούν να επαναληφθούν.

Αυτή η εργασία λοιπόν αποσκοπεί στην ανάδειξη των συνδέσεων ανάμεσα στη διδακτική πιθανοτήτων και τα ψηφιακά παιχνίδια εστιάζοντας στην χρήση πραγματικών δεδομένων από την καθημερινή ζωή, καθώς οι μαθητές παίζουν ένα ψηφιακό παιχνίδι αποφάσεων με αβέβαιες συνέπειες στο ασφαλές περιβάλλον ChoiCo. Μέσα από το παιχνίδι επιδιώκεται η ανάδειξη των διαδικασιών με τις οποίες οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στις πιθανότητες για να λάβουν αποφάσεις με συνέπειες που διαμορφώνουν την εξέλιξη του παιχνιδιού, αξιολογώντας τα δεδομένα που τους παρέχονται.

Αυτή η μέθοδος είναι σύμφωνη με τις κονστρακτιονιστικές θεωρίες μάθησης και έχει ως στόχο την δημιουργία νοημάτων και συνδέσεων για έννοιες πιθανοτήτων από τους μαθητές, μέσα από ένα πρόβλημα μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων, το οποίο είναι αφενός ενδιαφέρον για τους μαθητές και αφετέρου έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα. Έτσι λοιπόν ο μαθητής εμπλέκεται σε μια πολύπλοκη νοητική διαδικασία, στην οποία καλείται να δώσει λύσεις και να πάρει αποφάσεις συνδυάζοντας γνώσεις και δεξιότητες από διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα.

Για αυτό επιλέχθηκε ένα κοινωνικό-περιβαλλοντικό πρόβλημα, καθώς τα μεγαλύτερα προβλήματα στον πραγματικό κόσμο είναι τα περιβαλλοντικά προβλήματα τα οποία απαιτούν τη λήψη αποφάσεων που περιέχουν μεγάλα ρίσκα, τα οποία πρέπει να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες, και με μακροχρόνιες συνέπειες, οι οποίες είναι ωφέλιμες για κάποιους, αλλά ζημιώνουν κάποιους άλλους. Έτσι λοιπόν, οι μαθητές καλό θα ήταν να ενημερωθούν για αυτά τα πολυδιάστατα προβλήματα μέσα από ένα ψηφιακό παιχνίδι το οποίο προβάλλει την αβεβαιότητα της κατάστασης στην οποία βρίσκεται ο παίχτης, καθώς και τις συνέπειες που επιφέρουν οι επιλογές του μέσα στο παιχνίδι.

1. Οι έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων

1.1 Ιστορία Πιθανοτήτων

Μέσα από την μελέτη της ιστορίας έχει προκύψει ότι δύο είναι οι βασικές κινητήριες δυνάμεις για την ανάπτυξη νέων μαθηματικών: η ανθρώπινη πνευματική περιέργεια και η ευρύτερη επιστημονική ή κοινωνική αναγκαιότητα της κάθε εποχής. Για παράδειγμα, οι πρακτικές ανάγκες της μέτρησης εδαφών και αποστάσεων στην αρχαιότητα αποτέλεσαν σημαντικό κίνητρο για την ανάπτυξη της επίπεδης (Ευκλείδειας) γεωμετρίας. Παρομοίως, η ανάγκη για την κατανόηση και την πρόβλεψη της κίνησης των στερεών σωμάτων, όπως των πλανητών ή των βλημάτων που χρησιμοποιούνταν σε μάχες ήταν ένα από τα βασικότερα κίνητρα για την ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού από τον Νεύτωνα και τον Leibniz. Μάλλον το σημαντικότερο και αρχαιότερο κίνητρο για την ανάπτυξη των πιθανοτήτων, δηλαδή μιας μαθηματικά αυστηρής θεωρίας για την κατανόηση τυχαίων φαινομένων και, γενικότερα, καταστάσεων στις οποίες υπάρχει ένα σημαντικό μέρος αβεβαιότητας ήταν το ανθρώπινο πάθος για τον τζόγο.

Η λέξη πιθανότητα στις λατινογενείς και γερμανογενείς γλώσσες (π.χ. "probability" στα αγγλικά) προέρχεται από την λατινική λέξη probabilitas, η οποία μπορεί επίσης να σημαίνει «ακεραιότητα» ή «ευαλήθεια», από ένα ορισμό της εξουσίας ενός μάρτυρα σε μια δικαστική υπόθεση στην Ευρώπη, και συχνά συσχετίζεται με την 'ευγένεια' του μάρτυρα, όπως αναφέρεται στην εγκυκλοπαίδεια Britanica.

Ο Αριστοτέλης (384- 322 π.Χ.) διέκρινε τις λέξεις γνώση και γνώμη όπου η γνώση αφορά κάτι που είναι σωστό ή λάθος, ενώ γνώμη αφορά κάτι που μπορεί να είναι σωστό ή λάθος. Επίσης έδωσε την έννοια του τυχαίου, του απροσδόκητου και της σχετικής συχνότητας. Θεωρούσε όμως ότι το τυχαίο δεν είναι επιστημονική έννοια, οφείλεται στη δική μας αδυναμία να ερμηνεύσουμε τα φαινόμενα. Ακόμα το τυχαίο χρησιμοποιήθηκε για πρακτικούς σκοπούς στην Αθηναϊκή πολιτεία. Στη νομοθεσία του Δράκοντα (624 π.Χ.) η επιλογή των αρχόντων (βουλευτές, στρατηγοί) γινόταν με κλήρο και όχι με εκλογή. Όσοι κληρώνονταν για μια θητεία δε μετείχαν στην επόμενη κλήρωση.

Η έννοια της πιθανότητας ορίστηκε αρχικώς, για να περιγράψει το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης. Το παλαιότερο πιθανοθεωρητικό πρόβλημα τέθηκε από τον Pacioli το 1494 και είναι γνωστό ως το πρόβλημα διανομής μεριδίων.

Η θεωρία πιθανοτήτων οφείλει την αναγωγή της σε επιστήμη στην αλληλογραφία δύο μεγάλων επιστημόνων των Pierre de Fermat (εικόνα 1) και Blaise Pascal (1654) (εικόνα 2) που απάντησαν σωστά στο πρόβλημα της διανομής μεριδίων και στο πρόβλημα του συμφερότερου στοιχήματος που τέθηκε από τον Chevalier de Méré (Pratt, 2001).



Εικόνα 1 Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Ο Christian Huygens (1657) έδωσε την πρώτη επιστημονική πραγματεία για τον λογισμό Πιθανοτήτων. Ο Pierre-Simon Laplace (1774) συσχέτισε τα σφάλματα με την πιθανότητα και παρέστησε αυτή τη σχέση με μία συνάρτηση, της οποίας μελέτησε τις ιδιότητες. Θεμελίωσε την κλασική Θεωρία Πιθανοτήτων με το βιβλίο του "Theorie Analytique des Probabilites" (1795) (Κοντογιάννης και Τουμπής, 2015).



Εικόνα 2 Blaise Pascal (1623 – 1662)

Τον 18ο αιώνα θεμελιώνεται η πρώτη σύνδεση θεωρητικών αποτελεσμάτων και εμπειρικών γεγονότων από τον Jacob Bernoulli, ο οποίος μελέτησε επαναλαμβανόμενες ρίψεις νομίσματος και εισήγαγε τον πρώτο νόμο μεγάλων αριθμών. Πολλοί μαθηματικοί τον μιμήθηκαν και προσπάθησαν και οι ίδιοι να συνεισφέρουν σημαντικά στην ανάλυση πραγματικών φαινομένων και στη χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων, όπως ο Daniel Bernoulli, ο Leibniz, ο Bayes και ο Lagrange. Έκτοτε παρατηρήθηκε η δημιουργία διάφορων βιβλίων από μαθηματικούς, τα οποία ανέταξαν την θεωρία των πιθανοτήτων στα Μαθηματικά ως νέο κλάδο τους.

Τον 19ο αιώνα ο Laplace περιλαμβάνοντας στο βιβλίο του πολλές πρωτότυπες συνεισφορές, όπως είναι η γενική απόδειξη του κεντρικού οριακού θεωρήματος, κατόρθωσε να ασκήσει μεγάλη επιρροή και να θεμελιώσει την σπουδαιότητα της θεωρίας των πιθανοτήτων σαν ποσοτικό πεδίο. Ο Andrien-Marie Legendre ανέπτυξε την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων και ασχολήθηκε με την εφαρμογή των πιθανοτήτων σε αστρονομικές προβλέψεις συμβάλλοντας με αυτόν το τρόπο στον καθορισμό τροχιών των κομητών με νέες μεθόδους. Στη διάρκεια του ίδιου αιώνα ο Poisson εξέδωσε βιβλίο με πρωτότυπες συνεισφορές, όπως την κατανομή Poisson (Χαραλαμπίδης, 2002).

Η θεωρία των πιθανοτήτων κατά τον 20ο αιώνα είχε εισχωρήσει πλέον στη μηχανική και στην επιστήμη, καθώς έχει την ικανότητα να περιγράφει και να ερμηνεύει τους περισσότερους τύπους φαινομένων αβεβαιότητας που προκύπτουν στην πράξη. Η ανάγκη για μια αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων με μαθηματική αυστηρότητα παρουσιάστηκε από τον D. Hilbert στον κατάλογο των σπουδαίων άλυτων προβλημάτων το 1900. Ο A.N. Kolmogorov (1933) δημοσίευσε την αποδεκτή σήμερα αξιωματική θεμελίωση που θεωρεί την πιθανότητα ως ειδική περίπτωση της θεωρίας μέτρου. Η θεωρία του Kolmogorov δεν είναι μόνον απλή και κατανοητή όσον αφορά τη μαθηματική αυστηρότητα, αλλά έβαλε και τα θεμέλια για τις εφαρμογές της θεωρίας πιθανοτήτων (Κοντογιάννης και Τουμπής, 2015).

Έτσι λοιπόν, η θεωρία πιθανοτήτων (Probability Theory) είναι μια αξιωματική μαθηματική θεωρία μέτρου. Πρόκειται δηλαδή, για τον κλάδο των μαθηματικών ο οποίος ασχολείται με την ανάλυση τυχαίων φαινομένων και έχει ως αντικείμενο την μελέτη μαθηματικών υποδειγμάτων (προτύπων ή μοντέλων) γνωστών ως στοχαστικών υποδειγμάτων

τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των στοχαστικών (ή τυχαίων) πειραμάτων (ή φαινομένων).

Βασικό χαρακτηριστικό των πειραμάτων αυτών είναι ότι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Κεντρικό ρόλο στη θεωρία πιθανοτήτων παίζει η έννοια της πιθανότητας, ενώ σημαντικές έννοιες είναι οι τυχαίες μεταβλητές, οι συναρτήσεις κατανομής, οι στοχαστικές διαδικασίες και τα γεγονότα: μαθηματικές αφαιρέσεις μη ντετερμινιστικών συμβάντων τα οποία είτε συμβαίνουν μία φορά είτε εξελίσσονται με το πέρασμα του χρόνου (Δαμιανού, Χ.Χ., Παπαδάτος, Ν.Δ., & Χαραλαμπίδης, Χ.Α., 2010).

Η πιθανότητα εκφράζει την αβεβαιότητα του ανθρώπου για την εξέλιξη των φαινομένων. Το μέτρο δε της πιθανότητας ορίστηκε να είναι ένας θετικός αριθμός, μικρότερος ή ίσος του ένα. Αν και τα γεγονότα που μελετώνται από τη θεωρία πιθανοτήτων, όπως π.χ. η ρίψη ενός ζαριού ή το στρίψιμο ενός κέρματος, είναι τυχαία, όταν επαναλαμβάνονται πολλές φορές η αλληλουχία των τυχαίων γεγονότων παρουσιάζει ορισμένα στατιστικά μοτίβα τα οποία μπορούν να μελετηθούν και να προβλεφθούν.

Δύο αντιπροσωπευτικά μαθηματικά αποτελέσματα που περιγράφουν τέτοια μοτίβα είναι ο νόμος των μεγάλων αριθμών και το θεώρημα κεντρικού ορίου. Ως μαθηματικό θεμέλιο της στατιστικής, η θεωρία πιθανοτήτων είναι απαραίτητη σε πολλές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ανάλυση μεγάλων συνόλων δεδομένων.

Μέθοδοι της θεωρίας πιθανοτήτων εφαρμόζονται και στην περιγραφή πολύπλοκων συστημάτων, όπως στη στατιστική μηχανική (Κουνιάς και Μωυσιάδης, 1999).

Στη στατιστική, οι πιθανότητες δεν χρησιμοποιούνται απλά ως μια συλλογή τεχνικών εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων, αλλά αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο της ίδιας της θεμελίωσής της.

Τα μαθηματικά αποτελούν τη γλώσσα των θετικών επιστημών, έτσι και η θεωρία πιθανοτήτων είναι η γλώσσα της στατιστικής (Κοντογιάννης και Τουμπής, 2015).

1.2 Ορισμοί της έννοιας της πιθανότητας

Κλασσικός Ορισμός της Πιθανότητας (Από τον DE MOIVRE)

Εάν εκτελέσουμε ένα πείραμα N φορές και σημειώσουμε τον αριθμό n_x που συνέβηκε ένα γεγονός X , n_y τον αριθμό που συνέβηκε το γεγονός Y κ.ο.κ όπου $n_x + n_y + \dots = N$ και πάρουμε τα πηλίκια n_x/N , n_y/N κ.ο.κ παρατηρούμε ότι τα πηλίκια αυτά παρουσιάζουν μια ομαλότητα καθώς το N γίνεται πολύ μεγάλο. Εάν εκτελέσουμε δηλαδή τις N επαναλήψεις του πειράματος πολλές φορές τα πηλίκια n_x/N , n_y/N θα έχουν την ίδια τιμή την κάθε φορά.

Όλη μας η προσπάθεια είναι να ορίσουμε, για κάθε γεγονός E ενός πειράματος, έναν αριθμό $p(E) = n_E/N$ όταν το N είναι πολύ μεγάλο. Τον αριθμό $p(E)$ τον ονομάζουμε **πιθανότητα**.

Ο ορισμός αυτός ισχύει με την προϋπόθεση ότι όλα τα γεγονότα είναι ισοπίθανα, δηλαδή δεν υπάρχει λόγος να υποθέσουμε ότι κάποιο γεγονός του δειγματικού χώρου είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό να συμβεί έναντι των άλλων. Κατά την ρίψη π.χ ενός νομίσματος τα γεγονότα κορώνα, γράμματα είναι ισοπίθανα και η πιθανότητα να έχουμε κορώνα η γράμματα είναι 50%.

Ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας διατυπώθηκε αρχικά από τον De Moivre (1711) ως εξής: Η πιθανότητα της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκιο με αριθμητή τον αριθμό των περιπτώσεων ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου τούτου και παρονομαστή το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες). Η συνθήκη του ισοπίθανου των περιπτώσεων είναι αναγκαία γιατί διαφορετικά θεωρώντας τις περιπτώσεις της πραγματοποίησης και της μη πραγματοποίησης ενδεχομένου θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι ίση με $1/2$. Το συμπέρασμα τούτο δεν ισχύει γενικά επειδή οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν είναι πάντοτε εξίσου πιθανές. Η έννοια των εξίσου πιθανών (ισοπίθανων) περιπτώσεων είναι απαραίτητο να ορισθεί ανεξάρτητα από την έννοια της πιθανότητας γιατί διαφορετικά ο κλασσικός αυτός ορισμός θα οδηγούσε σε φαύλο κύκλο. Τούτο επιτυγχάνεται με επίκληση της αρχής της έλλειψης επαρκούς λόγου (Batanero, 2013).

Έτσι, αν σύμφωνα με τα δεδομένα, δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες, τότε όλες θεωρούνται εξίσου πιθανές. Για παράδειγμα κατά την ρίψη ενός κύβου υπάρχουν τόσα δυνατά αποτελέσματα (περιπτώσεις) όσες είναι και οι έδρες του. Με την προϋπόθεση ότι οι έδρες είναι ίσες και το βάρος του κύβου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες, οπότε όλες οι περιπτώσεις θεωρούνται ισοπίθανες. Σημειώνουμε ότι ο κλασικός αυτός ορισμός της πιθανότητας αφορά αναγκαστικά πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.

Η θεμελίωση του Λογισμού των Πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας αποδίδεται στον Laplace (1812). Αξίζει να παρουσιάσουμε τις σημαντικότερες ιδιότητες της κλασικής πιθανότητας, οι οποίες και ενέπνευσαν την κατάλληλη επέκταση της τόσο σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με μη ισοπίθανα δειγματικά σημεία (περιπτώσεις) όσο και γενικότερα σε αριθμήσιμους ή μη αριθμήσιμους δειγματικούς χώρους.

Επέκταση της κλασικής πιθανότητας στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής (μη αριθμήσιμος) αποτελεί η γεωμετρική πιθανότητα που ορίζεται ως εξής: Ας θεωρήσουμε ένα μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο Ω οριζόμενο από μία περιοχή του (μονοδιάστατου ή δισδιάστατου ή τρισδιάστατου) χώρου στην οποία οποιεσδήποτε στοιχειώδεις περιοχές είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A οριζόμενο από μία περιοχή του δειγματικού χώρου Ω . Η πιθανότητα του A δίδεται από τη σχέση $p(A) = \mu(A) / \mu(\Omega)$ όπου $\mu(A)$ και $\mu(\Omega)$ είναι το μέτρο (μήκος ή εμβαδό ή όγκος) των περιοχών A και Ω αντίστοιχα. Η γεωμετρική πιθανότητα όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, έχει αντίστοιχες με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ιδιότητες (Δαμιανού, Χ.Χ., Παπαδάτος, Ν.Δ., & Χαραλαμπίδης, Χ.Α., 2010).

Εμπειρικός ορισμός Πιθανότητας (Από τον Von Mises)

Η προϋπόθεση του ισοπίθανου των περιπτώσεων ή στοιχειωδών περιοχών που απαιτούν τόσο ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας όσο και η γεωμετρική επέκτασή του, περιορίζει σημαντικά το πεδίο εφαρμογών της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Έτσι σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με πεπερασμένο δειγματικό χώρο στον οποίο τα δειγματικά σημεία δεν είναι ισοπίθανα ή με αριθμησίμως άπειρο δειγματικό χώρο, όπως για παράδειγμα η εκπομπή

σωματιδίων από ραδιενεργό ουσία, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας.

Επίσης σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο στον οποίο οι στοιχειώδεις περιοχές δεν είναι ισοπίθανες, όπως για παράδειγμα ο χρόνος ζωής μιας μηχανής, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο γεωμετρικός ορισμός της πιθανότητας. Στις εμπειρικές θεωρίες, που βασίζονται στην έννοια της σχετικής συχνότητας, οι πιθανότητες αντιστοιχούν σε σχετικές συχνότητες κάποιας ακολουθίας πειραμάτων (ίσως και υποθετικών). Για παράδειγμα η πρόταση “η πιθανότητα άσσου είναι $1/6$ ” έχει την έννοια ότι αν ρίξουμε το ίδιο ζάρι κατ' επανάληψη - κάτω από τις ίδιες συνθήκες - η οριακή συχνότητα θα είναι $1/6$.

Ο Von-Mises ισχυρίζεται, ότι τα αντικείμενα που μελετάμε δεν είναι απλά ενδεχόμενα αλλά ακολουθίες ενδεχομένων. Βέβαια οι εμπειρικά παρατηρούμενες ακολουθίες είναι πάντα πεπερασμένες. Μερικές εμπειρικά παρατηρούμενες ακολουθίες δίνουν μια ένδειξη τυχειότητας στην σειρά εμφάνισης των όρων τους και σύγκλισης των σχετικών συχνοτήτων κατά προσέγγιση καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Ο Von-Mises εξιδανικεύει αυτές τις ιδιότητες σε μια άπειρη ακολουθία στην οποία κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο έχει οριακή συχνότητα, η οποία δεν αλλάζει από οποιαδήποτε υποακολουθία και αν υπολογισθεί.

Ο Von Mises στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει το πρόβλημα ορισμού πιθανότητας σε οποιουδήποτε δειγματικούς χώρους διατύπωσε τον ακόλουθο εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας (Δαμιανού, Χ.Χ., Παπαδάτος, Ν.Δ., & Χαραλαμπίδης, Χ.Α., 2010).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω ότι ένα τυχαίο πείραμα η φαινόμενο μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες απερίοριστο αριθμό φορών , και έστω ένα γεγονός A . Υποθέτουμε ότι σε N επαναλήψεις του πειράματος αυτού , το γεγονός A πραγματοποιείται n_A φορές .

Η σχετική συχνότητα του A f_A δίνεται από την σχέση : $f_A = n_A/N$.

Αν υπάρχει το $\lim f_A = \lim (n_A/N)$ τότε αυτό ορίζει την πιθανότητα $p(A)$, του γεγονότος A , δηλαδή $p(A) = \lim f_A = \lim (n_A/N)$

Την ύπαρξη του ορίου αυτού με την μαθηματική έννοια ο Von Mises την παίρνει σαν αξίωμα.

Σημειώνουμε ότι, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, και η εμπειρική πιθανότητα είναι (α) μη αρνητική : $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο $A \in \Omega$,

(β) νορμαλισμένη : $P(\Omega) = 1$,

(γ) προσθετική : $P(A + B) = P(A) + P(B)$ για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα A και $B \in \Omega$.

Η υπόθεση ότι ένα στοχαστικό πείραμα μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απερίοριστο αριθμό φορών αποτέλεσε το σημείο κριτικής του εμπειρικού ορισμού της πιθανότητας. Πολλές είναι οι αντιρρήσεις που εκτοξεύθηκαν εναντίον της ερμηνείας της πιθανότητας ως συχνότητας.

Πρώτον, ο πεπερασμένος αριθμός γεγονότων (πειραμάτων) που μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσα στα όρια της ανθρώπινης εμπειρίας.

Δεύτερον, η δυνατότητα εύρεσης της οριακής συχνότητας. Αυτό που φαίνεται ότι μπορούμε να κάνουμε είναι, από την παρατήρηση περιορισμένου τμήματος της ακολουθίας των γεγονότων, να βγάζουμε συμπεράσματα για άπειρο αριθμό γεγονότων.

Τρίτον, δεν είναι βέβαιον ότι υφίσταται το όριο της σχετικής συχνότητας. Για παράδειγμα κατά την ρίψη ενός νομίσματος είναι λογικώς δυνατό μια μακρά αλυσίδα από κορόνες να ακολουθηθεί από μια ακόμα μακρύτερη αλυσίδα από γράμματα και αυτή από ακόμα μια μακρύτερη αλυσίδα από κορόνες και ούτω κάθε εξής, έτσι ώστε η σχετική συχνότητα από κορόνες να κυμαίνεται σε ευρύτατα απομακρυσμένα όρια και να μην συγκλίνει. Παρά τις δυσκολίες που παρουσιάζει η παραπάνω προσέγγιση της πιθανότητας χρησιμοποιείται ευρέως στις επιστήμες.

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ KOLMOGOROV

Στα μοντέρνα μαθηματικά συνηθίζεται να διαλέγουμε σαν αξιώματα ορισμένες “προτάσεις” που υποθέτουμε ότι ισχύουν και οι οποίες δεν αποδεικνύονται μέσα στα πλαίσια μιας συγκεκριμένης θεωρίας. Όλες οι άλλες προτάσεις της θεωρίας συνάγονται στην συνέχεια, με αυστηρά λογικό τρόπο, με βάση τα τεθέντα αξιώματα. Στην εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών, ο καθορισμός των αξιωμάτων (δηλαδή των βασικών υποθέσεων) πάνω στα οποία μπορεί να κατασκευασθεί μια εκτενής θεωρία δεν αποτελεί το αρχικό βήμα. Αντίθετα, είναι το αποτέλεσμα μιας μακράς περιόδου συσσώρευσης πραγματικών γεγονότων και μιας λογικής ανάλυσης των αποτελεσμάτων που στόχο έχει τον καθορισμό των πραγματικών βασικών αιτιών. Αυτή είναι και η διαδικασία που ακολουθήθηκε και στη θεωρία πιθανοτήτων με τη μόνη διαφορά ότι, στην συγκεκριμένη περίπτωση, αυτό κατορθώθηκε σχετικά πρόσφατα.

Το πρόβλημα της αξιωματικής θεμελίωσης της θεωρίας των πιθανοτήτων τέθηκε, για πρώτη φορά, και λύθηκε το 1917 από τον γνωστό μαθηματικό S. N. Bernstein. Η εργασία του Bernstein είναι βασισμένη στην ποιοτική σύγκριση τυχαίων ενδεχομένων αναφορικά με τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε αυτά. Η αξιωματική θεμελίωση που έγινε κοινά αποδεκτή οφείλεται στον Ρώσο μαθηματικό A. N. Kolmogorov και προτάθηκε το 1933. Σύμφωνα με την θεωρία του Kolmogorov πιθανότητα είναι μια συνολοσυνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και B μια οικογένεια υποσυνόλων που είναι ενδεχόμενα. (Αυστηρότερα B είναι η σ -άλγεβρα του S). Έστω $A \in B$.

Ορισμός: Ορίζουμε ως συνάρτηση πιθανότητας (probability distribution) μια συνολοσυνάρτηση $P: B \rightarrow R$ η οποία σε κάθε στοιχείο $A \in B$ αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό $P(A)$ με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

i. $P(A) \geq 0$

ii. $P(S) = 1$

iii. Αν $A_i, i=1,2,\dots$ είναι ενδεχόμενα (αν A_i δηλαδή $\in B$) αμοιβαία ξένα μεταξύ τους ($A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) τότε $P(\bigcup A_i, i=1,2,\dots,\infty) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Ο αριθμός $P(A)$ λέγεται πιθανότητα (probability) του ενδεχομένου A . Τα αξιώματα (i), (ii), (iii) λέγονται και αξιώματα (axioms) του Kolmogorov.

Είναι προφανές ότι για τον ορισμό της έννοιας της πιθανότητας κατά Kolmogorov χρειάζεται να καθορίσουμε, όχι μόνο το σύνολο των απλών τυχαίων ενδεχομένων S , αλλά και το σύνολο των τυχαίων ενδεχομένων B όπως επίσης και την συνάρτηση P που ορίζεται πάνω στο B .

Ορισμός: Η συλλογή (S, B, P) ονομάζεται *χώρος πιθανοτήτων* (probability space).

Εδώ αξίζει να τονίσουμε το γεγονός ότι η ουσία της αξιωματικής θεμελίωσης της Θεωρίας Πιθανοτήτων κατά Kolmogorov είναι ότι κάθε ενδεχόμενο (του οποίου θέλουμε να καθορίσουμε την πιθανότητα και για αυτό θα ονομάζουμε παρατηρήσιμο ενδεχόμενο (observable event), είναι δυνατόν να παρασταθεί με ένα υποσύνολο του συνόλου όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων (δηλαδή ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου). Για παράδειγμα, όταν ρίχνουμε ένα ζάρι τα δυνατά αποτελέσματα (στοιχειώδη ενδεχόμενα) μπορούν να είναι τα 1, 2, ..., 6.

Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα από κοινού σχηματίζουν το δειγματικό χώρο. Το ενδεχόμενο ότι το αποτέλεσμα ενός ριξίματος ενός ζαριού είναι άρτιος αριθμός μπορεί να παρουσιασθεί ως το υποσύνολο του δειγματικού χώρου που αποτελείται από τους άρτιους αριθμούς $\{2,4,6\}$. Η θεωρία του Kolmogorov υποθέτει ότι τα παρατηρήσιμα ενδεχόμενα αποτελούν μια σ-άλγεβρα, όπως ήδη είπαμε, που το σ αναφέρεται στο άπειρο. Δηλαδή, ότι η από κοινού πραγματοποίηση δύο οποιονδήποτε παρατηρήσιμων γεγονότων, η πραγματοποίηση τουλάχιστον ενός ή ενός πεπερασμένου ή ενός μετρήσιμου αριθμού παρατηρήσιμων γεγονότων, όπως επίσης και το συμπλήρωμα οποιουδήποτε παρατηρήσιμου γεγονότος είναι επίσης ένα παρατηρήσιμο γεγονός.

Στη συνέχεια, σε κάθε παρατηρήσιμο ενδεχόμενο αντιστοιχείται ένας μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού, έτσι ώστε η πιθανότητα του βεβαίου γεγονότος (δηλαδή του συνολικού δειγματικού χώρου) να είναι ένα, και επίσης, ώστε η ιδιότητα της σ-προσθετικότητας να ισχύει.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας του ο Kolmogorov χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα γνωστών μαθηματικών, κυρίως αυτά των E.Borel, A.Lomnitzky, H.Steinhaus όπως επίσης Θεωρία Συνόλων και Θεωρία Μέτρου.

Κρίνεται σκόπιμο να παρατηρηθεί ότι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας κατά Kolmogorov περιλαμβάνει, σαν ειδικές περιπτώσεις, και το κλασσικό ορισμό και τον ορισμό που βασίζεται στην σχετική συχνότητα ενώ ταυτόχρονα ξεπερνά τα μειονεκτήματα των δύο αυτών θεωριών.

1.3 Ορισμοί των εννοιών της θεωρίας πιθανοτήτων

Παρακάτω αναφέρονται οι ορισμοί των εννοιών του κεφαλαίου πιθανοτήτων όπως αυτοί αναγράφονται στο σχολικό βιβλίο μαθητή του μαθήματος των μαθηματικών της Γ Γυμνασίου:

Η έννοια του συνόλου

Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να συλλέγουμε ή να επιλέγουμε διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενο τους ταξινομούνται σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κ.τ.λ. Σε κατηγορίες επίσης, ταξινομούμε τους αριθμούς (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί, θετικοί, αρνητικοί κ.τ.λ.), τα γράμματα της αλφαβήτου (φωνήεντα, σύμφωνα, μικρά, κεφαλαία κ.τ.λ.) και κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Ομάδες ή κατηγορίες, όπως οι παραπάνω, ονομάζονται στα Μαθηματικά, σύνολα. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται στοιχείο του συνόλου.

Παράσταση συνόλου

Κάθε σύνολο συμβολίζεται μ' ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου (A, B, Γ,) και παριστάνεται με τους εξής τρόπους:

α) Με αναγραφή των στοιχείων του.

β) Με περιγραφή των στοιχείων του.

γ) Με διάγραμμα Venn.

Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Υποσύνολο συνόλου

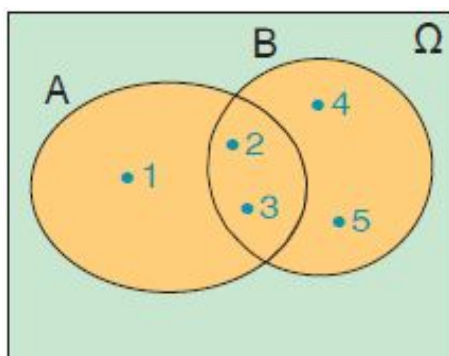
Ένα σύνολο A ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.

Κενό σύνολο

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\emptyset$.

Πράξεις με σύνολα

α) Ένωση συνόλων



Αν πάρουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται ένωση των συνόλων A και B και συμβολίζεται $A \cup B$.

Άρα $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

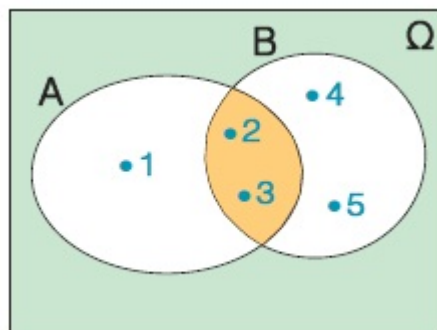
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση δύο συνόλων A, B, αν ανήκει στο σύνολο A ή στο σύνολο B, δηλαδή αν ανήκει σ' ένα τουλάχιστον από αυτά.

β) Τομή συνόλων

Αν πάρουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται τομή των συνόλων A, B και συμβολίζεται $A \cap B$.

Άρα $A \cap B = \{2, 3\}$.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην τομή δύο συνόλων A, B, αν ανήκει και στο σύνολο A και στο σύνολο B.

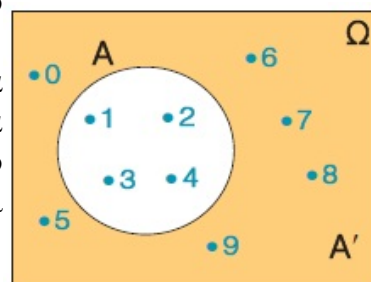


γ) Συμπλήρωμα συνόλου

Αν πάρουμε το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και ως βασικό σύνολο Ω θεωρήσουμε το σύνολο

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται συμπλήρωμα του A ως προς το Ω και συμβολίζεται A' . Άρα $A' = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Όπως φαίνεται και από το παρακάτω διάγραμμα Venn, ισχύουν: $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \emptyset$



Πείραμα τύχης

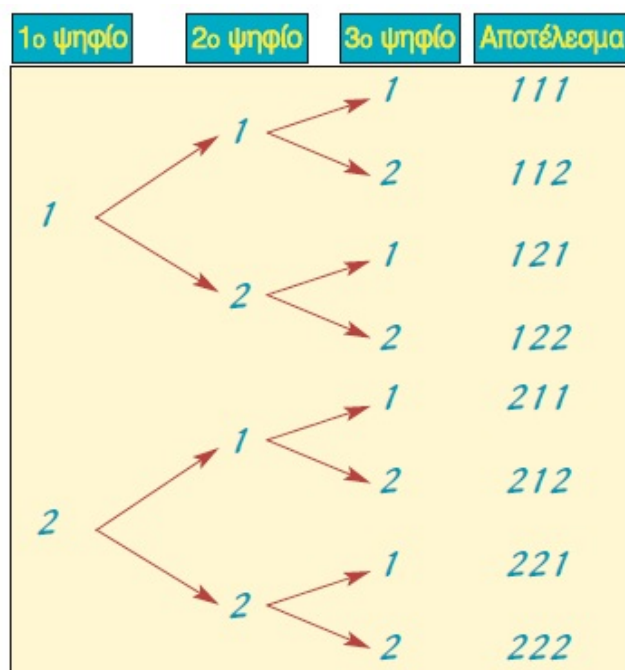
Σε πολλές περιπτώσεις, όταν κάνουμε ένα πείραμα, μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του. Υπάρχουν όμως και πειράματα, τα οποία όσες φορές και αν τα επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα τους με απόλυτη βεβαιότητα. Ένα τέτοιο πείραμα λέγεται **πείραμα τύχης**.

Δειγματικός χώρος

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω .

Εύρεση δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης

Σε πολλά πειράματα τύχης, όπως στη ρίψη ενός ζαριού ή ενός νομίσματος, μπορούμε να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εύκολα και άμεσα. Υπάρχουν όμως και πειράματα τύχης στα οποία προσδιορίζουμε ευκολότερα το δειγματικό τους χώρο, αν εφαρμόσουμε ειδικές τεχνικές ή μεθόδους. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε στην τύχη ένα τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2, για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εργαζόμαστε ως εξής: Γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το πρώτο ψηφίο και σε κάθε περίπτωση γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το δεύτερο ψηφίο κ.ο.κ.



Με το παρακάτω διάγραμμα, που ονομάζεται **δεντροδιάγραμμα**, βρίσκουμε ευκολότερα όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 1 ή 2, δηλαδή είναι:

$\Omega = \{111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222\}$, και περιέχει 8 στοιχεία

$(N(\Omega) = 8)$.

Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές και σημειώσουμε κάθε φορά την ένδειξή του, τότε για να προσδιορίσουμε ευκολότερα το δειγματικό χώρο, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη του πίνακα, δηλαδή είναι:

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6,6)\}$, και περιέχει 36 στοιχεία

$(N(\Omega) = 36)$.

2 ^η ρίψη 1 ^η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ενδεχόμενα

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το σύνολο $A = \{2, 4, 6\}$, που είναι υποσύνολο του Ω , ονομάζεται **ενδεχόμενο** του πειράματος και συγκεκριμένα είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό. Ομοίως, το $B = \{1, 2, 3\}$ είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε αριθμό μικρότερο του 4.

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .

Αν ρίξουμε ένα ζάρι και φέρουμε τον αριθμό 6, που ανήκει στο σύνολο $A = \{2, 4, 6\}$, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται. Το ενδεχόμενο όμως A **πραγματοποιείται** ακόμη και αν κατά τη συγκεκριμένη εκτέλεση του πειράματος εκτός από 6 φέρουμε 2 ή 4. Γι' αυτό τα στοιχεία 2, 4, 6 του ενδεχομένου A ονομάζονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.

Για ένα ενδεχόμενο A , το πλήθος των ευνοϊκών του περιπτώσεων, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του, συμβολίζεται με $N(A)$. Για το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ είναι $N(A) = 3$.

Βέβαιο - Αδύνατο ενδεχόμενο

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε το ενδεχόμενο να φέρουμε ένδειξη μικρότερη του 7 είναι το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Το ενδεχόμενο όμως να φέρουμε ένδειξη μεγαλύτερη του 6 είναι $\emptyset$. Το ενδεχόμενο αυτό δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Πράξεις με ενδεχόμενα

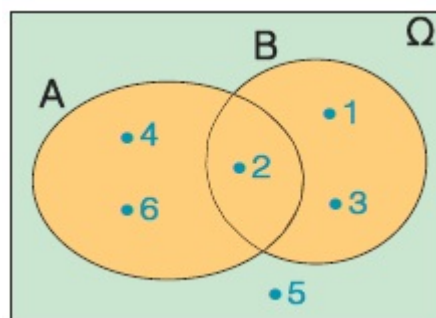
Όπως είδαμε, το ενδεχόμενο είναι σύνολο, οπότε παριστάνεται και με διάγραμμα Venn. Οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων γίνονται όπως και οι πράξεις μεταξύ συνόλων. Έτσι έχουμε:

- **Ένωση** δύο ενδεχομένων A , B ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cup B$ που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A , B .

Π.χ. αν $A = \{2, 4, 6\}$ και

$B = \{1, 2, 3\}$, τότε

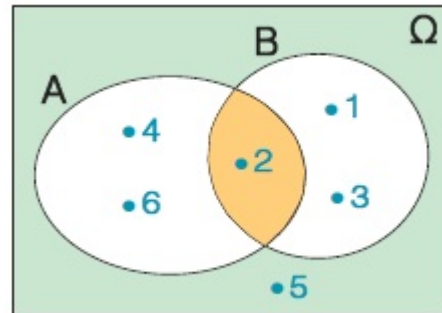
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



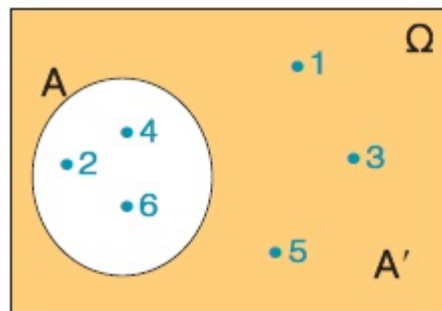
- **Τομή** δύο ενδεχομένων A , B ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cap B$ που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το A και το B .

Π.χ. αν $A = \{2, 4, 6\}$ και

$B = \{1, 2, 3\}$, τότε $A \cap B = \{2\}$.



- **Συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου A ονομάζεται το ενδεχόμενο A' που πραγματοποιείται, όταν **δεν πραγματοποιείται το A** .
Π.χ. στο πείραμα τύχης «ρίψη ενός ζαριού» αν $A = \{2, 4, 6\}$, τότε $A' = \{1, 3, 5\}$.



Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

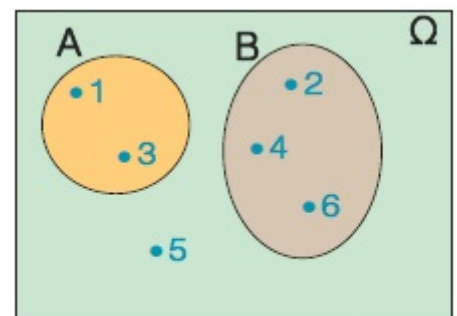
Σ' ένα πείραμα τύχης δύο ενδεχόμενα A , B είναι δυνατόν να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή να ισχύει

$$A \cap B = \emptyset.$$

Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού, τα ενδεχόμενα $A = \{1, 3\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, οπότε σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι **ασυμβίβαστα**.

Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$



Κλασικός ορισμός πιθανότητας

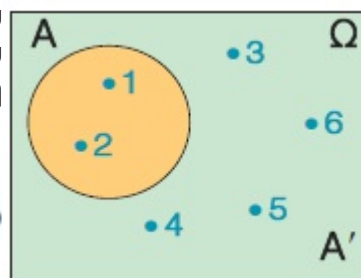
Σ' ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ονομάζεται ο αριθμός

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου τα 6 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Έτσι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{1, 2\}$ είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \text{ Το συμπληρωματικό}$$



$A' = \{3, 4, 5, 6\}$ και η πιθανότητά του είναι $P(A') =$

Παρατηρούμε ότι $P(A) + P(A') = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

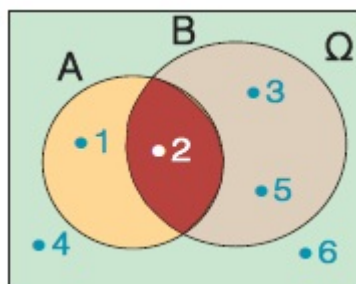
Γενικά

Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A, A' ισχύει $P(A) + P(A') = 1$.

Αν τώρα πάρουμε τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ και

προσδιορίσουμε την ένωση και την τομή τους, τότε έχουμε:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ και $A \cap B = \{2\}$.



Άρα $P(A) = \frac{2}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$ και

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{4}{6} +$

δηλαδή ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) +$

Γενικά

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Τις προηγούμενες ιδιότητες χρησιμοποιούμε συχνά για να υπολογίσουμε πιθανότητες και γι' αυτό λέμε ότι αποτελούν **βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων**.

1.4 Προσεγγίσεις της έννοιας της Πιθανότητας

Όταν οι άνθρωποι σκέφτονται για την έννοια της πιθανότητας χρησιμοποιούν κυρίως τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις: την θεωρητική, την πειραματική και την υποκειμενική (theoretical, experimental and subjective). Για να νοηματοδοτήσουν οι μαθητές τις πιθανότητες πρέπει να κατανοήσουν αυτές τις διαφορετικές προσεγγίσεις και να εξερευνήσουν τις συνδέσεις μεταξύ αυτών των προσεγγίσεων και μεταξύ των διαφορετικών πλαισίων, όπου η κάθε μια μπορεί να χρησιμοποιηθεί (Prodromou, 2012).

Η θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας προϋποθέτει, ότι είναι δυνατή η αναπαράσταση του δειγματικού χώρου, δηλαδή όλα τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, ως συλλογή των αποτελεσμάτων με γνωστή την πιθανότητα πραγματοποίησης τους. Όταν τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα του κάθε αποτελέσματος μπορεί να υπολογισθεί ως το πηλίκο των ευνοϊκών περιπτώσεων προς τον αριθμό όλων των περιπτώσεων του δειγματικού χώρου. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου πριν τις δοκιμές του πειράματος, όπως το ρίξιμο ενός αμερόληπτου ζαριού. Εάν όμως το ζάρι δεν είναι δίκαιο τότε η θεωρητική προσέγγιση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο υπολογισμός των πιθανοτήτων γίνεται μέσα από έναν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος τύχης (Batanero, 2013).

Η πειραματική ή εμπειρική προσέγγιση της πιθανότητας, αντιθέτως με την θεωρητική προσέγγιση, προϋποθέτει ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου μπορεί να υπολογισθεί μέσω πειραματισμού, καθώς καθορίζεται από την παρατηρήσιμη σχετική συχνότητα του ενδεχομένου μέσα από πολλές δοκιμές του πειράματος τύχης. Όπως και η θεωρητική προσέγγιση έτσι και η πειραματική μέθοδος περιέχει υπολογισμό λόγων μεγεθών μόνο που η πιθανότητα θεωρείται ως το πηλίκο ευνοϊκών περιπτώσεων προς τον αριθμό δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν.

Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος τότε η πειραματική πιθανότητα του ενδεχομένου τείνει να εξισωθεί με την θεωρητική πιθανότητα του. Όμως επειδή είναι αδύνατον να πραγματοποιήσουμε πολλές φορές ένα πείραμα με τις ίδιες συνθήκες στην πραγματικότητα, οι μαθητές δεν πρέπει να μπερδεύουν τα μοντέλα με τις πραγματικές καταστάσεις.

Η υποκειμενική προσέγγιση της πιθανότητας έγκειται στις προσωπικές εκτιμήσεις του κάθε ατόμου που δεν είναι ίδιες από μαθητή σε μαθητή. Αυτό συμβαίνει γιατί ο κάθε μαθητής έχει διαφορετικές αντιλήψεις όταν κρίνει ένα τυχαίο φαινόμενο. Στις υποκειμενικές θεωρίες η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι συνδεδεμένη με κάθε άτομο. Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές δεν υπάρχει μια “αντικειμενική” πιθανότητα για κάποιο ενδεχόμενο. Υπάρχει μόνο η υποκειμενική πιθανότητα που εξαρτάται φυσικά από το πρόσωπο που την δίνει. Κύριοι εκφραστές των θεωριών αυτών είναι οι De Finetti, Savage, Good, Lindley κ.λ.π..

Ο De Finetti, που θεωρείται ο εγκυρότερος εκφραστής των θεωριών αυτών, υποστηρίζει ότι η πιθανότητα που κάποιο άτομο αντιστοιχεί σ' ένα ενδεχόμενο αποκαλύπτεται από τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το άτομο αυτό θα ήταν διατεθειμένο να στοιχηματίσει για το ενδεχόμενο (Batanero, 2013).

Ο Savage ονομάζει τις πιθανότητες αυτές “προσωπικές πιθανότητες”. Κάθε άτομο θα πρέπει να είναι “συνεπές” (coherent) στον τρόπο με τον οποίο καθορίζει τις πιθανότητες στοιχειωδών ενδεχομένων, έχει όμως την ελευθερία να δώσει όποια πιθανότητα θέλει σε κάθε ενδεχόμενο χωρίς αυτό να δίνει δικαίωμα κριτικής στους άλλους. Εάν δηλαδή κάποιος υποστηρίζει ότι “η πιθανότητα του να βρέξει αύριο είναι 0.90” κανείς δεν μπορεί να πει ότι αυτό είναι λάθος (Borovcnik, Karadia, 2014).

Η πιθανότητα αυτή δίνει απλώς την διάθεση του ατόμου να στοιχηματίσει με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι οπαδοί των υποκειμενικών θεωριών υποστηρίζουν, ότι κάθε άτομο θα πρέπει να έχει “συνέπεια” στον τρόπο με τον οποίο στοιχηματίζει. Υπάρχουν πολλές αντιρρήσεις στις απόψεις αυτές που στηρίζονται στην έννοια του στοιχήματος. Άλλες είναι τεχνικής φύσης (είναι εφικτές;) και άλλες φιλοσοφικής (είναι χρήσιμες;).

Στην πρώτη κατηγορία αναφέρονται ενδεικτικά οι εξής:

- i) Υπάρχουν άτομα που δεν είναι διατεθειμένα να στοιχηματίσουν.
- ii) Το στοίχημα είναι ένα κέρδος που εξαρτάται από τις δυνάμεις της αγοράς. Έστω για παράδειγμα ότι ένα άτομο βρίσκεται μέσα σε ένα δωμάτιο γεμάτο από μετεωρολόγους και υποστηρίζει ότι η πιθανότητα να βρέξει αύριο είναι 0.95. Αν διαπιστώσει ότι όλοι τρέχουν προς το μέρος του έτοιμοι να στοιχηματίσουν, δε θα μεταβάλλει την πιθανότητά του; Γιατί θα πρέπει η παρουσία άλλων να είναι δυνατόν να επηρεάσει την πιθανότητα ενός ατόμου;

Οι φιλοσοφικές αντιρρήσεις στηρίζονται στην άποψη ότι δεν ενδιαφέρει ιδιαίτερα με ποιο τρόπο ένα συγκεκριμένο άτομο είναι διατεθειμένο να στοιχηματίσει. Στην εποχή μας η διαφωνία έχει κυρίως περιορισθεί ανάμεσα στους υποστηρικτές των εμπειρικών θεωριών. Από φιλοσοφική άποψη η θεωρητική και η υποκειμενική προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας επειδή υπολογίζονται πριν τις δοκιμές του πειράματος, δηλαδή είναι ανεξάρτητες από την εμπειρία θεωρούνται *a priori*, ενώ η πειραματική προσέγγιση, αντίθετα με τις άλλες δύο προσεγγίσεις θεωρείται *a posteriori* (Batanero, 2013).

Με βάση τα παραπάνω, δεν θα πρέπει να προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι μία αρκετά εκτενής βιβλιογραφία είναι αφιερωμένη στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται, επεξεργάζονται και αξιολογούν τις πιθανότητες αβέβαιων γεγονότων στα πλαίσια εκμάθησης της έννοιας της πιθανότητας, της διαισθητικής στατιστικής και των αποφάσεων που λαμβάνονται με κάποια δόση ρίσκου (Borovcnik, Karadia, 2014).

Μελετώντας δε κανείς τις σχετικές έρευνες, ίσως το πιο σημαντικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει είναι ότι τα άτομα δείχνουν συχνά να μην ακολουθούν τις αρχές και τους κανόνες της θεωρίας των πιθανοτήτων κατά την εκτίμηση της επαλήθευσης ή μη κάποιας πρόβλεψης. Φυσικά, το γεγονός αυτό δεν θα πρέπει να μας ξενίζει, αν αναλογιστεί κανείς ότι οι περισσότεροι από τους νόμους της θεωρίας των πιθανοτήτων δεν είναι ούτε προφανείς, αλλά ούτε και εύκολα εφαρμόσιμοι (Tversky & Kahneman, 1972).

Αυτομάτως, λοιπόν, οφείλουμε να προβούμε σε μία διάκριση μεταξύ «υποκειμενικής» (subjective) και «αντικειμενικής» (objective) πιθανότητας. Συγκεκριμένα, θα λέγαμε ότι ο πρώτος όρος χρησιμοποιείται για να περιγράψει μία εκτίμηση αναφορικά με την πιθανότητα ενός γεγονότος, η οποία δίνεται από ένα άτομο ή συνάγεται από τη συμπεριφορά του και η οποία δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιεί τυχόν αξιώματα ή να χαρακτηρίζεται από επιστημονική συνέπεια.

Αντίθετα, ο δεύτερος όρος, αυτός της «αντικειμενικής πιθανότητας», αναφέρεται στον υπολογισμό αξιών σύμφωνα με τους κανόνες και τις γενικότερες επιστημονικές αρχές της θεωρίας των πιθανοτήτων (Tversky & Kahneman, 1972). Ως εκ τούτου, υπάρχει μία εν δυνάμει διαμάχη και αλληλεπίδραση ανάμεσα στην πιθανολογική γνώση την οποία το παιδί κατακτά άτυπα, κυρίως εκτός σχολείου, και στην τυπική γνώση και τους κανόνες που παρουσιάζει το σχολείο.

1.5 Η χρησιμότητα των Πιθανοτήτων

Σήμερα, τα Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική & Πιθανότητες) έχουν κάνει αλματώδη ανάπτυξη λόγω της όλο και περισσότερο αυξανόμενης χρήσης των εφαρμογών τους σε πάρα πολλούς τομείς της επιστήμης, της οικονομίας και του εμπορίου. Με τη βοήθεια των Πιθανοτήτων μελετάμε τους νόμους που διέπουν τις εκδηλώσεις τυχαίων φαινομένων και τους εφαρμόζουμε σε όλες σχεδόν τις επιστήμες όπως Φυσική, Βιολογία, Πληροφορική, Κοινωνιολογία, Οικονομία, Ψυχολογία, Ιατρική, Βιοιατρική, Περιβαλλοντολογία και Φαρμακευτική. Επίσης, με τα Στοχαστικά Μαθηματικά έχουμε τη δυνατότητα να προβλέπουμε τη διαχρονική εξέλιξη των φαινομένων στο άμεσο μέλλον, μετά από αντικειμενική μελέτη του παρελθόντος. Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από τη ραγδαία αύξηση του πλήθους των πληροφοριών που αρκετές φορές πρέπει να αξιοποιήσουμε με το σωστό τρόπο για την εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων, όπως τις δημοσκοπήσεις και τα ερευνητικά ερωτηματολόγια.

Επιπλέον, στις μέρες μας είναι διαδεδομένη, αλλά και απαραίτητη η χρήση μεθόδων Πληροφορικής για την εφαρμογή της Στατιστικής επιστήμης (από τη χρήση λογιστικών φύλλων όπως το Excel, μέχρι εξειδικευμένων στατιστικών πακέτων όπως το SPSS, TinkerPlots, Fathom κτλ), οπότε είναι απαραίτητη η γνώση στοιχείων Στατιστικής για τη χρήση αυτών των λογισμικών. Στην καθημερινή ζωή, κάθε άνθρωπος με τη χρήση βασικών στοιχείων Στατιστικής μπορεί πιο εύκολα να αξιοποιεί πληροφορίες, να ποσοτικοποιεί, να προβλέπει, να διαχειρίζεται τα οικονομικά του, να κάνει έρευνα αγοράς και να παίρνει σωστές αποφάσεις για τον εαυτό του ή μέλη της οικογένειάς του.

Στο σχολείο, με τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών, οι μαθητές αναπτύσσουν ικανότητες που είναι απαραίτητες για τη μετέπειτα ζωή τους, είτε ως επιστήμονες είτε ως πολίτες. Μαθαίνουν να «διαβάζουν» κριτικά ένα σύνολο δεδομένων, να επιλέγουν τον κατάλληλο τρόπο αναπαράστασής τους, να περιγράφουν «τι δείχνουν» αυτά τα δεδομένα και κυρίως να τα αξιοποιούν σε καταστάσεις αβεβαιότητας λαμβάνοντας σωστές αποφάσεις. Από όλα τα παραπάνω γίνεται φανερό πως στην εποχή μας οι γνώσεις Πιθανοτήτων και Στατιστικής είναι απαραίτητες σε κάθε πολίτη, σε κάθε εργαζόμενο, σε κάθε επιστήμονα που θέλει να αντιμετωπίζει τις προκλήσεις της ζωής, της εργασίας ή της επιστήμης με επιτυχία και αποτελεσματικότητα (Garfield & Chance, 2000).

2. Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Η Διδακτική των πιθανοτήτων

Οι ανάγκες της σύγχρονης μεταβαλλόμενης κοινωνίας των τελευταίων δεκαετιών σε συνδυασμό με τα προβλήματα στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών, όπως η αποστήθιση ακατανόητων και ασύνδετων μαθηματικών κανόνων, συνεπάγονται τη δημιουργία πολλαπλών παρανοήσεων γύρω από τις μαθηματικές έννοιες, την αδυναμία σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης με την πραγματικότητα έξω από το σχολείο, έθεσαν τις βάσεις ώστε από το 2000 και μετά η μαθηματική εκπαίδευση να βασίζεται σε δύο θεμελιώδεις αρχές για τη μάθηση. Την ουσιώδη εκμάθηση Μαθηματικών η οποία απαιτεί όχι μόνο υπολογιστικές δεξιότητες αλλά και κατανόηση και ικανότητα για μαθηματική σκέψη και συλλογισμό με στόχο την επίλυση προβληματικών καταστάσεων (Prodromou & Pratt, 2013) και ότι η μάθηση είναι μια ενεργός προσπάθεια των μαθητών, η οποία συντελείται αποτελεσματικότερα σε ένα περιβάλλον

όπου προωθείται η επίλυση προβλημάτων, η παραγωγή ιδεών, η διατύπωση υποθέσεων, ο πειραματισμός, η ανάπτυξη συλλογιστικών δεξιοτήτων η ομαδική εργασία καθώς και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών (Van de Walle, 2005). Για αυτό τον σκοπό η διδασκαλία και η εκμάθηση των βασικών πιθανολογικών εννοιών αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα «οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να:

- Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα (κατηγορικά).
- Συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και τα οργανώνουν (υλικά, καταμέτρηση με γραμμές).
- Επεκτείνουν τις αναπαραστάσεις των δεδομένων και σε διαγράμματα όπως τα ραβδογράμματα.
- Κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης δεδομένων σε μία άλλη.
- Συγκρίνουν πληροφορίες στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης δεδομένων.
- Περιγράφουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα (δειγματικός χώρος) σε απλά πειράματα τύχης ενός σταδίου.
- Χαρακτηρίζουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο-άδικο (τριών ή περισσότερων ενδεχομένων).
- Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, απίθανο, αδύνατο.
- Υπολογίζουν την πιθανότητα ενδεχομένου.

Σύμφωνα με το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα ένας από τους κύριους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι «η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου». Οι πιθανότητες είναι ένα πεδίο των μαθηματικών με περιεχόμενο που είναι εξολοκλήρου νέο. Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας των Στοχαστικών Μαθηματικών (Στατιστική, Πιθανότητες) στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, όπως προαναφέραμε, είναι να αναπτύξει την ικανότητα του μαθητή να αξιολογεί κριτικά πληροφορίες, να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες.

Η βασική διαφορά των Στοχαστικών Μαθηματικών από τις άλλες θεματικές περιοχές των Μαθηματικών είναι ότι μελετά προβλήματα που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα δεδομένων, δηλαδή με την διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν).

Η διδασκαλία των πιθανοτήτων κρίνεται απαραίτητη κυρίως λόγω των εφαρμογών τους σε δραστηριότητες εκτός των μαθηματικών και του διαφορετικού «τρόπου σκέψης» που απαιτείται σε σχέση με την υπόλοιπη ύλη των μαθηματικών. Στόχος είναι να δοθεί έμφαση στην εμπλοκή των μαθητών με προβλήματα που θα αναδεικνύουν την έννοια της πιθανότητας και θα αποφεύγεται η "αλγεβροποίηση" της διδασκαλίας των πιθανοτήτων.

Εξετάζοντας τα στοχαστικά συστήματα οι μαθητές κατανοούν σταδιακά ότι, αν και τα ακριβή αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης μπορεί να είναι αβέβαια και απρόβλεπτα, η εμπειρία από την παρατήρηση του συστήματος μπορεί να οδηγήσει στην καταγραφή όλων των δυνατών ενδεχομένων και στην εκτίμηση των πιθανότερων ενδεχομένων. Τα παιδιά μπορούν να οικοδομήσουν πάνω στη διαισθητική τους αντίληψη για τις πιθανότητες και να διακρίνουν ότι, αν και απρόβλεπτα, τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης μπορεί να εμφανίζονται με κάποια οριακά σταθερή συχνότητα.

Συνεπώς, γίνεται κατανοητό όλο και περισσότερο ότι η αναφορά στις πιθανότητες στις περισσότερες τάξεις του σχολείου καθίσταται αναγκαία αφού η πλειονότητα των καταστάσεων της καθημερινής μας ζωής περιέχει κάποιο βαθμό τυχαιότητας και πάρα πολλές φορές οι επιλογές και οι αποφάσεις μας παίρνονται με πιθανολογική συλλογιστική. Έτσι, θα λέγαμε ότι η γνώση των αρχών και των νόμων των πιθανοτήτων απαιτείται στους περισσότερους επιστημονικούς και ερευνητικούς τομείς, καθώς και σε διάφορα προβλήματα της καθημερινότητας.

Παρόλο που η έννοια της πιθανότητας είναι συνυφασμένη με τον κόσμο που ζούμε, οι ψυχολόγοι Tversky και Kahneman (1974, 1983) υποστηρίζουν ότι κατά τη λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας, οι άνθρωποι δείχνουν να μην ακολουθούν τις αρχές της θεωρίας των πιθανοτήτων με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε «σοβαρά και συστηματικά λάθη». Σχετικά με την εξέλιξη της σκέψης των παιδιών δημοτικού όσον αφορά τις πιθανολογικές εκφράσεις οι Σκουμπουρδή και Καλαβάσης υποστηρίζουν πως είναι αναγκαία και εφικτή η διδασκαλία των πιθανοτήτων από τις μικρές τάξεις του δημοτικού, αρκεί η εισαγωγή αυτή να πραγματοποιηθεί με τη χρήση κατάλληλων πιθανολογικών εκφράσεων ανάλογα με την ηλικία του μαθητή. Η δυσκολία των μαθητών έγκειται στη μη εξοικείωσή τους με προβλήματα πιθανοτήτων, τα οποία παραγκωνίζονται μέσα από τα σχολικά βιβλία και στην παρουσίαση τέτοιων προβλημάτων, με λανθασμένο για την ηλικία τους λεξιλόγιο.

Σύμφωνα με έρευνες, οι ιδέες των μαθητών της Ε' και ΣΤ' δημοτικού σχετικά με πιθανολογικά ζητήματα φαίνονται να στηρίζονται κυρίως σε υποκειμενικές ερμηνείες. Στοιχεία από τη θεωρία πιθανοτήτων έχουν εισαχθεί τα τελευταία χρόνια στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών σε πολλές χώρες (NCTM, 2000). Για παράδειγμα, η ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών σε σχέση με δεδομένα και πιθανότητες κατέχει σημαντικό ρόλο στο αγγλικό αναλυτικό πρόγραμμα (National Curriculum), με ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή προβλήματος, στη συλλογή και ερμηνεία δεδομένων, στην ποσοτική ανάλυση ποιοτικών πληροφοριών και στην αναπαράσταση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Ερευνητικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι η ύπαρξη πολλαπλών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων είναι ιδιαίτερα σημαντική (Pratt, 2000). Στα εθνικά επίπεδα του National Council of Teachers of Mathematics (2000) ενθαρρύνεται η χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος τόσο στο δημοτικό όσο και στο γυμνάσιο.

Στην περίπτωση των πιθανοτήτων υπάρχουν οι εικονικές αναπαραστάσεις, οι διακοσμητικές, τα διαγράμματα, οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες και τα πραγματικά χειριστικά μέσα που βοηθούν στη διεξαγωγή πειραμάτων. Τα ψηφιακά χειριστικά μέσα αποτελούν ακόμη μια μορφή αναπαράστασης που επιτρέπουν στο χρήστη την αλληλεπίδραση με δυναμικά αντικείμενα - αναπαραστάσεις. Μέσα από αυτή την αλληλεπίδραση, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να φτιάξουν έννοιες και να δουν σχέσεις ως αποτέλεσμα των δικών τους ενεργειών.

2.1.1 Σημαντικές έρευνες πάνω στην διδακτική πιθανοτήτων

Οι έρευνες των Piaget και Inhelder (Inhelder και Piaget, 1958) για την ανάπτυξη της πιθανολογικής σκέψης έγιναν στο πλαίσιο της γενικότερης εργασίας τους για την διανοητική ανάπτυξη σε έννοιες όπως ο αριθμός, ο χώρος, ο αναλογικός συλλογισμός και η φυσική αιτιότητα. Τα βασικά πορίσματα των ερευνών αυτών αφορούν σε ζητήματα όπως η έννοια του τυχαίου, ο δειγματικός χώρος, η κατανομή πιθανοτήτων, ο νόμος των μεγάλων αριθμών κ.ά. Πιο συγκεκριμένα για το στάδιο της προσυλλογιστικής σκέψης (preoperational stage, 4-7 ετών), οι Piaget και Inhelder (Jones και Thorton, 2005) ισχυρίζονται ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να διακρίνουν τα βέβαια από τα αβέβαια γεγονότα και να αναγνωρίσουν όλα τα δυνατά ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με συστηματικό τρόπο.

Οι εκτιμήσεις τους για τα περισσότερο και λιγότερο πιθανά ενδεχόμενα βασίζονται συνήθως σε υποκειμενικές διαισθητικές κρίσεις. Επιπλέον, τα παιδιά εμφανίζουν δυσκολία στην πρόβλεψη και την κατανόηση της έννοιας της κατανομής των πιθανοτήτων (probability distribution).

Στο στάδιο των συγκεκριμένων πράξεων (concrete operational, 8-11 ετών) τα παιδιά μπορούν να διακρίνουν τα βέβαια από τα τυχαία γεγονότα και να καταγράφουν τα πιθανά ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, χωρίς ωστόσο να εφαρμόζουν πάντα με συνέπεια κάποια συστηματική μέθοδο. Οι εκτιμήσεις για τα περισσότερο και λιγότερο πιθανά ενδεχόμενα αρχίζουν να γίνονται με ποσοτικές συγκρίσεις, αν και δυσκολεύονται να εφαρμόσουν αναλογικό συλλογισμό για τον προσδιορισμό του βέλτιστου δειγματικού χώρου για δεδομένο επιδιωκόμενο ενδεχόμενο και εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση των κατανομών πιθανοτήτων.

Στο στάδιο των τυπικών λογικών πράξεων (formal operational, 11+ ετών) τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να τα καταφέρουν με όλα τα ζητήματα που μελετήθηκαν στην έρευνα, δηλαδή τη διάκριση των τυχαίων από τα βέβαια γεγονότα, την καταγραφή των πιθανών ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης, την ποσοτική σύγκριση των πιθανοτήτων διαφόρων ενδεχομένων και την πρόβλεψη της κατανομής των πιθανοτήτων. Οι έρευνες των Piaget και Inhelder και το βασικό αίτημα ότι τα παιδιά δεν έχουν τη δυνατότητα κατανόησης των πιθανοτήτων πριν το στάδιο των τυπικών λογικών πράξεων επηρέασε την μαθηματική εκπαίδευση μειώνοντας το ενδιαφέρον για τις προσπάθειες εισαγωγής της διδασκαλίας των πιθανοτήτων στις πρώτες βαθμίδες.

Οι έρευνες των Piaget και Inhelder έγιναν κατά βάση με την προσέγγιση της ψυχολογίας και όχι της εκπαίδευσης τα αποτελέσματα τους έρχονται ως ένα βαθμό σε αντίθεση με τις έρευνες του Fischbein και τα πειραματικά δεδομένα του παρόντος με την έννοια ότι οι πιθανολογικές αντιλήψεις είναι πιθανό να διαμορφωθούν και να εξελιχθούν από εκπαιδευτικές παρεμβάσεις πριν το στάδιο των τυπικών πράξεων. Τα πορίσματα των ερευνών αυτών όμως παραμένουν σημείο αναφοράς για τις μεταγενέστερες έρευνες.

Πολλοί ερευνητές προσπάθησαν να προσεγγίσουν με πειράματα την θεωρία του Piaget σχετικά με τις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών οι οποίες βελτιώνονται με την ηλικία και την κατάλληλη διδασκαλία, (Fischbein & Gazit, 1984, Green, 1983). Στο πλαίσιο αυτό ερευνήθηκαν και αναλύθηκαν διάφορες έννοιες, όπως οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την πιθανότητα.

Έχει βρεθεί ότι η δυνατότητα των μαθητών να λύνουν και να χειριστούν απλά πιθανολογικά προβλήματα με το πέρασμα των χρόνων βελτιώνεται μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας, κάτι το οποίο όμως δεν παρατηρείται σε προβλήματα που έχουν περισσότερες μαθησιακές και γνωστικές απαιτήσεις, όπου η βελτίωση είναι μικρή ή και ανύπαρκτη. Πιο συγκεκριμένα οι Fischbein & Schnarch, (1997) κατέληξαν στην έρευνα που έκαναν σχετικά τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να βελτιωθεί η κατανόηση των πιθανοτήτων από τους μαθητές με χρήση των αρχικών αντιλήψεών τους, ότι δηλαδή υπάρχει τρόπος επιρροής τους, όχι μόνο μέσω λεκτικών εξηγήσεων αλλά και μέσα από τη διδακτική παρέμβαση με πρακτικές δραστηριότητες.

Στην έρευνα αυτή ο Fischbein προτείνει ως εργαλείο για την διδασκαλία των πιθανοτήτων τη δημιουργία διαισθητικών δευτερογενών αντιλήψεων. Πρακτικά προτείνει, να εμπλακεί ο μαθητής ενεργά σε μια διαδικασία εκτέλεσης πειραμάτων τύχης, καθώς και σε άλλες αντίστοιχες δραστηριότητες σύγκρισης των εκ των προτέρων υπολογισμένων πιθανοτήτων με αποτελέσματα μεμονωμένων και επαναλαμβανόμενων πειραμάτων καθώς και πρόβλεψη αποτελεσμάτων και αποτίμηση πιθανοτήτων. Στο πλαίσιο της έρευνας τους σημειώνει ότι οι αρχικές αντιλήψεις πολλές φορές των μαθητών είναι συνήθως πολύ ανθεκτικές αλλά μπορούν να συνυπάρξουν με αντιλήψεις που σχετίζονται με έννοιες και νοήματα ανώτερα και επιστημονικά αποδεκτά.

Ο Fischbein (1975) υποστηρίζει πως οι διαισθητικές αντιλήψεις (intuitions) είναι γνωστικές κατακτήσεις ή πεποιθήσεις, οι οποίες είναι αυθόρμητες, ολιστικές και αυταπόδεικτες για το άτομο που τις κατέχει. Διαισθητικές αντιλήψεις οι άνθρωποι διαθέτουν εκτός από τις πιθανότητες και για αριθμητικές ή γεωμετρικές έννοιες καθώς και για έννοιες των φυσικών επιστημών. Βασική αρχή της θεωρίας του Fischbein είναι ότι οι διαισθητικές αντιλήψεις είναι προσαρμόσιμες και μπορούν να επηρεαστούν από συστηματική διδασκαλία.

Η θέση αυτή, είναι η βασική αντίθεση του Fischbein με την προσέγγιση του Piaget και οδήγησε στην διατύπωση της διάκρισης ανάμεσα στις πρωτογενείς και δευτερογενείς διαισθήσεις. Οι πρωτογενείς διαισθήσεις προκύπτουν από τις εμπειρίες του ατόμου. Αντίθετα, οι δευτερογενείς διαισθητικές αντιλήψεις αποτελούν προσαρμογές γνωστικών πεποιθήσεων που αποκτήθηκαν με διδασκαλία τυπικά στο πλαίσιο μιας μαθησιακής δραστηριότητας. Οι πρωτογενείς αντιλήψεις που αναδομούνται με διδασκαλία δεν χάνονται πάντα και είναι πιθανό να ξαναεμφανιστούν σε μια διαφορετική, αλλά συναφή εργασία.

Αυτή η περίεργη συνύπαρξη γνώσεων μπορεί να δημιουργήσει ασυνέπειες στις αντιδράσεις των μαθητών και στην συνολική κατανόηση του προβλήματος και της λύσης του. Για παράδειγμα ο μαθητής μπορεί να καταλάβει με την λογική του ότι πως αν πετάξει ένα νόμισμα αρκετές φορές, κάθε φορά έχει την ίδια πιθανότητα να φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα. Ακόμη πάλι διαισθητικά μπορεί να αισθανθεί και να αντιληφθεί, ότι μετά από 3-4 φορές που έχει φέρει «Α», στην επόμενη ρήψη υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να φέρει «Β». Άρα λοιπόν ένας από τους πρώτους ρόλους του διδάσκοντα μαθηματικών είναι να γνωστοποιήσει και να εξοικειώσει τους μαθητές του με τα διαισθητικά πρότυπα που είναι παρόντα στη σκέψη τους (αρχικές ιδέες) αλλά και ταυτόχρονα να μπορέσει να καλλιεργήσει και να τους αναπτύξει την ικανότητα να μπορούν ελέγχουν τις αρχικές τους αντιλήψεις, ίσως καμιά φορά και προκαταλήψεις, ώστε να χτίζονται και να δομούνται νέες δευτερογενείς αντιλήψεις (δευτερογενείς ιδέες) οι οποίες συναντώνται και διδάσκονται στην επίσημη μορφή τους.

Ο Fischbein (1975) πιστεύει ότι τα διαισθητικά μοντέλα αποτελούν την αφετηρία για την οικοδόμηση της γνώσης στις έννοιες των πιθανοτήτων. Ορίζει ως διαισθητικό μοντέλο τη γνώση που εμφανίζεται υποκειμενικά ως αυταπόδεικτη, η οποία είναι άμεσα αποδεκτή από το άτομο και θεωρείται ολιστική και έμμεσα καταναγκαστική. Επίσης, υποστήριξε ότι καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν, αρχίζουν να αναζητούν πιο σύνθετες και εξειδικευμένες στρατηγικές, βασισμένοι στην παρανόηση ότι υπάρχουν κανόνες που καθορίζουν την τυχαία κατανομή (Fischbein, E., Pampu, I., & Mânzat, I. 1970).

Οι Borovcnik and Bentz (1991), προτείνουν ότι η παραδοσιακή διδασκαλία των πιθανοτήτων δημιουργεί πολύ λίγες συνδέσεις μεταξύ των αρχικών ιδεών (αντιλήψεων) του αρχάριου μαθητή και της ευδιάκριτης κωδικοποιημένης μαθηματικής θεωρίας. Προτείνουν ότι η διδασκαλία πρέπει να αρχίσει από τις αρχικές διαισθήσεις των μαθητών, προσπαθώντας να τις αλλάξει και να τις αναπτύξει. Ο Borovcnik (2011) επισημαίνει ότι μια λογική προσέγγιση σκέψης αλλά και μια αιτιώδης προσέγγιση σκέψης είναι συμβατές στο διαισθητικό επίπεδο, και ότι η διδασκαλία πρέπει να αναπτύξει τις δευτερεύουσες διαισθήσεις που διευκρινίζουν πώς η πιθανολογική σκέψη συσχετίζεται με αυτές τις προσεγγίσεις. Ίσως η τρέχουσα διδασκαλία των πιθανοτήτων να δημιουργεί ελάχιστες έως και μηδενικές συνδέσεις με την αιτιοκρατική σκέψη των μαθητών και να μην την βελτιώνει με μια πιθανολογική ερμηνεία.

Οι Pratt και Noss (2002) βρήκαν ότι οι διαισθητικές αντιλήψεις των υποκειμένων επηρεάζονται από τα βιώματα τους και διάφορα πραγματικά αποτελέσματα, όπως τη ρίψη ενός ζαριού. Αντίθετα, η ενασχόληση και αλληλεπίδρασή τους με ένα λογισμικό πιθανοτήτων είχε ως αποτέλεσμα να εναρμονίσουν τις παλιές τους αντιλήψεις με νέες που προήλθαν από την αλληλεπίδρασή τους με τις δυναμικές αναπαραστάσεις του λογισμικού.

Ο Pratt (2000) βρήκε ακόμη ότι οι μαθητές με τη βοήθεια ενός κατάλληλου προγράμματος στον ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορούν να βοηθηθούν στο να αναπτύξουν την «επιτόπια» και «σφαιρική» πιθανολογική τους σκέψη. Με τον όρο «επιτόπια» αναφέρεται στις αντιλήψεις που προέρχονται από προσωπικές τους εμπειρίες και βιώματα, ενώ με τον όρο «σφαιρικές» αναφέρεται στις συνολικές τους αντιλήψεις στον τομέα των πιθανοτήτων. Ο Pratt περιγράφοντας το πρόγραμμα αυτό, αναφέρεται στις δυναμικές του αναπαραστάσεις με αντικείμενα από την καθημερινή ζωή όπως τα ζάρια, κέρματα, λοταρίες και παιγνίδια με την τράπουλα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, διαπιστώνεται μέσα από έρευνες (Fischbein, E., Nello, M., S. & Marino, M., S., 1991) ότι τα παιδιά από μικρές ηλικίες μπορούν σε διαφορετική έκταση να αναπτύξουν διαισθητικές αντιλήψεις σχετικές με πιθανολογικές έννοιες. Οι αντιλήψεις αυτές διαμορφώνονται από τις εμπειρίες τους και τις δομημένες μαθησιακές δραστηριότητες και μπορούν να ανιχνευθούν είτε μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες παρεμβάσεις είτε σε συνθήκες λήψης απόφασης υπό αβεβαιότητα (Pratt, 2001). Είναι εύλογο να αναλογιστεί κανείς αν οι Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) με τη δυνατότητά τους να εμπλουτίζουν και να μετασχηματίζουν τη μάθηση και τη διδασκαλία έχουν επίδραση στις διαισθητικές αντιλήψεις των παιδιών για τις πιθανότητες.

2.1.2 Ψηφιακές Τεχνολογίες στη διδακτική πράξη των Μαθηματικών

Η πλέον ευρέως αποδεκτή άποψη της ερευνητικής κοινότητας για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι ότι οι μαθητές δεν είναι «άδεια δοχεία» όταν τους καλούμε να συμμετάσχουν στις διδακτικές καταστάσεις που έχουμε σχεδιάσει για αυτούς ή όταν αντιμετωπίζουν επιστημονικές ή μαθηματικές θεωρίες. Αντίθετα, έχουν ήδη οικοδομήσει, στη βάση των καθημερινών τους εμπειριών, αλλά και της προηγηθείσας σχολικής τους θητείας, μια θεωρία «κοινής λογικής» προκειμένου να κατανοούν και να ερμηνεύουν τον κόσμο που τους περιβάλλει κατακτώντας έτσι τη νέα γνώση (Βοσνιάδου, 2000).

Φυσικά η μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας δεν είναι μια απλή υπόθεση καθώς ο τρόπος με τον οποίο κάθε μαθητής μαθαίνει ποικίλλει σημαντικά. Η εκμάθηση των μαθηματικών έχει την ίδια φύση με τη διαδικασία στην οποία εμπλέκονται οι μαθηματικοί επιστήμονες (Κυνηγός, 2006). Συνίσταται δηλαδή στην εμπειρική, υποθετικό – παραγωγική διαδικασία, όπου το ζητούμενο είναι η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από τις υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Κυνηγός, 2006). Εκεί ακριβώς είναι που με ειδικά ψηφιακά εργαλεία ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να «κάνει μαθηματικά» με τρόπους που ήταν αδύνατο με τα προ – τεχνολογικά μέσα όπως αυτά του χαρτιού και του μολυβιού (Κυνηγός, 2006).

Η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας στον ευρύτερο χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη και εστιάζει κυρίως σε πτυχές που αφορούν τη χρήση των νέων υπολογιστικών εργαλείων στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τα χαρακτηριστικά του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή (αποθήκευση και επεξεργασία μεγάλου αριθμού πληροφοριών, άμεση ανατροφοδότηση) παρέχουν τη δυνατότητα ενός διαφορετικού τρόπου οργάνωσης και σχεδίασης της μαθησιακής διαδικασίας με στόχο την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε προβληματικές καταστάσεις που έχουν προσωπικό νόημα γι' αυτούς. Ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο κυριαρχεί η χρήση της τεχνολογίας είναι πιο πυκνό σε ερεθίσματα και πιο πλούσιο σε ευκαιρίες εμπλοκής στα Μαθηματικά. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον ο μαθητής-χρήστης αυτενεργεί, εκφράζεται ελεύθερα, κάνει εικασίες, τις επανεξετάζει καθώς επίσης καλλιεργεί τη λειτουργία της αναστοχαστικής αφαίρεσης κατά την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών.

2.1.3 Οι παρανοήσεις των μαθητών γύρω από τις πιθανότητες

Οι πιθανότητες όπως και άλλοι κλάδοι των μαθηματικών, απαιτούν την καλλιέργεια αφηρημένης σκέψης. Η διαφορά με τις πιθανότητες είναι ότι χρειάζονται ένα διαφορετικό τρόπο σκέψης, σε σχέση με αυτόν που καλλιεργείται και χτίζεται στο σχολείο με τα χρόνια, όσον αφορά τα μαθηματικά. Αυτό το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους, εξηγεί την ύπαρξη εσφαλμένων αντιλήψεων και μαθησιακών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν μαθητές διαφόρων ηλικιών (Shaughnessy, 1983). Ακόμα και κατόπιν σχετικής διδασκαλίας, πολλοί δυσκολεύονται να κατανοήσουν απλές έννοιες των πιθανοτήτων και να αποκτήσουν βασικές δεξιότητες για την επίλυση προβλημάτων. Πολλές λανθασμένες αντιλήψεις στις πιθανότητες δεν είναι απομονωμένα λάθη, αλλά φαίνεται να αποτελούν μέρη ενός τρόπου σκέψης, ο οποίος είναι βαθιά ριζωμένος σε πολλούς ανθρώπους. Η γλώσσα των πιθανοτήτων που χρησιμοποιείται χρησιμοποιεί λέξεις γνωστές μεν στους

μαθητές αλλά με διαφορετικό νόημα από την καθημερινή μη μαθηματική ομιλία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παρακωλύεται η επικοινωνία στην τάξη καθώς και να παρεμποδίζεται η κατανόηση από τους μαθητές.

Σύμφωνα με τον Fischbein (1975) οι περισσότεροι μαθητές έχουν την παρανόηση του negative recency effect ή πλάνη του παίκτη (gambler's fallacy). Το «πιστεύω» αυτό, βασίζεται στο ότι η εναλλαγή των αποτελεσμάτων αντιπροσωπεύει καλύτερα μια τυχαία ακολουθία. Ο Fischbein ορίζει την παρανόηση αυτή ως την «επιρροή από το αρνητικό αποτέλεσμα», την αντίληψη δηλαδή, ότι μετά από πολλές συνεχόμενες εμφανίσεις ενός αποτελέσματος (π.χ. κορώνα στο κέρμα) την επόμενη φορά θα εμφανιστεί το άλλο ενδεχόμενο (γράμματα). Σύμφωνα με τον Kahneman και τους συνεργάτες του (Kahneman, Slovic, Tversky, 1982), όταν οι ερωτηθέντες έρχονται αντιμέτωποι με μια πιθανολογική κατάσταση, συχνά εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, βασιζόμενοι στο πόσο καλά αυτό το ενδεχόμενο αντιπροσωπεύει αυτόν τον πληθυσμό. Αυτή η στρατηγική βασίζεται στην αντιπροσωπευτικότητα της δοσμένης πληροφορίας (representativeness) γνωστή και ως πλάνη του παίκτη (gambler's fallacy) όπου κάποιος για παράδειγμα πιστεύει ότι μετά από πέντε συνεχόμενες ΚΕΦΑΛΕΣ που εμφανίζονται κατά τη ρίψη ενός νομίσματος, το επόμενο αποτέλεσμα που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί είτε θα είναι διαφορετικό (negative recency effect) είτε θα είναι το ίδιο με τα προηγούμενα (positive recency effect). Και στις δύο περιπτώσεις φαίνεται να αγνοείται η ανεξαρτησία της κάθε ρίψης του νομίσματος.

Επιπλέον, ο κόσμος έχει την τάση να συγχέει τα εξαιρετικά γεγονότα με εκείνα που έχουν ελάχιστη πιθανότητα. Ακριβώς επειδή ένα γεγονός είναι εξαιρετικό, αυτό δεν συνεπάγεται ότι έχει λιγότερη πιθανότητα από λιγότερο χτυπητά γεγονότα

Η έρευνα του Wilensky (1997) έδειξε, ότι όταν οι μαθητές έχουν δυσκολίες ή παρανοήσεις, αυτές προέρχονται από τη σύγχυση που υπάρχει μεταξύ των διάφορων εννοιών των πιθανοτήτων. Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM), υποστηρίζει ότι η στατιστική και η ανάλυση δεδομένων αναφάνηκε ως σημαντικό μέρος του σχολικού αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών κατά τη δεκαετία του 1990. Η υπάρχουσα προσέγγιση στην ανάλυση δεδομένων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από γραφικές αναπαραστάσεις. Στον ελληνικό χώρο, η στατιστική αποτελεί μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων του δημοτικού σχολείου και αφορά σε στοιχειώδεις έννοιες της στατιστικής, όπως ποσοστά επιτυχίας, συχνότητα, μέσος όρος κ.ά.

Πέραν της λεκτικής έκφρασης, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιούνται οι γραφικές αναπαραστάσεις και η μορφή πίνακα.

Η υποκειμενική ή διαισθητική εκτίμηση βασίζεται στην εμπειρία και συχνά χαρακτηρίζεται από γνωστικές προκαταλήψεις και αντιληπτικές αυταπάτες που συμβαίνουν, όταν για παράδειγμα ένα άτομο πρέπει να διαπραγματευτεί μια υπολογιστικά πολύπλοκη υπόθεση και την υποκαθιστά με μια απλούστερη, χωρίς να αντιλαμβάνεται ότι διαπραγματεύεται ένα τελείως διαφορετικό πρόβλημα, ή όταν θεωρεί περισσότερο σημαντικά ή συχνά τα φαινόμενα που θυμάται περισσότερο (Tversky & Kahneman, 1972).

Επιπλέον, ένα πρόβλημα κατά την εκτίμηση των πιθανοτήτων είναι ότι οι μαθητές, επειδή δεν μπορούν να καταλάβουν με ποιο τρόπο λειτουργεί το τυχαίο φαινόμενο που παρατηρούν τότε αποδίδουν την μη ικανότητα ελέγχου τους σε κάποια μυστήρια δύναμη που καθορίζει τη ροή των αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης.

Οι μαθητές όταν εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, συχνά αγνοούν την εμπλοκή του μεγέθους του δειγματικού χώρου (π.χ. συγκρίνουν την πιθανότητα να έρθουν 2 κεφαλές σε 3 ρίψεις σε σχέση με την πιθανότητα να έρθουν 200 κεφαλές σε 300 ρίψεις). Αυτού του είδους το λάθος συχνά συνδέεται και με την μη κατανόηση του νόμου των μεγάλων αριθμών, (Tversky & Kahneman, 1972). Αυτά τα λάθη κατά την εκτίμηση των πιθανοτήτων γίνονται γιατί οι μαθητές χρησιμοποιούν απλοποιημένες τεχνικές εκτίμησης των πιθανοτήτων (heuristics). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην καταγραφή του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης, δεν χρησιμοποιούν την αναλογία και δεν έχουν συνειδητοποιήσει το ρόλο των επαναλήψεων σε ένα πείραμα. Επιπλέον, η προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας στα υπάρχοντα διδακτικά βιβλία βασίζεται μόνο στον κλασικό ορισμό και έτσι δεν δίνεται στον μαθητή η ευκαιρία να χτίσει σταδιακά τη μαθηματική γνώση μέσα από την πορεία: πρόβλεψη-πείραμα-μοντελοποίηση προβλήματος.

Ένα πρόβλημα με την διδασκαλία των πιθανοτήτων που προκύπτει μέσα από τις έρευνες είναι το γεγονός ότι στη προσπάθειά μας να απαλλάξουμε τους μαθητές από την δυσκολία και την πολυπλοκότητα του θέματος, παρουσιάζουμε την απλούστερη των περιπτώσεων, την πιθανότητα δηλαδή ως λόγο του αριθμού των ευνοϊκών προς το σύνολο των παρατηρήσεων αποσιωπώντας ότι ο νόμος δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θεωρούν ότι πάντοτε τα ενδεχόμενα πρέπει να είναι ισοδύναμα. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται equiprobability bias (Lecoutre, 1992). Οι μαθητές έρχονται σε επαφή μόνο με

πειράματα ρίψης ζαριών, νομισμάτων και εξαγωγής αντικειμένων από κουτιά. Τέτοια πειράματα αναφέρονται μόνο στην κλασσική θεωρητική προσέγγιση των πιθανοτήτων. Αυτά τα πειράματα τύχης δεν χρειάζονται εξοπλισμό εργαστηρίου, όπως άλλα πιο περίπλοκα φαινόμενα που εξοικειώνουν όμως τους μαθητές με την πειραματική προσέγγιση των πιθανοτήτων.

Έτσι μια καλή πρακτική για τη διδασκαλία της έννοιας της πιθανότητας είναι η έκθεση των μαθητών σε διαφορετικά στοχαστικά φαινόμενα και προβλήματα, όπου η ενεργή εμπλοκή τους στη διαμόρφωση και την ερμηνεία της έννοιας της πιθανότητας, θα δώσει τη δυνατότητα αναστοχασμού και της διόρθωσης των παρανοήσεων που πιθανόν έχουν και θα προετοιμάσει το έδαφος για την περαιτέρω έρευνα στους νόμους και τη θεωρία των πιθανοτήτων.

Σύμφωνα με τον Pratt (2000), ο κόσμος έχει υπερβολική εμπιστοσύνη στην αξιοπιστία μικρών δειγμάτων ενώ όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του ληφθέντος δείγματος, τόση περισσότερη εμπιστοσύνη υπάρχει στην προσέγγιση μιας παραμέτρου του πληθυσμού, όπως η μέση τιμή και η διασπορά. Έτσι, πολύς κόσμος έχει την τάση να θεωρεί τα μικρά δείγματα στατιστικής σαν πολύ πιο αξιόπιστες εκτιμήσεις των παραμέτρων του πληθυσμού από ότι πράγματι είναι. Αυτού του είδους η παρανόηση σχετίζεται με την αντιπροσωπευτικότητα είναι η πλάνη του εύρους του δείγματος (effect of sample size) ή και νόμος των μικρών αριθμών (Law of small numbers), όπου κάποιος για παράδειγμα πιστεύει ότι κάθε δείγμα ενός πληθυσμού πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό της πραγματικής αναλογίας. Γενικά, πιστεύεται ότι και σε πολύ μικρά δείγματα πρέπει να φαίνεται η διαδικασία με την οποία τα τυχαία γεγονότα γενικεύονται.

Επιπλέον, μια άλλη παρανόηση έγκειται στην ευκολία με την οποία τα άτομα συνεπώς και οι μαθητές ανακτούν περιστατικά (bias due to the retrievability of instances), όταν τους ζητάνε να εκτιμήσουν την πιθανότητα τους. Όταν η πιθανότητα ενός γεγονότος κρίνεται από το πλήθος των σχετικών περιπτώσεων που μπορούν να έρθουν στο μυαλό του ατόμου, τότε ένα γεγονός του οποίου περιπτώσεις είναι εύκολο να ανακτηθούν θα εμφανίζεται πιο πιθανό από ένα γεγονός ισοδύναμης συχνότητας του οποίου περιπτώσεις είναι λιγότερο ανακτήσιμες. Σημαντικό ρόλο στην ανάκτηση των γεγονότων, είναι και ο τρόπος με τον οποίο έχουν καταγραφεί στην μνήμη του κάθε ατόμου.

Αντιθέτως, σύμφωνα με τους Tversky και Kahneman πολλές φορές τα άτομα αξιολογούν τη συχνότητα ενός γεγονότος όχι με βάση τις σχετικές περιπτώσεις που βρίσκονται στην μνήμη τους, όπως αναλύσαμε προηγουμένως, αλλά με βάση τις περιπτώσεις που μπορούν να φανταστούν (bias of imaginability). Για

παράδειγμα, κάποιος που πρόκειται να ταξιδέψει αεροπορικώς και σαν άτομο φοβάται τις μετακινήσεις με αεροπλάνο, είναι εύκολο να φανταστεί διάφορα ατυχήματα που θα μπορούσαν να συμβούν κατά την διάρκεια της πτήσης, όπως μια βλάβη στην μηχανή, και κατά συνέπεια να θεωρήσει ότι η πιθανότητα να πέσει το αεροπλάνο είναι πολύ μεγάλη. Αντίστοιχα, μπορεί κάποιος να αξιολογήσει την πιθανότητα ότι ένα συγκεκριμένο επιχειρηματικό εγχείρημα θα αποτύχει με το να φαντάζεται τις διάφορες δυσκολίες που μπορεί να συναντήσει. Αυτές οι δύο παρανοήσεις δείχνουν την υποκειμενική έννοια της πιθανότητας.

Σύμφωνα με τον Kahneman και τους συνεργάτες του μια άλλη στρατηγική είναι η πλάνη της σύζευξης (conjunction fallacy), που είναι μια κοινή αντίληψη των πιθανοτήτων που βασίζεται στη διαίσθηση και υποστηρίζει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν δύο ενδεχόμενα ταυτόχρονα (αυτό στα μαθηματικά ονομάζεται τομή των δύο ενδεχομένων) είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ένα από τα δύο. Φυσικά το σωστό είναι το αντίθετο.

Άλλες παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την τυχαιότητα και το γεγονός αν ένα πείραμα είναι πείραμα τύχης ή όχι, έχουν έρθει στο φως μέσα από έρευνες του Pratt (2000), ο οποίος εντόπισε ότι οι μαθητές κρίνουν τα αποτελέσματα ενός πειράματος «επιτόπια» και όχι «σφαιρικά» για να εξαγουν συμπεράσματα για το πείραμα. Με τον όρο «επιτόπια» ο Pratt αναφέρεται στις αντιλήψεις που προέρχονται από τις προσωπικές τους εμπειρίες και βιώματα, ενώ με τον όρο «σφαιρικές» αναφέρεται στις συνολικές τους αντιλήψεις στον τομέα των πιθανοτήτων.

Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές όταν κάνουν μια εικασία για την τυχαιότητα, την ελέγχουν πειραματικά, ωστόσο επικρατεί η θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας που έχουν διδαχθεί. Όταν τα αποτελέσματα της πειραματικής μεθόδου δεν συνάδουν με αυτά που προκύπτουν από υπολογισμούς των μαθητών, οι μαθητές δεν θεωρούν ότι έχουν κάνει λάθος υπολογισμούς αλλά θεωρούν ότι υπάρχει λάθος στα αποτελέσματα των πειραμάτων (Prodromou, 2012). Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές δεν έχουν καταλάβει την πειραματική προσέγγιση της πιθανότητας αλλά μόνο την θεωρητική προσέγγιση και πώς να κάνουν υπολογισμούς με πιθανότητες.

2.2 Η έννοια του παιχνιδιού

Πολλοί ερευνητές αλλά και φιλόσοφοι έχουν προσπαθήσει κατά καιρούς να ορίσουν την έννοια «παιχνίδι». Ο Ludwig Wittgenstein (1953) υποστηρίζει ότι είναι αδύνατον να έχουμε ένα και μοναδικό ορισμό για το παιχνίδι, αφού τα παιχνίδια δεν έχουν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό αλλά παρουσιάζουν ομοιότητες τις οποίες χαρακτηρίζει «οικογενειακές». Αναφέρει μάλιστα, ότι ο ορισμός του «παιχνιδιού» μπορεί να δοθεί μόνο μέσα από τις προσωπικές εμπειρίες του κάθε ατόμου.

Στην προσπάθεια του να ορίσει το «παιχνίδι» ο σχεδιαστής παιχνιδιών Chris Crawford (1984) υποστηρίζει ότι τα στοιχεία που ορίζουν ένα παιχνίδι είναι οι αναπαραστάσεις, η αλληλεπίδραση, η διαμάχη ή πρόκληση και η παροχή ενός ασφαλούς περιβάλλοντος, όπου τα αποτελέσματα των πράξεων του παίκτη δεν επιδρούν στην πραγματικότητα. Ένας ακόμα σχεδιαστής παιχνιδιών ο Kevin Oxland (2004) αναφέρει ότι «τα computer games καθορίζονται από κανόνες και όρια, την ανατροφοδότηση, τη διεπαφή με τον κόσμο του παιχνιδιού, την ευαισθησία του περιεχομένου, τους στόχους, τις αναζητήσεις και τις προκλήσεις, το περιβάλλον του παιχνιδιού και την ικανότητα παιξίματος (playability).

Ο Prensky (2001) δεν προσπάθησε να δώσει έναν συγκεκριμένο ορισμό του «παιχνιδιού» αλλά αναφέρει τα έξι δομικά του στοιχεία τα οποία είναι: οι κανόνες, οι στόχοι, τα αποτελέσματα και η ανατροφοδότηση, ο συναγωνισμός ή οι προκλήσεις, η αλληλεπίδραση και η αναπαράσταση μιας ιστορίας.

Το παιχνίδι αποτελεί σημαντικό μέσο μάθησης και ανάπτυξης ικανοτήτων και μέσα στην σχολική τάξη και έξω από αυτήν σε κάθε ηλικία. Άλλωστε, τα παιδιά μαθαίνουν και αντιλαμβάνονται βασικές έννοιες και αναπτύσσουν ικανότητες με εμπειρίες που αποκτούν από την εξερεύνηση και αλληλεπίδραση με αντικείμενα, συμμαθητές και δασκάλους. Μέσα από καταστάσεις που ενθαρρύνουν την προσωπική τους συμμετοχή, καθώς και τη συνεργασία και την ανταλλαγή απόψεων, τα παιδιά παίζουν μαθαίνοντας και μαθαίνουν παίζοντας.

Είναι σημαντικό ένα παιχνίδι να ανταποκρίνεται στις δημιουργικές δυνάμεις των παιδιών και να τους παρέχει ευκαιρίες για διεύρυνση των δυνατοτήτων τους (Πανταζής, 2004). Το παιχνίδι σε όποια μορφή και αν είναι φυσικό ή ψηφιακό και είτε είναι ατομικό, είτε ομαδικό, είτε οργανωμένο, είτε ελεύθερο, επιτρέπει στα παιδιά να αναπτύσσονται, να ανακαλύπτουν, να εκφράζονται, να χρησιμοποιούν δημιουργικά το υλικό που έχουν στη διάθεσή τους, να πειραματίζονται, να επικοινωνούν, να συνεργάζονται, να βιώνουν καταστάσεις και να αποκτούν νέες εμπειρίες.

Συνήθως, τα παιδιά μαθαίνουν και κατανοούν αφηρημένες έννοιες σταδιακά. Η μετάβαση μέσα από το παιχνίδι στη μάθηση γίνεται βαθμιαία και συντελείται στην ηλικία των 5-6 χρονών. Σε αυτήν την περίοδο αρχίζει να εκδηλώνεται ενδιαφέρον για τους στόχους και τα διδακτικά αποτελέσματα (Κιτσαράς, 2004). Ανάμεσα σε πολλούς ορισμούς, δύο τύποι παιχνιδιού διακρίνονται από τον Dienes (1963), οι οποίοι συνεχώς διαπλέκονται: το πρωτογενές και το δευτερογενές.

Το πρωτογενές παιχνίδι αποσκοπεί στην άμεση ικανοποίηση των βασικών αναγκών και ενστίκτων του παιδιού και δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ενεργός αντιπαράθεσή του με τα αντικείμενα και τα υλικά. Το δευτερογενές είναι μια δραστηριότητα η οποία γίνεται συνειδητά και έχει ως στόχο την ανακάλυψη ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών, τη διαμόρφωση αφηρημένων εννοιών, κατηγοριών ή κανόνων και την καλλιέργεια δεξιοτήτων και διαδικασιών, όπως η αφαίρεση, ο συμβολισμός και η κατηγοριοποίηση.

Ο Pellegrini (1991) διέκρινε τρεις ιδιότητες του παιχνιδιού που σχετίζονται με το λειτουργικό, το συμβολικό και το παιχνίδι με κανόνες (όπως προτείνει ο Piaget στη θεωρία του, 1972): τη διάθεση (disposition) που περιλαμβάνει την επιθυμία, την προσοχή, την εξερεύνηση, την ποικιλία και την ενεργό εμπλοκή, το περιεχόμενο (context), που συνήθως είναι άτυπο και την παρατηρούμενη συμπεριφορά (observable behavior).

Η τυχαιότητα (randomness) και η αβεβαιότητα (uncertainty) χαρακτηρίζουν, σχεδόν όλα τα παιχνίδια, είτε αυτά σχεδιάζονται στον υπολογιστή είτε όχι. Ειδικότερα όμως, τα τυχερά παιχνίδια και τα παιχνίδια πόντων είναι αυτά που διακατέχονται από τη σύμπτωση ή από την τύχη. Σε αυτές τις περιπτώσεις, όπου η έκβαση είναι μερικώς ελεγχόμενη, μέσα από αλληλοσυγκρουόμενα ενδιαφέροντα, προσωπική επιδίωξη είναι η νίκη. Τα παιδιά, καθώς εμπλέκονται σε τυχερά παιχνίδια αντιμετωπίζουν την πιθανότητα επιτυχίας να κερδίσουν, αξιοποιούν χρήσιμες πληροφορίες και συνδυασμούς, εφαρμόζουν στρατηγικές και συνεπώς εκφράζουν αντιληπτικές ή/και διαισθητικές ικανότητες (Νικηφορίδου, 2011).

Οι πιο βασικές θεωρητικές απόψεις για το παιχνίδι στηρίζονται στις ψυχαναλυτικές, τις ψυχολογικές, τις κοινωνιολογικές, τις ανθρωπολογικές και τις παιδαγωγικές θεωρίες. Στις ψυχολογικές θεωρίες, μελετήθηκαν εκτενώς οι σχέσεις μεταξύ παιχνιδιού, μάθησης και ανάπτυξης. Ο Piaget (1896-1980), ως κύριος εκφραστής των ψυχολογικών θεωριών, επισημαίνει ότι το παιχνίδι είναι ένα μέσω πειραματισμού και εξερεύνησης του κόσμου, ώστε να ανακαλυφθούν δεξιότητες και να κατασκευαστεί η γνώση. Υποστήριζε ότι το παιχνίδι συνεισφέρει στη διαδικασία σχηματισμού της νοημοσύνης, εφόσον το παιδί μαθαίνει επενεργώντας και αντιδρώντας στο φυσικό και κοινωνικό του περιβάλλον, με τις γνωστικές προσαρμογές να προέρχονται από την εξισορρόπηση των διαδικασιών αφομοίωσης και συμμόρφωσης. Αποδίδει έναν πολύπλευρο ρόλο στο παιχνίδι για τη γνωστική ανάπτυξη των παιδιών, ανάλογα με το αναπτυξιακό τους επίπεδο και για αυτόν τον λόγο προτείνει το παιχνίδι να έχει συγκεκριμένη μορφή, εφόσον η ηλικία των συμμετεχόντων σε αυτό είναι ορισμένη και οι ικανότητες τους προσδιορισμένες (Σκουμπουρδή, & Καλαβάσης, 2007).

Έτσι, ο Piaget, με κριτήριο την ηλικία, διέκρινε τα παιχνίδια σε αισθησιοκινητικά παιχνίδια (ή παιχνίδια άσκησης ή εξάσκησης ή λειτουργικά), σε συμβολικά παιχνίδια (ή παιχνίδια προσποίησης) και σε παιχνίδια κανόνων. Η διαφορά μεταξύ αισθησιοκινητικών και συμβολικών παιχνιδιών βρίσκεται στον σκοπό του παιχνιδιού, στο κατά πόσο δηλαδή η οικεία δράση επαναλαμβάνεται για την εξάσκησή της ή για ψυχαγωγία (Piaget, 1951).

Ο Bruner (1997), θεωρεί ότι το παιχνίδι είναι ένα μέσο εξερεύνησης και επινόησης που επιτρέπει στο παιδί αφενός να κοινωνικοποιηθεί και αφετέρου να ανακαλύψει τις δεξιότητές του. Υποστηρίζει ότι μέσω του παιδικού παιχνιδιού, το οποίο συμβάλλει στη μάθηση, υποβοηθούνται και οι διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων.

Για τις κοινωνικό-κονστрукτιβιστικές οπτικές, με κύριο εκφραστή τον Vygotsky (1896-1934), το παιχνίδι είναι το μέσο της επαφής του παιδιού με το κοινωνικό του περιβάλλον. Ο Vygotsky υποστηρίζει ότι αν και η σχέση παιχνίδι-ανάπτυξη μπορεί να συγκριθεί με τη σχέση μάθηση-ανάπτυξη, το παιχνίδι προσφέρει ένα πολύ πιο ευρύ πεδίο για τις αλλαγές των αναγκών και της συνείδησης. Τα παιδιά στο παιχνίδι κοινωνικής προσποίησης δημιουργούν τη δική τους ζώνη επικείμενης ανάπτυξης, έναν χώρο μεταξύ των ανεξάρτητων και των υποβοηθούμενων επιπέδων επίδοσης, εκεί δηλαδή που λαμβάνει χώρα η μάθηση. Για να δημιουργηθεί αυτή η ζώνη είναι απαραίτητο τα παιδιά να αλληλεπιδράσουν κοινωνικά και σε συνεργασία με τους συνομήλικούς τους και για αυτόν τον λόγο χρειάζονται πρόσβαση στο παιχνίδι μέσα στο οποίο δρουν με ιδιαίτερο τρόπο και εμφανίζουν ικανότητες διαφορετικές από εκείνες των μη παιγνιωδών δραστηριοτήτων (Von Neumann, Morgenstern, Kuhn, & Rubinstein, 2007).

Η Θεωρία Παιγνίων παρέχει ένα μοντέλο ανάλυσης των πολύπλοκων καταστάσεων της πραγματικής ζωής στις οποίες πρέπει να ληφθούν αποφάσεις σε συνθήκες σύγκρουσης ή/και συνεργασίας. Κύριο αντικείμενο της Θεωρίας Παιγνίων είναι η μελέτη των στοιχείων εκείνων που χαρακτηρίζουν καταστάσεις (παιχνίδια) στρατηγικής αλληλεπίδρασης με έμφαση στη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Η Θεωρία Παιγνίων, ως μοντέλο της πολυπλοκότητας της πραγματικής ζωής, είναι μια μαθηματική θεωρία η οποία ξεκίνησε ως κλάδος των οικονομικών, μελετώντας την αναλογία μιας οικονομικής διαπραγμάτευσης με τα παιχνίδια, αλλά χρησιμοποιείται και στην πολιτική, στη στρατιωτική στρατηγική, στις επιχειρήσεις, στην εξελικτική βιολογία, στην ψυχολογία, στην κοινωνιολογία, στην εκπαίδευση κλπ. (Jones, 2000).

Μέσα από αυτό το μοντέλο γίνεται φανερό η λογική μιας κατάστασης και γίνονται κατανοητές οι αρχές των αποφάσεων, χωρίς να δίνεται η λύση για την αντιμετώπιση της όποιας κατάστασης, ούτε οι απαντήσεις για το πώς πρέπει να συμπεριφερθούμε σε κάθε περίπτωση. Είναι η θεωρία που χρησιμοποιείται για την ανάλυση ανταγωνιστικών καταστάσεων που η έκβασή τους εξαρτάται όχι μόνο από τις επιλογές του ενός ατόμου και την τύχη, αλλά και από τις επιλογές των άλλων. Θεωρείται, μαζί με τη Θεωρία Πιθανοτήτων, η βάση για τη Θεωρία Λήψης Αποφάσεων σε δυναμικά συστήματα.

Τα παίγνια είναι καταστάσεις κατά τις οποίες παίκτες με αντικρουόμενους στόχους βρίσκονται αντιμέτωποι και ακολουθούν συνεργατικές στρατηγικές για να πάρουν αποφάσεις. Κάθε παίκτης προσπαθεί να χρησιμοποιήσει όλα τα μέσα που διαθέτει, προσπαθώντας να προβλέψει τις επιλογές των υπόλοιπων παικτών με σκοπό να καθορίσει τη δική του βέλτιστη επιλογή ώστε να εμποδίσει τον αντίπαλό του να αποκτήσει πλεονεκτήματα που θα περιορίσουν τα κέρδη του. Επομένως, οι ενέργειες του κάθε παίκτη εξαρτώνται άμεσα από

τη στρατηγική του αντιπάλου. Ο κάθε παίκτης, δηλαδή, πριν ενεργήσει, προσπαθεί να εκτιμήσει πώς θα αντιδράσει ο άλλος, προσδιορίζει τις εναλλακτικές στρατηγικές για την επίτευξη ενός στόχου και υποθέτει πως ο αντίπαλός του θα σκέφτεται όπως ο ίδιος ή θα σκέφτεται διαφορετικά και θα προσπαθεί να βρει τον τρόπο σκέψης του ώστε να αντιδράσει στην εκάστοτε στρατηγική του.

Ένα παίγνιο διαφέρει από μία πραγματική κατάσταση απλού ανταγωνισμού ή σύγκρουσης στο ότι η πραγμάτωσή του γίνεται κάτω από ορισμένες συνθήκες και σύμφωνα με ορισμένους κανόνες. Όλα τα παίγνια περιέχουν το χαρακτηριστικό του ανταγωνισμού μεταξύ των παικτών τους και το αποτέλεσμα τους οδηγεί σε κέρδη ή απώλειες. Στα παίγνια, ο παίκτης δεν είναι απαραίτητα φυσικό πρόσωπο, αλλά μπορεί να είναι μία οργάνωση, ένα κράτος, μια κατάσταση κλπ. Τα παίγνια κατατάσσονται σε δύο ευρείες κατηγορίες. Η πρώτη είναι τα παίγνια τύχης στα οποία ένας παίκτης παίζει με αντίπαλο τη φύση και η δεύτερη είναι τα παίγνια στρατηγικής στα οποία συμμετέχουν δύο ή περισσότεροι παίκτες και είναι αντίπαλοι μεταξύ τους.

Η μελέτη της ίδιας της Θεωρίας Παιγνίων, αλλά και των κατηγοριών παιγνίων που προτείνει, μπορεί να αξιοποιηθεί αφενός στην ταξινόμηση των εκπαιδευτικών παιχνιδιών που σχετίζονται με τα μαθηματικά (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2005; Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2007) και αφετέρου στον σχεδιασμό και στην ανάπτυξή τους διαμορφώνοντας τους κανόνες και τους τρόπους διαχείρισης του παιχνιδιού.

2.3 Τα ψηφιακά παιχνίδια ως περιβάλλοντα μάθησης

2.3.1 Ο ορισμός των ψηφιακών παιχνιδιών

Τα ψηφιακά παιχνίδια αποτελούν σημαντικό μέρος της καθημερινότητας των παιδιών. Παράλληλα, υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον για την αξιοποίησή τους στην εκπαίδευση, καθώς θεωρείται ότι, μέσω αυτών, επιτυγχάνονται ενδιαφέροντα μαθησιακά οφέλη και υπάρχει θετική επίπτωση σε μια σειρά δεξιοτήτων. Οι εκπαιδευτικοί που υιοθετούν αυτήν την άποψη αναφέρουν ότι το παιχνίδι προσφέρει το κατάλληλο πλαίσιο για μάθηση και το εντάσσουν, μετά από σχεδιασμό, στην εκπαιδευτική πράξη για την υποστήριξη της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2009).

Με τον όρο «ψηφιακό παιχνίδι» αναφερόμαστε σε μια ευρύτατη ποικιλία εφαρμογών πληροφορικής, που κοινά στοιχεία έχουν τη διασκέδαση, την έντονη συμμετοχή του παίκτη, τη διαδραστικότητα, την ανάληψη ρόλων και τη χρήση πολυμέσων. Ένας από τους περιεκτικότερους ορισμούς δίνει στα ηλεκτρονικά παιχνίδια χαρακτηριστικά «συστημάτων που βασίζονται σε

κανόνες, δομών για παίξιμο», ως βασικά συστατικά τους, δηλαδή αναφέρει την ύπαρξη κανόνων και δομημένου περιβάλλοντος (Prensky, 2007). Τα ψηφιακά παιχνίδια, δεν θεωρούνται μόνο ως ένα εργαλείο υψηλής τεχνολογίας, αλλά θεωρούνται από αρκετούς ερευνητές ως μια μορφή κουλτούρας με αρκετά στοιχεία που ενισχύουν την μάθηση αλλά και ως μέσο ενημέρωσης των μαθητών για πολύπλοκα προβλήματα του σύγχρονου κόσμου που δεν μπορούν να μελετήσουν με άλλα μέσα εντός του σχολικού πλαισίου (Kabat και Alfoldiova, 2019).

Το ηλεκτρονικό παιχνίδι είναι μια εφαρμογή που αποσκοπεί στη διασκέδαση του χρήστη και σύμφωνα με τον Prensky (2001), αποτελείται από τα εξής δομικά χαρακτηριστικά:

1. Κανόνες: θέτουν όρια και αναγκάζουν τον παίκτη να χρησιμοποιήσει συγκεκριμένες οδούς, ενώ το καθιστούν δίκαιο και προκαλούν τον ενθουσιασμό του.

2. Σκοπούς και στόχους: αποτελούν την κινητήρια δύναμη του παίκτη και υλοποιούνται μέσω της τήρησης των κανόνων. Πρόκειται για ένα σημαντικό στοιχείο του παιχνιδιού, καθώς ως είδος είμαστε ‘προγραμματισμένοι’ να επιδιώκουμε την επίτευξή τους (Prensky, 2001).

3. Διαδραστικότητα: επιτυγχάνεται σε δύο επίπεδα και αφορά στη σχέση του παίκτη με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή και στη σχέση του παίκτη με τους υπόλοιπους παίκτες. Μέσω αυτού του βήματος επιδεικνύεται ο κοινωνικός χαρακτήρας των παιχνιδιών, που απασχολεί ολοένα και περισσότερους τομείς οι οποίοι αποσκοπούν στην ανάπτυξή του.

4. Έκβαση: βοηθάει τους παίκτες να παρακολουθήσουν την πρόοδο και την επίτευξη των στόχων τους.

5. Σύγκρουση / ανταγωνισμός / πρόκληση / αντιπαράθεση: είναι καταστάσεις που αντιμετωπίζει ο παίκτης προσπαθώντας να επιλύσει προβλήματα και αυξάνοντας την αδρεναλίνη και τους σφυγμούς του (Prensky, 2001).

6. Αναπαράσταση: εμπεριέχεται σε κάθε παιχνίδι και αναφέρεται σε κάποιο θέμα, αφηρημένο ή συγκεκριμένο, άμεσο ή έμμεσο και περιλαμβάνει όλα τα αφηγηματικά στοιχεία του παιχνιδιού. Εμπεριέχει το στοιχείο της φαντασίας, το οποίο είναι σημαντική παράμετρος καθορισμού της ταυτότητας ενός παιχνιδιού (Prensky, 2001).

2.3.2 Σοβαρά ψηφιακά παιχνίδια

Ένα ψηφιακό παιχνίδι ορίζεται ως σοβαρό παιχνίδι (serious game) όταν η εκπαίδευση αποτελεί τον κύριο σκοπό του παιχνιδιού και έχει ένα μεγάλο φάσμα εφαρμογών. Τα Serious Games ή αλλιώς «παιχνίδια σοβαρού σκοπού» ή αλλιώς «σοβαρά παιχνίδια» είναι προσομοιώσεις γεγονότων του πραγματικού κόσμου με συμβάντα και διαδικασίες, σχεδιασμένα για το σκοπό της επίλυσης ενός προβλήματος έχοντας όμως την εμφάνιση και την αίσθηση ενός παιχνιδιού. Κύριος στόχος τους, είναι να διδάξουν ή να εκπαιδεύσουν τους χρήστες, παρέχοντάς τους μια ευχάριστη εμπειρία, κάτι που ενθαρρύνει την επαναλαμβανόμενη χρήση τους.

Παρόλο που τα serious games μπορεί να είναι διασκεδαστικά, ο κύριος σκοπός τους είναι να εκπαιδεύσουν τους χρήστες, ενώ ενδέχεται να εξυπηρετούν και άλλους σκοπούς, όπως το μάρκετινγκ και η διαφήμιση. Συχνά θυσιάζουν σκόπιμα τη διασκέδαση προκειμένου να επιτευχθεί μια επιθυμητή πρόοδος από τον παίχτη. Εάν και δεν υπάρχει σαφής ορισμός, ένα σοβαρό παιχνίδι έχει την εκπαίδευση ως κύριο στόχο και όχι τη διασκέδαση του παίχτη, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τα δύο αυτά στοιχεία δεν συνυπάρχουν μέσα στο παιχνίδι (Barbosa, Pereira, Dias, & Silva, 2014), κάτι που κάνει το σχεδιασμό αυτού του είδους παιχνιδιών εξαιρετικά πολύπλοκο. Επίσης, τα ψηφιακά παιχνίδια διαθέτουν ένα ακόμα προσόν που τα καθιστά πολύτιμα εκπαιδευτικά εργαλεία στα χέρια του εκπαιδευτικού. Αυτό το προσόν είναι ότι με κατάλληλο σχεδιασμό μπορούν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον του μαθητή ώστε να εμπλακεί ενεργά με το παιχνίδι, να το εξερευνήσει και να μάθει μέσα, από, και με αυτό. Μέσα από το παιχνίδι οι μαθητές μαθαίνουν να λειτουργούν συνεργατικά, να μοιράζονται και να επικοινωνούν αποτελεσματικά (De Lope, Medina-Medina, Paderewski, & Gutierrez-Vela, 2015).

Σύμφωνα με τους Mansour και El-Said (2008), η χρήση των σοβαρών παιχνιδιών έχει πολλά πλεονεκτήματα και μπορούν να μετατραπούν σε ισχυρά εργαλεία διδασκαλίας, καθώς παρέχουν στήριξη της ανάπτυξης διαφόρων δεξιοτήτων, όπως η στρατηγική σκέψη, ο σχεδιασμός, η επικοινωνία, η συνεργασία, οι ομαδικές αποφάσεις και οι δεξιότητες διαπραγμάτευσης.

Επιπλέον, παρέχουν ενίσχυση της αποκτηθείσας γνώσης και του βαθμού διάρκειάς της, προσαρμογή της μαθησιακής εμπειρίας σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά του μαθητή, το στυλ και το βαθμό μάθησης. Επιπλέον διευκολύνουν τη μάθηση, ώστε να λάβει χώρα σε ένα πλαίσιο όπου το παιχνίδι αποκτάει νόημα και στηρίζουν τη δημιουργία ομάδων επιτρέποντας την κατάρτιση σε ένα ασφαλές περιβάλλον, μειώνοντας τον κίνδυνο τραυματισμού του εκπαιδευόμενου και βλάβες σε ακριβό εξοπλισμό. Τέλος, δεν απαιτούν υψηλά γραφικά και μπορούν να καταστούν σημαντικά εργαλεία σε οποιαδήποτε κατάσταση τάξης (Rankin & Vargas, 2008).

Η αποτελεσματικότητα των ψηφιακών εκπαιδευτικών παιχνιδιών μπορεί να αποδοθεί σε αρκετούς παράγοντες. Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές τείνουν να αφιερώνουν περισσότερο χρόνο στο να μάθουν, κάτι που μπορεί να επηρεάζει θετικά τα μαθησιακά αποτελέσματα.

Καταλυτικό ρόλο, ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες, φαίνεται να παίζει το ότι οι μαθητές δίνουν μεγαλύτερη προσοχή σε μία μαθησιακή δραστηριότητα όταν αυτή παρουσιάζεται μέσω ενός παιχνιδιού.

Ένα άλλο στοιχείο είναι η άμεση ανατροφοδότηση που προσφέρουν αυτά τα παιχνίδια καθώς οι μαθητές βλέπουν άμεσα τα αποτελέσματα των ενεργειών τους και ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν ή να πειραματιστούν, οδηγούμενοι στην ανακάλυψη εννοιών και στρατηγικών. Ωστόσο, ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα είναι η προσπάθεια, ο χρόνος και το κόστος που απαιτείται για την ανάπτυξη σοβαρών ψηφιακών παιχνιδιών (Φωκίδης κ.αλ., 2018).

Ένα κατάλληλα σχεδιασμένο παιχνίδι μπορεί να αποτελεί πρόκληση για τους μαθητές, να τους εξάψει την φαντασία και την περιέργεια έχοντας ως συνέπεια την παροχή κινήτρου για μάθηση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μπορούν να εισαχθούν και να εξερευνήσουν ακόμα και τις πιο δύσκολες περιοχές των μαθηματικών, των φυσικών επιστημών αλλά και κοινωνικά, περιβαλλοντικά και οικονομικά προβλήματα του πραγματικού κόσμου, κάτι το οποίο είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί στην πραγματικότητα, λόγω χρόνου, κόστους και ασφάλειας.

Οι μικρόκοσμοι και οι «μισοψημμένοι μικρόκοσμοι», έτσι κι αλλιώς είναι περιβάλλοντα τα οποία όχι απλά επιδέχονται μετατροπών, αλλά είναι κατασκευασμένα με τρόπο που ο χρήστης να μπορεί να τα αναδιαμορφώσει. Έτσι, όταν κανείς διερευνά τον τρόπο που θα «λειτουργήσει» τα εργαλεία ενός μικρόκοσμου, για να τα χρησιμοποιήσει, στην ουσία εμπλέκεται στο σχεδιασμό διακειμένων, είτε πρόκειται για δημιουργία είτε για αλλοίωση ενός εργαλείου.

Στο πλαίσιο της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών είναι σημαντικό να μελετηθεί η διαδικασία αυτή, εφόσον είναι γνωστή η σχέση που συνδέει τα εργαλεία με τα μαθηματικά που βρίσκονται υπό διαπραγμάτευση στο μικρόκοσμο (Healy & Kynigos, 2010). Σε ένα τέτοιο περιβάλλον και όπως περιγράφηκε η εγκαθιδρυμένη μάθηση (Noss & Hoyles, 1996), όπως περιγράφηκε παραπάνω, πλασιοθετείται από τα εργαλεία και το ρόλο τους ως εκφραστικά μέσα και ως μέσα δράσης του μαθητή.

Με τον όρο «μισοψημμένοι μικρόκοσμοι» εννοούμε λογισμικά σχεδιασμένα κατά τρόπο που να προκαλούν τους μαθητές να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς, να τους αλλάζουν, να τους αποδομήσουν, προκειμένου να κάνουν μαθηματικά με αυτούς, που να τους αφορούν ή να δίνουν έναυσμα στους εκπαιδευτικούς μέσα από την αποδόμηση και την ανακατασκευή τμημάτων αυτών των μικρόκοσμων να δημιουργήσουν δικούς τους μικρόκοσμους για τους μαθητές τους (Kynigos, 2007).

Στο πλαίσιο του constructionism, αυτή η δραστηριότητα είναι μέρος της διερεύνησης που οδηγεί στην δημιουργία μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές, αλλά και σε παιδαγωγικό ή επιστημολογικό αναστοχασμό από την πλευρά των εκπαιδευτικών.

2.3.3 Μάθηση βασισμένη στο ψηφιακό παιχνίδι

Είναι γενικά αποδεκτό ότι η μάθηση βασισμένη στο ψηφιακό παιχνίδι (Game Based Learning, MBΠ) (Prensky, 2001) βρίσκει εφαρμογή σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και στα περισσότερα γνωστικά αντικείμενα. Η μάθηση μέσα από παιχνίδι (Game Based Learning), ορίζεται ως η διαδικασία, όπου χρησιμοποιούνται οι εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές, παίζοντας παιχνίδια ως εργαλεία μάθησης.

Οι υποστηρικτές της θεωρούν ότι, μέσω των παιχνιδιών, επιτυγχάνονται ενδιαφέροντα μαθησιακά οφέλη, αυξάνονται τα κίνητρα για μάθηση, ενισχύονται μία σειρά από δεξιότητες των μαθητών, αλλά και η δημιουργικότητά τους (Φωκίδης κ.αλ., 2018). Τα ηλεκτρονικά παιχνίδια προσφέρουν τη δυνατότητα εμπλοκής σε αυθεντικές δραστηριότητες και σε συγκεκριμένο κάθε φορά πλαίσιο, παρουσιάζοντας όχι καλά δομημένα προβλήματα προς αντιμετώπιση, τα οποία αφορούν μια ευρεία γκάμα θεματικών περιοχών, και προωθώντας διαδικασίες ερευνητικής και ανακαλυπτικής μάθησης (Gee, 2007).

Η ιδέα του συνδυασμού του παιχνιδιού, της τεχνολογίας και της μάθησης δεν είναι καινούρια. Με τη δημιουργία του πρώτου νηπιαγωγείου το 1837 ο Friedrich Froebel χρησιμοποίησε την τεχνολογία της εποχής του για να αναπτύξει ένα σύνολο παιχνιδιών, που έγιναν γνωστά ως «τα δώρα του Froebel», με στόχο να βοηθήσει τα μικρά παιδιά να μάθουν βασικές έννοιες, όπως η έννοια του αριθμού, του μεγέθους, του σχήματος και του χρώματος. Άλλοι εκπαιδευτικοί, όπως η Maria Montessori (Montessori, 1912), βασιζόμενοι στην ιδέα του Froebel δημιούργησαν μια μεγάλη ποικιλία παιχνιδιών που μπορούν να εμπλέξουν τα παιδιά στη μάθηση μέσω παιγνιωδών εξερευνήσεων (Resnick, 2006).

Ο Prensky (2001) χαρακτηρίζει τους μαθητές, οι οποίοι γεννήθηκαν και μεγάλωσαν σε ένα ψηφιακό κόσμο, ως digital natives (ψηφιακούς ιθαγενείς) ενώ τους ανθρώπους που γεννήθηκαν πριν το 1974 ως digital immigrants (ψηφιακούς μετανάστες). Ο ίδιος θεωρεί παράλογο να μη χρησιμοποιούνται τα ψηφιακά παιχνίδια στην εκπαίδευση από τη στιγμή που οι μαθητές περνούν το μεγαλύτερο μέρος του ελεύθερου χρόνου τους ασχολούμενοι με αυτά, καθώς σύμφωνα με τον Prensky (2001), οι αντιληπτικοί κόσμοι των δύο γενεών, όπως επίσης και οι τρόποι με τους οποίους έχουν «μάθει να μαθαίνουν» είναι πολύ διαφορετικοί.

Οι μαθητές έχοντας συνηθίσει πλέον μέσω της ενασχόλησής τους με τα ηλεκτρονικά παιχνίδια να προσλαμβάνουν πληροφορίες με πολύ γρήγορους ρυθμούς, να εφαρμόζουν παράλληλη επεξεργασία, να προσπελαίνουν το περιεχόμενο με τυχαίο και όχι σειριακό τρόπο (σύμφωνο με τη δομή του υπερκειμένου), να κατανοούν κυρίως μέσω των γραφικών και σε δεύτερο επίπεδο μέσω του κειμένου, να επικοινωνούν και να συνεργάζονται μέσω του διαδικτύου και να μαθαίνουν με ενεργό, διασκεδαστικό και διαδραστικό τρόπο που τροφοδοτεί τη φαντασία, και τη δημιουργική σκέψη, βρίσκουν ανιαρή την σημερινή εκπαίδευση.

Έτσι, δείχνουν ελάχιστη υπομονή ή προσοχή κατά την παρακολούθηση μαθημάτων που χαρακτηρίζονται από μορφή διαλέξεων, σειριακή/βηματική λογική και διδασκαλία στο πρότυπο της παράδοσης-αξιολόγησης, δομημένη βάσει των «κανόνων» της παραδοσιακής διδασκαλίας. Συνέπεια των εμπειριών τους με τα ηλεκτρονικά παιχνίδια, είναι το γεγονός ότι αντιλαμβάνονται τη διάδραση ως απολύτως αναγκαία για αυτούς. Χρειάζονται άμεση ανάδραση σε κάθε μεμονωμένη δράση τους, κάτι που το παραδοσιακό σχολείο μπορεί σε ελάχιστο μόνο βαθμό να τους προσφέρει (Prensky, 2005).

Σύμφωνα με τον Papert, το να καθίσταται ο μαθητευόμενος υπεύθυνος για τη μάθησή του, αντιτίθεται στην επικρατούσα ιδεολογία της σχεδίασης αναλυτικών προγραμμάτων, εφόσον εξ ορισμού η σχεδίαση αναλυτικού προγράμματος υποδηλώνει την ανάθεση σε ειδικούς της απόφασης σχετικά με τα ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος με τον οποίο μπορεί κάθε μαθητευόμενος να γνωρίσει ένα αντικείμενο.

Ένα από τα μεγάλα, λοιπόν, ζητήματα της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η κατασκευή της γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές σε ένα πλαίσιο νοηματοδοτημένο και ουσιώδες για αυτούς, ώστε να καταφέρουν να συνδέσουν τη μαθηματική γνώση με τη δική τους πραγματικότητα. Η τεχνολογία, και συγκεκριμένα τα παιχνίδια στον υπολογιστή, μπορούν να λειτουργήσουν ως ένα τέτοιο πλαίσιο για τους μαθητές δημιουργώντας στους ίδιους κίνητρα για δραστηριότητες και μάθηση, καθώς σύμφωνα με τη Βοσνιάδου τα ψηφιακά παιχνίδια αποτελούν ελκυστικά περιβάλλοντα για τους μαθητές προσφέροντάς τους τη δυνατότητα για συνεχή εξέλιξη και δράση. Παράλληλα, απαιτούν την ενεργητική συμμετοχή του μαθητή, στον οποίο παρέχεται συνεχώς άμεση ανατροφοδότηση αυξάνοντας με τον τρόπο αυτό τα κίνητρα συμμετοχής του και την εμπλοκή του στη μαθησιακή διαδικασία (Βοσνιάδου, 2006).

Επιπλέον τα ψηφιακά παιχνίδια απαιτούν από τους μαθητές να σκέφτονται διαφορετικά από ότι έχουν μάθει, να θέτουν τις γνώσεις τους στη πράξη και να είναι δημιουργικοί. Οι στόχοι του παιχνιδιού μπορεί να είναι μερικώς ή ολικώς καθορισμένοι όπως και στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Για να τους ολοκληρώσουν οι παίκτες πρέπει να καθορίσουν μια στρατηγική να λάβουν αποφάσεις με ρίσκα και να προβλέψουν τα αποτελέσματα.

Η αποτυχία μιας στρατηγικής θα οδηγήσει πάλι στο σχεδιασμό όπου απαιτείται γνώσεις και ικανότητες για να συνεχίσει το παιχνίδι. Όταν οι μαθητές μέσα από το παιχνίδι μαθαίνουν καινούργια πράγματα και βλέπουν πως λειτουργούν αυτά που ήδη είχαν μάθει, τότε νοηματοδοτούν τις έννοιες και η μάθηση αποκτάει περισσότερο ενδιαφέρον.

Τα ειδικά σχεδιασμένα λογισμικά μαθησιακά περιβάλλοντα δίνουν σήμερα νέες δυνατότητες μάθησης των πιθανοτήτων θέτοντας στη διάθεση των μαθητών χαρακτηριστικά όπως: προσομοίωση ποικίλων στοχαστικών συστημάτων με τρόπο ελκυστικό που να έχουν νόημα σε διάφορες ηλικίες, τη δυνατότητα πραγματοποίησης μεγάλου αριθμού πειραμάτων τύχης, ανάλυση

και σύνοψη των πειραματικών δεδομένων με τη βοήθεια πολλαπλών αναπαραστάσεων, δυναμικών και διασυνδεμένων π.χ. πίνακες τιμών, διαγράμματα συχνотήτων κ.α., τη παροχή αναδραστικής πληροφόρησης και υποστηρικτικών μηχανισμών υποστήλωσης για την πραγματοποίηση δραστηριοτήτων στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης και ευκαιρίες για συνεργασία κατά τη μάθηση (Νικηφορίδου, 2011).

Τα ψηφιακά παιχνίδια μπορούν να σχεδιαστούν ως περίπλοκα συστήματα τα οποία εμπλέκουν γνωστικά τους μαθητές σε δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν ικανότητες επίλυσης προβλημάτων και λήψης αποφάσεων για να αντιμετωπιστούν προβλήματα ανοιχτά, όχι καλά καθορισμένα και δομημένα με αναπάντεχες και μη προβλέψιμες εξελίξεις μέσα από τις δυνατότητες του παιχνιδιού και των μηχανισμών του (Avila-Pesantez, Rivera, & Alban, 2017). Πολλές βιωματικές δραστηριότητες εμπλουτίζονται με τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών (NT), καθώς οι NT μπορούν πλέον να θεωρηθούν ως σημαντικά εργαλεία που υποστηρίζουν την εκπαιδευτική διαδικασία. Σύμφωνα με την Παγγέ (2009), χωρίζονται σε οπτικοακουστικά μέσα, στα πολυμέσα ή multimedia και στις ΤΠΕ (Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνίας). Τα σύγχρονα ηλεκτρονικά περιβάλλοντα μάθησης προσφέρουν νέες δυνατότητες στην εκπαίδευση (Παγγέ, 2009).

Επιτρέπουν στους μαθητές όχι απλώς να ενεργούν, αλλά να επαναλαμβάνουν τις ενέργειές του όσες φορές θέλουν, να πειραματίζονται, να παρατηρούν, να αναπτύσσουν εικασίες και προβλέψεις και να διαπιστώνουν αν ισχύουν ή όχι. Οι παραδοσιακές σχολικές εμπειρίες, σύμφωνα με τους Rochelle, Abrahamson και Penuel (2004), μειονεκτούν σε σχέση με τα περιβάλλοντα που διαμορφώνονται με τη χρήση υπολογιστών, τα οποία ενθαρρύνουν την ενεργητική ενασχόληση, τη συμμετοχή σε ομάδες, τη συχνή αλληλεπίδραση και ανατροφοδότηση και τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο.

Μέσα από δραστηριότητες σχεδιασμένες στον υπολογιστή, εκεί όπου δεν υπάρχουν φυσικά και πραγματικά αντικείμενα, το παιχνίδι αποκτάει άλλη μορφή και υπόσταση. Ο χειρισμός των συμβόλων και των εικόνων στην οθόνη του υπολογιστή αντιπροσωπεύει ένα νέο είδος συμβολικού παιχνιδιού, στο οποίο τα παιδιά αντιμετωπίζουν τις εικόνες της οθόνης ως «απτές» και τις χειρίζονται, όπως τα αντίστοιχα μικρά παιχνίδια. Το ψηφιακό παιχνίδι δίνει τη δυνατότητα να οπτικοποιηθούν ενδιαφέρουσες ιδιότητες και έννοιες, φαινόμενα και αποτελέσματα, μέσα από τη διασκεδαστικότητα, την ευχρηστία και τη προσβασιμότητα, το μαθησιακό δυναμικό, την καλή παιγνιώδη πλοκή, την τεχνολογική κατασκευή και την επικοινωνιακή λειτουργία του, στο επίπεδο της πρόσληψης και της διάδρασης.

Οι NT αποτελούνται από διάφορα χαρακτηριστικά, όπως μόνο εικόνες, συνδυασμούς εικόνων και συμβόλων, ήχο, κίνηση, μικρόκοσμους, προσομοιώσεις με οδηγίες και ανατροφοδότηση (Παγγέ, 2009).

Έχει αποδειχθεί από τους Uttal κ.άλ. (2009), ότι οι αναπαραστάσεις στον υπολογιστή μπορεί να είναι πιο ευέλικτες, πιο βολικές, πιο «ξεκάθαρες» σε σχέση με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις που προέρχονται από φυσικά αντικείμενα (Kaminski, Sloutsky, και Heckler, 2009).

Συνοψίζοντας, η πραγματική εκπαιδευτική δύναμη των NT ανάγεται στη δυνατότητα που αυτές παρέχουν για χειρισμό και αναπαράσταση του πραγματικού κόσμου. Τα υλικά και μέσα του υπολογιστή χρησιμεύουν ως καταλύτης για την ανάπτυξη της ολοκληρωμένης γνώσης, αλλά η ύπαρξή τους και μόνο δεν συνεπάγεται ουσιαστική μάθηση (Clements και Samara, 2009). Τα δυναμικά εικονικά υλικά και μέσα επιτρέπουν, όχι απλά μια οπτική επαφή με τα αντικείμενα στην οθόνη, αλλά και μιαν αυξανόμενη εμπλοκή και αλληλεπίδραση του χρήστη.

Μέσα από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να δημιουργήσουν νοήματα, να διακρίνουν σχέσεις μέσα από τις δικιές τους πράξεις και να οικοδομήσουν γνώσεις (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2001). Ομοίως, οι NT μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο μέτρησης δεξιοτήτων και καταγραφής στρατηγικών, με ερευνητικό χαρακτήρα για τη συλλογή δεδομένων και πληροφοριών σχετικά με τη σκέψη και αντίληψη των μικρών παιδιών σε συγκεκριμένες έννοιες και διαδικασίες.

Στα σύγχρονα δυναμικά διερευνητικά υπολογιστικά περιβάλλοντα μάθησης το υποκείμενο έχει ενεργό συμμετοχή στη διαδικασία της μάθησης. Μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες οι οποίες στηρίζονται στη χρήση υπολογιστή, ο μαθητής είναι σε θέση να δομήσει τα δικά του νοήματα. Η γνώση κατασκευάζεται ενεργά από το μαθητή, μέσα από συνεχείς αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον του (Piaget, 1979; Papert, 1980).

Οι μαθητές δεν είναι παθητικοί ακροατές, δεν απομνημονεύουν στείρες γνώσεις, αλλά πειραματίζονται και διερευνούν. Οι δραστηριότητες με τις οποίες εμπλέκονται είναι σχεδιασμένες με τέτοιο τρόπο, ώστε μέσω της διαδικασίας της διερεύνησης και μέσω των διαθέσιμων εργαλείων του λογισμικού, να οδηγούνται βήμα - βήμα στην οικοδόμηση της γνώσης (Piaget, 1979). Η δραστηριοποίηση του ατόμου και η απόκτηση ικανοτήτων στην επίλυση προβλημάτων, επιτυγχάνονται διαμέσου της ενεργητικής του αντιπαράθεσης με προβληματικές καταστάσεις. Κατ' επέκταση, ο μαθητής θα μπορεί να είναι σε θέση να αντιμετωπίζει καθημερινά, διάφορες προβληματικές καταστάσεις (Bruner, 1966).

2.3.4 Τα ψηφιακά παιχνίδια και οι πιθανότητες

Κάθε ψηφιακό παιχνίδι, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα με συγκεκριμένους κανόνες (Avila-Pesantez, Rivera, & Alban, 2017), του οποίου τα μέρη αλληλεπιδρούν ώστε το σύστημα να διατηρεί την ύπαρξη του. Ένα παιχνίδι αποτελείται από τρία βασικά συστατικά: την ιστορία-σενάριο (story), την τέχνη (art) και το λογισμικό (software). Μπορούμε να διακρίνουμε μια μεγάλη ποικιλία χαρακτηριστικών των σοβαρών παιχνιδιών που κυμαίνονται από υψηλή εκπαιδευτική αξία σε υψηλή ψυχαγωγική αξία (Rankin & Vargas, 2008). Οι παίκτες παίζουν με απώτερο σκοπό να ολοκληρώσουν τους στόχους του παιχνιδιού, αλληλεπιδρώντας με τα στοιχεία του παιχνιδιού και με άλλους παίκτες. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις δημιουργούν την δυναμική του παιχνιδιού ως σύστημα. Η δυναμική του παιχνιδιού είναι ανεξάρτητη από τις αποφάσεις του παίκτη.

Τα ψηφιακά παιχνίδια μπορεί να αποτελούν περίπλοκα συστήματα όπου η συμπεριφορά κάθε στοιχείου του συστήματος, οι κανόνες που διέπουν αυτή τη συμπεριφορά και οι συνέπειες της, ενδέχεται να μην μπορεί να γίνουν αντιληπτά, αν εξετασθούν μεμονωμένα και τοπικά. Αυτή η δυναμική του παιχνιδιού προκαλεί αβεβαιότητα, την οποία οι παίκτες πρέπει να διαχειρισθούν και να εκτιμήσουν κατάλληλα χρησιμοποιώντας κανόνες και έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων. Η περιπλοκότητα όμως δεν συνεπάγεται μη ελεγχόμενη αβεβαιότητα. Αντιθέτως, εάν το παιχνίδι διέπεται από απλούς κανόνες και πολλές επιλογές, τότε η αβεβαιότητα που προκύπτει είναι ελεγχόμενη και αποτελεί περιβάλλον πλούσιο σε νοήματα για τους μαθητές (Westera, Nadolski, Hummel & Wopereis, 2008).

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ στοιχείων του συστήματος του παιχνιδιού, συνήθως δεν είναι γραμμικές. Κάθε αλληλεπίδραση μπορεί με τη σειρά της να διαμορφωθεί από διαφορετικά μοτίβα, να παράγει νέα αποτελέσματα και να προκαλέσει διαφορετικές αντιδράσεις. Έτσι, η εμφάνιση, η προσαρμογή και η μη γραμμικότητα προσδίδουν ένα ακόμα χαρακτηριστικό στα πολύπλοκα συστήματα, αυτό της μη προβλεψιμότητας. Παρόλο όμως το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των επιλογών του παίκτη δεν μπορούν να ελεγχθούν από την αρχή, η μη προβλεψιμότητα δεν συνεπάγεται τυχειότητα, γιατί τα περίπλοκα συστήματα τείνουν προς την αναδιοργάνωση και την προσαρμογή (Westera, Nadolski, Hummel & Wopereis, 2008). Η τυχειότητα (randomness) και η αβεβαιότητα (uncertainty) χαρακτηρίζουν, σχεδόν, όλα τα παιχνίδια, είτε αυτά σχεδιάζονται στον υπολογιστή είτε όχι.

Ειδικότερα, όμως, τα τυχερά παιχνίδια και τα παιχνίδια πόντων είναι αυτά που διακατέχονται από τη σύμπτωση ή από την τύχη. Σε αυτές τις περιπτώσεις, όπου η έκβαση είναι μερικώς ελεγχόμενη, μέσα από αλληλοσυγκρουόμενα ενδιαφέροντα, προσωπική επιδίωξη είναι η νίκη, όπως και στα ψηφιακά παιχνίδια που έχουν ως κύριο στόχο την επίλυση ενός προβλήματος. Τα παιδιά, καθώς εμπλέκονται σε αυτού του είδους τα παιχνίδια αντιμετωπίζουν την πιθανότητα επιτυχίας να κερδίσουν, αξιοποιούν χρήσιμες πληροφορίες και συνδυασμούς, εφαρμόζουν στρατηγικές και συνεπώς εκφράζουν αντιληπτικές ή/και διαισθητικές ικανότητες (Fabricatore, Ximena, 2012).

Αρκετοί ερευνητές θεωρούν, ότι ένα μαθησιακό περιβάλλον που είναι συνδυασμός δυναμικών μικρόκοσμων, εργαλείων και δραστηριοτήτων, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της πιθανολογικής σκέψης των μαθητών και εστιάζουν τις προσπάθειές τους στη δημιουργία σύνθετων περιβαλλόντων μάθησης, με σκοπό να αναλύσουν και να εμπλουτίσουν τα διαισθητικά μοντέλα των παιδιών (Pratt, 2000). Μέσα από τα περιβάλλοντα αυτά, τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να διερευνούν τις αντιλήψεις τους, να κάνουν εικασίες, να αναπτύσσουν την ικανότητα αιτιολόγησης, να οικοδομούν νέες αναπαραστάσεις και να οδηγούνται σε γενικεύσεις (Papert, 1980). Οι διαπιστώσεις αυτές οδήγησαν στη δημιουργία μικρόκοσμων με σκοπό να μελετηθεί η διαμόρφωση της πιθανολογικής σκέψης των παιδιών.

Σύμφωνα με την Carraher (1989), η οργάνωση της μαθηματικής γνώσης δεν εξαρτάται μόνο από το σύνολο των νοημάτων που οικοδομεί ο ανθρώπινος νους, αλλά και από τους στόχους για τους οποίους τα νοήματα αυτά οικοδομούνται. Η Lave (1988) υποστήριξε επίσης ότι το περιβάλλον στο οποίο οικοδομείται η γνώση, παίζει βασικό ρόλο στα γνωστικά σχήματα που δημιουργούνται, με αποτέλεσμα αυτά να είναι άμεσα συνδεδεμένα με αυτό.

Με βάση αυτήν την προοπτική, οι παρανοήσεις στην πιθανολογική σκέψη των παιδιών μπορεί να οφείλονται στις καθημερινές τους εμπειρίες με θέματα πιθανοτήτων και στη δημιουργία γνωστικής αναντιστοιχίας, με όσα διδάσκονται και τον τρόπο που διδάσκονται στο σχολικό περιβάλλον, αφού διαφορετικές εμπειρίες μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά γνωστικά σχήματα. Ο συνδυασμός εργαλείων, που δεν υπάρχουν στην καθημερινότητα των παιδιών, αλλά χρησιμοποιούνται σε δυναμικά περιβάλλοντα διδασκαλίας και αλληλεπίδρασης, που βασίζονται στις νέες τεχνολογίες, μπορεί να προσφέρει χρήσιμες εμπειρίες για τις πιθανότητες που έχουν νόημα για τα παιδιά (Σιριβιανού, Βαλανίδης, 2009).

2.4 Το λογισμικό CHOICO

Διαχρονικά, οι έννοιες «παιδί» και «παιχνίδι» συνδέονται άρρηκτα. Η δεύτερη, προερχόμενη ετυμολογικά από την πρώτη, περιγράφει την κατ'εξοχήν αυθόρμητη και ενδιαφέρουσα δραστηριότητα των παιδιών που αποσκοπεί στη συναισθηματική τους ευχαρίστηση. Το βασικότερο στοιχείο λοιπόν, άμεσα συνυφασμένο, με την έννοια του παιχνιδιού είναι η διασκέδαση. Όταν όμως γίνεται λόγος για εκπαιδευτικά παιχνίδια (educational games) η διασκέδαση πρέπει να συνδυάζεται με την εκπαιδευτική δράση τοποθετώντας το εκπαιδευτικό περιεχόμενο βαθιά στην πλοκή του παιχνιδιού (σοβαρό παιχνίδι).

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί ποικίλες υπολογιστικές εφαρμογές με σκοπό τον εξοπλισμό της εκπαιδευτικής κοινότητας με υπολογιστική τεχνολογία στο πλαίσιο αναβάθμισης της λειτουργίας της. Η επιστημονική εκπαιδευτική κοινότητα, λόγω της πληθώρας των υπολογιστικών εφαρμογών και των διαφορετικών χαρακτηριστικών τους, τα έχει διακρίνει στα νοητικά εργαλεία και στα πληροφοριακά μέσα (Κυνηγός, Δημαράκη, 2002). Ο όρος «νοητικά εργαλεία» χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια σειρά από εξειδικευμένες εφαρμογές, οι οποίες αποτελούν το λεγόμενο «διερευνητικό λογισμικό». Το διερευνητικό λογισμικό, μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το μαθητή ως εργαλείο κατασκευής μοντέλων που περιγράφουν την εξέλιξη φαινομένων και σχέσεων, αναπαραστάσεων, πειραματισμού, διερεύνησης και να του προσφέρει άμεση, ακριβή αλλά και ουδέτερη ανατροφοδότηση.

Οι Noss, Healy και Hoyles (1997) θεωρούν το σχεδιασμό μαθηματικών καταστάσεων σε η/υ για τους μαθητές, ως βασική δραστηριότητα κάποιου που ασχολείται με τη διδακτική των μαθηματικών. Αυτό γιατί, τα προσεκτικά και κατάλληλα σχεδιασμένα υπολογιστικά περιβάλλοντα δίνουν τη δυνατότητα στο μαθητή να τα εκμεταλλευτεί ως πηγές και εργαλεία έκφρασης, κατασκευάζοντας νοήματα.

Το εκπαιδευτικό περιβάλλον ChoiCo (Choices with Consequences) πρόκειται για ένα ελεύθερο διαδικτυακό λογισμικό που υποστηρίζει το παίξιμο, τον σχεδιασμό και την τροποποίηση ψηφιακών παιχνιδιών προσομοίωσης καθοδηγούμενων από επιλογές, από μαθητές και εκπαιδευτικούς (Kynigos & Yiannoutsou, 2018). Πιο συγκεκριμένα, το ChoiCo αποτελεί μια web-based πλατφόρμα που έχει κατασκευαστεί από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας του Πανεπιστημίου Αθηνών με σκοπό να λειτουργήσει ως «γεννήτρια παιχνιδιών» υποστηρίζοντας μαθητές και εκπαιδευτικούς, ακόμα

και μη εξοικειωμένους με τον προγραμματισμό, να δημιουργούν τα δικά τους εκπαιδευτικά παιχνίδια, τα οποία σχετίζονται με τη διαχείριση ενός συστήματος και τη διατήρηση της ισορροπίας του.

Στα παιχνίδια ChoiCo, ο παίχτης περιφέρεται γύρω από επιλογές βασισμένες πάνω στον χάρτη του παιχνιδιού, κάνοντας επιλογές οι οποίες επηρεάζουν τις παραμέτρους του παιχνιδιού. Οι μηχανισμοί του παιχνιδιού σχεδιάζονται και τροποποιούνται στη λειτουργία σχεδιασμού (Design Mode), όπου εκεί ενσωματώνονται τρία εργαλεία που δίνουν πρόσβαση στη δομή του παιχνιδιού: έναν βασισμένο σε χάρτη συντάκτη για τις περιοχές του παιχνιδιού και τις επιλογές που μπορεί να κάνει ο παίχτης πάνω στον χάρτη, μια βάση δεδομένων όπου διαμορφώνονται οι παράμετροι του παιχνιδιού και οι συνέπειες των επιλογών του παίχτη και τέλος διαθέτει προγραμματισμό με Block (Block-based programming) για να προγραμματιστούν οι κανόνες του παιχνιδιού (Grizioti and Kynigos, 2019).

Με το λογισμικό αυτό ο χρήστης μπορεί είτε να παίξει, είτε να σχεδιάσει ψηφιακά παιχνίδια προσομοίωσης που βασίζονται στις επιλογές με επιπτώσεις (choice driven simulation games) (Yiannoutsou, Kynigos & Daskolia, 2014), τα οποία παρέχουν δυνατότητες προκειμένου να εμπλέξουν τους παίκτες-μαθητές με το εκπαιδευτικό περιεχόμενο, μέσα από μια διασκεδαστική διαδικασία που οδηγεί σε έντονη προσωπική δέσμευση τους με αποκορύφωμα την ολική τους απορρόφησή (flow).

Τα ηλεκτρονικά παιχνίδια αυτού του είδους επιχειρούν να προσομοιάσουν τις αποφάσεις, τις συνέπειες και τις διαδικασίες που είναι ενσωματωμένες σε κάποια πραγματική κατάσταση. Οι περισσότεροι από τους κανόνες τους είναι σχεδιασμένοι με τρόπο που να αντανakλά τις πραγματικές επιπτώσεις που θα είχε η κάθε ενέργεια και επιλογή του παίκτη. Η πρόσθετη αξία που μπορεί να προσφέρει το παιχνίδι στην μαθησιακή διαδικασία έχει τονιστεί από πολλούς ερευνητές στο παρελθόν. Ειδικότερα την τελευταία δεκαετία, που τα ηλεκτρονικά παιχνίδια αποτελούν βασικό μέσο διασκέδασης των παιδιών, οι έρευνες έχουν στραφεί στα μαθησιακά οφέλη που μπορούν να προκύψουν παίζοντας ηλεκτρονικά παιχνίδια.

Παράλληλα, αρκετοί ερευνητές και υποστηρικτές της κονστραξιονιστικής προσέγγισης της μάθησης, έχουν τονίσει τα ευεργετικά αποτελέσματα της εμπλοκής των μαθητών στη διαδικασία σχεδιασμού ενός ηλεκτρονικού παιχνιδιού. Η διαδικασία σχεδιασμού ενός ηλεκτρονικού παιχνιδιού τοποθετεί τον μαθητή σε έναν ρόλο ξεχωριστό, αυτόν του σχεδιαστή.

Ο σχεδιασμός ενός λειτουργικού, κατανοητού και ταυτόχρονα ελκυστικού ηλεκτρονικού παιχνιδιού, απαιτεί την εμπλοκή με πολλές και διαφορετικές διαδικασίες (Robertson & Howells 2008, Overmas 2004), όπως είναι η συγγραφή και η δόμηση του σεναρίου, ο προγραμματισμός της συμπεριφοράς και των κανόνων του παιχνιδιού, οι καλλιτεχνικές και αισθητικές επιλογές κλπ. Παρατηρείται λοιπόν μέσα από έρευνες, πως ο μαθητής ως σχεδιαστής εμπλέκεται σε μια πολύπλοκη νοητική διαδικασία, στην οποία καλείται να δώσει λύσεις και να λάβει αποφάσεις, συνδυάζοντας γνώσεις και δεξιότητες από διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα.

Τα αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι, οι δραστηριότητες επεξεργασίας και σχεδιασμού ψηφιακών παιχνιδιών μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη ευρύτερων δεξιοτήτων των μαθητών, όπως είναι η επίλυση προβλημάτων, η δημιουργικότητα, η σχεδιαστική σκέψη (design thinking) και η υπολογιστική σκέψη (computational thinking) (Gee 2007, Lee et al 2011, Robertson & Howells 2008, Hayes and Games 2008).

Επιπλέον, ο σχεδιασμός ενός παιχνιδιού φαίνεται να δημιουργεί έντονα κίνητρα στους μαθητές να ασχοληθούν με το μαθησιακό αντικείμενο που αυτό πραγματεύεται και να εφαρμόσουν τις ιδέες και τις γνώσεις τους στην πράξη δημιουργώντας ένα κατασκεύασμα με προσωπικό νόημα για τους ίδιους (Kafai 2001, Baytak et. al. 2011, Harrel & Papert 1990). Τα ψηφιακά παιχνίδια επομένως δομούνται πάνω σε συγκεκριμένες διαδικασίες (processes), οι οποίες διαμορφώνουν το πλαίσιο και τους κανόνες του παιχνιδιού. Ωστόσο, η συλλογιστική του παιχνιδιού αναδύει τους ισχυρισμούς των σχεδιαστών του για τον κόσμο, καθώς το ψηφιακό παιχνίδι κατά τον Bogost (2008, σ. 119) «αποτελεί συνειδητή έκφραση συγκεκριμένων αντιλήψεων και προοπτικών» αναπαριστώντας τις πολιτισμικές αξίες του εκάστοτε σχεδιαστή.

Στην πραγματικότητα, μέσα σε ένα παιχνίδι ο πραγματικός κόσμος απλοποιείται, προκειμένου η προσοχή του παίκτη να εστιαστεί στις σχετικές - με το θέμα του παιχνιδιού - πλευρές, για να κατανοήσει συγκεκριμένες πολιτισμικές, κοινωνικές ή πολιτικές πρακτικές. Οι παίκτες μπορούν να αντιληφθούν, να αξιολογήσουν και σκεφτούν πολύ προσεκτικά αυτές τις αντιλήψεις που φαίνεται να αναδύονται μέσα από το παιχνίδι συζητώντας και αναλύοντας τις επιπτώσεις αυτών των διακυβευμάτων για τους ίδιους ή/και για τον κόσμο.

Το ChoiCo αποτελεί μια πρότυπη ψηφιακή πλατφόρμα συγγραφής εκπαιδευτικών παιχνιδιών κάτι που το καθιστά κατάλληλο να παρέχει στους παίκτες την αλληλεπίδραση βασισμένη σε όσα προαναφέρθηκαν, καθώς η

παιδαγωγική του τεκμηρίωση εναρμονίζεται πλήρως με τις αντίστοιχες παιδαγωγικές αρχές που καταγράφονται στη βιβλιογραφία. Επιπρόσθετα, αν και οι προσωπικές εμπειρίες των μαθητών με εξωγενή περιβάλλοντα μάθησης πρέπει να συνεκτιμώνται κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού νέων περιβαλλόντων, διότι αυτές είναι που διαμορφώνουν τις προσδοκίες για το νέο ψηφιακό περιβάλλον, δεν θα ήταν παιδαγωγικά ωφέλιμο να σχεδιάσουμε κάτι ανάλογο, παρασυρμένοι από τη διαπίστωση ότι τα παιδιά αγαπούν τα videogames.

Όπως παρατηρεί ο Fisch (2005) τα ευφάνταστα στοιχεία δεν βοηθούν τη μαθησιακή διαδικασία, γιατί τα παιδιά τείνουν να θυμούνται αυτά παραβλέποντας το μαθησιακό περιεχόμενο. Αυτή η διαπίστωση έχει ληφθεί υπόψη στο σχεδιασμό του ChoiCo, στο οποίο ο θόρυβος όλων αυτών των αποπροσανατολιστικών στοιχείων έχει αφαιρεθεί, προκειμένου ο μαθητής απερίσπαστος να χρησιμοποιήσει τα παιχνίδια ως ένα νέο και δημιουργικό τρόπο έκφρασης και αναπαράστασης της γνώσης (Yiannoutsou & Kynigos, 2016).

Το ειδικά σχεδιασμένο στο λογισμικό μαθησιακό περιβάλλον του ChoiCo παρέχει στους μαθητές νέες δυνατότητες μάθησης των πιθανοτήτων θέτοντας στη διάθεση των μαθητών χαρακτηριστικά όπως, την προσομοίωση ποικίλων στοχαστικών συστημάτων με τρόπο ελκυστικό που να έχουν νόημα σε διάφορες ηλικίες. Ακόμα, τους παρέχει την δυνατότητα πραγματοποίησης μεγάλου αριθμού πειραμάτων τύχης καθώς και ανάλυση και σύνοψη των πειραματικών δεδομένων με τη βοήθεια πολλαπλών αναπαραστάσεων δυναμικών και διασυνδεδεμένων π.χ. πίνακες τιμών, διαγράμματα συχνότητας. Η παροχή αναδραστικής πληροφόρησης και υποστηρικτικών μηχανισμών υποστήριξης συμβάλλουν στην πραγματοποίηση δραστηριοτήτων που έγκεινται στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης των μαθητών. Οι ευκαιρίες για συνεργασία κατά τη μάθηση είναι αρκετές καθώς οι μαθητές μπορούν να συζητούν με άλλους μαθητές τη στρατηγική που ακολούθησαν μέσα στο παιχνίδι ή ακόμα τον τρόπο με τον οποίο νίκησε ή έχασε κάθε παίχτης.

2.4.1 Τροποποίηση παιχνιδιών

Ο σχεδιασμός ενός ψηφιακού παιχνιδιού ή ενός εκπαιδευτικού λογισμικού εμπεριέχει και τη -συνειδητή ή όχι - επιστημολογική αντίληψη του σχεδιαστή για τη μάθηση γενικά και τη διδασκαλία του συγκεκριμένου αντικειμένου ειδικότερα (diSessa, 1995). Η Kafai (2006) διακρίνει δύο επιστημολογικές προσεγγίσεις στα εκπαιδευτικά παιχνίδια: τη διδακτική (instructional) και την

κονστρουξιονιστική. Η διδακτική προσέγγιση αποτέλεσε τη βάση για το σχεδιασμό των λεγόμενων σοβαρών παιχνιδιών (serious games), τα οποία έδωσαν έμφαση στο να κάνουν ελκυστική την υπάρχουσα διδακτική πρακτική που αφορούσε κυρίως την παρουσίαση του περιεχομένου (content knowledge) και την ανάπτυξη σχετικών δεξιοτήτων (Hayes, 2008).

Τα ερευνητικά αποτελέσματα για την εκπαιδευτική αξία των σοβαρών παιχνιδιών είναι ανάμεικτα: ή αναδεικνύουν τη θετική επίδρασή τους (Wouters et al., 2013), ή την επιφύλαξη στην αξιολόγησή τους, ή απορρίπτουν τα γνωστικά τους οφέλη (Young et al., 2012). Μια παρόμοια προσέγγιση με το σχεδιασμό παιχνιδιών είναι η μάθηση μέσα από την τροποποίηση παιχνιδιών ή όπως αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία "game modding" (El-Nasr & Smith, 2006, Salen, 2007, Yucel, I., Zupko, J., & El-Nasr, 2006, Moshirnia, 2007). Συνοπτικά, ο όρος game modding αφορά τη διαδικασία αναπροσαρμογής ενός υπάρχοντος ηλεκτρονικού παιχνιδιού με σκοπό τη δημιουργία ενός, πολύ ή λίγο, διαφορετικού ηλεκτρονικού παιχνιδιού (Yucel et. al., 2006). Οι αλλαγές που πραγματοποιούν οι παίκτες περιλαμβάνουν συνήθως την εισαγωγή νέων αντικειμένων και μοντέλων, περιοχών, κανόνων και σεναρίων παιχνιδιού. Μια διαφορά του game modding από τον σχεδιασμό παιχνιδιών έγκειται στο γεγονός, ότι στις δραστηριότητες τροποποίησης παιχνιδιών οι μαθητές έρχονται πρώτα σε επαφή με τον κώδικα και το περιβάλλον ενός πλήρως λειτουργικού παιχνιδιού και στη συνέχεια το τροποποιούν (Yucel et. al., 2006), σε αντίθεση με τις πλατφόρμες δημιουργίας παιχνιδιών, όπου ξεκινούν από την αρχή να χρησιμοποιούν ένα πολύπλοκο εργαλείο ή μια γλώσσα προγραμματισμού.

Από την άλλη μεριά, η εμπλοκή του μαθητή αποτελεί όχι μόνο την αφετηρία αλλά και την εστίαση της κονστρουξιονιστικής προσέγγισης, η οποία συνδυάζεται με την μάθηση μέσα από ψηφιακά παιχνίδια, με την έννοια ότι εδώ ο μαθητής μπαίνει στη θέση του σχεδιαστή παιχνιδιών (Papert & Harel, 1991, Kafai, 2006) ή στη θέση του συν-σχεδιαστή μέσα από την τροποποίηση παιχνιδιών (Yiannoutsou & Kynigos, 2016). Η τροποποίηση στα ψηφιακά παιχνίδια μπορεί να αναφέρεται όχι μόνο στην προσαρμογή ή την επέκταση ενός υπάρχοντος παιχνιδιού αλλά και στη ριζική αλλαγή ενός παιχνιδιού.

Μια έρευνα που εστίασε στην παρατήρηση της μαθησιακής διαδικασίας κατά την τροποποίηση παιχνιδιών από τους μαθητές, έδειξε ότι η διαδικασία αυτή περιλάμβανε στοιχεία πρωτοτυπίας, καινοτομίας και δημιουργικότητας (Baytak et al., 2011), ενδιαφέρον και κίνητρο για μάθηση αλλά και ανάπτυξη δεξιοτήτων (El Nasr & Smith, 2006).

Μία νέα πρόταση στην τροποποίηση των ψηφιακών παιχνιδιών ως μαθησιακό εργαλείο, αποτελούν τα «μισοψημένα παιχνίδια» (Yiannoutsou & Kynigos, 2016). Τα μισοψημένα παιχνίδια έχουν σχεδιαστεί ώστε να προκαλούν τους μαθητές να τα αλλάξουν, επειδή έχουν στοιχεία που δεν αρέσουν στους μαθητές ή στοιχεία με τα οποία δεν συμφωνούν. Εκτός από αυτό το χαρακτηριστικό, τα μισοψημένα παιχνίδια συνοδεύονται και από εργαλεία που επιτρέπουν την τροποποίησή τους, τόσο σε επίπεδο περιεχομένου όσο και σε επίπεδο κανόνων. Τα παράγωγα λοιπόν, των μισοψημένων παιχνιδιών είναι παιχνίδια που ανήκουν στην ίδια κατηγορία (genre: π.χ. SimCity like games, point and click κλπ) αλλά μπορεί να διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους ως προς το περιεχόμενο, τις παραμέτρους που καθορίζουν το σκορ των παιχνιδιών και τους κανόνες.

Η παιδαγωγική προσέγγιση πίσω από τα μισοψημένα παιχνίδια περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

α) κριτική σκέψη για τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το παιχνίδι αλλά και για τα βασικά αξιώματα που εμπεριέχει (Yiannoutsou & Kynigos, 2016)

β) ενσωμάτωση των εννοιών προς διερεύνηση μέσα στα μισοψημένα στοιχεία του παιχνιδιού, αυτά δηλαδή που προκαλούν τους μαθητές για αλλαγή

γ) παροχή εργαλείων υποστηριζόμενων από δραστηριότητες που επιτρέπουν όχι μόνο την εστίαση σε γνώσεις και δεξιότητες προγραμματισμού (Grizioti , Kynigos, 2018) αλλά και την εμβάθυνση σε άλλα αντικείμενα, όπως την αειφορία (Yiannoutsou et al., 2014), τις διατροφικές συνήθειες (Yiannoutsou & Kynigos, 2016), κλπ.

Συνεπώς, η τροποποίηση ενός παιχνιδιού απαιτεί σημαντικά λιγότερο χρόνο και τεχνικές γνώσεις σε σχέση με τον εξ αρχής σχεδιασμό του (El-Nasr & Smith, 2006). Το γεγονός αυτό καθιστά τη διαδικασία τροποποίησης καταλληλότερη επιλογή για μαθητές με περιορισμένες ή και καθόλου πρότερες γνώσεις προγραμματισμού. Επιπλέον, καθώς οι μαθητές καλούνται να τροποποιήσουν ένα παιχνίδι το οποίο έχουν ήδη παίξει και τους έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον, είναι πιθανότερο να προβούν σε πιο πολύπλοκες και ευφάνταστες επιλογές, απ' ό,τι όταν ξεκινούν από την αρχή τον σχεδιασμό ενός παιχνιδιού. Έρευνες έχουν δείξει, ότι οι τροποποιήσεις που κάνουν οι μαθητές σε ήδη υπάρχοντα παιχνίδια περιέχουν έντονα στοιχεία πρωτοτυπίας, καινοτομίας και δημιουργικότητας (Baytak, Land & Smith, 2011), διότι προσπαθούν να επεκτείνουν τις δυνατότητες και το περιεχόμενο του αρχικού παιχνιδιού.

2.4.2 Σχεδιασμός παιχνιδιών

Ο σχεδιασμός των παιχνιδιών βασίστηκε πάνω στις ιδέες του κονστραξιονισμού και της περιβαλλοντικής εκπαίδευσης, έχοντας ως κύριο στόχο την ενεργή εμπλοκή των μαθητών για την νοηματοδότηση εννοιών πιθανοτήτων μέσα από ένα πραγματικό περιβαλλοντικό-κοινωνικό πρόβλημα.

Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη του ψηφιακού υλικού έλαβε υπόψη την ευχρηστία τους και την προώθηση μιας σειράς δεξιοτήτων, στάσεων και αξιών, ενώ ακολούθησε και τις τρεις βασικές διαστάσεις για την ανάπτυξη της γνώσης μέσω της τεχνολογίας (Meyer & Rose, 1998) οι οποίες υποστηρίζουν την παροχή ευελιξίας:

(α) στους τρόπους παρουσίασης της πληροφορίας που παρέχουν δυνατότητα πολλαπλής αναπαράστασής της και «ανάγνωσής» της από τους μαθητές,

(β) στην ενίσχυση και ανατροφοδότηση, η οποία εξυπηρετεί τις εξατομικευμένες ανάγκες του κάθε μαθητή,

(γ) στις προσεγγίσεις για δέσμευση στη μαθησιακή διαδικασία, που δημιουργούν κίνητρα για ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης (Brown, 2008).

Βασικές συνιστώσες για την αξιοποίηση των ψηφιακών παιχνιδιών στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι η ελκυστικότητα και η μάθηση. Για να επιτευχθεί υψηλό ποσοστό μάθησης, θα πρέπει να συνυπολογίζονται εξίσου και οι δύο αυτές παράμετροι, καθώς, αν εστιάσουμε μόνο στο μαθησιακό μέρος, θα προκύψει ένα αδιάφορο για τους εκπαιδευόμενους προϊόν που απλά θα παρέχεται μέσω του ηλεκτρονικού υπολογιστή, ενώ, αν εστιάσουμε μόνο στο στοιχείο της ελκυστικότητας, κινδυνεύουμε να καταλήξουμε στον σχεδιασμό ενός απλού παιχνιδιού με μικρή μαθησιακή αξία. Η ισορροπία των δύο αυτών στοιχείων σε υψηλό επίπεδο μπορεί να ανταποκριθεί στην απαίτηση των εκπαιδευτικών/σχεδιαστών για αποδοτικότερη μάθηση μέσα στο ψηφιακό παιχνίδι (Prensky, 2007).

Αυτό που έχει τη μεγαλύτερη σημασία στο ψηφιακό παιχνίδι είναι το «πρόβλημα» που δίνει στον παίκτη να λύσει, και πώς το παρουσιάζει. Τα προβλήματα που έχουν νόημα, που ωθούν τις ικανότητες του παίκτη στα άκρα, είναι αυτά που θα τον καθηλώσουν περισσότερο και θα τον ενθουσιάσουν, διότι αυτό που ζητάει πρωτίστως ο παίκτης σε ένα ψηφιακό παιχνίδι είναι η πρόκληση (Jones, 1998).

Το περιβάλλον ενός «καλού» ψηφιακού παιχνιδιού, θα πρέπει να περιέχει:

- Δραστηριότητες τις οποίες οι μαθητές μπορούν να ολοκληρώσουν.
- Δραστηριότητες στις οποίες μπορούν να συγκεντρωθούν.
- Δραστηριότητες με ξεκάθαρους στόχους.
- Δραστηριότητες οι οποίες να επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση.
- Δραστηριότητες οι οποίες να προκαλούν βαθιά αλλά όχι πολύ απαιτητική ενασχόληση.
- Δραστηριότητες οι οποίες δημιουργούν αίσθηση ελέγχου των ενεργειών, μέσω του ποντικιού ή του πληκτρολογίου.
- Δραστηριότητες οι οποίες αλλάζουν την αίσθηση του χρόνου.

Τα παιχνίδια του ChoiCo, ενώ μπορεί να διαφέρουν θεματικά, έχουν όλα κοινή λογική παιχνιδιού (gameplay). Κάθε παιχνίδι, αποτελείται από μια σκηνή η οποία περιλαμβάνει έναν αριθμό από σημεία – επιλογές, που σχετίζονται με την αναπαράσταση της. Στα παιχνίδια που σχεδιάστηκαν, η σκηνή αναπαριστά μια πόλη και τα σημεία-επιλογές αφορούν σημεία της πόλης (π.χ. Πολυκατοικία, Νοσοκομείο, Σχολείο κλπ). Κάθε σημείο έχει ορισμένα χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στον πίνακα «Point Information» αριστερά από τη σκηνή κάνοντας κλικ στο σημείο. Επιπλέον υπάρχει ένας δεύτερος πίνακας με τίτλο «Game Status» που αποτυπώνει την κατάσταση του παίκτη ανά πάσα στιγμή, σε σχέση με συγκεκριμένους αριθμητικούς δείκτες (εικόνα 3).

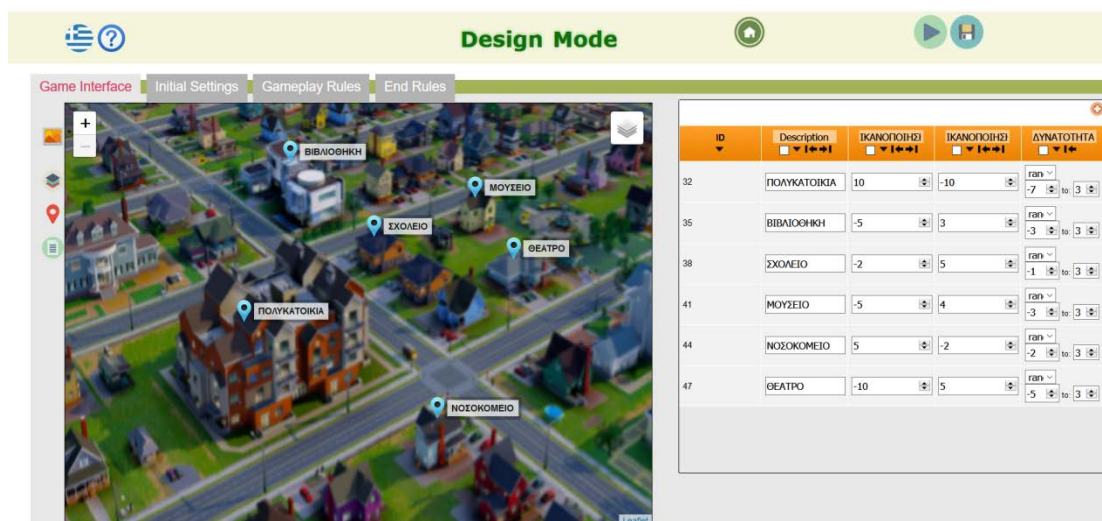


Εικόνα 3 Το περιβάλλον του ChoiCo

Ο παίκτης σε κάθε του κίνηση, πρέπει να μελετά τις διαθέσιμες επιλογές στη σκηνή και να επιλέγει μια από αυτές. Τα χαρακτηριστικά του κάθε σημείου περιλαμβάνουν και τις επιπτώσεις που θα επιφέρει η επιλογή του στην κατάσταση του παίκτη. Ανάλογα με τον στόχο του παιχνιδιού, ο παίκτης θα

πρέπει να κάνει τις κατάλληλες επιλογές ώστε η κατάστασή του να έχει συγκεκριμένες τιμές. Ο αριθμός και τα χαρακτηριστικά των διαθέσιμων επιλογών, οι δείκτες κατάστασης του παίκτη και οι κανόνες του παιχνιδιού διαφέρουν ανάλογα με τον εκπαιδευτικό σκοπό και το θέμα του παιχνιδιού και μπορούν να τροποποιηθούν στη λειτουργία σχεδιασμού.

Στη λειτουργία σχεδιασμού, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να σχεδιάσει ένα νέο παιχνίδι ή να τροποποιήσει ένα υπάρχον. Το περιβάλλον σχεδιασμού έχει αναπτυχθεί και δομηθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η κατασκευή του παιχνιδιού να μην απαιτεί προηγούμενες γνώσεις προγραμματισμού και ταυτόχρονα να καθιστά σαφείς τις βασικές δομές και αρχές πίσω από τον σχεδιασμό ενός παιχνιδιού. Συγκεκριμένα, αποτελείται από τέσσερις διακριτές καρτέλες οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετικά στοιχεία του παιχνιδιού (εικόνα 4).



Εικόνα 4 Το περιβάλλον σχεδιασμού του ChoiCo

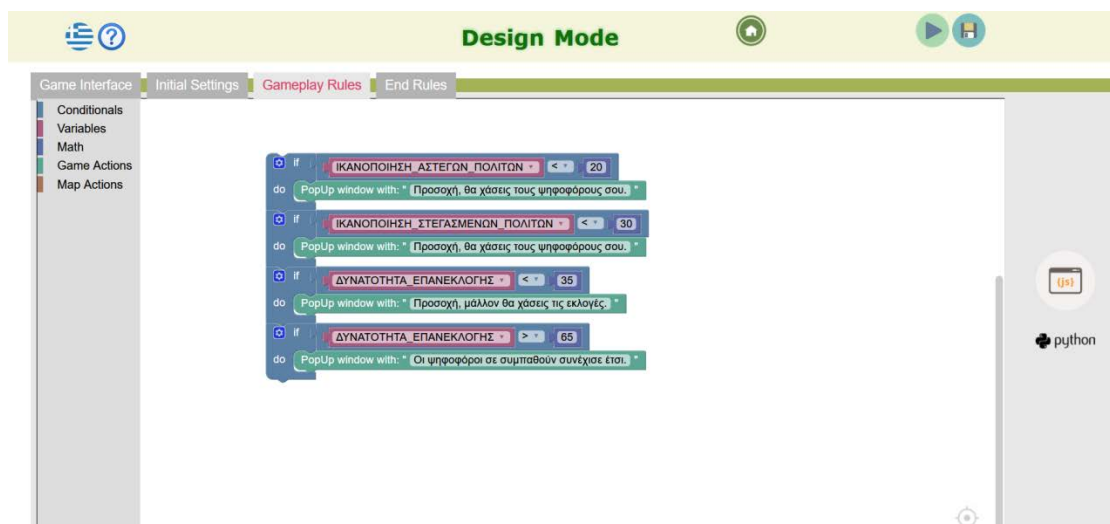
Η πρώτη καρτέλα, αφορά τη διεπαφή του παιχνιδιού, δηλαδή τα στοιχεία τα οποία θα εμφανιστούν στον παίκτη. Εκεί ο σχεδιαστής του παιχνιδιού μπορεί να επεξεργαστεί τη σκηνή, τα σημεία-επιλογές που αυτή περιέχει, τις οδηγίες που θα δοθούν στον παίκτη κλπ.. Οι επιλογές που εισάγονται από τον σχεδιαστή απεικονίζονται με δύο τρόπους: Πρώτον ως γραφικά αντικείμενα (σημεία) στην σκηνή του παιχνιδιού και δεύτερον ως εγγραφές σε έναν πίνακα με τη μορφή μιας βάσης δεδομένων. Η κάθε γραμμή του πίνακα αναπαριστά και μια σημείο-επιλογή, ενώ οι στήλες του πίνακα αναπαριστούν τα χαρακτηριστικά των επιλογών. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να επεξεργαστεί κάθε σημείο-επιλογή αλλάζοντας το όνομα του και τις τιμές των χαρακτηριστικών του στην αντίστοιχη γραμμή του πίνακα. Επιπλέον, μπορεί να προσθέσει νέες στήλες χαρακτηριστικών και να επεξεργαστεί την ονομασία και τον τύπο κάθε χαρακτηριστικού. Τα χαρακτηριστικά των σημείων μπορούν

να είναι αριθμητικές τιμές, κείμενο, φωτογραφία ή ένας εξωτερικός σύνδεσμος.

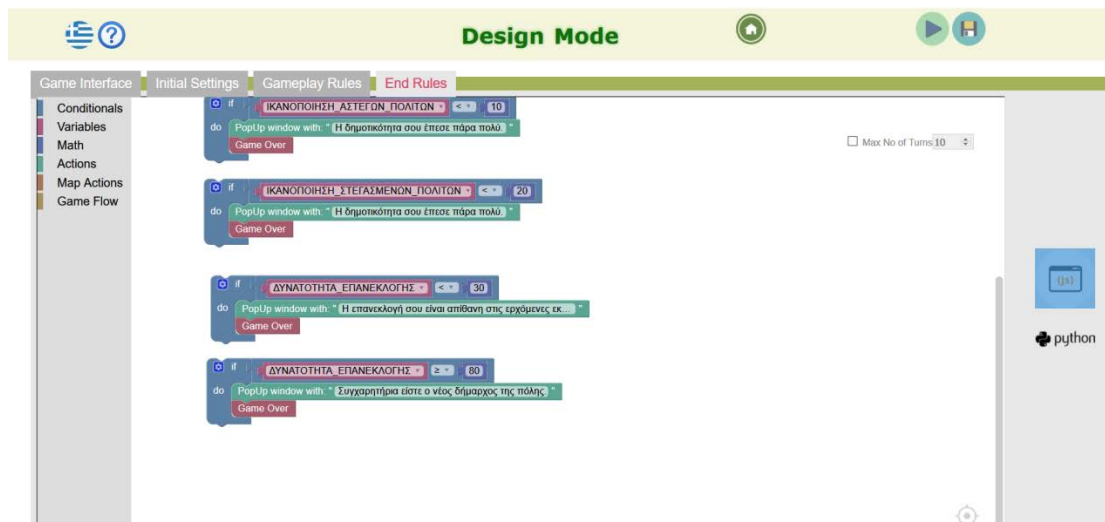
Στη δεύτερη καρτέλα (εικόνα 5) ο σχεδιαστής ορίζει τις αρχικές συνθήκες του παιχνιδιού, τις τιμές δηλαδή με τις οποίες θα ξεκινήσει ο παίκτης. Στην τρίτη καρτέλα (εικόνα 6) ορίζονται οι έλεγχοι που θα πραγματοποιούνται σε κάθε ενέργεια του παίκτη και η πιθανή απόκριση του παιχνιδιού, για παράδειγμα η εμφάνιση ενός προειδοποιητικού μηνύματος προς τον παίκτη ή η αναπαραγωγή ενός ήχου. Στη τέταρτη καρτέλα (εικόνα 7) ο σχεδιαστής ορίζει τις συνθήκες τερματισμού του παιχνιδιού.



Εικόνα 5 ChoiCo Initial Settings



Εικόνα 6 ChoiCo Gameplay Rules



Εικόνα 7 ChoiCo End Rules

Οι τρεις τελευταίες καρτέλες προσφέρουν στον σχεδιαστή έναν χώρο για προγραμματισμό με blocks. Η λογική της διεπαφής για τον προγραμματισμό είναι παρόμοια με αντίστοιχα περιβάλλοντα, όπως το Scratch, στα οποία οι χρήστες συνδυάζουν προγραμματιστικά μπλοκ από διαφορετικές κατηγορίες με σκοπό να φτιάξουν ένα πρόγραμμα (Resnick et. al, 2009). Η διαφορά των block του ChoiCo έγκειται στο γεγονός ότι είναι ειδικά διαμορφωμένα για τον προγραμματισμό των κανόνων ενός ψηφιακού παιχνιδιού. Πιο συγκεκριμένα οι κατηγορίες των block είναι χωρισμένες, ανάλογα με τη λειτουργία που προσφέρουν στο παιχνίδι (block αρχικοποίησης, ενημέρωσης του χρήστη, ελέγχου συνθηκών, ροής παιχνιδιού κλπ).

Επιπλέον, υπάρχουν block τα οποία υλοποιούν βασικές λειτουργίες του παιχνιδιού χωρίς να χρειάζεται επιπλέον προγραμματισμό από τον χρήστη, όπως τα «game over», «alert» και «change background». Με τον τρόπο αυτό ο προγραμματισμός των κανόνων γίνεται με προσιτό τρόπο που παράλληλα αποτυπώνει βασικές έννοιες προγραμματισμού, όπως είναι οι συνθήκες ελέγχου και οι μεταβλητές. Έτσι ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει εάν θα δώσει ή όχι έμφαση στις προγραμματιστικές έννοιες που υπάρχουν πίσω από τον σχεδιασμό των κανόνων (Γριζιώτη, Κυνηγός 2018).

Συγκεκριμένα, το e-game αφορά το πρόβλημα των άστεγων πολιτών μιας πόλης, δηλαδή ένα κοινωνικό πρόβλημα. Ο μαθητής καλείται να αναλάβει τον ρόλο του δημάρχου της πόλης που θέλει να επανεκλεγεί στο αξίωμα του, οπότε καλείται να κτίσει κτήρια, τα οποία θα εξυπηρετούν τις ανάγκες των άστεγων συμπολιτών του ή αυτές των ήδη στεγασμένων συμπολιτών του, οι οποίες όμως διαφέρουν μεταξύ τους. Η ικανοποίηση της μιας ομάδας δεν συνεπάγεται την ικανοποίηση της άλλης και ο στόχος του παιχνιδιού είναι να κρατήσει τις

δύο ομάδες ικανοποιημένες και να αυξήσει όσο μπορεί την πιθανότητα επανεκλογής του. Έτσι, τον ρόλο των σημείων επιλογών κατέχουν οι διαθέσιμοι τύποι κτιρίων που μπορεί να χτισθούν και οι επιπτώσεις της κάθε επιλογής επηρεάζουν την ικανοποίηση των δύο ομάδων ψηφοφόρων της πόλης με ντετερμινιστικό τρόπο και την πιθανότητα επανεκλογής με τυχαίο τρόπο.

Το eco-game αφορά μια περιβαλλοντική οργάνωση και την προστασία του αστικού τοπίου αλλά και του φυσικού περιβάλλοντος έξω από την πόλη όπως τη θάλασσα και το δάσος. Σε αυτό το παιχνίδι, ο μαθητής καλείται να αναλάβει τη διεύθυνση ενός παραρτήματος μιας περιβαλλοντικής οργάνωσης με στόχο την μείωση της ρύπανσης τόσο του αστικού τοπίου όσο του φυσικού περιβάλλοντος έξω από την πόλη. Η οργάνωση παρόλαυτα, στηρίζεται στον εθελοντισμό για να διεξάγει την δράση της, αλλά αυτοί οι εθελοντές δεν είναι μόνιμοι και ο μαθητής θα πρέπει να προσέξει ο αριθμός τους να μην πέσει κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή γιατί θα χάσει το παιχνίδι.

Τα σημεία επιλογές στο συγκεκριμένο παιχνίδι αποτελούν οι διαθέσιμες δράσεις της περιβαλλοντικής οργάνωσης και οι επιπτώσεις επηρεάζουν τα επίπεδα μόλυνσης της πόλης και του φυσικού περιβάλλοντος έξω από την πόλη. Η τυχαία μεταβλητή είναι ο αριθμός των εθελοντών που διαθέτει η οργάνωση.

Το school-game είναι ένα παιχνίδι που αφορά ένα μαθητή της Γ Γυμνασίου ο οποίος μένει με τους γονείς του σε ένα χωριό και το σχολείο του βρίσκεται στην γειτονική πόλη. Επειδή είναι μακριά το σχολείο πρέπει να βρει ένα μέσο μεταφοράς κάθε μέρα για να πηγαίνει. Το πρόβλημα είναι ότι έχει περιορισμένα χρήματα και δεν θέλει να ρυπαίνει το περιβάλλον, οπότε πρέπει να επιλέξει κάθε μέρα το μέσο μεταφοράς με απώτερο σκοπό μνα μην αργεί στο σχολείο. Ο χρόνος που θα ολοκληρώσει την διαδρομή με κάθε ένα από τα διαθέσιμα μέσα μεταφοράς εξαρτάται από πολλούς παράγοντες και είναι τυχαίος κάθε μέρα.

Τα σημεία επιλογές του παίχτη, είναι οι διαθέσιμοι τρόποι μεταφοράς που διαθέτει για να πάει στο σχολείο, οι οποίοι μπορεί να είναι δωρεάν όπως περπάτημα και ποδήλατο ή επί πληρωμή όπως τα μέσα μαζικής μεταφοράς. Οι επιπτώσεις είναι τα χρήματα που διαθέτει ο παίχτης, η περιβαλλοντική του δράση και η τυχαία μεταβλητή είναι ο χρόνος που κάνει για να πάει στο σχολείο.

2.5 Δημιουργία νοημάτων και Constructionism

Ο κονστρακτιονισμός οφείλει την γέννηση του στον Seymour Papert και έχει καθιερωθεί ως μια θεωρία μάθησης, ένα επιστημολογικό παράδειγμα αλλά και ως ένα πλαίσιο σχεδιασμού (design framework), το οποίο χρησιμοποιεί τις ψηφιακές τεχνολογίες, ως ένα εκφραστικό μέσο για τη δημιουργία νοημάτων από τους ίδιους τους μαθητές, ατομικά ως μεμονωμένα άτομα, αλλά και συλλογικά ως μέλη κάποιας ομάδας.

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μαθησιακή διαδικασία των μαθηματικών σε περιβάλλοντα βασισμένα σε εργαλεία σύγχρονης τεχνολογίας, αρχίζουν από τη θεώρηση του αμερικανού S. Papert (1980), ο οποίος ήθελε να περιγράψει τη μάθηση ως δραστηριότητα που πηγάζει από τη διερευνητική και δημιουργική ανθρώπινη φύση. Σύμφωνα με τον Κυνηγό (2006, σελ. 128,129), ο Papert ισχυρίστηκε ότι αυτό που δεν έχουν κάνει οι επιστήμες της αγωγής είναι να μελετήσουν το τι μπορεί να κάνει το παιδί. Έτσι, κατά τον Papert, θα πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στο ποια νοήματα δομεί το παιδί και όχι στο αν καταλαβαίνει ή παρανοεί νοήματα που υπάρχουν.

Με άλλα λόγια, αναποδογυρίζει την προσέγγιση και μελετάει τα μαθηματικά νοήματα που δομούν τα παιδιά, δηλαδή τι καταλαβαίνουν (αντί για το τι παρανοούν) και πως η κατανόηση αυτή αναπτύσσεται (αντί για το ποιες παρανοήσεις διορθώνονται). Έτσι, ήταν πεπεισμένος ότι τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν με πολύ ανώτερους τρόπους από ότι υποστηρίζεται και ότι μπορούν να σχεδιαστούν τεχνητά περιβάλλοντα, τα οποία να είναι πολύ πλούσια σε δυνατότητες, ώστε να δίνουν στο παιδί εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων (Papert, 1980).

Η θεώρηση του Papert έχει και ένα δεύτερο σκέλος, τη φιλοσοφία του για τη χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας. Σκέφτηκε ότι, ο προγραμματισμός που ήταν το βασικό εργαλείο στην εξέλιξη της επιστήμης της τεχνητής νοημοσύνης, ήταν και ένα αναπόσπαστο εργαλείο σκέψης και δημιουργίας και ότι αυτή η δραστηριότητα ήταν μια γνήσια δραστηριότητα μάθησης. Στο πλαίσιο αυτό, ο προγραμματισμός ωθεί τους μαθητές να αναπτύξουν διαισθητικές ιδέες και να τις εκφράσουν με τη χρήση συμβόλων, να τις εκτελέσουν στον υπολογιστή και να παρατηρήσουν άμεσα το αποτέλεσμα τους συγκρίνοντάς το με το αποτέλεσμα που επιδίωκαν πριν από την εκτέλεση.

Η θεωρία της μάθησης που ονομάζεται Constructionism έχει ως κεντρικό άξονα τη μάθηση μέσα από τη συνειδητή εμπλοκή του μαθητή σε μια κατασκευή, που έχει νόημα γι' αυτόν. Έχοντας ως αφετηρία τη θεωρία του

Κοστρουκτιβισμού του Piaget και εστιάζοντας στην μάθηση μέσω της κατασκευής, ο Seymour Papert ανέπτυξε τις ιδέες του Constructionism.

Στην αρχή, ξεκίνησε και αναπτύχθηκε παράλληλα με τον ερχομό των ψηφιακών μέσων, που σχεδιάστηκαν για να εμπλακούν οι μαθητές δυναμικά με τα μαθηματικά. Έκτοτε, εξελίσσεται ραγδαία και λειτουργεί όχι μόνο ως φακός για την δράση των μαθητών αλλά ως ένα πρίσμα με το οποίο εξηγούμε και καθοδηγούμε τη δράση των μαθητών.

Στη θεωρία του Piaget, ο μαθητής κατασκευάζει ενεργά τη γνώση. Η νέα γνώση δομείται πάνω στην παλιά, όχι απλά επειδή είναι πιο σωστή ή πιο αποτελεσματική, αλλά σαν αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεων με το περιβάλλον (Vygotsky, 1978). Ο Papert δίνει έμφαση στον «διάλογο» του μαθητή με το αντικείμενο που κατασκευάζει (artifact). Ο διάλογος αυτός είναι που αποκαλύπτει τον τρόπο που σκέφτηκε, εκείνος που το έφτιαξε, είτε πρόκειται για κατασκευή, είτε για ανακατασκευή, αλλά και αποδόμηση του αντικειμένου.

Αυτό που μας βοηθά να καταλάβουμε μια τέτοια οπτική είναι ο τρόπος που οι ιδέες παίρνουν μορφή ή αναδιαμορφώνονται, όταν εκφράζονται μέσω κατασκευών που υλοποιούνται σε συγκεκριμένο περιεχόμενο από συγκεκριμένους ανθρώπους. Οι μαθητές αντιμετωπίζοντας ένα πρόβλημα, εφευρίσκουν εργαλεία και μέσα, που υποστηρίζουν τη διερεύνησή τους, στην κατεύθυνση που οι ίδιοι επιθυμούν. Συνεπώς, η μάθηση, πηγάζει από την διερευνητική φύση του ανθρώπου.

Το αντικείμενο που κατασκευάζει ο μαθητής μπορεί στη συνέχεια να το περιεργαστεί και να το μετατρέψει. Ο τρόπος που σκέφτηκε και ο μηχανισμός που δημιούργησε τα δικά του νοήματα μπορεί να γίνει αντιληπτός από έναν ερευνητή που γνωρίζει το πλαίσιο μέσα στο οποίο δούλεψε ο μαθητής. Έτσι το πλαίσιο αυτό δε διαμεσολαβεί μόνο ανάμεσα στο μαθητή και τις ιδέες του, αλλά είναι και χρήσιμο εργαλείο που έχει στα χέρια του ο ερευνητής για να εξάγει τα συμπεράσματά του.

Έρευνες με αντικείμενο τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες συντελείται η μάθηση έχουν δείξει, όπως αναφέρει ο Resnick, ότι πολλές από τις καλύτερες μαθησιακές εμπειρίες των παιδιών αποκτώνται όταν αυτά εμπλέκονται, όχι απλώς στη διάδραση με υλικά, αλλά κατά τη σχεδίαση, δημιουργία και επινόηση με αυτά (Papert, 1980; Resnick, 2002). Μέσα από τη σχεδίαση και τη δημιουργία, τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να δοκιμάζουν τις ιδέες τους. Αν τα δημιουργήματά τους δεν ανταποκρίνονται στις αρχικές τους προσδοκίες, μπορούν να επανεξετάσουν τις ιδέες τους και να δημιουργήσουν κάτι καινούργιο, ακολουθώντας έτσι έναν επαναλαμβανόμενο κύκλο νέων ιδεών

και νέων δημιουργημάτων. Αυτός ο κύκλος σχεδίασης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος παιχνιδιού. Τα παιδιά με κάθε νέο δημιούργημά τους παίζουν με τις ιδέες τους, δηλαδή, όπως και στο παιχνίδι, δοκιμάζουν τα όρια, πειραματίζονται με νέες ιδέες και εξερευνούν τις πιθανότητες. Τέλος, μέσα από τη σχεδίαση και τη δημιουργία, τα παιδιά μαθαίνουν νέες έννοιες.

Ο κονστρακτιονισμός ως θεωρία μάθησης είναι μοναδική, γιατί εστιάζει στους τρόπους με τους οποίους τα νοήματα δημιουργούνται κατά τη διάρκεια ατομικής και συλλογικής ενασχόλησης με τα ψηφιακά δομήματα, επηρεασμένης όμως από τις αλλαγές, οι οποίες αποτελούν αντικείμενο διαπραγματεύσεως, που κάνουν οι μαθητές στα δομήματα, τα οποία θεωρούν ως κτήμα τους.

Τα δομήματα αποτελούν, από την μια πλευρά εκφράσεις μαθηματικού νοήματος και από την άλλη οι μαθητές συνεχώς εκφράζουν νοήματα τροποποιώντας τα, συζητώντας και αιτιολογώντας τις αλλαγές που πραγματοποίησαν. Για τον Papert η σύγχρονη τεχνολογία και ο ηλεκτρονικός υπολογιστής είναι τα πολιτισμικά εργαλεία με τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν κατάλληλα περιβάλλοντα μάθησης, που θα επηρεάζουν τον τρόπο που σκέφτονται και μαθαίνουν τα παιδιά ακόμα και όταν δε βρίσκονται σε επαφή με αυτά (Papert, 1980; Κυνηγός, 2006).

Ως θεωρία σχεδιασμού χρησιμοποιήθηκε από ένα ευρύ φάσμα παισίων, όπως ο σχεδιασμός διδακτικών παρεμβάσεων, σχεδίων διδασκαλίας και δομημάτων από εκπαιδευτικούς ως μέσο επαγγελματικής ανάπτυξης. Χρησιμοποιείται επίσης ως φακός για την μελέτη της μάθησης ως διαδικασία σχεδιασμού. Κάποιες από τις έρευνες εστίασαν στην κονστρακτιονιστική μάθηση μέσα από τον σχεδιασμό ψηφιακών δομημάτων (Kafai et al. 1998; Kafai 2006). Αυτή η έρευνα έγινε κυρίως στο πλαίσιο σχεδιασμού και παιξίματος παιχνιδιών από μαθητές, εστιάζοντας στους μαθηματικούς κανόνες των παιχνιδιών.

Η κονστρακτιονιστική δραστηριότητα θεωρείται εξ αρχής ως κοινωνική δραστηριότητα, όπου οι μαθητές συζητούν και επιχειρηματολογούν, εργαζόμενοι μέσα σε έναν μικρόκοσμο. Η δημιουργία νοημάτων από τους μαθητές επιτυγχάνεται από τον συνδυασμό της ανάδρασης που παρέχεται από την οθόνη του υπολογιστή, την χρήση των αναπαραστάσεων και της σημασιολογίας του μικρόκοσμου και από τη δημιουργία μιας γλώσσας για την έκφραση επιχειρημάτων μέσα στο πλαίσιο της εκάστοτε δραστηριότητας.

Οι νεώτερες έρευνες εστιάζουν στον σχεδιασμό ψηφιακών μέσων για την υποστήριξη της κονστρακτιονιστικής συλλογικής μάθησης, η οποία στοχεύει

στη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, μέσα από μικρόκοσμους που μοντελοποιούν πολύπλοκα περιβαλλοντολογικά και κοινωνικά θέματα. Οι μαθητές μέσα στον μικρόκοσμο διαθέτουν εργαλεία προγραμματισμού, όπου ο κάθε μαθητής ατομικά χρησιμοποιεί για να προγραμματίσει και να εξερευνήσει το περιβάλλον μάθησης και η ομαδική επικοινωνία διευκολύνεται από προγράμματα επικοινωνίας.

Ένα ερώτημα που προκύπτει από την έρευνα, έγκειται στο γεγονός αν η σύνδεση του μαθηματικού φορμαλισμού και του προγραμματισμού μπορεί να αποφευχθεί ή αλλιώς αν η τυπική αναπαράσταση συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Αυτό παραμένει ένα ανοιχτό ερώτημα, καθώς κάποιοι υποστηρίζουν, ότι ο μαθηματικός φορμαλισμός αποτελεί εμπόδιο στους μαθητές και ότι πρέπει να αποφευχθεί. Υπάρχουν όμως και κάποιοι, που υποστηρίζουν ότι τα ψηφιακά μέσα παρέχουν τη δυνατότητα στον μαθηματικό φορμαλισμό να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές, γιατί πλέον μπορούν να τον χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν μοντέλα και άλλες αναπαραστάσεις της ίδιας μαθηματικής έννοιας. Με αυτόν τον τρόπο ο φορμαλισμός αποτελεί μια ακόμα μορφή αναπαράστασης με την οποία οι μαθητές δημιουργούν νόημα για την μαθηματική έννοια που μελετούν.

Καθώς, η τεχνολογία προοδεύει και οι επιλογές αυξάνονται η δημιουργία κονστρακτιονιστικών εργαλείων με τις δικές τους αναπαραστάσεις ,λειτουργίες και σημασιολογία αποτελεί μια συνεχή διαδικασία σχεδιασμού. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο σχεδιασμού, ο σχεδιασμός και η δημιουργία ενός ψηφιακού παιχνιδιού γίνεται ένα ψηφιακό δόμημα που αποτελεί ένα μικρόκοσμο όπου οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν τον μαθηματικό φορμαλισμό με άλλες αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας μέσα από την εφαρμογή της στο παιχνίδι. Η θεωρία του κονστρακτιονισμού επισημαίνει πως οι άνθρωποι κατασκευάζουν τις αναπαραστάσεις για τον κόσμο γύρω τους, μέσα από την εμπειρία και τους αναλογισμούς τους πάνω στην εμπειρία αυτή, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα την προϋπάρχουσα γνώση, για να ερμηνεύσουν τη νέα γνώση. Είναι επομένως, ενεργοί δημιουργοί της γνώσης τους. Η πιο σημαντική θέση της θεωρίας του εποικοδομητισμού είναι ότι η μάθηση δομείται ενεργά από τον ίδιο τον μαθητή και δεν επιτυγχάνεται με τον μαθητή ως παθητικό δέκτη. Συνεπώς, δεν μπορεί να μεταδοθεί από τον κατέχοντα την γνώση- διδάσκοντα στον μη κατέχοντα -μαθητευόμενο.

Στην ενεργητική μάθηση (active learning) οι μαθητές δεν είναι απλά αποδέκτες πληροφοριών, αλλά συμμετέχουν και πράττουν. Έχουν καθοριστικό ρόλο, σκέφτονται τι κάνουν και οδηγούνται στη μάθηση με νόημα. Κατά την ενεργητική μάθηση εγκαταλείπεται η δασκαλοκεντρική διδασκαλία και

υιοθετείται η μαθητοκεντρική, αφού οι μαθησιακές ανάγκες των εκπαιδευόμενων τίθενται στο επίκεντρο. Η ενεργητική μάθηση αυξάνει την εννοιολογική κατανόηση με αποτέλεσμα οι γνώσεις και οι εμπειρίες να διατηρούνται περισσότερο. Η ενεργητική μάθηση είναι σύμφυτη με τη διδασκαλία και την πραγματικότητα. Η σύνδεση της θεωρίας με την πραγματικότητα, η εμπλοκή διαφόρων φορέων, η ανατροφοδότηση και ο αναστοχασμός, έχουν ως αποτέλεσμα την κατανόηση των εννοιών που βρίσκονται υπό συζήτηση και διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη από τους μαθητές. Η χρήση εκπαιδευτικών τεχνικών ενεργητικής μάθησης και η αξιοποίηση των ΤΠΕ αυξάνει τα κίνητρα των μαθητών για μάθηση, διευκολύνει τη συγκράτηση πληροφοριών, προωθεί την ανταλλαγή απόψεων, καλλιεργεί την κριτική και δημιουργική ικανότητα και βελτιώνει τα μαθησιακά αποτελέσματα (Κυνηγός, 2015).

2.5.1 Η έννοια της έννοιας

Οι όροι «έννοια» και «νόημα» εμφανίζονταν για χρόνια στην έρευνα της μαθηματικής παιδείας, άλλα με το κοινό νόημα του όρου, χωρίς να έχει οριστεί επακριβώς (Balacheff & Gaudin, 2002). Για τις μαθηματικές έννοιες υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις. Υπάρχουν οι προσεγγίσεις που εστιάζουν περισσότερο στις ίδιες τις έννοιες, σαν οντότητες και αναλύουν τη δομή τους κι άλλες που τις προσεγγίζουν μελετώντας το πλαίσιο εντός του οποίου δημιουργούνται με ιδιαίτερο βάρος στη χρήση τους και σε σχέση με το άτομο που τις χρησιμοποιεί.

Σύμφωνα με την Κολέζα (2000) η έννοια (concept) είναι μια νοητική κατασκευή, που συνοψίζει τα ουσιώδη στοιχεία που απαρτίζουν ορισμένα όντα, μια κανονικότητα που επαναλαμβάνεται και μπορεί να περιγραφεί. Η περιγραφή της έννοιας αυτής μπορεί να γίνει μέσω του ορισμού της έννοιας (concept definition) σε μαθηματικό πλαίσιο. Ο Tall (1991) ισχυρίζεται ότι μια μαθηματική έννοια, στο μέτρο που είναι αποτέλεσμα της αντιληπτικής εμπειρίας ενός ατόμου, διαθέτει εκτός από τον ορισμό της και μια εικονική πλευρά (concept image), που δημιουργείται από την συνύπαρξη νοητικών εικόνων (εσωτερικών αναπαραστάσεων) και ιδιοτήτων .

Ο ορισμός αναφέρεται στο μαθηματικό νόημα που καθορίζεται στο πλαίσιο τυπικών συμβολισμών, η εικόνα της έννοιας περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, τις διαδικασίες και τις ιδιότητες που συσχετίζονται στο νου ενός ατόμου με αυτή την έννοια. Άρα, ενώ ο ορισμός έχει μια φαινομενολογική διάσταση, η εικόνα είναι προσωπική δημιουργία κάθε ατόμου και ωριμάζει μαζί με τις εμπειρίες του.

Έτσι γίνεται αντιληπτό ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για μια έννοια ως αναλλοίωτη αλήθεια, αλλά στο πλαίσιο που αυτή κατασκευάζεται από το άτομο. Μεταξύ της εικόνας της έννοιας και του ορισμού της, υπάρχει αλληλεπίδραση. Δηλαδή, ο ορισμός συνεισφέρει στη διαμόρφωση της εικόνας, μέσα από εμπλοκή σε δραστηριότητες και εμπειρίες και η εικόνα δίνει προσωπικό νόημα για τον μαθητή στον τυπικό ορισμό.

2.5.2 Συνεργατική μάθηση σε ψηφιακό περιβάλλον

Βλέποντας το άτομο ως μέλος μιας ομάδας, τα νοήματα που δημιουργεί και οι πρακτικές του όχι μόνο επηρεάζονται από το περιβάλλον του, αλλά πιο συγκεκριμένα, συνδιαμορφώνονται από την ομάδα και εκλαμβάνονται όπως χρησιμοποιούνται. Άρα, μπορούμε να μιλάμε για νοήματα και πρακτικές της ομάδας. Η κατάσταση στην οποία τα άτομα σαν μια ομάδα προσπαθούν να μάθουν κάτι μαζί ή να μάθουν πώς να μαθαίνουν μαζί ονομάζεται συνεργατική μάθηση (Kynigos, 2015).

Το αντικείμενο της μάθησης μπορεί να είναι η επίλυση ενός προβλήματος που η διάρκειά της μπορεί να είναι είτε μιας διδακτικής ώρας, είτε πολλών επαναλαμβανόμενων συναντήσεων. Η χρήση της φράσης «μαθαίνουν μαζί» είναι αρκετά περιεκτική. Μπορεί να σημαίνει, στον ίδιο χώρο, ή σε διαφορετικούς, επικοινωνώντας, για παράδειγμα μέσω υπολογιστών, σύγχρονα ή ασύγχρονα. Οι ομάδες των ατόμων μπορεί να διαφέρουν σε πλήθος (από δύο ως πολύ περισσότερα μέλη).

Έτσι, μιλώντας στο πλαίσιο της διδακτικής έρευνας τα παραπάνω χαρακτηριστικά διαμορφώνουν την κλίμακα της έρευνας. Αυτό που πρέπει να τονισθεί, είναι ότι η συνεργασία στο πλαίσιο της συνεργατικής μάθησης δεν σημαίνει διαχωρισμό του προβλήματος σε βήματα και υποπροβλήματα με σκοπό το διαμοιρασμό εργασιών και αρμοδιοτήτων, ώστε το κάθε μέλος της ομάδας να δουλεύει ατομικά στο κομμάτι της δουλειάς που του έχει ανατεθεί. Η συνεργασία (cooperation) αυτής της μορφής δεν συνιστά συνεργατική μάθηση, αφού τα άτομα δεν μαθαίνουν μαζί, δουλεύοντας (collaboration). Αντίθετα στη συνεργατική μάθηση η συνεργασία (collaboration) εντοπίζεται σε διαπραγμάτευση απόψεων και κοινή χρήση νοημάτων (που τα ίδια τα μέλη της ομάδας δημιουργούν) για να λύσουν το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν (Roschelle & Teasley, 1995).

Με τη χρήση υπολογιστών και διαδικτύου δίνονται δυνατότητες συνεργατικής μάθησης από απόσταση (μεταξύ των μελών της ομάδας), αλλά και ασύγχρονης επικοινωνίας. Έτσι, διαμορφώνεται το πλαίσιο της συνεργατικής μάθησης σε ψηφιακό περιβάλλον (computer-based collaborative

learning: CSCL), ως διδακτική πρακτική, αλλά και ως μέθοδος έρευνας. Σαν ερευνητικό πεδίο έχει σαν αντικείμενο τη δημιουργία νοημάτων σαν κοινή δραστηριότητα των μελών μιας ομάδας, τις κοινωνικές πρακτικές που τη διέπουν και τους τρόπους που αυτές διαμεσολαβούνται από εργαλεία (artifacts) σχεδιασμένα για αυτό το σκοπό (Koschmann, 2002). Στόχος της κοινότητας των ερευνητών που ασχολούνται με αυτό το είδος έρευνας είναι ο συγκερασμός της χρήσης ψηφιακών τεχνολογιών και συνεργατικής μάθησης και οι προσπάθειες στην κατεύθυνση αυτή είναι συνεχώς εξελισσόμενες (Stahl, Koschmann, & Suthers, 2006). Έτσι, προϊόν αυτής της έρευνας είναι ο σχεδιασμός μέσων, εργαλείων, δραστηριοτήτων και περιβαλλόντων που εμπλουτίζουν αυτές τις πρακτικές δημιουργίας νοημάτων.

Όπως έχουμε προαναφέρει, σε ομάδες που δρουν σε περιβάλλοντα μάθησης, ιδιαίτερη σημασία για την ανάπτυξη κοινών νοημάτων και πρακτικών έχει το πρόβλημα το οποίο διαπραγματεύονται. Η διερευνητική φύση του προβλήματος είναι καταλυτική προς αυτή την κατεύθυνση. Έτσι, ο σχεδιασμός των μικρόκοσμων που θα απασχολήσουν τους μαθητές γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι δραστηριότητες να προωθούν τη διερεύνηση. Το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με το υπολογιστικό περιβάλλον, δηλαδή να υποστηρίζει διερευνητικές πρακτικές, αλλά και δυνατότητες επικοινωνίας μεταξύ των μελών της ομάδας ή υποομάδων της, χωρίς να σημαίνει ότι τα μέλη θα επικοινωνούν μόνο μεταξύ των υπολογιστών. Το υπολογιστικό περιβάλλον μέσω του οποίου αναπαρίσταται ο μικρόκοσμος (ή το πρόβλημα) επηρεάζει, όπως έχει προαναφερθεί, τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές. Πώς όμως μπορούν να εντοπιστούν αυτά τα νοήματα; Εκφράζεται η άποψη (Stahl, 2006) ότι η διενέργεια pre και post tests σε μια έρευνα που γίνεται στο πλαίσιο συνεργατικής μάθησης δε δίνει πλήρη αποτελέσματα για τη δημιουργία νοημάτων, αφού τα νοήματα δημιουργούνται από την ομάδα κι όχι από το κάθε άτομο.

Έτσι, οι ερευνητές μελετούν τις διαρθρωμένες μορφές διαλόγου μεταξύ των ατόμων, προτάσσοντας μια διαλογική άποψη της συνεργασίας, σύμφωνα με την οποία η γλώσσα χρησιμοποιείται ως κοινωνικός τρόπος σκέψης (Κυνηγός, 2006). Ειδικά όταν η μάθηση και η επικοινωνία υποστηρίζεται από υπολογιστές υπάρχουν διάλογοι με μηνύματα μεταξύ των συμμετεχόντων, παράλληλες ενέργειες που καταγράφονται και αναφορές σε προηγούμενες συζητήσεις που είχαν γίνει ή αποφάσεις που είχαν παρθεί από τα μέλη της ομάδας.

2.6 Η έννοια της αειφορίας

Η σύγχρονη εποχή παρά την πρόοδο που τη χαρακτηρίζει στον τομέα της τεχνολογίας και της επιστήμης, με σκοπό τη βελτίωση της ποιότητας της ζωής του ανθρώπου, χαρακτηρίζεται ταυτόχρονα και από πολλαπλές “κρίσεις” στο πεδίο της οικονομίας, της κοινωνίας και του περιβάλλοντος. Οι συνθήκες αυτές, κάθε άλλο παρά ευνοϊκές είναι για την ευημερία του ανθρώπου. Η έντονη οικονομική κρίση που πλήττει σήμερα ένα μεγάλο μέρος του κόσμου, συμπεριλαμβανομένων και αναπτυσσόμενων χωρών, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την περιβαλλοντική κρίση και ταυτόχρονα συνδέεται και με την κρίση στις σύγχρονες κοινωνίες (Funtowicz, Ravetz, 1993).

Η περιβαλλοντική κρίση πηγάζει από τη μη αειφορική διαχείριση του περιβάλλοντος, τη σπατάλη των φυσικών πόρων και ενέργειας, με ζητούμενο τη “φθηνή” μαζική παραγωγή προς ικανοποίηση των καταναλωτικών μας ορέξεων. Το υφιστάμενο μοντέλο παραγωγής και κατανάλωσης υποβαθμίζει το περιβάλλον και οδηγεί σε σοβαρά περιβαλλοντικά ζητήματα (π.χ. περιβαλλοντική ρύπανση, κλιματικές αλλαγές, συρρίκνωση της βιοποικιλότητας...) τα οποία διαταράσσουν την οικολογική ισορροπία και θέτουν σε κίνδυνο την επιβίωση των οικοσυστημάτων και κατά συνέπεια του ίδιου του ανθρώπου. Ταυτόχρονα, η περιβαλλοντική κρίση συνδέεται με κοινωνικά και οικονομικά ζητήματα. Η αντιμετώπιση των ζητημάτων αυτών απαιτεί μια αειφόρα, βιώσιμη και μόνιμη λύση (Liarakou, Daskolia and Papanikolaou, 2012).

Κατά τα τελευταία 50 χρόνια, αυξάνεται το ενδιαφέρον για την υποστήριξη μιας αειφόρου ανάπτυξης ενός κόσμου που αντιμετωπίζει αύξηση του πληθυσμού, μείωση των φυσικών πόρων, εκβιομηχάνιση και παγκοσμιοποίηση. Τι είναι όμως η βιωσιμότητα? Η βιωσιμότητα είναι μια έννοια η οποία διαρκώς εξελίσσεται, περιλαμβάνει πολλαπλά πεδία και προοπτικές και σχετίζεται με πολυσχιδή φαινόμενα (UNESCO 2005). Έτσι καθίσταται εξαιρετικά δύσκολο να προσδιορισθεί ένας ορισμός της βιωσιμότητας που να είναι ταυτόχρονα ευρύς και ακριβής με τα ποικιλόμορφα πλαίσια με τα οποία σχετίζεται. Αυτή η έλλειψη ορισμού συνεπάγεται την μερική κατανόηση της έννοιας, που με τη σειρά της οδηγεί στην υιοθέτηση αντιφατικών μεταξύ τους πολιτικών (Fabricatore, Ximena 2012).

Το 1987 η UN World Commission on Environment and Development μας παρέχει τον πιο διαδεδομένο και ευρέως χρησιμοποιούμενο ορισμό της έννοιας της βιωσιμότητας, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: ανάπτυξη που ικανοποιεί τις ανάγκες του σήμερα χωρίς να θέτει σε κίνδυνο την ικανότητα των μελλοντικών γενεών να ικανοποιήσουν τις δικές τους ανάγκες.

Αυτός ο ορισμός έχει δεχθεί κριτικές, επειδή δεν προβάλλει την σημασία της έννοιας αλλά παρόλαυτα θεωρείται θεμελιώδης, εφόσον περιλαμβάνει την ηθική και διαχρονική σκοπιά της βιωσιμότητας και προβάλλει άμεσα την αρμονική ανάπτυξη, όχι μόνο της οικονομίας αλλά και των διάφορων οικοσυστημάτων και του ανθρώπου.

Στην σήμερον ημέρα η έννοια της αειφορίας συναντάται ως the “Triple Bottom Line”(TBL) και περιλαμβάνει τρεις διαστάσεις :

Οικονομική : Ένα οικονομικά βιώσιμο σύστημα πρέπει να είναι σε θέση να παράγει αγαθά και υπηρεσίες σε μια συνεχή βάση ώστε να διατηρεί ευχέριστα επίπεδα κυβερνητικού και εξωτερικού χρέους και να αποφεύγει ανισορροπίες που ζημιώνουν την αγροτική και βιομηχανική παραγωγή.

Περιβαλλοντική : Ένα περιβαλλοντικά βιώσιμο σύστημα πρέπει να διατηρεί μια σταθερή βάση πόρων, αποφεύγοντας την υπερεκμετάλλευση των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και την εξάντληση των μη ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Αυτό περιλαμβάνει την διατήρηση της βιοποικιλότητας, της ατμοσφαιρικής σταθερότητας και άλλων λειτουργιών των οικοσυστημάτων που δεν χαρακτηρίζονται ως οικονομικοί πόροι.

Κοινωνική : Ένα κοινωνικά βιώσιμο σύστημα πρέπει να επιτυγχάνει διανεμητική ισότητα, επαρκής προσφορά υπηρεσιών υγείας και εκπαίδευσης, πολιτική υπευθυνότητα και συμμετοχή.

Αυτές οι τρεις διαστάσεις είναι άρρηκτα συνδεδεμένες μεταξύ τους και η αλληλεπίδραση των οποίων παράγει συνέπειες που δεν μπορούν να κατανοηθούν μόνο με τοπική παρατήρηση τους (Κάτζη 2013).

Έτσι λοιπόν για να αντιμετωπισθούν τα οικολογικά προβλήματα του πλανήτη κρίνεται επιτακτική η ανάγκη της υιοθέτησης μιας βιώσιμης πολιτικής ανάπτυξης σε παγκόσμιο επίπεδο. Για να γίνει αυτό πρέπει να γίνουν αλλαγές στο οικονομικό επίπεδο, στην κοινωνία ακόμα και στον τρόπο ζωής των ανθρώπων. Για να πραγματοποιηθούν αυτές οι αλλαγές πρέπει να μάθουν οι μαθητές ποια είναι τα προβλήματα, πώς και ποιους επηρεάζουν, αλλά κυρίως οι προτεινόμενες λύσεις τι ακριβώς απαιτούν να γίνει και τι συνέπειες έχουν, έτσι ώστε όταν γίνουν ενεργοί πολίτες να μπορούν με βάση τις επιστημονικές και περιβαλλοντικές τους γνώσεις να συμμετάσχουν ενεργά στην διαμόρφωση και εφαρμογή των διαδικασιών που θα ευνοούν μια αειφόρο ανάπτυξη όλων των κοινωνιών και των μελών αυτών (Funtowicz, Ravetz, 1993).

2.6.1 Το ChoiCo και η αειφορία

Οι ΤΠΕ μπορούν να αξιοποιηθούν ως συμπλήρωμα στην τάξη για να προωθήσουν τη συνεργασία, τη σύνδεση με τον «πραγματικό κόσμο» και την εμπειρική μάθηση, οι οποίες αποτελούν βασικές παιδαγωγικές μεθόδους της περιβαλλοντικής εκπαίδευσης (Δημητρίου, 2013).

Τα παιχνίδια που κατασκευάζονται με το ChoiCo μπορούν να αποτελέσουν προσομοιωτές πολύπλοκων περιβαλλοντικών και κοινωνικών προβλημάτων, με συνθήκες που προσεγγίζουν αυτές του πραγματικού κόσμου. Με το ChoiCo, οι μαθητές-παίκτες αποφασίζουν την επόμενη κίνηση τους, λαμβάνοντας υπόψιν τα δεδομένα του παιχνιδιού και υπολογίζοντας με αυτό τον τρόπο τις συνέπειες που επιφέρει η κάθε απόφαση τους.

Αυτό το κλίμα αβεβαιότητας που επικρατεί μέσα στο παιχνίδι, μπορεί να υποβοηθήσει την εξέταση και την ανάπτυξη των διαισθητικών αντιλήψεων τους. Μέσα από έρευνες, έχει φανεί ότι τα ψηφιακά παιχνίδια μπορούν να αποτελέσουν περιβάλλοντα μάθησης, ώστε οι μαθητές να νοηματοδοτήσουν την έννοια της αειφορίας (sustainability) (Daskolia & Kynigos, 2012). Για να μπορέσουν όμως οι μαθητές να χτίσουν ένα βιώσιμο μέλλον, απαιτείται η ικανότητα να αντιμετωπίζουν την περίπλοκη δυναμική, η οποία χαρακτηρίζει τον κόσμο στον οποίο ζουν.

Απαραίτητα εφόδια με τα οποία πρέπει να είναι εφοδιασμένοι οι μαθητές είναι η ικανότητα της συνεχούς εκτίμησης του περιβάλλοντος που τους περιβάλλει, να λειτουργούν αποτελεσματικά μέσα σε αυτό και να προσαρμόζονται κατάλληλα με τις αλλαγές. Αυτό σημαίνει, ότι πρέπει να αντιλαμβάνονται τον κόσμο, ως ένα σύστημα, σκεπτόμενοι ταυτόχρονα τα άμεσα προβλήματα και τις μακροχρόνιες συνέπειες των επιλογών που καλούνται να πάρουν.

Η εκπαίδευση για την αειφορία απαιτεί μαθησιακές προσεγγίσεις και περιβάλλοντα όπου η απόκτηση γνώσεων από μόνη της δεν είναι αρκετή, αλλά πρέπει να συνδυάζεται με την ικανότητα σκέψης, λήψης αποφάσεων, σχεδιασμό στρατηγικής και επίλυσης προβλημάτων. Τέτοια περιβάλλοντα αποτελούν τα ψηφιακά παιχνίδια, όπου ο μαθητής για να νικήσει το παιχνίδι πρέπει να αποκτήσει πληροφορίες για την λειτουργία του παιχνιδιού, αλλά πρέπει να σκεφτεί τον τρόπο αξιοποίησης τους με σκοπό να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος (Liarakou, Daskolia and Papanikolaou, 2012). Στον πραγματικό κόσμο όμως, οι συνέπειες μιας απόφασης χωρίζονται σε βέβαιες συνέπειες και σε αβέβαιες συνέπειες. Ιδίως στα περιβαλλοντικά προβλήματα οι συνέπειες επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες οπότε είναι αβέβαιες και

κάθε απόφαση εμπεριέχει το στοιχείο της αβεβαιότητας και του υψηλού ρίσκου.

Τα παιχνίδια στο ChoiCo, σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνουν την αίσθηση στο παίκτη, ότι μπορεί να είναι σίγουρος για κάποιες συνέπειες, αλλά αδύναμος να ελέγξει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν τη δυναμική του προβλήματος, ώστε να γνωρίζει όλες τις συνέπειες των αποφάσεων του. Έτσι, η αβεβαιότητα του πραγματικού προβλήματος μεταφέρεται στο ψηφιακό δόμημα ώστε να προσεγγιστεί όλο και περισσότερο η πολυπλοκότητα των προβλημάτων του πραγματικού κόσμου (Chung-Ho Su, 2018).

Τα τρία παιχνίδια που σχεδιάστηκαν με το λογισμικό Choico βασίζονται πάνω στη λογική της περιβαλλοντικής εκπαίδευσης, δηλαδή περιλαμβάνουν ένα πραγματικό περιβαλλοντικό ή κοινωνικό πρόβλημα που είναι πολυδιάστατο και ο μαθητής αναλαμβάνει ένα συγκεκριμένο ρόλο και καλείται να λάβει αποφάσεις που περιέχουν ρίσκα με απρόβλεπτες συνέπειες. Τα τρία αυτά ψηφιακά παιχνίδια αποτελούν σοβαρά παιχνίδια, δηλαδή έχουν ως απώτερο σκοπό την εκπαίδευση των μαθητών. Χρησιμοποιούνται ως περιβάλλοντα μάθησης επειδή παρέχουν κίνητρο στους μαθητές και είναι διασκεδαστικά. Μέσα από αυτά οι μαθητές θα μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στα μαθηματικά και ιδίως στις πιθανότητες στην πράξη ώστε να αξιολογήσουν καταστάσεις και δεδομένα, να σχεδιάσουν στρατηγική, να λάβουν αποφάσεις με αβέβαιες συνέπειες κάτι που δεν έχουν εξοικειωθεί οι μαθητές.

Με αυτά τα τρία παιχνίδια γίνεται μια προσπάθεια να αναδειχθούν οι τρεις διαστάσεις της βιωσιμότητας καθώς γίνεται άμεσα αντιληπτό από τους μαθητές και στα τρία προβλήματα ότι κάθε απόφαση που παίρνουν έχει κοινωνικές, περιβαλλοντικές και οικονομικές συνέπειες. Μια συζήτηση με τον διδάσκοντα πάνω στα θέματα που πραγματεύονται τα παιχνίδια καθώς και η σύνδεση τους με άλλα παρόμοια θέματα θα δώσει στους μαθητές την μεγαλύτερη εικόνα της σοβαρότητας αυτών των θεμάτων. Τα τρία θέματα που επιλέχθηκαν κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού των παιχνιδιών εξυπηρετούν ακόμα έναν σκοπό, ο οποίος είναι να φανεί το εύρος των προβλημάτων της βιωσιμότητας και τη βαρύτητα των συνεπειών του κάθε προβλήματος.

Το e-game αφορά το πρόβλημα των άστεγων πολιτών μιας πόλης, και ο μαθητής καλείται να αναλάβει τον ρόλο του δημάρχου της πόλης που θέλει να επανεκλεγεί στο αξίωμα του, οπότε καλείται να κτίσει κτήρια τα οποία θα εξυπηρετούν τις ανάγκες των άστεγων συμπολιτών του ή αυτές των ήδη στεγασμένων συμπολιτών του, οι οποίες όμως διαφέρουν μεταξύ τους. Εδώ οι αποφάσεις επηρεάζουν την οικονομία της πόλης, το ενεργειακό αποτύπωμα

καθώς και τις ζωές των ανθρώπων της πόλης. Έτσι η κάθε απόφαση επηρεάζει κάθε πτυχή της ζωής όλων των εμπλεκόμενων.

Το eco-game αφορά μια περιβαλλοντική οργάνωση και την προστασία του αστικού τοπίου αλλά και του φυσικού περιβάλλοντος έξω από την πόλη όπως τη θάλασσα και το δάσος. Ο μαθητής αναλαμβάνει τη διεύθυνση ενός παραρτήματος μιας περιβαλλοντικής οργάνωσης με στόχο την μείωση της ρύπανσης τόσο του αστικού τοπίου όσο του φυσικού περιβάλλοντος έξω από την πόλη η οποία στηρίζεται στον εθελοντισμό για να διεξάγει την δράση της, αλλά αυτοί οι εθελοντές δεν είναι μόνιμοι.

Σε αυτό το παιχνίδι οι αποφάσεις επηρεάζουν την κοινωνία και τις ζωές των ανθρώπων καθώς έχουν οικονομικές επιπτώσεις και περιβαλλοντικές. Οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν ότι η μείωση της ρύπανσης είναι σημαντική τόσο για την υγεία των ανθρώπων όσο και για την οικονομία της πόλης. Εδώ οι αποφάσεις διαφέρουν από αυτές του e-game αλλά είναι εξίσου σημαντικές σε μακροχρόνια βάση και μέσα από κατάλληλη συζήτηση οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν μια αλληλεξάρτηση μεταξύ αυτών των δύο παιχνιδιών. Για παράδειγμα όσες περισσότερες πολυκατοικίες χτιστούν τόσα περισσότερα απορρίμματα θα καταλήγουν στη θάλασσα.

Επιπλέον, υπάρχει και η προσωπική διάσταση μέσα στο παιχνίδι εφόσον ο μαθητής αναλαμβάνει τον ρόλο ενός προσώπου εξουσίας το οποίο προσπαθεί να επιβιώσει και να ανελιχθεί μέσα στον επαγγελματικό χώρο, οι επιλογές που κάνει έχουν αντίκτυπο στην κοινωνία αλλά κυρίως στο ίδιο το άτομο το οποίο προσπαθεί να επιβιώσει και να διατηρήσει τη θέση του στον επαγγελματικό χώρο.

Έτσι υπεισέρχεται και η υποκειμενική σκοπιά ενός τόσο μεγάλου κοινωνικού και περιβαλλοντικού προβλήματος καθώς οι επιλογές μπορεί να ωφελούν μια κοινωνική ομάδα περισσότερο ή εις βάρος μιας άλλης κοινωνικής ομάδας, αλλά στο τέλος οι επιλογές μπορεί να ωφελούν ή να ζημιώνουν αυτόν που καλείται να τις λάβει.

Το school-game είναι ένα παιχνίδι που αφορά ένα μαθητή Γυμνασίου ο οποίος μένει με τους γονείς του σε ένα χωριό και το σχολείο του βρίσκεται στην γειτονική πόλη. Επειδή είναι μακριά το σχολείο πρέπει να βρει ένα μέσο μεταφοράς κάθε μέρα για να πηγαίνει. Το πρόβλημα είναι ότι έχει περιορισμένα χρήματα και δεν θέλει να ρυπαίνει το περιβάλλον οπότε πρέπει να επιλέξει κάθε μέρα το μέσο μεταφοράς με απώτερο σκοπό να μην αργεί στο σχολείο.

Αυτό το παιχνίδι διαφέρει αισθητά από τα δύο προηγούμενα καθώς εδώ ο παίχτης δεν αναλαμβάνει τον ρόλο κάποιου που αποφασίζει για μια ολόκληρη πόλη ή οργάνωση αλλά οι επιλογές σχετίζονται με τις επιλογές του ίδιου του ατόμου. Εδώ οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν ότι ο μαθητής αντιπροσωπεύει κάθε παιδί σε παρόμοια κατάσταση ή και όλα τα παιδιά γενικότερα. Οι αποφάσεις του παίχτη έχουν αμελητέο αντίκτυπο στη μόλυνση του περιβάλλοντος αλλά όταν πολλαπλασιαστούν και συνδυαστούν με τις αποφάσεις άλλων εκατομμυρίων παιδιών από όλο τον κόσμο τότε έχουν σημαντικές συνέπειες.

Όμως κρίθηκε απαραίτητο από τον σχεδιαστή οι μαθητές να εστιάσουν κυρίως στις έννοιες των πιθανοτήτων που είναι ενσωματωμένες μέσα στο παιχνίδι και όχι στο κοινωνικό πρόβλημα και στις επεκτάσεις του στον πραγματικό κόσμο. Έτσι οι μαθητές ήρθαν σε επαφή μόνο με το ένα από τα τρία παιχνίδια το οποίο ήταν το e-game. Ένας παράγοντας που συνέβαλλε στην επιλογή του συγκεκριμένου παιχνιδιού ήταν ότι το εν λόγω παιχνίδι αποτελεί ένα κοινωνικό πρόβλημα το οποίο οι μαθητές γνωρίζουν, οπότε τους παρέχει κίνητρο να παίξουν το παιχνίδι αλλά εστιάζοντας στις πιθανότητες για να οδηγηθούν στη νίκη του παιχνιδιού.

2.6.2 Η έννοια του ρίσκου

Ο άνθρωπος καθημερινά έρχεται αντιμέτωπος με διαφόρων ειδών προκλήσεις και απειλές. Το ρίσκο διακατέχει σχεδόν, όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες και είναι αυτό που μας βοηθάει στην κατανόηση και αντιμετώπιση των κινδύνων σε συλλογικό αλλά και σε ατομικό επίπεδο. Είναι ζωτικής σημασίας στην καινοτομία και την ανάπτυξη των σύνθετων, προηγμένων κοινωνιών.

Η διακινδύνευση ή «ρίσκο» στη διδασκαλία αποτελεί επιστημολογικό νεολογισμό. Η δομική του οριοθέτηση στην εκπαιδευτική-διδασκτική διαδικασία προϋποθέτει τόσο την οντολογική, όσο και την επιστημολογική προσέγγιση της έννοιας του «ρίσκου», η οποία, όπως θα φανεί στη συνέχεια, είναι δύσκολα προσδιορίσιμη. Η πολυπλοκότητα και η δυσκολία της οριοθέτησης της έννοιας «ρίσκο» διαφαίνεται ακόμα και στη λεξικογραφία - ερμηνευτική και ετυμολογική, η οποία παρέχει μια αρχική περιγραφική βάση, σχετικά με του τι ακριβώς θεωρείται «ρίσκο» (Zagkotas & Fykaris, 2017).

Δεν υπάρχει ένας και μόνο ορισμός για το ρίσκο, πράγμα που αποδεικνύει πόσο πολυδιάστατη και σύνθετη έννοια είναι. Σύμφωνα με τον Adams (2006) το ρίσκο συναντάται κυρίως σε τρεις πτυχές της καθημερινότητας: υπάρχει το οικονομικό, το φυσικό και το κοινωνικό, το οποίο συμπεριλαμβάνει υποκατηγορίες, όπως το πολιτικό, το ιατρικό, το καλλιτεχνικό, το στρατιωτικό,

το νομικό και τόσα όσα είναι τα επίθετα που μπορούν να συνδυαστούν με την ανθρώπινη συμπεριφορά στην περίπτωση της αβεβαιότητας.

Τα τελευταία χρόνια μάλιστα, η έννοια του ρίσκου σχετίζεται κατά βάση με την επικινδυνότητα (hazard) ή με ανεπιθύμητα γεγονότα που έχουν ενδεχομένως κόστος ή ζημιά. Το ρίσκο είναι μια ποσοτικοποιημένη αβεβαιότητα είτε με βάση την εμπειρία είτε με βάση τη θεωρία (Adams, 2006). Επίσης, ο Bernstein (1996) υπογραμμίζει πως όταν μιλάμε για ρίσκο πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας, όχι μόνο το ενδεχόμενο της ζημιάς αλλά και την ευκαιρία για κέρδος, το πεπρωμένο αλλά και τις βασιζόμενες σε πιθανότητες εικασίες για το μέλλον και τέλος την απελπισία που προκαλεί μια κατάσταση αλλά και τη δυνατότητα επιλογών.

Στο σημείο αυτό λοιπόν, είναι σημαντικό να γίνει ο διαχωρισμός της έννοιας του ρίσκου σε δυο διαστάσεις (Adams, 2006): στο πραγματικό, αντικειμενικό, μετρήσιμο ρίσκο που υπάγεται σε τυπικούς νόμους στατιστικής και στο υποκειμενικό ρίσκο, έτσι όπως το αντιλαμβάνεται και το ερμηνεύει κάθε άνθρωπος ξεχωριστά. Από την άλλη, ενώ ένας κίνδυνος είναι αντικειμενικός, υπαρκτός, το ρίσκο που συνεπάγεται όπως το αντιλαμβάνεται ο καθένας, εμπεριέχει ένα ποσοστό υποκειμενικότητας. Ένας συγκεκριμένος κίνδυνος σημαίνει διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικούς ανθρώπους ή ακόμα και στον ίδιο άνθρωπο, εάν εξεταστεί υπό διαφορετικό πρίσμα.

Ο Thomson (1986: 77) ερμηνεύοντας την έννοια του «ρίσκου» του προσδίδει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Είναι Υποκειμενικό, διότι αποτελεί ψυχολογική κατάσταση του ατόμου που βιώνει αμφιβολία, αβεβαιότητα ή ανησυχία σχετικά με το αποτέλεσμα μιας πράξης του ή πράξης άλλου που όμως επηρεάζει τον ίδιο.
- Είναι Αντικειμενικό, όταν γίνεται αναφορά στη διαφορά που προκύπτει μεταξύ των πραγματικών απωλειών και των αναμενόμενων.
- Είναι Υπαρκτό, όταν σχετίζεται με την πιθανότητα εκδήλωσης αρνητικών συνεπειών που μπορεί να αναδειχθεί από μια πράξη.

Οι Yates και Stone (1992) πρότειναν τρία στοιχεία τα οποία σε συνδυασμό μεταξύ τους καθορίζουν το συνολικό βαθμό του αντιλαμβανόμενου ρίσκου σε μια κατάσταση: την πιθανή απώλεια, τη σημαντικότητα της απώλειας και την αβεβαιότητα της εμφάνισης ή μη εμφάνισης αυτής της απώλειας. Αυτή η αντίληψη συνδέεται με το ευρύτερο πλαίσιο της διαδικασίας λήψης αποφάσεων, όπου εμπλέκονται γνωστικοί μηχανισμοί καθώς και διεργασίες πρόβλεψης αποφάσεων.

Η λήψη αποφάσεων, σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από τον πιθανολογικό χαρακτήρα τους, την επιλογή μεταξύ εκδοχών, τη συνεκτίμηση δεδομένων υπέρ και κατά, είτε με βάση τον ορθολογικό τρόπο, είτε μέσα από προσωπικές εκτιμήσεις, ευρετικές μεθόδους και διαισθήσεις.

Το ρίσκο, η αντιμετώπισή του, η επιδίωξή του ή η αποφυγή του μπορούν να ενταχθούν στο τυπικό πλαίσιο μάθησης μέσα από την καλλιέργεια του γραμματισμού του ρίσκου.

Ο γραμματισμός, ως έννοια περιλαμβάνει μια συνεχόμενη διαδικασία μάθησης που επιτρέπει στους ανθρώπους να επιτυγχάνουν τους στόχους τους, να αναπτύσσουν τη γνώση τους και τη δυναμική τους και να συμμετέχουν στο ευρύτερο κοινωνικό σύνολο (UNESCO, 2004). Πρόκειται για το πλαίσιο ανάπτυξης της στατιστικής και πιθανολογικής σκέψης που ενισχύει τη σωστή επεξεργασία διαφόρων πληροφοριών και τη λήψη αποφάσεων με επίγνωση σε καθημερινές πρακτικές. Βοηθάει τα παιδιά και μελλοντικούς μαθητές, φοιτητές και πολίτες, να αναλογίζονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα καταστάσεων προκειμένου να παίρνουν λογικές αποφάσεις ζωής (Spiegelhalter, 2009).

Η διαχείριση του ρίσκου πρέπει να καλλιεργείται από την βασική εκπαίδευση, με μια δια βίου προοπτική μέσα από καταστάσεις προβληματικής που συνδέονται με την πραγματική ζωή. Η ικανότητα ερμηνείας ενός ρίσκου και αποφυγής του με βάση την εκτίμηση πιθανών ενδεχομένων αποτελούν μια από τις πιο σημαντικές δεξιότητες που μπορεί να αναπτύξει κανείς (Boyer, 2006). Σε συνθήκες αβεβαιότητας η διαδικασία επιλογής της πιο εποικοδομητικής εκδοχής με στόχο τον περιορισμό του ρίσκου ενέχει τη συνεκτίμηση των πληροφοριών, που αφορούν στο παρόν και των εμπειριών που αφορούν στο παρελθόν (Garon και Moore, 2004).

Η ανάληψη ρίσκου αποτελεί, δηλαδή, μια κίνηση εξισορρόπησης (Adams, 2006), που πλαισιώνεται από γνωστικές λειτουργίες, διαισθητικούς μηχανισμούς, προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρίες, διαδικασίες επεξεργασίας πληροφοριών, με εκπαιδευτική προοπτική και εφαρμογή.

Η ένταξη του ρίσκου στο αναλυτικό πρόγραμμα βοηθάει τα παιδιά να το αντιμετωπίζουν ως κομμάτι της μάθησης και της προόδου τους. Μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες για την ανάπτυξή τους δραστηριότητες οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν χαρακτηριστικά όπως εμπιστοσύνη, φιλοδοξία, κριτική σκέψη, συνειδητοποίηση και να επιδιώξουν την επιτυχία καθώς θα έχουν εξασκηθεί στην αποτυχία.

Οι μαθητές στο σχολικό «ασφαλές» περιβάλλον μπορούν να μάθουν πώς να αξιολογούν την αβεβαιότητα και την ανταμοιβή, για να παίρνουν αργότερα καλύτερες αποφάσεις σχετικά με τη ζωή τους σε προσωπικό και κοινωνικό επίπεδο.

Το ρίσκο δεν πρέπει να προσεγγίζεται μεμονωμένα και αποσπασματικά, αλλά μέσα από διάφορες περιοχές και άξονες του αναλυτικού προγράμματος και σε συνδυασμό με ποικίλες δεξιότητες και άλλες μαθηματικές έννοιες, δηλαδή βιωματικά, διαθεματικά και διεπιστημονικά.

Συνήθως, το ρίσκο συμπεριλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών και ειδικότερα στο μάθημα της Στατιστικής. Όμως, σχετίζεται και με άλλα γνωστικά πεδία, όπως τις φυσικές επιστήμες, τα οικονομικά σε μεγαλύτερες τάξεις, την τεχνολογία, την αγωγή υγείας, την αγωγή του πολίτη, την κυκλοφοριακή αγωγή, την περιβαλλοντική εκπαίδευση και όχι μόνο.

Μέσα από απλά παραδείγματα και προβλήματα της καθημερινής ζωής τα παιδιά μπορούν, όσο το δυνατόν νωρίτερα, να αποκτήσουν μια πρώτη εξοικείωση και συσχέτιση με τις έννοιες αυτές προκειμένου να τις κατανοούν και να τις διαχειρίζονται επιτυχώς αργότερα, είτε μέσα στο σχολείο, είτε στην καθημερινότητά τους.

3 Η Ερευνητική Διαδικασία

3.1 Αντικείμενο της έρευνας

Η παρούσα εμπειρική μελέτη είναι μια έρευνα σχεδιασμού, σχετίζεται άμεσα με την διερεύνηση και αξιολόγηση της συνεισφοράς και του ρόλου ειδικά σχεδιασμένων υπολογιστικών εργαλείων σε θέματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών. Εστιάζει στη μελέτη και διερεύνηση της μαθησιακής διαδικασίας των μαθητών, κατά τη διάρκεια εμπλοκής τους με ένα παιχνίδι, όπου καλούνται να λάβουν αποφάσεις, οι οποίες επηρεάζουν το παιχνίδι. Το εν λόγω παιχνίδι είναι ειδικά σχεδιασμένο με ένα ψηφιακό εργαλείο σχεδιασμού παιχνιδιών με κυριότερο σκοπό τη μάθηση.

Στα πλαίσια της εμπειρικής αυτής μελέτης οι μαθητές εμπλέκονται, σε πραγματικές σχολικές συνθήκες, σε δραστηριότητες μάθησης μέσω ψηφιακού παιχνιδιού, στις οποίες καλούνται να προσομοιώσουν κάποια προβλήματα κοινωνικά και περιβαντολλογικά λαμβάνοντας αποφάσεις μέσα από δεδομένα και εκτιμώντας τα ρίσκα της κάθε απόφασης που επηρεάζει το παιχνίδι με τρόπο τυχαίο. Οι δραστηριότητες αυτές είναι κατάλληλα σχεδιασμένες ώστε να παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα διερεύνησης της έννοιας της πιθανότητας και την εκ νέου κατασκευή και κατανόησή της μέσα από εφαρμογές της καθημερινότητας.

Αντικείμενο της έρευνας αποτέλεσε, ο τρόπος με τον οποίο νέα υπολογιστικά εργαλεία μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών, ποια είναι τα χαρακτηριστικά των περιβαλλόντων, όπου αυτή η αξιοποίηση λαμβάνει χώρα και πώς η προκαλούμενη σε αυτό το πλαίσιο επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή επηρεάζει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Με βάση τα παραπάνω οι υποθέσεις εργασίας που υιοθετήσαμε ήταν οι εξής:

- Κατάλληλα σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία στα μαθηματικά ενισχύουν την παρατηρητικότητα, τον λόγο, την επικοινωνιακή ικανότητα των μαθητών.
- Η υπολογιστική τεχνολογία με την κατάλληλη υποστήριξη μπορεί να γίνει εργαλείο έκφρασης, πειραματισμού, επικοινωνίας και δημιουργίας νοημάτων.
- Οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών μέσω της χρήσης υπολογιστικών εργαλείων αναδεικνύουν πολλαπλές πτυχές της διαδικασίας κατανόησή τους από τους μαθητές.

3.2 Η «έρευνα σχεδιασμού» ως ερευνητική μέθοδος

Τη δεκαετία του '90 στο χώρο της διδακτικής επιχειρήθηκε μια συντονισμένη προσπάθεια για τη γεφύρωση των προβλημάτων αξιοπιστίας σε μεθόδους εκπαιδευτικής έρευνας (Levin & O'Donnell, 1999). Ως αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας αναπτύχθηκε και διατυπώθηκε μια νέα ερευνητική μέθοδος η οποία καθιερώθηκε με τα χρόνια. Πρόκειται για την «έρευνα σχεδιασμού» (design research) (Cobb et al, 2003 ; Collins et al., 2004; Kelly, 2003), όρος ο οποίος εμφανίζεται για πρώτη φορά στην ερευνητική κοινότητα το 1992 με πρωτοπόρο την Ann Brown, η οποία κατέληξε στη μέθοδο αυτή όταν μελετώντας άλλες εργαστηριακού τύπου μεθόδους έρευνας ανέδειξε το γεγονός ότι επειδή είναι μικρές σε διάρκεια αγνοούνται σημαντικές παράμετροι που παίζουν καθοριστικό ρόλο στην μαθησιακή διαδικασία (Collins et al., 2004).

Η «έρευνα σχεδιασμού» (Κυνηγός, 2006) όπως αποδίδεται ο όρος “design research” (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Kelly, 2003; Collins, Joseph, & Bielaczysz, 2004; Κυνηγός, 2006) είναι η εμπειρική μελέτη ανθρώπινων δραστηριοτήτων στο συνηθισμένο χώρο εργασίας τους. Η «έρευνα σχεδιασμού» στο χώρο της εκπαίδευσης περιλαμβάνει μια εμπειρική μελέτη ανθρώπινων δραστηριοτήτων στο συνηθισμένο χώρο εργασίας, όπως αντίστοιχα συμβαίνει στις επιστήμες της αγωγής με την καθιερωμένη έρευνα δράσης (Κυνηγός, 2006).

Ως εμπειρική έρευνα απαντά στα κρίσιμα ερωτήματα του «πώς» και του «γιατί» μια εκπαιδευτική παρέμβαση μπορεί να δώσει καρποφόρα αποτελέσματα στη μαθησιακή διαδικασία, ενώ έχει ποιοτικά μεθοδολογικά χαρακτηριστικά, καθώς δεν εντάσσεται στις διαγνωστικού τύπου έρευνες ή στα κλασικού τύπου ερευνητικά πειράματα με σύγκριση ομάδων ελέγχου και πειραματισμού. Κατά τους Brown (1992) και Collins (1992) η αναδυόμενη αυτή ερευνητική μέθοδος αποτελεί πρότυπο για τη μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας μέσα από τον συστηματικό σχεδιασμό των εργαλείων και μελέτη των στρατηγικών μάθησης των συμμετεχόντων, η οποία στοχεύει να διερευνήσει τη δυνατότητα βελτίωσης των προβλημάτων της μαθησιακής διαδικασίας μελετώντας μέσα από την πραγματική και ενεργή εμπλοκή των συμμετεχόντων (Cobb et al., 2003) λαμβάνοντας υπ' όψιν κάθε πιθανή παράμετρο που επηρεάζει τη μαθησιακή διαδικασία.

Περιγράφεται καλύτερα ως «έρευνα παρέμβασης» και δεν αποτελεί έρευνα ειδικής μελέτης περίπτωσης (case study), επειδή αφορά παρέμβαση σε δραστηριότητα που εξελίσσεται ενεργά μέσα στο εκπαιδευτικό σύστημα όπως λόγου χάριν μέσα στη σχολική τάξη, κατά τη διάρκεια του ωρολογίου

προγράμματος, κατά τη διάρκεια του σχολικού τριμήνου (Κυνηγός, 2006). Η παρέμβαση συνίσταται στον από κοινού σχεδιασμό των δραστηριοτήτων με τους θεσμικά εμπλεκόμενους, όπως για παράδειγμα το εκπαιδευτικό προσωπικό και τη διεύθυνση του σχολείου και έχει το χαρακτήρα εξέλιξης ή εναλλακτικής πρότασης για τη διεξαγωγή ενός μαθήματος (Collins et al., 2004).

Οι Brown και Campione (1996) επισημαίνουν ότι η έρευνα σχεδιασμού αποτελεί ένα ενοποιημένο σύστημα παραμέτρων οι οποίες πρέπει ανά πάσα στιγμή να λαμβάνονται υπ' όψιν κατά τη διάρκεια εφαρμογής των δραστηριοτήτων και για το λόγο αυτό απαιτείται η ενεργή συμμετοχή όλων των θεσμικά εμπλεκόμενων προσώπων προκειμένου να θέσουν στο τραπέζι προτάσεις για την ομαλότερη διεξαγωγή του σχεδιασμού της παρέμβασης και να προτείνουν αλλαγές, αν και εφ' όσον κριθεί σκόπιμο. Όλα αυτά συνεισφέρουν σημαντικά στο να χαρακτηριστεί η έρευνα σχεδιασμού μια από τις πλέον συνεκτικές μεθοδολογίες έρευνας καθώς καταφέρνει να συγκεράσει δύο βασικές πτυχές: την θεωρητική έρευνα και την εκπαιδευτική πρακτική (Collins et al., 2004).

Παράλληλα, μια τέτοιου τύπου παρέμβαση έχει διδακτικό χαρακτήρα για τους συμμετέχοντες, καθώς αποκομίζουν γόνιμες εμπειρίες αλλά και ερευνητικό ενδιαφέρον καθώς μετατρέπεται σε καταλύτη για την παραγωγή όσο το δυνατόν πιο πλούσιων και κατάλληλων δεδομένων για ανάλυση και γενίκευση από τον ερευνητή (Collins et al., 2004; Κυνηγός, 2006), ο οποίος έχει πλέον τόσο το ρόλο του σχεδιαστή ή συμμετέχοντος των δραστηριοτήτων της παρέμβασης, όσο και του μελετητή των όσων συμβαίνουν.

Ένα από τα πλέον κρίσιμα ζητήματα που αφορούν στην «έρευνα σχεδιασμού» και υπερβαίνουν το διεκπεραιωτικό χαρακτήρα των δραστηριοτήτων είναι αυτό του δεοντολογικού πλαισίου που διέπει μια τέτοια παρέμβαση. Η ταυτότητα των συμμετεχόντων δε γίνεται γνωστή αφού τα ερευνητικά δεδομένα αφορούν ευαίσθητες και προσωπικές καταστάσεις που ενυπάρχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία στο εσωτερικό της σχολικής τάξης.

Η ερμηνεία των ερευνητικών δεδομένων δεν έχει σκοπό να διαμορφώσει ένα αρνητικό προφίλ των συμμετεχόντων αλλά προσεγγίζοντάς τους ως συνεργάτες στοχεύει να δώσει μια ρεαλιστική και ερευνητικά έντιμη εικόνα τόσο του τι συμβαίνει με έναν τρόπο θετικό όσο και για το ποιες θα ήταν οι πιθανές δυσκολίες σε μια ενδεχόμενη καθιέρωση της προτεινόμενης καινοτομίας.

Ιδεωδώς, στόχος της έρευνας σχεδιασμού είναι η βαθύτερη κατανόηση της learning ecology (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Πρόκειται για περίπλοκο σύστημα αλληλεπιδράσεων με βασικά στοιχεία τα προβλήματα που λύνουν οι μαθητές, το είδος της παρότρυνσης ή βοήθειας που τους παρέχεται, τις νόρμες μέσα στις οποίες λειτουργεί η συνεργατικότητα, τα μέσα που χρησιμοποιούν οι μαθητές (υπολογιστής, υλικά κατασκευής, χαρτί και μολύβι) και τις πρακτικές που χρησιμοποιούν οι καθηγητές για να ενορχηστρώσουν την ομαλή λειτουργία όλων των παραπάνω. Ο ερευνητής όταν σχεδιάζει την παρέμβαση, καθορίζει τις σχέσεις μεταξύ αυτών των στοιχείων.

Στη συνέχεια εκτιμά πως αυτά αλληλεπιδράσαν και υποστήριξαν τη διαδικασία της μάθησης. Ο σχεδιασμός δε γίνεται αμετάκλητα, πριν αρχίσει η παρέμβαση. Η έρευνα σχεδιασμού χαρακτηρίζεται από συνεχείς βελτιωτικές διορθώσεις της παρέμβασης (the approach of progressive refinement) (Collins, Joseph, & Bielaczysz, 2004). Ο αρχικός σχεδιασμός βασίζεται σε μια υποθετική πορεία μάθησης και σε εικασίες σχετικά με τα μέσα που υποστηρίζουν την μαθησιακή διαδικασία. Καθώς εξελίσσεται η έρευνα, έρχονται στην επιφάνεια οι λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας και αναθεωρούνται οι εικασίες. Έτσι, άλλες εικασίες δημιουργούνται που οδηγούν στην ανάγκη νέου σχεδιασμού.

Οι ερευνητές επανακαθορίζουν την αρχική μορφή του σχεδίου παρέμβασης, καθώς αυτό εξελίσσεται, έχοντας ανατροφοδότηση από την συνεχιζόμενη εφαρμογή της παρέμβασης και κατανοώντας καλύτερα το τρόπο λειτουργίας του μαθησιακού περιβάλλοντος.

Στόχος είναι, από τα συμπεράσματα, να προκύψουν θεωρίες για τη διαδικασία της μάθησης αλλά και για τα μέσα που σχεδιάστηκαν για να την υποστηρίξουν (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Έτσι θα προκύψει κάποιο προϊόν άμεσα αξιοποιήσιμο στην εκπαιδευτική πράξη. Συνεπώς, το ερευνητικό μοντέλο είναι κυρίως γενεσιουργό (generative) ως προς το ρόλο των ερευνητικών ερωτημάτων στην παραγωγή νέας θεωρητικής γνώσης (Goetz & Lecompte, 1984; Κυνηγός, 2006).

3.3 Ερευνητικά ερωτήματα

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας ήταν ο τρόπος που οι μαθητές δημιουργούν νοήματα σαν άτομα, αλλά και σαν ομάδες, όταν δουλεύουν διερευνητικά σε προβλήματα που αφορούν έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων. Ήδη έχω αναφέρει το πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος σχετικά με τις παραπάνω έννοιες. Αυτό βοήθησε στη διαμόρφωση πιο συγκεκριμένων ερευνητικών ερωτημάτων, αφού η έρευνα διεξήχθη σε σχολικό περιβάλλον. Επίσης, έχω καθορίσει το θεωρητικό γνωστικό πλαίσιο της διδακτικής, στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Το ζητούμενο είναι η διαμόρφωση μιας πλήρους εικόνας για την έννοια της πιθανότητας, ώστε να ανατροφοδοτεί την κατασκευή ενός σωστού και περιεκτικού ορισμού από τους μαθητές, σαν τελικό στόχο της διδακτικής πορείας και της εμπλοκής τους με πιθανολογικές σχέσεις. Η χάραξη μιας τέτοιας πορείας περνάει από την προσπάθεια για να δοθούν απαντήσεις σε ερευνητικά ερωτήματα όπως:

- Ποια είναι τα νοήματα που διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια της πιθανότητας και πώς σχετίζονται αυτά με βάσει τις εμπειρίες τους;
- Ποια είναι η πορεία κατασκευής των νοημάτων αυτών και από τι επηρεάζεται;
- Ποιες είναι οι δυσκολίες όταν προσεγγίζουν τη πιθανότητα με κάθε έναν από τους παραπάνω τρόπους;
- Με ποιους τρόπους εμπλοκής μπορούν αυτές οι δυσκολίες να γίνουν ευκαιρίες για δημιουργία πληρέστερων νοημάτων που οδηγούν στο μαθηματικό ορισμό;
- Πώς χρησιμοποιούν οι μαθητές σε διαφορετικά πλαίσια τον ορισμό και τα νοήματα που έχουν κατασκευάσει για την έννοια της πιθανότητας;

Ένα άλλο εξίσου σημαντικό ερώτημα είναι ποια μορφή πρέπει να έχει αυτή η παρέμβαση του διδάσκοντα, ώστε οι μαθητές να ενοποιήσουν αυτές τις προσεγγίσεις για την έννοια της πιθανότητας που βασίζονται σε διαφορετικά πρότυπα για την πιθανότητα και να δημιουργήσουν ένα πρότυπο για αυτή την έννοια, κάτι που είναι το τελευταίο βήμα για την μαθηματοποίηση της. Ιδιαίτερα σημαντικό ήταν το γεγονός ότι οι μαθητές δούλευαν σε συνεργατικό περιβάλλον. Στόχος ήταν να επισημάνω στοιχεία για το κατά πόσο το εργαλείο και οι λειτουργικότητές του συνέβαλαν σε αυτό.

Άρα οι «φακοί» μου ήταν στραμμένοι σε στιγμιότυπα:

- Κατασκευής νοημάτων υπό διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση προσωπικών νοημάτων, με στόχο την δημιουργία κοινών νοημάτων.
- Πτυχών συνεργασίας μεταξύ των μελών της ομάδας, σε μαθηματικό πλαίσιο.
- Διαμόρφωσης κοινωνικό-μαθηματικών νορμών.

Τέλος, κατά μήκος της αναζήτησης μου για απαντήσεις των ερωτημάτων-σκοπών της έρευνας, προσπάθησα να εντοπίσω στιγμιότυπα αναστοχασμού των μαθητών με χρήση των εργαλείων, δημιουργίας εικασιών στο πλαίσιο του μικρόκοσμου, μαθηματοποίησης πτυχών του αντικειμένου και διατύπωσης αυθόρμητων αντιλήψεων των μαθητών.

Πέρα από την περιγραφή του παραπάνω γενικού πλαισίου, οδηγήθηκα σε συμπεράσματα που μπορεί να μην ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες, αφού η μέθοδος προϋποθέτει τον επανασχεδιασμό και την ανατροφοδότηση. Περισσότερο επικεντρώθηκα στην περιγραφή ενός περιβάλλοντος μάθησης στο οποίο έγινε η έρευνα, παρά σε συγκεκριμένες απαντήσεις πάνω σε ερωτήματα που είχαν από πριν τεθεί.

3.4 Διδακτικό όφελος από την έρευνα

Κατά τη διενέργεια της έρευνας ως ερευνητής είχα δύο ατζέντες. Η μια φυσικά (του ερευνητή) ήταν αυτή που ανέλυσα προηγουμένως στην περιγραφή των στόχων-ερωτημάτων της έρευνας. Η άλλη ατζέντα ήταν αυτή του διδάσκοντα. Για τον διδάσκοντα, στόχος είναι η μάθηση, η ανάπτυξη της γνώσης του μαθητή που συμμετέχει σε μια δραστηριότητα. Ποιο ήταν το διδακτικό όφελος, λοιπόν, ενός μαθητή που συμμετείχε στην έρευνα;

Οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν σε ομάδες ένα δύσκολο πρόβλημα λήψης αποφάσεων, με υψηλό ρίσκο το οποίο το εκτιμούσαν με χρήση πιθανοτήτων. Τα κέρδη από μια τέτοια δραστηριότητα ήταν πολλαπλά. Η λύση δεν ήταν μονοσήμαντη, έτσι οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να δουλέψουν παίρνοντας πρωτοβουλίες και ο διδάσκοντας να αποστασιοποιηθεί όσο μπορούσε από το ρόλο της αυθεντίας, του κοινωνού της μαθηματικής γνώσης.

Η τάξη μπορούσε να πειραματιστεί και να δουλέψει διερευνητικά, κάνοντας εικασίες, σχεδιάζοντας και εφαρμόζοντας μια στρατηγική και κάθε μαθητής είχε τη δυνατότητα να παρατηρεί άμεσα τα αποτελέσματα των ενεργειών του, να επικοινωνήσει σύγχρονα ή ασύγχρονα με τους συμμαθητές του με τη χρήση

ενός ειδικά σχεδιασμένου λογισμικού. Ένα τόσο πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον έδωσε πολλαπλές ευκαιρίες έκφρασης και εν τέλει μάθησης ή ακόμα συχνότερα ανατροφοδότησης και αναστοχασμού.

3.5 Οι δραστηριότητες στο ChoiCo

Η μελέτη των πιθανοτήτων και η κατανόηση τους αποτελεί συχνά εμπόδιο για τους μαθητές. Αυτό συμβαίνει διότι ο αυστηρός μαθηματικός τρόπος με τον οποίο διδάσκονται οι πιθανότητες, καθώς και η επιστημολογία τους, περιορίζει τη φυσική διαίσθηση των μαθητών. Είναι εμφανής λοιπόν η έλλειψη μιας γλώσσας που θα καλλιεργεί τη δημιουργία μαθηματικών νοημάτων μέσα από τις αισθήσεις. Μέσα από αυτό το πρίσμα σχεδιάστηκαν και οι δραστηριότητες οι οποίες πλαισίωσαν το παιδαγωγικό πλάνο που εφαρμόστηκε στην έρευνα αυτή. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τόσο ότι η διδασκαλία των πιθανοτήτων είναι ένα μαθηματικό πεδίο το οποίο καλλιεργεί τη μαθηματική σκέψη όσο και τη συμβολή του προγραμματισμού, σχεδιάσαμε ένα παιδαγωγικό πλάνο το οποίο συνδέει ένα περίπλοκο κοινωνικό πρόβλημα με τις πιθανότητες. Το περιβάλλον του ChoiCo παρέχει αναπαραστάσεις δεδομένων μέσα σε ένα δυναμικό ψηφιακό περιβάλλον, φιλικό προς τον μαθητή, που του παρέχει κίνητρο για να νοηματοδοτήσει τις πιθανότητες.

4 Μεθοδολογία της έρευνας

4.1 Εισαγωγή

Το μεθοδολογικό πλαίσιο της ερευνητικής μελέτης οριοθετήθηκε από πρακτικές πειραμάτων σχεδιασμού για την παρατήρηση ανθρώπινων δραστηριοτήτων που λαμβάνουν χώρα σε πραγματικό χρόνο. Σε αυτή την προοπτική το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάστηκε στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων και αφορούν στη διερεύνηση των εννοιών της θεωρίας πιθανοτήτων που οι μαθητές μιας σχολικής τάξης πραγματοποιούν σε ένα μαθησιακό περιβάλλον διδασκαλίας μαθηματικών με συγκεκριμένα καινοτομικά χαρακτηριστικά (χρήση εργαλείων διερευνητικής μάθησης, ομαδική συνεργατική εργασία), καταγράφοντας παράλληλα τόσο το ρόλο των υπολογιστικών εργαλείων όσο και τον κοινωνικό χαρακτήρα των αναδυόμενων μαθησιακών διαδικασιών. Κατά την εφαρμογή της πειραματικής διαδικασίας υιοθετήθηκαν στοιχεία μελέτης περίπτωσης (Yin, 1994) η οποία περιελάμβανε σχεδίαση πειράματος (Cobb et al., 2003) καθώς και στοιχεία συμμετοχικής παρατήρησης για την καταγραφή των δραστηριοτήτων των μαθητών που έλαβαν χώρα σε πραγματικό χρόνο.

4.2 Περιγραφή δείγματος

Τα δεδομένα της έρευνας προέρχονται από έξι (6) μαθητές του Δεύτερου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών (εικόνα 8). Η γνωριμία του ερευνητή με τους μαθητές έγινε πριν την έναρξη της πειραματικής διαδικασίας. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του σχολείου αυτού, ήταν η φοίτηση παιδιών τα οποία ήταν εξοικειωμένα με τις νέες τεχνολογίες, κάτι που διευκόλυνε την εμπλοκή των μαθητών στην εξέλιξη της ερευνητικής διαδικασίας.

Η επιλογή του σχολείου έγινε με τη μέθοδο της επιλεκτικής δειγματοληψίας (convenience sampling), επιλέχθηκε δηλαδή ένα σχολείο, όπου αφ' ενός ήταν εφικτή η πρόσβαση του ερευνητή σε αυτό και αφ' ετέρου υπήρχε η δυνατότητα διάθεσης των απαιτούμενων διδακτικών ωρών από το ωρολόγιο πρόγραμμα. Ένα τέτοιο δείγμα δεν είναι ασφαλώς τυχαίο, ωστόσο αυτό δεν πρέπει να αποτελέσει ζήτημα προβληματισμού κατά την εξαγωγή και γενίκευση των συμπερασμάτων, εφόσον δε γεννάται πρόβλημα αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος, καθώς το ενδιαφέρον της συγκεκριμένης έρευνας δεν είναι η γενίκευση κανόνων με καθολική ισχύ, αλλά η σε βάθος κατανόηση της μαθησιακής διαδικασίας σε πραγματικές σχολικές συνθήκες.



Εικόνα 8 Το 2^ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών

4.3 Εκπαιδευτικό Περιεχόμενο

Το παιδαγωγικό πλάνο που σχεδιάστηκε πραγματοποιήθηκε σε μια τάξη του Δεύτερου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών, η οποία ήταν εξοπλισμένη με δύο (2) φορητούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Για την ομαλότερη εξέλιξη του πειράματος, την καλύτερη ακουστική των ηχητικών δεδομένων και την ασφαλέστερη μεταφορά τους, παράλληλα με τους δύο σύγχρονες τεχνολογίας φορητούς υπολογιστές χρησιμοποιήθηκαν μέσα μαγνητοφώνησης ήχου και στους δύο υπολογιστές είχε εγκατασταθεί το λογισμικό καταγραφής οθόνης HyperCam2. Η διάρκεια της έρευνας ήταν έξι (6) διδακτικές ώρες και πραγματοποιήθηκε σε πραγματικές σχολικές συνθήκες, στις 29 Οκτωβρίου και στις 5 Νοεμβρίου του ακαδημαϊκού έτους 2019 – 2020. Πριν από την κύρια έρευνα πραγματοποιήθηκε μια πιλοτική έρευνα με 3 μαθητές στο ίδιο σχολείο μια εβδομάδα πιο πριν την έναρξη της κύριας έρευνας.

4.4 Μέσα συλλογής δεδομένων

Όπως επανειλημμένως έχει αναφερθεί σε προηγούμενες ενότητες της παρούσας εργασίας, στόχος αυτής της ερευνητικής μελέτης είναι να διερευνηθεί σε βάθος η κατασκευή μαθηματικών νοημάτων κατά τη διάρκεια της ενεργητικής εμπλοκής των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Για το λόγο αυτό αλλά και για την πληρέστερη απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν, χρησιμοποιήθηκαν ταυτόχρονα ποικίλα μέσα συλλογής δεδομένων, τα οποία δεν διατάρασσαν το φυσικό κλίμα της τάξης κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας.

Πλούσια πηγή ερευνητικών δεδομένων στην έρευνα αυτή αποτέλεσε το διερευνητικό λογισμικό ChoiCo, εφοδιασμένο παράλληλα με το λογισμικό αποθήκευσης ήχου και εικόνας HyperCam2. Το υπολογιστικό εργαλείο ChoiCo, οι κατάλληλα σχεδιασμένες εκπαιδευτικές δραστηριότητες και τα φύλλα εργασίας που τις υποστήριζαν αποτέλεσαν τα κύρια εργαλεία της ερευνητικής μελέτης, καθώς σχεδιάστηκαν για να φέρουν στην επιφάνεια τα προς διερεύνηση χαρακτηριστικά της μαθησιακής διαδικασίας.

Το λογισμικό HyperCam2 από την άλλη παρείχε στον ερευνητή τη δυνατότητα να παρατηρήσει την αλληλεπίδραση νοητικού εργαλείου – μαθητή με το να ακούει όλες τις αυθόρμητες συζητήσεις των μαθητών καθ' όλη τη διάρκεια του πειραματισμού, καθώς εκείνοι συνεργάζονταν, προκειμένου να εντοπίσουν την βέλτιστη στρατηγική που θα τους επέτρεπε να παραμείνουν, όσο το δυνατόν περισσότερο στο παιχνίδι και να το νικήσουν. Παράλληλα, είχε τη δυνατότητα να ελέγχει τον συνεχή χειρισμό των λειτουργικοτήτων του υπολογιστικού περιβάλλοντος, καθώς επέτρεπε στον ερευνητή να βλέπει και να μελετά στην

οθόνη τις ακριβείς κινήσεις καθώς και τις αποτυπωμένες στην επιφάνεια του Η/Υ σκέψεις των μαθητών, κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους.

Για την πληρέστερη ερμηνεία της εξέλιξης της μαθησιακής διαδικασίας χρησιμοποιήθηκαν επιπλέον ψηφιακά οπτικοακουστικά μέσα ηχογράφησης κατά την εφαρμογή των οποίων τηρήθηκαν αυστηρά οι απαραίτητοι κανόνες δεοντολογίας περί προστασίας της προσωπικότητας των συμμετεχόντων μαθητών. Κάτι τέτοιο σημαίνει, ότι ο ερευνητής μερίμνησε αυστηρά προκειμένου να διασφαλιστεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων μαθητών, καθώς η έρευνα εστιάζεται αποκλειστικά στη μαθησιακή διαδικασία και στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές θα δημιουργήσουν νέα γνωστικά σχήματα για τις έννοιες των πιθανοτήτων και δεν ενδιαφέρει η ονομαστική αναφορά στα πεπραγμένα των μαθητών.

Τέλος, παράλληλα με όλα τα παραπάνω, καθοριστικό ρόλο κατά την εξαγωγή συμπερασμάτων στην ερευνητική αυτή μελέτη έπαιξαν οι προσωπικές σημειώσεις του ερευνητή κατά τη διάρκεια του πειράματος, οι οποίες επεφύλασσαν μια συνολική εικόνα για την εμπλοκή των μαθητών.

Τα πρώτα λεπτά της συνάντησης ο εκπαιδευτικός έκανε τις συστάσεις μεταξύ ερευνητή και μαθητών, λέγοντας στους δεύτερους ότι είναι απαραίτητη η συνεργασία τους, ώστε να δοκιμάσουν καινοτόμα λογισμικά σαν και αυτά που υπάρχουν στο ψηφιακό σχολείο με τα οποία θα κάνουμε «δύσκολα μαθηματικά».

Η γνώμη τους θα ήταν σημαντική για τους ερευνητές αφού θα λαμβανόταν υπόψη, για τον ανασχεδιασμό αυτών των λογισμικών. Οι μαθητές ήξεραν ότι θα δουλέψουν σε ομάδες και έγινε σαφής ο τρόπος διάθρωσης αυτών των ομάδων.

Στη συνέχεια χωρίστηκαν στις ομάδες τους. Χρησιμοποιώντας έναν βίντεο-προβολέα δείξαμε στους μαθητές το παιχνίδι στο ChoiCo. Ο στόχος της δραστηριότητας αυτής ήταν να εξοικειωθούν οι μαθητές με τις λειτουργικότητες του ChoiCo κι από την άλλη να παίξουν ελεύθερα το παιχνίδι για να σχηματίσουν μια εικόνα για το σενάριο του παιχνιδιού και τις πιθανότητες. Τα μέλη των υποομάδων της ίδιας ομάδας επικοινωνούσαν μεταξύ τους με φυσικό τρόπο και οι ομάδες είχαν οπτική επαφή και μπορούσαν να επικοινωνούν.

Επιπλέον, πριν την έρευνα πραγματοποιήθηκε μια πιλοτική έρευνα από την οποία προέκυψαν δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την βελτίωση της έρευνας. Τέλος, οι μαθητές πριν τα φύλλα εργασίας συμπλήρωσαν ένα pre test με σκοπό να δει ο ερευνητής τις αντιλήψεις των μαθητών γύρω από τις

πιθανότητες και μετά το τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα post test με σκοπό να παρατηρήσει ο ερευνητής, αν η παρέμβαση επέφερε αλλαγές στις αντιλήψεις των μαθητών γύρω από τις έννοιες των πιθανοτήτων.

4.5 Μέθοδος Ανάλυσης

Για την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων της ερευνητικής μελέτης ο ερευνητής εστίασε, τόσο στην αλληλεπίδραση των μαθητών με τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις και λειτουργικότητες του νέου αυτού διερευνητικού νοητικού εργαλείου, καθώς και στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων και την ανάπτυξη νέων γνωστικών σχημάτων από τη σκοπιά των μαθητών. Ένας από τους βασικούς άξονες εστίασης κατά την εξαγωγή επεισοδίων ήταν η λεκτική και σωματική εμπλοκή των μαθητών (με χειρονομίες ή με χρήση του λογισμικού και της οθόνης του υπολογιστή) και αφορούσαν τα αναδυόμενα μαθηματικά νοήματα που αφορούσαν κυρίως στην έννοια της πιθανότητας. Το μεθοδολογικό πλαίσιο το οποίο υιοθετήθηκε κατά την εφαρμογή της πειραματικής διαδικασίας περιείχε στοιχεία μελέτης περίπτωσης (Yin, 1994) η οποία περιελάμβανε σχεδίαση πειράματος (Cobb et al., 2003) καθώς και στοιχεία συμμετοχικής παρατήρησης για την καταγραφή των δραστηριοτήτων των μαθητών που έλαβαν χώρα σε πραγματικό χρόνο.

4.6 Το παιδαγωγικό πλάνο

Το παιδαγωγικό πλάνο που συγκροτήθηκε αποτελείται από μια δραστηριότητα στο περιβάλλον του νέου λογισμικού σχεδίασης ψηφιακών παιχνιδιών ChoiCo και απευθύνεται σε μαθητές Γ' Γυμνασίου οι οποίοι έχουν ήδη διδαχθεί από το Δημοτικό τις έννοιες των πιθανοτήτων (πχ ενδεχόμενο, ορισμός πιθανότητας). Για τη συμμετοχή των μαθητών στις δραστηριότητες δεν προαπαιτήθηκαν ειδικές γνώσεις προγραμματισμού, αλλά μια εξοικείωση των μαθητών με τον τρόπο που παίζονται τα παιχνίδια που σχεδιάζονται με το ChoiCo που αποτελεί το βασικό πλεονέκτημα αυτού του ψηφιακού εργαλείου. Η συμμετοχή του ερευνητή στο παιδαγωγικό πλάνο κρίθηκε απαραίτητη γιατί είχε εξοικειωθεί αρκετά με το περιβάλλον του ChoiCo.

Ο λόγος για τον οποίο επιλέχτηκε ένα εργαλείο σχεδιασμού ψηφιακών παιχνιδιών για τη μελέτη του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητές τις έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων στηρίχθηκε στην πεποίθηση ότι, οι πιθανότητες γίνονται πιο κατανοητές, αν χρησιμοποιηθούν για τη λήψη αποφάσεων μέσα σε ένα πρόβλημα όπου επικρατεί αβεβαιότητα. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε το γεγονός ότι συχνά εκπαιδευτικοί στην προσπάθειά τους να προσεγγίσουν καλύτερα την έννοια της πιθανότητας και να ξεφύγουν από τον τυπικό μαθηματικό ορισμό που προτείνεται από τα σχολικά εγχειρίδια,

προσπαθούν να κάνουν πειράματα τύχης ως επικουρικό μέσο για την καλύτερη αντίληψή της. Έτσι λοιπόν, το μαθησιακό περιβάλλον που χρησιμοποιείται στην έρευνα αποτελεί το μέσο σύνδεσης των σχολικών μαθηματικών με έναν εναλλακτικό τρόπο μάθησης, που αποβλέπει με τη βοήθεια ενός ψηφιακού παιχνιδιού να ξεπεράσουν οι μαθητές την αδυναμία διάκρισης και χειρισμού των εννοιών της θεωρίας πιθανοτήτων.

Σε αντίθεση λοιπόν, με το αναπαραστασιακό πλαίσιο που συγκροτείται σε μια παραδοσιακή αίθουσα διδασκαλίας, το προτεινόμενο ψηφιακό εργαλείο τοποθετεί τη διδασκαλία των πιθανοτήτων σε κεντρική θέση, καθώς παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα διερεύνησης πληθώρας μαθηματικών εννοιών κατά την επαφή τους με το παιχνίδι, προσφέροντας πολλαπλές αναπαραστάσεις δεδομένων. Οι μαθητές πλέον έχουν τη δυνατότητα να παρεμβαίνουν ενεργά στο παιχνίδι ρυθμίζοντας κατά βούληση τα χαρακτηριστικά ενός σημείου στον χάρτη του παιχνιδιού.

4.6.1 Σκεπτικό Σεναρίου

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται όλο και μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον μεταξύ των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης για τις στοχαστικές έννοιες, καθώς έχει αναγνωριστεί ο ρόλος της πιθανολογικής σκέψης και της λήψης αποφάσεων κάτω από αβέβαιες συνθήκες στη σύγχρονη κοινωνία (NCTM, 2000). Σε πολλές έρευνες προτείνεται η ενσωμάτωση της θεωρίας πιθανοτήτων στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών, καθώς επισημαίνεται ότι η διδασκαλία των πιθανοτήτων, ξεκινώντας από τις μικρές ηλικίες, δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε ενδιαφέρουσες, πρόσφορες μαθησιακές δραστηριότητες.

Ο παράγοντας τύχη και η έννοια της πιθανότητας αποτελούν μέρος της καθημερινότητας των μαθητών (σε τυχερά παιχνίδια, σε διάφορες κληρώσεις, στο μάθημα των μαθηματικών) και επομένως η σχετική ορολογία χρησιμοποιείται ευρέως από μικρούς και μεγάλους. Οι έρευνες όμως εντόπισαν και σημαντικές παρανοήσεις που δυσκολεύουν την κατανόηση των πιθανοτήτων (Piaget & Inhelder, 1975; Fischbein & Gazit, 1984; LeCourte, 1992), ενώ οι παρανοήσεις αυτές διατηρούνται ακόμη και μετά από τη σχετική διδασκαλία (Fischbein, 1975; Konold, 1989).

Οι περισσότερες από τις έρευνες αυτές πρότειναν ένα μεθοδολογικό σχεδιασμό κατά τον οποίο καταγράφονται ‘στιγμιότυπα’ (Pratt, 2000) από τις απαντήσεις των παιδιών σε συγκεκριμένα προβλήματα που δίνονται σε χαρτί, περιορίζοντας έτσι τη δυνατότητα διερεύνησης των επιδράσεων άλλων πτυχών του περιβάλλοντος μάθησης.

Σύμφωνα με την Carraher (1989), η οργάνωση της μαθηματικής γνώσης δεν εξαρτάται μόνο από το σύνολο των νοημάτων που οικοδομεί ο ανθρώπινος νους, αλλά και από τους στόχους για τους οποίους τα νοήματα αυτά οικοδομούνται. Η Lave (1988) υποστήριξε επίσης ότι το περιβάλλον στο οποίο

οικοδομείται η γνώση παίζει βασικό ρόλο στα γνωστικά σχήματα που δημιουργούνται, με αποτέλεσμα αυτά να είναι άμεσα συνδεδεμένα με αυτό.

Με βάση αυτήν την προοπτική, οι παρανοήσεις στην πιθανολογική σκέψη των παιδιών μπορεί να οφείλονται στις καθημερινές τους εμπειρίες με θέματα πιθανοτήτων και στη δημιουργία γνωστικής αναντιστοιχίας με όσα διδάσκονται και τον τρόπο που διδάσκονται στο σχολικό περιβάλλον, αφού διαφορετικές εμπειρίες μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά γνωστικά σχήματα.

Ο συνδυασμός εργαλείων, που δεν υπάρχουν στην καθημερινότητα των παιδιών αλλά χρησιμοποιούνται σε δυναμικά περιβάλλοντα διδασκαλίας και αλληλεπίδρασης που βασίζονται στις νέες τεχνολογίες, μπορεί να προσφέρει χρήσιμες εμπειρίες για τις πιθανότητες που έχουν νόημα για τα παιδιά. Αυτό μπορεί να υποβοηθήσει την εξέταση και την ανάπτυξη των διαισθητικών αντιλήψεων των για τις αντίστοιχες έννοιες (Pratt, 2000; Wilensky, 1993), ώστε να αναπτύσσεται σταδιακά και ευκολότερα η πιθανολογική σκέψη τους.

Ο σχεδιασμός και ο πειραματισμός κατάλληλων μαθησιακών δραστηριοτήτων σε τεχνολογικά ή μη περιβάλλοντα για τις πιθανότητες αποτελεί σήμερα βασική κατεύθυνση της έρευνας. Εξετάζοντας στοχαστικά συστήματα τα παιδιά κατανοούν σταδιακά ότι, αν και τα ακριβή αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης μπορεί να είναι αβέβαια και απρόβλεπτα, η εμπειρία από την παρατήρηση του συστήματος μπορεί να οδηγήσει στην καταγραφή όλων των δυνατών ενδεχομένων και στην εκτίμηση των πιθανότερων ενδεχομένων. Τα παιδιά μπορούν να οικοδομήσουν πάνω στη διαισθητική τους αντίληψη για τις πιθανότητες και να διακρίνουν ότι, αν και απρόβλεπτα, τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης μπορεί να εμφανίζονται με κάποια οριακά σταθερή συχνότητα.

4.6.2 Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές χωρίζονται σε δύο ομάδες τριών ατόμων και η κάθε ομάδα παίζει το παιχνίδι που είναι διαθέσιμο στο λογισμικό Choico στον υπολογιστή που έχουν μπροστά τους, ώστε όλες οι ομάδες να έχουν χρόνο να παίξουν και να καταλάβουν το παιχνίδι.

Όλες οι ομάδες συμμετέχουν στην ολομέλεια της τάξης, όπου κάθε ομάδα παρουσιάζει τα συμπεράσματά της, και επίσης ενημερώνεται και κρίνει τα συμπεράσματα των άλλων ομάδων. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται η ενεργητική συμμετοχή όλων των εκπαιδευομένων, δεδομένου ότι ακόμη και αν κάποιος δε νιώθει άνετα να συμμετέχει στην ολομέλεια, στα πλαίσια της μικρότερης υποομάδας θα του δοθεί η ευκαιρία να εκφραστεί. Μέσα σε κλίμα αλληλεγγύης και συνεργατικότητας, οι μαθητές αξιοποιούν τις γνώσεις που ήδη κατέχουν και ενισχύεται η διαδικασία του κριτικού στοχασμού και η αυτοπεποίθηση των εκπαιδευομένων ύστερα από μια επιτυχημένη προσπάθεια.

Στο πλαίσιο της κοινωνικής μάθησης που κατά κανόνα συντελείται σε μια σχολική τάξη στην οποία κυριαρχεί η κονστρακτιονιστική προσέγγιση στη μάθηση, η διδασκαλία πρέπει να δίνει ευκαιρίες σε κάθε μαθητή να αναπτύσσει εικασίες, να διατυπώνει υποθέσεις και να τις εκθέτει στην τάξη. Ακόμα, πρέπει να «φέρει όλη την τάξη μαζί», να προσφέρει πλούσιες σε μαθηματικά νοήματα συζητήσεις, να δημιουργεί συνθήκες για κατάλληλα δομημένη αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, όπως επίσης και μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού και να δίνει αρκετές ευκαιρίες για αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και του υπολογιστικού μικρόκοσμου που χρησιμοποιείται στο σενάριο.

Καθώς η κοινωνική μάθηση είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ατομική μάθηση, η εξασφάλιση ευκαιριών για ενεργό συμμετοχή κάθε μαθητή ατομικά στα δρώμενα της τάξης, κάτω από την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και την ύπαρξη κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού, μπορεί να εξασφαλίσει πλούσιες συζητήσεις μεταξύ των μαθητών.

Αυτές οι συζητήσεις μπορούν να βασίζονται στις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών αλλά και στην ανάλυση, σύνθεση και δόμηση των πληροφοριών που αντλούν από τους πόρους της δραστηριότητας με αποτέλεσμα κάθε μαθητής να αναπτύσσει νοήματα σχετικά με το θέμα διδασκαλίας.

Στο πλαίσιο της σχολικής τάξης με τη συγκεκριμένη ρύθμιση, ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι σημαντικός υπό την έννοια ότι πρέπει να λειτουργεί ως εμπνευστής κάθε μαθητή για δράση και συμμετοχή, ως συνεργάτης κάθε μαθητή που επιχειρεί να διατυπώσει και να ελέγξει εικασίες ή υποθέσεις, ως καθοδηγητής για διερευνήσεις ολόκληρης της τάξης. Είναι ο άνθρωπος που μπορεί να εξασφαλίζει διαδικασίες και κίνητρα για τη συμμετοχή όλων των μαθητών, να θέτει τον τόνο και την εστίαση των συζητήσεων και να δομεί το περιεχόμενο των αλληλεπιδράσεων της τάξης.

Ακόμα, ο καθηγητής φροντίζει να εκμεταλλεύεται όλες τις δυνατότητες που προσφέρουν τα συγκεκριμένα τεχνολογικά εργαλεία και μέσα προκειμένου όλοι οι μαθητές να έχουν πρόσβαση στις πληροφορίες και στις διαπραγματεύσεις. Μπορεί, ακόμα να αποθηκεύει, να τυπώνει και να μοιράζει σε όλους τους μαθητές όσα διατυπώθηκαν σε κάθε φάση ώστε να μπορούν να τα ανακαλέσουν ανά πάσα στιγμή οι μαθητές. Σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να συμπεριφέρεται ως αυθεντία στη γνώση, δεν επιχειρεί να διδάξει με μακρόσυρτους μονολόγους, αγνοώντας τις δυνατότητες που προσφέρουν τα σύγχρονα μέσα, κάνοντας π.χ. χρήση του πίνακα ως έναν απλό, κλασικό πίνακα.

Πιο συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός που θα διδάξει με τη βοήθεια της συγκεκριμένης ρύθμισης, πρέπει να λάβει υπόψη του ότι τα νοήματα που αναμένεται να αναπτύξει ατομικά κάθε μαθητής προέρχονται από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εικόνων ή των αναπαραστάσεων που εμφανίζονται στην τάξη, των δράσεων που κάνει στο θρανίο του με το φύλλο εργασίας και των νοητικών εικόνων που χρησιμοποιεί ή αναπτύσσει.

Η σύνδεση των αναπαραστάσεων του πίνακα με τις νοητικές εικόνες των μαθητών αναμένεται να παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων για τα μαθηματικά αντικείμενα του σεναρίου από κάθε μαθητή. Οι δραστηριότητες στο θρανίο, στο χαρτί με το μολύβι ή ενδεχομένως στον προσωπικό υπολογιστή κάθε μαθητή, αναμένεται να συνδεθούν και με τις αναπαραστάσεις του πίνακα αλλά και με τις εικασίες και τις υποθέσεις που κατασκεύασε, τις οποίες μπορεί να ελέγξει ατομικά ή σε συνεργασία με τον συμμαθητή του, είτε με τη βοήθεια ολόκληρης της τάξης. Η ενορχήστρωση της τάξης επομένως, πρέπει να λάβει υπόψη της τα παραπάνω ώστε η χρησιμοποίηση του λογισμικού να μην είναι μια ακόμα εκδοχή του παραδοσιακού πίνακα και της παραδοσιακής σχολικής τάξης.

4.6.3 Διδακτικοί στόχοι

Ως προς το γνωστικό αντικείμενο μετά το τέλος του μαθήματος θα πρέπει:

- Να αναγνωρίζουν πότε ένα φαινόμενο είναι στοχαστικό .
- Να προσδιορίζουν και να περιγράφουν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης .
- Να υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα $P(E) = \frac{E}{N}$ και ως ποσοστό.
- Να γνωρίζουν την πειραματική προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας
- Να διερευνήσουν τις διαφορετικές προσεγγίσεις της έννοιας της πιθανότητας .
- Να κατανοούν τους όρους ευνοϊκό, αδύνατο και βέβαιο ενδεχόμενο.
- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τα διαφορετικά ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης .
- Να εξετάζουν τη δυνατότητα καταγραφής και καταμέτρησης των διαφορετικών ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης .

Κατά τη μαθησιακή διαδικασία επίσης οι μαθητές:

- Να μάθουν να αναπτύσσουν εικασίες και υποθέσεις σχετικές με τις έννοιες και τις διαδικασίες του σεναρίου.
- Να καλλιεργήσουν θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά.
- Να μάθουν να ελέγχουν τις υποθέσεις τους ατομικά, είτε μπροστά σε όλη την τάξη, με την βοήθεια του λογισμικού και των εργαλείων που παρέχει.

- Να μάθουν να υπερασπίζονται με κατάλληλα επιχειρήματα τα συμπεράσματά τους απέναντι σε ολόκληρη την τάξη.
- Να μάθουν να συμμετέχουν στον διάλογο όλης της τάξης και να συνεισφέρουν με τις ιδέες και τις εκτιμήσεις τους.
- Να οικοδομούν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τους συμμαθητές τους και τον καθηγητή τους.
- Μαθαίνουν να επικοινωνούν και να ανταλλάσσουν απόψεις χρησιμοποιώντας μαθηματική ορολογία.
- Να αναπτύσσουν πρωτοβουλία κατά τη ενασχόλησή τους με κάποιο μαθηματικό πρόβλημα.
- Να κρίνουν και να αξιολογούν αποτελέσματα.
- Να διατυπώνουν ισχυρισμούς και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κριτική – πειραματική διαδικασία.
- Να εντοπίζουν διαφορετικές προσεγγίσεις στο θέμα που ερευνούν.
- Να γενικεύουν συμπεράσματα και να διατυπώνουν σχέσεις και μαθηματικούς τύπους.
- Να βιώσουν μία γνήσια εμπειρία ψυχαγωγίας και τέρψης.

Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται κυρίως στην συνεργασία και την διαπραγμάτευση των ιδεών τους, ώστε η γνώση να αποκτήσει έναν διυποκειμενικό χαρακτήρα.

Ακόμα, να οικοδομήσουν κώδικες επικοινωνίας (να ορίσουν κανόνες – νόρμες) ,ώστε οι μαθητές να γίνουν αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας τους και των άλλων ομάδων και φυσικά από τον καθηγητή τους. Οι κοινωνικομαθηματικοί κανόνες (sociomathematical norms) χωρίζονται στους κανόνες μέσω λεκτικών αλληλεπιδράσεων και των μη λεκτικών αλληλεπιδράσεων που πραγματοποιούνται με την επαφή με το λογισμικό.

Ο καθηγητής αναλαμβάνει τον ρόλο του καθοδηγητή και του συμβούλου των μαθητών καθόλη τη διάρκεια της δραστηριότητας. Μαζί με τους μαθητές, θα θέσουν νόρμες που θα στηρίζουν την κουλτούρα της τάξης, θα βοηθούν την ομαδοσυνεργατικότητα και δεν θα έχουν σαν κύριο στόχο την σωστή

απάντηση, αλλά την εξήγηση και την επιχειρηματολογία. Συγκεκριμένα πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον σημαίνει :

- Ομαδοσυνεργατική εργασία.
- Ανάπτυξη υποθέσεων και εικασιών.
- Έλεγχος, επαλήθευση ή απόρριψη εικασιών.
- Ανάπτυξη διαλογικών πρακτικών και επιχειρηματολογίας.

Ως προς την Περιβαλλοντική Εκπαίδευση

- Να γνωρίζουν οι μαθητές την έννοια της αειφόρου ανάπτυξης.
- Να αναγνωρίζουν τις τρεις βασικές διαστάσεις της αειφόρου ανάπτυξης.

Ψηφιακός γραμματισμός:

- Να έρθουν σε επαφή με τους υπολογιστές και να τους χρησιμοποιήσουν στα πλαίσια των ψηφιακών παιχνιδιών.
- Να εξοικειωθούν με το ψηφιακό περιβάλλον του εκάστοτε παιχνιδιού.

4.6.4 Καινοτομία

Η μέθοδος διδασκαλίας είναι μια από τις καινοτομίες που εισηγούμαι, η οποία είναι διαφορετική από το παραδοσιακό μάθημα στη σχολική τάξη, όπου οι μαθητές παραμένουν παθητικοί δέκτες των μαθηματικών ιδεών και τελικά το μόνο που μαθαίνουν είναι η εφαρμογή μαθηματικών τύπων χωρίς να καταλαβαίνουν πότε, πώς και πού πρέπει να εφαρμόζονται.

Αλλωστε, οι πιθανότητες δεν έχουν μόνο την θεωρητική προσέγγιση με υπολογισμούς τύπων αλλά την υποκειμενική και την πειραματική προσέγγιση. Αυτές οι δύο προσεγγίσεις δεν είναι εύκολο να αναπτυχθούν με τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό, οπότε μέσα από το παιχνίδι θα γίνουν αντικείμενο συζήτησης(Borovcnik , Karadia , 2014).

Μια άλλη από τις καινοτομίες που εισηγούμαι είναι η Περιβαλλοντική Εκπαίδευση. Τα ψηφιακά παιχνίδια που σχεδιάστηκαν στο Choico και ιδίως αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα, αποτελούν σοβαρά παιχνίδια, όπου πρωταρχικός στόχος είναι η εκπαίδευση των μαθητών. Τα παιχνίδια αυτά φέρνουν στο προσκήνιο το θέμα της αειφόρου ανάπτυξης, ένα θέμα που οι

μαθητές δεν διδάσκονται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση με κύριο στόχο την ενημέρωση των μαθητών.

Φυσικά η μέθοδος αυτή έχει και αρνητικές επιπτώσεις με κυριότερο τον παράγοντα χρόνο. Είναι προφανές ότι τέτοιες διαδικασίες απαιτούν περισσότερο χρόνο από μια παραδοσιακή διδασκαλία, και χρειάζεται μια συνεχής εγρήγορση και διαχείριση του χρόνου, έτσι ώστε η διαδικασία ούτε να εκπέσει σε μια παρουσίαση χωρίς ενεργό συμμετοχή των μαθητών, αλλά ούτε και σε μια κοπιώδη διαδικασία χωρίς κατάληξη στους επιθυμητούς διδακτικούς στόχους. Ο καταγιγισμός ιδεών, αν και είναι χρονοβόρος έχει ουσιαστικά αποτελέσματα. Απελευθερώνεται η σκέψη των συμμετεχόντων, διερευνούν σε βάθος το εξεταζόμενο ζήτημα βασιζόμενοι σε μεγάλο βαθμό στις δικές τους δυνάμεις και αξιοποιούν τη δημιουργικότητα και την εμπειρία της ομάδας.

Οι ΤΠΕ μπορούν να αξιοποιηθούν ως συμπλήρωμα στην τάξη για να προωθήσουν τη συνεργασία, τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο και την εμπειρική μάθηση, οι οποίες αποτελούν βασικές παιδαγωγικές μεθόδους της περιβαλλοντικής εκπαίδευσης (Δημητρίου, 2013).

Η συνεργατική μάθηση θεωρείται ως οι δραστηριότητες ενεργητικής μάθησης, κατά τις οποίες οι μαθητές εργάζονται μαζί σε μικρές ομάδες για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου στόχου. Μέσω της ομαδικής εργασίας δίνονται ευκαιρίες για καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου και ανταλλαγή εμπειριών μεταξύ των συμμετεχόντων (Funtowicz , Ravetz, 1993). Η συνεργατική μέθοδος προωθεί την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και μεταξύ των μαθητών- εκπαιδευτικού. Οι μαθητές που εργάζονται στα πλαίσια της συγκεκριμένης μεθόδου παρουσιάζουν διαπολιτισμική κατανόηση και ψηλές διαπροσωπικές δεξιότητες και είναι καλύτερα προετοιμασμένοι για τη συμμετοχή τους σε μια δημοκρατική κοινωνία (Δημητρίου, 2013).

Η χρήση τεχνικών συνεργατικής μάθησης μέσα στην τάξη είναι πολύ σημαντική λόγω των θετικών επιδράσεων τους στη μάθηση των μαθητών. Η μάθηση που προκύπτει μέσα από ενεργητικές διαδικασίες στα πλαίσια μιας μικρής ομάδας, οδηγεί στην ανάπτυξη δεξιοτήτων σκέψης ανώτερης τάξης και

στην ενίσχυση της ατομικής ευθύνης έναντι των υπολοίπων μελών της ομάδας. Ακόμα οδηγεί στην ανάπτυξη της αυτοαξιολόγησης των προσωπικών υποθέσεων αλλά και της αξιολόγησης των σκέψεων των άλλων συμμετεχόντων, αναπτύσσει τις κοινωνικές δεξιότητες των μελών, αναγνωρίζει τη διαφορετικότητα και τις ιδέες και τις απόψεις των μαθητών που αυτοί χρησιμοποιούν στη διαδικασία της μάθησης.

Οι μαθητές δομούν τη γνώση ενεργά εργαζόμενοι σε συνεργατικές ομάδες, ο καθηγητής δεν παρέχει καθοδηγητικές οδηγίες και οι μαθητές ενθαρρύνονται να επεξηγούν το σκεπτικό τους με κατάλληλα επιχειρήματα και να συνεισφέρουν γνωστικά στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Η εφαρμογή μεθόδων, όπως η στρατηγική της επίλυσης προβλήματος η οποία στηρίζεται στη θεωρία του εποικοδομητισμού, λόγω του ότι εφαρμόζεται σε ένα μαθητοκεντρικό περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές και ο διδάσκων συνδιαμορφώνουν το αντικείμενο μάθησης σε συνεργατική βάση, οδηγεί σε επανακαθορισμό των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με δύσκολες έννοιες και οδηγεί σε αύξηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Άλλωστε ο κύριος σκοπός των δραστηριοτήτων συνεργατικής μάθησης είναι η κατανόηση των απόψεων ενός άλλου ατόμου και των σχέσεων μεταξύ των ανθρώπων. Μέσω των αλληλεπιδράσεων της ομάδας οδηγούμαστε στην αποκρυπτογράφηση ιδεών, στην επίλυση των προβλημάτων και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων (Δημητρίου, 2013). Όταν η συνεργατική μάθηση υποστηρίζεται από τη χρήση των ΤΠΕ ο υπολογιστής λειτουργεί είτε ως διαμεσολαβητής μεταξύ των μελών της ομάδας, είτε ως μέσο διερεύνησης πληροφοριών για αξιοποίησή τους από τα μέλη της ομάδας. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να ανταλλάξουν απόψεις και επιχειρήματα επιλέγοντας την καλύτερη δυνατή λύση για την επίλυση ενός προβλήματος ή την αποπεράτωση μιας ομαδικής εργασίας (Κυνηγός, 2015).

4.6.5 Προστιθέμενη αξία

Το σενάριο αξιοποιεί τις ψηφιακές τεχνολογίες, ιδίως το λογισμικό Choico και αξιοποιεί τις ιδέες που έχουν δημιουργήσει τα τελευταία χρόνια οι κοινότητες των εκπαιδευτικών. Η προστιθέμενη αξία εντοπίζεται κυρίως στο γεγονός ότι μέσω της εμπλοκής των μαθητών με τις δραστηριότητες του σεναρίου, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις έννοιες των πιθανοτήτων χωρίς να εμπλέκονται μόνο σε υπολογισμούς τύπων, όπως γίνεται στο παραδοσιακό μάθημα, και μέσα από την εμπλοκή τους ως μέλη μιας ομάδας. Ο καθηγητής με αυτό το λογισμικό μπορεί να σχεδιάσει παιχνίδια που να ενσωματώνουν τις έννοιες των πιθανοτήτων και να βάλει τους μαθητές με τη σειρά τους, να τροποποιήσουν το παιχνίδι και να σχεδιάσουν δικά τους παιχνίδια που να ενσωματώνουν μαθηματικές έννοιες.

Επιπλέον, οι δραστηριότητες αυτές μπορούν να προσαρμοστούν ανάλογα με την τάξη που διδάσκονται και τους διδακτικούς στόχους που επιλέγονται. Βέβαια η επιλογή του κατάλληλου υλικού σύμφωνα με τους στόχους που έχουν τεθεί δεν είναι εύκολη υπόθεση. Χρειάζεται αρκετός χρόνος ψαξίματος προκειμένου να επιλεγούν οι εφαρμογές που θα δώσουν μια πρόσθετη αξία. Οι εφαρμογές θα πρέπει να βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν κριτική σκέψη, θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά και αυτονομία απέναντι στη μάθηση (Κυνηγός, 2006).

Σύμφωνα με τους Noss, Healy και Hoyles (1997) δεν υπάρχει φυσικός τρόπος πρόσβασης (natural window) στο μηχανισμό με τον οποίο οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα. Έτσι, τα υπολογιστικά περιβάλλοντα σε αντίθεση με το κλασσικό μοντέλο «χαρτί – μολύβι» δίνουν στην ερευνητή την ευκαιρία να φτιάξει σχετικά λεπτομερή μοντέλα του μηχανισμού αυτού, μελετώντας τα δομήματα του μαθητή.

Αυτά τα δομήματα, αποτελούν μαθηματικά μοντέλα της κατάστασης που αντιμετωπίζει ο μαθητής, έχουν κατασκευαστεί στα πλαίσια του λογισμικού κι έτσι δεν έχει πρόσβαση σε αυτά μόνο ο μαθητής που τα κατασκεύασε, αλλά κι ο ερευνητής. Άρα, είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τον ερευνητή να έχει σχεδιάσει πολύ προσεκτικά το υπολογιστικό περιβάλλον που θα χρησιμοποιήσει. Βέβαια, όσο προσεκτικά και αν το σχεδιάσει, δεν μπορεί να προβλέψει ακριβώς τι θα συμβεί, καθώς στα ψηφιακά εργαλεία δίνουν «ζωή» οι μαθητές και δημιουργούν τα δικά τους νοήματα (Noss, Healy, & Hoyles, 1997).

4.6.6 Η δραστηριότητα

Η δραστηριότητα που εφαρμόστηκε στα πλαίσια της ερευνητικής μελέτης κατανεμήθηκε σε δύο φάσεις. Κάθε φάση περιείχε ένα φύλλο εργασίας το οποίο λειτουργούσε ως μέσο συντονισμού και συζήτησης του ερευνητή με τους μαθητές τα οποία βοήθησαν σημαντικά στην ολοκλήρωση της κάθε φάσης. Επίσης, οι μαθητές είχαν ένα σημειωματάριο ή τετράδιο στο οποίο κατέγραφαν τις τιμές της πιθανότητας που βρήκαν σε κάθε δοκιμή του πειράματος τύχης.

Η δραστηριότητα είχε ως θέμα το παιχνίδι που σχεδιάστηκε με το λογισμικό και στην πρώτη φάση καλούσε τους μαθητές να παίξουν αρχικά το παιχνίδι ελεύθερα για να εξοικειωθούν με το λογισμικό ενώ παράλληλα, συζητούσαν με το καθηγητή για τις πιθανότητες. Μετά από την εξοικείωση των μαθητών με το λογισμικό η συζήτηση επικεντρωνόταν πάνω στις πιθανότητες που έχουν ενσωματωθεί στο παιχνίδι ώστε οι μαθητές να τις νοηματοδοτήσουν.

Στην δεύτερη φάση, εφόσον οι μαθητές είχαν κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο πιθανολογικές σχέσεις εκφράζονταν μέσα στο παιχνίδι, η δραστηριότητα τους καλούσε να τροποποιήσουν το αρχικό παιχνίδι κατάλληλα με σκοπό να μπορέσουν μόνοι τους πλέον να εντάξουν τις πιθανότητες σε ένα νέο πλαίσιο.

4.6.7 Ανάλυση δραστηριότητας

Φάσεις εφαρμογής της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα έχει ως θέμα τις πιθανότητες και αφορά μαθητές της Γ Γυμνασίου, η οποία είναι συμβατή με το Αναλυτικό Πρόγραμμα, καθώς έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων διδάσκονται στη Γ τάξη του Γυμνασίου για 8 διδακτικές ώρες, στο μάθημα της Άλγεβρας κεφ. 5. Επειδή όμως οι μαθητές δεν έχουν προλάβει να τις διδαχθούν θα χρησιμοποιηθεί απλούστερη ορολογία.

Οι μαθητές θα βρίσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου όπου θα έχουν την απαιτούμενη πρόσβαση στο διαδίκτυο για να λειτουργήσουν με το λογισμικό ChoiCo. Θα δοθούν δύο φύλλα εργασίας, ένα σε κάθε μια από τις δύο φάσεις της δραστηριότητας με τα ερωτήματα προς απάντηση, τα οποία θα λειτουργήσουν σαν εφόρμηση για πειραματισμό και συζήτηση μέσα στην τάξη. Επίσης, οι μαθητές μπορούν να έχουν ένα σημειωματάριο ή τετράδιο στο οποίο θα καταγράφουν τις τιμές που βρήκαν σε κάθε δοκιμή του πειράματος τύχης.

Χωρίζεται σε δυο φάσεις εφαρμογής όπου θα απαιτούνται 6 ώρες διδασκαλίας, δηλαδή 3 δίωρα για κάθε φάση εφαρμογής. Η δραστηριότητα θα πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας το λογισμικό ChoiCo στο οποίο έχει σχεδιασθεί ένα παιχνίδι με ενσωματωμένες έννοιες πιθανοτήτων και ονομάζεται e-game.

Συγκεκριμένα το e-game αφορά το πρόβλημα των άστεγων πολιτών μιας πόλης, δηλαδή ένα κοινωνικό πρόβλημα. Ο μαθητής καλείται να αναλάβει τον ρόλο του δημάρχου της πόλης που θέλει να επανεκλεγεί στο αξίωμα του, οπότε καλείται να κτίσει κτήρια τα οποία θα εξυπηρετούν τις ανάγκες των άστεγων συμπολιτών του ή αυτές των ήδη στεγασμένων συμπολιτών του, οι οποίες όμως διαφέρουν μεταξύ τους. Η ικανοποίηση της μιας ομάδας δεν συνεπάγεται την ικανοποίηση της άλλης και ο στόχος του παιχνιδιού είναι να κρατήσει τις δύο ομάδες ικανοποιημένες ώστε να επανεκλεγεί στο αξίωμα του.

Οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι χωρισμένοι σε ομάδες δύο ή τριών ατόμων και ο καθηγητής της τάξης μπορεί να τους παρέχει καθοδήγηση κυρίως κάνοντας υποστηρικτικές ερωτήσεις. Ο ερευνητής συμμετέχει ενεργά στην τάξη κάνοντας ερωτήσεις στους μαθητές και διεξάγοντας μια συζήτηση γύρω από τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, με σκοπό να καταλάβει τι έχουν κατανοήσει οι μαθητές από τις πιθανότητες και πώς αντιλαμβάνονται αυτές τις έννοιες μέσα στο παιχνίδι.

Φάση 1

Στο πρώτο δίωρο αρχικά, θα δοθεί στους μαθητές το φύλλο εργασίας 1. Ο καθηγητής και ο ερευνητής μπορούν να αρχίσουν μια συζήτηση με όλες τις ομάδες γύρω από βασικές έννοιες των πιθανοτήτων, που έχουν διδαχθεί οι μαθητές όπως πείραμα τύχης, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενο για να δουν τι γνωρίζουν οι μαθητές γύρω από αυτές τις έννοιες. Εδώ δίνεται έμφαση στην υποκειμενική προσέγγιση των μαθητών και στον τρόπο με τον οποίο δικαιολογούν τις απαντήσεις τους.

Οι πρώτες δύο ερωτήσεις του φύλλου εργασίας αφορούν τον ορισμό του πειράματος τύχης και του δειγματικού χώρου χωρίς όμως τη χρήση αυστηρής τυπικής ορολογίας γιατί οι μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί στη χρήση της. Πριν από κάθε ερώτηση ακολουθεί ένα επεξηγηματικό κείμενο στο οποίο αναφέρεται τι είναι ένα πείραμα τύχης στη πρώτη ερώτηση και τι είναι δειγματικός χώρος στη δεύτερη ερώτηση δίνοντας κάποια παραδείγματα.

Η πρώτη ερώτηση ζητάει από τους μαθητές να προσδιορίσουν με βάση τον ορισμό του πειράματος τύχης αν η ρίψη ενός ζαριού είναι πείραμα τύχης και αν η ταχύτητα πτώσης μιας πέτρας μέσα στο νερό είναι επίσης πείραμα τύχης. Ο καθηγητής και ο ερευνητής θα συζητήσουν με τις ομάδες την απάντησή τους στην ερώτηση ώστε να εξηγήσουν οι μαθητές την επιλογή τους.

Η δεύτερη ερώτηση ζητάει από τους μαθητές να προσδιορίσουν με βάση τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης, ποιος είναι ο δ.χ. στην ρίψη ενός ζαριού και ποιος είναι ο δ.χ. στο τράβηγμα ενός λαχνού από μια κληρωτίδα από το 1 έως το 5. Οι απαντήσεις των μαθητών δεν αναμένεται να γραφτούν σύμφωνα με τη θεωρία συνόλων αλλά περιφραστικά. Ο καθηγητής και ο ερευνητής θα συζητήσουν με τις ομάδες την απάντησή τους στην ερώτηση ώστε να εξηγήσουν οι μαθητές την επιλογή τους.

Ο χρόνος που θα δοθεί στους μαθητές για να καταλάβουν το κείμενο και να απαντήσουν στην ερώτηση είναι δύο έως τρία λεπτά για κάθε ερώτηση και μετά θα ακολουθήσει η συζήτηση με το διδάσκοντα και τον ερευνητή για άλλα 5-10 λεπτά συνολικά για τις δύο ερωτήσεις.

Η τρίτη ερώτηση ζητάει από τους μαθητές να παίξουν το παιχνίδι ώστε να αυξήσουν τις πιθανότητες επανεκλογής τους. Η απάντηση σε αυτήν την ερώτηση δεν είναι ένας αριθμός, αλλά θα παρέχει το κίνητρο στους μαθητές για να παίξουν το παιχνίδι και θα τους βοηθήσει να καταλάβουν τον σκοπό του παιχνιδιού.

Θα δοθεί αρχικά χρόνος στους μαθητές να εξοικειωθούν με το λογισμικό και τον τρόπο λειτουργίας του. Θα τους δοθούν δέκα με είκοσι λεπτά να παίξουν το παιχνίδι ελεύθερα για να καταλάβουν το παιχνίδι και τους κανόνες λειτουργίας του. Εδώ θα γίνουν διευκρινίσεις από τη μεριά του ερευνητή ως προς τον τρόπο που εμφανίζονται τα σημεία επιλογής στον χάρτη και πώς επηρεάζει η κάθε επιλογή τις αξίες του παιχνιδιού ώστε να το κατανοήσουν οι μαθητές για να μπορούν να παίξουν το παιχνίδι. Οι διαθέσιμες επιλογές του παίχτη είναι τα κτίρια που μπορεί να χτίσει και είναι οι εξής: πολυκατοικία, βιβλιοθήκη, σχολείο, μουσείο, νοσοκομείο και θέατρο.

Η κάθε επιλογή επηρεάζει με διαφορετικό τρόπο τις αξίες του παιχνιδιού οι οποίες είναι η ικανοποίηση των στεγασμένων πολιτών, η ικανοποίηση των άστεγων πολιτών και η δυνατότητα επανεκλογής.

Οι δύο πρώτες ερωτήσεις ήταν εισαγωγικές ώστε οι μαθητές να αναγνωρίζουν τις βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, βάζοντας με αυτόν τον τρόπο τους μαθητές, να σκεφτούν πώς ενσωματώνονται και εμφανίζονται αυτές οι έννοιες μέσα στο παιχνίδι, ώστε να διαβάζουν τα δεδομένα του παιχνιδιού, να τα αξιολογούν και να λαμβάνουν τις κατάλληλες αποφάσεις για να αυξήσουν τις πιθανότητες επανεκλογής. Στο σημείο αυτό αναμένεται οι μαθητές να έχουν ερωτήσεις για τον τρόπο λειτουργίας του παιχνιδιού και κυρίως για το αν τα ενδεχόμενα εμφάνισης του κάθε αριθμού στις επιλογές του παιχνιδιού έχουν την ίδια πιθανότητα να πραγματοποιηθούν. Ο καθηγητής και ο ερευνητής μπορεί να απαντήσει ότι κάθε αποτέλεσμα είναι το ίδιο πιθανό να συμβεί ως έκβαση, ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να διεξάγουν τα συμπεράσματα τους.

Η τέταρτη ερώτηση αφορά τον προσδιορισμό του πειράματος τύχης και του δειγματικού χώρου του πειράματος μέσα στο παιχνίδι. Αυτή η ερώτηση δεν είναι εύκολη όπως η πρώτη ερώτηση του φύλλου εργασίας αλλά θα δείξει εάν οι μαθητές έχουν καταλάβει τι είναι πείραμα τύχης και πώς μπορεί να το ελέγξουν αν δεν είναι σίγουροι. Εάν οι μαθητές δυσκολευτούν ο καθηγητής και ο ερευνητής μπορούν να κάνουν ερωτήσεις όπως τι παρατηρείτε να αλλάζει με κάθε επιλογή? Μεταβάλλεται το ίδιο την κάθε φορά? Ακόμα και αν κάνουμε την ίδια επιλογή τρεις φορές?

Ο χρόνος που θα χρειασθεί εξαρτάται από το αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει τις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων και αν κατάλαβαν πως έχουν ενσωματωθεί μέσα στο παιχνίδι. Μπορεί να χρειασθεί από 5 και έως 15 λεπτά. Μια λανθασμένη απάντηση που αναμένεται να δώσουν οι μαθητές είναι η ικανοποίηση των άστεγων ή η ικανοποίηση των στεγασμένων πολιτών γιατί μπορεί να μπερδευτούν, καθώς με κάθε επιλογή τα χαρακτηριστικά αυτά μεταβάλλονται.

Μια απάντηση που αναμένεται να δώσουν οι μαθητές είναι «ποια είναι η τιμή της δυνατότητας επανεκλογής σε κάθε επιλογή» με δ.χ. αυτό που γράφει η κάθε επιλογή. Η απάντηση αυτή δείχνει ότι ο μαθητής μελετάει το παιχνίδι τοπικά, δηλαδή βλέπει την κάθε επιλογή ως μεμονωμένη ενώ στην πραγματικότητα όλες οι επιλογές που κάνει ο παίχτης οδηγούν στο τελικό αποτέλεσμα που είναι η επανεκλογή ή όχι του δημάρχου.

Η απάντηση είναι ότι το πείραμα τύχης είναι αν ο δήμαρχος θα επανεκλεγεί. Η τυχαία μεταβλητή είναι η δυνατότητα επανεκλογής του δημάρχου η οποία επηρεάζεται αρνητικά ή θετικά ή και καθόλου όταν ο παίχτης κάνει κάποια επιλογή που παίρνει τιμές από -7 έως 3. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι επιτυχία και αποτυχία.

Ο δήμαρχος επανεκλέγεται και θεωρείται ως επιτυχία, όταν η τιμή της δυνατότητας επανεκλογής φτάσει ή ξεπεράσει την τιμή 80 μέσα στο παιχνίδι και η ικανοποίηση τόσο των στεγασμένων όσο και των άστεγων συμπολιτών του είναι μέσα στα επιτρεπτά όρια. Ο δήμαρχος δεν επανεκλέγεται και θεωρείται ως αποτυχία, όταν είτε η ικανοποίηση των στεγασμένων είτε των άστεγων συμπολιτών του είναι πιο χαμηλά από τα επιτρεπτά όρια ή η δυνατότητα επανεκλογής πέσει κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή. Ο καθηγητής και ο ερευνητής μπορεί να πει στους μαθητές ότι υπάρχουν πειράματα τύχης όπου έχουν μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα, τα οποία δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα δηλαδή είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Αυτά τα πειράματα λέγονται δοκιμές Bernoulli ή πείραμα Bernoulli και το πείραμα τύχης του παιχνιδιού είναι ένα από αυτά.

Η πέμπτη ερώτηση του φύλλου εργασίας ζητάει από τους μαθητές, παίζοντας το παιχνίδι να βρουν ποιο είναι το πιο ευνοϊκό σενάριο ως προς το χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής» μέσα σε 10 κινήσεις. Το πιο ευνοϊκό σενάριο είναι να επιλεγεί και τις 10 φορές που θα κινηθεί ο παίχτης ο μεγαλύτερος αριθμός του εύρους τιμών της κάθε επιλογής, δηλαδή ο αριθμός 3. Οι μαθητές αναμένεται να δυσκολευτούν και να κάνουν ερωτήσεις. Μια λανθασμένη απάντηση που μπορεί να δώσουν ότι ευνοϊκό σενάριο είναι αυτό που σε κάθε επιλογή δεν μειώνεται η δυνατότητα επανεκλογής.

Ο ερευνητής για να τους βοηθήσει, μπορεί να τους θέσει ένα συγκεκριμένο σετ 10 κινήσεων όπως: πολυκατοικία, σχολείο, βιβλιοθήκη, νοσοκομείο, μουσείο, θέατρο, πολυκατοικία, πολυκατοικία, βιβλιοθήκη, μουσείο και κάθε φορά να βλέπουν πόσο αυξήθηκε η δυνατότητα επανεκλογής. Το πιο ευνοϊκό σενάριο θα προκύψει μέσα από συζήτηση με τους μαθητές εξηγώντας τους ότι είναι αυτό που κάθε φορά επιλέγεται ο μεγαλύτερος αριθμός του εύρους τιμών της κάθε επιλογής, δηλαδή ο αριθμός 3.

Ο διδάσκοντας και ο ερευνητής μπορεί να κάνει κάποιο παράδειγμα με ένα ζάρι λέγοντας στους μαθητές ότι σε τρεις ρίψεις ενός ζαριού το άθροισμα των αποτελεσμάτων της κάθε ρίψης θέλουμε να προσεγγίζουν τον αριθμό 20. Το πιο ευνοϊκό είναι να τύχουν τρία 6 ώστε το άθροισμα να είναι το 18 που είναι πιο κοντά στο 20. Ο χρόνος που θα χρειασθεί είναι 15 με 20 λεπτά.

Η έκτη ερώτηση και η έβδομη είναι απλές και υπολογίζονται εύκολα χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας. Οι μαθητές πατώντας με το ποντίκι πάνω σε κάθε επιλογή βλέπουν τα δεδομένα και μπορούν να απαντήσουν στην ερώτηση και οι υπολογισμοί είναι απλοί. Μια απάντηση λανθασμένη μπορεί να είναι ότι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 είναι

1ή ότι είναι ίδια για κάθε επιλογή. Η σωστή απάντηση είναι $1/11$ στην ερώτηση 6. Στην ερώτηση 7 σωστές απαντήσεις είναι $1/11, 1/7, 1/5, 1/7, 1/6, 1/9$

Επειδή όμως μπορεί να μην θυμούνται ή δεν γνωρίζουν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ο καθηγητής και ο ερευνητής μπορούν να τους κάνουν ερωτήσεις όπως από ένα σακούλι με 10 λαχνούς αριθμημένους από το 1 έως το 10 τι πιθανότητα έχουμε να τραβήξουμε τον λαχνό με αριθμό 1. Ο χρόνος που απαιτείται είναι 5-10 λεπτά.

Η όγδοη ερώτηση είναι πιο πολύπλοκη καθώς οι μαθητές για να απαντήσουν σε αυτήν την ερώτηση πρέπει να οδηγηθούν στην πολλαπλασιαστική αρχή. Αυτό γίνεται επειδή η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και τις δέκα φορές μέσα στο παιχνίδι είναι μικρότερη από την πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 σε μια επιλογή. Για να το καταλάβουν οι μαθητές ο καθηγητής θα τους δώσει χρόνο 15 λεπτών να παίξουν το παιχνίδι και να σημειώνουν τις τιμές που βρήκαν ώστε να οδηγηθούν σε κάποιο συμπέρασμα.

Μέσα από συζήτηση που θα διεξαχθεί στην τάξη ο καθηγητής μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν την πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 δύο συνεχόμενες φορές και μετά τρεις φορές. Εδώ θα χρειασθεί το σετ των δέκα κινήσεων ώστε οι μαθητές να μην μπερδεύονται με τις διαφορετικές επιλογές του καθενός. Η σωστή απάντηση είναι $(1/11)^3 * (1/7)^4 * 1/5 * 1/6 * 1/9$. Μια λανθασμένη απάντηση των μαθητών θα είναι να προσθέσουν τις πιθανότητες που βρήκαν στην ερώτηση 7. Οι μαθητές πρέπει επίσης να κατανοήσουν ότι αυτή είναι και η πιθανότητα επιτυχίας του πειράματος τύχης κάτι που θα προκύψει μέσα από συζήτηση με τον διδάσκοντα και τον ερευνητή.

Η ένατη ερώτηση βασίζεται πάνω στις δυο προηγούμενες ερωτήσεις αλλά δεν απαιτεί τους υπολογισμούς πάλι από την αρχή καθώς κάποιοι αριθμοί σίγουρα δεν έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης εφόσον δεν περιέχονται στο εύρος τιμών της κάθε επιλογής. Για να το καταλάβουν αυτό οι μαθητές, ο καθηγητής μπορεί να εστιάσει σε έναν αριθμό και να πει στους μαθητές να παίξουν το παιχνίδι για 2 φορές σημειώνοντας πόσες φορές ήρθε ο συγκεκριμένος αριθμός. Μπορεί ακόμα να τους ρωτήσει τι θεωρούν οι ίδιοι ότι θα γίνει με κάθε αριθμό. Μια λανθασμένη απάντηση των μαθητών είναι: ναι είναι ίδια με κάθε άλλο αριθμό.

Η τελευταία ερώτηση δεν απαιτεί υπολογισμούς αλλά σκοπεύει να αναδείξει τη σύνδεση της πειραματικής και της κλασσικής προσέγγισης των πιθανοτήτων. Ο καθηγητής και ο ερευνητής θα ξεκινήσουν μια συζήτηση με τους μαθητές ότι αν παιχτεί το παιχνίδι πολλές φορές τι πιστεύουν οι ίδιοι ότι θα γίνει, με σκοπό να φτάσει η συζήτηση στο σημείο ότι οι πολύ μεγάλος αριθμός δοκιμών θα προσεγγίζει την θεωρητική τιμή πιθανότητας εμφάνισης που βρήκαν για τον αριθμό 3.

Φάση 2

Αρχικά στη δεύτερη φάση της δραστηριότητας θα δοθεί στους μαθητές το δεύτερο φύλλο εργασίας όπου τους ζητάει να τροποποιήσουν το αρχικό παιχνίδι στο Choico όπου το ζητούμενο είναι να εξασφαλίσουν μια σίγουρη επανεκλογή. Θα δοθεί όσος χρόνος χρειασθεί στους μαθητές και ο ερευνητής θα ακούει τις ιδέες των παιδιών και θα τους συμβουλεύει ως προς τον τρόπο λειτουργίας σχεδιασμού του λογισμικού αφού πρώτα τους παρέχει καθοδήγηση ως προς τον τρόπο που σχεδιάζουμε και τροποποιούμε ένα παιχνίδι με το λογισμικό.

Ο στόχος με αυτήν την τροποποίηση του παιχνιδιού από τους μαθητές είναι να δούμε πόσο καλά κατάλαβαν οι μαθητές τις έννοιες των πιθανοτήτων και αν μπορούν να τις ενσωματώσουν σε ένα διαφορετικό πλαίσιο. Εδώ θα φανεί εάν οι μαθητές κατάλαβαν ποιο είναι και πώς λειτουργεί το πείραμα τύχης του παιχνιδιού. Οι μαθητές πρέπει να αναλύσουν το εύρος τιμών κάθε επιλογής και να βρουν κατάλληλες τιμές για να εξασφαλίσουν τη νίκη στο παιχνίδι.

Στο αρχικό παιχνίδι η νίκη επιτυγχάνεται μόνο αν έρθει ο αριθμός 3 και στις δέκα επιλογές μέσα στο παιχνίδι. Σε αυτήν τη φάση όμως ο παίχτης έχει μόνο 6 επιλογές μια για κάθε τύπο κτιρίου, οπότε πρέπει να βάλει κατάλληλες τιμές στην δυνατότητα επανεκλογής ώστε να φτάσει την τιμή 80. Μια επιλογή είναι να βάλουν οι μαθητές το εύρος κάθε επιλογής από 5 έως 10, καθώς αν σε κάθε επιλογή τύχει ο αριθμός 5, που είναι ο μικρότερος στο συγκεκριμένο εύρος τιμών στη δυνατότητα επανεκλογής, ο παίχτης νικάει σίγουρα. Σε αυτή τη φάση μας νοιάζει και η αιτιολόγηση που δίνουν οι μαθητές όταν τροποποιούν το παιχνίδι για να καταλάβουμε τι έχουν κατανοήσει από τις πιθανότητες.

5. Αποτελέσματα

5.1 Εισαγωγή

Ο τρόπος με τον οποίο προσέγγισαν οι μαθητές το παιχνίδι που τους δόθηκε σχεδιασμένο με το λογισμικό ChoiCo καθ' όλη τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας, καθώς επίσης και η ερμηνεία που έδωσαν στα δεδομένα του παιχνιδιού, βρέθηκαν στο επίκεντρο της ανάλυσης, καθώς σχετίζονται άμεσα με τον τρόπο με τον οποίο διερευνάται η έννοια της πιθανότητας. Η ερμηνεία δεδομένων, η σχεδίαση στρατηγικής, ο υπολογισμός ρίσκου μιας απόφασης και η λήψη αποφάσεων με αβέβαιες συνέπειες πάνω στον χάρτη του λογισμικού ChoiCo, αποτελούν συνολικά μια σφαιρική μελέτη της έννοιας της πιθανότητας από θεωρητική προσέγγιση και από πειραματική προσέγγιση, μέσα από τις πολυάριθμες επαναλήψεις του πειράματος τύχης που περιλαμβάνόταν μέσα στο παιχνίδι. Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στην κατάλληλα σχεδιασμένη δραστηριότητα έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να διερευνήσουν την έννοια της πιθανότητας σε μια πραγματική κατάσταση προσπαθώντας με τον τρόπο αυτό να εντάξουν στα γνωστικά τους σχήματα την έννοια της πιθανότητας ως θεωρητικού εργαλείου, ως συχνότητα πραγματοποίησης ενδεχομένων ή ως προσωπική εκτίμηση της αβεβαιότητας. Τέλος, η εφαρμογή της έρευνας σχεδιασμού ως ερευνητική μέθοδος σε πραγματικές σχολικές συνθήκες ανέδειξε παράλληλα τη σύνδεση των μαθηματικών με την περιβαλλοντική εκπαίδευση και την πληροφορική.

5.2 Αποτελέσματα από την πιλοτική έρευνα

Η πιλοτική έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο σχολείο έγινε με στόχο να εξετάσει ο ερευνητής εάν το παιχνίδι λειτουργεί όπως σχεδιάστηκε και αν οι μαθητές μπορούν να καταλάβουν τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας 1.

Τα αποτελέσματα της πιλοτικής έρευνας έδειξαν ότι το παιχνίδι χρειαζόταν καλύτερες οδηγίες και επεξήγηση του ρόλου του παίχτη καθώς οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά να καταλάβουν το σκοπό του παιχνιδιού.

Επίσης, οι μαθητές χρειάστηκαν μια συζήτηση για τους όρους πείραμα τύχης και δειγματικός χώρος, συνεπώς προστέθηκαν τα κείμενα επεξήγησης που ακολουθούν τις δύο πρώτες ερωτήσεις του φύλλου εργασίας 1.

Τέλος, κρίθηκε απαραίτητο να εξηγηθεί στους μαθητές ότι οι ερωτήσεις έξι, επτά και οκτώ αφορούν το χαρακτηριστικό δυνατότητα επανεκλογής καθώς οι μαθητές της πιλοτικής έρευνας δυσκολεύτηκαν να καταλάβουν ότι εκεί πρέπει να εστιάσουν την προσοχή τους για να απαντήσουν στις ερωτήσεις που αφορούν τις πιθανότητες μέσα στο παιχνίδι.

5.3 Αποτελέσματα από το Pre-test

Η έννοια της πιθανότητας είναι μια περιοχή των μαθηματικών όπου η εμφάνιση εσφαλμένων αντιλήψεων και παρανοήσεων (misconceptions) από τους μαθητές είναι πολύ συχνή (Shaughnessy, 1983). Από τη μελέτη των απαντήσεων του δείγματος, όπου μαθητές Γ γυμνασίου που δεν έχουν διδαχθεί στην τάξη πιθανότητες, έρχονται αντιμέτωποι με πιθανολογικές καταστάσεις, γίνεται φανερό ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν στρατηγικές που βασίζονται στις βασικές εσφαλμένες αντιλήψεις-παρανοήσεις που έχουμε προηγουμένως αναφέρει (Αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας, Εύρος του δείγματος, Διαθεσιμότητα της πληροφορίας, και τέλος την Υπόθεση των ισοπίθανων), με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λανθασμένα συμπεράσματα. Η χρήση αυτών των εσφαλμένων αντιλήψεων-παρανοήσεων φαίνεται στις απαντήσεις των μαθητών.

Στην ερώτηση 1, οι μαθητές απάντησαν σωστά σε μεγάλο ποσοστό (66%). Ένας μαθητής από τους δύο που απάντησαν λανθασμένα απάντησε ότι το επόμενο αποτέλεσμα που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί θα είναι διαφορετικό (negative recency effect) και ο άλλος απάντησε ότι θα είναι το ίδιο με τα προηγούμενα (positive recency effect). Και στις δύο περιπτώσεις φαίνεται να αγνοείται η ανεξαρτησία της κάθε ρίψης του νομίσματος.

Στην ερώτηση 2, ένας μαθητής απάντησε σωστά ενώ οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν κυρίως λανθασμένα (83%), πιστεύοντας ότι επειδή η πιθανότητα να έρθει ΚΕΦΑΛΗ σε μία ρίψη ενός νομίσματος είναι ίση με την πιθανότητα να έρθει ΓΡΑΜΜΑΤΑ, το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και όταν το πείραμα εκτελείται είτε 3 είτε 300 φορές.

Στην ερώτηση 3 σχεδόν όλοι οι μαθητές, απάντησαν και πάλι λανθασμένα (83%) πιστεύοντας ότι και στη μεγάλη δημόσια κλινική και στη μικρή ιδιωτική, οι μήνες όπου καταγράφηκαν γεννήσεις αγοριών άνω του 60% ήταν οι ίδιοι. Ένας μόνο μαθητής απάντησε υπέρ της δημόσιας κλινικής, ενώ μόνο ένας μαθητής απάντησε σωστά, ότι πιθανότερο είναι να συμβεί το παραπάνω γεγονός στην ιδιωτική κλινική, όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, παρά στη δημόσια.

Στην ερώτηση 4, οι μισοί μαθητές απάντησαν λανθασμένα απάντησαν ότι τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ενώ οι άλλοι μισοί απάντησαν σωστά ότι το ζευγάρι 5-6 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί από το ζευγάρι 6-6.

Στην ερώτηση 5, οι μισοί μαθητές απάντησαν ότι και τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ενώ οι άλλοι μισοί απάντησαν σωστά ότι πιθανότερο είναι να φέρουμε άθροισμα το 7.

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές απάντησαν κυρίως λανθασμένα (66%), ενώ μόνο δύο μαθητές βρήκαν τη σωστή απάντηση. Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν λανθασμένα, ότι η σε μια οικογένεια με έξι παιδιά η σειρά A K K A K A γέννησης των παιδιών της, είναι πιθανότερη από τη σειρά A A A A A A και μόνο ένας μαθητής απάντησε ότι η σειρά A A A A A A είναι πιθανότερη από τη σειρά A K K A K A.

Φαίνεται λοιπόν ότι η μόνη εσφαλμένη αντίληψη που με την πάροδο του χρόνου έχει κάπως διορθωθεί είναι αυτή που βασίζεται στην αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας. Αυτό κυρίως οφείλεται στο ότι με βάση τις καθημερινές εμπειρίες τους, οι μαθητές μπορούν ευκολότερα να κατανοήσουν ότι πολλά γεγονότα είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και επομένως η πιθανότητα να εμφανιστεί κάποιο από αυτά δεν αλλάζει όσες φορές κι αν εκτελέσουμε το πείραμα. Οι υπόλοιπες παρανοήσεις παραμένουν έντονες και επηρεάζουν την κρίση τους παρά τις εμπειρίες που έχουν τώρα μέσα από την καθημερινότητα τους.

5.4 Αποτελέσματα της κύριας έρευνας

5.4.1 Δημιουργία νοημάτων για βασικές έννοιες των πιθανοτήτων

Στην πρώτη φάση του σεναρίου, δώσαμε στους μαθητές να παίξουν το παιχνίδι e-game καθώς και το φύλλο εργασίας 1 με ερωτήσεις που σχετίζονταν άμεσα με το παιχνίδι και τις πιθανότητες. Οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε δύο ομάδες των τριών ατόμων. Οι δύο πρώτες ερωτήσεις του φύλλου εργασίας ήταν εισαγωγικές και σχετίζονταν με τις έννοιες πείραμα τύχης και δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.

Δημιουργία νοημάτων για την έννοια πείραμα τύχης

Η πρώτη ερώτηση ζήτηγε από τους μαθητές να εξετάσουν αν τα πειράματα που δίνονταν στην εκφώνηση είναι πειράματα τύχης και να εξηγήσουν γιατί. Οι μαθητές ήταν σίγουροι για την επιλογή «η ταχύτητα πτώσης μιας πέτρας μέσα στο νερό», καθώς ήξεραν από την φυσική ότι υπάρχουν τύποι υπολογισμού της ταχύτητας, οπότε δεν αποτελεί πείραμα τύχης και για την επιλογή «το τράβηγμα ενός χαρτιού από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά», ότι αποτελεί πείραμα τύχης επειδή δεν μπορούν να προβλέψουν ποιο χαρτί θα τύχει, καθώς το θυμόντουσαν από το δημοτικό.

Για τις άλλες δύο επιλογές «Η επιλογή ενός ζώου και η εξέτασή του για να διαπιστωθεί αν έχει προσβληθεί από μια συγκεκριμένη ασθένεια» και «Η καταγραφή της διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα» οι μαθητές θεωρούσαν ότι δεν είναι πειράματα τύχης. Για κάποιον που

γνωρίζει θεωρία πιθανοτήτων αυτά τα δύο πειράματα είναι πείραμα τύχης καθώς δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του πειράματος. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να το καταλάβουν αυτό και ενδιαφέρον παρουσιάζει ο επόμενος διάλογος με τους μαθητές.

Απόσπασμα 1

Ερευνητής: Θέλω να μου πεις ποιο από αυτά είναι πείραμα τύχης κατά τη γνώμη σου και μια μικρή αιτιολόγηση.

Μαθητής 1: Πιστεύω ότι είναι μόνο το γ, γιατί το β, η ταχύτητα πτώσης πέτρας στο νερό αν η πέτρα έχει πάντα το ίδιο βάρος και την πετάξουμε με την ίδια δύναμη δεν είναι πείραμα τύχης. Η επιλογή α, εξέταση ενός ζώου για μια συγκεκριμένη ασθένεια δεν είναι πείραμα τύχης.

Ερευνητής: Για την επιλογή δ τι πιστεύεις;

Μαθητής 1 Το δ δεν είναι πείραμα τύχης, γιατί η διάρκεια ζωής μιας λάμπας είναι πάντα συγκεκριμένη, την γράφει πάνω στο κουτί.

Ερευνητής: Συμφωνείτε με αυτά που είπε ο συμμαθητής σας ή όχι; Θέλω να ακούσω τις απόψεις όλων.

Καθηγητής: Ποιος διαφωνεί; Αυτά δεν τα έχουμε κάνει στην τάξη.

Μαθητής 4: Στο α, η επιλογή ενός ζώου και η εξέταση του για μια συγκεκριμένη ασθένεια οι γιατροί το χωρίζουν στο αν παρουσιάζει συμπτώματα και αν παρουσιάζει το μελετάμε.

Ερευνητής: Θεωρείς ότι είναι πείραμα τύχης ή όχι;

Μαθητής 4: Θα μπορούσε να είναι.

Καθηγητής : Λες δηλαδή ότι κάνουμε μια πρώτη επιλογή από αυτά που φαίνεται ότι είναι ήδη άρρωστα.

Μαθητής 4: Ναι.

Μαθητής 6: Αν όμως ένα ζώο δεν έχει παρουσιάσει συμπτώματα αλλά έχει προσβληθεί από την ασθένεια πώς θα το ξέρουμε;

Ερευνητής Πολύ ωραία ερώτηση. Αυτό στην ιατρική έχει μεγάλη σημασία. Μπορεί να έχεις προσβληθεί από μια ασθένεια και να μην έχεις εμφανίσει ακόμα συμπτώματα.

Καθηγητής: Δηλαδή δεν έχεις εικόνα για το τι γίνεται.

Στον παραπάνω διάλογο (απόσπασμα 1) φαίνεται ότι η M4 προχώρησε ένα βήμα παραπάνω στην αφαίρεση καθώς σκέφτηκε ότι αν ένα ζώο παρουσιάζει συμπτώματα πρέπει να είναι άρρωστο, αλλά αν δεν παρουσιάζει δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι, οπότε η εξέταση ενός τέτοιου ζώου θα μπορούσε να είναι πείραμα τύχης. Άλλωστε τα νοήματα αντανακλούν τις προηγούμενες εμπειρίες του κάθε ατόμου της ομάδας και είναι ανοικτά σε διαπραγμάτευση και αναδιαμόρφωση (Stahl, Koschmann, & Suthers, 2006).

Επαναδιαπραγμάτευση των νοημάτων και συμφωνία σε ένα κοινό πλαίσιο

Ο διάλογος συνεχίστηκε ως εξής:

Απόσπασμα 2

Ερευνητής Θα κάνω μια ερώτηση. Αν ένας βοσκός έχει 200 πρόβατα και υπάρχει μια ασθένεια που προσβάλει τα πρόβατα και έρχεται ένας κτηνίατρος και θέλει να τα εξετάσει με ένα συγκεκριμένο τεστ, αν έχουν συμπτώματα ή όχι, δεν επηρεάζει το τεστ και το τεστ δείχνει αν έχουν την ασθένεια ή όχι. Αυτό πιστεύετε ότι είναι πείραμα τύχης και γιατί;

Μαθητής 5 Ναι, γιατί δεν ξέρουμε αν έχουν την ασθένεια για αυτό τα εξετάζουμε.

Ερευνητής : Θα μπορούσαν λοιπόν, να την έχουν και να μην την έχουν.

Μαθητής 5 Ναι.

Μαθητής 1 Πείραμα τύχης είναι να βρούμε ποιο ζώο έχει την ασθένεια όχι αν την έχει, γιατί ξέρουμε ότι το πρόβατο έχει την συγκεκριμένη ασθένεια, έστω κάποιο από αυτά.

Ερευνητής: Πώς το ξέρεις; Μπορεί να μην την έχει κανένα και να είναι όλα υγιή.

Μαθητής 2 Αν κολλήσουν αυτήν την ασθένεια αργότερα;

Ερευνητής Το τεστ δείχνει τα αποτελέσματα για τότε που έγινε, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να την κολλήσει αργότερα.

Μαθητής 4 Δεν είναι πείραμα τύχης γιατί εξετάζει όλα τα ζώα.

Ερευνητής Για κάθε ζώο ξεχωριστά είναι πείραμα τύχης;

Μαθητής 2 Ναι.

Καθηγητής Πειστήκατε ότι είναι πείραμα τύχης; Έχουμε τα πρόβατα και έναν τρόπο να δούμε ποιο είναι άρρωστο. Επιλέγουμε ένα και κάνουμε το τεστ. Αυτό είναι πείραμα τύχης;

Μαθητής 1 Ναι είναι.

Σε αυτό το απόσπασμα φαίνονται οι διαφορετικές απόψεις των μαθητών για μια πιθανολογική κατάσταση καθώς διαμορφώνονται τα νοήματα που δίνουν οι μαθητές. Σε αυτήν την ερώτηση δίνεται βάση στην υποκειμενική προσέγγιση της έννοιας του πειράματος τύχης καθώς όπως φάνηκε στο απόσπασμα, ο κάθε μαθητής έχει διαφορετική άποψη για το πείραμα τύχης. Οι μαθητές βασίστηκαν στις εμπειρίες τους και δεν χρησιμοποίησαν τον ορισμό του πειράματος τύχης για να απαντήσουν στην ερώτηση, μια βασική παρανόηση που αναγράφεται στη βιβλιογραφία. Το παράδειγμα που χρησιμοποίησε ο ερευνητής προσπαθεί να δείξει στους μαθητές ότι εφόσον δεν μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα του πειράματος, τότε αυτό είναι πείραμα τύχης. Αυτό έγινε πιο κατανοητό με την επιλογή δ στο απόσπασμα που ακολουθεί.

Απόσπασμα 3

Ερευνητής Για το δ μου είπες ότι η διάρκεια ζωής του λαμπτήρα αναγράφεται επάνω του, οπότε δεν είναι πείραμα τύχης. Αν όμως πάρουμε 5 λαμπτήρες και θέλουμε να μετρήσουμε τη διάρκεια ζωής του με ειδικά όργανα, τότε θα έχουν όλοι την ίδια διάρκεια ζωής?

Καθηγητής Ακόμα και οι ίδιοι να είναι οι λαμπτήρες;

Μαθητής 3 Όχι, μπορεί ένας να είναι ελαττωματικός.

Ερευνητής Υπάρχει και το ελάττωμα λοιπόν, ένας λαμπτήρας μπορεί να έχει κάποια συγκεκριμένη διάρκεια ζωής αλλά να διαρκέσει λιγότερο. Συνεπώς, είναι πείραμα τύχης;

Μαθητής 4 Πιστεύω ότι είναι πείραμα τύχης γιατί δεν ξέρουμε πόση ενέργεια καταναλώνει ο κάθε λαμπτήρας.

Ερευνητής Σίγουρα, οπότε έχουμε πολλές παραμέτρους που μας καθορίζουν κάποια πράγματα.

Μαθητής 6 Μπορεί να χρησιμοποιούμε ένα λαμπτήρα για κάποιο διάστημα και μετά να μην το χρησιμοποιούμε. Μπορεί να λέει για ένα χρόνο αλλά να διαρκέσει περισσότερο γιατί δεν τον χρησιμοποιούμε.

Ερευνητής Θα ήταν λοιπόν πείραμα τύχης;

Μαθητής 6 Ναι.

Καθηγητής Πρέπει λοιπόν να ορίσουμε πρώτα τι εννοούμε διάρκεια ζωής ενός λαμπτήρα. Διάρκεια ζωής εννοούμε τον χρόνο που δουλεύει όχι τον χρόνο που τον έχουμε τον λαμπτήρα στο σπίτι μας. Στα εργοστάσια όσο και αν προσπαθήσουν είναι αδύνατο να παράγουν λαμπτήρες με την ίδια διάρκεια ζωής. Αυτό δεν γίνεται ποτέ, έχουν περίπου την ίδια διάρκεια ζωής. Οπότε το να βρούμε τη διάρκεια ζωής ενός λαμπτήρα είναι πείραμα τύχης ή όχι?

Μαθητές Ναι.

Όπως φάνηκε στο απόσπασμα οι μαθητές κατάλαβαν ότι εφόσον δεν μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα του πειράματος, καθώς υπάρχουν πολλοί παράγοντες που το καθορίζουν, τότε αυτό είναι πείραμα τύχης. Το σημαντικότερο συμπέρασμα είναι ότι όλοι οι μαθητές προσπάθησαν να κρίνουν αν το πείραμα είναι τυχαίο βασιζόμενοι σε προηγούμενες εμπειρίες τους. Όπως φάνηκε στα αποσπάσματα 2 και 3 μια κοινή παρανόηση των μαθητών ήταν η πλάνη της σύζευξης, καθώς ένας μαθητής απάντησε ότι αν ένα ζώο εμφανίσει συμπτώματα μιας ασθένειας τότε έχει σίγουρα την ασθένεια για την οποία εξετάζεται και ένας άλλος ότι η διάρκεια ζωής του λαμπτήρα είναι γνωστή καθώς αναγράφεται πάνω στο κουτί. Αυτό είναι λάθος γιατί τα συμπτώματα που εμφανίζονται σε έναν οργανισμό που νοσεί, μπορεί να μην είναι από την ασθένεια για την οποία το εξετάζουμε αλλά από κάποια άλλη και στο κουτί του λαμπτήρα αναγράφεται η μέση διάρκεια ζωής του.

Δημιουργία νοημάτων για την έννοια δειγματικός χώρος πειράματος τύχης

Στην ερώτηση δύο οι μαθητές απάντησαν κυρίως σωστά, κάτι που ήταν αναμενόμενο, γιατί στο σχολείο εξοικειώνονται περισσότερο με πειράματα με ζάρια, και τράπουλες. Παρατηρήθηκε όμως, ότι σε πειράματα τύχης δύο σταδίων όπως το άθροισμα δύο ζαριών μπορεί να υπάρχει κάποια παρανόηση (εικόνα 9) όπως φάνηκε στο απόσπασμα 4 που ακολουθεί.

Απόσπασμα 4

Ερευνητής Θέλω να μου πείτε τον δειγματικό χώρο της ρίψης ενός ζαριού.

Καθηγητής Ποιες είναι δηλαδή οι πιθανές εκβάσεις της ρίψης ενός ζαριού;

Μαθητής 3 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6.

Ερευνητής Από 1 έως 6 λοιπόν. Το επόμενο.

Μαθητής 5 Ένας λαχνός με αριθμό από 1 έως 5.

Ερευνητής Ωραία, στο επόμενο.

Μαθητής 1 Το άθροισμα δύο ζαριών μπορεί να είναι από 1 έως 12.

Καθηγητής Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Μαθητής 2 Όχι, είναι από 2 έως 12.

Καθηγητής Αν φέρω δύο άσους τότε το άθροισμα είναι 2, δεν μπορεί να είναι ένα.

1. Να κυκλώσετε ποιά από τα παρακάτω φαινόμενα είναι πείραμα τύχης ;

(α) Η επιλογή ενός ζώου και η εξέτασή του για να διαπιστωθεί αν έχει προσβληθεί από μια συγκεκριμένη ασθένεια.

β) Η ταχύτητα πτώσης μιας πέτρας μέσα στο νερό.

(γ) Το τράβηγμα ενός χαρτιού από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά.

(δ) Η καταγραφή της διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα.

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο των δυνατών εκβάσεων του πειράματος. Π.χ. στο στρίψιμο ή τη ρίψη ενός κέρματος, η πλευρά που θα βρίσκεται πάνω όταν αυτό πέσει κάτω και σταματήσει να κινείται μπορεί να είναι κορώνα Κ ή γράμματα Γ.

2. Να γράψετε τους δειγματικούς χώρους των εξής πειραμάτων τύχης :

α) Η ρίψη ενός ζαριού. 1, 2, 3, 4, 5, 6

β) Τράβηγμα ενός λαχνού από μια κληρωτίδα από το 1 έως το 5. 1, 2, 3, 4, 5

γ) Το άθροισμα των δύο ζαριών σε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι. 2-12

Εικόνα 9 Λανθασμένη απάντηση μαθητή στην ερώτηση 2

5.4.2 Δημιουργία νοημάτων μέσα από το ChoiCo

Οι μαθητές όταν έπαιζαν το παιχνίδι τις πρώτες δύο φορές απλώς πατούσαν τα διάφορα κτίρια για να καταλάβουν πώς παίζεται το παιχνίδι. Η μια ομάδα κατάφερε να νικήσει το παιχνίδι, ενώ η άλλη ομάδα έχασε. Έχοντας ως σημείο αναφοράς τις αρχικές τιμές του παιχνιδιού οι μαθητές άρχισαν να συνεργάζονται με σκοπό να νικήσουν το παιχνίδι, να αναπτύσσουν στρατηγικές και να κάνουν εικασίες. Ενδιαφέρον είχε ότι οι μαθητές επεξεργάζονταν τα δεδομένα του παιχνιδιού για τον κάθε τύπο κτιρίου πριν λάβουν μια απόφαση αξιολογώντας το ρίσκο της κάθε απόφασης. Μετά από κάποιες δοκιμές οι μαθητές κατέληξαν σε κάποια στρατηγική που ήταν ωφέλιμη για να παρατηρήσουν με ποιες τιμές νίκησαν το παιχνίδι ή έχασαν αντίστοιχα (εικόνες 10, 11).

Απόσπασμα 5

Ερευνητής Ποια είναι μέσα στο παιχνίδι η δυνατότητα επανεκλογής ή αλλιώς που φαίνεται μέσα στο παιχνίδι;

Μαθητής 3 Ίσως πάνω που γράφει δυνατότητα επανεκλογής.

Ερευνητής Ωραία, πάνω λοιπόν εκεί που γράφει Game Values. Όταν κάνετε μια επιλογή στο παιχνίδι κάτι γίνεται. Αυτή η ερώτηση δεν έχει μια απάντηση απλά δείχνει αν έχετε καταλάβει το παιχνίδι.

Καθηγητής Δεν υπάρχει μόνο μια λύση αλλά πολλές.

Οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι και αρχίζουν να παρατηρούν ορισμένα στοιχεία που τους βοηθάνε να νικήσουν ή αποτρέπουν την ήττα.

Μαθητής 3 Το νοσοκομείο δίνει περισσότερους αστέγους από το θέατρο.

Μαθητής 4 Μας νοιάζει περισσότερο η πιθανότητα επανεκλογής.

Μαθητής 5 Ναι, αλλά μας νοιάζουν και οι άστεγοι.

Μαθητής 6 Να δούμε ποιο μας συμφέρει περισσότερο για να αυξήσουμε τις πιθανότητες επανεκλογής μας.

Οι μαθητές επιλέγουν διαφορετικά κτίρια και βλέπουν πώς επιδρά το κάθε κτίριο.

Μαθητής 4 Να δούμε ποιο ανεβάζει τη δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 5 Η πολυκατοικία έχει μεγάλο ρίσκο, περισσότερο σε σχέση με τη βιβλιοθήκη.

Μαθητής 3 Αν πατήσω μόνο σχολείο διαρκώς μπορώ να αυξήσω τη δυνατότητα επανεκλογής. Ναι, η δυνατότητα επανεκλογής έφτασε την τιμή 80.

Καθηγητής Κερδίσατε; Με πόσο;

Μαθητής 1 Με 80. Όταν η δυνατότητα επανεκλογής φτάνει 80 νικάμε.

Ερευνητής Τώρα που παίζατε λίγο το παιχνίδι θα σας ρωτήσω κάτι. Θέλω να σας ρωτήσω πώς αυξάνονται οι πιθανότητες επανεκλογής και να μου το εξηγήσετε με απλά λόγια. Μπορείτε και να μου δείχνετε στην οθόνη τι εννοείτε.

Μαθητής 1 Οι πιθανότητες επανεκλογής αυξάνονται όταν όλοι είναι ευχαριστημένοι.

Μαθητής 5 Όταν οι ευχαριστημένοι είναι περισσότεροι από τους δυσαρεστημένους.

Μαθητής 4 Αυτό δεν το εμφανίζει κάπου.

Μαθητής 6 Το εμφανίζει, εδώ λέει άστεγοι συν10 και στεγασμένοι μείον 10.

Ερευνητής Αυτό δείχνει ότι δεν μπορούν να είναι όλοι ευχαριστημένοι το ίδιο, έχετε δίκιο. Όμως, για εξηγήστε μου πώς πιστεύετε ότι η ικανοποίηση ή η μη ικανοποίηση της μιας ομάδας, ως πούμε των στεγασμένων πολιτών, επηρεάζει το παιχνίδι; Εννοώ δηλαδή, πώς επηρεάζει αυτό τις πιθανότητες επανεκλογής;

Μαθητής 4 Ίσως αν είναι ευχαριστημένοι θα τον ψηφίσουν, ενώ αν δεν είναι δεν θα τον ψηφίσουν.

Ερευνητής Μπορούν να είναι όλοι ευχαριστημένοι με όποια επιλογή κάνετε;

Μαθητές Όχι.

Ερευνητής Αν η ικανοποίηση της μιας ομάδας πέσει πολύ τι θα γίνει;

Μαθητής 3 Θα χάσουμε.

Ερευνητής Συμφωνούμε λοιπόν ότι πρέπει να είναι κάπου στη μέση.

Σχολείο	8	105	65	8	105	59	8	105	61
Πολ.	70	10	44	70	10	44			
Βιβ.	5	65	39	5	65	53			
Θεωρ.	0	65	20	0	65	48			
Μουσ.	5	70	57	5	70	52			
Νοσ.	10	18	59	10	18	61			

Εικόνα 10 Καταγραφή τιμών του παιχνιδιού κάθε επιλογής των μαθητών

A	Σ	Δ
30	50	50
28	55	51
26	60	50
24	65	49
22	70	52
20	75	40

A	Σ	Δ
1 28	50	51
2 25	55	50
3 33	49	46
4 37	47	45
5 35	59	45
6 41	50	46
7 39	55	46
8 34	59	44

A	Σ	Δ
9 32	64	46
10 37	62	46

Εικόνα 11 Καταγραφή τιμών του παιχνιδιού για εύρεση στρατηγικής

Οι μαθητές έχοντας παίξει το παιχνίδι όλοι από μια φορά τουλάχιστον, άρχισαν να καταλαβαίνουν τις σχέσεις μεταξύ των τιμών του παιχνιδιού και όπως φαίνεται στο απόσπασμα που ακολουθεί, κατέταξαν τα διάφορα κτίρια με βάση το ρίσκο που είχε η κάθε απόφαση. Με αυτόν τον τρόπο, κτίρια όπως η πολυκατοικία που ικανοποιούσε πολύ τους άστεγους αλλά είχε δυνατότητα

επανεκλογής από -7 έως 3, κρίθηκε ως επιλογή υψηλού κινδύνου και οι μαθητές το επέλεξαν μόνο ως έσχατη λύση για να παραμείνουν στο παιχνίδι. Επιπλέον οι μαθητές κατέληξαν ότι οι άστεγοι και οι στεγασμένοι συμπολίτες του δημάρχου πρέπει να είναι ικανοποιημένοι και η τιμή της ικανοποίησης τους πρέπει να είναι κοντά στις αρχικές τιμές του παιχνιδιού. Μια στρατηγική που κρίθηκε ωφέλιμη για το παιχνίδι από τους μαθητές ήταν να κτίζουν μόνο σχολεία και νοσοκομεία καθώς η δυνατότητα επανεκλογής αυτών των κτιρίων είχε εύρος τιμών από -1 έως 3 και -2 έως 3 αντίστοιχα.

Απόσπασμα 6

Ερευνητής Το χαρακτηριστικό δυνατότητα επανεκλογής πιστεύετε ότι επηρεάζει τις πιθανότητες επανεκλογής;

Μαθητής 2 Ναι, αν έχουμε την δυνατότητα επανεκλογής εδώ.

Ερευνητής Διάβασε μου σε ποια επιλογή.

Καθηγητής Πες το όνομα της επιλογής.

Μαθητής 2 Στην επιλογή σχολείο η δυνατότητα επανεκλογής διαλέγει τυχαία έναν αριθμό από το -1 μέχρι το 3.

Ερευνητής Πώς επηρεάζει αυτό την δυνατότητα επανεκλογής κατά τη γνώμη σου?

Μαθητής 2 Αν πατήσουμε ένα σχολείο η δυνατότητα επανεκλογής είναι από το -1 μέχρι το 3. Θα πέσει περισσότερο.

Μαθητής 3 Μπορεί να πάρεις αύξηση από 1 έως 3 ή θα πάρεις -1.

Ερευνητής Μπορείς να πάρεις την τιμή μηδέν? Να μην επηρεαστεί καθόλου δηλαδή;

Μαθητής 3 Ναι, μπορείς.

Μαθητής 6 Εγώ σκέφτομαι ότι αν τα θετικά είναι περισσότερα από τα αρνητικά θα πάρει περισσότερες ψήφους. Σε μια άλλη επιλογή ξεκινάει από -7 και φτάνει στο 3. Αρα είναι πιο δύσκολο να πάρει ψήφους.

Καθηγητής Τι εννοείς είναι πιο δύσκολο? Αν είχες να επιλέξεις από μια επιλογή που είχε από -1 έως 3 και μια άλλη που έχει από -7 έως 3 ποια θα διάλεγες;

Μαθητής 6 Αυτή που είναι από -1 έως 3 γιατί έχει περισσότερες πιθανότητες να πάρει θετική ψήφο.

Ερευνητής Μπορείτε να μου βρείτε μια στρατηγική, μέσα στο παιχνίδι, που βοηθάει το δήμαρχο να επανεκλεγεί;

Μαθητής 3 Εγώ, λέω να εστιάσουμε στο σχολείο γιατί θα πάρουμε περισσότερα θετικά. Να χτίζεις μόνο σχολεία και νοσοκομεία.

Μαθητής 6 Να χτίζουμε τα κτίρια τα οποία έχουν περισσότερα θετικά.

Ερευνητής Δεν ξέρεις όμως αν θα έρθει θετικό, μπορεί να έρθει και αρνητική τιμή. Έτσι όμως, κάποιοι δεν θα είναι δυσαρεστημένοι;

Μαθητής 1 Ίσως να χτίσουμε και μια πολυκατοικία.

Καθηγητής Τι δίνει η πολυκατοικία;

Μαθητής 3 Δεν μου αρέσει σαν επιλογή έχει πολύ ρίσκο.

Ερευνητής Γιατί έχει πολύ ρίσκο;

Μαθητής 4 Γιατί ξεκινάει από -7.

Ερευνητής Συμφωνούμε ότι κάθε επιλογή έχει ρίσκο. Ο δήμαρχος όμως, θέλει να είναι όλοι ευχαριστημένοι και οι άστεγοι και οι στεγασμένοι. Συνεπώς, όλοι πρέπει να είναι ευχαριστημένοι πάνω από κάποια τιμή για να παραμείνετε στο παιχνίδι, αλλιώς θα χάσετε.

Οι μαθητές εφόσον έπαιξαν το παιχνίδι κατάλαβαν ότι χάνουν εάν η ικανοποίηση της μιας ομάδας πολιτών πέσει πολύ και κερδίζουν όταν η δυνατότητα επανεκλογής του δημάρχου φτάσει το 80. Επίσης έφτασαν στο συμπέρασμα, ότι εφόσον δεν μπορούμε να προβλέψουμε, σε κάθε επιλογή, πόσο θα μεταβληθεί η δυνατότητα επανεκλογής τότε αυτό θα είναι το πείραμα τύχης, αλλά δεν ήταν σίγουροι.

Η αιτιολόγηση των μαθητών βασιζόταν στο ότι αν επιλέξουμε ένα κτίριο τότε η δυνατότητα επανεκλογής ανεβαίνει ή κατεβαίνει. Οι μαθητές μέσα από τις πολλές δοκιμές και την ανατροφοδότηση από το παιχνίδι, έκαναν εικασίες για το πείραμα τύχης και έπαιξαν το παιχνίδι με σκοπό να τις καταρρίψουν ή να τις επιβεβαιώσουν.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσέγγιση μιας εκ των δύο ομάδων, η οποία προσπάθησε επιλέγοντας κάθε φορά να χτίζουν μόνο έναν τύπο κτιρίου, να μελετήσει με ποιες τιμές θα χάσει, γιατί έτσι θα βεβαιωνόντουσαν αν είναι πείραμα τύχης.

Απόσπασμα 7

Ερευνητής Υπάρχει κατά τη γνώμη σας πείραμα τύχης;

Μαθητής 4 Υπάρχει πείραμα τύχης.

Καθηγητής Σε κάποια επιλογή μήπως;

Μαθητής 4 Εδώ ξεκινάει από -7 έως 3 οπότε μάλλον θα κατέβει, αν το επιλέξω, η δυνατότητα επανεκλογής. Άρα, δεν είναι πάντα τύχη.

Καθηγητής Πότε μπορείς να προβλέψεις τι θα γίνει με τα χαρακτηριστικά; Αν επιλέξεις το σχολείο ποια χαρακτηριστικά προβλέπεις ότι θα αλλάξουν;

Μαθητής 4 Οι άστεγοι -2 και οι άλλοι θα ανέβουν 5.

Καθηγητής Η δυνατότητα επανεκλογής τι τιμή θα πάρει;

Μαθητής 4 Δεν μπορώ να ξέρω. Από -1 έως 3.

Καθηγητής Πόσο θα γίνει δηλαδή;

Μαθητής 4 Δεν μπορώ να ξέρω από πριν.

Μαθητής 6 Υπάρχει πείραμα τύχης στο αν θα αυξηθεί ή αν θα μειωθεί η δυνατότητα επανεκλογής.

Ερευνητής Γιατί;

Μαθητής 6 Γιατί είναι από -3 έως 3.

Μαθητής 5 Στο σχολείο όμως, είναι από -1 έως 3 και δύο φορές που το πατήσαμε ήρθε το -1 και μετά το 3. Κατέβηκε και μετά ανέβηκε πάλι.

Μαθητής 4 Ναι αλλά πατήσαμε και την επιλογή που ξεκινάει από -7 και πάλι ανέβηκε η δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 6 Είμαστε βέβαιοι για τους άστεγους και τους στεγασμένους. Μόνο η δυνατότητα επανεκλογής δεν ξέρουμε πόσο θα γίνει.

Ερευνητής Πόσο πιστεύεις ότι θα γίνει η δυνατότητα επανεκλογής;

Μαθητής 6 Σκέφτομαι ότι αν η διαφορά μεταξύ αστέγων και στεγασμένων είναι μικρή, δεν είναι κάτι κακό. Πρέπει να είναι περίπου ίσοι.

Μαθητής 4 Ναι, αλλά πρέπει να είναι και κοντά στην αρχική τιμή του παιχνιδιού.

Μαθητής 1 Σε κάθε επιλογή ξέρω πόσο θα αλλάζουν οι άστεγοι και οι στεγασμένοι αλλά δεν ξέρω τι γίνεται με τη δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 3 Επέλεξε μόνο το σχολείο.

Μαθητής 2 Θα χάσουμε.

Μαθητής 3 Αυτό θέλουμε, να χάσουμε για να δούμε τι αλλάζει.

Μαθητής 1 Αν χάσουμε ενώ πριν κερδίσαμε, τότε είναι πείραμα τύχης.

Καθηγητής Γιατί λέτε ότι είναι πείραμα τύχης; Αν επιλέξουμε το σχολείο τι θα γίνει;

Μαθητής 3 Οι άστεγοι -2 και οι άλλοι θα αυξηθούν κατά 5. Η δυνατότητα επανεκλογής δεν ξέρω. Ίσως να αυξηθεί κατά 1.

Μαθητής 2 Ίσως, να αυξηθεί κατά 3.

Μαθητής 1 Μάλλον, θα αυξηθεί κατά 2.

Ερευνητής Για επιλέξτε το σχολείο να δείτε τι θα γίνει.

Μαθητής 3 Όχι, παρέμεινε το ίδιο.

Ερευνητής Επιλέξτε το πάλι.

Μαθητής 3 Τώρα αυξήθηκε κατά 3. Δεν ξέρω γιατί.

Στο παραπάνω απόσπασμα φάνηκε ότι οι μαθητές όταν κάνουν μια εικασία για την τυχειότητα, την ελέγχουν πειραματικά, ωστόσο επικρατεί η θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας που έχουν διδαχθεί. Όταν τα αποτελέσματα της πειραματικής μεθόδου δεν συνάδουν με αυτά που προκύπτουν από υπολογισμούς των μαθητών, οι μαθητές δεν θεωρούν ότι έχουν κάνει λάθος υπολογισμούς αλλά θεωρούν ότι υπάρχει λάθος στα αποτελέσματα των πειραμάτων τους (Prodromou, 2012).

Οι μαθητές έχοντας πλέον καταλάβει ότι το μόνο χαρακτηριστικό του παιχνιδιού που δεν μπορούν να προβλέψουν είναι η δυνατότητα επανεκλογής. Οπότε η στρατηγική τους πλέον είναι να κρατήσουν άστεγους και στεγασμένους σε ισορροπία και να εστιάσουν στην δυνατότητα επανεκλογής. Οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι και καταγράφουν τις τιμές που αναγράφει το παιχνίδι για να καταλάβουν πότε χάνουν. Οι μαθητές κατάλαβαν σωστά ότι κερδίζουν το παιχνίδι όταν η δυνατότητα επανεκλογής φτάσει την τιμή 80. Και ότι δεν πρέπει να πέσει κάτω από περίπου 35. Με αυτόν τον τρόπο

προσδιόρισαν το εύρος τιμών της τυχαίας μεταβλητής που είναι η δυνατότητα επανεκλογής.

Απόσπασμα 8

Μαθητής 5 Προσπαθούμε να πετύχουμε ισορροπία μεταξύ αστεγών και στεγασμένων και να μεγιστοποιήσουμε τη δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 3 Χάσαμε με 110 18 59.

Μαθητής 2 Επιλέξαμε κάθε κτίριο;

Μαθητής 1 Ναι.

Ερευνητής Γιατί προσπαθήσατε να χάσετε;

Μαθητής 3 Για να δούμε με ποιες τιμές χάσαμε. Αυτό είναι το νόημα σε αυτό το παιχνίδι, να χάσεις για να καταλάβεις πως λειτουργεί.

Μαθητής 1 Το πείραμα τύχης είναι πόσο θα ανέβει ή θα κατέβει η δυνατότητα επανεκλογής.

Οι μαθητές καταγράφοντας τις τιμές του παιχνιδιού μετά από πολλές προσπάθειες αρχίζουν να βρίσκουν σε ποιο εύρος τιμών πρέπει να είναι οι αξίες του παιχνιδιού.

Ερευνητής Υπάρχει πείραμα τύχης μέσα στο παιχνίδι;

Μαθητές Ναι.

Ερευνητής Ποιό είναι αυτό κατά τη γνώμη σας;

Μαθητής 6 Αν θα ανεβεί ή θα κατεβεί η δυνατότητα επανεκλογής και πόσο;

Μαθητής 5 Αν θα ψηφίσουν τον δήμαρχο.

Ερευνητής Μου το εξηγείς αυτό μέσα στο παιχνίδι;

Μαθητής 5 Στο σχολείο είναι από -1 έως 3. Μπορεί κάποιος να τον ψηφίσουν και να μην πάρει -1 ή να μην τον ψηφίσει κανένας από αυτούς. Να μην μεταβληθεί δηλαδή.

Ερευνητής Δηλαδή λες ότι κάτι γίνεται στη δυνατότητα επανεκλογής γιατί αυτό μου δείχνεις.

Μαθητής 5 Ναι, το πείραμα τύχης μάλλον είναι στη δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 4 Εγώ, πιστεύω ότι η δυνατότητα επανεκλογής βασίζεται στη διαφορά μεταξύ ικανοποίησης αστέγων και ικανοποίησης στεγασμένων.

Ερευνητής Πού το είδες αυτό μέσα στο παιχνίδι;

Μαθητής 4 Πριν ήταν 17 άστεγοι και 86 οι στεγασμένοι οπότε είχαν μεγάλη διαφορά.

Ερευνητής Πώς επηρέαζε αυτό τη δυνατότητα επανεκλογής;

Μαθητής 4 Συνέχεια κατέβαινε η δυνατότητα επανεκλογής λόγω της μεγάλης διαφοράς τους. Στην αρχή ήταν ψηλά, αλλά μακροπρόθεσμα κατέβηκε γιατί η μια ομάδα δεν είχε υπόβαθρο. Είναι καλό να έρθουν πιο κοντά οι δύο ομάδες.

Ερευνητής Αφού βρήκατε το πείραμα τύχης ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης;

Μαθητής 3 Εμείς, βρήκαμε για τη δυνατότητα επανεκλογής το ελάχιστο 40 και μέγιστο το 80. Κάπου εκεί πρέπει να κυμαίνεται.

Μαθητής 6 Κοντά στο 37 χάσαμε, άρα πρέπει να είναι μεταξύ 35 με 80.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί φαίνεται η πορεία που ακολούθησαν οι μαθητές εξετάζοντας αρχικά το παιχνίδι τοπικά και μετά από πολλές δοκιμές, το εξέτασαν σφαιρικά (Pratt, 2000). Μέσα από τη συζήτηση με τον ερευνητή και τον διδάσκοντα, οι μαθητές βλέπουν το παιχνίδι ως σύνολο και καταλαβαίνουν πλέον ότι το πείραμα τύχης είναι, αν θα καταφέρει ο δήμαρχος να επανεκλεγεί. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο αιτιολογούν γιατί αυτό είναι το πείραμα τύχης χρησιμοποιώντας στοιχεία μέσα από το παιχνίδι και τις εμπειρίες τους από την αληθινή ζωή και προτείνουν αλλαγές στο παιχνίδι, ώστε να μειωθεί η αβεβαιότητα του παιχνιδιού.

Απόσπασμα 9

Ερευνητής Το παιχνίδι επηρεάζεται μόνο από τη δυνατότητα επανεκλογής;

Μαθητής 4 Όχι, καταλήξαμε ότι πρέπει να υπάρχει μια ισορροπία μεταξύ ικανοποίησης αστέγων και στεγασμένων.

Ερευνητής Πως επηρεάζει αυτό το παιχνίδι;

Μαθητής 4 Αν όλοι είναι ευχαριστημένοι θα ψηφίσουν τον δήμαρχο.

Μαθητής 1 Αν οι στεγασμένοι πέσουν πολύ μειώνονται οι πιθανότητες επανεκλογής. Μπορούμε να βρούμε στο περίπου μέχρι πόσο πρέπει να πέσουν.

Ερευνητής Θεωρείτε ως πείραμα τύχης αν θα καταφέρει ο δήμαρχος να επανεκλεγεί;

Μαθητής 4 Αν η στρατηγική του δημάρχου είναι τέλεια, χωρίς λάθη, δεν θα ήταν πείραμα τύχης.

Μαθητής 2 Αν η πιθανότητα επανεκλογής είναι στο 30 δεν θα επανεκλεγεί.

Καθηγητής Αν είχε και άλλες κινήσεις να παίξει θα τα κατάφερνε να επανεκλεγεί;

Μαθητής 2 Έπρεπε πρώτα να τις κάνει και να δει τι θα γίνει.

Μαθητής 5 Είναι πείραμα τύχης γιατί μπορεί η δυνατότητα επανεκλογής να είναι ψηλά, αλλά να μην τον ψηφίσουν.

Μαθητής 4 Μπορεί να είναι ικανοποιημένοι, αλλά να μην τον ψηφίσουν γιατί κάποιος άλλος υποψήφιος τους ικανοποίησε περισσότερο.

Καθηγητής Συνεπώς, λες ότι οι ικανοποιημένοι μπορεί να μην ψηφίσουν τον δήμαρχο τελικά. Οπότε πρέπει να βάλουμε έναν κανόνα στο παιχνίδι ότι οι ικανοποιημένοι σίγουρα πρέπει να τον ψηφίσουν.

Μαθητής 4 Όχι σίγουρα, συνήθως να τον ψηφίσουν. Γιατί όταν γίνονται εκλογές στην πραγματικότητα, οι δημοσκοπήσεις δεν είναι ίδιες με το αποτέλεσμα αλλά περίπου ίδιες.

Καθηγητής Λες λοιπόν ότι υπάρχει ένας αστάθμητος παράγοντας. Πώς φαίνεται αυτός μέσα στο παιχνίδι;

Μαθητής 4 Ίσως εκεί που λέει δυνατότητα επανεκλογής τυχαίο νούμερο από μείον 2 έως 3.

Μαθητής 3 Είναι πείραμα τύχης, γιατί δεν υπάρχει τέλεια στρατηγική.

Μαθητής 2 Αν έχει από την αρχή 100 δυνατότητα επανεκλογής θα επανεκλεγεί.

Ερευνητής Δεν ξέρουμε από την αρχή του παιχνιδιού, πόσο θα φτάσει στο τέλος η δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 1 Αν ο δήμαρχος δεν λειτουργήσει προς όφελος κανενός δεν θα τον ψηφίσουν.

Μαθητής 2 Είναι πείραμα τύχης, γιατί μπορεί να έχεις καλή στρατηγική αλλά υπάρχουν πράγματα που δεν μπορείς να κάνεις, οπότε στο τέλος οι δυσαρεστημένοι, αν είναι πολλοί, δεν θα σε ψηφίσουν στο τέλος.

Οι μαθητές έχοντας παίξει το παιχνίδι αρκετές φορές ακολούθησαν διάφορες στρατηγικές οι οποίες τους οδήγησαν στην ήττα, είτε σκόπιμα είτε τυχαία, αλλά τους οδήγησαν και στη νίκη. Οι μαθητές δοκιμάζοντας τις στρατηγικές που σχεδίασαν αξιολογούσαν το ρίσκο της κάθε απόφασης και προτιμούσαν να το μειώσουν επιλέγοντας κτίρια χαμηλού ρίσκου.

Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονταν την έννοια του ρίσκου με τρία στοιχεία τα οποία σε συνδυασμό μεταξύ τους καθορίζουν το συνολικό βαθμό του αντιλαμβανόμενου ρίσκου σε μια κατάσταση: την πιθανή απώλεια, τη σημαντικότητα της απώλειας και την αβεβαιότητα της εμφάνισης ή μη εμφάνισης αυτής της απώλειας. Αυτή η αντίληψη συνδέεται με το ευρύτερο πλαίσιο της διαδικασίας λήψης αποφάσεων, όπου εμπλέκονται γνωστικοί μηχανισμοί καθώς και διεργασίες πρόβλεψης αποφάσεων. Η λήψη αποφάσεων, σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από τον πιθανολογικό χαρακτήρα τους, την επιλογή μεταξύ εκδοχών, τη συνεκτίμηση δεδομένων υπέρ και κατά, είτε με βάση τον ορθολογικό τρόπο, είτε μέσα από προσωπικές εκτιμήσεις, ευρετικές μεθόδους και διαισθήσεις (Yates and Stone, 1992).

Οι μαθητές στην προσπάθεια τους να βρουν την πιο ευνοϊκή στρατηγική ώστε να αυξήσουν τις πιθανότητες επανεκλογής του δημάρχου, οδηγήθηκαν μέσω της συζήτησης με τον ερευνητή και τον διδάσκοντα στην θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας και στην πειραματική προσέγγιση, χωρίς τη χρήση τυπικού ορισμού. Μέσα από το παιχνίδι και τα επιχειρήματα των μαθητών φαίνεται ότι χρησιμοποιούν τις πιθανότητες για να προβλέψουν πριν τη δοκιμή του παιχνιδιού τι θα γίνει και τα δεδομένα που προκύπτουν μετά από κάθε επιλογή μέσα στο παιχνίδι για να βρουν το πιο ευνοϊκό σενάριο. Σε αυτό το απόσπασμα που ακολουθεί το ενδιαφέρον είναι η προσπάθεια σύνδεσης της πειραματικής προσέγγισης της πιθανότητας και της θεωρητικής προσέγγισης.

Απόσπασμα 10

Μαθητής 4 Πρέπει στην αρχή να αυξάνουμε την μια ομάδα και μετά να διατηρούμε την ισορροπία μεταξύ τους ώστε στο τέλος να έχουμε περιθώριο να κατεβάσουμε την μια ομάδα.

Μαθητής 6 Η διαφορά πρέπει να είναι πάντα, περίπου 20 μεταξύ των δύο ομάδων όπως στις αρχικές τιμές του παιχνιδιού.

Μαθητής 5 Πρέπει πρώτα να βάζουμε κτίρια που ευνοούν την μια ομάδα και μετά κτίρια που ευνοούν την άλλη. Το σχολείο και το νοσοκομείο είναι καλές επιλογές (εικόνα 12).

Μαθητής 1 Ένα ευνοϊκό σενάριο είναι να διατηρείς την ισορροπία μεταξύ των δύο ομάδων. Η πολυκατοικία χρησιμοποιείται μόνο εάν η διαφορά των δύο ομάδων είναι μεγάλη.

Μαθητής 3 Να επιλέγεις μόνο το σχολείο, αυξάνει την πιθανότητα επανεκλογής περισσότερο από ότι τα υπόλοιπα. Είναι η λιγότερη αρνητική μονάδα.

Ερευνητής Γιατί θεωρείτε να κτίζεις μόνο το νοσοκομείο και το σχολείο ως τα καλύτερα σενάρια;

Μαθητής 4 Γιατί εξυπηρετεί και τις δύο ομάδες.

Μαθητής 3 Γιατί η δυνατότητα επανεκλογής είναι από -1 έως 3 ενώ στα άλλα κτίρια ξεκινάει από πιο παρακάτω.

Ερευνητής Υπάρχει κάτι κοινό στα διάφορα κτίρια όσον αφορά τη δυνατότητα επανεκλογής;

Μαθητής 1 Ναι, δεν ανεβαίνει πάνω από 3.

Μαθητής 2 Το 3 είναι το καλύτερο νούμερο που μπορεί να τύχει.

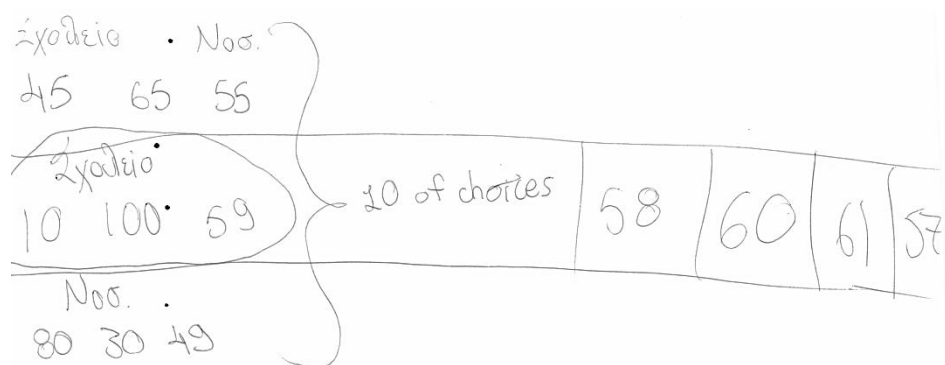
Μαθητής 4 Σε όλα τα κτίρια το καλύτερο είναι 3, άρα αυτό είναι το πιο καλό σενάριο.

Ερευνητής Πιο θεωρείτε λοιπόν το πιο ευνοϊκό σενάριο αν μπορούσε να πραγματοποιηθεί;

Μαθητής 4 Το σχολείο που είναι από -1 έως 3, ως αυτό που έχει το λιγότερο αρνητικό.

Καθηγητής Λες δηλαδή, ότι το σχολείο είναι η πιο ασφαλής επιλογή. Παρολαυτά αν καταφέρνατε και στις 10 επιλογές να φέρετε μόνο 3, θα ήταν αυτό το πιο ευνοϊκό σενάριο;

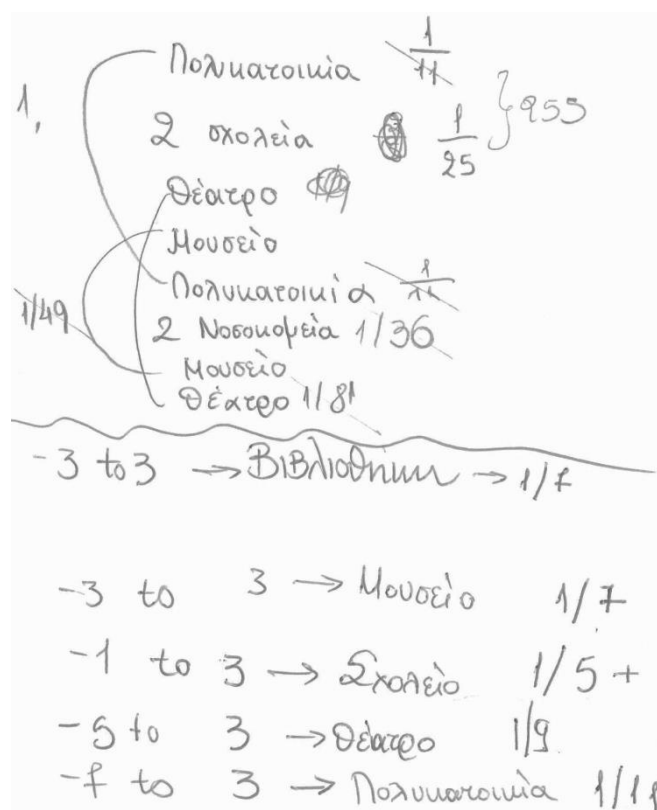
Μαθητής 3 Ναι, γιατί δεν μπορεί να τύχει κάτι μεγαλύτερο από 3, άρα είναι το καλύτερο.



Εικόνα 12 Αιτιολόγηση εύρεσης της πιο ευνοϊκής στρατηγικής

Νοηματοδότηση της πολλαπλασιαστικής αρχής

Στο απόσπασμα που ακολουθεί φαίνεται η πορεία νοηματοδότησης της πολλαπλασιαστικής αρχής από τους μαθητές. Οι μαθητές προσπαθώντας να απαντήσουν στην ερώτηση «Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και στις δέκα επιλογές μέσα στο παιχνίδι;» υπολόγισαν την πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 σε κάθε επιλογή ξεχωριστά μέσα στο παιχνίδι επιτυχώς. Μετά ο ερευνητής έδωσε και στις δύο ομάδες μια σειρά 10 επιλογών για να μπορέσουν να υπολογίσουν τις πιθανότητες (εικόνες 13, 14).



Εικόνα 13 Υπολογισμός πιθανοτήτων από μαθητή

6. Στην επιλογή 'πολυκατοικία', ποιά είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 στο χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής»; $1/11$

7. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 σε κάθε μια επιλογή στο χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής»;

Πολ. = $1/10$ Θεατρ. = $1/9$ Νοσ. = $1/6$
 2χ. = $1/7$ Μουσ. = $1/7$ Βιβλ. = $1/7$

8. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και στις δέκα επιλογές μέσα στο παιχνίδι; Θεωρείτε ότι έχει κάποια σχέση με την πιθανότητα επιτυχίας του πειράματος τύχης; $1/166698$

$$\frac{1}{11 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7}$$

Εικόνα 14 Απαντήσεις μαθητή στις ερωτήσεις 6, 7 και 8

Οι μαθητές εξέφρασαν παρανοήσεις για τις πιθανότητες, καθώς δεν έχουν συνδέσει τη πειραματική προσέγγιση με την θεωρητική προσέγγιση ακόμα και σε παραδείγματα με ζάρια που είναι πιο εξοικειωμένοι οι μαθητές. Παρατηρήθηκε ότι βασίζονται στις εμπειρίες τους για να υπολογίσουν τις πιθανότητες, χρησιμοποιούν απλοποιημένες τεχνικές εκτίμησης των πιθανοτήτων (heuristics). Επιπλέον, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην καταγραφή του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης, δεν χρησιμοποιούν την αναλογία και δεν έχουν συνειδητοποιήσει το ρόλο των επαναλήψεων σε ένα πείραμα. Ενδιαφέρον έχει το παράδειγμα που ο χρησιμοποιείται για να οδηγήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την πολλαπλασιαστική αρχή.

Απόσπασμα 11

Ερευνητής Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και στις δέκα επιλογές μέσα στο παιχνίδι; Τι θα κάνετε για να το βρείτε;

Μαθητής 4 Θα προσθέσουμε τις πιθανότητες εμφάνισης του 3 για κάθε επιλογή.

Μαθητής 6 Εφόσον βάλαμε δύο σχολεία θα είναι δύο οι πιθανότητες να εμφανισθεί ο 3, δηλαδή $2/5$.

Ερευνητής Πιστεύετε ότι αν άλλαζε η σειρά επιλογής των κτιρίων θα άλλαζε η πιθανότητα εμφάνισης του 3 και στις δέκα επιλογές,

Μαθητής 5 Όχι.

Μαθητής 4 Ναι, γιατί αν αλλάξουμε τη σειρά αλλάζουν οι τιμές των άστεγων και στεγασμένων.

Ερευνητής Εμείς θέλουμε μόνο να εμφανισθεί ο αριθμός 3.

Μαθητής 2 Τότε δεν μας επηρεάζει η σειρά επιλογής των κτιρίων.

Ερευνητής Ρίχνω ένα ζάρι δύο φορές ποια είναι η πιθανότητα να φέρω 6 και τις δύο φορές;

Μαθητής 4 $1/12$.

Μαθητής 6 $1/6$.

Μαθητής 5 Θεωρώ ότι είναι πιο δύσκολο, να τύχει 6 τη δεύτερη φορά.

Ερευνητής Γιατί;

Μαθητής 5 Είναι πιο δύσκολο να το κάνω συνεχόμενα. Δεν είναι κανόνας ότι θα φέρω 6.

Μαθητής 1 Πρέπει το ζάρι να το ρίξω με τον ίδιο τρόπο ή με την ίδια δύναμη.

Καθηγητής Έχω μια στήλη με 10 ίσα κουτάκια και παίρνω το 1 που έχω στο μυαλό μου. Τι πιθανότητα έχετε να το βρείτε;

Μαθητής 4 $1/10$.

Καθηγητής Τώρα, έχω ένα τετραγωνικό μέτρο .Πόσα κουτάκια έχει μέσα;

Μαθητής 6 100 κουτάκια 10 επί 10.

Καθηγητής Τι πιθανότητα έχεις να βρεις το ίδιο κουτάκι;

Μαθητής 5 Κάνουμε πολλαπλασιασμό για να το βρούμε γιατί δεν είναι ευθεία, είναι τετράγωνο.

Μαθητής 4 Συνεπώς, στα δύο σχολεία είναι $1/25$.

Μαθητής 6 Θα βγει στο τέλος ένα πολύ μικρό νούμερο.

Μαθητής 5 Δεν κατάλαβα τι κάνουμε.

Καθηγητής Στα δύο σχολεία, έχουμε 25 κουτάκια και στην πολυκατοικία 11.
Τι πιθανότητες έχεις να βρεις το ίδιο κουτάκι;

Μαθητής 5 $1/25$ επί $1/11$.

Τα συμπεράσματα από τη πρώτη φάση της παρέμβασης έδειξαν ότι ο σχεδιασμός του παιχνιδιού φάνηκε να δημιουργεί έντονα κίνητρα στους μαθητές να ασχοληθούν με το μαθησιακό αντικείμενο που αυτό πραγματεύεται και να εφαρμόσουν τις ιδέες και τις γνώσεις τους στην πράξη δημιουργώντας ένα κατασκεύασμα με προσωπικό νόημα για τους ίδιους (Kafai 2001, Baytak et. al. 2011, Harrel & Papert 1990).

Στην πραγματικότητα μέσα στο παιχνίδι ο πραγματικός κόσμος απλοποιήθηκε προκειμένου η προσοχή των μαθητών να εστιαστεί κυρίως στις πιθανότητες αλλά και στις σχετικές με το θέμα του παιχνιδιού πλευρές, για να κατανοήσει συγκεκριμένες πολιτισμικές, κοινωνικές ή πολιτικές πρακτικές.

Οι μαθητές μπόρεσαν να αντιληφθούν, να αξιολογήσουν και να σκεφτούν κάποιες από αυτές τις αντιλήψεις που φαίνεται να αναδύονται μέσα από το παιχνίδι συζητώντας με τον ερευνητή και αναλύοντας τις επιπτώσεις αυτών των διακυβευμάτων για τους ίδιους ή/και για τον κόσμο.

5.4.3 Δημιουργία νοημάτων μέσα από την τροποποίηση του παιχνιδιού

Η δεύτερη φάση της δραστηριότητας σχετίζεται με την τροποποίηση του παιχνιδιού που δόθηκε στους μαθητές στην προηγούμενη φάση της δραστηριότητας. Ο στόχος της δραστηριότητας ήταν να τροποποιήσουν οι μαθητές το παιχνίδι κατάλληλα, ώστε να εξασφαλίσουν μια σίγουρη επανεκλογή, μέσα σε 6 κινήσεις, επηρεάζοντας μόνο την "δυνατότητα επανεκλογής", η οποία μπορεί πάντα να παίρνει τιμές από -10 έως 10. Στο απόσπασμα που ακολουθεί φαίνεται ο τρόπος σκέψης μιας εκ των δύο ομάδων των μαθητών, πάνω στην αβεβαιότητα και στην τυχαιότητα του παιχνιδιού.

Απόσπασμα 12

Μαθητής 4 Κερδίσαμε σε 3 κινήσεις.

Ερευνητής Τι τιμές χρησιμοποιήσατε;

Μαθητής 5 Βάλαμε σε κάθε κτίριο η δυνατότητα επανεκλογής να είναι από 10 έως 10.

Καθηγητής Πάντα έρχεται σίγουρα 10 δηλαδή.

Μαθητής 6 Ναι.

Ερευνητής Πόσο τυχαίο είναι από 10 έως 10;

Καθηγητής Είναι καθόλου τυχαίο κατά τη γνώμη σας;

Μαθητής 3 Όχι, γιατί έτσι όταν παίζεις το παιχνίδι είναι σαν τα άλλα δύο, που ξέρεις από πριν πόσο θα μεταβληθούν.

Ερευνητής Αυτό που κάνατε είναι μια λύση αλλά με αυτόν τον τρόπο φαίνεται ότι όποια επιλογή και αν κάνει ο δήμαρχος, όλοι οι συμπολίτες του είναι ευχαριστημένοι και κανείς δεν φέρνει οποιαδήποτε αντίρρηση. Στην πραγματικότητα αυτό δεν γίνεται.

Καθηγητής Δοκιμάστε να βάλετε τιμές ώστε να γίνει τυχαίο, αλλιώς δεν φαίνεται να είναι παιχνίδι. Αυτός που θα παίζει το παιχνίδι καταλαβαίνει ότι είναι στημένο.

Οι μαθητές στην προσπάθεια τους να εξασφαλίσουν μια βέβαιη νίκη τροποποίησαν το παιχνίδι με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε και οι τρεις αξίες του παιχνιδιού να είναι ντετερμινιστικές. Οι μαθητές εξάλειψαν με αυτό τον τρόπο την έννοια της αβεβαιότητας και του ρίσκου που εμπεριέχει κάθε επιλογή του παίχτη.

Η αβεβαιότητα όμως είναι κομμάτι της πραγματικής ζωής, οπότε οι μαθητές με προτροπή του ερευνητή ξανατροποποίησαν το παιχνίδι αυτή τη φορά κρατώντας το χαρακτηριστικό δυνατότητα επανεκλογής της κάθε επιλογής τυχαίο. Αυτή η προσπάθεια των μαθητών για εξάλειψη του ρίσκου δείχνει την πορεία νοηματοδότησης της έννοιας του ρίσκου από τους μαθητές.

Στο παρακάτω απόσπασμα οι μαθητές τροποποιώντας το παιχνίδι νοηματοδοτούν τις πιθανότητες και ψάχνουν να βρουν με μέγιστη τιμή το 10 στην δυνατότητα επανεκλογής κάθε κτιρίου ποια θα μπορούσε να είναι η ελάχιστη τιμή που εξασφαλίζει τη βέβαιη νίκη σε 6 κινήσεις. Φαίνεται λοιπόν ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν το διερευνητικό λογισμικό ως εργαλείο κατασκευής μοντέλων που περιγράφουν την εξέλιξη του παιχνιδιού και των πιθανολογικών σχέσεων του παιχνιδιού και των αναπαραστάσεων τους, αλλά και ως μέσο πειραματισμού και διερεύνησης.

Απόσπασμα 13

Ερευνητής Όποιος βρει τη λύση, να βρει και ποια είναι η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη που μπορεί να βάλει κάποιος στη δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 2 Τα βάλαμε όλα από 9 έως 10.

Ερευνητής Ωραία, βρείτε με μέγιστη τιμή το 10, ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορείτε να βάλετε ώστε να εξασφαλίζεται νίκη σε 6 φορές μέσα στο παιχνίδι.

Μαθητής 1 Δεν μπορούμε να ξέρουμε ακριβώς πόσο να βάλουμε είναι τυχαίο.

Μαθητής 3 Κάνουμε δοκιμές.

Μαθητής 2 Υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί.

Μαθητής 6 Εμείς βάλαμε από 3 έως 10, αλλά δεν ξέρουμε αν αυτό είναι το ελάχιστο.

Μαθητής 1 Δεν μπορούμε να βρούμε ακριβώς πόσο θα είναι, γιατί υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί αριθμών από -10 έως 10.

Μαθητής 3 Μπορεί μια φορά να πετύχεις την ελάχιστη τιμή για να νικήσεις αλλά να έρθουν έτσι τα αποτελέσματα ώστε να χάσουμε.

Ερευνητής Τι εννοείς να έρθουν έτσι τα αποτελέσματα ώστε να χάσουμε;

Μαθητής 3 Μπορεί να μην νικήσεις αν δεν έρθει το ελάχιστο.

Καθηγητής Όμως το ελάχιστο εξασφαλίζει τη νίκη.

Ερευνητής Λες λοιπόν ότι υπάρχουν κάποιοι συνδυασμοί που εξασφαλίζουν τη νίκη. Μπορείς να μου βρεις τον μικρότερο ευνοϊκό συνδυασμό;

Οι μαθητές ψάχνοντας να βρουν την ελάχιστη τιμή της δυνατότητας επανεκλογής που θα εξασφαλίζει τη νίκη νοηματοδότησαν την πειραματική προσέγγιση της πιθανότητας, καθώς μετά από δοκιμές του παιχνιδιού, προσπάθησαν να εκτιμήσουν αν θα τύχει η ελάχιστη τιμή του παιχνιδιού και κατάλαβαν ότι οι πιθανότητες να τύχει και στις 6 επιλογές η ελάχιστη τιμή είναι πολύ μικρή.

Ένας μαθητής προχώρησε περισσότερο λέγοντας ότι υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί αριθμών που τυχαίνουν στο παιχνίδι από -10 έως 10. Στο απόσπασμα που ακολουθεί έχει ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές

προσπαθούν να ελέγξουν αν η ελάχιστη τιμή της δυνατότητας επανεκλογής που έχουν βάλει εξασφαλίζει τη νίκη, παίζοντας το παιχνίδι και προσπαθούν να προβλέψουν την πιθανότητα αποτυχίας.

Παρατηρήθηκε ότι η ενεργή συμμετοχή των μαθητών μέσα στο παιχνίδι καθώς και η συζήτηση τόσο μεταξύ τους όσο με τον ερευνητή και τον εκπαιδευτικό οδήγησε τους μαθητές σε μια σύνδεση της θεωρητικής προσέγγισης και της πειραματικής προσέγγισης της πιθανότητας.

Απόσπασμα 14

Μαθητής 2 Εμείς βάλαμε ως ελάχιστο το 6.

Μαθητής 5 Εμείς βάλαμε ως ελάχιστο το 4.

Μαθητής 4 Είχαμε βάλει το 3 ως ελάχιστο, αλλά παίξαμε τρεις φορές και τη μια χάσαμε.

Ερευνητής Αν ξαναπαίξετε τι θα γίνει;

Καθηγητής Θέλει αλλαγή και δοκιμή συνέχεια παιδιά.

Οι μαθητές γράφουν τις τιμές και μετά δοκιμάζουν το παιχνίδι.

Μαθητής 4 Εμείς θεωρούμε ότι το λιγότερο που μπορούμε να νικήσουμε είναι το -10.

Μαθητής 6 Επειδή είναι τυχαίο, εάν έρθουν θετικά νούμερα νικάς.

Μαθητής 5 Ο προγραμματισμός του μοιάζει με αυτόν του Scratch.

Καθηγητής Τα παιδιά ξέρουν Scratch.

Μαθητής 1 Εμείς βάλαμε τρια τεσσάρια και τρια τριάρια ως τις ελάχιστες τιμές.

Μαθητής 2 Το δοκιμάσαμε δύο φορές και νικήσαμε.

Μαθητής 3 Είχαμε δοκιμάσει να βάλουμε δύο τεσσάρια και τέσσερα τριάρια ως τις ελάχιστες τιμές, αλλά χάσαμε.

Μαθητής 5 Εμείς βάλαμε από 4 έως 10, νικήσαμε μια φορά αλλά μετά χάσαμε επειδή η ικανοποίηση αστέγων έπεσε πολύ.

Καθηγητής Πώς έγινε αυτό;

Μαθητής 6 Βάλαμε πρώτα τις επιλογές που δυσαρεστούν τους άστεγους, οπότε έπεσε πολύ η τιμή.

Μαθητής 4 Μάλλον, πρέπει να τα βάζεις με μια σειρά.

Ερευνητής Λες λοιπόν, ότι η σειρά των επιλογών παίζει ρόλο.

Μαθητής 4 Ναι.

Ερευνητής Μπορείτε να αθροίσετε τις τιμές που θέσατε ως ελάχιστες; Το παιχνίδι το νικάς σίγουρα όταν η δυνατότητα επανεκλογής φτάσει στο 80 και ξεκινάει από 50.

Μαθητής 2 Οπότε πρέπει οι ελάχιστες τιμές να αθροίζονται στο 80 ώστε να είναι σίγουρη η νίκη.

Μαθητής 4 Εμείς βάλαμε 3 έως 10 σε όλα και νικήσαμε. Τη μια φορά χάσαμε λόγω των άστεγων αλλά μετά αλλάξαμε τη σειρά των επιλογών και νικήσαμε

Ερευνητής Αν ερχόταν όμως κάθε φορά η ελάχιστη τιμή θα νικάγατε; Το σκεφτήκατε καθόλου αυτό από πριν;

Μαθητής 1 Το ελάχιστο είναι το 5, γιατί σε 6 κινήσεις $50+30=80$.

Καθηγητής Πρέπει το άθροισμα να βγει 30 ή κάθε φορά να τύχει το 5;

Μαθητής 3 Το άθροισμα να είναι 30.

Μαθητής 2 Μπορούμε να βάλουμε 4 και 6 ως ελάχιστα.

Οι μαθητές δεν μπορούσαν να σιγουρευτούν ότι η ελάχιστη τιμή που έβαλαν στη δυνατότητα επανεκλογής είναι όντως η ελάχιστη γιατί παίζοντας το παιχνίδι κέρδιζαν και έχαναν (εικόνα 15). Ο ερευνητής τους παρότρυνε να σκεφτούν με ποια τιμή της δυνατότητας επανεκλογής κερδίζουν το παιχνίδι και να υποθέσουν ότι και στις έξι επιλογές τυχαίνει η ελάχιστη τιμή.

Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να σκεφτούν εξ αρχής τι θα γίνει με τις τιμές που έθεσαν (apriori) και μετά να το επιβεβαιώσουν με τα δεδομένα του παιχνιδιού (aposteriori). Παρόλαυτα τέθηκαν ερωτήματα όπως μας ενδιαφέρει η σειρά των επιλογών» και «με πόσες δοκιμές είστε σίγουροι ότι λειτουργεί».

6-10	5 κινήσεις, 4 κινήσεις	$\left(\frac{1}{8}\right)^6 = \frac{1^6}{8^6} = \frac{1}{8^6} = \frac{1}{262.144}$
5-10	4 κινήσεις	
4-10	4 κινήσεις	
3-10	4 κινήσεις } χάσαμε	
2-4-10	4 κινήσεις } χάσαμε	
4-3-10		
3-4-10	4 κινήσεις, 6 κινήσεις	
3-3-10		
5-10		
-1		
2-8		
3-5		

Εικόνα 15 Προσπάθεια εύρεσης ελάχιστης τιμής και αιτιολόγηση

Απόσπασμα 15

Ερευνητής Βρήκατε όλοι κάποια ελάχιστη τιμή που να σας ικανοποιεί. Πόσες φορές παίξατε το παιχνίδι για να βεβαιωθείτε ότι είναι αυτό; Εάν βάλουμε ως ελάχιστο το 3 και μέγιστο το 10, πόσες φορές πρέπει να παίξετε το παιχνίδι για να βεβαιωθείτε ότι αυτό είναι το ελάχιστο;

Μαθητής 2 Περίπου δέκα φορές.

Μαθητής 1 Παραπάνω. Την προηγούμενη φορά είχαμε βρει μια πιθανότητα να έρθει το καλύτερο, άρα πρέπει να δοκιμάσουμε το παιχνίδι τουλάχιστον τόσες φορές και παραπάνω.

Ερευνητής Εννοείς, να δοκιμάσουμε το παιχνίδι τόσες φορές όσο είναι η τιμή της πιθανότητας που βρήκαμε να έρθει μόνο 3 και τις 6 φορές.

Μαθητής 1 Ναι, αλλά ποτέ δεν θα είμαστε σίγουροι.

Ερευνητής Η πιθανότητα όμως που βρήκαμε είναι ένα νούμερο μεταξύ του 0 και του 1, δεν είναι ακέραιος. Δεν μπορείς να παίζεις το παιχνίδι.

Μαθητής 1 Εννοώ τον αριθμό του παρονομαστή.

Καθηγητής Λες ότι αν παίζουμε το παιχνίδι όσες φορές λέει ο παρονομαστής και νικήσουμε είμαστε σίγουροι.

Μαθητής 1 Πάλι δεν είμαστε εντελώς σίγουροι.

Καθηγητής Γιατί;

Μαθητής 1 Γιατί μπορεί να μην τύχει καθόλου να έρθουν μόνο οι ελάχιστες τιμές.

Μαθητής 4 Ποιος καθορίζει κάθε φορά ποιος αριθμός θα τύχει;

Ερευνητής Αν ήταν πείραμα τύχης στη φύση θα ήταν τυχαίο. Στο λογισμικό έχουν σχεδιαστεί αλγόριθμοι που παράγουν αριθμούς, οι οποίοι είναι περίπου ισοπίθανοι.

Μαθητής 4 Ποιος αποφασίζει τελικά;

Καθηγητής Η μηχανή αποφασίζει. Εσένα, αυτό σε πείθει ότι είναι ισοπίθανοι οι αριθμοί;

Μαθητής 4 Όχι, δεν είναι εντελώς τυχαίο.

Ερευνητής Οι αμφιβολίες σου είναι βάσιμες αλλά ας δεχτούμε την υπόθεση ότι είναι ισοπίθανοι οι αριθμοί. Με βάση αυτήν την υπόθεση πόσες φορές πρέπει να παίζεις το παιχνίδι για να βεβαιωθείς ότι το ελάχιστο είναι ο αριθμός 3.

Μαθητής 4 Έξι φορές.

Μαθητής 5 Για να είμαστε σίγουροι 10 φορές.

Μαθητής 6 Εφόσον είναι ισοπίθανοι αριθμοί, πρέπει να παίζουμε το παιχνίδι τόσες φορές όσες και οι αριθμοί που μπορεί να τύχουν. Δηλαδή $6 \cdot 8 = 48$ φορές.

Μαθητής 3 Εγώ λέω 10 φορές, γιατί είναι οκτώ οι αριθμοί και άλλες δύο φορές για σιγουριά.

Μαθητής 4 Τα παιχνίδια όταν δημιουργούνται δίνονται να τα δοκιμάσουν από διαφορετικούς ανθρώπους, γιατί ο καθένας έχει διαφορετική σκέψη. Οπότε δεν μπορούμε να βάλουμε συγκεκριμένο αριθμό, αλλά να το δώσουμε να το δοκιμάσουν όσες φορές θέλουν και να δούμε αν κάποιος θα χάσει. Αυτό δεν γίνεται με 6 άτομα που είμαστε εδώ.

Το παραπάνω απόσπασμα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον καθώς οι μαθητές αιτιολογούν με πόσες δοκιμές του παιχνιδιού θα βεβαιώνονταν ότι η τιμή 3 είναι η ελάχιστη που μπορούν να βάλουν στην δυνατότητα επανεκλογής. Οι μαθητές εξέφρασαν αντιλήψεις για τις πιθανότητες και την αβεβαιότητα που σχετίζονται με τα μαθηματικά και την πληροφορική.

Ένας μαθητής απάντησε ότι εφόσον υπολόγισε την πιθανότητα να τύχει ο αριθμός 3, στη δυνατότητα επανεκλογής με τιμές από 3 έως 10 και στις 6 επιλογές του παίχτη πρέπει να παίξουμε το παιχνίδι τόσες φορές όσες είναι ο αριθμός του παρονομαστή. Επιπλέον πρόσθεσε ότι εφόσον δεν είμαστε βέβαιοι αν σε κάποια φορά θα τύχει πράγματι ο αριθμός 3 και τις 6 φορές πάντα θα υπάρχει περιθώριο αμφιβολίας.

Οι μαθητές προσέγγισαν πειραματικά την πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και στις 6 επιλογές, ως συχνότητα εμφάνισης δηλαδή, και κατάφεραν να τη συνδέσουν με τη θεωρητική προσέγγιση λέγοντας ότι είναι πολύ μικρή η πιθανότητα να συμβεί.

Ένας άλλος μαθητής ρώτησε ποιός αποφασίζει ποια τιμή θα τύχει σε κάθε επιλογή του παίχτη και αμφισβήτησε ότι οι αριθμοί είναι ισοπίθανοι, δείχνοντας έτσι και την επιρροή της υποκειμενικής προσέγγισης της πιθανότητας κάθε ατόμου στη λήψη αποφάσεων και στη διαχείριση της αβεβαιότητας.

Στο παρακάτω απόσπασμα οι μαθητές απαντούν στην ερώτηση «Πόσες είναι οι συνολικές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε από 3 έως 10». Πρόκειται στην ουσία για την περιγραφή του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης και στην θεωρητική προσέγγιση των πιθανοτήτων.

Οι μαθητές υπολογίζοντας όλους τους πιθανούς συνδυασμούς νοηματοδοτούν την έννοια του δειγματικού χώρου και την πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου. Ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθητές κατάφεραν να συνδέσουν την πειραματική με την θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας καταλαβαίνοντας ότι αυτό που βρήκαν με υπολογισμούς είναι ίδιο με αυτό που έλεγαν ότι πρέπει να παίξουν το παιχνίδι τόσες φορές όσες ο παρονομαστής της πιθανότητας να τύχει μόνο 3 και τις 6 φορές αλλά και πάλι δεν είναι βέβαιοι ότι θα γίνει γιατί είναι πολύ μικρός αυτός ο αριθμός.

Απόσπασμα 16

Καθηγητής Πόσες είναι οι συνολικές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε από 3 έως 10. Μια περίπτωση είναι να τύχουν μόνο τριάρια, μια άλλη περίπτωση είναι να τύχει 3 την πρώτη φορά και μετά μόνο τεσσάρια.

Καθηγητής Αν δεν μας νοιάζει η σειρά των αριθμών αλλάζει κάτι;

Μαθητής 3 Νομίζω πως ναι.

Μαθητής 4 Νομίζω ότι είναι 80.

Μαθητής 3 Δεν κατάλαβα.

Ερευνητής Παίζουμε το παιχνίδι και κάνουμε 6 επιλογές και η δυνατότητα επανεκκλογής είναι από 3 έως 10. Πόσες πιθανές εξάδες μπορούμε να λάβουμε.

Καθηγητής Αν παίζω το παιχνίδι 10 φορές και κερδίσω και τις 10 φορές, είμαστε σίγουροι ότι τις επόμενες 10 φορές θα νικήσω;

Μαθητής 3 Όχι.

Μαθητής 4 Σκεφτόμουν μήπως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πρόβλημα με τις χειραψίες για να το βρούμε.

Ερευνητής Οπότε τι σκέφτεσαι να κάνεις;

Μαθητής 6 Να σκεφτούμε όπως το πρόβλημα με τις χειραψίες για να βρούμε τις πιθανές περιπτώσεις.

Καθηγητής Να βρείτε πόσες είναι, όχι ποιες είναι.

Μαθητής Υπάρχει τύπος για αυτό;

Ερευνητής Ναι.

Μαθητής Έχει σχέση με την πιθανότητα εμφάνισης του 3 που είχαμε βρει;

Ερευνητής Τι πιστεύεις εσύ;

Μαθητής 3 Μάλλον θα έχει.

Ερευνητής Είχατε βρει την πιθανότητα εμφάνισης του 3 μια φορά και την πιθανότητα εμφάνισης του 3 σε κάθε επιλογή.

Μαθητής 1 Η πιθανότητα είναι $1/8$ να έρθει το 3, αφού είναι ισοπίθανα.

Μαθητής 2 Οπότε για όλες τις φορές $1/8$ και όλο εις την 6.

Μαθητής 2 Αυτό πώς θα μας βοηθήσει; Εμείς θέλουμε τις περιπτώσεις για όλους τους αριθμούς από 3 έως 10 και εμείς βρήκαμε μόνο για το 3.

Καθηγητής Σκέψου ότι βρήκες μια πιθανή εκδοχή. Μια άλλη είναι να βρεις μόνο 8.

Μαθητής 3 Οπότε, θα πολλαπλασιάσουμε αυτό που βρήκαμε επί 8.

Ερευνητής Θα βρεις τον παρονομαστή που λέγατε προηγουμένως.

Μαθητής 4 Ναι, αλλά αν το κάνουμε αυτό, βρίσκουμε τις περιπτώσεις που έρχεται μόνο 3, 4,5, 6,7,8,9,10.

Μαθητής 5 Μπορεί να πετύχει την πρώτη φορά 3 και μετά κάτι άλλο.

Καθηγητής Έστω ότι έρχεται την πρώτη φορά 3, μετά 4, μετά 5, μετά 6, μετά 7 και τέλος 8. Αλλάζει κάτι εκεί;

Μαθητής 6 Είναι το ίδιο, γιατί είναι 6 επιλογές, τυχαίος αριθμός, οπότε δεν αλλάζει.

Ερευνητής Στην πρώτη θέση της εξάδας, πόσες επιλογές έχουμε;

Μαθητής 4 8 επιλογές.

Ερευνητής Στις άλλες θέσεις, πόσες επιλογές έχουμε.

Μαθητής 5 Πάλι 8 επιλογές, σε κάθε θέση.

Μαθητής 6 Όλες οι περιπτώσεις είναι ο αριθμός του παρονομαστή της πιθανότητας του να έρθει μόνο 3 σε κάθε επιλογή, δηλαδή είναι 262.144

Ερευνητής Είσαι σίγουρος ότι ισχύει αυτό για όλες τις περιπτώσεις;

Μαθητής 3 Όχι, πρέπει να είναι για κάθε σειρά αριθμών.

Στην δεύτερη φάση της δραστηριότητας οι μαθητές τροποποιώντας το παιχνίδι έδειξαν την σκέψη τους ή την αντίληψη τους για τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το παιχνίδι αλλά και για τα βασικά αξιώματα που εμπεριέχει (Yiannoutsou & Kynigos, 2016).

Οι μαθητές προσπάθησαν να ενσωματώσουν την τυχειότητα και τις πιθανότητες για να πετύχουν τον σκοπό της δραστηριότητας, κάτι που τους επέτρεψε να θέσουν στην πράξη με τη βοήθεια του λογισμικού ChoiCo, όχι μόνο τις γνώσεις και τις δεξιότητες προγραμματισμού τους (Grizioti, Kynigos,

2018) αλλά και την εμβάθυνση σε άλλα αντικείμενα όπως την αειφορία (Yiannoutsou et al., 2014).

Η έρευνα έδειξε, όπως αναφέρει ο Resnick ότι πολλές από τις καλύτερες μαθησιακές εμπειρίες των παιδιών αποκτήθηκαν όταν οι μαθητές εμπλέχτηκαν ενεργά στη σχεδίαση, δημιουργία και επινόηση με το λογισμικό (Papert, 1980; Resnick, 2002).

Μέσα από τη σχεδίαση και τη δημιουργία, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να δοκιμάσουν τις ιδέες τους. Αν τα δημιουργήματά τους δεν ανταποκρίνονταν στις αρχικές τους προσδοκίες, μπορούσαν να επανεξετάσουν τις ιδέες τους και δημιουργούσαν κάτι καινούργιο, ακολουθώντας έτσι έναν επαναλαμβανόμενο κύκλο νέων ιδεών και νέων δημιουργημάτων.

Αυτός ο κύκλος σχεδίασης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος παιχνιδιού. Οι μαθητές με κάθε νέο δημιουργήμα τους έπαιζαν με τις ιδέες τους, δηλαδή, όπως και στο παιχνίδι, δοκίμασαν τα όρια τους και του λογισμικού, πειραματίστηκαν με νέες ιδέες και εξερεύνησαν τις έννοιες των πιθανοτήτων.

Τέλος, μέσα από τη σχεδίαση και τη δημιουργία, οι μαθητές έμαθαν νέες έννοιες, όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και στη πληροφορική. Η σύνδεση της θεωρίας πιθανοτήτων με την πραγματικότητα, η εμπλοκή διαφόρων φορέων, η συνεχής ανατροφοδότηση από το λογισμικό και ο αναστοχασμός των μαθητών, έφεραν ως αποτέλεσμα την κατανόηση των εννοιών που βρίσκονταν υπό συζήτηση και διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη από τους μαθητές.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι οι μαθητές κατάφεραν να συνδέσουν την πειραματική με την θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας καταλαβαίνοντας ότι αυτό που βρήκαν με υπολογισμούς είναι ίδιο με αυτό που έλεγαν ότι πρέπει να παίξουν το παιχνίδι τόσες φορές όσες ο παρονομαστής της πιθανότητας να τύχει μόνο 3 και τις 6 φορές αλλά και πάλι δεν είναι βέβαιοι ότι θα γίνει γιατί είναι πολύ μικρός αυτός ο αριθμός.

5.5 Αποτελέσματα από το Post-test

Μετά το τέλος της εξάωρης διδακτικής παρέμβασης χρονιάς, οι εκπαιδευόμενοι κλήθηκαν να απαντήσουν στο τελικό ερωτηματολόγιο που είχε σχεδόν ίδιες ερωτήσεις με το αρχικό ερωτηματολόγιο (Pre-test) που είχε δημιουργηθεί για να καταγράψει τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν καλούνται να υπολογίσουν την πιθανότητα εμφάνισης ενός

αποτελέσματος σε πιθανολογικές καταστάσεις με χρήση οικείων αντικειμένων όπως ζάρια, κέρματα, τραπουλόχαρτα.

Στην ερώτηση 1, όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά. Σε σχέση με την ίδια ερώτηση του Pre-test φαίνεται ότι οι μαθητές κατάλαβαν την ανεξαρτησία κάθε ρίψης νομίσματος, όπως κάθε επιλογής μέσα στο παιχνίδι του ChoiCo.

Στην ερώτηση 2, δύο μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν κυρίως λανθασμένα. Στην ερώτηση 3 όπως και στο αρχικό ερωτηματολόγιο σχεδόν όλοι οι μαθητές, απάντησαν και πάλι λανθασμένα (83%) πιστεύοντας ότι και στη μεγάλη δημόσια κλινική και στη μικρή ιδιωτική, οι μήνες όπου καταγράφηκαν γεννήσεις αγοριών άνω του 60% ήταν οι ίδιοι.

Μόνο ένας μαθητής απάντησε σωστά, ότι πιθανότερο είναι να συμβεί το παραπάνω γεγονός στην ιδιωτική κλινική, όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, παρά στη δημόσια.

Στην ερώτηση 4, σχεδόν όλοι οι μαθητές, απάντησαν και πάλι λανθασμένα (83%) πιστεύοντας ότι τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ενώ οι άλλοι μισοί απάντησαν σωστά ότι το ζευγάρι 1-2 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί από το ζευγάρι 6-6.

Στην ερώτηση 5, οι μισοί μαθητές απάντησαν ότι και τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ενώ οι άλλοι μισοί απάντησαν σωστά ότι πιθανότερο είναι να φέρουμε άθροισμα το 7.

Στην τελευταία ερώτηση οι μισοί μαθητές απάντησαν λανθασμένα (66%), ενώ οι άλλοι μισοί μαθητές βρήκαν τη σωστή απάντηση.

Φαίνεται λοιπόν ότι η μόνη εσφαλμένη αντίληψη που με την πάροδο του χρόνου έχει κάπως διορθωθεί είναι αυτή που βασίζεται στην αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας. Αυτό κυρίως οφείλεται στο ότι με βάση τις καθημερινές εμπειρίες τους και τις εμπειρίες που απέκτησαν οι μαθητές παίζοντας το παιχνίδι μπορούν ευκολότερα να κατανοήσουν ότι πολλά γεγονότα είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και επομένως η πιθανότητα να εμφανιστεί κάποιο από αυτά δεν αλλάζει όσες φορές κι αν εκτελέσουμε το πείραμα. Οι υπόλοιπες παρανοήσεις παραμένουν έντονες και επηρεάζουν την κρίση τους παρά τις γνώσεις που απέκτησαν μέσα από το παιχνίδι.

6. Συμπεράσματα – Συζήτηση

Το πρόβλημα της επανεκλογής του δημάρχου είναι πολυδιάστατο, προσφέρεται για διερεύνηση και ως εκ τούτου είναι κατάλληλο για εξαγωγή συμπερασμάτων όταν μια ομάδα μαθητών δουλεύει πάνω σε αυτό το πρόβλημα, συνεργατικά σε ψηφιακό περιβάλλον (Stahl, Koschmann, & Suthers, 2006).

Τα αποτελέσματα της έρευνας που επικεντρώθηκαν και στις δύο ομάδες μας παρέχουν στοιχεία για τον τρόπο που οι μαθητές σε ένα μαθησιακό περιβάλλον παρόμοιων συνθηκών κατασκευάζουν προσωπικά νοήματα για τις πιθανότητες, την επινόηση στρατηγικών και τη λήψη αποφάσεων με αξιολόγηση ρίσκου στη λύση ενός καθόλου προφανούς προβλήματος.

Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών που συμμετείχαν στην εμπειρική μελέτη που πραγματοποιήθηκε, στηρίχθηκε στις κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες οι οποίες στόχευαν κυρίως στη διερεύνηση της έννοιας της πιθανότητας σε ένα πολυδιάστατο πρόβλημα του πραγματικού κόσμου. Κεντρική θέση κατά τη διερεύνηση, είχε η προσπάθεια των μαθητών να συνδέσουν την θεωρητική με την πειραματική προσέγγιση της πιθανότητας.

Ο συγκεκριασμός των δύο αυτών προσεγγίσεων της έννοιας της πιθανότητας επιτεύχθηκε μέσα από τη διερεύνηση της έννοιας της πιθανότητας ως πρόβλεψη αποτελεσμάτων πριν παιχτεί το παιχνίδι και ως συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, μια δυνατότητα που τους παρείχε εξ' ολοκλήρου το λογισμικό ChoiCo μέσω των αναπαραστάσεων των δεδομένων και της συνεχούς ανατροφοδότησης μετά από κάθε επιλογή του παίχτη

Από τα παραπάνω συνάγεται το συμπέρασμα ότι η αλληλεπίδραση του νοητικού εργαλείου με τους μαθητές παρείχε εξ' ολοκλήρου τη δυνατότητα γνωστικής εξέλιξης όσον αφορά τις έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων.

Τα ποιοτικά δεδομένα που προέκυψαν κατά την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών με το ChoiCo, ανέδειξαν το γεγονός ότι οι ομάδες κατάφεραν στο σύνολό τους, διερευνώντας την έννοια της πιθανότητας ως πρόβλεψη αποτελεσμάτων πριν παιχτεί το παιχνίδι και ως συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, να την προσαρμόσουν στα γνωστικά τους σχήματα και ως συνέπεια αυτού να αποκτήσουν τη δυνατότητα της σύνδεσης των δύο προσεγγίσεων.

Έτσι, μελέτησαν τα δεδομένα του παιχνιδιού και έκαναν προβλέψεις για τις πιθανότητες πριν το παιχνίδι ως μέρος της στρατηγικής τους και κατόπιν

παίζοντας το παιχνίδι έλεγξαν αν ισχύουν οι προβλέψεις τους μέσα στο παιχνίδι.

Πιο συγκεκριμένα η πειραματική διαδικασία ανέδειξε από την αρχή την ικανότητα των μαθητών να καταλαβαίνουν τις διαφορετικές προσεγγίσεις της έννοιας της πιθανότητας τόσο με τις φυσικές εμπειρίες που είχαν τα παιδιά στην καθημερινή τους ζωή, όσο και με τους τυπικούς μαθηματικούς ορισμούς.

Κάτι τέτοιο συνέβη κατά τη μετάβαση των μαθητών σταδιακά στη λειτουργία της αναστοχαστικής αφαίρεσης, η οποία επιτεύχθηκε μέσα από την αλληλεπίδραση των μαθητών με τις λειτουργικότητες του νοητικού εργαλείου και κυρίως αυτές που είναι άμεσα συνδεδεμένες με την τροποποίηση του παιχνιδιού.

Έτσι, αρχικά, σε ένα πρώτο επίπεδο οι μαθητές φάνηκε να είναι σε θέση να διατυπώσουν επιτυχείς προβλέψεις για την πιθανότητα εμφάνισης ενδεχομένων.

Το ChoiCo προκαλεί τους μαθητές να πειραματιστούν καταφέροντας με τον τρόπο αυτό να γενικεύσουν εμπειρικά τις πρωταρχικές τους εικασίες που αφορούν την έννοια της πιθανότητας. Οι λειτουργικότητες του νοητικού εργαλείου παροτρύνουν τους μαθητές να διανύσουν μια περίοδο μετάβασης κατά την διερεύνηση της έννοιας της πιθανότητας, κατά την οποία η διερεύνηση πιο σύνθετων γνωστικών σχημάτων και η δράση των μαθητών γίνονται πιο εστιασμένα.

Οι μαθητές πλέον διερευνούν τις πιθανότητες μέσα από ένα ψηφιακό περιβάλλον όπου καλούνται να λάβουν αποφάσεις με αβέβαιες συνέπειες, να καταστρώσουν στρατηγικές αξιολογώντας τα δεδομένα του παιχνιδιού, να προβλέψουν τα αποτελέσματα των επιλογών τους και να εκτιμήσουν την πιθανότητα εμφάνισης ενδεχομένων μέσα στο παιχνίδι.

Η ομαδοσυνεργατική εμπλοκή των μαθητών με το λογισμικό ανέδειξε παράλληλα και την προσπάθεια σύνδεσης της έννοιας της πιθανότητας με πραγματικά προβλήματα. Αυτό είναι σύμφωνο και με τις αρχές της περιβαλλοντικής εκπαίδευσης.

Τέλος, οι εμπλεκόμενοι μέσω της δράσης τους εστιάζονται στις ενέργειες μέσω της λειτουργίας της αναστοχαστικής αφαίρεσης. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με το λογισμικό γενικεύουν τα συμπεράσματά τους καταφέροντας έτσι να μονιμοποιήσουν τις νέες τους ανακαλύψεις στα γνωστικά τους σχήματα. Η μελέτη και επεξεργασία των ποιοτικών δεδομένων που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της συνολικής ενεργητικής εμπλοκής των

μαθητών στο περιβάλλον του ChoiCo στέκεται ικανή προκειμένου να επιβεβαιωθεί η συνεισφορά του ChoiCo στη μαθησιακή διαδικασία. Τα επεισόδια μεταξύ των μαθητών αναδεικνύουν ότι το ChoiCo αποτελεί ένα διερευνητικό νοητικό εργαλείο εκμάθησης μαθηματικών με το οποίο οι μαθητές είναι σε θέση διερευνήσουν μια πληθώρα μαθηματικών εννοιών, καθώς η εμπλοκή στις δραστηριότητες είναι σε θέση να προκαλέσει στους μαθητές γνωστική σύγκρουση με πρότερες γνωστικές τους εμπειρίες.

Γενικές παρατηρήσεις

Το μαθησιακό περιβάλλον της έρευνας περιγράφεται από αρχές εγκαθιδρυμένης μάθησης (Lave, 1988), αφού το αποτέλεσμα της διερεύνησης και τα νοήματα που δημιουργήθηκαν θα ήταν διαφορετικά, αν το περιβάλλον ήταν άλλο και το πρόβλημα διαφορετικό. Οι αφαιρέσεις, οι γενικεύσεις και ο αναστοχασμός που τις προκάλεσε συνέβησαν σε συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς (Noss & Hoyles, 1996). Οι μαθητές έβγαλαν συμπεράσματα και τα χρησιμοποίησαν, σαν θεωρήματα εν δράσει (Vergnaud, 2009), πάλι σε συγκεκριμένο πλαίσιο. Τα κατασκευάσματά τους τέθηκαν σε διαπραγμάτευση μέσα στην ομάδα, αλλά και οι ίδιοι σαν άτομα βρέθηκαν σε μια διαρκή διαλογική σχέση με αυτά, ως εργαλεία με τα οποία σκέφτονταν (Papert, 1980).

Το γνωστικό αντικείμενο της πιθανότητας ευνόησε την έρευνα, αφού η διττή της φύση (εμπειρική και θεωρητική) προσφέρεται για πειραματισμό, αλλά και γενικεύσεις που όμως έρχονται ως ανάγκη να κι όχι επιβεβλημένες από τον διδάσκοντα. Οι έννοιες πιθανοτήτων που γνώριζαν οι μαθητές στο πλαίσιο του μαθήματος του σχολείου, εμπλουτίστηκαν στο επίπεδο των αναπαραστάσεων, άρα οι ίδιες οι έννοιες έγιναν πιο αποτελεσματικές στη χρήση τους.

Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε φάνηκε ότι όταν οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν διερευνητικά ένα δύσκολο πρόβλημα σε υπολογιστικό περιβάλλον, βγαίνουν αρκετά συμπεράσματα υπό το πρίσμα της δημιουργίας νοημάτων. Στην δεύτερη φάση της παρέμβασης υπήρχε μια δραστηριότητα τροποποίησης παιχνιδιού, που ήταν αρκετά ανοικτή ως προς την εκφώνηση της «Να τροποποιήσετε το παιχνίδι κατάλληλα, ώστε να εξασφαλίσετε μια σίγουρη επανεκλογή την επόμενη φορά, μέσα σε 6 κινήσεις. Μην ξεχνάτε όμως ότι μπορείτε να επηρεάσετε μόνο την "δυνατότητα επανεκλογής", η οποία μπορεί πάντα να παίρνει τιμές από -10 έως 10».

Τα αποτελέσματα αυτής της δραστηριότητας σε σχέση με τον απλό σχεδιασμό της και τη διάρκειά της (μια συνάντηση: 3 διδακτικές ώρες) ήταν πολλά. Αυτή η παρατήρηση δίνει την αφορμή για πρόταση έρευνας με παρόμοιες

δραστηριότητες, τελείως ανοικτών ερωτημάτων, με σημείο αναφοράς τις πιθανότητες και τη σύνδεση θεωρητικής και πειραματικής προσέγγισης.

Μια άλλη προέκταση αφορά την περιβαλλοντική εκπαίδευση και κυρίως την εκπαίδευση ευσυνείδητων πολιτών τόσο περιβαλλοντικά όσο και κοινωνικά. Στην παρούσα εργασία τα τρία παιχνίδια είναι αποκομμένα μεταξύ τους και οι μαθητές έρχονται σε επαφή μόνο με το παιχνίδι e-game. Παρόλαυτα δεν θίγονται θέματα όπως εργασιακή ηθική, νομικά θέματα καθώς κοινωνικές και πολιτικές εντάσεις που μπορεί να προκύψουν πριν και μετά τη λήψη αποφάσεων όπως γίνεται στον πραγματικό κόσμο. Έτσι, μια ενδιαφέρουσα τροποποίηση των παιχνιδιών θα ήταν η προσθήκη και άλλων μεταβλητών ή η μελέτη τριών παιχνιδιών που να συνδέονται μεν με το πρόβλημα αλλά το κάθε ένα να μελετάει το πρόβλημα από διαφορετική σκοπιά και σε άλλο επίπεδο (ατομικό, κοινωνικό, πολιτικό-οικονομικό) ώστε να φαίνονται οι τρεις διαστάσεις της αειφορίας.

Τέλος, βρίσκω ιδιαίτερα ενδιαφέρον να μελετηθούν οι μαθησιακές συνθήκες που κάνουν τους μαθητές να νιώσουν την ανάγκη δημιουργίας παραγωγικών συλλογισμών σε πολυδιάστατα προβλήματα υψηλής αβεβαιότητας που εμπλέκονται οι πιθανότητες. Ποιές είναι οι συνθήκες που τους κάνουν να επιχειρηματολογήσουν, μιλώντας για υπολογισμό δειγματικού χώρου, αξιολόγηση ρίσκου και όχι για συγκεκριμένα αντικείμενα, χωρίς την παρέμβαση ενός εκπαιδευτικού ή ερευνητή; Με ποιο τρόπο μπορεί η υποκειμενική προσέγγιση της πιθανότητας του κάθε μαθητή να οδηγήσει σε σύνδεση και κατανόηση των άλλων δύο αντικειμενικών προσεγγίσεων; Πώς χρησιμοποιείται το λογισμικό ChoiCo σε αυτή τη συγκυρία; Διαμορφώνονται άραγε κοινωνικό-μαθηματικές νόρμες όπου μια επαρκής εξήγηση θεωρείται απόδειξη;

7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Adams, J. (2006). Risk. Taylor και Francis: Routledge.
2. Avila-Pesantez, D., Rivera, L. A., & Alban, M. S. (2017). Approaches for Serious Game Design: A Systematic Literature Review. *COMPUTERS IN EDUCATION JOURNAL*, 8(3).
3. Balacheff, N., & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to formal characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz* , 65.
4. Barbosa, A. S., Pereira, P. M., Dias, J. F., & Silva, F. G. (2014). A New Methodology of Design and Development of Serious Games. *International Journal of Computer Games Technology*, 2014.
5. Batanero, C. (2013). Teaching and learning probability. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Heidelberg: Springer. Online; ISBN: 978-94-007-4977-1. 2013
6. Baytak, A., Land, S. M., & Smith, B. K. (2011). Children as Educational Computer Game Designers: An Exploratory Study. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, 10(4), 84–92.
7. Bernstein, P. (1998). *Against the Gods. The remarkable story of risk*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
8. Bogost, I. (2008). The rhetoric of video games. *The ecology of games: Connecting youth, games, and learning* , pp. 117-140.
9. Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. In Batanero C, Burrill G, Reading C (eds). *Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* New York: Springer, pp 71-83.
10. Borovcnik, M., and Bentz, H. J. (1991). Empirical Research in Understanding Probability, in *Chance Encounters: Probability in Education*, eds. R. Kapadia and M. Borovcnik, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
11. Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. In E. J Chernoff & B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7–34). New York: Springer.
12. Boyer, T. (2006). The development of risk-taking: A multi-perspective review. *Developmental Review*, 26, 291-345
13. Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions. *Journal of the Learning Sciences*, 2, 141–178.
14. Brown, A., Campione, J. (1996). Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems. In L. Schauble & R. Glaser (Eds.), *Innovations in learning:*

- New environments for education* (pp. 289–325). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
15. Brown, A. (2008). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *THE JOURNAL OF THE LEARNING SCIENCES*, 2(2), 141-178
 16. Carraher, T. N. (1989). Negotiating the results of mathematical computations. *International Journal of Educational Research*, 13, 627-646.
 17. Chung-Ho, Su. (2018). Exploring Sustainability Environment Educational Design and Learning Effect Evaluation through Migration Theory: An Example of Environment Educational Serious Games. *Sustainability* 2018, 10, 3363.
 18. Clements, D. και Samara, J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. New York: Routledge.
 19. Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, Vol. 32, No. 1, 9-13.
 20. Collins, A. (1992) Toward a design science of education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
 21. Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *The Journal of the Learning Sciences*, 13 (1), 15-42. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
 22. Crawford, C. (1984). *The art of computer game design*. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο <http://www.scribd.com/doc/140200/Chris-Crawford-The-Art-of-Computer-Game-Design>
 23. Daskolia, M. & Kynigos, C. (2012). Applying a Constructionist Frame to Learning about Sustainability. *Creative Education*, 3, 818-823. doi: 10.4236/ce.2012.326122.
 24. De Lope, Medina-Medina, Paderewski, & Gutierrez-Vela, (2015). Design methodology for educational games based on interactive screenplays. Design methodology for educational games based on interactive screenplays. In *CEUR Workshop Proceedings*. 1394.
 25. Dienes, Z.P. (1963): An Experimental Study of Mathematics-Learning. London: Hutchinson.
 26. El-Nasr, M. S., Smith B. K. (2006). Learning through game modding. *Comput. Entertain. CIE*, vol. 4, no. 1, p. 7.
 27. Fabricatore, Carlo & Lopez, Ximena. (2012). Sustainability Learning through Gaming: An Exploratory Study. *Electronic Journal of e-Learning*, 10, 209-222.

28. Fisch, S. M. (2005). Making educational computer games "educational". *IDC '05 Proceedings of the 2005 conference on Interaction design and children* (σσ. 56-61). New York: ACM.
29. Fischbein, E., Pampu, I., & Mânzat, I. (1970). Comparison of ratios and the chance concept in children. *Child Development*, 41, 377-389.
30. Fischbein, E. (1975). The intuitive source of probability thinking in children. *Dordrecht, The Netherlands: Reidel*.
31. Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
32. Fischbein, E., Nello, M., S. & Marino, M., S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in mathematics*, 22, 523-549.
33. Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.
34. Funtowicz, S.O., Ravetz, J.R., 1993. Science for the post-normal age. *Futures*, 25 (7), 739–755.
35. Garfield, J., Chance, B., (2000). Assessment in Statistics Education: Issues and Challenges. *MATHEMATICAL THINKING AND LEARNING*, 2(1&2), 99–125.
37. Garon, N., Moore, C. (2004). Complex decision-making in early childhood. *Brain and Cognition*, 55, 158–170.
38. Gee, J. P. (2003). What video games have to teach us about learning and literacy (1st ed.). New York: Palgrave Macmillan.
39. Gee, J.P. (2007). What videogames have to teach us about learning and literacy. New York: Palgrave Macmillan.
40. Goetz, J., & Lecompte, M. D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. London: Academic Press.
41. Green, D.R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett και G.M. Constable (Eds.) *In: Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2), 766-783.
42. Grizioti M, Kynigos, C. (2018). Game Modding for Computational Thinking: An Integrated Design Approach. *In: Proceedings of the 2018 Conference on Interaction Design and Children. ACM, 2018*

43. Grizioti M, Kynigos, C. (2019). Collaborative Modding of a Simulation Game: An Approach to the Development of Computational Thinking. *In: Proceedings of the 13th International Conference on Game Based Learning*.
44. Hayes, E. R., Games, I. A. (2008). Making Computer Games and Design Thinking: A Review of Current Software and Strategies. *Games Cult.*, vol. 3, no. 3–4, pp. 309–332, Jul. 2008.
45. Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* , 42 (1), 63-76.
46. Jones, A. (2000). *Game theory: Mathematical models of conflict*. Horwood Series in Mathematics & Applications. Woodhead Publishing.
47. Jones, G., Thornton, C. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In Jones G., (ed), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). NY: Springer
48. Kabat, M., & Alfoldiova, A. (2019). Virtual Reality Games and Environmental Awareness. *In: Proceedings of the 13th International Conference on Game Based Learning*.
49. Kafai, Y. B., Franke, M., Ching, C., & Shih, J. (1998). Game design as an interactive learning environment fostering students' and teachers' mathematical inquiry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(2), 149–184.
50. Kafai, Y. B. (2006). Playing and making games for learning: Instructionist and constructionist perspectives for game studies. *In Games and Culture*, 1(1), 36–40.
51. Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., και Heckler, A. (2009). Transfer of mathematical knowledge: The portability of generic instantiations. *Child Development Perspectives*, 3, 151–155.
52. Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York: Cambridge University Press.
53. Kelly, A. (2003). (Guest Editor), Research as Design (Editorial). *Educational Researcher*, Vol. 32, No. 1, pp 3-4.
54. Koschmann, T. (2002). Research, Dewey's Contribution to the Foundations of CSCL. Στο G. Stahl (Επιμ.), *Computer Support for Collaborative Learning: Foundations for a CSCL Community: Proceedings of CSCL 2002* (σσ. 17-22). Boulder, CO: Lawrence Erlbaum Associates.
55. Kynigos, C. (2007). Half-baked logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in education* , 6 (2), pp. 335-358.

56. Kynigos, C. (2015). Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design? Στο S. J. Cho (Επιμ.), Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design? (σσ. 417- 438). Springer International Publishing.
57. Kynigos, C., and Yiannoutsou, N. (2018) “Children challenging the design of half-baked games: Expressing values through the process of game modding”, *International Journal of Child-Computer Interaction*, Vol 17, pp 16-27.
58. Lagrange, J. B., & Kynigos, C. (2014). Digital technologies to teach and learn mathematics: Context and re-contextualization. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 381-403.
59. Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
60. Lecoutre, M., (1992). Cognitive models and problem spaces in purely random situations. *Educational Studies in Mathematics* 23, pp. 557-568. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherland.
61. Lee I., Martin F., Denner J., Coulter B., Walter A, Erickson J, Joyce M-S, & Werner L. (2011). Computational Thinking for Youth in Practice. *Acm Inroads* 2 ,1:32–37.
62. Levin, J. R., and O'Donnell, A. (1999). What to do about educational research's credibility gaps? *Issues Educ.* 5: 177–239.
63. Liarakou, G., Daskolia, M. and Papanikolaou, A. (2012). Children Learning about ‘Urban Sustainability’ through Playing and Re-constructing a Half-Baked Microworld. In C. Kynigos, J.E. Clayson and N. Yiannoutsou (Eds), *Constructionism 2012. Theory, Practice and Impact* (pp. 156-165). Athens: Educational Technology Lab, University of Athens – Vivliosynergatiki Publishing.
64. Mansour, Samah & EL-SAID, MOSTAFA. (2008). The Relationship between Educational Serious Games, Gender, and Students' Social Interaction. *WSEAS Transactions on Computers*. 7.
65. Meyer, A., & Rose, D. H. (1998). *Learning to read in the computer age*. Cambridge, MA: Brookline.
66. Moshirnia, A. (2007). The educational potential of modified video games. *Issues in Informing Science and Information Technology*, 4, 511–521.
67. Moyer, P., Bolyard, J., & Spikell, M. (2001). Virtual manipulatives in the K-12 Classroom. In A. Rogerson (Ed) *Proceedings of the International Conference on New Ideas in Mathematics Education* (pp 184 - 187). Queensland, Australia.
68. Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Netherlands: Kluwer academic Publishers.
69. Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics* , 33, 203-233.

70. Overmars, M. (2004). Teaching computer science through game design. *Computer*, 37(4), 81–83.
71. Oxland, K. (2004). *Gameplay and design*, 8-11. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο <http://books.google.com/books?id=l05TkZFbS24C&printsec=frontcover&hl=el#v=onepage&q=rules%20and%20boundaries&f=false>
72. Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.
73. Papert, S., Harel, I. (1991). Situating Constructionism. In: Papert, S, Harel, I. (Eds), *Constructionism* Norwood, NJ: Ablex Publishing.
74. Pellegrini, A. D. (1991). *Applied child study: A developmental approach*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
75. Piaget, J., Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. London: Routledge και Kegan Paul (Original work published 1951).
76. Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in mathematics Education*, 31(5), 602–625.
77. Pratt, D. (2001). Probability and Randomness. *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*, 1(3), ch.9, 140-150
78. Pratt, D., Noss, R. (2002). The Micro-Evolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. *Journal of the Learning Sciences*, 11(4), 453-488.
79. Prensky, M. (2001). *Digital game-based learning*. New York: McGraw-Hill.
80. Prensky, M. (2005). *Computer games and learning: Digital game-based learning*. Handbook of computer game studies, 18, 97-122
81. Prensky, M. (2007). *Μάθηση Βασισμένη στο Ψηφιακό Παιχνίδι: Αρχές, δυνατότητες και παραδείγματα εφαρμογής στην εκπαίδευση και την κατάρτιση*. Μειμάρης, Μ. (Επιμ.), Αθήνα: Μεταίχμιο.
82. Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM Mathematics Education* (2012) 44:855–868.
83. Prodromou, T., & Pratt, D. (2013). Making sense of stochastic variation and causality in a virtual environment. *Technology, Knowledge and Learning*, 18, 121–147.
84. Rankin, G., Vargas, S. (2008). *A review of serious games and other game categories for education*. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο <http://www.eludamos.org/index.php/eludamos/article/viewDownloadInterstitial/vol4no1-2/150>
85. Resnick, M. (2007). All I Really Need to Know (About Creative Thinking) I Learned (By Studying How Children Learn) in Kindergarten. *ACM Creativity & Cognition conference*, Washington DC.

86. Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., ... , & Kafai, Y. (2009). *Scratch: programming for all. Communications of the ACM*, 52(11), 60-67.
87. Robertson, J., Howells, C. (2008). Computer game design: Opportunities for successful learning. *Comput. Educ.*, vol. 50, no. 2, pp. 559–578.
88. Rochelle, J., & Teasley, S. (1995). *The Construction of Share Knowledge in Collaborative Problem Solving*. Στο C. O. Malley (Επιμ.), *Computer-supported Collaborative Learning* (σσ. 69-197). Berlin, Germany: Springer Verlag
89. Rochelle, J., Abrahamson, L., Penuel, W.R. (2004). *Integrating classroom network technology and learning theory to improve classroom science learning: A literature synthesis*. Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.
90. Salen, K. (2007). Gaming literacies: A game design study in action. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, 16(3), 301–322.
91. Shaughnessy, J. M. (1983), Misconceptions of Probability, Systematic and Otherwise: Teaching Probability and Statistics so as to Overcome Some Misconceptions. In *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, eds. D.R. Grey and P. Holmes, Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
92. Spiegelhalter, D. (2009). Probability lessons may teach children how to weigh life's odds and be winners. *The Times*.
93. Stahl, G. (2006). Group Cognition: Computer Support for Building Collaborative Knowledge.
94. Stahl, G., Koschmann, T., & Suthers, D. (2006). Computer-supported Collaborative Learning: A Historical Perspective. Στο R. K. Sawyer (Επιμ.), *Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (σσ. 409-426). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
95. Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Στο D. Tall (Επιμ.), *Advanced Mathematical Thinking* (σσ. 4-21). Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.
96. Thompson, P. B. (1986). The philosophical foundations of risk. *Southern Journal of Philosophy*, 24(2), 273–286.
97. Tversky A., Kahneman D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, 185(4157), 1124–1131.
98. Uttal, D., O'Doherty, K., Newland, R., Hand, L. L., DeLoache, J. (2009). Dual representation and the linking of concrete and symbolic representations. *Child Development Perspectives*, 3, 156–159.
99. Van de Walle, J. C. (2005). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διαδικασία. (Τ. Α. Τριανταφυλλίδης, Επιμ., Α. Αλεξανδροπούλου , & Β. Κομπορόζος, Μεταφρ.) Αθήνα: Τυπωθήτω-Γιώργος Δάρδανος.

100. Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52, 83-94.
101. Von Neumann, J., Morgenstern, O., Kuhn, H.-W. & Rubinstein, A. (2007). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton Classic Editions. Princeton University Press.
102. Westera, W., Nadolski, R.J., Hummel, H.G.K., Wopereis, I.G.J.H. (2008). Serious games for higher education: a framework for reducing design complexity. *Journal of computer assisted learning*. 24 (5) (pp. 420-432).
103. Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 171-202.
104. Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations*. New York, NY: Macmillan.
105. Yates, F.J. & Stone, E.R. (1992). *The risk construct*. In Yates, J. F. (Ed.), *Risk-taking behavior* (pp. 1-25). New York: John Wiley & Sons.
106. Yiannoutsou, N., Kynigos, C., & Daskolia, M. (2014). Constructionist Designs in Game Modding: The Case of Learning about Sustainability. Στο G. Futschek, & C. Kynigos (Eds.), *Proceedings of Constructionism 2014: Constructionism and Creativity*, (pp. 449-469). Austria, Vienna.
107. Yiannoutsou, N., & Kynigos, C. (2016). Game Kits: Metadesign considerations on game modding for learning. *The 15th International Conference on Interaction Design and Children* (σσ. 583-588). ACM.
108. Yin, R. K. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage Publications.
109. Yucel, I., Zupko, J., & El-Nasr, M. S. (2006). IT education, girls and game modding. *Interactive Technology and Smart Education*, 3(2), 143–156. doi:10.1108/17415650680000059
110. Zagkotas, V., & Fykaris, I. (2017). The “risk in teaching process” or the “didactic risk”: Views of the Greek teachers. *International Journal of Social Sciences*.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

111. Βοσνιάδου, Σ. (2000). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
112. Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Παιδιά, σχολεία και υπολογιστές*, Αθήνα: GUTENBERG.
113. Δαμιανού, Χ.Χ., Παπαδάτος, Ν.Δ., & Χαραλαμπίδης, Χ.Α. (2010). *Εισαγωγή στις πιθανότητες και τη Στατιστική*. Αθήνα: Συμμετρία.
114. Δημητρίου, Γ. (2013). Η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στην περιβαλλοντική εκπαίδευση /εκπαίδευση για αειφόρο ανάπτυξη. *Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΕΙΦΟΡΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΩΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗ ΔΗΜΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΔΗΜΟΤΙΚΗ*

- ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ*. Χρυσάνθη Κάτζη και Αραβέλλα Ζαχαρίου. FREDERICK RESEARCH CENTRE Ιανουάριος 2013.
115. Κάτζη-Beltran, X. (2013). Αειφόρος ανάπτυξη και εκπαίδευση. *Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΕΙΦΟΡΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΩΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗ ΔΗΜΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΔΗΜΟΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ*. Χρυσάνθη Κάτζη και Αραβέλλα Ζαχαρίου. FREDERICK RESEARCH CENTRE Ιανουάριος 2013.
 116. Κιτσαράς Γ. (2004), Προγράμματα: Διδακτική μεθοδολογία προσχολικής αγωγής με σχέδια εργασίας. Αθήνα: Συγγραφέας.
 117. Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.
 118. Κοντογιάννης, Γ. & Τουμπής, Σ. (2015). *ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ. ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ*, Αθήνα.
 119. Κουνιάς, Σ. και Μουσιάδης, Π. (1999). *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι*. Εκδόσεις Ζήτη 1999.
 120. Κυνηγός, Χ. & Δημαράκη, Ε. (2002). *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.
 121. Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
 122. Νικηφορίδου, Ζ. (2011). Η χρήση των Νέων Τεχνολογιών στη διερεύνηση της αντίληψης και την αξιοποίηση εννοιών των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών σε μικρά παιδιά: η έννοια του ρίσκου. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
 123. Παγγέ, Τ. (2009). Εκπαιδευτική Τεχνολογία. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο
 124. Πανταζής, Σ. (2004). Η Παιδαγωγική και το παιχνίδι-αντικείμενο στο χώρο του νηπιαγωγείου: ερευνητική προσέγγιση, Αθήνα: Gutenberg.
 125. Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2005). Ταξινόμηση του εκπαιδευτικού παιχνιδιού: σύνδεση με τη Θεωρία Παιγνίων. 22ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας: *Οι Σύγχρονες Εφαρμογές των Μαθηματικών και η Αξιοποίησή τους στην Εκπαίδευση* (σελ. 504-514), Λαμία.
 126. Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2007). Σχεδιασμός ένταξης του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. Στο Φ. Καλαβάσης & Α. Κοντάκος (επιμ.) *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού* (σελ. 137-156). Ατραπός, Αθήνα.
 127. Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2009). Ο ρόλος του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση: ανταγωνιστικές στάσεις και ψευδαίσθηση ομοθυμίας. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 47, 138-154.

128. Φωκίδης, Ε., Ατσικπάση, Π., Καϊμάρα, Π., & Δεληγιάννης, Ι. (2018). Ψηφιακά εκπαιδευτικά παιχνίδια. Μία κριτική θεώρηση των αποτελεσμάτων των ερευνητικών παρεμβάσεων της πρωτοβουλίας ETiE : Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου και Διεθνούς Συνεδρίου «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση», Θεσσαλονίκη(2018).
129. Χαραλαμπίδης, Χ. (2002). Ανασκόπηση της διαχρονικής εξέλιξης του λογισμού πιθανοτήτων. Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Κομοτηνή.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Pre test

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις κυκλώνοντας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ερώτηση 1: Η Αλέκα έριξε ένα νόμισμα πέντε φορές και πήρε κατά σειρά ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ. Η Αλέκα θα ξαναρίξει το νόμισμα. Είναι_____.

A) πιθανότερο να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ).

B) πιθανότερο να πάρει ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).

Γ) το ίδιο πιθανό να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ) ή ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).

Ερώτηση 2: Το να έρθουν 2 ΚΕΦΑΛΕΣ σε 3 ρίψεις ενός νομίσματος, έχει πιθανότητα να πραγματοποιηθεί_____ το να φέρουμε 200 ΚΕΦΑΛΕΣ σε 300 ρίψεις.

A) μεγαλύτερη από

B) μικρότερη από

Γ) ίδια με

Ερώτηση 3: Στη πόλη μας υπάρχει μία δημόσια μαιευτική κλινική (στο νοσοκομείο της πόλης) με 100 περίπου γεννήσεις το μήνα και μια ιδιωτική μαιευτική κλινική με 25 περίπου γεννήσεις το μήνα. Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι 50%, υπάρχουν όμως μήνες όπου πάνω από το 50% των γεννήσεων είναι αγόρια και μήνες όπου πάνω από το 50% των γεννήσεων είναι κορίτσια. Και στις δύο κλινικές καταγράφηκαν οι μήνες του χρόνου κατά τους οποίους γεννήθηκαν αγόρια σε ποσοστό μεγαλύτερο του 60% των συνολικών γεννήσεων. Οι μήνες που οι γεννήσεις αγοριών ξεπέρασαν το 60%_____.

A) ήταν περισσότεροι στη δημόσια κλινική του Νοσοκομείου.

B) ήταν περισσότεροι στην ιδιωτική κλινική.

Γ) ήταν οι ίδιοι και στις δύο κλινικές.

Ερώτηση 4: Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζόρια (ένα πράσινο και ένα κόκκινο) ταυτόχρονα. Χωρίς να δώσουμε σημασία στο χρώμα των ζαριών, ποιο από τα παρακάτω έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί;

A) Να πάρουμε το ζευγάρι 5-6.

B) Να πάρουμε το ζευγάρι 6-6.

Γ) Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.

Ερώτηση 5: Ρίχνουμε δύο ζάρια ταυτόχρονα. Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 7 είναι _____ με την πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 9.

A) μεγαλύτερη

B) μικρότερη

Γ) ίση

Ερώτηση 6: Διαλέγουμε μια πολύτεκνη οικογένεια με 6 παιδιά. Αν συμβολίσουμε A το αγόρι και K το κορίτσι και αν μια σειρά της μορφής A K A K A K εκφράζει τη σειρά γέννησης των παιδιών, τότε η σειρά A K K A K A έχει _____ πιθανότητες να εμφανιστεί από τη σειρά A A A A A A.

A) περισσότερες

B) λιγότερες

Γ) ίσες

Post test

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις κυκλώνοντας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ερώτηση 1: Η Σοφία έριξε ένα νόμισμα πέντε φορές και πήρε κατά σειρά ΚΕΦΑΛΗ - ΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΚΕΦΑΛΗ - ΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΚΕΦΑΛΗ. Η Σοφία θα ξαναρίξει το νόμισμα. Είναι _____.

A) πιθανότερο να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ).

B) πιθανότερο να πάρει ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).

Γ) το ίδιο πιθανό να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ) ή ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).

Ερώτηση 2: Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 100 μπάλες κόκκινες και 100 μπάλες πράσινες. Ο Κώστας τραβάει 5 μπάλες και ο Γιώργος 60 μπάλες. Ο Κώστας έχει _____ πιθανότητα να τραβήξει 60% κόκκινες μπάλες σε σχέση με τον Γιώργο.

A) μεγαλύτερη

B) μικρότερη

Γ) ίδια

Ερώτηση 3: Σε δύο νοσοκομεία τα μισά νεογέννητα είναι αγόρια και τα μισά κορίτσια. Στο Νοσοκομείο Α καταγράφονται κατά μέσο όρο 50 γεννήσεις την ημέρα. Στο Νοσοκομείο Β καταγράφονται κατά μέσο όρο 10 γεννήσεις την ημέρα. Σε μια συνηθισμένη ημέρα, ποιο νοσοκομείο είναι πιο πιθανό να καταγράψει 65% ή περισσότερες γεννήσεις κοριτσιών ;

A) Το Νοσοκομείο Α.

B) Το Νοσοκομείο Β.

Γ) Τα δύο νοσοκομεία έχουν ίση πιθανότητα να καταγράψουν ένα τέτοιο συμβάν.

Ερώτηση 4: Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζόρια (ένα πράσινο και ένα κόκκινο) ταυτόχρονα. Χωρίς να δώσουμε σημασία στο χρώμα των ζαριών, ποιο από τα παρακάτω έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί;

A) Να πάρουμε το ζευγάρι 1-2.

B) Να πάρουμε το ζευγάρι 6-6.

Γ) Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.

Ερώτηση 5: Ρίχνουμε δύο ζάρια ταυτόχρονα. Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 7 είναι _____ με την πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 9.

A) μεγαλύτερη

B) μικρότερη

Γ) ίση

Ερώτηση 6: Δύο φίλοι παίζουν ένα παιχνίδι στο οποίο ο κάθε παίκτης στρίβει ένα νόμισμα 6 φορές . Ο παίκτης Α για να νικήσει πρέπει να φέρει 6 κορώνες , ενώ ο παίκτης Β για να νικήσει πρέπει να φέρει κορώνα γράμματα εναλλάξ. Ο παίκτης Α έχει _____ πιθανότητες να νικήσει το παιχνίδι σε σχέση με τον παίκτη Β.

A) περισσότερες

B) λιγότερες

Γ) ίσες

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Φύλλο εργασίας 1

Ερωτήσεις :

Στη «θεωρία πιθανοτήτων» ως πείραμα τύχης ονομάζουμε ένα φαινόμενο που η έκβασή του δεν μπορεί να προβλεφτεί με κάποιον τρόπο, δεν υπάρχει έναν «τύπος» που να μας λέει με βεβαιότητα τι θα συμβεί αν το φαινόμενο γίνει σε συγκεκριμένες συνθήκες. Π.χ. Η πρόβλεψη του χρόνου στον οποίο θα φτάσει μία πέτρα στο έδαφος αν αφεθεί να πέσει από συγκεκριμένο ύψος ΔΕΝ είναι πείραμα τύχης, καθώς υπάρχουν τύποι της Φυσικής, που μπορούν να τον υπολογίσουν με ακρίβεια, πριν το φαινόμενο συμβεί. Αντιθέτως, στο στρίψιμο ή τη ρίψη ενός κέρματος, όταν αναζητούμε ποιά πλευρά του θα βρίσκεται πάνω όταν αυτό πέσει κάτω και σταματήσει να κινείται, είναι πείραμα τύχης γιατί δεν υπάρχει τύπος που, «με ακρίβεια» να μας προβλέπει το αποτέλεσμα.

1. Να κυκλώσετε ποιά από τα παρακάτω φαινόμενα είναι πείραμα τύχης ;

- α) Η επιλογή ενός ζώου και η εξέτασή του για να διαπιστωθεί αν έχει προσβληθεί από μια συγκεκριμένη ασθένεια.
- β) Η ταχύτητα πτώσης μιας πέτρας μέσα στο νερό.
- γ) Το τράβηγμα ενός χαρτιού από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά.
- δ) Η καταγραφή της διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα.

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο των δυνατών εκβάσεων του πειράματος . Π.χ. στο στρίψιμο ή τη ρίψη ενός κέρματος, η πλευρά που θα βρίσκεται πάνω όταν αυτό πέσει κάτω και σταματήσει να κινείται μπορεί να είναι κορώνα Κ ή γράμματα Γ.

2. Να γράψετε τους δειγματικούς χώρους των εξής πειραμάτων τύχης :

- α) Η ρίψη ενός ζαριού.
- β) Τράβηγμα ενός λαχνού από μια κληρωτίδα από το 1 έως το 5.
- γ) Το άθροισμα των δύο ζαριών σε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι.

Στο παιχνίδι, το χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής» συμπεριλαμβάνει όλους του τυχαίους παράγοντες που δεν μπορεί να ελέγξει

κάποιος υποψήφιος στον προεκλογικό του αγώνα. Όταν η «δυνατότητα επανεκλογής» αυξάνεται τότε αυτοί οι παράγοντες είναι ευνοϊκοί. Οι πιθανότητες επανεκλογής αυξάνονται όταν η «δυνατότητα επανεκλογής» είναι ψηλά και η «ικανοποίηση» άστεγων και στεγασμένων πολιτών είναι όσο το δυνατόν ψηλά γίνεται.

3. Να παίζετε το παιχνίδι ώστε να αυξήσετε τις πιθανότητες επανεκλογής σας.

4. Υπάρχει πείραμα τύχης κατά τη γνώμη σας στο παιχνίδι; Αν ναι, ποιο είναι το πείραμα τύχης και ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης μέσα στο παιχνίδι;

Ο χρόνος της προεκλογικής μάχης είναι περιορισμένος και οι εκλογές πλησιάζουν. Έχετε 10 κινήσεις. Προσπαθήστε να αυξήσετε περισσότερο τις πιθανότητες επανεκλογής σας.

5. Ποιο είναι το πιο ευνοϊκό σενάριο ως προς το χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής»;

6. Στην επιλογή ‘πολυκατοικία’, ποιά είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 στο χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής» ;

7. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 σε κάθε μια επιλογή στο χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής» ;

8. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και στις δέκα επιλογές μέσα στο παιχνίδι; Θεωρείτε ότι έχει κάποια σχέση με την πιθανότητα επιτυχίας του πειράματος τύχης;

9. Η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και τις δέκα φορές μέσα στο παιχνίδι είναι ίδια με την πιθανότητα εμφάνισης οποιουδήποτε άλλου αριθμού και τις δέκα φορές του δειγματικού χώρου;

10. Εάν επαναληφθεί το πείραμα τύχης πολλές φορές εκτιμήστε την πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και τις δέκα φορές μέσα στο παιχνίδι;

Φύλλο εργασίας 2

Συγχαρητήρια, εκλεγήκατε ξανά δήμαρχος της πόλης σας. Η επόμενη φορά θα είναι πιο δύσκολη, καθώς ο χώρος για διαθέσιμα κτίρια έχει περιορισθεί οπότε μπορείτε να επιλέξετε κάθε τύπο κτιρίου μόνο μια φορά μέσα στο παιχνίδι.

Να τροποποιήσετε το παιχνίδι κατάλληλα, ώστε να εξασφαλίσετε μια σίγουρη επανεκλογή την επόμενη φορά, μέσα σε 6 κινήσεις. Μην ξεχνάτε όμως ότι μπορείτε να επηρεάσετε μόνο την "δυνατότητα επανεκλογής", η οποία πάντα μπορεί να παίρνει τιμές από -10 έως 10.