

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Η πορεία προς έναν καθολικό αλγεβρικό συμβολισμό τον 16^ο
αιώνα, με έμφαση στο έργο του François Viète**

Ζάχαρης Ιωάννης

201725

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Παπασταυρίδης Σταύρος

Ομότιμος Καθηγητής

Αθήνα

Ιανουάριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 24 Ιανουαρίου 2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Παπασταυρίδης Σ. (Επιβλέπων)	Ομότιμος Καθηγητής
▪ Λάμπας Δ.	Αν. Καθηγητής
▪ Ράπτης Ε.	Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Παπασταυρίδης Σ. (Επιβλέπων)	Ομότιμος Καθηγητής
▪ Λάμπας Δ.	Αν. Καθηγητής
▪ Ράπτης Ε.	Καθηγητής

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τον Ομότιμο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Παπασταυρίδη Σταύρο για την επίβλεψη της παρούσας εργασίας, γεγονός που αυτό καθαυτό μπορώ να το θεωρήσω τιμητικό. Θα σταθώ όμως στο ουσιαστικότερο μέρος αυτής της συνεργασίας, που ήταν η επικοινωνία που αναπτύχθηκε. Στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασης και της διαλεκτικής αυτής, με επηρέασαν οι εμβριθείς απόψεις του για την Ιστορία γενικότερα, και όχι μόνο αυτή των Μαθηματικών, την αναγκαιότητα για την εύρεση και διασταύρωση έγκυρων ιστορικών πηγών, την κατά το δυνατόν ερμηνεία των ιστορικών γεγονότων χωρίς τον παραμορφωτικό φακό της χρονικής απόστασης, θέτοντας κάθε φορά το «σωστό» και καίριο ερώτημα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τους κ. Λάππα Διονύσιο και κ. Ράπτη Ευάγγελο, αφ' ενός για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή και αφ' ετέρου για τις εύστοχες και διαυγείς σκέψεις που μοιράστηκαν μαζί μας στη διάρκεια των διαλέξεων.

Ευχαριστίες οφείλω σε όλους τους συντελεστές του μεταπτυχιακού αυτού προγράμματος, διδάσκοντες και διοικητικούς, γιατί με τη λειτουργία του προγράμματος, κατόρθωσαν να αναζωπυρώσουν την –ευτυχώς– άσβεστη εσωτερική μου φλόγα για έρευνα και ανακάλυψη, παρέχοντας το απαραίτητο –μετά από 27 περίπου χρόνια διδασκαλίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση - αρχιμήδειο σημείο, για τον επαναπροσδιορισμό της έννοιας της αληθούς γνώσης, με την απόρριψη των βεβαιοτήτων, καθώς και την επανεκκίνηση του τρόπου που ασκείται η διδασκαλία.

Θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρω την πολύτιμη βοήθεια της, Εριφύλης Κανάκη και της Θεοδώρας, Φατούρου, αγαπητών συναδέλφων μου, τις οποίες θέλω επίσης να ευχαριστήσω θερμά.

Τέλος θα αναφερθώ στα πρόσωπα εκείνα που αποτέλεσαν μια αστείρευτη πηγή δύναμης και έμπνευσης για μένα, και είναι τα πρόσωπα της οικογένειάς μου. Σε αυτούς αφιερώνω την παρούσα εργασία. Στη σύζυγο μου Βάσω, με ένα από βάθους καρδιάς ευχαριστώ για το επιπλέον φορτίο που επωμίστηκε αγόγγυστα, και την καθολική συμπαράσταση, και στους γιούς μου, Στάθη, πτυχιούχο του Μαθηματικού Τμήματος ΕΚΠΑ, και Δημήτρη, τρίτοετή φοιτητή του ίδιου τμήματος, γιατί υπήρξαν ένθερμοι υποστηρικτές του εγχειρήματος αυτού, ζωηροί συνομιλητές, αλλά και πρόθυμοι ακροατές των προβληματισμών αλλά και των στιγμών ενθουσιασμού μου και αποτέλεσαν κατά βάση την

αφορμή –πιθανότατα και την αιτία– για την συμμετοχή μου στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα.

"Nullum non problema solvere"

François Viète

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	3
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	8
ABSTRACT	9
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: Η ΕΥΡΩΠΗ ΣΤΑ ΜΕΣΑ ΤΟΥ 16 ^{ΟΥ} ΑΙΩΝΑ	12
1.1 ΓΕΩΠΟΛΙΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	12
1.2 ΠΟΡΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΗ – Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΤΟΝ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΙΣΜΟ	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΟΥ ΚΛΗΡΟΔΟΤΟΥΝΤΑΙ ΣΤΟΝ 16Ο ΑΙΩΝΑ	20
2.1 Η ΚΛΗΡΟΝΟΜΙΑ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ	20
2.2 Η ΙΣΛΑΜΙΚΗ ΠΑΡΑΔΟΣΗ	30
2.2.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΙΣΛΑΜΙΚΗΣ ΑΝΘΙΣΗΣ	30
2.2.2 ΜΟΗΑΜΜΑΔ ΙΒΝ ΜΟΥΣΑ ΑΛ ΚΩΗΑΡΙΣΜΙ.....	32
2.2.3 Η ΕΝΑΡΞΗ ΤΗΣ ΑΡΑΒΙΚΗΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ Η ΕΠΑΝΝΕΚΙΝΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟΝ PIERRE DE RAMEE	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: Η ΙΤΑΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΤΟΥ 16 ^{ΟΥ} ΑΙΩΝΑ.....	39
3.1 GIROLAMO CARDANO	39
3.2 RAFAEL BOMBELLI	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: Η ‘ΝΕΑ ΑΛΓΕΒΡΑ’ (‘ALGEBRA NOVA’) ΤΟΥ FRANCOIS VIETE.....	59
4.1 ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ FRANCOIS VIETE	59
4.2 Η ΣΗΜΕΙΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ FRANCOIS VIETE	65
4.2.1 Η ‘ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ’ – ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ ‘ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ’	65
4.2.2 Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ‘ΣΥΝΑΓΩΓΗ’ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ ΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΝΟΥ	74
4.2.3 ΠΗΓΕΣ ΕΜΠΝΕΥΣΗΣ ΤΗΣ ‘ALGEBRA NOVA’	76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ: ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΡΙΑ ΕΡΓΑ ΤΗΣ ‘ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΗΣ’ ΤΟΥ FRANCOIS VIETE.....	78
5.1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ‘ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΤΕΧΝΗ’	78
5.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΤΕΧΝΗ (IN ARTEM ANALYTICEN ISAGOGAE)	80
5.3 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ (AD LOGISTICEN SPECIOSAM NOTAE PRIORUM)	89
5.3.1 ΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ I, XI, XVII ΚΑΙ XXIV	89
5.3.2 ΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ XLVIII – LI	95
5.4 ΠΕΝΤΕ ΒΙΒΛΙΑ ΤΗΣ ΖΗΤΗΤΙΚΗΣ (ZETETICORUM LIVRI QUINQUE)	102
5.4.1 Η ΠΡΟΤΑΣΗ I ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ I ΤΗΣ ΖΗΤΗΤΙΚΗΣ.....	102
5.4.2 ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ II ΚΑΙ III	104
5.4.3 Η ΚΟΙΝΗ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΩΝ ΠΕΜΠΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΣΤΟΝ VIETE ΚΑΙ ΤΟΝ ΔΙΟΦΑΝΤΟ	108
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΑ ΕΡΓΑ ‘ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ’ ΚΑΙ ‘APOLLONIUS GALLUS’	115
6.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΝΕΥΣΗΣ ΣΤΟ ‘ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ’	115
6.2 Η ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΤΥΧΑΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΟ ‘ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ VIETE’	116
6.3 ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΕΝΤΑΓΩΝΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ.....	117

6.4 ΜΙΑ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΟΝΙΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ VIETE ΣΤΟ 'ΑΠΟΛΛΟΝΙΟΥΣ ΓΑΛΛΟΣ'	120
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ: ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΑ ΕΡΓΑ 'ΔΥΟ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ 'ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ'	124
7.1 Η ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ	124
7.2 Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ VIETE	125
7.2.1 Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΔΥΟ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ	125
7.2.2 Η ΚΥΒΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ 'DUPLICATE HYPOSTASIS' ΜΕ ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΠΟ ΚΥΒΙΚΗ ΣΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ	129
7.2.3 Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΣΤΟΝ CARDANO ΚΑΙ ΣΤΟΝ VIETE	133
7.2.4 Η ΠΡΟΤΑΣΗ XXV ΣΤΟ 'SUPPLEMENTUM GEOMETRAE'	138
7.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ 'ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ' ΚΑΙ ΟΙ ΔΗΜΟΦΙΛΕΙΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΡΙΖΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	140
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ: ΚΑΤΟΠΙΝΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 17^{ΟΥ} ΑΙΩΝΑ.....	146
8.1 ΑΠΟ ΤΟΝ VIETE ΣΤΟΝ DESCARTES.....	146
8.2 Η ΔΙΑΧΥΣΗ ΤΩΝ ΙΔΕΩΝ ΤΟΥ VIETE ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΑ ΚΑΙ Η ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΓΓΛΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ.....	152
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ: ΜΙΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	157
9.1 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ VIETE	157
9.2 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ CARDANO.....	161
9.3 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ DESCARTES.....	164
9.4 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ HARRIOT	165
9.5 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ NEWTON	166
ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ - ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	168
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	171
ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ.....	171
ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ.....	173

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να φωτίσει τις ιδέες που οδήγησαν στη χάραξη μιας πορείας, που κατέληξε στον μετασχηματισμό της Άλγεβρας από μια διαδικασία με σκοπό την επίλυση ενός προβλήματος ή μιας εξίσωσης, σε ένα αυτόνομο σύστημα γνώσεων, με καθολικό συμβολισμό, οργανωμένο με μαθηματική πειθαρχία, αποτελώντας παράλληλα μια συμβολική γλώσσα για γενικότερη εφαρμογή. Στον πυρήνα των ιδεών αυτών βρίσκεται η αναλυτική μέθοδος. Το πλαίσιο όμως δημιουργήθηκε με την αμφισβήτηση καίριων προϋποθέσεων της αριστοτελικής φιλοσοφίας και τη μεταστροφή της αντίστοιχης μεθοδολογίας. Η ποσοτικοποίηση των μεγεθών που ακολούθησε οδήγησε στην αναγόρευση των μαθηματικών σε λυδία λίθο κάθε θεωρίας. Εστιάζουμε στις εξελίξεις του 16^{ου} αιώνα και το έργο του François Viète. Για την κατάδειξη της ιστορικής συνέχειας είναι επιβεβλημένη η αναφορά στο έργο του Διόφαντου, των μαθηματικών του Ισλάμ, του Ramus, αλλά και των Cardano, Bombelli επιφανών εκπροσώπων της Ιταλικής σχολής του 16^{ου} αιώνα. Οι αναφορές αυτές γίνονται ως επί το πλείστον συγκριτικά, ενστερνιζόμενοι τις απόψεις του Thomas Kuhn πως μια θεωρία δεν εξελίσσεται γραμμικά, σωρευτικά, αλλά με αποκλίσεις, παλινδρομήσεις και ρήξεις. Στη συνέχεια παρουσιάζονται στοιχεία από τη διάχυση των ιδεών του Viète στην Αγγλία με αναφορές από το έργο των Harriot, Oughtred, και τέλος διερευνάται η επίδραση των ιδεών αυτών στις εξελίξεις του 17^{ου} αιώνα και την καρτεσιανή σημειολογία ειδικότερα. Έτσι η Άλγεβρα αναδεικνύεται ως το όχημα για τη μετάβαση στην Επιστημονική επανάσταση στο πεδίο των μαθηματικών, δημιουργώντας την απαραίτητη βάση, πάνω στην οποία οικοδομούνται ρηξικέλευθοι κλάδοι, όπως η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός.

ABSTRACT

The present paper attempts to shed light to the ideas that led to carving a new path, culminating in the transformation of Algebra from a process aiming at solving a problem or equation to an autonomous discipline, using universal symbols, relying on mathematical principles, and claiming overall application. At the core of these ideas lies the analytical method. The framework, however, was created by questioning founding conditions of Aristotelian philosophy and converting relevant methodology. Quantification of magnitudes that followed led to proclaiming mathematics as the touchstone of any theory. We focus on 16th c developments and the work of Francois Viète. To manifest the historic continuum reference ought to be made to the work of Diophantos, the mathematicians of Islam, Ramus, as well as, Cardano, Bombelli – prominent mathematicians of the 16th c Italian school. Such references are mainly comparative, adopting the views of Thomas Kuhn that a theory does not develop in linear or cumulative fashion, but through deviation, regression and breach. Subsequently, data regarding the diffusion of Viète's theories in England are presented with reference to the work of Harriot, Oughtred, and finally the influence of these theories upon 17th c developments and the Cartesian semiotics in particular is investigated. Thus, Algebra emerges as the vehicle of transition to the scientific revolution in the field of mathematics, providing the required basis upon which groundbreaking branches such as Analytic Geometry and Calculus, are constructed.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μιλώντας κανείς για την άλγεβρα, όταν αναφέρεται σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους είναι βέβαιο ότι μιλάει για πράγματα που σίγουρα διαφέρουν πολύ μεταξύ τους· παρεμπιπτόντως μια κοινά αποδεκτή εξήγηση για την προέλευση του όρου «άλγεβρα» θα επιχειρηθεί στη συνέχεια της εργασίας.

Για μια μεγάλη χρονική περίοδο, που περιλαμβάνει το Μεσαίωνα και την Αναγέννηση, με τον όρο άλγεβρα αναφερόμαστε στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων ή στην επίλυση εξισώσεων για τον σκοπό αυτό. Η προσέγγιση ήταν είτε πλήρως ρητορική με την απουσία οποιουδήποτε είδους συμβολισμού, όπως στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά και τα μαθηματικά του Ισλάμ, είτε στοιχειωδώς ή μερικώς συμβολική. Στις τελευταίες περιπτώσεις ετίθεντο σα σύμβολα οι συντμήσεις των αντιστοίχων λέξεων όπως στα μαθηματικά των Ιταλών αβακιστών και των Γερμανών κοσσιστών¹, αλλά και στα έργα της Ιταλικής σχολής των μαθηματικών του 16^{ου} αιώνα, περιέχοντας οπωσδήποτε κάποιο συμβολισμό για τον άγνωστο κατά το πρότυπο της ‘συγκοπτόμενης’ άλγεβρας του Διόφαντου. Σε κάθε περίπτωση στο βάθος μιας τέτοιας προσέγγισης υποκρύπτονταν η αναλυτική μέθοδος² των αρχαίων Ελλήνων, καθώς και η Διοφαντική ανασύστασή της στο αλγεβρικό πεδίο.

Συνήθως επινοούνταν διάφοροι ευφάνταστοι τρόποι και τεχνικές για τη λύση μιας μεγάλης συλλογής αντιπροσωπευτικών προβλημάτων, κυρίως από τα μαθηματικά του εμπορίου· τα πρότυπα αυτά με τη διαρκή επανάληψη αποκτούσαν το χαρακτήρα λειτουργικών συνταγών που μπορούσαν να εφαρμοστούν κατά περίπτωση αλλά σπάνια κατέληγαν σε τύπους με τη σημασία που αποδίδουμε σήμερα στον όρο αυτό.

Προσπάθειες γενίκευσης των περιπτώσεων όταν επιχειρούνταν, και αυτό δε συνέβαινε συχνά, μιας και ο στόχος και ο σκοπός παρέμενε η επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, προσέκρουαν στο έλλειμμα καθολικού συμβολισμού ικανού για να εκφράσει τα γενικευμένα αυτά συμπεράσματα. Οι λύσεις όφειλαν να επικυρωθούν μέσω ευκλείδειων συμπερασμάτων και έτσι να νοηματοδοτηθούν. Αν τα αποτελέσματα δεν ήταν δυνατόν να αντιστοιχούν σε κάποια ευκλείδεια πρόταση ή δεν αναπαρίστανται γεωμετρικά, ετίθεντο στο περιθώριο με ένα συναίσθημα αμηχανίας, παραμένοντας εκεί

¹ Άτυπες κατηγορίες σχολών μαθηματικών για τους οποίους περισσότερες επεξηγήσεις θα δοθούν στη συνέχεια της μελέτης αυτής

² Η ανακάλυψη της μεθόδου αυτής αποδόθηκε στον Πλάτωνα, ερμηνεύοντας κυρίως τη διαλεκτική που ακολουθεί σε πολλούς διαλόγους του· ένας ορισμός της αναλυτικής μεθόδου περιέχεται στα ‘Στοιχεία’ του Θέωνα του Αλεξανδρέα, καθώς και στο έργο ‘Συναγωγή’ του Πάππου του Αλεξανδρινού. Αναλυτικές επεξηγήσεις θα δοθούν στις παραγράφους 4.2.2. και 5.2 της παρούσας μελέτης.

μέχρι τη στιγμή που κάτι θα τους έδινε μαθηματική υπόσταση, υπακούοντας έτσι σε μία καίρια προϋπόθεση της αριστοτελικής φιλοσοφίας, την προτεραιότητα της ύπαρξης έναντι της γνώσης, της υπόστασης (substant) έναντι της γνωρίζουσας συνείδησης. Τέτοιου είδους εμπόδια, ‘νοητικά βασανιστήρια’, όπως τα ονόμασε ο ίδιος, συνάντησε ο Cardano όταν χρειάστηκε να χειριστεί την τετραγωνική ρίζα του μείον δεκαπέντε στην προσπάθεια του να επιλύσει ένα παλιό ευκλείδειο πρόβλημα.

Με την πάροδο του χρόνου η συμβολική αναπαράσταση κέρδιζε έδαφος, εκμεταλλευόμενη τα πλεονεκτήματα που έφερνε η γενικευμένη εφαρμογή της άλγεβρας σε πλήθος διαφορετικών πεδίων· για να συμβεί αυτό απαιτήθηκε να ξεπεραστούν διανοητικές αγκυλώσεις για τη φύση μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων, όπως η διάκριση μεταξύ αριθμού και μεγέθους ή η απαίτηση της ομοιογένειας των όρων μιας εξίσωσης ώστε αυτή να έχει νόημα, καθώς και να αμφισβητηθούν προϋποθέσεις όπως αυτή που αναφέρθηκε.

Με την οπτική του σήμερα μπορεί, ενδεχομένως, να αποδώσει κανείς λανθάνοντα αλγεβρικά συμπεράσματα σε γεωμετρικές προτάσεις στους αρχαίους Έλληνες, ειδικότερα στα ‘Στοιχεία’ του Ευκλείδη και στις προτάσεις, για παράδειγμα, του βιβλίου II – αναφερόμαστε σε αυτό που αποδίδεται από κάποιους³ με τον όρο ‘γεωμετρική άλγεβρα’ - αλλά και σε γεωμετρικές λύσεις αλγεβρικών εξισώσεων από τους Άραβες μαθηματικούς, όπως η γεωμετρική επίλυση μιας μορφής τριτοβάθμιας εξίσωσης από τον Πέρση μαθηματικό του 11^{ου} αιώνα Umar al-Khayyami πιο γνωστού με το όνομα Omar Khayam.

Είναι ένα αμφιλεγόμενο ζήτημα όμως αν αυτό που υποκρύπτεται στις περιπτώσεις αυτές είναι όντως ένα είδος «άλγεβρας», με τα επιχειρήματα που στηρίζουν την άποψη αυτή να μην είναι ιδιαιτέρως πειστικά.

Σήμερα εβρισκόμενοι στο αντιδιαμετρικό σημείο του φάσματος αυτού λέγοντας άλγεβρα εννοούμε μια γενική θεωρία στηριζόμενη σε έναν καθολικό συμβολισμό που επικεντρώνεται στη μελέτη των δομών και των ιδιοτήτων τους, έτσι η άλγεβρα από την τέχνη του υπολογισμού στενά συνδεδεμένη με τις εμπορικές δραστηριότητες μετασχηματίστηκε σε ένα θεωρητικό αντικείμενο δομημένο με μαθηματική πειθαρχία. Σημαντικά βήματα για τη μετάβαση από τη μια θεώρηση ως την άλλη έγιναν στο 16^ο και στις αρχές του 17^{ου} αιώνα και αυτά ακριβώς διερευνούμε στην παρούσα εργασία εστιάζοντας στο έργο του François Viète.

³ Ένας από αυτούς είναι ο ιστορικός των μαθηματικών Van der Waerden

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: Η ΕΥΡΩΠΗ ΣΤΑ ΜΕΣΑ ΤΟΥ 16^{ου} ΑΙΩΝΑ

1.1 ΓΕΩΠΟΛΙΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Αρχίζουμε την εργασία αυτή με μια συνοπτική παρουσίαση της γεωπολιτικής και κοινωνικής κατάστασης της Ευρώπης τη χρονική περίοδο που θα μας απασχολήσει, δηλαδή τα τέλη του 16^{ου} και τις αρχές του 17^{ου} αιώνα. Αυτό κρίνεται απαραίτητο για το λόγο ότι όπως το κάθε λογής σύστημα γνώσεων, έτσι και τα μαθηματικά, δεν μπορούν να ειδωθούν και να μελετηθούν αποκόπτοντάς το από το κοινωνικό και πολιτισμικό γίγνεσθαι και τις κοινωνικές επιταγές της εποχής, καθώς είμαστε πεπεισμένοι ότι μέρος αυτών των κοινωνικών επιταγών είναι και τα ίδια τα μαθηματικά, καθώς η διαδρομή που τελικά ακολουθούν μέσα από ένα πλήθος πιθανών διαφορετικών διαδρομών είναι αδιάρρηκτα συνδεδεμένη και πρέπει να ερμηνεύεται υπό το πρίσμα της αντίστοιχης ιστορικής και πολιτισμικής συγκυρίας.

Το ιστορικό περίγραμμα μέσα στο οποίο διαδραματίζονται οι εξελίξεις στο πεδίο της άλγεβρας που θα μελετηθούν παρακάτω και περιλαμβάνει το 16^ο αιώνα μέχρι τα μέσα περίπου του 17^{ου} αιώνα προσδιορίζεται από χαρακτηριστικά και κομβικής σημασίας ιστορικά γεγονότα όπως η ανακάλυψη της αμερικανικής ηπείρου το 1492 με τους νέους ορίζοντες που διανοίχθηκαν και τη διεκυστίνδα για την επικράτηση ή την απόκτηση επιρροών μεταξύ των ευρωπαϊκών δυνάμεων στη νέα και γεμάτη προσδοκίες αυτή γη, αλλά και την αλλαγή κοσμολογικών αντιλήψεων που επέφερε η ανακάλυψη αυτή, η πρώτη αποτυχημένη πολιορκία της Βιέννης από τους Οθωμανούς το 1529 καθώς μια διαφορετική έκβαση της πολιορκίας αυτής θα σηματοδοτούσε πιθανότατα μια εντελώς διαφορετική πορεία της ευρωπαϊκής ιστορίας, η σφαγή Προτεσταντών από Καθολικούς τη νύχτα του Αγίου Βαρθολομαίου στο Παρίσι 24 Αυγούστου του 1572 , και περισσότερο για λόγους συμβολισμού και όχι φυσικά ιστορικής σημασίας, αναφέρουμε τη δίκη του Γαλιλαίου το 1633, ως ένα ακόμη ακραίο παράδειγμα ενός κλίματος θρησκευτικής τρομοκρατίας και ελλείμματος της δυνατότητας ελεύθερης διατύπωσης επιστημονικών ιδεών και θεωριών.

Τα μέσα του 16^{ου} αιώνα λοιπόν βρίσκουν τη Γαλλία έντονα διαιρεμένη πολιτικά, κοινωνικά και θρησκευτικά με φόντο τη διαμάχη Καθολικών και Προτεσταντών -

ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΚΑ ΔΟΓΜΑΤΑ

- ΚΑΘΟΛΙΚΟΙ
- ΠΡΟΤΕΣΤΑΝΤΕΣ
- ΚΑΘΟΛΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΠΟΥ ΔΕΧΤΗΚΑΝ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΡΡΩΜΙΣΗΣ

0 100 200 400 χιλιόμετρα

Στην Ιταλική χερσόνησο, η βόρεια Ιταλία ήταν διαχωρισμένη σε μικρά κρατίδια ενώ οι πόλεις της ήταν αποδυναμωμένες, ενώ ο νότος, συμπεριλαμβανομένης της Σικελίας, ήταν υπό την Ισπανική κυριαρχία

Οι αρχές του 17^{ου} αιώνα βρίσκει την κεντρική Ευρώπη στη δίνη ενός αιματηρού πολέμου που έχει διάρκεια 30 χρόνια γνωστός και ως Τριακονταετής πόλεμος 1618-1648 με ποικίλα αίτια και φόντο τη θρησκευτική διαμάχη Καθολικών και Προτεσταντών. Είναι η χρονική περίοδος που γενικεύεται η αμφισβήτηση της Ρωμαιοκαθολικής Εκκλησίας και του Παπικού κατεστημένου.

Η γερμανόφωνη Ευρώπη ως συνέπεια του πολέμου αυτού ήταν εξαντλημένη, κατακερματισμένη και οικονομικά αδύναμη και μάλιστα σε σχέση με τη Γαλλία του Λουδοβίκου ΙΔ και των επεκτατικών επιδιώξεων του, ενώ η Ολλανδία ζει το χρυσό αιώνα της με μεγάλη οικονομική ανάπτυξη λόγω εμπορίου και αποικιακής πολιτικής.

Στην Αγγλία μετά τον «Πόλεμο των Ρόδων» έχουμε μια μακρά περίοδο αβεβαιότητας με την προσπάθεια κοινοβουλευτικής εκδημοκρατισμού της πολιτικής ζωής από τη μια και την παλινόρθωση της Βασιλείας από την άλλη. Βρισκόμαστε λίγο πριν την «Ένδοξη Επανάσταση» (Glory Revolution) και την απόδοση κάποιου είδους συντάγματος στον Αγγλικό λαό, γεγονός ασφαλώς πρωτοποριακό για τα δεδομένα της εποχής.



Χάρτης της Ευρώπης γύρω στο 1600

1.2 ΠΟΡΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΗ – Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΤΟΝ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΙΣΜΟ

Η φυσική φιλοσοφία καθώς και οι οντολογικές ερμηνείες που κυριάρχησαν σε ολόκληρο το Μεσαίωνα είχαν κατά μεγάλο μέρος κληρονομηθεί από την αρχαιότητα, έχοντας διαποτιστεί από τα Πλατωνικά, αλλά κυρίως τα Αριστοτελικά δόγματα και την μεθοδολογία, που με την τελεολογική κοσμολογία της και την φυσική αποδοχή του Πτολεμαϊκού μοντέλου δεν έρχονταν σε πλήρη ρήξη με τις θεολογικές πεποιθήσεις της καθολικής εκκλησίας για την ‘εξ’ αποκαλύψεως’ αλήθεια μέσω των Γραφών και την ερμηνεία του κόσμου με αυτό το θεοκρατικό πρίσμα. Αργότερα όταν αυτό δε συνέβαινε, δηλαδή η διάσταση θεολογικών και φυσικών – σκόπιμα αποφεύγεται ο όρος επιστημονικός - απόψεων ήταν πιο εμφανής, έπρεπε να επινοηθεί μια συμβατή λύση, επικράτησε έτσι ένας συμβιβασμός ο λεγόμενος ως ‘διπλή αλήθεια’ όπου ήταν αποδεκτή η διερεύνηση των φαινομένων από τον στοχαστή και η εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων τα οποία όμως επουδενί λόγο δεν μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τη γενικότερη κοσμολογική ερμηνεία του κόσμου.

Η Αριστοτελική μεθοδολογία υιοθετούσε ως μέθοδο εξήγησης των παρατηρούμενων φαινομένων μια καθαρά διανοητική διεργασία στην οποία εκπονούνταν μια γενική θεωρία που ικανοποιούσε τη λογική, φυσικές αλλά και μεταφυσικές θέσεις –με την έννοια των δογμάτων - και δεν έρχονταν σε σημαντική αντίθεση με τα ίδια τα φαινόμενα. Κατόπιν επινοούνταν ‘επί τούτω’ (ad hoc) υποθέσεις για να επιτευχτεί η συμβατότητα της γενικής αυτής θεωρίας με τα παρατηρούμενα φαινόμενα, δηλαδή το Πλατωνικό

«σώζειν τα φαινόμενα»

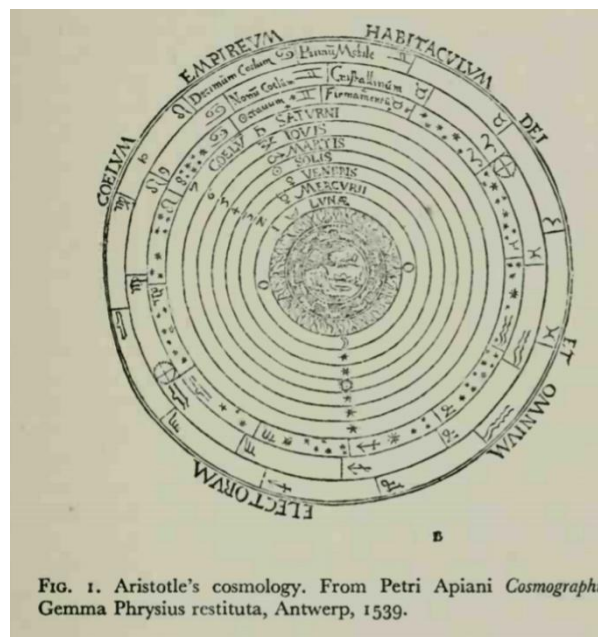
Η Πλατωνική αυτή παράδοση καταγράφεται στο ‘Υπόμνημα’ του Συμπλίκιου ως εξής:

Ο Πλάτων ο οποίος δέχεται ως αρχή ότι τα ουράνια σώματα εκτελούν κυκλικές, ομαλές και σταθερά κανονικές κινήσεις πρότεινε στους μαθηματικούς το εξής πρόβλημα: ποιες ομαλές, κυκλικές και απολύτως κανονικές κινήσεις να ληφθούν ως υποθέσεις, ώστε να είναι δυνατόν να σωθούν τα φαινόμενα που παρατηρούνται στους πλανήτες;⁴

⁴ Duhem Pierre *Σώζειν τα φαινόμενα* Εκδόσεις Νεφέλη Αθήνα 2007, σελίδες 17-18

Έτσι στο Πτολεμαϊκό γεωκεντρικό μοντέλο προτάσσεται το δόγμα των τέλειων γεωμετρικών σχημάτων, των κύκλων, για να εξηγηθούν οι κινήσεις των πλανητών, και έπειτα επινοείται η θεωρία των επικύκλων και των εκκέντρων κύκλων, για να εξηγηθεί η παρατηρούμενη αντινομία με την φαινόμενη κίνηση των πλανητών, δηλαδή να σωθούν τα φαινόμενα.

Ο Αριστοτέλης που φαίνεται να είναι γνώστης της Πλατωνικής μεθόδου την οποία διαφοροποιεί θέτοντας φυσικές - αλλά και μεταφυσικές⁵ - συνθήκες στις υποθέσεις του και επιλέγει τη θεωρία που σώζει τα φαινόμενα με βάση αυτές.



Η κοσμολογική ερμηνεία από τον Αριστοτέλη (Crombie 1953 σελ 53)

Ο νομιναλισμός⁶, που είχε αναδυθεί ως φιλοσοφικό ρεύμα τον 14^ο αιώνα, αντίρροπο του ρεαλισμού και του κατεστημένου του, που εφαρμόζονταν από την παπική έδρα και είχε πάρει τη μορφή δόγματος, απέρριπτε την τελεολογική ερμηνεία της φύσης, και τον σχολαστικισμό⁷ υπέρ της χρήσης εμπειρικών δεδομένων αντί εννοιών χωρίς πραγματική

⁵ Για παράδειγμα στα *Φυσικά* το «κινούν ακίνητο» [Θεός], είναι η κινούσα πρώτη αιτία, ενώ στα *Μεταφυσικά* παρουσιάζεται ως νους και ως τελική αιτία κίνησης του Κόσμου, [Καργόπουλος Φ. *Εισαγωγή στη Συμβολική Λογική* σελ. 306]

⁶ Νομιναλισμός είναι ένα φιλοσοφικό ρεύμα που διατείνεται πως οι καθολικές έννοιες δεν έχουν αντικειμενική ανεξάρτητη οντότητα, έχουν λάβει απλώς ονόματα, και είναι αντίρροπο ρεύμα του ρεαλισμού που βασίζεται στη θέση ότι η πραγματικότητα υπάρχει ανεξάρτητα από το πόσο καλά την αντιλαμβανόμαστε.

⁷ Σχολαστικισμός είναι το φιλοσοφικό ρεύμα που αποσκοπούσε στη συμφιλίωση της φιλοσοφίας που αναπτύχθηκε από τους αρχαίους κλασσικούς με τη μεσαιωνική θεολογία

υπόσταση. Μέσα σε ένα κλίμα κριτικής αμφισβήτησης του Αριστοτελισμού δημοσιεύονται το 1543 δύο βιβλία που σηματοδότησαν ίσως την αλλαγή στην πορεία της επιστήμης. Πρόκειται για το *De revolutionibus orbium coelestium Libri VI* (Εξι βιβλία για τις περιστροφές των Ουρανίων Σφαιρών) του μαθηματικού και αστρονόμου Νικόλαου Κοπέρνικου (1473 – 1543) και στο οποίο εισάγονταν η θέση ότι η γη κινείται γύρω από τον Ήλιο, και το *De humani corporis fabrica libri septem* (Επτά βιβλία Περί της κατασκευής του ανθρώπινου σώματος) του Φλαμανδού ανατόμου Ανδρέα Βεσάλιου (Andreas Vesalius 1514 - 1564). Αν κοιτάξει κανείς προσεκτικά τις καριέρες των δύο αυτών ανδρών θα παρατηρήσει ένα κοινό χαρακτηριστικό στοιχείο: και οι δύο διετέλεσαν καθηγητές στο Πανεπιστήμιο της Πάδουας (Padua) που είναι η σημερινή Padova της επαρχίας του Veneto στη Βόρεια Ιταλία. Σίγουρα το γεγονός μόνο συμπτωματικό δεν μπορεί να είναι και αξίζει να διερευνηθεί λίγο περισσότερο. Σημειώνουμε δε ότι από το Πανεπιστήμιο αυτό ξεκίνησε τη σταδιοδρομία του και ο Γαλιλαίος, και ήταν το μόνο που δεν ήταν θεολογική σχολή.

Το πρωτότυπο στοιχείο στο Πανεπιστήμιο της Πάντοβα ήταν να οριστεί συστηματικά ως «ευρετική διαδικασία» στις αιτίες των φαινομένων η μέθοδος της αναγωγής, με τρόπο που να αποφεύγεται έτσι ένας ανεξέλεγκτος ενορατισμός. Αυτή αποτελείται από τα στάδια της ανάλυσης και της σύνθεσης και ανασύρθηκε από τις αρχαιοελληνικές μεθόδους και τις επαναδιατυπώσεις τους μέσα από το έργο του Πάππου του Αλεξανδρινού, όπως θα αναλυθεί διεξοδικότερα παρακάτω.

Η μεταστροφή της μεθοδολογίας και της μεταφυσικής προτάσσει τώρα τα εμπειρικά δεδομένα, τη μέτρηση, και την αναλυτικο-συνθετική μέθοδο αντί των θεολογικών ή κοσμολογικών δογμάτων για την συναγωγή υποθέσεων ή ακόμη περισσότερο την επικύρωση τους, με δοκιμή και σφάλμα, διόρθωση και επιβεβαίωση. Οι ακριβείς μετρήσεις του Brache και το έργο του Kepler, που εν πολλοίς στηρίζεται σ' αυτές, και με τους νόμους του της ελλειπτικής κίνησης των πλανητών πλήττει σοβαρά το νεοπλατωνικό δόγμα της τέλει αρμονίας μέσω της κυκλικής κίνησης τους καθώς και τις θεοκρατικές ερμηνείες. Οι αλλαγές αυτές είτε ειδομένες κάτω από το πρίσμα του Ορθολογισμού, είτε κάτω από το πρίσμα του Εμπειρισμού⁸ δεν θα μπορούσαν αφ' εαυτές να σηματοδοτήσουν την επιστημονική επανάσταση της Αναγέννησης. Χρειάζονταν μια ριζική μεταβολή του

⁸ Οι ορθολογιστές πίστευαν ότι η αξιοπιστία των παρατηρήσεων θα πρέπει να θεμελιώνεται στον Λόγο, ενώ οι εμπειριστές ότι ο Λόγος είναι προϊόν της εμπειρίας.

τρόπου που ο ανθρώπινος νους ερμηνεύει τον κόσμο, μια αλλαγή ‘παραδείγματος’ - με την έννοια που προσέδωσε στη λέξη ο Kuhn-. Αυτό ήταν:

‘η κατανόηση της φύσης ως ενός μηχανικού συστήματος’.

και μια αντίληψη που επικράτησε να ονομάζεται Νευτώνια.

Η Αριστοτελική κοσμολογία αναγκάστηκε να υποχωρήσει μετά τη σύγκρουση της με το θεολογικό κατεστημένο. Ανέκαμψε, αργότερα αλλά το σπέρμα της αμφιβολίας για τις διδαχές του «Φιλοσόφου». Κατά πολλούς η συντηρητική αντεπίθεση και ο κλυδωνισμός της αυθεντίας του Αριστοτέλη υπήρξαν το έναυσμα για τη γέννηση της νεώτερης επιστήμης. (Crombie 2006)

Παρά τις όποιες επισημάνσεις για την επιφανειακή ίσως κατανόηση του στην Αριστοτελική λογική και διαλεκτική, που είχε χαρακτηριστεί στο Μεσαίωνα, σαν την ‘τέχνη των τεχνών και την επιστήμη των επιστημών’ ο Pierre de Ramée (Petrus Ramus)⁹ φέρεται να είπε το 1536 μια φράση που είναι χαρακτηριστική μιας ακραίας κριτικής στάσης στον Αριστοτελισμό και αποδίδεται από τον μελετητή του J. Ong ως εξής:

‘Όλα τα πράγματα που είπε ο Αριστοτέλης είναι αβάσιμα επειδή είναι ελλιπώς συστηματοποιημένα και μπορούν να ανακληθούν στη μνήμη μόνο με τη χρήση αυθαίρετων μνημονικών κατασκευών’

Σύμφωνα πάντα με τον Ong μια τέτοια εντυπωσιακή θέση ήταν στην πραγματικότητα μια θέση ρουτίνας εκείνο τον καιρό. Η αμφισβήτηση της Αριστοτελικής οντολογίας και στο επίπεδο της αριθμητικής δεν άργησε να έρθει. Το 1547 μια από τις ερωτήσεις που έθεσε ο L. Ferrari στον Tartaglia σε κάποια από τις δημόσιες μονομαχίες τους ήταν η εξής:

Είναι η μονάδα αριθμός;

Ο Tartaglia φυσικά διαμαρτυρήθηκε ότι το ερώτημα ήταν μεταφυσικό, και απάντησε υπεκφεύγοντας ότι η μονάδα ήταν δύναμι αριθμός και όχι ενεργεία. Το μεταφυσικό αυτό ερώτημα ανακύπτει από την Αριστοτελική διάκριση μεταξύ αριθμού και μεγέθους, αρκεί να θυμηθεί κανείς τους ορισμούς α, β του VII Βιβλίου των ‘Στοιχείων’ του Ευκλείδη

Α’ Μονάς ἐστίν, καθ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἔν λέγεται.

Β’ Ἀριθμός δέ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

⁹ Στον Petrus Ramus (1515-157) Γάλλο ουμανιστή και επιστήμονα της λογικής θα αναφερθούμε εκτενώς παρακάτω.

Στο έργο του *L'Arithmetique* (1585), ο Simon Stevin¹⁰ υιοθετώντας ένα βασικό φιλοσοφικό επιχείρημα για να ισχυριστεί ότι η μονάδα είναι αριθμός, στέκεται κριτικά απέναντι στις αρχαιοελληνικές θεωρήσεις.

Αυτό είναι το εξής: αφού το μέρος είναι ομοειδές με το όλο, και αφού η μονάδα είναι μέρος μια πολλαπλότητας μονάδων - δηλαδή ενός (Ευκλείδειου) αριθμού – άρα και αυτή είναι αριθμός.

Μάλιστα είναι τόσο πεπεισμένος για την ορθότητα των συλλογισμών του που γράφει με κεφαλαία γράμματα στην εναρκτήρια πρόταση του βιβλίου του

Η ΜΟΝΑΔΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ

Αυτή η διαφοροποίηση του Stevin καθώς και η φιλοσοφική θέση που ενστερνίζεται του επιτρέπουν να επεκτείνει την έννοια του αριθμού και στους άρρητους χωρίς να χρειάζεται να διακρίνει απαραίτητα τις διάφορες κλάσεις τους όπως κάνει ο Ευκλείδης στο X βιβλίο του. Φεύγοντας έτσι από τη διακριτότητα των αριθμών έθεσε τις βάσεις για την έννοια της συνέχειας τους, που σήμερα γίνεται αντιληπτή μέσω της συνεχούς αναπαράστασης τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Κάπως έτσι υπερβαίνοντας οντολογικές αγκυλώσεις σε διαφορετικές χρονικά και ιστορικά συγκυρίες οι Bombelli και Leibniz αποδέχτηκαν έννοιες που σήμερα είναι γνωστές ως μιγαδικός αριθμός και διαφορικό αντίστοιχα.

Η ιστορική, κοινωνική και πολιτισμική συγκυρία λοιπόν στα τέλη του 16^{ου} και τις αρχές του 17^{ου} προσέδιδε στα μαθηματικά, όχι απλά μια επικυρωτική, αλλά και μια αυθύπαρκτη οντολογική υπόσταση, **πέρα από την τελεολογία της γεωμετρικής επαλήθευσης ή της έκφρασης των νεοπυθαγόρειων πεποιθήσεων για την τάξη και αρμονία του κόσμου. Η νέα αυτή τάση έψαχνε να βρει τους εκφραστές της, οι οποίοι και δεν άργησαν να βρεθούν. Σ' αυτούς περίοπτη θέση κατέχει ο François Viète που με το έργο του φώτισε το δρόμο προς μια 'νέα άλγεβρα'. Στο έργο αυτό θα αναφερθούμε εκτενώς παρακάτω.**

¹⁰ Stevin Simon (1548 – 1620) Φλαμανδός μαθηματικός του οποίου το έργο στα δεκαδικά κλάσματα συνεισέφερε σημαντικά στην κατάργηση της Αριστοτελικής διάκρισης μεταξύ αριθμού και μεγέθους

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΟΥ ΚΛΗΡΟΔΟΤΟΥΝΤΑΙ ΣΤΟΝ 16ο ΑΙΩΝΑ

2.1

Η ΚΛΗΡΟΝΟΜΙΑ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Ο Διόφαντος, ο εξέχων αυτός Έλληνας μαθηματικός, έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου τον 3^ο μ.Χ. αιώνα και υπολογίζεται με μεγάλη πιθανότητα ότι βρέθηκε στην ακμή του περίπου το 250 μ.Χ. Εικάζουμε την πιθανή αυτή χρονολογία με βάση τις αναφορές, σε σωζόμενα έργα του, σε πρόσωπα που οι πληροφορίες για τις ημερομηνίες της ζωής τους είναι ακριβέστερες, έτσι γνωρίζουμε ότι ήταν μεταγενέστερος από τον Υψικλή (1^{ος} αιώνας π.Χ.) τον οποίο αναφέρει στην πραγματεία του ‘Περί πολυγώνων αριθμών’, και προγενέστερος της Υπατίας (4^{ος} αιώνας μ.Χ.) η οποία είχε γράψει ένα υπόμνημα και σχόλια στο έργο του ‘Αριθμητικά’. Σημαντική πληροφορία που συνηγορεί υπέρ της επιβεβαίωσης της χρονολογίας αυτής είναι ένα χωρίο του Μιχαήλ Ψελλού (11^{ος} αιώνας μ.Χ.) που περιέχεται στον 2^ο τόμο της εκδόσεως του Paul Tannery και αναφέρεται σε κάποιον λογιώτατο Ανατόλιο που συνέλεξε και επαναδιατύπωσε συνοπτικότερα μέρος του έργου του Διόφαντου. Ο Ανατόλιος ήταν λόγιος και μαθηματικός στην Αλεξάνδρεια και έγινε επίσκοπος Λαοδικείας το 270 μ.Χ. Αν όντως είναι το ίδιο και το αυτό πρόσωπο με τον Ανατόλιο που προαναφέρθηκε, και μνημονεύεται από τον Ιάμβλιχο, είναι εύλογο να εικάσει κανείς ότι ο Διόφαντος ήταν προγενέστερος του Ανατολίου¹¹.

Γίνεται φανερό λοιπόν με τον τρόπο που επιχειρείται η συλλογή πληροφοριών για τη ζωή του ότι πολύ λίγα είναι γνωστά για τη ζωή του Διόφαντου. Πέραν του ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια είναι γνωστό ότι απέκτησε έναν γιο από ένα γάμο που είχε συνάψει. Ο γιος του πέθανε όταν έγινε 42 περίπου ετών. Το γεγονός αυτό, όπως είναι φυσικό, συντάραξε τον Διόφαντο που τότε ήταν σε ηλικία 80 ετών και πιθανότατα συντόμευσε τον χρόνο του υπολοίπου της ζωής του· το τέλος αυτό ήρθε 4 χρόνια αργότερα στο ογδοηκοστό τέταρτο έτος της ζωής του. Πολλές από τις πληροφορίες αυτές περιέχονται κρυμμένες στο

¹¹ Πολλές από τις παραπάνω πληροφορίες αντλήθηκαν από το κείμενο που συνέγραψε ο Paul Tannery, και αποτελεί την Εισαγωγή του βιβλίου *Διόφαντος Αριθμητικά* του Σταμάτη Ε. Αθήνα 1963

παρακάτω επίγραμμα¹² του οποίου η αποκρυπτογράφηση και επίλυση οδηγεί στον αριθμό 84.

Στον τάφο αυτό κείται ο Διόφαντος...[και] με επιστημονικό τρόπο λέει τη διάρκεια της ζωής του. Ο Θεός του χάρισε την παιδική ηλικία το ένα έκτο της ζωής του, και μετά από ένα δωδέκατο έντυσε με γένια τα μάγουλα του. Του άναψε τη δάδα του γάμου μετά από το ένα έβδομο και πέντε χρόνια μετά τον γάμο του χάρισε έναν γιο.

Αλίμονο! Ταλαίπωρο αργογεννημένο παιδί· όταν έφτασε τα μισά χρόνια της ζωής του πατέρα του, η σκληρή Μοίρα τον πήρε. Αφού παρηγορήθηκε τέσσερα χρόνια με την επιστήμη των αριθμών, τερμάτισε ο βίος του'

Ο συμβολισμός του Διόφαντου

Το ρηξικέλευθο έργο του Διόφαντου 'Αριθμητικά', αποτελούνταν από 13 βιβλία ευθυγραμμιζόμενο με την αντίστοιχη Ευκλείδεια παράδοση των αντιστοίχου αριθμού βιβλίων των 'Στοιχείων', με σωζόμενα όμως μόνο τα 6 στα Ελληνικά¹³. Στο έργο αυτό εισήγαγε συντομογραφίες για τους διάφορους όρους που υπεισέρχονται στις εξισώσεις, στις οποίες ανάγεται η λύση προβλημάτων, εφαρμόζοντας για πρώτη φορά έναν **αμιγώς αναλυτικό τρόπο** επεξεργασίας των εξισώσεων αυτών. Η λύση κάθε προβλήματος άρχιζε με την υπόθεση ότι η απάντηση x , έχει βρεθεί, κατόπιν οι συνέπειες της υπόθεσης του προβλήματος ακολουθούνται ως το σημείο εκείνο που με τη λύση μιας απλής εξίσωσης, ήταν δυνατόν να προσδιοριστεί μια τιμή για το x . Η αντίστροφη πορεία της σύνθεσης δηλαδή της απόδειξης ότι η λύση που βρέθηκε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος δεν δίνονταν ποτέ από τον Διόφαντο. Έτσι το έργο του Διόφαντου, σύμφωνα με τον Katz, βρίσκεται στο αντίθετο άκρο του φάσματος από εκείνο που καταλαμβάνει το **γνήσια συνθετικό έργο** του Ευκλείδη.

¹² Επίγραμμα 126, Βιβλίο XIV της *Ελληνικής Ανθολογίας* (π. 500 μ. Χ), Katz V. *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Π.Ε.Κ σελ. 191.

¹³ Το 1968 ο Fuat Sezgin βρήκε τέσσερα προηγουμένως άγνωστα βιβλία των Αριθμητικών στο βωμό του Imam Reza στην ιερή πόλη Mashhad στο βορειοανατολικό Ιράν. Τα τέσσερα αυτά βιβλία θεωρούνται ότι έχουν μεταφραστεί από τον Qusta ibn Luqa. Στο αραβικό κείμενο ελλείπει ο μαθηματικός συμβολισμός, και φαίνεται να βασίζεται σε μεταγενέστερα σχόλια πιθανότατα αυτά της Υπατίας (370-415 μ. Χ.). [Diophantus of Alexandria (Greek Mathematician) Encyclopedia Britannica. Retrieved 11 April 2013]].

Ο άγνωστος x συμβολίζεται με το σύμβολο ς , και αποτελεί συναίρεση των δύο πρώτων γραμμάτων της λέξης *αριθμός*. Το ίδιο σύμβολο χρησιμοποιείται για δύο ή περισσότερους αγνώστους του ίδιου προβλήματος.

ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ιδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλήθος μονάδων ἀόριστον, ἀριθμὸς καλεῖται καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς .

Η μονάδα συμβολίζεται με

$\mathring{M}$

ενώ το τετράγωνο και ο κύβος του αγνώστου συμβολίζονται αντίστοιχα με τα σύμβολα

Δ^Y, K^Y

Η σε σειρά παράθεση συμβόλων δηλώνει πρόσθεση ενώ η αφαίρεση δηλώνεται ως ‘λείψις’ και συμβολίζεται με το σύμβολο

Λ

Έτσι την παράσταση $4x^2+16-16x$, ο Διόφαντος τη γράφει

$\Delta^Y \overline{\delta \mathring{M} \iota \varsigma} \Lambda \varsigma \overline{\iota \varsigma}.$

Προχωρά όμως ένα βήμα πιο πέρα από το σημείο που σταματά η ελληνική παράδοση ασχολούμενος με δυνάμεις μεγαλύτερες του τρία και μέχρι την έκτη δύναμη, για το λόγο αυτό προεξέτεινε το συμβολισμό ώστε να περιλαμβάνει τέτοιες δυνάμεις. Έτσι η τέταρτη, η πέμπτη και η έκτη δύναμη του αγνώστου συμβολίζονται με $\Delta \Delta^Y$ (*Δυναμοδύναμις*), ΔK^Y (*Δυναμόκυβος*) και $K^Y K$ (*Κυβόκυβος*) αντίστοιχα.

Ο Διόφαντος χρησιμοποιεί συμβολισμό και για τις κλασματικές εκφράσεις γράφοντας δίπλα στην αντίστοιχη δύναμη ένα χ ελαφρώς αποκλίνων και ο αριθμητικός συντελεστής τοποθετείται στο τέλος της έκφρασης αναπαριστάμενος με γράμματα σύμφωνα με την ελληνική παράδοση. Έτσι την παράσταση $8/x^2$ θα τη γράψει

$\Delta^Y \times \eta = \frac{8}{x^2}.$

Το «είδος» του Διόφαντου

Ο Διόφαντος χρησιμοποιεί για έναν άγνωστο όρο τη λέξη 'είδος', έτσι οι διαφορετικές δυνάμεις του αγνώστου που εμφανίζονται σε μια εξίσωση αποκαλούνται τα 'είδη', υιοθετώντας πιθανότατα τον αντίστοιχο Αριστοτελικό όρο. Στο παρακάτω απόσπασμα της εισαγωγής των 'Αριθμητικών' περιγράφει σαφώς τη διαδικασία και τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει κανείς όταν εργάζεται με τα 'είδη', και του οποίου αποσπάσματος θα παρουσιάσουμε τη μετάφραση. Ο όρος αυτός 'είδος' όπως θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο εμφανίζεται και στο έργο του Viète, με τη συμβολική λογιστική να αποδίδεται στο λατινικό κείμενο με τον όρο 'logistique speciosa', σε αντιδιαστολή με την αριθμητική λογιστική 'logistique numerosa', εγείροντας πληθώρα πιθανών ερμηνειών.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται εἶδη τινὰ ἴσα εἴςαι τοῖς αὐτοῖς, μὴ ὁμοπληθῇ δέ, ἀπὸ ἐκατέρων τῶν μερῶν δεήσῃ ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἐν εἶδος ἐνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐν ἐλλείψει τινὰ εἶδη, διήσῃ προσθεῖναι τὰ λείποντα εἶδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἐκατέρων τῶν μερῶν τὰ εἶδη ἐνυπάρχοντα γένηται, καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἐκατέρῳ τῶν μερῶν ἐν εἶδος καταλειφθῇ.

‘Μετά από αυτά, αν από κάποιο πρόβλημα προκύπτει εξίσωση ορισμένων ειδών [όρων] με διαφορετικό πλήθος, πρέπει να αφαιρείς ίσα από δύο μέλη, έως ότου απομείνει ένα είδος ίσο προς άλλο είδος. Αν σε κάποιο μέλος ή και στα δύο μέλη υπάρχει έλλειψη [διαφορά] ορισμένων ειδών, πρέπει να προσθέσεις τα λείποντα και στα δύο μέλη, έως ότου δημιουργηθεί ύπαρξη [αθροίσματα] και στα δύο μέλη και πάλι να αφαιρείς ίσα από ίσα έως ότου να απομείνει σε κάθε μέλος ένα είδος. Να επεξεργάζεσαι αυτά που λένε τα προβλήματα, ώστε αν είναι δυνατόν, να απομείνει ένα είδος σε κάθε μέλος, κατόπιν θα σου δείξουμε πως λύνεται ένα πρόβλημα όταν σε κάθε μέλος απομείνει μόνο από ένα είδος.’

Στο παραπάνω απόσπασμα ο Διόφαντος διατυπώνει τις δύο βασικές πράξεις του λογισμού των εξισώσεων, που χρησιμοποιούνται και σήμερα, τη μεταφορά των αφαιρούμενων «ειδών» από το ένα μέρος στο άλλο, ώστε να υπάρχουν σε μια εξίσωση μόνο προστιθέμενα «είδη» και την αναγωγή των ομοίων όρων. Με τις πράξεις αυτές ο Διόφαντος μετασχηματίζει τις εξισώσεις των *Αριθμητικών* ώστε να λάβουν ή την απλή μορφή της ισότητας δύο «ειδών» $ax^m = bx^n$, ή όταν αυτό δεν είναι δυνατόν, τη μορφή μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Οι δύο αυτές βασικές πράξεις αποδόθηκαν από τους Άραβες με

τους όρους *al-jabr* και *al-muqabala*. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε στην επόμενη παράγραφο.

Ο Διόφαντος χρησιμοποιεί τον όρο «είδος» αυτό σε πολλά άλλα σημεία της εισαγωγής των *Αριθμητικών* όπως παρακάτω:

Τῆς οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὕσης καὶ ἐστώσης αἰ, τὸ πολυπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται.

και για τις κλασματικές εκφράσεις σημειώνει:

Θὰ ἔχη δὲ ἐκάστη τοιαύτη κλασματικὴ μονὰς γραμμὴν x ἐπὶ τὸ σημεῖον τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ συμβολίζουσιν τὸ εἶδος.

Ο Διόφαντος γνώριζε τους κανόνες που διέπουν τον πολλαπλασιασμό με τα είδη· ενδιαφέρον παρουσιάζει η ορθή εφαρμογή του κανόνα όπου εμπλέκεται το ‘μείον’ και αναφέρεται στην εισαγωγή των *Αριθμητικών* με τον κανόνα

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὑπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὑπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον Ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον, Λ.

Δηλαδή πλην επί πλην δίνει συν, που είναι η ερμηνεία των όρων ‘ύπαρξιν’ και ‘λείψιν’ για τον Διόφαντο, και πλην επί συν δίνει πλην. Να τονιστεί ότι οι παραπάνω είναι κανόνες απαραίτητοι για τον πολλαπλασιασμό παραστάσεων όπου εμπλέκεται το σύμβολο της αφαίρεσης, αυτή είναι και η έννοια του συμβόλου ‘λείψις’, και δεν αφορά ένα λογισμό με αρνητικούς αριθμούς μιας και για το Διόφαντο δεν υφίστανται οι αριθμοί αυτοί.

Η καινοτομία όμως του Διόφαντου δεν συνίσταται τόσο στην επινόηση των παραπάνω συντομογραφιών. Το κρίσιμο στοιχείο κατά τον ιστορικό των μαθηματικών F. Hultsch συνίσταται στο ότι:

‘εισήγαγε τις συντομογραφίες στο λογιστικό μέρος της επιλυτικής διαδικασίας, κάνει υπολογισμούς με τον άγνωστο, με άλλα λόγια, ο Διόφαντος αναπτύσσει έναν λογισμό με τα «είδη» που δηλώνουν οι συντομογραφίες, επεκτείνοντας με τον τρόπο αυτό το πεδίο εφαρμογής των αριθμητικών πράξεων ώστε να περιλαμβάνει όχι μόνο τους κατονομασμένους αριθμούς αλλά και τα «είδη»¹⁴

¹⁴ Χριστιανίδης Γ. *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών* Π.Ε.Κ, σελ 109.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα: Η Πρόταση II VIII:

Παρακάτω παραθέτουμε την πρόταση II 8 των Αριθμητικών όχι μόνο για να παρουσιάσουμε με ένα παράδειγμα τον συμβολισμό του Διόφαντου αλλά κυρίως γιατί είναι εξαιρετικός ο τρόπος προσέγγισης και επίλυσης του δυσνόητου αυτού προβλήματος, προκαλώντας ποικίλα σχόλια από τους μελετητές του.

ΠΡΟΤΑΣΗ II 8

η.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\iota\varsigma}$ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ αὐτὸς $\Delta\Upsilon\bar{\alpha}$, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται $\overline{M\iota\varsigma} \wedge \Delta\Upsilon\bar{\alpha}$. δεήσει ἄρα $\overline{M\iota\varsigma} \wedge \Delta\Upsilon\bar{\alpha}$ ἴσας εἶναι $\square\varphi$.

πλάσσω τὸν $\square$ ον ἀπὸ $\Sigma\omega\bar{\nu}$ ὅσων δῆποτε $\wedge$ τοσούτων $\overline{M}$ ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν $\overline{\iota\varsigma M}$ πλευρά· ἔστω $\Sigma\bar{\beta} \wedge \overline{M\delta}$. αὐτὸς ἄρα ὁ $\square$ ος ἔσται $\Delta\Upsilon\bar{\delta M\iota\varsigma} \wedge \Sigma\bar{\iota\varsigma}$. ταῦτα ἴσα $\overline{M\iota\varsigma} \wedge \Delta\Upsilon\bar{\alpha}$. κοινὴ προσκείσθω ἡ $\overline{\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma}$ καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὁμοία.

$\Delta\Upsilon$ ἄρα $\bar{\epsilon}$ ἴσαι $\Sigma\bar{\iota\varsigma}$, καὶ γίνεται ὁ $\Sigma\bar{\iota\varsigma}$ πέμπτων.

ἔσται ὁ μὲν $\frac{\kappa\epsilon}{\sigma\eta\varsigma}$, ὁ δὲ $\frac{\kappa\epsilon}{\rho\mu\delta}$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\frac{\kappa\epsilon}{\nu}$, ἥτοι $\overline{M\iota\varsigma}$, καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

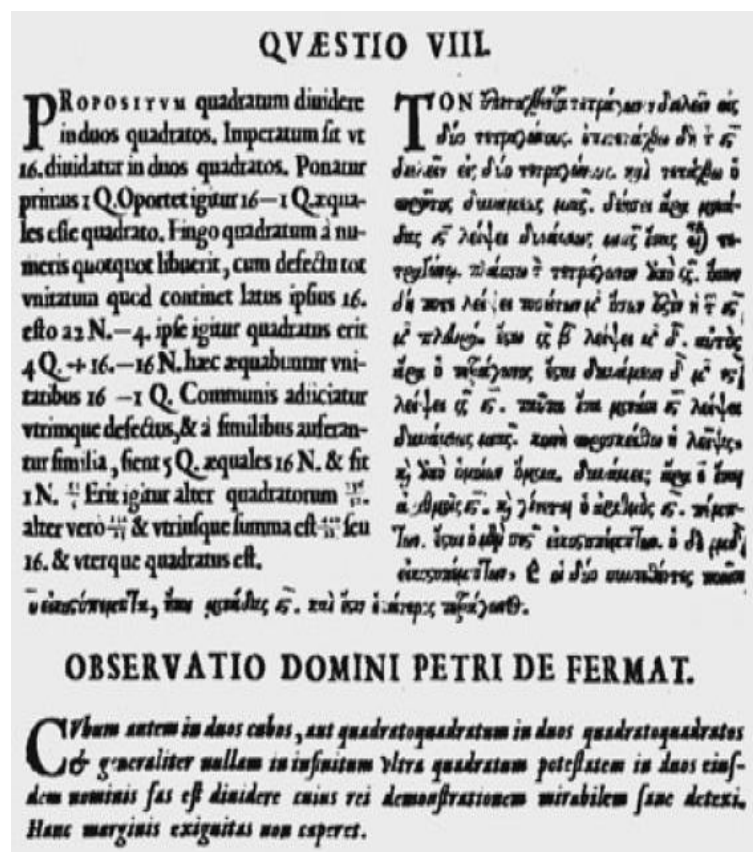
Τον ζητούμενο τετράγωνο αριθμό να αναλύσουμε σε άθροισμα δύο τετραγώνων αριθμών. Ας ζητηθεί να αναλύσουμε τον 16 σε άθροισμα δύο τετραγώνων αριθμών. Και έστω ο πρώτος είναι x^2 ο άλλος θα είναι $16-x^2$. άρα θα είναι ανάγκη ο $16-x^2$ να είναι τετράγωνος αριθμός.

Σχηματίζω τον τετράγωνο αριθμό παίρνοντας πολλαπλάσιο του x μείον την τετραγωνική ρίζα του 16· έστω $2x-4$ · αυτός άρα ο τετράγωνος αριθμός θα είναι $4x^2+16-16x$ · αυτά θα είναι ίσα με $16-x^2$. Ας προστεθεί και τα δύο μέλη το x^2+16x και ας αφαιρεθούν και από τα δύο μέλη οι ίσοι αριθμοί. Άρα είναι $5x^2=16x$, από όπου γίνεται $x=16/5$

Θα είναι ο μεν ένας $256/25$ ο δε άλλος $144/25$ και το άθροισμα των δύο είναι $400/25$ που κάνει 16 και είναι ένας άλλος τετράγωνος αριθμός.

Ο τρόπος που αντιμετωπίζει το παραπάνω πρόβλημα ο Διόφαντος είναι χαρακτηριστικός σε μεγάλο μέρος του έργου του, όταν αναζητείται ένα τετράγωνο επιλέγει αυτό να είναι της μορφής $(ax \pm b)^2$, και οι συντελεστές a , b επιλέγονται με τέτοιο τρόπο που να απαλείφεται ο δευτεροβάθμιος ή ο σταθερός όρος από την εξίσωση. Παραπάνω επιλέγεται $b=4$ ώστε να απαλειφθεί ο σταθερός όρος και το αρνητικό πρόσημο ώστε η λύση που προκύπτει να είναι θετική.

Πιο κάτω παρατίθεται η ίδια πρόταση όπως περιέχεται στην λατινική μετάφραση των Αριθμητικών το 1670 με το σχόλιο από τον Pierre de Fermat για την ανάλυση ενός κύβου σε άθροισμα δύο άλλων κύβων και την δήλωση του ότι η λύση του προβλήματος είναι αδύνατη. Το ίδιο φυσικά ισχυρίστηκε για οποιαδήποτε άλλη δύναμη μεγαλύτερη του τρία. Για την απόδειξη του περίφημου αυτού θεωρήματος των μαθηματικών χρειάστηκε να περάσουν περίπου 330 χρόνια και η απόδειξη να πιστωθεί τελικά στον Andrew Wiles το 1999 μετά από μια τεράστια επιστημονική σκυταλοδρομία.



Η σελίδα από τη λατινική έκδοση των αριθμητικών το 1670 με τη σημείωση του P. Fermat.

Η διάχυση των ιδεών του Διόφαντου

Το εμβληματικό έργο των Αριθμητικών άσκησε αναμφισβήτητα μεγάλη επιρροή στην εξέλιξη της Άλγεβρας. Οι Francois Viète, René Descartes, Pierre Fermat, Rafael Bombelli αλλά και άλλοι, μελέτησαν άμεσα και ενδελεχώς το έργο του, συμπεριλαμβάνοντας ενίοτε πολλά από τα Διοφαντικά προβλήματα στις πραγματείες τους.

Στο ένα, σχεδόν απόλυτο, άκρο του φάσματος της εκτίμησης του βαθμού επηρεασμού του έργου του Διόφαντου στις αλγεβρικές εξελίξεις έχουν διατυπωθεί απόψεις όπως του ιστορικού των μαθηματικών Jacob Klein¹⁵

“Η νεότερη άλγεβρα και ο νεότερος φορμαλισμός αναπτύχθηκαν από την άμεση ενασχόληση του Viète με τον Διόφαντο. Οι μεταγενέστεροι συγγραφείς απλώς επεξεργάστηκαν περαιτέρω και λεπτομερέστερα το έργο του» (εννοώντας τον Viète).’

Όσο και αν στέκεται κανείς κριτικά σε παρόμοιες ακραίες απόψεις δεν μπορεί παρά να συμφωνήσει ότι η τεράστια επιρροή του έργου του Διόφαντου στις κατοπινές εξελίξεις είναι σαφέστατη.

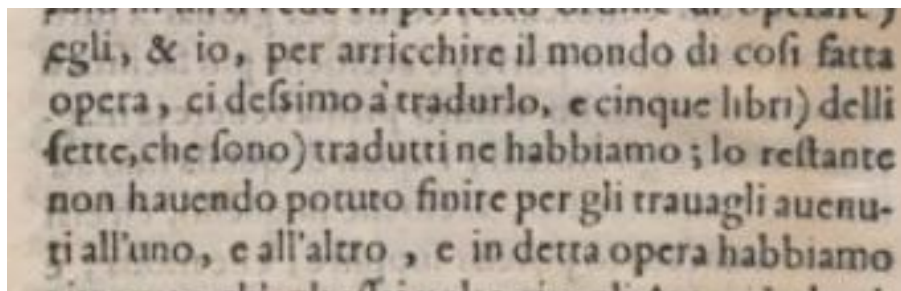
Τα έργα του Διόφαντου μελετήθηκαν και σχολιάστηκαν από τους Άραβες μέσω των οποίων οι ιδέες αυτές διαχύθηκαν στην Ευρώπη και συγκεκριμένα στην Ισπανία τον 8^ο αιώνα. Το όνομα του Διόφαντου μνημονεύεται για πρώτη φορά στην Ευρώπη το 1464 από τον Γερμανό μαθηματικό Regiomontanus, από το Königsberg, που σε επιστολή του αναφέρεται σε έργο του Διόφαντου στην Βενετία, το οποίο δεν είχε μεταφραστεί ακόμα στα Λατινικά. Στο διάστημα εκείνο αλλά και λίγο μεταγενέστερα κυκλοφορούσαν διάφορα εγχειρίδια άλγεβρας που περιέχουν προβλήματα του Διόφαντου χωρίς να αναφέρεται το όνομα του.

Στην Ιταλία η άλγεβρα εισάγεται το 12^ο αιώνα με το έργο του Leonardo Pisano (Fibonacci), ο τελευταίος είχε ταξιδέψει στην Βόρεια Αφρική και είχε γνωριστεί με πολλούς λόγιους Έλληνες και Άραβες. Η άλγεβρα του περιλαμβάνει πολλά Διοφαντικά προβλήματα χωρίς να αναφέρεται η πηγή τους. Ο Rafael Bombelli στη σελίδα 50 της εισαγωγής της ‘Άλγεβρας’ του που εκδόθηκε το 1572 αναφέρει ότι μετέφρασε, μαζί με τον καθηγητή μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Ρώμης Antonio Maria Pazzi, μεγάλο μέρος

¹⁵ Χριστιανίδης Γ. *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών* Π.Ε.Κ, σελ.108

των Αριθμητικών από αντίγραφο που βρίσκονταν στη βιβλιοθήκη του Βατικανού. Ο Bombelli γράφει:

‘με σκοπό να εμπλουτίσουμε τον κόσμο με ένα έργο τόσο τέλεια φτιαγμένο, αποφασίσαμε να το μεταφράσουμε και έχουμε μεταφράσει πέντε από τα βιβλία (στο σύνολο τους είναι επτά)¹⁶ τα υπόλοιπα δεν καταφέραμε να τα τελειώσουμε λόγω της πίεσης της δουλειάς στον έναν ή στον άλλον’



Το 1621 εκδίδεται στο Παρίσι, για πρώτη φορά, μια λατινική μετάφραση των Αριθμητικών από τον Claude Gaspar Bachet de Meziriac (1581 -1638), από ένα χειρόγραφο που βρίσκονταν στη Βιβλιοθήκη των Παρισίων. Πιθανόν αυτή να ήταν και η πηγή που μελέτησε ο Viète το διάστημα που βρίσκονταν στο Παρίσι. Η έκδοση περιλαμβάνει και το πρωτότυπο κείμενο στα ελληνικά καθώς και ενδιαφέροντα σχόλια. Στο περιθώριο της σελίδα 85 αυτής της έκδοσης έγινε το περίφημο σχόλιο του Fermat που αναφέραμε. Η δεύτερη λατινική έκδοση είναι αυτή του 1670 από τον Samuel Fermat, γιο του Pierre και η τρίτη από τον Paul Tannery, το 1893 και το 1895 στη Λειψία.

¹⁶ Είναι σχεδόν βέβαιο ότι το πλήθος των σωζόμενων στα ελληνικά βιβλίων των Αριθμητικών είναι έξι. Παρά το γεγονός ότι στο σημείο αυτό ο Bombelli ανεβάζει τον αριθμό αυτό σε επτά, είναι μάλλον απίθανο να θεωρήσουμε ότι είχε στη διάθεση του επιπλέον υλικό των Αριθμητικών.

teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 - 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. - 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. - 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 - 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{1}{4}$. alter vero $\frac{15}{4}$. & vtriusque summa est $\frac{16}{4}$ seu 16. & vterque quadratus est.

πέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοσπέμπτων, ἔστι δὺ συντεθέντες ποιοῦσι τὴν εἰκοσπέμπτω, ἢ τοὶ μονάδας 15. καὶ ἐστὶν ἐκείντος τετράγωνον.

QVÆSTIO IX.

RURSUS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius vero quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. - 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille vero 4 Q. + 16. - 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. - 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$ erit ergo primi latus $\frac{1}{4}$.

ὁ δὲριθμὸς 15 πέμπτων. ἔσται ἢ μὲν τὸ πρῶτον πλάτος 15 πέμπτων.

ΤΟΝ τετράγωνον διελὼν εἰς δύο τετράγωνους. ἐπιτέλλω δὴ τὴν 15 διελὼν εἰς δύο τετράγωνους. καὶ τετράγωνον ὁ ποσὸς δυνάμεως μιᾶς. διήσῃ ἄρα μονάδας 15 λείψα δυνάμεως μιᾶς ἴσας ἐπὶ τετράγωνον. πλάσσω τὸ τετράγωνον δὸπὸ 55. ὅσων δὴ ποτε λείψα τοσούτων μὲν ὅσων ὅστις ἢ τὴν 15 μὲν πλάσῃ. ἔστω 55 β λείψα μὲν δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ' μὲν 15 [λείψα 55 15.] ταῦτα ἴσα μονάσιν 15 λείψα δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ ποσὸς κείων ἢ λείψας, καὶ δὸπὸ ὁμοίων ὁμοία. δυνάμεις ἄρα εἰ ἴσαι ἀριθμοῖς 15. καὶ γίνεται ὁ δὲριθμὸς 15 πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν 55 εἰκοσπέμπτων.

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν 15 τετράγωνον διελὼν εἰς δύο τετράγωνους. τετράγωνον πάλιν ἢ τὸ πρῶτον πλάτος 55 εἰς 55, ἢ τὸν 55 εἰς 55 ὅσων δὴ ποτε λείψα μὲν ὅσων ὅστις ἢ τὸν διαμετρήσας πλάσῃ. ἔστω δὴ 55 β λείψα μὲν δ. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὅς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὅς δὲ δυνάμεων δ' μὲν 15 λείψα 55 15. βέλομαι ἵνα δύο λοιπὸν συντεθέντες ἴσοις ἐπὶ μὲν 15. δυνάμεις ἄρα εἰ μὲν 15 λείψα 55 15 ἴσαι μὲν 15. καὶ γίνεται ὁ δὲριθμὸς 15 πέμπτων.

H

Η σελίδα 85 από την έκδοση των Αριθμητικών του Bachet το 1621

2.2 Η ΙΣΛΑΜΙΚΗ ΠΑΡΑΔΟΣΗ

2.2.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΙΣΛΑΜΙΚΗΣ ΑΝΘΙΣΗΣ

Το 630 γίνεται η κατάληψη της Μέκκας από τον Μωάμεθ και η νέα μονοθεϊστική θρησκεία του Ισλάμ έρχεται στο ιστορικό προσκήνιο. Βέβαια το Ισλάμ όπως άλλωστε σχεδόν όλες οι θρησκείες, είναι ένας ολικός θεσμός, αρνείται τη διάκριση του θρησκευτικού και του πολιτικού. Σε λιγότερο από έναν αιώνα οι ισλαμικές στρατιές είχαν κατακτήσει τεράστιες εκτάσεις με σκοπό, και πρόσχημα ίσως, τη διάδοση της νέας αυτής θρησκείας. Από την Περσία που κατακτήθηκε το 642, και την Ινδία, μέχρι τη Συρία και την Αίγυπτο που αποσπάστηκαν από τη Βυζαντινή Αυτοκρατορία και φυσικά τις χώρες της Βόρειας Αφρικής που υπέκυψαν γρήγορα. Έτσι το 711 οι ισλαμικές δυνάμεις εισβάλουν και κατακτούν το μεγαλύτερο τμήμα της Ιβηρικής χερσονήσου ονομάζοντας το τμήμα αυτό Al-Andalus. Η κυριαρχία των Αράβων στα εδάφη αυτά με συνεχείς αυξομειώσεις δεν θα σταματήσει οριστικά πριν το 1492, με την επικράτηση του Βασιλείου της Καστίλης και την παράδοση του Εμιράτου της Γρανάδα. Το 732 δίνεται ανάμεσα στην Tours και το Poitiers μια κρίσιμη μάχη της οποίας η έκβαση θα καθόριζε και το μέλλον της δυτικής Ευρώπης. Οι αντιμαχόμενες δυνάμεις ήταν αυτή των Αράβων από τη μία, και των Φράγκων από την άλλη. Η επικράτηση των δεύτερων με αρχηγό τον Κάρολο Μαρτέλο σταμάτησε την προέλαση των Αράβων, οι οποίοι αναγκάστηκαν να οπισθοχωρήσουν.

Το 766 ο al-Mansur (714 – 775) χαλίφης στο Χαλιφάτο των Αββασιδών μετέφερε την πρωτεύουσα από την Δαμασκό ανατολικότερα στη Βαγδάτη πόλη με ανθηρή εμπορική και πολιτισμική ζωή. Μια πόλη με κοσμοπολίτικη αύρα, μια νέα Αλεξάνδρεια. Εκεί ο χαλίφης al – Mamun (786 – 833) ίδρυσε το Baytal Hikma (Οίκος της Σοφίας) γνωστή και ως Μεγάλη Βιβλιοθήκη της Βαγδάτης, στο πνεύμα της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, που εξελίχθηκε σε σπουδαίο ερευνητικό κέντρο. Εκεί οι αρχικές ορθόδοξες ισλαμικές τάσεις αντικαταστάθηκαν από μια περισσότερο ανεκτική ατμόσφαιρα και τα πνευματικά έργα όλων των κατοίκων του Χαλιφάτου ήταν ευπρόσδεκτα, έτσι λόγιοι από όλα τα μέρη του χαλιφάτου προσκαλούνταν για να μεταφράσουν στα αραβικά, Κινεζικά, Περσικά, Σανσκριτικά και κυρίως Ελληνικά κείμενα. Ευκλείδης, Απολλώνιος, Διόφαντος, Αρχιμήδης, Πτολεμαίος αλλά και Αριστοτέλης μεταφράστηκαν στα Αραβικά. Οι μεταφράσεις δεν περιορίστηκαν φυσικά στα μαθηματικά αλλά περιλάμβαναν και κείμενα

ιατρικής, αστρονομίας και ποίηση. Η κοινωνία των Αββασιδών είχε αντιληφθεί και εκτιμήσει την αξία της γνώσης και έτσι υποστήριξε στο 'Οίκο της Σοφίας' πρόσφεραν εύποροι έμποροι και στρατιωτικοί, είναι σχεδόν βέβαιο ότι κάποιος μπορούσε όχι μόνο να κερδίσει τα προς το ζην με την αποκλειστική του ενασχόληση με τις πνευματικές δραστηριότητες στο Οίκο της Σοφίας αλλά να του παρέχεται και μια ισχυρή πολιτική στήριξη, μια θέση αξιωματούχου ή δημόσιου λειτουργού. Ο ίδιος ο Al- Mamun είχε εμπνευστεί από την αριστοτελική λογική και διαλεκτική, και επεδείκνυε έμπρακτο ενδιαφέρον για τη καθημερινή ζωή στον 'Οίκο της Σοφίας'. Χαρακτηριστικό γεγονός είναι πως ύστερα από μια νίκη του με αντίπαλο τα Βυζαντινά στρατεύματα πρότεινε την ανταλλαγή των αιχμαλώτων με βιβλία, έτσι ίσως να αποκτήθηκε από τους Άραβες ένα αντίγραφο της 'Αλμαγέστης' του Πτολεμαίου.

Το ενδιαφέρον όμως στοιχείο είναι ότι οι λόγιοι του Ισλάμ δεν αρκέστηκαν στο να συλλέξουν απλώς όλες αυτές τις πηγές αλλά τις συνένωσαν σε ένα νέο και ενιαίο σύνολο και εμφύσησαν σε αυτό ότι θεωρούσαν 'θεία έμπνευση'¹⁷

Η Ινδο-Αραβική αριθμητική που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της ισλαμικής παιδείας μεταλαμπαδεύτηκε στη ρωμαιοκαθολική κουλτούρα διαμέσου της τεράστιας μεταφραστικής επιχείρησης στο τμήμα της χριστιανικής τότε Ισπανίας¹⁸. Εδώ υπάρχει μια έντονη αντίφαση, αν αναλογιστεί κανείς ότι το έργο αυτό το ανέλαβε, το συντόνισε και εν πολλοίς το χρηματοδότησε ένας κύκλος ανώτερων κληρικών της Καθολικής Εκκλησίας. Η αντίφαση φυσικά έγκειται στην μεγάλη ιδεολογική εχθρότητα από τη μια με τα αναθέματα και τις θρησκευτικές Σταυροφορίες, και μια σχεδόν ένθερμη πνευματική αποδοχή από την άλλη. Τα αναθέματα δεν περιορίζονταν μόνο στο θρησκευτικό περιεχόμενο αλλά όπως θα δούμε πιο κάτω ο Viète αλλά και ο Descartes αναθεμάτισαν τους 'βαρβάρους' για την μαθηματικές τεχνικές τους.

¹⁷ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013, σελ 274

¹⁸ Καστάνης Ν, *Η διείσδυση της ισλαμικής άλγεβρας στη Χριστιανική παιδεία το 12^ο αιώνα*, σελ. 2

Ένας από τους πρώτους λόγιους στον ‘Οίκο της Σοφίας’ ήταν ο Πέρσικης καταγωγής Muhammad Ibn Musa al Khwarismi (περ. 780 – 850). Ο al Khwarismi όπως είναι ευρέως γνωστός στον Δυτικό κόσμο, με καταγωγή από το Khwarismi μια περιοχή νότια της λίμνης Αράλης, περιοχή που σήμερα ανήκει στο Ουζμπεκιστάν ή το Τουρκμενιστάν, είναι συγγραφέας ενός βιβλίου που από τη στιγμή της εμφάνισής του η τέχνη της Άλγεβρας αναπτύχθηκε ραγδαία στα Αραβικά μαθηματικά. Είναι το *Kitab al-mukhtasar fi'l-hisab al-jabr wa'l-muqabala*.¹⁹ Η διεθνώς επικρατούσα λέξη ‘άλγεβρα’ ως γνωστόν προκύπτει από παραφθορά του όρου ‘al-jabr’.

Ο όρος *al-jabr* μπορεί να μεταφραστεί ως ‘αποκατάσταση’ και αναφέρεται στη μεταφορά μιας ποσότητας που αφαιρείται από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο όπου προστίθεται, ενώ η *muqabala* μπορεί να αποδοθεί ως ‘σύγκριση’ και αναφέρεται στην απάλειψη ενός θετικού όρου της στο ένα μέλος μιας εξίσωσης μέσω της αφαίρεσης ίσων ποσοτήτων και από τα δύο μέλη της εξίσωσης. Έτσι για παράδειγμα στην εξίσωση $3x+2=10-5x$ η *al-jabr* θα δώσει $8x+2=10$ ενώ η *muqabala* οδηγεί στην εξίσωση $8x=8$.

Στην εισαγωγή του ο Al Khwarismi ξεκαθαρίζει ότι ο σκοπός της συγγραφής του έργου του είναι κυρίως πρακτικός, αλλά όπως θα δούμε δεν αποκόπτεται πλήρως από τον ελληνικό τρόπο γεωμετρικής αιτιολόγησης αν και ο τρόπος που γίνεται θυμίζει περισσότερο τις Βαβυλωνιακές μεθόδους. Έτσι γράφει²⁰:

‘Αυτή η αγάπη με την οποία ο Θεός προίκισε το Ιμάμη al Ma'mun Αρχηγό των Πιστών... με ενθάρρυνε να συνθέσω ένα σύντομο έργο για τον υπολογισμό μέσω της jabr και της muqabala, συμπεριλαμβάνοντας σε αυτό ότι είναι πιο εύχρηστο και χρήσιμο στην αριθμητική, αυτό που οι άνθρωποι διαρκώς απαιτούν όταν έχουν να κάνουν με κληρονομίες, κληροδοτήματα, χωρισμούς, δίκες και εμπορικά ζητήματα σε όλα τα δούναι και λαβείν

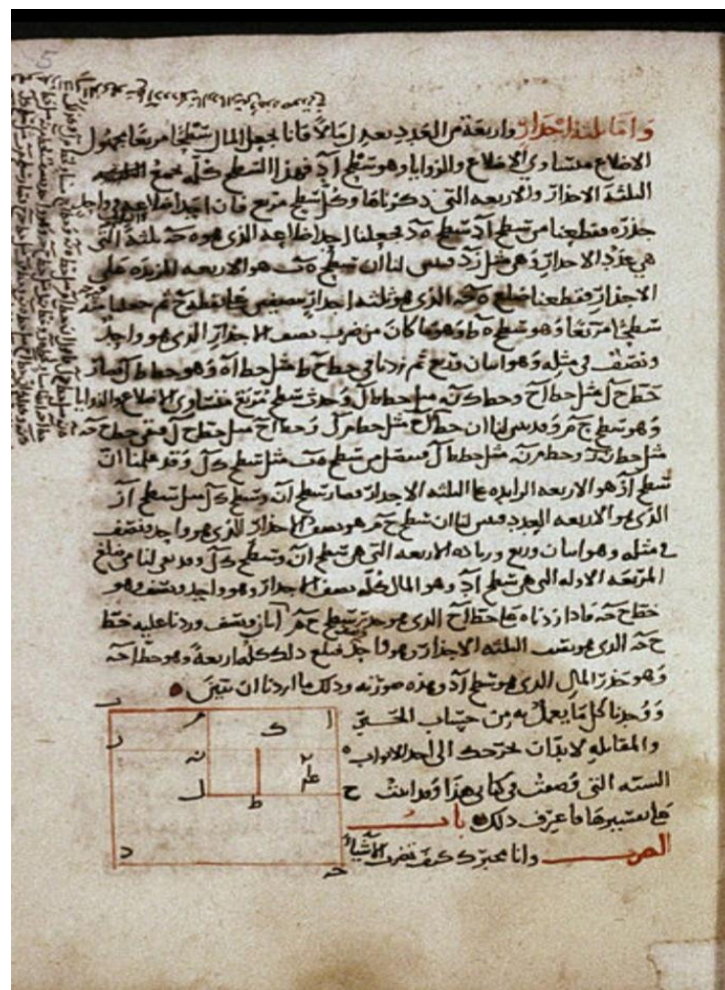
μεταξύ τους και επίσης στη μέτρηση γαιών, τη διόρυξη καναλιών, τους γεωμετρικούς υπολογισμούς και τα σχετικά.’

¹⁹ Ένα αντίγραφο του *Kitab* στα Αραβικά φυλάσσεται στην Oxford και ένα στα λατινικά φυλάσσεται στο Cambridge

²⁰ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013, σελ 280

Τα Αραβικά μαθηματικά άνθισαν κυρίως λόγω της μετάφρασης και της απορρόφησης των κλασικών αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, αλλά δεν πρέπει να αγνοεί κανείς την επιρροή που δέχτηκαν από τα Ινδικά μαθηματικά. Σύμφωνα με τον ιστορικό του Ισλαμικού κόσμου Ibn Kaldun (1332 – 1406) τα μαθηματικά ξεκινούν με τις επιστήμες που ασχολούνται με τους αριθμούς την αριθμητική (arithmatiqi, στο αραβικό λεξιλόγιο), προερχόμενη από τους Έλληνες και την τεχνική του υπολογισμού (sina'at al hisab) κυρίως προερχόμενη από τα Ινδικά μαθηματικά. Δεν μπορεί βέβαια να ισχυριστεί κανείς ότι οι Έλληνες επεδείκνυν ιδιαίτερη εκτίμηση στην ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών, κυρίως λόγω της πίστης τους ότι τα μαθηματικά είχαν μια ανώτερη σχεδόν υπερβατική φύση, σε αντίθεση με τα Ινδούς.

Θα αναφέρουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης που βρίσκεται στο *Kitab* του Al Khwarismi και στο έβδομο κεφάλαιο της εργασίας αυτής θα συγκρίνουμε τη λύση αυτή με την αντίστοιχη του Cardano.



Μία σελίδα του *Kitab* στο αραβικό κείμενο

Η διατύπωση του προβλήματος καθώς και η περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης είναι πλήρως ρητορική με τους αριθμούς ακόμα να απουσιάζουν. Είναι λοιπόν:

‘Ποιο είναι το τετράγωνο το οποίο αν αυξηθεί κατά δέκα ρίζες του γίνεται τριάντα εννέα;’

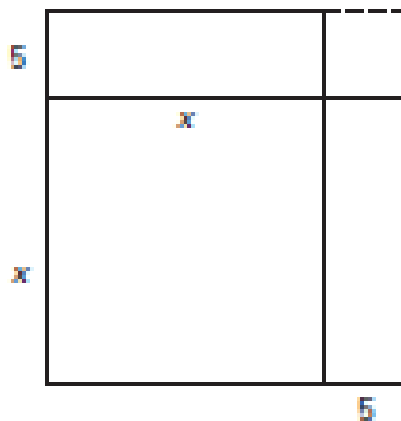
Και για τη λύση γράφει²¹:

‘Υποδιπλασιάζεις το πλήθος των ριζών του, που στο παράδειγμα είναι πέντε, μετά πολλαπλασιάζεις τον αριθμό αυτό επί τον εαυτό του το γινόμενο είναι είκοσι πέντε. Πρόσθεσε το στο τριάντα εννέα το άθροισμα είναι εξήντα τέσσερα. Πάρε τη ρίζα του, που είναι οκτώ και αφάιρεσε το μισό του πλήθους των ριζών που είναι πέντε η διαφορά είναι τρία. Αυτό είναι το τετράγωνο που ψάχνεις.’

Ακολουθεί η γεωμετρική αιτιολόγηση της λύσης της εξίσωσης

$$x^2 + 10x = 39$$

αρχίζοντας με το τετράγωνο x^2 , κατόπιν προσθέτει δύο ορθογώνια με διαστάσεις x , 5 που είναι το μισό του πλήθους των ριζών και συμπληρώνει με ένα τετράγωνο εμβαδού 25, οπότε όλη η περιοχή έχει εμβαδόν 64, άρα το μεγάλο τετράγωνο έχει πλευρά 8 και κατά συνέπεια το x είναι ίσο με τη διαφορά $8-5$ δηλαδή $x=3$.



²¹ Ο.π. σελ 281-282

2.2.3 Η ΕΝΑΡΞΗ ΤΗΣ ΑΡΑΒΙΚΗΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ Η ΕΠΑΝΝΕΚΙΝΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟΝ PIERRE DE RAMEE

Στην παράγραφο αυτή επιχειρούμε να παρουσιάσουμε το μέρος εκείνο των ισλαμικών μαθηματικών που αναφέρεται στον αναλυτικό τρόπο προσέγγισης, όπως κληροδοτήθηκε από τους Έλληνες, την στείρα υιοθέτηση ή την τυχόν γονιμοποίηση των ιδεών αυτών των Ελλήνων καθώς και τη χρήση τους στην άλγεβρα των Αράβων.

Ο εξάιρετος ιστορικός των μαθηματικών του Ισλαμικού κόσμου που έζησε το 14^ο αιώνα Ibn Kaldun περιγράφει το σκεπτικό που διέπει το έργο του *Kitab* του Al Khwarismi ως εξής:²²

«Αυτή είναι η τεχνική που καθιστά δυνατή την ανακάλυψη του αγνώστου από τις γνωστές πληροφορίες, αν υπάρχει μία σχέση μεταξύ τους που τις περιέχει».

Οι Άραβες φαίνεται να ήταν εξοικειωμένοι με την αρχαιοελληνική σύλληψη των εννοιών της ανάλυσης και της σύνθεσης: οι Αραβικές λέξεις ‘*tahlīl*’ ; ‘*tarkīb*’ είναι οι αντίστοιχες των ελληνικών για τις έννοιες αυτές. Διαφωτιστικά κείμενα για την ανάλυση και τη σύνθεση στον ισλαμικό κόσμο έγραψε ο μαθηματικός του 10^{ου} αιώνα Ibrahim ibn Sinan ibn Thabit Ibn Qurra (908 – 946) γεννημένος στη Βαγδάτη, προερχόμενος από επιφανή οικογένεια λογίων, που είχε ένα πρόωρο τέλος.

Σχολιάζοντας το έργο του ‘*Πραγματεία για την μέθοδο της Ανάλυσης και της Σύνθεσης και άλλοι τρόποι επίλυσης Γεωμετρικών Προβλημάτων*’ η ιστορικός H. Bellosta αναφέρει ότι ‘Αν και ο Ibn Sinan σφυρηλάτησε τα θεωρητικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουν οι αλγεβριστές των επόμενων αιώνων, τα παραδείγματα όπως και οι μέθοδοι του παρέμειναν βαθιά ριζωμένα στο μαθηματικό υπόβαθρο της ελληνιστικής αρχαιότητας. Ωστόσο ο Ibn Sinan στέκεται στο σημείο συνένωσης των μαθηματικών κεφαλαίων της Ελληνικής Γεωμετρίας και της Αραβικής Άλγεβρας.’²³

Περαιτέρω συνεισφορά στο θέμα παρατηρούμε στο έργο του Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al Haytam περισσότερο γνωστός στο δυτικό κόσμο με το όνομα Alhazen, του

²² Sasaki Chikara, *Descartes's Mathematical Thought*, Kluwer Academic Publisher, 2003, σελ 249

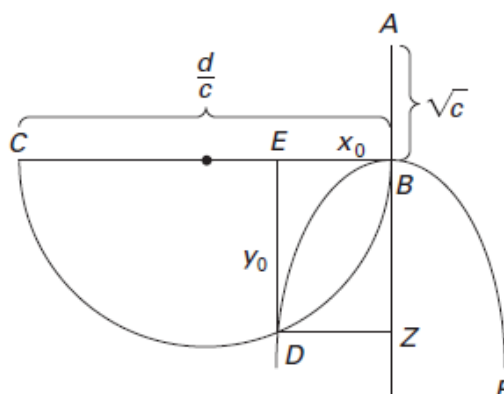
²³ Bellosta Hellene, ‘*Ibrahim ibn Sinan: On Analysis and Synthesis*’ *Arabic Science and Philosophy* Vol.1 σελ. 229

οποίου η κατανόηση των εννοιών της ανάλυσης και της σύνθεσης ήταν ευρείες και βαθιές αλλά δεν ξεφύγει από το πλαίσιο των κλασικών ελληνικών μαθηματικών.

Ο ιστορικός των μαθηματικών R. Rashed αναφέρει

‘η γενικότητά του είχε εκείνη την ηχώ των αντικειμένων μιας γεωμετρικής θεωρίας και δεν απέπνεε μια καθολικότητα που θα την χαρακτήριζε σαν μέθοδο.’

Σύμφωνα με τον ίδιο ιστορικό, η αλγεβρική γεωμετρία ξεκινά από τα Αραβικά μαθηματικά και συγκεκριμένα από τον Πέρση μαθηματικό του 11^{ου} αιώνα Omar Khayam, (1048 – 1131) με το αραβικό όνομα Umar al-Khayyami· αυτός στη πραγματεία του *Al-jabtra wa’lmucabala* επίλυσε την κυβική εξίσωση με την τομή μιας παραβολής και μιας υπερβολής. Με αυτή την έννοια ήταν ένας είδος πρόδρομος του έργου του Descartes.



Η γεωμετρική λύση της κυβικής εξίσωσης $x^3+cx=d$

Με αυτές τις μαθηματικές παραδόσεις σαν βάση, αναδύθηκε το 12^ο αιώνα ένας μαθηματικός που μπορεί να ειπωθεί ξεκάθαρα ότι καλλιέργησε την αναλυτική μέθοδο αντιλαμβανόμενος την άλγεβρα ως μέρος της ανάλυσης (*tahlil*)· πρόκειται για τον Ibn Yahya al-Maghribi al-Samaw'al (1130 – 1180). Στο πρώτο κεφάλαιο του δεύτερου βιβλίου του έργου του *‘Al-bahir fi al-jabr’* (Η λάμψη της Άλγεβρας) δίνει έναν ορισμό της αναλυτικής μεθόδου που θυμίζει τον ορισμό του Πάππου στο έβδομο βιβλίο της *‘Συναγωγής’*. Συγκεκριμένα γράφει²⁴:

²⁴ Sasaki Chikara, *Descartes's Mathematical Thought*, Kluwer Academic Publisher, 2003, σελ 252, *Al Bahir en Algebre d' As-Samaw'al*, edition, notes et introduction par Salah Ahmad et Roshdi Rashed (Damas, 1972), Arabic text, σελ 73

‘Όταν θέλει κανείς να βρει κάτι που απαιτείται ή να αποδείξει κάποιο ζήτημα, θα υποθέτουμε την απαίτηση αυτή και βλέπουμε τι συνάγεται από αυτήν, μέχρι να φτάσουμε σε απλά αποτελέσματα. Αν αυτά τα απλά αποτελέσματα αποδειχθούν αληθή, κανείς ανασυνθέτει ότι είχε αναλύσει και αρχίζει από το τέλος της ανάλυσης. Αλλά αν αυτά τα αποτελέσματα αποδειχθούν ψευδή θα ξέρει ότι η απαίτηση του ήταν μάταιη.’

Στο τέλος αυτής της περιγραφής της αναλυτικής τέχνης ο al-Samaw'al δηλώνει τη σχέση μεταξύ ανάλυσης και άλγεβρας

‘Και αυτή η πρακτική είναι αυτή που η τέχνη της ‘al-jabr wa'l muqabala’ απαιτεί και είναι αυτό ακριβώς που η τέχνη της ανάλυσης απαιτεί

Η αλγεβρική τέχνη των Αράβων μεταλαμπαδεύτηκε στην Ευρώπη το 12^ο αιώνα με το έργο του Leonadro Pisano πιο γνωστού ως Fibonacci (1170 – 1240) και με το έργο του Liber Abaci. Αυτή την περίοδο στον Αραβικό αλλά και τον Ευρωπαϊκό κόσμο, αρχίζουν να εμφανίζονται σύμβολα για να αναπαραστήσουν τις άγνωστες ποσότητες στις εξισώσεις, κατά τα Διοφαντικά πρότυπα, **μεταμορφώνοντας σταδιακά την άλγεβρα από την τέχνη του υπολογισμού που είναι στενά συνδεδεμένη με τις εμπορικές δραστηριότητες σε ένα θεωρητικό αντικείμενο δομημένο με μαθηματική πειθαρχία.**

Η διαμόρφωση της αλγεβρικής ανάλυσης στη δυτική Ευρώπη στα μέσα του 16^{ου} αιώνα δεν μπορεί να ειπωθεί αγνοώντας τη συνεισφορά του Pierre de la Ramée ή Petrus Ramus (1515 – 1572), ενός Προτεστάντη, ουμανιστή, φιλόσοφου της λογικής και αναμορφωτή των εκπαιδευτικών προγραμμάτων, που δολοφονήθηκε στα γεγονότα που ακολούθησαν τη νύχτα του Αγίου Βαρθολομαίου. Ο Viète μάλλον είχε συναντηθεί μαζί του και σε ένα έργο του το 1579 είχε αναφερθεί σε αυτόν αποκαλώντας τον ‘homo λογικώτατος’²⁵

Ο εικονοκλαστικός χαρακτήρας της Ραμιστικής σκέψης άσκησε κριτική στον Ευκλείδειο τρόπο της συνθετικής επίδειξης των συμπερασμάτων· έτσι στο έργο του *Scholae Mathematicae* έψαξε τη μέθοδο συγγραφής μαθηματικών βιβλίων που να είναι εύληπτα από τον καθένα. Ήταν από τους πρώτους που παρατήρησε αλγεβρικούς υπαινιγμούς σε κάποιες Ευκλείδειες προτάσεις, για παράδειγμα ο Mahoney αναφέρει²⁶ ότι στη *Geometria* του το 1569 ο Ramus βλέπει την αλγεβρική πρόταση $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, πίσω από την

²⁵ Ο.π., σελ 257

²⁶ Mahoney Michael. S, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601- 1665*, Princeton, N, J. Princeton University Press, 1973, σελ. 186

Ευκλείδεια πρόταση II 4, μολονότι δεν εκφράζεται αλγεβρικά. Στο ίδιο βιβλίο ο Ramus βλέπει πως χρησιμοποιείται η μέθοδος της ανάλυσης²⁷:

‘γιατί πράγματι είναι ο ίδιος δρόμος από τη Θήβα στην Αθήνα όπως είναι από την Αθήνα στη Θήβα και η χρήση της γεωμετρικής ανάλυσης παραμένει εδώ, όπως αργότερα με τον κύβο, αν και σε ολόκληρα τα *Στοιχεία* δεν υπάρχει καμία απολύτως άλλη χρήση αυτού’

Στο εισαγωγικό μέρος της *Άλγεβρας* του το 1560 ο Ramus ορίζει την άλγεβρα σαν ένα μέρος της Αριθμητικής που χρησιμοποιεί μια ειδική αρίθμηση από συνεχώς αναπαριστώμενες αναλογίες

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.
u.	l.	q.	c.	bq.	f.	qc.	b ^f .	tq.	cc.	f ^q .	t ^f .	bqc.

Στον Ramus τα ‘είδη των συμβόλων’ παίζουν το ρόλο των άγνωστων αριθμών στη συνήθη άλγεβρα. Αλλά ποιο ακριβώς μέρος της Αριθμητικής είναι η Άλγεβρα στη Ραμιστική θεώρηση; Την απάντηση δίνει ο μαθητής του Ramus και εκδότης των έργων του, Lazarus Schöner που εξηγεί στο πρώτο κεφάλαιο της Άλγεβρας ότι²⁸:

‘Άλγεβρα είναι αυτό που οι Έλληνες ονόμαζαν το αναλυτικό μέρος της αριθμητικής’

Αυτή η φράση πρέπει να είναι η πρώτη στην Δυτική Ευρώπη που ερμηνεύει την **άλγεβρα σαν το αναλυτικό μέρος της αριθμητικής**· μετά τον al-Samaw'al υπάρχει ένας μαθηματικός που βλέπει την άλγεβρα με τον ίδιο τρόπο.

²⁷ Ramus *Geometria* (1569), Lazarus Schöner's edition, Frankfurt, 1599

²⁸ Sasaki Chikara, *Descartes's Mathematical Thought*, Kluwer Academic Publisher, 2003, σελ 256

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: Η ΙΤΑΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΤΟΥ 16^{ου} ΑΙΩΝΑ

Οι αρχές του 16^{ου} αιώνα βρίσκει τις πόλεις του Ιταλικού βορρά αποδυναμωμένες από τις διαδοχικές πολεμικές διενέξεις και ένα μεγάλο μέρος της ιταλικής χερσονήσου υπό την ισπανική κυριαρχία, αλλά με ακμάζουσα την πανεπιστημιακή ζωή σε πολλές από τις πόλεις αυτές του βορρά όπως η Πάδουα (Πάντοβα), Φλωρεντία, Πίζα, Βενετία, Περούτζια αλλά το πολυπληθέστερο όλων σε αριθμό φοιτητών πανεπιστήμιο της Νάπολης.

3.1 GIROLAMO CARDANO

Στο Μιλάνο ο ιδιόρρυθμος αλλά και ευρυμαθής Girolamo Cardano (1501 – 1576), ήταν πολύ διάσημος γιατρός, με δια βίου ζωνρό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά αλλά και μανιώδης χαρτοπαίχτης. Ήταν γεννημένος στην Παβία, αλλά έζησε και δραστηριοποιήθηκε στο Μιλάνο. Το ευρέως αναγνωσμένο έργο του *‘Ars Magna²⁹ or the Rules of Algebra’* (Η Μεγάλη Τέχνη ή οι κανόνες της Άλγεβρας) εκδόθηκε το 1545 αποτέλεσε την πρώτη ουσιαστική πρόοδο μετά την μελέτη της ισλαμικής άλγεβρας και συγκαταλέγεται μαζί με το έργο του Κοπέρνικου και του Βεσάλιου στα τρία έργα που σηματοδοτούν την έναρξη της επιστημονικής επανάστασης. Χαρακτηριστική για τις προσδοκίες που καλλιέργησε ο συγγραφέας είναι η φράση που σημειώνεται με κεφαλαία γράμματα στο τέλος του βιβλίου:

ΓΡΑΦΤΗΚΕ ΣΕ ΠΕΝΤΕ ΧΡΟΝΙΑ ΜΑΚΑΡΙ ΝΑ ΚΡΑΤΗΣΕΙ ΧΙΛΙΑΔΕΣ

Εκεί ανέπτυξε και συμπεριέλαβε αλγοριθμικές διαδικασίες επίλυσης 13 τύπων τριτοβάθμιας εξίσωσης καθώς και 20 διαφορετικών τύπων τεταρτοβάθμιας εξίσωσης οι τελευταίες πιστώνονται στον γραμματέα και μαθητή του, Lodovico Ferrari (1522 – 1569) - και στις δύο περιπτώσεις μετά από αναγωγές που προέκυψαν απαλείφοντας τον επόμενο από τον μεγιστοβάθμιο όρο. Ιστορική έχει μείνει η διαμάχη του με τον Tartaglia (1500 – 1557) για την πατρότητα αυτών των διαδικασιών. Ο Cardano νομιμοποίησε την συμπερίληψη στο έργο αυτό και στα κεφάλαια 11- 25, μετά την ανακάλυψη χειρογράφων του Scipio del Ferro στο πανεπιστήμιο της Bologna που αποδείκνυαν την προγενέστερη του Tartaglia ανακάλυψη αυτών των τύπων.

²⁹ Η «Μεγάλη Τέχνη» είναι η Άλγεβρα σε αντιδιαστολή με την «Ελάσσονα Τέχνη» που είναι η Αριθμητική.

Η παρουσίαση του ακολουθεί την ισλαμική παράδοση λύνοντας καθεμία από κάθε πιθανή περίπτωση, με σχοινοτενή πολλές φορές επιχειρήματα, και απαραίτητες γεωμετρικές αιτιολογήσεις για όλες αυτές τις διαδικασίες, βασισμένες σε προτάσεις από τα ‘Στοιχεία’ του Ευκλείδη.

Η παρουσίαση της διαδικασίας είναι πλήρως ρητορική. Έτσι ο ‘τύπος’ του Cardano για τη λύση της κυβικής εξίσωσης $x^3+px=q$ περιγράφεται ως διαδικασία στη σελίδα 30 του ‘Ars Magna’³⁰:

REGULA.

Deducito tertiam partem numeri rerum
ad cubum, cui addes quadratum dimidij nu-
meri æquationis, & totius accipe radicem,
scilicet quadratam, quam feruabis vnique
dimidium numeri quod iam in se duxeras,
adiicies, ab altera dimidium idem minues,
habebisque Binomium cum sua Apotomæ,
inde detracta ꝛ. cubica Apotomæ ex ꝛ.
cubica sui Binomij, residuum quod ex hoc
relinquitur, est rei æstimatio. Exemplum,

‘Υψωσε στον κύβο το ένα τρίτο του συντελεστή του πράγματος πρόσθεσε σε αυτό το τετράγωνο του μισού της σταθεράς της εξίσωσης και πάρε την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος. Γράψε το αυτό δύο φορές και σε ένα από τα δύο πρόσθεσε το μισό του αριθμού που είχες πριν τετραγωνίσει και από το άλλο αφάιρεσε το.... Αν αφαιρέσεις την κυβική ρίζα του δεύτερου από την κυβική ρίζα του πρώτου, η διαφορά είναι η τιμή του πράγματος’³¹

Τα παραδείγματα επιλέγονται ώστε η ποσότητα $(p/2)^2-(q/3)^3$ η διακρίνουσα δηλαδή να είναι πάντα θετική $D>0$ και υιοθετείται ένας συμβολικός τρόπος γραφής όπως παρακάτω:

Η κυβική εξίσωση που υπάρχει σαν παράδειγμα είναι

$$x^3+6x=20$$

³⁰ Cardano, G.. Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis σελ 30

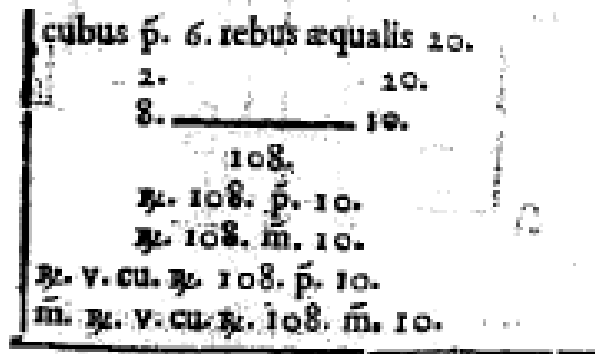
³¹ Cardano, G.. Ars Magna or The Rules of Algebra σελ 122

και ο Cardano γράφει: *cub p: 6 rebus aequalis 20*

και η λύση που προκύπτει

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} \quad \text{γράφεται}$$

R.V: cu.R.108 p:10 m: R. V: cu. R. 108m:10



και με σημερινή γραφή η παρατήρηση $x = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} - \sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3}$ δίνει και τη μοναδική λύση $x=2$. Στο κείμενο του ο Cardano παραλείπει το προηγούμενο βήμα και αναφέρεται λίγο παρακάτω³² μόνο η λύση, χωρίς κάποιες περαιτέρω επεξηγήσεις, επικαλούμενος τεχνικές του κεφαλαίου III, οπότε αποτελεί ερωτηματικό ο τρόπος που εν τέλει το υπολόγισε.

Memento autem eius, quod in capitulo de educenda cubica radice in libro tertio dixeram, quandoque radices illas uniuersales cubicas, numero integro, vel fracto x-quipollere, ut in primo exemplo docuimus, nam ra. v. cubica ra. 108. p. 10. m. ra. v. cubica ra. 108. m. 10. est 2. ut ibi ex regula

³² Cardano, G.. *Artis Magiae Sive de Regulis Algebraicis* σελ 30

Στο 11^ο κεφάλαιο, σελίδα 29 της ‘Ars Magna’ ο Cardano εκκινεί αναφέροντας την ιστορία που νομιμοποιεί ηθικά την δημοσιοποίηση του τύπου για την επίλυση της τριτοβάθμιας.

‘ο Scipio del Ferro από την Μπολόνια σχεδόν τριάντα χρόνια πριν ανακάλυψε αυτόν τον κανόνα και τον παρέδωσε στον Antonio Maria Fior από τη Βενετία, του οποίου ο αγώνας με τον Nicollo Tartaglia από τη Μπρέσια έδωσε την ευκαιρία στον Nicollo να τον ανακαλύψει. Αυτός τον έδωσε σε μένα λυγίζοντας στα παρακάλια μου, ωστόσο κράτησε την επίδειξη. Οπλισμένος με αυτή τη βοήθεια, βρήκα την επίδειξη του με (διάφορους) τρόπους. Αυτό ήταν πολύ δύσκολο. Η πρόταση μου σε αυτό ακολουθεί.’

Επανερχόμενοι στην επίλυση της εξίσωσης $x^3 + 6x = 20$ η

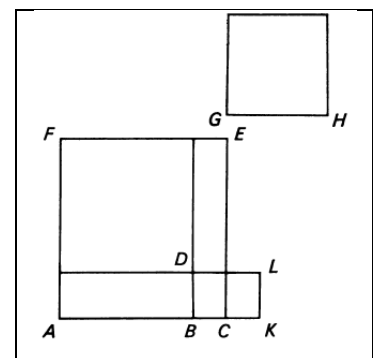
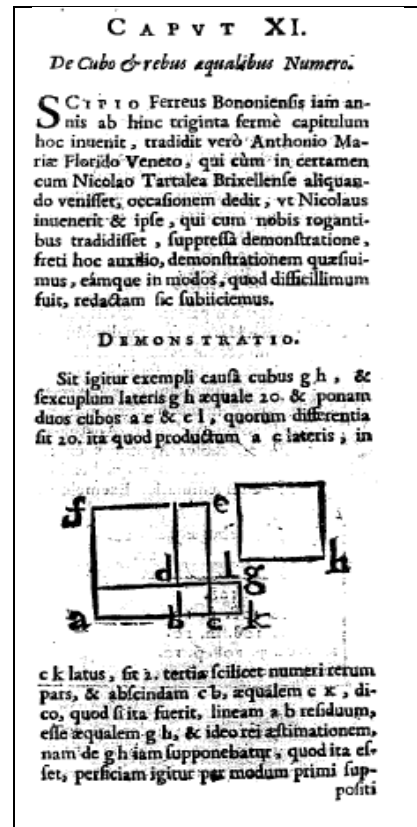
ιδέα στηρίζεται στην αξιοποίηση της αλγεβρικής ταυτότητας $(s-t)^3 + 3st(s-t) = s^3 - t^3$ που όμως ο Cardano αποδεικνύει γεωμετρικά, έτσι έπειτα αν τα s, t επιλεγούν ώστε να είναι

$$6 = 3st \text{ και } 20 = s^3 - t^3 \text{ τότε η λύση είναι } x = s - t$$

Τα s, t μπορούν να υπολογιστούν αλγεβρικά αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι $(6/3)^3 = (st)^3 = s^3 t^3$, και έτσι γνωρίζοντας τη διαφορά και το γινόμενο των s^3, t^3 το μόνο που απομένει είναι να επιλυθεί μια δευτεροβάθμια εξίσωση, διαδικασία που είναι όμως ήδη γνωστή. Ο Cardano όμως προσεγγίζει το θέμα αμιγώς γεωμετρικά. Τη γεωμετρική ‘επίδειξη’ παρουσιάζουμε σαν ενδεικτικό παράδειγμα της μεθοδολογίας που ακολούθησε.

Ας είναι $AC = CE = s$ και $BC = BD = t$, τον κύβο με ακμή s συμβολίζουμε (s, s, s) και το παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $AB = s - t$, BD, s συμβολίζουμε $(s - t, t, s)$. Ο κύβος βάσης AFEC αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} (s, s, s) &= ((t, t, t) + (t, t, s - t)) + 2(s - t, t, s) + ((s - t, s - t, s - t) + (s - t, s - t, t)) \\ &= ((t, t, t) + (s - t, s - t, s - t) + 2(s - t, t, s) + [(t, t, s - t) + (s - t, s - t, t)]) \\ &= ((t, t, t) + (s - t, s - t, s - t) + 3(s - t, t, s)). \end{aligned}$$



Όπως στην ισλαμική παράδοση οι συντελεστές είναι πάντα θετικοί αριθμοί γεγονός που μαζί με την έλλειψη ενός γενικευμένου συμβολισμού εμποδίζει την ανάπτυξη ενός είδους γενικής λύσης για τις εξισώσεις. Αγνοώντας την πιθανότητα αρνητικών συντελεστών η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης $x^3+px=q$ πρέπει να τροποποιηθεί για την εξίσωση $x^3=px+q$, ορίζοντας έτσι διαφορετικές κάθε φορά περιπτώσεις.

Ενώ εξακολουθεί να υπάρχει η κυρίαρχη αρχαιοελληνική θεώρηση ότι η ρίζα μιας εξίσωσης είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, ενώ ο κύβος της ρίζας είναι ένας γεωμετρικός κύβος με ακμή το τμήμα που εκφράζει η ρίζα, ο Cardano μπορούσε να αποδεχτεί, αναγκαστικά ίσως, σε κάποιες περιπτώσεις την πιθανότητα ύπαρξης μιας αρνητικής ρίζας, *πλασματικής*, όπως την ονόμαζε ρίζας. Στο κεφάλαιο XXXVII στη σελίδα 66 του *Ars Magna* θα προσπαθήσει να νοηματοδοτήσει ή με κάποιο τρόπο να αποδεχτεί την υπόστασή τους, παρουσιάζοντας προβλήματα που έχουν σαν λύση αρνητικό αριθμό. Έτσι στο πρόβλημα I του κεφαλαίου αυτού θέτει το εξής ζήτημα:

Η προίκα της γυναίκας του Φραγκίσκου είναι 100 aurei περισσότερα από την περιουσία του ίδιου και το τετράγωνο της προίκας είναι 400 περισσότερα από το τετράγωνο της περιουσίας. Να βρείτε την προίκα και την περιουσία.

Ο Cardano υποθέτει ότι ο Φραγκίσκος έχει:

$$-x \text{ aurei}$$

QVÆSTIO I.

Dos vxoris Francisci, est aurei 100. plus quam Francisci peculium, & dos vxoris eius in se ducta, est aurei 400. plus peculio Francisci in se ducto, quæritur dos, & peculium. Ponemus Franciscum habere rem vnā m. igitur dos vxoris est aurei 100. m. 1. re, duc partes in se, fient 1. quadratum & 10000. p. 1. quadrato m 200. suppositionibus, horum differentia est 400. aurei, igitur 1. quadratum p. 400. p. 200. positionibus

και προχωρώντας η προίκα θα είναι $100-x$ οδηγείται έτσι από τα δεδομένα στην εξίσωση

$(-x)^2=(100-x)^2$ οπότε προκύπτει $200x=9600$ άρα $x=48$. Η προίκα επομένως είναι $100-x=56$ aureos και έτσι ο Φραγκίσκος έχει

-48 aureos για αυτό ο Cardano γράφει 48 aureos χρέος

m. 1. pos.	100. m. 1. pos.
1. quad.	10000. p. 1. quad.
	m. 200. pos.
differentia	10000. m. 200.
pos. æqualis	400.

bus æquantur 10000. p. 1. quadrato, abii-
ce communia, habebis 9600. æqualia 200.
positionibus. Igitur res est 48. & tantum ha-
buit m. id est debiti, & dos erit residuum ad
100. scilicet 52. igitur Franciscus habuit
48. aureos debiti, sine vlllo capitali vel pe-
culio: & dos eius vxoris fuit 52. aureorum,
& secus operando peruenires ad quæstiones
difficillimas, ac inextricabiles. Talis modi
etiam hæc est.

Ο Cardano αισθάνεται σχετικά άβολα με την πιθανότητα αρνητικών ριζών εξισώσεων πόσο μάλλον με τα αρνητικά υπόρριζα που περιέχουν τα σπέρματα των ιδεών πίσω από τους μιγαδικούς αριθμούς.

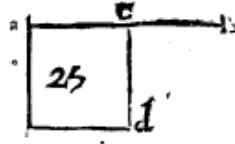
Έτσι μπροστά στην αμηχανία που προκύπτει από τη συνειδητοποίηση ότι τα δύο μέρη που πρέπει να χωριστεί το 10 ώστε το γινόμενο τους να είναι ίσο με 40, είναι οι αριθμοί $5+\sqrt{-15}$ και $5-\sqrt{-15}$ αποτέλεσμα εμφανώς αντιφατικό με το ευκλείδειο συμπέρασμα που δίνει το μέγιστο γινόμενο τους όταν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι, θα γράψει στη σελίδα 67

m. 40. seu 5. p. 72. m. 15. & 5. m. 72. m.
15. duc 5. p. 72. m. 15. in 5. m. 72. m. 15.
d. millis incruinationibus, fit 25. m. m. 15.
quod est p. 15. igitur hoc productum est
40. natura tamen a d, non est eadem cum
natura 40. nec a b, quia superficies est

5. p. 72. m. 15.
5 m. 72. m. 15.
25. m. m. 15. quad. est 40.

‘Παραμερίζοντας τα νοητικά βασανιστήρια που εμπλέκονται πολλαπλασίασε το $5 + \sqrt{-15}$ με το $5 - \sqrt{-15}$ που κάνει $25 - (-15)$ το οποίο είναι $+15$ και έτσι το γινόμενο είναι 40 ’

Αφού έχει προηγηθεί η αποτυχία μιας γεωμετρικής επίδειξης, και η πνευματική σύγχυση που προκαλείται από αυτήν



θα κλείσει, στη ίδια σελίδα, με τη φράση:

¶. 160. & hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.

‘έτσι περίπλοκα προοδεύει η αριθμητική, ο σκοπός της οποίας είναι όπως λέγεται τόσο εκλεπτυσμένος όσο και ανώφελος’

Αυτή η φράση είναι ενδεικτική για την πεποίθηση του προσαρτημένου ρόλου της γεωμετρίας στης αριθμητική, λόγω της μη αποδοχής οποιασδήποτε οντολογικής υπόστασης πέρα από τη φυσική οντολογία του μεγέθους με την αριστοτελική έννοια. Έτσι συμμεριζόμενοι την άποψη της Federica la Nave θα σημειώσουμε:

‘Αν αφηγηθείς την ιστορία μιας ανακάλυψης σαν μια γραμμική διαδικασία κινδυνεύεις να αποκρύψεις σημαντικά κομμάτια της εξέλιξης της σκέψης των μαθηματικών. Ένα από τα κομμάτια που κινδυνεύουν να χαθούν είναι ο ρόλος της πεποίθησης στην ανάδειξη μαθηματικών προτάσεων’³³

³³ Οι αναφορές στη Federica La Nave είναι από το βιβλίο *Circles Disturbed The interplay of Mathematics and Narrative* Ch. 3 σελ 79-104

Ο Cardano δεν είναι έτοιμος να αποδεχθεί τα ‘περίεργα’ αυτά μαθηματικά αντικείμενα που συνιστούν τα αρνητικά υπόρριζα και δεν έχουν μια εμφανή μαθηματική υπόσταση, έχοντας παραμείνει προσκολλημένος στην ευκλείδεια φύση ενός αριθμού.

Υποθέτει για αυτά ότι αν ακολουθούν κάποιους κανόνες αυτοί είναι οι ίδιοι με τους κανόνες των άλλων ριζικών. Παρόλα αυτά όμως το αρχικό βήμα έχει πραγματοποιηθεί.

Στο θέμα αυτό έτσι για λίγο παρατηρείται στασιμότητα. Αλλά η ιστορική και πολιτισμική συγκυρία έχει έρθει.

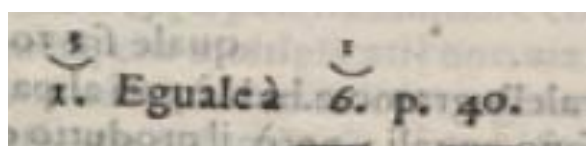
3.2

RAFAEL BOMBELLI

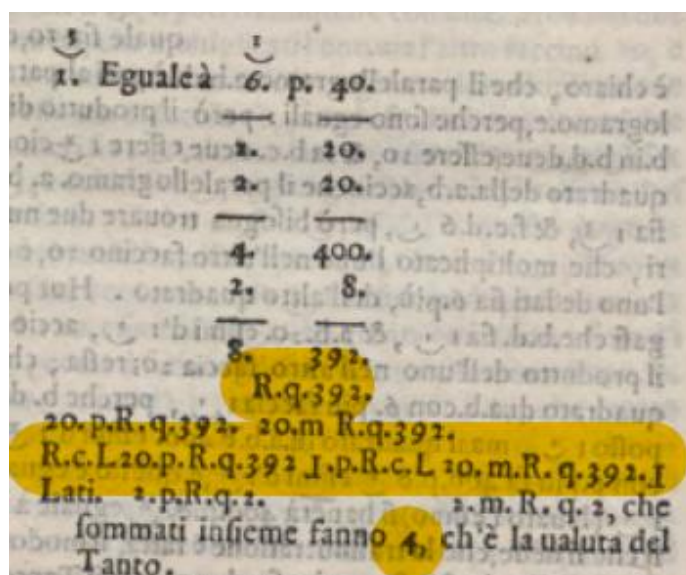
Η καθοριστική εξέλιξη στο ζήτημα θα επιτευχθεί με το έργο του Rafael Bombelli (1522 – 1572) από την Bologna. Ο Bombelli ήταν μηχανικός και κύριο επίτευγμα του αποτελεί η μετατροπή των ελών της Val di Chiana σε καλλιεργήσιμο έδαφος στην υπηρεσία ρωμαίου ευγενούς προστατευόμενου του Πάπα Παύλου ΙΙΙ. Η πεδιάδα αυτή υπάρχει μέχρι και σήμερα, εκτείνεται μεταξύ του Άρνου και του Τίβερη και αποτελεί την πιο γόνιμη πεδιάδα της Ιταλίας. Έγραψε την πραγματεία του ‘Άλγεβρα’ στη διάρκεια κάποιου από τους ιταλικούς πολέμους μεταξύ του 1557 και 1560 αλλά εκδόθηκε το 1572 λίγο πριν το θάνατο του. Η γεωμετρική επίδειξη και αιτιολόγηση είναι απαραίτητες στα πρότυπα του Cardano, αλλά στο θέμα του συμβολικού επιπέδου σημειώνεται μια σχετική πρόοδος. Μερικά στοιχεία από την συμβολισμό, με τις τεχνικές λεπτομέρειες να αναλύονται σε παράδειγμα που ακολουθεί, φαίνονται παρακάτω:

Radice quadrata	R.q.
Radice cubica	R.c.
Radice quadroquadrata	RR.q.
Radice prima incompolta, ouer relata	R.p.r.
Radice quadra cubica	R.q.c.
Radice seconda incompolta, ouer seconda relata	R.c.r.
Radice quadrata legata con le quantita fra li dui	R.q. L.
Radice cubica legata con le quantita fra li dui	R.c. L.

Έτσι για την τετραγωνική ρίζα χρησιμοποιεί το σύμβολο R.q, ενώ για την κυβική το σύμβολο R.c, έχοντας αντίστοιχο συμβολισμό για μεγαλύτερης τάξης ρίζες. Υιοθετεί επίσης τα γνωστά σύμβολα p και m της ιταλικής σχολής για το $+$ και το $-$ και χρησιμοποιεί ένα είδος αγκύλης για να συμπεριλάβει πιο περίπλοκες παραστάσεις. Αλλά ο πιο σημαντική ίσως καινοτομία του ήταν η τοποθέτηση ενός αριθμού σε ημικύκλιο για να δηλώσει τις δυνάμεις του αγνώστου. Έτσι την εξίσωση $x^3=6x+40$ τη γράφει όπως φαίνεται παρακάτω



Και για τη λύση θα γράψει:



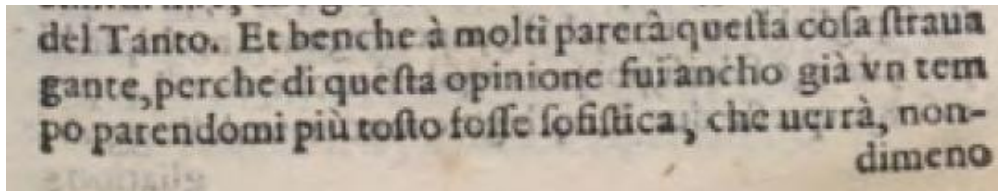
Δηλαδή

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} - \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

Ο Bombelli αρχικά αντιμετωπίζει το κρίσιμο ζήτημα της ‘μη αναγώγιμης’ περίπτωσης της κυβικής εξίσωσης, δηλαδή της εξίσωσης της μορφής $x^3=px+q$ όταν η διακρίνουσα, δηλαδή η παράσταση $D=(q/2)^2-(p/3)^3$ είναι αρνητική, καθώς και τις κυβικές ρίζες με αρνητικά υπόρριζα που εμφανίζονται με σκεπτικισμό.

Η αρχική του πεποίθηση είναι παρόμοια με αυτή του Cardano, ότι τα ριζικά αυτά πρέπει να υπόκεινται στους ήδη γνωστούς κανόνες που ισχύουν και για τα υπόλοιπα ριζικά, αλλά στη συνέχεια αλλάζει γνώμη, θεωρώντας ότι σε δικούς τους κανόνες, η διαφορά αυτή αποτυπώνεται στις διαφορετικές προσεγγίσεις που υπάρχουν στα χειρόγραφα του 1550 και την τυπωμένη έκδοση του 1572. Τα χειρόγραφα αυτά βρέθηκαν το 1923 και παρουσιάστηκαν από τον Ettore Bortolotti καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια σε μια έκδοση του 1929, ενώ στην τυπωμένη έκδοση περιλαμβάνονται τρία από τα πέντε συνολικά βιβλία. Η έκδοση του Ettore Bortolotti περιέχει κάποια συμπεράσματα από το ημιτελές βιβλίο IV. Ο Bombelli υπόσχονταν στο τέλος του τρίτου βιβλίου ότι τα βιβλία IV, V θα εκδοθούν σύντομα, δυστυχώς όμως θα τον προλάβει ο θάνατος που επήλθε λίγους μήνες αργότερα. Στο κείμενο γράφει χαρακτηριστικά αποτυπώνοντας την μεταστροφή των πεποιθήσεων του:

‘Έχω βρει ένα άλλο είδος κυβικής ρίζας ενός πολυνύμου που είναι πολύ διαφορετικό από τις άλλες Αυτή η κυβική ρίζα προκύπτει στο κεφάλαιο όπου εξετάζω την εξίσωση της μορφής $x^3 = px + q$, όταν $p^3/27 < (q/2)^2$. Αυτό το είδος τετραγωνικής ρίζας έχει στον υπολογισμό του διαφορετικές πράξεις από τις άλλες και έχει και ένα διαφορετικό όνομα’

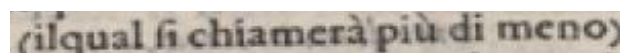


‘Αυτό το νέο είδος ρίζας θα φανεί στους περισσότερους ανθρώπους πιο πολύ σόφισμα παρά πραγματικό. Αυτήν την άποψη είχα και εγώ μέχρι που βρήκα τη γεωμετρική επίδειξη στο επίπεδο’

Έτσι ο Bombelli μετά τη μεταστροφή της άποψης του εισάγει νέα σύμβολα που έντεχνα αποφεύγουν την εμφάνιση ριζικών με αρνητικά υπόρριζα δηλαδή εκφράσεις της μορφής R $0 \text{ m } 1$ που αντιστοιχεί στην έκφραση $\sqrt{-1}$ και χρησιμοποιούσε αρχικά.

Τα σύμβολα *p.di.m*, δηλαδή *piu di meno*, περισσότερο από μείον και *m.di.m*, δηλαδή *meno di meno*, λιγότερο από μείον, αναφέρονται στις ‘ασαφείς’, την περίοδο αυτή, ποσότητες που εκφράζουν οι τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών όπως εδώ η $\sqrt{-121}$ αλλά ειδικότερα στη φανταστική μονάδα *i* για το πρώτο και *-i* για το δεύτερο, και όπως ο Bombelli σημειώνει:

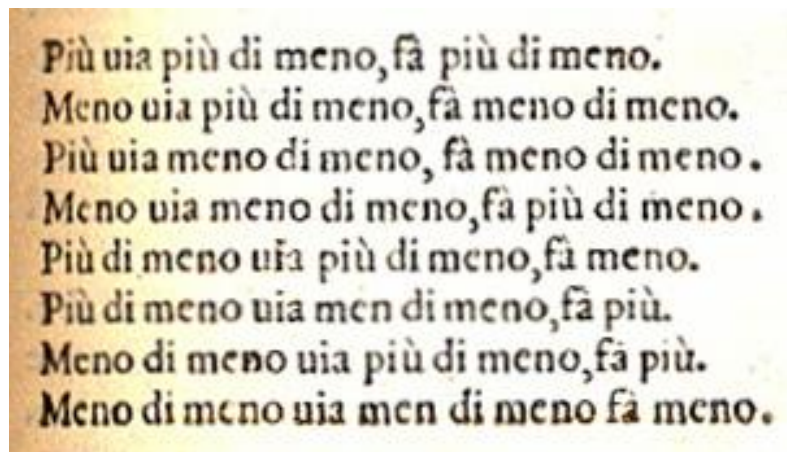
‘δεν μπορούν να θεωρηθούν σαν $+1$, -1 έτσι θα τους αποκαλώ *piu di meno* περισσότερο από μείον όταν πρέπει να προστεθούν και *meno di meno* λιγότερο από μείον όταν πρέπει να αφαιρεθούν.’



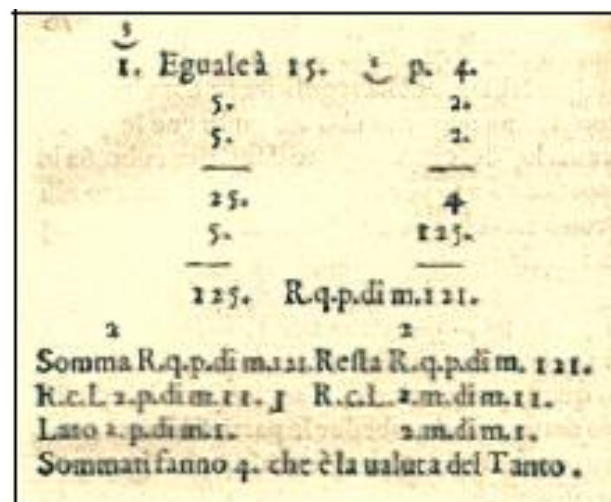
Ο Bombelli μετά την παραδοχή αυτή προχωρά σε εφαρμογή κανόνων λογισμού των συμβόλων αυτών ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιούνται σήμερα, έτσι εξηγεί:

‘*piu di meno*, επί *m.di.m* κάνει *piu*’ δηλαδή $(bi)(-ci) = bc$

‘*piu di meno*, επί *piu di meno* κάνει *meno*’ δηλαδή $(bi)(ci) = -bc$



Έτσι αναφέρουμε το κλασικό παράδειγμα της μη αναγώγιμης περίπτωσης όπως εμφανίζεται στην ‘Άλγεβρα’ και συγκεκριμένα στη σελίδα 294, αυτό της εξίσωσης $x^3=15x+4$



Αρχικά υπολογίζει τη διακρίνουσα $D=-121$ γράφοντας **R. q. p. di. m. 121** έπειτα γράφει:

R. c.[2. p. di. m. 11] R. c.[2. m. di. m. 11] , δηλαδή οι κυβικές ρίζες των $2+11i$, $2-11i$

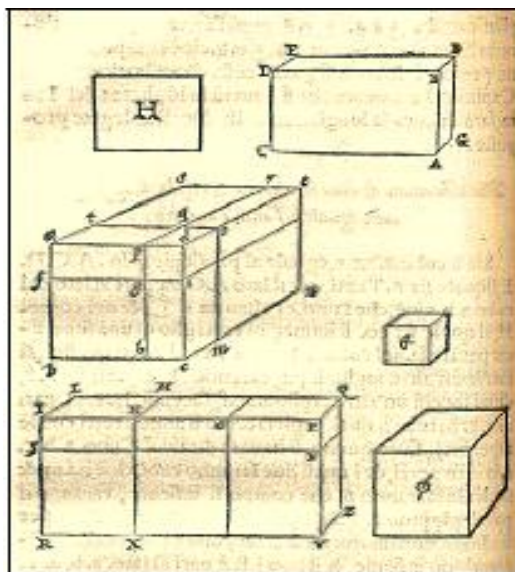
Πλευρά: **2. p. di. m. 1** **2. m. di. m. 1**, αφού $(2+i)^3=2+11i$ και $(2-i)^3=2-11i$

έτσι είναι $\sqrt[3]{2+11i} = \sqrt[3]{(2+i)^3} = 2+i$, $\sqrt[3]{2-11i} = \sqrt[3]{(2-i)^3} = 2-i$

‘προστιθέμενα δίνουν 4 που είναι η τιμή του tanto (άγνωστος)’

Η γεωμετρική νοηματοδότηση μέσω της επίδειξης για τις περιπτώσεις της αναγώγιμης συνίσταται όπως και στην περίπτωση του Cardano, που αναλύσαμε, στην αποδόμηση ενός

κύβου σε 6 επιμέρους στερεά και την επαναδόμησή του με τρόπο που να συνάγεται το ζητούμενο.



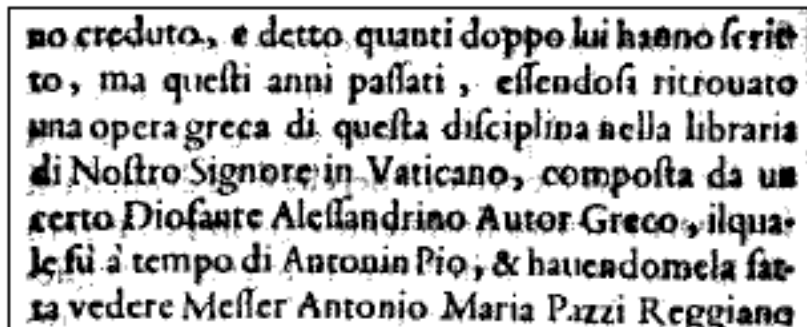
Το ατυχές όμως είναι ότι η παραπάνω επίδειξη **δεν** εφαρμόζεται και στην περίπτωση της μη αναγωγίμης εξίσωσης όπως είναι η παραπάνω

$$x^3 = 15x + 4 \text{ όπου } D = -121 < 0$$

Το ζητούμενο είναι λοιπόν να βρεθεί μια κατάλληλη '*dimonstrazione*' (επίδειξη).

Ποιο όμως ήταν το γεγονός που μεσολάβησε και οδήγησε στην μεταστροφή αυτή των πεποιθήσεων του Bombelli;

Όπως προαναφέρθηκε στο 2^ο κεφάλαιο ο Bombelli μαζί με τον Antonio Maria Pazzi από το πανεπιστήμιο της Ρώμης μελέτησαν και μετέφρασαν μέρος ‘Αριθμητικών’ «κάποιου» Διόφαντου, όπως γράφει ο Bombelli, στη σελίδα 50, από χειρόγραφα που φυλάσσονταν στο Βατικανό.



no creduto, e detto quanti doppo lui hanno scritto, ma questi anni passati, essendosi ritrovato una opera greca di questa disciplina nella libreria di Nostro Signore in Vaticano, composta da un certo Diofante Alessandrino Autor Greco, il quale fu à tempo di Antonin Pio, & hauendome la fatta vedere Messer Antonio Maria Pazzi Reggiano

Ο Bombelli λοιπόν σίγουρα δέχτηκε βαθύτατες επιρροές από το έργο του Διόφαντου. Αξίζει να σημειωθεί ότι 143 από τα 272 συνολικά προβλήματα που περιέχονται στο βιβλίο III της ‘Αλγεβρας’ του είναι παρμένα από το Διόφαντο. Είναι λοιπόν αυτό το γεγονός που συνετέλεσε στη μεταστροφή των πεποιθήσεων του για τα ριζικά με αρνητικό υπόρριζο;

Η Federica la Nave μελετώντας το έργο του δίνει μια διαφορετική και αρκούντως τεκμηριωμένη εξήγηση.

Για αυτήν το κρίσιμο γεγονός ήταν ότι ο Bombelli μελέτησε το έργο του Βενετού αρχιτέκτονα Daniele Barbaro με τίτλο ‘Σχόλια στο Vitruvius’, μια έκδοση του 1567, και ειδικότερα το απόσπασμα που αναφέρεται σε μια κατασκευή που αποδίδεται, από τον Ευτόκιο τον 6^ο μ. Χ. αιώνα, στον Πλάτωνα για το διπλασιασμό του κύβου, δηλαδή για την εύρεση της ακμής x ενός κύβου με διπλάσιο όγκο από δοθέντα κύβο. Η λύση αυτή αναφέρεται από τον Ευτόκιο ανάμεσα σε 12 συνολικά προτεινόμενες λύσεις.

Στο ιστορικό αυτό πρόβλημα που η επίλυση του με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη, όπως αποδείχτηκε μέσω της θεωρίας Galois, και την απόδειξη του P. Wantzell θα κάνουμε μια περιγραφή γιατί η μηχανική κατασκευή με την παρεμβολή δύο συνεχών και αναλόγων ενδιαμέσων κατά την ερμηνεία της la Nave οδήγησαν τον Bombelli να μεταστρέψει τις πεποιθήσεις του.

Η κατασκευή αυτή παρατίθεται στη συνέχεια μαζί με την επίδειξη 'demonstratione' που ακολούθησε ο Bombelli ορμώμενος πιθανότητα και κατά τα λεγόμενα του από αυτήν.

Η εξίσωση που προκύπτει από το ζητούμενο του προβλήματος είναι $x^3=2a^3$, με a να είναι η ακμή του δοθέντα κύβου, που είναι μια 'μη αναγώγιμη' κυβική εξίσωση αφού με $p=0$; και $q=2a^3$ είναι $D=(p/2)^2-(q/3)^3<0$ έτσι αν καταφέρει κανείς να βρει μια γεωμετρική επίδειξη για αυτήν τα περίεργα αποτελέσματα νοηματοδοτούνται και το ζήτημα τίθεται σε άλλη βάση. Η ιστορική αφήγηση έχει ως εξής:

Ο Ευτόκιος παραθέτει μια επιστολή³⁴ του Ερατοσθένη του Κυρηναίου,³⁵ της οποίας η αυθεντικότητα αμφισβητείται, προς το βασιλιά Πτολεμαίο που αρχίζει ως εξής:

‘Λέγεται πως κάποιος αρχαίος τραγουδοποιός εισήγαγε στη σκηνή τον Μίνωα ο οποίος είχε διατάξει να κατασκευαστεί τάφος για το [γιο του] Γλαύκο. Όταν αυτός πληροφορήθηκε ότι ο τάφος ήταν σε όλες του διαστάσεις εκατό πόδια είπε:

«Μικρή παρήγγειλες τη χωρητικότητα του βασιλικού τάφου· να διπλασιαστεί αυτή γρήγορα αφού διπλασιαστεί κάθε πλευρά του χωρίς όμως ο τάφος να χάσει το κομψό σχήμα του»

Φαινόταν δε ότι έκανε λάθος γιατί όταν διπλασιάζονται οι πλευρές η μεν επιφάνεια τετραπλασιάζεται ο δε όγκος οκταπλασιάζεται. Ζητήθηκε δε και από τους γεωμέτρες να βρουν, με ποιον τρόπο, ένα δεδομένο στερεό θα διπλασιαζόταν, χωρίς να χάνει το σχήμα του, και ονομάζονταν αυτό το πρόβλημα διπλασιασμός του κύβου, διότι υποθέτοντας ότι το

³⁴ Van Den Waarden Η αφύπνιση της Επιστήμης Π.Ε.Κ. σελ. 186

³⁵ Ο Viète στο Κεφάλαιο II του έργου του Variorum de Rebus Mathematicis αναφέρεται στην επιστολή αυτή

C A P U T II.

Historia duplicationis cubi.

Historia duplicationis cubi ex epistola Eratosthenis ad Ptolemaeum regem, quam cum Epigrammate recenset Eutocius, & ex Vitruvio scitu digna, & jucunda est.

» Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ερατοσθένης χαίρειν.

» Τῶν ἀρχαίων πινὰ τραγουδοποιῶν φασὶν εἰσπαγαίνειν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατὰ σκοπιά-
» ζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ οὕτω παύσαιτο· ἐκατόμπεδο· εἴη, εἴπῃν,

» Μικρόν γ' ἔρεξας βασιλικῆς σκηνῆς τὰ φε,

» Διπλασίον ἐς ὦ.

» ὁ δὲ πέκτων τῷ κύβῳ ὀπισθοφαίς, διπλασιάζων ἕκαστον πῶλον ἐν πάχῃ τὰ φε, ἐδόκει

» διημαρτικέναι. τῶν γὰρ πλάσεων διπλασιασθῆσάν, τὸ μὲν ὀπίπεδον γάνει πτερυγίασιον,

» τὸ δ' ἔρερον ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ καὶ ὅθεν αἱ γεωμέτραις, πῶνα αὖ τις τρέπον τὸ δο-

» ξεν ἔρερον διπλασιάζον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάζειν καὶ ἐκαλεῖτο τὸ πῆξιν πτερυγία-
μα,

[δεδομένο στερεό] ήταν κύβος, ζητούσαν να τον διπλασιάσουν. Ενώ δε όλοι επί πολύν χρόνον ήταν σε αμηχανία πρώτος ο Ιπποκράτης ο Χίος παρατήρησε ότι αν βρεθούν δύο μέσες ανάλογοι σε συνεχή αναλογία, μεταξύ δύο ευθειών, εκ των οποίων η μία είναι διπλάσια της άλλης ο κύβος θα διπλασιαστεί αλλά [με την επινόηση] αυτή η αρχική αμηχανία περιέπεσε σε άλλη όχι μικρότερη αμηχανία.

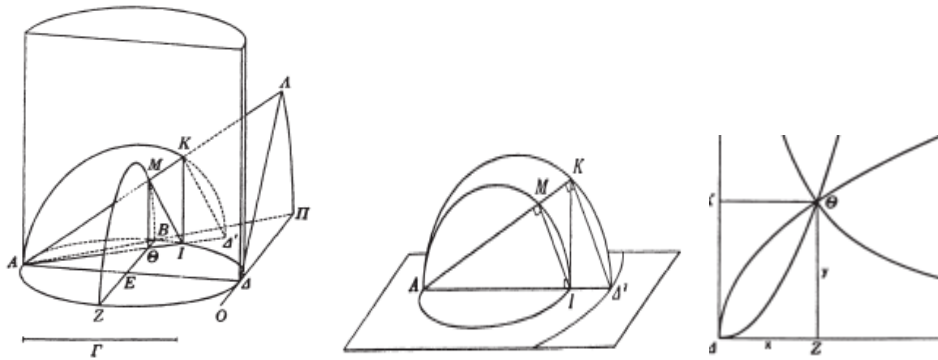
Λέγεται δε ακόμα ότι μετά την πάροδο χρόνου μερικοί Δήλιοι στους οποίους κάποιος χρησμός επέβαλε να διπλασιάσουν έναν από τους βωμούς τους, αφού περιέπεσαν στην ίδια αμηχανία, απέστειλαν εκπροσώπους και ζήτησαν από τους γεωμέτρους της Ακαδημίας του Πλάτωνα να λύσουν το πρόβλημα. Και αφού αυτοί επιδόθηκαν με ζήλο να κατασκευάσουν δύο μέσες αναλόγους μεταξύ δύο δεδομένων [ευθειών], λέγεται ότι ο Αρχύτας ο Ταραντίνος έλυσε το πρόβλημα δια των ημικυλίνδρων και ο Εύδοξος δια των λεγόμενων καμπύλων γραμμών.'

Υπάρχει μια πασιφανής χρονική αντίφαση μεταξύ των δύο αφηγήσεων. Η πηγή της δεύτερης σύμφωνα με το Θέωνα το Σμυρναίο είναι το βιβλίο του Ερατοσθένη 'Πλατωνικός'.

Στο θέμα αυτό ο Van Der Waerden τοποθετείται³⁶ αναφέροντας ότι ενδέχεται ο Πλατωνικός να ήταν ένας διάλογος όπου εμφανίζονταν οι Δήλιοι, Ο Πλάτων, ο Αρχύτας, ο Εύδοξος και ο Μέναιχμος. Στη δραματοποιημένη αυτή αφήγηση ο Ερατοσθένης συνόψιζε όλες τις εξελίξεις γύρω από το πρόβλημα που έλαβαν χώρα μέσα σε μια σύντομη χρονική περίοδο. Φυσικά μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο δεν θα μπορούσε να συμπεριλάβει τον Ιπποκράτη το Χίο. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα είναι πολύ παλαιότερο διότι προκύπτει από τη μετάφραση της Βαβυλωνιακής κυβικής εξίσωσης $x^3=V$ στη γλώσσα της γεωμετρικής άλγεβρας του χώρου. Έτσι η αντίφαση μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης αφήγησης της «επιστολής» εξηγείται: η πρώτη προέρχεται πιθανώς από ιστορικές πηγές, η δεύτερη από τον Πλατωνικό

Οι δύο πρώτες εικόνες δείχνουν τη στερεομετρική λύση του Αρχύτα του Ταραντίνου και η τρίτη τη λύση του Μέναιχμου με χρήση βοηθητικών καμπυλών.

³⁶ Van Den Waerden *Η ανάπτυξη της Επιστήμης* Π.Ε.Κ. πελ. 186 - 188

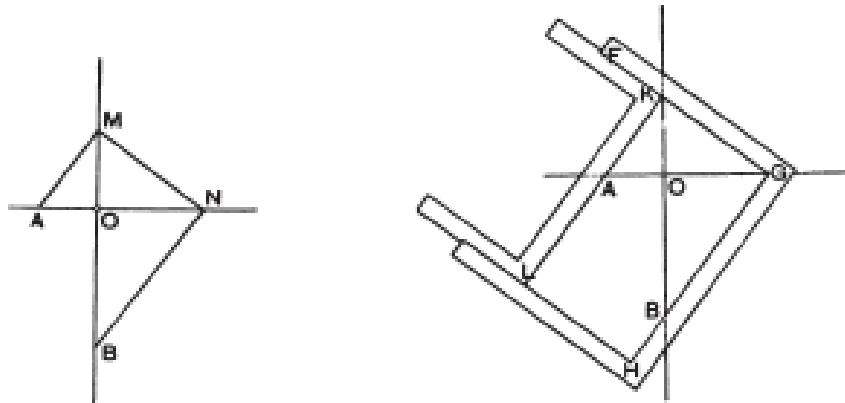


Αυτή όμως που θα μας απασχολήσει είναι η φερόμενη ως Πλατωνική λύση η οποία έγκειται στην κατασκευή των τμημάτων y, x όταν ισχύει

$$a/x = x/y = y/2a$$

με το x να είναι η λύση στο πρόβλημα. Είναι τότε $x^2 = ay$ και $y^2 = 2ax$ και η απαλοιφή του y οδηγεί στην αρχική εξίσωση $x^3 = 2a^3$

Η παρεμβολή ενός γεωμετρικού ενδιάμεσου είχε επιλυθεί από τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες, αλλά η παρεμβολή δύο συνεχών ενδιάμεσων είναι ένα σαφώς πιο δύσκολο τεχνικά πρόβλημα.

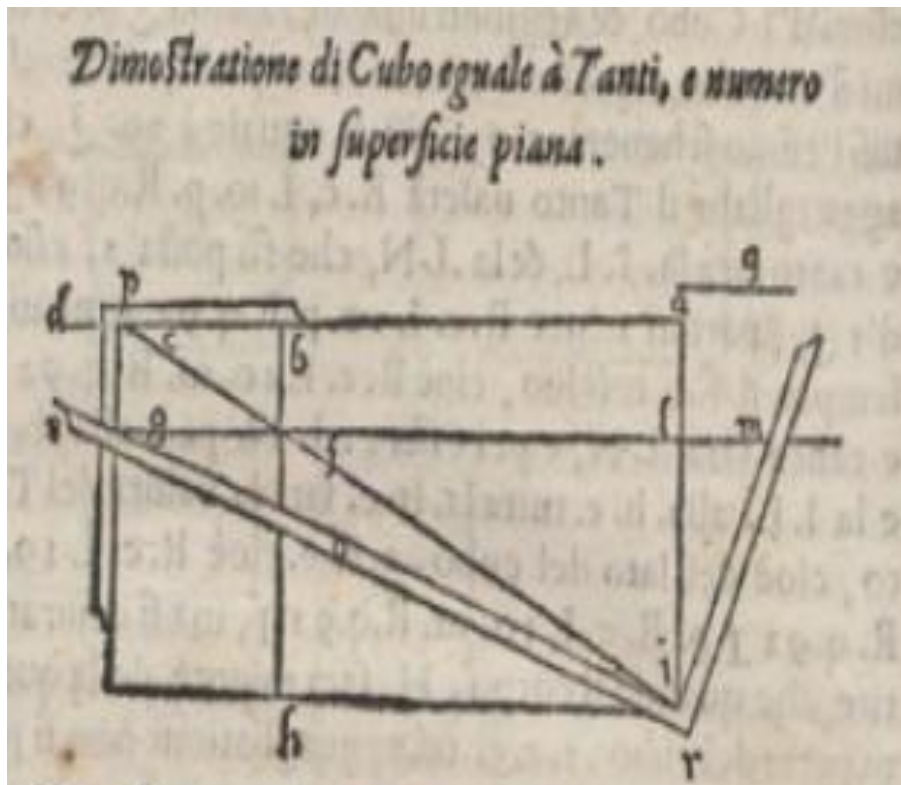


Αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τα σημεία M, N στις προεκτάσεις των πλευρών OA, OB της ορθής γωνίας στις οποίες έχουν τοποθετηθεί τα τμήματα $OA=a, OB=2a$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι AM, BN να είναι κάθετες στη MN , τότε οι OM, ON είναι δύο μέσες ανάλογοι μεταξύ των OA, OB με $OM=x, ON=y$.

Αν εφαρμόσουμε το συμπέρασμα που προέρχεται από την πρόταση II 5 των Στοιχείων, ότι το ύψος ορθογωνίου τριγώνου είναι μέσο ανάλογο των προβολών των καθέτων πλευρών

εφεύρεση του Πλάτωνα και του Αρχύτα του Ταραντίνου (μαζί με πολλούς άλλους σημαντικούς ανθρώπους) θα ήταν μάταιη στην προσπάθεια τους να διπλασιάσουν το altar, δηλαδή τον κύβο (για το οποίο ο Barbaro μιλά επί μακρόν στο βιβλίο του Commentaries on Vitruvius)...

Η επίδειξη του Bombelli φαίνεται παρακάτω.



Βασιζόμενος στις Προτάσεις των ‘Στοιχείων’ του Ευκλείδη II 5 και συγκεκριμένα σε ένα πόρισμα της Πρότασης αυτής που διατυπώνεται στη νεοελληνική γλώσσα ως εξής: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους προς την υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του προς αυτήν, και στην Πρόταση I 43 που επίσης διατυπώνεται: Σε κάθε παραλληλόγραμμο των περί τη διάμετρο παραλληλογράμμων τα παραπληρώματα είναι ίσα. [ισεμβαδικά]

Θα είναι επομένως με χρήση αυτών των προτάσεων

$$(il)^2 = (gl)(lm) \quad \text{και} \quad (gfhj) = (flab)$$

και τέλος δείχνει ότι:

$$(il)^3 = p(il) + q$$

Οπότε το τμήμα (il) είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 = px + q$ και έτσι η *dimonstratione* έγινε εφικτή.

Η διαφορά που προκύπτει από την αλλαγή πεποίθησης είναι ότι πιστεύει πλέον ακράδαντα ότι οι νέες ρίζες έχουν οντολογική υπόσταση και λειτουργούν σαν αριθμοί αφού μπορούν να έχουν μια γεωμετρική αναπαράσταση, τις δέχεται λοιπόν λειτουργικά, αποδεχόμενος έτσι έναν πιο διευρυμένο ‘λειτουργικό ορισμό’ του αριθμού.

Την αναγωγή αλλά και τη ‘μη αναγωγή’ τριτοβάθμια εξίσωση θα επιλύσει επίσης ο Viète χρησιμοποιώντας είτε την παρεμβολή δύο συνεχών μέσων αναλόγων είτε με τριγωνομετρικά μέσα στο VI κεφάλαιο του έργου του ‘*Δύο πραγματείες για την κατανόησης και βελτίωση των εξισώσεων*’.

Ho trovato un'altra sorte di R.c. legate molto differenti dall'altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, come in esso Capitolo si dimostrerà,⁴⁸ la qual sorte di R.q. ha nel suo Algorismo diversa operatione dall'altre e diverso nome; perchè quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si può chiamare nè più nè meno, però lo chiamarò più di meno quando egli si doverà aggiungere, e quando si doverà cavare lo chiamerò men di meno, e questa operatione è necessarijssima più che l'altre R.c.L. per rispetto delli Capitoli di potenze di potenze, accompagnati con li cubi, o tanti, o con tutti due insieme, che molto più sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di R. che quelli dove nasce l'altra, la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io, sin che ho trovato la sua dimostratione in linee (come si dimostrerà nella dimostratione del detto Capitolo in superficie piana) e prima tratterò del moltiplicare, ponendo la regola del più et meno.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: Η ‘ΝΕΑ ΑΛΓΕΒΡΑ’ (‘ALGEBRA NOVA’) ΤΟΥ FRANCOIS VIETE

4.1 ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ FRANCOIS VIETE



François Viète

Γεννήθηκε το 1540 στη Fontenay le Compte, το οποίο βρίσκεται εκεί που σήμερα είναι το διαμέρισμα της Vendée, της ιστορικής επαρχίας Poitou, στη δυτική Γαλλία κοντά στον κόλπο του Biscay.

Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα απ’ την αρχή³⁷. Ο πατέρας του Etienne Viète, ήταν δικηγόρος και η μητέρα του ήταν θεία του Barnabè Brisson πρώτου προέδρου του κοινοβουλίου κατά τη περίοδο της κυριαρχίας της Καθολικής Λίγκας (Catholic League) της Γαλλίας³⁸. Ο νεαρός τότε Viète αρχικά σπούδασε στο Φραγκισκανό μοναστήρι του Fontenay και στα 18 του νομικά στο Πανεπιστήμιο του Poitiers, όπου έλαβε και το πτυχίο του. Το 1559 επέστρεψε στο Fontenay, όπου ξεκίνησε να εξασκεί το επάγγελμα αυτό, αποκτώντας σημαντική φήμη - λέγεται ότι μεταξύ των πελατών του ήταν και η Mary

³⁷ Είναι σχεδόν βέβαιο ότι δεν υπάρχει μια πλήρης βιογραφία του François Viète, πολλές από τις πληροφορίες που ακολουθούν, στην εργασία αυτή, αντλήθηκαν από το βιβλίο Viete Francois, *The Analytic Art, Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra Nova*, μετάφραση T. Richard Witmer, Dover Publication Inc. Mineola, New York, 2006 και αποτελούν συρραφή τμημάτων από το έργο του Frederic Ritter, *François Viète, Inventeur de l’Algebre Modern*, Paris 1895, όπως αναφέρει ο συγγραφέας του.

³⁸ Η Καθολική Λίγκα (Catholic League) ήταν σκληροπυρηνική οργάνωση Καθολικών, στρεφόμενη κυρίως κατά των Προτεσταντών

Stuart της Σκωτίας, καθώς και η Βασίλισσα Ελεονόρα της Αυστρίας - αποκτώντας έτσι τον τίτλο Seigneur de la Bigotière³⁹. Τον πιο σημαντικό ρόλο ωστόσο για την μελλοντική επαγγελματική του πορεία ήταν η ανάληψη των νομικών υποθέσεων της επιφανούς οικογένειας Soubise το 1564, που είχαν σαν συνέπεια να γίνει προσωπικός γραμματέας της Antoinette d' Aubettere, που ήταν μέλος αυτής της οικογένειας.

Μεταξύ των καθηκόντων που ανέθεσε στον Viète η Antoinette, ήταν η νομική υπεράσπιση του συζύγου της, Jean V de Parthenay – Soubise, στρατιωτικό ηγέτη των Ουγενότων⁴⁰ (Huguenots) στην υπεράσπιση της Λυών απέναντι στα στρατεύματα του Jacques de Savoy, αλλά και η εκπαίδευση της εντεκάχρονης κόρης τους Catherine de Parthenay (1554 -1631), η οποία ενδιαφέρονταν ιδιαιτέρως για την αστρολογία, και κατά συνέπεια και την αστρονομία.

Τα μαθήματα περιελάμβαναν και μαθηματικά· ο Viète έγραψε γι' αυτήν διάφορες πραγματείες στην αστρονομία και την τριγωνομετρία, που όμως ποτέ δεν τυπώθηκαν, αν κάποιες από τις οποίες σώζονται.

Το 1568 η Catherine de Parthenay παντρεύεται, και ο Viète μαζί με την οικογένεια Soubise μετακομίζει στη La Rochelle, όπου έρχεται σε επαφή με όλη την Καλβινιστική αριστοκρατία συμπεριλαμβανομένου του Henry IV de Navarre, (1553 – 1610) μετέπειτα βασιλιά Henry IV (Ερρίκος Δ) της Γαλλίας.

Σημειωτέον ότι ο Viète παρέμεινε φίλος και σύμβουλος της Catherine⁴¹ σε ολόκληρη τη διάρκεια της ζωής του, συμπεριλαμβάνοντας μια λαμπρή αφιέρωση σ' αυτήν, στον πρόλογο της *Isagoge in Artem Analyticen* του 1591. Το ακριβές περιεχόμενο καθώς και το νόημα αυτών που αναφέρονται στην αφιέρωση αυτή, θα επιχειρήσουμε να αναλύσουμε στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας αυτής.

³⁹ Τιμητικός τίτλος που απονέμονταν σε ανώτατους λειτουργούς και κρατικούς αξιωματούχους, όπως δικαστικοί, υπουργοί, βουλευτές και είναι αντίστοιχος του βρετανικού τίτλου τιμής ' λόρδος'

⁴⁰ Οι Ουγενότων (Huguenots) ήταν θρησκευτική ομάδα Γάλλων Προτεσταντών, γνωστοί και ως Καλβινιστές

⁴¹ Viète Francois, *The Analytic Art, Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra Nova*, μετάφραση T. Richard Witmer, Dover Publication Inc. Mineola, New York, 2006, Introduction σελ.2



INCLYTÆ PRINCIPI
MELVSINIDI CATHARINÆ
PARTHENÆENSI,

Piissimæ Procerum ROMANIORVM matri,
FRANCISCVS VIETA FONTENÆENSIS
honorem voveo & obsequium.

Το 1571 βρίσκει τον Viète εγγεγραμμένο ως δικηγόρο στο Παρίσι. Το Παρίσι εκείνη την εποχή φιλοξενούσε πολλούς υποσχόμενους μαθηματικούς⁴² όπως ο με τους οποίους γνωρίστηκε, ξεκινώντας την έκδοση του *Universalium inspectionum ad canonem mathematicum liber singularis*, με δική του δαπάνη, όντας ευκατάστατος, ενώ παράλληλα συνεχίζει τις μαθηματικές του έρευνες εργαζόμενος τις νύχτες είτε στο ελεύθερο χρόνο του. Ένα χρόνο αργότερα, το 1572, συμβαίνει η τραγωδία της νύχτας του Αγίου Βαρθολομαίου με τη μαζική σφαγή Προτεσταντών από Καθολικούς. Το γεγονός αυτό βρίσκει τον Viète στο Παρίσι.

Το 1574 μετακομίζει στη Βρετάνη, όπου έγινε σύμβουλος του Κοινοβουλίου στη Rennes, διαβάζοντας δημόσια στις 6 Απριλίου 1574 μια δήλωση για την Καθολική του πίστη. Ο Viète, όπως θα δούμε, αν και υπηρέτησε κυρίως καθολικούς βασιλείς, εκτός του Ερρίκου του IV, πάντοτε συμπαθούσε και προστάτευε τους Huguenots και κατηγορήθηκε σφοδρά γι' αυτή του τη στάση. Είναι εξαιρετικά απίθανο να ασπάστηκε την Προτεσταντική πίστη παρότι είχε στενές συναναστροφές με Καλβινιστικές οικογένειες, καθώς και ηγετικές μορφές τους, επωφελούμενος εν γένει από αυτές. Έθετε ίσως την κοινωνική και εθνική σταθερότητα πάνω από τις θρησκευτικές διαμάχες υιοθετώντας μια πιο ουδέτερη θρησκευτική στάση⁴³

Ο Viète επιστρέφει στο Παρίσι και τη βασιλική αυλή το 1580, ως 'maitre de requetes'⁴⁴ (master of requests) έπειτα από τις επιτυχίες που σημείωσε στη διεκπεραίωση εμπιστευτικών υποθέσεων και διαπραγματεύσεων που του είχαν ανατεθεί από τον Βασιλιά Henry III (Ερρίκος Γ, (1551 – 1589)) που μετά το θάνατο του αδελφού του Καρόλου Θ'

⁴² Ένας από αυτούς ήταν ο Guillaume Gosselin (-1590) από την Caen, και ασχολήθηκε με τη μετάφραση του έργου του Tartaglia στα Γαλλικά..

⁴³ Πολλές από τις πληροφορίες της παραγράφου αυτής αντλήθηκαν από την ιστοσελίδα https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

⁴⁴ Εξέχων τίτλος νομικού συμβούλου του Κοινοβουλίου, και στενού συνεργάτη του βασιλιά.

(1550 -1574), ανέβηκε στο θρόνο το 1574, με την ενθρόνιση να γίνεται στη Rennes, στις 13 Φεβρουαρίου 1575.

Στο μεταξύ οι Καθολικοί κατηγορώντας τον Ερρίκο Γ' για χλιαρή στάση στο θέμα των Ουγενότων συστήνουν μια σκληροπυρηνική οργάνωση την Καθολική ή Ιερή Λίγκα (Ligue Catholique), με πρωτοβουλία της οικογένειας Guise και προετοιμάζουν την αντικατάσταση του Ερρίκου με οποιονδήποτε τρόπο. Ο Viète δε μένει στο απυρόβλητο, κατηγορείται ως Ουγενότος και έτσι χάνει τη θέση του.

Το 1585 επιστρέφει στο Fontenay όπου και αφοσιώνεται για τέσσερα περίπου χρόνια στο μαθηματικό του έργο. Αυτή είναι η περίοδος που συγγράφει την 'Αναλυτική Τέχνη' του, την 'ARS ANALYTICA'.

Το 1589 ο Henry III υπό την απειλή των Λίγκας και μέσα σε ένα κλίμα γενικού επαναστατικού αναβρασμού των Καθολικών καταφεύγει στην Tours με λίγους ευγενείς και στρατιώτες, καταδιωκόμενος από τα στρατεύματα της Λίγκας με αρχηγό τον Δούκα ντε Μαγιέν (De Mayenne), διατάζοντας τους βασιλικούς αξιωματούχους να παρουσιαστούν εκεί μέχρι τις 15 Απρίλη 1589.

Ο Viète ήταν ένας από αυτούς που τον ακολούθησαν. Μια από τις υπηρεσίες που προσέφερε προσέφερε, ήταν να αποκρυπτογραφεί τα μηνύματα που αντάλλασαν οι εχθροί του, δηλαδή η Λίγκα και οι Ισπανοί του Φιλίππου του Β', (1527 – 1598) και έφεταν στα χέρια του. Υπήρξε τόσο επιτυχής σ' αυτό που ορισμένοι, ιδιαίτερα στη Ρώμη, τον κατήγγειλαν λέγοντας ότι μια τέτοια αποκρυπτογράφηση μπορούσε να γίνει μόνο με μαγεία και διαβολική βοήθεια. Τον ίδιο χρόνο ο Ερρίκος ο III δολοφονείται και στο θρόνο ανεβαίνει ο Ερρίκος της Ναβάρρας τώρα βασιλιάς Ερρίκος ο IV (1553 – 1610). Ήταν ο πρώτος και ο μόνος Ουγενότος βασιλιάς της Γαλλίας, και ο πρώτος της δυναστείας των Βουρβόνων (Bourbon).

Το 1590 ο Viète «σπάζει» έναν κώδικα αποτελούμενο από περισσότερους από 500 χαρακτήρες και έτσι τα κείμενα των Ισπανών ήταν πλέον αναγνώσιμα από τον Henry IV· ο τελευταίος δημοσιοποιεί ένα γράμμα από τον Συνταγματάρχη Moreo, προς τον βασιλιά της Ισπανίας που αναφέρει πως ο αρχηγός της Λίγκας, Δούκας ντε Μαγιέν σχεδιάζει να γίνει βασιλιάς ανατρέποντας τον Ερρίκο.

Η δημοσιοποίηση αυτή οδήγησε στην έναρξη των Θρησκευτικών πολέμων. Ο βασιλιάς της Ισπανίας κατηγόρησε τον Viète για χρήση μαύρης μαγείας



Παράδειγμα κωδικοποιημένου μηνύματος

Ο Viète παρέμεινε ένα άτομο με υψηλές επιρροές στη βασιλική αυλή ακόμα και μετά το θάνατο του Ερρίκου του III και την άνοδο στο θρόνο του Ερρίκου του IV. Η αυλή επιστρέφει στο Παρίσι το 1594 και καλείται για μια θέση μυστικού συμβούλου σ' αυτή, εν τω μεταξύ κλονίζεται η υγεία του, πέφτει σε δυσμένεια και επιστρέφει στο Ροίτου όπου του έχει δοθεί μια ειδική αποστολή. Η ενασχόληση αυτή του επιτρέπει να διαμένει στη Fontenay.

Το 1602 αποσύρεται, και τον επόμενο χρόνο πεθαίνει.

Το μαθηματικό έργο του Francois Viète, χωρίζεται σε δύο διακριτές περιόδους. Η πρώτη ξεκινάει με ή λίγο μετά την πρόσληψη του στην οικογένεια Soubise το 1564 και τελειώνει με την έκδοση του *Canon Mathematicus* και του *Universalium Inspectionum Liber Singularis* στο Παρίσι το 1571. Αυτά τα έργα αποτελούνταν κυρίως από πίνακες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Η δεύτερη ενεργή μαθηματική περίοδος αρχίζει το 1584 περίπου μια περίοδος όπου είχε εκδιωχθεί από τη θέση του. Ήταν εκείνη ακριβώς η περίοδος όπου συγγράφει και το μεγαλύτερο μέρος της 'Αναλυτικής Τέχνης'. Η δημοσίευση των εργασιών του έγινε τμηματικά, με τις πρώτες να γίνονται το 1591 και να ακολουθήσουν οι επόμενες μετά το θάνατο του, από τους μαθητές, οπαδούς του έργου του ή φίλους του, όπως για παράδειγμα

οι Jean Beaugrand (1584 – 1640), Alexander Anderson (1582 – 1620), Marino Ghetaldi (1568 – 1626).

Ο Viète εντέλει δεν εργάστηκε ποτέ ως επαγγελματίας μαθηματικός με την έννοια ότι δεν χρησιμοποιούσε την ιδιότητά του αυτή για βιοπορισμό, ωστόσο εμπιστευόμενοι τον ιστορικό της εποχής Jacques de Thou⁴⁵, διαλογίζονταν πάνω σε αυτά συχνά για τρεις συνεχείς ημέρες χωρίς φαγητό ή ύπνο, διάγοντας έτσι έναν πνευματικό βίο παράλληλο με αυτό του νομικού ή αυλικού.

⁴⁵ François Viète, *The Analytic Art*, μετ. και επιμ. T. Richard Witmer (Κεντ, Οχάιο: Kent State University Press, 1983) σελ 3

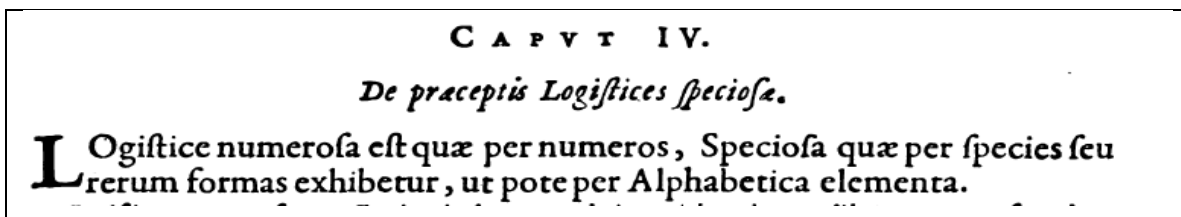
4.2

Η ΣΗΜΕΙΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ FRANCOIS VIETE

Η επιστημολογική θεώρηση που αναδύονταν στο λυκόφως του 16^{ου} αιώνα, ήταν αυτή που αντιμετώπιζε την Άλγεβρα σαν μια γενική θεωρία εξισώσεων που θεμελιώνονταν πάνω στην αναλυτική μέθοδο και τον καθολικό συμβολισμό, που εκκινεί ως μια **ars analytica** (αναλυτική τέχνη). Στο πλάνο τώρα της ιστορίας εισέρχεται ο François Viète, με το ομότιτλο έργο του. Η θεώρηση αυτή θα αλληλεπιδράσει με την αντίστοιχη καρτεσιανή που θα αναπτυχθεί το 17^ο αιώνα, η οποία θα συνεχίσει να δομείται με τις ίδιες βασικές αρχές, αλλά με μια αποκλίνουσα πορεία σε σχέση με αυτήν, προσδίδοντας στην άλγεβρα υποβοηθητικό ρόλο.

4.2.1 Η ‘ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ’ – ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ENANTI ΤΗΣ ‘ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ’

Αυτή η νέα ‘αναλυτική τέχνη’⁴⁶ όχι απλά επεκτείνει τις προγενέστερες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων και εξισώσεων, κάνοντας χρήση ενός πιο γενικευμένου συμβολισμού, που όμως απέχει από τη σημερινή συμβολική γραφή, αλλά όπως θα διαφανεί, και ελπίζουμε να καταδειχθεί, **τις αναγάγει σε μια γενική θεωρία**. Στην Εισαγωγή στην Αναλυτική Τέχνη (*Isagoge in Artem Analyticen*) του 1591 και στο τέταρτο κεφάλαιο γράφει χαρακτηριστικά⁴⁷:



⁴⁶ Έχει ενδιαφέρον η χρήση του όρου ‘τέχνη’ από τον Viète που δείχνει να ευθυγραμμίζεται με τον όρο *Ars Magna* (Μεγάλη Τέχνη) του Cardano, αν και το έργο του Viète περιέργως δεν περιλαμβάνει έστω και μία αναφορά σε αυτό, φροντίζοντας επίσης να κρατήσει σαφή απόσταση από τον όρο ‘Άλγεβρα’ που υπονοείται στο τίτλο του έργου του Cardano

⁴⁷ Οι συχνές αναφορές στο έργο του Viète που θα ακολουθήσουν προέρχονται από την έκδοση *Vietae Francisci, Opera Mathematica*, Francisci Van Schooten, Leyden 1646

«η αριθμητική λογιστική χρησιμοποιεί αριθμούς η συμβολική λογιστική χρησιμοποιεί σύμβολα, λόγου χάρη τα γράμματα του αλφαβήτου».

Σε μια ανάμειξη γραμμάτων, για άγνωστες αλλά και για τις δοθείσες τώρα ποσότητες, είναι σίγουρα χρήσιμος ένας καθορισμός της σημειολογίας τους, έτσι συμπληρώνει στο κεφάλαιο V πρόταση 5 της ‘Isagoge’:

«Οι δοθέντες όροι διακρίνονται από τους αγνώστους με σταθερά γενικά και εύκολα αναγνωρίσιμα σύμβολα, όπως λόγου χάριν, εάν συμβολίσουμε τα άγνωστα μεγέθη με το γράμμα A και τα άλλα φωνήεντα και E, I, O, U και Y και τους δοθέντες όρους με τα γράμματα B, G, D και τα άλλα σύμφωνα»⁴⁸.

όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα στη σελίδα 9 της ‘Εισαγωγής’

5 Quod opus, ut arte aliqua juvetur, symbolo constanti & perpetuo ac bene conspicuo datæ magnitudines ab incertis quæsititiis distinguantur, ut propter magnitudines quæsititiis elemento A aliave litera vocali, E, I, O, U, Y, datas elementis B, G, D, aliifve consonis designando.

Σε ένα άλλο σημείο της Εισαγωγής και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο VI πεπεισμένος για την αξία, την απλότητα και τη διαύγεια της συμβολικής λογιστικής ο Viète δηλώνει :

tuntur Analyseos vestigia. Quod & ipsum Analyticum est : neque propter inductam sub specie Logisticen jam negociofum. Quod si alienum proponi-

‘...αυτή είναι η Ανάλυση και χάρη στην εισαγωγή της συμβολικής λογιστικής δεν είναι πια δύσκολη’

Ενώ στο κεφάλαιο V επισημαίνει το δαιμόνιο⁴⁹ του Διόφαντου, γιατί με την δυσνόητη, όπως λέει, αριθμητική λογιστική που χρησιμοποιεί, σε σχέση με τη συμβολική λογιστική, προκαλεί τον θαυμασμό για την ευφυΐα του.

Zeteticen autem subtilissime omnium exercuit Diophantus in iis libris, qui de re Arithmetica conscripti sunt. Eam vero tanquam per numeros, non etiam per species (quibus tamen usus est) institutam exhibuit, quo sua esset magis admirationi subtilitas & solertia : quando quæ Logistæ numerofo subtiliora adparent & abstrusiora, ea utique specioso familiaria sunt & statim obvia.

⁴⁸ François Viète, *The Analytic Art*, μετ. και επιμ. T. Richard Witmer (Κεντ, Οχάιο: Kent State University Press, 1983) σελ 24

⁴⁹ Στη μετάφραση του εδαφίου αυτού, ο Smith, αποδίδει σκοπιμότητα στην επιλογή της παρουσίασης με τη μέθοδο της αριθμητικής λογιστικής από τον Διόφαντο με σκοπό να γίνει πιο θαυμαστή η ευφυΐα του. Ο. π. σελ 27

Ο συμβολισμός αυτός, αν και λίγο διαφορετικός από το συμβολισμό της σημερινής πρακτικής, επιτρέπει στον Viète να χειρίζεται αλγεβρικά όχι μόνο αριθμούς αλλά οποιοδήποτε μέγεθος ή ποσότητα υπόκειται στις βασικές αριθμητικές πράξεις και πραξιακές διαδικασίες, γεγονός που του δίνει τη δυνατότητα να πραγματοποιήσει το απαιτούμενο διανοητικό άλμα,

Κάνει χρήση ‘περίεργων’ όρων *sub specie* και *speciosa*⁵⁰, δηλαδή ‘είδος’ και στο κεφάλαιο III αναφέρεται ο όρος *Logistica speciosa* (άλγεβρα) σε αντιδιαστολή με τον όρο *Logistica numerosa* (αριθμητική)

Με την υιοθέτηση του όρου αυτού αλλά και τη χρήση συμβόλων και λέξεων μαζί, ο Viète δεν αποκόπτεται πλήρως από το προηγούμενη παράδοση, αλλά αποκτά το σημαντικό πλεονέκτημα να μπορεί να απεικονίζει με τη σημειολογία του εγγράμματος λογισμού, οποιοδήποτε μέγεθος και όχι μόνο αριθμούς και να έχει ορατά τα αποτελέσματα που προκύπτουν καθ’ όλη τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης, και διαθέσιμα για το ‘χτίσιμο’ ολοένα και πιο περίπλοκων προτάσεων.

Πιστός ή εγκλωβισμένος στην αρχαιοελληνική παράδοση υιοθετεί, όπως οι προγενέστεροι του αλλά και εμμένει, στην αρχή της ομοιογένειας των εξισώσεων, (Κεφάλαιο III της

⁵⁰ Η επιλογή του όρου αυτού από τον Viète έχει εγείρει πληθώρα σχολίων, ερμηνειών και επεξηγήσεων. Ο John Wallis στο ‘*Treatise of Algebra*’ (London, 1685) σελ 66 επεκτείνοντας τις απόψεις του Harriot, γράφει ότι η χρήση του όρου *species* προέρχεται από την εξοικείωση του Viète με τη δικανική ορολογία όπου ο όρος χρησιμοποιείται για ασαφή στοιχεία. Μια διαφορετική άποψη εκφράζει ο Samuel Jeake στη ‘*Λογιστική*’ του (London, 1696) γράφοντας ότι «αυτό είναι το όνομα... που οι Λατίνοι χρησιμοποιούν για το σχήμα και το μέγεθος οποιουδήποτε πράγματος» και έτσι αναλόγως ‘*Species* είναι Ποσότητες ή Μεγέθη που συμβολίζονται με γράμματα, νοηματοδοτώντας αριθμούς, γραμμές ή γεωμετρικά σχήματα’. Στο ‘*Dictionnaire Universel de Mathematique et de Physique*’ (Paris, 1753) τόμος I σελ. 17 του Alexander Saverein αναφέρεται ότι η έκφραση ‘*algebre specieuse*’ προέρχεται από το γεγονός ότι ποσότητες αναπαριστώνται με γράμματα που ορίζουν ‘*leur forme et leur espece*’, δηλαδή τη μορφή και το είδος τους, ‘*d’ ou viens le mot specieuse*’ απ’ όπου προκύπτει το όνομα ‘του είδους’. Ο Ritter από την άλλη θεωρεί ότι ο Viète δίνει ένα νέο νόημα σε μια παλιά λατινική λέξη. Ακόμη μια άλλη εξήγηση που δίνεται από κάποια Γαλλικά λεξικά όπως το Littre’s, για παράδειγμα, όπου ο όρος ‘*specieux*’ φέρεται να έρχεται απ’ ευθείας από το λατινικό ‘*speciosa*’ που σημαίνει ‘όμορφο στην εμφάνιση’ και η φράση ‘*Arithmetic spesieuz*’ ερμηνεύεται με τη φράση ‘*ainsi dite a cause de la beaute de l’ algebra par rapport de l’ arithmetique*’, δηλαδή ‘αυτό λέγεται εξ’ αιτίας της ομορφιάς της άλγεβρας σε σχέση με την αριθμητική’. Ο Smith θεωρεί πως ο Διόφαντος είναι ‘η πιο πιθανή πηγή για τη χρήση του όρου αυτού από τον Viète’, και πως ο τελευταίος το χρησιμοποιεί αντικαθιστώντας τη λέξη ‘είδος’ του Διόφαντου. «τείνω να πιστεύω ότι ο Viète διάλεξε το ουσιαστικό *είδος*, με τις ερμηνείες της ‘εμφάνισης’, ‘όψης’, ‘ομοιότητας’ κ.τ.λ. και χωρίς αμφιβολία με μια εκτίμηση της υποβοηθητικής του χροιάς, στο κάπως διευρυμένο νόημα μιας αναπαράστασης ή συμβόλου και το μετέφρασε ανάλογα».

Εισαγωγής της ‘Αναλυτικής Τέχνης, σελ. 2) ότι όλοι οι όροι μιας εξίσωσης πρέπει να είναι του ίδιου βαθμού, σημειώνοντας χαρακτηριστικά:

CAPUT. III.
*De lege homogeneorum, & gradibus ac generibus magnitudinum
 comparatarum.*

PRima & perpetua lex æqualitatum seu proportionum, quæ, quoniam de
 homogeneis concepta est, dicitur lex homogeneorum, hæc est:
Homogenea homogeneis comparari.
 Nam quæ sunt heterogenea, quomodo inter se adfecta sint, cognosci non
 potest, ut dicebat Adrastus.

‘ομοιογενείς όροι πρέπει να συγκρίνονται με ομοιογενείς όρους γιατί, όπως είπε ο Άδραστος⁵¹, είναι αδύνατον να καταλάβω πως ετερογενείς όροι αλληλεπιδρούν...’

Έτσι θα έγραφε:

A cub + B plano in A æquatur C in A quad + D solido

αντί $A^3 + BA = CA^2 + D$ ή με σύγχρονους όρους $x^3 + bx = cx^2 + d$

Στην παραπάνω έκφραση ο Viète εννοεί ότι ο αριθμός B είναι επίπεδος ώστε το γινόμενο AB να είναι στερεός αριθμός, ενώ ο D είναι στερεός αριθμός. Αυτή η απαίτηση της ομοιογένειας με το χρόνο και κυρίως μέσα από το έργο του Descartes παραμελήθηκε θεωρούμενη ένα περιττό βάρος και εντέλει απαλείφθηκε.

Έτσι για τον Viète η εξίσωση $x^3 = 15x + 4$ δεν φαίνεται έχει εμφανές νόημα, αν δεν γίνει ομοιογενής, μιας και μια τρισδιάστατη ποσότητα πρέπει να είναι ίση με ένα μονοδιάστατο μέγεθος συν έναν αριθμό. Οι αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν γίνει ακόμη αποδεκτοί και φυσικά δεν υφίστανται και για τον Viète.

Με την πρώτη ματιά παρατηρεί κανείς ότι ο Viète δεν χρησιμοποιεί το σύμβολο της ισότητας στις διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις, στην πραγματικότητα το σύμβολο αυτό εισήχθη από τον Άγγλο μαθηματικό Robert Recorde (1510 – 1558) στο έργο του

⁵¹ Ο Viète στο σημείο αυτό αναφέρεται πιθανότατα στον Άδραστο τον Αφροδισιάα, (2^{ος} αιώνας μ.Χ..) , περιπατητικό φιλόσοφο από την Αφροδισιάδα της Καρίας (Μικρά Ασία) , που ασχολήθηκε με την ερμηνεία έργων του Αριστοτέλη..

Η επαφή με τον Άδραστο γίνεται πιθανότατα μέσα από τη μελέτη του Θέωνα του Αλεξανδρέα. François Viète, *The Analytic Art*, μετ. και επιμ. T. Richard Witmer (Κεντ, Οχάιο: Kent State University Press, 1983) σελ 15

‘*Whetstone of Witte*’ από το οποίο διδάχθηκε άλγεβρα μια ολόκληρη γενιά άγγλων επιστημόνων και σε αυτό αναφέρει χαρακτηριστικά:

‘για να αποφύγω την κουραστική επανάληψη των λέξεων αυτών – είναι ίσο προς – θα χρησιμοποιώ, όπως κάνω συχνά όταν εργάζομαι, ένα ζεύγος παραλλήλων, ή δίδυμα ισομήκη ευθύγραμμα τμήματα, =, επειδή δεν μπορεί να υπάρχουν δύο πιο ίσα πράγματα’

Το σύμβολο της ισότητας δεν υιοθετήθηκε πλήρως παρά περίπου στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, δηλαδή περίπου μισό αιώνα μετά τον θάνατο του Viète, ο οποίος όπως συνηθιζόταν άλλωστε, στη θέση του ίσον γράφει το λατινικό *aequatur*.

Εμφανής είναι και η απουσία γραφής των εκθετών στις εκφράσεις με τις δυνάμεις με τρόπο που να είναι οικείος στο σημερινό αναγνώστη αλλά η καθήλωση σε μια λεκτική ή ρητορική διατύπωση τους, γράφει έτσι *A quadratum* ή σύντομα *A quad* για το A^2 , *A cubus* για το A^3 , και *A quadratum quadratum* ή σύντομα *A quad quad*, και ακόμα *Aqq* ή A^{qq} για το A^4 . Παρατηρούμε ότι οι εκθέτες αυτοί φέρουν κάτι από το άρωμα ενός πολυδιάστατου αντικειμένου.

Το γεγονός ότι ο Viète δεν έκανε το βήμα αυτό, δηλαδή της μετατροπής των λεκτικών εκθετών σε αριθμητικούς, εγείρει κρίσιμα ερωτήματα για το αν ήταν ενήμερος για το έργο των εν γένει συγχρόνων του Girolamo Cardano, Rafael Bombelli και Simon Stevin αλλά και των λίγο προγενέστερων του Nicolas Chuquet, Christoff Rudolff, ή και γενικότερα των κοσσιστών⁵², που χρησιμοποιούσαν έναν πιο προχωρημένο συμβολισμό και σαφώς πλησιέστερο στα σημερινά δεδομένα. Οι απόψεις στο θέμα αυτό διίστανται. Ένα επιχείρημα σε αυτή την κατεύθυνση αποτελεί το γεγονός ότι ενώ ο Viète από την Εισαγωγή ακόμα στην ‘*Αναλυτική Τέχνη*’ του αναφέρεται συχνά στους Έλληνες συγγραφείς και ειδικότερα στον Διόφαντο, αποτίνοντας φόρο τιμής για την πνευματική κληρονομιά που άφησαν, δεν υπάρχει ούτε μια απλή έστω αναφορά στο σημαντικό και έως ένα σημείο της θεματογραφίας τουλάχιστον παρεμφερές έργο του Cardano ‘*Ars Magna*’.

⁵² Ο όρος κοσσιστής είναι τεχνητός και διαμορφώθηκε από τη λέξη *coss*, που είναι η γερμανική μορφή της λέξης *cosa*, που στην ιταλική γλώσσα σημαίνει πράγμα, και είναι το όνομα που δίνονταν συνήθως στον άγνωστο μιας αλγεβρικής εξίσωσης, έτσι ο όρος εκφράζει τους ασχολούμενους με την τέχνη της επίλυσης προβλημάτων. Οι κοσσιστές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι μια προέκταση των αβακιστών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το έργο *Coss* του Christoff Rudolff.

Από την άλλη πλευρά ο F. Ritter, αναφέρει⁵³ ότι ο Viète κατά τη διάρκεια της διαμονής του στο Παρίσι είναι πολύ πιθανό να γνώρισε τον Guillaume Gosselin ανάμεσα στους άλλους υποσχόμενους μαθηματικούς που διέμεναν εκείνη την περίοδο εκεί. Ο Gosselin, όπως προαναφέραμε είχε μεταφράσει το έργο του Tartaglia στα γαλλικά, και έτσι είναι εύλογο να εικάσουμε ότι είχε έρθει σε επαφή με το έργο του τελευταίου, αλλά και του Cardano, άσπονδου του Tartaglia λόγω των δημοσιεύσεων των ‘τύπων’ της κυβικής εξίσωσης στο Ars Magna.

Ο Moritz Cantor αναφέρει ότι η λύση του Viète στην ‘αναγώγιμη’ κυβική εξίσωση με την παρεμβολή τεσσάρων συνεχών και αναλόγων αριθμών⁵⁴, που θα αναλυθεί στη συνέχεια, είναι πολύ κοντά σε αυτή της ιταλικής σχολής· θα προσθέταμε ότι και η λύση που προτείνει ο Viète στην τεταρτοβάθμια εξίσωση ομοιάζει της λύσης του Ferrari, γεγονός που ερμηνεύεται ότι είναι απίθανο να μην ήταν ενήμερος για την μεθοδολογία τους.

Αντιθέτως ο Viète μάλλον δεν ήταν ενήμερος με το έργο του N. Chuquet για παράδειγμα, αφού σε διαφορετική περίπτωση θα μπορούσε υιοθετώντας τον συμβολισμό του να προχωρήσει σε γενικευμένα αποτελέσματα που αφορούν δυνάμεις.

Ο Nicolas Chuquet, γάλλος γιατρός, που στη μαθηματική πραγματεία του ‘Triparty’ του 1484 χρησιμοποιεί συμβολισμούς όπως ο παρακάτω:

$$R^2 14 \overline{p} R^2 180 \quad \text{αντί για} \quad \sqrt{14 + \sqrt{180}}$$

Ο Chuquet εισήγαγε έναν πιο ευέλικτο τρόπο γραφής των δυνάμεων ακόμα και αρνητικών εκθετών για πρώτη φορά με τέτοιο σαφή τρόπο στα Ευρωπαϊκά μαθηματικά. Έτσι γράφει $\overline{m} 12. \overline{m}^2$ για να εκφράσει την ποσότητα $-12x^{-2}$.

Τα σύμβολα $\overline{p}$, $\overline{m}$ για το + και το – αντίστοιχα οφείλονται στον Luca Pacioli⁵⁵ ενώ το σύμβολο R^2 αντιστοιχεί στην τετραγωνική ρίζα. Ο Chuquet γράφει έτσι μια εξίσωση ως εξής:

⁵³ F. Ritter *François Viète* σελ 11

⁵⁴ Τέσσερις αριθμοί α,β,γ,δ είναι σε συνεχή αναλογία αν και μόνο αν ισχύει α/β=β/γ=γ/δ

⁵⁵ Luca Pacioli (1447 – 1517) Ιταλός μαθηματικός και δάσκαλος από την Τοσκάνη, συγγραφέας του ογκώδους έργου ‘*Summa de Arithmetica, geometica, proportionem et proportionalita*’

$$3x^2 + 12 = 9x \quad \text{για να εκφράσει την εξίσωση } 3x^2 + 12 = 9x$$

Οι συντελεστές όπως και στην ισλαμική παράδοση είναι θετικοί.

Επανερχόμενοι στη σημειολογία του Viète παρατηρούμε ότι για τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποίησε τη λέξη *in* για τη διαίρεση την κλασματική γραμμή ενώ για τη τετραγωνική ρίζα το σύμβολο *L* από το λατινικό *Latus* ενώ από την έκδοση του 1631 και μετά υιοθετείται το σύμβολο που χρησιμοποιείται και σήμερα. Για την πρόσθεση και την αφαίρεση υιοθέτησε τα σύμβολα +, - που πρωτοεμφανίστηκαν στο έργο του Γερμανού κοσμοσιστή Rudolff. Έτσι την παράσταση

$$\sqrt{\frac{1}{4}D^2 + G^2} + \frac{1}{2}D \text{ γράφει } \quad \text{D quad. } \frac{1}{4} \rightarrow G \text{ plano } + D \frac{1}{2}$$

Στα αριθμητικά παραδείγματα του τροποποιεί λίγο το συμβολισμό δηλώνοντας με *N* *numerus* τον αριθμό, *Q quadratus* το τετράγωνο, και *C cubus* τον κύβο, έτσι την εξίσωση

$$x^3 - 300x = 432 \quad \text{συμβολίζει } \mathbf{1\ C - 300\ N. aequat\ 432.}$$

Ακόμη γράφει:

$$\frac{A \text{ in } B}{C \text{ q}} \text{ αντί } \frac{A \cdot B}{C^2}$$

και ένας κανόνας θα διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{Z \text{ plano}}{G} + \frac{A \text{ plano}}{B} \text{ aeq. } \frac{G \text{ in } A \text{ plano} + B \text{ in } Z \text{ plano}}{B \text{ in } G}$$

Στον παραπάνω κανόνα παρατηρούμε ίσως ότι για πρώτη φορά έγινε εφικτό στο πλαίσιο μιας εξίσωσης να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με ένα συγκεκριμένο μέγεθος, κάνοντας στη συνέχεια αλγεβρική επεξεργασία των παραστάσεων που εμφανίζονται. Το αποτέλεσμα έτσι είναι μια νέα εξίσωση ομοιογενής με τον εαυτό της, αλλά ετερογενής με την αρχική..

Τη 'μη αναγωγήμη' κυβική εξίσωση του Cardano με όρους ομοιογενούς εξίσωσης θα τη γράψει:

$$A^3 - 3B^2A = B^2D \text{ με } B > D/2$$

με το συμβολισμό που φαίνεται παρακάτω

Si A cubus — B quad. 3 in A, æquetur B quad. in D, sit autem B major D semisse: B quad. 3 in E, — E cubo æquabitur B quad. in D.

Αυτός ο ελλιπής αριθμητικός συμβολισμός για τους εκθέτες στάθηκε ανυπέρβλητο εμπόδιο στην προσπάθεια γενίκευσης, για παράδειγμα των αλγεβρικών εκφράσεων με τα διωνυμικά αναπτύγματα που επιχειρείται στην Πρόταση XI των *Προκαταρκτικών σημειώσεων* της *‘Αναλυτικής Τέχνης’*.

Ο Viète ζώντας σε μια ιστορική περίοδο που προσδιορίζεται μια γενιά μετά τον Cardano και κάτι περισσότερο από μια γενιά πριν τον Descartes, διατηρεί τους δεσμούς του; με τα Ελληνικά μαθηματικά και τη Γεωμετρία, αλλά και τη Διοφαντική, και την Αραβική παράδοση στην επίλυση εξισώσεων καθώς την κληρονομιά των Ιταλών αβακιστών και κοσσιιστών, - πως θα μπορούσε άλλωστε να συμβεί το αντίθετο. δηλαδή να αποκοπεί από αυτές - κάνει ένα αποφασιστικό βήμα μπροστά.

Υιοθετεί τη γενικευμένη χρήση των γραμμάτων και για το συμβολισμό των γνωστών ποσοτήτων, αυτό είναι σχεδόν καθολικά αποδεκτό ότι είναι μια αποκλειστικά δική του επινόηση, και έτσι

‘μπορεί έτσι να τις χειρίζεται μέχρι το τελικό στάδιο χωρίς να αλλοιώνεται η μορφή τους από τις μεταξύ τους διεργασίες και πράξεις, και έτσι να είναι φανερή η τροποποίηση που επέστησαν από την αρχή μέχρι το τέλος.’

Για να χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα του John Wallis που στο έργο του *‘Treatise of Algebra, Both Historical and Practical’* (London 1675) γράφει⁵⁶:

‘Το πλεονέκτημα της συμβολικής άλγεβρας έναντι της αριθμητικής είναι «ενώ εκεί [στην αριθμητική] οι Αριθμοί που παίρνονται από την αρχή, χάνονται ή καταπίνονται από εκείνους που με διάφορες διαδικασίες παράγονται από αυτούς, έτσι που να μην παραμένουν ορατές, ή να ευδιάκριτες στο Αποτέλεσμα: Εδώ [στη συμβολική άλγεβρα] διατηρούνται τόσο πολύ, μέχρι τον τελευταίο, και παραμένουν ορατές μαζί με τις διάφορες διαδικασίες που τους αφορούν, έτσι που να εξυπηρετούν όχι μόνο για την Ανάλυση ενός συγκεκριμένου Ερωτήματος που τίθεται, αλλά για μια γενική Λύση παρόμοιων Ερωτημάτων σε άλλες Ποσότητες, όσο [αυτές] και αν αλλάζουν’

⁵⁶ François Viète, *The Analytic Art*, μετάφραση και έκδοση. T. Richard Witmer (Κεντ, Οχάιο: Kent State University Press, 1983) Translator’s Introduction, σελ 5

Η δυνατότητα αυτή της παρατήρησης των μεταβολών καθ' όλη τη διάρκεια της επεξεργασίας των εξισώσεων από το αρχικό στάδιο του σχηματισμού της μέχρι και το τελικό στάδιο, του επιτρέπει να διακρίνει για παράδειγμα τη σχέση ριζών και συντελεστών, θέμα για το οποίο είναι ευρύτατα γνωστός, και σε διαφορετική περίπτωση θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολη η διάκρισή τους, αλλά και να πετύχει κάτι σίγουρα πιο σημαντικό, να μετατοπίσει το βάρος στη δομή των εξισώσεων, γεγονός που σύντομα θα αλλάξει το χαρακτήρα όλης της αλγεβρικής σκέψης.

Η υιοθέτηση λοιπόν του 'είδους' ως πρωταρχικό μέσο έκφρασης του δίνει τη δυνατότητα να ελευθερωθεί εντελώς από τα γεωμετρικά διαγράμματα πάνω στα οποία σχεδόν όλες οι αποδείξεις του Cardano διαρθρώνονται. Μια εξάρτηση που αποδεικνύεται άβολη σε τεχνικά σύνθετες αποδείξεις, αρκεί να δει κανείς τη Ferrari – Cardano λύση της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης, αλλά και ανυπέρβλητο εμπόδιο για τη μετάβαση σε εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού. Η ανάλυση του θέματος αυτού θα γίνει στο έβδομο κεφάλαιο.

Ο Viète στην πραγματικότητα δεν χρησιμοποιεί διαγράμματα ούτε για λόγους παραστατικότητας, παρά μόνο όταν ασχολείται με τρίγωνα. Εκεί, όπως θα διαφανεί, και σύμφωνα με το Witmer⁵⁷

‘Ρίχνει μεγάλο βάρος στην εφαρμογή της άλγεβρας στη γεωμετρία, αντιστρέφοντας έτσι τον ιστορικό ρόλο της γεωμετρίας σαν μητέρα και μεγάλη τροφός της άλγεβρας.’

Ο Joseph Fourier γράφει για τον Viète:

‘Επίλυσε ερωτήματα της γεωμετρίας με αλγεβρική ανάλυση και από τις λύσεις συνήγαγε γεωμετρικά προβλήματα. Οι έρευνες του τον οδήγησαν στη θεωρία των τμημάτων των γωνιών και διαμόρφωσε γενικούς κανόνες για να εκφράσει τις αξίες των χορδών...’

⁵⁷ Ο.π. σελ 7

4.2.2 Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ‘ΣΥΝΑΓΩΓΗ’ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ ΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΝΟΥ

Ο Πάππος έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου το 340 μ.Χ. Λεπτομέρειες για τη ζωή του δεν είναι γνωστές εκτός του ότι είχε έναν γιο, τον Ερμόδωρο, που ήταν δάσκαλος στην Αλεξάνδρεια.

Το βιβλίο που άσκησε τη μεγαλύτερη επιρροή είναι το βιβλίο VII της *Συναγωγής* με τίτλο ‘Ο αναλυόμενος τόπος’. Η Συναγωγή του Πάππου πρωτοδημοσιεύτηκε στα Λατινικά το 1589 σε μετάφραση από τον ιταλό γεωμέτρη Federico Commandino (1509 – 1575). Μεσούσης της Αναγέννησης και με δεδομένη την αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος για τα κλασικά αρχαιοελληνικά μαθηματικά ο Commandino δίνει μια αξιόπιστη μετάφραση με σχόλια που αποσαφηνίζει τα κύρια σημεία του έργου, κυρίως χάρις στην ιδιότητα του ως . Αργότερα ακολούθησαν και άλλες μεταφράσεις από τον J. Wallis και τον F. Hultsch.

Στην εισαγωγή αυτού του βιβλίου ο Πάππος δίνει έναν σχετικά πλήρη ορισμό της ανάλυσης και της αναλυτικο-συνθετικής μεθόδου γράφοντας⁵⁸:

‘ο αποκαλούμενος Αναλυόμενος τόπος , παιδί μου Ερμόδωρε, είναι μια ιδιαίτερη σύλληψη, οργανωμένη μαζί με τα κοινά γεωμετρικά στοιχεία για αυτούς που επιθυμούν να γίνουν ικανοί στο να λύνουν τα προβλήματα της γεωμετρίας που τους προτείνονται και είναι χρήσιμη μόνο για αυτό το σκοπό. Έχει συγγραφεί από τρεις άνδρες, τον Ευκλείδη, τον συγγραφέα των Στοιχείων, τον Απολλώνιο τον Περγαίο και τον Αρισταίο τον πρεσβύτερο, και η μέθοδος βασίζεται στην ανάλυση και τη σύνθεση. Η ανάλυση λοιπόν είναι η οδός που εκκινεί από αυτό που ζητείται σαν να είχε γίνει δεκτό, προς κάτι που αποδεικνύεται με τη σύνθεση.

Μέσα στα πλαίσια της ανάλυσης το ζητούμενο τίθεται ως γεγονός γνωστό και αναζητείται εκείνο από το οποίο προκύπτει και από αυτό αναζητείται το προηγούμενο. Και βαδίζοντας έτσι προς τα πίσω μέχρι να φτάσουμε σε κάποιο από τα είδη γνωστά ή αυτά που αποτελούν αρχές. Τη μέθοδο αυτή την ονομάζουμε ανάλυση δηλαδή αντίστροφη λύση.

⁵⁸ Katz Victor, *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013, σελ. 210-211

Μέσα στα πλαίσια δε της σύνθεσης, με αντιστροφή ορμώμενοι από αυτό που κατά την ανάλυση έχει προσδιοριστεί ως κατασκευάσιμο στο τελευταίο βήμα, κατασκευάζουμε τα σύμφωνα με τη φυσική σειρά επόμενα, που στην ανάλυση είναι προηγούμενα. Έτσι φτάνουμε στο τέλος (σκοπός) που είναι η κατασκευή του ζητούμενου, και αυτό το ονομάζουμε σύνθεση.

Υπάρχουν δυο είδη ανάλυσης, αυτό που είναι για την αναζήτηση της αλήθειας, το ζητητικό, το οποίο ονομάζεται θεωρητικό, και το ευρετικό αυτό που βοηθά να βρεθεί το ζητούμενο, που ονομάζεται προβληματικό.

Στην περίπτωση της θεωρηματικής ανάλυσης υποθέτουμε ότι αυτό που ζητείται είναι όντως αληθές και έπειτα ακολουθούμε τις συνέπειες του σα να ήταν αληθείς εξ υποθέσεως, έως ότου καταλήξουμε σε κάτι που γνωρίζουμε εάν αυτό είναι αληθές, τότε και το ζητούμενο είναι αληθές και η απόδειξη του είναι το αντίστροφο της ανάλυσης εάν όμως καταλήξουμε σε κάτι που είναι ψευδές τότε και το ζητούμενο είναι ψευδές. Στην περίπτωση της προβληματικής ανάλυσης, υποθέτουμε ότι το ζητούμενο είναι κάτι που γνωρίζουμε εάν αυτό είναι δυνατό και εξασφαλισμένο, δηλαδή ότι οι μαθηματικοί αποκαλούν 'δοθέν', το ζητούμενο θα είναι επίσης δυνατό και πάλι η απόδειξη του θα είναι το αντίστροφο της ανάλυσης αλλά εάν καταλήξουμε σε κάτι γνωστό που δεν είναι δυνατό, τότε και το ζητούμενο είναι αδύνατο.'

Είναι πασίδηλο ότι υπάρχει μια ομοιότητα με τους ορισμούς που επιχείρησαν οι μαθηματικοί του Ισλάμ καθώς και ο Petrus Ramus -και παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.2.3-. Ο Viète επίσης έχει έρθει σε επαφή με το έργο του Πάππου, όπως θα διαφανεί στην ανακατασκευή της λύσης του Απολλώνιου Προβλήματος από τον ίδιο,⁵⁹ και δεν έχει καμία αμφιβολία για τη δύναμη της Αναλυτικής μεθόδου.

⁵⁹ Η ανακατασκευή αυτή παρουσιάζεται στην παράγραφο 6.4 της παρούσας εργασίας.

Το εύλογο ερώτημα που ανακύπτει αυτόματα είναι από πού αντλεί την έμπνευση του για να κάνει αυτό το κρίσιμο βήμα. Η απάντηση μάλλον βρίσκεται στον τίτλο του έργου του *Αναλυτική τέχνη* και περισσότερο στον πρώτο όρο του τίτλου. Θα επιχειρήσουμε λοιπόν μια διερεύνηση των πηγών αυτών.

Ο Viète ήταν ικανός γεωμέτρης και είναι βέβαιο ότι είχε μελετήσει την αναλυτική μέθοδο στο έργο ‘*Συναγωγή*’ του Πάππου του Αλεξανδρινού, επικαλούμενος όμως τον ορισμό της μεθόδου αυτής στην έκδοση των ‘*Στοιχείων*’ του Ευκλείδη από τον Θέωνα τον Αλεξανδρέα⁶⁰. Κάνει χρήση της αναλυτικής μεθόδου, που χρησιμοποιούνταν πρωτίστως και αμιγώς για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, για να επιλύσει ένα κλασσικό πρόβλημα τέτοιου είδους. Το Απολλώνιο πρόβλημα. Μια εκδοχή του προβλήματος αυτού είναι να κατασκευαστεί ένας κύκλος που να εφάπτεται σε τρεις δεδομένους κύκλους, (Η λύση του θα παρουσιαστεί στο έκτο κεφάλαιο.) Το μόνο που απομένει είναι να κάνει τη μετατόπιση της μεθόδου στο αλγεβρικό πεδίο.

Έχει εντυπώσει στο Διοφαντικό απάνθισμα, αντιμετωπίζοντας τον απαιτούμενο σεβασμό, μη διστάζοντας να εκφράσει την ευγνωμοσύνη του με κάθε ευκαιρία, αλλά με παρρησία δείχνει ότι είναι εκεί για να δώσει κάτι περισσότερο. Μια προσέγγιση απλούστερη και διαυγέστερη υπό το πρίσμα της γενικότητας.

Γνωρίζει τα συμπεράσματα στο αλγεβρικό πεδίο που κατέληξαν οι σύγχρονων του Ιταλοί - το αντίθετο είναι μάλλον απίθανο – που εν γένει μεταλαμπαδεύουν και επεκτείνουν την αραβική παράδοση στην Ευρώπη, καταλήγει και ο ίδιος σε αυτά με μια διαδρομή όμως που τα απελευθερώνει από την γεωμετρική κηδεμονία.

Υλοποιεί τη Ραμιστική ευρετική και μεθοδολογία όπως αναπτύχθηκε στο *Scholae mathematicae*.

Έτσι ο Viète ορμώμενος από την πίστη του στη δύναμη της ανάλυσης μετατρέπει τη συμβολική άλγεβρα του Διόφαντου σε μια καθολική θεωρία εξισώσεων.

⁶⁰ Περισσότερες λεπτομέρειες θα παρουσιαστούν στην παράγραφο 5. 2 της παρούσας μελέτης

Το 1631 ο Beaugrand δημοσιεύει μια έκδοση με σχόλια των έργων του Viète *‘In artem analyticem isagoge’* και *‘Ad Logisticem speciosum notae priores’*. Είναι αξιοσημείωτο ότι τμήματα των σχολίων της έκδοσης αυτής επανεμφανίζονται στην έκδοση του *‘Opera Mathematica’* από τον Frans van Schooten το 1646 στο Leyden.

FRANCISCI VIETÆ
O P E R A
MATHEMATICA,

In unum Volumèn congesta,
ac recognita,

Operâ atque studio

FRANCISCI à SCHOOTEN Leydenfis,
Matheseos Professoris.



LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.
MDCXLVI.

Εξώφυλλο από την έκδοση της *‘Αναλυτικής Τέχνης’* από τον F. Van Schooten 1646

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ: ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΡΙΑ ΕΡΓΑ ΤΗΣ ‘ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΗΣ’ ΤΟΥ FRANCOIS VIETE

5.1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ‘ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΤΕΧΝΗ

Στον πρόλογο της Εισαγωγής στην Αναλυτική τέχνη, και στην αφιέρωση στην Catherine de Parthenay ο Viète καυστικά αναφέρει:

‘παρατήρησε ότι η τέχνη που παρουσιάζω είναι νέα αλλά στην πραγματικότητα τόσο παλιά, τόσο χαλασμένη και μολυσμένη από τους βαρβάρους, που το θεωρώ απαραίτητο προκειμένου να παρουσιάσω ένα εντελώς νέο τρόπο σε αυτό, να σκεφτώ και να δημοσιεύσω ένα νέο λεξιλόγιο, έχοντας ξεφορτωθεί όλους τους ψευδο-τεχνικούς όρους, φοβούμενος μήπως διατηρηθεί η ρυπαρότητα τους και συνεχίσουν να είναι δύσσομοι με τον παλιό τρόπο’

‘generis sexu Encyclopædia. Colendissima Princeps, quæ nova sunt solent à principio proponi rudia & informia, succedentibus deinde seculis expolienda & perficienda. Ecce ars quam profero nova est, aut demùm ita vetusta, & à barbaris defædata & conspurcata, ut novam omninò formam ei inducere, & ablegatis omnibus suis pseudo-categorematis, ne quid suæ spurcitiei retineret, & veternum redoleret, excogitare necesse habuerim, & emittere nova vocabula, quibus cum parum hæcenus sint adsuefactæ aures, vix accidet, ut vel ab ipso limine non deterreantur multi & offendantur. At sub suâ, quam prædicabant,

Περисσότερο φως αναφορικά με τη σημασία αυτού του κειμένου, καθώς και σε ποιους αναφέρεται ρίχνει ένα παρόμοιου ύφους απόσπασμα του Descartes που περιέχεται στο *Regulae ad directionem ingenii* 38 χρόνια αργότερα δηλαδή το 1629. Γράφει λοιπόν⁶¹:

‘όταν αργότερα σκέφτηκα για ποιο λόγο εκείνοι οι πρώτοι φιλόσοφοι σε προηγούμενες εποχές αρνήθηκαν να δεχτούν στη σπουδή της φιλοσοφίας όσους αγνοούσαν τη μαθηματική επιστήμη- πιστεύοντας προφανώς πως η τελευταία είναι η πιο εύκολη από όλες και η κατ’ εξοχήν αναγκαία για την καλλιέργεια αι προετοιμασία του πνεύματος, ώστε αυτό να συλλάβει άλλες ανώτερες επιστήμες- βεβαιώθηκα πως αυτοί γνώριζαν κάποια μαθηματική επιστήμη πολύ διαφορετική από αυτήν που υπάρχει στην εποχή μας... Νομίζω πως ορισμένα ίχνη αυτής της αληθινής μαθηματικής επιστήμης εμφανίζονται στον Πάππο και στον Διόφαντο, οι

⁶¹ Katz Victor, *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013, σελ. 424

οποίοι δεν έζησαν βέβαια στα πολύ παλιά χρόνια, αλλά οπωσδήποτε αρκετούς αιώνες πριν την εποχή μας. Η γνώμη μου όμως είναι πως αυτοί οι συγγραφείς απέκρυσαν με μια ολέθρια πανουργία, αυτήν την επιστήμη· έκαμαν ότι κάνουν πολλοί τεχνικοί με τις εφευρέσεις τους: φοβήθηκαν μήπως, αν κοινοποιηθεί η μέθοδός τους, θεωρηθεί πως δεν έχει αξία, για το λόγο ότι ήταν ευκολότατη και πάρα πολύ απλή. Έτσι προτίμησαν να παρουσιάσουν σε μας, σαν επιτεύγματα της μεθόδου τους, αντί της ίδιας της μεθόδου, ορισμένες άγονες αλήθειες, που τις απέδειξαν με παραγωγική πορεία κατά τρόπο ευφυή, επιδιώκοντας έτσι να κερδίσουν το θαυμασμό μας μάλλον παρά να μας αποκαλύψουν τη ίδια τη μέθοδό τους, η οποία οπωσδήποτε θα εξαφάνιζε το θαυμασμό μας.

Υπήρξαν, τέλος, μερικοί ευφυέστατοι άντρες οι οποίοι επιχείρησαν να αναστήσουν, στην εποχή μας, αυτή τη μαθηματική επιστήμη· γιατί αυτή δεν είναι άλλη από εκείνη που μας είναι γνωστή με το ‘βαρβαρικό’ όνομα Άλγεβρα (**bardaro nomine Algebram**), φτάνει μόνο να απαλλαγεί με τέτοιο τρόπο· να απαλλαγεί από παντός είδους αριθμούς, και τα ακατάληπτα σχήματα, όπου είναι χωμένα, ώστε να έχει εκείνη την ευκρίνεια και τη μεγάλη απλότητα που υποτίθεται πως πρέπει να υπάρχουν στην αληθινή μαθηματική επιστήμη.

Πέρα από την εμφανή ευθυγράμμιση των δύο ανδρών ως προς τη θεώρηση της σχέσης των Αράβων με τα μαθηματικά, είναι βέβαιο ότι σε αυτούς αναφέρονται με τον όρο «βάρβαροι», ενισχύεται και ο επηρεασμός του δεύτερου από τον πρώτο. Ανάμεσα στους ‘ευφυέστατους άντρες’ που αναφέρει ο Descartes σίγουρα πρέπει να περιλαμβάνεται ο Viète. Όσο για τον τραχύ χαρακτηρισμό ‘βάρβαροι’ θυμίζουμε ότι βρισκόμαστε σε μια εποχή που μπορεί η αραβική κυριαρχία στην Ευρωπαϊκή ήπειρο να έχει περάσει, αλλά οι επίσης αλλόθρησκοι Οθωμανοί έχουν πολιορκήσει ήδη για πρώτη φορά τη Βιέννη, το 1529, αποτελώντας μια καταφανή απειλή για όλους τους λαούς της.

Η ‘Εισαγωγή’ εκδόθηκε στην Tours το 1591, με επανεκδόσεις Paris 1624, Paris 1631, με εκτεταμένα σχόλια από τον Jean de Beaugrand, πολλά από τα οποία μεταφέρθηκαν στην έκδοση του van Schooten, Leyden 1635. Ο Viète αρχίζει (*Isagoge* σελ 1) ξεκαθαρίζοντας τη μέθοδο που θ’ ακολουθήσει στην νέα ‘τέχνη’ που θα παρουσιάσει – αν και στον πρόλογο διατείνεται ορθώς ότι η τέχνη αυτή είναι παλαιά - αποκαλύπτοντας συγχρόνως τις πηγές της έμπνευσης του, και τελειώνει την ‘Εισαγωγή’ δηλώνοντας πόσο πολύ είναι πεπεισμένος για την αποτελεσματικότητα αυτής της μεθόδου καθώς και την καθολικότητα της.

«Υπάρχει στα μαθηματικά ένας ορισμένος τρόπος αναζήτησης της αλήθειας τον οποίο λέγεται ότι ανακάλυψε πρώτος ο Πλάτων. Ο Θέων τον αποκάλεσε *ανάλυση*»

IN ARTEM ANALYTICEN ISAGOGE.

C A P V T I.

De Definitione & Partitione Analyticos, & de iis qua juvant Zeteticen.



SIT veritatis inquirendæ via quædam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, à Theone nominata *Analytis*, & ab eodem definita, Adsumptio quæsitæ tantquam concessi per consequentia ad verum concessum. Ut contrà Synthelisis, Adsumptio concessi per consequentia ad quæsitæ finem & comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantum proposuerunt *Analytin* *ζητητικὴν* & *ποριστικὴν*, ad quas definitio Theonis maximè pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quæ dicatur *ρήπικὴ* ἢ *ἐξηγητικὴ*, consentaneum est, ut sit Zeteticæ quâ invenitur æqualitas proportionis magnitudinis, de quâ quæritur, cum iis quæ data sunt. Poristice, quâ de æqualitate vel proportionis ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, quâ ex ordina-

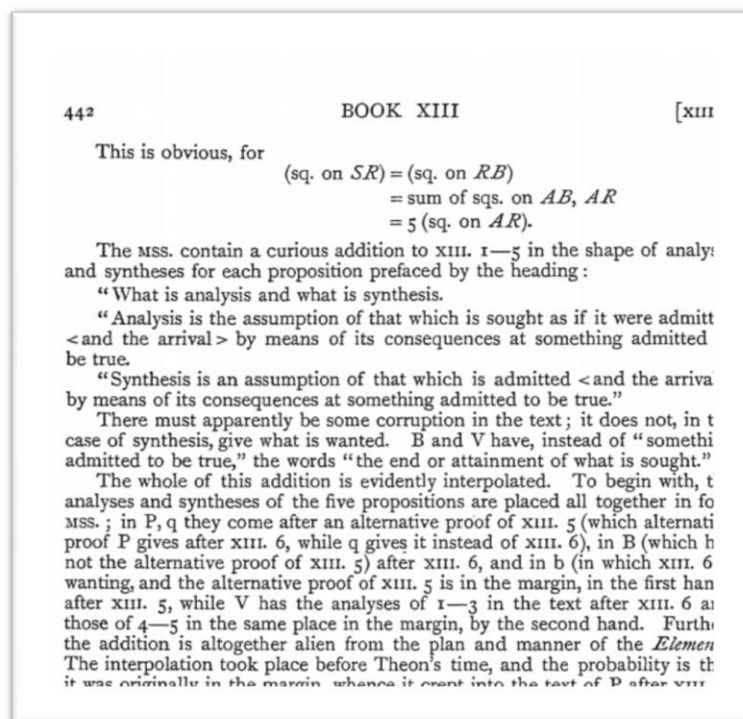
Ο Viète στο σημείο αυτό πιθανότατα αναφέρεται στον φιλόσοφο, και μαθηματικό Θέωνα τον Αλεξανδρέα (335 μ. Χ. – 405 μ. Χ.). Ο Θέων διετέλεσε τελευταίος διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, και ήταν πατέρας της νεοπλατωνικής φιλοσόφου και μαθηματικού Υπατίας, που δολοφονήθηκε βάναισα από οργισμένο πλήθος χριστιανών στην Αλεξάνδρεια το 415 μ.Χ. Ο Θέων εξέδωσε τα ‘*Στοιχεία του Ευκλείδη*’ γύρω στο 364 μ. Χ. και μάλλον αυτό ήταν το κορυφαίο επίτευγμά του. Κάποια επανέκδοση του έργου

αυτού πρέπει να είχε μελετήσει ο Viète, μιας και ο τίτλος του μνημονεύεται στη σελίδα 10, του κεφαλαίου VI της 'Isagoge'.

thelin fit facilisreditus:ut ea de re prolata sunt à Theone exempla in Elementis, & Apollonio Pergæo in Conicis, ac ipso etiam Archimede variis in libris.

Ο Viète συνεχίζει με τους ορισμούς της Ανάλυσης και της Σύνθεσης που τους αποδίδει στον Θέωνα. Συγκεκριμένα οι ορισμοί αυτοί παρεμβάλλονται στο XIII βιβλίο των Στοιχείων. Ο T. H. Heath επισημαίνει⁶² ότι οι παρεμβολές αυτές έγιναν, πριν την εποχή του Θέωνα, και αποδίδονται στους Θεαίτητο, Εύδοξο ή Ήρωνα.

« Η Ανάλυση ορίζεται υποθέτοντας ότι αυτό που ζητείται [σαν να] ήταν παραδεκτό και [εργαζόμενοι] μέσω των συνεπειών [της υπόθεσης αυτής, φτάνουμε] σε κάτι παραδεκτό ως αληθές, σε αντίθεση με τη Σύνθεση η οποία υποθέτει ότι έχει [ήδη] γίνει παραδεκτό [και εργαζόμενοι] μέσα από τις συνέπειες [αυτής της υπόθεσης] φτάνουμε και κατανοούμε αυτό που ζητείται»⁶³



⁶² Heath T. L., *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, Volume III p. 442, Cambridge University Press, 1925

⁶³ Ο Petrus Ramus επίσης ανέφερε και σχολίασε τις παραπάνω παρεμβολές στο XIII βιβλίο, περιλαμβάνοντας έναν παρόμοιο ορισμό της Ανάλυσης και της Σύνθεσης στο έργο του *Scholae mathematicae*, σελ 300

Σχετικά με την φημιολογούμενη, κατά τον Viète, απόδοση στον Πλάτωνα της ανακάλυψης της μεθόδου της ανάλυσης, αυτή πρέπει να προήλθε από δύο αναφορές.⁶⁴ Η πρώτη είναι αυτή του Πρόκλου που διατείνεται πως ‘η καλύτερη μέθοδος εύρεσης «λημμάτων» είναι αυτή της *ανάλυσης*, η οποία ανάγει το ζητούμενο σε μια ομολογουμένη αρχή, μια μέθοδος που ο Πλάτων, όπως λένε, μετέδωσε στον Λεοδάμαντα⁶⁵, και μέσω αυτής, ο τελευταίος λέγεται πως ανακάλυψε πολλά πράγματα στη γεωμετρία’.

Η δεύτερη αναφορά προέρχεται από ένα κείμενο του Διογένη του Λαέρτιου⁶⁶ ο οποίος, υπονοώντας τον Πλάτωνα, γράφει ότι ‘αυτός (ο Πλάτων) εξήγησε (*είσηγήσατο*) στον Λεοδάμαντα τον Θάσιο τη μέθοδο έρευνας μέσω *ανάλυσης*, φράση που έγινε ευρέως αντιληπτή ότι αποδίδει στον Πλάτωνα την ανακάλυψη της μεθόδου της ανάλυσης.

Ωστόσο ο Tannery επισημαίνει ότι είναι πραγματικά δύσκολο να ταυτίσουμε τη μέθοδο που ανακάλυψε ο Πλάτωνας με την ανάλυση, όπως εννοείται από τους γεωμέτρες και τον ορισμό του Πάππου. Ο Heath παρατηρεί⁶⁷ ότι τα λόγια του Πρόκλου μάλλον έχουν να κάνουν με την πλατωνική διαλεκτική, που ως συλλογιστική μέθοδος συναντάται σε πολλούς πλατωνικούς διαλόγους. Ένα παράδειγμα αντλείται από τον διάλογο ‘*Μένων*’⁶⁸ στον οποίο, με τη μορφή μιας οντολογικής αναζήτησης της αρετής, διερευνάται το φιλοσοφικό ζήτημα αν αυτή είναι διδακτή ή όχι. Εκεί εισάγεται η μέθοδος της υπόθεσης. Ο Πλάτων μέσα από το λόγο του Σωκράτη αναφέρει «ἐξ ὑποθέσεως αὐτό σκοπεῖσθαι» και συνεχίζει επεξηγώντας «λέγω δέ τό ἐξ’ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται»

Σωκράτης: ἀλλ’ εἰ μὲν ἐγὼ ἤρχον, ὡς Μένων, μὴ μόνον ἐμαυτοῦ ἀλλὰ καὶ σοῦ, οὐκ ἂν ἐσκεψάμηναι πρότερον εἴτε διδασκὼν εἴτε οὐ διδασκὼν ἢ ἀρετὴν, πρὶν ὅτι ἐστὶν πρῶτον ἐζητήσαμεν αὐτό· ἐπεὶ δὲ σὺ αὐτοῦ μὲν οὐδ’ ἐπιχειρεῖς ἀρχειν, ἵνα ἐλεύθερος ᾖς, ἐμοῦ δὲ ἐπιχειρεῖς τε ἀρχειν καὶ ἀρχεῖς, συγχωρήσομαι σοὶ τί γὰρ χρὴ ποιεῖν; εἰσὶν οὖν σκεπτέον [86e] εἶναι ποῖόν τι ἐστὶν ὃ μήπω ἴσμεν ὅτι ἐστίν· εἰ μὴ τι οὖν ἀλλὰ σμικρόν γε μοι τῆς ἀρχῆς χάλασον, καὶ συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως αὐτό σκοπεῖσθαι, εἴτε διδασκὼν ἐστὶν εἴτε ὅπως οὖν. λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδὴν τις ἐρηται αὐτοῦς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόν τε ἐς τὸν κύκλον τὸδε τὸ χωρίον [87a] τρίγωνον ἐνταθῆναι, εἰποὶ ἂν τις ὅτι οὕτω οἶδα εἰ ἐστὶν τοῦτο τοιοῦτον, ἀλλ’ ὥσπερ μὲν τινα ὑπόθεσιν προὔρουσιν οἱ ἔχοντες πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε· εἰ μὲν ἐστὶν τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθείσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείνειν, ἐλλείπειν τοιοῦτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστιν ταῦτα παθεῖν. ὑποθέμενος οὖν ἐθέλω [87b] εἰπεῖν σοὶ τὸ συμβαῖνον περὶ τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον, εἴτε ἀδύνατον εἴτε μὴ· οὕτω δὲ καὶ περὶ ἀρετῆς ἡμεῖς, ἐπεὶ οὐκ ἴσμεν οὐθ’ ὅτι ἐστὶν οὐθ’ ὅποιόν τι, ὑποθέμενοι αὐτό σκοποῦμεν εἴτε διδασκὼν εἴτε οὐ διδασκὼν ἐστὶν, ὧδε λέγοντες· εἰ ποῖόν τι ἐστὶν τῶν περὶ τὴν ψυχὴν ὄντων ἀρετὴ, διδασκὼν ἂν εἴη ἢ οὐ διδασκὼν; πρῶτον μὲν δὲ εἰ ἐστὶν ἄλλοιόν ἢ οἷον ἐπιστήμη, ἄρα διδασκὼν ἢ οὐ, ἢ ὃ νυνδὴ ἐλέγομεν, ἀναμνηστὴν διαφερέτω δὲ μὴδὲν ἡμῖν [87c] ὁποτέρῳ ἂν τῷ ὀνόματι χρώμεθα ἀλλ’ ἄρα διδασκὼν; ἢ τοῦτο γε παντὶ δῆλον, οὐδὲν ἄλλο διδάσκειται ἄνθρωπος ἢ ἐπιστήμην;

Μένων· εἴνεκεν δὸναι

⁶⁴ Heath T. L., *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, Volume I p. 134, Cambridge University Press, 1908

⁶⁵ Πρόκειται για τον Λεοδάμαντα το Θάσιο (γεννήθηκε τον 5^ο αιώνα π.Χ. , πέθανε το 380 π.Χ.) που ήταν μέλος της Ακαδημίας του Πλάτωνα, πιθανόν μαθητής του ίδιου του Πλάτωνα, και ικανός γεωμέτρης

⁶⁶ Ο Διογένης ο Λαέρτιος (180 μ. Χ. – 240 μ. Χ.) ήταν ιστοριογράφος της φιλοσοφίας της αρχαιότητας.

⁶⁷ Heath T. L., *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, Volume I p. 134, Cambridge University Press, 1908

⁶⁸ Μένων [86e]

Το επόμενο παράδειγμα έρχεται από την ‘*Πολιτεία*’. Εκεί χρησιμοποιούνται υποθέσεις ως σκαλοπάτια ανόδου σε μια αρχή που δεν είναι υποθετική. Στη συνέχεια είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί η κάθοδος, βήμα προς βήμα, επαληθεύοντας κάθε μια από τις υποθέσεις μέσω των οποίων πραγματοποιήθηκε η προηγούμενη ανοδική πορεία.

Η παραπάνω περιγραφή δεν μπορεί να ταυτιστεί με τη μέθοδο της ανάλυσης που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά, ωστόσο είναι δυνατόν να δημιουργήσει την πεποίθηση ότι η ανάλυση ήταν μια ανακάλυψη του Πλάτωνα, μιας και η ανάλυση με τη σύνθεση, όπως η μια διαδέχεται την άλλη, σχετίζονται με τον ίδιο τρόπο με μια ανοδική και μια καθοδική διαδικασία.

Στη συνέχεια της *Isagoge* ο Viète αναφέρει:

«Ενώ οι αρχαίοι ανέπτυξαν μόνο δύο είδη ανάλυσης, τη ζητητική και την ποριστική, στα οποία ταιριάζει απόλυτα ο ορισμός του Θέωνα, εγώ πρόσθεσα ένα τρίτο είδος, που μπορεί να αποκληθεί ρητική ή εξηγητική. Έτσι, υπάρχει μια καθαυτό ζητητική με την οποία βρίσκεται μια εξίσωση ή αναλογία μεταξύ του ζητούμενου και των δοθέντων όρων, μια ποριστική με την οποία ελέγχεται η αλήθεια του διατυπούμενου θεωρήματος με τη βοήθεια μιας εξίσωσης ή μιας αναλογίας, και μια εξηγητική με την οποία προσδιορίζεται η τιμή του αγνώστου όρου σε μια δοθείσα εξίσωση ή αναλογία. Επομένως ολόκληρη η αναλυτική τέχνη, εκπληρώνοντας αυτή την τριμερή λειτουργία, μπορεί να ονομαστεί επιστήμη του καλώς ευρίσκειν στα μαθηματικά.»

Εστιάζοντας στη φράση του Viète,

Doctrina bene inveniendi in Mathematicis..

δηλαδή η ‘*επιστήμη του καλώς ευρίσκειν στα Μαθηματικά*’ ο Sasaki παρατηρεί⁶⁹ ότι ‘ο Viète εκφράζεται με έναν τρόπο που ομοιάζει στον τρόπο έκφρασης του Ramus’

Το παρακάτω απόσπασμα από τον Ramus αναφέρει:⁷⁰

⁶⁹ Sasaki C. *Descartes Geometrical Thought*, σελ. 258

⁷⁰ Ramus Petrus *Scholae mathematicae*, σελ 108

‘Τι είναι τα μαθηματικά τότε; Θα έλεγα ότι είναι η επιστήμη της ποσότητας: Όπως πράγματι η αριθμητική ορίζεται ως η επιστήμη του καλώς υπολογίζειν; η γεωμετρία η επιστήμη του καλώς μετράν, έτσι η τέχνη των μαθηματικών θα μπορούσε να οριστεί από τον γενικό όρο και από το τέλος του να ονομαστεί, έτσι να την ονομάσουμε, η τέχνη της ‘ποσοτικοποίησης’

108

P. R A M I

PETRI RAMI SCHOLA-

RUM MATHEMATI-

CARUM LIB. III.

In I. lib. Arithm.



DRUS superioribus libris proœmium quoddam fuit cohortatio-
nis ad artes mathematicas, deinceps materies nobis pressior erit in
singulis præceptis mathematicis. Quartus itaque liber erit in defi-
nitionem & partitionem mathematicæ, & in primum librum no-
stra arithmetica. Quid igitur est mathematica? Est (inquam) do-
ctrina quantitatis: ut verò definitur arithmetica bene numerandi, geometria bene
metiendi doctrina, sic generali verbo, modò ex suo fine definiretur mathematica
ars, tanquam diceretur, quantitandi. Sed tamen non si vocabulum deest, res ipsa

Προχωρώντας στο κεφάλαιο II (σελ 19) ο Viète δηλώνει:

‘ η Ανάλυση αποδέχεται ως αποδεδειγμένους τους γνωστούς θεμελιώδεις κανόνες των εξισώσεων και των αναλογιών που υπάρχουν στα Στοιχεία ’

Ακολουθούν 16 κανόνες από τους οποίους οι πρώτοι 6 είναι παρμένες από τις κοινές έννοιες του Ευκλείδη, ενώ οι υπόλοιπες είναι από το βιβλίο V των Στοιχείων της θεωρίας λόγων μεγεθών, που αποδίδεται στον Εύδοξο. Έτσι ο πρώτος κανόνας είναι:

‘το όλον ισούται με [το άθροισμα] των μερών του’

C A P V T II.

De Symbolis æqualitatum & proportionum.

Symbola æqualitatum & proportionum notiora quæ habentur in Ele-
mentis adsumit Analytice ut demonstrata, qualia sunt ferè,

- 1 Totum suis partibus æquari;
- 2 Quæ eidem æquantur, inter se esse æqualia.
- 3 Si æqualia æqualibus addantur, tota esse æqualia.
- 4 Si æqualia æqualibus auferantur, residua esse æqualia.
- 5 Si æqualia per æqualia multiplicentur, facta esse æqualia.
- 6 Si æqualia per æqualia dividantur, orta esse æqualia.

A

Si

Στη σελίδα 2 της ‘Isagoge’ ο Viète αναφέρει τη φράση:

‘μια αναλογία μπορεί να ειπωθεί ότι είναι αυτό από το οποίο μια εξίσωση συντίθεται και μια εξίσωση αυτό μέσω του οποίου μια αναλογία επιλύεται’

Itaque Proportio potest dici constitutio æqualitatis; Æqualitas, resolutio proportionis.

Αυτή η αινιγματική φράση συμπυκνώνει σε μεγάλο βαθμό την προσέγγιση του Viète στην άλγεβρα και είναι θεμελιώδης, γιατί συνδέει τις αναλυτικές τεχνικές του με τις αποδεικτική πλευρά των θεωρημάτων των μαθηματικών, **εστιάζοντας στη δομή των εξισώσεων και τον τρόπο κατασκευής τους**. Έτσι, για παράδειγμα, θα κατασκευάσει μια δευτεροβάθμια καθώς και μια τριτοβάθμια εξίσωση από μια συνεχή αναλογία. Η σύνδεση αυτή θα ακολουθηθεί πιστά σε μεγάλο μέρος του έργου του.

Στη συνέχεια της ‘Εισαγωγής’ εμφανώς επιχειρείται μια συντακτική ρύθμιση των πραξιακών διαδικασιών που θ’ ακολουθήσουν, απαραίτητες για τον εγγράμματο λογισμό του, ενδυναμώνοντας την τέχνη του.

Έτσι υπάρχουν οι κανόνες της **ομοιογένειας** στο κεφάλαιο III, ενώ στο κεφάλαιο V της **αντίθεσης**, όπου μπορούμε να μεταφέρουμε όρους μιας εξίσωσης από το ένα μέρος στο άλλο με την αντίστροφη πράξη κατά τα Διοφαντικά πρότυπα, του **υποβιβασμού**, όπου μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους όρους μιας εξίσωσης με την ίδια δύναμη του αγνώστου, ή του **παραβολισμού** όπου μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους όρους μιας εξίσωσης με την ίδια δύναμη ενός γνωστού όρου.

C A P V T. III.

De lege homogeneorum, & gradibus ac generibus magnitudinum comparatarum.

P R O P O S I T I O I.

Antithesi æqualitatem non immutari.

P R O P O S I T I O II.

Hypobibasmo æqualitatem non immutari.

Proponatur A cubus, plus B in A quadratum; æquari Z plano in A. Dico per hypobibasmo A quadratum, plus B in A; æquari Z plano.

Illud enim est omnia solida divisisse per communem divisorem, à quo non immutatur æqualitatem determinatum est.

Για τον κανόνα του υποβιβασμού για παράδειγμα γράφει:

Αν

$$A^3+BA^2=Z^pA$$

τότε

$$A^2+BA=Z^p$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρήση όρων της ελληνικής γλώσσας κάτι που επαναλαμβάνεται σε πολλά και διαφορετικά σημεία του έργου του Viète.

Στο VI κεφάλαιο της Εισαγωγής (σελ 10) με τίτλο *‘Εξετάζοντας τα θεωρήματα της Ποριστικής’* ο Viète κάνει αναφορά σε τρεις νόμους από τα *‘Αναλυτικά Πρότερα’* του Αριστοτέλη,⁷¹ σύμφωνα με τους οποίους πρέπει να γίνεται η παρουσίαση των θεωρημάτων που προκύπτουν μετά την ζητητική.

‘Όταν η Ζητητική ολοκληρώσει [τη δουλειά της], ο αναλύστας περνάει από την υπόθεση στη θέση και παρουσιάζει τα θεωρήματα που παρήχθησαν από την ανακάλυψη του με τον προκαθορισμένο από την τέχνη τρόπο σύμφωνα με τους νόμους

κατά παντός, καθ’ αὐτό, καθ’ ὅλου πρώτον’

Perfecta Zetesi, confert se ab hypothesi ad thesin Analysta, conceptaque
sue inventionis Theoremata in artis ordinationem exhibet, legibus *κατά παντός, καθ’ αὐτό, καθ’ ὅλου πρώτον’* obnoxia. Quae quanquam suam habent ex

Αυτοί οι νόμοι που βρίσκονται στο Μέρος IV του πρώτου βιβλίου από τα *Αναλυτικά Πρότερα* ερμηνεύονται ως εξής: ένα κατηγορημα είναι *κατά παντός* αν ισχύει σε κάθε περίπτωση στην οποία το ζήτημα συμβαίνει, *καθ’ αὐτά* αν είναι ένα ουσιώδες και όχι ένα τυχαίο στοιχείο του ζητήματος, και *καθ’ ὅλου πρώτον* αν είναι, σύμφωνα με τον Smith⁷² εντελώς μετατρέψιμο [σύμφωνα] με το ζήτημα. Θεωρεί τη *σύνθεση* ως την πιο λογική μέθοδο για την επίδειξη των θεωρημάτων, *λογικώτερη*, όπως την ονομάζει.

syntheficos, demonstrandi censetur λογικώτερη,

⁷¹ Οι νόμοι αυτοί περιέχονται επίσης και στο *Scholae mathematicae*, του Ramus Petrus σελ 76-77 και 109, με τον Sasaki να θεωρεί ως πιθανότερη αυτήν την προέλευση στο έργο του Viète, παρά απευθείας από το έργο του Αριστοτέλη

⁷² Οι ερμηνείες των αριστοτελικών νόμων αντλήθηκαν από το βιβλίο *François Viète, The Analytic Art*, μετ. και επιμ. T. Richard Witmer (Κεντ, Οχάιο: Kent State University Press, 1983) σελ 28

Στο κεφάλαιο VII ακολουθεί μια ακόμη δυσνόητη φράση που ο Ritter επιχειρεί να ερμηνεύσει. Η φράση είναι:

‘είναι επίσης αλήθεια ότι [η κατασκευή] είναι προτιμότερη από οτιδήποτε άλλο που κάνει ξεκάθαρη όχι τη δομή από την εξίσωση, αλλά την εξίσωση από τη δομή; Έτσι η δομή επιδεικνύει τον εαυτό της’

blemata suas habent elegantias: verum ea ceteris antefertur, quæ compositionem operis non ex æqualitate, sed æqualitatem ex compositione arguit, & demonstrat: ipsa vero compositio seipsam. Itaque artifex Geometra,

Ο Ritter⁷³ δίνει ένα παράδειγμα για την ερμηνεία αυτής της φράσης. Αν ζητηθεί να βρεθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τετράγωνο και το άθροισμα των διαστάσεων του να είναι ίσο με δοθέντα αριθμό, κάποιος θα μπορούσε να βρει τις πλευρές επιλύοντας τις εξισώσεις $xy=k^2$ και $x+y=l$, αλλά ο Viète προτιμά μια λύση όπως η παρακάτω η οποία υποδεικνύεται από τη σύνθεση των εξισώσεων. Αν τις εξετάσουμε προκύπτει ότι το k είναι μέσο ανάλογο των τμημάτων x, y τα οποία έχουν δεδομένη διάμετρο l , έτσι ακολουθώντας τη γνωστή γεωμετρική κατασκευή μέσω της οποίας μπορεί να προσδιορίσει κανείς την αξία των x, y με αλγεβρικό τρόπο.

Η ‘Εισαγωγή’ τελειώνει στη σελίδα 12, με μια φράση που είναι ενδεικτική των προσδοκιών που έχει καλλιεργήσει για την ‘Αναλυτική Τέχνη’ του και έχει να κάνει περισσότερο με την καθολικότητα αντιμετώπισης των προβλημάτων, που τη διαφοροποιεί από τις προηγούμενες τεχνικές επίλυσης συγκεκριμένων κάθε φορά προβλημάτων χωρίς τη οποιαδήποτε δυνατότητα γενίκευσης. Η αντιμετώπιση αυτή οργανώνει την Άλγεβρα με την απαραίτητη πειθαρχία που είχε μέχρι τη στιγμή εκείνη μόνο η Γεωμετρία.

‘Τελικά η αναλυτική τέχνη με τις τρεις μορφές της, τη ζητητική, την ποριστική και την εξηγητική αξιώνει για τον εαυτό της το σπουδαιότερο από όλα τα προβλήματα, δηλαδή να μην αφήσει κανένα πρόβλημα ανεπίλυτο.

«ΝΑ ΜΗΝ ΑΦΗΣΕΙ ΚΑΝΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΕΠΙΛΥΤΟ»

⁷³ Ο. π. σελ 29

~~HOMOGENEOUS~~

29 Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zeteticas, Poristicas & Exegeticas formas tandem induta, jure sibi adrogat, Quod est, NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE.

NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE.

5.3 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ (AD LOGISTICEN SPECIOSAM NOTAE PRIORUM)

5.3.1 ΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ I, XI, XVII ΚΑΙ XXIV

Οι Προκαταρκτικές Σημειώσεις για τη συμβολική λογιστική συμπεριλήφθηκαν στην έκδοση του Beaugrand το 1631, αλλά γράφτηκαν μάλλον την ίδια περίοδο με την Εισαγωγή δηλαδή το 1591. Αυτή η καθυστέρηση στην έκδοση τους οφείλεται κυρίως στην άποψη του ίδιου του Viète ότι το έργο αυτό δεν άξιζε κάποια δημοσιοποίηση. Περιέχει βασικούς αλγεβρικούς τύπους που συνδέονται με κάποιες προτάσεις από τα βιβλία II και IX των ‘Στοιχείων’ προσφέροντας έτσι θεμελιώδεις κανόνες για τη λειτουργία της ‘συμβολικής άλγεβρας’.

Εκκινεί με την εύρεση τρίτης τέταρτης και πέμπτης αναλόγου στις Προτάσεις I, II

Πρόταση II

Δοθέντων δύο ποσοτήτων να δείξεις την τρίτη, τέταρτη, πέμπτη και υψηλότερης τάξης ανάλογο εις το διηνεκές.

P R O P O S I T I O II.

PROPOSITIS duabus magnitudinibus exhibere Tertiam proportionalem, Quartam, Quintam, & ulterioris ordinis continuè proportionales in in finitum.

Ο Viète αρχικά παρατηρεί ότι αν είναι A, B οι ποσότητες και αφού οι λόγοι $A/B = B/(B^2/A)$ είναι ίσοι η τρίτη ανάλογος είναι B^2/A και αφού $A/B = B^2/A/(B^3/A^2)$ η τέταρτη ανάλογος είναι B^3/A^2 . Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο παρουσιάζει αυτόν τον πίνακα που περιέχει και την πέμπτη ανάλογο B^4/A^3

Quoniam igitur est

Vt	Ad	Ita	Ad	} Erit {	} proportionalis.	
A.	B.	B.	$\frac{B \text{ quadr.}}{A}$			Tertia
A.	B.	$\frac{B \text{ quadr.}}{A}$	$\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$			Quarta
A.	B.	$\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$	$\frac{B \text{ quadr. quadratum}}{A \text{ cubo}}$			Quinta

Αυτά τα συμπεράσματα θα χρησιμοποιηθούν κατά κόρον παρακάτω στα βιβλία της ‘Ζητητικής’ κυρίως στο τρίτο βιβλίο αλλά και στη επεξεργασία και επίλυση των εξισώσεων με χρήση και παρεμβολή ενός ή περισσότερων ενδιάμεσων σε μια συνεχή αναλογία στο ‘Δύο πραγματείες για την κατανόηση και βελτίωση των εξισώσεων.’

Συμπεραίνει για παράδειγμα:

CONSECTARIUM.

**Itaque si sit series magnitudinum in continua proportione, est,
Vt Prima, ad Tertiam, ita Quadratum è Prima, ad Quadratum è Secunda.**

‘Εάν υπάρχει μια σειρά από ποσότητες σε συνεχή αναλογία τότε, όπως είναι ο λόγος του πρώτου προς τον τρίτο, έτσι είναι και ο λόγος του τετραγώνου του πρώτου προς το τετράγωνο του δεύτερου’.

Μια πρώτη εφαρμογή των παραπάνω είναι η ακόλουθη πρόταση III.

Πρόταση III

Να βρεις το μέσο ανάλογο δύο δοθέντων τετραγώνων

Inter duo propofita quadrata exhibere medium proportionale.

Έστω A η πρώτη ανάλογος, και B η δεύτερη, τότε η τρίτη ανάλογος βρίσκεται από την προηγούμενη πρόταση II και είναι B^2/A . Πολλάπλασιάζει στη συνέχεια όλους τους όρους της αναλογίας με A , έτσι η αναλογία εξακολουθεί να ισχύει και οι όροι της γίνονται A^2 , BA , B^2

Έτσι η μέση ανάλογος μεταξύ δύο τετραγώνων έχει βρεθεί και είναι η BA .

Η Πρόταση XI των Προκαταρκτικών Σημειώσεων (σελ. 16) και τα θεωρήματα που περιέχει αναφέρονται στα διωνυμικά ανάπτυγματα μέχρι και 6^{ου} βαθμού. Έτσι για το τετραγωνικό ανάπτυγμα $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ γράφει

A quadratum.
+ A in B bis.
+ B quadrato.
Quæ ideo æquabuntur A + B quadrato.

Ενώ για τον κύβο του αθροίσματος $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

A cubus, + A quadrato in B ter, + A in B quadratum ter, + B cubo. Quæ ideo æquabuntur cubo ex A + B.

Και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο φτάνει στο αντίστοιχο ανάπτυγμα για τον έκτο βαθμό.

T H E O R E M A genesis cubo-cubi.

SI fuerint duo latera: cubo-cubus lateris primi, plus quadrato-cubo lateris primi in latus secundum sextuplum, plus quadrato-quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum decuquintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi cubum vigecuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadrato-quadratum decuquintuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-cubum sextuplum, plus lateris secundi cubo-cubo, æquatur cubo-cubo adgregati laterum. •

Sit latus unum A, alterum B. Dico A cubo-cubum, + A quadrato-cubo in B 6, + A quad-quadrato in B quadratum 15, + A cubo in B cubum 10, + A quadrato in B quadrato-quadratum 15, + A in B quadrato-cubum 6, + B cubo-cubo, æquari A + B cubo-cubo. Ex opere multiplicationis A quadrato-cubi, + A quad-quadrato in B 5, + A cubo in B quadratum 10, + A quadrato in B cubum 10, + A in B quad-quadratum 5, + B quadrato-cubo, per A + B.

Cum autem placuerit à differentia laterum, non etiam adgregato, potestatem componi, eadem omnino efficiuntur singularia compositionis homogenea, sed affirmabuntur & negabuntur alterne initio sumpto à majoris lateris potestate, quando par est singulorum homogeneorum numerus, ut in cubo, quadrato cubo, & exinde alternis: in reliquis verò sive à majoris lateris potestate, sive à potestate minoris ducant initium, nihil refert; eodem enim opus recidit.

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Η απάντηση στο εύλογο ερώτημα που προκύπτει γιατί ο Viète δεν κάνει το βήμα για την εύρεση ενός γενικευμένου τύπου στο διωνυμικό ανάπτυγμα, κάτι που φαίνεται να ήταν μέσα στις δυνατότητες του, αφήνοντας στους μεταγενέστερους αυτό το βήμα, η απάντηση πρέπει να είναι ότι το βασικό εμπόδιο ήταν ο ελλιπής συμβολισμός, δηλαδή το έλλειμμα συμβολισμού με αριθμητικό εκθέτη που κάνει πολύ πιο δυσδιάκριτη αυτή την πορεία.

Στην Πρόταση XVII (σελ 20) ο Viète πολλαπλασιάζει τη διαφορά δύο ποσοτήτων A, B με το συμμετρικό πολυώνυμο αποτελούμενο από όρους δευτέρου βαθμού ως προς A και B και οδηγείται στη διαφορά κύβων $A^3 - B^3$ των αρχικών ποσοτήτων. Γράφει λοιπόν:

Έστω A η μεγαλύτερη και B η μικρότερη ρίζα. Πολλαπλασιάζοντας το $A - B$ με το $A^2 + AB + B^2$ κάνοντας κανείς όλους τους πολλαπλασιασμούς και συλλέγοντας τους ατομικούς όρους φτάνει στο αποτέλεσμα $A^3 - B^3$. Κατόπιν αναφέρει τον κανόνα δηλαδή με σύγχρονη ορολογία $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

PROPOSITIO XVII.

DIFFERENTIAM duorum laterum in tria singularia plana, quibus constat quadratum adgregati ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

SIT latus majus A , minus B . Oporteat $A - B$ ducere in A quadratum, $+ A$ in B , $+ B$ quadrato. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia solida. Erunt illa A cubus, $- B$ cubo. Hinc

Ο Viète στις οχτώ προτάσεις που ακολουθούν μέχρι και την XXIV ασχολείται με τέτοιου είδους ταυτότητες, έως και τις έκτες δυνάμεις.

Πρόταση XXIV

Να πολλαπλασιάσεις το άθροισμα δύο ριζών με τους έξι ατομικούς πέμπτης τάξης όρους, παίρνοντας κάθε φορά έναν, από τους οποίους η έκτη δύναμη της διαφοράς των ριζών αποτελείται.

Έτσι πολλαπλασιάζει το άθροισμα των ριζών $A + B$ με το $A^5 - A^4B + A^3B^2 - A^2B^3 + AB^4 - B^5$ και κάνοντας όλους τους πολλαπλασιασμούς καταλήγει στο $A^6 - B^6$

PROPOSITIO XXIV.

AD GREGATVM duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiae ipsorum, semel sumpta, ducere.

SIT latus unum A , alterum B . Oporteat $A + B$ ducere in A quadrato-cubum, $- A$ quadrato-quadrato in B , $+ A$ cubo in B quadratum, $- A$ quadrato in B cubum, $+ A$ in B quadrato-quadratum, $- B$ quadrato-cubo. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia solido-solida. Erunt illa A cubo-cubus, $- B$ cubo-cubus. Hinc

Παρατηρεί κανείς ότι ο Viète σταματά τη διαδικασία αυτή πάλι στην έκτη δύναμη, με το έλλειμμα συμβολισμού για τον αριθμητικό εκθέτη να αποτελεί το βασικό εμπόδια για την όποια προσπάθεια γενίκευσης. Στο σημείο στην έκδοση του 1631 έχει εισαχθεί στο κείμενο από τον Beaugrand μια προσθήκη, και συγκεκριμένα μια παράγραφος.

Η προσθήκη του Beaugrand προετοιμάζει για την γενικότητα και την καθολικότητα των θεωρημάτων που θα παρουσιάσει, ως συνέχεια των οκτώ προτάσεων του Viète, καθώς και την ανάγκη για την επέκταση αυτή ως παράγοντα ποιοτικότερης μάθησης, εκθειάζοντας παράλληλα την ατομική του επίδραση στην αρτιότητα και πληρότητα του έργου του Viète.

‘Μιας και οι καθολικότητες πρέπει να δηλώνονται με μια καθολική μορφή αν θέλουμε να προχωρήσουμε τη μάθηση, τα θεωρήματα που συνάγονται από τις οκτώ προηγούμενες προτάσεις του Francois Viète δεν θα πρέπει να λαμβάνονται τόσο περιορισμένα. Είμαι ευτυχής που εμείς, όχι μόνο καθαρίσαμε τη δουλειά ενός εξέχοντα άντρα από τα αναρίθμητα λάθη από τα οποία έβριθε και έχουμε επιπλέον συμπληρώσει περισσότερο από το ένα τέταρτο της δουλειάς που είχε χαθεί, αλλά που έχουμε εκτελέσει το έργο ενός σχολιαστή. Είμαι ευτυχής, λέω, που προσθέτω στους κανόνες της επίδειξης και που συλλέγω αυτά τα γενικά θεωρήματα από τις προτάσεις και τα επακόλουθά τους’

Η παράγραφος αυτή που θα αναφέρουμε αμέσως παρακάτω αντικαταστάθηκε στην έκδοση του 1646⁷⁴ με μια μόνο πρόταση:

‘Από τις προηγούμενες προτάσεις συνάγονται ακόλουθα Θεωρήματα καθολικά’

Ex propositionibus præcedentibus deducuntur Theorematum universalium.

Έτσι στο θεώρημα I παρουσιάζεται ο γενικός κανόνας:

Το γινόμενο της διαφοράς δύο ριζών και των ατομικών ομοιογενών όρων, παίρνοντας κάθε φορά έναν, από τον οποίο μία δύναμη του αθροίσματος των ριζών αποτελείται ισούται με τη διαφορά των αμέσως υψηλότερων δυνάμεων (των ριζών αυτών) δηλαδή με σύγχρονους όρους

$$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

T H E O R E M A I.

Quod fit ex differentia duorum laterum in singularia homogenea, quibus constat potestas aggregati ipsorum laterum, semel sumpta, est æquale differentiarum potestatum gradus proxime superioris. Hinc

⁷⁴ Η έκδοση αυτή αποτελεί και την πηγή άντλησης υλικού της εργασίας αυτής όπως δηλώθηκε ρητά σε προηγούμενη παράγραφο..

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο Beaugrand κάνει ένα μεγάλο βήμα προς τη γενίκευση των προτάσεων του Viète αλλά ην στιγμή που θα εμφανιστεί ένας τύπος με n -ιοστό εκθέτη δε θα αργήσει να εμφανιστεί.

Η Πρόταση XVI θα παρουσιαστεί

PROPOSITIO XVI.

CUBO adgregati duorum laterum, cubum differentia eorundem demere.

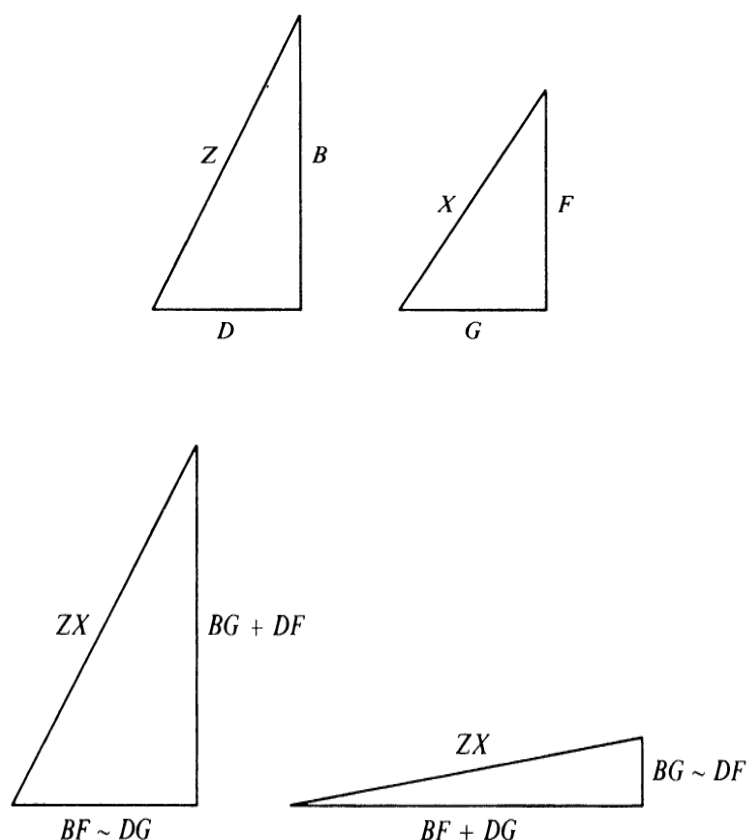
SIT latus unum A, alterum B. Oporteat $A + B$ cubo, cubum ex $A = B$ demere. Abs solidis singularibus, quibus constat componendus abs $A + B$ cubus, demantur singularia solida, quibus constat cubus abs $A = B$: orietur A quadratum in B sexies, $+ B$ cubo bis. Hinc

THEOREMA.

CUBVS adgregati duorum laterum minus cubo differentia eorundem, æquatur sextuplo solido à latere minore in quadratum majoris, plus duplo cubo lateris minoris.

Σε ένα άλλο τμήμα των Προκαταρκτικών Σημειώσεων και συγκεκριμένα στις Προτάσεις XLVIII – LI, ο Viète κάνει χρήση της ‘αναλυτικής τέχνης’ του και εφαρμόζοντας αλγεβρικές μεθόδους στη γεωμετρία των ορθογώνιων τριγώνων φτάνει σε εξαιρετα συμπεράσματα της τριγωνομετρίας. Αυτά θα αποτελέσουν τη μετέπειτα βάση, στη θεωρία των εξισώσεων για μια διαφορετικής οπτικής και προσέγγισης, κομψή επίλυση της κυβικής εξίσωσης αφού δείξει ότι αυτή μετασχηματίζεται πρώτα σε μια μορφή που δεν περιέχει δευτεροβάθμιο όρο. Διαφοροποιείται έτσι από τον Cardano ή τον Bombelli που δίνουν ξεχωριστή λύση για καθεμία από τις 13 τύπους της κυβικής.

Αρχικά δείχνει ότι όταν δίνονται 2 ορθογώνια τρίγωνα, το ένα με βάση D , κάθετο B και υποτείνουσα Z , και το άλλο με βάση G , κάθετο F , και υποτείνουσα X , τότε μπορεί να κατασκευαστεί ένα άλλο ορθογώνιο τρίγωνο με βάση $BF+D$, κάθετο $BG+DF$ και υποτείνουσα ZX , και ένα ακόμη ορθογώνιο τρίγωνο με βάση $BF+DG$ κάθετο $BG-DF$ και υποτείνουσα ZX .



Για την απόδειξη ενεργοποιεί τη συμβολική άλγεβρα που έχει επινοήσει και συγκεκριμένα την παρακάτω πρόταση:

$$(BG + DF)^2 + (BF - DG)^2 = (B^2 + D^2)(F^2 + G^2)$$

Έτσι με απλή εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα δύο αρχικά τρίγωνα εξασφαλίζεται ότι το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι ίσο $Z^2 X^2$ και έτσι η παραπάνω αλγεβρική ισότητα διασφαλίζει ότι νέο τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Η κρίσιμη παρατήρηση όμως, είναι ότι ένα από τα νέα τρίγωνα έχει οξεία γωνία βάσης ίση με το άθροισμα των οξείων γωνιών βάσης των δύο αρχικών τριγώνων - με την προϋπόθεση φυσικά το άθροισμα αυτό να είναι μικρότερο της ορθής -. Το τρίγωνο αυτό ο Viète το ονομάζει 'συναιρετικό', και το άλλο από τα νέα τρίγωνα έχει οξεία γωνία βάσης ίση με τη διαφορά των οξείων γωνιών βάσης των δύο αρχικών τριγώνων που το ονομάζει 'διαιρετικό'.

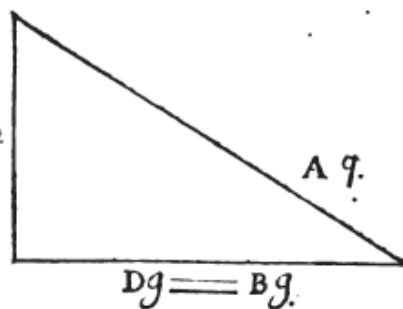
PROPOSITIO XLVIII.

A Duobus triangulis rectangulis æqualibus & æquiangularis, tertium triangulum rectangulum, constituere.

Sunto duo triangu^{la} rectangula, quoru^m communia latera hypotenusa quidem A, perpendiculum B, basis D. Oporteat ab illis duobus tertium triangulum rectangulum constituere. Fiat deductio sicut docuit Propositio 46. casu primo. Deduci enim tantum potest *synareseos* via, non autem *diareseos*. Fit hypotenusa similis A quadrato. Basis, D quadrato = B quadrato. Perpendiculum B in D 2. Tertium autem illud, vocetur triangulum anguli dupli, & ejus respectu primum vel secundum dicetur anguli simpli ob causas * suo ponendas loco.

* Causa est quod angulus acutus trianguli rectanguli à duobus triangulis via *synareseos* effecti æquetur angulis acutis horum triangulorum simul adgregatis, cujus *theorematis conversum demonstravit Andersonus theoremate secundo sectionum angularium*. Porro acuti voce intelligitur is angulus, D in B 2 cui Perpendiculum subtenditur.

Triangulum anguli dupli.



PROPOSITIO XLIX.

A Triangulo rectangulo simpli, &

Θα επιχειρήσουμε μια εξήγηση για τις σχέσεις των γωνιών στο 'διαιρετικό' τρίγωνο που αναφέρεται στην υποσημείωση που φαίνεται στο παραπάνω απόσπασμα και έχει προστεθεί, μάλλον από τον Beaugrand, στην έκδοση του 1631. Η επίδειξη αυτή περιέχεται

στο έργο ‘Καθολικώτερα Θεωρήματα για την Ανάλυση των τμημάτων γωνιών’ του Alexander Anderson.

A D
ANGVLARES SECTIONES
THEOREMATA ΚΑΘΟΛΙΚΩΤΕΡΑ
DEMONSTRATA
P E R
ALEXANDRUM ANDERSONUM.

Έτσι στο Θεώρημα I γράφει:

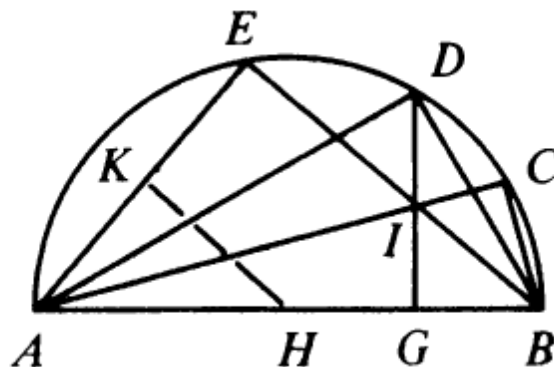
Αν υπάρχουν τρία ορθογώνια τρίγωνα με την οξεία γωνία του πρώτου να διαφέρει από την οξεία γωνία του δεύτερου όσο η οξεία γωνία του τρίτου, με το πρώτο να είναι το μεγαλύτερο από αυτά τα τρία τρίγωνα, τότε οι πλευρές του τρίτου θα είναι όπως παρακάτω:

Η υποτείνουσα θα είναι ανάλογη με το γινόμενο των υποτεινουσών του πρώτου και του δεύτερου.

Η κάθετη θα είναι ανάλογη με το γινόμενο της κάθετης του πρώτου επί τη βάση του δεύτερου μείον το γινόμενο της κάθετης του δεύτερου επί τη βάση του πρώτου.

Η βάση θα είναι ανάλογη με το γινόμενο των βάσεων των τριγώνων συν το γινόμενο των καθέτων τους.

Απόδειξη: Ας είναι AEB , ADB , ACB τα τρία τρίγωνα, οι βάσεις των οποίων είναι AE , AD , και AC και οι κάθετες είναι EB , DB , CB αντίστοιχα και ας είναι I το σημείο που η EB τέμνει τη βάση AC



Από την ομοιότητα των τριγώνων ADB , AEI ⁷⁵ προκύπτει ότι $AD/DB=AE/EI$ έτσι είναι $AD \cdot EI=AE \cdot DB$ και έτσι

$$DB \cdot AE=AD \cdot EB-AD \cdot IB$$

οπότε

$$DB \cdot AE+AD \cdot IB=AD \cdot EB$$

Ακόμα $AD/AB=CB/IB$, από την ομοιότητα των τριγώνων ADB , CBI άρα θα είναι και

$$AB \cdot CB=AD \cdot IB$$

Έτσι

$$DB \cdot AE+AB \cdot BC=AD \cdot EB$$

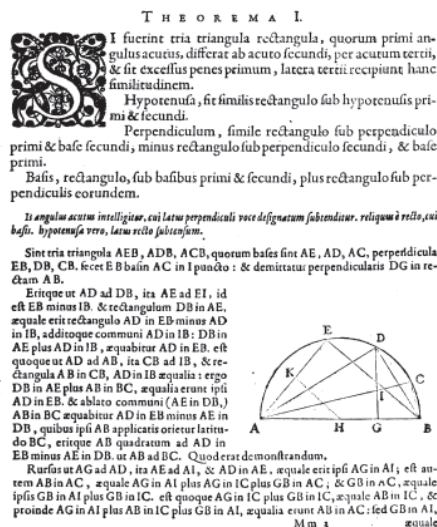
άρα

$$AB \cdot BC=AD \cdot EB -DB \cdot AE$$

και

$$AB^2:[AD \cdot EB -DB \cdot AE]=AB \cdot BC,$$

όπου το τμήμα BC αποδεικνύεται ανάλογο της διαφοράς των γινομένων της καθέτου του ενός τριγώνου επί τη βάση του άλλου, και αποτελεί ένα από τα ζητούμενα. Τα υπόλοιπα από τα ζητούμενα αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.



⁷⁵ Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα τόξα ED και CB είναι ίσα λόγω του ότι η γωνία $BAE - \text{γωνία } BAD = \text{γωνία } BAC = \text{γωνία } DAE$

Έτσι ερμηνεύοντας με όρους στοιχειώδους τριγωνομετρίας έχει αποδείξει ότι:

$$\cos(a+b) = \frac{BF - DG}{ZX} = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \text{ και}$$

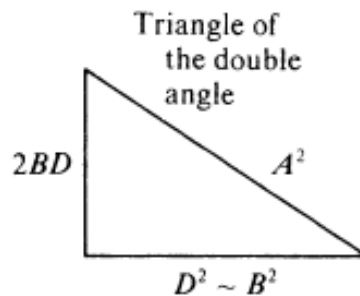
$$\sin(a+b) = \frac{BG + DF}{ZX} = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

αφού είναι:

$$\cos a = \frac{D}{Z}, \quad \cos b = \frac{G}{X}$$

$$\sin a = \frac{B}{Z}, \quad \sin b = \frac{F}{X}$$

Συνεχίζοντας στην πρόταση XLIX θεωρεί τα δύο αρχικά ορθογώνια τρίγωνα να συμπίπτουν έχοντας βάση D , κάθετη B και υποτείνουσα A , τότε το τρίγωνο που προκύπτει παίρνει την παρακάτω μορφή, έτσι αφού η οξεία γωνία βάσης είναι $2a$ και προκύπτουν οι τριγωνομετρικοί τύποι για της διπλάσια γωνία

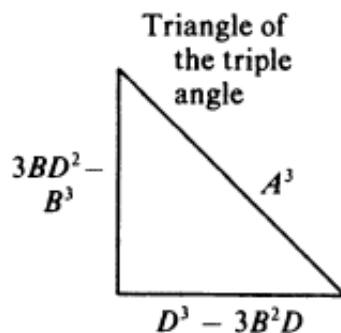


PROPOSITION XLIX

Δηλαδή συμπεραίνει:

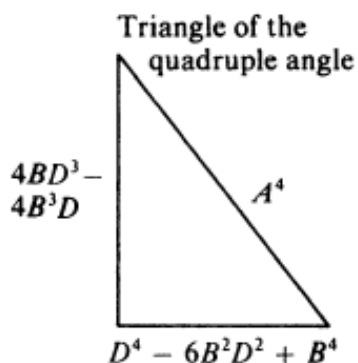
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \text{ και } \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Προχωρώντας με παρόμοιο τρόπο θεωρώντας το ένα από τα δύο αρχικά ορθογώνια τρίγωνα να έχει βάση D , κάθετη B και υποτείνουσα A , το άλλο τρίγωνο να είναι το τρίγωνο του προηγούμενου σχήματος για τη διπλάσια γωνία και τότε το τρίγωνο που προκύπτει παίρνει την παρακάτω μορφή, έτσι αφού η οξεία γωνία βάσης είναι $3a$ προκύπτουν οι τριγωνομετρικοί τύποι για της τριπλάσια γωνία από δοθείσα γωνία.



$$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a \text{ και } \sin(3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

Και συνεχίζει θεωρώντας το ένα απ' τα δύο αρχικά ορθογώνια τρίγωνα να έχει βάση D , κάθετη B και υποτείνουσα A , το άλλο τρίγωνο να είναι το τρίγωνο του προηγούμενου σχήματος για την τριπλάσια γωνία βάσης, τότε το τρίγωνο που προκύπτει παίρνει την παρακάτω μορφή, έτσι αφού η οξεία γωνία βάσης είναι $4a$ προκύπτουν οι τριγωνομετρικοί τύποι για της τετραπλάσια γωνία από δοθείσα γωνία.



Δηλαδή ο Viète με ένα κράμα γεωμετρίας, και συμβολικής άλγεβρας προσέγγισε αρκετά τους γενικευμένους τύπους που είναι γνωστοί σήμερα με τους τύπους:

$$\begin{aligned}\cos n\alpha &= \cos^n \alpha - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots \\ \sin n\alpha &= n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots\end{aligned}$$

Είναι εμφανής η μετατόπιση από το γεωμετρικό στο αλγεβρικό πεδίο.

5.4

ΠΕΝΤΕ ΒΙΒΛΙΑ ΤΗΣ ΖΗΤΗΤΙΚΗΣ ZETETICORUM LIVRI QUINQUE

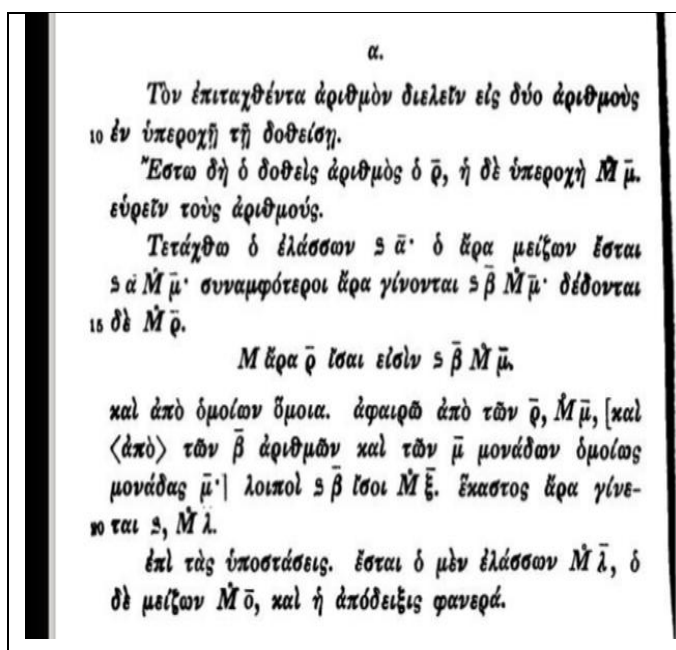
5.4.1. Η ΠΡΟΤΑΣΗ Ι ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ Ι ΤΗΣ ΖΗΤΗΤΙΚΗΣ

Η Ζητητική εκκινεί στο 1^ο Βιβλίο με το ίδιο πρόβλημα που ξεκίνησε ο Διόφαντος και ο Jordanus de Nemore, εν μέρει για να καταδείξει την ιστορική συνέχεια αποτείνοντας φόρο τιμής, αλλά και παράλληλα να επιδείξει το δικό του καθολικότερο τρόπο προσέγγισης.

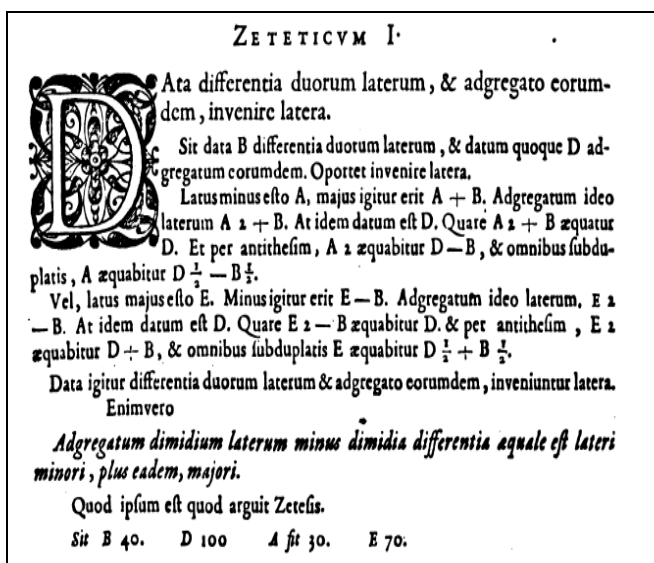
Έτσι στην πρόταση α' του πρώτου βιβλίου των Αριθμητικών διαβάζουμε:

Δοθέντα αριθμό να χωρίσετε σε δύο αριθμούς με δοθείσα διαφορά.

Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι 100 και η διαφορά είναι 40. Ονομάζουμε τον μικρότερο ς και τότε ο μεγαλύτερος $\varsigma+40$ και το άθροισμα είναι $2\varsigma+40$ οπότε $100=2\varsigma+40$ και αφαιρώντας το 40 και από τα δύο μέλη γίνεται $2\varsigma=60$, δηλαδή $\varsigma=30$ ο μικρότερος αριθμός και έτσι 70 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός και η απόδειξη είναι φανερή.



Ο Viète ονομάζει B τη διαφορά, D το άθροισμα και A το μικρότερο από τους δύο αριθμούς. Τότε το άθροισμα των δύο αριθμών είναι $2A+B$ και ισούται με D , έτσι είναι $2A=D-B$ με μεταφορά, και $A=(1/2)D-(1/2)B$. Έστω ο μεγαλύτερος αριθμός είναι E τότε ο μικρότερος αριθμός είναι $E-B$ και το άθροισμα τους είναι $2E-B$ οπότε $2E-B=D$ δηλαδή $2E=B+D$ ή



$$E=(1/2)D+(1/2)B.$$

Στη συνέχεια διατυπώνει τη γενικευμένη συμβολική απάντηση με λέξεις

« το μισό του αθροίσματος δύο αριθμών μείον το μισό της διαφοράς τους ισούται με το μικρότερο αριθμό, και (το μισό του αθροίσματος δύο αριθμών) συν (το μισό της διαφοράς τους ισούται) με το μεγαλύτερο αριθμό »

και συμπληρώνει *«αυτό είναι που η ζητητική κάνει ξεκάθαρο»*. Τέλος ολοκληρώνει με το ίδιο παράδειγμα: αν B είναι 40 και D είναι 100 τότε A είναι 30 και E είναι 70. Αυτή είναι μια τυπική οργάνωση στο έργο του Viete και θα την ακολουθήσει μέχρι το τέλος. Ο Victor Katz σχολιάζει⁷⁶:

‘Μολονότι έχει εισαγάγει συμβολικές μεθόδους, συχνά επαναδιατυπώνει τις απαντήσεις του με λέξεις σαν να θέλει ίσως να πείσει τους σκεπτικιστές αναγνώστες ότι η νέα συμβολική μέθοδος μπορεί πάντοτε να μεταγραφεί σε μια ποιο οικεία ρητορική μορφή’.

Ο Διόφαντος λοιπόν διατυπώνει το πρόβλημα γενικά αλλά το λύνει μόνο για ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, το ίδιο που χρησιμοποιεί και ο Viète, ενώ ο Jordanus de Nemore⁷⁷, το επιλύει γενικά αλλά λεκτικά, κάτι σύνηθες, σημειώνοντας

«αφαίρεσε τη διαφορά από το όλον και ότι απομένει είναι το διπλάσιο του μικρότερου από τους δύο αριθμούς»

Αυτή η διαφορετική προσέγγιση δείχνει τη μετεξέλιξη της άλγεβρας σε μια περίοδο 1300 περίπου ετών.

⁷⁶ Katz Victor, *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013, σελ. 428

⁷⁷ Jordanus de Nemore (1225 – 1260) Γερμανός μαθηματικός του Μεσαίωνα, με σχεδόν καμία πληροφορία για τη ζωή του. η ‘Αριθμητική’ του οποίου περιλαμβάνει διάφορα ευκλείδεια και μη θέματα με αριθμούς.

⁷⁸ Katz Victor, *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013, σελ. 428

. Z E T E T I C V M XVII.

Data differentia laterum, & differentia cuborum: invenire latera.

Sit data B, differentia laterum. Differentia vero cuborum, D solidum. Oportet invenire latera.

Summa laterum esto E, ergo $E + B$ erit duplum lateris majoris, & $E - B$ erit duplum lateris minoris. Differentia autem cuborum illorum, est; B in E quadratum 6, + B cubo 2, æqualis consequenter D solido 8. Quare $\frac{D \text{ sol. } 8}{B} = \frac{B \text{ cubo. } 2}{B}$ æquatur E quadrato.

Dati autem quadrati datur latus, & data differentia laterum & eorumdem summa, dantur latera.

Data igitur differentia laterum, & differentia cuborum: invenitur summa laterum. Enimvero,

Differentia cuborum quadrupla, minus cubo differentia laterum, si applicetur ad triplum differentia laterum: oritur quadratum adgregati laterum.

Sit B 6, D solidum 504, summa laterum 1 N, 1 Q æquatur 100.

Ο Viète ονομάζει B τη διαφορά των αριθμών και D^s τη διαφορά των κύβων τους. Τότε αν E είναι το άθροισμα των αριθμών, $E+B$ είναι το διπλάσιο του μεγαλύτερου και $E-B$ είναι το διπλάσιο του μικρότερου από τους δύο αριθμούς. Έτσι η διαφορά των κύβων των ριζών (αριθμών) είναι ίση με:

$$(E+B)^3/8 - (E-B)^3/8 \text{ που ισούται με } (6BE^2 + 2B^3)/8$$

ποσότητα που είχε συμβολίσει με D^s ,

Άρα κάνοντας τις βασικές του μετακινήσεις στην εξίσωση προκύπτει:

$$E^2 = (4D - B^3)/3B$$

οπότε αν είναι γνωστό το E^2 είναι και το E . Έτσι τελικά με γνωστή διαφορά B και γνωστό άθροισμα E οι αριθμοί μπορούν να βρεθούν (Βιβλίο 1 – Πρόταση 1) οπότε μπορεί να διατυπώσει τον κανόνα

‘τέσσερεις φορές η διαφορά των κύβων δύο αριθμών μείον τον κύβο της διαφοράς των αριθμών αυτών αν διαιρεθεί με το τριπλάσιο της διαφοράς τους δίνει το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών’

Αν η διαφορά των αριθμών είναι $B=6$, η διαφορά των κύβων τους είναι $D=504$ τότε το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών είναι $E^2=100$ και $E=10$ οπότε ο μεγαλύτερος αριθμός είναι $(E+B)/2=8$ και ο μικρότερος είναι $(E-B)/2=2$.

«όπως είναι η διαφορά των άκρων μείον τρεις φορές τη διαφορά των μέσων προς τη διαφορά των μέσων έτσι είναι και το τετράγωνο της διαφοράς των μέσων προς το γινόμενο των μέσων»

Γνωρίζοντας τέλος το γινόμενο των μέσων A και τη διαφορά τους B μπορεί από προηγούμενη πρόταση της ζητητικής να τους προσδιορίσει.

Ακολουθεί σύμφωνα με την τυπική παρουσίαση του ένα αριθμητικό παράδειγμα. Αν είναι η διαφορά των κύβων των άκρων μιας αναλογίας $D=7$ και η διαφορά τους είναι $B=2$, τότε γίνεται το γινόμενο $A=8$ και έτσι αφού η διαφορά είναι 2 οι μέσοι είναι 2, 4 και οι άκροι είναι 1, 8. Οπότε οι τέσσερις συνεχείς ανάλογοι αριθμοί

I	II	III	IV
1	2	4	8

5.4.3 Η ΚΟΙΝΗ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΩΝ ΠΕΜΠΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΣΤΟΝ VIÈTE ΚΑΙ ΤΟΝ ΔΙΟΦΑΝΤΟ

Το πέμπτο βιβλίο της ζητητικής κλείνει με μια ακόμη κίνηση ισχυρού συμβολισμού από την πλευρά του Viète παραθέτοντας, αλλά και επιλύοντας, ένα ακόμη πρόβλημα από το Διοφαντικό ανθολόγιο, που μάλιστα ο Διόφαντος το έθετε στην ίδια ακριβώς θέση στο τέλος του 5^{ου} βιβλίου των *Ἀριθμητικῶν* του.

λ.

Ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους χοεᾶς τις ἔμιξε τοῖς ὁμοπλοῖσι
ποιεῖν χρήστ' ἐπιταπτόμενος,

καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον, τὰς ἐπιταχθείσας
δεξάμενον μονάδας

καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον κτησάμενον πλευρὰν
σύνθεμα τῶν χοεῶν·

ὥστε διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν, καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους,
παῖ, λέγε πενταδράχμους.

Τὸ σημαινόμενον διὰ τοῦ ἐπιγράμματός ἐστι τοιοῦτον.

Ἦγόρασέ τις δύο ἐνῆ οἶνου, ἐκ μὲν τοῦ ἐνὸς τὸν χοεᾶ δραχμῶν $\overline{\eta}$, ἐκ
δὲ τοῦ ἐνὸς τὸν χοεᾶ δραχμῶν $\overline{\epsilon}$, καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον
ἀριθμόν, ὃς πρὸς $\overline{M\xi}$ ἐποίει τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τῶν χοεῶν·
διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους.

Η μετάφραση και η σημασία του επιγράμματος έχει ως εξής:

Αγόρασε κάποιος δύο είδη οίνου, του ενός τον χοεᾶ προς 8 δραχμές και του άλλου τον χοεᾶ προς 5 δραχμές και είπε ότι η τιμή του όλου είναι τετράγωνος αριθμός, ο οποίος προστιθέμενος στο 60 σχηματίζει νέο τετράγωνο αριθμό, του οποίου η τετραγωνική ρίζα ισούται με το άθροισμα των χοεῶν. Να βρεθούν οι οκτάδραχμοι και πεντάδραχμοι χοεῖς. (3,28 λίτρα=1 χοεῦς=12 κοτύλαι)

Η λύση που παρουσιάζει ο Διόφαντος είναι η παρακάτω:

Ἐστω τὸ πλήθος τῶν χοέων $\mathfrak{S} \bar{a}$, ὥστε ἡ τιμὴ γενήσεται $\Delta^Y \bar{a} \wedge \bar{M} \bar{\xi}$.
 λοιπὸν δεῖ $\Delta^Y \bar{a} \wedge \bar{M} \bar{\xi}$ ποιεῖν ἴσ. $\square\varphi$ καὶ δεῖ τάσσειν τὴν τοῦ $\square$ ου πλ.
 ἀπὸ $\mathfrak{S} \bar{a}$ λείψαντος $\bar{M}$ ὅσασδήποτε.

ἀλλὰ ἐπεὶ ἡ $\Delta^Y \bar{a} \wedge \bar{M} \bar{\xi}$ σύγκειται ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν, τῆς τιμῆς
 τῶν ὀκταδράχμων καὶ τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, (καὶ τὸ εὖν τῆς τιμῆς
 τῶν πενταδράχμων) ποιεῖ τὸ πλήθος (τῶν) πενταδράχμων, τὸ δὲ ἡὖν τῆς τιμῆς
 τῶν ὀκταδράχμων ποιεῖ τὸ πλήθος τῶν ὀκταδράχμων, καὶ ἐπεὶ τὸ πλήθος
 τῶν χοέων συντεθέντα ποιεῖ $\mathfrak{S} \bar{a}$, γέγονεν οὖν τινα τὸν ὄντα $\Delta^Y \bar{a} \wedge \bar{M} \bar{\xi}$ διελεῖν
 εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ ἑνὸς εὖν καὶ τὸ τοῦ ἑτέρου ἡὖν ποιῇ $\mathfrak{S} \bar{a}$.

Καὶ τοῦτο δὲ οὐ πάντοτε δύναμαι, εἰ μὴ κατεσκευάσθῃ ὁ $\mathfrak{S}$ μείζων μὲν
 τοῦ ἡὖν $\Delta^Y \bar{a} \wedge \bar{M} \bar{\xi}$, ἐλάσσων δὲ τοῦ εὖν $\Delta^Y \bar{a} \wedge \bar{M} \bar{\xi}$. ἔστω $\Delta^Y \bar{a} \wedge \bar{M} \bar{\xi}$
 μείζων $\mathfrak{S} \bar{e}$, ἐλάσσων δὲ $\mathfrak{S} \bar{\eta}$.

Ἐστω x το πλήθος των χοέων οπότε η [συνολική] τιμή τους θα είναι x²-60. Πρέπει λοιπόν

$$x^2-60=\text{τετράγωνος}$$

και η τετραγωνική ρίζα του τετραγώνου αριθμού να είναι x-a, όπου a κάποιος ακέραιος.

Αλλά επειδή ο x^2-60 αποτελείται από δύο αριθμούς, την τιμή των οκταδράχμων και την
 τιμή των πανταδράχμων, και το πέμπτο της τιμής των πενταδράχμων δίνει το πλήθος των
 πενταδράχμων, το δε ὄγδοο της τιμής των οκταδράχμων δίνει το πλήθος των οκταδράχμων
 (χοέων) επειδή το πλήθος όλων των χοέων ισούται με x, καταλήγει το πρόβλημα να
 αναλύσουμε τον x^2-60 σε δύο αριθμούς ώστε το 1/5 του ενός και το 1/8 του άλλου να
 ισούται με x.

Και αυτό δεν είναι πάντα δυνατόν εκτός εάν ο x είναι μεγαλύτερος του $(x^2-60)/8$, και
 μικρότερος του $(x^2-60)/5$ οπότε προκύπτει:

$$8x > x^2 - 60 > 5x$$

Επειδή $x^2-60 > 5x$ ας προστεθεί και στα δύο μέλη το 60 οπότε $x^2 > 5x+60$ ώστε και $x^2=5x$
 συν αριθμό μεγαλύτερο του 60 ώστε θα είναι αναγκαίο ο x να μην είναι μικρότερος του 11
 Επειδή $x^2-60 < 8x$ ας προστεθεί και στα δύο μέλη το 60 οπότε $x^2 < 8x+60$ ώστε και $x^2=8x$
 συν αριθμό μικρότερο του 60 ώστε θα είναι αναγκαίο ο x να μην είναι μεγαλύτερος του 12
 οπότε είναι αρκετό να βρεθεί x με

$$11 < x < 12$$

Αλλά επιπλέον ζητάμε $x^2-60=\text{τετράγωνος}=(x-\lambda)^2$ οπότε είναι και $x=(\lambda^2+60)/2\lambda$ και έτσι ακόμη⁷⁹

$$11 < x = (\lambda^2 + 60) / 2\lambda < 12$$

πάλιν δεῖ $\Delta Y \bar{a} M \xi$ μερίζοντα παρὰ $\underline{\varsigma} \beta$ [τόν $\underline{\varsigma}$] εὐρεῖν ἐλάσσονα $M \iota \beta$. ὥστε $\Delta Y \bar{a} M \xi$ ἐλάσσονος εἰσὶν $\underline{\varsigma} \kappa \delta$. $\underline{\varsigma}$ ἄρα $\kappa \delta$ ἴσοι εἰσὶν $\Delta Y \bar{a}$ καὶ ἀριθμῶ τινα μείζονι $M \xi$. ὅθεν ὁ $\underline{\varsigma}$ ὀφείλει ἐλάσσων εἶναι $M \kappa \alpha$, ἀλλὰ καὶ μείζων $M \iota \theta$. ἔστω $M \bar{\kappa}$.

Από όπου $\lambda^2+60 < 24\lambda$ και $24\lambda = \lambda^2 + \text{κάποιον αριθμό μεγαλύτερο του } 60$, από όπου προκύπτει ότι ο λ οφείλει να είναι μικρότερος του 21 και όμοια ο Διόφαντος συμπεραίνει ότι ο λ οφείλει να είναι μεγαλύτερος του 19, εκμεταλλευόμενος τη σχέση $\lambda^2+60 > 22\lambda$ άρα ο για τον λ έχουμε:

$$19 < \lambda < 21$$

Έστω ότι είναι $\lambda=20$

ὥστε δεῖ $\Delta Y \bar{a} \wedge M \xi$ ἴσ. $\square \psi$ ποιοῦντα, τάσσειν τὴν τοῦ $\square$ ου $\pi \lambda$. ἀπὸ $\underline{\varsigma} \bar{a} \wedge M \bar{\kappa}$. ὅθεν εὐρίσκεται ὁ $\underline{\varsigma} M \iota \alpha L'$, ὁ $\square$ ος $\varrho \lambda \beta \delta \times$.

Ὡστε πρέπει $x^2-60=\text{τετράγωνος}$, του οποίου η τετραγωνική ρίζα να είναι ίση με $x-20$, από όπου βρίσκουμε

$$x = 11\frac{1}{2} \text{ και } x^2 = 132\frac{1}{4}$$

Αφαιρώ 60 μένει υπόλοιπο $72\frac{1}{4}$. Πρέπει λοιπόν να αναλύσουμε τον αριθμό αυτό σε δύο αριθμούς, ώστε το ένα πέμπτο του πρώτου συν το ένα όγδοο του δεύτερου να δίνει $11\frac{1}{2}$. (Στο κείμενο εκ παραδρομής είναι $11\frac{1}{4}$. Έστω το πέμπτο του πρώτου είναι x , τότε το όγδοο του δεύτερου είναι $11\frac{1}{2}-x$ θα είναι ο μεν ένας $5x$, ο δε άλλος $92-8x$, και το άθροισμα τούτων θα είναι ίσο με $72\frac{1}{4}$. Θα είναι άρα ο $x=79/12$.

⁷⁹ Ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε το ίδιο σύμβολο ς για όλους τους αγνώστους που εισήγαγε

εον μέρος $\leq \bar{a}$. τὸ ἄρα τοῦ βου ηον ἔσται $M\bar{\iota}\bar{a}L' \wedge \leq \bar{a}$. αὐτοὶ ἄρα ἔσονται ὁ
 μὲν $\leq \bar{\epsilon}$, ὁ δὲ $M\bar{\iota}\bar{\beta} \wedge \leq \bar{\eta}$. ταῦτα ἴσα $\langle M \rangle \bar{o}\bar{\beta} \delta^\times$. ἔσται ἄρα $\langle \delta \leq \rangle M\bar{o}\bar{\theta}$.
 τὸ ἄρα πλήθος τῶν πενταδράχμων ἔσται χοέων $\bar{\zeta}$ κοτυλῶν $\bar{\zeta}$, τὸ δὲ τῶν
 οκταδράχμων χοέων $\bar{\delta}$ κοτυλῶν $\bar{\iota}\bar{a}$. τὰ λοιπὰ δῆλα.

Το πλήθος των πεντάδραχμων χοέων θα είναι 6 συν 7 κοτύλαι και το πλήθος των
 οκτάδραχμων χοέων θα είναι 4 και 11 κοτύλαι. Τα λοιπά είναι φανερά.

Η λύση του προβλήματος σύμφωνα με τον Viète:

Η πρόταση XIII του πέμπτου βιβλίου της ζητητικής που προηγείται του προβλήματος αυτού και ουσιαστικά λειτουργεί ως λήμμα για την επίλυση του έχει την εξής διατύπωση:

Πρόταση XIII:

Να εξισώσεις το $A^2 - G^p$ με ένα τετράγωνο που να είναι λιγότερο από DA και περισσότερο από BA .

Κατασκευάζουμε το τετράγωνο πλευράς $A-F$ οπότε

$$A^2 - 2AF + F^2 = A^2 - G^p, \text{ συνεπώς}$$

$$(F^2 + G^p) / 2F = A, \quad (1)$$

,αλλά αφού είναι $A^2 - G^p < DA$ ή $A^2 - DA < G^p$,

Είναι

$$A < \sqrt{\frac{1}{4} D^2 + G^p} + \frac{1}{2} D$$

Έτσι ο A θα είναι λιγότερο από S

Ο Viète γράφει

autem S æquari vel præstare $\sqrt{D \text{ quad. } \frac{1}{4} + G \text{ plano}} + D \frac{1}{2}$.

Από την άλλη

$$A^2 - G^p > BA \text{ ή } A^2 - BA > G^p,$$

Είναι

$$A > \sqrt{\frac{1}{4} B^2 + G^p} + \frac{1}{2} B$$

Έτσι ο A θα είναι περισσότερο από R όπου $R \leq \sqrt{\frac{1}{4} B^2 + G^p} + \frac{1}{2} B$

Ο Viète θα γράψει:

$$\text{autem } R \text{ æquari vel cedere } \sqrt{B \text{ quad. } \frac{1}{4} + G \text{ plano} + B \frac{1}{2}}.$$

Αλλά το $F^2 + G^p$ είναι λιγότερο $2SF$ και περισσότερο από $2RF$. Έτσι F δεν μπορεί να είναι οτιδήποτε· αλλά δεν πρέπει να βρίσκεται έξω από κάποια προκαθορισμένα όρια. Σύμφωνα με τη ζητητική ας είναι ίσο με E .

Έτσι

$$2SE - E^2 > G^p, \text{ ας υποθέσουμε ότι } F < S + \sqrt{S^2 - G^p}$$

και

$$2RE - E^2 < G^p \text{ υποθέτουμε επιπλέον ότι } F > R + \sqrt{R^2 - G^p}$$

Έτσι για το πρόβλημα του Διόφαντου ο Viète θεωρεί

$$G^p = 60, B = 5, D = 8 \text{ και } A = x.$$

Τότε το x θα είναι μικρότερο από $\sqrt{76} + 4$ και μεγαλύτερο από $\sqrt{265/4} + 5/2$

Αλλά το 12 είναι μικρότερο από $\sqrt{76} + 4$ και το 11 είναι μεγαλύτερο από $\sqrt{265/4} + 5/2$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $S = 13$ και $R = 10$, αλλά τότε το F θα είναι μικρότερο από $13 + \sqrt{109}$ αλλά μεγαλύτερο από $10 + \sqrt{40}$

έτσι $17 < F < 23$ οπότε επιλέγει $F = 20$ και έτσι από τη σχέση (1) είναι:

$$A = 11\frac{1}{2}$$

Έτσι ο Viète συνοψίζει τα αποτελέσματα της λύσης του προβλήματος και κλείνει το 5^ο βιβλίο της Ζητητικής, στη σελίδα 81, με τον τρόπο που κλείνει ο Διόφαντος το 5^ο βιβλίο των Αριθμητικών του.

Atque hinc solutio Problematis ab Epigrammatario Graeco propositi.

- „ Οκτάδραχμος ἔ πεντάδραχμος χοείας τις ἔμιξε,
 „ Τοῖς περπλοῖς ποιῆν χρῆσιν Ὀπιπτάγμῳ.
 „ Καὶ πμὴν ἀπὸ δώκεν ὑπὲρ πάντων πτεράγων,
 „ Τὰς Ὀπιπαχθείσας δεξάμῳ μονάδας,
 „ Καὶ ποιῶντας πάλιν ἐπὶ ρόν σὲ φέρειν πτεράγων
 „ Κτησάμῳ πλῶραν σῶθεμα τ̃ χοεῶν.
 „ Ὡς τε διάσφλον, τὴς ὀκταδράχμος ποιήσιν,
 „ Καὶ πάλι τὴς ἐπὶ ρας, παῖ, λέγει πεντάδραχμος.

σῶθεμα τ̃ χοεῶν	II $\frac{1}{2}$	A
πεντάδραχοι	6 $\frac{7}{12}$	
ὀκταδράχοι	4 $\frac{11}{12}$	

πμὴ πενταδραχμῶν	32 $\frac{11}{12}$	B in A
πμὴ ὀκταδραχμῶν	39 $\frac{1}{4}$	D in A
πμὴ συμπᾶσαι	72 $\frac{1}{4}$ πτεράγων	A quad. — Z plano.

μονάδες	60	Z planum
πρόδεσις πμῆς καὶ μονάδων	132 $\frac{1}{4}$ πτεράγων	κτησάμῳ πλῶραν
II $\frac{1}{2}$ A quad.		

Retulit Diophantus quaestione ultima libri V. Quare & Zeteticorum quintus noster finem hic accipito.

F I N I S.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΑ ΕΡΓΑ ‘ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ’ ΚΑΙ ‘APOLLONIUS GALLUS’

6.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΝΕΥΣΗΣ ΣΤΟ ‘ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ’

Στο ‘Συμπλήρωμα Γεωμετρίας’ (*Supplementum Geometrae*) του 1593 ο Viète εκκινεί επαναφέροντας και αξιοποιώντας τη μέθοδο της νεύσης για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων χωρίς τον Πλατωνικό περιορισμό της χρήσης μόνο κανόνα και διαβήτη, και το κάνει γενικευμένα και χωρίς οντολογικές τύψεις.

Η μέθοδος της νεύσης συνίσταται στην τοποθέτηση ενός ευθύγραμμου τμήματος ορισμένου μήκους μεταξύ δύο δεδομένων γραμμών έτσι ώστε τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος να βρίσκονται πάνω στις γραμμές και το ίδιο το τμήμα ή η προέκτασή του να διέρχεται από δεδομένο σημείο.

Μάλιστα προσπαθεί να τη ‘νομιμοποιήσει’ περαιτέρω προσθέτοντας ένα επιπλέον αξίωμα στα 3 πρώτα αξιώματα του Ευκλείδη και το τοποθετεί μάλιστα στην έναρξη του έργου αυτού.

Αξίωμα:

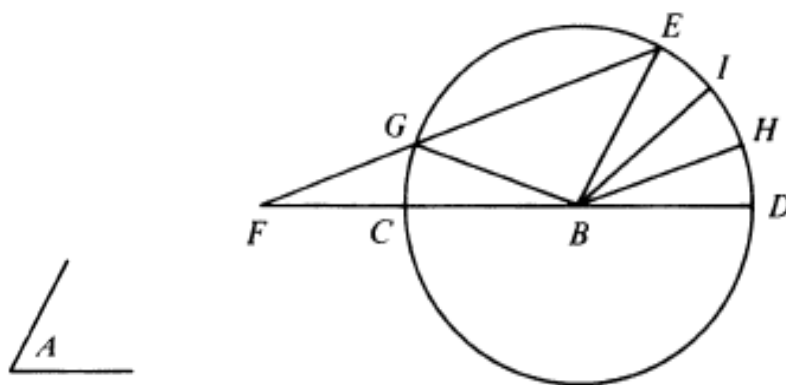
‘Δύνασαι να φέρεις ευθεία γραμμή από τυχαίο σημείο προς δύο οποιεσδήποτε δεδομένες ευθείες έτσι ώστε η τομή τους με αυτές να παράγει τμήμα ίσο με δοθέν άλλο [προκαθορισμένου μήκους]’.

Στο βιβλίο ‘Συμπλήρωμα Γεωμετρίας’ ο Viète επιχειρεί να καταδείξει τη δύναμη αυτής της μεθόδου. Με βάση το νέο αξίωμα και τη μέθοδο της νεύσης δείχνει ότι μπορούν να επιλυθούν η τριχοτόμηση δοθείσας –τυχαίας– γωνίας (Πρόταση IX) και η εύρεση (παρεμβολή) δύο μέσων αναλόγων (Πρόταση V).

Αυτές οι δύο όμως περιπτώσεις όπως είδαμε, αρκούν για να επιλύσει οποιαδήποτε κυβική εξίσωση, μετά τις απαραίτητες αναγωγές. Αυτό θα το διατυπώσει emphaticά στην ακροτελεύτια πρόταση του ‘Συμπληρώματος’ (Πρόταση XXV).

6.2 Η ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΤΥΧΑΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΟ ‘ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ VIEΤΕ’

ΠΡΟΤΑΣΗ IX : Να τριχοτομηθεί τυχούσα γωνία.



Έστω A η δοθείσα γωνία που ζητείται να τριχοτομηθεί. Από το κέντρο B γράφουμε κύκλο με τυχαία ακτίνα και έστω η διάμετρος είναι CBD . Σημειώνουμε το τόξο DE που ορίζει το μέγεθος της δοθείσας γωνίας και προεκτείνουμε τη DBC απροσδιόριστα. Σχεδιάζουμε την ευθεία γραμμή EFG που τέμνει την προέκταση της διαμέτρου στο F και την περιφέρεια του κύκλου στο G ,

*έτσι ώστε το [τμήμα] FG να ισούται με BC ή BD , την ακτίνα του κύκλου.*⁸⁰

Τότε η γωνία BFG είναι το ένα τρίτο της γωνίας EBD , που είναι η δοθείσα γωνία A και το τόξο GC είναι το ένα τρίτο [του τόξου ED]

Εδώ εμφανίζεται ένα μεγάλο άλμα , αλλά το κενό γεφυρώνεται ως εξής:

Από το ισοσκελές τρίγωνο BGF είναι οι γωνίες $BFG = FBG$

Η εξωτερική γωνία του τριγώνου BGF , $BGE = BFG + FBG = 2BFG$

Από το ισοσκελές τρίγωνο BGE είναι οι γωνίες $BGE = BEG = 2BFG$

Η εξωτερική γωνία του τριγώνου EBF , $EBD = A = BFG + BEG = 3BFG$

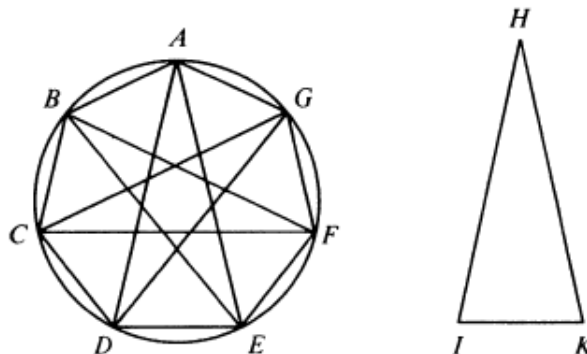
⁸⁰ Η νέυση έγκειται ακριβώς σε αυτό το σημείο, όπου επιλέγουμε να φέρουμε την ευθεία EFG με τρόπο που το τμήμα FG να έχει προκαθορισμένο μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου και να διέρχεται από το σημείο E .

6.3

ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΕΝΤΑΓΩΝΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

ΠΡΟΤΑΣΗ XXIV

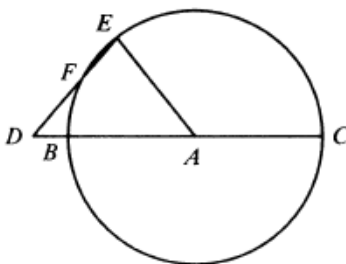
Να εγγραφεί κανονικό επτάγωνο σε κύκλο



Εδώ ο Viète υιοθετώντας μια αναλυτική προσέγγιση, παρατηρεί ότι αρκεί η κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου με καθεμία από τις γωνίες βάσης τριπλάσια από τη γωνία κορυφής, έπειτα εγγράφουμε ένα τέτοιο τρίγωνο σε κύκλο, και τέλος το μόνο που απομένει είναι η τριχοτόμηση των γωνιών βάσης με τη μέθοδο που παρουσίασε στην πρόταση IX με τη μέθοδο της νεύσης.

Το πρόβλημα έτσι έγκειται στο να βρεθεί ο τρόπος κατασκευής ενός τέτοιου ισοσκελούς τριγώνου. Για το σκοπό αυτό έχουν προηγηθεί οι προτάσεις XIX έως XXIII που με τα συμπεράσματά τους γίνεται εφικτή η υλοποίηση αυτής της κατασκευής. Έτσι στην πρόταση XX κατασκευάζει ένα ισοσκελές τρίγωνο EDA ($ED=EA$) στο οποίο:

ο λόγος της διαφοράς της βάσης με μια από τις ίσες πλευρές του προς τη βάση να είναι ίσος με το λόγο του τετραγώνου μιας από τις ίσες πλευρές του προς το τετράγωνο του αθροίσματος της βάσης και μιας από τις ίσες πλευρές του.

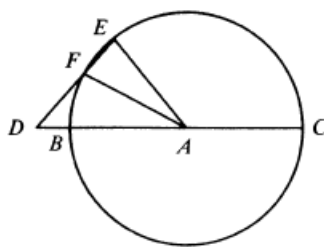


Με κέντρο ένα σημείο A γράφουμε κύκλο με τυχαία ακτίνα AB . Το κρίσιμο σημείο είναι επιλογή ενός σημείου D στην προέκταση της διαμέτρου BC τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$DB:DA=AB^2:DC^2$$

Με την πρόταση XIX έχει εξασφαλίσει ότι το σημείο D μπορεί να προσδιοριστεί. Έπειτα αρκεί να φέρει το τμήμα $DE=AB$ ίσο με την ακτίνα του κύκλου με E να είναι το σημείο τομής με τον αρχικό κύκλο. Τότε το ζητούμενο τρίγωνο είναι το DEA καθώς πληρεί τις αρχικές απαιτήσεις.

Κατόπιν με την πρόταση XXI αποδεικνύει ότι αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ισχύουν οι προϋποθέσεις της πρότασης XX και φέρουμε από μια κορυφή του που βρίσκεται στη βάση του ένα τμήμα, που να είναι ίσο με μια από τις ίσες πλευρές του το AF , τότε το τμήμα αυτό διχοτομεί τη γωνία της βάσης $[A]$



Θα δώσουμε την απόδειξη για την ενδεικτική παρουσίαση της μεθοδολογικής του πορείας. Ας θυμηθούμε ότι το ‘Συμπλήρωμα Γεωμετρίας’ εκδόθηκε το 1593 και έως τότε έχουν προηγηθεί οι συντακτικές ρυθμίσεις των αλγεβρικών χειρισμών στα υπόλοιπα έργα του και κυρίως στην ‘Εισαγωγή στην Αναλυτική Τέχνη’.

Απόδειξη: Θα αποδειχθεί ο ισχυρισμός ότι η AF διχοτομεί τη γωνία EAD

Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει:

$$DB:DA=AB^2:DC^2$$

Έτσι

$$DB:AB=(DA:AB):DC^2$$

αλλά από την πρόταση II του ίδιου έργου που είναι αντίστοιχη της ευκλείδειας πρότασης III 36 και αφορά τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο, ισχύει

$DB:DE=DF:DC$ έτσι $DB:AB=DF:DC$ άρα προκύπτει:

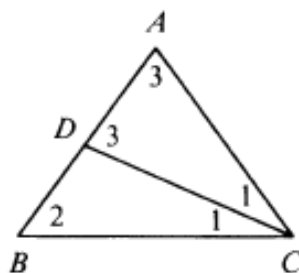
$DF:DC=(DA \cdot AB):DC^2$ και ακόμη $DF:DE=DA:DC$, αφού $AB=DE$

και τέλος

$$DF:FE=DA:AC$$

έτσι το σημείο F χωρίζει εσωτερικά το τμήμα DE σε λόγο όπως ο λόγος των πλευρών του τριγώνου που περιέχουν το τμήμα AF . Ο Viète κάνει εκ νέου απόδειξη ότι το σημείο F είναι το ίχνος της εσωτερικής διχοτόμου χωρίς να χρησιμοποιήσει την ευκλείδεια πρόταση.

Τέλος με τις προτάσεις XXII-XXIII αποδεικνύεται ότι αν ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι όπως στις προτάσεις XIX-XXI τότε η γωνία κορυφής είναι μιάμιση φορά μεγαλύτερη από τη γωνία βάσης και έτσι οι γωνίες ισοσκελούς τριγώνου ADC έχουν την ιδιότητα που αναζητήθηκε δηλαδή οι γωνίες βάσης τριπλάσιες τη γωνίας κορυφής.



Με αυτό το συμπέρασμα τώρα στη φαρέτρα του, μπορεί να κατασκευάσει το κανονικό επτάγωνο.

6.4 ΜΙΑ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΟΝΙΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ VΙΕΤΕ ΣΤΟ ‘APOLLONIUS GALLUS’

F. V.
APOLLONIUS GALLVS,
Seu,
EXSVSCITATA APOLLONII PERGÆI
πρὸς ἐπαφῶν
Geometria.
Ad V. C. A. R. Belgam.

Ο Viète χρησιμοποιεί την αρχαιοελληνική μέθοδο της ανάλυσης που ανέσυρε από το απάνθισμα του ‘Αναλυόμενου Τόπου’ του Πάππου και ενεργοποιεί τις γεωμετρικές του ικανότητες για να επιλύσει στο έργο του ‘Apollonius Gallus’ ένα κλασικό και σύνθετο γεωμετρικό πρόβλημα, το λεγόμενο ‘Απολλώνιο πρόβλημα’ που αρχικά διατυπώθηκε και λύθηκε από τον Απολλώνιο τον Περγαίο στο έργο του ‘Περὶ επαφῶν’ και σε μια εκδοχή του διατυπώνεται ως εξής:

P R O B L E M A X.

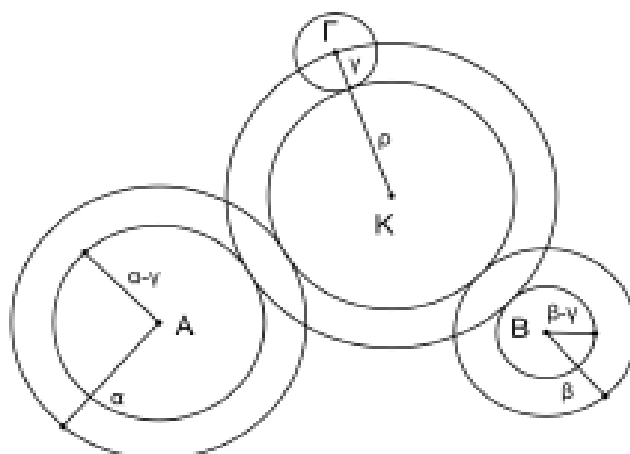
**Datis tribus circulis , describere quartum circulum quem illi
contingant.**

Πρόβλημα X: Δοθέντων τριῶν κύκλων να κατασκευαστεί ένας τέταρτος κύκλος που να εφάπτεται στους τρεις δοθέντες κύκλους.

Ανάλυση: Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος είναι ο (K, ρ) ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά στους δεδομένους κύκλους (A, α) , (B, β) . και (Γ, γ) .

Η ιδέα πίσω από την απόδειξη που ακολουθεί έγκειται στο ότι η επαφή των κύκλων διατηρείται όταν οι ακτίνες των δεδομένων κύκλων ελαττώνονται κατά το ένα κοινό ποσό αρκεί ο εφαπτόμενος σε αυτούς κύκλους να έχει μια ισόποση αύξηση στην ακτίνα του έτσι μέσα από μια ακολουθία αναγωγών αντικαθιστά σταδιακά τους κύκλους με σημεία.

Γράφουμε λοιπόν τους κύκλους $(A, \alpha-\gamma)$ και $(B, \beta-\gamma)$ έτσι ο κύκλος $(\Gamma, \gamma-\gamma)$ εκφυλίζεται στο σημείο Γ . Είναι φανερό ότι ο κύκλος $(K, \rho+\gamma)$ εφάπτεται στους δύο προηγούμενους κύκλους στα σημεία Λ, Δ και διέρχεται από το σημείο Γ .



Το πρωτότυπο κείμενο στο *Apollonius Gallus* φαίνεται παρακάτω⁸¹

APOLLONIUS

Itaque ducatur ab eo puncto E recta per centrum alicuius datorum ad ipsius dati circonferentiam habitâ ea quam decebit opus-ue exiget, partium in positionibus ratione, & intervallo describatur circulus HLM factum erit quod oportuit. Sic autem habebitur ea, quam decebit opus-ue exiget, partium ratio.

I

Vt quartus à datis tangatur intus. Sit A centrum maximi datorum, B medij, D minimi. DF differentia quâ semidiameter maximi superat semidiametrum minimi, BG differentia qua semidiameter maximi superat semidiametrum medij, & per A punctum describatur circulus, quem positiij intus contingant.

II.

Κατόπιν θεωρούμε το σημείο τομής O των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων των κύκλων (A, $\alpha-\gamma$) και (B, $\beta-\gamma$), (κέντρο ομοιότητας των δύο κύκλων) και έστω η διακεντρική ευθεία των δύο παραπάνω κύκλων τους τέμνει διαδοχικά στα σημεία Σ, Η, και Θ, Ι αντίστοιχα.

Από τα ισοσκελή τρίγωνα $K\Lambda\Delta$, $A\Lambda H$, $B\epsilon I$, ισότητα και απλές σχέσεις γωνιών αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα $O\epsilon I$ και $O\Lambda H$ είναι όμοια οπότε ισχύει:

⁸¹ Vietae Francisci, *Apollonius Gallus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei Περί επαφών Geometia*, Paris 1600 σελ.7

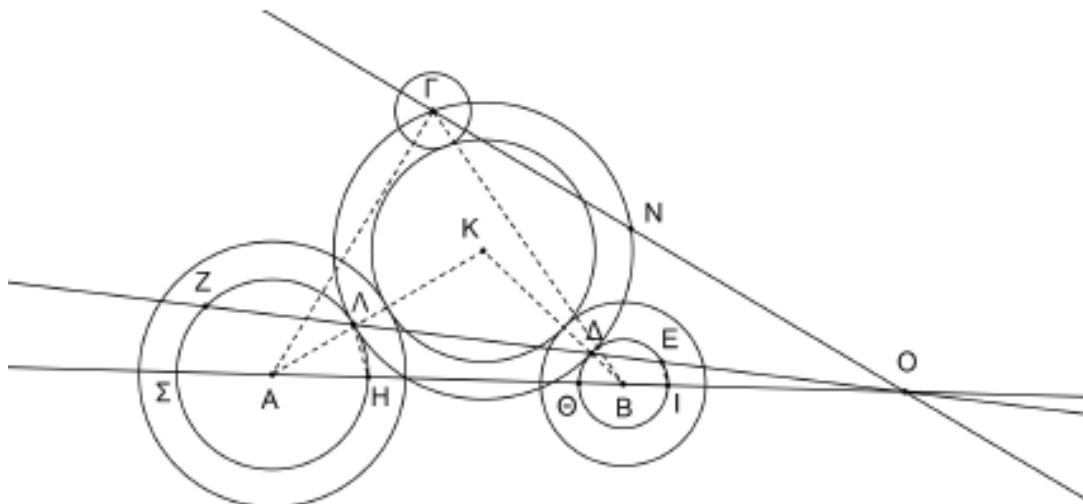
$OI/OE=OH/OA$ (1), αλλά επιπλέον ισχύει $OI \cdot O\Theta = OE \cdot OA$ (Πρόταση III 36 – ‘Στοιχεία’ Ευκλείδη) έτσι $OI/OE=OA/O\Theta$ (2). Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $OH/OA=OA/O\Theta$, δηλαδή

$$OH \cdot O\Theta = OA \cdot OA \quad (3).$$

Από το σημείο O φέρουμε ευθεία που διέρχεται από το σημείο Γ η οποία τέμνει τον κύκλο (K, ρ+γ) σε σημείο N. Είναι:

$$OG \cdot ON = OA \cdot OA \quad (4)$$

και από (3), (4) προκύπτει $OH \cdot O\Theta = OG \cdot ON$, που ερμηνεύεται ότι το σημείο N προσδιορίζεται ως η τέταρτη ανάλογος των OH , $O\Theta$, OG (Πρόταση VI 12 – ‘Στοιχεία’ Ευκλείδη)



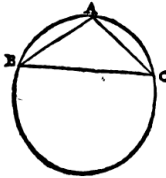
Τώρα το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή κύκλου που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία Γ, N και εφάπτεται σε δεδομένο κύκλο, έστω, τον (A, α-γ) και αυτό το πρόβλημα ανάγεται εν συνεχεία στην κατασκευή ενός κύκλου που διέρχεται από τρία δεδομένα σημεία. (Πρόταση III 1 - Στοιχεία Ευκλείδη).

Ο Viète χρησιμοποιεί την παραπάνω συλλογιστική έχοντας αποδείξει τα βοηθητικά λήμματα και τις προτάσεις που χρειάζεται⁸².

APOLLONIUS
PROBLEMA I.

¶ A T I S tribus punctis per eadem circulum describere: Oportet autem data puncta non existere tria in eadem lineâ rectâ.

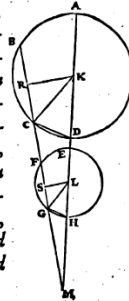
Sint data tria puncta A, B, C. Oportet per puncta A, B, C, circulum describere. Iungantur puncta A, B, C. Et quoniam non existunt in eadem lineâ rectâ ex cautione adiecta Problemati, idè triangulum fit, cuius apices erūt ipsa A, B, C, puncta. Itaque circa triangulum A, B, C, describatur circulus. Id enim docent Elementa. Per puncta igitur A, B, C, descriptus est circulus A B C. Quod faciendum erat.



Lemma ad id quod sequitur.

Lemma II.

Sint duo circuli, unus ABCD, alter EFGH, iungens autem eorum centra KL secet circulum primum in A, D. Secundum vero in E, H, & in eâ sumatur M punctum, à quo alia MGFCB recta secet circulum primum in B, C, secundum in F, G, & sint similia segmenta, & puncta quidem scilicet A, B sint remotiora ipsis C, D, & puncta F, E ipsis C, H. Aio id quod fit sub MG MB aequari id quod fit sub MH, MA.



⁸² Ο.π. σελ 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ: ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΑ ΕΡΓΑ ‘ΔΥΟ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ’ ΚΑΙ ‘ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ’

7.1 Η ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ

Η διαφοροποίηση από το ‘*Ars Magna*’ του Cardano είναι ότι Viète δεν επιχειρεί να επιλύσει το πρόβλημα της τριτοβάθμιας εξίσωσης θεωρώντας τις 13 ξεχωριστές περιπτώσεις του Cardano αλλά δείχνει πως μετασχηματίζεται μια τριτοβάθμια εξίσωση με χρήση της αντικατάστασης $x=y+c$ ή $x=y-c$ σε μια ισοδύναμη εξίσωση χωρίς δευτεροβάθμιο όρο.

Έτσι στο κεφάλαιο I της δεύτερης πραγματείας του ‘για τη βελτίωση των εξισώσεων’ γράφει:

Αν

$$A^3 + 3BA^2 = Z^3$$

τότε έστω $A+B=E$ και τότε $E^3 - 3B^2E = Z^3 - 2B^3$

και συνεχίζει αν $x^3 + 6x^2 = 1600$ τότε με την μετατροπή $x=y-2$ γίνεται $y^3 - 12y = 1584$ που δίνει τη λύση $y=12$ και έτσι το x γίνεται 10

Formula tres.

L

Si A cubus $\rightarrow$ B $\frac{3}{2}$ in A quad., α quetur Z solido. A $\rightarrow$ B esto E. E cubus $\rightarrow$ B quad. $\frac{3}{2}$ in E, α quabitur Z solido $\rightarrow$ B cubo 2.

1 C $\rightarrow$ 6 Q, α quatur 1600. est 1 N 10. 1 C $\rightarrow$ 12 N, α quatur 1584. est 1 N 12.

Ad Arithmetica non incongrue σημείον aliquod superimponitur notis alteratæ radicis, ad differentiam notarum ejus, de qua primum quærebatur.

7.2 Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ VIETE

7.2.1 Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΔΥΟ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ

Ο Viète στο 4^ο κεφάλαιο στο 'Περί κατανόησης των εξισώσεων' και στο Θεώρημα II λεγόμενο Αποφατικής ασχολείται με την κυβική εξίσωση $x^3 - 3b^2x = b^2d$ που τη γράφει

$$A^3 - B^2A = B^2D$$

σύμφωνα με το γνωστό συμβολισμό του 'είδους' του.

T H E O R E M A II.
Α Π Ο Φ Α Τ Ι Κ Η Σ .

Si A cubus — B quadr. in A, æquetur B quad. in D : sunt quatuor continue proportionales quarum prima minor inter extremas est B, differentia secundæ & quartæ D, & fit A secunda.

Ex Zetetico:

Data prima minore inter extremas, & differentia secunda & quarta in serie quatuor continue proportionalium, invenire secundam.

Sit data B prima minor inter extremas, differentia vero secundæ & quartæ D. Oportet invenire continue proportionales. Sit secunda A quarta igitur erit A + D, solido autem sub quadrato primæ & quarta, æquatur cubus è secunda; quare A cubus æquabitur B quad. in A, + B quad. in D, & per antithesin, A cubus — B quad. in A, æquabitur B quad. in D, ut est ordinatum.

Si 1 C. — 64 N æquetur 960. sunt quatuor continue proportionales, quarum prima est $\sqrt[4]{64}$. id est 8. differentia vero secunda & quarta $\frac{960}{8^3}$ id est 15. & fit 1 N. secunda ex serie proportionalium 8, 12, 18, 27.

Η εξίσωση αυτή συνεχίζει, προέρχεται από την ύπαρξη τεσσάρων συνεχών και αναλόγων αριθμών, ο πρώτος από τους οποίους είναι ο B, η διαφορά του τέταρτου και του δεύτερου είναι D, και τότε ο ζητούμενος αριθμός A είναι ο δεύτερος. Έτσι αφού είναι

$$B:A=A:Y=Y:(A+D)$$

είναι και $(B:A)^2 = (A:Y) \cdot [Y:(A+D)]$ οπότε

$$(B:A)^2 = A:(A+D)$$

άρα και $A^3 = B^2(A+D)$ δηλαδή $A^3 - B^2A = B^2D$

Στο παράδειγμα του θεωρεί την εξίσωση $x^3-64x=960$ και παρατηρεί ότι υπάρχουν τέσσερις συνεχείς ανάλογοι αριθμοί με πρώτο τον $B=8$ και τη διαφορά τέταρτου δευτέρου να είναι $D=960:64=15$, έτσι ο Viète συμπεραίνει, χωρίς όμως να δίνει επαρκείς αιτιολογήσεις, ότι οι ανάλογοι αριθμοί είναι οι

$$8, 12, 18, 27$$

και η λύση είναι

$$A=12$$

Στο IV κεφάλαιο επίσης του ίδιου έργου ο Viète ασχολείται με τις κυβικές εξισώσεις που προκύπτουν από γραμμικές μετατροπές σύμφωνα με τη Ζητητική

Θεώρημα 1: Αν

$$A^3+3B^pA=D^s$$

B^p είναι το γινόμενο δύο αριθμών και D^s είναι η διαφορά των κύβων τους, τότε A είναι η διαφορά των αριθμών αυτών. Το συμπέρασμα αυτό είναι άμεσο από τη Ζητητική και την Πρόταση XV του δεύτερου βιβλίου (αναφέρθηκε παραπάνω). Έτσι αν:

$$x^3+6x=7$$

$6/3=2$ είναι το γινόμενο των ριζών με 7 να είναι η διαφορά των κύβων τους, και x είναι η διαφορά των ριζών. Κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$(r^3-s^3)^2+4(rs)^3=(r^3+s^3)^2, \quad (1)$$

προκύπτει ότι το τετράγωνο του αθροίσματος των κύβων είναι $7^2+4\cdot 2^3=81$ και έτσι το άθροισμα κύβων των ριζών είναι 9, οπότε ο κύβος της μεγαλύτερης ρίζας είναι 8 και ο κύβος της μικρότερης ρίζας είναι 1, άρα οι ρίζες είναι το 2 και το 1. Έτσι το x είναι ίσο με τη διαφορά των ριζών δηλαδή $x=1$.

Ερμηνεύοντας με σύγχρονη ορολογία τα παραπάνω ο Viète κάνει χρήση της αλγεβρικής ταυτότητας

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$$

Έτσι γνωρίζοντας το γινόμενο και τη διαφορά των κύβων με χρήση της σχέσης (1) υπολογίζει το άθροισμα κύβων άρα τους κύβους των ριζών, έτσι στη συνέχεια υπολογίζει τις δύο ρίζες a, b και τέλος τη διαφορά τους που είναι $a-b$. Η λύση αυτή ομοιάζει με τη λύση του Cardano, με εξαίρεση τη γεωμετρική απαίτηση του τελευταίου.

Στο κεφάλαιο V και στο δεύτερο Θεώρημα επεξεργάζεται εξισώσεις όπως η παρακάτω και δείχνει τρόπους επίλυσης με χρήση συνεχών αναλόγων αριθμών, αν και στο κεφάλαιο IX της ίδιας πραγματείας μετασχηματίζει μια κυβική εξίσωση σε μια ισοδύναμη απαλλαγμένη από το δευτεροβάθμιο όρο.

$$\text{Αν} \quad A^3 + BA^2 = BD^2$$

Υπάρχουν τέσσερεις συνεχείς ανάλογοι αριθμοί ο πρώτος από τους οποίους, ο μικρότερος από τους άκρους είναι B , και η διαφορά μεταξύ του δεύτερου και του τέταρτου είναι D , τότε A είναι η διαφορά μεταξύ του πρώτου και του τρίτου.

Ας είναι A αυτή η διαφορά (μεταξύ του πρώτου και του τρίτου) τότε ο τρίτος είναι $A+B$. Έτσι αφού η διαφορά του πρώτου από τον τρίτο προς τη διαφορά του δεύτερου από τον τέταρτο είναι όπως ο πρώτος προς τον δεύτερο και εφόσον ισχύει:

$$A:D=B:(BD/A)$$

ο δεύτερος αριθμός θα είναι BD/A .

Αλλά το γινόμενο του πρώτου με τον τρίτο είναι ίσο με το τετράγωνο του δεύτερου

$$BA + B^2 = B^2 D^2 / A^2$$

Έπειτα πολλαπλασιάζοντας με A^2 και διαιρώντας με B προκύπτει:

$$A^3 + BA^2 = BD^2$$

που είναι και η ζητούμενη.

Ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Αν

$$x^3 + 8x^2 = 1800,$$

τότε υπάρχουν τέσσερεις συνεχείς ανάλογοι αριθμοί ο μικρότερος από τους άκρους είναι ο 8 και η διαφορά μεταξύ του δεύτερου και του τέταρτου είναι $\sqrt{1800/8} = 15$ έτσι $x=10$, δηλαδή όσο η διαφορά του πρώτου και του τρίτου στη σειρά των αναλόγων 8, 12, 18, 27.

Στο 6^ο κεφάλαιο της πρώτης πραγματείας και στο θεώρημα δίνει έναν τρόπο επίλυσης της κυβικής αναγώγιμης εξίσωσης αλλά και της μη αναγώγιμης χρησιμοποιώντας τα τριγωνομετρικά μέσα που έχει αποδείξει.

7.2.2 Η ΚΥΒΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ‘DUPLICATE HYPOSTASIS’ ΜΕ ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΠΟ ΚΥΒΙΚΗ ΣΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ

Στο έβδομο κεφάλαιο της ‘πραγματείας για τη βελτίωση των εξισώσεων’ ο Viète εφαρμόζει μια μέθοδο για την αναγωγή της κυβικής εξίσωσης σε δευτεροβάθμια. Τη μέθοδο αυτή την ονομάζει μέθοδο της ‘duplicate hypostasis’ με διπλή αντικατάσταση.

Æ Q V A T I O N V M.

149

C A P V T VII.

Quemadmodum equationes cubicae deprimuntur ad quadraticas à radice solida.

S E V

De Duplicata Hypothesi.

Έτσι στο πρόβλημα II ζητά να μειωθεί ο βαθμός της κυβικής εξίσωσης με αρνητικό γραμμικό όρο

$$A^3 - 3B^p A = 2Z^s$$

σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Η κυβική ικανοποιεί την απαίτηση ότι ο κύβος του ενός τρίτου του συντελεστή του γραμμικού όρου να είναι μικρότερος από το ένα τέταρτο του τετραγώνου του σταθερού όρου.

P R O B L E M A II.

CUbum adfectum sub latere negatæ, ad quadratum sub radice solida negatum de plano, reducere.

Oportet autem in æquatione proposita, cubum è triente coefficientis adfectionis, cedere solidi comparationis sub-quadruplo quadrato.

Ο Viète στηριζόμενος στην πρόταση XX της Ζητητικής που με σύγχρονους όρους είναι η σχέση

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3$$

Παρατηρεί ότι ο άγνωστος A θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα δύο αριθμών που θα έχουν γινόμενο B , έτσι αν ο ένας είναι E ο άλλος θα είναι $A-E$ και θα ισχύει

$$(A-E)E=B^p$$

Άρα $(B^p+E^2)/E=A$ οπότε αντικαθιστώντας στην κυβική προκύπτει

$$(B^{ppp}+3E^2B^{pp}+3E^4B^p+E^6)/E^3 [=] (-3B^{pp}-3B^pE^2)/E=2Z^s$$

Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με E^3 και τακτοποιώντας τους σύμφωνα με την τέχνη,

$$2Z^sE^3-(E^3)^2=(B^p)^3$$

που είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς E^3 . Ο Viète σημειώνει ότι είναι προφανές ότι η ισχύουσα συνθήκη $(Z^s)^2 > (B^p)^3$ είναι απαραίτητος όρος για να έχει δύο λύσεις το παραπάνω πρόβλημα

Apparet autem ex æquationis illius ad quam reductio facta est proprietate, Z solidi quadratum præstare debere B plani-cubo: quo pertinet appositæ lex Problemæ.

Μια και οι δύο λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι

$$E^3 = Z^s \pm \sqrt{Z^{ss} - B^{ppp}} \text{ δηλαδή } E^3 = Z \pm \sqrt{Z^2 - B^3}$$

η λύση της κυβικής εξίσωσης $A^3-3B^pA=2Z^s$ θα είναι το άθροισμα των ριζών των προηγούμενων παραστάσεων και διαφοροποιείται ελαφρώς από την περιγραφή του Cardano

$$\text{Έτσι είναι} \quad A = \sqrt[3]{Z^s + \sqrt{Z^{ss} - B^{ppp}}} + \sqrt[3]{Z^s - \sqrt{Z^{ss} - B^{ppp}}}$$

που γράφεται με τον παρακάτω τρόπο

Itaque si A cubus—B plano; in A, æquetur Z solido z:

$$\sqrt[3]{C.Z \text{ solidi}} + \sqrt[3]{C.Z \text{ solidi} - \sqrt{Z \text{ solidi} - B \text{ plano-plano-plano}}} = \sqrt[3]{C.Z \text{ solidi} - \sqrt{Z \text{ solidi} - B \text{ plano-plano-plano}}} \text{ Est A}$$

de qua quaeritur.

TERTIUM THEOREMA.

Si A cubus — B quad. 3 in A, æquetur B quad. in D, sit autem B major D semisse: B quad. 3 in E, — E cubo æquabitur B quad. in D.

Et sunt duo triangula rectangula æqualis B hypotenusæ, ita ut angulus acutus subtensus à perpendicularo primi, sit triplus ad angulum acutum subtensum à perpendicularo secundi; basis vero dupla primi, est D, & sit A dupla basis secundi. E vero basis simpla secundi, contracta, protractave longitudine ejus quæ potest quadrato triplum perpendiculari ejusdem.

1 C — 300 N. æquetur 432. vel etiam 300 N. — 1 C æquetur 432. sunt duo triangula rectangula, quorum hypotenusa communis est 10: ita ut angulus acutus primi, à perpendicularo videlicet subtensus, sit triplus ad acutum secundi, à suo quoque perpendicularo subtensum; basis autem primi dupla, est $\frac{4}{1}\frac{3}{00}$. & 1 N in æqualitate directe negata est basis dupla secundi: in inverse vero negata, est basis simpla secundi, plus minusve ea quæ potest quadrato triplum perpendicularum secundi.

Constituta hypotenusa communis 10. basi secundi trianguli 9. sit perpendicularum ejusdem secundi ✓ 19.

Primi vero hypotenusa stante 10. sit basis $2\frac{16}{100}$. itaque quum in ea hypotensi dicitur 1 C — 300 N. æuari 432. fiet 1 N 18. vel quum dicitur 300 N. — 1 C æuari 432. fiet 1 N. 9 + $\sqrt{57}$. vel 9 — $\sqrt{57}$.

Atque hæc ad assequendum ex Zeteticis constitutiones ad æquatarum quæ affectæ sunt potestatum, exempla nunc sufficiunt. Et si enim de simpliciter affectis Theoremata tantum proposita sunt, tamen quemadmodum ad multipliciter affectas possunt trahi, vix ignorabitur, quando præsertim detegatur earum plasmā, de quo jam succedit dicendi locus. Ipsorum enim Zeteticorum à quibus antedictæ constitutiones depromptæ sunt, jam patuit processus sufficienter in expositis eclogis, hoc postremo Theoremate excepto, quod par est rejici in peculiarem Zeteticorum ad angularēs sectiones pertinentium silvulam.

Στο κεφάλαιο αυτό, δηλαδή το 6^ο της πρώτης πραγματείας για την αναγνώριση των εξισώσεων ο Viète δίνει έναν κοινό αλλά και εναλλακτικό τρόπο επίλυσης της εξίσωσης $A^3 - 3B^2A = B^2D$ ή $x^3 - 3b^2x = b^2d$, με τη συνθήκη $d < 2b$. Ο εναλλακτικός αυτός τρόπος βασίζεται στις τριγωνομετρικές ταυτότητες τριπλάσιας γωνίας και χρησιμοποιείται επειδή

‘η συγκρότηση των εξισώσεων αυτού του είδους είναι κομψότερη και προκύπτει σαφέστερα μέσω της ανάλυσης της διαίρεσης γωνιών’

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η συγκεκριμένη εξίσωση με τη συνθήκη που τη συνοδεύει είναι ταυτόσημη με την κυβική εξίσωση $x^3 = px + q$ με $D < 0$ όπου $D = (q/2)^2 - (p/3)^3$, αυτή που ο Cardano πρώτος είχε ονομάσει ‘μη αναγώγιμη’ και οδήγησε τον Bombelli να χρησιμοποιήσει την μηχανική κατασκευή που αποδίδεται στον Πλάτωνα για τη δική του ‘demonstratione’, που νοσηματοδοτούσε την εξίσωση αυτή και άνοιξε το δρόμο για την επινόηση εντέλει των μιγαδικών αριθμών. Έτσι τώρα είναι $D = [(b^2d)/2]^2 - (3b^2/3)^3$ οπότε $d^2 < 4b^2$ ή $d < 2b$ αφού όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί.

Ο πρώτος τρόπος που εισάγεται από τον Viète στηρίζεται στην πιο περίπλοκη ταυτότητα

$$(r+s)^3-(r^2+s^2+rs)(r+s)=rs(r+s),$$

έτσι αν είναι $3b=r^2+s^2+rs$ και $d=rs(r+s)$, τότε είναι $x=r+s$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί και είναι το $x^3-21x=20$, πρέπει να βρει τα r,s ώστε να ισχύει $21=r^2+s^2+rs$ και $20=rs(r+s)$. Βρίσκει τις τιμές τους, που είναι 1 και 4 και έτσι η λύση είναι το $x=r+s=5$.

Αλλά περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο δεύτερος, ο εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης του. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το συνημίτονο τριπλάσιας γωνίας δηλαδή:

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

που γράφεται:

$$\cos^3 a - 3/4(\cos a) = 1/4(\cos 3a) \quad (1)$$

κατόπιν θέτει $x=r\cos a$ στην εξίσωση $x^3-3b^2x=b^2d$ οπότε γράφεται $r^3\cos^3 a-3b^2 r\cos a=b^2d$ ή ακόμα

$$\cos^3 a - (3b^2/r^2)\cos a = (b^2d)/r^3 \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει $3b^2/r^2=3/4$ δηλαδή $r=2b$ και

$1/4(\cos 3a)=(b^2d)/r^3$ άρα αφού είναι $r=2b$ είναι και $\cos 3a=d/2b < 1$ αφού $d < 2b$.

Αυτό σημαίνει ότι αν για κάποιον αριθμό a ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις τότε ο αριθμός

$x=r\cos a$ είναι λύση της κυβικής εξίσωσης.

Ως παράδειγμα επιλέγει να λύσει την κυβική εξίσωση $x^3-300x=432$ όπου $b=10$ και $d=432/100$ και έτσι αφού $\cos 3a=d/2b=432/2000$ οπότε **αφού ανατρέξει σε τριγωνομετρικούς πίνακες** βρίσκει $\cos a=0.9$ άρα

$$x=r\cos a=2b\cos a=20 \cdot 0,9=18$$

7.2.3 Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΣΤΟΝ CARDANO ΚΑΙ ΣΤΟΝ VIETE

Ο Cardano στο κεφάλαιο XXXIX και στον δεύτερο κανόνα αποδίδει στον Ferrari τη μέθοδο επίλυσης μιας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης, και συνοψίζει σε 20 τις περιπτώσεις που εμφανίζονται ανάλογα με τη μορφή της εξίσωσης.

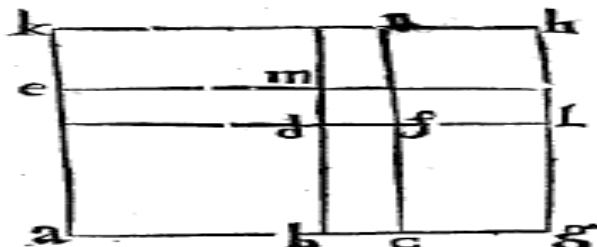
REGULA II.

1. Alia est regula nobilior præcedente, & est Ludouici de Ferrariis, qui eam me rogante inuenit, & per eam habemus omnes

Ακολουθεί η γεωμετρική επίδειξη της ταυτότητας $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2cb$ που χρησιμοποιείται σαν λήμμα για την προσέγγιση της λύσης της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης

DEMONSTRATIO.

Sit quadratum a f, diuisum in duo quadrata a d & d f, & duo supplementa d e & d e, & velim addere gnomonem k f g circuncirca, vt remaneat quadratum totum a h, dico quòd talis gnomon constabit ex duplo g c additæ lineæ, in e a, cum quadrato g c, nam f g constat ex g c in c f, ex definitione data in initio secundi Elementorum, & c f est æqualis e a, ex definitione quadrati, & quia per 44. primi Elemento-



rum, k f est æqualis f g, igitur duæ superficies g f & f x constant ex g c, in duplum c a, & quadratum g c est f h, per coroll. 4. secundi Elementorum, igitur patet propositum, si igitur a d sit 1. quad. quadratum, & c d ac d e, 3. quadrata, & d f 9. erunt b a 1. quadratum, & b c 3, necessario. Cum igitur voluerimus addere quadrata aliqua, ad d e & d e, & fuerint c l & k m erit ad complendum quadratum totum necessaria superficies l n m, quæ vt demonstratum est, constat ex quadrato g c numeri quadratorum dimidiati, nam c i est superficies ex g c in a b, vt ostensum est, & a b est 1. quadratum, quia ponimus, a d 1. quadratum, f l verò & m n, sunt ex g c in c b, ex 42. primi Elementorum, quare superficies l n m, & est numerus addendus, sit ex g c in duplum c b, id est in numerum quadratorum, qui fuit 6. & g c in seipsam, id est numero quadratorum addito, & hæc demonstratio nostra est.

Hoc peractò, semper reduces partem 4 quad. quadrati ad 3. id est addendo tantum vtrique parti, vt 1. quad. quadratum cum quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile est, cum posueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies,

Θα παρουσιάσουμε την αντιμετώπιση της εξίσωσης τετάρτου βαθμού που εμφανίζεται στο πρόβλημα X11 του ίδιου κεφαλαίου και είναι ενδεικτικό της μεθοδολογίας που ακολουθείται

Q V A S T I O XII.

Si quis dicat, 1. quad. quadratum $\bar{p}$. 3. æquatur 12. rebus, addes 2. positiones quadratorum, & 1. quadratum numeri quadratorum, quare sic habebit $\bar{x}$. quadratam si-

	1. quad. quad. $\bar{p}$. 3. 12. pos.
	2. pos. quad. $\bar{p}$. 1. quad. m. 3.
1. qd. qd. $\bar{p}$. 2. pos. $\bar{p}$. 1. qd. 2. pos. 12. 1.	quad. m. 3.
1. qd. qd. $\bar{p}$. 6. quad. $\bar{p}$. 9. 6. quad. $\bar{p}$. 12.	pos. $\bar{p}$. 6.

ne numero ut clarum est, igitur addemus ex alia parte pro numero quadratorum 2. positiones, & pro numero 1. quad. m. 3. habebis partes ut vides, quare multiplicatis partibus, habes 2. cubos æquales 6. rebus $\bar{p}$. 36. & 1. cubum, æqualem 3. rebus $\bar{p}$. 18. & res valet 3. igitur partes sunt ut vides, & erit 1. quadratum $\bar{p}$. 3. $\bar{x}$. primæ partis, æqualis rebus $\bar{x}$. 6. $\bar{p}$. numero $\bar{x}$. 6. & res quaerita erit, $\bar{x}$. v. $\bar{x}$. 6. m. $1\frac{1}{2}\bar{p}$, $\bar{x}$. $1\frac{1}{2}$.

Η εξίσωση

$$x^4+3=12x \text{ γίνεται } x^4+2bx^2+b^2=2bx^2+12x+b^2-3$$

και αφού το πρώτο μέλος είναι τετράγωνο για να είναι και το δεύτερο μέλος τετράγωνο θα πρέπει να είναι

$$12^2-4\cdot 2b(b^2-3)=0 \text{ ή } b^3-3b-18=0$$

Οπότε θέλει να εντοπίσει μια ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

Η τελευταία εξίσωση που λέγεται επιλύουσα (resolvent) της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης έχει **μια ρίζα $b=3$** και έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$x^4+6x^2+9=6x^2+12x+6 \text{ ή } (x^2+3)^2=6(x+1)^2 \text{ από όπου προκύπτει}$$

$$x^2 + 3 = \pm\sqrt{6}(x+1) \text{ οπότε είναι}$$

$$x^2 - \sqrt{6}x + (3 - \sqrt{6}) = 0 \quad x^2 + \sqrt{6}x + (3 + \sqrt{6}) = 0$$

Η δεύτερη εξίσωση έχει δύο μιγαδικές λύσεις που φυσικά ο Cardano τις αγνοεί ενώ η πρώτη έχει δύο θετικές λύσεις από τις οποίες επιλέγει την εξής μία

$$\sqrt{6 - \sqrt{1\frac{1}{2}}} + \sqrt{1\frac{1}{2}}$$

Ο Cardano δεν αναλώνεται να εξετάσει και να βρει τις άλλες ρίζες που ενδεχομένως υπάρχουν, μάλιστα σε ένα προγενέστερο σημείο του βιβλίου παροτρύνει τον αναγνώστη να το κάνει μόνος του, αν αυτό τον ευχαριστεί.

ρίζες πραγματικές και φανταστικές μιγαδικούς, *et alias duas æstimationes, sed si te delectat operatio, per te ipsum potes illud inquirere.*

Ο Viète αντιμετωπίζει το ζήτημα της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης στο κεφάλαιο VI της ‘Πραγματείας για τη βελτίωση των εξισώσεων’ με τη μέθοδο του που την ονομάζει ‘*Climactic paraplerosis*’ που συνίσταται στη μείωση μιας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης σε κυβική. Ο όρος οφείλεται στο γεγονός ότι πρέπει να προστεθεί ένα συμπλήρωμα όπως θα διαφανεί παρακάτω. Η μέθοδος δεν έχει ουσιαστικές διαφορές από τη μέθοδο του Cardano.

C A P V T VI.
Quemadmodum equationes quadrato-quadraticæ deprimuntur ad quadraticas, per medium cubicarum à radice plana.
Scu de Climactica Paraplerosi.

Ο Viète θεωρεί την εξίσωση

$$A^4 + B^s A = Z^{pp}$$

Αφού μεταφέρει τον πρωτοβάθμιο και το σταθερό όρο στο άλλο μέλος της εξίσωσης και κατόπιν προσθέτει και στα δύο μέλη τους όρους που απαιτούνται ώστε το πρώτο μέλος να γίνει τέλειο τετράγωνο και αυτοί είναι $A^2 E^2 + 1/4 E^4$ (τις ενέργειες αυτές τις έχει δεχτεί ως επιτρεπτές στην ‘*Isagoge*’ και θα αναφερθούν στο αντίστοιχο κεφάλαιο διεξοδικά). Έτσι έχει

$$A^4 + A^2 E^2 + 1/4 E^4 = Z^{pp} - B^s A + A^2 E^2 + 1/4 E^4 \quad (1)$$

Μιας και το πρώτο μέλος είναι το τετράγωνο του $A^2 + 1/2 E^2$ το επόμενο κρίσιμο βήμα είναι να γράψει το δεύτερο μέλος επίσης ως τέλειο τετράγωνο. Προσεγγίζοντας το θέμα με τη σημερινή οπτική θα απαιτούσαμε η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας, ως προς A , παράστασης του δεύτερου μέλους να είναι ίση με το μηδέν. Ο Viète χρησιμοποιεί μια άλλη οδό, προερχόμενη από μια Διοφαντική ιδέα της επιλογής του κατάλληλου όρου ώστε να εξαφανιστεί ο άγνωστος A καθώς και οι δυνάμεις του

Sit igitur abs $\frac{B^2}{E^2}$ — E in A. sic enim in comparatione evanescent adfectiones sub A vel gradibus, & incidetur in æqualitatem de E, quo tendendum est.

Έτσι θεωρεί το τετράγωνο του όρου $B/2E - EA$ που είναι $B^2/4E^2 + E^2 A^2 - BA$ και το εξισώνει με το δεύτερο μέλος της σχέσης (1) έτσι προκύπτει

$$B^2/4E^2 + E^2 A^2 - B^s A = Z^{pp} - B^s A + A^2 E^2 + 1/4 E^4$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$E^6 + 4Z^{pp}E^2 = B^2 \text{ δηλαδή } (E^2)^3 + 4Z^{pp}E^2 = B^2$$

που είναι κυβική ως προς E^2 και ο Viète ξέρει να τη λύνει. Έτσι η λύση μιας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης έχει αναχθεί στη λύση μιας κυβικής.

PROBLEMA I.

Æquationem quadrato-quadrati adfecti sub latere, per medium cubi-
cæ radicem habentis planam, ad quadraticam deprimere.

Proponatur $A \text{ quad.} \cdot \text{quad.} + B \text{ solido in } A$, æquari $Z \text{ plano-plano}$. Oportet facere quod imperatum est. Ex iis igitur quæ proponuntur, $A \text{ quad.} \cdot \text{quad.}$, æquabitur $Z \text{ plano-plano} - B \text{ solido in } A$. Vtrique æqualitatis parti addatur $A \text{ quad. in } E \text{ quad.}$, $+ E \text{ quad. quad.}$. Igitur $A \text{ quad.} \cdot \text{quad.} + A \text{ quad. in } E \text{ quad.} + E \text{ quad.} \cdot \text{quad.}$, æquabitur $Z \text{ plano-plano} - B \text{ solido in } A + A \text{ quad. in } E \text{ quad.} + E \text{ quad.} \cdot \text{quad.}$. Omnia dividantur subquadratrice, illic orietur $A \text{ quad.} + E \text{ quad.}$.

Idcirco enim de industria $A \text{ quad.} \cdot \text{quadrato}$, adjecta fuerunt in supplementum duo illa plano-plana $A \text{ quad. in } E \text{ quad.}$, & $E \text{ quad.} \cdot \text{quadrato}$, quæ alioqui deficiebant à canonica genesi quadrati, instituta à duabus radicibus planis: quod si altera æqualitatis pars posset quoque dividi subquadratrice, quod oriretur foret æquale $A \text{ quad.} + E \text{ quad.}$.

Effingendum igitur quadratum à radice plana, cui altera illa æqualitatis pars commode comparetur, ut ei tandem radici planæ adæquetur $A \text{ quad.} + E \text{ quad.}$.

Sit igitur abs $\frac{B \text{ solido}}{E^2} - E \text{ in } A$. sic enim in comparatione evanescent adfectiones sub A vel gradibus, & incideret in æqualitatem de E , quo tendendum est.

Effectum igitur quad. erit $\frac{B \text{ solido} \cdot \text{solidum}}{E \text{ quad.} \cdot 4} + E \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ solido in } A$, æquandum $Z \text{ plano-plano} - B \text{ solido in } A + E \text{ quad. in } A \text{ quad.} + E \text{ quad.} \cdot \text{quad.}$.

Et deletis utrinque adfectionibus $E \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ solido in } A$. Omnibusque in $E \text{ quad.} \cdot 4$ ductis, $E \text{ cubo-cubus} + Z \text{ plano-plano}$ in $E \text{ quad.}$, æquabitur $B \text{ solido-solido}$. Innotescat autem $E \text{ quad.}$ esse $D \text{ quad.}$. Ergo $\frac{B \text{ solido}}{D^2} - D \text{ in } A$, æquabitur $A \text{ quad.} + D \text{ quad.}$, & ordinata secundum artem æqualitate $A \text{ quad.} + D \text{ in } A$, æquabitur $\frac{B \text{ solido}}{D^2} - D \text{ quad.}$.

Ο Viète στο 'Συμπλήρωμα Γεωμετρίας' συνοψίζοντας προηγούμενα συμπεράσματα δηλώνει ότι:

«Είναι γενικά αληθές ότι προβλήματα που αλλιώς είναι άλυτα και αφορούν κυβικές και τεταρτοβάθμιες εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν είτε με την εύρεση δύο ενδιαμέσων συνεχών αναλόγων αριθμών μεταξύ δύο ακραίων είτε με τριχοτόμηση γωνίας.»

PROPOSITIO XXV.

Est Confectarium generale.

Generaliter id verum est, opere faltem alterutro, vel constructionis duarum mediarum continue proportionalium inter datas, vel sectionis anguli in tres partes æquales, omnia Problemata, alioqui non solubilia, explicari, in quibus cubi solidis, vel quadrato-quadrata plano-planis sine adfectione vel cum adfectione adæquantur.

Συγκεκριμένα εξηγεί αμέσως πιο κάτω ότι όπως αποδείχθηκε στην 'πραγματεία για την κατανόηση των εξισώσεων' εξισώσεις τετάρτου βαθμού μπορούν να μειωθούν σε κυβικές εξισώσεις

Κυβικές εξισώσεις με δευτεροβάθμιο όρο μπορούν να μειωθούν σε κυβικές με γραμμικό όρο

Κυβικές εξισώσεις με γραμμικό όρο μπορούν να μειωθούν σε απλές κυβικές

Κυβικές εξισώσεις με αρνητικό γραμμικό όρο μπορούν να μειωθούν σε απλές κυβικές

GEOMETRIÆ.

257

Enimvero ostensum est in tractatu de æquationum recognitione, æquationes quadrato-quadratorum ad æquationes cuborum reduci.

Cubos vero adfectos sub quadrato, ad cubos adfectos sub latere.

Rursus, adfectos cubos sub latere reduci ad cubos puros.

Adfectos vero cubos sub latere negare ita demum reduci ad puros, cum solidum, à

Ο Viète προσθέτει ότι στις απλές κυβικές εξισώσεις $A^3=B^2D$, οι B,D είναι οι άκροι σε μια σειρά τεσσάρων συνεχών και αναλόγων αριθμών και τότε ο άγνωστος A είναι ο δεύτερος σε αυτή τη σειρά.

Το ζήτημα της εύρεσης δύο συνεχών και αναλόγων ενδιάμεσων αντιμετωπίζεται στην πρόταση V του ‘Συμπληρώματος’ όπου εκεί κατασκευάζει τους δύο αυτούς ενδιάμεσους με τη μέθοδο της νεύσης, έτσι μπορούμε να παραφράσουμε την πρόταση XXV λέγοντας ότι κάθε τεταρτοβάθμια και κάθε κυβική εξίσωση οδηγεί είτε σε νεύση είτε σε τριχοτόμηση γωνίας.

P R O P O S I T I O V.

Datis duabus lineis rectis, invenire inter easdem duas medias continue proportionales.

Στην τελευταία παράγραφο του ‘Συμπληρώματος’ ο Viète επαναλαμβάνει ως επιμύθιο το συμπέρασμα της πρότασης σημειώνοντας στη σελίδα 257⁸³, ότι

‘αυτό είναι πολύ αξιοσημείωτο’

Atque adeo duobus Problematis æquationes cuborum omnes, & quadrato-quadratorum cujuscumque adfectionis alioqui non solubiles explicabuntur, una inventione duarum mediarum inter datas, altera anguli dati in tres æquales partes sectione. Quod animadvertisse fuit operæ pretium.

⁸³ Vietae Francisci, Opera Mathematica, Francisci Van Schooten, Leyden 1646

7.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ‘ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ’ ΚΑΙ ΟΙ ΔΗΜΟΦΙΛΕΙΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΡΙΖΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στο XVI κεφάλαιο της ‘αναγνώρισης των εξισώσεων’ της πρώτης πραγματείας του για τις εξισώσεις ο Viète χρησιμοποιεί τη μέθοδο της ‘σύγκρισης’ (syncrissiS) για να αναπτύξει το πλέον ίσως δημοφιλές συμπέρασμα που πιστώνεται σε αυτόν και είναι η σχέση των ριζών και των συντελεστών μιας εξίσωσης.

Με τη ‘syncrissi’ ο Viète συγκρίνει δύο ‘συσχετισμένες’ εξισώσεις με σκοπό να ανακαλύψει τη δομή τους.

C A P V T XVI.

De Syncrissi.

SyncrissiS est duarum æquationum correlatarum mutua inter se ad deprehendendum earum constitutionem collatio.

Ορίζει τις εξισώσεις να είναι συσχετισμένες όταν αυτές είναι όμοιες και επιπροσθέτως έχουν τις ίδια δεδομένα μεγέθη και για τους συντελεστές και για τους ομοιογενείς όρους της σύγκρισης. Ο Viète δεν ασχολείται με αρνητικές ή μιγαδικές ρίζες αλλά γνωρίζει ότι μια δευτεροβάθμια εξίσωση $bX - X^2 = C$ μπορεί να έχει δύο θετικές ρίζες.

In specic.

Proponatur B in A — A quad., æquari Z plano. Et rursus B in E — E quadr., æquari Z plano.

Oportet ex syncrissi earum æquationum constitutionem dignoscere: quoniam igitur quæ uni æquantur æqualia sunt inter se, manifestum est B in A — A quad., æquari B in E — E quad. Et per antithesin, statuendo si placet A maiorem quam E, quod quidem hic liberum est, propter suppositam radicem *ἀμφιβολίαν*. A quad. — E q., æquabitur B in A — B in E, & omnibus per A — E divis. $\frac{A \text{ quad.} - E \text{ quad.}}{A - E}$ id est **A + E, æquabitur B.**

Est igitur B summa duorum de quibus queritur laterum, oriunda ex applicatione differentie quadratorum, ad differentiam laterum: ut est generaliter constitutum.

Porro quum B in A — A quad., æquetur Z plano: si in locum B, subrogetur iam agnitus ipsius valor $\frac{A \text{ quad.} - E \text{ quad.}}{A - E}$ seu **A + E, $\frac{A \text{ quad. in E} - E \text{ quad. in A}}{A - E}$ id est E in A, æquabitur Z plano.**

Est igitur Z planum, id quod fit sub duobus de quibus queritur lateribus, ortum ex differentie factorum reciproce à quadrato unius in radicem alterius applicatione, ad differentiam laterum: ut est quoque generaliter constitutum.

Με αλγεβρικό συμβολισμό

Έτσι εφαρμόζοντας τη σύγκριση των εξισώσεων:

$$BA-A^2=Z^p \quad \text{και} \quad BE-E^2=Z^p$$

θεωρώντας τις ρίζες τους A, E αντίστοιχα. Κατόπιν μιας και «πράγματα που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι ίσα και μεταξύ τους είναι φανερό ότι»

$$BA-A^2=BE-E^2$$

από όπου με μεταφορά προκύπτει

$$A^2-E^2=BA-BE$$

Υποθέτοντας, αν θέλετε, ότι το A είναι μεγαλύτερο από το E που είναι επιτρεπτό λόγω της ασάφειας των ριζών, και διαιρώντας με το $A-E$ προκύπτει

$$A^2-E^2/A-E=A+E=B$$

Οπότε το άθροισμα των ριζών που ζητάμε είναι ίσο με B και προκύπτει από τη διαίρεση της διαφοράς των τετραγώνων τους διαιρούμενη με τη διαφορά των ριζών.

Έπειτα αντικαθιστώντας στην εξίσωση $BA-A^2=Z^p$ το B που είναι τώρα γνωστό προκύπτει

$$(A^2E-E^2A)/A-E=E \cdot A=Z^p$$

Έτσι Z^p είναι το γινόμενο των ριζών που ζητάμε όπως προκύπτει διαιρώντας τη διαφορά των γινομένων του τετραγώνου της μιας ρίζας επί την άλλη, με τη διαφορά των ριζών.

Για την κυβική εξίσωση όμως τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα. Θα εφαρμόσει έτσι τη μέθοδο του θεωρώντας ότι η κυβική εξίσωση έχει δύο διαφορετικές θετικές ρίζες.

Aliud.

Proponatur B planum in A — A cubo, æquari Z solido, & rursus B planum in E — E cubo, æquari Z solido.

Oportet ex syncrifi earum æquationum constitutionem dignoscere: quoniam igitur quæ uni æquantur æqualia sunt inter se, manifestum est B planum in A — A cubo, æquari B plano in E — E cubo. Et per antithesin, statuendo si placet A majorem quam E, quod quidem hîc liberum est, propter suppositam radicem ἀμφιβολίαν, A cubus — E cubo, æquabitur B plano in A — B plano in E. Et omnibus per A — E divisus $\frac{A \text{ cubus} - E \text{ cubo}}{A - E}$ id est A quad. + E quad. + A in E, æquabitur B plano.

Est igitur B planum aggregatum quadratorum à duobus de quibus quæritur lateribus, adjunctum ei quod sub iis fit plano: & oritur ex applicatione differentię cuborum ad differentiam laterum: ut est generaliter constitutum.

Porro quum B planum in A — A cubo, æquetur Z solido: si in locum B plan. subrogetur, agnitus ejus valor, nempe $\frac{A \text{ cubus} - E \text{ cubo}}{A - E}$ seu A q. + E q. + A in E. $\frac{A \text{ cubus in E} - E \text{ cubus in A}}{A - E}$ id est, + A q. in E + E q. in A, æquabitur Z solido. Est igitur Z solidum quod fit ab aggregato laterum in planum sub lateribus, & oritur ex differentię ipsorum factorum, reciproce à cubo unius lateris in latus alterius, applicatione ad differentiam ipsorum laterum: ut est quoque constitutum.

Constitutio igitur propositarum æquationum tandem ex syncrifi agnita est: ut faciendum erat.

Placeat exhibere formulam æquationis ancipitis quadraticę, de radice F & G, hac minore, illa majore explicabilis. dixerò $F + G$ in A — A q, æquari F in G: & fieri A, F vel G.

Sit F 10. G 2. A 1 N. formula æquationis erit $12 N - 1 Q$, æquabitur 20. explicabilis de 10 vel 2. Placcat

Έτσι εφαρμόζοντας ξανά τη σύγκριση των εξισώσεων

$$B^p A - A^3 = Z^s \quad \text{και} \quad B^p E - E^3 = Z^s$$

θεωρώντας τις ρίζες τους A, E αντίστοιχα. Κατόπιν μιας και 'πράγματα που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι ίσα και μεταξύ τους είναι φανερό ότι':

$$B^p A - A^3 = B^p E - E^2$$

από όπου με μεταφορά προκύπτει

$$A^3 - E^3 = B^p A - B^p E$$

Υποθέτοντας πάλι ότι το A είναι μεγαλύτερο από το E που είναι επιτρεπτό λόγω της ασάφειας των ριζών, και διαιρώντας με το A-E προκύπτει

$$A^3 - E^3 / A - E = A^2 + E^2 + AE = B^p$$

Οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών που ζητάμε συν το γινόμενο τους είναι ίσο με B και προκύπτει από τη διαίρεση της διαφοράς των κύβων τους διαιρούμενη με τη διαφορά των ριζών.

Έπειτα αντικαθιστώντας στην εξίσωση $B^p A - A^2 = Z^s$ το B^p που είναι τώρα γνωστό προκύπτει

$$A^2 E + E^2 A = Z^p$$

Έτσι Z^p είναι τόσες φορές το άθροισμα των ριζών που ζητάμε όσες είναι το γινόμενο των ριζών αυτών όπως προκύπτει διαιρώντας τη διαφορά των γινομένων του κύβου της μιας ρίζας επί την άλλη, με τη διαφορά των ριζών.

Όταν όμως η κυβική εξίσωση έχει τρεις θετικές ρίζες, τότε θα πρέπει να περιέχει και δευτεροβάθμιο όρο, οπότε ο Viète μπορεί μέσω της γραμμικής αντικατάστασης να τη μετατρέψει σε μια εξίσωση χωρίς δευτεροβάθμιο όρο, που έχει το πολύ δύο θετικές ρίζες και έτσι κανονικά δεν μπορεί να βρει και την τρίτη ρίζα.

III.

Si A cubus — B ; in A quad. + D plano in A, æquetur Z solido. A — B
 esto E. E cubus — B quad. ; + D plano in E, æquabitur Z solido — B cubo 2
 — D plano in B.

1 C — 30 Q + 330 N, æquetur 1368. & est 1 N 12. 1 C + 30 N, æquabitur 68. & est 1 N 1.
 1 C — 12 Q + 28 N, æquetur 80. & est 1 N 10. 1 C — 20 N, æquatur 96. & est 1 N 6.
 1 C — 18 Q + 88 N, æquetur 80. & est 1 N 10. 20 N — 1 C, æquatur 16. & est 1 N 4.

Στο παραπάνω παράδειγμα του μάλιστα αναγάγει την εξίσωση

$$x^3 - 18x^2 + 88x = 80 \quad \text{στην εξίσωση} \quad 20y - y^3 = 16$$

και υπολογίζοντας μόνο την ακέραια λύση $y=4$ για την ανηγμένη βρίσκει μόνο μία λύση για την αρχική την $x=10$.

Στο XIV κεφάλαιο της δεύτερης πραγματείας ‘για τη βελτίωση των εξισώσεων’ στη σελίδα 166, παρουσιάζει χωρίς απόδειξη τα λαμπρά συμπεράσματα του για τη σχέση ριζών και συντελεστών των εξισώσεων μέχρι και πέμπτου βαθμού.

Ο Viète ονόμαζε τα θεωρήματα αυτά ‘*κομψά και όμορφα*’ θεωρώντας ότι αποτελούν την ‘*κορωνίδα*’ του έργου του.

Atque hæc elegans & perpulchræ speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

Στο θεώρημα I αν είναι

$$A(B+D)-A^2=BD$$

τότε το A ερμηνεύεται με οποιοδήποτε από τα B ή D .

Μεταφράζοντας το συμπέρασμα με σημερινή ορολογία συνάγεται ότι $(A-B)(A-D)=0$ από όπου προκύπτει $A=B$ ή $A=D$, δηλαδή ο Viète αναλύει την δευτεροβάθμια εξίσωση σε πρωτοβάθμιους παράγοντες. Έπειτα χρησιμοποιεί την ίδια διαδικασία μέχρι και την εξίσωση πέμπτου βαθμού.

Στο θεώρημα II σημειώνει ότι αν είναι η εξίσωση

$$A^3-A^2(B+D+G)+A(BD+BG+DG)=BGD$$

Το A ερμηνεύεται με οποιοδήποτε από τα B ή D ή G . Ακολουθεί σε κάθε περίπτωση ένα αριθμητικό παράδειγμα

Στα θεωρήματα III και IV αναφέρονται σε εξισώσεις βαθμού τέταρτου και πέμπτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Αν

$$A(BDG+BDH+BGH+DGH)-A^2(BD+BG+BH+D+DH+GH)+A^3(B+D+G+H)-A^4=BDGH$$

Τότε το A ερμηνεύεται με οποιοδήποτε από τα B, D, G ή H

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Av

$$A^5 - A^4(B+D+G+H+K) + A^3(BD+BG+BH+BK+DG+DH+DK+GH+GK+HK) - A^2(BDG+BDH+BDK+BGH+BGK+BHK+DGH+DGK+DHK+GHK) + A(BDGH+BDGK+BDHK+BGHK+DGHK) = BDGHK$$

Τότε το A ερμηνεύεται με οποιοδήποτε από τα B, D, G, H ή K

Έτσι για την εξίσωση

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$$

τότε το x είναι οποιοσδήποτε από τους 1, 2, 3, 4, ή 5

C A P V T XIV.

Collectio quarta.

T H E O R E M A I.

Si $\overline{B \rightarrow D}$ in A — A quad., $\propto$ quetur B in D : **A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D .**

$3N - 1Q$, *aquatur 2. fit 1N 1, vel 2.*

T H E O R E M A II.

Si A cubus $\overline{B \rightarrow D \rightarrow G}$ in A quad. $\rightarrow B$ in $D \rightarrow B$ in $G \rightarrow D$ in G in A , $\propto$ quetur B in D in G : **A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D , vel G .**

$1C - 6Q + 11N$, *aquatur 6. fit 1N 1, 2, vel 3.*

T H E O R E M A III.

Si B in D in $G \rightarrow B$ in D in $H \rightarrow B$ in G in $H \rightarrow D$ in G in H in A — B in D — B in G — B in H — D in G — D in H — G in H in A quad. $\rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$ in A cubum — A quad. quad., $\propto$ quetur B in D in G in H : **A explicabilis est de qualibet illarum quatuor B, D, G, H .**

$50N - 35Q + 10C - 1Q$, *aquatur 24. fit 1N 1, 2, 3, vel 4.*

T H E O R E M A IV.

Si A quadrato-cubus $\overline{B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow K}$ in A quad. quad. $\rightarrow B$ in $D \rightarrow B$ in $G \rightarrow B$ in $H \rightarrow B$ in $K \rightarrow D$ in $G \rightarrow D$ in $H \rightarrow D$ in $K \rightarrow G$ in $H \rightarrow G$ in $K \rightarrow H$ in K in A cubum — B in D in G — B in D in H — B in D in K — B in G in H — B in G in K — B in H in K — D in G in H — D in G in K — D in H in K — G in H in K in A quad. $\rightarrow B$ in D in G in $H \rightarrow B$ in D in G in $K \rightarrow B$ in D in H in $K \rightarrow B$ in G in H in $K \rightarrow D$ in G in H in K in A , $\propto$ quetur B in D in G in H in K : **A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K .**

$1QC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N$, *aquatur 120. fit 1N 1, 2, 3, 4, vel 5.*

Atque hæc elegans & perpulchræ speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

FINIS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΩΟ: ΚΑΤΟΠΙΝΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 17^{ΟΥ} ΑΙΩΝΑ

8.1 ΑΠΟ ΤΟΝ VIETE ΣΤΟΝ DESCARTES

Ο René Descartes (1596 – 1650), εισήγαγε με το έργο του ένα πρόγραμμα που είχε σαν κύρια κατεύθυνση τη διαμόρφωση μιας γενικής μεθόδου για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων διαμέσου της Άλγεβρας, όπου η λύση των εμφανιζόμενων εξισώσεων γινόταν με γεωμετρικές κατασκευές. Ο Descartes αρχίζει τη ‘*La Geometrie*’ με την φράση ‘κάθε γεωμετρικό πρόβλημα μπορεί εύκολα να αναχθεί σε τέτοιους όρους ώστε για την κατασκευή του να αρκεί η γνώση των μηκών ορισμένων τμημάτων’

L A
G E O M E T R I E.
LIVRE PREMIER.
*Des problemes qu'on peut construire sans
y employer que des cercles & des
lignes droites.*

 Ou s les Problemes de Geometrie se
peuvent facilement reduire a tels termes,
qu'il n'est besoin par après que de connoi-
stre la longueur de quelques lignes droites,
pour les construire.

Για παράδειγμα προς το τέλος του τρίτου βιβλίου της *Γεωμετρίας* για τις ρίζες των εξισώσεων βαθμού 3 και 4 χρησιμοποιεί την τομή μιας παραβολής και ενός κύκλου που και οι δύο είναι κατασκευάσιμες καμπύλες σύμφωνα με τα κριτήρια του, και έδειξε πώς να λύσουμε εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του τετάρτου παίρνοντας την τομή ενός κύκλου με μια καμπύλη που κατασκευάζεται με ένα από τα όργανα του. Ο Descartes πίστευε πως

‘δεν ήταν ανάγκη παρά να ακολουθήσει κανείς την ίδια γενική μέθοδο για να κατασκευάσει όλα τα προβλήματα, των οποίων η πολυπλοκότητα μεγάλωνε επ’ άπειρον όπως και στην

περίπτωση μιας μαθηματικής προόδου, που όταν δίνονται οι δύο ή τρεις πρώτοι όροι, τότε είναι εύκολο να υπολογιστούν οι υπόλοιποι'

LIVRE TROISIEME.

413

les Problemes d'un mesme genre, iay tout ensemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres diverses; & ainfi de resoudre chascun deux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, en coupant d'un cercle vne ligne droite; & tous ceux qui sont solides, en coupant aussy d'un cercle vne Parabole; & enfin tous ceux qui sont d'un degré plus composés, en coupant tout de mesme d'un cercle vne ligne qui n'est que d'un degré plus composée que la Parabole; il ne faut que suiure la mesme voye pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini. Car en matiere de progressions Mathematiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaysé de trouver les autres. Et j'espere que nos neveux me sçauront gré, non seulement des choses que iay icy expliquées; mais aussy de celles que iay omises volontairement, affin de leur laisser le plaisir de les inuenter.

F I N.

Η μελέτη της προσέγγισης των εξισώσεων στο τρίτο βιβλίο της 'Geometrie' του Descartes εγείρει τουλάχιστον δύο κρίσιμα ερωτήματα. Πρώτον αν είχε επηρεαστεί ο Descartes από τον Viète και σε ποιο βαθμό και δεύτερον αν τουλάχιστον είχε μελετήσει ο Descartes τον Viète κυρίως πριν την έκδοση της 'Geometrie' το 1637. Φυσικά, όπως καταλαβαίνει κανείς, τα δύο ερωτήματα δεν είναι ασυσχέτιστα, και αν το πρώτο είναι δύσκολο να απαντηθεί στο δεύτερο η απάντηση είναι μάλλον εύκολη.

Για τον Descartes βέβαια η εξίσωση ήταν κύρια ένα εργαλείο, ένα εργαλείο για τις καμπύλες, με ποιο σημαντική ίσως χρήση της εξίσωσης την ταξινόμηση των καμπυλών σε κλάσεις και τον προσδιορισμό των καθέτων (normal) των καμπυλών. Παρόλο όμως οι αλγεβρικές εξισώσεις στον Descartes και ειδικότερα στο τρίτο βιβλίο της 'Geometrie' όπου παρουσιάζεται η μελέτη τους, κατέχουν περίοπτη θέση με υψηλό βαθμό καθολικότητας και αφαίρεσης, δεν μπορεί παρά να αναρωτηθεί κανείς αν ο ρόλος της άλγεβρας ήταν προσαρτημένος σε μια γεωμετρικά αποστολή μιας και σύμφωνα με τη φράση του Lenoir⁸⁴

⁸⁴ Lenoir T. 'Descartes and Geometrization of Thought, the Methodological Background of Descartes' σελ.377

‘η μαθηματική σκέψη του Descartes βασίζεται σε μία εποπτική οντολογία που έχει τις ρίζες της στη φιλοσοφική του μέθοδο’.

Όπως και να έχουν τα πράγματα αξίζει να βρούμε μια απάντηση στα ερωτήματα που θέσαμε. Στην κατεύθυνση αυτή θα κινηθούμε αντλώντας υλικό από τον ίδιο τον Descartes και την αλληλογραφία του με τον Mersenne πριν και μετά την έκδοση της *‘Geometrie’*

Το πρώτο απόσπασμα είναι από ένα γράμμα του Descartes⁸⁵, εβρισκόμενος στο Άμστερνταμ, στον Mersenne στο Παρίσι, το οποίο γράφτηκε πιθανότατα στις 3 Μαΐου 1632. Εκείνο το διάστημα ο Descartes είχε λάβει από τον Mersenne ένα αντίγραφο της λατινικής έκδοσης του 1631 του έργου Viète από τον Beaugrand. Ο Mersenne το είχε ζητήσει από αυτόν όντας σε επικοινωνία μαζί του. Το μικρό αυτό βιβλίο (duo-decimo) που έλαβε ο Descartes και που αποκαλεί *‘le livre d’Analyse’* δεν φαίνεται να τον εντυπωσίασε, όπως θα διαφανεί από το απόσπασμα. Γράφει λοιπόν:

*‘Σε ευχαριστώ για το βιβλίο της Ανάλυσης που μου έστειλες. Αλλά, μεταξύ μας, δε νομίζω ότι είναι πολύ χρήσιμο, ούτε πως κάποιος μπορεί να μάθει τη μέθοδο διαβάζοντας το. Δε μιλάω για το *‘Nullum non problema solvere’* αλλά, για να λύσουμε κάποιο πρόβλημα καθόσον είναι εύκολο. Αυτό δε σημαίνει πως οι συγγραφείς δεν έχουν καλή γνώση, αλλά δεν έχω επαρκή δυνατότητα να κρίνω τι υπάρχει σε αυτό το βιβλίο ούτε για αυτό που μου έγραψες σχετικά με το πρόβλημα του Πάππου. Γιατί κάποιος πρέπει να προχωρήσει μακριά πέρα από τις κωνικές τομές και τους στερεούς τόπους για να το λύσει για οποιοδήποτε αριθμό δεδομένων γραμμών, όπως ένα άτομο που καυχιέται για τον εαυτό του *‘nullum non problema solvere’* πρέπει να το λύσει, και νομίζω ότι το έχω λύσει’*

Ο Descartes φαίνεται να ενοχλείται από την επανάληψη της φράσης *‘Nullum non problema solvere’* η οποία στο πρωτότυπο κείμενο του Viète εμφανίζεται μόνο μια φορά στο τέλος της *Isagoge*, αλλά στην έκδοση του 1631 επαναλαμβάνεται πολλές φορές σαν ένα ρεφραίν, επειδή σίγουρα το έργο είχε εντυπωσιάσει τον εκδότη του.

Το δεύτερο απόσπασμα είναι από ένα γράμμα του Descartes από το Santpoort της Ολλανδίας στον Mersenne στο Παρίσι στις 31 Μάρτη 1638⁸⁶ και αφού είχε πληροφορηθεί από τον τελευταίο για τις κατηγορίες του Beaugrand εναντίον του για λογοκλοπή κάποιων

⁸⁵ Sasaki Chikara, *Descartes's Mathematical Thought*, Kluwer Academic Publisher, 2003 σελ.247

⁸⁶ Ο.π. σελ. 242

από τα γραπτά των προδρόμων του ειδικότερα του Viète ή/και του Harriot. Ο Beaugrand είχε αρχίσει να παίρνει κάποια φήμη σαν μαθηματικός γύρω στο 1630, αλλά κατείχε επίσης μια θέση αξιωματούχου που ήταν σε θέση να εγκρίνει ή όχι την έκδοση των κειμένων κάποιου. Η στάση του στο θέμα της έκδοσης κειμένων του Descartes και η αποστολή ενός αντιτύπου του *‘Le Dioptrique’* στον αντίπαλο του Fermat ήταν που πυροδότησε και την έναρξη της διαμάχης τους.

‘Και είναι τελείως απίθανο αυτά που έγραψα να έχουν παρθεί εύκολα από τον Viète, αντίθετα ο λόγος που η πραγματεία μου είναι τόσο δύσκολη για να την κατανοήσεις είναι ότι προσπάθησα να βάλω σε αυτήν ότι νόμιζα ότι δεν είναι γνωστό ούτε από αυτόν ούτε από κανέναν άλλο. Όπως μπορεί να φανεί, αν κανείς συγκρίνει αυτά που έγραψα για τον αριθμό των ριζών σε κάθε εξίσωση στη σελίδα 372, όπου είναι το σημείο που ξεκίνησα να παρουσιάζω τους κανόνες της Άλγεβρας μου, με αυτά που ο Viète έγραψε για αυτό στο τέλος του βιβλίου του De Emendatione aequationum, θα δει ότι το προσδιορίζω γενικά για όλες τις εξισώσεις, ενώ [αυτός], έχοντας δώσει μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα, από τα οποία είναι τόσο περήφανος που ήθελε να καταλήξει το βιβλίο του με αυτά, έδειξε πως δεν μπορούσε να το λύσει γενικά. Έτσι άρχισα από εκεί που αυτός είχε σταματήσει. Και το έκανα χωρίς να τα γνωρίζω αυτά, γιατί μελέτησα πολύ πιο επισταμένα τον Viète από τότε που έλαβα το τελευταίο γράμμα σου, από ότι είχα κάνει πριν, έχοντας το βρει εκεί στα χέρια ενός φίλου μου. Και μεταξύ μας, δε θεωρώ ότι ήξερε τόσα όσα νόμιζα, παρότι ήταν πολύ ικανός’

Ο Descartes προφανώς αναφέρεται στο κεφάλαιο XIV που είναι και το τελευταίο του βιβλίου του Viète *‘Δύο πραγματείες για την κατανόηση και βελτίωση των εξισώσεων’* που εκδόθηκε στο Παρίσι το 1615 από τον Σκοτσέζο φίλο του Viète, Alexander Anderson. Στο κεφάλαιο αυτό και με τα τέσσερα συγκεκριμένα θεωρήματα που παρουσιάζει, όπως είδαμε, κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι ίσως ο Viète μερικώς μόνο κατανόησε τη σχέση μεταξύ συντελεστών και ριζών κάθε εξίσωσης.

Από την άλλη ο Descartes στη σελίδα 372 της πρώτης έκδοσης του *‘La Geometrie’* αναρωτιέται

‘Combien il peut y avoir de racine en chaque Equation’

δηλαδή *‘Πόσες ρίζες μπορεί να έχει κάθε εξίσωση’*. Η απάντηση έρχεται με την πρώτη κιόλας πρόταση της παραγράφου αυτής και είναι:

‘Κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες διαφορετικές ρίζες όσο ο βαθμός (διάσταση) της άγνωστης ποσότητας’

δήλωση που είναι ισοδύναμη με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας και ο Descartes ήταν από τους πρώτους που τη διατύπωσε.⁸⁷

372 LA GEOMETRIE.

Combien il peut y auoir de racines en chascq; Equatiō.

Scachés donc qu'en chascque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y auoir de diuerses racines, c'est a dire de valeurs de cete quantité. car par exemple si on suppose x esgal a 2; ou bien $x -- 2$ esgal a rien ; & derechef $x \propto 3$; ou bien $x -- 3 \propto 0$; en multipliant ces deux equations $x -- 2 \propto 0$, & $x -- 3 \propto 0$, l'une par l'autre, on aura $xx -- 5x + 6 \propto 0$, ou bien $xx \propto 5x -- 6$. qui est vne Equation en laquelle la

Μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ του Viète και του Descartes είναι ότι ο δεύτερος αποδέχεται τις αρνητικές (ψευδείς) ρίζες ‘fausses rasines’ σε αντίθεση με τον πρώτο που δέχεται μόνο τις θετικές ρίζες, ‘vrayes rasines’ για τον Descartes, και ισχυρίζεται ότι

‘οι θετικές ρίζες όπως και οι αρνητικές δεν είναι πάντα πραγματικές (reel) αλλά κάποιες φορές μόνο φανταστικές (imaginaire)’

Και ακολουθεί το παράδειγμα με την $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ με μια μόνο πραγματική ρίζα το 2 και δύο ακόμη φανταστικές $2 \pm i$

Que les racines, tant vrayes que faulles peuuent estre reelles ou imaginaires.

Au reste tant les vraves racines que les faulles ne sont pas tousiours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est a dire qu'on peut bien tousiours en imaginer autant que i'ay dit en chascque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine. comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle cy, $x^3 -- 6xx + 13x -- 10 \propto 0$, il n'y en a toutefois qu'une reelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne scauroit

⁸⁷ Ο κανόνας αυτός είχε διατυπωθεί πριν από τον Descartes από τον Albert Girard (Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013, σελ 512)

Παρότι λοιπόν ο Descartes δεν παρατήρησε τη σχέση ριζών και συντελεστών πρέπει να παραδεχτούμε ότι η επιμονή του ότι η διατύπωση του ήταν γενικότερη του Viète ήταν βασικά σωστή, και για αυτό μπορεί κάποιος να ισχυριστεί ότι ήταν αυτός που άνοιξε το δρόμο των καθαρά αφηρημένων, δομικών μαθηματικών, και σύμφωνα με τον Mahoney⁸⁸

‘για πρώτη φορά εμφανίζονται νέα, καθαρά αφηρημένα, όχι ενστικτώδη αντικείμενα στα μαθηματικά, τα οποία αναδύονται από δομικές θεωρήσεις

Έτσι μπορούμε να ισχυριστεί κανείς, περιορίζοντας τη συζήτηση στα μαθηματικά, ότι η φράση του Descartes που αναφέρεται στον Viète στο γράμμα του στον Mersenne ***‘άρχισα από εκεί που αυτός είχε σταματήσει’*** μάλλον έχει βάση.

Αλλά ακόμα και αν είναι δύσκολο να ανακαλύψουμε αν ο Descartes επηρεάστηκε, και σε ποιο βαθμό, από τον Viète δεν μπορούμε να παραγνωρίσουμε αυτό που ο ίδιος ο Descartes ποτέ δεν αρνήθηκε, δηλαδή ότι μελέτησε επισταμένα τον Viète, ακόμα και πριν την έκδοση της *‘Geometrie’*.

⁸⁸ Ο M. S. Mahoney, *‘The Beginning of Algebraic Thought in the Seventeen Century’*

8.2 Η ΔΙΑΧΥΣΗ ΤΩΝ ΙΔΕΩΝ ΤΟΥ VİÈTE ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΑ ΚΑΙ Η ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΓΓΛΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ

Οι ιδέες του Viète διαχύθηκαν από την ηπειρωτική Ευρώπη στην Αγγλία, όπου οι Άγγλοι μαθηματικοί τις υιοθέτησαν, και τις επεξεργάστηκαν, προσαρμόζοντάς τις δικό τους στυλ και πρακτική, δίνοντας έμφαση σε έναν εργαλειακό ρόλο της άλγεβρας. Σαν αρχή αναφέρουμε το έργο του Thomas Harriot (1560-1621) '*Artis Analyticae Praxis*' ομόλογη μεθόδευση του '*Analytic Art*' που εκδόθηκε από τον Henry Percy δέκα χρόνια μετά το θάνατο του, δηλαδή το 1631, αφού είχαν συγκεντρωθεί και μελετηθεί τα χειρόγραφα του, και έχει σαφείς επιρροές από το έργο του Viète, που είναι εμφανείς από το περιεχόμενο μέχρι και τον τίτλο του έργου. Ο συνδετικός κρίκος μεταξύ του Viète και του Henry Percy, και κατ' επέκταση με τον Thomas Harriot εμφανίζεται να είναι ο Nathaniel Torporley. Ο τελευταίος, όπως και ο Harriot, ήταν ένας 'practitioner'⁸⁹ ο οποίος υπήρξε και μαθητής του Viète υπηρετώντας σε αυτόν ως γραφέας την εποχή της έκδοσης της 'Αναλυτικής Τέχνης'. Ύστερα από την επιστροφή του στην Αγγλία, εργάστηκε για τον Percy. Ο Harriot στα χειρόγραφα του αναφέρει τον Viète, όπως επίσης αναφορά γίνεται και στον πρόλογο της έκδοσης του 1631 στους Έλληνες μαθηματικούς και τον Διόφαντο συγκεκριμένα.

Diophantus Analysta Græcus, ex antiqua Mathematicorum familia super-

PRÆFATIO

AD

ANALYSTAS.

 **RTIS ANALYTICÆ**, cuius causa hîc agitur, post eruditum illud **Græcorum** sæculum antiquatæ iamdiu & incultæ iacentis, restitutionem **Franciscus Vieta**, Gallus, vir clarissimus, & ob insignem in scientijs Mathematicis peritiâ, Gallicæ gentis decus, primus singulari consilio & intentato antehâc conamine aggressus est; atque ingenuam hanc animi sui intentionem per varios tractatus, quos in argumenti huius elaboratione eleganter & acutè conscripsit, poste-

Έτσι ο Harriot διατήρησε το συμβολισμό του Viète να αναπαριστά με φωνήεντα τους αγνώστους και με σύμφωνα τους γνωστούς, χρησιμοποιώντας όμως μικρά αντί κεφαλαίων

⁸⁹ Οι 'practitioners' ήταν επαγγελματίες μαθηματικοί που ασκούσαν τα μαθηματικά για κάποιο συγκεκριμένο λόγο και με κάποιο σκοπό.

γραμμάτων ενώ για τις δυνάμεις γράφει *aaa* αντί a^3 ή *A Cubus*. Για τον πολλαπλασιασμό $(a-b)(a-c)$ χρησιμοποιεί τη γραφή

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ a & c \\ \hline & aa - ba \\ & - ca + bc \end{array}$$

και παίρνει αποτέλεσμα ίσο με $a^2 - ba - ca + bc$. Ένα παράδειγμα της ορολογίας και της γραφής '*Praxis*' ο Harriot φαίνεται στην παρακάτω απόδειξη του λήμματος

Si quantitas fecetur in duas partes inæquales quadratum è dimidia totius maior est facto è duabus partibus inæqualibus.

Si sint p, q duæ magnitudinis partes inæquales,

$$\frac{p+q}{2} > \sqrt{pq}$$

Nam è tribus continuè proportionalibus pp, pq, qq quarum pq maxima est, pp verò minima, est $pp - pq > pq - qq$.

Ergo $pp + qq > 2pq$.

Et addito utrinq; $2pq$ est $pp + 2pq + qq > 4pq$.

$$\text{Sed } pp + 2pq + qq = \left(\frac{p+q}{2} \right)^2$$

$$\text{Ergo } \left(\frac{p+q}{2} \right)^2 > 4pq$$

$$\text{Ergo } \frac{p+q}{4} > \sqrt{pq}$$

Ergo

$$\text{Ergo } \frac{p+q}{2} > \sqrt{pq}$$

Quod erat probandum.

Δηλαδή αν $p \neq q$

$$(p+q)^2/4 > pq$$

Χρησιμοποιώντας γνωστά συμπεράσματα του Viète κατανόησε ότι οι εξισώσεις είναι δυνατόν να παραχθούν από τις ρίζες τους. Μια από τις μεγαλύτερες συνεισφορές του στη θεωρία εξισώσεων ήταν η γραφή των εξισώσεων στην '*κανονική τους μορφή*' δηλαδή ως γινόμενο διωνυμικών παραγόντων. Στο '*Praxis*' ο Harriot αναγνωρίζει μόνο θετικές ρίζες, αλλά ακόμα και όταν γράφει τις εξισώσεις στην κανονική τους μορφή, όπου είναι σχεδόν εμφανής η ύπαρξη αρνητικών ριζών αυτός είτε τις αγνοεί είτε απαλείφει εξισώσεις με αρνητικές ρίζες μόνο. Όταν εκφράζει μια εξίσωση μέσω των παραγόντων της

$$(a-b)(a-c)(a+d)$$

όπου a είναι ο άγνωστος, δίνει σαν ρίζες το b και το c .

PROPOSITIO 4.

Æquatio canonica . . . $aaa - baa + bca$
 $- caa - bda$
 $+ daa - cda = -bcd.$ ab originali

$a - b$	$aaa - baa + bca$
$a - c$	$- caa - bda$
$a + d$	$+ daa - cda + bcd.$
$-$	$deducitur.$

posito b . vel c . radici a . æquali

G Nam

Έτσι όταν συζητά για την κλάση των εξισώσεων που κατασκευάζονται από τέτοιους παράγοντες όπως:

$$(a+b)(a+c)$$

καθώς και

$$(a+b)(a+c)(a+d)$$

γράφει

‘μιας και δεν μπορούν να παραχθούν εκτός από την προϋπόθεση των αρνητικών ριζών, θα αγνοηθούν ως εντελώς ανώφελες’

Επιπροσθέτως, το ‘Praxis’ αναφέρεται μόνο μια φορά σε κάποιον φανταστικό αριθμό, χωρίς να τον κατονομάσει και εμφανίζεται στην κυβική εξίσωση

$$eee = ccc + \sqrt{-ddddd}$$

όπου e είναι ο άγνωστος. Ο Harriot απορρίπτει την εξίσωση αυτή σαν ‘ως αδύνατο να μειωθεί’ λόγω του ‘ανεξήγητου’ τελευταίου όρου της.

PROBLEMA 13.

Æquationem $aaa - 3.bba = + 2.ccc.$ posito $a = \frac{ee + bb}{e}$
 si c . maior sit quam b . ad æquationem simplicem $eee = ccc + \dots$
 $ddd.$ si $c = b$. ad æquationem item simplicem $eee = ccc.$ Si ve-
 rò c . minor sit quam b . ad æquationem $eee = ccc + \sqrt{-ddddd}.$
 impossibilem reducere.

Παρόλα αυτά όμως σε χειρόγραφα του που δεν συμπεριλαμβάνονται στο 'Praxis' χρησιμοποιεί αρνητικές και φανταστικές ρίζες, που τις αποκαλεί 'noetical' ευθυγραμμιζόμενος με έναν αντίστοιχο αριστοτελική όρο. Έτσι επιλύει μια τεταρτοβάθμια εξίσωση με μια θετική, μια αρνητική και δύο φανταστικές ρίζες.

Ο Harriot υιοθέτησε και εφάρμοσε περισσότερο το συμβολικό στυλ από το έργο του Viète, το έργο αυτό είχε μια πιο αυστηρή κι επιστημονική πειθαρχία στη απόδοση του, και έναν επεξηγηματικό χαρακτήρα ως προς την προέλευση των μεθόδων που ακολουθεί και τα πρόσωπα που τις είχαν εγχαράξει αποτίνοντας φόρο τιμής. Ο τίτλος άλλωστε του έργου του Harriot, 'Artis Analyticae Praxis' δηλαδή 'Πρακτική της Αναλυτικής Τέχνης' μαρτυρά με σαφήνεια τη διαφορετική αυτή προσέγγιση. Όπως ο Florian Cajori παρατηρεί⁹⁰ ότι

«η άλγεβρα του [Harriot] είναι λιγότερο ρητορική και περισσότερο συμβολική από οποιαδήποτε ίσως άλλη άλγεβρα έχει γραφτεί... Μερικές σελίδες δεν έχουν σχεδόν καμία επεξηγηματική λέξη. Συχνά οι ιδέες μεταφέρονται στο μάτι με μαθηματικά σύμβολα μόνο.»

Στο στην ίδια τροχιά κινήθηκε πιο αποτελεσματικά ο William Oughtred (1575-1660) με το 'Clavis Mathematicae' δηλαδή το 'Κλειδί των Μαθηματικών' που εκδόθηκε την ίδια χρονιά με το 'Praxis' το 1631, καθώς και οι μαθητές του, που ανάμεσα τους διακρίνεται ο John Wallis. Ο Oughtred ήταν μια αντιπροσωπευτική περίπτωση ενός 'mathematical practitioner' με το 'Clavis' να ασκεί μεγαλύτερη επίδραση από το στους ακαδημαϊκούς κύκλους και τη μαθηματική παιδεία γενικότερα 'Praxis', με την επίδραση αυτή να οδηγεί στην αλλαγή των προγραμμάτων σπουδών των Αγγλικών πανεπιστημίων, που μέχρι εκείνη τη στιγμή δεν περιελάμβαναν υποχρεωτικά μαθήματα μαθηματικών που θεωρούνταν σαφώς υποδεέστερη σπουδή από τη φιλοσοφία. Ο Oughtred στον πρόλογο του δηλώνει ότι θα ακολουθήσει την Αναλυτική μέθοδο και όχι τη Συνθετική πορεία που τη θεωρεί πιο δυσνόητη ξεκαθίζοντας ότι σκοπός του βιβλίου είναι με τη χρήση των συμβόλων και όχι με ρητορικά και περιγραφικά μέσα μόνο, να γίνει το περιεχόμενο του πιο εύληπτο.

⁹⁰ Cajori Florian A History of Mathematical Notation, The Open Court Company Publishers, 1928, σελ. 200-201

AD LECTOREM PRÆFATIO:
Editioni tertiæ præfixa.



Onscripsi olim in Familia illustrissimi
nuper Comitis *Arundelia & Surrey*,
cum ex filiis ejus alteri in disciplinis
Mathematicis exponendis deservie-
rim, ordinem quendam, qui mihi
ad mysteria Mathematica videbatur
appositissimus, ut studiosorum, qui ipsum secuturi
sunt, animi scientiis illis, non leviter & superficie te-
nè tingantur, sed intimè & radicatè imbuantur.
Hunc meum ordinem multorum virorum doctorum,
maximè verò nobilissimi illius eruditissimique Dni
Caroli Cavendish hortatu, in publicum sub titulo
CLAVIS MATHEMATICÆ primò emissi.
Tractatus quidem ille, non methodo (sicut vulgò
fit) Synthetica, per Theoremata atque Problemata
longo verborum ambitu descriptus, sed via inven-
tionis Analytica, (ita ut torus sit quasi demonstratio
continua nexibus firmissimis compaginata) & non
tam verbis quàm rerum speciebus depictus, primo ad-
spectu difficultatem peperit in multis, qui forma tra-
dendi inusitata territi, Chimæram aut Sphingem
aliquam

Είναι αξιοσημείωτο ότι το ‘*Clavis Mathematicae*’ του Oughtred, το ‘*Arithmetica Infinitorum*’ του Wallis, καθώς και η λατινική έκδοση της ‘*Geometrie*’ του Descartes από τον Franz Van Schooten αποτέλεσαν τα βιβλία της νεανικής αυτομόρφωσης του Isaac Newton.

Ο Lenoir σημειώνει⁹¹ ότι ο Oughtred δίδαξε ότι το πιο αποτελεσματικό μέσο για την ανακάλυψη των μαθηματικών θεωρημάτων είναι η αποδέσμευση από τις συγκεκριμένες γεωμετρικές ή αριθμητικές λεπτομέρειες του προβλήματος και η επικέντρωση στη δομή των σχέσεων, όπως αποκαλύπτεται με την αλγεβρική ανάλυση

⁹¹ Lenoir Timothy. *Descartes and Geometrization of Thought, the Methodological Backround of Descartes*, Historia Mathematica 6, 1979

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ: ΜΙΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Θα παρουσιάσουμε τους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης, παρουσίασης, επίδειξης και επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στα έργα των Cardano, Viète, Harriot, Descartes, Newton

9.1 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ VIETE

Ο Viète στην δεύτερη πραγματεία του 'για τη βελτίωση των εξισώσεων' δίνει επίσης ένα γενικό τρόπο μετασχηματισμού και επίλυσης τετραγωνικής εξίσωσης με απαλοιφή του πρωτοβάθμιου όρου, μέθοδο που θα ακολουθήσει και σε εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού.

De reductione quadratorum adfectorum ad pura.

Formula tres.

I

Si A quad. + B 2 in A, æquetur Z plano. A + B esto E. Igitur E quad.,
æquabitur Z plano + B quad.

Confectarium.

Itaque, si $\sqrt{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ + B fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1, Z planum 20. A 1 N. $1 Q + 2 N$, æquatur 20. & fit 1 N. $\sqrt{21} - 1$.

Έτσι για την επίλυση της εξίσωσης

$$A^2 + 2BA = Z^p$$

θέτει $A+B=E$ δηλαδή $A=E-B$ οπότε γίνεται $E^2 = Z^p + B^2$ έτσι ο αρχικός άγνωστος A θα ισούται με

$$\sqrt{Z^p + B^2} - B$$

Και συνεχίζει με ένα παράδειγμα: Έστω $B=1$, $Z^p=20$ και $A=x$:

$$x^2+2x=20$$

και έτσι το x είναι ίσο με $\sqrt{21}-1$

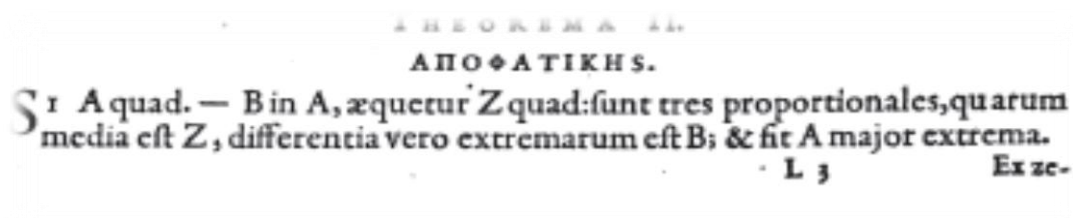
Μεταφράζοντας αυτή τη μέθοδο με σημερινούς όρους για την επίλυση της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$ με $a \neq 0$ θέτει $x=y-b/2a$ και έτσι ανάγεται σε μια εξίσωση της μορφής $y^2=k$ που επιλύεται απλά.

Μένοντας ακόμη στον Viète και στην πρώτη πραγματεία του ‘για την κατανόηση των εξισώσεων’ παρατηρούμε ότι για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$A^2-BA=Z^2$$

χρησιμοποιεί επίσης μια αναλυτική προσέγγιση και τη θεωρία αναλογιών επικαλούμενος τον *Giovanni Campano de Novara* που μετέφρασε και σχολίασε τα ‘Στοιχεία’ του Ευκλείδη, και πιθανά σχόλια του στο 5^ο βιβλίο, που αναφέρεται στη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου. **huius Campanus in libro de proportionibus.**

Κατόπιν ενεργοποιεί συμπεράσματα που άντλησε από τη ζητητική.



Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν

υπάρχουν τρεις ανάλογοι (αριθμοί) ο μέσος των οποίων είναι ο Z και η διαφορά των άκρων είναι ο B , κάνοντας τον A τον μεγαλύτερο από τους άκρους.

Έστω A αυτός ο αριθμός (ο μεγαλύτερος από τους άκρους), Τότε ο μικρότερος από τους άκρους θα είναι $A-B$ και μιας και το γινόμενο των άκρων είναι ίσο με το τετράγωνο του μέσου θα είναι

$$A(A-B)=Z^2 \text{ ;etsi } A^2-BA=Z^2$$

Έτσι από τη ζητητική θα χρειαστεί να υπολογίσει τον μεγαλύτερο από τους άκρους τριών αναλόγων αριθμών όταν δίνεται ο μέσος και η διαφορά των άκρων.

Ex Zetetico:

Data media trium proportionalium & differentia inter extremas, invenire majorem extremam.

Est illa A. minor igitur erit A — B. ducatur major in minorem; sic A quad. — B in A, æquale Z quad. Id autem ipsum est quod ordinatur.

1 Q — 10 N æquatur 144. est 1/144 media inter extremas differentes per 10. & sit 1 N major extrema ex serie trium proportionalium 8. 12. 18.

Τα συμπεράσματα που χρειάζεται έπειτα αντλούνται από δύο σημεία σε δύο διαφορετικά βιβλία της ζητητικής

LIBER TERTIUS.

ZETETICVM I.



Ata media trium proportionalium linearum rectarum, & differentia extremarum, invenire extremas.

At vero extremæ proportionales sunt ut latera. Medix vero quadratum est ipsum rectangulum sub lateribus. Jam autem expōitum est. Dato rectangulo sub lateribus, & differentia laterum, invenire latera. Itaque, quadratum differentie dimidix extremarum, adjunctum medix quadrato, æquatur quadrato adgregati dimidii extremarum.

Sic differentia extremarum 10, media 12, minor extrema est 8, major 18.

LIBER SECVNDVS.

51

ZETETICVM III.

Dato rectangulo sub lateribus, & differentia laterum: inveniuntur latera.

Enimvero quadratum differentie laterum, adjunctum quadruplo rectangulo sub lateribus: æquatur quadrato adgregati laterum.

Jam enim ordinatum est, Quadratum adgregati laterum, minus quadrato differentie, æquari quadruplo rectangulo sub lateribus: adeo ut sola fuerit opus architecti. Data porro differentia duorum laterum & eorum summa, dantur latera.

Sic 10. Rectangulum sub duobus lateribus quorum differentia est 8. Summa laterum est 18. 1 Q æquatur 144.

Έτσι στην πρόταση I του τρίτου βιβλίου της ζητητικής ζητείται να βρεθούν οι άκροι όταν δίνεται ο μέσος μιας αναλογίας τριών αριθμών. Αλλά αφού το τετράγωνο του μέσου ισούται με το γινόμενο των άκρων το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση δύο αριθμών με γνωστό γινόμενο και διαφορά. Τώρα στο δεύτερο βιβλίο της Ζητητικής και την πρόταση III, αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα

‘το τετράγωνο της διαφοράς δύο αριθμών συν τέσσερις φορές το γινόμενο τους ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών αυτών’

$$(r-s)^2 + 4rs = (r+s)^2,$$

Στο αριθμητικό παράδειγμα ο Viète θα επιλύσει την εξίσωση

$$x^2 = 10x + 144$$

Έτσι είναι 144 ο μέσος των αναλόγων αριθμών άρα και το γινόμενο των άκρων με τη διαφορά τους να είναι 10. Από το συμπέρασμα που αναφέρεται στην παραπάνω πρόταση III του δεύτερου βιβλίου είναι $10^2 + 4 \cdot 144 = 676$ που είναι το τετράγωνο του αθροίσματος

έτσι το αθροίσματος των αριθμών, επομένως το άθροισμα των άκρων είναι 26 και αφού η διαφορά τους είναι 10 από την πρόταση I του πρώτου βιβλίου το διπλάσιο του μεγαλύτερου αριθμού είναι $26+10=36$ άρα ο μεγαλύτερος από τους άκρους που είναι και η λύση της εξίσωσης είναι

$$x=18.$$

Στη συνέχεια θα δούμε πως είχε αντιμετωπίζει την ίδια ακριβώς εξίσωση ο Cardano. στο *‘Ars Magna’* (1545). Γράφει:

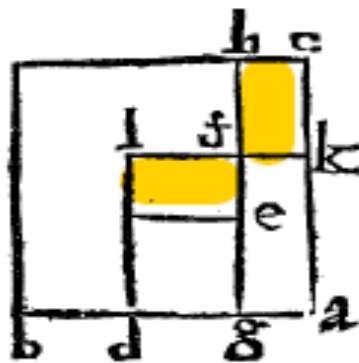
‘η τέχνη αυτή προέκυψε από τον Mohamete το γιο του Moses του Άραβα. Ο Leonardo της Piza⁹² είναι μια αξιόπιστη πηγή για αυτή τη δήλωση’

‘**H**ec Ars olim à Mahomete, Moſis Arabis filio initium ſumpſit. Etenim huius rei locuples teſtis Leonartus Piſanus.

Ξεκινάει λοιπόν με τη γεωμετρική επίδειξη *‘demonstratio’* σελ. 10 του *Ars Magna*, κατόπιν διατυπώνει τον κανόνα και καταλήγει με την επίλυση της συγκεκριμένης εξίσωσης σαν παράδειγμα.

ALIA DEMONSTRATIO.

3 Sit modò quadratum a c in tertia figura, æquale 6. rebus & 16. numero, & ponatur a d numerus rerum, ſcilicet 6. igitur ſuperficies a h eſt 6. poſitiones, quare d e reſiduum erit præciſè 16. diuidatur a d per æqualia in g, & fiant quadrata g b & g d,



Θεωρεί την εξίσωση $x^2 = 6x + 16$ και κατασκευάζει ένα τετράγωνο με διάμετρο bc και πλευρά x τον άγνωστο (*cosa*). Έστω bg είναι ίσο με 6 δηλαδή τον συντελεστή του x . Τότε η επιφάνεια bd θα είναι ίση με $6x$ και έτσι αυτό που απομένει θα είναι ίσο με 16. Έστω επίσης ότι το μέσο του bg είναι το d .

⁹²Γνωστοί με το όνομα Al Khwarismi και Fibonacci αντίστοιχα.

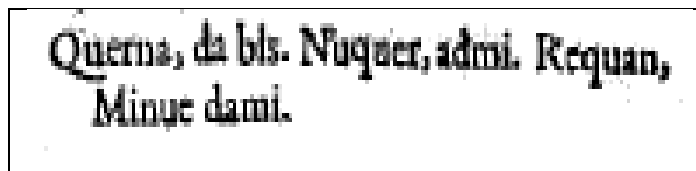
Κατόπιν εντός αυτού κατασκευάζει τα τετράγωνα (με διαγωνίους) dk , το πρώτο είναι το μεγάλο εσωτερικό τετράγωνο, και το άλλο το μικρό εσωτερικό τετράγωνο. Το τετράγωνο de έχει εμβαδόν $9=3^2$.

Το κρίσιμο σημείο είναι να αποδείξει ότι το εμβαδόν του le είναι ίσο με το εμβαδόν του fc , δηλαδή ότι τα χρωματισμένα ορθογώνια είναι ισοδύναμα. Αυτό είναι $fe=ck$ αφού καθένα από αυτά είναι ίσο με τη διαφορά των πλευρών των δύο εσωτερικών τετραγώνων που έχει κατασκευάσει. Αλλά και $lf=ak$ μιας και τα δύο είναι ίσα με τη διαφορά των πλευρών του εξωτερικού τετραγώνου και του μεγάλου εσωτερικού δηλαδή αυτού με πλευρά da .

Άρα λοιπόν dk είναι $9+16=25$ και έτσι το da είναι 5 και το ba δηλαδή ολόκληρο το x είναι $5+3=8$ που είναι και η θετική λύση της εξίσωσης.

Έπειτα διατυπώνει τον κανόνα:

‘πρόσθεσε το τετράγωνο του μισού του συντελεστή της πρώτης δύναμης στο σταθερό της εξίσωσης και πάρε την τετραγωνική ρίζα του συνόλου. Σε αυτό πρόσθεσε το μισό του συντελεστή της πρώτης δύναμης και το άθροισμα είναι η τιμή του x ’



Τέλος δίνει σαν παράδειγμα την επίλυση της εξίσωσης που είδαμε και στον Viète

$$x^2=10x+144$$

Ακολουθώντας έτσι τα βήματα του παραπάνω κανόνα υψώνει στο τετράγωνο το 5 που είναι το μισό του 10, ο οποίος είναι ο συντελεστής του x και το αποτέλεσμα 25 το προσθέτει στο σταθερό όρο 144 βρίσκει 169 και έπειτα παίρνει την τετραγωνική ρίζα που είναι 13. Τέλος προσθέτει το 5 που είναι το μισό του συντελεστή του x στο αποτέλεσμα 13 και έτσι βρίσκει τη (θετική) λύση,

που είναι $x=18$

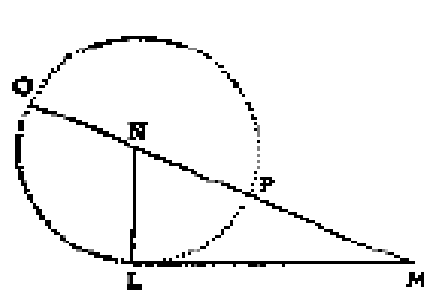
aggregatum est rei æstimatio. Exemplum,
sit vnum quadratum æquale 10. rebus p.
144. duc 5. in se fit 25. quadratum dimidij
rerum, adde 144. fit 169. cuius q. est 13.
huic adde 5. dimidium numeri rerum, fit
18. æstimatio rei. Rursus sit 1. quadratum

9.3

Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ DESCARTES

Ο Descartes στις σελίδες 302-303 του 'La Geometrie' (1637) του έργου του 'Discourse de la methode' επιλύει την τετραγωνική εξίσωση με τον παρακάτω τρόπο:

Et lors ce triangle, ou ligne inconnue se trouve aysement. Car si l'on prend exemple



z so $a z + b b$
je fais le triangle rectan-
gle $N L M$, dont le co-
sté LM est egal à b ra-
cine quarré de la quan-
tité connue $b b$, & l'au-
tre LN est $\frac{1}{2} a$, la moi-
tié de l'autre quantité

connue, qui estoit multiplié par z que je suppose estre la
ligne inconnue. puis prolongeant $M N$ la base de ce tri-
angle, jusques a O , en sorte qu' $N O$ soit esgale a $N L$,
la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime
en ceste sorte

$$z = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}$$

Γράφει λοιπόν:

Τότε αυτή η άγνωστη γραμμή μπορεί εύκολα να βρεθεί. Για παράδειγμα αν έχω

$$z^2 = az + bb$$

κατασκευάζω ένα ορθογώνιο τρίγωνο NLM με μια πλευρά την LM ίση με b , η τετραγωνική ρίζα της γνωστής ποσότητας bb , και η άλλη πλευρά LN , ίση με $\frac{1}{2} a$, που είναι το μισό της άλλης γνωστής ποσότητας, η οποία πολλαπλασιάζεται με z , το οποίο έχω υποθέσει ότι είναι η άγνωστη γραμμή. Τότε προεκτείνοντας την MN , την υποτεινούσα του τριγώνου, στο O , έτσι ώστε η NO να είναι ίση με NL , η όλη γραμμή OM είναι η ζητούμενη γραμμή z . Αυτό εκφράζεται με τον ακόλουθο τρόπο

$$z = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}$$

Η αφηρημένη συμβολική αλγεβρική επεξεργασία συνυπάρχει με τη γεωμετρική απεικόνιση.

9.4

Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ HARRIOT

Παρακάτω φαίνεται η λύση της τετραγωνικής εξίσωσης που παρουσιάζει ο Thomas Harriot στη σελίδα 16 του 'Artis Analyticae Praxis'

16

SECTIO SECVNDA.

Canonicalum quadratici ordinis derivatio.

PROPOSITIO PRIMA.

Aequatio canonica $aa - ba$
 $+ ca = + bc$ ab originali $a - b$
 $a + c$
 $= aa - ba$
 $+ ca - bc$ posito b . ipsi a . æquali deducitur.

Nam si ponatur $a = b$. erit $a - b = 0$.
 Posito igitur $a = b$. erit $a - b = 0$.

Est autem ex generi $a - b$
 $a + c$
 $+ ca - bc$. quæ est æquatio originalis hic designata.

Ergo... $aa - ba$
 $+ ca - bc = 0$.

Ergo... $aa - ba$
 $+ ca = + bc$. quæ est æquatio proposita.

Aequatio igitur canonica proposita ab originali designata, posito b . ipsi a . æquali deducitur. Vt est enunciatum.

PROPOSITIO 2.

Aequatio canonica $aa - ba$
 $- ca = - bc$ ab originali $a - b$
 $a - c$
 $= aa - ba$
 $- ca + bc$ posito b . vel c . ipsi a . æquali deducitur.

Nam si ponatur $a = b$. erit $a - b = 0$.

Vel . . . $a = c$. erit $a - c = 0$.

Posito igitur $a = b$. vel c . erit $a - b$
 $a - c$
 $- ca + bc$.

Est autem ex generi $a - b$
 $a - c$
 $- ca + bc$. quæ est æquatio originalis hic designata.

Ergo . . . $aa - ba$
 $- ca + bc = 0$.

Ergo

Η πλήρως συμβολική λύση ενός 'practitioner' όπου οι ρητορικές επεξηγήσεις είναι (σχεδόν) περιττές.

Ο Newton στα μαθήματα στο Trinity του Cambridge παρουσιάζει την παρακάτω λύση

Regula 7. *Algebraica ratio radice per extractionem radice ex altera equatōne haberi
ostenditur. Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extraxta utrobisq; radice
prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quod si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$, transfer aa et
exurgit $xx - 2ax + aa = bb$, extraxtisq; partibus radicibus $x - a = +vel - b$, seu
 $x = a \pm b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utriusq; $-ax + \frac{1}{4}aa$ et prodit
 $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, et extraxta utrobisq; radice $x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ seu
 $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.*

Κανόνας 7: Στην περίπτωση επίσης, αναγωγής, επιτυγχάνεται με εξαγωγή της ρίζας και από τις δύο μεριές της εξίσωσης. Για παράδειγμα αν είναι $xx = 1/4aa - bb$, όταν εξαχθεί η ρίζα έχει

ως αποτέλεσμα $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$

και αν είναι $xx + aa = 2ax + bb$ μεταφέρεται το $2ax$ και προκύπτει $xx - 2ax + aa = bb$ και όταν εξαχθούν οι ρίζες και από τις δύο μεριές είναι $x - a = +$ ή $-b$, το οποίο είναι $x = a \pm b$.

Έτσι επίσης, όταν είναι $xx = ax - bb$ προστίθεται και στις δύο μεριές το $-ax + 1/4aa$ και έχει ως αποτέλεσμα

$$xx - ax + 1/4aa = 1/4aa - bb$$

τότε όταν εξαχθούν οι ρίζες και από τις δύο μεριές

$$x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

Η επεξεργασία είναι πλήρως αλγεβρική και σύμφωνα με τον μελετητή του μαθηματικού του έργου D. T. Whiteside, η ταύτιση της Άλγεβρας με την με την ‘Καθολική Αριθμητική’ (Arithmetica Universalis) αποτελεί για τον Άγγλο επιστήμονα καθοδηγητικό δόγμα, διευκρινίζοντας ότι ο Newton προώθησε την ιδέα ότι «η άλγεβρα είναι στην ουσία της η αφηρημένη λογική των σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες, αποσπασμένες από το

συγκεκριμένο τους περιεχόμενο και έτσι μπορεί να αναπτυχθεί ως ένα ανεξάρτητο μεταθεωρητικό σύστημα»⁹³

⁹³ Καστάνης Ν, *Η κατάσταση και η δυναμική της αλγεβρικής σκέψης το 18^ο αιώνα*, σελ 7

ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ - ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στις σελίδες που προηγήθηκαν προσπαθήσαμε να περιγράψουμε το ιστορικό, πολιτισμικό και κοινωνικό πλαίσιο που διαμόρφωσε τις συνθήκες εκείνες που οδήγησαν στην ανάδυση μιας θεώρησης της άλγεβρας ως μια θεωρία, ένα σύστημα γνώσεων, αυτόνομης και καθολικά αποδεσμευμένης από τη γεωμετρική της εξάρτηση, αποκομμένης από τις όποιες γεωμετρικές της ρίζες.

Η εξέλιξη αυτή ήταν αργή και σύνθετη, σταδιακή, με βήματα που υπαγορεύονταν από τις εκάστοτε συνθήκες με αποκλίσεις και παλινδρομήσεις και φυσικά δεν μπορεί να αποδοθεί και να πιστωθεί αμιγώς σε κάποια μόνο πρόσωπα, πολύ περισσότερο μόνο σε ένα, αφού η πορεία της μπορεί να περιγραφεί, τουλάχιστον μερικώς, ως μια διαρκής σκυταλοδρομία.

Η θεώρηση αυτή της άλγεβρας έπρεπε συνεχώς να αναμετρηθεί με αντίρροπες ή αποκλίνουσες προς αυτήν τάσεις μέχρι να επικρατήσει, και η πορεία της προς αυτό που είναι σήμερα δεν ήταν με κανένα τρόπο προδιαγεγραμμένη με βεβαιότητα. Οι μεταβολές δεν θα μπορούσαν να είναι άμεσα παρατηρήσιμες παρά μόνο μέσα από το φακό της ιστορικής μελέτης.

Η επιστημονική **ρήξη** λοιπόν στον τομέα αυτό, με την έννοια που απέδωσε στον όρο ο Kuhn, επήλθε σχετικά ομαλά, όσο οξύμωρο και αν φαίνεται αυτό, ίσως λόγω ακριβώς αυτής της μεγάλης χρονικής διάρκειας που χρειάστηκε να γεννηθούν οι κυοφορούμενες αλλαγές αλλά και να παγιωθούν με το πέρασμα του χρόνου.

Από τη χρονική περίοδο που αναφερόμαστε δηλαδή τον 16^ο αιώνα και τις αρχές του 17ου μέχρι την οριστική αυτόνομη θεώρηση της άλγεβρας θα χρειαστεί να περάσουν 2 περίπου αιώνες ακόμη, να υιοθετηθούν πεποιθήσεις και αντιλήψεις συμβατές με το περιεχόμενο της, και να εμπλακούν πρόσωπα όπως του Newton, Leibniz, Euler, Cauchy,

Ίσως λοιπόν και στα μαθηματικά μπορούμε να συμμεριστούμε την άποψη του Max Planck που εκφέρεται με τις παρακάτω λέξεις⁹⁴

«Καμία νέα επιστημονική θεωρία δεν θριάμβευσε επειδή κατάφερε να πείσει τους αντιπάλους της κάνοντάς τους να δουν το φως της αλήθειας, αλλά μάλλον γιατί αυτοί που

⁹⁴ Η φράση αυτή αλιεύτηκε από την εισαγωγή του βιβλίου των Δανέζη - Θεοδοσίου *Το σύμπαν που αγάπησα*

ήταν εναντίον της κάποια στιγμή πέθαναν, και μια νέα γενιά, περισσότερο εξοικειωμένη μαζί της, μεγάλωσε και πήρε τα ηνία.»

Όταν λοιπόν τα ιστορικά και κοινωνικά δεδομένα είναι τέτοια, η ιστορική παρατήρηση έχει δείξει πως εμφανίζεται κάποιος που να είναι φορέας των νέων αυτών τάσεων· σίγουρα ένα άτομο ικανό, εμβριθές τολμηρό και διορατικό. Ένα επιχείρημα που ενισχύει την άποψη αυτή, δηλαδή ότι η ιστορική συγκυρία διαμορφώνει τις προϋποθέσεις για την ανάδειξη των καινοτομιών, στοιχειοθετείται αν σκεφτεί κανείς τη λεγόμενη «ταυτόχρονη» ανακάλυψη σε διαφορετικά πεδία από πρόσωπα που δεν είχαν τη δυνατότητα να επικοινωνήσουν μεταξύ τους. Αυτό συνέβη για παράδειγμα στην ‘επινόηση’ του Απειροστικού Λογισμού από τους Newton – Leibniz, της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τους Descartes – Fermat των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών από Bolyai και Lobachevsky ή τη διατύπωση της θεωρίας της εξέλιξης των ειδών από τους Darwin – Wallace.

Η μελέτη λοιπόν της ιστορίας των μαθηματικών με τη δυνατότητα της επισκόπησης που προσφέρει μπορεί, εκτός από τις συνδέσεις και τις αλληλεπιδράσεις των κοινωνικών μεταβολών με τις επιστημονικές μεταβολές, παλινδρομήσεις, ρήξεις και την κατάδειξη της ιστορικής συνέχειας των ιδεών της ανθρώπινης διάνοησης, να φωτίσει και τον τρόπο που προσλαμβάνεται, αφομοιώνεται αλλά και διαχέεται η γνώση και στο συγκεκριμένο πεδίο, να γίνει επομένως ένα ισχυρό επιστημολογικό εργαλείο. Δίνει επίσης τη δυνατότητα να διακρίνουμε τους παράγοντες εκείνους που λειτούργησαν ανασταλτικά, και τους τρόπους και τις αλλαγές πεποιθήσεων που χρειάστηκαν για να τους παρακάμψουμε. Μπορούμε έπειτα να αναγάγουμε τα συμπεράσματα στο παρόν ιστορικό πλαίσιο, μεταφέροντάς τα αναλογικά, αν και η εξέλιξη δεν είναι κατ’ ανάγκη αναλογική.

Τα επιχειρήματα που προβλήθηκαν αποδυναμώνουν την ισχύ του πρωταρχικού μεθοδολογικού και ερευνητικού ερωτήματος:

Γιατί να ασχοληθεί κανείς με την Ιστορία των Μαθηματικών, αφού η ιστορική και επιστημονική συγκυρία του σήμερα είναι μοναδική, ανεπανάληπτη και σίγουρα διαφορετική από οποιαδήποτε προηγούμενη;

Το παραπάνω ερώτημα αποδυναμώνεται περισσότερο και μετατρέπεται σε σχεδόν ρητορικό, αν μεταφερθεί στο γενικότερο πλαίσιο της μελέτης της ανθρώπινης ιστορίας, αφού δύσκολα θα βρει κανείς οποιοδήποτε πειστικό επιχείρημα ώστε να υποστηρίξει την άποψη ότι είναι άσκοπο και ανώφελο να μελετήσει κανείς τα αίτια και τις επιπτώσεις της

Γαλλικής, της Αμερικανικής ή της Ρωσικής Επανάστασης ή ακόμη του Β Παγκοσμίου πολέμου και να αναγάγει στις συνθήκες του σήμερα τα όποια συμπεράσματα συνάγονται για τις κοινωνικές μεταβολές ή την ανθρώπινη φύση - αν βέβαια δεχθούμε ότι υπάρχει κοινή ανθρώπινη φύση. -

Τέλος οι ιδέες αυτές μπορούν να αξιοποιηθούν πολλαπλά στο πλαίσιο της διδακτικής των μαθηματικών αφού μπορούν να ανατρέψουν παγιωμένες στους μαθητές αντιλήψεις και πεποιθήσεις για τη φύση του των μαθηματικών αντικειμένων και θεωριών, όπως λόγου χάρη ότι τα μαθηματικά αποτελούνται από αδιαμφισβήτητες βεβαιότητες, είναι στατικά και αμετάβλητα, η εξέλιξη τους είναι γραμμική ή δεν εξελίσσονται πια, αφού ότι είναι να αποδειχθεί. έχει ήδη αποδειχθεί.

Αναδεικνύουμε έτσι επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια στην εισαγωγή μιας μαθηματικής έννοιας, που πηγάζουν από τα αντίστοιχα εμπόδια που προέκυψαν κατά την ιστορική εξέλιξη της ίδιας έννοιας, και να αναδείξουν τις υπερβάσεις ή τις ρήξεις που απαιτήθηκαν για να υιοθετηθεί εντέλει αυτή .

Οι πεποιθήσεις και οι στάσεις απέναντι σε μια θέση διαμορφώνονται από το κοινωνικό γίνεσθαι, και παράλληλα διαμορφώνουν την εξέλιξη του. Αυτές γονιμοποιούν τις απαραίτητες ιδέες στην πορεία προς τη δημιουργία μιας νέας θεωρίας. Στην περίπτωση που εξετάζουμε η αυτονόμηση της Άλγεβρας δημιούργησε μια θεωρία με καθολικό συμβολισμό, και μια συμβολική γλώσσα και σημειολογία, αποτελώντας το όχημα για τη μετάβαση στην πλήρη μαθηματικοποίηση των επιστημονικών κλάδων που οδήγησε στην Επιστημονική Επανάσταση, συμβάλλοντας αποφασιστικά στην μετεξέλιξή τους. Έτσι τα μαθηματικά αναγορεύονται σε λυδία λίθο κάθε επιστημονικής θεωρίας.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Bagni T. Giorgio, *Rafael Bombelli's Algebra (1572) and a new mathematical 'object' : A semiotic Analysis*

Bellosta Helena, *Ibrahim Ibn Sinan: On Analysis and Synthesis*, Arabic Science and Philosophy, Vol. 1, 1991

Bombelli Rafael, *L' Algebra di Rafael Bombelli*,., Editone Nazionale Mathematica Italiana, Bologna 1579

Bos H. J. M., *Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; The 'Construction of Equations' , 1637-ca. 1750*

Cardano Girolamo, *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, 1545

Cardano Girolamo, *Ars Magna or The Rules of Algebra*, Έκδοση και μετάφραση από T. Richard Witmer, Dover Publications, Inc. New York, 1993

Cajori Florian, *A History of mathematical notation*, The Open Court Company Publishers, 1928

Cajori Florian, *A History of mathematics*, The Macmillan Company, London 1909

Corry Leo, *History of Algebra*

Crombie A. C, *Augustine to Galileo*, The History of Science A.D. 400-1650, Harvard University Press, Cambridge Massacussets, 1953

Crombie A. C, *Από τον Αυγουστίνο στον Γαλιλαίο*, Εκδόσεις Μορφωτικού Ιδρύματος Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα 1989

Descartes Rene, *The Geometrie of Rene Descartes*, μετάφραση David Eugene και Marcia L. Latham, Dover, New York, 1926

Doxiadis Apostolos - Mazur Barry, *Circles Disturbed – The interplay of Mathematics and Narrative*, Princeton University Press, 2012

- Duhem Pierre, *Σώζειν τα φαινόμενα*, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 2007
- Edwards C, *The Historical Development of the Calculus*, Springer - Verlag, Berlin, Heibelberg, 1979
- Eves H., *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, τόμος I, απόδοση στα ελληνικά: Κωνσταντινίδης Μ – Λιλής Ν., εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1989
- Franci R.- Rigatelli T, *Towards a History of Algebra*
- Gray J. *Descartes: Algebra and Geometry*, Open Univ. Press, 1987
- Harriot T, *Artis Analyticae Praxis*, London 1631
- Heath T. L., *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, Cambridge University Press, 1908
- Heath T.L., *A History of Greek Mathematics*, New York, Dover Publications, 1981
- Jullien Vincent, *Descartes La "Geometrie" de 1637*, Puf 1996
- Katz Victor, *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013
- Kuhn Thomas, *Η δομή των Επιστημονικών επαναστάσεων*, Σύγχρονα Θέματα, 1981
- Lenoir Timothy. *Descartes and Geometrization of Thought, the Methodological Backround of Descartes*, Historia Mathematica 6, 1979
- Mahoney Michael. S, *The Beginning of Algebraic Thought in the Seventeen Century*, 1980
- Mahoney Michael. S, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601- 1665*, Princeton, N, J. Princeton University Press, 1973
- Oughtred Guilelmi, *Clavis Mathematicae denovo limata sive potius fabricate*, 1667
- Oughtred William, *Key of the Mathematicks*, London 1694
- Pycior Helena M. *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British Algebra Through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*. Cambridge University Press. 1997

Ramus Petrus, *Scholarum Mathematicarum, libri unus et triginta*, Εκδότης Lazarus Schoner, Basel 1569

Ramus Petrus, *Algebra*, Εκδότης Apud Andream Wecheum, sub Pegaso, in vico Belloyaco, Paris 1560⁹⁵

Ramus Petrus, *Geometria*, (1569) Εκδότης Lazarus Schoner, Frankfurt, 1599

Sasaki Chikara, *Descartes's Mathematical Thought*, Kluwer Academic Publisher, 2003

Struik Dirk, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις Δαίδαλος, 2008

Van der Waerden B.L. *Η αφύπνιση της επιστήμης*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003

Vietae Francisci, *Apollonius Gallus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei Περί επαφών Geometia*, Paris 1600

Viete Francois, *The Analytic Art, Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra Nova*, μετάφραση T. Richard Witmer, Dover Publication Inc. Mineola, New York, 2006

Vietae Francisci, *Opera Mathematica*, Francisci Van Schooten, Leiden 1646

Ελληνόγλωσση

Βαλλιάνος Περικλής, *Η Επιστημονική Επανάσταση και η Φιλοσοφική θεωρία της Επιστήμης. Ακμή και Υπέρβαση του θετικισμού*, Β' έκδοση, Πάτρα ΕΑΠ.

Δανέζης Μ.– Θεοδοσίου Σ, *Το σύμπαν που αγάπησα, Εισαγωγή στην Αστροφυσική*, Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα 2012

Καργόπουλος Φίλιππος, *Εισαγωγή στη Συμβολική Λογική*, Εκδόσεις Βάνιας, Θεσσαλονίκη 2008

Καστάνης Ν, *Η κατάσταση και η δυναμική της αλγεβρικής σκέψης το 18^ο αιώνα*

Καστάνης Ν, *Η διείσδυση της ισλαμικής άλγεβρας στη Χριστιανική παιδεία το 12^ο αιώνα*

⁹⁵ Το βιβλίο αυτό είχε δημοσιευτεί αρχικά χωρίς να περιέχει το όνομα του συγγραφέα.

Καστοριάδης Κορνήλιος, *Η άνοδος της ασημαντότητας*, Ύψιλον Βιβλία, 2000

Παπασταυρίδης Σταύρος, Σημειώσεις μαθήματος Ιστορία Νεώτερων Μαθηματικών, ΠΜΣ

Πενολίδης Θεόδωρος, *Μέθοδος και συνείδηση, η έννοια της συνείδησης στη νεώτερη φιλοσοφία* Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών

Σταμάτης Ευάγγελος, *Διοφάντου Αριθμητικά, Η Άλγεβρα των Αρχαίων Ελλήνων*, Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα 1963

Φιλολογική ομάδα Κάκτου, *Πλάτων - Μένων*, Εκδόσεις Κάκτος, 1993

Χριστιανίδης Ιωάννης, *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*, Π.Ε.Κ