Δομές διάταξης σε χώρους τελεστών και εμφυτευτικότητα

Αργύριος Πετρόπουλος

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Μάρτιος 2020

Περιεχόμενα

Περίληψη

Υποθέτουμε σε αυτήν την εργασία ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με κάποιες βασικές έννοιες και ιδιότητες των C^* αλγεβρών, όπως το θεώρημα Gelfand-Naimark-Segal.
Αντικείμενο μελέτης της εργασίας αυτής είναι η αλληλεπίδραση της διάταξης που ορίζεται μεταξύ (αυτοσυζυγών) τελεστών σε χώρους Hilbert και της θεωρίας των Χώρων Τελεστών (Operator Space Theory).
Ειδικότερα η εργασία πραγματεύεται τις διάφορες δομές διάταξης πινάκων (Matrix orderings) που ορίζονται σε Συστήματα Τελεστών καθώς και την έννοια της εμφυτευτικότητας (injectivity) και του εμφυτευτικού περιβλήματος (injective envelope) στις κατηγορίες των χώρων τελεστών και των συστημάτων τελεστών.
Στο κεφάλαιο 1, αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία των θετικών και πλήρως θετικών απεικονίσεων. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε μεταξύ άλλων, την ανισότητα του Schwarz για 2 - θετικές απεικονίσεις και το διαχωριστικό θεώρημα του Krein για κώνους.
Στο κεφάλαιο 2, μελετάμε *- γραμμικούς χώρους με διάταξη, εισάγοντας την έννοια των Αρχιμήδειων διατεταγμένων χώρων. Επιπλέον, ορίζουμε τις νόρμες διάταξης ενός διατεταγμένου χώρου και παρουσιάζουμε τη σύνδεσή τους με τις καταστάσεις του χώρου. Έπειτα, χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία, αποδεικνύουμε τον χαρακτηρισμό του Kadison για συστήματα συναρτήσεων.
Στο κεφάλαιο 3, ορίζουμε τις δομές συστημάτων τελεστών, αποδεικνύοντας αρχικά το θεώρημα Choi- Effros. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε την ελαχιστική και μεγιστική τέτοια δομή και εφαρμόζουμε τη θεωρία αυτή στη μελέτη των entanglement breaking απεικονίσεων.
Στο κεφάλαιο 4, αναπτύσσουμε τη θεωρία των εμφυτευτικών συστημάτων τελεστών, αποδεικνύουμε την ύπαρξη εμφυτευτικών περιβλημάτων χώρων τελεστών. Τέλος, ορίζουμε το C^*-περίβλημα μιάς άλγεβρας τελεστών και αποδεικνύουμε τον χαρακτηρισμό του Hamana για τέτοιες άλγεβρες.

Abstract

We assume that the reader of this thesis is familiar with some elementary parts of C^* algebras theory, such as the Gelfand-Naimark-Segal theorem.
The object of study of this thesis is the interaction between the ordering defined on (self-adjoint) operators on Hilbert spaces and operator space theory. In particular, we study several matrix orderings defined on operator systems as well as the concepts of injectivity and injective envelope in the categories of operator spaces and operator systems.
In Chapter 1, we present the basic theory of positive and completely positive maps. Among others, we state and prove Schwarz inequality for 2-positive maps and Krein separation theorem for cones.
In Chapter 2, we study * ordered linear spaces and introduce the concept of an Archimedean space. In addition, we define the order norms in such spaces and connect them with the states of the space. Then, using these tools, we state and prove Kadison's characterisation of function systems.
In Chapter 3, we define the operator system structures. We state and prove the theorem of Choi-Effros and study the minimal and the maximal such structure. Then, we present the application of these concepts to the study of entanglement breaking maps.
Finally, in Chapter 4 is given an introduction in the theory of injective operator systems. We also prove the existence of injective envelopes of operator spaces. Finally, we define the C* envelope of an operator algebra and prove Hamana's characterisation for such algebras.

Κεφάλαιο 1

Θετικές και πλήρως θετικές απεικονίσεις

1.1 Θετικές απεικονίσεις

Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ όπου $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα. Θέτουμε $\mathcal{S}^* = \{a : a^* \in \mathcal{S}\}$. Λέμε ότι το $\mathcal{S}$ είναι **αυτοσυζυγές** όταν $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$. Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα $1_{\mathcal{A}}$ και το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγής υπόχωρος με $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{S}$ τότε το $\mathcal{S}$ καλείται **σύστημα τελεστών**. Αν $h \in \mathcal{S}$ και το h αυτοσυζυγές (δηλαδή $h = h^*$) μπορούμε να γράψουμε το h ως διαφορά 2 θετικών στοιχείων του $\mathcal{S}$ ως εξής:

$$h = \frac{1}{2}(\|h\|1_{\mathcal{A}} + h) - \frac{1}{2}(\|h\|1_{\mathcal{A}} - h) \ .$$

Θα δείξουμε ότι το στοιχείο $\|h\|1_{\mathcal{A}} - h$ θετικό:

Πράγματι, έχουμε $(\|h\|1_{\mathcal{A}} - h)^* = \|h\|1_{\mathcal{A}}^* - h^* = \|h\|1_{\mathcal{A}} - h$, οπότε το $\|h\|1_{\mathcal{A}} - h$ είναι αυτοσυζυγές.

Επίσης

$$\begin{aligned} \sigma(\|h\|1_{\mathcal{A}} - h) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_{\mathcal{A}} - (\|h\|1_{\mathcal{A}} - h) \notin Inv(\mathcal{A})\} = \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - \|h\|)1_{\mathcal{A}} + h \notin Inv(\mathcal{A})\} = \\ &= \{\|h\| - \lambda : \lambda \in \sigma(h)\} \subseteq [0, \infty) \end{aligned} \tag{1.1}$$

γιατί $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \leq \|h\|$ όταν $\lambda \in \sigma(h)$.

Άρα το στοιχείο $\|h\|1_{\mathcal{A}} - h$ είναι θετικό.

Όμοια αποδεικνύεται ότι και το στοιχείο $\|h\|1_{\mathcal{A}} + h$ είναι θετικό.

Ορισμός 1.1.1. Αν $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών και $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα, τότε μία συνάρτηση $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ λέγεται **θετική** αν απεικονίζει θετικά στοιχεία του $\mathcal{S}$ σε θετικά στοιχεία της $\mathcal{B}$.

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $\mathcal{S}$ σύστημα τελεστών και $\mathcal{B}$ μία C^* μία άλγεβρα. Αν $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ θετική τότε η ϕ είναι φραγμένη και $\|\phi\| \ \leq 2\|\phi(1)\|$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν p θετικό, τότε $0 \leq p \leq \|p\|1$ (το αποδείξαμε πιο πάνω), οπότε αφού η φ είναι θετική έχουμε

$$0 \leq \phi(p) \leq \|p\|\phi(1) \quad \Longrightarrow \quad \|\phi(p)\| \leq \|p\|\|\phi(1)\| \ .$$

όταν $p \geq 0$. Παρατηρούμε ότι αν $p_1, p_2 \geq 0$ τότε $\|p_1 - p_2\| \leq \max\{\|p_1\|, \|p_2\|\}$.

Αν το h είναι αυτοσυζυγές τοτε από την προηγούμενη διάσπαση έχουμε

$$\phi(h) = \frac{1}{2}\phi(\|h\|1 + h) - \frac{1}{2}\phi(\|h\|1 - h) \ .$$

Έτσι, από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\phi(h)\| &\leq \frac{1}{2}\max\{\|\phi(\|h\|1 + h)\|, \|\phi(\|h\|1 - h)\|\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max\{\|\|h\|1 + h\|\|\phi(1)\|, \|\|h\|1 - h\|\|\phi(1)\|\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max\{2\|h\|\|\phi(1)\|, 2\|h\|\|\phi(1)\} \\
&= \|h\|\|\phi(1)\| \ .
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Αν a είναι τυχόν στοιχείο του $\mathcal{S}$, τότε μπορούμε να γράψουμε $a = h + ik$ με $\|h\|, \|k\| \leq \|a\|$ όπου h, k αυτοσυζυγή και έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\phi(a)\| &\leq \|\phi(h)\| + \|\phi(k)\| \leq \|h\|\|\phi(1) + \|k\|\|\phi(1)\| \\
&\leq \|a\|\|\phi(1) + \|a\|\|\phi(1)\| = 2\|\phi(1)\|\|a\| \ .
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Άρα η ϕ είναι φραγμένη και $\|\phi\| \leq 2\|\phi(1)\|$. □

Λήμμα 1.1.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα και έστω $p_i, i = 1, 2, ..., n$ θετικά στοιχεία της $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^n p_i \leq 1$. Αν $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, ...n$ με $|\lambda_i| \leq 1$ τότε $\| \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i\| \leq 1$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_1^{1/2} & \cdots & p_n^{1/2} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} .$$

Η νόρμα του πίνακα στο πρώτο μέλους είναι $\| \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \|$. Επιπλέον, κάθε πίνακας στο δεξί μέλος έχει νόρμα μικρότερη από 1 λόγω της C^*-ιδιότητας. □

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα , X συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος και $\phi : C(X) \to \mathcal{B}$ θετική. Τότε $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi(1) \leq 1$. Έστω $f \in C(X), \|f\| \leq 1$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε ενα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i=1}^n$. τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ για $x \in U_i$. Έστω $\{p_i\}$ η διαμέριση της μονάδας υποκείμενη σε αυτό το κάλυμμα. Δηλαδή, τα $\{p_i\}$ είναι μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ και $p_i(x) \neq 0$ όταν $x \notin U_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Θέτουμε $\lambda_i = f(x_i)$. Παρατηρούμε ότι αν $p_i(x) \neq o$ για κάποιο i, τότε $x \in U_i$ και συνεπώς $|f(x) - \lambda_i| = |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$.
Έτσι , για κάθε x έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i(x)| &= |\sum (f(x) - \lambda_i) p_i(x)| \\ &\leq \sum |f(x) - \lambda_i| p_i(x) < \sum \varepsilon \cdot p_i(x) = \varepsilon \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Τώρα, από το λήμμα έχουμε ότι $\| \sum \lambda_i \phi(p_i) \| \leq 1$ και άρα

$$\|\phi(f)\| \leq \|\phi(f - \sum \lambda_i p_i)\| + \| \sum \lambda_i \phi(p_i)\| < 1 + \varepsilon \|\phi\| \ .$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, έχουμε $\|\phi\| \leq 1$. □

Παρατήρηση 1.1.5. Αν $a \in \mathcal{A}$ όπου $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα, τότε υπάρχει μία *unital*, θετική απεικόνιση $\varphi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{A}$ με $\varphi(p) = p(a)$.

Απόδειξη. Δείτε στη σελίδα 17 στο [4]. □

Πρόταση 1.1.6. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών , $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα και $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ μία θετική απεικόνιση. Τότε ισχύει $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$.*

Απόδειξη. Αφού η ϕ είναι θετική, έχουμε $\phi(p) \geq 0$ για κάθε $p \in \mathcal{S}$ με $p \geq 0$. Συνεπώς $\phi(p) = (\phi(p))^*$ και επειδή $p = p^*$ έπεται $\phi(p^*) = \phi(p)^*$.

Αν τώρα $h \in \mathcal{S}$ αυτοσυζυγές, γράφουμε $h = h_1 - h_2$ όπου h_1, h_2 θετικά και έχουμε

$$\phi(h^*) = \phi(h_1^* - h_2^*) = \phi(h_1)^* - \phi(h_2)^* = \phi(h)^* \ .$$

Τελικά, αν $x \in \mathcal{S}$ τυχόν, γράφουμε $x = h + ik$ με $h, k \in S$, αυτοσυζυγή. Τότε

$$\phi(x^*) = \phi(h^*) - i\phi(k^*) = \phi(h)^* - i\phi(k)^* = \phi(x)^* \ .$$

□

Πρόταση 1.1.7. *Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο C^* άλγεβρες με μονάδες, $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα της $\mathcal{B}$ με $1 \in \mathcal{A}$ και έστω $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{A}^*$.*
Αν $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ θετική, τότε $\|\phi(a)\| \leq \|\phi(1)\| \|a\|$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathcal{A}$ με $\|a\| \leq 1$. Επειδή η ϕ είναι συνεχής, μπορούμε να την επεκτείνουμε σε μια θετική απεικόνιση στην κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$. Συνεπώς, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.1.5, υπάρχει μία θετική απεικόνιση $\psi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}$ με $\psi(p) = p(a)$. Επειδή η σύνθεση θετικών απεικονίσεων είναι προφανώς θετική, από το θεώρημα 1.1.4 έχουμε

$$\|\phi(a)\| = \|\phi \circ \psi(e^{i\theta})\| \leq \|\phi \circ \psi(1)\| \cdot \|e^{i\theta}\| = \|\phi(1)\| \ .$$

□

Λήμμα 1.1.8. *Η κυρτή θήκη ενός συμπαγούς $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι η τομή όλων των κλειστών δίσκων που περιέχουν το A .*

Απόδειξη. Θα συμβολίζω την τομή αυτή K για διευκόλυνση .
Η σχέση $conv(A) \subseteq K$ είναι προφανής.
Για τον άλλο εγκλεισμό: Έστω $x \in K$ και $x \notin conv(A)$. Το $conv(A)$ είναι συμπαγές ως κυρτή θήκη συμπαγούς, το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό και προφανώς έχουν κενή τομή.
Οπότε (από το διαχωριστικό θεώρημα για ημιεπίπεδα) μπορούμε να βρούμε $v \in \mathbb{C}$ και πραγματικούς αριθμούς $c_1 < c_2$ τ.ω $\langle x, v\rangle > c_2$ και $\langle y, v\rangle < c_1$ για κάθε $y \in conv(A)$.
Μπορούμε να βρούμε έναν κλειστό δίσκο B με $conv(A) \subseteq B$ με τον B να βρίσκεται στο «κάτω» μισό (δηλαδή $\langle b, v\rangle < c_1$ για κάθε $b \in B$).
Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς $x \in K \subseteq B$. □

Λήμμα 1.1.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ ένα σύστημα τελεστών και $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ γραμμικό συναρτησοειδές με $f(1) = 1$, $\|f\| = 1$.*
Αν a ένα κανονικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ (δηλαδή $aa^* = a^*a$) και $a \in \mathcal{A}$,τότε το $f(a)$ θα ανήκει στη κλειστή κυρτή θήκη του φάσματος του a.

Απόδειξη. Έστω πως δεν ισχύει το συμπέρασμα. Από το λήμμα 1.1.8 η κυρτή θήκη ενός συμπαγούς συνόλου είναι η τομή όλων των κλειστών δίσκων που το περιέχουν.Έτσι, θα υπάρχει λ και $r > 0$ τέτοια ώστε $|f(a) - \lambda| > r$, ενώ για το φάσμα του a ισχύει $\sigma(a) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq r\}$.
Αλλά τότε $\sigma(a - 1\lambda) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ και αφού για κανονικά στοιχεία η νόρμα και η φασματική ακτίνα είναι ίσες, έχουμε $\|a - \lambda 1\| \leq r$ ενώ $|f(a - \lambda 1)| > r$, άτοπο. □

Αφού η κυρτή θήκη του φάσματος ενός θετικού στοιχείου περιέχεται στο $[0, \infty)$ το προηγούμενο λήμμα λέει ότι μία τέτοια f είναι θετική.

Πρόταση 1.1.10. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών, $\mathcal{B}$ μία unital C^* άλγεβρα, $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ unital, συστολή. Τότε η ϕ είναι θετική.*

Απόδειξη. Αφού η $\mathcal{B}$ μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα χώρο *Hilbert* H, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ για κάποιον H.
Σταθεροποιούμε ένα $x \in H$ με $\|x\| = 1$. Θέτοντας $f(a) = \langle \varphi(a)x, x \rangle$, έχουμε $f(1) = 1$ και $\|f\| \leq \|\phi\| \leq 1$ αφού φ συστολή. Οπότε $\|f\| = 1$. Από το λήμμα 1.1.9 αν a είναι θετικό τότε $f(a)$ θετικό, και αφού το x ήταν τυχόν, $\phi(a)$ θετικό.
Άρα η φ είναι θετική. □

Πρόταση 1.1.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα, και έστω $\mathcal{M}$ υπόχωρος της $\mathcal{A}$ με $1 \in \mathcal{M}$.*
Αν $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα και $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$ είναι μια unital συστολή, τότε η $\tilde{\varphi} : \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \to \mathcal{B}$ με $\tilde{\varphi}(a + b^*) = \varphi(a) + \varphi(b)^*$ είναι καλά ορισμένη και η μοναδική θετική επέκταση της φ στο $\mathcal{M} + \mathcal{M}^*$.

Απόδειξη. Αφού κάθε θετική απεικόνιση είναι αυτοσυζυγής (δηλαδη $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$), αν η φ όντως επεκτείνεται σε μια θετική $\tilde{\varphi}$ τότε ικανοποιείται η παραπάνω ισότητα.
Η $\tilde{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη: Αρκεί να δείξουμε ότι αν a και a^* ανήκουν στο M τότε $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$. Θέτουμε $\mathcal{S}_1 = \{a : a \in \mathcal{M}$ και $a^* \in \mathcal{M}\}$. Τότε το $\mathcal{S}_1$ είναι σύστημα τελεστών και φ είναι *unital* και συστολή άρα θετική. Από την πρόταση 1.1.6 έχουμε $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$. Έτσι η $\tilde{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη.
Μένει να δείξουμε ότι η $\tilde{\varphi}$ είναι θετική. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ για κάποιον χώρο Hilbert H. Σταθεροποιούμε $x \in H$ με $\|x\| = 1$. Θέτουμε $\tilde{p}(a) = \langle \tilde{\varphi}(a)x, x \rangle$.
Θα δείξουμε ότι $\tilde{p}$ είναι θετική, τότε και η $\tilde{\varphi}$ θα είναι θετική(ίδιο επιχείρημα με πριν).
Έστω $p : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ με $p(a) = \langle \varphi(a)x, x \rangle$, τότε $\|p\| = 1$ και από το θεώρημα Hahn-Banach η p επεκτείνεται σε μια $p_1 : \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \to \mathbb{C}$ με $\|p_1\| = 1$. Αλλά

από τη προηγούμενη πρόταση η p_1 είναι θετική, άρα και η $\tilde{p}$ είναι θετική αφού $p_1(a+b^*) = p(a) + \overline{p(b)} = \tilde{p}(a+b^*)$. □

1.2 Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα και $\mathcal{M}$ ένας υπόχωρος. Τότε ο $\mathcal{M}$ καλείται **χώρος τελεστών**.
Εάν έχουμε έναν χώρο τελεστών $\mathcal{M}$ τότε ο $M_n(\mathcal{M})$ μπορεί να θεωρηθεί ως υπόχωρος του $M_n(\mathcal{A})$ και εφοδιάζεται με τη μοναδική νόρμα της C^* άλγεβρας $M_n(\mathcal{A}) \subseteq M_n(\mathcal{B}(H)) \simeq \mathcal{B}(H \oplus H \oplus ... \oplus H)$ (n προσθετέοι στο ευθύ άθροισμα)
Αν $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα, $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών και $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση, θεωρούμε

$$\phi_n : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{B}) \quad \text{με} \quad \varphi_n((a_i, j)) = (\varphi(a_i, j)) \ .$$

Ορισμός 1.2.1. (1) Θα λέμε ότι η ϕ είναι n-**θετική** αν η ϕ_n είναι θετική και **πλήρως θετική** αν η ϕ είναι n-θετική για κάθε n .

(2) Θα λέμε ότι η ϕ είναι **πλήρως φραγμένη** αν $\sup \|\phi_n\| \leq \infty$.

(3) Θέτουμε $\|\phi\|_{cb} = \sup \|\phi_n\|$, νόρμα στον χώρο των πλήρως φραγμένων απεικονίσεων.

(4) Λέμε ότι η ϕ είναι **πλήρης ισομετρία** αν κάθε ϕ_n είναι ισομετρία.

(5) Λέμε ότι η ϕ είναι **πλήρης συστολή** αν $\|\phi\|_{cb} \leq 1$.

Παρατηρούμε ότι αν ϕ είναι n-θετική τότε ϕ είναι k-θετική για κάθε $k \leq n$. Επίσης $\|\phi_k\| \leq \|\phi_n\|$ για κάθε $k \leq n$.

Λήμμα 1.2.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα και $a, b \in \mathcal{A}$. Τότε :*

(1) $\|a\| \leq 1 \iff \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$ *είναι θετικό στην $M_2(\mathcal{A})$.*

(2) $a^*a \leq b \iff \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{bmatrix}$ *είναι θετικό στην $M_2(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. (1) Αναπαριστούμε την $\mathcal{A}$ σε ένα χώρο Hilbert H μέσω της αναπαράστασης $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ και θέτουμε $A = \pi(a)$.

Αν $\|A\| \leq 1$, τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle x + Ay, x \rangle + \langle A^*x + y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle Ay, x \rangle + \langle x, Ay \rangle + \langle y, y \rangle \qquad (1.5) \\
&\geq \|x\|^2 - 2\|A\| \cdot \|y\| \cdot \|x\| + \|y\|^2 \geq 0 \\
&\geq \|x\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \geq 0 \ .
\end{aligned}$$

Αφού τα x, y ήταν τυχόντα, έχουμε το ζητούμενο.
Αντίστροφα, αν $\|A\| > 1$, τότε υπάρχουν μοναδιαία διανύσματα x, y τέτοια ώστε

$$\langle Ay, x \rangle < -1$$

και τότε

$$\left\langle \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle < \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 = 0 \ .$$

Άρα ο πίνακας $\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix}$ δεν είναι θετικός.
(2) Γίνεται με παρόμοιο υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου

$$\left\langle \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle .$$

□

Πρόταση 1.2.3. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών, $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα και $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ μία μοναδιαία, 2-θετική απεικόνιση. Τότε η ϕ είναι συστολή.*

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathcal{S}$ με $\|a\| \leq 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\|\phi(a)\| \leq 1$. Τότε θα έχουμε $\|\phi\| \leq 1$, δηλαδή η ϕ θα είναι συστολή.
Έχουμε ότι το

$$\phi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \phi(a) \\ \phi(a)^* & 1 \end{bmatrix}$$

είναι θετικό στοιχείο της $M_2(\mathcal{B})$ αφού η ϕ είναι 2-θετική. Άρα, από το λήμμα 1.2.2 παίρνουμε

$$\|\phi(a)\| \leq 1 \ .$$

□

Πρόταση 1.2.4. *(ανισότητα του Schwarz) Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο unital C^* άλγεβρες, $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μοναδιαία και 2-θετική. Τότε $\phi(a)^*\phi(a) \le \phi(a^*a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & a^*a \end{bmatrix} \ge 0$$

αφού κάθε στοιχείο της μορφής a^*a είναι θετικό σε μία C^* άλγεβρα. Αφού η ϕ είναι 2-θετική, έχουμε

$$\phi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & a^*a \end{bmatrix} \right) \ge 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & \phi(a) \\ \phi(a)^* & \phi(a^*a) \end{bmatrix} \ge 0.$$

Από το λήμμα 1.2.2 έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο C^* άλγεβρες με μονάδα, $\mathcal{K}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{A}$ που περιέχει τη μονάδα, και έστω $\mathcal{S} = \mathcal{K} + \mathcal{K}^*$.*
Αν $\phi : \mathcal{K} \to \mathcal{B}$ είναι μοναδιαία και 2-συστολή (δηλαδή $\|\phi_2\| \le 1$), τότε η $\tilde{\phi} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$, όπου $\tilde{\phi}(a + b^*) = \phi(a) + \phi(b)^*$, είναι 2-θετική και συστολή.

Απόδειξη. Η ϕ είναι συστολή αφού $\|\phi\| \le \|\phi_2\| \le 1$, οπότε η $\tilde{\phi}$ είναι καλά ορισμένη από πρόταση 1.1.10.
Παρατηρούμε ότι $\mathcal{M}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_2(\mathcal{K}) + \mathcal{M}_2(\mathcal{K})^*$ και ότι $(\tilde{\phi})_2 = (\tilde{\phi_2})$. Από πρόταση 1.1.10, αφού ϕ_2 συστολή έχουμε ότι η $\tilde{\phi_2}$ είναι θετική και συνεπώς από την πρόταση 1.2.3, η $\tilde{\phi}$ είναι και συστολή. □

Πρόταση 1.2.6. *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο C^* άλγεβρες με μονάδα , $\mathcal{K}$ υπόχωρος του $\mathcal{A}$ που περιέχει τη μονάδα και έστω $\mathcal{S} = \mathcal{K} + \mathcal{K}^*$.*
Αν $\phi : \mathcal{K} \to \mathcal{B}$ μοναδιαία και πλήρως συστολή, τότε η $\tilde{S} \to \mathcal{B}$ είναι πλήρως θετική και πλήρως συστολή.

Απόδειξη. Αφού ϕ_n είναι μοναδιαία και συστολή $\Rightarrow \tilde{\phi_n}$ θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης ϕ_n συστολή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αφού $\tilde{\phi_{2n}} = (\tilde{\phi_n})_2$ θετική από την πρόταση 1.2.3 . □

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο C^* άλγεβρες .Παρατηρούμε ότι αν $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι $*-$ομομορφισμός (δηλαδή ομομορφισμός και διατηρεί το $*$) τότε π είναι πλήρως θετική και πλήρως συστολή , αφού κάθε $\pi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ είναι $*-$ομομορφισμός και οι $*-$ομομορφισμοί είναι θετικές απεικονίσεις και συστολές.
Έστω $x, y \in \mathcal{A}$, ορίζουμε $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ με $\varphi(a) = xay$. Παρατηρούμε ότι αν $(a_{i,j}) \in M_n(\mathcal{A})$ τότε

$$\|\varphi((a_{i,j}))\| = \|(xa_{i,j})\| \le \|x\|\|(a_{i,j})\|\|y\|$$

Άρα $\|\phi_n\| \leq \|x\|\|y\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπώς $\|\phi\|_{cb} \leq \|x\|\|y\|$.
Δηλαδή η ϕ είναι πλήρως φραγμένη.

Ο ίδιος υπολογισμός δείχνει ότι αν $x = y^*$ τότε ϕ είναι πλήρως θετική.

Συνδυάζοντας τα δύο παραδείγματα παίρνουμε ένα σημαντικό παράδειγμα μιάς πλήρως φραγμένης απεικόνισης. Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert και έστω $u_i : H_1 \to H_2, i = 1, 2$, δύο φραγμένοι τελεστές. Έστω επίσης ένας $*-$ομομορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_2)$. Ορίζουμε $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_1)$ ως εξής :

$$\phi(a) = u_2^* \pi(a) u_1 \ .$$

Τότε , η ϕ είναι πλήρως φραγμένη με $\|\phi\|_{cb} \leq \|u_1\|\|u_2\|$.
Επιπλέον, αν $u_1 = u_2$ τότε ϕ είναι πλήρως θετική.

Πρόταση 1.2.7. *Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ ένα σύστημα τελεστών , $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα, $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ πλήρως θετική .Τότε η φ είναι πλήρως φραγμένη και*

$$\|\phi(1)\| = \|\phi\| = \|\phi\|_{cb} \ .$$

Απόδειξη. Έχουμε προφανώς ότι $\|\phi(1)\| \leq \|\phi\| \leq \|\phi\|_{cb}$, έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $\|\phi\|_{cb} \leq \|\phi(1)\|$. Έστω $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathcal{S})$ με $\|A\| \leq 1$, και έστω I_n ο ταυτοτικός πίνακας του $M_n(\mathcal{A})$. Αφού ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} I_n & A \\ A^* & I_n \end{bmatrix}$$

είναι θετικός, έχουμε ότι και ο πίνακας

$$\phi_{2n}\left(\begin{bmatrix} I_n & A \\ A^* & I_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \phi_n(I_n) & \phi_n(A) \\ \phi_n(A)^* & \phi_n(I_n) \end{bmatrix}$$

είναι θετικός. Έτσι,

$$\|\phi_n(A)\| \leq \|\phi_n(I_n)\| = \|\phi(1)\| \ ,$$

λόγω του λήμματος 1.2.2. □

Πρόταση 1.2.8. *Έστω $\mathcal{S}$ ένας χώρος τελεστών, $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ φραγμένη γραμμική συνάρτηση. Τότε $\|f\|_{cb} = \|f\|$.*
Επιπλέον, αν $\mathcal{S}$ είναι σύστημα τελεστών και f θετική, τότε f πλήρως θετική.

Απόδειξη. Έστω $(a_{i,j}) \in M_n(\mathcal{S})$ και έστω $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ δύο μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{C}^n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle f_n((a_{i,j}))x, y\rangle| &= |\sum_{i,j} f(a_{i,j})x_j\bar{y_i}| = |f(\sum_{i,j} a_{i,j}x_j\bar{y_i}| \\ &\leq \|f\| \cdot \|\sum_{i,j} a_{i,j}x_j\bar{y_i}\| \ . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Έτσι, πρέπει να δείξουμε ότι το στοιχείο $\sum_{i,j} a_{i,j}x_j\bar{y_i}$ έχει νόρμα μικρότερη από $\|(a_{i,j})\|$. Παρατηρούμε ότι το το αθροισμα αυτό είναι ακριβώς η (1,1)-είσοδος του γινομένου

$$\begin{bmatrix} \bar{y_1}\cdot 1 & \cdots & \bar{y_n}\cdot 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\cdot 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n\cdot 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

όπου ο πρώτος και ο τρίτος πίνακας έχουν νόρμα ακριβώς 1 , αφού τα x, y έχουν επιλεγεί να είναι μοναδιαία διανύσματα. Άρα έχουμε το ζητούμενο.
Για να δείξουμε ότι η f είναι πλήρως θετική όταν f είναι θετική, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle f_n((a_{i,j}))x, x\rangle = f\left(\sum_{i,j} a_{i,j}x_j\bar{x_i}\right) \geq 0$$

όταν $(a_{i,j})$ είναι θετικός. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω γινόμενο με $y = x$, βλέπουμε ότι το άθροισμα στο οποίο υπολογίζεται η f είναι η (1,1)-είσοδος ενός θετικού πίνακα και έτσι είναι θετικό . □

Έστω X ένας συμπαγής χώρος Hausdorff, $C(X)$ η C^* άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων στον X. Κάθε στοιχείο $F = (f_{i,j}) \in M_n(C(X))$ μπορούμε να το θεωρούμε ως μια συνεχή συνάρτηση που παίρνει τιμές στους πίνακες και έτσι ο πολλαπλασιασμός και η απεικόνιση $*$ στην άλγεβρα $M_n(C(X))$ είναι ο κατά σημείο πολλαπλασιασμός και η απεικόνιση $*$ των συναρτήσεων που παίρνουν τιμες στους πίνακες. Συνεπώς, ένας τρόπος να κάνουμε την $M_n(C(X))$ να έχει τη δομή C^* άλγεβρας είναι να θέσουμε $\|F\| = \sup\{\|F(x)\| : x \in X\}$, ο οποίος από τη μοναδικότητα των C^* νορμών, είναι και ο μοναδικός. Με αυτές τις παρατηρήσεις, προκύπτει εύκολα το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω $\mathcal{S}$ χώρος τελεστών, $\varphi : \mathcal{S} \to C(X)$ μία φραγμένη και γραμμική απεικόνιση. Τότε $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$.*
Αν επιπλέον το $\mathcal{S}$ είναι σύστημα τελεστών και ϕ θετική τότε η ϕ είναι πλήρως θετική.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, ορίζουμε $\phi^x : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ με $\phi^x(a) = \phi(a)(x)$.
Από την προηγούμενη παράγραφο, έχουμε

$$\|\phi_n\| = \sup\{\|\phi_n^x\| : x \in X\} = \sup\{\|\phi^x\| : x \in X\} = \|\phi\|$$

άρα $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$.
Ομοίως, ισχύει και η ισοδυναμία $\phi_n((a_{i,j}))$ θετικό $\iff$ $\varphi_n^x((a_{i,j}))$ θετικό, οπότε προκύπτει και ο δεύτερος ισχυρισμός. □

Αποδεικνύουμε τώρα ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα για την ειδική περίπτωση όπου το πεδίο ορισμού μιάς θετικής απεικόνισης είναι ένας χώρος συνεχών συναρτήσεων. Πριν από αυτό, διατυπώνουμε ένα απλό αλλά χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 1.2.10. *Έστω $(p_{i,j})$ ένας θετικός πίνακας μιγαδικών αριθμών και q ένα θετικό στοιχείο μιας C^* άλγεβρας $\mathcal{B}$. Τότε, το στοιχείο $(q \cdot p_{i,j})$ είναι θετικό στην $M_n(\mathcal{B})$.*

Θεώρημα 1.2.11. *(Stinespring) Έστω $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα και $\phi : C(X) \to \mathcal{B}$ θετική.*
Τότε, η ϕ είναι πλήρως θετική.

Απόδειξη. Έστω $P(x)$ ένα θετικό στοιχείο της $M_n(C(X))$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi_n(P)$ είναι θετικό.
Έστω $\epsilon > 0$, παίρνουμε μία διαμέριση της μονάδας $\{u_l(x)\}$ και θετικούς πίνακες $P_l = (p_{i,j}^l)$ τέτοιους ώστε

$$\|P(x) - \sum_l u_l(x) P_l\| < \epsilon$$

Αλλά, $\phi_n(u_l \cdot P_l) = \phi_n((u_l \cdot p_{i,j}^l)) = (\phi(u_l) p_{i,j}^l)$ που είναι θετικό από το λήμμα 1.2.10 . Έτσι, το $\phi_n(P)$, είναι όριο από αθροίσματα από θετικά στοιχεία. Επειδή ο κώνος $M_n(\mathcal{B})^+$ είναι κλειστό σύνολο, έχουμε ότι $\phi_n(P)$ είναι θετικό. □

Λήμμα 1.2.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα. Τότε κάθε θετικό στοιχείο της $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ είναι ένα άθροισμα από n το πλήθος στοιχεία της μορφής $(a_i^* a_j)$ για κάποια $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν R είναι ένα θετικό στοιχείο της $M_n(\mathcal{A})$ του οποίου η κ-οστή γραμμή είναι $a_1, a_2, \cdots, a_n$ και παντού αλλού είναι 0 τότε $R^*R = (a_i^* a_j)$ άρα ένα τέτοιο στοιχείο είναι θετικό.
Έστω τώρα ένα θετικό $P \in M_n(\mathcal{A})$ με $P = B^*B$. Γράφουμε $B = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$, όπου R_k η κ-οστή γραμμή του B και αλλού 0.
Έχουμε $P = B^*B = R_1^*R_1 + \cdots + R_n^*R_n$, αφού $R_i^*R_j = 0$ όταν $i \neq j$. □

Παρατηρούμε ότι, από το προηγούμενο λήμμα, για να δείξουμε ότι μία $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι n-θετική αρκεί να ελέγξουμε αν $(\varphi(a_i^* a_j))$ είναι θετικό για κάθε $\{a_i, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq \mathcal{A}$.

Θεώρημα 1.2.13. *(Choi) Έστω $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα, $\phi : M_n \to \mathcal{B}$ και έστω $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ οι $n \times n$ πίνακες με 1 στην (i,j) θέση και 0 αλλού. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(1) η ϕ είναι πλήρως θετική.

(2) η ϕ είναι n-θετική.

(3) $(\phi(E_{i,j}))_{i,j=1}^n$ είναι θετικό στοιχείο της $M_n(\mathcal{B})$.

Απόδειξη. Προφανώς, (1)⇒(2) και αφού $(E_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n^+$ έχουμε και (2)⇒(3). Μένει να δείξουμε ότι (3)⇒(1).
Υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$. Σταθεροποιούμε ένα $k \in \mathbb{N}$ και έστω $x_1, \cdots, x_k \in H$ και $B_1, \cdots, B_k \in M_n$. Από το λήμμα 1.2.12 αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\sum_{i,j} \langle \phi(B_i^* B_j) x_j, x_i \rangle \geq 0$$

Γράφουμε $B_l = \sum_{r,s=1}^n$ και έτσι

$$B_i^* B_j = \sum_{r,s,t=1}^n \bar{b}_{r,s,i} b_{r,t,j} E_{s,t} \ .$$

Θέτουμε $y_{t,r} = \sum_{j=1}^k b_{r,t,j} x_j$ και τότε

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \langle \phi(B_i^*, B_j) x_j, x_i \rangle &= \sum_{r=1}^n \sum_{s,t}^n \left\langle \phi(E_{s,t}) \left(\sum_{i,j} \bar{b}_{r,s,i} b_{r,t,j} x_j \right), x_j \right\rangle \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s,t} \langle \phi(E_{s,t}) y_{t,r}, y_{s,r} \rangle \ . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Για κάθε r, το τελευταίο άθροισμα είναι θετικό αφού $(\phi(E_{s,t}))_{s,t=1}^n$ είναι θετικό. Έτσι, το αρχικό άθροισμα είναι άθροισμα από n θετικούς όρους. Άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Τελειώνουμε την παράγραφο με ένα χρήσιμο θεώρημα επέκτασης το οποίο είναι γνωστό ως το θεώρημα του Krein.

Θεώρημα 1.2.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ ένα σύστημα τελεστών. Αν $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ μία γραμμική και θετική απεικόνιση, τότε υπάρχει θετική επέκταση της ϕ σε όλη την άλγεβρα $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Επειδή $1 \in \mathcal{S}^+$ και η ϕ είναι θετική, έχουμε $\phi(1) \geq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi(1) > 0$, καθώς αν $\phi(1) = 0$, τότε $\phi = 0$ και το συμπέρασμα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\phi(1) > 0$ και διαιρώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi(1) = 1$. Επειδή η ϕ είναι γραμμική και θετική, είναι και φραγμένη, οπότε από τη πρόταση 1.2.8, είναι και πλήρως θετική.

Έστω $a \in \mathcal{S}$ με $\|a\| \leq 1$. Τότε, από το λήμμα 1.2.2, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$ είναι θετικός και αφου ϕ_2 θετική, έχουμε

$$\phi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix} \right) \geq 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \phi(a) \\ \overline{\phi(a)} & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Longrightarrow 1 - \phi(a)\overline{\phi(a)} \geq 0 \ .$$

Συνεπώς $|\phi(a)| \leq 1$. Τελικά, αφού $\phi(1) = 1$, έχουμε $\|\phi\| = 1$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει επέκταση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ της ϕ με $\|\psi\| = \|\phi\| = 1$ και $\psi(1) = \phi(1)$. Μένει να δείξουμε ότι η ψ είναι θετική. Αν πάρουμε ένα $a \in \mathcal{A}^+$ τότε $aa^* = a^*a$, και από το λήμμα 1.1.9 προκύπτει

$$\psi(a) \in \overline{conv}(\sigma(a)) \subseteq [0, +\infty) \quad \Longrightarrow \quad \psi(a) \geq 0 \ .$$

□

1.3 Πλήρως θετικές απεικονίσεις σε χώρους πινάκων

Θα συμβολίζουμε $M_n = M_n(\mathbb{C})$.
Έστω M ένας χώρος τελεστών και έστω $\{e_j\}_{j=1}^n$ η κανονική βάση του $\mathbb{C}^n$
Αν $A \in M_n$ τότε ορίζουμε $A_{(i,j)}$ το (i,j)-στοιχείο του A ώστε
$A_{(i,j)} = \langle Ae_j, e_i \rangle$.

Αν $\phi : M \to M_n$ γραμμική , ορίζουμε s_ϕ στον $M_n(M)$ ως εξής:

$$s_\phi((a_{i,j})) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \phi(a_{i,j})_{(i,j)} \ .$$

Εναλλακτικά , αν $x = e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus ... \oplus e_n$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{C}^{n^2}$, ορίζουμε

$$s_\phi((a_{i,j})) = \frac{1}{n} \langle \phi_n((a_{i,j}))x, x \rangle$$

όπου το εσωτερικό γινόμενο είναι του $\mathbb{C}^{n^2}$.

Η απεικόνιση $\phi \to s_\phi$ είναι γραμμική από τον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}(M, M_n)$ (το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $M \to M_n$) στον $\mathcal{L}(M_n(M), \mathbb{C})$. Παρατηρούμε ότι αν $1 \in M$ και $\phi(1) = 1$ τότε $s_\phi(I_n) = 1$.
Τέλος, αν $s : M_n(M) \to \mathbb{C}$ ορίζουμε $\phi_s : M \to M_n$ ως εξής

$$(\phi_s(a))_{(i,j)} = ns(a \otimes E_{i,j})$$

όπου $a \otimes E_{i,j}$ το στοιχείο του $M_n(M)$ όπου έχει για (i, j)-στοιχείο το a και 0 αλλού.
Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις $\phi \mapsto s_\phi$ και $s \mapsto \phi_s$ είναι η μία αντίστροφη της άλλης:
Έστω $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, M_n)$ και $s \in \mathcal{L}(M_n(\mathcal{M}), \mathbb{C})$. Θα δείξουμε ότι $s_{\phi_s} = s$ και $\phi_{s_\phi} = \phi$. Παίρνουμε $(a_{i,j}) \in M_n(\mathcal{M})$ και υπολογίζουμε

$$s_{\phi_s}((a_{i,j}) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \phi((a_{i,j}))_{(i,j)} = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} ns(a_{i,j} \otimes E_{i,j}) = s((a_{i,j}))$$

Επιπλέον, για κάθε $a \in \mathcal{M}$ και για κάθε $i, j = 1, \cdots, n$ έχουμε

$$(\phi_{s_\phi}(a))_{(i,j)} = ns_\phi(a \otimes E_{i,j}) = n \cdot \frac{1}{n}(\phi(a))_{(i.j)} \ ,$$

άρα έχουμε τα ζητούμενα.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών στην $\mathcal{A}$ και $\phi : \mathcal{S} \to M_n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η ϕ είναι πλήρως θετική.

(2) Η ϕ είναι n-θετική.

(3) Η s_ϕ είναι θετική.

Απόδειξη. (1)⇒(2) Άμεσο.
(2)⇒(3)Προφανές από τον εναλλακτικό ορισμό της s_φ.
(3)⇒(2) Έστω s_ϕ θετική. Από το θεώρημα 1.2.14 μπορούμε να επεκτείνουμε την s_ϕ από τον $M_n(\mathcal{S})$ σε μια $s : M_n(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ διατηρώντας τη θετικότητα.
Αφού η s επεκτείνει την s_ϕ, η απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to M_n$ που σχετίζεται με την s επεκτείνει την ϕ. Θα αποδείξουμε ότι η ψ είναι πλήρως θετική. Τότε και η ϕ θα είναι ως περιορισμός της ψ.
Έστω $m \in \mathbb{N}$. Για να αποδείξουμε ότι η ψ είναι m-θετική, αρκεί, από το λήμμα 1.2.13, να θεωρήσουμε ένα στοιχείο του $M_n(\mathcal{A})$ της μορφής $(a_i^* a_j)$.

Παίρνουμε ένα στοιχείο $x = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_m$, όπου $x_j = \sum_k \lambda_{j,k} e_k \ \in \mathbb{C}^n$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\langle \psi_m((a_i^* a_j))x, x\rangle &= \sum_{i,j} \langle \psi(a_i^* a_j) x_j, x_i\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{j,k} \overline{\lambda}_{i,l} \langle \psi(a_i^* a_j) e_k, e_l\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{j,k} \overline{\lambda}_{i,l} s(a_i^* a_j \otimes E_{l,k})\end{aligned} \tag{1.8}$$

Αν A_i είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η πρώτη σειρά είναι $(\lambda_{i,1}, \cdots, \lambda_{i,n})$ και οι υπόλοιπες είναι 0, τότε έχουμε

$$A_i^* A_j = \sum_{k,l} \overline{\lambda_{i,l}} \lambda_{j,k} E_{l,k}$$

Έτσι, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}\langle \psi_m((a_i^* a_j))x, x\rangle &= \sum_{i,j} s(a_i^* a_j \otimes A_i^* A_j) \\ &= s((\sum_i a_i \otimes A_i)^* (\sum_j a_j \otimes A_j)) \geq 0\end{aligned} \tag{1.9}$$

αφού s θετική και το στοιχείο είναι $(\sum_i a_i \otimes A_i)^* (\sum_j a_j \otimes A_j)$ είναι επίσης θετικό.
Έτσι, η ψ είναι m-θετική και αφού m τυχόν, προκύπτει ότι η ψ είναι πλήρως θετική. □

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών που περιέχεται στην $\mathcal{A}$ και $\phi : \mathcal{S} \to M_n$ πλήρως θετική απεικόνιση. Τότε, υπάρχει μια πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to M_n$ που επεκτείνει την ϕ.*

Απόδειξη. Έστω s_ϕ το θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στον $M_n(\mathcal{S})$ που σχετίζεται με την ϕ. Μπορούμε να το επεκτείνουμε σε ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές s στον $M_n(\mathcal{A})$ από το θεώρημα 1.2.14. Από το θεώρημα 1.3.1, η απεικόνιση ψ που σχετίζεται με το s είναι πλήρως θετική. Επιπλέον, αφού το s επεκτείνει το s_ϕ και η ψ επεκτείνει την ϕ. □

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{M}$ ένας υπόχωρος της $\mathcal{A}$ που περιέχει τη μονάδα και έστω $\phi : \mathcal{M} \to M_n$ με $\phi(1) = 1$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(1) ϕ *είναι πλήρης συστολή.*

(2) ϕ *είναι n-συστολή.*

(3) s_ϕ *είναι συστολή.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{S} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^*$. Προφανώς (1)$\Longrightarrow$(2) και (2)$\Longrightarrow$(3).
Υποθέτοντας το (3), αφού s_ϕ είναι unital συστολή, μπορεί να επεκταθεί σε μία θετική unital απεικόνιση $\tilde{s_\phi}$ στον $M_n(\mathcal{M}) + M_n(\mathcal{M})^* = M_n(\mathcal{S})$. Από το θεώρημα 1.3.1, το γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{s_\phi}$ σχετίζεται με μία πλήρως θετική απεικόνιση στον $\mathcal{S}$. Αυτή η απεικόνιση είναι προφανώς η $\tilde{\phi}$ όπου $\tilde{\phi}(x + y^*) = \phi(x) + \phi(y)^*$. Έτσι, $\tilde{\phi}$ είναι πλήρως θετική επομένως η ϕ πρέπει να είναι πλήρης συστολή. □

Πόρισμα 1.3.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{M}$ ένας υπόχωρος της $\mathcal{A}$ που περιέχει τη μονάδα και έστω $\phi : \mathcal{M} \to M_n$ n-συστολή με $\phi(1) = 1$. Τότε η ϕ επεκτείνεται σε μία πλήρως θετική απεικόνιση στην $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος είδαμε ότι $\tilde{\phi}$ είναι πλήρως θετική και έτσι από το θεώρημα 1.3.2 επεκτείνεται σε μία πλήρως θετική απεικόνιση στην $\mathcal{A}$. □

Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών και $\mathcal{S}^+$ τα θετικά του στοιχεία . Ορίζουμε

$$\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+ = \{\sum_i p_i \otimes Q_i \ : \ p_i \in \mathcal{S}^+, Q_i \in M_n^+\}$$

όπου το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$ είναι κώνος που περιέχεται στον κώνο $M_n(\mathcal{S})^+$.

Λήμμα 1.3.5. *Έστω $\phi : \mathcal{S} \to M_n$. Τότε ϕ είναι θετική αν και μόνο αν η s_ϕ δίνει θετικές τιμές στον κώνο $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$.*

Απόδειξη. Έστω $\phi : \mathcal{S} \to M_n$ θετική. Έστω $p \in \mathcal{S}^+$ και $Q \in M_n^+$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $s_\phi(p \otimes Q)$ είναι θετικό. Από το λήμμα 1.2.12 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Q = (\overline{a_i} a_j)$. Έτσι, $p \otimes Q = (\overline{a_i} a_j p)$, συνεπώς

$$ns_\phi(p \otimes Q) = \sum_{i,j} \phi(a_i a_j p)_{(i,j)} = \sum_{i,j} \overline{a_i} a_j \langle \phi(p) e_j, e_i \rangle = \langle \phi(p) x, x \rangle \geq 0$$

γιατί ϕ θετική, όπου $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$.
Αντίστροφα, έστω s_ϕ θετική στον $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$. Έστω $p \in \mathcal{S}^+$ και έστω $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ διάνυσμα του $\mathbb{C}^n$. Έχουμε

$$\langle \phi(p) x, x \rangle = \sum_{i,j} \langle \phi(\overline{a_i} a_j p) e_j, e_i \rangle = ns_\phi((\overline{a_i} a_j p)) \geq 0$$

γιατί $(\overline{a_i} a_j p) \in \mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$.
Άρα η ϕ είναι θετική. □

Διατυπώνουμε τώρα και αποδεικνύουμε το θεώρημα του Krein για κώνους που θα μας χρειαστεί στη συνέχεια.

Θεώρημα 1.3.6. *(Krein) Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα και έστω C ένας κλειστός κυρτός κώνος στον πραγματικό χώρο $\mathcal{A}_h = \{a \in \mathcal{A} : a = a^*\}$ τέτοιος ώστε $C \cap (-C) = \{0\}$. Αν $x \in \mathcal{A} \setminus C$, τότε υπάρχει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $s : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $s(C) \subseteq \mathbb{R}^+$ αλλά $s(x) \notin \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{A}_h + i\mathcal{A}_h$, οπότε, αν γράψουμε $x = x_1 + ix_2$ όπου $x_j \in \mathcal{A}_h$ για $j = 1, 2$, τότε τουλάχιστον ένα από τα x_j δεν ανήκει στον C. Έστω ότι $x_1 \notin C$. Το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{A}_h$ και $x_1 \in \mathcal{A}_h \setminus C$, οπότε, από διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχουν πραγματικό, $\mathbb{R}$-γραμμικό και φραγμένο συναρτησοειδές $\phi : \mathcal{A}_h \to \mathbb{R}$ και σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\phi(x_1) < c \quad \text{και} \quad \phi(y) \geq c \ \text{ για κάθε } \ y \in C \ .$$

Επειδή $0 \in C$, έχουμε $c \leq \phi(0) = 0$. Έστω $z \in C$. Επειδή C κώνος, έχουμε $n \cdot z \in C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι,

$$n\phi(z) = \phi(n \cdot z) \geq c \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \iff \quad \phi(z) \geq \frac{c}{n} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Καθώς $n \to \infty$, παίρνουμε $\phi(z) \geq 0$, δηλαδή $\phi(C) \subseteq \mathbb{R}^+$.
Επεκτείνουμε τώρα την ϕ σε μία μιγαδική γραμμική απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ θεωρώντας

$$\psi(x + iy) = \phi(x) + i\phi(y) \quad \text{για } \ x, y \in \mathcal{A}_h \ .$$

Η ψ, λόγω του ορισμού της, είναι προφανώς επέκταση της ϕ , οπότε η ψ είναι θετική στον C και $\phi(x) \notin \mathbb{R}^+$, αφού $\psi(x_1) = \phi(x_1) < 0$. □

Λήμμα 1.3.7. *Έστω $\mathcal{S}$ σύστημα τελεστών και $\phi : \mathcal{S} \to M_n$ θετική με $\phi(1) = P$. Έστω Q η προβολή στο σύνολο τιμών του P και έστω R θετικός με*

$$(I - Q)R = 0 \ , \ RPR = Q \ .$$

Έστω $\psi : \mathcal{S} \to M_n$ θετική και unital απεικόνιση.
Θέτουμε

$$\phi'(a) = R\phi(a)R + (I - Q)\psi(a)(I - Q) \ .$$

Τότε ισχύουν τα εξής :

(1) Η ϕ' είναι unital θετική απεικόνιση.

(2) Αν $(a_{i,j}) \in M_k(\mathcal{S})^+$ με $\phi_k((a_{i,j}))$ όχι θετικό , τότε $\phi'((a_{i,j}))$ επίσης όχι θετικό.

Απόδειξη. Δείτε στη σελίδα 42 στο [4]. □

Θεώρημα 1.3.8. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Κάθε θετική απεικόνιση $\phi : \mathcal{S} \to M_n$ είναι πλήρως θετική.

(2) Κάθε unital, θετική απεικόνιση $\phi : \mathcal{S} \to M_n$ είναι πλήρως θετική.

(3) $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$ είναι πυκνό υποσύνολο του $M_n(\mathcal{S})^+$.

Απόδειξη. Η κατεύθυνση (1) $\Longrightarrow$ (2) είναι προφανής. Επίσης, η κατεύθυνση (2) $\Longrightarrow$ (1) είναι άμεση από το λήμμα 1.3.7.
Δείχνουμε τώρα την ισοδυναμία (1) $\Longleftrightarrow$ (3) :
Έστω ότι το $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$ είναι πυκνό υποσύνολο του $M_n(\mathcal{S})^+$ και $\phi : \mathcal{S} \to M_n$ είναι θετική τότε από το λήμμα 1.3.5, η s_ϕ είναι θετική στον $M_n(\mathcal{S})^+$ και έτσι, από το θεώρημα 1.3.1, η ϕ είναι πλήρως θετική.
Αντίστροφα, αν $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$ δεν είναι πυκνό στον $M_n(\mathcal{S})^+$, τότε υπάρχει ένα $p \in M_n(\mathcal{S})^+$ με $p \notin \overline{\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+}$. Από το θεώρημα 1.3.6 υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησοειδές s στον $M_n(\mathcal{S})$ που είναι θετικό στον $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$, αλλά $s(p) \notin \mathbb{R}^+$. Η γραμμική απεικόνιση $\phi_s : \mathcal{S} \to M_n$, που προκύπτει από την s, είναι θετική από το λήμμα 1.3.5, αλλά όχι πλήρως θετική. □

Πόρισμα 1.3.9. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

(1) Για κάθε C^* άλγεβρα $\mathcal{B}$, κάθε θετική $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ είναι πλήρως θετική.

(2) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε θετική $\phi : \mathcal{S} \to M_n$ είναι πλήρως θετική.

(3) $\mathcal{S}^+ \otimes M_n^+$ είναι πυκνό υποσύνολο του $M_n(\mathcal{S})^+$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει την ισοδυναμία (2) $\Longleftrightarrow$ (3), και προφανώς (1) $\Longrightarrow$ (2). Μένει να αποδείξουμε την συνεπαγωγή (2) $\Longrightarrow$ (1).
Υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ για κάποιον χώρο Hilbert H . Έστω $(a_{i,j}) \in M_n(\mathcal{S})^+$, θα δείξουμε ότι $\phi_n((a_{i,j}))$ θετικό. Διαλέγουμε $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$ και παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i,j} \langle \phi(a_{i,j}) x_j, x_i \rangle \geq 0$$

Έστω $\mathcal{F}$ ο πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος που παράγεται από αυτά τα n διανύσματα και έστω $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{F})$ η compression της ϕ στον $\mathcal{F}$. Ταυτοποιώντας τον $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ με τον M_k, όπου $k = \dim(\mathcal{F})$ έχουμε ότι η ψ είναι πλήρως θετική από το (2) και έτσι

$$0 \leq \sum_{i,j} \langle \psi(a_{i,j})x_j, x_i \rangle = \sum_{i,j} \langle \phi(a_{i,j})x_j, x_i \rangle \ .$$

□

Ορισμός 1.3.10. Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών και έστω $x \in \mathcal{S}$. Λέμε ότι το $\mathcal{S}$ έχει μία **διαμέριση της μονάδας** για το x και ότι το x είναι **partitionable** στο $\mathcal{S}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathcal{S}^+$, με $\sum_i p_i \leq 1$ και μιγαδικοί $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, με $|\lambda_i| \leq \|x\|$ τέτοιοι ώστε

$$\|x - \sum_i \lambda_i p_i\| < \varepsilon$$

Λέμε ότι το $\mathcal{S}$ έχει μία διαμέριση της μονάδας για ένα υποσύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, αν κάθε $x \in \mathcal{M}$ είναι partitionable στο $\mathcal{S}$.

Λήμμα 1.3.11. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών και $x \in \mathcal{S}$, με $\|x\| \leq 1$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Το x είναι partitionable στο $\mathcal{S}$.

(2) Κάθε θετική απεικόνιση ϕ με πεδίο ορισμού το $\mathcal{S}$ ικανοποιεί την σχέση $\|\phi(x)\| \leq \|\phi(1)\|$.

(3) Το στοιχείο $\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^* & 1 \end{bmatrix}$ ανήκει στη κλειστή θήκη του $\mathcal{S}^+ \otimes M_2^+$.

Απόδειξη. Η απόδειξη ότι (1)$\Longrightarrow$(2) είναι ακριβώς όμοια με του θεωρήματος 1.1.4.
(2)$\Longrightarrow$(3) Έστω ότι δεν ισχύει το (3). Έστω $s : M_2(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές τέτοιο ώστε

$$s\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^* & 1 \end{bmatrix} \right) < 0$$

ενώ s είναι θετική στον $\mathcal{S}^+ \otimes M_2^+$. Έστω $\phi : \mathcal{S} \to M_2$ η γραμμική απεικόνιση που σχετίζεται με την s. Από το λήμμα 1.3.5, η ϕ είναι θετική. Αφού

$$\left\langle \begin{bmatrix} \phi(1) & \phi(x) \\ \phi(x)^* & \phi(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2s\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^* & 1 \end{bmatrix} \right) < 0$$

έχουμε ότι το στοιχείο

$$\phi_2\left(\begin{bmatrix}1 & x\\ x^* & 1\end{bmatrix}\right)$$

δεν είναι θετικό. Κατασκευάζοντας μία θετική unital απεικόνιση ϕ' όπως στο λήμμα 1.3.7, τότε από το (2) του λήμματος 1.3.7 έχουμε ότι

$$\phi'\left(\begin{bmatrix}1 & x\\ x^* & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & \phi'(x)\\ \phi'(x)^* & 1\end{bmatrix}$$

δεν είναι θετικός αριθμός. Έτσι, από λήμμα 1.2.2, έχουμε $\|\phi'(x)\| > 1 = \|\phi'(1)\|$, άτοπο.
(3)$\Longrightarrow$(1) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (3) και έστω $\varepsilon > 0$, $p_i \in \mathcal{S}^+$, $Q_i \in M_2^+, i = 1, \cdots, n$, τέτοια ώστε

$$\left\| \begin{bmatrix}1 & x\\ x^* & 1\end{bmatrix} - \sum_i p_i \otimes Q_i \right\| < \varepsilon \ .$$

Μπορούμε να γράψουμε $Q_i = \begin{bmatrix}r_i & \lambda_i\\ \bar{\lambda}_i & t_i\end{bmatrix}$, με $r_i \geq 0, t_i \geq 0$ για κάθε i. Θέτουμε $s_i = \frac{r_i+t_i}{2}$ και παρατηρούμε ότι αν $s_i = 0$, τότε $\lambda_i = 0$. Η προηγούμενη ισότητα συνεπάγεται τις επόμενες ανισότητες

$$1 - \varepsilon < \sum_i r_i p_i < 1 + \varepsilon \ ,$$

$$1 - \varepsilon < \sum_i t_i p_i < 1 + \varepsilon \ ,$$

$$\|x - \sum_i \lambda_i p_i\| < \varepsilon \ .$$

Έτσι,

$$1 - \varepsilon < \sum_i s_i p_i < 1 + \varepsilon \ .$$

Θέτοντας $\lambda_i/s_i = 0$ όταν $s_i = 0$ έχουμε

$$\|x - \sum_i (\lambda_i/s_i) s_i p_i\| < \varepsilon \ ,$$

με $|\lambda_i/s_i| \leq 1$. Άρα το x είναι partitionable . □

Άμεση συνέπεια του λήμματος είναι το επόμενο θεώρημα :

Θεώρημα 1.3.12. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$. Τότε κάθε θετική απεικόνιση ϕ με πεδίο ορισμού το $\mathcal{S}$ έχει νόρμα $\|\phi(1)\|$ αν περιοριστεί στον $\mathcal{M}$ αν και μόνο αν το $\mathcal{S}$ έχει μία διαμέριση της μονάδας για το $\mathcal{M}$.*

Πόρισμα 1.3.13. *Έστω $\mathcal{B}$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα , $\mathcal{A}$ μία υπάλγεβρα της $\mathcal{B}$ που περιέχει τη μονάδα και έστω $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{A}^*$. Τότε το $\mathcal{S}$ έχει μία διαμέριση της μονάδας για το $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 1.1.7, κάθε θετική απεικόνιση ϕ στον $\mathcal{S}$ ικανοποιεί την $\|\phi(a)\| \leq \|\phi(1)\| \cdot \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Έτσι, από το πόρισμα 1.3.9 , το $\mathcal{S}$ έχει μία διαμέριση της μονάδας για την $\mathcal{A}$. □

Κεφάλαιο 2

Γραμμικοί χώροι με διάταξη

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε διατεταγμένους γραμμικούς χώρους με μονάδα διάταξης. Ξεκινάμε με πραγματικούς γραμμικούς χώρους.

2.1 Πραγματικοί χώροι με διάταξη

Ορισμός 2.1.1. Αν V ένας πραγματικός γραμμικός χώρος, ένα μη κενό σύνολο $C \subseteq V$ λέγεται **κώνος** στον V αν έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

(1) $av \in C$ όταν $a \geq 0$ και $v \in C$.

(2) $v + w \in C$ όταν $v, w \in C$.

Αν V ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και V^+ ένας κώνος στον V, λέμε το ζεύγος (V, V^+) **διατεταγμένο πραγματικό γραμμικό χώρο** αν επιπλέον ισχύει και η ιδιότητα:
(3) $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$.

Σε κάθε διατεταγμένο γραμμικό χώρο, μπορούμε να ορίσουμε μια μερική διάταξη $\geq$ στον V θεωρώντας $u \geq v \Leftrightarrow u - v \in V^+$. Παρατηρούμε ότι αυτή η μερική διάταξη είναι αναλλοίωτη στις μεταφορές (δηλαδή $u \geq w \Rightarrow u + x \geq w + x$) και στον πολλαπλασιασμό με μη αρνητικό πραγματικό αριθμό (δηλαδή $u \geq w$ και $a \in [0, \infty) \Rightarrow au \geq aw$). Επίσης, παρατηρούμε ότι $u \in V^+ \iff u \geq 0$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος.

(1) Ένα στοιχείο $e \in V$ λέγεται **μονάδα διάταξης** για τον V αν για κάθε $u \in V$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε $re > u$.

(2) Μία μονάδα διάταξης $e \in V$ λέγεται **Αρχιμήδεια** αν ισχύει η συνεπαγωγή: $u \in V$ με $re + u \geq 0 \ \forall \ r > 0 \implies u \in V^+$.

(3) Ο κώνος V^+ λέγεται **πλήρης** αν $V = V^+ - V^+$.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης $e \in V$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(1) $e \in V^+$.

(2) Αν $u \in V$ και $re \geq u$ για κάποιο πραγματικό αριθμό $r > 0$, τότε $se \geq u \ \forall s \geq r$.

(3) Αν $u_1, u_2, ..., u_n \in V$, τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $re \geq u_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.

(4) V^+ είναι πλήρης κώνος.

(5) Αν $u_1, u_2, ..., u_n \in V^+$ και $u_1 + u_2 + ... + u_n = 0$, τότε $u_1 = u_2 = ... = u_n = 0$.

(6) Έστω $u_1, ..., u_n \in V^+$ και $a_1, ..., a_n \in [0.\infty)$. Αν $a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0$, τότε για κάθε $1 \leq i \leq n$ είτε $a_i = 0$ είτε $u_i = 0$.

Απόδειξη. Αφού το $e \in V$ είναι μονάδα διάταξης, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $re \geq -e$. Αυτό σημαίνει ότι $re + e \in V^+$ οπότε $e = (r+1)^{-1}(re + e) \in V^+$.
Για το (2), αφού $s - r \geq 0$ και από το (1) έχουμε ότι $e \in V^+$ παίρνουμε $(s - r)e \geq 0$. Συνεπώς, $se \geq re \geq u$
Για το (3), έστω $u_1, u_2, ..., u_n \in V$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχει $r_i > 0$ τέτοιος ώστε $r_ie \geq u_i$. Θέτουμε $r := \max\{r_1, ..., r_n\}$ και από το (2) παίρνουμε $re \geq u_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.
Για το (4), έστω $u \in V$. Από το (3) μπορούμε να βρούμε έναν πραγματικό αριθμό $r > 0$ τέτοιος ώστε $re \geq u$ και $re \geq -u$. Τότε , $re + u, re - u \in V^+$ άρα $u = \frac{re+u}{2} - \frac{re-u}{2} \in V^+ - V^+$.
Για το (5), θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$, το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n-1$,θα δείξουμε ότι ισχύει και για n. Αν $u_1 + ... + u_n = 0$ τότε $u_n = -u_1 - ... - u_n$. Τότε $u_n \in V^+ \cap -V^+$ άρα $u_n = 0$. Συνεπώς, $u_1 + ... + u_{n-1} = 0$ και από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε $u_i = ... = u_{n-1} = 0$.
Τέλος, το (6) είναι άμεσο από το (5) αφού κάθε $a_iu_i \in V^+$. □

Λήμμα 2.1.4. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e, και έστω $r_0 \in [0, \infty)$.*
Αν $u \in V$ και $re + u \geq 0 \ \forall r > r_0$, τότε $r_0e + u \geq 0$.

Απόδειξη. Εφόσον $re+u \geq 0 \; \forall r > r_0$ έχουμε $se+(r_0e+u) = (s+r_0)e+u \geq 0$ $\forall s > 0$, άρα παίρνουμε $r_0e + u \geq 0$ αφού η μονάδα είναι Αρχιμήδεια. $\square$

Θα μελετήσουμε τώρα θετικά $\mathbb{R}$-γραμμικά συναρτησοειδή, με πρώτο στόχο να αποδείξουμε ένα ανάλογο του θεωρήματος Hahn-Banach. Πρώτα θα παρατεθούν κάποιοι ορισμοί και ένα λήμμα.

Ορισμός 2.1.5. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός
;; χώρος και $S \subseteq V$. Λέμε ότι το S **μεγιστοποιεί** το V^+ αν για κάθε $u \in V^+$ υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $s \geq u$.

Παρατηρούμε ότι ένα S μεγιστοποιεί τον V^+ και $S \subseteq T$ τότε και το T μεγιστοποιεί τον V^+.
Επιπλέον, αν e μονάδα διάταξης για το (V, V^+) και E υπόχωρος του V με $e \in E$,τότε ο E μεγιστοποιεί τον V^+ (αφού αν $u \in V$ τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $re \geq u$ και $re \in E$ εφόσον E υπόχωρος).

Ορισμός 2.1.6. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος και V^+ πλήρης κώνος του V. Έστω E υπόχωρος του V που μεγιστοποιεί τον V^+, και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές.
Έστω $h \in V$. Ορίζουμε

$$l_f(h) := \sup\{f(z) : z \in L_h\},$$

$$u_f(h) := \inf\{f(z) : z \in U_h\}$$

όπου $L_h := \{z \in E : z \leq h\}$ και $U_h := \{z \in E : h \leq z\}$.

Παραρηρούμε ότι αν $z \in L_h$ και $w \in U_h$ τότε $z \leq w$.
Οπότε $l_f(h) \leq u_f(h)$.
Επιπλέον, αν $h \in E$ τότε $l_f(h) = f(h) = u_f(h)$.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος όπου ο V^+ πλήρης κώνος για τον V. Έστω E ένας υπόχωρος του V που μεγιστοποιεί τον V^+, $h \notin E$ και $f : E \to \mathbb{R}$ θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές.*
Έστω $W = \{ah + u : a \in \mathbb{R}, u \in E\}$ ο υπόχωρος του V που παράγεται απο τον E και το h.
Αν $\gamma \in \mathbb{R}$ και $l_f(h) \leq \gamma \leq u_f(h)$, θέτουμε $f_\gamma : W \to \mathbb{R}$ με

$$f_\gamma(ah + u) := a\gamma + f(u) \ .$$

Τότε το f_γ είναι θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές με $f_\gamma|_E = f$.
Επιπλέον, αν $g : W \to \mathbb{R}$ θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές με $g|_E = f$, τότε $l_f(h) \leq g(h) \leq u_f(h)$.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι το f_γ είναι καλά ορισμένο, γραμμικό και ότι $f_\gamma|E = f$.
Οπότε μένει να δείξουμε ότι f_γ είναι θετικό.
Έστω $ah + u \in W$ με $ah + u \geq 0$. Θα δείξουμε ότι $f_\gamma(ah + u) \geq 0$.
Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

1) Αν $a = 0$ τότε $u \geq 0$, οπότε $f_\gamma(ah + u) = 0\gamma + f(u) = f(u) \geq 0$ γιατί f θετικό.

2) Αν $a > 0$, τότε $ah + u \geq 0 \Longrightarrow h \geq (-\frac{1}{a})u \Longrightarrow (-\frac{1}{a})u \in L_h$.

   Έτσι, $(-\frac{1}{a})f(u) \leq l_f(h) \leq \gamma \Longrightarrow 0 \leq f(u) + a\gamma = f_\gamma(ah + u)$

3) Αν $a < 0$, τότε $-a > 0$ και $(-\frac{1}{a})u \geq h \Rightarrow (-\frac{1}{a})u \in U_h \Rightarrow \gamma \leq (-\frac{1}{a})f(u)$.

   Έπεται $0 \leq (-a)[(-\frac{1}{a})f(u) - \gamma] = f_\gamma(u + ah)$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, έστω $g : W \to \mathbb{R}$ θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές με $g|E = f$, τότε για κάθε $z \in L_h$ και για κάθε $w \in U_h$ έχουμε $z \leq h \leq w$. Επίσης, η g είναι θετική απεικόνιση και ταυτίζεται με την f στο E(συνεπώς και στα L_h, U_h), οπότε έχουμε

$$f(z) = g(z) \leq g(h) \leq g(w) = f(w) \ .$$

Παίρνοντας supremum ως προς $z \in L_h$ και infimum ως προς $w \in U_h$, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.1.8. *Έστω (V, V^+) διατεταγμένος πραγματικός χώρος και V^+ πλήρης κώνος. Αν E υπόχωρος του V που μεγιστοποιεί τον V^+ και αν $f : E \to \mathbb{R}$ θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές στον E, τότε υπάρχει θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_E = f$*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{C} = \{(E', f')$, όπου E' υπόχωρος του V, f' θετικό και γραμμικό στον E' με $f|_E = f\}$
Ορίζουμε μια μερική διάταξη στον $\mathcal{C}$ ως εξής:

$$(E_1, f_1) \leq (E_2, f_2) \iff E_1 \subseteq E_2 \ \text{ και } \ f_2|_{E_1} = f_1 \ .$$

Έστω $S = \{(E_\lambda, f_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ αλυσίδα στον $\mathcal{C}$.
Ορίζουμε $E_0 := \cup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ και $f_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ με $f_0(x) := f_\lambda(x)$ αν $x \in E_\lambda$.
Παρατηρούμε ότι ο E_0 είναι υπόχωρος γιατί S αλυσίδα και επίσης το f_0 είναι καλά ορισμένο και θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στον E_0. Έτσι , το ζεύγος

(E_0, f_0) είναι άνω φράγμα για την S.
Από Zorn, ο $\mathcal{C}$ έχει μεγιστικό στοιχείο , έστω $(\tilde{E}, \tilde{f})$
Θα δείξουμε ότι $\tilde{E} = V$. Έστω ότι $\tilde{E} \neq V$, τότε ,αφού $V = V^+ - V^+$, υπάρχει $p \in V^+ \setminus \tilde{E}$.
Αν $W := span_{\mathbb{R}}\{p\} \cup \tilde{E}$, τότε $\tilde{E}$ γνήσιος υπόχωρος του W.
Επιπλέον, αφού $E \subseteq \tilde{E}$ και το E μεγιστοποιεί τον V^+, έπεται ότι και το $\tilde{E}$ μεγιστοποιεί τον V^+.
Από το λήμμα 2.1.7 παίρνουμε ότι το $\tilde{f}$ επεκτείνεται σε ένα θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό f_W στον W.
Τότε όμως $(W, f_W) \in \mathcal{C}$ και είναι γνήσια μεγαλύτερο από το $(\tilde{E}, \tilde{f})$, άτοπο. □

Πόρισμα 2.1.9. *Έστω (V, V^+) διατεταγμένος γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Αν E υπόχωρος του V με $e \in E$,τότε κάθε θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό $f : E \to \mathbb{R}$ επεκτείνεται σε ένα θετικό γραμμικό $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_E = f$.*

Απόδειξη. Αφού $e \in E$, το E μεγιστοποιεί τον V^+, οπότε για να εφαρμόσουμε το θεώρημα, μένει να δείξουμε ότι ο V^+ είναι πλήρης κώνος. Αυτό όμως είναι ακριβώς το (4) της πρότασης 2.1.3. □

Ορισμός 2.1.10. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e.Ένα θετικό $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές λέγεται **κατάσταση** αν $f(e) = 1$. Το σύνολο όλων των καταστάσεων του V λέγεται **χώρος καταστάσεων** του V.

Το προηγούμενο πόρισμα με άλλα λόγια μας λέει ότι ο χώρος καταστάσεων ενός V με μονάδα διάταξης e είναι πάντα μη κενός.
Για παράδειγμα, το συναρτησοειδές $f(re) = r$ είναι θετικό στον $E = span_{\mathbb{R}}\{e\}$ και από το πόρισμα επεκτείνεται στον V .

Θεώρημα 2.1.11. *Έστω (V, V^+, e) διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με μονάδα e.*
Αν $u \in V$ τότε

$$\alpha := \sup\{r \in \mathbb{R} : re \leq u\} \leq \inf\{s \in \mathbb{R} : u \leq se\} := \beta$$

και $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει κατάσταση $f_\gamma : V \to \mathbb{R}$ με $f_\gamma(u) = \gamma$.

Απόδειξη. Έστω $E := \{re : r \in \mathbb{R}\}$ και $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(re) = r$.
Τότε, $\alpha = l_f(u)$ και $\beta = u_f(u)$.
Από το λήμμα 2.1.7 , $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]$ το $\mathbb{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές g_γ στον $W = \{re + tu : r, t \in \mathbb{R}\}$ με

$$g_\gamma(re + tu) = r + t\gamma$$

είναι θετικό και επεκτείνεται σε ένα $f_\gamma : V \to \mathbb{R}$ όπου $f_\gamma(e) = 1, f_\gamma(u) = \gamma$, δηλαδή το f_γ είναι η ζητούμενη κατάσταση. □

Πόρισμα 2.1.12. *Έστω $u \in V$ και α, β όπως στο παραπάνω θεώρημα. Τότε*

$$\{f(u) : f \ \ \textit{κατάσταση}\} = [\alpha, \beta] \ .$$

Απόδειξη. Το προηγούμενο θεώρημα δίνει τον εγκλεισμό $[\alpha, \beta] \subseteq \{f(u) : f \ \ \text{κατάσταση}\}$.
Ανάποδα, έστω μια κατάσταση $f : V \to \mathbb{R}$.
Έχουμε $re \leq u \Longrightarrow f(re) \leq f(u) \Longrightarrow r \leq f(u) \Longrightarrow f(u) \geq \alpha$.
Όμοια, $f(u) \leq \beta$. Τελικά , $\{f(u) : f \ \text{κατάσταση}\} \subseteq [\alpha, \beta]$ □

Πρόταση 2.1.13. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα e.*
Αν $v \in V$ και $f(v) = 0$ για κάθε κατάσταση $f : V \to \mathbb{R}$, τότε $v = 0$.

Απόδειξη. Από το παραπάνω πόρισμα, αν $f(v) = 0$ για κάθε κατάσταση f τότε $\alpha = \beta = 0$.
Έχουμε

$$\alpha = 0 \Longrightarrow \ v \geq (-r)e \ \ \forall r > 0 \Longrightarrow \ re + v \geq 0 \ \ \forall r > 0 \ .$$

Αφού e Αρχιμήδεια , προκύπτει $v \in V^+$.
Όμοια,

$$\beta = 0 \Longrightarrow \ re \geq v \ \ \forall r > 0 \ \ \Longrightarrow \ -v \in V^+ \ .$$

Αφού $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$, έπεται $u = 0$. □

Πρόταση 2.1.14. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e.*
Αν $v \in V$ και $f(v) \geq 0$ για κάθε κατάσταση $f : V \to \mathbb{R}$ τότε $v \in V^+$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha := \sup\{r : re \leq v\}$. Από το θεώρημα 2.1.11 υπάρχει κατάσταση $f_\alpha : V \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f_\alpha(v) = \alpha$. Από υπόθεση έχουμε $\alpha \geq 0$.
Έτσι,

$$re \leq v \ \ \forall r < 0 \quad \Longrightarrow \quad se + v \geq 0 \ \ \forall s > 0 \ .$$

Αφού e Αρχιμήδεια, έπεται $v \in V^+$. □

Ορισμός 2.1.15. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός χώρος με μονάδα διάταξης e.
Αν $v \in V$, θέτουμε

$$\|v\| := \inf\{r \in \mathbb{R} : re + v \geq 0 \ \ \text{και} \ \ re - v \geq 0\} \ .$$

Η $\| \cdot \|$ λέγεται **νόρμα διάταξης** στον V .

Λήμμα 2.1.16. *Ισχύει* $\|v\| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ *όπου* α, β *όπως στο θεώρημα 2.1.11 .*

Απόδειξη. Είναι

$$re + v \geq 0 \text{ και } re - v \geq 0 \iff -re \leq v \leq re \ .$$

και ένα τέτοιο r είναι αναγκαστικά μη αρνητικό.
Έτσι, για κάθε τέτοιο r έχουμε

$$-r \geq \alpha \leq \beta \leq r \Rightarrow r \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\} \Rightarrow \|v\| \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\} \ .$$

Ανάποδα, αν $t > \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ τότε

$$-t < \alpha \text{ και } \beta < t \Rightarrow -te \leq v \leq te \Rightarrow \|v\| \leq t \quad \forall t > \max\{|\alpha|, |\beta|\} \ .$$

Συνεπώς, αφού το t ήταν τυχόν, έπεται $\|v\| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. □

Πρόταση 2.1.17. *Αν* (V, V^+) *ένας διατεταγμένος πραγματικός χώρος με μονάδα δίαταξης* e*, τότε η* $\|.\|$ *είναι ημινόρμα στον* V *και για κάθε* $v \in V$ *ισχύει*

$$\|v\| = \sup\{|f(v)| : f : V \to \mathbb{R} \ \text{ κατάσταση}\} \ .$$

Επιπλέον, αν e *Αρχιμήδεια τότε η* $\|.\|$ *είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Έστω $v \in V$ και α, β όπως προηγουμένως.
Καθώς $\{f(v) : f \ \text{ κατάσταση}\} = [\alpha, \beta]$ έχουμε

$$\sup\{|f(v)| : f \ \text{ κατάσταση}\} = \sup\{|\gamma| : \alpha \leq \gamma \leq \beta\} = \max\{|\alpha|, |\beta|\} = \|v\| \ .$$

Έτσι,

$$\|tv\| = \sup\{|f(tv)| : f \text{ κατάσταση}\} = \sup\{|t||f(v)| : f \text{ κατάσταση}\} = |t|\|v\| \ .$$

Επίσης, για $v, w \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|v + w\| &= \sup\{|f(v + w)| : f \ \text{ κατάσταση}\} \\ &\leq \sup\{|f(v)| + |f(w)| : f \ \text{ κατάσταση}\} \leq \|v\| + \|w\| \ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Άρα $\|\cdot\|$ ημινόρμα.
Αν επιπλέον η e είναι Αρχιμήδεια, από την πρόταση 2.1.13 έπεται ότι $\|\cdot\|$ νόρμα. □

Πρόταση 2.1.18. *Έστω* (V, V^+) *ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης* e*.*
Αν $f : V \to \mathbb{R}$ *θετικό* $\mathbb{R}$*-γραμμικό συναρτησοειδές, τότε* f *συνεχής (στη τοπολογία της* $\|\cdot\|$*), και* $\|f\| = f(e)$ *.*
Συγκεκριμένα $|f(v)| \leq f(e)\|v\| \ \ \forall v \in V$ *.*

Απόδειξη. Έστω $v \in V$. Αν $r > \|v\|$ τότε

$$-re \leq v \leq re \implies -f(re) \leq f(r) \leq f(re) \implies$$

$$|f(v)| \leq f(re) \implies \|f(v)| \leq f(e)\|v\| \ .$$

Άρα f φραγμένη, δηλαδή συνεχής.
Επιπλέον, από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε $\|f\| \leq f(e)$. Όμως $|f(e)| \leq \|f\|\|e\| = \|f\|$ άρα τελικά $\|f\| = f(e)$. □

Πρόταση 2.1.19. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e και $\|.\|$ η ημινόρμα διάταξης.*
Αν $f : V \to \mathbb{R}$ ένα $\mathbb{R}$-γραμμικό και συνεχές συναρτησοειδές και αν $\|f\| = f(e)$, τότε f θετικό.

Απόδειξη. Έστω $v \in V$. Για κάθε $r > \|v\|$ έχουμε $0 \leq v \leq re$ και συνεπώς $0 \leq re - v \leq re$.
Έπεται $\|re - v\| \leq r$.
Αφού f συνεχής και $\|f\| = f(e)$ έχουμε

$$|f(re - v)| \leq \|f\| \ \|re - v\| \ \leq f(e)r$$

$$\implies f(re - v) \leq f(e)r \implies rf(e) - f(v) \leq rf(e) \implies f(v) \geq 0 \ .$$

Άρα f θετική. □

Θεώρημα 2.1.20. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e.*
Τότε η ημινόρμα διάταξης $\| \cdot \|$ είναι η μοναδική ημινόρμα στον V με τις ιδιότητες:

1) $\|e\| = 1$.

2) Αν $-w \leq v \leq w$ τότε $\|v\| \leq \|w\|$.

3) Αν $f : V \to \mathbb{R}$ κατάσταση, τότε $|f(v)| \leq \|v\|$.

Απόδειξη. Για το 1), αφού $f(e) = 1$ για κάθε κατάσταση, από τον χαρακτηρισμό της πρότασης 2.1.17 έπεται το ζητούμενο.
Για το 2), έστω $r > \|w\|$, τότε

$$-re \leq w \leq re \implies -re \leq -w \leq v \leq w \leq re \implies \|v\| \leq r \ .$$

Αφού το $r > \|w\|$ ήταν τυχόν, έπεται $\|v\| \leq \|w\|$
Το 3) το έχουμε αποδείξει στο λήμμα 2.1.17.
Για τη μοναδικότητα:
Έστω $\|.\|'$ ημινόρμα στον V με αυτές τις 3 ιδιότητες.
Έστω $v \in V$ και $r > \|v\|$. Τότε $-re \leq v \leq re$.
Από τις ιδιότητες 1) και 2) για την $\|.\|'$ έχουμε

$$\|v\|' \leq \|re\|' = r\|e\|' = r \ .$$

Έτσι, $\|v\|' \leq \|v\|$.
Επίσης, η 3) μας δίνει $\sup\{|f(v)| : f \ \text{κατάσταση}\} \leq \|v\|'$. Από πρόταση 2.1.17 έπεται $\|v\| \leq \|v\|'$.
Τελικά, $\|v\| = \|v\|'$. □

Θεώρημα 2.1.21. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος πραγματικός γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e και έστω $\|.\|$ η ημινόρμα διάταξης στον V. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1) *Η e είναι Αρχιμήδεια.*

2) *Το V^+ είναι κλειστό υποσύνολο του V στην τοπολογία της $\| \cdot \|$.*

3) *$-\|v\|e \leq v \leq \|v\|e \quad \forall v \in V$.*

Απόδειξη. 1) $\Longrightarrow$ 2) :
Έστω e Αρχιμήδεια. Έστω $v \in V$ με v να είναι όριο στοιχείων του V^+. Τότε, για κάθε $r > 0$ υπάρχει $v_r \in B_r(v) \cap V^+$ όπου $B_r(v) := \{w \in V : \|w - v\| < r\}$.
Τότε, $\|u - v_r\| < r$ και $re + u - v_r \geq 0$.
Αφού $v_r \geq 0$ έπεται $re + v \geq 0$ για κάθε $r > 0$ και έτσι, εφόσον e Αρχιμήδεια, παίρνουμε $v \in V^+$.
2) $\Longrightarrow$ 1) :
Έστω V^+ κλειστό στη τοπολογία της $\|.\|$.
Έστω $v \in V$ τέτοιο ώστε $re + v \geq 0 \quad \forall r > 0$
Έχουμε $\|re\| = r\|e\| = r$ δηλαδή για κάθε $r > 0$ είναι $re + v \in B_{2r}(v) \cap V^+$.
Έτσι, το v είναι όριο στοιχείων του V^+ και αφού V^+ κλειστό, έπεται $v \in V^+$.
1) $\Longrightarrow$ 3) Έστω $v \in V$. Αφού $\|v\| := \inf\{r \in \mathbb{R} : re + v \geq 0 \ \text{ και } \ re - v \geq 0\}$ έχουμε $re + v \geq 0$ και $re - v \geq 0 \quad \forall r > \|v\|$. Τότε $se + (\|v\|e + v) \geq 0 \quad \forall s > 0$ και αφού e Αρχιμήδεια έπεται $\|v\|e + v \geq 0$. Όμοια παίρνουμε και την ανισότητα $\|v\|e - v \geq 0$.
3) $\Longrightarrow$ 1) Έστω $v \in V^+$ με $re + v \in V^+ \quad \forall r > 0$. Θεωρούμε το στοιχείο $\|v\|e - v$.
Από υπόθεση, $\|v\|e - v \geq 0$ και έτσι $re + (\|v\|e - v) \geq 0 \quad \forall r > 0$ οπότε και $\forall r > \|v\|$.

Επιπλέον, αφού $re + v \geq 0 \quad \forall r > 0$ έπεται $(r - \|v\|)e + v \geq 0 \quad \forall r > \|v\|$ δηλαδή $re - (\|v\|e - v) \geq 0 \quad \forall r > \|v\|$.
Αυτές οι δύο ανισότητες συνεπάγονται ότι $\|\|v\|e - v\| \leq \|v\|$.
Από το 3) έχουμε

$$v\|e - v \leq \|\|v\|e - v\|e \implies \|v\|e - v \leq \|v\|e \implies v \geq 0 \ .$$

$\square$

2.2 Μιγαδικοί *-γραμμικοί χώροι με διάταξη

Τώρα θα θεωρήσουμε μιγαδικούς γραμμικούς χώρους με μια ενέλιξη $*$ και θα περιγράψουμε δομές διάταξης σε τέτοιους χώρους.

Ορισμός 2.2.1. Έστω V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος μαζί με μία απεικόνιση $* : V \to V$ με τις ιδιότητες:

1) $(v^*)^* = v$ για κάθε $v \in V$.

2) $(\lambda v + u)^* = \bar{\lambda} v^* + u^*$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και $v, u \in V$.

Τότε ο V λέγεται $*$-γραμμικός χώρος.

Αν V είναι ένας $*$-γραμμικός χώρος, θέτουμε $V_h := \{x \in V : x^* = x\}$.Τα στοιχεία του V_h λέγονται τα **αυτοσυζυγή** στοιχεία του V. Παρατηρούμε εύκολα ότι το V_h είναι πραγματικός υπόχωρος του V, και ότι κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται μοναδικά $v = x + yi$ όπου $x, y \in V_h$. Συγκεκριμένα $x = \frac{v+v^*}{2}$ και $y = \frac{v-v^*}{2}$. Καλούμε τα x, y το **πραγματικό** και **φανταστικό μέρος** του v και γράφουμε

$$\mathrm{Re}(v) := \frac{v + v^*}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}(v) := \frac{v - v^*}{2i} \ .$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $V \cong V_h \oplus iV_h$ ως πραγματικοί διανυσματικοί χώροι.

Ορισμός 2.2.2. Αν V ένας $*$-γραμμικός χώρος, λέμε το ζεύγος (V, V^+) **διατεταγμένο $*$-γραμμικό χώρο** αν $V^+ \subseteq V_h$ και ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

(1) V^+ είναι κώνος στον V_h .

(2) $V^+ \bigcap -V^+ = \{0\}$.

Στον V_h ορίζεται μία μερική διάταξη θεωρώντας

$$v \geq w \iff v - w \in V^+ \ .$$

Ορισμός 2.2.3. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος. Λέμε ότι ένα στοιχείο $e \in V_h$ είναι **μονάδα διάταξης** αν $\forall x \in V_h$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε $re \geq x$.
Λέμε μία μονάδα διάταξης e **Αρχιμήδεια** αν όποτε $x \in V_h$ και $re + x \geq 0$ για κάθε $r > 0$ τότε έπεται $x \geq 0$.

Τώρα θα μελετήσουμε θετικές απεικονίσεις και καταστάσεις σε $*$-γραμμικούς χώρους σε αναλογία με τους πραγματικούς χώρους που ειδαμε προηγουμένως.

Ορισμός 2.2.4. Έστω (V, V^+) και (W, W^+) δύο διατεταγμένοι $*$-γραμμικοί χώροι με μονάδες διάταξης e και e' αντίστοιχα.
Μία γραμμική απεικόνιση $\phi : V \to W$ λέγεται **θετική** αν $v \in V^+ \Rightarrow \phi(v) \in W^+$ και **μοναδιαία** αν $\phi(e) = e'$.
Μία γραμμική απεικόνιση $\phi : V \to W$ λέγεται **ισομορφισμός διάταξης** αν η ϕ είναι επί και ισχύει η ισοδυναμία:

$$v \in V^+ \iff \phi(v) \in W^+ \ .$$

Λήμμα 2.2.5. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης και (W, W^+) ένας διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος. Αν $\phi : V \to W$ θετική γραμμική απεικόνιση, τότε $\phi(v^*) = \phi(v)^*$ για κάθε $v \in V$.*

Απόδειξη. Αφού η ϕ είναι θετική και $V_h = V^+ - V^+$, έχουμε $\phi(V_h) \subseteq W_h$.
Έτσι, για κάθε $v \in V$, αν γράψουμε $v = x + yi$ όπου $x, y \in V_h$, έχουμε

$$\phi(v^*) = \phi(x - yi) = \phi(x) - i\phi(y) = (\phi(x) + i\phi(y))^* = \phi(x + yi)^* = \phi(v)^*.$$

□

Ορισμός 2.2.6. Έστω (V, V^+) διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος.
Αν $f : V_h \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tilde{f} : V \to \mathbb{C} \ \ \textit{με} \ \ \tilde{f}(v) := f(\mathrm{Re}(v)) + if(\mathrm{Im}(v)) \ .$$

Η παρακάτω πρόταση δείχνει την σύνδεση μίας f με την αντίστοιχη $\tilde{f}$.

Πρόταση 2.2.7. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος. Αν $f : V_h \to \mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική τότε $\tilde{f} : V \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική. Επίσης f είναι θετική αν και μόνο αν $\tilde{f}$ είναι θετική και f είναι κατάσταση αν και μόνο αν $\tilde{f}$ είναι κατάσταση.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $v, w \in V$. Γράφουμε $\lambda = a + ib$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $v = x + iy, w = x' + iy'$ όπου $x, y, x', y' \in V_h$.
Αν f είναι γραμμική,τότε

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\lambda v + w) &= \tilde{f}((a+ib)(x+iy) + (x'+iy')) \\
&= \tilde{f}((ax - by + x') + i(bx + ay + y')) \\
&= f(ax - by + x') + if(bx + ay + y') \\
&= (af(x) - bf(y) + f(x')) + i(bf(x) + af(y) + f(y')) \\
&= (a+ib)(f(x) + if(y)) + (f(x') + if(y')) \\
&= \lambda \tilde{f}(v) + \tilde{f}(w) \ .
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Άρα $\tilde{f}$ γραμμική.
Επιπλέον, αφού $\tilde{f}(V_h) = f(V_h)$ και $f(e) = \tilde{f}(e)$ έχουμε τις δύο ισοδυναμίες. □

Πρόταση 2.2.8. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e.*
Αν $f : V \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική τότε f είναι θετική αν και μόνο αν $f = \tilde{g}$ για κάποια θετική $\mathbb{R}$-γραμμική $g : V_h \to \mathbb{R}$.

Απόδειξη.($\Longleftarrow$) Έχουμε $f(V^+) = g(V^+) \subseteq [0, \infty)$ άρα f θετική.

($\Longrightarrow$) Έστω $f : V \to \mathbb{C}$ θετική. Επειδή V^+ πλήρης κώνος στον V_h, κάθε $x \in V_h$ γράφεται $x = x^+ - x^-$ με $x^+, x^- \in V^+$.
Έτσι, $f(x) = f(x^+) - f(x^-) \in \mathbb{R}$, άρα $f(V_h) \subseteq \mathbb{R}$.
Έστω $g := f|_{V_h}$. Τότε η $g : V_h \to \mathbb{R}$ είναι θετική $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση και για κάθε $v \in V$ με $v = x + yi$ με $x, y \in V_h$ έχουμε

$$\tilde{g}(v) = g(x) + ig(y) = f(x) + if(y) = f(x + iy) = f(v) \ .$$

Άρα $f = \tilde{g}$

□

Πρόταση 2.2.9. *Έστω (V, V^+) διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e. Αν $v \in V$ και $f(v) = 0$ για κάθε κατάσταση $f : V \to \mathbb{C}$ τότε $v = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $v = x + yi$ όπου $x, y \in V_h$. Τότε για κάθε κατάσταση $g : V_h \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\tilde{g} : V \to \mathbb{C}$ είναι επίσης κατάσταση και από υπόθεση

$$\tilde{g}(v) = 0 \implies g(x) + ig(y) = 0 \implies g(x) = g(y) = 0 \ .$$

Από την πρόταση 2.1.14 έχουμε $x = y = 0$ άρα $v = 0$. □

Όμοια, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες προτάσεις για την πραγματική περίπτωση παίρνουμε και την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.2.10. *Έστω (V, V^+) διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e. Αν $v \in V$ και $f(v) \geq 0$ για κάθε κατάσταση $f : V \to \mathbb{C}$ τότε $v \in V^+$.*

Ορισμός 2.2.11. Έστω V $*$-γραμμικός χώρος. Μία ημινόρμα (νόρμα) στον V καλείται $*$-ημινόρμα ($*$-νόρμα) αν $\|v^*\| = \|v\|$ για κάθε $v \in V$.

Λήμμα 2.2.12. *Έστω V $*$-γραμμικός χώρος και $\|.\|$ μία $*$-ημινόρμα στον V.*
Τότε για κάθε $v \in V$ έχουμε $\|\operatorname{Re}(v)\| \leq \|v\|$ και $\|\operatorname{Im}(v)\| \leq \|v\|$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|Re(v)\| &= \frac{1}{2}\|\operatorname{Re}(v) + i\operatorname{Im}(v) + \operatorname{Re}(v) - i\operatorname{Im}(v)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\operatorname{Re}(v) + i\operatorname{Im}(v)\| + \frac{1}{2}\|\operatorname{Re}(v) - i\operatorname{Im}(v)\| \\
&= \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|v^*\| \\
&= \|v\| \ .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Όμοια,

$$\begin{aligned}
\|Im(v)\| &= \frac{1}{2}\|\operatorname{Re}(v) + i\operatorname{Im}(v) - \operatorname{Re}(v) + i\operatorname{Im}(v)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\operatorname{Re}(v) + i\operatorname{Im}(v)\| + \frac{1}{2}\|\operatorname{Re}(v) - i\operatorname{Im}(v)\| \\
&= \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|v^*\| \\
&= \|v\| \ .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

□

Ορισμός 2.2.13. Έστω (V, V^+, e) διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Έστω $\|.\|$ η ημινόρμα διάταξης στον V_h. Μία **ημινόρμα διάταξης** στον V είναι μία $*$-ημινόρμα $\|\cdot\|'$ τέτοια ώστε $\|v\|' = \|v\|$ για κάθε $v \in V_h$.

Γενικά, ενδέχεται να υπάρχουν αρκετές ημινόρμες διάταξης σε έναν διατεταγμένο $*$-γραμμικό χώρο. Εδώ θα εξετάσουμε δύο τέτοιες, την ελαχιστική και τη μεγιστική, που παίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη των διατεταγμένων $*$-γραμμικών χώρων.

Ορισμός 2.2.14. Έστω (V, V^+, e) ένας διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος. Ορίζουμε ως **ελαχιστική νόρμα διάταξης** την $\|.\|_m : V \to [0, \infty)$ ως εξής:

$$\|v\|_m := \sup\{|f(v)| : f : V \to \mathbb{C} \ \text{ κατάσταση}\} \ .$$

Θεώρημα 2.2.15. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e, και έστω $\|.\|$ η ημινόρμα διάταξης στον V_h. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) η $\|.\|_m$ είναι $*$-ημινόρμα στον μιγαδικό $*$-χώρο V.

(2) $\|v\|_m = \|v\|$ για κάθε $v \in V_h$.

(3) αν $\|\cdot\|'$ μία άλλη $*$-ημινόρμα στον V τέτοια ώστε $\|v\|' = \|v\|$ για κάθε $v \in V_h$ τότε $\|v\|_m \leq \|v\|'$ για κάθε $v \in V$.

Απόδειξη. (1) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και $v \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|\lambda v\|_m &= \sup\{|f(\lambda v)| : f : V \to \mathbb{C} \ \text{ κατάσταση}\}\\ &= \sup\{|\lambda||f(v)| : f : V \to \mathbb{C} \ \text{ κατάσταση}\}\\ &= |\lambda|\|v\|_m \ .\end{aligned} \tag{2.5}$$

Επιπλέον, για κάθε $v, w \in V$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|v + w\|_m &= \sup\{|f(v + w)| : f \ \text{ κατάσταση}\}\\ &\leq \sup\{|f(v)| + |f(w)| : f \ \text{ κατάσταση}\}\\ &\leq \|v\|_m + \|w\|_m \ .\end{aligned} \tag{2.6}$$

Άρα $\|.\|_m$ μιγαδική ημινόρμα.
Επίσης, αφού f θετική, έχουμε $f(v^*) = \overline{f(v)}$ για κάθε $v \in V$.
Συνεπώς,

$$\|v^*\| = \sup\{|\overline{f(v)}| : f \ \text{ κατάσταση}\} = \sup\{|f(v)| : f \ \text{ κατάσταση}\} = \|v\|_m.$$

Άρα $\|.\|_m$ $*$-ημινόρμα.

(2) Από τις προτάσεις 2.1.17 και 2.2.8 έχουμε

$$\begin{aligned}\|v\|_m &= \sup\{|f(v)| : f : V \to \mathbb{C} \ \text{ κατάσταση}\}\\ &= \sup\{|\tilde{g}(v)| : g : V_h \to \mathbb{R} \ \text{ κατάσταση}\}\\ &= \sup\{|g(v)| : g : V_h \to \mathbb{R} \ \text{ κατάσταση}\}\\ &= \|v\| \ .\end{aligned} \tag{2.7}$$

(3) Έστω $\|\cdot\|'$ $*$-ημινόρμα, τέτοια ώστε $\|v\|' = \|v\|$ για κάθε $v \in V_h$.
Έστω $v \in V$ και $f : V \to \mathbb{C}$ κατάσταση.
Διαλέγουμε $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(v)| = e^{i\theta} f(v) = f(e^{i\theta} v)$.
Έστω $w = e^{i\theta} v$.
Επειδή $(\mathrm{Re}(w))^* = \mathrm{Re}(w)$ και η f είναι θετική, έχουμε $f((\mathrm{Re}(w))^*) = f(\mathrm{Re}(w))$ δηλαδή $\overline{f(\mathrm{Re}(w))} = f(\mathrm{Re}(w)) \Rightarrow f(\mathrm{Re}(w)) \in \mathbb{R}$. Όμοια, $f(\mathrm{Im}(w)) \in \mathbb{R}$.
Επειδή, $f(w) = |f(v)| \in [0, \infty)$, έχουμε $f(w) = f(\mathrm{Re}(w)) + if(\mathrm{Im}(w)) \Rightarrow f(w) = f(\mathrm{Re}(w))$.
Έτσι,

$$|f(v)| = f(w) = f(\mathrm{Re}(w)) \leq \|\mathrm{Re}(w)\| =$$

$$= \|\frac{w + w^*}{2}\|' \leq \frac{1}{2}(\|w\|' + \|w^*\|') \leq \|w\|' = \|v\|'$$

Παίρνοντας τώρα supremum ως προς όλες τις καταστάσεις, παίρνουμε $\|v\|_m \leq \|v\|'$.

$\square$

Ορισμός 2.2.16. Έστω (V, V^+) διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e, και έστω $\|\cdot\|$ η ημινόρμα διάταξης στον V_h.
Ορίζουμε την **μεγιστική ημινόρμα διάταξης** $\|\cdot\|_M : V \to [0, \infty)$ ως εξής:

$$\|v\|_M = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|v_i\| : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\; \mu\epsilon \;\; v_i \in V_h, \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Επειδή $V = V_h + iV_h$, το παραπάνω σύνολο δεν είναι κενό , συνέπως έχει νόημα ο ορισμός αυτός.

Θεώρημα 2.2.17. *Έστω (V, V^+) διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Ισχύουν τα εξής:*

(1) $\|.\|_M$ είναι $*$-ημινόρμα στον V .

(2) $\|v\|_M = \|v\|$ για κάθε $v \in V_h$.

(3) Αν $\|\cdot\|'$ οποιαδήποτε άλλη $*$-ημινόρμα στον V τέτοια ώστε $\|v\|' = \|v\|_M$ για κάθε $v \in V_h$, τότε $\|v\|' \leq \|v\|_M$.

Απόδειξη. (1) Η ισότητα $\|\lambda v\|_M = |\lambda|\|v\|_M$ είναι άμεση καθώς

$$v = \sum_i \lambda_i v_i \iff \lambda v = \sum_i (\lambda\lambda_i) v_i \ .$$

Επίσης, αν $v, w \in V$ με $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ και $w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j$ όπου $v_i, w_j \in V_h$. Τότε $v + w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j$, και αυτός είναι ένας τρόπος να εκφράσουμε το $v+w$ με τη μορφή του αθροίσματος που θέλουμε (όχι μοναδικός).
Έπεται,

$$\begin{aligned} \|v+w\|_M &= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{k} |K_i|\|u_i\| \ : v+w = \sum_{i=1}^{k} \ \text{ με } \ u_i \in V_h, K_i \in \mathbb{C} \right\} \\ &\leq \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\|v_i\| + \sum_{j=1}^{m} |\mu_j|\|w_j\| : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ \text{ και } \ w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j \right\} \\ &= \|v\|_M + \|w\|_M \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Άρα $\|\cdot\|_M$ μιγαδική ημινόρμα.
Επιπλέον, αν $v \in V$, τότε $v = \sum_i \lambda_i v_i \Leftrightarrow v^* = \sum \overline{\lambda_i} v_i$ καθώς $v_\in V_h$.
Όμως, $|\overline{\lambda_i}| = |\lambda_i|$ άρα $\|v\|_M = \|v^*\|_M$.

(2) Έστω $v \in V_h$. Η ανισότητα $\|v\|_M \leq \|v\|$ προκύπτει παίρνοντας $v = 1v$.
Για την ανάποδη ανισότητα, έστω $v = \sum_i \lambda_i v_i$ με $\lambda_i \in \mathbb{C}, v_i \in V_h$.

Έχουμε $v = v^* = \sum_i \overline{\lambda_i} v_i \Rightarrow v = \sum_i \mathrm{Re}(\lambda_i) v_i$
Αφού $\|.\|$ πραγματική ημινόρμα , έχουμε

$$\|v\| \leq \sum_i |\mathrm{Re}(\lambda_i)|\|v_i\| \leq \sum |\lambda_i|\|v_i\| \ .$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλα τα αθροίσματα έχουμε $\|v\| \leq \|v\|_M$.

(3) Έστω $\|\cdot\|'$ μία $*$-ημινόρμα με $\|v\|' = \|v\|$ για κάθε $v \in V_h$.
Για οποιαδήποτε έκφραση $v = \sum_i \lambda_i v_i$ με $\lambda_i \in \mathbb{C}, v_i \in V_h$ έχουμε:

$$\|v\|' \leq \sum_i |\lambda_i|\|v_i\|' = \sum_i |\lambda_i|\|v_i\| \ .$$

Παίρνοντας infimum στο δεξί μέλος προκύπτει $\|v\|' \leq \|v\|_M$.

$\square$

Παρατήρηση 2.2.18. Από τα θεωρήματα 2.2.17 και 2.2.15 συμπεραίνουμε (μεταξύ άλλων) ότι οι $\|.\|_m, \|.\|_M$ είναι ημινόρμες διάταξης στον V και ότι αν $\|.\|$ μια άλλη ημινόρμα διάταξης στον V , τότε

$$\|v\|_m \leq \|v\| \leq \|v\|_M \quad \forall v \in V \ .$$

Πρόταση 2.2.19. *Έστω (V, V^+) διατεταγμένος $*$-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e.*
Τότε, κάθε δύο ημινόρμες διάταξης στον V είναι ισοδύναμες.
Επιπλέον, αν $\| \cdot \|'$ μία ημινόρμα διάταξης στον V , τότε

$$\{v \in V : \|v\|' = 0\} = \bigcap \{kerf : f : V \to \mathbb{C} \ \ \textit{κατάσταση}\} \ .$$

Απόδειξη. Από την παρατήρηση 2.2.18 , αρκεί να δείξουμε ότι οι $\|.\|_m$ και $\|.\|_M$ είναι ισοδύναμες.
Έστω $v \in V$. Έχουμε ήδη την $\|v\|_m \leq \|v\|_M$.
Γράφουμε $v = \mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)$ και έστω $\|.\|$ η ημινόρμα διάταξης στον V_h.
Από το λήμμα 2.2.12 έχουμε

$$\begin{aligned} \|v\|_M &= \|\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)\|_M \leq \|\mathrm{Re}(v)\|_M + |i|\|\mathrm{Im}(v)\|_M \\ &= \|\mathrm{Re}(v)\| + |i|\|\mathrm{Im}(v)\| = \|\mathrm{Re}(v)\|_m + \|\mathrm{Im}(v)\|_m \\ &\leq \|v\|_m + \|v\|_m = 2\|v\|_m \ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Άρα $\|.\|_m$ και $\|.\|_M$ είναι ισοδύναμες.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αφού $\|.\|', \|.\|_m$ είναι ισοδύναμες, έχουμε

$$\{v \in V : \|v\|' = 0\} = \{v \in V : \|v\|_m = 0\} = \bigcap \{ker : f : V \to \mathbb{C} \ \ \text{κατάσταση}\}$$

$\square$

Θεώρημα 2.2.20. *Έστω (V, V^+, e) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η ημινόρμα διάταξης στον V_h είναι νόρμα.

(2) $\bigcap \{kerf : \ \ f : V_h \to \mathbb{R} \ \ \textit{κατάσταση}\} = \{0\}$.

(3) $\bigcap \{kerf : \ \ f : V \to \mathbb{C} \ \ \textit{κατάσταση}\} = \{0\}$.

(4) Κάποια ημινόρμα διάταξης στον V είναι νόρμα.

(5) Όλες οι ημινόρμες διάταξης στον V είναι νόρμες.

Απόδειξη. (1)$\Longrightarrow$(2). Έστω ότι η ημινόρμα διάταξης $\|.\|$ στον V_h είναι νόρμα. Αν $v \in \bigcap\{kerf : \quad f : V_h \to \mathbb{R} \;\; \text{κατάσταση}\}$, τότε από πρόταση 2.2.9 έπεται ότι $\|v\| = 0$, και αφού $\| \cdot \|$ είναι νόρμα έχουμε $v = 0$.
(2)$\Longrightarrow$(3) Έστω $\bigcap\{kerf : \quad f : V_h \to \mathbb{R} \;\; \text{κατάσταση}\} = \{0\}$ και ένα $v \in \bigcap\{kerf : \quad f : V \to \mathbb{C} \;\; \text{κατάσταση}\}$. Έστω μία κατάσταση $f : V_h \to \mathbb{R}$, έπεται από την πρόταση 2.2.8 ότι και η $\tilde{f} : V \to \mathbb{C}$ είναι κατάσταση.
Έτσι,

$$f(\mathrm{Re}(v)) + if(\mathrm{Im}(v)) = \tilde{f}(v) = 0 \Rightarrow f(\mathrm{Re}(v)) = f(\mathrm{Im}(v)) = 0 \ .$$

Αφού η f ήταν τυχούσα, έχουμε

$$\mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v) \in \bigcap\{kerf : \quad f : V_h \to \mathbb{R} \;\; \text{κατάσταση}\} = \{0\} \ .$$

Άρα, $Re(v) = Im(v) = 0$, συνεπώς $v = 0$.
(3)$\Longrightarrow$(4) Από τον ορισμό 2.2.14 η ελαχιστική ημινόρμα διάταξης είναι νόρμα.
(4)$\Longrightarrow$(5) Από πρόταση 2.2.19 όλες οι ημινορμες διάταξης είναι ισοδύναμες άρα αν κάποια από αυτές είναι νόρμα τότε όλες είναι νόρμες.
(5)$\Longrightarrow$(1) Η ημινόρμα διάταξης στον V_h είναι περιορισμός κάθε ημινόρμας διάταξης στον V άρα είναι και αυτή νόρμα. □

Πόρισμα 2.2.21. *Εστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e. Τότε κάθε ημινόρμα διάταξης στον V είναι νόρμα.*

Θέλουμε να ορίσουμε μια τοπολογία στον V που να σχετίζεται με τη διάταξη που έχουμε. Αφού όλες οι ημινόρμες διάταξης δείξαμε ότι είναι ισοδύναμες οδηγούμαστε φυσιολογικά στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 2.2.22. Ορίζουμε ως **τοπολογία διάταξης** στον V την τοπολογία που παράγεται από οποιαδήποτε ημινόρμα διάταξης στον V.

Λήμμα 2.2.23. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e. Έστω $\| \cdot \|'$ οποιαδήποτε νόρμα διάταξης στον V, και $f : V \to \mathbb{C}$ θετική.*
Αν $\|f\|$ η νόρμα της f ως προς τη νόρμα διάταξης $\| \cdot \|'$ τότε $\|f\| = |f(e)|$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

(1) Αν $f(e) = 0$, τότε από πρόταση 2.1.18 $f|_{V_h} = 0$ και άρα από την πρόταση 2.2.8 έπεται $f = 0$. Τότε, το συμπέρασμα ισχύει.

(2) Αν $f(e) \neq 0$ τότε η $g := \frac{1}{f(e)} f$ είναι κατάσταση και για κάθε $v \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(v)| &= f(e)|g(v)| \\ &\leq f(e) \sup\{|h(v)| : h : V \to \mathbb{C} \text{ κατάσταση}\} \\ &\leq f(e)\|v\|_m \leq f(e)\|v\|' . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Έτσι, $\|f\| \leq f(e)$.
Επιπλέον, αφού $\|e\|' = \|e\| = 1$, έπεται $\|f\| = f(e)$.

□

Πόρισμα 2.2.24. *Έστω (V, V^+) διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα e.*
Αν $f : V \to \mathbb{C}$ θετική τότε f συνεχής ως προς την τοπολογία διάταξης στον V.

2.3 Συστήματα συναρτήσεων και εφαρμογή στις C^* άλγεβρες

Ορισμός 2.3.1. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff. Ένας αυτοσυζυγής υπόχωρος του $C(X)$ που περιέχει την ταυτοτική συνάρτηση λέγεται **σύστημα συναρτήσεων**.

Ο $C(X)$ είναι ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με $C(X)^+ = \{f \in C(X) : f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X\}$ και Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης τη σταθερή συνάρτηση 1.
Αν $V \subseteq C(X)$ ένα σύστημα συναρτήσεων, τότε ο V είναι διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με $V^+ := V \cap C(X)^+$.
Είδαμε λοιπόν πως μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν διατεταγμένο *-χώρο, εάν έχουμε ένα σύστημα τελεστών. Το ενδιαφέρον είναι ότι όλοι τελικά οι Αρχιμήδειοι διατεταγμένοι *-χώροι προκύπτουν έτσι.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e. Εφοδιάζουμε τον V με την τοπολογία διάταξης και το $S(V) := \{f : V \to \mathbb{C}, f \text{ κατάσταση}\}$ με την επαγόμενη w^*-τοπολογία.*
Τότε ο $S(V)$ είναι συμπαγής χώρος , και η

$$\Phi : V \to C(S(V)) \quad \text{με} \quad \Phi(v)(f) := f(v)$$

είναι 1-1 απεικόνιση και ισομορφισμός διάταξης στο συνολο τιμών της με $\Phi(e) =$ 1.
Επιπλέον, η Φ είναι ισομετρία $(V, \|.\|_m) \to (C(S(V)), \|.\|_\infty)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι το $S(V)$ είναι συμπαγές:
Από το λήμμα 2.2.23 το $S(V)$ είναι υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του V^*.
Από το θεώρημα του Αλάογλου, η μοναδιαία μπάλα του V^* είναι συμπαγές στην w^*-τοπολογία, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το $S(V)$ είναι κλειστό.
Πράγματι, έστω $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq S(V)$ ένα δίκτυο από καταστάσεις τέτοιο ώστε $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$ για κάποιο $f \in V^*$.
Αν $v \in V^+$ έχουμε $f_\lambda(v) \geq 0$ οπότε $f(v) = \lim f_\lambda(v) \geq 0 \ \ \forall v \in V^+$. Συνεπώς f θετική και επιπλέον $f(e) = \lim f_\lambda(e) = \lim 1 = 1$, άρα f κατάσταση.
Έτσι, δείξαμε ότι το $S(V)$ είναι κλειστό.
Η Φ είναι 1-1: Αν $\Phi(v) = 0$ τότε $f(v) = 0$ για κάθε κατάσταση $f : V \to \mathbb{C}$.
Από πρόταση 2.2.9 έπεται $v = 0$.
Η Φ είναι ισομορφισμός διάταξης: Αν $v \in V^+$ τότε για κάθε κατάσταση $f \in S(v)$ έχουμε $\Phi(v)(f) = f(v) \geq 0$, αφού f θετική. Έτσι, $\Phi(v) \in C(S(V))^+$.
Αντίστροφα, αν $\Phi(v) \in C(S(V))^+$ τότε για κάθε κατάσταση $f \in S(V)$ έχουμε

$$f(v) = \Phi(v)(f) \geq 0 \Rightarrow \quad v \in V^+ \ .$$

Τέλος, η Φ είναι ισομετρία: Αν $v \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|v\|_m &= \sup\{|f(v)| : f : V \to \mathbb{C} \ \ \text{κατάσταση}\} \\ &= \sup\{|\Phi(v)(f)| : f \in S(V)\} \\ &= \|\Phi(v)\|_\infty \ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

□

Αυτός ο χαρακτηρισμός των Αρχιμήδειων *-γραμμικών χώρων, που είναι η μιγαδική μορφή του γνωστού χαρακτηρισμού του Kadison για συστήματα συναρτήσεων, είναι πολύ χρήσιμος καθώς μας επιτρέπει να θεωρούμε καθε Αρχιμήδειο *-γραμμικό χώρο ως υπόχωρο μιάς μεταθετικής C^*-άλγεβρας.
Θα δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές στις C^* άλγεβρες με μονάδα.
Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μία C^* άλγεβρα με μονάδα $e = I_H$ τέτοια ώστε η $\mathcal{A}$ να είναι επίσης Αρχιμήδειος διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με $\mathcal{A}^+$ το συνήθη κώνο των θετικών στοιχείων.
Θα συμβολίζουμε $\|\cdot\|_{op}$ τη συνήθη νόρμα της C^* άλγεβρας.

Λήμμα 2.3.3. *Αν $\mathcal{A}$ μία C^* άλγεβρα και $X \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό, τότε υπάρχει κατάσταση $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ με $\|X\| = |f(X)|$.*

Πρόταση 2.3.4. *Αν $X \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό τότε $\|X\|_m = \|X\|_{op}$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $\|.\|_m$ έχουμε

$$\|X\|_m := \sup\{|f(X)| : f : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \ \ \text{κατάσταση}\} \ .$$

Όμως για κάθε κατάσταση $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ έχουμε $|f(X)| \leq \|f\| \|X\|_{op} \leq \|X\|_{op}$.
Άρα $\|X\|_m \leq \|X\|_{op}$.
Επιπλέον, αφού X φυσιολογικό, από το λήμμα 2.3.3, υπάρχει κατάσταση $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ με $|f(X)| = \|X\|$. Άρα $\|X\|_m \geq \|X\|_{op}$. □

Πόρισμα 2.3.5. *Αν $\mathcal{A}$ μεταθετική, τότε $\|.\|_m = \|.\|_{op}$*

Πόρισμα 2.3.6. *Αν $X \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές τότε $\|X\|_{op} = \|X\|$ όπου $\|.\|$ η νόρμα διάταξης*

Έτσι, η $\|.\|_{op}$ της $\mathcal{A}$ αν περιοριστεί στην $\mathcal{A}_h$ είναι η νόρμα διάταξης. Επίσης, αφού $\|X\|_{op} = \|X^*\|$, η $\|.\|_{op}$ είναι *-νόρμα.
Δηλαδή, δείξαμε ότι η $\|.\|_{op}$ είναι νόρμα διάταξης στον $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^+)$. Συνεπώς, για κάθε $X \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι $\|X\|_m \leq \|X\|_{op} \leq \|X\|_M$.

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με ένα κριτήριο ισότητας για τις $\|\cdot\|_m$ και $\|\cdot\|_M$:

Θεώρημα 2.3.7. *Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e. Τότε, η ελαχιστική νορμα διάταξης $\|\cdot\|_m$ και η μεγιστική νόρμα διάταξης $\|\cdot\|_M$ είναι ίσες αν και μόνο αν ο V είναι ισόμορφος με τους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Αν $V \cong \mathbb{C}$, τότε, αφού $\mathbb{C}$ είναι μία μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα, από το πόρισμα 2.3.5 έχουμε ότι η ελαχιστική νόρμα διάταξης συμπίπτει με τη νόρμα τελεστή. Επιπλέον, για κάθε $v \in \mathbb{C}$, αν γράψουμε $v = v \cdot 1$, τότε $v \in \mathbb{C},\ 1 \in \mathbb{R}$ και από τον ορισμό της μεγιστικής νόρμας διάταξης έχουμε

$$\|v\|_M \leq |v| \|1\| = |v| \ .$$

Από την μεγιστικότητα της μεγιστικής νόρμας διάταξης έχουμε $\|v\|_M = |v|$, και έτσι η μεγιστική νόρμα διάταξης συμπίπτει και αυτή με την νόρμα τελεστή.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $V \ncong \mathbb{C}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $\|v\|_m < \|v\|_M$. Από το θεώρημα 2.3.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο V είναι ένας υπόχωρος του $C(X)$ για κάποιον συμπαγή και Hausdorff χώρο X με την ιδιότητα $V = V^*$ και $1 \in V$. Επιπλέον, η ελαχιστική νόρμα διάταξης $\|\cdot\|_m$ στον V συμπίπτει με τη νόρμα supremum στον $C(X)$.
Αφού $V \neq \mathbb{C} \cdot 1$, υπάρχει $f \in V$ με $f \geq 0$ και $f \notin \mathbb{C} \cdot 1$. Κανονικοποιώντας, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\|f\| = 1$. Έστω $h := f - 1$ και $g := (1/\|h\|)h$. Παρατηρούμε ότι, αφου $f \neq 1$, έχουμε $\|h\| > 0$. Τότε $g \in V$ και αφού $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι

$$h(x) \leq 0 \ \text{ και } \ -1 \leq g(x) \leq 0 \ \text{ για κάθε } \ x \in X \ .$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι

- Αν $f(x) = 1$ τότε $g(x) = 0$
- Αν $g(x) = -1$ τότε $h(x) = -\|h\|$ και $f(x) = 1 - \|h\| < 1$.
- Επειδή $0 \leq f \leq 1$ και $-1 \leq g \leq 0$, αν $|f(x)| = 1$ τότε $g(x) = 0$,και αν $|g(x)| = 1$ τότε $f(x) = 1 - \|h\| < 0$.

Αν ορίσουμε $F : X \to \mathbb{C}$ με $F(x) := f(x) + ig(x)$, τότε από τις προηγούμενες παρατηρήσεις έπεται ότι για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$|F(x)| = |f(x) + ig(x)| = \sqrt{|f(x)|^2 + |g(x)|^2} < \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Έτσι, $\|F\|_m = \|F\|_\infty < \sqrt{2}$.
Θα δείξουμε τώρα ότι $\|F\|_M \geq \sqrt{2}$. Υποθέτουμε ότι $F = \sum_{j=1}^n \lambda_j s_j$ για $\lambda_j \in \mathbb{C}$ και πραγματικές συναρτήσεις $s_j : X \to \mathbb{R}$ και θέτουμε

$$K := \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \|s_j\| \ .$$

Αφού κάθε λ_j μπορεί να γραφτει ως $e^{i\theta_j}|\lambda_j|$ για κάποιο $\theta_j \in [0, 2\pi)$, έχουμε ότι $\lambda_j s_j = e^{i\theta_j}(|\lambda_j| s_j)$ και θέτοντας $r_j := |\lambda_j| s_j$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F = \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} r_j$ για πραγματικές συναρτήσεις $r_j : X \to \mathbb{R}$ και

$$K = \sum_{j=1}^{n} |e^{i\theta_j}| \|r_j\| = \sum_{j=1}^{n} \|r_j\| \ .$$

Επειδή ο X είναι συμπαγής και $f \geq 0$ με $\|f\| = 1$, υπάρχει $x_1 \in X$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 1$. Όμοια, αφού $-1 \leq g \leq 0$ και $\|g\| = 1$, υπάρχει $x_2 \in X$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = -1$. Επειδή $F = \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} r_j$ και $F(x_1) = f(x_1) + ig(x_1) = 1 + ig(x_1)$, έχουμε $1 + ig(x_1) = \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} r_j(x_1)$. Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη της προηγούμενης ισότητας παίρνουμε $1 = \sum_{j=1}^n (\cos\theta_j) r_j(x_1)$. Έτσι ,

$$1 \leq \sum_{j=1}^{n} |\cos\theta_j| |r_j(x_1)| \ .$$

Όμοια, αφού $F = \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} r_j$ και $F(x_2) = f(x_2) + ig(x_2) = f(x_2) - i$ έχουμε $f(x_2) - i = \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} r_j(x_2)$. Εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη στη προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $-1 = \sum_{j=1}^n (\sin\theta_j) r_j(x_2)$. Έτσι,

$$1 \leq \sum_{j=1}^{n} |\sin\theta_j| |r_j(x_2)| \ .$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned}
2 &= 1+1 \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |\cos\theta_j||r_j(x_1)| + \sum_{j=1}^{n} |\sin\theta_j||r_j(x_2)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (|\cos\theta_j| + |\sin\theta_j|) \max\{|r_j(x_1)|, |r_j(x_2)|\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sqrt{2} \max\{|r_j(x_1)|, |r_j(x_2)|\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sqrt{2}\|r_j\| \\
&= \sqrt{2}K
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Έπεται ότι $K \geq \sqrt{2}$ και αφού $\|F\|_M$ είναι το infimum όλων αυτών των K, έπεται ότι $\|F\|_M \geq \sqrt{2}$. Δείξαμε άρα ότι $\|F\|_m < \|F\|_M$. □

Παρατήρηση 2.3.8. Αν έχουμε έναν διατεταγμένο *-γραμμικό χώρο (V, V^+) με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e, διερωτώμαστε πόσες νόρμες διάταξης υπάρχουν. Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει την απάντηση.
Αν $V \cong \mathbb{C}$, τότε όπως είδαμε $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_M$, συνεπώς υπάρχει μία και μοναδική νόρμα διάταξης στον V .
Αν $V \ncong \mathbb{C}$, τότε $\|\cdot\|_m$ και $\|\cdot\|_M$ δεν είναι ίσες. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος (υπεραριθμήσιμο μάλιστα) διαφορετικές μεταξύ τους νόρμες διάταξης. Πράγματι, για κάθε $0 \leq t \leq 1$ θέτουμε $\|\cdot\|_t$ ώς εξής :

$$\|v\|_t := t\|v\|_m + (1-t)\|v\|_M \ .$$

Είναι προφανές ότι ο κυρτός συνδυασμός δύο νορμών διάταξης είναι και αυτός νόρμα διάταξης. Επίσης παρατηρούμε ότι αν $t_1 \neq t_2$ τότε $\|\cdot\|_{t_1} \neq \|\cdot\|_{t_2}$.
Άρα, αν $V \ncong \mathbb{C}$ είδαμε ότι υπάρχουν «πολλές» νόρμες διαταξης στον V που προκύπτουν ως κυρτοί συνδυασμοί της ελαχιστικής και μεγιστικής νόρμας διάταξης.

Κεφάλαιο 3

Δομές συστημάτων τελεστών σε διατεταγμένους χώρους

3.1 Το θεώρημα Choi-Effros

Αν V ένας *-γραμμικός χώρος, τότε ο $M_{m,n}(V)$ γίνεται μιγαδικός γραμμικός χώρος με την συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ενός μιγαδικού με έναν πίνακα (κατά συντεταγμένη).
Όταν $m = n$ ορίζουμε μία ενέλιξη * στον $M_n(V)$ θέτοντας $(a_{i,j})^*_{i,j} := (a^*_{j,i})_{i,j}$. Έτσι, ο $M_n(V)$ γίνεται *-γραμμικός χώρος.

Ορισμός 3.1.1. Έστω V ένας *γραμμικός χώρος. Λέμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι **διάταξη πινάκων** στον V αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) C_n κώνος στην $M_n(V)_h$ για κάθε n .

(2) $C_n \cap (-C_n) = \{0\}$, για κάθε n.

(3) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και κάθε $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ έχουμε $X^* C_n X \subseteq C_m$.

Σε αυτή τη περίπτωση, λέμε ότι $(V, \mathcal{C} = \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ είναι ένας ***-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων**.

Παρατηρούμε ότι από τις ιδιότητες (1) και (2) έπεται ότι ο $(M_n(V), C_n)$ είναι ένας διάτεταγμένος *-γραμμικός χώρος για κάθε $n \in \mathbb{C}$. Αν $A, B \in M_n(V)_h$, γράφουμε $A \leq B$ αν $B - A \in C_n$. Μία οικογένεια που έχει την ιδιότητα (3) θα τη λέμε **συμβιβαστή** (compatible).

Ορισμός 3.1.2. Έστω $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων. Για $e \in V_h$ ορίζουμε

$$e_n = \begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \\ & & \ddots & \\ & & & e \end{bmatrix}$$

να είναι ο αντίστοιχος διαγώνιος πίνακας του $M_n(V)$ πού έχει στην διαγώνιο του το e.
Λέμε ότι το e είναι **μονάδα διάταξης πινάκων** αν το e_n είναι μονάδα διάταξης του $(M_n(V), C_n)$ για κάθε n. Αντίστοιχα, λέμε ότι το e είναι Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης πινάκων αν κάθε e_n είναι Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης του $(M_n(V), C_n)$.

Έστω S ένα σύστημα τελεστών (δηλαδή ένας υπόχωρος ενός $\mathcal{B}(H)$ τέτοιος ώστε $S = S^*$ και $I \in S$). Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την κλάση αυτην των υποχώρων του $\mathcal{B}(H)$ με βάση τον προηγούμενο ορισμό:
Πράγματι, παρατηρούμε ότι ο S είναι ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με την διάταξη του $\mathcal{B}(H)$ και μάλιστα ο ταυτοτικός τελεστής I είναι Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης. Επιπλέον, ισχύει $M_n(S) \subseteq M_n(\mathcal{B}(H)) \cong \mathcal{B}(H^n)$ και έτσι ο $M_n(S)$ κληρονομεί τη διάταξη του $\mathcal{B}(H^n)$ και ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας

$$\begin{bmatrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{bmatrix}$$

είναι Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης για τον $M_n(S)$. Δείξαμε δηλαδή ότι κάθε σύστημα τελεστών μπορεί να θεωρηθεί ως ένας Αρχιμήδειος *-γραμμικός χώρος με μια διάταξη πινάκων. Το ενδιαφέρον, όμως, είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο, που είναι γνωστό ως το θεώρημα Choi-Effros.

Θεώρημα 3.1.3. *(Choi-Effros) Αν $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty}, e)$ ένας Αρχιμήδειος *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων, τότε υπάρχει ένας χώρος Hilbert H, ένα σύστημα τελεστών $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ και ένας πλήρης ισομορφισμός διάταξης $J : V \to S$ τέτοιος ώστε $J(e) = I$.*

Για την απόδειξη, θα χρειαστούμε πρώτα δύο προτάσεις :

Πρόταση 3.1.4. *Έστω S ένας Αρχιμήδειος *-γραμμικός χώρος με μονάδα e. Για $X \in M_n(S)$ ορίζουμε*

$$\|X\|_n = \inf\left\{ r : \begin{bmatrix} rI_n & X \\ X^* & rI_n \end{bmatrix} \in C_{2n} \right\}$$

Τότε, η $\|\cdot\|_n$ είναι νόρμα στον $M_n(S)$ και σε αυτήν την τοπολογία ο κώνος C_n είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη. Θα κανούμε την απόδειξη για $n = 1$.
Πρώτα δείχνουμε ότι $\|x\|_1 \geq 0$: Αν $\begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$, τότε θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{bmatrix} re & x \\ -x^* & re \end{bmatrix} = A^* \cdot \begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \cdot A \in C_2 \ .$$

Προσθέτουμε αυτούς τους δύο πίνακες και παίρνουμε ότι $2rI_2 \in C_2$. Αφού C_2 είναι κώνος, $I_2 \in C_2$ και $(C_2) \bigcap (-C_2) = \{0\}$, έπεται $r \geq 0$. Συνεπώς $\|x\|_1 \geq 0$.
Θα δείξουμε τώρα ότι αν $\|x\|_1 = 0$ τότε $x = 0$: Αν $\|x\|_1 = 0$, τότε έχουμε $\begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$ για κάθε $r > 0$. Έτσι,

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = r(1 + |\lambda|^2)e + \lambda x + (\lambda x)^* \in C_1$$

για κάθε μιγαδικό αριθμό λ και κάθε $r > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα έπεται $\lambda x + (\lambda x)^* \in C_1$. Θέτοντας τώρα $\lambda = 1, -1$ παίρνουμε $x + x^* = 0$ και θέτοντας $\lambda = i, -i$ παίρνουμε $ix + (ix)^* = 0$. Οπότε, τελικά $x = 0$.
Με όμοια επιχειρήματα βγαίνουν και οι σχέσεις $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$, $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ και $\|x^*\| = \|x\|_1$.
Τέλος, δείχνουμε ότι C_1 είναι κλειστό ως προς τη νόρμα $\|.\|_1$: Έστω $x_n \in C_1$, $x \in S$ με $\|x - x_n\|_1 \to 0$.
Αφού $x_n = x_n^*$, έχουμε $x = x^*$. Έστω $r > 0$, διαλέγουμε n ώστε $\|x - x_n\|_1 < r$. Τότε $\begin{bmatrix} re & x - x_n \\ x - x_n & re \end{bmatrix} \in C_2$, και παίρνοντας $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ προκύπτει $(2re + 2x - 2x_n) \in C_1$.
Έτσι $(re + x) \in C_1$, αφού $x_n \in C_1$ και C_1 είναι κώνος.
Αφού το r ήταν τυχόν, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα παίρνουμε $x \in C_1$. □

Πρόταση 3.1.5. *Έστω S ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων, $s : M_n(S) \to \mathbb{C}$ και $\phi : S \to M_n(\mathbb{C})$ με $\phi = \phi_s$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

(1) $s(C_n) \geq 0$.

(2) $\phi : S \to M_n(\mathbb{C})$ *είναι n-θετική.*

(3) $\phi : S \to M_n(\mathbb{C})$ *είναι πλήρως θετική.*

Απόδειξη. Είναι όμοια με την απόδειξη της πρότασης 1.3.1. □

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος Choi-Effros:

Απόδειξη. Έστω S ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων και Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης e. Έστω

$$\mathcal{P}_n = \{\phi : S \to M_n | \ \phi \ \text{ πλήρως θετική } , \phi(e) = I\}$$

και

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\phi \in \mathcal{P}_n} \oplus \phi : S \to \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\phi \in \mathcal{P}_n} \oplus M_n^{\phi}$$

όπου το δεύτερο ευθύ άθροισμα είναι με την l_∞-έννοια.
Αφού το δεύτερο ευθύ άθροισμα είναι C^* άλγεβρα, για να δείξουμε ότι το S είναι ισόμορφο με ένα σύστημα τελεστών μέσω ενός ισομορφισμού διάταξης, αρκεί να δείξουμε ότι ο J είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης $S \to J(S)$.
Για να το αποδείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι για ένα στοιχείο $(x_{i,j}) \in M_n(S)$, ισχύει η ισοδυναμία

$$(x_{i,j}) \in C_n \iff (J(x_{i,j})) \geq 0$$

Από τον τρόπο που έχουμε επιλέξει τα ϕ η συνεπαγωγή $\Rightarrow$ είναι προφανής.
Για το αντίστροφο: Θα δείξουμε ότι αν $(x_{i,j}) \notin C_n$ τότε υπάρχει k και $\phi \in \mathcal{P}_n$ τέτοιο ώστε $(\phi(x_{i,j})) \ngeq 0$.
Αφού C_n κλειστό στη τοπολογία του $M_n(S)$ που προέρχεται από τη νόρμας της πρότασης 3.1.4, υπάρχει, από το θεώρημα 1.3.6, ένα γραμμικό συναρτησοειδές $s : M_n(S) \to \mathbb{C}$ με $s(C_n) \geq 0$ αλλά $s((x_{i,j})) < 0$.
Θεωρούμε την $\phi_s : S \to M_n$, τότε

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi_s(x_{i,j} e_j, e_i \rangle = s((x_{i,j})) < 0$$

Έτσι, το $(\phi_s(x_{i,j}))$ δεν είναι θετικό.
Αυτό που μένει, είναι να αντικαταστήσουμε την ϕ_s με μία μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση.
Έστω $\phi_s(e) = P \in M_n^+$. Αν ο P είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει πίνακας A ώστε $A^*PA = I$. Θέτουμε $\psi(x) = A^*\phi_s(x)A$ και έχουμε $\psi(e) = I$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle (\psi(x_{i,j}) A^{-1} e_j, A^{-1} e_i \rangle < 0$$

και δείξαμε το ζητούμενο.
Αν ο P δεν είναι αντιστρέψιμος, έστω $\|x\| \leq 1$, τότε $\begin{bmatrix} e & x \\ x^* & e \end{bmatrix} \in C_2$ και έτσι $\begin{bmatrix} P & \phi_s(x) \\ \phi_s(x)^* & P \end{bmatrix} \geq 0$.

Ισχυρισμός. *Αν* $Ph = 0$ *τότε* $\phi_s(x)h = 0$. *Επιπλέον, αν* Q *η προβολή στον* $ker(P)^{\perp}$, *τότε* $Q\phi_s(x)Q = \phi_s(x)$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Θέτουμε $A = \phi_s(x)$. Έχουμε

$$\left\langle \begin{bmatrix} P & A \\ A^* & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0 \;\; \forall \; x, y \iff$$

$$\langle Px, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle Ay, x\rangle + \langle Py, y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $y \in kerP$ με $Ay \neq 0$. Τότε υπάρχει $x \in H$ ώστε $\langle Ay, x\rangle > 0$. Οπότε, επειδή

$$\left\langle \begin{bmatrix} P & A \\ A^* & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ \lambda y \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0 \;\; \forall \; \lambda \in \mathbb{C}$$

έχουμε

$$\langle Px, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle A(\lambda y), x\rangle + 0 \geq 0 \;\; \forall \lambda.$$

Αν πάρουμε $\lambda \in \mathbb{R}$, από την παραπάνω σχέση έπεται ότι $\langle Px, x\rangle + 2\lambda\langle Ay, x\rangle \geq 0$, δηλαδή

$$-2\lambda\langle Ay, x\rangle \leq \langle Px, x\rangle \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \text{άτοπο} \; .$$

Άρα, $kerP \subseteq A$, οπότε έχουμε $AQ^{\perp} = 0$ δηλαδή $A = AQ$.
Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα για τον A^*, παίρνουμε επίσης ότι $kerP \subseteq kerA^*$. Οπότε, $A^*Q = A^*Q$ δηλαδή $A = QA$.
Συνεπώς, $A = QAQ$. □

Τώρα, αν $rank(Q) = k$, επιλέγουμε έναν $n \times k$ πίνακα A και έναν $k \times n$ πίνακα B ώστε

$$A^*PA = I_k \;\; , \;\; AB = Q \; .$$

Θέτουμε $\psi(x) = A^*\phi_s(x)A$ και έχουμε ότι η $\psi : S \to M_k(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική , με $\psi(e) = I_k$ και

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \psi(x_{i,j})Be_j, Be_i\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi_s(x_{i,j})Qe_j, Qe_i\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi_s(x_{i,j}e_j, e_i\rangle < 0 \; .$$

Έτσι, $\psi \in \mathcal{P}_k$ με $(\psi(x_{i,j})) \ngeq 0$. □

Λόγω του παραπάνω θεωρήματος, έχει νόημα ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 3.1.6. Αν (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος, θα λέμε ότι η τριάδα $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty}, e)$ είναι **δομή συστήματος τελεστών** αν η οικογένεια $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Αρχιμήδεια διάταξη πινάκων και επιπλέον $C_1 = V^+$.

Χάριν συντομίας, θα αναφερόμαστε κάποιες φορές στο συγκεκριμένο κεφάλαιο σε τέτοιες τριάδες απλά ως συστήματα τελεστών.

3.2 Δομές συστήματος τελεστών

Αν έχουμε μία δομή συστήματος τελεστών $(S, \{P_n\}_{n=1}^{\infty}, e)$ και μία μοναδιαία θετική απεικόνιση $\phi : V \to S$ τέτοια ώστε $V^+ = \phi^{-1}(P_1)$, τότε παίρνουμε μία δομή συστήματος τελεστών στον V θέτοντας $C_n = \phi_n^{-1}(P_n)$.

Έστω $\mathcal{P} = \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\mathcal{Q} = \{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ δύο διατάξεις πινάκων στον V. Λέμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι ισχυρότερη της $\mathcal{Q}$ αν $P_n \subseteq Q_n \ \ \forall n$.
Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P}$ ισχυρότερη της $\mathcal{Q}$ αν και μόνο αν η ταυτοτική απεικόνιση

$$(V, \{P_n\}) \to (V, \{Q_n\})$$

είναι πλήρως θετική.

Ορισμός 3.2.1. Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$C_n^{\min}(V) = \{(u_{i,j}) \in M_n(V) : \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j u_{i,j} \in V^+ \ \forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\}$$

και $C^{\min} = \{C_n^{\min}\}_{n=1}^{\infty}$.

Το επόμενο θεώρημα, περιγράφει με έναν εναλλακτικό τρόπο τα στοιχεία του $C_n^{\min}(V)$ και ταυτόχρονα αποδεικνύει εύκολα ότι είναι δομή συστήματος τελεστών.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος και $n \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$(u_{i,j}) \in C_n^{\min}(V) \iff (s(u_{i,j})) \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{C}) \ \ \forall s \in S(V) \ .$$

Πριν αποδείξουμε την ισοδυναμία, θα δούμε γιατί από αυτή έπεται ότι το $(V, \{C_n^{\min}\}_{n=1}^{\infty}, e)$ είναι σύστημα τελεστών:

Πράγματι, από την αναπαράσταση Kadison (θεώρημα 2.3.2) που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπάρχει μια συμπαγής Hausdorff τοπολογία στον $S(V)$ τέτοια ώστε η απεικόνιση $\Phi : V \to C(S(V))$ με $\Phi(v)(s) = s(v)$ είναι ισομορφισμός διάταξης στο σύνολο τιμών της. Ισοδύναμα, $V^+ = \Phi^{-1}(P_1)$ όπου P_1 είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Άρα, ορίζεται μία δομή συστήματος τελεστών $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον V ως εξής:

$$\begin{aligned} (v_{i,j}) \in C_n &\iff (s(v_{i,j})) \in M_n^+ \quad \forall s \in S(V) \\ &\iff (\Phi(v_{i,j})) \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Αποδεικνύουμε τώρα το θεώρημα:

Απόδειξη θεωρήματος. Έστω $(v_{i,j}) \in M_n(V)$.
Έχουμε

$$(s(v_{i,j})) \in M_n^+ \quad \forall s \in S(V)$$

$$\iff \quad \langle (s(v_{i,j}))x, x\rangle \geq 0 \quad \forall s \in S(V), \quad x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\iff \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\lambda_j s(v_{i,j}) \geq 0 \quad \forall s \in S(V), \quad \forall \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\iff s(\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\lambda_j) \geq 0 \quad \forall s \in S(V) \ , \ \forall \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\iff \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\lambda_j v_{i,j} \in V^+, \quad \forall \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\iff \quad (v_{i,j}) \in C_n^{\min}(V) \ .$$

□

Ορισμός 3.2.3. Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος *-γραμμικός χώρος. Ορίζουμε $OMIN(V)$ το σύστημα τελεστών $(V, C_n^{\min}(V), e)$.

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει τη δυνατότητα να ταυτοποιούμε το $OMIN(V)$ με έναν υπόχωρο του $C(S(V))$ μέσω ενός πλήρους ισομορφισμού διάταξης. Αποδεικνύουμε τώρα κάποιες ιδιότητες του $OMIN(V)$:

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος *-γραμμικός χώρος και $(W, \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων.*

(1) Αν $\phi : W \to OMIN(V)$ θετική γραμμική απεικόνιση τότε η ϕ είναι πλήρως θετική.

(2) Αν $\tilde{V} = (V, \{\tilde{C}_n\}_{n=1}^{\infty}, e)$ σύστημα τελεστών με $\tilde{C}_1 = V^+$ τέτοιο ώστε κάθε θετική απεικόνιση $\psi : W \to \tilde{V}$ να είναι πλήρως θετική, τότε η ταυτοτική απεικόνιση $\tilde{V} \to OMIN(V)$ είναι μοναδιαίος πλήρης ισομορφισμός διάταξης.

Απόδειξη. (1) Έστω $A = (a_{i,j}) \in C_n$. Αν $X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ τότε

$$X^* A X = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j a_{i,j} \in C_1 \ .$$

Αφού η ϕ είναι θετική έχουμε $\phi\big(\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j a_{i,j} \big) \in V^+ \iff \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j \phi(a_{i,j}) \in V^+$. Οπότε, $(\phi(a_{i,j})) \in C_n^{\min}(V)$, άρα η ϕ είναι πλήρως θετική.

(2) Έστω $i : \tilde{V} \to OMIN(V)$ η ταυτοτική απεικόνιση. Είναι φυσικά μοναδιαία, και επίσης θετική ,εφόσον $\tilde{C}_i = V^+$. Από το (1) η i είναι πλήρως θετική. Επίσης, η i^{-1} είναι θετική, άρα από υπόθεση είναι πλήρως θετική. □

Πόρισμα 3.2.5. *Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος διατεταγμένος χώρος. Αν $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty}, e)$ μία οποιαδήποτε δομή συστήματος τελεστών στον V τότε $C_n \subseteq C_n^{\min}(V)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Η ταυτοτική απεικόνιση $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty}, e) \to OMIN(V)$ είναι θετική, άρα από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι είναι πλήρως θετική, δηλαδή $C_n \subseteq C_n^{\min}(V)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Ορίζουμε τώρα και μία μεγιστική δομή συστήματος τελεστών. Μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τον $M_n(V)$ με τον $M_n \otimes V$ με τον φυσικό τρόπο. Πριν τον ορισμό αποδεικνύουμε ένα χρήσιμο λήμμα:

Λήμμα 3.2.6. *Ισχύει* $M_n(V)_h = (M_n)_h \otimes V_h$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $(M_n)_h \otimes V_h \subseteq M_n(V)_h$.
Για τον ανάποδο εγκλεισμό, έστω $v = (v_{i,j}) \in M_n(V)_h$. Τότε $v_{i,j}^* = v_{j,i}$ όπου $i, j = 1, ..., n$. Γράφουμε $v = \sum_{i=1}^n E_{i,i} \otimes v_{i,i} + \sum_{i<j}(E_{i,j} \otimes v_{i,j} + E_{j,i} \otimes v_{j,i})$. Προφανώς, $\sum_{i=1}^n E_{i,i} \otimes v_{i,i} \in (M_n)_h \otimes V_h$. Σταθεροποιούμε δύο i, j με $i < j$ και γράφουμε $v_{i,j} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k w_k$, όπου $w_k \in V^+$ και $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Τότε $v_{j,i} = v_{i,j}^* = \sum_{k=1}^4 \overline{\lambda_k} w_k$ και έτσι:

$$\begin{aligned} E_{i,j} \otimes v_{i,j} + E_{j,i} \otimes v_{j,i} &= E_{i,j} \otimes \Big(\sum_{k=1}^4 \lambda_k w_k \Big) + E_{j,i} \otimes \Big(\sum_{k=1}^4 \overline{\lambda_k} w_k \Big) \\ &= \sum_{k=1}^4 (\lambda_k E_{i,j}) \otimes w_k + (\overline{\lambda_k} E_{j,i}) \otimes w_k) \qquad (3.2) \\ &= \sum_{k=1}^4 (\lambda_k E_{i,j} + \overline{\lambda_k} E_{j,i}) \otimes w_k \ \in (M_n)_h \otimes V_h \ . \end{aligned}$$

Άρα, έπεται ότι $v \in (M_n)_h \otimes V_h$. □

Ορισμός 3.2.7. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος. Θέτουμε

$$D_n^{\max}(V) = \Big\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes v_i : v_i \in V^+, \alpha_i \in M_n^+, k \in \mathbb{N} \Big\}$$

και $D^{\max}(V) = \{D_n^{\max}(V)\}_{n=1}^\infty$.

Λήμμα 3.2.8. *Έστω* (V, V^+) *ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος.*
Έστω $P_n \subseteq M_n(V)_h$ *όπου* $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ *μία συμβιβαστή διάταξη πινάκων του* V *με* $P_1 = V^+$.
Τότε

$$D_n^{\max}(V) \subseteq P_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Απόδειξη. Αν $X \in M_{n,1}$ τότε

$$XV^+X^* = XP_1X^* \subseteq P_n \ .$$

Δηλαδή έπεται $\alpha \otimes u \in P_n$ για κάθε $\alpha \in M_n^+$ τάξης 1 και κάθε $u \in V^+$.
Αφού κάθε στοιχείο του M_n^+ είναι άθροισμα στοιχείων του M_n^+ τάξης 1 , συμπεραίνουμε ότι $\alpha \otimes u \in P_n$ για κάθε $\alpha \in M_n^+$ και για κάθε $u \in V^+$.
Έτσι, $D_n^{\max}(V) \subseteq P_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 3.2.9. *Έστω (V, V^+, e) Αρχιμήδειος διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος. Ισχύουν τα επόμενα:*

(1) $D^{\max}(V)$ είναι διάταξη πινάκων στον V και το e είναι μονάδα διάταξης πινάκων για αυτήν.

(2) $D_n^{\max}(V) = \{\alpha \operatorname{diag}(u_1, ..., u_m)\alpha^* : \alpha \in M_{n,m}, u_i \in V^+, i = 1, ..., m, m \in \mathbb{N}\} := D_n$.

(3) Αν $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία διάταξη πινάκων στον V με $P_1 = V^+$ τότε

$$D_n^{\max}(V) \subseteq P_n \subseteq C_n^{\min}(V) \ .$$

και το e είναι μονάδα διάταξης πινάκων για την $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι ο D_n είναι κώνος στον $M_n(V)_h$:

- Αν $u_1, u_2, ..., u_m \in V^+$ και $\alpha = (\alpha_{i,k} \in M_{n,m}$ τότε η (i, j)-θέση του πίνακα $\alpha \operatorname{diag}(u_1, ..., u_m)\alpha^*$ είναι $\sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,k}\overline{a_{j,k}}u_k$ και

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,k}\overline{a_{j,k}}u_k\Big)^* = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{j,k}\overline{a_{i,k}}u_k$$

  Άρα $D_n \subseteq M_n(V)_h$.

- D_n είναι προφανώς κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό με μη αρνητικό πραγματικό αριθμό.

- Αν $\alpha \operatorname{diag}(u_1, ..., u_m)\alpha^*$ και $\beta \operatorname{diag}(w_1, ..., w_k)\beta^*$ τότε

$$\begin{aligned} &\alpha \operatorname{diag}(u_1, ..., u_m)\alpha^* + \beta \operatorname{diag}(w_1, ..., w_k)\beta^* \\ &= \begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix} \operatorname{diag}(u_1, ...u_m, w_1, ..., w_k) \begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}^* \ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

  Άρα το σύνολο D_n είναι κώνος.

Δείχνουμε τώρα ότι η οικογένεια $\{D_n\}$ είναι compatible:
Πράγματι, αν $\alpha \operatorname{diag}(u_1, ..., u_m)\alpha^* \in D_n$ και $\beta \in M_{k,n}$ τότε

$$\beta(\alpha \operatorname{diag}(u_1, ..., u_m)\alpha^*)\beta^* = (\beta\alpha) \operatorname{diag}(u_1, ..., u_m)(\beta\alpha)^* \in D_k \ .$$

Επίσης, είναι προφανές ότι $D_1 = V^+$. Οπότε από το προηγούμενο λήμμα έχουμε $D_n^{\max} \subseteq D_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Για τον ανάποδο εγκλεισμό: Παίρνουμε $u_1, ..., u_m \in V^+$. Τότε

$$\operatorname{diag}(u_1, ..., u_m) = \sum_{i=1}^{m} E_{i,j} \otimes u_i \in D_m^{\max} \ .$$

Από compatibility του $\{D_n^{\max}\}_{n=1}^{\infty}$ έχουμε ότι για κάθε $\alpha \in M_{n,m}$ ισχύει

$$\alpha\, \mathrm{diag}(u_1, ..., um)\alpha^* \in D_n^{\max} \ .$$

Έτσι, $D_n \subseteq D_n^{\max}$ άρα δείξαμε την (2).
Δείχνουμε τώρα ότι e_n είναι μονάδα διάταξης για την $D_n^{\max}$:
Έστω $\omega \in M_n(V)_h$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\omega = \alpha \otimes v$, όπου $\alpha \in M_n$ και $v \in V_h$. Γράφουμε $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ και $v = v_1 - v_2$ όπου $\alpha_i \in M_n^+$ και $v_i \in V^+$ για $i = 1, 2$.
Τότε

$$\alpha \otimes v = \alpha_1 \otimes v_1 - \alpha_1 \otimes v_2 - \alpha_2 \otimes v_1 + \alpha_2 \otimes v_2 \ .$$

Αφού I_n μονάδα διάταξης του $M_n(\mathbb{C})_h$ και e μονάδα διάταξης του V_h μπορούμε να βρούμε $r, s \in \mathbb{R}^+$ τέτοιους ώστε

$$-rI_n \leq a_i \leq rI_n \ \text{ και } \ se \pm v_i \in V^+, \quad i = 1, 2 \ .$$

Τότε $rse_n - (\pm\alpha_i \otimes v_j) \in D_n^{\max}$, άρα $4rse_n - \omega \in D_n^{\max}$.
Το δείξαμε λοιπόν για $\omega = \alpha \otimes v$. Έστω τώρα τυχόν $\omega \in M_n(V)_h$. Από το λήμμα 3.2.6 έχουμε $\omega = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \otimes v_j$, όπου $\alpha_j \in (M_n)_h$ και $v_j \in V_h$ για κάθε $1 < j < N$.
Από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε το ζητούμενο.

Μένει να αποδείξουμε το (3):
Έστω $\mathcal{P} = \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία διάταξη πινάκων στον (V, V^+, e).
Αν θέσουμε $W = (V, \mathcal{P})$, από το θεώρημα 3.2.4, η ταυτοτική $W \to OMIN(V)$ είναι πλήρως θετική άρα η $\mathcal{P}$ είναι ισχυρότερη από την $C_n^{\min}(V)$. Δηλαδή $P_n \subseteq C_n^{\min} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Ο εγκλεισμός $D_n^{\max} \subseteq P_n$ είναι άμεσος από το λήμμα 3.2.8.
Επίσης,

$$D_n^{\max} \subseteq C_n^{\min} \implies D_n^{\max} \cap (-D_n^{\max}) \subseteq C_n^{\min} \cap (-C_n^{\min}) = \{0\} \ .$$

Άρα, $D^{\max}(V)$ είναι διάταξη πινάκων στον V .
Τέλος, αφού e_n είναι μονάδα διάταξης πινάκων της $D^{\max}(V)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Αν} \ \ A \in (M_n(V))_h \implies & \ \exists r > 0 \ \text{ τέτοιο ώστε } \ re_n + A \in D_n^{\max} \\ \implies & \ re_n + A \in P_n \\ \implies & \ e_n \ \text{ είναι μονάδα διάταξης για την } \ \mathcal{P} \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

□

Παρατήρηση 3.2.10. Δυστυχώς, παρότι το e είναι μονάδα διάταξης πινάκων για τον $D^{\max}(V)$, δεν είναι Αρχιμήδεια:
Θεωρούμε $V = C([0,1])$, τον χώρο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων , V^+ είναι οι θετικές συναρτήσεις, e η σταθερή συνάρτηση 1.
Έστω

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{2\pi it} \\ e^{-2\pi it} & 1 \end{bmatrix} \in M_2(V)_h.$$

Για κάθε $r > 0$ έχουμε $re_2 + P(t) = \begin{bmatrix} 1+r & e^{2\pi it} \\ e^{-2\pi it} & 1+r \end{bmatrix} \in D_2^{\max}(V)$ ενώ $P(t) \notin D_2^{\max}(V)$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού της προηγούμενης παρατήρησης δείτε στο [6] .

3.3 Αρχιμηδοποίηση

Ορισμός 3.3.1. Έστω (V, V^+) ένας πραγματικός διατεταγμένος γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e.
Ορίζουμε $D := \{v \in V \ : re + v \in V^+ \ \text{ για κάθε } \ r > 0\}$.
Επίσης ορίζουμε $N := D \cap -D$.

Είναι προφανές ότι ο D είναι κώνος με $V^+ \subseteq D$.
Επίσης, ο N είναι πραγματικός υπόχωρος του V.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω (V, V^+) ένας πραγματικός διατεταγμένος γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Τότε ο D ισούται με τη κλειστή θήκη του V^+ ως προς τη τοπολογία της διάταξης και*

$$N = \{v \in V : \|v\| = 0\} = \bigcap\{kerf : \quad f : V \to \mathbb{R} \ \ \textit{κατάσταση}\} .$$

Απόδειξη. Αν $v \in D$, τότε $re + v \in V^+$ με $\|(re + v) - v\| = r$ για κάθε $r > 0$ και έτσι ο D περιέχεται στην κλειστή θήκη του V^+.
Ανάποδα, έστω ότι v ανήκει στη κλειστή θήκη του V^+, τότε υπάρχει ακολουθία $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V^+$ με $\|v_n - v\| \to 0$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διαλέγουμε $r_n > \|v_n - v\|$ με $r_n \to 0$. Τότε $r_n e_n \pm (v_n - v) \in V^+$, και έτσι $r_n e + v - v_n \in V^+$, από το οποίο έπεται ότι $r_n e + v \in V^+$ για κάθε n.
Αφού $r_n \to 0$ έπεται $re + v \in V^+$ για κάθε $r > 0$. Άρα και η κλειστή θήκη του V^+ περιέχεται στο D.
Τη δεύτερη ισότητα του δεύτερου ισχυρισμού την έχουμε ήδη αποδείξει στο

κεφάλαιο 2, οπότε δείχνουμε την πρώτη: Αν $v \in N$ τότε $re \pm v \in V^+$ για κάθε $r > 0$. Έτσι, $-re \leq v \leq re$ για κάθε $r > 0$. Όμως από αυτό έπεται ότι $\|v\| \leq \|re\| = r$ για κάθε $r > 0$ και άρα $\|v\| = 0$. Ανάποδα, αν $\|v\| = 0$, έχουμε ότι $re \pm v \in V^+$ για κάθε $r > 0$. Έπεται ότι $\pm v \in D$ δηλαδή $v \in D \cap -D = N$. $\square$

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω (V, V^+) ένας πραγματικός διατεταγμένος γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Έστω $N := D \cap -D$ και θεωρούμε το χώρο πηλίκο V/N με*

$$(V/N)^+ := D + N = \{v + N \ : v \in D\} .$$

Τότε $(V/N, (V/N)^+)$ είναι ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος και $e+N$ είναι Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης για αυτόν τον χώρο.

Απόδειξη. Αφού ο D είναι κώνος, έπεται ότι και ο $(V/N)^+ := D + N$ είναι κώνος.
Επιπλέον, αν $x + N \in (V/N)^+ \cap -(V/N)^+$ τότε $x + N = d_1 + N$ και $x + N = -d_2 + N$ για κάποια d_1 , $d_2 \in D$. Έτσι, $x - d_1 \in N \subseteq D$ και αφού D κώνος έχουμε $x \in D$. Όμοια , προκύπτει ότι $x \in -D$. Έτσι, $x \in N := D \cap -D$ οπότε $x + N = 0 + N$. Δηλαδή $(V/N)^+ \cap -(V/N)^+ = \{0\}$.
Επιπλέον, αφού e είναι μονάδα διάταξης για τον (V, V^+) , αν πάρουμε ένα $v + N \in V/N$, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $re + v \in V^+$. Επειδή $V^+ \subseteq D$, έπεται ότι

$$r(e + N) + (v + N) = (re + v) + N \quad \in D + N = (V/N)^+ .$$

Έτσι, $e + N$ είναι μονάδα διάταξης για τον V/N.
Τέλος, δείχνουμε ότι η μονάδα αυτή είναι Αρχιμήδεια: Έστω $v + N \in V/N$ και ότι $r(e+N)+(v+N) \in (V/N)^+$ για κάθε $r > 0$. Έχουμε $(re+v)+N \in D+N$ και $re + v \in D + N$ και $re + v \in D$ για κάθε $r > 0$. Έστω ένα $r_0 > 0$. Τότε $\frac{r_0}{2}e + v \in D$ και από τον ορισμό του D παίρνουμε $\frac{r_0}{2}e + (\frac{r_0}{2}e + v) \in V^+$. Έπεται ότι $r_0 e + v \in V^+$ για κάθε $r_0 > 0$. Από τον ορισμό του D έχουμε $v \in D$. Έτσι, $v + N \in (V/N)^+$. $\square$

Ορισμός 3.3.4. Έστω (V, V^+) ένας πραγματικός διατεταγμένος γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e.
Θέτουμε $D := \{v \in V \ : re + v \in V^+ \text{ για κάθε } r > 0\}$ και $N := D \cap -D$.
Ορίζουμε ως V_{Arch} τον διατεταγμένο γραμμικό χώρο $(V/N, (V/N)^+)$ με την Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης $e + N$.
Καλούμε τον V_{Arch} **Αρχιμηδοποίηση** του V.

Τώρα, θα επεκτείνουμε την ίδια διαδικασία στη περίπτωση των *-γραμμικών χώρων. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Ορίζουμε $D := \{v \in V_h \ : re + v \in V^+ \text{ για κάθε } r > 0\}$ και

$N_{\mathbb{R}} := D \cap -D$. Όπως και στη προηγούμενη περίπτωση, έχουμε ότι ο $N_{\mathbb{R}}$ είναι πραγματικός υπόχωρος του V_h και ότι

$$N_{\mathbb{R}} = \bigcap \{ker f \ : f : V_h \to \mathbb{R} \ \text{κατάσταση} \}$$

Όπως και νωρίτερα, ορίζουμε

$$N := \bigcap \{ker f \ : f : V \to \mathbb{C} \ \text{κατάσταση} \}$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.2.8 βλέπουμε εύκολα ότι $N = N_{\mathbb{R}} \oplus iN_{\mathbb{R}}$. Είναι επίσης προφανές ότι ο N είναι ένας μιγαδικός υπόχωρος του V και ότι είναι κλειστός ως προς την ενέλιξη $*$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε το πηλίκο V/N με την καλά ορισμένη ενέλιξη $(v+N)^* = v^* + N$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $v + N \in (V/N)_h$, έχουμε $v + N = v^* + N$ και έτσι $v + N = \frac{v+v^*}{2} + N = \mathrm{Re}(v) + N$.
Έτσι, $(V/N)_h = \{v + N \ : v \in V_h \}$. Ορίζουμε $(V/N)^+ := \{v + N : v \in D\}$. Εύκολα φαίνεται ότι οι χώροι $((V/N)_h, (V/N)^+)$ και $(V_h/N_{\mathbb{R}}, D + N_{\mathbb{R}})$ είναι ισόμορφοι ως πρός τη διάταξη μέσω της απεικόνισης $v+N \mapsto v+N_{\mathbb{R}}$. Επιπλέον, έπεται από το θεώρημα 3.3.3 ότι ο $(V/N, (V/N)^+)$ είναι ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης $e + N$.

Ορισμός 3.3.5. Έστω (V, V^+) ένας διατεταγμένος *-γραμμικός χώρος με μονάδα διάταξης e. Ορίζουμε $D := \{v \in V_h \ : re + v \in V^+ \ \text{για κάθε} \ r > 0\}$ και

$$N := \bigcap \{ker f \ : f : V \to \mathbb{C} \ \text{κατάσταση} \} \ .$$

Ορίζουμε ως V_{Arch} τον διατεταγμένο *-γραμμικό χώρο $(V/N, (V/N)^+)$ με την Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης $e + N$.
Καλούμε τον V_{Arch} **Αρχιμηδοποίηση** του V.

Εμάς μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε την Αρχιμηδοποίηση ενός *-γραμμικού χώρου με διάταξη πινάκων και μια μονάδα διάταξης πινάκων. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες ιδέες, ξεκινάμε τη διαδικασία δίνοντας έναν ορισμό:

Ορισμός 3.3.6. Έστω $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων και μονάδα διάταξης πινάκων e.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$N_n := \bigcap \{ker f \ : \ \ f : M_n(V) \to \mathbb{C} \ \text{κατάσταση}\} \ .$$

Λήμμα 3.3.7. *Έστω $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων και μονάδα διάταξης πινάκων e. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$N_n = M_n(N_1) \ .$$

.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $N_n \subseteq M_n(N_1)$: Έστω $A = (\alpha_{k,l}) \in N_n$. Τότε κάθε κατάσταση : $M_n(V) \to \mathbb{C}$ μηδενίζει το A, συνεπώς και κάθε θετικό και γραμμικό συναρτησοειδές στον $M_n(V)$ μηδενίζει το A.
Αν $s : V \to \mathbb{C}$ μια κατάσταση στον V και $P = (p_{k,l}) \in M_n(\mathbb{C})^+$ ένας θετικός πίνακας, τότε η απεικόνιση $\tilde{s_p} : M_n(V) \to \mathbb{C}$ με

$$\tilde{s_p}((x_{k,l})_{k,l}) := \sum_{k,l} s(p_{k,l} \cdot x_{k,l})$$

είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $M_n(V)$.
Επιπλέον, το $\tilde{s_p}$ είναι και θετικό: Κάθε θετικός πίνακας $P \in M_n(\mathbb{C})$ με τάξη 1 έχει τη μορφή $P = a^*a$ για $a \in M_{n,1}$ και για κάθε $X = (x_{k,l})_{k,l} \in C_n$ ισχύει $a^*Xa \in C_1$.
Έτσι ,

$$\begin{aligned} \tilde{s_p}((x_{k,l})_{k,l}) &= \sum_{k,l} s(p_{k,l} \cdot x_{k,l}) \\ &= s\big(\sum_{k,l} a_k x_{k,l} \overline{a_l}\big) \\ &= s(a^*Xa) \geq 0\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Έτσι, αφού κάθε θετικός πίνακας $P \in M_n$ είναι άθροισμα από θετικούς πίνακες τάξης 1, από τη γραμμικότητα της s παίρνουμε $\tilde{s_p}\big((x_{k,l})_{k,l}\big) \geq 0$ για κάθε $P \in M_n$ και για κάθε $(x_{k,l})_{k,l} \in C_n$.
Άρα , $s\big(\sum_{k,l} p_{k,l} a_{k,l}\big) = 0$ για κάθε κατάσταση $s : V \to \mathbb{C}$ και κάθε θετικό πίνακα $P = (p_{k,l})_{k,l} \in M_n$.
Αν διαλέξουμε $1 \leq k \leq n$ και θέσουμε D τον διαγώνιο πίνακα που έχει 1 στην (k,k)-θέση και 0 αλλού, τότε $D \in M_n(\mathbb{C})^+$ και $s_D(A) = s(a_{k,k}) = 0$ δηλαδή

$$s(a_{k,k}) = 0 \quad \text{για κάθε κατάσταση} \ \ s : V \to \mathbb{C}\ .$$

Επιπλέον, αν διαλέξουμε $1 \leq k, l \leq n$ και θέσουμε $a = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ όπου τα 1 είναι στη k-θέση και τη l-θέση , ορίζουμε $P := a^*a \in M_n(\mathbb{C})$. Τότε ο P έχει 1 στις θέσεις $(k,k), (k,l), (l,k), (l,l)$ και 0 αλλού. Άρα

$$\begin{aligned} \tilde{s_p}(A) &= s(a_{k,k}) + s(a_{k,l}) + s(a_{l,k}) + s(a_{l,l}) \\ &\Longrightarrow s(a_{k,l}) + s(a_{l,k}) = 0 \ \ \text{για κάθε κατάσταση} \ \ s : V \to \mathbb{C}\ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Όμοια, αν $b = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, i, 0, \cdots, 0) \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ τότε ο $Q := b^*b$ έχει 1 στην θέση (k,k) , i δτην θέση (k,l), $-i$ στην θέση (l,k) και 0 αλλού. Άρα

$$\begin{aligned} \tilde{s_Q}(A) &= s(a_{k,k}) + is(a_{k,l}) - is(a_{l,k}) + s(a_{l,l}) \\ &\Longrightarrow is(a_{k,k}) - is(a_{l,k}) \ \ \text{για κάθε κατάσταση} \ \ s : V \to \mathbb{C}\ . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε $s(a_{k,l}) = 0$ για κάθε $1 \leq k,l \leq n$ και για κάθε κατάσταση $s : V \to \mathbb{C}$. Άρα $a_{k,l} \in N_1$ και άρα $A \in M_n(N_1)$. Δείξαμε λοιπόν ότι $N_n \subseteq M_n(N_1)$.

Για το ανάποδο : Έστω $A = (a_{k,l})_{k,l} \in M_n(N_1)$ και έστω μία κατάσταση $s : M_n(V) \to \mathbb{C}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $s(A) = 0$.
Για $1 \leq k,l \leq n$ ορίζουμε

$$s_{k,l} : V \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad s_{k,l}(u) := s(E_{k,l} \otimes u)$$

όπου $E_{k,l}$ ο πίνακας με 1 στην (k,l)-θέση και 0 αλλού.
Τότε όλα τα $s_{k,l}$ είναι προφανώς γραμμικά συναρτησοειδή και ισχύει

$$s(A) = s(\sum_{k,l} E_{k,l} \otimes a_{k,l}) = \sum_{k,l} s(E_{k,l} \otimes a_{k,l}) = \sum_{k,l} s_{k,l}(a_{k,l}) \ .$$

Διαλέγουμε $1 \leq k \leq n$.
Για κάθε $u \in V^+ = C_1$ ο πίνακας $B = \mathrm{diag}(0,0,\cdots,0,u,0,\cdots,0)$ είναι θετικός αφού $B = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^* \cdot u \cdot (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \in C_n$.
Άρα $s_{k,k}(u) = s(B) \geq 0$, αφού s θετικό. Έτσι , το $s_{k,k} : V \to \mathbb{C}$ είναι θετικό γραμμικό συναρτησοειδές, άρα $s_{k,k}(x) = 0$ για κάθε $x \in N_1$.
Όμοια, αν $1 \leq k,l \leq n$ και $u \in V^+ = C_1$, τότε ο πίνακας $P \in M_n(V)$ που έχει u στις θέσεις $(k,k),(k,l),(l,k),(l,l)$ και 0 αλλού , είναι στοιχείο του C_n. Έπεται ότι

$$s_{k,k}(u) + s_{k,l}(u) + s_{l,k}(u) + s_{l,l}(u) = s(P) \geq 0 \ .$$

Δηλαδή το $s_{k,k} + s_{k,l} + s_{l,k} + s_{l,l}$ είναι γραμμικό και θετικό συναρτησοειδές. Άρα

$$_{k,k}(x) + s_{k,l}(x) + s_{l,k}(x) + s_{l,l}(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \ \ x \in N_1 \ .$$

Δηλαδή

$$s_{k,l}(x) + s_{l,k}(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \ \ x \in N_1 \ .$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για $P \in M_n(V)$ που έχει u στις θέσεις $(k,k),(l,l)$, iu στην (k,l)-θέση και $-iu$ στην (l,k)-θέση παίρνουμε

$$is_{k,l}(x) - is_{l,k}(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \ \ x \in N_1 \ .$$

Από αυτές τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται ότι $s_{k,l}(x) = 0$ για κάθε $x \in N_1$.
Συνεπώς , αφού $a_{k,l} \in N_1$, έχουμε $s(A) = \sum_{k,l} s_{k,l}(a_{k,l}) = 0$.
Άρα $A \in N_n$ δηλαδή $M_n(N_1) \subseteq N_n$. $\square$

Υποθέτουμε τώρα ότι V είναι ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων με μονάδα διάταξης πινάκων e . Ο $N := N_1$ είναι ένας *-υπόχωρος του V (αν $u \in N$ τότε $u^* \in N$), το πηλίκο V/N είναι *-χώρος με τον φυσικό τρόπο και

$$(V/N)_h = \{u + N \quad : u \in V_h\} \ .$$

Επιπλέον, μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τον $M_(V/N)$ με τον $M_n(V)/M_n(N)$ και παίρνουμε ότι

$$(M_n(V)/M_n(N))_h = \{A + M_n(N) \ : A^* = A \ \} \ .$$

Επίσης, για κάθε $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ έχουμε $X^* M_n(N) X \subseteq M_m(N)$.
Τέλος , $(e + N)_n = e_n + M_n(N)$.

Ορισμός 3.3.8. Έστω $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων και μονάδα διάταξης πινάκων e.
Θέτουμε

$$\begin{aligned} C_n^{Arch} \ := \{A + M_n(N) \in & M_n(V)/M_n(N) \ : \\ & (re_n + A) + M_n(N) \in C_n + M_n(N) \ \ \forall r > 0\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

και $V_{Arch} := (V/N, \{C_n^{Arch}\}_{n=1}^{\infty}, e + N)$.

Πρόταση 3.3.9. *Έστω $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ ένας *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων και μονάδα διάταξης πινάκων e.*
*Τότε ο V_{Arch} είναι *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων και $e + N$ είναι Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης για αυτον τον χώρο.*

Απόδειξη. Ταυτοποιώντας τον $M_n(V/N)$ με τον $M_n(V)/M_n(N)$ και χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.3.7 έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$(M(V/N), C_n^{Arch}, e_n + M_n(N)) = (M_n(V)/N_n, C_n^{Arch}, e_n + N_n)$$

Έτσι, βλέπουμε ότι $(M(V/N), C_n^{Arch}, e_n + M_n(N))$ είναι η Αρχιμηδοποίηση του χώρου $(M_n(V), C_n, e_n)$. Συνεπώς έχουμε ότι

- C_n^{Arch} είναι κώνος.
- $C_n^{Arch} \bigcap -C_n^{Arch} = \{0\}$.
- $e_n + M_n(N)$ Αρχιμήδεια μονάδα διάταξης.

Μένει να δείξουμε ότι η οικογένεια $\{C_n^{Arch}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι συμβιβαστή.
Έστω $A \in C_n^{Arch}$ και $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$.
Αφού $X^*e_nX \in M_m(V)$ και e μονάδα διάταξης πινάκων , υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $r_0e_m - X^*e_nX \in C_m$.
Αφού $A \in C_n^{Arch}$ έχουμε

$$\begin{aligned} &(re_n + A) + M_n(N) \in C_n + M_n(N) \ \text{ για κάθε } \ r > 0 \\ \iff &\big(\frac{r}{r_0}e_n + A\big) + M_n(N) \in C_n + M_n(N) \ \text{ για κάθε } \ r > 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

και αφού $X^*C_nX \subseteq C_m$ και $X^*M_n(N)X \subseteq M_m(N)$ έχουμε

$$\begin{aligned} &X^*(\frac{r}{r_0}e_n + A)X + M_m(N) \quad \in C_m + M_m(N) \\ \iff &\big(\frac{r}{r_0}X^*e_nX + X^*AX\big) + M_m(N) \quad \in C_m + M_m(N)\ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Προσθέτοντας $re_m - (\frac{r}{r_0}X^*e_nX) = (\frac{r}{r_0})(r_0e_m - X^*e_nX) \in C_m$ σε αυτό το στοιχείο έχουμε

$$(re_m + X^*AX) + M_m(N) \quad \in C_m + M_m(N)\ .$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $r > 0$ έχουμε $X^*AX + M_m(N) \in C_m^{Arch}$ δηλαδή $X^*C_n^{Arch}X \subseteq C_m^{Arch}$. □

Παρατήρηση 3.3.10. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τη συγκεκριμένη περίπτωση κατά την οποία έχουμε έναν $(V, \{C_n\}_{n=1}^{\infty})$ *-γραμμικός χώρος με διάταξη πινάκων και μονάδα διάταξης πινάκων e με τον (V, C_1, e) να είναι Αρχιμήδειος.
Σε αυτή τη περίπτωση $N = \{0\}$, $V/N = V$ και $C_1^{Arch} = C_1$. Τότε για $n \geq 2$, αφού $N = \{0\}$, παρατηρούμε ότι

$$C_n^{Arch} = \{A \in M_n(V) : re_n + A \in C_n \quad \text{για κάθε} \quad r > 0\}\ .$$

Ορισμός 3.3.11. Έστω (V, V^+, e) ένας AOU χώρος .
Θέτουμε

$$C_n^{\max} = \{A \in M_n(V)\ : re_n + A \in D_n^{\max} \ \text{ για κάθε } \ r > 0\}$$

και $C^{\max}(V) = \{C_n^{\max}(V)\}_{n=1}^{\infty}$.

Ορίζουμε $OMAX(V) = (V, C^{\max}(V), e)$.
Οι συνέπειες των παραπάνω αποτελεσμάτων, σε συνδυασμό με την πρόταση 3.2.9, συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.12. *Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος *-διατεταγμένος χώρος. Τότε ισχύουν τα επόμενα :*

1) $OMAX(V)$ έχει τη δομή συστήματος τελεστών στον (V, V^+, e) .

2) Αν $(V, \{P_n\}, e)$ μια άλλη δομή συστήματος τελεστών στον (V, V^+, e) , τότε $C_n^{\max} \subseteq P_n$ για κάθε $n \geq 1$.

3) Αν S σύστημα τελεστών και $\Phi : V \to S$ unital θετική απεικόνιση τότε $\Phi : OMAX(V) \to S$ είναι πλήρως θετική.

3.4 The matricial state space

Μία διάταξη πινάκων σε έναν *-γραμμικό χώρο επάγει μία διάταξη πινάκων στον δυϊκό χώρο. Θα περιγράψουμε την αντιστοιχία ανάμεσα στις διάφορες δομές συστήματος τελεστών που μπορεί να εφοδιαστεί ένας Αρχιμήδειος *-διατεταγμένος χώρος και στον αντίστοιχο matricial state space.
Αν έχουμε λοιπόν έναν Αρχιμήδειο *-διατεταγμένο χώρο V έχουμε δείξει ότι η ημινόρμα διάταξης $\| \cdot \|$ στον V_h είναι νόρμα και επεκτείνεται σε μία νόρμα στον V (για την ακρίβεια σε πολλές αλλά ισοδύναμες). Έτσι το σύνολο των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών του V , ως προς οποιαδήποτε από αυτές τις νόρμες είναι ο ίδιος χώρος.
Ορίζουμε λοιπόν,

$$V' = \{f : V \to \mathbb{C} \ , \quad f \ \text{γραμμική και συνεχής}\} \ .$$

Για ένα $f \in V'$ ορίζουμε $f^* \in V'$ ως εξής : $f^*(u) = \overline{f(u^*)}$.
Η απεικόνιση $f \mapsto f^*$ κάνει τον V' *-γραμμικό χώρο.

Ορισμός 3.4.1. Έστω μια δομή συστήματος τελεστών $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ σε έναν Αρχιμήδειο *-διατεταγμένο χώρο (V, V^+, e).
Θεωρούμε

$$P_n^d = \{f : M_n(V) \to \mathbb{C} \ : f \ \text{γραμμική και} \ \ f(P_n) \subseteq \mathbb{R}^+\} \ .$$

Αν έχουμε ένα $f \in P_n^d$, ορίζουμε $f_{i,j} : V \to \mathbb{C}$ με $f_{i,j}(u) = f(u \otimes E_{i,j})$.

Λήμμα 3.4.2. *Αν $f \in P_n^d$ τότε $f_{i,j} \in V'$.*

Απόδειξη. Εφόσον $C_n^{\max} \subseteq P_n \subseteq C_n^{\min}$ έπεται $(C_n^{\min})^d \subseteq P_n^d \subseteq (C_n^{\max})^d$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι αν $f \in (C_n^{\max})^d$ τότε $f_{k,l} \in V'$.
Έχουμε $C_1^{\max} = V^+$, οπότε πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $(V^+)^d \subseteq V'$:
Έστω $f : V \to \mathbb{C}$ γραμμική με $f(V^+) \subseteq \mathbb{R}^+$. Πρέπει να δείξουμε ότι f συνεχής .
Έστω $f(e) = t \geq 0$. Για κάθε $v \in V_h$ με $-re \leq v \leq re$ (όπου $r > 0$) έχουμε

$$-rt \leq f(v) \leq rt \quad \Longrightarrow \quad |f(v)| \leq t\|v\|_m \ .$$

Άρα η f είναι συνεχής στον V_h. Επειδή κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται στη μορφή $v = \frac{v+v^*}{2} + i\frac{v-v^*}{2i}$ και η απεικόνιση $v \mapsto v^*$ είναι συνεχής, έπεται ότι f συνεχής στον V δηλαδή $f \in V'$.
Τώρα, αν $f \in (C_n^{\max})^d$ και $v \in V^+$ τότε, από τον ορισμό του $C_n^{\max}$ έχουμε $v \otimes E_{k,k} \in C_n^{\max}$. Άρα $f_{k,k}(v) \geq 0$, δηλαδή $f_{k,k} \in (V^+)^d \subseteq V'$.
Επιπλέον, αν $v \in V^+$, τότε τα 4 στοιχεία

$$\begin{aligned}
&v \otimes (E_{k,k} + E_{k,l} + E_{l,k} + E_{l,l}) \\
&v \otimes (E_{k,k} - E_{k,l} - E_{l,k} + E_{l,l}) \\
&v \otimes (E_{k,k} + iE_{k,l} - iE_{l,k} + E_{l,l}) \\
&v \otimes (E_{k,k} - iE_{k,l} + iE_{l,k} + E_{l,l})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ανήκουν όλα στον $C_n^{\max}$.
Με το ίδιο επιχείρημα τα 4 στοιχεία

$$\begin{aligned}
&f_{k,k} + f_{k,l} + f_{l,k} + f_{l,l} \\
&f_{k,k} - f_{k,l} - f_{l,k} + f_{l,l} \\
&f_{k,k} + if_{k,l} - if_{l,k} + f_{l,l} \\
&f_{k,k} - if_{k,l} + if_{l,k} + f_{l,l}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ανήκουν όλα στον $(V^+)^d$.
Παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς έπεται $f_{k,l} \in (V^+)^d \quad \Rightarrow \quad f_{k,l} \in V'$. $\square$

Ταυτοποιώντας κάθε $f \in P_n^d$ με τον πίνακα $(f_{i,j}) \in M_n(V')$ θα θεωρούμε ότι ο P_n^d είναι μέσα στον $M_n(V')$. Αντίστροφα, ταυτοποιούμε κάθε $(f_{i,j}) \in M_n(V')$ με το γραμμικό συναρτησοειδές

$$f : M_n(V) \to \mathbb{C} \quad \text{όπου} \quad f((u_{i,j})) = \sum_{i,j} f_{i,j}(u_{i,j}) \ .$$

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια δομή συστήματος τελεστών σε έναν Αρχιμήδειο *-διατεταγμένο χώρο (V, V^+, e) .*
*Τότε η $\{P_n^d\}_{n=1}^{\infty}$ είναι διάταξη πινάκων στον *-χώρο V' με $P_1^d = (V^+)^d$.*
*Αντίστροφα, αν $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι διάταξη πινάκων στον *-χώρο V' με $Q_1 = (V^+)^d$ και θέσουμε*

$${}^dQ_n = \{u \in M_n(V) \ : f(u) \geq 0 \ \ \forall f \in Q_n\}$$

τότε $\{{}^dQ_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι δομή συστήματος τελεστών στον (V, V^+, e) .

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε ότι $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι διάταξη πινάκων στον V' .

- Αν πάρουμε $f, g \in P_n^d$ τότε προφανώς $f+g$ γραμμικό και $(f+g)(P_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ άρα $f+g \in P_n^d$.Επίσης για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε προφανώς $\lambda f \in P_n^d$. Συνεπώς $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ κώνος.

- Αν $f \in P_n^d \bigcap -P_n^d$ τότε $f(x) \geq 0$ και $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in P_n$ οπότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in P_n$. Άρα $P_n^d \bigcap -P_n^d = \{0\}$.

- Για την compatibility, έστω $X \in M_{n,m}$ και $f = (f_{i,j}) \in P_n^d \subseteq M_n(V')$. Τότε, το στοιχείο $(g_{i,j}) := X^*(f_{i,j})X \in P_m^d \subseteq M_m(V')$.

Άρα, δείξαμε ότι η $\{P_n^d\}_{n=1}^{\infty}$ είναι διάταξη πινάκων στον *-χώρο V' με $P_1^d = (V^+)^d$.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό:
Θέλουμε να δείξουμε ότι $\{{}^dQ_n\}$ ορίζει μία δομή συστήματος τελεστών στον (V, V^+, e).
Πρώτα, παρατηρούμε ότι ${}^dQ_1 = V^+$: Πράγματι , ο εγκλεισμός $V^+ \subseteq^d Q_1$ είναι προφανής, ενώ ο ανάποδος προκύπτει άμεσα από την ισοδυναμία

$$v \geq 0 \iff f(u) \geq 0 \text{ για κάθε } f \text{ θετικό και γραμμικό}$$

που την έχουμε αποδείξει.
Ορίζουμε $\overline{Y}$ τον ανάστροφο του συζυγούς Y^* ενός πίνακα $Y \in M_{n,m}$.
Ότι κάθε ${}^dQ_n$ είναι κώνος στον $M_n(V)$ είναι προφανές.
Δείχνουμε τώρα ότι ${}^dQ_n \bigcap(-{}^dQ_n) = \{0\}$:
Έστω $u = (u_{i,j}) \in^d Q_n \bigcap(-{}^dQ_n)$ και έστω $s \in S(V) \subseteq (V^+)^d$.
Έστω X το διάνυσμα-στήλη $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ όπου κάθε $a_i \in \mathbb{C}$.
Αφού $XQ_1X^* \subseteq Q_n$ έχουμε $f = (a_i s \overline{a_j}) \in Q_n$.
Επειδή $u = (u_{i,j}) \in^d Q_n \bigcap(-{}^dQ_n)$ έχουμε

$$0 = f(u) = \sum_{i,j} a_i s(u_{i,j}) \overline{a_j} = \langle (s(u_{i,j})\overline{X}, \overline{X} \rangle$$

Εφόσον το διάνυσμα X ήταν τυχόν έχουμε $(s(u_{i,j})) = 0$ και αφού s τυχούσα κατάσταση έχουμε $(u_{i,j}) = 0$.
Άρα ${}^dQ_n \bigcap(-{}^dQ_n) = \{0\}$.
Έστω τώρα $X \in M_{n,m}$. Θα δείξουμε ότι $X^*({}^dQ_n)X \subseteq^d Q_m$.
Παρατηρούμε ότι αν $u = (u_{i,j}) \in^d Q_n$ και $f = (f_{k,l}) \in Q_m$ τότε

$$f(X^*uX) = (\overline{X} f \overline{X}^*)(u) \geq 0$$

αφού $\overline{X} f \overline{X}^* \in Q_n$ και $\{Q_n\}$ διάταξη πινάκων.
Έτσι, δείξαμε ότι $\{{}^dQ_n\}_{n=1}^{\infty}$ διάταξη πινάκων.
Από πρόταση 3.2.9 το e είναι μονάδα διάταξης πινάκων για την $\{{}^dQ_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Μένει να δείξουμε ότι e Αρχιμήδεια:
Αν $u \in M_n(V)$ και $re_n + u \in^d Q_n$ για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} & rf(e_n) + f(u) \geq 0 \ \text{ για κάθε } \ r > 0 \text{ και για κάθε } \ f \in Q_n \\ \Longrightarrow\ & f(u) \geq 0 \ \text{ για κάθε } \ f \in Q_n \\ \Longrightarrow\ & u \in^d Q_n \ . \end{aligned} \tag{3.13}$$

□

Παρατήρηση 3.4.4. Η ασθενής*-τοπολογία στον V' εφοδιάζει τον $M_n(V')$ με μία τοπολογία που συμπίπτει με την ασθενη*-τοπολογία που προέρχεται από την ταυτοποίηση του $M_n(V')$ με τον δυϊκό του $M_n(V)$. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν την τοπολογία ως ασθενή *-τοπολογία στον $M_n(V')$.

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος *-διατεταγμένος χώρος. Οι απεικονίσεις $P_n \mapsto P_n^d$ και $Q_n \mapsto^d Q_n$ μας δίνουν μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις δομές συστημάτων τελεστών $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον (V, V^+, e) και στις διατάξεις πινάκων $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον V' με $Q_1 = (V^+)^d$ όπου κάθε Q_n είναι ασθενώς *-κλειστό.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ${}^d(P_n^d) = P_n$ και $({}^dQ_n)^d = Q_n$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.2.10, παίρνουμε

$${}^d(P_n^d) = \{u \in M_n(V) \ : f(u) \geq 0 \ \ \forall f \in P_n^d\} = P_n \ .$$

Επίσης,

$$({}^dQ_n)^d = \{f : M_n(V) \to \mathbb{C} : \ f \text{ γραμμική και } f({}^dQ_n) \subseteq \mathbb{R}^+\} = Q_n.$$

□

Παρατήρηση 3.4.6. Στο θεώρημα 3.4.9 θα ταυτοποιήσουμε τους δυϊκούς κώνους της μεγιστικής και ελαχιστικής διάταξης πινάκων. Παρότι ο κώνος $Q_n^{\min}$ που θα ορίσουμε παρακάτω δεν είναι ασθενώς *-κλειστός , στο θεώρημα 3.4.9 αποδεικνύουμε ότι ${}^dQ_n^{\min} = C_n^{\max}$ από όπου έπεται ότι το $(C_n^{\min})^d$ είναι η ασθενώς *-κλειστή θήκη του $Q_n^{\min}$, κάτι που θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στην επόμενη παράγραφο.

Ορισμός 3.4.7. Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος *-διατεταγμένος χώρος. Ορίζουμε

$$Q_n^{\min} = \{X^*GX \ : X \in M_{n,m}, G = \operatorname{diag}(g_1, \cdots, g_m), g_i \in (V^+)^d, m \in \mathbb{N}\}$$

και

$$Q_n^{\max} = \{(f_{i,j}) \in M_n(V') \ : (f_{i,j}(u)) \in M_n^+ \ \ \forall u \in V^+\} \ .$$

Παρατήρηση 3.4.8. Με την ίδια τεχνική όπως στην πρόταση 3.2.9 , δείχνει κανείς ότι

$$Q_n^{\min} = \{\sum_{i=1}^{k} P_i \otimes g_i \ : g_i \in (V^+)^d, P_i \in M_n^+, i = 1, \cdots, k, \ \ k \in \mathbb{N}\} \ .$$

Θεώρημα 3.4.9. *Έστω (V, V^+, e) ένας AOU χώρος.*
Τότε

$${}^dQ_n^{\min} = C_n^{\min} \ \ \textit{και} \ \ (C_n^{\max})^d = Q_n^{\max}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.2.9 και το θεώρημα 3.2.2 φαίνεται εύκολα ότι οι οικογένειες $\{Q_n^{\min}\}$ και $\{Q_n^{\max}\}$ είναι διατάξεις πινάκων στον V' με $Q_1^{\min} = Q_1^{\max} = (V^+)^d$.
Έστω $u = (u_{i,j}) \in C_n^{\min}$ και έστω $f = X^*GX \in Q_n^{\min}$. Τότε

$$f(u) = G(\overline{X}u\overline{X}^*) = \sum_i g_i(w_{i,i})$$

όπου $(w_{i,j}) = \overline{X}u\overline{X}^* \in C_m^{\min}$.
Αλλά αυτό το άθροισμα είναι μη-αρνητικό αφού $(w_{i,i}) \in V^+ \ \ \forall i$.
Άρα $C_n^{\min} \subseteq^d Q_n^{\min}$ και η ισότητα έπεται από το γεγονός ότι και οι δύο ειναι δομές συστήματος τελεστών στον (V, V^+, e) και η $C_n^{\min}$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή.
Έστω $f = (f_{i,j}) \in (C_n^{\max})^d$, $u \in V^+$ και $X = (a_1, \cdots, a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{C})$. Τότε

$$\langle (f_{i,j}(u))X^*, X^* \rangle = \sum_{i,j} f_{i,j}(u)a_i\overline{a_j} = f(XuX^*) \geq 0$$

Αφού X τυχόν, έχουμε $(f_{i,j}(u)) \in M_n(\mathbb{C})^+$ και αφού u τυχόν έπεται $(f_{i,j}) \in Q_n^{\max}$.
Άρα έχουμε $(C_n^{\max})^d \subseteq Q_n^{\max}$. Όμως, $\{{}^dQ_n^{\max}\}$ είναι δομή συστήματος τελεστών οπότε έχουμε

$$C_n^{\max} \subseteq^d Q_n^{\max} \ \ \Rightarrow ({}^dQ_n^{\max})^d \subseteq (C_n^{\max})^d$$

Όμως το $Q_n^{\max}$ είναι ασθενώς*-κλειστό άρα $({}^dQ_n^{\max})^d = Q_n^{\max}$. □

Πρόταση 3.4.10. *Εστω X ένας συμπαγής Hausdorff χώρος και έστω $C(X)$ η C^*-άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων στον X. Τότε η ταυτοτική απεικόνιση είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης μεταξύ των $C(X), OMIN(C(X))$ και $OMAX(C(X))$.*

Απόδειξη. Από τα θεωρήματα 1.2.9 και 3.2.4 προκύπτει η ταυτοποίηση $C(X) \cong OMIN(C(X))$. Αντίστοιχα, από τα θεωρήματα 1.2.11 και 3.3.12 προκύπτει και η ταυτοποίηση $C(X) \cong OMAX((C(X))$. □

3.5 Entanglement breaking απεικονίσεις

Μία κατάσταση $s : M_n \otimes M_m \to \mathbb{C}$ λέγεται **separable** αν υπάρχουν $l \in \mathbb{N}$ και καταστάσεις $s_i : M_n \to \mathbb{C}$, $t_i : M_m \to \mathbb{C}$ και πραγματικοί αριθμοί $r_i > 0$ για $i = 1, \cdots, l$ με $\sum_{i=1}^{l} r_i = 1$ και τέτοια ώστε

$$s = \sum_{i=1}^{l} r_i(s_i \otimes t_i)$$

Παρατηρούμε ότι αν s είναι κατάσταση και $f_i : M_n \to \mathbb{C}$ και $g_i : M_m \to \mathbb{C}$ θετικά και γραμμικά συναρτησοειδή με $s = \sum_{i=1}^{l} f_i \otimes g_i$, τότε αν θέσουμε

$$\begin{aligned} r_i &= f_i(I_n)g_i(I_m) \\ s_i &= (f_i(I_n))^{-1} f_i \\ t_i &= (g_i(I_m))^{-1} g_i \end{aligned} \tag{3.14}$$

τότε έχουμε $\sum_{i=1}^{l} r_i = 1$, s_i, t_i είναι καταστάσεις και $s = \sum_{i=1}^{l} r_i(s_i \otimes t_i)$.
Άρα τελικά μια κατάσταση είναι separable αν και μόνο αν είναι άθροισμα από tensors από θετικά γραμμικά συναρτησοειδή.
Πιο γενικά, θα λέμε ένα γραμμικό θετικό συναρτησοειδές $f : M_n \otimes M_m \to \mathbb{C}$ separable αν είναι άθροισμα από tensors από θετικά γραμμικά συναρτησοειδή.
Αν έχουμε μια πλήρως θετική απεικόνιση $\phi : M_k \to M_m$ ορίζουμε

$$\phi_n : M_n \otimes M_k \to M_n \otimes M_m \ \text{ με } \ \phi_n((u_{i,j})) = (\phi(u_{i,j})) \ .$$

Αν $s : M_n \otimes M_m \to \mathbb{C}$ είναι θετικό και γραμμικό συναρτησοειδές τότε και το $s \circ \phi_n : M_n \otimes M_k \to \mathbb{C}$ είναι θετικό και γραμμικό συναρτησοειδές. Αν s κατάσταση και ϕ unital τότε το $s \circ \phi_n$ είναι επίσης κατάσταση.
Η γραμμική απεικόνιση $\phi : M_k \to M_m$ λέγεται **entanglement breaking** αν η απεικόνιση $s \circ \phi_n$ είναι separable κατάσταση για κάθε κατάσταση $s : M_n \otimes M_m \to \mathbb{C}$.
Ταυτοποιούμε τον $M_n \otimes M_m$ με τον $M_n(M_m)$.
Έστω $f : M_n \otimes M_m \to \mathbb{C}$ και $f = (f_{i,j})$ όπου $f_{i,j} : M_m \to \mathbb{C}$ καθορίζονται πλήρως από την σχέση $f((B_{i,j})) = \sum_{i,j} f_{i,j}(B_{i,j})$.

Πρόταση 3.5.1. *Έστω $f : M_n \otimes M_m \to \mathbb{C}$ θετικό γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε*

$$f \ \textit{separable} \iff f : M_n(OMIN(M_m)) \to \mathbb{C} \ \ \textit{θετικό}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι f κατάσταση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f :& M_n(OMIN(M_m)) \to \mathbb{C} \ \text{ θετικό } \iff f \in (C_n^{\min}(M_m))^d \\ &\iff f \in \overline{Q_n^{\min}}^{w^*} \\ &\iff \text{ είναι ασθενές*-όριο από separable θετικά γραμμικά συναρτησοειδή} \\ &\iff f \text{ είναι ασθενές*-όριο από separable καταστάσεις } . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Επειδή οι separable καταστάσεις ειναι κυρτή θήκη συμπαγούς συνόλου, είναι συμπαγές σύνολο, οπότε

$$f \text{ είναι ασθενές*-όριο από separable καταστάσεις } \iff f \ \textit{ separable } .$$

□

Υπενθυμίζουμε ότι ο δυϊκός ενός διατεταγμένου χώρου με διάταξη πινάκων είναι και αυτός διατεταγμένος με διάταξη πινάκων Έστω $\delta_{i,j} : M_n \to \mathbb{C}$ το γραμμικό συναρτησοειδές

$$\delta_{i,j}(E_{k,l}) = \begin{cases} 1 & (i,j) = (k,l) \\ 0 & (i,j) \neq (k,l) \end{cases} .$$

Έστω $\gamma_n : M_n \to M_n'$ ο γραμμικός ισομορφισμός με $\gamma_n(E_{i,j}) = \delta_{i,j}$.

Θεώρημα 3.5.2. *Η απεικόνιση $\gamma_n : M_n \to M_n'$ είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης μεταξύ διατεταγμένων χώρων με διάταξη πινάκων.*
*Συνεπώς ο χώρος $(M_n', (M_n')^+, tr)$ είναι Αρχιμήδειος *-διατεταγμένος χώρος ισόμορφος ως προς τη διάταξη με τον (M_n, M_n^+, I_n) όπου I_n ο ταυτοτικός πίνακας.*

Απόδειξη. Έστω $A_{i,j} \in M_k, \ \ i,j = 1,2,\cdots,n.$
Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sum_{i,j} A_{i,j} \otimes E_{i,j} \in M_k(M_n)^+ \quad \iff \quad F = \sum_{i,j} A_{i,j} \otimes \delta_{i,j} \ \in M_k(M_n')^+ \ .$$

Γράφουμε $F = (f_{r,s})_{r,s=1}^k$, με κάθε $f_{r,s} \in M_n'$. Έχουμε

$$F \in M_k(M_n)^+ \quad \iff \quad \text{η απεικόνιση } F : M_n \to M_k \text{ είναι πλήρως θετική } .$$

Από το θεώρημα 1.2.13 αυτό είναι ακριβώς ισοδύναμο με $(F(E_{i,j})) \in M_n(M_k)^+$
.
Όμως, $(F(E_{i,j})) = \sum_{i,j} A_{i,j} \otimes E_{i,j}$, άρα δείξαμε την ζητούμενη ισοδυναμία.

Άρα, η γ_n είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης.
Τώρα, αφού η γ_n είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης , έχουμε ότι $(M_n', (M_n')^+, \gamma(I_n))$ θα είναι AOU χώρος , ισόμορφος ως προς τη διάταξη με τον (M_n, M_n^+, I_n).
Τέλος , $\gamma(I_n) = \sum_i \delta_{i,i} = tr$. $\square$

Ο Αρχιμήδειος *-διατεταγμένος χώρος (M_n, M_n^+, I_n) μας δίνει τα συστήματα τελεστών $OMIN(M_n)$ και $OMAX(M_n)$ και τους δυϊκούς τους $(OMIN(M_n))'$ και $OMAX(M_n))'$.
Από την άλλη, το θεώρημα 3.5.2 μας επιτρέπει να φτιάξουμε τα συστήματα τελεστών $OMIN(M_n')$ και $OMAX(M_n')$ από τον χώρο $(M_n', (M_n')^+, tr)$.
Η παρακάτω πρόταση δείχνει τη σχέση μεταξύ τους.

Πρόταση 3.5.3. *Ισχύει*

$$(OMIN(M_n))' = OMAX(M_n') = OMAX(M_n)$$

και

$$(OMAX(M_n))' = OMIN(M_n') = OMIN(M_n) .$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη σχέση:
Για συντομία θα συμβολίζουμε $V := M_n'$. Από πρόταση 3.2.9 έχουμε $Q_n^{\min}(M_n) = D_m^{\max}(V)$.

Ισχυρισμός. *Το $D_m^{\max}(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $M_m \otimes V$.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Γράφω $W = M_m$ για συντομία. Επειδή $\dim V < \infty$, υπάρχει k ώστε $V \simeq \mathbb{C}^k$ με την διάταξη κατά συντεταγμένη.

Θεωρώ την γραμμική μορφή

$$\mathrm{tr_{mk}} : M_m \otimes \mathbb{C}^k \to \mathbb{C} : \alpha \otimes v \to \mathrm{tr_m}(\alpha)\mathrm{tr_k}(v)$$

όπου $v = (v(1)\ldots, v(k)) \in \mathbb{C}^k$ και $\mathrm{tr_k}(v) := \sum_{n=1}^k v(n)$.

Θέτουμε

$$D_1 = \{u \in D_m^{\max}(V) : \mathrm{tr_{mk}}(u) \leq 1\}$$

Αν $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes v_i \in D_m^{\max}(V)$, έχουμε

$$\mathrm{tr_{mk}}(u) = \sum_{i=1}^k \mathrm{tr_{mk}}(\alpha_i \otimes v_i) = \sum_{i=1}^k \mathrm{tr_m}(\alpha_i)\mathrm{tr_k}(v_i)$$

$$\text{οπότε} \quad u = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\beta_i \otimes w_i)$$

$$\text{όπου} \quad \lambda_i = \mathrm{tr_m}(\alpha_i)\mathrm{tr_k}(v_i),\ \beta_i = \frac{\alpha_i}{\mathrm{tr_m}(\alpha_i)},\ w_i = \frac{v_i}{\mathrm{tr_k}(v_i)} .$$

Έστω $u \in D_1$. Έχουμε $\lambda_i > 0$ και $\sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}_{\mathrm{mk}}(u) \leq 1$ οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_i \lambda_i = 1$, προσθέτοντας εν ανάγκη όρο της μορφής $\lambda 0 \otimes 0$.

Έχουμε τώρα γράψει το u ως κυρτό συνδυασμό διανυσμάτων από το σύνολο

$$\Sigma := \{\beta \otimes w : \beta \in W_1^+, w \in V_1^+\}$$

όπου $W_1^+ = \{\beta \in W^+ : \mathrm{tr}_{\mathrm{m}}(\beta) \leq 1\}$ και $V_1^+ = \{w \in V^+ : \mathrm{tr}_{\mathrm{k}}(w) \leq 1\}$. Όμως τα σύνολα αυτά είναι κλειστά και φραγμένα υποσύνολα χώρων πεπερασμένης διάστασης, άρα είναι συμπαγή, συνεπώς και το Σ είναι συμπαγές. Επομένως (αφού $\Sigma \subseteq W \otimes V$ και $\dim(W \otimes V) < \infty$) η κυρτή θήκη του Σ είναι κι αυτή συμπαγές σύνολο (απ΄ το θεώρημα Καραθεοδωρή).

Τώρα, αν $u = \lim_n u_n$ όπου $u_n \in D_m^{\max}(V)$ και $\mathrm{tr}_{\mathrm{mk}}(u) := t$, τότε $\frac{u_n}{2t} \in \mathrm{conv}(\Sigma)$ τελικά, άρα και $\frac{u}{2t} = \lim_n \frac{u_n}{2t} \in \mathrm{conv}(\Sigma)$, δηλαδή $\frac{u}{2t} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_i \otimes w_i$ με $\beta_i \in W_1^+, w_i \in V_1^+$, οπότε $u \in D_m^{\max}(V)$, όπως θέλαμε.

□

Άρα

$$D_m^{\max}(V) = C_m^{\max}(V) \quad \text{και} \quad Q_m^{\min}(M_n) = C_m^{\max}(V)$$

άρα

$$M_m(OMIN(M_n)')^+ = M_m(OMAX(M_n'))^+ \ .$$

Έτσι, η ταυτοτική απεικόνιση $OMIN(M_n)' \mapsto OMAX(M_n')$ είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης.
Επίσης, η απεικόνιση γ δίνει την ταυτοποίηση $OMAX(M_n') = OMAX(M_n)$.
Όμοια βγαίνει και ο δεύτερος ισχυρισμός. □

Θεώρημα 3.5.4. *Έστω $\phi : M_k \to M_m$ γραμμική.*
Τότε

$$\phi \ \textit{entanglement breaking} \iff \phi : OMIN(M_k) \to M_m \ \textit{πλήρως θετική} \ .$$

Επιπλέον, αν $\tilde{M}_k = (M_k, \{P_n\}_{n=1}^{\infty}, I)$ κάποια δομή συστήματος τελεστών στον M_k με την ιδιότητα : για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\textit{μια απεικόνιση } \phi : \tilde{M}_k \to M_m \textit{ είναι πλήρως θετική} \\ &\Leftrightarrow \qquad \phi : \tilde{M}_k \to M_m \ \textit{ entanglement breaking} \end{aligned} \tag{3.16}$$

τότε η ταυτοτική απεικόνιση $\tilde{M}_k \to OMIN(M_k)$ είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης.

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Αν $\phi : OMIN(M_k) \to M_m$ πλήρως θετική , τότε η απεικόνιση

$$\phi' : M_m' \to OMIN(M_k)' \text{ με } \phi'(f)(u) = f(\phi(u))$$

είναι και αυτή πλήρως θετική.
Συνεπώς, αν $f = (f_{i,j}) \in M_n(M_m')^+$ τότε $(\phi'(f_{i,j})) \in M_n(OMIN(M_k)')^+$.
Από πρόταση 3.5.3 και τον ορισμό του $OMAX(M_k')$, η κατάσταση $(\phi'(f_{i,j}))$ στον $M_n \otimes M_k$ είναι separable.
Έτσι, για κάθε f στον $M_n \otimes M_m$, έχουμε $f \circ \phi_n = (\phi'(f_{i,j}))$ είναι separable κατάσταση.
Άρα ϕ είναι entanglement breaking.
($\Rightarrow$) Έστω ότι η ϕ είναι entanglement breaking. Τότε $(\phi(f_{i,j})) \in M_n(OMIN(M_k)')^+$ για κάθε $(f_{i,j}) \in M_n(M_m')^+$.
Έτσι, η $\phi' : M_m' \to OMIN(M_k)'$ είναι πλήρως θετική , συνεπώς και η $\phi : OMIN(M_k) \to M_m$ είναι πλήρως θετική.
Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι ισοδύναμος με το ότι

$$\{f : OMIN(M_k) \to M_m \ : f \text{ πλ. θετική}\} \equiv \{f : \tilde{M}_k \to M_m \ : f \text{ πλ. θετική}\}$$

Αυτό όμως ειναι ισοδύναμο με το ότι $C_M^{\min}(M_k)^d = P_m^d$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
Από το θεώρημα 3.4.5 έπεται ότι $C_m^{\min}(M_k) = P_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
Έτσι, η ταυτοτική απεικόνιση $\tilde{M}_k \to OMIN(M_k)$ είναι πλήρης ισομορφισμός διάταξης. □

Ορισμός 3.5.5. Για μία γραμμική $\phi : M_k \to M_m$, ορίζουμε

$$\phi^\flat := \gamma_k^{-1} \circ \phi' \circ \gamma_m : M_m \to M_k \ .$$

Λήμμα 3.5.6. *Αν $A \in M_{m,k}$, $B \in M_{k,m}$ και $\phi : M_k \to M_m$ με $\phi(X) = AXB$ τότε $\phi^\flat(Y) = A^tYB^t$.*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι αν $f : M_k \to \mathbb{C}$ γράφεται $f = \sum_{i,j} y_{i,j}\delta_{i,j}$, έχουμε $f(X) = \sum_{i,j} y_{i,j}x_{i,j} = tr(XY^t)$.
Γράφουμε $\phi = (f_{i,j})$ όπου $f_{i,j} : M_k \to \mathbb{C}, \quad i = 1, \cdots, m$. Έχουμε

$$\phi^\flat(E_{i,j}) = \gamma_k^{-1} \circ \phi'(\delta_{i,j}) = \gamma_k^{-1}(f_{i,j}) \ .$$

Τώρα ,

$$\begin{aligned} f_{i,j}(X) = tr(\phi(X)E_{i,j}) = tr(XBE_{i,j}A) = \\ = tr(X(A^tE_{i,j}B^t)^t) \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Έτσι, $\phi^\flat(E_{i,j}) = A^tE_{i,j}B^t$, άρα, από την αρχική παρατήρηση, έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.5.7. *Έστω $\phi : M_k \to M_m$ γραμμική.*
Τότε

$$\phi^\flat : M_m \to M_k \;\; entangl.\ breaking \Leftrightarrow \phi : M_k \to OMAX(M_m) \;\; \text{πλ. θετική} .$$

Επιπλέον, αν $\tilde{M}_m = (M_m, \{P_n\}_{n=1}^{\infty}, I)$ κάποια δομή συστήματος τελεστών στον M_m με την ιδιότητα : για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\text{μια απεικόνιση } \phi : M_k \to \tilde{M}_m \text{ είναι πλήρως θετική} \\ \Longleftrightarrow \qquad &\phi^\flat : M_k \to \tilde{M}_m \;\; \text{entanglement breaking} \end{aligned} \tag{3.18}$$

τότε η ταυτοτική απεικόνιση $\tilde{M}_m \to OMAX(M_m)$ είναι complete order isomorphism .

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις ταυτοποιήσεις της πρότασης (3.5.3 έχουμε

$$\begin{aligned} &\phi : M_k \to OMAX(M_m) \text{ πλήρως θετική} \\ \Longleftrightarrow \;\; &\phi' : OMAX(M_m)' \to M_k' \text{ πλήρως θετική} \\ \Longleftrightarrow \;\; &\phi^\flat : OMIN(M_m) \to M_k \text{ πλήρως θετική} \\ \Longleftrightarrow \;\; &\phi^\flat \text{ entanglement breaking ,} \end{aligned} \tag{3.19}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία είναι ακριβώς το θεώρημα 3.5.4.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό, είναι ισοδύναμος με το ότι

$$\{f : M_k \to \tilde{M}_m \;\; : f \text{ πλ. θετική}\} \equiv \{f : M_k \to OMAX(M_m) \;\; : f \text{ πλ. θετική}\}.$$

Όμως, μια απεικόνιση $\phi : M_k \to S$ όπου S σύστημα τελεστών είναι πλήρως θετικη $\Longleftrightarrow$ $(\phi(E_{i,j})) \in M_k(S)^+$. Άρα, η ισότητα των παραπάνω συνόλων ισοδυναμεί με την $M_k(OMAX(M_m))^+ = P_k \;\; \forall k$. □

Θα καλούμε μια $\phi : M_k \to M_m$ **co-entanglement breaking** αν η $\phi^\flat$ είναι entanglement breaking

Πρόταση 3.5.8. *Έστω $\phi : M_k \to M_m$ γραμμική. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\phi : M_k \to OMAX(M_m)$ είναι πλήρως θετική.

(2) Υπάρχουν γραμμικά θετικά συναρτησοειδή $s_l : M_k \to \mathbb{C}$ και πίνακες $P_l \in M_m^+$ με $l = 1, \cdots, q$ τέτοια ώστε $\phi(X) = \sum_{l=1}^{q} s_l(X)P_l$.

Απόδειξη. (1)$\Longrightarrow$(2): Η $\phi : M_k \to OMAX(M_m)$ είναι πλήρως θετική $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\phi(E_{i,j})) \in M_k(OMAX(M_m))^+ = C_k^{\max}(M_m) = D_k^{\max}(M_m)$$

Έτσι, από τον χαρακτηρισμό του $D_k^{\max}(M_m)$, υπάρχουν φυσικός q, $A = (a_{l,j}) \in M_{q,k}$ και θετικοί πίνακες $P_1, \cdots, P_q \in M_m^+$ τέτοιοι ώστε

$$\phi(E_{i,j}) = \sum_{l=1}^{q} \overline{a_{l,i}} P_l a_{l,j} \ .$$

Αν ορίσουμε θετικά γραμμικά συναρτησοειδή $s_l : M_k \to \mathbb{C}$ με

$$s_l(X) = \sum_{i,j} \overline{a_{l,i}} x_{i,j} a_{l,j}$$

τότε έχουμε $\phi(E_{i,j}) = \sum_{l=1}^{q} s_l(E_{i,j}) P_l \ \ \forall 1 \leq i, j \leq k$ και άρα

$$\phi(X) = \sum_{l=1}^{q} s_l(X) P_l \ \ \forall X \in M_k \ .$$

(2)$\Longrightarrow$(1): Αν έχουμε ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $s : M_k \to \mathbb{C}$ μπορούμε να γράψουμε το s ως άθροισμα συναρτησοειδών της μορφής $X \mapsto \sum_{i,j} \overline{a_i} x_{i,j} a_j$.
Έτσι, αν $\phi(X) = \sum_{l=1}^{q} s_l(X) P_l$ με κάθε s_l θετικό γραμμικό συναρτησοειδές, τότε αυξάνοντας τον αριθμό των προσθετέων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε κατάσταση έχει τη μορφή

$$s_l(X) = \sum_{i,j} \overline{a_{l,i}} x_{i,j} a_{l,j}$$

και έτσι $\phi(E_{i,j}) = \sum_l \overline{a_{l,i}} P_l a_{l,j}$ οπότε $(\phi(E_{i,j})) \in D_k^{\max}(M_m)$.
Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $\phi : M_k \to OMAX(M_m)$ είναι πλήρως θετική. $\square$

Πόρισμα 3.5.9. *Αν $\phi : M_k \to OMAX(M_m)$ πλήρως θετική, τότε η ϕ είναι entanglement breaking .*

Απόδειξη. Από πρόταση 3.5.8 έχουμε ότι υπάρχουν θετικά γραμμικά συναρτησοειδή $s_l : M_k$ και πίνακες $P_l \in M_m^+, l = 1, \cdots, q$ τέτοιοι ώστε

$$\phi(X) = \sum_{l=1}^{q} s_l(X) P_l \ .$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $f : M_n \otimes M_m \to \mathbb{C}$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} f \circ \phi_n(A \otimes X) &= f(A \otimes \phi(X)) = \sum_{l=1}^{q} s_l(X) f(A \otimes P_l) = \\ &= \sum_{l=1}^{q} s_l(X) g_l(A) = \sum_{l=1}^{q} (g_l \otimes s_l)(A \otimes X) \end{aligned} \tag{3.20}$$

όπου $g_l : M_n \to \mathbb{C}$ θετικό γραμμικό συναρτησοειδές με $g_l(A) = f(A \otimes P_l)$, $l = 1, \cdots, q$.
Άρα $f \circ \phi_n$ separable. $\square$

Θεώρημα 3.5.10. *Έστω $\phi : M_k \to M_m$ γραμμική. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(1) Η $\phi : OMIN(M_k) \to M_m$ είναι πλήρως θετική.

(2) Η ϕ είναι entanglement breaking.

(3) Η ϕ είναι co-entanglement breaking.

(4) Η $\phi : M_k \to OMAX(M_m)$ είναι πλήρως θετική.

(5) Υπάρχουν θετικά γραμμικά συναρτησοειδή $s_l : M_k \to \mathbb{C}$ και πίνακες $P_l \in M_m^+$, $l = 1, \cdots, q$ τέτοιοι ώστε

$$\phi(X) = \sum_{l=1}^{q} s_l(X) P_l \quad \text{για} \quad 1 \le l \le q.$$

(6) Υπάρχουν πίνακες $A_l \in M_{k,m}$ για $1 \le l \le N$ τάξης 1 τέτοιοι ώστε

$$\phi(X) = \sum_{l=1}^{N} A_l^* X A_l \ .$$

(7) Η $\phi : OMIN(M_k) \to OMAX(M_m)$ είναι πλήρως θετική.

Απόδειξη. (1) $\iff$ (2) είναι το θεώρημα 3.5.4.
(3) $\iff$ (4) $\iff$ (5) είναι το πόρισμα 3.5.7 και η πρόταση 3.5.8.
(4) $\Longrightarrow$ (2) το πόρισμα 3.5.9 άρα επίσης (3) $\Longrightarrow$ (2). Επιπλέον αν $\phi = (\phi^\flat)^\flat$ είναι entanglement breaking τότε $\phi^\flat$ είναι entanglement breaking δηλαδή (2) $\Longrightarrow$ (3).
Δηλαδή έχουμε τις ισοδυναμίες

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4) \iff (5)$$

(6) $\Longrightarrow$ (5): Επειδή κάθε A_l είναι τάξης 1, υπάρχουν πίνακες $V_l \in M_{k,1}$ και $W_l \in M_{1,m}$ ώστε $A_l = V_l W_l$. Έχουμε

$$A_l^* X A_l = W_l^* V_l^* X V_l W_l = (V_l^* X V_l)(W_l^* W_l) \ .$$

Τώρα, ορίζουμε $s_l(X) = V_l^* X V_l$ και $P_l = W_l^* W_l$ και έχουμε τη ζητούμενη μορφή της (5).
(5) $\Longrightarrow$ (6): Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε s_l είναι κατάσταση, διαιρώντας με $s_l(I)$. Έτσι, γράφουμε

$$s_l(X) = \langle X, Y_l \rangle := tr(XY_l) \ ,$$

όπου κάθε Y_l είναι θετικός πίνακας (επειδή s_l θετικό) και $tr(Y_l) = 1$ (επειδή $s_l(I) = 1$).
Από το φασματικό θεώρημα, κάθε Y_l γράφεται $Y_l = \sum y_i Q_i$ όπου $Q_i = U_i U_i^*$ είναι προβολές τάξης 1 και y_i είναι οι θετικές ιδιοτιμές κάθε Y_l. Έχουμε

$$s_l(X) = \sum_i y_i tr(XQ_i) = \sum y_i tr(XU_i U_i^*) = \sum_i y_i \langle U_i, XU_i \rangle \ .$$

Δηλαδή, το $s_l(X)$ είναι κυρτός συνδυασμός από vector states. Έτσι, αρκεί να υποθέσουμε ότι το s_l είναι vector state. Έστω $s_l(X) = \langle U_l, XU_l \rangle = U_l^* X U_l$, όπου $U_l \in M_{k,1}$.
Τώρα, πάλι από το φασματικό θεώρημα, έχουμε $P_l = \sum p_i Q_i$ όπου κάθε είναι μία προβολή τάξης 1 και $Q_i = V_i V_i^*$. Συνεπώς, $P_l = \sum_i W_i W_i^*$ όπου $W_i = \sqrt{p_i} V_i$. Θέτοντας τώρα $A_l = V_l W_l$ έχουμε το ζητούμενο.
Δείξαμε λοιπόν και την ισοδυναμία (5) $\iff$ (6).
Τέλος, είναι σαφές ότι (7)$\Longrightarrow$(1). Θα δείξουμε τώρα ότι (5)$\Longrightarrow$(7): Αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση όπου το άθροισμα έχει μόνο έναν όρο, δηλαδή $\phi(X) = s(X)P$. Όμως, για κάθε σύστημα τελεστών $\mathcal{S}$, κάθε $P \in \mathcal{S}^+$ και κάθε $s : M_k \to \mathbb{C}$, βλέπουμε ότι αφού η απεικόνιση $s : OMIN(M_k) \to \mathbb{C}$ είναι πλήρως θετική, τότε και η απεικόνιση $\phi(X) = s(X)P$ είναι πλήρως θετική. □

Η επόμενη πρόταση δίνει μια διαφορετική απόδειξη της ισοδυναμίας (1) και (6), στην ειδική περίπτωση όπου το S είναι εμφυτευτικό (δείτε τον ορισμό 4.1.1):

Πρόταση 3.5.11. *Έστω (V, V^+, e) ένας AOU χώρος , S ένα εμφυτευτικό σύστημα τελεστών. Τότε $\phi : OMIN(V) \to S$ είναι πλήρως θετική*

$$\iff \phi : OMIN(V) \to OMAX(S) \text{ πλήρως θετική}$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $\phi : OMIN(V) \to S$ πλήρως θετική. Από το θεώρημα 2.3.2 υπάρχει ένας συμπαγής Hausdorff χώρος X ώστε ο $OMIN(V)$ να

εμφυτεύεται πλήρως ισομορφικά ως προς τη διάταξη στον $C(X)$. Αφού S εμφυτευτικό η ϕ επεκτείνεται σε μια πλήρως θετική $\psi : C(X) \to S$. Επειδή η ψ είναι πλήρως θετική, είναι και θετική. Συνεπώς, και η $\psi : C(X) \to OMAX(S)$ είναι θετική, επειδή ο κώνος S^+ είναι ο ίδιος σε όλες τις διατάξεις πινάκων στο S.
Θεωρούμε τώρα το σύστημα τελεστών $T = OMAX(S)$. Από την πρόταση 3.4.10 έχουμε ότι $C(X) \cong OMAX(C(X))$ και έτσι, αφού η απεικόνιση $\psi : C(X) \to T$ είναι θετική, και η $\psi : OMAX(C(X)) \to T$ είναι θετική. Οπότε, από το θεώρημα 3.3.12, η απεικόνιση $\psi : OMAX(C(X)) \to T$ είναι πλήρως θετική.
Άρα, η ϕ, που είναι που είναι ο περιορισμός της ψ στον $OMIN(V)$ είναι και αυτή πλήρως θετική.
($\Leftarrow$) Αν η $\phi : OMIN(V) \to OMAX(S)$ είναι πλήρως θετική, τότε, αφού η ταυτοτική απεικόνιση $OMAX(S) \to S$ είναι πλήρως θετική, και η $\phi : OMIN(V) \to S$ θα είναι πλήρως θετική (ως σύνθεση πλήρως θετικών απεικονίσεων). $\square$

Πολλά από τα αποτελέσματα για entaglement breaking απεικονίσεις μεταξύ αλγεβρών πινάκων, μπορούν να γενικευτούν σε συστήματα τελεστών. Η κύρια διαφορά είναι ότι το σύνολο των separable καταστάσεων δεν είναι εν ανάγκη να είναι ασθενώς*-κλειστό. Για αυτό τον λόγο, αν έχουμε ένα σύστημα τελεστών S θα καλούμε ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\phi : M_n(S) \to \mathbb{C}$ **ασθενώς*-separable** αν είναι ασθενώς*-όριο από αθροίσματα από απλούς τανυστές από θετικά γραμμικά συναρτησοειδή.
Έστω S, T συστήματα τελεστών και έστω $\phi : S \to T$.
Θα λέμε ότι ϕ είναι **ασθενώς*-entanglement breaking** αν για κάθε n και για κάθε θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $s : M_n(T) \to \mathbb{C}$ το $s \circ \phi_n : M_n(S) \to \mathbb{C}$ είναι ασθενώς*-separable.

Λήμμα 3.5.12. *Έστω X συμπαγής Hausdorff και έστω $\phi : M_n(C(X)) \to \mathbb{C}$ θετικό γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε ϕ είναι ασθενώς*-separable.*

Απόδειξη. Επειδή $C(X) = OMIN(C(X))$ πλήρως ως προς τη διάταξη, αν $\phi : M_n(C(X)) \to \mathbb{C}$ θετικό, τότε και $\phi : M_n(OMIN(C(X)))) \to \mathbb{C}$ θετικό.
Από την παρατήρηση 3.4.6, η ϕ είναι στην ασθενώς*-κλειστή θήκη του $Q_n^{\min}$.
Από την παρατήρηση 3.4.8 όμως, κάθε στοιχείο του $Q_n^{\min}$ είναι separable. $\square$

Λήμμα 3.5.13. *Έστω (V, V^+, e) ένας Αρχιμήδειος *-διατεταγμένος χώρος και έστω $\phi : M_n(OMIN(V)) \to \mathbb{C}$ θετικό και γραμμικό.*
Τότε ϕ είναι ασθενώς-separable.*

Απόδειξη. Θα θεωρήσουμε τον $OMIN(V)$ σαν υποσύστημα του $C(X)$ όπου X ο χώρος των καταστάσεων του V. Τότε επεκτείνουμε την ϕ σε ένα γραμμικό θετικό συναρτησοειδές στον $M_n(C(X))$ και εφαρμόζουμε το λήμμα 3.5.12. $\square$

Θεώρημα 3.5.14. *Έστω μια γραμμική απεικόνιση $\phi : S \to T$. Τότε η ϕ είναι ασθενώς*-entanglement breaking αν και μόνο αν η $\phi : OMIN(S) \to T$ είναι πλήρως θετική.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Αν $\phi : OMIN(S) \to T$ είναι πλήρως θετική και $s : M_n(T) \to \mathbb{C}$ θετικό και γραμμικό συναρτησοειδές τότε η $s \circ \phi_n : M_n(OMIN(S)) \to \mathbb{C}$ είναι θετικό και γραμμικό συναρτησοειδές άρα από το λήμμα 3.5.13 το $s \circ \phi_n$ είναι ασθενώς*-separable. Άρα ϕ είναι ασθενώς*-entanglement breaking.
($\Rightarrow$) Έστω $\phi : S \to T$ είναι ασθενώς*-entanglement breaking και έστω $s : M_n(T) \to \mathbb{C}$ θετικό και γραμμικό συναρτησοειδές.
Αν $s \circ \phi_n = g \otimes h$ όπου $g : S \to \mathbb{C}$, $h : M_n \to \mathbb{C}$ θετικά και γραμμικά συναρτησοειδή, με $h = \sum_{i,j} p_{i,j}\delta_{i,j}$ όπου $P = (p_{i,j}) \in M_n^+$.
Γράφουμε $P = X^*X$, τότε $g \otimes h = X^*diag(g, \cdots, g)X \in Q_n^{\min}(S)$. Αφού $Q_n^{\min}$ κώνος, κάθε άθροισμα από τέτοιους στοιχειώδεις tensors ανήκει στον $Q_n^{\min}$. Επειδή $s \circ \phi_n$ είναι ασθενώς*-separable έχουμε $s \circ \phi_n \in \overline{Q_n^{\min}}^{w^*}$.
Από την παρατήρηση 3.4.6 έπεται ότι $s \circ \phi_n \in (C_n^{\min})^d$.
Όμως, $C_n^{\min}(S) = M_n(OMIN(S))^+$, οπότε το $(\phi')_n : M_n(T') \to M_n(OMIN(S)')$ είναι θετικό για κάθε n.
Άρα $\phi : OMIN(S) \to T$ είναι πλήρως θετική. $\square$

Κεφάλαιο 4

Εμφυτευτικότητα

4.1 Εμφυτευτικά συστήματα τελεστών

Ορισμός 4.1.1. Ένα αντικείμενο $I \in \mathcal{C}$ καλείται **εμφυτευτικό** (injective) αν για κάθε ζευγάρι αντικειμένων $E \subseteq F$ και κάθε μορφισμό $\phi\colon E \to I$ υπάρχει μορφισμός $\psi\colon F \to I$ που *επεκτείνει* τη ϕ, δηλαδή

$$\psi(e) = \phi(e), \text{για κάθε } e \in E.$$

Αν θεωρήσουμε $\mathfrak{S}$ να είναι η συλλογή των συστημάτων τελεστών και ως μορφισμούς τις πλήρως θετικές απεικονίσεις, τότε έχουμε μια κατηγορία, την οποία ονομάζουμε **κατηγορία των συστημάτων τελεστών**.

Για παράδειγμα, στην κατηγορία των χώρων με νόρμα με μορφισμούς τις συστολές, το αντικείμενο $\mathbb{C}$ είναι εμφυτευτικό (από το θεώρημα Hahn-Banach).

Θεώρημα 4.1.2. *(Θεώρημα Επέκτασης Arveson) Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα, $\mathcal{S}$ σύστημα τελεστών στην $\mathcal{A}$ και $\phi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ πλήρως θετική. Τότε υπάρχει $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ πλήρως θετική που επεκτείνει την ϕ.*

Το θεώρημα του Arveson λέει ακριβώς ότι η $\mathcal{B}(H)$ είναι εμφυτευτική στην κατηγορία των συστημάτων τελεστών.

Ορισμός 4.1.3. Ορίζουμε τις εξής κατηγορίες

1. $\mathfrak{O}$ να είναι η κατηγορία των χώρων τελεστών με μορφισμούς τις πλήρως φραγμένες απεικονίσεις.
2. $\mathfrak{O}_1$ να είναι η κατηγορία των χώρων τελεστών με μορφισμούς τις πλήρεις συστολές.

3. $\mathfrak{S}$ να είναι η κατηγορία των συστημάτων τελεστών με μορφισμούς τις πλήρως θετικές απεικονίσεις.

4. $\mathfrak{S}_1$ να είναι η κατηγορία των συστημάτων τελεστών με μορφισμούς τις πλήρως θετικές unital απεικονίσεις.

Θεώρημα 4.1.4. *(Θεώρημα Επέκτασης Wittstock) Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{M}$ υπόχωρος της $\mathcal{A}$ και $\phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}(H)$ πλήρως φραγμένη. Τότε υπάρχει πλήρως φραγμένη $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ που επεκτείνει τη ϕ ώστε $\|\phi\|_{cb} = \|\psi\|_{cb}$.*

Από το θεώρημα του Wittstock έπεται ότι η άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$ είναι εμφυτευτική στην κατηγορία $\mathfrak{O}$.

Πρόταση 4.1.5. *Η I είναι εμφυτευτικό στην $\mathfrak{O}_1$ αν και μόνο αν κάθε πλήρως φραγμένη απεικόνιση με τιμές στο I έχει πλήρως φραγμένη επέκταση με την ίδια cb-νόρμα.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω I εμφυτευτικό στην $\mathfrak{O}_1$. Έστω $E \subsetneq F$ και $\phi\colon E \to I$ πλήρως φραγμένη με $\|\phi\|_{cb} = M$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\psi\colon F \to I$ πλήρως φραγμένη ώστε $\psi|_E = \phi$ και $\|\psi\|_{cb} = \|\phi\|_{cb}$.

Έστω $\phi_1\colon E \to I$ ώστε

$$\phi_1 = \frac{1}{M}\phi.$$

Τότε $\|\phi_1\|_{cb} = 1$ και η ϕ_1 επεκτείνεται, δηλαδή υπάρχει $\psi_1\colon F \to I$ πλήρως συστολή με $\psi_1|_E = \phi_1$. Επίσης $\|\psi_1\| \leq 1$ αφού είναι πλήρης συστολή, και $\|\psi_1\| \geq \|\phi_1\| = 1$, όπου η ανισότητα ισχύει λόγω της επέκτασης. Άρα $\|\psi_1\|_{cb} = 1$. Αν ορίσουμε $\psi\colon F \to I$ ώστε

$$\psi = M\psi_1$$

τότε αυτή είναι επέκταση της ϕ, αφού εύκολα βλέπουμε ότι $\phi(e) = M\psi_1(e) = M\phi_1(e) = \frac{M}{M}\phi(e) = \phi(e)$ για κάθε $e \in E$ και έτσι $\|\psi\|_{cb} = M\|\psi_1\|_{cb} = M$.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι κάθε πλήρως φραγμένη απεικόνιση έχει πλήρως φραγμένη επέκταση με την ίδια νόρμα. Έστω $E \subsetneq F$ και $\phi\colon E \to I$ πλήρης συστολή με $\|\phi\|_{cb} = a < 1$. Τότε η ϕ είναι πλήρως φραγμένη και συνεπώς υπάρχει $\psi\colon F \to I$ για την οποία $\|\psi\|_{cb} = \|\phi\|_{cb} \leq 1$. Αυτό σημαίνει ότι η ψ είναι πλήρης συστολή. $\square$

Η Πρόταση αυτή δείχνει ότι το θεώρημα του Wittstock λέει επιπλέον ότι το $\mathcal{B}(H)$ είναι εμφυτευτικό και στην κατηγορία $\mathfrak{O}_1$.

Πρόταση 4.1.6. *Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ένα σύστημα τελεστών. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Το $\mathcal{S}$ είναι εμφυτευτικό στην $\mathfrak{O}_1$.*
2. *Το $\mathcal{S}$ είναι εμφυτευτικό στην $\mathfrak{S}_1$.*
3. *Το $\mathcal{S}$ είναι εμφυτευτικό στην $\mathfrak{S}$.*
4. *Υπάρχει μια πλήρως θετική προβολή $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}$ στον $\mathcal{S}$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ισοδυναμία μεταξύ των (1) και (4):
($\Rightarrow$) Αν ο $\mathcal{S}$ είναι εμφυτευτικός στην $\mathfrak{O}_1$, τότε η ταυτοτική απεικόνιση από τον $\mathcal{S}$ στον $\mathcal{S}$ επεκτείνεται σε μια πλήρη συστολή $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}$. Εφ' όσον η ϕ επεκτείνει την ταυτοτική απεικόνιση, είναι προβολή στον $\mathcal{S}$. Αφού επιπλέον $\phi(1) = 1$ η ϕ πρέπει να είναι πλήρως θετική.
($\Leftarrow$) Δεχόμαστε ότι ισχύει η (4) και έστω δύο χώροι τελεστών $E \subseteq F$ και $\gamma\colon E \to \mathcal{S}$ μια πλήρης συστολή. Τότε, από Wittstock, η γ έχει επέκταση $\psi\colon F \to \mathcal{B}(H)$ η οποία είναι πλήρως συστολή. Έτσι η $\phi \circ \psi\colon F \to \mathcal{S}$ είναι η ζητούμενη πλήρης συστολή επέκταση της γ στην $\mathcal{S}$.
Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ισοδυναμίες. □

Η Πρόταση αυτή εξασφαλίζει ότι για συστήματα τελεστών η εμφυτευτικότητα στις $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$ είναι ισοδύναμες έννοιες. Συνεπώς, στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον όρο '*εμφυτευτικά*' για τέτοια συστήματα.

Θεώρημα 4.1.7. *(Choi-Effros) Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ένα εμφυτευτικό σύστημα τελεστών και έστω $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}$ μια πλήρως θετική προβολή στο $\mathcal{S}$. Η απεικόνιση $a \circ b\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ώστε $a \circ b = \phi(a \cdot b)$ ορίζει πολλαπλασιασμό έτσι ώστε το $(\mathcal{S}, \circ, *)$ να είναι μια C^*-άλγεβρα, όπου $*$ είναι η συνήθης ενέλιξη στο $\mathcal{S}$. Επιπλέον, η ταυτοτική απεικόνιση από το $\mathcal{S}$ στην $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{S}, \circ)$ είναι μοναδιαίος πλήρης ισομορφισμός ως προς τη διάταξη. Τέλος, η C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μονότονα πλήρης, δηλαδή για κάθε φραγμένο και αύξον δίκτυο $\{a_i\}$ από αυτοσυζυγή στοιχεία της $\mathcal{A}$, το supremum του ανήκει στην $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Πρώτα, παρατηρούμε ότι, αφού $\mathcal{S} = \phi(\mathcal{B}(H)) = ker(id - \phi)$, ο χώρος $\mathcal{S}$ είναι κλειστός στην $\mathcal{B}(H)$ ως προς τη νόρμα, συνεπώς είναι και πλήρης.
Τώρα, θα δείξουμε ότι η πράξη $\circ$ είναι πράγματι πολλαπλασιασμός:
Έστω $a, b, c \in \mathcal{S}$. Τότε εξ ορισμού $a \circ b \in \mathcal{S}$. Για την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} a \circ (b + c) = \phi(a \cdot (b + c)) = \phi(a \cdot b + a \cdot c) &= \phi(a \cdot b) + \phi(a \cdot c) \\ &= a \circ b + a \circ c \end{aligned}$$

και επιπλέον ισχύει $a \circ 1 = 1 \circ a = a$. Για την προσεταιριστική ιδιότητα αρκεί να δείξουμε ότι $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, ή ισοδύναμα ότι $\phi(a \cdot \phi(b \cdot c)) = \phi(\phi(a \cdot b) \cdot c)$.

Ισχυρισμός. *Για κάθε $x \in \mathcal{B}(H)$ και $a \in \mathcal{S}$ έχουμε $\phi(\phi(x) \cdot a) = \phi(x \cdot a)$ και $\phi(a \cdot \phi(x)) = \phi(a \cdot x)$.*

Αν έχουμε τον ισχυρισμό τότε έχουμε

$$\phi(a\phi(bc)) = \phi(a(bc)) = \phi((ab)c) = \phi(\phi(ab)c),$$

συνεπώς έχουμε την προσεταιριστικότητα.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Από την ανισότητα του Schwarz για τις unital πλήρως θετικές απεικονίσεις ψ έχουμε $\psi(y^*y) - \psi(y)^*\psi(y) \geq 0$. Αν το εφαρμόσουμε αυτό για $\psi = \phi^{(2)}$ και $y = \begin{bmatrix} a^* & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \phi(aa^*) & \phi(ax) \\ \phi(x^*a^*) & \phi(x^*x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} aa^* & a\phi(x) \\ \phi(x)^*a^* & \phi(x)^*\phi(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε την $\phi^{(2)}$ στην παραπάνω ανισότητα, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & \phi(ax) - \phi(a\phi(x)) \\ \phi(x^*a^*) - \phi(\phi(x)^*a^*) & \phi(x^*x) - \phi(\phi(x)^*\phi(x)) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Εφ΄ όσον ο πίνακας είναι θετικός, πρέπει $\phi(ax) - \phi(a\phi(x)) = 0$ και αφού η ϕ είναι αυτοσυζυγής, παίρνουμε $\phi(\phi(x)a)) = \phi(ax)$ και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης. □

Δείχνουμε τώρα την C^*-ιδιότητα: Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\|a^* \circ a\| = \|\phi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| = \|a\|^2 \tag{4.1}$$

και έπειτα από την ανισότητα του Schwarz έχουμε $\phi(a^*a) \geq \phi(a)^*\phi(a) = a^*a$ και συνεπώς

$$\|a^* \circ a\| = \|\phi(a^*a)\| \geq \|a^*a\| = \|a\|^2. \tag{4.2}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις, έπεται ότι η $(\mathcal{S}, \circ)$ είναι C^*-άλγεβρα.

Μένει να δείξουμε ότι η ταυτοτική είναι μοναδιαίος πλήρης ισομορφισμός διάταξης. Αρκεί να δείξουμε ότι η ταυτοτική και η αντίστροφη της είναι μοναδιαίες πλήρεις ισομετρίες. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η ταυτοτική από το $\mathcal{S}$ στην $\mathcal{A}$ είναι ισομετρία. Το $\mathcal{S}$ είναι εφοδιασμένο με τη δομή χώρου τελεστών που κληρονομεί από το $\mathcal{B}(H)$, ενώ η $\mathcal{A}$ έχει την συνήθη δομή χώρου τελεστών ως C^* άλγεβρα. Θεωρούμε $M_n(\mathcal{S}) \subseteq M_n(\mathcal{B}(H)) = \mathcal{B}(H^{(n)})$ και $\phi_n : \mathcal{B}(H^{(n)}) \to M_n(\mathcal{S})$. Επειδή η ϕ_n είναι πλήρως θετική προβολή, χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα για την ϕ_n, το γινόμενο $A \circ_n B = \phi_n(A \cdot B)$

κάνει το $M_n(\mathcal{S})$ C^* άλγεβρα, η οποία μάλιστα είναι ισομετρική με το σύστημα τελεστών $M_n(\mathcal{S})$. Όμως, για κάθε $A = (a_{i,j})$ και $B = (b_{i,j})$ έχουμε

$$A \circ_n B = \phi^{(n)}\big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\big) = \sum_{k=1}^{n} \phi(a_{ik}b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \circ b_{kj}.$$

το οποίο είναι το γινόμενο πινάκων στην άλγεβρα $M_n(\mathcal{A})$. Έτσι, $(M_n(\mathcal{S}), \circ_n)$ και $M_n(\mathcal{A})$ έχουν τον ίδιο πολλαπλασιασμό και την ίδια ενέλιξη. Άρα, η ταυτοτική απεικόνιση ανάμεσα σε αυτές τις δύο C^* άλγεβρες είναι $*$-ισομορφισμός άρα είναι ισομετρία.

Τέλος, έστω $\{a_i\}$ ένα αύξον δίκτυο αυτοσυζυγών στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $\sup_i \|a_i\| < +\infty$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το ελάχιστο άνω φράγμα του δικτύου $\{a_i\}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Επειδή η ταυτοτική απεικόνιση $\iota : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ είναι ισομορφισμός διάταξης, διατηρεί την ενέλιξη. Συνεπώς, το $\{a_i\}$ είναι ένα αύξον δίκτυο από αυτοσυζυγή στοιχεία του $\mathcal{B}(H)$. Έτσι, το στοιχείο $b \in \mathcal{B}(H)$, το οποίο ορίζεται από την σχέση

$$\langle b\xi, \xi\rangle = \sup_i \langle a_i\xi, \xi\rangle \quad \forall\ \xi \in H\ ,$$

είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{a_i\}$ στον $\mathcal{B}(H)$. Θα δείξουμε ότι το στοιχείο $\phi(b) \in \mathcal{A}$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{a_i\}$ στην $\mathcal{A}$.

Εφ΄ όσον ϕ είναι θετική και $a_i \leq b$ για κάθε i, έχουμε

$$a_i = \phi(a_i) \leq \phi(b)$$

και έτσι, το $\phi(b)$ είναι άνω φράγμα του $\{a_i\}$. Όμως, αν $a \in \mathcal{A}$ είναι ένα άνω φράγμα του $\{a_i\}$, τότε $a_i \leq a$ σαν τελεστές στον H, οπότε $b \leq a$. Άρα,

$$\phi(b) \leq \phi(a) = a\ ,$$

δηλαδή το $\phi(b)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. □

Στο εξής, θα λέμε ότι ένα σύστημα τελεστών είναι εμφυτευτικό, όταν είναι εμφυτευτικό στην $\mathfrak{O}_1$.

Όμοια με την Πρόταση 4.1.6 βλέπουμε ότι ένας χώρος τελεστών $E \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι εμφυτευτικός αν και μόνο αν υπάρχει μια προβολή από τον $\mathcal{B}(H)$ στον E που είναι πλήρης συστολή.

4.2 Εμφυτευτικά περιβλήματα χώρων τελεστών

Ορισμός 4.2.1. Έστω E, F χώροι τελεστών και $k : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Λέμε ότι ο (E, k) είναι **εμφυτευτικό περίβλημα** (injective envelope) του F αν ισχύουν τα εξής:

(i) Ο E είναι εμφυτευτικός στην $\mathfrak{O}_1$.

(ii) Η $k\colon F \to E$ είναι πλήρης ισομετρία.

(iii) Αν ο E_1 είναι εμφυτευτικός με $k(F) \subseteq E_1 \subseteq E$, τότε $E_1 = E$.

Κάθε ζεύγος (E, k) που ικανοποιεί το (ii) λέγεται **επέκταση** του F. Κάθε ζεύγος (E, k) που ικανποιεί τα $(i), (ii)$ λέγεται **εμφυτευτική επέκταση** του F.

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη τέτοιου αντικειμένου θα ήταν λογικό να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Zorn. Θα έπρεπε όμως να αποδείξουμε ότι αν $\{E_\lambda\}$ είναι μια φθίνουσα αλυσίδα από εμφυτευτικούς χώρους τελεστών ώστε $F \subseteq E_\lambda$ για κάθε λ, τότε και η τομή $\bigcap_\lambda E_\lambda$ είναι επίσης εμφυτευτική. Αυτό δεν είναι εύκολο να γίνει και θα ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την έννοια της minimal F-ημινόρμας.

Υποθέτουμε ότι $F \subseteq \mathcal{B}(H)$. Θα λέμε ότι μια απεικόνιση $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι **F-απεικόνιση** αν είναι πλήρης συστολή και $\phi(x) = x$ για κάθε $x \in F$. Μια F-απεικόνιση ϕ για την οποία ισχύει $\phi \circ \phi = \phi$ λέγεται F-προβολή.

Ορίζουμε **μερική διάταξη** στις F-προβολές ως εξής:

$$\psi < \phi \iff \psi \circ \phi = \psi = \phi \circ \psi.$$

Δοθείσης μιας F-απεικόνισης ϕ, ορίζουμε μια **F-ημινόρμα** p_ϕ στον $\mathcal{B}(H)$ ώστε

$$p_\phi(x) = \|\phi(x)\|.$$

Η συνηθισμένη μερική διάταξη στις ημινόρμες είναι η εξής:

$$p \leq q \iff p(x) \leq q(x) \text{ , για κάθε } x.$$

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω $F \subseteq \mathcal{B}(H)$ χώρος τελεστών. Τότε υπάρχει minimal F-ημινόρμα στον $\mathcal{B}(H)$.*

Για την απόδειξη, θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:
Αν E ένας χώρος με νόρμα, ο χώρος $\mathcal{B}(E, \mathcal{B}(H))$ όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $\phi : E \to \mathcal{B}(H)$ μπορεί να εφοδιαστεί με την λεγόμενη **BW-τοπολογία**, την οποία θα χρειαστεί να ορίσουμε μόνο στα ομοιόμορφα φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{B}(E, \mathcal{B}(H))$ δηλαδή στις μπάλες $B_r(E, \mathcal{B}(H)) = \{\phi : E \to \mathcal{B}(H) \text{ με } \|\phi\| \leq r\}$. Ορίζουμε

$$\phi_i \overset{\text{BW}}{\to} \phi \iff \langle \phi_i(x)\xi, \eta\rangle \to \langle \phi(x)\xi, \eta\rangle \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } \xi, \eta \in H \text{ .}$$

Λήμμα 4.2.3. *Αν E είναι χώρος με νόρμα και $\rho \in \mathbb{R}_+$, τότε η μπάλα $B_p(E, \mathcal{B}(H))$ είναι BW-συμπαγής. Επιπλέον, αν E είναι χώρος τελεστών, τα σύνολα*

$$CB_\rho(E, \mathcal{B}(H)) = \{\phi \in B(E, \mathcal{B}(H)) : \|\phi\|_{cb} \leq \rho\} \ ,$$

$$CP_\rho(E, \mathcal{B}(H)) = \{\phi \in B_\rho(E, \mathcal{B}(H) : \phi \text{ πλήρως θετική}\} \ ,$$

$$CP_\rho^1(E, \mathcal{B}(H)) = \{\phi \in CP_\rho(E, \mathcal{B}(H)) : \phi(1) = 1\} \ ,$$

είναι BW-κλειστά υποσύναλα του $B_p(E, \mathcal{B}(H))$.
Με άλλα λόγια: Έστω $\{\phi_i\}$ ένα ομοιόμορφα φραγμένο δίκτυο από γραμμικές απεικονίσεις $\phi : E \to \mathcal{B}(H)$. Τότε υπάρχει ένα υποδίκτυο $\{\psi_i\}$ του $\{\phi\}$ και ένα $\psi : E \to \mathcal{B}(H)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in E$ και κάθε $\xi, \eta \in H$ να ισχύει

$$\langle \psi_i(x)\xi, \eta \rangle \to \langle \psi(x)\xi, \eta \rangle \ .$$

Επιπλέον, αν οι ϕ_i είναι πλήρως θετικές, τότε και η ψ είναι πλήρως θετική και αν $\sup_i \|\phi_i\|_{cb} \leq \rho$, τότε $\|\psi\|_{cb} \leq \rho$.

Απόδειξη λήμματος. Έστω $\rho = \sup_i \|\phi_i\|$. Θεωρούμε K ως το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : E \times H \times H \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την σχέση $f(x, \xi, \eta) \leq \rho\|x\|\|\xi\|\|\eta\|$, δηλαδή

$$K = \prod_{x,\xi,\eta} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\|x\|\|\xi\|\|\eta\|\}$$

με την τοπολογία γινόμενο. Επειδή κάθε σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\|x\|\|\xi\|\|\eta\|\}$ είναι συμπαγές, από το θεώρημα Tychonoff, το K είναι και εκείνο συμπαγές. Τώρα, αν $f_i(x, \xi, \eta) = \langle \phi_i(x)\xi, \eta \rangle$, τότε το $\{f_i\}$ είναι ένα δίκτυο στο K, οπότε έχει ένα συγκλίνον υποδίκτυο, έστω $\{g_i\}$. Έχουμε $g_j(x, \xi, \eta) = \langle \psi_j(x)\xi, \eta \rangle$ για κάποιο υποδίκτυο $\{\psi_j\}$ του $\{\phi_i\}$.
Σταθεροποιούμε τώρα ένα $x \in E$ και ορίζουμε

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_x : H \times H \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_x = \lim_j \langle \psi_j(x)\xi, \eta \rangle \ .$$

Η απεικόνιση $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_x$ είναι sesquilinear μορφή, λόγω του ορισμού της, και είναι φραγμένη από $\rho\|x\|$ αφού

$$|\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_x| \leq \sup_i \|\psi_j\|\|x\|\|\xi\|\|\eta\| \ .$$

Έτσι, υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $\psi \in \mathcal{B}(H)$ τέτοιος ώστε

$$\langle \psi(x)\xi, \eta \rangle = \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_x = \lim_j \langle \psi_j(x)\xi, \eta \rangle \ ,$$

και $\|\psi(x)\| \leq \rho\|x\|$. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\psi : E \to \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμική, καθώς το $\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_x$, συνεπώς και το $\psi(x)$ εξαρτάται γραμμικά από το x. Επίσης, $\|\psi\| \leq \rho$ και $\psi(x) = \lim_j \psi_j(x)$ στην weak operator τοπολογία και αν ϕ_i είναι unital τότε και η ψ είναι unital.

Παρατηρούμε ότι, αν E είναι χώρος τελεστών ή σύστημα τελεστών, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x = [x_{i,j}] \in M_n(E)$ έχουμε $\psi^{(n)}(x) = \lim_\lambda \psi_\lambda^{(n)}(x)$ στην weak operator τοπολογία του $\mathcal{B}(H^{(n)})$:

Πράγματι, αν $\xi = [\xi_i], \eta = [\eta_i] \in H^{(n)}$ έχουμε

$$\left\langle \psi_\lambda^{(n)}(x)\xi, \eta \right\rangle = \langle [\psi_\lambda(x_{ik})]\xi, \eta \rangle = \sum_{i,k=1}^{n} \langle \psi_\lambda(x_{i,k})\xi_k, \eta_i \rangle \ .$$

και αφού $\lim_\lambda \langle \psi_\lambda(x_{ik}\xi_k, \eta_i\rangle = \langle \psi(x_{ik}\xi_k, \eta_i \rangle$ για κάθε i, k, έπεται το ζητούμενο.

Έτσι, αν κάθε ϕ_i είναι πλήρως φραγμένη με $\|\phi_i\|_{cb} \leq \rho$ τότε

$$|\langle \psi^{(n)}(x)\xi, \eta \rangle| \leq \sup_\lambda \|\psi_\lambda^{(n)}(x)\|\|\xi\|\|\eta\| \leq \sup_\lambda \rho\|x\|_n\|\xi\|\|\eta\| \ ,$$

ώστε $\|\psi^{(n)}(x)\| \leq \rho\|x\|_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $\|\psi\|_{cb} \leq \rho$.

Ομοίως, αν κάθε ϕ είναι πλήρως θετική τότε κάθε $\psi_\lambda^{(n)}$ είναι θετική και θέτοντας $\xi = \eta$ παίρνουμε ότι η $\psi^{(n)}$ είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η ψ είναι πλήρως θετική. □

Απόδειξη θεωρήματος. Έστω $\phi_\lambda \colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ F-απεικονίσεις τέτοιες ώστε η p_{ϕ_λ} να είναι φθίνουσα αλυσίδα από F-ημινόρμες. Εφ'όσον ο $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}(H), \mathcal{B}(H))$ είναι BW-συμπαγής από το λήμμα 4.2.3, το δίκτυο $\{\phi_\lambda\}$ έχει συγκλίνον υποδίκτυο $\{\phi_{\lambda_\mu}\}$ το οποίο συγκλίνει, έστω στο ϕ. Προφανώς η ϕ είναι F-απεικόνιση και αφού

$$|\langle \phi(x)h, k \rangle| = \lim_\mu |\langle \phi_{\lambda_\mu}(x)h, k \rangle| \leq \liminf_\mu \|\phi_{\lambda_\mu}(x)\|\|h\|\|k\|$$

έπεται ότι $p_\phi \leq p_{\phi_\lambda}$, για κάθε λ. Δηλαδή κάθε φθίνουσα αλυσίδα από F-ημινόρμες έχει κάτω φράγμα. Από το Λήμμα Zorn, υπάρχει minimal F-ημινόρμα. □

Θεώρημα 4.2.4. *(Θεώρημα ύπαρξης εμφυτευτικού περιβλήματος) Έστω $F \subseteq \mathcal{B}(H)$ χώρος τελεστών. Αν $\phi \colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ μια F-απεικόνιση ώστε η p_ϕ να είναι minimal F-ημινόρμα, τότε η ϕ είναι minimal F-προβολή και το σύνολο τιμών της $\phi(\mathcal{B}(H))$ είναι εμφυτευτικό περίβλημα για τον F.*

Απόδειξη. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι η ϕ είναι F-προβολή, δηλαδή ότι $\phi \circ \phi = \phi$. Πράγματι, για την $\phi \circ \phi$ έχουμε:

$$(\phi \circ \phi)(x) = \phi(\phi(x)) = \phi(x) = x, \text{ για κάθε } x \in F$$

όπου στην παραπάνω ισότητα χρησιμοποιούμε ότι η ϕ είναι F-απεικόνιση, και επίσης έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|\phi \circ \phi\|_{cb} \leq 1 \iff \\ \sup\|(\phi \circ \phi)_n\| \leq 1 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει, αφού $\sup\|(\phi)_n\| \leq 1$. Άρα η $\phi \circ \phi$ είναι F-απεικόνιση. Επίσης, αφού η $\phi \circ \phi$ είναι συστολή έχουμε ότι $\|\phi(\phi(x))\| \leq \|\phi(x)\|$. Άρα, αφού η p_ϕ είναι minimal, πρέπει $\|\phi \circ \phi(x)\| = \|\phi(x)\|$, για κάθε $x \in \mathcal{B}(H)$. Αφού $\phi^{(k+1)} = \phi^{(k)} \circ \phi$, τότε $\|\phi^{(k)}(x)\| = \|\phi(x)\|$, για κάθε $k \geq 1$. Θέτουμε $\psi_n(x) = \frac{\phi(x)+\cdots+\phi^{(n)}(x)}{n}$ και τότε $\|\psi_n(x)\| \leq \|\phi(x)\|$ και άρα

$$\|\psi_n(x)\| = \|\phi(x)\|. \tag{4.3}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi \circ \phi(x)\| = \|\phi(x - \phi(x))\| = \|\psi_n(x - \phi(x))\| = \\ \|\frac{\phi(x) + \cdots + \phi^{(n)}(x)}{n} - \frac{\phi^{(2)} + \cdots + \phi^{(n+1)}(x)}{n}\| \leq \\ \frac{2\|\phi(x)\|}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (4.3). Άρα $\|\phi(x) - \phi \circ \phi(x)\| = 0$. Συνεπώς, αποδείξαμε ότι η ϕ είναι F-προβολή. Θα δείξουμε τώρα ότι η ϕ είναι minimal. Έστω ψ F-προβολή ώστε $\psi < \phi$

δηλαδή $\psi \circ \phi = \psi = \phi \circ \psi$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $\psi = \phi$. Αφού $\|\psi(x)\| = \|\psi(\phi(x))\| \leq \|\phi(x)\|$, όπου στην ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ψ είναι συστολή, έχουμε ότι

$$\|\psi(x)\| = \|\phi(x)\|$$

για κάθε x. Άρα,

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \psi(x)\| = \|\phi(\phi(x) - \psi(x))\| = \|\psi(\phi(x) - \psi(x))\| = \\ \|\psi(\phi(x)) - \psi(\psi(x))\| = \|\psi(x) - \psi(x)\| = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\phi(x) = \psi(x)$, για κάθε x, συνεπώς η ϕ είναι minimal.

Μένει να δείξουμε ότι το $\phi(\mathcal{B}(H))$ είναι εμφυτευτικό περίβλημα του F. Η $\mathcal{B}(H)$ είναι εμφυτευτική στην $\mathfrak{D}_1$ και η ϕ είναι πλήρης συστολή και προβολή. Από αυτό προκύπτει ότι το $\phi(\mathcal{B}(H))$ είναι εμφυτευτικό στην $\mathfrak{D}_1$. Υποθέτουμε τώρα ότι $F \subseteq E_1 \subseteq \phi(\mathcal{B}(H))$ με E_1 εμφυτευτικό στην $\mathfrak{D}_1$. Τότε η ταυτοτική απεικόνιση $E_1 \to E_1$ επεκτείνεται σε μια πλήρης συστολή και προβολή

$\gamma\colon \mathcal{B}(H) \to E_1$. Εφ' όσον οι ϕ και γ είναι F-απεικονίσεις, η $\gamma \circ \phi\colon \mathcal{B}(H) \to E_1$ είναι F-απεικόνιση και επίσης $\|\gamma(\phi(x)\| \leq \|\phi(x)\|$. Η p_ϕ όμως είναι minimal, οπότε έχουμε ότι $\|\gamma(\phi(x)\| = \|\phi(x)\|$.

Επίσης η γ είναι ισομετρία στον $\phi(\mathcal{B}(H))$ και $\gamma(\phi(x) - (\gamma \circ \phi)(x)) = (\gamma \circ \phi)(x) - (\gamma \circ \gamma \circ \phi)(x) = 0$, οπότε παίρνουμε ότι $\gamma(\phi(x)) = \phi(x)$. Άρα $E_1 = \phi(\mathcal{B}(H))$. Έτσι, $\phi(\mathcal{B}(H))$ εμφυτευτικό περίβλημα του F. □

Λήμμα 4.2.5. *Έστω $F \subseteq \mathcal{B}(H)$ χώρος τελεστών με $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ μια F-απεικόνιση ώστε η p_ϕ να είναι minimal F-ημινόρμα. Αν $\gamma\colon \phi(\mathcal{B}(H)) \to \phi(\mathcal{B}(H))$ πλήρως συστολή και $\gamma(x) = x$ για κάθε $x \in F$, τότε $\gamma(\phi(x)) = \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{B}(H)$.*

Απόδειξη. Αφού $\|\gamma(\phi(x))\| \leq \|\phi(x)\|$ έχουμε ότι $\|\gamma(\phi(x))\| = \|\phi(x)\|$ λόγω της minimality της p_ϕ. Έτσι, η γ είναι ισομετρία και συνεπώς 1-1. Εφ' όσον η $\gamma \circ \phi$ είναι F-απεικόνιση και η $p_{\gamma\circ\phi} = p_\phi$ είναι minimal F-ημινόρμα, από το Θεώρημα 4.2.4 έπεται ότι η $\gamma \circ \phi$ είναι προβολή.

Έτσι, $\gamma \circ \phi = \gamma \circ \phi \circ \gamma \circ \phi = \gamma \circ \gamma \circ \phi$, γιατί η ϕ είναι η ταυτοτική στο σύνολο τιμών της $\gamma \circ \phi$ που είναι υποσύνολο του $\phi(\mathcal{B}(H))$ και $\phi \circ \phi = \phi$. Έτσι, $\gamma \circ (\phi - \gamma \circ \phi) = 0$. Αλλά αφού η γ είναι 1-1, έπεται ότι $\phi = \gamma \circ \phi$. □

Θεώρημα 4.2.6. *(Μοναδικότητα) Έστω $(E_1, k_1), (E_2, k_2)$ δύο εμφυτευτικά περιβλήματα ενός χώρου τελεστών F. Τότε η απεικόνιση*
$i = k_2 \circ k_1^{-1}\colon k_1(F) \to k_2(F)$ ώστε $i(k_1(m)) = k_2(m)$,

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "k_2"'] & k_1(F) \subseteq E_1 \arrow[dl, "i"] \\
k_2(F) \subseteq E_2 &
\end{tikzcd}$$

επεκτείνεται μοναδικά σε μια πλήρη ισομετρία και ισομορφισμό από τον E_1 στον E_2.

Απόδειξη. Έστω $F \subseteq \mathcal{B}(H)$ με $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ μια F-απεικόνιση ώστε p_ϕ minimal ημινόρμα. Αν αποδείξουμε ότι η $k_1\colon F \to E_1$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια $\gamma_1\colon \phi(\mathcal{B}(H)) \to E_1$ που είναι πλήρης ισομετρία και ισομορφισμός, τότε όμοια η k_2 θα επεκτείνεται σε μια γ_2, οπότε η $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ θα είναι η ζητούμενη απεικόνιση από τον E_1 στον E_2.

Αφού το E_1 είναι εμφυτευτικό, υπάρχει επέκταση της k_1, έστω $\gamma_1 \colon \phi(\mathcal{B}(H)) \to E_1$ που είναι πλήρης συστολή. Επίσης το $\phi(\mathcal{B}(H))$ είναι εμφυτευτικό λόγω του Θεωρήματος 4.2.4, από όπου παίρνουμε ότι υπάρχει πλήρης συστολή $\beta \colon E_1 \to \phi(\mathcal{B}(H))$ με $\beta(k_1(x)) = x$ για κάθε $x \in F$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "\phi"'] & E_1 \\ \phi(\mathcal{B}(H)) \arrow[ur, "\gamma_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "\phi"'] & E_1 \arrow[dl, "\beta"] \\ \phi(\mathcal{B}(H)) & \end{tikzcd}$$

Τώρα η $\beta \circ \gamma_1 \colon \phi(\mathcal{B}(H)) \to \phi(\mathcal{B}(H))$ είναι πλήρης συστολή και ικανοποιεί το Λήμμα 4.2.5. Αφού β και γ_1 είναι και οι δύο πλήρεις συστολές και η σύνθεσή τους από το Λήμμα είναι ισομετρία, έπεται ότι η γ_1 είναι πλήρης ισομετρία. Άρα η γ_1 είναι 1-1.

Επίσης το σύνολο τιμών $\gamma_1(\phi(\mathcal{B}(H))) \subseteq E_1$ θα είναι εμφυτευτικός χώρος τελεστών, οπότε από την minimality του E_1 έπεται ότι $\gamma_1(\phi(\mathcal{B}(H))) = E_1$, δηλαδή η γ_1 είναι επί. Δηλαδή, γ_1 πλήρης συστολή και ισομορφισμός.

Για την μοναδικότητα της γ_1, βλέπουμε ότι αν η $\gamma_1 \colon \phi(\mathcal{B}(H)) \to E_1$ είναι πλήρης ισομετρία και ισομορφισμός, τότε επεκτείνει την k_1. Η απεικόνιση $\gamma^{-1} \circ \gamma_1 \colon \phi(\mathcal{B}(H)) \to \phi(\mathcal{B}(H))$ είναι πλήρης συστολή και ικανοποιεί το Λήμμα 4.2.5. Οπότε είναι η ταυτοτική στο $\phi(\mathcal{B}(H))$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 4.2.7. *(Rigidity) Έστω (E, k) εμφυτευτικό περίβλημα της F και έστω $\psi \colon E \to E$ πλήρης συστολή με $\psi(k(x)) = k(x)$ για κάθε $x \in F$. Τότε $\psi(e) = e$ για κάθε $e \in E$.*

Απόδειξη. Αυτό ισχύει για το εμφυτευτικό περίβλημα $\phi(\mathcal{B}(H))$ από το Λήμμα 4.2.5. Όμως από το Θεώρημα 4.2.6 τα $\phi(\mathcal{B}(H))$ και E είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφα. Σαφώς, η ιδιότητα αυτή διατηρείται κάτω από πλήρως ισομετρικούς ισομορφισμούς. □

Αυτή η (rigidity) ιδιότητα θα χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσουμε τα εμφυτευτικά περιβλήματα.

Ορισμός 4.2.8.

1. Καλούμε μια επέκταση (E, k) του F **rigid** επέκταση, αν κάθε $\phi \colon E \to E$ πλήρης συστολή ώστε $\phi(k(x)) = k(x)$ για κάθε $x \in F$, να είναι η ταυτοτική στον E.

2. Καλούμε μια επέκταση (E, k) του χώρου τελεστών F **ουσιώδη (essential)**, αν για κάθε χώρο τελεστών M και κάθε $\phi : E \to M$ πλήρη συστολή, αν $\phi \circ k : F \to M$ είναι πλήρης ισομετρία, τότε η $\phi : E \to M$ είναι επίσης πλήρης ισομετρία.

3. Καλούμε μια επέκταση (E,k) του χώρου τελεστών F **maximal** με την ιδιότητα P αν το (E,k) είναι επέκταση του F και όταν το (M,β) είναι μια επέκταση του E και το $(M,\beta\circ k)$ έχει την ιδιότητα P, τότε $\beta(E)=M$.

Θεώρημα 4.2.9. *Έστω F χώρος τελεστών και (E,k) μια επέκταση του F. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Η (E,k) είναι εμφυτευτικό περίβλημα του F (minimal εμφυτευτική επέκταση του F),

(ii) Η (E,k) είναι maximal rigid επέκταση του F,

(iii) Η (E,k) είναι maximal ουσιώδης επέκταση του F,

(iv) Το E είναι εμφυτευτικό και η (E,k) είναι rigid επέκταση του F,

(v) Το E είναι εμφυτευτικό και η (E,k) είναι ουσιώδης επέκταση του F.

Απόδειξη. $(iv)\implies(v)$ Έστω $\gamma:E\to M$ πλήρης συστολή τέτοια ώστε όταν περιοριστεί στο $k(F)$ να είναι πλήρης ισομετρία. Επειδή E είναι εμφυτευτικό, ο περιορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί σε μία πλήρη συστολή $\lambda:M\to E$. Από την rigidity, αφού η $\lambda\circ\gamma$ είναι η ταυτοτική όταν περιοριστεί στο $k(F)$, η $\lambda\circ\gamma$ είναι παντού ίση με την ταυτοτική απεικόνιση. Άρα, η γ είναι πλήρης ισομετρία οπότε δείξαμε το (v).
$(iv)\implies(i)$ Έστω $k(F)\subseteq N\subseteq E$, όπου N εμφυτευτικό. Θέλουμε να δείξουμε ότι $N=E$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την ταυτοτική $N\to N$ σε μία πλήρη συστολή $\Phi:E\to N$, εφόσον N εμφυτευτικό. Τότε η Φ είναι προβολή στον N και, από υπόθεση, η Φ περιορισμένη στο $k(F)$ είναι η ταυτοτική του $k(F)$. Άρα, από την rigidity η Φ είναι ταυτοτική στο E. Συνεπώς, εφόσον η Φ είναι και επί, έχουμε $N=E$.
$(i)\implies(iv)$ Είναι ακριβώς το πόρισμα 4.2.7
$(i)\implies(iii)$ Η (E,k) είναι ουσιώδης επέκταση λόγω της ισοδυναμίας $(i)\iff(iv)\iff(v)$. Τώρα, έστω (M,β) επέκταση και έστω $(M,\beta\circ k)$ μια ουσιώδης επέκταση του F. Θέλουμε $\beta(E)=M$. Αφού E εμφυτευτικό, η β^{-1} επεκτείνεται σε μια πλήρη συστολή προβολή $M\to E$. Αυτή η απεικόνιση είναι πλήρης ισομετρία στον $\beta\circ k(F)$, άρα πρέπει να είναι πλήρης ισομετρία στο M. Έτσι, $\beta(E)=M$.

$(iii)\implies(i)$ Έστω (E,k) maximal ουσιώδης επέκταση του F και έστω (M,β) ένα εμφυτευτικό περίβλημα του F. Από την $(i)\Rightarrow(iii)$ παίρνουμε ότι (M,β) είναι ουσιώδης επέκταση του F. Η απεικόνιση $\beta\circ k^{-1}\colon k(F)\to\beta(F)$, επειδή M εμφυτευτικό, επεκτείνεται σε μια πλήρη συστολή $\gamma\colon E\to M$. Αλλά αφού E ουσιώδης επέκταση έχουμε ότι η γ είναι ισομορφισμός στο M. Δηλαδή

(M,γ) επέκταση του E και ουσιώδης επέκταση του F. Έτσι, από maximality, $\gamma(E)=M$, δηλαδή (E,k) εμφυτευτικό περίβλημα του F.
$(v) \implies (i)$ Έστω M εμφυτευτικό με $k(F)\subseteq M\subseteq E$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $M=E$. Επεικτείνουμε την ταυτοτική $M\to M$ σε μία πλήρη συστολή $\phi: E\to M$ αφού E εμφυτευτικό. Αφού $\phi\circ k$ είναι πλήρης ισομετρία, τότε και η ϕ θα είναι (λόγω του ότι (E,k) ουσιώδης. Συνεπώς, $E=M$.
$(i) \implies (ii)$ Έστω (M,β) επέκταση του E ώστε $(M,\beta\circ k)$ rigid επέκταση του F. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\beta(E)=M$. Η απεικόνιση $\beta^{-1}:\beta(E)\to E$ επεκτείνεται σε μία $\alpha: M\to E$. Ισχύει

$$\beta^{-1}(\beta(k(x)))=k(x) \quad \forall x\in F$$

άρα

$$\alpha(\beta(k(x)))=k(x) \quad \forall x\in F$$

αφού η α είναι επέκταση της β^{-1}. Από την rigidity, έχουμε ότι η α περιορισμένη στο E είναι η ταυτοτική του M, άρα έχουμε το ζητούμενο.

□

Ορίζουμε ως $I(F)$ να είναι το (μοναδικό) εμφυτευτικό περίβλημα στην $\mathfrak{O}_1$ ενός χώρου τελεστών F.

Πρόταση 4.2.10. *Έστω $\mathcal{S}$ σύστημα τελεστών. Το εμφυτευτικό περίβλημα του $\mathcal{S}$ στην $\mathfrak{O}_1$, $I(\mathcal{S})$, είναι εμφυτευτικό σύστημα τελεστών και έτσι είναι πλήρως ισομορφικό ως προς τη διάταξη με μια C^*-άλγεβρα.*

Απόδειξη. Έστω $1\in S\subseteq\mathcal{B}(H)$. Τότε $I(S)=\phi(\mathcal{B}(H))$ για κάποια S-προβολή ϕ που είναι πλήρης συστολή και άρα είναι πλήρως θετική. Έτσι $\phi(\mathcal{B}(H))$ είναι σύστημα τελεστών και $I(S)$ είναι C^*-άλγεβρα με γινόμενο $a\circ b=\phi(ab)$ από το Θεώρημα 4.1.7. □

Πρόταση 4.2.11. *Έστω $1\in\mathcal{A}\subseteq\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}(H)$ με $\mathcal{S}$ σύστημα τελεστών και $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(H)$. Τότε η εμφύτευση $\mathcal{A}\to I(\mathcal{S})$ είναι πλήρως ισομετρικός ισομορφισμός αλγεβρών.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι τα γινόμενα στις δύο άλγεβρες ταυτίζονται. Έστω $\phi:\mathcal{B}(H)$: $\mathcal{B}(H)$ μία S-προβολή τέτοια ώστε το $\phi(\mathcal{B}(H))$ να είναι ένα αντίγραφο του $I(S)$. Τότε, ο πολλαπλασιασμός στο $I(S)$ δίνεται από την σχέση $x\circ y=\phi(xy)$.
Έτσι, για κάθε $a,b\in\mathcal{A}$ έχουμε πράγματι ότι $a\circ b=\phi(a\cdot b)=a\cdot b$. □

Παρατήρηση 4.2.12. Στην περίπτωση όπου η $\mathcal{A}$ είναι unital C^*-άλγεβρα, αν θέσουμε $\mathcal{S}=\mathcal{A}$, η παραπάνω πρόταση λέει ότι η $\mathcal{A}$ είναι C^*-υπάλγεβρα της $I(\mathcal{A})$.

Η επόμενη Πρόταση λέει τι γίνεται στη μη unital περίπτωση.

Πρόταση 4.2.13. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μια μη unital C^*-άλγεβρα τέτοια ώστε $\mathcal{A}H$ πυκνό στον H. Έστω $\mathcal{A}_1$ η μοναδοποίηση της $\mathcal{A}$. Αν $\phi \colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι $\mathcal{A}$-απεικόνιση, τότε η ϕ είναι $\mathcal{A}_1$-απεικόνιση. Συνεπώς, η εμφύτευση από την $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{A}_1$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια πλήρη ισομετρία και επί $I(\mathcal{A}) \to I(\mathcal{A}_1)$. Έτσι, $I(A)$ είναι μια unital C^*-άλγεβρα με το γινόμενο $\circ$ και $\mathcal{A}_1$ C^*-υπάλγεβρα της $I(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν η ϕ είναι $\mathcal{A}$-απεικόνιση, τότε είναι και $\mathcal{A}_1$-απεικόνιση. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι αν ϕ είναι $\mathcal{A}$-απεικόνιση, τότε $\phi(I) = I$.

Έστω $\{e_a\}$ contractive θετική προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$. Αφού ο $\mathcal{A}H$ είναι πυκνός στον H, έχουμε ότι $e_a \to I$ κατά σημείο. Επειδή $\{e_a^n\}$, όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι επίσης contractive προσεγγιστική μονάδα για την $\mathcal{A}$, έχουμε $e_a^n \to I$.

Βλέπουμε ότι για $t \in \mathbb{R}$, $\phi(e^{ite_a}) = \phi(I) + \sum_n \frac{(ite_a)^n}{n!} \to \phi(I) + (e^{it} - 1)I$ κατά σημείο. Αφού e^{ite_a} είναι unitary και ϕ συστολή, έχουμε

$$\|(\phi(I) - I) + e^{it}I\| \leq 1, \text{ για κάθε } t.$$

Ισχυρισμός. *Ισχύει ότι $\phi(I) - I = 0$.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό για μιγαδικούς αριθμούς: Δηλαδή, αν έχουμε $|z + \exp^{it}| \leq 1 \;\; \forall t$ τότε $z = 0$.
Πράγματι, αν $z \neq 0$ και γράψουμε $z = \rho \exp^{i\theta}$ και θέσουμε $t = \theta$ τότε έχουμε $|(\rho + 1)\exp^{i\theta}| > 1$, άτοπο.
Τώρα, στην περίπτωση που έχουμε τελεστές, δηλαδή αν $\|A + \exp^{it} I\| \leq 1$ τότε για κάθε κατάσταση ψ έχουμε

$$|\psi(A) + \exp^{it}| \leq 1 \implies \psi(A) = 0 \implies A = 0,$$

όπου στην τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιείται η πρόταση 2.2.9. Έτσι, παίρνουμε ότι $\phi(I) - I = 0$. □

□

Στη προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιήθηκε ότι κάθε C^*-άλγεβρα έχει προσεγγιστική μονάδα. Αποδεικνύουμε αυτόν τον ισχυρισμό στο παρακάτω θεώρημα, αφού πρώτα αποδείξουμε ένα λήμμα:

Λήμμα 4.2.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a, b \in \mathcal{A}^+$ με $a \leq b$ και το a είναι αντιστρέψιμο τότε το b είναι επίσης αντιστρέψιμο και*

$$0 \leq b^{-1} \leq a^{-1} .$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $c \geq 1$ τότε το c αντιστρέφεται και $c^{-1} \leq 1$ (μια απλή εφαρμογή της αναπαράστασης Gelfand στην C^* υπάλγεβρα $C^*(1,c)$). Τώρα, αν έχουμε $a \leq b$ τότε $1 = a^{-\frac{1}{2}} a a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}}$ οπότε από την πρώτη παρατήρηση παίρνουμε

$$(a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}})^{-1} \leq 1 \;\Rightarrow\; a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}} \leq 1 \;.$$

Έτσι, έχουμε $b^{-1} \leq (a^{\frac{1}{2}})^{-1} (a^{\frac{1}{2}})^{-1} = a^{-1}$. □

Θεώρημα 4.2.15. *(Ύπαρξη προσεγγιστικής μονάδας σε C^*-άλγεβρα) Κάθε C^*-άλγεβρα έχει προσεγγιστική μονάδα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα και Λ το σύνολο όλων των θετικών στοιχείων $a \in \mathcal{A}$ τέτοιων ώστε $\|a\| < 1$.

Το Λ είναι μερικώς διατεταγμένο με τη συνήθη διάταξη, καθώς επίσης είναι και κατευθυνόμενο, δηλαδή για κάθε $(a,b) \in \Lambda \times \Lambda$ υπάρχει $c \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $a, b \leq c$,. Πράγματι, αν $a \in \mathcal{A}^+$ τότε το $1 + a$ είναι φυσικά ανιστρέψιμο στην μοναδοποίηση $\tilde{\mathcal{A}}$ και $a(1+a)^{-1} = 1 - (1+a)^{-1}$.

Ισχυρισμός. *Αν $a, b \in \mathcal{A}^+$ και $a \leq b$, τότε $a(1+a)^{-1} \leq b(1+b)^{-1}$.*

Απόδειξη Ισχυρισμού. Αν $0 \leq a \leq b$, τότε $1 + a \leq 1 + b$ και συνεπώς, από το λήμμα 4.2.14, έχουμε $(1+a)^{-1} \geq (1+b)^{-1}$. Άρα, $1 - (1+a)^{-1} \leq 1 + (1+b)^{-1}$ και έτσι $a(1+a)^{-1} \leq b(1+b)^{-1}$. □

Τώρα, αν $a \in \mathcal{A}^+$ τότε $a(1+a)^{-1} \in \Lambda$. Παίρνουμε δύο στοιχεία $a, b \in \Lambda$. Έστω $a' = a(1-a)^{-1}$, $b' = b(1-b)^{-1}$ και $c = (a' + b')(1 + a' + b')^{-1}$. Τότε $c \in \Lambda$.

Αφού $a' \leq a' + b'$ έχουμε από τον Ισχυρισμό ότι $a = a'(1+a')^{-1} \leq c$ και όμοια, $b \leq c$. Δείξαμε ότι το Λ είναι κατευθυνόμενο.

Θεωρούμε τώρα $u_\lambda = \lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Θα δείξουμε ότι η $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την $\mathcal{A}$. Δείξαμε ότι $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι αύξον δίκτυο στην κλειστή μοναδιαία μπάλα της $\mathcal{A}$. Μένει να δείξουμε ότι $a = \lim_\lambda u_\lambda a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Αφού το Λ παράγει όλον τον $\mathcal{A}$, αρκεί να το δείξουμε για $a \in \Lambda$.

Παίρνουμε $a \in \Lambda$ και έστω $\epsilon > 0$. Έστω $\phi \colon C^*(a) \to C_0(\Omega)$ η αναπαράσταση Gelfand. Αν ορίσουμε $f = \phi(a)$ τότε το $K = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ είναι συμπαγές, αφού $f \in C_0(\Omega)$, και συνεπώς από το Λήμμα του Urysohn υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g \colon \Omega \to [0,1]$ με συμπαγή φορέα, τέτοια ώστε $g(\omega) = 1$ για κάθε $\omega \in K$.

Διαλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\delta < 1$ και $1 - \delta < \epsilon$. Τότε $\|f - \delta g f\| \leq \epsilon$. Αν $\lambda_0 = \phi^{-1}(\delta g)$, τότε $\lambda_0 \in \Lambda$ και, λόγω ισομετρίας της ϕ, $\|a - u_{\lambda_0} a\| \leq \epsilon$.

Έστω τώρα $\lambda \in \Lambda$ ώστε $\lambda \geq \lambda_0$. Τότε $1 - u_\lambda \leq 1 - u_{\lambda_0}$. Έτσι έχουμε $a(1-u_\lambda)a \leq a(1-u_{\lambda_0})a$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\|a - u_\lambda a\|^2 = \|(1-u_\lambda)^{1/2}(1-u_\lambda)^{1/2}a\| \leq \|(1-u_\lambda)^{1/2}a\|^2 = \|a(1-u_\lambda)a\| \\ \leq \|a(1-u_{\lambda_0})a\| \leq \|(1-u_{\lambda_0})a\| \leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

4.3 C^*-περίβλημα μίας άλγεβρας τελεστών

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα τελεστών. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια πλήρως ισομετρική αναπαράσταση $\gamma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ ώστε αν $p\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(K)$ μια οποιαδήποτε άλλη πλήρως ισομετρική αναπαράσταση, τότε υπάρχει ένας επί $*$-ομομορφισμός $\pi\colon C^*(p(\mathcal{A})) \to C^*(\gamma(\mathcal{A}))$ με $\pi(p(a)) = \gamma(a)$.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω $1 \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ άλγεβρα τελεστών. Τότε η $I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)$ είναι C^*-άλγεβρα και η εμφύτευση της $\mathcal{A}$ στην $I(\mathcal{A})$ είναι πλήρης ισομετρικός ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Αφού $1 \in \mathcal{A}$, κάθε πλήρης συστολή $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ που σταθεροποιεί την $\mathcal{A}$ είναι πλήρως θετική και άρα για $a, b \in \mathcal{A}$ έχουμε $\phi(a+b^*) = \phi(a) + \phi(b)^* = a + b^*$. Έτσι, κάθε $\mathcal{A}$-απεικόνιση είναι και $(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)$-απεικόνιση και συνεπώς $I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)$. Τέλος, το ότι η εμφύτευση είναι πλήρως ισομετρικός ισομορφισμός έπεται από την Πρόταση 4.2.11. □

Δοσμένης μια άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$, ορίζουμε $C^*_e(\mathcal{A})$ την C^*-υπάλγεβρα της $I(\mathcal{A})$ που παράγεται από την $\mathcal{A}$. Η $C^*_e(\mathcal{A})$ λέγεται **C^*-περίβλημα** (C^*-envelope) της $\mathcal{A}$.

Πρόταση 4.3.2. *(Choi multiplicative domains) Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unital C^*-άλγεβρες και έστω $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ πλήρης συστολή με $\phi(1) = 1$. Τότε το σύνολο*

$$\begin{aligned}\{a \in \mathcal{A} : \phi(a)^*\phi(a) = \phi(a^*a) \text{ και } \phi(a)\phi(a)^* = \phi(aa^*)\} = \\ \{a \in \mathcal{A} : \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \text{ και } \phi(ba) = \phi(b)\phi(a), \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

είναι C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ και η ϕ είναι $*$-ομομορφισμός αν περιοριστεί στο σύνολο αυτό.

Απόδειξη. Έστω $R_1 = \{a \in \mathcal{A} : \phi(a)^*\phi(a) = \phi(a^*a)\}$ και $R_2 = \{a \in \mathcal{A} : \phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}\}$. Θα δείξουμε ότι $R_1 = R_2$.

Έστω $a \in R_1$. Τότε $\phi(a)^*\phi(a) = \phi(a^*a)$. Έστω ένα $b \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση ϕ_2 είναι πλήρως θετική, οπότε αν εφαρμόσουμε την ανισότητα του Schwarz ($\phi_2(x)^*\phi_2(x) \leq \phi_2(x^*x)$) για το στοιχείο $X = \begin{bmatrix} a & b^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \phi(a) & \phi(b^*) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \phi(a) & \phi(b^*) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \phi_2\left(\begin{bmatrix} a^*a & a^*b^* \\ ba & bb^* \end{bmatrix}\right)$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} \phi(a^*a) - \phi(a)^*\phi(a) & \phi(a^*b^*) - \phi(a)^*\phi(b^*) \\ \phi(b)\phi(a) - \phi(ba) & \phi(b)\phi(b^*) - \phi(bb^*) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Αφού η $(1,1)$ θέση του πίνακα είναι 0, πρέπει και η $(2,1)$ θέση να είναι 0. Έτσι, έχουμε ότι $R_1 \subseteq R_2$. Για την αντίστροφη, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

Συμβολίζουμε με R το σύνολο $R_1 = R_2$. Για να δείξουμε ότι το R είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$, θεωρούμε $x, y \in R$ και θα δείξουμε ότι $xy \in R$. Πράγματι, για κάθε $b \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\phi(bxy) = \phi(bx)\phi(y) = \phi(b)\phi(x)\phi(y) = \phi(b)\phi(xy).$$

Επιπλέον, η ϕ είναι ομομορφισμός αν περιοριστεί στο R (λόγω του ορισμού) και διατηρεί το $*$, αφού είναι θετική.

Τέλος, ένα στοιχείο $a \in \mathcal{A}$ ικανοποιεί τις $\phi(a)^*\phi(a) = \phi(a^*a)$ και $\phi(a)\phi(a)^* = \phi(aa^*)$, αν και μόνο αν $a \in R \cap R^*$. Έτσι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $\phi(ba) = \phi(b)\phi(a)$ και επίσης $\phi(ab) = \phi((b^*a^*)^*) = \phi(b^*a^*)^* = (\phi(b^*)\phi(a^*))^* = \phi(a)\phi(b)$. Έπεται ότι τα δύο σύνολα στην εκφώνηση είναι ίσα (συμπίπτουν με το $R \cap R^*$) και είναι C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ (είναι κλειστή αφού ϕ συνεχής). □

Θεώρημα 4.3.3. *(Hamana) Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα τελεστών με μονάδα. Έστω $p\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ πλήρως ισομετρικός unital ομομορφισμός και έστω $C^*(p(\mathcal{A}))$ η C^*-άλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που παράγεται από την $p(\mathcal{A})$. Τότε υπάρχει μοναδικός επί $*$-ομομορφισμός $\pi\colon C^*(p(\mathcal{A})) \to C_e^*(\mathcal{A})$ με $\pi(p(a)) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση $p(\mathcal{A}) \to I(\mathcal{A})$ με $p(a) \mapsto a$ είναι πλήρης συστολή και από την εμφυτευτικότητα του $I(A)$ επεκτείνεται σε μια απεικόνιση $\phi\colon \mathcal{B}(H) \to I(A)$ που είναι πλήρης συστολή τέτοια ώστε $\phi(p(a)) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Επίσης η ϕ είναι πλήρως θετική.

Από την ανισότητα του Schwarz για πλήρως θετικές απεικονίσεις έχουμε $\phi(x)^*\phi(x) \leq \phi(x^*x)$ για κάθε $x \in \mathcal{B}(H)$ και συγκεκριμένα έχουμε

$$a^*a = \phi(p(a))^*\phi(p(a)) \leq \phi(p(a)^*p(a)). \tag{4.4}$$

Τώρα αφού $\mathcal{B}(H)$ εμφυτευτικό, η πλήρης συστολή $p\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ επεκτείνεται σε μια πλήρη συστολή $\psi\colon I(A) \to \mathcal{B}(H)$. Δηλαδή $\psi(a) = p(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Η ανισότητα του Schwarz για την ϕ δίνει $p(a)^*p(a) = \psi(a)^*\psi(a) \leq \psi(a^*a)$ και αφού η ϕ είναι θετική έχουμε $\phi(p(a)^*p(a)) \leq \phi(\psi(a^*a))$ για $a \in \mathcal{A}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις με την σχέση (4.4) παίρνουμε

$$a^*a \leq \phi(p(a)^*p(a)) \leq \phi(\psi(a^*a))$$

για $a \in \mathcal{A}$. Όμως, η απεικόνιση $u \equiv \phi \circ \psi\colon I(\mathcal{A}) \to I(\mathcal{A})$ είναι ταυτοτική στην $\mathcal{A}$. Από την rigidity, η u είναι η ταυτοτική στην $I(\mathcal{A})$. Δηλαδή

$$a^*a \leq \phi(p(a)^*p(a)) \leq \phi(\psi(a^*a)) = a^*a$$

και άρα $a^*a = \phi(p(a)^*p(a))$. Όμοια, $aa^* = \phi(p(a)p(a)^*)$. Δηλαδή για κάθε $b = p(a) \in p(\mathcal{A})$ έχουμε

$$p(b^*b) = \phi(p(a)^*p(a)) = a^*a = \phi(p(a)^*)\phi(p(a)) = \phi(b)^*\phi(b)$$

και όμοια

$$\phi(bb^*) = \phi(b)\phi(b^*).$$

Αν περιορίσουμε την ϕ στο $C^*(p(\mathcal{A}))$ και την ονομάσουμε π, τότε είναι $*$-ομομορφισμός. Πράγματι, το σύνολο

$$K = \{b \in \mathcal{B}(H) : \phi(b)^*\phi(b) = \phi(b^*b) \text{ και } \phi(b)\phi(b)^* = \phi(bb^*)\}$$

περιέχει το $p(A)$ και είναι unital C^*-άλγεβρα από την πρόταση 4.3.2. Έτσι, $C^*(p(\mathcal{A})) \subseteq K$. Άρα ο $\phi|_{C^*(p(\mathcal{A}))}$ είναι $*$-ομομορφισμός πάλι από την πρόταση 4.3.2. □

Δοσμένης μίας άλγεβρας $\mathcal{A}$, δεν είναι πάντα εύκολο να αναγνωρίσουμε την $C_e^*(\mathcal{A})$. Το παρακάτω πόρισμα είναι μία από τις απλές περιπτώσεις:

Πόρισμα 4.3.4. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μία άλγεβρα τελεστών. Αν η άλγεβρα $C^*(\mathcal{A})$ είναι απλή (δηλαδή δεν έχει μη τετριμμένα ιδεώδη) τότε $C_e^*(\mathcal{A}) = C^*(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Από το παραπάνω θεώρημα υπάρχει ένας $*$-ομομορφισμός από την $C^*(\mathcal{A})$ επί της $C_e^*(\mathcal{A})$. Επειδή η $C^*(\mathcal{A})$ είναι απλή, η απεικόνιση αυτή θα είναι και 1-1. □

Βιβλιογραφία

[1] M.D. Choi, E.G Effros. Injectivity and Operator spaces. *Journal of functional analysis* 24, no. 2, 156–209. (1977)

[2] M. Hamana. Injective envelopes of C^*-algebras. *J. Math. Soc.Japan, no.1*, pp.181-197. (1979)

[3] G. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, Inc., Boston, MA. (1990)

[4] V. Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 78. Cambridge University Press, Cambridge (2002)

[5] V. Paulsen, M. Tomforde. Vector spaces with an order unit.*Indiana University Mathematics Journal Vol. 58, No. 3*, pp. 1319-1359(2009)

[6] V. Paulsen, I. Todorov, M. Tomforde. Operator system structures on ordered spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 102 , no. 1, 25–49.(2011)

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας -η οποία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της φοίτησής μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Θεωρητικά Μαθηματικά», του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών – οφείλω να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν καθ΄ οιονδήποτε τρόπο στην εκπόνησή της.
Αρχικά, επιθυμώ να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, των οποίων η συμβολή ήταν ουσιαστική. Ιδιαίτερες ευχαριστίες επιθμώ να απευθύνω στον κ. Αριστείδη Κατάβολο για τις επιστημονικές κατευθύνσεις που μου παρείχε από τα πρώτα στάδια διαμόρφωσης της εργασίας μου μέχρι την αποπεράτωση αυτής, το ουσιαστικό του ενδιαφέρον, αλλά και εν γένει για τη στήριξή του καθ΄όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της.
Παράλληλα, θέλω να ευχαριστήσω τη συνάδελφο και φίλη, Χάρις Γανωτάκη, για την βοήθειά της στην εκμάθηση του LateX και την Αφροδίτη Ιωάννου για την στήριξή της. Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω τον πατέρα μου για τις συμβουλές και την κατανόησή του. Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη σε αυτόν.