



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής

Μελέτη των ιδιοτήτων των τροχιών γύρω από
μελανές οπές Kerr με τη χρήση νευτώνειων
αναλόγων

Διδακτορική Διατριβή
της
Αρετής Ελένης

Επιβλέπων: Θεοχάρης Αποστολάτος
Αν. Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Αθήνα 2020

Περίληψη

Η παρούσα διατριβή έχει σκοπό να διερευνήσει την ομοιότητα που παρουσιάζει ένα συγκεκριμένο Νευτώνειο βαρυτικό πεδίο, και συγκεκριμένα το βαρυτικό πεδίο του Euler που δημιουργείται από δύο σημειακές μάζες που βρίσκονται σε σταθερή απόσταση η μία από την άλλη, με το βαρυτικό πεδίο μιας μελανής οπής Kerr. Αρχικά η ομοιότητα φαινόταν πολύ επιφανειακή και πολλά στοιχεία ήταν παντελώς άγνωστα, αν και στη βιβλιογραφία υπήρχαν κάποιες έμμεσες αναφορές σε μερικά κοινά χαρακτηριστικά των δύο πεδίων. Ο απώτερος σκοπός αυτής της μελέτης είναι να χρησιμοποιηθεί αυτή η ομοιότητα, προκειμένου να μελετηθούν δύσκολα χαρακτηριστικά των τροχιών σε μια μελανή οπή Kerr, μέσω της ανάλυσης αντίστοιχων τροχιών στο ανάλογο Νευτώνειο βαρυτικό πεδίο.

Μελετήσαμε το συγκεκριμένο Νευτώνειο βαρυτικό πεδίο, το πεδίο του Euler, με τη μέθοδο των Hamilton-Jacobi προκειμένου να διαχωριστεί σε κατάλληλες συντεταγμένες (πεπλατυσμένες σφαιροειδείς) και να κατασκευάσουμε τα τρία ολοκλήρωμα της κίνησης που αντιστοιχούν στο πρόβλημα αυτό. Κατασκευάσαμε τις σχέσεις που συνδέουν τις εκφράσεις για το τρίτο ολοκλήρωμα της κίνησης όπως το υπολογίζει ο Landau, ο Lynden-Bell καθώς και μια τρίτη εκδοχή του η οποία, όπως φαίνεται, ταιριάζει καλύτερα στη σταθερά Carter, που εμφανίζεται συνήθως στην ανάλυση των τροχιών στη μετρική της Kerr.

Ακολουθώντας, εντοπίσαμε τις ομοιότητες των δυναμικών που ελέγχουν την ακτινική και την πολική κίνηση των τροχιών στο δυναμικό του Euler και της Kerr.

Στη συνέχεια ακολουθήσαμε τη μέθοδο ανάλυσης σε μεταβλητές γωνίας-δράσης που χρησιμοποιούνται για την ανεύρεση των θεμελιωδών συχνοτήτων των τροχιών στη μετρική Kerr, προκειμένου να υπολογίσουμε για κάθε τροχιά με συγκεκριμένα τροχιακά χαρακτηριστικά, τις αντίστοιχες θεμελιώδεις συχνότητες που χαρακτηρίζουν την τροχιά αυτή. Οι συχνότητες αυτές είναι το άμεσα παρατηρήσιμο μέγεθος στην περίπτωση των μελανών οπών Kerr στην περίπτωση που οι τροχιές συνδέονται με την εκπομπή κάποιου βαρυτικού κύματος που εκπέμπεται από την εν λόγω πηγή.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι και στο πρόβλημα του Euler, εμφανίζεται το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό που εμφανίζουν οι τροχιές της Kerr: δηλαδή ότι υπάρχουν εντελώς διαφορετικές τροχιές που χαρακτηρίζονται από το ίδιο σύνολο συχνοτήτων. Επομένως η σχέση συχνοτήτων-τροχιών δεν είναι μονοσήμαντη.

Τέλος μελέτησαμε την ευστάθεια των σφαιρικών τροχιών (τροχιών μηδενικής εκκεντρότητας) κάτω από την επίδραση μικρών αναλωτικών δυνάμεων πέραν της βαρύτητας, αντίστοιχων με τις ιδιοδυνάμεις που αναπτύσσονται στις σχετικιστικές τροχιές, όταν η βαρυτική ακτινοβολία του σώματος σε τροχιά ληφθεί υπόψη. Στην περίπτωση της Kerr δεν βρέθηκαν αρχικές συνθήκες κατάλληλες για τέτοιου είδους συντονισμούς (σε συμφωνία με τη σχετική βιβλιογραφία). Στο πεδίο του Euler, όμως, βρήκαμε κατάλληλες αρχικές συνθήκες που να ικανοποιούν την απαιτούμενη συνθήκη συντονισμού. Οι τροχιές αυτές, αν και αρχικά σφαιρικές, καθίστανται έκκεντρες με την πάροδο του χρόνου. Μάλιστα, κατασκευάσαμε ένα θεωρητικό μοντέλο που ερμηνεύει την εξέλιξη των αρχικά σφαιρικών τροχιών, είτε αυτές υπόκεινται σε συντονισμό, είτε όχι.

Abstract

This PhD thesis aims to demonstrate the similarity of a particular Newtonian gravitational field, namely the gravitational field of Euler produced by two point masses, at a fixed distance from each other, with the gravitational field of a Kerr black hole. At a first glance, the similarity seems simply superficial and many things relating the two problems were completely unknown. Only some indirect references to some common properties of the two fields were mentioned in the literature. The purpose of this study is to use this similarity to study difficult orbital characteristics in a Kerr black hole, by analyzing corresponding orbits in the analogous Newtonian gravitational field.

We have studied this particular Newtonian gravitational field, the Euler field, by Hamilton-Jacobi method, in order to separate it in appropriate coordinates and construct the three integrals of motion corresponding to this problem. We have derived the relationships that relate the expressions for the third integral of the motion as calculated by Landau, Lynden-Bell and a third version, of it, which seems to match the Carter constant, which is introduced naturally in the analysis of the orbits in the Kerr metric.

Subsequently, we identified the similarity of the potentials that govern the radial and polar motion of the orbits at Euler and Kerr potential.

Next, we followed the method of action angle variables to detect the fundamental frequencies of the orbits in Kerr metric, in order to calculate for each orbit with specific orbital characteristics the corresponding fundamental frequencies that characterize the orbit. These frequencies are the directly observed quantities in the case of Kerr black holes when the orbits are associated with the emission of gravitational waves radiated from such a source.

Next, we prove that some particular characteristics of Kerr orbits show up in the Euler problem, as well. Namely, the fact that there are pairs of completely different orbits characterized by the exactly the same set of frequencies. Therefore the frequency-orbit relationship is not one-to-one correspondent.

Finally, we have studied the stability of spherical orbits (orbits with zero eccentricity) under the act of a dissipative force, corresponding to the self-force of relativistic orbits when the gravitational radiation of the orbiting body is taken into account. In Kerr case, no initial conditions suitable for such resonance were found (in accordance with the relevant literature). However, in the Euler field, suitable initial conditions were found that satisfy the required resonance condition. These orbits, though initially spherical, become eccentric over time. In fact, we have managed to build a theoretical model which interprets the evolution of the initially spherical orbits, whether or not they meet a resonance.

0.1 Ευχαριστίες

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Πρόγραμμα Χορήγησης Υποτροφιών για Μεταπτυχιακές Σπουδές Δευτέρου Κύκλου Σπουδών» (MIS-5003404), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).



**Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση**
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Περιεχόμενα

0.1	Ευχαριστίες	1
1	Το πρόβλημα Euler	4
1.1	Το αρχικό πρόβλημα	4
1.2	Το πεπλατυσμένο πρόβλημα Euler	9
1.3	Ολοκληρώματα κίνησης	11
1.3.1	Η εξίσωση Hamilton-Jacobi	11
1.3.2	Το τρίτο ολοκλήρωμα κίνησης β	13
1.4	Η σχέση των τρίτων ολοκληρωμάτων β, I_3	15
1.5	Εξισώσεις κίνησης	17
1.6	Φραγμένες Τροχιές	18
1.6.1	Ιδιότητες των δυναμικών	18
1.6.2	Ισημερινές κυκλικές τροχιές	21
1.6.3	Παραμέτρηση τροχιών	23
1.7	Διαχωρίζουσα (Separatrix)	23
2	Η μελανή οπή Kerr	30
2.1	Η μετρική Kerr	30
2.2	Φραγμένες τροχιές στην Kerr	32
2.2.1	Οι εξισώσεις κίνησης	32
2.2.2	Ιδιότητες των δυναμικών	34
2.2.3	Ισημερινές κυκλικές τροχιές	36
3	Σύγκριση του πεπλατυσμένου Euler με την Kerr	37
3.1	Θεμελιώδεις διαφορές	37
3.2	Γνωστές Αναλογίες	38
3.2.1	Πολυπολικές Ροπές	38
3.2.2	Διαχωρισιμότητα της κυματικής εξίσωσης	39
3.3	Ανακαλύπτοντας νέες αναλογίες	40
3.3.1	Μετάπτωση των τροχιών	40
3.3.2	Ομοιότητα του τρίτου ολοκληρώματος Q_E με την σταθερά Carter	42
3.3.3	ISCO	43
3.3.4	Θεμελιώδεις συχνότητες	45
3.3.5	Ζεύγη τροχιών με ίδιες συχνότητες	50
4	Σφαιρικές τροχιές υπό την επίδραση ιδιοδύναμης	61
5	Το μη ολοκληρώσιμο πρόβλημα του Euler	71
5.1	Το δυναμικό	71

5.2	Μη ολοκληρώσιμα και ελαφρώς μη ολοκληρώσιμα συστήματα	73
5.3	Αριθμητικά αποτελέσματα	74
5.4	Ιδιοδύναμη	75
6	Συμπεράσματα	80
A'	Συντεταγμένες	82
B'	Παραμέτρηση Τροχιών	85
Γ'	Εναλλακτικές αναλυτικές εκφράσεις για τις συχνότητες	88

Κεφάλαιο 1

Το πρόβλημα Euler

1.1 Το αρχικό πρόβλημα

Το βαρυτικό πεδίο δύο σημειακών μαζών τοποθετημένων σε καθορισμένες σταθερές θέσεις σε ένα Νευτώνειο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων αποτελεί τη βάση του προβλήματος Euler [1], γνωστού ως πρόβλημα των δύο κέντρων (two-centre problem), βλ. Σχήμα (1.1). Το 1760, ο Euler μελέτησε για πρώτη φορά την τροχιά ενός δοκιμαστικού σωματιδίου σε ένα τέτοιο βαρυτικό πεδίο ως μία προσπάθεια να βρει αναλυτικές λύσεις σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις του γενικού προβλήματος των τριών σωμάτων (της κίνησης τριών σωμάτων τυχαίας μάζας που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μόνο υπό την επίδραση των αμοιβαίων βαρυτικών τους δυνάμεων). Το πρόβλημα των τριών σωμάτων υπήρξε ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα Μηχανικής, κατά την επεξεργασία του οποίου πολλοί γνωστοί φυσικοί και μαθηματικοί (Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Poincaré) του 18ου του 19ου και του 20ου αιώνα πρόσφεραν πολύτιμες ιδέες. Το περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων, το πρόβλημα του Euler, όπως απέδειξε ο ίδιος ο Euler στην ειδική περίπτωση των επίπεδων (μεσημβρινών) τροχιών, διαθέτει ένα τρίτο ολοκλήρωμα της κίνησης, πέραν της ενέργειας και της z -στροφορμής. Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από μια κατάλληλη εσωτερική συμμετρία [2] η οποία συνδέεται με τη νέα σταθερά της κίνησης (σύμφωνα με το θεώρημα της Noether για τα μηχανικά συστήματα σωματιδίων), καθιστώντας αυτό το ιδιαίτερο μηχανικό πρόβλημα πλήρως ολοκληρώσιμο.

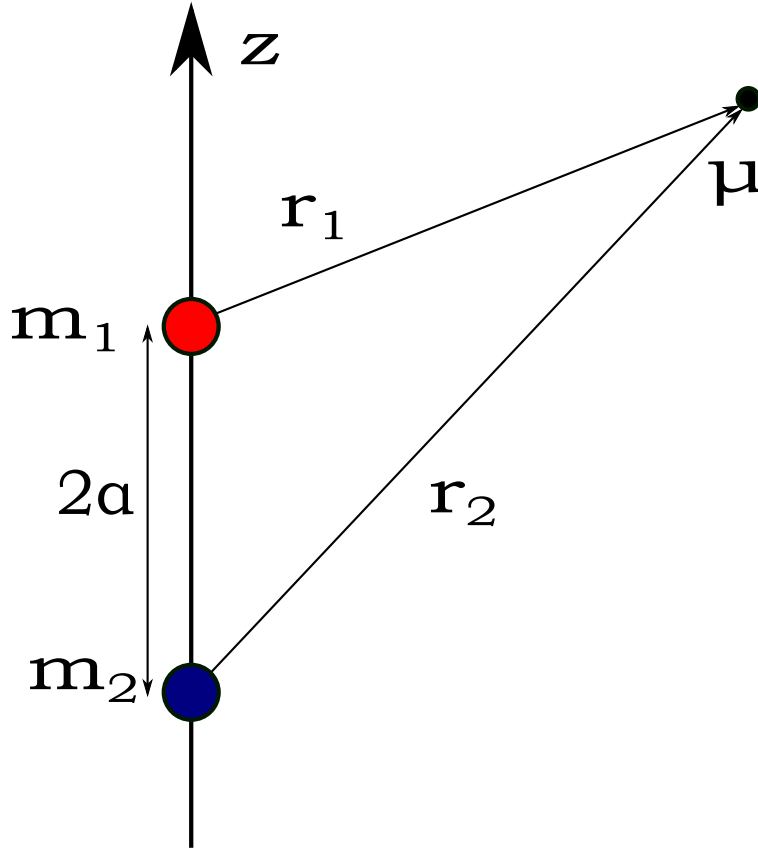
Το βαρυτικό δυναμικό ενός τέτοιου συστήματος είναι:

$$V^{(E)}(r_1, r_2) = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2},$$

όπου G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας του Νεύτωνα, m_1, m_2 είναι οι δύο σημειακές μάζες του βαρυτικού πεδίου και r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις του σημείου, στο οποίο υπολογίζουμε το δυναμικό, από τις δύο προαναφερθείσες μάζες. Αν χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε οι δύο μάζες να βρίσκονται πάνω στον άξονα z σε ίση απόσταση a εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, τότε το βαρυτικό πεδίο παίρνει τη μορφή:

$$V^{(E)}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{Gm_2}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}|}.$$

Επειδή το παραπάνω πεδίο είναι συντηρητικό (περιγράφεται από ένα χρονοανεξάρτητο βαθμωτό δυναμικό) και αξονικά συμμετρικό (με άξονα συμμετρίας τον άξονα z), η τροχιά



Σχήμα 1.1: Η διάταξη των βαρυτικών πηγών στο πρόβλημα του Euler.

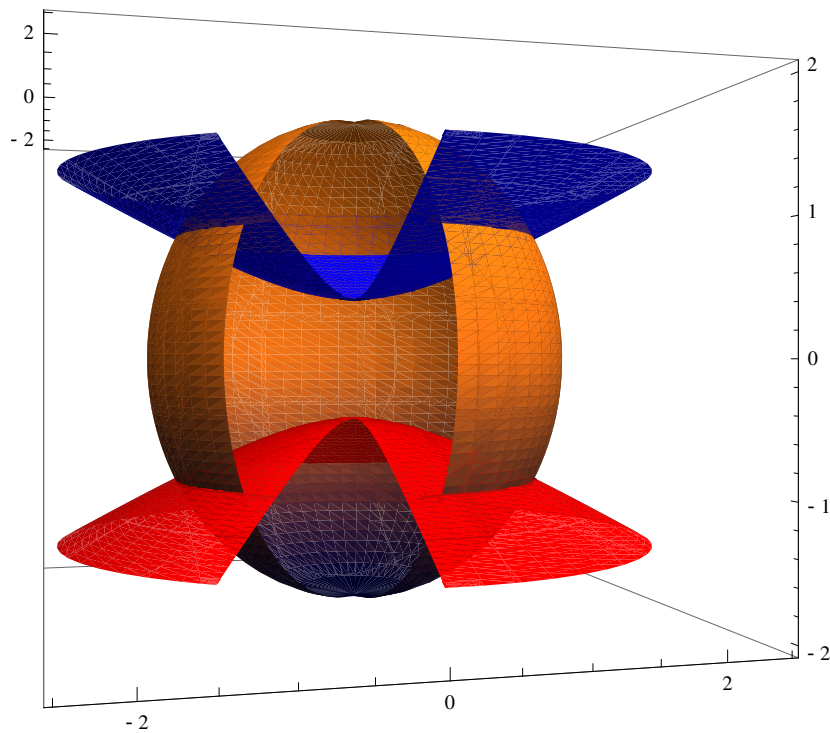
ενός δοκιμαστικού σωματιδίου μάζας μ σε αυτό το βαρυτικό πεδίο χαρακτηρίζεται, όπως προείπαμε, από σταθερή ενέργεια και σταθερή z -συνιστώσα της γωνιακής στροφορμής. Το δυναμικό δεν είναι κατοπτρικά συμμετρικό ως προς το κάθετο στον άξονα συμμετρίας επίπεδο $x - y$, εκτός αν οι δύο βαρυτικές μάζες είναι ίσες, οπότε τότε οι περιττές τάξης πολυπολικές ροπές μηδενίζονται. Ανεξάρτητα από την τιμή των μαζών, όμως, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από μία κρυμμένη δυναμική συμμετρία που οδηγεί σε ένα νέο ολοκλήρωμα κίνησης το οποίο είναι διγραμμικό ως προς τις ορμές. Αυτό το τρίτο ολοκλήρωμα της κίνησης μπορεί κανείς να το υπολογίσει εφαρμόζοντας τη μέθοδο Hamilton-Jacobi κατά τον διαχωρισμό των μεταβλητών σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο (γί' αυτό το πρόβλημα) σύστημα συντεταγμένων [3]. Η παρουσία τριών ανεξάρτητων ολοκληρωμάτων κίνησης, τα οποία βρίσκονται ανά δύο σε συνέλιξη (in involution)

$$\{A_i, B_j\} = 0,$$

καθιστά την κίνηση σε αυτό το πεδίο ένα πλήρως ολοκληρώσιμο πρόβλημα.

Το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων για την μελέτη της κίνησης σε αυτό το πεδίο είναι αυτό των επίμηκων σφαιροειδών (prolate spheroidal) συντεταγμένων (ξ, η, ϕ) , όπου ξ είναι το άθροισμα των αποστάσεων από τις δύο μάζες, διαιρεμένο με την απόσταση μεταξύ των δύο μαζών (η ποσότητα αυτή είναι ανάλογη της ακτίνας των σφαιρικών συντεταγμένων¹), ενώ η συντεταγμένη είναι η διαφορά των δύο αυτών αποστάσεων διαιρεμένη με την απόσταση των δύο μαζών (που είναι ανάλογη του συνημιτόνου της πολικής γωνίας

¹Η συντεταγμένη ξ είναι αδιάστατη, οπότε η ποσότητα ξa που έχει διαστάσεις μήκους είναι αυτή που είναι η αντίστοιχη της σφαιρικής συντεταγμένης r .



Σχήμα 1.2: Στο διάγραμμα φαίνεται η απεικόνιση στον τρισδιάστατο χώρο των επίμηκων σφαιροειδών συντεταγμένων. Η επιμήκης ελλειψοειδής καφετί επιφάνεια αντιστοιχεί σε επιφάνεια σταθερού ξ , η υπερβολοειδής επιφάνεια άνω του ισημερινού επιπέδου (μπλε) αντιστοιχεί σε επιφάνεια σταθερού (θετικού) η , ενώ αυτή που βρίσκεται κάτω από το ισημερινό επίπεδο (κόκκινη) σε επιφάνεια σταθερού (αρνητικού) η . Οι ανωτέρω σφαιροειδείς επιφάνειες δεν έχουν σχεδιαστεί μεταξύ κάποιων μεσημβρινών προκειμένου να φανεί καθαρά η μορφή τους στο εσωτερικό των ελλειψοειδών.

στις σφαιρικές συντεταγμένες). Οι επιφάνειες σταθερού ξ αντιστοιχούν σε αξονικά συμμετρικά ελλειψοειδή με εστίες τα δύο ελκτικά κέντρα (με μεγάλο ημιάξονα κατά μήκος του άξονα z), ενώ οι επιφάνειες σταθερού η αντιστοιχούν σε αξονικά συμμετρικά δίχωνα υπερβολοειδή με εστίες και πάλι τα δύο κέντρα, βλ. Σχήμα (1.2). Η τρίτη συντεταγμένη, ϕ , είναι η γνωστή αζιμουθιακή γωνία των σφαιρικών ή κυλινδρικών συντεταγμένων. Έτσι

$$\xi = \frac{r_2 + r_1}{2a} = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}}{2a}, \quad (1.1)$$

$$\eta = \frac{r_2 - r_1}{2a} = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2} - \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}}{2a}, \quad (1.2)$$

όπου ρ, z είναι οι συνήθεις κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι επιμήχεις σφαιροειδείς συντεταγμένες παίρνουν τιμές εντός των διαστημάτων: $\xi \in [1, +\infty)$ και $\eta \in [-1, 1]^2$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός συντεταγμένων λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\rho = a\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad (1.3)$$

$$z = a\xi\eta. \quad (1.4)$$

Σε αυτές τις συντεταγμένες το βαρυτικό δυναμικό του πεδίου του Euler παίρνει τη μορφή:

$$V^{(E)}(\xi, \eta) = -G \frac{(m_1 + m_2)\xi + (m_1 - m_2)\eta}{a(\xi^2 - \eta^2)}. \quad (1.5)$$

Έτσι, η Λαγκρανζιανή ανά μονάδα μάζας του δοκιμαστικού σωματιδίου³ που κινείται στο βαρυτικό πεδίο του Euler δίνεται, στις επιμήχεις σφαιροειδείς συντεταγμένες, από την έκφραση:

$$L = \frac{1}{2}a^2 \left[\dot{\xi}^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} + \dot{\eta}^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} + \dot{\phi}^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \right] - V^{(E)}(\xi, \eta). \quad (1.6)$$

όπου τα ‘ $\dot{}$ ’ αντιπροσωπεύουν διαφορίση ως προς τον χρόνο t . Οι αντίστοιχες συζυγείς ορμές είναι:

$$\begin{aligned} p_\xi &= a^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \dot{\xi} \\ p_\eta &= a^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \dot{\eta} \\ p_\phi &= a^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\phi} = L_z, \end{aligned}$$

οπότε η Χαμιλτονιανή έχει την ακόλουθη μορφή:

$$H = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{p_\xi^2 (\xi^2 - 1)}{\xi^2 - \eta^2} + \frac{p_\eta^2 (1 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2} + \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \right] + V^{(E)}(\xi, \eta). \quad (1.7)$$

²Η τιμή $\xi = 1$ αντιστοιχεί στο τμήμα του άξονα z μεταξύ των ελκτικών βαρυτικών κέντρων (εκφυλισμένο ελλειψοειδές). Η τιμή $\eta = 0$ αντιστοιχεί στο επίπεδο $x - y$, ενώ οι τιμές $\eta = \pm 1$ αντιστοιχούν στο υπόλοιπο κομμάτι του άξονα z πέραν των ελκτικών κέντρων.

³Η κίνηση ενός σωματιδίου σε δοσμένο βαρυτικό πεδίο στη Νευτώνεια μηχανική είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του σωματιδίου –αντίστοιχη της γεωδαισιακής κίνησης στη Σχετικότητα–, οπότε στο εξής θα υποθέσουμε ότι η μάζα αυτού είναι ίση με μονάδα και δεν θα αναφερόμαστε στη συνέχεια σε ανηγμένες (ανά μονάδα μάζας) ποσότητες.

Ο Landau, στο περίφημο βιβλίο του *Mechanics* [3], εξηγεί πως μπορεί κανείς να κατασκευάσει το γενικότερο διαχωρίσιμο δυναμικό σε αυτές τις συντεταγμένες (επιμήχεις σφαιροειδείς), ως εφαρμογή της μεθόδου Hamilton-Jacobi, και έτσι οδηγείται στο συμπέρασμα ότι η διαχωρισιμότητα του εν λόγω προβλήματος προκύπτει από το γεγονός ότι ο αριθμητής στην εξίσωση (1.5) είναι γραμμική υπέρθεση μιας συνάρτησης αποκλειστικά του ξ συν μιας συνάρτησης αποκλειστικά του η ($V^{(E)} = [F(\xi) + G(\eta)]/(\xi^2 - \eta^2)$). Συνεπώς η ολοκληρωσιμότητα αυτού του προβλήματος προκύπτει ως άμεση συνέπεια της διαχωρισιμότητας της αντίστοιχης εξίσωσης Hamilton-Jacobi στις επιμήχεις σφαιροειδείς (ελλειψοειδείς όπως τις αποκαλεί ο Landau) συντεταγμένες.

Η τρίτη διατηρούμενη ποσότητα, β , (εκτός από την ενέργεια $E = H$ και την z -συνιστώσα της στροφορμής L_z) ανακύπτει άμεσα κατά το διαχωρισμό της παραπάνω Χαμιλτονιανής:

$$\begin{aligned}\beta &= (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + \frac{L_z^2}{\xi^2 - 1} - 2a^2(\xi^2 - 1)E - 2G(m_1 + m_2)a\xi \\ &= -(1 - \eta^2)p_\eta^2 - \frac{L_z^2}{1 - \eta^2} + 2a^2(1 - \eta^2)E + 2G(m_1 - m_2)a\eta.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Οι δύο αυτές εναλλακτικές εκφράσεις για το β στην (1.8) είναι συναρτήσεις είτε του p_ξ και του ξ , είτε του p_η και του η , αντίστοιχα, τονίζοντας τη διαχωρισιμότητα του προβλήματος. Η παραπάνω πρόταση, περί αναγκαιότητας γραμμικού συνδυασμού του αριθμητή του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου, αναδεικνύεται καθαρά στον ανωτέρω διαχωρισμό.

Παρόλο που το τρίτο αυτό ολοκλήρωμα της κίνησης είναι γνωστό για περισσότερο από δύο αιώνες, σχετικά πρόσφατα ο Lynden-Bell [4], προσπαθώντας να του αποδώσει κάποια φυσική σημασία, έδωσε μία απλούστερη φόρμουλα γι' αυτό χωρίς να γίνεται καμία αναφορά στο ιδιαίτερο σύστημα των σφαιροειδών συντεταγμένων. Συγκεκριμένα έδειξε ότι το κινητικό μέρος αυτής της σταθεράς δεν είναι άλλο από το εσωτερικό γινόμενο των γωνιακών στροφορμών γύρω από τα δύο κέντρα μάζας. Η έκφραση για το τρίτο ολοκλήρωμα του Lynden-Bell δίνεται από την σχέση:

$$I_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}) - Ga\hat{\mathbf{z}} \cdot (m_1\hat{\mathbf{r}}_1 - m_2\hat{\mathbf{r}}_2), \quad (1.9)$$

όπου το $\mathbf{v}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r} \mp a\hat{\mathbf{z}}$ είναι τα διανύσματα από κάθε βαρυτική μάζα έως τη θέση του δοκιμαστικού σωματιδίου, ενώ τα $\hat{\mathbf{r}}_{1,2}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά την διεύθυνση των $\mathbf{r}_{1,2}$, αντίστοιχα. Η ποσότητα I_3 είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του κινούμενου σωματιδίου σε αυτό το βαρυτικό πεδίο. Η έκφραση (1.9) ξεχωρίζει διότι δεν απορρέει από τον διαχωρισμό της Hamilton-Jacobi εξίσωσης και αναδεικνύει άμεσα τη σχέση αυτής της ποσότητας με τη διατήρηση της στροφορμής στην ειδική περίπτωση που το δυναμικό γίνεται κεντρικό στο όριο $a = 0$. Εξαιτίας μάλιστα της γραφής μέσω διανυσματικών γεωμετρικών και φυσικών μεγεθών, η ποσότητα αυτή μπορεί σχετικά εύκολα να γραφεί σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

Αν συνδυάσουμε τις δύο εκφράσεις για το β στην (1.8) και μεταβούμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες για τη γραφή του κινητικού μέρους τότε λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\beta = a^2(p_\rho^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2}) - p_\rho^2 z^2 - \rho^2 p_z^2 - \frac{r^2 L_z^2}{\rho^2} + 2z\rho p_z p_\rho - 2Ga\hat{\mathbf{z}} \cdot (m_1\hat{\mathbf{r}}_1 - m_2\hat{\mathbf{r}}_2) \quad (1.10)$$

όπου ρ , z οι κυλινδρικές συντεταγμένες και p_ρ , p_z οι αντίστοιχες ορμές τους, ενώ $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Αν υπολογίσουμε παράλληλα και το I_3 σε κυλινδρικές συντεταγμένες, γράφοντας τα διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_{1,2} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z \mp a)\hat{\mathbf{z}}$ και την ταχύτητα $\mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}$, καταλήγουμε στην ακόλουθη συσχέτιση των δύο διαφορετικών εκφράσεων για το τρίτο ολοκλήρωμα:

$$\beta = -2I_3. \quad (1.11)$$

1.2 Το πεπλατυσμένο πρόβλημα Euler

Το βαρυτικό δυναμικό του προβλήματος Euler, περιγράφει μια, εκ κατασκευής, επιμήκη κατανομή μάζας ως πηγή, αφού οι μάζες είναι κατανεμημένες πάνω στον άξονα συμμετρίας. Μια τέτοια κατανομή δεν μοιάζει προφανώς με το βαρυτικό πεδίο μιας μελανής οπής Kerr, το οποίο είναι ως γνωστό ‘πεπλατυσμένο’, όπως και κάθε άλλου απομονωμένου, αξονικά συμμετρικού, βαρυτικού σώματος με ιδιοπεριστροφή. Ωστόσο, είναι εύκολο να μετατρέψουμε το αρχικό πρόβλημα σε ένα πεπλατυσμένο βαρυτικό πεδίο, ανάλογο των μελανών οπών, αν αλλάξουμε την απόσταση a των δύο βαρυτικών μαζών από την αρχή των αξόνων, από πραγματική σε καθαρά φανταστική. Αν και το a θα μετατραπεί τότε σε μία φανταστική απόσταση, το βαρυτικό πεδίο θα παραμείνει πραγματικό στην περίπτωση που $m_1 = m_2 = M/2$. Μόνο τότε το βαρυτικό δυναμικό κάθε μάζας θα δίνεται από τη μιγαδική συζυγή συνάρτηση του δυναμικού της άλλης μάζας. Μάλιστα, για να αποφύγουμε τη σύγχυση θα κρατήσουμε την a παράμετρο πραγματική και απλώς θα αντικαταστήσουμε την a με ia στο δυναμικό. Το βαρυτικό δυναμικό θα λάβει τότε την ακόλουθη μορφή:

$$V = -\frac{G(M/2)}{|\mathbf{r} - ia\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{G(M/2)}{|\mathbf{r} + ia\hat{\mathbf{z}}|}$$

όπου με $|\mathbf{k}|$, εννοούμε $\sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}$. Το τελευταίο διανυσματικό γινόμενο είναι, εν γένει, ένας μιγαδικός αριθμός. Μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις το νέο δυναμικό παίρνει την εξής μορφή στις σφαιρικές συντεταγμένες:

$$V = -\frac{GM}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - a^2}}{R^2}$$

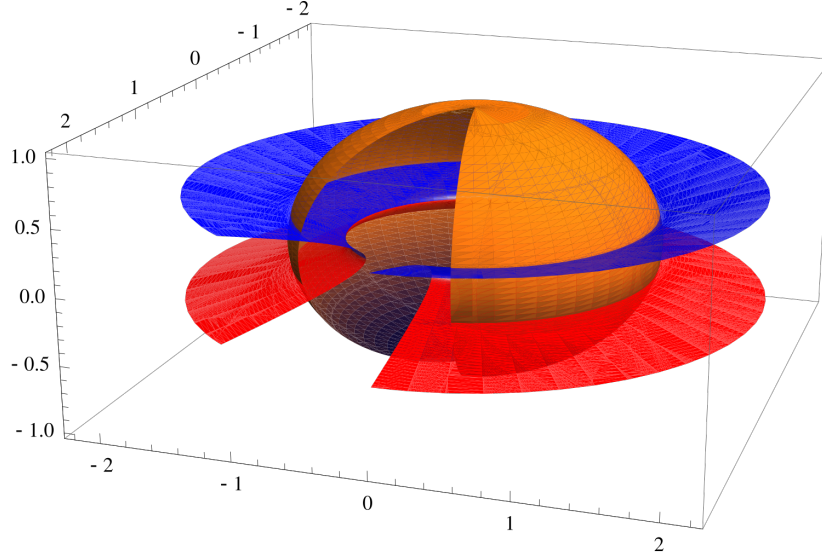
όπου

$$R^2 = \sqrt{(r^2 - a^2)^2 + (2a\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2} = \sqrt{(r^2 - a^2)^2 + 4a^2r^2 \cos^2 \theta}.$$

Το νέο πεδίο V ορίζεται παντού για $R^2 \geq r^2 - a^2$, εκτός από τον ισημερινό κύκλο ($r = a, \theta = \pi/2$), όπου η έκφραση για το δυναμικό γίνεται απροσδιόριστη καθώς $R = 0$. Επίσης στον ισημερινό δίσκο ($r < a, \theta = \pi/2$) το δυναμικό μηδενίζεται. Τα πεπλατυσμένο Euler πεδίο είναι κατοπτρικά συμμετρικό, όπως το αρχικό επίμηκες Euler πεδίο (όταν οι μάζες των δύο βαρυτικών κέντρων είναι ίσες). Το παραπάνω δυναμικό είναι γνωστό στην αστρονομία ως Vinti δυναμικό [5–8] και έχει χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της κίνησης δορυφόρων στο ‘πεπλατυσμένο’ βαρυτικό πεδίο της Γης.

Το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων για την μελέτη της κίνησης σε αυτό το πεδίο είναι αυτό των πεπλατυσμένων σφαιροειδών (oblate spheroidal) συντεταγμένων, (ξ, η, ϕ) , οι οποίες ορίζονται με βάση τις καρτεσιανές συντεταγμένες ως:

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \cos \phi, \\ y &= a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \sin \phi, \\ z &= a \xi \eta, \end{aligned}$$



Σχήμα 1.3: Στο διάγραμμα φαίνεται η απεικόνιση στον τρισδιάστατο χώρο των πεπλατυσμένων σφαιροειδών συντεταγμένων. Η πεπλατυσμένη ελλειψοειδής καφετί επιφάνεια αντιστοιχεί σε επιφάνεια σταθερού ξ , η υπερβολοειδής επιφάνεια άνω του ισημερινού επιπέδου (μπλε) αντιστοιχεί σε επιφάνεια σταθερού (θετικού) η , ενώ αυτή κάτω από το ισημερινό επίπεδο (κόκκινη) σε επιφάνεια σταθερού (αρνητικού) η . Οι ανωτέρω σφαιροειδείς επιφάνειες δεν έχουν σχεδιαστεί μεταξύ κάποιων μεσημβρινών, προκειμένου να φανεί καθαρά η μορφή τους στο εσωτερικό των ελλειψοειδών.

όπου $\xi \in [0, +\infty)$, $\eta \in [-1, 1]$ και $\phi \in [0, 2\pi)$. Οι επιφάνειες συντεταγμένων σταθερού ξ είναι πεπλατυσμένα ελλειψοειδή με εστιακό κύκλο τον $(r = a, \theta = \pi/2)$, βλ. Σχήμα (1.3). Η επιφάνεια που αντιστοιχεί σε $\xi = 0$ είναι ο δίσκος $r \leq a, \theta = \pi/2$. Αντίστοιχα οι επιφάνειες συντεταγμένων σταθερού η είναι μονόχωνα υπερβολοειδή με τον ίδιο εστιακό κύκλο. Για $\eta = 0$ έχουμε το ισημερινό επίπεδο πέραν του δίσκου και για $\eta = \pm 1$ τον άξονα z (πάνω ή κάτω από το δίσκο). Οι θετικές τιμές του η αντιστοιχούν στο άνω ημισφαίριο, ενώ οι αρνητικές στο κάτω ημισφαίριο.

Στις καινούργιες συντεταγμένες το δυναμικό Euler παίρνει την απλή μορφή:

$$V(\xi, \eta) = -G \frac{M\xi}{a(\xi^2 + \eta^2)}, \quad (1.12)$$

ενώ η Λαγκρανζιανή ανά μονάδα μάζας (ομοίως με το αρχικό επίμηκες πρόβλημα μπορούμε να θέσουμε την μάζα του δοκιμαστικού σωματιδίου ίση με την μονάδα) του πεπλατυσμένου Euler δυναμικού γίνεται:

$$L = \frac{1}{2}a^2 \left[\dot{\xi}^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + 1} + \dot{\eta}^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2} + \dot{\phi}^2 (\xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \right] - V(\xi, \eta). \quad (1.13)$$

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange παίρνουμε τις εξής εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \left(-\dot{\xi}^2 \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1} + \dot{\eta}^2 \frac{\xi^2 + 1}{1 - \eta^2} \right) - \frac{2\eta\dot{\eta}\dot{\xi}}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\xi(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \dot{\phi}^2 \\
&\quad - \frac{GM}{a^3} \frac{(\xi^2 + 1)(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^3} \\
\ddot{\eta} &= -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \left(-\dot{\xi}^2 \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1} + \dot{\eta}^2 \frac{\xi^2 + 1}{1 - \eta^2} \right) - \frac{2\xi\dot{\eta}\dot{\xi}}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\eta(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \dot{\phi}^2 \\
&\quad - \frac{GM}{a^3} \frac{2\xi\eta(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^3} \\
\ddot{\phi} &= \left(-\frac{2\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + 1} + \frac{2\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} \right) \dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

1.3 Ολοκληρώματα κίνησης

1.3.1 Η εξίσωση Hamilton-Jacobi

Εκτός από τις εξισώσεις Euler-Lagrange και Hamilton, ένας εναλλακτικός τρόπος να κατασκευάσουμε και στη συνέχεια να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης είναι η μέθοδος Hamilton-Jacobi [3, 9, 10] με αντίστοιχη εξίσωση:

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{1.15}$$

Με το φορμαλισμό Hamilton-Jacobi, μπορούμε να βρούμε όλες τις σταθερές κίνησης ενός μηχανικού συστήματος ακόμα και αυτές που δεν είναι προφανείς από τις συμμετρίες του προβλήματος, ή ακόμα και όταν το ίδιο το μηχανικό πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί πλήρως.

Ένας κανονικός μετασχηματισμός $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$, ο οποίος διατηρεί την μορφή των εξισώσεων του Hamilton, με γεννήτρια συνάρτηση (generating function) $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ ικανοποιεί της εξισώσεις:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}}, \tag{1.17}$$

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \tag{1.18}$$

όπου $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ οι παλιές γενικευμένες συντεταγμένες και $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ οι νέες κανονικές συντεταγμένες. $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ είναι η καινούργια Χαμιλτονιανή, και οι αντίστοιχες εξισώσεις Hamilton είναι:

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}. \tag{1.19}$$

Η εξίσωση Hamilton-Jacobi προκύπτει αν απαιτήσουμε η νέα Χαμιλτονιανή να είναι μη-δενική, $K = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις Hamilton είναι τετριμμένες

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{Q}} = 0, \tag{1.20}$$

με συνέπεια οι νέες γενικευμένες συντεταγμένες και ορμές να είναι σταθερές της κίνησης. Συνδυάζοντας την (1.16) με την (1.18) και θέτοντας τη γεννήτρια συνάρτηση, F_2 , ίση με μια συνάρτηση $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ (Hamilton's principal function) που θα ορίσουμε στη συνέχεια, προκύπτει η (1.15).

Η χρονική παράγωγος της συνάρτησης $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.16, 1.18) και το γεγονός ότι η νέα Χαμιλτονιανή είναι μηδενική, ενώ η νέα γενικευμένη ορμή είναι σταθερά της κίνησης, αποδεικνύεται ότι είναι η Λαγκρανζιανή:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (1.21)$$

Άρα η συνάρτηση S είναι η

$$S = \int L dt, \quad (1.22)$$

δηλαδή, η κύρια συνάρτηση του Χάμιλτον (Hamilton's principal function) είναι η δράση του μηχανικού συστήματος.

Η μέθοδος των Hamilton-Jacobi είναι χρήσιμη όταν μπορούμε να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές. Στην περίπτωση που η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, η χρονική παράγωγος της δράσης $\partial S/\partial t$ είναι μια σταθερά, $-E$, οπότε μπορούμε να διαχωρίσουμε αμέσως το χρόνο:

$$S = W(q_i) - Et, \quad (1.23)$$

όπου η $W(q_i)$ είναι η καλούμενη χαρακτηριστική συνάρτηση του Χάμιλτον (Hamilton's characteristic function). Έτσι η Hamilton-Jacobi καταλήγει στην:

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \quad (1.24)$$

Επειδή η W δεν περιλαμβάνει την χρονική συντεταγμένη, η νέα και η παλιά Χαμιλτονιανή είναι ίσες $K = H = E$.

Στην περίπτωση όπου μία γενικευμένη συντεταγμένη q_k και η παράγωγος $\partial S/\partial q_k$ εμφανίζονται στην Χαμιλτονιανή ως ένας συνδιασμός $f\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)$ που δεν εξαρτάται από τις άλλες συντεταγμένες q_i , ορμές και το χρόνο :

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t; f\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.25)$$

η S μπορεί να χωριστεί σε δύο συναρτήσεις όπου η μία θα εξαρτάται μόνο από την q_k και η άλλη από τις υπόλοιπες γενικευμένες συντεταγμένες:

$$S = S_k(q_k) + S'(q_i, t). \quad (1.26)$$

Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω λύση στην εξίσωση Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, t; f\left(q_k; \frac{dS_k}{dq_k}\right)\right) + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0 \quad (1.27)$$

τότε αυτή θα ισχύει για οποιαδήποτε τιμή της q_k . Τυχόν αλλαγή της q_k επηρεάζει μόνο την f , οπότε προκύπτει ότι η f θα πρέπει να είναι μια σταθερά. Τότε η (1.27) οδηγεί σε

δύο εξισώσεις:

$$f\left(q_k, \frac{dS_k}{dq_k}\right) = a_k, \quad (1.28)$$

$$H\left(q_i, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, t, a_k\right) + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0 \quad (1.29)$$

όπου a_k είναι κάποια σταθερά. Η πρώτη από τις δύο εξισώσεις είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση και μπορεί να λυθεί με απλή ολοκλήρωση.

1.3.2 Το τρίτο ολοκλήρωμα κίνησης β

Η Χαμιλτονιανή ενός δοκιμαστικού σωματιδίου που κινείται στο πεπλατυσμένο δυναμικό του Euler είναι:

$$H = \frac{1}{2a^2} \left[p_\xi^2 \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2} + p_\eta^2 \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \right] + V(\xi, \eta), \quad (1.30)$$

με τις συζυγείς ορμές να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_\xi &= a^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + 1} \dot{\xi} \\ p_\eta &= a^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2} \dot{\eta} \\ p_\phi &= a^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\phi} \end{aligned} \quad (1.31)$$

και να ισούνται με τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους της δράσης $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$. Η δράση θεωρούμε ότι εξαρτάται από τις συντεταγμένες και τον χρόνο $S = S(q_i, t)$ και από παραμέτρους που δεν είναι άλλες από τα ολοκληρώματα της κίνησης.

Κατ' αναλογία με το επίμηκες πρόβλημα του Euler, αποδεικνύεται ότι το δυναμικό Euler έχει τρεις ανεξάρτητες σταθερές κίνησης. Η ολοκληρωσιμότητα του προβλήματος, είναι αποτέλεσμα της διαχωρισιμότητας της Hamilton-Jacobi εξίσωσης, που σύμφωνα με το επιχείρημα του Landau [3] οφείλεται στο γεγονός ότι ο αριθμητής της εξίσωσης (1.12) είναι γραμμική υπέρθεση μιας συνάρτησης του ξ συν μιας συνάρτησης του η :

$$V(\xi, \eta) = \frac{F(\xi) + G(\eta)}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση η συνάρτηση του η είναι μηδενική ($G(\eta) = 0$) και η συνάρτηση του ξ είναι απλώς γραμμική ($F(\xi) = k\xi$).

Η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, συνεπώς το σύστημα είναι συντηρητικό. Η δράση, λοιπόν, παίρνει την μορφή:

$$S = S_0(q_i) - Et,$$

οπότε η χρονική παράγωγος της δράσης ισούται με την σταθερά $-E$ ($\frac{\partial S}{\partial t} = -E$) (η σταθερά αυτή παίζει το ρόλο της ενέργειας).

Έτσι η εξίσωση Hamilton-Jacobi γίνεται απλούστερη:

$$H(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}) = E$$

με την ενέργεια να ισούται με την τιμή της Χαμιλτονιανής ($E = H$):

$$E = \frac{1}{2a^2(\xi^2 + \eta^2)} [(\xi^2 + 1)(\frac{\partial S_0}{\partial \xi})^2 + (1 - \eta^2)(\frac{\partial S_0}{\partial \eta})^2 + (-\frac{1}{\xi^2 + 1} + \frac{1}{1 - \eta^2})(\frac{\partial S_0}{\partial \phi})^2] - \frac{GM\xi}{a(\xi^2 + \eta^2)}. \quad (1.32)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με $2a(\xi^2 + \eta^2)$ και εκτελώντας μερικές ακόμη πράξεις, καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned} &(\xi^2 + 1)(\frac{\partial S_0}{\partial \xi})^2 - \frac{1}{\xi^2 + 1}(\frac{\partial S_0}{\partial \phi})^2 - 2a^2(\xi^2 + 1)E - 2GM^2a\xi + \\ &(1 - \eta^2)(\frac{\partial S_0}{\partial \eta})^2 + \frac{1}{1 - \eta^2}(\frac{\partial S_0}{\partial \phi})^2 + 2a^2(1 - \eta^2)E = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Η ϕ συντεταγμένη είναι κυκλική, καθώς δεν εμφανίζεται στην χαμιλτονιανή (1.30) (λόγω αξονικής συμμετρίας) επομένως η αντίστοιχη ορμή p_ϕ διατηρείται. Αυτή η ορμή είναι η συνιστώσα της γωνιακής στροφορμής στον άξονα συμμετρίας και από εδώ και στο εξής θα την συμβολίζουμε ως L_z .

Επειδή στην (1.33) η πρώτη γραμμή εξαρτάται μόνο από την ξ -μεταβλητή ενώ η δεύτερη γραμμή εξαρτάται μόνο από την η , οποιαδήποτε αλλαγή στην ξ συντεταγμένη δεν επηρεάζει την δεύτερη γραμμή. Διαπιστώνουμε ότι η πρώτη γραμμή πρέπει να ισούται με μία σταθερά. Ομοίως ισχύει και για την η -μεταβλητή, με την δεύτερη γραμμή να ισούτε με μία σταθερά, ίση και αντίθετη με την πρώτη, καθώς το άθροισμα των δύο γραμμών πρέπει να ισούται με μηδέν.

Οπότε στην (1.33) οι ξ και η μεταβλητές διαχωρίζονται πλήρως, με την χωρική εξάρτηση της δράσης να γίνεται:

$$S_0 = L_z\phi + S_\xi(\xi) + S_\eta(\eta).$$

Με την δράση να έχει την παραπάνω μορφή η (1.33) γίνεται:

$$(\xi^2 + 1) \left(\frac{dS_\xi}{d\xi} \right)^2 - \frac{L_z^2}{\xi^2 + 1} + 2GMa\xi - 2a^2(\xi^2 + 1)E = \beta \quad (1.34)$$

$$(1 - \eta^2) \left(\frac{dS_\eta}{d\eta} \right)^2 + \frac{L_z^2}{1 - \eta^2} + 2a^2(1 - \eta^2)E = -\beta \quad (1.35)$$

όπου β είναι μια σταθερά. Ισχύει ότι $p_\xi = \frac{dS_\xi}{d\xi}$ και $p_\eta = \frac{dS_\eta}{d\eta}$. Οπότε οι ορμές είναι:

$$p_\xi = \pm \sqrt{2a^2E + \frac{\beta - 2GMa\xi}{\xi^2 + 1} + \frac{L_z^2}{(\xi^2 + 1)^2}} \quad (1.36)$$

$$p_\eta = \pm \sqrt{-2ma^2E - \frac{\beta}{1 - \eta^2} - \frac{L_z^2}{(1 - \eta^2)^2}} \quad (1.37)$$

και η λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi είναι η

$$S = -Et + L_z \phi \pm \int p_\xi d\xi \pm \int p_\eta d\eta$$

ενώ το β είναι το τρίτο ολοκλήρωμα κίνησης:

$$\begin{aligned} \beta &= (\xi^2 + 1)p_\xi^2 - \frac{L_z^2}{\xi^2 + 1} - 2a^2(\xi^2 + 1)E + 2GMa\xi \\ &= -(1 - \eta^2)p_\eta^2 - \frac{L_z^2}{1 - \eta^2} - 2a^2(1 - \eta^2)E. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Παρατηρούμε ότι το τρίτο ολοκλήρωμα της κίνησης είναι διγραμμικό ως προς τις ορμές.

1.4 Η σχέση των τρίτων ολοκληρωμάτων β , I_3

Η σταθερά I_3 (1.9) του Lynden-Bell [4] ισχύει και για το πεπλατυσμένο Euler πεδίο. Για να δείξουμε τη σχέση αυτής με το τρίτο ολοκλήρωμα β (1.38) που εξαγάγαμε παραπάνω, θα ήταν καλύτερα να εκφράσουμε το β σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, z, ϕ) .

Το τρίτο ολοκλήρωμα β δίνεται από τις σχέσεις:

$$(\xi^2 + 1)p_\xi^2 - \frac{L_z^2}{\xi^2 + 1} + 2a^2F(\xi) - 2a^2(\xi^2 + 1)E = \beta \quad (1.39)$$

$$(1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{L_z^2}{1 - \eta^2} + 2a^2G(\eta) + 2a^2(1 - \eta^2)E = -\beta \quad (1.40)$$

όπου έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις:

$$F(\xi) = (a_1 + a_2)\frac{\xi}{a}$$

$$G(\eta) = i(a_1 - a_2)\frac{\eta}{a} = 0$$

μέσω των ποσοτήτων $a_1 = a_2 = -\frac{GM}{2}$.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση για το β με το $(1 - \eta^2)$ και την δεύτερη με το $(\xi^2 + 1)$ και τις προσθέτουμε. Ύστερα από κάποιες πράξεις καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned} &(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)(p_\xi^2 + p_\eta^2) + L_z^2 \frac{(\xi^2 + 1)^2 - (1 - \eta^2)^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} + 2a[a_1(\xi(1 - \eta^2) \\ &+ i\eta(\xi^2 + 1)) + a_2(\xi(1 - \eta^2) - i\eta(\xi^2 + 1))] = \beta[(1 - \eta^2) - (\xi^2 + 1)]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ισχύουν οι παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$\begin{aligned}
(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2) &= \frac{\rho^2}{a^2} \\
(\xi^2 + 1)^2 - (1 - \eta^2)^2 &= \frac{r_1 r_2}{a^2} \frac{a^2 + r^2}{a^2} \\
\xi^2 + \eta^2 &= \frac{r_1 r_2}{a^2} \\
\xi^2 - \eta^2 &= \frac{r_1 + r_2}{2a^2} \\
\xi(1 - \eta^2) + i\eta(\xi^2 + 1) &= \frac{r_2}{a} \left(1 + \frac{iz}{a}\right) \\
\xi^2(1 - \eta^2)^2 + \eta^2(\xi^2 + 1)^2 &= \frac{r_1 r_2}{a^2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

ενώ οι ορμές στις σφαιροειδείς και στις κυλινδρικές συντεταγμένες συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
p_\xi &= a^2 \xi(1 - \eta^2) \frac{p_\rho}{\rho} + a\eta p_z \\
p_\eta &= -a^2 \eta(\xi^2 + 1) \frac{p_\rho}{\rho} + a\xi p_z
\end{aligned}$$

όπου $p_\rho = \dot{\rho}$ και $p_z = \dot{z}$. Επίσης θα χρειαστούμε τις:

$$\begin{aligned}
a + iz &= i\mathbf{r}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}} \\
a - iz &= -i\mathbf{r}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην (1.41) καταλήγουμε στην:

$$\beta = -a^2 \left(\rho^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2}\right) - z^2 p_\rho^2 - \rho^2 p_z^2 + 2z\rho p_\rho p_z - \frac{L_z^2 r^2}{\rho^2} + 2GMia\hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2). \quad (1.42)$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά I_3 , θα εκφράσουμε τις θέσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathbf{r}_{1,2} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z \mp ia)\hat{\mathbf{z}},$$

όπως επίσης και την ταχύτητα:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}.$$

Από την σχέση (1.9) και ύστερα από λίγες πράξεις ακόμη καταλήγουμε στην ίδια ακριβώς σχέση που συνδέει το β με την I_3 :

$$I_3 = -\frac{\beta}{2}$$

ακριβώς όπως και στην περίπτωση του επίμηχους προβλήματος Euler.

Αργότερα θα κατασκευάσουμε άλλη μια εναλλακτική έκφραση για το τρίτο ολοκλήρωμα, ώστε να έχουμε μια πιο καλή αναλογία με το τη σταθερά του Carter, που αντιπροσωπεύει τη συνήθη έκφραση για το τρίτο ολοκλήρωμα των γεωδαισιακών της μετρικής Kerr.

1.5 Εξισώσεις κίνησης

Επειδή σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η σύγκριση μεταξύ των τροχιών στο πεπλατυσμένο Euler δυναμικό με τις τροχιές στο πεδίο μιας μελανής οπής Kerr, είναι καλύτερα να ορίσουμε τις εξής καινούργιες συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} r &= a\xi \\ \theta &= \cos^{-1} \eta \\ \phi &= \phi. \end{aligned}$$

Οι καινούργιες συντεταγμένες (r, θ) θα παίξουν τον ρόλο της ακτινικής και πολικής Boyer-Lindquist (BL) συντεταγμένης του Kerr χωροχρόνου, αντίστοιχα. Παρότι παρόμοιες με τις πεπλατυσμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες (ξ, η) , οι καινούργιες συντεταγμένες (r, θ) είναι προτιμότερες για την ανάδειξη των αναλογιών με τις αντίστοιχες τροχιές στη μετρική Kerr. Η τρίτη συντεταγμένη ϕ είναι η συνήθης αζιμουθιακή γωνία, κοινή και στα δύο προβλήματα. Στην συνέχεια θα υιοθετήσουμε γεωμετρικές μονάδες $G = c = 1$.

Το δυναμικό Euler στις καινούργιες συντεταγμένες δίνεται από την:

$$V = -\frac{Mr}{r^2 + a^2 \cos \theta} \quad (1.43)$$

με την Χαμιλτονιανή (1.30) να παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$H = \frac{(r^2 + a^2)p_r^2 + p_\theta^2}{2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta} p_\phi^2 - \frac{Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (1.44)$$

όπου p_r, p_θ και p_ϕ είναι οι συζυγείς ορμές των συντεταγμένων r, θ, ϕ αντίστοιχα. Οι ορμές p_r και p_θ σχετίζονται με τις αντίστοιχες ορμές p_ξ και p_η (1.31) μέσω των σχέσεων $p_r = p_\xi/a$ και $p_\theta = -\sin \theta p_\eta$.

Όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα το Euler πεδίο είναι τριών βαθμών ελευθερίας και χαρακτηρίζεται από τρεις ανεξάρτητες σταθερές κίνησης, οπότε το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο. Από την Hamilton-Jacobi εξίσωση για την Χαμιλτονιανή (1.44), προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης (1.36) και (1.37), με τις ορμές να ορίζονται από την (1.31). Στις καινούργιες συντεταγμένες οι εξισώσεις κίνησης καταλήγουν στις:

$$(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{dr}{dt} \right) = \pm \sqrt{V_r(r)}, \quad (1.45)$$

$$(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \pm \sqrt{V_\theta(\theta)}, \quad (1.46)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L_z}{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}. \quad (1.47)$$

Το ακτινικό δυναμικό $V_r(r)$ και το πολικό δυναμικό $V_\theta(\theta)$, στις εξισώσεις κίνησης (1.45) και (1.46) αντίστοιχα, δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_r(r) = 2Er^4 + 2Mr^3 + (2a^2E - Q_E - L_z^2) r^2 + 2Ma^2r - Q_E a^2, \quad (1.48)$$

$$V_\theta(\theta) = Q_E - \cos^2 \theta \left(-2a^2E + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right). \quad (1.49)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, t είναι ο νευτώνειος χρόνος και E, L_z, Q_E είναι οι σταθερές κίνησης που προκύπτουν από τον διαχωρισμό των μεταβλητών και οι οποίες μπορούν να εκφραστούν στις νέες συντεταγμένες και ορμές από τις σχέσεις:

$$E = \frac{p_r^2(r^2 + a^2) + p_\theta^2}{2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} + \frac{p_\phi^2}{2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta} - \frac{Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (1.50)$$

$$L_z = p_\phi, \quad (1.51)$$

$$Q_E = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left(-2Ea^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (1.52)$$

$$= -p_r^2(r^2 + a^2) + 2Er^2 + 2Mr - \frac{L_z r^2}{r^2 + a^2}. \quad (1.53)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι ανάλογες εξισώσεις κίνησης λαμβάνουμε για τις γεωδαισιακές εξισώσεις στην μετρική Kerr, με ελαφρώς διαφορετικά δυναμικά, αλλά με τον ιδιοχρόνο τ , στην θέση του νευτώνειου χρόνου t , να είναι η παράμετρος που περιγράφει την εξέλιξη των τροχιών.

Για να κατασκευάσουμε τα σχεδιαγράμματα των τροχιών και για τους διάφορους αριθμητικούς υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την Euler-Lagrange (1.14) και όχι αυτές από την εξίσωση Hamilton-Jacobi (1.45-1.47). Οι δεύτερες συσσωρεύουν αριθμητικά σφάλματα κατά την αριθμητική ολοκλήρωση λόγω της παρουσίας των τετραγωνικών ριζών. Επιπλέον θα πρέπει να αλλάζουμε με το χέρι το πρόσημο της ταχύτητας κάθε φορά που η τροχιά περνά από σημείο αναστροφής του δυναμικού ($V_r(r) = 0$ ή $V_\theta(\theta) = 0$).

Από την Hamilton-Jacobi εξίσωση, λαμβάνουμε εκτός από την ενέργεια και την z -συνιστώσα της γωνιακής στροφορμής, μία τρίτη σταθερά (1.38) που σχετίζεται με την σταθερά του Lynden-Bell με την σχέση $\beta = -2I_3$, όπως είδαμε παραπάνω, και στις καινούργιες συντεταγμένες γράφεται ως:

$$\beta = (r^2 + a^2)p_r^2 - \frac{a^2 L_z^2}{r^2 + a^2} - 2Mr - 2E(r^2 + a^2) \quad (1.54)$$

$$= -p_\theta^2 - 2Ea^2 \sin^2 \theta - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}. \quad (1.55)$$

Ωστόσο στην μελέτη μας αντί του β θα χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο συνδυασμό σταθερών, Q_E , ο οποίος σχετίζεται με το β με την σχέση:

$$\beta = -Q_E - L_z^2 - 2a^2 E.$$

Αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Q_E ως τρίτο ολοκλήρωμα κίνησης, γιατί το Q_E μπορεί να θεωρηθεί ως το Νευτώνειο ανάλογο της σταθεράς Carter στην Kerr, όπως θα δείξουμε στην συνέχεια.

1.6 Φραγμένες Τροχιές

1.6.1 Ιδιότητες των δυναμικών

Μια τροχιά στο βαρυτικό πεδίο του πεπλατυσμένου Euler είναι φραγμένη όταν η ακτινική της συνιστώσα ταλαντώνεται μεταξύ δύο δοσμένων ακτίνων $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$. Ομοίως

και η πολική γωνία $\theta_{\min} \leq \theta \leq \pi - \theta_{\min}$, ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας, βλ. Σχήμα 1.4. Οι ακτίνες $r_{\min}$ (περίαστρο) και $r_{\max}$ (άπαστρο) είναι τα σημεία ακτινικής αναστροφής της τροχιάς, όπου το ακτινικό δυναμικό μηδενίζεται ενώ $\theta_{\min}$ και $\pi - \theta_{\min}$ είναι τα σημεία αναστροφής του πολικού δυναμικού. Τα δυναμικά V_r και V_θ είναι υπεύθυνα για την ακτινική ταλάντωση και τις ταλαντώσεις γύρω από τον ισημερινό, αντίστοιχα. Οι επιτρεπόμενες περιοχές κίνησης καθορίζονται από τις συνθήκες $V_r \geq 0$ και $V_\theta \geq 0$, ώστε οι ταχύτητες να είναι πραγματικές.

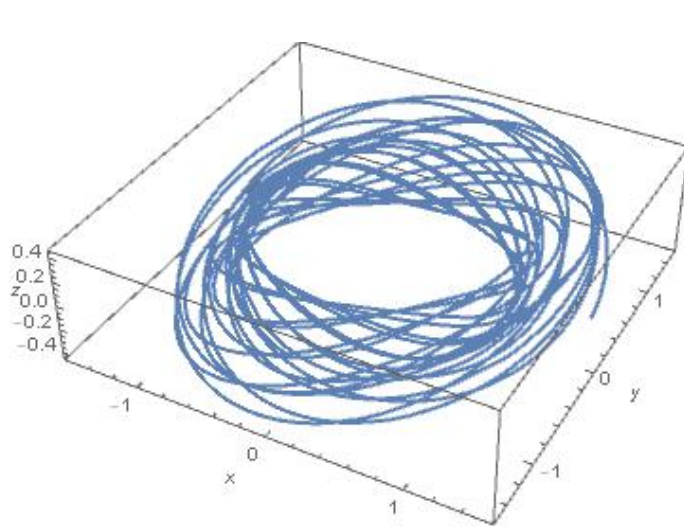
Γενικά οι φραγμένες τροχιές χαρακτηρίζονται από τρεις περιοδικές κλίμακες, οι οποίες αντιστοιχούν στις συχνότητες Ω_r , Ω_θ και Ω_ϕ που σχετίζονται με την ακτινική, πολική και αξιμουθιακή διεύθυνση, αντίστοιχα. Θα ορίσουμε τις συχνότητες στο Κεφάλαιο 3.3.4 όπου θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες της Kerr.

Από τον συντελεστή του r^4 στο ακτινικό δυναμικό V_r (1.48) είναι φανερό πως καμία τροχιά με αρνητική ενέργεια ($E < 0$) δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο. Στην περίπτωση που η ενέργεια είναι αρνητική, από το πολικό δυναμικό V_θ (1.49), παρατηρούμε ότι για να υπάρξει τροχιά πρέπει το Q_E να είναι μη αρνητικό. Στην περίπτωση των ισημερινών τροχιών, όπου η κίνηση πραγματοποιείται πάνω στο σταθερό επίπεδο $\theta = \pi/2$, το τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται $Q_E = 0$.

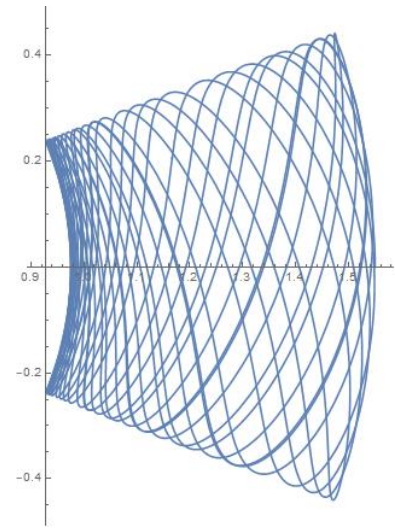
Πρέπει να σημειώσουμε ότι μπορεί να υπάρξει φραγμένη τροχιά με θετική ενέργεια. Σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό V_r (1.48) έχει δύο επιτρεπόμενες περιοχές κίνησης: μία εξωτερική περιοχή σε μεγάλες ακτίνες που αντιστοιχεί σε μία μη φραγμένη (υπερβολική) τροχιά και μία εσωτερική περιοχή (σε μικρότερες ακτίνες) που αντιστοιχεί σε φραγμένη τροχιά, βλ. Σχήμα 1.6. Επειδή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, στην περίπτωση της Kerr όταν υπάρχει φραγμένη τροχιά αυτή είναι πάντα εξωτερική, θα αποφύγουμε να μελετήσουμε τέτοιες τροχιές (όπου μόνο η εσωτερική είναι φραγμένη). Θα ασχοληθούμε μόνο με φραγμένες τροχιές που έχουν $E < 0$ και $Q_E \geq 0$.

Το δυναμικό V_r όντας πολυώνυμο τετάρτου βαθμού οδηγεί σε δύο οικογένειες τροχιών:

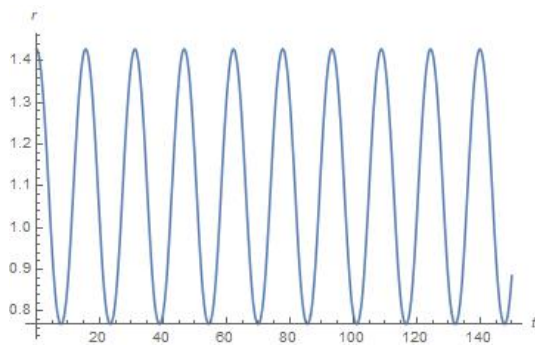
- (α) μία εσωτερική περιοχή κίνησης με μικρές ακτίνες $r_4 \leq r \leq r_3$ που συνυπάρχει μαζί με μία εξωτερική περιοχή κίνησης σε μεγαλύτερες ακτίνες $r_2 \leq r \leq r_1$ (βλ. Σχήμα 1.5a), όπου $0 \leq r_4 \leq r_3 \leq r_2 \leq r_1$ είναι οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου. Οι δύο αυτές φραγμένες διακριτές τροχιές χαρακτηρίζονται από την ίδια τριάδα σταθερών κίνησης (E, L_z, Q_E) . Στην περίπτωση αυτή θα θεωρήσουμε μόνο την εξωτερική περιοχή ως επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης. Ο λόγος είναι ότι θέλουμε να τις συγκρίνουμε με την Kerr, η οποία έχει ένα παρόμοιο ακτινικό δυναμικό με δύο περιοχές κίνησης. Από τις δύο, όμως, μόνο η εξωτερική περιοχή κίνησης αντιστοιχεί στις φραγμένες τροχιές ενώ η εσωτερική περιοχή στις καταδυόμενες τροχιές, δηλαδή, αυτές που διασχίζουν τον ορίζοντα.
- (β) μία μόνο περιοχή κίνησης με $r_2 \leq r \leq r_1$, ενώ οι άλλες δύο ρίζες του πολυωνύμου είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε δύο υποπερίπτώσεις: μία όταν περιγράφεται μία κανονική τροχιά (εξωτερική) (βλ. Σχήμα 1.5c) και μία όταν στο δυναμικό εμφανίζεται κάποιο τοπικό ελάχιστο μεταξύ των δύο πραγματικών ριζών (βλ. Σχήμα 1.5d). Οι τελευταίες αυτές τροχιές δεν μπορούν να περιγραφούν σαν απλές έγκεντρες τροχιές με περίαστρο και άπαστρο, καθώς, αν και εφικτό από τεχνικής άποψης, δεν είναι φυσικό να τους αποδώσει κάποιος ένα συγκε-



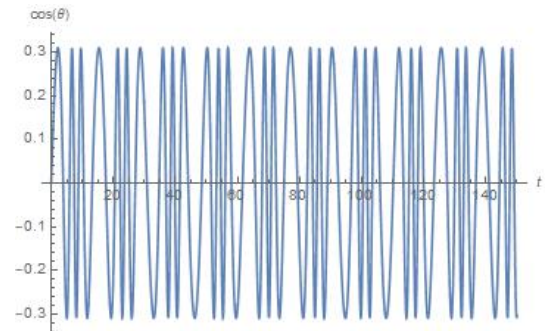
(α')



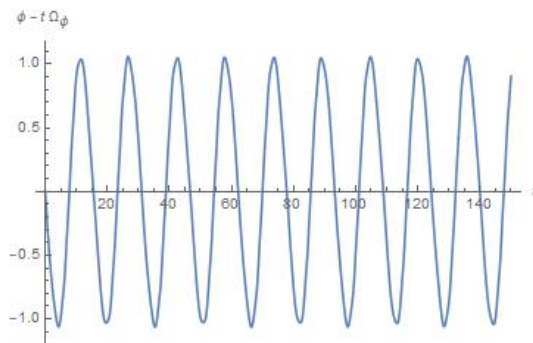
(β')



(γ')

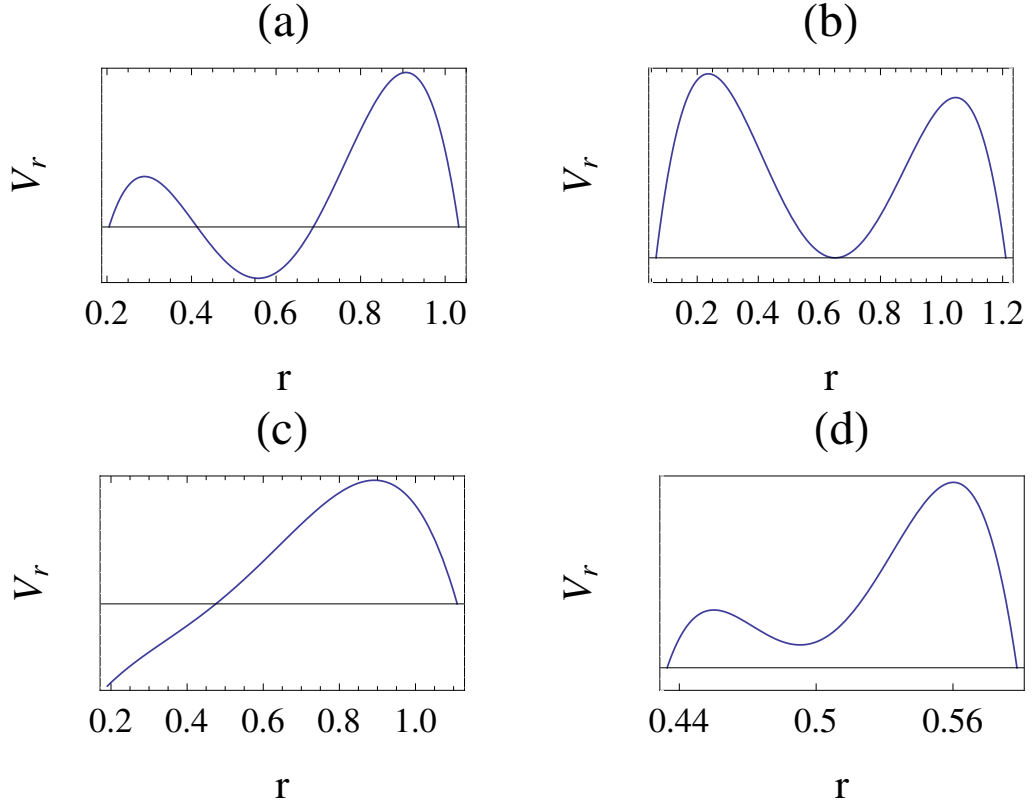


(δ')



(ε')

Σχήμα 1.4: Πάνω αριστερά: Μία γενική τροχιά στον Καρτεσιανό χώρο (x, y, z) , με $e = 0.3$, $p = 1$ και $\theta_{\min} = 2\pi/5$, $a = 0.6M$. Πάνω δεξιά: Η προβολή της τροχιάς στο (ρ, z) πολικό επίπεδο. Η τροχιά περικλείεται μεταξύ δύο ελλείψεων και μιας υπερβολής. Τα υπόλοιπα διαγράμματα δείχνουν την ταλάντωση στην r , θ και ϕ διεύθυνση (σε σχέση με τη μέση αξιμουθιακή περιστροφή), αντίστοιχα.



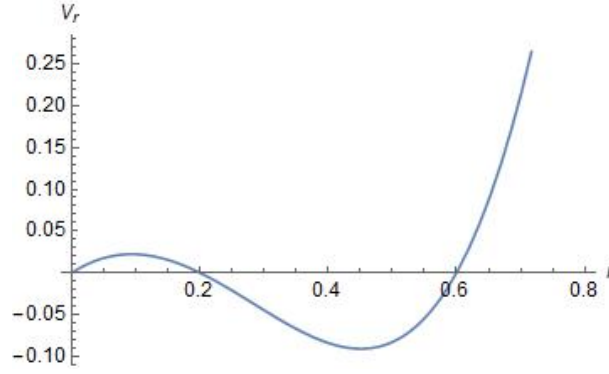
Σχήμα 1.5: Διάφορες μορφές του ακτινικού δυναμικού V_r , που οδηγούν σε διαφορετικά είδη τροχιών. Στο διάγραμμα (a) υπάρχουν δύο περιοχές επιτρεπόμενων τροχιών. Ωστόσο εμείς ενδιαφερόμαστε μόνο για τη εξωτερική περιοχή. Στο διάγραμμα (b) απεικονίζεται μία οριακή περίπτωση, όπου οι δύο ρίζες του πολυωνύμου συμπίπτουν ($r_2 = r_3$). Στην περίπτωση αυτή η τροχιά περνάει άπειρο χρόνο για να φτάσει την ακτίνα r_2 . Πρόκειται για τη διαχωρίζουσα η οποία θα μελετηθεί σε επόμενη ενότητα. Στα διαγράμματα (c) και (d) οι δύο ρίζες του ακτινικού δυναμικού είναι μιγαδικές. Στην πρώτη περίπτωση η τροχιά είναι κανονική, ενώ στην δεύτερη περίπτωση οι δύο περιοχές του σχήματος (a) έχουν συγχωνευτεί σε μία τροχιά. Το τελευταίο είδος τροχιών δεν θα το λάβουμε υπ' όψη στη μελέτη μας.

κρίμενο ορθό ημιπλάτος (semi-latus rectum) και μία συγκεκριμένη εκκεντρότητα. Θα αποφύγουμε τη μελέτη τέτοιων τροχιών.

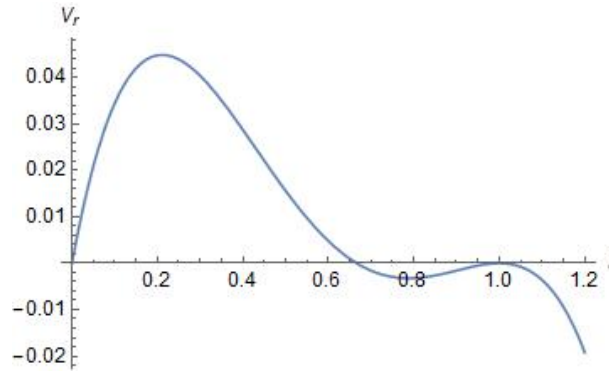
Οι θ ταλαντώσεις γύρω από το ισημερινό επίπεδο ($\theta = \pi/2$) διέπονται από το V_θ δυναμικό. Οι τέσσερις ρίζες του δυναμικού αυτού είναι ένα ζεύγος παραπληρωματικών γωνιών ($\theta_{\min}$ και $\pi - \theta_{\min}$), που περιγράφουν τα σημεία αναστροφής της κίνησης, και δύο μιγαδικές φανταστικές γωνίες. Από το (1.49) φαίνεται ότι $\theta \neq 0$ για $L_z \neq 0$, οπότε το σωματίδιο δεν μπορεί να διασχίσει τον άξονα συμμετρίας σε αυτή την περίπτωση.

1.6.2 Ισημερινές κυκλικές τροχιές

Μια σημαντική κατηγορία τροχιών είναι αυτή των κυκλικών ισημερινών τροχιών. Σε αυτήν την περίπτωση οι τροχιές χαρακτηρίζονται από σταθερή ακτίνα $r_1 = r_2 = r_0$ και σταθερή πολική γωνία $\theta_{\min} = \pi/2$ (το τρίτο ολοκλήρωμα και επομένως και η μικρότερη ρίζα του ακτινικού δυναμικού είναι μηδέν, $Q_E = r_4 = 0$, στην περίπτωση των ισημερινών τροχιών).



Σχήμα 1.6: Το ακτινικό δυναμικό όταν οι σταθερές κίνησης είναι $E = 1.35417$, $L_z = 1.91974$, $Q_E = 0$ (για $a = 0.5M$).



Σχήμα 1.7: Το ακτινικό δυναμικό μιας κυκλικής ισημερινής τροχιάς με $e = 0$, $p = 1$, $\theta_{\min} = \pi/2$ (για $a = 0.5M$).

Οι κυκλικές τροχιές, βλ. Σχήμα 1.7, ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$V_r(r_0) = 0 \quad (1.56)$$

$$\left. \frac{\partial V_r}{\partial r} \right|_{r_0} = 0. \quad (1.57)$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για τις σταθερές κίνησης:

$$E = \frac{Ma^2 - Mr^2}{2r^3} \quad (1.58)$$

$$L_z = \pm \sqrt{M} \frac{r^2 + a^2}{r^{3/2}}, \quad (1.59)$$

ενώ η γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής αυτής τροχιάς θα είναι:

$$\Omega_\phi = \frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{M}{r^3}}. \quad (1.60)$$

Για να είναι ευσταθής μια κυκλική τροχιά πρέπει να ικανοποιείται η σχέση: $\left. \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} \right|_{r_0} \leq 0$. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην ανισότητα $r \geq r_{\text{ISCO}}$, όπου:

$$r_{\text{ISCO}} = \sqrt{3}a \quad (1.61)$$

είναι η ακτίνα της εσώτερης ευσταθούς κυκλικής τροχιάς (ISCO–Innermost Stable Circular Orbit). Αυτή η τροχιά αντιστοιχεί σε ακτινικό δυναμικό με τριπλή ρίζα ($r_3 = r_2 = r_1 = r_0$).

1.6.3 Παραμέτρηση τροχιών

Η παραμέτρηση των φραγμένων τροχιών μπορεί να γίνει είτε με τα σημεία αναστροφής $r_1 = r_{\max}$, $r_2 = r_{\min}$ και $\theta_{\min}$ είτε, όπως και στην περίπτωση της Kerr, μέσω των τροχιακών χαρακτηριστικών:

$$e = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{και} \quad Mp = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (1.62)$$

όπου e είναι η εκκεντρότητα και p είναι το αδιάστατο ορθό ημιπλάτος (semi-latus rectum) (αν και η τροχιά δεν έχει τη μορφή μιας κλειστής έλλειψης). Οι δύο μικρότερες ρίζες r_3, r_4 του ακτινικού δυναμικού, καθώς και τα ολοκληρώματα κίνησης $\{E, L_z, Q_E\}$, μπορούν να γραφούν ως συνάρτηση των γεωμετρικών τροχιακών χαρακτηριστικών $\{e, p, \theta_{\min}\}$ της τροχιάς (βλ. Παράρτημα Β').

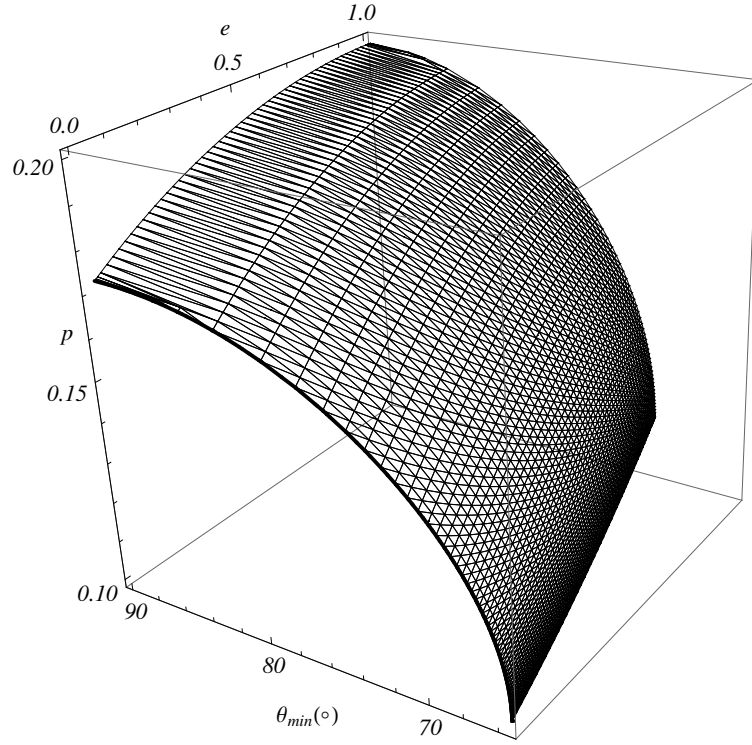
1.7 Διαχωρίζουσα (Separatrix)

Στην περίπτωση που το δυναμικό έχει τέτοια μορφή ώστε να συνυπάρχουν δύο περιοχές κίνησης, μία εσωτερική και μία εξωτερική, (όπως στο Σχήμα 1.5a,b), τότε στον τρισδιάστατο χώρο των τροχιακών παραμέτρων $(p, e, \theta_{\min})$ υπάρχει μια ιδιαίτερη επιφάνεια η οποία διαχωρίζει τα δύο αυτά είδη επιτρεπόμενων τροχιών (εσωτερικές και εξωτερικές φραγμένες τροχιές), βλ. Σχήμα 1.8. Αυτή η επιφάνεια ονομάζεται διαχωρίζουσα (separatrix).

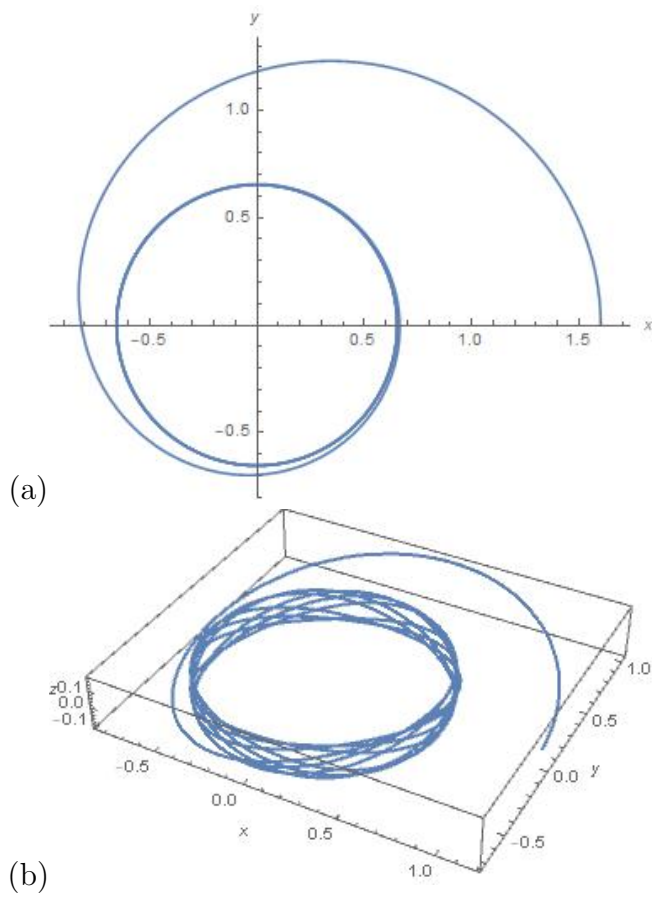
Κάθε σημείο πάνω σε αυτή την επιφάνεια σχετίζεται με ένα ζευγάρι τροχιών: μια εξωτερική ($r_2 \leq r \leq r_1$) και μια εσωτερική ($r_4 \leq r \leq r_3$) φραγμένη τροχιά, οι οποίες έχουν ένα κοινό σημείο αναστροφής $r_2 = r_3$ (στο σημείο αυτό το ακτινικό δυναμικό έχει διπλή ρίζα), βλ. Σχήμα 1.5b). Οι φραγμένες τροχιές της διαχωρίζουσας είναι στην πραγματικότητα οριακά ευσταθείς τροχιές. Σταδιακά αυτές οι τροχιές θα εξελιχθούν σε κυκλικές (ή σφαιρικές αν είναι μη ισημερινές) τροχιές με ακτίνα $r(t \rightarrow \infty) = r_2 = r_3$, βλ. Σχήμα 1.9. Οι τροχιές αυτές χαρακτηρίζονται από τις σταθερές κίνησης που θα έχει μια κυκλική ή σφαιρική τροχιά με ακτίνα r_2 . Οι τροχιές για σημεία κοντά στην διαχωρίζουσα $r_2 \rightarrow r_3$ είναι γνωστές ως τροχιές whirl-zoom (στροβιλιζόμενες και εξακοντιζόμενες τροχιές), βλ. Σχήμα 1.10, δηλαδή, αφού περιελίσσονται πολλές φορές στη θέση περίαστρου r_2 , εξακοντίζονται στο άπαστρο r_1 .

Στις δύο περιοχές που ορίζει η διαχωρίζουσα στον παραμετρικό χώρο, υπάρχουν ζευγάρια που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές τροχιές: ένα σημείο $(p_1, e_1, \theta_{\min})$ πάνω από την διαχωρίζουσα που περιγράφει μία εξωτερική τροχιά και ένα σημείο $(p_2, e_2, \theta_{\min})$ κάτω από την διαχωρίζουσα που περιγράφει μία εσωτερική τροχιά έτσι ώστε $p_1 > p_s > p_2$. Οι δύο αυτές τροχιές περιγράφονται από το ίδιο ακτινικό δυναμικό V_r και τις ίδιες σταθερές κίνησης. Επειδή ενδιαφερόμαστε μόνο για εξωτερικές φραγμένες τροχιές, θα ασχοληθούμε μόνο με τις τροχιές που βρίσκονται πάνω από την διαχωρίζουσα.

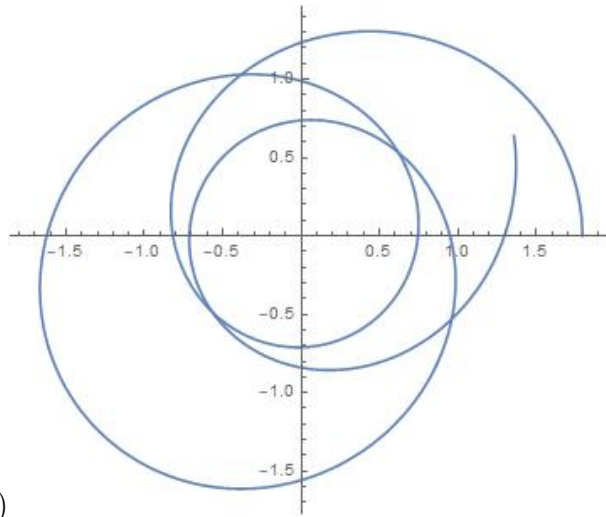
Η διαχωρίζουσα μπορεί εναλλακτικά να περιγραφεί ως εξής: Για ένα ζευγάρι e και $\theta_{\min}$ υπάρχει ένα συγκεκριμένο ορθό ημιπλάτος $p_s(e, \theta_{\min})$ το οποίο φέρνει τους δύο τύπους τροχιών (εσωτερικό και εξωτερικό) σε επαφή με $r_2 = r_3$. Για τις ισημερινές τροχιές



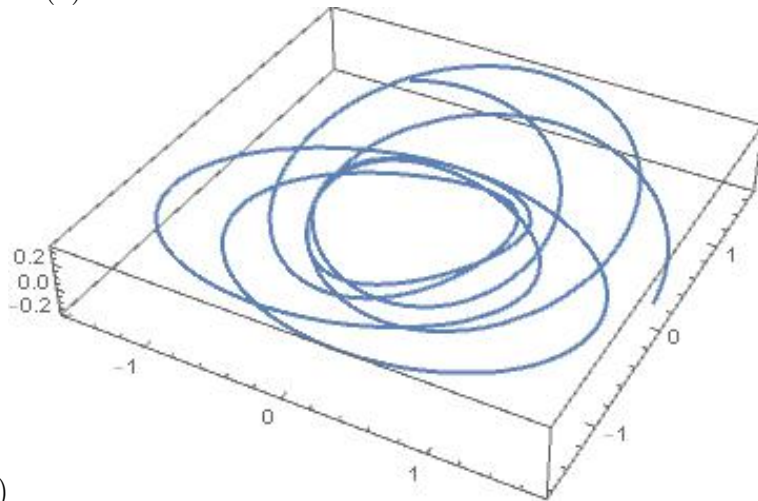
Σχήμα 1.8: Η επιφάνεια δείχνει τις τροχιακές παραμέτρους της διαχωρίζουσας για το πρόβλημα του Euler στον χώρο των παραμέτρων $(e, p, \theta_{\min})$, για $a = 0.5M$. Οι φραγμένες τροχιές που μελετάμε βρίσκονται πάνω από την επιφάνεια τη διαχωρίζουσας. Η λεπτή μαύρη γραμμή (στο μπροστινό μέρος) αντιστοιχεί στις σφαιρικές ($r = \text{σταθερό} = r_1 = r_2$) τροχιές, δηλαδή, τις τροχιές με $e = 0$. Η άνω αριστερή γωνία της επιφάνειας στο σημείο $e = 0$, $\theta_{\min} = \pi/2$ αντιστοιχεί στο ISCO. Αυτό το σχήμα δείχνει καθαρά ότι η διαχωρίζουσα εκτείνεται μέχρι μια ελάχιστη τιμή του $\theta_{\min}$ η οποία είναι συνάρτηση του e (το κάτω σύνορο της επιφάνειας). Είναι εμφανές ότι δεν υπάρχει διαχωρίζουσα για το πρόβλημα του Euler για τροχιές που έχουν μεγάλη κλίση.



Σχήμα 1.9: Πάνω (a): Μία ισημερινή τροχιά πάνω στην διαχωρίζουσα με $e = 0.5$, $p = 0.2\sqrt{15}$ και $a = 0.4$. Κάτω (b): Μία γενική (μη ισημερινή) τροχιά πάνω στη διαχωρίζουσα με $e = 0.35$, $p = 0.7194$ και $\theta_{\min} = 1.38767746$



(a)



(b)

Σχήμα 1.10: Τροχιές whirl-zoom με $a = 0.4$. Πάνω (a): Μία ισημερινή τέτοια τροχιά με $e = 0.5$, $p = 0.87459666924$. Κάτω (b): Μία γενική τέτοια τροχιά με $e = 0.5$, $p = 0.726$ και $\theta_{\min} = 1.3708$

$\theta_{\min} = \pi/2$, μπορεί εύκολα να βρεθεί η αναλυτική έκφραση για το $p_s(e, \theta_{\min} = \pi/2)$. Θέτοντας $Q_E = r_4 = 0$, η ενέργεια E μιας κυκλικής τροχιάς δίνεται από την (1.58) ενώ η στροφορμή L_z από την (1.59) και η γωνιακή ταχύτητα Ω_ϕ από την (1.60). Λύνοντας στη συνέχεια την εξίσωση $r_2 = r_3$ και χρησιμοποιώντας τις (B'.3) και (B'.4) καταλήγουμε στην $p_s(e) = a\sqrt{(1+e)(3-e)}$. Για τις γενικές τροχιές είναι δύσκολο να πάρουμε αναλυτική έκφραση για το p_s ως συνάρτηση του e και του $\theta_{\min}$. Στην περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε μία βοηθητική καινούργια παράμετρο $x = r_4/r_3$, να γράψουμε μία αναλυτική έκφραση για το $p_s(e, x)$ και μετά να σχεδιάσουμε παραμετρικά την $p_s(e, \theta_{\min})$, καθώς το $\theta_{\min}$ μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των e, x . Στο Σχήμα 1.8 έχουμε σχεδιάσει την διαχωρίζουσα για $a = 0.5M$.

Στην συνέχεια μπορούμε να βρούμε τις σταθερές κίνησης και το ορθό ημιπλάτος p_s της τροχιάς, όταν αυτή βρίσκεται πάνω στη διαχωρίζουσα, ως συνάρτηση του λόγου $x = r_4/r_3$ και της εκκεντρότητας e . Θα αποδείξουμε ότι στο πρόβλημα του Euler υπάρχει μία ελάχιστη γωνία ($\theta_{\min} < \pi/2$) όπου μπορεί να υπάρξει διαχωρίζουσα. Πέραν αυτής δεν υπάρχουν δύο διακριτές περιοχές κίνησης (οι δύο ρίζες του ακτινικού δυναμικού γίνονται μιγαδικές).

Το δυναμικό του προβλήματος του Euler που διέπει την ακτινική κίνηση δίνεται, όπως είδαμε παραπάνω, από την έκφραση:

$$V_r(r) = 2Er^4 + 2Mr^3 + (2Ea^2 - Q_E - L_z^2)r^2 + 2Ma^2r - Q_Ea^2, \quad (1.63)$$

δηλαδή, είναι ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού της μορφής:

$$\begin{aligned} V_r(r) &= 2E(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4) \\ &= 2E[r^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)r^3 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)r^2 \\ &\quad - (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)r + r_1r_2r_3r_4] \end{aligned} \quad (1.64)$$

όπου r_1, r_2, r_3, r_4 είναι οι ρίζες του πολωνύμου. Αντίστοιχα το πολικό δυναμικό είναι το:

$$V_\theta(z) = Q_E - \left[-2a^2E + \frac{L_z^2}{1-z} \right] z, \quad (1.65)$$

όπου το z αντιστοιχεί στο $\cos^2 \theta$.

Για $V_\theta(z) = 0$ έχουμε το εξής τριώνυμο:

$$-2a^2Ez^2 - [Q_E + L_z^2 - 2a^2E]z + Q_E = 0. \quad (1.66)$$

Από τις δύο λύσεις του τριωνύμου ενδιαφερόμαστε για την μικρότερη καθώς αυτή σχετίζεται με το $\theta_{\min}$ ($z_- = \cos^2 \theta_{\min}$):

$$z_- = \frac{-(2a^2E - L_z^2 - Q_E) - \sqrt{(2a^2E - L_z^2 - Q_E)^2 + 8a^2EQ_E}}{-4a^2E}. \quad (1.67)$$

Για τροχιές πάνω στη διαχωρίζουσα, ισχύει $r_1 = Mp/(1-e)$ και $r_2 = r_3 = Mp/(1+e)$. Ενώ για το r_4 είναι $0 \leq r_4 \leq r_3$. Όταν $r_4 = 0$ η τροχιά διαγράφεται στο ισημερινό επίπεδο. Μέσω της βοηθητικής παραμέτρου x γράφουμε το r_4 ως $r_4 = xr_3 = xMp/(1+e)$, όπου το x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και 1 (για $x = 0$ έχουμε ισημερινές τροχιές,

ενώ για $x = 1$ έχουμε την πιο κεκλιμένη τροχιά της διαχωρίζουσας με τη δεδομένη εκκεντρότητα). Αντικαθιστώντας όλες τις παραπάνω τιμές για τις ρίζες στην (1.64) και εξισώνοντάς την με την (1.63), καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$2M = -2EMp \frac{(3-e) + x(1-e)}{1-e^2}, \quad (1.68)$$

$$2Ea^2 - Q_E - L_z^2 = 2E \frac{M^2 p^2}{(1+e)^2(1-e)} [(3+e) + x(3-e)], \quad (1.69)$$

$$2Ma^2 = -2E \frac{M^3 p^3}{(1+e)^3(1-e)} [(1+e) + x(3+e)], \quad (1.70)$$

$$-Q_E a^2 = \frac{2EM^4 p^4 x}{(1-e)(1+e)^3}. \quad (1.71)$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων, βρίσκουμε τις σταθερές κίνησης και το ορθό ημιπλάτος μιας τροχιάς επί της διαχωρίζουσας:

$$p_s(e, x) = \frac{a}{M}(1+e) \sqrt{\frac{3-e+x(1-e)}{1+e+x(3+e)}}, \quad (1.72)$$

$$E(e, x) = -\frac{(1-e)M}{a} \sqrt{\frac{1+e+x(3+e)}{(3-e+x(1-e))^3}}, \quad (1.73)$$

$$Q_E(e, x) = 2Ma(1+e)x \sqrt{\frac{3-e+x(1-e)}{(1+e+x(3+e))^3}}, \quad (1.74)$$

$$L_z^2(e, x) = 16Ma \sqrt{\frac{1+e+x(3+e)}{(3-e+x(1-e))^3} \frac{(1+x)^2[1+x+e(1-x)]}{(1+e+x(3+e))^2}}. \quad (1.75)$$

Από την (1.67) και τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην έκφραση για την κλίση της τροχιάς:

$$z_-(e, x) = \frac{3-e+x(1-e)}{2(1-e)(1+e+x(3+e))} [3+e+x(3-e) - \sqrt{(3+e+x(3-e))^2 - 4x(1-e^2)}] \quad (1.76)$$

Το z_- είναι μια αύξουσα μονότονη συνάρτηση ως προς x , όπου παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ ενώ για $x = 0$, $z_-(e, 0) = 0$, η τροχιά είναι ισημερινή.

Η διαχωρίζουσα εκτείνεται από $\theta_{\min} = \pi/2$ (ισημερινές τροχιές) έως μια ελάχιστη τιμή $\theta'_{\min} = \cos^{-1} \sqrt{z_-}$ η οποία εξαρτάται (όχι σθεναρά) από την εκκεντρότητα, e . Συγκεκριμένα $\theta'_{\min} \simeq 65.5^\circ$ για $e = 0$, και αυξάνει μονότονα έως $\theta'_{\min} \simeq 70.5^\circ$ για $e = 1$. Το σχήμα της επιφάνειας της διαχωρίζουσας δεν εξαρτάται από την τιμή του a , ενώ το p_s κλιμακώνεται γραμμικά με το a και παίρνει τη μέγιστη τιμή $p_s = 2a/M$ για $e = 1$ και $x = 0$ το οποίο αντιστοιχεί σε ισημερινές τροχιές $\theta_{\min} = \pi/2$. Για γωνίες μικρότερης της ελάχιστης τιμής $\theta'_{\min}$ δεν υπάρχει διαχωρίζουσα, δηλαδή, δεν υπάρχουν τέσσερις πραγματικές ρίζες για το δυναμικό V_r . Πέραν αυτού του συνόρου εμφανίζεται ένα ζευγάρι

συζυγών μιγαδικών ριζών και η τροχιά μπορεί να πλησιάσει οσοδήποτε κοντά στον άξονα z .

Τώρα θα αναφερθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες στην περιοχή γύρω από την διαχωρίζουσα. Για την περιοχή ακριβώς πάνω (αλλά όχι μακριά) από τη διαχωρίζουσα ($p > p_s$) οι δύο τύποι των τροχιών (εσωτερική και εξωτερική) είναι διαχωρισμένοι ($r_2 > r_3$). Ακριβώς κάτω από την διαχωρίζουσα η σειρά των ριζών έχει αλλάξει $r_2 < r_3$: οπότε δεν μπορεί να γίνει περιγραφή αυτών των τροχιών με βάση τη θεωρήση ότι η σειρά των ριζών είναι $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq r_4$ και οι φραγμένες εξωτερικές τροχιές ταλαντώνονται ακτινικά μεταξύ r_1 και r_2 . Για κάθε τέτοιο σημείο $p, e, \theta_{\min}$, κάτω από την διαχωρίζουσα, υπάρχει ένα σημείο πάνω από την επιφάνεια της διαχωρίζουσας το οποίο περιγράφει την ίδια ακριβώς τροχιά με διαφορετικά p', e' (αλλά με το ίδιο $\theta_{\min}$), έτσι ώστε $r_1 = p/(1-e) = r'_1 = p'/(1-e') \geq r'_2 = p'/(1+e') = r_3 \geq r'_3 = r_2 = p/(1+e) \geq r'_4$, έτσι τα δύο αυτά σημεία ανταποκρίνονται σε μία φραγμένη τροχιά που ταλαντώνεται μεταξύ r'_1 και r'_2 . Μακριά από την διαχωρίζουσα (είτε πάνω είτε κάτω) το ακτινικό δυναμικό χάνει το ένα ζευγάρι πραγματικών ριζών και απομένει μία μόνο επιτρεπόμενη τροχιά. Τέλος σε μία στενή περιοχή του χώρου γύρω από το κάτω πέρασ της διαχωρίζουσας για τις μικρές επιτρεπτές τιμές του $\theta'_{\min}$, υπάρχει ένας ιδιόμορφος τύπος φραγμένων τροχιών με μία μόνο επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης που μοιάζει με συγχώνευση μιας εξωτερικής και μιας εσωτερικής φραγμένης τροχιάς. Το δυναμικό σε αυτήν την περίπτωση εμφανίζει ένα τοπικό ελάχιστο μεταξύ των δύο πραγματικών ριζών.

Το σύνορο της διαχωρίζουσας με $e = 0$ ανταποκρίνεται στις οριακά ευσταθείς "σφαιρικές" τροχιές. Αυτές είναι επίσης οριακά ευσταθείς φραγμένες τροχιές. Οι σφαιρικές αυτές τροχιές συνυπάρχουν μαζί με εσωτερικές τροχιές που αντιστοιχούν στις καταδυόμενες τροχιές της Kerr.

Το όριο της διαχωρίζουσας που αφορά τις ισημερινές τροχιές ($\theta_{\min} = \pi/2$) δίνεται από μία μονότονη αύξουσα συνάρτηση $p_s(e)$, ακριβώς όπως και στην Kerr, αλλά το αντίστοιχο διάγραμμα να είναι καμπυλωμένο διαφορετικά από ότι στην Kerr (για το Euler ισχύει $p''_s(e) < 0$ ενώ για την Kerr $p''_s(e) > 0$). Και στα δύο προβλήματα το "γωνιακό" όριο της διαχωρίζουσας στο $e = 0$ και $\theta_{\min} = \pi/2$, αντιστοιχεί στην ISCO και αντιπροσωπεύει το μικρότερο ορθό ημιπλάτος από όλες τις οριακά ευσταθείς σφαιρικές τροχιές.

Κεφάλαιο 2

Η μελανή οπή Kerr

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται μια σύντομη ανασκόπηση των ιδιοτήτων της μετρικής Kerr και των γεωδαισιακών τροχιών γύρω από μια μελανή οπή Kerr.

2.1 Η μετρική Kerr

Ο χωροχρόνος γύρω από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή Kerr, μάζας M και ιδιοστροφορμής (spin) ανά μονάδα μάζας a , περιγράφεται από μια μετρική με αντίστοιχο στοιχείο μήκους ($ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$) [11]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2,$$

όπου οι συναρτήσεις Δ και Σ ορίζονται ως:

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

(t, r, θ, ϕ) είναι οι καλούμενες Boyer-Lindquist συντεταγμένες. Σε όλες τις σχέσεις για την Kerr έχουμε χρησιμοποιήσει γεωμετρικές μονάδες $G = c = 1$. Το όριο $a = 0$ περιγράφει μια μελανή οπή Schwarzschild. Επίσης για $M = 0$ και $a \neq 0$ ο χωροχρόνος γίνεται επίπεδος με μετρική:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Το χωρικό τμήμα αυτής της μετρικής περιγράφει έναν επίπεδο χώρο σε πεπλατυσμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες με $r = a\xi$ και $\cos \theta = \eta$. Η επιπεδότητα του χωροχρόνου είναι εμφανής στο ασυμπτωτικό όριο $r \rightarrow \infty$, όπου οι σφαιροειδείς συντεταγμένες δεν διαφέρουν ουσιαστικά από τις σφαιρικές.

Οι συντελεστές της μετρικής Kerr είναι ανεξάρτητοι της χρονικής συντεταγμένης t και της αξιμουθιακής γωνίας ϕ . Οπότε η γεωμετρία του χωροχρόνου είναι αντιστοίχως χρονικά στάσιμη (stationary) και αξονικά συμμετρική.

Ο χωροχρόνος που περιγράφεται από τη μετρική Kerr καθορίζεται μονοσήμαντα από τη μάζα M και την ιδιοστροφορμή a της μελανής οπής, ‘no hair theorem’ [12] (οι μελανές οπές αστροφυσικού ενδιαφέροντος θεωρούνται ηλεκτρικά ουδέτερες οπότε το φορτίο τους θεωρείται μηδενικό).

Ο ορίζοντας γεγονότων (event horizon), η επιφάνεια, δηλαδή, από την οποία κανένα σήμα δεν μπορεί να διαφύγει από το εσωτερικό της μελανής οπής προς έναν εξωτερικό παρατηρητή, ορίζεται από τον απειρισμό της ακτινικής συνιστώσας της μετρικής g_{rr} και είναι η μεγαλύτερη ρίζα r_+ της εξίσωσης $\Delta = 0$:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}.$$

Για να είναι πραγματική η ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων r_+ , πρέπει η ιδιοστροφορμή (ανά μονάδα μάζας) a της μελανής οπής να περιορίζεται στο διάστημα $a \in [0, M]$.

Παράλληλα, ο μηδενισμός της χρονικής συνιστώσας της μετρικής ($g_{tt} = 0 \Rightarrow \Sigma - 2Mr = 0$) ορίζει την ακτίνα του λεγόμενου στατικού ορίου (static limit):

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

δηλαδή την ακτίνα μέσα από την οποία κανένα σωματίδιο δεν μπορεί να μείνει σε ηρεμία. Το στατικό όριο και ο ορίζοντας γεγονότων είναι δύο ξεχωριστές επιφάνειες με $r_+ < r_0$, ενώ στους πόλους $\theta = 0, \pi$ οι δύο αυτές επιφάνειες εφάπτονται. Στην περίπτωση $a = 0$ οι δύο επιφάνειες συμπίπτουν. Η περιοχή του χωροχρόνου που εκτείνεται μεταξύ του ορίζοντα γεγονότων και του στατικού ορίου ονομάζεται εργόσφαιρα. Μέσα στην εργόσφαιρα ένα σωματίδιο παρασύρεται στην ϕ διεύθυνση σύμφωνα με τη διεύθυνση περιστροφής της μελανής οπής. Είναι δυνατό να αντλήσουμε ενέργεια από μια μελανή οπή μέσω της εργόσφαιρας της, σύμφωνα με τον μηχανισμό Penrose [13, 14]. Αυτό μπορεί να συμβεί γιατί εντός της εργόσφαιρας επιτρέπονται γεωδαισιακές τροχιές με αρνητική ενέργεια. Ένα σωματίδιο μάζας μ κινούμενο σε κυκλική ισημερινή τροχιά με τετραταχύτητα u_α έχει ενέργεια $E = \mu(g_{tt}u^t + g_{t\phi}u^\phi)$. Εντός της εργόσφαιρας η χρονική συνιστώσα g_{tt} έχει αρνητικό πρόσημο ενώ $g_{t\phi} > 0$. Με κατάλληλη επιλογή τετραταχύτητας μπορεί ένα σωματίδιο να αποκτήσει αρνητική ενέργεια. Η απώλεια ενέργειας από μια μελανή οπή Kerr με τον μηχανισμό Penrose, έχει ως συνέπεια την μείωση της στροφορμής της, απ’ όπου και αντλείται η ενέργεια.

Εντός του ορίζοντα γεγονότων υπάρχει μια ιδιάζουσα καμπύλη, πάνω στην οποία η καμπυλότητα του χωροχρόνου γίνεται άπειρη. Πρόκειται για τον δακτύλιο με $\Sigma = 0$:

$$r = 0 \quad \text{και} \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Η καμπύλη αυτή, στο πρόβλημα του Euler, περιγράφει τον εστιακό δακτύλιο των πεπλατυσμένων σφαιροειδών συντεταγμένων.

Ένα σημαντικό φαινόμενο της μετρικής Kerr, το οποίο δεν έχει ανάλογο στο Νευτώνειο βαρυτικό πεδίο του Euler, είναι αυτό της παράσυρσης των συστημάτων αναφοράς (frame dragging). Όλα τα τοπικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς στο βαρυτικό πεδίο παρασύρονται σε περιστροφή σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άπειρο. Ο βαθμός της παράσυρσης μειώνεται με την απόσταση από την κεντρική μάζα. Γενικά, εντός ενός ισχυρού στάσιμου βαρυτικού πεδίου, όλα τα τοπικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα:

$$\Omega_{\min} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} - \sqrt{\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} < \Omega < -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} + \sqrt{\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} = \Omega_{\max}.$$

Τα $\Omega_{\min}$ και $\Omega_{\max}$ προκύπτουν λύνοντας την:

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}(dtd\phi + d\phi dt) + g_{\phi\phi}d\phi^2$$

για την εύρεση της γωνιακής ταχύτητας ενός φωτονίου που κινείται στην ϕ διεύθυνση σε σταθερή ακτίνα r στο ισημερινό επίπεδο. Το $\Omega_{\min}$ αυξάνεται καθώς μειώνεται η ακτίνα, δηλαδή, η παράσυρση γίνεται ισχυρότερη. Στο στατικό όριο r_0 ισχύει:

$$\Omega_{\min} = 0, \quad \Omega_{\max} = \frac{Ma}{2M^2 + a^2},$$

οπότε όλοι οι τοπικοί αδρανειακοί παρατηρητές περιστρέφονται με θετική γωνιακή ταχύτητα. Η παράσυρση συνεχίζεται μέχρι τον ορίζοντα r_+ με την γωνιακή ταχύτητα της παράσυρσης στον ορίζοντα:

$$\Omega_+ = \frac{aM}{r_+^2 + a^2M^2},$$

να θεωρείται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της μελανής οπής.

2.2 Φραγμένες τροχιές στην Kerr

2.2.1 Οι εξισώσεις κίνησης

Σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, ένα ελεύθερο δοκιμαστικό σωματίδιο με μάζα ηρεμίας μ , χωρίς ηλεκτρικό φορτίο, που κινείται στο βαρυτικό πεδίο μιας μελανής οπής Kerr και υπόκειται μονάχα στην βαρυτική δύναμή της, ακολουθεί μια γεωδαισιακή καμπύλη που δίνεται από την γεωμετρία του χωροχρόνου που δημιουργεί η περιστρεφόμενη μελανή οπή Kerr.

Η μάζα ηρεμίας του δοκιμαστικού σωματιδίου θεωρείται πολύ μικρή (αλλά μη μηδενική) έτσι ώστε να μην αλλοιώνεται η δομή του χωροχρόνου. Η γεωδαισιακή ενός τέτοιου σωματιδίου στον χωροχρόνο Kerr δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{D^2x^a}{d\tau^2} = \frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^a \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (2.1)$$

όπου τ είναι ο ιδιοχρόνος, $\frac{D}{d\tau}$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος ενώ οι παράμετροι συνοχής (affine connections) $\Gamma_{\beta\gamma}^a$ δίνονται από την σχέση:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^a = \frac{1}{2}g^{a\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right) \quad (2.2)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ είναι η μετρική της Kerr, με τους σχετικιστικούς δείκτες μ, ν να παίρνουν τιμές 0,1,2,3, ενώ χρησιμοποιείται η αθροιστική σύμβαση του Einstein στους επαναλαμβανόμενους δείκτες.

Η εξίσωση των γεωδαισιακών προκύπτει από την εξίσωση Euler-Lagrange, με την Λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου στο χωροχρόνο μιας μελανής οπής Kerr να δίνεται από την σχέση:

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad (2.3)$$

όπου $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

Η γεωδαισιακή εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις Hamilton:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad (2.4)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad (2.5)$$

όπου H η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = -\frac{1}{2}\mu^2 \quad (2.6)$$

ενώ οι συζυγείς ορμές ορίζονται μέσω της Λαγκρανζιανής:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \quad (2.7)$$

Ο χαμιλτονιανός φορμαλισμός έχει το πλεονέκτημα ότι οδηγεί άμεσα στην εύρεση δύο σταθερών κίνησης. Συγκεκριμένα, οι συνιστώσες της μετρικής $g_{\mu\nu}$ όπως και η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητες του χρόνου t και της γωνίας ϕ . Οπότε οι συντεταγμένες αυτές είναι κυκλικές και οι συζυγείς ορμές τους p_t και p_ϕ , αντίστοιχα, είναι σταθερές της κίνησης. Οι ορμές αυτές αντιστοιχούν στην ενέργεια και στη z συνιστώσα της γωνιακής στροφορμής, αντίστοιχα.

Παράλληλα, η μάζα ηρεμίας του δοκιμαστικού σωματιδίου διατηρείται:

$$\mu = (-g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^{1/2} \quad (2.8)$$

οπότε από την (2.6) η Χαμιλτονιανή αποτελεί μία τρίτη σταθερά της κίνησης. Όντας, όμως, τετραδιάστατος ο χωροχρόνος, απαιτείται ένα ακόμη ολοκλήρωμα της κίνησης προκειμένου να είναι ολοκληρώσιμο το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφουν τις γεωδαισιακές τροχιές.

Ένας τρίτος τρόπος εύρεσης των εξισώσεων κίνησης προκύπτει λύνοντας την Hamilton-Jacobi εξίσωση. Με αυτή την μέθοδο ο Carter ανακάλυψε μια τέταρτη σταθερά Q [15], η ύπαρξη της οποίας δεν είναι προφανής από τις συμμετρίες της μετρικής της Kerr.

Η εξίσωση Hamilton-Jacobi, για την κίνηση ενός δοκιμαστικού σωματιδίου στην Kerr μετρική, παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0. \quad (2.9)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί με τον διαχωρισμό των μεταβλητών, και η λύση αυτής είναι η δράση:

$$S = -H\tau - Et + L_z\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (2.10)$$

με

$$S_r(r) = \int^r dr \frac{\sqrt{V_r}}{\Delta}, \quad (2.11)$$

$$S_\theta(\theta) = \int^\theta d\theta \sqrt{V_\theta}. \quad (2.12)$$

Συνολικά, λοιπόν, υπάρχουν τέσσερις σταθερές κίνησης, η μάζα ηρεμίας μ του σωματιδίου ή η Χαμιλτονιανή, η ενέργεια E , η συνιστώσα της γωνιακής στροφορμής L_z κατά τον άξονα περιστροφής της μελανής οπής, και η σταθερά Carter Q :

$$E = -p_t, \quad (2.13)$$

$$L_z = p_\phi, \quad (2.14)$$

$$Q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2(1 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (2.15)$$

$$= \frac{[E(r^2 + a^2) - aL_z]^2}{\Delta} - (L_z - aE)^2 - r^2 - \Delta p_r^2. \quad (2.16)$$

Η πρώτη σχέση για το Q περιέχει μόνο τις μεταβλητές θ, p_θ ενώ η δεύτερη τις r, p_r , ως αποτέλεσμα του διαχωρισμού των μεταβλητών.

Όσον αφορά στο φυσικό νόημα της νέας σταθεράς Q , στην περίπτωση που $a = 0$, το $Q + p_\phi^2$ δεν είναι άλλο από το τετράγωνο της ολικής γωνιακής στροφορμής, L^2 , οπότε η Q σε αυτή την περίπτωση μετράει το τετράγωνο της συνιστώσας της στροφορμής στο επίπεδο $x - y$.

Οι τέσσερις σταθερές κίνησης καθορίζουν πλήρως την τροχιά ενός σωματιδίου στον τετραδιάστατο χώρο. Οι τετραορμές του σωματιδίου μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των σταθερών κίνησης. Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι:

$$\Sigma \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{V_r(r)} \quad (2.17)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{V_\theta(\theta)} \quad (2.18)$$

$$\Sigma \frac{d\phi}{d\tau} = - \left(aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{aT}{\Delta} \quad (2.19)$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\tau} = -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + (r^2 + a^2) \frac{T}{\Delta} \quad (2.20)$$

με

$$T = E(r^2 + a^2) - L_z a, \quad (2.21)$$

$$V_r(r) = T^2 - \Delta[r^2 + (L_z - aE)^2 + Q], \quad (2.22)$$

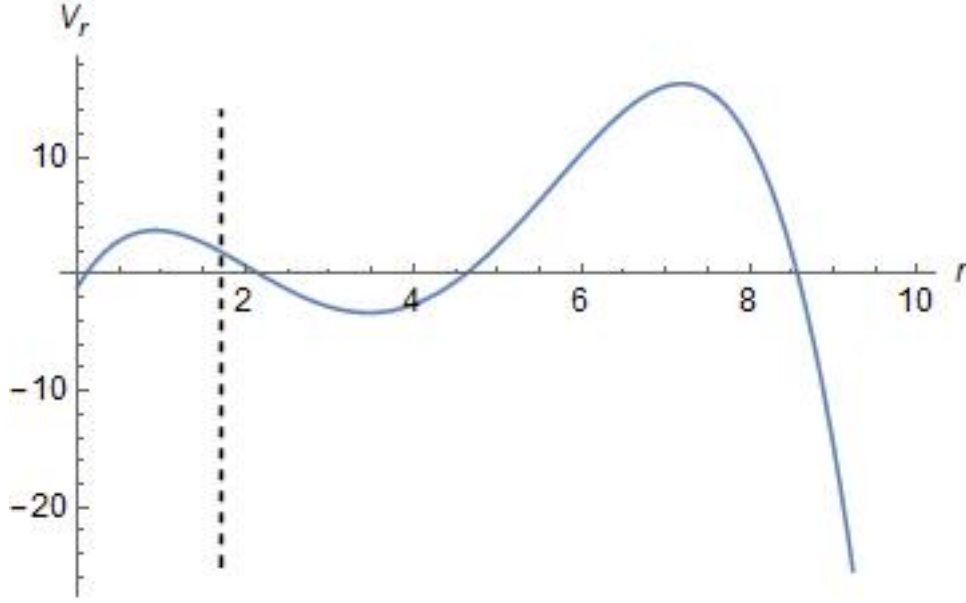
$$V_\theta(\theta) = Q - \cos^2 \theta \left[a^2(1 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (2.23)$$

Η πραγματική τιμή της μάζας ηρεμίας μ δεν επηρεάζει την τροχιά του σωματιδίου, οπότε μπορούμε να θέσουμε $\mu = 1$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το να κανονικοποιήσουμε τις σταθερές ως ακολούθως: E/μ , L_z/μ και Q/μ^2 . Το ακτινικό δυναμικό V_r εξαρτάται μόνο από το r και το πολικό δυναμικό V_θ εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ . Τα δυναμικά αυτά διέπουν την κίνηση στην r και θ διεύθυνση, αντίστοιχα.

2.2.2 Ιδιότητες των δυναμικών

Μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τις γεωδαισιακές μελετώντας τα δυναμικά V_r και V_θ που διέπουν την r και θ κίνηση, αντίστοιχα. Αναλύοντας το V_r έχουμε:

$$V_r(r) = (E^2 - 1)r^4 + 2Mr^3 + 2[a^2(E^2 - 1) - L_z^2 - Q]r^2 + 2M[Q + (L_z - aE)^2]r - a^2Q. \quad (2.24)$$



Σχήμα 2.1: Το ακτινικό δυναμικό της Kerr για $E < 1$. Η μαύρη διακεκομμένη γραμμή είναι ο ορίζοντας γεγονότων, r_+ . Φαίνεται ότι μόνο μία περιοχή κίνησης επιτρέπεται. Η δεύτερη επιτρεπόμενη είναι μερικώς καλυμμένη από τον ορίζοντα, οπότε η αντίστοιχη τροχιά θα είναι μια καταδυόμενη τροχιά.

Από τις Εξισώσεις (2.17, 2.18) προκύπτει ότι οι κινήσεις θα περιορίζονται στις περιοχές όπου $V_r(r) \geq 0$ και $V_\theta(\theta) \geq 0$, ώστε οι αντίστοιχες ταχύτητες να είναι πραγματικές.

Από τον συντελεστή του r^4 στο ακτινικό δυναμικό V_r είναι φανερό ότι καμιά γεωδαισιακή που ικανοποιεί την σχέση $E^2 < 1$ δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο. Σε αυτήν την περίπτωση η κίνηση είναι φραγμένη. Το V_r είναι τετάρτου βαθμού και ως αποτέλεσμα μπορεί να έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες $r_4 \leq r_3 \leq r_2 \leq r_1$, και δύο επιτρεπόμενες περιοχές όπου η κίνηση είναι φραγμένη ($[r_4, r_3]$ και $[r_2, r_1]$). Ωστόσο ο Wilkins [16] απέδειξε ότι η μικρότερη ρίζα βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του ορίζοντα, $r_4 < r_+$, βλ. Σχήμα 2.1. Με άλλα λόγια, μόνο μία περιοχή φραγμένων τροχιών $r_2 \leq r \leq r_1$ μπορεί να υπάρξει, ενώ για $r < r_3$ οι τροχιές είναι καταδυόμενες (plunging orbits), δηλαδή ένα σωματίδιο που θα βρεθεί σε αυτή την περιοχή θα κινηθεί αναγκαστικά προς τον ορίζοντα γεγονότων, τον οποίο και θα διασχίσει άπαξ. Η επιφάνεια που φέρνει σε επαφή τις φραγμένες με τις καταδυόμενες τροχιές ονομάζεται διαχωρίζουσα (separatrix) και ορίζεται από την σχέση $r_2 = r_3$. Για $E^2 \geq 1$ στο [16] αποδεικνύεται ότι οι τροχιές είναι μη φραγμένες και διαφεύγουν στο άπειρο ή βυθίζονται κάτω από τον ορίζοντα της μελανής οπής.

Η συνθήκη $E^2 < 1$, θέτει περιορισμούς και στο τρίτο ολοκλήρωμα της κίνησης Q . Κατ' αρχήν, από το γεγονός ότι $V_\theta \geq 0$, το Q πρέπει να είναι μη αρνητικό. Έτσι φραγμένες τροχιές υπάρχουν μόνο όταν $E^2 < 1$ και $Q \geq 0$. Η σταθερά Carter γίνεται μηδέν ($Q = 0$) μόνο όταν η κίνηση εξελίσσεται πάνω στο ισημερινό επίπεδο $\theta = \pi/2$. Μη ισημερινές φραγμένες τροχιές με $\theta =$ σταθερό δεν μπορούν να υπάρξουν στην Kerr. Τέλος ένα σωματίδιο με $L_z \neq 0$ δεν μπορεί να φτάσει τον άξονα περιστροφής, $\theta = 0$, ή π . Κάτι τέτοιο είναι εφικτό μόνο αν $L_z = 0$.

Οι φραγμένες τροχιές στην Kerr ταλαντώνονται μεταξύ δύο δοσμένων ακτίνων $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ και πολικών γωνιών $\theta_{\min} \leq \theta \leq \pi - \theta_{\min}$, ενώ ταυτόχρονα περιστρέφονται γύρω από

τον άξονα συμμετρίας, βλ. Σχήμα 1.4. Οι ακτίνες $r_{\min}$ (περίαστρο) και $r_{\max}$ (άπαστρο) και οι γωνίες $\theta_{\min}$ και $\pi - \theta_{\min}$ είναι τα σημεία αναστροφής των αντίστοιχων δυναμικών. Μπορούμε να ορίσουμε θεμελειώδεις συχνότητες Ω_r , Ω_θ και Ω_ϕ που σχετίζονται με την ακτινική, πολική και αξιμουθιακή ταλάντωση, αντίστοιχα (βλ Κεφάλαιο 3.3.4).

2.2.3 Ισημερινές κυκλικές τροχιές

Μια σημαντική κλάση τροχιών είναι οι κυκλικές ισημερινές ($Q = 0$) τροχιές οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις [17]:

$$\begin{aligned} V_r(r_0) &= 0, \\ \left. \frac{\partial V_r}{\partial r} \right|_{r_0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} \right|_{r_0} &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Λύνοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις, η ενέργεια και η στροφορμή μιας κυκλικής ισημερινής τροχιάς ακτίνας r δίνονται από τις σχέσεις:

$$E = \frac{r^{3/2} - 2Mr^{1/2} \pm aM^{1/2}}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2})^{1/2}}, \quad (2.26)$$

$$L_z = \frac{\pm M^{1/2}(r^2 \mp 2aM^{1/2}r^{1/2} + a^2)}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2})^{1/2}}. \quad (2.27)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις αλλά και ακολούθως στις σχέσεις για την Kerr το άνω πρόσημο είναι για τις ορθόδρομες τροχιές (prograde- $L_z > 0$) και το κάτω για τις ανάδρομες (retrograde- $L_z < 0$). Παράλληλα η γωνιακή ταχύτητα που μετρά ένας μακρινός παρατηρητής είναι:

$$\Omega_\phi = \frac{d\phi}{dt} = \pm \frac{M}{r^{3/2} \pm aM^{1/2}} \quad (2.28)$$

Για να είναι ευσταθής μια κυκλική τροχιά πρέπει να ικανοποιείται και η τρίτη σχέση της (2.25). Έτσι καταλήγουμε ότι πρέπει να ισχύει και $r \geq r_{\text{ISCO}}$, όπου r_{ISCO} είναι η ακτίνα της οριακά ευσταθούς τροχιάς ($V_r'' = 0$):

$$r_{\text{ISCO}}/M = 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \quad (2.29)$$

με τις ποσότητες Z_1, Z_2 να δίνονται από τις σχέσεις:

$$Z_1 = 1 + (1 - (a/M)^2)^{1/3}[(1 + (a/M))^{1/3} + (1 - (a/M))^{1/3}], \quad (2.30)$$

$$Z_2 = (3(a/M)^2 + Z_1^2)^{1/2}. \quad (2.31)$$

Κεφάλαιο 3

Σύγκριση του πεπλατυσμένου Euler με την Kerr

Το βαρυτικό δυναμικό του πεπλατυσμένου προβλήματος Euler περιγράφει ένα συντηρητικό, αξονικά και κατοπτρικά συμμετρικό πεδίο το οποίο έχει επιπλέον μια σταθερά κίνησης η οποία είναι διγραμμική ως προς τις ορμές. Η ύπαρξη αυτής της επιπλέον σταθεράς (εκτός από την ενέργεια και την γωνιακή στροφορμή κατά τον άξονα συμμετρίας) καθιστά το πρόβλημα ολοκληρώσιμο. Η μετρική Kerr περιγράφει επίσης ένα πεπλατυσμένο ολοκληρώσιμο πεδίο, με τρεις σταθερές κίνησης, παρόμοιες με αυτές του Euler. Επίσης και τα δύο προβλήματα μπορούν να περιγραφούν από δύο φυσικές παραμέτρους: την ολική μάζα και την ιδιοστροφορμή (για την Kerr) ή την φανταστική απόσταση μεταξύ των δύο μαζών (για το Euler).

Ο Keres [18] το 1967 και ο Israel [19] το 1970, οδηγήθηκαν στο πεπλατυσμένο Euler πεδίο (χωρίς να το κατονομάσουν) ως το νευτώνειο ανάλογο της μετρικής Kerr, καθώς η πηγή αυτού του πεδίου έχει παρόμοια κατανομή μάζας. Εστίασαν την μελέτη τους στο να βρουν ομοιότητες σχετιζόμενες με τον ιδιάζοντα δακτύλιο της Kerr και την αποφυγή αυτού από τις γεωδαισιακές τροχιές. Δεν μελέτησαν, όμως, τυχόν ομοιότητες μεταξύ των δύο βαρυτικών πεδίων όσον αφορά στα τροχιακά χαρακτηριστικά στα δύο αυτά πεδία.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποιες επιπλέον ομοιότητες, κάποιες ήδη γνωστές, μεταξύ των δύο αυτών πεδίων. Θα εστιάσουμε σε αστροφυσικού ενδιαφέροντος θέματα, όπως οι γεωδαισιακές τροχιές στο εξωτερικό μιας μελανής οπής Kerr και τις ιδιότητές τους.

3.1 Θεμελιώδεις διαφορές

Πρέπει να τονίσουμε ότι υπάρχουν κάποιες θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ των δύο πεδίων. Με μια πρώτη ματιά υπάρχει βασική διαστατική διαφορά στην παράμετρο a , η οποία εμφανίζεται στα δύο πεδία. Στην Kerr μετρική η παράμετρος a είναι η ιδιοστροφορμή ανά μονάδα μάζας της μελανής οπής Kerr, έτσι έχει διαστάσεις μήκους επί ταχύτητα. Στο πεπλατυσμένο πρόβλημα του Euler η a παράμετρος είναι απλά μία απόσταση και έχει διαστάσεις μήκους. Παρόλο που στις γεωμετρικές μονάδες και οι δύο a παράμετροι έχουν διαστάσεις μήκους, τα δύο a έχουν τελείως διαφορετική φυσική προέλευση. Παρόλα αυτά, αυτή η παράμετρος παίζει τον ίδιο ρόλο ως ρυθμιστικός παράγοντας στα δύο πεδία και

στις αντιστοιχίες τους.

Ωστόσο υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά στην χρήση του a στα δύο προβλήματα: στο πρόβλημα του Euler το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, ενώ στο Kerr το a δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή M . Ωστόσο ο περιορισμός στο a στην Kerr οφείλεται στην ύπαρξη του ορίζοντα της Kerr, ο οποίος, άλλωστε, δεν έχει νευτώνειο ανάλογο. Θα περιορίσουμε την μελέτη μας και στο Euler πεδίο στο διάστημα $a \in (0, M]$.

Μία άλλη τεχνική διαφορά ανάμεσα στα δύο προβλήματα, είναι η ασυμμετρία της Kerr μετρικής στον μετασχηματισμό $\phi \rightarrow -\phi$ (πρέπει να συνδυαστεί με τον μετασχηματισμό $t \rightarrow -t$ για να παράγει ισομετρία, αλλά τότε η ιδοστροφορμή a της Kerr θα αλλάξει πρόσημο). Αντίθετα το πρόβλημα του Euler (όπως κάθε άλλο αξονικά συμμετρικό νευτώνειο δυναμικό) είναι απόλυτα συμμετρικό στον μετασχηματισμό $\phi \rightarrow -\phi$. Ως αποτέλεσμα η παράσυρση των συστημάτων αναφοράς (frame dragging – όλα τα τοπικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς μέσα στο βαρυτικό πεδίο παρασύρονται σε περιστροφή σε σχέση με ένα μακρινό αδρανειακό σύστημα) που εμφανίζεται στα στάσιμα και αξονικά συμμετρικά σχετικιστικά πεδία, όπως η Kerr, δεν έχει ανάλογο στη νευτώνεια βαρύτητα. Οπότε πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν συγκρίνουμε ποσοτικά χαρακτηριστικά φαινομένων, τα οποία είναι ευαίσθητα στην περιστροφή της Kerr, με τα αντίστοιχα φαινόμενα στο πεδίο του Euler.

3.2 Γνωστές Αναλογίες

3.2.1 Πολυπολικές Ροπές

Σύμφωνα με το "no hair" θεώρημα (‘περί απουσίας τριχών’), ο χωροχρόνος γύρω από μια μελανή οπή Kerr μπορεί να καθοριστεί μονοσήμαντα από την μάζα της, M , και την ιδιοστροφορμή της ανά μονάδα μάζας, a . Ως αποτέλεσμα μπορούμε να περιγράψουμε τον εξωτερικό χωροχρόνο Kerr από τα πολύπολα μάζας M_l και τα πολύπολα ρεύματος S_l :

$$M_l + iS_l = M(ia)^l, \quad (3.1)$$

όπου $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, με το μονόπολο $M_0 = M$ να είναι η μάζα και $S_1 = ma$ να είναι η ιδιοστροφορμή. Τα πολύπολα μάζας ανώτερης τάξης σχετίζονται με το τετράπολο $M_2 = -ma^2$ και το μονόπολο μέσω της σχέσης: $M_{2l} = M(M_2/M)^l$.

Όπως είναι γνωστό η μελανή οπή Kerr, εκτός από την ενέργεια και την στροφορμή, έχει μία επιπλέον σταθερά, τη σταθερά Carter, η οποία είναι ένας συνδυασμός του τετραγώνου της ολικής γωνιακής στροφορμής (αν και η ίδια δεν διατηρείται), συντελεστών της ορμής (στο τετράγωνο) και κάποιων άλλων μεταβλητών που εξαρτώνται από το a και την πολική γωνία θ . Η ύπαρξη αυτής της σταθεράς σχετίζεται με τη σχέση μεταξύ των ροπών που χαρακτηρίζουν την απόκλιση του συγκεκριμένου πεδίου από την σφαιρική συμμετρία (3.1).

Πριν από μερικά χρόνια ο Will [20] απέδειξε ότι το νευτώνειο αξονικά και κατοπτρικά συμμετρικό βαρυτικό πεδίο που χαρακτηρίζεται από μία τρίτη σταθερά κίνησης ανάλογη της σταθεράς του Carter στον Kerr χωροχρόνο (δηλαδή μιας σταθεράς η οποία να είναι διγραμμική ως προς τις ορμές), και οδηγεί σε ένα ολοκληρώσιμο νευτώνειο δυναμικό, πρέπει να έχει ένα πολυπολικό ανάπτυγμα που να ικανοποιεί την ίδια σχέση με τις πολυπολικές

ροπές μάζας M_{2l} της Kerr μετρικής, δηλ.

$$M_{2l} = M \left(\frac{M_2}{M} \right)^l, \quad (3.2)$$

όπου οι περιττές τάξης ροπές μάζας M_{2l+1} μηδενίζονται (όπως αναμένεται από την κατοπτρική συμμετρία του βαρυτικού πεδίου). Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η πολυπολική αυτή δομή δεν καθορίζει το πρόσημο της τετραπολικής ροπής M_2 , το οποίο είναι σαφώς αρνητικό στη μετρική Kerr. Το αποτέλεσμα, λοιπόν, του Will στην πραγματικότητα οδηγεί και στα δύο είδη πεδίων του Euler: και το επίμηκες (που δεν σχετίζεται με την Kerr καθότι έχει θετική τετραπολική ροπή) και το πεπλατυσμένο (που είναι πραγματικά ανάλογο με την Kerr αφού έχει $M_2 < 0$). Η περίπτωση $M_2 = 0$ είναι το μονοπολικό, σφαιρικά συμμετρικό πεδίο του Κέπλερ, για το οποίο το αντίστοιχο τρίτο ολοκλήρωμα της κίνησης είναι απλά το τετράγωνο της ολικής στροφορμής.

Θα πρέπει βέβαια να επισημάνουμε ότι το νευτώνειο στάσιμο και αξονικά συμμετρικό δυναμικό δεν αναπαράγει φαινόμενα όπως η παράσυρση των συστημάτων αναφοράς (dragging of frames) του αντίστοιχου σχετικιστικού πεδίου, και έτσι δεν έχει πολυπολικές ροπές ρεύματος, S_l , όπως το Kerr. Αυτή είναι μια από τις βασικές διαφορές μεταξύ των δύο πεδίων, και αυτό καθιστά την σύγκριση μεταξύ των αντίστοιχων τροχιών στα δύο πεδία πιο δύσκολη.

Πρόσφατα ο Μαρκάκης [21] προσπάθησε να γενικεύσει το αποτέλεσμα του Will, ψάχνοντας για νευτώνεια βαρυτικά πεδία που έχουν ολοκληρώματα κίνησης ανώτερης τάξης (συγκεκριμένα τέταρτης τάξης ως προς τις ορμές). Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε, όμως, είναι ότι δεν υπάρχει τέτοιο νευτώνειο δυναμικό.

3.2.2 Διαχωρισιμότητα της κυματικής εξίσωσης

Όπως έχει αποδειχθεί στο [22] το βαρυτικό πεδίο του Euler είναι το μόνο στάσιμο, αξονικά και κατοπτρικά συμμετρικό νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό από μια απομονωμένη πηγή που έχει το χαρακτηριστικό να διαχωρίζει την Hamilton-Jacobi εξίσωση, η οποία διέπει την κίνηση των σωματιδίων, αλλά επίσης να διαχωρίζει και την αντίστοιχη κυματική εξίσωση που αφορά σε βαθμωτά πεδία. Την ίδια ακριβώς συμπεριφορά έχει και η Kerr η οποία έχει της κατάλληλες συμμετρίες ώστε να διαχωρίζει τόσο την Hamilton-Jacobi εξίσωση για την γεωδαισιακή κίνηση των δοκιμαστικών σωματιδίων όσο και την Teukolsky [23] εξίσωση για την κυματική δυναμική. Η νευτώνεια κυματική εξίσωση δίνεται από τη σχέση:

$$\square \Psi = -\kappa V \Psi, \quad (3.3)$$

όπου Ψ είναι ένα βαθμωτό πεδίο μηδενικής μάζας το οποίο θεωρείται ότι είναι συζευγμένο με το βαρυτικό δυναμικό V το οποίο, με τη σειρά του, ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\nabla^2 V = 0$ ενώ το κ είναι μια σταθερά με διαστάσεις συχνότητας στο τετράγωνο η οποία θα πρέπει να προσδιοριστεί. Δεδομένου ότι το δυναμικό είναι αυτό του Euler προβλήματος (1.12), ή του αντίστοιχου επιμήκους (1.5), η εξίσωση (3.3) διαχωρίζεται στις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Πιο συγκεκριμένα η κυματική λύση του πεπλατυσμένου Euler προβλήματος ($\Psi = R(\xi)S(\eta)e^{im\phi}$) ικανοποιεί τις εξής διαχωρισμένες συνήθειες διαφορικές

εξισώσεις [22]:

$$\frac{d}{d\eta} \left((1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} \right) - \left(\frac{m^2}{1 - \eta^2} - (\omega a \eta)^2 + E \right) S = 0, \quad (3.4)$$

$$(\xi^2 + 1) \frac{d^2 R}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dR}{d\xi} + \left((a\omega\xi)^2 + \frac{m^2}{\xi^2 + 1} + \kappa Ma\xi - E \right) R = 0, \quad (3.5)$$

όπου ω είναι η συχνότητα της κυματικής λύσης. Οι αντίστοιχες εξισώσεις για την Kerr έχουν υπολογιστεί στο [23] και για $s = 0$ (βαθμωτή κυματική εξίσωση) είναι:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) - \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - (a\omega \cos \theta)^2 + E \right) S = 0, \quad (3.6)$$

$$\Delta \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{((r^2 + a^2)\omega - am)^2}{\Delta} + 2am\omega - a^2\omega^2 - E \right) R = 0, \quad (3.7)$$

όπου $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$. Παρατηρούμε ότι το γωνιακό μέρος της κυματικής λύσης στο Euler έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το αντίστοιχο γωνιακό μέρος της βαθμωτής διαταραχής στην Kerr (αλλάζοντας τη μεταβλητή από η σε $\cos \theta$), ενώ το ακτινικό μέρος έχει ποιοτικά παρόμοια συμπεριφορά, κυρίως αν $\kappa = 4\omega^2$. Για να αναδειχθεί αυτή η αναλογία πρέπει να θεωρήσουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$\eta^{(\text{Euler})} \leftrightarrow \cos \theta^{(\text{Kerr})}, \quad (3.8)$$

$$r^{(\text{Euler})} = a\xi^{(\text{Euler})} \leftrightarrow \tan \left(a \int_{r_{\min}^{(\text{Kerr})}}^{r^{(\text{Kerr})}} \frac{dx}{\Delta(x)} \right) \quad (3.9)$$

όπου το $r_{\min}$ είναι η ακτινική τιμή r_{BL} που αντιστοιχεί στο $\xi = 0$. Η περίεργη σχέση μεταξύ του $\xi^{(\text{Euler})}$ και του $r^{(\text{Kerr})}$ επιλέχθηκε ώστε να μετασχηματίσει το ακτινικό μέρος της κυματικής λύσης σε όσο το δυνατό πιο πιστή μορφή με την αντίστοιχη της Kerr, και σχετίζεται με το γεγονός ότι η ακτινική συνιστώσα της Kerr δεν θα πρέπει να ερμηνευτεί σαν σφαιρική συντεταγμένη του επίπεδου χώρου. Για μεγάλες τιμές του $r^{(\text{Kerr})}$, ισχύει $r^{(\text{Kerr})} \simeq r^{(\text{Euler})}$.

Έτσι όχι μόνο τα δύο προβλήματα οδηγούν σε διαχωρίσιμες κυματικές εξισώσεις, αλλά οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, πάνω στις οποίες κάθε κυματική διαταραχή μπορεί να αναλυθεί, έχουν πολύ παρόμοια συναρτησιακή μορφή. Ειδικά οι γωνιακές ιδιοσυναρτήσεις είναι ακριβώς οι ίδιες, ενώ οι ακτινικές, έχουν ακριβώς την ίδια συμπεριφορά σε μεγάλες ακτίνες.

3.3 Ανακαλύπτοντας νέες αναλογίες

Στη συνέχεια θα δείξουμε κάποιες καινούργιες αναλογίες που αποδεικνύουν τη στενή σχέση μεταξύ του σχετικιστικού βαρυτικού πεδίου του Kerr χωροχρόνου και του νευτώνειου βαρυτικού πεδίου του πεπλατυσμένου προβλήματος του Euler.

3.3.1 Μετάπτωση των τροχιών

Μία γεωδαισιακή τροχιά γύρω από μια μελανή οπή Kerr, ταλαντώνεται γύρω από το ισημερινό επίπεδο, ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από την μελανή οπή [24]. Έτσι μια τροχιά με $L_z \neq 0$ δεν μπορεί να διασχίσει τον άξονα συμμετρίας, αλλά ταλαντώνεται

μέσα σε ένα μέγιστο γωνιακό πλάτος γύρω από το ισημερινό επίπεδο. Η γωνία, που περιορίζει τις θ -ταλαντώσεις, ονομάζεται γωνία κλίσης της τροχιάς, ($\theta_{\text{inc}} = \pi/2 - \theta_{\text{min}}$). Αυτή σχετίζεται με την τιμή της σταθεράς Carter Q . Για παράδειγμα, όταν $Q = 0$ η τροχιά είναι αυστηρά ισημερινή.

Αφού η σχέση μεταξύ των $\theta \rightarrow \cos^{-1} \eta$, p_θ και Q του προβλήματος του Euler (1.52) είναι η ίδια με αυτή της Kerr, (εάν αντικαταστήσουμε την ενέργεια του νευτώνειου προβλήματος E με $E \rightarrow (E^2 - 1)/2$), οι τροχιές ενός δοκιμαστικού σωματιδίου στο πεπλατυσμένο πρόβλημα Euler θα έχουν την ίδια ακριβώς γωνιακή συμπεριφορά με αυτή της Kerr. Όσο μία Euler τροχιά χαρακτηρίζεται από $L_z \neq 0$, η γωνία θ (που σχετίζεται με την σφαιροειδή συντεταγμένη η) ταλαντώνεται πάνω-κάτω γύρω από το ισημερινό επίπεδο, ενώ οι αντίστοιχες ακραίες τιμές του θ είναι συμμετρικές η μία της άλλης, καθορίζοντας την κλίση της τροχιάς. Επίσης όταν η σταθερά Q_E του Euler μηδενίζεται η τροχιά είναι ισημερινή.

Επιπλέον και στα δύο προβλήματα, μία φραγμένη τροχιά, ενώ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας και ταλαντώνεται γύρω από το ισημερινό επίπεδο, εκτελεί επίσης ακτινικές ταλαντώσεις μεταξύ δύο ακραίων ακτίνων ($r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$). Αν αυτές οι δύο ακτίνες είναι ίσες, η τροχιά γίνεται κυκλική (ισημερινή τροχιά) ή σφαιρική (στη μη ισημερινή περίπτωση). Στην περίπτωση της Kerr οι σφαιρικές τροχιές είναι ευσταθείς ως προς την αύξηση της εκκεντρότητας υπό την επίδραση της βαρυτικής ακτινοβολίας. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι αυτό δεν ισχύει πάντα για τις φραγμένες σφαιρικές τροχιές, στην περίπτωση του Euler. Αν και αυτό είναι μια προφανής διαφορά μεταξύ του Euler και της Kerr, που οφείλεται στις μικρές διαφορές στα αντίστοιχα ακτινικά δυναμικά, και τα δύο προβλήματα χαρακτηρίζονται από ανάλογη ποιοτική δυναμική συμπεριφορά των σφαιρικών τροχιών υπό την δράση μιας αναλωτικής εξωτερικής δύναμης στο αδιαβατικό όριο. Η ευστάθεια των σφαιρικών τροχιών έναντι της αύξησης της εκκεντρότητας είναι, και για τα δύο προβλήματα, καθορισμένη από την ίδια συνθήκη για τον συντονισμό μεταξύ των r - και θ -συχνοτήτων ($\Omega_r = 2n\Omega_\theta$ όπου $n = 1, 2, \dots$). Ενώ στην Kerr περίπτωση δεν συναντάμε ποτέ αυτή την συνθήκη, στο Euler την συναντάμε για κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Με αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών στο Euler πεδίο, θα δείξουμε, στο επόμενο Κεφάλαιο, ότι μια αρχικά μικρή εκκεντρότητα, υπό την επίδραση μιας τεχνητής μικρής εξωτερικής δύναμης (η οποία μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση, σταθερότητα ή μείωση της εκκεντρότητας) συμφωνεί με την αναλυτική δυναμική εξέλιξη στην οποία οδηγεί η ανάλυσή μας. Βασισμένοι σε αυτήν την ανάλυση θα ρίξουμε περισσότερο φως στην εξέλιξη της εκκεντρότητας στις σχεδόν σφαιρικές τροχιές της Kerr.

Τέλος πρέπει να προσθέσουμε ότι και στα δύο προβλήματα, συνήθως υπάρχει ένα ζευγάρι φραγμένων τροχιών, όπου η μία είναι καταδυσόμενη τροχιά στην περίπτωση της Kerr (καθώς τμήμα αυτής της τροχιάς είναι θαμμένο κάτω από τον ορίζοντα της μελανής οπής). Αντιθέτως το πρόβλημα Euler δεν έχει ορίζοντα, οπότε αυτός ο τύπος τροχιών είναι και πάλι κανονικές τροχιές με μικρότερες ακραίες ακτίνες (r_4, r_3) από ότι οι αντίστοιχες ακραίες μεγάλες ακτίνες (r_2, r_1) που αντιστοιχούν στο άλλο μέλος του ζεύγους. Ακολουθώντας αυτή την αναλογία με την Kerr, θα αγνοήσουμε την τροχιά με τις μικρότερες ακτίνες, ως ανάλογη των καταδυσόμενων τροχιών της Kerr.

Όπως αναφέραμε πρωτύτερα, πρέπει να τονίσουμε ότι υπάρχει μία σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο προβλημάτων. Στον Kerr χωροχρόνο οι ορθόδρομες τροχιές (τροχιές που περιστρέφονται στην διεύθυνση περιστροφής της μελανής οπής) και οι ανάδρομες (κινούμενες στην αντίθετη διεύθυνση) είναι διακριτές: έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Αυτό είναι συνέπεια του σχετικιστικού φαινομένου Lense-Thirring που προκαλείται από την ιδιοστροφορμή και προκύπτει ως αποτέλεσμα της ύπαρξης των ροπών ρεύματος-μάζας της αντίστοιχης μετρικής. Οι ροπές ρεύματος-μάζας δεν υπάρχουν στο στατικό νευτώνειο βαρυτικό πεδίο: έτσι οι ορθόδρομες και οι ανάδρομες τροχιές είναι τελείως ισοδύναμες καθώς είναι ταυτόσημες κάτω από τον μετασχηματισμό $\phi \rightarrow -\phi$. Αυτή η ποιοτική διαφορά μεταξύ των δύο προβλημάτων είναι εμφανής στα φαινόμενα των οποίων η σχετικιστική περιγραφή περιλαμβάνει όρους γραμμικούς ως προς την παράμετρο a μαζί με όρους τετραγωνικούς ως προς a . Στις αντίστοιχες περιγραφές για το Euler μόνο τετραγωνικοί όροι του a εμφανίζονται στις αντίστοιχες περιγραφές. Έτσι όταν μια συγκεκριμένη ιδιότητα του πεδίου της μετρικής Kerr, η οποία διαχωρίζει τις ορθόδρομες από τις ανάδρομες τροχιές, συγκρίνεται με μία αντίστοιχη στο πεδίο Euler, προκύπτουν διαφορές.

3.3.2 Ομοιότητα του τρίτου ολοκληρώματος Q_E με την σταθερά Carter

Η σταθερά Carter Q είναι μια διατηρούμενη ποσότητα κατά μήκος των γεωδαισιακών τροχιών στον Kerr χωροχρόνο. Στο Κεφάλαιο 2.2 αποδείξαμε ότι, στις Boyer-Lindquist συντεταγμένες, όταν εκφραστεί ως συνάρτηση της p_θ ορμής, η σταθερά Carter παίρνει την μορφή:

$$Q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2(1 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (3.10)$$

ενώ, όταν εκφραστεί ως συνάρτηση της p_r ορμής, παίρνει μια διαφορετική μορφή:

$$Q = \frac{[E(r^2 + a^2) - aL_z]^2}{\Delta} - (L_z - aE)^2 - r^2 - \Delta p_r^2. \quad (3.11)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις τα E , L_z είναι η διατηρούμενη ενέργεια ($-p_t$) και η διατηρούμενη z -συνιστώσα της γωνιακής στροφορμής (p_ϕ) του δοκιμαστικού σωματιδίου, αντίστοιχα. Οι ορμές είναι ανάλογες της μάζας ηρεμίας του σωματιδίου μ , άρα η σταθερά Q είναι ανάλογη του μ^2 . Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε θεωρήσει ότι $\mu = 1$.

Έχουμε υπολογίσει το τρίτο ολοκλήρωμα κίνησης του Euler, Q_E , στο Κεφάλαιο 1.5, σχέσεις (1.52) και (1.53). Ξαναγράφοντας στις εκφράσεις αυτές την ενέργεια E ως $E = (E_K^2 - 1)/2$, λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για την σταθερά Carter στο Euler:

$$Q_E = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2(1 - E_K^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (3.12)$$

ως προς θ , p_θ και

$$Q_E = \frac{[E_K(r^2 + a^2) - aL_z]^2}{r^2 + a^2} - (L_z - aE_K)^2 - r^2 - (r^2 + a^2)p_r^2 + 2Mr \quad (3.13)$$

ως προς r , p_r .

Παρατηρούμε ότι η σχέση (3.12) είναι ακριβώς η ίδια με την αντίστοιχη σχέση της σταθεράς Carter της Kerr (3.10), ενώ η δεύτερη (3.13), αν και παρόμοια, δεν ταιριάζει απόλυτα με την αντίστοιχη σχέση (3.11) της Kerr.

Παρόλου που η δεύτερη έκφραση για την Q_E (3.13) μπορούσε να γραφεί σε απλούστερη μορφή, όπου η ιδιοστροφορμή a εμφανίζεται μόνο μέσω του τετραγώνου a^2 (αν αναλύσουμε την (3.13) οι όροι που είναι γραμμικοί ως προς a εξαφανίζονται), προτιμήθηκε η

παραπάνω μορφή, καθώς μπορεί να αναδείξει άμεσα τυχόν ομοιότητες με την αντίστοιχη σχέση για την Kerr (3.11). Παρατηρούμε ότι η παρουσία της μάζας της πηγής, M , μόνο στον τελευταίο όρο της έκφρασης στην (3.13) για το Q_E , φαίνεται να μην έχει ανάλογο με την αντίστοιχη έκφραση για την Q της Kerr. Ωστόσο η παρουσία του M στο Δ στην (3.11) θα εμφανιστεί ακριβώς ως ένας όρος $2Mr$ αν αναλύσουμε στη χαμηλότερη τάξη το Δ στον παρανομαστή του πρώτου όρου της (3.11) ως προς M/r και θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο κινείται σε ασθενές βαρυτικό πεδίο με ενέργεια $E \simeq 1$. Τα δύο προβλήματα, προφανώς, δεν είναι ταυτόσημα και αυτή ήταν η καλύτερη αναλογία μεταξύ των δύο εκφράσεων που θα μπορούσαμε να πετύχουμε. Στο όριο του ασθενούς πεδίου η ομοιότητα είναι ακόμη καλύτερη.

3.3.3 ISCO

Το σύννηδες βαρυτικό πεδίο μιας νευτώνειας σημειακής μάζας (μονόπολο) δεν παρουσιάζει το ανάλογο της εσώτερης ευσταθούς κυκλικής τροχιάς ISCO η οποία είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά μιας Schwarzschild μελανής οπής. Ο λόγος είναι ότι το φυγοκεντρικό δυναμικό των νευτώνειων βαρυτικών πεδίων λειτουργεί ως απωστικό δυναμικό το οποίο βεβαιώνει ότι υπάρχει σταθερή τροχιά σε κάθε ακτίνα. Αυτό θα μπορούσε να εκληφθεί ως μια βασική διαφορά μεταξύ του σχετικιστικού Kerr και του νευτώνειου βαρυτικού πεδίου του Euler στο όριο $a \rightarrow 0$.

Ωστόσο, όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 1.6.2, το πρόβλημα του Euler έχει ISCO για κάθε μη μηδενικό a , στην ακτίνα:

$$\rho_{\text{ISCO}} = a\sqrt{\xi_{\text{ISCO}}^2 + 1} = 2a \quad (3.14)$$

στις κυλινδρικές συντεταγμένες, ή

$$r_{\text{ISCO}} = a\xi_{\text{ISCO}} = a\sqrt{3}, \quad (3.15)$$

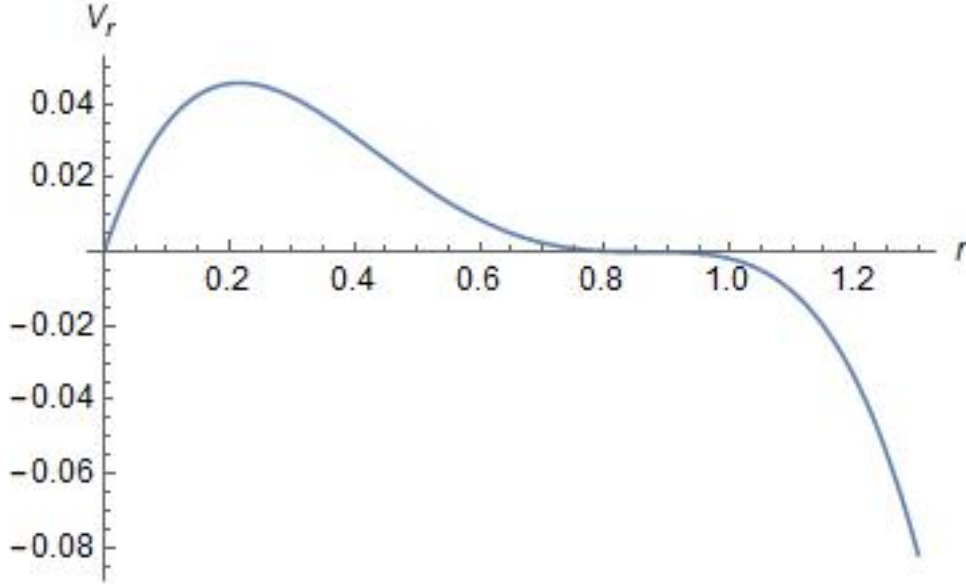
στις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Παρατηρούμε ότι η r_{ISCO} εξαρτάται γραμμικά από την a . Σημειώνουμε ότι η r_{ISCO} δεν είναι η πραγματική απόσταση του δοκιμαστικού σωματιδίου στην ISCO από την αρχή (η ευκλείδεια απόσταση είναι η ρ_{ISCO}), αλλά είναι το ανάλογο της Boyer-Lindquist ακτίνας της Kerr, την οποία χρησιμοποιούμε στην εργασία για να συγκρίνουμε το Euler με την Kerr.

Η παρουσία ISCO στο πρόβλημα του Euler υπάρχει και ακόμη και στο όριο $a \rightarrow 0$: τείνει απλά στην $r_{\text{ISCO}} = 0$. Αυτό είναι ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό το οποίο στο νευτώνειο μονόπολο ($a = 0$) δεν εμφανίζεται. Επίσης, σε αντίθεση με το πεπλατυσμένο πεδίο Euler, το αρχικό επίμηκες Euler δεν παρουσιάζει ISCO.

Συνεχίζοντας τη διερεύνηση των φυσικών παραμέτρων που σχετίζονται με την ISCO, η κρίσιμη τιμή της z -γωνιακής στροφορμής που οδηγεί στην παρουσία της ISCO στο πεπλατυσμένο Euler πεδίο είναι:

$$L_z^2 = \frac{16Ma}{3\sqrt{3}}. \quad (3.16)$$

ενώ η αντίστοιχη σχέση για το Kerr πεδίο είναι πιο περίπλοκη και δύσκολα μπορεί να συγκριθεί με την παραπάνω σχέση, καθώς η έκφραση για την z -γωνιακή στροφορμή για τις ορθόδρομες και τις ανάδρομες τροχιές είναι διαφορετική λόγω του φαινομένου Lense-Thirring.



Σχήμα 3.1: Το ακτινικό δυναμικό στην περίπτωση της ISCO με $e = 0$, $p = a\sqrt{3}$, $\theta_{\min} = \pi/2$ και $a = 0.5M$.

Η ύπαρξη της ISCO στο νευτώνειο πρόβλημα είναι από μόνο του ένα θετικό ποιοτικό σημάδι για την φυσική ομοιότητα με το σχετικιστικό πρόβλημα της μελανής οπής Kerr. Ωστόσο δεν φαίνεται να μοιράζεται κάποια ποσοτική ομοιότητα όσον αφορά την εξάρτηση της ακτίνας της ISCO από την παράμετρο a , όπως αυτή συμβαίνει στην περίπτωση της Kerr. Στην Kerr η ακτίνα της ISCO δίνεται από την σχέση [17]:

$$r_{\text{ISCO}} = M \left[3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right], \quad (3.17)$$

όπου

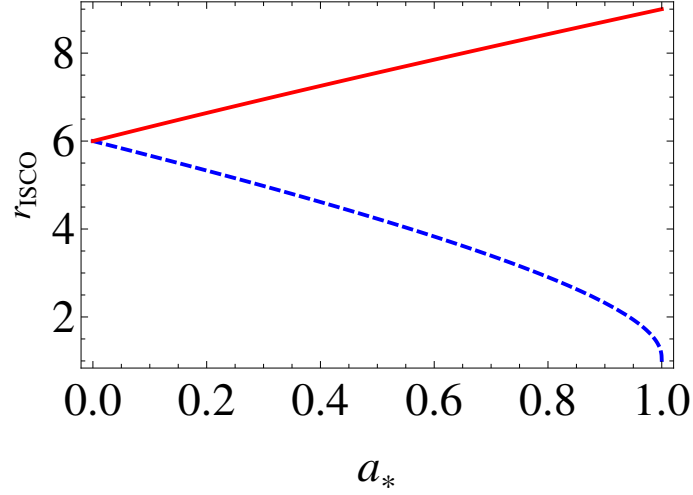
$$Z_1 = 1 + (1 - a_*^2)^{1/3} \left[(1 + a_*)^{1/3} + (1 - a_*)^{1/3} \right] \quad (3.18)$$

$$Z_2 = \sqrt{3a_*^2 + Z_1^2} \quad (3.19)$$

με $a_* = a/M \in [0, 1]$, ενώ τα δύο πρόσημα στην εξίσωση (3.17) αντιστοιχούν στις ορθόδρομες (άνω πρόσημο) και ανάδρομες (κάτω πρόσημο) τροχιές, αντίστοιχα. Η διαφορετική αυτή εξάρτηση από την a αποτελεί μια βασική διαφορά μεταξύ του σχετικιστικού και του νευτώνειου προβλήματος: ο Kerr χωροχρόνος, λόγω του φαινομένου της παράσυρσης των συστημάτων αναφοράς, διαχωρίζει τις ανάδρομες από τις ορθόδρομες τροχιές, και ιδιαίτερα στην περιοχή όπου το πεδίο είναι ισχυρό.

Έτσι εκτός από την ύπαρξη της ακτίνας της ISCO και στα δύο προβλήματα, δεν αναμένεται καμία ποιοτική ομοιότητα όσον αφορά την εξάρτηση του r_{ISCO} από το a_* . Στο Σχήμα 3.2 έχει σχεδιαστεί η ακτίνα της ISCO ως συνάρτηση του a_* για τους δύο τύπους τροχιών της Kerr. Η μη γραμμικότητα, κυρίως για τις ορθόδρομες τροχιές, σε αντίθεση με την γραμμικότητα του πεπλατυσμένου προβλήματος Euler, είναι εμφανής.

Αν στο πρόβλημα Euler προσθέσουμε ένα επιπλέον πεδίο ταχυτήτων, το οποίο να προσομοιάζει το σχετικιστικό φαινόμενο της παράσυρσης των συστημάτων αναφοράς, οι κυκλικές τροχιές με αντίθετη διεύθυνση περιστροφής θα διαχωρίζονταν επίσης. Η ακτίνα της ISCO θα μετατοπίζονταν αναλόγως. Οι μεν ορθόδρομες τροχιές θα αισθανόντουσαν μεγαλύτερη φυγόκεντρο δύναμη σε κάθε σημείο της τροχιάς σε σύγκριση με την



Σχήμα 3.2: Οι ακτίνες r_{ISCO} ως συνάρτηση του a_* για τις ορθόδρομες (μπλε διακεκομμένη γραμμή) και για τις ανάδρομες (κόκκινη καμπύλη) τροχιές στην Kerr σύμφωνα με την Εξ. (3.17). Οι ακτίνες μετρώνται σε μονάδες M .

περίπτωση απουσίας εξωτερικού πεδίου ταχυτήτων, και έτσι η αντίστοιχη κυκλική τροχιά θα μετακινούνταν εσωτερικά όπου το βαρυτικό πεδίο είναι ισχυρότερο, και η ακτίνα της ISCO θα μειώνονταν. Το αντίθετο θα συνέβαινε αν η τροχιά ήταν ανάδρομη. Επιπλέον, αν το εξωτερικό πεδίο ταχυτήτων περιγράφει μία περιστροφή όπου η γωνιακή της ταχύτητα εξαρτάται από την ακτίνα (όπως συμβαίνει με το φαινόμενο της παράσυρσης των συστημάτων αναφοράς στο σχετικιστικό πρόβλημα) η μετατόπιση της ακτίνας της ISCO θα ήταν ακόμη πιο περίπλοκη. Οι αντίστοιχες ακτίνες της ISCO για τις ορθόδρομες και τις ανάδρομες τροχιές δεν θα μετατοπίζονταν συμμετρικά ως προς το αρχικό πρόβλημα. Δεν υπάρχει λόγος να αναζητήσουμε για περισσότερες ομοιότητες μεταξύ των δύο προβλημάτων καθώς δεν είναι συγκρίσιμα ως προς αυτό το χαρακτηριστικό. Έχουν, απλώς, ποιοτικά την ίδια συμπεριφορά αν μία τεχνητή παράσυρση συστημάτων αναφοράς εισαχθεί στο νευτώνειο πρόβλημα.

3.3.4 Θεμελιώδεις συχνότητες

Οι μεταβλητές γωνίας-δράσης

Οι μεταβλητές γωνίας-δράσης [9,10] είναι κανονικές συντεταγμένες χρήσιμες για τον υπολογισμό της συχνότητας μιας περιοδικής (ταλαντωτικής ή περιστροφικής) τροχιάς χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης.

Η γεννήτρια συνάρτηση του κανονικού μετασχηματισμού $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του Hamilton, $W(\mathbf{q}, \mathbf{P})$, η οποία είναι η λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi: $\partial S/\partial t + H(q_i, \partial S/\partial q_i) = 0$:

$$S(q_i, P_i, t) = -Et + W(q_i, P_i), \quad (3.20)$$

όπου q_i είναι οι παλιές συντεταγμένες με συζυγείς ορμές p_i , και Q_i, P_i είναι οι καινούργιες κανονικές συντεταγμένες, ορμές, αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι η εξίσωση Hamilton-Jacobi διαχωρίζεται πλήρως, οπότε η λύση της είναι της μορφής:

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_i W_i(q_i, P_i).$$

Εφόσον η αρχική Χαμιλτονινή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, η καινούργια Χαμιλτονιανή είναι απλώς η παλιά Χαμιλτονιανή εκπεφρασμένη στις καινούργιες συντεταγμένες, ενώ οι νέες γενικευμένες ορμές είναι ολοκληρώματα τις κίνησης. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και σε ανελίξη ($\{P_i, P_j\} = 0$). Τέτοια ολοκληρώματα ορίζουν μία n διαστάσεων πολλαπλότητα M η οποία είναι ομαλή και αναλλοίωτη στη Χαμιλτονιανή ροή μέσα στο φασικό χώρο. Αν η πολλαπλότητα αυτή είναι συμπαγής και συνεκτική, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Liouville-Arnold [9], είναι διαφορομορφική ως προς ένα τόρο n διαστάσεων.

Σύμφωνα με το θεώρημα Liouville-Arnold [9] μπορούμε να ορίσουμε νέες κανονικές μεταβλητές (ω_i, J_i), η οποίες ονομάζονται μεταβλητές γωνίας-δράσης, όπου ω_i είναι οι γωνιακές συντεταγμένες στον τόρο και οι συζυγείς τους ορμές J_i είναι ολοκληρώματα της κίνησης.

Οι μεταβλητές δράσης ορίζονται από την σχέση:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (3.21)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε χρόνο μιας περιόδου της ταλάντωσης ή τις περιστροφής της συντεταγμένης q_i . Οι μεταβλητές δράσης J_i είναι σταθερές της κίνησης, καθώς εξαρτώνται μόνο από τα ολοκληρώματα κίνησης, P_i που παίρνουμε από τη λύση της Hamilton-Jacobi, $J_i(P_j)$. Μπορούμε να αντιστρέψουμε και να εκφράσουμε τα ολοκληρώματα P_i ως συνάρτηση των μεταβλητών δράσης. Ιδιαίτερα η Χαμιλτονιανή γράφεται ως $H = P_1 = H(J_i)$ και είναι κυκλική στις νέες μεταβλητές γωνίες ω_i . Επίσης η γεννήτρια συνάρτηση της Hamilton-Jacobi εκφράζεται συναρτήσει των παλιών συντεταγμένων και των μεταβλητών δράσης:

$$W = \sum_i W(q_i, J_i).$$

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού γίνονται:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{J}), \quad (3.22)$$

$$\omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}(\mathbf{q}, \mathbf{J}). \quad (3.23)$$

Οι δε εξισώσεις κίνησης στις μεταβλητές γωνίας-δράσης είναι:

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial J_i} = \Omega_i, \quad (3.24)$$

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial \omega_i} = 0. \quad (3.25)$$

Οι γωνιακές μεταβλητές είναι περιοδικές ($\omega_i + 2\pi \equiv \omega_i$) και εξελίσσονται γραμμικά με τον χρόνο:

$$\omega_i(t) = \text{mod} [\Omega_i(\mathbf{J})t + \omega_i(0), 2\pi], \quad (3.26)$$

όπου $\Omega_i(\mathbf{J})$ και $\omega_i(0)$ σταθερές, ενώ τα $\Omega_i(\mathbf{J}) = \partial H(J_j)/\partial J_i$ είναι οι θεμελιώδεις συχνότητες της τροχιάς. Η μεταβολή των ω_i στο χρόνο μιας πλήρους ταλάντωσης ή περιστροφής των q_i δίνονται από την:

$$\Delta\omega_i = \oint \frac{\partial \omega_i}{\partial q_i} dq_i = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_i} dq_i = \frac{d}{dJ_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \frac{d}{dJ_i} \oint p_i dq_i = 2\pi. \quad (3.27)$$

Επίσης από την (3.26) σε χρόνο μιας περιόδου T έχουμε $\Delta\omega_i = \Omega_i(J)T$. Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις:

$$\Omega_k(\mathbf{J}) = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.28)$$

Λόγω της ύπαρξης πολλών συχνοτήτων, η κίνηση στον $2n$ διαστάσεων χώρο των φάσεων δεν είναι απαραίτητα περιοδική. Είναι οιωνεί περιοδική (quasi-periodic).

Οι συχνότητες του προβλήματος του Euler

Το δυναμικό του Euler αποτελεί, όπως έχουμε πει, ένα ολοκληρώσιμο σύστημα με τρία ανεξάρτητα και σε ανέλιξη ολοκληρώματα κίνησης. Οι συζυγείς ορμές p_r και p_θ , εξ. (1.53, 1.52), είναι συναρτήσεις μόνο του r , και του θ , αντίστοιχα. Για φραγμένες τροχιές, ο χώρος των τροχιών είναι μία συμπαγής και συνεκτική πολλαπλότητα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Arnold [9], ο χώρος των φάσεων είναι τοπολογικά ισοδύναμος με έναν 3-τόρο. Αφού το πρόβλημα είναι ολοκληρώσιμο, παρόλο που οι συντεταγμένες δεν είναι στην πραγματικότητα περιοδικές, η ταλάντωση τους –ή η περιστροφή για το ϕ , αντιστοιχεί σε χαρακτηριστικές συχνότητες, τις θεμελιώδεις συχνότητες.

Συνεπώς, μπορούμε να εκμεταλευτούμε τις μεταβλητές γωνίας-δράσης $(\omega, \mathbf{J})$, όπου οι γωνιακές μεταβλητές ω είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, και οι μεταβλητές δράσεις $\mathbf{J}$ αντιστοιχούν σε σταθερό διάνυσμα, για τον υπολογισμό των συχνοτήτων. Οι τρεις συχνότητες που σχετίζονται με την περιοδικότητα των ω είναι οι θεμελιώδεις συχνότητες που παίρνουμε από την ανάλυση Fourier της ταλαντωτικής (ή περιστροφικής) χρονικής εξάρτησης των συντεταγμένων r, θ και ϕ των φραγμένων τροχιών.

Οι παλιές συντεταγμένες q_i είναι οι (r, θ, ϕ) και οι συζυγείς ορμές p_i ορίζονται ως: $p_r = \pm\sqrt{V_r(r)/(r^2 + a^2)}$, $p_\theta = \pm\sqrt{V_\theta(\theta)}$, και $p_\phi = L_z$, (τα αντίστοιχα δυναμικά V_r, V_θ δίνονται από τις σχέσεις (1.48, 1.49)). Τα αντίστοιχα ολοκληρώματα κίνησης είναι: $P_i = (H = E, L_z, Q_E)$. Εξ' αιτίας της διαχωρισιμότητας της Hamilton-Jacobi εξίσωσης η λύση της είναι της μορφής:

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = L_z\phi + W_r(r) + W_\theta(\theta), \quad (3.29)$$

όπου:

$$W_r(r) = \int^r \frac{\sqrt{V_r}}{r^2 + a^2} dr, \quad (3.30)$$

$$W_\theta(\theta) = \int^\theta \sqrt{V_\theta} d\theta. \quad (3.31)$$

Οι δε μεταβλητές δράσης ορίζονται από την (3.21) και δίνονται από τις σχέσεις:

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{V_r(r)}}{r^2 + a^2} dr, \quad (3.32)$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{V_\theta} d\theta, \quad (3.33)$$

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = L_z, \quad (3.34)$$

Για να υπολογίσουμε τη συχνότητα θα πρέπει να εκφράσουμε τη χαμιλτονιανή ως συνάρτηση των μεταβλητών δράσης $H(\mathbf{J})$, κάτι το οποίο δεν μπορεί να γίνει αναλυτικά. Τα

ολοκληρώματα (3.32)-(3.34) δεν μπορούν να αντιστραφούν αναλυτικά. Ωστόσο μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\frac{\partial J_i}{\partial P_j}$ και με τον κανόνα της αλυσίδας να βρούμε τις συχνότητες. Οι μη τετριμένες μερικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial J_r}{\partial H} = \frac{Y}{\pi} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial J_r}{\partial L_z} = -\frac{Z}{\pi} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial J_r}{\partial Q_E} = -\frac{X}{2\pi} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial H} = \frac{2\alpha^2 \sqrt{z_+}}{\pi\beta} (K(k) - E(k)) \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial L_z} = \frac{2L_z}{\pi\beta\sqrt{z_+}} (K(k) - \Pi(\frac{\pi}{2}, z_-, k)) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial Q_E} = \frac{1}{\pi\beta\sqrt{z_+}} K(k) \quad (3.40)$$

όπου $K(k)$, $E(k)$ και $\Pi(\frac{\pi}{2}, z_-, k)$ είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου, δεύτερου και τρίτου είδους αντίστοιχα, [25]:

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \\ E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \\ \Pi(\frac{\pi}{2}, z_-, k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - z_- \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \end{aligned}$$

με όρισμα $k = \sqrt{z_-/z_+}$ (όπου $z_\pm$ είναι οι δύο ρίζες του $V_\theta(\cos \theta)$, με $z_- < 1 < z_+$) και $\beta^2 = -2a^2 E$. Τα δε ολοκληρώματα X , Y και Z σχετίζονται με την ακτινική κίνηση και ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} X &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{V_r}}, \\ Y &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2}{\sqrt{V_r}} dr, \\ Z &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{L_z r^2}{(r^2 + \alpha^2) \sqrt{V_r}} dr \end{aligned}$$

με ακτινικό δυναμικό

$$V_r = 2Er^4 + 2Mr^3 + [2Ea^2 - Q_E - L_z^2]r^2 + 2Ma^2r - Q_E a^2.$$

Στη συνέχεια αντιστρέφουμε τις (3.35)-(3.40) χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial F_i}{\partial J_j} \frac{\partial J_j}{\partial F_k} = \delta_k^i. \quad (3.41)$$

και παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial J_r} \frac{\partial J_r}{\partial L_z} + \frac{\partial H}{\partial J_\theta} \frac{\partial J_\theta}{\partial L_z} + \frac{\partial H}{\partial J_\phi} \frac{\partial J_\phi}{\partial L_z} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial J_r} \frac{\partial J_r}{\partial Q} + \frac{\partial H}{\partial J_\theta} \frac{\partial J_\theta}{\partial Q} &= 0.\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων, καταλήγουμε τελικά στις εκφράσεις για τις συχνότητες:

$$\Omega_r = \frac{\pi K(k)}{a^2 z_+ [K(k) - E(k)] X + Y K(k)}, \quad (3.42)$$

$$\Omega_\theta = \frac{\pi \beta \sqrt{z_+} X/2}{a^2 z_+ [K(k) - E(k)] X + Y K(k)}, \quad (3.43)$$

$$\Omega_\phi = \frac{Z K(k) + X L_z [\Pi(\frac{\pi}{2}, z_-, k) - K(k)]}{a^2 z_+ [K(k) - E(k)] X + Y K(k)}. \quad (3.44)$$

Αν και γενικά η τροχιά δεν είναι περιοδική, υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις που η κίνηση μπορεί να γίνει περιοδική. Μια τροχιά σε συντονισμό, όπου ο λόγος των συχνότητων Ω_r/Ω_θ είναι ένας ρητός αριθμός, είναι μια περίπτωση περιοδικής τροχιάς καθώς ένας ακέραιος αριθμός ταλαντώσεων του θ και r (όχι απαραίτητα ίδιος αριθμός μεταξύ τους) επαναλαμβάνεται σε κάθε πεπερασμένη χρονική περίοδο.

Οι θεμελιώδεις συχνότητες για μια δέσμια τροχιά στην Kerr έχουν υπολογιστεί από τον Schmidt [26] και δίνονται ακριβώς από τις ίδιες εκφράσεις με αυτές της Euler (3.42)-(3.44), με $\beta^2 = a^2(1 - E^2)$ και $z_\pm$ οι ρίζες του πολικού δυναμικού της Kerr. Τα ακτινικά ολοκληρώματα στην περίπτωση της Kerr είναι:

$$\begin{aligned}X &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{V_r}}, \\ Y &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2}{\sqrt{V_r}} dr, \\ Z &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{L_z r^2 - 2Mr(L_z - aE)}{(r^2 - 2Mr + a^2)\sqrt{V_r}} dr\end{aligned}$$

με το αντίστοιχο δυναμικό:

$$V_r = (E^2 - 1)r^4 + 2Mr^3 + [(E^2 - 1)\alpha^2 - Q - L_z^2] r^2 + 2M [(L_z - aE)^2 + Q] r - Qa^2.$$

Παρατηρούμε ότι αν αντιστοιχίσουμε στη νευτώνεια ενέργεια E την $E \rightarrow (E^2 - 1)/2$, τα ακτινικά δυναμικά του Kerr και του Euler διαφέρουν μόνο στον γραμμικό τους όρο, ενώ τα πολικά καθίστανται ταυτόσημα.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στον Kerr χωροχρόνο υπάρχει μία τέταρτη σταθερά Ω_t που σχετίζεται με τη χρονική συντεταγμένη. Ωστόσο, η κίνηση δεν είναι φραγμένη στην χρονική διεύθυνση, οπότε το Ω_t δεν ορίζεται ως συχνότητα, [26, 27], αλλά ως ένας βαρυτικός παράγοντας Lorentz που συσχετίζει τις τρεις δυναμικές κλίμακες του ιδιοχρόνου

$\tau_i = 2\pi/\Omega_i$ με τα αντίστοιχα διαστήματα στην χρονική συντεταγμένη $T_i = \tau_i\Omega_t$, με $i = r, \theta, \phi$.

Τέλος τονίζουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις (Kerr και Euler) έχουμε $\Omega_r/\Omega_\phi \neq 1$ και $\Omega_\theta/\Omega_\phi \neq 1$ σε μία γενική τροχιά, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει σε μία κεπλεριανή τροχιά Kepler. Αυτό έχει ως συνέπεια την μετάπτωση του περίαστρου και του τροχιακού επιπέδου σε αντίθεση με τις κλειστές επίπεδες ελλειπτικές τροχιές του κεπλεριανού προβλήματος. Αν και στις δύο περιπτώσεις οι τροχιές εν γένει δεν είναι περιοδικές στην χρονική κλίμακα t . Μπορούμε, ωστόσο, να ορίσουμε μια νέα χρονική κλίμακα στην οποία η κίνηση καθίσταται περιοδική (Παράρτημα Γ').

3.3.5 Ζεύγη τροχιών με ίδιες συχνότητες

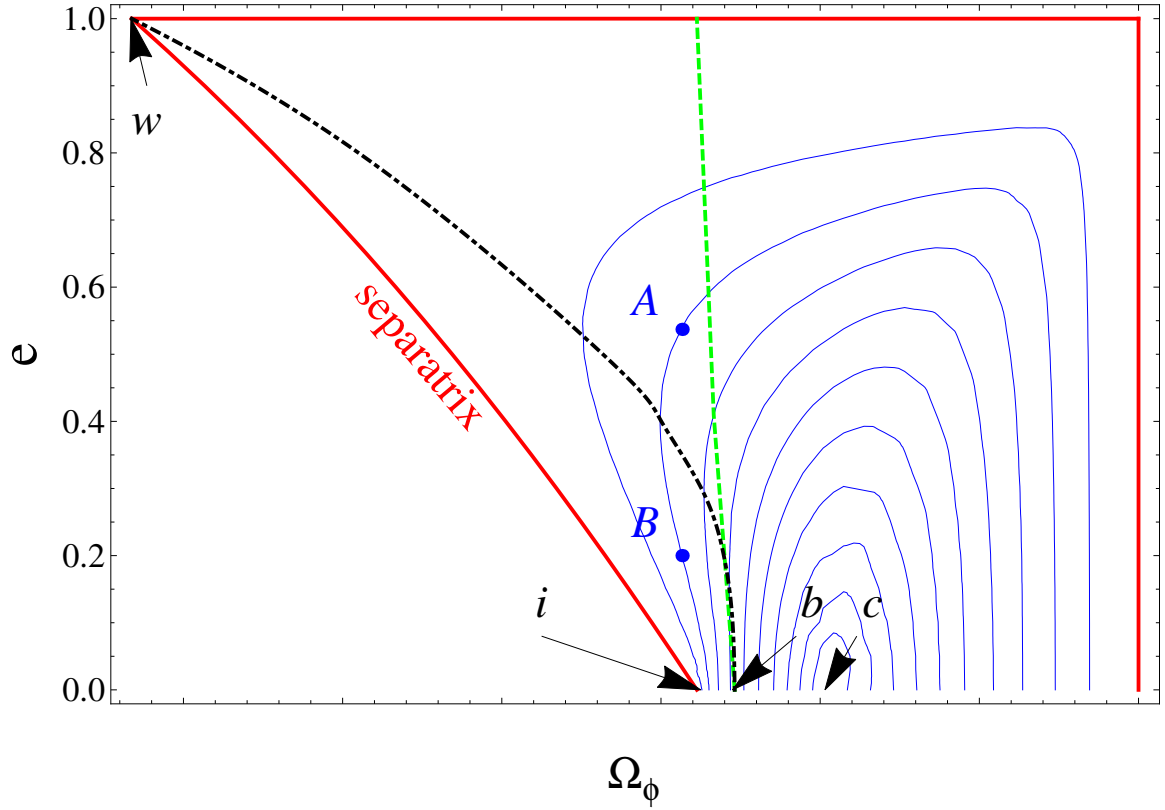
Οι Warburton κ.α. στο [28] απέδειξαν ότι οι μελανές οπές Kerr (όπως και οι μελανές οπές Schwarzschild) έχουν μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα: δεν υπάρχει αντιστοίχιση ένα προς ένα μεταξύ των τροχιακών χαρακτηριστικών (ή των σταθερών κίνησης) και των θεμελιωδών συχνοτήτων, δηλαδή, υπάρχουν ζεύγη τροχιών που αποτελούνται από δύο διαφορετικές φραγμένες τροχιές στην περιοχή όπου το βαρυτικό πεδίο είναι ισχυρό, οι οποίες όμως χαρακτηρίζονται και οι δύο από ακριβώς την ίδια τριάδα συχνοτήτων (ακτινική, πολική και αζιμουθιακή). Σε ένα τέτοιο ζευγάρι οι δύο τροχιές παρουσιάζουν τον ίδιο ρυθμό μετάπτωσης του περίαστρου και τον ίδιο ρυθμό της Lense-Thirring μετάπτωσης του επιπέδου της τροχιάς: οι φάσεις τους παραμένουν συγχρονισμένες κατά μέσο όρο. Παρακινούμενοι από το γεγονός ότι και το πεπλατυσμένο Euler πεδίο έχει ISCO, όπως και η Kerr, φάξαμε για την ύπαρξη ζευγών συγχρονισμένων τροχιών στο πεδίο του Euler.

Ζεύγη ίσων συχνοτήτων σε ισημερινές τροχιές

Ακολουθώντας τη διαδικασία των [28], διερευνήσαμε πρώτα τις ισημερινές τροχιές αναζητώντας ίδια δυάδα των (Ω_r, Ω_ϕ) συχνοτήτων. Ενώ η τρίτη συχνότητα, Ω_θ , μπορεί και αυτή να υπολογιστεί για τέτοιες τροχιές, δεν εκδηλώνεται στην τροχιακή κίνηση καθώς η τροχιά αυτή βρίσκεται συνεχώς πάνω στο ισημερινό επίπεδο. Με σκοπό να βρούμε τέτοιες διπλές λύσεις στον χώρο των συχνοτήτων, κατασκευάσαμε τις ισο-συχνοτικές καμπύλες (contours) $\Omega_r = \text{σταθερό}$ στο επίπεδο των παραμέτρων (e, Ω_ϕ) , βλ. Σχήμα 3.3. Παρατηρούμε στο σχήμα ότι μπορεί να υπάρξει ισο-συχνοτική καμπύλη $\Omega_r = \text{σταθερό}$, η οποία να τέμνεται σε δύο σημεία από μία κάθετη ευθεία $\Omega_\phi = \text{σταθερό}$, δηλαδή μπορεί να βρεθούν σημεία με διαφορετική εκκεντρότητα (και ορθό ημιπλάτος) αλλά με ίδιες συχνότητες. Για την κατασκευή του σχήματος χρησιμοποιήσαμε τις αναλυτικές εκφράσεις για τις συχνότητες Εξ. (Γ'.19) που κατασκευάσαμε στο Παράρτημα Γ'. Οι εκφράσεις αυτές είναι ακριβείς και εύκολα διαχειρίσιμες για αριθμητικούς υπολογισμούς σε όλο τον παραμετρικό χώρο και κυρίως κοντά στην διαχωρίζουσα, όπου οι σχέσεις (3.42)-(3.44) αποτυγχάνουν να δώσουν ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα.

Το σχήμα του συνόρου όλων των πιθανών ισημερινών τροχιών στον παραμετρικό χώρο $(e - \Omega_\phi)$, δηλαδή, το περίγραμμα $\Omega_r = 0$ (κόκκινη καμπύλη στο Σχήμα 3.3), έχει τέτοιο σχήμα ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη ζευγών τροχιών με ίδιο ζευγάρι συχνοτήτων (Ω_r, Ω_ϕ) . Το σύνορο αυτό αποτελείται από τις εξής τροχιές:

- (i) Όταν το $p \rightarrow \infty$, θα έχουμε τροχιές με $\Omega_\phi = 0$ για όλες τις εκκεντρότητες. Το σύνορο αυτό αντιστοιχεί σε φραγμένες τροχιές σε ασθενές πεδίο (κόκκινη κάθετη καμπύλη).
- (ii) Όταν η εκκεντρότητα γίνεται $e = 1$, οριακά κλειστές (παραβολικές) τροχιές με $r_1 \rightarrow \infty$ και άρα $T_r = 2\pi/\Omega_r \rightarrow 0$ (κόκκινη οριζόντια καμπύλη).



Σχήμα 3.3: Οι ισο-συχνотικές καμπύλες $\Omega_r = \text{σταθερό}$ (μπλε καμπύλες) για τις ισημερινές φραγμένες τροχιές στο πεπλατυσμένο πεδίο του Euler στον παραμετρικό χώρο $(e - \Omega_\phi)$. (Το Ω_ϕ αυξάνει προς τα αριστερά και δεν υπάρχει αρίθμηση στον οριζόντιο άξονα, καθώς οι πραγματικές τιμές του Ω_ϕ εξαρτώνται από τα M, a). Το σύνορο (κόκκινη καμπύλη) όλων των $\Omega_r = \text{σταθερό}$ καμπύλων αντιστοιχεί στο $\Omega_r = 0$, ενώ καθώς κινούμαστε προς το εσωτερικό του κόκκινου περιγράμματος, το Ω_r αυξάνει. Το σημείο, πάνω στον άξονα Ω_ϕ , με την ονομασία 'c' αντιστοιχεί στο μέγιστο Ω_r , (3.2). Το ελαφρά καμπυλωμένο τμήμα του συνόρου $\Omega_r = 0$ αντιστοιχεί στη διαχωρίζουσα. Η υψηλότερη τιμή του Ω_ϕ , με την ονομασία 'w', αντιστοιχεί στην οριακά ανοικτή τροχιά (παραβολική), $e \rightarrow 1$, πάνω στη διαχωρίζουσα. Η διακεκομμένη πράσινη γραμμή, (COD), είναι το σύνολο των μη κυκλικών τροχιών που χαρακτηρίζονται από τις ίδιες συχνότητες (Ω_r, Ω_ϕ) με κυκλικές τροχιές. Τέλος, η διακεκομμένη μαύρη γραμμή είναι η ιδιάζουσα καμπύλη κατά μήκος της οποίας όλες οι τροχιές είναι οριακά διαφορετικά ζευγάρια των τροχιών με ίδιες συχνότητες. Τα ζεύγη τροχιών με ίδιες συχνότητες βρίσκονται αριστερά της πράσινης COD καμπύλης, όπως για παράδειγμα οι τροχιές A, B.

(iii) Η διαχωρίζουσα (βλ. Κεφάλαιο 1.7), δηλαδή, τροχιές όπου το ακτινικό δυναμικό έχει διπλή ρίζα $r_2 = r_3$, έτσι ώστε η τροχιά να χρειάζεται άπειρο χρόνο για να ολοκληρώσει μια r -ταλάντωση. Η ISCO αποτελεί το τελικό σημείο της διαχωρίζουσας στο $e = 0$, και είναι μια οριακά ευσταθής κυκλική τροχιά όπου το δυναμικό V_r αποκτά τριπλή ρίζα $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3}a$. Πάνω στην διαχωρίζουσα των ισημερινών τροχιών, η αξιμουθιακή συχνότητα Ω_ϕ δίνεται από την έκφραση:

$$\Omega_{\phi,s}^{(\text{eq})} = \sqrt{\frac{M}{r_2^3}}, \quad (3.45)$$

με $r_2 = p/(1+e)$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.72), η ϕ -συχνότητα αυτών των τροχιών γίνεται:

$$\Omega_{\phi,s}^{(\text{eq})}(e) = \left(\frac{1+e}{3-e}\right)^{3/4} \sqrt{\frac{M}{a^3}} \quad (3.46)$$

Η καμπύλη της διαχωρίζουσας έχει θετική κλίση ($de_s/d\Omega_\phi > 0$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3). Συνεπώς, η συνοριακή καμπύλη $\Omega_r = 0$, σχηματίζει ένα ανάποδο τραπεζοειδές (όπως στην Kerr περίπτωση) όπου περικλείεται ο παραμετρικός χώρος των φραγμένων τροχιών από τρεις πλευρές. Για λόγους συνέχειας, τώρα, της συνάρτησης $\Omega_r(e, \Omega_\phi)$ για τις ισημερινές τροχιές, μόνο και μόνο από το σχήμα του συνόρου μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη ζευγών τροχιών με τις ίδιες συχνότητες, όπως υποστηρίζεται για την περίπτωση της Kerr στο [28].

Στο Κεφάλαιο 1.7 δίνουμε αναλυτικές σχέσεις για τις σταθερές της κίνησης στη διαχωρίζουσα και από αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε, βασισμένοι στις εκφράσεις του Παραρτήματος Β', τις θεμελιώδεις συχνότητες για αυτές τις τροχιές. Εκτός από τη διαχωρίζουσα, οι φραγμένες ισημερινές τροχιές έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

(i) Υπάρχει μία μέγιστη τιμή του Ω_r , η οποία ανταποκρίνεται σε μία κυκλική τροχιά ($e = 0$), την οποία έχουμε συμβολίσει με ' c ' στο Σχήμα 3.3. Η αναλυτική έκφραση για την Ω_r για μηδενική εκκεντρότητα είναι:

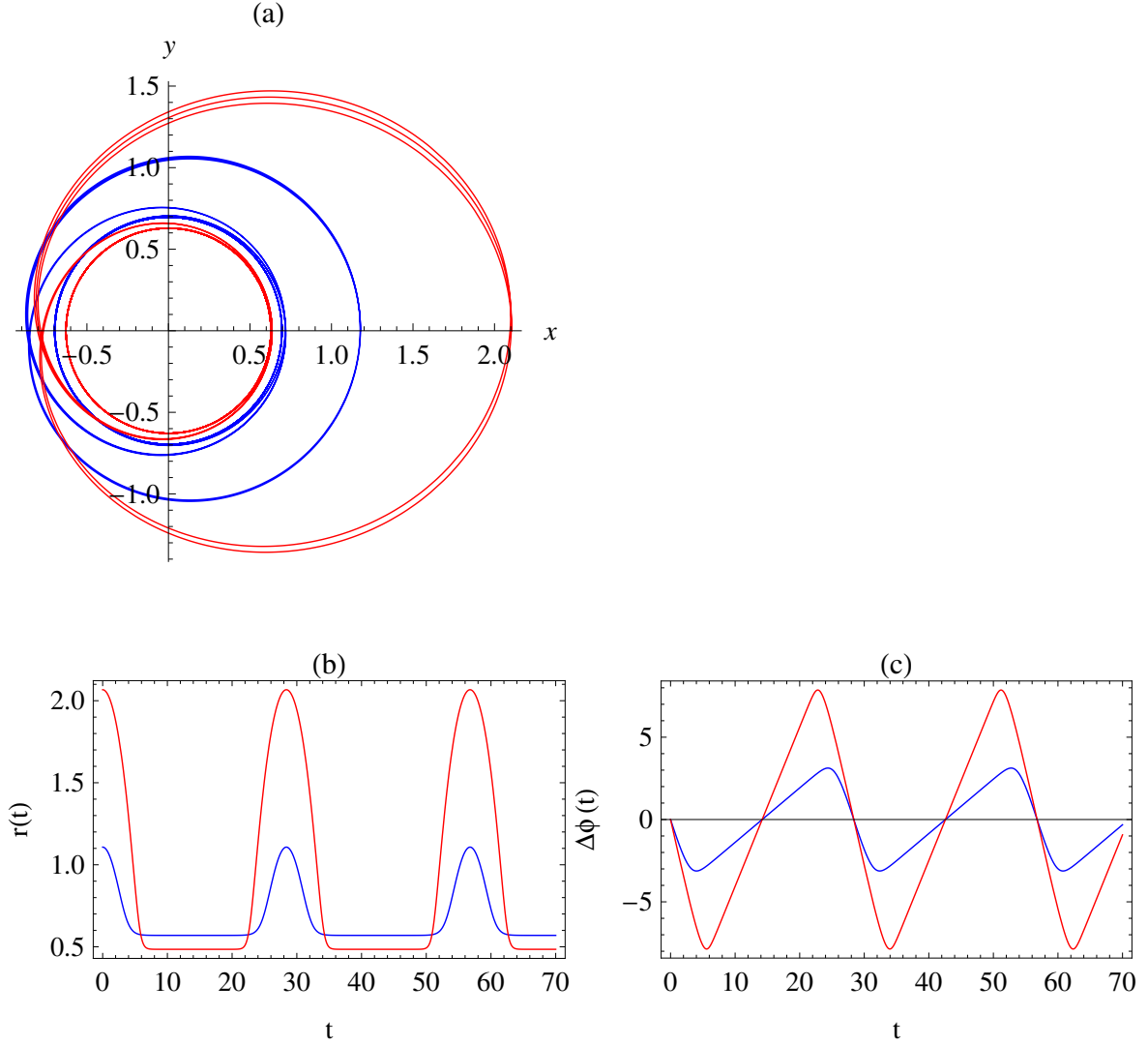
$$\Omega_r(p, e = 0) \rightarrow \frac{\sqrt{p^2 - 3a^2}}{p^{5/2}} \sqrt{\frac{M}{a^2}}, \quad (3.47)$$

ενώ η μέγιστη τιμή του $\Omega_r(p, e)$ είναι $\Omega_{r,c} = \sqrt{2/5^{5/2}} \sqrt{M/a^3}$, για $p_c = \sqrt{5}a$ και $e = 0$.

(ii) Υπάρχει μία καμπύλη (πράσινη στο Σχ.3.3), ονομάζεται 'COD' (circular orbit duals)

	A	B
Ω_r^*	0.0790569	
Ω_ϕ^*	0.453379	
e	0.5370696	0.2
p^*	1.94569	1.83337

Πίνακας 3.1: Οι δύο τροχιές, A και B του σχήματος 3.3, έχουν απομονωθεί στην περιοχή που υπάρχουν ζευγάρια ίσων συχνοτήτων. Η μία από αυτές (B) έχει προκαθοριστεί και η άλλη έχει υπολογιστεί από αριθμητική επίλυση των εξισώσεων $\Omega_\phi(e_B, p_B) = \Omega_\phi(e_A, p_A)$, $\Omega_r(e_A, p_A) = \Omega_\phi(e_B, p_B)$ ως προς τις μεταβλητές e και το p . Όλες οι συχνότητες εμφανίζονται ως αδιάστατα νούμερα που πολλαπλασιάζουν την ποσότητα $\sqrt{M/a^3}$, έτσι ώστε $\Omega_i = \Omega_i^* \sqrt{M/a^3}$, ενώ το αδιάστατο ορθό ημιπλάτος p^* είναι το p/a .



Σχήμα 3.4: Αυτό το διάγραμμα δείχνει δύο διακριτές ισημερινές τροχιές A (η κόκκινη είναι η πιο έκκεντρη τροχιά) και B (η μπλε, η λιγότερο έκκεντρη) του Σχήματος 3.3 (διάγραμμα (a)), καθώς και τις συγχρονισμένες χρονικές εξελίξεις των συντεταγμένων τους (διαγράμματα (b) και (c)). Το τελευταίο διάγραμμα (c) δείχνει το $\Delta\phi(t) = \phi(t) - \Omega_\phi t$. Στα τελευταία δύο διαγράμματα διαφαίνονται οι κοινές συχνότητες των τροχιών, παρά τη διαφορετική μορφολογία τους.

στο [28], που αντιστοιχεί σε μη κυκλικές τροχιές οι οποίες μοιράζονται τις ίδιες συχνότητες (Ω_r, Ω_ϕ) με κάποια αντίστοιχη κυκλική τροχιά. Το εύρος των Ω_ϕ που διατρέχει η COD καμπύλη είναι $[\Omega_{\phi,b}, \Omega_{\phi,i}]$, με τα σύμβολα ‘b’ και ‘i’ να αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένες κυκλικές τροχιές στον χώρο των παραμέτρων. Η ‘i’ κυκλική τροχιά είναι απλά η ISCO, η οποία σχηματίζει ζεύγος ίσων συχνοτήτων με την μη κυκλική τροχιά $e = 1$ (το άνω τελικό σημείο της πράσινης γραμμής στο Σχήμα 3.3), και η συχνότητά της Ω_ϕ είναι η μέγιστη συχνότητα μιας COD τροχιάς. Από την άλλη η ‘b’ είναι η κυκλική ισημερινή τροχιά που σχηματίζει ζευγάρι με μία άλλη μη κυκλική τροχιά, και η οποία έχει ελάχιστη συχνότητα Ω_ϕ και την μέγιστη Ω_r . Η ‘b’ κυκλική τροχιά είναι ιδιάζουσα περίπτωση καθώς το ζευγάρι της κυκλικής αυτής τροχιάς είναι η ίδια τροχιά, εκπροσωπώντας μια οριακή μη κυκλική τροχιά. Στην αριστερή πλευρά της COD γραμμής μπορούμε να βρούμε όλα τα πιθανά ζεύγη με ίδιες συχνότητες.

(iii) Τέλος υπάρχει μία άλλη ιδιαίτερη καμπύλη που εκπροσωπεί όλα τα ζεύγη τροχιών με ίσες συχνότητες με οριακά ίδιες τροχιακές παραμέτρους (μαύρη διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 3.3). Κατά μήκος αυτής της καμπύλης η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού $(\Omega_r, \Omega_\phi) \rightarrow (p, e)$ μηδενίζεται, καθώς εκεί ο μετασχηματισμός καθίσταται ανώμαλος. Η καμπύλη αυτή ενώνει τα σημεία κάθε ισο-συχνοτικής καμπύλης $\Omega_r = \text{σταθερό}$ στα οποία η συχνότητα Ω_ϕ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. Στα σημεία αυτά η εφαπτομένη των καμπύλων $\Omega_r = \text{σταθερό}$ γίνεται κάθετη. Αυτή η ιδιάζουσα καμπύλη διατρέχει όλες τις εκκεντρότητες από την οριακά δέσμια τροχιά ($e = 1$) μέχρι την κυκλική τροχιά ($e = 0$) συναντώντας εκεί την COD καμπύλη στο σημείο ‘b’. Όπως αναφέραμε, το σημείο ‘b’ εκπροσωπεί μια ιδιάζουσα κυκλική τροχιά που σχηματίζει ζευγάρι μαζί με τον εαυτό της. Το άλλο τελικό σημείο της ιδιάζουσας καμπύλης (η άνω αριστερή γωνία στο διάγραμμα) αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή του Ω_ϕ που μία φραγμένη τροχιά μπορεί να έχει, και την συμβολίζουμε με ‘w’ στο διάγραμμα. Καθώς είναι τροχιά της διαχωρίζουσας το ορθό ημιπλάτος είναι $p_w = 2a$ από την σχέση (1.72) με $e = 1$ και $x = 0$, ενώ η συχνότητά της είναι $\Omega_{\phi,w} = \sqrt{M/r_2^3} = \sqrt{M/a^3}$.

Για να σχεδιάσουμε αυτή την ιδιάζουσα καμπύλη πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$J = \left| \frac{\partial(\Omega_r, \Omega_\phi)}{\partial(p, e)} \right| = 0. \quad (3.48)$$

Η Ιακωβιανή αυτού του μετασχηματισμού έχει υπολογιστεί αριθμητικά για διάφορες εκκεντρότητες. Ωστόσο, η βάση αυτής της καμπύλης, ‘b’, που αντιστοιχεί σε μηδενική εκκεντρότητα έχει υπολογιστεί αναλυτικά καθώς οι περίπλοκες συναρτήσεις $\Omega_\phi(p, e)$ και $\Omega_r(p, e)$, μπορούν να γραφούν ως απλές αναλυτικές εκφράσεις όταν αναλυθούν σε σειρές Taylor γύρω από το $e = 0$ (και οι δύο συχνότητες παίρνουν τη μορφή $\Omega_0(p) + e^2\Omega_2(p)$). Έτσι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι γραμμική ως προς e γύρω από το $e = 0$. Αυτό εξηγεί γιατί οι καμπύλες $\Omega_r = \text{σταθερό}$ τέμνουν τον Ω_ϕ -άξονα κάθετα: δηλαδή, μια μικρή εκκεντρότητα $e \ll 1$ δεν αλλάζει και τις δύο συχνότητες της αντίστοιχης κυκλικής τροχιάς σε τάξη $O(e)$. Πιο συγκεκριμένα, η ορίζουσα του Ιακωβιανής του μετασχηματισμού κοντά στο $e = 0$ καταλήγει στην ακόλουθη μορφή:

$$J = \left| \frac{9a^2(5a^4 - 15a^2p^2 + 4p^4)e}{4p(p^2 - 3a^2)^{3/2}(p^2 + a^2)M} \right| = 0. \quad (3.49)$$

Έτσι το αρχικό σημείο ‘b’ της COD καμπύλης (στο $e = 0$), το οποίο, όπως είπαμε, συμπίπτει με το αρχικό σημείο της ιδιάζουσας καμπύλης, δίνεται από την λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $5a^4 - 15a^2p^2 + 4p^4 = 0$, η οποία είναι $p_b = a\sqrt{(15 + \sqrt{145})/8} = 1.839a$

	c	b	i	w
Ω_r^*	0.189	0.135	0	0
Ω_ϕ^*	0.299	0.401	0.439	1
p^*	2.236	1.839	1.732	2
e	0	0	0	1

Πίνακας 3.2: Οι χαρακτηριστικές συχνότητες στον παραμετρικό χώρο $(e - \Omega_\phi)$ για τις ισημερινές Euler τροχιές. Τα Ω^* είναι απλά οι αδιάστατες συχνότητες που προκύπτουν αν οι συχνότητες γραφούν ως πολλαπλάσια της $\sqrt{M/a^3}$. Αυτές οι αριθμητικές τιμές είναι ανεξάρτητες από το a . Τα p^* είναι τα αδιάστατα ορθά ημιπλάτη (p/a) .

(η δεύτερη λύση του τριωνύμου είναι μικρότερη της ακτίνας ISCO και άρα απορρίπτεται). Έτσι, από το ορθό ημιπλάτος υπολογίζουμε τις συχνότητες $\Omega_{\phi,b} = 0.401\sqrt{M/a^3}$ και $\Omega_{r,b} = 0.135\sqrt{M/a^3}$.

Ο Πίνακας 3.2 δίνει μια πλήρη λίστα με αριθμητικές τιμές των διάφορων χαρακτηριστικών συχνοτήτων, που συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σε όρους $\sqrt{M/a^3}$, καθώς και το αντίστοιχο ορθό ημιπλάτος, p , αυτών των τροχιών. Πρέπει να τονίσουμε ότι οι συχνότητες των φραγμένων τροχιών στο πρόβλημα Euler, οι οποίες είναι πολλαπλάσια της ποσότητας $\sqrt{M/a^3}$ ανεξαρτήτως των τιμών του a και του M : εξαρτώνται μόνο από τις χαρακτηριστικές τροχιακές παραμέτρους e και p/a . Έτσι το Σχήμα 3.3 δεν αντιστοιχεί σε κάποια συγκεκριμένη τιμή του a , όπως συμβαίνει στην Kerr. Η ακριβής μορφή των καμπύλων στο αντίστοιχο διάγραμμα της Kerr εξαρτάται από την τιμή του a , κυρίως λόγω της παράσυρσης των συστημάτων αναφοράς, στο αντίστοιχο σχετικιστικό πρόβλημα.

Το σχήμα των καμπύλων $\Omega_r = \text{σταθερό}$ αριστερά της COD καμπύλης διαβεβαιώνει ότι μπορούν να βρεθούν ζευγάρια ισημερινών τροχιών με διαφορετικές τροχιακές παραμέτρους αλλά με τις ίδιες συχνότητες. Για κάθε σημείο μεταξύ της COD και της ιδιάζουσας καμπύλης υπάρχει ένα σημείο μεταξύ της ιδιάζουσας καμπύλης και της διαχωρίζουσας που έχει τις ίδιες συχνότητες με το πρώτο. Το εύρος των αζιμουθιακών συχνοτήτων μέσα στο οποίο υπάρχουν τέτοια ζεύγη είναι:

$$\Omega_{\phi,b} \leq \Omega < \Omega_{\phi,w}.$$

Δύο τέτοιες τροχιές έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.4 και είναι τα σημεία A και B που αντιστοιχούν στις τροχιές που έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.3.

Ζεύγη ίσων συχνοτήτων σε γενικές τροχιές

Στην συνέχεια διερευνούμε την ύπαρξη ζευγών ίσων συχνοτήτων στις γενικές, μη ισημερινές, τροχιές στο βαρυτικό πεδίο του Euler. Οι τροχιές αυτές χαρακτηρίζονται από τρεις συχνότητες $(\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_\phi)$ (όλες οι συχνότητες είναι εκδηλώνονται στην εξέλιξη της τροχιάς). Σε αυτήν την περίπτωση είναι πιο δύσκολο να ψάξει κανείς για την ύπαρξη ζευγών τροχιών με την ίδια τριάδα συχνοτήτων $(\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_\phi)$, καθώς ο τρισδιάστατος παραμετρικός χώρος $(e - \Omega_\theta - \Omega_\phi)$, που περιλαμβάνει όλους τους τύπους των φραγμένων τροχιών έχει το σχήμα ενός λοξού τριγωνικού πρίσματος, το οποίο είναι τόσο λεπτό ώστε να μοιάζει με μια δισδιάστατη φέτα στον παραμετρικό χώρο, βλ. Σχήμα 3.5. Η διαχωρίζουσα αυτών των τροχιών είναι μία λωρίδα παραμετροποιημένη από τις συναρτήσεις $\Omega_\theta(\zeta, e)$, $\Omega_\phi(\zeta, e)$, όπου ζ είναι μία παράμετρος που αλλάζει με την κλίση της τροχιάς, ενώ το ορθό ημιπλάτος

p είναι τέτοιο ώστε $r_2 = r_3$, σε κάθε τιμή της εκκεντρότητας. Αυτή η λωρίδα καλύπτει όλο το εύρος των εκκεντροτήτων από $e = 0$ έως $e = 1$. Παρόλο που οι δύο συχνότητες Ω_θ , Ω_ϕ αυξάνουν μονοτόνως καθώς κινούμαστε από το $e = 0$ στο $e = 1$, για κάθε δοσμένη κλίση της τροχιάς. Επομένως η λωρίδα έχει την σωστή κλίση ώστε να μπορούν να υπάρχουν ζευγάρια με ίδιες συχνότητες. Αυτό, όμως, από μόνο του δεν είναι αρκετό να μας βεβαιώσει ότι υπάρχουν ζευγάρια ίσων συχνοτήτων. Το περιγράμμα της επιφάνειας σταθερού Ω_r είναι επίσης μία λωρίδα που γεμίζει όλο το πρίσμα στον νέο παραμετρικό χώρο. Η τομή των $\Omega_r =$ σταθερό επιφανειών, με το επίπεδο των σταθερών Ω_ϕ (ή των σταθερών Ω_θ) δεν θα καλύπτει απαραίτητα όλο το εύρος των εκκεντροτήτων $0 \leq e \leq 1$, λόγω της λοξότητας του τρισδιάστατου χωρίου των τροχιών και του μικροσκοπικού πάχους του. Αυτό καθιστά την έρευνα για τα ζεύγη ίσων συχνοτήτων δύσκολη έως ανέφικτη για μεγάλο εύρος των συχνοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, αν κάποιος ξεκινήσει από μία τροχιά στην περιοχή κοντά στη διαχωρίζουσα και κινηθεί προς το επάνω (σε μεγαλύτερα e) ή προς τα κάτω (προς μικρότερα e) με σκοπό να βρει πιθανά ζευγάρια ίσων συχνοτήτων, ίσως καταλήξει στο λωξό σύνορο του χώρου των τροχιών, προτού καταλήξει στην αρχική τιμή του Ω_r . Αυτή η αποτυχία ενισχύεται από το γεγονός ότι το πάχος του τρισδιάστατου χωρίου, που περιγράφει όλες τις πιθανές τροχιές στον χώρο των παραμέτρων, είναι αρκετά μικροσκοπικό. Έτσι το αρχικό σημείο της αναζήτησης είναι αρκετά σημαντικό. Η έρευνα πρέπει να περιοριστεί σε περιοχή κοντά στο τμήμα της διαχωρίζουσας που κείται κοντά στην επιφάνεια που παίζει το ρόλο της ιδιάζουσας γραμμής των ισημερινών τροχιών.

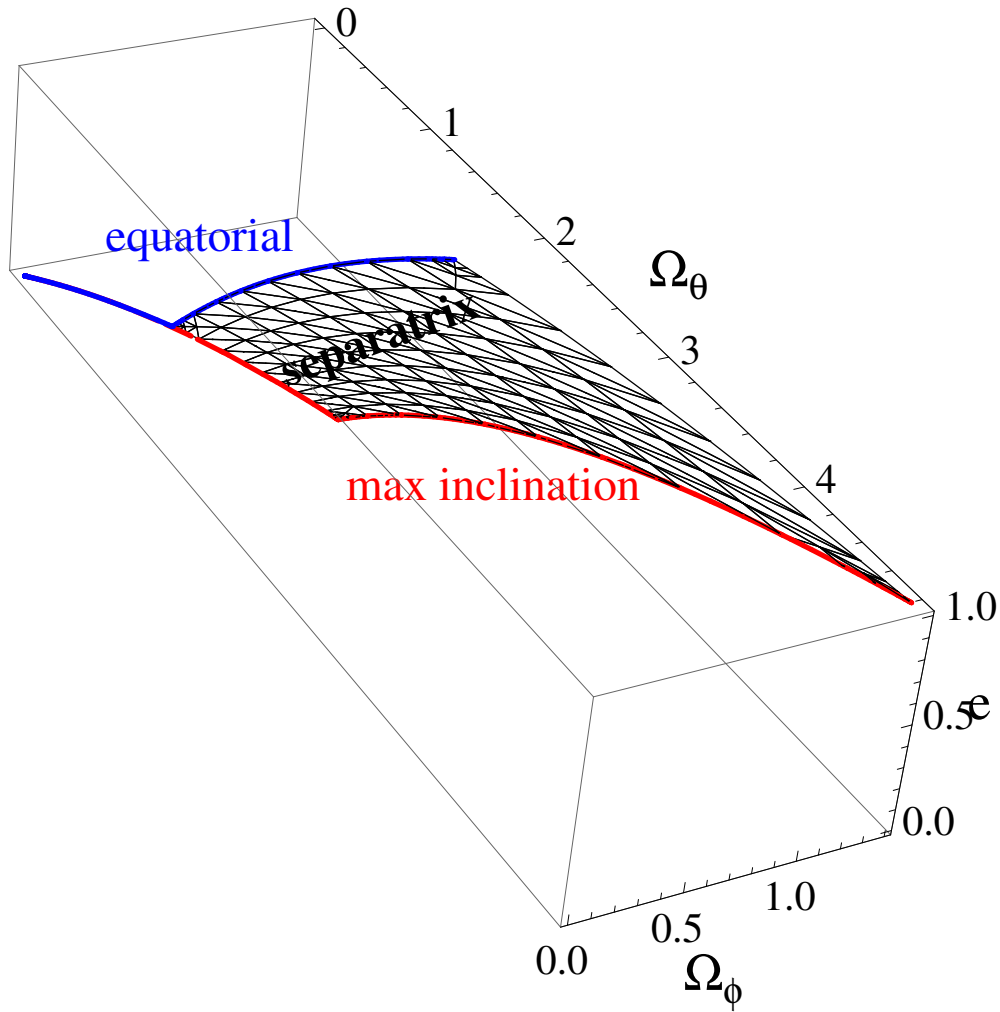
Στη συνέχεια ακολουθεί ο αριθμητικός υπολογισμός των συχνοτήτων στην γειτονιά του αρχικού σημείου. Για δοσμένα e και $\theta_{\min}$ λύνουμε αριθμητικά την εξίσωση $\Omega_\phi(p) =$ σταθερό. Εφόσον έχουμε την τριάδα $\{p, e, \theta_{\min}\}$ υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές των Ω_θ και Ω_r από τις σχέσεις (Γ'.19). Επαναλαμβάνουμε για πολλές τιμές του e και του $\theta_{\min}$, κυρίως στην περιοχή κοντά στην διαχωρίζουσα. Η έρευνά μας καταλήγει (για ένα αρχικό σημείο αναζήτησης) στο Σχήμα 3.6, το οποίο δείχνει ένα τμήμα των ισο-συχνοτικών καμπυλών με $\Omega_r =$ σταθερό στην τομή του παραμετρικού χώρου με το επίπεδο $\Omega_\phi = 0.632456\sqrt{M/a^3}$. Εξαιτίας του στενού πλάτους του παραμετρικού χώρου, ο οριζόντιος άξονας καλύπτει ένα μικρό μόνο εύρος της Ω_θ συχνότητας. Αυτό το διάγραμμα μοιάζει με το Σχήμα 6 του [28], που αναφέρεται στις γενικές τροχιές της Kerr. Ωστόσο υπάρχει μία μικρή διαφορά: στο πεδίο του Euler οι καμπύλες $\Omega_r =$ σταθερό τοποθετούνται σε υψηλότερες τιμές του Ω_θ από ότι εκείνες στην διαχωρίζουσα, ενώ στην Kerr η σχετική θέση είναι αντίστροφη. Ο λόγος είναι ότι η επιφάνεια της διαχωρίζουσας είναι διαφορετικά προσανατολισμένη ως προς τις υπόλοιπες τροχιές στον 3 διαστάσεων παραμετρικό χώρο $\Omega_\theta, \Omega_\phi, e$ στην Kerr και στο Euler: Έτσι οι υπόλοιπες φραγμένες τροχιές βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές της επιφάνειας της διαχωρίζουσας στα δύο προβλήματα.

Ακολουθώντας το αριθμητικό πρόγραμμα που χρησιμοποιήσαμε για τις ισημερινές τροχιές, σημειώνουμε και πάλι δύο διαφορετικές τροχιές με την ίδια τριάδα συχνοτήτων (τα δύο σημεία πάνω σε μία $\Omega_r =$ σταθερό καμπύλη του Σχήματος 3.5). Τα τροχιακά χαρακτηριστικά αυτών των δύο τροχιών αναγράφονται στον πίνακα 3.3, ενώ οι r -, θ -, και $(\phi - \Omega_\phi t)$ -ταλαντώσεις αυτών των τροχιών, έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.7.

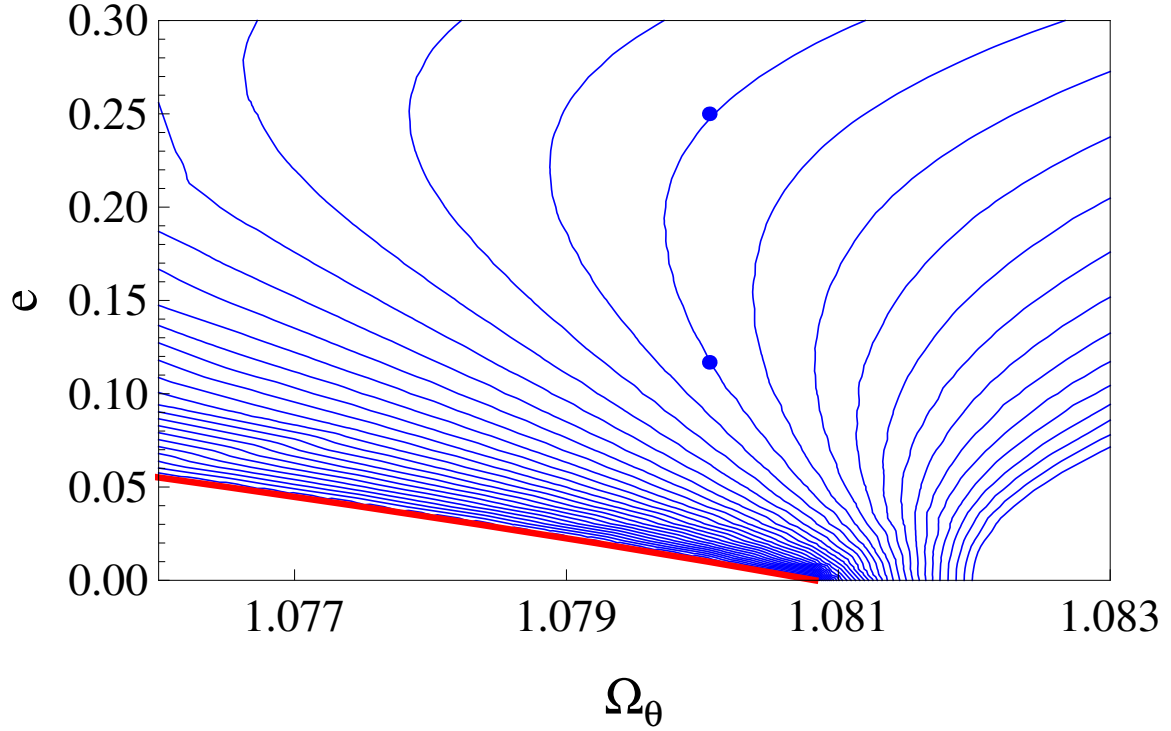
Σημειώνουμε ότι για τις μη ισημερινές τροχιές, όπως και για τις ισημερινές τροχιές, όλες οι συχνότητες μπορούν να γραφούν ως πολλαπλάσια της διαστατικής ποσότητας $\sqrt{M/a^3}$. Έτσι οι αριθμητικές τιμές όλων των συχνοτήτων που πολλαπλασιάζονται με $\sqrt{M/a^3}$, είναι ανεξάρτητες της πραγματικής τιμής του a και του M . Αυτός είναι ο λόγος που δεν έχουμε σημειώσει την τιμή του a σε κάποιο από τα σχήματα 3.5, 3.6.

	A	B
Ω_r^*	0.0455368	
Ω_ϕ^*	0.632456	
Ω_θ^*	1.08005	
e	0.25	0.116833918947677
p^*	1.48957	1.33702
$\theta_{\min}(^{\circ})$	70.148692322964	67.94240594

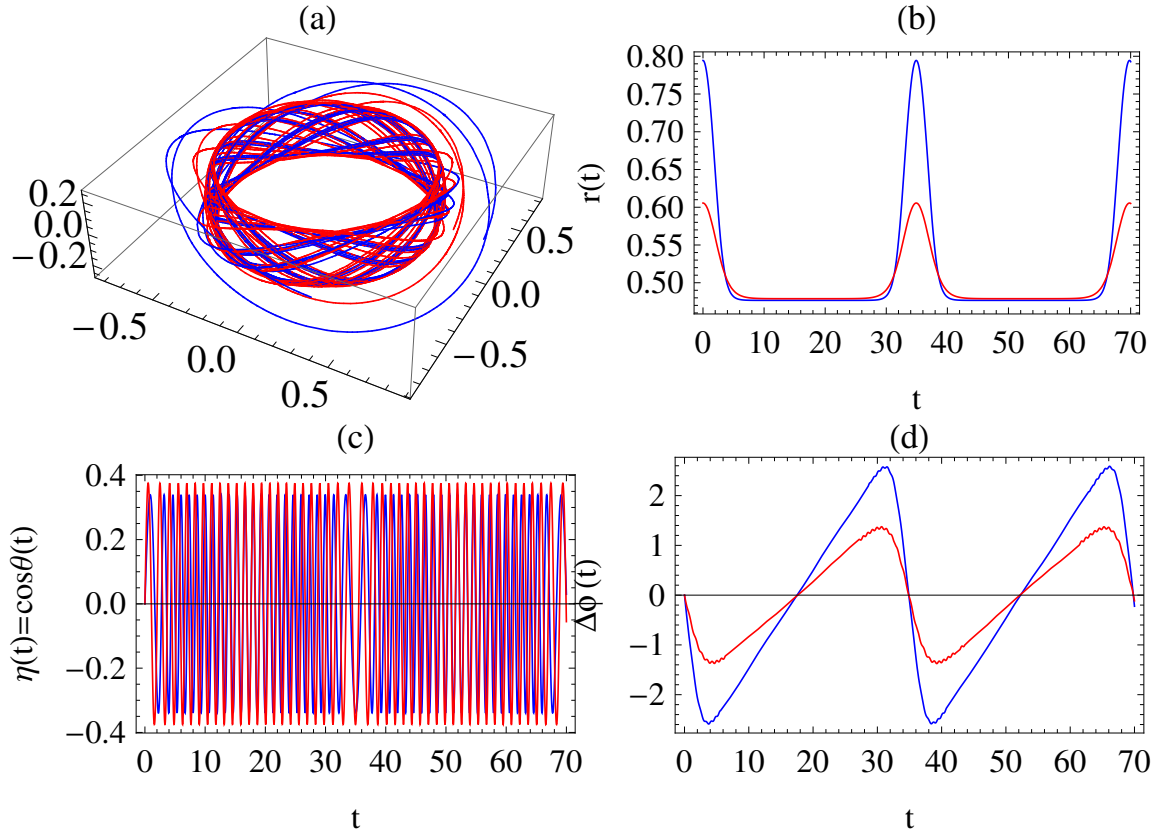
Πίνακας 3.3: Αυτά είναι τα χαρακτηριστικά του ζεύγους των τροχιών (τροχιακές παράμετροι και θεμελιώδεις συχνότητες) που εμφανίζονται στα Σχήματα 3.6 και 3.7. Οι συχνότητες δίνονται σε μονάδες $\sqrt{M/a^3}$ και τα αντίστοιχα ορθά ημιπλάτη σε μονάδες a . Οι δύο τροχιές έχουν διαφορετικά τροχιακά χαρακτηριστικά, αλλά οι θεμελιώδεις συχνότητες είναι ακριβώς οι ίδιες.



Σχήμα 3.5: Αυτό το σχήμα δείχνει τις δύο πλευρές του τρισδιάστατου χωρίου των τροχιών στον παραμετρικό χώρο $(\Omega_\phi, \Omega_\theta, e)$ για όλες τις κανονικές φραγμένες τροχιές του βαρυτικού πεδίου του Euler. Στο Σχήμα απεικονίζεται: (1) η λωρίδα της διαχωρίζουσας (η γκρι επιφάνεια η οποία είναι το σύνολο όλων των τροχιών με $\Omega_r = 0$, εκτός από αυτές με $e \rightarrow 1$ και αυτές με άπειρο ορθό ημιπλάτος), και (2) το σύνολο των σφαιρικών τροχιών ($e = 0$) οι οποίες είναι είτε ισημερινές (μπλε γραμμή στο επίπεδο $e = 0$), ή με μέγιστη κλίση (κόκκινη γραμμή στο επίπεδο $e = 0$). Αυτές οι δύο γραμμές είναι τα όρια της βάσης οι οποίες στη συνέχεια εκτείνονται κατά μήκος της λωρίδας της διαχωρίζουσας, ορίζοντας τα όρια της (τις ισημερινές τροχιές στην διαχωρίζουσα και τις τροχιές στην διαχωρίζουσα με τη μέγιστη κλίση). Οι δύο γραμμές του επιπέδου $e = 0$, είναι τόσο κοντά η μία στην άλλη ώστε να φαίνονται ότι ταυτίζονται (και οι δύο έχουν αρχή το $(0, 0, 0)$, ενώ η κόκκινη έχει ελάχιστα μεγαλύτερη Ω_θ συχνότητα για δοσμένο Ω_ϕ). Επιπλέον, η βάση της διαχωρίζουσας είναι σχεδόν παράλληλη στην καμπύλη μέγιστης κλίσης στο επίπεδο $e = 0$. Στην πραγματικότητα η βάση του τρισδιάστατου χωρίου των τροχιών είναι ένα εξαιρετικά λεπτό καμπύλο τρίγωνο. Το ίδιο ισχύει για όλες τις τομές του σώματος με το επίπεδο $e = \text{σταθερό}$ (δεν απεικονίζονται στο διάγραμμα για λόγους καθαρότητας). Το πλήρες χωρίο των τροχιών δημιουργεί, σε αυτό τον παραμετρικό χώρο, ένα πολύ λεπτό καμπύλο και λωξό τριγωνικό πρίσμα, το οποίο μοιάζει με μια δισδιάστατη επιφάνεια. Ο άξονας των e αντιστοιχεί σε όλες τις τροχιές οι οποίες εκτείνονται σε άπειρη απόσταση και χαρακτηρίζονται από $\Omega_r = \Omega_\theta = \Omega_\phi = 0$. Μία τομή αυτού του σώματος με το επίπεδο σταθερού Ω_ϕ , που τέμνει την λωρίδα της διαχωρίζουσας έχει ζωγραφιστεί στο σχήμα 3.6, μαζί με μερικές $\Omega_r = \text{σταθερό}$ καμπύλες.



Σχήμα 3.6: Το σχήμα των $\Omega_r = \text{σταθερό}$ στον παραμετρικό χώρο (Ω_θ, e) για γενικές τροχιές, (με $\Omega_\phi = \text{σταθερή}$, έτσι ώστε το επίπεδο $\Omega_\phi = \text{const}$ να τέμνει την διαχωρίζουσα επιφάνεια). Όλες οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια του $\sqrt{M/a^3}$. Το τμήμα του παραμετρικού χώρου που εμφανίζεται εδώ είναι πολύ μικρό ειδικά κατά μήκος του άξονα Ω_ϕ εξαιτίας του μικρού πάχους του τρισδιάστατου χωρίου των τροχιών. Πρέπει να τονίσουμε ότι η διαχωρίζουσα (η κόκκινη γραμμή) παρουσιάζει τις μικρότερες τιμές του Ω_θ . Αυτό είναι αναμενόμενο από το σχήμα της τρισδιάστατης επιφάνειας του σχήματος 3.5. Αντιθέτως, η διαχωρίζουσα των γενικών τροχιών στην Kerr παρουσιάζει τις υψηλότερες τιμές του Ω_θ στην τομή των $\Omega_\phi = \text{const}$. Αυτό οφείλεται στον διαφορετικό προσανατολισμό της λωρίδας της διαχωρίζουσας στον παραμετρικό χώρο $(\Omega_\phi, \Omega_\theta, e)$ της Kerr. Ένα συγκεκριμένο ζευγάρι τροχιών με ίσες συχνότητες έχει σημειωθεί με τις δύο κουκκίδες στο διάγραμμα. Τα χαρακτηριστικά αυτών των συγχρονισμένων τροχιών έχουν αποτυπωθεί στον πίνακα 3.3, ενώ οι αντίστοιχες τροχιές απεικονίζονται στο Σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.7: Για το συγκεκριμένο ζευγάρι γενικών τροχιών με τις ίδιες συχνότητες: στο διάγραμμα ((a)) απεικονίζονται οι τροχιές των δύο σημείων (κόκκινη είναι η τροχιά με την χαμηλότερη εκκεντρότητα, ενώ μπλέ είναι η πιο έκκεντρη τροχιά). Τα υπόλοιπα σχήματα δείχνουν την εξέλιξη των $r(t)$, $\eta(t) = \cos(\theta(t))$, και $\Delta\phi(t) = \phi(t) - \Omega_\phi t$, αντίστοιχα, για τις δύο τροχιές. Είναι εμφανές ότι και οι τρεις ταλαντώσεις αυτών των τροχιών είναι συγχρονισμένες ανά δύο. Ακόμα και το $\eta(t)$ στο διάγραμμα (c), όπου φαίνεται να υπάρχει μία σχετική μετατόπιση ανάμεσα στις δύο καμπύλες, τελικά δεν υπάρχει μετάθεση όταν ένας μεγάλος αριθμός η -ταλαντώσεων ληφθεί υπόψη. Η πολύ μεγαλύτερη τιμή του Ω_θ σε σχέση με το Ω_r αντανακλάται στα αντίστοιχα διαγράμματα (b) και (c). Από την άλλη μεριά η θεμελιώδης περίοδος του Ω_ϕ (το οποίο είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το Ω_θ) δεν διαφαίνεται άμεσα στο διάγραμμα (d), αφού έχει αφαιρεθεί μέσω του όρου $\Omega_\phi t$.

Κεφάλαιο 4

Σφαιρικές τροχιές υπό την επίδραση ιδιοδύναμης

Βασισμένοι στις βασικές ομοιότητες μεταξύ των δύο προβλημάτων, αυτό της μελανής οπής Kerr και του βαρυτικού πεδίου του Euler, και αναφέρθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο, θα προσπαθήσουμε χρησιμοποιήσουμε το ένα πρόβλημα για να κατανοήσουμε το άλλο. Ως κεντρικό παράδειγμα σε αυτή την εργασία, προσπαθούμε να εξηγήσουμε τη συμπεριφορά και την ευστάθεια των σφαιρικών τροχιών υπό την επίδραση μιας αναλωτικής ιδιοδύναμης που αδιαβατικά μεταβάλλει τις τροχιές. Γνωρίζουμε από προηγούμενες μελέτες, ότι στο σχετικιστικό πρόβλημα οι σφαιρικές τροχιές παραμένουν σφαιρικές κατά την αδιαβατική τους εξέλιξη λόγω της βαρυτικής ακτινοβολίας. Την ίδια συμπεριφορά επιδεικνύουν, όπως θα δείξουμε, και οι σφαιρικές τροχιές στο νευτώνειο πρόβλημα.

Σε αυτήν την ενότητα θα εκμεταλλευτούμε την ομοιότητα μεταξύ του δυναμικού του Euler και του βαρυτικού πεδίου μιας μελανής οπής Kerr, με σκοπό να διερευνήσουμε την αδιαβατική εξέλιξη των σφαιρικών (ή σχεδόν σφαιρικών) τροχιών στα δύο προβλήματα, υπό την επίδραση μιας αναλωτικής δύναμης πάνω στο σωματίδιο (όπως η ιδιοδύναμη (self-force) λόγω βαρυτικής ακτινοβολίας η οποία αναπτύσσεται στα διπλά συστήματα συμπαγών σωμάτων με μεγάλο λόγο μαζών, δηλαδή στα EMRI's (extreme mass ratio inspirals)).

Η πρώτη μελέτη αυτού του προβλήματος, στην περίπτωση της Kerr, έγινε από τους Ori και Kennefick [29] την δεκαετία του 90. Το αποτέλεσμα τους λέει ότι, αν οι σφαιρικές τροχιές ικανοποιούν τη συνθήκη συντονισμού ακτινικών-πολικών ταλαντώσεων: $\Omega_r = 2n\Omega_\theta$, όπου n ακέραιος, η σφαιρικότητα των τροχιών είναι ασταθής ως προς το να αναπτυχθεί εκκεντρότητα καθώς η τροχιά εξελίσσεται. Πιο συγκεκριμένα έδειξαν ότι αρχίζοντας από μία ακριβώς σφαιρική τροχιά, η σταθερά Carter Q , αρχικά θα εξελιχθεί έτσι ώστε η τροχιά να παραμείνει σφαιρική, ανεξάρτητα από την ακριβή μορφή της εξωτερικής δύναμης. Ωστόσο η σχέση ανάμεσα στις r - και θ - συχνότητες θα καθορίσει την μακροπρόθεσμη ευστάθεια της τροχιάς έναντι της αύξησης της εκκεντρότητας. Αν η συνθήκη για συντονισμό δεν ικανοποιείται, τέλεια σφαιρικά τροχιές θα παραμείνουν σφαιρικές (χωρίς να διασφαλίζεται η ευστάθεια αυτών έναντι της αύξησης μιας αρχικά μικρής εκκεντρότητας), ενώ αν οι παραπάνω συχνότητες είναι σε συντονισμό η εκκεντρότητα θα αυξηθεί γραμμικά με τον ιδιοχρόνο.

Το επιχείρημα των Ori και Kennefick ήταν αναλυτικό αλλά αρκετά περίπλοκο. Λίγο αργότερα ο Ryan [30] παρουσίασε ένα πολύ κομψό επιχείρημα για την ευστάθεια των

σφαιρικών τροχιών, στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται η συνθήκη για τον συντονισμό, βασιζόμενος απλά στις βασικές συμμετρίες της Kerr.

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε ένα αναλυτικό επιχείρημα για να εξηγήσουμε την ευστάθεια των ελάχιστα εκκεντρων τροχιών ως προς την αύξηση της εκκεντρότητας, υπό την επίδραση μιας αναλωτικής ιδιοδύναμης στο αδιαβατικό όριο, κατασκευασμένη με όρους του προβλήματος Euler. Το επιχείρημα θα ισχύει και στην περίπτωση της Kerr. Στην μελέτη μας καταφέραμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε έναν εξαναγκασμένο αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος θα οδηγηθεί σε αυξανόμενο πλάτος όταν η παραπάνω συνθήκη συντονισμού ικανοποιείται. Ειδικά η περίπτωση του Euler, σε αντίθεση με την Kerr, επιτρέπει αρχικά σφαιρικές τροχιές να ικανοποιούν τη συνθήκη για τον συντονισμό.

Η εξίσωση κίνησης για την συντεταγμένη r για ένα σωματίδιο στο πεδίο Euler με παράμετρο χρόνου το χρόνο Mino, λ , (βλ. Παράρτημα Γ'), όταν προστεθεί μια επιπλέον δύναμη που απομακρύνει αδιαβατικά το σωματίδιο από την γεωδαισιακή τροχιά είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\lambda^2} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\pm \sqrt{V_r(r)} \right) + \epsilon F_r^{(SF)} \\ &= \frac{1}{2} V_r'(r) + \epsilon F_r^{(SF)}\end{aligned}\quad (4.1)$$

όπου $'$ δηλώνει παραγώγιση ως προς r , ϵ είναι μία μικρή παράμετρος, ανάλογη του μ^2/M στην περίπτωση ενός EMRI συστήματος (μ η μάζα του δοκιμαστικού σωματιδίου, ενώ M είναι η ολική μάζα του Euler βαρυτικού πεδίου). Αυτή είναι η συνήθης κλίμακα για την σχετικιστική βαρυτική ιδιοδύναμη σε πρώτη τάξη. Αυτή η δύναμη παίζει το ρόλο της ιδιοδύναμης για ένα σχετικιστικό δοκιμαστικό σωματίδιο σε τροχιά γύρω από μια μελανή οπή Kerr.

Το δυναμικό V_r , που σχετίζεται με την τροχιακή r -ταλάντωση, είναι τετάρτου βαθμού πολυώνυμο ως προς r , εξίσ. (1.48), με συντελεστές που είναι συναρτήσεις των τριών ολοκληρωμάτων κίνησης E, L_z, Q_E (της γεωδαισιακής εξίσωσης), οι οποίες δεν είναι πλέον σταθερές. Έτσι:

$$V_r(r) = a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 \quad (4.2)$$

με $a_i = a_i(E, L_z, Q)$. Η ακτινική εξίσωση κίνησης λοιπόν είναι

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \left(2a_4 r^3 + \frac{3}{2}a_3 r^2 + a_2 r + \frac{1}{2}a_1 \right) + \epsilon F_r^{(SF)}. \quad (4.3)$$

όπου οι συντελεστές a_i του πολυωνύμου δεν είναι πλέον σταθερές της κίνησης. Επιπλέον, το δυναμικό χαρακτηρίζεται από ένα τοπικό ελάχιστο r_0 , γύρω από το οποίο η τροχιά εξελίσσεται, τουλάχιστον αρχικά. Για μικρούς χρόνους, λοιπόν, σε σχέση με την κλίμακα χρόνου της διαταρακτικής ιδιοδύναμης, θα είναι $r(\lambda) \simeq r_0$, και $V_r'(r_0) = 0$. Το r_0 είναι το στιγμιαίο κέντρο της ακτινικής ταλάντωσης, το πλάτος της οποίας σχετίζεται άμεσα με την εκκεντρότητα της τροχιάς, η οποία θεωρείται πολύ μικρή, τουλάχιστον αρχικά. Αφαιρώντας από την παραπάνω εξίσωση την παράγωγο του δυναμικού στο r_0 οδηγούμαστε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = 2a_4(r^3 - r_0^3) + \frac{3}{2}a_3(r^2 - r_0^2) + a_2(r - r_0) + \epsilon F_r^{(SF)} \quad (4.4)$$

$$= (r - r_0) \left(2a_4(r^2 + rr_0 + r_0^2) + \frac{3}{2}a_3(r + r_0) + a_2 \right) + \epsilon F_r^{(SF)}. \quad (4.5)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι η νέα παράμετρος r_0 που εμφανίζεται στην τελευταία έκφραση μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση των E, L_z , και Q_E , καθώς είναι απλά η μέγιστη ρίζα της κυβικής εξίσωσης συνάρτησης των a_1, a_2, a_3, a_4 .

Αν η αντίστοιχη γεωδαισιακή τροχιά ($\epsilon = 0$) είναι αρχικά σχεδόν σφαιρική, δηλ. $r(\lambda) \simeq r_0$, η παραπάνω εξίσωση περιγράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή με $\omega_r^2 = -6a_4r_0^2 - 3a_3r_0 - a_2$, ο οποίος ταλαντώνεται με ένα πολύ μικρό πλάτος. (Σημειώνουμε ότι το ω_r είναι απλά το Y_r μέρος της θεμελιώδους συχνότητας Ω_r (βλ. Παράρτημα Γ'), καθώς είναι η συχνότητα ως προς το χρόνο Μino, λ . Ωστόσο, όταν η ιδιοδύναμη είναι παρούσα, τα a_i , και συνεπώς το r_0 , θα εξελίσσονται όπως αναφέρθηκε προηγουμένως: οπότε το $r(\lambda)$ θα αποκλίνει με αδιαβατικό από την αρχική ταλάντωση.

Για να μελετήσουμε τον νέο τρόπο εξέλιξης όταν κάποια ασθενής ιδιοδύναμη είναι παρούσα, θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής:

$$r(\lambda) = r_0(0) + e_0\Delta(\lambda), \quad (4.6)$$

θεωρώντας ότι το $r_0(0)$ είναι η αρχική τιμή του r_0 (το αρχικό στιγμιαίο ελάχιστο του V_r) και e_0 είναι το αρχικό πλάτος της ακτινικής ταλάντωσης (το οποίο είναι ανάλογο της αρχικής μικρής εκκεντρότητας της τροχιάς) ενώ $\Delta(\lambda)$ είναι μία συνάρτηση του λ , μηδενικής τάξης (ενώ η εκκεντρότητα e και το μέγεθος της ιδιοδύναμης ϵ θεωρούνται ότι είναι πρώτης τάξης) η οποία περιγράφει την εξέλιξη του r με το λ . Αν αντικαταστήσουμε στην (4.5) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση κίνησης για το Δ :

$$e_0 \frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} = -(r(\lambda) - r_0(\lambda))\omega_r^2(\lambda) + \epsilon F_r^{(SF)}, \quad (4.7)$$

όπου $\omega_r^2(\lambda)$ είναι η στιγμιαία τιμή του $-6a_4r_0^2 - 3a_3r_0 - a_2$, εξαιτίας της αδιαβατικής αλλαγής των παραμέτρων.

Θεωρώντας ότι τα ϵ, e είναι συγκρίσιμες μικρές ποσότητες, θα κρατήσουμε ποσότητες τάξης $O(e)$ και $O(\epsilon)$ στην παραπάνω εξίσωση, και χρησιμοποιώντας την πλήρη έκφραση για το $r(\lambda)$ από την (4.7) παίρνουμε:

$$\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} = -\omega_r^2\Delta - \frac{(r_0(0) - r_0)}{e_0}\omega_r^2 + \frac{\epsilon}{e_0}F_r^{(SF)}, \quad (4.8)$$

όπου οι ποσότητες Δ, ω_r, r_0 είναι όλες συναρτήσεις του λ .

Στην συνέχεια αναλύουμε την απόκλιση του r_0 , $\delta r_0 \equiv r_0 - r_0(0)$, που οφείλεται στην ιδιοδύναμη. Καθώς, εξ' ορισμού το r_0 , είναι εκείνη η τιμή για την οποία $V'_r(r_0) = 0$ (όπου V_r είναι συνάρτηση του r και του λ , μέσω της λ -εξάρτησης των συντελεστών του):

$$\begin{aligned} 0 &= V'_r(r_0(\lambda), \lambda) \\ &= V'_r(r_0(0) + \delta r_0, \lambda) \\ &\simeq V'_r(r_0(0), \lambda) + V''_r(r_0(0), \lambda = 0)\delta r_0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

η μεταβολή των $r_0, \delta r_0$, δίνεται προσεγγιστικά από την:

$$\delta r_0 \simeq -\frac{V'_r(r_0(0), \lambda)}{V''_r(r_0(0), \lambda = 0)} = \frac{0 + \delta V'_r(r_0(0), \lambda)}{2\omega_r(0)^2}, \quad (4.10)$$

όπου δV_r είναι η μεταβολή του V_r εξαιτίας της εξέλιξης των συντελεστών της πολυωνυμικής έκφρασης, ενώ η αρχική τιμή 0 στον αριθμητή δηλώνει απλά την τιμή της παραγώγου

του V_r' (σε $\lambda = 0$) στο $r_0(0)$. Ο δε παρονομαστής $V_r''(r_0(0), \lambda = 0)$ έχει αντικατασταθεί από την τιμή του, $-2\omega_r(0)^2$, υπολογισμένη στην αρχική τιμή του V_r .

Αντικαθιστώντας, στη συνέχεια, το δr_0 που βρήκαμε παραπάνω στην (4.8) και παραβλέποντας τη μικρή μεταβολή του ω_r^2 με λ στον δεύτερο όρο στο δεξί μέλος, ως όρο ανώτερης τάξης, λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} = -\omega_r^2\Delta + \frac{\delta V_r'(r_0(0), \lambda)}{2e_0} \frac{\omega_r^2}{\omega_r(0)^2} + \frac{\epsilon}{e_0} F_r^{(SF)}. \quad (4.11)$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η τιμή του V_r' στο $r_0(0)$ εξαιτίας της αλλαγής των παραμέτρων a_i είναι ανάλογη του λ , σε πρώτη τάξη. Ο λόγος είναι ο ακόλουθος: Όλοι οι συντελεστές a_4, a_3, a_2, a_1 είναι γραμμικές συναρτήσεις των E, L_z^2 , και Q . Έτσι

$$\delta a_i = \int_0^\lambda \frac{da_i}{dt} \frac{dt}{d\lambda'} d\lambda' \quad (4.12)$$

$$= \int_0^\lambda \left(\frac{\partial a_i}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial a_i}{\partial L_z^2} \frac{dL_z^2}{dt} + \frac{\partial a_i}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} \right) \frac{dt}{d\lambda'} d\lambda'. \quad (4.13)$$

Παράλληλα, κάθε μία από αυτές τις χρονικές παραγώγους των ολοκληρωμάτων κίνησης μηδενίζεται όταν δεν υπάρχει ιδιοδύναμη (στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$). Ωστόσο, οι παράγωγοι $dE/dt, dL_z^2/dt, dQ/dt$ δεν μηδενίζονται όταν είναι παρούσα η ιδιοδύναμη. Για παράδειγμα:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial E}{\partial \dot{r}} \ddot{r} + \frac{\partial E}{\partial \dot{\eta}} \ddot{\eta} + \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} \ddot{\phi}, \quad (4.14)$$

καθώς το E (όπως και τα Q και L_z^2) είναι συνάρτηση των $r, \eta, \dot{r}, \dot{\eta}, \dot{\phi}$ (με $\eta = \cos \theta$). Επομένως η εξάρτηση της παραπάνω έκφρασης, dE/dt , από την ιδιοδύναμη κρύβεται μόνο στις δεύτερες παραγώγους $\ddot{r}, \ddot{\eta}, \ddot{\phi}$. Όλοι οι άλλοι όροι, καθώς και το μέρος των δεύτερων παραγώγων που δεν αντιστοιχούν στην ιδιοδύναμη, έχουν μηδενικό αποτέλεσμα, αφού το E αποτελεί ολοκλήρωμα κίνησης για την βαρυτική δύναμη (γεωδαισιακή κίνηση), όταν απουσιάζει οποιαδήποτε εξωτερική δύναμη. Έτσι

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{r}} F_r^{(SF)} + \frac{\partial E}{\partial \dot{\eta}} F_\eta^{(SF)} + \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} F_\phi^{(SF)} \right). \quad (4.15)$$

Στην πραγματικότητα όλα τα ολοκληρώματα κίνησης E, L_z^2, Q είναι διγραμμικές συναρτήσεις των $\dot{r}, \dot{\eta}, \dot{\phi}$ και επομένως οι όροι $\partial E/\partial \dot{r}, \partial E/\partial \dot{\eta}$, και $\partial E/\partial \dot{\phi}$ είναι γραμμικές συναρτήσεις των $\dot{r}, \dot{\eta}$, και $\dot{\phi}$, αντίστοιχα. Συλλέγοντας, λοιπόν, όλες τις μερικές παραγώγους καταλήγουμε στη γενική έκφραση για τη μεταβολή όλων των a_i :

$$\delta a_i = \epsilon \sum_k \int_0^\lambda F_k^{(SF)} \left(\frac{\partial a_i}{\partial E} G_{E,k} + \frac{\partial a_i}{\partial L_z^2} G_{L_z^2,k} + \frac{\partial a_i}{\partial Q} G_{Q,k} \right) \frac{dt}{d\lambda'} d\lambda', \quad (4.16)$$

όπου τα x_k , ως προς τα οποία λογαριάζονται όλες οι παράγωγοι, δηλώνουν τις συντεταγμένες r, η, ϕ για $k = 1, 2, 3$, αντίστοιχα, ενώ $G_{E,k} = \partial E/\partial \dot{x}_k$ (και ομοίως για $G_{L_z^2,k}, G_{Q,k}$) το οποίο είναι γραμμικό ως προς $\dot{x}_k$. Σημειώνουμε ότι όλες οι ποσότητες μέσα στο ολοκλήρωμα πρέπει να υπολογιστούν επί της γεωδαισιακής τροχιάς, καθώς το δa_i είναι τάξης ϵ , οπότε όποια απόκλιση από τις γεωδαισιακές θα προκαλέσει διορθώσεις ανώτερης τάξης. Επιπλέον, θεωρώντας ότι οι συνιστώσες $F_k^{(SF)}$ είναι της μορφής $-\dot{x}_k f_k(r, \eta, \dot{x}_l^2)$ (έχουν,

δηλαδή, αναλωτικό χαρακτήρα), το δa_i θα δίνεται από ολοκληρώματα του $(\dot{x}_k)^2$ και άλλες πιο περίπλοκες συναρτήσεις των συντεταγμένων r, η και $\dot{x}_l^2$. Τέλος, και ο όρος $dt/d\lambda'$ είναι τετραγωνική συνάρτηση των r , και η :

$$\frac{dt}{d\lambda'} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (4.17)$$

Τώρα, θεωρώντας τις σχεδόν σταθερές τιμές του r των σφαιρικών τροχιών, το ολοκλήρωμα για κάθε δa_i θα ταλαντώνεται, κυρίως λόγω των η -ταλαντώσεων, γύρω από την μέση τιμή του. Έτσι όλα τα ολοκληρώματα που σχετίζονται με τα δa_i (και τα ω_r^2 και $\delta V_r'(r_0(0), \lambda)$) θα αποτελούνται από μέρη που έχουν γραμμική εξάρτηση από το λ , λόγω της μέσης τιμής του ολοκληρώματος, συν έναν ταλαντωτικό όρο, λόγω των η -ταλαντώσεων. Ο ολικός λ -χρόνος της ολοκλήρωσης για να υπολογίσουμε το δa_i θεωρείται πολύ μικρός ώστε να μην χρειάζεται, στην τάξη που ενδιαφερόμαστε, να λάβουμε υπόψη τη συστηματική μετακίνηση της r -συντεταγμένης που προκαλείται από την ιδιοδύναμη, αλλά είναι αρκετά μεγάλος ώστε να καλύπτει το λιγότερο μερικές περιόδους του η . Βεβαίως, για μεγαλύτερες περιόδους, ανώτεροι όροι, από τους γραμμικούς όρους ως προς λ , θα εμφανιστούν. Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα, το Δ θα υπακούει στην παρακάτω γενική εξίσωση:

$$\frac{d^2 \Delta}{d\lambda^2} = - [\omega_0^2 + \epsilon(B\lambda + A_\eta(\lambda))] \Delta - \frac{\epsilon}{e_0} [D\lambda + C_\eta(\lambda) + \dot{r}f_r], \quad (4.18)$$

όπου $\omega_0^2 = \omega_r(0)^2$ και

$$B\lambda + A_\eta(\lambda) = \frac{\delta\omega_r^2}{\epsilon}, \quad (4.19)$$

ενώ

$$D\lambda + C_\eta(\lambda) = \frac{1}{\epsilon} [4\delta a_4 r_0(0)^3 + 3\delta a_3 r_0(0)^2 + 2\delta a_2 r_0(0) + \delta a_1]. \quad (4.20)$$

Οι όροι $B\lambda, D\lambda$ δηλώνουν το γραμμικό μέρος των ολοκληρωμάτων, ενώ τα A_η, C_η δηλώνουν το ταλαντωτικό μέρος των ολοκληρωμάτων λόγω των η -ταλαντώσεων της τροχιάς. Ο τελευταίος όρος στη δεύτερη αγκύλη του δεξιού σκέλους της (4.18) είναι ανώτερης τάξης από τους υπόλοιπους, καθώς είναι ανάλογος του e_0 (ενώ οι άλλοι όροι του $D\lambda$ και $C_\eta(\lambda)$ είναι τάξης μονάδας), οπότε μπορεί να παραλειφθεί. Η εξίσωση (4.18) περιγράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα, ο οποίος είναι εξαναγκασμένος σε ταλάντωση από μία εξωτερική δύναμη η οποία αποτελείται από ένα γραμμικό κομμάτι ως προς τον χρόνο και ένα ταλαντωτικό κομμάτι που προκαλείται από τις η ταλαντώσεις. Ως αποτέλεσμα το Δ θα ταλαντώνεται με συχνότητα που αλλάζει συνεχώς με αδιαβατικό τρόπο, ενώ ταλαντώνεται ελάχιστα σε περιττές αρμονικές για ω_η (καθώς όλες οι συναρτήσεις του η είναι τετραγωνικές λόγω κατοπτρικής συμμετρίας του V_θ). Από την άλλη, η μέση τιμή του Δ μετατοπίζεται αδιαβατικά με το λ (λόγω του όρου $D\lambda$) και εξαναγκάζεται από τον όρο $C_\eta(\lambda)$ που ταλαντώνεται πάλι σε άρτιες αρμονικές του η . Ειδικά, αν $\omega_r = 2m\omega_\eta$ (με m ένας ακέραιος αριθμός), προκύπτει συντονισμός και οι Δ ταλαντώσεις θα οδηγούνται σε αυξανόμενο πλάτος, μέχρι η μεταβολή της ιδιοσυχνότητας να βγάλει το σύστημα και πάλι εκτός συντονισμού. Έτσι το μηχανικό πρόβλημα για την χρονοεξάρτηση του Δ μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση:

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} + [\omega_0^2 + \epsilon_1 t + \epsilon_2 \cos(k\omega_0 t + \phi_1)] \Delta + \epsilon_3 t + \epsilon_4 \cos(k\omega_0 t + \phi_2) = 0, \quad (4.21)$$

όπου $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ είναι μικροί αριθμοί, ϕ_1, ϕ_2 είναι τυχαίες φάσεις, ενώ ο k είναι ένας αριθμητικός παράγοντας που ρυθμίζει αν ικανοποιείται η συνθήκη συντονισμού ή όχι (ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες). Η διαφορά στο πρόσημο της διεγείρουσας δύναμης, σε σχέση με την (4.18) είναι παραπλανητικός: η D παράμετρος στην (4.18) είναι αρνητική για μία αναλωτική δύναμη που οδηγεί την τροχιά πλησιέστερα στην περιοχή του ισχυρού πεδίου. Ο εξαναγκασμένος ταλαντωτής της (4.18) και το απλοποιημένο του μοντέλο (4.21) είναι ελεύθερος από κάθε αποσβεση, έτσι το πλάτος του μπορεί να αυξάνει απεριόριστα, όσο ισχύει η συνθήκη συντονισμού.

Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο ταλαντωτικός όρος $A_\eta(\lambda)$ (4.18) (περιγράφεται στο μοντέλο του αρμονικού ταλαντωτή από τον όρο ϵ_2) θα μπορούσε δυνητικά να οδηγήσει σε παραμετρικό συντονισμό (όταν $\Omega_r/(2\Omega_\theta) = m/2$, με m ακέραιο). Ωστόσο, αυτό είναι αρκετά δύσκολο να 'δουλέψει' καθώς ο παραμετρικός συντονισμός είναι ιδιαίτερα ευαίσθητος στη συνθήκη συντονισμού.

Πηγαίνοντας πίσω στην βασική εξίσωση (4.1), η οποία περιγράφει την εξέλιξη της ακτινικής συντεταγμένης, πρέπει να τονίσουμε ότι αν είχαμε αρχίσει με αρχικές συνθήκες που είναι τέλεια σφαιρικές, δηλ. με $r(0) = r_0(\lambda = 0)$, και $dr(0)/d\lambda = 0$, η εξέλιξη της τροχιακής ακτίνας για απειροστό λ θα ήταν τέτοια όπου η τροχιά θα παρέμενε σφαιρική όπως έδειξαν οι [29] για την περίπτωση της Kerr. Με σκοπό να κάνουμε αυτό το σημείο πιο ξεκάθαρο, ορίζουμε μία μη-σφαιρική παράμετρο ως:

$$S = \left[\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - V_r(r(\lambda), \lambda) \right] \quad (4.22)$$

όπου $V(r(\lambda), \lambda)$ είναι το ακτινικό δυναμικό της ακτινικής συντεταγμένης r , με συντελεστές που εξαρτώνται από την χρονική παράμετρο λ . Τελικά, όσο η ακτινική ταχύτητα είναι μηδενική και η ακτινική συντεταγμένη είναι ρίζα της στιγμιαίας τιμής της πολυωνυμικής έκφρασης για το V_r , και $\partial V_r / \partial r$, τότε η τροχιά παραμένει σφαιρική. Διαφορίζοντας το S ως προς λ στην περίπτωση εξωτερικής δύναμης, παίρνουμε:

$$\frac{dS}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda} \left(2 \frac{d^2 r}{d\lambda^2} - \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial V_r}{\partial \lambda} = 2 \frac{dr}{d\lambda} \epsilon F_r^{(SF)} - \frac{dV_r}{d\lambda}. \quad (4.23)$$

Καθώς η αρχική ακτινική ταχύτητα είναι μηδέν και η αλλαγή στο V_r στην αρχική τιμή του r (η οποία είναι τετραγωνική ρίζα της αρχικής πολυωνυμικής έκφρασης του V_r) επίσης εξαφανίζεται:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} V_r''(r_0, \lambda) (r(\lambda) - r_0(\lambda))^2 \right] \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (4.24)$$

η παράμετρος της μη σφαιρικότητας S δεν έχει αρχικά την τάση να μεταβληθεί από τη μηδενική της τιμή. Έτσι η σταθερά Carter, όπως επίσης και οι άλλες δύο σταθερές, αρχικά εξελίσσονται έτσι ώστε να διατηρηθεί η σφαιρική τροχιά. Από την άλλη αυτό το μηδενικής τάξης επιχείρημα, όπως εξηγούν οι Ori και Kennefick στο [29], δεν είναι επαρκές για να βεβαιώσει την σφαιρική ευστάθεια στο αδιαβατικό όριο μακροπρόθεσμα. Η προηγούμενη ανάλυση δίνει την πλήρη δυναμική εξέλιξη της εκκεντρότητας (μέσω του Δ), η οποία όχι μόνο προβλέπει τη συνθήκη του συντονισμού ($\omega_r = \omega_0 = 2\omega_\eta$) στο να μετατρέψει μια ελαφρώς εκκεντρη τροχιά σε τροχιά με αυξανόμενη εκκεντρότητα, αλλά επίσης εξηγεί την εξέλιξη της εκκεντρότητας μετά την αρχική αύξηση. Πρέπει να τονίσουμε ότι η δυναμική ανάλυση για την εξέλιξη του Δ ισχύει για γενικές περιπτώσεις αδιαβατικής αναλωτικής

ιδιοδύναμης η οποία έχει μία φυσική συμπεριφορά (είναι συναρτήσεις του r και του η^2 , ανεξάρτητα της εξάρτησης από την ταχύτητα $\mathbf{v}$).

Η ομοιότητα μεταξύ του Kerr και του Euler προβλήματος είναι τέτοια ώστε όλη η επιχειρηματολογία ταιριάζει στην ανάλυση της εξέλιξης των σφαιρικών τροχιών και στις δύο περιπτώσεις. Ειδικά η Kerr δεν παρουσιάζει συντονισμό για καμία σφαιρική τροχιά όπως υπονοείται στην [29]. Από την άλλη στο πρόβλημα του Euler, όπου υπάρχουν μικρές αλλά διακριτές ποσοτικές διαφορές από την Kerr, μπορούν να υπάρξουν αρχικές παράμετροι που περιγράφουν μια σφαιρική τροχιά με συντονισμό $\Omega_r = 2\Omega_\theta$.

Έχουμε μελετήσει τέτοιες ταλαντώσεις εκτελώντας αριθμητικές ολοκληρώσεις σε σφαιρικές τροχιές υπό την επίδραση μιας τεχνητής αναλωτικής ιδιοδύναμης, κάποιας απλής τυχαίας μορφής:

$$\mathbf{F}^{(SF)} = -\epsilon a \frac{1 - \eta^2}{r} \mathbf{v}, \quad (4.25)$$

όπου $\mathbf{v}$ είναι η ταχύτητα εκπεφρασμένη στις πεπλατυσμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες. Η μορφή της ιδιοδύναμης έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να οδηγεί σε απώλεια ενέργειας και γωνιακής στροφορμής, ενώ η δύναμή της αυξάνει για μικρές ακτίνες όπου το πεδίο είναι πιο ισχυρό, και εξαρτάται από την η συντεταγμένη με κατοπτρικά συμμετρικό τρόπο. Οι συντελεστές της ιδιοδύναμης στις σφαιροειδείς συντεταγμένες είναι:

$$F_r^{(SF)} = -\epsilon a \sqrt{\frac{r^2 + a^2 \eta^2}{r^2 + a^2}} \frac{(1 - \eta^2) \dot{r}}{r}, \quad (4.26)$$

$$F_\eta^{(SF)} = -\epsilon a \sqrt{\frac{r^2 + a^2 \eta^2}{1 - \eta^2}} \frac{(1 - \eta^2) \dot{\eta}}{r}, \quad (4.27)$$

$$F_\phi^{(SF)} = -\epsilon a \sqrt{(1 - \eta^2)(r^2 + a^2)} \frac{(1 - \eta^2) \dot{\phi}}{r}. \quad (4.28)$$

Η αριθμητική ολοκλήρωση οδηγεί στη χρονική εξέλιξη μιας τροχιάς υπό την δράση της παραπάνω ιδιοδύναμης. Η παράμετρος ϵ έχει μικρή τιμή ($1/1000$), έτσι ώστε η τροχιά να μην αποκλίνει σημαντικά από την αντίστοιχη γεωδαισιακή τροχιά για μια χρονική περίοδο ισοδύναμη με μερικές φορές τη μέγιστη περίοδο όλων των τροχιακών συχνοτήτων. Οι αρχικές συνθήκες της τροχιάς είναι προετοιμασμένες να δίνουν μία σφαιρική τροχιά όταν η αναλωτική δύναμη είναι απύσχα. Επιπλέον διαφορετικές αρχικές συνθήκες έχουν χρησιμοποιηθεί ώστε η τροχιά είτε να ικανοποιεί τη συνθήκη (Ω_θ), είτε όχι. Στα αριθμητικά μας πειράματα παρατηρήσαμε ότι σε όλες οι σφαιρικές τροχιές που δεν ικανοποιούν την συνθήκη συντονισμού, η επίδραση της δύναμης οδηγεί απλά σε μια βαθμιαία μείωση της ακτίνας, χωρίς καμία αύξηση στην εκκεντρότητα, βλ. Σχήμα 4.1(b).

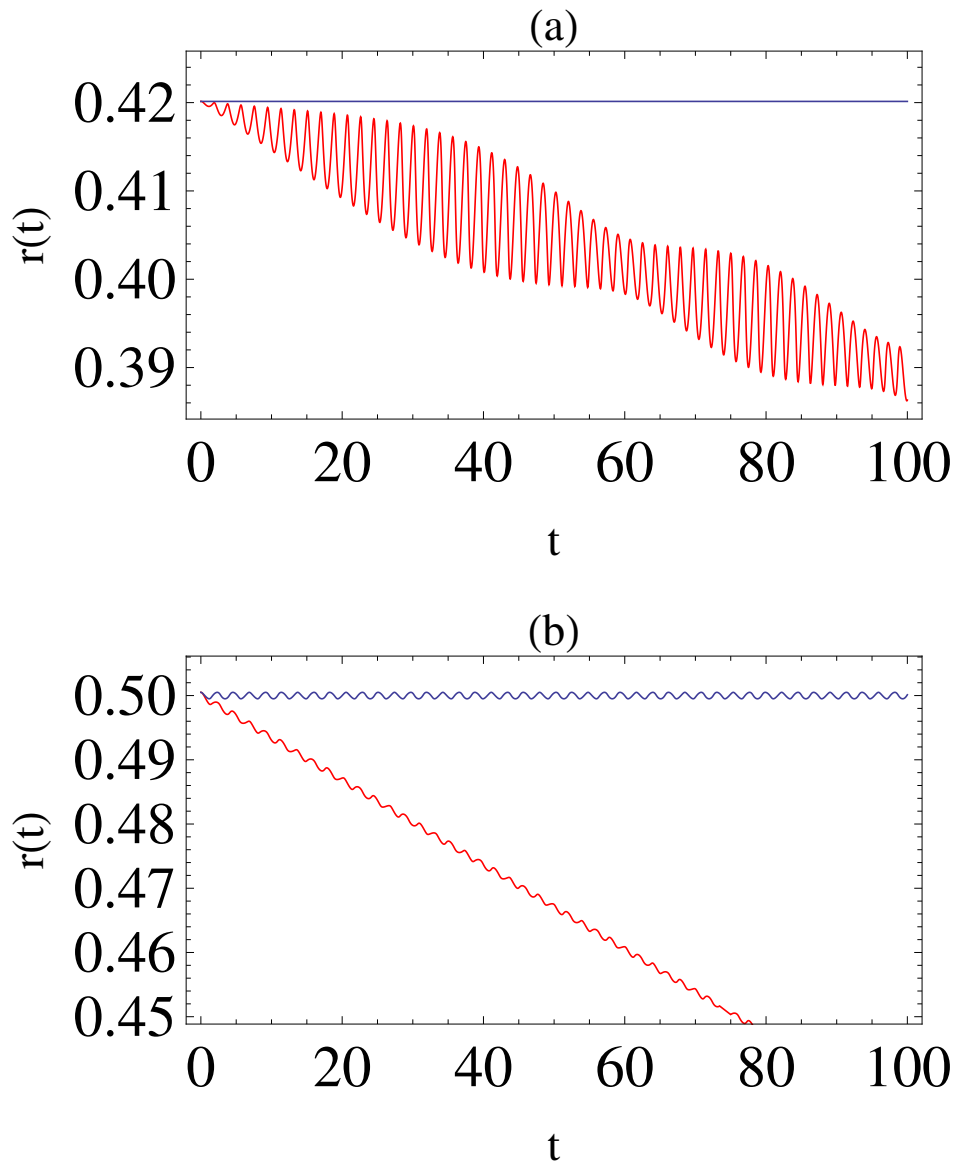
Ωστόσο όταν η αρχική σφαιρική τροχιά ικανοποιεί την συνθήκη συντονισμού, υπάρχει μια αξιοσημείωτη αύξηση της εκκεντρότητας, σχήμα 4.1(α), ενώ η μέση τιμή της ακτίνας της τροχιάς μειώνεται λόγω της καταναλωτικής δύναμης. Η αύξηση της εκκεντρότητας δεν είναι μονότονη. Σε κάποιο σημείο αρχίζει να μειώνεται, όπως ένα διακρότημα. Προφανώς η συνθήκη συντονισμού έχει χαθεί και το πλάτος των ακτινικών ταλαντώσεων αρχίζει να μειώνεται. Πρέπει να τονίσουμε ότι παρόλο που οι αρχικές συνθήκες περιέγραφαν μία τέλεια σφαιρική τροχιά, όταν δεν υπάρχει ιδιοδύναμη, η εμφάνιση της επιπλέον ιδιοδύναμης καταστρέφει την ολοκληρωσιμότητα, και κάποιο είδος αρχικής εκκεντρότητας έχει εμέσως επιβληθεί στην τροχιά. Αυτή η μικρή εκκεντρότητα μπορεί είτε να αυξηθεί (λόγω του συντονισμού) η να παραμείνει μικρή κατά την διάρκεια της εξέλιξης της τροχιάς όταν τα τροχιακά χαρακτηριστικά την κρατάνε μακριά από τον συντονισμό.

Για να δείξουμε την αξιοπιστία του μαθηματικού μας μοντέλου, που περιγράφεται από την (4.21), του απλού εξαναγκασμένου με μεταβλητή συχνότητα αρμονικού ταλαντωτή, έχουμε λύσει αριθμητικά την (4.21) με παραμέτρους: $\omega_0 = 4$, $\epsilon_1 = 0.021$, $\epsilon_2 = 0.01$, $\epsilon_3 = 0.011$, $\epsilon_4 = 0.04$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, και k είτε 1 (συντονισμός) είτε 0.6 (όχι συντονισμός). Η εξέλιξη του Δ , με αρχικές συνθήκες $\Delta(0) = \dot{\Delta}(0) = 0$, παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2. Η εξέλιξη της συμπεριφοράς του Δ μοιάζει με αυτή που έχουμε πάρει στις τροχιές Euler. Προσπαθήσαμε να διεγείρουμε παραμετρικούς συντονισμούς στο μαθηματικό μας μοντέλο, διαλέγοντας $k = 1/2$, αλλά βρήκαμε ότι χρειαζόμαστε πολύ υψηλές, μη φυσικές τιμές του ϵ_2 , για να το πετύχουμε. Έτσι το ταλαντωτικό μέρος του $A_\eta(\lambda)$ φαίνεται να μην παίζει σημαντικό, από πλευράς πρακτικής, ρόλο.

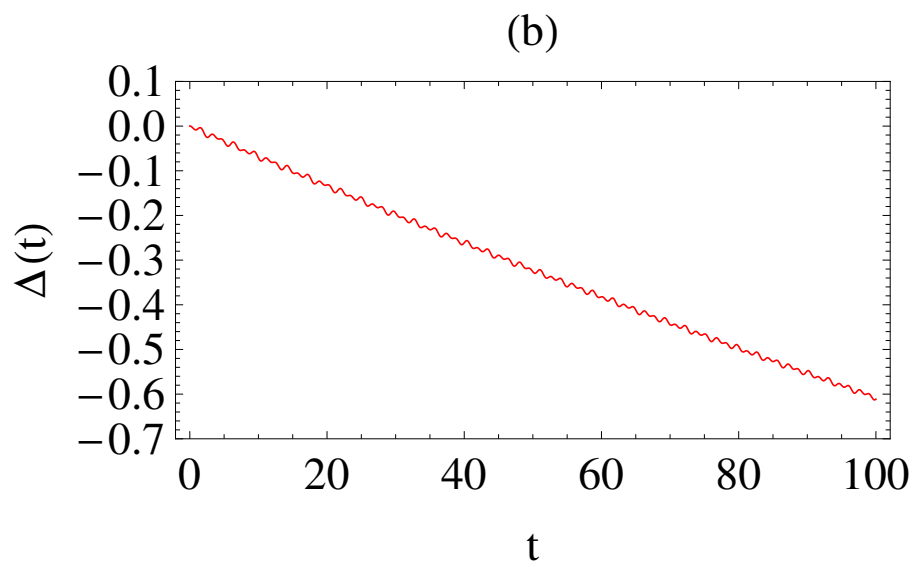
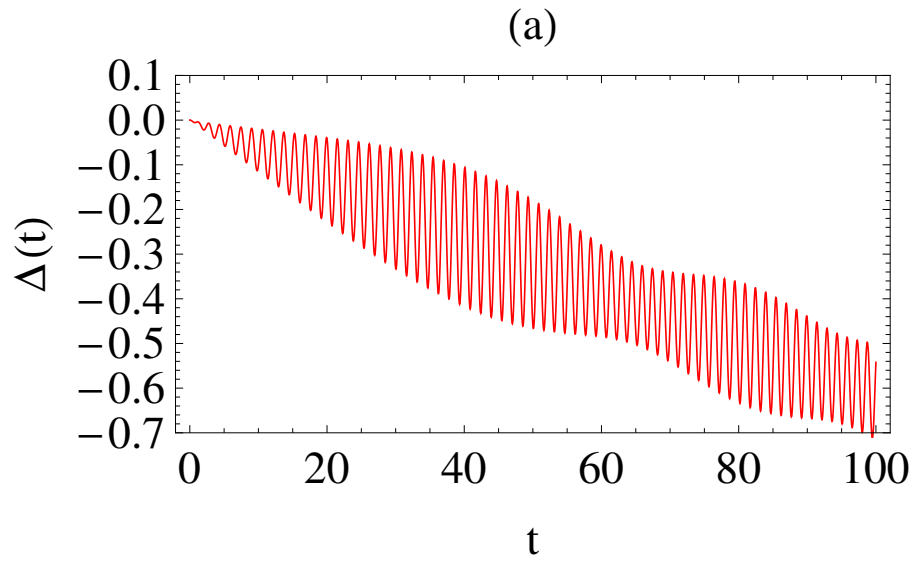
Πριν κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο πρέπει να τονίσουμε πάλι την διαφορά μεταξύ των δύο χρόνων: την τύπου Mino χρονική παράμετρο λ και την κανονική χρονική παράμετρο t . Ως προς λ οι r και η ταλαντώσεις είναι περιοδικές με συχνότητες ω_r και ω_η , αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες ταλαντώσεις ως προς t δεν είναι εν γένει περιοδικές. Σε αυτή την περίπτωση οι θεμελιώδεις συχνότητες είναι Ω_r και Ω_η . Οι δύο τύποι συχνοτήτων δε είναι ίσοι αλλά οι λόγοι τους είναι:

$$\frac{\Omega_r}{\Omega_\eta} = \frac{\omega_r}{\omega_\eta}, \quad (4.29)$$

αφού οι συχνότητες ω_i είναι απλά τα Y_i στοιχεία που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τις θεμελιώδεις συχνότητες στο Παράρτημα Γ'.



Σχήμα 4.1: Το σχήμα δείχνει την εξέλιξη μιας φραγμένης τροχιάς υπό την επίδραση μιας αναλωτικής δύναμης της μορφής (4.25). Η εξέλιξη της τροχιάς έχει υπολογιστεί στον πραγματικό χρόνο, t . Στο διάγραμμα (a) μία γεωδαισιακή τροχιά κυκλική που αρχικά βρίσκεται σε συντονισμό. Η μπλε καμπύλη είναι η εξέλιξη της ακτίνας όταν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη. Η κόκκινη καμπύλη δείχνει την εξέλιξη υπό την παρουσία ιδιοδύναμης. Λόγο του συντονισμού η ακτινικές ταλαντώσεις διεγείρονται ενώ η ακτίνα μειώνεται. Στο διάγραμμα (b) έχει σχεδιαστεί η εξέλιξη της τροχιάς όταν δεν υπάρχει συντονισμός. Εάν η δύναμη είναι απύουσα (μπλε γραμμή) η τροχιά ταλαντώνεται ελάχιστα. Όταν υπάρχει ιδιοδύναμη (κόκκινη καμπύλη) η ακτίνα μειώνεται χωρίς να αυξάνει η εκκεντρότητά της.



Σχήμα 4.2: Η εξέλιξη του αρμονικού ταλαντωτή (4.21) με μεταβλητή συχνότητα και διέγερση σε συντονισμό (a) και σε μη συντονισμό (b).

Κεφάλαιο 5

Το μη ολοκληρώσιμο πρόβλημα του Euler

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια παραλλαγή του πεπλατυσμένου προβλήματος του Euler η οποία καθιστά το πρόβλημα μη ολοκληρώσιμο. Αν τοποθετήσουμε μια μικρή μάζα ανάμεσα στα δύο βαρυτικά κέντρα του προβλήματος Euler, οι αντίστοιχες τροχιές δοκιμαστικών σωματιδίων θα πάψουν να χαρακτηρίζονται από τρία ολοκληρώματα κίνησης και επομένως η τροχιά δεν μπορεί να λυθεί με απλή ολοκλήρωση, αλλά μόνο αριθμητικά. Το πρόβλημα αποκτά επίσης χαοτική συμπεριφορά –έχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες– για κάποιες τουλάχιστον από αυτές.

5.1 Το δυναμικό

Η παρουσία μιας μικρής μάζας m στο σημείο $(0, 0, 0)$, ανάμεσα στις δύο μάζες $M/2$ που βρίσκονται στα σημεία $(0, 0, ia)$ και $(0, 0, -ia)$, αντίστοιχα, αλλάζει το δυναμικό του Euler ως ακολούθως:

$$V(r_1, r_2) = -\frac{GM}{2r_1} - \frac{GM}{2r_2} - \frac{Gm}{r}, \quad (5.1)$$

ενώ στις πεπλατυσμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες γίνεται:

$$V(\xi, \eta) = -\frac{GM\xi}{a(\xi^2 + \eta^2)} - \frac{Gm}{a\sqrt{1 + \xi^2 - \eta^2}}. \quad (5.2)$$

Η Λαγκραζιανή ανά μονάδα μάζας είναι αυτή που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 1 αλλά με το καινούργιο δυναμικό:

$$L = \frac{1}{2}a^2 \left[\dot{\xi}^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + 1} + \dot{\eta}^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2} + \dot{\phi}^2 (\xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \right] - V(\xi, \eta). \quad (5.3)$$

Έτσι οι εξισώσεις κίνησης, τις οποίες θα πρέπει να λύσουμε αριθμητικά, διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \left(-\dot{\xi}^2 \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1} + \dot{\eta}^2 \frac{\xi^2 + 1}{1 - \eta^2} \right) - \frac{2\eta\dot{\eta}\dot{\xi}}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\xi(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \dot{\phi}^2 \\
&\quad - \frac{GM}{a^3} \frac{(\xi^2 + 1)(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^3} - \frac{Gm}{a^3} \frac{\xi(\xi^2 + 1)}{(\xi^2 + \eta^2)\sqrt{(1 + \xi^2 - \eta^2)^3}}, \\
\ddot{\eta} &= -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \left(-\dot{\xi}^2 \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1} + \dot{\eta}^2 \frac{\xi^2 + 1}{1 - \eta^2} \right) - \frac{2\xi\dot{\eta}\dot{\xi}}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\eta(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \dot{\phi}^2 \\
&\quad - \frac{GM}{a^3} \frac{2\xi\eta(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^3} - \frac{Gm}{a^3} \frac{\eta(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)\sqrt{(1 + \xi^2 - \eta^2)^3}}, \\
\ddot{\phi} &= \left(-\frac{2\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + 1} + \frac{2\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} \right) \dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Ομοίως η Χαμιλτονιανή ενός δοκιμαστικού σωματιδίου που κινείται στο πεπλατυσμένο δυναμικό του Euler είναι:

$$H = \frac{1}{2a^2} \left[p_\xi^2 \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2} + p_\eta^2 \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \right] + V(\xi, \eta), \tag{5.5}$$

όπου οι ορμές είναι αυτές που ορίστηκαν στην (1.31) και το δυναμικό αυτό το ορίσαμε παραπάνω (5.2). Η Χαμιλτονιανή του μη ολοκληρώσιμου προβλήματος εξακολουθεί να είναι ανεξάρτητη της χρονικής παραμέτρου t και της αξιμουθιακής συντεταγμένης ϕ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο σταθερές κίνησης, η ενέργεια $E = H$ και η συνιστώσα της γωνιακής στροφορμής κατά τον άξονα συμμετρίας $L_z = p_\phi$:

$$E = \frac{1}{2a^2} \left[p_\xi^2 \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2} + p_\eta^2 \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \right] + V(\xi, \eta), \tag{5.6}$$

$$L_z = a^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)\dot{\phi}. \tag{5.7}$$

Ωστόσο, όπως προείπαμε, δεν υπάρχει και τρίτο ολοκλήρωμα κίνησης το οποίο θα καθιστούσε το σύστημα ολοκληρώσιμο.

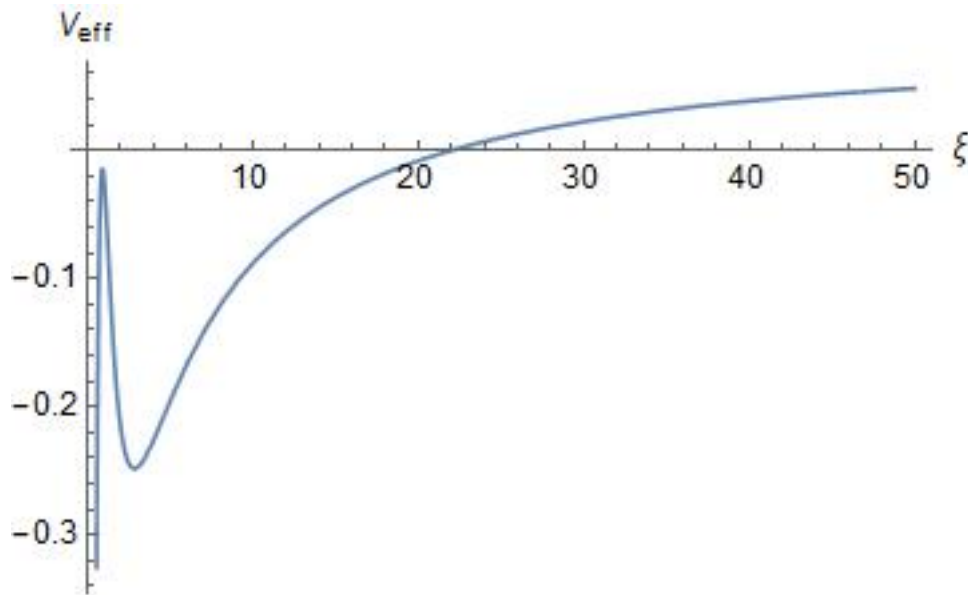
Ένα χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη αξονικά συμμετρικών στάσιμων βαρυτικών πεδίων είναι το ενεργό δυναμικό εκπεφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + V_{\text{eff}}(\rho, z) = 0, \tag{5.8}$$

όπου το ενεργό δυναμικό ορίζεται ως:

$$V_{\text{eff}} = \frac{L_z^2}{2\rho^2} - \frac{GM r_a^3}{r_a^4 + a^2 z^2} - \frac{Gm}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - E. \tag{5.9}$$

$r_a^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(\rho^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2})$ Η καμπύλη $V_{\text{eff}} = 0$ καθορίζει την περιοχή των επιτρεπόμενων τροχιών. Οι τροχιές μπορούν να κινηθούν μόνο στο εσωτερικό αυτής της καμπύλης (όχι κατ' ανάγκη σε ολόκληρη την έκταση αυτής) όπου το ενεργό δυναμικό είναι αρνητικό. Όταν η τροχιά φτάσει στην καμπύλη $V_{\text{eff}} = 0$, οι ταχύτητες $\dot{\rho}$ και $\dot{z}$ μηδενίζονται ταυτόχρονα. Γι' αυτό το λόγο αυτή η καμπύλη ονομάζεται *καμπύλη μηδενικής ταχύτητας*.



Σχήμα 5.1: Το ενεργό δυναμικό στο ισημερινό επίπεδο για $a = 0.7M$ σταθερές κίνησης $E = -0.09$ και $L_z = 1.89$.

5.2 Μη ολοκληρώσιμα και ελαφρώς μη ολοκληρώσιμα συστήματα

Μέθοδοι με τις οποίες μελετάμε μη ολοκληρώσιμα δυναμικά συστήματα είναι:

1. οι τομές Poincaré,
2. η ανάλυση συχνοτήτων.

Σε ένα ολοκληρώσιμο σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας οι φραγμένες τροχιές εξελίσσονται πάνω σε έναν 2×2 τόρο μέσα στον τετραδιάστατο χώρο των φάσεων. Οι τιμές των σταθερών κίνησης χαρακτηρίζουν πλήρως τους τόρους. Αν θεωρήσουμε μία διδιάστατη επιφάνεια η οποία να τέμνει τους τόρους (τομή Poincaré), ορίζεται μια κλειστή καμπύλη πάνω σε αυτήν την επιφάνεια. Αυτή η καμπύλη ονομάζεται αναλλοίωτη καμπύλη (*invariant curve*). Κάθε τέτοιος τόρος αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι θεμελιωδών συχνοτήτων. Οι συχνότητες, αλλά και ο λόγος τους, αλλάζει με συνεχή τρόπο από τον ένα τόρο στον επόμενο. Αν ο λόγος των συχνοτήτων είναι ένας άρρητος αριθμός, η τροχιά περιελίσσεται γύρω από τον αντίστοιχο τόρο καλύπτοντας σταδιακά όλη την επιφάνειά του. Στην περίπτωση, όμως, που ο λόγος των συχνοτήτων είναι ένας ρητός αριθμός p/q (συντονισμός $p \div q$), η τροχιά επαναλαμβάνεται μετά από ακέραιο αριθμό περιελίξεων στον αντίστοιχο τόρο. Με άλλα λόγια, η τροχιά είναι περιοδική. Η αναλλοίωτη καμπύλη της τομής Poincaré, αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό σημείων, τα οποία διαφοροποιούνται επί της αναλλοίωτης καμπύλης, αν αλλάξουμε την αρχική συνθήκη επί του τόρου.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), αν ένα ολοκληρώσιμο σύστημα διαταραχθεί ελαφρά, οι περισσότεροι από τους τόρους του παραμορφώνονται αλλά δεν καταστρέφονται. Αυτοί ονομάζονται τόροι KAM. Στους τόρους KAM ο λόγος των συχνοτήτων είναι άρρητος και αλλάζει από την μία καμπύλη στην άλλη. Έτσι η αντίστοιχη επιφάνεια της τομής μοιάζει με την επιφάνεια της τομής του αντίστοιχου ολοκληρώσιμου συστήματος, με ελαφρώς διαφοροποιημένο σχήμα. Οι αναλλοίωτες καμπύλες ονομάζονται

KAM καμπύλες.

Ωστόσο, σύμφωνα με το θεώρημα Poincaré-Birkhoff, όταν το σύστημα διαταραχθεί ελαφρά, παύοντας να είναι ολοκληρώσιμο, οι τροχιές του αρχικά ολοκληρώσιμου συστήματος που βρίσκονταν σε συντονισμό παραμορφώνονται σε τέτοιο βαθμό ώστε οι αναλλοίωτες καμπύλες καταστρέφονται και από αυτές μόνο ένας άρτιος αριθμός περιοδικών σημείων επιβιώνει. Τα μισά από αυτά τα περιοδικά σημεία είναι ευσταθή και τα άλλα μισά είναι ασταθή. Τα ευσταθή και ασταθή σημεία βρίσκονται εναλλάξ κατά μήκος της προηγούμενης αναλλοίωτης καμπύλης, δημιουργώντας μία αλυσίδα Birkhoff. Γύρω από ένα ευσταθές περιοδικό σημείο υπάρχει ένα σύνολο από KAM καμπύλες όπου δημιουργούν μία νησίδα σταθερότητας. Κάθε τροχιά που ανήκει στην αλυσίδα των νησίδων χαρακτηρίζεται από τον ίδιο ρητό λόγο συχνοτήτων, ανεξάρτητα από την καμπύλη KAM της νησίδας στην οποία ανήκει. Τέλος υπάρχει μια στενή περιοχή γύρω από την αλυσίδα των νησίδων Birkhoff, κυρίως κοντά στα ασταθή σημεία, όπου οι τροχιές είναι χαοτικές. Η περιοχή αυτή είναι μεταβατική μεταξύ των νησίδων που αντιστοιχούν σε ρητό λόγο συχνοτήτων και των αναλλοίωτων καμπυλών που αντιστοιχούν σε άρρητο λόγο συχνοτήτων.

Οι νησίδες ευστάθειας Birkhoff είναι πολύ λεπτές και η ανίχνευσή τους στην επιφάνεια των τομών είναι απαιτητική υπολογιστικά. Μια μέθοδος χρήσιμη στην μελέτη μη ολοκληρώσιμων συστημάτων είναι αυτή του αριθμού περιστροφής (rotation number). Ο αριθμός περιστροφής n ορίζεται ως η μέση τιμή των γωνιών περιστροφής θ_i , μεταξύ δύο διαδοχικών τομών Poincaré κατά μήκος μιας αναλλοίωτης καμπύλης, κανονικοποιημένη στη μονάδα:

$$n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{i=1}^N \theta_i \quad (5.10)$$

Οι γωνίες περιστροφής υπολογίζονται ως εξής: βρίσκουμε πρώτα το σταθερό σημείο u_0 γύρω από το οποίο έχει σχηματισθεί η κύρια νησίδα, ορίζουμε το διάνυσμα θέσης $R_i = u_i - u_0$ του σημείου u_i ως προς το u_0 στην επιφάνεια τομής και υπολογίζουμε τις γωνίες $\theta_i = \text{angle}(R_{i+1}, R_i)$ μεταξύ διαδοχικών απεικονίσεων μιας τροχιάς πάνω στην επιφάνεια τομής. Ο αριθμός περιστροφής ισούται με το λόγο των συχνοτήτων:

$$n = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (5.11)$$

Ο αριθμός περιστροφής είναι μονότονη συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο u_0 της κύριας νησίδας και ορίζει προσεγγιστικά μια λεία καμπύλη. Η καμπύλη αυτή είναι γνησίως μονότονη για τις καμπύλες KAM που περικλείουν το κέντρο της νησίδας, στις οποίες ο n λαμβάνει άρρητες τιμές. Η γνησίως μονότονη εξέλιξη της διακόπτεται από τις νησίδες ευσταθών περιοδικών τροχιών, όπου η τιμή του n στις περιπτώσεις αυτές είναι ρητή και σταθερή για όλες τις τροχιές που ανήκουν στη νησίδα, δημιουργώντας έτσι ένα πλατώ. Μέσα στην νησίδα ευστάθειας, ο λόγος των συχνοτήτων παραμένει σταθερός.

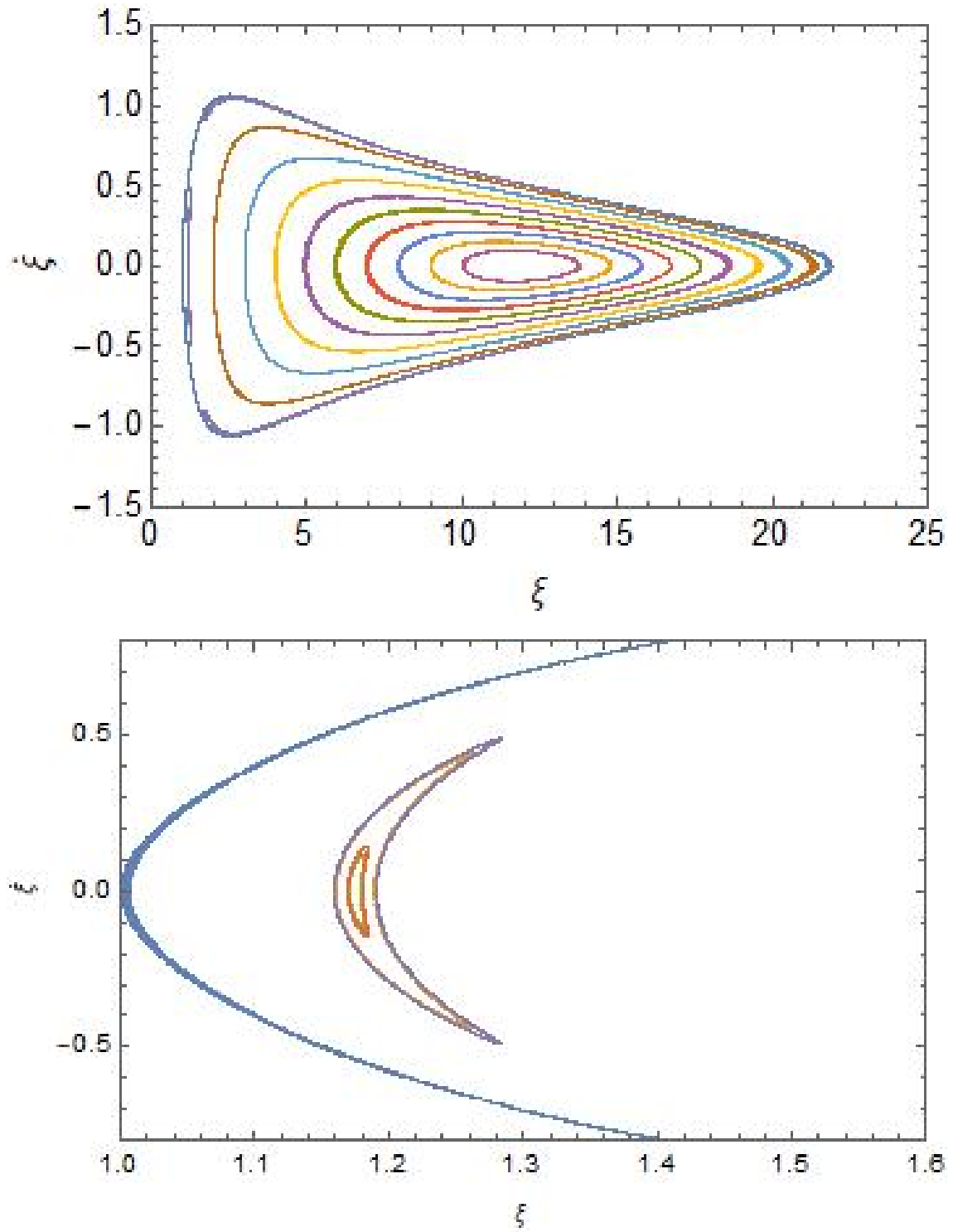
5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Κατασκευάσαμε τομές Poincaré για το μη ολοκληρώσιμο πρόβλημα του Euler, βλ. Σχήμα 5.2. Συγκεκριμένα μελετήσαμε την επιφάνεια της τομής $\eta = 0$ με $\dot{\eta} > 0$ στο επίπεδο $(\xi, \dot{\xi})$. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρκετές KAM καμπύλες και μόνο μία αλυσίδα νησίδων ευστάθειας, που αντιστοιχούν στον συντονισμό $1/3$. Οι νησίδες (τρεις στον αριθμό) είναι

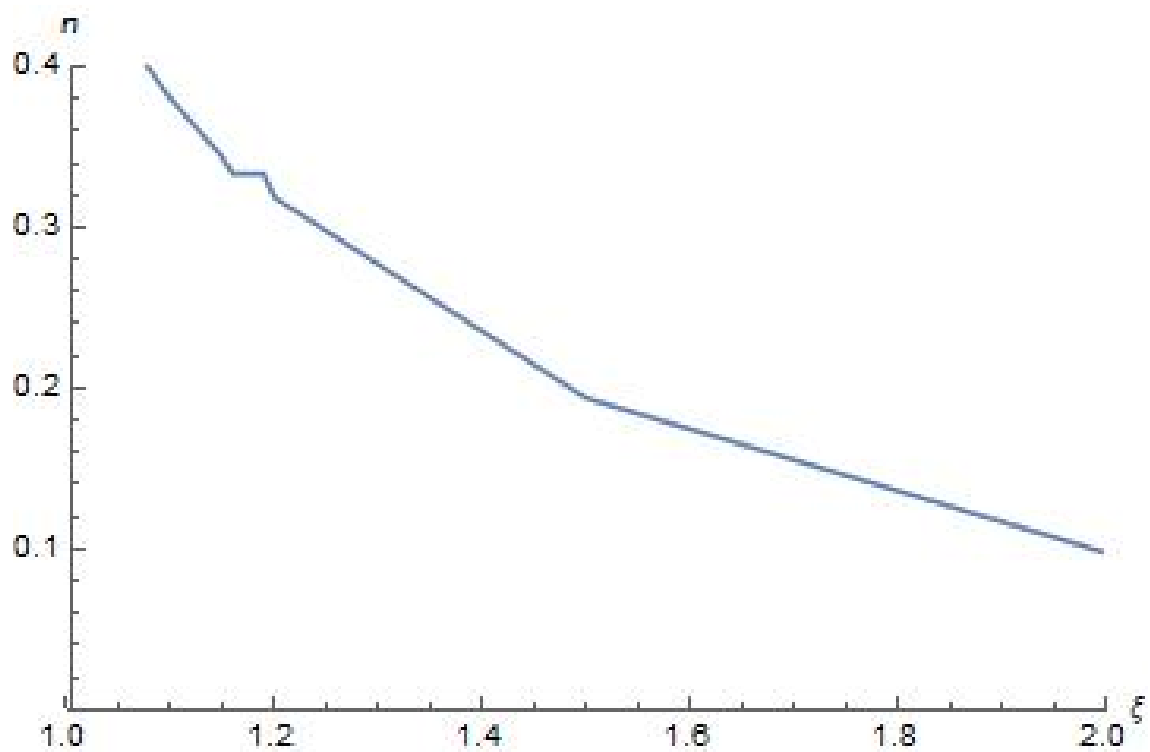
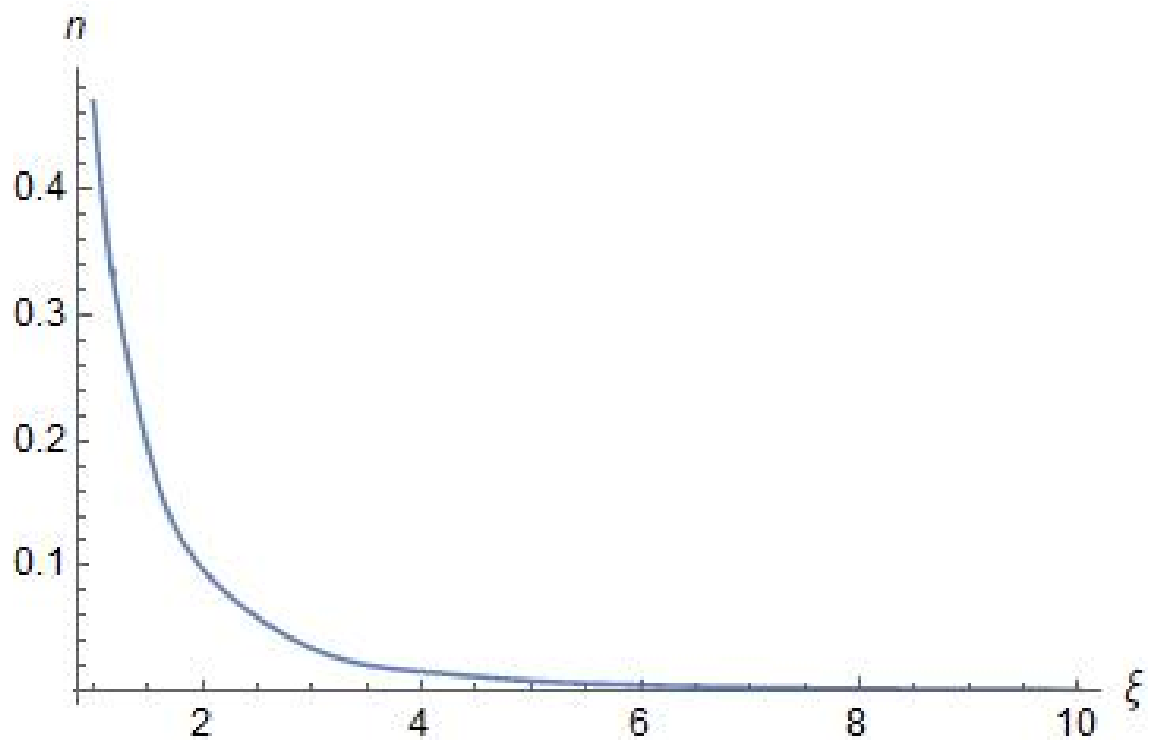
πολύ λεπτές γι' αυτό στο Σχήμα 5.2 έχουμε εστιάσει σε μία από αυτές. Η ύπαρξη των νησίδων, αυτή καθεαυτή, είναι ένδειξη ότι το σύστημα είναι μη ολοκληρώσιμο. Στην πραγματικότητα υπάρχουν και άλλες αλυσίδες νησίδων, ωστόσο η ανίχνευσή τους είναι αρκετά πιο δύσκολη. Για τον εντοπισμό των νησίδων στο Σχήμα 5.2, εκμεταλλευτήκαμε τη χρήση του αριθμού περιστροφής (rotation number), ο οποίος είναι ένας σταθερός ρητός αριθμός για όλες τις τροχιές που βρίσκονται εντός μιας νησίδας, βλ. Σχήμα 5.3. Για να υπολογίσουμε τον αριθμό περιστροφής ξεκινήσαμε από τις κεντρικές KAM καμπύλες και κινηθήκαμε προς το $\xi = 0$ κατά μήκος της γραμμής $\xi = 0$. Η καμπύλη του αριθμού περιστροφής είναι μονότονη (φθίνουσα) ως συνάρτηση του ξ , αλλά εμφανίζει ένα πλατώ όπου ο αριθμός περιστροφής σταθεροποιείται κοντά στο $\xi = 1.17$. Η σταθερή τιμή είναι $n = 1/3$.

5.4 Ιδιοδύναμη

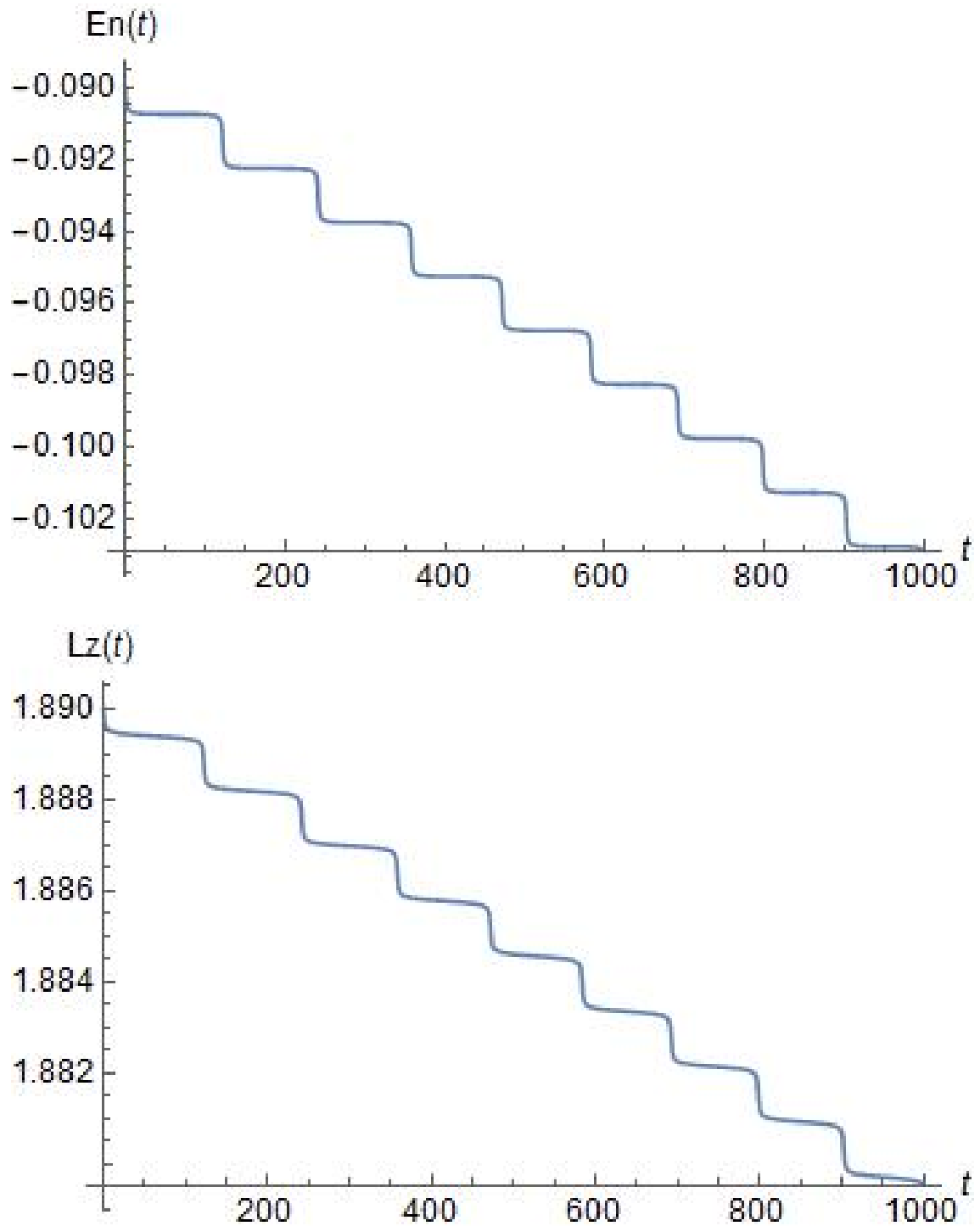
Απώτερος στόχος της μελέτης του μη ολοκληρώσιμου προβλήματος είναι να μελετήσουμε την εξέλιξή του υπό την επίδραση μιας αναλωτικής ιδιοδύναμης, ανάλογης αυτής που οφείλεται στη βαρυτική ακτινοβολία. Θα εξελίξουμε το σύστημα όταν αυτό βρίσκεται κοντά σε συντονισμό υπό την επίδραση μιας αναλωτικής δύναμης όπως η (4.26) και θα μετρήσουμε αριθμητικά τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας και της στροφορμής. Αφού υπολογίσουμε τον μέσο όρο των ρυθμών αυτών θα ξαναεξελίξουμε το ίδιο σύστημα αλλά όχι υπό την επίδραση της αναλωτικής δύναμης αυτή τη φορά, αλλά μέσω της μέσης μείωσης της ενέργειας και της στροφορμής. Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε αν οι δύο εξελίξεις παρουσιάζουν διαφορές. Ενώ στην περίπτωση που βρισκόμαστε μακριά από συντονισμό αναμένει κανείς παρόμοιες εξελίξεις, στην περίπτωση του συντονισμού η λήψη της μέσης τιμής δεν αναμένεται να επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό που δεν είναι γνωστό είναι σε ποιο βαθμό θα διαφέρουν οι δύο εξελίξεις. Η μελέτη αυτή εφαρμοζόμενη στο νευτώνειο ανάλογο της Kerr πρόβλημα, αναμένεται να μας δώσει μια ποιοτική απάντηση στο ερώτημα αν το φαινόμενο του πλατώ που μελετήθηκε στο [31] και βασιζόταν στις μέσες απώλειες ενέργειας και στροφορμής θα είναι στην πραγματικότητα (λόγω της στιγμιαίας δράσης της ιδιοδύναμης) περισσότερο ή λιγότερο ενισχυμένο. Στην περίπτωση που θα είναι περισσότερο ενισχυμένο, το φαινόμενο του πλατώ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένα πολύ καλό εργαλείο για την εξερεύνηση ύπαρξης αστροφυσικών υπερσυμπαγών σωμάτων που διαφοροποιούνται από τις μελανές οπές της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.



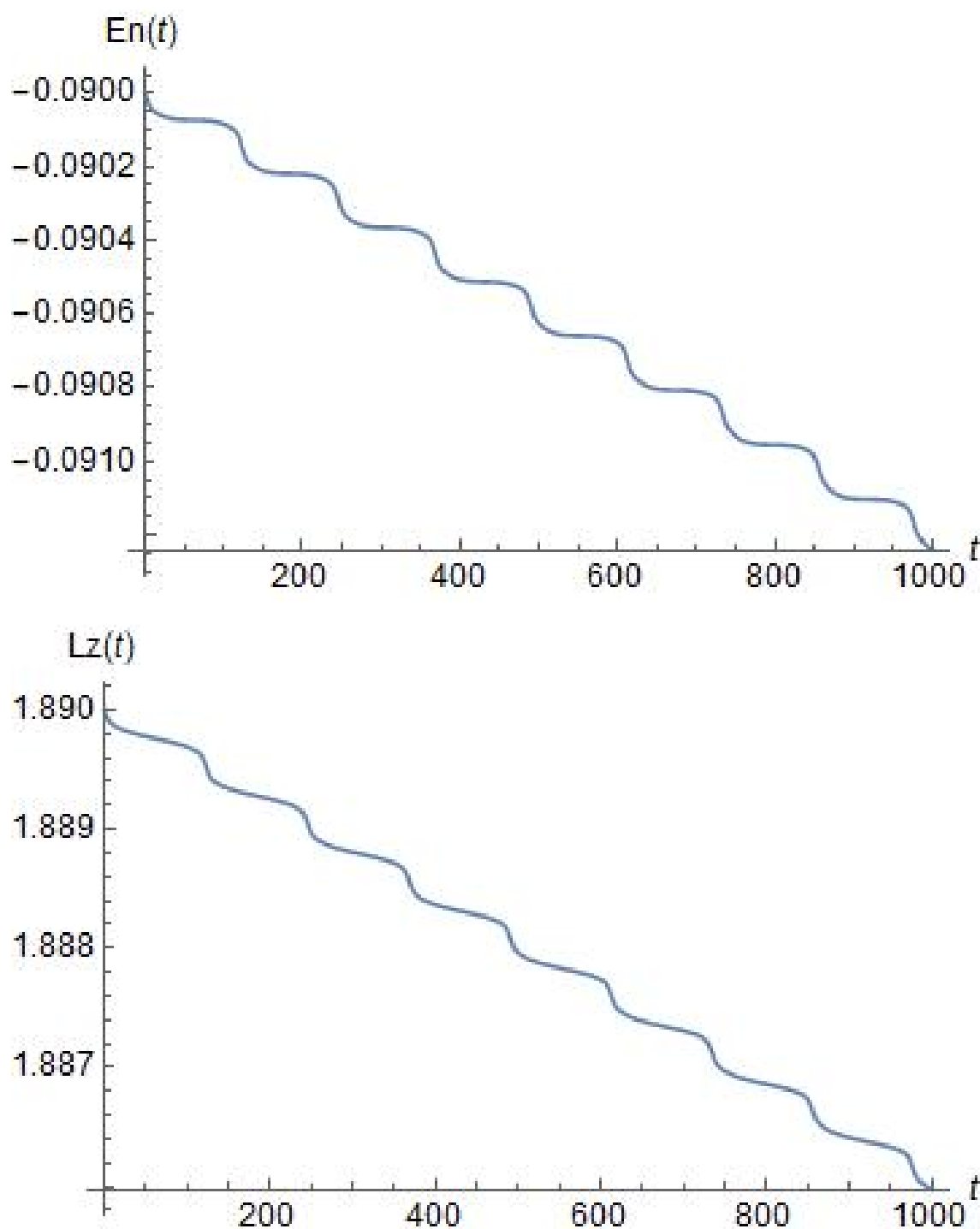
Σχήμα 5.2: Πάνω: Τομές Poincaré στο επίπεδο $\eta = 0$ με $\dot{\eta} > 0$ και σταθερές κίνησης $E = -0.09$ και $L_z = 1.89$. Κάτω: εστίαση στη νησίδα που αντιστοιχεί στον συντονισμό $1 \div 3$. $a = 0.7M$



Σχήμα 5.3: Πάνω: Ο αριθμός περιστροφής που αντιστοιχεί στις τομές Poincaré του διαγράμματος 5.2. Κάτω: Εστίαση στην περιοχή του συντονισμού (της νησίδας) όπου διακρίνεται το πλατώ. Η μη ομαλή συμπεριφορά της καμπύλης (εκτός του πλατώ) οφείλεται στη διακριτότητα των σημείων που έχουμε επιλέξει για να υπολογίσουμε τον αριθμό περιστροφής. $a = 0.7M$



Σχήμα 5.4: Πάνω: Η εξέλιξη της ενέργειας μιας τροχιάς σε συντονισμό ($1 \div 3$) με αρχικές συνθήκες $E = -0.09$, $L_z = 1.89$, $\xi(0) = 1.17$ και $\eta(0) = 0$. Κάτω: Η εξέλιξη της γωνιακής στροφορμής της ίδιας τροχιάς ($a = 0.7M$).



Σχήμα 5.5: Πάνω: Η εξέλιξη της ενέργειας μιας τροχιάς με άρρητο λόγο συχνοτήτων και αρχικές συνθήκες $E = -0.09$, $L_z = 1.89$, $\xi(0) = 5$ και $\eta(0) = 0$. Κάτω: Η εξέλιξη της γωνιακής στροφορμής της ίδιας τροχιάς ($a = 0.7M$).

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Σε αυτήν τη διδακτορική διατριβή μελετήσαμε ένα νευτώνειο βαρυτικό πεδίο το οποίο παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με το σχετικιστικό βαρυτικό πεδίο μιας Kerr μελανής οπής. Η θεμελειώδης ιδιότητα που καθιστά τα δύο προβλήματα τόσο όμοια είναι η ολοκληρωσιμότητα και η διαχωρισιμότητα, η οποία χαρακτηρίζεται από τρεις σταθερές κίνησης, με την φυσική τους σημασία ανάλογη στις δύο περιπτώσεις. Οι τρεις αυτές σταθερές κίνησης είναι η ενέργεια, η γωνιακή στροφορμή και μια τρίτη σταθερά η οποία είναι διγραμμική στις ορμές.

Προσπαθήσαμε να παρουσιάσουμε μια πλήρη λίστα με τις ομοιότητες μεταξύ των δύο προβλημάτων, λαμβάνοντας υπ' όψη τις ενδογενείς διαφορές τους. Αυτές οι ομοιότητες είναι:

- 1) Η διαχωρισιμότητα των δύο προβλημάτων οδηγεί τα δυναμικά $V_r(r)$ και $V_\theta(\theta)$ που περιγράφουν την τροχιακή δυναμική να έχουν κοινές ιδιότητες: το V_θ έχει ακριβώς την ίδια μορφή και στα δύο προβλήματα, ενώ το V_r είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού.
- 2) Η κυματική εξίσωση διαχωρίζεται και στα δύο πεδία με ανάλογα χαρακτηριστικά.
- 3) Η πολυπολική δομή είναι η ίδια.
- 4) Οι φραγμένες τροχιές περιγράφουν ακτινικές και πολικές ταλαντώσεις.
- 5) Η ύπαρξη ISCO και στα δύο προβλήματα.
- 6) Οι φραγμένες τροχιές χαρακτηρίζονται από τρεις συχνότητες και στα δύο προβλήματα. Οι εκφράσεις των συχνοτήτων έχουν πορόμοια μορφή.

Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις παραπάνω ομοιότητες, χρησιμοποιήσαμε το Νευτώνειο πρόβλημα για να εξηγήσουμε την ευστάθεια των σφαιρικών τροχιών υπό την επίδραση της ιδιοδύναμης λόγω βαρυτικής ακτινοβολίας στην σχετικιστική περίπτωση, σύμφωνα με την οποία οι σφαιρικές τροχιές παραμένουν σφαιρικές. Αναλύσαμε τη δυναμική εξέλιξη των ακτινικών ταλαντώσεων υπό την επίδραση κάποιας εξωτερικής δύναμης στο Νευτώνειο πεδίο και καταλήξαμε σε ένα απλό μοντέλο αρμονικού ταλαντωτή. Όταν η τροχιά βρεθεί στον συντονισμό $\Omega_r = 2k\Omega_\theta$ (με k ακέραιο) οι ακτινικές ταλαντώσεις διεγείρονται. Αυτή η ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ώστε να εξηγηθεί η αδιαβατική εξέλιξη των τροχιών στην σχετικιστική περίπτωση. Στην σχετικιστική περίπτωση ωστόσο ο συντονισμός που διεγείρει ταλαντώσεις δεν συναντάται. Αντιθέτως στο Νευτώνειο πρόβλημα ένας τέτοιος συντονισμός είναι εφικτός, γεγονός που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έλεγχος του μοντέλου αρμονικού ταλαντωτή που κατασκευάσαμε.

Πιστεύουμε ότι η αναλογία που παρουσιάσαμε μπορεί να επεκταθεί και στην μελέτη του

αδιαβατικού, λόγω βαρυτικής ακτινοβολίας, περάσματος μιας τροχιάς γύρω από μία μελανή οπή διαμέσου ενός συντονισμού. Το Νευτώνειο ανάλογο αποτελεί ένα καλό εργαλείο, για να μελετήσουμε αυτό το περίπλοκο θέμα στην αντίστοιχη σχετικιστική περίπτωση. Επίσης μπορούμε να μελετήσουμε ένα ελαφρώς μη ολοκληρώσιμο σύστημα, που θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε μια διαταραγμένη μελανή οπή. Το Νευτώνειο πρόβλημα μπορεί να τροποποιηθεί αναλόγως σε ένα μη ολοκληρώσιμο πρόβλημα, τοποθετώντας μια μικρή μάζα ανάμεσα στα δύο βαρυτικά κέντρα.

Παράρτημα Α΄

Συντεταγμένες

Για την μελέτη του προβλήματος Euler θα χρησιμοποιήσουμε τις πεπλατυσμένες σφαιρωειδείς συντεταγμένες (ξ, η, ϕ) , οι οποίες ορίζονται, σε σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, ως εξής:

$$\begin{aligned}x &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\cos\phi \\y &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\sin\phi \\z &= a\xi\eta\end{aligned}$$

με $\xi \in [0, +\infty)$, $\eta \in [-1, 1]$ και ϕ η γνωστή αζιμουθιακή γωνία.

Επίσης δίνονται οι σχέσεις που συνδέουν τις πεπλατυσμένες σφαιρωειδείς συντεταγμένες με τις:

1. κυλινδρικές $(\rho, z, \phi) \rightarrow (\xi, \eta, \phi)$:

$$\begin{aligned}\rho &= a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)} \\z &= a\xi\eta \\ \phi &= \phi\end{aligned}$$

2. σφαιρικές $(r, \theta, \phi) \rightarrow (\xi, \eta, \phi)$

$$\begin{aligned}r &= a\sqrt{\xi^2 - \eta^2 + 1} \\ \cos\theta &= \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2 + 1}} \\ \phi &= \phi\end{aligned}$$

καθώς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός $(\xi, \eta, \phi) \rightarrow (r, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2a^2}} \\ \eta &= \text{sign}(\cos\theta)\sqrt{\frac{R^2 - (r^2 - a^2)}{2a^2}}\end{aligned}$$

όπου $R^2 = \sqrt{(r^2 - a^2)^2 + (2arz)^2}$

Η απόσταση ενός σημείου από τις δύο εστίες είναι:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - ia) \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{r}_2 &= \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z + ia) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

όπου προκύπτει $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2^*$ και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}$ η αντίστοιχη κυλινδρική συντεταγμένη. Τα μήκη των παραπάνω αποστάσεων είναι:

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{\vec{\mathbf{r}}_1 \vec{\mathbf{r}}_1} = a(\xi - i\eta) \\ r_2 &= \sqrt{\vec{\mathbf{r}}_2 \vec{\mathbf{r}}_2} = a(\xi + i\eta)\end{aligned}$$

λύνοντας ως προς ξ και η έχουμε:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{r_1 + r_2}{2a} \\ \eta &= \frac{r_2 - r_1}{2a}\end{aligned}$$

Οι παράγοντες κλίμακας είναι:

$$\begin{aligned}h_\xi &= \alpha \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2}} \\ h_\eta &= \alpha \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}} \\ h_\phi &= \alpha \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}.\end{aligned}$$

Το διάνυσμα θέσης σε καρτεσιανά μοναδιαία διανύσματα είναι:

$$\vec{\mathbf{r}} = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + a\xi\eta \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A'.1})$$

Τα διανύσματα βάσης των πεπλατισμένων σφαιροειδών συντεταγμένων ως συνάρτηση των μοναδιαίων καρτεσιανών είναι:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\xi}} &= \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \xi \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \xi \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \eta \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{\xi^2 + \eta^2}} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\eta}} &= -\sqrt{\frac{1 + \xi^2}{\xi^2 + \eta^2}} \eta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} - \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{\xi^2 + \eta^2}} \eta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \xi \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

ενώ οι παραγωγοί τους ως προς τον χρόνο είναι:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}} &= \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\xi \dot{\eta} \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 - \eta^2}} - \dot{\xi} \eta \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1}} \right) \hat{\boldsymbol{\eta}} + \xi \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} &= -\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\xi \dot{\eta} \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 - \eta^2}} - \dot{\xi} \eta \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1}} \right) \hat{\boldsymbol{\xi}} - \eta \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2}} \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} &= \dot{\phi} \left(-\xi \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1}} \hat{\boldsymbol{\xi}} + \eta \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{1 - \eta^2}} \hat{\boldsymbol{\eta}} \right)\end{aligned}$$

Το διάνυσμα θέσης δίνεται από την έκφραση:

$$\mathbf{r} = a\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\xi^2+\eta^2}}\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} - a\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}\eta\hat{\boldsymbol{\eta}},$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο παίρνουμε τη στιγμιαία ταχύτητα:

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}} = u_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + u_\eta\hat{\boldsymbol{\eta}} + u_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

όπου

$$\begin{aligned} u_\xi &= a\dot{\xi}\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2+1}} \\ u_\eta &= a\dot{\eta}\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\eta^2}} \\ u_\phi &= a\dot{\phi}\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}. \end{aligned}$$

Όμοια η στιγμιαία επιτάχυνση είναι:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = a_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + a_\eta\hat{\boldsymbol{\eta}} + a_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

όπου

$$\begin{aligned} a_\xi &= a\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2+1}} \left[\ddot{\xi} + \dot{\xi}^2 \frac{\xi(1-\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)(1+\xi^2)} - \dot{\eta}^2 \frac{\xi(\xi^2+1)}{(\xi^2+\eta^2)(1-\eta^2)} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\xi}\dot{\eta} \frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2} - \dot{\phi}^2 \xi(1-\eta^2) \sqrt{\frac{\xi^2+1}{\xi^2+\eta^2}} \right] \\ a_\eta &= a\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\eta^2}} \left[\ddot{\eta} + \dot{\eta}^2 \frac{\eta(\xi^2+1)}{(\xi^2+\eta^2)(1-\eta^2)} - \dot{\xi}^2 \frac{\eta(1-\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+1)} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\xi}\dot{\eta} \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2} - \dot{\phi}^2 \eta(\xi^2+1) \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}} \right] \\ a_\phi &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \left[\ddot{\phi} + \dot{\xi}\dot{\phi} \frac{2\xi}{\xi^2+1} - \dot{\eta}\dot{\phi} \frac{2\eta}{1-\eta^2} \right] \end{aligned}$$

Παράρτημα Β΄

Παραμέτρηση Τροχιών

Τα δυναμικά (1.48) και (1.49) που διέπουν την κίνηση είναι πολυώνυμα τετάρτου βαθμού οπότε μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$V_r(r) = 2E(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4) \quad (\text{B'.1})$$

$$V_\theta(\theta) = \frac{-2a^2 E}{1 - \cos^2 \theta} (z_- - \cos^2 \theta)(z_+ - \cos^2 \theta). \quad (\text{B'.2})$$

Το ακτινικό δυναμικό έχει είτε τέσσερις πραγματικές ρίζες με σειρά $r_4 \leq r_3 \leq r_2 \leq r_1$ ή δύο πραγματικές ρίζες με σειρά $r_2 \leq r_1$ και δύο συζυγείς μιγαδικές r_3, r_4 . Ενώ οι ρίζες του πολικού δυναμικού είναι οι $\pm\sqrt{z_-}$ και οι $\pm\sqrt{z_+}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις $z_- \leq 1$ και $z_+ > 1$. Οι δέσμιες τροχιές έχουν $r_2 \leq r \leq r_1$ και $-\sqrt{z_-} \leq \cos \theta \leq \sqrt{z_-}$. Έχουμε αποκλείσει από τη μελέτη μας δέσμιες τροχιές με $r_4 \leq r \leq r_3$, ενώ η ρίζα z_+ δεν ανταποκρίνεται σε κάποια φυσική τιμή του θ .

Στους αριθμητικούς υπολογισμούς έχουμε χρησιμοποιήσει τις τροχιακές παραμέτρους $\{e, p, \theta\}$ για να παραμετροποιήσουμε τις δέσμιες τροχιές. Με e την εκκεντρότητα, p το ορθό ημιπλάτος και $\theta_{\min}$ την μικρότερη πολική γωνία της τροχιάς. Τα σημεία καμπής των δυναμικών γίνονται:

$$r_1 = \frac{Mp}{1 - e}, \quad r_2 = \frac{Mp}{1 + e}, \quad z_- = \cos^2 \theta_{\min}. \quad (\text{B'.3})$$

Οι υπόλοιπες ρίζες των δυναμικών (B'.1) και (B'.2) μπορούν να γραφούν ως συνάρτηση των σημείων καμπής και των σταθερών κίνησης $\{E, L_z, Q_E\}$. Αναλύοντας την (B'.1) και εξισώνοντάς την με την (1.48), καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} -2E(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) &= 2M \\ 2Er_1 r_2 r_3 r_4 &= -Q_E a^2 \end{aligned}$$

οι οποίες οδηγούν τις κάτωθι εκφράσεις:

$$r_3 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad r_4 = \frac{B}{r_3}, \quad (\text{B'.4})$$

με

$$A = -\frac{M}{E} - (r_1 + r_2) \quad (\text{B'.5})$$

και

$$B = \frac{a^2 Q_E}{-2E r_1 r_2}. \quad (\text{B'.6})$$

Επίσης από την (1.49) και την (B'.2) βρίσκουμε:

$$-2a^2 E z_- z_+ = Q_E$$

η οποία δίνει:

$$z_+ = \frac{Q_E}{-2a^2 E z_-}. \quad (\text{B'.7})$$

Στη συνέχεια θα χρειαστεί να εκφράσουμε τις σταθερές κίνησης $\{E, L_z, Q_E\}$, οι οποίες εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις, σε όρους των τροχιακών παραμέτρων $\{e, p, \theta_{\min}\}$. Αντίστοιχες εκφράσεις υπάρχουν και για την Kerr, τις οποίες έχει υπολογίσει ο Schmidt (βλ. το Appendix B του [26]).

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη $\frac{d\theta}{dt} = 0$ στο $\theta = \theta_{\min}$ εκφράζουμε το Q_E ως συνάρτηση των $\{E, L_z, z_-\}$:

$$Q_E = z_- \left[-2a^2 E + \frac{L_z^2}{1 - z_-} \right] \quad (\text{B'.8})$$

και ξαναγράφουμε το ακτινικό δυναμικό ως:

$$V_r(r) = 2E f(r) - L_z^2 g(r) + d(r) \quad (\text{B'.9})$$

όπου οι συναρτήσεις f, g, d ορίζονται ως:

$$f(r) = r^4 + a^2(1 + z_-)r^2 + a^4 z_-$$

$$g(r) = \frac{r^2 + a^2 z_-}{1 - z_-}$$

$$d(r) = 2Mr^3 + 2Ma^2 r.$$

Θέτουμε την συνθήκη $\frac{dr}{dt} = 0$ στα r_1 και r_2 , ενώ για τις κυκλικές τροχιές $r_1 = r_2 = r_0$ θα πρέπει να λύσουμε την $\frac{dr}{dt} = 0$ ταυτόχρονα με την $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$ στο r_0 . Η ενέργεια E και η γωνιακή στροφορμή L_z , θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$E = -\frac{\kappa}{2\rho}, \quad (\text{B'.10})$$

$$L_z = \pm \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (\text{B'.11})$$

όπου ρ, κ, τ είναι οι ορίζουσες:

$$\rho = f_1 g_2 - f_2 g_1$$

$$\kappa = d_1 g_2 - d_2 g_1$$

$$\tau = f_1 d_2 - f_2 d_1.$$

Στις εκφράσεις για τις ορίζουσες, οι δείκτες 1, 2 σημαίνουν:

i. για τις έκκεντρες τροχιές ($e \neq 0$)

$$(f_1, g_1, d_1) = (f(r_1), g(r_1), d(r_1))$$

$$(f_2, g_2, d_2) = (f(r_2), g(r_2), d(r_2))$$

ii. ενώ για τις κυκλικές τροχιές ($e = 0, r_1 = r_2 = r_0$):

$$(f_1, g_1, d_1) = (f(r_0), g(r_0), d(r_0))$$

$$(f_2, g_2, d_2) = (f'(r_0), g'(r_0), d'(r_0))$$

Παράρτημα Γ'

Εναλλακτικές αναλυτικές εκφράσεις για τις συχνότητες

Οι εκφράσεις για τις θεμελιώδεις συχνότητες που κατασκευάσαμε στο Κεφάλαιο 3.3.4, με την μέθοδο των μεταβλητών γωνίας-δράσης, απειρίζονται στο όριο όπου $r_2 \rightarrow r_3$, δηλαδή, κοντά στη διαχωρίζουσα (βλ. Κεφάλαιο 1.7). Σε αυτή την περιοχή χρειάζεται να προσφύγουμε σε ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις συχνότητες, οι οποίες όμως είναι δύσκολο να κατασκευαστούν ειδικά στην περίπτωση των γενικών τροχιών. Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα είναι ότι οι r και θ ταλαντώσεις δεν είναι περιοδικές στον νευτώνειο χρόνο t , καθώς οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης (1.45) και (1.46) είναι συζευγμένες μέσω της κοινής ποσότητας $r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, που εμφανίζεται από κοινού στο αριστερό μέλος των παραπάνω εξισώσεων. Με σκοπό να διαχωρίσουμε την ακτινική με την πολική κίνηση, εισάγουμε μία νέα μεταβλητή χρόνου, λ , που ορίζεται ως:

$$d\lambda = \frac{dt}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (\Gamma'.1)$$

κατ' αναλογία με την Kerr όπου χρησιμοποιείται ο χρόνος Mino [32]. Τότε οι αντίστοιχες μεταβλητές γίνονται περιοδικές ως προς το νέο χρόνο λ . Είναι προτιμότερο να κατασκευάσουμε νέες αναλυτικές εκφράσεις για τις συχνότητες εκμεταλλεύομενοι την νέα χρονική μεταβλητή ($\Gamma'.1$) και τις ιδιότητες των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων [25], όπως έκαναν οι Fujita και Hikida [33] για την περίπτωση της Kerr.

Οι γεωδαισιακές εξισώσεις στην νέα χρονική μεταβλητή λ γίνονται:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= V_r(r) \\ \left(\frac{d\cos\theta}{d\lambda}\right)^2 &= V_\theta(\cos\theta) \\ \frac{d\phi}{d\lambda} &= \Phi_r(r) + \Phi_\theta(\cos\theta) - aE \\ \frac{dt}{d\lambda} &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (\Gamma'.2)$$

όπου οι διάφορες συναρτήσεις που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} V_r(r) &= 2Er^4 + 2Mr^3 + (2a^2E - Q_E - L_z^2)r^2 + 2Ma^2r - Q_Ea^2 \\ V_\theta(\cos \theta) &= Q_E - (Q_E - 2a^2E + L_z^2)\cos^2 \theta - 2a^2E\cos^4 \theta \\ \Phi_r(r) &= a \frac{E(r^2 + a^2) - aL_z}{r^2 + a^2} \\ \Phi_\theta(\cos \theta) &= \frac{L_z}{1 - \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε στην (Γ'.2) ότι οι εξισώσεις για την r και θ κίνηση είναι διαχωρισμένες, καθώς το $dr/d\lambda$ εξαρτάται μόνο από το r και το $d(\cos \theta)/d\lambda$ εξαρτάται μόνο από το $\cos \theta$. Αυτό σημαίνει ότι στον καινούργιο χρόνο, οι φραγμένες τροχιές $r(\lambda)$ και $\cos \theta(\lambda)$ είναι ανεξάρτητες η μία της άλλης και περιδικές ως προς τον χρόνο λ με αντίστοιχες περιόδους, Λ_r και Λ_θ :

$$\Lambda_r = 2 \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{V_r(r)}} \quad (\Gamma'.3)$$

$$\Lambda_\theta = 4 \int_0^{\cos \theta_{min}} \frac{d \cos \theta}{\sqrt{V_\theta(\cos \theta)}} \quad (\Gamma'.4)$$

ενώ οι αντίστοιχες συχνότητες είναι:

$$Y_r = \frac{2\pi}{\Lambda_r} \quad (\Gamma'.5)$$

$$Y_\theta = \frac{2\pi}{\Lambda_\theta}. \quad (\Gamma'.6)$$

Αντίθετα, τα $\frac{d\phi}{d\lambda}$ και $\frac{dt}{d\lambda}$ είναι αθροίσματα μιας συνάρτησης του r και μιας συνάρτησης του $\cos \theta$, οπότε όταν οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης ολοκληρωθούν, θα μας δώσουν:

$$t(\lambda) = \Gamma\lambda + t^{(r)}(\lambda) + t^{(\theta)}(\lambda) \quad (\Gamma'.7)$$

$$\phi(\lambda) = Y_\phi\lambda + \phi^{(r)}(\lambda) + \phi^{(\theta)}(\lambda) \quad (\Gamma'.8)$$

με Γ και Y_ϕ , να είναι οι συχνότητες του t και ϕ ως προς τον χρόνο λ αντιστοιχα, και να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Gamma = Y_{t^{(r)}} + Y_{t^{(\theta)}} \quad (\Gamma'.9)$$

$$Y_\phi = Y_{\phi^{(r)}} + Y_{\phi^{(\theta)}} - aE \quad (\Gamma'.10)$$

με

$$Y_{t^{(r)}} = \langle r^2 \rangle_\lambda \quad (\Gamma'.11)$$

$$Y_{t^{(\theta)}} = \langle a^2 \cos^2 \theta \rangle_\lambda \quad (\Gamma'.12)$$

$$Y_{\phi^{(r)}} = \langle \Phi_r(r) \rangle_\lambda \quad (\Gamma'.13)$$

$$Y_{\phi^{(\theta)}} = \langle \Phi_\theta(\cos \theta) \rangle_{>\lambda} \quad (\Gamma'.14)$$

όπου $\langle f(x) \rangle_\lambda$ είναι ο μέσος όρος της συνάρτησης $f(x)$ σε άπειρο χρόνο λ ενώ οι διακυμάνσεις $t^{(r)}$, $t^{(\theta)}$, $\phi^{(r)}$ και $\phi^{(\theta)}$ ικανοποιούν τις:

$$\frac{dt^{(r)}}{d\lambda} = r^2 - Y_{t^{(r)}} \quad (\Gamma'.15)$$

$$\frac{dt^{(\theta)}}{d\lambda} = a^2 \cos^2 \theta - Y_{t^{(\theta)}} \quad (\Gamma'.16)$$

$$\frac{d\phi^{(r)}}{d\lambda} = \Phi_r(r) - Y_{\phi^{(r)}} \quad (\Gamma'.17)$$

$$\frac{d\phi^{(\theta)}}{d\lambda} = \Phi_\theta(\cos \theta) - Y_{\phi^{(\theta)}}. \quad (\Gamma'.18)$$

Οι συχνότητες $(Y_r, Y_\theta, Y_\phi, \Gamma)$ ως προς τον χρόνο λ σχετίζονται με τις συχνότητες $(\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_\phi)$ ως προς τον πραγματικό χρόνο t , μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} \Omega_r &= \frac{Y_r}{\Gamma}, \\ \Omega_\theta &= \frac{Y_\theta}{\Gamma}, \\ \Omega_\phi &= \frac{Y_\phi}{\Gamma}. \end{aligned} \quad (\Gamma'.19)$$

Η συχνότητα της ακτινικής κίνησης υπολογίζεται από την $(\Gamma'.3)$. Ωστόσο ο παρανομαστής μηδενίζεται όταν η κίνηση διέρχεται από τα σημεία καμπής του ακτινικού δυναμικού r_1 και r_2 . Για να αποφύγουμε τα σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς, και επειδή το $V_r(r)$ είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, θα εκφράσουμε την $(\Gamma'.3)$ με την βοήθεια των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων.

Κάνοντας την αλλαγή:

$$r \rightarrow y_r = \sqrt{\frac{r_1 - r_3}{r_1 - r_2} \frac{r - r_2}{r - r_3}}$$

το ολοκλήρωμα $(\Gamma'.3)$ γίνεται:

$$\Lambda_r = 2 \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{V_r(r)}} = 2 \frac{2}{\sqrt{-2E(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} K(k_r) \quad (\Gamma'.20)$$

όπου $K(k_r)$ το ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους με όρισμα: $k_r = \sqrt{\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3} \frac{r_3 - r_4}{r_2 - r_4}}$. Τελικά η συχνότητα γίνεται:

$$Y_r = \frac{\pi \sqrt{-2E(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}}{2K(k_r)} \quad (\Gamma'.21)$$

Ομοίως, η συχνότητα για την κίνηση στην θ -διεύθυνση θα υπολογιστεί από την $(\Gamma'.4)$, η οποία αποκλίνει στα $\pm \cos \theta_{\min}$. Επειδή το $V_\theta(\cos \theta)$ είναι επίσης πολυώνυμο τετάρτου βαθμού θα χρησιμοποιήσουμε ξανά ελλειπτικά ολοκληρώματα.

Κάνοντας την αλλαγή

$$\cos \theta \rightarrow y_\theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{z_-}}$$

η περίοδος γίνεται:

$$\Lambda_\theta = 4 \int_0^{\cos \theta_{min}} \frac{d \cos \theta}{\sqrt{V_\theta(\cos \theta)}} = \frac{4}{L_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}} K(k_\theta) \quad (\Gamma'.22)$$

με $k_\theta = \sqrt{\frac{z_-}{z_+}}$ και $\epsilon_0 = \frac{-2a^2 E}{L_z^2}$. Τελικά η συχνότητα δίνεται από την σχέση:

$$Y_\theta = \frac{\pi L_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}}{2K(k_\theta)}. \quad (\Gamma'.23)$$

Η συχνότητα για την ϕ -κίνηση ορίζεται από την (Γ'.10). Ο υπολογισμός των διαφορών μέσω των όρων θα γίνει στους αντίστοιχους περιοδικούς χρόνους (Γ'.3, Γ'.4):

$$Y_{\phi(r)} = \frac{2}{\Lambda_r} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\Phi_r(r)}{\sqrt{V_r(r)}} dr \quad (\Gamma'.24)$$

$$Y_{\phi(\theta)} = \frac{4}{\Lambda_\theta} \int_0^{\sqrt{z_-}} \frac{\Phi_\theta(\cos \theta)}{\sqrt{V_\theta(\cos \theta)}} d\theta. \quad (\Gamma'.25)$$

Αντικαθιστώντας το $\Phi_\theta(\cos \theta)$ στη δεύτερη σχέση βρίσκουμε:

$$Y_{\phi(\theta)} = \frac{4}{\Lambda_\theta} \int_0^{\sqrt{z_-}} \frac{L_z d \cos \theta}{(1 - \cos^2 \theta) L_z \sqrt{\epsilon_0} \sqrt{(z_- - \cos^2 \theta)(z_+ - \cos^2 \theta)}}. \quad (\Gamma'.26)$$

Ο υπολογισμός του $Y_{\phi(\theta)}$ με όρους ελλειπτικών ολοκληρωμάτων γίνεται άμεσα. Χρησιμοποιώντας τα $\Lambda_\theta = \frac{2\pi}{Y_\theta}$ και $y_\theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{z_-}}$ παίρνουμε την συχνότητα:

$$Y_{\phi(\theta)} = \frac{2Y_\theta}{\pi \sqrt{\epsilon_0 z_+}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, z_-, k_\theta\right) \quad (\Gamma'.27)$$

όπου $\Pi(\phi, z_-, k_\theta)$ είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους.

Για να υπολογίσουμε το $Y_{\phi(r)}$ ξαναγράφουμε τη συνάρτηση:

$$\Phi_r(r) = a \frac{E(r^2 + a^2) - L_z a}{r^2 + a^2} = \frac{a}{r_+ - r_-} \left(-\frac{a L_z}{r - r_+} + \frac{a L_z}{r - r_-} \right) + a E \quad (\Gamma'.28)$$

με $r_+ = ia$ και $r_- = -ia$. Θα χρειαστούμε το εξής ολοκλήρωμα (το οποίο έχει υπολογιστεί στο Appendix A του [33]):

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{(r - r_\pm) \sqrt{V_r(r)}} = \frac{2(K(k_r) - \frac{r_2 - r_3}{r_2 - r_\pm} \Pi(\frac{\pi}{2}, -h_\pm, k_r))}{(r_3 - r_\pm) \sqrt{-2E(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \quad (\Gamma'.29)$$

όπου

$$h_\pm = \frac{(r_1 - r_2)(r_3 - r_\pm)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_\pm)},$$

$$k_r = \sqrt{\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3} \frac{r_3 - r_4}{r_2 - r_4}}$$

και έχουμε κάνει την αντικατάσταση

$$r \rightarrow y_r = \sqrt{\frac{r_1 - r_3}{r_1 - r_2} \frac{r - r_2}{r - r_3}}.$$

οπότε καταλήγουμε στη ϕ -συχνότητα:

$$\begin{aligned} Y_\phi = & \frac{2Y_\theta}{\pi\sqrt{\epsilon_0 z_+}} \Pi(-z_-, k_\theta) + \frac{2aY_r}{\pi(r_+ - r_-)\sqrt{-2E(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \times \\ & \left(\frac{-aL_z}{r_3 - r_+} [K(k_r) - \frac{r_2 - r_3}{r_2 - r_+} \Pi(-h_+, k_r)] \right. \\ & \left. + \frac{aL_z}{r_3 - r_-} [K(k_r) - \frac{r_2 - r_3}{r_2 - r_-} \Pi(-h_-, k_r)] \right) \end{aligned} \quad (\Gamma'.30)$$

Η συχνότητα για την t -κίνηση ορίζεται από την (Γ'.9), με:

$$Y_{t(r)} = \frac{2}{\Lambda_r} \int_{r_2}^{r_1} \frac{r^2}{\sqrt{V_r(r)}} dr \quad (\Gamma'.31)$$

$$Y_{t(\theta)} = \frac{4}{\Lambda_\theta} \int_0^{\sqrt{z_-}} \frac{a^2 \cos^2 \theta d \cos \theta}{\sqrt{V_\theta(\cos \theta)}}. \quad (\Gamma'.32)$$

Ο υπολογισμός του $Y_{t(\theta)}$ με την χρήση ελλειπτικών ολοκληρωμάτων γίνεται εύκολα:

$$\begin{aligned} Y_{t(\theta)} = & \frac{2Y_\theta}{\pi L_z \sqrt{\epsilon_0}} \int_0^{\sqrt{z_-}} \frac{a^2 \cos^2 \theta d \cos \theta}{\sqrt{(z_- - \cos^2 \theta)(z_+ - \cos^2 \theta)}} \\ = & \frac{2Y_\theta a^2 \sqrt{z_+}}{\pi L_z \sqrt{\epsilon_0}} [K(k_\theta) - E(k_\theta)]. \end{aligned}$$

όπου $E(k_\theta)$ είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους. Για το $Y_{t(r)}$ έχουμε από το Appendix A του [33]:

$$\begin{aligned} Y_{t(r)} = & \frac{Y_r}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{r^2}{\sqrt{V_r(r)}} dr = \frac{Y_r}{\pi} \frac{2}{\sqrt{-2E(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \left[\frac{r_3(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_2}{2} K(k_r) \right. \\ & \left. + \frac{(r_2 - r_3)(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}{2} \Pi(-h_r, k_r) + \frac{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}{2} E(k_r) \right]. \end{aligned}$$

όπου έχουμε κάνει την αντικατάσταση

$$r \rightarrow y_{r_1} = \sqrt{\frac{r_1 - r_3}{r_1 - r_2} \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3}}$$

και έχουμε ορίσει τις ποσότητες

$$k_r = \sqrt{\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3} \frac{r_3 - r_4}{r_2 - r_4}},$$

$$h_r = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3}.$$

Τελικά η συχνότητα Γ δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{2Y_\theta \alpha^2 z_+}{\pi L_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}} [K(k_\theta) - E(k_\theta)] \\ & + \frac{Y_r}{\pi \sqrt{-2E(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} [(r_3(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_2)K(k_r) \\ & + (r_2 - r_3)(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)\Pi(-h_r, k_r) + (r_1 - r_3)(r_2 - r_4)E(k_r)]. \end{aligned} \quad (\Gamma'.33)$$

Τα σχεδιαγράμματα που έχουμε κατασκευάσει και όλοι οι αριθμητικοί υπολογισμοί συχνοτήτων που χρειαστήκαμε έγιναν με βάση τις παραπάνω σχέσεις (Γ'.19). Οι εκφράσεις αυτές είναι ακριβείς και εύκολα υπολογίσιμες από την Mathematica ακόμα και για την περιοχή κοντά στη διαχωρίζουσα ($r_2 \rightarrow r_3$).

Ειδικά πάνω στη διαχωρίζουσα αυτές οι εκφράσεις για τις συχνότητες απλοποιούνται καθώς ο λόγος κάποιων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων μηδενίζεται:

$$\frac{E(k_r)}{K(k_r)} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_2} 0, \quad (\Gamma'.34)$$

και

$$(r_2 - r_3) \frac{\Pi(h_{r,+,-}, k_r)}{K(k_r)} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_2} 0. \quad (\Gamma'.35)$$

Οι τελικές εκφράσεις για τις συχνότητες πάνω στη διαχωρίζουσα δίνονται πάλι από τις σχέσεις (Γ'.19), αλλά με τα διάφορα Y_i και Γ σε αρκετά απλούστερη μορφή:

$$\begin{aligned} Y_r &= 0 \\ Y_\theta &= \frac{\pi L_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}}{2K(k_\theta)} \\ Y_\phi &= L_z \left(\frac{\Pi(z_-, k_\theta)}{K(k_\theta)} - \frac{a^2}{r_2^2 + a^2} \right) \\ \Gamma &= a^2 z_+ \left(1 - \frac{E(k_\theta)}{K(k_\theta)} \right) + r_2^2. \end{aligned} \quad (\Gamma'.36)$$

Bibliography

- [1] Euler, Leonard, “Mémoires de l’acad. de berlin,” *Nov. Comm. Acad. Imp. Petropolitanae*, vol. 11, pp. 152–249, 1760.
- [2] W. E.T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies (4th Edition)*. Cambridge Univ. Press, 1989.
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976.
- [4] D. Lynden-Bell, “A simple derivation and interpretation of the third integral in stellar dynamics,” *MNRAS*, vol. 338, no. 1, pp. 208–210, Jan 2003.
- [5] J. P. Vinti, “Theory of the Orbit of an Artificial Satellite with Use of Spheroidal Coordinates,” *The Astronomical Journal*, vol. 65, p. 353, Aug. 1960.
- [6] —, “The Spheroidal Method for Satellite Orbits,” in *The Use of Artificial Satellites for Geodesy*, Jan. 1963, p. 12.
- [7] —, “Improvement of the Spheroidal Method for Artificial Satellites,” *The Astronomical Journal*, vol. 74, p. 25, Feb. 1969.
- [8] —, “Representation of the Earth’s Gravitational Potential,” *Celestial Mechanics*, vol. 4, no. 3-4, pp. 348–367, Dec. 1971.
- [9] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer, 1989.
- [10] P. C. S. J. Goldstein, H., *Classical Mechanics*. Pearson, 2001.
- [11] R. P. Kerr, “Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics,” *prl*, vol. 11, no. 5, pp. 237–238, Sep 1963.
- [12] B. Carter, “Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom,” *prl*, vol. 26, no. 6, pp. 331–333, Feb 1971.
- [13] R. Penrose, “Gravitational Collapse: the Role of General Relativity,” *Nuovo Cimento Rivista Serie*, vol. 1, p. 252, Jan 1969.
- [14] D. Christodoulou, “Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics,” *prl*, vol. 25, no. 22, pp. 1596–1597, Nov 1970.
- [15] B. Carter, “Hamilton-Jacobi and Schrodinger Separable Solutions of Einstein’s Equations,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 10, no. 4, pp. 280–310, Dec 1968.

- [16] D. C. Wilkins, “Bound Geodesics in the Kerr Metric,” *prd*, vol. 5, no. 4, pp. 814–822, Feb 1972.
- [17] J. M. Bardeen, W. H. Press, and S. A. Teukolsky, “Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation,” *apj*, vol. 178, pp. 347–370, Dec 1972.
- [18] H. Keres, “Physical Interpretation of Solutions of the Einstein Equations,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 25, p. 504, Sep. 1967.
- [19] W. Israel, “Source of the Kerr Metric,” *Phys. Rev. D*, vol. 2, no. 4, pp. 641–646, Aug. 1970.
- [20] C. M. Will, “Carter-like Constants of the Motion in Newtonian Gravity and Electrodynamics,” *prl*, vol. 102, no. 6, p. 061101, Feb 2009.
- [21] C. Markakis, “Constants of motion in stationary axisymmetric gravitational fields,” *mnras*, vol. 441, no. 4, pp. 2974–2985, Jul 2014.
- [22] K. Glampedakis and T. A. Apostolatos, “The separable analogue of Kerr in Newtonian gravity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 30, no. 5, p. 055006, Mar 2013.
- [23] S. A. Teukolsky, “Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations,” *Astroph. J.*, vol. 185, pp. 635–648, Oct 1973.
- [24] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*. Oxford Univ. Press, 1983.
- [25] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1965.
- [26] W. Schmidt, “Celestial mechanics in Kerr spacetime,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, no. 10, pp. 2743–2764, May 2002.
- [27] T. Hinderer and É. É. Flanagan, “Two-timescale analysis of extreme mass ratio inspirals in Kerr spacetime: Orbital motion,” *prd*, vol. 78, no. 6, p. 064028, Sep 2008.
- [28] S. Akcay, N. Warburton, and L. Barack, “Frequency-domain algorithm for the Lorenz-gauge gravitational self-force,” *prd*, vol. 88, no. 10, p. 104009, Nov 2013.
- [29] D. Kennefick and A. Ori, “Radiation-reaction-induced evolution of circular orbits of particles around Kerr black holes,” *prd*, vol. 53, no. 8, pp. 4319–4326, Apr 1996.
- [30] F. D. Ryan, “Effect of gravitational radiation reaction on circular orbits around a spinning black hole,” *prd*, vol. 52, no. 6, pp. R3159–R3162, Sep 1995.
- [31] G. Lukes-Gerakopoulos, T. A. Apostolatos, and G. Contopoulos, “Observable signature of a background deviating from the Kerr metric,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, no. 12, p. 124005, Jun. 2010.
- [32] Y. Mino, “Perturbative approach to an orbital evolution around a supermassive black hole,” *Phys. Rev. D*, vol. 67, no. 8, p. 084027, Apr 2003.

- [33] R. Fujita and W. Hikida, “Analytical solutions of bound timelike geodesic orbits in Kerr spacetime,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 26, no. 13, p. 135002, Jul 2009.