



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΔΡΙΑΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μοντελοποίηση περιοδικής συμπεριφοράς
μέσω επίλυσης ανοικτού προβλήματος:
Μία εφαρμογή σε μαθητές Γ' Γυμνασίου

Φώτης Τσαγκαράκης
Δ201628

Επιβλέπουσα Συμβουλευτική Επιτροπή

Κα. Χ. Τριανταφύλλου.

Επίκουρη Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Αθήνα
Ιανουάριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε τηναπό **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη
από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
▪ Χ. Τριανταφύλλου (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
▪ Γ. Ψυχάρης	Επικ. Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την
καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδης	Καθηγητής, ΕΚΠΑ
▪ Χ. Τριανταφύλλου (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
▪ Γ. Ψυχάρης	Επικ. Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Την επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας Επίκουρη Καθηγήτρια, Κα Χρυσανγή Τριανταφύλλου, τόσο γιατί το μάθημα της, «Διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων», που ήταν η αφορμή για το θέμα της παρούσας εργασίας, όσο και για τις πολύτιμες συμβουλές που μου έδωσε και το χρόνο που μου αφιέρωσε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της.

Τον Καθηγητή, κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη, που με τίμησε με τη συμμετοχή του στη συμβουλευτική επιτροπή.

Τον Επίκουρο Καθηγητή, κ. Γεώργιο Ψυχάρη, για την υποστήριξή του κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών ως συμβούλου καθηγητή αλλά και για τη συμμετοχή του στη συμβουλευτική επιτροπή.

Όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος για τις γνώσεις που μου πρόσφεραν.

Τους συμφοιτητές μου από το πρόγραμμα για τη συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια του προγράμματος.

Τις κυρίες Ελένη Κλη και Διονυσία Μπακογιάννη από τη γραμματεία του προγράμματος, για την πολύτιμη υποστήριξή τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και κυρίως τους γιους μου Ανδρέα και Δημήτρη. Η αγάπη και η κατανόηση τους, ήταν αναγκαίες για την ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Περίληψη

Η περιοδικότητα είναι μια έννοια που σχετίζεται όχι μόνο με τα περιοδικά φαινόμενα της καθημερινής ζωής και τον φυσικό κόσμο, αλλά και με τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες. Παρόλο που είναι κεντρική σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, υπάρχει περιορισμένος αριθμός ερευνών που εστιάζουν στην κατανόησή της. Στην Ελλάδα η περιοδικότητα διδάσκεται για πρώτη φορά στους μαθητές στο Λύκειο. Στα Μαθηματικά στην Άλγεβρα της Β' Λυκείου και στη Φυσική στην Β' και Γ' Λυκείου μέσω της μελέτης περιοδικών κινήσεων και περιοδικά μεταβαλλόμενων μεγεθών.

Στην παρούσα εργασία θα περιγράψουμε μια εφαρμογή σε 45 μαθητές Γ' Γυμνασίου (δύο τμήματα), που δούλεψαν σε ομάδες και αφορά στην επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος με ρεαλιστικό περιεχόμενο το οποίο παρουσιάζει την κίνηση ενός τροχού λούνα-παρκ. Αναλύσαμε τις στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα και τον τρόπο που νοηματοδότησαν στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας.

Οι μαθητές ανέπτυξαν δύο κύκλους μοντελοποίησης, ο 1^{ος} αφορούσε τα στατικά χαρακτηριστικά του τροχού όπως είναι η ακτίνα, το ύψος και η περιφέρειά του και ο 2^{ος} τα δυναμικά στοιχεία της κίνησης του τροχού όπως είναι η περίοδος της κυκλικής κίνησης και η μεταβολή του ύψους ενός βαγονιού σε συνάρτηση με το χρόνο, κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Μερικές από τις στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές, στους δύο κύκλους, ήταν η χρήση αναλόγων ποσών, ο ορισμός σημείων αναφοράς και η χρήση τριγωνομετρίας. Οι μαθητές νοηματοδότησαν πτυχές της έννοιας της περιοδικότητας. Αντιλήφθηκαν την περίοδο ως τον ελάχιστο χρόνο για την επανάληψη μιας κίνησης αλλά και ως εργαλείο πρόβλεψης.

Καταλήγουμε ότι το πλαίσιο της παρέμβασης δηλ. το ανοικτό πρόβλημα σε ρεαλιστικό πλαίσιο και η συνεργασία μεταξύ των μαθητών ευνόησε την ανάπτυξη μιας πλούσιας μαθηματικής δραστηριότητας.

Λέξεις κλειδιά: Ανοικτό πρόβλημα, Μοντελοποίηση, Ρεαλιστικό πλαίσιο, Περιοδική συμπεριφορά

Abstract

Periodicity is a concept that relates not only to the regular phenomena of everyday life and the physical world, but also to abstract mathematical concepts. Although is central to many disciplines, there is a limited number of researches focusing on its understanding. In Greece, periodicity is taught for the first time to students in high school. In mathematics in algebra in the second grade, and in physics in the second, and third grades of high school through periodic movements and periodically varying quantities.

In this paper we will describe an application to 45 Grade 3 students (two classes), who worked in groups to solve an open problem with realistic content presenting the movement of a Ferris wheel. We analyzed the strategies developed by the students in their attempt to model the problem and how they conceptualized elements of the concept of periodicity.

The students developed two modeling cycles, the first concerned the static characteristics of the wheel such as its radius, height and circumference, and the second the dynamic elements of the wheel's motion such as the period of circular motion and the interaction of time and height of a wagon during movement.

Some of the strategies developed by the students in the two cycles were the use of proportional sums, the use of reference points, and the use of trigonometry. Students conceptualized aspects of the concept of periodicity. They perceived the period as the minimum time to repeat a movement but also as a forecast tool.

We conclude that the intervention framework ie. the open problem in a realistic context and the cooperation between pupils favored the development of a rich mathematical activity.

Keywords: Open problem, Modeling, Realistic framework, Periodic behavior

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	3
Περίληψη.....	4
Abstract	5
Εισαγωγή.....	8
Κεφάλαιο 1 ^ο : Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	10
1.1 Μαθηματικό Πρόβλημα.....	10
1.1.2 Τι είναι πρόβλημα	10
1.1.3 Επίλυση Προβλήματος.....	10
1.1.4 Στρατηγικές Επίλυσης Προβλήματος.....	12
1.2 Ανοικτά Προβλήματα.....	14
1.2.1 Ορισμός.....	14
1.2.2 Ανοικτό Πρόβλημα και Εκπαιδευτικοί Στόχοι.....	17
1.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση.....	19
1.3.1 Ορισμός.....	19
1.3.2 Κύκλος μοντελοποίησης.....	20
1.3.3 Οφέλη εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες μοντελοποίησης.....	23
1.3.4 Δυσκολίες των μαθητών κατά τη διαδικασία Μοντελοποίησης.....	26
1.3.5 Διδασκαλία προβλημάτων Μοντελοποίησης.....	27
1.3.6. Η μοντελοποίηση στη Ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education – RME)	28
1.4 Περιοδικότητα.....	29
1.4.1 Η έννοια της Περιοδικότητας.....	29
1.4.2 Η έννοια της Περιοδικότητας στα σχολικά κείμενα.....	30
1.4.3 Προβλήματα που αφορούν στην έννοια της περιοδικότητας στα σχολικά κείμενα των Μαθηματικών.....	34
Κεφάλαιο 2 ^ο : Ερευνητικό Θέμα και ερευνητικά ερωτήματα.....	36
2.1 Το ερευνητικό θέμα.....	36
2.2 Ερευνητικά Ερωτήματα.....	37
Κεφάλαιο 3 ^ο : Μεθοδολογία.....	38
3.1 Το πλαίσιο της έρευνας.....	38
3.2 Το πρόβλημα όπως δόθηκε στους μαθητές.....	38
3.3 Οργάνωση της ερευνητικής δραστηριότητας στη σχολική τάξη.....	39

3.4 Ο ρόλος του Εκπαιδευτικού	41
3.5 Ερευνητικά Δεδομένα	41
3.6 Ανάλυση Ερευνητικών Δεδομένων	42
Κεφάλαιο 4 ^ο : Αποτελέσματα.....	43
4.1 Εισαγωγή	43
4.2 Οι στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές	43
4.2.1 1 ^{ος} Κύκλος Μοντελοποίησης – Προσδιορισμός Γεωμετρικών στοιχείων του Τροχού	44
4.2.1 2 ^{ος} Κύκλος Μοντελοποίησης - Μελέτη της κίνησης του Τροχού	52
4.3 Νοηματοδότηση στοιχείων της έννοιας της περιοδικότητας.....	62
4.3.1 Η περίοδος ως ο χρόνος μίας πλήρους περιστροφής.....	62
4.3.2 Η περιοδικότητα ημιτόνου γωνιών άνω των 360 ⁰	63
4.3.3 Η περίοδος ως εργαλείο πρόβλεψης	64
4.3.4 Η γραφική αναπαράσταση της περιοδικής συμπεριφοράς της κίνησης του τροχού	64
Κεφάλαιο 5 ^ο : Συμπεράσματα	66
Βιβλιογραφία	73

Εισαγωγή

Αν και η έρευνα στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών τα τελευταία χρόνια έχει αναδείξει τη διδακτική αξία της επίλυσης ανοικτών προβλημάτων στη σχολική τάξη και προβλημάτων συνδεδεμένων με πραγματικές καταστάσεις (Blomhøj & Jensen, 2007), ο τρόπος διδασκαλίας δεν έχει διαφοροποιηθεί ιδιαίτερα. Η μορφή της εκπαιδευτικής διαδικασίας ωθεί τις περισσότερες φορές τους μαθητές στην αποστήθιση αλγοριθμικών διαδικασιών. Με ποιο τρόπο όμως μπορούμε να εμπλέξουμε τους μαθητές σε πλούσιες μαθηματικές δραστηριότητες;

Η έρευνα έχει δείξει ότι η επίλυση ανοικτών προβλημάτων υποστηρίζουν την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που συνδέονται με την ανάπτυξη της δημιουργικότητάς τους και συμβάλλουν στην ανάπτυξη της πρωτοτυπίας και της ευελιξίας της σκέψης τους (Κόσυβας, 2008; Sullivan, 2003). Σε αυτή την περίπτωση, ο μαθητής αναπτύσσει διαφορετικούς τρόπους λύσης, εμπλέκεται σε διαδικασίες διερεύνησης, ψάχνει και δοκιμάζει ποικίλους χειρισμούς των δεδομένων ενώ δεν έχει κάποιο έτοιμο τρόπο αντιμετώπισής του, παίρνει αποφάσεις, οργανώνει μεθόδους, κτίζει υποθέσεις και εμπλέκεται στην επαλήθευσή τους. Ο μαθητής συμπεριφέρεται ως ενεργητικός λυτής που κάνει αναδρομές και που ξαναδιαβάζοντας όλο και πιο προσεκτικά το πρόβλημα ανακαλύπτει βαθύτερες δομές και κανονικότητες, εξερευνά νέες ιδέες και νέα παράγωγα προβλήματα που γεννιούνται. Γίνεται ένας ερευνητής (Πατρώνης, 1988).

Ταυτόχρονα, τα προβλήματα μοντελοποίησης που βασίζονται σε πραγματικά πλαίσια υποστηρίζουν τους μαθητές να ανακαλύψουν τα μαθηματικά μέσα σε πραγματικές καταστάσεις, να «επανεφεύρουν» μαθηματικές έννοιες (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000) και να αναπτύξουν διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης. Η μαθηματική μοντελοποίηση λοιπόν είναι η διαδικασία εκείνη με την οποία όχι μόνον μπορούμε να διαπραγματευτούμε πάνω σε πραγματικές καταστάσεις αλλά και να αναδείξουμε τις εφαρμογές των μαθηματικών.

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκαν οι στρατηγικές και οι τρόποι μοντελοποίησης που ακλούθησαν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος μοντελοποίησης. Συγκεκριμένα, δόθηκαν στους μαθητές φωτογραφίες και ένα βίντεο της κίνησης του Ρίζενραντ (Riesenrad), μιας τεράστιας ρόδας τροχού Λούνα- Παρκ στη Βιέννη. Οι μαθητές παρατηρώντας τις φωτογραφίες και παρακολουθώντας το βίντεο κλήθηκαν να περιγράψουν στοιχεία της κίνησης του

τροχού Riesenrad σε κάποιον φίλο τους που πρόκειται να επισκεφτεί τη Βιέννη. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δυο διαφορετικά τμήματα της Γ' γυμνασίου. Να σημειώσουμε ότι οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί στο μάθημα των μαθητικών την έννοια της περιοδικότητας.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση. Συγκεκριμένα, μέσα από μελέτη ερευνών ορίζεται το πρόβλημα και οι στρατηγικές επίλυσής του, αναλύεται το ανοικτό πρόβλημα και οι εκπαιδευτικοί στόχοι που επιτυγχάνονται με την εφαρμογή του στην τάξη. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στη μαθηματική μοντελοποίηση. Γίνεται αναφορά στον κύκλο μοντελοποίησης, στα στάδια δηλαδή που ακολουθούνται κατά την επίλυση ενός προβλήματος σε πραγματικό πλαίσιο καθώς επίσης στα οφέλη αλλά και στις δυσκολίες που μπορεί να προκύψουν κατά την υλοποίησή δραστηριοτήτων τέτοιου είδους. Το πρώτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την έννοια της περιοδικότητας. Επισημαίνονται έρευνες που αναφέρονται σε αυτή καθώς επίσης και τα σημεία στα οποία εμφανίζεται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το ερευνητικό θέμα και διατυπώνονται τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται η μεθοδολογία της έρευνας. Παράλληλα δίνονται στοιχεία για το πλαίσιο της έρευνας, το είδος των ερευνητικών δεδομένων και των τρόπων ανάλυσής τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, μέσα από τη μελέτη των στοιχείων που συλλέχθηκαν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας με άξονα τους τρόπους μοντελοποίησης των μαθητών αλλά και των τρόπων που ανέπτυξαν την κατανόηση στοιχείων της έννοιας της περιοδικότητας.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η τελική αποτίμηση της έρευνας, μέσα από την εξαγωγή των ανάλογων συμπερασμάτων.

Κεφάλαιο 1^ο : Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

1.1 Μαθηματικό Πρόβλημα

1.1.2 Τι είναι πρόβλημα

Πρόβλημα είναι κάποιο εμπόδιο, δυσκολία, πρόκληση που δυσκολεύει την έκβαση ενός στόχου ή αποτελέσματος που επιδέχεται αντιμετώπισης και ενδεχομένως λύσης. Με άλλα λόγια, πρόβλημα είναι μια κατάσταση η οποία χρήζει αντιμετώπισης, απαιτεί λύση, η δε λύση της δεν είναι γνωστή, ούτε προφανής. Είναι η εύρεση του δρόμου που οδηγεί σε ένα προκαθορισμένο σημείο μιας όχι και τόσο γνωστής περιοχής για τον λύτη (Pólya, 1945). Κάποιος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν θέλει να βρει κάτι και δεν γνωρίζει τη σειρά των ενεργειών που πρέπει να ακολουθήσει για να το πετύχει (Newell & Simon, 1972). Σύμφωνα με τους Blum και Niss (1991), ένα πρόβλημα μπορεί να οριστεί ως μία κατάσταση που φέρει μαζί της κάποιες ανοικτές ερωτήσεις οι οποίες προκαλούν κάποιον να απαντήσει σε αυτές. Τα προβλήματα που απαντώνται στην καθημερινότητα και στις επιστήμες ποικίλουν. Ένα πρόβλημα μπορεί να είναι προσωπικό, κοινωνικό, μαθηματικό.

Ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι ένας ιδιαίτερος τύπος μαθηματικής ερώτησης, που απαιτεί διερεύνηση προκειμένου να απαντηθεί. Ο Schoelfeld (1985) όρισε ως προβλήματα τα μαθηματικά «έργα» που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας, για την άσκηση των μαθηματικών δεξιοτήτων και τη μέτρηση του επιπέδου ανάπτυξης των μαθητών.

1.1.3 Επίλυση Προβλήματος

Η επίλυση προβλημάτων είναι ένα ξεχωριστό επίτευγμα της νόησης και αποτελεί την πιο χαρακτηριστική μορφή ανθρώπινης δραστηριότητας (Pólya, 1962). Είναι μια διαδικασία, το μέσο με το οποίο ένα άτομο χρησιμοποιεί προηγούμενες αποκτηθείσες γνώσεις, δεξιότητες και κατανόηση για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις μιας άγνωστης κατάστασης (Krulik et al., 1988). Σύμφωνα με τον Mayer (1985), η επίλυση μαθηματικού προβλήματος δεν είναι τίποτα άλλο παρά η μετάβαση από μία δεδομένη κατάσταση σε μία άλλη που αποτελεί το στόχο. Η ικανότητα της επίλυσης προβλημάτων είναι στην καρδιά των μαθηματικών και είναι η ικανότητα να εφαρμόζονται τα μαθηματικά σε μια ποικιλία καταστάσεων, στις οποίες δίνεται το

όνομα «επίλυση προβλημάτων» (Cockcroft, 1982). Εμπεριέχει την ικανότητα ευέλικτης διαχείρισης μιας βάσης γνώσεων (στρατηγική ικανότητα), την ικανότητα για συστηματική αναζήτηση (ευρετική ικανότητα) και μεταγνωστικές δεξιότητες.

Ο Pólya στο βιβλίο του «How to Solve It» (1945) αναφέρει μία διαδικασία επίλυσης η οποία ολοκληρώνεται σε τέσσερις φάσεις - στάδια:

1. Κατανόηση του προβλήματος.

Ένας λύτης προβλήματος πρέπει να εξοικειωθεί με ένα πρόβλημα και να δουλέψει προς μια σαφέστερη κατανόησή του πριν προχωρήσει σε μια λύση. Η αυξανόμενη κατανόηση μπορεί να επέλθει αν ο λύτης ξαναδιαβάσει τα δεδομένα του προβλήματος, αν σχεδιάσει ένα σκίτσο ή ένα διάγραμμα για να παρουσιάσει τις συνδέσεις και σχέσεις, αν επαναδιατυπώσει το πρόβλημα με δικά του λόγια, ή αν κάνει μια λογική εικασία για τη λύση για να εξοικειωθεί με τις λεπτομέρειες. Μερικές φορές η κύρια δυσκολία στην επίλυση ενός προβλήματος είναι να ξέρεις ποια ερώτηση πρέπει να απαντηθεί.

2. Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης.

Η πορεία από την κατανόηση ενός προβλήματος στην εκπόνηση ενός σχεδίου επίλυσης μπορεί μερικές φορές να απέχει πολύ. Τα περισσότερα από τα ενδιαφέροντα προβλήματα δεν έχουν προφανείς λύσεις. Η εμπειρία και η πρακτική είναι οι καλύτεροι σύμβουλοι για την επινόηση των σχεδίων επίλυσης.

3. Εκτέλεση του σχεδίου.

Το σχέδιο δίνει μια γενική περίληψη της κατεύθυνσης. Ο Pólya προτείνει στους μαθητές – λύτες: «Καταγράψτε τη σκέψη σας έτσι ώστε τα βήματά σας να μπορούν να ανιχνευθούν εκ νέου. Επίσης, δεν πειράζει αν «κολλήσετε». Εάν αυτό συμβεί, είναι καλύτερο μερικές φορές να αφήσετε το πρόβλημα για λίγο και να επιστρέψετε σε αυτό αργότερα.»

4. Επανελέγχος.

Όταν επιτευχθεί ένα αποτέλεσμα, πρέπει να ελεγχθεί. Στο στάδιο της επίτευξης μιας λύσης μπορεί να εμφανιστούν άλλοι τρόποι προσέγγισης του προβλήματος. Αρκετά συχνά αφότου υπάρξει εξοικείωση με ένα πρόβλημα, μπορεί να εμφανιστούν βελτιωμένες ή ίσως καινούριες προσεγγίσεις. Επίσης, λύνοντας ένα πρόβλημα, μπορεί να προκύψουν άλλες ενδιαφέρουσες ερωτήσεις ή παραλλαγές που να αξίζει να διερευνηθούν.

Το έργο του Ρόλυα αποτέλεσε σημείο αναφοράς και έδωσε το έναυσμα σε πολλούς ερευνητές να μελετήσουν την επίλυση προβλημάτων. Άλλα μοντέλα επίλυσης προβλημάτων, είναι το μοντέλο των τριών σταδίων που πρότείνει ο Schoenfeld (1985), (1.Ανάλυση, 2.Εξερεύνηση, 3.Επαλήθευση) των πέντε σταδίων των Krulik και Rudnick (1988), (1.Ανάγνωση, 2.Εξερεύνηση, 3.Επιλογή στρατηγικής, 4.Επίλυση, 5.Έλεγχος προς τα πίσω και επέκταση) και αυτό των Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts και Ratinckx (1999), (1.Νοερή αναπαράσταση του προβλήματος, 2.Τρόπος επίλυσης του προβλήματος, 3.Εκτέλεση των απαραίτητων πράξεων, 4.Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και διαμόρφωση απάντησης, 5.Αξιολόγηση της λύσης).

Ο Schoenfeld το 1992, στο πλαίσιο της εκτενούς μελέτης που έκανε γύρω από την επίλυση προβλημάτων, μετατόπισε το πεδίο έρευνας και ανέπτυξε ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση της επίλυσης προβλημάτων αλλά και της μαθηματικής σκέψης γενικότερα. Αυτό το πλαίσιο περιλαμβάνει τέσσερις διαστάσεις οι οποίες είναι:

1. *Οι πηγές άντλησης πληροφοριών του λύτη όπως η σχετική μαθηματική γνώση, η διαίσθησή του και οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιεί.*
2. *Οι γνωστικές στρατηγικές όπως η χρήση αναπαραστάσεων, η αξιοποίηση παρόμοιων προβλημάτων ή μαθηματικών αλγορίθμων.*
3. *Οι μεταγνωστικές στρατηγικές όπως οι αποφάσεις που παίρνει, η αξιολόγηση της στρατηγικής που έχει επιλέξει ή της απάντησης που έχει προκύψει και η γενίκευση –επέκταση των ευρημάτων σε νέες καταστάσεις.*
4. *Οι πεποιθήσεις του λύτη για τα μαθηματικά και τη μαθηματική γνώση.*

1.1.4 Στρατηγικές Επίλυσης Προβλήματος

Λύνω ένα πρόβλημα, σύμφωνα με τον Polya (1962), σημαίνει πως βρίσκω κάποιον τρόπο να αποφύγω μια δυσκολία, να παρακάμψω ένα εμπόδιο, να επιτύχω ένα στόχο, ο οποίος δεν είναι άμεσα εφικτός. Σημαντικό ζήτημα αποτελεί η διάκριση μεταξύ των προϊόντων της επίλυσης προβλημάτων και της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων. Το προϊόν της επίλυσης προβλημάτων αναφέρεται στο αν ο λύτης φτάνει στη σωστή τελική απάντηση ή όχι, η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων

αναφέρεται στη στρατηγική που χρησιμοποιείται για να δοθεί μια απάντηση (Mayer, 1985).

Ο Ρόλυα αφιέρωσε ένα μεγάλο μέρος της διδασκαλίας του για να βοηθήσει τους μαθητές του να γίνουν καλύτεροι λύτες προβλημάτων. Στο πλαίσιο αυτό πρότεινε τις ακόλουθες ευρετικές στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ανά στάδιο επίλυσης:

1. Κατανόηση του Προβλήματος

- Διατύπωσε το πρόβλημα με δικά σου λόγια.
- Εντόπισε ποια είναι τα δεδομένα και ποια είναι τα ζητούμενα.
- Εξέτασε αν υπάρχουν δεδομένα που είναι περιττά ή μήπως λείπουν στοιχεία που χρειάζονται.
- Φτιάξε ένα γράφημα ή ένα διάγραμμα και πρόσθεσε όλα τα απαραίτητα σύμβολα ώστε να συγκεκριμενοποιήσεις το πρόβλημα.

2. Επινόηση ενός Σχεδίου Επίλυσης:

- Σκέψου ένα γνωστό πρόβλημα που είναι ανάλογο με το πρόβλημα που καλείσαι να λύσεις.
- Σκέψου ένα γνωστό πρόβλημα που έχει τους ίδιους αγνώστους αλλά είναι απλούστερο.
- Προσπάθησε να μετατρέψεις το πρόβλημα σ' ένα άλλο τη λύση του οποίου γνωρίζεις.
- Κάνε το πρόβλημα πιο γενικό και προσπάθησε να το λύσεις.
- Χώρισε το πρόβλημα σε μέρη, ώστε να μπορείς να λύσεις το κάθε μέρος χωριστά.
- Κατάγραψε τα αποτελέσματα της προσπάθειας, αυτό δηλαδή που δοκιμάζεις κάθε φορά, κάτι που βοηθά στη συνοπτική αναθεώρηση και συσχέτιση.

3. Εκτέλεση του Σχεδίου

- Εκτέλεση όλων των πράξεων ή διαδικασιών που προβλέπονται στο σχέδιο.
- Έλεγχος κάθε βήματος καθώς προχωρεί η υλοποίηση του σχεδίου. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με τυπικό αποδεικτικό τρόπο ή διαισθητικά.

4. Έλεγχος του προβλήματος και της λύσης

- Έλεγξε την ορθότητα του αποτελέσματος. Απαντήθηκε πράγματι το αρχικό ερώτημα;
- Μήπως υπάρχει κι άλλος τρόπος επίλυσης;

- Μπορείς να χρησιμοποιήσεις το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο για την επίλυση ή τη διατύπωση νέων προβλημάτων;

Συνοψίζοντας, οι στρατηγικές επίλυσης προβλήματος εμπίπτουν στις εξής βασικές κατηγορίες:

- Υπολογίστε ή απλοποιήστε
- Χρησιμοποιήστε έναν τύπο
- Κάντε ένα μοντέλο ή ένα σκίτσο
- Συντάξτε έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή έναν κατάλογο
- Ψάξτε για μοτίβα
- Εικάστε, ελέγξτε και αναθεωρήστε
- Εξετάστε μια απλούστερη περίπτωση
- Απορρίψτε

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε τις στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος.

1.2 Ανοικτά Προβλήματα

1.2.1 Ορισμός

Η παιδαγωγική προσέγγιση της διδασκαλίας έχει κατηγοριοποιηθεί σε δασκαλοκεντρική (teacher-centered) και σε μαθητοκεντρική (student-centered) με την τελευταία να θεωρείται καταλληλότερη για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, της κριτικής σκέψης και της αυτοπεποίθησης των μαθητών (Becker & Shimada, 1997, Hancock, Bray & Nason 2003, Cubukcu 2012). Στην προσέγγιση με επίκεντρο τον δάσκαλο, ο μαθητής παθητικά προσπαθεί να «απορροφήσει» και να «αναπαράγει» το καθορισμένο σώμα γνώσης που του παραδίδει ο δάσκαλος (Cubukcu, 2012). Αντίθετα, η παιδαγωγική με επίκεντρο το μαθητή αφορά στην ενεργή συμμετοχή του στη διαδικασία διδασκαλίας - εκμάθησης. Ο μαθητής ελέγχει τον ρυθμό και, σε ορισμένες περιπτώσεις, το περιεχόμενο της μάθησης. Το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (NCTM, 1997), στο βιβλίο «Αρχές και Πρότυπα για τα Μαθηματικά του Σχολείου», πρότεινε ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να χρησιμοποιούν περισσότερο μεθόδους μαθητοκεντρικές στη διδασκαλία των μαθηματικών. Μία τέτοιου είδους μέθοδος είναι και η ανοιχτή προσέγγιση (Becker & Shimada, 1997).

Η χρήση «ημιτελών» (incomplete) ή «ανοιχτών» (open-ended) προβλημάτων στην τάξη για την προώθηση της μαθηματικής συζήτησης αναπτύχθηκε στην Ιαπωνία από τον Shimada στα τέλη της δεκαετίας του '70. Από τις αρχές της δεκαετίας του '80, η ιδέα της χρήσης ανοικτών προβλημάτων στην τάξη διαδιδόταν σε όλο τον κόσμο και η έρευνα για τις δυνατότητές και τα πλεονεκτήματά της ήταν ζωνρή σε πολλές χώρες (Nohda 1988, Pehkonen 1995, Silver & Mamona 1989, Williams 1989, Κόσυβας 1996, Πατρώνης 1988).

Οι Becker και Shimada (1997) προτείνουν το «ημιτελές πρόβλημα» γιατί δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να το λύσουν προσεγγίζοντάς το από διαφορετικές κατευθύνσεις αλλά και να ανακαλύψουν νέες μαθηματικές έννοιες για αυτούς, αξιοποιώντας και συνδυάζοντας την προγενέστερη γνώση τους. Ένα ημιτελές πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που δεν προσδιορίζει με σαφήνεια τι ζητά. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται επίσης «ανοιχτό πρόβλημα» και η παιδαγωγική μέθοδος που το αξιοποιεί ονομάζεται «ανοιχτή προσέγγιση». Με άλλα λόγια, η ανοιχτή προσέγγιση είναι μια παιδαγωγική στρατηγική που στοχεύει στην κατανόηση των μαθηματικών και στην εφαρμογή τους μέσω δημιουργικών μαθηματικών δραστηριοτήτων που διεγείρουν την περιέργεια και τη συνεργασία των μαθητών κατά την αντιμετώπιση προβλημάτων.

Η ανοιχτή προσέγγιση είναι μια ευέλικτη μέθοδος που επικεντρώνεται στον μαθητή. Οι μαθητές, που εργάζονται μεμονωμένα ή σε ομάδες, αναμένεται να εφαρμόσουν τη δική τους μεθοδολογία για την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων. Αυτά τα προβλήματα έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να έχουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις ή να μπορεί να φτάσει κάποιος σε μια απάντηση με περισσότερους από έναν τρόπους, και με αυτό τον τρόπο να προκαλέσουν στους μαθητές διάφορα επίπεδα γνωστικής ανάπτυξης.

Γενικά, ένα ανοιχτό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που είναι ανοιχτό σε πολλές διαφορετικές λύσεις (Becker & Shimada, 1997, Nohda, 2000). Γεγονός είναι όμως ότι ο ορισμός του ποικίλλει μεταξύ των μελετητών. Αυτός ο τίτλος περιλαμβάνει πολλά προβλήματα που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το ύφος τους όμως όλα «σπάνε» το στερεότυπο ότι κάθε πρόβλημα έχει μια σωστή λύση.

Η έννοια «ανοιχτό πρόβλημα» θα μπορούσε να εξηγηθεί ορίζοντας το αντίθετό της, ορίζοντας δηλαδή τι είναι «κλειστό πρόβλημα». Ο Pehkonen (1995) καθόρισε για πρώτη φορά τα κλειστά προβλήματα. Ένα κλειστό πρόβλημα έχει πολύ ξεκάθαρους στόχους και δεν επιτρέπει την ανάπτυξη «αποκλίνουσας» σκέψης δηλαδή

έναν τύπο ελεύθερης πνευματικής διεργασίας που βασίζεται στη φαντασία. Ένα πρόβλημα είναι «κλειστό» αν η κατάσταση εκκίνησης και η τελική του κατάσταση, ο στόχος του, είναι κλειστές, δηλαδή εξηγούνται με σαφήνεια. Εάν η κατάσταση εκκίνησης ή / και η κατάσταση στόχου (δηλαδή τα ζητούμενα) είναι μη σαφώς διατυπωμένα, έχουμε ένα ανοιχτό πρόβλημα (Σχήμα 1.1).

Επομένως, ένα πρόβλημα που είναι «ανοιχτό» σε σχέση είτε με την εισαγωγή του είτε με τους στόχους του, μπορεί να θεωρηθεί ανοιχτό πρόβλημα. Υπό αυτή την έννοια, ένα ανοιχτό πρόβλημα ορίζεται ως ένα πρόβλημα που μπορεί να έχει ένα πολύ ξεκάθαρο αρχικό πλαίσιο αλλά είναι ανοιχτό σε πολλές διαφορετικές πιθανές λύσεις.

Ο London (1993) υποστήριξε ότι τα ανοιχτά προβλήματα θα πρέπει να έχουν τέσσερα χαρακτηριστικά: α) να έχουν διαφορετικές λύσεις, β) να μπορούν να επιλυθούν σε συγκεκριμένο χρόνο, γ) να μπορεί ο κάθε μαθητής να αναπτύξει μία στρατηγική επίλυσης και δ) να δίνει στους εκπαιδευτικούς δυνατότητες αξιολόγησης της λύσης ή των λύσεών τους.

Τελική κατάσταση (τα ζητούμενα) → ↓ Κατάσταση εκκίνησης (οι υποθέσεις)	Κλειστή (σαφώς διατυπωμένα ζητούμενα)	Ανοιχτή
Κλειστή (σαφώς διατυπωμένες υποθέσεις)	Κλειστό πρόβλημα	ανοικτό πρόβλημα (open-ended problem) • ρεαλιστικό πρόβλημα (real-life situation) • διερεύνηση προβληματικών καταστάσεων (investigation problem fields) • παραλλαγές προβλήματος (problem variations)
Ανοιχτή	ανοικτό πρόβλημα • ρεαλιστικό πρόβλημα (real-life situation) • παραλλαγές προβλήματος (problem variations)	ανοικτό πρόβλημα (open-ended problem) • ρεαλιστικό πρόβλημα (real-life situation) • παραλλαγές προβλήματος (problem variations) • διερευνητική εργασία (project) • διατύπωση προβλήματος (problem posing)

Σχήμα 1.1. Η ταξινόμηση των προβλημάτων ανάλογα με την αρχική και την τελική τους κατάσταση (Pehkonen, 1997).

Ο Nohda (1995) υποστήριξε την άποψη ότι τα ανοικτά προβλήματα πρέπει να πληρούν δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, θα πρέπει να ταιριάζουν σε κάθε μαθητή χρησιμοποιώντας γνωστά και ενδιαφέροντα γι' αυτόν θέματα και δεύτερον, τα ανοικτά προβλήματα θα πρέπει να είναι κατάλληλα για μαθηματική σκέψη, θα πρέπει να μπορούν να γενικευτούν σε νέα προβλήματα και θα πρέπει επίσης να επιτρέπουν διάφορες λύσεις σε διάφορα επίπεδα. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές είναι απαραίτητο να αισθανθούν ότι είναι δυνατόν να τα λύσουν με βάση τις γνώσεις τους και να έχουν την αίσθηση της επιτυχίας κατά την επίλυσή τους. Επομένως τα προβλήματα πρέπει να είναι αρκετά ευέλικτα ώστε να λαμβάνουν υπόψη τις διαφορετικές μαθηματικές ικανότητες των μαθητών.

1.2.2 Ανοικτό Πρόβλημα και Εκπαιδευτικοί Στόχοι

Οι περισσότερες ερωτήσεις στα μαθηματικά έχουν μόνο μία απάντηση και τα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στα σχολικά μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι συνήθως κλειστά προβλήματα τα οποία δεν αφήνουν πολλά περιθώρια δημιουργικής σκέψης. Ως εκ τούτου, δίνεται έμφαση στη «συγκλίνουσα σκέψη», δηλαδή στο να απομνημονεύει ο μαθητής μαθηματικούς κανόνες και θεωρήματα και στη συνέχεια τους εφαρμόζει σε προβλήματα για να βρει τη μια και μόνη λύση απομακρύνοντάς τον έτσι από την εξερεύνηση διαφορετικών ιδεών και ίσως και από τα μαθηματικά. Ωστόσο, τα ανοικτά προβλήματα μπορούν να αντισταθμίσουν αυτά τα μειονεκτήματα επειδή επιτρέπουν διάφορες απαντήσεις ή διαφορετικές προσεγγίσεις. Στα πλεονεκτήματα των ανοιχτών προβλημάτων έχουν αναφερθεί πολλοί ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών.

Ο Freedman (1994) έχει δηλώσει ότι τα ανοιχτά προβλήματα επιτρέπουν στους μαθητές να χρησιμοποιούν και να αναπτύσσουν υψηλής τάξης ικανότητες σκέψης. Δεδομένου ότι τα ανοιχτά προβλήματα επιτρέπουν πολλές διαφορετικές λύσεις λόγω της δυνατότητας της διαφορετικής ερμηνείας τους από τον εκπαιδευόμενο, θεωρείται ότι συμβάλλουν στην ανάπτυξη της ευρηματικότητας και της ευελιξίας του μαθητή (Silver, 1997).

Ο Sawada (1997) απαρίθμησε πέντε πλεονεκτήματα των ανοιχτών προβλημάτων. Πρώτον, οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά στην τάξη και εκφράζουν τις ιδέες τους πιο ελεύθερα. Δεύτερον, οι μαθητές μπορούν να έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν ευρύτερα τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητές τους. Τρίτον, όλοι οι μαθητές,

ακόμα και αυτοί με χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά, μπορούν να απαντήσουν στο πρόβλημα με τον δικό τους τρόπο βασισμένο στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους. Τέταρτον, οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τη δική τους κατάλληλη προσέγγιση και να εξηγήσουν τον λόγο για την επιλογή τους. Τέλος, προσφέρεται στους μαθητές η ευκαιρία να αισθανθούν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης και την αποδοχή των άλλων μαθητών. Έτσι, αυτά τα προβλήματα είναι προσιτά στους μαθητές και τους δίνουν αυτοπεποίθηση να λύσουν νέα προβλήματα (Wu, 1994).

Η ύπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει την ευκαιρία στον κάθε μαθητή να ανταποκριθεί στο πρόβλημα με το δικό του τρόπο και να εργαστεί στο δικό του επίπεδο, είτε ξεχωρίζει στα μαθηματικά είτε όχι. Μπορεί να προσπαθήσει να βρει τις δικές του απαντήσεις στα προβλήματα μέσω του δικού του εύρους γνώσεων και ικανοτήτων με αποτέλεσμα να συμμετέχει πιο ενεργά στο μάθημα και να εκφράζει τις ιδέες του πιο συχνά (Παρασχίδης, 2008). Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο τα ανοικτά προβλήματα μπορούν εύκολα να υιοθετηθούν στις διαφοροποιημένες τάξεις.

Επειδή ενθαρρύνει ποικίλους τρόπους σκέψης, ένα ανοιχτό πρόβλημα συμβάλλει στην ενίσχυση της αποκλίνουσας σκέψης. Στο πλαίσιο αναζήτησης διαφορετικών λύσεων και διαφορετικών προσεγγίσεων, οι μαθητές μπορούν να προωθήσουν πολλές ιδέες ελεύθερα (ευχέρεια) να κάνουν προσπάθειες για να σχεδιάσουν νέες στρατηγικές για την αντιμετώπιση του προβλήματος όταν οι προηγούμενες δεν είχαν επιφέρει κάποιο αποτέλεσμα (ευελιξία) και να σκεφτούν απροσδόκητες ιδέες (πρωτοτυπία) (Κόσσυβας, 1996). Επίσης ενισχύει την ανάπτυξη δεξιοτήτων σκέψης ανώτερης τάξης των μαθητών (Pehkonen, 1997) αφού κατά τη διάρκεια της επίλυσης αναλύουν το πρόβλημα, αξιολογούν και επιχειρηματολογούν υπέρ ή κατά κάποιας πρότασης και αναπτύσσουν, οργανώνουν και συνθέτουν επιμέρους στοιχεία για τη λύση προβλήματος.

Ένας από τους αναγνωρισμένους τρόπους ανάπτυξης των συνδέσεων των μαθηματικών γνώσεων είναι η επίλυση προβλημάτων με διάφορους τρόπους (Leikin & Levav-Waynberg 2009, NCTM, 2000, Pólya, 1981, Silver, 1997). Όταν οι μαθητές επιλύουν τα προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους επικοινωνώντας και συζητώντας τις ιδέες τους στην τάξη, προωθούν τη μαθηματική τους γνώση, κάνουν συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και συνδέουν διαφορετικές έννοιες και ιδέες (Pólya, 1981).

Η ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης, η σύγκριση των διαφορετικών λύσεων και η συζήτηση πάνω σ' αυτές κινητοποιεί τους μαθητές να

επιχειρηματολογήσουν υπέρ των λύσεών τους, με αποτέλεσμα να προάγεται η μαθηματική τους σκέψη (Κόσυβας, 2016) και να καθίσταται εύκολο για τον εκπαιδευτικό να αξιολογήσει τι έχουν μάθει οι μαθητές και πόσο καλά έχουν εμπεδώσει ό,τι έμαθαν (Kwon, Park & Park, 2006).

Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας δόθηκε στους μαθητές ένα ανοικτό πρόβλημα που αφορούσε στη γενική περιγραφή των γεωμετρικών στοιχείων και της κίνησης ενός περιστρεφόμενου τροχού λούνα – παρκ μέσα από τη μελέτη φωτογραφιών του και ενός βίντεο χωρίς να τους δίνεται καμιά άλλη πληροφορία..

1.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση

1.3.1 Ορισμός

Οι άνθρωποι στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τον κόσμο, να ερμηνεύσουν τα διάφορα φαινόμενα, να κάνουν προβλέψεις για τη συμπεριφορά διαφόρων συστημάτων αλλά και για να ενεργήσουν πάνω σε αυτά, επιστρατεύουν τις συμβολικές, παραστατικές και δημιουργικές τους ικανότητες δημιουργώντας πραγματικά ή συμβολικά κατασκευάσματα που μιμούνται ή αναπαριστούν – σε μια ιδεατή μορφή – στοιχεία ή πτυχές της πραγματικότητας (Ράπτης & Ράπτη, 2002). Τα κατασκευάσματα αυτά ονομάζονται μοντέλα και μπορούν να έχουν – σε επίπεδο δομής - αναλογικές και τοπολογικές ομοιότητες (φυσικά μοντέλα δύο ή τριών διαστάσεων ή ομοιώματα) ή να συνιστούν συμβολικές κατασκευές που δε σχετίζονται φαινομενολογικά με το προς αναπαράσταση σύστημα (Βοσνιάδου, 1998).

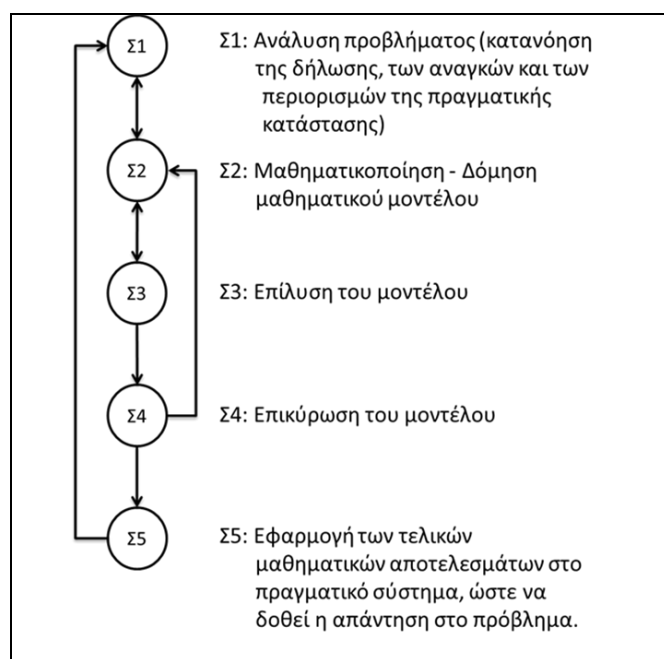
Μαθηματικό μοντέλο, είναι ένα μοντέλο, που αποτελείται από μαθηματικές έννοιες όπως , σταθερές, μεταβλητές, συναρτήσεις, εξισώσεις, ανισώσεις κ.λ.π. Το σύνολο των μεταβλητών και των σχέσεων ανάμεσα στις μεταβλητές, λέμε ότι αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο της κατάστασης που εξετάζουμε. (Κλαουδάτος, 1992). Η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου, δηλαδή η μοντελοποίηση του πραγματικού προβλήματος, είναι μια μετατροπή μιας μορφής αναπαράστασης εννοιών και καταστάσεων σε μια άλλη με μαθηματικά στοιχεία με στόχο την επίλυσή του προβλήματος.

Ως μαθηματική μοντελοποίηση ορίζεται η μελέτη των μαθηματικών εννοιών και λειτουργιών μέσα στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου και η κατασκευή μοντέλων για την εξερεύνηση και κατανόηση πραγματικών πολύπλοκων προβληματικών

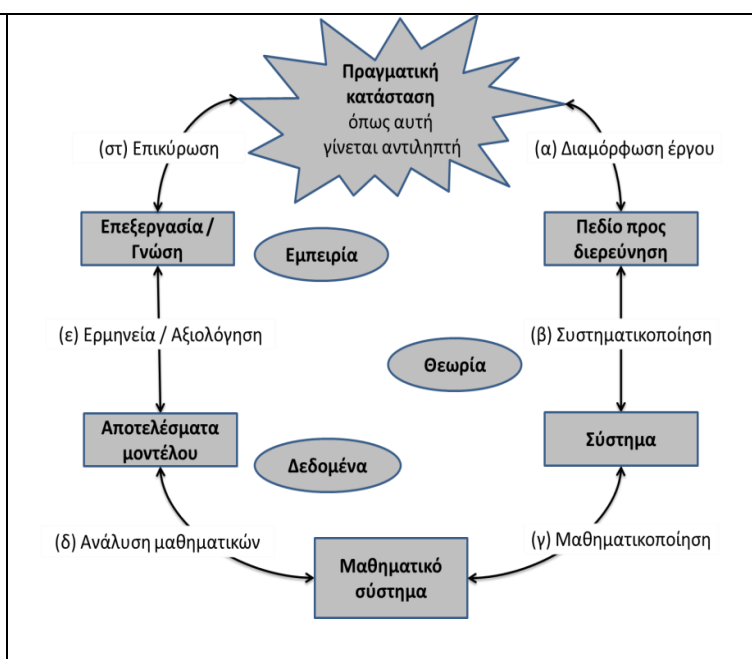
καταστάσεων (Lesh and Doerr, 2003, English, 2006). Είναι η αμφίδρομη διαδικασία μετάφρασης μεταξύ του πραγματικού κόσμου και του κόσμου των μαθηματικών (Blum & Ferri, 2009). Είναι μια διαδικασία που χρησιμοποιεί τα μαθηματικά για να αναπαριστά, να αναλύει, να κάνει προβλέψεις ή να παρέχει με άλλο τρόπο πληροφορίες για καταστάσεις του πραγματικού κόσμου (GAIMME, 2019). Η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί μια γνωστική μέθοδο κατά την οποία αντικαθίσταται το αρχικό αντικείμενο ή η κατάσταση με ένα μοντέλο, εξετάζεται το μοντέλο και εξάγονται πληροφορίες χρήσιμες για το αρχικό αντικείμενο ή κατάσταση. Για παράδειγμα, η μετατροπή της διατύπωσης ενός πραγματικού προβλήματος σε μορφή συμβολικής εξίσωσης, ή η μετατροπή μιας εικόνας του πραγματικού περιβάλλοντος σε μια αναπαράσταση στο χαρτί και στη συνέχεια η λύση του προβλήματος, αποτελούν μορφές μοντελοποίησης.

1.3.2 Κύκλος μοντελοποίησης

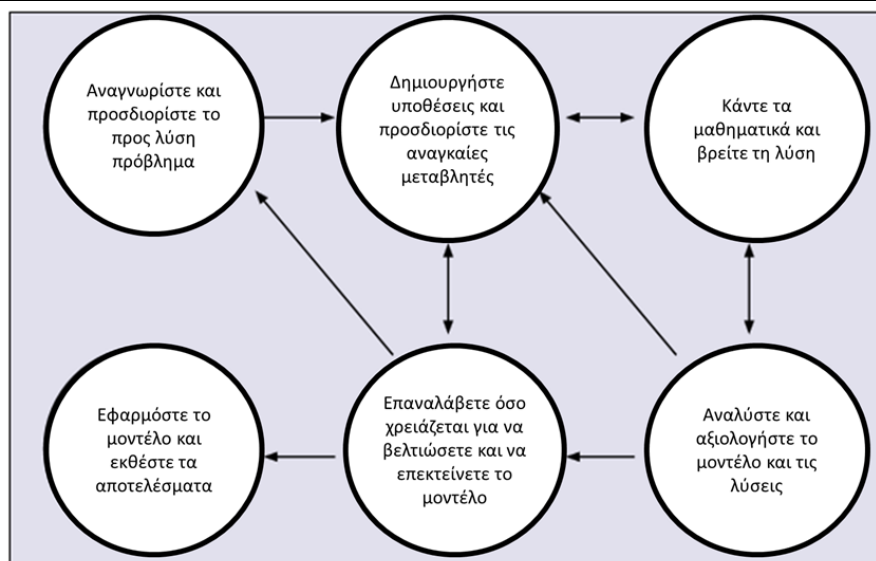
Κατά τη συζήτηση της μαθηματικής μοντελοποίησης και των συναφών δραστηριοτήτων, οι ερευνητές για την κατανόηση των μαθησιακών συμπεριφορών, αναπαριστούν τη διαδικασία της μοντελοποίησης ως μία κυκλική δραστηριότητα. Οι κυκλικές αναπαραστάσεις που αναπτύχθηκαν, περιγράφουν τα στάδια που πρέπει να περάσουν οι μαθητές για να προσεγγίσουν ένα πρόβλημα της πραγματικότητας.



Σχήμα 1.2 Κύκλος μοντελοποίησης, Voskoglu (2007)



Σχήμα 1.3 Κύκλος μοντελοποίησης, Blomhøj & Jensen (2007)



Σχήμα 1.4 Κύκλος μοντελοποίησης, GAIMME 2016

(Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education)

Ο πρώτος κύκλος μοντελοποίησης που σχετίζεται με την εκπαίδευση των μαθηματικών παρουσιάστηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1970 από τον Henry Pollak και από τότε παρουσιάστηκαν πολλές διαφορετικές εκδοχές του , ανάλογα με τον ερευνητικό στόχο. Σύμφωνα με τους Kaiser και Sriraman (2006), ο κύκλος μοντελοποίησης περιλαμβάνει έως επτά στάδια και χωρίζεται σε δύο τομείς/κόσμους. Ο ένας ονομάζεται μαθηματικός ή ενδομαθηματικός και ο άλλος ονομάζεται πραγματικότητα ή εξωμαθηματικός ή υπόλοιπος κόσμος.

Μια σύντομη επεξήγηση του κύκλου μοντελοποίησης, όπως αυτός απεικονίζεται, από διάφορους ερευνητές είναι η εξής. Το πρόβλημα της μοντελοποίησης βρίσκεται στον «πραγματικό κόσμο» που ονομάζεται πραγματική κατάσταση (το πρόβλημα, που συχνά διατυπώνεται και αφορά στην καθημερινή κατάσταση και γνώση). Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν το πρόβλημα, να κάνουν μια διανοητική αναπαράσταση της κατάστασης (πώς αντιλαμβάνονται τη συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση) και να συνεχίσουν στη δόμηση ενός πραγματικού μοντέλου (εξωτερικές αναπαραστάσεις) απλοποιώντας , φιλτράροντας και εξιδανικεύοντας τις πληροφορίες της προβληματικής κατάστασης που τους δόθηκε αρχικά. Αυτό το πραγματικό μοντέλο στη συνέχεια μεταφράζεται από τον «πραγματικό κόσμο», με τη χρήση της εξω-μαθηματικής γνώσης, στο «μαθηματικό κόσμο» με μαθηματικά κριτήρια και δημιουργεί ένα μαθηματικό μοντέλο. Στο επόμενο βήμα οι μαθητές δουλεύουν στο «μαθηματικό κόσμο» για να παράγουν

απαντήσεις και μαθηματικά αποτελέσματα. Τέλος, τα μαθηματικά αποτελέσματα ερμηνεύονται σε πραγματικά αποτελέσματα με τη μετακίνηση πίσω στον «πραγματικό κόσμο» και τα πραγματικά αποτελέσματα αξιολογούνται. Εάν κατά την αξιολόγηση προκύψει ότι τα πραγματικά αποτελέσματα δεν είναι έγκυρα και πρέπει να συμπεριληφθούν και άλλες παράμετροι/πτυχές τότε ο μαθητής πρέπει να κάνει ξανά τον κύκλο μοντελοποίησης.

Ενδιαφέρουσες είναι οι προσεγγίσεις του Βόσκογλου (2007) (Σχήμα 1.2) και των Blomhøj & Jensen (2007) (Σχήμα 1.3). Ο Βόσκογλου ασχολείται κι αυτός με τα στάδια μοντελοποίησης αλλά αντιμετωπίζει τον κύκλο μοντελοποίησης ως διαδικασία, που βασίζεται στη μετάβαση μεταξύ διαδοχικών διακριτών σταδίων. Κάθε στάδιο Σ1 έως Σ5 ορίζεται ως προς τα αναμενόμενα αποτελέσματα και η μετάβαση από το ένα στάδιο στο επόμενο εξαρτάται εξ ολοκλήρου από την επιτυχή ολοκλήρωση του προηγούμενου σταδίου.

Οι Blomhøj και Jensen (2007) παρουσιάζουν έξι υπο-διεργασίες (α-στ), κάθε μία από τις οποίες συνδέεται με ένα στάδιο μοντελοποίησης:

- (α) Διαμόρφωση του έργου (περισσότερο ή λιγότερο ρητά) ώστε να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά της αντιληφθείσας πραγματικότητας που πρόκειται να μοντελοποιηθεί.
- (β) Επιλογή των σχετικών αντικειμένων, σχέσεων κ.λπ. από το πεδίο διερεύνησης που προέκυψε και εξιδανίκευσή τους ώστε να επιτραπεί μια μαθηματική αναπαράσταση.
- (γ) Μετάφραση αυτών των αντικειμένων και σχέσεων από τον αρχικό τρόπο εμφάνισής τους στα μαθηματικά.
- (δ) Χρήση μαθηματικών μεθόδων για την επίτευξη μαθηματικών αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων.
- (ε) Ερμηνεία των μαθηματικών αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων ως αποτελέσματα και συμπεράσματα σχετικά με την προς διερεύνηση κατάσταση.
- (στ) Αξιολόγηση της εγκυρότητας του μοντέλου με βάση τα δεδομένα που έχουν παρατηρηθεί ή προβλεφθεί ή είναι γνωστά από τη θεωρία.

Οι τρεις ελλείψεις στο κέντρο του κύκλου δείχνουν ότι η επιστημολογική βάση, για τις όποιες διεργασίες γίνονται κατά τη διάρκεια της μοντελοποίησης, είναι η εμπειρία, η θεωρία και τα δεδομένα. Το στάδιο «επεξεργασία / γνώση» περιγράφεται ως η νέα γνώση που αποκτήθηκε από τα φαινόμενα που ερευνήθηκαν, η οποία

εφαρμόζεται αν υποστηρίζεται και επικυρώνεται από τα εμπειρικά δεδομένα.

1.3.3 Οφέλη εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες μοντελοποίησης

Η ιδέα επίλυσης προβλημάτων πραγματικού πλαισίου έχει επισημανθεί από τους ερευνητές (Pierce & Stacey, 2009) ως σημαντική για την ενίσχυση της κατανόησης και της μάθησης. Οι μαθητές μέσα από τη δράση τους επιδιώκεται να κατανοήσουν το πρόβλημα και να το επιλύσουν μέσω μοντελοποίησης χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις, σχέσεις και έννοιες.

Η εμπλοκή των μαθητών σε κύκλους μοντελοποίησης, θεωρείται από πολλούς ερευνητές ότι ενισχύει τη δημιουργικότητά και την κριτική τους σκέψη.

Οι Blum και Niss (1991) αναφέρουν πέντε κύρια επιχειρήματα για τη συμπερίληψη της μαθηματικής μοντελοποίησης στο πρόγραμμα σπουδών:

1. Το διαμορφωτικό επιχείρημα

Η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν γενικές ικανότητες, στάσεις και αυτοπεποίθηση προωθώντας μια συνολική ικανότητα επίλυσης προβλημάτων που είναι διερευνητική, δημιουργική και ανοιχτή.

2. Το επιχείρημα της «ικανότητας κριτικής σκέψης»

Μπορεί να προετοιμάσει τους μαθητές να είναι σε θέση να προσδιορίζουν, να αναλύουν και να κατανοούν τις καταστάσεις και τις περιπτώσεις της καθημερινότητας όπου χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά.

3. Το επιχείρημα της χρησιμότητας

Με τη χρήση των μαθηματικών οι μαθητές συνειδητοποιούν πως τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές καταστάσεις που σχετίζονται με τον εξωμαθηματικό τομέα.

4. Το επιχείρημα της «εικόνας των μαθηματικών»

Η μαθηματική μοντελοποίηση δίνει στους μαθητές μια ευρεία εικόνα των μαθηματικών ως επιστήμης και ως δραστηριότητας στην κοινωνία και στον πολιτισμό.

5. Το επιχείρημα της «προώθησης της μάθησης των μαθηματικών»

Μπορεί να ενεργοποιήσει και να βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν μαθηματικές έννοιες και μεθόδους.

Η Schmidt (2012) συζητά επίσης τα κίνητρα, από την οπτική των εκπαιδευτικών, για τη διδασκαλία μέσω μοντελοποίησης. Αναφέρει ότι:

1. οι μαθητές συμμετέχουν στο σύνολό τους σε ένα έργο που απαιτεί μοντελοποίηση
2. οι μαθητές υπολογίζουν και σκέφτονται πιο δημιουργικά,
3. οι μαθητές δουλεύουν πιο ανεξάρτητα,
4. τα μαθηματικά αποκτούν σημασία για την καθημερινή ζωή των μαθητών, και
5. η μοντελοποίηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε τάξεις μαθητών μικτής επίδοσης στα μαθηματικά.

Οι μαθηματικές έννοιες, καθώς συνδέονται αμεσότερα με τον πραγματικό κόσμο, προσφέρουν στους μαθητές πλούσιες ευκαιρίες μάθησης και ενθαρρύνουν τη χρήση ποικίλων μέσων συνοπτικής περιγραφής και ανάπτυξης γενικεύσεων (Mousoulides et al. 2010).

Η ενασχόληση με πραγματικές καταστάσεις αποτελεί πρόκληση και αφυπνίζει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, όταν παρέχονται στους μαθητές τα κατάλληλα εργαλεία (Καφετζόπουλος, Κόσυβας & Λυγάτσικας, 2015). Όπως αναφέρουν οι Schiefele και Csikszentmihalyi (1995), η αύξηση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα μαθηματικά επιτυγχάνεται από την ενεργό συμμετοχή των μαθητών σε μαθητοκεντρικές δραστηριότητες, μέσω των οποίων προωθείται η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή.

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται δεν είναι για τους μαθητές αποκλειστικά μαθηματικά και ως εκ τούτου οι μαθητές πρέπει να αποκαλύψουν τα μαθηματικά με τη χαρτογράφηση των πληροφοριών του προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να παράγουν μια απάντηση χρησιμοποιώντας γνωστές μαθηματικές λειτουργίες. Οι μαθητές μαθηματοποιούν τα προβλήματα με τρόπους που να έχει νόημα γι' αυτούς, και αυτή η διαδικασία μπορεί να οδηγήσει στη βελτίωση των ικανοτήτων τους ως προς τη χρήση και εφαρμογή των μαθηματικών για την επίλυση προβλημάτων ακόμα και εκτός τάξης (English, 2003). Χαρακτηριστικό των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης είναι ότι ενθαρρύνουν την ανάπτυξη γενικευμένων λύσεων. Αυτές οι λύσεις (μοντέλα) επικεντρώνονται στα δομικά χαρακτηριστικά του προβλήματος στα οποία αναφέρονται και εκφράζονται χρησιμοποιώντας μια ποικιλία μέσων αναπαραστάσεων, συμπεριλαμβανομένων γραπτών συμβόλων, διαγραμμάτων ή γραφημάτων. Το τελευταίο είναι κεντρικό στη μάθηση των μαθηματικών για μαθητές

της υποχρεωτικής εκπαίδευσης (Lesh & Doerr, 2003). Κατά την κατασκευή μοντέλων, οι μαθητές προσδιορίζουν, επιλέγουν και συλλέγουν σχετικά δεδομένα, ερμηνεύουν τη λύση στο πλαίσιο, περιγράφουν καταστάσεις χρησιμοποιώντας μια ποικιλία μέσων και επικοινωνούν τις λύσεις τους (Lesh and Doerr, 2003).

Οι μαθητές στο επίπεδο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης μπορούν να επωφεληθούν από την εργασία με αυθεντικά προβλήματα μοντελοποίησης (English και Watters, 2005, English, 2006). Η χρήση των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν σημαντικές μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες που κανονικά δεν θα συναντούσαν στο «παραδοσιακό» σχολικό πρόγραμμα σπουδών. Οι μαθηματικές ιδέες είναι ενσωματωμένες στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου και αναδύονται από τους μαθητές καθώς εργάζονται στο πρόβλημα. Επιπλέον, οι μαθητές έχουν πρόσβαση σε αυτές τις μαθηματικές ιδέες σε διαφορετικά επίπεδα πολυπλοκότητας (English, 2006). Οι Lesh και Doerr (2003) υποστηρίζουν ότι μέσω της μοντελοποίησης διευκολύνεται η εννοιολογική προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών, καθώς οι μαθητές επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα μέσω μαθηματικών μοντέλων. Η English (2006) αναφέρει ότι υπήρχαν σημαντικές ενδείξεις ότι οι μαθηματικές ιδέες, η μαθηματική γλώσσα και η ευελιξία των μαθητών ως προς τη χρήση των δεδομένων βελτιώθηκαν αφού εργάστηκαν σε μια ακολουθία δραστηριοτήτων μοντελοποίησης.

Κατά τους Blum & Borromeo (2009) τα μαθηματικά μοντέλα και η μοντελοποίηση βρίσκονται παντού στον πραγματικό κόσμο. Συνεπώς, μια ολοκληρωμένη προετοιμασία των μαθητών για να ανταποκριθούν στον κοινωνικό στίβο απαιτεί την ανάπτυξη της ικανότητας μοντελοποίησης. Και αυτό συμβαίνει διότι η μοντελοποίηση:

- βοηθάει τους μαθητές να αντιληφθούν καλύτερα τον πραγματικό κόσμο και να κατανοήσουν την αξία των μαθηματικών ως εργαλείο ερμηνείας της πραγματικότητας,
- ενισχύει την μαθηματική εκπαίδευση (μάθηση νέων εννοιών και διαδικασιών) ενώ παράλληλα συνεισφέρει στην ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων παρέχοντας ταυτόχρονα κίνητρα,
- δίνει μια ολοκληρωμένη εικόνα για το τι είναι μαθηματικά, δίνοντάς τους νόημα.

- ο μαθητής αναπτύσσει μία πιο κριτική στάση απέναντι στα προβλήματα, δίνοντας έμφαση στη δόμηση αλλά και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Με την μοντελοποίηση τα μαθηματικά αποδεσμεύονται από το στενό πλαίσιο του χειρισμού συμβόλων, αποκτούν νόημα και βρίσκουν πεδίο εφαρμογής. Πίσω από όλα αυτά τα επιχειρήματα βρίσκονται οι κύριοι στόχοι της μαθηματικής διδασκαλίας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Niss, 1996 στο Blum, 2011).

1.3.4 Δυσκολίες των μαθητών κατά τη διαδικασία Μοντελοποίησης

Το γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να μοντελοποιήσουν αποτελεί κοινό εύρημα πολλών ερευνών παγκοσμίως. Τα εμπόδια που εκφράζονται από την άποψη των εκπαιδευομένων είναι ότι η μαθηματική μοντελοποίηση είναι πιο απαιτητική και απαιτεί μεγαλύτερη συμμετοχή του μαθητή από τη συνηθισμένη διδασκαλία. Σύμφωνα με τους Blum και Niss (1991), οι μαθητές προτιμούν την επίλυση καθημερινών εργασιών με χρήση αλγορίθμων περισσότερο από το να εμπλέκονται σε απρόβλεπτες δραστηριότητες μοντελοποίησης. Κατά τους Crouch και Haines (2004) η κύρια δυσκολία εντοπίζεται στη διαδικασία μετάβασης από τον πραγματικό κόσμο στον μαθηματικό και αντίστροφα, στη διαδικασία ερμηνείας των μαθηματικών αποτελεσμάτων με βάση πληροφορίες και στοιχεία της πραγματικότητας. Γιατί, όμως, οι μαθητές δυσκολεύονται στο να κινηθούν ελεύθερα μεταξύ των δύο αυτών «κόσμων»;

Ένας πρώτος λόγος είναι το μεγάλο χάσμα μεταξύ της θεωρητικής γνώσης που προσφέρει η τυπική εκπαίδευση και της αποστασιοποιημένης από το θεωρητικό πλαίσιο σκέψης, που απαιτεί το πραγματικό πρόβλημα. Ένας δεύτερος λόγος είναι η απειρία των μαθητών στο να διαλέξουν ποια πληροφορία είναι αξιοποιήσιμη στη λύση του προβλήματος και ποια τεχνική πρέπει να χρησιμοποιήσουν.

Συνεπώς είναι δόκιμο να ισχυριστούμε ότι η μοντελοποίηση απαιτεί αφενός καλή γνώση του πραγματικού κόσμου, αφετέρου κατασκευαστικές, αφαιρετικές, ερμηνευτικές και μεταγνωστικές ικανότητες, σε συνδυασμό με γνώσεις μαθηματικών τεχνικών και αλγορίθμων.

Αντίστοιχα, οι Blum & Leiß (2007) επιβεβαιώνουν τα προαναφερθέντα, σημειώνοντας ότι οι περισσότεροι μαθητές της δικής τους έρευνας δεν αντιμετώπισαν ιδιαίτερα προβλήματα στη μαθηματική επεξεργασία (εφαρμογή μαθηματικών τύπων,

μαθηματικοί υπολογισμοί κ.ο.κ.), αλλά στα βήματα πριν και μετά την μαθηματικοποίηση. Πολλοί δυσκολεύτηκαν στην αξιοποίηση των αρχικών δεδομένων ενώ άλλοι δεν μπόρεσαν να ερμηνεύσουν/επαληθεύσουν το μαθηματικό τους αποτέλεσμα στο αρχικό πλαίσιο του προβλήματος. Παρόμοια είναι τα συμπεράσματα της έρευνας των Blum και Borromeo (2009).

Από την άλλη πλευρά, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν τη διδασκαλία της μοντελοποίησης δύσκολη και απαιτητική. Πιστεύουν ότι οι δραστηριότητες μοντελοποίησης καθιστούν δύσκολη την αξιολόγηση των μαθητών, ότι δεν έχουν τις γνώσεις να τις σχεδιάσουν και να επιλέξουν τις κατάλληλες δραστηριότητες και ότι δεν έχουν το χρόνο να τις προετοιμάσουν ή να τις υλοποιήσουν (Blum & Niss, 1991 · Schmidt, 2012). Επιπλέον, η διδασκαλία μέσω της μοντελοποίησης γίνεται πιο ανοιχτή και λιγότερο προβλέψιμη (Blum & Leiß, 2007).

Τέλος, παρότι ορισμένοι μαθηματικοί πιστεύουν ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δεν πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στη διδασκαλία, επειδή κατά τη γνώμη τους, δεν έχει την ομορφιά, τη σαφήνεια και την καθαρότητα των μαθηματικών (Blum & Niss, 1991), η διδασκαλία προβλημάτων μοντελοποίησης είναι καλό να αποτελεί ένα κεντρικό σημείο της διδασκαλίας των μαθηματικών.

1.3.5 Διδασκαλία προβλημάτων Μοντελοποίησης

Έρευνες έδειξαν ότι η μοντελοποίηση μπορεί να διδαχθεί αποτελεσματικά (Kaiser & Maaß 2007, Blum & Borromeo, 2009) αν ακολουθηθεί το τρίπτυχο της ποιοτικής διδασκαλίας, όπως το περιγράφουν οι Blum & Borromeo (2009):

1) Απαιτητικά ενορχηστρωμένη διδασκαλία του μαθηματικού αντικειμένου (η οποία θα δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αποκτήσουν μαθηματικές ικανότητες και να δημιουργήσουν συνδέσεις του πραγματικού με τον μαθηματικό κόσμο).

2) Μόνιμη γνωστική ενεργοποίηση των μαθητών (διεγείροντας γνωστικές και μεταγνωστικές δραστηριότητες, ενθαρρύνοντας την ανεξαρτησία των μαθητών, χειριζόμενοι τα λάθη εποικοδομητικά).

3) Αποτελεσματική και μαθητοκεντρική διαχείριση της τάξης (μεταβάλλοντας εύελικτα τη διδασκαλία, χρησιμοποιώντας αποτελεσματικά τον χρόνο, διαχωρίζοντας την μάθηση από την αξιολόγηση).

Στο σύγχρονο σχολικό περιβάλλον η παρέμβαση των δασκάλων είναι πολλές φορές έντονη, γεγονός που δυσχεραίνει την αποτελεσματική μάθηση της

μοντελοποίησης. Οι παρεμβάσεις θα πρέπει να είναι στρατηγικές, παρακινητικές και να ενισχύουν τα μεταγνωστικά επίπεδα των μαθητών. Σύμφωνα με τον Greenman (1973), για να οδηγηθούν οι μαθητές στην ανάπτυξη και διαμόρφωση μαθηματικών μοντέλων μέσω μιας πραγματικής κατάστασης, θα πρέπει:

1. Η κατάσταση να είναι αρκετά οικεία στο μαθητή, έτσι ώστε να έχει μια πρώτη αίσθηση του τι συμβαίνει.
2. Τα μαθηματικά τα απαραίτητα για τη μοντελοποίηση να είναι γνωστά στους μαθητές
3. Η κατάσταση να είναι επαρκώς "ανοιχτή", για να μπορούν να αναπτυχθούν διάφοροι τρόποι μοντελοποίησης.
4. Το μοντέλο να είναι αρκετά «πλούσιο», ώστε να μπορούν να διατυπωθούν ερωτήσεις.

Σύμφωνα με τους De Corte, Verschaffel & Greer (2000) η εφαρμογή των μαθηματικών για την επίλυση προβληματικών καταστάσεων του πραγματικού κόσμου είναι σύνθετη διαδικασία που περιλαμβάνει πέντε φάσεις και οι οποίες είναι:

- κατανόηση της κατάστασης που περιγράφεται,
- κατασκευή μαθηματικού μοντέλου,
- εργασία στο μαθηματικό μοντέλο,
- ερμηνεία των αποτελεσμάτων στο πραγματικό περιβάλλον και
- αξιολόγηση του αποτελέσματος.

Η μοντελοποίηση ως δεξιότητα, όπως όλες οι δεξιότητες του ανθρώπινου εγκεφάλου, εξαρτάται από το ρυθμό με τον οποίο δουλεύεται. Πρόκειται για μια απαραίτητη δεξιότητα σκέψης η οποία υποστηρίζει τη διαδικασία της μάθησης. Η σύνθετη αυτή δεξιότητα επίσης στηρίζεται στην κατανόηση αρκετών δεξιοτήτων, οι οποίες είναι πολύ βασικές. Τέτοιες είναι η παρατήρηση, η ταξινόμηση, η μέτρηση, η επικοινωνία και η υποβολή ερωτημάτων (Γαγάτσης, 2008). Ο σχεδιασμός τους αφορά κυρίως μικρές ομάδες εργασίας, στις οποίες οι μαθητές εργάζονται συλλογικά για την ανάπτυξη κοινόχρηστων προϊόντων που περιλαμβάνουν περιγραφές, εξηγήσεις, δικαιολογίες, και μαθηματικές παραστάσεις (English & Watters, 2004).

1.3.6. Η μοντελοποίηση στη Ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education – RME)

Η Ρεαλιστική Μαθηματική εκπαίδευση (RME) είναι ένα ρεύμα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που ξεκίνησε να αναπτύσσεται περίπου το 1970 στις Κάτω Χώρες. Η

RME βασίστηκε στις ιδέες του Freudenthal και χαρακτηρίζεται από την ανάγκη τα Μαθηματικά να βρίσκονται κοντά στις εμπειρίες των μαθητών (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

Σύμφωνα με αυτή την οπτική η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να έχει ως σημείο εκκίνησης τις καθημερινές εμπειρίες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών και όχι ένα έτοιμο και ολοκληρωμένο σύστημα γνώσης που έχει προκύψει από επιστήμονες της μαθηματικής επιστήμης ανά τους αιώνες (Freudenthal, 1991). Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μπορούν να «επανεφεύρουν» μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Στα ρεαλιστικά μαθηματικά καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει το πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται το πρόβλημα. Το πλαίσιο του προβλήματος είναι ρεαλιστικό ή πραγματικό (συνδέεται με την καθημερινότητα και τα ενδιαφέροντα του μαθητή). Το πραγματικό πλαίσιο αποτελεί την πηγή, τη βάση της εφαρμογής και το πλαίσιο ελέγχου της μαθηματικής λύσης του προβλήματος. Ο μαθητής υποχρεώνεται μέσα από την κίνηση από το πραγματικό στο μαθηματικό πλαίσιο και αντίστροφα να αναπτύξει τη μαθηματική του γνώση. Συνεπώς, τέτοιου είδους δραστηριότητες συνδέονται άμεσα με δραστηριότητες μοντελοποίησης και μαθηματοποίησης που έχουν περιγραφεί αναλυτικά στις παραπάνω υποενότητες.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε με ποιο τρόπο οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου μοντελοποιούν την περιοδική κίνηση της ρόδας ενός λούνα-παρκ και «επανεφεύρουν» στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας σύμφωνα με την αντίληψη των Ρεαλιστικών Μαθηματικών.

1.4 Περιοδικότητα

1.4.1 Η έννοια της Περιοδικότητας

Η έννοια της περιοδικότητας εμφανίζεται σε κάθε τακτική επανάληψη φαινομένων στη φύση, ανθρώπινων ενεργειών, μηχανικών λειτουργιών κτλ . Πολλά παραδείγματα με περιοδικότητα μπορούν να δοθούν από την καθημερινή ζωή και το φυσικό κόσμο, όπως η εναλλαγή της μέρας με τη νύχτα, η κυκλοφορία του αίματος στο σώμα μας, η λειτουργία της καρδιάς, η λειτουργία ενός ρολογιού, η κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο.

Η περιοδικότητα είναι μια έννοια που είναι παρούσα στην ανάπτυξη της επιστημονικής σκέψης. Ο Pannekoek (1961) αναγνωρίζει ως πηγή της αστρονομίας ως επιστημονικής δραστηριότητας τη συστηματική παρατήρηση της περιοδικής

συμπεριφοράς των ουράνιων σωμάτων. Ο Whitehead (1983) επισημαίνει την περιοδικότητα ως ιδιότητα που ευνοεί τη σύγκριση και ανάλυση των ομοιοτήτων και αναλογιών μεταξύ διαφορετικών φυσικών φαινομένων.

Η περιοδικότητα είναι μια έννοια που σχετίζεται όχι μόνο με τα περιοδικά φαινόμενα της καθημερινής ζωής και τον φυσικό κόσμο, αλλά και με τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες. Η περιοδικότητα στα μαθηματικά παραπέμπει στις περιοδικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις. Οι περιοδικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν φαινόμενα της βιολογίας, της χημείας, της φυσικής και της τεχνολογίας.

Παρόλο που η περιοδικότητα είναι κεντρική σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, υπάρχει περιορισμένος αριθμός ερευνών που εστιάζουν στην κατανόησή της. Η Shama (1998) έκανε μια ποιοτική και ποσοτική μελέτη σε μαθητές διαφορετικών σχολικών βαθμίδων με σκοπό να αξιολογήσει το πώς αντιλαμβάνονται την έννοια της περιοδικότητας. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το 93% των μαθητών αντιλαμβάνεται την έννοια διαισθητικά ως τη συμπεριφορά χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών. Επίσης αναγνωρίζουν ως περιοδικά φαινόμενα που δεν είναι περιοδικά απλά και μόνο επειδή ένα μέρος τους επαναλαμβάνεται (Shama, 1998). Οι αντιλήψεις όπως «κάθε επαναλαμβανόμενη κίνηση είναι περιοδική» ή «κάθε ημιτονοειδές γράφημα, ακόμη και με μειούμενη ένταση, αντιπροσωπεύει μια περιοδική κίνηση» κυριαρχεί στην κατανόηση ακόμα και φοιτητών που σπουδάζουν μαθηματικά (Triantafyllou, Spiliotopoulou & Potari 2014). Επιπλέον οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν τον αναλυτικό ορισμό της περιοδικής συνάρτησης με τις εφαρμογές της σε μη μαθηματικά πλαίσια (Kynigos & Gavrilis, 2006). Τέλος, και ο ίδιος ο ορισμός της περιοδικής συνάρτησης όπως συναντάται σε πολλά μαθηματικά εγχειρίδια εγείρει επιστημολογικής φύσης ζητήματα (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003). Τέτοιου είδους ζητήματα αυξάνουν τη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν και να συνδέσουν στοιχεία της περιοδικότητας ως μαθηματικής έννοιας (π.χ. περιοδικών γραφημάτων) με τις εφαρμογές της (π.χ. περιοδικής κίνησης εκκρεμούς) (Buendia & Cordero, 2005).

1.4.2 Η έννοια της Περιοδικότητας στα σχολικά κείμενα

Στα Μαθηματικά οι μαθητές συναντούν, για πρώτη φορά άρρητα, την έννοια της περιοδικότητας και της περιόδου στο Γυμνάσιο. Εκεί διδάσκονται τους περιοδικούς

δεκαδικούς και τις δυνάμεις. Έτσι παραδείγματος χάριν κατά τη μετατροπή του κλάσματος $\frac{48}{111}$ σε δεκαδικό προκύπτει ο αριθμός 0,432432432... με περίοδο 3.

Επίσης κάθε δύναμη της μορφής a^n με a αρνητικό αριθμό και $n=0,1,2,3,4,5,\dots$ είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός με περίοδο 2.

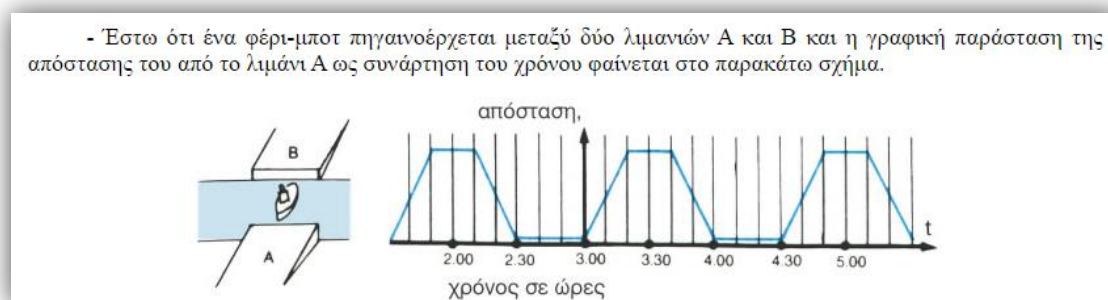
Στη συνέχεια συναντούν, ρητά πλέον, την έννοια της περιοδικότητας μέσα από την έννοια της περιοδικής συνάρτησης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας Β' Λυκείου Γενικής Παιδείας. Αφού πρώτα παρουσιάζονται δύο παραδείγματα γραφικών παραστάσεων περιοδικών συναρτήσεων (Εικ. 1.1) στη συνέχεια αναφέρεται ο ορισμός της περιοδικής συνάρτησης σύμφωνα με τον οποίο «Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

$$i) \quad x + T \in A, x - T \in A \text{ και}$$

$$ii) \quad f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f .»

Στην ίδια παράγραφο του βιβλίου μελετώνται οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, του ημιτόνου, του συνημιτόνου, της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης και αναφέρεται ως σχόλιο ότι οι συναρτήσεις $f(x)=\rho\eta\mu\omega x$ και $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$ όπου $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$.



Εικ.1.1 Παράδειγμα περιοδικής συνάρτησης στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β' Λυκείου

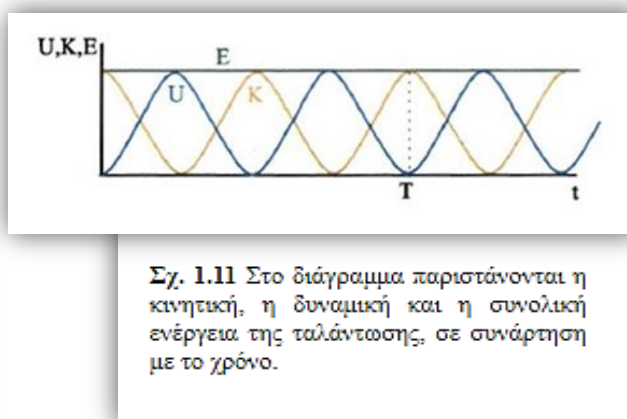
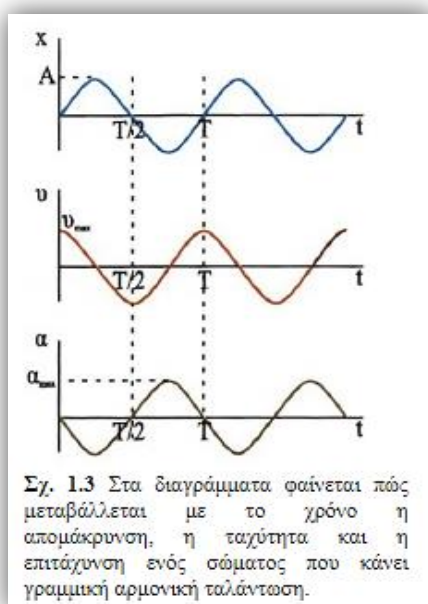
Στη Φυσική οι μαθητές συναντούν την έννοια της περιοδικότητας μέσα από την μελέτη περιοδικών φαινομένων. Στη Γ' Γυμνασίου μελετούν ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα. Από την διδακτέα ύλη της Φυσικής της Γ' γυμνασίου έχει εξαιρεθεί η παράγραφος που αναφέρεται γενικά στις περιοδικές κινήσεις. Διδάσκονται μόνο

ταλαντώσεις και σε αυτό το πλαίσιο ορίζεται και η έννοια της περιόδου. Συγκεκριμένα στο σχολικό βιβλίο της Φυσικής της Γ' γυμνασίου για την περίοδο αναφέρεται ότι:

« Για να περιγράψουμε μια ταλάντωση χρησιμοποιούμε ορισμένα φυσικά μεγέθη: την περίοδο, τη συχνότητα και το πλάτος της ταλάντωσης. Στην εικόνα του σχήματος τραβάμε το ελατήριο στη θέση Α και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σώμα από τη θέση Α φθάνει στη θέση Ο (θέση όπου αρχικά ισορροπούσε), στη συνέχεια στη θέση Β και μετά επιστρέφει στην Ο και ακολούθως ξανά στην Α. Ο χρόνος που χρειάζεται για να κινηθεί το σώμα από το Α στο Ο, μετά στο Β και στη συνέχεια να επιστρέψει πάλι στο Α, δηλαδή ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης, ονομάζεται περίοδος της ταλάντωσης (T).»



Στη Β' Λυκείου διδάσκονται την ομαλή κυκλική κίνηση και στη Γ' Λυκείου μελετούν τα περιοδικά φαινόμενα, τα φαινόμενα δηλαδή που εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα σε σταθερά χρονικά διαστήματα. Συγκεκριμένα μελετούν την αρμονική ταλάντωση, την ηλεκτρική ταλάντωση, το εναλλασσόμενο ρεύμα και την περιστροφική κίνηση στερεού. Εργαλείο μελέτης των περιοδικών αυτών φαινομένων για τους μαθητές είναι ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς συναρτήσεις.



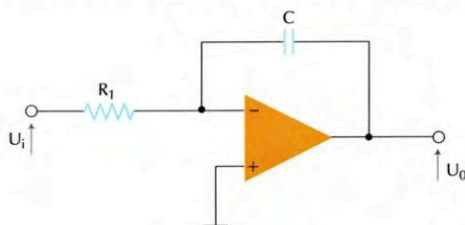
Εικ. 1.2 Γραφικές παραστάσεις από το βιβλίο Φυσικής της Γ' Γενικού Λυκείου

Για παράδειγμα στην απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση $x(t)$, η ταχύτητα $v(t)$ και η επιτάχυνση $a(t)$ του σώματος κάθε χρονική στιγμή t δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $x(t)=A\eta\mu\omega t$, με A το πλάτος της ταλάντωσης, $v(t)=v_{\max}\sigma\upsilon\nu\omega t$ και $a(t)=-a_{\max}\eta\mu\omega t$ ενώ η κινητική και η δυναμική του ενέργεια από τους τύπους $K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega t$ και $U(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \eta\mu^2\omega t$.

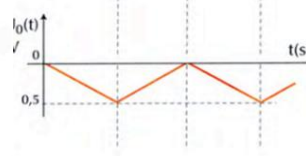
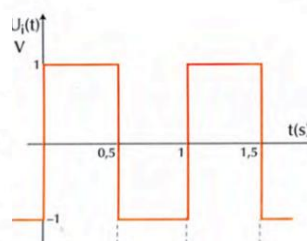
Όμως και οι μαθητές της Επαγγελματικής Εκπαίδευσης (ΕΠΑΛ) που φοιτούν στους τομείς Μηχανολογίας, Ηλεκτρολογίας, Ηλεκτρονικής, Δομικών έργων και Πληροφορικής συναντούν την έννοια της περιοδικότητας μέσω της μελέτης της κυκλικής κίνησης, των ταλαντώσεων και του εναλλασσόμενου ρεύματος.

Ολοκληρωτής

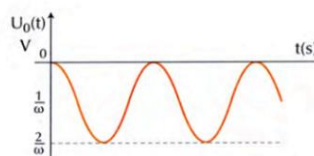
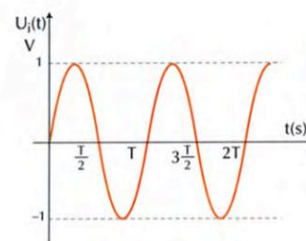
Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως π.χ. στους αναλογικούς υπολογιστές, χρειάζεται να γίνεται (μαθηματική) ολοκλήρωση μιας κυματομορφής. Το κύκλωμα στο οποίο η κυματομορφή της τάσης εισόδου είναι το ολοκλήρωμα της κυματομορφής της τάσης εξόδου του ονομάζεται **ολοκληρωτής** ή **ολοκληρωτής ενισχυτής**. Το κύκλωμα αυτό δημιουργείται από το βασικό κύκλωμα ενίσχυσης του Σχ.4.7 αν αντικαταστήσουμε την αντίσταση ανασύζευξης R_2 με τον πυκνωτή C . Σχ.4.11.



Σχήμα 4.11. Κύκλωμα ολοκληρωτή



Ολοκλήρωση τετραγωνικών παλμών



Ολοκλήρωση ημιτονικού σήματος

Εικ. 1.3 Από το βιβλίο «Αναλογικά Ηλεκτρονικά» Β΄ Λυκείου ΕΠΑΛ

Παρατηρήσεις

Συνοψίζοντας, στα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα σπουδών η έννοια της περιοδικότητας διδάσκεται για πρώτη φορά στους μαθητές στο Λύκειο, στα Μαθηματικά στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου και στη Φυσική στην Β΄ και Γ΄ Λυκείου και αφορά τη μελέτη περιοδικών κινήσεων και περιοδικά μεταβαλλόμενων μεγεθών.

1.4.3 Προβλήματα που αφορούν στην έννοια της περιοδικότητας στα σχολικά κείμενα των Μαθηματικών.

Όπως έχει προαναφερθεί η έννοια της περιοδικότητας διδάσκεται στους μαθητές, στα Μαθηματικά, στη Β΄ Λυκείου. Στις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄ και Β΄ τάξεις Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019 – 2020 επισημαίνεται ότι:

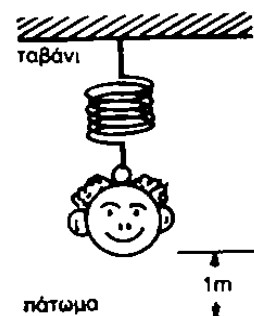
«Η έννοια της περιοδικότητας, που συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδαχτούν οι μαθητές στη Β΄ Λυκείου. Θα πρέπει λοιπόν να δοθεί έμφαση σε αυτή την ιδιότητα μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις. Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορεί να στηριχτεί στον τριγωνομετρικό κύκλο.»

Στη συνέχεια προτείνεται η παρακάτω δραστηριότητα:

- Μία ρόδα ακτίνας 1 περιστρέφεται με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού έτσι ώστε, κάθε σημείο της περιφέρειάς της, να διαγράφει σε ένα δευτερόλεπτο τόξο ενός ακτίνιου. Τοποθετούμε τη ρόδα σε ένα σύστημα αξόνων με αρχή στο κέντρο της O και θεωρούμε ένα σημείο της P , το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στο σημείο $(1,0)$.
 - α) Να εξηγήσετε γιατί, το ύψος του σημείου P σε σχέση με τον άξονα $x'x$ κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), $t \geq 0$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \eta \mu t$, $t \geq 0$
 - β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)$ στο διάστημα $[0, 4\pi]$.
 - γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές t με $0 \leq t \leq 4\pi$ κατά τις οποίες το σημείο P βρίσκεται στο μεγαλύτερο και στο μικρότερο δυνατό ύψος.
 - δ) Να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ 0 και 4π sec κατά τα οποία το ύψος του σημείου P είναι μεγαλύτερο του $0,5$.
 - ε) Θεωρούμε τώρα το σημείο K της ρόδας, το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στη θέση $(0,1)$. Να δείξετε ότι το ύψος του σημείου K κάθε χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $g(t) = \sigma \nu t$, $t \geq 0$.

Στο σχολικό βιβλίο της άλγεβρας τέσσερα είναι τα προβλήματα που εμπεριέχουν την έννοια της περιοδικότητας και είναι τα παρακάτω:

1. Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y=3 \cdot \eta \mu(6\pi \cdot t)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.
 - i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.
 - ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 12$.
2. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το πάτωμα 1m . Όταν το παιγνίδι ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του από το πάτωμα σε μέτρα είναι $h = 1 + 13 \cdot \sigma \nu 3t$ όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.
 - i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.



- ii) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 2\pi$.

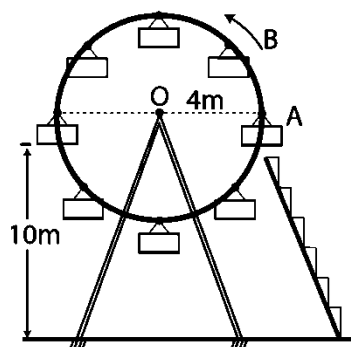
3. Η απόσταση x του πιστονιού σε μέτρα από το ένα άκρο του κυλίνδρου περιγράφεται με τη συνάρτηση $x(t) = 0,1 + 0,1 \cdot \eta\mu 3t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

- i) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού,
- ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 2\pi$.



Ποιες στιγμές του χρονικού αυτού διαστήματος η απόσταση είναι 0,15m;

4. Σε ένα λούνα-παρκ ο περιστρεφόμενος τροχός έχει ακτίνα 4m, το κέντρο του απέχει από το έδαφος 10m και όταν αρχίζει να κινείται εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 δευτερόλεπτα με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το ύψος του βαγονιού A από το έδαφος ύστερα από χρόνο 1sec, 2sec, 5sec και γενικότερα ύστερα από χρόνο t sec. Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για το βαγόνι B.



Παρατηρήσεις

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και τα τέσσερα παραπάνω προβλήματα είναι «κλειστά», δεδομένου ότι έχουν συγκεκριμένες υποθέσεις και ζητούμενα. Από αυτά μόνο το τέταρτο (Πρόβλημα 4) απαιτεί μοντελοποίηση, δηλαδή τη διαμόρφωση, από τους μαθητές, μαθηματικού μοντέλου που να περιγράφει την κίνηση του τροχού. Συγκεκριμένα, οι μαθητές σε αυτό «καλούνται» να συνδέσουν τον τροχό με τον τριγωνομετρικό κύκλο και να «τοποθετήσουν» το κέντρο του τροχού στην αρχή καρτεσιανού συστήματος αξόνων. Στη συνέχεια αξιοποιώντας τα γεωμετρικά στοιχεία του προβλήματος, την περίοδο και τον τύπο του ημιτόνου να καταλήξουν στη συνάρτηση $h(t) = 10 + 4 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi t}{4}\right)$.

Το παραπάνω πρόβλημα αποτέλεσε το έναυσμα για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης στην οποία βασίζεται η παρούσα εργασία. Το πρόβλημα που δόθηκε, στο πλαίσιο της παρέμβασης, παρουσίαζε μέσω φωτογραφιών και βίντεο ένα κινούμενο τροχό του λούνα – παρκ τον οποίο καλούνταν οι μαθητές να περιγράψουν, με ό,τι αυτό θα μπορούσε να σημαίνει γι' αυτούς. Είναι δηλαδή ένα ρεαλιστικό πρόβλημα μοντελοποίησης, «ανοικτό», σε αντίθεση με αυτό του σχολικού βιβλίου, και ως προς την αρχική και ως προς την τελική του κατάσταση.

Κεφάλαιο 2ο : Ερευνητικό Θέμα και ερευνητικά ερωτήματα

2.1 Το ερευνητικό θέμα

Η επίλυση ανοικτών προβλημάτων είναι κάτι πρωτόγνωρο για τους μαθητές στα Ελληνικά σχολεία, καθώς οι παραδοσιακές διδακτικές μέθοδοι περιορίζονται στη επίλυση ασκήσεων ή κλειστών προβλημάτων με έναν, τα περισσότερα από αυτά, τρόπο λύσης. Για να επιλυθεί ένα πρόβλημα θα πρέπει να προηγηθεί η διερεύνησή του ώστε να προκύψουν εικασίες οι οποίες, μετά από έλεγχο, γίνονται δεκτές ή απορρίπτονται και προκύπτουν νέες. Όταν, δε, η προβληματική κατάσταση είναι πραγματική τότε η επίλυσή της απαιτεί μοντελοποίηση ώστε να μετατραπούν τα στοιχεία της καθημερινότητας σε μαθηματικές έννοιες και σχέσεις.

Οι μαθητές, στην πλειοψηφία τους, δυσανασχετούν όποτε καλούνται να λύσουν πρόβλημα και αυτό οφείλεται στο ότι το εκπαιδευτικό σύστημα είναι επικεντρωμένο σε διαδικασίες και στην εργασία με δράσεις ρουτίνας. Υπάρχει μια υπερ-έμφαση στη διδασκαλία με μαθησιακές διαδικασίες από μνήμης, χωρίς απαραίτητα μια καθαρή σύνδεση με τη μαθηματική κατανόηση.

Στη συγκεκριμένη ερευνητική παρέμβαση στους μαθητές της Γ' Γυμνασίου δόθηκαν φωτογραφίες του περιστρεφόμενου τροχού ενός Λούνα-παρκ και ένα βίντεο της κίνησής του και τους ζητήθηκε να τον περιγράψουν. Συγκεκριμένα το κείμενο του προβλήματος ήταν: *«Παρατηρώντας τις φωτογραφίες και αφού παρακολουθήσετε το βίντεο να περιγράψετε όσο πιο αναλυτικά μπορείτε τον περιστρεφόμενο τροχό Riesenrad σε κάποιον φίλο σας που πρόκειται να επισκεφτεί τη Βιέννη».*

Ο τρόπος με τον οποίο δόθηκε το πρόβλημα στους μαθητές δεν τους ήταν καθόλου οικείος γιατί παρόλο που περιγράφει μία πραγματική και γνώριμη κατάσταση σ' αυτούς δεν ήταν εξοικειωμένοι με την επίλυση τέτοιων προβλημάτων για τους παρακάτω λόγους:

A) Τα περισσότερα προβλήματα που απαιτούν μοντελοποίηση στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου, δίνουν στους μαθητές έτοιμο και το μαθηματικό μοντέλο που απαιτείται. Στη συγκεκριμένη παρέμβαση οι ίδιοι οι μαθητές θα έπρεπε να ανακαλύψουν το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την κίνηση του τροχού.

B) Στα σχολικά κείμενα δεν υπάρχουν ανοικτά προβλήματα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η κατάσταση εκκίνησης, οι υποθέσεις του προβλήματος, δεν είναι σαφώς προσδιορισμένες αλλά και τα ζητούμενα είναι επίσης μη σαφώς

ορισμένα μιας και ζητά την περιγραφή ενός αξιοθέατου. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Pehkonen (1997) το πρόβλημα είναι ανοικτό.

Γ) Ουσιαστικά οι μαθητές έπρεπε να μελετήσουν μια ομαλή κυκλική κίνηση και να ανακαλύψουν στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας, δηλαδή ήρθαν σε επαφή με μία κίνηση και μία έννοια που διδάσκονται στο Λύκειο και όχι στο Γυμνάσιο.

Συνεπώς, οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν ένα ανοικτό πρόβλημα που απαιτεί τη μοντελοποίηση της περιοδικής κίνησης ενός τροχού χωρίς να έχουν διδαχθεί μέχρι τότε την έννοια της περιοδικότητας.

2.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Η παρούσα εργασία ερευνά τις στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου κατά την επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος μοντελοποίησης και που απαιτούσε από τους μαθητές να μελετήσουν και να αναλύσουν στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας που δεν είχαν μέχρι τότε διδαχθεί στη σχολική τάξη. Συγκεκριμένα τα κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα είναι τα εξής:

1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Τι είδους στρατηγικές ανέπτυξαν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να μοντελοποιήσουν την κίνηση του τροχού;

2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Με ποιο τρόπο οι μαθητές προσέγγισαν και αντιλήφθηκαν στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας;

Όπως προαναφέραμε, αν και η έννοια της περιοδικότητας είναι κεντρικής σημασίας σε όλες τις επιστήμες, ελάχιστες έρευνες αναφέρονται σε αυτή. Συνεπώς, η συνεισφορά της διπλωματικής εργασίας είναι και σε διδακτικό επίπεδο αλλά και σε ερευνητικό επίπεδο.

Κεφάλαιο 3ο : Μεθοδολογία

3.1 Το πλαίσιο της έρευνας

Το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτέλεσαν οι 45 μαθητές δύο τμημάτων της Γ΄ τάξης ενός Γυμνασίου της εκπαιδευτικής περιφέρειας Δ΄ Αθήνας. Τα τμήματα ήταν ισοδύναμης επίδοσης και μικτής γνωστικής δυναμικής όσον αφορά τα μαθηματικά. Η έρευνα διενεργήθηκε τον Απρίλιο του 2019 αμέσως μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας έως 360^0 και υπολογισμού αυτών μέσω ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Πραγματοποιήθηκε σε κάθε τμήμα ξεχωριστά, στην αίθουσα πληροφορικής, και είχε διάρκεια τριών διδακτικών ωρών, στο καθένα. Στο πρώτο τμήμα οι μαθητές χωρίστηκαν σε έξι ομάδες των τεσσάρων ατόμων ενώ στο δεύτερο σε τέσσερις ομάδες των τεσσάρων ατόμων και σε μία των πέντε. Η σύνθεση των ομάδων αποφασίστηκε κατά κύριο λόγο από τους ίδιους τους μαθητές, ώστε τα μέλη κάθε ομάδας να νιώθουν οικεία μεταξύ τους και να επικοινωνούν τις ιδέες τους με μεγαλύτερη άνεση.

3.2 Το πρόβλημα όπως δόθηκε στους μαθητές

Ως ερευνητικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω ανοικτό - ρεαλιστικό πρόβλημα:

«Riezerlad, ο τροχός του Λούνα Παρκ της Βιέννης »

Το Πράτερ (Prater) είναι ένα μεγάλο δημόσιο πάρκο στην περιοχή Λιοπόλντστατ (Leopoldstadt) στα βορειοανατολικά της πόλης της Βιέννης. Σε μια γωνία του πάρκου Πράτερ βρίσκεται ένα λούνα Παρκ που ονομάζεται Βουρστελπράτερ (Wurstelprater), στην είσοδο του οποίου θα βρείτε το διάσημο τουριστικό αξιοθέατο Ρίζενραντ (Riesenrad), μια τεράστια ρόδα που είναι μια από της παλιότερες του κόσμου (1897).

Ο γιγάντιος τροχός περιστρέφεται αργά και δίνει τη δυνατότητα στους επισκέπτες να δουν όλη τη Βιέννη από ψηλά, το ναό του Αγ. Στεφάνου, το παλάτι Schönbrunn και τις καφεκόκκινες σκεπές των κτιρίων.

Παρατηρώντας τις φωτογραφίες και αφού παρακολουθήσετε το βίντεο να περιγράψετε όσο πιο αναλυτικά μπορείτε τον περιστρεφόμενο τροχό Riesenrad σε κάποιον φίλο σας που πρόκειται να επισκεφτεί τη Βιέννη.



Εικόνα 2.1 Οι φωτογραφίες που δόθηκαν στους μαθητές.

Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους την εκφώνηση του προβλήματος, τρεις φωτογραφίες του τροχού εκτυπωμένες (Εικ. 2.1) , τετράδιο, χάρακα, διαβήτη και μικροϋπολογιστή. Στην οθόνη του υπολογιστή της κάθε ομάδας αλλά και στον διαδραστικό πίνακα της αίθουσας είχαν τη δυνατότητα να παρακολουθούν, επαναλαμβανόμενα, ένα βίντεο με τον τροχό να περιστρέφεται και χρονόμετρο στην κάτω αριστερή γωνία. (Εικ. 2.2)



Εικόνα 2.2 Στιγμιότυπα του βίντεο

3.3 Οργάνωση της ερευνητικής δραστηριότητας στη σχολική τάξη

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα επελέγη και σχεδιάστηκε ως προς το περιεχόμενο και τον τρόπο εφαρμογής της ώστε να ευνοήσει τη συμμετοχή του συνόλου των μαθητών.

Η κατάσταση την οποία περιγράφει το πρόβλημα, ο τροχός ενός λούνα - παρκ, είναι πραγματική και οικεία στους μαθητές.

Στο ανοικτό πλαίσιο του προβλήματος εμπεριέχεται πλούσιο μαθηματικό περιεχόμενο. Δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν απλές, για μαθητές τρίτης γυμνασίου, μαθηματικές έννοιες όπως ανάλογα ποσά και κλίμακα αλλά και πιο σύνθετες όπως τριγωνομετρία και στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι οι μαθητές μπορούν:

- να μετρήσουν το πλήθος των βαγονιών
- να μετρήσουν με το χάρακα το μήκος της ακτίνας του τροχού σε μία φωτογραφία, να μετρήσουν με το χάρακα το ύψος κάποιου κτηρίου ή δέντρου ή βαγονιού, να εικάσουν το πραγματικό ύψος του κτηρίου ή του δέντρου ή του βαγονιού και κάνοντας χρήση αναλόγων ποσών ή κλίμακας να υπολογίσουν την ακτίνα του τροχού
- να υπολογίσουν την περίμετρο του τροχού, το ύψος του, την επιφάνεια που καλύπτει

Επίσης μπορούν να υπολογίσουν:

- παρακολουθώντας το βίντεο, το χρόνο μετάβασης δύο διαδοχικών βαγονιών από ένα σταθερό σημείο
- την περίοδο του τροχού, με το δεδομένο ότι έχει 15 βαγόνια
- τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού
- κάνοντας χρήση του ημιτόνου της γωνίας της διανυσματικής ακτίνας ενός βαγονιού με τον οριζόντιο άξονα, το ύψος του οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Έτσι όλοι οι μαθητές, ανεξάρτητα από το γνωστικό τους επίπεδο στα μαθηματικά, θα ήταν σε θέση να συμμετέχουν.

Οι μαθητές, χωρίστηκαν και εργάστηκαν ανά ομάδες. Οι Johnson & Johnson (1992) υποστηρίζουν ότι οι προσπάθειες των μαθητών όταν συνεργάζονται καταλήγουν σε υψηλότερη επίδοση και μεγαλύτερη παραγωγικότητα, αναπτύσσουν τη διαπροσωπική έλξη και την κοινωνική υποστήριξη και ενισχύουν την αυτοεκτίμηση. Η αλληλεπίδραση στην ομάδα αποτελεί μία σημαντική λεωφόρο για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, γιατί παρέχει μαθησιακές ευκαιρίες οι οποίες δε συναντώνται στην ατομική επίλυση προβλημάτων (Παναγάκος, 2001) αφού η μάθηση προκύπτει κυρίως από τη συνεργασία με τη διαδικασία ανταλλαγής απόψεων (Edwards & Mercer, 1987) και οι ομάδες εργασίας βοηθούν στο να έχουν οι μαθητές πολύ λιγότερο άγχος από αυτό που θα είχαν αν αντιμετώπιζαν το πρόβλημα μόνοι τους (Thompson & Thompson, 1989).

Η έρευνα, όπως προαναφέρθηκε, είχε διάρκεια τριών διδακτικών ωρών και διεξήχθη σε κάθε τμήμα ξεχωριστά. Την πρώτη διδακτική ώρα δόθηκε το πρόβλημα στους μαθητές. Εδώ πρέπει να διευκρινιστεί ότι παρόλο που τα παιδιά είχαν δουλέψει κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους κι άλλες φορές ομαδικά στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών, ήταν η πρώτη φορά που έρχονταν αντιμέτωπα με ένα

ανοικτό πρόβλημα. Τη δεύτερη διδακτική ώρα η κάθε ομάδα, μέσω κάποιου εκπροσώπου της, παρουσίασε στο σύνολο της τάξης τα αποτελέσματα των εργασιών της. Την τρίτη διδακτική ώρα ο εκπαιδευτικός ζήτησε από τους μαθητές να βρουν το ύψος ενός βαγονιού του τροχού από το έδαφος 2 λεπτά, 4 λεπτά, 7 λεπτά, 10 λεπτά, 13 λεπτά, 16 λεπτά και 19 λεπτά αφότου ξεκίνησε και να αναπαραστήσουν γραφικά τη μεταβολή του ύψους του, σε συνάρτηση με το χρόνο, τα πρώτα 18 λεπτά της κίνησης του.

3.4 Ο ρόλος του Εκπαιδευτικού

Ο εκπαιδευτικός – ερευνητής, κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, παρατηρούσε την πρόοδο των εργασιών κάθε ομάδας και συμμετείχε στις συζητήσεις χωρίς όμως να παρέχει κάποιου είδους βοήθεια που θα υποδείκνυε ή έστω θα υπονοούσε κάποια λύση. Από την αρχή εξήγησε στους μαθητές ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν έχει μόνο μία σωστή ούτε μία μόνο συγκεκριμένη λύση, κάτι που χρειάστηκε να επαναλάβει αρκετές φορές,

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης στην τάξη με το ρόλο του συντονιστή, παρότρυνε τους μαθητές να εξηγήσουν και να δικαιολογήσουν τις λύσεις τους, να αξιολογήσουν αυτές των συνομηλίκων τους και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών λύσεων (Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000). Επίσης όταν έκρινε ότι ήταν αναγκαίο λειτουργούσε ως διαμεσολαβητής για να διευκολύνει την επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και να τους βοηθήσει να κατανοήσουν το σκεπτικό και τις εξηγήσεις των συμμαθητών τους (McClain, 2002).

3.5 Ερευνητικά Δεδομένα

Τα ερευνητικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

- οι ηχογραφημένες συνομιλίες μεταξύ των μελών κάθε ομάδας,
- οι συνομιλίες των εκπροσώπων των ομάδων με τους συμμαθητές τους και τον εκπαιδευτικό κατά τη διάρκεια της παρουσίασης των εργασιών κάθε ομάδας στο τμήμα,
- οι γραπτές λύσεις κάθε ομάδας στο τετράδιό
- οι σημειώσεις των μαθητών στις εκτυπωμένες φωτογραφίες και
- οι παρατηρήσεις του διδάσκοντα - ερευνητή όπως σημειώθηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

3.6 Ανάλυση Ερευνητικών Δεδομένων

Από τις απομαγνητοφωνήσεις των συζητήσεων όλων των ομάδων ανά διδακτική ώρα και τις σημειώσεις, εντοπίστηκαν και προσδιορίστηκαν τα κρίσιμα περιστατικά τα σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα και αποτέλεσαν τη βάση για την ανάλυση περιεχομένου.

Σύμφωνα με τους Yang & Ricks (2012), ως κρίσιμα περιστατικά λογίζονται τα γεγονότα που λαμβάνουν χώρα σε μια τάξη κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και συμβάλλουν στο να κατανοήσει ο εκπαιδευτικός τη μαθηματική σκέψη των μαθητών περιλαμβάνοντας απροσδόκητες απαντήσεις στις ερωτήσεις του (Yang & Ricks, 2012) ή αντίθετα δημιουργώντας ερωτήσεις που αφορούν στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές ή και στη διδακτική προσέγγιση (Goodell, 2006). Κρίσιμο, επίσης, μπορεί να χαρακτηριστεί ένα γεγονός όταν παρουσιάζει μια σημαντική αλλαγή ή υποδεικνύει μια εννοιολογική διαφοροποίηση σε σχέση με την πρότερη γνώση (Maher, 2002).

Στην παρούσα έρευνα ως κρίσιμα περιστατικά θεωρήθηκαν αυτά κατά τα οποία παρατηρήθηκε ανάπτυξη στρατηγικών και δημιουργία μαθηματικών μοντέλων ώστε να περιγραφούν από τους μαθητές στοιχεία του τροχού ή της κίνησής του, καθώς και τα περιστατικά εκείνα που υποδείκνυαν το πως οι μαθητές αντιλαμβάνονταν την έννοια της περιοδικότητας.

Συγκεκριμένα πραγματοποιήθηκε

- εντοπισμός και κωδικοποίηση των στρατηγικών που ανέπτυξαν οι μαθητές και ένταξή τους σε κύκλους μοντελοποίησης και
- εντοπισμός κρίσιμων συμβάντων που αφορούν τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας

Κεφάλαιο 4ο : Αποτελέσματα

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων. Στην υποενότητα 4.2. θα παρουσιαστούν οι στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της μοντελοποίησης και στην υποενότητα 4.3. θα παρουσιαστούν οι τρόποι νοηματοδότησης της έννοιας της περιοδικότητας. Όπως προαναφέραμε η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε σε δύο τμήματα της Γ΄ Γυμνασίου Δημόσιου σχολείου της Αθήνας. Έντεκα συνολικά ομάδες μαθητών ενεπλάκησαν στην παραπάνω δραστηριότητα. Δεν θα γίνει αναφορά στο κάθε τμήμα ξεχωριστά γιατί η δραστηριότητα ουσιαστικά εξελίχθηκε με τον ίδιο τρόπο και στα δύο τμήματα.

4.2 Οι στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές

Η πρώτη αντίδραση των μαθητών

Οι μαθητές μη έχοντας αντιμετωπίσει ξανά ανάλογο είδους πρόβλημα αρχικά ήταν αμήχανοι. Η έλλειψη εμπειρίας επίλυσης προβλημάτων ανοικτού πλαισίου αποτυπώθηκε αυτόματα σε εκφράσεις όπως

«Μα έκθεση θα γράψουμε;» ή

«Κύριε αυτά είναι μαθηματικά; Άλλα μας κάνατε ένα χρόνο τώρα.»

Ο εκπαιδευτικός τους εξήγησε ότι οποιαδήποτε απάντηση που αφορά στο ερώτημα του προβλήματος γίνεται δεκτή. Επίσης τόνισε ότι δεν υπάρχει μία μόνο σωστή λύση αλλά ούτε μόνο ένας τρόπος για να επιτευχθεί η όποια λύση.

Εκπαιδευτικός (Ε): *Δεν υπάρχει μία μόνο λύση. Παρατηρείστε τις φωτογραφίες και το βίντεο και προσπαθήστε να ανακαλύψετε όσα στοιχεία του τροχού μπορείτε για να δώσετε όσες περισσότερες πληροφορίες μπορείτε στο φίλο σας για τον τροχό.*

Ενώ αρχικά πέρασαν κάποια λεπτά χωρίς να μπορούν να καταλάβουν τι ακριβώς καλούνταν να κάνουν, στη συνέχεια προσπάθησαν να διακρίνουν τα «συστατικά» του προβλήματος και να καθορίσουν τις μεταξύ τους σχέσεις, να ανακαλύψουν τις υποθέσεις και τα δεδομένα του. Στη συνέχεια άρχισαν να διερευνούν το πλαίσιο του

προβλήματος ώστε να μπορέσουν να καθορίσουν τις στρατηγικές που θα επέλεγαν για την επίλυσή του.

Στη προσπάθειά τους οι μαθητές να απαντήσουν στο πρόβλημα που τους τέθηκε ανέπτυξαν δύο κύκλους μοντελοποίησης. Ο πρώτος κύκλος μοντελοποίησης αφορά την εύρεση των στατικών ή γεωμετρικών στοιχείων του προβλήματος όπως η εύρεση του ύψους και της ακτίνας του τροχού και ο δεύτερος κύκλος μοντελοποίησης αφορά τη μελέτη στοιχείων της περιοδικής κίνησης του τροχού. Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι μαθητές πρώτα ασχολούνται και προσπαθούν να διευκρινίσουν τα στατικά στοιχεία του τροχού (π.χ. το ύψος του) και μετά τα δυναμικά στοιχεία του (π.χ. την περίοδο της κίνησής του).

Στον Πίνακα 1 καταγράφονται οι στρατηγικές που ανέπτυξαν οι ομάδες των μαθητών (2^η στήλη), τα στάδια του κύκλου μοντελοποίησης που κατατάσσεται η κάθε στρατηγική (1^η στήλη) και το πλήθος των ομάδων που ανέπτυξαν αυτή τη στρατηγική (3^η στήλη) ανά κύκλο μοντελοποίησης.

Παρατηρούμε ότι στον 1^ο κύκλο μοντελοποίησης συμμετείχαν σχεδόν όλες οι ομάδες των μαθητών. Επίσης στον 1^ο κύκλο μοντελοποίησης οι στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές ήταν σχεδόν κοινές. Μόνο μια στρατηγική (η εύρεση του ύψους του τροχού με σύγκριση) αναπτύχθηκε μόνο από μια ομάδα μαθητών. Στον 2^ο κύκλο μοντελοποίησης συμμετείχαν πολλές αλλά όχι όλες οι ομάδες των μαθητών. Στις επόμενες υποενότητες παρουσιάζονται οι στρατηγικές των μαθητών που αναπτύχθηκαν στις διαφορετικές φάσεις των κύκλων μοντελοποίησης. Η κάθε στρατηγική υποστηρίζεται από τα αντίστοιχα εμπειρικά δεδομένα.

4.2.1 1^{ος} Κύκλος Μοντελοποίησης – Προσδιορισμός Γεωμετρικών στοιχείων του Τροχού

Φάση αναζήτησης των δεδομένων του προβλήματος.

Δεδομένου ότι το πρόβλημα ήταν ανοικτό με μη σαφώς διατυπωμένα μαθηματικά ερωτήματα όπως «Παρατηρώντας τις φωτογραφίες και αφού παρακολουθήσετε το βίντεο να περιγράψετε όσο πιο αναλυτικά μπορείτε τον περιστρεφόμενο τροχό Riesenrad σε κάποιον φίλο σας που πρόκειται να επισκεφτεί τη Βιέννη» οι μαθητές πέρασαν από μια γενική περιγραφή του τροχού, έκριναν ότι κάτι τέτοιο δεν θα μπορούσε να είναι το μαθηματικό ζητούμενο οπότε αναζήτησαν τα εργαλεία (π.χ. χάρακας) και τις πηγές που τους δόθηκαν (π.χ. βίντεο και φωτογραφίες) και έτσι

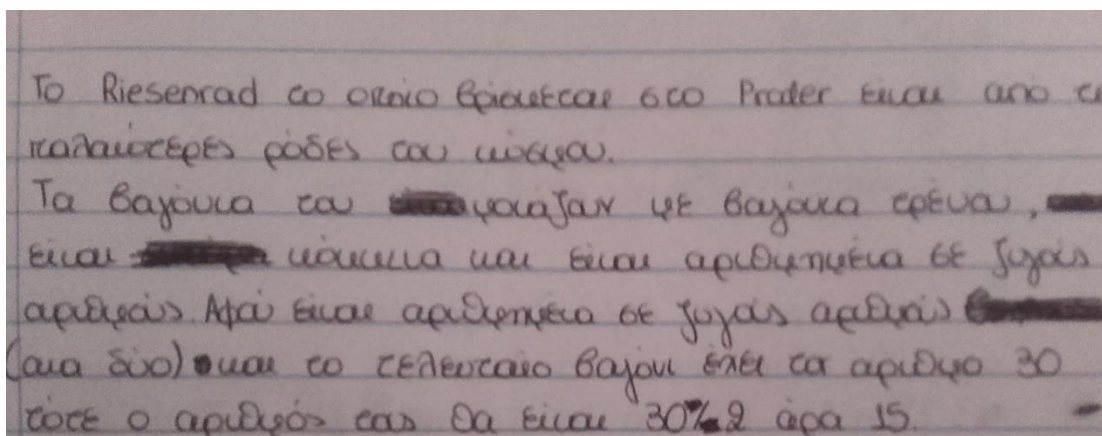
κατέληξαν στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος (π.χ. την εύρεση της ακτίνας του τροχού) και την αναζήτηση τρόπου εύρεσής της με την αναζήτηση της κλίμακας.

Τα στάδια του κύκλου μοντελοποίησης	Στρατηγικές επίλυσης ανοικτού προβλήματος	Πλήθος ομάδων που ανέπτυξαν αυτή τη στρατηγική (από τις 11)
1 ^{ος} κύκλος μοντελοποίησης Εύρεση των στατικών (γεωμετρικών) στοιχείων του τροχού		
Διατύπωση προβλήματος και αναζήτηση των δεδομένων του προβλήματος	(ΣΤΡ1) Γενική περιγραφή του τροχού	11
	(ΣΤΡ2) Καταγραφή των εργαλείων (π.χ. χάρακας) και των πηγών (χρονομέτρηση στο βίντεο) και διατύπωση του προβλήματος	11
	(ΣΤΡ3) Αναζήτηση και καθορισμός τρόπου εύρεσης της κλίμακας	11
Μαθηματικοί υπολογισμοί για την εύρεση ακτίνας και ύψους τροχού	(ΣΤΡ4) Χρήση ανάλογων ποσών	10
	(ΣΤΡ5) Εύρεση ύψους τροχού με διαδικασία σύγκρισης μεγεθών	1
Αξιολόγηση μοντέλου και λύσεων	(ΣΤΡ6) Σύνδεση των ευρημάτων με στοιχεία της καθημερινότητας	10
Επέκταση του μοντέλου - Εύρεση περιφέρειας και επιφάνειας τροχού	(ΣΤΡ7) Χρήση γνωστών τύπων	10
2 ^{ος} κύκλος μοντελοποίησης Μελέτη της κίνησης του τροχού Εύρεση περιόδου – Πρόβλεψη θέσης βαγονιού		
Διατύπωση προβλήματος και αναζήτηση των δεδομένων του προβλήματος	(ΣΤΡ8) Αναζήτηση σημείου αναφοράς για τον υπολογισμό της περιόδου	8
Μαθηματικοί υπολογισμοί	(ΣΤΡ9) Χρήση ανάλογων ποσών	8
Αξιολόγηση μοντέλου και λύσης	(ΣΤΡ10) Σύνδεση της περιόδου με στοιχεία της καθημερινότητας	7
1 ^η επέκταση του μοντέλου - Εύρεση θέσης βαγονιού	(ΣΤΡ11) Σχεδίαση σχήματος - τριγωνομετρικού κύκλου	11
	(ΣΤΡ12) Υπολογισμός θέσης κινούμενου βαγονιού με χρήση κλίμακας	1
	(ΣΤΡ13) Υπολογισμός ύψους βαγονιού με χρήση τριγωνομετρίας – Σύνδεση της κίνησης του βαγονιού με την κίνηση σημείου στον τριγωνομετρικό κύκλο	10
	(ΣΤΡ 14) Αναγωγή ημιτόνου γωνίας στον πρώτο κύκλο	10
	(ΣΤΡ 15) Πρόβλεψη θέσης βαγονιού μέσω της περιόδου	7
2 ^η επέκταση του μοντέλου – Γραφική παράσταση	(ΣΤΡ 16) Γραφική αναπαράσταση της περιοδικής κίνησης με χρήση ακραίων τιμών	6
	(ΣΤΡ 17) Γραφική αναπαράσταση της περιοδικής κίνησης με χρήση ενδιάμεσων τιμών.	1

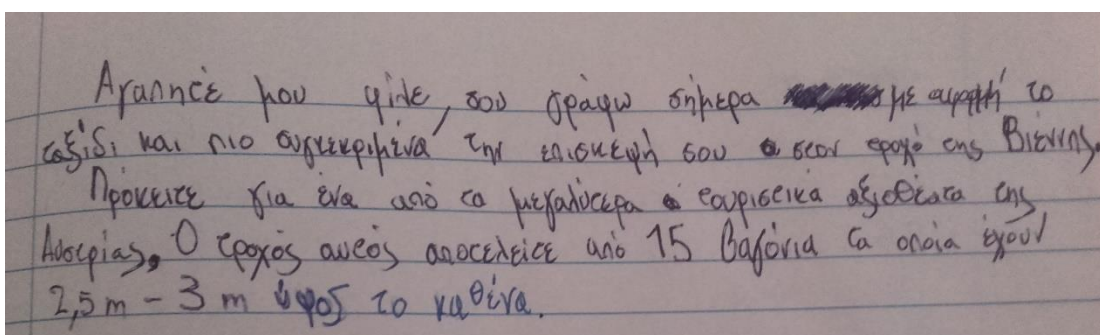
Πίνακας 1. Οι στρατηγικές των ομάδων

(ΣΤΡ1) Γενική Περιγραφή του Τροχού:

Μη ξέροντας πώς να ξεκινήσουν οι μαθητές και προσπαθώντας να προσδιορίσουν το προς λύση πρόβλημα, σε όλες τις ομάδες εντόπισαν αρχικά τα γενικά χαρακτηριστικά του τροχού, μέτρησαν τα βαγόνια του και έγραψαν στο τετράδιο μία γενική περιγραφή του, αντιγράφοντας και μέρος της εκφώνησης του προβλήματος (Εικ. 4.1 & 4.2)



Εικ. 4.1 Απόσπασμα από τις σημειώσεις της ομάδας 7



Εικ. 4.2 Απόσπασμα από τις σημειώσεις της ομάδας 5

(ΣΤΡ2) Αναζήτηση και καταγραφή των εργαλείων (π.χ. χάρακας) και των πηγών (π.χ. χρονόμετρο στο βίντεο) που τους δόθηκαν και διατύπωση των μαθηματικών ζητούμενων του προβλήματος:

Όλες οι ομάδες αναζητούν, χωρίς ακόμα να έχουν μπει στη διαδικασία να βρουν ένα μαθηματικό μοντέλο, τα δεδομένα στα οποία θα πρέπει να στηριχτούν για να λύσουν το πρόβλημα του οποίου η διατύπωση δεν τους είναι σαφής.

Ομάδα 1^η – Μαθητής 1 (Ο1-M1): Τις φωτογραφίες γιατί μας τις έδωσε (εννοεί τον εκπαιδευτικό); Ό,τι έχει γράψει φαίνεται και σ' αυτές.

Ομάδα 2^η - Μαθητής 2 (Ο2-M2): Μας έχει δώσει χάρακα.

O8-M1: *Το χρονόμετρο γιατί το έχει στο βίντεο;*

Αυτού του είδους οι ερωτήσεις ενεργοποίησαν τα μέλη της ομάδας ώστε να αρχίζουν να εκφράζουν υποθέσεις με μαθηματικό περιεχόμενο και σιγά σιγά να μπαίνουν στη διαδικασία της μοντελοποίησης με το στάδιο της διατύπωσης του μαθηματικού προβλήματος.

O8-M2: *Αφού μας ζητάει να τον περιγράψουμε (εννοεί τον τροχό) έχουμε πει για τα βαγόνια, δεν πρέπει να βρούμε και το ύψος του;*

O8-M1: *Και πόσο γρήγορα γυρνάει; Δε πρέπει να πούμε;*

Όλες οι ομάδες επικεντρώθηκαν αρχικά στο να υπολογίσουν το ύψος του τροχού.

O2-M1: *Πόσο ύψος έχει (εννοεί ο τροχός); Αν ξέραμε την ακτίνα; Κύριε την ακτίνα της ρόδας θα μας τη δώσετε;*

E: *Να στη δώσω;*

O2-M1: *Πόσο είναι.*

E: *Δεν ξέρω, δεν μπορείτε να την εκτιμήσετε;*

(ΣΤΡ3) Αναζήτηση και καθορισμός τρόπου εύρεσης της κλίμακας:

Στη συνέχεια «μπήκαν» στη διαδικασία αναζήτησης και καθορισμού της κλίμακας. Άρχισαν να μετρούν τα μήκη διαφόρων αντικειμένων που απεικονίζονταν στις φωτογραφίες. Άλλοι μαθητές πρότειναν στις ομάδες τους να μετρήσουν την ακτίνα του τροχού, άλλοι τη διάμετρο του και άλλοι το συνολικό του ύψος και να το συγκρίνουν με το ύψος ενός δέντρου, ή ενός κτηρίου ή ενός βαγονιού. Οι περισσότερες ομάδες, οι 6 από τις 11, μέτρησαν την ακτίνα του τροχού, οι 4 τη διάμετρο και μία το συνολικό ύψος του στη φωτογραφία. Οι 9 από τις 11 τελικά μέτρησαν το ύψος ενός βαγονιού μια και θεώρησαν ότι ήταν το μόνο αντικείμενο στις φωτογραφίες για το οποίο μπορούσαν αν έχουν σωστή εκτίμηση για το πραγματικό του ύψος δεδομένου ότι εμφανίζονταν και στο βίντεο.

O2-M2: *Να μετρήσουμε την ακτίνα με το χάρακα, στη φωτογραφία.*

O2-M3: *Στη φωτογραφία είναι 11cm*

O2_M1: *Η διάμετρος, όχι η ακτίνα.*

O2-M2: *Κοίτα στην άλλη φωτογραφία τα δέντρα. Πόσο είναι τα δέντρα;*

O2-M1: *Που να ξέρουμε. Το δέντρο είναι κοντό ή ψηλό. Και πάλι...*

O2-M2: *Αν βρούμε τα δέντρα θα βρούμε και το ύψος.*

O2-M3: *Φαίνεται τετραπλάσιος, πενταπλάσιος από το δέντρο.*

Τα παιδιά έχουν ήδη αποφασίσει ότι θα προχωρήσουν στη συγκεκριμένη φάση της επίλυσης με ανάλογα ποσά όμως προσπαθούν να βρουν τρόπο ώστε να ελαχιστοποιήσουν την πιθανότητα του λάθους και να βρουν ένα αποτέλεσμα όσο γίνεται πιο ακριβές και πιο «κοντά» στην πραγματικότητα.

Φάση μαθηματικοποίησης

(ΣΤΡ4) Χρήση ανάλογων ποσών:

Αφού ολοκλήρωσαν τη διατύπωση του μαθηματικού προβλήματος και την εύρεση των δεδομένων, οι μαθητές, μπαίνουν στο στάδιο της επίλυσης αξιοποιώντας κατάλληλους συλλογισμούς και εφαρμόζοντας μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και μαθηματικά εργαλεία που τους είναι γνωστά. Από τις 10 ομάδες, οι 9 έκαναν χρήση της απλής μεθόδου των τριών ενώ μία ομάδα έκανε αναγωγή στη μονάδα.

O2-M2: *Κάτσε, στη φωτογραφία και στο βίντεο μας δείχνει τα βαγόνια.*

O2-M1: *Και ...;*

O2-M2: *Πόσο να είναι τα βαγόνια; Στο μήκος 5m, πλάτος 1,5 με 2m και ύψος 2m και στη φωτογραφία είναι 0,5cm.*

O2-M1: *Απλή μέθοδο των τριών.*

O2-M3: *Ανάλογα ποσά.*

O2-M2: *Άρα $(2 \cdot 11) : 1 = 22m$*

(ΣΤΡ5) Εύρεση του ύψους του τροχού με σύγκριση

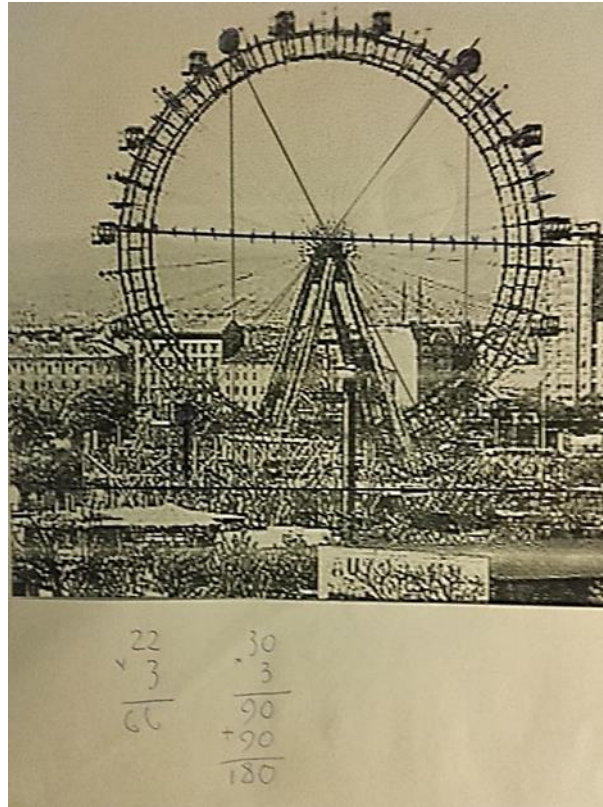
Στην ομάδα 5, τη μόνη ομάδα με όλα τα μέλη της να έχουν χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά, μέτρησαν αρχικά το ύψος του βαγονιού στη φωτογραφία και στη συνέχεια μέτρησαν πόσα τέτοια μήκη χρειάζονταν ώστε να καλυφθεί ολόκληρο το μήκος της διαμέτρου του τροχού. Αφού βρήκαν το ύψος του τροχού ερεύνησαν την ορθότητα της λύσης τους και τη δέχτηκαν, αιτιολογώντας την επιλογή τους. (Εικ. 4.3)

O5-M1: *Το βαγόνι είναι μισό εκατοστό.*

O5-M2: *Έχω να διαβάσω μαθηματικά από την πρώτη δημοτικού αλλά το ύψος του μπορώ να το βρω. Θα βάλω τα βαγόνια το ένα δίπλα στο άλλο. Κοιτάζτε ένα, δύο, τρία, ..., είκοσι δύο. Είκοσι δύο βαγόνια. Κύριε τι ύψος έχει η αίθουσα;*

E: *Γύρω στα τρία μέτρα.*

O5-M2: *$22 \cdot 3 = 66$, 66m είναι ο τροχός*



Εικ. 4.3 Φωτογραφία τροχού ομάδας 5

Η φάση της αξιολόγησης της εγκυρότητας των ευρημάτων

(ΣΤΡ6) Σύνδεση των ευρημάτων με στοιχεία της καθημερινότητας

Στη συνέχεια οι 10 από τις 11 ομάδες επιστρέφουν στην καθημερινότητα, ερμηνεύουν το μαθηματικό αποτέλεσμα στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου και αξιολογούν την εγκυρότητα της λύσης με βάση τις πραγματικές συνθήκες. Ελέγχουν τη συμφωνία των αποτελεσμάτων με τον πραγματικό κόσμο.

O5-M2: $22 \cdot 3 = 66$, 66m είναι ο τροχός

O5-M1: Πολλά δεν είναι;

O5-M2: Όχι, δεν βλέπεις στη φωτογραφία;

O5-M3: Κοίτα και στη φωτοτυπία λέει ότι φαίνεται ολόκληρη η πόλη από τον τροχό, μια χαρά είναι τα 66m.

O5-M2: Κύριε 66m ο τροχός είναι πολύ;

Ε: Όχι βέβαια. Τόσο το βρήκατε; Μπράβο παιδιά!

Κάποιες ομάδες αφού αξιολόγησαν τη λύση τους την απέρριψαν ως μη έγκυρη, έκαναν νέες υποθέσεις και επαναυπολόγισαν το ύψος του τροχού.

O2-M1: Μία πολυκατοικία τι ύψος έχει; ...(παύση) Κύριε μία πολυκατοικία τι ύψος έχει;

E: *Ο κάθε όροφος είναι γύρω στα 3,2m άρα μία πενταόροφη γύρω στα 20m.*

O2-M1: *Τότε τα 22m είναι λίγα.*

Οι μαθητές κρίνουν ότι η λύση δεν είναι συμβατή με την πραγματικότητα. Διερευνούν τα διάφορα στάδια που ακολούθησαν κατά τη διάρκεια της επίλυσης ώστε να βρουν το λόγο για τον οποίο η λύση που προέκυψε δεν μπορεί να γίνει δεκτή. Ψάχνουν να βρουν που έχει γίνει το λάθος.

O2-M3: *Πως τα βρήκες τα 22m; Λάθος έκανες, 44m είναι το ύψος.*

O2-M2: *Ωχ ναι, ενώ είπαμε 0,5cm το βαγόνι το έβαλα 1cm.*

O2-M1: *Κύριε 44m είναι σωστό;*

E: *Από την αρχή σας είπα ότι δεν υπάρχει μία μόνο σωστή λύση ή απάντηση. Για εξηγήστε μου, τι κάνατε;*

Τα παιδιά εξηγούν το σκεπτικό τους και τη διαδικασία που ακολούθησαν. Επειδή όμως το ύψος του τροχού που είχαν υπολογίσει απείχε αρκετά από το πραγματικό, ο εκπαιδευτικός αποφάσισε να τους βοηθήσει λίγο.

E: *Μπράβο, πολύ σωστά το σκεφτήκατε! Να σας ρωτήσω, τι ύψος έχετε;*

Τα παιδιά αναφέρουν το καθένα το ύψος του.

E: *Εγώ είμαι 1,80 περίπου*

Αμέσως αξιολογούν και πάλι τη λύση τους, αναπροσαρμόζουν τις τιμές των μεγεθών και το λύνουν.

O2-M3: *Ο κύριος 1,80 και το βαγόνι 2m ύψος; Κοίτα την πόρτα, (εννοεί τη πόρτα του βαγονιού που βλέπει στο βίντεο) αν αυτή είναι 2m το βαγόνι θα είναι 2,5 με 2,8m.*

... *το ύψος είναι 61,6m*

O2-M1: *Βάλε και 1m γιατί είναι πιο ψηλά από το έδαφος.*

O2-M2: *Άρα 62,6m, 63m.*

Οι 10 ομάδες υπολόγισαν το ύψος του τροχού από 50m έως 72m. Η απόκλιση αυτή οφειλόταν στη διαφορετική εκτίμηση κάθε ομάδας όσον αφορά το πραγματικό ύψους του βαγονιού. Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι το πραγματικό ύψος του τροχού είναι 64,75m.

Στην ομάδα 9 υπολόγισαν το ύψος του τροχού 48m αφού θεώρησαν, αυθαίρετα όπως προκύπτει από τους διαλόγους τους, ότι τα κτήρια που φαίνονταν από πίσω ήταν γύρω στα 24m και ο τροχός τους φαινόταν διπλάσιος σε ύψος.

Στην ομάδα 10 μέτρησαν το ύψος ενός δέντρου 2,5cm και τη διάμετρο του τροχού 11,5cm. Αρχικά θεώρησαν ότι το δέντρο έχει ύψος 4m, υπολόγισαν τη

διάμετρο 18,4m και απέρριψαν την τιμή αυτή ως πολύ μικρή. Στη συνέχεια παρατήρησαν ένα κτήριο στη βάση του τροχού, θεώρησαν ότι είναι 3m και ότι το δέντρο έχει τετραπλάσιο ύψος, άρα 12m. Με χρήση αναλόγων ποσών κατέληξαν ότι ο τροχός έχει ύψος 55,2m τιμή την οποία και δέχτηκαν ως λογική.

Η φάση επέκτασης του μοντέλου - εύρεση περιφέρειας και επιφάνειας τροχού

(ΣΤΡ7) Χρήση γνωστών τύπων

Ουσιαστικά όλες οι ομάδες με κάποιο τρόπο υπολόγισαν την ακτίνα και το ύψος του τροχού και στη συνέχεια, εξαιρουμένης της ομάδας 5, κάνοντας χρήση των τύπων του μήκους κύκλου και της επιφάνειας κυκλικού δίσκου υπολόγισαν το μήκος του τροχού καθώς και την επιφάνεια που καταλαμβάνει.

O6-M1: *Αφού ξέρουμε την ακτίνα μπορούμε να βρούμε και την περίμετρο και το εμβαδό.*

O6-M2: *Ωχ ναι, αλλά θυμάται κανείς τους τύπους;*

O6-M1: *Κύριε ποιοι είναι οι τύποι για περίμετρο και εμβαδό κύκλου;*

E: *A! Δεν θυμάμαι!*

O6-M1: *Τους μπερδεύω ... $2\pi r^2$;*

O6-M3: *Η περίμετρος είναι $2\pi r$ σίγουρα, όμως το εμβαδό είναι $2\pi r^2$ ή πr^2 ; ...*

O6-M4: *Δε θυμάμαι ο τύπος να έχει δύο δυνάμια. Μας έλεγε ότι το 2 ανεβαίνει πάνω στο εμβαδό άρα πr^2 .*

O6-M1: *Άρα η περίμετρος είναι $2 \cdot 3,14 \cdot 32,5 = 204,1m$ και το εμβαδό είναι $3,14 \cdot 32,5^2 = 3.316,625m^2$.*

Στην ομάδα 5 δεν βρήκαν το μέτρο της επιφάνειας, βρήκαν όμως το μήκος του τροχού περιμετρικά με τον ίδιο τρόπο που υπολόγισαν και το ύψος, μέσω σύγκρισης. Θεώρησαν, όχι εσφαλμένα, ότι ο τροχός είναι κανονικό εξηντάγωνο με μήκος πλευράς όσο και το ύψος του βαγονιού αφού στη φωτογραφία τη μέτρησαν κι αυτή 0,5cm. Μέτρησαν τριάντα πλευρές στο μισό τροχό, βρήκαν τη μισή περίμετρο ίση με 90m, αφού είχαν από την αρχή θεωρήσει ότι το πραγματικό ύψος του βαγονιού είναι 3m, και στη συνέχεια βρήκαν την περίμετρο ολόκληρου του τροχού ίση με 180m.

O5-M2: *Ένα, δύο, τρία, ..., τριάντα. Τριάντα βαγόνια χωράνε γύρω γύρω, στο μισό τροχό, άρα $30 \cdot 3 = 90$ και $90 + 90 = 180$, 180m είναι ο τροχός γύρω γύρω.*

4.2.1 2^{ος} Κύκλος Μοντελοποίησης - Μελέτη της κίνησης του Τροχού

Οι ομάδες στη συνέχεια επικεντρώθηκαν στο βίντεο και στην κίνηση του τροχού. Οι περισσότεροι μαθητές αναρωτιόνταν γιατί υπάρχει το χρονόμετρο. Αμέσως τρεις ομάδες μπήκαν στη διαδικασία να υπολογίσουν την περίοδο του τροχού και μετά ακολούθησαν οι άλλες πέντε. Διατύπωσαν το μαθηματικό πρόβλημα, έκαναν τις απαραίτητες μετρήσεις και το έλυσαν.

Φάση αναζήτησης δεδομένων για τον υπολογισμό της περιόδου

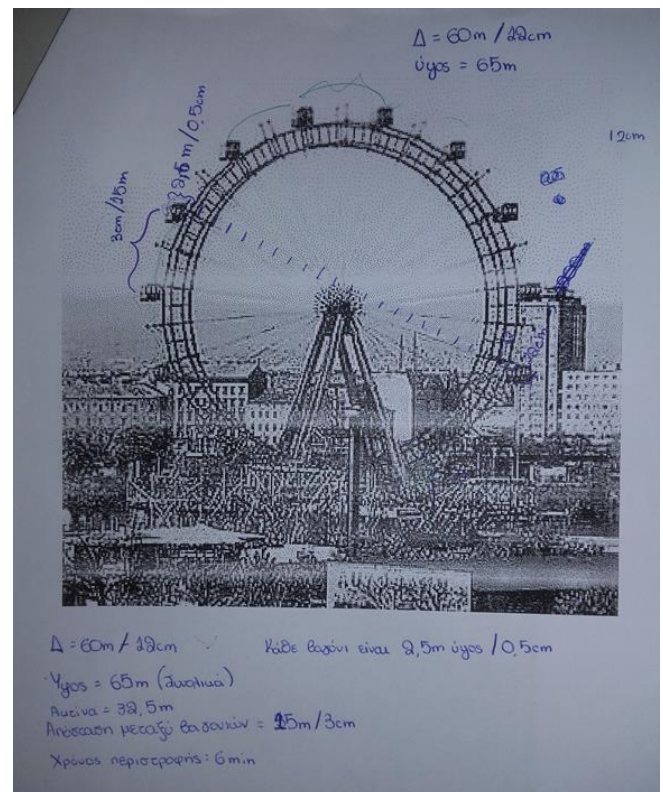
(ΣΤΡ8) Αναζήτηση σημείου αναφοράς για τον υπολογισμό της περιόδου κίνησης του τροχού.

Εδώ αρχικά ψάχνουν για ένα σημείο αναφοράς ώστε να αρχίσουν τη χρονομέτρηση για τον υπολογισμό της περιόδου. Πέντε ομάδες πήραν ως σημείο αναφοράς το σημείο επιβίβασης στα βαγόνια, ενώ οι τρεις το σημείο από το οποίο φαίνεται να ξεκινάει το βαγόνι με τον αριθμό 28 κατά την έναρξη του βίντεο.

Φάση μαθηματικοποίησης

(ΣΤΡ9) Υπολογισμός της περιόδου του τροχού μέσω ανάλογων ποσών

Οι μαθητές πέντε ομάδων βρήκαν το χρόνο που απαιτείται για τη διέλευση δύο διαδοχικών βαγονιών από σταθερό σημείο και οι μαθητές τριών ομάδων βρήκαν το χρόνο που απαιτείται για τη διέλευση τριών διαδοχικών βαγονιών από σταθερό σημείο. Στη συνέχεια κάνοντας χρήση αναλόγων ποσών υπολόγισαν την περίοδο κίνησης του τροχού.



Εικ. 4.4 Σημειώσεις ομάδας 1 στη φωτογραφία

Ο7-M1: Να βρούμε πόσο χρόνο χρειάζεται για ένα κύκλο. Κοίτα το χρονόμετρο και πες μου πόσο κάνει από το ένα βαγόνι στο άλλο και μετά θα το κάνουμε επί 15 (το πλήθος των βαγονιών του τροχού).

Ο7-M2: Αφού η κάμερα κινείται!; Πήγαινε το πίσω, παίξε το ξανά (το βίντεο). Μπορούμε να βρούμε το χρόνο για δύο βαγόνια. Το βίντεο ξεκινάει με το βαγόνι 28, μέχρι που εμφανίζεται το βαγόνι νούμερο 2 στην ίδια θέση έχουν περάσει 48 δευτερόλεπτα. (τα βαγόνια είναι 15 και αριθμημένα με άρτιους αριθμούς από το 2 μέχρι το 30)

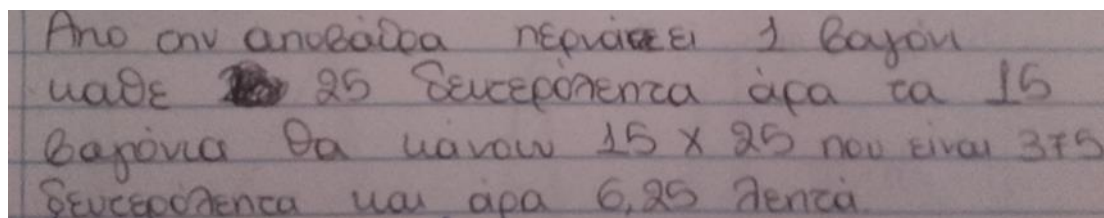
Ο7-M1: Ναι αλλά είναι ακριβώς στο ίδιο σημείο τα δύο βαγόνια;

Ο7-M2: Περίπου ναι. Να κοίτα. (προβάλλει ξανά το βίντεο και δείχνει τη θέση των δύο βαγονιών)

Ο7-M1: Ναι αλλά κοίτα αν πάρουμε την αποβάθρα (το σημείο επιβίβασης προτείνει να το θεωρήσουν ως σημείο αναφοράς), το 28 (εννοεί το βαγόνι) περνάει στα 20 δευτερόλεπτα και μετά από το ίδιο σημείο περνάει το 30 στα 45 δευτερόλεπτα. Άρα το κάθε βαγόνι χρειάζεται 25 δευτερόλεπτα.

Ο7-M2: Ναι έχεις δίκιο αλλά κι εγώ περίπου το ίδιο βρήκα.

Ο7-M1: $15 \cdot 25 = 375$ δευτερόλεπτα ο ένας κύκλος, $375 \div 60 = 6,25$ λεπτά. (Εικ. 4.5)



Εικ. 4.5 Σημειώσεις της ομάδας 7

Οι 8 ομάδες βρήκαν την περίοδο του τροχού από 6 έως 8 λεπτά οι 5 παίρνοντας ως σημείο αναφοράς το σημείο επιβίβασης στα βαγόνια, ενώ οι 3 το σημείο από το οποίο φαίνεται να ξεκινάει το βαγόνι με τον αριθμό 28 κατά την έναρξη του βίντεο.

Φάση της αξιολόγησης της εγκυρότητας της τιμής της περιόδου

(ΣΤΡ10) Σύνδεση της περιόδου με στοιχεία της καθημερινότητας

Οι μαθητές και των οκτώ ομάδων αξιολόγησαν την εγκυρότητα της τιμής της περιόδου που υπολόγισαν και την δεχτήκαν. Οι μαθητές των τριών από αυτές κατά τη διάρκεια της αξιολόγησης συνέκριναν την τιμή της περιόδου που βρήκαν με την περίοδο αντίστοιχου τροχού τον οποίο είχαν επισκεφθεί.

Ο4-M1: Χρειάζεται 6,25 λεπτά για ένα κύκλο. Λίγο δεν είναι;

Ο4-M2: Γιατί είναι λίγο;

Ο4-M1: Αφού στη φωτοτυπία λέει ότι κινείται αργά. Τόσο μεγάλος τροχός σε 6,25 λεπτά ένα κύκλο;

Ο4-M3: Του "Allou fun park" κάνει περισσότερο που είναι και μικρότερος.

O4-M4: *Κάνει περισσότερο γιατί σταματάει ενδιάμεσα ενώ αυτός γυρίζει συνέχεια.*
 O4-M2: *Στο βίντεο, γιατί κι αυτός θα σταματάει. Πως μπαίνουν μέσα οι άνθρωποι;*
 O4-M4: *Αν σταματάει και ένα λεπτό σε κάθε βαγόνι 15 λεπτά και 6,25 που γυρίζει συνολικά θέλει 21,25 λεπτά.*
 O4-M1: *Και μισό λεπτό να σταματάει πάλι χρειάζεται... (υπολογίζει)... 13,75 λεπτά, ένα τέταρτο.*
 O4-M2: *Άρα τα 6,25 λεπτά για ένα κύκλο είναι εντάξει.*

1^η Επέκταση του μοντέλου - Πρόβλεψη της θέσης κινούμενου βαγονιού

Δέκα με δώδεκα λεπτά πριν τη λήξη της πρώτης ώρας δύο ομάδες, μία από κάθε τμήμα, η 4 κι η 11, είχαν υπολογίσει τα στοιχεία του τροχού καθώς και την περίοδο του. Μη ξέροντας με ποιο τρόπο θα μπορούσαν να συνεχίσουν την επίλυση του προβλήματος απευθύνθηκαν στον εκπαιδευτικό.

O11-M1: *Κύριε τελειώσαμε, τι άλλο να κάνουμε; Δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι άλλο.*

Τότε ο εκπαιδευτικός ζητεί από τους μαθητές να υπολογίσουν τη θέση του βαγονιού συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.

E: *Μήπως θα μπορούσατε να βρείτε πόσο ψηλά έχει ανέβει ένα βαγόνι μετά από ένα λεπτό και μετά από δύο λεπτά αφού ξεκίνησε να κινείται;*

(ΣΤΡ11) Υπολογισμός ύψους βαγονιού με χρήση τριγωνομετρίας – Σύνδεση της κίνησης του βαγονιού με την κίνηση σημείου στον τριγωνομετρικό κύκλο

Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας αρχικά υιοθέτησαν γραμμικό μοντέλο για την κίνηση του βαγονιού. Είχαν υπολογίσει 7,5 λεπτά την περίοδο και 55m τη διάμετρο του τροχού.

O11-M1: *Το βαγόνι 3,75 λεπτά ανεβαίνει, ας πούμε 4, και 4 λεπτά κατεβαίνει, άρα κάθε λεπτό ανεβαίνει $55 \div 4 = 13,75m$ άρα τα δύο λεπτά ανεβαίνει $13,75 \cdot 2 = 27,5m$.*

Άλλο μέλος της ομάδας θεωρώντας κι αυτό, χάριν ευκολίας, 8 λεπτά την περίοδο, χωρίζει τον τροχό στη φωτογραφία σε οκτώ ίσους κυκλικούς τομείς, σημειώνει τις διαδοχικές θέσεις του βαγονιού και με το χάρακα, μετρώντας τις κατακόρυφες αποστάσεις των διαδοχικών αυτών θέσεων, παρατηρεί ότι η μεταβολή του ύψους ανά λεπτό δεν είναι σταθερή.

O11-M2: *Κοίτα, αλλιώς ανεβαίνει το ένα λεπτό εδώ και αλλιώς εδώ. Δεν έχει την ίδια ταχύτητα.*

Τότε τρίτο μέλος της ομάδας βλέποντας τις σημειώσεις του συμμαθητή του παρατηρεί ότι η κεντρική γωνία κάθε λεπτό είναι η ίδια και ίση με 45^0 και αναγνωρίζει στον τροχό τον τριγωνομετρικό κύκλο.

O11-M3: Η κεντρική γωνία κάθε λεπτό είναι 45^0 άρα περιμένετε... το ημίτονο δεν είναι y προς ρ ;

O11-M2: Ναι

O11-M3: Κύριε το ημίτονο των 45^0 ;

E: Θεώρησέ το 0,7.

O11-M3: $0,7 = \frac{y}{27,5}$ άρα $y = 0,7 \cdot 27,5$, $y = 19,25$, άρα $27,5 - 19,25 = 7,25m$

ανέβηκε το πρώτο λεπτό.

O11-M2: Δηλαδή το πρώτο λεπτό ανέβηκε 7,25m ενώ το δεύτερο ανέβηκε $25 - 7,25 = 19,75m$.

Στην ομάδα 4 ο εκπαιδευτικός έθεσε την ίδια ερώτηση με αυτή που είχε θέσει και στην 11. Η συγκεκριμένη ομάδα είχε βρει την περίοδο 6 λεπτά.

E: Μήπως θα μπορούσατε να βρείτε πόσο ψηλά έχει ανέβει ένα βαγόνι μετά από ένα και μετά από δύο λεπτά αφού ξεκίνησε να κινείται;

Αμέσως μία μαθήτρια αναγνώρισε την ανάγκη χρήσης τριγωνομετρίας και μάλιστα ρώτησε αν θα μπορούσαν να θεωρήσουν ως αφετηρία της κίνησης του βαγονιού τον ημιάξονα Οχ για μεγαλύτερη ευκολία.

O4-M1: Κύριε μπορώ να υποθέσω ότι ξεκίνησε από εδώ το βαγόνι; (Δείχνει το σημείο του τροχού στον οριζόντιο ημιάξονα Οχ). Θα είναι πιο εύκολο από εδώ.

E: Ναι, γιατί όχι; Από όπου εσείς θέλετε.

O4-M1: Από εδώ βολεύει γιατί μετά το y είναι θετικό. Βρήκαμε ότι για ένα κύκλο χρειάζεται 6,25 λεπτά, να το πάρουμε 6 λεπτά;

E: Ναι, θεωρήστε ότι κάνει 6 λεπτά.

O4-M2: Τι είπες για το y ;

O4-M1: Κοίτα στη φωτογραφία. Παίρνω τη γωνία. Αφού τις 360^0 τις κάνει σε 6 λεπτά τότε το ένα λεπτό κάνει 60^0 . Αυτό είναι το ρ και αυτό το y .

O4-M2: Θα κάνεις τριγωνομετρία!

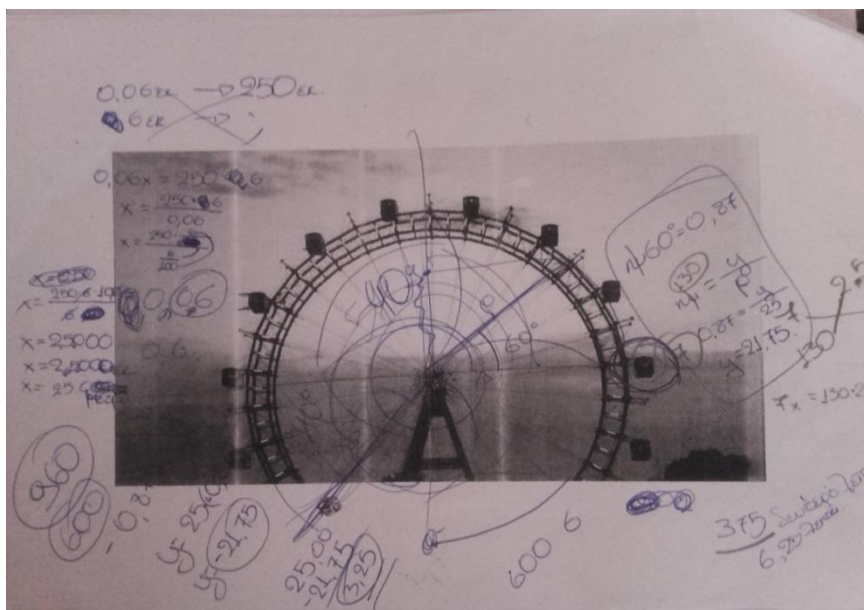
O4-M3: Με ημίτονο; Αυτά που μας έκανε την προηγούμενη εβδομάδα; (Εννοεί τον εκπαιδευτικό όταν τους δίδασκε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών έως 360^0 στο πλαίσιο του μαθήματος)

O4-M1: Κύριε το ημίτονο των 60^0 να το πάρουμε $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

E: Όχι παιδιά, 0,87.

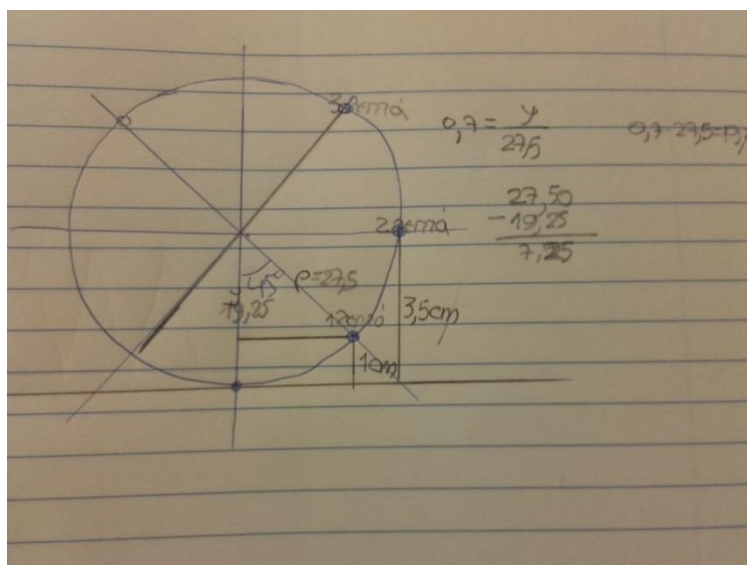
O4-M1: Άρα $0,87 = \frac{y}{25}$ και τότε $y = 21,25$ και το ύψος του βαγονιού μετά από ένα λεπτό είναι $21,25 + 25 = 46,25m$ από το έδαφος.

Τη δεύτερη διδακτική ώρα οι ομάδες παρουσίασαν τα αποτελέσματα των εργασιών τους στην ολομέλεια του τμήματος. Οι μαθητές ενεπλάκησαν σε συζήτηση, με συντονιστή τον διδάσκοντα, και στα δύο τμήματα. Αντάλλαξαν απόψεις, συνδύασαν τις γνώσεις τους και διατύπωσαν ερωτήματα και απορίες.



Εικ. 4.6 Σημειώσεις ομάδας 4 στη φωτογραφία

Σχεδόν όλοι οι μαθητές σχολίασαν τα διαφορετικά αποτελέσματα των ομάδων μεταξύ τους. Ο εκπαιδευτικός διευκρίνισε ότι οι αποκλίσεις μεταξύ των λύσεων κάθε ομάδας ήταν απολύτως λογικές αφού οφείλονταν στο ότι η κάθε μία είχε κάνει διαφορετικές εκτιμήσεις ως προς το ύψος του βαγονιού ή του δέντρου ή του κτηρίου.



Εικ. 4.7 Σημειώσεις τις ομάδας 11

Ενδιαφέρον παρουσίασε η συζήτηση στο δεύτερο τμήμα αφού παρουσίασε τα αποτελέσματά της η ομάδα 11 που είχε ήδη συνδέσει τη μεταβολή του ύψους με το ημίτονο της γωνίας. Ένας μαθητής από την ομάδα 7 έκανε την παρατήρηση ότι το y που ανέφεραν οι συμμαθητές του (Εικ. 4.7) δεν αναφερόταν ουσιαστικά στην τεταγμένη του σημείου αλλά στην πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματιζόταν. Πρότεινε ως αφετηρία της κίνησης τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα Οχ.

O7-M1: *Από εκεί που μέτρησαν τη γωνία αυτό δεν είναι το y του άξονα. Αν μετράμε τη γωνία από την αρχή, όπως έχουμε μάθει, κάθε φορά θα βρίσκουμε το y (εννοεί την τεταγμένη).*

O11-M3: *Ναι, αλλά μετά το y εδώ (δείχνει ένα σημείο στο τέταρτο τεταρτημόριο) θα είναι αρνητικό.*

O7-M1: *Ναι (παύση).*

E: *Δηλαδή σε αυτή τη θέση που βρίσκεται το βαγόνι ένα λεπτό μετά την εκκίνηση που ο ... (αναφέρει το όνομα του μαθητή της ομάδας 11) βρήκε $y=19,25$ αν μετρούσαμε τη γωνία με αφετηρία τον Οχ πόσο θα έβγαине;*

O7-M1: *Κύριε το ημίτονο των 315^0 πόσο είναι;*

E: *Περίπου -0,7.*

O7-M1: *(Κοιτά τις σημειώσεις του συμμαθητή του) Άρα το y θα βγει -19,25*

O11-M2: *Ωραία, άρα θα μετράμε τη γωνία κανονικά από την αρχή και μετά θα προσθέτουμε το y στην ακτίνα.*

Την τρίτη διδακτική ώρα όπως έχει προαναφερθεί τα ερωτήματα πλέον ήταν συγκεκριμένα. Ο εκπαιδευτικός ζήτησε από τους μαθητές να βρουν το ύψος ενός βαγονιού του τροχού από το έδαφος 1 λεπτό, 4 λεπτά, 7 λεπτά, 10 λεπτά, 13 λεπτά, 16 λεπτά και 19 λεπτά αφότου ξεκίνησε και να αναπαραστήσουν γραφικά τη μεταβολή του ύψους του, σε συνάρτηση με το χρόνο, τα πρώτα 18 λεπτά της κίνησης του.

Από τους μαθητές και των δύο τμημάτων τέθηκαν, αρχικά, τα ερωτήματα.

O2-M3: *Κύριε η κάθε ομάδα με τα δικά της αποτελέσματα θα δουλέψει;*

O6-M1: *Εμείς που δεν είχαμε υπολογίσει το χρόνο για ένα κύκλο (εννοεί την περίοδο) πόσο να τον πάρουμε;*

O7-M1: *Τελικά τη γωνία από πού να τη μετράμε;*

Ο εκπαιδευτικός για να διευκολύνει τη διαδικασία τους είπε να θεωρήσουν 6 λεπτά το χρόνο περιστροφής του τροχού και να θεωρήσουν ως αφετηρία της κίνησης τον Οχ. Επίσης τους υπενθύμισε ότι οποιοδήποτε ημίτονο γωνίας χρειαζόνταν θα τους το έλεγε εκείνος. Σε αυτό το στάδιο της δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν ένα κλειστό πρόβλημα και ως προς το σημείο εκκίνησης αλλά και ως προς το στόχο.

(ΣΤΡ12) Σχεδίαση σχήματος - τριγωνομετρικού κύκλου

Προσπαθώντας οι μαθητές να βρουν το ύψος ενός βαγονιού τις χρονικές στιγμές που τους ζητούσε ο εκπαιδευτικός, αποφάσισαν να σχεδιάσουν στο τετράδιο που τους είχε δοθεί ένα τριγωνομετρικό κύκλο, να σημειώσουν σ' αυτόν τις διαδοχικές θέσεις του βαγονιού και με βάση αυτόν να υπολογίσουν τα διάφορα ύψη. Οι μαθητές των 8 ομάδων έκαναν σχήμα ενώ οι άλλες 3 δούλεψαν «πάνω» σε μία από τις φωτογραφίες που τους είχαν δοθεί.

(ΣΤΡ13) Υπολογισμός της θέσης βαγονιού με χρήση ανάλογων ποσών

Η ομάδα 5 υπολόγισε το ύψος του βαγονιού τις διάφορες χρονικές στιγμές από την έναρξη της κίνησής του χρησιμοποιώντας κλίμακα. Ουσιαστικά επέκτειναν τη στρατηγική που ακολούθησαν για τον υπολογισμό του ύψους και της περιφέρειας του τροχού σε νέο πλαίσιο. Η διαδικασία που ακολούθησαν οι μαθητές της ομάδας έχει ως εξής. Χώρισαν τον τροχό στη φωτογραφία σε έξι περίπου ίσα μέρη, σημείωσαν τη θέση του βαγονιού κάθε χρονική στιγμή που ζητείτο το ύψος του από το πρόβλημα, μέτρησαν με το χάρακα το ύψος του από το έδαφος στη φωτογραφία και στη συνέχεια υπολόγισαν το πραγματικό. (Εικ. 4.3)

Ο5-Μ2: Μετά από 4 λεπτά το ύψος είναι 1,4 εκατοστά (εννοεί στη φωτογραφία) και το βαγόνι είναι μισό εκατοστό άρα $1,4 \div 0,5 = 2,8$ και (θεωρούν ότι το βαγόνι έχει ύψος 3m) $2,8 \cdot 3 = 8,4m$ (το ύψος του βαγονιού από το έδαφος 4 λεπτά μετά την εκκίνηση του)

(ΣΤΡ 14) Αναγωγή γωνίας από 0^0 έως 360^0

Από τις 11 ομάδες, οι 10 βρήκαν το ύψος του βαγονιού τις χρονικές στιγμές 1min, 4min, 7min και 10min με χρήση του ημιτόνου της κεντρικής γωνίας. Όταν η γωνία υπερέβαινε τις 360^0 έκαναν Ευκλείδεια διαίρεση και αναγωγή της γωνίας στον πρώτο κύκλο.

Ο2-Μ3: Αφού κάνει 6 λεπτά τον κύκλο, κάθε λεπτό κάνει 60^0

Ο2-Μ1: Τα 10 λεπτά κάνει $10 \cdot 60 = 600^0$ άρα ένας κύκλος και 240^0 . Κύριε το ημίτονο των 240^0 ;

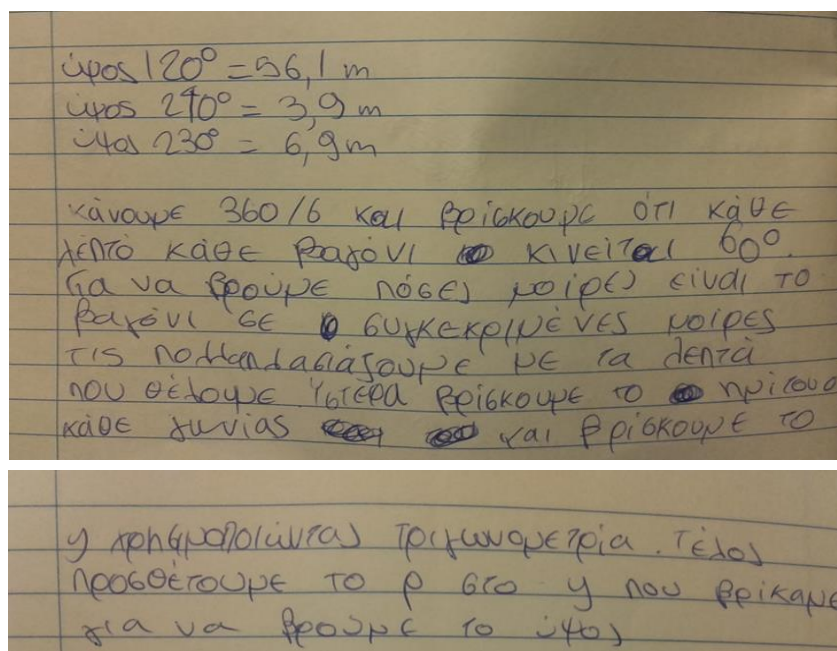
Ε: Θεώρησέ το -0,87

Ο2-Μ1: Άρα $-0,87 = \frac{y}{30}$ άρα $y = -0,87 \cdot 30$, $y = -26,1$ και το προσθέτω στην ακτίνα και το ύψος είναι $30 - 26,1 = 3,9m$

Ο2-Μ3: Το προσθέτεις δεν είπες;

O2-M1: Ναι προσθέτω το -26,1, κοίτα που βρίσκεται το βαγόνι (δείχνει στη φωτογραφία)

O2-M3: Α ναι, μπερδεύτηκα. (Εικ. 4.8)



Εικ. 4.8 Σημειώσεις ομάδας 2

(ΣΤΡ15) Πρόβλεψη θέσης βαγονιού μέσω της περιόδου

Στη συνέχεια οι μαθητές των 7 ομάδων από τις 11, κατά τη διάρκεια των υπολογισμών τους, προσπαθώντας να απαντήσουν το πρώτο ερώτημα του καθηγητή, ανακάλυψαν ότι δεν χρειαζόταν για να βρουν τη θέση του βαγονιού να ακολουθήσουν την ίδια διαδικασία (αναγωγή γωνίας στον πρώτο κύκλο και χρήση ημιτόνου) για κάθε χρονική στιγμή αλλά θα μπορούσαν να την προβλέψουν μέσω της περιόδου.

O2-M1: Τα 16 λεπτά κάνει $16 \cdot 60 = 960^\circ$ άρα $960 \div 360 = 2$ κύκλους και 240° . Το ημίτονο των 240° , το έχουμε κάνει ξανά, το ύψος είναι πάλι 4,095m.

O2-M2: Δεν χρειάζεται το ημίτονο. Αφού κάθε 6 λεπτά κάνει ένα κύκλο και στα 4 λεπτά ήταν εδώ (δείχνει την υποτιθέμενη θέση του βαγονιού) μετά και στα 10 και στα 16 λεπτά θα είναι στην ίδια θέση, οπότε δε χρειάζεσαι το ημίτονο.

O2-M1: Γι' αυτό μας είπε (εννοεί τον εκπαιδευτικό) να βρούμε το ύψος τότε!; Το ίδιο έχουμε και στα 7, 13, 19 λεπτά. Πάλι στην ίδια θέση βρίσκεται, εκεί που ήταν και στο 1 λεπτό.

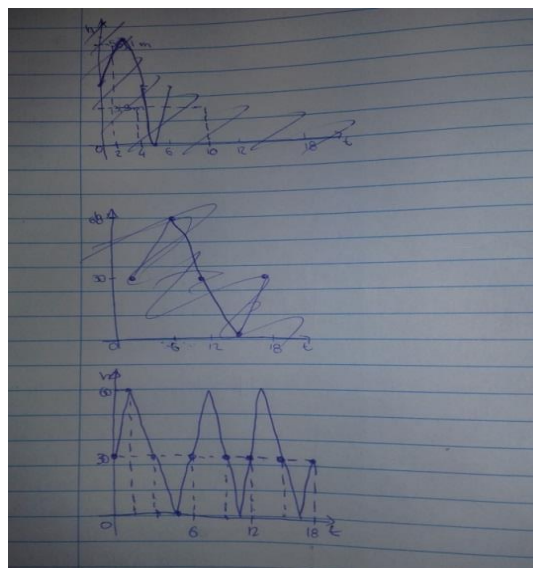
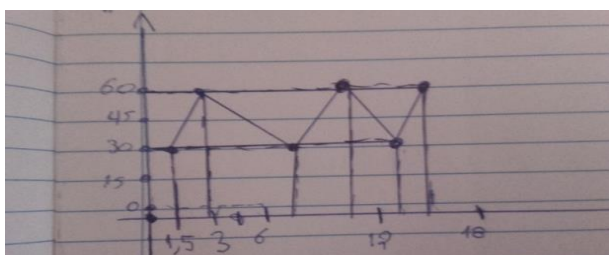
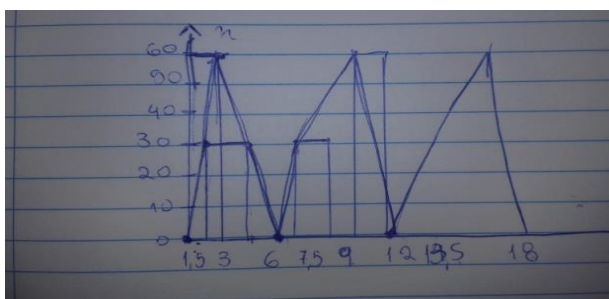
O2-M2: Βρίσκεις μία φορά το ύψος με το ημίτονο και μετά κάθε 6 λεπτά είναι το ίδιο.

2^η Επέκταση του μοντέλου - Γραφική απεικόνιση της κίνησης βαγονιού

(ΣΤΡ16) Γραφική αναπαράσταση της περιοδικής κίνησης με χρήση ακραίων τιμών

Τέλος οι ομάδες ασχολήθηκαν με το δεύτερο μέρος της εργασίας που τους είχε ανατεθεί, δηλαδή τη γραφική αναπαράσταση της μεταβολής του ύψους του βαγονιού συναρτήσει του χρόνου τα πρώτα 18 λεπτά της κίνησής του.

Όλες οι ομάδες προσπάθησαν να αναπαραστήσουν γραφικά τη μεταβολή του ύψους του βαγονιού από το έδαφος, σε συνάρτηση με το χρόνο όμως μόνο οι 7 κατάφεραν να αποδώσουν με τέτοιο τρόπο τη μεταβολή ώστε να γίνεται κατανοητή η περιοδικότητα της κίνησης.



Εικ. 4.8 Γραφικές παραστάσεις ύψους – χρόνου των μαθητών

Αξίζει να αναφερθεί ότι ενώ από το προηγούμενο ερώτημα που τους είχε τεθεί είχαν στη διάθεσή τους ζεύγη τιμών χρόνου – ύψους τα οποία θα μπορούσαν να αξιοποιήσουν για τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης, οι 6 ομάδες δεν το έκαναν. Σχεδίασαν τη γραφική παράσταση λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις ακραίες θέσεις ή παίρνοντας ενδιάμεσες τιμές θεωρώντας, οι περισσότερες, τη μεταβολή γραμμική.

O3-M1: Αφού κάνει τον κύκλο 6 λεπτά, ξεκινάει από κάτω και στα 3 λεπτά είναι πάνω.

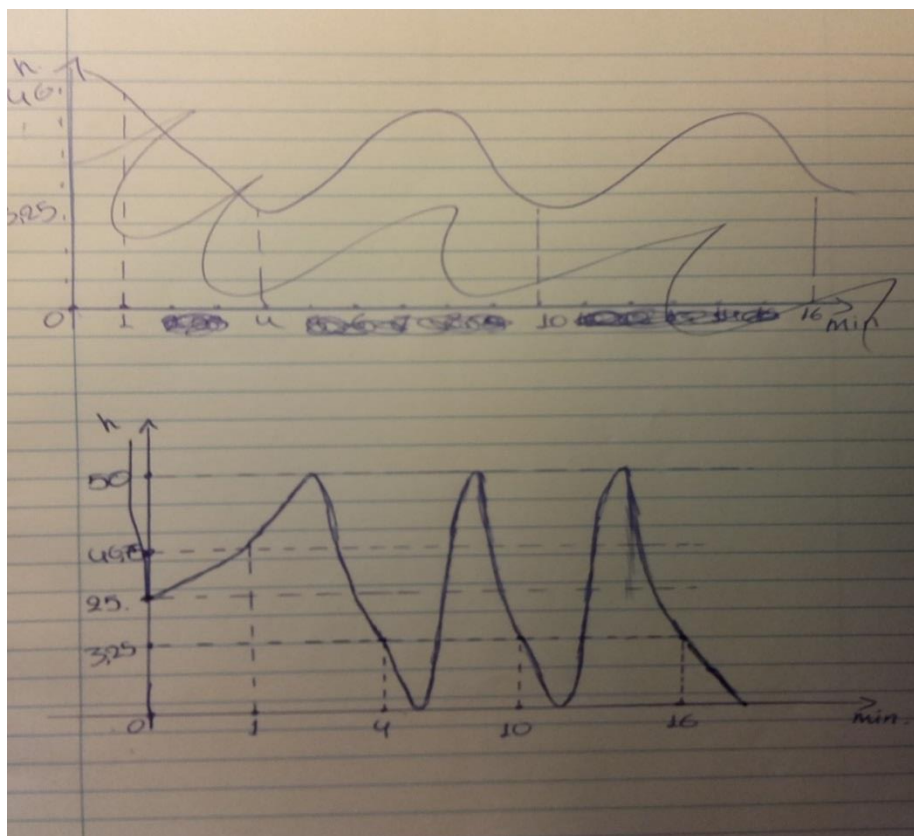
O3-M2: Ναι και στο 1,5 λεπτό είναι στη μέση. (εννοεί τα 30 μέτρα)

O3-M1: Θα βάλουμε 30 και 60 (εννοεί το ύψος)

O3-M2: Όχι χώρισε ανά 10 (εννοεί το ύψος) και ανά 1,5 (εννοεί το χρόνο)

(ΣΤΡ17) Γραφική αναπαράσταση της περιοδικής κίνησης με χρήση ενδιάμεσων τιμών

Μία μόνο ομάδα, η ομάδα 4, αξιοποίησε τα ζεύγη τιμών που είχε στη διάθεσή της από το προηγούμενο ερώτημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλα τα μέλη της, όταν ετέθη το ερώτημα, δήλωσαν ότι δεν μπορούν να κάνουν γραφικές παραστάσεις.



Εικ. 4.9 Οι γραφικές παραστάσεις της ομάδας 4

Ο4-M2: Ποιος θα κάνει τη γραφική παράσταση; Εγώ δεν ξέρω.

Ο4-M1: Ούτε εγώ. Να το δώσουμε έτσι;

Ο4-M2: Να τραβήξουμε μία γραμμή να ανεβοκατεβαίνει από το έδαφος μέχρι τα 50m;

Ο4-M4: Έτσι στην τύχη;

Ο4-M2: Όχι κάθε 6 λεπτά δεν είπαμε ότι ανεβοκατεβαίνει;

Ο4-M3: Καθίστε, αφού έχουμε βρει το ύψος στο 1 min στα 4min στα 10min και 16min να βάλουμε αυτά και να τα ενώσουμε. Στο ένα δε το βρήκαμε 46m και στα άλλα 3,25m; Κοιτάζτε... (σχεδιάζει μία πρόχειρη γραφική παράσταση)

Ο4-M2: Ωραία την έκανες όμως... (παύση) δεν ακουμπάει στο έδαφος.

Ο4-M3: Αφού την έκανα γρήγορα, θα κάνω μία να ακουμπάει.

Ο4-M1: Α! Αυτό θα κάνουμε αφού ξέρουμε τα ύψη και ο τροχός είναι 50m θα βάλουμε τα σημεία και θα τα ενώσουμε. Στο ένα λεπτό είναι στα 46,25m όχι στα 46. Έλα κάνε μία καλή. (εννοεί γραφική παράσταση απευθυνόμενη στο μαθητή 3) (Εικ. 4.9)

4.3 Νοηματοδότηση στοιχείων της έννοιας της περιοδικότητας

Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να περιγράψουν την κίνηση του τροχού και των βαγονιών του προσέγγισαν τέσσερις πτυχές της περιοδικότητας.

4.3.1 Η περίοδος ως ο χρόνος μίας πλήρους περιστροφής

Αρχικά όλοι οι μαθητές επικεντρώθηκαν στον υπολογισμό των πραγματικών διαστάσεων του τροχού. Στη συνέχεια 8 ομάδες επικεντρώθηκαν στη μελέτη της κίνησης του τροχού ώστε να μπορέσουν να την περιγράψουν. Παρακολουθώντας το βίντεο, όρισαν ένα σημείο ως σημείο αναφοράς για την κίνηση των βαγονιών, χρονομέτρησαν το διάστημα διέλευσης δύο ή τριών διαδοχικών βαγονιών από το σημείο που οι ίδιοι είχαν επιλέξει και υπολόγισαν την περίοδο της κίνησης του τροχού. Ενδεικτικά αναφέρονται οι συζητήσεις τριών ομάδων.

Ομάδα 1 (με σημείο αναφοράς το σημείο έναρξης προβολής του βίντεο)

O1-M1: Το βίντεο ξεκινάει με το 28 και μετά από 48 δευτερόλεπτα από εκεί περνάει το 2. (Εννοεί τα βαγόνια με τον αριθμό 28, τον αριθμό 30 και τον αριθμό 2. Τα 15 βαγόνια έχουν άρτια αρίθμηση.)

O1-M2: 24 δευτερόλεπτα το βαγόνι;

O1-M1: Ναι δεν έβλεπες το χρονόμετρο; $24 \cdot 15 = 360$ δευτερόλεπτα για ένα κύκλο

O1-M2: Όχι, θα το ξαναβάλω... 48 , 49 ή 50 δευτερόλεπτα κάνουν τα δύο βαγόνια;

O1-M1: 48, βγαίνει και ακριβώς 6 λεπτά.

Ομάδα 8 (με σημείο αναφοράς το σημείο επιβίβασης στα βαγόνια)

O8-M2: Μπορούμε να βρούμε πόσο χρόνο κάνει για ένα κύκλο.

O8-M1: Πως;

O8-M2: Θα μετρήσουμε το χρόνο από βαγόνι σε βαγόνι

O8-M3: Ναι αλλά από πού;

O8-M2: Ναι έχεις δίκιο ...βάλε ξανά το βίντεο.

O8-M3: Από εδώ. (εννοεί το σημείο επιβίβασης) Το βαγόνι 28 περνάει από εδώ στα 20 δευτερόλεπτα και μετά το 30 περνάει στα 46 δευτερόλεπτα. Άρα από βαγόνι σε βαγόνι κάνει 26 δευτερόλεπτα

O8-M2: Αφού η ρόδα έχει 15 βαγόνια $15 \cdot 26 = 390$, δηλαδή κάνει 6,5 λεπτά τον κύκλο.

Ομάδα 7 (εξέτασαν την κίνηση και με τα δύο σημεία αναφοράς)

O7-M1: Να βρούμε πόσο χρόνο χρειάζεται για ένα κύκλο. Κοίτα το χρονόμετρο και πες μου πόσο κάνει από το ένα βαγόνι στο άλλο και μετά θα το κάνουμε επί 15 (το πλήθος των βαγονιών του τροχού).

O7-M2: Αφού η κάμερα κινείται!; Πήγαινε το πίσω, παίξε το ξανά (το βίντεο). Μπορούμε να βρούμε το χρόνο για δύο βαγόνια. Το βίντεο ξεκινάει με το βαγόνι 28, μέχρι που εμφανίζεται το βαγόνι νούμερο 2 στην ίδια θέση έχουν περάσει 48

δευτερόλεπτα. (τα βαγόνια είναι 15 και αριθμημένα με άρτιους αριθμούς από το 2 μέχρι το 30)

O7-M1: *Ναι αλλά είναι ακριβώς στο ίδιο σημείο τα δύο βαγόνια;*

O7-M2: *Περίπου ναι. Να κοίτα.* (προβάλλει ξανά το βίντεο και δείχνει τη θέση των δύο βαγονιών)

O7-M1: *Ναι αλλά κοίτα αν πάρουμε την αποβάθρα (το σημείο επιβίβασης προτείνει να το θεωρήσουν ως σημείο αναφοράς), το 28 (εννοεί το βαγόνι) περνάει στα 20 δευτερόλεπτα και μετά από το ίδιο σημείο περνάει το 30 στα 45 δευτερόλεπτα. Άρα το κάθε βαγόνι χρειάζεται 25 δευτερόλεπτα.*

O7-M2: *Ναι έχεις δίκιο αλλά κι εγώ περίπου το ίδιο βρήκα.*

O7-M1: $15 \cdot 25 = 375$ δευτερόλεπτα ο ένας κύκλος, $375 \div 60 = 6,25$ λεπτά.

Από τις 8 ομάδες οι 5 πήραν ως σημείο αναφοράς το σημείο επιβίβασης στα βαγόνια, ενώ οι 3 το σημείο από το οποίο φαίνεται να ξεκινάει το βαγόνι με τον αριθμό 28 κατά την έναρξη της προβολής του βίντεο. Δύο βρήκαν την περίοδο 6min, δύο 6.25min, μία 6.5min, μία 7min, μία 7.5min και μια 8min.

4.3.2 Η περιοδικότητα ημιτόνου γωνιών άνω των 360°

Οι μαθητές για να βρουν το ύψος ενός βαγονιού του τροχού από το έδαφος 1 λεπτό, 4 λεπτά, 7 λεπτά, 10 λεπτά, 13 λεπτά, 16 λεπτά και 19 λεπτά αφότου ξεκίνησε να κινείται, όπως τους είχε ζητηθεί από τον εκπαιδευτικό, έκαναν αρχικά χρήση του ημιτόνου της κεντρικής γωνίας. Από τις 11 ομάδες, οι 10 βρήκαν το ύψος του βαγονιού τις χρονικές στιγμές 1 λεπτό, 4 λεπτά, 7 λεπτά και 10 λεπτά με χρήση του ημιτόνου. Όταν η γωνία υπερέβαινε τις 360° έκαναν Ευκλείδεια διαίρεση και αναγωγή της γωνίας στον πρώτο κύκλο. Έτσι παρατήρησαν ότι η γωνία των 420° ουσιαστικά συνέπιπτε με αυτή των 60° και ότι η γωνία των 600° με αυτή των 240° και γενικεύοντας συμπέραναν ότι το ημίτονο κάθε 360° έχει την ίδια τιμή.

Ομάδα 4

O4-M2: ... 19 λεπτά άρα $19 \cdot 60 = 1140$, κάνει 3 κύκλους, $360 \cdot 3 = 1080$, $1140 - 1080 = 60$ άρα πάλι το ημίτονο των 60° , κάθε 360° το βαγόνι θα βρίσκεται στο ίδιο σημείο και θα παίρνουμε το ίδιο ημίτονο.

Ομάδα 1

O1-M1: *Τα 10 λεπτά κάνει $10 \cdot 60 = 600^\circ$ άρα ένα κύκλο και 240° , θα πάρουμε το ημίτονο των 240° . Το έχουμε από πριν.*

O1-M2: *Ναι, στα 4 λεπτά πάλι το ίδιο δε βρήκαμε;*

O1-M1: *Αφού άμα κάνει ένα κύκλο πάλι στο ίδιο σημείο θα βρεθεί.*

Οι μαθητές ουσιαστικά περιγράφουν τις ισότητες $\eta\mu 1140^\circ = \eta\mu(3 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ$ και $\eta\mu 600^\circ = \eta\mu(360^\circ + 240^\circ) = \eta\mu 240^\circ$. Παρόλο που δεν τις εκφράζουν συμβολικά είναι φανερό ότι έχουν αναπτύξει αυτή την αντίληψη.

4.3.3 Η περίοδος ως εργαλείο πρόβλεψης

Όπως έχει προαναφερθεί από τις 11 ομάδες οι 10 βρήκαν το ύψος του βαγονιού τις χρονικές στιγμές 1 λεπτό, 4 λεπτά, 7 λεπτά και 10 λεπτά με χρήση του ημιτόνου της κεντρικής γωνίας. Από τις 10 ομάδες οι 3 συνέχισαν να υπολογίζουν το ύψος του βαγονιού στο 13° , στο 16° και στο 19° λεπτό της κίνησης του με τον ίδιο τρόπο. Οι υπόλοιπες 7 ομάδες παρατήρησαν ότι κάποιες χρονικές στιγμές απείχαν μεταξύ τους 6 λεπτά, όσος ο χρόνος δηλαδή μιας πλήρους περιστροφής του τροχού. Εξ αυτού του λόγου αποφάσισαν να σταματήσουν να χρησιμοποιούν το ημίτονο και να εκμεταλλευτούν την περιοδικότητα της κίνησης.

Ομάδα 2

O2-M1: Τα 16 λεπτά κάνει $16 \cdot 60 = 960^\circ$ άρα $960 \div 360 = 2$ κύκλους και 240° . Το ημίτονο των 240° , το έχουμε κάνει ξανά, το ύψος είναι πάλι 4,095m.

O2-M2: Δεν χρειάζεται το ημίτονο. Αφού κάθε 6 λεπτά κάνει ένα κύκλο και στα 4 λεπτά ήταν εδώ (δείχνει την υποτιθέμενη θέση του βαγονιού) μετά και στα 10 και στα 16 λεπτά θα είναι στην ίδια θέση, οπότε δε χρειάζεσαι το ημίτονο.

O2-M1: Γι' αυτό μας είπε (εννοεί τον εκπαιδευτικό) να βρούμε το ύψος τότε!; Το ίδιο έχουμε και στα 7, 13, 19 λεπτά. Πάλι στην ίδια θέση βρίσκεται, εκεί που ήταν και στο 1 λεπτό.

O2-M2: Βρίσκεις μία φορά το ύψος με το ημίτονο και μετά κάθε 6 λεπτά είναι το ίδιο.

Ομάδα 7

O7-M2: ... Για τα 13 λεπτά ... $13 \cdot 60 = 780^\circ$ άρα...

O7-M1: Μην είσαι χαζός δε χρειάζεται (εννοεί την αναγωγή σε γωνία μεταξύ 0° και 360° και τη χρήση ημιτόνου) αφού κάθε έξι λεπτά κάνει ένα κύκλο, άρα κάθε έξι λεπτά βρίσκεται στο ίδιο ακριβώς σημείο. Το ίδιο (εννοεί το ύψος του βαγονιού) που έχουμε 1 λεπτό και στα 7, θα έχουμε και στα 13 και στα 19 λεπτά, θα είναι 47,85m πάνω από το έδαφος.

4.3.4 Η γραφική αναπαράσταση της περιοδικής συμπεριφοράς της κίνησης του τροχού

Τέλος, μετά από προτροπή του εκπαιδευτικού, οι μαθητές προσπάθησαν να αναπαραστήσουν γραφικά τη μεταβολή του ύψους ενός βαγονιού σε συνάρτηση με το χρόνο τα πρώτα 18 λεπτά της κίνησής του.

Παρόλο που οι μαθητές Γυμνασίου δεν έχουν σχεδόν καθόλου εμπειρία στη σχεδίαση γραφικών παραστάσεων οι 7 ομάδες απέδωσαν με τέτοιο τρόπο τη συμμεταβολή ύψους – χρόνου ώστε να είναι εμφανής η περιοδικότητα της κίνησης. Ουσιαστικά καμία γραφική παράσταση δεν είναι σωστή όμως φαίνεται ότι οι μαθητές

και των 7 ομάδων είχαν αντιληφθεί ότι το βαγόνι κάθε 6 λεπτά βρίσκεται στην ίδια θέση και άρα απέχει από το έδαφος την ίδια απόσταση. Όπως φαίνεται στις γραφικές παραστάσεις οι 5 από τις 7 ομάδες που κατάφεραν να αναπαραστήσουν τη μεταβολή του ύψους συναρτήσει του χρόνου, τη θεώρησαν γραμμική.

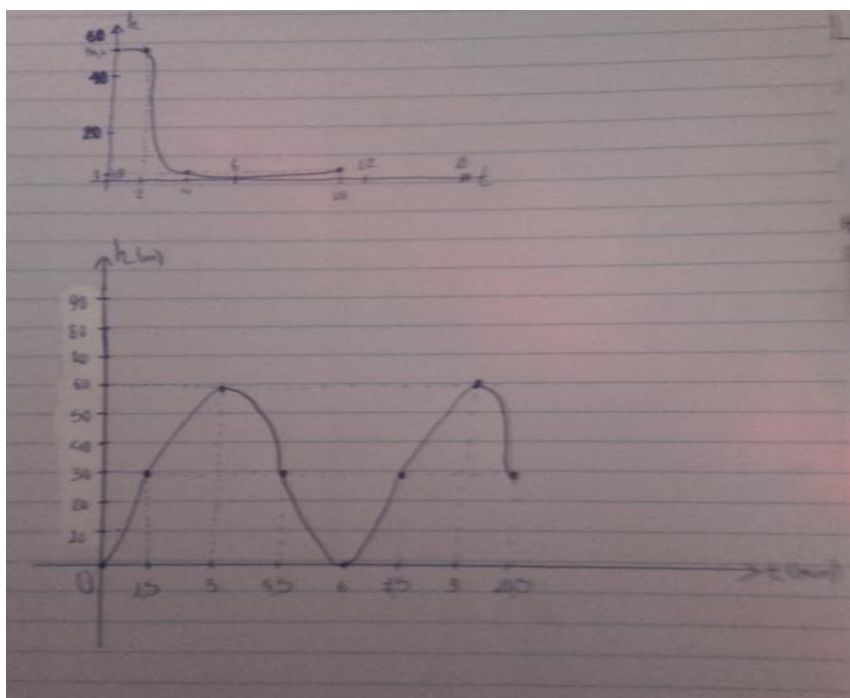
O7-M1: Θα βάλουμε τα σημεία και μετά θα τα ενώσουμε.

O7-M2: Σε 6 λεπτά κάνει τον κύκλο, στα 3 λεπτά φτάνει στα 60 μέτρα άρα κάθε 1,5 λεπτό κάνει 30 μέτρα.

O7-M1: Να χωρίσουμε ανά 1,5;

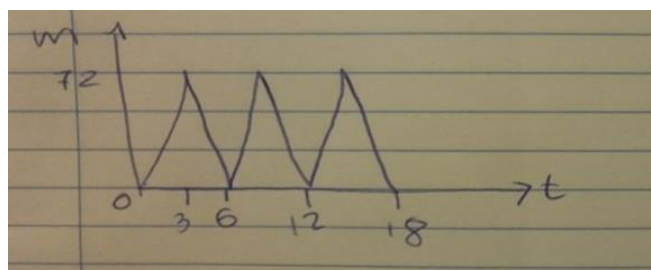
O7-M2: Ναι και βάλε τα 30 και τα 60 μέτρα.

O7-M1: Θα το χωρίσω ανά 10 μέτρα.



Εικ. 4.10 Γραφική παράσταση μαθητών ομάδας 7

Είναι φανερό ότι ενώ οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν γραφικά τα πρώτα 18 λεπτά της κίνησης, μελετούν την κίνηση του βαγονιού στα πρώτα 6 λεπτά, στην πρώτη περίοδο δηλαδή, έχοντας αντιληφθεί την περιοδικότητά της.



Εικ. 4.11 Γραφική παράσταση μαθητών ομάδας 8

Κεφάλαιο 5^ο : Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε τις στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος μοντελοποίησης καθώς και τον τρόπο με τον οποίο προσέγγισαν και αντιλήφθηκαν, μέσω αυτού, την έννοια της περιοδικότητας.

Στην παρέμβαση, διάρκειας τριών διδακτικών ωρών, συμμετείχαν σαράντα πέντε μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, ενός δημόσιου σχολείου, οι οποίοι χωρίστηκαν και εργάστηκαν ανά ομάδες. Δημιουργήθηκαν συνολικά 11 ομάδες μαθητών. Στους μαθητές δόθηκε ένα ανοικτό - ρεαλιστικό πρόβλημα που αφορούσε στη γενική περιγραφή των γεωμετρικών στοιχείων και της κίνησης ενός περιστρεφόμενου τροχού λούνα – παρκ αποκλειστικά μέσα από τη μελέτη φωτογραφιών και ενός βίντεο. Ουσιαστικά οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν ένα πρόβλημα που απαιτεί τη μοντελοποίηση της περιοδικής κίνησης ενός τροχού χωρίς όμως να έχουν διδαχθεί μέχρι τότε την έννοια της περιοδικότητας.

Σύντομη περιγραφή της μαθηματικής δραστηριότητας που ανέπτυξαν οι μαθητές

Οι μαθητές μόλις είδαν το πρόβλημα ξεπλάγησαν. Ενώ πέρασαν κάποια λεπτά χωρίς να μπορούν να καταλάβουν τι ακριβώς καλούνταν να κάνουν, στη συνέχεια προσπάθησαν να διακρίνουν τα «συστατικά» του προβλήματος και να καθορίσουν τις μεταξύ τους σχέσεις, να ανακαλύψουν τις υποθέσεις και τα δεδομένα του. Άρχισαν να το αναλύουν ώστε να μπορέσουν να καθορίσουν τις στρατηγικές που θα επέλεγαν για την επίλυσή του. Στις συζητήσεις μεταξύ τους ακούγονταν οι φράσεις:

«Μας έχει δώσει τις φωτογραφίες»

«Στο βίντεο φαίνεται ένα χρονόμετρο»

«Γιατί μας έδωσε το χάρακα;»

Άρχισαν να κάνουν μετρήσεις, να κάνουν εικασίες, να συλλέγουν δεδομένα.

«Ο τροχός έχει 15 βαγόνια αριθμημένα με ζυγούς αριθμούς»

«Η ακτίνα του τροχού είναι 6,5 εκατοστά.»

«Το ύψος του βαγονιού είναι 7 χιλιοστά, 0,7 εκατοστά.»

«Το βαγόνι πόσο να είναι; 2 μέτρα;»

«Το βαγόνι κανονικά θα είναι 2,5 με 3 μέτρα»

«Μετρήστε το χρόνο ανάμεσα στα δύο βαγόνια στην αποβάθρα.»

«Από το βαγόνι 28 μέχρι το 2 έχουν περάσει 48 δευτερόλεπτα.»

Αφού συνέλεξαν τα δεδομένα τους προσπάθησαν να «σπάσουν» το πρόβλημα σε υπο-προβλήματα έτσι ώστε να μπορέσουν να ξεκινήσουν την επίλυση.

Κατά τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας οι μαθητές ακολούθησαν διαφόρων ειδών στρατηγικές στην προσπάθειά τους να μοντελοποιήσουν πτυχές του προβλήματος. Όλες οι ομάδες ξεκίνησαν δίνοντας μία γενική περιγραφή του τροχού, όπως αυτός απεικονίζονταν στις φωτογραφίες. Στη συνέχεια αναζήτησαν τις υποθέσεις ώστε να υπολογίσουν τα γεωμετρικά στοιχεία του τροχού και να μελετήσουν την κίνησή του. Και οι έντεκα ομάδες αναζήτησαν τον τρόπο ώστε να καθορίσουν κλίμακα μέσω της οποίας θα υπολόγιζαν την ακτίνα ή το ύψος του τροχού. Αφού την καθόρισαν, οι δέκα από αυτές για την εκτίμηση της ακτίνας και του ύψους χρησιμοποίησαν γνωστές μαθηματικές διαδικασίες (χρήση απλής μεθόδου των τριών, ανάλογων ποσών και αναγωγή στη μονάδα). Στη συνέχεια υπολόγισαν την περίμετρο και την επιφάνεια του τροχού χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους μαθηματικούς τύπους. Μία ομάδα χρησιμοποίησε τον καθαρά εμπειρικό τρόπο της σύγκρισης τόσο για τον καθορισμό του ύψους του τροχού όσο και της περιφέρειάς του. Ανεξάρτητα του τρόπου υπολογισμού του ύψους οι δέκα ομάδες των μαθητών ανέπτυξαν μεταγνωστικής φύσης στρατηγικές (Schoenfeld, 1992) μιας και πάντα αξιολογούσαν τα ευρήματά τους σε σχέση με την πραγματικότητα. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση των μαθητών της ομάδας 2 που ενώ αρχικά υπολόγισαν το ύψος του τροχού 22m, το απέρριψαν. Κάνοντας επανέλεγχο το βρήκαν 44m, ύψος που και πάλι δεν τους ικανοποιούσε. Τελικά αναθεωρώντας το μοντέλο τους το βρήκαν 63m με το πραγματικό ύψος του τροχού να είναι 64,75m.

Αφού οι ομάδες των μαθητών καθόρισαν τα γεωμετρικά στοιχεία του τροχού συνέχισαν μελετώντας την κίνησή του. Συγκεκριμένα, οκτώ ομάδες μαθητών υπολόγισαν την περίοδο του τροχού χρησιμοποιώντας σημείο αναφοράς και χρονομετρώντας την μετατόπιση διαδοχικών βαγονιών. Επιπλέον, οι δύο από αυτές τις ομάδες συνέδεσαν την κίνηση του βαγονιού με την κίνηση σημείου στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Τη δεύτερη διδακτική ώρα όλες οι ομάδες παρουσίασαν τα αποτελέσματά τους στους συμμαθητές τους στην τάξη. Η συμμετοχή των μαθητών στη συζήτηση ήταν καθολική. Πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ την πρώτη διδακτική ώρα μόνο δύο ομάδες

είχαν κάνει τη σύνδεση μεταξύ τριγωνομετρικού κύκλου και τροχού, μετά τη λήξη της συζήτησης άλλες οκτώ ομάδες είχαν αντιληφθεί και κατανοήσει το πώς η κίνηση του τροχού μοντελοποιείται μέσω του τριγωνομετρικού κύκλου, κάτι που έγινε απολύτως αντιληπτό στη συνέχεια της παρέμβασης, την τρίτη διδακτική ώρα.

Την τελευταία ώρα της παρέμβασης οι μαθητές ασχολήθηκαν αποκλειστικά με τη μελέτη της κίνησης του τροχού και της θέσης ενός βαγονιού του σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Και οι έντεκα ομάδες σχεδίασαν τον τριγωνομετρικό κύκλο είτε πάνω στις φωτογραφίες, είτε στο χαρτί. Από αυτές οι δέκα έκαναν αναγωγή της γωνίας στον πρώτο κύκλο και έτσι προέβλεψαν το ύψος του βαγονιού συγκεκριμένες χρονικές στιγμές με τη χρήση ημιτόνου. Με το δεδομένο ότι οι μαθητές είχαν διδαχθεί τον τριγωνομετρικό κύκλο μία εβδομάδα νωρίτερα ο εκπαιδευτικός μπόρεσε να αξιολογήσει τί είχαν μάθει οι μαθητές και πόσο καλά είχαν εμπεδώσει ό,τι έμαθαν (Kwon, Park & Park, 2006).

Ενώ οι μαθητές Γυμνασίου δεν έχουν εμπειρία στη σχεδίαση γραφικών παραστάσεων, παρά ταύτα επτά ομάδες κατάφεραν, αν και όχι απολύτως σωστά, να αποτυπώσουν την μεταβολή του ύψους του βαγονιού συναρτήσει του χρόνου. Οι έξι αξιοποίησαν μόνο τις ακραίες τιμές (μέγιστο – ελάχιστο ύψος βαγονιού) ενώ μία αξιοποίησε και ενδιάμεσες τιμές, ζεύγη τιμών ύψους – χρόνου που είχε βρει νωρίτερα κατά τη διάρκεια της μελέτης της κίνησης του τροχού.

Δέκα ομάδες έχοντας κατανοήσει, μετά από εισήγηση συμμαθητών τους, τη σύνδεση της κίνησης του βαγονιού με κινούμενο σημείο σε τριγωνομετρικό κύκλο, όρισαν πρώτα με δικό τους τρόπο τη γωνιακή ταχύτητα σε μοίρες ανά λεπτό και στη συνέχεια την περιοδικότητα του ημιτόνου κάθε 360^0 ($\eta\mu 600^0 = \eta\mu 240^0$, $\eta\mu 960^0 = \eta\mu 240^0$, ...). Επτά ομάδες παρατήρησαν ότι τις χρονικές στιγμές που διαφέρουν χρονικά όσο μια περίοδος, το βαγόνι βρίσκεται στην ίδια θέση. Έτσι διαπίστωσαν ότι αρκούσε να χρησιμοποιήσουν το ημίτονο για να υπολογίσουν το ύψος στις διάφορες χρονικές στιγμές μόνο κατά τη διάρκεια της πρώτης περιστροφής ενώ στις υπόλοιπες θα μπορούσαν να προβλέψουν τη θέση μέσω της περιόδου. Ταυτόχρονα οι ίδιες ομάδες αναπαράστησαν γραφικά με τέτοιο τρόπο το ύψος του βαγονιού σε συνάρτηση με το χρόνο ώστε να γίνεται κατανοητή η περιοδικότητα της κίνησης. Ουσιαστικά επικεντρώθηκαν στη σχεδίαση της γραφικής παράστασης κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου και μετά την επαναλάμβαναν.

Τα στάδια μοντελοποίησης

Τα στάδια μοντελοποίησης που ακολούθησαν οι ομάδες προσεγγίζουν τον κύκλο μοντελοποίησης που παρουσιάζεται στο GAIMME (2016). Οι μαθητές στην πλειονοψηφία τους ολοκλήρωσαν δύο κύκλους μοντελοποίησης, έναν κατά τη μελέτη των γεωμετρικών στοιχείων του τροχού και έναν κατά τη μελέτη της κίνησής του. Προσδιόριζαν το πρόβλημα, δημιουργούσαν τις υποθέσεις, έλυναν το πρόβλημα που οι ίδιοι είχαν διατυπώσει, αξιολογούσαν τη λύση με βάση την πραγματικότητα, βελτίωναν και επέκτειναν το μοντέλο όποτε το θεωρούσαν απαραίτητο και ανακοίνωναν τα αποτελέσματα αν η λύση και το μοντέλο τους ικανοποιούσε.

Οι στρατηγικές των μαθητών

Διαπιστώσαμε ότι κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης παρέμβασης οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά στην επίλυση του προβλήματος κάνοντας εικασίες και χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές τους γνώσεις με αποτέλεσμα να αναπτύξουν διαφορετικές στρατηγικές στις διάφορες φάσεις της μοντελοποίησης του προβλήματος. Οι στρατηγικές αυτές στη φάση της επεξεργασίας είχαν διερευνητικό χαρακτήρα (γενική περιγραφή του τροχού, καταγραφή εργαλείων και πηγών, αναζήτηση κλίμακας και σημείου αναφοράς) στη φάση της μαθηματοποίησης είχαν γνωστικό χαρακτήρα (χρήση αναλόγων ποσών και τριγωνομετρίας) και στη φάση αξιολόγησης και επέκτασης έχουν μεταγνωστικό χαρακτήρα (αναγωγή γωνίας από 0° έως 360° , πρόβλεψη θέσης βαγονιού μέσω της περιόδου, γραφική αναπαράσταση της περιοδικής κίνησης) (Schoefeld, 1992). Ακόμα και οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά βρήκαν έδαφος ώστε να αναπτύξουν την ευρηματικότητά τους και να βρουν ένα τρόπο να απαντήσουν (Silver, 1997).

Η επανεφεύρεση στοιχείων της έννοιας της περιοδικότητας

Παρόλο που οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί την έννοια της περιοδικότητας στα μαθηματικά, επτά ομάδες από τις έντεκα προσέγγισαν τέσσερις πτυχές της: α) Υπολόγισαν το χρόνο μιας πλήρους περιστροφής του τροχού ήτοι την περίοδο της κίνησης του τροχού, β) διαπίστωσαν την περιοδική συμπεριφορά του ημιτόνου γωνίας μεγαλύτερης των 360° , γ) χρησιμοποίησαν την περίοδο ως εργαλείο πρόβλεψης (Buendia & Cordero, 2005) και δ) αναπαρέστησαν γραφικά μία περιοδικά επαναλαμβανόμενη κίνηση.

Το ρεαλιστικό περιεχόμενο του προβλήματος ευνόησε την ενεργή συμμετοχή και εμπλοκή των μαθητών. Όπως έχει αναδείξει και η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών όταν οι μαθηματικές έννοιες συνδέονται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο, προσφέρουν στους μαθητές πλούσιες ευκαιρίες μάθησης και ενθαρρύνουν τη χρήση ποικίλων μέσων περιγραφής τους και ανάπτυξης γενικεύσεων (Mousoulides et al. 2010).

Επιπλέον, η ασάφεια στην διατύπωσή του προβλήματος όχι μόνο δεν περιόρισε τους μαθητές αλλά τους ενθάρρυνε στο να κάνουν υποθέσεις και να αναπτύξουν μαθηματικές στρατηγικές, (Becker & Shimada, 1997) και να ‘επανεφεύρουν’ στοιχεία της έννοιας της περιοδικότητας σύμφωνα με την οπτική του Freudenthal (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

Στοιχεία του προβλήματος και της οργάνωσης της τάξης που ευνόησαν στην επίλυσή του

Η ανοικτή φύση του προβλήματος έδωσε τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να αναπτύξουν ένα μεγάλο εύρος στρατηγικών αλλά και ειδικά σε μια ομάδα μαθητών με ελλιπή μαθηματική γνώση να απαντήσουν με τον δικό τους τρόπο βασισμένο στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους (Sawada, 1997). Συγκεκριμένα, οι μαθητές της ομάδας 5, που αποτελείτο από μαθητές με ελλιπή μαθηματική γνώση («αδύνατους» στα μαθηματικά) υπολόγισαν με μεγάλη ακρίβεια το ύψος του τροχού με διαδικασίες σύγκρισης μεγεθών αλλά όχι με τη χρήση κλίμακας όπως οι άλλες ομάδες.

Επιπλέον η χρήση του βίντεο ως εργαλείου μελέτης της κίνησης φάνηκε ότι αύξησε το ενδιαφέρον των μαθητών για τη διερεύνησή της λόγω της δυνατότητας που είχαν να παρακολουθούν την κίνηση είτε σε πραγματικό χρόνο, είτε καρέ-καρέ ενώ ταυτόχρονα γνώριζαν σε πιο στιγμιότυπο της κίνησης βρίσκονταν κάθε χρονική στιγμή. Έτσι μπορούσαν να σταματήσουν σε κάποιο στιγμιότυπο και ύστερα να συνεχίσουν την εξέλιξη του σε επόμενα ή προηγούμενα στιγμιότυπα. (Zollman & Fuller, 1994).

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές ανέπτυξαν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα (Boaler, 2002) δεδομένου ότι ενεπλάκησαν στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων της κίνησης του τροχού, ανέδειξαν κανόνες γενίκευσης που αφορούν την έννοια της

περιοδικότητας, ανέπτυξαν μαθηματικούς συλλογισμούς κατά τη διάρκεια της μαθηματοποίησης του προβλήματος και αναστοχάστηκαν πάνω στις δράσεις τους.

Τέλος, η οργάνωση της τάξης σε ομάδες ευνόησε την ανάπτυξη της πλούσιας μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών (Slavit & Nelson, 2014). Οι μαθητές συνεργάστηκαν, χωρίς την παρέμβαση του εκπαιδευτικού σε ένα μεγάλο μέρος της δραστηριότητας, ανέπτυξαν στρατηγικές, έκαναν δοκιμές και επαληθεύσεις, έθεσαν και αξιολόγησαν εικασίες, στοχάστηκαν και πήραν αποφάσεις, αξιοποίησαν τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους και προσέγγισαν, νέες γι' αυτούς, μαθηματικές έννοιες.

Η συνεισφορά της έρευνας σε παιδαγωγικό επίπεδο

Η παρούσα εργασία συμβάλλει σε παιδαγωγικό επίπεδο αφού γνωστοποιεί ότι μαθητές της τρίτης Γυμνασίου είναι σε θέση α) να περιγράψουν μία περιοδική κίνηση με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών, β) να αντιληφθούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών μεγαλύτερων των 360^0 και την περιοδικότητά τους και γενικότερα γ) να μελετήσουν την περιοδικότητα κινήσεων που επαναλαμβάνονται αναλλοίωτες σε σταθερά χρονικά διαστήματα. Αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια μαθηματικών έργων όπως ανοικτά προβλήματα μοντελοποίησης και τη χρήση διδακτικών εργαλείων όπως το βίντεο.

Περιορισμοί της έρευνας

Ένας περιορισμός της παρούσας έρευνας είναι το μέγεθος του δείγματός της. Η παρέμβαση έγινε στους 45 μαθητές δύο τμημάτων της Γ' Γυμνασίου τα οποία είχαν τον ίδιο εκπαιδευτικό ως διδάσκοντα στα Μαθηματικά. Παρόλο που ήταν δύο τμήματα μέσης επίδοσης ενός τυπικού δημόσιου Γυμνασίου ο αριθμός των μαθητών είναι μικρός. Η εφαρμογή της παρέμβασης σε περισσότερους μαθητές Γ' Γυμνασίου και από περισσότερους εκπαιδευτικούς θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια πληρέστερη γνώση της δυνατότητας να αντιληφθούν αλλά και του τρόπου που αντιλαμβάνονται οι μαθητές αυτής της ηλικίας την περιοδικότητα στην τριγωνομετρία και στη φυσική μέσω ανοικτών προβλημάτων.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων και την καταγραφή των συμπερασμάτων της παρούσας εργασίας προκύπτουν οι παρακάτω προτάσεις για τη διεξαγωγή μελλοντικής έρευνας:

Πραγματοποίηση της έρευνας, με τη χρήση του ίδιου εκπαιδευτικού υλικού και αξιολόγηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων τόσο μετά τη διδακτική παρέμβαση όσο και τρεις ή και περισσότερους μήνες μετά τη διδακτική παρέμβαση, ώστε να διερευνηθεί αν τα μαθησιακά αποτελέσματα παραμένουν αμετάβλητα σε βάθος χρόνου.

Υλοποίηση του εκπαιδευτικού υλικού που συγκροτήθηκε σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών αντίστοιχης ηλικίας και σε άλλα Γυμνάσια από διαφορετικές περιοχές της Ελλάδας, ώστε να διερευνηθεί αν τα μαθησιακά αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν.

Υλοποίηση έρευνας με τη χρήση αντίστοιχου εκπαιδευτικού υλικού και αξιολόγηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας της περιοδικότητας σε μαθητές Λυκείου.

Βιβλιογραφία

- Baldi, S., Jin, Y., Skemer, M., Green, P., Herget, D., & Xie, H. (2007). *Highlights from PISA 2006: Performance of US 15-year old students in science and mathematics literacy in an international context*. National Center for Education Statistics: US DOE.
- Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.) (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Berry, J., and Davies, A. (1996). Written reports. In C.R. Haines, and S. Dunthorne (Eds.), *Mathematics Learning and Assessment: Sharing Innovative Practices* (pp. 3.3–3.11). London: Arnold.
- Blomhøj, M., and Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modeling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22, 123–139.
- Blomhøj, M., and Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modeling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, and M. Niss (Eds.), *Applications and Modeling in Mathematics Education: The 14th IMCI Study* (pp. 45–56). New York: Springer.
- Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching – a review of arguments and instructional aspects. M. Niss, W. Blum, & I. Huntley (Edt.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (s.10-29). New York: Ellis Horwood.
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.
- Blum, W., and Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, and S. Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.
- Boaler, J. (2002) *Experiencing School Mathematics* (Revised and expanded edition). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Borromeo Ferri, R. (2007). Modeling problems from a cognitive perspective. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, and S. Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 260–270). Chichester: Horwood Publishing.
- Buendía, G., Cordero, F., 2005, Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study, *Educational Studies in Mathematics* 58, 299-333
- Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics counts: Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools*. London: HMSO.
- Crouch, R., and Haines, C. (2004). Mathematical modelling: Transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, 35, 197–206.
- De Corte, E., Greer, B., Verschaffel, L. (2000). *Making Sense of Word Problems*, CRC Press
- DeVries, R., & Kohlberg, L. (1987). *Constructivist early education: Overview and comparison with other programs*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.
- Donovan, S., & Bransford, J. (2005). *How students learn: Mathematics in the classroom*. Washington, DC: National Research Council
- Edwards, D., & Mercer, N. (1987). *Common Knowledge: The Development of Understanding in the Classroom*. London: Methuen.
- English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modelling perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 225–248.
- English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 303–323.
- English, L., Watters, J. (2004). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, 16, 59–80.
- Freedman, R. (1994). *Open-ended questioning: A handbook for educators*. Don Mills, OH: Addison-Wesley.
- Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education. *The 14th ICMI study* (pp. 219-224). New York: Springer.
- Galbraith, P., Stillman, G. and Jill Brown, J. (2010). Turning Ideas into Modeling Problems. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, and A. Hurford (Eds.) *Modeling*

- Students' Mathematical Modeling Competencies* (ICTMA 13) (pp.133-144). New York: Springer.
- Greenman, J. V. (1973). Optimization as a Model-Building Theme, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 4:3, 321-328
- Greer, B., & Verschaffel, L. (2007). *Modelling competencies - overview*. In W. Blum, P. L.
- Hancock, D. R., Bray M., & Nason, S. A. (2003). Influencing university students' achievement and motivation in a technology course. *The Journal of Educational Research*, 95,(6).
- Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1992). *Positive interdependence: Key to effective cooperation*. In Hertz-Lazarowitz, R., & Miller, N. (Eds.),
- Kaiser, G., and Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom: Problems and opportunities. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn and M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI study* (pp. 99–108). New York: Springer.
- Kaiser, G., and Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, 3, 302–312.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). *Problem solving: A handbook for Elementary School Teachers*. Boston: Allyn and Bacon.
- Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7, 51–61.
- Kynigos C., & Gavrilis, K. (2006). Constructing A Sinusoidal Periodic Covariation. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 9-16. Prague: PME.
- Lesh, R., and Doerr, H. M. (2003). Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, *Learning and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of sixth conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 776–785). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

- London, R. (1993). *A curriculum of nonroutine problems*. Paper represented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA, April. (ERIC Document Reproduction Service No. ED359213)
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142
- Mayer, R. E. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 123-139.
- McClain, K. (2002). Teacher's and students' understanding: The role of tool use in communication. *Journal of the Learning Sciences*, 11(2/3), 217–249.
- Mousoulides, N., Pittalis, M., Christou, C., & Sriraman, B. (2010). Tracing students' modeling processes in school. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp.119-129). New York: Springer.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- National Council of Teachers of Mathematics (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: Author.
- Niss, M. (2010). Modeling a Crucial Aspect of Students' Mathematical Modeling. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, and A. Hurford (Eds.) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (ICTMA 13) (pp.43-60). New York: Springer.
- Nohda, N. (1995). Teaching and evaluating using “open-ended problems” in classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 27(2), 57-61.
- Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. *Proceeding of the 24th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, Hiroshima, Japan, July 23-27, volume 1-39-53.
- Pannekoek, A., 1961, *A history of astronomy*. New York: Dover.
- Pehkonen, E. (1995). Using open-ended problem in mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 27(2), 67-71.

- Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem". In: Pehkonen, E. (ed.) *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, 7–11. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 176.
- Pierce, R. & Stacey, K. (2009) Lesson study with a twist: researching lesson design by studying classroom implementation. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.) *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Greece: PME.
- Pólya, G. (1945; 2nd edition, 1957). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Combined ed.). New York: Wiley.
- Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. In J. Becker, & S. Shimada (Eds.), *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. (p. 23-35). National Council of Teachers of Mathematics.
- Schiefele, U., & Csikszentmihalyi, M. (1995). Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 163-181.
- Schmidt, B. (2012). *Modelling in mathematics classrooms. Motives and obstacles from the teachers' perspective*. Hildesheim: Franzbecker.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Schoenfeld, A.H. (1982). Expert and Novice Mathematical Problem Solving. Final Project Report and Appendices B-H.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Shama, G.: 1998, Understanding periodicity as a process with a gestalt structure, *Educational Studies in Mathematics* 35, 255–281.
- Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 27(2), 68-74.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich mathematical problem solving and problem posing. *International Reviews on Mathematical Education*, 29(3), 75–80.

- Silver, E.A. & Mamona, J. 1989. Problem posing by middle school mathematics teachers. In: *Proceedings of PMENA 11 Conference* (eds. C.A. Maher, G.A. Goldin & R.B. Davis). Volume 1, 263-269. New Brunswick (NJ): Rutgers University.
- Slavit, D., & Nelson, T. H. (2010). Collaborative teacher inquiry as a tool for building theory on the development and use of rich mathematical tasks. *Journal of mathematics teacher education*, 13(3), 201-221.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.
- Thompson, A. G., & Thompson, P. W. (1989). Affect and problem solving in an elementary school mathematics classroom. In D. B. McLeod & V. A. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 162-176). New York: Springer-Verlag
- Triantafillou, C., Spiliotopoulou, V. & Potari, D. (2014). How undergraduate students make sense out of graphs: the case of periodic motions. 2014. In Nicol, C., Oesterle, S., Liljedahl, P., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 5, pp. 273-280. Vancouver, Canada.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.
- Van Dormolen, J. & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 1-106.
- Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment with Fifth Graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1 (3), 195-229.
- Voskoglou, M. (2007) A stochastic model for the modeling process. In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 149–157). Chichester: Horwood Publishing.
- Whitehead, AN. ,1983, La matemática como elemento en la historia del pensamiento, in *Sigma. El mundo de las matemáticas*, España: Editorial Grijalbo, Tomo 1,pp. 325-338
- Williams, D. 1989. Assessment of open-ended work in the secondary school. In: *Evaluation and Assessment in Mathematics Education* (ed. D. F. Robitaille), 135-140. Science and Technology Education. Document Series 32. Paris: Unesco.

- Wu, H. (1994). The role of open-ended problems in mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13, 115–128.
- Zollman, D. & Fuller, R. (1994), Teaching and learning physics with interactive video, *Physics Today* 64, 114-119
- Κόσυβας, Γ. (1996). Προσεγγίσεις της έννοιας και του ρόλου του ανοιχτού προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ'*, 43, 11-34, Αθήνα: ΕΜΕ.
- Παναγάκος, Ι. (2001). Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και κοινωνικοσυναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τ.6, ανακτήθηκε από: <http://blogs.sch.gr/gmamakis/files/2015/01/i-panagakos.pdf>.
- Παρασχίδης Κ. (2008), Τα ανοιχτά προβλήματα στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Ε' τάξης του Δημοτικού σχολείου – Μια πρώτη ερευνητική απόπειρα. *Πρακτικά 7ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, 145-156
- Πατρώνης, Τ. (1988). *Προς μια ανοιχτή διαδικασία επίλυσης προβλημάτων*, Διάσταση, τ.2, Θεσσαλονίκη 1988.