Γεωργίου Μιχάλης

Μία εισαγωγή στις Τριγωνισμένες Κατηγορίες και το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του **Brown**

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "vu"] \arrow[dr, "u"] & & Z \arrow[rr, bend left, "l"] \arrow[dr, "m"] & & X' \arrow[rr, bend left, dashed, "h"] \arrow[dr, "i"] & & \Sigma Z' \\
& Y \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "j"] & & Y' \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[dr, "n"] & & \Sigma Y \arrow[ur, "\Sigma j"] & \\
& & Z' \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, bend right, "k"] & & \Sigma X \arrow[ur, "\Sigma u"] & &
\end{tikzcd}
$$

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα 05 Ιουνίου, 2020

Εισηγητής : Ιωάννης Εμμανουήλ

Επιτροπή : Ιωάννης Εμμανουήλ, Μιχάλης Μαλιάκας, Ιωάννης Ντόκας

Αφιερώνεται στην γιαγιά μου Ανδριάνα.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή **6**

1 Τριγωνισμένες Κατηγορίες **13**
1.1 Προ−τριγωνισμένες κατηγορίες 13
1.2 Συνέπειες του τριγωνισμένου 5 Λήμματος 20
1.3 Τριγωνισμένες κατηγορίες 29
1.4 Το Οκταεδρικό Αξίωμα ή το αξίωμα του Verdier 35
1.5 Τριγωνισμένες υποκατηγορίες 45
1.6 Τα αξιώματα [TR5] και [TR5*], και τα ομοτοπικά συνόρια και όρια 48

2 Τοπικοποίηση Verdier **57**
2.1 Τοπικοποίηση Verdier, και οι πυκνές (épaisse) υποκατηγορίες 57
2.2 Τα πηλίκα Verdier δεν έχουν εν γένει μικρά Hom−σύνολα 97

3 Τέλειες κλάσεις **99**
3.1 Πληθάριθμοι 99
3.2 Παραγόμενες υποκατηγορίες 99
3.3 Τέλειες κλάσεις 107

4 Τοπικοποίηση Thomason **120**
4.1 Μικρά αντικείμενα 120
4.2 Συμπαγή αντικείμενα 126
4.3 Παραγοντοποίηση απεικονίσεων μέσω της υποκατηγορίας $\langle S\rangle^{\beta}$ 129
4.4 Απεικονίσεις στο πηλίκο Verdier 134

5 Αβελιανοποίηση Verdier **149**
5.1 Η αβελιανοποίηση $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$ 149
5.2 Υποαντικείμενα και αντικείμενα πηλίκο της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$ 173
5.3 Συναρτητικότητα της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$ 177

6 Η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ **191**
6.1 Η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ ικανοποιεί τα αξιώματα [AB3] και [AB3*] 191
6.2 Η περίπτωση της υποκατηγορίας $\mathcal{S}=\mathcal{T}^{\alpha}$ 229
6.3 Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα 239
6.4 Η κατηγορία $\mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op},\mathcal{A}b\Big)$ είναι ένα καθολικό πηλίκο Gabriel της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ της $\mathcal{T}$ 243

7 Αναπαραστασιμότητα Brown **249**
7.1 Συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες 249
7.2 Αναπαραστασιμότητα Brown 250
7.3 Το Πρώτο Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας 260
7.4 Συνέπειες της Αναπαραστασιμότητας Brown 274
7.5 Συνέπειες της ύπαρξης αρκετών ενέσιμων αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op},\mathcal{A}b\Big)$, και ο φορμαλισμός των phantom απεικονίσεων 284
7.6 Το Δεύτερο Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας 299
7.7 Συνέπειες της δυϊκής Αναπαραστασιμότητας Brown 314

Βιβλιογραφία **316**

Εισαγωγή

Οι τριγωνισμένες κατηγορίες εισήχθησαν στις αρχές της δεκαετίας του 60 από τον J.L. Verdier στην διδακτορική του διατριβή [Ver96] υπό την επίβλεψη του A. Grothendieck , προκειμένου να κατανοήσει την δομή της παραγόμενης κατηγορίας μιας αβελιανής κατηγορίας.

Συγκεκριμένα, έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία. Έστω $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ η κατηγορία των αλυσωτών συμπλόκων στην $\mathcal{A}$. Η $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ έχει για αντικείμενα τα αλυσωτά σύμπλοκα και μορφισμούς τους μορφισμούς αλυσωτών συμπλόκων, Επίσης, έστω $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ η ομοτοπική κατηγορία της $\mathbf{C}(\mathcal{A})$. Η $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ έχει για αντικείμενα της τα αντικείμενα της $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, δηλαδή τα αλυσωτά σύμπλοκα και μορφισμούς τις κλάσεις ισοδυναμίας των μορφισμών στην $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ ως την σχέση ισοδυναμίας που επάγεται από την αλυσωτή ομοτοπία. Τέλος, θεωρούμε την παραγόμενη κατηγορία $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$. Δηλαδή, η $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ είναι η τοπικοποίηση της $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ ως προς την κλάση των σχεδόν−ισομορφισμών της $\mathbf{C}(\mathcal{A})$. Ένας μορφισμός στην $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, δηλαδή ένας μορφισμός συμπλόκων καλείται σχεδόν−ισομορφισμός εάν οι επαγόμενες απεικονίσεις στις ομάδες ομολογίας (αντίστοιχα συνομολογίας) είναι ισομορφισμοί. Τότε, υφίσταται η παρακάτω σύνθεση συναρτητών

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{αβελιανή}} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{C}(\mathcal{A})}_{\text{αβελιανή}} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{K}(\mathcal{A})}_{\text{προσθετική}} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{D}(\mathcal{A})}_{\text{προσθετική}}$$

Συνεπώς, εάν η $\mathcal{A}$ είναι μια αβελιανή κατηγορία, τότε η κατηγορία $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ είναι πάντα αβελιανή, ενώ οι κατηγορίες είναι $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ και $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ είναι εν γένει προσθετικές. Υπάρχει κάποια πρόσθετη δομή στην $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, και κάτ΄ επέκταση στην $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ που συμπληρώνει την απολεσθείσα αβελιανή δομή της $\mathbf{C}(\mathcal{A})$. Η αξιωματικοποίηση αυτής της δομής οδήγησε στην ορισμό της τριγωνισμένης κατηγορίας. Χονδρικά μιλώντας, σ΄ αυτή την νεα κατηγορία θα πρέπει να σκεφτόμαστε τα διακεκριμένα τρίγωνα ως την κατάλληλη έννοια η οποία υποκαθιστά αυτή των βραχέων ακριβών ακολουθιών (οι οποίες δεν υπάρχουν γενικά, αφού η $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ δεν είναι αβελιανή). Η συνοπτική κατασκευή που μόλις παρουσιάσαμε, βρίσκεται αναλυτικά με όλες τις λεπτομέρειες στο άρθρο [HJR10].

Σχεδόν συγχρόνως και ανεξάρτητα οι τριγωνισμένες κατηγορίες εισήχθησαν επίσης, από τους A. Dold και D. Puppe στα πλαίσια της αξιωματικής θεμελίωσης της ευσταθούς θεωρίας ομοτοπίας (stable homotopy theory), στο άρθρο τους [DP61]. Η αξιωματική περιγραφή των Dold−Puppe ήταν αυτή των προ−τριγωνισμένων κατηγοριών. Η αξιωματική προσέγγιση του Verdier , ήταν αυτή των τριγωνισμένων κατηγοριών, δηλαδή η σημαντική συνεισφορά του Verdier ήταν η προσθήκη του αξιώματος [TR4] (Πρόταση 1.4.6), το οποίο προς τιμήν του αναφέρεται, και ως αξίωμα του Verdier.

Έλκοντας την προέλευσή τους από την αλγεβρική γεωμετρία και την αλγεβρική τοπολογία, οι τριγωνισμένες κατηγορίες έχουν πλέον καταστεί απαραίτητες σε πολλές διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών. Η ακόλουθη σχηματική παράσταση είναι ενδεικτική και βρίσκεται στο άρθρο [Sos12]

$$\begin{tikzcd}
 & & (\ \textit{tensor}\ )\ \textit{tr. cat.} & & \\
\textit{alg. geom} \arrow[urr] & \textit{repr. th.} \arrow[ur] & \textit{st. hom. th} \arrow[u] & \textit{motiv. th.} \arrow[ul] & \textit{noncomm. top.} \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

Μια καλή πηγή που μπορεί κανείς να αντλήσει πληθώρα παραδειγμάτων και να λάβει μια εικόνα του εύρους των εφαρμογών των τριγωνισμένων κατηγοριών βρίσκεται στα άρθρα [BCN11] και [De16].

Παρόλα αυτά, οι τριγωνισμένες κατηγορίες δεν είναι τέλειες. Η έλλειψη ορίων, και συνορίων, η μη συναρτητικότητα των κώνων, η αδυναμία κατασκευής νέων τριγωνισμένων κατηγοριών από παλιές, κ.λπ., τις καθιστά ανεπαρκείς ώστε να εκπληρώσουν τον αρχικό τους σκοπό. Συνεπώς, με την πάροδο των δεκαετιών πολλοί μαθηματικοί έχουν αμφισβητήσει τα αξιώματα του Verdier, και έχουν προτείνει διάφορες "βελτιώσεις" ("enhancements") τους, όπως $\mathcal{A}_\infty$−categories, dg−categories, stable model categories, ∞−categories, και stable derivators. Ενώ αυτές οι θεωρίες κατορθώνουν να επιδιορθώσουν τα ελαττώματα που προαναφέραμε, πληρώνουν το τίμημα να είναι αρκετά πιο δύσκολο να εργαστεί κανείς μαζί τους, εν συγκρίσει με την πιο προσιτή θεωρία των τριγωνισμένων κατηγοριών [De16].

Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown ("για την συνομολογία"), εάν ισχύει για την $\mathcal{T}$, ισχυρίζεται ότι οι (ανταλλοίωτοι) αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{T}(-,h)$ είναι ακριβώς οι ομολογικοί συναρτητές $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ οι οποίοι διατηρούν τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$ (Ορισμός 7.2.1), και το δυϊκό του ("για την ομολογία"), εάν ισχύει για την $\mathcal{T}$ (Ορισμός 7.6.1), αυτό σημαίνει ότι το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown ("για την συνομολογία") ισχύει για την $\mathcal{T}^{op}$, ισχυρίζεται ότι οι (συναλλοίωτοι) αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{T}(h, -)$ είναι ακριβώς οι ομολογικοί συναρτητές $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ οι οποίοι διατηρούν τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν γινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, είναι ενδεχομένως η πιο χρήσιμη δομή που θα μπορούσαν να έχουν οι τριγωνισμένες κατηγορίες. Η λίστα των εφαρμογών του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας του Brown , εδώ και πολλά χρόνια, είναι τεράστια. Δεν θα επιχειρήσουμε καν μια επισκόπηση.

Υπάρχει όμως μια πτυχή του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας του Brown , και του δυϊκού του, που είναι αυτή που θα θέλαμε να υπογραμμίσουμε στην παρούσα εργασία. Είναι η δυνατότητα που μας παρέχει κατασκευής συζυγών συναρτητών.

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά $Hom-$σύνολα, και $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Υποθέτουμε ότι, για κάθε αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$, ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,), t\big) : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι αναπαραστάσιμος. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $\mathcal{G}t \in \mathcal{S}$, και ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,), t\big) \longrightarrow \mathcal{S}(-, \mathcal{G}t)$$

Δηλαδή, για κάθε αντικείμενο $s \in \mathcal{S}$, υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{F}s, t\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(s, \mathcal{G}t\big)$$

, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $f : s' \longrightarrow s$ στην $\mathcal{S}$ το παρακάτω διάγραμμα να καθίσταται μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(\mathcal{F}s, t\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mathcal{F}f,t)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\big(\mathcal{F}s', t\big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{S}\big(s, \mathcal{G}t\big) \arrow[r, "\mathcal{S}(f,\mathcal{G}t)"] & \mathcal{S}\big(s', \mathcal{G}t\big)
\end{tikzcd}$$

Έστω $\mathcal{G}$ η απεικόνιση η οποία απεικονίζει το αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ στο αντικείμενο $\mathcal{G}t \in \mathcal{S}$. Σ' αυτή την περίπτωση, υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος να επεκτείνουμε την απεικόνιση $\mathcal{G}$ από μια απεικόνιση στα αντικείμενα $t \in \mathcal{T}$ σε μια απεικόνιση στους μορφισμούς στην $\mathcal{T}$, ώστε να καταστεί ένας συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ δεξιός συζυγής του $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$, και ως εκ τούτου η φυσικότητα στα αντικείμενα $t \in \mathcal{T}$ υπονοείται. Συνεπώς, εάν ισχύει το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown για την $\mathcal{S}$, και ο συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα συγκινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$, τότε έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ (Θεώρημα 7.4.10), ο οποίος είναι επίσης τριγωνισμένος (Λήμμα 5.3.4).

Κατά δυϊκό τρόπο, υποθέτουμε ότι $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά $Hom-$σύνολα, και $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Υποθέτουμε ότι, για κάθε αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$, ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(t, \mathcal{F}(\,-\,)\big) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι αναπαραστάσιμος. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $\mathcal{G}t \in \mathcal{S}$, και ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(t, \mathcal{F}(\,-\,)\big) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G}t, -)$$

Δηλαδή, για κάθε αντικείμενο $s \in \mathcal{S}$, υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(t, \mathcal{F}s\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(\mathcal{G}t, s\big)$$

, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $f : s \longrightarrow s'$ στην $\mathcal{S}$ το παρακάτω διάγραμμα να καθίσταται μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(t, \mathcal{F}s\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(t,\mathcal{F}f)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\big(t, \mathcal{F}s'\big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{S}\big(\mathcal{G}t, s\big) \arrow[r, "\mathcal{S}(\mathcal{G}t,f)"] & \mathcal{S}\big(\mathcal{G}t, s'\big)
\end{tikzcd}$$

Έστω $\mathcal{G}$ η απεικόνιση η οποία απεικονίζει το αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ στο αντικείμενο $\mathcal{G}t \in \mathcal{S}$. Σ′ αυτή την περίπτωση, υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος να επεκτείνουμε την απεικόνιση $\mathcal{G}$ από μια απεικόνιση στα αντικείμενα $t \in \mathcal{T}$ σε μια απεικόνιση στους μορφισμούς στην $\mathcal{T}$, ώστε να καταστεί ένας συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ αριστερός συζυγής του $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$, και ως εκ τούτου η φυσικότητα στα αντικείμενα $t \in \mathcal{T}$ υπονοείται. Συνεπώς, εάν ισχύει το δυϊκό Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown για την $\mathcal{S}$, και ο συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει γινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{T}$, τότε έχει έναν αριστερό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ (Θεώρημα 7.7.2), ο οποίος είναι επίσης τριγωνισμένος (Λήμμα 5.3.4).

Αυτό μας δίνει το εναρκτήριο λακτισμα να αναζητήσουμε τριγωνισμένες κατηγορίες οι οποίες ικανοποιούν το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown , και το δυϊκό του. Υπάρχει κάποια κλάση τριγωνισμένων κατηγοριών έτσι ώστε κάθε μέλος της να ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown , και το δυϊκό του ;

Η απάντηση είναι θετική, ναι υπάρχει. Η κλάση των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών κατέχει αυτή την ιδιότητα. Μια τριγωνισμένη κατηγορία καλείται μια $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, εάν έχει μικρά $Hom-$σύνολα, ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] , δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, και περιέχει ένα $\aleph_0-$συμπαγές παράγον σύνολο αντικειμένων (Ορισμός 7.1.10). Θα αποδείξουμε ότι οι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες ικανοποιούν το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown (Πρόταση 7.4.2). Η απόδειξη είναι γνωστή για πάνω από μισό αιώνα, και επι της ουσίας είναι η κλασσική απόδειξη [Bro62] του E. H. Brown. Το γεγονός ότι οι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες ικανοποιούν το δυϊκό Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown (Θεώρημα 7.6.2) αποτελεί σημαντικό επίτευγμα, και αποδείχθηκε πρόσφατα, κάπου στα τέλη της δεκαετίας του 1990 !

Υπάρχουν αρκετά σημαντικά παραδείγματα $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, π.χ. η ευσταθής ομοτοπική κατηγορία (stable homotopy category), η ευσταθής κατηγορία προτύπων (stable module category), η παραγόμενη κατηγορία $\mathbf{D}(R)$ των (αριστερών) $R-$προτύπων, όπου ο R είναι ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με 1 κ.α. Ωστόσο, υπάρχουν πολύ σημαντικές τριγωνισμένες κατηγορίες οι οποίες ενώ δεν είναι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενες, π.χ. η παραγόμενη κατηγορία $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ μιας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$, δεν είναι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη εν γένει, αλλά ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown [Nee05] . Συνεπώς, προσεγγίζοντας συστηματικά το πρόβλημα, εγείρεται το ερώτημα, μήπως υπάρχει κάποια κατάλληλη έννοια ''$\alpha-$συμπαγών'' αντικειμένων, η οποία να γενικεύει την έννοια των $\aleph_0-$συμπαγών αντικειμένων, και κάποια κατάλληλη έννοια κλάσης ''$\alpha-$συμπαγώς'' παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών η οποία να γενικεύει την κλάση των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, για κάποιον κανονικό πληθάριθμο α, έτσι ώστε η $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ να εμπίπτει σ′ αυτήν την κλάση, και κάθε μέλος της, και συνεπώς η $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, να ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown ;

Αυτό το ερώτημα, αποτέλεσε ένα κίνητρο για τον A. Neeman να γενικεύσει κατάλληλα, για όλους τους μεγάλους κανονικούς πληθάριθμους α, την έννοια των $\aleph_0-$συμπαγών αντικειμένων, και την κλάση των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, και να ορίσει την έννοια των $\alpha-$συμπαγών αντικειμένων (Ορισμός 4.2.2), και την έννοια της κλάσης των $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών (Ορισμός 7.1.10). Μια τριγωνισμένη κατηγορία καλείται μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, εάν έχει μικρά $Hom-$σύνολα, ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] , δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, και περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο αντικειμένων. Παρόλο που, για κάθε κανονικό πληθάριθμο α, η κλάση των $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών αποτελεί την κατάλληλη γενίκευση της κλάσης των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, προκειμένου να εξασφαλιστεί μια ιδιαίτερα σημαντική έννοια κλειστότητας, την οποία θα αναλύσουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο, ο A. Neeman όρισε τελικά μια νέα κλάση τριγωνισμένων κατηγοριών, την ένωση των κλάσεων των $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, για όλους τους μεγάλους κανονικούς πληθάριθμους α, δηλαδή την κλάση η οποία απαρτίζεται από όλες τις $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες, για όλους τους μεγάλους κανονικούς πληθάριθμους α. Αυτή η νέα κλάση, είναι η κλάση των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών. Μια τριγωνισμένη κατηγορία καλείται μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, εάν είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, για κάποιον κανονικό πληθάριθμο α. Σχηματικά, για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\alpha \geq \aleph_0$, υφίστανται οι αυστηροί εγκλεισμοί

$$\left\{ \begin{array}{c} \aleph_0-\text{συμπαγ. παραγ.} \\ \text{τριγων. κατηγ.} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \alpha-\text{συμπαγ. παραγ.} \\ \text{τριγων. κατηγ.} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{καλ. παραγ.} \\ \text{τριγων. κατηγ.} \end{array} \right\}$$

Δεν θα ήταν καθόλου υπερβολή να ισχυριστούμε ότι, ο ορισμός των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών αποτελεί εν τέλει την κατάλληλη γενίκευση, για όλους τους μεγάλους κανονικούς πληθάριθμους α, του ορισμού των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, και είναι κατάλληλα προσαρμοσμένος, έτσι ώστε να μπορέσει να εφαρμοστεί η μέθοδος της απόδειξης του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας του Brown (Θεώρημα 7.3.3). Θα αποδείξουμε ότι οι καλώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες ικανοποιούν το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown (Πρόταση 7.4.2).

Υπάρχει ένα ιδιαίτερα σημαντικό γεγονός όσον αφορά την κλάση των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών. Είναι η μη κλειστότητα της κλάσεως ως προς τις τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από σύνολα αντικειμένων, και ως προς την τοπικοποίηση Verdier με τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από σύνολα αντικειμένων. Η κλάση των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών είναι κλειστή ως προς τις τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από $\aleph_0-$συμπαγή σύνολα αντικειμένων, και ως προς την τοπικοποίηση Verdier με τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από $\aleph_0-$συμπαγή σύνολα αντικειμένων. Αυτό σημαίνει ότι, οι τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από $\aleph_0-$συμπαγή σύνολα αντικειμένων, και τα πηλίκα Verdier των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών με τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από σύνολα αντικειμένων, είναι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες (Πρόταση 7.4.13). Αλλά, εάν τα σύνολα των αντικειμένων δεν είναι $\aleph_0-$συμπαγή, είναι αυθαίρετα, που είναι και η ενδιαφέρουσα περίπτωση, τότε οι τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες, και τα πηλίκα Verdier δεν είναι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες, είναι καλώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες. Αυτό το αποτέλεσμα, είναι ειδική περίπτωση της Πρότασης 7.4.8, η οποία είναι συμπέρασμα του Θεωρήματος Τοπικοποίησης των Neeman−Thomason (Θεώρημα 4.4.12), το οποίο είναι η γενίκευση, για όλους τους μεγάλους κανονικούς πληθάριθμους α, του περίφημου Θεωρήματος Τοπικοποίησης του Thomason [[TT90], Λήμμα 5.5.1, σελ. 343], σε συνδυασμό με το γεγονος ότι οι καλώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες ικανοποιούν το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας του Brown . Επίσης, από την Πρόταση 7.4.8, για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\alpha > \aleph_0$, συμπεραίνουμε ότι η κλάση των $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών είναι κλειστή ως προς τις τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από $\alpha-$συμπαγή σύνολα αντικειμένων, και ως προς την τοπικοποίηση Verdier με τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από $\alpha-$συμπαγή σύνολα αντικειμένων. Αλλά, εάν τα σύνολα των αντικειμένων δεν είναι $\alpha-$συμπαγή, είναι αυθαίρετα, τότε εκ νέου από την Πρόταση 7.4.8 έπεται ότι, οι κατηγορίες αυτές δεν είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες, είναι καλώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες. Αυτή η έννοια μη κλειστότητας, για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\alpha \geq \aleph_0$, της κλάσης των $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, αποτέλεσε ένα επιπλέον κίνητρο για τον A. Neeman για ορισμό της κλάσης των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών. Στην πραγματικότητα, από την Πρόταση 7.4.8, συμπεραίνουμε ότι η κλάση των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών είναι κλειστή ως προς τις τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από σύνολα αντικειμένων, και ως προς την τοπικοποίηση Verdier με τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από σύνολα αντικειμένων !

Υπάρχουν αρκετά ενδιαφέροντα παραδείγματα καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, που δεν είναι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες, π.χ. η ομοτοπική κατηγορία $\mathbf{K}(R\text{-Proj})$ των προβολικών (αριστερών) $R-$προτύπων, όπου ο R είναι ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με 1, η οποία είναι ειδικότερα μια $\aleph_1-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία [Nee08], η παραγόμενη κατηγορία $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ μιας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ εν γένει [Nee01a] κ.α. Μια ολόκληρη κλάση παραδειγμάτων, καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, απορρέει από το γεγονός ότι τα πηλίκα Verdier των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών με τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από αυθαίρετα σύνολα αντικειμένων, είναι καλώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες, π.χ. η παραγόμενη κατηγορία $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ υπάγεται σ' αυτή την κλάση παραδειγμάτων, ειδικότερα είναι ένα πηλίκο Verdier της παραγόμενης κατηγορίας $\mathbf{D}(R)$ ενός δακτυλίου R (ο οποίος είναι προσεταιριστικός με 1), η οποία είναι μια $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, με την τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία η οποία παράγεται από ένα σύνολο αντικειμένων $L \subset \mathbf{D}(R)$ [[Nee01a], Πρόταση 2.1, σελ. 487].

Οι καλώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες εξ ορισμού ικανοποιούν το αξίωμα [TR5]. Αυτό σημαίνει ότι είναι κλειστές ως προς τα συγκινόμενα. Μια άμεση, και καθόλου προφανής εκ των προτέρων συνέπεια του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας του Brown , είναι ότι ικανοποιούν επίσης το αξίωμα [TR5*]. Αυτό σημαίνει ότι, είναι κλειστές ως προς τα γινόμενα. Αυτό μας οδηγεί φυσιολογικά να διερωτηθούμε, οι καλώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες ικανοποιούν το δυϊκό Θεώρημα

Αναπαραστασιμότητας του Brown ;

Ο ορισμός των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών δεν είναι αυτο−δυϊκός, π.χ. η δυϊκή μιας $\aleph_0$−συμπαγούς παραγόμενης τριγωνισμένης κατηγορίας, όχι μόνο δεν είναι μια $\aleph_0$−συμπαγώς τριγωνισμένη κατηγορία, αλλά δεν είναι καν μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία [[Nee01b], Παράρτημα E, σελ. 443-447]. Ωστόσο, η μέθοδος της απόδειξης του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας του Brown (Θεώρημα 7.3.3) γενικεύεται στις δυϊκές των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών (Θεώρημα 7.6.2), αλλά δυστυχώς υπό μια ισχυρή υπόθεση, της παρουσίας αρκετών ενέσιμων αντικειμένων σε κάποιες πολύ συγκεκριμένες κατηγορίες συναρτητών τις οποίες θα μελετήσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 6.

Ευχαριστίες :

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Ιωάννη Εμμανουήλ. Θεωρώ εξαιρετική τιμή την ευκαιρία να τον γνωρίσω και να συνεργαστώ μαζί του. Τον ευχαριστώ για την πολύτιμη βοήθεια του, τις συζητήσεις μας, και την καθοδήγηση του στην ολοκλήρωση της εργασίας. Η συνεισφορά του στην διόρθωση, και στην τελική διαμόρφωση του κειμένου της εργασίας υπήρξε καθοριστική.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Μιχάλη Μαλιάκα, και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ιωάννη Ντόκα που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής για την παρούσα εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που μου συμπαραστάθηκαν, με υποστήριξαν, και με ενθάρρυναν στις δύσκολες στιγμές, συμβάλλοντας και αυτοί με το λιθαράκι τους στην αποπεράτωση αυτής της εργασίας.

Γεωργίου Μιχάλης

Αθήνα 05 Ιουνίου, 2020

1 Τριγωνισμένες Κατηγορίες

1.1 Προ−τριγωνισμένες κατηγορίες

Σε αυτή την Ενότητα θα ορίσουμε τις προ−τριγωνισμένες κατηγορίες.

Ορισμός 1.1.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία και Σ ένας προσθετικός ενδοσυναρτητής. Υποθέτω επιπλέον ότι ο ενδοσυναρτητής Σ είναι αντιστρέψιμος, συνεπώς είναι ένας αυτομορφισμός. Ένα υποψήφιο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ (ως πρός τον συναρτητή Σ) είναι ένα διάγραμμα της μορφής :*

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

ούτως ώστε οι συνθέσεις να είναι οι μηδενικοί μορφισμοί. Ένας μορφισμός μεταξύ υποψήφιων τριγώνων ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

στο οποίο κάθε γραμμή είναι ένα υποψήφιο τρίγωνο.

Ορισμός 1.1.2. *Μία προ−τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι μια προσθετική κατηγορία, μαζί με ένα προσθετικό αυτομορφισμό Σ, και μια κλάση υποψήφιων τριγώνων (ως πρός τον συναρτητή Σ) τα οποία ονομάζονται διακεκριμένα τρίγωνα. Η κλάση πληρεί τα παρακάτω αξιώματα :*

[TR0] : *Κάθε υποψήφιο τρίγωνο το οποίο είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο τρίγωνο είναι επίσης διακεκριμένο. Το υποψήφιο τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0 \xrightarrow{\quad 0 \quad} \Sigma X$$

είναι διακεκριμένο.

[TR1] : *Για κάθε μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$ υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο που τον συμπληρώνει, δηλαδή ένα διακεκριμένο τρίγωνο της μορφής*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, dashed] & Z \arrow[r, dashed] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

[TR2] : *Έστω ένα διακεκριμένο τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

Τότε τα παρακάτω υποψήφια τρίγωνα είναι επίσης διακεκριμένα

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "-v"] & Z \arrow[r, "-w"] & \Sigma X \arrow[r, dashed, "-\Sigma u"] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1} Z \arrow[r, dashed, "-\Sigma^{-1} w"] & X \arrow[r, "-u"] & Y \arrow[r, "-v"] & Z
\end{tikzcd}$$

[TR3] : Για κάθε μεταθετικό διάγραμμα της παρακάτω μορφής

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα, υπάρχει ένας μορφισμός $h : Z \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{T}$, όχι απαραίτητα μοναδικός, ο οποίος το καθιστά μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 1.1.3. Στον Ορισμό 1.1.2 κάποιες από τις προυποθέσεις είναι περιττές. Για παράδειγμα, δεν είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι τα διακεκριμένα τρίγωνα είναι υποψήφια τρίγωνα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα διακεκριμένα τρίγωνα είναι ακολουθίες της μορφής

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

χωρίς να απαιτήσουμε οι συνθέσεις $v \circ u, w \circ v$ και $\Sigma u \circ w$ να μηδενίζονται. Έπεται από τα υπόλοιπα αξιώματα ότι οι προηγούμενες συνθέσεις μηδενίζονται. Απλώς θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Η κάτω γραμμή είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο έξ υποθέσεως, ενώ η επάνω γραμμή είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο από το αξίωμα [TR0] . Αλλά από το αξίωμα [TR3] το διάγραμμα μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα μεταθετικό διάγραμμα (όχι απαραίτητα μοναδικό)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

από το οποίο εύκολα συμπεραίνουμε οτι η σύνθεση $v \circ u$ μηδενίζεται. Ο μηδενισμός των υπόλοιπων συνθέσεων έπεται χρησιμοποιώντας το προηγούμενο επιχείρημα και το αξίωμα [TR2] .

Σημείωση 1.1.4. Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Όταν θα αναφέρουμε την λέξη τρίγωνα στην $\mathcal{T}$, θα εννοούμε τα διακεκριμένα τρίγωνα. Όταν θα εννοούμε υποψηφια τρίγωνα, αυτό θα αναφέρεται ρητά.

Παρατήρηση 1.1.5. Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε η δυϊκή της $\mathcal{T}^{op}$ καθίσταται μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία, με προσθετικό αυτομορφισμό τον Σ^{-1}, και κλάση διακεκριμένων τριγώνων (ως πρός τον συναρτητή Σ^{-1}) την κλάση όλων των υποψήφιων τριγώνων της μορφής

$$Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{\Sigma^{-1}w} \Sigma^{-1}Z$$

στην $\mathcal{T}^{op}$, όπου

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{T}$.

Πρόταση 1.1.6.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε ο συναρτητής Σ διατηρεί τα συγκινόμενα. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ είναι ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$, και υποθέτουμε ότι το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Τότε η φυσική απεικόνιση*

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma X_\lambda \longrightarrow \Sigma\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Με άλλα λόγια, οι φυσικές απεικονίσεις $\Sigma X_\lambda \longrightarrow \Sigma\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}$ εφοδιάζουν το αντικείμενο $\Sigma\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}$ με την δομη ενός συγκινομένου στην κατηγορια $\mathcal{T}$, όπου η απεικόνιση $X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινομένο, για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

Απόδειξη. Το ουσιαστικό σημείο της απόδειξης είναι ότι ο συναρτητής Σ είναι αντιστρέψιμος, άρα επιδέχεται έναν δεξιά συζυγή (ο οποίος είναι και αριστερά συζυγής), και ταυτίζεται με τον αντίστροφο του Σ^{-1}. Δηλαδή, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma X, Y) \;\simeq\; \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(X, \Sigma^{-1}Y)$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{T}$. Ένας συναρτητής που επιδέχεται έναν δεξιά συζυγή συναρτητή διατηρεί τα συνόρια, και επομένως διατηρεί τα συγκινόμενα. Συνεπώς, ο συναρτητής Σ διατηρεί τα συγκινόμενα.

□

Πρόταση 1.1.6.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε ο συναρτητής Σ διατηρεί τα γινόμενα. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ είναι ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$, και υποθέτουμε ότι το γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Τότε η φυσική απεικόνιση*

$$\Sigma\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma X_\lambda$$

είναι ένας ισομορφισμός. Με άλλα λόγια, οι φυσικές απεικονίσεις $\Sigma\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\} \longrightarrow \Sigma X_\lambda$ εφοδιάζουν το αντικείμενο $\Sigma\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}$ με την δομη ενός γινομένου στην κατηγορια $\mathcal{T}$, όπου η απεικόνιση $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ είναι η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.1.6.1.

□

Ορισμός 1.1.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ ένας συναρτητής, όπου $\mathcal{A}$ είναι μια αβελιανή κατηγορία. Ο συναρτητής $\mathcal{H}$ καλείται ομολογικός εάν για κάθε (διακεκριμένο) τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

η ακολουθία

$$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(u)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(v)} \mathcal{H}(Z)$$

είναι ακριβής στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.1.8. Εξ αιτίας του αξιώματος [TR2] , το (διακεκριμένο) τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

μπορεί να επεκταθεί άπειρα και προς τις δύο διευθύνσεις

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^{-1}Z \xrightarrow{\Sigma^{-1}w} X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X \longrightarrow \cdots$$

Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία

$$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(u)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(v)} \mathcal{H}(Z)$$

μπορεί να επεκταθεί άπειρα και προς τις δύο διευθύνσεις. Με άλλα λόγια, η άπειρη ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^{-1}Z) \xrightarrow{\mathcal{H}(\Sigma^{-1}w)} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(u)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(v)} \mathcal{H}(Z) \xrightarrow{\mathcal{H}(w)} \mathcal{H}(\Sigma X) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής. Συνεπώς, ένας συναρτητής $\mathcal{H}$ είναι ομολογικός εάν απεικονίζει κάθε (διακεκριμένο) τρίγωνο σε μια μακρά ακριβή ακολουθία.

Παρατήρηση 1.1.9. Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Ένας ομολογικός συναρτητής στην $\mathcal{T}^{op}$ θα καλείται ένας συνομολογικός συναρτητής στην $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει, ότι ένας συνομολογικός συναρτητής είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$, έτσι ώστε για κάθε τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

η ακολουθία

$$\mathcal{H}(Z) \xrightarrow{\mathcal{H}(v)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(u)} \mathcal{H}(X)$$

να είναι ακριβής στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$.

Λήμμα 1.1.10. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία, U ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{T}$. Τότε ο αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,-)$ είναι ομολογικός.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

Πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,X) \xrightarrow{\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,u)} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,Y) \xrightarrow{\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,v)} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,Z)$$

είναι ακριβής. Γνωρίζουμε οτι η παραπάνω σύνθεση μηδενίζεται. Έστω $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,Y)$ μια απεικόνιση που απεικονίζεται στο μηδεν της $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,Z)$ μέσω του $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-,v)$. Αυτό σημαίνει, ότι σύνθεση

$$U \xrightarrow{\quad f \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z$$

μηδενιζεται. Τότε υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma U \arrow[r, "-1"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma f"] \\
Y \arrow[r, "-v"] & Z \arrow[r, "-w"] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma u"] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

Η κάτω γραμμή είναι ένα τρίγωνο από το αξίωμα [TR2] , η επάνω γραμμή είναι ένα τρίγωνο από το [TR0] και το [TR2] . Επιπλέον, από το αξίωμα [TR3] , υπάρχει απεικόνιση $h : U \longrightarrow X$ ούτως ώστε η απεικόνιση $\Sigma h : \Sigma U \longrightarrow \Sigma X$ να καθιστά το διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma U \arrow[r, "-1"] \arrow[d, dashed, "\Sigma h"'] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma f"] \\
Y \arrow[r, "-v"] & Z \arrow[r, "-w"] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma u"] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

.

Πιό συγκεκριμένα αυτό σημαίνει ότι το παρακάτω τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
\Sigma U \arrow[r, "-1"] \arrow[d, dashed, "\Sigma h"'] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma f"] \\
\Sigma X \arrow[r, "-\Sigma u"] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, και κατά συνέπεια $f = uh$. Άρα, βρήκαμε μια απεικόνιση $h \in \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,X)$ η οποία απεικονίζεται στην $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U,Y)$. Αυτό αποδεικνύει την ακρίβεια.

□

Παρατήρηση 1.1.11. Από την Παρατήρηση 1.1.5, η δυϊκή κατηγορία $\mathcal{T}^{op}$ μιας προ−τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$ είναι μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Συνεπώς, από το Λήμμα 1.1.10, για την δυϊκή κατηγορία της $\mathcal{T}$, έπεται ότι ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-,U)$ ειναι συνομολογικός.

Ορισμός 1.1.12. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ ένας ομολογικός συναρτητής. Ο συναρτητής $\mathcal{H}$ καλείται decent εάν*

1.1.12.1. *Η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB4*] . Αυτό σημαίνει ότι, ο συναρτητής*

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}(-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

είναι ακριβής, δηλαδή τα γινόμενα ακριβών ακολουθιών στην $\mathcal{A}$ είναι ακριβείς ακολουθίες.

1.1.12.2. *Ο συναρτητής $\mathcal{H}$ διατηρεί τα γινόμενα. Για κάθε συλλογή $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ αντικειμένων $X_\lambda \in \mathcal{T}$ των οποίων το γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$, η φυσική απεικόνιση*

$$\mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(X_\lambda)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Με άλλα λόγια, οι φυσικές απεικονίσεις $\mathcal{H}\big(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(X_\lambda\big)$ εφοδιάζουν το αντικείμενο $\mathcal{H}\big(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big)$ με την δομη ενός γινομένου στην αβελιανή κατηγορια $\mathcal{A}$, όπου η απεικόνιση $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ είναι η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

Παράδειγμα 1.1.13. Ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U, -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ένας decent ομολογικός συναρτητής. Είναι ομολογικός από το Λήμμα 1.1.10, η κατηγορία των $\mathcal{A}b$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB4*] , και ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U, -)$ διατηρεί τα γινόμενα.

Ορισμός 1.1.14. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα υποψήφιο τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

καλείται προ−τρίγωνο εάν, για κάθε decent ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$, η μακρά ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^{-1}Z) \overset{\mathcal{H}(\Sigma^{-1}w)}{\longrightarrow} \mathcal{H}(X) \overset{\mathcal{H}(u)}{\longrightarrow} \mathcal{H}(Y) \overset{\mathcal{H}(v)}{\longrightarrow} \mathcal{H}(Z) \overset{\mathcal{H}(w)}{\longrightarrow} \mathcal{H}(\Sigma X) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής.

Παράδειγμα 1.1.15. Από την Παρατήρηση 1.1.8, κάθε ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$, όχι αναγκαστικά decent, απεικονίζει ένα τρίγωνο σε μια μακρά ακριβή ακολουθία. Συνεπώς, κάθε τρίγωνο είναι ένα προ−τρίγωνο.

Παράδειγμα 1.1.16. Από την συνθήκη 1.1.12.2, κάθε decent ομολογικός συναρτητής διατηρεί τα γινόμενα. Συνεπώς, κάθε ευθύς προσθετέος ενός προ−τριγώνου είναι ένα προ−τρίγωνο.

Στο επόμενο Λήμμα θα αποδείξουμε ότι τυχαίο γινόμενο προ−τριγώνων είναι ένα προ−τρίγωνο.

Λήμμα 1.1.17.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω Λ ένα σύνολο δεικτών, και υποθέτουμε οτι για κάθε $\lambda \in \Lambda$ δίνεται ένα προ−τρίγωνο*

$$X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow Z_\lambda \longrightarrow \Sigma X_\lambda$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι τα τρία γινόμενα

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$$

υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Η ακολουθία

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma X_\lambda$$

ταυτίζεται, από την Πρόταση 1.1.6.2, με την ακολουθία

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \longrightarrow \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\}$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό το υποψήφιο τρίγωνο είναι ένα προ−τρίγωνο. Συνεπώς, το γινόμενο προ−τριγώνων είναι ένα προ−τρίγωνο.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ ένας decent ομολογικός συναρτητής. Επειδή, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, η ακολουθία

$$X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow Z_\lambda \longrightarrow \Sigma X_\lambda$$

είναι προ−τρίγωνο, εφαρμόζοντας τον $\mathcal{H}$ λαμβάνουμε μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^{-1}Z_\lambda) \longrightarrow \mathcal{H}(X_\lambda) \longrightarrow \mathcal{H}(Y_\lambda) \longrightarrow \mathcal{H}(Z_\lambda) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma X_\lambda) \longrightarrow \cdots$$

στην $\mathcal{A}$, και επειδή έχουμε υποθέσει οτι η κατηγορία $\mathcal{A}$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB4*] (συνθήκη 1.1.12.1), το γινόμενο αυτών των μακρά ακριβών ακολουθιών είναι μία μακρά ακριβής ακολουθία

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(X_\lambda) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(Y_\lambda) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(Z_\lambda) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(\Sigma X_\lambda)$$

Αλλά όμως έχουμε υποθέσει ότι ο $\mathcal{H}$ είναι decent , επομένως από την συνθήκη 1.1.12.2 διατηρεί τα γινόμενα, συνεπώς επάγεται ένας ισομορφισμός ακολουθιών

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\right) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda\right) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{H}\left(\Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right\}\right) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\right) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda\right) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}\Sigma X_\lambda\right) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(X_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(Y_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(Z_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(\Sigma X_\lambda)
\end{tikzcd}$$

Επειδή κάτω ακολουθία είναι ακριβής, έπεται ότι η επάνω ακολουθία είναι επίσης ακριβής. Αυτό ισχύει για κάθε decent ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H}$, συνεπώς η ακολουθία

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda \longrightarrow \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right\}$$

είναι ένα προ−τρίγωνο.

□

Λήμμα 1.1.17.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω Λ ένα σύνολο δεικτών, και υποθέτουμε οτι για κάθε $\lambda \in \Lambda$ δίνεται ένα προ−τρίγωνο*

$$X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow Z_\lambda \longrightarrow \Sigma X_\lambda$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι τα τρία συγκινόμενα

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda, \qquad \coprod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda, \qquad \coprod_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda$$

υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Η ακολουθία

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\Sigma X_\lambda$$

ταυτίζεται, από την Πρόταση 1.1.6.1, με την ακολουθία

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda \longrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right\}$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό το υποψήφιο τρίγωνο είναι ένα προ−τρίγωνο. Συνεπώς, το συγκινόμενο προ−τριγώνων είναι ένα προ−τρίγωνο.

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 1.1.17.1.

□

Λήμμα 1.1.18. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ ένας decent ομολογικός συναρτητής. Έστω ότι το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

είναι ένας μορφισμός προ−τριγώνων. Υποθέτω ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οι $\mathcal{H}(\Sigma^n f)$ και $\mathcal{H}(\Sigma^n g)$ είναι ισομορφισμοί. Τότε οι $\mathcal{H}(\Sigma^n h)$ είναι ισομορφισμοί, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, αρκεί να αποδείξουμε οτι ο $\mathcal{H}(\Sigma^0 h) = \mathcal{H}(h)$ είναι ένας ισομορφισμός. Αλλά τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(X) \arrow[r, "\mathcal{H}(u)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(f)"'] & \mathcal{H}(Y) \arrow[r, "\mathcal{H}(v)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(g)"'] & \mathcal{H}(Z) \arrow[r, "\mathcal{H}(w)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(h)"'] & \mathcal{H}(\Sigma X) \arrow[r, "\mathcal{H}(\Sigma u)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(\Sigma f)"'] & \mathcal{H}(\Sigma Y) \arrow[d, "\mathcal{H}(\Sigma g)"'] \\
\mathcal{H}(X') \arrow[r, "\mathcal{H}(u')"] & \mathcal{H}(Y') \arrow[r, "\mathcal{H}(v')"] & \mathcal{H}(Z') \arrow[r, "\mathcal{H}(w')"] & \mathcal{H}(\Sigma X') \arrow[r, "\mathcal{H}(\Sigma u')"] & \mathcal{H}(\Sigma Y')
\end{tikzcd}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα στην αβελιανή κατηγορια $\mathcal{A}$ με ακριβής γραμμές. Από το 5 Λήμμα, συμπεραίνουμε ότι ο $\mathcal{H}(h)$ είναι ένας ισομορφισμός.

□

Λήμμα 1.1.19. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ένας μορφισμός προ−τριγώνων*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε για κάθε decent ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$, ο $\mathcal{H}(h)$ είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε εφόσον Σ^n είναι ένας αυτομορφισμός για κάθε n, οι $\Sigma^n f$ και $\Sigma^n g$ είναι επίσης ισομορφισμοί για κάθε n. Συνεπώς από το Λήμμα 1.1.18 συμπεραίνουμε οτι ο $\mathcal{H}(h)$ είναι ένας ισομορφισμός.

□

Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε το ανάλογο του 5 Λήμματος, για την περίπτωση των τριγωνισμένων κατηγοριών.

Πρόταση 1.1.20. *[Τριγωνισμένο 5 Λήμμα] Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ένας μορφισμός προ−τριγώνων*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε ο h είναι επίσης ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.1.19 γνωρίζουμε ότι για κάθε decent ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο $\mathcal{H}(h)$ είναι ένας ισομορφισμός. Από το Παράδειγμα 1.1.13, ο αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U, -)$ είναι decent , για κάθε αντικείμενο $U \in \mathcal{T}$. Συνεπώς, ο μορφισμός

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U, h) : \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U, Z) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(U, Z')$$

είναι ένας ισομορφισμός, για κάθε $U \in \mathcal{T}$. Αλλά τότε η απεικόνιση

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-, h) : \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-, Z) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-, Z')$$

είναι ένας ισομορφισμός. Από το Λήμμα Yoneda έπεται ότι η $h : Z \longrightarrow Z'$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός.

$\square$

Παρατήρηση 1.1.21. Έστω οτι δίνεται ένας μορφισμός $u : X \longrightarrow Y$. Από το αξίωμα [TR1] μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα τρίγωνο. Έστω

$$X \xrightarrow{u} Y \dashrightarrow^{v} Z \dashrightarrow^{w} \Sigma X$$

και

$$X \xrightarrow{u} Y \dashrightarrow^{v'} Z' \dashrightarrow^{w'} \Sigma X$$

δύο διακεκριμένα τρίγωνα που συμπληρώνουν τον μορφισμό u. Έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1"'] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

το οποίο από το αξίωμα [TR3] μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

κάποιο μορφισμό $h : Z \longrightarrow Z'$. Επειδή οι $1 : X \longrightarrow X$ και $1 : Y \longrightarrow Y$ είναι προφανώς ισομορφισμοί, από την Πρόταση 1.1.20 έπεται ότι ο h είναι επίσης ένας ισομορφισμός. Ουσιαστικά το τρίγωνο που συμπληρώνει τον μορφισμό είναι καλά ορισμένο ως προς ισομορφισμό. Αλλά ο ισομορφισμός αυτός δεν είναι εν γένει κανονικός. Με άλλα λόγια, το τρίγωνο που συμπληρώνει τον μορφισμό είναι μοναδικό ως προς μη κανονικό ισομορφισμό.

1.2 Συνέπειες του τριγωνισμένου 5 Λήμματος

Σ' αυτή την Ενότητα θα παρουσιάσουμε κάποιες συνέπειες της Πρότασης 1.1.20, οι οποίες σχετίζονται με τα γινόμενα και τα συγκινόμενα.

Πρόταση 1.2.1.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία και Λ ένα σύνολο δεικτών. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\lambda \in \Lambda$ δίνεται ένα (διακεκριμένο) τρίγωνο*

$$X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow Z_\lambda \longrightarrow \Sigma X_\lambda$$

στην $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι τα τρία γινόμενα

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \qquad \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \qquad \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$$

υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Από το Λήμμα 1.1.17.1, γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των προ−τριγώνων

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \longrightarrow \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\}$$

είναι ένα προ−τρίγωνο. Ισχυριζόμαστε οτι αυτό είναι ένα τρίγωνο.

Απόδειξη. Από το αξίωμα [TR1] , η απεικόνιση

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \arrow[r, dashed] & Q \arrow[r, dashed] & \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\} \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, λαμβάνουμε ένα διάγραμμα στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] & \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\} \arrow[d] \\ X_\lambda \arrow[r] & Y_\lambda \arrow[r] & Z_\lambda \arrow[r] & \Sigma X_\lambda \end{tikzcd}$$

Από το αξίωμα [TR3] , το διάγραμμα μπορεί να συμπληρώθει σε έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\} \arrow[d] \\ X_\lambda \arrow[r] & Y_\lambda \arrow[r] & Z_\lambda \arrow[r] & \Sigma X_\lambda \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας το γινόμενο όλων αυτών των μορφισμών τριγώνων, επάγεται ένας μορφισμός

$$\begin{tikzcd} \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r] \arrow[d, dashed, "1"'] & \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \arrow[r] \arrow[d, dashed, "1"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\} \arrow[d, dashed, "1"'] \\ \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \arrow[r] & \Sigma\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\} \end{tikzcd}$$

προ−τριγώνων. Η επάνω γραμμή είναι ένα τρίγωνο, συνεπώς από το Παράδειγμα 1.1.15, είναι ένα προ−τρίγωνο, ενώ η κάτω γραμμή είναι ένα προ−τρίγωνο από το Λήμμα 1.1.17.1, ως γινόμενο προ−τριγώνων. Από την Πρόταση 1.1.20 έπεται ότι η προηγούμενη απεικόνιση είναι ένας ισομορφισμός της επάνω γραμμής η οποία είναι διακεκριμένο τρίγωνο με την κάτω γραμμή η οποία είναι ένα προ−τρίγωνο. Συνεπώς, από το αξίωμα [TR0] έπεται ότι η κάτω γραμμή είναι ένα τρίγωνο.

□

Πρόταση 1.2.1.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία και Λ ένα σύνολο δεικτών. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\lambda \in \Lambda$ δίνεται ένα (διακεκριμένο) τρίγωνο*

$$X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow Z_\lambda \longrightarrow \Sigma X_\lambda$$

στην $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι τα τρία συγκινόμενα

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \qquad \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda, \qquad \coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$$

υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Από το Λήμμα 1.1.17.2, γνωρίζουμε ότι το συγκινόμενο των προ−τριγώνων

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \longrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right\}$$

είναι ένα προ−τρίγωνο. Ισχυριζόμαστε ότι αυτό είναι ένα τρίγωνο.

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.2.1.1. □

Πρόταση 1.2.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

και

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

δύο υποψήφια τρίγωνα. Υποθέτουμε ότι το ευθύ τους άθροισμα

$$X \oplus X' \longrightarrow Y \oplus Y' \longrightarrow Z \oplus Z' \longrightarrow \Sigma X \oplus \Sigma X'$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Τότε οι ευθείς προσθετέοι είναι επισης διακεκριμένα τρίγωνα.

Απόδειξη. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να αποδείξουμε ότι το υποψήφιο τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

είναι ένα τρίγωνο. Επειδή είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός τριγώνου, και άρα ενός προ−τριγώνου, από το Παράδειγμα 1.1.16, έπεται οτι είναι ένα προ−τρίγωνο. Έστω

$$X \longrightarrow Y \dashrightarrow Q \dashrightarrow \Sigma X$$

ένα τρίγωνο που συμπληρώνει τον μορφισμό $X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$. Το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] & Q \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] \\
X \oplus X' \arrow[r] & Y \oplus Y' \arrow[r] & Z \oplus Z' \arrow[r] & \Sigma X \oplus \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

από το αξίωμα [TR3] μπορεί να συμπληρωθεί σ΄ έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\begin{bmatrix}h\\h'\end{bmatrix}"'] & \Sigma X \arrow[d, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] \\
X \oplus X' \arrow[r] & Y \oplus Y' \arrow[r] & Z \oplus Z' \arrow[r] & \Sigma X \oplus \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Συνθέτοντας τον μορφισμό αυτό με την προβολή

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X' \arrow[r] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}"'] & Y \oplus Y' \arrow[r] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}"'] & Z \oplus Z' \arrow[r] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}"'] & \Sigma X \oplus \Sigma X' \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε έναν μορφισμό προ−τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Η επάνω γραμμή είναι ένα τρίγωνο εξ ορισμού, ενώ η κάτω γραμμή είναι ένα προ−τρίγωνο επειδή είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός τριγώνου, και άρα από το Παράδειγμα 1.1.15, ενός προ−τριγώνου. Από την Πρόταση 1.1.20, έπεται ότι ο h είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, η κάτω γραμμή είναι ισόμορφη με την επάνω γραμμή η οποία είναι ένα τρίγωνο. Συνεπώς, από το αξίωμα [TR0] έπεται ότι η κάτω γραμμή

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

είναι ένα τρίγωνο.

$\square$

Πρόταση 1.2.3.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία και υποθέτουμε ότι δίνεται ένα υποψήφιο τρίγωνο της μορφής*

$$X \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} A \oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}} A \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}} \Sigma X$$

Τότε αυτό μπορεί να εκφραστεί ως το ευθύ άθροισμα των δύο υποψηφίων τριγώνων

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} A \xrightarrow{0} 0$$

και

$$X \xrightarrow{b} Y \xrightarrow{\gamma - \beta\alpha} Z \xrightarrow{d} \Sigma X$$

Απόδειξη. Έστω u_1, p_1, v_1 και q_1 οι κανονικοί μορφισμοί του γινόμενου−συγκινόμενου $A \oplus Y$, και u_2, p_2, v_2 και q_2 οι κανονικοί μορφισμοί του γινόμενου−συγκινόμενου $A \oplus Z$. Δηλαδή, το $A \oplus Y$ χαρακτηρίζεται απο τις σχέσεις :

$$p_1 u_1 = 1_A \qquad q_1 u_1 = 0$$

$$q_1 v_1 = 1_Y \qquad p_1 v_1 = 0$$

$$u_1 p_1 + v_1 q_1 = 1_{A \oplus Y}$$

Ομοίως το $A \oplus Z$. Ορίζουμε τους μορφισμούς

$$p_1' := \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix} : A \oplus Y \longrightarrow A \quad \text{και} \quad v_1' := \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1 \end{bmatrix} : Y \longrightarrow A \oplus Y$$

Οι μορφισμοί u_1, p_1', v_1' και q_1 εφοδιάζουν επίσης το $A \oplus Y$ με την δομή ενός γινόμενου−συγκινόμενου. Εύκολα επαληθεύονται οι σχέσεις :

$$p'_1 u_1 = 1_A \qquad\qquad q_1 u_1 = 0$$

$$q_1 v'_1 = 1_Y \qquad\qquad p'_1 v'_1 = 0$$

$$u_1 p'_1 + v'_1 q_1 = 1_{A\oplus Y}$$

Επίσης, ορίζουμε τους μορφισμούς

$$u'_2 := \begin{bmatrix}1\\ \beta\end{bmatrix} : A \longrightarrow A\oplus Z \quad \text{και} \quad q'_2 := \begin{bmatrix}-\beta & 1\end{bmatrix} : A\oplus Z \longrightarrow Z$$

Ομοίως οι μορφισμοί u'_2, p_2, v_2 και q'_2 εφοδιάζουν επίσης το $A\oplus Z$ με την δομή ενός γινόμενου−συγκινόμενου. Επομένως, από τις καθολικές ιδιότητες των γινομένων−συγκινομένων $A\oplus Y$, $A\oplus Z$, οι παλιές δομές καθίστανται ισόμορφες με τις καινούργιες μέσω των αντίστοιχων ισομορφισμών

$$\Phi := \begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix} : A\oplus Y \longrightarrow A\oplus Y \quad \text{και} \quad \Psi := \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\beta & 1\end{bmatrix} : A\oplus Z \longrightarrow A\oplus Z$$

Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A\oplus Y & A\oplus Y \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[r, "\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}"] & A\oplus Z \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "{\begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix}}"'] & A\oplus Z \arrow[d, dashed, "{\begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix}\circ\Psi^{-1}}"] \\
X \arrow[u, dashed, "\Phi\circ\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}"] \arrow[ur, "\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}"'] & & & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας, τις σχεσεις που προκύπτουν από το δοθέν υποψήφιο τρίγωνο

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \beta & \gamma\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \beta & \gamma\end{bmatrix} = 0$$

και το προηγούμενο διάγραμμα, το δοθέν υποψήφιο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}} A\oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}} A\oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix}} \Sigma X$$

μετασχηματίζεται στο (ισόμορφο) υποψήφιο τρίγωνο στο οποίο τα $A\oplus Y$, $A\oplus Z$ έχουν αποκτήσει τις νέες δομές γινόμενου−συγκινόμενου

$$X \xrightarrow{\Phi\circ\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}} A\oplus Y \xrightarrow{\Psi\circ\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}\circ\Phi^{-1}} A\oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix}\circ\Psi^{-1}} \Sigma X$$

το οποίο ισούται με το υποφήφιο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix}} A\oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma-\beta\alpha\end{bmatrix}} A\oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix}0 & d\end{bmatrix}} \Sigma X$$

Τώρα, το ζητούμενο είναι άμεσο.

$\square$

Πρόταση 1.2.3.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία και υποθέτουμε ότι δίνεται ένα υποψήφιο τρίγωνο της μορφής*

$$Q \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}} Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}} \Sigma Q \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}} \Sigma(Q \oplus X)$$

Τότε αυτό μπορεί να εκφραστεί ως το ευθύ άθροισμα των δύο υποψηφίων τριγώνων

$$Q \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Sigma Q \xrightarrow{1} \Sigma Q$$

και

$$X \xrightarrow{b} Y \xrightarrow{d} Z \xrightarrow{\gamma-\beta\alpha} \Sigma X$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την Πρόταση 1.2.3.1, και το αξίωμα [TR2] . □

Πρόταση 1.2.3.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία και υποθέτουμε ότι δίνεται ένα υποψήφιο τρίγωνο της μορφής*

$$Q \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}} Q \oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}} Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}} \Sigma(Q \oplus X)$$

Τότε αυτό μπορεί να εκφραστεί ως το ευθύ άθροισμα των δύο υποψηφίων τριγώνων

$$Q \xrightarrow{1} Q \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Sigma Q$$

και

$$X \xrightarrow{\gamma-\beta\alpha} Y \xrightarrow{b} Z \xrightarrow{d} \Sigma X$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την Πρόταση 1.2.3.1, και το αξίωμα [TR2] . □

Το επόμενο Πόρισμα, μας διαβεβαιώνει ότι η κλάση των διακεκριμένων τριγώνων (ως πρός τον συναρτητή Σ) μιας προ−τριγωνισμένης κατηγορίας περιέχει σίγουρα κάποια προφανή υποψήφια τρίγωνα.

Πόρισμα 1.2.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι ένας ισομορφισμός εάν και μόνο εάν, για κάποιο Z (το οποίο αναγκαστικά είναι ισόμορφο με το μηδέν), το υποψήφιο τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{0} Z \xrightarrow{0} \Sigma X$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο.

Απόδειξη. Έστω ότι η απεικόνιση f είναι ένας ισομορφισμός, τότε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ισομορφισμός υποψηφίων τριγώνων. Η επάνω γραμμή είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο, επομένως από το αξίωμα [TR0] , έπεται ότι και κάτω γραμμή είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Συνεπώς, μπορούμε να θέσουμε $Z := 0$.

Αντιστρόρφως, υποθέτουμε ότι η ακολουθία

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{0} Z \xrightarrow{0} \Sigma X$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Αυτό το τριγώνο είναι το άθροισμα των παρακάτω δυο υποψηφίων τριγώνων

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

και

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

τα οποία λόγω της Πρότασης 1.2.2, οφείλουν να είναι (διακεκριμένα) τρίγωνα. Όμως, τότε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένας μορφισμός τριγώνων. Γνωρίζουμε, ότι οι $1 : X \longrightarrow X$ και $1 : 0 \longrightarrow 0$ είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.1.20, έπεται ότι ο μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ είναι ένας ισομορφισμός. Ομοίως, το παρακάτω διάγραμμα τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "0"] & Z \arrow[r, "0"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένας μορφισμός τριγώνων, και επειδή γνωρίζουμε ότι οι $1 : X \longrightarrow X$ και $f : X \longrightarrow Y$ είναι ισομορφισμοί, έπεται ότι ο $0 : 0 \longrightarrow Z$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, το αντικείμενο Z είναι ισόμορφο με το μηδέν.

$\square$

Πόρισμα 1.2.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Κάθε τρίγωνο της μορφής*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{0} \Sigma X$$

είναι ισόμορφο με το τρίγωνο

$$X \longrightarrow X \oplus Z \longrightarrow Z \xrightarrow{0} \Sigma X$$

Αυτό σημαινει ότι, εάν η απεικόνιση $: Z \longrightarrow \Sigma X$ μηδενίζεται, τότε το τρίγωνο διασπάται.

Απόδειξη. Από τα αξιώματα [TR0] και [TR2] τα

$$X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

και

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{-1} Z \longrightarrow 0$$

είναι τρίγωνα. Από την Πρόταση 1.2.1, γνωρίζουμε ότι το ευθύ τους άθροισμα

$$X \longrightarrow X \oplus Z \longrightarrow Z \xrightarrow{0} \Sigma X$$

είναι επίσης ένα τρίγωνο. Αλλά τώρα το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & X \oplus Z \arrow[r] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r, "0"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

από το αξίωμα [TR3] μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & X \oplus Z \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r, "0"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

, ο οποίος από την Πρόταση 1.1.20 και το αξίωμα [TR2], οφείλει να είναι ένας ισομορφισμός.

□

Λήμμα 1.2.6.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ότι δίνεται ένα τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

Εάν $v' : Z \longrightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε η σύνθεση

$$Z \xrightarrow{v'} Y \xrightarrow{v} Z$$

να ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στο Z, τότε $w = 0$, και η απεικόνιση των τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & X \oplus Z \arrow[r] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} u & v' \end{bmatrix}}"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $w = w1 = wvv' = 0v' = 0$, και επειδή είναι μια απεικόνιση τριγώνων, όπου δύο από τις κάθετες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί, από την Πρόταση 1.1.20 και το αξίωμα [TR2], έπεται ότι και η τρίτη απεικόνιση

$$\begin{bmatrix} u & v' \end{bmatrix} : X \oplus Z \longrightarrow Y$$

είναι επίσης ένας ισομορφισμός.

□

Λήμμα 1.2.6.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ότι δίνεται το τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

Εάν $u' : Y \longrightarrow X$ είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε η σύνθεση

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{u'} X$$

να ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στο X, τότε $w = 0$, και η απεικόνιση των τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} u' \\ v \end{bmatrix}}"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r] & X \oplus Y \arrow[r] & Z \arrow[r, "0"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 1.2.6.1.

□

Παρατήρηση 1.2.7. Δοθέντος ενός τριγώνου

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

λαμβάνουμε έναν κανονικό ισομορφισμό

$$Y \simeq X \oplus Z$$

οποτεδήποτε δίνεται μια παραγοντοποίηση της ταυτοτικής απεικόνισης στο Z ως

$$Z \xrightarrow{\quad v' \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z$$

ή μια παραγοντοποίηση της ταυτοτικής απεικόνισης στο X ως

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad u' \quad} X$$

Στο επόμενο Λήμμα θα δείξουμε πότε αυτοί οι δύο ισομορφισμοί συμπίπτουν.

Λήμμα 1.2.8. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

μια παραγοντοποίηση της ταυτοτικής απεικόνισης στο Z, και μια παραγοντοποίηση της ταυτοτικής απεικόνισης στο X, όπως στην Παρατήρηση 1.2.7. Τότε λαμβάνουμε δύο ισομορφισμούς, έναν από κάθε παραγοντοποίηση. Οι δύο ισομορφισμοί συμπίπτουν εάν και μόνο εάν η σύνθεση

$$Z \xrightarrow{\quad v' \quad} Y \xrightarrow{\quad u' \quad} X$$

μηδενίζεται.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2.6.1, η απεικόνιση $v' : Z \longrightarrow Y$ επάγει έναν ισομορφισμό

$$X \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} u & v' \end{bmatrix}} Y$$

και από το δυϊκό του, το Λήμμα 1.2.6.2, η απεικόνιση $u' : Y \longrightarrow X$ επάγει επίσης έναν ισομορφισμό

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} u' \\ v \end{bmatrix}} X \oplus Z$$

Οί δύο ισομορφισμοί συμπίπτουν εάν και μόνο εάν ο ένας είναι αντίστροφος του άλλου. Για να συμβεί αυτό, αρκεί να επαληθεύσουμε πότε η (η μια από τις δύο) σύνθεση

$$X \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} u & v' \end{bmatrix}} Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} u' \\ v \end{bmatrix}} X \oplus Z$$

δηλαδή,

$$X \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} u'u & u'v' \\ vu & vv' \end{bmatrix}} X \oplus Z$$

ισούται με την ταυτοτική απεικονιση στο $X \oplus Z$. Επιπλέον, γνωρίζουμε εξ υποθέσεως $u'u = 1$, $vv' = 1$ και $vu = 0$ επειδή είναι σύνθεση δύο διαδοχικών απεικονίσεων σ΄ ένα τρίγωνο. Επομένως, η σύνθεση λαμβάνει την μορφή

$$X \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & u'v' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X \oplus Z$$

και θα ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στο $X \oplus Z$ εάν και μονο εάν η συνθεση $u'v'$ μηδενίζεται. Συνεπώς, οι δύο ισομορφισμοί συμπίπτουν εάν και μόνο εάν $u'v' = 0$.

□

1.3 Τριγωνισμένες κατηγορίες

Σε αυτή την Ενότητα θα ορίσουμε τις τριγωνισμένες κατηγορίες.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε οτι δίνεται ένας μορφισμός υποψηφίων τριγώνων*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

Υπάρχει ένας τρόπος να ορίσουμε ένα νέο υποψήφιο τρίγωνο. Αυτό είναι το διάγραμμα

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\Sigma u & 0 \\ \Sigma f & w' \end{bmatrix}} \Sigma Y \oplus \Sigma X'$$

Το νέο υποψήφιο τρίγωνο καλείται η απεικόνιση κώνος της απεικόνισης των υποψήφιων τριγώνων.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Δύο απεικονίσεις μεταξύ υποψηφίων τριγώνων*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h'"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f'"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

καλούνται ομοτοπικές εάν διαφέρουν ως προς ομοτοπία. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν απεικονίσεις Θ, Φ και Ψ

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[dl, dashed, "\Theta"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[dl, dashed, "\Phi"'] & \Sigma X \arrow[dl, dashed, "\Psi"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

τέτοιες ώστε να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$f - f' = \Theta u + \Sigma^{-1}\{w'\Psi\} \qquad g - g' = \Phi v + u'\Theta \qquad h - h' = \Psi w + v'\Phi$$

Λήμμα 1.3.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Ώς προς ισομορφισμό, η απεικόνιση κώνος δεν εξαρτάται από τον μορφισμό*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

των υποψήφιων τριγώνων αλλά από την κλάση ομοτοπίας του μορφισμού. Εάν η παραπάνω απεικόνιση είναι ομοτοπική με μια απεικόνιση

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h'"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f'"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

, τότε οι απεικονίσεις κώνοι είναι ισόμορφα υποψήφια τρίγωνα.

Απόδειξη. Το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Y \oplus X' \arrow[r, "\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Theta & 1 \end{bmatrix}"'] & Z \oplus Y' \arrow[r, "\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Phi & 1 \end{bmatrix}"'] & \Sigma X \oplus Z' \arrow[r, "\begin{bmatrix} -\Sigma u & 0 \\ \Sigma f & w' \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Psi & 1 \end{bmatrix}"'] & \Sigma Y \oplus \Sigma X' \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Sigma\Theta & 1 \end{bmatrix}"'] \\
Y \oplus X' \arrow[r, "\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g' & u' \end{bmatrix}"'] & Z \oplus Y' \arrow[r, "\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h' & v' \end{bmatrix}"'] & \Sigma X \oplus Z' \arrow[r, "\begin{bmatrix} -\Sigma u & 0 \\ \Sigma f' & w' \end{bmatrix}"'] & \Sigma Y \oplus \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, και οι κάθετες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς, υφίσταται ένας ισομορφισμός της επάνω γραμμής με την κάτω.

□

Τα επόμενα δύο Λήμματα είναι δύο στοιχειώδη αποτελέσματα της Ομολογικής Άλγεβρας.

Λήμμα 1.3.4.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι $F : C \longrightarrow D$ και $F' : C \longrightarrow D$ είναι δύο μορφισμοί υποψήφιων τριγώνων. Υποθέτουμε επίσης ότι οι F και F' είναι ομοτοπικοί. Τότε για κάθε απεικόνιση $G : C' \longrightarrow C$, οι συνθέσεις $F \circ G : C' \longrightarrow D$ και $F' \circ G : C' \longrightarrow D$ είναι ομοτοπικές.*

Απόδειξη. [[Mur07], Λήμμα 20, σελ. 15]

□

Λήμμα 1.3.4.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι $F : C \longrightarrow D$ και $F' : C \longrightarrow D$ είναι δύο μορφισμοί υποψήφιων τριγώνων. Υποθέτουμε επίσης ότι οι F και F' είναι ομοτοπικοί. Τότε για κάθε απεικόνιση $H : D \longrightarrow D'$, οι συνθέσεις $H \circ F : C \longrightarrow D'$ και $H \circ F' : C \longrightarrow D'$ είναι ομοτοπικές.*

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 1.3.4.1.

□

Ορισμός 1.3.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα υποψήφιο τρίγωνο καλείται συμπτύξιμο εάν η ταυτοτική απεικόνιση $1 : C \longrightarrow C$ είναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση $0 : C \longrightarrow C$.*

Λήμμα 1.3.6.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω C ένα συμπτύξιμο υποψήφιο τρίγωνο, τότε κάθε απεικόνιση από το C σε ένα οποιοδήποτε υποψήφιο τρίγωνο D, $F : C \longrightarrow D$ είναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση $0 : C \longrightarrow D$.*

Απόδειξη. Ισχύει $F = F \circ 1$, και επειδή το C είναι συμπτύξιμο, η ταυτοτική απεικόνιση $1 : C \longrightarrow C$ είναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση $0 : C \longrightarrow C$. Συνεπώς, από το Λήμμα 1.3.4.2, έπεται ότι η απεικόνιση F είναι ομοτοπική με την απεικόνιση $F = F \circ 0 = 0$.

□

Λήμμα 1.3.6.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω C ένα συμπτύξιμο υποψήφιο τρίγωνο, τότε κάθε απεικόνιση από οποιοδήποτε υποψήφιο τρίγωνο D στο C, $F : D \longrightarrow C$ είναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση $0 : D \longrightarrow C$.*

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 1.3.6.1.

□

Λήμμα 1.3.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω C ένα συμπτύξιμο υποψήφιο τρίγωνο, τότε το C είναι ένα προ−τρίγωνο.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι εάν $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι ένας οποιοσδήποτε decent ομολογικός συναρτητής, και C είναι το υποψήφιο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

η μακρά ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^{-1}Z) \xrightarrow{\mathcal{H}(\Sigma^{-1}w)} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(u)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(v)} \mathcal{H}(Z) \xrightarrow{\mathcal{H}(w)} \mathcal{H}(\Sigma X) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής. Στην πραγματικότητα αυτό αληθεύει όχι μόνο για τους decent ομολογικούς συναρτητές, αλλά και για κάθε προσθετικό συναρτητή, επειδή κάθε προσθετικός συναρτητής, δεν διατηρεί μόνο τους ταυτοτικούς μορφισμούς, εξ ορισμού επειδή είναι συναρτητής, διατηρεί επίσης και τους μηδενικούς μορφισμούς. Το C είναι συμπτύξιμο, αυτό σημαίνει ότι η ταυτοτικη απεικόνιση $1 : C \longrightarrow C$ ειναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση στο C. Συνεπώς, υπάρχουν τρείς απεικονίσεις Θ, Φ και Ψ

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[dl, dashed, "\Theta"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[dl, dashed, "\Phi"'] & \Sigma X \arrow[dl, dashed, "\Psi"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

τέτοιες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$1_X = \Theta u + \Sigma^{-1}\{w\Psi\} \qquad 1_Y = \Phi v + u\Theta \qquad 1_Z = \Psi w + v\Phi$$

Εφαρμόζουμε τον decent ομολογικό συναρτητή (ή γενικότερα προσθετικό συναρτητή) $\mathcal{H}$ στο C. Τότε προκύπτουν τρείς απεικονίσεις $\mathcal{H}(\Theta)$,$\mathcal{H}(\Phi)$ και $\mathcal{H}(\Psi)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(X) \arrow[r, "\mathcal{H}(u)"] & \mathcal{H}(Y) \arrow[r, "\mathcal{H}(v)"] \arrow[dl, dashed, "\mathcal{H}(\Theta)"'] & \mathcal{H}(Z) \arrow[r, "\mathcal{H}(w)"] \arrow[dl, dashed, "\mathcal{H}(\Phi)"'] & \mathcal{H}(\Sigma X) \arrow[dl, dashed, "\mathcal{H}(\Psi)"'] \\
\mathcal{H}(X) \arrow[r, "\mathcal{H}(u)"] & \mathcal{H}(Y) \arrow[r, "\mathcal{H}(v)"] & \mathcal{H}(Z) \arrow[r, "\mathcal{H}(w)"] & \mathcal{H}(\Sigma X)
\end{tikzcd}$$

, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
1_{\mathcal{H}(X)} &= \mathcal{H}(\Theta)\mathcal{H}(u) + \mathcal{H}(\Sigma^{-1}w)\mathcal{H}(\Sigma^{-1}\Psi) \\
1_{\mathcal{H}(Y)} &= \mathcal{H}(\Phi)\mathcal{H}(v) + \mathcal{H}(u)\mathcal{H}(\Theta) \\
1_{\mathcal{H}(Z)} &= \mathcal{H}(\Psi)\mathcal{H}(w) + \mathcal{H}(v)\mathcal{H}(\Phi)
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, η ταυτοτική απεικόνιση $1 : \mathcal{H}(C) \longrightarrow \mathcal{H}(C)$ είναι αλυσωτά ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση στο $\mathcal{H}(C)$. Επομένως, οι ομάδες ομολογίας (αντίστοιχα συνομολογίας) της μακράς ακολουθίας

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^{-1}Z) \xrightarrow{\mathcal{H}(\Sigma^{-1}w)} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(u)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(v)} \mathcal{H}(Z) \xrightarrow{\mathcal{H}(w)} \mathcal{H}(\Sigma X) \longrightarrow \cdots$$

είναι τετριμένες, συνεπώς η μακρά ακολουθία είναι ακριβής.

□

Τα συμπτύξιμα υποψήφια τρίγωνα, δεν είναι απλώς προ−τρίγωνα είναι μάλιστα τρίγωνα όπως μας υπαγορεύει η επόμενη

Πρόταση 1.3.8. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω C ένα συμπτύξιμο υποψήφιο τρίγωνο, τότε το C είναι ένα τρίγωνο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το C ειναι το υποψήφιο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\ u\ } Y \xrightarrow{\ v\ } Z \xrightarrow{\ w\ } \Sigma X$$

Τότε η απεικόνιση $u : X \longrightarrow Y$ μπορεί να συμπληρωθεί σ′ ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, dashed, "v'"] & Q \arrow[r, dashed, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Το C είναι συμπτύξιμο, αυτό σημαίνει ότι η ταυτοτικη απεικόνιση $1 : C \longrightarrow C$ ειναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση στο C. Συνεπώς υπάρχουν τρείς απεικονίσεις Θ,Φ και Ψ

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[dl, dashed, "\Theta"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[dl, dashed, "\Phi"'] & \Sigma X \arrow[dl, dashed, "\Psi"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v'"] & Q \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

τέτοιες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$1_X = \Theta u + \Sigma^{-1}\{w'\Psi\} \qquad 1_Y = \Phi v + u\Theta \qquad 1_Z = \Psi w + v'\Phi$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $w\Psi$. Επειδή ισχύει $\Sigma u \circ w = 0$, έπεται ότι $\Sigma u \circ w\Psi = 0$. Αλλά επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma X, -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός απεικονίζει το τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\ u\ } Y \xrightarrow{\ v'\ } Q \xrightarrow{\ w'\ } \Sigma X$$

στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma X, Q) \xrightarrow{\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma X, w')} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma X, \Sigma X) \xrightarrow{\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma X, \Sigma u)} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma X, \Sigma Y)$$

Από την ακρίβεια της ακολουθίας συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση $\Psi' : \Sigma X \longrightarrow Q$, έτσι ώστε $w'\Psi' = w\Psi$. Τότε επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\Psi' w + v'\Phi"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v'"] & Q \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι προ−τρίγωνα, επομένως επάγεται μια απεικόνιση προ−τριγώνων. Η κάτω γραμμή είναι ένα τρίγωνο, συνεπώς από το Παράδειγμα 1.1.15, είναι ένα προ−τρίγωνο, ενώ η επάνω γραμμή είναι ένα συμπτύξιμο υποψήφιο τρίγωνο, συνεπώς από το Λήμμα 1.3.7, είναι ένα προ−τρίγωνο. Από την Πρόταση 1.1.20, έπεται ότι η προηγούμενη απεικόνιση είναι ένας ισομορφισμός της επάνω γραμμής η οποία είναι προ−τρίγωνο με την κάτω γραμμή η οποία είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Συνεπώς, από το αξίωμα [TR0] έπεται ότι η επάνω γραμμή είναι ένα τρίγωνο.

□

Από εδώ και στο εξής, τα συμπτύξιμα υποψήφια τρίγωνα θα τα καλούμε συμπτύξιμα τρίγωνα. Επειδή από την Πρόταση 1.3.8, γνωρίζουμε ότι κάθε συμπτύξιμο υποψήφιο τρίγωνο, είναι ένα τρίγωνο. Συνεπώς, δεν υφίσταται κίνδυνος σύγχυσης.

Λήμμα 1.3.9. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ότι το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

είναι μία απεικόνιση προ−τριγώνων. Τότε η απεικόνιση κώνος είναι ένα προ−τρίγωνο.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H}$ ένας decent ομολογικός συναρτητής. Πρέπει να δείξουμε ότι ο $\mathcal{H}$ απεικονίζει την απεικόνιση κώνο σε μία μακρά ακριβή ακολουθία. Αλλά επειδή κάθε γραμμή του παραπάνω διαγράμματος είναι ένα προ−τρίγωνο, λαμβάνουμε μια απεικόνιση

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{H}(\Sigma^{-1}Z) \arrow[r, "\mathcal{H}(\Sigma^{-1}w)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(\Sigma^{-1}h)"] & \mathcal{H}(X) \arrow[r, "\mathcal{H}(u)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(f)"] & \mathcal{H}(Y) \arrow[r, "\mathcal{H}(v)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(g)"] & \mathcal{H}(Z) \arrow[r, "\mathcal{H}(w)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(h)"] & \mathcal{H}(\Sigma X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}(\Sigma f)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{H}(\Sigma^{-1}Z') \arrow[r, "\mathcal{H}(\Sigma^{-1}w')"] & \mathcal{H}(X') \arrow[r, "\mathcal{H}(u')"] & \mathcal{H}(Y') \arrow[r, "\mathcal{H}(v')"] & \mathcal{H}(Z') \arrow[r, "\mathcal{H}(w')"] & \mathcal{H}(\Sigma X') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

μακρά ακριβών ακολουθιών. Η απεικόνιση κώνος μιας απεικόνισης μακρά ακριβών ακολουθιών είναι μια μακρά ακριβής ακολουθία. Συνεπώς, η απεικόνιση κώνος της προηγούμενης απεικόνισης είναι μια μακρά ακριβής ακολουθία. Όμως, η απεικόνιση αυτή ταυτίζεται με την ακολουθία που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τον decent ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H}$ στην απεικόνιση κώνο του δοθέντος μορφισμού προ−τριγώνων, δηλαδή στο υποψήφιο τρίγωνο

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\Sigma u & 0 \\ \Sigma f & w' \end{bmatrix}} \Sigma Y \oplus \Sigma X'$$

Συνεπώς, το υποψήφιο τρίγωνο αυτό, είναι ένα προ−τρίγωνο.

□

Λήμμα 1.3.10. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Η απεικόνιση κώνος της μηδενικής απεικόνισης*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "0"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "0"] & \Sigma X \arrow[d, "0"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

μεταξύ δυο τριγώνων, είναι ένα τρίγωνο.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση κώνο της μηδενικής απεικόνισης

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v & 0 \\ 0 & u' \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ 0 & v' \end{bmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\Sigma u & 0 \\ 0 & w' \end{bmatrix}} \Sigma Y \oplus \Sigma X'$$

Η ακολουθία αυτή μπορεί να εκφραστεί ως το ευθύ άθροισμα των ακολουθιών

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

και

$$Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{-w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y$$

Η πρώτη ακολουθία είναι ένα τρίγωνο εξ' υποθέσεως. Η δεύτερη ακολουθία είναι ένα τρίγωνο από το αξιώμα [TR2] , επειδή το

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

είναι ένα τρίγωνο. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.2.1 έπεται ότι το ευθύ τους άθροισμα είναι ένα τρίγωνο.

□

Πόρισμα 1.3.11. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ότι δίνεται μια απεικόνιση τριγώνων*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

Εάν η απεικόνιση είναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση, τότε η απεικόνιση κώνος είναι ένα τρίγωνο.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.3.3 η απεικόνιση κώνος παραμένει αναλλοίωτη, ως προς ισομορφισμό, δηλαδή εάν αντικαταστήσουμε μια απεικόνιση από μια ομοτοπική της, τότε οι απεικόνισεις κώνοι είναι ισόμορφα υποψήφια τρίγωνα. Συνεπώς, από το Λήμμα 1.3.10, έπεται το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 1.3.12.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ένα συμπτύξιμο τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

και

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X'$$

ένα οποιδήποτε τρίγωνο, τότε η απεικόνιση κώνος οποιασδήποτε απεικόνισης

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

είναι ένα τρίγωνο.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.3.6.1, κάθε απεικόνιση από ένα συμπτύξιμο τρίγωνο σε ένα οποιοδήποτε υποψήφιο τρίγωνο, πόσο μάλλον τρίγωνο, είναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση. Συνεπώς, από το Πόρισμα 1.3.11 έπεται το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 1.3.12.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ένα οποιδήποτε τρίγωνο*

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X'$$

και

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

ένα συμπτύξιμο τρίγωνο, τότε η απεικόνιση κώνος οποιασδήποτε απεικόνισης

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X' \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένα τρίγωνο.

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Πορίσματος 1.3.12.1.

□

Ορισμός 1.3.13. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προ−τριγωνισμένη κατηγορία, αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια προσθετική κατηγορία, μαζί με έναν προσθετικό αυτομορφισμό Σ, και μια κλάση υποψήφιων τριγώνων (ως πρός τον συναρτητή Σ), έτσι ώστε η κλάση να πληρεί τα αξιώματα [TR0]−[TR3] . Τότε η $\mathcal{T}$ θα καλείται τριγωνισμένη εάν η κλάση ικανοποιεί το επιπρόσθετο αξίωμα :*

[TR4'] : *Για κάθε διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα, από το αξίωμα [TR3] , υπάρχει μια απεικόνιση $h : Z \longrightarrow Z'$, η οποία καθιστά το προηγούμενο διάγραμμα μεταθετικό. Αυτή η απεικόνιση μπορεί να επιλεγεί, έτσι ώστε η απεικόνιση κώνος

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\Sigma u & 0 \\ \Sigma f & w' \end{bmatrix}} \Sigma Y \oplus \Sigma X'$$

να είναι ένα τρίγωνο.

Ορισμός 1.3.14. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Ένας μορφισμός τριγώνων θα καλείται καλός εάν η απεικόνιση κώνος είναι ένα τρίγωνο.*

Παρατήρηση 1.3.15. Με βάση τον Ορισμό 1.3.14 το αξίωμα [TR4'] μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής :

[TR4'] : Κάθε διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα, μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν καλό μορφισμό τριγώνων.

1.4 Το Οκταεδρικό Αξίωμα ή το αξίωμα του Verdier

Αρχικά θα παραθέσουμε τον ορισμό τον ομοτοπικών καρτεσιανών τετραγώνων.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε ένα μεταθετικό τετράγωνο*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g'"'] \\
Y' \arrow[r, "f'"] & Z'
\end{tikzcd}$$

καλείται ομοτοπικά καρτεσιανό (ή Mayer− Vietoris τετράγωνο) εάν υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & g' \end{bmatrix}} Z' \xrightarrow{\vartheta} \Sigma Y$$

για κάποιο μορφισμό $\vartheta : Z' \longrightarrow \Sigma Y$. Ο μορφισμός ϑ καλείται διαφορικό του τετραγώνου.

Σημείωση 1.4.2. Εάν

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

είναι ένα ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο, καλούμε το Y ομοτοπικό pullback του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

και το Z' ομοτοπικό pushout του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \\ Y' & \end{tikzcd}$$

Από το αξίωμα [TR1] , έπεται ότι το ομοτοπικό pushout ενός διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \\ Y' & \end{tikzcd}$$

υπάρχει πάντα. Ο μορφισμός

$$\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} : Y \longrightarrow Y' \oplus Z$$

μπορεί να συμπληρωθεί σ΄ ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] Y \arrow[r, "\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}"] & Y' \oplus Z \arrow[r, dashed, "\begin{bmatrix} f' & g' \end{bmatrix}"] & Z' \arrow[r, dashed, "\vartheta"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$, και αυτό το τρίγωνο, από τον Ορισμό 1.4.1, με την σειρά του ορίζει ένα ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

Από την Παρατήρηση 1.1.21, το ομοτοπικό pushout Z' είναι μοναδικό ως προς μη κανονικό ισομορφισμό. Επίσης, κάθε μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g''"] \\ Y' \arrow[r, "f''"] & P \end{tikzcd}$$

αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση

$$\begin{bmatrix} f'' & g'' \end{bmatrix} : Y' \oplus Z \longrightarrow P$$

, έτσι ώστε η σύνθεση

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} f'' & g'' \end{bmatrix}} P$$

να μηδενίζεται. Αλλά ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-, P) : \mathcal{T} \longrightarrow Ab$ είναι συνομολογικός, και συνεπώς απεικονίζει το τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & g' \end{bmatrix}} Z' \xrightarrow{\vartheta} \Sigma Y$$

στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(Z', P) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(Y' \oplus Z, P) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(Y, P)$$

Επειδή η σύνθεση

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} f'' & g'' \end{bmatrix}} P$$

μηδενίζεται, από την ακρίβεια της ακολουθίας, υπάρχει μια απεικόνιση $h : Z' \longrightarrow P$ (όχι απαραίτητα μοναδική), έτσι ώστε

$$h \circ \begin{bmatrix} f' & g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'' & g'' \end{bmatrix}$$

, ισοδύναμα $hf' = f''$ και $hg' = g''$. Συνεπώς, δείξαμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση $h : Z' \longrightarrow P$ η οποία απεικονίζει το ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

στο μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g''"] \\ Y' \arrow[r, "f''"] & P \end{tikzcd}$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $h : Z' \longrightarrow P$ καθιστά τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f''"'] & Z' \arrow[d, dashed, "h"] \\ & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z' \arrow[d, dashed, "h"'] & Z \arrow[l, "g'"'] \arrow[dl, "g''"] \\ P & \end{tikzcd}$$

μεταθετικά.

Δυϊκά, το ομοτοπικό pullback ενός διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

υπάρχει πάντα, και είναι μοναδικό ως προς μη κανονικό ισομορφισμό. Επίσης, για κάθε μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "g''"] & Z \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

υπάρχει μία απεικόνιση $h : P \longrightarrow Y$ (όχι απαραίτητα μοναδική) η οποία το απεικονίζει στο ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $h : P \longrightarrow Y$ καθιστά τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g''"'] \arrow[d, dashed, "h"] \\ Y' & Y \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "f''"] & \\ Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

μεταθετικά.

Λήμμα 1.4.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "1"] \\ X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα.

Τότε, αυτό μπορεί να συμπληρωθεί σ΄ ένα μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "1"] \\ X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

έτσι ώστε το μεσαίο τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, dashed, "h"] \\ Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \end{tikzcd}$$

να είναι ομοτοπικά καρτεσιανό. Στην πραγματικότητα, όπως θα διαπιστώσουμε κατά την διαδικασία της απόδειξης, το διαφορικό $\vartheta : Z' \longrightarrow \Sigma Y$ του τετραγώνου μπορεί να επιλεγεί, έτσι ώστε να ισούται με την σύνθεση

$$Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

Απόδειξη. Από το αξίωμα [TR4'] μπορούμε να συμπληρώσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

σ′ έναν καλό μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση κώνος είναι το τρίγωνο

$$Y \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g & gf \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\Sigma f & 0 \\ 1 & w' \end{bmatrix}} \Sigma Y \oplus \Sigma X$$

το οποίο μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$X \oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & -v \\ gf & g \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & w' \\ -\Sigma f & 0 \end{bmatrix}} \Sigma X \oplus \Sigma Y$$

Από την Πρόταση 1.2.3.2 το τρίγωνο αυτο μπορεί να εκφραστεί ως το ευθύ άθροισμα των δύο υποψηφίων τριγώνων

$$X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Sigma X \xrightarrow{1} \Sigma X$$

και

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v \\ g \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} h & v' \end{bmatrix}} Z' \xrightarrow{\Sigma f \circ w'} \Sigma Y$$

το οποίο μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -v \end{bmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} v' & h \end{bmatrix}} Z' \xrightarrow{\Sigma f \circ w'} \Sigma Y$$

Από την Πρόταση 1.2.2, οποιοσδήποτε ευθύς προσθετέος ενός τριγώνου είναι ένα τρίγωνο. Άρα, το υποψηφίο τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -v \end{bmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} v' & h \end{bmatrix}} Z' \xrightarrow{\Sigma f \circ w'} \Sigma Y$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Συνεπώς, λαμβάνουμε το ζητούμενο.

□

Λήμμα 1.4.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ένα ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "h"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

Εάν το

$$Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{v} Y'' \xrightarrow{w} \Sigma Y$$

είναι ένα τρίγωνο, τότε υπάρχει ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] & Z' \arrow[r, dashed, "v'"] & Y'' \arrow[r, dashed, "w'"] & \Sigma Z \end{tikzcd}$$

το οποίο συμπληρώνει το ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο σε μια απεικόνιση τριγώνων

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f'"'] & Y'' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma Y \arrow[d, "\Sigma f"'] \\ Z \arrow[r, "h"] & Z' \arrow[r, dashed, "v'"] & Y'' \arrow[r, dashed, "w'"] & \Sigma Z \end{tikzcd}$$

Στην πραγματικότητα, όπως θα διαπιστώσουμε κατά την διαδικασία της απόδειξης, ο μορφισμός $v' : Z' \longrightarrow Y''$ μπορεί να επιλεγεί, έτσι ώστε το διαφορικό $\vartheta : Z' \longrightarrow \Sigma Y$ του τετραγώνου να ισούται με την σύνθεση

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, dashed, "v'"] & Y'' \arrow[r, "w"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "h"] \\ Y' \arrow[r, "f'"] & Z' \end{tikzcd}$$

είναι ομοτοπικά καρτεσιανό. Δηλαδή, έχουμε το τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & h \end{bmatrix}} Z' \xrightarrow{\vartheta} \Sigma Y$$

Αλλά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "{\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "1"'] & Y' \oplus Z \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f' & h \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}"'] & Z' \arrow[r, "\vartheta"] & \Sigma Y \arrow[d, "1"'] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y' \arrow[r, "v"] & Y'' \arrow[r, "w"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

μπορεί να συμπληρωθεί σ' έναν καλό μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}"] \arrow[d, "1"'] & Y' \oplus Z \arrow[r, "\begin{bmatrix} f' & h \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}"'] & Z' \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, dashed, "g'"'] & \Sigma Y \arrow[d, "1"'] \\
Y \arrow[r, "g"] & Y' \arrow[r, "v"] & Y'' \arrow[r, "w"] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

δηλαδή, η απεικόνιση κώνος

$$Y' \oplus Z \oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f' & -h & 0 \\ 1 & 0 & g \end{bmatrix}} Z' \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\vartheta & 0 \\ g' & v \end{bmatrix}} \Sigma Y \oplus Y'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\Sigma g & 0 \\ \Sigma f & 0 \\ 1 & w \end{bmatrix}} \Sigma Y' \oplus \Sigma Z \oplus \Sigma Y$$

είναι ένα τρίγωνο, το οποίο μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$Y' \oplus Y \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & g & 0 \\ -f' & 0 & -h \end{bmatrix}} Y' \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & -\vartheta \\ v & g' \end{bmatrix}} \Sigma Y \oplus Y'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\Sigma g & 0 \\ 1 & w \\ \Sigma f & 0 \end{bmatrix}} \Sigma Y' \oplus \Sigma Y \oplus \Sigma Z$$

Από τις Προτάσεις 1.2.3.2, και 1.2.3.3 το τρίγωνο αυτό μπορεί να εκφραστεί ως το ευθύ άθροισμα των τριών υποψηφίων τριγώνων

$$Y' \xrightarrow{1} Y' \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Sigma Y'$$

$$Y \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Sigma Y \xrightarrow{1} \Sigma Y$$

και

$$Z \xrightarrow{-h} Z' \xrightarrow{g'} Y'' \xrightarrow{-\Sigma f \circ w} \Sigma Z$$

, τα οποία είναι τρίγωνα, από την Πρόταση 1.2.2, ως ευθείς προσθετέοι ενός τριγώνου. Τώρα το τελευταίο τρίγωνο είναι ισόμορφο με το υποψήφιο τρίγωνο

$$Z \xrightarrow{h} Z' \xrightarrow{g'} Y'' \xrightarrow{\Sigma f \circ w} \Sigma Z$$

το οποίο, από το αξίωμα [TR0] , οφείλει να είναι ένα τρίγωνο. Επομένως, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f'"'] & Y'' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma Y \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
Z \arrow[r, "h"] & Z' \arrow[r, dashed, "g'"] & Y'' \arrow[r, dashed, "\Sigma f \circ w"] & \Sigma Z
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα, δηλαδή ένας μορφισμός τριγώνων. Συνεπώς, θέτοντας $v' := g'$ και $w' := \Sigma f \circ w$ λαμβάνουμε το ζητούμενο.

□

Πρόταση 1.4.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $u : X \longrightarrow Y, v : Y \longrightarrow Z$ δυο μορφισμοί και $vu : X \longrightarrow Z$ η σύνθεση τους. Έστω ότι δίνονται τα τρίγωνα*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{j} Z' \xrightarrow{k} \Sigma X$$

$$X \xrightarrow{vu} Z \xrightarrow{m} Y' \xrightarrow{n} \Sigma X$$

και

$$Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad l \quad} X' \xrightarrow{\quad i \quad} \Sigma Y$$

Τότε μπορούμε να συμπληρώσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "k"] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "vu"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l"'] & Y' \arrow[r, "n"] & \Sigma X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[r] & 0 \arrow[d] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma u"] & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma j"] & \Sigma Z' \arrow[r, "-\Sigma k"] & \Sigma^2 X
\end{tikzcd}$$

σ΄ ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "f"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "vu"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l"'] & Y' \arrow[r, "n"] \arrow[d, dashed, "g"'] & \Sigma X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & 0 \arrow[d] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma u"] & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma j"] & \Sigma Z' \arrow[r, "-\Sigma k"] & \Sigma^2 X
\end{tikzcd}$$

στο οποίο η πρώτη και δεύτερη γραμμή, και η δεύτερη στήλη είναι τα δοθέντα τρία τρίγωνα, ενώ οι υπόλοιπες γραμμές και στήλες, είναι τα προφανή (διακεκριμένα) τρίγωνα. Επιπροσθέτως, το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[d, dashed, "f"'] \\
Z \arrow[r, "m"] & Y'
\end{tikzcd}$$

είναι ομοτοπικά καρτεσιανό, με το διαφορικό $\vartheta : Y' \longrightarrow \Sigma Y$ *του τετραγώνου να δίνεται από τις ίσες συνθέσεις*

$$Y' \xrightarrow{\quad n \quad} \Sigma X \xrightarrow{\quad \Sigma u \quad} \Sigma Y$$

και

$$Y' \overset{g}{\dashrightarrow} X' \xrightarrow{\quad i \quad} \Sigma Y$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.4.3, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "k"] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "vu"] & Z \arrow[r, "m"] & Y' \arrow[r, "n"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

μπορεί να συμπληρωθεί σ'ενα μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "f"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "vu"] & Z \arrow[r, "m"] & Y' \arrow[r, "n"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

έτσι ώστε το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[d, dashed, "f"'] \\
Z \arrow[r, "m"] & Y'
\end{tikzcd}$$

να είναι ομοτοπικά καρτεσιανό, και το διαφορικό $\vartheta : Y' \longrightarrow \Sigma Y$ του τετραγώνου μπορεί να επιλεγεί, έτσι ώστε να ισούται με την σύνθεση

$$Y' \xrightarrow{n} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma u} \Sigma Y$$

Από το Λήμμα 1.4.4, το ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο αυτό και το τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{l} X' \xrightarrow{i} \Sigma Y$$

μπορούν να συμπληρωθούν σε μια απεικόνιση τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "j"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "m"'] & X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma j"'] \\
Z' \arrow[r, "f"] & Y' \arrow[r, dashed, "g"] & X' \arrow[r, dashed, "h"] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

, και ο μορφισμός $g : Y' \longrightarrow X'$ μπορεί να επιλεγεί, έτσι ώστε το διαφορικό $\vartheta : Y' \longrightarrow \Sigma Y$ του τετραγώνου να ισούται με την σύνθεση

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, dashed, "g"] & X' \arrow[r, "i"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1.4.6. Με άλλα λόγια, η Πρόταση 1.4.5 δοθέντων των προυποθέσεων προβλέπει την ύπαρξη ενός (μη τετριμμένου) τριγώνου

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, dashed, "f"] & Y' \arrow[r, dashed, "g"] & X' \arrow[r, dashed, "h"] & \Sigma Z' \end{tikzcd}$$

Η Πρόταση 1.4.5 είναι γνωστή ως το αξίωμα [TR4] , ή το Οκταεδρικό Αξίωμα, ή το αξίωμα του Verdier. Το διάγραμμα του συμπεράσματος της Πρότασης 1.4.5 εάν υπάρχει είναι γνωστό ως οκτάεδρο. Ο λόγος για αυτό το όνομα είναι ότι από τις γραμμές και τις στήλες του διαγράμματος προκύπτουν οκτώ τρίγωνα : τέσσερα μεταθετικά τρίγωνα (το πρώτο μεταθετικό τρίγωνο δίνεται εξ υποθέσεως, ενώ τα υπόλοιπα τρία επάγονται), και τέσσερα διακεκριμένα τρίγωνα (τα τρία διακεκριμένα τρίγωνα δίνονται εξ υποθέσεως, ενώ το τέταρτο επάγεται).

Τα τέσσερα μεταθετικά τρίγωνα είναι :

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "vu"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z' \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "k"] & \\
Y' \arrow[r, "n"'] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, "l"] & \\
Y' \arrow[r, dashed, "g"'] & X'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \Sigma Y \arrow[d, "\Sigma j"] \\
X' \arrow[ur, "i"] \arrow[r, dashed, "h"'] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

Τα τέσσερα (διακεκριμένα) τρίγωνα είναι :

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[ur, "u"] & Z' \arrow[l, "k"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "m"'] & \\
Y' \arrow[r, "n"'] & X \arrow[ul, "vu"']
\end{tikzcd}$$

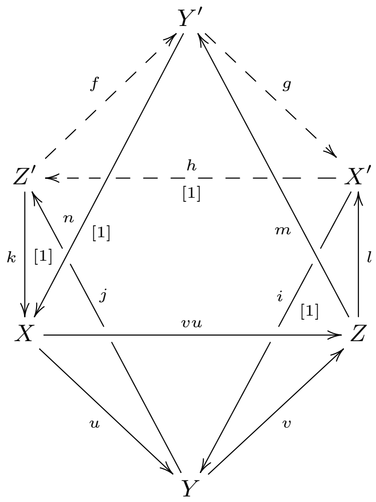
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "l"] & \\
Y \arrow[u, "v"] & X' \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, dashed, "g"'] \\
X' \arrow[r, dashed, "h"'] & Z' \arrow[u, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον, ικανοποιούνται οι σχέσεις :

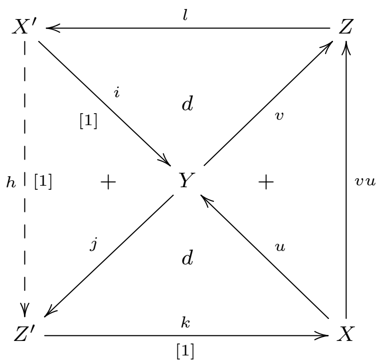
$$ig = \Sigma u \circ n \quad \text{και} \quad fj = mu$$

, όπου η πρώτη σχέση προκύπτει από τις δύο ίσες εκφράσεις του διαφορικού του επαγόμενου ομοτοπικά καρτεσιανού τετραγώνου της Πρότασης.

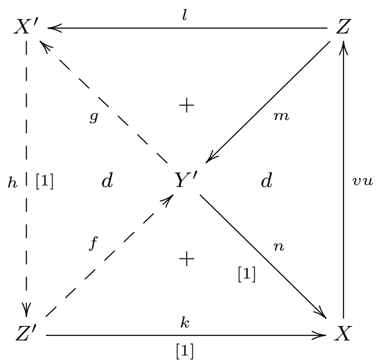
Τα οκτώ αυτά τρίγωνα (έδρες) ταυτοποιώντας κατάλληλα τις κοινές πλευρές (ακμές) τους συναρμολογούν τον σκελετό ενός οκταεδρικού πρίσματος, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι προηγούμενες σχέσεις. Προκειμένου να επιτύχουμε την σχηματική παράσταση του οκταεδρικού πρίσματος υιοθετούμε τις παρακάτω συμβάσεις. Με $[1] : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ συμβολίζουμε τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ της κατηγορίας $\mathcal{T}$ και συμβολίζοντας επιπλέον με $[1]$ τις πλευρές (ακμές) k, i, n και h των τριγώνων (εδρών) του οκταέδρου υπονοούμε ότι τα πέρατα τους δεν είναι τα δηλούμενα, αλλά οι εικόνες αυτών μέσω του $[1] := \Sigma$, π.χ η πλευρά $h : X' \longrightarrow Z'[1]$ ταυτίζεται με την $h : X' \longrightarrow Z'$. Επιπλέον, οι πλευρές j και u ταυτίζονται με τις εικόνες τους μέσω του $[1]$, π.χ η πλευρά $j : Y \longrightarrow Z'$ ταυτίζεται με την $j[1] : Y[1] \longrightarrow Z'[1]$. Συνεπώς, το οκταεδρικό πρίσμα παρίσταται ως εξής :



, και επιπλέον οι δύο διαγώνιες έδρες του πρίσματος είναι μεταθετικά διαγράμματα (ως προς τις προηγούμενες ταυτίσεις). Για καλύτερη εποπτεία παραθέτουμε την κάτω και την επάνω κάτοψη του οκταεδρικού πρίσματος



(κάτω κάτοψη)



(επάνω κάτοψη)

, όπου με (d) συμβολίζουμε τα διακεκριμένα τρίγωνα και με (+) τα μεταθετικά τρίγωνα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε προ−τριγωνισμένη κατηγορία ικανοποιεί το αξίωμα [TR4] αν και μόνο αν ικανοποιεί το αξίωμα [TR4'] . Έχουμε αποδείξει την μια κατεύθυνση. Για την ακρίβεια, έχουμε αποδείξει ότι κάθε προ−τριγωνισμένη κατηγορία εάν ικανοποίει το αξίωμα [TR4'] τότε ικανοποιεί το αξίωμα [TR4] . Η απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης βρίσκεται στο άρθρο [[Nee91], Θεώρημα 1.8, σελ. 228].

Από τα αξιώματα [TR0]−[TR2] , φαίνεται άμεσα ότι κάθε προ−τριγωνισμένη κατηγορία έχει αρκετά τρίγωνα. Διαισθητικά μιλώντας η εισαγωγή του αξιώματος [TR4] ($\Longleftrightarrow$ [TR4']) μας επιτρέπει να εμπλουτίσουμε κατά μια έννοια την κλάση των τριγώνων μιας προ−τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$ με μη τετριμμένα τρίγωνα.

1.5 Τριγωνισμένες υποκατηγορίες

Σε αυτή την Ενότητα θα ορίσουμε τις τριγωνισμένες υποκατηγορίες.

Ορισμός 1.5.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Μία πλήρης προσθετική υποκατηγορία $\mathcal{S}$ εντός της $\mathcal{T}$ καλείται μια τριγωνισμένη υποκατηγορία εάν είναι κλειστή ως τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{T}$, αυτό σημαίνει ότι κάθε αντικείμενο της $\mathcal{T}$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$, η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma S = S$, και εάν για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

τέτοιο ώστε τα αντικείμενα X και Y να ανήκουν στην $\mathcal{S}$, τότε το αντικείμενο Z ανήκει στην $\mathcal{S}$.

Παρατήρηση 1.5.2. Από το αξίωμα [TR2] μπορούμε να συμπεράνουμε ότι εάν $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ και

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$, τότε εάν οποιαδήποτε δύο από τα αντικείμενα X, Y και Z ανήκουν στην S τότε και το τρίτο ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$.

Ορισμός 1.5.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Θα ορίσουμε την συλλογή των μορφισμών $Mor_{\mathcal{S}}$ της $\mathcal{T}$ ως ακολούθως. Ένας μορφισμος $f : X \longrightarrow Y$ ανήκει στην συλλογή $Mor_{\mathcal{S}}$ αν και μόνο αν, υπάρχει ένα τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{f} Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε το αντικείμενο Z να ανήκει στην $\mathcal{S}$.

Παρατήρηση 1.5.4. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην συλλογή $Mor_{\mathcal{S}}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{f} Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε το αντικείμενο Z να ανήκει στην $\mathcal{S}$. Από την Παρατήρηση 1.1.21, το αντικείμενο Z είναι μοναδικό ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, και από τον Ορισμό 1.5.1, η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς, η συλλογή $Mor_{\mathcal{S}}$ είναι καλώς ορισμένη.

Λήμμα 1.5.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Κάθε ισομορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ ένας ισομορφισμός. Από την Πρόταση 1.2.4 το υποψήφιο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Αλλά εφόσον $\mathcal{S}$ είναι προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ εξ ορισμού περιλαμβάνει το 0. Συνεπώς, ο f ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$.

□

Λήμμα 1.5.6. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Y'$ δύο μορφισμοί της $\mathcal{T}$. Εάν δύο απο τους μορφισμούς $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Y'$ και $gf : X \longrightarrow Y'$ ανήκουν στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$, τοτε ανήκει και ο τρίτος επίσης.*

Απόδειξη. Συμπληρώνουμε, τους μορφισμούς f, g και gf σε τρίγωνα

$$X \xrightarrow{f} Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

$$Y \xrightarrow{g} Y' \dashrightarrow Y'' \dashrightarrow \Sigma Y$$

και

$$X \xrightarrow{gf} Y' \dashrightarrow Z' \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{T}$, αντίστοιχα. Από το αξίωμα του Verdier (Πρόταση 1.4.5), επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & Y'' \arrow[r, "1"] \arrow[d] & Y'' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y \arrow[r] & \Sigma Z \arrow[r] & \Sigma^2 X
\end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός f ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ αν και μόνο αν το αντικείμενο Z ανήκει στην $\mathcal{S}$, ο μορφισμός g ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ αν και μόνο αν το αντικείμενο Y'' ανήκει στην $\mathcal{S}$, και ο μορφισμός gf ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ αν και μόνο αν το αντικείμενο Z' ανήκει στην $\mathcal{S}$. Τώρα στο τρίγωνο

$$Z \longrightarrow Z' \longrightarrow Y'' \longrightarrow \Sigma Z$$

, από την Παρατήρηση 1.5.2, γνωρίζουμε ότι εάν οποιαδήποτε δύο από τα αντικείμενα Z, Z' και Y'' ανήκουν στην $\mathcal{S}$ τότε και το τρίτο ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$.

□

Λήμμα 1.5.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Τότε υπάρχει μια υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ της οποίας τα αντικείμενα αποτελούνται από όλα τα αντικείμενα της $\mathcal{T}$, και οι μορφισμοί της από όλους τους μορφισμούς οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$.*

Απόδειξη. Έστω X ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{T}$. Από το Λήμμα 1.5.5 γνωρίζουμε ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1 : X \longrightarrow X$, όντας ισομορφισμός, ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$. Αλλά από το Λήμμα 1.5.6 γνωρίζουμε ότι η σύνθεση μορφισμών που ανήκουν στην $Mor_{\mathcal{S}}$ ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{S}}$. Συνεπώς, η κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ είναι μία υποκατηγορία της $\mathcal{T}$.

□

Λήμμα 1.5.8.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Έστω ότι το τετράγωνο*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g'"] \\
Y' \arrow[r, "f'"] & Z'
\end{tikzcd}$$

είναι ομοτοπικά καρτεσιανό. Αν ο f ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ τότε ο f' ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$, και αν ο g ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ τότε ο g' ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$. Με άλλα λόγια, το ομοτοπικό pushout μορφισμών που ανήκουν στην κλαση $Mor_{\mathcal{S}}$ επάγει μορφισμούς που ανήκουν στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν ο g ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ τότε και ο g' ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$. Ο ισχυρισμός για τον μορφισμό f είναι πανομοιότυπος. Από το Λήμμα 1.4.4 το ομοτοπικά καρτεσιανό τετράγωνο μπορεί να συμπληρωθεί σ' ένα μορφισμό τριγώνων της παρακάτω μορφής

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f'"'] & Y'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "1"'] & \Sigma Y \arrow[d, dashed, "\Sigma f"'] \\
Z \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, dashed] & Y'' \arrow[r, dashed] & \Sigma Z
\end{tikzcd}$$

Τώρα επειδή ο g ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$, έπεται ότι το Y'' ανήκει στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, υπάρχει ένα τρίγωνο που συμπληρώνει τον μορφισμό g' στην $\mathcal{T}$ έτσι ώστε το αντικείμενο Y'' να ανήκει στην $\mathcal{S}$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι, αν ο g ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ τότε ο g' ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{S}}$.

□

Λήμμα 1.5.8.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Έστω ότι το τετράγωνο*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & Z \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ Y' & \xrightarrow{\quad f' \quad} & Z' \end{array}$$

είναι ομοτοπικά καρτεσιανό. Τότε αν ο f' ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ τότε ο f ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$, και αν ο g' ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$ τότε ο g ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$. Με άλλα λόγια, το ομοτοπικό pullback μορφισμών που ανήκουν στην κλαση $Mor_{\mathcal{S}}$ επάγει μορφισμούς που ανήκουν στην κλάση $Mor_{\mathcal{S}}$.

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 1.5.8.1.

□

1.6 Τα αξιώματα [TR5] και [TR5*], και τα ομοτοπικά συνόρια και όρια

Σ' αυτή την Ενότητα θα ορίσουμε τα συγκινόμενα και τα ομοτοπικά συνόρια, καθώς επίσης και τα δυϊκά τους, τα γινόμενα και τα ομοτοπικά όρια.

Ορισμός 1.6.1. *Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ θα λέγεται ότι ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(α)] εάν, εκτός από τα αξιώματα [TR1]–[TR4] , ισχύει το ακόλουθο :*

[TR5(α)] : *Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε σύνολο Λ πληθικότητας $< \alpha$, και για κάθε συλλογή, $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ αντικειμένων της $\mathcal{T}$, το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Εάν η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποίει το αξίωμα [TR5(α)] για όλους τους άπειρους πληθαρίθμους α, θα λέμε ότι η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] .*

Ορισμός 1.6.2. *Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ θα λέγεται ότι ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*(α)] εάν, εκτός από τα αξιώματα [TR1]-[TR4] , ισχύει το ακόλουθο :*

[TR5*(α)] : *Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$γινόμενα. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε σύνολο Λ πληθικότητας $< \alpha$, και για κάθε συλλογή, $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ αντικειμένων της $\mathcal{T}$, το γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Εάν η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποίει το αξίωμα [TR5*(α)] για όλους τους άπειρους πληθαρίθμους α, θα λέμε ότι η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*] .*

Παρατήρηση 1.6.3. Από τις Πρότασεις 1.2.1.1 και 1.2.1.2 τα γινόμενα και τα συγκινόμενα τριγώνων είναι τρίγωνα. Ειδικότερα, εαν η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(α)] τότε δοθέντος ενός συνόλου τριγώνων πληθικότητας $< \alpha$, το συγκινόμενο τους υπάρχει, και συνεπώς από την Πρόταση 1.2.1.2 είναι ένα τρίγωνο. Κατά δυϊκό τρόπο, εαν η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*] τότε δοθέντος ενός συνόλου τριγώνων πληθικότητας $< \alpha$, το γινόμενο τους υπάρχει, και συνεπώς από την Πρόταση 1.2.1.1 είναι ένα τρίγωνο.

Ορισμός 1.6.4.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)] , αυτό σημαίνει ότι τα αριθμήσιμα συγκινόμενα υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Έστω μια αριθμήσιμη ακολουθία απο αντικείμενα και μορφισμούς της $\mathcal{T}$*

$$X_0 \xrightarrow{\quad j_1 \quad} X_1 \xrightarrow{\quad j_2 \quad} X_2 \xrightarrow{\quad j_3 \quad} X_3 \xrightarrow{\quad j_4 \quad} \cdots$$

Το ομοτοπικό συνόριο (ή συνόριο Milnor) της ακολουθίας, το οποίο συμβολίζεται ως $\underrightarrow{Hocolim}\, X_i$, δίνεται εξ ορισμού, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, ως το αντικείμενο που συμπληρώνει τον μορφισμό

$$1 - shift : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$$

σ' ένα τρίγωνο

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \dashrightarrow \underrightarrow{Hocolim}\, X_i \dashrightarrow \Sigma\Big\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\Big\}$$

στην $\mathcal{T}$. Ο μορφισμός $shift : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ είναι ο (μοναδικός) μορφισμός που επάγεται στο πρώτο συγκινόμενο από τους μορφισμούς $u_{i+1} \circ j_{i+1} : X_i \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "j_{i+1}"] \arrow[d, "u_i"'] & X_{i+1} \arrow[d, "u_{i+1}"] \\
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[r, dashed, "shift"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i
\end{tikzcd}$$

καθίσταται μεταθετικό, όπου $u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ είναι η κανονική εμφύτευση του X_i στο συγκινόμενο.

Ορισμός 1.6.4.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία που ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*($\aleph_1$)] , αυτό σημαίνει ότι τα αριθμήσιμα γινόμενα υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Έστω μια αριθμήσιμη ακολουθία απο αντικείμενα και μορφισμούς της $\mathcal{T}$*

$$\cdots \xrightarrow{j_4} X_3 \xrightarrow{j_3} X_2 \xrightarrow{j_2} X_1 \xrightarrow{j_1} X_0$$

Το ομοτοπικό όριο (ή όριο Milnor) της ακολουθίας, το οποίο συμβολίζεται ως $\underleftarrow{Holim}\, X_i$, δίνεται εξ ορισμού, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, ως το αντικείμενο που συμπληρώνει τον μορφισμό

$$1 - shift : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$$

σ' ένα τρίγωνο

$$\underleftarrow{Holim}\, X_i \dashrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \xrightarrow{1-shift} \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \dashrightarrow \Sigma\Big\{\underleftarrow{Holim}\, X_i\Big\}$$

στην $\mathcal{T}$. Ο μορφισμός $shift : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ είναι ο (μοναδικός) μορφισμός που επάγεται στο δεύτερο γινόμενο από τους μορφισμούς $j_{i+1} \circ p_{i+1} : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow X_i$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X_{i+1} \arrow[r, "j_{i+1}"] & X_i \\
\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[u, "p_{i+1}"] \arrow[r, dashed, "shift"] & \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[u, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

καθίσταται μεταθετικό, όπου $p_i : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow X_i$ είναι η κανονική προβολή από το γινόμενο στο X_i.

Παρατήρηση 1.6.5. Για να ακριβολογούμε το ομοτοπικο όριο ορίζεται ως η εικόνα το αντικειμένου που επεκτείνει τον μορφισμό $1 - shift : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ μέσω του συναρτητή Σ^{-1}.

Παρατήρηση 1.6.6. Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν μορφισμό ακολουθιών, αυτό σημαίνει οτι υπάρχουν απεικονίσεις $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ τέτοιες ώστε να υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[r, "j_3"] \arrow[d, "f_2"'] & X_3 \arrow[r, "j_4"] \arrow[d, "f_3"'] & \cdots \\
Y_0 \arrow[r, "k_1"] & Y_1 \arrow[r, "k_2"] & Y_2 \arrow[r, "k_3"] & Y_3 \arrow[r, "k_4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Επιλέγω ένα ομοτοπικό συνόριο για κάθε γραμμή. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i"'] & \coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[r] \arrow[d, "\coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i"'] & \underrightarrow{Hocolim}\ X_i \arrow[r] & \Sigma\coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[d, "\Sigma\coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i"'] \\
\coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} Y_i \arrow[r, "1-shift"] & \coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} Y_i \arrow[r] & \underrightarrow{Hocolim}\ Y_i \arrow[r] & \Sigma\coprod\limits_{i\in\mathbb{N}} Y_i
\end{tikzcd}$$

Από το αξίωμα [TR3] , υπάρχει μια απεικόνιση $\underrightarrow{Hocolim}\ X_i \longrightarrow \underrightarrow{Hocolim}\ Y_i$, όχι απαραίτητα μοναδική, η οποία καθιστά το προηγούμενο διάγραμμα μεταθετικό. Επίσης, από την Πρόταση 1.1.20, έπεται ότι ισόμορφες ακολουθίες έχουν (μη κανονικά) ισόμορφα ομοτοπικά συνόρια. Ομοίως, για τα ομοτοπικά όρια.

Τα ομοτοπικά συνόρια και τα ομοτοπικά συνόρια μετατίθενται ως προς (μη κανονικό) ισομορφισμό, με τα (πεπερασμένα) ευθέα αθροίσματα. Θα δείξουμε την πρώτη περίπτωση, η άλλη περίπτωση είναι δυϊκή.

Λήμμα 1.6.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)] . Έστω οτι δίνονται οι ακολουθίες*

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \cdots$$

και

$$Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y_3 \longrightarrow \cdots$$

τότε, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, ισχύει

$$\underrightarrow{Hocolim}\ \{X_i \oplus Y_i\} \ \simeq\ \{\underrightarrow{Hocolim}\ X_i\} \oplus \{\underrightarrow{Hocolim}\ Y_i\}$$

Απόδειξη. Από την Προταση 1.1.2.1 το συγκινόμενο των τριγώνων

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \dashrightarrow \underrightarrow{Hocolim}\ X_i \dashrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\}$$

και

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} Y_i \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} Y_i \dashrightarrow \underrightarrow{Hocolim}\ Y_i \dashrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} Y_i\right\}$$

είναι ένα τρίγωνο. Εξ αιτίας του ισομορφισμού

$$\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\} \oplus \left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} Y_i\right\} \ \simeq\ \coprod_{i\in\mathbb{N}} \{X_i \oplus Y_i\}$$

, και του γεγονότος ότι το αντικείμενο που επεκτείνει τον μορφισμό

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} \{X_i \oplus Y_i\} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} \{X_i \oplus Y_i\}$$

σ΄ ένα τρίγωνο, είναι μοναδικά καθορισμένο ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, έπεται ο ζητούμενος μη κανονικός ισομορφισμός.

□

Λήμμα 1.6.8.1. *[Τέχνασμα του Eilenberg] Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)] , αυτό σημαίνει ότι τα αριθμήσιμα συγκινόμενα υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Έστω X ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$. Τότε το συγκινόμενο $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ενός συνόλου αντιτύπων του X πληθικότητας*

$\aleph_0$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Θεωρούμε τις φυσικές εμφυτεύσεις $u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ στο συγκινόμενο, όπου $X = X_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι, οι απεικονίσεις $u_0 : X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, και $u_{i-1} - u_i : X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$, όπου $i \geq 1$, εφοδιάζουν επίσης το αντικείμενο $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ με την δομή ενός συγκινομένου στην $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Έστω ότι δίνονται απεικονίσεις $\beta_i : X_i \longrightarrow Y$ για κάθε $i \geq 0$. Τότε αναδρομικά ορίζουμε μια οικογένεια απεικονίσεων $\gamma_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, όπου $\gamma_0 = \beta_0$ και για κάθε $i \geq 1$

$$\gamma_i = \gamma_{i-1} - \beta_i$$

Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του συγκινομένου $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση $\beta : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow Y$ η οποία καθιστά τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dr, "\gamma_i"] & \\ \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & Y \end{tikzcd}$$

μεταθετικά, δηλαδή $\beta u_i = \gamma_i$, για κάθε $i \geq 0$. Επαγωγικά μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ισχύει $\beta(u_{i-1} - u_i) = \beta_i$, για κάθε $i \geq 0$, και επειδή β είναι η μοναδική απεικόνιση μ΄ αυτή την ιδιότητα, έπεται το ζητούμενο.

□

Λήμμα 1.6.8.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)] . Έστω X ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{T}$, και έστω*

$$X \xrightarrow{\ 1\ } X \xrightarrow{\ 1\ } X \xrightarrow{\ 1\ } X \xrightarrow{\ 1\ } \cdots$$

η ακολουθία στην οποία όλες οι απεικονίσεις οι ταυτοτικές 1. Τότε υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\underrightarrow{Hocolim}\, X \;\simeq\; X$$

ο οποίος είναι ακόμα και κανονικός.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα συγκινόμενο $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ των αντικειμένων της ακολουθίας. Επίσης, έστω $u_i : X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ η φυσική εμφύτευση στο συγκινόμενο, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε η απεικόνιση $1 - shift : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ έχει συνιστώσες τις απεικονίσεις $u_{i-1} - u_i : X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$, για κάθε $i \geq 1$. Επομένως, από το Λήμμα 1.6.8.1, οι απεικονίσεις $u_0 : X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ και $1 - shift : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ εφοδιάζουν επίσης το $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ με την δομή ενός συγκινομένου στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του συγκινομένου επάγεται ένας ισομορφισμός

$$X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{\begin{bmatrix} u_0 & 1-shift \end{bmatrix}} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$$

Θεωρούμε το υποψήφιο τρίγωνο

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{\ p\ } X \xrightarrow{\ 0\ } \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\}$$

, όπου $p : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow X$ είναι η απεικόνιση που επάγεται στο συγκινόμενο $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ από την απεικόνιση $1 : X \longrightarrow X$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το παρακάτω διάγραμμα είναι ένας ισομορφισμός υποψήφιων τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r] \arrow[d, "1"] & X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r] \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix} u_0 & 1-shift \end{smallmatrix}\right]}"'] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"] & \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\} \arrow[d, "1"] \\
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "1-shift"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "p"] & X \arrow[r, "0"] & \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\}
\end{tikzcd}$$

, όπου $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ και $X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow X$ είναι η δεύτερη φυσική εμφύτευση, και η πρώτη φυσική προβολή του (πεπερασμένου) γινομένου−συγκινομένου $X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$, αντίστοιχα. Το επάνω υποψήφιο τρίγωνο ισούται με το ευθύ άθροισμα των τριγώνων

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{\quad 1 \quad} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\}$$

και

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \longrightarrow 0$$

Συνεπώς, από την Πρόταση 1.2.1.1 είναι ένα τρίγωνο. Επομένως, από το αξίωμα [TR0] έπεται ότι υποψήφιο τρίγωνο

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{\quad p \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\}$$

είναι ένα τρίγωνο. Συνεπώς, από την Παρατήρηση 1.1.21 συμπεραίνουμε ότι $\underrightarrow{Hocolim}\ X \simeq X$, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό. Τέλος, το ότι ο ισομορφισμός δεν είναι μη κανονικός αλλά κανονικός έγκειται στο γεγονός ότι το ομοτοπικό συνόριο $\underrightarrow{Hocolim}\ X$ στην πραγματικότητα υλοποιείται ως ο συνπυρήνας X του μονομορφισμού $1 - shift$.

□

Λήμμα 1.6.9. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)] . Έστω*

$$X_0 \xrightarrow{\quad 0 \quad} X_1 \xrightarrow{\quad 0 \quad} X_2 \xrightarrow{\quad 0 \quad} X_3 \xrightarrow{\quad 0 \quad} \cdots$$

η ακολουθία στην οποία όλες οι απεικονίσεις οι μηδενικές 0. *Τότε υφίσταται ένας ισμορφισμός*

$$\underrightarrow{Hocolim}\ X_i \ \simeq\ 0$$

Απόδειξη. Έστω $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ το συγκινόμενο των αντικειμένων της ακολουθίας. Επειδή η απεικόνιση $1 - shift = 1$ είναι ένας ισομορφισμός, από το Πόρισμα 1.2.4 υπάρχει ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[r, "1"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] & \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right\}
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς, από την Παρατήρηση 1.1.21 έπεται το ζητούμενο.

□

Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(α)], όπου $\alpha \geq \aleph_1$. Τότε η $\mathcal{T}$ είναι Karoubian, αυτό σημαίνει ότι οι ταυτοδύναμοι μορφισμοί διασπώνται στην $\mathcal{T}$, όπως μας λέει η επόμενη

Πρόταση 1.6.10. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία που ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)] . Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$, και υποθέτουμε ότι ο $e : X \longrightarrow X$ είναι ένας ταυτοδύναμος* *μορφισμός, δηλαδή ο e είναι ένας μορφισμός, έτσι ώστε $e^2 = e \circ e = e$. Τότε ο e διασπάται εντός της $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχουν μορφισμοί $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$, έτσι ώστε $gf = e$ και $fg = 1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$X \xrightarrow{\quad e \quad} X \xrightarrow{\quad e \quad} X \xrightarrow{\quad e \quad} \cdots$$

$$X \xrightarrow{\quad 1-e \quad} X \xrightarrow{\quad 1-e \quad} X \xrightarrow{\quad 1-e \quad} \cdots$$

Έστω Y ένα ομοτοπικό συνόριο της πρώτης ακολουθίας, και Z ένα ομοτοπικό συνόριο της δεύτερης ακολουθίας. Από το Λήμμα 1.6.7, το $Y \oplus Z$ είναι ισόμορφο με το ομοτοπικό συνόριο του (πεπερασμένου) συγκινομένου των ακολουθιών, δηλαδή της ακολουθίας

$$X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}} \cdots$$

Η απεικόνιση των ακολουθιών

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X \arrow[r, "\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} e & 1-e \\ 1-e & e \end{bmatrix}"'] & X \oplus X \arrow[r, "\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} e & 1-e \\ 1-e & e \end{bmatrix}"'] & X \oplus X \arrow[r, "\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} e & 1-e \\ 1-e & e \end{bmatrix}"'] & \cdots \\
X \oplus X \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}"'] & X \oplus X \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}"'] & X \oplus X \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ισομορφισμός. Η απεικόνιση

$$\begin{bmatrix} e & 1-e \\ 1-e & e \end{bmatrix} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$$

έχει αντίστροφο τον εαυτό της. Από την Παρατήρηση 1.6.6, έπεται ότι τα ομοτοπικά συνόρια των ακολουθιών είναι ισόμορφα. Το ομοτοπικό συνόριο της κάτω ακολουθίας είναι ισόμορφο με το ομοτοπικό συνόριο της επάνω ακολουθίας, δηλαδή με το $Y \oplus Z$. Όμως το ομοτοπικό συνόριο της κάτω ακολουθίας

$$X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \cdots$$

, από το Λήμμα 1.6.7, είναι ισόμορφο με το (πεπερασμένο) συγκινόμενο των ομοτοπικών συνορίων των δυο ακολουθιών

$$X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \xrightarrow{\quad 1 \quad} \cdots$$

$$X \xrightarrow{\quad 0 \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} \cdots$$

Από το Λήμμα 1.6.8.1 το ομοτοπικό συνόριο της πρώτης ακολουθίας είναι ισόμορφο με το X, ενώ από το Λήμμα 1.6.9 το ομοτοπικό συνόριο της δεύτερης ακολουθίας είναι ισόμορφο με το 0. Συνεπώς, επάγεται ένας (μη κανονικός) ισομορφισμός

$$\begin{bmatrix} g & g' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : Y \oplus Z \longrightarrow X \oplus 0.$$

Αναλυτικότερα, έστω $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ το συγκινόμενο ενός συνόλου αντιτύπων του X πληθικότητας $\aleph_0$, και έστω $u_i : X \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} X$ η φυσική εμφύτευση στο συγκινόμενο, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έστω $v_Y : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow Y$, και $v_Z : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow Z$ οι απεικονίσεις που εμφανίζονται στον ορισμό των τριγώνων των ομοτοπικών συνορίων των ακολουθιών

$$X \xrightarrow{\quad e \quad} X \xrightarrow{\quad e \quad} X \xrightarrow{\quad e \quad} \cdots$$

$$X \xrightarrow{\quad 1-e \quad} X \xrightarrow{\quad 1-e \quad} X \xrightarrow{\quad 1-e \quad} \cdots$$

Τότε το αντικείμενο $Y \oplus Z$, στο τρίγωνο

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{v_Y \oplus v_Z} Y \oplus Z \longrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X\right\} \oplus \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X\right\}$$

, είναι ένα ομοτοπικό συνόριο του (πεπερασμένου) συγκινομένου των ακολουθιών αυτών. Ομοίως, έστω $p : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow X$, και $0 : \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \longrightarrow 0$ οι απεικονίσεις, των Λημμάτων 1.6.8.1, και 1.6.9, αντίστοιχα, που εμφανίζονται στον ορισμό των τριγώνων των ομοτοπικών συνορίων των ακολουθιών

$$X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \xrightarrow{\quad 1 \quad} \cdots$$

$$X \xrightarrow{\quad 0 \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} \cdots$$

Τότε το αντικείμενο $X \simeq X \oplus 0$, στο τρίγωνο

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{p \oplus 0} X \oplus 0 \longrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X\right\} \oplus \Sigma\left\{\coprod_{i\in\mathbb{N}} X\right\}$$

, είναι ένα ομοτοπικό συνόριο του (πεπερασμένου) συγκινομένου των ακολουθιών αυτών. Ο επαγόμενος ισομορφισμός

$$\begin{bmatrix} g & g' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : Y \oplus Z \longrightarrow X \oplus 0.$$

καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} \begin{bmatrix} e & 1-e \\ 1-e & e \end{bmatrix}"'] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "v_Y \oplus v_Z"] \arrow[d, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} \begin{bmatrix} e & 1-e \\ 1-e & e \end{bmatrix}"'] & Y \oplus Z \arrow[d, dashed, "\begin{bmatrix} g & g' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}"'] \\
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "1-shift"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \oplus \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "p \oplus 0"] & X \oplus 0
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα με την σειρά τους, προκύπτουν τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} e"'] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "v_Y"] \arrow[d, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} e"'] & Y \arrow[d, dashed, "g"'] \\
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "1-shift"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} 1-e"'] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "v_Z"] \arrow[d, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} 1-e"'] & Z \arrow[d, dashed, "g'"'] \\
\coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "1-shift"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

Με άλλα λόγια, θεωρούμε τους μορφισμούς των παρακάτω ακολουθιών

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & \cdots \\
X \arrow[r, "1"] & X \arrow[r, "1"] & X \arrow[r, "1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1-e"] \arrow[d, "1-e"'] & X \arrow[r, "1-e"] \arrow[d, "1-e"'] & X \arrow[r, "1-e"] \arrow[d, "1-e"'] & \cdots \\
X \arrow[r, "1"] & X \arrow[r, "1"] & X \arrow[r, "1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Αυτό που μόλις δείξαμε είναι ότι οι απεικονίσεις $g : Y \longrightarrow X$ και $g' : Z \longrightarrow X$ μπορούν να διαδραμάτισουν τον ρόλο των επαγόμενων απεικονίσεων στα ομοτοπικά συνόρια των ακολουθιών των μορφισμών αυτών, έτσι ώστε η επαγόμενη απεικόνιση στο συγκινόμενο $\begin{bmatrix} g & g' \end{bmatrix} : Y \oplus Z \longrightarrow X$ να είναι ένας ισομορφισμός. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, υφίστανται τα παρακάτω μεταθετικά διαγραμμάτα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_i"] \arrow[dd, "e"'] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "v_Y"] \arrow[dd, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} e"'] & Y \arrow[dd, "g"'] \\
& & \\
X \arrow[r, "u_i"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_i"] \arrow[dd, "1-e"'] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "v_Z"] \arrow[dd, "\coprod_{i\in\mathbb{N}} 1-e"'] & Z \arrow[dd, "g'"'] \\
& & \\
X \arrow[r, "u_i"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} X \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

, τα οποία δεν είναι άλλα από τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v_Y u_i"] \arrow[d, "e"'] & Y \arrow[d, "g"'] \\
X \arrow[r, "p u_i"] & X
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v_Z u_i"] \arrow[d, "1-e"'] & Z \arrow[d, "g'"'] \\
X \arrow[r, "p u_i"] & X
\end{tikzcd}$$

, δηλαδή ισχύουν σχέσεις $gv_Y u_i = pu_i e$, και $g'v_Z u_i = pu_i \circ (1-e)$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έστω f μια οποιαδήποτε σύνθεση $v_Y u_i$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, για $i = 0$, θέτουμε $f := v_Y u_0 : X \longrightarrow Y$. Ομοίως, θέτουμε $f' := v_Z u_0 : X \longrightarrow Z$. Τότε επειδή $p \circ u_0 = 1$, οι προηγούμενες σχέσεις γίνονται $e = gf$ και $1 - e = g'f'$, αντίστοιχα. Επομένως, η σύνθεση

$$X \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}} Y \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} g & g' \end{bmatrix}} X$$

ισούται με την $gf + g'f' = e + (1-e) = 1$, δηλαδή με την ταυτοτική απεικόνιση στο X. Επειδή, η απεικόνιση $\begin{bmatrix} g & g' \end{bmatrix} : Y \oplus Z \longrightarrow X$ είναι ένας ισομορφισμός, έπεται ότι η απεικόνιση

$$\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} : X \longrightarrow Y \oplus Z$$

είναι συγχρόνως αριστερή και δεξιά αντίστροφος της. Άρα, η σύνθεση

$$Y \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} g & g' \end{bmatrix}} X \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}} Y \oplus Z$$

ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στο Y, και συνεπώς αποκτούμε την δεύτερη ζητούμενη σχέση $fg = 1$.

□

Παρατήρηση 1.6.11. Δυϊκά, εάν η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*($\aleph_1$)] , τότε οι ταυτοδύναμοι μορφισμοί διασπώνται. Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη και πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας ομοτοπικά όρια.

2 Τοπικοποίηση Verdier

2.1 Τοπικοποίηση Verdier, και οι πυκνές (épaisse) υποκατηγορίες

Ορισμός 2.1.1.1. *Έστω $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ είναι ένας προσθετικός συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ και μια κλάση φυσικών ισομορφισμών*

$$\phi_X : (\mathcal{F} \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ \mathcal{F})(X)$$

, δηλαδή η ϕ είναι μια φυσική ισοδυναμία, έτσι ώστε για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

στην κατηγορία $\mathcal{D}_1$ το υποψήφιο τρίγωνο

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(v)} \mathcal{F}(Z) \xrightarrow{\phi_X \circ \mathcal{F}(w)} \Sigma(\mathcal{F}(X))$$

είναι ένα δικεκριμένο τρίγωνο στην κατηγορία $\mathcal{D}_2$.

Παρατήρηση 2.1.1.2. Ο φυσικός μετασχηματισμός δεν είναι ανάγκη να υποτεθεί ισομορφισμός. Πράγματι, από τα αξιώματα [TR0] , και [TR2] το υποψήφιο τρίγωνο

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{1} \Sigma X$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{D}_1$. Ο $\mathcal{F}$ απεικονίζει το τρίγωνο αυτό, στο τρίγωνο

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{F}(\Sigma X) \xrightarrow{\phi_X \circ \mathcal{F}(1)} \Sigma(\mathcal{F}(X))$$

στην $\mathcal{D}_2$. Από το αξίωμα [TR2] , το υποψήφιο τρίγωνο

$$\mathcal{F}(\Sigma X) \xrightarrow{\phi_X} \Sigma(\mathcal{F}(X)) \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma(\mathcal{F}(\Sigma X))$$

είναι ένα τρίγωνο. Συνεπώς, από το Πόρισμα 1.2.4, έπεται ότι, για κάθε αντικείμενο X, η απεικόνιση

$$\phi_X : (\mathcal{F} \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ \mathcal{F})(X)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Στην συνέχεια, θα επαναδιατυπώσουμε τον Ορισμό 1.5.1, των τριγωνισμένων υποκατηγοριών, στην γλώσσα των τριγωνισμένων συναρτητών.

Ορισμός 2.1.2.1. *Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{C}$ μια πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{D}$ η οποία είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{D}$, αυτό σημαίνει ότι κάθε αντικείμενο της $\mathcal{D}$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$, ανήκει επίσης στην $\mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ θα καλείται μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$, εάν είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία, και ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κλάση των φυσικών ισομορφισμών*

$$\phi_X : (i \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ i)(X)$$

είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις στο ΣX.

Λήμμα 2.1.2.2. *Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{C}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$. Τότε ο προσθετικός αυτομορφισμός Σ της $\mathcal{C}$ είναι ο περιορισμός στην $\mathcal{C}$ του προσθετικού αυτομορφισμού Σ της $\mathcal{D}$. Επιπλέον, τα διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}$ είναι τα υποψήφια τρίγωνα στην $\mathcal{C}$, τα οποία είναι διακεκριμένα στην $\mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Επειδή, ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής, για κάθε X στην $\mathcal{C}$, η κλάση των φυσικών ισομορφισμών $\phi_X : (i \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ i)(X)$ είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις στο ΣX. Έπεται άμεσα ότι ο προσθετικός αυτομορφισμός Σ της $\mathcal{C}$ είναι ο περιορισμός στην $\mathcal{C}$ του προσθετικού αυτομορφισμού Σ της $\mathcal{D}$. Επιπλέον, επειδή ο $i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής κάθε διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}$. Έστω

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

ένα υποψήφιο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ το οποίο είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{D}$. Επειδή, η $\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία μπορούμε να συμπληρώσουμε τον μορφισμό $u : X \longrightarrow Y$ σ' ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{u} Y \dashrightarrow Z' \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{C}$, το οποίο είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}$. Συνεπώς, από το αξίωμα [TR3] επάγεται ένας μορφιμός διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

ο οποίος από την Πρόταση 1.1.20 είναι ένας ισομορφισμός. Επειδή η $\mathcal{C}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{D}$, ο προηγούμενος ισομορφισμός είναι ένας ισομορφισμός υποψήφιων τριγώνων στην $\mathcal{C}$. Συνεπώς, από το αξίωμα [TR1] έπεται ότι το υποψήφιο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{C}$.

□

Πρόταση 2.1.3. *Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{C}$ μια πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{D}$. Η $\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, όπως στον Ορισμό 1.5.1, εάν και μόνο εάν είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, όπως στον Ορισμό 2.1.2.1.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, όπως στον Ορισμό 2.1.2.1. Επειδή, ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής, για κάθε X στην $\mathcal{C}$, η κλάση των φυσικών ισομορφισμών $\phi_X : (i \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ i)(X)$ είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις στο ΣX. Έπεται άμεσα ότι ο προσθετικός αυτομορφισμός Σ της $\mathcal{C}$ είναι ο περιορισμός στην $\mathcal{C}$ του προσθετικού αυτομορφισμού Σ της $\mathcal{D}$, συνεπώς $\Sigma\mathcal{C} = \mathcal{C}$. Έστω

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}$, όπου τα αντικείμενα X και Y να ανήκουν στην $\mathcal{C}$. Επειδή η $\mathcal{C}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{D}$, μπορούμε να συμπληρώσουμε τον μορφισμό $u : X \longrightarrow Y$ σ' ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{u} Y \dashrightarrow Z' \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{C}$, το οποίο είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}$. Από το αξίωμα [TR3] επάγεται ένας μορφιμός διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

ο οποίος από την Πρόταση 1.1.20 είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, $Z \simeq Z'$. Αλλά η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{D}$, συνεπώς το αντικείμενο Z' ανήκει στην $\mathcal{C}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, όπως στον Ορισμό 1.5.1. Θα εφοδιάσουμε την $\mathcal{C}$ με την δομή μιας τριγωνισμένης κατηγορίας. Επειδή, $\Sigma\mathcal{C} = \mathcal{C}$, ορίζουμε ως προσθετικό αυτομορφισμό Σ της $\mathcal{C}$, τον περιορισμό στην $\mathcal{C}$ του προσθετικού αυτομορφισμού Σ της $\mathcal{D}$. Ορίζουμε ως κλάση διακεκριμένων τριγώνων (ως προς τον συναρτητή Σ) στην $\mathcal{C}$ την κλάση όλων των υποψήφιων τριγώνων στην $\mathcal{C}$ τα οποία είναι διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{D}$. Έστω $u : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Τότε έξ υποθέσεως μπορεί να συμπληρωθεί σ' ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \dashrightarrow Z' \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{D}$, έτσι ώστε το αντικείμενο Z' να ανήκει στην $\mathcal{C}$. Αυτό αποδεικνύει το αξίωμα [TR1] . Επειδή η $\mathcal{C}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{D}$, τα υπόλοιπα αξιώματα επαληθεύονται άμεσα.

Τέλος, ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής από τον ορισμό της κλάσης των διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{C}$.

□

Ορισμός 2.1.4. *Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Ο πυρήνας του $\mathcal{F}$ ορίζεται ως η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{C}$ της $\mathcal{D}$ της οποίας τα αντικείμενα απεικονίζονται στα αντικείμενα της $\mathcal{T}$ τα οποία είναι ισόμορφα με το 0. Αυτό σημαίνει ότι,*

$$\mathcal{C} = \{x \in Ob(\mathcal{D}) \mid \mathcal{F}(x) \text{ είναι ισόμορφο με το } 0\}$$

Λήμμα 2.1.5. *Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Τότε ο πυρήνας $\mathcal{C}$ του $\mathcal{F}$ είναι μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Ένα στοιχείο $X \in \mathcal{D}$ εάν και μόνο εάν το $\mathcal{F}(X)$ είναι ισόμορφο με το 0. Επειδή ο Σ είναι ένας αυτομορφισμός, έπεται ότι το $\mathcal{F}(X)$ είναι ισόμορφο με το 0 εάν και μόνο εάν το $\Sigma\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(\Sigma X)$ είναι ισόμορφο με το 0. Συνεπώς, το ΣX ανήκει στον πυρήνα εάν και μόνο εάν το X ανήκει. Έστω ένα τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{D}$, τότε το

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(Z) \longrightarrow \mathcal{F}(\Sigma X)$$

είναι επίσης ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Τώρα εάν τα $\mathcal{F}(X)$ και $\mathcal{F}(Y)$ ανήκουν στον πυρήνα, δηλαδή είναι ισόμορφα με το 0, τότε από την Παρατήρηση 1.1.21 έπεται ότι το προηγούμενο τρίγωνο είναι ισόμορφο με το τρίγωνο

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Συνεπώς, το $\mathcal{F}(Z)$ είναι ισόμορφο με το 0. Επομένως, εάν τα X και Y ανήκουν στην $\mathcal{C}$, τότε και το Z ανήκει στην $\mathcal{C}$.

□

Λήμμα 2.1.6. *Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Έστω $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ είναι ο πυρήνας του συναρτητή $\mathcal{F}$. Εάν $X \oplus Y$ είναι ένα αντικείμενο που στην $\mathcal{C}$, τότε και οι ευθείς προσθετέοι X και Y ανήκουν επίσης στην $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F}$ είναι είναι εξ ορισμού προσθετικός ικανοποιεί την σχέση $\mathcal{F}(X \oplus Y) = \mathcal{F}(X) \oplus \mathcal{F}(Y)$, για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$. Συνεπώς, εάν το $\mathcal{F}(X \oplus Y)$ είναι ισόμορφο με το 0, τότε το $\mathcal{F}(X) \oplus \mathcal{F}(Y)$ είναι ισόμορφο με το 0, και άρα οι ευθείς προσθετέοι $\mathcal{F}(X)$ και $\mathcal{F}(Y)$ είναι ισόμορφοι με το 0.

□

Ορισμός 2.1.7.1. *Μία υποκατηγορία $\mathcal{C}$ μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{D}$ καλείται πυκνή εάν είναι τριγωνισμένη, και επιπλέον περιέχει τους ευθείς προσθετέους των αντικειμένων της, αυτό σημαίνει ότι εάν $X,\ Y \in \mathcal{D}$ έτσι ώστε $X \oplus Y \in \mathcal{C}$, τότε $X,\ Y \in \mathcal{C}$.*

Ορισμός 2.1.7.2. *Μία υποκατηγορία $\mathcal{C}$ μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{D}$ καλείται épaisse εάν είναι τριγωνισμένη και επιπλέον για κάθε διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dr] & & & \\
X \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

του οποίου η βάση είναι ένα τρίγωνο της $\mathcal{D}$, ισχύει ότι, εάν τα Z' και Z ανήκουν στην $\mathcal{C}$, τότε τα X και Y ανήκουν επίσης στην $\mathcal{C}$. Με άλλα λόγια, εάν ένας μορφισμός $X \longrightarrow Y$ της $\mathcal{D}$ παραντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου Z' της $\mathcal{C}$ και ο κώνος του Z (δηλαδή το αντικείμενο που τον συμπληρώνει σ' ένα τρίγωνο στην $\mathcal{D}$) ανήκει επίσης στην $\mathcal{C}$, τότε ο μορφισμός ανήκει επίσης στην $\mathcal{C}$.

Πρόταση 2.1.7.3. *[Κριτήριο του Rickard] Μία τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{C}$ μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{D}$ είναι πυκνή εάν και μόνο εάν είναι épaisse .*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι η $\mathcal{C}$ είναι épaisse . Έστω $X,\ Y \in \mathcal{D}$ έτσι ώστε $X \oplus Y \in \mathcal{C}$. Θεωρούμε τα τρίγωνα

$$X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0 \xrightarrow{\quad 0 \quad} \Sigma X$$

$$0 \xrightarrow{\quad 0 \quad} Y \xrightarrow{\quad 1 \quad} Y \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0$$

Το ευθύ τους άθροισμα είναι ένα τρίγωνο από την Πρόταση 1.2.1.1, συνεπώς από το αξίωμα [TR2] λαμβάνουμε το τρίγωνο

$$\Sigma^{-1}Y \xrightarrow{\quad 0 \quad} X \xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}} Y$$

Συνεπώς, υφίσταται το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr, "0"] & & & \\
\Sigma^{-1}Y \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "0"] & & X \arrow[r, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] & X \oplus Y \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Επειδή, τα 0 και $X \oplus Y$ ανήκουν στην $\mathcal{C}$, η οποία είναι εξ υποθέσεως épaisse , έπεται ότι τα $\Sigma^{-1}Y$ και X ανήκουν στην $\mathcal{C}$ και άρα το X ανήκει στην $\mathcal{C}$, επειδή η $\mathcal{C}$ είναι τριγωνισμένη. Ομοίως το Y.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε οτι η $\mathcal{C}$ είναι πυκνή, και έστω ότι δίνεται ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dr, "\beta"] & & & \\
X \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

με τα Z' και Z να ανήκουν στην $\mathcal{C}$. Θα αποδείξουμε ότι τα X και Y ανήκουν επίσης στην $\mathcal{C}$. Έστω ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] & Z' \arrow[r, dashed, "v'"] & Z'' \arrow[r, dashed, "w'"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

που συμπληρώνει τον μορφισμο $\alpha : X \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{D}$. Το ευθύ του άθροισμα με το τρίγωνο

$$0 \xrightarrow{\quad 0 \quad} Y \xrightarrow{\quad 1 \quad} Y \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0$$

από την Πρόταση 1.2.1.1, είναι το τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\begin{bmatrix}0\\ \alpha\end{bmatrix}} Y\oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & v'\end{bmatrix}} Y\oplus Z'' \xrightarrow{\begin{bmatrix}0 & w'\end{bmatrix}} \Sigma X$$

Η απεικόνιση

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\begin{bmatrix}0\\ \alpha\end{bmatrix}"] \arrow[d, "1"'] & Y\oplus Z' \arrow[r, "\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & v'\end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}"'] & Y\oplus Z'' \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & w'\end{bmatrix}"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "\begin{bmatrix}\beta\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}"] & Y\oplus Z' \arrow[r, "\begin{bmatrix}1 & -\beta\\ 0 & v'\end{bmatrix}"] & Y\oplus Z'' \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & w'\end{bmatrix}"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ισομορφισμός υποψήφιων τριγώνων, και επειδή η επάνω γραμμή είναι ένα τρίγωνο, από το αξίωμα [TR0] , έπεται ότι και η κάτω γραμμή είναι ένα τρίγωνο.

Θεωρούμε τα τρίγωνα

$$X \xrightarrow{\beta\alpha} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

$$X \xrightarrow{\begin{bmatrix}\beta\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}} Y\oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & -\beta\\ 0 & v'\end{bmatrix}} Y\oplus Z'' \xrightarrow{\begin{bmatrix}0 & w'\end{bmatrix}} \Sigma X$$

$$Y\oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}} Y \xrightarrow{0} \Sigma Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}} \Sigma(Y\oplus Z')$$

Από το αξίωμα του Verdier (Πρόταση 1.4.5), επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\begin{bmatrix}\beta\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}"] \arrow[d, "1"'] & Y\oplus Z' \arrow[r, "\begin{bmatrix}1 & -\beta\\ 0 & v'\end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}"'] & Y\oplus Z'' \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & w'\end{bmatrix}"] \arrow[d, dashed, "f"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "\beta\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "0"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "g"'] & \Sigma X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma Z' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}"'] & \Sigma Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & 0 \arrow[d] \\
\Sigma X \arrow[r, "\begin{bmatrix}\Sigma(\beta\alpha)\\ \Sigma\alpha\end{bmatrix}"] & \Sigma(Y\oplus Z') \arrow[r, "\begin{bmatrix}1 & -\Sigma\beta\\ 0 & \Sigma v'\end{bmatrix}"] & \Sigma(Y\oplus Z'') \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & -\Sigma w'\end{bmatrix}"] & \Sigma^2 X
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε ένα τρίγωνο

$$Y\oplus Z'' \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} \Sigma Z' \xrightarrow{h} \Sigma(Y\oplus Z'')$$

Τώρα το $Y\oplus Z''$ ανήκει στη $\mathcal{C}$, επειδή η $\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, και τα Z, Z' ανήκουν στην $\mathcal{C}$. Επειδή η $\mathcal{C}$ έχει υποτεθεί πυκνή έπεται ότι ο ευθύς προσθετέος Y ανήκει στην $\mathcal{C}$. Τέλος, από το τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\beta\alpha} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

, και επειδή η $\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, έπεται ότι και το X ανήκει στην $\mathcal{C}$.

$\square$

Παρατήρηση 2.1.8. Βάσει του Ορισμού 2.1.7.1, το Λήμμα 2.1.6 ισχυρίζεται ότι ο πυρήνας ενός τριγωνισμένου συναρτητή είναι μια πυκνή υποκατηγορία.

Σ' αυτό το σημείο θα διατυπώσουμε το κεντρικό Θεώρημα του οποίου η απόδειξη θα μας απασχολήσει σε όλο το Κεφάλαιο, οφειλόμενο στον Verdier . Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε είναι ελαφρώς διαφοροποιημένη από την κλασσική του Verdier . Ο ορισμός της πυκνής υποκατηγορίας (Ορισμός 2.1.7.2) του Verdier είναι κάπως δύσχρηστος. Για αυτό το λόγο θα υιοθετήσουμε για ορισμό της πυκνής υποκατηγορίας, τον Ορισμό 2.1.7.1 που είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 2.1.7.2, από το Κριτήριο του Rickard .

Θεώρημα 2.1.9. *[Θεώρημα Τοπικοποίησης του Verdier] Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία (όχι απαραίτητα πυκνή). Τότε υπάρχει ένας καθολικός τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F})$. Με άλλα λόγια, υπάρχει μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, και ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F}_{univ})$, και ο $\mathcal{F}_{univ}$ είναι καθολικός με αυτή την ιδιότητα. Αυτό σημαίνει ότι, εάν $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας οποιοσδήποτε άλλος τριγωνισμένος συναρτητής έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F})$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{F}_{univ}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{D}/\mathcal{C} \arrow[dl, dashed, "\mathcal{G}"] \\
\mathcal{T} &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ καλείται συναρτητής τοπικοποίησης Verdier ή τοπικοποίηση Verdier και η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ καλείται πηλίκο Verdier της κατηγορίας $\mathcal{D}$ με την υποκατηγορία $\mathcal{C}$ ή πηλίκο Verdier .

Παρατήρηση 2.1.10. Δεν ισχυριζόμαστε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ είναι πυκνή, και επομένως δεν συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{C} = ker(\mathcal{F}_{univ})$. Από την Παρατήρηση 2.1.8, ο πυρήνας $ker(\mathcal{F}_{univ})$ είναι μια πυκνή υποκατηγορία, και περιέχει την $\mathcal{C}$. Μάλιστα είναι η μικρότερη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$ με αυτή την ιδιότητα. Παρακάτω στην Πρόταση 2.1.35 θα χαρακτηρίσουμε τον πυρήνα ως την πλήρη υποκατηγορία όλων των αντικειμένων τα οποία είναι οι ευθείς προσθετέοι στην $\mathcal{D}$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$, δηλαδή

$$ker(\mathcal{F}_{univ}) = \{x \in Ob(\mathcal{D}) \mid \exists y \in \mathcal{D} \text{ έτσι ώστε } x \oplus y \in \mathcal{C}\}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.9 θα αναβληθεί για το τέλος του Κεφαλαίου. Στην συνέχεια θα ακολουθήσει μια προπαρασκευή, ορίζοντας την καθολική κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ και τον καθολικό συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}$, αποδεικνύοντας μια σωρεία Λημμάτων.

Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό της $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Τα αντικείμενα της $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ ορίζονται ως τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{D}$, δηλαδή $Ob(\mathcal{D}/\mathcal{C}) := Ob(\mathcal{D})$. Επίσης, ορίζουμε ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ}$ να είναι ο ταυτοτικός στα αντικείμενα, δηλαδή $\mathcal{F}_{univ}(X) = X$, για κάθε $X \in \mathcal{D}/\mathcal{C}$.

Μένει να ορίσουμε τους μορφισμούς στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Αυτό ακριβώς θα κάνουμε μέχρι το Λήμμα 2.1.18. Στον Ορισμό 1.5.3, για κάθε τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{D}$, ορίσαμε την κατηγορία $Mor_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{D}$. Ένας μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ ανήκει στην κατηγορία $Mor_{\mathcal{C}}$ αν και μόνο αν, υπάρχει ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

που τον επεκτείνει στην $\mathcal{D}$, τέτοιο ώστε το αντικείμενο Z να ανήκει στην $\mathcal{C}$.

Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής, έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F})$. Ο συναρτητής $\mathcal{F}$ απεικονίζει το αντικείμενο Z στο 0 εάν και μόνο εάν απεικονίζει το διακεκριμένο τριγωνο

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

σ' ένα τρίγωνο ισόμορφο με την εικόνα του τριγώνου

$$X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

μέσω του $\mathcal{F}$. Ισοδύναμα, από το Πόρισμα 1.2.4, ο συναρτητής $\mathcal{F}$ απεικονίζει το αντικείμενο Z στο 0 εάν και μόνο εάν ο $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός. Πράγματι, έστω ότι ο συναρτητής $\mathcal{F}$ απεικονίζει το αντικείμενο Z στο 0. Τότε από το αξίωμα [TR3] επάγεται ένας μορφισμός τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\simeq"'] & \mathcal{F}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{F}(\Sigma X) \arrow[d, "1"'] \\
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "1"] & \mathcal{F}(X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\Sigma X)
\end{tikzcd}$$

, ο οποίος από την Πρόταση 1.1.20 οφείλει να είναι ένας ισομορφισμός. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι άμεση.

Συνεπώς, εάν υποθέσουμε προς στιγμή ότι ο καθολικός συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ υπήρχει, τότε κάθε μορφισμός $f \in Mor_{\mathcal{C}}$ καθίσταται αντιστρέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, δηλαδή ο $\mathcal{F}_{univ}(f)$ καθίσταται αντιστρέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Επομένως, είναι φυσιολογικό να ορίσουμε

Ορισμός 2.1.11. *Για κάθε δύο αντικείμενα X, Y της $\mathcal{D}$ συμβολίζουμε με $\alpha(X, Y)$ την κλάση των διαγραμμάτων της μορφής*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\
X &
\end{tikzcd}$$

τέτοια ώστε $f \in Mor_{\mathcal{C}}$. Ορίζουμε μια σχέση $R(X, Y)$ στην κλάση $\alpha(X, Y)$ έτσι ώστε, δύο στοιχεία (Z, f, g), (Z', f', g') είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση $R(X, Y)$ εάν και μόνο εάν υπάρχουν ένα στοιχείο (Z'', f'', g'') στην $\alpha(X, Y)$ και μορφισμοί

$$Z'' \xrightarrow{u} Z$$

$$Z'' \xrightarrow{v} Z'$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & Y \\
& Z'' \arrow[ul, dashed, "v"] \arrow[ur, dashed, "g''"'] \arrow[dl, dashed, "f''"] \arrow[dr, dashed, "u"'] & \\
X & & Z \arrow[ll, "f"] \arrow[uu, "g"']
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Λήμμα 2.1.12. *Οι μορφισμοί u, v του Ορισμού 2.1.11 ανήκουν αναγκαστικά στην $Mor_{\mathcal{C}}$.*

Απόδειξη. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να το αποδείξουμε για τον μορφισμό u. Τότε όμως $fu = f''$, f και f'' ανήκουν στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Από το Λήμμα 1.5.6, έπεται ότι και ο u ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{C}}$.

□

Παρατήρηση 2.1.13. Τα στοιχεία της κλάσης $\alpha(X, Y)$ μπορούμε να τα αντιλαμβανόμαστε σαν κλάσματα, δηλαδή σαν απεικονίσεις gf^{-1} στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, επειδή κάθε μορφισμός $f \in Mor_{\mathcal{C}}$ είναι αντιστέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Έστω (Z, f, g), (Z', f', g') δύο ισοδύναμα διαγράμματα ως προς την σχέση $R(X, Y)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ένα στοιχείο (Z'', f'', g'') στην $\alpha(X, Y)$ και μορφισμοί

$$Z'' \xrightarrow{u} Z$$

$$Z'' \xrightarrow{v} Z'$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & Y \\
& Z'' \arrow[ul, dashed, "v"] \arrow[ur, dashed, "g''"'] \arrow[dl, dashed, "f''"] \arrow[dr, dashed, "u"'] & \\
X & & Z \arrow[ll, "f"] \arrow[uu, "g"']
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Τότε συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned}
gf^{-1} &= guu^{-1}f^{-1} \\
&= \{gu\}\{u^{-1}f^{-1}\} \\
&= \{gu\}\{fu\}^{-1} \\
&= g''\{f''\}^{-1} \\
&= g'v\{f'v\}^{-1} \\
&= g'vv^{-1}f'^{-1} \\
&= g'f'^{-1}
\end{aligned}$$

, δηλαδή τα διαγράμματα (Z, f, g), (Z', f', g') ισούνται, εάν θεωρηθούν ως απεικονίσεις στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, η ταύτιση των διαγραμμάτων (Z, f, g), (Z', f', g') ως προς την σχέση $R(X, Y)$ είναι φυσιολογική.

Λήμμα 2.1.14. *Η σχέση $R(X, Y)$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η αυτοπαθητικότητα και η ανακλαστικότητα αποδεικνύονται άμεσα. Μένει να δείξουμε την μεταβατικότητα. Έστω (Z_1, f_1, g_1), (Z_2, f_2, g_2) και (Z_3, f_3, g_3) τρία στοιχεία στην $\alpha(X, Y)$ έτσι ώστε το (Z_1, f_1, g_1) να είναι ισοδύναμο με το (Z_2, f_2, g_2) και το (Z_2, f_2, g_2) να είναι ισοδύναμο με το (Z_3, f_3, g_3) ως προς την σχέση $R(X, Y)$ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει οτι υπάρχουν στοιχεία (Z, f, g) και (Z', f', g') στην $\alpha(X, Y)$ και μορφισμοί

$$Z \xrightarrow{\quad u \quad} Z_1 \qquad Z' \xrightarrow{\quad u' \quad} Z_2$$

$$Z \xrightarrow{\quad v \quad} Z_2 \qquad Z' \xrightarrow{\quad v' \quad} Z_3$$

οι οποίοι καθιστούν τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dd, "f_1"'] & & Y \\
& Z \arrow[ul, dashed, "u"] \arrow[ur, dashed, "g"'] \arrow[dl, dashed, "f"] \arrow[dr, dashed, "v"'] & \\
X & & Z_2 \arrow[ll, "f_2"] \arrow[uu, "g_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z_2 \arrow[rr, "g_2"] \arrow[dd, "f_2"'] & & Y \\
& Z' \arrow[ul, dashed, "u'"] \arrow[ur, dashed, "g'"'] \arrow[dl, dashed, "f'"] \arrow[dr, dashed, "v'"'] & \\
X & & Z_3 \arrow[ll, "f_3"] \arrow[uu, "g_3"']
\end{tikzcd}$$

μεταθετικά. Θεωρώ ένα ομοτοπικό pullback τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
Z'' \arrow[r, dashed, "w"] \arrow[d, dashed, "w'"'] & Z \arrow[d, "v"] \\
Z' \arrow[r, "u'"] & Z_2
\end{tikzcd}$$

του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "v"] \\ Z' \arrow[r, "u'"] & Z_2 \end{tikzcd}$$

το οποίο υπάρχει πάντα, από την Σημείωση 1.4.2. Από το Λήμμα 2.1.12 ο μορφισμός u' ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$, συνεπώς από το Λήμμα 1.5.8.2 έπεται ότι το ομοτοπικό του pullback ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$, δηλαδή ο w ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση vw ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$, και πάλι από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση f_2vw ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{C}}$, επομένως το $(Z'', f_2vw, g_2vw) \in \alpha(X,Y)$. Συνεπώς, υπάρχουν ένα στοιχείο (Z'', f_2vw, g_2vw) στην $\alpha(X,Y)$ και μορφισμοί

$$Z'' \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{u} Z_1$$

$$Z'' \xrightarrow{w'} Z' \xrightarrow{v'} Z_3$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dd, "f_1"'] & & Y \\ & Z'' \arrow[ul, dashed, "uw"] \arrow[ur, dashed, "g_2vw"'] \arrow[dl, dashed, "f_2vw"] \arrow[dr, dashed, "v'w'"'] & \\ X & & Z_3 \arrow[ll, "f_3"] \arrow[uu, "g_3"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, τα στοιχεία (Z_1, f_1, g_1) και (Z_3, f_3, g_3) είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση $R(X,Y)$.

□

Ορισμός 2.1.15. *Για κάθε δύο αντικείμενα X, Y της $\mathcal{D}$ ορίζουμε*

$$''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y) := \alpha(X,Y)/R(X,Y)$$

την κλάση των κλάσεων ισοδυναμίας στην $\alpha(X,Y)$ που επάγεται από την σχέση ισοδυναμίας $R(X,Y)$, δηλαδή τον χώρο πηλίκο, και συμβολίζουμε με $[(Z,f,g)]_{\sim}$ την κλάση ισοδυναμίας του (Z,f,g) ως προς την σχέση ισοδυναμίας $R(X,Y)$.

Έστω ένα στοιχείο $(W_1, f_1, g_1) \in \alpha(X,Y)$ και ένα στοιχείο $(W_2, f_2, g_2) \in \alpha(Y,Z)$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "v"'] & W_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & Z \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd}$$

, όπου το μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "v"'] & W_2 \arrow[d, "f_2"] \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] & Y \end{tikzcd}$$

είναι ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g_1, f_2, το οποίο υπάρχει πάντα, και είναι μοναδικό ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, από την Σημείωση 1.4.2.

Στην συνέχεια, και συγκεκριμένα στο Λήμμα 2.1.18, θα δείξουμε ότι το ομοτοπικό pullback μορφισμών που ανήκουν στην κλάση $''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$ στην πραγματικότητα ορίζει μια σύνθεση μορφισμών. Πρώτα όμως θα αποδείξουμε τα επόμενα δύο Λήμματα.

Λήμμα 2.1.16. *Υπάρχει μια καλά ορισμένη απεικόνιση*

$$\Phi : \alpha(Y,Z) \times \alpha(X,Y) \longrightarrow {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X,Z)$$
$$((W_2,f_2,g_2),(W_1,f_1,g_1)) \longrightarrow (W_2,f_2,g_2) \circ (W_1,f_1,g_1) := [(W_3, f_1v, g_2u)]_\sim$$

Απόδειξη. Έστω ένα στοιχείο $(W_1,f_1,g_1) \in \alpha(X,Y)$ και ένα στοιχείο $(W_2,f_2,g_2) \in \alpha(Y,Z)$, και έστω

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "v"'] & W_2 \arrow[d, "f_2"] \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] & Y \end{tikzcd}$$

ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g_1, f_2. Επειδή, ο $f_2 \in Mor_\mathcal{C}$, από το Λήμμα 1.5.8.2, έπεται ότι το ομοτοπικό του pullback ανήκει επίσης στην $Mor_\mathcal{C}$, δηλαδή ο $v \in Mor_\mathcal{C}$. Επειδή ο $f_1 \in Mor_\mathcal{C}$, από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση $f_1v \in Mor_\mathcal{C}$. Συνεπώς, το $(W_3, f_1v, g_2u) \in \alpha(X,Z)$. Το ομοτοπικό pullback των μορφισμών g_1, f_2 είναι μοναδικό ως προς (μη κανονικό) ισομορφισμό στην $\mathcal{D}$. Δηλαδή, εάν υποθέσουμε ότι το μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} W_3' \arrow[r, dashed, "u'"] \arrow[d, dashed, "v'"'] & W_2 \arrow[d, "f_2"] \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] & Y \end{tikzcd}$$

είναι επίσης ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g_1, f_2, τότε από την Σημείωση 1.4.2, υπάρχει ένας μορφισμός $w : W_3' \longrightarrow W_3$, ο οποίος στην προκειμένη περιπτωση είναι ένας ισομορφισμός, ούτως ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $v \circ w = v'$ και $u \circ w = u'$. Επειδή, ο $f_2 \in Mor_\mathcal{C}$, από το Λήμμα 1.5.8.2, έπεται ότι το ομοτοπικό του pullback ανήκει επίσης στην $Mor_\mathcal{C}$, δηλαδή ο $v' \in Mor_\mathcal{C}$. Επειδή ο $f_1 \in Mor_\mathcal{C}$, από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση $f_1v' \in Mor_\mathcal{C}$. Συνεπώς, το $(W_3', f_1v', g_2u') \in \alpha(X,Z)$. Επειδή ο μορφισμός w είναι ένας ισομορφισμός, από το Λήμμα 1.5.5, ανήκει στην $Mor_\mathcal{C}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση vw ανήκει στην $Mor_\mathcal{C}$. Επειδή ο $f_1 \in Mor_\mathcal{C}$, από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση f_1vw ανήκει επίσης στην $Mor_\mathcal{C}$, επομένως το $(W_3', f_1vw, g_2uw) \in \alpha(X,Z)$. Επομένως, υπάρχουν ένα στοιχείο (W_3', f_1vw, g_2uw) στην $\alpha(X,Z)$ και μορφισμοί

$$W_3' \xrightarrow{\quad 1 \quad} W_3'$$

$$W_3' \xrightarrow{\quad w \quad} W_3$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} W_3' \arrow[rr, "g_2u'"] \arrow[dd, "f_1v'"'] & & Z \\ & W_3' \arrow[ul, dashed, "1"] \arrow[ur, dashed, "g_2uw"'] \arrow[dl, dashed, "f_1vw"'] \arrow[dr, dashed, "w"] & \\ X & & W_3 \arrow[ll, "f_1v"] \arrow[uu, "g_2u"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Δείξαμε λοιπόν ότι τα στοιχεία $(W_3', f_1 v', g_2 u')$ και $(W_3, f_1 v, g_2 u)$ είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση $R(X,Z)$. Συνεπώς, η εικόνα της απεικόνισης Φ στο πηλίκο $''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Z)$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή είναι ανεξάρτητη των επιλογών των ομοτοπικών pullback των μορφισμών g_1, f_2.

$\square$

Λήμμα 2.1.17. *Δοθέντος ενός στοιχείου $(W_1, f_1, g_1) \in \alpha(X,Y)$, ενός στοιχείου $(W_2, f_2, g_2) \in \alpha(Y,Z)$ και ενός διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & W_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] & Z \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd}$$

με $v' \in Mor_{\mathcal{C}}$, τα στοιχεία $(W_3, f_1 v, g_2 u)$ και $(P, f_1 v', g_2 u')$ είναι ισοδύναμα, δηλαδή ταυτίζονται στην $''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Z)$, όπου το $(W_3, f_1 v, g_2 u)$ προκύπτει από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "v"'] & W_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] & Z \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd}$$

όπου το μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "v"'] & W_2 \arrow[d, "f_2"'] \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] & Y \end{tikzcd}$$

είναι ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g_1, f_2.

Απόδειξη. Από την Σημείωση 1.4.2, υπάρχει μία απεικόνιση $w : P \longrightarrow W_3$ η οποία απεικονίζει το μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & W_2 \arrow[d, "f_2"'] \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] & Y \end{tikzcd}$$

στο ομοτοπικό pullback τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "v"'] & W_2 \arrow[d, "f_2"'] \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] & Y \end{tikzcd}$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $w : P \longrightarrow W_3$ καθιστά τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "v'"'] \arrow[d, dashed, "w"] \\ W_1 & W_3 \arrow[l, "v"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[d, dashed, "w"'] \arrow[dr, "u'"] & \\ W_3 \arrow[r, "u"] & W_2 \end{tikzcd}$$

μεταθετικά, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $v \circ w = v'$ και $u \circ w = u'$, από τις οποίες επάγονται οι σχέσεις $f_1 v \circ w = f_1 v'$ και $g_2 u \circ w = g_2 u'$. Το $v' \in Mor_{\mathcal{C}}$ εξ υποθέσεως. Επειδή ο $f_1 \in Mor_{\mathcal{C}}$, από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση $f_1 v'$ ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$, επομένως το $(P, f_1 v', g_2 u') \in \alpha(X, Z)$. Συνεπώς, υπάρχουν ένα στοιχείο $(P, f_1 v', g_2 u')$ στην $\alpha(X, Z)$ και μορφισμοί

$$P \xrightarrow{\quad w \quad} W_3$$

$$P \xrightarrow{\quad 1 \quad} P$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[rr, "g_2 u"] \arrow[dd, "f_1 v"'] & & Z \\ & P \arrow[ul, dashed, "w"'] \arrow[ur, dashed, "g_2 u'"] \arrow[dl, dashed, "f_1 v'"'] \arrow[dr, dashed, "1"] & \\ X & & P \arrow[ll, "f_1 v'"] \arrow[uu, "g_2 u'"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, τα στοιχεία $(W_3, f_1 v, g_2 u)$ και $(P, f_1 v', g_2 u')$ είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση $R(X, Z)$.

□

Λήμμα 2.1.18. *Η απεικόνιση η οποία ορίστηκε στο Λήμμα 2.1.16*

$$\Phi : \alpha(Y, Z) \times \alpha(X, Y) \longrightarrow {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X, Z)$$

$$((W_2, f_2, g_2), (W_1, f_1, g_1)) \longrightarrow [(W_2, f_2, g_2) \circ (W_1, f_1, g_1)]_{\sim} := [(W_3, f_1 v, g_2 u)]_{\sim}$$

είναι συμβατή με την σχέση ισοδυναμίας $R(Y, Z) \times R(X, Y)$ στην κλάση $\alpha(Y, Z) \times \alpha(X, Y)$. Συνεπώς, επάγεται μια καλώς ορισμένη απεικόνιση

$$\overline{\Phi} : {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(Y, Z) \times {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X, Y) \longrightarrow {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X, Z)$$

$$([(W_2, f_2, g_2)]_{\sim}, [(W_1, f_1, g_1)]_{\sim}) \longrightarrow [(W_2, f_2, g_2)]_{\sim} \circ [(W_1, f_1, g_1)]_{\sim} := [(W_3, f_1 v, g_2 u)]_{\sim}$$

Η $\overline{\Phi}$ ορίζει μια σύνθεση μορφισμών, δηλαδή ικανοποιεί τα παρακάτω δύο αξιώματα :

2.1.18.1. *Αξίωμα της ταυτότητας. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε αντικείμενο X υπάρχει ένας μορφισμός $[(X, 1, 1)]_{\sim} \in {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X, X)$ ο οποίος καλείται ο ταυτοτικός μορφισμός στο X, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $[(W, f, g)]_{\sim} \in {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(Z, X)$ και για κάθε μορφισμό $[(W', f', g')]_{\sim} \in {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X, Z')$, να ισχύουν οι σχέσεις*

$$[(X, 1, 1)]_{\sim} \circ [(W, f, g)]_{\sim} = [(W, f, g)]_{\sim} \;\text{ και }\; [(W', f', g')]_{\sim} \circ [(X, 1, 1)]_{\sim} = [(W', f', g')]_{\sim}$$

2.1.18.2. *Αξίωμα της προσεταιριστικότητας. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε μορφισμό $[(W, f, g)]_{\sim} \in {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X, X')$, για κάθε μορφισμό $[(W', f', g')]_{\sim} \in {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X', X'')$, και για κάθε μορφισμό $[(W'', f'', g'')]_{\sim} \in {''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}}(X'', X''')$, ισχύει η σχέση*

$$[(W'', f'', g'')]_{\sim} \circ ([(W', f', g')]_{\sim} \circ [(W, f, g)]_{\sim}) = ([(W'', f'', g'')]_{\sim} \circ [(W', f', g')]_{\sim}) \circ [(W, f, g)]_{\sim}$$

Απόδειξη. Εργαζόμαστε με αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας. Θέλουμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\overline{\Phi}$ είναι μια καλώς ορισμένη απεικόνιση, δηλαδή η απεικόνιση Φ λαμβάνει σταθερή τιμή, ανεξάρτητη της επιλογής των αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας. Πρώτα θα δείξουμε ότι η Φ λαμβάνει σταθερή τιμή, ανεξάρτητη της επιλογής των αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας στην πρώτη μεταβλητή. Έστω $(W,f,g) \in \alpha(X,Y)$ ένα σταθερό στοιχείο και $(W',f',g'),(W'',f'',g'') \in \alpha(Y,Z)$ δύο ισοδύναμα στοιχεία ως προς την σχέση $R(Y,Z)$. Συνεπώς, υπάρχουν ένα στοιχείο (Z',p,q) στην $\alpha(Y,Z)$ και μορφισμοί

$$Z' \xrightarrow{q'} W'$$

$$Z' \xrightarrow{p'} W''$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
W'' \arrow[rr, "g''"] \arrow[dd, "f''"'] & & Z \\
& Z' \arrow[ul, dashed, "p'"'] \arrow[ur, dashed, "q"] \arrow[dl, dashed, "p"] \arrow[dr, dashed, "q'"'] & \\
Y & & W' \arrow[ll, "f'"] \arrow[uu, "g'"']
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Έστω Q ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g, f', Q' ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g, f'', και T ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g, p. Συνεπώς υφίστανται τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, dashed, "\bar{g}"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}'"'] & W' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Z \\
W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q' \arrow[r, dashed, "\bar{g}'"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}''"'] & W'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & Z \\
W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, dashed, "\bar{g}''"] \arrow[d, dashed, "\bar{p}"'] & Z' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Z \\
W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}$$

Επειδή τα παρακάτω τετράγωνα

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "q'\bar{g}''"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & W' \arrow[d, "f'"'] \\
W \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "p'\bar{g}''"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & W'' \arrow[d, "f''"'] \\
W \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικά, από την Σημείωση 1.4.2 υπάρχουν απεικονίσεις $h : T \longrightarrow Q$ και $h' : T \longrightarrow Q'$ (όχι απαραίτητα μοναδικές) οι οποίες καθιστούν τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "\bar{p}"'] \arrow[d, dashed, "h"] \\
W & Q \arrow[l, "\bar{f}'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\bar{g}''"] \arrow[d, dashed, "h"'] & Z' \arrow[d, "q'"] \\
Q \arrow[r, "\bar{g}"] & W'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "\bar{p}"'] \arrow[d, dashed, "h'"] \\
W'' & Q' \arrow[l, "\bar{f}''"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\bar{g}''"] \arrow[d, dashed, "h'"'] & Z' \arrow[d, "p'"] \\
Q' \arrow[r, "\bar{g}'"] & W''
\end{tikzcd}
$$

Επειδή, ο $p \in Mor_{\mathcal{C}}$, από το Λήμμα 1.5.8.2, έπεται ότι το ομοτοπικό του pullback ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{C}}$, δηλαδή ο $\bar{p} \in Mor_{\mathcal{C}}$. Επειδή ο $f \in Mor_{\mathcal{C}}$, από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι η σύνθεση $f\bar{p}$ ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$, επομένως το $(T, f\bar{p}, q\bar{g}'') \in \alpha(X, Z)$. Συνεπώς, αξιοποιώντας τα προηγούμενα μεταθετικά διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, υπάρχουν ένα στοιχείο $(T, f\bar{p}, q\bar{g}'')$ στην $\alpha(X, Z)$ και μορφισμοί

$$T \xrightarrow{h'} Q'$$

$$T \xrightarrow{h} Q$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[rr, "g'\bar{g}"] \arrow[dd, "f\bar{f}'"'] & & Z \\
 & T \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[ur, dashed, "q\bar{g}''"] \arrow[dl, dashed, "f\bar{p}"] \arrow[dr, dashed, "h'"] & \\
X & & Q' \arrow[ll, "f\bar{f}''"] \arrow[uu, "g''\bar{g}'"']
\end{tikzcd}
$$

μεταθετικό. Συνεπώς, τα στοιχεία

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "g'\bar{g}"] \arrow[d, "f\bar{f}'"'] & Z \\
X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q' \arrow[r, "g''\bar{g}'"] \arrow[d, "f\bar{f}''"'] & Z \\
X &
\end{tikzcd}
$$

είναι ισοδύναμα στην $''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Z)$, δηλαδή

$$\Phi((W', f', g'), (W, f, g)) = \Phi((W'', f'', g''), (W, f, g))$$

Εντελώς όμοια αποδεικνύεται ότι η Φ λαμβάνει σταθερή τιμή, ανεξάρτητη της επιλογής των αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας στην δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή εάν $(W'', f'', g'') \in \alpha(Y, Z)$ είναι ένα σταθερό στοιχείο και $(W, f, g), (W', f', g') \in \alpha(X, Y)$ δύο ισοδύναμα στοιχεία ως προς την σχέση $R(X, Y)$ τότε

$$\Phi((W, f, g), (W'', f'', g'')) = \Phi((W', f', g'), (W'', f'', g''))$$

Συνεπώς, η $\overline{\Phi}$ είναι μια καλώς ορισμένη απεικόνιση.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η $\overline{\Phi}$ ικανοποιεί τα αξιώματα μιας σύνθεσης μορφισμών. Το αξίωμα της ταυτότητας έπεται άμεσα από το Λήμμα 2.1.17. Μένει να αποδείξουμε το αξίωμα της προσεταιριστικότητας. Έστω $(W, f, g) \in \alpha(X, X')$, $(W', f', g') \in \alpha(X', X'')$ και $(W'', f'', g'') \in \alpha(X'', X''')$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dashed, "\bar{g}'"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}''"'] & V' \arrow[r, dashed, "\hat{g}''"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}''"'] & W'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & X''' \\
V \arrow[r, dashed, "\hat{g}'"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}'"'] & W' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X'' & \\
W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X' & & \\
X & & &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο όλα τα τετράγωνα είναι τα ομοτοπικά pullback τετράγωνα των αντίστοιχων μορφισμών. Επειδή ο $f' \in Mor_{\mathcal{C}}$, από το Λήμμα 1.5.8.2, έπεται ότι το ομοτοπικό του pullback $\hat{f}' \in Mor_{\mathcal{C}}$. Ομοίως, επειδή ο $f'' \in Mor_{\mathcal{C}}$, έπεται ότι το ομοτοπικό του pullback $\hat{f}'' \in Mor_{\mathcal{C}}$ και άρα ο $\bar{f}'' \in Mor_{\mathcal{C}}$, όντας ομοτοπικό pullback του $\hat{f}''$. Συνεπώς, όλοι οι κάθετοι μορφισμοί στο διάγραμμα ανήκουν στην $Mor_{\mathcal{C}}$, και από το Λήμμα 1.5.6 έπεται ότι κάθε δυνατή σύνθεση αυτών ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Από την μεταθετικότητα των τετραγώνων του προηγούμενου διαγράμματος, εξ αιτίας του γεγονότος ότι οι κάθετοι μορφισμοί ανήκουν στην $Mor_{\mathcal{C}}$, και συνεπώς κάθε δυνατή σύνθεση αυτών, και του Λήμματος 2.1.17, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα στοιχεία $(W'', f'', g'') \circ ((W', f', g') \circ (W, f, g))$ και $((W'', f'', g'') \circ (W', f', g')) \circ (W, f, g)$ αντίστοιχα, συμπίπτουν στην $\alpha(X, X''')$, και συνεπώς στην $''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, X''')$. Πιο αναλυτικά, η σύνθεση (καταχρηστικά εννοούμε την εφαρμογή της Φ) των στοιχείων $(W, f, g) \in \alpha(X, X')$, $(W', f', g') \in \alpha(X', X'')$ και $(W'', f'', g'') \in \alpha(X'', X''')$ με την προηγούμενη σειρά δύναται να υλοποιηθεί (Λήμμα 2.1.17) μέσω των παρακάτω διαδοχικών διαγραμμάτων

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\hat{g}''\bar{g}'"] \arrow[d, "\bar{f}''"'] & W'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & X''' \\
V \arrow[r, "g'\hat{g}'"] \arrow[d, "f\hat{f}'"'] & X'' & \\
X & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\bar{g}'"] \arrow[d, "\hat{f}'\bar{f}''"'] & V' \arrow[r, "g''\hat{g}''"] \arrow[d, "f'\hat{f}''"'] & X''' \\
W' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X' & \\
X & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g''(\bar{g}''\bar{g}')"] \arrow[d, "(f\bar{f}')\bar{f}''"'] & X''' \\
X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "(g''\bar{g}'')\bar{g}'"] \arrow[d, "f(\bar{f}'\bar{f}'')"'] & X''' \\
X &
\end{tikzcd}$$

αντίστοιχα, τα οποία τελικά από την προσεταιριστικότητα των αβελιανών ομάδων $Hom_{\mathcal{D}}(U, X)$, και $Hom_{\mathcal{D}}(U, X''')$, ισούνται με το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g''\hat{g}''\bar{g}'"] \arrow[d, "f\hat{f}'\bar{f}''"'] & X''' \\
X &
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς, δείξαμε την προσεταιριστικότητα σε επίπεδο αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας, και η $\overline{\Phi}$ μόλις δείξαμε ότι είναι μια καλώς ορισμένη απεικόνιση. Τώρα το ζητούμενο έπεται άμεσα.

$\square$

Ορισμός 2.1.19. *Η κλάση $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ καθίσταται κατηγορία με κλάση αντικειμένων την $Ob(\mathcal{D}/\mathcal{C}) := Ob(\mathcal{D})$ και κλάση μορφισμών την $''Hom''_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$ για κάθε $X,\ Y \in \mathcal{D}$. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$ για τους μορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Επίσης, ορίζουμε έναν συναρτητή $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ ο οποίος είναι ο ταυτοτικός στα αντικείμενα, δηλαδή $\mathcal{F}_{univ}(X) = X$ για κάθε $X \in \mathcal{D}/\mathcal{C}$ και ο οποίος απεικονίζει κάθε μορφισμό $f \in Hom_{\mathcal{D}}(X,Y)$ στην κλάση ισοδυναμίας του διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

, δηλαδή στον μορφισμό $[(X,1,f)]_\sim \in\ Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$.

Λήμμα 2.1.20. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, οι μορφισμοί με αντιπροσώπους*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου.

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "1"] \arrow[d, dashed, "1"'] & X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f"'] & X \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd}$$

Το οποίο αποδεικνύει ότι η σύνθεση $X \longrightarrow Y \longrightarrow X$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο X στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

Ομοίως, θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "1"] \arrow[d, dashed, "1"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f"'] & X & \\ Y & & \end{tikzcd}$$

Τότε η σύνθεση $Y \longrightarrow X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ ισούται με την απεικόνιση

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ Y & \end{tikzcd}$$

η οποία καθίσταται μέσω της απεικόνισης $f : X \longrightarrow Y$ ισοδύναμη με το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ Y & \end{tikzcd}$$

το οποίο είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο Y στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

□

Λήμμα 2.1.21. *Κάθε απεικόνιση στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ με αντιπρόσωπο*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

μπορεί να εκφραστεί ως η σύνθεση δύο απεικονίσεων στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ με αντιπροσώπους

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f"'] & W \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ W & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Το διάγραμμα αυτό

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "1"] \arrow[d, dashed, "1"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ W \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f"'] & W & \\ X & & \end{tikzcd}$$

αποδεικνύει το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 2.1.22. Από το Λήμμα 2.1.20 γνωρίζουμε ότι εάν ένας μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση $Mor_{\mathcal{C}}$, τότε ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(f) \equiv [(X, 1, f)]_{\sim} \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$ είναι αντιστρέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, με αντίστροφο τον $\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1} \equiv [(X, f, 1)]_{\sim} \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(Y, X)$. Από το Λήμμα 2.1.21, γνωρίζουμε ότι οποιοσδήποτε μορφισμός $[(W, f, g)]_{\sim} \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$, είναι της μορφής $[(W, 1, g)]_{\sim} \circ [(W, f, 1)]_{\sim}$. Συνεπώς, κάθε μορφισμός $[(W, f, g)]_{\sim} \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $\mathcal{F}_{univ}(g)\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}$ (παραλείπουμε το $\circ$ για απλούστευση του συμβολισμού), όπου $f \in Mor_{\mathcal{C}}$.

Πρόταση 2.1.23. *Ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$, του Ορισμού 2.1.19, είναι ένας καθολικός συναρτητής μεταξύ όλων των συναρτητών $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F})$, ή ισοδύναμα* *που απεικονίζουν τους μορφισμούς στην $Mor_{\mathcal{C}}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, εάν $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας οποιοσδήποτε άλλος συναρτητής έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F})$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{F}_{univ}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{D}/\mathcal{C} \arrow[dl, dashed, "\mathcal{G}"] \\ \mathcal{T} & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας συναρτητής έτσι ώστε ο $\mathcal{F}(f)$ να είναι ένας ισομορφισμός, για κάθε $f \in Mor_{\mathcal{C}}$. Δοθέντων αντικειμένων $X, Y \in \mathcal{D}$, ορίζουμε μια απεικόνιση $\mathcal{Z}(-) : \alpha(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{T}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ η οποία απεικονίζει ένα στοιχείο $(Z, f, g) \in \alpha(X,Y)$ στον μορφισμό $\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)^{-1}$, δηλαδή $\mathcal{Z}((Z,f,g)) := \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)^{-1}$. Έστω (Z,f,g), $(Z',f',g') \in \alpha(X,Y)$ είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση $R(X,Y)$, τότε από την Παρατήρηση 2.1.13, ισχύει $gf^{-1} = g'f'^{-1}$, επομένως $\mathcal{Z}(f,g) = \mathcal{Z}(f',g')$. Συνεπώς, για κάθε $X, Y \in \mathcal{D}$, επάγεται μια καλά ορισμένη απεικόνιση $\mathcal{Z}'(-) : Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{T}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$, η οποία απεικονίζει έναν μορφισμό $[(Z,f,g)]_{\sim} \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$ στον μορφισμό $\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)^{-1}$, δηλαδή $\mathcal{Z}'([(Z,f,g)]_{\sim}) := \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)^{-1}$. Ορίζουμε τον συναρτητή $\mathcal{G} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}$ να συμπίπτει με τον $\mathcal{F}$ στα αντικείμενα, δηλαδή $\mathcal{G}(X) := \mathcal{F}(X)$ για κάθε $X \in Ob(\mathcal{D}/\mathcal{C})$, δηλαδή $\mathcal{G}([(Z,f,g)]_{\sim}) := \mathcal{Z}'([(Z,f,g)]_{\sim})$ για κάθε $[(Z,f,g)]_{\sim} \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$. Επειδή ο $\mathcal{F}_{univ}$ είναι ένας επιμορφισμός, έπεται ότι είναι δεξιά διαγράψιμος, συνεπώς ο $\mathcal{G}$ είναι μοναδικός. Τέλος, για κάθε $f \in Hom_{\mathcal{D}}(X,Y)$, ισχύει $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ}(f) = \mathcal{G}([(X,1,f)]_{\sim}) = \mathcal{F}(f)$.

□

Παρατήρηση 2.1.24. Η καθολική συνθήκη της κατηγορίας $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ της Πρότασης 2.1.23, είναι αυτο−δυϊκή. Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Τότε η $\mathcal{C}^{op}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{D}^{op}$. Συνεπώς, μπορούμε να σχηματίσουμε την κατηγορία $\mathcal{D}^{op}/\mathcal{C}^{op}$, όπως στον Ορισμό 2.1.19. Η κατηγορία $(\mathcal{D}/\mathcal{C})^{op}$ ικανοποιεί την ίδια καθολική συνθήκη με την κατηγορία $\mathcal{D}^{op}/\mathcal{C}^{op}$. Συνεπώς, από την μοναδικότητα της $\mathcal{D}^{op}/\mathcal{C}^{op}$, ως προς ισομορφισμό κατηγοριών, έπεται ότι υπάρχει ένας (μοναδικός) ισομορφισμός $\mathcal{D}^{op}/\mathcal{C}^{op} \longrightarrow (\mathcal{D}/\mathcal{C})^{op}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^{op} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}^{op}/\mathcal{C}^{op} \arrow[dl, dashed, "\simeq"] \\ (\mathcal{D}/\mathcal{C})^{op} & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επομένως, οι μορφισμοί που ανήκουν στην $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$ μπορούν επίσης να περιγραφούν σαν διαγράμματα με αντιπροσώπους της μορφής

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"'] \\ X \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

όπου $f \in Mor_{\mathcal{C}}$. Η σχέση ισοδυναμίας σε τέτοια διαγράμματα είναι η δυϊκή της $R(X,Y)$ (δυϊκός του Ορισμού 2.1.11). Ένα τέτοιο διάγραμμα μπορούμε να φανταζόμαστε σαν ένα κλάσμα της μορφής $\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(g)$ (δυϊκή της Παρατήρησης 2.1.22). Στην περίπτωση αυτή, η σύνθεση των μορφισμών υλοποιείται μέσω των ομοτοπικών pushout (δυϊκό του Λήμματος 2.1.18).

Λήμμα 2.1.25. *Έστω $f, g : X \longrightarrow Y$ δύο μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{D}$. Τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες*

2.1.25.1. $\mathcal{F}_{univ}(f) = \mathcal{F}_{univ}(g)$

2.1.25.2. *Υπάρχει μια απεικόνιση $\alpha : W \longrightarrow X$ η οποία ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$ έτσι ώστε να ισχύει $f\alpha = g\alpha$.*

2.1.25.3. *Η απεικόνιση $f - g : X \longrightarrow Y$ παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου C.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα την ισοδυναμία των συνθηκών 2.1.25.1 και 2.1.25.2. Οι μορφισμοί $\mathcal{F}_{univ}(f)$ και $\mathcal{F}_{univ}(g)$ ταυτίζονται στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ εάν και μόνο εάν οι αντιπρόσωποι

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα διαγράμματα ως προς την σχέση $R(X,Y)$. Αυτό συμβαίνει, εάν και μόνο εάν υπάρχουν ένα στοιχείο (W, f, g) στην $\alpha(X,Y)$ και μορφισμοί

$$W \xrightarrow{\alpha_2} X$$

$$W \xrightarrow{\alpha_1} X$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "1"'] & & Y \\ & W \arrow[ul, dashed, "\alpha_1"'] \arrow[ur, dashed, "g'"] \arrow[dl, dashed, "f'"] \arrow[dr, dashed, "\alpha_2"'] & \\ X & & X \arrow[ll, "1"] \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Από το διάγραμμα αυτο προκύπτουν τα παρακάτω μεταθετικά τετράγωνα

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & X \arrow[d, "1"] \\ X \arrow[r, "1"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

.

Από το πρώτο τετράγωνο προκύπτει ότι $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, και από το δεύτερο τετράγωνο προκύπτει ότι $f\alpha = g\alpha$.

Μένει να αποδείξουμε την ισοδυναμία των συνθηκών 2.1.25.2 και 2.1.25.3. Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, dashed, "\beta"] & C \arrow[r, dashed] & \Sigma W \end{tikzcd}$$

που συμπληρώνει τον μορφισμό α στην $\mathcal{D}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(-,Y)$ είναι συνομολογικός απεικονίζει το τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία. Από την ακρίβεια της ακολουθίας στην θέση $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(X,Y)$ έπεται ότι, υπάρχει μια απεικόνιση $\alpha : W \longrightarrow X$, έτσι ώστε $(f-g)\circ\alpha = 0$, εάν και μόνο εάν, υπάρχει μια απεικόνιση $w : C \longrightarrow Y$, έτσι ώστε $w \circ \beta = f - g$, δηλαδή η $f - g$ παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου C. Αλλά η απεικόνση $\alpha \in Mor_{\mathcal{C}}$ εάν και μόνο εάν το αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$. Συνεπώς, υπάρχει μια απεικόνιση $\alpha : W \longrightarrow X$ η οποία ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$ έτσι ώστε να ισχύει $f\alpha = g\alpha$ εάν και μόνο εάν η απεικόνιση $f - g : X \longrightarrow Y$ παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου $C \in \mathcal{C}$.

□

Λήμμα 2.1.26. *Δοθέντων δυο μορφισμών $\alpha : X \longrightarrow Y$ και $\beta : Y \longrightarrow Z$ στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ υπάρχουν μορφισμοί $a : X' \longrightarrow Y', b : Y' \longrightarrow Z'$ στην κατηγορία $\mathcal{D}$ και μορφισμοί $s : X' \longrightarrow X, t : Y' \longrightarrow Y, q : Z' \longrightarrow Z$ στην $Mor_{\mathcal{C}}$ οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[d, dashed, "s"'] & Y' \arrow[r, dashed, "b"] \arrow[d, dashed, "t"'] & Z' \arrow[d, dashed, "q"'] \\
X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] & Z
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Επιπλέον, μπορούμε να επιλέξουμε $Z = Z'$ και $q = 1$.

Απόδειξη. Έστω (καταχρηστικά ταυτίζουμε έναν μορφισμό στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ με έναν οποιοδήποτε αντιπρόσωπο του) $\alpha = (W, f, g)$ και $\beta = (W', f', g')$ όπου οι μορφισμοί $f : W \longrightarrow X, f' : W' \longrightarrow Y$ ανήκουν στην κατηγορία $Mor_{\mathcal{C}}$, και οι μορφισμοί $g : W \longrightarrow Y, g' : W' \longrightarrow Z$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, dashed, "n"] \arrow[d, dashed, "m"'] & W' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Z \\
W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}$$

, όπου το Q ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών g, f'. Συνεπώς, θέτοντας $X' = Q, Y' = W', Z' = Z$ και $a = n, b = g', s = fm, t = f', q = 1$ λαμβάνουμε το επιθυμητό διάγραμμα.

□

Λήμμα 2.1.27. *Κάθε μεταθετικό τετράγωνο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι ισόμορφο (στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$) με την εικόνα ενός μεταθετικού τετραγώνου στην $\mathcal{D}$. Πιο συγκεκριμένα για κάθε μεταθετικό τετράγωνο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

υπάρχουν ένα μεταθετικό τετράγωνο στην $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Y' \arrow[r] & Z'
\end{tikzcd}$$

και μορφισμοί $W \longrightarrow W, X' \longrightarrow X, Y' \longrightarrow Y$ και $Z' \longrightarrow Z$ στην $Mor_{\mathcal{C}}$ οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & & X' \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
& Y' \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & Z' \arrow[dd, dashed] \\
W \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \arrow[dr] & \\
& Y \arrow[rr] & & Z
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1.26 για τις συνθέσεις $W \longrightarrow X \longrightarrow Z$ και $W \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & X' \arrow[rr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & Z \arrow[dr, dashed, "1"] \arrow[dd, dashed] & \\
& W_2 \arrow[rr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & Y' \arrow[rr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & Z \arrow[dd, dashed] \\
W \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & X \arrow[rr] & & Z \arrow[dr, "1"] & \\
& W \arrow[rr] & & Y \arrow[rr] & & Z
\end{tikzcd}
$$

στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Έστω W'' ένα ομοτοπικό pullback των μορφισμών $W_1 \longrightarrow W$ και $W_2 \longrightarrow W$. Τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
W'' \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "1"] & & W_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dr, "1"] \arrow[dd] & \\
& W'' \arrow[rr, dashed] & & W_2 \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dd] \\
& & W \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & X \arrow[rr] & & Z \arrow[dr, "1"] & \\
& & & W \arrow[rr] & & Y \arrow[rr] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Συνεπώς, θέτοντας $W_1 = W_2 = W''$, προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
W'' \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd] & & X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dr, "1"] \arrow[dd] & \\
& W'' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dd] \\
W \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & X \arrow[rr] & & Z \arrow[dr, "1"] & \\
& W \arrow[rr] & & Y \arrow[rr] & & Z
\end{tikzcd}
$$

στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Από την μεταθετικότητα της επάνω πλευράς του διαγράμματος, συμπεραίνουμε ότι οι συνθέσεις $W'' \longrightarrow X' \longrightarrow Z$ και $W'' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z$, οι οποίες είναι συνθέσεις απεικονίσεων της $\mathcal{D}$, ταυτίζονται στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.25, υπάρχει ένας μορφισμός $W' \longrightarrow W''$ στην $Mor_{\mathcal{C}}$, έτσι ώστε οι $W' \longrightarrow W'' \longrightarrow W'' \longrightarrow X' \longrightarrow Z$ και $W' \longrightarrow W'' \longrightarrow W'' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z$ να ισούνται (στην $\mathcal{D}$), και επομένως επάγεται το μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
W' \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd] & & X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dr, "1"] \arrow[dd] & \\
& W' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dd] \\
W \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & X \arrow[rr] & & Z \arrow[dr, "1"] & \\
& W \arrow[rr] & & Y \arrow[rr] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Συνεπώς, υπάρχουν ένα μεταθετικό τετράγωνο στην $\mathcal{D}$

$$
\begin{tikzcd}
W' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Y' \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}
$$

και μορφισμοί $W' \longrightarrow W, X' \longrightarrow X, Y' \longrightarrow Y$ και $Z' \longrightarrow Z$ στην $Mor_{\mathcal{C}}$ οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] \arrow[dr] & & X' \arrow[dd, dashed] \arrow[dr] & \\
& Y' \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & Z' \arrow[dd, dashed] \\
W \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \arrow[dr] & \\
& Y \arrow[rr] & & Z
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Επιπλέον, από το Λήμμα 2.1.26 μπορούμε να επιλέξουμε $Z = Z'$ και ο μορφισμός $Z' \longrightarrow Z$ να είναι ο ταυτοτικός στο Z.

$\square$

Λήμμα 2.1.28. *Το αντικείμενο $0 \in \mathcal{D}$ είναι ένα τελικό και συγχρόνως ένα αρχικό αντικείμενο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Επειδή οι δύο ισχυρισμοί είναι δυϊκοί, αρκεί να αποδείξουμε ότι το 0 είναι τελικό αντικείμενο. Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
X &
\end{tikzcd}$$

παριστάνει έναν μορφισμό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Δοθέντος οποιουδήποτε άλλου μορφισμού στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ ο οποίος παρίσταται από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
X &
\end{tikzcd}$$

Τότε ο μορφισμός $f : P \longrightarrow X$ καθιστά τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"'] & 0 & P \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
X & & X &
\end{tikzcd}$$

ισοδύναμα. Συνεπώς, υφίσταται μόνο μια απεικόνιση $X \longrightarrow 0$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

$\square$

Λήμμα 2.1.29. *Έστω X και Y δύο αντικείμενα στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, τα οποία προφανώς ανήκουν στην $\mathcal{D}$. Τότε κάθε γινόμενο–συγκινόμενο $X \oplus Y$ στην $\mathcal{D}$ είναι επίσης ένα γινόμενο–συγκινόμενο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Δηλαδή, ικανοποιεί τις καθολικές ιδιότητες τόσο ενός γινομένου όσο και ενός συγκινομένου.*

Απόδειξη. Υπάρχουν απεικονίσεις στην $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
X \oplus Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y & X \oplus Y & Y \arrow[l, "i_2"'] \\
X & & X \arrow[u, "i_1"] &
\end{tikzcd}$$

οι οποίες εφοδιάζουν το $X \oplus Y$ με την δομή ενός γινόμενου−συγκινόμενου στην $\mathcal{D}$. Θα δείξουμε ότι οι εικόνες τους μέσω του $\mathcal{F}_{univ}$, εφοδιάζουν το $X \oplus Y$ με την δομή ενός γινόμενου−συγκινόμενου στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

Επειδή οι δύο ισχυρισμοί είναι δυϊκοί μεταξύ τους, θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για τα συγκινόμενα. Έστω ότι δίνονται δυο μορφισμοί $X \longrightarrow Q$ και $Y \longrightarrow Q$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, δηλαδή δίνονται δυο κλάσεις ισοδυναμίας των διαγραμμάτων

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Q \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a'"'] & Q \\ Y & \end{tikzcd}$$

Συμπληρώνουμε τους μορφισμούς a και a' σε τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "a"] & X \arrow[r, dashed] & Z \arrow[r, dashed] & \Sigma P \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "a'"] & Y \arrow[r, dashed] & Z' \arrow[r, dashed] & \Sigma P' \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{D}$, και επειδή οι a και a' ανήκουν στην $Mor_{\mathcal{C}}$, τα αντικείμενα Z και Z' να ανήκουν στην $\mathcal{C}$. Το ευθύ άθροισμα των τριγώνων αυτών

$$P \oplus P' \xrightarrow{a \oplus a'} X \oplus Y \longrightarrow Z \oplus Z' \longrightarrow \Sigma P \oplus \Sigma P'$$

είναι ένα τρίγωνο, από την Πρόταση 1.2.1.1. Επειδή, το $Z \oplus Z' \in \mathcal{C}$ έπεται ότι ο μορφισμός $a \oplus a'$ ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Συνεπώς, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P \oplus P' \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "a \oplus a'"'] & Q \\ X \oplus Y & \end{tikzcd}$$

είναι ένας καλά ορισμένος αντιπρόσωπος για έναν μορφισμό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνθέτοντας το διάγραμμα αυτό, με τα στοιχεία $(X \oplus Y, 1, i_l)$, όπου $l = 1, 2$, δηλαδή με τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "1"'] & X \oplus Y \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "1"'] & X \oplus Y \\ Y & \end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "i'_1"] \arrow[d, dashed, "a"'] & P \oplus P' \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "a \oplus a'"'] & Q \\ X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "1"'] & X \oplus Y & \\ X & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, dashed, "i'_2"] \arrow[d, dashed, "a'"'] & P \oplus P' \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "a \oplus a'"'] & Q \\ Y \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "1"'] & X \oplus Y & \\ Y & & \end{tikzcd}$$

τα οποία ισούνται ακριβώς με τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Q \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a'"'] & Q \\ Y & \end{tikzcd}$$

, όπου i'_1 και i'_2 είναι οι κανονικές εμφυτεύσεις στο συγκινόμενο $P \oplus P'$. Συνεπώς, δείξαμε ότι οι μορφισμοί $X \longrightarrow Q$ και $Y \longrightarrow Q$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ παραγοντοποιούνται μέσω του μορφισμού $[(P \oplus P', a \oplus a', [f\ \ g])]_\sim$, δηλαδή

$$[(P \oplus P', a \oplus a', [f\ \ g])]_\sim \circ [(X, 1, i_1)]_\sim = [(P, a, f)]_\sim$$

$$[(P \oplus P', a \oplus a', [f\ \ g])]_\sim \circ [(Y, 1, i_2)]_\sim = [(P', a', g)]_\sim$$

Μένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης $[(P \oplus P', a \oplus a', [f\ \ g])]_\sim$. Για αυτόν τον σκοπό είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε την δυϊκή περιγραφή των μορφισμών στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, από την Παρατήρηση 2.1.24. Υποθέτουμε ότι δίνονται δυο μορφισμοί στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, δηλαδή δίνονται δυο κλάσεις ισοδυναμίας των διαγραμμάτων

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d] \\ X \oplus Y \arrow[r, "f"] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Q \arrow[d] \\ X \oplus Y \arrow[r, "g"] & P' \end{tikzcd}$$

, έτσι ώστε οι συνθέσεις τους με τους μορφισμούς $\mathcal{F}_{univ}(i_1)$ και $\mathcal{F}_{univ}(i_2)$ να συμπίπτουν στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = P'$ και ότι οι $Q \longrightarrow P$ και $Q \longrightarrow P'$ συμπίπτουν, διαφορετικά απλώς αντικαθιστούμε τα P, P' με ένα ομοτοπικό pushout N, και τις απεικονίσεις με τις συνθέσεις $Q \longrightarrow P \longrightarrow N$ και $Q \longrightarrow P' \longrightarrow N$ που προκύπτουν από το ομοτοπικό pushout τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d, dashed] \\ P' \arrow[r, dashed] & N \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έχουμε δυο διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "a"'] \\ X \oplus Y \arrow[r, "f"] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "a"'] \\ X \oplus Y \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

και οι συνθέσεις τους με τα στοιχεία $(X \oplus Y, i_l, 1)$, όπου $l = 1, 2$, δηλαδή με τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & X \oplus Y \arrow[d, "1"'] \\ X \arrow[r, "i_1"] & X \oplus Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \oplus Y \arrow[d, "1"'] \\ Y \arrow[r, "i_2"] & X \oplus Y \end{tikzcd}$$

, δηλαδή τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
 & & Q \arrow[d, "a"] \\
 & X \oplus Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & P \arrow[d, dashed, "1"] \\
X \arrow[r, "i_l"] & X \oplus Y \arrow[r, dashed, "f"] & P
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & Q \arrow[d, "a"] \\
 & X \oplus Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"] & P \arrow[d, dashed, "1"] \\
Y \arrow[r, "i_l"] & X \oplus Y \arrow[r, dashed, "g"] & P
\end{tikzcd}$$

επάγουν τον ίδιο μορφισμό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, δηλαδή

$$\mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(fi_1) = \mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(gi_1) \;\text{ και }\; \mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(fi_2) = \mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(gi_2)$$

Πολλαπλασιάζοντας εξ αριστερών με τον ισομορφισμό $\mathcal{F}_{univ}(a)$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}_{univ}(fi_1) = \mathcal{F}_{univ}(gi_1) \;\text{ και }\; \mathcal{F}_{univ}(fi_2) = \mathcal{F}_{univ}(gi_2)$$

Τώρα από το Λήμμα 2.1.25, έπεται ότι ο μορφισμός $(f-g)\circ i_1$ παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου $C \in \mathcal{C}$, και ο μορφισμός $(f-g)\circ i_2$ παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου $C' \in \mathcal{C}$. Αυτό σημαίνει ότι ο μορφισμός $f-g$ παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου $C \oplus C' \in \mathcal{C}$. Συνεπώς, πάλι από το Λήμμα 2.1.25 συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{F}_{univ}(f) = \mathcal{F}_{univ}(g)$. Πολλαπλασιάζοντας εξ αριστερών με τον ισομορφισμό $\mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}$ λαμβάνουμε την

$$\mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(f) = \mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(g)$$

, γεγονός που αποδεικνύει την μοναδικότητα.

$\square$

Λήμμα 2.1.30. *Η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι προσθετική και ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι ένας προσθετικός συναρτητής.*

Απόδειξη. Η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι εστιγμένη από το Λήμμα 2.1.28 το 0 είναι ένα μηδενικό αντικείμενο. Από το Λήμμα 2.1.29 η $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ έχει πεπερασμένα γινόμενα–συγκινόμενα, και επιπλέον ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ διατηρεί τα γινόμενα–συγκινόμενα. Διατηρεί επίσης το 0. Επειδή η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ έχει πεπερασμένα γινόμενα–συγκινόμενα και ένα μηδενικό αντικείμενο το 0 υπάρχει μια καλά ορισμένη προσθετική δομή στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, η οποία ορίζεται ως

$$f + g := \mathcal{F}_{univ}(\nabla^Y) \circ (f \oplus g) \circ \mathcal{F}_{univ}(\triangle_X)$$

για κάθε $f, g \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$, όπου $\triangle_X : X \longrightarrow X \oplus X$ είναι η διαγώνια απεικόνιση και $\nabla^Y : Y \oplus Y \longrightarrow Y$ είναι η συν–διαγώνια απεικόνιση στην $\mathcal{D}$ αντίστοιχα, έτσι ώστε οι κλάσεις $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$ να είναι μεταθετικά μονοειδή, και η σύνθεση μορφισμών να είναι δι–προσθετική. Συνεπώς για να δείξουμε ότι οι κλάσεις $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$ επιδέχονται την δομή μιας αβελιανής ομάδας, απομένει να δείξουμε ότι κάθε μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ έχει προσθετικό αντίστροφο. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, τότε αυτός μπορεί να εκφραστεί ως $\mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(f)$. Αλλά τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(f) + \mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(-f) &= \mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(f + (-f)) \\
&= \mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}\mathcal{F}_{univ}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι προσθετική. Τέλος, επειδή οι κατηγορίες $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι προσθετικές και ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ διατηρεί τα γινόμενα–συγκινόμενα, έπεται ότι είναι προσθετικός. Πράγματι, έστω ότι δίνονται δυο μορφισμοί $f : X \longrightarrow Y$ και $g : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{D}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{univ}(f+g) &= \mathcal{F}_{univ}(\bigtriangledown^Y \circ (f \oplus g) \circ \bigtriangleup_X) \\
&= \mathcal{F}_{univ}(\bigtriangledown^Y) \circ \mathcal{F}_{univ}(f \oplus g) \circ \mathcal{F}_{univ}(\bigtriangleup_X) \\
&= \mathcal{F}_{univ}(\bigtriangledown^Y) \circ (\mathcal{F}_{univ}(f) \oplus \mathcal{F}_{univ}(g)) \circ \mathcal{F}_{univ}(\bigtriangleup_X) \\
&= \mathcal{F}_{univ}(f) + \mathcal{F}_{univ}(g)
\end{aligned}
$$

□

Λήμμα 2.1.31. *Εάν ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ με αντιπρόσωπο*

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & X \\
X &
\end{tikzcd}
$$

συμπίπτει με την κλάση ισοδυναμίας του ταυτοτικού μορφισμού $1 : X \longrightarrow X$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, τότε ο $f \in Mor_{\mathcal{C}}$.

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, από την ισοδυναμία των μορφισμών υπάρχουν ένα στοιχείο (W, β, g) στην $\alpha(X, X)$ και μορφισμοί

$$W \xrightarrow{u'} X$$

$$W \xrightarrow{u} P$$

οι οποίοι καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & X \\
& W \arrow[ul, dashed, "u"'] \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[dl, dashed, "\beta"] \arrow[dr, dashed, "u'"'] & \\
X & & X \arrow[ll, "1"] \arrow[uu, "1"']
\end{tikzcd}
$$

μεταθετικό. Από το προηγούμενο διάγραμμα προκύπτουν τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"] & P \arrow[d, "a"'] \\
X \arrow[r, "1"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] & P \arrow[d, "f"'] \\
X \arrow[r, "1"] & X
\end{tikzcd}
$$

Από το πρώτο τετράγωνο (Λήμμα 2.1.12) έπεται ότι οι μορφισμοί $u, u' \in Mor_{\mathcal{C}}$, ενώ από το δεύτερο τετράγωνο έπεται ότι ο μορφισμός $u' = fu \in Mor_{\mathcal{C}}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 1.5.6 συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός f ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{C}}$.

□

Λήμμα 2.1.32. *Ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ με αντιπρόσωπο*

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"'] & Y \\
X &
\end{tikzcd}
$$

είναι αντιστέψιμος εάν και μόνο εάν υπάρχουν μορφισμοί f και h στην $\mathcal{D}$ έτσι ώστε οι μορφισμοί gf και hg να ανήκουν και οι δυο στην $Mor_{\mathcal{C}}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)\mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}$ είναι αντιστέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Τότε ο $\mathcal{F}_{univ}(g)$ είναι επίσης αντιστέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί f και h στην $\mathcal{D}$ έτσι ώστε οι μορφισμοί gf και hg να ανήκουν και οι δυο στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Επειδή οι ισχυρισμοί είναι δυϊκοί, αρκεί να δείξουμε την περίπτωση για τον f.

Έστω ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ με αντιπρόσωπο

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] & P \\ Y & \end{tikzcd}$$

ο οποίος είναι δεξιός αντίστροφος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ του μορφισμού $\mathcal{F}_{univ}(g) : P \longrightarrow Y$. Τότε η σύνθεση των διαγραμμάτων

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "1"'] & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"'] & Y \\ Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] & P & \\ Y & & \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας της ταυτοτικής απεικόνισης $1 : Y \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.31 έπεται ότι ο μορφισμός gf ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι οι μορφισμοί f και h είναι τέτοιοι ώστε οι μορφισμοί gf και hg να ανήκουν και οι δυο στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Τότε οι μορφισμοί $\mathcal{F}_{univ}(hg)$ και $\mathcal{F}_{univ}(gf)$, ή ισοδύναμα οι μορφισμοί $\mathcal{F}_{univ}(h)\mathcal{F}_{univ}(g)$ και $\mathcal{F}_{univ}(g)\mathcal{F}_{univ}(f)$ είναι και οι δύο αντιστρέψιμοι στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Αυτό σημαίνει ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ επιδέχεται αριστερό και δεξιό αντίστροφο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, άρα είναι αντιστρέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)\mathcal{F}_{univ}(a)^{-1}$ είναι αντιστέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

□

Λήμμα 2.1.33. *Έστω $g : X \longrightarrow 0$ ο μηδενικός μορφισμός στην $\mathcal{D}$. Τότε ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα αντικείμενο $Y \in \mathcal{D}$ έτσι ώστε $X \oplus Y \in \mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Έστω $g : X \longrightarrow 0$ ο μηδενικός μορφισμός στην $\mathcal{D}$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ να είναι ένας ισομορφισμός. Από το Λήμμα 2.1.32, υπάρχει ένας μορφισμός $h : 0 \longrightarrow \Sigma Y$ έτσι ώστε η σύνθεση

$$X \xrightarrow{\quad g \quad} 0 \xrightarrow{\quad h \quad} \Sigma Y$$

να ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Αλλά τότε έχουμε ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad 0 \quad} \Sigma Y \longrightarrow \Sigma(X \oplus Y) \longrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{D}$. Επειδή ο $0 : X \longrightarrow \Sigma Y$ ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$, έπεται ότι το $\Sigma(X \oplus Y) \in \mathcal{C}$. Επειδή η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι τριγωνισμένη, έπεται ότι το $X \oplus Y \in \mathcal{C}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $Y \in \mathcal{D}$ έτσι ώστε $X \oplus Y \in \mathcal{C}$. Έστω $h : 0 \longrightarrow \Sigma Y$ και $f : 0 \longrightarrow X$ οι μηδενικοί μορφισμοί. Τότε ο $gf : 0 \longrightarrow 0$ είναι ισομορφισμός, ενώ ο $hg : X \longrightarrow \Sigma Y$ είναι ο μηδενικός μορφισμός. Αλλά τότε έχουμε ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{\quad 0 \quad} \Sigma Y \longrightarrow \Sigma(X \oplus Y) \longrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{D}$. Επειδή το $\Sigma(X \oplus Y) \in \mathcal{C}$, έπεται ότι ο μορφισμός hg ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Συνεπώς, οι μορφισμοί gf και hg ανήκουν στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Επομένως, από το Λήμμα 2.1.32 έπεται ότι ο g είναι αντιστρέψιμος στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

□

Το αντικείμενο $Y \in \mathcal{D}$ του Λήμματος 2.1.33 μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να ισούται με το ΣX, σύμφωνα με το επόμενο

Λήμμα 2.1.34. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι το πυκνό περίβλημα της $\mathcal{S}$, δηλαδή $\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{S}}$. Τότε για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$, το αντικείμενο $X \oplus \Sigma X$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$.*

Απόδειξη. Επειδή το $X \in \mathcal{T}$ και η $\mathcal{T}$ είναι το πυκνό περίβλημα της $\mathcal{S}$, υπάρχει ένα αντικείμενο Y στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε $X \oplus Y \in \mathcal{S}$. Επειδή η $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, το αντικείμενο $\Sigma(X \oplus Y) = \Sigma X \oplus \Sigma Y$ ανήκει στην $\mathcal{S}$. Υπάρχουν τρία (διακεκριμένα) τρίγωνα στην $\mathcal{T}$

$$Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma Y \xrightarrow{\quad 1 \quad} \Sigma Y$$

$$X \xrightarrow{\quad 1 \quad} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

$$0 \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{\quad 1 \quad} \Sigma X \longrightarrow 0$$

Από την Πρόταση 1.2.1.1, το ευθύ τους άθροισμα

$$X \oplus Y \longrightarrow X \oplus \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \oplus \Sigma Y \longrightarrow \Sigma X \oplus \Sigma Y$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Τα αντικείμενα $X \oplus Y$ και $\Sigma X \oplus \Sigma Y$ ανήκουν στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, επειδή η $\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένη, το αντικείμενο $X \oplus \Sigma X$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$.

□

Πρόταση 2.1.35. *Έστω $g : Y \longrightarrow Y'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}$. Τότε ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ εάν και μόνο εάν στο τρίγωνο*

$$Y \xrightarrow{\quad g \quad} Y' \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma Y$$

που συμπληρώνει τον μορφισμό g στην $\mathcal{D}$, το αντικείμενο $Z \in \mathcal{D}$ είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός αντικειμένου της $\mathcal{C}$, δηλαδή υπάρχει ένα αντικείμενο $Z' \in \mathcal{D}$ έτσι ώστε $Z \oplus Z' \in \mathcal{C}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε από το Λήμμα 2.1.32 υπάρχει απεικόνιση $h : Y' \longrightarrow Y''$ έτσι ώστε η hg να ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Θεωρούμε την απεικόνιση των τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "hg"'] & Y' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(hg)"'] \\
Y'' \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & Y'' \oplus Z \arrow[r, "\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}"] & Z \arrow[r, "0"] & \Sigma Y''
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{D}$. Το κάτω τρίγωνο είναι συμπτύξιμο, αυτό σημαίνει ότι η ταυτοτική απεικόνιση στο τρίγωνο αυτό ειναι ομοτοπική με την μηδενική απεικόνιση. Πράγματι, θέτουμε

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad w = 0$$

Τότε, υπάρχουν τρείς απεικονίσεις

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \Psi = 0$$

τέτοιες ώστε

$$\begin{tikzcd}
Y'' \arrow[r, "u"] & Y'' \oplus Z \arrow[r, "v"] \arrow[dl, dashed, "\Theta"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[dl, dashed, "\Phi"'] & \Sigma Y'' \arrow[dl, dashed, "\Psi"'] \\
Y'' \arrow[r, "u"] & Y'' \oplus Z \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma Y''
\end{tikzcd}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις

$$1_{Y''} = \Theta u + \Sigma^{-1}\{w\Psi\} \qquad 1_{Y''\oplus Z} = \Phi v + u\Theta \qquad 1_Z = \Psi w + v\Phi$$

Από την Πρόταση 1.3.12.2, κάθε μορφισμός από ένα τρίγωνο σε ένα συμπτίξιμο τρίγωνο είναι καλός. Συνεπώς, η παραπάνω απεικόνιση είναι ένας καλός μορφισμός τριγώνων. Από το αξίωμα [TR2], επάγεται η απεικόνιση

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}Z \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "1"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "hg"'] & Y' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}"'] & Z \arrow[d, "1"] \\
\Sigma^{-1}Z \arrow[r, dashed, "0"] & Y'' \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & Y'' \oplus Z \arrow[r, "\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}"] & Z
\end{tikzcd}$$

, η οποία είναι επίσης ένας καλός μορφισμός τριγώνων. Ακριβώς, όπως στην απόδειξη του Λήμματος 1.4.3, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "hg"'] & Y' \arrow[d, "\begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}"'] \\
Y'' \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & Y'' \oplus Z
\end{tikzcd}$$

είναι ομοτοπικά καρτεσιανό. Αλλά η hg ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 1.5.8.1 έπεται ότι η απεικόνιση

$$Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z$$

ανήκει επίσης στην $Mor_{\mathcal{C}}$, δηλαδή είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Επειδή η $g : Y \longrightarrow Y'$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, έπεται ότι η σύνθεση

$$Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z$$

είναι επίσης ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, και επειδή ισχύει $ag = 0$, έπεται ότι η απεικόνιση

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} hg \\ 0 \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z$$

είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, η σύνθεση

$$Y \xrightarrow{hg} Y'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z$$

είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, και επειδή η hg είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, έπεται ότι η απεικόνιση

$$Y'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z$$

είναι επίσης ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Η σύνθεση

$$Y'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} Y''$$

είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο Y'' στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, και επειδή η πρώτη απεικόνιση είναι ένας ισομορφισμός, έπεται ότι η δεύτερη απεικόνιση είναι αναγκαστικά η αμφίπλευρη αντίστροφός της. Συνεπώς, η σύνθεση

$$Y'' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} Y'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z$$

ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στο $Y'' \oplus Z$. Συνεπώς, οι απεικονίσεις

$$Y'' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z \quad \text{και} \quad Y'' \oplus Z \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} Y'' \oplus Z$$

συμπίπτουν στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Έπεται, ότι οι απεικονίσεις

$$Z \xrightarrow{1} Z \quad \text{και} \quad Z \xrightarrow{0} Z$$

συμπίπτουν επίσης στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Αυτό σημαίνει ότι οι απεικονίσεις

$$Z \xrightarrow{1} 0 \quad \text{και} \quad 0 \xrightarrow{0} Z$$

είναι η μια αντίστροφος της άλλης. Ειδικότερα, η απεικόνιση $g : Z \longrightarrow 0$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.33 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $Z' \in \mathcal{D}$ έτσι ώστε $Z \oplus Z' \in \mathcal{C}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $Z' \in \mathcal{D}$ έτσι ώστε $Z \oplus Z' \in \mathcal{C}$. Έστω ένα τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{g} Y' \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma Y$$

που συμπληρώνει τον g στην $\mathcal{D}$. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$0 \longrightarrow Z' \xrightarrow{1} Z' \longrightarrow 0$$

Από την Πρόταση 1.2.1.1, το ευθύ των τριγώνων είναι το τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}} Y' \oplus Z' \longrightarrow Z \oplus Z' \longrightarrow \Sigma X$$

Επειδή το $Z \oplus Z'$ ανήκει στην $\mathcal{C}$, έπεται ότι η απεικόνιση

$$\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} : Y \longrightarrow Y' \oplus Z'$$

ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Όμως η απεικόνιση αυτή παραγοντοποιείται ως

$$Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{h} Y' \oplus Z'$$

, όπου h είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο. Επομένως, υπάρχει μια απεικόνιση h έτσι ώστε η απεικόνιση hg να ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Ομοίως θεωρώντας το τρίγωνο

$$\Sigma^{-1}Z' \longrightarrow 0 \longrightarrow Z' \xrightarrow{1} Z'$$

, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια απεικόνιση f έτσι ώστε η απεικόνιση gf να ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.32 έπεται ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ είναι αντιστρέψιμος.

□

Λήμμα 2.1.36.1. *Έστω ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "1"] \\ X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $\mathcal{D}$ στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ είναι ένας ισομορφισμός. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός h ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"] \\ X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

έναν μορφισμό τριγώνων, έτσι ώστε ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(h)$ να είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] & Y' \arrow[r, dashed] & Y'' \arrow[r, dashed] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

που συμπληρώνει τον μορφισμό g στην $\mathcal{D}$. Από το αξίωμα του Verdier (Πρόταση 1.4.5), επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & Y'' \arrow[r, "1"] \arrow[d] & Y'' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y \arrow[r] & \Sigma Z \arrow[r] & \Sigma^2 X
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ είναι ισομορφισμός, από την Πρόταση 2.1.35 έπεται ότι το αντικείμενο Y'' είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός αντικειμένου της $\mathcal{C}$. Πάλι από την Πρόταση 2.1.35 για το τρίγωνο

$$Z \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow Y'' \longrightarrow \Sigma Z$$

έπεται ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(h)$ είναι ένας ισομορφισμός.

□

Λήμμα 2.1.36.2. *Έστω ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $\mathcal{D}$ στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(h)$ είναι ένας ισομορφισμός. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός g ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r, "gf"] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

έναν μορφισμό τριγώνων, έτσι ώστε ο μορφισμός $\mathcal{F}_{univ}(g)$ να είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 2.1.36.1.

□

Λήμμα 2.1.37. *Έστω ότι δίνονται δύο τρίγωνα*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X'$$

στην $\mathcal{D}$ και ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ έτσι ώστε οι μορφισμοί $\alpha : X \longrightarrow X'$, $\beta : Y \longrightarrow Y'$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ να είναι ισομορφισμοί. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $\gamma : Z \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για την περίπτωση $Y = Y'$ και $\beta = 1$. Έστω $\beta = (Y'', f, a)$ για κάποιους μορφισμούς $f : Y'' \longrightarrow Y$ και $a : Y'' \longrightarrow Y'$ έτσι ώστε $f \in Mor_{\mathcal{C}}$. Συμπληρώνουμε τις συνθέσεις $v'a, vf$ σε τρίγωνα στην $\mathcal{D}$, και θεωρούμε τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, dashed] & Y'' \arrow[r, "v'a"] \arrow[d, "a"'] & Z' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "1"'] & \Sigma X'' \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}'' \arrow[r, dashed] & Y'' \arrow[r, "vf"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, dashed] \arrow[d, "1"'] & \Sigma \bar{X}'' \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Ο $\mathcal{F}_{univ}(a)$ είναι ένας ισομορφισμός επειδή ο $\beta = (Y'', f, a)$ είναι ένας ισομορφισμός εξ υποθέσεως, ενώ ο $\mathcal{F}_{univ}(f)$ είναι ένας ισομορφισμός, επειδή ο $f \in Mor_{\mathcal{C}}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.36.2 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $m : X'' \longrightarrow X'$ και $n : \bar{X}'' \longrightarrow X'$ στην $\mathcal{D}$ οι οποίοι καθιστούν τα προηγούμενα διαγράμματα μεταθετικά (δηλαδή μορφισμούς τριγώνων), έτσι ώστε οι μορφισμοί $\mathcal{F}_{univ}(m)$ και $\mathcal{F}_{univ}(n)$ να είναι ισομορφισμοί. Ο μορφισμός $\tau := \mathcal{F}_{univ}(m)^{-1}\alpha\mathcal{F}_{univ}(n) : \bar{X}'' \longrightarrow X''$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, ως σύνθεση ισομορφισμών. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}'' \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\tau"'] \arrow[dd, "n"'] & & Y'' \arrow[rr, "vf"] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "f"'] & & Z \arrow[rr] \arrow[dd, "1"'] & & \Sigma\bar{X}'' \arrow[dr, dashed, "\Sigma\tau"] \arrow[dd, "\Sigma n"'] & \\
& X'' \arrow[rr] \arrow[dd, "m"'] & & Y'' \arrow[rr, "v'a"] \arrow[dd, "a"'] & & Z' \arrow[rr] \arrow[dd, "1"'] & & \Sigma X'' \arrow[dd, "\Sigma m"'] \\
X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\beta"'] & & Z \arrow[rr, "w"] & & \Sigma X \arrow[dr, "\Sigma\alpha"] & \\
& X' \arrow[rr, "u'"] & & Y' \arrow[rr, "v'"] & & Z' \arrow[rr, "w'"] & & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

, όπου ταυτίζουμε όλους τους μορφισμούς στην $\mathcal{D}$ με τις εικόνες τους στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ του κάτω διαγράμματος με το επάνω διάγραμμα, επειδή όλοι οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, υπάρχει ένας ισομορφισμός $Z \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, ο οποίος καθιστά το κάτω διάγραμμα μεταθετικό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός $Z \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, ο οποίος καθιστά το επάνω διάγραμμα μεταθετικό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Επομένως, όπως ισχυριστήκαμε, μπορούμε να αναχθούμε στην περίπτωση όπου $Y = Y'$ και $\beta = 1$.

Έστω $\alpha = (X'', g, b)$ για κάποιους μορφισμούς $g : X'' \longrightarrow X$ και $b : X'' \longrightarrow X'$ έτσι ώστε $g \in Mor_{\mathcal{C}}$. Τότε η ισότητα $\beta\mathcal{F}_{univ}(u) = \mathcal{F}_{univ}(u')\alpha$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ ισοδυναμεί με την ισότητα $\mathcal{F}_{univ}(ug) = \mathcal{F}_{univ}(u'b)$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.25 υπάρχει μια απεικόνιση $t : W \longrightarrow X''$ η οποία ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$ έτσι ώστε να ισχύει $ugt = u'bt$. Συμπληρώνουμε τον μορφισμό $ugt : W \longrightarrow Y$ σ' ένα τρίγωνο στην $\mathcal{D}$ και θεωρούμε τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "ugt"] \arrow[d, "gt"'] & Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, "1"] & Z'' \arrow[r, dashed] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma(gt)"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "ugt"] \arrow[d, "bt"'] & Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, "1"] & Z'' \arrow[r, dashed] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma(bt)"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Ο $\mathcal{F}_{univ}(b)$ είναι ένας ισομορφισμός επειδή ο $\alpha = (X'', g, b)$ είναι ένας ισομορφισμός εξ υποθέσεως, ενώ οι $\mathcal{F}_{univ}(g)$ και $\mathcal{F}_{univ}(t)$ είναι ισομορφισμοί, επειδή οι g και t ανήκουν στην $Mor_{\mathcal{C}}$. Επομένως, οι $\mathcal{F}_{univ}(gt)$ και $\mathcal{F}_{univ}(bt)$ είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.36.2 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $h : Z'' \longrightarrow Z$ και $c : Z'' \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{D}$ οι οποίοι καθιστούν τα προηγούμενα διαγράμματα μεταθετικά (δηλαδή μορφισμούς τριγώνων), έτσι ώστε οι μορφισμοί $\mathcal{F}_{univ}(h)$ και $\mathcal{F}_{univ}(c)$ να είναι ισομορφισμοί. Τότε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "ugt"] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "gt"'] & & Y \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "1"] & & Z'' \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "h"] & & \Sigma W \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "\Sigma(gt)"] & \\
& W \arrow[rr, "ugt"] \arrow[dd, "bt"] & & Y \arrow[rr] \arrow[dd, "1"] & & Z'' \arrow[rr] \arrow[dd, "c"] & & \Sigma W \arrow[dd, "\Sigma(bt)"] \\
X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1"] & & Z \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & & \Sigma X \arrow[dr, "\Sigma\alpha"] & \\
& X' \arrow[rr, "u'"] & & Y \arrow[rr, "v'"] & & Z' \arrow[rr, "w'"] & & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

, όπου ταυτίζουμε όλους τους μορφισμούς στην $\mathcal{D}$ με τις εικόνες τους στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, όπως προηγουμένως, είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, επειδή όλοι οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, ο $\gamma := \mathcal{F}_{univ}(c)\mathcal{F}_{univ}(h)^{-1} : Z \longrightarrow Z'$ είναι ο μορφισμός που ψάχνουμε.

□

Παρατήρηση 2.1.38. Από το Λήμμα 2.1.30 η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι προσθετική και ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι προσθετικός. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας προσθετικός συναρτητής έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F})$, ή ισοδύναμα απεικονίζει τους μορφισμούς στην $Mor_{\mathcal{C}}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{T}$. Τότε ο μοναδικός συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}$ της Πρότασης 2.1.23 είναι προσθετικός. Πράγματι, από την Πρόταση 2.1.23, $\mathcal{G}(f) = \mathcal{F}(\beta)\mathcal{F}(\alpha)^{-1}$, για κάθε $f := [(Z, \alpha, \beta)]_{\sim} \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$, και $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ}(g) = \mathcal{F}(g)$, για κάθε $g \in Hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$. Έστω ότι δίνονται δυο μορφισμοί $f : X \longrightarrow Y$ και $g : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, δηλαδή δίνονται δυο κλάσεις ισοδυναμίας των διαγραμμάτων

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y & Z' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & Y \\
X & & X &
\end{tikzcd}$$

Στο Λήμμα 2.1.30, το άθροισμα τους ορίστηκε ως $f + g := \mathcal{F}_{univ}(\bigtriangledown^Y) \circ (f \oplus g) \circ \mathcal{F}_{univ}(\bigtriangleup_X)$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(f+g) &= \mathcal{G}(\mathcal{F}_{univ}(\bigtriangledown^Y)\circ(f\oplus g)\circ\mathcal{F}_{univ}(\triangle_X))\\
&= \mathcal{G}(\mathcal{F}_{univ}(\bigtriangledown^Y))\circ\mathcal{G}(f\oplus g)\circ\mathcal{G}(\mathcal{F}_{univ}(\triangle_X))\\
&= \mathcal{F}(\bigtriangledown^Y)\circ\mathcal{G}(f\oplus g)\circ\mathcal{F}(\triangle_X)\\
&= \mathcal{F}(\bigtriangledown^Y)\circ(\mathcal{F}(\beta\oplus\beta')\circ\mathcal{F}^{-1}(\alpha\oplus\alpha'))\circ\mathcal{F}(\triangle_X)\\
&= \mathcal{F}(\bigtriangledown^Y)\circ(\mathcal{F}(\beta)\oplus\mathcal{F}(\beta'))\circ(\mathcal{F}^{-1}(\alpha)\oplus\mathcal{F}^{-1}(\alpha'))\circ\mathcal{F}(\triangle_X)\\
&= \bigtriangledown^{\mathcal{F}(Y)}\circ(\mathcal{F}(\beta)\oplus\mathcal{F}(\beta'))\circ(\mathcal{F}^{-1}(\alpha)\oplus\mathcal{F}^{-1}(\alpha'))\circ\triangle_{\mathcal{F}(X)}\\
&= (\bigtriangledown^{\mathcal{F}(Y)}\circ(\mathcal{F}(\beta)\oplus\mathcal{F}(\beta')))\circ((\mathcal{F}^{-1}(\alpha)\oplus\mathcal{F}^{-1}(\alpha'))\circ\triangle_{\mathcal{F}(X)})\\
&= \mathcal{F}(\beta)\circ\mathcal{F}^{-1}(\alpha)+\mathcal{F}(\beta')\circ\mathcal{F}^{-1}(\alpha')\\
&= \mathcal{G}(f)+\mathcal{G}(g)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η Πρόταση 2.1.23 μπορεί να διατυπωθεί σε επίπεδο προσθετικών κατηγοριών και προσθετικών συναρτητών.

Ο συναρτητής $\Sigma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας προσθετικός συναρτητής. Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ}\circ\Sigma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι προσθετικός. Επειδή $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F}_{univ}\circ\Sigma)$, από την Πρόταση 2.1.23 υπάρχει ένας μοναδικός προσθετικός συναρτητής $\overline{\Sigma} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{univ}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\mathcal{F}_{univ}"'] \\
\mathcal{D}/\mathcal{C} \arrow[r, dashed, "\overline{\Sigma}"] & \mathcal{D}/\mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

μεταθετικό στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Ακριβέστερα, ο συναρτητής $\overline{\Sigma} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ ορίζεται στα αντικείμενα να λαμβάνει τις τιμές του Σ, δηλαδή $\overline{\Sigma}X = \Sigma X$, για κάθε $X \in Ob(\mathcal{D}/\mathcal{C})$, και στους μορφισμούς ως $\overline{\Sigma}([(Z,f,g)]_\sim) := [(\Sigma Z, \Sigma f, \Sigma g)]_\sim$, για κάθε μορφισμό $[(Z,f,g)]_\sim \in Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X,Y)$, και είναι καλά ορισμένος στους μορφισμούς, εάν ένας μορφισμός $f \in Mor_\mathcal{C}$, τότε ο $\Sigma f \in Mor_\mathcal{C}$. Ομοίως, ορίζεται ο προσθετικός συναρτητής $\overline{\Sigma}^{-1} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$, ο οποίος προφανώς είναι ο αντίστροφος του $\overline{\Sigma}$. Συνεπώς, ο $\overline{\Sigma}$ είναι ένας προσθετικός αυτομορφισμός της προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Τέλος, θα ταυτίζουμε καταχρηστικά τους συναρτητές Σ και $\overline{\Sigma}$, όπως κάναμε σιωπηρά στο Λήμμα 2.1.37.

Πρόταση 2.1.39. *Η προσθετική κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία. Επιπλέον, ο προσθετικός συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής.*

Απόδειξη. Υιοθετούμε προσωρινά τον συμβολισμό $\mathcal{F}$ για τον $\mathcal{F}_{univ}$. Ο $\Sigma \equiv \overline{\Sigma}$ είναι ένας προσθετικός αυτομορφισμός της προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, και από τον ορισμό του, ισχύει $\Sigma\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(\Sigma X)$. Συνεπώς, ορίζουμε η κλάση των ισομορφισμών $\phi_X : \mathcal{F}(\Sigma X) \longrightarrow \Sigma\mathcal{F}(X)$, να είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις στο ΣX. Ορίζουμε ως κλάση διακεκριμένων τριγώνων (ως προς τον συναρτητή Σ) στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ την κλάση όλων των υποψηφίων τριγώνων στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ τα οποία είναι ισόμορφα ως υποψήφια τρίγωνα με τα υποψήφια τρίγωνα

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(v)} \mathcal{F}(Z) \xrightarrow{\mathcal{F}(w)} \Sigma\mathcal{F}(X)$$

όπου το

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}$, και $\mathcal{F}(w) = \phi_X \circ \mathcal{F}(w)$ επειδή ο $\phi_X : \mathcal{F}(\Sigma X) \longrightarrow \Sigma\mathcal{F}(X)$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Τα αξιώματα [TR0] και [TR2] είναι προφανή για την $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Για το αξίωμα [TR1] , κάθε μορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ είναι της μορφής $\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(f)^{-1}$ για κάποιους μορφισμούς $f : P \longrightarrow X$ και $u : P \longrightarrow Y$, έτσι ώστε $f \in Mor_\mathcal{C}$. Από το αξίωμα [TR1] συμπληρώνω τον μορφισμό u σ' ένα τρίγωνο

$$P \xrightarrow{u} Y \overset{v}{\dashrightarrow} Z \overset{w}{\dashrightarrow} \Sigma P$$

στην $\mathcal{D}$. Θεωρούμε το υποψήφιο τρίγωνο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(f)^{-1}} \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(v)} \mathcal{F}(Z) \xrightarrow{\mathcal{F}(\Sigma f)\mathcal{F}(w)} \Sigma\mathcal{F}(X)$$

Αυτό είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ γιατί είναι ισόμορφο με το υποψήφιο τρίγωνο

$$\mathcal{F}(P) \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(v)} \mathcal{F}(Z) \xrightarrow{\mathcal{F}(w)} \Sigma\mathcal{F}(X)$$

μέσω του ισομορφισμού

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(P) \arrow[r, "\mathcal{F}(u)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(v)"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{F}(Z) \arrow[r, "\mathcal{F}(w)"] \arrow[d, "1"'] & \Sigma\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\Sigma\mathcal{F}(f)"'] \\
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(f)^{-1}"] & \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(v)"] & \mathcal{F}(Z) \arrow[r, "\mathcal{F}(\Sigma f)\mathcal{F}(w)"] & \Sigma\mathcal{F}(X)
\end{tikzcd}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι ο μορφισμός $\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(f)^{-1} : X \longrightarrow Y$ μπορεί να συμπληρωθεί σ΄ ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(f)^{-1}"] & \mathcal{F}(Y) \arrow[r, dashed, "\mathcal{F}(v)"] & \mathcal{F}(Z) \arrow[r, dashed, "\mathcal{F}(\Sigma f)\mathcal{F}(w)"] & \Sigma\mathcal{F}(X)
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Μένει μόνο να αποδείξουμε τα αξιώματα [TR3] και [TR4'] ($\iff$ [TR4]). Επειδή το [TR4'] είναι ισχυρότερο θα αποδείξουμε μόνο αυτό. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, στο οποίο οι γραμμές οι γραμμές είναι τρίγωνα, υπάρχει μια απεικόνιση $Z \longrightarrow Z'$ η οποία καθιστά το διάγραμμα έναν καλό μορφισμό τριγώνων, αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση κώνος είναι ένα τρίγωνο. Από το Λήμμα 2.1.27 για το αριστερό μεταθετικό τετράγωνο του προηγούμενου μεταθετικού διαγράμματος, υπάρχουν ένα μεταθετικό τετράγωνο στην $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{Y} \arrow[d] \\
\overline{X}' \arrow[r] & \overline{Y}'
\end{tikzcd}$$

και μορφισμοί $\overline{X} \longrightarrow X, \overline{X}' \longrightarrow X', \overline{Y}' \longrightarrow Y'$ και $\overline{Y} \longrightarrow Y$ στην $Mor_{\mathcal{C}}$, έτσι ώστε να υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & & \overline{Y} \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & & & & & \\
& \overline{X}' \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & \overline{Y}' \arrow[dd, dashed] & & & & \\
X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[rr] & & \Sigma X \arrow[dr] & \\
& X' \arrow[rr] & & Y' \arrow[rr] & & Z' \arrow[rr] & & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

.

Από το αξίωμα [TR4'] η επάνω πλευρά μπορεί να συμπληρωθεί σ' έναν καλό μορφισμό τριγώνων στην $\mathcal{D}$, και συνεπώς σ' έναν καλό μορφισμό τριγώνων στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Επομένως λαμβάνουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \overline{Y} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \overline{Z} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \Sigma\overline{X} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{X}' \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{Y}' \arrow[rr, dashed] \arrow[dd] & & \overline{Z}' \arrow[rr, dashed] & & \Sigma\overline{X}' \arrow[dd] \\
X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[rr] & & \Sigma X \arrow[dr] & \\
& X' \arrow[rr] & & Y' \arrow[rr] & & Z' \arrow[rr] & & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα 2.1.37, υπάρχουν ισομορφισμοί $\overline{Z} \longrightarrow Z$ και $\overline{Z}' \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, οι οποίοι καθιστούν την πίσω και την μπροστινή πλευρά αντίστοιχα του προηγούμενου μεταθετικού διαγράμματος μεταθετικά διαγράμματα στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \overline{Y} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \overline{Z} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & & \Sigma\overline{X} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{X}' \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{Y}' \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{Z}' \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & \Sigma\overline{X}' \arrow[dd] \\
X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[rr] & & \Sigma X \arrow[dr] & \\
& X' \arrow[rr] & & Y' \arrow[rr] & & Z' \arrow[rr] & & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Επειδή οι καλοί μορφισμοί παραμένουν καλοί συντιθέμενοι με ισομορφισμούς, συμπεραίνουμε ότι η σύνθεση $\tau : Z \longrightarrow \overline{Z} \longrightarrow \overline{Z}' \longrightarrow Z'$ συμπληρώνει το δοθέν διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tau"'] & \Sigma X \arrow[d] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

σ' έναν καλό μορφισμό τριγώνων στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

Τέλος, ο προσθετικός συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ εφοδιασμένος με την κλάση των ισομορφισμών $\phi_X : \mathcal{F}(\Sigma X) \longrightarrow \Sigma\mathcal{F}(X)$ καθίσταται ένας τριγωνισμένος συναρτητής, από τον ορισμό της κλάσεως των διακεκριμένων τριγώνων της $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

□

Ακολουθεί η απόδειξη του Θεωρήματος Τοπικοποίησης του Verdier (Θεώρημα 2.1.9) :

Απόδειξη. Έχουμε κατασκευάσει μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ και έναν τριγωνισμένο συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}$. Από το Λήμμα 2.1.33 γνωρίζουμε ότι $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F}_{univ})$. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας οποιοσδήποτε άλλος τριγωνισμένος συναρτητής και $\eta : \mathcal{F} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{F}$ ο αντίστοιχος φυσικός ισομορφισμός, έτσι ώστε $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F})$. Τότε ο $\mathcal{F}$, ο οποίος εξ ορισμού είναι προσθετικός, απεικονίζει τους μορφισμούς στην $Mor_{\mathcal{C}}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{T}$, συνεπώς από την Παρατήρηση 2.1.38, υπάρχει ένας μοναδικός προσθετικός συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{F}_{univ}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"] & \mathcal{D}/\mathcal{C} \arrow[dl, dashed, "\mathcal{G}"] \\
\mathcal{T} &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, δηλαδή $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ} = \mathcal{F}$. Μένει να δείξουμε ότι ο $\mathcal{G}$ είναι επίσης ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Κατ' αρχάς ισχύει

$$\Sigma \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ} = \Sigma \circ \mathcal{F} \ \text{ και } \ \mathcal{G} \circ \Sigma \circ \mathcal{F}_{univ} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ} \circ \Sigma = \mathcal{F} \circ \Sigma$$

, και επειδή ο $\eta : \mathcal{F} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{F}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός, δηλαδή οι $\mathcal{F} \circ \Sigma$ και $\Sigma \circ \mathcal{F}$ είναι φυσικά ισόμορφοι, έπεται ότι οι $\mathcal{G} \circ \Sigma \circ \mathcal{F}_{univ}$ και $\Sigma \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ}$ είναι επίσης φυσικά ισόμορφοι. Ο $\eta : \mathcal{F} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{F}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{D}$, ο $\eta_X : (\mathcal{F} \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ \mathcal{F})(X)$ είναι ένας ισομορφισμός, και επιπλέον, για κάθε μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{D}$, το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F} \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "(\mathcal{F}\circ\Sigma)(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & (\mathcal{F} \circ \Sigma)(Y) \arrow[d, "\eta_Y"'] \\
(\Sigma \circ \mathcal{F})(X) \arrow[r, "(\Sigma\circ\mathcal{F})(f)"] & (\Sigma \circ \mathcal{F})(Y)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επειδή $Ob(\mathcal{D}/\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{D})$ και ο $\mathcal{F}_{univ}$ είναι ταυτοτικός στα αντικείμενα, για κάθε αντικείμενο $X \in Ob(\mathcal{D}/\mathcal{C})$, ο ισομορφισμός $\eta_X : (\mathcal{G} \circ \Sigma \circ \mathcal{F}_{univ})(X) \longrightarrow (\Sigma \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ})(X)$ επάγει έναν ισομορφισμό $\eta_X : (\mathcal{G} \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ \mathcal{G})(X)$. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο επαγόμενος ισομορφισμός $\eta : \mathcal{G} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{G}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός. Έστω $\alpha : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, ο οποίος αναπαρίσταται από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\
X &
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο $\eta : \mathcal{F} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{F}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, υφίστανται οι σχέσεις

$$(\Sigma \circ \mathcal{F})(f) \circ \eta_Z = \eta_X \circ (\mathcal{F} \circ \Sigma)(f) \ \text{ και } \ (\Sigma \circ \mathcal{F})(g) \circ \eta_Z = \eta_Y \circ (\mathcal{F} \circ \Sigma)(g)$$

Επειδή ισχύει $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{univ} = \mathcal{F}$, η πρώτη σχέση ξαναγράφεται ως

$$(\Sigma \circ \mathcal{G})(\mathcal{F}_{univ}(f)) \circ \eta_Z = \eta_X \circ (\mathcal{G} \circ \Sigma)(\mathcal{F}_{univ}(f))$$

, ή ισοδύναμα ως

$$(\Sigma \circ \mathcal{G})(\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}) \circ \eta_X = \eta_Z \circ (\mathcal{G} \circ \Sigma)(\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1})$$

, επειδή ο $\mathcal{F}_{univ}(f)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
\eta_Y \circ (\mathcal{G} \circ \Sigma)(\alpha) &= \eta_Y \circ (\mathcal{G} \circ \Sigma)(\mathcal{F}_{univ}(g)\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}) \\
&= \eta_Y \circ (\mathcal{G} \circ \Sigma)(\mathcal{F}_{univ}(g)) \circ (\mathcal{G} \circ \Sigma)(\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}) \\
&= (\Sigma \circ \mathcal{G})(\mathcal{F}_{univ}(g)) \circ \eta_Z \circ (\mathcal{G} \circ \Sigma)(\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}) \\
&= (\Sigma \circ \mathcal{G})(\mathcal{F}_{univ}(g)) \circ (\Sigma \circ \mathcal{G})(\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}) \circ \eta_X \\
&= (\Sigma \circ \mathcal{G})(\mathcal{F}_{univ}(g)\mathcal{F}_{univ}(f)^{-1}) \circ \eta_X \\
&= (\Sigma \circ \mathcal{G})(\alpha) \circ \eta_X
\end{aligned}
$$

Αυτό σημαίνει ότι, το παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{G} \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "(\mathcal{G}\circ\Sigma)(\alpha)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & (\mathcal{G} \circ \Sigma)(Y) \arrow[d, "\eta_Y"'] \\
(\Sigma \circ \mathcal{G})(X) \arrow[r, "(\Sigma\circ\mathcal{G})(\alpha)"] & (\Sigma \circ \mathcal{G})(Y)
\end{tikzcd}
$$

είναι μεταθετικό. Συνεπώς, ο $\eta : \mathcal{G} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{G}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός. Μένει να δείξουμε ότι ο $\mathcal{G}$ απεικονίζει τρίγωνα στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ σε τρίγωνα στην $\mathcal{T}$. Έστω

$$
X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{\ w\ } \Sigma X
$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει ένα τρίγωνο

$$
X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z' \xrightarrow{\ w'\ } \Sigma X'
$$

στην $\mathcal{D}$, έτσι ώστε να υφίσταται ένας ισομορφισμός των τριγώνων

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{univ}(X') \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & \mathcal{F}_{univ}(Y') \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \mathcal{F}_{univ}(Z') \arrow[r, "\mathcal{F}_{univ}(w')"] \arrow[d, "c"'] & \mathcal{F}_{univ}(\Sigma X') \arrow[d, "\Sigma a"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X
\end{tikzcd}
$$

στην $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Εφαρμόζοντας τον $\mathcal{G}$ στο προηγούμενο διάγραμμα και χρησιμοποιώντας τον φυσικό ισομορφισμό $\eta : \mathcal{G} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{G}$, λαμβάνουμε έναν ισομορφισμό υποψήφιων τριγώνων

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X') \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{G}(a)"'] & \mathcal{F}(Y') \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{G}(b)"'] & \mathcal{F}(Z') \arrow[r, "\eta_{Z'}\circ\mathcal{F}(w')"] \arrow[d, "\mathcal{G}(c)"'] & \Sigma\mathcal{F}(X') \arrow[d, "\Sigma\mathcal{G}(a)"'] \\
\mathcal{G}(X) \arrow[r] & \mathcal{G}(Y) \arrow[r] & \mathcal{G}(Z) \arrow[r, "\eta_Z\circ\mathcal{G}(w)"] & \Sigma\mathcal{G}(X)
\end{tikzcd}
$$

Επειδή, ο $\mathcal{F}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής, έπεται ότι η επάνω πλευρά του διαγράμματος είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς, απο το αξίωμα [TR0] , έπεται ότι η κάτω πλευρά του διαγράμματος είναι επίσης ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Επομένως, ο $\mathcal{G}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής.

□

Ορισμός 2.1.40.1. *Έστω $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$ και $\mathcal{E}$ τριγωνισμένες κατηγορίες. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$, $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο τριγωνισμένοι συναρτητές, και $\phi : \mathcal{F} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{F}$, $\psi : \mathcal{G} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{G}$ οι αντίστοιχες φυσικές ισοδυναμίες. Ο συναρτητής $\mathcal{G}\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ καθίσταται ένας τριγωνισμένος συναρτητής, του οποίου η φυσική ισοδυναμία $\gamma : \mathcal{G}\mathcal{F} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{G}\mathcal{F}$ ορίζεται στο αντικείμενο $X \in \mathcal{D}$, από την σύνθεση*

$$\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma X \xrightarrow{\quad \mathcal{G}\phi_X \quad} \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}X \xrightarrow{\quad \psi_{\mathcal{F}X} \quad} \Sigma\mathcal{G}\mathcal{F}X$$

, δηλαδή $\gamma_X = \psi_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{G}\phi_X$.

Ορισμός 2.1.40.2. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένοι συναρτητές, και $\phi : \mathcal{F}\circ\Sigma \longrightarrow \Sigma\circ\mathcal{F}$, $\psi : \mathcal{G}\circ\Sigma \longrightarrow \Sigma\circ\mathcal{G}$ οι αντίστοιχες φυσικές ισοδυναμίες. Ένας φυσικός μετασχηματισμός τριγωνισμένων συναρτητών ή ένας τριγωνισμένος φυσικός μετασχηματισμός είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ο οποίος έχει την επιπλέον ιδιότητα, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{D}$, το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\Sigma X \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "\eta_{\Sigma X}"'] & \Sigma\mathcal{F}X \arrow[d, "\Sigma\eta_X"] \\
\mathcal{G}\Sigma X \arrow[r, "\psi_X"] & \Sigma\mathcal{G}X
\end{tikzcd}$$

να καθίσταται μεταθετικό. Εάν ο φυσικός μετασχηματισμός $\eta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε καλείται ένας φυσικός ισομορφισμός τριγωνισμένων συναρτητών ή ένας τριγωνισμένος φυσικός ισομορφισμός. Σε αυτή την περίπτωση, οι $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ καλούνται φυσικά ισόμορφοι τριγωνισμένοι συναρτητές, και συμβολίζονται ως $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$.

Ορισμός 2.1.40.3.1. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι μια φυσική ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών ή μια τριγωνισμένη φυσική ισοδυναμία, εάν υπάρχει ένας τριγωνισμένος τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}$, έτσι ώστε $\mathcal{F}\mathcal{G} \simeq 1$ και $\mathcal{G}\mathcal{F} \simeq 1$, όπου 1 ο είναι ταυτοτικός τριγωνισμένος συναρτητής.*

Ορισμός 2.1.40.3.2. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας ισομορφισμός τριγωνισμένων κατηγοριών ή ένας τριγωνισμένος ισομορφισμός, εάν υπάρχει ένας τριγωνισμένος τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}$, έτσι ώστε $\mathcal{F}\mathcal{G} = 1$ και $\mathcal{G}\mathcal{F} = 1$, όπου 1 ο είναι ταυτοτικός τριγωνισμένος συναρτητής.*

Διατυπώνουμε τα παρακάτω δύο σημαντικά Λήμματα. Οι ευθείες κατευθύνσεις των αποδείξεων δεν είναι καθόλου τετριμμένες. Το ουσιαστικό σημείο της απόδειξης του πρώτου Λήμματος (το δεύτερο Λήμμα είναι άμεση συνέπεια του πρώτου Λήμματος, επειδή κάθε ισομορφισμός κατηγοριών είναι προφανώς μια ισοδυναμία) είναι το αξιοσημείωτο γεγονός ότι ένας αριστερός (ή δεξιός) συζυγής προσθετικός συναρτητής ενός τριγωνισμένου συναρτητή είναι επίσης τριγωνισμένος, το οποίο αποδεικνύουμε στο Λήμμα 5.3.4. Για αυτό τον λόγο θα αναβάλουμε την απόδειξη ωσότου αποδείξουμε το Λήμμα 5.3.4.

Λήμμα 2.1.40.4. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής, και $\phi : \mathcal{F}\circ\Sigma \longrightarrow \Sigma\circ\mathcal{F}$ η αντίστοιχη φυσική ισοδυναμία. Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες :*

2.1.40.4.1. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών.*

2.1.40.4.2. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι φυσική ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.*

Λήμμα 2.1.40.5. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής, και $\phi : \mathcal{F}\circ\Sigma \longrightarrow \Sigma\circ\mathcal{F}$ η αντίστοιχη φυσική ισοδυναμία. Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες :*

2.1.40.5.1. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας ισομορφισμός κατηγοριών.*

2.1.40.5.2. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας ισομορφισμός τριγωνισμένων κατηγοριών.*

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε

Ορισμός 2.1.40.6.1. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι μια φυσική ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, εάν είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών.*

Ορισμός 2.1.40.6.2. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας ισομορφισμός τριγωνισμένων κατηγοριών, εάν είναι ένας ισομορφισμός κατηγοριών.*

Παρατήρηση 2.1.41. Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Εάν το πηλίκο Verdier υπάρχει, τότε είναι μοναδικό, ως προς ισομορφισμό τριγωνισμένων κατηγοριών. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ και $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}'$ είναι δύο τριγωνισμένοι συναρτητές οι οποίοι ικανοποιούν την καθολική ιδιότητα ενός πηλίκου Verdier της κατηγορίας $\mathcal{D}$ με την υποκατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε από τις καθολικές ιδιότητες των πηλίκων $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$, για τους τριγωνισμένους συναρτητές $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ και $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}'$, υπάρχουν μοναδικοί τριγωνισμένοι συναρτητές $\mathcal{G} : \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}$ οι οποίοι καθιστούν τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\overline{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{T} \arrow[dl, dashed, "\mathcal{G}"] \\ \mathcal{T}' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\overline{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{T}' \arrow[dl, dashed, "\mathcal{G}'"] \\ \mathcal{T} & \end{tikzcd}$$

μεταθετικά, δηλαδή ισχύουν οι $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{G}' \circ \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$, αντίστοιχα. Τότε όμως ισχύει

$$\mathcal{F} = \mathcal{G}' \circ \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{G}' \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F} = (\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}) \circ \mathcal{F}$$

Τώρα από την καθολική συνθήκη του πηλίκου $\mathcal{T}$, για τον συναρτητή $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$, υπάρχει ένας μοναδικός τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{T} \arrow[dl, dashed, "\mathcal{H}"] \\ \mathcal{T} & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, δηλαδή ισχύει $\mathcal{H} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Από την μοναδικότητα του $\mathcal{H}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{H} = 1$. Συνεπώς, επειδή ο τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}$ καθιστά επίσης το προηγούμενο διάγραμμα μεταθετικό, έπεται ότι $\mathcal{G}' \circ \mathcal{G} = 1$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathcal{G} \circ \mathcal{G}' = 1$, και επομένως οι κατηγορίες $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$ είναι ισόμορφες ως προσθετικές κατηγορίες. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.40.5, είναι ισόμορφες ως τριγωνισμένες κατηγορίες.

Παρατήρηση 2.1.42. Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Από τη Παρατήρηση 2.1.8, ο πυρήνας $ker(\mathcal{F}_{univ})$ είναι μια πυκνή υποκατηγορία της $\mathcal{D}$, δηλαδή είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία που περιέχει όλους τους ευθείς προσθετέους των αντικειμένων της. Από το Λήμμα 2.1.33, γνωρίζουμε ότι $\mathcal{C} \subset ker(\mathcal{F}_{univ})$ (η $\mathcal{C}$ είναι μια προσθετική υποκατηγορία), και ο πυρήνας $ker(\mathcal{F}_{univ})$ χαρακτηρίζεται ως η πλήρης υποκατηγορία όλων των αντικειμένων τα οποία είναι οι ευθείς προσθετέοι στην $\mathcal{D}$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Θα καλούμε αυτή την κατηγορία πυκνό (épaisse) περίβλημα της $\mathcal{C}$, και θα την συμβολίζουμε $\widehat{\mathcal{C}}$.

Επειδή ο πυρήνας ενός τριγωνισμένου συναρτητή είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία, συμπεραίνουμε ότι για κάθε τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, η υποκατηγορία $\widehat{\mathcal{C}}$ είναι τριγωνισμένη. Η τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ είναι πυκνή εάν και μόνο εάν ταυτίζεται με το πυκνό της περίβλημα, δηλαδή $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{C}}$.

2.2 Τα πηλίκα Verdier δεν έχουν εν γένει μικρά Hom−σύνολα

Στην προηγούμενη Ενότητα αποδείξαμε το Θεώρημα Τοπικοποίησης του Verdier (Θεώρημα 2.1.9). Δοθείσης μιας τριγωνισμένης, κατηγορίας $\mathcal{D}$ και μιας τριγωνισμένης υποκατηγορίας $\mathcal{C}$, σχηματίσαμε την τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$. Αλλά όμως υπάρχει ένα σημείο που πρέπει να τονίσουμε.

Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{D}}$−σύνολα, αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε δύο αντικείμενα X και Y στην $\mathcal{D}$, η κλάση $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$ είναι ένα σύνολο. Τότε προφανώς η $\mathcal{C}$, όντας υποκατηγορία έχει επίσης μικρά $Hom_{\mathcal{C}}$−σύνολα. Παρόλα αυτά η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ δεν έχει εν γένει μικρά $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}$−σύνολα. Η κλάση $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$ έχει οριστεί ως η κλάση ισοδυναμίας όλων των διαγραμμάτων της μορφής

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

όπου ο f ανήκει στην $Mor_{\mathcal{C}}$, ως προς την σχέση ισοδυναμίας $R(X, Y)$. Η κλάση $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(X, Y)$

για κανένα λόγο δεν οφείλει να είναι ένα μικρό σύνολο. Εάν όμως η υποκατηγορία $\mathcal{C}$ είναι επιπλέον μικρή, τότε ισχύει η επόμενη

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $\mathcal{D}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{D}}-$σύνολα. Έστω $\mathcal{C}$ μια μικρή τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$, αυτό σημαίνει ότι η κλάση $Ob(\mathcal{C})$ είναι ένα σύνολο. Τότε η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}-$σύνολα.*

Απόδειξη. Επειδή ο $f \in Mor_{\mathcal{C}}$, υπάρχει ένα τρίγωνο

$$W \xrightarrow{\quad f \quad} X \overset{g}{\dashrightarrow} Z \dashrightarrow \Sigma W$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{D}$, έτσι ώστε $Z \in \mathcal{C}$. Εάν υποτεθεί ότι η $\mathcal{C}$ είναι επιπλέον μικρή, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μόνο ένα μικρό σύνολο επιλογών για το αντικείμενο Z, και άρα, για κάθε Z μόνο ένα μικρό σύνολο επιλογών για τον μορφισμό $g : X \longrightarrow Z$. Έπεται, ότι υπάρχει μόνο ένα ουσιαστικά μικρό σύνολο επιλογών για τον μορφισμό $f : W \longrightarrow X$, δηλαδή η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των επιλογών για τον μορφισμό f είναι ένα σύνολο και επομένως για κάθε μία απο αυτές υπάρχει ένα μικρό σύνολο επιλογών για τον μορφισμό $a : W \longrightarrow Y$. Συνεπώς, η κλάση των κλάσεων ισοδυναμίας είναι ένα μικρό σύνολο.

□

Στην πραγματικότητα η Πρόταση 2.2.1 δεν είναι χρήσιμη. Κατά κύριο λόγο ενδιαφερόμαστε για τριγωνισμένες υποκατηγορίες $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ οι οποίες δεν είναι μικρές, και συνεπώς χρειαζόμαστε κριτήρια που μας διασφαλίζουν ότι η κατηγορία $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}-$σύνολα. Στο Κεφάλαιο 4 θα αναπτύξουμε κριτήρια για τις κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ που εγγυώνται ότι το πηλίκο Verdier $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}-$σύνολα.

3 Τέλειες κλάσεις

3.1 Πληθάριθμοι

Ένας πληθάριθμος α καλείται ιδιάζων, εάν ο α μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συνόλου πληθαρίθμων πληθικότητας $< \alpha$, οι οποίοι είναι όλοι μικρότεροι του α. Έστω $\aleph_n$ ο n-οστός άπειρος πληθάριθμος. Αυτό σημαίνει, $\aleph_0$ είναι ο μηδενικός άπειρος πληθάριθμος, δηλαδή ο αριθμήσιμος πληθάριθμος, $\aleph_1$ είναι ο πρώτος άπειρος πληθάριθμος, δηλαδή ο μικρότερος υπεραριθμήσιμος πληθάριθμος και ούτω καθεξής. Ο πληθάριθμος $\aleph_\omega$ ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος ο οποίος είναι μεγαλύτερος απο όλους τους $\aleph_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, ο

$$\aleph_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \aleph_n$$

είναι η αριθμήσιμη ένωση όλων των πληθαρίθμων, οι οποίοι είναι αυστηρά μικρότεροι απο τον $\aleph_\omega$. Συνεπώς, ο $\aleph_\omega$ είναι ένας ιδιάζων πληθάριθμος. Ένας πληθάριθμος ο οποίος δεν είναι ιδιάζων καλείται κανονικός. Ο διαδοχικός ενός πληθαρίθμου α, είναι ο μικρότερος πληθάριθμος που τον υπερβαίνει. Εάν β είναι ο διαδοχικός πληθάριθμος ενός άπειρου πληθαρίθμου α, τότε το άθροισμα ενός συνόλου πληθαρίθμων πληθικότητας $< \beta$, οι οποίοι είναι όλοι μικροτεροι του β, είναι ένα άθροισμα ενός συνόλου πληθαρίθμων πληθικότητας $\leq \alpha$, οι οποίοι είναι όλοι μικροτεροι ή ίσοι του α, είναι φραγμένο από τον $\alpha \times \alpha = \alpha$. Συνεπώς, ο διαδοχικός πληθάριθμος του α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος.

3.2 Παραγόμενες υποκατηγορίες

Ορισμός 3.2.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία που ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε θα συμβολίζουμε με $\langle S \rangle^\beta$ την μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες :*

3.2.1.1. *Τα αντικείμενα της κλάσης S ανήκουν στην $\mathcal{S}$.*

3.2.1.2. *Η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα, δηλαδή το συγκινόμενο (στην $\mathcal{T}$) οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \beta$ της $\mathcal{S}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$.*

3.2.1.3. *Η υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι πυκνή.*

Παρατήρηση 3.2.2. Η υποκατηγορία $\langle S \rangle^\beta$ είναι καλά ορισμένη. Είναι η τομή όλων των τριγωνισμένων υποκατηγοριών $\mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$ που ικανοποιούν τις συνθήκες 3.2.1.1, 3.2.1.2 και 3.2.1.3.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε σ' αυτό το Κεφάλαιο είναι ότι, εάν $\mathcal{T}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], και S είναι μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$ η οποία είναι ένα σύνολο, τότε για κάθε άπειρο πληθάριθμο β, η κατηγορία $\langle S \rangle^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρή, δηλαδή η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των αντικειμένων της $\langle S \rangle^\beta$ είναι ένα σύνολο.

Λήμμα 3.2.3. *Εάν $\beta \leq \gamma$ και $S \subset \mathcal{T}$ είναι ένα σύνολο αντικειμένων, τότε $\langle S \rangle^\beta \subset \langle S \rangle^\gamma$.*

Απόδειξη. Η $\langle S \rangle^\gamma$ έξ ορισμού ικανοποιεί τις συνθήκες 3.2.1.1 και 3.2.1.3 οι οποίες είναι ανεξάρτητες του γ, καθώς και την συνθήκη 3.2.2 η οποία εξαρτάται απο τον γ, δηλαδή το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \gamma$ της $\langle S \rangle^\gamma$ ανήκει στην $\langle S \rangle^\gamma$. Επομένως, το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \beta$ της $\langle S \rangle^\gamma$ ασφαλώς ανήκει στην $\langle S \rangle^\gamma$. Όμως, η $\langle S \rangle^\beta$ είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ που ικανοποιεί τις προηγούμενες συνθήκες. Συνεπώς, έπεται ο ζητούμενος εγκλεισμός.

□

Λήμμα 3.2.4.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, και $\mathcal{S}$ μια πλήρης υποκατηγορία κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της, αυτό σημαίνει ότι κάθε αντικείμενο της $\mathcal{T}$ ισόμορφο με ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$. Τότε η $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία εάν και μόνο εάν είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ^{-1}, και τους κώνους των μορφισμών της. Αυτό σημαίνει ότι, εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφιμός στην $\mathcal{S}$, και $C_f \in \mathcal{T}$ ένα αντικείμενο που τον συμπληρώνει σ' ένα τρίγωνο*

$$X \xrightarrow{f} Y \dashrightarrow C_f \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{T}$, τότε $C_f \in \mathcal{S}$.

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής. Έστω $\mathcal{S}$ μια προσθετική υποκατηγορία κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της, και τους κώνους των μορφισμών της. Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Από τα αξιώματα [TR0] και [TR2] υπάρχουν τα τρίγωνα

$$X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{1} \Sigma X$$

Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ περιέχει τα μηδενικά αντικείμενα της $\mathcal{T}$, και είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ. Έστω X, Y αντικείμενα της $\mathcal{S}$, δηλαδή $\Sigma\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Πάλι από τα αξιώματα [TR0] και [TR2] υπάρχουν τα τρίγωνα

$$\Sigma^{-1}Z \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{1} Z$$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0$$

Από την Πρόταση 1.2.1.2, το συγκινόμενο τους

$$\Sigma^{-1}Z \xrightarrow{0} X \longrightarrow X \oplus Z \longrightarrow Z$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα πεπερασμένα γινόμενα$-$συγκινόμενα, και επομένως είναι μια προσθετική υποκατηγορία. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία.

□

Λήμμα 3.2.4.2. *Έστω S είναι ένα σύνολο αντικειμένων μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα. Τότε η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ που περιέχει το S, συμβολιζόμενη $\overline{T}(S)$, είναι ουσιαστικά μικρή. Επιπλέον, κατά την διαδικασία της απόδειξης θα κατασκευάσουμε μια μικρή κατηγορία $T(S)$ ισοδύναμη με την $\overline{T}(S)$, η οποία περιέχει το S.*

Απόδειξη. Έστω $T_1(S)$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ της οποία τα αντικείμενα είναι η κλάση $S \cup \{0\}$. Επειδή το S είναι ένα σύνολο, η κλάση των αντικειμένων της $T_1(S)$ είναι ένα σύνολο, συνεπώς η $T_1(S)$ είναι μικρή. Θα ορίσουμε επαγωγικά την κατηγορία $T_{n+1}(S)$. Υποθέτουμε ότι οι υποκατηγορίες $T_1(S), T_2(S), \dots, T_n(S)$ έχουν οριστεί, και ότι είναι μικρές. Για κάθε μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ στην $T_n(S)$, επιλέγουμε έναν κώνο του f, δηλαδή ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$ που ανήκει στην κλάση ισομορφισμού ενός αντικειμένου Z, που τον συμπληρώνει σε ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{f} Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{T}$. Καλούμε αυτό το αντικείμενο C_f. Έστω $T_{n+1}(S)$ η μικρότερη πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, της οποίας η κλάση των αντικειμένων αποτελείται απο όλα τα αντικείμενα της $T_n(S)$ και τα παρακάτω αντικείμενα :

3.2.4.2.1. Το αντικείμενο C_f για κάθε μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ στην $T_n(S)$.

3.2.4.2.2. Το αντικείμενο $\Sigma^{-1}X$ για κάθε αντικείμενο $X \in T_n(S)$.

Επειδή η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, έπεται ότι η $T_{n+1}(S)$ είναι μια μικρη κατηγορία. Τώρα θέτουμε $T(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(S)$, η οποία είναι επίσης μια μικρή κατηγορία. Δοθέντος ενός οποιουδήποτε μορφισμού $f : X \longrightarrow Y$ στην $T(S)$, αυτός ανήκει σε κάποια $T_n(S)$ για κάποιο n. Αλλά τότε η $T_{n+1}(S)$ περιέχει έναν κώνο $C_f \in \mathcal{T}$ του f, δηλαδή ένα αντικείμενο που τον συμπληρώνει σ΄ ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{f} Y \dashrightarrow C_f \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{T}$. Επιπλέον, η $T(S)$ είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ^{-1}. Συνεπώς, από το Λήμμα 3.2.4.1, η κλειστότητα $\overline{T}(S)$ της $T(S)$, δηλαδή η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ της οποίας τα αντικείμενα είναι η κλάση όλων των αντικειμένων της $\mathcal{T}$ τα οποία είναι ισόμορφα με τα αντικείμενα της $T(S)$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, και από την κατασκευή της είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το σύνολο S. Συνεπώς, επειδή ο εγκλεισμός $T(S) \longrightarrow \overline{T}(S)$ είναι μια ισοδυναμία προσθετικών κατηγοριών, συμπεραίνουμε ότι η $\overline{T}(S)$ είναι ουσιαστικά μικρή.

□

Λήμμα 3.2.4.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Υποθέτουμε ότι οι ταυτοδύναμοι μορφισμοί διασπώνται στην $\mathcal{S}$. Τότε η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $X \oplus Y \in \mathcal{S}$ για κάποια αντικείμενα $X,\ Y \in \mathcal{T}$. Έστω u, p, v, q οι κανονικοί μορφισμοί του γινομένου−συγκινομένου $X \oplus Y$. Ο μορφισμός $\theta := up : X \oplus Y \longrightarrow X \oplus Y$ είναι ένας ταυτοδύναμος μορφισμός στην $\mathcal{S}$, επειδή $\theta\theta = upup = u1p = up = \theta$. Συνεπώς, εξ υποθέσεως οφείλει να διασπαστεί. Δηλαδή, υπάρχουν ένα αντικείμενο $Q \in \mathcal{S}$ και μορφισμοί $g : X \oplus Y \longrightarrow Q$ και $f : Q \longrightarrow X \oplus Y$ στην $\mathcal{S}$, έτσι ώστε $\theta = fg$ και $gf = 1$. Επίσης, ο u είναι ένας πυρήνας στην $\mathcal{T}$ του $(1 - \theta)$. Πράγματι, έστω $\alpha : Z \longrightarrow X \oplus Y$ μια απεικόνιση στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε $(1 - \theta)\alpha = 0$. Τότε $u(p\alpha) = up\alpha = \theta\alpha = \alpha$. Επειδή ο u είναι ένας μονομορφισμός, και ισχύει $(1 - \theta)u = u - upu = u - u1 = 0$, συμπεραίνουμε ότι ο u είναι ένας πυρήνας του $(1 - \theta)$. Τώρα, επειδή ισχύει

$$(1 - \theta)f = f - \theta f = f - fgf = f - f1 = 0$$

, έπεται ότι υπάρχει ένας (μοναδικός) μορφισμός $t : Q \longrightarrow X$ στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε $ut = f$. Επειδή ισχύει $gf = 1$, έπεται ότι η f είναι ένας μονομορφισμός, και επειδή ισχύει $ut = f$, έπεται ότι η t είναι επίσης ένας μονομορφισμός. Επίσης, επειδή ισχύει $t = put = pf$, συμπεραίνουμε ότι

$$t(gu) = pfgu = p\theta u = pupu = 1$$

Συνεπώς, ο t είναι ένας επιμορφισμός, και άρα είναι ένας ισομορφισμός. Επειδή, η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{T}$, έπεται ότι το αντικείμενο X ανήκει στην $\mathcal{S}$. Εντελώς όμοια θεωρώντας τον μορφισμό $\theta := vq : X \oplus Y \longrightarrow X \oplus Y$ αποδεικνύεται ότι το Y ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή.

□

Πρόταση 3.2.4.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5 ($\aleph_1$)]. Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία κλειστή ως προς τα $\aleph_1$−συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \aleph_1$ της $\mathcal{S}$ υπάρχει, ως συγκινόμενο στην $\mathcal{T}$, και είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Τότε η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή.*

Απόδειξη. Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία, κλειστή ως προς τα $\aleph_1$−συγκινόμενα, από την Πρόταση 1.6.10 έπεται ότι οι ταυτοδύναμοι μορφισμοί διασπώνται στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς από το Λήμμα 3.2.4.3, λαμβάνουμε το ζητούμενο.

□

Πρόταση 3.2.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}$−σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι S είναι ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε η κατηγορία $\langle S \rangle^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.2.3 γνωρίζουμε ότι, εάν $\beta \leq \gamma$, τότε $\langle S \rangle^{\beta} \subset \langle S \rangle^{\gamma}$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι εάν ο β ένας άπειρος πληθάριθμος και γ είναι ο διαδοχικός πληθάριθμος του β, τότε η $\langle S \rangle^{\gamma}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Αλλά, ο γ όντας διαδοχικός πληθάριθμος, είναι κανονικός. Επιπλέον, $\gamma > \beta \geq \aleph_0$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας τον β με τον διαδοχικό του γ, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο β είναι κανονικός και $\beta > \aleph_0$.

Παρατηρούμε ότι κάθε υποκατηγορία $\mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$ που ικανοποιεί την συνθήκη 3.2.1.2 έτσι ώστε $\beta > \aleph_0$, ικανοποιεί αυτομάτως την συνθήκη 3.2.1.3. Αυτο συμβαίνει, διότι η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα

$\beta-$συγκινόμενα, συνεπώς είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, δηλαδή περιέχει τα συγκινόμενα οποιουδήποτε αριθμήσιμου (πληθικότητας $< \aleph_1$) συνόλου αντικειμένων της, και συνεπώς από την Πρόταση 3.2.4.4, έπεται ότι η είναι πυκνή, δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη 3.2.1.3.

Με άλλα λόγια, εάν ισχύει $\beta > \aleph_0$, τότε η συνθήκη 3.2.1.3 είναι περιττή, επομένως η $\langle S\rangle^{\beta}$ είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες 3.2.1.1 και 3.2.1.2.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο S, περιέχει το μηδενικό αντικείμενο 0 της $\mathcal{T}$, διαφορετικά θέτουμε $S := S \cup \{0\}$. Έστω M ένα σύνολο πληθικότητας β. Θεωρούμε το σύνολο

$$\prod_{\mu\in M} X_{\mu}$$

όλων των ακολουθιών αντικειμένων του S μήκους β. Θεωρούμε το υποσύνολο

$$G \subset \prod_{\mu\in M} X_{\mu}$$

που αποτελείται απ΄ όλες τις ακολουθίες, έτσι ώστε το συνόλο των μη μηδενικών όρων να είναι πληθικότητας $< \beta$. Για κάθε ακολουθία στο G, επιλέγω έναν αντιπρόσωπο από την κλάση ισομορφισμού του συγκινομένου της ακολουθίας στην $\mathcal{T}$. Έστω $CP_{\beta,G}(S)$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, της οποίας τα αντικείμενα είναι η ένωση του συνόλου S και των επιλογών των αντιπροσώπων απο τις κλάσεις ισομορφισμού των συγκινομένων μήκους $< \beta$ στην $\mathcal{T}$. Η $CP_{\beta,G}(S)$ είναι μικρή, περιέχει το S, και περιέχει ένα αντικείμενο ισόμορφο με ένα συγκινόμενο για κάθε σύνολο αντικειμένων του S πληθικότητας $< \beta$. Θα κάνουμε χρήση υπερπεπερασμένης επαγωγής. Επαγωγικά θα ορίσουμε τις κατηγορίες S_i, για όλους τους διατακτικούς αριθμούς i. Έστω $S_0 = T(S)$ η μικρή κατηγορία ισοδύναμη με την μικρότερη τριγωνισμένη κατηγορία $\overline{T}(S)$ της $\mathcal{T}$ που περιέχει το S, όπως στο Λήμμα 3.2.4.2. Για έναν διαδοχικό διατακτικό αριθμό $i+1$, ορίζουμε

$$S_{i+1} := T(CP_{\beta,G}(S_i))$$

Για έναν οριακό διατακτικό αριθμό i, ορίζουμε

$$S_i := \bigcup_{j<i} S_j$$

Προφανώς, κάθε S_i είναι μικρή. Ισχυρίζομαι ότι η πλήρης υποκατηγορία $\overline{S}_{\beta}$ της $\mathcal{T}$ της οποίας τα αντικείμενα είναι η κλάση όλων των αντικειμένων της $\mathcal{T}$ τα οποία είναι ισόμορφα με τα αντικείμενα της S_{β} είναι τριγωνισμένη, και ικανοποιεί τις συνθήκες 3.2.1.1 και 3.2.1.2. Η συνθήκη 3.2.1.1 είναι προφανής, εκ κατασκευής ισχύει ο εγκλεισμός $S \subset S_0 \subset S_{\beta}$.

Το γεγονός ότι η $\overline{S}_{\beta}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία αποδεικνύεται με επαγωγή. $S_0 = T(S)$, και προφανώς $\overline{S}_0 = \overline{T}(S)$ είναι τριγωνισμένη. Για κάθε διαδοχικό διατακτικό αριθμό, $\overline{S}_{i+1} = \overline{T}(CP_{\beta,G}(S_i))$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία από το Λήμμα 3.2.4.2. Αλλά εάν ο i είναι ένας οριακός διατακτικός διατακτικός αριθμός, και για κάθε $j < i$ η $\overline{S}_j$ είναι τριγωνισμένη, τότε από το γεγονός ότι η

$$\overline{S}_i = \bigcup_{j<i} \overline{S}_j$$

είναι μια αύξουσα ένωση τριγωνισμένων κατηγοριών, συμπεραίνουμε ότι η $\overline{S}_i$ είναι τριγωνισμένη. Συνεπώς, από την υπερπεπερασμένη επαγωγή, έπεται ότι η $\overline{S}_i$ είναι τριγωνισμένη, για κάθε διατακτικό αριθμό i. Ειδικότερα, για τον κανονικό πληθάριθμο $\beta > \aleph_0$, η κατηγορία $\overline{S}_{\beta}$ είναι τριγωνισμένη.

Υποθέτουμε ότι $\{X_{\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}$ είναι μια συλλογή αντικειμένων της S_{β} πληθικότητας $< \beta$. Ο β όντας ένας άπειρος πληθάριθμος, είναι προφανώς ένας οριακός διατακτικός αριθμός. Συνεπώς,

$$S_\beta := \bigcup_{j<\beta} S_j$$

, και επειδή $X_\lambda \in S_\beta$ έπεται ότι για κάποιο $j_\lambda < \beta$, το X_λ ανήκει στο S_{j_λ}. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, διαλέγω έναν j_λ. Έστω $\gamma = \cup_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda$ ο μικρότερος διατακτικός αριθμός ο οποίος είναι μεγαλύτερος απ΄ όλους τους j_λ, $\lambda \in \Lambda$. Τώρα κάθε $j_\lambda < \beta$, και το πλήθος τους είναι $< \beta$, γιατί το σύνολο Λ έχει πληθικότητα $< \beta$. Επιπλέον, το άθροισμα των j_λ είναι ένα άθροισμα ενός συνόλου διατακτικών αριθμών πληθικότητας $< \beta$, οι οποίοι είναι όλοι μικρότεροι του β. Όμως ο β είναι κανονικός. Συνεπώς, η πληθικότητα του γ είναι αυστηρά μικρότερη απο την πληθικότητα του β, δηλαδή $\gamma < \beta$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $X_\lambda \in S_\gamma$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε η κατηγορία $S_{\gamma+1} := T(CP_{\beta,G}(S_\gamma)) \subset S_\beta$ περιέχει ένα αντικείμενο ισόμορφο με ένα συγκινόμενο των αντικειμένων της συλλογής $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$. Συνεπώς, η $\overline{S}_\beta$ περιέχει τα συγκινόμενα οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων της πληθικότητας $< \beta$. Δηλαδή, η κατηγορία $\overline{S}_\beta$ ικανοποιεί τις συνθήκες 3.2.1.1 και 3.2.1.2.

Τέλος, επειδή η κατηγορία $\overline{S}_\beta$ ικανοποιεί τις συνθήκες 3.2.1.1 και 3.2.1.2, και η $\langle S\rangle^\beta$ είναι η μικρότερη κατηγορία που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, έπεται $\langle S\rangle^\beta \subset \overline{S}_\beta$. Αλλά επειδή η κατηγορία $\overline{S}_\beta$ είναι ισοδύναμη με την μικρή κατηγορία S_β, είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς, η $\langle S\rangle^\beta$ από την σχέση του περιέχεσθαι, έπεται ότι είναι επίσης ουσιαστικά μικρή.

□

Ορισμός 3.2.6. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Μια υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ καλείται $\beta-$τοπικοποιήσιμη εάν είναι πυκνή και κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα, δηλαδή το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \beta$ της $\mathcal{S}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει ότι το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \beta$ της $\mathcal{S}$ υπάρχει, ως συγκινόμενο στην $\mathcal{T}$, και είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Μια υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ καλείται τοπικοποιήσιμη εάν είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, δηλαδή είναι $\beta-$τοπικοποιήσιμη για κάθε β. Αυτό σημαίνει, ότι εάν $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ είναι μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{S}$, τότε το συγκινόμενο*

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

στην $\mathcal{T}$, είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$.

Παρατήρηση 3.2.7. Εάν $\beta > \aleph_0$, τότε κάθε τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ η οποία είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα είναι αυτομάτως πυκνή, και συνεπώς είναι $\beta-$τοπικοποιήσιμη. Γιατί σε αυτή την περίπτωση η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, δηλαδή περιέχει τα συγκινόμενα οποιουδήποτε αριθμήσιμου (πληθικότητας $< \aleph_1$) συνόλου αντικειμένων της, και συνεπώς από την Πρόταση 3.2.4.4, έπεται ότι είναι πυκνή.

Παράδειγμα 3.2.8. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε η υποκατηγορία $\langle S\rangle^\beta$ είναι $\beta-$τοπικοποιήσιμη, και επιπλέον είναι η μικρότερη $\beta-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία, η οποία περιέχει την S. Επίσης, η ένωση όλων των υποκατηγοριών $\langle S\rangle^\beta$, δηλαδή η υποκατηγορία

$$\bigcup_\beta \langle S\rangle^\beta$$

είναι τοπικοποιήσιμη (υπονοούμε ότι ο β διατρέχει όλους τους πληθαρίθμους), και επιπλέον είναι η μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία, η οποία περιέχει την S.

Ορισμός 3.2.9. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε η κατηγορία του Παραδείγματος 3.2.8*

$$\bigcup_\beta \langle S\rangle^\beta$$

θα συμβολίζεται με $\langle S \rangle$. Σημειώνουμε, ότι ακόμη και εάν η κλάση S είναι μικρή (δηλαδή είναι ένα σύνολο) και η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, όπου σ΄ αυτή την περίπτωση από την Πρόταση 3.2.5 γνωρίζουμε ότι οι κατηγορίες $\langle S \rangle^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρές, η κατηγορία συνήθως $\langle S \rangle$ θα είναι πελώρια (δεν θα είναι μικρή, δηλαδή σύνολο). Η κατηγορία $\langle S \rangle$ θα καλείται η τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία που παράγεται από την κλάση S. Θα λέμε ότι η κλάση S παράγει την $\mathcal{T}$, εάν ισχύει $\mathcal{T} = \langle S \rangle$.

Καταχρηστικά όπως έχουμε ξανακάνει για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, από εδώ και στο εξής θα ταυτίζουμε τους μορφισμούς στα πηλίκα Verdier με τους αντιπροσώπους τους.

Λήμμα 3.2.10. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5 (β)]. Αυτό σημαίνει ότι είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα, δηλαδή το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \beta$ της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Έστω $\mathcal{S}$ μια $\beta-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5 (β)] , και ο συναρτητής τοπικοποίησης Verdier*

$$\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα.

Απόδειξη. Επειδή τα αντικείμενα των κατηγοριών $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε ότι ένα $\beta-$συγκινόμενο στην $\mathcal{T}$, είναι επίσης ένα $\beta-$συγκινόμενο στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Έστω Λ ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$, και $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε το $\beta-$συγκινόμενο

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι είναι επίσης ένα $\beta-$συγκινόμενο στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Έστω Y ένα τυχαίο αντικείμενο της $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Θα δείξουμε ότι κάθε συλλογή των μορφισμών

$$\{X_\lambda \longrightarrow Y,\ \lambda \in \Lambda\}$$

στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω του $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \mathcal{T}/\mathcal{S}$. Δηλαδή, αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε, είναι η ύπαρξη και η μοναδικότητα της παραγοντοποίησης. Οι μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ παρίστανται απο διαγράμματα της μορφής

$$\begin{tikzcd} P_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "f_\lambda"'] & Y \\ X_\lambda & \end{tikzcd}$$

έτσι ώστε $f_\lambda \in Mor_{\mathcal{S}}$. Αυτό σημαίνει, ότι υπάρχουν τρίγωνα

$$P_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda \dashrightarrow Z_\lambda \dashrightarrow \Sigma P_\lambda$$

που συμπληρώνουν τους μορφισμούς f_λ στην $\mathcal{T}$ έτσι ώστε $Z_\lambda \in \mathcal{S}$. Τώρα το συγκινόμενο των τριγώνων

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \longrightarrow \Sigma \Big\{ \coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \Big\}$$

από την Πρόταση 1.2.1.2 είναι ένα τρίγωνο και το $\coprod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ όντας ένα $\beta-$συγκινόμενο στην $\mathcal{S}$, ανήκει στην $\mathcal{S}$. Επομένως, η απεικόνιση

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

ανήκει στην $Mor_{\mathcal{S}}$. Συνεπώς, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda"'] & Y \\ \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda & \end{tikzcd}$$

είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Η σύνθεση του με τις κανονικές εμφυτεύσεις

$$X_\lambda \xrightarrow{i_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, δηλαδή τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} P_\lambda \arrow[r, dashed, "i'_\lambda"] \arrow[d, dashed, "f_\lambda"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda"'] & Y \\ X_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, "1"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda & \\ X_\lambda & & \end{tikzcd}$$

ισούνται με τα διάγραμματα

$$\begin{tikzcd} P_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "f_\lambda"'] & Y \\ X_\lambda & \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, οι απεικονίσεις $X_\lambda \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ παραγοντοποιούνται μέσω της απεικόνισης

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda"'] & Y \\ \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda & \end{tikzcd}$$

Μένει να δείξουμε την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης. Έστω ότι δίνεται μια απεικόνιση στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ της μορφής

$$\phi : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow Y$$

έτσι ώστε οι συνθέσεις $\phi \circ i_\lambda$ να μηδενίζονται, όπου i_λ είναι οι κανονικές εμφυτεύσεις του συγκινομένου $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}$. Πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ μηδενίζεται. Η ϕ από την Παρατήρηση 2.1.24 εναλλακτικά παρίσταται ως ένα διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

έτσι ώστε $g \in Mor_{\mathcal{S}}$. Τότε για κάθε $\lambda \in \Lambda$ η σύνθεση $\phi \circ i_\lambda$ η οποία παρίσταται από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X_\lambda \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

μηδενίζεται στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Από το Λήμμα 2.1.25, υπάρχουν αντικείμενα $Z_\lambda \in \mathcal{S}$ έτσι ώστε οι μορφισμοί $X_\lambda \longrightarrow Q$ παραγοντοποιούνται ως

$$X_\lambda \longrightarrow Z_\lambda \longrightarrow Q$$

Αλλά τότε η απεικόνιση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow Q$$

παραγοντοποιείται ως

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} z_\lambda \longrightarrow Q$$

και επειδή το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$, είναι ένα $\beta-$συγκινόμενο στην $\mathcal{S}$, ανήκει στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.25 έπεται ότι η απεικόνιση ϕ μηδενίζεται στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$.

Τέλος, ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, διότι ένα οποιοδήποτε $\beta-$συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ υλοποιείται μέσω των κανονικών εμφυτεύσεων $\mathcal{F}_{univ}(i_\lambda) : X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, όπου $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ είναι οι κανονικές εμφυτεύσεις του $\beta-$συγκινομένου $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}$.

□

Πόρισμα 3.2.11. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Αυτό σημαίνει ότι είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, δηλαδή το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Έστω $\mathcal{S}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ ικανοποεί το αξίωμα [TR5], και ο συναρτητής τοπικοποίησης Verdier*

$$\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

διατηρεί τα συγκινόμενα.

Απόδειξη. Άμμεση από το Λήμμα 3.2.10.

□

3.3 Τέλειες κλάσεις

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Μία κλάση αντικειμένων $S \subset \mathcal{T}$ καλείται $\beta-$τέλεια εάν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :*

3.3.1.1. *Η S περιέχει το μηδέν.*

3.3.1.2. *Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι η πληθικότητα του συνόλου Λ είναι $< \beta$. Έστω k ένα αντικείμενο της S. Τότε κάθε απεικόνιση*

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in S$. Ακριβέστερα αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, υπάρχει ένα αντικείμενο $k_\lambda \in S$ και μια απεικόνιση $f_\lambda : k_\lambda \longrightarrow X_\lambda$, έτσι ώστε η απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

3.3.1.3. *Υποθέτουμε ξανά ότι Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$. Επίσης, υποθέτουμε ότι k και k_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της S και X_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της $\mathcal{T}$, έτσι ώστε η σύνθεση*

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να μηδενίζεται. Τότε οι απεικονίσεις $f_\lambda : k_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ δύναται να παραγοντοποιηθούν ως

$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} l_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} X_\lambda$$

με $l_\lambda \in S$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

να μηδενίζεται.

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος και T μια $\beta-$τέλεια κλάση στην $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι $S \subset T$ είναι μια ισοδύναμη κλάση, αυτό σημαίνει ότι κάθε αντικείμενο της S είναι ισόμορφο με κάποιο αντικείμενο της T. Τότε η S είναι επίσης μια $\beta-$τέλεια κλάση.*

Απόδειξη. Προφανής.

□

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι S είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση της $\mathcal{T}$. Έστω T η κλάση όλων των αντικειμένων στην $\mathcal{T}$ τα οποία είναι οι ευθείς προσθετέοι των αντικειμένων της S. Τότε η T είναι επίσης μια $\beta-$τέλεια κλάση.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν περιέχει το 0. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα αντικείμενο $k \in T$, ένα σύνολο Λ πληθικότητας $< \beta$, μία οικογένεια αντικειμένων $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ στην $\mathcal{T}$ και μία απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επειδή, $k \in T$, υπάρχει κάποιο $k' \in T$, έτσι ώστε $k \oplus k' \in S$. Θεωρώ την σύνθεση

$$k \oplus k' \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}} k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επειδή, $k \oplus k' \in S$ και η S είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση, η απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$k \oplus k' \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in S \subset T$. Αλλά τώρα η απεικόνιση

$$k \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}} k \oplus k' \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

είναι μια παραγοντοποίηση της αρχικής απεικόνισης

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Υποθέτουμε τώρα ότι δίνεται μια σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

η οποία μηδενίζεται με $k, k_\lambda \in T$. Επιλέγω ένα $k' \in T$, έτσι ώστε $k \oplus k' \in S$, και για κάθε $\lambda \in \Lambda$ επιλέγω ένα ένα $k'_\lambda \in T$, έτσι ώστε $k_\lambda \oplus k'_\lambda \in S$. Τότε η σύνθεση

$$k \oplus k' \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}} k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \oplus k'_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \begin{bmatrix}f_\lambda & 0\end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

μηδενίζεται. Επειδή, η S είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση, για κάθε $\lambda \in \Lambda$ η απεικόνιση

$$\begin{bmatrix}f_\lambda & 0\end{bmatrix} : k_\lambda \oplus k'_\lambda \longrightarrow X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k_\lambda \oplus k'_\lambda \xrightarrow{\begin{bmatrix}h_\lambda & h'_\lambda\end{bmatrix}} l_\lambda \longrightarrow X_\lambda$$

με $l_\lambda \in S$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \oplus k' \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}} k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \oplus k'_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \begin{bmatrix}h_\lambda & h'_\lambda\end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

να μηδενίζεται. Αλλά τότε η σύνθεση

$$k \xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} k \oplus k' \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}} k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \oplus k'_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\begin{bmatrix}h_\lambda & h'_\lambda\end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

μηδενίζεται επίσης. Συνεπώς, δείξαμε ότι υπάρχουν αντικείμενα $l_\lambda \in S$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

να μηδενίζεται. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η T είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση.

□

Ορισμός 3.3.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Ένα αντικείμενο $k \in \mathcal{T}$ καλείται $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$ εάν ισχύει η παρακάτω συνθήκη :*

3.3.4.1. *Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι η πληθικότητα του συνόλου Λ είναι $< \beta$. Τότε κάθε απεικόνιση*

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in \mathcal{S}$.

Λήμμα 3.3.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Εάν k είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$ το οποίο είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$, τότε αυτομάτως ισχύει η παρακάτω συνθήκη :*

3.3.5.1. *Υποθέτουμε ότι Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$. Επίσης, υποθέτουμε ότι k_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της $\mathcal{S}$ και X_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της $\mathcal{T}$, έτσι ώστε η σύνθεση*

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να μηδενίζεται. Τότε οι απεικονίσεις $f_\lambda : k_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ δύναται να παραγοντοποιηθούν ως

$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} l_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} X_\lambda$$

με $l_\lambda \in \mathcal{S}$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

να μηδενίζεται.

Απόδειξη. Έστω Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$. Επίσης, υποθέτουμε ότι k_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της $\mathcal{S}$ και X_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της $\mathcal{T}$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να μηδενίζεται. Για κάθε λ, θεωρώ τα τρίγωνα

$$Y_\lambda \dashrightarrow k_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda \dashrightarrow \Sigma Y_\lambda$$

που συμπληρώνουν τους μορφισμούς f_λ στην $\mathcal{T}$. Τώρα το συγκινόμενο των τριγώνων

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right\}$$

από την Πρόταση 1.2.1.2 είναι ένα τρίγωνο.

Ο ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k,-) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ απεικονίζει το τρίγωνο αυτό σε μια ακριβή ακολουθία. Επειδή η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

μηδενίζεται, από την ακρίβεια της προηγούμενης ακολουθίας έπεται ότι η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda$$

Από την υπόθεση το αντικείμενο k είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$, συνεπώς η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

με $j_\lambda \in \mathcal{S}$. Η σύνθεση

$$j_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow k_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda$$

προφανώς μηδενίζεται. Για κάθε λ, θεωρώ τα τρίγωνα

$$j_\lambda \longrightarrow k_\lambda \overset{g_\lambda}{\dashrightarrow} l_\lambda \dashrightarrow \Sigma j_\lambda$$

που συμπληρώνουν τους μορφισμούς $j_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow k_\lambda$ στην $\mathcal{T}$.

Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, ο συνομολογικός συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-,X_\lambda) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ απεικονίζει το αντίστοιχο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία. Επειδή η σύνθεση

$$j_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow k_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda$$

μηδενίζεται, από την ακρίβεια της προηγούμενης ακολουθίας έπεται ότι, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, η απεικόνιση

$$k_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} l_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} X_\lambda$$

Επειδή, τα αντικείμενα j_λ και k_λ ανήκουν στην $\mathcal{S}$, και η $\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία, το l_λ ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

μηδενίζεται, επειδή η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

μηδενίζεται, καθώς οι

$$j_\lambda \longrightarrow k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} l_\lambda$$

είναι διαδοχικοί μορφισμοί ενός τριγώνου.

□

Παρατήρηση 3.3.6.1. Από το Λήμμα 3.3.5 γνωρίζουμε ότι εάν $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ της οποίας όλα τα αντικείμενα είναι $\beta-$καλά ως προς την $\mathcal{S}$, τότε η $\mathcal{S}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση, ακριβέστερα η κλάση όλων των αντικειμένων της $\mathcal{S}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση. Δηλαδή, κάθε αντικείμενο $k \in \mathcal{S}$, εάν ικανοποιεί την συνθήκη 3.3.1.2, τότε η συνθήκη 3.3.1.3 έπεται αυτομάτως. Στα Λήμματα 3.3.7 και 3.3.8 θα αποδείξουμε ότι δεν χρειάζεται να ελέγξουμε ότι κάθε αντικείμενο της $\mathcal{S}$ είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$. Αρκεί να ελέγξουμε τα αντικείμενα μιας αρκετά μεγάλης παράγουσας κλάσης.

Λήμμα 3.3.6.2. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Ορίζουμε την πλήρη υποκατηγορία*

$$\mathcal{Q} = \{k \in \mathcal{S} \mid k \text{ είναι } \beta-\text{καλό ως προς την } \mathcal{S}\}$$

της $\mathcal{T}$. Τότε η $\mathcal{Q}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Επιπλεόν, εάν η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή, τότε η $\mathcal{Q}$ είναι επίσης πυκνή.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρώ ότι το k είναι ένα $\beta-$καλό αντικείμενο ως προς την $\mathcal{S}$ εάν και μόνο εάν το αντικείμενο Σk είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$. Ο συναρτητής Σ είναι ένας αριστερός (και δεξιός) συζυγής του Σ^{-1}, και ο συναρτητής Σ^{-1} διατηρεί τα συγκινόμενα από την Πρόταση 1.6.1.1. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

εάν και μόνο εάν η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma^{-1} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma^{-1} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma^{-1} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma^{-1} X_\lambda$$

και το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \in \mathcal{S}$ εάν και μόνο εάν το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} \Sigma^{-1} k_\lambda \in \mathcal{S}$. Συνεπώς, η $\mathcal{Q}$ είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$. Ομοίως, ισχύει $\Sigma^{-1}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$.

Η $\mathcal{Q}$ είναι κλειστή ως προς ισομορφισμούς των αντικειμένων της. Πράγματι, έστω k ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο k' της $\mathcal{Q}$, και έστω $k' \longrightarrow k$ ο αντίστοιχος ισομορφισμός. Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι η πληθικότητα του συνόλου Λ είναι $< \beta$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$k' \xrightarrow{\simeq} k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επειδή, το k' ανήκει στην $\mathcal{Q}$, η προηγούμενη απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$k' \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in \mathcal{S}$. Συνεπώς, η αρχική απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$k \xrightarrow{\simeq} k' \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επομένως το k ανήκει στην $\mathcal{Q}$. Συνεπώς, η $\mathcal{Q}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της, καθώς επίσης και ως προς τους προσθετικούς αυτομορφισμούς Σ και Σ^{-1}. Από το Λήμμα 3.2.4.1, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς τους κώνους των μορφισμών της. Έστω $f : k \longrightarrow l$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{Q}$. Θεωρώ ένα τρίγωνο

$$k \longrightarrow l \overset{w}{\dashrightarrow} m \dashrightarrow \Sigma k$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{T}$. Γνωρίζουμε ότι τα $k, l \in \mathcal{Q}$, Θα δείξουμε ότι το m ανήκει επίσης στην $\mathcal{Q}$.

Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$, με Λ ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$. Σχηματίζουμε το $\beta-$συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι συνομολογικός απεικονίζει το τρίγωνο στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(m, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(l, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(k, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)$$

Υποθέτουμε ότι δίνεται μια απεικόνιση

$$m \xrightarrow{\quad h \quad} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

στην $\mathcal{T}$. Από την ακρίβεια της ακολουθίας, αυτή αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να μηδενίζεται. Όμως, το αντικείμενο l είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$, συνεπώς υφίσταται μια παραγοντοποίηση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $l_\lambda \in \mathcal{S}$. Επιπλέον, η σύνθεση

$$k \longrightarrow l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

επίσης μηδενίζεται, και άρα επειδή το αντικείμενο k είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$, συμπεραίνουμε από το Λήμμα 3.3.5 ότι οι απεικονίσεις $f_\lambda : l_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ δύναται να παραγοντοποιηθούν ως

$$l_\lambda \xrightarrow{\quad g_\lambda \quad} m_\lambda \xrightarrow{\quad h_\lambda \quad} X_\lambda$$

με $m_\lambda \in \mathcal{S}$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda$$

να μηδενίζεται. Συνεπώς, από την ακρίβεια της ακολουθίας η απεικόνιση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$l \xrightarrow{\quad w \quad} m \xrightarrow{\quad g \quad} \coprod_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda$$

Τώρα, η σύνθεση

$$m \xrightarrow{g} \coprod_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

δεν συμπίπτει απαραίτητα με την δοθείσα απεικόνιση

$$m \xrightarrow{h} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Αλλά από την κατασκευή, οι συνθέσεις εκ δεξιών με την απεικόνιση $w : l \longrightarrow m$, δηλαδή οι συνθέσεις $h \circ w$ και $\big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda \circ g\big) \circ w$ συμπίπτουν με την σύνθεση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επομένως, η διαφορά τους $\big(h - \coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda \circ g\big) \circ w$ μηδενίζεται, και συνεπώς από την ακρίβεια της ακολουθίας στην θέση $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(m, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big)$ η διαφορά $h - \coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda \circ g$ παραγοντοποιείται ως

$$m \longrightarrow \Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επειδή το αντικείμενο k είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$, έπεται ότι το αντικείμενο Σk είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$, συνεπώς η απεικόνιση

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} m'_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} h'_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $m'_\lambda \in \mathcal{S}$. Άρα, η διαφορά $h - \coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda \circ g$ παραγοντοποιείται ως

$$m \longrightarrow \Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} m'_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} h'_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

και συνεπώς η απεικόνιση

$$m \xrightarrow{h} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$m \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda \oplus m'_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \begin{bmatrix} h_\lambda & h'_\lambda \end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $m_\lambda \oplus m'_\lambda \in \mathcal{S}$, δηλαδή το αντικείμενο m είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S}$, και συνεπώς ανήκει στην $\mathcal{Q}$.

Τέλος, κάθε ευθύς προσθετέος στην $\mathcal{T}$ ενός $\beta-$καλού αντικειμένου ως προς την $\mathcal{S}$, είναι επίσης ένα $\beta-$καλό αντικείμενο ως προς την $\mathcal{S}$. Συνεπώς, εάν η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή, τότε η $\mathcal{Q}$ είναι επίσης πυκνή.

□

Λήμμα 3.3.7. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι κάθε αντικείμενο $k \in S$ είναι $\beta-$καλό ως προς την τριγωνισμένη υποκατηγορία $\overline{T}(S) \subset \mathcal{T}$. Τότε τα αντικείμενα της κατηγορίας $\overline{T}(S)$ συνιστούν μια $\beta-$τέλεια κλάση.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την πλήρη υποκατηγορία

$$\mathcal{Q} = \{k \in \overline{T}(S) \mid k \text{ είναι } \beta-\text{καλό ως προς την } \overline{T}(S)\}$$

της $\mathcal{T}$. Προφανώς ισχύει $\mathcal{Q} \subset \overline{T}(S)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{T}(S) \subset \mathcal{Q}$. Τότε, $\mathcal{Q} = \overline{T}(S)$ και από την Παρατήρηση 3.3.6.1, έπεται ότι η $\mathcal{Q}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση. Για να δείξουμε ότι $\overline{T}(S) \subset \mathcal{Q}$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{Q}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει την κλάση S. Αλλά η $\mathcal{Q}$ περιέχει την κλάση S εξ υποθέσεως, και από το Λήμμα 3.3.6.2 είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Συνεπώς, η $\mathcal{Q}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση.

□

Λήμμα 3.3.8. *Έστω α και β άπειροι πληθάριθμοι. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι κάθε αντικείμενο $k \in S$ είναι $\beta-$καλό ως προς την τριγωνισμένη υποκατηγορία $\langle S \rangle^\alpha \subset \mathcal{T}$. Τότε τα αντικείμενα της κατηγορίας $\langle S \rangle^\alpha$ συνιστούν μια $\beta-$τέλεια κλάση.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την πλήρη υποκατηγορία

$$\mathcal{Q} = \left\{k \in \langle S \rangle^\alpha \mid k \text{ είναι } \beta-\text{καλό ως προς την } \langle S \rangle^\alpha\right\}$$

της $\mathcal{T}$. Προφανώς ισχύει $\mathcal{Q} \subset \langle S \rangle^\alpha$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle S \rangle^\alpha \subset \mathcal{Q}$. Τότε, $\mathcal{Q} = \langle S \rangle^\alpha$ και από την Παρατήρηση 3.3.6.1, έπεται ότι η $\mathcal{Q}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση. Για να δείξουμε ότι $\langle S \rangle^\alpha \subset \mathcal{Q}$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{Q}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 3.2.1.1 , 3.2.1.2 και 3.2.1.3. Από το Λήμμα 3.3.6.2, η $\mathcal{Q}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Η $\mathcal{Q}$ περιέχει την κλάση S εξ υποθέσεως, συνεπώς ικανοποιεί την συνθήκη 3.2.1.1. Επίσης, από το Λήμμα 3.3.6.2 είναι πυκνή, επειδή η $\langle S \rangle^\alpha$ είναι πυκνή, συνεπώς ικανοποιεί την συνθήκη 3.2.1.2. Μένει να δείξουμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη 3.2.1.2, δηλαδή ότι είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα.

Έστω $\{k_\mu,\ \mu \in M\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{Q}$, με M είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \alpha$, και έστω ένα συγκινόμενο $\coprod_{\mu \in M} k_\mu$ στην $\mathcal{T}$. Επειδή η $\langle S \rangle^\alpha$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη το συγκινόμενο ανήκει επίσης στην $\langle S \rangle^\alpha$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ανήκει στην $\mathcal{Q}$, δηλαδή ότι είναι $\beta-$καλό ως προς την $\langle S \rangle^\alpha$. Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}$, με Λ ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$. Υποθέτουμε ότι δίνεται μια απεικόνιση

$$\coprod_{\mu \in M} k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\mu \in M$, έχουμε μια απεικόνιση

$$k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Επειδή το αντικείμενο $k_\mu \in \mathcal{Q}$, για κάθε $\mu \in M$, η προηγούμενη απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_{\mu,\lambda} \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_{\mu,\lambda}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_{\mu,\lambda} \in \langle S\rangle^\alpha$. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$\coprod_{\mu\in M} k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$\coprod_{\mu\in M} k_\mu \longrightarrow \coprod_{\mu\in M}\coprod_{\lambda\in\Lambda} k_{\mu,\lambda} \xrightarrow{\coprod_{\mu\in M}\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_{\mu,\lambda}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

, ισοδύναμα ως

$$\coprod_{\mu\in M} k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\coprod_{\mu\in M} k_{\mu,\lambda} \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\coprod_{\mu\in M} f_{\mu,\lambda}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

, και επειδή η κατηγορία $\langle S\rangle^\alpha$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, το συγκινόμενο $\coprod_{\mu\in M} k_{\mu,\lambda} \in \langle S\rangle^\alpha$. Δείξαμε λοιπόν ότι το $\coprod_{\mu\in M} k_\mu$ είναι $\beta-$καλό ως προς την $\langle S\rangle^\alpha$, συνεπώς ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{Q}$.

□

Θεώρημα 3.3.9. *Έστω α και β άπειροι πληθάριθμοι. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\{S_i,\ i \in I\}$ μια οικογένεια $\beta-$τέλειων κλάσεων της $\mathcal{T}$. Υπενθυμίζουμε ότι εάν συμβολίσουμε $\cup S_i$ την ένωση*

$$\bigcup_{i\in I} S_i$$

, τότε $\overline{T}(\cup S_i)$ είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει την ένωση $\cup S_i$, και $\langle \cup S_i\rangle^\alpha$ είναι η μικρότερη $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ η οποία περιέχει την ένωση $\cup S_i$. Ισχυριζόμαστε ότι τα αντικείμενα της κατηγορίας $\overline{T}(\cup S_i)$ συνιστούν μια $\beta-$τέλεια κλάση. Επιπλέον, τα αντικείμενα της κατηγορίας $\langle \cup S_i\rangle^\alpha$ συνιστούν επίσης μια $\beta-$τέλεια κλάση.

Απόδειξη. Επειδή οι αποδείξεις είναι πανομοιότυπες, θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για την κατηγορία $\langle \cup S_i\rangle^\alpha$. Από το Λήμμα 3.3.8, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αντικείμενο $k \in \cup S_i$ είναι $\beta-$καλό ως προς την τριγωνισμένη υποκατηγορία $\langle \cup S_i\rangle^\alpha \subset \mathcal{T}$. Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$, με Λ ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$. Έστω μια απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επειδή το $k \in \cup S_i$, έπεται ότι για κάποιο $i \in I$, το k ανήκει σε κάποια $\beta-$τέλεια κλάση S_i. Αλλά τότε η προηγούμενη απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in S_i \subset \langle \cup S_i \rangle^\alpha$.

$\square$

Πόρισμα 3.3.10. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Η συλλογή των $\beta-$τέλειων κλάσεων $S_i \subset \mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$ έχει ένα μοναδικό μεγιστικό μέλος, έστω S. Επιπλέον, κάθε $\beta-$τέλεια κλάση R της $\mathcal{T}$, της οποίας τα αντικείμενα ανήκουν στην $\mathcal{S}$, περιέχεται στην μοναδική μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση S.*

Απόδειξη. Έστω $\{S_i,\ i \in I\}$ η κλάση όλων των $\beta-$τέλειων κλάσεων της $\mathcal{T}$, των οποίων όλα τα αντικείμενα ανήκουν στην $\mathcal{S}$. Τότε από το Θεώρημα 3.3.9, τα αντικείμενα της κατηγορίας $\overline{T}(\cup S_i)$ συνιστούν μια $\beta-$τέλεια κλάση. Επειδή, η κατηγορία $\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένη και περιέχει την $\cup S_i$, έπεται ότι περιέχει την $\overline{T}(\cup S_i)$. Επομένως, η κατηγορία $\overline{T}(\cup S_i)$ περιέχεται στην $\mathcal{S}$, είναι $\beta-$τέλεια, και περιέχει όλες τις $\beta-$τέλειες κλάσεις $S_i \subset \mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$. Συνεπώς, θέτοντας $S := \overline{T}(\cup S_i)$, λαμβάνουμε την μοναδική μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $S \subset \mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$.

$\square$

Ορισμός 3.3.11. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ της οποίας τα αντικείμενα απαρτίζονται απο τα αντικείμενα της μεγιστικής $\beta-$τέλειας κλάσης S του Πορίσματος 3.3.10, θα συμβολίζεται με $\mathcal{S}_\beta$.*

Στην απόδειξη του Πορίσματος 3.3.10, η $\mathcal{S}_\beta$ ορίστηκε ως η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ που περιέχει την ένωση όλων των $\beta-$τέλειων κλάσεων της $\mathcal{T}$ που περιέχονται στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, είναι εξ ορισμού μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Παρόλα αυτά

Πόρισμα 3.3.12. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε η υποκατηγορία $\mathcal{S}_\beta$ είναι τριγωνισμένη.*

Απόδειξη. Η $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία η οποία περιέχει την υποκατηγορία $\mathcal{S}_\beta$, και συνεπώς περιέχει την ελαχιστική τριγωνισμένη υποκατηγορία κατηγορία η οποία περιέχει την $\mathcal{S}_\beta$. Δηλαδή ισχύουν οι εγκλεισμοί,

$$\mathcal{S}_\beta \subset \overline{T}(\mathcal{S}_\beta) \subset \mathcal{S}$$

Αλλά η $\mathcal{S}_\beta$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση. Από το Θεώρημα 3.3.9, έπεται ότι η $\overline{T}(\mathcal{S}_\beta)$ είναι επίσης μια $\beta-$τέλεια κλάση. Επειδή η $\mathcal{S}_\beta$ είναι η μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση, περιέχει την $\overline{T}(\mathcal{S}_\beta)$. Δηλαδή ισχύουν οι εγκλεισμοί,

$$\overline{T}(\mathcal{S}_\beta) \subset \mathcal{S}_\beta \subset \mathcal{S}$$

Συνεπώς, έπεται η ισότητα $\mathcal{S}_\beta = \overline{T}(\mathcal{S}_\beta)$, και επομένως η $\mathcal{S}_\beta$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία.

$\square$

Πόρισμα 3.3.13. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία η οποία είναι πυκνή. Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε η τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S}_\beta$ είναι πυκνή.*

Απόδειξη. Έστω T η κλάση όλων των αντικειμένων της $\mathcal{T}$ τα οποία είναι ισόμορφα με τους ευθείς προσθετέους των αντικειμένων της $\mathcal{S}_\beta$, δηλαδή T είναι το πυκνό περίβλημα της $\mathcal{S}_\beta$ στην $\mathcal{T}$. Επειδή η $\mathcal{S}$ περιέχει την $\mathcal{S}_\beta$ και είναι πυκνή, περιέχει την T. Δηλαδή ισχύουν οι εγκλεισμοί,

$$\mathcal{S}_\beta \subset T \subset \mathcal{S}$$

Αλλά η T είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση από το Λήμμα 3.3.3, και επειδή η $\mathcal{S}_\beta$ είναι η μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση, περιέχει την T. Δηλαδή ισχύουν οι εγκλεισμοί,

$$T \subset \mathcal{S}_\beta \subset \mathcal{S}$$

Συνεπώς, έπεται η ισότητα $\mathcal{S}_\beta = T$, και επομένως η $\mathcal{S}_\beta$ είναι πυκνή.

$\square$

Πόρισμα 3.3.14. *Έστω α και β άπειροι πληθάριθμοι. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω $\mathcal{S}$ μια $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Τότε η τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S}_\beta$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη.*

Απόδειξη. Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη και περιέχει την $\mathcal{S}_\beta$, περιέχει την $\langle\mathcal{S}_\beta\rangle^\alpha$, η οποία είναι η μικρότερη $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία η οποία περιέχει την $\mathcal{S}_\beta$. Δηλαδή ισχύουν οι εγκλεισμοί,

$$\mathcal{S}_\beta \subset \langle\mathcal{S}_\beta\rangle^\alpha \subset \mathcal{S}$$

Αλλά η $\mathcal{S}_\beta$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση. Από το Θεώρημα 3.3.9, έπεται ότι η $\langle\mathcal{S}_\beta\rangle^\alpha$ είναι επίσης μια $\beta-$τέλεια κλάση. Επειδή η $\mathcal{S}_\beta$ είναι η μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση, περιέχει την $\langle\mathcal{S}_\beta\rangle^\alpha$. Δηλαδή ισχύουν οι εγκλεισμοί,

$$\langle\mathcal{S}_\beta\rangle^\alpha \subset \mathcal{S}_\beta \subset \mathcal{S}$$

Συνεπώς, έπεται η ισότητα $\mathcal{S}_\beta = \langle\mathcal{S}_\beta\rangle^\alpha$, και επομένως η $\mathcal{S}_\beta$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη.

$\square$

Παρατήρηση 3.3.15. Έστω γ και β άπειροι πληθάριθμοι. Εάν S είναι μια $\gamma-$τέλεια κλάση, και $\gamma > \beta$, τότε η S είναι επίσης μια $\beta-$τέλεια κλάση. Συνεπώς, για καθε τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, η κατηγορία $\mathcal{S}_\gamma$ όντας $\beta-$τέλεια κλάση, περιέχεται στην μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $\mathcal{S}_\beta$. Δηλαδή, για καθε τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, εάν $\gamma > \beta$, τότε $\mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}_\beta$.

Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ τριγωνισμένες υποκατηγορίες της $\mathcal{T}$, εάν $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, τότε η $\mathcal{R}_\beta$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση η οποία περιέχεται στην $\mathcal{S}$, και συνεπώς περιέχεται στην μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $\mathcal{S}_\beta$. Δηλαδή, για οποιεσδήποτε τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$, εάν $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, τότε $\mathcal{R}_\beta \subset \mathcal{S}_\beta$.

Κάθε τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι είναι μια $\aleph_0-$τέλεια κλαση, και μάλιστα συμπίπτει με την μοναδική μεγιστική $\aleph_0-$τέλεια κλαση της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχεται στην $\mathcal{S}$, όπως ισχυρίζεται η επόμενη

Πρόταση 3.3.16. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποεί το αξίωμα [TR5] και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Τότε $\mathcal{S}_{\aleph_0} = \mathcal{S}$.*

Απόδειξη. Εφόσον, προφανώς ισχύει $\mathcal{S}_{\aleph_0} \subset \mathcal{S}$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια $\aleph_0-$τέλεια κλάση. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα αντικείμενο $k \in \mathcal{S}$, ένα σύνολο Λ πληθικότητας $< \aleph_0$, δηλαδή ένα πεπερασμένο σύνολο, μία οικογένεια αντικειμένων $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ στην $\mathcal{T}$, και μία απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Τότε η απεικόνιση μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$k \xrightarrow{\ \triangle\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} k \xrightarrow{\ \coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k \in \mathcal{S}$, όπου $\triangle : k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k$ είναι η διαγώνια απεικόνιση. Τώρα υποθέτουμε ξανά ότι Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \aleph_0$, δηλαδή ένα πεπερασμένο σύνολο. Επίσης, υποθέτουμε ότι k και k_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της S και X_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της $\mathcal{T}$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \xrightarrow{\quad \gamma \quad} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\quad \coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda \quad} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να μηδενίζεται. Συνεπώς, $f_\lambda\gamma_\lambda = 0$, όπου γ_λ είναι η $\lambda-$στή συνιστώσα της απεικόνισης γ. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, θεωρώ τα τρίγωνα

$$k \xrightarrow{\quad \gamma_\lambda \quad} k_\lambda \overset{g_\lambda}{\dashrightarrow} l_\lambda \dashrightarrow \Sigma k$$

που συμπληρώνουν τους μορφισμούς $\gamma_\lambda : k \longrightarrow k_\lambda$ στην $\mathcal{T}$. Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, έπεται ότι $l_\lambda \in \mathcal{S}$. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, ο συνομολογικός συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-, X_\lambda) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ απεικονίζει το αντιστοιχο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία. Επειδή, $f_\lambda\gamma_\lambda = 0$, από την ακρίβεια της προηγούμενης ακολουθίας έπεται ότι για κάθε $\lambda \in \Lambda$, η απεικόνιση $f_\lambda : k \longrightarrow X_\lambda$ παραγοντοποιείται ως

$$k_\lambda \xrightarrow{\quad g_\lambda \quad} l_\lambda \xrightarrow{\quad h_\lambda \quad} X_\lambda$$

με $l_\lambda \in S$. Αλλά τότε η σύνθεση

$$k \xrightarrow{\quad \gamma \quad} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\quad \coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda \quad} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

μηδενίζεται. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ είναι μια $\aleph_0-$τέλεια κλάση, και άρα περιέχεται στην μεγιστική $\aleph_0-$τέλεια κλάση $\mathcal{S}_{\aleph_0}$.

□

4 Τοπικοποίηση Thomason

4.1 Μικρά αντικείμενα

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Ένα αντικείμενο $k \in \mathcal{T}$ καλείται $\alpha-$μικρό εάν ισχύει η παρακάτω συνθήκη :*

4.1.1.1. *Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε για κάθε απεικόνιση*

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, όπου η πληθικότητα του Λ' είναι $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

, όπου η δεύτερη απεικόνιση είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο.

Παράδειγμα 4.1.2. Θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου $\alpha = \aleph_0$. Ένα αντικείμενο $k \in \mathcal{T}$ καλείται $\aleph_0-$μικρό εάν, για οποιοδήποτε άπειρο συγκινόμενο στην $\mathcal{T}$, δηλαδή συγκινόμενο μιας οποιαδήποτε οικογένειας $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ αντικειμένων της $\mathcal{T}$, κάθε απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται μέσω ενός πεπερασμένου συγκινομένου. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$ πεπερασμένης πληθικότητας, και μια παραγοντοποίηση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Ισοδύναμα, η φυσική απεικόνιση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, X_\lambda) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(k, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)$$

η οποία είναι πάντα ένας μονομορφισμός, είναι επιπλέον ένας επιμορφισμός, συνεπώς είναι ένας ισομορφισμός. Πιο συγκεκριμένα, έστω $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Επειδή η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Έστω $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ η κανονική εμφύτευση του συγκινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, X_\lambda) \xrightarrow{\ \phi_\lambda\ } \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(k, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)$$

όπου $\phi_\lambda := \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, i_\lambda)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, X_\lambda)$ υπάρχει στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του συγκινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, X_\lambda) \arrow[dl] \arrow[dr, "\phi_\lambda"] & \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, X_\lambda) \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(k, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)
\end{tikzcd}$$

, όπου $i'_\lambda : \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, X_\lambda) \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(k, X_\lambda)$ είναι η κανονική εμφύτευση του συγκινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Το αντικείμενο $k \in \mathcal{T}$ είναι $\aleph_0-$μικρό, σημαίνει ακριβώς ότι η απεικόνιση ϕ είναι ένας ισομορφισμός.

Ορισμός 4.1.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω* *α ένας άπειρος πληθάριθμος. Η πλήρης υποκατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι όλα τα α−μικρά αντικείμενα της $\mathcal{T}$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{T}^{(\alpha)}$.*

Λήμμα 4.1.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποεί το αξίωμα [TR5] . Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε η υποκατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)} \subset \mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένη.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρώ ότι το $k \in \mathcal{T}^{(\alpha)}$ εάν και μόνο εάν το $\Sigma k \in \mathcal{T}^{(\alpha)}$. Ο συναρτητής Σ είναι ένας αριστερός (και δεξιός) συζυγής του Σ^{-1}, και ο συναρτητής Σ^{-1} διατηρεί τα συγκινόμενα από την Πρόταση 1.6.1.1. Συνεπώς, για την απεικόνιση

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, όπου η πληθικότητα του Λ' είναι $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

εάν και μόνο εάν η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Sigma^{-1} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} \Sigma^{-1} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Sigma^{-1} X_\lambda$$

Η $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της. Πράγματι, έστω k ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο k' της $\mathcal{T}^{(\alpha)}$, και έστω $k' \longrightarrow k$ ο αντίστοιχος ισομορφισμός. Έστω μια απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$k' \xrightarrow{\simeq} k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Επειδή, το k' είναι $\alpha-$μικρό, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η προηγούμενη απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$k' \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Συνεπώς, η αρχική απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$k \xrightarrow{\simeq} k' \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

, και επομένως το k είναι $\alpha-$μικρό. Συνεπώς, η $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της, καθώς επίσης και ως προς τους προσθετικούς αυτομορφισμούς Σ και Σ^{-1}. Από το Λήμμα 3.2.4.1, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς τους κώνους των μορφισμών της. Έστω $f : k \longrightarrow l$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$. Θεωρώ ένα τρίγωνο

$$k \longrightarrow l \overset{w}{\dashrightarrow} m \dashrightarrow \Sigma k$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{T}$. Γνωρίζουμε ότι τα $k, l \in \mathcal{T}^{(\alpha)}$. Θα δείξουμε ότι το m ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$.

Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Σχηματίζουμε το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι συνομολογικός απεικονίζει το τρίγωνο στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(m, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(l, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(k, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)$$

Υποθέτουμε ότι δίνεται μια απεικόνιση

$$m \xrightarrow{\ h\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Από την ακρίβεια της ακολουθίας υπάρχει μια απεικόνιση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να μηδενίζεται. Αλλά, το l είναι $\alpha-$μικρό, συνεπώς υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \xrightarrow{\ i_{\Lambda'}\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

, όπου $i_{\Lambda'}$ είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Επομένως, η σύνθεση

$$k \longrightarrow l \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \xrightarrow{\ i_{\Lambda'}\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

μηδενίζεται. Επειδή η απεικόνιση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \xrightarrow{\ i_{\Lambda'}\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

είναι ο εγκλεισμός ενός ευθέος προσθετέου εντός του συγκινομένου $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, είναι ένας μονομορφισμός στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς, η σύνθεση

$$k \longrightarrow l \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$$

μηδενίζεται επίσης. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(-, \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda\big) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι συνομολογικός απεικονίζει το αρχικό τρίγωνο στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\Big(m, \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda\Big) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\Big(l, \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda\Big) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\Big(k, \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda\Big)$$

Από την ακρίβεια της ακολουθίας η απεικόνιση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$l \xrightarrow{w} m \xrightarrow{g} \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$$

Τώρα, η σύνθεση

$$m \xrightarrow{g} \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda'}} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

δεν συμπίπτει απαραίτητα με την δοθείσα απεικόνιση

$$m \xrightarrow{h} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Αλλά από την κατασκευή, οι συνθέσεις εκ δεξιών με την απεικόνιση $w : l \longrightarrow m$, δηλαδή οι συνθέσεις $h \circ w$ και $(i_{\Lambda'} \circ g) \circ w$ συμπίπτουν με την σύνθεση

$$l \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda'}} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Επομένως, η διαφορά τους $(h - i_{\Lambda'} \circ g) \circ w$ μηδενίζεται, και συνεπώς από την ακρίβεια της πρώτης ακολουθίας στην θέση $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(m, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$ η διαφορά $h - i_{\Lambda'} \circ g$ παραγοντοποιείται ως

$$m \longrightarrow \Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Επειδή το $k \in \mathcal{T}^{(\alpha)}$, έπεται ότι το $\Sigma k \in \mathcal{T}^{(\alpha)}$, συνεπώς υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda'' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$\Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda''} X_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda''}} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

, όπου $i_{\Lambda''}$ είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Άρα, η διαφορά $h - i_{\Lambda'} \circ g$ παραγοντοποιείται ως

$$m \longrightarrow \Sigma k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda''} X_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda''}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

και συνεπώς η απεικόνιση

$$m \xrightarrow{h} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$m \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'\cup\Lambda''} X_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda'\cup\Lambda''}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

, όπου $i_{\lambda\in\Lambda'\cup\Lambda''}$ είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Επειδή ο α είναι ένας άπειρος πληθάριθμος, και τα υποσύνολα $\Lambda', \Lambda'' \subset \Lambda$ είναι πληθικότητας $< \alpha$ έπεται ότι η πληθικότητα του υποσυνόλου $\Lambda' \cup \Lambda'' \subset \Lambda$ είναι $< \alpha$. Συνεπώς, το m είναι $\alpha-$μικρό.

□

Λήμμα 4.1.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος, δηλαδή ο α δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συνόλου πληθαρίθμων πληθικότητας $< \alpha$, οι οποίοι είναι όλοι μικρότεροι του α. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα, αυτό σημαίνει ότι το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \alpha$ της $\mathcal{T}^{(\alpha)}$, ανήκει στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$.*

Απόδειξη. Έστω $\{k_\mu,\ \mu \in M\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}^{(\alpha)}$, όπου η πληθικότητα του συνόλου M είναι $< \alpha$. Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι δίνεται μια απεικόνιση

$$\coprod_{\mu\in M} k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\mu \in M$, έχουμε μια απεικόνιση

$$k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επειδή το k_μ είναι $\alpha-$μικρό, για κάθε μ υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda_\mu \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda_\mu} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Συνεπώς, η απεικόνιση

$$\coprod_{\mu\in M} k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$\coprod_{\mu\in M} k_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\cup_{\mu\in M}\Lambda_\mu} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

και η πληθικότητα του συνόλου $\cup_{\mu\in M}\Lambda_\mu$ είναι φραγμένη απο το άθροισμα των πληθικοτήτων των υποσυνόλων $\Lambda_\mu \subset \Lambda$ για όλα τα $\mu \in M$, το οποίο είναι ένα άθροισμα ενός συνόλου πληθαρίθμων πληθικότητας $< \alpha$, οι οποίοι είναι όλοι μικρότεροι του α. Επομένως, επειδή ο α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, το άθροισμα αυτο είναι $< \alpha$. Συνεπώς, το $\coprod_{\mu\in M} k_\mu \in \mathcal{T}^{(\alpha)}$.

□

Λήμμα 4.1.6. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι πυκνή.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.1.4 γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι πυκνή, αρκεί να δείξουμε ότι οποιοσδήποτε προσθετέος ενός αντικειμένου της $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ ανήκει στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$.

Έστω k, l αντικείμενα της $\mathcal{T}$ και υποθέτουμε οτι το συγκινόμενο τους $k \oplus l$ ανήκει στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$, δηλαδή το $k \oplus l$ είναι $\alpha-$μικρό. Αρκεί να δείξουμε ότι το k είναι $\alpha-$μικρό. Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι δίνεται μια απεικόνιση

$$k \xrightarrow{\ h\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

και θεωρούμε την απεικόνιση

$$k \oplus m \xrightarrow{\begin{bmatrix} h & 0 \end{bmatrix}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Επειδή το το $k \oplus l$ είναι $\alpha-$μικρό, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η προηγούμενη απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$k \oplus m \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

και συνεπώς η δοθείσα απεικόνιση

$$k \xrightarrow{\ h\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k \oplus m \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Συνεπώς, το k είναι $\alpha-$μικρό.

□

Λήμμα 4.1.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.1.5 η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα, και από το Λήμμα 4.1.6 η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι πυκνή, συνεπώς είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη.

$\square$

Παρατήρηση 4.1.8. Εάν ο α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος $> \aleph_0$, τότε το Λήμμα 4.1.6 είναι περιττό. Από το Λήμμα 4.1.5, η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα και επειδή $\alpha > \aleph_0$, από την Παρατήρηση 3.2.7 έπεται ότι η $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι πυκνή.

4.2 Συμπαγή αντικείμενα

Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Στην Ενότητα 4.1 κατασκευάσαμε, για κάθε άπειρο πληθάριθμο α, μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)} \subset \mathcal{T}$, της οποίας η κλάση των αντικειμένων απαρτίζεται από την κλάση όλων των $\alpha-$μικρών αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Στην Ενότητα 3.3, δοθείσης οποιασδήποτε τριγωνισμένης υποκατηγορίας $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ και ενός άπειρου πληθαρίθμου β, κατασκευάσαμε μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S}_\beta \subset \mathcal{T}$, της οποίας η κλάση των αντικειμένων απαρτίζεται από την κλάση των αντικειμένων της μοναδικής μεγιστικής $\beta-$τέλειας κλάσης της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχεται στην $\mathcal{S}$. Στην παρούσα Ενότητα θα συνδυάσουμε τις δύο αυτές κατασκευές, και θα μελετήσουμε την τριγωνισμένη υποκατηγορία

$$\left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_\beta \subset \mathcal{T}$$

, της οποίας η κλάση των αντικειμένων απαρτίζεται από την κλάση των αντικειμένων της μοναδικής μεγιστικής $\beta-$τέλειας κλάσης της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχεται στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Έστω S μια $\alpha-$τέλεια κλάση $\alpha-$μικρών αντικειμένων. Δηλαδή, η S είναι μια $\alpha-$τέλεια κλάση η οποία περιέχεται στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$, συνεπώς από το Πόρισμα 3.3.10, περιέχεται στην μοναδική μεγιστική $\alpha-$τέλεια κλάση $\left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_\alpha$ της $\mathcal{T}$, δηλαδή $S \subset \left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_\alpha$. Τότε η S είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση, για όλους τους άπειρους πληθαρίθμους β.*

Απόδειξη. Έστω k ένα αντικείμενο της S, και $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{T}$, όπου η πληθικότητα του συνόλου Λ είναι $< \beta$. Επειδή το αντικείμενο k είναι $\alpha-$μικρό, για κάθε απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Επειδή η S είναι μια $\alpha-$τέλεια κλάση, η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in S$. Για $\lambda \notin \Lambda'$, ορίζουμε $k_\lambda = 0$ και $f_\lambda = 0$. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in S$.

Υποθέτουμε ξανά ότι το Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$. Επίσης, υποθέτουμε ότι k και k_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της S και X_λ είναι οποιαδήποτε αντικείμενα της $\mathcal{T}$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να μηδενίζεται. Επειδή το k είναι $\alpha-$μικρό, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda'}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda$$

, όπου $i_{\Lambda'}$ είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda$. Η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda'}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

ισοδύναμα, η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

μηδενίζεται, όπου $\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda := \coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda \circ i_{\Lambda'}$. Επειδή η S είναι μια $\alpha-$τέλεια κλάση, για κάθε $\lambda \in \Lambda'$, οι απεικονίσεις $f_\lambda : k_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ δύναται να παραγοντοποιηθούν ως

$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} l_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} X_\lambda$$

με $l_\lambda \in S$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} l_\lambda$$

να μηδενίζεται. Για κάθε $\lambda \notin \Lambda'$, ορίζουμε $g_\lambda := 1 : k_\lambda \longrightarrow k_\lambda$, και $h_\lambda := f_\lambda : k_\lambda \longrightarrow X_\lambda$, αντίστοιχα. Τότε η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

μηδενίζεται, επειδή στην πραγματικότητα ισούται με την απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{i_{\Lambda'}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

η οποία μόλις δείξαμε ότι μηδενίζεται. Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, οι απεικονίσεις $f_\lambda : k_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ δύναται να παραγοντοποιηθούν ως

$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} l_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} X_\lambda$$

με $l_\lambda \in S$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

να μηδενίζεται.

□

Ορισμός 4.2.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Ορίζουμε*

$$\mathcal{T}^\alpha := \left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_\alpha$$

, την τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, της οποίας η κλάση των αντικειμένων απαρτίζεται από την κλάση των αντικειμένων της μοναδικής μεγιστικής $\alpha-$τέλειας κλάσης της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχεται στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$. Δηλαδή, η $\mathcal{T}^\alpha$ είναι η μεγαλύτερη $\alpha-$τέλεια κλάση της $\mathcal{T}$ η οποία αποτελείται από $\alpha-$μικρά αντικείμενα.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α και β άπειροι πληθάριθμοι. Εάν $\alpha < \beta$, τότε $\mathcal{T}^\alpha \subset \mathcal{T}^\beta$.*

Απόδειξη. Η $\mathcal{T}^\alpha$ είναι μια $\alpha-$τέλεια κλάση (και μάλιστα η μοναδική μεγιστική $\alpha-$τέλεια), της οποίας τα αντικείμενα είναι $\alpha-$μικρά. Από το Λήμμα 4.2.1, η $\mathcal{T}^\alpha$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση. Επειδή, τα αντικείμενα της είναι $\alpha-$μικρά και $\alpha < \beta$, είναι επίσης $\beta-$μικρά. Επομένως, η $\mathcal{T}^\alpha$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση που περιέχεται στην $\mathcal{T}^{(\beta)}$, και συνεπώς περιέχεται στην μοναδική μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $\mathcal{T}^\beta := \left\{\mathcal{T}^{(\beta)}\right\}_\beta$ της $\mathcal{T}^{(\beta)}$.

□

Λήμμα 4.2.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}^\alpha$ είναι πυκνή.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.1.6 έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι πυκνή. Από το Πόρισμα 3.3.13, για κάθε άπειρο πληθάριθμο β, η κατηγορία $\left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_\beta \subset \mathcal{T}$ είναι επίσης πυκνή. Συγκεκριμένα, θέτοντας $\beta = \alpha$, η κατηγορία $\mathcal{T}^\alpha := \left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_\alpha \subset \mathcal{T}$ είναι πυκνή.

□

Λήμμα 4.2.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}^\alpha$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη.*

Απόδειξη. Επειδή ο α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, από το Λήμμα 4.1.7 έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη. Από το Πόρισμα 3.3.14, για κάθε άπειρο πληθάριθμο β, η κατηγορία $\left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_{\beta}$ είναι επίσης $\alpha-$τοπικοποιήσιμη. Συγκεκριμένα, θέτοντας $\beta = \alpha$, η κατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha} := \left\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\right\}_{\alpha} \subset \mathcal{T}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη.

□

Παρατήρηση 4.2.6. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Από την Πρόταση 3.3.16, γνωρίζουμε ότι για κάθε τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$, ισχύει $\mathcal{S}_{\aleph_0} = \mathcal{S}$. Συγκεκριμένα για την κατηγορία $\mathcal{S} := \mathcal{T}^{(\aleph_0)}$, ισχύει

$$\left\{\mathcal{T}^{(\aleph_0)}\right\}_{\aleph_0} = \mathcal{T}^{(\aleph_0)}$$

, ή ισοδύναμα

$$\mathcal{T}^{\aleph_0} = \mathcal{T}^{(\aleph_0)}$$

Δηλαδή, η κλάση $\mathcal{T}^{\aleph_0}$ των αντικειμένων της μοναδικής μεγιστικής $\aleph_0-$τέλειας κλάσης της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχεται στην κλάση $\mathcal{T}^{(\aleph_0)}$ των $\aleph_0-$μικρών αντικειμένων της $\mathcal{T}$, συμπίπτει ακριβώς με την κλάση $\mathcal{T}^{(\aleph_0)}$.

Ορισμός 4.2.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος. Τα αντικείμενα της τριγωνισμένης υποκατηγορίας $\mathcal{T}^{\alpha}$ θα καλούνται $\alpha-$συμπαγή αντικείμενα της $\mathcal{T}$. Στην περίπτωση $\alpha = \aleph_0$, τα αντικείμενα της $\mathcal{T}^{\aleph_0}$ καλούνται επίσης και συμπαγή αντικείμενα της $\mathcal{T}$.*

Παρατήρηση 4.2.8. Τα $\aleph_0-$συμπαγή αντικείμενα, είναι $\beta-$συμπαγή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο β, γιατί $\mathcal{T}^{\aleph_0} \subset \mathcal{T}^{\beta}$ για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\beta > \aleph_0$, από το Λήμμα 4.2.3.

4.3 Παραγοντοποίηση απεικονίσεων μέσω της υποκατηγορίας $\langle S\rangle^{\beta}$

Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}$. Υπενθυμίζουμε τον Ορισμό 3.2.9. Συμβολίζουμε με $\langle S\rangle$ την μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ που παράγεται απο την S. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\langle S\rangle = \bigcup_{\beta} \langle S\rangle^{\beta}$$

, όπου $\langle S\rangle^{\beta}$ είναι η μικρότερη $\beta-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ που περιέχει την κλάση S, για κάθε άπειρο πληθάριθμο β.

Λήμμα 4.3.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}^{\beta}$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}^{\beta}$. Τότε, η υποκατηγορία $\langle S\rangle^{\beta}$ περιέχεται στην υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\beta}$.*

Απόδειξη. Εάν ο β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, τότε από το Λήμμα 4.2.5 η $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι $\beta-$τοπικοποιήσιμη. Από την υπόθεση, η S περιέχεται στην $\mathcal{T}^{\beta}$. Αλλά η $\langle S\rangle^{\beta}$ είναι η μικρότερη $\beta-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία η οποία περιέχει την S. Συνεπώς, υφίσταται ο ζητούμενος εγλεισμός $\langle S\rangle^{\beta} \subset \mathcal{T}^{\beta}$.

□

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}^{\beta}$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}^{\beta}$. Έστω $x \in \mathcal{T}^{\beta}$ ένα $\beta-$συμπαγές αντικείμενο της $\mathcal{T}$. Έστω z ένα αντικείμενο της $\langle S\rangle$. Υποθέτουμε $f : x \longrightarrow z$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}$. Τότε, ο f παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της $\langle S\rangle^{\beta}$, δηλαδή υπάρχει ένα αντικείμενο $y \in \langle S\rangle^{\beta} \subset \langle S\rangle \cap \mathcal{T}^{\beta}$, έτσι ώστε ο f να παραγοντοποιείται ως*

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{S}$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ της οποίας η κλάση των αντικειμένων αποτελείται από όλα τα αντικείμενα z της $\mathcal{T}$ τα οποία ικανοποιούν το Θεώρημα για κάθε αντικείμενο $x \in \mathcal{T}^{\beta}$. Αυτό σημαίνει ότι, ένα αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$ εάν και μόνο εάν κάθε μορφισμός $x \longrightarrow z$ στην $\mathcal{T}$ με $x \in \mathcal{T}^\beta$ παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της $\langle S \rangle^\beta$. Προφανώς, ισχύει ο εγκλεισμός $\mathcal{S} \subset \langle S \rangle$. Αρκεί να δείξουμε τον εγκλεισμό $\langle S \rangle \subset \mathcal{S}$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία η οποία περιέχει την S, δηλαδή περιέχει την S, είναι τριγωνισμένη, και είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, δηλαδή περιέχει το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων της.

Η κατηγορία $\mathcal{S}$ περιέχει την S. Έστω οποιαδήποτε αντικείμενα $z \in S$ και $x \in \mathcal{T}^\beta$, και ένας οποιοσδήποτε μορφισμός $f : x \longrightarrow z$ στην $\mathcal{T}$. Επειδή, $z \in S$, και $S \subset \langle S \rangle^\beta$, έπεται ότι το $z \in \langle S \rangle^\beta$. Συνεπώς, θέτοντας $y := z$, ο μορφισμός παραγοντοποιείται ως

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} z \xrightarrow{\quad 1 \quad} z$$

Επίσης, το $z \in \mathcal{S}$ εάν και μόνο εάν το $\Sigma z \in \mathcal{S}$. Ο συναρτητής Σ είναι ένας δεξιός (και αριστερός) συζυγής του Σ^{-1}. Συνεπώς, η απεικόνιση $x \longrightarrow \Sigma z$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow \Sigma z$$

εάν και μόνο εάν η απεικόνιση $\Sigma^{-1} x \longrightarrow z$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\Sigma^{-1} x \longrightarrow \Sigma^{-1} y \longrightarrow z$$

και το $x \in \mathcal{T}^\beta$ εάν και μόνο εάν το $\Sigma^{-1} x \in \mathcal{T}^\beta$, και το $\Sigma^{-1} y \in \langle S \rangle^\beta$ εάν και μόνο εάν το $\Sigma^{-1} y \in \langle S \rangle^\beta$. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Ομοίως, ισχύει $\Sigma^{-1} \mathcal{S} = \mathcal{S}$.

Η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς ισομορφισμούς των αντικειμένων της. Πράγματι, έστω z ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο z' της $\mathcal{S}$, και έστω $z \longrightarrow z'$ ο αντίστοιχος ισομορφισμός. Έστω $x \in \mathcal{T}^\beta$ και μια απεικόνιση $x \longrightarrow z$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$x \longrightarrow z \xrightarrow{\quad \simeq \quad} z'$$

Επειδή, το z' ανήκει στην $\mathcal{S}$ υπάρχει ένα αντικείμενο $y \in \langle S \rangle^\beta$, έτσι ώστε η προηγούμενη απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z'$$

Συνεπώς, υπάρχει ένα αντικείμενο $y \in \langle S \rangle^\beta$, έτσι ώστε η αρχική απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z' \xrightarrow{\quad \simeq \quad} z$$

Επομένως το z ανήκει στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της, καθώς επίσης και ως προς τους προσθετικούς αυτομορφισμούς Σ και Σ^{-1}. Από το Λήμμα 3.2.4.1, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς τους κώνους των μορφισμών της. Έστω $\phi : z \longrightarrow z'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{S}$. Θεωρώ ένα τρίγωνο

$$z \longrightarrow z' \dashrightarrow z'' \dashrightarrow \Sigma z$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{T}$. Γνωρίζουμε ότι τα z και z' ανήκουν στην $\mathcal{S}$. Θα δείξουμε ότι το z'' ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$. Έστω ένα οποιοδήποτε αντικείμενο $x \in \mathcal{T}^\beta$, και ένας οποιοσδήποτε μορφισμός $f : x \longrightarrow z''$ στην $\mathcal{T}$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $y \in \langle S \rangle^\beta$, έτσι ώστε ο f να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z''$$

Κατ΄ αρχήν, η σύνθεση

$$x \longrightarrow z'' \longrightarrow \Sigma z$$

είναι μια απεικόνιση απο το $x \in \mathcal{T}^\beta$ στο $\Sigma z \in \mathcal{S}$, συνεπώς υπάρχει ένα αντικείμενο $y \in \langle S \rangle^\beta$, έτσι ώστε η σύνθεση να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow \Sigma z$$

Τώρα η σύνθεση

$$x \longrightarrow z'' \longrightarrow \Sigma z \longrightarrow \Sigma z'$$

μηδενίζεται, και ισούται με την σύνθεση

$$x \longrightarrow y \longrightarrow \Sigma z \longrightarrow \Sigma z'$$

η οποία επίσης μηδενίζεται. Συμπληρώνω, τον μορφισμό $x \longrightarrow y$ σ΄ ένα τρίγωνο

$$x \longrightarrow y \dashrightarrow C \dashrightarrow \Sigma x$$

στην $\mathcal{T}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-, \Sigma z') : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι συνομολογικός απεικονίζει το τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία. Από την ακρίβεια της ακολουθίας η σύνθεση

$$y \longrightarrow \Sigma z \longrightarrow \Sigma z'$$

παραγοντοποιείται ως

$$y \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma z'$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε ένα μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ \Sigma z \arrow[r] & \Sigma z' \end{tikzcd}$$

Από την υπόθεση, το $x \in \mathcal{T}^\beta$. Από την κατασκευή, το $y \in \langle S \rangle^\beta$, και επειδή ο β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος και $S \subset \mathcal{T}^\beta$, από το Λήμμα 4.3.1, γνωρίζουμε ότι $\langle S \rangle^\beta \subset \mathcal{T}^\beta$, επομένως το $y \in \mathcal{T}^\beta$. Επειδή, τα $x, y \in \mathcal{T}^\beta$ και η $\mathcal{T}^\beta$ είναι τριγωνισμένη, έπεται ότι το $C \in \mathcal{T}^\beta$. Επειδή, το $\Sigma z' \in \mathcal{S}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $y' \in \langle S \rangle^\beta$, έτσι ώστε η απεικόνιση $C \longrightarrow \Sigma z'$ να παραγοντοποιείται ως

$$C \longrightarrow y' \longrightarrow \Sigma z'$$

Συνεπώς, το προηγούμενο μεταθετικό τετράγωνο μπορεί να αντικατασταθεί από ένα άλλο μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r] \arrow[d] & y' \arrow[d] \\ \Sigma z \arrow[r] & \Sigma z' \end{tikzcd}$$

όπου η επάνω γραμμή περιλαμβάνει μόνο αντικείμενα της $\langle S \rangle^\beta$. Επειδή η σύνθεση

$$x \longrightarrow y \longrightarrow C$$

μηδενίζεται, έπεται ότι η σύνθεση

$$x \longrightarrow y \longrightarrow C \longrightarrow y'$$

επίσης μηδενίζεται.

Τώρα συμπληρώνω το δεύτερο μεταθετικό τετράγωνο σ' ένα μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}y'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & y \arrow[r] \arrow[d] & y' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & y'' \arrow[d, dashed] \\
z'' \arrow[r, dashed] & \Sigma z \arrow[r] & \Sigma z' \arrow[r, dashed] & \Sigma z''
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Επειδή τα y και y' ανήκουν στην $\langle S\rangle^{\beta}$, έπεται ότι το y'' ανήκει επίσης στην $\langle S\rangle^{\beta}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x,-) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός απεικονίζει το επάνω τρίγωνο στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, \Sigma^{-1}y'') \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, y) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, y')$$

Από την ακρίβεια της ακολουθίας στην θέση $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, y)$ η απεικόνιση $x \longrightarrow y$ παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \Sigma^{-1}y'' \longrightarrow y$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] & \Sigma^{-1}y'' \arrow[r] \arrow[d] & y \arrow[d] \\
& z'' \arrow[r] & \Sigma z
\end{tikzcd}$$

Η σύνθεση

$$x \longrightarrow \Sigma^{-1}y'' \longrightarrow z''$$

δεν συμπίπτει απαραίτητα με την απεικόνιση

$$f : x \longrightarrow z''$$

που ξεκινήσαμε. Αλλά από την κατασκευή, οι συνθέσεις εξ αριστερών με την απεικόνιση $z'' \longrightarrow \Sigma z$, δηλαδή οι συνθέσεις

$$x \longrightarrow \Sigma^{-1}y'' \longrightarrow z'' \longrightarrow \Sigma z$$

και

$$x \longrightarrow z'' \longrightarrow \Sigma z$$

συμπίπτουν με την σύνθεση

$$x \longrightarrow \Sigma^{-1}y'' \longrightarrow y \longrightarrow \Sigma z$$

Επομένως, η διαφορά τους μηδενίζεται. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x,-) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός απεικονίζει το κάτω τρίγωνο του προηγούμενου μορφισμού τριγώνων, στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, z') \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, z'') \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, \Sigma z)$$

Συνεπώς, από την ακρίβεια της ακολουθίας στην θέση $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(x, z'')$ η διαφορά των απεικονίσεων

$$x \longrightarrow \Sigma^{-1}y'' \longrightarrow z''$$

$$x \xrightarrow{f} z''$$

παρογοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow z' \longrightarrow z''$$

Επειδή, το αντικείμενο $z' \in \mathcal{S}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $\overline{y} \in \langle S \rangle^{\beta}$, έτσι ώστε η απεικόνιση $x \longrightarrow z'$ να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \overline{y} \longrightarrow z'$$

Άρα, η προηγούμενη διαφορά παρογοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \overline{y} \longrightarrow z' \longrightarrow z''$$

, συνεπώς η απεικόνιση $f : x \longrightarrow z''$ παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \overline{y} \oplus \Sigma^{-1}y'' \longrightarrow z''$$

, και $\overline{y} \oplus \Sigma^{-1}y'' \in \langle S \rangle^{\beta}$. Συνεπώς, θέτοντας $y := \overline{y} \oplus \Sigma^{-1}y''$, έπεται το ζητούμενο, δηλαδή ότι $z'' \in \mathcal{S}$.

Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ περιέχει το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων της. Έστω $\{z_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{S}$. Σχηματίζουμε το συγκινόμενο

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

στην $\mathcal{T}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Δηλαδή, θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε αντικείμενο $x \in \mathcal{T}^{\beta}$, και για κάθε απεικόνιση

$$x \xrightarrow{f} \coprod_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

, υπάρχει ένα αντικείμενο $y \in \langle S \rangle^{\beta}$, έτσι ώστε η f να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

Έστω

$$x \xrightarrow{f} \coprod_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

μια οποιαδήποτε απεικόνιση. Επειδή, το $x \in \mathcal{T}^{\beta} \subset \mathcal{T}^{(\beta)}$, έπεται ότι το x είναι $\beta-$μικρό, συνεπώς υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \beta$, έτσι ώστε η απεικόνιση f να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} z_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

Το x δεν είναι μόνο $\beta-$μικρό, είναι επιπλέον $\beta-$συμπαγές. Δηλαδή, ανήκει στην μοναδική μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $\mathcal{T}^\beta \subset \mathcal{T}^{(\beta)}$ της $\mathcal{T}$. Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in \Lambda'$, υπάρχει ένα αντικείμενο $x_\lambda \in \mathcal{T}^\beta$, και μια απεικόνιση $h_\lambda : x_\lambda \longrightarrow z_\lambda$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$x \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} z_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} x_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda'} h_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda'} z_\lambda$$

Αλλά, για κάθε $\lambda \in \Lambda'$, έχουμε $x_\lambda \in \mathcal{T}^\beta$, $z_\lambda \in \mathcal{S}$ και μια απεικόνιση $h_\lambda : x_\lambda \longrightarrow z_\lambda$. Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in \Lambda'$, υπάρχει ένα αντικείμενο $y_\lambda \in \langle S \rangle^\beta$, έτσι ώστε η h_λ να παραγοντοποιείται ως

$$x_\lambda \longrightarrow y_\lambda \longrightarrow z_\lambda$$

Τότε, όμως η απεικόνιση

$$x \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} x_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda'} h_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda'} z_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} z_\lambda$$

Συνεπώς, η απεικόνιση f παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} z_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

, και το $\coprod_{\lambda \in \Lambda'} y_\lambda$ είναι ένα $\beta-$συγκινόμενο της $\langle S \rangle^\beta$, επομένως ανήκει στην $\langle S \rangle^\beta$. Συνεπώς, θέτοντας $y := \coprod_{\lambda \in \Lambda'} y_\lambda$, έπεται ότι το $\coprod_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda \in \mathcal{S}$.

□

4.4 Απεικονίσεις στο πηλίκο Verdier

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, και $\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Τότε, το Θεώρημα Τοπικοποίησης του Verdier (Θεώρημα 2.1.9) ισχυρίζεται ότι το πηλίκο Verdier $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία. Από την Ενότητα 2.2 γνωρίζουμε, ότι η $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ ενδέχεται να μην έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}-$σύνολα. Παρ' όλα αυτά, σ' αυτή την Ενότητα στην Πρόταση 4.4.3, θα αποδείξουμε ότι υπο ορισμένες προϋποθέσεις η κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}-$σύνολα.

Πρόταση 4.4.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}^\beta$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}^\beta$. Τότε υπάρχει ένας φυσικός τριγωνισμένος συναρτητής*

$$\mathcal{T}/\langle S \rangle^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S \rangle$$

Έστω $y \in \mathcal{T}$ ένα τυχαίο αντικείμενο, και $x \in \mathcal{T}^\beta$ ένα $\beta-$συμπαγές αντικείμενο της $\mathcal{T}$. Τότε η φυσική απεικόνιση

$$\Big\{\mathcal{T}/\langle S \rangle^\beta\Big\}(x,y) \longrightarrow \big\{\mathcal{T}/\langle S \rangle\big\}(x,y)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. Ισχύει $\langle S\rangle^{\beta} \subset \langle S\rangle$. Επειδή η κατηγορία $\langle S\rangle^{\beta}$ ανήκει στον πυρήνα του συναρτητή $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$, από την καθολική συνθήκη για το πηλίκο Verdier $\mathcal{T}/\langle S\rangle^{\beta}$, έπεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{T}/\langle S\rangle^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$, ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}/\langle S\rangle^{\beta} \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{T}/\langle S\rangle &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, υπάρχει μια φυσική απεικόνιση

$$\phi : \left\{\mathcal{T}/\langle S\rangle^{\beta}\right\}(x,y) \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\right\}(x,y)$$

Επειδή $\langle S\rangle^{\beta} \subset \langle S\rangle$, έπεται $Mor_{\langle S\rangle^{\beta}} \subset Mor_{\langle S\rangle}$. Συνεπώς, κάθε απεικόνιση f η οποία ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S\rangle^{\beta}}$, μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S\rangle}$. Η ϕ απεικονίζει ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & y \\
x &
\end{tikzcd}$$

, όπου f ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S\rangle^{\beta}}$, το οποίο αναπαριστά έναν μορφισμό στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle^{\beta}$, στο ίδιο διάγραμμα, όπου η f θεωρούμε ότι ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S\rangle}$, το οποίο αναπαριστά έναν μορφισμό στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η ϕ είναι ένας ισομορφισμός.

Η ϕ είναι ένας επιμορφισμός. Έστω $x \longrightarrow y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, ο οποίος αναπαρίσταται από ένα διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & y \\
x &
\end{tikzcd}$$

με $f \in Mor_{\langle S\rangle}$. Έστω

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "f"] & x \arrow[r, dashed] & z \arrow[r, dashed] & \Sigma p
\end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο που συμπληρώνει τον f στην $\mathcal{T}$. Επειδή ο $f \in Mor_{\langle S\rangle}$, έπεται ότι το $z \in \langle S\rangle$. Από τις υποθέσεις, ισχύει ότι $x \in \mathcal{T}^{\beta}$, $S \subset \mathcal{T}^{\beta}$ και $z \in \langle S\rangle$. Επομένως, από το Θεώρημα 4.3.2 υπάρχει ένα αντικείμενο $z' \in \langle S\rangle^{\beta}$, έτσι ώστε ο $x \longrightarrow z$ να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow z' \longrightarrow z$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & z' \arrow[d] & \\
p \arrow[r, "f"] & x \arrow[r] & z \arrow[r] & \Sigma p
\end{tikzcd}$$

, το οποίο μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
p' \arrow[r, dashed, "fg"] \arrow[d, dashed, "g"'] & x \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & z' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \Sigma p' \arrow[d, dashed, "\Sigma g"'] \\
p \arrow[r, "f"] & x \arrow[r] & z \arrow[r] & \Sigma p
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Ο μορφισμός $fg : p' \longrightarrow x$ ανήκει στην $Mor_{\langle S\rangle^\beta}$ επειδή το $z' \in \langle S\rangle^\beta$. Συνεπώς, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
p' \arrow[r, "\alpha g"] \arrow[d, "fg"'] & y \\
x &
\end{tikzcd}$$

είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle^\beta$, του οποίου η εικόνα μέσω της ϕ είναι ισοδύναμη με τον μορφισμό $x \longrightarrow y$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$.

Η ϕ είναι ένας μονομορφισμός. Έστω ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & y \\
x &
\end{tikzcd}$$

το οποίο αναπαριστά έναν μορφισμό $x \longrightarrow y$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle^\beta$, του οποίου η εικόνα μέσω της ϕ μηδενίζεται. Επειδή το διάγραμμα είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle^\beta$, έπεται ότι ο $f \in Mor_{\langle S\rangle^\beta}$. Έστω

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] & x \arrow[r, dashed] & z \arrow[r, dashed] & \Sigma p
\end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο που συμπληρώνει τον f στην $\mathcal{T}$. Επειδή ο $f \in Mor_{\langle S\rangle^\beta}$, έπεται ότι το $z \in \langle S\rangle^\beta$. Επειδή, ο β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, και $S \subset \mathcal{T}^\beta$ από το Λήμμα 4.3.1 έπεται $\langle S\rangle^\beta \subset \mathcal{T}^\beta$, άρα το $z \in \mathcal{T}^\beta$. Συνεπώς, επειδή έξ υποθέσεως το $x \in \mathcal{T}^\beta$, και η $\mathcal{T}^\beta$ είναι τριγωνισμένη, έπεται ότι το $p \in \mathcal{T}^\beta$. Έχουμε υποθέσει ότι η εικόνα του μορφισμού ο οποίος αναπαρίσταται από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & y \\
x &
\end{tikzcd}$$

μέσω της φυσικής απεικόνισης ϕ, μηδενίζεται στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Αυτο σημαίνει ότι το διάγραμμα είναι ισοδύναμο, στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, με το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"'] & y \\
x &
\end{tikzcd}$$

, το οποίο αναπαριστά τον μηδενικό μορφισμό στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.1.25, η απεικόνιση $\alpha : p \longrightarrow y$ παραγοντοποιείται ως

$$p \longrightarrow z \longrightarrow y$$

με $z \in \langle S \rangle$. Έχουμε δείξει ότι το $p \in \mathcal{T}^\beta$. Συνεπώς, για το $z \in \langle S \rangle$ από το Θεώρημα 4.3.2 υπάρχει ένα αντικείμενο $z' \in \langle S \rangle^\beta$, έτσι ώστε η $p \longrightarrow z$ να παραγοντοποιείται ως

$$p \longrightarrow z' \longrightarrow z$$

Συνεπώς, επειδή η $p \longrightarrow y$ παραγοντοποιείται ως

$$p \longrightarrow z' \longrightarrow y$$

με $z' \in \langle S \rangle^\beta$, πάλι από το Λήμμα 2.1.25, έπεται ότι η κλάση ισοδυναμίας του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & y \\ x & \end{tikzcd}$$

που αναπαριστά τον μορφισμό $x \longrightarrow y$, μηδενίζεται στην $\mathcal{T}/\langle S \rangle^\beta$.

$\square$

Πόρισμα 4.4.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}^\beta$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}^\beta$. Τότε ο φυσικός τριγωνισμένος συναρτητής*

$$\mathcal{T}^\beta/\langle S \rangle^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S \rangle$$

είναι μια πλήρης εμφύτευση.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.3.1, ισχύει $\langle S \rangle^\beta \subset \mathcal{T}^\beta$. Επειδή η κατηγορία $\langle S \rangle^\beta$ ανήκει στον πυρήνα του συναρτητή $\mathcal{T}^\beta \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S \rangle$, από την καθολική συνθήκη για το πηλίκο Verdier $\mathcal{T}^\beta/\langle S \rangle^\beta$, έπεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{T}^\beta/\langle S \rangle^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S \rangle$, ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}^\beta \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T} \arrow[d] \\ \mathcal{T}^\beta/\langle S \rangle^\beta \arrow[r, dashed] & \mathcal{T}/\langle S \rangle \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, υπάρχει μια φυσική απεικόνιση

$$\phi : \Big\{\mathcal{T}^\beta/\langle S \rangle^\beta\Big\}(x,y) \longrightarrow \big\{\mathcal{T}/\langle S \rangle\big\}(x,y)$$

Επειδή $Mor_{\langle S \rangle^\beta} \subset Mor_{\langle S \rangle}$ και $\mathcal{T}^\beta \subset \mathcal{T}$ κάθε απεικόνιση f η οποία ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S \rangle^\beta}$, μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S \rangle}$, και αντίστοιχα, κάθε απεικόνιση α η οποία ανήκει στην $\mathcal{T}^\beta$, μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στην $\mathcal{T}$. Η ϕ απεικονίζει ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & y \\ x & \end{tikzcd}$$

, όπου f ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S\rangle^\beta}$, και α ανήκει στην $\mathcal{T}^\beta$, το οποίο αναπαριστά έναν μορφισμό στην $\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta$, στο ίδιο διάγραμμα, όπου η f θεωρούμε ότι ανήκει στην κλάση $Mor_{\langle S\rangle}$, και αντίστοιχα, η α θεωρούμε ότι ανήκει στην $\mathcal{T}$, το οποίο αναπαριστά έναν μορφισμό στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Τέλος από την Πρόταση 4.4.1, έπεται ότι για κάθε $x, y \in \mathcal{T}^\beta$, η φυσική απεικόνιση

$$\Big\{\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta\Big\}(x,y) \longrightarrow \big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}(x,y)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

□

Στην Πρόταση 2.2.1, διατυπώσαμε ένα κριτήριο το οποίο εγγυάται ότι το πηλικό Verdier $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$ με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα με μια μικρή (ή ουσιαστικά μικρή) τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{S}$, έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}-$σύνολα. Το κριτήριο αυτό δεν έχει πρακτική αξία, κατά κύριο λόγο ενδιαφερόμαστε για τριγωνισμένες υποκατηγορίες $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ οι οποίες δεν είναι μικρές. Επιπλέον, από τον Ορισμό 3.2.9, γνωρίζουμε ότι ακόμη και εάν η κλάση $S \subset \mathcal{T}$ είναι μικρή (δηλαδή είναι ένα σύνολο), και η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\langle S\rangle$ που παράγεται από την κλάση S, κατά κανόνα θα είναι γιγαντιαία (δηλαδή δεν θα είναι μικρή). Εντούτοις εάν $\mathcal{T} = \bigcup_\beta \mathcal{T}^\beta$, τότε ισχύει το επόμενο σημαντικό

Πόρισμα 4.4.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T} = \bigcup_\beta \mathcal{T}^\beta$, δηλαδή κάθε αντικείμενο της $\mathcal{T}$ είναι $\beta-$συμπαγές, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο β. Υποθέτουμε ότι S είναι ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}^\alpha$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}^\alpha$, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο α. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\langle S\rangle}-$σύνολα.*

Απόδειξη. Έστω x και y αντικείμενα της $\mathcal{T}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η κλάση

$$\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}(x,y)$$

είναι ένα σύνολο. Από την υπόθεση, ισχύει $\mathcal{T} = \bigcup_\beta \mathcal{T}^\beta$. Συνεπώς, το x ανήκει σε κάποια $\mathcal{T}^\beta$, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο β. Από το Λήμμα 4.2.3 γνωρίζουμε ότι εάν $\beta < \gamma$ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\mathcal{T}^\beta \subset \mathcal{T}^\gamma$. Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε έναν πληθάριθμο β έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

4.4.3.1. Το x είναι $\beta-$συμπαγές.

4.4.3.2. Ο β είναι κανονικός.

4.4.3.3. Ο β είναι $> \alpha$, όπου $\alpha \geq \aleph_0$.

Τότε $x \in \mathcal{T}^\beta$ και $S \subset \mathcal{T}^\alpha \subset \mathcal{T}^\beta$, και συνεπώς από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι η φυσική απεικόνιση

$$\Big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle^\beta\Big\}(x,y) \longrightarrow \big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}(x,y)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Επειδή, το S είναι σύνολο, από την Πρόταση 3.2.5 έπεται ότι η κατηγορία $\langle S\rangle^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρή. Αλλά από την Πρόταση 2.2.1, το πηλίκο Verdier της $\mathcal{T}$ με μια μικρή (ή ουσιαστικά μικρή) $\mathcal{S}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}-$σύνολα. Επομένως, η κλάση $\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle^\beta\big\}(x,y)$ είναι ένα μικρό σύνολο. Συνεπώς, η κλάση $\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}(x,y)$ όντας ισόμορφη, είναι επίσης ένα μικρό σύνολο.

□

Λήμμα 4.4.4.1. *Έστω $\mathcal{D}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας πλήρης και πιστός τριγωνισμένος συναρτητής. Τότε η ουσιαστική εικόνα $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}$, όπου $\mathcal{I}m(\mathcal{F})$ είναι η εικόνα του, είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη. Η ουσιαστική εικόνα $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}$ είναι εξ ορισμού η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα της $\mathcal{T}$ τα οποία είναι ισόμορφα με τα αντικείμενα $\mathcal{F}(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{D}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F}$ είναι τριγωνισμένος είναι προφανώς προσθετικός, και επειδή είναι πλήρης και πιστός, επάγει μια ισοδυναμία $\mathcal{D} \simeq \overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$ προσθετικών κατηγοριών. Συνεπώς, η κατηγορία $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$ είναι μια πλήρης προσθετική, και εξ ορισμού κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της, υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Έστω X ένα αντικείμενο της $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $X' \in \mathcal{D}$, έτσι ώστε $X \simeq \mathcal{F}(X')$. Επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι τριγωνισμένος, ισχύει $\Sigma X \simeq \Sigma\mathcal{F}(X') \simeq \mathcal{F}\Sigma(X') = \mathcal{F}(\Sigma X')$. Συνεπώς, η $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$ είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$. Έστω $X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$. Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{T}$. Γνωρίζουμε ότι τα αντικείμενα X και Y ανήκουν στην $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι το αντικείμενο Z ανήκει επίσης στην $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$. Το γεγονός ότι ο $X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$, σημαίνει ότι υπάρχει ένας μορφισμός $\mathcal{F}(X') \longrightarrow \mathcal{F}(Y')$ για κάποια αντικείμενα $X', Y' \in \mathcal{D}$, έτσι ώστε να υφίσταται το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{F}(X') \arrow[r] & \mathcal{F}(Y') & & \Sigma\mathcal{F}(X')
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F}$ είναι πλήρης και πιστός, ο μορφισμός $\mathcal{F}(X') \longrightarrow \mathcal{F}(Y')$ αντιστοιχεί σ' έναν μοναδικό μορφισμό $X' \longrightarrow Y'$ στην $\mathcal{D}$. Συμπληρώνουμε τον μορφισμό αυτό σ' ένα τρίγωνο

$$X' \longrightarrow Y' \dashrightarrow Z' \dashrightarrow \Sigma X'$$

στην $\mathcal{D}$. Τότε επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι τριγωνισμένος, και λόγω του αξιώματος [TR3] , επάγεται ένας μορφισμός τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{F}(X') \arrow[r] & \mathcal{F}(Y') \arrow[r] & \mathcal{F}(Z') \arrow[r] & \Sigma\mathcal{F}(X')
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$, ο οποίος από την Πρόταση 1.1.20 οφείλει να είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, το $Z \simeq \mathcal{F}(Z')$, και επομένως το Z ανήκει στην $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F})$.

□

Λήμμα 4.4.4.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T} = \bigcup_\beta \mathcal{T}^\beta$, δηλαδή κάθε αντικείμενο της $\mathcal{T}$ είναι $\beta-$συμπαγές για κάποιο άπειρο πληθάριθμο β. Υποθέτουμε ότι S είναι μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}^\alpha$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}^\alpha$, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο α. Τότε για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, η εικόνα της $\mathcal{T}^\beta$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$ στην κατηγορία $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ ικανοποιεί τον εγκλεισμό,*

$$\mathcal{T}^\beta \subset \{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^\beta$$

Με άλλα λόγια, κάθε αντικείμενο της εικόνας της $\mathcal{T}^\beta$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}$ παραμένει $\beta-$μικρό ακόμα και στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Στην πραγματικότητα η εικόνα της κλάσης $\mathcal{T}^\beta$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, συνεπώς περιέχεται στην μοναδική μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^\beta$ της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι η εικόνα της $\mathcal{T}^\beta$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}$ αποτελείται απο $\beta-$μικρά αντικείμενα της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, και ότι η $\mathcal{T}^\beta$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Έστω k ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}^\beta$. Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Έστω ότι δίνεται μια απεικόνιση στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Από το Πόρισμα 3.2.11, το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, και ορίζεται ως η εικόνα του αντίστοιχου συγκινομένου $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}$ μέσω του $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$, και επιπλέον ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ}$ διατηρεί τα συγκινόμενα. Από το Λήμμα 4.2.3, ισχύει $S \subset \mathcal{T}^\alpha \subset \mathcal{T}^\beta$. Συνεπώς, επειδή $k \in \mathcal{T}^\beta$, και $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathcal{T}$, από την Πρόταση 4.4.1, η φυσική απεικόνιση

$$\left\{\mathcal{T}/\langle S\rangle^\beta\right\}\left(k, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \longrightarrow \{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}\left(k, \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι, η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ είναι η εικόνα ενός μοναδικού μορφισμού $k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle^\beta$. Συνεπώς, αναπαρίσταται από ένα διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \\ k & \end{tikzcd}$$

με $f \in Mor_{\langle S\rangle^\beta}$. Επομένως, υπάρχει ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f"] & k \arrow[r, dashed] & z \arrow[r, dashed] & \Sigma p \end{tikzcd}$$

που συμπληρώνει τον f στην $\mathcal{T}$, με $z \in \langle S\rangle^\beta \subset \mathcal{T}^\beta$. Επειδή, το k ανήκει στην $\mathcal{T}^\beta$, και η $\mathcal{T}^\beta$ είναι τριγωνισμένη, έπεται ότι το p ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}^\beta$. Δηλαδή, το p είναι ένα $\beta-$μικρό αντικείμενο της $\mathcal{T}$, συνεπώς υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \beta$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$p \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$p \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Το p είναι επιπλέον $\beta-$συμπαγές αντικείμενο της $\mathcal{T}$, συνεπώς η απεικόνιση

$$p \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται στην $\mathcal{T}$ ως

$$p \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in \mathcal{T}^\beta$. Επειδή ο $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$ διατηρεί τα συγκινόμενα, η απεικόνιση

$$p \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ ως

$$p \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in \mathcal{T}^\beta$. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

παραγοντοποιείται στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

με $k_\lambda \in \mathcal{T}^\beta$. Επομένως, δείξαμε ότι το k είναι $\beta-$μικρό στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, και επίσης ότι είναι $\beta-$καλό ως προς οποιαδήποτε τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ η οποία περιέχει την κλάση $\mathcal{T}^\beta$. Συνεπώς, κάθε αντικείμενο της κλάσης $\mathcal{T}^\beta$ είναι $\beta-$μικρό στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, και επίσης είναι $\beta-$καλό ως προς οποιαδήποτε τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ η οποία περιέχει την κλάση $\mathcal{T}^\beta$. Από το Πόρισμα 4.4.2, γνωρίζουμε ότι η εικόνα της $\mathcal{T}^\beta$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$ ταυτίζεται με την εικόνα της πλήρους εμφύτευσης $\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$, δηλαδή

$$\mathcal{I}m\{\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle\} = \mathcal{F}_{univ}(\mathcal{T}^\beta)$$

, ισοδύναμα

$$\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta = \mathcal{T}^\beta$$

στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Επομένως, η ουσιαστική εικόνα $\mathcal{E} := \overline{\mathcal{I}m}\{\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle\}$, του συναρτητή $\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ τα οποία είναι ισόμορφα με τα αντικείμενα της $\mathcal{T}^\beta$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, και από το Λήμμα 4.4.4.1 είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Συνεπώς, κάθε αντικείμενο της $\mathcal{T}^\beta$ είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Μάλιστα, κάθε αντικείμενο της $\mathcal{E}$ είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Τότε από την Παρατήρηση 3.3.6.1, έπεται ότι η $\mathcal{E}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Επειδή η $\mathcal{T}^\beta \subset \mathcal{E}$ είναι μια ισοδύναμη κλάση της $\mathcal{E}$, από το Λήμμα 3.3.2, συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{T}^\beta$ είναι επίσης μια $\beta-$τέλεια κλάση στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$.

□

Λήμμα 4.4.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω S μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}^\alpha$, δηλαδή $S \subset \mathcal{T}^\alpha$, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο α. Υποθέτουμε ότι $\langle S\rangle = \mathcal{T}$. Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος $\geq \alpha$. Τότε ο εγκλεισμός $\langle S\rangle^\beta \subset \mathcal{T}^\beta$ του Λήμματος 4.3.1, καθίσταται μια ισότητα.*

Απόδειξη. Έστω x ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}^\beta$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το x ανήκει στην $\langle S\rangle^\beta$. Επειδή $x \in \mathcal{T}^\beta$, και $x \in \langle S\rangle = \mathcal{T}$, από το Θεώρημα 4.3.2 υπάρχει ένα αντικείμενο $y \in \langle S\rangle^\beta$, έτσι ώστε η ταυτοτική απεικόνιση $x \longrightarrow x$ να παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow x$$

Επομένως, το x είναι ένας ευθύς προσθετέος του $y \in \langle S\rangle^\beta$. Αλλά η $\langle S\rangle^\beta$ είναι πυκνή, συνεπώς το $x \in \langle S\rangle^\beta$.

□

Λήμμα 4.4.6. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $S \subset \mathcal{T}^{\alpha}$ μια κλάση $\alpha-$συμπαγών αντικειμένων, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο α. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T} = \langle S \rangle$. Τότε, ισχύει $\mathcal{T} = \bigcup_{\beta} \mathcal{T}^{\beta}$.*

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε αντικείμενο της $\mathcal{T}$ είναι $\beta-$συμπαγές για κάποιο άπειρο πληθάριθμο β. Έστω x ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$. Επειδή $\mathcal{T} = \langle S \rangle = \bigcup_{\beta} \langle S \rangle^{\beta}$, υπάρχει ένας άπειρος πληθάριθμος β, έτσι ώστε $x \in \langle S \rangle^{\beta}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\beta \geq \alpha$ και αντικαθιστώντας τον β με τον διαδοχικό του εάν είναι αναγκαίο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο β είναι κανονικός. Τότε $S \subset \mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}^{\beta}$, και από το Λήμμα 4.3.1 έπεται ότι $\langle S \rangle^{\beta} \subset \mathcal{T}^{\beta}$. Συνεπώς, το x ανήκει στην $\mathcal{T}^{\beta}$.

□

Λήμμα 4.4.7.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] , και $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι δίνεται μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{R}$ της $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Τότε η αντίστροφη εικόνα $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$ της $\mathcal{R}$, δηλαδή η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ της οποίας τα αντικείμενα, ταυτίζονται με τα αντικείμενα της $\mathcal{R}$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$, είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Εάν η $\mathcal{S}$ είναι μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία στην $\mathcal{T}$, και η $\mathcal{R}$ είναι μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, τότε η $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$ είναι επίσης μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία στην $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$, και έστω Y ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$ το οποίο είναι ισόμορφο με το X. Τότε $\mathcal{F}_{univ}(X) \in \mathcal{R}$ και $\mathcal{F}_{univ}(X) \simeq \mathcal{F}_{univ}(Y)$ στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, και επειδή η $\mathcal{R}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, έπεται ότι $\mathcal{F}_{univ}(Y) \in \mathcal{R}$, συνεπώς το $Y \in \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$. Επίσης, επειδή ο $\mathcal{F}_{univ}$ είναι τριγωνισμένος είναι προφανώς προσθετικός, η $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$ έπεται ότι είναι μια προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Έστω $X \in \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$. Αυτό σημαίνει ότι το αντικείμενο $\mathcal{F}_{univ}(X)$ ανήκει στην $\mathcal{R}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ}$ είναι τριγωνισμένος, ισχύει $\mathcal{F}_{univ}(\Sigma X) = \mathcal{F}_{univ}\Sigma(X) \simeq \Sigma\mathcal{F}_{univ}(X) \in \mathcal{R}$, συνεπώς το $\Sigma X \in \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$. Επομένως, η $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$ είναι μια πλήρης προσθετική κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της, καθώς επίσης και ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$, υποκατηγορία στην $\mathcal{T}$. Έστω $X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$. Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{T}$. Γνωρίζουμε ότι τα αντικείμενα X και Y ανήκουν στην $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$. Θα δείξουμε ότι το αντικείμενο Z ανήκει επίσης στην $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$. Επειδή ο $\mathcal{F}_{univ}$ είναι τριγωνισμένος απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο, σ' ένα τρίγωνο

$$\mathcal{F}_{univ}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_{univ}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}_{univ}(Z) \longrightarrow \Sigma\mathcal{F}_{univ}(X)$$

στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, το οποίο ανήκει εξ ολοκλήρου στην $\mathcal{R}$ επειδή είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, επομένως το $\mathcal{F}_{univ}(Z) \in \mathcal{R}$, και συνεπώς το $Z \in \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$.

Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$. Θεωρούμε το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ στην $\mathcal{T}$. Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία στην $\mathcal{T}$, από το Πόρισμα 3.2.12, η κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, και ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ διατηρεί τα συγκινόμενα. Συνεπώς,

$$\mathcal{F}_{univ}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_{univ}(X_\lambda)$$

Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, το αντικείμενο X_λ ανήκει στην $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$, επομένως το αντικείμενο $\mathcal{F}_{univ}\big(X_\lambda\big)$ ανήκει στην $\mathcal{R}$. Επειδή η $\mathcal{R}$ είναι τοποικοποιήσιμη, συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{F}_{univ}\big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big) \in \mathcal{R}$, επομένως το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\mathcal{R})$.

□

Λήμμα 4.4.7.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, και έστω $\widehat{\mathcal{S}}$ το πυκνό* *περίβλημα της $\mathcal{S}$. Εάν η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα, τότε η $\widehat{\mathcal{S}}$ είναι επίσης κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα.*

Απόδειξη. Έστω $\{X_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\widehat{\mathcal{S}}$, όπου το Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $<\beta$. Για $\lambda\in\Lambda$, υπάρχει ένα αντικείμενο $Y_\lambda\in\mathcal{T}$, έτσι ώστε $X_\lambda\oplus Y_\lambda\in\mathcal{S}$. Τότε

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\oplus\coprod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\simeq\coprod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\oplus Y_\lambda\in\mathcal{S}$$

, επειδή $X_\lambda\oplus Y_\lambda\in\mathcal{S}$, και η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα. Επομένως, το αντικείμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\in\widehat{\mathcal{S}}$. Συνεπώς, η $\widehat{\mathcal{S}}$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα.

□

Πρόταση 4.4.8. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Έστω $T\subset\mathcal{T}^\alpha$ και $S\subset\mathcal{T}^\alpha$ δύο κλάσεις $\alpha-$συμπαγών αντικειμένων, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο α. Υποθέτουμε ότι $\langle T\rangle=\mathcal{T}$. Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος $\geq\alpha$. Τότε, από το Λήμμα 4.4.4, η εικόνα της $\mathcal{T}^\beta$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}:\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{T}/\langle S\rangle$ στην κατηγορία $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ ικανοποιεί τον εγκλεισμό,*

$$\mathcal{T}^\beta\subset\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}^\beta$$

Αυτός ο εγκλεισμός είναι μια σχεδόν ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, δηλαδή κάθε αντικείμενο της $\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}^\beta$ είναι ισόμορφο με έναν ευθύ προσθετέο της εικόνας ενός $\beta-$συμπαγούς αντικειμένου της $\mathcal{T}$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}$. Αυτό σημαίνει ότι, η κλάση των $\beta-$συμπαγών αντικειμένων της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ απαρτίζεται, μέχρις διάσπασης ταυτοδύναμων μορφισμών ως προς ισομορφισμό, από τις εικόνες των $\beta-$συμπαγών αντικειμένων της $\mathcal{T}$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ μέσω του $\mathcal{F}_{univ}$.

Απόδειξη. Επειδή ισχύει $T\subset\mathcal{T}^\alpha$, και $\langle T\rangle=\mathcal{T}$, από το Λήμμα 4.4.6 ισχύει $\mathcal{T}=\bigcup_\beta\mathcal{T}^\beta$. Επειδή ισχύει $S\subset\mathcal{T}^\alpha$, από το Λήμμα 4.4.4.2 υφίσταται ο εγκλεισμός $\mathcal{T}^\beta\subset\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}^\beta$, και επιπλέον γνωρίζουμε ότι η εικόνα της $\mathcal{T}^\beta$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}:\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{T}/\langle S\rangle$ ταυτίζεται με την εικόνα της πλήρους εμφύτευσης $\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta\longrightarrow\mathcal{T}/\langle S\rangle$, δηλαδή $\mathcal{I}m\{\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta\longrightarrow\mathcal{T}/\langle S\rangle\}=\mathcal{F}_{univ}(\mathcal{T}^\beta)$, ισοδύναμα $\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta=\mathcal{T}^\beta$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Έστω $\mathcal{E}$, η ουσιαστική εικόνα του συναρητή $\mathcal{T}^\beta/\langle S\rangle^\beta\longrightarrow\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Από την απόδειξη του Λήμματος 4.4.4.2 γνωρίζουμε ότι $\mathcal{E}\subset\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}^\beta$. Επίσης, από το Λήμμα 4.2.4 η $\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}^\beta$ είναι πυκνή, συνεπώς περιλαμβάνει το πυκνό περίβλημα $\widehat{\mathcal{E}}$ της $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, δηλαδή ισχύει ο εγκλεισμός,

$$\widehat{\mathcal{E}}\subset\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}^\beta$$

Αρκεί να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό,

$$\big\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\big\}^\beta\subset\widehat{\mathcal{E}}$$

Επειδή ο β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, από το Λήμμα 4.2.5, έπεται ότι η $\mathcal{T}^\beta$ είναι μια $\beta-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία στην $\mathcal{T}$, ειδικότερα είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$. Οι κατηγορίες $\mathcal{T}$, και $\langle S\rangle$ είναι κλειστές ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα. Συνεπώς, από το Λήμμα 3.2.10, η κατηγορία $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα, και μάλιστα το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $<\beta$ της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, ορίζεται ως η εικόνα του αντίστοιχου συγκινομένου του συνόλου των αντικειμένων αυτών στην $\mathcal{T}$, μέσω του $\mathcal{F}_{univ}:\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Συνεπώς, η $\mathcal{T}^\beta$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Επομένως, η κλειστότητα $\mathcal{E}$ ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ της $\mathcal{T}^\beta$ είναι μια κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, και συνεπώς από το Λήμμα 4.4.7.2 η $\widehat{\mathcal{E}}$ είναι επίσης μια κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Τότε η $\widehat{\mathcal{E}}$ είναι μια πυκνή, κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, η οποία περιέχει τα αντικείμενα της κλάσης T, εφόσον $T\subset\mathcal{T}^\alpha\subset\mathcal{T}^\beta$, τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, συνεπώς $\langle T\rangle^\beta\subset\widehat{\mathcal{E}}$.

Έχουμε υποθέσει ότι $\langle T\rangle=\mathcal{T}$, αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει την T. Οι κατηγορίες $\mathcal{T}$, και $\langle S\rangle$ είναι κλειστές ως προς τα συγκινόμενα. Συνεπώς, από το Πόρισμα 3.2.11, η κατηγορία $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, και μάλιστα το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, ορίζεται ως η εικόνα του αντίστοιχου συγκινομένου του συνόλου των αντικειμένων αυτών στην $\mathcal{T}$, μέσω του $\mathcal{F}_{univ}: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$. Η κλάση T προφανώς μπορεί να θεωρηθεί ως μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Θεωρούμε την τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\langle T\rangle$ της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Από το Λήμμα 4.4.7.1 η $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\langle T\rangle)$ είναι μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Τότε $T \subset \mathcal{F}_{univ}^{-1}(\langle T\rangle)$, και η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει την T, επομένως $\mathcal{F}_{univ}^{-1}(\langle T\rangle) = \mathcal{T}$. Ο $\mathcal{F}_{univ}: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$ είναι ένας επιμορφισμός τριγωνισμένων κατηγοριών. Πράγματι έστω $\mathcal{G}, \mathcal{H}: \mathcal{T}/\langle S\rangle \longrightarrow \mathcal{T}'$ τριγωνισμένοι συναρτητές, έτσι ώστε $\mathcal{G}\mathcal{F}_{univ} = \mathcal{H}\mathcal{F}_{univ}$, τότε από την καθολική ιδιότητα της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, έπεται $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Συνεπώς, $\langle T\rangle = \mathcal{F}_{univ}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}/\langle S\rangle$, δηλαδή η $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ είναι η μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ η οποία περιέχει την T, εάν θεωρηθεί ως κλάση της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Τέλος, επειδή η T είναι μια κλάση $\beta-$συμπαγών αντικειμένων της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, δηλαδή $T \subset \{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta}$, από το Λήμμα 4.4.5 για την $\mathcal{T}/\langle S\rangle$, έπεται ο ζητούμενος εγκλεισμός,

$$\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta} = \langle T\rangle^{\beta} \subset \widehat{\mathcal{E}}$$

□

Πόρισμα 4.4.9. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω $T \subset \mathcal{T}^{\alpha}$ και $S \subset \mathcal{T}^{\alpha}$ δύο κλάσεις $\alpha-$συμπαγών αντικειμένων, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο α. Υποθέτουμε ότι $\langle T\rangle = \mathcal{T}$. Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος $\geq \alpha$ με $\beta > \aleph_0$. Τότε, η ουσιαστική εικόνα του φυσικού τριγωνισμένου συναρτητή*

$$\mathcal{T}^{\beta}/\langle S\rangle^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$$

είναι, ως προς ισομορφισμό, ακριβώς η τριγωνισμένη υποκατηγορία $\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta}$. Συγκεκριμένα, ο φυσικός τριγωνισμένος συναρτητής

$$\mathcal{T}^{\beta}/\langle S\rangle^{\beta} \longrightarrow \{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta}$$

είναι μια ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 4.4.2, ο συναρτητής $\mathcal{T}^{\beta}/\langle S\rangle^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$ είναι μια πλήρης εμφύτευση. Στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.8, διαπιστώσαμε ότι η ουσιαστική του εικόνα $\mathcal{E}$ είναι μια κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}/\langle S\rangle$. Επειδή $\beta > \aleph_0$, από την Παρατήρηση 3.2.7, έπεται ότι η $\mathcal{E}$ είναι πυκνή, συνεπώς ισχύει $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{E}} = \{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta}$.

□

Παρατήρηση 4.4.10. Από το Πόρισμα 4.4.9, εάν $\beta > \aleph_0$, τότε ισχύει

$$\mathcal{T}^{\beta}/\langle S\rangle^{\beta} \subset \mathcal{E} = \widehat{\mathcal{E}} = \{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta}$$

Συνεπώς κάθε αντικείμενο της $\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta}$ είναι ισόμορφο στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ με ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}^{\beta}/\langle S\rangle^{\beta}$. Ισοδύναμα, επειδή από το Λήμμα 4.4.4.2 γνωρίζουμε ότι η εικόνα της $\mathcal{T}^{\beta}$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$ ταυτίζεται με την εικόνα της πλήρους εμφύτευσης $\mathcal{T}^{\beta}/\langle S\rangle^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$, κάθε αντικείμενο της $\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\beta}$ είναι ισόμορφο στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ με την εικόνα ενός αντικειμένου της $\mathcal{T}^{\beta}$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$.

Ενώ, εάν $\beta = \aleph_0$, τότε ισχύει

$$\mathcal{T}^{\aleph_0}/\langle S\rangle^{\aleph_0} \subset \mathcal{E} \subset \widehat{\mathcal{E}} = \{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\aleph_0}$$

Επειδή ενδέχεται ο δεύτερος εγκλεισμός να είναι γνήσιος, έπεται ότι κάθε αντικείμενο της $\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\aleph_0}$ είναι ισόμορφο στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ με έναν ευθύ προσθετέο ενός αντικειμένου της $\mathcal{T}^{\aleph_0}/\langle S\rangle^{\aleph_0}$. Ισοδύναμα, από το Λήμμα 4.4.4.2, κάθε αντικείμενο της $\{\mathcal{T}/\langle S\rangle\}^{\aleph_0}$ είναι ισόμορφο στην $\mathcal{T}/\langle S\rangle$ με έναν ευθύ προσθετέο της εικόνας ενός αντικειμένου της $\mathcal{T}^{\aleph_0}$ μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\langle S\rangle$.

Λήμμα 4.4.11. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω $S \subset \mathcal{T}^{\alpha}$ μια κλάση $\alpha-$συμπαγών αντικειμένων, για κάποιο άπειρο πληθάριθμο α. Έστω $\mathcal{S} = \langle S\rangle$ η τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, παραγόμενη απο την S. Υποθέτουμε ότι $\beta \geq \alpha$ είναι ένας κανονικός πληθάριθμος. Τότε υφίσταται ένας εγκλεισμός,*

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \subset \mathcal{S}^{\beta}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση της $\mathcal{S}$, η οποία περιέχεται στην $\mathcal{S}^{(\beta)}$, συνεπώς θα περιέχεται στην μοναδική μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $\mathcal{S}^{\beta} := \left\{\mathcal{S}^{(\beta)}\right\}_{\beta} \subset \mathcal{S}^{(\beta)}$ της $\mathcal{S}$.

Έστω $k \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$, και έστω $\{X_{\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων στην $\mathcal{S}$. Θεωρούμε το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$. Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$ είναι επίσης ένα συγκινόμενο στην $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι δίνεται μια απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$$

Επειδή το $k \in \mathcal{T}^{\beta}$, είναι $\beta-$μικρό στην $\mathcal{T}$, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \beta$, έτσι ώστε η προηγούμενη απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_{\lambda} \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$$

Τότε το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_{\lambda}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε αντικείμενο $k \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$ είναι $\beta-$μικρό στην $\mathcal{S}$, συνεπώς $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \in \mathcal{S}^{(\beta)}$.

Έστω τώρα $\{X_{\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων στην $\mathcal{S}$, όπου το Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \beta$, και μια απεικόνιση

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$$

Το $k \in \mathcal{T}^{\beta}$, και η $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση της $\mathcal{T}$, επομένως η απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_{\lambda} \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_{\lambda}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$$

με $k_{\lambda} \in \mathcal{T}^{\beta}$. Από το Λήμμα 4.2.3, ισχύει $S \subset \mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}^{\beta}$, συνεπώς επειδή $k_{\lambda} \in \mathcal{T}^{\beta}$, και $X_{\lambda} \in \mathcal{S} = \langle S \rangle$, από το Θεώρημα 4.3.2, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, υπάρχει ένα αντικείμενο $k'_{\lambda} \in \langle S \rangle^{\beta} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$, έτσι ώστε η απεικόνιση $f_{\lambda} : k_{\lambda} \longrightarrow X_{\lambda}$ να παραγοντοποιείται ως

$$k_{\lambda} \longrightarrow k'_{\lambda} \longrightarrow X_{\lambda}$$

Συνεπώς, η απεικόνιση παραγοντοποιείται ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$$

ως

$$k \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k'_{\lambda} \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}$$

, με $k'_{\lambda} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$. Δείξαμε ότι κάθε αντικείμενο της $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$ είναι $\beta-$καλό ως προς την $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$. Συνεπώς, επειδή η $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, ως τομή τριγωνισμένων υποκατηγοριών, από την Παρατήρηση 3.3.6.1 έπεται ότι είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση της $\mathcal{S}$.

$\square$

Θεώρημα 4.4.12. *[Θεώρημα Τοπικοποίησης των Neeman– Thomason] Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] , $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος, μια κλάση αντικειμένων $T \subset \mathcal{T}^{\alpha}$, και μια κλάση αντικειμένων $S \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\alpha}$, έτσι ώστε*

$$\mathcal{S} = \langle S \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{T} = \langle T \rangle$$

Τότε για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$,

$$\langle S \rangle^{\beta} = \mathcal{S}^{\beta} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \ ,$$
$$\langle T \rangle^{\beta} = \mathcal{T}^{\beta}$$

Ο φυσικός τριγωνισμένος συναρτητής

$$\mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S}^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

παραγοντοποιείται ως

$$\mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S}^{\beta} \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

και ο συναρτητής

$$\mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S}^{\beta} \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\beta}$$

είναι πλήρης και πιστός. Εάν $\beta > \aleph_0$, τότε ο συναρτητής

$$\mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S}^{\beta} \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\beta}$$

είναι μια ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών. Εάν $\beta = \aleph_0$, τότε ο συναρτητής είναι μια σχεδόν ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, δηλαδή ο συναρτητής είναι πλήρης και πιστός, και κάθε αντικείμενο της $\left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\aleph_0}$ είναι ισόμορφο με έναν ευθύ προσθετέο ενός αντικειμένου της $\mathcal{T}^{\aleph_0}/\mathcal{S}^{\aleph_0}$.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η $\langle S \rangle^{\beta}$, η οποία είναι η μικρότερη πυκνή $\beta-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει την S, είναι επίσης η μικρότερη πυκνή $\beta-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{S}$ η οποία περιέχει την S, συνεπώς δεν υφίσταται κίνδυνος σύγχυσης στον συμβολισμό. Επειδή, ισχύει $S \subset \mathcal{T}^{\alpha}$, από το Λήμμα 4.4.11, υφίσταται ο εγκλεισμός $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \subset \mathcal{S}^{\beta}$. Επίσης, ισχύει $\langle S \rangle^{\beta} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$, επειδή $\mathcal{S} = \langle S \rangle$, και $\langle S \rangle^{\beta} \subset \mathcal{T}^{\beta}$ από το Λήμμα 4.3.1, επειδή $S \subset \mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}^{\beta}$. Συνεπώς, λαμβάνουμε τους εγκλεισμούς

$$\langle S \rangle^{\beta} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \subset \mathcal{S}^{\beta}$$

Επειδή, ισχύει $S \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \subset \mathcal{S}^{\beta}$, από το Λήμμα 4.4.5 για την $\mathcal{S}$, έπεται

$$\langle S \rangle^{\beta} = \mathcal{S}^{\beta}$$

Επομένως, λαμβάνουμε την ισότητα $\langle S \rangle^{\beta} = \mathcal{S}^{\beta} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$. Επειδή, ισχύει $T \subset \mathcal{T}^{\alpha}$, από το Λήμμα 4.4.5, λαμβάνουμε την ισότητα

$$\langle T \rangle^{\beta} = \mathcal{T}^{\beta}$$

Από το Λήμμα 4.4.4.2, η εικόνα του φυσικού τριγωνισμένου συναρτητή

$$\mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S}^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

περιέχεται στην $\left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\beta}$, συνεπώς παραγοντοποιείται ως

$$\mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S}^{\beta} \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\beta} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

Από το Πόρισμα 4.4.2, ο συναρτητής

$$\mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S}^{\beta} \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\beta}$$

είναι πλήρης και πιστός. Από το Πόρισμα 4.4.9, ο συναρτητής

$$\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^\beta$$

είναι μια ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, εάν $\beta > \aleph_0$. Τέλος, ο ισχυρισμός για $\beta = \aleph_0$, έπεται από την Παρατήρηση 4.4.10.

□

Παρατήρηση 4.4.13. Έστω οι υποθέσεις όπως στο Θεώρημα 4.4.12. Επειδή $\mathcal{T} = \langle T \rangle$, προφανώς ισχύει $\mathcal{T} = \langle \mathcal{T}^\alpha \rangle$. Τότε από το Θεώρημα 4.4.12, συμπεραίνουμε ότι για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$,

$$\langle \mathcal{T}^\alpha \rangle^\beta \ = \ \mathcal{T}^\beta$$

Αυτή η ισότητα ενδεχομένως να προξενήσει σύγχυση με μια πρώτη ματιά. Προφανώς είναι μια ταυτολογία, επειδή $\mathcal{T} = \langle \mathcal{T}^\alpha \rangle$, απλώς αντικαθιστώ την $\langle \mathcal{T}^\alpha \rangle$ από την $\mathcal{T}$. Επισκιάζει το γεγονός ότι υπάρχουν δυο τρόποι να ερμηνεύσουμε το σύμβολο $\langle \mathcal{T}^\alpha \rangle^\beta$. Ο πρώτος τρόπος είναι ο εξής. Δοθείσης μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{Q}$ κλειστής ως προς τα συγκινόμενα, υπάρχει ένας κανονικός τρόπος να κατασκευάσουμε μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{Q}^\beta$, και στην συνέχεια εφαρμόζουμε την κατασκευή αυτή για την τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{T}^\alpha \rangle$. Ενώ ο δεύτερος τρόπος είναι ο εξής. Δοθείσης μιας κλάσης αντικειμένων $Q \subset \mathcal{T}$, υπάρχει ένας κανονικός τρόπος να κατασκευάσουμε μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\langle Q \rangle^\beta$, και στην συνέχεια εφαρμόζουμε την κατασκευή αυτή για την κλάση αντικειμένων $Q = \mathcal{T}^\alpha$. Το Θεώρημα 4.4.12 ισχυρίζεται ότι υπό ορισμένες συνθήκες οι δυο αυτοί τρόποι ταυτίζονται, και επομένως δεν υφίσταται κίνδυνος αμφισημίας. Ομοίως, επειδή $\mathcal{S} = \langle S \rangle$, προφανώς ισχύει $\mathcal{S} = \langle \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha \rangle$. Τότε από το Θεώρημα 4.4.12, συμπεραίνουμε ότι για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$,

$$\langle \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha \rangle^\beta \ = \ \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\beta \ = \ \mathcal{S}^\beta$$

Συνεπώς, όπως προηγουμένως υπάρχουν δύο τρόποι να ερμηνεύσουμε το σύμβολο $\langle \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha \rangle^\beta$. Ο πρώτος τρόπος είναι ο εξής. Δοθείσης μιας τοπικοποιήσιμης υποκατηγορίας $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, υπάρχει ένας κανονικός τρόπος να κατασκευάσουμε μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{R}^\beta$, και στην συνέχεια εφαρμόζουμε την κατασκευή αυτή για την τριγωνισμένη υποκατηγορία $\langle \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha \rangle$. Ο δεύτερος τρόπος είναι ο εξής. Δοθείσης μιας κλάσης αντικειμένων $R \subset \mathcal{S}$, υπάρχει ένας κανονικός τρόπος να κατασκευάσουμε μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\langle R \rangle^\beta$, και στην συνέχεια εφαρμόζουμε την κατασκευή για την κλάση αντικειμένων $R = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha$. Το Θεώρημα 4.4.12 ισχυρίζεται ότι υπό ορισμένες συνθήκες οι δυο αυτοί τρόποι ταυτίζονται.

Πρόταση 4.4.14. *Όπως στο Θεώρημα 4.4.12, έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Αλλά σε αντίθεση με το Θεώρημα 4.4.12, τώρα υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα. Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Έστω α ένας άπειρος πληθάριθμος, ένα σύνολο (όχι μόνο μια κλάση, όπως στο Θεώρημα 4.4.12) αντικειμένων $T \subset \mathcal{T}^\alpha$, και ένα σύνολο αντικειμένων $S \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha$, έτσι ώστε*

$$\mathcal{S} = \langle S \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{T} = \langle T \rangle$$

Τότε για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, οι κατηγορίες $\mathcal{S}^\beta, \mathcal{T}^\beta$ και $\left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρές.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.4.12, για κάθε $\beta \geq \alpha$ γνωρίζουμε ότι $\langle S \rangle^\beta = \mathcal{S}^\beta$, και $\langle T \rangle^\beta = \mathcal{T}^\beta$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι οι κλάσεις S και T είναι σύνολα και η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, από την Πρόταση 3.2.5 οι κατηγορίες $\langle S \rangle^\beta$ και $\langle T \rangle^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρές. Συνεπώς, οι κατηγορίες $\mathcal{S}^\beta$ και $\mathcal{T}^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρές. Επειδή η $\mathcal{T}^\beta$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}^\beta}-$σύνολα και η $\mathcal{S}^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρή, από την Πρόταση 2.2.1 το πηλίκο Verdier $\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta}-$σύνολα, και επειδή η κλάση των αντικείμενων του ταυτίζεται με την κλάση των αντικειμένων της $\mathcal{T}^\beta$, έπεται ότι το πηλίκο είναι ουσιαστικά μικρό. Από το Θεώρημα 4.4.12, εάν $\beta > \aleph_0$, τότε ο $\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^\beta$ είναι μια ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών. Εάν $\beta = \aleph_0$, τότε ο $\mathcal{T}^{\aleph_0}/\mathcal{S}^{\aleph_0} \longrightarrow \left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^{\aleph_0}$ είναι μια σχεδόν ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών. Συνεπώς, και στις δυο περιπτώσεις επειδή η $\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρή, έπεται ότι η $\left\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\right\}^\beta$ είναι επίσης ουσιαστικά μικρή.

□

Συγκεφαλαιώνοντας, το Θεώρημα 4.4.12 ισχυρίζεται το εξής. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] , $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Προφανώς για κάθε άπειρο πληθάριθμο α πάντα υπάρχει το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^\alpha \arrow[d] & \mathcal{T}^\alpha \arrow[d] & \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha \arrow[d] \\
\mathcal{S} \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r, "\mathcal{F}_{univ}"] & \mathcal{T}/\mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

στο οποίο όλες οι απεικονίσεις εκτός της $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$, είναι οι προφανείς συναρτητές φυσικής έγκλεισης.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο α ένας κανονικός πληθάριθμος, και έστω μια κλάση αντικειμένων $T \subset \mathcal{T}^\alpha$, και μια κλάση αντικειμένων $S \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha$, έτσι ώστε

$$\mathcal{S} = \langle S \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{T} = \langle T \rangle$$

Τότε από το Θεώρημα 4.4.12, για την ειδική περίπτωση $\beta = \alpha$, ουσιαστικά συμπεραίνουμε ότι οι συναρτητές φυσικής έγκλεισης $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$, και τοπικοποίησης Verdier $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ διατηρούν τα $\alpha-$συμπαγή αντικείμενα, δηλαδή απεικονίζουν $\alpha-$συμπαγή αντικείμενα σε $\alpha-$συμπαγή. Αυτο σημαίνει ότι το προηγούμενο διάγραμμα μπορεί να συμπληρωθεί στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^\alpha \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathcal{T}^\alpha \arrow[r, dashed, "\mathcal{F}_{univ}|_{\mathcal{T}^\alpha}"] \arrow[d] & \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha \arrow[d] \\
\mathcal{S} \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r, "\mathcal{F}_{univ}"] & \mathcal{T}/\mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

Επειδή η κατηγορία $\mathcal{S}^\alpha$ ανήκει στον πυρήνα του συναρτητή $\mathcal{T}^\alpha \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha$, δηλαδή η σύνθεση $\mathcal{S}^\alpha \longrightarrow \mathcal{T}^\alpha \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha$ μηδενίζεται, απο την καθολική συνθήκη για το πηλίκο Verdier $\mathcal{T}^\alpha/\mathcal{S}^\alpha$, έπεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός τριγωνισμένος συναρτητής $i : \mathcal{T}^\alpha/\mathcal{S}^\alpha \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha$, ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^\alpha \arrow[r] \arrow[dd] & \mathcal{T}^\alpha \arrow[rr, "\mathcal{F}_{univ}|_{\mathcal{T}^\alpha}"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha \arrow[dd] \\
& & \mathcal{T}^\alpha/\mathcal{S}^\alpha \arrow[ur, dashed, "i"] & \\
\mathcal{S} \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[rr, "\mathcal{F}_{univ}"] & & \mathcal{T}/\mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

Τέλος, συμπεραίνουμε το εξής. Εάν $\alpha > \aleph_0$, τότε ο συναρτητής $\mathcal{T}^\alpha/\mathcal{S}^\alpha \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha$ είναι μια ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, δηλαδή είναι πλήρης, πιστός, και ουσιαστικά επί. Συνεπώς, κάθε αντικείμενο της $\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\alpha$ είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}^\alpha/\mathcal{S}^\alpha$. Εάν $\alpha = \aleph_0$, τότε ο συναρτητής $i : \mathcal{T}^{\aleph_0}/\mathcal{S}^{\aleph_0} \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^{\aleph_0}$ είναι μια σχεδόν ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, δηλαδή είναι πλήρης, πιστός, και σχεδόν ουσιαστικά επί. Συνεπώς, κάθε αντικείμενο της $\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^{\aleph_0}$ είναι ισόμορφο με έναν ευθύ προσθετέο ενός αντικειμένου της $\mathcal{T}^{\aleph_0}/\mathcal{S}^{\aleph_0}$. Ακριβέστερα, για κάθε αντικείμενο $t \in \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^{\aleph_0}$ υπάρχουν αντικείμενα $t' \in \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^{\aleph_0}$, και $s \in \mathcal{T}^{\aleph_0}/\mathcal{S}^{\aleph_0}$ έτσι ώστε $t \oplus t' \simeq i(s)$.

Θα επανέλθουμε στο Θεώρημα Τοπικοποίησης των Neeman−Thomason, στο Κεφάλαιο 7. Η σπουδαιότητα του, θα αναφανεί στην Πρόταση 7.4.8.

5 Αβελιανοποίηση Verdier

5.1 Η αβελιανοποίηση $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$

Έστω $\mathcal{S}$ μια προσθετική κατηγορία. Δεν ισχυριζόμαστε ότι η $\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά μικρή.

Ορισμός 5.1.1. *Η κατηγορία $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει για αντικείμενα όλους τους προσθετικούς συναρτητές*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

Οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι οι φυσικοί μετασχηματισμοί.

Η κατηγορία $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ αποδεικνύεται ότι είναι μια αβελιανή κατηγορία. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της ακρίβειας στην κατηγορία $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Υποθέτουμε ότι δίνεται μια ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{F}''(\,-\,) \longrightarrow 0$$

αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, δηλαδή συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών. Η ακολουθία είναι ακριβής στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ εάν και μόνο εάν, για κάθε $s \in \mathcal{S}$, η ακολουθία των αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(s) \longrightarrow \mathcal{F}(s) \longrightarrow \mathcal{F}''(s) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}b$.

Λήμμα 5.1.2. *Έστω $\mathcal{S}$ μια προσθετική κατηγορία. Έστω $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ να είναι όπως στον Ορισμό 5.1.1. Τότε ο αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathcal{S}\big(-, s\big)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$.*

Απόδειξη. Ο συναρτητής $Y_s(\,-\,) = \mathcal{S}\big(-, s\big)$ είναι προσθετικός, συνεπώς είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Έστω $\mathcal{F}$ ένα οποιοδήποτε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Το Λήμμα Yoneda ισχυρίζεται ότι, οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, αυτό σημαίνει οι φυσικοί μετασχηματιμοί

$$Y_s(\,-\,) = \mathcal{S}\big(-, s\big) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$$

τίθενται σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με στοιχεία της $\mathcal{F}(s)$. Έστω ότι δίνεται μια ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{F}''(\,-\,) \longrightarrow 0$$

Ο συναρτητής

$$\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big\{Y_s(\,-\,), -\Big\} : \mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

απεικονίζει την ακριβή ακολουθία σε μια ακολουθία, η οποία απο το Λήμμα Yoneda , είναι ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(s) \longrightarrow \mathcal{F}(s) \longrightarrow \mathcal{F}''(s) \longrightarrow 0$$

Άρα, ο συναρτητής $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big\{Y_s(\,-\,), -\big\}$ είναι ακριβής. Συνεπώς, το $Y_s(\,-\,) = \mathcal{S}\big(-, s\big)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο.

□

Ορισμός 5.1.3. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, όχι απαραίτητα ουσιαστικά μικρή. Η κατηγορία $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, όπως στον Ορισμό 5.1.1, είναι η κατηγορία όλων των προσθετικών συναρτητών $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$. Ορίζουμε την κατηγορία των πεπερασμένα παραστάσιμων συναρτητών (ή coherent συναρτητών)*

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \quad \subset \quad \mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

να είναι η πλήρης υποκατηγορία όλων των αντικειμένων $\mathcal{F}$ της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, τα οποία επιδέχονται παραστάσεις

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

Παρατήρηση 5.1.4. Με άλλα λόγια, η κλάση των αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ απαρτίζεται απ' όλα τα αντικείμενα της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, τα οποία επιδέχονται προβολικές παραστάσεις από προβολικά αντικείμενα, και ειδικότερα από αναπαραστάσιμα αντικείμενα.

Λήμμα 5.1.5. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Οι συναρτητές στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρούν τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}$ ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, αυτό σημαίνει ότι ο $\mathcal{F}$ επιδέχεται μια παράσταση

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

Είναι γνωστό ότι οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-,s)$ και $\mathcal{S}(-,t)$ απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Έστω $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{S}$ των οποίων το συγκινόμενο, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Τότε επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, s\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{S}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, t\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{F}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\Big) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & 0 \\
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(X_\lambda, s) \arrow[r] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(X_\lambda, t) \arrow[r] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(X_\lambda) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Η κάτω γραμμή είναι ακριβής γιατί ο συναρτητής $\prod_{\lambda\in\Lambda}(\,-\,) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι δεξιά ακριβής, σε οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Συνεπώς, από το 5 Λήμμα έπεται ότι η απεικόνιση h είναι ένας ισομορφισμός, δηλαδή ο συναρτητής $\mathcal{F}$ διατηρεί τα γινόμενα.

□

Λήμμα 5.1.6. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Τότε ο συνπυρήνας είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H}$ ο συνπυρήνας του μορφισμού $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$\mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,) \dashrightarrow \mathcal{H}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

, όπου $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{H}$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Οι συναρτητές $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ επιδέχονται παραστάσεις

$$\mathcal{S}(-,s') \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t') \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{G}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

αντίστοιχα. Επίσης δίνεται μια απεικόνιση $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, συνεπώς λαμβάνουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,t') \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[d] \\
& \mathcal{G}(-)
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα 5.1.2, ο αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathcal{S}(-,t')$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο, συνεπώς επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,t') \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F}(-) \arrow[d] \\
\mathcal{S}(-,t) \arrow[r] & \mathcal{G}(-)
\end{tikzcd}$$

Επομένως, λαμβάνουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{S}(-,t') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathcal{S}(-,s) \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & \mathcal{H}(-) \arrow[d] & \\
& & 0 &
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές, και στήλες. Από το διάγραμμα αυτό, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο $\mathcal{H}$ είναι ο συνπυρήνας της επαγόμενης στο συγκινόμενο απεικόνισης

$$\mathcal{S}(-,s\oplus t') = \mathcal{S}(-,s) \oplus \mathcal{S}(-,t') \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$$

Επομένως, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,s\oplus t') \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r, dashed] & \mathcal{H}(-) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς, ο συνπυρήνας $\mathcal{H}$ του μορφισμού $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ επιδέχεται μια παράσταση από προβολικά αντικείμενα, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

□

Λήμμα 5.1.7. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{F}$ είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, και $\phi : \mathcal{S}(-,x) \longrightarrow \mathcal{F}(-)$ είναι ένας επιμορφισμός. Τότε ο πυρήνας του ϕ είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.*

Απόδειξη. Επειδή το $\mathcal{F}$ είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ επιδέχεται μια παράσταση

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,s) \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}(-) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Επίσης δίνεται μια απεικόνιση $\phi : \mathcal{S}(-,x) \longrightarrow \mathcal{F}(-)$, συνεπώς λαμβάνουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{S}(-,x) \arrow[d, "\phi"'] & \\ \mathcal{S}(-,s) \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

, όπου η κάτω γραμμή είναι ακριβής. Το αντικείμενο $\mathcal{S}(-,x)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ από το Λήμμα 5.1.2, συνεπώς η απεικόνιση $\phi : \mathcal{S}(-,x) \longrightarrow \mathcal{F}(-)$ παραγοντοποιείται ως

$$\mathcal{S}(-,x) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t) \longrightarrow \mathcal{F}(-) \longrightarrow 0$$

Επίσης, έχουμε ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}(-,x) \arrow[d] & & \\ \mathcal{S}(-,s) \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

, όπου η κάτω γραμμή είναι ακριβής, και η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(-,x) \arrow[d] & \\ \mathcal{S}(-,t) \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \end{tikzcd}$$

είναι ο επιμορφισμός ϕ. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι επαγόμενη στο συγκινόμενο απεικόνιση

$$\mathcal{S}(-,x \oplus s) = \mathcal{S}(-,x) \oplus \mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$$

, είναι ένας επιμορφισμός.

Από το Λήμμα Yoneda , αυτός ο φυσικός μετασχηματισμός επάγεται απο έναν μορφισμό στην $\mathcal{S}$

$$x \oplus s \longrightarrow t$$

Το γεγονός ότι η

$$\mathcal{S}(-,x \oplus s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$$

είναι ένας επιμορφισμός, σημαίνει ότι η

$$\mathcal{S}(t,x \oplus s) \longrightarrow \mathcal{S}(t,t)$$

είναι ένας επιμορφισμός, επομένως η απεικόνιση $1 : t \longrightarrow t$ ανήκει στην εικόνα. Συνεπώς, παραγοντοποιείται ως

$$t \longrightarrow x \oplus s \longrightarrow t$$

Έστω ένα τρίγωνο

$$r \dashrightarrow x \oplus s \longrightarrow t \dashrightarrow \Sigma r$$

που συμπληρώνει τον μορφισμό $x \oplus s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, απο το Λήμμα 1.2.6.1 λαμβάνουμε έναν ισομορφισμό $x \oplus s \simeq r \oplus t$. Συνεπώς, η ακολουθία

$$r \longrightarrow x \oplus s \longrightarrow t$$

είναι μια διασπάσιμη ακριβής ακολουθία. Ο συναρτητής του Λήμματος Yoneda , ο οποίος απεικονίζει το s στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{S}(-,s)$, είναι προσθετικός. Επομένως επάγει μια διασπάσιμη ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\mathcal{S}(-,r) \longrightarrow \mathcal{S}(-,x) \oplus \mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$$

Με άλλα λόγια, το παρακάτω τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,r) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,x) \arrow[d] \\
\mathcal{S}(-,s) \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t)
\end{tikzcd}$$

, είναι ένα δικαρτεσιανό τετράγωνο, δηλαδή είναι συγχρόνως ένα pullback και pushout τετράγωνο, στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Συνεπώς, λαμβάνοντας τους συνπυρήνες των γραμμών επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές, και η επαγόμενη απεικόνιση στους συνπυρήνες είναι ένας ισομορφισμός

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,r) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,x) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathcal{F}'(\,-\,) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\simeq"'] & 0 \\
\mathcal{S}(-,s) \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Επομένως, ο επιμορφισμός $\phi : \mathcal{S}(-,x) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$ συμπληρώνεται σε μια παράσταση του $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,r) \arrow[r, dashed, "\rho"] & \mathcal{S}(-,x) \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Έστω ένα τρίγωνο

$$q \dashrightarrow r \longrightarrow x \dashrightarrow \Sigma q$$

που συμπληρώνει τον μορφισμό $r \longrightarrow x$ στην $\mathcal{S}$. Από το Λήμμα 1.1.10, έπεται ότι ο συναρτητής του Λήμματος Yoneda , είναι ομολογικός. Συνεπώς, απεικονίζει το τρίγωνο αυτό σε μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{S}(-,q) \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}(-,r) \xrightarrow{\rho} \mathcal{S}(-,x) \xrightarrow{\theta} \mathcal{S}(-,\Sigma q)$$

Ο συναρτητής $\mathcal{F}(-)$ ταυτίζεται με την εικόνα του θ, δηλαδή ισχύει $\mathcal{F} = \mathcal{I}m(\theta)$, και ο πυρήνας $\mathcal{K}er(\phi)$ του $\phi : \mathcal{S}(-,x) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$ ταυτίζεται με την εικόνα του ρ, δηλαδή ισχύει $\mathcal{K}er(\phi) = \mathcal{I}m(\rho)$. Συνεπώς, επειδή ισχύει $\mathcal{I}m(\psi) = \mathcal{K}er(\rho)$, ο πυρήνας $\mathcal{K}er(\phi)$ επιδέχεται μια παράσταση

$$\mathcal{S}(-,q) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,r) \dashrightarrow \mathcal{K}er(\phi)(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

, και άρα είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

□

Λήμμα 5.1.8. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{G}(-) \longrightarrow \mathcal{H}(-) \longrightarrow 0$$

είναι μια ακριβής ακολουθία συναρτητών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές $\mathcal{F}$ και $\mathcal{H}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Τότε υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,f) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,h) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] & \mathcal{H}(-) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου όλοι οι κάθετοι μορφισμοί είναι επιμορφισμοί.

Απόδειξη. Επειδή οι συναρτητές $\mathcal{F}$ και $\mathcal{H}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, μπορούμε να επιλέξουμε επιμορφισμούς

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}(-,f) \arrow[d, dashed] & & \mathcal{S}(-,h) \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] & \mathcal{H}(-) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα 5.1.2 ο συναρτητής $\mathcal{S}(-,h)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Επομένως, η απεικόνιση $\mathcal{S}(-,h) \longrightarrow \mathcal{H}(-)$ παραγοντοποιείται μέσω του επιμορφισμού $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$. Θέτουμε $g = f \oplus h$, όπου $i : f \longrightarrow f \oplus h$ και $p : f \oplus h \longrightarrow h$, είναι πρώτη εμφύτευση και η δεύτερη προβολή του γινομένου−συγκινομένου $g = f \oplus h$, αντίστοιχα. Συνεπώς, λαμβάνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,f) \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}(-,i)"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}(-,p)"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,h) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] & \mathcal{H}(-) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, και επειδή οι δύο εξωτερικές κάθετες απεικονίσεις είναι επιμορφισμοί, έπεται ότι η μεσαία είναι επίσης.

□

Λήμμα 5.1.9. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{G}(-) \longrightarrow \mathcal{H}(-) \longrightarrow 0$$

είναι μια ακριβής ακολουθία συναρτητών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Εάν οποιοιδήποτε δύο απο τους $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, τότε και ο τρίτος ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Απόδειξη. Εάν οι συναρτητές $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, τότε απο το Λήμμα 5.1.6 και ο $\mathcal{H}$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Επομένως, αρκεί να θεωρήσουμε τις άλλες δυο περιπτώσεις.

Έστω ότι οι συναρτητές $\mathcal{F}$ και $\mathcal{H}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Από το Λήμμα 5.1.8, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,f) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,h) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] & \mathcal{H}(-) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου όλοι οι κάθετοι μορφισμοί είναι επιμορφισμοί. Θεωρώντας τους πυρήνες των στηλών, προκύπτει ένα 3×3 διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}'(-) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{G}'(-) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{H}'(-) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}(-,f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,h) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(-) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

και από το Λήμμα 5.1.7 οι συναρτητές $\mathcal{F}'$ και $\mathcal{H}'$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Συνεπώς, από το Λήμμα 5.1.8 υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,f') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,g') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,h') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(-) \arrow[r] & \mathcal{G}'(-) \arrow[r] & \mathcal{H}'(-) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου όλοι οι κάθετοι μορφισμοί είναι επιμορφισμοί. Συνεπώς, προκύπτει ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,f') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,g') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,h') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}(-,f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,h) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(-) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

και συγκεκριμένα η μεσαία στήλη είναι ακριβής

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,g') \arrow[r] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r] & \mathcal{G}(\,-\,) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, δηλαδή ο συναρτητής $\mathcal{G}$ ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Τέλος, μένει να δείξουμε ότι εάν οι συναρτητές $\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, τότε και ο $\mathcal{F}$ ανήκει επίσης. Επειδή, ο $\mathcal{G}$ ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, μπορούμε να επιλέξουμε έναν επιμορφισμό $\mathcal{S}(-,g) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,)$. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r, dashed, "1"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] & \mathcal{G}(\,-\,) \arrow[r] & \mathcal{H}(\,-\,) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τους πυρήνες και τους συνπυρήνες των στηλών, και συνεπώς προκύπτει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
 & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{G}'(\,-\,) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{H}'(\,-\,) \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,g) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{G}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{H}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
 & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα του Φιδιού, επάγεται μια ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}'(\,-\,) \arrow[r] & \mathcal{H}'(\,-\,) \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα 5.1.7, οι συναρτητές $\mathcal{G}'$ και $\mathcal{H}'$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, και επομένως από το Λήμμα 5.1.6 έπεται ότι ο $\mathcal{F}$ ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

□

Πρόταση 5.1.10. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Η υποκατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή υποκατηγορία κλειστή ως προς τις επεκτάσεις. Αυτό σημαίνει ότι, εάν $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ είναι ένας μορφισμός αντικειμένων της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, τότε ο πυρήνας, η εικόνα και ο συνπυρήνας, θεωρούμενα ως αντικείμενα της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, και κάθε επέκταση αντικειμένων της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.*

Απόδειξη. Έστω $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Από το Λήμμα 5.1.6 ο συνπυρήνας του μορφισμού $\mathcal{C}oker(f)$ ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \dashrightarrow \mathcal{I}m(f) \dashrightarrow \mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{C}oker(f) \dashrightarrow 0$$

, και επειδή οι συναρτητές $\mathcal{C}oker(f)$ και $\mathcal{G}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, από το Λήμμα 5.1.9, έπεται ότι ο $\mathcal{I}m(f)$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Ομοίως, θεωρούμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \dashrightarrow \mathcal{K}er(f) \dashrightarrow \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{I}m(f) \dashrightarrow 0$$

, και επειδή οι συναρτητές $\mathcal{I}m(f)$ και $\mathcal{F}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, από το Λήμμα 5.1.9 , έπεται ότι ο $\mathcal{K}er(f)$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Έστω

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{G}(-) \longrightarrow \mathcal{H}(-) \longrightarrow 0$$

μια ακριβής ακολουθία συναρτητών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Από το Λήμμα 5.1.9, εάν οποιοιδήποτε δύο από τους $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, τότε και ο τρίτος ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Συνεπώς, η υποκατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή κατηγορία, κλειστή ως προς τις επεκτάσεις αντικειμένων της.

□

Λήμμα 5.1.11. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-, x)$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, και είναι προβολικά αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Επιπλέον, κάθε προβολικό αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός αναπαραστάσιμου συναρτητή $\mathcal{S}(-, x)$. Εάν, όλοι οι ταυτοδύναμοι μορφισμοί διασπώνται στην $\mathcal{S}$, π.χ. εάν η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], όπου $\beta \geq \aleph_1$, τότε τα προβολικά αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ακριβώς οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-, x)$.*

Απόδειξη. Τα αντικείμενα $\mathcal{S}(-, x)$ επιδέχονται παραστάσεις

$$\mathcal{S}(-, 0) \dashrightarrow \mathcal{S}(-, x) \dashrightarrow \mathcal{S}(-, x) \dashrightarrow 0$$

, συνεπώς ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Απο το Λήμμα 5.1.2 τα αντικείμενα $\mathcal{S}(-, x)$ είναι προβολικά στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, συνεπώς είναι προβολικά στην $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι όλοι οι ταυτοδύναμοι μορφισμοί διασπώνται στην $\mathcal{S}$. Έστω $\mathcal{F}(-)$ ένα προβολικό αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, συνεπώς επιδέχεται μια παράσταση

$$\mathcal{S}(-, s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-, t) \overset{\rho}{\dashrightarrow} \mathcal{F}(-) \dashrightarrow 0$$

Επειδή το $\mathcal{F}(-)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο, ο ταυτοτικός μορφισμός $1 : \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{F}(-)$ παραγοντοποιείται μέσω του επιμορφισμού $\rho : \mathcal{S}(-, t) \longrightarrow \mathcal{F}(-)$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει ένας μορφισμός $\iota : \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{S}(-, t)$, έτσι ώστε $\rho \circ \iota = 1$.

Από την άλλη μεριά, ο μορφισμός $\iota \circ \rho : \mathcal{S}(-, t) \longrightarrow \mathcal{S}(-, t)$ είναι αναπαραστάσιμος. Συνεπώς, από το Λήμμα Yoneda υπάρχει ένας μορφισμός $e : t \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$, έτσι ώστε $\iota \circ \rho = \mathcal{S}(-, e)$. Επειδή, ισχύει $(\iota \circ \rho) \circ (\iota \circ \rho) = \iota \circ \rho$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{S}(-, e \circ e) = \mathcal{S}(-, e)$. Συνεπώς, από το Λήμμα Yoneda , έπεται ότι $e \circ e = e$, δηλαδή ο e είναι ένας ταυτοδύναμος μορφισμός, επομένως διασπάται. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχουν μορφισμοί $i : t' \longrightarrow t$ και $r : t \longrightarrow t'$, έτσι ώστε $r \circ i = 1$ και $i \circ r = e$. Τότε, οι μορφισμοί $\mathcal{S}(-, i) : \mathcal{S}(-, t') \longrightarrow \mathcal{S}(-, t)$ και $\mathcal{S}(-, r) : \mathcal{S}(-, t) \longrightarrow \mathcal{S}(-, t')$ αποτελούν μια διάσπαση του ταυτοδύναμου μορφισμού $\mathcal{S}(-, e)$. Αλλά, μια τέτοια διάσπαση είναι μοναδική, ως προς ισομορφισμό, συνεπώς ο $\mathcal{F}(-)$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{S}(-, t')$.

□

Σε κάθε αβελιανή κατηγορία, οι μορφισμοί μεταξύ αντικειμένων, επάγουν μορφισμούς μεταξύ των αντίστοιχων προβολικών παραστάσεων των αντικειμένων. Αυτό μας οδηγεί σε μια ισοδύναμη περιγραφή της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Ορισμός 5.1.12. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ η προσθετική κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι οι μορφισμοί $\{s \longrightarrow t\} \in \mathcal{S}$, και οι μορφισμοί*

$$\{s \longrightarrow t\} \longrightarrow \{s' \longrightarrow t'\}$$

στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας μεταθετικών τετραγώνων

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

Η σχέση ισοδυναμίας στους μορφισμούς είναι προσθετική, και ένας μορφισμός είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό μορφισμό εάν στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d, "\phi"'] \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

η απεικόνιση $\phi : t \longrightarrow t'$ παραγοντοποιείται ως $t \longrightarrow s' \longrightarrow t'$.

Πρόταση 5.1.13. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Υπάρχει ένας προσθετικός συναρτητής $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο της $\mathcal{B}(\mathcal{S})$*

$$\{s \longrightarrow t\}$$

στον συνπυρήνα της απεικόνισης

$$\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$$

Αυτός ο συναρτητής είναι μια ισοδυναμία προσθετικών κατηγοριών.

Απόδειξη. Προφανώς κάθε αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ανήκει στην εικόνα του συναρτητή. Έστω προβολικές παραστάσεις

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

$$\mathcal{S}(-,s') \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t') \dashrightarrow \mathcal{F}'(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

, τότε οι απεικονίσεις $\mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{F}'(\,-\,)$ βρίσκονται σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με τις κλάσεις ομοτοπίας των επαγόμενων απεικονίσεων μεταξύ των αντίστοιχων προβολικών παραστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι απεικονίσεις $\mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{F}'(\,-\,)$ βρίσκονται σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τις κλάσεις ομοτοπίας των αλυσωτών απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(-,s) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[d] \\ \mathcal{S}(-,s') \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t') \end{tikzcd}$$

Αυτό σημαίνει ότι, δύο αλυσωτές απεικόνισεις ταυτίζονται (ως προς αλυσωτή ομοτοπία), εάν οι διαφορές των απεικονίσεων $\mathcal{S}(-,t) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t')$ παραγοντοποιούνται μέσω του αντικειμένου $\mathcal{S}(-,s')$.

Συνεπώς, ο συναρτητής συναρτητής $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι πλήρης και πιστός. Επειδή είναι επιπλέον προσθετικός και επιμορφισμός στα αντικείμενα, έπεται ότι είναι μια ισοδυναμία προσθετικών κατηγοριών.

□

Η κατηγορία $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ δεν έχει απαραίτητα μικρά $Hom_{\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)}-$σύνολα, ακόμα και εάν η $\mathcal{S}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{S}}-$σύνολα.

Πρόταση 5.1.14. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{S}}-$σύνολα. Τότε η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{A}(\mathcal{S})}-$σύνολα.*

Απόδειξη. Από την ισοδύναμη περιγραφή της $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, έπεται ότι η κλάση των κλάσεων ισοδυναμίας των διαγραμμάτων

$$\begin{array}{ccc} s & \longrightarrow & t \\ \downarrow & & \downarrow \\ s' & \longrightarrow & t' \end{array}$$

είναι ένα σύνολο.

□

Λήμμα 5.1.15. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Ο συναρτητής Yoneda $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, ο οποίος απεικονίζει το s στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{S}(-,s)$, είναι ένας ομολογικός συναρτητής.*

Απόδειξη. Η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι μια ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, αυτό σημαίνει ότι οι ακριβείς ακολουθίες στις δυο κατηγορίες συμπίπτουν. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι ομολογικός. Έστω ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

τότε η ακολουθία

$$\mathcal{S}(-,r) \longrightarrow \mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, απο το Λήμμα 1.1.10.

□

Θεώρημα 5.1.16. *[Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier] Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Ο συναρτητής Yoneda $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ένας καθολικός ομολογικός συναρτητής. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ είναι μια αβελιανή κατηγορία. Υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}"] & \mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\mathcal{H}}"] \\ \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επιπλέον, κάθε φυσικός μετασχηματισμός $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ μεταξύ ομολογικών συναρτητών $\mathcal{H}, \mathcal{H}' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω ενός φυσικού μετασχηματισμού $\widetilde{\eta} : \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}'}$ μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών $\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}'} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ μια αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα, και έστω $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{B}$ της οποίας η κλάση των αντικειμένων αποτελείται απ΄ όλα τα προβολικά αντικείμενα. Τότε οποιοσδήποτε προσθετικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}$ επεκτείνεται, μοναδικά ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, σ΄ έναν δεξιά ακριβή συναρτητή $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$. Στην περίπτωση μας, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι η πλήρης υποκατηγορία των αναπαραστάσιμων συναρτητών. Από το Λήμμα 5.5.11 τα αντικείμενα της $\mathcal{S}$ είναι προβολικά αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Συνεπώς, ο δοθέν συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ επεκτείνεται μοναδικά, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, σ΄ έναν δεξιά ακριβή συναρτητή $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$. Το γεγονός ότι ο $\mathcal{H}$ δεν είναι ένας οποιοσδήποτε συναρτητής, αλλά είναι επιπλέον ομολογικός θα μας επιτρέψει να δείξουμε ότι είναι ακριβής.

Ο συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}}$ ορίζεται στα αντικείμενα ως εξής. Έστω ότι δίνεται ένα αντικείμενο $\mathcal{F}$ στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{F}$ επιδέχεται μια προβολική παράσταση

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(-) \dashrightarrow 0$$

Από το Λήμμα Yoneda η απεικόνιση $\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$ επάγεται απο μια μοναδική $f : s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$. Ο $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$ ορίζεται ως ο συνπυρήνας της απεικόνισης $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$, δηλαδή ορίζεται απο την ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathcal{H}(t) \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \dashrightarrow 0$$

Συνεπώς,

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) := \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathcal{H}(t)\Big\}$$

Επιπλέον, ο $\widetilde{\mathcal{H}}$ ορίζεται στους μορφισμούς ως εξής. Έστω ότι δίνονται δύο αντικείμενα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, και ένας μορφισμός $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Τότε τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ επιδέχονται προβολικές παραστάσεις

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(-) \dashrightarrow 0$$

$$\mathcal{S}(-,s') \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t') \dashrightarrow \mathcal{G}(-) \dashrightarrow 0$$

Συνεπώς, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,s) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & 0 \\
\mathcal{S}(-,s') \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t') \arrow[r] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα Yoneda οι απεικονίσεις στο αριστερό μεταθετικό τετράγωνο επάγονται από μοναδικές απεικονίσεις στην $\mathcal{S}$. Συγκεκριμένα, οι κάθετες απεικονίσεις $\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,s')$ και $\mathcal{S}(-,t) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t')$ επάγονται από τις μοναδικές απεικονίσεις $g : s \longrightarrow s'$ και $g' : t \longrightarrow t'$ στην $\mathcal{S}$ αντίστοιχα. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & t \arrow[d, "g'"'] \\
s' \arrow[r] & t'
\end{tikzcd}$$

Ο $\widetilde{\mathcal{H}}(\phi)$ ορίζεται ως η απεικόνιση που επάγεται στους συνπυρήνες των απεικονίσεων $\mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ και $\mathcal{H}(s') \longrightarrow \mathcal{H}(t')$ του παρακάτω διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(s) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}(g)"'] & \mathcal{H}(t) \arrow[d, "\mathcal{H}(g')"'] \\
\mathcal{H}(s') \arrow[r] & \mathcal{H}(t')
\end{tikzcd}$$

, δηλαδή ορίζεται από το μεταθετικό διάγραμμα των ακριβών ακολουθιών

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(s) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}(g)"'] & \mathcal{H}(t) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathcal{H}(g')"'] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\widetilde{\mathcal{H}}(\phi)"'] & 0 \\
\mathcal{H}(s') \arrow[r] & \mathcal{H}(t') \arrow[r, dashed] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς,

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\phi) := \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathcal{H}(t)\Big\} \longrightarrow \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{H}(s') \longrightarrow \mathcal{H}(t')\Big\}$$

Ο $\widetilde{\mathcal{H}}$ επεκτείνει τον $\mathcal{H}$. Πράγματι, έστω $\mathcal{S}(-,t)$ ένας αναπαραστάσιμος συναρτητής. Τότε αυτός επιδέχεται μια προβολική παράσταση

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς, $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{S}(-,t)) := \mathcal{C}oker\{0 \longrightarrow \mathcal{H}(t)\} = \mathcal{H}(t)$, ισοδύναμα $\widetilde{\mathcal{H}} \circ Y(t) = \mathcal{H}(t)$, όπου $Y : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ο συναρτητής Yoneda . Μένει να δείξουμε ότι ο $\widetilde{\mathcal{H}}$ είναι αριστερά ακριβής.

Θεωρούμε την περίπτωση που δίνεται μια ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της μορφής

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(-) \longrightarrow \mathcal{S}(-,f) \longrightarrow \mathcal{F}(-) \longrightarrow 0$$

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι ο $\widetilde{\mathcal{H}}$ απεικονίζει αυτή την ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ σε μια ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Επειδή ο $\mathcal{F}'$ ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, μπορούμε να επιλέξουμε έναν επιμορφισμό $\mathcal{S}(-,f') \longrightarrow \mathcal{F}'$, δηλαδή υφίσταται το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}(-,f') \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(-) \arrow[r] & \mathcal{S}(-,f) \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, και συνεπώς λαμβάνουμε μια παράσταση του $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,f') \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathcal{S}(-,f) \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}(-) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

, και ο $\mathcal{F}'$ ταυτίζεται με την εικόνα του ϕ, δηλαδή ισχύει $\mathcal{F}' = \mathcal{I}m(\phi)$. Συμπληρώνουμε τον μορφισμό $f' \longrightarrow f$, σ΄ ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
f'' \arrow[r, dashed] & f' \arrow[r] & f \arrow[r, dashed] & \Sigma f''
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{S}$. Επειδή, ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ομολογικός, έπεται ότι η ακολουθία

$$\mathcal{S}(-,f'') \xrightarrow{\rho} \mathcal{S}(-,f') \xrightarrow{\phi} \mathcal{S}(-,f) \longrightarrow \mathcal{F}(-) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, ο συναρτητής $\mathcal{F}$ είναι ο συνπυρήνας του ϕ και ο συναρτητής $\mathcal{F}' = \mathcal{I}m(\phi)$ είναι ο συνπυρήνας του ρ. Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{F}'$ επιδέχεται μια παράσταση

$$\mathcal{S}(-, f'') \overset{\rho}{\dashrightarrow} \mathcal{S}(-, f') \overset{\phi}{\dashrightarrow} \mathcal{F}'(-) \dashrightarrow 0$$

Επειδή, ο συναρτητής $\mathcal{H}$ είναι ομολογικός απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}(f'') \xrightarrow{\mathcal{H}(\rho)} \mathcal{H}(f') \xrightarrow{\mathcal{H}(\phi)} \mathcal{H}(f)$$

και $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) = \mathcal{C}oker(\mathcal{H}(\phi))$, ενώ $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}') = \mathcal{C}oker(\mathcal{H}(\rho)) = \mathcal{I}m(\mathcal{H}(\phi))$. Συνεπώς, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$0 \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}') \dashrightarrow \mathcal{H}(f) \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \dashrightarrow 0$$

, και επειδή ισχύει $\widetilde{\mathcal{H}} \circ \mathcal{S}(-, f) = \mathcal{H}(f)$, έπεται ότι ο $\widetilde{\mathcal{H}}$ απεικονίζει την δοθείσα ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ σε μια ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{A}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι δίνεται μια οποιαδήποτε ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{G}(-) \longrightarrow \mathcal{K}(-) \longrightarrow 0$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.1.8, δύναται να παράξουμε στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ένα 3×3 διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}'(-) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{G}'(-) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{K}'(-) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-, f) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-, g) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-, k) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}(-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}(-) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\widetilde{\mathcal{H}}$ σ' αυτό το διάγραμμα, λαμβάνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{K}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}(f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(k) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Στο ανωτέρω διάγραμμα, η ακρίβεια των στηλών έπεται από την προηγούμενη περίπτωση που μόλις αποδείξαμε. Ομοίως η ακρίβεια της μεσαίας γραμμής έπεται απο την προηγούμενη περίπτωση, απλά θέτοντας $\mathcal{F}' = \mathcal{S}(-, f)$ και $\mathcal{F} = \mathcal{S}(-, k)$, ενώ οι ακριανές γραμμές είναι δεξιά ακριβείς, γιατί ο $\widetilde{\mathcal{H}}$ είναι δεξιά ακριβής. Επειδή οι απεικονίσεις

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}') \arrow[d] & \\
\mathcal{H}(f) \arrow[r] & \mathcal{H}(g)
\end{tikzcd}
$$

είναι ένα προς ένα, έπεται ότι και η σύνθεση τους είναι ένα προς ένα. Συνεπώς, από την μεταθετικότητα του τετραγώνου

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}') \arrow[d] \\
\mathcal{H}(f) \arrow[r] & \mathcal{H}(g)
\end{tikzcd}
$$

έπεται ότι η απεικόνιση $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}') \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}')$, είναι επίσης ένα προς ένα. Συνεπώς, λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{K}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}(f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(k) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

και από το 3×3 Λήμμα, έπεται η ακρίβεια της κάτω γραμμής

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{K}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Τέλος, έστω $\mathcal{H}, \mathcal{H}' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ ομολογικοί συναρτητές και $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ ένας φυσικός μετασχηματισμός. Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ δύο αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, και $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ένας φυσικός μετασχηματισμός. Τότε τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ επιδέχονται προβολικές παραστάσεις

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,s) \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,s') \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}(-,t') \arrow[r, dashed] & \mathcal{G}(\,-\,) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(-,s) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{S}(-,t) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & 0 \\
\mathcal{S}(-,s') \arrow[r] & \mathcal{S}(-,t') \arrow[r] & \mathcal{G}(\,-\,) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα Yoneda οι απεικονίσεις στο αριστερό μεταθετικό τετράγωνο επάγονται από μοναδικές απεικονίσεις στην $\mathcal{S}$. Συγκεκριμένα, το αριστερό μεταθετικό τετράγωνο επάγεται από το μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & t \arrow[d, "g'"'] \\
s' \arrow[r, "f"] & t'
\end{tikzcd}$$

Τότε από τον ορισμό των συναρτητών $\widetilde{\mathcal{H}}$ και $\widetilde{\mathcal{H}'}$ στον ϕ αντίστοιχα, υφίστανται τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(s) \arrow[r, "\mathcal{H}(h)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(g)"'] & \mathcal{H}(t) \arrow[r, dashed, "h'"] \arrow[d, "\mathcal{H}(g')"'] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\widetilde{\mathcal{H}}(\phi)"'] & 0 \\
\mathcal{H}(s') \arrow[r, "\mathcal{H}(f)"] & \mathcal{H}(t') \arrow[r, dashed, "f'"] & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}'(s) \arrow[r, "\mathcal{H}'(h)"] \arrow[d, "\mathcal{H}'(g)"'] & \mathcal{H}'(t) \arrow[r, dashed, "h''"] \arrow[d, "\mathcal{H}'(g')"'] & \widetilde{\mathcal{H}'}(\mathcal{F}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\widetilde{\mathcal{H}'}(\phi)"'] & 0 \\
\mathcal{H}'(s') \arrow[r, "\mathcal{H}'(f)"] & \mathcal{H}'(t') \arrow[r, dashed, "f''"] & \widetilde{\mathcal{H}'}(\mathcal{G}) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}
$$

Συνεπώς, επάγεται ένα διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(s) \arrow[rr, "\mathcal{H}(h)"] \arrow[dr, "\mathcal{H}(g)"] \arrow[dd, "\eta_s"] & & \mathcal{H}(t) \arrow[rr, "h'"] \arrow[dr, "\mathcal{H}(g')"] \arrow[dd, "\eta_t"] & & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\widetilde{\mathcal{H}}(\phi)"] \arrow[dd, dashed, "\widetilde{\eta_{\mathcal{F}}}"] & & 0 & \\
& \mathcal{H}(s') \arrow[rr, "\mathcal{H}(f)"] \arrow[dd, "\eta_{s'}"] & & \mathcal{H}(t') \arrow[rr, "f'"] \arrow[dd, "\eta_{t'}"] & & \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \arrow[rr] \arrow[dd, dashed, "\widetilde{\eta_{\mathcal{G}}}"] & & 0 \\
\mathcal{H}'(s) \arrow[rr, "\mathcal{H}'(h)"] \arrow[dr, "\mathcal{H}'(g)"] & & \mathcal{H}'(t) \arrow[rr, "h''"] \arrow[dr, "\mathcal{H}'(g')"] & & \widetilde{\mathcal{H}'}(\mathcal{F}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\widetilde{\mathcal{H}'}(\phi)"] & & 0 & \\
& \mathcal{H}'(s') \arrow[rr, "\mathcal{H}'(f)"] & & \mathcal{H}'(t') \arrow[rr, "f''"] & & \widetilde{\mathcal{H}'}(\mathcal{G}) \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}
$$

με ακριβείς γραμμές, στο οποίο η επάνω και κάτω πλευρά είναι μεταθετικά διαγράμματα, ενώ η αριστερή κάθετη, η δεξιά κάθετη, η μπροστινή, και η πίσω πλευρά του αριστερού κύβου είναι μεταθετικά διαγράμματα επειδή ο η είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Για να δείξουμε ότι ο $\widetilde{\eta} : \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}'}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών $\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}'} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$, αρκεί να δείξουμε ότι η δεξιά κάθετη πλευρά του δεξιού κύβου είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα. Τότε

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\eta_{\mathcal{G}}} \circ \widetilde{\mathcal{H}}(\phi) \circ h' &= \widetilde{\eta_{\mathcal{G}}} \circ f' \circ \mathcal{H}(g') \\
&= f'' \circ \eta_{t'} \circ \mathcal{H}(g') \\
&= f'' \circ \mathcal{H}'(g') \circ \eta_t \\
&= \widetilde{\mathcal{H}'}(\phi) \circ h'' \circ \eta_t \\
&= \widetilde{\mathcal{H}'}(\phi) \circ \widetilde{\eta_{\mathcal{F}}} \circ h'
\end{aligned}
$$

, και επειδή η απεικόνιση h' είναι ένας επιμορφισμός, έπεται ότι είναι δεξιά διαγράψιμη, συνεπώς υφίσταται η ζητούμενη ισότητα

$$
\widetilde{\eta_{\mathcal{G}}} \circ \widetilde{\mathcal{H}}(\phi) = \widetilde{\mathcal{H}'}(\phi) \circ \widetilde{\eta_{\mathcal{F}}}
$$

Από τον ορισμό του, ως επαγόμενη απεικόνιση στους συνπυρήνες των οριζόντιων γραμμών ενός μεταθετικού τετραγώνου, ο $\widetilde{\eta} : \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}'}$ είναι μοναδικός. Επειδή ισχύει $\widetilde{\mathcal{H}} \circ \mathcal{S}(-,t) = \mathcal{H}(t)$, έπεται $\widetilde{\eta}_{\mathcal{S}(-,t)} = \eta_t$, ισοδύναμα $\widetilde{\eta} \circ Y(t) = \eta_t$, όπου $Y : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ο συναρτητής Yoneda. Συνεπώς, ο φυσικός μετασχηματισμός $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ μεταξύ των ομολογικών συναρτητών $\mathcal{H}, \mathcal{H}' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω του φυσικού μετασχηματισμού $\widetilde{\eta} : \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}'}$ μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών $\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}'} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$.

$\square$

Ο συναρτητής Yoneda $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ αναφέρεται και ως συναρτητής αβελιανοποίησης Verdier ή αβελιανοποίηση Verdier , και η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ως αβελιανοποίηση Verdier της κατηγορίας $\mathcal{S}$, και είναι μοναδική, ως προς ισοδυναμία αβελιανών κατηγοριών.

Ορισμός 5.1.17. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ η προσθετική κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι τα τριγωνα στην $\mathcal{S}$*

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

, και οι μορφιμοί στην $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας μορφισμών τριγώνων

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d] & s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma r \arrow[d] \\ r' \arrow[r] & s' \arrow[r] & t' \arrow[r] & \Sigma r' \end{tikzcd}$$

Η σχέση ισοδυναμίας στους μορφισμούς είναι προσθετική, και ένας μορφισμός είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό μορφισμό εάν στο μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

οι ίσες συνθέσεις

$$\begin{tikzcd} s \arrow[d] & \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s \arrow[r] & t \arrow[d] \\ & t' \end{tikzcd}$$

μηδενίζονται.

Λήμμα 5.1.18. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Υπάρχει ένας προσθετικός συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$ ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, δηλαδή ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$*

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

στο αντικείμενο

$$\{r \longrightarrow s\} \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$$

Αυτός ο συναρτητής είναι μια ισοδυναμία προσθετικών κατηγοριών.

Απόδειξη. Ο συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$ είναι καλά ορισμένος. Έστω ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό μορφισμό, θα δείξουμε ότι η εικόνα του στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ είναι επίσης ισοδύναμη με το μηδενικό μορφισμό. Έστω ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}(\mathcal{S})$

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d] & s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma r \arrow[d] \\ r' \arrow[r] & s' \arrow[r] & t' \arrow[r] & \Sigma r' \end{tikzcd}$$

ισοδύναμος με τον μηδενικό μορφισμό. Συνεπώς, η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

μηδενίζεται. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{S}}(s,-) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός, απεικονίζει το τρίγωνο

$$r' \longrightarrow s' \longrightarrow t' \longrightarrow \Sigma r'$$

σε μια ακριβή ακολουθία. Επομένως, από την ακρίβεια της ακολουθίας η απεικόνιση $s \longrightarrow s'$ παραγοντοποιείται ως $s \longrightarrow r' \longrightarrow s'$. Συνεπώς, το τετράγωνο ορίζει

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d] & s \arrow[d] \\ r' \arrow[r] & s' \end{tikzcd}$$

έναν μορφισμό στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ ισοδύναμο με τον μηδενικό μορφισμό.

Κάθε αντικείμενο στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, δηλαδή κάθε μορφισμός $\{r \longrightarrow s\} \in \mathcal{S}$, μπορεί να συμπληρωθεί σ΄ ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] & s \arrow[r, dashed] & t \arrow[r, dashed] & \Sigma r \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{S}$, και συνεπώς ανήκει στην εικόνα του συναρτητή $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$. Κάθε μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d] & s \arrow[d] \\ r' \arrow[r] & s' \end{tikzcd}$$

μπορει να συμπληρωθεί σ΄ έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d] & s \arrow[r, dashed] \arrow[d] & t \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \Sigma r \arrow[d, dashed] \\ r' \arrow[r] & s' \arrow[r, dashed] & t' \arrow[r, dashed] & \Sigma r' \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{S}$, συνεπώς ο συναρητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$ είναι πλήρης. Επίσης, εάν το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d] & s \arrow[d] \\ r' \arrow[r] & s' \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με τον μηδένικό μορφισμό, τότε η απεικόνιση $s \longrightarrow s'$ παραγοντοποιείται ως $s \longrightarrow r' \longrightarrow s'$, και σε οποιαδήποτε συμπλήρωση του τετράγωνου σ΄ έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d] & s \arrow[r, dashed] \arrow[d] & t \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \Sigma r \arrow[d, dashed] \\ r' \arrow[r] & s' \arrow[r, dashed] & t' \arrow[r, dashed] & \Sigma r' \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{S}$, η απεικόνιση

$$\begin{tikzcd} s \arrow[d] & \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

μηδενίζεται, επειδή ισούται με την σύνθεση $s \longrightarrow r' \longrightarrow s' \longrightarrow t'$ η οποία μηδενίζεται. Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$ είναι πιστός. Επειδή είναι επιπλέον επιμορφισμός στα αντικείμενα, έπεται ότι είναι μια ισοδυναμία προσθετικών κατηγοριών.

$\square$

Παρατήρηση 5.1.19. Οι ισοδυναμίες $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{S})$ της Πρότασης 5.1.13, και $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{S})$ του Λήμματος 5.1.18 αντίστοιχα, όπως θα δούμε μας διευκολύνουν στην απόδειξη του Λήμματος 5.1.21.1. Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δείξουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι μια Frobenius αβελιανή κατηγορία [[Nee01b], Πόρισμα 5.1.23, σελ. 172]. Χρησιμοποιώντας το δυϊκό Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16), θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια μια μάλλον πιο σύντομη απόδειξη.

Πόρισμα 5.1.20. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-,s)$ δεν είναι μόνο προβολικά αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, είναι επίσης και ενέσιμα αντικείμενα. Κάθε προβολικό ή ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός αντικειμένου $\mathcal{S}(-,s)$. Εάν κάθε ταυτοδύναμος μορφισμός διασπάται στην $\mathcal{S}$, π.χ. εάν η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], όπου $\beta \geq \aleph_1$, τότε τα προβολικά (= ενέσιμα) αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ακριβώς οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-,s)$. Κάθε αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ επιδέχεται μια προβολική παράσταση*

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

, και μια ενέσιμη παράσταση

$$0 \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t') \dashrightarrow \mathcal{S}(-,s')$$

Με άλλα λόγια, η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{S})$ είναι μια Frobenius αβελιανή κατηγορία. Αυτό σημαίνει ότι είναι μια αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά και αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, και η κλάση των προβολικών αντικειμένων συμπίπτει με την κλάση των ενέσιμων αντικειμένων.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.1.11, οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-,s)$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, και είναι προβολικά αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Συνεπώς, κάθε αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, εξ ορισμού, επιδέχεται μια προβολική παράσταση

$$\mathcal{S}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

Επιπλέον, κάθε προβολικό αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός αναπαραστάσιμου συναρτητή $\mathcal{S}(-,s)$. Εάν, όλοι οι ταυτοδύναμοι μορφισμοί διασπώνται στην $\mathcal{S}$, π.χ. εάν η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], όπου $\beta \geq \aleph_1$, τότε τα προβολικά αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ακριβώς οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-,s)$.

Το Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16) είναι αυτοδυϊκό. Αυτό σημαίνει ότι, ο ανταλλοίωτος συναρτητής Yoneda $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$, δηλαδή ο συναρτητής, ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{S}$ στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{S}(t,-)$ είναι ένας καθολικός ομολογικός συναρτητής. Κάθε αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$, εξ ορισμού, επιδέχεται μια παράσταση

$$\mathcal{S}(s,-) \dashrightarrow \mathcal{S}(t,-) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

Από το δυϊκό του Λήμματος 5.1.11, οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(s,-)$ ανήκουν στην $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$, και είναι προβολικά αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$. Έστω $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ ο δυϊκός συναρτητής του συναλλοίωτου συναρτητή Yoneda $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Η κατηγορία $\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ ικανοποιεί την ίδια καθολική συνθήκη με την αβελιανοποίηση Verdier $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$ της $\mathcal{S}^{op}$. Συνεπώς, από την μοναδικότητα της $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$, ως προς ισοδυναμία κατηγοριών, έπεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ ο οποίος είναι μια ισοδυναμία, και επιπλέον καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^{op} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \arrow[dl, dashed] \\ \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op} & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Ο (ανταλλοίωτος) συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ απεικονίζει το αντικείμενο $\mathcal{S}(t,-)$ στο αντικείμενο $\mathcal{S}(-,t)$, για κάθε $t \in \mathcal{S}$. Κάθε αντικείμενο $\mathcal{F} \in \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ επιδέχεται μια παράσταση

$$0 \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow \mathcal{S}(-,t') \dashrightarrow \mathcal{S}(-,s')$$

Έστω $\mathcal{S}(-,s')$ ένα αντικείμενο στην $\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}(-,s') & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & \mathcal{G}(\,-\,) \end{tikzcd}$$

του οποίου η κάτω γραμμή είναι ακριβής. Ο $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ είναι μια ισοδυναμία, συνεπώς το διάγραμμα αυτό αντιστοιχεί σ΄ ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}(s',-) \arrow[d, "g'"] & \\ \mathcal{G}'(\,-\,) \arrow[r, "f'"] & \mathcal{F}'(\,-\,) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

του οποίου η κάτω γραμμή είναι επίσης ακριβής, επειδή ο $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ ανταναклά τους επιμορφισμούς. Το αντικείμενο $\mathcal{S}(s',-)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$, συνεπώς υπάρχει μια απεικόνιση $h : \mathcal{S}(s',-) \longrightarrow \mathcal{G}'(\,-\,)$, η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}(s',-) \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ \mathcal{G}'(\,-\,) \arrow[r, "f'"] & \mathcal{F}'(\,-\,) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Τότε ο $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ απεικονίζει την προηγούμενη απεικόνιση σε μια απεικόνιση $h' : \mathcal{G}(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{S}(-,s')$, η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}(-,s') & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & \mathcal{G}(\,-\,) \arrow[ul, dashed, "h'"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, το αντικείμενο $\mathcal{S}(-,s')$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο στην $\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$. Επομένως, οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-,s')$ είναι προβολικά αντικείμενα στην $\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$, δηλαδή ενέσιμα αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Συνεπώς, δείξαμε ότι κάθε αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ επιδέχεται μια ενέσιμη παράσταση.

□

Έστω $\mathcal{S}$ μια προσθετική κατηγορία. Ως γνωστόν ο συναρτητής του Λήμματος Yoneda δεν διατηρεί τα συνόρια εν γένει, επομένως δεν διατηρεί τα συγκινόμενα, και συνεπώς δεν διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα εν γένει. Παρ΄ όλα αυτά, εάν η $\mathcal{S}$ υποτεθεί τριγωνισμένη, διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, όπως θα δείξουμε στην συνέχεια.

Λήμμα 5.1.21.1. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα. Τότε η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3(β)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα. Ο συναρτητής αβελιανοποίησης Verdier $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Επιπλέον, ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα εάν και μόνο εάν ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$, του Θεωρήματος 5.1.16, διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα.*

Απόδειξη. Λόγω των ισοδυναμιών αβελιανών κατηγοριών $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{S})$, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις ισοδύναμες περιγραφές της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ χωρίς να κάνουμε ιδιαίτερη μνεία.

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})$, ο οποίος απεικονίζει το αντικείμενο $s \in \mathcal{S}$ στο τρίγωνο στην $\mathcal{S}$

$$0 \longrightarrow s \xrightarrow{\ 1\ } s \longrightarrow 0$$

διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Αρχικά υποθέτουμε ότι δίνεται ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ πληθικότητας $< \beta$. Αυτό σημαίνει ότι δίνεται ένα σύνολο Λ, πληθικότητας $< \beta$, και για κάθε $\lambda \in \Lambda$ ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, δηλαδή ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$

$$r_\lambda \longrightarrow s_\lambda \longrightarrow t_\lambda \longrightarrow \Sigma r_\lambda$$

Επειδή η κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], μπορούμε να σχηματίσουμε το συγκινόμενο αυτών των τριγώνων

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \longrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda\right\}$$

Από την Πρόταση 1.2.1.2 αυτό είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$, συνεπώς είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}(\mathcal{S})$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, δίνεται ένας μορφιμός στην $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, δηλαδή δίνεται ένας αντιπρόσωπος της κλάσεως ισοδυναμίας του μορφισμού των τριγώνων

$$\begin{array}{ccccccc}
r_\lambda & \longrightarrow & s_\lambda & \longrightarrow & t_\lambda & \longrightarrow & \Sigma r_\lambda \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
r & \longrightarrow & s & \longrightarrow & t & \longrightarrow & \Sigma r
\end{array}$$

ως προς την σχέση ισοδυναμίας του Ορισμού 5.1.17. Τότε από τις καθολικές ιδιότητες των συγκινομένων, υπάρχουν μοναδικές απεικονίσεις οι οποίες καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
& r_\lambda \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & s_\lambda \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & t_\lambda \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \Sigma r_\lambda \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \Sigma\Big\{\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda\Big\} \arrow[dr, dashed] & \\
& r \arrow[rr] & & s \arrow[rr] & & t \arrow[rr] & & \Sigma r
\end{tikzcd}
$$

Συνεπώς, το συγκινόμενο των τριγώνων ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα ενός συγκινομένου στην κατηγορία $\mathcal{C}(\mathcal{S})$.

Τώρα θεωρούμε την ειδική περίπτωση των τριγώνων της μορφής

$$0 \longrightarrow s_\lambda \xrightarrow{\ 1\ } s_\lambda \longrightarrow 0$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, το αντίστοιχο τρίγωνο είναι η εικόνα του αντικειμένου $s_\lambda \in \mathcal{S}$ μέσω του $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})$. Τότε όμως το συγκινόμενο των τριγώνων αυτών είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$, το οποίο είναι ισόμορφο με το τρίγωνο

$$0 \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\ 1\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow 0$$

, το οποίο είναι η εικόνα του $\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \in \mathcal{S}$ μέσω του $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})$, δηλαδή υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\big\{\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})\big\}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right) \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} \big\{\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})\big\}(s_\lambda)$$

στην $\mathcal{C}(\mathcal{S})$. Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα.

Έστω ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$. Από Θεώρημα 5.1.16, υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{A} &
\end{tikzcd}
$$

μεταθετικό. Γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Συνεπώς, εάν ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, τότε από το μεταθετικό διάγραμμα έπεται ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $\mathcal{H} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι ένας ομολογικός συναρτητής ο οποίος διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$, ο οποίος απεικονίζει το αντικείμενο $\{r \longrightarrow s\} \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ στον συνπυρήνα της απεικόνισης

$$\mathcal{H}(r) \longrightarrow \mathcal{H}(s)$$

διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Θεωρούμε τον συνπυρήνα της προηγούμενης απεικόνισης, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(r) \arrow[r] & \mathcal{H}(s) \arrow[r, dashed] & \widetilde{\mathcal{H}}\big(\{r \longrightarrow s\}\big) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}
$$

Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα σύνολο Λ, πληθικότητας $< \beta$, και για κάθε $\lambda \in \Lambda$, ένα αντικείμενο $\{r_\lambda \longrightarrow s_\lambda\} \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$. Όπως προηγουμένως υποθέτουμε ότι, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, δίνεται ένας μορφιμός στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, δηλαδή δίνεται ένας αντιπρόσωπος της κλάσεως ισοδυναμίας του μεταθετικού τετραγώνου

$$\begin{tikzcd}
r_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & s_\lambda \arrow[d] \\
r \arrow[r] & s
\end{tikzcd}$$

ως προς την σχέση ισοδυναμίας του Ορισμού 5.1.12. Τότε από τις καθολικές ιδιότητες των συγκινομένων, υπάρχουν μοναδικές απεικονίσεις οι οποίες καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & r_\lambda \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & s_\lambda \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \arrow[dr, dashed] & \\
 & r \arrow[rr] & & s
\end{tikzcd}$$

, συνεπώς το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda}\{r_\lambda \longrightarrow s_\lambda\}$ υπάρχει στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, και είναι ισόμορφο στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ με το αντικείμενο (το οποίο είναι μια απεικόνιση στην $\mathcal{S}$)

$$\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right\}$$

Ο συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$ απεικονίζει το αντικείμενο αυτό στον συνπυρήνα της απεικόνισης

$$\mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right)$$

, συνεπώς υφίσταται μια ακριβής ακολουθία

$$\mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right) \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}\left(\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right\}\right) \dashrightarrow 0$$

, ή ισοδύναμα κάνοντας χρήση του προηγούμενου ισομορφισμού μια ακριβής ακολουθία

$$\mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right) \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} \{r_\lambda \longrightarrow s_\lambda\}\right) \dashrightarrow 0$$

Όμως, έξ υποθέσεως ο συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, επομένως υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}(r_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}(s_\lambda) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda\right) \arrow[r] & \mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right)
\end{tikzcd}$$

, στο οποίο οι κάθετες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(r_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(s_\lambda) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{\mathcal{H}}(\{r_\lambda \longrightarrow s_\lambda\}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "h"'] & 0 \\
\mathcal{H}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda\Big) \arrow[r] & \mathcal{H}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r, dashed] & \widetilde{\mathcal{H}}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\{r_\lambda \longrightarrow s_\lambda\}\Big) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Η επάνω γραμμή είναι ακριβής γιατί ο συναρτητής $\coprod_{\lambda\in\Lambda}(\,-\,) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι δεξιά ακριβής, σε οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Συνεπώς, από το 5 Λήμμα έπεται ότι η απεικόνιση h είναι ένας ισομορφισμός, δηλαδή ο συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα.

□

Έστω $\mathcal{S}$ μια προσθετική κατηγορία. Ως γνωστόν ο συναρτητής του Λήμματος Yoneda διατηρεί τα όρια, επομένως διατηρεί τα γινόμενα, και συνεπώς διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα. Εάν η $\mathcal{S}$ υποτεθεί τριγωνισμένη, τότε προφανώς διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα, ωστόσο υπάρχει μια μάλλον συντομότερη απόδειξη, όπως μας λέει το επόμενο

Λήμμα 5.1.21.2. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*(β)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$γινόμενα. Τότε η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3*(β)] , αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$γινόμενα. Ο συναρτητής αβελιανοποίησης Verdier $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα. Επιπλέον, ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα εάν και μόνο εάν ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$, του Θεωρήματος 5.1.16, διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα.*

Απόδειξη. Πανομοιότυπη της απόδειξης του Λήμματος 5.1.21.1, κάνοντας χρήση της Πρότασης 1.2.1.1.

□

Παρατήρηση 5.1.22. Στην πραγματικότητα το Λήμμα 5.1.21.2, είναι το δυϊκό του Λήμματος 5.1.21.1, όπως θα διαπιστώσουμε στην Παρατήρηση 5.3.7.4, χρησιμοποιώντας την αυτοδυϊκότητα του Θεωρήματος Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16).

5.2 Υποαντικείμενα και αντικείμενα πηλίκο της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$

Όπως σε κάθε αβελιανή κατηγορία είναι εύλογο να μελετάμε τα υποαντικείμενα και αντικείμενα πηλίκο, το ίδιο θα θέλαμε να κάνουμε και για την $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Για αυτόν τον σκοπό θα εισαγάγουμε μια τρίτη κατηγορία $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ ισοδύναμη με την $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ η οποία θα μας διευκολύνει στην μελέτη αυτή. Συν τοις άλλοις, χρησιμοποιώντας την $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, όπως θα δούμε στο τέλος της Ενότητας 6.4, ο πυρήνας του συναρτητή $\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ θα αποκτήσει μια κάπως πιο κατανοητή περιγραφή.

Ορισμός 5.2.1. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{S}}-$σύνολα. Έστω $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ η προσθετική κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι οι μορφισμοί $\{s \longrightarrow t\} \in \mathcal{S}$, και οι μορφιμοί*

$$\{s \longrightarrow t\} \longrightarrow \{s' \longrightarrow t'\}$$

στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας μεταθετικών τετραγώνων

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\
s' \arrow[r] & t'
\end{tikzcd}$$

Η σχέση ισοδυναμίας στους μορφισμούς είναι προσθετική, και ένας μορφισμός είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό μορφισμό εάν στο μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

οι ίσες συνθέσεις

$$\begin{tikzcd} s \arrow[d] & \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s \arrow[r] & t \arrow[d] \\ & t' \end{tikzcd}$$

μηδενίζονται.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{S}}-$σύνολα. Υπάρχει ένας προσθετικός συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S})$ ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, δηλαδή ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$*

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

στο αντικείμενο

$$\{s \longrightarrow t\} \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$$

Αυτός ο συναρτητής είναι μια ισοδυναμία προσθετικών κατηγοριών.

Απόδειξη. Ο συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S})$ είναι καλά ορισμένος, ισοδύναμοι μορφισμοί απεικονίζονται σε ισοδύναμους μορφισμούς. Επι της ουσίας, η σχέση ισοδυναμίας στους μορφισμούς στις κατηγορίες $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ και $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ είναι η ίδια. Άρα, ο συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S})$ είναι πιστός.

Κάθε αντικείμενο $\{s \longrightarrow t\} \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, δηλαδή κάθε μορφισμός $s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$ μπορεί να συμπληρώθει σ′ ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r, dashed] & s \arrow[r] & t \arrow[r, dashed] & \Sigma r \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{S}$, συνεπώς ο συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S})$ είναι επιμορφισμός στα αντικείμενα. Οποιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\ s' \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

μπορεί να συμπληρώθει σ′ έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & s \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \Sigma r \arrow[d, dashed] \\ r' \arrow[r, dashed] & s' \arrow[r] & t' \arrow[r, dashed] & \Sigma r' \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{S}$. Επομένως, ο συναρτητής $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S})$ είναι πλήρης. Συνεπώς, είναι μια ισοδυναμία προσθετικών κατηγοριών.

□

Παρατήρηση 5.2.3. Από το Λήμμα 5.1.18 υπάρχει μια ισοδυναμια κατηγοριών $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$, η οποία απεικόνίζει ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, αυτό σημαίνει ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

σ' ένα αντικείμενο της $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, δηλαδή έναν μορφισμό

$$r \longrightarrow s$$

στην $\mathcal{S}$. Επίσης, από την Πρόταση 5.1.13 υπάρχει μια ισοδυναμία κατηγοριών $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, η οποία απεικονίζει το αντικείμενο

$$r \longrightarrow s$$

στον συνπυρήνα της απεικόνισης

$$\mathcal{S}\big(-, r\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, s\big)$$

Από το Λήμμα 5.1.15 συναρτητής Yoneda $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, ο οποίος απεικονίζει το s στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{S}\big(-, s\big)$, είναι ένας ομολογικός συναρτητής, συνεπώς απεικονίζει το τρίγωνο

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

σε μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{S}\big(-, r\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, s\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, t\big)$$

Συνεπώς, η σύνθεση (ισοδυναμία) $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, απεικόνίζει ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, αυτό σημαίνει ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

στον συνπυρήνα της απεικόνισης

$$\mathcal{S}\big(-, r\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, s\big)$$

, οποίος ταυτίζεται με την εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{S}\big(-, s\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, t\big)$$

Από την άλλη μεριά, από το Λήμμα 5.2.2 υπάρχει μια ισοδυναμια κατηγοριών $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})$, η οποία απεικονίζει ένα αντικείμενο $\{s \longrightarrow t\} \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, δηλαδή έναν μορφισμό στην $\mathcal{S}$ σ' ένα τρίγωνο

$$r \dashrightarrow s \longrightarrow t \dashrightarrow \Sigma r$$

που τον συμπληρώνει στην $\mathcal{S}$. Συνεπώς, επάγεται μια ισοδυναμια κατηγοριών $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, όπως φαίνεται στον παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathcal{S}) \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{B}(\mathcal{S}) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{D}(\mathcal{S}) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, dashed, "\simeq"] & \mathcal{A}(\mathcal{S})
\end{tikzcd}$$

, η οποία απεικονίζει ένα αντικείμενο $\{s \longrightarrow t\} \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ στην εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{S}\big(-, s\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, t\big)$$

Συνεπώς, ένα αντικείμενο $\{s \longrightarrow t\}$ στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αντικείμενο $\mathcal{F}\big(-\big)$ της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, μαζί με μια εμφύτευση σ' ένα ενέσιμο αντικείμενο $t \in \mathcal{S} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$ και μια απεικόνιση επί από ένα προβολικό αντικείμενο $s \in \mathcal{S} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$ σ' αυτό. Δηλαδή, ένα αντικείμενο $\{s \longrightarrow t\}$ στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ μπορούμε να το σκεφτόμαστε ως ένα αντικείμενο $\mathcal{F}\big(-\big)$ στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, έτσι ώστε

$$\mathcal{S}\big(-, s\big) \xrightarrow{\ \phi\ } \mathcal{F}\big(-\big) \xrightarrow{\ \theta\ } \mathcal{S}\big(-, t\big)$$

, όπου η ϕ είναι επί και η θ είναι είναι ένα προς ένα.

Λήμμα 5.2.4. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{S}}-$σύνολα. Έστω s ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Μέσω του καθολικού ομολογικού συναρτητή $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{S})$, μπορούμε να θεωρήσουμε το s ως ένα αντικείμενο της $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, μέσω της ταύτισης $s \equiv \{1 : s \longrightarrow s\}$. Κάθε αντικείμενο πηλίκο του s μπορεί να παρασταθεί ως ένα αντικείμενο $\{s \longrightarrow t\}$ της $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, για κάποιο t και κάποιο μορφισμό $s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$. Ειδικότερα, η κλάση ισοδυναμίας του παρακάτω μεταθετικού τετραγώνου*

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & s \arrow[d] \\
s \arrow[r] & t
\end{tikzcd}
$$

είναι ένας επιμορφισμός στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$.

Απόδειξη. Έστω ότι δίνεται ένα αντικείμενο πηλίκο του s στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$. Αυτό σημαίνει ότι, δίνεται ένα αντικείμενο $\mathcal{F}$ και ένας επιμορφισμός $s \longrightarrow \mathcal{F}$. Επιλέγουμε μια εμφύτευση του $\mathcal{F}$ σ' ένα ενέσιμο αντικείμενο $t \in \mathcal{S}$. Τότε

$$\mathcal{F} = \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)\Big\}$$

, για κάποιον (μοναδικό) μορφισμό $s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$, ο οποίος επάγεται από το Λήμμα Yoneda . Η απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού παραλείπεται.

□

Πρόταση 5.2.5. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{S}}-$σύνολα. Έστω s ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Τα αντικείμενα πηλίκο του s στην κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{S})$ μπορούν να αναπαρασταθούν ως $\{s \longrightarrow t\} \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$. Έστω $\{s \longrightarrow t\}$ και $\{s \longrightarrow t'\}$ δυο αντικείμενα πηλίκο του s στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$. Τα αντικείμενα πηλίκο είναι ισόμορφα εάν και μόνο εάν υπάρχουν απεικονίσεις $t \longrightarrow t'$ και $t' \longrightarrow t$ οι οποίες καθιστούν τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά στην $\mathcal{S}$*

$$
\begin{tikzcd}
& s \arrow[rr, "1"] \arrow[dl, "1"'] \arrow[dd, "1"] & & s \arrow[dl] \arrow[dd] \\
s \arrow[rr] \arrow[dr, "1"'] & & t \arrow[dr, dashed] & \\
& s \arrow[rr] & & t'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& s \arrow[rr, "1"] \arrow[dl, "1"'] \arrow[dd, "1"] & & s \arrow[dl] \arrow[dd] \\
s \arrow[rr] \arrow[dr, "1"'] & & t' \arrow[dr, dashed] & \\
& s \arrow[rr] & & t
\end{tikzcd}
$$

Κατά δυϊκό τρόπο, τα υποαντικείμενα του s στην κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{S})$ μπορούν να αναπαρασταθούν ως $\{t \longrightarrow s\} \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$. Έστω $\{t \longrightarrow s\}$ και $\{t' \longrightarrow s\}$ δυο υποαντικείμενα του s στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$. Τα υποαντικείμενα είναι ισόμορφα εάν και μόνο εάν υπάρχουν απεικονίσεις $t \longrightarrow t'$ και $t' \longrightarrow t$ οι οποίες καθιστούν τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά στην $\mathcal{S}$

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & s \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "1"'] & \\
& t' \arrow[rr] \arrow[dl] & & s \arrow[dl, "1"] \\
s \arrow[rr, "1"] & & s &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
t' \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & s \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "1"'] & \\
& t \arrow[rr] \arrow[dl] & & s \arrow[dl, "1"] \\
s \arrow[rr, "1"] & & s &
\end{tikzcd}
$$

Απόδειξη. [[Nee01b], Πρόταση 5.2.6, σελ. 180]

□

Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ τα αντικείμενα πηλίκο και τα υποαντικείμενα τίθενται σε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Δηλαδή, κάθε υποαντικείμενο αντιστοιχεί σ' ένα αντικείμενο πηλίκο, και αντιστρόφως.

Ορισμός 5.2.6. Μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται well−powered εάν, για κάθε αντικείμενο $a \in \mathcal{A}$, η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των υποαντικειμένων του a είναι ένα σύνολο. Ισοδύναμα, η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των αντικειμένων πηλίκο του a είναι ένα σύνολο.

Παρατήρηση 5.2.7. Εάν η κατηγορία $\mathcal{S}$ είναι μια μικρή κατηγορία, τότε η $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι επίσης μια μικρή κατηγορία. Η $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι προφανώς well−powered . Αλλά για σχεδόν όλες τις μη τετριμμένες μεγάλες τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{S}$ (αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις των αντικειμένων τους δεν είναι μικρές, δηλαδή σύνολα), η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ δεν είναι ποτέ well−powered [[Nee01b], Ενότητα C.3, σελ. 405-407].

5.3 Συναρτητικότητα της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$

Δοθείσης μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{S}$, στην Ενότητα 5.1, και συγκεκριμένα στο Θεώρημα 5.1.16, μάθαμε, μέσω του καθολικού ομολογικού συναρτητή $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, πως να αντιστοιχίσουμε σ′ αυτήν μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Στην πραγματικότητα αυτή η αντιστοιχία $\mathcal{A}(-)$, όπως θα δούμε σ′ αυτήν την Ενότητα, ορίζει έναν 2−καθολικό ομολογικό συναρτητή.

Λήμμα 5.3.1.1. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά Hom−σύνολα. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, φυσικός ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ ο οποίος καθιστά τα παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \mathcal{T} \arrow[d] \\ \mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[r, dashed, "\mathcal{A}(\mathcal{F})"] & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Εάν οι κατηγορίες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ ικανοποιούν το αξίωμα [TR5(β)], και ο συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα β−συγκινόμενα, τότε ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ διατηρεί τα β−συγκινόμενα.

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \mathcal{T} \arrow[d, "Y"'] \\ \mathcal{A}(\mathcal{S}) & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

Επειδή η σύνθεση $Y \circ \mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ένας ομολογικός συναρτητής, από την καθολική συνθήκη για την αβελιανοποίηση Verdier $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$, έπεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \widetilde{Y \circ \mathcal{F}} : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$$

ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \mathcal{T} \arrow[d, "Y"'] \\ \mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[r, dashed, "\mathcal{A}(\mathcal{F})"] & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επίσης, έστω ότι δίνεται ένα αντικείμενο $\mathcal{G}$ στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{G}$ επιδέχεται μια προβολική παράσταση

$$\mathcal{S}(-, s) \dashrightarrow \mathcal{S}(-, t) \dashrightarrow \mathcal{G}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

Τότε,

$$\mathcal{A}(\mathcal{F})[\mathcal{G}] = \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{T}(-, \mathcal{F}(s)) \longrightarrow \mathcal{T}(-, \mathcal{F}(t))\Big\}$$

, και με τον προφανή τρόπο ορίζεται στους μορφισμούς.

Έστω ότι οι κατηγορίες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ ικανοποιούν το αξίωμα [TR5(β)], και ότι ο συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Επειδή η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], από το Λήμμα 5.1.21.1, έπεται ότι ο συναρτητής $Y : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Επομένως, επειδή ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, έπεται ότι η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{T} \arrow[d, "Y"'] \\ & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι, η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[d] & \\ \mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[r, "\mathcal{A}(\mathcal{F})"] & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Επειδή η κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], από το Λήμμα 5.1.21.1, έπεται ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Συνεπώς, η προηγούμενη σύνθεση διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα εάν και μόνο εάν ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα.

□

Λήμμα 5.3.1.2. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγοριες με μικρά Hom−σύνολα. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Εάν οι κατηγορίες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ ικανοποιούν το αξίωμα [TR5*(β)], και ο συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα, τότε ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα.*

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 5.3.1.1.

□

Λήμμα 5.3.1.3. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά Hom−σύνολα. Έστω $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ ένας φυσικός μετασχηματισμός τριγωνισμένων συναρτητών $\mathcal{H}, \mathcal{H}' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$. Τότε παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω ενός φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{A}(\eta) : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{H}')$ μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών $\mathcal{A}(\mathcal{H}), \mathcal{A}(\mathcal{H}') : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$.*

Απόδειξη. Έστω $Y : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ο καθολικός ομολογικός συναρτητής. Τότε επάγεται ένας φυσικός μετασχηματισμός $Y \circ \eta : Y \circ \mathcal{H} \longrightarrow Y \circ \mathcal{H}'$ ομολογικών συναρτητών. Συνεπώς, από την καθολική συνθήκη για την αβελιανοποίηση Verdier $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ της $\mathcal{S}$, έπεται ότι παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω ενός φυσικού μετασχηματισμού

$$\mathcal{A}(\eta) := \widetilde{Y \circ \eta} : \mathcal{A}(Y \circ \mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{A}(Y \circ \mathcal{H}')$$

μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών $\mathcal{A}(Y \circ \mathcal{H}), \mathcal{A}(Y \circ \mathcal{H}') : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Επίσης, έστω $\mathcal{F}$ ένα αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{F}$ επιδέχεται μια προβολική παράσταση

$$\mathcal{S}\big(-, s\big) \dashrightarrow \mathcal{S}\big(-, t\big) \dashrightarrow \mathcal{F}\big(\,-\,\big) \dashrightarrow 0$$

Τότε,

$$\big[\mathcal{A}(\eta)\big]_{\mathcal{F}} = \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{T}\big(-, \mathcal{H}(t)\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, \mathcal{H}'(t)\big)\Big\}$$

$\square$

Παρατήρηση 5.3.2. Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά $Hom-$σύνολα. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Στο Λήμμα 5.3.1.1 ορίσαμε έναν ακριβή συναρτητή $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Από την Πρόταση 5.1.13, από το Λήμμα 5.1.18, και από το Λήμμα 5.2.2 υπάρχουν οι ισοδυναμίες (αβελιανών κατηγοριών) $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$, $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})$, και $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S})$ αντίστοιχα. Συνεπώς, επάγονται οι συναρτητές $\mathcal{B}(\mathcal{F}) : \mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{T})$, $\mathcal{C}(\mathcal{F}) : \mathcal{C}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{T})$, και $\mathcal{D}(\mathcal{F}) : \mathcal{D}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[r, "\mathcal{A}(\mathcal{F})"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{B}(\mathcal{S}) \arrow[r, dashed, "\mathcal{B}(\mathcal{F})"] & \mathcal{B}(\mathcal{T})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(\mathcal{S}) \arrow[r, "\mathcal{B}(\mathcal{F})"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{B}(\mathcal{T}) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{C}(\mathcal{S}) \arrow[r, dashed, "\mathcal{C}(\mathcal{F})"] & \mathcal{C}(\mathcal{T})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathcal{S}) \arrow[r, "\mathcal{C}(\mathcal{F})"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{C}(\mathcal{T}) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{D}(\mathcal{S}) \arrow[r, dashed, "\mathcal{D}(\mathcal{F})"] & \mathcal{D}(\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ ορίζεται στα αντικείμενα της $\mathcal{F}' \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ως

$$\mathcal{A}(\mathcal{F})\big[\mathcal{F}'\big] := \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{S}\big(-, \mathcal{F}'s\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, \mathcal{F}'t\big)\Big\}$$

, όπου

$$\mathcal{S}\big(-, s\big) \dashrightarrow \mathcal{S}\big(-, t\big) \dashrightarrow \mathcal{F}'\big(\,-\,\big) \dashrightarrow 0$$

είναι μια προβολική παράσταση του $\mathcal{F}'$. Επιπλέον, ο $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ ορίζεται στους μορφισμούς $f : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{G}'$ της $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ως

$$\mathcal{A}(\mathcal{F})\big[f\big] := \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{S}\big(-, \mathcal{F}'s\big) \to \mathcal{S}\big(-, \mathcal{F}'t\big)\Big\} \to \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{S}\big(-, \mathcal{G}'s'\big) \to \mathcal{S}\big(-, \mathcal{G}'t'\big)\Big\}$$

, όπου

$$\mathcal{S}\big(-, s\big) \dashrightarrow \mathcal{S}\big(-, t\big) \dashrightarrow \mathcal{F}'\big(\,-\,\big) \dashrightarrow 0$$

$$\mathcal{S}\big(-, s'\big) \dashrightarrow \mathcal{S}\big(-, t'\big) \dashrightarrow \mathcal{G}'\big(\,-\,\big) \dashrightarrow 0$$

είναι δυο προβολικές παραστάσεις των $\mathcal{F}'$ και $\mathcal{G}'$. Συνεπώς, οι συναρτητές $\mathcal{B}(\mathcal{F})$, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$, και $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ είναι εύκολο να περιγραφούν. Ο $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ απεικονίζει ένα αντικείμενο στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, δηλαδή έναν μορφισμό $s \longrightarrow s'$ στην $\mathcal{S}$ στον μορφισμό $\mathcal{F}s \longrightarrow \mathcal{F}s'$ στην $\mathcal{T}$, ο $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ απεικονίζει ένα αντικείμενο στην $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, δηλαδή ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$

$$s \longrightarrow s' \longrightarrow s'' \longrightarrow \Sigma s$$

στο τρίγωνο στην $\mathcal{T}$

$$\mathcal{F}s \longrightarrow \mathcal{F}s' \longrightarrow \mathcal{F}s'' \longrightarrow \Sigma\mathcal{F}s$$

, και ο $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ απεικονίζει ένα αντικείμενο στην $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, δηλαδή έναν μορφισμό $s \longrightarrow s'$ στην $\mathcal{S}$ στον μορφισμό $\mathcal{F}s \longrightarrow \mathcal{F}s'$ στην $\mathcal{T}$. Αναλόγως, με τον προφανή τρόπο ορίζονται στους μορφισμούς.

Λήμμα 5.3.3. *Η αντιστοιχία $\mathcal{A}(-)$ είναι ένας lax συναρτητής, από την $2-$κατηγορία των τριγωνισμένων κατηγοριών και των τριγωνισμένων συναρτητών, στην $2-$κατηγορία των αβελιανών κατηγοριών και των ακριβών συναρτητών. Αυτό σημαίνει ότι, απεικονίζει μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{S}$ στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, απεικονίζει έναν τριγωνισμένο συναρτητή $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ στον ακριβή συναρτητή $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$, και απεικονίζει έναν φυσικό μετασχηματισμό $\eta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ μεταξύ τριγωνισμένων συναρτητών $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ στον φυσικό μετασχηματισμό $\mathcal{A}(\eta) : \mathcal{A}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G})$ μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών $\mathcal{A}(\mathcal{F}), \mathcal{A}(\mathcal{G}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Διατηρεί την σύνθεση (με την lax έννοια, αυτό σημαίνει ότι διατηρεί την σύνθεση μέχρις $2-$ισομορφισμών) και τις ταυτότητες.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 5.1.16, και τα Λήμματα 5.3.1.1, και 5.3.1.3.

$\square$

Λήμμα 5.3.4. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγοριες, και $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{F}$ έχει έναν συζυγή (αριστερό ή δεξιό) $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$. Τότε ο $\mathcal{G}$ είναι επίσης ένας τριγωνισμένος συναρτητής.*

Απόδειξη. Όπως κάνουμε πάντα έτσι και εδώ θα συμβολίζουμε τους προσθετικούς αυτομορφισμούς των τριγωνισμένων κατηγοριών $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ με Σ. Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{G}$ είναι ένας δεξιός συζυγής συναρτητής του $\mathcal{F}$, η περίπτωση για την αριστερή συζυγία είναι δυϊκή. Επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι τριγωνισμένος, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\phi : \mathcal{F}\Sigma \longrightarrow \Sigma\mathcal{F}$$

Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{G}$ είναι ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{F}$, ο συναρτητής Σ (Σ είναι ο προσθετικός αυτομορφισμός της $\mathcal{S}$) είναι ένας δεξιός (και αριστερός) συζυγής του Σ^{-1}, και ο συναρτητής Σ (Σ είναι ο προσθετικός αυτομορφισμός της $\mathcal{T}$) είναι ένας δεξιός (και αριστερός) συζυγής του Σ^{-1}, για κάθε $X \in \mathcal{S}$, και για κάθε $Y \in \mathcal{T}$, υφίστανται οι φυσικοί ισομορφισμοί

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\big(X, \Sigma\mathcal{G}Y\big) &\simeq \mathcal{S}\big(\Sigma^{-1}X, \mathcal{G}Y\big) \\
&\simeq \mathcal{T}\big(\mathcal{F}\Sigma^{-1}X, Y\big) \\
&\simeq \mathcal{T}\big(\Sigma^{-1}\mathcal{F}X, Y\big) \\
&\simeq \mathcal{T}\big(\mathcal{F}X, \Sigma Y\big) \\
&\simeq \mathcal{S}\big(X, \mathcal{G}\Sigma Y\big)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $X \in \mathcal{S}$, και για κάθε $Y \in \mathcal{T}$ υφίσταται ένας ισομορφισμός $\mathcal{S}\big(X, \Sigma\mathcal{G}Y\big) \simeq \mathcal{S}\big(X, \mathcal{G}\Sigma Y\big)$, ισοδύναμα για κάθε $Y \in \mathcal{T}$, υφίσταται ένας ισομορφισμός $\mathcal{S}\big(-, \Sigma\mathcal{G}Y\big) \simeq \mathcal{S}\big(-, \mathcal{G}\Sigma Y\big)$. Επομένως, για κάθε $Y \in \mathcal{T}$, από το Λήμμα Yoneda έπεται ότι η απεικόνιση $\mathcal{G}\Sigma Y \longrightarrow \Sigma\mathcal{G}Y$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, λαμβάνουμε έναν φυσικό ισομορφισμό

$$\psi : \mathcal{G}\Sigma \longrightarrow \Sigma\mathcal{G}$$

Όμως χρειαζόμαστε την ακριβή περιγραφή του ψ. Θεωρούμε τον φυσικό μετασχηματισμό

$$\rho = \mathcal{G}\Sigma\eta \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}} : \Sigma\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}\Sigma$$

Θα δείξουμε ότι ο ρ^{-1} είναι ένας φυσικός ισομορφισμός, και ότι ο $\mathcal{G}$ εφοδιασμένος με τον φυσικό ισομορφισμό

$$\rho^{-1} = \psi : \mathcal{G}\Sigma \longrightarrow \Sigma\mathcal{G}$$

καθίσταται ένας τριγωνισμένος συναρτητής.

Έστω $\epsilon : 1 \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$, και $\eta : \mathcal{F}\mathcal{G} \longrightarrow 1$ η μονάδα, και αντίστοιχα η συν−μονάδα της συζυγίας των $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$. Το γεγονός ότι ο συναρτητής $\mathcal{G}$ είναι ένας δεξιός συζυγής του συναρτητή $\mathcal{F}$, σημαίνει ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\Phi_{X,Y} : \mathcal{T}\big(\mathcal{F}X, Y\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(X, \mathcal{G}Y\big)$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $X \in \mathcal{S}$ και $Y \in \mathcal{T}$. Επιπλέον, οι $\Phi_{X,Y}$, και $\Phi^{-1}_{X,Y}$ ορίζονται από τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\epsilon_X"] \arrow[dr, "\Phi_{X,Y}(f)"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}X \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
& \mathcal{G}Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}X \arrow[r, "\mathcal{F}g"] \arrow[dr, "\Phi^{-1}_{X,Y}(g)"'] & \mathcal{F}\mathcal{G}Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

, δηλαδή $\Phi_{X,Y}\big(f\big) = \mathcal{G}f \circ \epsilon_X$, για κάθε απεικόνιση $f : \mathcal{F}X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$, και $\Phi^{-1}_{X,Y}\big(g\big) = \eta_Y \circ \mathcal{F}g$, για κάθε απεικόνιση $g : X \longrightarrow \mathcal{G}Y$ στην $\mathcal{S}$, αντίστοιχα.

Έστω $\epsilon' : 1 \longrightarrow \Sigma\Sigma^{-1}$, και $\eta' : \Sigma^{-1}\Sigma \longrightarrow 1$ η μονάδα, και αντίστοιχα η συν$-$μονάδα της συζυγίας των Σ^{-1} και Σ (Σ είναι ο προσθετικός αυτομορφισμός της $\mathcal{S}$). Επειδή ο Σ είναι ένας αυτομορφισμός οι φυσικοί μετασχηματισμοί ϵ', και η' είναι φυσικοί ισομορφισμοί, συγκεκριμένα είναι οι ταυτοτικοί φυσικοί μετασχηματισμοί. Το γεγονός ότι ο συναρτητής Σ είναι ένας δεξιός συζυγής του συναρτητή Σ^{-1}, σημαίνει ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\Phi'_{X,Y} : \mathcal{S}\big(\Sigma^{-1}X, Y\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(X, \Sigma Y\big)$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $X \in \mathcal{S}$ και $Y \in \mathcal{S}$. Επιπλέον, οι $\Phi'_{X,Y}$, και $\Phi'^{-1}_{X,Y}$ ορίζονται από τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\epsilon'_X"] \arrow[dr, "\Phi'_{X,Y}(f)"'] & \Sigma\Sigma^{-1}X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Sigma^{-1}X \arrow[r, "\Sigma^{-1}g"] \arrow[dr, "\Phi'^{-1}_{X,Y}(g)"'] & \Sigma^{-1}\Sigma Y \arrow[d, "\eta'_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

, δηλαδή $\Phi'_{X,Y}\big(f\big) = \Sigma f \circ \epsilon'_X = \Sigma f$, επειδή ο ϵ' είναι ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός, για κάθε απεικόνιση $f : \Sigma^{-1}X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{S}$, και $\Phi'^{-1}_{X,Y}\big(g\big) = \eta'_Y \circ \Sigma^{-1}g = \Sigma^{-1}g$, επειδή ο η' είναι ένας φυσικός ισομορφισμός, για κάθε απεικόνιση $g : X \longrightarrow \Sigma Y$ στην $\mathcal{S}$, αντίστοιχα.

Ομοίως, έστω $\epsilon'' : 1 \longrightarrow \Sigma\Sigma^{-1}$, και $\eta'' : \Sigma^{-1}\Sigma \longrightarrow 1$ η μονάδα, και αντίστοιχα η συν$-$μονάδα της συζυγίας των Σ^{-1} και Σ (Σ είναι ο προσθετικός αυτομορφισμός της $\mathcal{T}$). Τότε, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\Phi''_{X,Y} : \mathcal{T}\big(\Sigma^{-1}X, Y\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(X, \Sigma Y\big)$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $X \in \mathcal{T}$ και $Y \in \mathcal{T}$. Επιπλέον, $\Phi''_{X,Y}\big(f\big) = \Sigma f \circ \epsilon''_X = \Sigma f$, για κάθε απεικόνιση $f : \Sigma^{-1}X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$, και $\Phi''^{-1}_{X,Y}\big(g\big) = \eta''_Y \circ \Sigma^{-1}g = \Sigma^{-1}g$, για κάθε απεικόνιση $g : X \longrightarrow \Sigma Y$ στην $\mathcal{T}$, αντίστοιχα.

Για κάθε $X \in \mathcal{T}$ και $Y \in \mathcal{S}$, λόγω της συζυγίας της συζυγίας των $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$, υφίστανται τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}X \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{G}X}"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{G}X,X}(\eta_X)=1_{\mathcal{G}X}"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}X \arrow[d, "\mathcal{G}\eta_X"] \\ & \mathcal{G}X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}Y \arrow[r, "\mathcal{F}\epsilon_Y"] \arrow[dr, "\Phi^{-1}_{Y,\mathcal{F}Y}(\epsilon_Y)=1_{\mathcal{F}Y}"'] & \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}Y \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}Y}"] \\ & \mathcal{F}Y \end{tikzcd}$$

Συγκεκριμένα, για κάθε $X \in \mathcal{T}$, από το πρώτο μεταθετικό διάγραμμμα έπεται η σχέση

$$\Phi_{\mathcal{G}X,X}\big(\eta_X\big) \quad = \quad \mathcal{G}\eta_X \circ \epsilon_{\mathcal{G}X} \quad = \quad 1_{\mathcal{G}X}$$

Έστω $X \in \mathcal{S}$ και $Y \in \mathcal{T}$. Για κάθε απεικόνιση $h \in \mathcal{T}\big(\mathcal{F}\Sigma^{-1}X, Y\big)$, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
X = \Sigma\Sigma^{-1}X \arrow[r, "\Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X}"] \arrow[d, "\epsilon_X = \epsilon_{\Sigma\Sigma^{-1}X}"'] & \Sigma\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X \arrow[r, "\Sigma\mathcal{G}h"] \arrow[d, "\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X}"'] & \Sigma\mathcal{G}Y \arrow[d, "\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y}"'] \\
\mathcal{G}\mathcal{F}X = \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\Sigma^{-1}X \arrow[r, "\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X}"] \arrow[d, "\mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X}"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X \arrow[r, "\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}h"] \arrow[d, "\mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X}"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}Y \arrow[d, "\mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y}"'] \\
\mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\Sigma^{-1}X \arrow[r, "\mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\epsilon_{\Sigma^{-1}X}"] & \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X \arrow[r, "\mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}h"] \arrow[d, "\mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}\Sigma^{-1}X}"'] & \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}Y \arrow[d, "\mathcal{G}\Sigma\eta_Y"'] \\
& \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\Sigma^{-1}X \arrow[r, "\mathcal{G}\Sigma h"] & \mathcal{G}\Sigma Y
\end{tikzcd}
$$

Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει η σχέση

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}\Sigma h \circ \mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X &= (\mathcal{G}\Sigma h \circ \mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}\Sigma^{-1}X}) \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}h \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}h \circ (\mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X}) \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}h \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ (\mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}h \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X}) \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}h \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}h \circ (\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X) \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}h \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X} \circ \Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ (\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}h \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}\mathcal{F}\Sigma^{-1}X}) \circ \Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y} \circ \Sigma\mathcal{G}h \circ \Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X}
\end{aligned}
$$

Τώρα χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, λαμβάνουμε την σχέση

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(\Sigma(h \circ \Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X})) \circ \epsilon_X &= \mathcal{G}\Sigma h \circ \mathcal{G}\Sigma\Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma h \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma h \circ 1_{\mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma h \circ (\mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\epsilon_{\Sigma^{-1}X}) \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma h \circ \mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\Sigma^{-1}X} \circ \epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y} \circ \Sigma\mathcal{G}h \circ \Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \\
&= (\mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y}) \circ \Sigma\mathcal{G}h \circ \Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \\
&= \rho_Y \circ \Sigma\mathcal{G}h \circ \Sigma\epsilon_{\Sigma^{-1}X} \\
&= \rho_Y \circ \Sigma(\mathcal{G}h \circ \epsilon_{\Sigma^{-1}X})
\end{aligned}
$$

, ή ισοδύναμα

$$
\Phi_{X,\Sigma Y} \circ \Phi''_{\mathcal{F}X,Y} \circ \mathcal{T}(\Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X}, Y)(h) \quad = \quad \mathcal{S}(X, \rho_Y) \circ \Phi'_{X,\mathcal{G}Y} \circ \Phi_{\Sigma^{-1}X,Y}(h)
$$

Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(\Sigma^{-1}\Sigma\mathcal{F}\Sigma^{-1}X, Y) = \mathcal{T}(\mathcal{F}\Sigma^{-1}X, Y) \arrow[r, "\Phi_{\Sigma^{-1}X,Y}"] \arrow[d, "\mathcal{T}(\Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X}, Y)"'] & \mathcal{S}(\Sigma^{-1}X, \mathcal{G}Y) \arrow[r, "\Phi'_{X,\mathcal{G}Y}"] & \mathcal{S}(X, \Sigma\mathcal{G}Y) \arrow[d, "\mathcal{S}(X,\rho_Y)"] \\
\mathcal{T}(\Sigma^{-1}\mathcal{F}\Sigma\Sigma^{-1}X, Y) = \mathcal{T}(\Sigma^{-1}\mathcal{F}X, Y) \arrow[r, "\Phi''_{\mathcal{F}X,Y}"] & \mathcal{T}(\mathcal{F}X, \Sigma Y) \arrow[r, "\Phi_{X,\Sigma Y}"] & \mathcal{S}(X, \mathcal{G}\Sigma Y)
\end{tikzcd}
$$

, όπου η απεικόνιση $\Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X} : \Sigma^{-1}\mathcal{F}\Sigma\Sigma^{-1}X \longrightarrow \Sigma^{-1}\Sigma\mathcal{F}\Sigma^{-1}X$ ισούται με την απεικόνιση $\Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X} : \Sigma^{-1}\mathcal{F}X \longrightarrow \mathcal{F}\Sigma^{-1}X$. Οι οριζόντιες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί, ενώ η κάθετη απεικόνιση $\mathcal{T}\big(\Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X}, Y\big)$ είναι ένας ισομορφισμός, επειδή η απεικόνιση $\Sigma^{-1}\phi_{\Sigma^{-1}X}$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα έπεται ότι η απεικόνιση $\mathcal{S}\big(X, \rho_Y\big) : \mathcal{S}\big(X, \Sigma\mathcal{G}Y\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(X, \mathcal{G}\Sigma Y\big)$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός. Δείξαμε λοιπόν ότι, για κάθε $Y \in \mathcal{T}$, η απεικόνιση $\mathcal{S}\big(-, \rho_Y\big) : \mathcal{S}\big(-, \Sigma\mathcal{G}Y\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-, \mathcal{G}\Sigma Y\big)$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός (όλοι οι ισομορφισμοί στο προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα είναι φυσικοί). Επομένως, για κάθε $Y \in \mathcal{T}$, από το Λήμμα Yoneda έπεται ότι η απεικόνιση $\rho_Y : \Sigma\mathcal{G}Y \longrightarrow \mathcal{G}\Sigma Y$ είναι ένας ισομορφισμός, και συνεπώς, για κάθε $Y \in \mathcal{T}$, η αντίστροφη απεικόνιση $\rho_Y^{-1} : \mathcal{G}\Sigma Y \longrightarrow \Sigma\mathcal{G}Y$ είναι ένας ισομορφισμός.

Έστω

$$X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το υποψήφιο τρίγωνο

$$\mathcal{G}X \xrightarrow{\quad \mathcal{G}u \quad} \mathcal{G}Y \xrightarrow{\quad \mathcal{G}v \quad} \mathcal{G}Z \xrightarrow{\rho_X^{-1} \circ \mathcal{G}w} \Sigma\mathcal{G}X$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$. Συμπληρώνουμε τον μορφισμό $\mathcal{G}u : \mathcal{G}X \longrightarrow \mathcal{G}Y$ σ' ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}X \arrow[r, "\mathcal{G}u"] & \mathcal{G}Y \arrow[r, dashed, "v'"] & C \arrow[r, dashed, "w'"] & \Sigma\mathcal{G}X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{S}$. Επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής, το υποψήφιο τρίγωνο

$$\mathcal{F}\mathcal{G}X \xrightarrow{\quad \mathcal{F}\mathcal{G}u \quad} \mathcal{F}\mathcal{G}Y \xrightarrow{\quad \mathcal{F}v' \quad} \mathcal{F}C \xrightarrow{\phi_{\mathcal{G}X} \circ \mathcal{F}w'} \Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}X$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Από την φυσικότητα του $\eta : \mathcal{F}\mathcal{G} \longrightarrow 1$ υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}\mathcal{G}X \arrow[r, "\mathcal{F}\mathcal{G}u"] \arrow[d, "\eta_X"'] & \mathcal{F}\mathcal{G}Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$, το οποίο μπορεί από το αξίωμα [TR3] να συμπληρωθεί σ' έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}\mathcal{G}X \arrow[r, "\mathcal{F}\mathcal{G}u"] \arrow[d, "\eta_X"'] & \mathcal{F}\mathcal{G}Y \arrow[r, "\mathcal{F}v'"] \arrow[d, "\eta_Y"'] & \mathcal{F}C \arrow[r, "\phi_{\mathcal{G}X} \circ \mathcal{F}w'"] \arrow[d, dashed, "\theta"'] & \Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}X \arrow[d, "\Sigma\eta_X"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$.

Ισχύουν οι παρκάτω σχέσεις

$$
\begin{aligned}
1_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{G}u &= (\mathcal{G}\eta_Y \circ \epsilon_{\mathcal{G}Y}) \circ \mathcal{G}u \\
&= \mathcal{G}\eta_Y \circ \epsilon_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{G}u \\
&= \mathcal{G}\eta_Y \circ (\epsilon_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{G}u) \\
&= \mathcal{G}\eta_Y \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}u \circ \epsilon_{\mathcal{G}X} \\
&= \mathcal{G}(\eta_Y \circ \mathcal{F}\mathcal{G}u) \circ \epsilon_{\mathcal{G}X} \\
&= \mathcal{G}(u \circ \eta_X) \circ \epsilon_{\mathcal{G}X} \\
&= \mathcal{G}u \circ \mathcal{G}\eta_X \circ \epsilon_{\mathcal{G}X} \\
&= \mathcal{G}u \circ (\mathcal{G}\eta_X \circ \epsilon_{\mathcal{G}X}) \\
&= \mathcal{G}u \circ 1_{\mathcal{G}X}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}\theta \circ \epsilon_C \circ v' &= \mathcal{G}\theta \circ (\epsilon_C \circ v') \\
&= \mathcal{G}\theta \circ \mathcal{G}\mathcal{F}v' \circ \epsilon_{\mathcal{G}Y} \\
&= \mathcal{G}(\theta \circ \mathcal{F}v') \circ \epsilon_{\mathcal{G}Y} \\
&= \mathcal{G}(v \circ \eta_Y) \circ \epsilon_{\mathcal{G}Y} \\
&= \mathcal{G}v \circ \mathcal{G}\eta_Y \circ \epsilon_{\mathcal{G}Y} \\
&= \mathcal{G}v \circ (\mathcal{G}\eta_Y \circ \epsilon_{\mathcal{G}Y}) \\
&= \mathcal{G}v \circ 1_{\mathcal{G}Y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}w \circ \mathcal{G}\theta \circ \epsilon_C &= \mathcal{G}(w \circ \theta) \circ \epsilon_C \\
&= \mathcal{G}(\Sigma\eta_X \circ \phi_{\mathcal{G}X} \circ \mathcal{F}w') \circ \epsilon_C \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_X \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}X} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}w' \circ \epsilon_C \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_X \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}X} \circ (\mathcal{G}\mathcal{F}w' \circ \epsilon_C) \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_X \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}X} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}X} \circ w' \\
&= (\mathcal{G}\Sigma\eta_X \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}X} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}X}) \circ w' \\
&= \rho_X \circ w' \\
&= \rho_X \circ 1_{\Sigma\mathcal{G}X} \circ w'
\end{aligned}
$$

, ή ισοδύναμα

$$
\rho_X^{-1} \circ \mathcal{G}w \circ \mathcal{G}\theta \circ \epsilon_C = 1_{\Sigma\mathcal{G}X} \circ w'
$$

Συνεπώς, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{S}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}X \arrow[r, "\mathcal{G}u"] \arrow[d, "1_{\mathcal{G}X}"'] & \mathcal{G}Y \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "1_{\mathcal{G}Y}"'] & C \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "\mathcal{G}\theta\circ\epsilon_C"'] & \Sigma\mathcal{G}X \arrow[r, "\Sigma\mathcal{G}u"] \arrow[d, "1_{\Sigma\mathcal{G}X}"'] & \Sigma\mathcal{G}Y \arrow[d, "1_{\Sigma\mathcal{G}Y}"'] \\
\mathcal{G}X \arrow[r, "\mathcal{G}u"] & \mathcal{G}Y \arrow[r, "\mathcal{G}v"] & \mathcal{G}Z \arrow[r, "\rho_X^{-1}\circ\mathcal{G}w"] & \Sigma\mathcal{G}X \arrow[r, "\Sigma\mathcal{G}u"] & \Sigma\mathcal{G}Y
\end{tikzcd}
$$

Ισχυρίζομαι ότι η απεικόνιση $\mathcal{G}\theta \circ \epsilon_C : C \longrightarrow \mathcal{G}Z$ είναι ένας ισομορφισμός. Έστω $R \in \mathcal{S}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathcal{S}(R, -) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}b$ στο προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(R,\mathcal{G}X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,1_{\mathcal{G}X})"'] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,1_{\mathcal{G}Y})"'] & \mathcal{S}(R,C) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,\mathcal{G}\theta\circ\epsilon_C)"'] & \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,1_{\Sigma\mathcal{G}X})"'] & \mathcal{S}(X,\Sigma\mathcal{G}Y) \arrow[d, "\mathcal{S}(R,1_{\Sigma\mathcal{G}Y})"'] \\
\mathcal{S}(R,\mathcal{G}X) \arrow[r] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Y) \arrow[r] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Z) \arrow[r] & \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}X) \arrow[r] & \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}Y)
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές στο οποίο όλες οι κάθετες απεικονίσεις πλήν της μεσαίας απεικόνισης είναι ισομορφισμοί.

Η επάνω γραμμή είναι ακριβής επειδή ο συναρτητής $\mathcal{S}(R,-) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός, και συνεπώς απεικονίζει το τρίγωνο

$$\mathcal{G}X \longrightarrow \mathcal{G}Y \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma\mathcal{G}X$$

στην μακρά ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{S}(R,\mathcal{G}X) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Y) \longrightarrow \mathcal{S}(R,C) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}X) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}Y)$$

Από την άλλη μεριά, ο συναρτητής $\mathcal{T}(\mathcal{F}R,-) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός, συνεπώς απεικονίζει το τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

στην μακρά ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}R,X) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{F}R,Y) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{F}R,Z) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{F}R,\Sigma X) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{F}R,\Sigma Y)$$

Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(R,\mathcal{G}X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,1_{\mathcal{G}X})"'] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,1_{\mathcal{G}Y})"'] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,1_{\mathcal{G}Z})"'] & \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{S}(R,\rho_X)"'] & \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}Y) \arrow[d, "\mathcal{S}(R,\rho_Y)"'] \\
\mathcal{S}(R,\mathcal{G}X) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^{-1}_{R,X}"'] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Y) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^{-1}_{R,Y}"'] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Z) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^{-1}_{R,Z}"'] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}\Sigma X) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^{-1}_{R,\Sigma X}"'] & \mathcal{S}(R,\mathcal{G}\Sigma Y) \arrow[d, "\Phi^{-1}_{R,\Sigma Y}"'] \\
\mathcal{T}(\mathcal{F}R,X) \arrow[r] & \mathcal{T}(\mathcal{F}R,Y) \arrow[r] & \mathcal{T}(\mathcal{F}R,Z) \arrow[r] & \mathcal{T}(\mathcal{F}R,\Sigma X) \arrow[r] & \mathcal{T}(\mathcal{F}R,\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο όλες οι κάθετες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί. Επειδή η επάνω γραμμή

$$\mathcal{S}(R,\mathcal{G}X) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Y) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Z) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}X) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\Sigma\mathcal{G}Y)$$

του προηγούμενου μεταθετικού διαγράμματος είναι ισόμορφη με την κάτω γραμμή η οποία είναι μια ακριβής ακολουθία, έπεται ότι είναι ακριβής.

Συνεπώς, από το 5 Λήμμα έπεται ότι η απεικόνιση $\mathcal{S}(R,\mathcal{G}\theta\circ\epsilon_C) : \mathcal{S}(R,C) \longrightarrow \mathcal{S}(R,\mathcal{G}Z)$ είναι ένας ισομορφισμός. Δείξαμε λοιπόν ότι, η απεικόνιση $\mathcal{S}(-,\mathcal{G}\theta\circ\epsilon_C) : \mathcal{S}(-,C) \longrightarrow \mathcal{S}(-,\mathcal{G}Z)$ είναι ένας ισομορφισμός. Επομένως, από το Λήμμα Yoneda έπεται ότι η μεσαία απεικόνιση $\mathcal{G}\theta\circ\epsilon_C : C \longrightarrow \mathcal{G}Z$ είναι ένας ισομορφισμός. Τέλος, από το αξίωμα [TR0] συμπεραίνουμε ότι το υποψήφιο τρίγωνο

$$\mathcal{G}X \xrightarrow{\mathcal{G}u} \mathcal{G}Y \xrightarrow{\mathcal{G}v} \mathcal{G}Z \xrightarrow{\rho_X^{-1}\circ\mathcal{G}w} \Sigma\mathcal{G}X$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{S}$.

$\square$

Ακολουθεί η απόδειξη του Λήμματος 2.1.40.3 :

Απόδειξη. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι τετριμμένη. Έστω ότι ο συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών. Τότε υπάρχει δεξιός συζυγής συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}$ του $\mathcal{F}$, έτσι ώστε η μονάδα $\epsilon : 1 \longrightarrow \mathcal{GF}$, και αντίστοιχα η συν−μονάδα $\eta : \mathcal{FG} \longrightarrow 1$ της συζυγίας των $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ να είναι φυσικοί ισομορφισμοί. Επιπλέον, για κάθε $Y \in \mathcal{T}$, λόγω της συζυγίας των $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$, ικανοποιείται η σχέση

$$\eta_{\mathcal{F}Y} \circ \mathcal{F}\epsilon_Y \;=\; 1_{\mathcal{F}Y}$$

Από το Λήμμα 5.3.4, ο συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}$ εφοδιασμένος με τον φυσικό ισομορφισμό $\rho^{-1} : \mathcal{G} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{G}$, καθίσταται ένας τριγωνισμένος συναρτητής.

Από τον Ορισμό 2.1.40.1, ο συναρτητής $\mathcal{GF}$ καθίσταται ένας τριγωνισμένος συναρτητής, του οποίου η φυσική ισοδυναμία $\gamma : \mathcal{GF} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{GF}$ ορίζεται στο αντικείμενο $X \in \mathcal{D}$, από την σύνθεση

$$\mathcal{GF}\Sigma X \xrightarrow{\;\mathcal{G}\phi_X\;} \mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}X \xrightarrow{\;\rho^{-1}_{\mathcal{F}X}\;} \Sigma\mathcal{GF}X$$

, δηλαδή $\gamma_X = \rho^{-1}_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{G}\phi_X$. Επιπλέον, η μονάδα $\epsilon : 1 \longrightarrow \mathcal{GF}$ της συζυγίας είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός τριγωνισμένων συναρτητών. Πράγματι, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{D}$, ισχύει

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{F}X} \circ \Sigma\epsilon_X &= \mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{GF}X} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{GF}X} \circ \Sigma\epsilon_X \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{GF}X} \circ (\epsilon_{\Sigma\mathcal{GF}X} \circ \Sigma\epsilon_X) \\
&= \mathcal{G}\Sigma\eta_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{GF}X} \circ \mathcal{GF}\Sigma\epsilon_X \circ \epsilon_{\Sigma X} \\
&= \mathcal{G}(\Sigma\eta_{\mathcal{F}X} \circ \phi_{\mathcal{GF}X} \circ \mathcal{F}\Sigma\epsilon_X) \circ \epsilon_{\Sigma X} \\
&= \mathcal{G}(\Sigma\eta_{\mathcal{F}X} \circ (\phi_{\mathcal{GF}X} \circ \mathcal{F}\Sigma\epsilon_X)) \circ \epsilon_{\Sigma X} \\
&= \mathcal{G}(\Sigma\eta_{\mathcal{F}X} \circ \Sigma\mathcal{F}\epsilon_X \circ \phi_X) \circ \epsilon_{\Sigma X} \\
&= \mathcal{G}\Sigma(\eta_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\epsilon_X) \circ \mathcal{G}\phi_X \circ \epsilon_{\Sigma X} \\
&= \mathcal{G}\Sigma(1_{\mathcal{F}X}) \circ \mathcal{G}\phi_X \circ \epsilon_{\Sigma X} \\
&= 1_{\mathcal{G}\Sigma\mathcal{F}X} \circ \mathcal{G}\phi_X \circ \epsilon_{\Sigma X} \\
&= \mathcal{G}\phi_X \circ \epsilon_{\Sigma X}
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\Sigma\epsilon_X \circ 1_{\Sigma X} = (\rho^{-1}_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{G}\phi_X) \circ \epsilon_{\Sigma X}$$

, ή ισοδύναμα

$$\Sigma\epsilon_X \circ 1_{\Sigma X} = \gamma_X \circ \epsilon_{\Sigma X}$$

Ομοίως, από τον Ορισμό 2.1.40.1, ο συναρτητής $\mathcal{FG}$ καθίσταται ένας τριγωνισμένος συναρτητής, του οποίου η φυσική ισοδυναμία $\delta : \mathcal{FG} \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ \mathcal{FG}$ ορίζεται στο αντικείμενο $Y \in \mathcal{T}$, από την σύνθεση

$$\mathcal{FG}\Sigma Y \xrightarrow{\;\mathcal{F}\rho^{-1}_Y\;} \mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}Y \xrightarrow{\;\phi_{\mathcal{G}Y}\;} \Sigma\mathcal{FG}Y$$

, δηλαδή $\delta_Y = \phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\rho_Y^{-1}$. Επιπλέον, η συν−μονάδα $\eta : \mathcal{F}\mathcal{G} \longrightarrow 1$ της συζυγίας είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός τριγωνισμένων συναρτητών. Πράγματι, για κάθε αντικείμενο $Y \in \mathcal{T}$, ισχύει

$$\begin{aligned}
\eta_{\Sigma Y} \circ \mathcal{F}\rho_Y &= \eta_{\Sigma Y} \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y}) \\
&= \eta_{\Sigma Y} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\Sigma\eta_Y \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y} \\
&= (\eta_{\Sigma Y} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\Sigma\eta_Y) \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y} \\
&= \Sigma\eta_Y \circ \eta_{\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y} \\
&= \Sigma\eta_Y \circ (\eta_{\Sigma\mathcal{F}\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\phi_{\mathcal{G}Y}) \circ \mathcal{F}\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y} \\
&= \Sigma\eta_Y \circ \phi_{\mathcal{G}Y} \circ \eta_{\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y} \\
&= \Sigma\eta_Y \circ \phi_{\mathcal{G}Y} \circ (\eta_{\mathcal{F}\Sigma\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\epsilon_{\Sigma\mathcal{G}Y}) \\
&= \Sigma\eta_Y \circ \phi_{\mathcal{G}Y} \circ 1_{\Sigma\mathcal{G}Y} \\
&= \Sigma\eta_Y \circ \phi_{\mathcal{G}Y}
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$1_{\Sigma Y} \circ \eta_{\Sigma Y} = \Sigma\eta_Y \circ (\phi_{\mathcal{G}Y} \circ \mathcal{F}\rho_Y^{-1})$$

, ή ισοδύναμα

$$1_{\Sigma Y} \circ \eta_{\Sigma Y} = \Sigma\eta_Y \circ \delta_Y$$

Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι μια φυσική ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

$\square$

Παρατήρηση 5.3.5. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας ακριβής συναρτητής, και $\mathcal{G} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{F}$, τότε ο $\mathcal{G}$ είναι γενικά μόνο αριστερά ακριβής. Εάν ο $\mathcal{G} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι ένας αριστερός συζυγής του $\mathcal{F}$, τότε ο $\mathcal{G}$ είναι γενικά μόνο δεξιά ακριβής. Εάν σκεφτούμε τα τρίγωνα ως φυσικά ανάλογα των βραχέων ακριβών ακολουθιών, και τους τριγωνισμένους συναρτητές μεταξύ τριγωνισμένων κατηγοριών ως φυσικά ανάλογα των ακριβών συναρτητών μεταξύ αβελιανών κατηγοριών, τότε το Λήμμα 5.3.4 ισχυρίζεται ότι η συζυγία εκ δεξιών ή εξ αριστερών με τον $\mathcal{F}$, διατηρεί την ακρίβεια. Στο επόμενο Λήμμα βρισκόμαστε στην ιδανική περίπτωση που ο δεξιός συζυγής ενός ακριβούς συναρτητή, είναι επίσης ακριβής.

Λήμμα 5.3.6. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά Hom−σύνολα. Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ είναι ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{F}$. Απο το Λήμμα 5.3.4, ο $\mathcal{G}$ είναι τριγωνισμένος. Απο το Λήμμα 5.3.1.1, επάγονται μοναδικοί, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, φυσικοί ακριβείς συναρτητές*

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\mathcal{A}(\mathcal{F})} \mathcal{A}(\mathcal{T}) \qquad \mathcal{A}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\mathcal{A}(\mathcal{G})} \mathcal{A}(\mathcal{T})$$

Τότε ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ είναι ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε χρήση των ισοδύναμων αβελιανών κατηγοριών $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{S})$ και $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Ένα αντικείμενο $\{s \longrightarrow s'\} \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ είναι ένας μορφισμός $s \longrightarrow s'$ στην $\mathcal{S}$. Τότε από την Παρατήρηση 5.3.2,

$$\mathcal{B}(\mathcal{F})\big[\{s \longrightarrow s'\}\big] = \{\mathcal{F}s \longrightarrow \mathcal{F}s'\}$$

Ένας μορφισμός

$$\mathcal{B}(\mathcal{F})\big[\{s \longrightarrow s'\}\big] \longrightarrow \{t \longrightarrow t'\}$$

στην $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας μεταθετικών διαγραμμάτων στην $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}s \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}s' \arrow[d] \\ t \arrow[r] & t' \end{tikzcd}$$

, όπου δυο διαγράμματα είναι ισοδύναμα εάν η διαφορά των απεικονίσεων $\mathcal{F}s' \longrightarrow t'$ παραγοντοποιείται ως $\mathcal{F}s' \longrightarrow t \longrightarrow t'$. Από την συζυγία έπεται ότι αυτός ο μορφισμός τίθεται σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με έναν μορφισμό

$$\{s \longrightarrow s'\} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})\big[\{t \longrightarrow t'\}\big]$$

στην $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, δηλαδή μια κλάση ισοδυναμίας μεταθετικών διαγραμμάτων στην $\mathcal{S}$

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & s' \arrow[d] \\ \mathcal{G}t \arrow[r] & \mathcal{G}t' \end{tikzcd}$$

, όπου δυο διαγράμματα είναι ισοδύναμα εάν η διαφορά των απεικονίσεων $s' \longrightarrow \mathcal{G}t'$ παραγοντοποιείται ως $s' \longrightarrow \mathcal{G}t \longrightarrow \mathcal{G}t'$. Συνεπώς για κάθε αντικείμενο $\{s \longrightarrow s'\} \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ και για κάθε αντικείμενο $\{t \longrightarrow t'\} \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ υπάρχουν ένα προς ένα και επί απεικονίσεις

$$\mathcal{B}(\mathcal{T})\Big[\mathcal{B}(\mathcal{F})\big[\{s \to s'\}\big], \{t \to t'\}\Big] \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})\Big[\{s \to s'\}, \mathcal{B}(\mathcal{G})\big[\{t \to t'\}\big]\Big]$$

οι οποίες είναι φυσικές στα αντικείμενα $\{s \longrightarrow s'\} \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ και $\{t \longrightarrow t'\} \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$.

□

Το ενδιαφέρον είναι ότι οι $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες, κλειστές ως προς την διάσπαση ταυτοδύναμων μορφισμών, αυτό συμβαίνει π.χ. εάν η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)] , και η $\mathcal{T}$ το αξίωμα [TR5(γ)] , όπου $\beta, \gamma > \aleph_0$, ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 5.3.7.1. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά Hom−σύνολα, κλειστές ως προς την διάσπαση ταυτοδύναμων μορφισμών. Ο τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή εάν και μόνο εάν ο ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν δεξιό συζυγή. Αυτό σημαίνει, ότι εάν ο $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν δεξιό συζηγή $\widetilde{\mathcal{G}} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, τότε ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$, και ο $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον $\widetilde{\mathcal{G}}$.*

Απόδειξη. Εάν ο τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$, τότε απο το Λήμμα 5.3.6 γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{A}(\mathcal{G}) : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Θα δείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση.

Υποθέτουμε ότι ο ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν δεξιό συζυγή $\widetilde{\mathcal{G}} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ακριβής, έπεται ότι ο συναρτητής $\widetilde{\mathcal{G}} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα ενέσιμα αντικείμενα. Επειδή οι $\mathcal{T}$ και $\mathcal{S}$ είναι κλειστές ως προς την διάσπαση ταυτοδύναμων μορφισμών, από το Πόρισμα 5.1.20 τα ενέσιμα (= προβολικά) αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ (αντίστοιχα στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$) είναι ακριβώς οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$ (αντίστοιχα $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$). Συνεπώς ο περιορισμός του $\widetilde{\mathcal{G}}$ στην $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$, επάγει έναν συναρτητή $\mathcal{G} := \widetilde{\mathcal{G}}|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$. Επίσης απο το Θεώρημα 5.1.16 ο $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ επεκτείνει μοναδικά τον

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\ \mathcal{F}\ } \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$$

, συνεπώς ο περιορισμός του στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ταυτίζεται με τον $\mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{F} = \mathcal{A}(\mathcal{F})|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$. Απο την συζυγία υπάρχουν ένα προς ένα και επί απεικονίσεις

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})\big[\mathcal{A}(\mathcal{F})[X],Y\big] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})\big[X,\widetilde{\mathcal{G}}[Y]\big]$$

οι οποίες είναι φυσικές στα αντικείμενα $X \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ και $Y \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Επομένως, λαμβάνοντας τους περιορισμούς στις $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ αντίστοιχα, προκύπτουν οι ένα προς ένα και επί απεικονίσεις

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})|_{\mathcal{T}}\big[\mathcal{A}(\mathcal{F})|_{\mathcal{S}}[X],Y\big] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})|_{\mathcal{S}}\big[X,\widetilde{\mathcal{G}}|_{\mathcal{T}}[Y]\big]$$

, ή ισοδύναμα

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}X,Y) \longrightarrow \mathcal{S}(X,\mathcal{G}Y)$$

οι οποίες είναι προφανώς φυσικές στα αντικείμενα $X \in \mathcal{S}$ και $Y \in \mathcal{T}$. Συνεπώς, ο $\mathcal{G}:\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ είναι ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{F}:\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$. Από το Λήμμα 5.3.6 ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{G}):\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{A}(\mathcal{F}):\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Συνεπώς, είναι φυσικά ισόμορφος με τον $\widetilde{\mathcal{G}}$.

□

Από το Πόρισμα 5.1.20, οι $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{S})$ και $\mathcal{A}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{T})$ είναι Frobenius αβελιανές κατηγορίες, αυτό σημαίνει ότι είναι αβελιανές κατηγορίες με αρκετά προβολικά και αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, και η κλάση των προβολικών αντικειμένων συμπίπτει με την κλάση των ενέσιμων αντικειμένων τους. Επιπλέον, στην περίπτωση που οι $\mathcal{S}^{op}$ και $\mathcal{T}^{op}$ είναι κλειστές ως προς την διάσπαση ταυτοδύναμων μορφισμών, αυτό συμβαίνει π.χ. από την Παρατήρηση 1.6.11, εάν η $\mathcal{S}^{op}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)] , και η $\mathcal{T}^{op}$ το αξίωμα [TR5(γ)] , δηλαδή εάν η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*(β)] , και η $\mathcal{T}$ το αξίωμα [TR5*(γ)] , όπου $\beta,\gamma > \aleph_0$, τα προβολικά (= ενέσιμα) αντικείμενα στις $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ και $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ακριβώς οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$ και $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Συνεπώς, ισχύει η δυϊκή της Πρότασης 5.3.7.1.

Πρόταση 5.3.7.2. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά Hom−σύνολα, κλειστές ως προς την διάσπαση ταυτοδύναμων μορφισμών. Ο τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F}:\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν αριστερό συζυγή εάν και μόνο εάν ο ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}):\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν αριστερό συζυγή. Αυτό σημαίνει, ότι εάν ο $\mathcal{A}(\mathcal{F}):\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν αριστερό συζηγή $\widetilde{\mathcal{G}}:\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, τότε ο $\mathcal{F}:\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν αριστερό συζυγή $\mathcal{G}:\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$, και ο $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον $\widetilde{\mathcal{G}}$.*

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 5.3.7.1.

□

Στην απόδειξη του Λήμματος 5.3.1.2, και της Πρότασης 5.3.7.2, υπαινίσσεται η αυτοδυϊκότητα του Θεωρήματος Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16).

Παρατήρηση 5.3.7.3. Το Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16) είναι αυτοδυϊκό. Αυτό σημαίνει ότι, ο ανταλλοίωτος συναρτητής Yoneda $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$ είναι ένας καθολικός ομολογικός συναρτητής. Έστω $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \big\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\big\}^{op}$ ο δυϊκός συναρτητής του συναλλοίωτου συναρτητή Yoneda $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Η κατηγορία $\big\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\big\}^{op}$ ικανοποιεί την ίδια καθολική συνθήκη με την αβελιανοποίηση Verdier $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$ της $\mathcal{S}^{op}$. Συνεπώς, από την μοναδικότητα της $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$, ως προς ισοδυναμία κατηγοριών, έπεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \big\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\big\}^{op}$ ο οποίος είναι μια ισοδυναμία, και επιπλέον καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^{op} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \arrow[dl, dashed] \\
\big\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\big\}^{op} &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^{op} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathcal{F}^{op}"'] & & \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \arrow[dl, dashed, "\simeq"'] \arrow[dd, "\mathcal{A}(\mathcal{F}^{op})"] \\
& \left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op} \arrow[dd, "\{\mathcal{A}(\mathcal{F})\}^{op}"' near start] & \\
\mathcal{T}^{op} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op}) \arrow[dl, dashed, "\simeq"'] \\
& \left\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\right\}^{op} &
\end{tikzcd}
$$

Συνεπώς, ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα εάν και μόνο εάν ο $\mathcal{F}^{op} : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{T}^{op}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Από το Λήμμα 5.3.1.1, ο $\mathcal{F}^{op} : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{T}^{op}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα εάν και μόνο εάν ο $\mathcal{A}(\mathcal{F}^{op}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Ισοδύναμα, από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα, εάν και μόνο εάν ο $\left\{\mathcal{A}(\mathcal{F})\right\}^{op} : \left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op} \longrightarrow \left\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\right\}^{op}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Τέλος, ο $\left\{\mathcal{A}(\mathcal{F})\right\}^{op} : \left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op} \longrightarrow \left\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\right\}^{op}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, εάν και μόνο εάν ο $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα.

Ομοίως, ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν αριστερό συζυγή εάν και μόνο εάν ο $\mathcal{F}^{op} : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{T}^{op}$ έχει έναν δεξιό συζυγή. Από τη Πρόταση 5.3.7.1, ο $\mathcal{F}^{op} : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{T}^{op}$ έχει έναν δεξιό συζυγή εάν και μόνο εάν ο $\mathcal{A}(\mathcal{F}^{op}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$ έχει έναν δεξιό συζυγή. Ισοδύναμα, από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα, εάν και μόνο εάν ο $\left\{\mathcal{A}(\mathcal{F})\right\}^{op} : \left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op} \longrightarrow \left\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\right\}^{op}$ έχει έναν δεξιό συζυγή. Τέλος, ο $\left\{\mathcal{A}(\mathcal{F})\right\}^{op} : \left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op} \longrightarrow \left\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\right\}^{op}$ έχει έναν δεξιό συζυγή, εάν και μόνο εάν ο $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν αριστερό συζυγή.

Παρατήρηση 5.3.7.4. Εργαζόμενοι παρομοίως όπως στην Παρατήρηση 5.3.7.3, μπορούμε επίσης να εξάγουμε το συμπέρασμα του Λήμματος 5.1.21.2, χρησιμοποιώντας την αυτοδυϊκότητα του Θεωρήματος Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16). Συνεπώς, εάν η κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*(β)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{S}^{op}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(β)], τότε η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3(β)]. Ισοδύναμα, η κατηγορία $\left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op}$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3(β)] , αυτό σημαίνει ότι η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3*(β)]. Ο συναρτητής αβελιανοποίησης Verdier $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}^{op})$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Ισοδύναμα, ο συναρτητής $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, αυτό σημαίνει ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα. Επιπλέον, ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}^{op}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα εάν και μόνο εάν ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}^{op}) \longrightarrow \mathcal{A}^{op}$, διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Ισοδύναμα, ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}^{op}$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα εάν και μόνο εάν ο ακριβής συναρτητής $\left\{\mathcal{A}(\mathcal{S})\right\}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}^{op}$, διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα. Αυτό σημαίνει ότι ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα εάν και μόνο εάν ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}$, διατηρεί τα $\beta-$γινόμενα.

Παρατήρηση 5.3.8. Τα Θεωρήματα ύπαρξης συζυγών συναρτητών στις αβελιανές κατηγορίες συνήθως εξαρτώνται από το γεγονός, οι κατηγορίες να είναι well$-$powered . Από την Παρατήρηση 5.2.7, γνωρίζουμε ότι για σχεδόν όλες τις μη τετριμμένες μεγάλες τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{S}$ (αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις των αντικειμένων τους δεν είναι μικρές, δηλαδή σύνολα), η αβελιανοποίηση $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ αποτυγχάνει να είναι well$-$powered . Συνεπώς, οι Προτάσεις 5.3.7.1 και 5.3.7.2 σχεδόν πάντα είναι απίθανο να εφαρμοστούν.

6 Η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

6.1 Η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ ικανοποιεί τα αξιώματα [AB3] και [AB3*]

Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος, τον οποίο θεωρούμε σταθερό σ΄ αυτό το Κεφάλαιο. Έστω $\mathcal{S}$ μια κατηγορία η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες υποθέσεις

Υπόθεση 6.1.1. *Η κατηγορία $\mathcal{S}$ λέγεται ότι ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1 εάν*

6.1.1.1. *Η $\mathcal{S}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή προσθετική κατηγορία.*

6.1.1.2. *Η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα, δηλαδή το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \alpha$ της $\mathcal{S}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$.*

6.1.1.3. *Τα ομοτοπικά pullback υπάρχουν στην $\mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει ότι, οποιοδήποτε διάγραμμα στην $\mathcal{S}$*

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[d] \\ x' \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

μπορεί να συμπληρωθεί σ΄ ένα μεταθετικό τετράγωνο στην $\mathcal{S}$

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & x \arrow[d] \\ x' \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

, έτσι ώστε για κάθε μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d] \\ x' \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

να υπάρχει μια (όχι απαραίτητα μοναδική) απεικόνιση $s \longrightarrow p$, η οποία καθιστά τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \\ x \arrow[r] & p \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \\ p \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

μεταθετικά. Το αντικείμενο p θα καλείται το ομοτοπικο pullback του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[d] \\ x' \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

και το αντίστοιχο τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d] \\ x' \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

θα καλείται το ομοτοπικό pullback τετράγωνο του διαγράμματος.

6.1.1.4. *Η $\mathcal{S}$ είναι κλειστη ως προς τα $\alpha-$pullback , δηλαδή το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου ομοτοπικών pullback τετραγώνων πληθικότητας $< \alpha$ είναι ένα ομοτοπικό pullback τετράγωνο. Αυτό σημαίνει ότι, έστω Λ ένα σύνολο πληθικότητας $< \alpha$. Εάν για κάθε $\lambda \in \Lambda$ δίνεται ένα ομοτοπικό pullback τετράγωνο*

$$\begin{tikzcd} p_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & x_\lambda \arrow[d] \\ x'_\lambda \arrow[r] & y_\lambda \end{tikzcd}$$

, τότε το συγκινόμενο

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \arrow[d] \\ \coprod_{\lambda\in\Lambda} x'_\lambda \arrow[r] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda \end{tikzcd}$$

είναι επίσης ένα ομοτοπικό pullback τετράγωνο.

Παράδειγμα 6.1.2. Έστω $\mathcal{S}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε, η $\mathcal{S}$ όντας ουσιαστικά μικρή, ικανοποιεί την συνθήκη 6.1.1.1. Επιπλέον εάν η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα, τότε ικανοποιεί την συνθήκη 6.1.1.2. Η ύπαρξη ομοτοπικών pullback έπεται από τον Ορισμό 1.4.1, και την Σημείωση 1.4.2. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ ικανονοποιεί την συνθήκη 6.1.1.3. Τέλος το γεγονός ότι η $\mathcal{S}$ είναι κλειστη ως προς τα $\alpha-$pullback έπεται από την Πρόταση 1.2.1.2. Συνεπώς, εάν μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(α)] , τότε αυτομάτως ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1.

Από εδώ και στο εξής, σ' αυτό το Κεφάλαιο, υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1, επομένως ικανοποιεί την συνθήκη 6.1.1.1, δηλαδή είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς η κατηγορία $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)}-$σύνολα.

Ορισμός 6.1.3. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ ορίζεται ως η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, της οποίας τα αντικείμενα είναι οι συναρτητές $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ οι οποίοι διατηρούν τα $\alpha-$γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Με άλλα λόγια, έστω $\mathcal{F} : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ένας προσθετικός συναρτητής. Τότε ο $\mathcal{F}$ ανήκει στην πλήρη υποκατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \subset \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ εάν, για κάθε οικογένεια $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ αντικειμένων πληθικότητας $< \alpha$ της $\mathcal{S}$, η φυσική απεικόνιση*

$$\mathcal{F}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(s_\lambda)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Λήμμα 6.1.4. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή υποκατηγορία της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Αυτό σημαίνει ότι, η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή κατηγορία, και ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης*

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$$

είναι ένας ακριβής συναρτητής.

Απόδειξη. Έστω $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Αυτό σημαίνει ότι οι συναρτητές $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F}'$ απεικονίζουν $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, και ο $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο πυρήνας $\mathcal{K} := \mathcal{K}er(\phi)$ και ο συνπυρήνας $\mathcal{Q} := \mathcal{C}oker(\phi)$ του ϕ, οι οποίοι αποτελούν σαφώς αντικείμενα της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, στην πραγματικότητα ανήκουν στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \subset \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.

Συμπληρώνω τον $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ σε μια ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{K} \arrow[r, dashed] & \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{F}' \arrow[r, dashed] & \mathcal{Q} \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}
$$

Έστω $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων πληθικότητας $< \alpha$ της $\mathcal{S}$. Επειδή οι $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F}'$ ανήκουν στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, οι φυσικές απεικονίσεις

$$
\mathcal{F}\Bigg(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Bigg) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(s_\lambda)
$$

$$
\mathcal{F}'\Bigg(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Bigg) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}'(s_\lambda)
$$

είναι και οι δύο ισομορφισμοί. Επομένως, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{F}'\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(s_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}'(s_\lambda)
\end{tikzcd}
$$

, στο οποίο οι κάθετες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{F}'\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{Q}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{K}(s_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(s_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}'(s_\lambda) \arrow[r] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{Q}(s_\lambda) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Η κάτω γραμμή είναι ακριβής γιατί ο συναρτητής $\prod_{\lambda\in\Lambda}\big(\,-\,\big) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι ακριβής, σε οποιοδήποτε αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Συνεπώς, από το 5 Λήμμα έπεται το ζητούμενο.

□

Λήμμα 6.1.5. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Τότε η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3*], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα. Επίσης, ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης*

$$
\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)
$$

διατηρεί τα γινόμενα.

Απόδειξη. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Η κατηγορία $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει γινόμενα. Συνεπώς, μπορούμε να σχηματίσουμε το γινόμενο τους

$$
\Bigg\{\prod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\Bigg\}\big(\,-\,\big) : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b
$$

στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Το γινόμενο ορίζεται με τον προφανή τρόπο στα αντικείμενα, δηλαδή για κάθε $s \in \mathcal{S}$

$$\left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s) \;=\; \prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu(s)$$

, και κατ΄ αναλογία στους μορφισμούς. Θα δείξουμε ότι ο συναρτητής $\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu$ είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, δηλαδή διατηρεί τα $\alpha-$γινόμενα.

Έστω $\{s_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων πληθικότητας $<\alpha$ της $\mathcal{S}$. Από την συνθήκη 6.1.1.2 το $\alpha-$συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Έστω $i_\lambda : s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda$ η φυσική ένθεση στο συγκινόμενο, για κάθε $\lambda\in\Lambda$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}\left[\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right] \xrightarrow{\;\;\phi_\lambda\;\;} \left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s_\lambda)$$

, όπου $\phi_\lambda := \left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(i_\lambda)$, για κάθε $\lambda\in\Lambda$. Το γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s_\lambda)$ προφανώς υπάρχει στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s_\lambda) & \\
\left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}\left[\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right] \arrow[ur, "\phi_\lambda"'] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \prod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s_\lambda) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

, όπου $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s_\lambda) \longrightarrow \left\{\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s_\lambda)$ είναι η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda\in\Lambda$. Για κάθε $\mu\in M$, επειδή ο $\mathcal{F}_\mu\in\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, έπεται ότι η φυσική απεικόνιση

$$\mathcal{F}_\mu\left[\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right] \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\mu(s_\lambda)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\prod_{\mu\in M}(\,-\,) : \mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{A}b$, έπεται ότι η απεικόνιση

$$\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\left[\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right] \longrightarrow \prod_{\mu\in M}\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\mu(s_\lambda)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Τώρα χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό

$$\prod_{\mu\in M}\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\mu(s_\lambda) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu(s_\lambda)$$

συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\left[\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right] \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu(s_\lambda)$$

, ισοδύναμα η απεικόνιση

$$\phi : \Big\{ \prod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} \Big[\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \Big] \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \Big\{ \prod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s_\lambda)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, ο συναρτητής $\prod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu$ ο οποίος προφανώς υπάρχει, ως ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, είναι επιπλέον ένα αντικείμενο της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα γινόμενα.

$\square$

Παρατήρηση 6.1.6. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Η κατηγορία $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει συγκινόμενα. Το συγκινόμενο τους

$$\Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (\,-\,) : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

ορίζεται με τον προφανή τρόπο στα αντικείμενα, δηλαδή για κάθε $s \in \mathcal{S}$

$$\Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s) \ = \ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu(s)$$

, και κατ΄ αναλογία στους μορφισμούς. Έστω $\alpha = \aleph_0$, τότε η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα. Επιπλέον, το συγκινόμενο οποιουδήποτε συνόλου $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ αντικειμένων της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ υλοποιείται ως το συγκινόμενο $\coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu$ του συνόλου των αντικειμένων αυτών στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Με άλλα λόγια, ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, ο οποίος είναι ο ταυτοτικός στην προκειμένη περίπτωση, διατηρεί τα συγκινόμενα. Έστω $\alpha > \aleph_0$. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα συνόλο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Τότε ο συναρτητής $\coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu$ δεν είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, δηλαδή δεν διατηρεί τα $\alpha-$γινόμενα. Ο λόγος είναι ο εξής. Έστω $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια αντικειμένων πληθικότητας $< \alpha$ της $\mathcal{S}$. Από την συνθήκη 6.1.1.2 το $\alpha-$συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Έστω $i_\lambda : s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ η φυσική ένθεση στο συγκινόμενο, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} \Big[\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \Big] \xrightarrow{\ \phi_\lambda\ } \Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s_\lambda)$$

, όπου $\phi_\lambda := \Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (i_\lambda)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Το γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda} \Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s_\lambda)$ προφανώς υπάρχει στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s_\lambda) & \\
\Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} \Big[\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \Big] \arrow[ur, "\phi_\lambda"] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} \Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s_\lambda) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

, όπου $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} \Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s_\lambda) \longrightarrow \Big\{ \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \Big\} (s_\lambda)$ είναι η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Επειδή, η απεικόνιση

$$\coprod_{\mu\in M} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\mu(s_\lambda) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu(s_\lambda)$$

δεν είναι ένας ισομορφισμός (στην $\mathcal{A}b$) εν γένει, εργαζόμενοι παρομοίως οπώς στην απόδειξη του Λήμματος 6.1.5, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε η απεικόνιση ϕ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, δεν μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ των αντικειμένων με την δομή του συγκινομένου του συνόλου των αντικειμένων αυτών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.

Παρόλα αυτά, μπορούμε να εφοδιάσουμε ένα οποιοδήποτε σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ με την δομή ενός συγκινομένου. Από τα Λήμματα 6.1.4, και 6.1.5 ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$$

είναι ακριβής και διατηρεί τα γινόμενα, επομένως διατηρεί τα αντίστροφα όρια. Συνεπώς, μπορούμε να δείξουμε ότι έχει έναν αριστερό συζυγή

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$$

Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο άρθρο [[Nee02], Πόρισμα 2.6, σελ. 405]. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Μπορούμε να σχηματίσουμε το συγκινόμενο τους

$$\left\{ \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(-)$$

στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Ο $\mathcal{L}$ είναι ένας αριστερός συζυγής, συνεπώς διατηρεί τα συγκινόμενα. Τότε το συγκινόμενο του συνόλου των αντικειμένων $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ ορίζεται (είναι ισόμορφο) ως η εικόνα στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ του συγκινομένου τους στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ μέσω του $\mathcal{L}$, δηλαδή ορίζεται (κατάχρηση συμβολισμού) ως το αντικείμενο

$$\left\{ \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(-) \ := \ \mathcal{L}\left(\left\{ \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(-) \right)$$

Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα. Επειδή τα συγκινόμενα θα διαδραματίσουν ουσιαστικό ρόλο εφεξής στην ανάπτυξη της Θεωρίας, θα επιθυμούσαμε μια πολύ σαφή περιγραφή τους. Σχεδόν όλη η Ενότητα θα αφιερωθεί σ΄ αυτον τον σκοπό.

Ορισμός 6.1.7. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω s ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Ορίζουμε το σύνολο*

$$\left\{ \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(s) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{κλάση των ζευγών της μορφής} \\ s \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda, \quad \beta \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ \text{όπου } \Lambda \subset M \text{ πληθικότητας} < \alpha \end{array} \right\}$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η κατηγορία $\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά μικρή, η κλάση $\left\{ \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(s)$ έπεται ότι είναι ένα μικρό σύνολο. Στην συνέχεια, δοθέντος ενός συνόλου συναρτητών $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$, θα κατασκευάσουμε τον συναρτητή

$$\left\{ \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(-) : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

, και θα δείξουμε ότι είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Ο συναρτητής θα κατασκευαστεί κατα σημείο, δηλαδή για κάθε $s \in \mathcal{S}$, η εικόνα του $\left\{ \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(s)$ θα αποκτηθεί επιβάλλοντας μια κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\left\{ \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(s)$.

Ορισμός 6.1.8. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω s ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Έστω ότι δίνονται δυο στοιχεία του $\left\{ \bigvee_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \right\}(s)$, αυτό σημαίνει ότι δίνονται δυο ζεύγη*

$$\begin{array}{ll} s \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda, & \beta \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} t_\lambda, & \beta' \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \end{array}$$

Εάν $\lambda \notin \Lambda$ θέτουμε $s_\lambda = 0$, και ομοίως εάν $\lambda \notin \Lambda'$ θέτουμε $t_\lambda = 0$. Η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1, επομένως είναι μια προσθετική κατηγορία, συνεπώς περιέχει ένα μηδενικό αντικείμενο. Οι απεικονίσεις

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda$$

επάγουν μια απεικόνιση

$$s \dashrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

, η οποία υπάρχει επειδή η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1, επομένως είναι μια προσθετική κατηγορία, συνεπώς το συγκινόμενο

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda = \left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\right\} \oplus \left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} t_\lambda\right\}$$

είναι ένα γινόμενο–συγκινόμενο στην $\mathcal{S}$, ειδικότερα είναι ένα γινόμενο. Τα ζεύγη

$$\begin{array}{ll} s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, & \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, & \beta' \in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \end{array}$$

είναι ισοδύναμα, εαν υπάρχει μια οικογένεια $\{k_\lambda, \lambda \in \Lambda\cup\Lambda'\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

, και οι εικόνες των β και β' στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus t_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

να συμπίπτουν. Ακριβέστερα, θεωρούμε τον ανταλλοίωτο συναρτητή (ο οποίος δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον συναρτητή του Λήμματος 6.1.5)

$$\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda\right\}(-) : \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{S} \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{S}$$

ο οποίος στα αντικείμενα

$$\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda\right\}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \beta_\lambda\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(\beta_\lambda)$$

, και κατ΄ αναλογία στους μορφισμούς. Για κάθε $\lambda \in \Lambda\cup\Lambda'$, θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$s \longrightarrow k_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

Εφαρμόζοντας, τον συναρτητή λαμβάνουμε μια απεικόνιση

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus t_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

Υποθέτουμε ότι

$$\beta = \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big) \quad \text{και} \quad \beta' = \prod_{\lambda\in\Lambda'}\beta'_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda\big(t_\lambda\big)$$

τότε ζεύγη είναι

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, & \beta &= \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big) \\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, & \beta' &= \prod_{\lambda\in\Lambda'}\beta'_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda\big(t_\lambda\big) \end{aligned}$$

ισοδύναμα εάν

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda\big(f_\lambda\big)\big(\beta_\lambda\big) = \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda\big(f_\lambda\big)\big(\beta'_\lambda\big)$$

, όπου εάν $\lambda \notin \Lambda$ υποχρεωτικά θέτουμε $\beta_\lambda = 0$, και ομοίως εάν $\lambda \notin \Lambda'$ θέτουμε $\beta'_\lambda = 0$. Προκειμένου να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό θα γράφουμε

$$\Big\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda\big(f_\lambda\big)\Big\}(\beta) = \Big\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda\big(f_\lambda\big)\Big\}(\beta')$$

Λήμμα 6.1.9. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω s ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Τότε η σχέση που ορίστηκε στον Ορισμό 6.1.8 είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η σχέση είναι προφανώς ανακλαστική και συμμετρική. Μένει να δείξουμε την μεταβατικότητα. Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο ζεύγη ισοδύναμων στοιχείων στην $\Big\{\bigvee_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s)$

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda, & \beta &\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(r_\lambda) \\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, & \beta' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, & \beta' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda''} t_\lambda, & \beta'' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda''}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \end{aligned}$$

αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι τα ζεύγη

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda, & \beta &\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(r_\lambda) \\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda''} t_\lambda, & \beta'' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda''}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμα. Το γεγονός ότι τα ζεύγη

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda, & \beta &\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(r_\lambda) \\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, & \beta' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμα, σημαίνει ότι υπάρχει μια οικογένεια $\{k_\lambda, \lambda \in \Lambda \cup \Lambda'\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} r_\lambda \oplus s_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} r_\lambda \oplus s_\lambda$$

και οι εικόνες των β και β' στην

$$\prod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(r_\lambda \oplus s_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)} \prod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

να συμπίπτουν. Το γεγονός ότι τα ζεύγη

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda'} s_\lambda, \qquad \beta' \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda''} t_\lambda, \qquad \beta'' \in \prod_{\lambda \in \Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμα, σημαίνει ότι υπάρχει μια οικογένεια $\{l_\lambda, \lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} l_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} g_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

και οι εικόνες των β' και β'' στην

$$\prod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(l_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus t_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(g_\lambda)} \prod_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(l_\lambda)$$

να συμπίπτουν. Για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda' \cup \Lambda''$, θεωρούμε τα διαγράμματα στην $\mathcal{S}$

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "1 \oplus g_\lambda"] \\ k_\lambda \oplus t_\lambda \arrow[r, "f_\lambda \oplus 1"] & r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda \end{tikzcd}$$

Από την υπόθεση Υπόθεση 6.1.1.3, τα διαγράμματα μπορούν να συμπληρωθούν σε ομοτοπικά pullback τετράγωνα

$$\begin{tikzcd}
m_\lambda \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & r_\lambda \oplus l_\lambda \arrow[d, "1\oplus g_\lambda"] \\
k_\lambda \oplus t_\lambda \arrow[r, "f_\lambda \oplus 1"] & r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda
\end{tikzcd}$$

Από την υπόθεση Υπόθεση 6.1.1.4, η $\mathcal{S}$ είναι κλειστη ως προς τα $\alpha-$pullback , συνεπώς το συγκινόμενο των ομοτοπικών pullback τετραγώνων

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} m_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus l_\lambda \arrow[d, "\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} 1\oplus g_\lambda"] \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} k_\lambda \oplus t_\lambda \arrow[r, "\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} f_\lambda \oplus 1"] & \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda
\end{tikzcd}$$

είναι ένα ομοτοπικό pullback τετράγωνο. Από την άλλη μεριά, υπάρχει ένα προφανές μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus l_\lambda \arrow[d, "\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} 1\oplus g_\lambda"] \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} k_\lambda \oplus t_\lambda \arrow[r, "\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} f_\lambda \oplus 1"] & \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς, από την Σημείωση 1.4.2 υπάρχει μια απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} m_\lambda$$

(όχι απαραίτητα μοναδική) η οποία καθιστά τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} m_\lambda \arrow[d] \\
& \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} k_\lambda \oplus t_\lambda
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} m_\lambda \arrow[d] \\
& \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus l_\lambda
\end{tikzcd}$$

μεταθετικά. Έστω η απεικόνιση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} m_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda' \cup \Lambda''$, η απεικόνιση h_λ είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας μια εκ των δύο συνθέσεων των πλευρών του προηγούμενου ομοτοπικού pullback τετραγώνου. Υποθέτουμε ότι είναι η σύνθεση

$$m_\lambda \longrightarrow k_\lambda \oplus t_\lambda \xrightarrow{f_\lambda \oplus 1} r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda$$

Από τα παραπάνω δεδομένα, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda) \arrow[r, "\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda \oplus 1)"] \arrow[d, "\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(1 \oplus g_\lambda)"] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda \oplus t_\lambda) \arrow[d] \\
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(r_\lambda \oplus l_\lambda) \arrow[r] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(m_\lambda)
\end{tikzcd}$$

Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι εικόνες των β, β' και β'' στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(m_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda) \xrightarrow{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(h_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(m_\lambda)$$

συμπίπτουν. Επομένως, δείξαμε ότι υπάρχει μια οικογένεια $\{m_\lambda, \lambda \in \Lambda \cup \Lambda' \cup \Lambda''\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} m_\lambda \xrightarrow{\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda$$

και οι εικόνες των β, β' και β'' στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(m_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda) \xrightarrow{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(h_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(m_\lambda)$$

να συμπίπτουν. Συνεπώς, τα στοιχεία

$$\begin{aligned}
s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda, & \beta &\in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(r_\lambda) \\
s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, & \beta' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\
s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda''} t_\lambda, & \beta'' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)
\end{aligned}$$

είναι ισοδύναμα. Αυτό αποδεικνύει την προσεταιριστικότητα.

□

Ορισμός 6.1.10. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω s ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Το σύνολο*

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$$

ορίζεται ως το πηλίκο του $\left\{\bigvee_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$ ως προς την σχέση ισοδυναμίας του Ορισμού 6.1.8.

Λήμμα 6.1.11. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω s ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Το σύνολο $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$ έχει την φυσική δομή μιας αβελιανής ομάδας.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο στοιχεία στην $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$

$$\begin{array}{llll} s \longrightarrow \displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, & \beta & \in & \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s \longrightarrow \displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, & \beta' & \in & \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \end{array}$$

Ορίζουμε το άθροισμα τους να είναι το ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\oplus t_\lambda, \qquad \beta+\beta' \;\in\; \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda\oplus t_\lambda)$$

Η πρόσθεση είναι καλώς ορισμένη. Αυτό σημαίνει ότι, ισοδύναμα στοιχεία στην $\left\{\bigvee_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$ έχουν ισοδύναμα αθροίματα. Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο ισοδύναμα στοιχεία

$$\begin{array}{llll} s \longrightarrow \displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, & \beta & \in & \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s \longrightarrow \displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda'} s'_\lambda, & \beta' & \in & \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(s'_\lambda) \end{array}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια οικογένεια αντικειμένων $\{k_\lambda, \lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\}$ έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\oplus s'_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\oplus s'_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'$

$$f_\lambda \;=\; \begin{bmatrix} g_\lambda \\ g'_\lambda \end{bmatrix}$$

και οι εικόνες των β και β' στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\oplus s'_\lambda\big) \xrightarrow{\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda\big(k_\lambda\big)$$

, όπου για κάθε $\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'$

$$\mathcal{F}_\lambda(f_\lambda) \;=\; \begin{bmatrix}\mathcal{F}_\lambda(g_\lambda) & \mathcal{F}_\lambda(g'_\lambda)\end{bmatrix}$$

να συμπίπτουν. Επίσης, υποθέτουμε ότι δίνονται δύο ισοδύναμα στοιχεία

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in M} t_\lambda, &\qquad \gamma &\in \prod_{\lambda\in M}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)\\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in M'} t'_\lambda, &\qquad \gamma' &\in \prod_{\lambda\in M'}\mathcal{F}_\lambda(t'_\lambda) \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια οικογένεια αντικειμένων $\{l_\lambda,\lambda\in M\cup M'\}$ έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in M\cup M'} t_\lambda\oplus t'_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in M\cup M'} l_\lambda \xrightarrow{\displaystyle\coprod_{\lambda\in M\cup M'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in M\cup M'} t_\lambda\oplus t'_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda\in M\cup M'$

$$g_\lambda \;=\; \begin{bmatrix}h_\lambda\\ h'_\lambda\end{bmatrix}$$

και οι εικόνες των γ και γ' στην

$$\prod_{\lambda\in M\cup M'} \mathcal{F}_\lambda\big(l_\lambda\big)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in M\cup M'} \mathcal{F}_\lambda\big(t_\lambda\oplus t'_\lambda\big) \xrightarrow{\displaystyle\prod_{\lambda\in M\cup M'} \mathcal{F}_\lambda(g_\lambda)} \prod_{\lambda\in M\cup M'} \mathcal{F}_\lambda\big(l_\lambda\big)$$

, όπου για κάθε $\lambda\in M\cup M'$

$$\mathcal{F}_\lambda(g_\lambda) \;=\; \begin{bmatrix}\mathcal{F}_\lambda(h_\lambda) & \mathcal{F}_\lambda(h'_\lambda)\end{bmatrix}$$

να συμπίπτουν. Θεωρούμε τα αθροίσματα

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup M} s_\lambda\oplus t_\lambda, &\qquad \beta+\gamma &\in \prod_{\lambda\in\Lambda\cup M}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda\oplus t_\lambda)\\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'\cup M'} s'_\lambda\oplus t'_\lambda, &\qquad \beta'+\gamma' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda'\cup M'}\mathcal{F}_\lambda(s'_\lambda\oplus t'_\lambda) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω δεδομένα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια οικογένεια αντικειμένων $\{k_\lambda\oplus l_\lambda,\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup M\cup M'\}$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup M\cup M'} s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus s'_\lambda \oplus t'_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup M\cup M'} k_\lambda \oplus l_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup M\cup M'} f_\lambda \oplus g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup M\cup M'} s_\lambda \oplus s'_\lambda \oplus t_\lambda \oplus t'_\lambda$$

, ισοδύναμα ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup M\cup\Lambda'\cup M'} k_\lambda \oplus l_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup M\cup\Lambda'\cup M'} f'_\lambda \oplus g'_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup M\cup\Lambda'\cup M'} s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus s'_\lambda \oplus t'_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup M$

$$f'_\lambda \; = \begin{bmatrix} g_\lambda & 0 \\ 0 & h_\lambda \end{bmatrix}$$

, και για κάθε $\lambda \in \Lambda' \cup M'$

$$g'_\lambda \; = \begin{bmatrix} g'_\lambda & 0 \\ 0 & h'_\lambda \end{bmatrix}$$

και οι εικόνες των $\beta+\gamma$ και $\beta'+\gamma'$ στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup M\cup\Lambda'\cup M'} \mathcal{F}_\lambda\big(k_\lambda \oplus l_\lambda\big)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup M\cup\Lambda'\cup M'} \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus s'_\lambda \oplus t'_\lambda\big) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup M\cup\Lambda'\cup M'} \mathcal{F}_\lambda(f'_\lambda \oplus g'_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup M\cup\Lambda'\cup M'} \mathcal{F}_\lambda\big(k_\lambda \oplus l_\lambda\big)$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup M \cup \Lambda' \cup M'$

$$\mathcal{F}_\lambda(f'_\lambda \oplus g'_\lambda) \; = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_\lambda(g_\lambda) & 0 & \mathcal{F}_\lambda(g'_\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_\lambda(h_\lambda) & 0 & \mathcal{F}_\lambda(h'_\lambda) \end{bmatrix}$$

να συμπίπτουν.

Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική. Έστω ότι δίνονται τα στοιχεία

$$\begin{aligned} s &\xrightarrow{f} \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, & \beta &\in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s &\xrightarrow{g} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, & \beta' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \\ s &\xrightarrow{h} \coprod_{\lambda\in\Lambda''} r_\lambda, & \beta'' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(r_\lambda) \end{aligned}$$

Τότε τα στοιχεία

$$s \xrightarrow{g'} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} (s_\lambda \oplus t_\lambda) \oplus r_\lambda, \qquad (\beta+\beta')+\beta'' \in \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda((s_\lambda \oplus t_\lambda) \oplus r_\lambda)$$

$$s \xrightarrow{g'} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} (s_\lambda \oplus t_\lambda) \oplus r_\lambda, \qquad \beta+(\beta'+\beta'') \in \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus (t_\lambda \oplus r_\lambda))$$

, όπου

$$g' = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

είναι ισοδύναμα. Πράγματι, η απεικόνιση

$$s \xrightarrow{g''} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda$$

, όπου

$$g'' = \begin{bmatrix} g' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

παραγοντοποιείται ως

$$s \xrightarrow{g'} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda' \cup \Lambda''$

$$g_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, και οι εικόνες των $(\beta+\beta')+\beta''$ και $\beta+(\beta'+\beta'')$ στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda \oplus s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda\big) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda(g_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\cup\Lambda''} \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus r_\lambda\big)$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda' \cup \Lambda''$

$$\mathcal{F}_\lambda(g_\lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_\lambda(1) & 0 & 0 & \mathcal{F}_\lambda(1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_\lambda(1) & 0 & 0 & \mathcal{F}_\lambda(1) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_\lambda(1) & 0 & 0 & \mathcal{F}_\lambda(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

συμπίπτουν.

Η πρόσθεση είναι μεταθετική. Έστω ότι δίνονται τα στοιχεία

$$s \xrightarrow{\quad f \quad} \coprod_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

$$s \xrightarrow{\quad g \quad} \coprod_{\lambda \in \Lambda'} t_\lambda, \qquad \beta' \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

Τότε τα στοιχεία

$$s \xrightarrow{\quad g' \quad} \coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda, \qquad \beta + \beta' \in \prod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus t_\lambda)$$

$$s \xrightarrow{\quad g'' \quad} \coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} t_\lambda \oplus s_\lambda, \qquad \beta' + \beta \in \prod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(t_\lambda \oplus s_\lambda)$$

, όπου

$$g' = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

, και

$$g'' = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}$$

είναι ισοδύναμα. Πράγματι, η απεικόνιση

$$s \xrightarrow{\quad g''' \quad} \coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus t_\lambda \oplus s_\lambda$$

, όπου

$$g''' = \begin{bmatrix} g' \\ g'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ g \\ f \end{bmatrix}$$

παραγοντοποιείται ως

$$s \xrightarrow{\quad g' \quad} \coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda \oplus t_\lambda \oplus s_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'$

$$f_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, και οι εικόνες των $\beta + \beta'$ και $\beta' + \beta$ στην

$$\prod_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus t_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda\oplus t_\lambda\oplus t_\lambda\oplus s_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda\oplus t_\lambda)$$

, όπου για κάθε $\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'$

$$\mathcal{F}_\lambda(f_\lambda) \;=\; \begin{bmatrix} \mathcal{F}_\lambda(1) & 0 & 0 & \mathcal{F}_\lambda(1) \\ 0 & \mathcal{F}_\lambda(1) & \mathcal{F}_\lambda(1) & 0 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

συμπίπτουν.

Ένας αντιπρόσωπος της κλάσεως ισοδυναμίας του μηδενός της πρόσθεσης είναι ένα στοιχείο της μορφής

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad 0 \,\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

, και οποιαδήποτε δύο τέτοια στοιχεία αυτής της μορφής είναι ισοδύναμα. Τέλος, αυτό το στοιχείο είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, και κάθε στοιχείο το οποίο ανήκει στην $\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s)$

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \,\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

έχει προσθετικό αντίστροφο το στοιχείο

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad -\beta \,\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

□

Λήμμα 6.1.12. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu\in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Η αντιστοιχία $\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,-\,)$ η οποία απεικονίζει ένα αντικείμενο $s\in\mathcal{S}$ στην αβελιανή ομάδα $\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s)$ μπορεί κατά φυσικό τρόπο να επεκταθεί σ΄ έναν προσθετικό ανταλλοίωτο συναρτητή*

$$\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,-\,) : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

Απόδειξη. Αρκεί να ορίσουμε την αντιστοιχία $\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,-\,)$ στους μορφισμούς στην $\mathcal{S}$. Έστω $f : s \longrightarrow t$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{S}$. Θέλουμε να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(t) \longrightarrow \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s)$$

στην $\mathcal{A}b$. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα στοιχείο της $\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(t)$, δηλαδή ένα ζεύγος

$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \beta\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

Η σύνθεση με την απεικόνιση $f : s \longrightarrow t$ επάγει ένα ζεύγος

$$s \xrightarrow{\;f\;} t \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda), \qquad \beta\in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

το οποίο αναπαριστά ένα στοιχείο της $\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s)$. Επομένως, η ζητούμενη απεικόνιση είναι η

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(t) \xrightarrow{\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)} \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$$

Η $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)$ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση, δηλαδή απεικονίζει δύο στοιχεία τα οποία είναι ισοδύναμα στην $\left\{\bigvee_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(t)$ σε δύο στοιχεία τα οποία είναι ισοδύναμα στην $\left\{\bigvee_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$. Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο ισοδύναμα ζεύγη

$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$
$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, \qquad \beta' \in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει μια οικογένεια $\{k_\lambda, \lambda\in\Lambda\cup\Lambda'\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

, και οι εικόνες των β και β' στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda\oplus t_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

να συμπίπτουν. Τότε τα ζεύγη

$$s \xrightarrow{f} t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$
$$s \xrightarrow{f} t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, \qquad \beta' \in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

προφανώς είναι ισοδύναμα.

Η $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)$ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων ως προς την προσθετική δομή του Λήμματος 6.1.11. Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο στοιχεία στην $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(t)$

$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$
$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, \qquad \beta' \in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

, και συμβολίζουμε τα στοιχεία αυτά με B και B' αντίστοιχα. Τότε η εικόνα του αθροίσματος των B και B' μέσω της $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)$, δηλαδή το ζεύγος

$$s \xrightarrow{\ \ f\ \ } t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus t_\lambda, \qquad \beta+\beta' \in \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda\oplus t_\lambda)$$

προφανώς ισούται στην $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$, με το άθροισμα των εικόνων των B και B' μέσω της $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)$, δηλαδή με το άθροισμα των ζευγών

$$s \xrightarrow{\ \ f\ \ } t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

$$s \xrightarrow{\ \ f\ \ } t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda, \qquad \beta' \in \prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

Συνεπώς,

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)(B+B') = \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)(B) + \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)(B')$$

Η $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(-)$ καθίσταται ένας συναρτητής, δηλαδή διατηρεί τις συνθέσεις των απεικονίσεων και τις ταυτότητες. Πράγματι, θεωρούμε ένα ζεύγος

$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

, και έστω $f : r \longrightarrow s$, και $g : s \longrightarrow t$ απεικονίσεις στην $\mathcal{S}$. Τότε εικόνα της σύνθεσης των f και g μέσω της $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(\,-\,)$, δηλαδή η απεικόνιση

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(t) \xrightarrow{\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(g\circ f)} \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(r)$$

προφανώς ισούται με την σύνθεση των εικόνων των f και g, μέσω της $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(\,-\,)$ με την αντίστροφη σειρά, δηλαδή με την απεικόνιση

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(t) \xrightarrow{\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(g)} \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s) \xrightarrow{\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)} \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(r)$$

Συνεπώς,

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(g\circ f) = \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)\circ\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(g)$$

Επίσης, εάν $1 : s \longrightarrow s$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο s, τότε επαληθεύεται άμεσα ότι

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(1) = 1$$

Τέλος, ο συναρτητής $\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu$ είναι προσθετικός. Πράγματι, έστω ότι δίνονται δυο μορφισμοί $f : s \longrightarrow t$ και $g : s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$. Από το Λήμμα 6.1.13, ο συναρτητής $\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu$ διατηρεί τα $\alpha-$γινόμενα, επομένως διατηρεί τα πεπερασμένα γινόμενα, και άρα διατηρεί τα (πεπερασμένα) γινόμενα$-$συγκινόμενα. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(f+g) &= \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,\bigtriangledown^t \circ (f\oplus g)\circ \bigtriangleup_s) \\
&= \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,\bigtriangleup_s\,)\circ\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(f\oplus g)\circ\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,\bigtriangledown^t\,) \\
&= \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,\bigtriangleup_s\,)\circ\bigg(\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(f)\oplus\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(g)\bigg)\circ\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,\bigtriangledown^t\,) \\
&= \bigtriangledown^{\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\}(s)}\circ\bigg(\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(f)\oplus\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(g)\bigg)\circ\bigtriangleup_{\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\}(t)} \\
&= \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(f)+\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(g)
\end{aligned}
$$

, όπου $\bigtriangleup_s : s \longrightarrow s\oplus s$ είναι η διαγώνια απεικόνιση και $\bigtriangledown^t : t\oplus t \longrightarrow t$ είναι η συν$-$διαγώνια απεικόνιση στην $\mathcal{S}$ αντίστοιχα.

$\square$

Λήμμα 6.1.13. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu\in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Ο συναρτητής*

$$\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(\,-\,) : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, δηλαδή απεικονίζει $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$.

Απόδειξη. Έστω $\{s_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$ μια οικογένεια αντικειμένων πληθικότητας $<\alpha$ της $\mathcal{S}$. Από την συνθήκη 6.1.1.2 το $\alpha-$συγκινόμενο $\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma$ υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Έστω $i_\gamma : s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma$ η φυσική ένθεση στο συγκινόμενο, για κάθε $\gamma\in\Gamma$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}\Big[\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma\Big] \xrightarrow{\ \phi_\gamma\ } \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s_\gamma)$$

, όπου $\phi_\gamma := \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(i_\gamma)$, για κάθε $\gamma\in\Gamma$. Το γινόμενο $\prod_{\gamma\in\Gamma}\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s_\gamma)$ προφανώς υπάρχει στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
 & \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s_\gamma) & \\
\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}\Big[\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma\Big] \arrow[ur, "\phi_\gamma"] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \prod_{\gamma\in\Gamma}\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s_\gamma) \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

, όπου $p_\gamma : \prod_{\gamma\in\Gamma}\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s_\gamma) \longrightarrow \Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s_\gamma)$ είναι η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\gamma\in\Gamma$. Η ϕ απεικονίζει ένα ζεύγος

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \beta = \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

στην $\gamma-$άδα

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}\left\{s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \beta = \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)\right\}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι ένας ισομορφισμός, δηλαδή η ϕ είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση.

Η ϕ είναι επί. Έστω ότι δίνεται μια $\gamma-$άδα στην $\prod_{\gamma\in\Gamma}\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}(s_\gamma)$ αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\gamma\in\Gamma$, δίνεται ένα ζεύγος

$$s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda_\gamma} t^\gamma_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda_\gamma}\beta^\gamma_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda_\gamma}\mathcal{F}_\lambda(t^\gamma_\lambda)$$

, όπου $\Lambda_\gamma \subset M$ είναι ένα υποσύνολο πληθικότητας $<\alpha$. Θέτουμε

$$\Lambda = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Lambda_\gamma$$

, και εάν $\lambda\notin\Lambda_\gamma$ θέτουμε $t^\gamma_\lambda = 0$. Επειδή κάθε σύνολο $\Lambda_\gamma\subset M$ είναι πληθικότητας $<\alpha$ και το Γ είναι επίσης ένα σύνολο πληθικότητας $<\alpha$, η ένωση $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Lambda_\gamma$ έχει πληθικότητα φραγμένη απο το άθροισμα ενός συνόλου πληθαρίθμων πληθικότητας $<\alpha$, οι οποίοι είναι όλοι μικρότεροι του α. Επειδή ο α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, έπεται ότι η πληθικότητα του Λ είναι $<\alpha$.

Το γινόμενο

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}\prod_{\lambda\in\Lambda}\beta^\gamma_\lambda \quad\in\quad \prod_{\gamma\in\Gamma}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t^\gamma_\lambda)\right)$$

χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t^\gamma_\lambda)\right) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{F}_\lambda(t^\gamma_\lambda)\right)$$

αντιστοιχεί στο γινόμενο

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\beta^\gamma_\lambda \quad\in\quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{F}_\lambda(t^\gamma_\lambda)\right)$$

Για κάθε $\lambda\in\Lambda$, το αντικείμενο $\mathcal{F}_\lambda$ ανήκει στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, αυτό σημαίνει ότι

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\beta^\gamma_\lambda \quad\in\quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma}t^\gamma_\lambda\right)$$

Συνεπώς, υπάρχει μια απεικόνιση

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\gamma\in\Gamma}\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}t^\gamma_\lambda\right\}$$

, ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma}\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda^\gamma\right\} \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right\}$$

μια απεικόνιση

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right\}$$

, και ένα στοιχείο

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\beta_\lambda^\gamma \quad\in\quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right)$$

, δηλαδή υπάρχει ένα ζεύγος

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right\}, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\beta_\lambda^\gamma \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right)$$

το οποίο είναι ένα στοιχείο της $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}\left[\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma\right]$. Η ϕ απεικονίζει το στοιχείο αυτό στην $\gamma-$άδα

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}\left\{s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right\}, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\beta_\lambda^\gamma \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right)\right\}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την αρχική $\gamma-$άδα που ξεκινήσαμε. Πράγματι, για κάθε $\gamma\in\Gamma$, τα ζεύγη

$$s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda_\gamma}t_\lambda^\gamma, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda_\gamma}\beta_\lambda^\gamma \in \prod_{\lambda\in\Lambda_\gamma}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda^\gamma)$$

$$s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\left\{\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right\}, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\beta_\lambda^\gamma \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma}t_\lambda^\gamma\right)$$

είναι προφανώς ισοδύναμα. Συνεπώς, η ϕ είναι επί.

Η ϕ είναι ένα προς ένα. Έστω ότι δίνεται ένα στοιχείο της $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}\left[\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma\right]$ το οποίο απεικονίζεται στο μηδέν μέσω της ϕ. Το στοιχείο αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί απο ένα ζεύγος

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda, \qquad \beta\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

Το να ισχυριστούμε ότι η ϕ απεικονίζει αυτό το στοιχείο στο μηδέν, ισοδυναμεί με το να ισχυριστούμε ότι, για κάθε $\gamma\in\Gamma$, το ζεύγος

$$s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\gamma\in\Gamma}s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda, \qquad \beta\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

είναι ισοδύναμο με μηδέν. Συνεπώς απο τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας, για κάθε $\gamma\in\Gamma$, υπάρχει μια οικογένεια $\{k_\lambda^\gamma,\lambda\in\Lambda\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s_\gamma \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda^\gamma \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^\gamma} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

, και η εικόνα του $\beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$ να μηδενίζεται από την απεικόνιση

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(f_\lambda^\gamma)} \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(k_\lambda^\gamma)$$

Επομένως, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $\prod_{\gamma\in\Gamma}\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(f_\lambda^\gamma)$ και κάνοντας χρήση του προηγούμενου ισομορφισμού, επάγεται μια (μοναδική) απεικόνιση

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \overset{\prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{F}_\lambda(f_\lambda^\gamma)}{\dashrightarrow} \prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{F}_\lambda(k_\lambda^\gamma) = \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma} k_\lambda^\gamma\right)$$

η οποία επίσης μηδενίζει το β. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\coprod_{\gamma\in\Gamma} k_\lambda^\gamma \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\coprod_{\gamma\in\Gamma} f_\lambda^\gamma} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

και η εικόνα του β στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma} k_\lambda^\gamma\right)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{F}_\lambda(f_\lambda^\gamma)} \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}\left(\coprod_{\gamma\in\Gamma} k_\lambda^\gamma\right)$$

μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι, τα ζεύγη

$$\coprod_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$
$$\coprod_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad 0 \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(t_\lambda)$$

είναι ισοδύναμα. Επομένως ο πυρήνας της ϕ είναι τετριμμένος (δηλαδή είναι ισοδύναμος με το μηδέν ως προς την σχέση ισοδυναμίας), συνεπώς η ϕ είναι ένα προς ένα.

$\square$

Λήμμα 6.1.14. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Υπάρχουν (μη τετριμμένοι) φυσικοί μετασχηματισμοί*

$$\mathcal{F}_\mu \longrightarrow \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu$$

Απόδειξη. Για κάθε αντικείμενο $s \in \mathcal{S}$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathcal{F}_\mu\big(s\big) \xrightarrow{\phi(s)} \Big\{\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu\Big\}\big(s\big)$$

η οποία απεικονίζει το $\beta \in \mathcal{F}_\mu\big(s\big)$ στο ζεύγος

$$s \xrightarrow{1} s, \qquad \beta \in \mathcal{F}_\mu\big(s\big)$$

Η απεικόνιση $\phi\big(s\big)$ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο στοιχεία β και β' στην $\mathcal{F}_\mu\big(s\big)$. Τότε η εικόνα του αθροίσματος των β και β' μέσω της $\phi\big(s\big)$, δηλαδή το ζεύγος

$$s \xrightarrow{1} s, \qquad \beta + \beta' \ \in \mathcal{F}_\mu(s)$$

ισούται, δηλαδή είναι ισοδύναμο, στην $\Big\{\coprod_{\mu \in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}\big(s\big)$, με το άθροισμα των εικόνων των β και β' μέσω της $\phi\big(s\big)$, δηλαδή με το ζεύγος

$$s \xrightarrow{f} s \oplus s, \qquad \beta + \beta' \in \mathcal{F}_\mu\big(s \oplus s\big)$$

, όπου

$$f \ = \ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πράγματι, η απεικόνιση

$$s \xrightarrow{g} s \oplus s \oplus s$$

, όπου

$$g \ = \ \begin{bmatrix} 1 \\ f \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

παραγοντοποιείται ως

$$s \xrightarrow{1} s \xrightarrow{g} s \oplus s \oplus s$$

, και οι εικόνες των $\beta + \beta' \in \mathcal{F}_\mu(s)$ και $\beta + \beta' \in \mathcal{F}_\mu(s \oplus s)$ στην $\mathcal{F}_\mu(s)$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{F}_\mu\big(s \oplus s \oplus s\big) \xrightarrow{\mathcal{F}_\mu(g)} \mathcal{F}_\mu\big(s\big)$$

, όπου

$$\mathcal{F}_\mu(g) \ = \ \big[\mathcal{F}_\mu(1) \quad \mathcal{F}_\mu(1) \quad \mathcal{F}_\mu(1)\big] \ = \ \big[1 \quad 1 \quad 1\big]$$

συμπίπτουν. Συνεπώς,

$$\phi(s)(\beta + \beta') = \phi(s)(\beta) + \phi(s)(\beta')$$

Η απεικόνιση ϕ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μορφισμό $f : s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$, το παρακάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\mu(t) \arrow[r, "\phi(t)"] \arrow[d, "\mathcal{F}_\mu(f)"'] & \left\{\coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\right\}(t) \arrow[d, "\left\{\coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\right\}(f)"'] \\
\mathcal{F}_\mu(s) \arrow[r, "\phi(s)"] & \left\{\coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\right\}(s)
\end{tikzcd}$$

Έστω $\beta \in \mathcal{F}_\mu(t)$. Η απεικόνιση $\phi(t)$ απεικονίζει το β στο ζεύγος

$$t \xrightarrow{\quad 1 \quad} t, \qquad \beta \in \mathcal{F}_\mu(t)$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\left\{\coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\right\}(f)$ με την σειρά της απεικονίζει το ζεύγος αυτό στο ζεύγος

$$s \xrightarrow{\quad f \quad} t \xrightarrow{\quad 1 \quad} t, \qquad \beta \in \mathcal{F}_\mu(t)$$

, δηλαδή στο ζεύγος

$$s \xrightarrow{\quad f \quad} t, \qquad \beta \in \mathcal{F}_\mu(t)$$

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση $\mathcal{F}_\mu(f) : \mathcal{F}_\mu(t) \longrightarrow \mathcal{F}_\mu(s)$ απεικονίζει το $\beta \in \mathcal{F}_\mu(t)$ στο $\mathcal{F}_\mu(f)(\beta)$. Συνεπώς, η απεικόνιση $\phi(s)$ με την σειρά της απεικονίζει το $\mathcal{F}_\mu(f)(\beta) \in \mathcal{F}_\mu(s)$ στο ζεύγος

$$s \xrightarrow{\quad 1 \quad} s, \qquad \mathcal{F}_\mu(f)(\beta) \in \mathcal{F}_\mu(s)$$

Επομένως για να δείξουμε την μεταθετικότητα του διαγράμματος, αρκεί να δείξουμε ότι τα δυο ζεύγη

$$\begin{aligned}
s &\xrightarrow{\quad f \quad} t, & \beta &\in \mathcal{F}_\mu(t) \\
s &\xrightarrow{\quad 1 \quad} s, & \mathcal{F}_\mu(f)(\beta) &\in \mathcal{F}_\mu(s)
\end{aligned}$$

είναι ισοδύναμα. Πράγματι, η απεικόνιση

$$s \xrightarrow{\quad g \quad} s \oplus t$$

, όπου

$$g = \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix}$$

παραγοντοποιείται ως

$$s \xrightarrow{\quad 1 \quad} s \xrightarrow{\quad g \quad} s \oplus t$$

και οι εικόνες των β και $\mathcal{F}_\mu(f)(\beta)$ στην $\mathcal{F}_\mu(s)$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{F}_\mu(s \oplus t) \xrightarrow{\mathcal{F}_\mu(g)} \mathcal{F}_\mu(s)$$

, όπου

$$\mathcal{F}_\mu(g) \;=\; \big[\mathcal{F}_\mu(f) \quad \mathcal{F}_\mu(1)\big] \;=\; \big[\mathcal{F}_\mu(f) \quad 1\big]$$

συμπίπτουν.

□

Πρόταση 6.1.15. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω $\{\mathcal{F}_\mu, \mu \in M\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί*

$$\mathcal{F}_\mu \longrightarrow \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu$$

του Λήμματος 6.1.14. εφοδιάζουν το αντικείμενο $\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu$ με την δομή ενός συγκινομένου των $\mathcal{F}_\mu$ στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι το $\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu$ χαρακτηρίζεται από την καθολική ιδιότητα ενός συγκινομένου. Έστω $\mathcal{G}$ ένα αντικείμενο στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Υποθέτουμε ότι δίνονται απεικονίσεις $\phi_\mu : \mathcal{F}_\mu \longrightarrow \mathcal{G}$ για κάθε $\mu \in M$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ, η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}_\mu \arrow[dl] \arrow[dr, "\phi_\mu"] & \\
\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου $i_\mu : \mathcal{F}_\mu \longrightarrow \coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu$ είναι η κανονική εμφύτευση του συγκινομένου, για κάθε $\mu \in M$.

Αρχικά πρέπει να ορίσουμε την απεικόνιση ϕ στο τυχαίο αντικείμενο $s \in \mathcal{S}$, δηλάδή πρέπει να ορίσουμε την απεικόνιση $\phi(s)$ στο τυχαίο στοιχείο της αβελιανής ομάδας $\Big\{\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu\Big\}(s)$. Έστω ένα στοιχείο το οποίο ανήκει στην $\Big\{\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu\Big\}(s)$. Τότε το στοιχείο αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

Εάν γνωρίζαμε ότι η ϕ ήταν ένας φυσικός μετασχηματισμός, τότε το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
\Big\{\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu\Big\}\Big(\coprod_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r] \arrow[d] & \Big\{\coprod_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu\Big\}(s) \arrow[d, "\phi(s)"] \\
\mathcal{G}\Big(\coprod_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda\Big) \arrow[r] & \mathcal{G}(s)
\end{tikzcd}$$

θα έπρεπε να ήταν μεταθετικό. Θα εκμαιεύσουμε τον τύπο της $\phi(s)$ ακολουθώντας την εικόνα του ζεύγους

$$1 : \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

το οποίο ανήκει στην $\Big\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Big\}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big)$, περιμετρικά του προηγούμενου μεταθετικού τετραγώνου.

Η απεικόνιση

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \longrightarrow \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$$

απεικονίζει το ζεύγος

$$1 : \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

στο ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\ 1\ } \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

, δηλαδή στο ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

, απλώς εφαρμόζουμε τον συναρτητή $\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu(-)$ στον μορφισμό $s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda$ (Λήμμα 6.1.12). Συνεπώς, η μεταθετικότητα τετραγώνου μας υποδεικνύει ότι για να υπολογίσουμε την εικόνα του ζεύγους

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

στην $\mathcal{G}(s)$ μέσω της $\phi(s)$, αρκεί να προσδιορίσουμε πού απεικονίζει η σύνθεση

$$\begin{tikzcd}
\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \arrow[d] & \\
\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \arrow[r] & \mathcal{G}(s)
\end{tikzcd}$$

το ζεύγος

$$1 : \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

Κάθε στοιχείο το οποίο ανήκει στο γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$ είναι μια λ−άδα, συνεπώς μπορεί να γραφεί ως μια οικογένεια

$$\beta \quad = \quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda$$

, όπου $\beta_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Γράφω το β με αυτόν το τρόπο, δηλαδή $\beta = \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda$. Επίσης, εάν υποθέταμε ότι, για κάθε $\mu \in M$, οι απεικονίσεις $\phi_\mu : \mathcal{F}_\mu \longrightarrow \mathcal{G}$ παραγοντοποιούνταν μέσω της ϕ, τότε οι συνθέσεις

$$\mathcal{F}_\mu \longrightarrow \coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu \xrightarrow{\quad\phi\quad} \mathcal{G}$$

θα ταυτίζονταν με τις δοθείσες απεικονίσεις $\phi_\mu : \mathcal{F}_\mu \longrightarrow \mathcal{G}$, και επομένως το ζεύγος

$$1 : s_\lambda \longrightarrow s_\lambda, \qquad \beta_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big)$$

θα απεικονίζονταν στην εικόνα του $\beta_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big)$ μέσω της $\phi_\lambda : \mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big) \longrightarrow \mathcal{G}\big(s_\lambda\big)$ (αντί για ϕ_{λ,s_λ} γράφουμε ϕ_λ για να ελαφρύνουμε τον συμβολισμό). Συνεπώς, το ζεύγος

$$1 : \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big)$$

θα απεικονίζονταν στο

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda\big(\beta_\lambda\big) \quad \in \quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}\big(s_\lambda\big) = \mathcal{G}\Bigg(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Bigg)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}\big(s_\lambda\big) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}\big(s_\lambda\big)$$

Αυτό το στοιχείο υπολογίζει την εικόνα του ζεύγους

$$1 : \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\Bigg\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Bigg\}\Bigg(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Bigg) \longrightarrow \mathcal{G}\Bigg(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Bigg)$$

Αλλά η σύνθεση

$$\begin{tikzcd}
\Bigg\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\Bigg\}\Bigg(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Bigg) \arrow[d] & \\
\mathcal{G}\Bigg(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\Bigg) \arrow[r] & \mathcal{G}(s)
\end{tikzcd}$$

απεικονίζει το ζεύγος

$$1 : \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda\big(s_\lambda\big)$$

στην εικόνα του

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(\beta_\lambda) \quad \in \quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}(s_\lambda) = \mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{G}(s)$$

Συνεπώς, από την μεταθετικότητα του διαγράμματος συμπεραίνουμε ότι η εικόνα του ζεύγους

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

μέσω της $\phi(s)$, ταυτίζεται με την εικόνα του

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(\beta_\lambda) \quad \in \quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}(s_\lambda) = \mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{G}(s)$$

, δηλαδή η $\phi(s)$ απεικονίζει το ζεύγος

$$\left\{s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)\right\} \in \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$$

στο στοιχείο

$$\left\{\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{G}(s)\right\}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(\beta_\lambda)\right) \in \mathcal{G}(s)$$

Συνεπώς, για κάθε $s \in \mathcal{S}$, ορίσαμε την απεικόνιση

$$\phi(s) : \coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu(s) \longrightarrow \mathcal{G}(s)$$

Η απεικόνιση ϕ είναι μοναδικά ορισμένη. Έστω ϕ' μια άλλη απεικόνιση, έτσι ώστε, για κάθε $\mu \in M$, οι συνθέσεις

$$\mathcal{F}_\mu \longrightarrow \coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu \xrightarrow{\phi'} \mathcal{G}$$

να μηδενίζονται. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\mu \in M$, το στοιχείο $\beta_\mu \in \mathcal{F}_\mu(s_\mu)$ απεικονίζεται στο μηδέν στην $\mathcal{G}(s_\mu)$ μέσω της απεικόνισης $\phi_\mu : \mathcal{F}_\mu(s_\mu) \longrightarrow \mathcal{G}(s_\mu)$. Τότε η $\phi'(s)$ απεικονίζει το ζεύγος

$$\left\{s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)\right\} \in \left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$$

στο στοιχείο

$$\left\{\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{G}(s)\right\}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(\beta_\lambda)\right) \in \mathcal{G}(s)$$

το οποίο ισούται με το μηδέν στην $\mathcal{G}(s)$, επειδή $\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(\beta_\lambda) = 0$. Συνεπώς, η ϕ' είναι η μηδενική απεικόνιση.

Η ϕ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση, δηλαδή απεικονίζει ισοδύναμα ζεύγη στην $\left\{\bigvee_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$ στο ίδιο στοιχείο στην $\mathcal{G}(s)$. Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο ισοδύναμα ζεύγη

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad & \beta &\in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s &\longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s'_\lambda, \qquad & \beta' &\in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s'_\lambda) \end{aligned}$$

, και συμβολίζουμε τα ζεύγη αυτά με B και B' αντίστοιχα. Το γεγονός ότι τα ζεύγη είναι ισοδύναμα σημαίνει ότι υπάρχει μια οικογένεια $\{k_\lambda, \lambda \in \Lambda \cup \Lambda'\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus s'_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus s'_\lambda$$

και οι εικόνες των β και β' στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus s'_\lambda) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda)$$

να συμπίπτουν. Για κάθε $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda' \subset M$, οι απεικονίσεις

$$\mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{G}$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί, συνεπώς επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus s'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(k_\lambda) \arrow[d] \\
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{G}(s_\lambda \oplus s'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{G}(k_\lambda) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{G}\left(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus s'_\lambda\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}\left(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} k_\lambda\right) \arrow[d] \\
\mathcal{G}(s) \arrow[r, "="] & \mathcal{G}(s)
\end{tikzcd}
$$

Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος, και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι εξ υποθέσεως ισχύει

$$\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)\right\}(\beta) = \left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(f_\lambda)\right\}(\beta')$$

, μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα ότι ισχύει η ισότητα στην $\mathcal{G}(s)$

$$\left\{\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{G}(s)\right\}\left(\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \phi_\lambda\right\}(\beta)\right) = \left\{\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s'_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{G}(s)\right\}\left(\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \phi_\lambda\right\}(\beta')\right)$$

, και συνεπώς η ισότητα στην $\mathcal{G}(s)$

$$\phi(s)(B) = \phi(s)(B')$$

Συνεπώς, η ϕ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση.

Η ϕ είναι φυσική στα αντικείμενα $s \in \mathcal{S}$, δηλαδή για κάθε μορφισμό $f : s \longrightarrow t$ στην $\mathcal{S}$ το παρακάτω διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\left\{\coprod\limits_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\right\}(t) \arrow[r, "\phi(t)"] \arrow[d, "\left\{\coprod\limits_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\right\}(f)"'] & \mathcal{G}(t) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"'] \\
\left\{\coprod\limits_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu\right\}(s) \arrow[r, "\phi(s)"] & \mathcal{G}(s)
\end{tikzcd}
$$

είναι μεταθετικό. Πράγματι, έστω ένα ζεύγος

$$t \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \beta \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

Η απεικόνιση

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(t)\xrightarrow{\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(f)}\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$$

απεικονίζει το προηγούμενο ζεύγος στο ζεύγος

$$s\longrightarrow t\longrightarrow\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda,\qquad \beta\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

Στην συνέχεια η απεικόνιση

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)\xrightarrow{\phi(s)}\mathcal{G}(s)$$

απεικονίζει με την σειρά της προηγούμενο ζεύγος στο στοιχείο

$$r:=\left\{\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right)\longrightarrow\mathcal{G}(s)\right\}\left(\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda\right\}(\beta)\right)\in\mathcal{G}(s)$$

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(t)\xrightarrow{\phi(t)}\mathcal{G}(t)$$

απεικονίζει το ζεύγος

$$t\longrightarrow\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda,\qquad \beta\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda)$$

στο στοιχείο

$$r':=\left\{\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right)\longrightarrow\mathcal{G}(t)\right\}\left(\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda\right\}(\beta)\right)\in\mathcal{G}(t)$$

το οποίο στην συνέχεια η απεικονίζεται μέσω της

$$\mathcal{G}(t)\xrightarrow{\mathcal{G}(f)}\mathcal{G}(s)$$

σ' ένα στοιχείο r'' της $\mathcal{G}(t)$. Ο συναρτητής $\mathcal{G}$ απεικονίζει την σύνθεση

$$s\longrightarrow t\longrightarrow\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda$$

στην σύνθεση

$$\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right)\longrightarrow\mathcal{G}(t)\xrightarrow{\mathcal{G}(f)}\mathcal{G}(s)$$

Από την σύνθεση να συμπεραίνουμε άμεσα ότι $r''=r$, επομένως $\mathcal{G}(f)(r')=r$. Συνεπώς η ϕ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός.

Η ϕ είναι ένας ομορφισμός αβελιανών ομάδων. Έστω ότι δίνονται δύο ζεύγη στην $\left\{\coprod_{\mu\in M}\mathcal{F}_\mu\right\}(s)$

$$\begin{array}{lll} s \longrightarrow \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, & \qquad & \beta \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \\ s \longrightarrow \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda'} s'_\lambda, & \qquad & \beta' \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s'_\lambda)\end{array}$$

, και συμβολίζουμε τα ζεύγη αυτά με B και B' αντίστοιχα. Θεωρούμε το άθροισμα τους, δηλαδή θεωρούμε το ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda \oplus s'_\lambda, \qquad \beta+\beta' \in \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda \oplus s'_\lambda)$$

Για κάθε $\lambda \in \Lambda\cup\Lambda' \subset M$, οι απεικονίσεις $\phi_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{G}$ φυσικοί μετασχηματισμοί, συνεπώς επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda\oplus s'_\lambda) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s_\lambda) \oplus \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{F}_\lambda(s'_\lambda) \arrow[d] \\
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{G}(s_\lambda\oplus s'_\lambda) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{G}(s_\lambda) \oplus \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \mathcal{G}(s'_\lambda) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{G}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\oplus s'_\lambda\Big) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{G}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\Big) \oplus \mathcal{G}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s'_\lambda\Big) \arrow[d] \\
\mathcal{G}(s) \arrow[r, "="] & \mathcal{G}(s)
\end{tikzcd}$$

Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος, μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα ότι το στοιχείο

$$\left\{\mathcal{G}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\Big) \to \mathcal{G}(s)\right\}\left(\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \phi_\lambda\right\}(\beta+\beta')\right)$$

ισούται στην $\mathcal{G}(s)$, με το στοιχείο

$$\left\{\mathcal{G}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\Big) \oplus \mathcal{G}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} s_\lambda\Big) \to \mathcal{G}(s)\right\}\left(\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \phi_\lambda\right\}(\beta) + \left\{\prod_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'} \phi_\lambda\right\}(\beta')\right)$$

Συνεπώς,

$$\phi(s)(B+B') = \phi(s)(B) + \phi(s)(B')$$

Τέλος, εκ κατασκευής οι συνθέσεις

$$\mathcal{F}_\mu \longrightarrow \coprod_{\mu\in M} \mathcal{F}_\mu \xrightarrow{\ \phi\ } \mathcal{G}$$

ταυτίζονται με τις δοθείσες απεικονίσεις $\phi_\mu : \mathcal{F}_\mu \longrightarrow \mathcal{G}$.

$\square$

Παρατήρηση 6.1.16. Συνοψίζοντας, σ' αυτή την Ενότητα δείξαμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή κατηγορία η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα [AB3] και [AB3*] , δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα και τα συγκινόμενα αντίστοιχα. Επίσης, ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$$

είναι ακριβής, και διατηρεί τα γινόμενα. Αλλά, δεν διατηρεί τα συγκινόμενα, εκτός εάν $\alpha = \aleph_0$. Σ' αυτή την περίπτωση ($\alpha = \aleph_0$), από την καθολική ιδιότητα των συγκινομένων έπεται ότι ο ορισμός των συγκινομένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ της Παρατήρησης 6.1.6, ταυτίζεται με τον ορισμό των συγκινομένων της Πρότασης 6.1.15.

Παρατήρηση 6.1.17. Υπάρχει ένας φυσικός συναρτητής

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$$

ο οποίος απεικονίζει το $t \in \mathcal{S}$ στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{S}(-,t)$. Ο συναρτητής αυτός είναι ομολογικός. Από το Λήμμα 6.1.4 η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή υποκατηγορία της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, δηλαδή οι ακριβείς ακολουθίες στις δυο κατηγορίες συμπίπτουν. Έστω ότι δίνεται ένα τρίγωνο

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

στην $\mathcal{S}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathcal{S}(-,r) \longrightarrow \mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{S}(-,t)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, ή ισοδύναμα, για κάθε $k \in \mathcal{S}$, η ακολουθία

$$\mathcal{S}(k,r) \longrightarrow \mathcal{S}(k,s) \longrightarrow \mathcal{S}(k,t)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}b$. Αλλά, για κάθε $k \in \mathcal{S}$, η ακολουθία είναι ακριβής στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, από το Λήμμα 1.1.10. Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.1.16, υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b) &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Ο ακριβής αυτός συναρτητής είναι μια πλήρης εμφύτευση. Θεωρούμε την σύνθεση

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$$

Από τον Ορισμό 5.1.3 η $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, αυτό σημαίνει ότι ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι μια πλήρης εμφύτευση. Επίσης, από τον Ορισμό 6.1.3 η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, αυτό σημαίνει ότι ο συναρτητής $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι μια πλήρης εμφύτευση. Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι αναγκαστικά μια πλήρης εμφύτευση. Με άλλα λόγια, ο ομολογικός συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, δεν είναι άλλος από τον συναρτητή αβελιανοποίησης Verdier $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$, απλώς θεωρούμε την εικόνα του εντός της κατηγορίας $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$.

Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5(α)]. Τότε από το Λήμμα 5.1.21.1 έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3(α)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα, και ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ διατηρεί τα $\alpha-$συγκινόμενα. Επιπλέον, το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων, πληθικότητας $< \alpha$, στην $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, είναι ακριβώς το συγκινόμενο του συνόλου των αντικειμένων αυτών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Από την Πρόταση 6.1.15, η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3], ειδικότερα ικανοποιεί το αξίωμα [AB3(α)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα. Αλλά από την Παρατήρηση 6.1.16, το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, δεν υλοποιείται ως το συγκινόμενο του συνόλου των αντικειμένων αυτών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ διατηρεί τα $\alpha-$συγκινόμενα.

Λήμμα 6.1.18.1. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα $\alpha-$συγκινόμενα.*

Απόδειξη. Έστω $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{S}$, όπου Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \alpha$. Απο την συνθήκη 6.1.1.2 το $\alpha-$συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Θα δείξουμε ότι το αντικείμενο

$$\mathcal{S}\Bigg(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Bigg) \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι το συγκινόμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ των αντικειμένων του συνόλου $\big\{\mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big), \lambda \in \Lambda\big\}$. Έστω $i_\lambda : t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$ η κανονική εμφύτευση του συγκινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big) \xrightarrow{\ \phi_\lambda\ } \mathcal{S}\Bigg(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Bigg)$$

, όπου $\phi_\lambda := \mathcal{S}\big(-, i_\lambda\big)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Από την Πρόταση 6.1.15, το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big)$ υπάρχει στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του συγκινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big) \arrow[dl] \arrow[dr, "\phi_\lambda"] & \\
\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big) \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \mathcal{S}\Bigg(-, \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Bigg)
\end{tikzcd}$$

, όπου $i'_\lambda : \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big) \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big)$ είναι η κανονική εμφύτευση του συγκινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι ένας ισομορφισμός. Επειδή το Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \alpha$, κάθε στοιχείο της

$$\Bigg\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big)\Bigg\}(s)$$

, δηλαδή κάθε ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\mu\in M} s_\mu, \qquad \prod_{\mu\in M} \beta_\mu \in \prod_{\mu\in M} \mathcal{S}\big(s_\mu, t_\mu\big)$$

, όπου $M \subset \Lambda$ πληθικότητας $< \alpha$, είναι ισοδύναμο με ένα οποιοδήποτε ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\mu\in M} s_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} \beta'_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)$$

, όπου η απεικόνιση $\coprod_{\mu\in M} s_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο, και για κάθε $\lambda \in M$, θέτουμε $\beta'_\lambda = \beta_\lambda$, ενώ για κάθε $\lambda \notin M$, θέτουμε $\beta_\lambda = 0$. Πράγματι, η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \oplus s_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \oplus s_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda$

$$g_\lambda \;=\; \begin{bmatrix} f_\lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

, και για κάθε $\lambda \in M$, θέτουμε $f_\lambda = 1$, ενώ για κάθε $\lambda \notin M$, θέτουμε $f_\lambda = 0$. Τότε οι εικόνες των $\prod_{\lambda\in\Lambda} \beta_\lambda$ και $\prod_{\lambda\in\Lambda} \beta'_\lambda$ στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda \oplus s_\lambda, t_\lambda\big) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(g_\lambda, t_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda$

$$\mathcal{S}(g_\lambda, t_\lambda) \;=\; \big[\mathcal{S}(f_\lambda, t_\lambda) \quad \mathcal{S}(1, t_\lambda)\big]$$

συμπίπτουν.

Η απεικόνιση ϕ απεικονίζει ένα στοιχείο της

$$\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(-, t_\lambda)\right\}(s)$$

, δηλαδή ένα ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} \beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)$$

στην απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(\beta_\lambda)} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

, δηλαδή στην απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \beta_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

η οποία είναι ένα στοιχείο της $\mathcal{S}\big(s, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\big)$. Επίσης, η απεικόνιση

$$\mathcal{S}\left(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\right) \xrightarrow{\psi} \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(-, t_\lambda)$$

η οποία απεικονίζει ένα στοιχείο της

$$\mathcal{S}\left(s, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\right)$$

, δηλαδή μια απεικόνιση $s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$, στο ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} 1 \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(t_\lambda, t_\lambda)$$

το οποίο είναι ένα στοιχείο της $\Big\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(-, t_\lambda)\Big\}(s)$, είναι η αντίστροφη της ϕ. Η σύνθεση $\phi\psi$ απεικονίζει ένα στοιχείο της

$$\mathcal{S}\left(s, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\right)$$

, δηλαδή μια απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

στην απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(1)} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

, ισοδύναμα στην απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} 1} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

, με την οποία προφανώς ταυτίζεται. Απο τη άλλη μεριά, η σύνθεση $\psi\phi$ απεικονίζει ένα στοιχείο της

$$\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(-, t_\lambda)\right\}(s)$$

, δηλαδή ένα ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} \beta_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(s_\lambda, t_\lambda)$$

στο ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(\beta_\lambda)} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} 1 \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(t_\lambda, t_\lambda)$$

, δηλαδή στο ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} \beta_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} 1 \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(t_\lambda, t_\lambda)$$

, με το οποίο είναι ισοδύναμο. Πράγματι, η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \oplus t_\lambda$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda$

$$f_\lambda \; = \; \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_\lambda \end{bmatrix}$$

, και οι εικόνες των $\prod_{\lambda\in\Lambda}\beta_\lambda$ και $\prod_{\lambda\in\Lambda} 1$ στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda \oplus t_\lambda, t_\lambda\big) \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(f_\lambda, t_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)$$

, όπου για κάθε $\lambda \in \Lambda$

$$\mathcal{S}(f_\lambda, t_\lambda) \; = \; \big[\mathcal{S}(1, t_\lambda) \quad \mathcal{S}(\beta_\lambda, t_\lambda)\big]$$

συμπίπτουν.

□

Σε πλήρη αντιστοιχία με το Λήμμα 5.1.21.2, θα δείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα $\alpha-$γινόμενα.

Λήμμα 6.1.18.2. *Έστω $\mathcal{S}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα $\alpha-$γινόμενα.*

Απόδειξη. Έστω $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{S}$, όπου Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \alpha$. Υποθέτουμε ότι το γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Θα δείξουμε ότι το αντικείμενο

$$\mathcal{S}\left(-, \prod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\right) \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι το γινόμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ των συναρτητών $\mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big)$. Έστω $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \longrightarrow t_\lambda$ η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{S}\left(-, \prod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\right) \xrightarrow{\phi_\lambda} \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big)$$

, όπου $\phi_\lambda := \mathcal{S}\big(-, p_\lambda\big)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Το γινόμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}\big(-, t_\lambda\big)$ υπάρχει στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}(-, t_\lambda) & \\
\mathcal{S}\Big(-, \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Big) \arrow[ur, "\phi_\lambda"] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}(-, t_\lambda) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

, όπου $p'_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-, t_\lambda) \longrightarrow \mathcal{S}(-, t_\lambda)$ είναι η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Ο συναρτητής Yoneda διατηρεί τα όρια, επομένως διατηρεί τα γινόμενα, και συνεπώς τα $\alpha-$γινόμενα. Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι η απεικόνιση ϕ είναι ένας ισομορφισμός. Από το Λήμμα 6.1.5, το αντικείμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-, t_\lambda)$ είναι επίσης το γινόμενο στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ των αντικειμένων του συνόλου $\{\mathcal{S}(-, t_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$.

$\square$

6.2 Η περίπτωση της υποκατηγορίας $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\alpha$

Έστω α ο κανονικός πληθάριθμος, τον οποίο έχουμε σταθεροποιήσει εξαρχής σ' αυτό το Κεφάλαιο. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] .

Λήμμα 6.2.1.1. *Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή κατηγορία. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Τότε η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί τις τέσσερις συνθήκες της Υπόθεσης 6.1.1. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή τριγωνισμένη υποκατηγορία, έπεται ότι ικανοποιεί την 6.1.1.1. Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη, αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένη και κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα, συνεπώς ικανοποιεί την 6.1.1.2. Απο το Παράδειγμα 6.1.2 έπεται ότι οι συνθήκες 6.1.1.3 και 6.1.1.4 ισχύουν αυτομάτως για οποιαδήποτε τριγωνισμένη κατηγορία.

$\square$

Παρατήρηση 6.2.1.2. Από το Λήμμα 4.2.5 η υποκατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\alpha$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη. Εάν υπόθεσουμε επιπλέον ότι είναι ουσιαστικά μικρή, π.χ. αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία (Ορισμός 7.1.1), τότε ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1.

Παρατήρηση 6.2.2. Υπενθυμίζουμε, ότι εάν δεν υποθέσουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά μικρή, τότε εν γένει δεν ισχύει ότι η κατηγορία $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)}-$σύνολα. Εμείς όπως έχουμε ξανα αναφέρει ενδιαφερόμαστε για κατηγορίες με μικρά $Hom-$σύνολα.

Λήμμα 6.2.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Υπάρχει ένας φυσικός συναρτητής*

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$$

, ο οποίος απεικονίζει το $t \in \mathcal{T}$ στον συναρτητή $\mathcal{T}(-, t)\big|_{\mathcal{S}}$, δηλαδή στον περιορισμό του αναπαραστάσιμου συναρτητή $\mathcal{T}(-, t)$ στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $t \in \mathcal{T}$, ο συναρτητής $\mathcal{T}(-, t)\big|_{\mathcal{S}}$ ανήκει στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, δηλαδή απεικονίζει $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Αυτό ισχύει επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη, συνεπώς το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων πληθικότητας $< \alpha$ της $\mathcal{S}$ υπάρχει, ως συγκινόμενο στην $\mathcal{T}$, και είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$, και επειδή οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{T}(-, t)$ απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, και συνεπώς οι περιορισμοί τους $\mathcal{T}(-, t)\big|_{\mathcal{S}}$ στην $\mathcal{S}$ απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, και άρα $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$.

$\square$

Λήμμα 6.2.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Υποθέτουμε ότι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Τότε ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ομολογικός.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.1.4 η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι μια αβελιανή υποκατηγορία της $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, δηλαδή οι ακριβείς ακολουθίες στις δυο κατηγορίες συμπίπτουν. Έστω ότι δίνεται ένα τρίγωνο

$$r \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow \Sigma r$$

στην $\mathcal{T}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathcal{T}\big(-, r\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, s\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, t\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, ή ισοδύναμα, για κάθε $k \in \mathcal{S}$, η ακολουθία

$$\mathcal{T}\big(k, r\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(k, s\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(k, t\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}b$. Αλλά, για κάθε $k \in \mathcal{S}$, η ακολουθία είναι ακριβής στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, από το Λήμμα 1.1.10.

$\square$

Λήμμα 6.2.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Υποθέτουμε ότι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Τότε ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα γινόμενα.*

Απόδειξη. Έστω $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι το γινόμενο $\prod_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι το αντικείμενο

$$\mathcal{T}\left(-, \prod_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda\right)\Bigg|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι το γινόμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ των αντικειμένων του συνόλου $\big\{\mathcal{T}\big(-, t_\lambda\big)\big|_{\mathcal{S}}, \lambda \in \Lambda\big\}$. Έστω $p_\lambda : \coprod_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda \longrightarrow t_\lambda$ η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{T}\left(-, \prod_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda\right) \xrightarrow{\ \phi_\lambda\ } \mathcal{T}\big(-, t_\lambda\big)$$

, όπου $\phi_\lambda := \mathcal{T}\big(-, p_\lambda\big)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Το γινόμενο $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}\big(-, t_\lambda\big)$ υπάρχει στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}\big(-, t_\lambda\big) & \\
\mathcal{T}\left(-, \prod_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda\right) \arrow[ur, "\phi_\lambda"] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}\big(-, t_\lambda\big) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

, όπου $p'_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}\big(-, t_\lambda\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, t_\lambda\big)$ είναι η κανονική προβολή του γινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Ο συναρτητής Yoneda διατηρεί τα όρια, συνεπώς διατηρεί τα γινόμενα. Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι η απεικόνιση ϕ είναι ένας ισομορφισμός. Προφανώς, ο περιορισμός της ϕ στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, δηλαδή η απεικόνιση

$$\phi\big|_{\mathcal{S}} : \mathcal{T}\Big(-, \prod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ένας ισομορφισμός. Από το Λήμμα 6.1.5, το αντικείμενο $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι το γινόμενο στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ των αντικειμένων του συνόλου $\{\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}, \lambda \in \Lambda\}$.

□

Λήμμα 6.2.6. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Εάν η $\mathcal{S}$ είναι μια $\alpha-$τέλεια κλάση, τότε ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ διατηρεί τα $\alpha-$συγκινόμενα. Εάν η $\mathcal{S}$ δεν είναι μόνο $\alpha-$τέλεια, αλλά κάθε αντικείμενο της $\mathcal{S}$ είναι επίσης $\alpha-$μικρό, τότε ο $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ διατηρεί τα συγκινόμενα.*

Απόδειξη. Έστω $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Επειδή η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι εάν η $\mathcal{S}$ είναι μια $\alpha-$τέλεια κλάση και το Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \alpha$, ή ότι εάν η $\mathcal{S}$ δεν είναι μόνο $\alpha-$τέλεια αλλά κάθε αντικείμενο της $\mathcal{S}$ είναι επίσης $\alpha-$μικρό, δηλαδή $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^{(\alpha)}$, και το Λ είναι ένα σύνολο οποιασδήποτε πληθικότητας, τότε θα δείξουμε ότι το αντικείμενο

$$\mathcal{T}\Big(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$$

είναι το συγκινόμενο στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ των αντικειμένων του συνόλου $\{\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}, \lambda \in \Lambda\}$. Έστω $i_\lambda : t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$ η κανονική εμφύτευση του συγκινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\ \phi_\lambda\ } \mathcal{T}\Big(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Big)\Big|_{\mathcal{S}}$$

όπου $\phi_\lambda := \mathcal{T}(-, i_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Από την Πρόταση 6.1.15, το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$ υπάρχει στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του συγκινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ϕ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[dl] \arrow[dr, "\phi_\lambda"] & \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \mathcal{T}\Big(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\Big)\Big|_{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

, όπου $i'_\lambda : \mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι η κανονική εμφύτευση του συγκινομένου, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Η απεικόνιση ϕ απεικονίζει ένα στοιχείο της

$$\Big\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(-, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}\Big\}(s)$$

, δηλαδή ένα ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}(s_\lambda, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

στην απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}(f_\lambda, i_\lambda)|_{\mathcal{S}}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

, δηλαδή στην απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

η οποία είναι ένα στοιχείο της $\mathcal{T}(s, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda)|_{\mathcal{S}}$, όπου η απεικόνιση $\coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$ είναι η κανονική εμφύτευση στο συγκινόμενο. Θέλουμε να δείξουμε ότι η ϕ είναι ένας ισομορφισμός.

Η ϕ είναι επί. Έστω ένα στοιχείο της

$$\mathcal{T}\left(s, \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\right)\Big|_{\mathcal{S}}$$

, δηλαδή μια απεικόνιση στην $\mathcal{T}$ απο ένα αντικείμενο $s \in \mathcal{S}$ στο συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$. Εάν $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^{(\alpha)}$ τότε το s είναι $\alpha-$μικρό, και για κάθε απεικόνιση

$$s \xrightarrow{f} \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

, υπάρχει ένα υποσύνολο $\Lambda' \subset \Lambda$, πληθικότητας $< \alpha$, έτσι ώστε η απεικόνιση να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

Εάν δεν υποθέσουμε ότι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^{(\alpha)}$, τότε υποθέτουμε ότι το Λ είναι πληθικότητας $< \alpha$. Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι επίσης $\alpha-$τέλεια, η προηγούμενη απεικόνιση παραγοντοποιείται περαιτέρω ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

, με $s_\lambda \in \mathcal{S}$. Συνεπώς, υπάρχει μια απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda$$

και ένα στοιχείο

$$\prod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda \quad \in \quad \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}(s_\lambda, t_\lambda)|_{\mathcal{S}}$$

, δηλαδή ένα ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}(s_\lambda, t_\lambda)|_{\mathcal{S}}$$

το οποίο απεικονίζεται στην f μέσω της ϕ.

Η ϕ είναι ένα προς ένα. Έστω ένα στοιχείο που ανήκει στον πυρήνα της ϕ. Δηλαδή, ένα ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}(s_\lambda, t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

το οποίο απεικονίζεται στο μηδέν μέσω της ϕ. Αυτό σημαίνει, ότι η σύνθεση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

μηδενίζεται. Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$τέλεια, οι απεικονίσεις $f_\lambda : s_\lambda \longrightarrow t_\lambda$ δύναται να παραγοντοποιηθούν ως

$$s_\lambda \longrightarrow q_\lambda \longrightarrow t_\lambda$$

με $q_\lambda \in \mathcal{S}$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda$$

να μηδενίζεται. Συμπληρώνω κάθε μορφισμό $s_\lambda \longrightarrow q_\lambda$ σ' ένα τρίγωνο

$$k_\lambda \overset{g_\lambda}{\dashrightarrow} s_\lambda \longrightarrow q_\lambda \dashrightarrow \Sigma k_\lambda$$

στην $\mathcal{T}$, και επειδή η $\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένη και $s_\lambda, q_\lambda \in \mathcal{S}$, έπεται ότι το $k_\lambda \in \mathcal{S}$. Απο την Πρόταση 1.2.1.2 το συγκινόμενο των τριγώνων

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda \longrightarrow \Sigma \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Η σύνθεση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda$$

μηδενίζεται. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{T}(s, -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία. Από την ακρίβεια της ακολουθίας έπεται ότι η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda$$

μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda$$

Επίσης, για κάθε $\lambda \in \Lambda'$, η σύνθεση

$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} s_\lambda \longrightarrow q_\lambda \longrightarrow t_\lambda$$

μηδενίζεται, επειδή η σύνθεση $k_\lambda \longrightarrow s_\lambda \longrightarrow q_\lambda$ μηδενίζεται. Επομένως, η εικόνα του $\prod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda$ στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{T}(k_\lambda,t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{T}(s_\lambda,t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}\xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{T}(g_\lambda,t_\lambda)|_{\mathcal{S}}}\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{T}(k_\lambda,t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

μηδενίζεται. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι το ζεύγος

$$s\longrightarrow\coprod_{\lambda\in\Lambda'}s_\lambda,\qquad \prod_{\lambda\in\Lambda'}f_\lambda\in\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{T}(s_\lambda,t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ισοδύναμο με το ζεύγος

$$s\longrightarrow\coprod_{\lambda\in\Lambda'}s_\lambda,\qquad \prod_{\lambda\in\Lambda'}0\in\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{T}(s_\lambda,t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

Επομένως, ο πυρήνας της ϕ είναι τετριμμένος, συνεπώς η ϕ είναι ένα προς ένα.

□

Στο Λήμμα 6.2.6 εάν παρακολουθήσουμε προσεκτικά την απόδειξη, στην πραγματικότητα ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 6.2.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$ είναι μια ουσιαστικά μικρή $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Ο συναρτητής $\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα $\alpha-$συγκινόμενα εάν και μόνο εάν η $\mathcal{S}$ είναι μια $\alpha-$τέλεια κλάση. Επίσης, ο φυσικός συναρτητής $\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα συγκινόμενα εάν και μόνο εάν η $\mathcal{S}$ δεν είναι μόνο $\alpha-$τέλεια, αλλά κάθε αντικείμενο της $\mathcal{S}$ είναι επίσης $\alpha-$μικρό, δηλαδή $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}^{(\alpha)}$, συνεπώς περιέχεται στην μοναδική μεγιστική $\alpha-$τέλεια της $\mathcal{T}$ που περιέχεται στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$, δηλαδή $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}^{\alpha}:=\big\{\mathcal{T}^{(\alpha)}\big\}_\alpha\subset\mathcal{T}^{(\alpha)}$.*

Απόδειξη. Έστω $\{t_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Επειδή η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], το συγκινόμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι εάν το Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $<\alpha$ και ο συναρτητής $\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα $\alpha-$συγκινόμενα τότε η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$τέλεια, ή ότι εάν το Λ είναι ένα σύνολο οποιασδήποτε πληθικότητας και ο συναρτητής $\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα συγκινόμενα τότε η $\mathcal{S}$ δεν είναι μόνο $\alpha-$τέλεια αλλά κάθε αντικείμενο της $\mathcal{S}$ είναι επίσης $\alpha-$μικρό, δηλαδή $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}^{(\alpha)}$.

Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα συγκινόμενα. Αυτό σημαίνει ότι, η απεικόνιση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(-,t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}\xrightarrow{\ \phi\ }\mathcal{T}\left(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda\right)\Bigg|_{\mathcal{S}}$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Η ϕ είναι επί. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε απεικόνιση

$$s\xrightarrow{\ f\ }\coprod_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda$$

υπάρχει ένα ζεύγος

$$s\longrightarrow\coprod_{\lambda\in\Lambda'}s_\lambda,\qquad \prod_{\lambda\in\Lambda'}f_\lambda\in\prod_{\lambda\in\Lambda'}\mathcal{T}(s_\lambda,t_\lambda)\big|_{\mathcal{S}}$$

, έτσι ώστε η απεικόνιση f να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

με $s_\lambda \in \mathcal{S}$. Εάν υποθέσουμε ότι το Λ είναι ένα σύνολο πληθικότητας $< \alpha$, τότε υποθέτουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα $\alpha-$συγκινόμενα.

Η ϕ είναι ένα προς ένα. Αυτό σημαίνει ότι, εάν ένα ζεύγος

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda, \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

το οποίο απεικονίζεται στον μηδέν μέσω της ϕ, τότε είναι ισοδύναμο με το μηδέν. Ισοδύναμα, εάν η σύνθεση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$$

είναι μηδέν, τότε υπάρχει μια οικογένεια $\{k_\lambda, \lambda \in \Lambda'\}$ αντικειμένων έτσι ώστε η απεικόνιση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda$$

να παραγοντοποιείται ως

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda$$

, και η εικόνα του $\prod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda$ στην

$$\prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}\big(k_\lambda, t_\lambda\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

μέσω της απεικόνισης

$$\prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}\big(s_\lambda, t_\lambda\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}(g_\lambda, t_\lambda)|_{\mathcal{S}}} \prod_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{T}\big(k_\lambda, t_\lambda\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

να μηδενίζεται. Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in \Lambda'$, η σύνθεση

$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} s_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} t_\lambda$$

μηδενίζεται. Επομένως, η σύνθεση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda$$

επίσης μηδενίζεται. Συμπληρώνω κάθε μορφισμό $k_\lambda \longrightarrow s_\lambda$ σ' ένα τρίγωνο

$$\Sigma^{-1}q_\lambda \dashrightarrow k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} s_\lambda \overset{h_\lambda}{\dashrightarrow} q_\lambda$$

στην $\mathcal{T}$, και επειδή η $\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένη και $k_\lambda, s_\lambda \in \mathcal{S}$, έπεται ότι το $q_\lambda \in \mathcal{S}$. Απο την Πρόταση 1.2.1.2 το συγκινόμενο των τριγώνων

$$\Sigma^{-1}\coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Η σύνθεση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda$$

μηδενίζεται. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(-, \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda\big) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι συνομολογικός απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια μακρά ακριβή ακολουθία. Απο την ακρίβεια της μακράς ακολουθίας έπεται ότι η απεικόνιση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda$$

μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} t_\lambda$$

Τότε όμως η σύνθεση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda'} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda$$

μηδενίζεται, επειδή οι συνθέσεις $k_\lambda \longrightarrow s_\lambda \longrightarrow q_\lambda$ μηδενίζονται, ως διαδοχικές απεικονίσες τριγώνων. Συνεπώς, οι απεικονίσεις $f_\lambda : s_\lambda \longrightarrow t_\lambda$ δύναται να παραγοντοποιηθούν ως

$$s_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} q_\lambda \longrightarrow t_\lambda$$

με $q_\lambda \in \mathcal{S}$, έτσι ώστε η σύνθεση

$$s \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda'} s_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda'} q_\lambda$$

να μηδενίζεται.

$\square$

Παρατήρηση 6.2.8. Με άλλα λόγια, το ευθύ του Θεωρήματος 6.2.7, σε ότι αφορά τα συγκινόμενα, ισχυρίζεται το εξής. Θεωρούμε την οικογένεια όλων των ουσιαστικά μικρών $\alpha-$τοπικοποιήσιμων υποκατηγοριών $\mathcal{S}$ της $\mathcal{T}$, έτσι ώστε ο ομολογικός συναρτητής τον οποίο συμβολίζουμε ως

$$Y_{\mathcal{S}}^{\alpha} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

, για να υποδηλώσουμε την εξάρτηση απο τον κανονικό πληθάριθμο α και την $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\mathcal{S}$, να διατηρεί τα συγκινόμενα. Υποθέτουμε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha}$ η οποία είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη από το Λήμμα 4.2.5, είναι επιπλέον ουσιαστικά μικρή. Τότε η $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι η μοναδική μεγιστική $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ ανήκουσα στην οικογένεια, η οποία έχει την επιπλέον ιδιότητα να περιέχει κάθε μέλος της οικογένειας (Πόρισμα 3.3.10). Συνεπώς, ο Ορισμός 4.2.2 των υποκατηγοριών $\mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}$ (α κανονικός πληθάριθμος) παρόλο που εκ πρώτης όψεως φάνηκε μυστηριώδης, στην πραγματικότητα είναι πολύ φυσιολογικός.

Μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ θα λέμε ότι ικανοποιεί το αξίωμα [AB4], εάν ικανοποιεί το αξίωμα [AB3], δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, και τα συγκινόμενα μονομορφισμών στην $\mathcal{A}$ είναι μονομορφισμοί. Μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ θα λέμε ότι ικανοποιεί το αξίωμα [AB5$^{\alpha}$], εάν ικανοποιεί το αξίωμα [AB4], και τα $\alpha-$φιλτραρισμένα συνόρια ακριβών ακολουθιών είναι ακριβή στην $\mathcal{A}$.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ότι η υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha}$ δεν είναι μόνο η καλύτερη δυνατή επιλογή μεταξύ των μελών της οικογένειας όπως περιγράψαμε προηγουμένως, αλλά επιπλέον χαρακτηρίζεται από μια καθολική ιδιότητα όπως μας λέει το επόμενο

Θεώρημα 6.2.9. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία (Ορισμός 7.1.1). Τότε ο ομολογικός συναρτητής*

$$Y_{\mathcal{T}^{\alpha}}^{\alpha} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$$

ο οποίος απεικονίζει το $t \in \mathcal{T}$ στον συναρτητή $\mathcal{T}\big(-,t\big)\big|_{\mathcal{T}^{\alpha}}$, δηλαδή στον περιορισμό του αναπαραστάσιμου συναρτητή $\mathcal{T}\big(-,t\big)$ στην $\mathcal{T}^{\alpha}$, είναι καθολικός μεταξύ όλων των ομολογικών συναρτητών οι οποίοι διατηρούν τα συγκινόμενα από την κατηγορία $\mathcal{T}$ στις αβελιανές κατηγορίες $\mathcal{A}$ οι οποίες ικανοποιούν το αξίωμα [AB5$^{\alpha}$] . Υποθέτουμε ότι δίνεται ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ ο οποίος διατηρεί τα συγκινόμενα. Υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}$ ο οποίος διατηρεί τα συγκινόμενα, και ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r, "Y_{\mathcal{T}^{\alpha}}^{\alpha}"] \arrow[d, "\mathcal{H}"'] & \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big) \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\mathcal{H}}"] \\
\mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επιπλέον, κάθε φυσικός μετασχηματισμός $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ μεταξύ ομολογικών συναρτητών $\mathcal{H}, \mathcal{H}' : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ οι οποίοι διατηρούν τα συγκινόμενα παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω ενός φυσικού μετασχηματισμού $\widetilde{\eta} : \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}'}$ μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών $\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}'} : \mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}$ οι οποίοι επίσης διατηρούν τα συγκινόμενα.

Απόδειξη. [[Nee01b], Θεώρημα B.2.5, σελ. 396] □

Παρατήρηση 6.2.10.1. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, η τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}$ είναι ουσιαστικά μικρή (Ορισμός 7.1.1). Επίσης, από το Λήμμα 4.2.5 έπεται ότι η $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη. Τέλος, αποδεικνύεται ότι η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB5$^{\alpha}$].

Παρατήρηση 6.2.10.2. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση που θα μας απασχολήσει απ΄ εδώ και στο εξής, είναι όταν $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, π.χ. στην περίπτωση που η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία (Ορισμός 7.1.1), όπου ο α είναι ο κανονικός πληθάριθμος τον οποίο έχουμε θεωρήσει σταθερό σ΄ αυτό το Κεφάλαιο. Από το Λήμμα 4.2.5 έπεται ότι η $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη. Εξ ορισμού $\mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}^{(\alpha)}$, συνεπώς η $\mathcal{T}^{\alpha}$ αποτελείται μόνο από $\alpha-$μικρά αντικείμενα. Επίσης, η $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι $\alpha-$τέλεια, στην πραγματικότητα είναι η μεγαλύτερη $\alpha-$τέλεια κλάση της $\mathcal{T}$ που περιέχεται στην $\mathcal{T}^{(\alpha)}$. Επομένως η $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις των Λημμάτων 6.2.4, 6.2.5 και 6.2.6. Συνεπώς, ο φυσικός συναρτητής

$$Y^{\alpha}_{\mathcal{S}} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι ένας ομολογικός συναρτητής, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα και τα συγκινόμενα. Τότε όμως, από το Λήμμα 5.1.21.1 ο μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, επαγόμενος ακριβής συναρτητής

$$\pi^{\alpha}_{\mathcal{S}} := \widetilde{Y^{\alpha}_{\mathcal{S}}} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "Y^{\alpha}_{\mathcal{S}}"'] & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \arrow[dl, dashed, "\pi^{\alpha}_{\mathcal{S}}"] \\
\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, του Θεωρήματος 5.1.16, διατηρεί επίσης τα συγκινόμενα. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το ότι ο συναρτητής $\pi^{\alpha}_{\mathcal{S}}$ επιδέχεται έναν αριστερό συζυγή, ο οποίος θα κατασκευαστεί στην Πρόταση 6.4.3, θα μας επιτρέψει να συμπεράνουμε ότι η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι επακριβώς προσδιορισμένη, για την ακρίβεια είναι ένα πηλίκο Gabriel της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ της $\mathcal{T}$ και μάλιστα είναι ένα καθολικό πηλίκο Gabriel της $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, από την οπτική γωνία του Θεωρήματος 6.2.9.

Αναλυτικότερα, υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], αυτό σημαίνει ότι είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, π.χ. αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία (Ορισμός 7.1.1). Η καθολική συνθήκη της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ της $\mathcal{T}$ (Θεώρημα 5.1.16) ισχυρίζεται ότι οι ομολογικοί συναρτητές $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ τίθενται σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τους ακριβείς συναρτητές $\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}$. Ομοίως, η καθολική συνθήκη της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ (Θεώρημα 6.2.9) ισχυρίζεται ότι οι ομολογικοί συναρτητές $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ οι οποίοι διατηρούν τα συγκινόμενα τίθενται σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τους ακριβείς συναρτητές $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}$ οι οποίοι διατηρούν τα συγκινόμενα. Έστω $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ ένας ομολογικός συναρτητής ο οποίος διατηρεί τα συγκινόμενα, και έστω $Y^{\alpha}_{\mathcal{S}} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ ο καθολικός ομολογικός συναρτητής του Θεωρήματος 6.2.9. Τότε από το Θεώρημα 5.1.16, και το Θεώρημα 6.2.9 επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T} \arrow[dl] \arrow[dd, "Y^{\alpha}_{\mathcal{S}}"] \arrow[dr, "Y"] & \\
\mathcal{A} & & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \arrow[ll] \arrow[dl, "\pi^{\alpha}_{\mathcal{S}}"] \\
& \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα 5.1.21.1, και το Θεώρημα 6.2.9 οι επαγόμενοι ακριβείς συναρτητές $\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}$, $\pi^{\alpha}_{\mathcal{S}} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, και $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}$ αντίστοιχα, διατηρούν τα συγκινόμενα. Με άλλα λόγια, ο ακριβής συναρτητής

$$\pi^{\alpha}_{\mathcal{S}} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι καθολικός μεταξύ όλων των ακριβών συναρτητών οι οποίοι διατηρούν τα συγκινόμενα από την κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ στις αβελιανές κατηγορίες $\mathcal{A}$ οι οποίες ικανοποιούν το αξίωμα [AB5$^{\alpha}$] . Υποθέτουμε ότι δίνεται ένας ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}$ ο οποίος διατηρεί τα συγκινόμενα. Υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}$ ο οποίος διατηρεί τα συγκινόμενα, και ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) \arrow[r, "\pi^{\alpha}_{\mathcal{S}}"] \arrow[d] & \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Ορισμός 6.2.11. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία. Θα λέμε ότι η $\mathcal{S}$ παράγει την $\mathcal{T}$ εάν*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-,x)\big|_{\mathcal{S}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν x είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$, και για κάθε $s \in \mathcal{S}$ ισχύει $\mathcal{T}(s,x) = 0$, τότε το x είναι ισόμορφο με το μηδέν στην $\mathcal{T}$.

6.3 Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα

Έστω $\mathcal{S}$ μια προσθετική κατηγορία όχι απαραίτητα ουσιαστικά μικρή. Από το Λήμμα 5.1.2 γνωρίζουμε ότι οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές $\mathcal{S}(-,s)$ είναι προβολικά αντικείμενα στην κατηγορία $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η $\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Έστω α ο κανονικός πληθάριθμος, τον οποίο έχουμε σταθεροποιήσει εξ αρχής σ′ αυτό το Κεφάλαιο, και έστω ότι η κατηγορία $\mathcal{S}$ ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι η αβελιανή υποκατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \subset \mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα. Είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.1.2. Παρ′ όλα αυτά η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ δεν έχει εν γένει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα.

Λήμμα 6.3.1. *Έστω $\mathcal{S}$ μια κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Έστω s ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{S}$. Τότε ο αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathcal{S}(-,s)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.*

Απόδειξη. Ο συναρτητής $Y_s(-) = \mathcal{S}(-,s)$ είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Από το Λήμμα 5.1.2, ο συναρτητής $\mathcal{S}(-,s)$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο ως αντικείμενο της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, συνεπώς είναι ένα προβολικό αντικείμενο ως αντικείμενο της αβελιανής υποκατηγορίας $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Ο συναρτητής

$$\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)\Big|_{\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)}\Big\{Y_s(\,-\,), -\Big\} : \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

παραμένει ακριβής.

□

Λήμμα 6.3.2. *Έστω $\mathcal{S}$ μια κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Το σύνολο των προβολικών αντικειμένων $\{\mathcal{S}(-,s), s \in \mathcal{S}\}$ παράγει την $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Για την ακρίβεια, επειδή η $\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά μικρή, επιλέγουμε ένα σύνολο αντικειμένων S της $\mathcal{S}$, το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{S}$. Αυτό που ισχυριζόμαστε είναι ότι, το σύνολο των προβολικών αντικειμένων $\{\mathcal{S}(-,s), s \in S\}$ παράγει την $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.*

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση

$$\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$$

για κάποιο $s \in \mathcal{S}$. Αλλά εάν το $\mathcal{F}$ είναι μη μηδενικό, τότε για κάποιο $s \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F}(s) \neq 0$. Από το Λήμμα Yoneda γνωρίζουμε ότι το $\mathcal{F}(s)$ βρίσκεται σε μια ένα προς εάν αντιστοιχία με τις φυσικές απεικονίσεις

$$\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$$

Συνεπώς, υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση $\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$.

□

Λήμμα 6.3.3. *Έστω $\mathcal{S}$ μια κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Το αντικείμενο $\mathcal{P} = \coprod_{s\in\mathcal{S}}\mathcal{S}(-,s)$ είναι ένας προβολικός γεννήτορας της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$.*

Απόδειξη. Το αντικείμενο $\mathcal{P}$ είναι προβολικό ως συγκινόμενο προβολικών αντικειμένων. Επίσης απο το Λήμμα 6.3.2, έπεται άμεσα ότι οποιοδήποτε μη μηδενικό αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση

$$\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$$

Συνεπώς, κάθε μη μηδενικό αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση

$$\mathcal{P}(\,-\,) = \coprod_{s\in\mathcal{S}}\mathcal{S}(-,s) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$$

□

Η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα.

Λήμμα 6.3.4.1. *Έστω $\mathcal{S}$ μια κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}$ ένα αντικείμενο στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η $\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά μικρή, έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)}$−σύνολα. Συνεπώς, η κλάση όλων των απεικονίσεων $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$ είναι ένα σύνολο, όπου $\mathcal{P}$ είναι ο προβολικός γεννήτορας του Λήμματος 6.3.3. Επομένως, από την Πρόταση 6.1.15 το συγκινόμενο $\coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P}$ υπάρχει στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Θεωρούμε το συγκινόμενο όλων αυτών των απεικονίσεων $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$, δηλαδή θεωρούμε την απεικόνιση

$$\coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P} \dashrightarrow \mathcal{F}$$

Έστω $\mathcal{Q}$ ο συνπυρήνας της απεικόνισης, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$\coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{Q} \dashrightarrow 0$$

Έστω $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ μια οποιαδήποτε απεικόνιση. Επειδή το $\mathcal{P}$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο, η απεικόνιση παραγοντοποιείται μέσω του επιμορφισμού $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Q}$, συνεπώς μπορεί να γραφεί ως $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Q}$. Αλλά η απεικόνιση $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$ παραγοντοποιείται μέσω της απεικόνισης $\coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$. Συνεπώς, η απεικόνιση $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Q}$ ισούται με την μηδενική απεικόνιση. Αυτό συμβαίνει για όλες τις απεικονίσεις $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$, συνεπώς $\mathcal{Q} = 0$. Επειδή το $\mathcal{P}$ είναι ένας γεννήτορας, κάθε μη μηδενικό αντικείμενο επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση απο το $\mathcal{P}$ σ' αυτό. Συνεπώς $\mathcal{Q} = 0$, και η απεικόνιση $\coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$ είναι ένας επιμορφισμός. Επιπλέον, το αντικείμενο $\coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P}$ είναι προβολικό ως συγκινόμενο ενός συνόλου $\#\{\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}\}$ αντιτύπων του $\mathcal{P}$. Συνεπώς δείξαμε ότι για κάθε αντικείμενο $\mathcal{F}$ υπάρχει ένας επιμορφισμός από ένα προβολικό αντικείμενο σ' αυτό, επομένως η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα.

□

Παρατήρηση 6.3.4.2. Από το Λήμμα 6.3.4.1, η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα. Ειδικότερα, για κάθε αντικείμενο $\mathcal{F}$ στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, υπάρχει ένας επιμορφισμός $\pi : \coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$. Θεωρούμε τον πυρήνα $\mathcal{K}er(\pi) \longrightarrow \coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P}$ της προηγούμενης απεικόνισης. Τότε για το αντικείμενο $\mathcal{K}er(\pi)$, πάλι από το Λήμμα 6.3.4.1, υπάρχει ένας επιμορφισμός $\coprod_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{K}er(\pi)}\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{K}er(\pi)$. Επομένως, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{K}er(\pi)}\mathcal{P} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \coprod\limits_{\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{F}}\mathcal{P} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
& \mathcal{K}er(\pi) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

του οποίου η γραμμή είναι μια ακριβής ακολουθία. Συνεπώς, κάθε αντικείμενο $\mathcal{F}$ στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ επιδέχεται μια παράσταση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}\big(-,s_\lambda\big) \dashrightarrow \coprod_{\mu\in M}\mathcal{S}\big(-,t_\mu\big) \dashrightarrow \mathcal{F} \dashrightarrow 0$$

Παρατήρηση 6.3.4.3. Από το Λήμμα 6.3.3 η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ έχει έναν γεννήτορα (και μάλιστα προβολικό), συνεπώς είναι well−powered . Αυτό σημαίνει ότι η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των υποαντικειμένων, ή ισοδύναμα των αντικειμένων πηλίκο ενός αντικειμένου της, είναι ένα σύνολο [[Fre66], Πρόταση 3.35, σελ. 69].

Μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ θα λέμε ότι ικανοποιεί το αξίωμα [AB5], εάν ικανοποιεί το αξίωμα [AB3] δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, και τα φιλτραρισμένα συνόρια ακριβών ακολουθιών είναι ακριβή στην $\mathcal{A}$. Μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ θα λέμε ότι είναι μια Grothendieck αβελιανή κατηγορία, εάν ικανοποιεί το αξίωμα [AB5] , και έχει έναν γεννήτορα.

Παρατήρηση 6.3.5. Η ύπαρξη αρκετών ενέσιμων αντικειμένων είναι αρκετά πιο λεπτής φύσεως. Η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ δεν έχει εν γένει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Εάν $\alpha=\aleph_0$, τότε η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big) = \mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ είναι μια Grothendieck αβελιανή κατηγορία, και συνεπώς αποδεικνύεται ότι έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα [[KS06], Θεώρημα 9.6.2, σελ. 236]. Αλλά εάν $\alpha>\aleph_0$, η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ δεν είναι πάντα Grothendieck αβελιανή, διότι δεν ικανοποιεί εν γένει το αξίωμα [AB5] [[Nee01b], Παρατήρηση 6.4.7, σελ. 219]. Συνεπώς, δεν υπάρχει συστηματική διαδικασία (όπως στην περίπτωση $\alpha=\aleph_0$) για να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα.

Λήμμα 6.3.6. *Έστω $\mathcal{S}$ μια κατηγορία η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1.1. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Τότε έχει έναν ενέσιμο συν−γεννήτορα $\mathcal{I}$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.3.3, το αντικείμενο $\mathcal{P}=\coprod_{s\in\mathcal{S}}\mathcal{S}\big(-,s\big)$ είναι ένας προβολικός γεννήτορας της κατηγορίας $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$. Τότε κάθε μη μηδενικό αντικείμενο $k\in\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση $\mathcal{P}\longrightarrow k$. Αυτό σημαίνει ότι το k περιέχει την εικόνα κάποιας μη μηδενικής απεικόνισης $\mathcal{P}\longrightarrow k$. Με άλλα λόγια, το k περιέχει ένα μη μηδενικό υποαντικείμενο, ισόμορφο με ένα αντικείμενο πηλίκο του γεννήτορα $\mathcal{P}$. Από την Παρατήρηση 6.3.4.3 η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ είναι well−powered . Συνεπώς, η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των αντικειμένων πηλίκο του $\mathcal{P}$ είναι ένα σύνολο.

Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Για κάθε αντικείμενο πηλίκο του $\mathcal{P}$, δηλαδή για κάθε κλάση ισομορφισμού των ακριβών ακολουθιών

$$\mathcal{P}\longrightarrow q\longrightarrow 0$$

επιλέγουμε ένα αντικείμενο $q\in\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ και μια εμφύτευση $q\longrightarrow\mathcal{I}_q$, όπου το $\mathcal{I}_q$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$. Επειδή, η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των αντικειμένων πηλίκο του $\mathcal{P}$ είναι ένα σύνολο, οι επιλογές των αντικειμένων q αποτελούν ένα σύνολο, συνεπώς από το Λήμμα 6.1.5 το γινόμενο

$$\mathcal{I} \quad = \quad \prod_{P\longrightarrow q\longrightarrow 0}\mathcal{I}_q$$

υπάρχει στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$.

Ισχυριζόμαστε ότι ο $\mathcal{I}$ είναι ένας ενέσιμος συν−γεννήτορας στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, δηλαδή είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο και είναι ένας συν−γεννήτορας. Ο $\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο ως γινόμενο ενέσιμων αντικειμένων. Αυτό σημαίνει ότι, ο συναρτητής $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\big[-,\mathcal{I}\big]$ είναι ακριβής. Μένει να δείξουμε ότι είναι επιπλέον πιστός. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε μη μηδενικό αντικείμενο $\mathcal{F}\in$

$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, το αντικείμενο $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)[\mathcal{F},\mathcal{I}]$ είναι μη μηδενικό. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$$

Έστω $\mathcal{F}$ ένα μη μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η $\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά μικρή, έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)}-$σύνολα. Συνεπώς, η κλάση όλων των απεικονίσεων $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$ είναι ένα σύνολο. Επομένως, από το Λήμμα 6.1.5 το γινόμενο $\prod_{\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{I}}\mathcal{I}$ υπάρχει στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Θεωρούμε το γινόμενο όλων αυτών των απεικονίσεων, δηλαδή θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathcal{F} \dashrightarrow \prod_{\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{I}} \mathcal{I}$$

Έστω k ο πυρήνας της απεικόνισης, δηλαδή k είναι η τομή των πυρήνων όλων των απεικονίσεων $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $k = 0$. Διαφορετικά, εάν $k \neq 0$, τότε ο k θα είχε ένα μη μηδενικό υποαντικείμενο q, το οποίο είναι ένα αντικείμενο πηλίκο του γεννήτορα $\mathcal{P}$. Επομένως υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow q \longrightarrow k$$

, και συνεπώς η εμφύτευση $q \longrightarrow \mathcal{I}_q$ παραγοντοποιείται μέσω μιας απεικόνισης $k \longrightarrow \mathcal{I}_q$. Αλλά το k είναι ένα υποαντικείμενο του $\mathcal{F}$, συνεπώς η προηγούμενη απεικόνιση παραγοντοποιείται περαιτέρω μέσω μιας απεικόνισης $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}_q$, και επειδή ισχύει

$$\mathcal{I}_q \quad \subset \quad \prod_{P\longrightarrow q\longrightarrow 0} \mathcal{I}_q \quad = \quad \mathcal{I}$$

, στην ουσία παραγοντοποιείται μέσω μιας απεικόνισης $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$. Εκ κατασκευής, αυτή η απεικόνιση είναι μη μηδενική στο $q \subset k \subset \mathcal{F}$. Συνεπώς έχουμε μια απεικόνιση $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$, η οποία είναι μη μηδενική στο $k \subset \mathcal{F}$, και ο k είναι ο πυρήνας της απεικόνισης

$$\mathcal{F} \longrightarrow \prod_{\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{I}} \mathcal{I}$$

Γεγονός που οδηγεί σε αντίφαση, συνεπώς $k = 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

$\square$

Παρατήρηση 6.3.7. Έστω $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\alpha$. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}^\alpha$ είναι ουσιαστικά μικρή, π.χ. αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία (Ορισμός 7.1.1). Από το Λήμμα 6.3.6, υφίσταται η συνεπαγωγή

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b) \\ \text{έχει αρκετά} \\ \text{ενέσιμα} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b) \\ \text{έχει ενέσιμο} \\ \text{συν}-\text{γεννήτορα} \end{array} \right\}$$

Η ύπαρξη αρκετών ενέσιμων αντικειμένων εντός της κατηγορίας $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, και συνεπώς από το Λήμμα 6.3.6 η ύπαρξη ενός ενέσιμου συν$-$γεννήτορα είναι αρκετά ισχυρή συνθήκη, τόσο ισχυρή ώστε, να μας επιτρέψει να γενικεύσουμε την μέθοδο της απόδειξης του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας του Brown (Θεώρημα 7.3.3) για την δυϊκή μιας $\alpha-$συμπαγούς παραγόμενης τριγωνισμένης κατηγορίας (Θεώρημα 7.6.2).

6.4 Η κατηγορία $\mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$ είναι ένα καθολικό πηλίκο Gabriel της αβελιανοποίησης $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ της $\mathcal{T}$

Έστω α ο κανονικός πληθάριθμος που έχουμε θεωρήσει σταθερό από την αρχή του Κεφαλαίου. Από το Θεώρημα 5.1.16 γνωρίζουμε ότι δοθείσης μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, υπάρχει ένας καθολικός ομολογικός συναρτητής

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$$

, ο συναρτητής αβελιανοποίησης Verdier. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, και ότι ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω $\mathcal{T}^{\alpha}$ η $\alpha-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία, η οποία αντιστοιχεί στον κανονικό πληθάριθμο α, και υποθέτουμε επιπλέον ότι είναι ουσιαστικά μικρή, π.χ. αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία (Ορισμός 7.1.1). Τότε από το Λήμμα 6.2.4, υπάρχει ένας φυσικός ομολογικός συναρτητής

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.1.16, υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big) &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Θα δείξουμε ότι ο ακριβής συναρτητής

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$$

είναι μια τοπικοποίηση Gabriel , δηλαδή η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ένα πηλίκο Gabriel της κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, θέτουμε $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$.

Λήμμα 6.4.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Ο φυσικός ακριβής συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα συγκινόμενα.*

Απόδειξη. Από τα Λήμματα 6.2.4 και 6.2.6 ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ομολογικός και διατηρεί τα συγκινόμενα. Επειδή η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] και ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα συγκινόμενα, από το Λήμμα 5.1.21.1, έπεται ότι ο ακριβής συναρτητής

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

διατηρεί τα συγκινόμενα.

□

Λήμμα 6.4.2. *Ο φυσικός συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ απεικονίζει έναν συναρτητή $\mathcal{F} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ στον συναρτητή $\mathcal{F}\big|_{\mathcal{S}}$, δηλαδή στον περιορισμό του $\mathcal{F}$ στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.*

Απόδειξη. Ο ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ απεικονίζει ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ στο $\mathcal{T}\big(-, t\big)\big|_{\mathcal{S}}$. Από το Θεώρημα 5.1.16, ο συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ο μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής ο οποίος καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\mathcal{T}) \arrow[dl, dashed, "\pi"] \\
\mathcal{E}x\Big(\{\mathcal{T}^\alpha\}^{op}, \mathcal{A}b\Big) &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Έστω ένα αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, δηλαδή ένας συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος επιδέχεται μια παράσταση

$$\mathcal{T}(-,s) \dashrightarrow \mathcal{T}(-,t) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

με $s,t \in \mathcal{T}$. Το αντικείμενο $\pi(\mathcal{F})$ ορίζεται ως ο συνπυρήνας της απεικόνισης $\mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$, δηλαδή ορίζεται από την ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathcal{H}(t) \dashrightarrow \pi(\mathcal{F}) \dashrightarrow 0$$

Εάν περιορίσουμε την ακριβή ακολουθία συναρτητών στην $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(-,s) \longrightarrow \mathcal{T}(-,t) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow 0$$

στην υποκατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\alpha \subset \mathcal{T}$, τότε επειδή η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή υποκατηγορία της $\mathcal{C}at(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, λαμβάνουμε μια ακριβή αλουθία συναρτητών στην $\mathcal{S}$

$$\mathcal{T}(-,s)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,t)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

Αλλά $\mathcal{H}(s) = \mathcal{T}(-,s)\big|_{\mathcal{S}}$ και $\mathcal{H}(t) = \mathcal{T}(-,t)\big|_{\mathcal{S}}$. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(s) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{H}(t) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \pi(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\simeq"'] & 0 \\
\mathcal{T}(-,s)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{T}(-,t)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\pi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$.

□

Πρόταση 6.4.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Θέτω $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\alpha$. Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι ένα πηλίκο Gabriel της κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ με μια συν−τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία Serre την οποία συμβολίζουμε $\mathcal{B}$, ή $\mathcal{B}(\alpha)$ για να υποδηλώσουμε την εξάρτηση απο τον κανονικό πληθάριθμο α. Ακριβέστερα, ο ακριβής συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει έναν αριστερό συζυγή $\mathcal{L} : \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$, και η μονάδα της συζυγίας $\varepsilon : 1 \longrightarrow \pi\mathcal{L}$ είναι ένας ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ ταυτοποιεί την κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ ως ένα πηλίκο Gabriel $\mathcal{A}(\mathcal{T})/\mathcal{B}$, δηλαδή ένα πηλίκο της κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ με μια συν−τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία Serre $\mathcal{B}$. Από την δυϊκή της Πρότασης A.2.12 [[Nee01b], σελ. 345], αρκεί να παράξουμε έναν αριστερό συζυγή συναρτητή $\mathcal{L} : \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ του συναρτητή π, έτσι ώστε η μονάδα της συζυγίας $\varepsilon : 1 \longrightarrow \pi\mathcal{L}$ να είναι ένας ισομορφισμός.

Από την Παρατήρηση 6.3.4.2, κάθε αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ επιδέχεται μια παράσταση

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \dashrightarrow \coprod_{\mu\in M}\mathcal{S}(-,t_\mu) \dashrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \dashrightarrow 0$$

Θεωρούμε την κλάση

$$\Phi \quad = \quad \left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda),\ \Lambda \text{ είναι ένα σύνολο}\right\}$$

Από το δυϊκό του Λήμματος A.2.13 [[Nee01b], σελ. 347], για να αποδείξουμε την ύπαρξη του αριστερού συζυγή συναρτητή $\mathcal{L}$ αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda),\pi(\,-\,)\right\} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

είναι αναπαραστάσιμος στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, για κάθε αντικείμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \in \Phi$. Απο το δυϊκό του Λήμματος A.2.15 [[Nee01b], σελ. 348], για να αποδείξουμε ότι μονάδα της συζυγίας $\varepsilon : 1 \longrightarrow \pi\mathcal{L}$ είναι ένας ισομορφισμός, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο φυσικός μετασχηματισμός $\varepsilon : 1 \longrightarrow \pi\mathcal{L}$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο $\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \in \Phi$.

Έστω $\mathcal{G}$ ένα τυχαίο αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{G}$ είναι ένας συναρτητής $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$. Απο το Λήμμα 6.4.2, ο $\pi(\mathcal{G})$ είναι ο περιορισμός του $\mathcal{G}$ στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Το να θεωρήσουμε έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$$

ισοδυναμεί, από την καθολική ιδιότητα του συγκινομένου $\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)$, με το να θεωρήσουμε για κάθε $\lambda \in \Lambda$, έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\mathcal{S}(-,s_\lambda) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$$

Από το Λήμμα Yoneda οι φυσικοί μετασχηματισμοί $\mathcal{S}(-,s_\lambda) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ τίθενται σε μια ένα προς ένα και επι αντιστοιχία με τα στοιχεία του $\mathcal{G}(s_\lambda)$. Συνεπώς υπάρχει μια ένα προς ένα και επι αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών μετασχηματισμών

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$$

και των στοιχείων του

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}(s_\lambda)$$

Από το Λήμμα 5.1.5 ο $\mathcal{G}$ απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, συνεπώς ισχύει

$$\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \quad = \quad \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}(s_\lambda)$$

Από το Λήμμα Yoneda τα στοιχεία του $\mathcal{G}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right)$ τίθενται σε μια ένα προς ένα και επι αντιστοιχία με τους φυσικούς μετασχηματισμούς

$$\mathcal{T}\left(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,)$$

Συνεπώς, υπάρχει μια ένα προς ένα και επι αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών μετασχηματισμών

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \longrightarrow \pi\mathcal{G}(\,-\,)$$

$$\mathcal{T}\Big(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big) \longrightarrow \mathcal{G}(\,-\,)$$

, δηλαδή υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda),\pi\mathcal{G}(\,-\,)\Big\} \quad\simeq\quad \mathcal{A}(\mathcal{T})\Big\{\mathcal{T}\Big(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big),\mathcal{G}(\,-\,)\Big\}$$

ο οποίος εκ κατασκευής (από το Λήμμα Yoneda) είναι φυσικός στα αντικείμενα $\mathcal{G}\in\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Αυτο σημαίνει ότι ο συναρτητής

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda),\pi(\,-\,)\Big\}:\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

είναι αναπαραστάσιμος στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, και αναπαριστάται από το αντικείμενο

$$\mathcal{L}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)\Big) := \mathcal{T}\Big(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big)\in\mathcal{A}(\mathcal{T})$$

Επομένως, ορίσαμε μια απεικόνιση $\mathcal{L}:\Phi\longrightarrow\mathcal{A}(\mathcal{T})$ έτσι ώστε, για κάθε $\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)\in\Phi$, να υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda),\pi(\,-\,)\Big\} \quad\simeq\quad \mathcal{A}(\mathcal{T})\Big\{\mathcal{L}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)\Big),-\Big\}$$

Συνεπώς, από το δυϊκό του Λήμματος A.2.13 [[Nee01b], σελ. 347], υπάρχει ένας αριστερός συζυγής συναρτητής $\mathcal{L}$ του π, δηλαδή η $\mathcal{L}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια απεικόνιση $\mathcal{L}:\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\longrightarrow\mathcal{A}(\mathcal{T})$ (κατάχρηση συμβολισμού), έτσι ώστε να καταστεί ένας ένας αριστερός συζυγής συναρτητής του π.

Ο συναρτητής $\mathcal{L}$ απεικονίζει το

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \qquad \text{στο} \qquad \mathcal{T}\Big(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big)$$

Από το Λήμμα 6.4.2 ο π με την σειρά του απεικονίζει το

$$\mathcal{T}\Big(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big) \qquad \text{στο} \qquad \mathcal{T}\Big(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big)\Big|_{\mathcal{S}}$$

Αλλά, από το Λήμμα 6.2.6, ο συναρτητής $\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, δηλαδή ο περιορισμός του π στην $\mathcal{T}\subset\mathcal{A}(\mathcal{T})$, διατηρεί τα συγκινόμενα. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\mathcal{T}\Big(-,\coprod_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \quad=\quad \coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(-,s_\lambda)|_{\mathcal{S}} \quad=\quad \coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή $\{s_\lambda,\lambda\in\Lambda\}\subset\mathcal{S}$. Επομένως ο συναρτητής $\pi\mathcal{L}$ απεικονίζει το $\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)$ στον εαυτό του, δηλαδή η απεικόνιση

$$\epsilon_{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)} : \coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda) \longrightarrow \pi\mathcal{L}\Big\{\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}(-,s_\lambda)\Big\}$$

είναι η ταυτοτική απεικόνιση, συνεπώς είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, από το δυϊκό του Λήμματος A.2.15 [[Nee01b], σελ. 348], έπεται ότι ο φυσικός μετασχηματισμός ε είναι ένας ισομορφισμός, για κάθε $\mathcal{F} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$.

□

Από το Λήμμα 5.1.21.2, έπεται ότι ο συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα γινόμενα. Ωστόσο,

Πόρισμα 6.4.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Ο φυσικός συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ διατηρεί τα γινόμενα.*

Απόδειξη. Επειδή ο συναρτητής π έχει έναν αριστερό συζυγή, έπεται ότι διατηρεί τα όρια, και συνεπώς διατηρεί τα γινόμενα.

□

Παρατήρηση 6.4.5. Στην Πρόταση 6.4.3 δείξαμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ένα πηλίκο Gabriel της κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ με μια συν−τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία Serre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Από την δυϊκή της Πρότασης A.2.12 [[Nee01b], σελ. 345], τα αντικείμενα της $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ αποτελούνται από όλα τα αντικείμενα $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έτσι ώστε $\pi\big(\mathcal{F}\big) = 0$, δηλαδή

$$\mathcal{B} := \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big\} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$$

Από το Λήμμα 6.4.2, ο $\pi\big(\mathcal{F}\big)$ είναι ο περιορισμός του $\mathcal{F}$ στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Συνεπώς η $\mathcal{B}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ η οποία αποτελείται απ΄ όλους τους συναρτητές της $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ οι οποίοι μηδενίζονται στην $\mathcal{S}$.

Λήμμα 6.4.6. *Από την Πρόταση 5.1.13, και τα Λήμματα 5.1.18, και 5.2.2 έπεται ότι υπάρχει μια ισοδυναμία των αβελιανών κατηγοριών $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Ένα αντικείμενο στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ είναι μια απεικόνιση $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$. Το αντικείμενο $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ ανήκει στον πυρήνα της απεικόνισης*

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

εάν και μόνο εάν η εικόνα της $x \longrightarrow y$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι μηδέν.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 5.2.3, ένα αντικείμενο $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ζεύγος απεικονίσεων στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$

$$\mathcal{T}\big(-,x\big) \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathcal{F}\big(\,-\,\big) \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{T}\big(-,y\big)$$

, όπου ο α είναι ένας επιμορφισμός, και ο β είναι ένας μονομορφισμός. Με άλλα λόγια, η ισοδυναμία $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ απεικονίζει ένα αντικείμενο $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ στην εικόνα $\mathcal{F}\big(\,-\,\big)$ της επαγόμενης απεικόνισης $\mathcal{T}\big(-,x\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,y\big)$ στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, δηλαδή

$$\mathcal{F}\big(\,-\,\big) = \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(-,x\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,y\big)\Big\}$$

Από το Λήμμα 6.4.2, ο συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ο περιορισμός στην υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, δηλαδή απεικονίζει έναν συναρτητή $\mathcal{F}$ στον περιορισμό του $\mathcal{F}\big|_{\mathcal{S}}$ στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ απεικονίζει ένα αντικείμενο $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ στο

$$\mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(-,x\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,y\big)\Big\}\Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(-,x\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,y\big)\big|_{\mathcal{S}}\Big\}$$

Η ισότητα αυτή ισχύει επειδή ο π είναι ακριβής, και επομένως διατηρεί τις εικόνες. Συνεπώς, η εικόνα αυτή $\mathcal{I}m\{\mathcal{T}(-,x)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,y)\big|_{\mathcal{S}}\}$ είναι μηδέν όταν και μόνο όταν η εικόνα της $x \longrightarrow y$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι μηδέν.

□

Επομένως, είναι φυσιολογικό να ορίσουμε

Ορισμός 6.4.7. *Ένας μορφισμός $x \longrightarrow y$ στην $\mathcal{T}$ καλείται $\alpha-$phantom απεικόνιση εάν, η εικόνα της μέσω της φυσικής απεικόνισης*

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι μηδέν.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.4.7, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το Λήμμα 6.4.6 ως εξής. Ο πυρήνας του συναρτητή

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$$

αποτελείται ακριβώς από τις $\alpha-$phantom απεικονίσεις στην $\mathcal{T}$, εάν θεωρηθούν ως αντικείμενα της $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Συμβολίζουμε καταχρηστικά τον πυρήνα αυτό

$$\mathcal{B}(\alpha) := \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{D}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)\Big\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})$$

Συνεπώς από την Πρόταση 6.4.3, έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\{\mathcal{T}^{\alpha}\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι το πηλίκο της $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ με την συν$-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία Serre $\mathcal{B}(\alpha) \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})$, δηλαδή

$$\frac{\mathcal{D}(\mathcal{T})}{\mathcal{B}(\alpha)} \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$$

, όπου $\mathcal{B}(\alpha)$ είναι η κλάση όλων των $\alpha-$phantom απεικονίσεων.

Παρατήρηση 6.4.8. Επειδή η $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, από την Παρατήρηση 6.3.4.3, έπεται ότι η κατηγορία

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι well$-$powered , δηλαδή η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των υποαντικειμένων, ή ισοδύναμα των αντικειμένων πηλίκο ενός αντικειμένου της, είναι ένα σύνολο.

7 Αναπαραστασιμότητα Brown

7.1 Συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες

Υποθέτουμε ότι όλες οι κατηγορίες έχουν μικρά $Hom-$σύνολα.

Ορισμός 7.1.1. *Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Εάν η υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, και εάν $\langle \mathcal{T}^{\alpha} \rangle = \mathcal{T}$, θα λέμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη. Μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ θα λέγεται ότι είναι καλώς παραγόμενη εάν*

7.1.1.1. *Η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα.*

7.1.1.2. *Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5].*

7.1.1.3. *Για κάποιο κανονικό πληθάριθμο α, η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη.*

Παρατήρηση 7.1.2. Προφανώς, μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι $\beta-$συμπαγώς παραγόμενη για όλους τους αρκετά μεγάλους κανονικούς πληθαρίθμους β.

Ορισμός 7.1.3.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Ένα σύνολο T αντικειμένων της $\mathcal{T}$ καλείται παράγον σύνολο εάν*

7.1.3.1.1. *$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(-,x)\big|_T = 0 \Longrightarrow x = 0$, αυτό σημαίνει ότι εάν $x \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε*

$$\forall t \in T, \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(t,x) = 0$$

τότε το x είναι ισόμορφο στην $\mathcal{T}$ με το 0.

7.1.3.1.2. *Ως προς ισομορφισμό, το σύνολο T είναι κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, αυτό σημαίνει ότι δοθέντος ενός αντικειμένου $t \in T$ και ενός ακεραίου $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει ένα αντικείμενο στην T ισόμορφο με το $\Sigma^n t$.*

Παρατήρηση 7.1.3.2. Έστω T ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$ το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη 7.1.3.1.1. Τότε το σύνολο

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n T \ := \ \{\Sigma^n t \mid n \in \mathbb{Z}, t \in T\}$$

είναι κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή

$$\Sigma \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n T \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n T$$

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο Σ^{-n} είναι ένας δεξιός (και αριστερός) συζυγής του Σ^n. Ειδικότερα για κάθε $t \in T$ και για κάθε $x \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma^n t, x) \quad \simeq \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(t, \Sigma^{-n} x)$$

Έστω $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(\Sigma^n t, x) = 0$, για κάθε $t \in T$. Τότε λόγω του προηγούμενου ισομορφισμού ισχύει $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}(t, \Sigma^{-n} x) = 0$, για κάθε $t \in T$. Επειδή το σύνολο T ικανοποιεί την συνθήκη 7.1.3.1.1, έπεται ότι το $\Sigma^{-n} x$, και συνεπώς το x, είναι ισόμορφο στην $\mathcal{T}$ με το 0. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n T$ ικανοποιεί την συνθήκη 7.1.3.1.1. Επομένως, η συνθήκη 7.1.3.1.2 στην ουσία περιττεύει. Συνεπώς, κάθε παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$, θα μπορούμε να το θεωρούμε κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ.

Ορισμός 7.1.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Ένα σύνολο T αντικειμένων της $\mathcal{T}$ καλείται $\beta-$τέλειο παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$ εάν είναι ένα παράγον σύνολο όπως στον Ορισμό 7.1.3.1, και το σύνολο $T \cup \{0\}$ είναι $\beta-$τέλειο όπως στον Ορισμό 3.3.1.*

Παρατήρηση 7.1.5. Έστω α και β άπειροι πληθάριθμοι. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω T ένα $\beta-$τέλειο παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Από την Πρόταση 3.2.5 η κατηγορία $\langle T \rangle^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Έστω S ένα σύνολο αντικειμένων της $\langle T \rangle^{\alpha}$ το οποίο περιέχει το T, και το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\langle T\rangle^{\alpha}$. Τότε το σύνολο S είναι ένα $\beta-$τέλειο παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Πράγματι, το σύνολο S είναι κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, ως προς ισομορφισμό. Επειδή το σύνολο S περιέχει το παράγον σύνολο T, έπεται ότι είναι επίσης ένα παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Τέλος, επειδή το T είναι ένα $\beta-$τέλειο σύνολο, από το Θεώρημα 3.3.9 η κατηγορία $\langle T\rangle^{\alpha}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση, και επειδή κάθε αντικείμενο του $S\subset\langle T\rangle^{\alpha}$ είναι ισόμορφο με κάποιο αντικείμενο της $\langle T\rangle^{\alpha}$, από το Λήμμα 3.3.2 το S είναι ένα $\beta-$τέλειο σύνολο. Προφανώς, ισχύει και το αντίστροφο εναλλάσοντας τους ρόλους των α και β.

Ορισμός 7.1.6. *Έστω β ένας άπειρος πληθάριθμος. Μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] καλείται $\beta-$τέλεια παραγόμενη εάν περιέχει κάποιο $\beta-$τέλειο παράγον σύνολο T.*

Παρατήρηση 7.1.7. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.1.5, αντικαθιστώντας το σύνολο T με ένα σύνολο S, το οποίο περιέχει το T, και το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\langle T\rangle^{\alpha}$, όπου ο α είναι ένας οποιοσδήποτε άπειρος πληθάριθμος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το S είναι, ως προς ισοδυναμία κατηγοριών, το σύνολο των αντικειμένων της μικρότερης $\alpha-$τοπικοποιήσιμης υποκατηγορίας $\langle T\rangle^{\alpha}$ της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το T.

Ορισμός 7.1.8. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος. Ένα σύνολο T αντικειμένων της $\mathcal{T}$ καλείται $\beta-$συμπαγές παράγον για την $\mathcal{T}$ εάν είναι ένα $\beta-$τέλειο παράγον σύνολο όπως στον Ορισμό 7.1.4, και όλα τα αντικείμενα του T είναι $\beta-$μικρά. Αυτό σημαίνει ότι, $T\subset\mathcal{T}^{(\beta)}$.*

Παρατήρηση 7.1.9.1. Έστω T ένα $\beta-$συμπαγές παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Τότε το T είναι ένα $\beta-$τέλειο υποσύνολο της $\mathcal{T}^{(\beta)}$, συνεπώς περιέχεται στην μοναδική μεγιστική $\beta-$τέλεια κλάση $\mathcal{T}^{\beta}:=\{\mathcal{T}^{(\beta)}\}_{\beta}\subset\mathcal{T}^{(\beta)}$. Αυτό σημαίνει ότι, το T περιέχεται στην τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\beta}$ των $\beta-$συμπαγών αντικειμένων στην $\mathcal{T}$.

Παρατήρηση 7.1.9.2. Έστω T ένα $\beta-$συμπαγές παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Θεωρούμε το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\Sigma^nT:=\{\Sigma^nt\mid n\in\mathbb{Z},t\in T\}$ της Παρατήρησης 7.1.3.2. Τότε,

$$\Sigma\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\Sigma^nT\right\}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\Sigma^nT\quad\subset\quad\mathcal{T}^{\beta}$$

, επειδή η $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, και άρα $\Sigma^n\mathcal{T}^{\beta}=\mathcal{T}^{\beta}$, για κάθε $n\in\mathbb{Z}$. Συνεπώς, κάθε $\beta-$συμπαγές παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$, θα μπορούμε να το θεωρούμε κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ.

Ορισμός 7.1.10. *Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Εάν η $\mathcal{T}$ περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T, θα λέμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη. Μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ θα λέγεται ότι είναι καλώς παραγόμενη εάν*

7.1.10.1. *Η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα.*

7.1.10.2. *Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5].*

7.1.10.3. *Για κάποιο κανονικό πληθάριθμο α, η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη, δηλαδή περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T.*

Στην Ενότητα 7.4, στην Πρόταση 7.4.5 θα δείξουμε ότι οι Ορισμοί 7.1.1 και 7.1.10 είναι ισοδύναμοι.

7.2 Αναπαραστασιμότητα Brown

Σ' αυτή την Ενότητα θα μελετήσουμε τους αναπαραστάσιμους συναρτητές $\mathcal{H}:\mathcal{T}^{op}\longrightarrow\mathcal{A}b$. Από την Παρατήρηση 1.1.11, γνωρίζουμε ότι οι συναρτητές $\mathcal{T}(-,h)$ είναι ομολογικοί, και απο το Λήμμα 5.1.5, ότι διατηρούν τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Ορίζουμε

Ορισμός 7.2.1. *Μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ θα λέμε ότι ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας εάν*

7.2.1.1. *Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5].*

7.2.1.2. *Κάθε συναρτητής* $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$, *ο οποίος είναι ομολογικός, και διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην* $\mathcal{T}$ *σε γινόμενα στην* $\mathcal{A}b$, *είναι αναπαραστάσιμος. Αυτό σημαίνει ότι είναι φυσικά ισόμορφος με έναν συναρτητή* $\mathcal{T}(-,h)$, *για κάποιο αντικείμενο* $h \in \mathcal{T}$.

Ορισμός 7.2.2.1. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια αβελιανή κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [AB3*(*$\aleph_1$*)] , αυτό σημαίνει ότι τα αριθμήσιμα γινόμενα υπάρχουν στην* $\mathcal{A}$. *Έστω μια αριθμήσιμη ακολουθία απο αντικείμενα και μορφισμούς της* $\mathcal{A}$

$$\cdots \xrightarrow{j_4} X_3 \xrightarrow{j_3} X_2 \xrightarrow{j_2} X_1 \xrightarrow{j_1} X_0$$

Το όριο (ή αντίστροφο όριο) της ακολουθίας, το οποίο συμβολίζεται ως $\varprojlim X_i$, *δίνεται εξ ορισμού, ως προς κανονικό ισομορφισμό, ως ο πυρήνας του μορφισμού*

$$1 - shift : \prod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow \prod_{i\geq 0} X_i$$

Ο μορφισμός $shift : \prod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow \prod_{i\geq 0} X_i$ *είναι ο (μοναδικός) μορφισμός που επάγεται στο δεύτερο γινόμενο από τους μορφισμούς* $j_{i+1} \circ p_{i+1} : \prod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow X_i$. *Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε* $i \geq 0$, *το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X_{i+1} \arrow[r, "j_{i+1}"] & X_i \\ \prod_{i\geq 0} X_i \arrow[u, "p_{i+1}"] \arrow[r, dashed, "shift"] & \prod_{i\geq 0} X_i \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

καθίσταται μεταθετικό, όπου $p_i : \prod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow X_i$ *είναι η κανονική προβολή από το γινόμενο στο* X_i.

Ορισμός 7.2.2.2. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια αβελιανή κατηγορία η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [AB3(*$\aleph_1$*)] , αυτό σημαίνει ότι τα αριθμήσιμα συγκινόμενα υπάρχουν στην* $\mathcal{A}$. *Έστω μια αριθμήσιμη ακολουθία από αντικείμενα και μορφισμούς της* $\mathcal{A}$

$$X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_2} X_2 \xrightarrow{j_3} X_3 \xrightarrow{j_4} \cdots$$

Το ευθύ όριο (ή συνόριο) της ακολουθίας, $\underrightarrow{colim}\, X_i$, *δίνεται εξ ορισμού, ως προς κανονικό ισομορφισμό, ως ο συν−πυρήνας του μορφισμού*

$$1 - shift : \coprod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i$$

Ο μορφισμός $shift : \coprod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i$ *είναι ο (μοναδικός) μορφισμός που επάγεται στο πρώτο συγκινόμενο από τους μορφισμούς* $u_{i+1} \circ j_{i+1} : X_i \longrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i$. *Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε* $i \geq 0$, *το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "j_{i+1}"] \arrow[d, "u_i"'] & X_{i+1} \arrow[d, "u_{i+1}"] \\ \coprod_{i\geq 0} X_i \arrow[r, dashed, "shift"] & \coprod_{i\geq 0} X_i \end{tikzcd}$$

καθίσταται μεταθετικό, όπου $u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i$ *είναι η κανονική εμφύτευση του* X_i *στο συγκινόμενο.*

Λήμμα 7.2.3. *Έστω* $\mathcal{T}$ *μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά* $Hom_{\mathcal{T}}$*−σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], και* T *ένα σύνολο αντικειμένων στην* $\mathcal{T}$. *Έστω* $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ *ένας ομολογικός συναρτητής. Αυτό σημαίνει ότι ο* $\mathcal{H}$ *είναι ανταλλοίωτος και απεικονίζει τρίγωνα σε μακρές ακριβείς ακολουθίες. Υποθέτουμε ότι ο* $\mathcal{H}$ *διατηρεί τα γινόμενα. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε σύνολο* $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *αντικειμένων στην* $\mathcal{T}$, *η φυσική απεικόνιση*

$$\mathcal{H}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\right) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}(t_\lambda)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Τότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$X_0 \xrightarrow{\ j_1\ } X_1 \xrightarrow{\ j_2\ } X_2 \xrightarrow{\ j_3\ } \cdots$$

έτσι ώστε

7.2.3.1. *Για κάθε $i \geq 0$, τα αντικείμενα X_i ανήκουν στην $\langle T\rangle$, δηλαδή την μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το T.*

7.2.3.2. *Για κάθε $i \geq 0$, υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών στην $\mathcal{T}$*

$$\mathcal{T}(-, X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)$$

Αυτοί οι φυσικοί μετασχηματισμοί ικανοποιούν μια σχέση συμβατότητας, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}(-, X_i) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{T}(-, X_{i+1}) \arrow[rr] & & \mathcal{H}(\,-\,)
\end{tikzcd}$$

να καθίσταται μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$.

7.2.3.3. *Έστω $X = \underrightarrow{Hocolim}\ X_i$ το ομοτοπικό συνόριο της ακολουθίας. Υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός*

$$\mathcal{T}(-, X) \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}(-, X_i) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{T}(-, X) \arrow[rr] & & \mathcal{H}(\,-\,)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$.

7.2.3.4. *Για κάθε αντικείμενο $t \in T$, η εικόνα της απεικόνισης*

$$\mathcal{T}(t, X_i) \longrightarrow \mathcal{T}(t, X_{i+1})$$

απεικονίζεται ισομορφικά στην $\mathcal{H}(t)$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{T}(t, X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$$

, για κάθε $i \geq 0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$U_0 \;=\; \bigcup_{t\in T}\mathcal{H}(t)$$

Τα στοιχεία του U_0 μπορούμε να τα σκεφτόμαστε ως ζεύγη (α, t) με $\alpha \in \mathcal{H}(t)$. Θέτουμε

$$X_0 \;=\; \coprod_{(\alpha,t)\in U_0} t$$

Προφανώς, το X_0 είναι ένα αντικείμενο της $\langle T\rangle$, επειδή είναι ένα συγκινόμενο των $t \in T$ και η $\langle T\rangle$ είναι τοπικοποίησιμη.

Έστω $i_{(\alpha,t)} : t \longrightarrow X_0$ η κανονική εμφύτευση του t στο συγκινόμενο $X_0 = \coprod_{(\alpha,t)\in U_0} t$ που αντιστοιχεί στο $(\alpha, t) \in U_0$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big) : \mathcal{H}\big(X_0\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$$

Το γινόμενο $\prod_{(\alpha,t)\in U_0} \mathcal{H}\big(t\big)$ προφανώς υπάρχει στην $\mathcal{A}b$. Έστω $p_{(\alpha,t)} : \prod_{(\alpha,t)\in U_0} \mathcal{H}\big(t\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$ η κανονική προβολή από το γινόμενο $\prod_{(\alpha,t)\in U_0} \mathcal{H}\big(t\big)$ στην $\mathcal{H}\big(t\big)$ που αντιστοιχεί στο $(\alpha, t) \in U_0$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ψ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}\big(t\big) & \\
\mathcal{H}\big(X_0\big) \arrow[ur, "\mathcal{H}(i_{(\alpha,t)})"] \arrow[rr, dashed, "\psi"] & & \prod\limits_{(\alpha,t)\in U_0} \mathcal{H}\big(t\big) \arrow[ul, "p_{(\alpha,t)}"']
\end{tikzcd}$$

, για κάθε $(\alpha, t) \in U_0$. Από την υπόθεση ο $\mathcal{H}$ απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, αυτό ακριβώς σημαίνει ότι η απεικόνιση ψ είναι ένας ισομορφισμός.

Υπάρχει ένα προφανές στοιχείο στην $\mathcal{H}\big(X_0\big)$, το οποίο απεικονίζεται μέσω της ψ, στο στοιχείο $(\alpha)_{(\alpha,t)\in U_0} \in \prod_{(\alpha,t)\in U_0} \mathcal{H}\big(t\big)$. Συμβολίζουμε αυτό το στοιχείο με $\alpha_0 \in \mathcal{H}\big(X_0\big)$.

Θεωρούμε τον ισομορφισμό του Λήμματος Yoneda

$$\pi_{X_0,\mathcal{H}} : \mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-, X_0\big), \mathcal{H}\big(\,-\,\big)\Big] \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathcal{H}\big(X_0\big)$$

Τότε από το Λήμμα Yoneda, υπάρχει μια απεικόνιση $\phi_0 : \mathcal{T}\big(-, X_0\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$, η οποία απεικονίζεται μέσω της $\pi_{X_0,\mathcal{H}}$, στο στοιχείο $\alpha_0 \in \mathcal{H}\big(X_0\big)$, δηλαδή $\pi_{X_0,\mathcal{H}}\big(\phi_0\big) = \big(\phi_0\big)_{X_0}\big(1_{X_0}\big) = \alpha_0$. Για κάθε $(\alpha, t) \in U_0$, θεωρούμε την κανονική εμφύτευση $i_{(\alpha,t)}$ που αντιστοιχεί στο $(\alpha, t) \in U_0$. Για κάθε τέτοια απεικόνιση $i_{(\alpha,t)}$, από την φυσικότητα του Λήμματος Yoneda στα αντικείμενα της $\mathcal{T}$, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(X_0, X_0\big) \arrow[r, "(\phi_0)_{X_0}"] \arrow[d, "\mathcal{T}(i_{(\alpha,t)}, X_0)"'] & \mathcal{H}(X_0) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathcal{H}(i_{(\alpha,t)})"'] & \prod\limits_{(\alpha,t)\in U_0} \mathcal{H}\big(t\big) \arrow[d, "p_{(\alpha,t)}"'] \\
\mathcal{T}\big(t, X_0\big) \arrow[r, "(\phi_0)_t"] & \mathcal{H}(t) \arrow[r, "="] & \mathcal{H}(t)
\end{tikzcd}$$

Από την μεταθετικότητα του δεξιού τετραγώνου, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big)\big(\alpha_0\big) = p_{(\alpha,t)} \circ \psi\big(\alpha_0\big)$, ισοδύναμα $\mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big)\big(\alpha_0\big) = \alpha$, επειδή $p_{(\alpha,t)} \circ \psi\big(\alpha_0\big) = \alpha$ από τον ορισμό της ψ. Συνεπώς, για κάθε $(\alpha, t) \in U_0$, υπάρχει ένα στοιχείο της $\mathcal{H}\big(X_0\big)$ και μάλιστα το α_0, το οποίο απεικονίζεται μέσω της $\mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big)$, στο α, δηλαδή $\mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big)\big(\alpha_0\big) = \alpha$.

Από την μεταθετικότητα του αριστερού τετραγώνου, συμπεραίνουμε ότι $\big(\phi_0\big)_t \circ \mathcal{T}\big(i_{(\alpha,t)}, X_0\big)\big(1_{X_0}\big) = \mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big) \circ \big(\phi_0\big)_{X_0}\big(1_{X_0}\big)$, ισοδύναμα $\big(\phi_0\big)_t\big(i_{(\alpha,t)}\big) = \mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big)\big(\alpha_0\big)$, επειδή $\mathcal{T}\big(i_{(\alpha,t)}, X_0\big)\big(1_{X_0}\big) = i_{(\alpha,t)}$, και $\big(\phi_0\big)_{X_0}\big(1_{X_0}\big) = \alpha_0$. Επειδή $\mathcal{H}\big(i_{(\alpha,t)}\big)\big(\alpha_0\big) = \alpha$, έπεται $\big(\phi_0\big)_t\big(i_{(\alpha,t)}\big) = \alpha$. Συνεπώς, για κάθε $(\alpha, t) \in U_0$, υπάρχει ένα στοιχείο της $\mathcal{T}\big(t, X_0\big)$, συγκεκριμένα η κανονική εμφύτευση $i_{(\alpha,t)}$ που αντιστοιχεί στο $(\alpha, t) \in U_0$, η οποία απεικονίζεται μέσω της $\big(\phi_0\big)_t$, στο α, δηλαδή $\big(\phi_0\big)_t\big(i_{(\alpha,t)}\big) = \alpha$.

Συνεπώς, δείξαμε ότι υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\phi_0 : \mathcal{T}\big(-, X_0\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$$

και ότι, για κάθε $t \in T$, η απεικόνιση

$$\big(\phi_0\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_0\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$$

είναι ένας επιμορφισμός.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $i \geq 0$ έχουμε ορίσει ένα αντικείμενο $X_i \in \langle T \rangle$, και έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\phi_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι, για κάθε $t \in T$, η απεικόνιση

$$\big(\phi_i\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$$

είναι ένας επιμορφισμός. Θέλουμε να συνεχίσουμε με επαγωγή ορίζοντας ένα αντικείμενο $X_{i+1} \in \langle T \rangle$, μια απεικόνιση $j_{i+1} : X_i \longrightarrow X_{i+1}$, και έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\phi_{i+1} : \mathcal{T}\big(-, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)$$

ο οποίος να παραγοντοποιεί τον φυσικό μετασχηματισμό

$$\phi_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)$$

ως

$$\mathcal{T}\big(-, X_i\big) \xrightarrow{\mathcal{T}(-, j_{i+1})} \mathcal{T}\big(-, X_{i+1}\big) \xrightarrow{\phi_{i+1}} \mathcal{H}\big(-\big)$$

, για κάθε $t \in T$, η απεικόνιση

$$\big(\phi_{i+1}\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$$

να είναι ένας επιμορφισμός, και επιπλέον, για κάθε $t \in T$, η εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{T}\big(t, j_{i+1}\big) : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)$$

να απεικονίζεται ισομορφικά στην $\mathcal{H}\big(t\big)$ μέσω της απεικόνισης

$$\big(\phi_{i+1}\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$$

Ορίζουμε

$$U_{i+1} \;=\; \bigcup_{t \in T} \mathcal{K}er\Big\{\big(\phi_i\big)_t\Big\} \;=\; \bigcup_{t \in T} \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)\Big\}$$

Ένα στοιχείο του U_{i+1} μπορούμε να το σκεφτόμαστε ως ένα ζεύγος (f,t), όπου $t \in T$ και ο $f : t \longrightarrow X_i$ είναι ένας μορφισμός. Θέτουμε

$$K_{i+1} \;=\; \coprod_{(f,t) \in U_{i+1}} t$$

, και έστω

$$K_{i+1} \xrightarrow{\coprod_{(f,t) \in U_{i+1}} f} X_i$$

η μοναδική απεικόνιση που επάγεται στο συγκινόμενο K_{i+1}, δηλαδή η απεικόνιση η οποία ταυτίζεται με την f στον παράγοντα t του συγκινομένου, ο οποίος αντιστοιχεί στο ζεύγος $(f,t) \in U_{i+1}$. Συμβολίζουμε αυτή την απεικόνιση με k_{i+1}. Έστω X_{i+1} ένα αντικείμενο που συμπληρώνει την απεικόνιση $k_{i+1} : K_{i+1} \longrightarrow X_i$ σ' ένα τρίγωνο

$$K_{i+1} \xrightarrow{k_{i+1}} X_i \overset{j_{i+1}}{\dashrightarrow} X_{i+1} \dashrightarrow \Sigma K_{i+1}$$

στην $\mathcal{T}$. Το $X_i \in \langle T \rangle$ από την επαγωγική υπόθεση, το $K_{i+1} \in \langle T \rangle$ επειδή είναι ένα συγκινόμενο των $t \in T$ και η $\langle T \rangle$ είναι τοπικοποίησιμη. Συνεπώς, επειδή η $\langle T \rangle$ είναι τριγωνισμένη έπεται ότι το $X_{i+1} \in \langle T \rangle$. Συνεπώς, κατασκευάσαμε επαγωγικά μια απεικόνιση $j_{i+1} : X_i \longrightarrow X_{i+1}$ στην $\langle T \rangle$. Στην συνέχεια θα παραγοντοποιήσουμε την απεικόνιση

$$\phi_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$$

ως

$$\mathcal{T}\big(-, X_i\big) \xrightarrow{\mathcal{T}(-,j_{i+1})} \mathcal{T}\big(-, X_{i+1}\big) \xrightarrow{\phi_{i+1}} \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$$

Έστω $i_{(f,t)} : t \longrightarrow K_{i+1}$ η κανονική εμφύτευση του t στο συγκινόμενο $K_{i+1} = \coprod_{(f,t)\in U_{i+1}} t$ που αντιστοιχεί στο $(f,t) \in U_{i+1}$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{H}\big(i_{(f,t)}\big) : \mathcal{H}\big(K_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$$

Το γινόμενο $\prod_{(f,t)\in U_{i+1}} \mathcal{H}\big(t\big)$ υπάρχει στην $\mathcal{A}b$. Έστω $p_{(f,t)} : \prod_{(f,t)\in U_{i+1}} \mathcal{H}\big(t\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$ η κανονική προβολή από το γινόμενο $\prod_{(f,t)\in U_{i+1}} \mathcal{H}\big(t\big)$ στην $\mathcal{H}\big(t\big)$ που αντιστοιχεί στο $(f,t) \in U_{i+1}$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ψ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}\big(t\big) & \\ \mathcal{H}\big(K_{i+1}\big) \arrow[ur, "\mathcal{H}(i_{(f,t)})"] \arrow[rr, dashed, "\psi"] & & \prod\limits_{(f,t)\in U_{i+1}} \mathcal{H}\big(t\big) \arrow[ul, "p_{(f,t)}"'] \end{tikzcd}$$

, για κάθε $(f,t) \in U_{i+1}$. Εξ υποθέσεως ο συναρτητής $\mathcal{H}$ απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, όπως αναφέραμε προηγουμένως αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση ψ είναι ένας ισομορφισμός.

Θεωρούμε τον ισομορφισμό του Λήμματος Yoneda

$$\pi_{X_i,\mathcal{H}} : \mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-, X_i\big), \mathcal{H}\big(\,-\,\big)\Big] \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}\big(X_i\big)$$

Τότε από το Λήμμα Yoneda, η απεικόνιση $\phi_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$ απεικονίζεται μέσω της $\pi_{X_i,\mathcal{H}}$, σ' ένα στοιχείο $\alpha_i \in \mathcal{H}\big(X_i\big)$, δηλαδή $\pi_{X_i,\mathcal{H}}\big(\phi_i\big) = \big(\phi_i\big)_{X_i}\big(1_{X_i}\big) = \alpha_i$. Η απεικόνιση

$$\mathcal{H}\big(k_{i+1}\big) : \mathcal{H}\big(X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(K_{i+1}\big)$$

απεικονίζει το $\alpha_i \in \mathcal{H}\big(X_i\big)$ στο μηδέν. Πράγματι, η απεικόνιση $k_{i+1} : K_{i+1} \longrightarrow X_i$ είναι το συγκινόμενο όλων των απεικονίσεων της μορφής $f : t \longrightarrow X_i$, για κάποιο $t \in T$, έτσι ώστε η απεικόνιση $\big(\phi_i\big)_t\big(f\big)$ να μηδενίζεται. Για κάθε τέτοια απεικόνιση $f : t \longrightarrow X_i$, από την φυσικότητα του Λήμματος Yoneda στα αντικείμενα της $\mathcal{T}$, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(X_i, X_i) \arrow[r, "(\phi_i)_{X_i}"] \arrow[d, "\mathcal{T}(f,X_i)"'] & \mathcal{H}(X_i) \arrow[r, "\mathcal{H}(k_{i+1})"] \arrow[d, "\mathcal{H}(f)"'] & \mathcal{H}(K_{i+1}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathcal{H}(i_{(f,t)})"'] & \prod_{(f,t)\in U_{i+1}} \mathcal{H}(t) \arrow[d, "p_{(f,t)}"'] \\
\mathcal{T}(t, X_i) \arrow[r, "(\phi_i)_t"] & \mathcal{H}(t) \arrow[r, "="] & \mathcal{H}(t) \arrow[r, "="] & \mathcal{H}(t)
\end{tikzcd}$$

Από την μεταθετικότητα του αριστερού τετραγώνου, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{H}(f) \circ (\phi_i)_{X_i}(1_{X_i}) = (\phi_i)_t \circ \mathcal{T}(f, X_i)(1_{X_i})$, ισοδύναμα $\mathcal{H}(f)(\alpha_i) = (\phi_i)_t(f)$, επειδή $(\phi_i)_{X_i}(1_{X_i}) = \alpha_i$ και $\mathcal{T}(f, X_i)(1_{X_i}) = f$. Επειδή, $(\phi_i)_t(f) = 0$, έπεται $\mathcal{H}(f)(\alpha_i) = 0$. Συνεπώς, για κάθε $(f,t) \in U_{i+1}$, έπεται $\mathcal{H}(f)(\alpha_i) = 0$.

Από την μεταθετικότητα του μεσαίου τετραγώνου, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{H}(i_{(f,t)}) \circ \mathcal{H}(k_{i+1})(\alpha_i) = \mathcal{H}(f)(\alpha_i) = 0$, συνεπώς $\mathcal{H}(k_{i+1})(\alpha_i) = 0$. Με άλλα λόγια, το γεγονός ότι ο $\mathcal{H}$ απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$ σημαίνει ακριβώς ότι οι επαγόμενες απεικονίσεις $\mathcal{H}(i_{(f,t)}) : \mathcal{H}(K_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ εφοδιάζουν το αντικείμενο $\mathcal{H}(K_{i+1})$ με την δομή ενός γινομένου στην $\mathcal{A}b$ (δεξιό τετράγωνο). Επομένως, η απεικόνιση $\mathcal{H}(k_{i+1})$ είναι η μοναδική απεικόνιση που επάγεται στο γινόμενο $\mathcal{H}(K_{i+1})$, δηλαδή η απεικόνιση η οποία ταυτίζεται με την $\mathcal{H}(f)$ στον παράγοντα t του συγκινομένου, ο οποίος αντιστοιχεί στο ζεύγος $(f,t) \in U_{i+1}$. Συνεπώς, επειδή $\mathcal{H}(f)(\alpha_i) = 0$, για κάθε $(f,t) \in U_{i+1}$, έπεται $\mathcal{H}(k_{i+1})(\alpha_i) = 0$.

Αλλά, ο συναρτητής $\mathcal{H}$ είναι συνομολογικός, συνεπώς απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}(X_{i+1}) \xrightarrow{\mathcal{H}(j_{i+1})} \mathcal{H}(X_i) \xrightarrow{\mathcal{H}(k_{i+1})} \mathcal{H}(K_{i+1})$$

Επειδή $\mathcal{H}(k_{i+1})(\alpha_i) = 0$, από την ακρίβεια της ακολουθίας υπάρχει ένα στοιχείο $\alpha_{i+1} \in \mathcal{H}(X_{i+1})$, έτσι ώστε $\mathcal{H}(j_{i+1})(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$. Επιλέγω ένα τέτοιο στοιχείο έστω α_{i+1}. Από το Λήμμα Yoneda αυτό αντιστοιχεί σ΄ έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\phi_{i+1} : \mathcal{T}(-, X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)$$

, ο οποίος καθιστά μεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}(-, X_i) \arrow[dl, "\mathcal{T}(-,j_{i+1})"'] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\
\mathcal{T}(-, X_{i+1}) \arrow[rr, "\phi_{i+1}"] & & \mathcal{H}(\,-\,)
\end{tikzcd}$$

Επειδή για κάθε $t \in T$, από την επαγωγική υπόθεση, η σύνθεση

$$(\phi_i)_t : \mathcal{T}(t, X_i) \xrightarrow{\mathcal{T}(t,j_{i+1})} \mathcal{T}(t, X_{i+1}) \xrightarrow{(\phi_{i+1})_t} \mathcal{H}(t)$$

είναι ένας επιμορφισμός, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $t \in T$, η απεικόνιση

$$(\phi_{i+1})_t : \mathcal{T}(t, X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$$

είναι επίσης ένας επιμορφισμός.

Για κάθε $t \in T$, ο συναρτητής $\mathcal{T}(t, -)$ είναι ομολογικός, συνεπώς απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{T}(t, K_{i+1}) \xrightarrow{\mathcal{T}(t,k_{i+1})} \mathcal{T}(t, X_i) \xrightarrow{\mathcal{T}(t,j_{i+1})} \mathcal{T}(t, X_{i+1})$$

Επομένως, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(t, K_{i+1}\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(t,k_{i+1})"] & \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(t,j_{i+1})"] \arrow[dr, "(\phi_i)_t"'] & \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \arrow[d, "(\phi_{i+1})_t"] \\
 & & \mathcal{H}\big(t\big)
\end{tikzcd}$$

του οποίου η γραμμή είναι μια ακριβής ακολουθία. Προφανώς ισχύει ο εγλεισμός

$$\mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)\Big\} \ \subset \ \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)\Big\}$$

Το σύνολο U_{i+1} αποτελείται από όλα τα ζεύγη (f, t), όπου $t \in T$ και ο $f : t \longrightarrow X_i$ είναι ένας μορφισμός, ο οποίος απεικονίζεται στο μηδέν μέσω της απεικόνισης $\phi_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)$. Η απεικόνιση $k_{i+1} : K_{i+1} \longrightarrow X_i$ είναι το συγκινόμενο όλων αυτών των απεικονίσεων $t \longrightarrow X_i$. Αυτό σημαίνει ότι είναι η μοναδική απεικόνιση η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl, "i_{(f,t)}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
K_{i+1} \arrow[rr, dashed, "k_{i+1}"] & & X_i
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, για κάθε $(f, t) \in U_{i+1}$. Τότε, για κάθε $(f, t) \in U_{i+1}$, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}\big(t, t\big) \arrow[dl, "\mathcal{T}(t,i_{(f,t)})"'] \arrow[dr, "\mathcal{T}(t,f)"] & \\
\mathcal{T}\big(t, K_{i+1}\big) \arrow[rr, "\mathcal{T}(t,k_{i+1})"] & & \mathcal{T}\big(t, X_i\big)
\end{tikzcd}$$

Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{T}\big(t, k_{i+1}\big) \circ \mathcal{T}\big(t, i_{(f,t)}\big)\big(1_t\big) = \mathcal{T}\big(t, f\big)\big(1_t\big)$, ισοδύναμα $\mathcal{T}\big(t, k_{i+1}\big)\big(i_{(f,t)}\big) = f$. Επομένως, κάθε απεικόνιση $f : t \longrightarrow X_i$ η οποία ανήκει στον πυρήνα της απεικόνισης $\big(\phi_i\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$, έπεται ότι ανήκει στην εικόνα της απεικόνισης $\mathcal{T}\big(t, k_{i+1}\big) : \mathcal{T}\big(t, K_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_i\big)$, συνεπώς ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)\Big\} \ \subset \ \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(t, K_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_i\big)\Big\}$$

Η προηγούμενη ακολουθία είναι ακριβής, αυτό σημαίνει ότι

$$\mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(t, K_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_i\big)\Big\} \ = \ \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)\Big\}$$

, επομένως λαμβάνουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό

$$\mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)\Big\} \ \subset \ \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)\Big\}$$

Συνεπώς, για κάθε $t \in T$, ο πυρήνας της απεικόνισης

$$\mathcal{T}\big(t, j_{i+1}\big) : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)$$

ταυτίζεται με τον πυρήνα της απεικόνισης

$$\big(\phi_i\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \xrightarrow{\mathcal{T}(t,j_{i+1})} \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \xrightarrow{(\phi_{i+1})_t} \mathcal{H}\big(t\big)$$

, δηλαδή ισχύει η ισότητα

$$\mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)\Big\} \;=\; \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)\Big\}$$

Τότε όμως επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}\big(t, j_{i+1}\big)\Big\} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(t, j_{i+1}\big)\Big\} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\Big\{\big(\phi_i\big)_t\Big\} \arrow[r] & \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \arrow[r] & \mathcal{I}m\Big\{\big(\phi_i\big)_t\Big\} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι ακριβείς. Συνεπώς, για κάθε $t \in T$, η εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{T}\big(t, j_{i+1}\big) : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)$$

είναι ισόμορφη με την εικόνα της απεικόνισης

$$\big(\phi_i\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \xrightarrow{\mathcal{T}(t, j_{i+1})} \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \xrightarrow{(\phi_{i+1})_t} \mathcal{H}\big(t\big)$$

η οποία ταυτίζεται με την $\mathcal{H}\big(t\big)$, επειδή η $\big(\phi_i\big)_t : \mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)$ είναι ένας επιμορφισμός, δηλαδή ισχύει ο ισομορφισμός

$$\mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big)\Big\} \;\simeq\; \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}\big(t, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(t, X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(t\big)\Big\} \;=\; \mathcal{H}\big(t\big)$$

Συνεπώς, δείξαμε τους ισχυρισμούς 7.2.3.1, 7.2.3.2 και 7.2.3.4, κατασκευάζοντας επαγωγικά μια ακολουθία αντικειμένων και των μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$X_0 \xrightarrow{\;j_1\;} X_1 \xrightarrow{\;j_2\;} X_2 \xrightarrow{\;j_3\;} \cdots$$

Μένει να δείξουμε τον ισχυρισμό 7.2.3.3, δηλαδή ότι υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\phi : \mathcal{T}\big(-, X\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$$

ο οποίος παραγοντοποιεί τον φυσικό μετασχηματισμό

$$\phi_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$$

ως

$$\mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, X\big) \xrightarrow{\;\phi\;} \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$$

, για κάθε $i \geq 0$, όπου $X = \underrightarrow{Hocolim}\, X_i$ είναι το ομοτοπικό συνόριο της ακολουθίας. Το ομοτοπικό συνόριο $X = \underrightarrow{Hocolim}\, X_i$ ορίζεται ως το μοναδικό, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, αντικείμενο που συμπληρώνει τον μορφισμό $1 - shift : \coprod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i$ σ′ ένα τρίγωνο

$$\coprod_{i\geq 0} X_i \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i\geq 0} X_i \overset{\mu}{\dashrightarrow} \underrightarrow{Hocolim}\, X_i \dashrightarrow \Sigma\Big\{\coprod_{i\geq 0} X_i\Big\}$$

στην $\mathcal{T}$. Αλλά ο συναρτητής $\mathcal{H}$ είναι ένας συνομολογικός συναρτητής, συνεπώς απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο στην ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(\mu)} \mathcal{H}\Big(\coprod_{i\geq 0} X_i\Big) \xrightarrow{\mathcal{H}(1-shift)} \mathcal{H}\Big(\coprod_{i\geq 0} X_i\Big)$$

Έστω $u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i$ η κανονική εμφύτευση του X_i στο συγκινόμενο $\coprod_{i\geq 0} X_i$, για κάθε $i \geq 0$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις

$$\mathcal{H}(u_i) : \mathcal{H}\Big(\coprod_{i\geq 0} X_i\Big) \longrightarrow \mathcal{H}(X_i)$$

Το γινόμενο $\prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i)$ υπάρχει στην $\mathcal{A}b$. Έστω $p_i : \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(X_i)$ η κανονική προβολή από το γινόμενο $\prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i)$ στην $\mathcal{H}(X_i)$, για κάθε $i \geq 0$. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση ψ η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{H}(X_i) & \\
\mathcal{H}\Big(\coprod_{i\geq 0} X_i\Big) \arrow[ur, "\mathcal{H}(u_i)"] \arrow[rr, dashed, "\psi"] & & \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i) \arrow[ul, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

, για κάθε $i \geq 0$. Ο συναρτητής $\mathcal{H}$ απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση ψ είναι ένας ισομορφισμός. Τότε επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(X) \arrow[r, "\mathcal{H}(\mu)"] & \mathcal{H}\Big(\coprod_{i\geq 0} X_i\Big) \arrow[r, "\mathcal{H}(1-shift)"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{H}\Big(\coprod_{i\geq 0} X_i\Big) \arrow[d, "\psi"'] \\
& \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i) \arrow[r, "1-shift"] & \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i)
\end{tikzcd}$$

το οποίου η επάνω γραμμή είναι μια ακριβής ακολουθία. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathcal{H}$ στην ακολουθία των αντικειμένων και των μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_2} X_2 \xrightarrow{j_3} \cdots$$

λαμβάνουμε την ακολουθία ομάδων και ομομορφισμών ομάδων στην $\mathcal{A}b$

$$\cdots \xrightarrow{\mathcal{H}(j_3)} \mathcal{H}(X_2) \xrightarrow{\mathcal{H}(j_2)} \mathcal{H}(X_1) \xrightarrow{\mathcal{H}(j_1)} \mathcal{H}(X_0)$$

Το στοιχείο $\prod_{i\geq 0}\alpha_i \in \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i)$ κατασκευάστηκε επαγωγικά, έτσι ώστε $\mathcal{H}(j_{i+1})(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$, ισοδύναμα $\mathcal{H}(j_{i+1})(\alpha_{i+1}) - \alpha_i = 0$, για κάθε $i \geq 0$. Επομένως ανήκει στον πυρήνα $\varprojlim \mathcal{H}(X_i)$ της απεικόνισης $1 - shift : \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i) \longrightarrow \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i)$. Συνεπώς από το προηγούμενο διάγραμμα, επειδή η επάνω γραμμή είναι μια ακριβής ακολουθία, και οι οριζόντιες απεικονίσεις του μεταθετικού τετραγώνου του διαγράμματος έχουν ισόμορφους πυρήνες (η ψ είναι ένας ισομορφισμός), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο $\alpha \in \mathcal{H}(X)$ το οποίο απεικονίζεται στο $\prod_{i\geq 0}\alpha_i \in \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i)$, μέσω της απεικόνισης $\psi \circ \mathcal{H}(\mu) : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(\coprod_{i\geq 0} X_i) \longrightarrow \prod_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\alpha \in \mathcal{H}(X)$ απεικονίζεται στο $\alpha_i \in \mathcal{H}(X_i)$, για κάθε $i \geq 0$. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $i \geq 0$, θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(X) \arrow[r, "\mathcal{H}(\mu)"] & \mathcal{H}\left(\coprod\limits_{i\geq 0} X_i\right) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathcal{H}(u_i)"'] & \prod\limits_{i\geq 0}\mathcal{H}(X_i) \arrow[d, "p_i"] \\
& \mathcal{H}(X_i) \arrow[r, "="] & \mathcal{H}(X_i)
\end{tikzcd}$$

Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν απεικονίσεις $\mathcal{H}(\mu \circ u_i) = \mathcal{H}(u_i) \circ \mathcal{H}(\mu) : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(\coprod_{i\geq 0} X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(X_i)$ οι οποίες επάγονται από τις απεικονίσεις $\mu \circ u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i \longrightarrow X$, έτσι ώστε $\mathcal{H}(\mu \circ u_i)(\alpha) = \alpha_i$, για κάθε $i \geq 0$. Συνεπώς, από το Λήμμα Yoneda υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\phi : \mathcal{T}(-, X) \longrightarrow \mathcal{H}(-)$$

, ο οποίος καθιστά μεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}(-, X_i) \arrow[dl, "\mathcal{T}(-,\mu\circ u_i)"'] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\
\mathcal{T}(-, X) \arrow[rr, "\phi"] & & \mathcal{H}(-)
\end{tikzcd}$$

, για κάθε $i \geq 0$.

□

7.3 Το Πρώτο Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας

Σ' αυτή την Ενότητα θα αποδείξουμε το Πρώτο Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας κάνοντας χρήση του Λήμματος 7.2.3, και του αμέσως επόμενου

Λήμμα 7.3.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], και T ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι το T είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, όπως στον Ορισμό 7.1.3.1. Από το Λήμμα 7.2.3, για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία αντικειμένων X_i στην $\mathcal{T}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1−7.2.3.4 του Λήμματος. Έστω το ομοτοπικό συνόριο $X = \underrightarrow{Hocolim}\, X_i$ της ακολουθίας. Από την συνθήκη 7.2.3.3 του Λήμματος υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\mathcal{T}(-, X) \longrightarrow \mathcal{H}(-)$. Εάν, για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H}$ και κάθε $t \in T$, η απεικόνιση*

$$\mathcal{T}(t, X) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$$

είναι ένας μονομορφισμός, τότε

7.3.1.1. *Η κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το T, αυτό σημαίνει ότι*

$$\mathcal{T} \quad = \quad \langle T \rangle$$

7.3.1.2. *Για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H}$ ο φυσικός μετασχηματισμός*

$$\mathcal{T}(-, X) \xrightarrow{\ \phi\ } \mathcal{H}(-)$$

είναι ένας ισομορφισμός, και συνεπώς ο $\mathcal{H}$ είναι αναπαραστάσιμος.

Απόδειξη. Από την συνθήκη 7.2.3.4 του Λήμματος 7.2.3, η απεικόνιση $\mathcal{T}(t, X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ είναι ένας επιμορφισμός, για κάθε $i \geq 0$. Επιπλέον, από την συνθήκη 7.2.3.3, παραγοντοποιείται ως

$$\mathcal{T}(t, X_i) \longrightarrow \mathcal{T}(t, X) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$$

, και επομένως η απεικόνιση $\mathcal{T}(t,X) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ είναι επίσης ένας επιμορφισμός. Συνεπώς, επειδή έχουμε υποθέσει ότι η απεικόνιση $\mathcal{T}(t,X) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ είναι ένας μονομορφισμός, έπεται ότι, για κάθε $t \in T$, είναι ένας ισομορφισμός.

Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ η πλήρης υποκατηγορία όλων των αντικειμένων $y \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η απεικόνιση $\phi(\Sigma^n y) : \mathcal{T}(\Sigma^n y, X) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n y)$ είναι ένας ισομορφισμός. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{T}(\Sigma^n(-), X) = \mathcal{T}(-,X) \circ \Sigma^n(-)$ είναι προσθετικός ως σύνθεση προσθετικών συναρτητών, η $\mathcal{S}$ είναι μια προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Από την Παρατήρηση 7.1.3.2, το σύνολο T μπορούμε να το θεωρήσουμε κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma T = T$. Η $\mathcal{S}$ προφανώς περιέχει το σύνολο T, είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{T}$, και είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Έστω y και y' αντικείμενα στην $\mathcal{S}$. Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$\Sigma^{-1}y \dashrightarrow y'' \dashrightarrow y' \longrightarrow y$$

που συμπληρώνει τον $y' \longrightarrow y$ στην $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι το y'' ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής $\mathcal{T}(\Sigma^n(-), X)$ είναι συνομολογικός, ενώ ο $\mathcal{H}(-)$ είναι συνομολογικός εξ υποθέσεως, συνεπώς επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(\Sigma^n y, X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi(\Sigma^n y)"'] & \mathcal{T}(\Sigma^n y', X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi(\Sigma^n y')"'] & \mathcal{T}(\Sigma^n y'', X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi(\Sigma^n y'')"'] & \mathcal{T}(\Sigma^{n-1} y, X) \arrow[d, "\phi(\Sigma^{n-1} y)"'] \\
\mathcal{H}(\Sigma^n y) \arrow[r] & \mathcal{H}(\Sigma^n y') \arrow[r] & \mathcal{H}(\Sigma^n y'') \arrow[r] & \mathcal{H}(\Sigma^{n-1} y)
\end{tikzcd}$$

Τα αντικείμενα y και y' ανήκουν στην $\mathcal{S}$, επομένως οι πρώτες δύο και η τελευταία κάθετες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί. Από το 5 Λήμμα έπεται η απεικόνιση $\phi(\Sigma^n y'') : \mathcal{T}(\Sigma^n y'', X) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n y'')$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, το $y'' \in \mathcal{S}$

Έστω $\{y_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], συνεπώς το συγκινόμενο αυτών των αντικειμένων, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda$, υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Από την Πρόταση 1.1.6.1, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής Σ^n διατηρεί τα συγκινόμενα, ενώ ο $\mathcal{H}(-)$ εξ υποθέσεως απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, συνεπώς υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}(\Sigma^n y_\lambda, X) \arrow[r, "\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \phi(\Sigma^n y_\lambda)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}(\Sigma^n y_\lambda) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}\{\Sigma^n y_\lambda\}, X\Big) \arrow[r, "\phi\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}\{\Sigma^n y_\lambda\}\Big)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}\Big(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}\{\Sigma^n y_\lambda\}\Big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}\Big(\Sigma^n\Big\{\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\Big\}, X\Big) \arrow[r, "\phi\Big(\Sigma^n\Big\{\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\Big\}\Big)"] & \mathcal{H}\Big(\Sigma^n\Big\{\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\Big\}\Big)
\end{tikzcd}$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \Lambda$, το $y_\lambda \in \mathcal{S}$, η απεικόνιση $\phi(\Sigma^n y_\lambda) : \mathcal{T}(\Sigma^n y_\lambda, X) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n y_\lambda)$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, από το προηγούμενο διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\phi(\Sigma^n\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\}) : \mathcal{T}(\Sigma^n\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\}, X) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\})$ είναι ένας ισομορφισμός, επομένως το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda \in \mathcal{S}$. Δείξαμε λοιπόν ότι, η $\mathcal{S}$ περιέχει το σύνολο T, είναι τριγωνισμένη, και είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, επομένως περιέχει την $\langle T\rangle$ που είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ με αυτές τις ιδιότητες. Συνεπώς, η $\phi : \mathcal{T}(-,X) \longrightarrow \mathcal{H}(\ -\ )$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\langle T \rangle$. Εάν δείξουμε την συνθήκη 7.3.1.1, δηλαδή $\mathcal{T} = \langle T \rangle$, τότε η συνθήκη 7.3.1.2 έπεται αυτομάτως.

Έστω Y ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$, θα θέλαμε να δείξουμε ότι $Y \in \langle T \rangle$. Θεωρούμε τον συναρτητή

$$\mathcal{H}(\ -\ ) \quad = \quad \mathcal{T}(-,Y)$$

Από το Λήμμα 7.2.3 υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία αντικειμένων X_i στην $\mathcal{T}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1–7.2.3.4 του Λήμματος. Έστω το ομοτοπικό συνόριο $X = \underrightarrow{Hocolim}\ X_i$ της ακολουθίας, από την συνθήκη 7.2.3.3 του Λήμματος υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\mathcal{T}(-,X) \longrightarrow \mathcal{T}(-,Y)$. Τα αντικείμενα X_i ανήκουν στην $\langle T \rangle$, και συνεπώς το $X \in \langle T \rangle$. Ο συναρτητής $\mathcal{T}(-,Y)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος. Συνεπώς, για κάθε $t \in T$, η απεικόνιση

$$\mathcal{T}(t,X) \longrightarrow \mathcal{T}(t,Y)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Από το Λήμμα Yoneda , ο φυσικός μετασχηματισμός

$$\mathcal{T}(-,X) \longrightarrow \mathcal{T}(-,Y)$$

αντιστοιχεί σ΄ έναν μορφισμό $X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$. Συμπληρώνουμε τον μορφισμό σ΄ ένα τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

στην $\mathcal{T}$. Για κάθε $t \in T$, ο συναρτητής $\mathcal{T}(t,-) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός, συνεπώς απεικονίζει το τρίγωνο σε μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{T}(t,X) \longrightarrow \mathcal{T}(t,Y) \longrightarrow \mathcal{T}(t,Z) \longrightarrow \mathcal{T}(t,\Sigma X) \longrightarrow \mathcal{T}(t,\Sigma Y)$$

Ο συναρτητής Σ^{-1} είναι ένας αριστερός (και δεξιός) συζυγής του Σ, συνεπώς για κάθε $t \in T$, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(\Sigma^{-1}t,X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}(\Sigma^{-1}t,Y) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}(t,\Sigma X) \arrow[r] & \mathcal{T}(t,\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\Sigma T = T$, και για κάθε $t \in T$, η απεικόνιση $\mathcal{T}(t,X) \longrightarrow \mathcal{T}(t,Y)$ είναι ένας ισομορφισμός, έπεται ότι η απεικόνιση $\mathcal{T}(\Sigma^{-1}t,X) \longrightarrow \mathcal{T}(\Sigma^{-1}t,Y)$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $t \in T$, η απεικόνιση $\mathcal{T}(t,\Sigma X) \longrightarrow \mathcal{T}(t,\Sigma Y)$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, για κάθε $t \in T$, από την ακρίβεια της μακράς ακολουθίας, έπεται ότι $\mathcal{T}(t,Z) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $t \in T$, δεν υπάρχουν μη μηδενικές απεικονίσεις $t \longrightarrow Z$. Όμως το T είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, επομένως από τον Ορισμό 7.1.3.1, έπεται ότι $Z = 0$. Συνεπώς, από το Πόρισμα 1.2.4, έπεται ότι η απεικόνιση $X \longrightarrow Y$ είναι ένας ισομορφισμός. Αλλά το $X \in \langle T \rangle$, και επειδή η $\langle T \rangle$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία, είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{T}$, συνεπώς το $Y \in \langle T \rangle$.

□

Παρατήρηση 7.3.2. Το Λήμμα 7.3.1 μας υποδεικνύει έναν τρόπο για να δείξουμε ότι μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, εργαζόμενοι ως εξής. Επιλέγουμε ένα σύνολο αντικειμένων T για την $\mathcal{T}$, όπως στο Λήμμα 7.3.1. Από το Λήμμα 7.2.3, για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ο οποίος απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακολουθία αντικειμένων X_i στην $\mathcal{T}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1–7.2.3.4. Ειδικότερα, από τις 7.2.3.3–7.2.3.4 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση

$\mathcal{T}(t, X) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ η οποία είναι ένας επιμορφισμός, για κάθε $t \in T$, όπου $X = \underrightarrow{Hocolim}\, X_i$ είναι το ομοτοπικό συνόριο της ακολουθίας. Εάν μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ο οποίος απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, η προηγούμενη απεικόνιση $\mathcal{T}(t, X) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ είναι ένας μονομορφισμός, για κάθε $t \in T$, τότε η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Επιπλέον, η $\mathcal{T}$ ισούται με την μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το σύνολο T, δηλαδή $\mathcal{T} = \langle T \rangle$. Εάν παρατηρήσουμε την απόδειξη του Λήμματος 7.3.1 επειδή το σύνολο T, από την Παρατήρηση 7.1.3.2, μπορούμε να το θεωρήσουμε κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma T = T$, πρώτα αποδεικνύουμε ότι ο περιορισμός του $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ στην $\langle T \rangle \subset \mathcal{T}$ είναι ένας αναπαραστάσιμος συναρτητής, δηλαδή

$$\mathcal{H}(-)\big|_{\langle T \rangle} \quad \simeq \quad \mathcal{T}(-, X)\big|_{\langle T \rangle} \quad = \quad \langle T \rangle(-, X)$$

, όπου η προηγούμενη ισότητα ισχύει, επειδή για κάθε $i \geq 0$, από την συνθήκη 7.2.3.1, τα αντικείμενα X_i της ακολουθίας ανήκουν στην $\langle T \rangle$, και συνεπώς το ομοτοπικό συνόριο X ανήκει επίσης στην $\langle T \rangle$, και έπειτα επειδή το T είναι επιπλέον ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, αποδεικνύουμε ότι ο $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ένας αναπαραστάσιμος συναρτητής, δηλαδή

$$\mathcal{H}(-) \quad \simeq \quad \mathcal{T}(-, X)$$

αποδεικνύοντας ότι $\langle T \rangle = \mathcal{T}$. Συνεπώς, οι αποδείξεις των Θεωρημάτων Αναπαραστασιμότητας που θα ακολουθήσουν στην συνέχεια θα αρκεστούν στην κατάλληλη επιλογή ενός συνόλου T για την $\mathcal{T}$ (Ενότητα 7.1), και στην απόδειξη ότι η απεικόνιση $\mathcal{T}(t, X) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ του Λήμματος 7.2.3 είναι ένας μονομορφισμός, για κάθε $t \in T$.

Ακολουθεί η απόδειξη του Πρώτου Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας ή του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας για μια $\aleph_1-$τέλεια παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία.

Θεώρημα 7.3.3. *[Πρώτο Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας] Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω T ένα $\aleph_1-$τέλειο παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$ όπως στον Ορισμό 7.1.4. Τότε η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, υπάρχει ένα αντικείμενο $h \in \mathcal{T}$ και ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\mathcal{T}(-, h) \quad \simeq \quad \mathcal{H}(-)$$

Ισχυρίζομαι επιπλέον ότι η $\mathcal{T}$ συμπίπτει με την μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το σύνολο T, δηλαδή

$$\langle T \rangle \quad = \quad \mathcal{T}$$

Απόδειξη. Επειδή το T είναι $\aleph_1-$τέλειο, από το Λήμμα 3.3.7 η κατηγορία $\mathcal{S} = \langle T \rangle^{\aleph_1}$ είναι μια $\aleph_1-$τέλεια κλάση. Επειδή το T είναι ένα σύνολο, από την Πρόταση 3.2.5 η κατηγορία $\mathcal{S} = \langle T \rangle^{\aleph_1}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το σύνολο T μ΄ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{S}$, το οποίο περιέχει το T, και το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{S}$ (Παρατήρηση 7.1.7, για την περίπτωση $\beta = \alpha = \aleph_1$). Από το Λήμμα 3.3.2 το T είναι ένα $\aleph_1-$τέλειο σύνολο. Σ΄ αυτό το σημείο θα επικαλεστούμε την Θεωρία που αναπτύξαμε στο Κεφαλαίο 6, για την περίπτωση του κανονικού πληθαρίθμου $\alpha = \aleph_1$, και της κατηγορίας $\mathcal{S} = \langle T \rangle^{\aleph_1}$. Από το Παράδειγμα 3.2.8, η κατηγορία $\mathcal{S} = \langle T \rangle^{\aleph_1}$ είναι $\aleph_1-$τοπικοποιήσιμη, αυτό σημαίνει ότι είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$συγκινόμενα. Έστω η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ όπως στον Ορισμό 6.1.2. Αυτό σημαίνει ότι, τα αντικείμενα της $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι οι συναρτητές $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ οι οποίοι διατηρούν τα $\aleph_1-$γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν $\aleph_1-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\aleph_1-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$.

Από το Λήμμα 7.2.3 υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1−7.2.3.4. Αυτή η ακολουθία από το Λήμμα Yoneda αντιστοιχεί σε μια (μοναδική) ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\mathcal{T}(-, X_0) \longrightarrow \mathcal{T}(-, X_1) \longrightarrow \mathcal{T}(-, X_2) \longrightarrow \cdots$$

Από την συνθήκη 7.2.3.2, υπάρχουν απεικονίσεις $\mathcal{T}(-,X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)$, για κάθε $i \geq 0$. Περιορίζοντας την προηγούμενη ακολουθία στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, προκύπτει μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\mathcal{T}(-,X_0)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\quad\theta_0\quad} \mathcal{T}(-,X_1)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\quad\theta_1\quad} \mathcal{T}(-,X_2)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\quad\theta_2\quad} \cdots$$

, όπου ο φυσικός μετασχηματισμός θ_i είναι ο περιορισμός στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}(-,X_i) \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_{i+1})$, για κάθε $i \geq 0$. Επίσης, έστω $\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ οι περιορισμοί στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ των απεικονίσεων της συνθήκης 7.2.3.2, για κάθε $i \geq 0$. Οι συναρτητές $\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$ και $\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ ανήκουν στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, επειδή απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, συνεπώς απεικονίζουν $\aleph_1-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\aleph_1-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$.

Από την συνθήκη 7.2.3.4, για κάθε $t \in T \subset \mathcal{S}$, η εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{T}(t,X_i) \longrightarrow \mathcal{T}(t,X_{i+1})$$

είναι ισόμορφη με την εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{T}(t,X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$$

η οποία είναι η $\mathcal{H}(t)$, δηλαδή

$$\mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(t,X_i) \to \mathcal{T}(t,X_{i+1})\Big\} \;\simeq\; \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(t,X_i) \to \mathcal{H}(t)\Big\} \;=\; \mathcal{H}(t)$$

επειδή η $\mathcal{T}(t,X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$ είναι ένας επιμορφισμός, και ο πυρήνας της ταυτίζεται με τον πυρήνα $\mathcal{K}_i(t)$ της απεικόνισης

$$\mathcal{T}(t,X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(t)$$

, δηλαδή

$$\mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(t,X_i) \to \mathcal{T}(t,X_{i+1})\Big\} \;=\; \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(t,X_i) \to \mathcal{H}(t)\Big\} \;=\; \mathcal{K}_i(t)$$

, όπου $\mathcal{K}_i(\,-\,) = \mathcal{K}er\{\mathcal{T}(-,X_i) \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_{i+1})\}$, για κάθε $i \geq 0$. Με άλλα λόγια, για κάθε $i \geq 0$, υφίστανται οι παρακάτω ισομορφισμοί

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_T \to \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_T\Big\} \;&\simeq\; \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_T \to \mathcal{H}(\,-\,)\big|_T\Big\} \;=\; \mathcal{H}(\,-\,)\big|_T \\
\mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_T \to \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_T\Big\} \;&=\; \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_T \to \mathcal{H}(\,-\,)\big|_T\Big\} \;=\; \mathcal{K}_i(\,-\,)\big|_T
\end{aligned}$$

Αλλά τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{S}$ είναι, ως προς ισομορφισμό, ακριβώς τα αντικείμενα του συνόλου $T \subset \mathcal{S}$. Συνεπώς, για κάθε $i \geq 0$, οι προηγούμενοι ισομορφισμοί επεκτείνονται σε ολόκληρη την $\mathcal{S}$, δηλαδή υφίστανται οι παρακάτω ισομορφισμοί

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}m(\theta_i) \;&=\; \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \to \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \;\simeq\; \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \to \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \;=\; \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \\
\mathcal{K}er(\theta_i) \;&=\; \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \to \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \;=\; \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \to \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \;=\; \mathcal{K}_i(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Για κάθε απεικόνιση $\theta_i : \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}}$ της προηγούμενης ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}er(\theta_i) \xrightarrow{\quad\rho_i\quad} \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\quad\tau_i\quad} \mathcal{I}m(\theta_i) \longrightarrow 0$$

και σχηματιζουμε το παρακάτω διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i-1}\big) \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \mathcal{T}\big(-,X_{i-1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i-1}"] \arrow[d, "\theta_{i-1}"'] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i-1}\big) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i}\big) \arrow[r, "\rho_{i}"] & \mathcal{T}\big(-,X_{i}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i}"] \arrow[d, "\theta_{i}"'] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i}\big) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i+1}\big) \arrow[r, "\rho_{i+1}"] & \mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i+1}"] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i+1}\big) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Η απεικόνιση $\tau_i : \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{I}m\big(\theta_i\big)$ είναι η εικόνα της απεικόνισης θ_i, δηλαδή του περιορισμού στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(-,X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)$, η οποία, από την συνθήκη 7.2.3.4, είναι ισόμορφη με την εικόνα του περιορισμού στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(-,X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$, η οποία είναι ο $\mathcal{H}\big(\,-\,\big)\big|_{\mathcal{S}}$, επειδή είναι ένας επιμορφισμός, για κάθε $i \geq 0$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να επιλέξουμε την απεικόνιση $\tau_i : \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{I}m\big(\theta_i\big)$ να είναι ο περιορισμός στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(-,X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$, της συνθήκης 7.2.3.2, για κάθε $i \geq 0$. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i-1}\big) \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \mathcal{T}\big(-,X_{i-1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i-1}"] \arrow[d, "\theta_{i-1}"'] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i-1}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i}\big) \arrow[r, "\rho_{i}"] & \mathcal{T}\big(-,X_{i}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i}"] \arrow[d, "\theta_{i}"'] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i+1}\big) \arrow[r, "\rho_{i+1}"] & \mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i+1}"] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i+1}\big) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Για κάθε $i \geq 0$, η σύνθεση $\theta_i \circ \rho_i : \mathcal{K}er\big(\theta_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}}$ ισούται με την μηδενική απεικόνιση. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i-1}\big) \arrow[r, "\rho_{i-1}"] \arrow[d, dashed, "0"'] & \mathcal{T}\big(-,X_{i-1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i-1}"] \arrow[d, "\theta_{i-1}"'] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i-1}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed, "\chi_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i}\big) \arrow[r, "\rho_{i}"] \arrow[d, dashed, "0"'] & \mathcal{T}\big(-,X_{i}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i}"] \arrow[d, "\theta_{i}"'] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed, "\chi_{i+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\theta_{i+1}\big) \arrow[r, "\rho_{i+1}"] & \mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\tau_{i+1}"] & \mathcal{I}m\big(\theta_{i+1}\big) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

, όπου η απεικόνιση $\mathcal{K}er\big(\theta_i\big) \longrightarrow \mathcal{K}er\big(\theta_{i+1}\big)$, η οποία οφείλει να είναι η μηδενική, επάγεται από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα $\mathcal{K}er\big(\theta_{i+1}\big)$, ενώ η απεικόνιση $\chi_{i+1} : \mathcal{I}m\big(\theta_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}}$, επάγεται από την καθολική ιδιότητα του συν$-$πυρήνα $\mathcal{I}m\big(\theta_i\big)$. Αυτό σημαίνει ότι, οι γραμμές του μεταθετικού διαγράμματος είναι διασπάσιμες ακριβείς ακολουθίες. Συνεπώς, για κάθε $i \geq 1$, υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} &\simeq \mathcal{I}m(\theta_i)\oplus\mathcal{K}er(\theta_i) \\ &\simeq \mathcal{I}m(\theta_{i-1})\oplus\mathcal{K}er(\theta_i) \end{aligned}$$

, επειδή $\mathcal{I}m(\theta_i)\simeq\mathcal{I}m(\theta_{i-1})$, και επιπλέον το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}m(\theta_{i-2})\oplus\mathcal{K}er(\theta_{i-1}) \arrow[r, "1\oplus0"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{I}m(\theta_{i-1})\oplus\mathcal{K}er(\theta_i) \arrow[r, "1\oplus0"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{I}m(\theta_i)\oplus\mathcal{K}er(\theta_{i+1}) \arrow[d, "\simeq"'] \\ \mathcal{T}(-,X_{i-1})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\theta_{i-1}"] & \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\theta_i"] & \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, όπου

$$\begin{bmatrix}\chi_i & \rho_i\end{bmatrix} : \mathcal{I}m(\theta_{i-1})\oplus\mathcal{K}er(\theta_i) \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ο τύπος του αντίστοιχου ισομορφισμού, για κάθε $i\geq 1$.

Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι η ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$

$$\mathcal{T}(-,X_1)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\theta_1} \mathcal{T}(-,X_2)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\theta_2} \mathcal{T}(-,X_3)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\theta_3} \cdots$$

είναι είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα των ακολουθιών

$$\mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1} \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1} \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1} \cdots$$

$$\mathcal{K}_1(-)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{0} \mathcal{K}_2(-)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{0} \mathcal{K}_3(-)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{0} \cdots$$

, δηλαδή υφίσταται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}\oplus\mathcal{K}_1(-)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1\oplus0"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}\oplus\mathcal{K}_2(-)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1\oplus0"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}\oplus\mathcal{K}_3(-)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1\oplus0"] \arrow[d, "\simeq"'] & \cdots \\ \mathcal{T}(-,X_1)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\theta_1"] & \mathcal{T}(-,X_2)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\theta_2"] & \mathcal{T}(-,X_3)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\theta_3"] & \cdots \end{tikzcd}$$

, όπου για κάθε $i\geq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}} &\simeq \mathcal{I}m(\theta_{i-1}) = \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(-,X_{i-1})\big|_{\mathcal{S}}\longrightarrow\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \\ \mathcal{K}_i(-)\big|_{\mathcal{S}} &= \mathcal{K}er(\theta_i) = \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}\longrightarrow\mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \end{aligned}$$

Τότε επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \coprod_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}\oplus\mathcal{K}_i(-)\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}\oplus\mathcal{K}_i(-)\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \arrow[d, "\simeq"'] \\ 0 \arrow[r] & \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] & \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \end{tikzcd}$$

Οι παρακάτω βραχείες ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

, όπου $\coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι η απεικόνιση που επάγεται στο συγκινόμενο $\coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$ από την απεικόνιση $1 : \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$, για κάθε $i \geq 1$, είναι ακριβείς.

Έστω $u_i : \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$ η κανονική εμφύτευση του $\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$ στο συγκινόμενο, για κάθε $i \geq 1$. Η απεικόνιση $1 - shift : \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$ έχει συνιστώσες τις απεικονίσεις $u_{i-1} - u_i : \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$, για κάθε $i \geq 2$. Επομένως, από το Τέχνασμα του Eilenberg (Λήμμα 1.6.8.1), οι απεικονίσεις $u_1 : \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$ και $1 - shift : \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$, εφοδιάζουν επίσης το αντικείμενο $\coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$ με την δομή ενός συγκινομένου. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του συγκινομένου επάγεται ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} u_1 & 1-shift \end{smallmatrix}\right]} \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

Τότε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix} u_1 & 1-shift \end{smallmatrix}\right]}"'] & \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] & \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου οι δύο επάνω απεικονίσεις είναι η δεύτερη κανονική εμφύτευση, και η πρώτη κανονική προβολή του (πεπερασμένου) γινομένου−συγκινομένου $\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}}$, αντίστοιχα, είναι ένας ισομορφισμός ακολουθιών. Συνεπώς, η πρώτη ακολουθία είναι μια διασπάσιμη ακριβής ακολουθία. Επειδή $shift = 0$, έπεται ότι η απεικόνιση $1 - shift = 1$ είναι ένας ισομορφισμός. Επομένως, και η δεύτερη ακολουθία είναι μια ακριβής ακολουθία. Συνεπώς, προσθέτοντας αυτές τις δύο ακριβείς ακολουθίες, λαμβάνουμε μια ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$0 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε τον παρακάτω ισομορφισμό ακολουθιών στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{K}_i(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{K}_i(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \mathcal{K}_i(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \mathcal{K}_i(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου $\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι οι περιορισμοί στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ των απεικονίσεων της συνθήκης 7.2.3.2, για κάθε $i \geq 1$. Από το διάγραμμα αυτό, επειδή η επάνω ακολουθία είναι ακριβής, συμπεραίνουμε ότι η κάτω ακολουθία είναι ακριβής

$$0 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε την παρακάτω βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "1-shift"'] & \coprod\limits_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "1-shift"'] & \mathcal{T}(-, X_0)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \coprod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & \coprod\limits_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}(-, X_0)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

, όπου $\coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}}$, και $\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-, X_0)\big|_{\mathcal{S}}$, είναι η δεύτερη κανονική εμφύτευση, και η πρώτη κανονική προβολή του (πεπερασμένου) γινομένου−συγκινομένου $\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}(-, X_0)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \coprod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}}$, αντίστοιχα. Επειδή η πρώτη, και η τρίτη ακολουθίες είναι ακριβείς, συμπεραίνουμε ότι και η μεσαία ακολουθία είναι επίσης ακριβής

$$0 \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

, όπου $\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι οι περιορισμοί στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ των απεικονίσεων της συνθήκης 7.2.3.2, για κάθε $i \geq 0$.

Η $\mathcal{S}$ είναι μια $\aleph_1-$τέλεια κλάση. Συνεπώς, από το Λήμμα 6.2.6, ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, ο οποίος απεικονίζει το t στο $\mathcal{T}\big(-,t\big)\big|_{\mathcal{S}}$, διατηρεί τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, αυτό σημαίνει ότι

$$\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \quad \simeq \quad \mathcal{T}\left(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right)\bigg|_{\mathcal{S}}$$

Επομένως, επάγεται μια ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}\left(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right)\bigg|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{T}(-,1-shift)|_{\mathcal{S}}} \mathcal{T}\left(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right)\bigg|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

Το ομοτοπικό συνόριο $X = \underrightarrow{Hocolim}\, X_i$ της ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$, δίνεται εξ ορισμού, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, ως το αντικείμενο που συμπληρώνει τον μορφισμό $1-shift : \coprod_{i=0}^{\infty}X_i \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}X_i$ σ΄ ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$

$$\coprod_{i=0}^{\infty}X_i \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=0}^{\infty}X_i \dashrightarrow X \dashrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right\}$$

Επιπλέον, από το Λήμμα 6.2.4 ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ομολογικός. Συνεπώς, απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο στην μακρά ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\left(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{T}(-,X)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{T}\left(-,\Sigma\left\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right\}\right)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[d, "\mathcal{T}(-\text{,}\Sigma\{1-shift\})|_{\mathcal{S}}"'] \\
\mathcal{T}\left(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[u, "\mathcal{T}(-\text{,}1-shift)|_{\mathcal{S}}"] & & \mathcal{T}\left(-,\Sigma\left\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right\}\right)\Big|_{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

Επειδή ισχύει $\Sigma\mathcal{S} = \mathcal{S}$, και ο συναρτητής Σ^{-1} είναι ένας αριστερός (και δεξιός) συζυγής του Σ, υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(\Sigma^{-1}(\,-\,),X_0)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}(\Sigma^{-1}(\,-\,),X_1)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}(\Sigma^{-1}(\,-\,),X_2)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \cdots \\
\mathcal{T}\big(-,\Sigma X_0\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{T}\big(-,\Sigma X_1\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{T}\big(-,\Sigma X_2\big)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι ένας ισομορφισμός ακολουθιών. Τότε επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(\Sigma^{-1}(\,-\,),X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(\Sigma^{-1}(\,-\,),X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[d, "\simeq"'] \\
\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,\Sigma X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] & \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,\Sigma X_i)\big|_{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

Επειδή, η απεικόνιση

$$\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ένας μονομορφισμός, έπεται ότι η απεικόνιση

$$\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(\Sigma^{-1}(\,-\,),X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(\Sigma^{-1}(\,-\,),X_i)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ένας μονομορφισμός. Επομένως, από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα έπεται ο η απεικόνιση

$$\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,\Sigma X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,\Sigma X_i)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ένας μονομορφισμός. Οι συναρτητές Σ, και $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ διατηρούν τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, από την Πρόταση 1.1.6.1 και το Λήμμα 6.2.6 αντίστοιχα, συνεπώς επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,\Sigma X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,\Sigma X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}\Bigg(-,\coprod_{i=0}^{\infty}\{\Sigma X_i\}\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\mathcal{T}(-,1-shift)|_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\Bigg(-,\coprod_{i=0}^{\infty}\{\Sigma X_i\}\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}\Bigg(-,\Sigma\Bigg\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Bigg\}\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\mathcal{T}(-\text{,}\Sigma\{1-shift\})|_{\mathcal{S}}"] & \mathcal{T}\Bigg(-,\Sigma\Bigg\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Bigg\}\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

Από το διάγραμμα αυτό, έπεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}\Bigg(-,\Sigma\Bigg\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Bigg\}\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{T}(-,\Sigma\{1-shift\})|_{\mathcal{S}}} \mathcal{T}\Bigg(-,\Sigma\Bigg\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Bigg\}\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}}$$

είναι επίσης ένας μονομορφισμός. Συνεπώς, από την ακρίβεια της προηγούμενης μακράς ακολουθίας συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}\Bigg(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,X)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ένας επιμορφισμός. Επομένως, λαμβάνουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}\Bigg(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{T}(-,1-shift)|_{\mathcal{S}}} \mathcal{T}\Bigg(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,X)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

Τέλος, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{T}\Big(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\mathcal{T}(-,1-shift)|_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "="'] & \mathcal{T}\Big(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{T}(-,X)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}\Big(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\mathcal{T}(-,1-shift)|_{\mathcal{S}}"] & \mathcal{T}\Big(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές. Επομένως, από το 5 Λήμμα συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}(-,X)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$$

, η οποία είναι ο περιορισμός στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ της απεικόνισης της συνθήκης 7.2.3.3, είναι ένας ισομορφισμός. Η απεικόνιση αυτή, προφανώς παραμένει ένας ισομορφισμός στο σύνολο $T \subset \mathcal{S}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 7.3.1 σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.3.2, έπεται το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 7.3.4. Από το Θεώρημα 7.3.3, διατηρώντας τον συμβολισμό των απεικονίσεων του Λήμματος 7.2.3, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, δεν είναι μόνο φυσικά ισόμορφος με έναν αναπαραστάσιμο συναρτητή, είναι επιπλέον φυσικά ισόμορφος με το ευθύ όριο μιας ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op},\mathcal{A}b\big)$.

Πράγματι, από το Λήμμα 7.2.3, υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$X_0 \xrightarrow{\;\;j_1\;\;} X_1 \xrightarrow{\;\;j_2\;\;} X_2 \xrightarrow{\;\;j_3\;\;} \cdots$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1−7.2.3.4. Το ομοτοπικό συνόριο $\underrightarrow{Hocolim}\, X_i$ της ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$, δίνεται εξ ορισμού, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, ως το αντικείμενο που συμπληρώνει τον μορφισμό $1 - shift : \coprod_{i=0}^{\infty}X_i \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}X_i$ σ΄ ένα τρίγωνο

$$\coprod_{i=0}^{\infty}X_i \xrightarrow{\;1-shift\;} \coprod_{i=0}^{\infty}X_i \overset{\mu}{\dashrightarrow} \underrightarrow{Hocolim}\, X_i \dashrightarrow \Sigma\left\{\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right\}$$

στην $\mathcal{T}$. Η απεικόνιση μ μπορεί να ξαναγραφεί ως ένα συγκινόμενο, δηλαδή $\mu = \coprod_{i=0}^{\infty}\mu \circ u_i$, όπου $u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}X_i$ είναι η κανονική εμφύτευση του X_i στο συγκινόμενο, για κάθε $i \geq 0$. Θέτουμε $\mu_i := \mathcal{T}\big(-,\mu \circ u_i\big)$, για κάθε $i \geq 0$.

Από το Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16) ο συναλλοίωτος συναρτητής Yoneda $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$, ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{T}\big(-,t\big)$, είναι ένας καθολικός ομολογικός συναρτητής. Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], ειδικότερα ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$συγκινόμενα. Συνεπώς, από το Λήμμα 5.1.21.1, η αβελιανοποίηση Verdier $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ της $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3($\aleph_1$)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, και ότι ο $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ διατηρεί τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, δηλαδή απεικονίζει $\aleph_1-$συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε $\aleph_1-$συγκινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, για την αριθμήσιμη (πληθικότητας $< \aleph_1$) οικογένεια $\{X_i, i \geq 0\}$ των αντικειμένων της προηγούμενης ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$, η φυσική απεικόνιση

$$\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i) \longrightarrow \mathcal{T}\left(-,\coprod_{i=0}^{\infty}X_i\right)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Επειδή, ο $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ένας ομολογικός συναρτητής, απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια μακρά ακριβή ακολουθία. Ακριβώς, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.3, συμπεραίνουμε ότι η παρακάτω βραχεία ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}\Big(-, \coprod_{i=0}^{\infty} X_i\Big) \xrightarrow{\mathcal{T}(-,1-shift)} \mathcal{T}\Big(-, \coprod_{i=0}^{\infty} X_i\Big) \xrightarrow{\quad \mathcal{T}(-,\mu) \quad} \mathcal{T}\big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\big) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Συνεπώς, κάνοντας χρήση του προηγούμενου ισομορφισμού, επάγεται η παρακάτω βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty} \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \xrightarrow{\quad 1-shift \quad} \coprod_{i=0}^{\infty} \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \xrightarrow{\quad \coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \quad} \mathcal{T}\big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\big) \longrightarrow 0$$

Ο μορφισμός $shift : \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}\big(-, X_i\big)$ είναι ο (μοναδικός) μορφισμός που επάγεται στο πρώτο συγκινόμενο από τους μορφισμούς $u'_{i+1} \circ j_{i+1} : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}\big(-, X_i\big)$. Αυτό σημαίνει ότι, ισχύει $shift \circ u'_i = u'_{i+1} \circ j_{i+1}$, όπου $u'_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}\big(-, X_i\big)$ είναι η κανονική εμφύτευση του $\mathcal{T}\big(-, X_i\big)$ στο συγκινόμενο, και $j_{i+1} \equiv \mathcal{T}\big(-, j_{i+1}\big)$, όπου $\mathcal{T}\big(-, j_{i+1}\big) : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, X_{i+1}\big)$, μέσω του συναλλοίωτου συναρτητή Yoneda , προκειμένου να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, για κάθε $i \geq 0$. Από την προηγούμενη ακριβή ακολουθία, έπεται $\coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ (1 - shift) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, $\big(\coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ (1 - shift)\big) \circ u'_i = 0$, για κάθε $i \geq 0$. Αλλά,

$$\begin{aligned}
\left(\coprod_{i=0}^{\infty} \mu_i \circ (1 - shift)\right) \circ u'_i &= \coprod_{i=0}^{\infty} \mu_i \circ u'_i - \coprod_{i=0}^{\infty} \mu_i \circ (shift \circ u'_i) \\
&= \mu_i - \coprod_{i=0}^{\infty} \mu_i \circ (u'_{i+1} \circ j_{i+1}) \\
&= \mu_i - \left(\coprod_{i=0}^{\infty} \mu_i \circ u'_{i+1}\right) \circ j_{i+1} \\
&= \mu_i - \mu_{i+1} \circ j_{i+1}
\end{aligned}$$

Επομένως, $\mu_i - \mu_{i+1} \circ j_{i+1} = 0$. Συνεπώς, το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \arrow[dl, "j_{i+1}"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
\mathcal{T}\big(-, X_{i+1}\big) \arrow[rr, "\mu_{i+1}"] & & \mathcal{T}\big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\big)
\end{tikzcd}$$

καθίσταται μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$. Τοποθετώντας τα προηγούμενα διαγράμματα μαζί με τα διαγράμματα των συνθηκών 7.2.3.2 και 7.2.3.3, σ' ένα ενιαίο διάγραμμα, λαμβάνουμε το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \arrow[ddl, "\mu_i"'] \arrow[d, "j_{i+1}"] \arrow[ddr, "\phi_i"] & \\
 & \mathcal{T}\big(-, X_{i+1}\big) \arrow[dl, "\mu_{i+1}"] \arrow[dr, "\phi_{i+1}"'] & \\
\mathcal{T}\big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\big) \arrow[rr, "\phi"] & & \mathcal{H}\big(-\big)
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$, και η απεικόνιση $\phi : \mathcal{T}\big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(-\big)$ της συνθήκης 7.2.3.3, από το Θεώρημα 7.3.3, είναι ένας ισομορφισμός.

Με άλλα λόγια, οι απεικονίσεις $\mu_i : \mathcal{T}\big(-, X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\big)$ εφοδιάζουν το αντικείμενο $\mathcal{T}\big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\big)$ με την δομή ενός ευθέως ορίου στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Αυτό που ισχυρίζεται επι της ουσίας το Θεώρημα 7.3.3 είναι ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε επαγωγικά ένα ευθύ σύστημα αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, αυτό που αποτελείται από τις απεικονίσεις

$\phi_i : \mathcal{T}(-, X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(-)$, έτσι ώστε η απεικόνιση $\phi : \mathcal{T}(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i) \longrightarrow \mathcal{H}(-)$ η οποία στην πραγματικότητα, είναι η (μοναδική) απεικόνιση η οποία επάγεται από την επάγεται από την καθολική συνθήκη του ευθέως ορίου, να είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα, υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$X_0 \xrightarrow{\quad j_1 \quad} X_1 \xrightarrow{\quad j_2 \quad} X_2 \xrightarrow{\quad j_3 \quad} \cdots$$

, έτσι ώστε

$$\mathcal{T}\Big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\Big) \quad \simeq \quad \mathcal{H}(-)$$

Αυτή η ακολουθία από το Λήμμα Yoneda αντιστοιχεί σε μια (μοναδική) ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\mathcal{T}(-, X_0) \xrightarrow{\quad j_1 \quad} \mathcal{T}(-, X_1) \xrightarrow{\quad j_2 \quad} \mathcal{T}(-, X_2) \xrightarrow{\quad j_3 \quad} \cdots$$

Επιπλέον,

$$\underrightarrow{colim}\, \mathcal{T}(-, X_i) \quad \simeq \quad \mathcal{T}\Big(-, \underrightarrow{Hocolim}\, X_i\Big)$$

Παρατήρηση 7.3.5. Έστω β ένας κανονικός πληθάριθμος, έτσι ώστε $\beta > \aleph_0$. Έστω $\mathcal{T}$ μια $\beta-$τέλεια παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία. Αυτό σημαίνει ότι, η $\mathcal{T}$ περιέχει κάποιο $\beta-$τέλειο παράγον σύνολο T. Από το Θεώρημα 3.3.9 η κατηγορία $\mathcal{S} = \langle T \rangle^{\beta}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση. Επειδή το T είναι ένα σύνολο, από την Πρόταση 3.2.5 η κατηγορία $\mathcal{S} = \langle T \rangle^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το σύνολο T μ' ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{S}$, το οποίο περιέχει το T, και το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{S}$ (Παρατήρηση 7.1.7, για την περίπτωση $\beta = \alpha$). Τώρα από το Λήμμα 7.2.3, υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία αντικειμένων X_i στην $\mathcal{T}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1−7.2.3.4. Σ' αυτή την περίπτωση, οι συναρτητές $\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}}$ και $\mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}$ ανήκουν στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, επειδή απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, συνεπώς απεικονίζουν $\beta-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\beta-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, και η κατηγορία $\mathcal{S} = \langle T \rangle^{\beta}$, από το Παράδειγμα 3.2.8, είναι $\beta-$τοπικοποιήσιμη, συνεπώς είναι κλειστή ως προς τα $\beta-$συγκινόμενα. Τέλος, επειδή η $\mathcal{S}$ είναι μια $\beta-$τέλεια κλάση, από το Λήμμα 6.2.6, ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ διατηρεί τα $\beta-$συγκινόμενα, ειδικότερα διατηρεί τα $\aleph_1-$συγκινόμενα. Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.3, διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε βήμα προς βήμα ακριβώς την ίδια απόδειξη για το σύνολο T. Με άλλα λόγια, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε $\beta-$τέλεια παραγόμενη παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, όπου β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, έτσι ώστε $\beta > \aleph_0$, ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, χωρίς να μεσολαβήσει η έννοια της $\aleph_1-$τελειότητας. Ωστόσο, επειδή κάθε $\beta-$τέλεια παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, όπου β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, έτσι ώστε $\beta > \aleph_0$, είναι $\aleph_1-$τέλεια παραγόμενη, αναγόμαστε στο Θεώρημα 7.3.3. Πράγματι, έστω γ και β άπειροι πληθάριθμοι, έτσι ώστε $\beta > \gamma$. Από την Παρατήρηση 3.3.15 γνωρίζουμε ότι, εάν το S είναι ένα $\beta-$τέλειο σύνολο, τότε το S είναι επίσης ένα $\gamma-$τέλειο σύνολο. Συνεπώς, κάθε $\beta-$τέλειο παράγον σύνολο T, όπου β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, έτσι ώστε $\beta > \aleph_0$, είναι $\aleph_1-$τέλειο παράγον.

Παρατήρηση 7.3.6. Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], και περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T, και έστω $\mathcal{H} : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ένας ομολογικός συναρτητής, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Από την 7.4.2.2, της Πρότασης 7.4.2, η $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς, μπορούμε αντικαταστήσουμε το σύνολο T μ' ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{S}$, το οποίο περιέχει το T, και το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{S}$. Τώρα από το Λήμμα 7.2.3, υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία αντικειμένων X_i στην $\mathcal{T}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1−7.2.3.4. Σ' αυτή την περίπτωση, οι συναρτητές $\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}}$ και $\mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}$ ανήκουν στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, επειδή απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, συνεπώς απεικονίζουν $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, και η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$, από το Λήμμα 4.2.5 είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη, συνεπώς είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα. Τέλος, επειδή η $\mathcal{S}$ δεν είναι μόνο μια $\alpha-$τέλεια κλάση, κάθε αντικείμενο της $\mathcal{S}$ είναι επίσης $\alpha-$μικρό, από το Λήμμα 6.2.6, ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ διατηρεί τα συγκινόμενα, ειδικότερα διατηρεί τα $\aleph_1-$συγκινόμενα. Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.3, διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε βήμα προς βήμα ακριβώς την ίδια απόδειξη για το σύνολο T. Με άλλα λόγια, μπορούμε να δείξουμε απευθείας ότι κάθε $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, χωρίς να μεσολαβήσει η έννοια της $\aleph_1-$τελειότητας. Ωστόσο, επειδή από το Λήμμα 4.2.1 κάθε $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, είναι $\aleph_1-$τέλεια παραγόμενη, αναγόμαστε στο Θεώρημα 7.3.3, όπως θα διαπιστώσουμε στην Πρόταση 7.4.2.

7.4 Συνέπειες της Αναπαραστασιμότητας Brown

Έστω T ένα $\aleph_1-$τέλειο παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$. Στο Θεώρημα 7.3.3, δείξαμε ότι το T παράγει την $\mathcal{T}$, δηλαδή $\mathcal{T} = \langle T \rangle$ (Ορισμός 3.2.9). Ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 7.4.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω T ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$ κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma T = T$. Εάν $\mathcal{T} = \langle T \rangle$, τότε το T είναι ένα παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι το T είναι ένα $\aleph_1-$τέλειο σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, τότε ισχύει το αντίστροφο. Εάν το T είναι ένα παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$, τότε $\mathcal{T} = \langle T \rangle$.*

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 7.3.3, δηλαδή εάν το T είναι ένα $\aleph_1-$τέλειο παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, τότε $\mathcal{T} = \langle T \rangle$. Θέλουμε να αποδείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση. Έστω T ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T} = \langle T \rangle$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το T είναι ένα παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$.

Έστω $x \in \mathcal{T}$ ένα αντικείμενο έτσι ώστε $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(-, x\big)\big|_T = 0$. Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ η πλήρης υποκατηγορία όλων των αντικειμένων $s \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ισχύει $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s, x\big) = 0$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n\big(-\big), x\big) = \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(-, x\big) \circ \Sigma^n\big(-\big)$ είναι προσθετικός ως σύνθεση προσθετικών συναρτητών, η $\mathcal{S}$ είναι μια προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Εξ υποθέσεως το σύνολο T είναι κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma T = T$. Η $\mathcal{S}$ προφανώς περιέχει το σύνολο T, είναι κλειστή κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{T}$, και είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Έστω s και s' αντικείμενα στην $\mathcal{S}$. Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$s \longrightarrow s' \dashrightarrow s'' \dashrightarrow \Sigma s$$

που συμπληρώνει τον $s \longrightarrow s'$ στην $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι το s ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n\big(-\big), x\big)$ είναι συνομολογικός, συνεπώς απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^{n+1}s, x\big) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s'', x\big) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s', x\big)$$

Τα αντικείμενα s και s' ανήκουν στην $\mathcal{S}$, επομένως ισχύει $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^{n+1}s, x\big) = \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s', x\big) = 0$. Από την την ακρίβεια της ακολουθίας, έπεται ότι $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s'', x\big) = 0$. Συνεπώς, το $s'' \in \mathcal{S}$.

Έστω $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], συνεπώς το συγκινόμενο αυτών των αντικειμένων, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$, υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Από την Πρόταση 1.1.6.1, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής Σ^n διατηρεί τα συγκινόμενα, συνεπώς υφίστανται οι παρακάτω ισομορφισμοί

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(\Sigma^n\left\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right\}, x\right) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\{\Sigma^n s_\lambda\}, x\right) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s_\lambda, x\big)$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \Lambda$, το $s_\lambda \in \mathcal{S}$, ισχύει $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s_\lambda, x\big) = 0$. Συνεπώς, από τους προηγούμενους ισομορφισμούς συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n\{\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\}, x\big) = 0$, επομένως το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \in \mathcal{S}$. Δείξαμε λοιπόν ότι, η $\mathcal{S}$ περιέχει το σύνολο T, είναι τριγωνισμένη, και είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, επομένως περιέχει την $\langle T \rangle$ που είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ με αυτές τις ιδιότητες, δηλαδή $\langle T \rangle \subset \mathcal{S}$. Όμως $\mathcal{T} = \langle T \rangle$, συνεπώς $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $s \in \mathcal{T}$, και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ισχυεί $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(\Sigma^n s, x\big) = 0$, ισοδύναμα, για κάθε $s \in \mathcal{T}$, ισχυεί $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(s, x\big) = 0$, επομένως $x = 0$. Συνεπώς, το T είναι ένα παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$.

□

Πρόταση 7.4.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι καλώς παραγόμενη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας κανονικός πληθάριθμος α, έτσι ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη. Τότε*

7.4.2.1. *Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας*

7.4.2.2. *Για κάθε πληθάριθμο β η κατηγορία $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή.*

7.4.2.3. *Ισχύει,*

$$\mathcal{T} \;=\; \bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{T}^{\beta}$$

, όπου ο β διατρέχει τους κανονικούς πληθαρίθμους $\geq \alpha$. Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο β διατρέχει όλους τους κανονικούς πληθαρίθμους.

Απόδειξη. Η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη. Αυτό σημαίνει ότι, περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T. Το $T \subset \mathcal{T}^{(\alpha)}$ είναι ένα $\alpha-$τέλειο σύνολο $\alpha-$μικρών αντικειμένων. Συνεπώς από το Λήμμα 4.2.1 για κάθε άπειρο πληθάριθμο β, το T είναι επίσης $\beta-$τέλειο. Συγκεκριμένα, για τον πληθάριθμο $\beta = \aleph_1$, το T είναι $\aleph_1-$τέλειο. Από το Θεώρημα 7.3.3 γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και ότι $\mathcal{T} = \langle T \rangle$.

Επειδή $T \subset \mathcal{T}^{\alpha}$, και $\mathcal{T} = \langle T \rangle$ από το Λήμμα 4.4.5 για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, ισχύει $\mathcal{T}^{\beta} = \langle T \rangle^{\beta}$. Επειδή το T είναι ένα σύνολο, από την Πρόταση 3.2.5 η $\langle T \rangle^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς, για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, η $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Από το Λήμμα 4.2.3 εάν $\gamma < \beta$, τότε $\mathcal{T}^{\gamma} \subset \mathcal{T}^{\beta}$. Επειδή για κάθε άπειρο πληθάριθμο γ μπορούμε να επιλέξουμε έναν κανονικό πληθάριθμο β μεγαλύτερο απο τους α και γ, έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{T}^{\gamma}$ είναι ουσιαστικά μικρή για όλους τους άπειρους πληθαρίθμους γ.

Για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, ισχύει $\mathcal{T}^{\beta} = \langle T \rangle^{\beta}$, και από το Λήμμα 3.2.3, εάν γ, δ άπειροι πληθάριθμοι έτσι ώστε $\gamma < \delta$, τότε $\langle T \rangle^{\gamma} \subset \langle T \rangle^{\delta}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \langle T \rangle \\ &= \bigcup_{\lambda} \langle T \rangle^{\lambda} \\ &= \bigcup_{\beta \geq \alpha} \langle T \rangle^{\beta} \\ &= \bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{T}^{\beta} \end{aligned}$$

, όπου ο β διατρέχει τους κανονικούς πληθαρίθμους $\geq \alpha$. Τέλος, από το Λήμμα 4.2.3, εάν γ, δ κανονικοί πληθάριθμοι έτσι ώστε $\gamma < \delta$, τότε $\mathcal{T}^{\gamma} \subset \mathcal{T}^{\delta}$. Συνεπώς, στην προηγούμενη ένωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο β διατρέχει όλους τους κανονικούς πληθαρίθμους.

□

Επαναδιατυπώνοντας την Πρόταση 7.4.2, στην ουσία σημαίνει το εξής.

Πρόταση 7.4.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Η τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι καλώς παραγόμενη εάν και μόνο εάν για κάθε άπειρο πληθάριθμο β, η κατηγορία $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή, και για όλους τους αρκετά μεγάλους πληθαρίθμους β η $\mathcal{T}^{\beta}$ παράγει, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2.11.*

Απόδειξη. Έστω β ένας αρκετά μεγάλος πληθάριθμος. Έστω ότι η $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή και παράγει. Ο β μπορεί να επιλεγεί να είναι κανονικός. Επιλέγουμε ένα σύνολο T αντικειμένων της $\mathcal{T}^{\beta}$ το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο απο κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{T}^{\beta}$. Τότε, επειδή η $\mathcal{T}^{\beta}$ παράγει και τα αντικείμενα του συνόλου $T \subset \mathcal{T}^{\beta}$ είναι, ως προς ισομορφισμό, ακριβώς τα αντικείμενα της $\mathcal{T}^{\beta}$, έπεται ότι το T είναι ένα $\beta-$συμπαγές παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Συνεπώς, η $\mathcal{T}$ είναι καλώς παραγόμενη.

Έστω τώρα ότι η $\mathcal{T}$ είναι καλώς παραγόμενη. Αυτό σημαίνει ότι, για κάποιον κανονικό πληθάριθμο α, η $\mathcal{T}$ περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T. Από το Λήμμα 4.2.3, εάν γ και β είναι άπειροι πληθάριθμοι, έτσι ώστε $\gamma < \beta$, τότε $\mathcal{T}^{\gamma} \subset \mathcal{T}^{\beta}$. Επομένως, για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, ισχύει $T \subset \mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}^{\beta}$. Επειδή η $\mathcal{T}^{\beta}$ περιέχει το παράγον σύνολο T, έπεται ότι παράγει. Συνεπώς, για όλους τους αρκετά μεγάλους πληθαρίθμους β (στην πραγματικότητα $\geq \alpha$), η $\mathcal{T}^{\beta}$ παράγει. Τέλος, ακριβώς όπως στην απόδειξη της 7.4.2.2, για κάθε πληθάριθμο β, η κατηγορία $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή.

□

Παρατήρηση 7.4.4. Στην πράξη, η μόνη φορά που είναι χρήσιμο να εξετάσουμε υποψήφια $\alpha-$συμπαγή παράγοντα σύνολα T, είναι όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι καλώς παραγόμενη. Πιο συγκεκριμένα, δοθείσης μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις κατηγορίες $\mathcal{T}^{\alpha}$ άμεσα, και μάλιστα να δείξουμε ότι για όλους τους α, η $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, και ότι για όλους τους αρκετά μεγάλους πληθαρίθμους α παράγει. Είναι ευκολότερο για κάποιο κανονικό πληθάριθμο α να παράξουμε ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T, δηλαδή ένα $\alpha-$τέλειο παράγον σύνολο, έτσι ώστε $T \subset \mathcal{T}^{(\alpha)}$.

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.3.3 και την Πρόταση 7.4.1, θα δείξουμε ότι οι Ορισμοί 7.1.1 και 7.1.10 είναι ισοδύναμοι.

Πρόταση 7.4.5. *Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη όπως στον Ορισμό 7.1.1, δηλαδή η υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, και $\langle \mathcal{T}^{\alpha} \rangle = \mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη όπως στον Ορισμό 7.1.10, δηλαδή περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T. Ομοίως, η $\mathcal{T}$ είναι καλώς παραγόμενη όπως στον Ορισμό 7.1.1 εάν και μόνο εάν είναι καλώς παραγόμενη όπως στον Ορισμό 7.1.10.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη όπως στον Ορισμό 7.1.1, δηλαδή η υποκατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, και $\langle \mathcal{T}^{\alpha} \rangle = \mathcal{T}$. Επιλέγουμε ένα σύνολο T αντικειμένων της $\mathcal{T}^{\alpha}$ το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο απο κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{T}^{\alpha}$. Τότε $\langle T \rangle = \mathcal{T}$, και από την Παρατήρηση 7.1.9.2, το T μπορούμε να το θεωρήσουμε κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma T = T$. Συνεπώς από την Πρόταση 7.4.1, το T είναι ένα παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$, και επειδή $T \subset \mathcal{T}^{\alpha}$, έπεται ότι το T είναι ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη όπως στον Ορισμό 7.1.10, δηλαδή περιέχει ένα $\alpha-$συμπαγές παράγον σύνολο T. Επειδή $T \subset \mathcal{T}^{\alpha} \subset \mathcal{T}^{(\alpha)}$, από το Λήμμα 4.2.1 το T είναι $\aleph_1-$τέλειο. Επομένως το T είναι ένα $\aleph_1-$τέλειο παράγον σύνολο, και συνεπώς από το Θεώρημα 7.3.3 η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και $\mathcal{T} = \langle T \rangle$. Επειδή $T \subset \mathcal{T}^{\alpha}$, και $\mathcal{T} = \langle T \rangle$ από το Λήμμα 4.4.5 για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, ισχύει $\mathcal{T}^{\beta} = \langle T \rangle^{\beta}$, συνεπώς για $\beta = \alpha$, ισχύει $\mathcal{T}^{\alpha} = \langle T \rangle^{\alpha}$. Επειδή το T είναι ένα σύνολο, από την Πρόταση 3.2.5 η $\langle T \rangle^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς η $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Επειδή $\mathcal{T} = \langle T \rangle$, έπεται ότι $\mathcal{T} = \langle \mathcal{T}^{\alpha} \rangle$.

□

Βάσει της Πρότασης 7.4.5, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον Ορισμό 7.1.1 ($\Longleftrightarrow$ Ορισμός 7.1.10)

Ορισμός 7.4.6. *Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Θα λέμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη, εάν η κατηγορία $\mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, και ο ομολογικός συναρτητής*

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$$

δεν μηδενίζεται σε κανένα αντικείμενο.

Λήμμα 7.4.7. *Έστω $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες οι οποίες ικανοποιούν το αξίωμα [TR5]. Έστω $\mathcal{F} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής ο οποίος διατηρεί τα συγκινόμενα. Έστω T ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε*

$$\overline{\mathcal{I}m}\Big(\mathcal{F}\big|_{\langle T \rangle}\Big) \subset \big\langle \mathcal{F}(T) \big\rangle$$

, όπου $\overline{\mathcal{I}m}\big(\mathcal{F}\big|_{\langle T \rangle}\big)$ είναι η ουσιαστική εικόνα του συναρτητή $\mathcal{F}\big|_{\langle T \rangle}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την πλήρη υποκατηγορία $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ της οποίας η κλάση των αντικειμένων ορίζεται ως εξής. Ένα αντικείμενο X ανήκει στην $\mathcal{S}$ εάν το αντικείμενο $\mathcal{F}(X)$ ανήκει στην $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$. Η $\mathcal{S}$ προφανώς περιέχει το σύνολο T, και είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς των αντικειμένων της στην $\mathcal{T}$. Επίσης, επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι τριγωνισμένος είναι προφανώς προσθετικός, έπεται ότι είναι προσθετική. Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει ότι το αντικείμενο $\mathcal{F}(X)$ ανήκει στην $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$. Επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι τριγωνισμένος, ισχύει $\mathcal{F}(\Sigma X) = \mathcal{F}\Sigma(X) \simeq \Sigma\mathcal{F}(X) \in \langle \mathcal{F}(T) \rangle$. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Έστω X και Y αντικείμενα στην $\mathcal{S}$. Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow \Sigma X$$

που συμπληρώνει τον $X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι το Z ανήκει επίσης στην $\mathcal{S}$. Επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι τριγωνισμένος απεικονίζει το τρίγωνο αυτό σ' ένα τρίγωνο

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(Z) \longrightarrow \Sigma\mathcal{F}(X)$$

στην $\mathcal{T}'$. Τα αντικείμενα X και Y ανήκουν στην $\mathcal{S}$, επομένως τα $\mathcal{F}(X)$ και $\mathcal{F}(Y)$ ανήκουν στην $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$. Επειδή η $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}'$, έπεται ότι το $\mathcal{F}(Z)$ ανήκει στην $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$.

Έστω $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], συνεπώς το συγκινόμενο αυτών των αντικειμένων, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, υπάρχει στην $\mathcal{T}$. Ο $\mathcal{F}$ διατηρεί τα συγκινόμενα, αυτό σημαίνει ότι

$$\mathcal{F}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(X_\lambda)$$

Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, το αντικείμενο X_λ ανήκει στην $\mathcal{S}$, επομένως το αντικείμενο $\mathcal{F}(X_\lambda)$ ανήκει στην $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$. Επειδή η $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ είναι τοποικοποιήσιμη, συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{F}\big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big) \in \langle \mathcal{F}(T) \rangle$, επομένως το $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathcal{S}$. Δείξαμε λοιπόν ότι, η $\mathcal{S}$ περιέχει το σύνολο T, είναι τριγωνισμένη, και είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, επομένως περιέχει την $\langle T \rangle$ που είναι η μικρότερη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ με αυτές τις ιδιότητες, δηλαδή $\langle T \rangle \subset \mathcal{S}$. Συνεπώς, η εικόνα του συναρτητή $\mathcal{F}\big|_{\langle T \rangle}$, και άρα η ουσιαστική του εικόνα περιέχεται στην $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$.

□

Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, και έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη στην $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, η $\mathcal{S}$ είναι η τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία που παράγεται από ένα $\alpha-$συμπαγές σύνολο αντικειμένων $S \subset \mathcal{S}$ στην $\mathcal{T}$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $S \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\alpha$, έτσι ώστε $\mathcal{S} = \langle S \rangle$. Από το Θεώρημα Τοπικοποίησης των Neeman−Thomason (Θεώρημα 4.4.12), για την ειδική περίπτωση $\beta = \alpha$, όπου $\alpha \geq \aleph_0$, ουσιαστικά συμπεραίνουμε ότι οι συναρτητές φυσικής έγκλεισης, και τοπικοποίησης Verdier

$$i : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

διατηρούν τα $\alpha-$συμπαγή σύνολα, δηλαδή απεικονίζουν $\alpha-$συμπαγή σύνολα σε $\alpha-$συμπαγή σύνολα. Από την Πρόταση 7.4.8 συμπεραίνουμε ότι, για την ειδική περίπτωση $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, όπου $\alpha \geq \aleph_1$, δηλαδή στην περίπτωση που η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, και η $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη στην $\mathcal{T}$, συμπεραίνουμε ότι διατηρούν επίσης τα παράγοντα σύνολα, δηλαδή απεικονίζουν παράγοντα σύνολα σε παράγοντα σύνολα, επομένως διατηρούν τα $\alpha-$συμπαγή παράγοντα σύνολα. Αυτό σημαίνει ότι, οι κατηγορίες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες. Για την ειδική περίπτωση $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, όπου $\alpha = \aleph_0$, δηλαδή στην περίπτωση που η $\mathcal{T}$ είναι μια $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, και η $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη στην $\mathcal{T}$, συμπεραίνουμε ότι ο συναρτητής i διατηρεί τα $\aleph_0-$συμπαγή παράγοντα σύνολα, αλλά ενώ ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ}$ διατηρεί τα $\aleph_0-$συμπαγή σύνολα, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι διατηρεί τα παράγοντα σύνολα. Ο λόγος είναι ότι, ο φυσικός τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{T}^{\aleph_0}/\mathcal{S}^{\aleph_0} \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^{\aleph_0}$ είναι μια σχεδόν ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, και μάλιστα από την Παρατήρηση 4.4.10 γνωρίζουμε ότι, κάθε αντικείμενο του $R' \subset \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^{\aleph_0}$, είναι ως προς ισομορφισμό στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, ένας ευθύς προσθετέος ενός αντικειμένου της μορφής $\mathcal{F}_{univ}(x)$ για κάποιο αντικείμενο $x \in T' \subset \mathcal{T}^{\aleph_0}$, όπου T' και R' είναι τα σύνολα της απόδειξης της Πρότασης 7.4.8. Συνεπώς, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\langle R' \rangle = \langle \mathcal{F}_{univ}(T') \rangle$. Παρόλα αυτά, η $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι μια $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, όπως θα αποδείξουμε στην Πρόταση 7.4.13, αφού σε αυτή την περίπτωση ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ}$ είναι μια τοπικοποίηση Bousfield . Τέλος, εάν η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, όπου $\alpha \geq \aleph_0$, και η $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι η τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία η οποία παράγεται από ένα οποιοδήποτε σύνολο $S \subset \mathcal{S}$ αντικειμένων της $\mathcal{T}$, που είναι και η ενδιαφέρουσα περίπτωση, τότε από την Πρόταση 7.4.8 συμπεραίνουμε ότι, οι συναρτητές i και $\mathcal{F}_{univ}$ δεν διατηρούν υποχρεωτικά τα $\alpha-$συμπαγή παράγοντα σύνολα αντικειμένων, διατηρούν όμως τα $\beta-$συμπαγή παράγοντα σύνολα αντικειμένων, για κάποιον κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$.

Επομένως, η κλάση των $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, όπου $\alpha \geq \aleph_0$, δεν είναι κλειστή ως προς τις τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από σύνολα αντικειμένων, και ως προς την τοπικοποίηση Verdier με τοπικοποιήσιμες υποκατηγορίες οι οποίες παράγονται από σύνολα αντικειμένων. Αυτό το γεγονός όπως αναφέραμε στην Εισαγωγή αποτέλεσε ένα από τα κίνητρα του ορισμού των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών. Με άλλα λόγια, η κλάση των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών αποτελεί την κατάλληλη γενίκευση της κλάσεως των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών, προκειμένου να εξασφαλιστεί η προηγούμενη έννοια κλειστότητας.

Πρόταση 7.4.8. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία, η οποία παράγεται απο ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε οι κατηγορίες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι καλώς παραγόμενες. Επίσης, υπάρχει ένας κανονικός πληθάριθμος α, έτσι ώστε*

$$\mathcal{S} \;=\; \bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \qquad \mathcal{T}/\mathcal{S} \;=\; \bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{T}^{\beta}/\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta}$$

, όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει ως προς ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, και ο β διατρέχει τους κανονικούς πληθαρίθμους $\geq \alpha$. Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο β διατρέχει όλους τους κανονικούς πληθαρίθμους.

Απόδειξη. Έστω S ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε $\mathcal{S} = \langle S \rangle$. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, από την Πρόταση 7.4.2 γνωρίζουμε ότι $\mathcal{T} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{T}^{\alpha}$, όπου ο α διατρέχει όλους τους άπειρους κανονικούς πληθαρίθμους. Θεωρούμε το συγκινόμενο $\coprod_{s \in S} s$ όλων των αντικειμένων του S. Το S είναι ένα σύνολο, και η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα συγκινόμενα, επομένως

$$\coprod_{s \in S} s \in \mathcal{T} \;=\; \bigcup_{\alpha} \mathcal{T}^{\alpha}$$

Συνεπώς, υπάρχει ένας κανονικός πληθάριθμος α_1, έτσι ώστε $\coprod_{s \in S} s \in \mathcal{T}^{\alpha_1}$. Αλλά, από το Λήμμα 4.2.4 η $\mathcal{T}^{\alpha_1}$ είναι πυκνή, συνεπώς $S \subset \mathcal{T}^{\alpha_1}$. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, υπάρχει ένα α_2 συμπαγές παράγον σύνολο $T \subset \mathcal{T}^{\alpha_2}$, για κάποιο κανονικό πληθάριθμο α_2. Θέτουμε $\alpha = max(\aleph_1, \alpha_1, \alpha_2)$. Τότε,

$$\begin{aligned} &T \subset \mathcal{T}^{\alpha_2} \subset \mathcal{T}^{\alpha}, && \text{και} \quad \mathcal{T} = \langle T \rangle \\ &S \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\alpha_1} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\alpha}, && \text{και} \quad \mathcal{S} = \langle S \rangle \end{aligned}$$

Τότε από το Θεώρημα Τοπικοποίησης των Neeman$-$Thomason (Θεώρημα 4.4.12), για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$,

$$\langle S \rangle^{\beta} = \mathcal{S}^{\beta} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\beta} \; ,$$
$$\langle T \rangle^{\beta} = \mathcal{T}^{\beta}$$

Επίσης, ο φυσικός τριγωνισμένος συναρτητής

$$\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

παραγοντοποιείται ως

$$\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\beta \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$$

, και ο συναρτητής

$$\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\beta$$

είναι μια ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών ($\beta > \aleph_0$).

Η $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι τοπικοποιήσιμη. Αυτό σημαίνει ότι το συγκινόμενο ενός συνόλου αντικειμένων της $\mathcal{S}$ υπάρχει, ως συγκινόμενο στην $\mathcal{T}$, και είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$. Συνεπώς, η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Επίσης, η $\mathcal{S}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x, y \in \mathcal{S}$ η απεικόνιση $\mathcal{S}(x,y) \longrightarrow \mathcal{T}(x,y)$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, επειδή η $\mathcal{T}$ έχει μικρά $Hom_\mathcal{T}-$σύνολα, έπεται ότι η $\mathcal{S}$ έχει επίσης μικρά $Hom_\mathcal{S}-$σύνολα. Επειδή το S είναι ένα σύνολο, από την Πρόταση 3.2.5 η $\langle S\rangle^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρή για όλους τους άπειρους πληθαρίθμους β. Για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$ έχουμε $\langle S\rangle^\beta = \mathcal{S}^\beta$. Συνεπώς, για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, η $\mathcal{S}^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρή. Επιλέγουμε ένα σύνολο S' αντικειμένων της $\mathcal{S}^\beta$ το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο απο κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{S}^\beta$, και από την Παρατήρηση 7.1.9.2, το S' μπορούμε να το θεωρήσουμε κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma S' = S'$. Επειδή $S \subset \langle S\rangle^\beta = \mathcal{S}^\beta$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{S} = \langle S\rangle \subset \langle\langle S\rangle^\beta\rangle = \langle\mathcal{S}^\beta\rangle = \langle S'\rangle$, για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$. Όμως, η $\langle S'\rangle$ είναι η μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το S', και $S' \subset \mathcal{S}$, συνεπώς $\langle S'\rangle = \mathcal{S}$. Επειδή $\Sigma S' = S'$, από την Πρόταση 7.4.1, το S' είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{S}$. Δείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{S}$ είναι $\beta-$συμπαγώς παραγόμενη για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, συνεπώς είναι καλώς παραγόμενη.

Επειδή η $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι τοπικοποιήσιμη, από το Πόρισμα 3.2.11 έπεται ότι η $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5] . Επίσης, επειδή $\mathcal{T} = \bigcup_\alpha \mathcal{T}^\alpha$, από το Πόρισμα 4.4.3 έπεται ότι η $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}-$σύνολα. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι καλώς παραγόμενη, από την Πρόταση 7.4.2 η κατηγορία $\mathcal{T}^\beta$, είναι ουσιαστικά μικρή. Από την Πρόταση 4.5.13, για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, η κατηγορία $\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\beta \simeq \mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta$ είναι ουσιαστικά μικρή. Έστω $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ ο συναρτητής τοπικοποίησης Verdier . Επιλέγουμε ένα σύνολο T' αντικειμένων της $\mathcal{T}^\beta$ το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\mathcal{T}^\beta$, και από την Παρατήρηση 7.1.9.2, το T' μπορούμε να το θεωρήσουμε κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ, δηλαδή $\Sigma T' = T'$. Ομοίως, επιλέγουμε ένα σύνολο R' αντικειμένων της $\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\beta$, το οποίο περιέχει έναν αντιπρόσωπο απο κάθε κλάση ισομορφισμού αντικειμένων της $\{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\beta$, έτσι ώστε $\Sigma R' = R'$. Ο φυσικός τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{T}^\beta/\mathcal{S}^\beta \longrightarrow \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\beta$ μια ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, και μάλιστα από την Παρατήρηση 4.4.10 γνωρίζουμε ότι, κάθε αντικείμενο της $R' \subset \{\mathcal{T}/\mathcal{S}\}^\beta$, είναι ως προς ισομορφισμό, της μορφής $\mathcal{F}_{univ}(x)$ για κάποιο αντικείμενο $x \in T' \subset \mathcal{T}^\beta$, συνεπώς $\langle R'\rangle = \langle\mathcal{F}_{univ}(T')\rangle$. Από το Πόρισμα 3.2.11, γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ διατηρεί τα συγκινόμενα, συνεπώς από το Λήμμα 7.4.7, ισχύει $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F}_{univ}|_{\langle T'\rangle}) \subset \langle\mathcal{F}_{univ}(T')\rangle$, όπου $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F}_{univ}|_{\langle T'\rangle})$ είναι η ουσιαστική εικόνα του συναρτητή $\mathcal{F}_{univ}|_{\langle T'\rangle}$. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι $\beta-$συμπαγώς παραγόμενη, το σύνολο $T' \subset \mathcal{T}^\beta$ είναι ένα $\beta-$συμπαγές παράγον σύνολο για την $\mathcal{T}$. Από το Λήμμα 4.2.1 το T' είναι $\aleph_1-$τέλειο, επομένως είναι ένα $\aleph_1-$τέλειο παράγον σύνολο, και συνεπώς από την Πρόταση 7.4.1, συμπεραίνουμε ότι $\langle T'\rangle = \mathcal{T}$. Ο $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι ένας επιμορφισμός τριγωνισμένων κατηγοριών. Πράγματι έστω $\mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathcal{T}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}'$ τριγωνισμένοι συναρτητές, έτσι ώστε $\mathcal{G}\mathcal{F}_{univ} = \mathcal{H}\mathcal{F}_{univ}$, τότε από την καθολική ιδιότητα της $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, έπεται $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Συνεπώς $\overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F}_{univ}|_{\langle T'\rangle}) = \overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F}_{univ}|_\mathcal{T}) = \mathcal{T}/\mathcal{S}$. Τότε $\mathcal{T}/\mathcal{S} = \overline{\mathcal{I}m}(\mathcal{F}_{univ}|_{\langle T'\rangle}) \subset \langle\mathcal{F}_{univ}(T')\rangle = \langle R'\rangle$, επομένως $\langle R'\rangle = \mathcal{T}/\mathcal{S}$. Επειδή $\Sigma R' = R'$, από την Πρόταση 7.4.1, το R' είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Επομένως, δείξαμε ότι η $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι $\beta-$συμπαγώς παραγόμενη για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\beta \geq \alpha$, συνεπώς είναι καλώς παραγόμενη.

Τώρα ο τελευταίος ισχυρισμός της Πρότασης, έπεται άμεσα από το Θεώρημα 4.4.12, και την Πρόταση 7.4.2.

$\square$

Πόρισμα 7.4.9. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία, η οποία παράγεται απο ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε οι κατηγορίες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ ικανοποιούν το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας.*

Απόδειξη. Έπεται, άμεσα από τις Προτάσεις 7.4.2 και 7.4.8.

$\square$

Μια σημαντική συνέπεια της Αναπαραστασιμότητας Brown, είναι το Θεώρημα Συζυγών Συναρτητών. Υπενθυμίζουμε ότι, από το Λήμμα 5.3.4 ένας δεξιός συζυγής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ ενός τριγωνισμένου συναρτητή $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένος.

Θεώρημα 7.4.10. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά $Hom-$σύνολα. Υποθέτουμε ότι*

7.4.10.1. *Η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, αυτό συμβαίνει, παραδείγματος χάριν, όταν η $\mathcal{S}$ είναι $\beta-$τέλεια παραγόμενη, όπου β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, έτσι ώστε $\beta > \aleph_0$, ή όταν η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη, όπου α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος.*

7.4.10.2. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής.*

7.4.10.3. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα συγκινόμενα. Υπενθυμίζουμε ότι δεν υποθέτουμε ότι υπάρχουν συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$, μόνο ότι οι εικόνες των συγκινομένων στην $\mathcal{S}$ είναι συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$. Δηλαδή, έστω $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{S}$. Γνωρίζουμε ότι το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας ισχύει για την $\mathcal{S}$, και συγκεκριμένα από την συνθήκη 7.2.1.1 η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Το συγκινόμενο αυτών των αντικειμένων, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$, υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Αλλά τότε, στην $\mathcal{T}$ υπάρχουν απεικονίσεις*

$$\mathcal{F}(s_\lambda) \longrightarrow \mathcal{F}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right)$$

, οι οποίες είναι οι εικόνες των φυσικών ενθέσεων $s_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ στην $\mathcal{S}$ μέσω του $\mathcal{F}$. Το να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{F}$ διατηρεί τα συγκινόμενα, ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε ότι αυτές οι απεικονίσεις εφοδιάζουν το αντικείμενο $\mathcal{F}\big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\big)$ με την δομή ενός συγκινομένου στην $\mathcal{T}$, των αντικειμένων του συνόλου $\big\{\mathcal{F}(s_\lambda), \lambda \in \Lambda\big\}$. Ισχυριζόμαστε ότι ως προς τις παραπάνω υποθέσεις, ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει, ότι για κάθε $s \in \mathcal{S}$ και για κάθε $t \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{F}s, t\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(s, \mathcal{G}t\big)$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $s \in \mathcal{S}$ και $t \in \mathcal{T}$.

Απόδειξη. Έστω t ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$. Θεωρούμε τον συναρτητή

$$\mathcal{H}(\,-\,) \quad = \quad \mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,), t\big) \quad = \quad \mathcal{T}(-, t) \circ \mathcal{F}(\,-\,)$$

Ο $\mathcal{F}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής, δηλαδή απεικονίζει τρίγωνα στην $\mathcal{S}$ σε τρίγωνα στην $\mathcal{T}$, και έξ υποθέσεως διατηρεί τα συγκινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$. Ο $\mathcal{T}(-, t)$ είναι ένας συνομολογικός συνομολογικός, δηλαδή απεικονίζει τρίγωνα στην $\mathcal{T}$ σε μακρές ακριβείς ακολουθίες στην $\mathcal{A}b$, και επιπλέον διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, ο συναρτητής

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,), t\big) : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

είναι ένας συνομολογικός συναρτητής, ο οποίος απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην Ab. Συνεπώς από το Θεώρημα 7.3.3, έπεται ότι είναι αναπαραστάσιμος. Για κάθε $t \in \mathcal{T}$, επιλέγω ένα αντικείμενο $\mathcal{G}t \in \mathcal{S}$ που τον αναπαριστά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t\big)$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $s \in \mathcal{S}$. Έστω $f : t \longrightarrow t'$ μια απεικόνιση στην $\mathcal{T}$. Η απεικόνιση

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mathcal{F}(-),f)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t'\big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t\big) & \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t'\big)
\end{tikzcd}$$

είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t'\big)$. Συνεπώς, από το Λήμμα Yoneda , υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση $\mathcal{G}f : \mathcal{G}t \longrightarrow \mathcal{G}t'$ στην $\mathcal{S}$, η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mathcal{F}(-),f)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t'\big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t\big) \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}(-,\mathcal{G}f)"] & \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t'\big)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, ορίσαμε μια απεικόνιση $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ στα αντικείμενα και στους μορφισμούς στην $\mathcal{T}$. Η απεικόνιση αυτή είναι ένας συναρτητής. Έστω $f : t \longrightarrow t'$, και $g : t' \longrightarrow t''$ απεικονίσεις στην $\mathcal{T}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$, υφίστανται το παρακάτω μεταθετικό διαγράμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mathcal{F}(-),g)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t'\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mathcal{F}(-),f)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t''\big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t\big) \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}(-,\mathcal{G}g)"] & \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t'\big) \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}(-,\mathcal{G}f)"] & \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t''\big)
\end{tikzcd}$$

το οποίο ξαναγράφεται ως

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t\big) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mathcal{F}(-),f\circ g)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\big(\mathcal{F}(\,-\,),t''\big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t\big) \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}(-,\mathcal{G}f\circ\mathcal{G}g)"] & \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t''\big)
\end{tikzcd}$$

Από την μοναδικότητα της απεικόνισης $\mathcal{G}\big(f\circ g\big) : \mathcal{G}t \longrightarrow \mathcal{G}t''$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{G}\big(f\circ g\big) = \mathcal{G}f\circ\mathcal{G}g$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathcal{G}\big(1\big) = 1$. Ο ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{F}s,t\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(s,\mathcal{G}t\big)$$

είναι φυσικός στα αντικείμενα $s \in \mathcal{S}$, γιατί ο ισομορφισμός $\mathcal{T}\big(\mathcal{F}(-),t\big) \longrightarrow \mathcal{S}\big(-,\mathcal{G}t\big)$ είναι φυσικός, για κάθε $t \in \mathcal{T}$. Μένει να δείξουμε ότι είναι φυσικός στα αντικείμενα $t \in \mathcal{T}$. Έστω s ένα αντικείμενο στην $\mathcal{S}$, και $f : t \longrightarrow t'$ μια απεικόνιση στην $\mathcal{T}$. Τότε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}(\mathcal{F}s,t) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mathcal{F}s,f)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}(\mathcal{F}s,t') \arrow[d, "\simeq"'] \\ \mathcal{S}(s,\mathcal{G}t) \arrow[r, "\mathcal{S}(s,\mathcal{G}f)"] & \mathcal{S}(s,\mathcal{G}t') \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, από την κατασκευή της απεικόνισης $\mathcal{G}f$. Συνεπώς, ο ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}s,t) \longrightarrow \mathcal{S}(s,\mathcal{G}t)$$

είναι φυσικός στα αντικείμενα $s \in \mathcal{S}$ και $t \in \mathcal{T}$, και επομένως ο $\mathcal{G}$ καθίσταται ένας δεξιός συζυγής του $\mathcal{F}$.

□

Παρατήρηση 7.4.11. Από την Πρόταση 5.3.7.1, γνωρίζουμε ότι εάν $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά $Hom-$σύνολα, κλειστές ως προς την διάσπαση ταυτοδύναμων μορφισμών, τότε το πρόβλημα της ύπαρξης δεξιού συζυγή συναρτητή ανάγεται με αμφιμονοσήμαντο τρόπο στο πρόβλημα της ύπαρξης δεξιού συζυγή συναρτητή μεταξύ των αβελιανοποιήσεων $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ και $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ των $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή εάν και μόνο εάν ο ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν δεξιό συζυγή. Από την Παρατήρηση 5.3.8, γνωρίζουμε ότι τα Θεωρήματα ύπαρξης συζυγών συναρτητών μεταξύ αβελιανών κατηγοριών εξαρτώνται από το γεγονός, οι κατηγορίες να είναι well$-$powered (αυτό σημαίνει ότι η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των υποαντικειμένων, ή ισοδύναμα των αντικειμένων πηλίκο ενός αντικειμένου της, είναι ένα σύνολο), και ότι για σχεδόν όλες τις μη τετριμμένες μεγάλες τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{S}$ (αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις των αντικειμένων τους δεν είναι μικρές, δηλαδή σύνολα), η αβελιανοποίηση $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ δεν είναι ποτέ well$-$powered , συνεπώς γνωρίζουμε ότι η Πρόταση 5.3.7.1 δεν έχει πρακτική αξία παρά μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον. Αντιθέτως, το Θεώρημα 7.4.10 είναι πολύ πρακτικό. Εάν η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας (π.χ. όταν η $\mathcal{S}$ είναι $\beta-$τέλεια παραγόμενη, όπου β είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, έτσι ώστε $\beta > \aleph_0$, ή όταν η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη, όπου α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος), τότε ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή εάν και μόνο εάν διατηρεί τα συγκινόμενα.

Παράδειγμα 7.4.12. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα. Υποθέτουμε ότι ισχύει το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας για την $\mathcal{T}$. Έστω $\mathcal{S}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία. Ο συναρτητής τοπικοποίησης Verdier $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένος, και από το Πόρισμα 3.2.11, διατηρεί τα συγκινόμενα. Εάν γνωρίζουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}-$σύνολα, π.χ. εάν η $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι καλώς παραγόμενη (Πρόταση 7.4.8), τότε από το Θεώρημα 7.4.10 ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{T}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο $\mathcal{F}_{univ}$ καλείται μια τοπικοποίηση Bousfield , και ο δεξιός συζυγής $\mathcal{G}$ καλείται συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield .

Πρόταση 7.4.13. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, και έστω T ένα $\aleph_0-$συμπαγές παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$. Έστω $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μια τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη στην $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, η $\mathcal{S}$ παράγεται από ένα $\aleph_0-$συμπαγές σύνολο αντικειμένων $S \subset \mathcal{S}$ για την $\mathcal{T}$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $S \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\aleph_0}$, έτσι ώστε $\mathcal{S} = \langle S \rangle$. Τότε οι κατηγορίες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες.*

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στην Πρόταση 7.4.8, για την ειδική περίπτωση $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, όπου $\alpha = \aleph_0$.

Η $\mathcal{T}$ είναι μια $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία. Επομένως, εξ ορισμού έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα. Από την 7.4.2.3, της Πρότασης 7.4.2, ισχύει $\mathcal{T} = \bigcup_{\beta \geq \aleph_0} \mathcal{T}^{\beta} = \bigcup_{\beta} \mathcal{T}^{\beta}$. Συνεπώς, από το Πόρισμα 4.4.3, η $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}-$σύνολα. Ο συναρτητής τοπικοποίησης Verdier $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι τριγωνισμένος, και από το Πόρισμα 3.2.11, διατηρεί τα συγκινόμενα. Συνεπώς, από το Θεώρημα 7.4.10, ο $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ έχει έναν δεξιό συζυγή

$\mathcal{G} : \mathcal{T}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$, δηλαδή είναι μια τοπικοποίηση Bousfield (Παράδειγμα 7.4.12). Επίσης, η μονάδα $\epsilon : 1 \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}_{univ}$ της συζυγίας των $\mathcal{F}_{univ}$ και $\mathcal{G}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός, αυτό σημαίνει ότι ο δεξιός συζυγής $\mathcal{G} : \mathcal{T}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι πλήρης και πιστός [[Neeman], Λήμμα 9.1.7, σελ. 321].

Το σύνολο T είναι ένα $\aleph_0-$συμπαγές παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, ειδικότερα είναι ένα $\aleph_0-$συμπαγές σύνολο. Από Θεώρημα Τοπικοποίησης των Neeman$-$Thomason (Θεώρημα 4.4.12), ο συναρτητής $\mathcal{F}_{univ} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}$ διατηρεί τα $\aleph_0-$συμπαγή σύνολα. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{F}_{univ}(T)$ είναι ένα $\aleph_0-$συμπαγές σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Μένει να δείξουμε ότι είναι επιπλέον ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}/\mathcal{S}$.

Έστω $x \in \mathcal{T}/\mathcal{S}$, και $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}\big(\mathcal{F}_{univ}(t), x\big) = 0$, για κάθε $t \in T$. Λόγω της συζυγίας των $\mathcal{F}_{univ}$ και $\mathcal{G}$ υφίσταται ο ισομορφισμός

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}\big(\mathcal{F}_{univ}(t), x\big) \;\simeq\; \mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(t, \mathcal{G}(x)\big)$$

Τότε $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(t, \mathcal{G}(x)\big) = 0$, για κάθε $t \in T$. Όμως, το T είναι ένα $\aleph_0-$συμπαγές παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, επομένως το $\mathcal{G}(x) = 0$. Επειδή ο $\mathcal{G} : \mathcal{T}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι πλήρης και πιστός, συμπεραίνουμε ότι $x = 0$. Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{F}_{univ}(T)$ είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}/\mathcal{S}$.

□

Πρόταση 7.4.14. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα. Υποθέτουμε ότι ισχύει το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας για την $\mathcal{T}$. Τότε η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*], αυτό σημαίνει ότι περιέχει ένα γινόμενο οποιουδήποτε μικρού συνόλου αντικειμένων της.*

Απόδειξη. Έστω $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{T}$. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(-, X_\lambda\big)$ είναι συνομολογικός, και απεικονίζει συγκινόμενα της $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Αλλά τότε ο συναρτητής

$$\mathcal{H}(\,-\,) \quad = \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}(-, X_\lambda)$$

είναι επίσης συνομολογικός συναρτητής, και απεικονίζει συγκινόμενα της $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Επειδή ισχύει το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας για την $\mathcal{T}$, ο $\mathcal{H}$ είναι αναπαραστάσιμος. Συνεπώς υπάρχει ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$, έτσι ώστε

$$\mathcal{T}(-, X) \quad \simeq \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}(-, X_\lambda)$$

Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}(-, X_\lambda) & \\
\mathcal{T}(-, X) \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}(-, X_\lambda) \arrow[ul, "p_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

, και οι απεικονίσεις $p_\lambda \circ \phi : \mathcal{T}\big(-, X\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, X_\lambda\big)$, όπου ϕ είναι ο προηγούμενος ισομορφισμός, εφοδιάζουν το αντικείμενο $\mathcal{T}\big(-, X\big)$ με την δομή ενός γινομένου στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, των αντικειμένων του συνόλου $\big\{\mathcal{T}\big(-, X_\lambda\big), \lambda \in \Lambda\big\}$, όπου $p_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}\big(-, X_\lambda\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, X_\lambda\big)$ είναι η κανονικές προβολές από το γινόμενο $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}\big(-, X_\lambda\big)$ στο $\mathcal{T}\big(-, X_\lambda\big)$. Από το Λήμμμα Yoneda οι απεικονίσεις $p_\lambda \circ \phi$ αντιστοιχούν σε μοναδικές απεικονίσεις $X \longrightarrow X_\lambda$ στην $\mathcal{T}$, και επιπλέον καθιστούν το αντικείμενο X ένα γινόμενο στην $\mathcal{T}$, των αντικειμένων του συνόλου $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$. Συνεπώς, το αντικείμενο $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ υπάρχει στην $\mathcal{T}$ και μάλιστα αναπαριστά τον $\mathcal{H}$, δηλαδή

$$\mathcal{T}\Bigg(-, \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\Bigg) \quad \simeq \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}(-, X_\lambda)$$

$\square$

7.5 Συνέπειες της ύπαρξης αρκετών ενέσιμων αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^{\alpha}\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$, και ο φορμαλισμός των phantom απεικονίσεων

Έστω $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$. Σ' αυτήν την Ενότητα θα αναλύσουμε τις συνέπειες της ύπαρξης αρκετών ενέσιμων αντικειμένων στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, τα οποία όπως προαναφέραμε στην Παρατήρηση 6.3.5, δεν είναι αναγκαίο να υπάρχουν.

Απο την Πρόταση 7.4.2, εάν η $\mathcal{T}$ είναι μια καλώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, τότε από την 7.4.2.1 η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και από την 7.4.2.2, για κάθε κανονικό πληθάριθμο β η κατηγορία $\mathcal{T}^{\beta}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Συνεπώς, όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σ' αυτήν την Ενότητα ισχύουν αυτομάτως, για την κλάση των καλώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών.

Πρόταση 7.5.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Από τα Λήμματα 6.2.4, 6.2.5, και 6.2.6, και την Παρατήρηση 6.2.10.2 του Κεφαλαίου 6, ο φυσικός συναρτητής*

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι ένας ομολογικός συναρτητής, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα και τα συγκινόμενα. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Έστω $\mathcal{I}$ ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Υπάρχει ένα αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{I} \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε :

7.5.1.1. *Για κάθε αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\mathcal{T}\big(x, \mathcal{G}\mathcal{I}\big) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}\big(\,-\,\big)\Big]$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{I}$ ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ανταλλοίωτο συναρτητή $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$,

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}\big(\,-\,\big)\Big] = \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[-, \mathcal{I}\big(\,-\,\big)\Big] \circ \mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$ στην ομάδα των φυσικών μετασχηματισμών

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}\big(\,-\,\big)\Big]$$

Από την Παρατήρηση 6.2.10.2, ο συναρτητής

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$ στο $\mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι ένας ομολογικός συναρτητής ο οποίος διατηρεί τα συγκινόμενα. Επειδή το $\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο, ο συναρτητής

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[-, \mathcal{I}\big(\,-\,\big)\Big] : \Big\{\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big\}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

είναι ακριβής, και απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς ο συναρτητής

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}\big(\,-\,\big)\Big]$$

είναι ένας ομολογικός συναρτητής $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος απεικονίζει συγκινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Έχουμε υποθέσει ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Συνεπώς υπάρχει ένα αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{I} \in \mathcal{T}$, έτσι ώστε

$$\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I}) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}(-,-)\big|_{\mathcal{S}},\mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

, δηλαδή οι απεικονίσεις $x \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{I}$ τίθενται σε μια ένα προς ένα και επι αντιστοιχία με τους φυσικούς μετασχηματισμούς στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$

$$\mathcal{T}(-,x)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{I}(\,-\,)$$

□

Πόρισμα 7.5.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Τέλος, υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Τότε ο φυσικός συναρτητής της Ενότητας 6.4*

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$$

έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G}$.

Απόδειξη. Στην Πρόταση 7.5.1, δείξαμε ότι για κάθε αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$ και για κάθε ενέσιμο αντικείμενο $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, ο συναρτητής ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$ στην ομάδα των φυσικών μετασχηματισμών

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\pi x,\mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

είναι αναπαραστάσιμος. Δηλαδή, υπάρχει ένας ισομορφισμός, ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $x \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{T}\big(x,\mathcal{G}\mathcal{I}\big) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\pi x,\mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

Ο συναρτητής $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\big[-,\mathcal{I}(\,-\,)\big]$ είναι ακριβής, επειδή το αντικείμενο $\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, ενώ ο συναρτητής $\pi(\,-\,)$ είναι ακριβής από την Ενότητα 6.4. Ο συναρτητής συναρτητής $\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})$ είναι ακριβής, επειδή είναι φυσικά ισόμορφος με τον συναρτητή $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\big[\pi(\,-\,),\mathcal{I}(\,-\,)\big] = \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\big[-,\mathcal{I}(\,-\,)\big] \circ \pi(\,-\,)$ ο οποίος είναι ακριβής ως σύνθεση ακριβών συναρτητών, συνεπώς το αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{T}$. Από το Πόρισμα 5.1.20, γνωρίζουμε ότι κάθε ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός αντικειμένου στην $\mathcal{T}$, και ότι εάν κάθε ταυτοδύναμος μορφισμός διασπάται στην $\mathcal{T}$, τότε τα ενέσιμα αντικείμενα στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ακριβώς τα αντικείμενα της $\mathcal{T}$. Αλλά, η κατηγορία $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], συνεπώς από την Πρόταση 1.6.10, κάθε ταυτοδύναμος μορφισμός διασπάται στην $\mathcal{T}$. Επομένως, το αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Συνεπώς, ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{T})\big[-,\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})\big]$ είναι ακριβής. Οι συναρτητές $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$

$$\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I}) \quad \text{και} \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\pi(\,-\,),\mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

θεωρούμενοι ως συναρτητές στο αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$, είναι ομολογικοί συναρτητές, και συμπίπτουν με τους περιορισμούς στην $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ των ακριβών συναρτητών $\big\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\big\}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})\Big[-,\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})\Big] \quad \text{και} \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\pi(\,-\,),\mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

Συνεπώς, οι συναρτητές $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})\Big[-,\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})\Big]\Big|_{\mathcal{T}\subset\mathcal{A}(\mathcal{T})} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\pi(\,-\,),\mathcal{I}(\,-\,)\Big]\Big|_{\mathcal{T}\subset\mathcal{A}(\mathcal{T})}$$

είναι φυσικά ισόμορφοι. Το Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16) είναι αυτοδυϊκό. Αυτό σημαίνει ότι, ο ανταλλοίωτος συναρτητής Yoneda $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$, δηλαδή ο συναρτητής, ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{T}(t,-)$ είναι ένας καθολικός ομολογικός συναρτητής. Έστω $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{S})\}^{op}$ ο δυϊκός συναρτητής του συναλλοίωτου συναρτητή Yoneda $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Η κατηγορία $\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op}$ ικανοποιεί την ίδια καθολική συνθήκη με την αβελιανοποίηση Verdier $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$ της $\mathcal{T}^{op}$. Συνεπώς, από την μοναδικότητα της $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$, ως προς ισοδυναμία κατηγοριών, έπεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός, ως προς φυσικό ισομορφισμό συναρτητών, ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{op}) \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op}$ ο οποίος είναι μια ισοδυναμία, και επιπλέον καθιστά το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^{op} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op}) \arrow[dl, dashed] \\
\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op} &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{op}) \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op}$ απεικονίζει το αντικείμενο $\mathcal{T}(t,-)$ στο αντικείμενο $\mathcal{T}(-,t)$, για κάθε $t \in \mathcal{T}$. Υφίστανται τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^{op} \arrow[r] \arrow[d] & \{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op} \arrow[dl, "{\mathcal{A}(\mathcal{T})[-,\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})]}"] \\
\mathcal{A}b &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^{op} \arrow[r] \arrow[d] & \{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op} \arrow[dl, "{\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)[\pi(-),\mathcal{I}(-)]}"] \\
\mathcal{A}b &
\end{tikzcd}$$

, και οι συνθέσεις των ακριβών συναρτητών $\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})\Big[-,\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})\Big] \quad \text{και} \quad \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\pi(\,-\,),\mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

με τον καθολικό ομολογικό συναρτητή $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \{\mathcal{A}(\mathcal{T})\}^{op}$, οι οποίοι συμπίπτουν με τους περιορισμούς στην $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ των συναρτητών αυτών, δηλαδή οι ομολογικοί συναρτητές $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})\Big[-,\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})\Big]\Big|_{\mathcal{T}\subset\mathcal{A}(\mathcal{T})} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\pi(\,-\,),\mathcal{I}(\,-\,)\Big]\Big|_{\mathcal{T}\subset\mathcal{A}(\mathcal{T})}$$

, είναι φυσικά ισόμορφοι. Από το δυϊκό Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16), κάθε φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ ομολογικών συναρτητών παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω ενός φυσικού μετασχηματισμού μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών. Επίσης, κάθε φυσικός ισομορφισμός μεταξύ ομολογικών συναρτητών, επάγει έναν φυσικό ισομορφισμό μεταξύ των επαγόμενων ακριβών συναρτητών. Συνεπώς, επάγεται ένας ισομορφισμός, ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $x \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$,

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})\Big[-,\mathcal{T}(-,\mathcal{G}\mathcal{I})\Big] \quad \simeq \quad \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\pi(\,-\,),\mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο συναρτητής π έχει έναν δεξιό συζυγή. Έχουμε δείξει ότι ο δεξιός συζυγής $\mathcal{G}$ είναι καλώς ορισμένος στην κατηγορία των ενέσιμων αντικειμένων $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$. Έξ υποθέσεως η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, δηλαδή κάθε αντικείμενο επιδέχεται μια ενέσιμη παράσταση. Συνεπώς, από το Λήμμα A.2.13 [[Nee01b], σελ. 347], ο συναρτητής $\mathcal{G}$ επεκτείνεται σε όλη την $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, ορίζοντας με αυτόν τον τρόπο ένα δεξιό συζυγή συναρτητή του π.

□

Παρατήρηση 7.5.3. Από την Πρόταση 6.4.3, γνωρίζουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$ είναι ένα πηλίκο Gabriel $\mathcal{A}(\mathcal{T})/\mathcal{B}$. Δείξαμε ότι το πηλίκο είναι συν−τοπικοποιήσιμο. Στο Πόρισμα 7.5.2, δείξαμε ότι εάν η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$

έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, το πηλίκο Gabriel $\mathcal{A}(\mathcal{T})/\mathcal{B}$ είναι επίσης τοπικοποιήσιμο. Συνεπώς, ο συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει έναν αριστερό, καθώς και έναν δεξιό συζυγή συναρτητή.

Από την Πρόταση A.2.10 [[Nee01b], σελ. 343], επειδή το πηλίκο είναι τοπικοποιήσιμο, έπεται ότι η συν−μονάδα της συζυγίας $\eta : \pi\mathcal{G} \longrightarrow 1$ είναι ένας ισομορφισμός. Συγκεκριμένα, για κάθε $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ υφίσταται ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(-, \mathcal{G}\mathcal{I})\big|_{\mathcal{S}} \quad = \quad \pi \circ \mathcal{T}(-, \mathcal{G}\mathcal{I}) \quad = \quad \pi \circ \mathcal{G}(\mathcal{I}) \quad \simeq \quad \mathcal{I}(\,-\,)$$

, ισοδύναμα

$$\mathcal{T}(-, \mathcal{G}\mathcal{I})\big|_{\mathcal{S}} \quad \simeq \quad \mathcal{I}(\,-\,)$$

Λήμμα 7.5.4. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Εάν ο φυσικός συναρτητής*

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$, τότε η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει έναν συν−γεννήτορα.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.3.3, το αντικείμενο $\mathcal{P} = \coprod_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{S}(-, s)$ είναι ένας προβολικός γεννήτορας της κατηγορίας $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Τότε κάθε μη μηδενικό αντικείμενο $x \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση $\mathcal{P} \longrightarrow x$. Αυτό σημαίνει ότι το x περιέχει την εικόνα κάποιας μη μηδενικής απεικόνισης $\mathcal{P} \longrightarrow x$. Με άλλα λόγια, το x περιέχει ένα μη μηδενικό υποαντικείμενο, ισόμορφο με ένα αντικείμενο πηλίκο του γεννήτορα $\mathcal{P}$. Από την Παρατήρηση 6.4.8 η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι well−powered . Συνεπώς, η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των αντικειμένων πηλίκο του $\mathcal{P}$ είναι ένα σύνολο.

Έστω $Q = \{q_{\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων όλων των αντικειμένων πηλίκο του $\mathcal{P}$. Τότε κάθε μη μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ περιέχει ένα μη μηδενικό υποαντικείμενο της μορφής $q_{\lambda} \in Q$. Επειδή η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, από την Πρόταση 7.4.14, ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*], δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα, επομένως από το Λήμμα 5.1.21.2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3*], δηλαδή είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα. Συνεπώς, επειδή το Λ είναι ένα σύνολο, το γινόμενο

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}q_{\lambda}$$

υπάρχει στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

Από το Λήμμα 5.1.11 η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Έστω $\mathcal{I}$ ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, το οποίο επιδέχεται μια εμφύτευση

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}q_{\lambda} \longrightarrow \mathcal{I}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το $\pi\mathcal{I}$ είναι ένας συν−γεννήτορας στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Αυτό σημαίνει ότι, ο συναρτητής $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[-, \pi\mathcal{I}\big]$ είναι πιστός, δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι, για κάθε μη μηδενική απεικόνιση $\phi : y \longrightarrow x$ στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, η απεικόνιση $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[\phi, \pi\mathcal{I}\big]$ είναι μη μηδενική. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση

$$y \xrightarrow{\ \phi\ } x \longrightarrow \pi\mathcal{I}$$

Έστω $\phi : y \longrightarrow x$ μια μη μηδενική απεικόνιση στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή, έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει μικρά $Hom_{\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)}$−σύνολα. Συνεπώς, η κλάση όλων των απεικονίσεων $x \longrightarrow \pi\mathcal{I}$ είναι ένα σύνολο. Επομένως, από το Λήμμα 6.1.5 το γινόμενο $\prod_{x \longrightarrow \pi\mathcal{I}} \pi\mathcal{I}$ υπάρχει στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Θεωρούμε το γινόμενο όλων αυτών των απεικονίσεων, δηλαδή θεωρούμε την απεικόνιση

$$x \dashrightarrow \prod_{x \longrightarrow \pi\mathcal{I}} \pi\mathcal{I}$$

Έστω k ο πυρήνας της απεικόνισης, δηλαδή k είναι η τομή των πυρήνων όλων των απεικονίσεων $x \longrightarrow \pi\mathcal{I}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $k = 0$. Έστω ότι ο πυρήνας k είναι μη μηδενικός. Τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό υποαντικείμενο q_λ του k, έτσι ώστε $q_\lambda \in Q$, και έστω $q_\lambda \longrightarrow k$ η αντίστοιχη εμφύτευση. Τότε λαμβάνουμε μια σύνθεση μονομορφισμών

$$q_\lambda \longrightarrow k \longrightarrow x$$

Ο συναρτητής $\mathcal{G}$ έχει έναν αριστερό συζυγή (τον π), και επομένως είναι αριστερά ακριβής. Συνεπώς εφαρμόζοντας τον $\mathcal{G}$ στην προηγούμενη σύνθεση μονομορφισμών, προκύπτει μια σύνθεση μονομορφισμών στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$

$$\mathcal{G}q_\lambda \longrightarrow \mathcal{G}k \longrightarrow \mathcal{G}x$$

Το $\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, το οποίο περιέχει το $\mathcal{G}q_\lambda$, επειδή ισχύει

$$\mathcal{G}q_\lambda \quad \subset \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}q_\lambda$$

Συνεπώς ο μονομορφισμός $\mathcal{G}q_\lambda \longrightarrow \mathcal{I}$ επεκτείνεται σε μια απεικόνιση $\mathcal{G}x \longrightarrow \mathcal{I}$, και εφαρμόζοντας τον συναρτητή π λαμβάνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi\mathcal{G}q_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{q_\lambda}"'] & \pi\mathcal{G}x \arrow[r] \arrow[d, "\eta_x"'] & \pi\mathcal{I} \\
0 \arrow[r] & q_\lambda \arrow[r] & x &
\end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση $\pi\mathcal{G}q_\lambda \longrightarrow \pi\mathcal{I}$ είναι ένας μονομορφισμός επειδή η απεικόνιση $\mathcal{G}q_\lambda \longrightarrow \mathcal{I}$ είναι ένας μονομορφισμός, και ο π είναι ακριβής συναρτητής. Από την Πρόταση A.2.10 [[Nee01b], σελ. 343], γνωρίζουμε ότι η συν−μονάδα της συζυγίας $\eta : \pi\mathcal{G} \longrightarrow 1$ είναι ένας ισομορφισμός, συνεπώς οι κάθετες απεικονίσεις στο μεταθετικό διάγραμμα είναι ισομορφισμοί. Επομένως, έχουμε βρεί μια απεικόνιση $x \longrightarrow \pi\mathcal{I}$ η οποία είναι ένας μονομορφισμός στο $q_\lambda \subset k$, και k είναι η τομή των πυρήνων όλων των απεικονίσεων $x \longrightarrow \pi\mathcal{I}$. Έπεται ότι $q_\lambda = 0$. Το μόνο υποαντικείμενο του πυρήνα k της μορφής q_λ είναι το μηδενικό αντικείμενο. Συνεπώς, $k = 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 7.5.5. Από το Πόρισμα 7.5.2, και το Λήμμα 7.5.4 υφίστανται οι συνεπαγωγές

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \\ \text{έχει αρκετά} \\ \text{ενέσιμα} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \\ \text{έχει έναν} \\ \text{δεξιό συζυγή} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \\ \text{έχει έναν} \\ \text{συν−γεννήτορα} \end{array} \right\}$$

Έστω ότι δίνεται ένα ενέσιμο αντικείμενο $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Από την Πρόταση 7.5.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{I} \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε να υφίσταται ο φυσικός ισομορφισμός της 7.5.1.1. Τα αντικείμενα αυτά θα διαδραματίσουν ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη του Δεύτερου Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας. Για αυτό τον λόγο, στην συνέχεια θα επιχειρήσουμε να δώσουμε έναν πιο κατανοητό χαρακτηρισμό για την κατηγορία των αντικειμένων αυτών.

Από την Παρατήρηση 6.4.5 η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ένα πηλίκο Gabriel της κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ με μια συν−τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία Serre την οποία συμβολίζουμε $\mathcal{B}$, η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, έτσι ώστε $\pi\big(\mathcal{F}\big) = 0$. Δηλαδή, $\mathcal{B}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ η οποία αποτελείται απ΄ όλους τους συναρτητές η οποίοι μηδενίζονται στην $\mathcal{S}$. Από την Πρόταση 5.1.13, και τα Λήμματα 5.1.18, και 5.2.2 έπεται ότι υπάρχει μια ισοδυναμία των αβελιανών κατηγοριών $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ισοδυναμία, και το Λήμμα 6.4.6, είδαμε ότι η $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})$ μπορεί να αποκτήσει μια πιο κατανοητή περιγραφή, ως εξής.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα αντικείμενο στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ είναι ένας μορφισμός $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$. Ένας μορφισμός

$$\{x \longrightarrow y\} \longrightarrow \{x' \longrightarrow y'\}$$

στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας μεταθετικών τετραγώνων

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d] & y \arrow[d] \\ x' \arrow[r] & y' \end{tikzcd}$$

Η σχέση ισοδυναμίας στους μορφισμούς είναι προσθετική, και ένας μορφισμός είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό μορφισμό εάν στο προηγούμενο μεταθετικό τετράγωνο οι ίσες συνθέσεις

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & \\ x' \arrow[r] & y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r] & y \arrow[d] \\ & y' \end{tikzcd}$$

μηδενίζονται. Ο συναρτητής $\pi : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ απεικονίζει ένα αντικείμενο $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ στην εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-, y)\big|_{\mathcal{S}}$$

Από το Λήμμα 6.4.6, ένα αντικείμενο $\{x \longrightarrow y\} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ ανήκει στην $\mathcal{B}$ εάν και μόνο εάν η εικόνα της $x \longrightarrow y$, μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι μηδέν, δηλαδή η $x \longrightarrow y$ είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.4.7. Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι το πηλίκο της κατηγορίας $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ με την συν$-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία Serre $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})$, όπου η $\mathcal{B}$ συγκροτείται από την κλάση όλων των $\alpha-$phantom απεικονίσεων, εάν θεωρηθούν ως αντικείμενα της $\mathcal{D}(\mathcal{T})$.

Λήμμα 7.5.6. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Έστω $\mathcal{I}$ ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Έστω*

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

ο συνήθης φυσικός συναρτητής. Έστω $\mathcal{G}\mathcal{I} \in \mathcal{T}$ το αντικείμενο που αντιστοιχεί στο $\mathcal{I}$, από την 7.5.1.1. Τότε κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{I}$ στην $\mathcal{T}$ μηδενίζεται. Επιπλέον, το αντικείμενο $\pi\mathcal{G}\mathcal{I}$ είναι φυσικά ισόμορφο με το $\mathcal{I}$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 7.5.1, για κάθε αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(x, \mathcal{G}\mathcal{I}\big) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}(\ -\ )\Big]$$

Έστω $x \longrightarrow y$ μια $\alpha-$phantom απεικόνιση, τότε η απεικόνιση

$$\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-, y)\big|_{\mathcal{S}}$$

μηδενίζεται, και επειδή ο $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[-, \mathcal{I}(\ -\ )\big]$ είναι ένας προσθετικός συναρτητής, η απεικόνιση

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}(-, y)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}(\ -\ )\Big] \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}(\ -\ )\Big]$$

μηδενίζεται. Από την φυσικότητα του ισομορφισμού της Πρότασης 7.5.1 στα αντικείμενα $x \in \mathcal{T}$ έπεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}(y, \mathcal{G}\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{T}(x, \mathcal{G}\mathcal{I})$$

επίσης μηδενίζεται. Συνεπώς, εάν $y = \mathcal{G}\mathcal{I}$, τότε για κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{I}$ η απεικόνιση

$$\mathcal{T}(\mathcal{G}\mathcal{I}, \mathcal{G}\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{T}(x, \mathcal{G}\mathcal{I})$$

μηδενίζεται. Συγκεκριμένα, $f = 1_{\mathcal{G}\mathcal{I}} \circ f = 0$. Συνεπώς, κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{I}$ μηδενίζεται.

Μένει να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\pi\mathcal{G}\mathcal{I}$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον $\mathcal{I}$. Από το Πόρισμα 7.5.2, γνωρίζουμε ότι εάν η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, τότε ο δεξιός συζυγής $\mathcal{G}$ ο οποίος επάγεται από την συνθήκη 7.5.1.1 της Πρότασης 7.5.1, είναι καλώς ορισμένος στην κατηγορία των ενέσιμων αντικειμένων $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, και μπορεί να επεκταθεί στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ μοναδικά, ως προς φυσικό ισομορφισμό, σ΄ έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G}$ του π. Τότε από την Παρατήρηση 7.5.3, η συν$-$μονάδα της συζυγίας $\eta : \pi\mathcal{G} \longrightarrow 1$ είναι ένας ισομορφισμός, δηλαδή η $\eta_{\mathcal{I}} : \pi\mathcal{G}\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, όχι μόνο για $\mathcal{I}$ ενέσιμο. Άλλά ακόμη και εάν η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ στερείται αρκετών ενέσιμων αντικειμένων, τότε για κάθε ενέσιμο αντικείμενο $\mathcal{I}$ υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\pi\mathcal{G}\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$. Πράγματι, εξ ορισμού το αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{I} \in \mathcal{T}$, αναπαριστά τον συναρτητή $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[\pi(\,-\,), \mathcal{I}(\,-\,)\big]$, δηλαδή για κάθε $x \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(x, \mathcal{G}\mathcal{I}) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\pi x, \mathcal{I}(\,-\,)\Big]$$

Εάν $x = s \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, τότε $\pi s = s$. Συνεπώς

$$\pi\mathcal{G}\mathcal{I}(s) \quad \simeq \quad \mathcal{T}(s, \mathcal{G}\mathcal{I})\big|_{\mathcal{S}} \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\pi s, \mathcal{I}(\,-\,)\Big] \quad = \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[s, \mathcal{I}(\,-\,)\Big] \quad \simeq \quad \mathcal{I}(s)$$

Ο τελευταίος ισομορφισμός οφείλεται στο γεγονός ότι η $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, και το Λήμμα Yoneda , δηλαδή

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[s, \mathcal{I}(\,-\,)\Big] \quad = \quad \mathcal{C}at\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[s, \mathcal{I}(\,-\,)\Big] \quad \simeq \quad \mathcal{I}(s)$$

Συνεπώς, το αντικείμενο $\pi\mathcal{G}\mathcal{I}$ είναι φυσικά ισόμορφο με το $\mathcal{I}$.

□

Λήμμα 7.5.7. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Υποθέτουμε ότι t είναι ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$, και υποθέτουμε ότι κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow t$ στην $\mathcal{T}$ μηδενίζεται. Έστω*

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

ο συνήθης φυσικός συναρτητής. Εάν a είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ έτσι ώστε $\pi a = 0$, τότε $\mathcal{A}(\mathcal{T})[a, t] = 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ισοδυναμία $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T})$ του Λήμματος 5.2.2. Ένα αντικείμενο $a \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ είναι ένας μορφισμός $\{f : x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$. Ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$ απεικονίζει ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ στο $\{1 : t \longrightarrow t\} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$. Ένας μορφισμός

$$\{f : x \longrightarrow y\} \longrightarrow \{1 : t \longrightarrow t\}$$

στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας μεταθετικών τετραγώνων

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d] & y \arrow[d] \\ t \arrow[r, "1"] & t \end{tikzcd}$$

Εάν $\pi a = 0$, τότε η $\{f : x \longrightarrow y\}$ είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς, η σύνθεση $x \longrightarrow y \longrightarrow t$ είναι επίσης μια $\alpha-$phantom απεικόνιση στην $\mathcal{T}$. Εξ υποθέσεως, κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow t$ στην $\mathcal{T}$ μηδενίζεται. Συνεπώς η $x \longrightarrow y \longrightarrow t$ μηδενίζεται. Επειδή, οι δυο ίσες συνθέσεις

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & \\ t \arrow[r, "1"] & t \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[d] \\ & t \end{tikzcd}$$

μηδενίζονται, το μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d] & y \arrow[d] \\ t \arrow[r, "1"] & t \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας του μηδενικού μορφισμού μεταξύ των αντικειμένων $\{f : x \longrightarrow y\}$ και $\{1 : t \longrightarrow t\}$ στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Συνεπώς, κάθε απεικόνιση $\{f : x \longrightarrow y\} \longrightarrow \{1 : t \longrightarrow t\}$ στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ μηδενίζεται, δηλαδή

$$\mathcal{D}(\mathcal{T})\Big[\{x \longrightarrow y\}, \big\{\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})\big\}(t)\Big] = 0$$

$\square$

Λήμμα 7.5.8. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Υποθέτουμε ότι t είναι ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$, και υποθέτουμε ότι κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow t$ στην $\mathcal{T}$ μηδενίζεται. Έστω*

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

ο συνήθης φυσικός συναρτητής. Τότε το πt είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Επιπλέον, το αντικείμενο $\mathcal{G}\pi t$ είναι ισόμορφο με το t, όπου $\mathcal{G}\pi t \in \mathcal{T}$ είναι το αντικείμενο που αντιστοιχεί στο πt, από την 7.5.1.1.

Απόδειξη. Έστω $x \longrightarrow y$ ένας μονομορφισμός στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Ο συναρτητής π έχει έναν αριστερό συζυγή συναρτητή $\mathcal{L}$, ο οποίος είναι δεξιά ακριβής, και ο οποίος δεν είναι αναγκαία αριστερά ακριβής. Ωστόσο θεωρούμε τον πυρήνα της απεικόνισης $\mathcal{L}x \longrightarrow \mathcal{L}y$. Συνεπώς, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$

$$0 \dashrightarrow k \dashrightarrow \mathcal{L}x \longrightarrow \mathcal{L}y$$

Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& & x \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_x"'] & y \arrow[d, "\varepsilon_y"] \\
0 \arrow[r] & \pi k \arrow[r] & \pi\mathcal{L}x \arrow[r] & \pi\mathcal{L}y
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο συναρτητής π είναι ακριβής, η κάτω γραμμή του διαγράμματος είναι ακριβής. Από την Πρόταση 6.4.3, η μονάδα της συζυγίας $\varepsilon : 1 \longrightarrow \pi\mathcal{L}$ είναι ένας ισομορφισμός, συνεπώς οι ε_x και ε_y είναι ισομορφισμοί. Επειδή η $x \longrightarrow y$ είναι ένας μονομορφισμός στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, έπεται ότι η $\pi\mathcal{L}x \longrightarrow \pi\mathcal{L}y$ είναι ένας μονομορφισμός στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, συνεπώς $\pi k = 0$. Από το Λήμμα 7.5.7, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A}(\mathcal{T})[k, t] = 0$.

Από το Πόρισμα 5.1.20 το αντικείμενο $t \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο, ως αντικείμενο της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{T})[-, t]$ είναι αριστερά ακριβής, συνεπώς απεικονίζει την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \mathcal{L}x \longrightarrow \mathcal{L}y$$

σε μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}y, t] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}x, t] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})[k, t] \longrightarrow 0$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι $\mathcal{A}(\mathcal{T})[k, t] = 0$, έπεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}y, t] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}x, t]$$

είναι ένας επιμορφισμός. Ο συναρτητής $\mathcal{L}$ είναι ένας αριστερός συζυγής συναρτητής του π, συνεπώς απο την φυσικότητα της συζυγίας στα αντικείμενα της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έπεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[y, \pi t\Big] \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[x, \pi t\Big]$$

είναι επίσης ένας επιμορφισμός. Επειδή η προηγούμενη απεικόνιση είναι ένας επιμορφισμός στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ για κάθε μονομορφισμό $x \longrightarrow y$ στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, έπεται ότι ο συναρτητής $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[-, \pi t\big]$ είναι δεξιά ακριβής. Επειδή είναι αριστερά ακριβής, έπεται ότι είναι ακριβής. Συνεπώς, το πt είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$.

Επειδή το πt είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, από την Πρόταση 7.5.1 υπάρχει ένα αντικείμενο $\mathcal{G}\pi t \in \mathcal{T}$, έτσι ώστε

$$\mathcal{T}\big(-, \mathcal{G}\pi t\big) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\pi(\,-\,)\big|_{\mathcal{T}}, \pi t\Big]$$

, δηλαδή για κάθε $x \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(x, \mathcal{G}\pi t\big) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\pi x, \pi t\Big]$$

Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{G}\pi t \in \mathcal{T}$ είναι ισόμορφο με το t. Έστω $\eta : \mathcal{L}\pi \longrightarrow 1$ η συν$-$μονάδα της συζυγίας. Για κάθε $x \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$, θεωρούμε τον πυρήνα και τον συνπυρήνα της απεικόνισης

$$\eta_x : \mathcal{L}\pi x \longrightarrow x$$

Συνεπώς, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & k \arrow[r, dashed] & \mathcal{L}\pi x \arrow[r, "\eta_x"] & x \arrow[r, dashed] & q \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi x \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\varepsilon_{\pi x}"'] & \pi x \arrow[d, "1"] & & \\
0 \arrow[r] & \pi k \arrow[r] & \pi\mathcal{L}\pi x \arrow[r, "\pi\eta_x"] & \pi x \arrow[r] & \pi q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ακριβής, η κάτω γραμμή του διαγράμματος είναι ακριβής. Από την Πρόταση 6.4.3, η μονάδα της συζυγίας $\varepsilon : 1 \longrightarrow \pi\mathcal{L}$ είναι ένας ισομορφισμός, συνεπώς για κάθε $x \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$, η απεικόνιση $\varepsilon_{\pi x}$ είναι ένας ισομορφισμός, και επομένως η απεικόνιση $\pi\eta_x$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός. Επομένως, από την ακρίβεια της κάτω γραμμής συμπεραίνουμε ότι

$$\pi k \;=\; 0 \;=\; \pi q$$

Συνεπώς, από το Λήμμα 7.5.7 έπεται ότι

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})[k, t] \quad = \quad 0 \quad = \quad \mathcal{A}(\mathcal{T})[q, t]$$

Από το Πόρισμα 5.1.20 το αντικείμενο $t \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο, ως αντικείμενο της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Ο συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{T})[-, t]$ είναι αριστερά ακριβής, συνεπώς απεικονίζει την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \mathcal{L}\pi x \xrightarrow{\eta_x} x \longrightarrow q \longrightarrow 0$$

σε μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{A}(\mathcal{T})[q, t] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})[x, t] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}\pi x, t] \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})[k, t]$$

Επειδή ισχύει $\mathcal{A}(\mathcal{T})[k, t] = 0 = \mathcal{A}(\mathcal{T})[q, t]$, από την ακρίβεια της ακολουθίας συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{T}\big(x, t\big) = \mathcal{A}(\mathcal{T})[x, t]$ είναι φυσικά ισόμορφο με το $\mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}\pi x, t]$. Επειδή ο $\mathcal{L}$ είναι ένας αριστερός συζυγής του π, για κάθε $x \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\pi x, \pi t\Big] \quad \simeq \quad \mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}\pi x, t]$$

Επομένως σε συνδυασμό με Λήμμα 7.5.1, για κάθε $x \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\big(x, \mathcal{G}\pi t\big) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\pi x, \pi t\Big] \quad \simeq \quad \mathcal{A}(\mathcal{T})[\mathcal{L}\pi x, t] \quad \simeq \quad \mathcal{A}(\mathcal{T})[x, t] \quad = \quad \mathcal{T}\big(x, t\big)$$

Συνεπώς, από το Λήμμα Yoneda έπεται ότι, το αντικείμενο $\mathcal{G}\pi t$ είναι ισόμορφο με το t.

$\square$

Παρατήρηση 7.5.9. Τα Λήμματα 7.5.6 και 7.5.8 μας επιτρέπουν να ταυτίσουμε τα ενέσιμα αντικείμενα $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ με τα αντικείμενα t στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε όλες οι $\alpha-$phantom απεικονίσεις $x \longrightarrow t$ στην $\mathcal{T}$ να μηδενίζονται. Από το Λήμμα 7.5.6, εάν το $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, τότε το $\mathcal{G}\mathcal{I} \in \mathcal{T}$ δεν επιδέχεται μη μηδενικές $\alpha-$phantom απεικονίσεις $x \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{I}$ στην $\mathcal{T}$, και επιπλέον ισχύει $\pi\mathcal{G}\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}$. Από το Λήμμα 7.5.8, εάν το $t \in \mathcal{T}$ δεν επιδέχεται μη μηδενικές $\alpha-$phantom απεικονίσεις $x \longrightarrow t$ στην $\mathcal{T}$, τότε το πt είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, και επιπλέον ισχύει $\mathcal{G}\pi t \simeq t$.

Ορισμός 7.5.10. *Ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ καλείται ορθογώνιο στις $\alpha-$phantom απεικονίσεις, εάν κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow t$ στην $\mathcal{T}$ μηδενίζεται.*

Παρατήρηση 7.5.11. Επαναδιατυπώνοντας την Παρατήρηση 7.5.9, βάσει του Ορισμού 7.5.10, έχουμε ουσιαστικά το εξής. Τα ενέσιμα αντικείμενα $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ τίθενται σε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα αντικείμενα $t \in \mathcal{T}$, τα οποία είναι ορθογώνια στις $\alpha-$phantom απεικονίσεις στην $\mathcal{T}$.

Ορισμός 7.5.12. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προσθετική κατηγορία. Ένα ιδεώδες $\mathcal{J}$ μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι μια κλάση μορφισμών, κλειστή ως προς την πρόσθεση, έτσι ώστε εάν $g \in \mathcal{J}$ και f και h είναι τυχαίοι μορφισμοί στην $\mathcal{T}$, τότε $fgh \in \mathcal{J}$, οποτεδήποτε η σύνθεση υπάρχει.*

Παράδειγμα 7.5.13. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Η κλάση $\mathcal{P}h(\mathcal{T})$ όλων των $\alpha-$phantom απεικονίσεων στην $\mathcal{T}$ είναι ένα ιδεώδες μορφισμών. Πράγματι, έστω $g : x \longrightarrow y$ μια $\alpha-$phantom απεικόνιση στην $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, η απεικόνιση $\mathcal{T}\big(-, g\big)\big|_{\mathcal{S}} : \mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, y\big)\big|_{\mathcal{S}}$ μηδενίζεται. Έστω $f : y \longrightarrow t$, και $h : t' \longrightarrow x$ τυχαίοι μορφισμοί στην $\mathcal{T}$. Τότε η σύνθεση μηδενίζεται

$$\mathcal{T}\big(-, t'\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{T}(-,h)|_{\mathcal{S}}} \mathcal{T}\big(-, x\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{T}(-,g)|_{\mathcal{S}}} \mathcal{T}\big(-, y\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{T}(-,f)|_{\mathcal{S}}} \mathcal{T}\big(-, t\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

Επομένως, η απεικόνιση $\mathcal{T}\big(-, fgh\big)\big|_{\mathcal{S}} : \mathcal{T}\big(-, t'\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, t\big)\big|_{\mathcal{S}}$ επίσης μηδενίζεται. Συνεπώς, $fgh \in \mathcal{P}h(\mathcal{T})$.

Ορισμός 7.5.14. *Έστω $\mathcal{J}$ ένα ιδεώδες μορφισμών. Το ορθογώνιο $\mathcal{J}^{\perp}$ του $\mathcal{J}$, ορίζεται να είναι η συλλογή όλων των αντικειμένων $t \in \mathcal{T}$, έτσι ώστε έαν $\{x \longrightarrow t\} \in \mathcal{J}$, τότε $x \longrightarrow t$ είναι η μηδενική απεικόνιση. Εάν T είναι μια κλάση αντικειμένων στην $\mathcal{T}$, το ιδεώδες $\mathcal{I}\{T\}$ είναι το ιδεώδες όλων των μορφισμών $\{f : x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$, έτσι ώστε για κάθε $t \in T$, όλες οι συνθέσεις $x \xrightarrow{f} y \longrightarrow t$ μηδενίζονται.*

Παρατήρηση 7.5.15. Για κάθε ιδεώδες $\mathcal{J}$ μορφισμών, ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathcal{J} \quad \subset \quad \mathcal{I}\{\mathcal{J}^{\perp}\}$$

Πράγματι, ένας μορφισμός $\{f : x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$ ανήκει στο ιδεώδες $\mathcal{I}\{\mathcal{J}^{\perp}\}$, εάν για κάθε $t \in \mathcal{J}^{\perp}$, όλες οι συνθέσεις $x \xrightarrow{f} y \longrightarrow t$ μηδενίζονται. Εάν ένας μορφισμός $\{f : x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$ ανήκει στο ιδεώδες $\mathcal{J}$, τότε όλες οι συνθέσεις $x \xrightarrow{f} y \longrightarrow t$ ανήκουν στο ιδεώδες $\mathcal{J}$, και συνεπώς για κάθε $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ μηδενίζονται, εξ ορισμού του $\mathcal{J}^{\perp}$. Παρ' όλα αυτά, υπό ορισμένες συνθήκες ο εγκλεισμός, όπως θα δούμε στην συνέχεια, καθίσταται ισότητα

$$\mathcal{J} \quad = \quad \mathcal{I}\{\mathcal{J}^{\perp}\}$$

Λήμμα 7.5.16. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Έστω $\mathcal{J} = \mathcal{P}h(\mathcal{T})$ το ιδεώδες των $\alpha-$phantom απεικονίσεων στην $\mathcal{T}$. Η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν ισχύει*

$$\mathcal{J} \quad = \quad \mathcal{I}\{\mathcal{J}^{\perp}\}$$

Απόδειξη. Η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν κάθε μη μηδενικό αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$, όπου το $\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Από την Παρατήρηση 7.5.11, κάθε ενέσιμο αντικείμενο $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι (φυσικά) ισόμορφο με ένα αντικείμενο της μορφής πt, έτσι ώστε το $t \in \mathcal{T}$ να είναι ορθογώνιο στις $\alpha-$phantom απεικονίσεις, δηλαδή $t \in \mathcal{J}^{\perp}$.

Έστω

$$\pi : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

ο συνήθης φυσικός συναρτητής. Επειδή η $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι μια ισοδυναμία αβελιανών κατηγοριών, κάθε αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της μορφής πa, όπου το a είναι ένα αντικείμενο στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Ένα αντικείμενο $a \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ το οποίο δεν ανήκει στον πυρήνα του π, είναι ένας μορφισμός $\{f : x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$ ο οποίος δεν είναι $\alpha-$phantom . Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν, κάθε απεικόνιση $\{f : x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$ η οποία δεν είναι $\alpha-$phantom , εάν θεωρηθεί ως αντικείμενο της $\mathcal{D}(\mathcal{T})$, επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση $\{f : x \longrightarrow y\} \longrightarrow t$, όπου το $t \equiv \{1 : t \longrightarrow t\}$ είναι τέτοιο ώστε το $t \in \mathcal{J}^{\perp}$. Από την παράγραφο που προηγήθηκε, αυτό σημαίνει ότι το μη μηδενικό αντικείμενο $\pi[\{f : x \longrightarrow y\}]$ επιδέχεται μια μη μηδενική απεικόνιση $\pi[\{f : x \longrightarrow y\}] \longrightarrow \pi t$, όπου το $t \in \mathcal{J}^{\perp}$.

Αλλά η απεικόνιση $\{f : x \longrightarrow y\} \longrightarrow t$ στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας μεταθετικών τετραγώνων

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d] & y \arrow[d] \\ t \arrow[r, "1"] & t \end{tikzcd}$$

Το να ισχυριστούμε ότι η απεικόνιση δεν είναι ισοδύναμη με την μηδενική, ισοδυναμεί με το να ισχυριστούμε ότι δυο ίσες συνθεσεις

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & \\ t \arrow[r, "1"] & t \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[d] \\ & t \end{tikzcd}$$

δεν μηδενίζονται. Με άλλα λόγια, μια μη μηδενική απεικόνιση $\{f : x \longrightarrow y\} \longrightarrow t$ υπάρχει στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ εάν και μόνο εάν υπάρχει μια μη μηδενική σύνθεση $x \xrightarrow{f} y \longrightarrow t$. Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ θα έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν για κάθε απεικόνιση $\{f : x \longrightarrow y\} \in \mathcal{T}$ η οποία δεν είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση, υπάρχει μια μη μηδενική σύνθεση $x \xrightarrow{f} y \longrightarrow t$. Ισοδύναμα, εάν η σύνθεση $x \xrightarrow{f} y \longrightarrow t$ μηδενίζεται για κάθε $t \in \mathcal{J}^{\perp}$, τότε η $x \longrightarrow y$ θα πρέπει να είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση. Συνεπώς, ισχύει ο εγκλεισμός $\mathcal{I}\{\mathcal{J}^{\perp}\} \subset \mathcal{J}$. Από την Παρατήρηση 7.5.15 ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός, συνεπώς λαμβάνουμε την ισότητα

$$\mathcal{J} \quad = \quad \mathcal{I}\{\mathcal{J}^{\perp}\}$$

□

Στο Λήμμα 7.5.16, μεταφράσαμε την ύπαρξη αρκετών ενέσιμων αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ στην γλώσσα των $\alpha-$phantom απεικονίσεων. Ας διατυπώσουμε άλλον έναν χαρακτηρισμό.

Λήμμα 7.5.17. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Έστω $\mathcal{J} = \mathcal{P}h(\mathcal{T})$ το ιδεώδες των $\alpha-$phantom απεικονίσεων στην $\mathcal{T}$. Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν, για κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$*

$$y \overset{f}{\dashrightarrow} z \dashrightarrow t \dashrightarrow \Sigma y$$

, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ και $f : y \longrightarrow z$ είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση στην $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν κάθε αντικείμενο $a \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ εμφυτεύεται σ' ένα ενέσιμο αντικείμενο. Από την Πρόταση 6.4.3 ο φυσικός συναρτητής

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$$

έχει έναν αριστερό συζυγή $\mathcal{L}$. Η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, είναι τα αντικείμενα $z \in \mathcal{T}$. Δοθέντος ενός αντικειμένου $a \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, υπάρχει μια εμφύτευση $\mathcal{L}a \longrightarrow z$, όπου $z \in \mathcal{T}$ ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Επειδή ο π είναι ένας ακριβής συναρτητής, και η μονάδα της συζυγίας $\varepsilon : 1 \longrightarrow \pi\mathcal{L}$ είναι ένας ισομορφισμός, η απεικόνιση

$$a \longrightarrow \pi\mathcal{L}a \longrightarrow \pi z$$

είναι επίσης μια εμφύτευση. Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν, κάθε αντικείμενο της κλάσης $\{\pi z, z \in \mathcal{T}\}$ μπορεί να εμφυτευθεί σ' ένα ενέσιμο αντικείμενο $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$.

Από την Παρατήρηση 7.5.11, κάθε ενέσιμο αντικείμενο $\mathcal{I} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι (φυσικά) ισόμορφο με ένα αντικείμενο της μορφής πt, έτσι ώστε το $t \in \mathcal{T}$ να είναι ορθογώνιο στις $\alpha-$phantom απεικονίσεις, δηλαδή $t \in \mathcal{J}^{\perp}$. Η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν, για κάθε $z \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$, υπάρχει μια εμφύτευση στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$\pi z \longrightarrow \pi t$$

, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$. Εάν $t \in \mathcal{J}^{\perp}$, από την απόδειξη του Λήμματος 7.5.8 γνωρίζουμε ότι, για κάθε $z \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(z,t) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\pi z, \pi t\Big]$$

Με άλλα λόγια η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν, για κάθε $z \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένας μορφισμός $z \longrightarrow t$, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$, στην $\mathcal{T}$, έτσι ώστε η απεικόνιση $\pi z \longrightarrow \pi t$, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ να είναι ένας μονομορφισμός.

Έστω ένα τρίγωνο

$$y \overset{f}{\dashrightarrow} z \longrightarrow t \dashrightarrow \Sigma y$$

που συμπληρώνει τον μορφισμό $z \longrightarrow t$ στην $\mathcal{T}$. Ο συναρτητής π είναι ακριβής, και ο συναρτητης Yoneda $Y : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ομολογικός. Συνεπώς, ο ομολογικός συναρτητής $\pi \equiv \pi \circ Y$ απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία

$$\pi y \xrightarrow{\pi f} \pi z \longrightarrow \pi t$$

στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Η απεικόνιση $\pi z \longrightarrow \pi t$ είναι ένας μονομορφισμός εάν και μόνο εάν $\pi f = 0$, δηλαδή εάν $f \in \mathcal{J}$. Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν, για κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένα τρίγωνο

$$y \overset{f}{\dashrightarrow} z \dashrightarrow t \dashrightarrow \Sigma y$$

, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ και $f \in \mathcal{J}$.

□

Συνδυάζοντας τα Λήμματα 7.5.16 και 7.5.17, προκύπτει η επόμενη

Πρόταση 7.5.18. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Έστω $\mathcal{J} = \mathcal{P}h(\mathcal{T})$ το ιδεώδες των $\alpha-$phantom απεικονίσεων στην $\mathcal{T}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :*

7.5.18.1. *Η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα.*

7.5.18.2. *Το ιδεώδες $\mathcal{J}$ ικανοποιεί την ισότητα $\mathcal{J} = \mathcal{I}\{\mathcal{J}^{\perp}\}$.*

7.5.18.3. *Για κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$*

$$y \overset{f}{\dashrightarrow} z \dashrightarrow t \dashrightarrow \Sigma y$$

, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ και $f \in \mathcal{J}$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 7.5.16, έχουμε την ισοδυναμία 7.5.18.1 $\Longleftrightarrow$ 7.5.18.2. Από το Λήμμα 7.5.17, έχουμε την ισοδυναμία 7.5.18.1 $\Longleftrightarrow$ 7.5.18.3. Συνεπώς, έχουμε την ισοδυναμία 7.5.18.1 $\Longleftrightarrow$ 7.5.18.2 $\Longleftrightarrow$ 7.5.18.3.

□

Πόρισμα 7.5.19. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Τότε κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$ επιδέχεται μια μεγιστική $\alpha-$phantom απεικόνιση $y \longrightarrow z$. Αυτό σημαίνει ότι, η $y \longrightarrow z$ είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση, και κάθε άλλη $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow z$ παραγοντοποιείται (όχι απαραίτητα μοναδικά) ως*

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{J} = \mathcal{P}h(\mathcal{T})$ το ιδεώδες των $\alpha-$phantom απεικονίσεων στην $\mathcal{T}$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, από το Λήμμα 7.5.17, για κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$

$$y \overset{f}{\dashrightarrow} z \dashrightarrow t \dashrightarrow \Sigma y$$

, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ και $f \in \mathcal{J}$. Ισχυρίζομαι, ότι η απεικόνιση $f : y \longrightarrow z$ είναι μια μεγιστική $\alpha-$phantom απεικόνιση.

Η $\{f : y \longrightarrow z\} \in \mathcal{J}$, επομένως είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση. Συνεπώς, μένει να δείξουμε ότι είναι μεγιστική. Υποθέτουμε ότι η $g : x \longrightarrow z$ είναι μια οποιαδήποτε $\alpha-$phantom απεικόνιση. Η σύνθεση

$$x \xrightarrow{g} z \longrightarrow t$$

είναι μια $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow t$. Συνεπώς, επειδή το $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ είναι τέτοιο ώστε εάν $\{x \longrightarrow t\} \in \mathcal{J}$, τότε $x \longrightarrow t$ είναι η μηδενική απεικόνιση, έπεται ότι μηδενίζεται. Ο συναρτητής $\mathcal{H}om_{\mathcal{T}}\big(x, -\big) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι ομολογικός. Συνεπώς απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια ακριβή ακολουθία. Απο την ακρίβεια της ακολουθίας έπεται ότι η απεικόνιση $x \longrightarrow z$ παραγοντοποιείται ως $x \longrightarrow y \longrightarrow z$.

□

Ας διατυπώσουμε στην γλώσσα των $\alpha-$phantom απεικονίσεων τι σημαίνει ο συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ να έχει έναν δεξιό συζυγή.

Λήμμα 7.5.20. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5]. Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Ο φυσικός συναρτητής*

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

έχει έναν δεξιό συζυγή εάν και μόνο εάν, για κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$, υπάρχει μια μεγιστική $\alpha-$phantom απεικόνιση $y \longrightarrow z$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.4.3 ο συναρτητής

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$$

είναι μια τοπικοποίηση Gabriel . Αυτό σημαίνει ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι ένα πηλίκο Gabriel της κατηγορίας $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ με μια συν$-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία Serre την οποία συμβολίζουμε $\mathcal{B}$, όπου $\mathcal{B} = \mathcal{K}er\big(\pi\big)$. Η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, είναι τα αντικείμενα $z \in \mathcal{T}$. Συνεπώς, από την Πρόταση A.2.20 [[Nee01b], σελ. 351], ο συναρτητής π θα έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ εάν και μόνο εάν, κάθε ενέσιμο αντικείμενο $z \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει ένα μεγιστικό $\mathcal{B}-$υποαντικείμενο $z_m \subset z$.

Θεωρούμε την ισοδυναμία $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T})$ του Λήμματος 5.2.2. Από την Πρόταση 5.2.5, τα υποαντικείμενα στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$, ενός αντικειμένου $z \in \mathcal{T} \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})$, μπορούν να αναπαρασταθούν απο μορφισμούς στην $\mathcal{T}$ της μορφής $\{y \longrightarrow z\}$. Έστω $\{y \longrightarrow z\}$ ένα υποαντικείμενο το οποίο περιέχει το αντικείμενο $\{x \longrightarrow z\}$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει ένα μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d] & z \arrow[d, "1"] \\ y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

του οποίου η κλάση ισοδυναμίας, είναι ένας μονομορφισμός στην $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Συνεπώς, η απεικόνιση $x \longrightarrow z$ παραγοντοποιείται ως

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z$$

Ο πυρήνας $\mathcal{K}er(\pi)$ του $\pi : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ ταυτίζεται με την κλάση όλων των $\alpha-$phantom απεικονίσεων στην $\mathcal{T}$, εάν θεωρηθούν ως αντικείμενα της $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Συνεπώς, η ύπαρξη ενός μεγιστικού $\mathcal{B}-$υποαντικειμένου $\{y \longrightarrow z\}_m$ του $z \equiv \{1 : z \longrightarrow z\}$, είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας μεγιστικής $\alpha-$phantom απεικόνισης $y \longrightarrow z$ στην $\mathcal{T}$.

□

Παρατήρηση 7.5.21. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά $Hom_{\mathcal{T}}-$σύνολα, η οποία ικανοποιεί το αξίωμα [TR5], και έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι ουσιαστικά μικρή. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Στην Πρόταση 7.5.18 επαναδιατυπώσαμε την ύπαρξη των αρκετών ενέσιμων αντικειμένων για την $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ στην γλώσσα των $\alpha-$phantom απεικονίσεων. Στο Λήμμα 7.5.20 επαναδιατυπώσαμε την ύπαρξη ενός δεξιού συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ του π, επίσης στην γλώσσα των $\alpha-$phantom απεικονίσεων. Από το Πόρισμα 7.5.2, γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη των αρκετών ενέσιμων αντικειμένων για την $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ συνεπάγεται την ύπαρξη ενός δεξιού συζυγή $\mathcal{G}$ του π. Το Πόρισμα 7.5.19 επαναδιατυπώνει το Πόρισμα 7.5.2 στην γλώσσα των $\alpha-$phantom απεικονίσεων.

Πιο συγκεκριμένα, από την Πρόταση 7.5.18 γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα εάν και μόνο εάν, για κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$

$$y \overset{f}{\dashrightarrow} z \dashrightarrow t \dashrightarrow \Sigma y$$

, όπου $t \in \mathcal{J}^{\perp}$ και $f \in \mathcal{J}$. Από το Πόρισμα 7.5.19, γνωρίζουμε ότι σε οποιοδήποτε τέτοιο τρίγωνο, η απεικόνιση $f : y \longrightarrow z$ είναι μια μεγιστική $\alpha-$phantom απεικόνιση στην $\mathcal{T}$. Τέλος, από το Λήμμα 7.5.20 γνωρίζουμε ότι ο φυσικός συναρτητής

$$\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$$

έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ εάν και μόνο εάν, για κάθε αντικείμενο $z \in \mathcal{T}$, υπάρχει μια μεγιστική $\alpha-$phantom απεικόνιση $y \longrightarrow z$ στην $\mathcal{T}$. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό των $\alpha-$phantom απεικονίσεων, μπορούμε να ανακτήσουμε το συμπέρασμα του Πορίσματος 7.5.2, δηλαδή το γεγονός για $z \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένα τριγώνο με τις προαναφερθείσες ιδιότητες, περιλαμβάνει τόσο την πληροφορία για την ύπαρξη αρκετών ενέσιμων αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ και την υπάρξη ενός δεξιού συζυγή του $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, όσο και την πληροφορία για την ύπαρξη της συνεπαγωγής

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \\ \text{έχει αρκετά} \\ \text{ενέσιμα} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b) \\ \text{έχει έναν} \\ \text{δεξιό συζυγή} \end{array} \right\}$$

Τα ενέσιμα αντικείμενα και δεξιοί συζυγείς συναρτητές είναι αρκετά αφηρημένα αντικείμενα. Από την άλλη μεριά, οι $\alpha-$phantom απεικονίσεις φαίνονται να είναι πολύ πιο φιλικά αντικείμενα. Διατυπώνοντας λοιπόν, τι σημαίνει η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ να έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, και τι σημαίνει ο συναρτητής $\pi : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ να έχει έναν δεξιό συζυγή στην γλώσσα των $\alpha-$phantom απεικονίσεων, μεταξύ των άλλων, μπορούμε να δείξουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ δεν έχει εν γένει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα [[Nee01b], Ενότητα C.4, σελ. 407-418].

Παρατήρηση 7.5.22. Έστω $\mathcal{I}$ ένας ενέσιμος συν$-$γεννήτορας της $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Ειδικότερα, ο $\mathcal{I}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο. Από την Πρόταση 7.5.1 υπάρχει ένα αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{I} \in \mathcal{T}$ το οποίο αναπαριστά τον συναρτητή

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)\Big[\pi(\,-\,)\big|_{\mathcal{T}}, \mathcal{I}(\,-\,)\Big] : \mathcal{T}^{op} \subset \big\{\mathcal{A}(\mathcal{T})\big\}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

, όπου ο συναρτητής $\pi(\,-\,)\big|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, ορίζεται στο αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$, ως $\pi \circ Y(x) = \pi \circ \big[\mathcal{T}(-, x)\big] = \mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{S}}$, όπου $Y : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ είναι ο συναρτητής Yoneda. Θα συμβολίζουμε το αντικείμενο $\mathcal{GI}$ με $\mathbb{BC}$, ή $\mathbb{BC}(\alpha, \mathcal{T})$ για να υποδηλώσουμε την εξάρτηση απο τον κανονικό πληθάριθμο α και την $\mathcal{T}$, και θα το καλούμε, το αντικείμενο Brown−Comenetz της $\mathcal{T}$ που αντιστοιχεί στον ενέσιμο συν−γεννήτορα $\mathcal{I}$.

Έστω $\mathcal{T}$ μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε από τον Ορισμό 7.4.6 ($\Longleftrightarrow$ Ορισμός 7.1.1 $\Longleftrightarrow$ Ορισμός 7.1.10), η κατηγορία $\mathcal{T}^\alpha$ είναι ουσιαστικά μικρή, και ο ομολογικός συναρτητής

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^\alpha\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big)$$

δεν μηδενίζεται σε κανένα αντικείμενο, δηλαδή για κάθε $x \in \mathcal{T}$, έαν $\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{T}^\alpha} = 0$, τότε $x = 0$. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^\alpha\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει έναν ενέσιμο συν−γεννήτορα $\mathcal{I}$, και έστω $\mathbb{BC} = \mathbb{BC}(\alpha, \mathcal{T})$ το αντικείμενο Brown−Comenetz της $\mathcal{T}$ που αντιστοιχεί στον ενέσιμο συν−γεννήτορα $\mathcal{I}$. Θεωρούμε το σύνολο $T = \{\Sigma^n \mathbb{BC}, n \in \mathbb{Z}\}$. Τότε το σύνολο T είναι ένα συν−παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}$, ή ισοδύναμα είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}^{op}$. Πράγματι, ο $\mathcal{I}$ είναι ένας ενέσιμος συν−γεννήτορας της $\mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^\alpha\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, ειδικότερα είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο. Συνεπώς, από το Λήμμα 7.5.6 το αντικείμενο $\pi\mathbb{BC}$ είναι φυσικά ισόμορφο με το $\mathcal{I}$. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{T}^\alpha} \quad = \quad \pi \circ \mathcal{T}(-, \mathbb{BC}) \quad = \quad \pi \circ \mathbb{BC} \quad \simeq \quad \mathcal{I}(\,-\,)$$

, ισοδύναμα

$$\mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{T}^\alpha} \quad \simeq \quad \mathcal{I}(\,-\,)$$

Δοθέντος ενός μη μηδενικού αντικειμένου $x \in \mathcal{T}$, επειδή η $\mathcal{T}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη ο συναρτητής $\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{T}^\alpha}$ είναι μη μηδενικός. Συνεπώς, επειδή ο $\mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{T}^\alpha}$ είναι ένας συν−γεννήτορας, υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση στην $\mathcal{E}x\big(\big\{\mathcal{T}^\alpha\big\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{T}^\alpha} \longrightarrow \mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{T}^\alpha}$$

Από την συνθήκη 7.5.1.1, του Λήμματος 7.5.1, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(x, \mathbb{BC}) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)\Big[\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{T}^\alpha}, \mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{T}^\alpha}\Big]$$

, ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $x \in \mathcal{T}$. Συνεπώς, η προηγούμενη μη μηδενική απεικόνιση αντιστοιχεί σε μια (μοναδική) απεικόνιση $x \longrightarrow \mathbb{BC}$. Συνεπώς, επειδή η απεικόνιση $\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{T}^\alpha} \longrightarrow \mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{T}^\alpha}$ είναι μη μηδενική, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $x \longrightarrow \mathbb{BC}$ είναι επίσης μη μηδενική. Συνεπώς, για κάθε μη μηδενικό αντικειμένο $x \in \mathcal{T}$, υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση $x \longrightarrow \mathbb{BC}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο Σ^{-n} είναι ένας αριστερός (και δεξιός) συζυγής του Σ^n, δηλαδή υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(\Sigma^{-n} x, \mathbb{BC}) \quad \simeq \quad \mathcal{T}(x, \Sigma^n \mathbb{BC})$$

Έστω $x \in \mathcal{T}$ ένα μη μηδενικό αντικείμενο, τότε το $\Sigma^{-n} x$ είναι μη μηδενικό. Επομένως, υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση $\Sigma^{-n} x \longrightarrow \mathbb{BC}$. Τότε η απεικόνιση αυτή μέσω του προηγούμενου φυσικού ισομορφισμού απεικονίζεται σε μια απεικόνιση $\Sigma^n \Sigma^{-n} x = x \longrightarrow \Sigma^n \mathbb{BC}$, η οποία είναι επίσης μη μηδενική, επειδή ο Σ^n είναι ένας αυτομορφισμός. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και για κάθε μη μηδενικό αντικείμενο $x \in \mathcal{T}$, υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση $x \longrightarrow \Sigma^n \mathbb{BC}$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathcal{T}$, έαν $\mathcal{T}(x, -)\big|_T = 0$, τότε $x = 0$, ή ισοδύναμα για κάθε $x \in \mathcal{T}^{op}$, έαν $\mathcal{T}^{op}(-, x)\big|_T = 0$, τότε $x = 0$. Τέλος, το T είναι εξ ορισμού κλειστό ως προς τον προσθετικό αυτομορφισμό Σ. Συνεπώς, από τον δυϊκό του Ορισμού 7.1.3.1, έπεται ότι το T είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}^{op}$.

7.6 Το Δεύτερο Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας

Σ' αυτή την Ενότητα θα μελετήσουμε τους αναπαραστάσιμους συναρτητές $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$. Από το Λήμμα 1.1.10, γνωρίζουμε ότι οι συναρτητές $\mathcal{T}(h, -)$ είναι ομολογικοί, και απο το δυϊκό του Λήμματος 5.1.5, ότι διατηρούν τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν γινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Ορίζουμε

Ορισμός 7.6.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία. Θα λέμε ότι η $\mathcal{T}^{op}$ ικανοποιεί το Θεώρημα*

Αναπαραστασιμότητας ή ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το δυϊκό Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας εάν

7.6.1.1. *Η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*].*

7.6.1.2. *Κάθε συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος είναι ομολογικός, και διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει γινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, είναι αναπαραστάσιμος. Αυτό σημαίνει ότι είναι φυσικά ισόμορφος με έναν συναρτητή $\mathcal{T}(h,-)$, για κάποιο αντικείμενο $h \in \mathcal{T}$.*

Ακολουθεί η απόδειξη του Δεύτερου Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας ή του Θεωρήματος Αναπαραστασιμότητας για την δυϊκή κατηγορία μιας $\alpha-$συμπαγούς παραγόμενης τριγωνισμένης κατηγορίας.

Θεώρημα 7.6.2. *[Δεύτερο Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας] Έστω α ένας κανονικός πληθάριθμος. Έστω $\mathcal{T}$ μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\mathcal{I}$ ένας ενέσιμος συν$-$γεννήτορας της $\mathcal{E}x\big(\{\mathcal{T}^\alpha\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$. Έστω $\mathbb{BC} = \mathbb{BC}(\alpha, \mathcal{T})$ το αντικείμενο Brown$-$Comenetz της $\mathcal{T}$ που αντιστοιχεί στον συν$-$γεννήτορα $\mathcal{I}$. Θεωρούμε το σύνολο $T = \{\Sigma^n \mathbb{BC}, n \in \mathbb{Z}\}$. Από την Παρατήρηση 7.5.22, το T είναι ένα παράγον σύνολο αντικειμένων για την $\mathcal{T}^{op}$. Τότε η $\mathcal{T}^{op}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*], και ότι κάθε συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ο οποίος είναι ομολογικός, και διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει γινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, είναι αναπαραστάσιμος. Δηλαδή, υπάρχει ένα αντικείμενο $h \in \mathcal{T}$ και ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\mathcal{T}(h,-) \quad \simeq \quad \mathcal{H}(\,-\,)$$

Ισχυρίζομαι, επιπλέον ότι η $\mathcal{T}^{op}$ συμπίπτει με την μικρότερη τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}^{op}$ η οποία περιέχει το σύνολο T, δηλαδή

$$\langle T \rangle \quad = \quad \langle \mathbb{BC} \rangle \quad = \quad \mathcal{T}^{op}$$

Απόδειξη. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, από την Πρόταση 7.4.2 ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Συνεπώς, από την Πρόταση 7.4.14, η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*]. Θέτουμε $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\alpha$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 7.2.3 (για την $\mathcal{T}^{op}$) για το σύνολο T. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε συναρτητή $\mathcal{H} : \{\mathcal{T}^{op}\}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ο οποίος είναι ομολογικός, και διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει γινόμενα στην $\{\mathcal{T}^{op}\}^{op}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία αντικειμένων X_i στην $\mathcal{T}^{op}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1$-$7.2.3.4. Έστω το ομοτοπικό συνόριο $X = \underrightarrow{Hocolim}\, X_i$ της ακολουθίας. Από την συνθήκη 7.2.3.3 του Λήμματος 7.2.3, υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\mathcal{T}^{op}(-,X) \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)$. Κατά συνέπεια, για να δείξουμε ότι η $\mathcal{T}^{op}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, καθώς επίσης ότι $\langle T \rangle = \langle \mathbb{BC} \rangle = \mathcal{T}^{op}$, αρκεί από το Λήμμα 7.3.1 (για την $\mathcal{T}^{op}$) να δείξουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η απεικόνιση $\mathcal{T}^{op}\big(\Sigma^n \mathbb{BC}, X\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\Sigma^n \mathbb{BC}\big)$ η οποία είναι ένας επιμορφισμός, είναι επιπλέον ένας μονομορφισμός. Ισοδύναμα στην $\mathcal{T}$, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η απεικόνιση $\mathcal{T}\big(X, \Sigma^n \mathbb{BC}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\Sigma^n \mathbb{BC}\big)$ η οποία είναι ένας επιμορφισμός, είναι επιπλέον ένας μονομορφισμός.

Ομοίως θα διατυπώσουμε στην $\mathcal{T}$ τι σημαίνει ότι, για το παράγον σύνολο $T \subset \mathcal{T}^{op}$ ισχύει το Λήμμα 7.2.3. Δηλαδή, για κάθε συναρτητή $\mathcal{H} : \{\mathcal{T}^{op}\}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ο οποίος είναι ομολογικός, και διατηρεί τα γινόμενα, υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία αντικειμένων X_i στην $\mathcal{T}^{op}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 7.2.3.1$-$7.2.3.4.

Σημαίνει ότι, για κάθε συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ ο οποίος είναι ομολογικός, και διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει γινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, υπάρχει μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$\cdots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0$$

έτσι ώστε

7.2.3.1. Για κάθε $i \geq 0$, τα αντικείμενα X_i ανήκουν στην $\langle T \rangle$, δηλαδή την μικρότερη συν$-$τοπικοποιήσιμη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το T, δηλαδή την μικρότερη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ η οποία περιέχει το T, και είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα.

7.2.3.2. Για κάθε i, υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών στην $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(X_i,-) \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)$$

Αυτοί οι φυσικοί μετασχηματισμοί ικανοποιούν μια σχέση συμβατότητας, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T}(X_i,-) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{T}(X_{i+1},-) \arrow[rr] & & \mathcal{H}(\,-\,) \end{tikzcd}$$

να καθίσταται μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$.

7.2.3.3. Έστω $X = \underleftarrow{Holim}\, X_i$ το ομοτοπικό όριο της ακολουθίας. Υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\mathcal{T}(X,-) \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T}(X_i,-) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{T}(X,-) \arrow[rr] & & \mathcal{H}(\,-\,) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$.

7.2.3.4. Για κάθε αντικείμενο $n \in \mathbb{Z}$, η εικόνα της απεικόνισης

$$\mathcal{T}(X_i,\Sigma^n\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{T}(X_{i+1},\Sigma^n\mathbb{BC})$$

απεικονίζεται ισομορφικά στην $\mathcal{H}(\Sigma^n\mathbb{BC})$ μέσω της απεικόνισης

$$\mathcal{T}(X_{i+1},\Sigma^n\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n\mathbb{BC})$$

, για κάθε $i \geq 0$.

Επιπλέον, από την συνθήκη 7.2.3.4, γνωρίζουμε ότι, για κάθε $i \geq 0$, και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η εικόνα της απεικόνισης $\mathcal{T}(X_i,\Sigma^n\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{T}(X_{i+1},\Sigma^n\mathbb{BC})$ είναι ισόμορφη με την εικόνα της απεικόνισης $\mathcal{T}(X_i,\Sigma^n\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n\mathbb{BC})$ η οποία είναι η $\mathcal{H}(\Sigma^n\mathbb{BC})$, επειδή είναι ένας επιμορφισμός, και ο πυρήνας της ταυτίζεται με τον πυρήνα $\mathcal{K}_i(\Sigma^n\mathbb{BC})$ της απεικόνισης $\mathcal{T}(X_i,\Sigma^n\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n\mathbb{BC})$. Δηλαδή, για κάθε $i \geq 0$, ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(X_i,-)\big|_T \to \mathcal{T}(X_{i+1},-)\big|_T\Big\} \quad &\simeq \quad \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(X_i,-)\big|_T \to \mathcal{H}(\,-\,)\big|_T\Big\} \quad = \quad \mathcal{H}(\,-\,)\big|_T \\ \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(X_i,-)\big|_T \to \mathcal{T}(X_{i+1},-)\big|_T\Big\} \quad &= \quad \mathcal{K}er\Big\{\mathcal{T}(X_i,-)\big|_T \to \mathcal{H}(\,-\,)\big|_T\Big\} \quad = \quad \mathcal{K}_i(\,-\,) \end{aligned}$$

, όπου $\mathcal{K}_i(\,-\,)$ είναι ο πυρήνας του περιορισμού στο σύνολο $T \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}(X_i,-) \longrightarrow \mathcal{T}(X_{i+1},-)$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η απεικόνιση $\mathcal{T}(X,\Sigma^n\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n\mathbb{BC})$ είναι ένας ισομορφισμός. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, αρκεί να δείξουμε ότι, για την περίπτωση όπου $n = 0$, η απεικόνιση $\mathcal{T}(X,\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{BC})$ είναι ένας ισομορφισμός. Η απόδειξη, για την περίπτωση όπου ο $n \in \mathbb{Z}$ είναι ένας οποιοσδήποτε μη μηδενικός ακέραιος, αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως θα διαπιστώσουμε στο τελευταίο τμήμα της απόδειξης.

Από την Πρόταση 7.5.1, για κάθε αντικείμενο $y \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(y,\mathbb{BC}) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\mathcal{T}(-,y)\big|_{\mathcal{S}},\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big]$$

, όπου $\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}} \simeq \mathcal{I}\big(\,-\,\big)$ είναι ο ενέσιμος συν$-$γεννήτορας της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ (Παρατήρηση 7.5.22). Σ' αυτό το σημείο θα επικαλεστούμε την Θεωρία που αναπτύξαμε στο Κεφαλαίο 6, για την περίπτωση του κανονικού πληθαρίθμου α, και της κατηγορίας $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$. Από το Λήμμα 4.2.5, η κατηγορία $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{\alpha}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη, αυτό σημαίνει ότι είναι κλειστή ως προς τα $\alpha-$συγκινόμενα. Έστω η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ όπως στον Ορισμό 6.1.2. Αυτό σημαίνει ότι, τα αντικείμενα της $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ είναι οι συναρτητές $\mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ οι οποίοι διατηρούν τα $\alpha-$γινόμενα, δηλαδή απεικονίζουν $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$.

Από το Λήμμα Yoneda η προηγούμενη ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$ αντιστοιχεί σε μια (μοναδική) ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}^{op},\mathcal{A}b\big)$, συνεπώς επάγονται οι φυσικές απεικονίσεις

$$\mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_i\big) \qquad \mathcal{T}\big(-,X_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_{i-1}\big)$$

Περιορίζοντας την προηγούμενη ακολουθία στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, προκύπτει μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, συνεπώς επάγονται οι φυσικές απεικονίσεις

$$\mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\ \theta i\ } \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}} \qquad \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\ \theta_{i-1}\ } \mathcal{T}\big(-,X_{i-1}\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

, όπου ο φυσικός μετασχηματισμός θ_i είναι ο περιορισμός στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_i\big)$, για κάθε $i \geq 0$. Οι συναρτητές $\mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}}$ ανήκουν στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, επειδή απεικονίζουν συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, συνεπώς απεικονίζουν $\alpha-$συγκινόμενα στην $\mathcal{S}$ σε $\alpha-$γινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Ο προηγούμενος ισομορφισμός είναι φυσικός στα αντικείμενα $y \in \mathcal{T}$, αυτό σημαίνει ότι, για κάθε απεικόνιση $X_{i+1} \longrightarrow X_i$ της προηγούμενης ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$ το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\big(X_i,\mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\overline{\theta}_i"'] & \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}},\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\Big] \arrow[d, "\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)[\theta_i,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})|_{\mathcal{S}}]"'] \\
\mathcal{T}\big(X_{i+1},\mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}},\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\Big]
\end{tikzcd}$$

καθίσταται μεταθετικό, όπου η απεικόνιση $\overline{\theta}_i$ είναι ο περιορισμός στο $\{\mathbb{BC}\} \subset T \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(X_i,-\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(X_{i+1},-\big)$, για κάθε $i \geq 0$.

Με άλλα λόγια, συμπεραίνουμε ότι η προηγούμενη ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ απεικονίζεται μέσω του συναρτητή $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\big[-,\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\big]$ σε μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{A}b$. Ειδικότερα οι προηγούμενες απεικονίσεις αντιστοιχούν με την αντίστροφη σειρά στις απεικονίσεις

$$\mathcal{T}\big(X_{i-1},\mathbb{BC}\big) \xrightarrow{\ \overline{\theta}_{i-1}\ } \mathcal{T}\big(X_i,\mathbb{BC}\big) \qquad \mathcal{T}\big(X_i,\mathbb{BC}\big) \xrightarrow{\ \overline{\theta}_i\ } \mathcal{T}\big(X_{i+1},\mathbb{BC}\big)$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i \geq 0$

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\big[\theta_i,\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\big] \quad \simeq \quad \overline{\theta}_i$$

Ο $\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, συνεπώς ο ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)\big[-,\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\big]$ είναι ακριβής, δηλαδή διατηρεί τις εικόνες και τους πυρήνες (διατηρεί την ομολογία). Ακριβέστερα, απεικονίζει συν$-$εικόνες στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ σε εικόνες στην $\mathcal{A}b$, και συν$-$πυρήνες στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$ σε πυρήνες στην $\mathcal{A}b$. Ειδικότερα, για κάθε απεικόνιση $\theta_i : \mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}}$ της προηγούμενης ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b\big)$, υφίστανται οι ισομορφισμοί

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\mathcal{C}oim(\theta_i),\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big] \;\simeq\; \mathcal{I}m\Bigg[\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\theta_i,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big]\Bigg]$$

$$\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\mathcal{C}oker(\theta_i),\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big] \;\simeq\; \mathcal{K}er\Bigg[\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\theta_i,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big]\Bigg]$$

Επιπλέον, υφίστανται οι ισομορφισμοί

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}m\Bigg[\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\theta_i,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big]\Bigg] \quad &\simeq \quad \mathcal{I}m(\overline{\theta}_i) \quad \simeq \quad \mathcal{H}(\mathbb{BC}) \\
\mathcal{K}er\Bigg[\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\Big[\theta_i,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big]\Bigg] \quad &\simeq \quad \mathcal{K}er(\overline{\theta}_i) \quad = \quad \mathcal{K}_i(\mathbb{BC})
\end{aligned}$$

, όπου ο ισομορφισμός των εικόνων και των πυρήνων, αντίστοιχα, επάγεται από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα, ενώ οι υπόλοιποι δύο ισομορφισμοί υφίστανται από τα δεδομένα. Για κάθε απεικόνιση $\theta_i : \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$ της προηγούμενης ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$, θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}oim(\theta_i) \xrightarrow{\ \tau_i\ } \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\ \rho_i\ } \mathcal{C}oker(\theta_i) \longrightarrow 0$$

και σχηματίζουμε το παρακάτω διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_{i+1}) \arrow[r, "\tau_{i+1}"] & \mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_{i+1}"] \arrow[d, "\theta_i"'] & \mathcal{C}oker(\theta_{i+1}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_i) \arrow[r, "\tau_i"] & \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\theta_{i-1}"'] & \mathcal{C}oker(\theta_i) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_{i-1}) \arrow[r, "\tau_{i-1}"] & \mathcal{T}(-,X_{i-1})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \mathcal{C}oker(\theta_{i-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\big[-,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\big]$ είναι ακριβής (διατηρεί την ομολογία), συνεπώς απεικονίζει το διάγραμμα αυτό, σ΄ ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{A}b$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er(\overline{\theta}_{i-1}) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i-1}"] & \mathcal{T}(X_{i-1},\mathbb{BC}) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i-1}"] \arrow[d, "\overline{\theta}_{i-1}"'] & \mathcal{I}m(\overline{\theta}_{i-1}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er(\overline{\theta}_i) \arrow[r, "\overline{\rho}_i"] & \mathcal{T}(X_i,\mathbb{BC}) \arrow[r, "\overline{\tau}_i"] \arrow[d, "\overline{\theta}_i"'] & \mathcal{I}m(\overline{\theta}_i) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er(\overline{\theta}_{i+1}) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i+1}"] & \mathcal{T}(X_{i+1},\mathbb{BC}) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i+1}"] & \mathcal{I}m(\overline{\theta}_{i+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\big[\tau_i,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\big] \quad &\simeq \quad \overline{\tau}_i \\
\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)\big[\rho_i,\mathcal{T}(-,\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\big] \quad &\simeq \quad \overline{\rho}_i
\end{aligned}$$

Η απεικόνιση $\overline{\tau}_i : \mathcal{T}\big(X_i, \mathbb{BC}\big) \longrightarrow \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_i\big)$ είναι η εικόνα της απεικόνισης $\overline{\theta}_i$, δηλαδή του περιορισμού στο $\{\mathbb{BC}\} \subset T \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(X_i, -\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(X_{i+1}, -\big)$, η οποία, από την συνθήκη 7.2.3.4, είναι ισόμορφη με την εικόνα του περιορισμού στο $\{\mathbb{BC}\} \subset T \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(X_i, -\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$, η οποία είναι η $\mathcal{H}\big(\mathbb{BC}\big)$, επειδή είναι ένας επιμορφισμός, για κάθε $i \geq 0$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να επιλέξουμε την απεικόνιση $\overline{\tau}_i : \mathcal{T}\big(X_i, \mathbb{BC}\big) \longrightarrow \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_i\big)$ να είναι ο περιορισμός στο $\{\mathbb{BC}\} \subset T \subset \mathcal{T}$ του φυσικού μετασχηματισμού $\mathcal{T}\big(X_i, -\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)$, της συνθήκης 7.2.3.2, για κάθε $i \geq 0$. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{A}b$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i-1}\big) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i-1}"] & \mathcal{T}\big(X_{i-1}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i-1}"] \arrow[d, "\overline{\theta}_{i-1}"'] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i-1}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i}\big) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i}"] & \mathcal{T}\big(X_{i}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i}"] \arrow[d, "\overline{\theta}_{i}"'] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i+1}\big) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i+1}"] & \mathcal{T}\big(X_{i+1}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i+1}"] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i+1}\big) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Για κάθε $i \geq 0$, η σύνθεση $\overline{\theta}_i \circ \overline{\rho}_i : \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(X_i, \mathbb{BC}\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(X_{i+1}, \mathbb{BC}\big)$ ισούται με την μηδενική απεικόνιση. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{A}b$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i-1}\big) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i-1}"] \arrow[d, dashed, "0"'] & \mathcal{T}\big(X_{i-1}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i-1}"] \arrow[d, "\overline{\theta}_{i-1}"'] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i-1}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed, "\overline{\chi}_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i}\big) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i}"] \arrow[d, dashed, "0"'] & \mathcal{T}\big(X_{i}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i}"] \arrow[d, "\overline{\theta}_{i}"'] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i}\big) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed, "\overline{\chi}_{i+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i+1}\big) \arrow[r, "\overline{\rho}_{i+1}"] & \mathcal{T}\big(X_{i+1}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\tau}_{i+1}"] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i+1}\big) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου η απεικόνιση $\mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_i\big) \longrightarrow \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i+1}\big)$, η οποία οφείλει να είναι η μηδενική, επάγεται από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα $\mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i+1}\big)$, ενώ η απεικόνιση $\overline{\chi}_{i+1} : \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_i\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(X_{i+1}, \mathbb{BC}\big)$, επάγεται από την καθολική ιδιότητα του συν$-$πυρήνα $\mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_i\big)$. Αυτό σημαίνει ότι, οι γραμμές του μεταθετικού διαγράμματος είναι διασπάσιμες ακριβείς ακολουθίες. Συνεπώς, για κάθε $i \geq 1$, υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\big(X_i, \mathbb{BC}\big) \quad &\simeq \quad \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_i\big) \oplus \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_i\big) \\
&\simeq \quad \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i-1}\big) \oplus \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_i\big)
\end{aligned}$$

, επειδή $\mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_i\big) \simeq \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i-1}\big)$, και επιπλέον το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i-2}\big) \oplus \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i-1}\big) \arrow[r, "1\oplus 0"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i-1}\big) \oplus \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i}\big) \arrow[r, "1\oplus 0"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_{i}\big) \oplus \mathcal{K}er\big(\overline{\theta}_{i+1}\big) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}\big(X_{i-1}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\theta}_{i-1}"] & \mathcal{T}\big(X_{i}, \mathbb{BC}\big) \arrow[r, "\overline{\theta}_{i}"] & \mathcal{T}\big(X_{i+1}, \mathbb{BC}\big)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, όπου

$$\begin{bmatrix}\overline{\chi}_i & \overline{\rho}_i\end{bmatrix} : \mathcal{I}m(\overline{\theta}_{i-1}) \oplus \mathcal{K}er(\overline{\theta}_i) \longrightarrow \mathcal{T}(X_i, \mathbb{BC})$$

είναι ο τύπος του αντίστοιχου ισομορφισμού, για κάθε $i \geq 1$.

Ο $\mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}$ είναι ένας συν−γεννήτορας της $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$, συνεπώς ο ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)\big[-, \mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\big]$ είναι πιστός. Επίσης, η κατηγορία $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι ισορροπημένη επειδή είναι αβελιανή, έπεται λοιπόν ότι είναι ένας συντηρητικός συναρτητής, επομένως ανταναλκά τους ισομορφισμούς, και άρα τους ταυτοτικούς μορφισμούς, και τα μεταθετικά διαγράμματα στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{A}b$ ανταναλκάται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_{i+1}) \arrow[r, "\tau_{i+1}"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{T}(-, X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_{i+1}"] \arrow[d, "\theta_i"'] & \mathcal{C}oker(\theta_{i+1}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_i) \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\theta_{i-1}"'] & \mathcal{C}oker(\theta_i) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_{i-1}) \arrow[r, "\tau_{i-1}"] & \mathcal{T}(-, X_{i-1})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \mathcal{C}oker(\theta_{i-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Για κάθε $i \geq 0$, η σύνθεση $\rho_i \circ \theta_i : \mathcal{T}(-, X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{C}oker(\theta_i)$ ισούται με την μηδενική απεικόνιση. Συνεπώς, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_{i+1}) \arrow[r, "\tau_{i+1}"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{T}(-, X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_{i+1}"] \arrow[d, "\theta_i"'] \arrow[dl, dashed, "\chi_{i+1}"'] & \mathcal{C}oker(\theta_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_i) \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\theta_{i-1}"'] \arrow[dl, dashed, "\chi_i"'] & \mathcal{C}oker(\theta_i) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}oim(\theta_{i-1}) \arrow[r, "\tau_{i-1}"] & \mathcal{T}(-, X_{i-1})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \mathcal{C}oker(\theta_{i-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου η απεικόνιση $\chi_{i+1} : \mathcal{T}(-, X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{C}oim(\theta_i)$, επάγεται από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα $\mathcal{C}oim(\theta_i)$, ενώ η απεικόνιση $\mathcal{C}oker(\theta_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{C}oker(\theta_i)$, η οποία οφείλει να είναι η μηδενική, επάγεται από την καθολική ιδιότητα του συν−πυρήνα $\mathcal{C}oker(\theta_{i+1})$. Αυτό σημαίνει ότι, οι γραμμές του μεταθετικού διαγράμματος είναι διασπάσιμες ακριβείς ακολουθίες. Συνεπώς, για κάθε $i \geq 1$, υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(-, X_i)\big|_{\mathcal{S}} &\simeq \mathcal{C}oim(\theta_i) \oplus \mathcal{C}oker(\theta_i) \\
&\simeq \mathcal{C}oim(\theta_{i-1}) \oplus \mathcal{C}oker(\theta_i) \\
&\simeq \mathcal{I}m(\theta_{i-1}) \oplus \mathcal{C}oker(\theta_i)
\end{aligned}$$

, επειδή $\mathcal{C}oim(\theta_i) \simeq \mathcal{C}oim(\theta_{i-1})$, και $\mathcal{C}oim(\theta_{i-1}) \simeq \mathcal{I}m(\theta_{i-1})$, όπου ο πρώτος ισομορφισμός υφίσταται από το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα, ενώ ο δεύτερος ισομορφισμός οφείλεται στο γεγονός ότι η $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$ είναι μια αβελιανή κατηγορία, και επιπλέον το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\quad\theta_i\quad} & \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\quad\theta_{i-1}\quad} & \mathcal{T}(-,X_{i-1})\big|_{\mathcal{S}} \\
\simeq\Big\downarrow & & \simeq\Big\downarrow & & \simeq\Big\downarrow \\
\mathcal{I}m(\theta_i)\oplus\mathcal{C}oker(\theta_{i+1}) & \xrightarrow{1\oplus 0} & \mathcal{I}m(\theta_{i-1})\oplus\mathcal{C}oker(\theta_i) & \xrightarrow{1\oplus 0} & \mathcal{I}m(\theta_{i-2})\oplus\mathcal{C}oker(\theta_{i-1})
\end{array}$$

είναι μεταθετικό, όπου

$$\begin{bmatrix}\chi_i\\ \rho_i\end{bmatrix} : \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{I}m(\theta_{i-1})\oplus\mathcal{C}oker(\theta_i)$$

είναι ο τύπος του αντίστοιχου ισομορφισμού, για κάθε $i \geq 1$.

Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι η ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$

$$\cdots \xrightarrow{\quad\theta_3\quad} \mathcal{T}(-,X_3)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\quad\theta_2\quad} \mathcal{T}(-,X_2)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\quad\theta_1\quad} \mathcal{T}(-,X_1)\big|_{\mathcal{S}}$$

είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα των ακολουθιών

$$\cdots \xrightarrow{\quad 1\quad} \mathcal{F}(-) \xrightarrow{\quad 1\quad} \mathcal{F}(-) \xrightarrow{\quad 1\quad} \mathcal{F}(-)$$

$$\cdots \xrightarrow{\quad 0\quad} \mathcal{Q}_3(-) \xrightarrow{\quad 0\quad} \mathcal{Q}_2(-) \xrightarrow{\quad 0\quad} \mathcal{Q}_1(-)$$

, δηλαδή υφίσταται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\theta_3} & \mathcal{T}(-,X_3)\big|_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\quad\theta_2\quad} & \mathcal{T}(-,X_2)\big|_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\quad\theta_1\quad} & \mathcal{T}(-,X_1)\big|_{\mathcal{S}} \\
 & & \simeq\Big\downarrow & & \simeq\Big\downarrow & & \simeq\Big\downarrow \\
\cdots & \xrightarrow{1\oplus 0} & \mathcal{F}(-)\oplus\mathcal{Q}_3(-) & \xrightarrow{1\oplus 0} & \mathcal{F}(-)\oplus\mathcal{Q}_2(-) & \xrightarrow{1\oplus 0} & \mathcal{F}(-)\oplus\mathcal{Q}_1(-)
\end{array}$$

, όπου για κάθε $i \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(-) &\simeq \mathcal{I}m(\theta_{i-1}) = \mathcal{I}m\Big\{\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_{i-1})\big|_{\mathcal{S}}\Big\} \\
\mathcal{Q}_i(-) &= \mathcal{C}oker(\theta_i) = \mathcal{C}oker\Big\{\mathcal{T}(-,X_{i+1})\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}\Big\}
\end{aligned}$$

Τότε επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\quad 1-shift\quad} & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} & \longrightarrow & 0 \\
\simeq\Big\downarrow & & \simeq\Big\downarrow & & \\
\prod_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{F}(-)\oplus\mathcal{Q}_i(-)\Big\} & \xrightarrow{1-shift} & \prod_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{F}(-)\oplus\mathcal{Q}_i(-)\Big\} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Οι παρακάτω βραχείες ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \xrightarrow{1-shift} \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i(\,-\,) \xrightarrow{1-shift} \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i(\,-\,) \longrightarrow 0$$

, όπου $\mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,)$ είναι η απεικόνιση που επάγεται στο γινόμενο $\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,)$ από την απεικόνιση $1 : \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,)$, για κάθε $i \geq 1$, είναι ακριβείς.

Έστω $p_i : \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ η κανονική προβολή από το γινόμενο στο $\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$, για κάθε $i \geq 1$. Η απεικόνιση $1 - shift : \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ έχει συνιστώσες τις απεικονίσεις $p_{i-1} - p_i : \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}$, για κάθε $i \geq 2$. Επομένως, από το Τέχνασμα του Eilenberg (Λήμμα 1.6.8.1), για την $\mathcal{T}^{op}$, οι απεικονίσεις $p_1 : \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{H}(-)\big|_{\mathcal{S}}$ και $1 - shift : \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$, εφοδιάζουν επίσης το αντικείμενο $\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}(\,-\,)\big|_{\mathcal{S}}$ με την δομή ενός γινομένου. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του γινομένου επάγεται ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} p_1 & 1-shift \end{smallmatrix}\right]} \mathcal{F}(\,-\,) \oplus \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,)$$

Τότε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix} p_1 & 1-shift \end{smallmatrix}\right]}"'] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \oplus \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου οι δύο κάτω απεικονίσεις είναι η πρώτη κανονική εμφύτευση, και η δεύτερη κανονική προβολή του (πεπερασμένου) γινομένου$-$συγκινομένου $\mathcal{F}(\,-\,) \oplus \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,)$, αντίστοιχα, είναι ένας ισομορφισμός ακολουθιών. Συνεπώς, η πρώτη ακολουθία είναι μια διασπάσιμη ακριβής ακολουθία. Επειδή $shift = 0$, έπεται ότι η απεικόνιση $1 - shift = 1$ είναι ένας ισομορφισμός. Επομένως, και η δεύτερη ακολουθία είναι μια ακριβής ακολουθία. Συνεπώς, προσθέτοντας αυτές τις δύο ακριβείς ακολουθίες, λαμβάνουμε μια ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \oplus \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i(\,-\,) \xrightarrow{1-shift} \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,) \oplus \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i(\,-\,) \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε τον παρακάτω ισομορφισμό ακολουθιών στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \prod_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{F}(\,-\,)\oplus\mathcal{Q}_i(\,-\,)\Big\} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod_{i=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{F}(\,-\,)\oplus\mathcal{Q}_i(\,-\,)\Big\} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,)\oplus\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i(\,-\,) \arrow[r, "1-shift"] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}(\,-\,)\oplus\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i(\,-\,) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, όπου $\mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι η εικόνα της θ_i, δηλαδή η εικόνα του περιορισμού στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ της απεικόνισης $\mathcal{T}(-,X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_i)$, για κάθε $i \geq 1$.Από το διάγραμμα αυτό, επειδή η κάτω ακολουθία είναι ακριβής, συμπεραίνουμε ότι η επάνω ακολουθία είναι ακριβής

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε την παρακάτω βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op},\mathcal{A}b)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \mathcal{F}(\,-\,) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}(-,X_0)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \prod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "1-shift"'] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "1-shift"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}(-,X_0)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

, όπου $\mathcal{T}(-,X_0)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \prod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$, και $\prod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$, είναι η πρώτη κανονική εμφύτευση, και η δεύτερη κανονική προβολή του (πεπερασμένου) γινομένου−συγκινομένου $\prod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}(-,X_0)\big|_{\mathcal{S}} \oplus \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$, αντίστοιχα. Επειδή η τρίτη, και η πρώτη ακολουθίες είναι ακριβείς, συμπεραίνουμε ότι και η μεσαία ακολουθία είναι επίσης ακριβής

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(\,-\,) \longrightarrow \prod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-shift} \prod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

, όπου $\mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_i)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι η εικόνα της θ_i, δηλαδή η εικόνα του περιορισμού στην $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ της απεικόνισης $\mathcal{T}(-,X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{T}(-,X_i)$, για κάθε $i \geq 0$.

Από το Λήμμα 4.2.5, η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$τοπικοποιήσιμη. Συνεπώς, από το Λήμμα 6.2.5, ο συναρτητής $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$, ο οποίος απεικονίζει το t στο $\mathcal{T}\big(-,t\big)\big|_{\mathcal{S}}$, διατηρεί τα γινόμενα, ειδικότερα διατηρεί τα $\aleph_1-$γινόμενα, αυτό σημαίνει ότι

$$\mathcal{T}\Bigg(-, \prod_{i=0}^{\infty} X_i\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \quad \simeq \quad \prod_{i=0}^{\infty} \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

Επομένως, επάγεται μια ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}\big(-\big) \longrightarrow \mathcal{T}\Bigg(-, \prod_{i=0}^{\infty} X_i\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{T}(-,1-shift)|_{\mathcal{S}}} \mathcal{T}\Bigg(-, \prod_{i=0}^{\infty} X_i\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

Από την Πρόταση 7.5.1, για το αντικείμενο $\prod_{i=0}^{\infty} X_i \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}\Bigg(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Bigg) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Bigg[\mathcal{T}\Bigg(-, \prod_{i=0}^{\infty} X_i\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{S}}, \mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\Bigg]$$

Ο $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[-,\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\big]$ είναι ένας ακριβής συναρτητής, αυτό σημαίνει ότι διατηρεί τις εικόνες (διατηρεί την ομολογία), και ο $\mathcal{F}\big(-\big)$ είναι εικόνα ενός φυσικού μετασχηματισμού, συγκεκριμένα ισχύει $\mathcal{F}\big(-\big) \simeq \mathcal{I}m\big(\theta_i\big) = \mathcal{I}m\big\{\mathcal{T}\big(-,X_{i+1}\big)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}\big(-,X_i\big)\big|_{\mathcal{S}}\big\}$, για κάθε $i \geq 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας επιλέγουμε το i να ισούται με το 0. Επομένως, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\mathcal{F}\big(-\big), \mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\Big] \;\simeq\; \mathcal{I}m\Bigg[\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\Big[\theta_0, \mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\Big]\Bigg] \;\simeq\; \mathcal{I}m\big(\overline{\theta}_0\big) \;\simeq\; \mathcal{H}\big(\mathbb{BC}\big)$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[-,\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\big]$ στην προηγούμενη ακριβή ακολουθία, επάγεται μια ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}\Bigg(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Bigg) \xrightarrow{\mathcal{T}(1-shift,\mathbb{BC})} \mathcal{T}\Bigg(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Bigg) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\mathbb{BC}\big) \longrightarrow 0$$

Το ομοτοπικό όριο $X = \underleftarrow{Holim}\ X_i$ της ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$, δίνεται εξ ορισμού, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, ως το αντικείμενο που συμπληρώνει τον μορφισμό $1 - shift : \prod_{i=0}^{\infty} X_i \longrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ σ΄ ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$

$$X \dashrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} X_i \xrightarrow{1-shift} \prod_{i=0}^{\infty} X_i \dashrightarrow \Sigma X$$

Επιπλέον, ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(-,\mathbb{BC}\big) : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ είναι συνομολογικός. Συνεπώς, απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο στην μακρά ακριβή ακολουθία

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{T}\Bigg(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Bigg) & \longrightarrow & \mathcal{T}\big(X,\mathbb{BC}\big) & \longrightarrow & \mathcal{T}\Bigg(\Sigma^{-1}\Bigg\{\prod_{i=0}^{\infty} X_i\Bigg\}, \mathbb{BC}\Bigg) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle \mathcal{T}(1-shift,\mathbb{BC})} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{T}(\Sigma^{-1}\{1-shift\},\mathbb{BC})} \\
\mathcal{T}\Bigg(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Bigg) & & & & \mathcal{T}\Bigg(\Sigma^{-1}\Bigg\{\prod_{i=0}^{\infty} X_i\Bigg\}, \mathbb{BC}\Bigg)
\end{array}$$

Η απεικόνιση

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\right) \xrightarrow{\mathcal{T}(1-shift, \mathbb{BC})} \mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\right)$$

είναι ένας μονομορφισμός. Επειδή ο συναρτητής $\Sigma^{-1} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι εξ ορισμού ένας προσθετικός αυτομορφισμός (Ορισμός 1.1.1), υφίσταται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Sigma^{-1}X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \Sigma^{-1}X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \Sigma^{-1}X_0 \arrow[d, "\simeq"'] \\
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι ένας ισομορφισμός ακολουθιών. Τότε επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=0}^{\infty}\{\Sigma^{-1}X_i\} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod_{i=0}^{\infty}\{\Sigma^{-1}X_i\} \arrow[d, "\simeq"'] \\
\prod_{i=0}^{\infty} X_i \arrow[r, "1-shift"] & \prod_{i=0}^{\infty} X_i
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον, από την Πρόταση 1.1.6.2, ο $\Sigma^{-1} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, συνεπώς επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\right) \arrow[r, "\mathcal{T}(1-shift, \mathbb{BC})"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\right) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty}\{\Sigma^{-1}X_i\}, \mathbb{BC}\right) \arrow[r, "\mathcal{T}(1-shift, \mathbb{BC})"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty}\{\Sigma^{-1}X_i\}, \mathbb{BC}\right) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}\left(\Sigma^{-1}\left\{\prod_{i=0}^{\infty} X_i\right\}, \mathbb{BC}\right) \arrow[r, "\mathcal{T}(\Sigma^{-1}\{1-shift\}, \mathbb{BC})"] & \mathcal{T}\left(\Sigma^{-1}\left\{\prod_{i=0}^{\infty} X_i\right\}, \mathbb{BC}\right)
\end{tikzcd}$$

Από το διάγραμμα αυτό, έπεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}\left(\Sigma^{-1}\left\{\prod_{i=0}^{\infty} X_i\right\}, \mathbb{BC}\right) \xrightarrow{\mathcal{T}(\Sigma^{-1}\{1-shift\}, \mathbb{BC})} \mathcal{T}\left(\Sigma^{-1}\left\{\prod_{i=0}^{\infty} X_i\right\}, \mathbb{BC}\right)$$

είναι επίσης ένας μονομορφισμός. Συνεπώς, από την ακρίβεια της προηγούμενης μακράς ακολουθίας συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\right) \longrightarrow \mathcal{T}(X, \mathbb{BC})$$

είναι ένας επιμορφισμός. Επομένως, λαμβάνουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}\Big(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Big) \xrightarrow{\mathcal{T}(1-shift,\mathbb{BC})} \mathcal{T}\Big(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Big) \longrightarrow \mathcal{T}(X, \mathbb{BC}) \longrightarrow 0$$

Τέλος, επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{T}\Big(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Big) \arrow[r, "\mathcal{T}(1-shift,\mathbb{BC})"] \arrow[d, "="'] & \mathcal{T}\Big(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Big) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{T}(X, \mathbb{BC}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}\Big(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Big) \arrow[r, "\mathcal{T}(1-shift,\mathbb{BC})"] & \mathcal{T}\Big(\prod_{i=0}^{\infty} X_i, \mathbb{BC}\Big) \arrow[r] & \mathcal{H}(\mathbb{BC}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές. Από το 5 Λήμμα συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}(X, \mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{BC})$$

, η οποία είναι ο περιορισμός στο $\{\mathbb{BC}\} \subset T \subset \mathcal{T}$ της απεικόνισης της συνθήκης 7.2.3.3, είναι ένας ισομορφισμός. Μένει να δείξουμε ότι, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, η απεικόνιση $\mathcal{T}(X, \Sigma^n\mathbb{BC}) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma^n\mathbb{BC})$ είναι ένας ισομορφισμός.

Για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε το αντικείμενο $\Sigma^n\mathbb{BC}$ στην $\mathcal{T}$. Τότε κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow \Sigma^n\mathbb{BC}$ στην $\mathcal{T}$ μηδενίζεται. Πράγματι, έστω $x \longrightarrow \Sigma^n\mathbb{BC}$ μια $\alpha-$phantom απεικόνιση στην $\mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, η απεικόνιση $\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-, \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}$ μηδενίζεται. Ισοδύναμα, η απεικόνιση $\mathcal{T}(-, x)\big|_{\mathcal{S}} \circ \Sigma^n(-) \longrightarrow \mathcal{T}(-, \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}} \circ \Sigma^n(-)$ μηδενίζεται, επειδή ο Σ^n είναι ένας αυτομορφισμός, και επιπλέον ισχύει $\Sigma^n\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Επειδή, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής Σ^n είναι ένας αριστερός (και δεξιός) συζυγής του Σ^{-n}, επάγεται το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(\Sigma^n(\,-\,), x)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{T}(\Sigma^n(\,-\,), \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}} \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{T}(-, \Sigma^{-n}x)\big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & \mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\mathcal{T}(-, \Sigma^{-n}x)\big|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}(-, \mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}$ επίσης μηδενίζεται. Από το Λήμμα 7.5.6 κάθε $\alpha-$phantom απεικόνιση $x \longrightarrow \mathbb{BC}$ στην $\mathcal{T}$ μηδενίζεται. Συνεπώς, η απεικόνιση $\Sigma^{-n}x \longrightarrow \mathbb{BC}$ μηδενίζεται. Τότε η αρχική απεικόνιση $\Sigma^n\Sigma^{-n}x = x \longrightarrow \Sigma^n\mathbb{BC}$ επίσης μηδενίζεται. Συνεπώς, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, από το Λήμμα 7.5.8 το αντικείμενο $\pi\Sigma^n\mathbb{BC}$, δηλαδή το αντικείμενο $\mathcal{T}(-, \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}$, είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)$. Τότε από την Πρόταση 7.5.1, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, και για κάθε αντικείμενο $y \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(y, \mathcal{G}\mathcal{T}(-, \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)\Big[\mathcal{T}(-, y)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{T}(-, \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big]$$

Αλλά από το Λήμμα 7.5.8 το αντικείμενο $\mathcal{G}\pi\Sigma^n\mathbb{BC}$, δηλαδή το αντικείμενο $\mathcal{G}\mathcal{T}(-, \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{T}$ είναι ισόμορφο με το $\Sigma^n\mathbb{BC}$. Συνεπώς, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, και για κάθε αντικείμενο $y \in \mathcal{T}$, ο φυσικός ισομορφισμός της Πρότασης 7.5.1, λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\mathcal{T}(y, \Sigma^n\mathbb{BC}) \quad \simeq \quad \mathcal{E}x(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b)\Big[\mathcal{T}(-, y)\big|_{\mathcal{S}}, \mathcal{T}(-, \Sigma^n\mathbb{BC})\big|_{\mathcal{S}}\Big]$$

Επιπλέον, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(-, \Sigma^n \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι ένας συν$-$γεννήτορας. Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε μη μηδενικό αντικείμενο $\mathcal{F} \in \mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση

$$\mathcal{F}\big(\,-\,\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, \Sigma^n \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

Πράγματι, το αντικείμενο $\mathcal{F} \circ \Sigma^n\big(\,-\,\big)$ είναι μη μηδενικό, επειδή ο Σ^n είναι ένας αυτομορφισμός, και επιπλέον ισχύει $\Sigma^n \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(-, \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι ένας ενέσιμος συν$-$γεννήτορας. Αυτό σημαίνει ότι, ο συναρτητής $\mathcal{E}x\big(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{A}b\big)\big[-, \mathcal{T}\big(-, \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}\big]$ είναι ακριβής και πιστός, ειδικότερα είναι πιστός. Συνεπώς, υπάρχει μια μη μηδενική απεικόνιση

$$\mathcal{F} \circ \Sigma^n\big(\,-\,\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

Ισοδύναμα, υπάρχει μια μηδενική απεικόνιση $\mathcal{F} \circ \Sigma^n \Sigma^{-n}\big(-\big) = \mathcal{F}\big(-\big) \longrightarrow \mathcal{T}\big(-, \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}} \circ \Sigma^{-n}\big(-\big)$, επειδή ο Σ^{-n} είναι ένας αυτομορφισμός, και επιπλέον ισχύει $\Sigma^{-n}\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής Σ^{-n} είναι ένας αριστερός (και δεξιός) συζυγής του Σ^n, επομένως επάγεται η παρακάτω απεικόνιση

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}\big(\Sigma^{-n}\big(\,-\,\big), \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathcal{T}\big(-, \Sigma^n \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}$$

η οποία προφανώς είναι μη μηδενική. Συνεπώς, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής $\mathcal{T}\big(-, \Sigma^n \mathbb{BC}\big)\big|_{\mathcal{S}}$ είναι ένας ενέσιμος συν$-$γεννήτορας.

Ακολουθώντας βήμα προς βήμα την απόδειξη ότι η απεικόνιση $\mathcal{T}\big(X, \mathbb{BC}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\mathbb{BC}\big)$ είναι ένας ισομορφισμός, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε μη μηδενικό ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, η απεικόνιση

$$\mathcal{T}\big(X, \Sigma^n \mathbb{BC}\big) \longrightarrow \mathcal{H}\big(\Sigma^n \mathbb{BC}\big)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{T}\big(X, -\big)\big|_{T} \longrightarrow \mathcal{H}\big(\,-\,\big)\big|_{T}$$

, η οποία είναι ο περιορισμός στο $T \subset \mathcal{T}$ της απεικόνισης της συνθήκης 7.2.3.3, είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, από το Λήμμα 7.3.1 (για την $\mathcal{T}^{op}$), σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.3.2 (για την $\mathcal{T}^{op}$), προκύπτει το ζητούμενο.

$\square$

Παρατήρηση 7.6.3. Από το Θεώρημα 7.6.2, διατηρώντας τον συμβολισμό των απεικονίσεων του δυϊκού του Λήμματος 7.2.3, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε ομολογικός συναρτητής $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή απεικονίζει γινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε γινόμενα στην $\mathcal{A}b$, δεν είναι μόνο φυσικά ισόμορφος με έναν αναπαραστάσιμο συναρτητή, είναι επιπλέον φυσικά ισόμορφος με το ευθύ όριο μιας ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at\big(\mathcal{T}, \mathcal{A}b\big)$.

Πράγματι, από το δυϊκό του Λήμματος 7.2.3, υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$\cdots \xrightarrow{\ j_3\ } X_2 \xrightarrow{\ j_2\ } X_1 \xrightarrow{\ j_1\ } X_0$$

η οποία ικανοποιεί τις δυϊκες των συνθήκων 7.2.3.1$-$7.2.3.4. Το ομοτοπικό όριο $\underleftarrow{Holim}\ X_i$ της ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$, δίνεται εξ ορισμού, ως προς μη κανονικό ισομορφισμό, ως το αντικείμενο που συμπληρώνει τον μορφισμό $1-shift : \prod_{i=0}^{\infty} X_i \longrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ σ′ ένα τρίγωνο

$$\underleftarrow{Holim}\ X_i \xrightarrow{\ \mu\ } \prod_{i=0}^{\infty} X_i \xrightarrow{\ 1-shift\ } \prod_{i=0}^{\infty} X_i \longrightarrow \Sigma\Big\{\underleftarrow{Holim}\ X_i\Big\}$$

στην $\mathcal{T}$. Η απεικόνιση μ μπορεί να ξαναγραφεί ως ένα γινόμενο, δηλαδή $\mu = \prod_{i=0}^{\infty} p_i \circ \mu$, όπου $p_i : \prod_{i=0}^{\infty} X_i \longrightarrow X_i$ είναι η κανονική προβολή από το γινόμενο στο X_i, για κάθε $i \geq 0$. Θέτουμε $\mu_i := \mathcal{T}\big(p_i \circ \mu, -\big)$, για κάθε $i \geq 0$.

Το Θεώρημα Αβελιανοποίησης του Verdier (Θεώρημα 5.1.16) είναι αυτοδυϊκό. Αυτό σημαίνει ότι, ο ανταλλοίωτος συναρτητής Yoneda $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$, ο οποίος απεικονίζει ένα αντικείμενο $t \in \mathcal{T}$ στον αναπαραστάσιμο συναρτητή $\mathcal{T}(t,-)$ είναι ένας καθολικός ομολογικός συναρτητής. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, από την Πρόταση 7.4.2 ικανοποιεί το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας. Συνεπώς, από την Πρόταση 7.4.14, η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*] , ειδικότερα ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*($\aleph_1$)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$γινόμενα. Ισοδύναμα η $\mathcal{T}^{op}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5($\aleph_1$)], αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}^{op}$ είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$συγκινόμενα. Συνεπώς, από το δυϊκό του Λήμματος 5.1.21.1, έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$ ικανοποιεί το αξίωμα [AB3($\aleph_1$)] , αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$ είναι κλειστή ως προς τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, και ότι ο $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$, διατηρεί τα $\aleph_1-$συγκινόμενα, δηλαδή απεικονίζει $\aleph_1-$γινόμενα στην $\mathcal{T}$ σε $\aleph_1-$συγκινόμενα στην $\mathcal{A}b$. Συνεπώς, για την αριθμήσιμη (πληθικότητας $< \aleph_1$) οικογένεια $\{X_i, i \geq 0\}$ των αντικειμένων της προηγούμενης ακολουθίας αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$, η φυσική απεικόνιση

$$\coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(X_i,-) \longrightarrow \mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty}X_i,-\right)$$

είναι ένας ισομορφισμός. Επειδή, ο $\mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}^{op})$ είναι ένας ομολογικός συναρτητής, απεικονίζει το προηγούμενο τρίγωνο σε μια μακρά ακριβή ακολουθία. Ακριβώς, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.6.2, συμπεραίνουμε ότι η παρακάτω βραχεία ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty}X_i,-\right) \xrightarrow{\mathcal{T}(1-shift,-)} \mathcal{T}\left(\prod_{i=0}^{\infty}X_i,-\right) \xrightarrow{\mathcal{T}(\mu,-)} \mathcal{T}\big(\underleftarrow{Holim}\ X_i,-\big) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Συνεπώς, κάνοντας χρήση του προηγούμενου ισομορφισμού, επάγεται η παρακάτω βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(X_i,-) \xrightarrow{1-shift} \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(X_i,-) \xrightarrow{\coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i} \mathcal{T}\big(\underleftarrow{Holim}\ X_i,-\big) \longrightarrow 0$$

Ο μορφισμός $shift : \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(X_i,-) \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(X_i,-)$ είναι ο (μοναδικός) μορφισμός που επάγεται στο πρώτο συγκινόμενο από τους μορφισμούς $u_{i+1} \circ j_{i+1} : \mathcal{T}(X_i,-) \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(X_i,-)$. Αυτό σημαίνει ότι, ισχύει $shift \circ u_i = u_{i+1} \circ j_{i+1}$, όπου $u_i : \mathcal{T}(X_i,-) \longrightarrow \coprod_{i=0}^{\infty}\mathcal{T}(X_i,-)$ είναι η κανονική εμφύτευση του $\mathcal{T}(X_i,-)$ στο συγκινόμενο, και $j_{i+1} \equiv \mathcal{T}(j_{i+1},-)$, όπου $\mathcal{T}(j_{i+1},-)$: $\mathcal{T}(X_i,-) \longrightarrow \mathcal{T}(X_{i+1},-)$, μέσω του ανταλλοίωτου συναρτητή Yoneda , προκειμένου να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, για κάθε $i \geq 0$. Από την προηγούμενη ακριβή ακολουθία, έπεται $\coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ (1-shift) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, $\big(\coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ (1-shift)\big) \circ u_i = 0$, για κάθε $i \geq 0$. Αλλά,

$$\begin{aligned}
\left(\coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ (1-shift)\right) \circ u_i &= \coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ u_i - \coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ (shift \circ u_i)\\
&= \mu_i - \coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ (u_{i+1} \circ j_{i+1})\\
&= \mu_i - \left(\coprod_{i=0}^{\infty}\mu_i \circ u_{i+1}\right) \circ j_{i+1}\\
&= \mu_i - \mu_{i+1} \circ j_{i+1}
\end{aligned}$$

Επομένως, $\mu_i - \mu_{i+1} \circ j_{i+1} = 0$. Συνεπώς, το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathcal{C}at(\mathcal{T}, \mathcal{A}b)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}(X_i,-) \arrow[dl, "j_{i+1}"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
\mathcal{T}(X_{i+1},-) \arrow[rr, "\mu_{i+1}"] & & \mathcal{T}\big(\underleftarrow{Holim}\ X_i,-\big)
\end{tikzcd}$$

καθίσταται μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$. Τοποθετώντας τα προηγούμενα διαγράμματα μαζί με τα διαγράμματα των δυϊκών των συνθηκών 7.2.3.2 και 7.2.3.3, σ' ένα ενιαίο διάγραμμα, λαμβάνουμε το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathcal{C}at(\mathcal{T}, \mathcal{A}b)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}(X_i, -) \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[d, "j_{i+1}"] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\
 & \mathcal{T}(X_{i+1}, -) \arrow[dl, "\mu_{i+1}"] \arrow[dr, "\phi_{i+1}"'] & \\
\mathcal{T}\Big(\underleftarrow{Holim}\ X_i, -\Big) \arrow[rr, "\phi"] & & \mathcal{H}(\ -\ )
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό, για κάθε $i \geq 0$, και η απεικόνιση $\phi : \mathcal{T}(\underleftarrow{Holim}\ X_i, -) \longrightarrow \mathcal{H}(\ -\ )$ της δυϊκής της συνθήκης 7.2.3.3, από το Θεώρημα 7.6.2, είναι ένας ισομορφισμός.

Με άλλα λόγια, οι απεικονίσεις $\mu_i : \mathcal{T}(X_i, -) \longrightarrow \mathcal{T}(\underleftarrow{Holim}\ X_i, -)$ εφοδιάζουν το αντικείμενο $\mathcal{T}(\underleftarrow{Holim}\ X_i, -)$ με την δομή ενός ευθέως ορίου στην $\mathcal{C}at(\mathcal{T}, \mathcal{A}b)$. Αυτό που ισχυρίζεται επι της ουσίας το Θεώρημα 7.6.2 είναι ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε επαγωγικά ένα ευθύ σύστημα αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{T}, \mathcal{A}b)$, αυτό που αποτελείται από τις απεικονίσεις $\phi_i : \mathcal{T}(X_i, -) \longrightarrow \mathcal{H}(\ -\ )$, έτσι ώστε η απεικόνιση $\phi : \mathcal{T}(\underleftarrow{Holim}\ X_i, -) \longrightarrow \mathcal{H}(\ -\ )$ η οποία στην πραγματικότητα, είναι η (μοναδική) απεικόνιση η οποία επάγεται από την επάγεται από την καθολική συνθήκη του ευθέως ορίου, να είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, για κάθε ομολογικό συναρτητή $\mathcal{H} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$, ο οποίος διατηρεί τα γινόμενα, υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$\cdots \xrightarrow{\ j_3\ } X_2 \xrightarrow{\ j_2\ } X_1 \xrightarrow{\ j_1\ } X_0$$

, έτσι ώστε

$$\mathcal{T}\Big(\underleftarrow{Holim}\ X_i, -\Big) \ \simeq\ \mathcal{H}(\ -\ )$$

Αυτή η ακολουθία από το δυϊκό Λήμμα Yoneda αντιστοιχεί σε μια (μοναδική) ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}at(\mathcal{T}, \mathcal{A}b)$

$$\mathcal{T}(X_0, -) \xrightarrow{\ j_1\ } \mathcal{T}(X_1, -) \xrightarrow{\ j_2\ } \mathcal{T}(X_2, -) \xrightarrow{\ j_3\ } \cdots$$

Επιπλέον,

$$\underrightarrow{colim}\ \mathcal{T}(X_i, -) \ \simeq\ \mathcal{T}\Big(\underleftarrow{Holim}\ X_i, -\Big)$$

7.7 Συνέπειες της δυϊκής Αναπαραστασιμότητας Brown

Παρατήρηση 7.7.1. Υπενθυμίζουμε ότι από την Παρατήρηση 6.3.7, υφίσταται η συνεπαγωγή

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^\alpha\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big) \\ \text{έχει αρκετά} \\ \text{ενέσιμα} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}x\Big(\big\{\mathcal{T}^\alpha\big\}^{op}, \mathcal{A}b\Big) \\ \text{έχει ενέσιμο} \\ \text{συν}-\text{γεννήτορα} \end{array} \right\}$$

Συνεπώς, εάν $\mathcal{T}$ μια $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία, και η $\mathcal{E}x(\{\mathcal{T}^\alpha\}^{op}, \mathcal{A}b)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, τότε ισχύει το Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας για την $\mathcal{T}^{op}$.

Μια σημαντική συνέπεια της δυϊκής Αναπαραστασιμότητας Brown , είναι το δυϊκό Θεώρημα, του Θεωρήματος Συζυγών Συναρτητών (Θεώρημα 7.4.10), υπό την έννοια της ύπαρξης αρκετών ενέσιμων αντικειμένων στην $\mathcal{E}x(\{\mathcal{T}^\alpha\}^{op}, \mathcal{A}b)$. Υπενθυμίζουμε ότι, από το Λήμμα 5.3.4 ένας αριστερός συζυγής $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ ενός τριγωνισμένου συναρτητή $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένος.

Θεώρημα 7.7.2. *Έστω $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά Hom−σύνολα. Υποθέτουμε ότι*

7.7.2.1. *Η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το δυϊκό Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας, αυτό συμβαίνει, παραδείγματος χάριν, όταν η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη, όπου α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, και η* *κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\{\mathcal{T}^\alpha\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ αρκετά ενέσιμα αντικείμενα.*

7.7.2.2. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι ένας τριγωνισμένος συναρτητής.*

7.7.2.3. *Ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ διατηρεί τα γινόμενα. Υπενθυμίζουμε ότι δεν υποθέτουμε ότι υπάρχουν γινόμενα στην $\mathcal{T}$, μόνο ότι οι εικόνες των γινομένων στην $\mathcal{S}$ είναι γινόμενα στην $\mathcal{T}$. Δηλαδή, έστω $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{S}$. Γνωρίζουμε ότι το δυϊκό Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας ισχύει για την $\mathcal{S}$, και συγκεκριμένα από την συνθήκη 7.6.1.1 η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το αξίωμα [TR5*]. Το γινόμενο αυτών των αντικειμένων, $\prod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$, υπάρχει στην $\mathcal{S}$. Αλλά τότε, στην $\mathcal{T}$ υπάρχουν απεικονίσεις*

$$\mathcal{F}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\right) \longrightarrow \mathcal{F}(s_\lambda)$$

, οι οποίες είναι οι εικόνες των φυσικών προβολών $\prod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda \longrightarrow s_\lambda$ στην $\mathcal{S}$ μέσω του $\mathcal{F}$. Το να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{F}$ διατηρεί τα γινόμενα, ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε ότι αυτές οι απεικονίσεις εφοδιάζουν το αντικείμενο $\mathcal{F}\big(\prod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda\big)$ με την δομή ενός γινομένου στην $\mathcal{T}$, των αντικειμένων του συνόλου $\big\{\mathcal{F}(s_\lambda), \lambda \in \Lambda\big\}$. Ισχυριζόμαστε ότι ως προς τις παραπάνω υποθέσεις, ο $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν αριστερό συζυγή $\mathcal{G} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει, ότι για κάθε $s \in \mathcal{S}$ και για κάθε $t \in \mathcal{T}$, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\mathcal{T}(t, \mathcal{F}s) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G}t, s)$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα $s \in \mathcal{S}$ και $t \in \mathcal{T}$.

Παρατήρηση 7.7.3. Από την Παρατήρηση 6.3.5, εάν $\alpha = \aleph_0$, τότε η $\mathcal{E}x\big(\{\mathcal{T}^{\aleph_0}\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ είναι μια Grothendieck αβελιανή κατηγορία, και συνεπώς έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Συνεπώς, το Θεώρημα Συζυγών Συναρτητών (Θεώρημα 7.4.10) είναι αυτοδυϊκο για την περίπτωση της κλάσης των $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγοριών !

Παρατήρηση 7.7.4. Από την Πρόταση 5.3.7.2, γνωρίζουμε ότι εάν $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένες κατηγορίες με μικρά $Hom-$σύνολα, κλειστές ως προς την διάσπαση ταυτοδύναμων μορφισμών, τότε το πρόβλημα της ύπαρξης αριστερού συζυγή συναρτητή ανάγεται με αμφιμονοσήμαντο τρόπο στο πρόβλημα της ύπαρξης αριστερού συζυγή συναρτητή μεταξύ των αβελιανοποιήσεων $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ και $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ των $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν αριστερό συζυγή εάν και μόνο εάν ο ακριβής συναρτητής $\mathcal{A}(\mathcal{F}) : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T})$ έχει έναν αριστερό συζυγή. Από την Παρατήρηση 5.3.8, γνωρίζουμε ότι τα Θεωρήματα ύπαρξης συζυγών συναρτητών μεταξύ αβελιανών κατηγοριών εξαρτώνται από το γεγονός, οι κατηγορίες να είναι well−powered (αυτό σημαίνει ότι η κλάση των κλάσεων ισομορφισμού των υποαντικειμένων, ή ισοδύναμα των αντικειμένων πηλίκο ενός αντικειμένου της, είναι ένα σύνολο), και ότι για σχεδόν όλες τις μη τετριμμένες μεγάλες τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{S}$ (αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις των αντικειμένων τους δεν είναι μικρές, δηλαδή σύνολα), η αβελιανοποίηση $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ δεν είναι ποτέ well−powered , συνεπώς γνωρίζουμε ότι η Πρόταση 5.3.7.2 δεν έχει πρακτική αξία παρά μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον. Αντιθέτως, το Θεώρημα 7.7.2 είναι πολύ πρακτικό. Εάν η $\mathcal{S}$ ικανοποιεί το δυϊκό Θεώρημα Αναπαραστασιμότητας (π.χ. όταν η $\mathcal{S}$ είναι $\aleph_0-$συμπαγώς παραγόμενη, ή όταν η $\mathcal{S}$ είναι $\alpha-$συμπαγώς παραγόμενη, όπου α είναι ένας κανονικός πληθάριθμος, και η κατηγορία $\mathcal{E}x\big(\{\mathcal{T}^\alpha\}^{op}, \mathcal{A}b\big)$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα), τότε ένας τριγωνισμένος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ έχει έναν αριστερό συζυγή εάν και μόνο εάν διατηρεί τα γινόμενα.

Βιβλιογραφία

[BCN11] : Paul Balmer (org.), Dan Christensen (org.), Amnon Neeman (org.), Triangulated categories and applications, Banff International Research Station Conference, June 12-17-2011.

[Bro62] : E. H. Brown, Cohomology theories, Annals of Math. 75 (1962), 467–484.

[De16] : Ivo Dell'Ambrogio, Triangulated categories and applications (Habilitation memoir), University of Lille 1 (2016).

[DP61] : Albrecht Dold, Dieter Puppe, Homologie nicht–additiver Funktoren. Anwendungen, Ann. Inst. Fourier, tome 11 (1961), 201–312 (in German)

[Fre66] : Peter Freyd, Abelian categories, Harper, Heidelberg, 1966.

[HJR10] : Thorsten Holm, Peter Jørgensen, and Raphaël Rouquier, Triangulated categories, London Mathematical Society Lecture Notes Series, No. 375, Cambridge University Press (2010), 1-51.

[KS06] : Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, Categories and Sheaves, Springer (2006).

[Mur06] : Daniel Murfet, Triangulated Categories Part II, Part III, lecture notes, 2006.

[Mur07] : Daniel Murfet, Triangulated Categories Part I, lecture notes, 2007.

[Nee91] : Amnon Neeman, Some new axioms for triangulated categories, J. Algebra 139 (1991), 221–255.

[Nee92] : Amnon Neeman, The connection between the K–theory localisation theorem of Thomason, Trobaugh and Yao, and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel, Ann. Sci. École Normale Supérieure 25 (1992), 547–566.

[Nee93] : Amnon Neeman, Marcel Bökstedt, Homotopy limits in triangulated categories, Compositio Mathematica, Volume 86 (1993) no. 2, 209-234.

[Nee96] : Amnon Neeman, The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability, Jour. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 205–236.

[Nee98] : Amnon Neeman, Non-compactly generated categories, Topology 37 (1998), no. 5, 981–987.

[Nee01a] : Amnon Neeman, On the derived category of sheaves on a manifold, Doc. Math. 6 (2001), 483–488.

[Nee01b] : Amnon Neeman, Triangulated Categories, Annals of Mathematics Studies, vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[Nee02] : A. Neeman. A counterexample to a 1961 "theorem" in homological algebra. Invent. Math. (2) 148 (2002), 397–420.

[Nee05] : Amnon Neeman, 'A survey of well generated triangulated categories', Ragnar-Olaf Buchweitz and Helmut Lenzig (ed.), Representations of algebras and related topics, American Mathematical Society (2005), 307-330.

[Nee06] : Amnon Neeman, A non-commutative generalisation of Thomason's localisation theorem, Andrew Ranicki (ed.), Noncommutative localization in algebra and topology, ICMS Edinburgh (2006), 60-80.

[Nee08] : Amnon Neeman, The homotopy category of flat modules, and Grothendieck duality, Inventiones mathematicae Volume 174 (2008), 255–308.

[TT90] : Robert W. Thomason and Thomas F. Trobaugh, Higher algebraic K–theory of schemes and of derived categories, The Grothendieck Festschrift (a collection of papers to honor Grothendieck's 60'th birthday), vol. 3, Birkhäuser (1990), 247–435.

[Sos12] : Pawel Sosna, Triangulated categories, lecture notes (summer semester 2012).

[Ver96] : J.-L. Verdier, Des catégories dérivées des catégories abéliennes, Astérisque, 239, 1996. Verdier's PhD thesis, defended on 14-06-1967.