ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Η Αρχή της Συμβατής Περάτωσης του Απείρου

Αγγελική Πισιμίση

Α.Μ. Δ201520

Επιβλέπων Καθηγητής

Στυλιανός Νεγρεπόντης

Αθήνα, Ιούνιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε 25/06/2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Στυλιανός Νεγρεπόντης (Επιβλέπων)	Ομότιμος Καθηγητής
• Βασιλική Φαρμάκη	Καθηγήτρια
• Μιχαήλ Ανούσης	Καθηγητής

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης που απονέμει το Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών". Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Ομότιμος Καθηγητής του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών, κ. Στυλιανός Νεγρεπόντης, στον οποίο οφείλω ένα τεράστιο ευχαριστώ, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε να εργαστώ πάνω σε ένα τόσο ιδιαίτερο και ενδιαφέρον θέμα, για τη γενναιοδωρία του, για την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια κ. Βασιλική Φαρμάκη και τον Καθηγητή κ. Μιχαήλ Ανούση, μέλη της τριμελούς εξεταστικής μου επιτροπής για τις εξαιρετικά εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές και τις καθηγήτριες, τους συμφοιτητές και τις συμφοιτήτριες με τους οποίους συνεργάστηκα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, το διοικητικό προσωπικό, τους φίλους μου, τους συναδέλφους μου και τους μαθητές μου για τη βοήθειά τους.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στα παιδιά μου Φίλιππο και Οδυσσέα, στον σύζυγό μου Αλέξανδρο και στους γονείς μου, καθώς όλοι τους, με απίστευτη υπομονή και εμπιστοσύνη πάντα με στηρίζουν σε όποια καινούρια "περιπέτεια" και αν οδηγήσω την οικογένειά μας...

Για κάθε λάθος που ενδεχομένως εντοπιστεί στο κείμενο υπεύθυνη είναι αποκλειστικά η συγγραφέας της διπλωματικής εργασίας.

Αγγελική Πισιμίση

Αθήνα, 2020

Στα αγόρια μου...

Αντί Προλόγου

Πρόσθεσις

Αν ευτυχής ή δυστυχής είμαι δεν εξετάζω.

Πλην ένα πράγμα με χαράν στον νου μου πάντα βάζω —

που στην μεγάλη πρόσθεσι (την πρόσθεσί των που μισώ)

που έχει τόσους αριθμούς, δεν είμ' εγώ εκεί απ' τες πολλές μονάδες μια.

Μες στ' ολικό ποσό δεν αριθμήθηκα. Κι αυτή η χαρά μ' αρκεί.

Κ. Π. Καβάφης – [1897]

[*Κρυμμένα Ποιήματα 1882–1923]*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ **Σελ. 1 – 2**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο **Σελ. 3 - 20**

1.1 Η Αρχή της συμβατής περάτωσης του Απείρου Σελ. 4

1.2 Περίπτωση συμβατής περάτωσης του Απείρου Σελ. 10

1.2.1 Ανθυφαίρεση – Ευκλείδειος Αλγόριθμος Σελ. 12

1.2.2 Η απόδειξη της ασυμμετρίας πλευράς – διαμέτρου Σελ. 14

1.3 Περίπτωση μη συμβατής περάτωσης του Απείρου Σελ. 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο **Σελ. 21 -72**

2.1 Η Αρχή του Ελαχίστου Vs η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής Σελ. 21

2.2 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής του Ελαχίστου στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη Σελ. 24

2.2.1 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης αριθμών - Προτάσεις 7.1 – 7.2 – 7.3 Σελ. 24

2.2.2 Αναλογία αριθμών – Ορισμός ισοδύναμων κλασμάτων Σελ. 29

2.2.3 Περιγραφή της κλάσης ισοδυναμίας κλασμάτων ως συνέπεια της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21 Σελ. 42

2.2.4 Απόδειξη αρρητότητος του $\sqrt{N}$, όπου N όχι τετράγωνος αριθμός Σελ. 44

2.2.5 Ανάλυση κάθε φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών Σελ. 46

2.2.6 Η απειρία των πρώτων αριθμών Σελ. 49

2.2.7 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής του Ελαχίστου & της Αρχής της Μαθηματικής επαγωγής συνολικά Σελ. 51

2.3 Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ως συμβατή περάτωση του Απείρου Σελ. 52

2.4 Η Θεωρία Αριθμών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου Σελ. 55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο **Σελ. 73 - 146**

3.1 Η δομή της βασικής Ευκλείδειας γεωμετρίας στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη Σελ. 73

3.1.1 Όροι 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη Σελ. 74

3.1.2 Αιτήματα 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη Σελ. 78

3.2 Η αποδεικτική ισχύς του 5ου Αιτήματος στα *Στοιχεία του* Ευκλείδη Σελ. 81

3.2.1 Οι Προτάσεις 1.1 - 1.26 (χωρίς τη χρήση του 5ου Αιτήματος), η Πρόταση 1.16 και η πρώτη άμεση εφαρμογή του 2ου Αιτήματος Σελ. 82

3.2.2 Οι Προτάσεις 1.27 και 1.28 και η προετοιμασία για τη χρήση του 5ου Αιτήματος Σελ. 98

3.2.3 Η Πρόταση 1.29 και η πρώτη άμεση χρήση του 5ου Αιτήματος Σελ. 99

3.2.4 Οι Προτάσεις 1.32 και 1.34 Σελ. 101

3.2.5 Οι "παράδοξες" Προτάσεις 1.35, 1.36 (παραλληλόγραμμα), 1.37, 1.38 (τρίγωνα) Σελ. 105

3.2.6 Οι Προτάσεις 1.39, 1.40 Σελ. 111

3.2.7 Οι Προτάσεις 1.41 έως και 1.46 Σελ. 112

3.2.8 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα – Πρόταση 1.47 και η αρχική του θέση Σελ. 115

3.2.9 Το 2ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη – Η Θεωρία των Γνωμόνων Σελ. 119

3.2.9.1 Οι Στοιχειώδεις Προτάσεις 2.1, 2.2, 2.3 Σελ. 120

3.2.9.2 Η Θεωρία των Γνωμόνων - Προτάσεις 2.4 έως και 2.8 Σελ. 120

3.2.9.3 Η μέθοδος παραβολής χωρίων – Η Γεωμετρική Άλγεβρα Σελ. 124

3.2.9.4 Συνέπειες της Πυθαγόρειας μορφής παραβολής χωρίου καθ' υπερβολή Σελ. 126

3.2.9.5 Συνέπειες της Πυθαγόρειας μορφής παραβολής χωρίου κατ΄έλλειψη Σελ. 128

3.2.10 Η αποδεικτική ισχύς του 5ου Αιτήματος συνολικά Σελ. 131

3.3 Το 5ο Αίτημα ως συμβατή περάτωση του Απείρου Σελ. 132

3.4 Η βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου Σελ. 134

3.4.1 Η αξιωματική μέθοδος και η εφαρμογή της στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη Σελ. 134

3.4.2 Η παιδευτική αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η υποβάθμιση της διδασκαλίας της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση Σελ. 139

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο **Σελ. 147 - 210**

4.1 Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη Σελ. 147

4.2 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη Σελ. 151

4.2.1 Οι τετριμμένες Προτάσεις 5.1, 5.5, 5.2, 5.3, 5.6, χωρίς τη χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη Σελ. 151

4.2.2 Οι στοιχειώδεις Προτάσεις 5.4, 5.15, 5.7, 5.10, 5.11, 5.13, 5.12, 5.17, 5.18, χωρίς τη χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη Σελ. 153

4.2.3 Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις 5.8, 5.9, 5.14, 5.16, 5.19, 5.25, 5.20, 5.22, 5.21, 5.23 με τη χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη Σελ. 156

4.2.4 Βασικές Προτάσεις του 6ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη Σελ. 163

4.2.5 Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου Vs Θεωρία πραγματικών αριθμών του Dedekind Σελ. 166

4.2.6 Οι εφαρμογές της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου Σελ. 171

4.2.6.1 Η μέθοδος της εξάντλησης Σελ. 171

4.2.6.2 Το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη Σελ. 181

4.2.6.3 Το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου Σελ. 184

4.2.7 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη συνολικά Σελ. 188

4.3 Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη ως συμβατή περάτωση του Απείρου Σελ. 189

4. 4 Η Θεωρία Λόγων Μεγεθών και οι εφαρμογές της στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου Σελ. 193

4.4.1 Η Θεωρία Λόγων Μεγεθών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου Σελ. 193

4.4.2 Η μέθοδος της εξάντλησης στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου Σελ. 198

4.4.3 Η τριγωνομετρία στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου Σελ. 200

4.4.3.1 Τα Θεωρήματα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη και των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου Σελ. 200

4.4.3.2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις Σελ. 206

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο **Σελ. 211 - 312**

5.1 Το Αξίωμα της Πληρότητας στους πραγματικούς αριθμούς Σελ. 211

5.1.1 Από τους πραγματικούς στους φυσικούς αριθμούς Σελ. 212

5.1.2 Από τους φυσικούς στους πραγματικούς αριθμούς Σελ. 217

5.2 Η αποδεικτική ισχύς του Αξιώματος της Πληρότητας στους πραγματικούς αριθμούς & στη Μαθηματική Ανάλυση Σελ. 225

5.2.1 Βασικές συνέπειες του Αξιώματος Πληρότητας Σελ. 225

5.2.2 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις Ακολουθίες Σελ. 231

5.2.3 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις συνεχείς Συναρτήσεις Σελ. 240

5.2.4 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Ολοκληρωτικό Λογισμό Σελ. 258

5.2.5 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Διαφορικό Λογισμό Σελ. 267

5.2.6 Σχέση Διαφόρισης και Ολοκλήρωσης Σελ. 280

5.3 Το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών ως συμβατή περάτωση του Απείρου Σελ. 283

5.4 Το Αξίωμα της Πληρότητας στα σχολικά βιβλία Σελ. 291

5.4.1 Οι πραγματικοί αριθμοί Σελ. 291

5.4.1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί στο Γυμνάσιο Σελ. 291

5.4.1.2 Οι πραγματικοί αριθμοί στο Λύκειο Σελ. 294

5.4.2 Η Μαθηματική Ανάλυση στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου Σελ. 295

5.4.2.1 Βασικές συνέπειες του Αξιώματος Πληρότητας Σελ. 296

5.4.2.2 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις Ακολουθίες Σελ. 296

5.4.2.3 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις συνεχείς Συναρτήσεις Σελ. 298

5.4.2.4 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Ολοκληρωτικό Λογισμό Σελ. 302

5.4.2.5 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Διαφορικό Λογισμό Σελ. 304

5.4.2.6 Σχέση Διαφόρισης και Ολοκλήρωσης Σελ. 308

ΣΥΝΟΨΗ **Σελ. 313 - 338**

6.1 Συμπεράσματα από τη μελέτη της Αρχής του Ελαχίστου στη Θεωρία Αριθμών Σελ. 317

6.2 Συμπεράσματα από τη μελέτη του 5ου Αιτήματος στη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία Σελ. 318

6.3 Συμπεράσματα από τη μελέτη της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών Σελ. 320

6.4 Συμπεράσματα από τη μελέτη του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών στη Μαθηματική Ανάλυση Σελ. 323

6.5 Προτάσεις εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων και αναδιαμόρφωσης των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών Σελ. 326

6.5.1 Η μαθηματική απόδειξη Σελ. 326

6.5.2 Η κατανόηση των πραγματικών αριθμών και η μετάβαση στη Μαθηματική Ανάλυση Σελ. 327

6.5.3 Η κατανόηση του ρόλου της Περάτωσης του Απείρου και η ανάδειξη του κάλλους των μαθηματικών Σελ. 333

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως κεντρικό θέμα την Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου, όπως παρουσιάζεται στο άρθρο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* το οποίο και θα μελετήσουμε αναλυτικά. Συμπληρωματικά στοιχεία στο άρθρο προέρχονται από σειρά διαλέξεων του Νεγρεπόντη που αναφέρονται στη βιβλιογραφία, καθώς και από την κοινή εισήγηση των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη που ετοιμάστηκε για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί.

Η εργασία αποτελείται από 6 κεφάλαια.

Στο 1ο Κεφάλαιο μελετάμε αναλυτικά την Αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου, ενός "θεμελιώδους σημασιολογικού και θεματολογικού μοτίβου", σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο. Παρουσιάζουμε δύο περιπτώσεις εφαρμογής της Αρχής: η πρώτη σχετίζεται με την άπειρη, αλλά περιοδική ανθυφαίρεση πλευράς – διαμέτρου και χαρακτηρίζεται ως συμβατή, άρα αποδεκτή περάτωση του απείρου, ενώ η δεύτερη σχετίζεται με τη Γενική Αρχή της Συμπερίληψης του Frege και χαρακτηρίζεται ως μη συμβατή, άρα απορριπτέα περάτωση του απείρου.

Στο 2ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε την Αρχή του Ελαχίστου και την ισοδύναμή της Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Διερευνούμε την αποδεικτική δύναμη της Αρχής του Ελαχίστου στη Θεωρία Αριθμών, μελετώντας Προτάσεις από τα Βιβλία 7, 8, 9 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, οι αποδείξεις των οποίων αποτελούν άμεσες ή έμμεσες συνέπειες της εν λόγω Αρχής. Παρουσιάζουμε επιχειρήματα που συνηγορούν υπέρ της άποψης ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου. Τέλος, μελετάμε τους τρόπους παρουσίασης σημαντικών ζητημάτων της Θεωρίας Αριθμών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου συγκριτικά με τους αντίστοιχους τρόπους παρουσίασής τους στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη, η ιδιαιτερότητα του οποίου έγινε αντιληπτή από την αρχαιότητα. Διερευνούμε την αποδεικτική δύναμη του 5ου Αιτήματος στη βασική επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία, μελετώντας Προτάσεις από τα Βιβλία 1, 2, 3 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, οι αποδείξεις των οποίων αποτελούν άμεσες ή έμμεσες συνέπειες του εν λόγω Αιτήματος. Παρουσιάζουμε επιχειρήματα που συνηγορούν υπέρ της άποψης ότι το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου. Τέλος, καταγράφουμε σκέψεις και προβληματισμούς σχετικά με τη διαρκή υποβάθμιση της

διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη χώρα μας, η οποία συνδέεται με τη γενικότερη υποβάθμιση της διδασκαλίας της μαθηματικής απόδειξης.

Στο 4ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη. Διερευνούμε την αποδεικτική δύναμη της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών, μελετώντας Προτάσεις από τα Βιβλία 5 και 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, τη μέθοδο της εξάντλησης, αλλά και εργασίες των Πτολεμαίου και Αρχιμήδη, οι αποδείξεις των οποίων αποτελούν άμεσες ή έμμεσες συνέπειες της εν λόγω Αρχής. Παρουσιάζουμε επιχειρήματα που συνηγορούν υπέρ της άποψης ότι η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου. Τέλος, μελετάμε τους τρόπους παρουσίασης σημαντικών ζητημάτων της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου συγκριτικά με τους αντίστοιχους τρόπους παρουσίασής τους στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Στο 5ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Διερευνούμε την αποδεικτική δύναμη του Αξιώματος της Πληρότητας τόσο στην αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, αλλά και σε θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης, οι αποδείξεις των οποίων αποτελούν άμεσες ή έμμεσες συνέπειες του εν λόγω Αξιώματος. Παρουσιάζουμε επιχειρήματα που συνηγορούν υπέρ της άποψης ότι το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου. Τέλος, μελετάμε τους τρόπους παρουσίασης των πραγματικών αριθμών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου, αλλά και ζητημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου, συγκριτικά με τους αντίστοιχους τρόπους παρουσίασής τους σε Πανεπιστημιακά εγχειρίδια του Απειροστικού Λογισμού.

Το 6ο Κεφάλαιο αποτελεί τη σύνοψη της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Παρουσιάζονται τα τελικά συμπεράσματα της μελέτης μας και με βάση αυτά καταγράφονται συγκεκριμένες προτάσεις που σχετίζονται με την αναδιαμόρφωση των αναλυτικών προγραμμάτων και τον εμπλουτισμό των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών του Γυμνασίου και του Λυκείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Σημείο αναφοράς και ταυτόχρονα αφορμή για την παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί το εξαιρετικά ενδιαφέρον άρθρο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* το οποίο θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια αναλυτικά. Κεντρικό θέμα του άρθρου είναι η λεγόμενη Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου, υπό το πρίσμα της οποίας οι συγγραφείς ερμηνεύουν το σύνολο της ιστορίας των Μαθηματικών, υποστηρίζοντας μάλιστα ότι η συγκεκριμένη ερμηνεία "έχει σημαντικές επιπτώσεις στις βασικές κατευθύνσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών." (Σελ. 1 του άρθρου) Στην Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου οι συγγραφείς αποδίδουν, τόσο την αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες, όσο και την παράλογη, όπως τη χαρακτηρίζει ο, βραβευμένος με Νόμπελ Φυσικής το 1963, Eugene Wigner, αποδεικτική ικανότητα των Μαθηματικών.

Στην εισαγωγή του άρθρου διαβάζουμε:

> Το μεγαλύτερο μέρος των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών (από τον Θαλή και τους Πυθαγόρειους μέχρι τον Θεαίτητο) και της φιλοσοφίας (Πυθαγόρειοι, Ζήνων, Πλάτων) ερμηνεύεται με βάση τη **συμβατή περάτωση του απείρου** που βασίζεται στην περιοδική ανθυφαίρεση, ενώ το ύστερο μέρος των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών (Εύδοξος, Αρχιμήδης) ερμηνεύεται ως προετοιμασία για τη σύγχρονη συμβατή περάτωση του απείρου, η οποία βασίζεται στην πληρότητα των τομών Dedekind, ισοδύναμα στη συμπάγεια των κλειστών και φραγμένων διαστημάτων των πραγματικών αριθμών [...] Η ερμηνεία της ιστορίας των Μαθηματικών με βάση την Αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου έχει σημαντικές επιπτώσεις στις βασικές κατευθύνσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών [...] η Αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου προτείνεται ως η κινητήρια δύναμη όχι μόνο για την αποδεικτική δύναμη των Μαθηματικών, αλλά και για την "παράλογη" και μυστηριώδη, κατά Wigner, αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες.
>
> (Σελ. 1 του άρθρου)

Ας μελετήσουμε το κεντρικό μας άρθρο προσεκτικά.

1.1 Η Αρχή της συμβατής περάτωσης του Απείρου

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη στο άρθρο τους με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* ξεκινούν με μία διαπίστωση:

> τα Μαθηματικά έχουν αποδειχθεί, μόνα αυτά από όλες τις επιστήμες, ικανά και αποτελεσματικά να εξηγήσουν σε βάθος τα φαινόμενα της φύσης και να παράγουν μοντέλα βάσει των οποίων γίνονται ακριβείς προβλέψεις ακόμη και για φαινόμενα που βρίσκονται πέραν των αρχικών στόχων και προθέσεων του μοντέλου (Σελ. 1 του άρθρου)

Η άποψη αυτή συμφωνεί απόλυτα με τη θέση του Πλάτωνα, όπως μας τη μεταφέρει ο Πλούταρχος στα Συμποσιακά (718B) "έλεγε τον Θεόν αεί γεωμετρείν", του Γαλιλαίου (1623) "η Φύση είναι ένα βιβλίο γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών", αλλά και πιο σύγχρονων μελετητών, όπως είναι ο Wigner, ο οποίος στο άρθρο του *Η παράλογη αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες* (1960), αναφέρει τα εξής: "the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it." (η τεράστια χρησιμότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες είναι κάτι που συνορεύει με το μυστηριώδες και δεν υπάρχει κάποια λογική εξήγηση γι' αυτή) (Σελ. 2 του άρθρου)

Οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι η απάντηση στο ερώτημα "Πού οφείλεται η (εξ ίσου παράλογη) αποδεικτική δύναμη που έχουν τα Μαθηματικά;" (Σελ. 2 του άρθρου), θα θέσει τα θεμέλια για την ερμηνεία της παράλογης αποτελεσματικότητας των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες και ταυτόχρονα θα αναδείξει την αληθή φύση των Μαθηματικών.

Η έρευνα των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη σχετικά με την ερμηνεία και την εύρεση της προέλευσης της μυστηριώδους αποδεικτικής δύναμης των Μαθηματικών έχει αφετηρία μία εξαιρετικά απλή παρατήρηση που δεν είναι άλλη από τον πίνακα τιμών αληθείας της συνεπαγωγής. Η συνεπαγωγή αποτελεί έναν ιδιαίτερα σημαντικό σύνδεσμο στα μαθηματικά, έναν προτασιακό γεννήτορα της μορφής *αν ... τότε...,* βάσει του οποίου παράγονται οι λεγόμενες υποθετικές προτάσεις. Να θυμίσουμε ότι, σε μία υποθετική πρόταση της μορφής

αν Πρόταση [α], τότε Πρόταση [β],

η Πρόταση [α] καλείται ηγούμενος όρος, ενώ η Πρόταση [β] καλείται επόμενος όρος.

Οι υποθετικές προτάσεις χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν μία σχέση διαπλοκής μεταξύ δύο καταστάσεων: εκείνης της κατάστασης που περιγράφει ο ηγούμενος όρος και εκείνης

της κατάστασης που περιγράφει ο επόμενος όρος. Στα σύγχρονα συγγράμματα της Μαθηματικής Λογικής, ως προς την αποτίμηση του συνδέσμου της συνεπαγωγής, διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- ✔ Έστω ότι η Πρόταση [α] είναι αληθής και η Πρόταση [β] είναι αληθής. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια κατάσταση κατά την οποία υφίστανται αυτά που περιγράφουν και οι δύο όροι της υποθετικής πρότασης. Άρα η υποθετική πρόταση είναι αληθής, καθώς περιγράφει μια κατάσταση που υφίσταται.
- ✔ Έστω ότι η Πρόταση [α] είναι αληθής και η Πρόταση [β] είναι ψευδής. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια κατάσταση κατά την οποία αυτό που περιγράφει ο ηγούμενος όρος υφίσταται, αλλά αυτό που περιγράφει ο επόμενος όρος δεν υφίσταται. Άρα η υποθετική πρόταση είναι ψευδής, καθώς περιγράφει μια κατάσταση διαφορετική από αυτήν που υφίσταται.
- ✔ Έστω ότι η Πρόταση [α] είναι ψευδής και η Πρόταση [β] είναι είτε αληθής, είτε ψευδής. Στην περίπτωση που η υποθετική πρόταση χρησιμοποιείται για να περιγράψει μία κατάσταση της καθημερινότητας, τότε απλά δεν έχει νόημα. Για λόγους επιστημονικούς όμως, η λειτουργία του συνδέσμου "εάν..., τότε..." επεκτείνεται πέρα από τη συνηθισμένη του χρήση και στην περίπτωση όπου η πρόταση που πληροί το πρώτο κενό είναι ψευδής.

Η περίπτωση λοιπόν, που ο ηγούμενος όρος είναι ψευδής πρόταση, είναι κάπως "θολή" και η τιμή αληθείας που πρέπει να λαμβάνει τότε η συνεπαγωγή, δεν είναι καθόλου προφανής, ούτε σύμφωνη με την κοινή διαίσθηση. Από την αρχαιότητα υπήρχε διχογνωμία σχετικά με το πότε μια υποθετική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής, με τη συζήτηση να συνεχίζεται ακόμη και σήμερα. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη παραθέτουν απόσπασμα από το έργο του Σέξτου Εμπειρικού *Προς Λογικούς* [Βιβλίο 8: 113,1 – 115,1], στο οποίο αναφέρεται ότι ο Φίλων ο Λογικός, έχοντας κατανοήσει πλήρως τον πίνακα αληθείας του "συνημμένου", όρο που χρησιμοποιεί για τη συνεπαγωγή, διέκρινε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

> ***οἷον ὁ μὲν Φίλων ἔλεγεν ἀληθὲς γίνεσθαι τὸ συνημμένον, ὅταν μὴ ἄρχηται ἀπ' ἀληθοῦς καὶ λήγῃ ἐπὶ ψεῦδος, ὥστε τριχῶς μὲν γίνεσθαι κατ' αὐτὸν ἀληθὲς συνημμένον, καθ' ἕνα δὲ τρόπον ψεῦδος. καὶ γὰρ***
>
> 1. ***ὅταν ἀπ' ἀληθοῦς ἀρχόμενον ἐπ' ἀληθὲς λήγῃ, ἀληθές ἐστιν, ὡς τὸ "εἰ ἡμέρα ἔστι, φῶς ἔστιν"*** **(A ⇒ A)**
> 2. ***καὶ ὅταν ἀπὸ ψεύδους ἀρχόμενον ἐπὶ ψεῦδος λήγῃ, πάλιν ἀληθές, οἷον τὸ "εἰ***

πέταται ἡ γῆ, πτέρυγας ἔχει ἡ γῆ” **(Ψ ⇒ Ψ)**

3. ***ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἀρχόμενον ἀπὸ ψεύδους, ἐπ' ἀληθὲς δὲ λῆγον ἐστὶν ἀληθές, ὡς τὸ “εἰ πέταται ἡ γῆ, ἔστιν ἡ γῆ”*** **(Ψ ⇒ Α)**

4. ***μόνως δὲ γίνεται ψεῦδος, ὅταν ἀρχόμενον ἀπὸ ἀληθοῦς λήγῃ ἐπὶ ψεῦδος, ὁποῖόν ἐστι τὸ “εἰ ἡμέρα ἔστι, νὺξ ἔστιν”· ἡμέρας γὰρ οὔσης τὸ μὲν “ἡμέρα ἔστιν” ἀληθές ἐστιν, ὅπερ ἦν ἡγούμενον, τὸ δὲ “νὺξ ἔστι” ψεῦδός ἐστιν, ὅπερ ἦν λῆγον*** **(Α ⇒ Ψ)**

(Σελ. 3 του άρθρου)

Από το παραπάνω χωρίο προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας αληθείας του συνημμένου.

Πρόταση [α]	**Πρόταση [β]**	**α ⇒ β**
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας αληθείας του συνημμένου ταυτίζεται απόλυτα με τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής, όπως αυτός παρουσιάζεται σε σύγχρονα συγγράμματα της Μαθηματικής Λογικής. Όταν ο ηγούμενος όρος α είναι ψευδής πρόταση, τότε, ανεξάρτητα από την τιμή αληθείας του επόμενου όρου β, η συνεπαγωγή α ⇒ β είναι πάντα αληθής πρόταση. Αυτό μας οδηγεί στο ασφαλές συμπέρασμα ότι όλες οι προτάσεις που προκύπτουν από μία ψευδή υπόθεση είναι αληθείς προτάσεις.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη διατυπώνουν στη συνέχεια του άρθρου τους την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση

Αν η πρόταση α είναι αντιφατική, δηλαδή της μορφής α = φ ∧ (¬ φ) (φ και όχι φ), όπου φ προτασιακός τύπος, ενώ β είναι οποιαδήποτε πρόταση, τότε η συνεπαγωγή α ⇒ β είναι αληθής.

Απόδειξη

Εφόσον η πρόταση α είναι αντιφατική, η άρνησή της, δηλαδή η πρόταση ¬α θα είναι ταυτολογία. Γνωρίζουμε ότι, ένας προτασιακός τύπος είναι ταυτολογία, αν και μόνο αν, είναι

αληθής για κάθε αποτίμηση. Συνεπώς η πρόταση ¬ α είναι αληθής, για κάθε αποτίμηση, άρα η πρόταση α είναι ψευδής, για κάθε αποτίμηση.

Από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής επιλέγουμε τις κατάλληλες γραμμές:

Πρόταση [α]	**Πρόταση [β]**	**α ⇒ β**
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Παρατηρούμε ότι η συνεπαγωγή α ⇒ β είναι αληθής, ανεξάρτητα από την τιμή αληθείας της πρότασης β.□

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, έχοντας κατά νου την παραπάνω πρόταση, προχωρούν το συλλογισμό τους ένα βήμα ακόμη και οδηγούνται στην ακόλουθη ενδιαφέρουσα υπόθεση: "Εάν, κατά την κατασκευή ενός αξιωματικού συστήματος, έστω ένα από τα επιλεγόμενα αξιώματα, είναι αντιφατικό, συνεπώς ψευδής πρόταση, τότε κάθε πρόταση που σχηματίζεται στα πλαίσια του συγκεκριμένου αξιωματικού συστήματος είναι αληθής." (Σελ. 4 του άρθρου) Στη συγκεκριμένη υπόθεση εντοπίζουμε ένα λεπτό και εξαιρετικά ενδιαφέρον σημείο που σχετίζεται με την επιλογή των αξιωμάτων μιας μαθηματικής θεωρίας.

Ένα αντιφατικό αξιωματικό σύστημα είναι μεταξύ όλων των αξιωματικών συστημάτων, εκείνο με τη μεγαλύτερη αποδεικτική ισχύ, καθώς στα πλαίσια του, όλα τα συμπεράσματα είναι αληθή. Αν λοιπόν, κατά την επιλογή των αξιωμάτων, επιλέξουμε, έστω ένα αντιφατικό αξίωμα, αυτομάτως η αποτελεσματικότητα του συγκεκριμένου, αντιφατικού προφανώς, αξιωματικού συστήματος είναι η μεγαλύτερη δυνατή και η προέλευσή της παύει να είναι μυστηριώδης και εξηγείται απολύτως λογικά. Βέβαια, όπως είναι ευρύτερα γνωστό, καμία μαθηματική θεωρία δεν μπορεί να στηριχθεί σε ένα αντιφατικό αξιωματικό σύστημα και τα μόνα αξιωματικά συστήματα που γίνονται αποδεκτά είναι εκείνα που δεν περιέχουν αντιφάσεις ή τουλάχιστον εκείνα που ελπίζουμε ότι δεν θα μας οδηγήσουν μελλοντικά σε αντιφατικές προτάσεις. Εύλογα προκύπτει το ερώτημα: πώς άραγε θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε, με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο, τις δύο επιθυμητές ιδιότητες, δηλαδή να κατασκευάσουμε ένα μη αντιφατικό, συνεπώς αποδεκτό αξιωματικό σύστημα, το οποίο όμως να διαθέτει τη μέγιστη δυνατή αποδεικτική δύναμη;

Η απάντηση είναι η κατασκευή αξιωματικών συστημάτων που, χωρίς να είναι τα ίδια αντιφατικά, αποτελούν ωστόσο καλές προσεγγίσεις αντιφατικών αξιωματικών συστημάτων. Ο Νεγρεπόντης, στη διάλεξη που έδωσε στην Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης, ανέφερε:

> Είναι σημαντικό να έχουμε τη νοητική εικόνα συμβατότητος και αντίφασης, όχι από τη μια μεριά οι συμβατές προτάσεις κι από την άλλη οι αντιφατικές, αλλά την αντίφαση ως ένα είδος οριακού σημείου με συμβατές προσεγγίσεις, όσο πιο κοντά στην αντίφαση τόσο πιο ισχυρές. Η αντίφαση είναι σαν ένα απαγορευμένο οριακό σημείο και επιθυμητές, άκρως επιθυμητές οι τολμηρές συμβατές προσεγγίσεις! Τα Μαθηματικά έχουν τη μοναδική ικανότητα να δημιουργούν ισχυρές και γόνιμες προσεγγίσεις, οι οποίες λειτουργούν ως μαθηματικές Αιτίες. Αυτή η ισχύς είναι η λογική δύναμη των αξιωμάτων. (Σελ. 31 – 32)

Μία περίπτωση προσέγγισης της αντίφασης αποτελεί η συμβατή περάτωση του απείρου. Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο,

> οι έννοιες πέρας και άπειρο αποτελούν ένα δίπολο λογικά αντίθετων εννοιών, οι οποίες παρουσιάζουν ασυμβατότητα και δεν είναι δυνατό να παρουσιάζονται ταυτόχρονα. Το άπειρο έχει αντιφατική φύση, καθώς έρχεται σε αντίθεση με τα πεπερασμένα αντικείμενα και τις πεπερασμένες διαδικασίες που αποτελούν τη βάση των ανθρώπινων νοητικών κατασκευών, (Αναπολιτάνος, 1985)

ενώ οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη αναφέρουν ότι,

> μια διαδικασία δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα πεπερασμένη και άπειρη, ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα πεπερασμένο και άπειρο. Στην περίπτωση που προσπαθήσουμε να περατώσουμε το άπειρο, ενώ γνωρίζουμε ότι είναι άπειρο, οδηγούμαστε σε αντίφαση. (Σελ. 6 του άρθρου)

Με δεδομένη την αντίθεση απείρου και πέρατος, δεν είναι επιτρεπτό να διατυπώσουμε αξιώματα που μετατρέπουν το άπειρο σε πεπερασμένο, υποθέσεις που μετατρέπουν άπειρες διαδικασίες σε πεπερασμένες, καθώς κάτι τέτοιο θα μας οδηγούσε με βεβαιότητα σε αντίφαση. Αφού λοιπόν δεν μπορούμε να επιτρέψουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας αντίφασης στο σύστημά μας, μία εναλλακτική πρόταση είναι να θεωρήσουμε τολμηρές, αλλά πάντα συμβατές προσεγγίσεις της αντίφασης. Μάλιστα, όσο πιο ισχυρή είναι μία προσέγγιση, τόσο ισχυρότερη αποδεικτική δύναμη θα διαθέτει το αξιωματικό σύστημα που θα περιέχει το συγκεκριμένο τολμηρό αξίωμα.

Κατά την προσπάθεια μετάβασης από μια αντιφατική σε μια συμβατή προσέγγιση του απείρου, είναι αρκετά πιθανή η εμφάνιση παραδόξων. Παράδοξο, σύμφωνα με τον Μοσχοβάκη είναι "είτε κάτι που είναι λάθος, είτε κάτι που εναντιώνεται στη διαίσθηση". (Σελ. 24) Παράδοξες προτάσεις δεν σημαίνει απαραίτητα λανθασμένες προτάσεις, αλλά ενδεχομένως προτάσεις που αντίκεινται στην ανθρώπινη διαίσθηση.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη αναφέρουν:

> τα παράδοξα αποτελούν, κατά κάποιο τρόπο, την πηγή δημιουργίας και αποδεικτικής δύναμης των μαθηματικών, είναι θέσεις που πιθανόν να μας προκαλέσουν έκπληξη, καθώς, δυστυχώς, έχουμε εθισθεί ώστε να θεωρούμε παράδοξα τις διασκεδαστικές, ψυχαγωγικές σπαζοκεφαλιές και να μην υποψιαζόμαστε ότι τα αληθή παράδοξα είναι εκείνα τα θεμελιώδη επιχειρήματα και εκείνες οι διαδικασίες που, επιδέξια κινούμενα στα συμβατά όρια της αντίφασης, προκαλούν την όξυνση της ανθρώπινης σκέψης
>
> (Σελ. 6 – 7 του άρθρου)

Οι προσεγγίσεις του απείρου, διακρίνονται σε συμβατές, συνεπώς αποδεκτές περιπτώσεις και μη συμβατές, συνεπώς απορριπτέες περιπτώσεις. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη αναφερόμενοι στο συγκεκριμένο φαινόμενο χρησιμοποιούν τον όρο **Αρχή της περάτωσης του απείρου**. Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο, η Αρχή της περάτωσης του απείρου αποτελεί ένα "θεμελιώδες σημασιολογικό και θεματολογικό μοτίβο", ενώ "ο όρος έχει να κάνει με τη δυνατότητα περατοκρατικού ελέγχου του απείρου, ως μόνης διεξόδου για τη νοητική κυριαρχία του ανθρώπου, ως πεπερασμένου ελλόγου όντος, επί του, αδύνατον να εξαντληθεί μετρούμενο, απείρου." (κριτική του Αναπολιτάνου Δ. στο βιβλίο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαιτήτου, Ευδόξου, Τόμος Ι*, Books' Journal, τεύχος 99, Ιούνιος 2019)

Στις επόμενες παραγράφους θα παραθέσουμε δύο περιπτώσεις εφαρμογής της Αρχής της περάτωσης του Απείρου, με σκοπό τη βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου. Η πρώτη περίπτωση σχετίζεται με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας και την απειρία της ανθυφαίρεσης των μεγεθών διαμέτρου – πλευράς από τους Πυθαγόρειους, η οποία αποτελεί μία περίπτωση συμβατής περάτωσης του Απείρου. Η δεύτερη περίπτωση σχετίζεται με την αξιωματικοποίηση της Συνολοθεωρίας από τον Frege και τη Γενική Αρχή της Συμπερίληψης, η οποία αποτελεί μία περίπτωση μη συμβατής περάτωσης του Απείρου.

1.2 Περίπτωση συμβατής περάτωσης του Απείρου

Η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και τους προγενέστερους αυτών ήταν η ανάγκη ύπαρξης αυστηρής μαθηματικής απόδειξης όλων των ισχυρισμών και των μαθηματικών προτάσεων. Το όνομα των Πυθαγορείων συνδέεται κυρίως με το Πυθαγόρειο θεώρημα ως η σημαντικότερη των ανακαλύψεών τους. Όμως, οι Boyer & Merzbach αναφέρουν ότι η πινακίδα Plimpton 322 (πλάκα της βαβυλωνιακής περιόδου 1900 – 1600 π.χ), περιέχει πίνακα 4 στηλών και 15 γραμμών, όπου παρουσιάζονται περιπτώσεις πυθαγόρειων τριάδων, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα ήταν γνωστό, έστω και εμπειρικά, ακόμη και πριν από τους Πυθαγόρειους. Ποια ήταν λοιπόν η σημαντικότερη ανακάλυψη των Πυθαγορείων, αν όχι το Πυθαγόρειο θεώρημα;

Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο (1985), οι Πυθαγόρειοι αποτέλεσαν "ένα είδος θρησκευτικο – φιλοσοφικής ομάδας εκπληκτικής εσωτερικής συνοχής", της οποίας "η φιλοσοφία στηριζόταν με μία οντολογία" ότι,

> τα δομικά υλικά του σύμπαντος είναι οι φυσικοί αριθμοί, ενώ οι δομικές μεταξύ τους σχέσεις μπορούν να εκφραστούν ως σχέσεις φυσικών αριθμών. Η κοσμική αρμονία είναι ταυτόσημη με την αρμονία των ρητών σχέσεων της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν φυσικοί αριθμοί, με $\nu \neq 0$ (Σελ. 13)

Για τους Πυθαγόρειους λοιπόν, κάθε δύο συγκρινόμενα μεγέθη έπρεπε να έχουν κοινό μέτρο, δηλαδή να είναι σύμμετρα.

Σύμφωνα με τους μελετητές, οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν αυστηρά το Πυθαγόρειο θεώρημα και στη συνέχεια με εφαρμογή του, ανακάλυψαν την ασυμμετρία της διαμέτρου προς την πλευρά ενός τετραγώνου. Αυτή, σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο, είναι η μεγαλύτερη μαθηματική ανακάλυψη συνολικά στην αρχαιότητα, η οποία προκάλεσε βαθιά κρίση στην Πυθαγόρεια φιλοσοφία και είχε ως τελικό αποτέλεσμα τη διάλυση της Πυθαγόρειας σχολής.

Η ανακάλυψη της ύπαρξης ασύμμετρων μεγεθών θεωρήθηκε, σύμφωνα με αρχαίες πηγές, που παραθέτουν οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη (Σελ. 9 – 10 του άρθρου), ως αντίθετη προς την ανθρώπινη διαίσθηση, δηλαδή παράδοξη. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

- ✔ Ο Πλάτων θεωρεί ότι η άγνοια των ανθρώπων στο ερώτημα αν υπάρχουν ασύμμετρα μεγέθη είναι τόσο ασυγχώρητη, ώστε αυτοί θυμίζουν περισσότερο χοίρους, παρά ανθρώπους και το διαδεδομένο της άγνοιας αυτής τον κάνει, όπως δηλώνει, να νιώθει

ντροπή για όλους τους Έλληνες. (Πλάτων, *Νόμοι* [819δ – ε])

- ✔ Ο Αριστοτέλης εντοπίζει ένα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ασυμμετρίας. Πρόκειται για μια μαθηματική ανακάλυψη, η οποία αντίκειται στην ανθρώπινη διαίσθηση σε τέτοιο βαθμό ώστε, όταν κάποιος πληροφορείται για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών έχει ως αρχική αντίδραση την απορία και την αίσθηση της παραδοξότητας. Όμως, μετά την απόκτηση της γνώσης, παύει να απορεί, πείθεται εξαιτίας της δύναμης της αυστηρής μαθηματικής σκέψης και διακατέχεται από θαυμασμό.

(Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά* [983α11–23])

Η πρόταση μέσω της οποίας οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν την ασυμμετρία, είναι η ακόλουθη:

Πυθαγόρεια Πρόταση ασυμμετρίας

Αν α, β είναι δύο μεγέθη, διάμετρος και πλευρά αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\alpha^2 = 2\beta^2$, τότε τα α, β είναι μεγέθη ασύμμετρα.

Η πρόταση αντιστοιχεί στην ακόλουθη σύγχρονη πρόταση ύπαρξης άρρητων αριθμών.

Πρόταση

Αν ο φυσικός αριθμός ν δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο αριθμός $\sqrt{\nu}$ είναι άρρητος.

Μελετώντας όμως, τη σύγχρονη απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{\nu}$, όπου ν ένας μη τετράγωνος αριθμός, δεν ερχόμαστε αντιμέτωποι με κάποια παράδοξη κατάσταση. Για να επιβεβαιώσουμε τον ισχυρισμό μας, θα παραθέσουμε την απόδειξη όπως αυτή παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Λυκείου της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 4, Παράγραφος 4.5 με τίτλο *Πρώτοι Αριθμοί*, εφαρμογή 2. (Σελ. 168)

Πρόταση

Αν ο φυσικός αριθμός ν δεν είναι τετράγωνο φυσικού, τότε ο αριθμός $\sqrt{\nu}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt{\nu}$ είναι ρητός.

Τότε ισχύει $\sqrt{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}$, όπου α και β θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με $\beta \neq 0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι οι ακέραιοι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους (αν δεν

συμβαίνει αυτό, διαιρούμε τα α, β με το Μ.Κ.Δ., μετατρέποντάς τους σε πρώτους μεταξύ τους).

Από την ισότητα $\sqrt{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}$, έχουμε $\alpha^2 = \nu\beta^2$. Επειδή ο ν δεν είναι τετράγωνο φυσικού θα ισχύει $\beta > 1$. Επομένως ο ακέραιος β θα έχει έναν πρώτο διαιρέτη ρ, οπότε θα ισχύει ρ / α^2, δηλαδή $\rho / \alpha \cdot \alpha$ και άρα ρ / α. Επομένως, ρ / α και ρ / β, κάτι που είναι άτοπο, αφού τα α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους. □

Διαπιστώνουμε πράγματι ότι η παραπάνω απόδειξη της αρρητότητας δεν αντίκειται στην ανθρώπινη διαίσθηση, συνεπώς η παραδοξότητα για την οποία κάνουν λόγο ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης δεν μπορεί να προκύπτει από την ύπαρξη αυτή καθ΄ αυτή των ασύμμετρων μεγεθών. Σύμφωνα με τον Νεγρεπόντη,(1) η απόδειξη μέσω της οποίας οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν στην ασυμμετρία της διαμέτρου προς την πλευρά ενός τετραγώνου, στηρίζεται σε μία διαφορετική μέθοδο εύρεσης κοινού μέτρου, που όντως εμπεριέχει παραδοξότητα. Προτού μελετήσουμε την "παράδοξη" απόδειξη, θα δούμε κάποια στοιχεία για τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης, δηλαδή για τη μέθοδο εύρεσης κοινού μέτρου που χρησιμοποιήθηκε από τους Πυθαγόρειους.

1.2.1 Ανθυφαίρεση – Ευκλείδειος Αλγόριθμος

Η μέθοδος της Ανθυφαίρεσης, γνωστή και ως μέθοδος του Ευκλείδειου αλγόριθμου, παρουσιάζεται στις αποδείξεις των Προτάσεων 7.1 και 7.2 του 7ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, με τις οποίες υπολογίζεται ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο φυσικών αριθμών. Η μέθοδος δεν περιορίζεται σε φυσικούς αριθμούς, αλλά, σύμφωνα με την Πρόταση 10.2, εφαρμόζεται και σε δύο ομοειδή μεγέθη, όπως είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα, δύο επιφάνειες, δύο στερεά, κ.α, με σκοπό την εύρεση κοινού μέτρου, εάν και εφόσον αυτό υπάρχει, δηλαδή εάν τα μεγέθη είναι σύμμετρα.

Ας μελετήσουμε αναλυτικά τη γενική μέθοδο εύρεσης κοινού μέτρου, είτε δύο αριθμών, είτε δύο ομοειδών μεγεθών, τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης.

(1) Όλα τα σχόλια προέρχονται από τις παραδόσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη του Νεγρεπόντη, ακ.έτος 2016 -17, ΠΜΣ: Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Έστω α, β, με α > β, δύο φυσικοί αριθμοί ή δύο ομοειδή μεγέθη. Θέλουμε να μετρήσουμε το μεγαλύτερο α με το μικρότερο β. Εκτελούμε τη διαίρεση του α με το β και έστω κ_0 το πηλίκο και γ_1 το υπόλοιπο. Το πρώτο βήμα της ανθυφαίρεσης είναι:

$$\alpha = \kappa_0\beta + \gamma_1, \text{ όπου } \gamma_1 < \beta.$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει η ακόλουθη, είτε πεπερασμένη είτε άπειρη ακολουθία διαδοχικών διαιρέσεων:

$\alpha = \kappa_0 \beta + \gamma_1$, όπου $\gamma_1 < \beta$,

$\beta = \kappa_1\gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma_2 < \gamma_1$,

...

$\gamma_{n-1} = \kappa_n \gamma_n + \gamma_{n+1}$, όπου $\gamma_{n+1} < \gamma_n$,

$\gamma_n = \kappa_{n+1}\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2}$, όπου $\gamma_{n+2} < \gamma_{n+1}$,

.....

Ορισμός

Καλούμε ανθυφαίρεση του α ως προς το β την ακολουθία των πηλίκων των παραπάνω διαδοχικών διαιρέσεων.

Είναι δηλαδή: $\text{Ανθ}(\alpha, \beta) = [\kappa_0, \kappa_1, ...\kappa_n, \kappa_{n+1}, ...]$

Αν η διαδικασία ολοκληρωθεί σε κάποιο βήμα, δηλαδή αν κάποιο από τα υπόλοιπα είναι 0, τότε λέμε ότι η Ανθυφαίρεση του α προς το β είναι πεπερασμένη. Αυτό συμβαίνει, όταν:

- ✔ τα α, β είναι φυσικοί αριθμοί, ή
- ✔ τα α, β είναι μεγέθη σύμμετρα

Να θυμήσουμε ότι, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1 του 10ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη:

Ορισμός 10.1

Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.	Έστω α, β δύο μεγέθη με α > β. • Τα α, β καλούνται σύμμετρα αν υπάρχει μέγεθος γ και αριθμοί κ, λ, έτσι ώστε α = κγ και β = λγ. • Τα α, β καλούνται ασύμμετρα, αν δεν είναι σύμμετρα.

Αν η διαδικασία δεν ολοκληρωθεί σε κάποιο βήμα, δηλαδή αν όλα τα υπόλοιπα είναι μη μηδενικά, τότε η Ανθυφαίρεση του α προς το β είναι άπειρη. Αυτό συμβαίνει όταν τα α, β είναι μεγέθη ασύμμετρα, σύμφωνα με την Πρόταση 10.2 του 10ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη:

Πρόταση 10.2

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.	Έστω α, β δύο μεγέθη με α > β. Αν η ανθυφαίρεση του α προς β είναι άπειρη, τότε τα α, β είναι ασύμμετρα.

1.2.2 Η απόδειξη της ασυμμετρίας πλευράς – διαμέτρου

Ας επιστρέψουμε στην Πυθαγόρεια απόδειξη της ασυμμετρίας.

Πρόταση

Αν α, β είναι δύο μεγέθη, διάμετρος και πλευρά αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\alpha^2 = 2\beta^2$, τότε τα α, β είναι μεγέθη ασύμμετρα.

Απόδειξη

Η ανθυφαίρεση πλευράς – διαμέτρου έχει την εξής μορφή:

$\alpha = 1 \cdot \beta + \gamma_1$, όπου $\gamma_1 < \beta$,

$\beta = 2 \cdot \gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma_2 < \gamma_1$,

...

$\gamma_{n-1} = 2 \cdot \gamma_n + \gamma_{n+1}$, όπου $\gamma_{n+1} < \gamma_n$,

$\gamma_n = 2 \cdot \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2}$, όπου $\gamma_{n+2} < \gamma_{n+1}$,

.....

Η ακολουθία των διαδοχικών πηλίκων της ευκλείδειας διαίρεσης είναι άπειρη, άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 10.2, τα μεγέθη είναι ασύμμετρα, ενώ η ανθυφαίρεση αυτών έχει τη μορφή Ανθ(α, β) = [1, 2, 2, 2, ...] □

Το πρώτο προφανές συμπέρασμα είναι ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο της πλευράς και της διαμέτρου, καθώς τα μεγέθη είναι ασύμμετρα. Όμως υπάρχει και ένα δεύτερο, βαθύτερο και άκρως

ενδιαφέρον συμπέρασμα.

Η απειρία της ανθυφαίρεσης των μεγεθών διαμέτρου – πλευράς δεν μας επιτρέπει, προφανώς, την πλήρη γνώση της διαιρετικής διαδικασίας, καθώς δεν είναι εφικτό να γνωρίζουμε πλήρως οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία.

Ας εστιάσουμε όμως στη μορφή της συγκεκριμένης ανθυφαίρεσης.

Όπως είδαμε, αν α, β είναι δύο μεγέθη, διάμετρος και πλευρά αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\alpha^2 = 2\beta^2$, τότε η ανθυφαίρεση αυτών έχει τη μορφή:

$$\text{Ανθ}(\alpha, \beta) = [1, 2, 2, 2, ...]$$

Παρατηρούμε ότι, η ανθυφαίρεση των δύο μεγεθών είναι άπειρη, αλλά τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα από κάποιο βήμα και μετά παραμένουν ίσα. Συνεπώς, ναι μεν η διαιρετική διαδικασία είναι άπειρη, ωστόσο η πλήρης γνώση της είναι εφικτή και μάλιστα επιτυγχάνεται στο τρίτο βήμα, λόγω επανάληψης των ανθυφαιρετικών υπολοίπων. Στο σημείο αυτό εντοπίζεται μία μείξη απείρου – πέρατος.

Η επανάληψη των ανθυφαιρετικών υπολοίπων είναι εκείνη που "στρογγυλεύει" ή "μαλακώνει" την απειρία της ανθυφαίρεσης, επιτρέποντάς μας την πλήρη γνώση της άπειρης διαιρετικής διαδικασίας σε πεπερασμένο στάδιο. Έτσι, η απειρία της ανθυφαίρεσης, συνεπώς η απειρία που προκύπτει από την ασυμμετρία, περατώνεται κατά έναν τρόπο που θα χαρακτηρίζαμε συμβατό.

Πρόκειται δηλαδή για μία περίπτωση συμβατής περάτωσης του απείρου.

1.3 Περίπτωση μη συμβατής περάτωσης του Απείρου

Η έννοια του συνόλου(2) είναι θεμελιώδης στα μαθηματικά, καθώς τα σύνολα χρησιμοποιούνται σε όλους τους κλάδους. Η συστηματική ενασχόληση με τα σύνολα άρχισε στα τέλη του 19ου αιώνα με τις μελέτες των Cantor, Dedekind και άλλων μεγάλων μαθηματικών. Ο ορισμός που διατύπωσε ο Cantor για την έννοια του συνόλου είναι ο ακόλουθος:

(2) Βασικό εγχειρίδειο για τη Θεωρία Συνόλων είναι το "Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία", του Μοσχοβάκη, Γ., Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα, 1993

Ορισμός

Σύνολο καλούμε μία οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Όπως αναφέρει ο Μοσχοβάκης (1993), "η Θεωρία Συνόλων, σε αυτή τη διαισθητική της φάση, αναπτύχθηκε με βάση τον ορισμό της έννοιας του συνόλου που έδωσε ο Cantor." (Σελ. 22) Το 1903 ο Γερμανός μαθηματικός Frege πρότεινε μια αξιωματικοποίηση της Συνολοθεωρίας, με βάση τη Γενική Αρχή της Συμπερίληψης (General Comprehension Principle), κεντρική ιδέα της οποίας είναι η παραδοχή ότι, κάθε σύνολο περιγράφεται πλήρως από την ιδιότητα των στοιχείων του.

Πριν παραθέσουμε τη Γενική Αρχή της Συμπερίληψης με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό να θυμίσουμε ότι, μία n – μελής συνθήκη P χαρακτηρίζεται οριστική, αν για κάθε n – άδα αντικειμένων μπορούμε να αποφασίσουμε ρητά αν η $P(\vec{x})$ είναι αληθής ή όχι.

Γενική Αρχή της Συμπερίληψης

Για κάθε οριστική συνθήκη P, n μεταβλητών, υπάρχει ένα σύνολο $X = \{\vec{x} \,/\, P(\vec{x})\}$ με μέλη ακριβώς τις n – άδες αντικειμένων που ικανοποιούν την P, έτσι ώστε για κάθε $\vec{x}$ ισχύει:

$$\vec{x} \in X \Leftrightarrow P(\vec{x})$$

Ακολούθησε η, λίγο πολύ, γνωστή ιστορία της επιστολής που έστειλε ο Bertrand Russell στον Frege, ανακοινώνοντάς του το λεγόμενο παράδοξό του και αμφισβητώντας ουσιαστικά την ισχύ της Γενικής Αρχής της Συμπερίληψης. Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο (1985), ο Frege γράφει στο βιβλίο του *Grundgesetze der Arithetik*:

> Δεν υπάρχει μεγαλύτερη ατυχία που μπορεί να συμβεί σε έναν συγγραφέα επιστημονικού συγγράμματος, από αυτήν του να δει κάποιο από τα θεμέλια του οικοδομήματός του να τρέμει, μετά το τέλος της οικοδόμησης.
>
> Αυτή ήταν η θέση στην οποία περιήλθα μετά από ένα γράμμα του κ.Russell ακριβώς τη στιγμή που το τύπωμα αυτού του τόμου ήταν κοντά στο τέλος του. Σχετίζεται με το αξίωμά μου (V). Ποτέ δεν έκρυψα από τον εαυτό μου την έλλειψη προφάνειάς του, κάτι που ανήκει στα υπόλοιπα αξιώματα και που πρέπει καθαρά να απαιτείται από κάθε νόμο της λογικής.
>
> (Σελ. 204)

Το παράδοξο του Russell δεν ήταν το πρώτο παράδοξο που είχε παρουσιαστεί κατά την προσπάθεια θεμελίωσης της συνολοθεωρίας. Το 1895 ο Cantor είχε εντοπίσει το, γνωστό σήμερα

με το όνομα, παράδοξο Burali – Forti, ενώ το 1899 προέκυψε το παράδοξο του Cantor (Αναπολιτάνος, 1985). Το παράδοξο του Russell όμως ήταν σημαντικά διαφορετικό σε σχέση με τα υπόλοιπα παράδοξα. Ο Μοσχοβάκης (1993) αναφέρει ότι,

> ήταν απλό, σύντομο, άγγιζε την ουσία της βασικής έννοιας του συνόλου και την προφανή και μοναδική αρχή πάνω στην οποία είχε στηριχθεί όλη η θεωρία και φαινομενικά την κατέστρεφε. Δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι το παράδοξο του Russell έφερε μια φιλοσοφική κρίση αμφιβολίας πρώτα στη συνολοθεωρία και μετά απ' αυτή, αργότερα, σε όλα τα μαθηματικά, που δεν ξεπεράστηκε τελείως για τριάντα χρόνια περίπου. (Σελ. 24)

Προτού περιγράψουμε αναλυτικά το παράδοξο του Russell να σημειώσουμε ότι τα σύνολα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- ✔ εκείνα που δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους, για παράδειγμα το σύνολο όλων των κύκλων που δεν είναι κύκλος,
- ✔ εκείνα που ανήκουν στον εαυτό τους, για παράδειγμα το σύνολο όλων των συνόλων που είναι σύνολο.

Παράδοξο του Russell

Έστω Α το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους, δηλαδή

$$A = \{X \,/\, X \text{ σύνολο και } X \notin X\}$$

Σύμφωνα με τη Γενική Αρχή της Συμπερίληψης, το Α είναι σύνολο.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- ✔ Αν $A \in A$, τότε το Α, ως στοιχείο του Α, ικανοποιεί την ιδιότητα των στοιχείων του Α, συνεπώς $A \notin A$.
- ✔ Αν $A \notin A$, τότε επειδή το Α ικανοποιεί την ιδιότητα των στοιχείων του Α, ισχύει $A \in A$.

Προφανώς και οι δύο περιπτώσεις δεν γίνονται δεκτές, συνεπώς, η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης οδηγεί σε λογική αντίφαση. Δημιουργείται εύλογα το ερώτημα: για ποιο λόγο η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης οδηγεί σε λογική αντίφαση;

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη δίνουν τη δική τους ερμηνεία σχετικά με την προέλευση της αντιφατικότητας που εμπεριέχει η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης. Ο συλλογισμός τους περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα:

1. Λόγω του Αξιώματος της Επιλογής, κάθε σύνολο μπορεί να εφοδιαστεί με μία σχέση καλής διάταξης, δηλαδή, κάθε σύνολο μπορεί να εφοδιαστεί με μία διάταξη, έτσι ώστε κάθε μη κενό υποσύνολο του να έχει ένα στοιχείο ελάχιστο ως προς τη διάταξη αυτή.
2. Ταυτόχρονα, κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο Α δεν είναι στοιχείο του εαυτού του, δηλαδή κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο Α ικανοποιεί τη συνθήκη $A \notin A$.
3. Συνεπώς, η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης επιτρέπει την ύπαρξη ενός συνόλου που προσεγγίζει το σύνολο όλων των συνόλων.
4. Το σύνολο όλων των συνόλων είναι ανεπίτρεπτα άπειρο, καθώς δεν υπάρχει τόσο μεγάλος πληθάριθμος που να αντιστοιχεί σε αυτό. (Σελ. 5 του άρθρου)

Άρα, η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης, καθιστά δυνατή τη συλλογή όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν μία ιδιότητα, επιτρέποντας την ύπαρξη συνόλων – *τερατογενέσεων,* όπως τα χαρακτηρίζει ο Αναπολιτάνος (1985) και οδηγεί τελικά σε αντίφαση.

Πρόκειται δηλαδή για μία περίπτωση μη συμβατής περάτωσης του απείρου.

Έχοντας κατανοήσει ικανοποιητικά το μοτίβο που οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη καλούν Αρχή της περάτωσης του απείρου, θα μελετήσουμε σε βάθος στα τέσσερα κεφάλαια που έπονται, τη θέση και την αποδεικτική ισχύ τεσσάρων τολμηρών αξιωμάτων, σε τέσσερις διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών, με τον τρόπο που αυτά παρουσιάζονται σε Προτάσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και όχι μόνο. Η μελέτη θα γίνει υπό το πρίσμα του σκεπτικού των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, όπως αυτό καταγράφεται στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί :

> Η παρουσία μιας συμβατής περάτωσης του απείρου σε ένα αξιωματικό σύστημα είναι μια συμβατή προσέγγιση της αντιφατικότητας, του πλέον ισχυρού λογικού συστήματος. Άρα, αναμένουμε ότι μια τέτοια συμβατή περάτωση του απείρου διατηρεί ένα μέρος από την αποδεικτική ισχύ της αντίφασης. Επομένως, η παρουσία μιας συμβατής περάτωσης του απείρου σε ένα αξιωματικό σύστημα έχει ως αποτέλεσμα την ισχυροποίηση του αξιωματικού συστήματος, με την έννοια ότι αυξάνει τις λογικές συνέπειες του συστήματος. (Σελ. 26)

Θα διερευνήσουμε τη θέση και την αποδεικτική ισχύ:

- ✔ της Αρχής του Ελαχίστου στη Θεωρία Αριθμών,
- ✔ του 5ου Αιτήματος στη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία,
- ✔ της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών,
- ✔ του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών στη Μαθηματική Ανάλυση.

Στη συνέχεια κάθε κεφαλαίου, θα παρουσιάσουμε επιχειρήματα που συνηγορούν υπέρ της άποψης ότι καθεμία από τις παραπάνω υποθέσεις αποτελεί μία συμβατή περάτωση του απείρου και θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι παραπάνω κλάδοι των μαθηματικών, όπως και τα συγκεκριμένα τολμηρά αξιώματα, παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε την αποδεικτική δύναμη της Αρχής του Ελαχίστου στη βασική Θεωρία Αριθμών, όπως αυτή παρουσιάζεται στα Αριθμητικά Βιβλία 7, 8, 9 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και θα επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε την προέλευση της δύναμης αυτής. Θα εστιάσουμε ιδιαίτερα σε Προτάσεις – συνέπειες της Αρχής του Ελαχίστου, οι οποίες αντίκεινται στη διαίσθηση και μοιάζουν παράδοξες. Τέλος, θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης της Αρχής του Ελαχίστου, της ισοδύναμής της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής, αλλά και των συνεπειών αυτών, στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου.

2.1 Η Αρχή του Ελαχίστου Vs η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Η Αρχή του Ελαχίστου, γνωστή και ως Αρχή της Καλής Διάταξης, με σύγχρονη ορολογία, διατυπώνεται ως εξής:

Αρχή του Ελαχίστου

Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Ο σύγχρονος μαθηματικός συμβολισμός της Αρχής του Ελαχίστου είναι ο ακόλουθος:

Σύγχρονος μαθηματικός συμβολισμός

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ με $A \neq \varnothing$, υπάρχει $\alpha \in A$, για το οποίο $\alpha \leq \beta$, για κάθε $\beta \in A$.

Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, με σύγχρονη ορολογία, διατυπώνεται ως εξής:

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω Α ένα υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, τέτοιο ώστε:

- ✔ $1 \in A$,
- ✔ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αν $k \in A$, τότε $k + 1 \in A$.

Τότε ισχύει $A = \mathbb{N}$, δηλαδή το σύνολο Α ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Υπάρχει και μία δεύτερη διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Δεύτερη διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω πρόταση P(n), εξαρτώμενη από τον φυσικό αριθμό n, τέτοια ώστε:

- ✔ η P(1) να είναι αληθής,
- ✔ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αν η πρόταση P(k) είναι αληθής, τότε η πρόταση P(k + 1) είναι αληθής.

Τότε, η πρόταση P(n) είναι αληθής, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι η Αρχή του Ελαχίστου είναι ισοδύναμη με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Παραθέτουμε ακολούθως την απόδειξη(3) της ισοδυναμίας των δύο Αρχών, καθώς και της ισοδυναμίας των δύο διατυπώσεων της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Πρόταση

Οι ακόλουθες Αρχές είναι ισοδύναμες:

1. Αρχή του Ελαχίστου
2. Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής
3. Δεύτερη διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής

Απόδειξη

($1 \Rightarrow 2$) Έστω ότι ισχύει η Αρχή του Ελαχίστου. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.

Ας υποθέσουμε ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει σύνολο A, υποσύνολο του $\mathbb{N}$, για το οποίο:

- ✔ $1 \in A$,
- ✔ αν $k \in A$, τότε $k + 1 \in A$,

ενώ ταυτόχρονα $A \neq \mathbb{N}$.

Καλούμε T το συμπλήρωμα του A, δηλαδή $T = \mathbb{N} \setminus A$.

Επειδή $A \neq \mathbb{N}$, προκύπτει ότι το T δεν είναι κενό, άρα από την Αρχή του Ελαχίστου, έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω α.

(3) Η απόδειξη προέρχεται από τις κάτωθι πηγές:

- Πρόχειρες σημειώσεις για τον Απειροστικό Λογισμό Ι, Γιαννόπουλος Απ. Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2009, Σελ. 8
- Πρόχειρες σημειώσεις για τη Θεωρία Αριθμών, Μπεληγιάννης Α., Παπαδάκης Σ.,Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2013, Σελ. 3

Ταυτόχρονα ισχύει $1 \in A$, συνεπώς $\alpha > 1$. Προφανώς $\alpha - 1 \in \mathbb{N}$. Επειδή όμως το α είναι το ελάχιστο στοιχείο του Τ, το $\alpha - 1$ δεν είναι στοιχείο του Τ, συνεπώς το $\alpha - 1$ είναι στοιχείο του Α.

Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει $(\alpha - 1) + 1 \in A$, δηλαδή $\alpha \in A$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά, το Α ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

($2 \Rightarrow 3$) Έστω ότι ισχύει η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η δεύτερη διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N}$, ώστε η πρόταση $P(n)$ να είναι αληθής$\}$

Για το σύνολο Α ισχύουν:

- ✔ $1 \in A$,
- ✔ αν $k \in A$, τότε $k + 1 \in A$

Άρα $A = \mathbb{N}$, δηλαδή η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

($3 \Rightarrow 1$) Έστω ότι ισχύει η δεύτερη διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η Αρχή του Ελαχίστου.

Ας υποθέσουμε ότι η Αρχή του Ελαχίστου δεν ισχύει. Τότε υπάρχει σύνολο Β, μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών, το οποίο δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την πρόταση $P(n)$: $\{$για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ώστε $1 \leq k \leq n$, ισχύει $k \notin B\}$

- ✔ Παρατηρούμε ότι $1 \notin B$, καθώς, αν αυτό δεν ήταν αληθές, το 1 θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του Β. Συνεπώς η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής.
- ✔ Έστω ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής, δηλαδή οι αριθμοί 1, 2, 3, ... n δεν ανήκουν στο Β. Αν $n + 1 \in B$, τότε το $n + 1$ θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του Β, κάτι που είναι άτοπο. Άρα $n + 1 \notin B$, δηλαδή η πρόταση $P(n + 1)$ είναι αληθής.

Από τη δεύτερη διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει ότι, η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $B = \varnothing$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά, δεν υπάρχει μη κενό σύνολο $B \subseteq \mathbb{N}$, το οποίο δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. □

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε την αποδεικτική ισχύ της Αρχής του Ελαχίστου στα Αριθμητικά Βιβλία 7, 8, 9 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όπου παρουσιάζονται έννοιες και προτάσεις της Θεωρίας Αριθμών.

2.2 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής του Ελαχίστου στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη

Το 7ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είναι το πρώτο από τα λεγόμενα Αριθμητικά Βιβλία (Βιβλία 7, 8 και 9). Περιεχόμενό του είναι η βασική Θεωρία Αριθμών και συγκεκριμένα η θεωρία της αναλογίας αριθμών, ως συνέχεια μάλλον, της θεωρίας της αναλογίας γεωμετρικών μεγεθών που αναπτύσσεται στα Βιβλία 5 και 6. Το 7ο Βιβλίο περιέχει 23 Ορισμούς ή Όρους όπως ονομάζονται, 39 Προτάσεις, αλλά, σε αντίθεση, τόσο με τη θεμελίωση της επίπεδης γεωμετρίας, όπως αυτή παρουσιάζεται στο 1ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όσο και με τη σύγχρονη θεμελίωση των φυσικών αριθμών, όπως αυτή εκφράζεται από τα Αξιώματα του Peano, δεν περιλαμβάνει Αξιώματα.

Μεγάλο πλήθος, εξαιρετικής σημασίας ζητημάτων της Θεωρίας Αριθμών αποτελούν, όπως θα αναδειχθεί από τη μελέτη μας, είτε άμεσες, είτε έμμεσες συνέπειες των Προτάσεων 7.1, 7.2 και 7.31. Πράγματι, στις Προτάσεις αυτές αναπτύσσονται όλα τα απαραίτητα επιχειρήματα που οδηγούν σε σημαντικά συμπεράσματα της Θεωρίας Αριθμών, μεταξύ των οποίων το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής. Στον πυρήνα των αποδείξεων των Προτάσεων 7.1, 7.2 και 7.31 βρίσκεται η Αρχή του Ελαχίστου, η οποία χρησιμοποιείται, ή μάλλον προσεγγίζεται, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, με την ισοδύναμη μορφή της: *κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών είναι πεπερασμένη.*

Ας μελετήσουμε αναλυτικά τις συνέπειες της Αρχής του Ελαχίστου, μία προς μία.

2.2.1 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης αριθμών - Προτάσεις 7.1 – 7.2 – 7.3

Η εύρεση του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη αριθμών παρουσιάζεται στις Προτάσεις 7.1, 7.2, 7.3 και πραγματοποιείται με τη μέθοδο της Ανθυφαίρεσης. Ας ξεκινήσουμε με κάποιους στοιχειώδεις ορισμούς, στην πρωτότυπη μορφή τους.

Όρος 7.12

Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

Ένας αριθμός καλείται πρώτος, όταν έχει μέτρο μόνο τη μονάδα.

Όρος 7.13

Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί καλούνται πρώτοι μεταξύ τους, όταν έχουν κοινό μέτρο μόνο τη μονάδα.

Όρος 7.14

Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

Ένας αριθμός καλείται σύνθετος, όταν έχει μέτρο και κάποιον αριθμό διαφορετικό από τη μονάδα.

Όρος 7.15

Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί καλούνται σύνθετοι μεταξύ τους, όταν έχουν κοινό μέτρο και κάποιον αριθμό διαφορετικό από τη μονάδα.

Οι αποδείξεις(4) των Προτάσεων 7.1 και 7.2 που ακολουθούν είναι, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, σύμφωνες με το πνεύμα των αποδείξεων του Ευκλείδη, αλλά σε μία μάλλον γενικότερη μορφή και με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό. Να σημειώσουμε ότι, ενώ στις αποδείξεις των Προτάσεων στο πρωτότυπο κείμενο παρουσιάζονται μόνο κάποια αρχικά βήματα, ο Ευκλείδης θεωρεί τις αποδείξεις γενικές.

Πρόταση 7.1

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.	Έστω α, β δύο φυσικοί αριθμοί με α > β. Αν η ανθυφαίρεση του α προς το β έχει ως τελευταίο υπόλοιπο το 1, τότε οι αριθμοί α, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους.

(4) Οι αποδείξεις των Προτάσεων των Στοιχείων του Ευκλείδη, καθώς και σχετικά σχόλια, προέρχονται από τις παραδόσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη του Νεγρεπόντη, ακ.έτος 2016 -17, ΠΜΣ: Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών και από το βιβλίο των Νεγρεπόντη Σ., Φαρμάκη Β. Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαίτητου, Ευδόξου, Αθήνα: εκδόσεις Εκκρεμές, 2019

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β δεν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους και έστω γ κοινός διαιρέτης αυτών, με $\gamma > 1$. Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, λ τέτοιοι ώστε $\alpha = \mu\gamma$ και $\beta = \lambda\gamma$.

Έστω ότι η ανθυφαίρεση του α προς το β είναι πεπερασμένη και το υπόλοιπο του τελευταίου βήματος είναι 1. Ας υποθέσουμε δηλαδή ότι, η ακολουθία των διαδοχικών διαιρέσεων είναι η ακόλουθη:

$\alpha = \kappa_0 \beta + \gamma_1$, όπου $\gamma_1 < \beta$,

$\beta = \kappa_1\gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma_2 < \gamma_1$,

...

$\gamma_{n-1} = \kappa_n \gamma_n + \gamma_{n+1}$, όπου $\gamma_{n+1} < \gamma_n$,

$\gamma_n = \kappa_{n+1}\gamma_{n+1} + \mathbf{1}$

Είναι:

$\gamma_1 = \alpha - \kappa_0\beta$, άρα ο γ είναι διαιρέτης του γ_1,

$\gamma_2 = \beta - \kappa_1\gamma_1$, άρα ο γ είναι διαιρέτης του γ_2,

...

$1 = \gamma_n - \kappa_{n+1}\gamma_{n+1}$, άρα ο γ είναι διαιρέτης του 1, κάτι που είναι άτοπο, αφού $\gamma > 1$.

Άρα τελικά, τα α, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. □

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στην απόδειξη της Πρότασης 7.1, ο Ευκλείδης υποθέτει ότι οι αριθμοί α, β δεν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή υπάρχει κοινός διαιρέτης μεγαλύτερος της μονάδας και στη συνέχεια, με βάση αυτήν την υπόθεση, καταλήγει σε άτοπο. Πρόκειται φανερά για χρήση της "εις άτοπον" αποδεικτικής μεθόδου.

Πρόταση 7.2

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.	Έστω α, β δύο φυσικοί αριθμοί, όχι πρώτοι μεταξύ τους. Να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο, δηλαδή να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία των διαδοχικών διαιρέσεων είναι η ακόλουθη:

$\alpha = \kappa_0 \beta + \gamma_1$, όπου $\gamma_1 < \beta$,

$\beta = \kappa_1\gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma_2 < \gamma_1$,

...

$\gamma_{n-1} = \kappa_n \gamma_n + \gamma_{n+1}$, όπου $\gamma_{n+1} < \gamma_n$,

$\gamma_n = \kappa_{n+1}\gamma_{n+1} + \mathbf{0}$

Υποθέτουμε δηλαδή, ότι η ανθυφαίρεση του α προς το β είναι πεπερασμένη και το υπόλοιπο του τελευταίου βήματος είναι 0.

Ισχυρισμός 1: Ο γ_{n+1} είναι κοινός διαιρέτης των α και β.

Πράγματι, από το τελευταίο βήμα της ανθυφαίρεσης παρατηρούμε ότι ο γ_{n+1} είναι διαιρέτης του γ_n, άρα από το προηγούμενο βήμα προκύπτει ότι ο γ_{n+1} είναι διαιρέτης του γ_{n-1}, …., άρα από το δεύτερο βήμα προκύπτει ότι ο γ_{n+1} είναι διαιρέτης του β, άρα τελικά, από το πρώτο βήμα προκύπτει ότι ο γ_{n+1} είναι διαιρέτης του α.

Συνεπώς, ο γ_{n+1} είναι κοινός διαιρέτης των α και β.

Ισχυρισμός 2: Αν ο γ είναι κοινός διαιρέτης των α και β, τότε ο γ είναι διαιρέτης του γ_{n+1}.

Πράγματι, από το πρώτο βήμα προκύπτει ότι ο γ είναι διαιρέτης του γ_1, άρα από το δεύτερο βήμα προκύπτει ότι ο γ είναι διαιρέτης του γ_2,..., άρα τελικά, από το τελευταίο βήμα προκύπτει ότι ο γ είναι διαιρέτης του γ_{n+1}.

Συνεπώς, αφού ο γ_{n+1} είναι κοινός διαιρέτης των α και β και επιπλέον διαιρείται από κάθε άλλο κοινό τους διαιρέτη, άρα τελικά, ο γ_{n+1} είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των α και β. □

Στην Πρόταση 7.3 παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη τριών φυσικών αριθμών, όχι πρώτων ανά δύο μεταξύ τους. Την παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 7.3

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν	Έστω α, β, γ τρεις φυσικοί αριθμοί, όχι πρώτοι ανά δύο μεταξύ τους. Να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο, δηλαδή να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους.

Παρατηρώντας προσεκτικά τις αποδείξεις των Προτάσεων 7.1 και 7.2 διαπιστώνουμε ότι η Πρόταση 7.1 αποτελεί υποπερίπτωση της Πρότασης 7.2. Πράγματι, στην Πρόταση 7.1 οι αριθμοί α

και β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους και ο ΜΚΔ αυτών είναι η μονάδα, ενώ στην Πρόταση 7.2 οι αριθμοί α και β δεν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους και ο ΜΚΔ αυτών είναι το τελευταίο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο. Γιατί άραγε ο Ευκλείδης διαχωρίζει τις δύο προτάσεις;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, παραθέτουμε τους δύο πρώτους μεγαλειώδεις ορισμούς του 7ου Βιβλίου των *Στοιχείων*.

Όρος 7.1

Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

Μονάδα καλείται αυτό από το οποίο φτιάχνονται όλα τα όντα.

Όρος 7.2

Αριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Αριθμός καλείται το πλήθος μονάδων.

Είναι φανερό ότι ο Ευκλείδης δεν θεωρεί τη μονάδα ως αριθμό, καθώς η μονάδα δεν είναι *πλήθος μονάδων*, δηλαδή δεν επαληθεύει τον ορισμό του αριθμού. Ο διαχωρισμός των δύο περιπτώσεων και η παράθεση δύο ξεχωριστών Προτάσεων κρίνεται, με βάση αυτό το σκεπτικό, αναγκαία.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη παρατηρούν ότι στον ορισμό 7.2, δεν αναφέρεται ρητά ότι το πλήθος των μονάδων πρέπει να είναι πεπερασμένο, όπως επίσης ότι οι μονάδες πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους. Τα δύο αυτά σημεία αποτελούν, όπως προκύπτει από τις υπόλοιπες προτάσεις, σαφείς παραδοχές του Ευκλείδη.

Κοινό στοιχείο των αποδείξεων των Προτάσεων 7.1 και 7.2 είναι η αποδεικτική μέθοδος που χρησιμοποιείται. Πρόκειται σαφέστατα για πεπερασμένη μαθηματική επαγωγή επί μιας αναδρομικής ακολουθίας. Συγκεκριμένα και στις δύο αποδείξεις ορίζεται αναδρομικά μια πεπερασμένη ακολουθία όρων:

$$\alpha > \beta > \gamma_1 > \ldots > \gamma_n > \gamma_{n+1} > 1$$

Οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι οι αρχικοί αριθμοί α και β, ενώ οι υπόλοιποι όροι είναι τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα που παράγονται σε κάθε βήμα της ανθυφαίρεσης. Με δεδομένο ότι η ακολουθία των διαδοχικών ανθυφαιρετικών υπολοίπων είναι πεπερασμένη, η διαδικασία ολοκληρώνεται μετά από πεπερασμένα βήματα.

Πώς όμως εξασφαλίζεται η περατότητα της ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων; Το σύγχρονο επιχείρημα για το γεγονός αυτό είναι η Αρχή του Ελαχίστου. Πράγματι, η γνησίως

φθίνουσα ακολουθία των διαδοχικών ανθυφαιρετικών υπολοίπων, όπως κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, είναι πεπερασμένη, συνεπώς ο αλγόριθμος εύρεσης του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη τερματίζεται. Για τον Ευκλείδη ίσως, το επιχείρημα σχετίζεται με το πεπερασμένο πλήθος των μονάδων που περιέχει κάθε αριθμός. Το αδιαμφισβήτητο συμπέρασμα στο οποίο τελικά καταλήγουμε είναι ότι στον πυρήνα των αποδείξεων των Προτάσεων 7.1 και 7.2 βρίσκεται η Αρχή του Ελαχίστου.

2.2.2 Αναλογία αριθμών - Ορισμός ισοδύναμων κλασμάτων

Πρόταση 7.4 – Κανονική Μορφή Ορισμού 7.21

Στον Ορισμό 7.21 ο Ευκλείδης ορίζει την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, όπου α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί. Διαβάζουμε:

Όρος 7.21

> ***Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.***
>
> Ανάλογοι καλούνται οι αριθμοί όταν, αν ο πρώτος αποτελεί, είτε πολλαπλάσιο, είτε μέρος, είτε μέρη του δευτέρου, τότε και ο τρίτος αποτελεί, είτε το ίδιο πολλαπλάσιο, είτε το ίδιο μέρος, είτε τα ίδια μέρη αντίστοιχα του τετάρτου.

Στον παραπάνω ορισμό διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- ✔ Ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιος του β και ο αριθμός γ είναι ισοπολλαπλάσιος του δ.
- ✔ Ο αριθμός α είναι μέρος του β και ο αριθμός γ είναι το αυτό μέρος του δ.
- ✔ Ο αριθμός α είναι μέρη του β και ο αριθμός γ είναι τα αυτά μέρη του δ.

Πότε όμως ένας αριθμός καλείται πολλαπλάσιο, πότε μέρος και πότε μέρη ενός άλλου αριθμού; Η απάντηση δίνεται στους ορισμούς 7.5, 7.3 και 7.4 αντίστοιχα.

Όρος 7.5

> ***Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.***
>
> Ένας αριθμός καλείται πολλαπλάσιος ενός μικρότερού του αριθμού, όταν ο μικρότερος αριθμός είναι μέρος του αριθμού.

Με σύγχρονο συμβολισμό:

Ο α είναι πολλαπλάσιο του β, όταν

- α > β και
- α = κ·β

Όρος 7.3

Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

Ένας αριθμός καλείται μέρος ενός μεγαλύτερου αριθμού, όταν αποτελεί μέτρο του μεγαλύτερου αριθμού.

Με σύγχρονο συμβολισμό:

Ο α είναι μέρος του β, όταν

- α < β και
- β είναι πολλαπλάσιο του α.

Όρος 7.4

Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

Ένας αριθμός αποτελεί ένα από τα μέρη ενός μεγαλύτερου αριθμού, όταν δεν αποτελεί μέτρο του μεγαλύτερου αριθμού.

Με σύγχρονο συμβολισμό:

Ο αριθμός α είναι μέρη του β, όταν

- α < β και
- α δεν είναι μέρος του β.

Ο Ευκλείδης διακρίνει τρεις περιπτώσεις στον Ορισμό 7.21, για οποιουσδήποτε αριθμούς :

1. α πολλαπλάσιο του β, άρα α > β
2. α μέρος του β, άρα α < β
3. α μέρη του β, άρα α < β

Ο Νεγρεπόντης παρατηρεί ότι ο Ορισμός 7.21 είναι υπερβολικά συντετμημένος, καθώς καλύπτει μόνο τις περιπτώσεις όπου α < β ή α > β, ενώ δεν γίνεται καμία αναφορά στην περίπτωση που ισχύει α = β. Επιπρόσθετα, η τρίτη περίπτωση του Ορισμού 7.21 παρουσιάζει κάποιου είδους ασάφεια, καθώς το νόημα της φράσης, *τα αυτά μέρη*, δεν ξεκαθαρίζεται επαρκώς. Η αποσαφήνιση

των εκφράσεων *το αυτό μέρος* και *τα αυτά μέρη*, άρα και η πλήρης κατανόηση του Ορισμού 7.21 γίνεται στις Προτάσεις 7.5 και 7.6, όπου οι συγκεκριμένες εκφράσεις παρουσιάζονται ξανά.

Πρόταση 7.5

Ἐὰν ἀριθμός ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.	Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί. Αν ο α είναι μέρος του β και ο γ είναι το αυτό μέρος του δ, τότε ο αριθμός α + γ είναι το αυτό μέρος του β + δ.

Από τη μελέτη της απόδειξης της Πρότασης 7.5, σε σχέση με τη χρήση του όρου *το αυτὸ μέρος*, οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη καταλήγουν στην ακόλουθη ερμηνεία:

Το α είναι μέρος του β και το γ είναι το αυτό μέρος του δ, όταν υπάρχουν αριθμοί μ, κ, λ, με μ ακέραιο, ώστε $\alpha = 1 \cdot \kappa$ και $\gamma = 1 \cdot \lambda$ $\beta = \mu \cdot \kappa$ $\delta = \mu \cdot \lambda$

Πρόταση 7.6

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.	Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί. Αν ο α είναι μέρη του β και ο γ είναι τα αυτά μέρη του δ, τότε ο αριθμός α + γ είναι τα αυτά μέρη του β + δ

Από τη μελέτη της απόδειξης της Πρότασης 7.6, σε σχέση με τη χρήση του όρου *τα αυτά μέρη*, οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη καταλήγουν στην ακόλουθη ερμηνεία:

Το α είναι μέρη του β και το γ είναι τα αυτά μέρη του δ όταν υπάρχουν αριθμοί μ, ν, κ, λ, με μ, ν ακέραιους, ώστε $\alpha = \mu \cdot \kappa$ και $\gamma = \mu \cdot \lambda$ $\beta = \nu \cdot \kappa$ $\delta = \nu \cdot \lambda$

Η διαφορά ανάμεσα στις εκφράσεις *το αυτό μέρος* και *τα αυτά μέρη* σχετίζεται με την τιμή του αριθμού μ. Ειδικότερα, η έκφραση το αυτό μέρος αντιστοιχεί στην τιμή $\mu = 1$, ενώ η έκφραση τα αυτά μέρη αντιστοιχεί σε τιμές του μ, για τις οποίες ισχύει $\mu > 1$.

Μετά την αποσαφήνιση των εκφράσεων το αυτό μέρος και τα αυτά μέρη είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τον Ορισμό 7.21 με σύγχρονο συμβολισμό.

Σύγχρονη διατύπωση του Ορισμού 7.21

Αν α, β, γ, δ αριθμοί με $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, όταν υπάρχουν αριθμοί κ, λ, μ, ν, ώστε

$$\alpha = \mu \cdot \kappa \qquad \gamma = \mu \cdot \lambda$$

και

$$\beta = \nu \cdot \kappa \qquad \delta = \nu \cdot \lambda$$

Δηλαδή, θα λέμε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ όταν, για κάποιο κοινό μέτρο των α, β , έστω κ και κάποιο κοινό μέτρο των γ, δ, έστω λ, οι αντίστοιχοι συντελεστές είναι κοινοί.

Η παραπάνω διατύπωση του Ορισμού 7.21 παρουσιάζει όμως ένα σημαντικό μειονέκτημα. Η σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ορίζει, ή καλύτερα, θα έπρεπε να ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας, αυτής των ισοδύναμων κλασμάτων. Κατά συνέπεια, ο Ορισμός 7.21 θα έπρεπε να έχει μορφή κατάλληλη, ώστε να εξασφαλίζεται η ισχύς της μεταβατικής ιδιότητας, κάτι που δεν είναι αληθές, όπως αποδεικνύεται στην επόμενη Πρόταση, την οποία οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη καλούν Πρόταση 7.Α. Με δεδομένη τη χρήση της μεταβατικότητας από τον Ευκλείδη στην απόδειξη της Πρότασης 7.13, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι μάλλον ο Ευκλείδης θεωρεί τη μεταβατικότητα τετριμμένη.

Πρόταση 7.Α

Αν α, β, γ, δ, ε, ζ αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, υπάρχουν κ, λ, μ, ν, ώστε, $\alpha = \mu\kappa$ $\gamma = \mu\lambda$

$\beta = \nu\kappa$ $\delta = \nu\lambda$

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, υπάρχουν $\kappa_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$, ώστε, $\gamma = \mu_1\lambda_1$ $\varepsilon = \mu_1\kappa_1$

$\delta = \nu_1\lambda_1$ $\zeta = \nu_1\kappa_1$

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχει πρόβλημα στην ολοκλήρωση της απόδειξης, καθώς δεν γνωρίζουμε ότι ισχύει $\lambda = \lambda_1$. Η κατάλληλη τροποποίηση του Ορισμού 7.21 κρίνεται απαραίτητη.

Η τροποποίηση του Ορισμού 7.21 θα πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια της Πρότασης 7.4, βάσει της οποίας θα οδηγηθούμε, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, στη λεγόμενη Κανονική Μορφή του Ορισμού 7.21.

Πρόταση 7.4

Ἅπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.	Έστω δύο αριθμοί α, β με α > β. Τότε ο β, είτε είναι μέρος του α, είτε είναι μέρη του α.

Απόδειξη

Καλούμε κ το Μέγιστο Κοινό διαιρέτη των α και β [Πρόταση 7.2]
Υπάρχουν αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε:

$$\alpha = \nu\kappa \qquad \text{και} \qquad \beta = \mu\kappa$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- ✔ α, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $\kappa = 1$.
  Επειδή α > β προκύπτει ότι το β είναι μέρος του α.
- ✔ α, β δεν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $\kappa \neq 1$.

  Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

  - Το β μετρά το α.

    Είναι: $\beta = 1\,\kappa$
    $\alpha = \nu\,\kappa$, άρα το β είναι μέρος του α.
  - Το β δεν μετρά το α.

    Είναι: $\beta = \mu\,\kappa$
    $\alpha = \nu\kappa$, άρα το β είναι μέρη του α. □

Η Πρόταση 7.4 έχει ένα βαθύτερο νόημα: ο απόλυτα ασφαλής έλεγχος σχετικά με το αν ο αριθμός β είναι μέρος ή μέρη του αριθμού α, πραγματοποιείται μέσω του υπολογισμού του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη των δύο αριθμών.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη της Πρότασης 7.Α, οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη προτείνουν την ακόλουθη, Κανονική, όπως την ονομάζουν, μορφή του Ορισμού 7.21.

Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21

Αν α, β, γ, δ αριθμοί με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και κ = ΜΚΔ [α, β], λ = ΜΚΔ [γ, δ],

τότε υπάρχουν αριθμοί μ, ν, ώστε: α = μκ και γ = μλ

β = νκ δ = νλ

Η ισοδυναμία του Ορισμού 7.21 και της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21 εξασφαλίζεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση

Ο Ορισμός 7.21 είναι ισοδύναμος με την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21.

Απόδειξη

" $\Rightarrow$" Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, υπάρχουν αριθμοί κ_1, λ_1, μ_1, ν_1, ώστε

$\alpha = \mu_1\kappa_1$ και $\gamma = \mu_1\lambda_1$

$\beta = \nu_1\kappa_1$ $\delta = \nu_1\lambda_1$

Θέτουμε κ = ΜΚΔ [α, β] και λ = ΜΚΔ [γ, δ]

Από τον ισχυρισμό 2 της απόδειξης της Πρότασης 7.2 προκύπτει ότι, κάθε άλλος διαιρέτης των α, β διαιρεί και το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των α, β.

Άρα υπάρχουν μ, ν τέτοια ώστε, α = μκ και β = νκ

Αρκεί να δείξουμε ότι: γ = μλ και δ = νλ

Από τον ισχυρισμό 2 της απόδειξης της Πρότασης 7.2 προκύπτει ότι:

- κ = ΜΚΔ [α, β]
- κ_1 διαιρέτης των α, β

Άρα το κ_1 είναι διαιρέτης του κ, δηλαδή υπάρχει αριθμός ω, τέτοιος ώστε $\kappa = \kappa_1\omega$.

Ταυτόχρονα:

- λ = ΜΚΔ[γ, δ]
- λ_1 διαιρέτης των γ, δ

Άρα το λ_1 είναι διαιρέτης του λ, δηλαδή υπάρχει αριθμός φ, τέτοιος ώστε $\lambda = \lambda_1\varphi$.

Επειδή:

$\alpha = \mu\kappa = \mu(\omega\kappa_1) = (\mu\omega)\kappa_1$

και

$\alpha = \mu_1\kappa_1$,

άρα $\mu_1 = \mu\omega$ (1)

Αντίστοιχα, επειδή:

$\beta = \nu\kappa = \nu(\omega\kappa_1) = (\nu\omega)\kappa_1$

και

$\beta = \nu_1\kappa_1$,

άρα $\nu_1 = \nu\omega$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

- $\gamma = \mu_1\lambda_1 = (\mu\omega)\lambda_1 = \mu(\omega\lambda_1)$
- $\delta = \nu_1\lambda_1 = (\nu\omega)\lambda_1 = \nu(\omega\lambda_1)$

Συνεπώς ο $\omega\lambda_1$ είναι κοινός διαιρέτης των γ, δ.

Από τον ισχυρισμό 2 της απόδειξης της Πρότασης 7.2 προκύπτει ότι, ο $\omega\lambda_1$ είναι διαιρέτης του λ, όπου $\lambda = \varphi\lambda_1$. Άρα, ο $\varphi\lambda_1$ είναι διαιρέτης του $\omega\lambda_1$, άρα ο ω διαιρεί το φ.

Με ανάλογο επιχείρημα καταλήγουμε ότι ο φ διαιρεί το ω.

Τελικά $\varphi = \omega$.

Συνεπώς: $\gamma = \mu(\omega\lambda_1) = \mu(\varphi\lambda_1) = \mu\lambda$

$\delta = \nu(\omega\lambda_1) = \nu(\varphi\lambda_1) = \nu\lambda$

Άρα ισχύει η Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21.

" $\Leftarrow$ " Προφανής. □

Επιστρέφουμε στην απόδειξη της Πρότασης 7.Α. Για την ολοκλήρωσή της, θα χρησιμοποιήσουμε την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21.

Συνέχεια Απόδειξης της Πρότασης 7.Α

Έστω $\kappa = \text{ΜΚΔ}[\alpha, \beta]$, $\lambda = \text{ΜΚΔ}[\gamma, \delta]$, $\xi = \text{ΜΚΔ}[\varepsilon, \zeta]$

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, υπάρχουν μ, ν, ώστε: $\alpha = \mu\kappa$ και $\gamma = \mu\lambda$

$\beta = \nu\kappa$ $\delta = \nu\lambda$

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, υπάρχουν μ_1, ν_1, ώστε: $\gamma = \mu_1\lambda$ και $\varepsilon = \mu_1\xi$

$\delta = \nu_1\lambda$ $\zeta = \nu_1\xi$

Προφανώς ισχύει $\mu = \mu_1$ και $\nu = \nu_1$, άρα τελικά $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ □

Άμεσες συνέπειες της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21

Η μη εξασφάλιση της ισχύος της μεταβατικότητας από την απλή μορφή του Ορισμού 7.21 έχει ως αποτέλεσμα τον διαχωρισμό των υπόλοιπων προτάσεων του 7ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη σε δύο κατηγορίες: α) εκείνες τις προτάσεις που αποδεικνύονται από την απλή μορφή του Ορισμού 7.21 και β) εκείνες τις προτάσεις που αποδεικνύονται από την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21.

Θα παραθέσουμε ενδεικτικά ορισμένες από αυτές.

Πρόταση 7.11 (Χωρίς την Κανονική Μορφή του Ορισμού 7.21)

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.	Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, με $\alpha > \gamma$ και $\beta > \delta$. Τότε ισχύει $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\beta}$

Απόδειξη

Έστω $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ Από τον Ορισμό 7.21 υπάρχουν αριθμοί κ, λ, μ, ν τέτοιοι ώστε

$\alpha = \mu\kappa$ και $\gamma = \mu\lambda$

$\beta = \nu\kappa$ $\delta = \nu\lambda$

Είναι:

$$\alpha - \gamma = \mu(\kappa - \lambda) \qquad (1)$$

$\beta - \delta = \nu(\kappa - \lambda)$ (2)

Άρα υπάρχουν μ, ν, κ, κ – λ τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (1), (2), άρα $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$ □

Πρόταση 7.12 (Χωρίς την Κανονική Μορφή του Ορισμού 7.21)

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.	Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ φυσικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Πρόταση 7.13 - Εναλλάξ (Χωρίς την Κανονική Μορφή του Ορισμού 7.21)

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.	Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ υπάρχουν αριθμοί κ, λ, μ, ν τέτοιοι ώστε

$\alpha = \mu\kappa$ και $\gamma = \mu\lambda$

$\beta = \nu\kappa$ $\delta = \nu\lambda$

- Είναι $\alpha = \mu\kappa$

  $\gamma = \mu\lambda$, συνεπώς $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\mu\kappa}{\mu\lambda}$

- Είναι $\beta = \nu\kappa$

  $\delta = \nu\lambda$, συνεπώς $\frac{\beta}{\delta} = \frac{\nu\kappa}{\nu\lambda}$

Ισχυρισμός: $\frac{\mu\kappa}{\mu\lambda} = \frac{\nu\kappa}{\nu\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda}$

Πράγματι, από την Πρόταση 7.12 και επειδή $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda}$, προκύπτει ότι $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\kappa+\kappa}{\lambda+\lambda}$,

δηλαδή $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{2\kappa}{2\lambda}$

Με πεπερασμένη μαθηματική επαγωγή προκύπτει ότι $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu\kappa}{\mu\lambda}$, όπως και $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\nu\kappa}{\nu\lambda}$

Αν ίσχυε η μεταβατική ιδιότητα, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

Δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, καθώς η απλή μορφή του Ορισμού 7.21 δεν μας εξασφαλίζει την ισχύ της μεταβατικότητας.

Ας αποπειραθούμε να αποδείξουμε την ίδια Πρόταση χρησιμοποιώντας την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21.

Πρόταση 7.13 – Εναλλάξ (Με την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21)

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.	Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

Απόδειξη

Έστω $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Αν κ = ΜΚΔ [α, β] και λ = ΜΚΔ [γ, δ], υπάρχουν αριθμοί μ,ν, τέτοιοι ώστε:

α = μκ και γ = μλ

β = νκ δ = νλ

- Είναι: α = μκ και γ = μλ, συνεπώς $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\mu\kappa}{\mu\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda}$ (λόγω του ισχυρισμού)
- Είναι: β = νκ και δ = νλ, συνεπώς $\frac{\beta}{\delta} = \frac{\nu\kappa}{\nu\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda}$ (λόγω του ισχυρισμού)

Άρα τελικά, $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ □

Η ακόλουθη Πρόταση 7.14 εξασφαλίζει το καλώς ορισμένο του πολλαπλασιασμού των

κλασμάτων ειδικής μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, δηλαδή το καλώς ορισμένο του λεγόμενου ομώνυμου πολλαπλασιασμού.

Πρόταση 7.14 (Με την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21)

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.	Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\beta_2}{\beta_3}$ .... $\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu} = \frac{\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{\beta_i}{\beta_j}$, για κάθε $i \neq j$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση στην περίπτωση που $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$,

δηλαδή θα αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}$

Πράγματι:

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$, ισχύει $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ [Πρόταση 7.13] (1)

Επειδή $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$, ισχύει $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$ [Πρόταση 7.13] (2)

Άρα $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$ [Πρόταση 7.Α], δηλαδή $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}$ [Πρόταση 7.13] □

Η επόμενη Πρόταση είναι απαραίτητη για την απόδειξη της Πρότασης 7.16 και παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 7.15

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ	Έστω α, β φυσικοί αριθμοί .

ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.	Τότε ισχύει $\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta\alpha}$

Επίσης απαραίτητη για την απόδειξη της Πρότασης 7.16 είναι η ακόλουθη βοηθητική πρόταση, την οποία οι Νεγρεπόντης - Φαρμάκη καλούν Πρόταση 7.Β.

Πρόταση 7.Β

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta'}$, τότε $\beta = \beta'$.

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta'}$, υπάρχουν αριθμοί κ, λ, μ, ν, τέτοιοι ώστε

$\alpha = \mu\kappa$ και $\alpha = \mu\lambda$

$\beta = \nu\kappa$ $\beta' = \nu\lambda$

Επειδή $\alpha = \mu\kappa$ και $\alpha = \mu\lambda$ είναι $\kappa = \lambda$ και άρα τελικά $\beta = \beta'$. □

Είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την Πρόταση 7.16, η οποία συνδέεται με την ισχύ της αντιμεταθετικότητας.

Πρόταση 7.16 (Με την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21)

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.	Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$

Απόδειξη

Είναι $\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta\alpha}$ [Πρόταση 7.15] (1)

Είναι $\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha\beta}$ [Πρόταση 7.15] και άρα $\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha\beta}$ [Πρόταση 7.13] (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{\beta}{\beta\alpha} = \frac{\beta}{\alpha\beta}$ [Πρόταση 7.Α]

Επειδή $\frac{\beta}{\beta\alpha} = \frac{\beta}{\alpha\beta}$, προκύπτει τελικά $\beta\alpha = \alpha\beta$ [Πρόταση 7.Β] □

Οι Προτάσεις 7.17 και 7.18 που ακολουθούν είναι απαραίτητες για την απόδειξη της

Πρότασης 7.19 και παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 7.17

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.	Έστω α, β, γ φυσικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

Πρόταση 7.18

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.	Έστω α, β, γ φυσικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$

Πρόταση 7.19

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.	Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν, αδ = γβ

Απόδειξη

"⇒" Είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta}$

$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma\beta}{\delta\beta}$ [Προτάσεις 7.17, 7.18]

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, έχουμε $\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\gamma\beta}{\delta\beta}$

Άρα αδ = γβ [Πρόταση 7.Β]

"⇐" Αντιστρέφουμε τα βήματα. □

2.2.3 Περιγραφή της κλάσης ισοδυναμίας κλασμάτων ως συνέπεια της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη ισχυρίζονται ότι ο ορισμός της ισοδυναμίας κλασμάτων με τη χρήση της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21 είναι αδιαμφισβήτητα ανώτερος σε σχέση με εκείνον που προκύπτει από την Πρόταση 7.19 και σχετίζεται με την ισότητα των χιαστί γινομένων. Η ανωτερότητα συνδέεται με το γεγονός ότι η Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21, μέσω των Προτάσεων 7.20, 7.21 και 7.22, μας παρέχει τη δυνατότητα πλήρους περιγραφής των κλασμάτων που ισοδυναμούν με το $\frac{\alpha}{\beta}$

Ας μελετήσουμε προσεκτικά τις εξαιρετικές αυτές Προτάσεις.

Πρόταση 7.20

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα.	Έστω α, β, μ, ν φυσικοί αριθμοί, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}$ και μ, ν να είναι οι ελάχιστοι με λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ Τότε, υπάρχει αριθμός ω, τέτοιος ώστε $\alpha = \mu\omega$ και $\beta = \nu\omega$.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21.

Έστω $\kappa = \text{ΜΚΔ}\,[\alpha, \beta]$ και $\lambda = \text{ΜΚΔ}\,[\mu, \nu]$

Υπάρχουν αριθμοί μ_1, ν_1, τέτοιοι ώστε,

$$\alpha = \mu_1\kappa \qquad \text{και} \qquad \mu = \mu_1\lambda \ (1)$$

$$\beta = \nu_1\kappa \qquad\qquad \nu = \nu_1\lambda \ (2)$$

Είναι σαφές ότι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_1\lambda}{\nu_1\lambda} = \frac{\mu_1}{\nu_1}$, άρα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu_1}{\nu_1}$ [Πρόταση 7.Α]

Αν $\lambda > 1$, τότε $\mu_1 < \mu$

$\nu_1 < \nu$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα $\lambda = 1$.

Από (1), (2) προκύπτουν ότι $\mu = \mu_1$ και $\nu = \nu_1$,

άρα $\alpha = \mu\kappa$ και $\beta = \nu\kappa$,

δηλαδή υπάρχει αριθμός ω, τέτοιος ώστε $\alpha = \mu\omega$ και $\beta = \nu\omega$. □

Πρόταση 7.21

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.	Έστω α, β, μ, ν φυσικοί αριθμοί, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}$ και μ, ν να είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. Τότε οι μ, ν είναι οι ελάχιστοι με λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$

Απόδειξη

Έστω μ_1, ν_1 οι ελάχιστοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu_1}{\nu_1}$

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}$, είναι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_1}{\nu_1}$ [Πρόταση 7.Α]

Συνεπώς, υπάρχει αριθμός ω, τέτοιος ώστε: $\mu = \omega\mu_1$

$\nu = \omega\nu_1$

Αν $\omega > 1$, τότε οι μ, ν δεν είναι σχετικώς πρώτοι, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα $\omega = 1$, συνεπώς $\mu = \mu_1$ και $\nu = \nu_1$, δηλαδή οι μ, ν είναι οι ελάχιστοι με λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ □

Πρόταση 7.22

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.	Έστω α, β, μ, ν φυσικοί αριθμοί, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}$ και μ, ν να είναι οι ελάχιστοι με λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ Τότε οι μ, ν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21.

Έστω κ = ΜΚΔ [α, β] και λ = ΜΚΔ [μ, ν]

Υπάρχουν αριθμοί μ_1, ν_1, τέτοιοι ώστε,

$$\alpha = \mu_1\kappa \qquad \text{και} \qquad \mu = \mu_1\lambda \ (1)$$

$$\beta = \nu_1\kappa \qquad\qquad \nu = \nu_1\lambda \ (2)$$

Είναι σαφές ότι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_1\lambda}{\nu_1\lambda} = \frac{\mu_1}{\nu_1}$, άρα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu_1}{\nu_1}$ [Πρόταση 7.Α]

Αν $\lambda > 1$, τότε $\mu_1 < \mu$ και $\nu_1 < \nu$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα $\lambda = 1$, συνεπώς τα μ, ν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. □

Από τη μελέτη των Προτάσεων 7.20, 7.21, 7.22 προκύπτει η περιγραφή της κλάσης των κλασμάτων που είναι ισοδύναμα με το $\frac{\alpha}{\beta}$ Πρόκειται για το σύνολο:

$$A = \{\frac{\mu\omega}{\nu\omega}, \text{ όπου } \frac{\mu}{\nu} \text{ ανάγωγο κλάσμα και } \omega = 1,2,...\}$$

Η δυνατότητα περιγραφής των κλάσεων ισοδυναμίας, επιβεβαιώνει πράγματι την ανωτερότητα της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21 σε σχέση με τον ορισμό που στηρίζεται στην ισότητα των χιαστί γινομένων και προκύπτει από την Πρόταση 7.19.

2.2.4 Απόδειξη αρρητότητος του $\sqrt{N}$, όπου N όχι τετράγωνος αριθμός

Μία ακόμη ιδιαίτερα σημαντική συνέπεια των Προτάσεων 7.21 και 7.27 σχετίζεται με την απόδειξη της αρρητότητος πραγματικών αριθμών και συνοψίζεται στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση

Αν ο αριθμός N δεν είναι τετράγωνος, τότε ο $\sqrt{N}$ είναι άρρητος πραγματικός αριθμός.

Για την απόδειξη της βασικής αυτής πρότασης θα παραθέσουμε ορισμένες βοηθητικές προτάσεις.

Πρόταση 7.25

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.	Έστω α, β φυσικοί αριθμοί, σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. Τότε οι αριθμοί α^2, β είναι επίσης σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους.

Απόδειξη

Έστω $\kappa = \text{ΜΚΔ}\,[\alpha^2, \beta]$

Υπάρχουν αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε, $\alpha^2 = \mu\kappa$ και $\beta = \nu\kappa$

Τότε ισχύει, $\dfrac{\alpha^2}{\beta} = \dfrac{\mu\kappa}{\nu\kappa} = \dfrac{\mu}{\nu}$ [Προτάσεις 7.17, 7.18]

Άρα, $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\mu}{\nu\alpha}$

Επειδή τα α, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, υπάρχει ω τέτοιο ώστε,

$\mu = \omega\alpha$ και $\nu\alpha = \omega\beta$ [Πρόταση 7.20]

Είναι $\alpha^2 = \mu\kappa = \omega\alpha\kappa$, άρα $\alpha = \omega\kappa$.

Επειδή $\alpha = \omega\kappa$, $\beta = \nu\kappa$ και οι αριθμοί α, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, προκύπτει ότι $\kappa = 1$.

Συνεπώς οι αριθμοί α^2, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. □

Πρόταση 7.27

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀ κεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται [καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].	Έστω α, β φυσικοί αριθμοί, σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. Τότε: • οι αριθμοί α^2, β^2 είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, • οι αριθμοί α^3, β^3 είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, ... • οι αριθμοί α^ν, β^ν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους.

Απόδειξη

Επειδή τα α, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, έχουμε ότι οι αριθμοί α^2, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. [Πρόταση 7.25]

Επειδή τα α^2, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, έχουμε ότι οι αριθμοί α^2, β^2 είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. [Πρόταση 7.25]

Επαγωγικά, αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Ας επανέλθουμε στη βασική Πρόταση αρρητότητας, για την οποία οι Νεγρεπόντης –

Φαρμάκης, στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, αναφέρουν ότι είναι "συναφής προς τη μέθοδο του Αρχύτα στο Βιβλίο 8 των *Στοιχείων*." (Σελ. 9 της εισήγησης)

Πρόταση

Αν ο αριθμός N δεν είναι τετράγωνος, τότε ο $\sqrt{N}$ είναι άρρητος πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη

Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt{N}$ είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, τέτοιοι ώστε $\sqrt{N}=\frac{\mu}{\nu}$ [Πρόταση 7.21]

άρα $\frac{N}{1}=\frac{\mu^2}{\nu^2}$ (1)

Επειδή οι αριθμοί μ, ν είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους προκύπτει ότι οι αριθμοί μ^2, ν^2 είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους. [Πρόταση 7.27]

Προφανώς οι αριθμοί N, 1 είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, άρα, από την (1) έχουμε,

$N = \mu^2$ και $1 = \nu^2$, κάτι που είναι άτοπο, καθώς ο N δεν είναι τετράγωνος αριθμός.

Συνεπώς τελικά, ο αριθμός $\sqrt{N}$ είναι άρρητος πραγματικός αριθμός. □

2.2.5 Ανάλυση κάθε φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών

Ένα από τα βασικά θεωρήματα της Θεωρίας Αριθμών είναι το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, σύμφωνα με το οποίο:

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

Σύμφωνα με τον van der Waerden, στο 7ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, παρόλο που δεν διατυπώνεται ρητά το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, αναπτύσσονται ωστόσο όλα τα απαραίτητα για την απόδειξή του επιχειρήματα. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη υποστηρίζουν ότι η πλήρης απόδειξή του "προκύπτει με άμεση επέκταση του επιχειρήματος της Πρότασης 7.31 και χρήση της Πρότασης 7.30." (2019, Σελ. 70) Η Πρόταση 9.14 του 9ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη μοιάζει να προσεγγίζει εξαιρετικά το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, με μοναδική ίσως έλλειψη τη μη εξασφάλιση της μοναδικότητας της ανάλυσης του αριθμού σε

γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Ας μελετήσουμε τις Προτάσεις 7.30, 7.31, 7.32, καθώς και την Πρόταση 9.14.

Πρόταση 7.30

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.	Έστω α, β, ρ φυσικοί αριθμοί. Αν ο αριθμός ρ είναι πρώτος και διαιρεί το γινόμενο αβ, τότε ο ρ διαιρεί τον α ή ο ρ διαιρεί τον β.

Απόδειξη

Επειδή ο πρώτος αριθμός ρ διαιρεί το γινόμενο αβ, υπάρχει αριθμός κ, τέτοιος ώστε ρκ = αβ (1)

Η σχέση (1) παίρνει τη μορφή $\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{\rho}{\beta}$ [Πρόταση 7.19]

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ο πρώτος αριθμός ρ διαιρεί το β, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αν οι αριθμοί ρ, β είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους, τότε υπάρχει ω, τέτοιο ώστε

  $\alpha = \omega\rho$ και $\kappa = \omega\beta$.

  Άρα ο ρ διαιρεί τον α.

Άρα τελικά, ο αριθμός ρ διαιρεί τον α ή διαιρεί τον β. □

Οι Προτάσεις 7.31 και 7.32 σχετίζονται με τη δυνατότητα ανάλυσης ενός φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στην απόδειξη της Πρότασης 7.31 γίνεται για μία ακόμη φορά χρήση της Αρχής του Ελαχίστου. Πράγματι, ακριβώς όπως στις αποδείξεις των Προτάσεων 7.1 και 7.2, ορίζεται με αναδρομικό τρόπο μια ακολουθία αριθμών της μορφής $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > ... > \alpha_\kappa > ... > \alpha_\nu$, η οποία, λόγω της Αρχής του Ελαχίστου είναι πεπερασμένη, με συνέπεια τον τερματισμό της διαδικασίας και την ολοκλήρωση της απόδειξης.

Πρόταση 7.31

Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Κάθε σύνθετος αριθμός έχει τουλάχιστον έναν πρώτο αριθμό ως διαιρέτη του, ή ισοδύναμα, αν α σύνθετος φυσικός αριθμός, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός, ο οποίος διαιρεί τον α.

Απόδειξη

Έστω α σύνθετος φυσικός αριθμός. Προφανώς, υπάρχει $\alpha_1 > 1$, με $\alpha_1 \neq \alpha$, ώστε ο α_1 να είναι διαιρέτης του α.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ο α_1 είναι πρώτος αριθμός, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αν ο α_1 είναι σύνθετος αριθμός, τότε υπάρχει $\alpha_2 > 1$, με $\alpha_2 \neq \alpha_1$, ώστε ο α_2 να είναι διαιρέτης του α_1, συνεπώς και του α.

  Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

  - .....
  - κ.ο.κ

  Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία αριθμών της μορφής

$$\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_\kappa > \ldots > \alpha_\nu$$

Λόγω της Αρχής του Ελαχίστου, η συγκεκριμένη ακολουθία είναι πεπερασμένη, ενώ ο τελευταίος διαιρέτης είναι ταυτόχρονα πρώτος αριθμός και διαιρέτης του α. Άρα ισχύει το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 7.32 αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 7.31.

Πρόταση 7.32

Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Κάθε αριθμός, είτε είναι ο ίδιος πρώτος, είτε έχει έναν τουλάχιστον πρώτο αριθμό ως διαιρέτη του. Ισοδύναμα, αν α φυσικός αριθμός, τότε, είτε ο α είναι πρώτος, είτε υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός, ο οποίος διαιρεί τον α.

Απόδειξη

Έστω α φυσικός αριθμός. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ο α είναι πρώτος αριθμός, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αν ο α είναι σύνθετος αριθμός τότε, από την Πρόταση 7.31, υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός, έστω ρ, ο οποίος διαιρεί τον α. □

Ας περάσουμε τώρα στην βασική Πρόταση 9.14 που προσεγγίζει, σύμφωνα με τον van der

Waerden, το σύγχρονο Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής.

Πρόταση 9.14

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.	Αν β, γ, δ πρώτοι αριθμοί και α είναι ο ελάχιστος αριθμός που μετριέται από αυτούς, τότε ισχύει α = β · γ · δ

Απόδειξη

Έστω α ο ελάχιστος αριθμός που μετριέται από τους πρώτους αριθμούς β, γ, δ. Θα αποδείξουμε ότι ο α δεν μετριέται από κανέναν άλλο πρώτο αριθμό.

Έστω ε πρώτος αριθμός, για τον οποίο ισχύει ε ≠ β και ε≠ γ και ε ≠ δ και ο ε μετρά τον α, δηλαδή υπάρχει αριθμός ζ, έτσι ώστε, α = ε · ζ

Επειδή β / α και γ / α και δ / α, θα ισχύει β / ε · ζ και γ / ε · ζ και δ / ε · ζ

Άρα, από την Πρόταση 7.30 προκύπτει ότι, τα β, γ, δ μετρούν, είτε το ε, είτε το ζ. Επειδή ε πρώτος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα β, γ, δ μετρούν το ζ, κάτι που είναι άτοπο, αφού ζ < α και α ο ελάχιστος που μετρούν τα β, γ, δ. □

Επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός ότι η πλήρης απόδειξη της Πρότασης 9.14 αποτελεί επέκταση του επιχειρήματος της Πρότασης 7.31, στην οποία γίνεται χρήση της Αρχής του Ελαχίστου.

2.2.6 Η απειρία των πρώτων αριθμών

Με την Πρόταση 9.20 εισάγεται το άπειρο στους αριθμούς, αφού σε αυτήν αποδεικνύεται αυστηρά η απειρία των πρώτων αριθμών. Στην απόδειξη της Πρότασης 9.20 γίνεται χρήση της Πρότασης 7.31, άρα η Πρόταση 9.20 αποτελεί έμμεση συνέπεια της Αρχής του Ελαχίστου.

Ας τη μελετήσουμε.

Πρόταση 9.20

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.	Για κάθε δοσμένο πλήθος πρώτων αριθμών, υπάρχουν πάντα περισσότεροι πρώτοι αριθμοί. **Με σύγχρονη διατύπωση:** Το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

Απόδειξη

Έστω α, β, γ τρεις δοσμένοι πρώτοι αριθμοί.

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν περισσότεροι πρώτοι αριθμοί από τους α, β, γ.

Καλούμε ε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β, γ [Πρόταση 7.36] και θεωρούμε τον αριθμό δ = ε + 1 (1)

Έστω ότι ο δ δεν είναι πρώτος. Θα υπάρχει ένας πρώτος αριθμός, έστω ζ, ο οποίος μετρά τον δ. [Πρόταση 7.31]

Θα αποδείξουμε ότι ζ ≠ α και ζ ≠ β και ζ ≠ γ.

Ας υποθέσουμε ότι ο ζ ταυτίζεται με κάποιον από τους αριθμούς α, β, γ. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ζ = α.

Επειδή ο α μετρά τον ε, άρα και ο ζ θα μετρά τον ε.

Όμως ο ζ μετρά τον δ, συνεπώς θα μετρά και τη διαφορά τους δ – ε.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι δ – ε = 1, άρα τελικά ο ζ θα μετρά τη μονάδα, κάτι που είναι άτοπο. Άρα τελικά ο δ είναι πρώτος αριθμός. □

2.2.7 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής του Ελαχίστου & της Αρχής της Μαθηματικής επαγωγής συνολικά

Οι βασικότερες συνέπειες των Προτάσεων 7.1, 7.2 και 7.31 και άρα οι βασικότερες συνέπειες της Αρχής του Ελαχίστου παρουσιάζονται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Η Αρχή του Ελαχίστου Προτάσεις 7.1, 7.2, 7.31	**Εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη αριθμών** Προτάσεις 7.1, 7.2, 7.3 – Μέθοδος της Ανθυφαίρεσης **Αναλογία αριθμών - Ορισμός ισοδύναμων κλασμάτων** Ορισμός 7.21 + Πρόταση 7.4 $\rightarrow$ Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21 **Περιγραφή της κλάσης ισοδυναμίας κλασμάτων – ρητού** $\{\frac{\mu\omega}{\nu\omega}$, όπου $\frac{\mu}{\nu}$ ανάγωγο κλάσμα και $\omega = 1,2,...\}$ Επιτυγχάνεται με τις Προτάσεις 7.20, 7.21, 7.22 **Απόδειξη αρρητότητος του $\sqrt{N}$, όπου N δεν είναι τετράγωνος αριθμός** Αποδεικνύεται αυστηρά με χρήση των Προτάσεων 7.21 και 7.27 **Ανάλυση κάθε φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών** Παρουσιάζεται στην Πρόταση 9.14 με χρήση της Πρότασης 7.30 **Η απειρία των πρώτων αριθμών** Αποδεικνύεται αυστηρά στην Πρόταση 9.20 με εφαρμογή της Πρότασης 7.31, εισάγοντας το άπειρο στους αριθμούς.

Από τον παραπάνω πίνακα καταλήγουμε στο εξής αδιαμφισβήτητο συμπέρασμα: η Αρχή του Ελαχίστου, που χρησιμοποιείται άμεσα στις Προτάσεις 7.1, 7.2 και 7.31, διαθέτει τεράστια αποδεικτική δύναμη στη βασική Θεωρία Αριθμών. Θεμελιώδη, μη τετριμμένα αποτελέσματα της Θεωρίας Αριθμών, αλλά και παράδοξες, αντίθετες προς την κοινή διαίσθηση προτάσεις, όπως η ύπαρξη άρρητων πραγματικών αριθμών απορρέουν από αυτήν.

Εύλογα, τίθεται το ερώτημα:

Ποια είναι άραγε η προέλευση της αποδεικτικής δύναμης της Αρχής του Ελαχίστου και από

πού πηγάζει η παραδοξότητα ορισμένων προτάσεων;

Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε την ερμηνεία των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη σε σχέση με την προέλευση της αποδεικτικής δύναμης της Αρχής του Ελαχίστου και της ισοδύναμης προς αυτήν Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

2.3 Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ως συμβατή περάτωση του Απείρου

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην εργασία τους με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* χαρακτηρίζουν την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ως μία παράτολμη υπόθεση και όχι υπόθεση ρουτίνας, όπως συχνά θεωρείται. Αναγνωρίζουν μάλιστα σε αυτήν μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Αν δεχτούμε την ερμηνεία τους, τότε η ισχυρή αποδεικτική δύναμη των δύο ισοδύναμων Αρχών, δηλαδή της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής και της Αρχής του Ελαχίστου, παύει να αποτελεί μυστήριο και εξηγείται απόλυτα λόγω της προσέγγισης της αντίφασης.

Ας μελετήσουμε προσεκτικά τα επιχειρήματά τους.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε την ισχύ μιας πρότασης, έστω P(n), για όλους τους φυσικούς αριθμούς, χωρίς τη χρήση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται τα εξής βήματα:

Βήμα 1ο: αποδεικνύουμε την ισχύ της πρότασης για n = 1, δηλαδή αποδεικνύουμε την P(1).

Βήμα 2ο: αποδεικνύουμε την ισχύ της πρότασης για n = 2, δηλαδή αποδεικνύουμε την P(2).

... ,

Βήμα κο: αποδεικνύουμε την ισχύ της πρότασης για n = κ, δηλαδή αποδεικνύουμε την P(κ).

... ,

κ.ο.κ.

Σχηματικά έχουμε:

Βήμα 1ο: P(1)

Βήμα 2ο: P(2)

... ,

Βήμα κ^{ο}: P(κ)

... ,

κ.ο.κ.

Με δεδομένο ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών είναι άπειρο σύνολο, η απόδειξη της ισχύος μίας πρότασης P(n), χωρίς τη χρήση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί για άπειρους αριθμούς, κατά συνέπεια, η συνολική απόδειξη της πρότασης P(n) για όλους τους φυσικούς αριθμούς θα είναι, αναπόφευκτα, άπειρου μήκους. Είναι όμως αποδεκτή, στα πλαίσια μιας τυπικής αξιωματικής θεωρίας, μια απόδειξη άπειρου μήκους;

Ας θυμηθούμε ορισμένους απαραίτητους ορισμούς της Μαθηματικής Λογικής, όπως τους παραθέτουν οι Αναπολιτάνος και Δημητρακόπουλος.(5)

Ορισμός

Μία τυπική αξιωματική θεωρία ορίζεται γενικά από τις παρακάτω συνθήκες:

1. Ένα σύνολο συμβόλων, το αλφάβητο της γλώσσας της θεωρίας, το οποίο συμβολίζουμε L_T. Μία πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της L_T καλείται έκφραση της γλώσσας της θεωρίας.

2. Ένα σύνολο τύπων, υποσύνολο του συνόλου των εκφράσεων της L_T. Συνήθως υπάρχει ένας συγκεκριμένος και πεπερασμένα ελέγξιμος μηχανισμός ελέγχου, ώστε να αποφανθούμε αν μία έκφραση της L_T είναι τύπος.

3. Ένα πεπερασμένο σύνολο αποδεικτικών κανόνων. Πρόκειται για σχέσεις ανάμεσα στους τύπους της L_T.

Ορισμός

Σε μία τυπική αξιωματική θεωρία T, καλούμε απόδειξη, μία **πεπερασμένη** ακολουθία τύπων $A_1, A_2,...A_n$, τέτοια ώστε, για κάθε i, το A_i είναι:

1. είτε αξίωμα,

2. είτε άμεση συνέπεια των τύπων που έχουν προηγηθεί, μέσω συγκεκριμένου αποδεικτικού κανόνα. (Αναπολιτάνος, 1985, Σελ. 169)

(5) Τα βασικά εγχειρίδεια για τη Μαθηματική Λογική είναι: Αναπολιτάνος, Δ. (1985). Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη, και Δημητρακόπουλος, Κ. (2003). Μαθηματική Λογική. Πάτρα: Έλληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Ας επιστρέψουμε στο ερώτημά μας σχετικά με το εάν μια απόδειξη άπειρου μήκους γίνεται αποδεκτή στα πλαίσια μιας τυπικής αξιωματικής θεωρίας. Όπως αναφέρεται ρητά στους παραπάνω ορισμούς, σε μία τυπική αξιωματική θεωρία, οι μόνες αποδεκτές αποδείξεις είναι εκείνες που έχουν πεπερασμένο μήκος, κατά συνέπεια απόδειξη άπειρου μήκους μιας πρότασης P(n) για όλους τους φυσικούς αριθμούς, δεν είναι αποδεκτή. Ουσιαστικά δηλαδή, δεν είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ισχύ μιας πρότασης για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Την παραπάνω αδυναμία εύρεσης απόδειξης μιας πρότασης για όλους τους φυσικούς αριθμούς έρχεται να ανατρέψει το πρόσθετο αξίωμα, η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Πράγματι, η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας απολύτως αποδεκτής απόδειξης μιας πρότασης P(n), για όλους τους φυσικούς αριθμούς, σε δύο μόνο βήματα:

Βήμα 1ο: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για τον πρώτο φυσικό αριθμό, δηλαδή αποδεικνύουμε την P(1).

Βήμα 2ο: Έχοντας ως υπόθεση την ισχύ της πρότασης για τον τυχαίο φυσικό αριθμό n, δηλαδή έχοντας ως υπόθεση την ισχύ της πρότασης P(n), αποδεικνύουμε την ισχύ της πρότασης για τον επόμενό του n+1, δηλαδή αποδεικνύουμε την ισχύ της πρότασης P(n+1).

Σχηματικά έχουμε:

Βήμα 1ο: P(1)

Βήμα 2ο: $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Είναι σαφές ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής μετατρέπει μία μη αποδεκτή απόδειξη άπειρων βημάτων, σε απόδειξη δύο μόνο βημάτων, συνεπώς κάτι που από τη φύση του είναι άπειρο, περατώνεται. Πρόκειται για μία περίπτωση εφαρμογής της λεγόμενης Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου, δηλαδή μία περίπτωση προσέγγισης της αντίφασης. Η συγκεκριμένη διαπίστωση αιτιολογεί πλήρως την εξαιρετικά μεγάλη αποδεικτική δύναμη, τόσο της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής, όσο και της ισοδύναμης με αυτήν, Αρχής του Ελαχίστου.

Δεν γνωρίζουμε εάν η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής αποτελεί καλή προσέγγιση της αντίφασης και εάν μελλοντικά εισάγει ή ακόμη χειρότερα εάν έχει ήδη εισάγει κάποια αντίφαση στο σύστημά μας. Ο Νεγρεπόντης, στη διάλεξη που έδωσε στην Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης, ανέφερε τα ονόματα των Gödel, σύμφωνα με τον οποίο "δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί η ύπαρξη αντίφασης" και Nelson, σύμφωνα με τον οποίο η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής έχει ήδη εισάγει αντίφαση στο σύστημά μας". (Σελ. 17)

2.4 Η Θεωρία Αριθμών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου

Η Θεωρία Αριθμών αναγνωρίζεται από το Υπουργείο Παιδείας "ως ίσως ο πιο ελκυστικός κλάδος της μαθηματικής επιστήμης", όπως αναφέρεται σε έγγραφο του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου με τίτλο *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008* (Σελ. 84). Στο ίδιο έγγραφο η Θεωρία Αριθμών, ως αντικείμενο διδασκαλίας στη Β΄ Λυκείου, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε αφηρημένο επίπεδο, αναμένεται "να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να διεγείρει την πνευματική περιέργεια και την ερευνητική τους διάθεση." (Σελ. 84) Ως πλεονεκτήματα της Θεωρίας Αριθμών αναφέρονται τα ακόλουθα:

- Δεν απαιτούνται και δεν προστίθενται νέες έννοιες, αλλά προϋπάρχουσες, είτε από το Δημοτικό, είτε από το Γυμνάσιο.
- Οι ασκήσεις και τα προβλήματα είναι κατανοητά από το σύνολο των μαθητών και των μαθητριών.
- Επιτυγχάνεται η άσκηση των μαθητών και των μαθητριών στην αποδεικτική διαδικασία και συγκεκριμένα

  α) στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής,

  β) στην ευθεία απόδειξη,

  γ) στη μέθοδο της "εις άτοπον απαγωγής",

  δ) αλλά και σε ευρετικές διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων.

(Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων,
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Δευτεροβάθμιας
Εκπαίδευσης, Σελ. 84, 85, 86)

Με δεδομένη λοιπόν τη σπουδαιότητα που αποδίδεται στον συγκεκριμένο κλάδο των μαθηματικών, τόσο από τη μαθηματική κοινότητα, αλλά και από το Υπουργείο Παιδείας, κρίνουμε ενδιαφέρον να μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης της Θεωρίας Αριθμών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου συνολικά, έχοντας πάντα κατά νου ότι οι μαθηματικές προτάσεις στο Γυμνάσιο δεν συνοδεύονται από την αυστηρή μαθηματική τους απόδειξη.

Πριν όμως, ξεκινήσουμε τη μελέτη μας, αξίζει να παραθέσουμε ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον

ζήτημα που αφορά τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στο Λύκειο.

Στοιχεία της Θεωρίας Αριθμών, συνοδευόμενα από αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις, παρουσιάζονται στο Λύκειο, στο 4ο Κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. Το βιβλίο αυτό χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το σχολικό έτος 1998 – 99 και στη διδακτέα ύλη κατά το συγκεκριμένο σχολικό έτος συμπεριλαμβάνονταν οι πέντε πρώτες παράγραφοι του 4ου Κεφαλαίου. Έτσι, οι μαθητές και οι μαθήτριες διδάσκονταν ορισμένα από τα βασικά στοιχεία της Θεωρίας Αριθμών, όπως είναι η Μαθηματική Επαγωγή, η Ευκλείδεια Διαίρεση, η Διαιρετότητα, ο Μέγιστος κοινός διαιρέτης, το Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και οι Πρώτοι αριθμοί. Τα σχολικά έτη που ακολούθησαν, οι παράγραφοι του Κεφαλαίου 4 αφαιρούνταν σταδιακά από τη διδακτέα ύλη, μέχρι που το σχολικό έτος 2014 – 15, η Θεωρία Αριθμών αφαιρέθηκε συνολικά από τη διδακτέα ύλη. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τις παραγράφους που, ανά σχολικό έτος, ήταν εκτός διδακτέας ύλης.

Σχολικό έτος	**Εκτός διδακτέας ύλης**
1998 – 99	• 4.6 Γραμμική διοφαντική εξίσωση • 4.7 Ισοϋπόλοιποι αριθμοί
2007 – 08	Αφαιρούνται επιπλέον: • 4.4 Μέγιστος κοινός διαιρέτης – Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο • 4.5 Πρώτοι αριθμοί
2010 – 11	Αφαιρούνται επιπλέον: • 4.2 Ευκλείδεια Διαίρεση • 4.3 Διαιρετότητα
2014 – 15	Αφαιρείται επιπλέον: • 4.1 Η Μαθηματική Επαγωγή

Παρατηρούμε ότι μέσα σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα, το σύνολο της Θεωρίας Αριθμών αφαιρέθηκε από τη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου, με αποτέλεσμα, από το σχολικό έτος 2014 – 15 και μέχρι σήμερα, οι μαθητές και οι μαθήτριες Λυκείου να ολοκληρώνουν τη φοίτησή τους, χωρίς δυστυχώς, να διδάσκονται, με την απαραίτητη μαθηματική αυστηρότητα, ορισμούς εννοιών και αποδείξεις προτάσεων της Θεωρίας Αριθμών, παρά την αναγνωρισμένη, τόσο από τη μαθηματική κοινότητα, όσο και από το Υπουργείο, σπουδαιότητά της.

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης στοιχείων της Θεωρίας Αριθμών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου, που όπως αναφέραμε δεν παρουσιάζεται καμία

μαθηματική απόδειξη και στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β΄ Τάξης, που όπως αναφέραμε δεν αποτελεί διδακτέα ύλη, συγκριτικά με τον αντίστοιχο τρόπο παρουσίασης στα Αριθμητικά Βιβλία 7, 8, 9 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Τρόπος παρουσίασης Αρχής του Ελαχίστου – Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. και συγκεκριμένα στο 4ο Κεφάλαιο, στην παράγραφο 4.1 με τίτλο *Η Μαθηματική Επαγωγή*, παρουσιάζεται για πρώτη και μοναδική φορά στα σχολικά βιβλία η μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής.

Αρχικά παρουσιάζονται ορισμένα ιστορικά στοιχεία.

Διαβάζουμε:

> Η Θεωρία Αριθμών, δηλαδή η μελέτη των ιδιοτήτων των θετικών ακεραίων, έθεσε από πολύ νωρίς τους μαθηματικούς μπροστά στο εξής πρόβλημα: Κάποια πρόταση αληθεύει για ορισμένες περιπτώσεις ακεραίων. Είναι όμως αδύνατο να εξεταστούν όλες οι ειδικές περιπτώσεις. Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει γενικά; (Σελ. 135)

Στη συνέχεια αναφέρονται οι εξής μαθηματικοί:

- Francesco Mauroliko, ο οποίος "έδειξε λοιπόν ότι υπάρχει ένας γενικός τρόπος μετάβασης από μια περίπτωση στην αμέσως επόμενη." (Σελ. 135)
- A. de Morgan & R. Dedekind, οι οποίοι "κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα καθιέρωσαν με τις εργασίες τους τους όρους μαθηματική επαγωγή ή τέλεια επαγωγή." (Σελ. 136)
- Blaise Pascal, ο οποίος "στην πραγματεία του για το αριθμητικό τρίγωνο το 1654 διατύπωσε τη μέθοδο με σαφήνεια" (Σελ. 135) και περιέγραψε τη μέθοδο απόδειξης μιας ιδιότητας που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου του, ως εξής:

> Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα:
>
> Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.
>
> Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα

ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.

Από αυτό γίνεται φανερό ότι η πρόταση αληθεύει σε κάθε περίπτωση, γιατί η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή, λόγω του πρώτου λήμματος. Έτσι λόγω του δεύτερου λήμματος θα ισχύει και στην 3η γραμμή, άρα και στην 4η κ.ο.κ., μέχρι το άπειρο. (Σελ. 135)

Στη συνέχεια διατυπώνεται η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής και αναφέρεται ρητά ότι αποτελείται από δύο απολύτως αναγκαία βήματα.

Διαβάζουμε:

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Έστω Ρ(ν) ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακεραίους.

Αν

(i) ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1, δηλαδή ο Ρ(1) είναι αληθής,

και

(ii) η αλήθεια του Ρ(ν) συνεπάγεται την αλήθεια του Ρ(ν +1) για κάθε ν, τότε ο ισχυρισμός Ρ(ν) αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν. (Σελ. 137)

Η Μαθηματική Επαγωγή, σύμφωνα με έγγραφο του Υπουργείου Παιδείας "αποτελεί βασική αποδεικτική μέθοδο την οποία πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές που στρέφονται προς τις θετικές σπουδές. " *(*Υπουργείο Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων, *Καθορισμός και διαχείριση διδακτέας ύλης Θετικών Μαθημάτων, των Α΄ Β΄ και Γ΄ τάξεων Ημερήσιου και Εσπερινού Γενικού Λυκείου, για το σχολικό έτος 2010–11,* Σελ. 36*).* Όπως όμως είδαμε, από το σχολικό έτος 2014 – 15 και μέχρι σήμερα, οι μαθητές και οι μαθήτριες Λυκείου δεν τη διδάσκονται.

Η Αρχή του Ελαχίστου διατυπώνεται ρητά ως υποσημείωση, στην επόμενη παράγραφο, δηλαδή στην παράγραφο 4.2 με τίτλο *Ευκλείδεια Διαίρεση*, του 4ου Κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

Διαβάζουμε:

Αποδεικνύεται ότι κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο. (Σελ. 141)

Η ισοδυναμία της Αρχής του Ελαχίστου και της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής δεν αναφέρεται.

Τρόπος παρουσίασης Ευκλείδειας Διαίρεσης στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, των Βανδουλάκη Ι., Καλλιγά Χ., Μαρκάκη Ν., Φερεντίνου Σ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 1ο – Οι φυσικοί αριθμοί, παράγραφος Α.1.4 με τίτλο *Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα*, δίνονται οι ορισμοί της Ευκλείδειας Διαίρεσης, του διαιρετέου, του διαιρέτη, του πηλίκου, του υπολοίπου.

Διαβάζουμε:

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει: $\Delta = \delta\pi + \upsilon$.
- Ο αριθμός Δ λέγεται διαιρετέος, ο δ λέγεται διαιρέτης, ο αριθμός π ονομάζεται πηλίκο και το υ υπόλοιπο της διαίρεσης.
- Το υπόλοιπο είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $0 \leq \upsilon < \delta$. (Σελ. 25)

Σημαντική παράλειψη, κατά την προσωπική μας άποψη, αποτελεί το γεγονός ότι δεν αναφέρεται ρητά η μοναδικότητα των π, υ.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. και συγκεκριμένα στο 4ο Κεφάλαιο στην παράγραφο 4.2 με τίτλο *Ευκλείδεια Διαίρεση*, διατυπώνονται και αποδεικνύονται ορισμένα σημαντικά Θεωρήματα.

Διαβάζουμε:

Θεώρημα 1

Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί κ και υ, τέτοιοι ώστε $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \beta$. (Σελ. 141)

Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός ότι στην απόδειξη του Θεωρήματος γίνεται χρήση της Αρχής του Ελαχίστου, η οποία διατυπώνεται ρητά, ως υποσημείωση.

Γενίκευση Θεωρήματος για οποιαδήποτε ακεραίους

Αν α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ, τέτοιοι ώστε $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < |\beta|$ (Σελ. 142)

Στη συνέχεια ορίζεται ρητά η ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση, το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής. Ακολουθούν παραδείγματα ευκλείδειων διαιρέσεων και οι μορφές των άρτιων, των περιττών αριθμών και των τετραγώνων αυτών.

Τρόπος παρουσίασης της Εύρεσης του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη αριθμών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, των Βανδουλάκη Ι., Καλλιγά Χ., Μαρκάκη Ν., Φερεντίνου Σ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α΄– Κεφάλαιο 1ο – Οι φυσικοί αριθμοί, παράγραφος Α.1.5 με τίτλο *Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων*, παρουσιάζεται η εύρεση του Μ.Κ.Δ και του Ε.Κ.Π αριθμών μέσω της ανάλυσή τους σε γινόμενο πρώτων αριθμών.

Διαβάζουμε:

Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια της ανάλυσης να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π αυτών των αριθμών.

Λύση

Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη για το ΜΚΔ και τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη για το ΕΚΠ.

2520	2 διαιρώ με το 2	2940	2 διαιρώ με το 2	3780	2 διαιρώ με το 2
1260	2	1470	2	1890	2
630	2	735	3 διαιρώ με το 3	945	3 διαιρώ με το 3
315	3 διαιρώ με το 3	245	5 διαιρώ με το 5	315	3
105	3	49	7 διαιρώ με το 7	105	3
35	5 διαιρώ με το 5	7	7	35	5 διαιρώ με το 5
7	7 διαιρώ με το 7	1		7	7 διαιρώ με το 7
1				1	

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad$ $2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\quad$ $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

ΜΚΔ(2520, 2940, 3780) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ και ΕΚΠ(2520, 2940, 3780)= $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$

(Σελ. 28)

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου, των Αργυράκη, Δ., Βουργάνα, Π., Μεντή, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργη, Μ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 1 παράγραφος 1.8 με τίτλο *Ε.Κ.Π και Μ.Κ.Δ ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων,* παρουσιάζεται η εύρεση του Ε.Κ.Π και του Μ.Κ.Δ αλγεβρικών παραστάσεων κατά αντιστοιχία με τη μέθοδο εύρεσης του Ε.Κ.Π και του Μ.Κ.Δ αριθμών.

Διαβάζουμε:

> Δραστηριότητα
>
> 1. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 24, 300 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των αριθμών αυτών.
>
> 2. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των μονωνύμων $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$ και των πολυωνύμων $3(x-y)(x+y)$, $18(x-y)^2$, $9(x-y)$.
>
> Σε προηγούμενη τάξη μάθαμε να βρίσκουμε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ θετικών ακεραίων αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
>
> Για παράδειγμα, οι αριθμοί 12, 24, 300, αν αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, γράφονται:
>
> $12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad$ $24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad$ $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
>
> Άρα, [...] Μ.Κ.Δ (12, 24, 300) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ (Γινόμενο κοινών παραγόντων με το μικρότερο εκθέτη)
>
> Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
> [...] (Σελ. 68)

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. και συγκεκριμένα στο 4ο Κεφάλαιο στην παράγραφο 4.3 με τίτλο *Διαιρετότητα*, διατυπώνεται ρητά ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης υπολογίζεται στις Προτάσεις 7.1 και 7.2 του 7ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη με τη μέθοδο του Ευκλείδειου αλγόριθμου. Στην παράγραφο 4.4 με τίτλο *Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης -*

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο, ορίζονται οι έννοιες του κοινού διαιρέτη, του μέγιστου κοινού διαιρέτη και στη συνέχεια αποδεικνύεται το σχετικό Θεώρημα.

Διαβάζουμε:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν α, β είναι δύο φυσικοί αριθμοί και υ είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β, τότε (α, β) = (β, υ) (Σελ. 151)

Ακολουθεί συγκεκριμένο παράδειγμα εύρεσης του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη των αριθμών 111 και 78 με τη μέθοδο του Ευκλείδειου αλγόριθμου.

Διαβάζουμε:

Ας χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω θεώρημα στον υπολογισμό του Μ.Κ.Δ των 111 και 78. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την ευκλείδεια διαίρεση έχουμε:

$111 = 1 \cdot 78 + 33$

$78 = 2 \cdot 33 + 12$

$33 = 2 \cdot 12 + 9$

$12 = 1 \cdot 9 + 3$

$9 = 3 \cdot 3 + 0$

Επομένως,

$$(111, 78) = (78, 33) = (33, 12) = (12, 9) = (9, 3) = (3, 0) = 3,$$

δηλαδή (111, 78) = 3, που είναι και το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο των διαδοχικών διαιρέσεων. (Σελ. 152)

Η παραπάνω μέθοδος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο φυσικών αριθμών εφαρμόζεται στη συνέχεια για α, β θετικούς ακέραιους με α > β, μέσω της ευκλείδειας διαίρεσης αυτών.

Διαβάζουμε:

Γενικά, για δύο θετικούς ακεραίους α, β με α > β, η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Εφαρμόζουμε επανειλημμένα και διαδοχικά την ευκλείδεια διαίρεση και γράφουμε

$\alpha = \kappa_1\beta + \upsilon_1, \qquad 0 < \upsilon_1 < \beta$

$\beta = \kappa_2\upsilon_1 + \upsilon_2,$ $\qquad 0 < \upsilon_2 < \upsilon_1$

$\upsilon_1 = \kappa_3\upsilon_2 + \upsilon_3,$ $\qquad 0 < \upsilon_3 < \upsilon_2$

.....

Από τον έλεγχο των ανισοτήτων στη δεξιά στήλη βλέπουμε ότι για την ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων ισχύει $\beta > \upsilon_1 > \upsilon_2 > \upsilon_3 > .... \geq 0$. Επομένως, ύστερα από β το πολύ βήματα θα εμφανιστεί το υπόλοιπο 0. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$\upsilon_{\nu-2} = \kappa_\nu\upsilon_{\nu-1} + \upsilon_\nu,$ $\qquad \upsilon_\nu > 0$

$\upsilon_{\nu-1} = \kappa_{\nu+1}\upsilon_\nu + 0.$

Τότε ισχύει $(\alpha, \beta) = \upsilon_\nu$. Αυτό προκύπτει από τη διαδοχική εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon_1) = (\upsilon_1, \upsilon_2) = ... = (\upsilon_\nu, 0) = \upsilon_\nu$$

Επομένως, ο Μ.Κ.Δ των α και β είναι το τελευταίο θετικό υπόλοιπο των παραπάνω αλγοριθμικών διαιρέσεων.

Η διαδικασία αυτή αποτελεί τον ευκλείδειο αλγόριθμο και χρησιμοποιείται γενικότερα για τον προσδιορισμό του Μ.Κ.Δ δύο οποιωνδήποτε αριθμών.

(Σελ. 152 – 153)

Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, ο υπολογισμός του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη δύο αριθμών παρουσιάζεται στις Προτάσεις 7.1 και 7.2 και η μέθοδος που προτείνεται είναι η μέθοδος της Ανθυφαίρεσης ή του Ευκλείδειου αλγόριθμου. Το πλέον σημαντικό στοιχείο των Προτάσεων αυτών είναι η, έστω και προσεγγιστική, χρήση της Αρχής του Ελαχίστου. Στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, η εύρεση του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη δύο αριθμών, πραγματοποιείται μέσω της ανάλυσης των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η ιδέα αυτή ενισχύεται περαιτέρω στην Γ΄ Γυμνασίου, καθώς πριν τον υπολογισμό του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλασίου αλγεβρικών παραστάσεων τονίζεται και μάλιστα, όπως αναφέρεται, "κατ΄αντιστοιχία με την εύρεση του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλασίου δύο αριθμών", η ανάγκη παραγοντοποίησης των αλγεβρικών παραστάσεων. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου για την Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης υπολογίζεται με τη μέθοδο του Ευκλείδειου Αλγορίθμου. Βέβαια, όπως ήδη σημειώσαμε, η Θεωρία Αριθμών στο Λύκειο δεν αποτελεί στο σύνολό της διδακτέα ύλη από το σχολικό έτος 2014–15 και μετά, με αποτέλεσμα οι μαθητές και οι μαθήτριες να μην έρχονται σε επαφή με τη μέθοδο αυτή.

Η μέθοδος εύρεσης του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη που έχει αποκρυσταλλωθεί στους μαθητές και στις μαθήτριες είναι ξεκάθαρα μέσω της ανάλυσης των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ο Νεγρεπόντης, στη διάλεξη που έδωσε στην Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης ανέφερε ότι υπάρχει διεθνώς μία τάση μη διδασκαλίας του Ευκλείδειου αλγόριθμου και αναρωτήθηκε σε ποιο βαθμό αυτό είναι διδακτικά ορθό. Ανέφερε τις διαπιστώσεις του αμερικάνου μαθηματικού Hyman Bass, σχετικά με το σχολικό πρόγραμμα της Αμερικής:

> Το σχολικό πρόγραμμα δίνει μικρή σημασία στον Ευκλείδειο αλγόριθμο, με τον οποίο βρίσκεται ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης δύο αριθμών. Η συνήθης μέθοδος είναι να βρούμε πρώτα το ανάπτυγμα σε γινόμενο πρώτων αριθμών των δύο αριθμών και μετά απλώς να παρατηρήσουμε τους πρώτους και να υπολογίσουμε αμέσως τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη. (Σελ. 10)

Όπως ανέφερε ο Νεγρεπόντης, ο Hyman Bass, σε σχέση με την αποτελεσματικότητα των δύο μεθόδων σχολιάζει τα εξής:

> Και πράγματι η μέθοδος αυτή για μικρούς αριθμούς είναι η πιο αποτελεσματική. Αλλά, αν δεν αναφερθεί κάτι άλλο, αυτό στερεί από τους μαθητές τη δυνατότητα σύγκρισης των δύο μεθόδων – Ευκλείδειος αλγόριθμος έναντι παραγοντοποίηση σε πρώτους. Γενικά για μεγάλους αριθμούς (π.χ με > 6 ψηφία), το πρόβλημα της παραγοντοποίησης γίνεται ιδιαίτερα δύσκολο, ενώ ο Ευκλείδειος αλγόριθμος χρειάζεται πολύ λιγότερα βήματα (και πολυωνυμικό χρόνο). Είναι τόσο δύσκολη η παραγοντοποίηση ώστε χρησιμοποιείται στην κρυπτογραφία! Είναι κάπως ειρωνικό ότι αν παραμελήσουμε τη μελέτη του Ευκλείδειου αλγόριθμου, με την δικαιολογία ότι μπορούν οι υπολογιστές να κάνουν αυτούς τους υπολογισμούς, θα στερήσουμε από τους μαθητές την έκθεση σε μια σημαντική ιδέα για τη σύγχρονη επιστήμη των υπολογιστών. (Σελ. 10)

Την ίδια άποψη, σύμφωνα με τον Νεγρεπόντη, παρουσιάζει ο Donald Knuth στο βιβλίο του με τίτλο *The Art of Computing Programming* vol.2. Ο Knuth παρουσιάζει αναλυτικά και τις δύο μεθόδους εύρεσης του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη και σημειώνει:

> It is a great deal harder to factor a large number n than to compute the greatest common divisor of two large numbers m and n; therefore we should avoid factoring large numbers whenever possible. (Σελ. 11)

Αντίστοιχο σχόλιο περιέχεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και

Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. και συγκεκριμένα στο 4ο Κεφάλαιο στην παράγραφο 4.4 με τίτλο *Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης - Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο.*

Διαβάζουμε:

> Αν για τον υπολογισμό του Μ.Κ.Δ δύο ακεραίων προσδιορίσουμε προηγουμένως τους διαιρέτες τους, τότε, ιδιαίτερα για μεγάλους αριθμούς, απαιτείται πολύς χρόνος. Μια σύντομη και αποτελεσματική μέθοδος προσδιορισμού του Μ.Κ.Δ οφείλεται στον Ευκλείδη και λέγεται ευκλείδειος αλγόριθμος. (Σελ. 151)

Τελικό συμπέρασμα σχετικά με την βέλτιστη μέθοδο υπολογισμού του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη δύο αριθμών είναι ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες θα πρέπει να διδάσκονται και τις δύο μεθόδους και να εφαρμόζουν κατά περίπτωση εκείνη που κρίνουν καταλληλότερη.

Τρόπος παρουσίασης Αναλογίας αριθμών – Ορισμός ισοδύναμων κλασμάτων στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, των Βανδουλάκη Ι., Καλλιγά Χ., Μαρκάκη Ν., Φερεντίνου Σ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 2ο – Τα κλάσματα, παράγραφος Α.2.1 με τίτλο *Η έννοια του κλάσματος,* δίνεται ο ορισμός του κλάσματος.

Διαβάζουμε:

$$\text{Κλάσμα:} \quad \frac{\text{πόσα μέρη πήραμε}}{\text{σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε}} = \frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}} \quad \text{(Σελ. 35)}$$

Στην επόμενη παράγραφο Α.2.2 με τίτλο *Ισοδύναμα κλάσματα,* αναφέρονται ο ορισμός της ισοδυναμίας δύο κλασμάτων και η ισότητα των χιαστί γινομένων.

Διαβάζουμε:

- Δύο κλάσματα, $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα, όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$
- Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα χιαστί γινόμενα $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.

Δηλαδή: αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$. (Σελ. 38)

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Λυκείου, των Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Παπασταυρίδη Σ., Πολύζου Γ., Σβέρκου Α., Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2ο – Οι πραγματικοί Αριθμοί, παράγραφος 2.1 με τίτλο *Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους (επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)*, παρουσιάζεται σε εφαρμογή η αναλογία αριθμών ως ισοδύναμη με την ισότητα των χιαστί γινομένων.

Διαβάζουμε:

Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες των αναλογιών:

i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ (εφόσον $\beta\delta \neq 0$) (Σελ. 50)

Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, η αναλογία αριθμών παρουσιάζεται στον Ορισμό 7.21. Η Πρόταση 7.4 σε συνδυασμό με τον Ορισμό 7.21 οδηγεί στη λεγόμενη Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21, με βάση την οποία, η ισότητα των χιαστί γινομένων αποτελεί αποδείξιμη πρόταση. Στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου και Λυκείου, ο τρόπος παρουσίασης της αναλογίας αριθμών οδηγεί με βεβαιότητα τους μαθητές και τις μαθήτριες στην ταύτιση της ισοδυναμίας δύο κλασμάτων με την ισότητα των χιαστί γινομένων. Όμως, η Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21 είναι σε μεγάλο βαθμό ανώτερη και σημαντικά πιο ισχυρή σε σχέση με την ισότητα των χιαστί γινομένων, καθώς, μεταξύ άλλων συνεπειών:

- ✔ καθιστά αποδείξιμες τις προτάσεις 7.20, 7.21, 7.22, με τις οποίες επιτυγχάνεται η πλήρης περιγραφή των κλάσεων ισοδυναμίας των κλασμάτων,
- ✔ αναπτύσσονται όλα τα αναγκαία επιχειρήματα ώστε να αποδειχθεί η Πρόταση 7.30, σύμφωνα με την οποία κάθε φυσικός αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων αριθμών.

Τρόπος παρουσίασης της κλάσης ισοδυναμίας κλασμάτων – ρητού στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου

Η Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21 είναι, όπως ήδη αναφέραμε, σε μεγάλο βαθμό ανώτερη και σημαντικά πιο ισχυρή σε σχέση με την ισότητα των χιαστί γινομένων, καθώς καθιστά αποδείξιμες τις προτάσεις 7.20, 7.21, 7.22. Οι προτάσεις αυτές περιγράφουν πλήρως τις κλάσεις ισοδυναμίας των κλασμάτων, ως ισοπολλαπλάσια αριθμητή και παρονομαστή του αντίστοιχου ανάγωγου κλάσματος.

Ειδικότερα, κάθε κλάση ισοδυναμίας κλασμάτων, κάθε ρητός αριθμός δηλαδή, ορίζεται ως

το σύνολο $A = \{\frac{\mu\omega}{\nu\omega}$, όπου $\frac{\mu}{\nu}$ ανάγωγο κλάσμα και $\omega = 1,2,...\}$

Η συγκεκριμένη οπτική του ρητού αριθμού δεν αναπτύσσεται, σε καμία περίπτωση, από τον ορισμό της ισοδυναμίας κλασμάτων μέσω της ισότητας των χιαστί γινομένων, άρα οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν έχουν την έννοια του ρητού αριθμού ως μία κλάση ισοδυναμίας.

Τρόπος παρουσίασης της απόδειξης αρρητότητος του $\sqrt{N}$, όπου N δεν είναι τετράγωνος αριθμός στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, των Βλάμου Π., Δρούτσα Π., Πρέσβη Γ., Ρεκούμη Κ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α, Κεφάλαιο 2ο – Οι πραγματικοί Αριθμοί, παράγραφος Α2.1 με τίτλο *Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού*, οι μαθητές και οι μαθήτριες έρχονται σε πρώτη επαφή με τους άρρητους αριθμούς. Στην επόμενη παράγραφο Α2.2 με τίτλο *Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί,* παρουσιάζονται κάποια ιστορικά στοιχεία για την κοσμοθεωρία των Πυθαγορείων και για την κρίση που δημιουργήθηκε λόγω της ανακάλυψης της ασυμμετρίας. Ουσιαστικά περιγράφεται μέχρι ένα σημείο η απόδειξη της αρρητότητας, χωρίς βέβαια μαθηματική αυστηρότητα, με δεδομένο ότι δεν προβλέπεται η διδασκαλία αποδείξεων στο Γυμνάσιο.

Διαβάζουμε:

> Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1 cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
>
> Στη συνέχεια, οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι δεν υπάρχει ρητός $\frac{\mu}{\nu}$, τέτοιος ώστε
>
> $x = \frac{\mu}{\nu}$
>
> Αυτό σημαίνει ότι ο x δεν μπορεί να είναι ούτε δεκαδικός, ούτε περιοδικός δεκαδικός. (Σελ. 45)

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Λυκείου, των Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Παπασταυρίδη Σ., Πολύζου Γ., Σβέρκου Α., Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2ο – Οι πραγματικοί Αριθμοί, παράγραφος 2.1 με τίτλο *Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους (επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)* , παρουσιάζεται σε εφαρμογή η απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$. Η μέθοδος απόδειξης είναι αντίστοιχη εκείνης που παρουσιάσαμε στην ενότητα 1.2 της

παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τρόπος παρουσίασης της Ανάλυσης κάθε φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, των Βανδουλάκη Ι., Καλλιγά Χ., Μαρκάκη Ν., Φερεντίνου Σ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 1ο – Οι φυσικοί αριθμοί, παράγραφος Α.1.5 με τίτλο *Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων*, παρουσιάζεται συγκεκριμένο παράδειγμα ανάλυσης αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. και συγκεκριμένα στο 4ο Κεφάλαιο στην παράγραφο 4.5 με τίτλο *Πρώτοι Αριθμοί*, παρουσιάζονται δύο από τα σημαντικότερα, όπως χαρακτηρίζονται, αποτελέσματα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς. Αναγνωρίζουμε τις προτάσεις:

1. Πρόταση 9.14: Κάθε ακέραιος αναλύεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών.
2. Πρόταση 9.20: Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Ακολουθούν αυστηροί ορισμοί των εννοιών πρώτος, σύνθετος και η απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αριθμητικής.

Διαβάζουμε:

> ΘΕΩΡΗΜΑ 8
>
> Αν ένας πρώτος ρ διαιρεί το γινόμενο αβ δύο ακεραίων, τότε διαιρεί έναν, τουλάχιστον, από τους ακεραίους αυτούς.
>
> ΑΠΟΔΕΙΞΗ
>
> Έστω ότι ρ δεν διαιρεί τον α. Επειδή ο αριθμός ρ είναι πρώτος, οι μοναδικοί διαιρέτες του είναι οι 1 και ρ. Επομένως, ο Μ.Κ.Δ. των α και ρ είναι (α, ρ) = 1, δηλαδή ο ρ είναι πρώτος προς τον α. Αφού λοιπόν ρ / αβ και (ρ, α) = 1, σύμφωνα με το Πόρισμα 3, ρ / β. □ (Σελ. 165)
>
> ΘΕΩΡΗΜΑ 9
>
> Κάθε θετικός ακέραιος α > 1 αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων (αν παραβλέψουμε τη σειρά των παραγόντων).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο α είναι πρώτος, τότε προφανώς το θεώρημα ισχύει.

Αν ο α είναι σύνθετος, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 6, θα ισχύει $\alpha = \rho_1\beta_1$, όπου ρ_1 πρώτος και β_1 ακέραιος με $\alpha > \beta_1 > 1$.

Αν ο β_1 είναι πρώτος, τότε ο α είναι γινόμενο πρώτων παραγόντων και το θεώρημα αληθεύει.

Αν ο β_1 είναι σύνθετος, τότε θα έχουμε $\beta_1 = \rho_2\beta_2$, με ρ_2 πρώτος και $\alpha > \beta_2 > 1$

Αν ο β_2 είναι πρώτος, τότε $\alpha = \rho_1\rho_2\beta_2$ και ο α είναι γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Αν ο β_2 είναι σύνθετος, τότε η παραπάνω διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί και οδηγεί σε μια σχέση $\alpha = \rho_1\rho_2\rho_3\beta_3$, με ρ_3 πρώτο και $\alpha > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 1$

Αποδεικνύεται ότι, αν συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή, ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα βρούμε τελικά έναν πρώτο ρ_κ, τέτοιο, ώστε:

$\alpha = \rho_1\ \rho_2\ \rho_3 ... \rho_\kappa$

Ας υποθέσουμε ότι ο α αναλύεται και με άλλο τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ότι δηλαδή υπάρχουν και οι πρώτοι $q_1, q_2, q_3, ... q_\lambda$, τέτοιοι ώστε

$\alpha = \rho_1\ \rho_2\ \rho_3 ... \rho_\kappa = q_1\ q_2\ q_3 \dots q_\lambda$ (1)

και έστω $\kappa \leq \lambda$. Ο πρώτος ρ_1 είναι διαιρέτης του α, άρα και του γινομένου $q_1\ q_2\ q_3 \dots q_\lambda$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 8, ο ρ_1 είναι διαιρέτης ενός τουλάχιστον από τους παράγοντες $q_1, q_2, q_3, ... q_\lambda$, έστω ρ_1 / q_μ, όπου $1 < \mu < \lambda$. Ο q_μ όμως είναι πρώτος και έχει διαιρέτες μόνο το 1 και τον εαυτό του. Άρα επειδή $q_\mu \neq 1$, θα είναι $\rho_1 = q_\mu$. Ύστερα από τη διαγραφή των δύο αυτών ίσων παραγόντων, με ανάλογο συλλογισμό συμπεραίνουμε ότι ο ρ_2 πρέπει να είναι ίσος με έναν τουλάχιστον από τους υπόλοιπους παράγοντες του δεύτερου μέλους της (1) π.χ τον q_τ. Αφού διαγράψουμε τους ρ_2 και q_τ, συνεχίζουμε ομοίως με τους $\rho_3 ... \rho_\kappa$. Στο τέλος της διαδικασίας όλοι οι παράγοντες $\rho_1\ \rho_2\ \rho_3 ... \rho_\kappa$ θα έχουν διαγραφεί, αφήνοντας μόνο τον αριθμό 1 στο πρώτο μέλος της ισότητας (1). Κανένας όμως και από τους παράγοντες $q_1\ q_2\ q_3 \dots q_\lambda$, δεν θα έχει απομείνει και στο δεύτερο μέλος της (1), αφού όλοι οι παράγοντες είναι μεγαλύτεροι από το 1. Έτσι οι παράγοντες $\rho_1\ \rho_2\ \rho_3 ... \rho_\kappa$ του πρώτου μέλους σχηματίζουν ζεύγη ίσων αριθμών με τους παράγοντες του δεύτερου μέλους. Αυτό αποδεικνύει ότι, με

εξαίρεση ίσως τη σειρά των παραγόντων, οι δύο αναλύσεις του αριθμού είναι ταυτόσημες. □ (Σελ. 165 – 166)

Τρόπος παρουσίασης της απειρίας των πρώτων αριθμών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, των Βανδουλάκη Ι., Καλλιγά Χ., Μαρκάκη Ν., Φερεντίνου Σ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 1ο – Οι φυσικοί αριθμοί, παράγραφος Α.1.4 με τίτλο *Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα,* αναφέρεται ρητά ότι "οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι το πλήθος", χωρίς όμως να περιλαμβάνεται η απόδειξη, καθώς δεν προβλέπεται η διδασκαλία αποδείξεων στο Γυμνάσιο.

Διαβάζουμε:

> Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 100.
>
> Λύση
>
> Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός, δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος. Γνώριζαν ακόμη ότι δεν υπάρχει ένας απλός κανόνας που να δίνει τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς. Με την απλή μέθοδο του Ερατοσθένη, γνωστή ως "Κόσκινο του Ερατοσθένη", που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από ένα δοσμένο αριθμό. □ (Σελ. 29)

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. και συγκεκριμένα στο 4ο Κεφάλαιο στην παράγραφο 4.5 με τίτλο *Πρώτοι Αριθμοί,* αποδεικνύεται με αυστηρή μαθηματική απόδειξη η απειρία των πρώτων αριθμών, δηλαδή η Πρόταση 9.20.

Διαβάζουμε:

> ΘΕΩΡΗΜΑ 7 (του Ευκλείδη)
>
> Υπάρχουν άπειροι θετικοί πρώτοι αριθμοί.
>
> Απόδειξη
>
> Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$. Θα αποδείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο.

Σχηματίζουμε τον αριθμό $A = \rho_1 \rho_2 ... \rho_\nu + 1$. Ο αριθμός όμως αυτός, επειδή είναι μεγαλύτερος του 1, θα έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη, έστω τον ρ_i, με $1 \leq i \leq \nu$. Αλλά, αν ο ρ_i διαιρεί τον Α, επειδή διαιρεί και τον $\rho_1 \rho_2 ... \rho_\nu$, θα πρέπει να διαιρεί και τον 1. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $\rho_i > 1$. □

(Σελ.164 – 165)

Σε σχέση με την Πρόταση 9.20 και την απειρία των πρώτων αριθμών, διαβάζουμε:

Το αποτέλεσμα αυτό και η απόδειξή του από τον Ευκλείδη θεωρούνται ένα από τα αριστουργήματα της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης. Ο G. Hardy (1877 – 1947) έγραψε ότι: "... είναι τόσο σύγχρονο και σημαντικό όπως και όταν ανακαλύφθηκε εδώ και 2000 χρόνια παρέμεινε ανέπαφο." (Σελ. 161)

Ολοκληρώνουμε την μελέτη μας με τον ακόλουθο πίνακα, στον οποίο παρουσιάζονται συγκριτικά οι τρόποι παρουσίασης σημαντικών ζητημάτων της Θεωρίας Αριθμών στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη από τη μια και στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου από την άλλη.

Σύγκριση

Θεωρία Αριθμών στα *Στοιχεία*	**Θεωρία Αριθμών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου**
✔ Αρχή του Ελαχίστου	✔ Δεν διδάσκεται
✔ Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής	✔ Δεν διδάσκεται
✔ Εύρεση Μ.Κ.Δ. με Ανθυφαίρεση – Ευκλείδειος Αλγόριθμος (Προτάσεις 7.1 & 7.2)	✔ Εύρεση Μ.Κ.Δ. με ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
✔ Ισότητα λόγων αριθμών μέσω του Ορισμού 7.21 ή μέσω της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21	✔ Ισότητα λόγων αριθμών εάν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών
✔ Η ισότητα του χιαστί γινομένου αποδεικνύεται ως πρόταση μέσω της Κανονικής μορφής του Ορισμού 7.21 [Πρόταση 7.19]	✔ Έλεγχος της αναλογίας μέσω της ισότητας των χιαστί γινομένων

✔ Οι Προτάσεις 7.20, 7.21, 7.22 περιγράφουν πλήρως τη μορφή κάθε κλάσης ισοδυναμίας κλασμάτων, άρα κάθε ρητού αριθμού	✔ Δεν διδάσκονται οι Προτάσεις, δεν αναπτύσσεται η οπτική του ρητού ως κλάση ισοδυναμίας
✔ Οι ασυμμετρίες της μορφής $N^{1/k}$ αποδεικνύονται με χρήση της Πρότασης 7. 27	✔ Δεν αποδεικνύονται οι ασυμμετρίες με εξαίρεση την αρρητότητα του $\sqrt{2}$
✔ Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων αριθμών Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής	✔ Δεν αποτελεί διδακτέα ύλη η αυστηρή απόδειξη της Πρότασης
✔ Απειρία πρώτων αριθμών	✔ Δεν αποτελεί διδακτέα ύλη η αυστηρή απόδειξη της Πρότασης

Στη διάλεξη που έδωσε ο Νεγρεπόντης στην Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης ανέφερε ότι θεωρεί απολύτως απαραίτητη τη διδασκαλία της βασικής Θεωρίας Αριθμών, γενικά και ειδικότερα στη Β΄ Λυκείου.

Διαβάζουμε:

> Θεωρώ βασικά στοιχεία της διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών δύο:
>
> 1) την ανάδειξη και κατανόηση της έννοιας της διαδικασίας της απόδειξης και
> 2) το ερώτημα για την προέλευση της αποδεικτικής δύναμης των Μαθηματικών.
>
> Γιατί η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής έχει αυτή την αποδεικτική δύναμη; Μια ένδειξη της αποδεικτικής δύναμης κάποιων υποθέσεων, μεταξύ των οποίων και η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, είναι η δύναμη να παράγουν μη–τετριμμένα βαθειά θεωρήματα, αλλά και θεωρήματα που αντίκεινται στη διαίσθηση, παράδοξα. (Σελ. 17)

Σχετικά με το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων Γυμνασίου και Λυκείου σε ζητήματα της Θεωρίας Αριθμών κατέληξε στη διαπίστωση ότι:

> Από μαθηματικής πλευράς και με τις αναγκαίες δευτερεύουσες τροποποιήσεις, το 7ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη υπερτερεί στην παρουσίαση της Θεωρίας Αριθμών σε σχέση με τα σχολικά βιβλία, τα οποία θα πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα. Εξαίρεση αποτελεί το βιβλίου της Β΄ Λυκείου Ομάδας Θετικού Προσανατολισμού το οποίο έχει θετικά στοιχεία. (Σελ. 17)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την αποδεικτική δύναμη του περίφημου 5ου Αιτήματος του Ευκλείδη στη βασική επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπως αυτή παρουσιάζεται και μάλιστα με τη μορφή αξιωματικού συστήματος στα Βιβλία 1, 2, 3, 4 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, ενώ στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε την προέλευση της δύναμης αυτής. Θα εστιάσουμε ιδιαίτερα σε Προτάσεις – συνέπειες του 5ου Αιτήματος, οι οποίες αντίκεινται στη διαίσθηση και μοιάζουν παράδοξες. Τέλος, θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης του 5ου Αιτήματος του Ευκλείδη στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου.

3.1 Η δομή της βασικής Ευκλείδειας γεωμετρίας στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη

Στα τέσσερα πρώτα Βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη παρουσιάζεται η βασική επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Το περιεχόμενο των Βιβλίων 1, 2, 3, 4 έχει συνοπτικά ως εξής:

	Αιτήματα	**Κοινές Έννοιες**	**Ορισμοί**	**Προτάσεις**	**Περιεχόμενο**
Βιβλίο 1ο	5	9	23	48	Σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα, παράλληλες ευθείες, εμβαδά τριγώνων και παραλληλογράμμων
Βιβλίο 2ο			2	14	Γεωμετρική Άλγεβρα, Γνώμονες
Βιβλίο 3ο			11	37	Κύκλοι, σχέσεις ευθειών – κύκλων, σχέσεις μεταξύ κύκλων
Βιβλίο 4ο			7	16	εγγραφή και περιγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

Τεράστιας επιστημονικής αξίας είναι το γεγονός ότι ο Ευκλείδης επιλέγει να οργανώσει τη βασική επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία ακολουθώντας τη γενική λογική δομή μιας αποδεικτικής επιστήμης, όπως ακριβώς την όρισε ο Αριστοτέλης στο έργο του *Αναλυτικά Ύστερα* [72α14 – 24] και [76α31 – 76β22]. Τα παραπάνω χωρία και σχετικά σχόλια θα παρουσιαστούν αναλυτικά στην ενότητα 3.4 του παρόντος κεφαλαίου.

Στα πλαίσια της δομής αυτής, ο Ευκλείδης παραθέτει τους όρους, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες, ενώ κάθε πρόταση αποτελεί το συμπέρασμα μιας αυστηρής διαδικασίας απόδειξης, η οποία βασίζεται αποκλειστικά σε ορισμούς, αιτήματα, κοινές έννοιες, καθώς και σε ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη του μεγαλειώδους οικοδομήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, από τους ορισμούς του 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όπως αρμόζει σε ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα.

3.1.1 Όροι 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη

Όρος 1.1

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν

Σημείο καλείται καθετί που δεν έχει μέρη.

Να παρατηρήσουμε ότι ο ορισμός 1.1 της έννοιας του σημείου είναι αρκετά ασαφής. Οι μελετητές εικάζουν ότι ανήκει στον Ευκλείδη, ενώ παλαιότερος πυθαγόρειος ορισμός του σημείου είναι ***Μονάς προσλαβούσα θέση***

Όρος 1.2

Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές

Γραμμή καλείται αυτό που έχει μήκος.

Όρος 1.3

Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα

Τα πέρατα μιας γραμμής είναι σημεία.

Όρος 1.4

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται

Ευθεία γραμμή καλείται εκείνη, η οποία κείται εξίσου προς τα σημεία της.

Όρος 1.5

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει

Επιφάνεια καλείται αυτό που έχει μήκος και πλάτος.

Όρος 1.6

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί

Τα πέρατα μιας επιφάνειας είναι γραμμές.

Όρος 1.7

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται

Επίπεδη επιφάνεια καλείται εκείνη που κείται εξίσου προς τις ευθείες της.

Όρος 1.8

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις

Επίπεδη γωνία καλείται η κλίση ανάμεσα σε δύο τεμνόμενες ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν αποτελούν ευθεία.

Όρος 1.9

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία

Όταν οι ευθείες που σχηματίζουν τη γωνία αποτελούν ευθεία, τότε η γωνία καλείται ευθύγραμμη.

Να παρατηρήσουμε ότι η μηδενική γωνία, όπως και η ευθεία γωνία, δεν ικανοποιούν τον ορισμό 1.8, άρα, για τους αρχαίους, οι παραπάνω γωνίες δεν αποτελούν γωνίες.

Όρος 1.10

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν

Όταν μία ευθεία τέμνει μία άλλη και οι εφεξής γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες, τότε κάθε μία γωνία καλείται ορθή και η μία ευθεία καλείται κάθετος της άλλης ευθείας.

Όρος 1.11

Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς

Αμβλεία καλείται η γωνία που είναι μεγαλύτερη της ορθής.

Όρος 1.12

Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς

Οξεία καλείται η γωνία που είναι μικρότερη της ορθής.

Όρος 1.13

Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας

Όριο καλείται το πέρας κάποιου γεωμετρικού αντικειμένου.

Όρος 1.14

Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον

Σχήμα καλείται ότι περιέχεται σε ένα ή περισσότερα όρια.

Όρος 1.15

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν

Κύκλος καλείται το επίπεδο σχήμα που περιέχεται σε μια γραμμή, την οποία καλούμε περιφέρειά του και τα σημεία της ισαπέχουν από ένα σημείο στο εσωτερικό του σχήματος.

Όρος 1.16

Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται

Το σημείο αυτό καλείται κέντρο του κύκλου.

Όρος 1.17

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον

Διάμετρος του κύκλου καλείται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, συνδέει δύο σημεία της περιφέρειας του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

Να παρατηρήσουμε ότι, ο ορισμός της διαμέτρου στηρίζεται στην ιδιότητά της να διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη, συνεπώς ουσιαστικά αποτελεί πρόταση.

Όρος 1.18

Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν

Ημικύκλιο καλείται το σχήμα που περιέχεται από μία διάμετρο του κύκλου και το αντίστοιχο στη διάμετρο τόξο του κύκλου. Κέντρο του ημικυκλίου καλείται το κέντρο του κύκλου.

Όρος 1.19

Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα

Ευθύγραμμα σχήματα καλούνται αυτά που περιέχονται από ευθύγραμμα τμήματα: τα τρίγωνα περιέχονται από τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα τετράπλευρα από τέσσερα, τα πολύπλευρα από πάνω από τέσσερις πλευρές.

Όρος 1.20

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς

Από τα τρίγωνα, εκείνο που έχει ίσες και τις τρεις πλευρές καλείται ισόπλευρο, εκείνο που έχει τις δύο πλευρές ίσες καλείται ισοσκελές, ενώ εκείνο που έχει και τις τρεις πλευρές άνισες καλείται σκαληνό.

Να παρατηρήσουμε ότι σύμφωνα με τους ορισμούς, αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε δεν είναι ισοσκελές, συνεπώς οι κατηγορίες που διακρίνονται στα τρίγωνα είναι ξένες.

Όρος 1.21

Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας

Από τα τρίγωνα, εκείνο που έχει μία ορθή γωνία καλείται ορθογώνιο, εκείνο που έχει μία αμβλεία γωνία καλείται αμβλυγώνιο, ενώ εκείνο που έχει τρεις γωνίες οξείες καλείται οξυγώνιο.

Όρος 1.22

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω

Από τα τετράπλευρα σχήματα, εκείνο που είναι ισόπλευρο και ορθογώνιο καλείται τετράγωνο, εκείνο που είναι ορθογώνιο, αλλά όχι ισόπλευρο καλείται ετερόμηκες, εκείνο που δεν είναι ισόπλευρο και ταυτόχρονα δεν είναι ορθογώνιο καλείται ρομβοειδές. Τα υπόλοιπα τετράπλευρα καλούνται τραπέζια.

Όρος 1.23

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις

Παράλληλες καλούνται οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρο και από τις δύο κατευθύνσεις δεν τέμνονται ποτέ μεταξύ τους.

3.1.2 Αιτήματα 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα 5 Αιτήματα του 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, καθώς και κάποια σύντομα σχετικά σχόλια.(6)

Αίτημα 1.1

Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν

Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να συνδέει το συγκεκριμένο σημείο με οποιοδήποτε άλλο.

Να παρατηρήσουμε ότι η μοναδικότητα της ευθείας του 1ου Αιτήματος δεν αναφέρεται ρητά στο αίτημα, αλλά όπως θα δούμε στη συνέχεια αποδεικνύεται σε συγκεκριμένη πρόταση.

(6) Οι αποδείξεις των Προτάσεων των Στοιχείων του Ευκλείδη, καθώς και τα σχόλια, προέρχονται από τις παραδόσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη του Νεγρεπόντη, ακ.έτος 2016 -17, ΠΜΣ: Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών και από το βιβλίο των Νεγρεπόντη Σ., Φαρμάκη Β. Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαίτητου, Ευδόξου, Αθήνα: εκδόσεις Εκκρεμές, 2019. Ορισμένα σχήματα προέρχονται από το βιβλίο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη.

Αίτημα 1.2

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθύγραμμα.

Να παρατηρήσουμε ότι το 2ο Αίτημα μας παρέχει τη δυνατότητα να προεκτείνουμε απεριόριστα κάθε ευθύγραμμο τμήμα. Πρόκειται για ένα ιδιαίτερο αίτημα και, όπως θα διαπιστώσουμε, το μοναδικό, που εισάγει την απειρία στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Πράγματι:

Έστω ευθύγραμμο τμήμα α.

- ✔ Με εφαρμογή του 2ου Αιτήματος, επεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα α σε ένα μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα, έστω $α_1$.
- ✔ Με εφαρμογή του 2ου Αιτήματος, επεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $α_1$ σε ένα μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα, έστω $α_2$.

...

κοκ

...

Η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον.

Η εισαγωγή του απείρου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, με την παραπάνω έννοια, καθιστά αναγκαία τη μελέτη του ακριβή ρόλου του 2ου Αιτήματος και του προσδιορισμού της αποδεικτικής του δύναμης. Για να γίνει κάτι τέτοιο εφικτό, στην επόμενη ενότητα, θα μελετήσουμε προσεκτικά τις Προτάσεις στις οποίες γίνεται χρήση του 2ου Αιτήματος.

Αίτημα 1.3

Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι

Με κέντρο τυχαίο σημείο και ακτίνα οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα, μπορεί να γραφεί κύκλος.

Να παρατηρήσουμε ότι ενώ η ακτίνα ενός κύκλου δεν ορίζεται αυστηρά στα *Στοιχεία*, ωστόσο στο 3ο Αίτημα αναφέρεται ρητά ότι με οποιοδήποτε κέντρο και κάθε διάστημα, δηλαδή ακτίνα, γράφουμε κύκλο, με την προϋπόθεση βέβαια να ταυτίζεται το ένα άκρο του διαστήματος με το κέντρο του κύκλου.

Αίτημα 1.4

Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι

Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Να αναφέρουμε ότι το 4ο Αίτημα αποτελεί μία αποδείξιμη πρόταση, για την οποία μάλιστα υπάρχουν περισσότερες από μία αποδείξεις, με μία από αυτές να αποδίδεται στον Πρόκλο.

Ας περάσουμε τώρα στο περίφημο 5ο Αίτημα του Ευκλείδη, η ιδιαιτερότητα του οποίου, ως πιο σύνθετο και λιγότερο προφανές στην ανθρώπινη διαίσθηση σε σχέση με τα 4 άλλα Αιτήματα έγινε, σύμφωνα με τους μελετητές, πολύ γρήγορα αντιληπτή από τη μαθηματική κοινότητα.

Αίτημα 1.5

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες

Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και σχηματίζεται ένα ζεύγος εντός και επί τ' αυτά γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι εντός και επί τ΄ αυτά γωνίες.

Ο Στράντζαλος χαρακτηρίζει το 5ο Αίτημα ως "την ειδοποιό διαφορά της Ευκλείδειας από τις άλλου τύπου Γεωμετρίες". (Σελ. 28) Πολλά μέλη της μαθηματικής κοινότητας, αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, όπως ο Πρόκλος και ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, Άραβες μαθηματικοί, όπως ο Nasireddin, αλλά και Ευρωπαίοι μαθηματικοί όπως, ο Wallis, ο Playfair, ο Borelli, ο Saccheri, ο Lambert, ο Legendre προσπάθησαν να το αποδείξουν ή να το αντικαταστήσουν από κάποια άλλη υπόθεση, με τελικό αποτέλεσμα την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών τον 18ο αιώνα (Υπερβολική Γεωμετρία από τους Bolyai – Lobachevsky και Ελλειπτική Γεωμετρία από τον Riemann).

Ιδιαίτερα εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι ο ίδιος ο Ευκλείδης μοιάζει διστακτικός στη χρήση του 5ου Αιτήματος καθώς, ενώ στο πρώτο μισό του 1ου Βιβλίου, δηλαδή στις Προτάσεις 1.1 έως και 1.26, το 5ο Αίτημα δεν χρησιμοποιείται καθόλου, όλες οι επόμενες Προτάσεις του 1ου Βιβλίου, δηλαδή οι Προτάσεις 1.29 έως και 1.48, αλλά και εκείνες των επόμενων τριών Βιβλίων, δηλαδή των Βιβλίων 2, 3, 4 αποτελούν είτε άμεσες, είτε έμμεσες συνέπειες αυτού.

Η διαπιστωμένη ιδιαιτερότητα του 5ου Αιτήματος, αλλά και το γεγονός ότι η ισχύς του δεν είναι διαισθητικά προφανής, ούτε εύλογη, καθιστά αναγκαία την περαιτέρω διερεύνηση του ακριβή του ρόλου και του προσδιορισμού της αποδεικτικής του δύναμης. Για να γίνει κάτι τέτοιο εφικτό,

θα μελετήσουμε προσεκτικά, στην επόμενη ενότητα, δύο κατηγορίες Προτάσεων: εκείνες που αποδεικνύονται με χρήση του 5ου Αιτήματος και εκείνες που αποδεικνύονται χωρίς τη χρήση του 5ου Αιτήματος. Θα προσπαθήσουμε επιπλέον να συγκρίνουμε τις δύο παραπάνω κατηγορίες των προτάσεων ως προς την προφάνειά τους και τη γενικότερη φιλοσοφία τους.

3.2 Η αποδεικτική ισχύς του 5ου Αιτήματος στα *Στοιχεία του* Ευκλείδη

Η κατηγοριοποίηση των Προτάσεων του 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, σε σχέση με τη χρήση του 2ου Αιτήματος, παρουσιάζεται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Πρόταση	**Χρήση του 2ου Αιτήματος**
Πρόταση 1.16	Πρώτη άμεση εφαρμογή του 2ου Αιτήματος
Προτάσεις 1.17 – 1.26	Εφαρμογή της Πρότασης 1.16, άρα έμμεση εφαρμογή του 2ου Αιτήματος

Η κατηγοριοποίηση των Προτάσεων του 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, σε σχέση με τη χρήση του 5ου Αιτήματος, παρουσιάζεται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Πρόταση	**Χρήση του 5ου Αιτήματος**
Προτάσεις 1.1 έως και 1.26	Χωρίς το 5ο Αίτημα (Ουδέτερη Γεωμετρία)
Προτάσεις 1.27 και 1.28	Χωρίς το 5ο Αίτημα, αλλά προετοιμασία για αυτό
Πρόταση 1.29	**Πρώτη χρήση του 5ου Αιτήματος** **Αντιθετοαντίστροφη του 5ου Αιτήματος**
Προτάσεις 1.30 έως και 1.48	Άμεσες ή έμμεσες συνέπειες του 5ου Αιτήματος

Ας μελετήσουμε τις Προτάσεις, καθώς και τις αποδείξεις αυτών, προσεκτικά.

3.2.1 Οι Προτάσεις 1.1 - 1.26 (χωρίς τη χρήση του 5ου Αιτήματος), η Πρόταση 1.16 και η πρώτη άμεση εφαρμογή του 2ου Αιτήματος

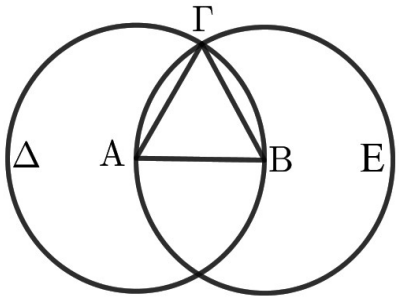
Στην ενότητα που ακολουθεί θα παραθέσουμε τις αποδείξεις των Προτάσεων 1.1 έως και 1.26, που αποτελούν τη λεγόμενη Ουδέτερη Γεωμετρία.

Πρόταση 1.1

Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι	Να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο δοσμένης πλευράς.

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θα κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ίσης με ΑΒ.



Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα το ΑΒ γράφουμε κύκλο [Αίτημα 1.3]

Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα το ΑΒ γράφουμε κύκλο [Αίτημα 1.3]

Ονομάζουμε Γ το σημείο τομής των κύκλων.

Φέρουμε τα τμήματα ΓΑ και ΒΓ [Αίτημα 1.1]

Επειδή Α κέντρο κύκλου, είναι ΑΓ = ΑΒ [Ορισμός 1.15]

Επειδή Β κέντρο κύκλου, είναι ΒΓ = ΑΒ [Ορισμός 1.15]

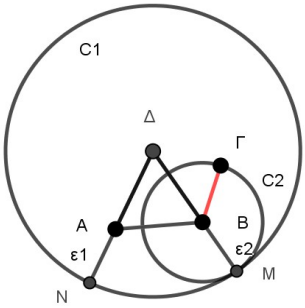
Συνεπώς ισχύει ΑΓ = ΒΓ [Κοινή Έννοια 1.1]

Άρα τελικά, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και οι πλευρές του είναι ίσες με το τμήμα ΑΒ. □

Πρόταση 1.2

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι	Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα ίσο με δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου το ένα άκρο να είναι δοσμένο σημείο.

Απόδειξη



Έστω σημείο Α και ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει σημείο Ν, τέτοιο ώστε ΑΝ = ΒΓ.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν το Α ταυτίζεται με το Β, τότε ισχύει το ζητούμενο.

β) Έστω ότι το Α δεν ταυτίζεται με το Β.

Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ [Αίτημα 1.1] και με πλευρά το ΑΒ, κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ [Πρόταση 1.1]

Προεκτείνουμε τις ευθείες ΔΑ [Αίτημα 1.2] και ΔΒ [Αίτημα 1.2] , τις οποίες ονομάζουμε ε1 και ε2 αντίστοιχα.

Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα το ΒΓ, γράφουμε κύκλο C2 [Αίτημα 1.3] και καλούμε Μ το σημείο τομής του C2 με την ευθεία ε2.

Με κέντρο το Δ και ακτίνα το ΔΜ γράφουμε κύκλο C1 [Αίτημα 1.3] και καλούμε Ν το σημείο τομής του C1 με την ευθεία ε1.

Επειδή Β το κέντρο του C2 είναι ΒΓ = ΒΜ (1)

Επειδή Δ το κέντρο του C1 είναι ΔΝ = ΔΜ (2)

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, συνεπώς ΑΔ = ΒΔ (3)

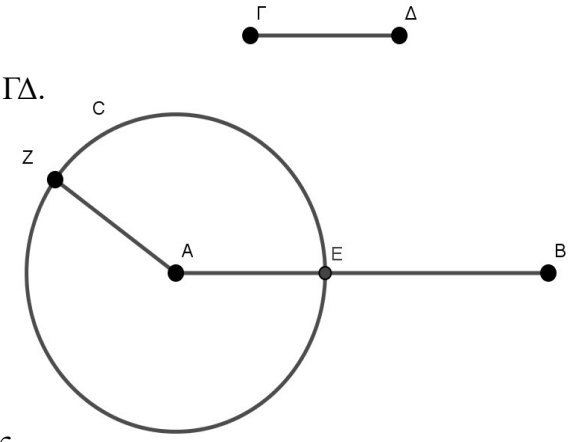
Είναι: (2) – (3) ⇒ ΔΝ – ΑΔ = ΔΜ – ΒΔ, δηλαδή ΑΝ = ΒΜ (4) [Κοινή Έννοια 1.3]

Τελικά από τις σχέσεις (1), (4) ⇒ ΒΓ = ΑΝ [Κοινή Έννοια 1.1], δηλαδή υπάρχει σημείο Ν για το οποίο ισχύει ΑΝ = ΒΓ. □

Πρόταση 1.3

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν	Αν δοθούν δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα, να αφαιρεθεί από το μεγαλύτερο, τμήμα ίσο με το μικρότερο.

Απόδειξη



Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα με ΑΒ > ΓΔ.

Θα κατασκευάσουμε τη διαφορά τους ΑΒ – ΓΔ.

Υπάρχει σημείο Ζ, για το οποίο

ισχύει ΑΖ = ΓΔ [Πρόταση 1.2]

Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΖ γράφουμε

κύκλο C [Αίτημα 1.3] και καλούμε Ε το σημείο τομής

του κύκλου C με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

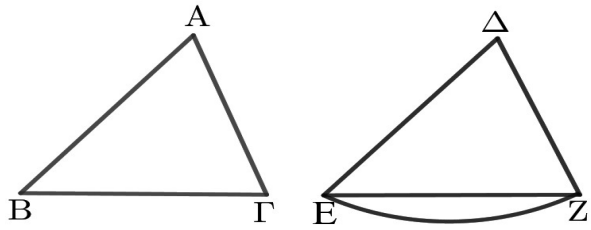
Επειδή Α είναι το κέντρο του C, ισχύει ΑΕ = ΑΖ [Ορισμός 1.15]

Όμως ισχύει ΓΔ = ΑΖ, συνεπώς ΑΕ = ΓΔ [Κοινή Έννοια 1.1] και το τμήμα ΕΒ είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.4

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν	Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες, μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες και θα είναι ίσα, δηλαδή θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες γωνίες τους.

Απόδειξη



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ,
για τα οποία ισχύουν:

1. ΑΒ = ΔΕ
2. ΑΓ = ΔΖ
3. $\hat{A} = \hat{\Delta}$

Μεταφέρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε, το σημείο Α να ταυτιστεί με το σημείο Δ και η πλευρά ΑΒ να συμπέσει με την πλευρά ΔΕ. Τότε:

- Το σημείο Β θα ταυτιστεί με το σημείο Ε, αφού ισχύει ΑΒ = ΔΕ
- Η πλευρά ΑΓ θα συμπέσει με την πλευρά ΔΖ, αφού η $\hat{A}$ είναι ίση με τη $\hat{\Delta}$
- Το σημείο Γ θα ταυτιστεί με το σημείο Ζ, αφού ισχύει ΑΓ = ΔΖ

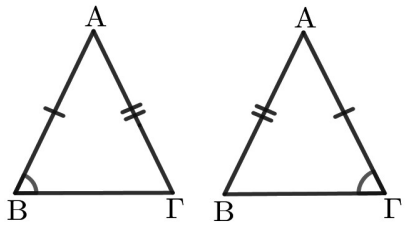
Συνεπώς, η πλευρά ΒΓ θα συμπέσει με την πλευρά ΕΖ, γιατί αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε μεταξύ των ΒΓ και ΕΖ θα υπήρχε χωρίο, κάτι που είναι αδύνατο.

Τελικά, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ συμπίπτουν, άρα είναι ίσα και έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα. □

Πρόταση 1.5

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται	Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση είναι ίσες και αν οι ίσες πλευρές προεκταθούν, οι γωνίες, που έχουν πλευρές τις προεκτάσεις των ίσων πλευρών και τη βάση, είναι ίσες.

Απόδειξη(7)



Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΓ είναι ίσα [Πρόταση 1.4]

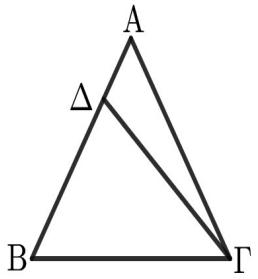
Άρα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες. □

Η Πρόταση 1.6 που ακολουθεί είναι η αντίστροφη της Πρότασης 1.5, ενώ η απόδειξή της είναι η πρώτη απόδειξη των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, στην οποία χρησιμοποιείται η αποδεικτική μέθοδος "εις άτοπον".

Πρόταση 1.6

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίαις ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται	Αν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες τότε και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι επίσης ίσες.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Ας υποθέσουμε ότι ΑΒ ≠ ΑΓ και έστω ΑΒ > ΑΓ.

Τότε υπάρχει σημείο Δ πάνω στην ΑΒ, τέτοιο

ώστε, ΒΔ = ΑΓ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ:

- ΒΓ = ΒΓ
- ΑΓ = ΒΔ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ είναι ίσα [Πρόταση 1.4], συνεπώς έχουν και ίσα εμβαδά, κάτι που είναι άτοπο. Άρα τελικά ισχύει ΑΒ = ΑΓ. □

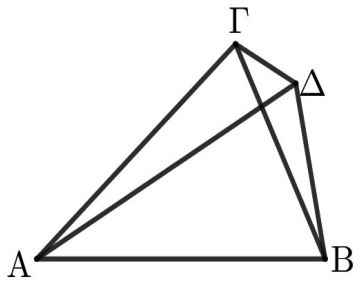
(7) Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, η απόδειξη είναι του Πάππου (2019, Σελ.155)

Πρόταση 1.7

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις	Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Γ εκτός του ΑΒ. Αν φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΑ και ΓΒ, τότε δεν υπάρχει σημείο του ίδιου ημιεπιπέδου του τμήματος με το Γ, που τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το σημείο με τα Α, Β να είναι ίσα με τα ΓΑ και ΓΒ αντίστοιχα.

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Γ εκτός αυτού, ώστε να υπάρχει σημείο Δ, στο ίδιο ημιεπίπεδο με το Γ, για το οποίο ισχύει ΓΑ = ΔΑ και ΓΒ = ΔΒ.



Φέρουμε το τμήμα ΓΔ.

Επειδή ΑΓ = ΑΔ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές,

ισχύει $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ [Πρόταση 1.5]

Συνεπώς $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma < B\hat{\Delta}\Gamma$,

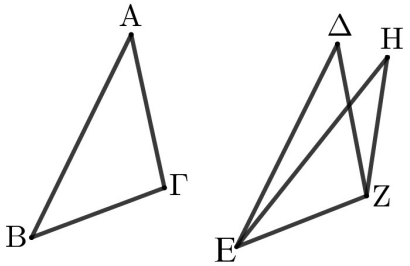
άρα $B\hat{\Gamma}\Delta < A\hat{\Gamma}\Delta < B\hat{\Delta}\Gamma$, κάτι που είναι άτοπο,

αφού ΒΓ = ΒΔ. Άρα τελικά $B\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ και τα σημεία Γ και Δ ταυτίζονται. □

Πρόταση 1.8

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην	Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες αντίστοιχα και τις βάσεις τους ίσες, τότε οι περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες των τριγώνων είναι ίσες.

Απόδειξη



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία:

- ΒΓ = ΕΖ
- ΑΒ = ΔΕ
- ΑΓ = ΔΖ

Μεταφέρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ στο ΔΕΖ, ώστε το σημείο Β να ταυτιστεί με το σημείο Ε και η

πλευρά ΒΓ να ταυτιστεί με την ΕΖ. Το σημείο Γ θα ταυτιστεί με το σημείο Ζ, καθώς ΒΓ = ΕΖ.

Η πλευρά ΑΒ θα ταυτιστεί με την πλευρά ΔΕ και η πλευρά ΑΓ θα ταυτιστεί με την πλευρά ΔΖ, αφού αν δεν συνέβαινε αυτό και οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ ταυτίζονταν με τα τμήματα ΗΕ και ΗΖ αντίστοιχα (όπου Η σημείο) τότε:

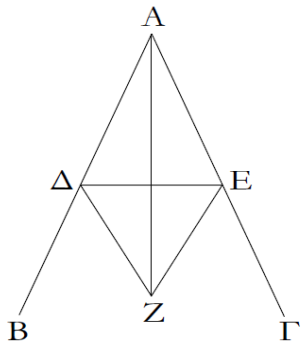
- ΔΕ = ΗΕ
- ΔΖ = ΗΖ, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά, αφού οι πλευρές ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ, ταυτίζονται με τις ΕΖ, ΕΔ, ΔΖ, οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ θα ταυτιστούν. □

Πρόταση 1.9

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν	Να κατασκευαστεί η διχοτόμος μιας δοσμένης γωνίας.

Απόδειξη



Έστω η γωνία $B\hat{A}\Gamma$. Θα κατασκευάσουμε τη διχοτόμο της.

Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ.

Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο

και ονομάζουμε Ε το σημείο που ο κύκλος τέμνει την ΑΓ.

Προφανώς ισχύει ΑΔ = ΑΕ.

Φέρουμε το τμήμα ΔΕ, κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ [Πρόταση 1.1] και φέρουμε την ΑΖ.

Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΕΑΖ έχουν:

- ΔΖ = ΕΖ
- ΑΔ = ΑΕ
- ΑΖ = ΑΖ

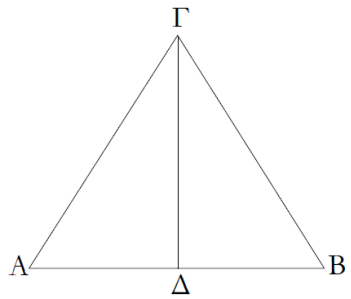
Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΕΑΖ είναι ίσα [Πρόταση 1.8], συνεπώς $\Delta\hat{A}Z = E\hat{A}Z$

Άρα τελικά, η ΑΖ είναι η διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$ □

Πρόταση 1.10

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν	Να κατασκευαστεί το μέσο ενός δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος.

Απόδειξη



Έστω ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα. Θα βρούμε το μέσο του.

Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ [Πρόταση 1.1]

Διχοτομούμε τη $\hat{\Gamma}$ [Πρόταση 1.9] και έστω Δ το σημείο

που η διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ τέμνει το τμήμα ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΓΑΔ και ΓΔΒ έχουν:

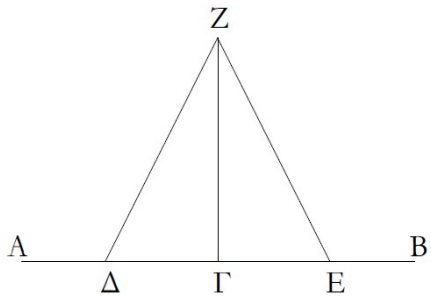
- ΓΑ = ΓΒ
- ΓΔ = ΓΔ
- $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta$

Τα τρίγωνα ΓΑΔ και ΓΔΒ είναι ίσα [Πρόταση 1.4], άρα τελικά ΑΔ = ΔΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. □

Πρόταση 1.11

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν	Από σημείο δοσμένης ευθείας, να κατασκευαστεί ευθεία, η οποία σχηματίζει ορθές γωνίες με τη δοσμένη ευθεία.

Απόδειξη



Θεωρούμε ευθεία ΑΒ και τυχαίο σημείο αυτής, έστω Γ.

Θα φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Γ.

Εκατέρωθεν του Γ επιλέγουμε σημεία Δ και Ε,

τέτοια ώστε ΔΓ = ΓΕ.

Σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔΖΕ [Πρόταση 1.1] και φέρουμε το τμήμα ΖΓ.

Τα τρίγωνα ΖΔΓ και ΕΖΓ έχουν:

- ΔΓ = ΓΕ
- ΔΖ = ΕΖ

- $\hat{\Delta} = \hat{E}$

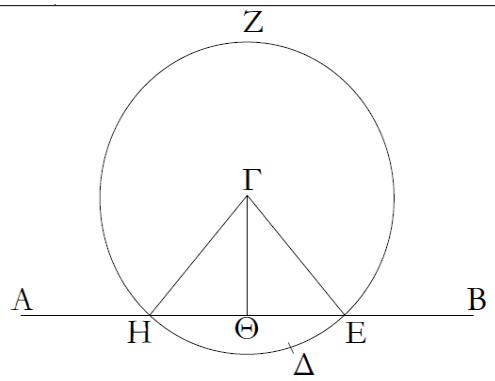
Τα τρίγωνα ΖΔΓ και ΕΖΓ είναι ίσα [Πρόταση 1.8], άρα $Z\hat{\Gamma}\Delta = Z\hat{\Gamma}E$

Επειδή οι γωνίες αυτές είναι εφεξής, άρα τελικά $Z\hat{\Gamma}\Delta = Z\hat{\Gamma}E = 1$ ορθή. □

Πρόταση 1.12

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν	Από σημείο εκτός δοσμένης ευθείας, να κατασκευαστεί ευθεία κάθετη προς τη δοσμένη ευθεία.

Απόδειξη



Θεωρούμε ευθεία ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ εκτός αυτής.

Θα φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Γ.

Επιλέγουμε τυχαίο σημείο Δ, που δεν ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο με το Γ.

Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα ΓΔ γράφουμε κύκλο και ονομάζουμε Η και Ε τα σημεία που ο κύκλος τέμνει την ΑΒ. Βρίσκουμε το μέσο, έστω Θ, του τμήματος ΗΕ [Πρόταση 1.10]

Τα τρίγωνα ΓΘΗ και ΓΘΕ έχουν:

- ΓΗ = ΓΕ
- ΓΘ = ΓΘ
- ΗΘ = ΕΘ

Τα τρίγωνα ΓΘΗ και ΓΘΕ είναι ίσα [Πρόταση 1.8], άρα $\Gamma\hat{\Theta}H = \Gamma\hat{\Theta}E$. Επειδή οι γωνίες αυτές είναι εφεξής, άρα τελικά $\Gamma\hat{\Theta}H = \Gamma\hat{\Theta}E = 1$ ορθή. □

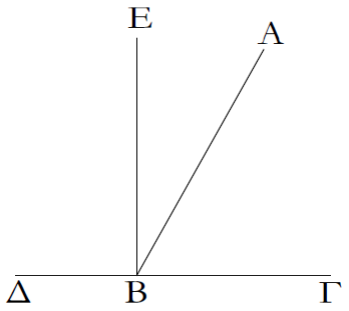
Πρόταση 1.13

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει	Όταν μία ημιευθεία τέμνει μία άλλη ευθεία, τότε οι γωνίες που σχηματίζονται, είτε είναι και οι δύο ορθές, είτε το άθροισμά τους είναι ίσο με δύο ορθές.

Απόδειξη

Έστω η ημιευθεία ΑΒ, η οποία τέμνει την ΓΔ στο σημείο Β και σχηματίζονται οι γωνίες $\Gamma\hat{B}A$ και $\Delta\hat{B}A$

Φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΓΔ στο σημείο Β [Πρόταση 1.11]



Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν η κάθετη ταυτίζεται με την ΑΒ, τότε

   ισχύει $\Gamma\hat{B}A = \Delta\hat{B}A = 1$ ορθή

2. Αν η κάθετη δεν ταυτίζεται με την ΑΒ, τότε:

   - $\Gamma\hat{B}E = \Gamma\hat{B}A + A\hat{B}E$
   - $\Gamma\hat{B}E + E\hat{B}\Delta = 2$ ορθές

   άρα $\Gamma\hat{B}A + A\hat{B}E + E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}A + A\hat{B}\Delta = 2$ ορθές. □

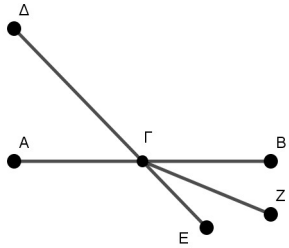
Πρόταση 1.14

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι	Αν από τυχαίο σημείο ευθείας, φέρουμε δύο ημιευθείες στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία και οι εφεξής γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα δύο ορθές, τότε οι δύο ημιευθείες έχουν κοινό φορέα.

Απόδειξη

Έστω σημείο Γ της ΑΒ. Εκατέρωθεν της ΑΒ θεωρούμε δύο ημιευθείες, τις ΓΔ και ΓΕ, ώστε

$B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}E = 2$ ορθές. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Δ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.



Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία Δ, Γ, Ε δεν είναι συνευθειακά.

Προεκτείνουμε τη ΔΓ και έστω σημείο Ζ στην προέκταση.

Είναι $B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 2$ ορθές [Πρόταση 1.13],

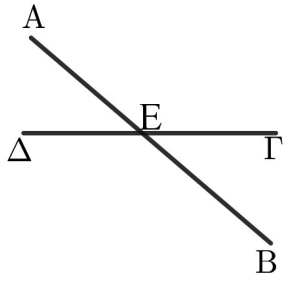
άρα $B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}E = B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z$, συνεπώς $B\hat{\Gamma}E = B\hat{\Gamma}Z$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τα σημεία Δ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. □

Πρόταση 1.15

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν	Αν δύο ευθείες τέμνονται, τότε οι κατακορυφήν γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.

Απόδειξη



Έστω οι ευθείες ΑΒ και ΔΓ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε.

Θα αποδείξουμε ότι:

- $A\hat{E}\Delta = B\hat{E}\Gamma$
- $A\hat{E}\Gamma = B\hat{E}\Delta$

Είναι:

- $A\hat{E}\Delta + A\hat{E}\Gamma = 2$ ορθές
- $A\hat{E}\Gamma + B\hat{E}\Gamma = 2$ ορθές

Άρα τελικά, $A\hat{E}\Delta = B\hat{E}\Gamma$

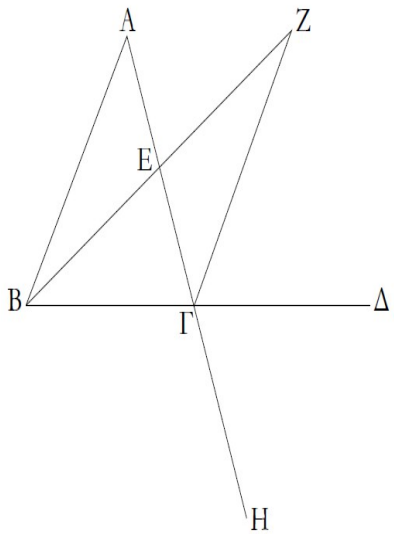
Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι $A\hat{E}\Gamma = B\hat{E}\Delta$ □

Η Πρόταση 1.16 αποτελεί την πρώτη άμεση συνέπεια του 2ου Αιτήματος. Ας τη μελετήσουμε προσεκτικά.

Πρόταση 1.16

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν	Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες του.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε την προέκταση της πλευράς ΒΓ

και επιλέγουμε τυχαίο σημείο Δ σε αυτήν. **[Αίτημα 2]**

Θα αποδείξουμε ότι:

- $A\hat{\Gamma}\Delta > \hat{A}$
- $A\hat{\Gamma}\Delta > \hat{B}$

Βρίσκουμε το μέσο της ΑΓ [Πρόταση 1.10] και το ονομάζουμε Ε.

Φέρουμε το τμήμα ΒΕ, στην προέκταση του οποίου θεωρούμε

σημείο Ζ, τέτοιο ώστε ΒΕ = ΕΖ.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΖ έχουν:

- ΑΕ = ΕΓ
- ΒΕ = ΕΖ
- $A\hat{E}B = \Gamma\hat{E}Z$ [Πρόταση 1.15]

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΖ είναι ίσα και άρα $\hat{A} = E\hat{\Gamma}Z < E\hat{\Gamma}\Delta$

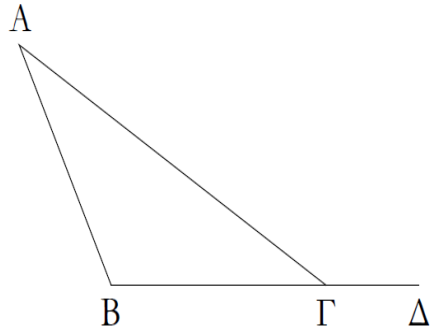
Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι $A\hat{\Gamma}\Delta > \hat{B}$ □

Οι Προτάσεις 1.17 έως και 1.26 αποτελούν συνέπειες της Πρότασης 1.16, συνεπώς πρόκειται για έμμεσες συνέπειες του 2ου Αιτήματος.

Πρόταση 1.17

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι	Το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο από 2 ορθές.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 2$ ορθές.

Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ.

Η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΓ, άρα θα ισχύει

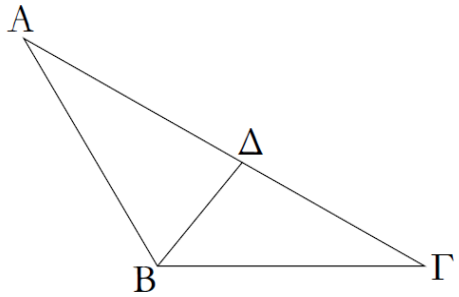
$A\hat{\Gamma}\Delta > \hat{B}$, άρα $\hat{B} + \hat{\Gamma} < A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Gamma}$

δηλαδή τελικά $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 2$ ορθές. □

Πρόταση 1.18

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει	Σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΓ η μεγαλύτερή του πλευρά.

Θα αποδείξουμε ότι η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερή του γωνία.

Θεωρούμε σημείο Δ της ΑΓ, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΒ

και σχηματίζουμε το τμήμα ΒΔ.

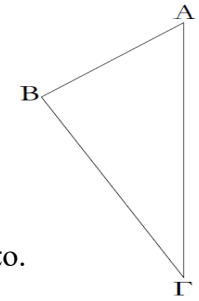
Η $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, άρα $A\hat{\Delta}B > \hat{\Gamma}$

Όμως $\hat{B} > A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B$, άρα τελικά θα ισχύει $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ □

Πρόταση 1.19

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει	Σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και $\hat{B}$ η μεγαλύτερή του γωνία.

Θα αποδείξουμε ότι η ΑΓ είναι η μεγαλύτερή του πλευρά .

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

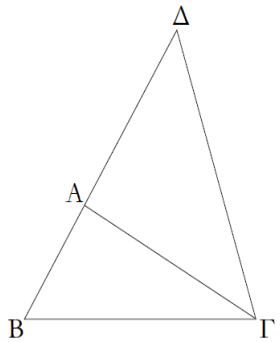
- Αν ΑΓ = ΑΒ, τότε θα ήταν $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ [Πρόταση 1.5], κάτι που είναι άτοπο.
- Αν ΑΓ < ΑΒ, τότε θα ήταν $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ [Πρόταση 1.18], κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά ισχύει ΑΓ > ΑΒ.□

Πρόταση 1.20

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι	Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε πλευρών του είναι μεγαλύτερο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι ΑΒ + ΑΓ > ΒΓ.

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ και πάνω στην προέκταση

θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ. Φέρουμε την ΔΓ.

Επειδή ΑΓ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, συνεπώς $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$

Είναι $A\hat{\Gamma}\Delta < \Delta\hat{\Gamma}B$, άρα $A\hat{\Delta}\Gamma < \Delta\hat{\Gamma}B$

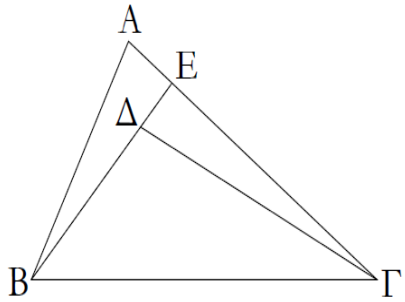
Άρα τελικά ΒΓ < ΔΒ = ΔΓ + ΑΒ = ΑΓ + ΑΒ. □

Πρόταση 1.21

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν	Αν από τα άκρα μιας πλευράς ενός τριγώνου, φέρουμε δύο ημιευθείες, ώστε να τέμνονται στο εσωτερικό του τριγώνου, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από το άθροισμα των δύο πλευρών

	του τριγώνου και η γωνία τους είναι μεγαλύτερη από τη γωνία των δύο πλευρών.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Από τις κορυφές Β και Γ φέρουμε, στο εσωτερικό του τριγώνου, ημιευθείες και καλούμε Δ το σημείο τομής τους. Θα αποδείξουμε ότι ΑΒ + ΑΓ > ΒΔ + ΔΓ και ταυτόχρονα $B\hat{\Delta}\Gamma > B\hat{A}\Gamma$

Προεκτείνουμε τη ΒΔ και έστω Ε το σημείο τομής της με την πλευρά ΑΓ. Τότε:

ΑΒ + ΑΕ > ΒΕ, δηλαδή,

ΑΒ + ΑΕ > ΒΔ + ΔΕ, δηλαδή,

ΑΒ + ΑΕ + ΕΓ > ΒΔ + ΔΕ + ΕΓ, δηλαδή,

ΑΒ + ΑΓ > ΒΔ + ΔΓ

Η $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔΕΓ, άρα $B\hat{\Delta}\Gamma > \Delta\hat{E}\Gamma$ [Πρόταση 1.16]

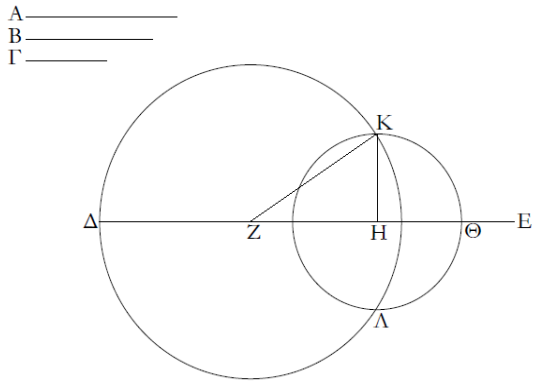
Η $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΑΕ, άρα $\Delta\hat{E}\Gamma > \hat{A}$ [Πρόταση 1.16]

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι $B\hat{\Delta}\Gamma > \hat{A}$ □

Πρόταση 1.22

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας]	Για να κατασκευαστεί τρίγωνο με πλευρές τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα είναι αναγκαίο δύο οποιοδήποτε από τα τμήματα να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από το τρίτο τμήμα.

Απόδειξη



Έστω Α, Β, Γ τρία ευθύγραμμα τμήματα, για τα οποία ισχύει ότι το άθροισμα οποιονδήποτε δύο είναι μεγαλύτερο από το τρίτο τμήμα.

Πάνω στην ευθεία ΔΕ, θεωρούμε τμήματα

ΔΖ = Α, ΖΗ = Β, ΗΘ = Γ.

Με κέντρο το σημείο Ζ και ακτίνα ΔΖ, γράφουμε κύκλο.

Με κέντρο το σημείο Η και ακτίνα ΗΘ, γράφουμε κύκλο.

Ονομάζουμε Κ και Λ τα σημεία τομής των δύο κύκλων, και φέρουμε τις ΚΖ και ΚΗ.

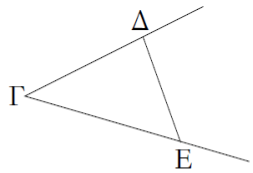
Το τρίγωνο ΚΗΖ έχει πλευρές ίσες με τα αρχικά δοσμένα τμήματα, άρα είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.23

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι	Να κατασκευαστεί γωνία ίση με δοσμένη γωνία, της οποίας η μία πλευρά είναι δοσμένη, ενώ η κορυφή της είναι τυχαίο σημείο δοσμένης ευθείας.

Απόδειξη

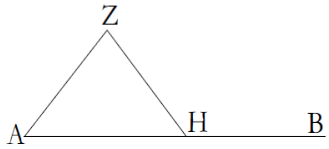
Έστω γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ και ευθεία ΑΒ. Θα κατασκευάσουμε γωνία ίση με τη $\Delta\hat{\Gamma}E$, της οποίας η κορυφή είναι το σημείο Α και η μία της πλευρά είναι η ΑΒ.



Φέρουμε το τμήμα ΔΕ. Στην πλευρά ΑΒ, θεωρούμε σημείο Η,

τέτοιο ώστε ΑΗ = ΓΕ.

Κατασκευάζουμε τρίγωνο ΗΑΖ, έτσι ώστε



ΗΖ = ΔΕ, ΑΗ =ΓΕ, ΑΖ = ΓΔ [Πρόταση 1.22]

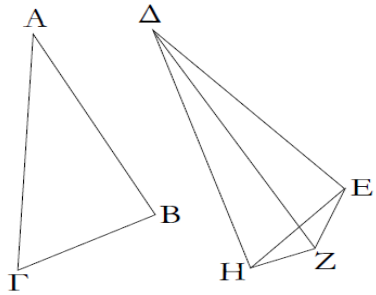
Τα τρίγωνα ΔΓΕ και ΗΑΖ είναι ίσα [Πρόταση 1.8],

άρα ισχύει $\hat{A} = \Delta\hat{\Gamma}E$ □

Πρόταση 1.24

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει	Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες τους άνισες, τότε οι τρίτες πλευρές τους είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Απόδειξη



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΗΖ, για τα οποία:

- ΑΒ = ΔΗ
- ΑΓ = ΔΖ
- $B\hat{A}\Gamma > H\hat{\Delta}Z$

Θα αποδείξουμε ότι ΒΓ > ΗΖ.

Με πλευρά ΔΖ και κορυφή το σημείο Ζ, κατασκευάζουμε $E\hat{\Delta}Z$ ίση με $B\hat{A}\Gamma$ [Πρόταση 1.23]

Θεωρούμε τα τμήματα ΔΕ = ΑΒ, καθώς και τα τμήματα ΕΗ και ΕΖ.

Επειδή ΔΕ = ΑΒ και ΔΗ = ΑΒ, ισχύει ΔΕ = ΔΗ, άρα το τρίγωνο ΔΕΗ είναι ισοσκελές,

συνεπώς $\Delta\hat{E}H = \Delta\hat{H}E$

Είναι:

- $\Delta\hat{H}E > Z\hat{E}H$
- $Z\hat{H}E > Z\hat{E}H$

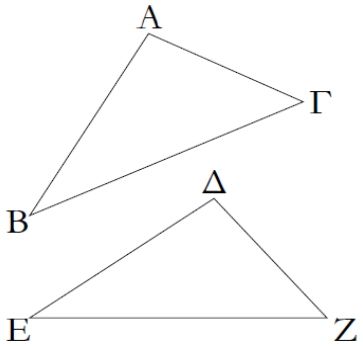
άρα ΕΖ > ΖΗ.

Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΕΔΖ είναι ίσα, συνεπώς ισχύει ΒΓ = ΕΖ. Άρα τελικά ΒΓ > ΖΗ. □

Πρόταση 1.25

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην	Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες και τις τρίτες πλευρές τους άνισες, τότε οι περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες τους είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Απόδειξη



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, για τα οποία ισχύουν:

- ΑΒ = ΔΕ
- ΑΓ = ΔΖ
- ΒΓ > ΕΖ

Θα αποδείξουμε ότι $B\hat{A}\Gamma > E\hat{\Delta}Z$

Ας υποθέσουμε ότι $B\hat{A}\Gamma \leq E\hat{\Delta}Z$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

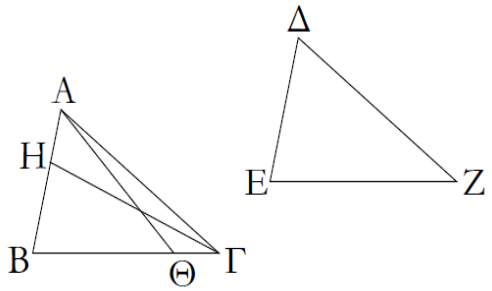
- Αν $B\hat{A}\Gamma = E\hat{\Delta}Z$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ θα ήταν ίσα, συνεπώς θα είχαμε ΒΓ = ΕΖ, κάτι που είναι άτοπο.
- Αν $B\hat{A}\Gamma < E\hat{\Delta}Z$, τότε θα ήταν ΕΖ > ΒΓ [Πρόταση 1.24], κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά ισχύει $B\hat{A}\Gamma > E\hat{\Delta}Z$ □

Πρόταση 1.26

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ	Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες, μία πλευρά ίση, η οποία είτε έχει τις ίσες γωνίες προσκείμενες, είτε είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες, τότε τα τρίγωνα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή τελικά είναι ίσα.

Απόδειξη



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία ισχύει:

- $\hat{B} = \hat{E}$
- $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$
- μία πλευρά ίση.

Θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Έστω ότι ΒΓ = ΕΖ και ας υποθέσουμε ότι ΑΒ > ΔΕ.

   Πάνω στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Η, τέτοιο ώστε ΒΗ = ΕΔ και φέρουμε το τμήμα ΗΓ.

   Τα τρίγωνα ΗΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

   - ΒΗ = ΕΔ
   - ΒΓ = ΕΖ
   - $\hat{B} = \hat{E}$

   άρα είναι ίσα [Πρόταση 1.4], συνεπώς $H\hat{\Gamma}B = \hat{Z} = A\hat{\Gamma}B$, κάτι που είναι άτοπο.

2. Έστω ότι ΑΒ = ΔΕ και ας υποθέσουμε ότι ΒΓ > ΕΖ

   Θεωρούμε σημείο Θ τέτοιο ώστε ΒΘ = ΕΖ και φέρουμε τη ΘΑ

   Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΔΕΖ έχουν:

   - ΑΒ = ΔΕ
   - ΒΘ = ΕΖ

- $\hat{B} = \hat{E}$

άρα είναι ίσα, συνεπώς $B\hat{\Theta}A = \hat{Z} = \hat{\Gamma}$, κάτι που είναι άτοπο, αφού η $B\hat{\Theta}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΘΓ, συνεπώς ισχύει $B\hat{\Theta}A > \hat{\Gamma}$ □

3.2.2 Οι Προτάσεις 1.27 και 1.28 και η προετοιμασία για τη χρήση του 5ου Αιτήματος

Στις Προτάσεις 1.27 και 1.28 διατυπώνονται ρητά τρεις ικανές συνθήκες παραλληλίας δύο ευθειών. Οι Προτάσεις αυτές αποτελούν ένα είδος προετοιμασίας για την εισαγωγή του 5ου Αιτήματος, καθώς στις αποδείξεις τους δεν απαιτείται άμεση ή έμμεση χρήση του 5ου Αιτήματος, παρά μόνο η Πρόταση 1.16.

Με σύγχρονη μαθηματική διατύπωση, δύο ευθείες είναι παράλληλες, **όταν** τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία:

Συνθήκη 1: σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες [Πρόταση 1.27]

Συνθήκη 2: σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες ίσες [Πρόταση 1.28α]

Συνθήκη 3: σχηματίζουν δύο εντός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές

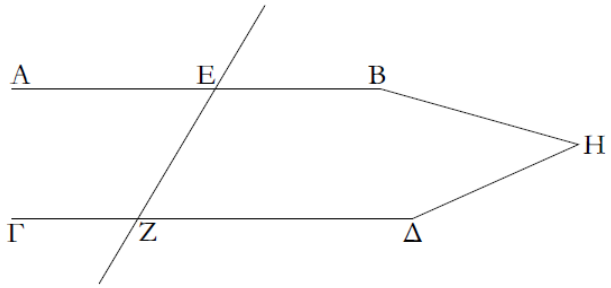
[Πρόταση 1.28β]

Ας μελετήσουμε τις Προτάσεις αναλυτικά.

Πρόταση 1.27

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι	Αν δύο ευθείες, τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Απόδειξη



Έστω οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ, οι οποίες τέμνονται από την ευθεία ΕΖ, ώστε ισχύει $A\hat{E}Z = E\hat{Z}\Delta$

Θα αποδείξουμε ότι ΑΒ // ΓΔ.

Ας υποθέσουμε ότι οι ΑΒ, ΓΔ δεν είναι παράλληλες και ας ονομάσουμε Η το σημείο τομής τους. Στο τρίγωνο ΗΕΖ, η γωνία $A\hat{E}Z$ είναι εξωτερική, άρα ισχύει $A\hat{E}Z > E\hat{Z}\Delta$, κάτι που είναι

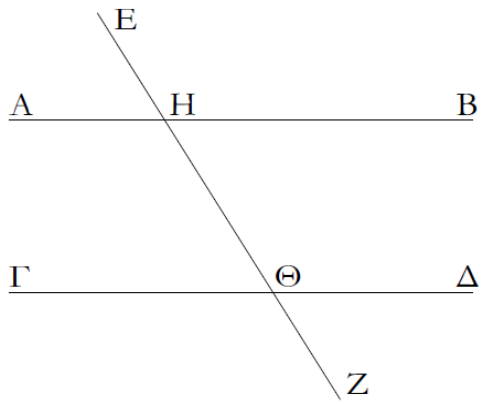
άτοπο λόγω της υπόθεσης. Άρα τελικά ΑΒ // ΓΔ. □

Πρόταση 1.28

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι	Αν δύο ευθείες, τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία, σχηματίζουν τις εντός, εκτός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες ίσες ή τις εντός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ, οι οποίες τέμνονται από την ευθεία ΕΖ. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:



- $E\hat{H}B = H\hat{\Theta}\Delta$

  Επειδή $E\hat{H}B = A\hat{H}\Theta$ [Πρόταση 1.15],

  θα ισχύει $A\hat{H}\Theta = H\hat{\Theta}\Delta$

  άρα ΑΒ // ΓΔ [Πρόταση 1.27]

- $B\hat{H}\Theta + H\hat{\Theta}\Delta = 2$ ορθές

  Επειδή $B\hat{H}\Theta + \Theta\hat{H}A = 2$ ορθές,

  θα ισχύει $H\hat{\Theta}\Delta = \Theta\hat{H}A$

  άρα ΑΒ // ΓΔ [Πρόταση 1.27] □

3.2.3 Η Πρόταση 1.29 και η πρώτη άμεση χρήση του 5ου Αιτήματος

Στην απόδειξη της Πρότασης 1.29 γίνεται για πρώτη φορά άμεση εφαρμογή του 5ου Αιτήματος. Στην Πρόταση αυτή αποδεικνύεται ότι οι τρεις συνθήκες που περιγράφονται στις Προτάσεις 1.27 και 1.28 αποτελούν όχι μόνο ικανές, αλλά αναγκαίες συνθήκες παραλληλίας δύο ευθειών.

Με σύγχρονη μαθηματική διατύπωση, **αν** δύο ευθείες είναι παράλληλες, **τότε** τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία:

Συνθήκη 1: σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Συνθήκη 2: σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες ίσες.

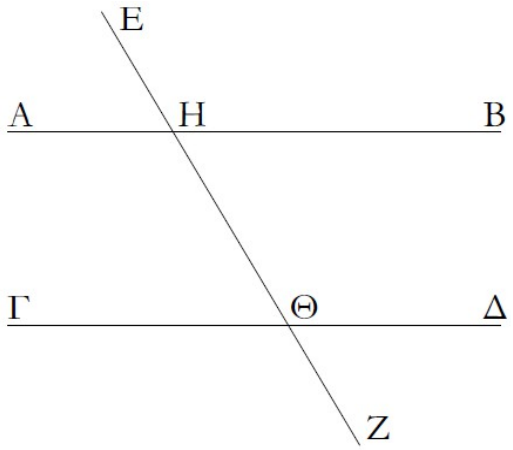
Συνθήκη 3: σχηματίζουν δύο εντός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Ας μελετήσουμε την Πρόταση 1.29 προσεκτικά.

Πρόταση 1.29

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας	Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τις εντός, εκτός και επί τ' αυτά γωνίες ίσες, ενώ τις εντός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Απόδειξη



Έστω οι παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΔ,

οι οποίες τέμνονται από την ευθεία ΕΖ.

Θα αποδείξουμε ότι:

- $A\hat{H}\Theta = H\hat{\Theta}\Delta$ (1)
- $E\hat{H}B = H\hat{\Theta}\Delta$ (2)
- $B\hat{H}\Theta + H\hat{\Theta}\Delta = 2$ ορθές (3)

(1) Έστω ότι $A\hat{H}\Theta \neq H\hat{\Theta}\Delta$ και ας υποθέσουμε ότι $A\hat{H}\Theta > H\hat{\Theta}\Delta$

Τότε $A\hat{H}\Theta + B\hat{H}\Theta > H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta$

Όμως ισχύει $A\hat{H}\Theta + B\hat{H}\Theta = 2$ ορθές, άρα $H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta > 2$ ορθές, κάτι που είναι άτοπο, καθώς αν ίσχυε, τότε οι ΑΒ και ΓΔ θα τέμνονταν **[Αίτημα 5]**

Ανάλογα αν $A\hat{H}\Theta < H\hat{\Theta}\Delta$

Άρα τελικά, $A\hat{H}\Theta = H\hat{\Theta}\Delta$

(2) Είναι $A\hat{H}\Theta = E\hat{H}B$, άρα $E\hat{H}B = H\hat{\Theta}\Delta$

(3) Είναι $E\hat{H}B + B\hat{H}\Theta = H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta$

Όμως $E\hat{H}B + B\hat{H}\Theta = 2$ ορθές, άρα τελικά $H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta = 2$ ορθές. □

Όπως είδαμε, στην απόδειξη της Πρότασης 1.29 γίνεται και μάλιστα για πρώτη φορά χρήση του περίφημου 5ου Αιτήματος του Ευκλείδη. Μήπως όμως υπάρχει μία βαθύτερη σχέση ανάμεσα στην Πρόταση 1.29 και στο 5ο Αίτημα;

Ας εξετάσουμε το ερώτημα.

Η σχέση της Πρότασης 1.29 και του 5ου Αιτήματος

Έστω δύο ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία.

Είναι:

5ο Αίτημα: Αν το άρθροισμα των εντός και επί τ' αυτά γωνιών είναι διάφορο των 2 ορθών, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.

Δηλαδή, αν $\hat{\omega} + \hat{\varphi} \neq 2$ ορθών $\Rightarrow$ ΑΒ όχι // ΓΔ

Ενώ:

Πρόταση 1.29: Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το άρθροισμα των εντός και επί τ' αυτά γωνιών ισούται με 2 ορθές.

Δηλαδή, αν ΑΒ // ΓΔ $\Rightarrow$ $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 2$ ορθές

Είναι προφανές ότι η Πρόταση 1.29 αποτελεί την αντιθετοαντίστροφη πρόταση του 5ου Αιτήματος, συνεπώς, σύμφωνα με τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής, πρόκειται για ισοδύναμες προτάσεις.

3.2.4 Οι Προτάσεις 1.32 και 1.34

Με την Πρόταση 1.29 και την πρώτη ευθεία χρήση του 5ου Αιτήματος, συντελείται ένα γεγονός μοναδικής σημασίας. Οι Προτάσεις που έπονται της Πρότασης 1.29 παύουν να είναι εύλογες και σύμφωνες με την ανθρώπινη διαίσθηση, διαφορά που έγινε αντιληπτή και σχολιάστηκε, όπως θα δούμε στη συνέχεια και από Αρχαίους μελετητές. Ταυτόχρονα, δύο από τις Προτάσεις που έπονται της Πρότασης 1.29 και συγκεκριμένα οι Προτάσεις 1.32 και 1.34, δίνουν εξαιρετικά πλούσια και σημαντικά συμπεράσματα, τόσο στο υπόλοιπο Βιβλίο 1, όσο και στα επόμενα 3 Βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Ο συνολικός ρόλος των Προτάσεων 1.32 και 1.34 παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

Πρόταση 1.32	Πρόταση 1.34
1. Βιβλίο 3 (Προτάσεις για κύκλο με εξαίρεση τις Προτάσεις 3.35 και 3.36)	**1.** Προτάσεις 1.35, 1.36, 1.37, 1.38
2. Προτάσεις 3.20, 3.21, 3.22	**2.** Βιβλίο 2 και Γεωμετρική Άλγεβρα
3. Προτάσεις 3.31, 3.32, 3.33	**3.** Πυθαγόρειο Θεώρημα
	4. Προτάσεις 1.44, 2.14 (Κάθε ευθύγραμμο χωρίο τετραγωνίζεται)
	5. Προτάσεις 3.35, 3.36 (Δύναμη σημείων ως προς κύκλο)
	6. Παραβολή χωρίων

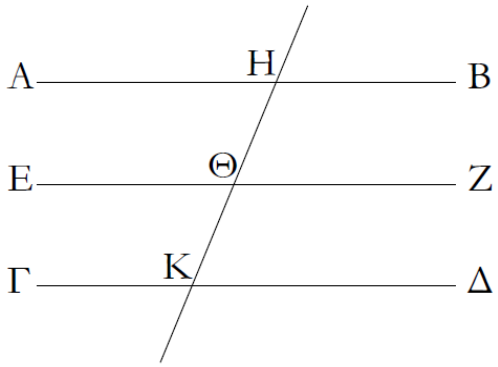
Για λόγους πληρότητας του κειμένου θα μελετήσουμε όλες τις Προτάσεις 1.30 έως και 1.34.

Στην Πρόταση 1.30 εξασφαλίζει η ισχύς της μεταβατικότητας της παραλληλίας ευθειών.

Πρόταση 1.30

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι	Δύο ευθείες που είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη



Έστω ΑΒ // ΕΖ και ΓΔ // ΕΖ. Θα αποδείξουμε ότι ΑΒ // ΓΔ.

Θεωρούμε ευθεία ΗΚ που τέμνει τις ΑΒ , ΕΖ, ΓΔ.

Επειδή ΑΒ // ΕΖ ισχύει $A\hat{H}K = H\hat{\Theta}Z$ [Πρόταση 1.29]

Επειδή ΓΔ // ΕΖ ισχύει $H\hat{\Theta}Z = \Theta\hat{K}\Delta$ [Πρόταση 1.29]

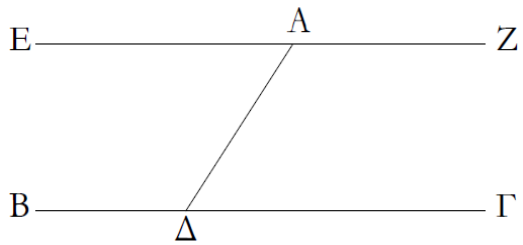
Άρα $A\hat{H}K = \Theta\hat{K}\Delta$, συνεπώς ΑΒ // ΓΔ □

Στην Πρόταση 1.31, από συγκεκριμένο σημείο, κατασκευάζεται ευθεία παράλληλη προς δοσμένη ευθεία. Πρόκειται για μία κατασκευή απαραίτητη για την Πρόταση 1.32.

Πρόταση 1.31

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν	Να κατασκευάσετε ευθεία παράλληλη προς δοσμένη ευθεία, η οποία να διέρχεται από συγκεκριμένο σημείο.

Απόδειξη



Έστω σημείο Α εκτός της ευθείας ΒΓ.

Από το Α θα φέρουμε ευθεία ΕΖ, ώστε ΕΖ // ΒΓ.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ πάνω στην ΒΓ

και φέρουμε το τμήμα ΑΔ. Με κορυφή το σημείο Α και πλευρά την ΑΔ, κατασκευάζουμε $E\hat{A}\Delta$ ώστε $E\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$

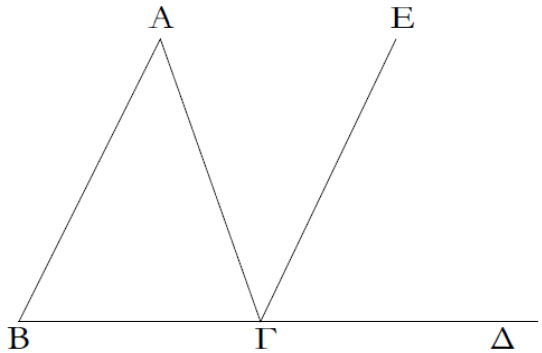
Η ευθεία ΕΑΖ είναι παράλληλη στην ΒΓ. □

Στην Πρόταση 1.32, η οποία, όπως αναφέραμε, διαθέτει ισχυρή αποδεικτική δύναμη, αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές. Πρόκειται για μία Πυθαγόρεια πρόταση, σύμφωνα με τον Πρόκλο.

Πρόταση 1.32

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν	Κάθε εξωτερική γωνία ενός τρίγωνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ισούται με δύο ορθές.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ

μέχρι το σημείο Δ. Θα αποδείξουμε ότι

$A\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A} + \hat{B}$ και

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές.

Φέρουμε ΓΕ // ΑΒ.

Η ευθεία ΑΓ τέμνει τις ΑΒ και ΓΕ, συνεπώς

$B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}E$ και $A\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta$ άρα

$B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}\Delta$ ή $\hat{A} + \hat{B} = A\hat{\Gamma}\Delta$ (1)

Είναι $A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές (2),

άρα τελικά (1), (2) $\Rightarrow$ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές. □

Στην Πρόταση 1.33 αποδεικνύεται η εναλλάξ ιδιότητα της παραλληλίας ευθειών.

Πρόταση 1.33

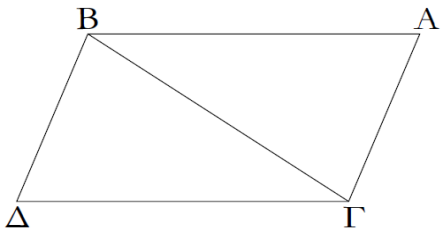
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν	Τα τμήματα που συνδέουν τα άκρα δύο ίσων παράλληλων τμημάτων προς το ίδιο μέρος, είναι ίσα και παράλληλα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΓΔ ευθύγραμμα τμήματα ίσα και παράλληλα.

Θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα.

Φέρουμε την ΒΓ. Προφανώς ισχύει $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B$



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΒ έχουν:

- ΑΒ = ΔΓ
- ΒΓ = ΒΓ
- $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B$

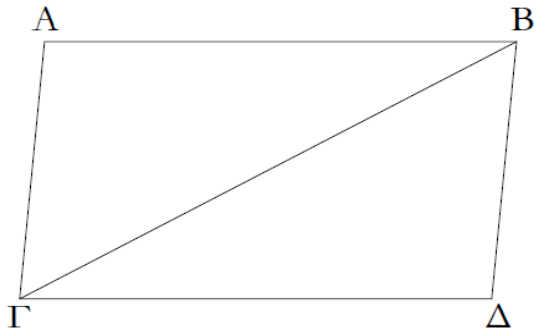
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, συνεπώς ΑΓ = ΒΔ και επειδή $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{B}\Delta$ ισχύει ΑΓ // ΒΔ.□

Ας περάσουμε στην Πρόταση 1.34, η οποία επίσης διαθέτει ισχυρή αποδεικτική δύναμη.

Πρόταση 1.34

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει	Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες, τις απέναντι γωνίες ίσες, ενώ οι διαγώνιοί του το διαιρούν σε δύο ίσα τρίγωνα.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΔΓ παραλληλόγραμμο και ΒΓ η διαγώνιός του.

Θα αποδείξουμε ότι:

- $\hat{A} = \hat{\Delta}$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- ΑΒ = ΓΔ
- ΑΓ = ΒΔ
- τρίγωνο ΑΒΓ = τρίγωνο ΔΒΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν:

- $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$ (επειδή ΑΒ // ΓΔ)
- $A\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{B}\Delta$ (επειδή ΑΓ // ΒΔ)
- ΒΓ = ΒΓ

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ είναι ίσα και συνεπώς ισχύει:

- ΑΒ = ΓΔ
- ΑΓ = ΒΔ
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$

Επίσης: $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$ και

$\Delta\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ □

3.2.5 Οι "παράδοξες" Προτάσεις 1.35, 1.36 (παραλληλόγραμμα), 1.37, 1.38 (τρίγωνα)

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τις λεγόμενες "παράδοξες" Προτάσεις 1.35, 1.36, 1.37 και 1.38 που έπονται της Πρότασης 1.29 και της πρώτης ευθείας χρήσης του 5ου Αιτήματος και οι οποίες δεν είναι εύλογες, ούτε σύμφωνες με την ανθρώπινη διαίσθηση.

Η Πρόταση 1.35 αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 1.29 (αντιθετοαντίστροφη πρόταση του 5ου Αιτήματος) και των Προτάσεων 1.31 έως και 1.34 (άμεσες συνέπειες του 5ου Αιτήματος).

Ας την μελετήσουμε.

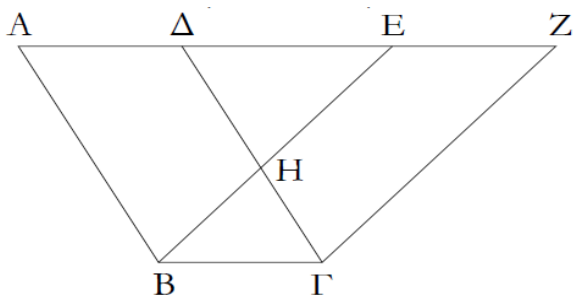
Πρόταση 1. 35 (Πυθαγόρεια)

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν	Παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών, έχουν ίσα εμβαδά.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ, τα οποία περιέχονται μεταξύ των παράλληλων ΒΓ και ΑΖ και έχουν κοινή βάση τη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα έχουν ίσα εμβαδά.

Τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΔΓΖ έχουν:



- ΑΕ = ΔΖ (αφού ΑΔ = ΒΓ και ΕΖ = ΒΓ)
- ΑΒ = ΔΓ
- $E\hat{A}B = E\hat{\Delta}\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΔΓΖ είναι ίσα, συνεπώς (ΕΑΒ) = (ΔΓΖ)

Είναι:

(ΕΑΒ) – (ΕΔΗ) = (ΔΓΖ) – (ΕΔΗ), δηλαδή (ΑΔΗΒ) = (ΕΗΓΖ)

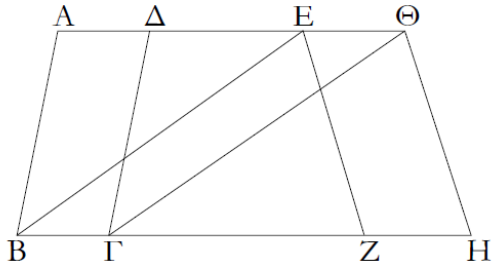
και άρα (ΑΔΗΒ) + (ΗΒΓ) = (ΕΗΓΖ) + (ΗΒΓ), δηλαδή (ΑΒΓΔ) = (ΕΒΓΖ). □

Ας συνεχίσουμε με την απόδειξη της Πρότασης 1.36.

Πρόταση 1.36

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν	Παραλληλόγραμμα που έχουν ίσες βάσεις και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών, έχουν ίσα εμβαδά.

Απόδειξη



Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ,

τα οποία περιέχονται μεταξύ των παράλληλων ΒΗ

και ΑΘ και έχουν ίσες βάσεις ΒΓ και ΖΗ.

Θα αποδείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα έχουν ίσα εμβαδά.

Φέρουμε τα τμήματα ΒΕ και ΓΘ. Είναι ΖΗ = ΕΘ, άρα ΒΓ = ΕΘ.

Όμως ΕΘ // ΒΓ άρα το τετράπλευρο ΒΕΘΓ είναι παραλληλόγραμμο [Πρόταση 1.33]

Συνεπώς (ΑΒΓΔ) = (ΒΓΘΕ) [Πρόταση 1.35]

Αντίστοιχα, (ΒΓΘΕ) = (ΕΖΗΘ) [Πρόταση 1.35]

Άρα τελικά, (ΑΒΓΔ) = (ΕΖΗΘ). □

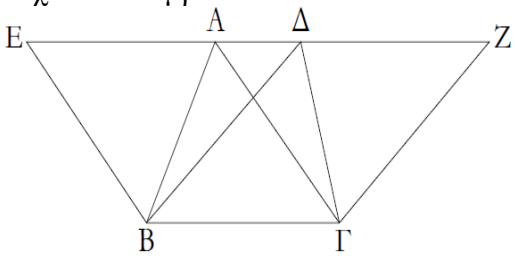
Οι Προτάσεις 1.37 και 1.38 έχουν περιεχόμενο αντίστοιχο των Προτάσεων 1.35 και 1.36, με μοναδική διαφορά ότι αναφέρονται σε τρίγωνα και όχι σε παραλληλόγραμμα.

Πρόταση 1.37

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν	Τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών, έχουν ίσα εμβαδά.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ, τα οποία περιέχονται μεταξύ των παράλληλων ΒΓ και ΕΖ και έχουν κοινή βάση τη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.



Προεκτείνουμε την ΑΔ και προς τις δύο κατευθύνσεις και φέρουμε ευθείες ΒΕ // ΑΓ και ΓΖ // ΒΔ.

Τα τετράπλευρα ΕΒΓΑ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, που περιέχονται ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες και έχουν κοινή βάση, άρα ισχύει (ΕΒΓΑ) = (ΔΒΓΖ) [Πρόταση 1.35]

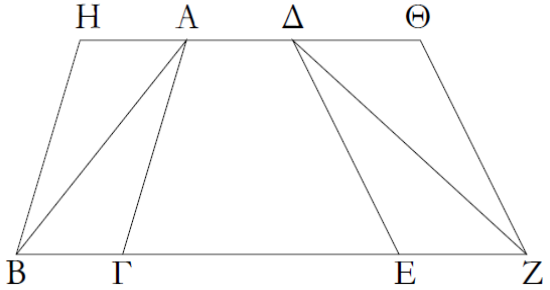
Όμως (ΕΒΓΑ) = 2(ΑΒΓ) και (ΔΒΓΖ) = 2(ΔΒΓ), άρα τελικά (ΑΒΓ) = (ΔΒΓ). □

Ας συνεχίσουμε με την απόδειξη της Πρότασης 1.38.

Πρόταση 1.38

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν	Τρίγωνα που έχουν ίσες βάσεις και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών, έχουν ίσα εμβαδά.

Απόδειξη



Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, τα οποία περιέχονται μεταξύ των παράλληλων ΒΖ και ΑΔ και έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή ισχύει ΒΓ = ΕΖ.

Θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.

Προεκτείνουμε την ΑΔ και προς τις δύο κατευθύνσεις και φέρουμε ευθείες ΒΗ // ΑΓ και ΖΘ // ΔΕ. Τα τετράπλευρα ΑΓΒΗ και ΔΕΖΘ είναι παραλληλόγραμμα που περιέχονται ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες και έχουν ίσες βάσεις, αφού ΒΓ = ΕΖ, συνεπώς ισχύει (ΑΓΒΗ) = (ΔΕΖΘ). [Πρόταση 1.36]

Όμως (ΑΓΒΗ) = 2(ΑΒΓ) και (ΔΕΖΘ) = 2(ΔΕΖ), άρα τελικά (ΑΒΓ) = (ΔΕΖ). □

Σύμφωνα με τον Πρόκλο (*Εις Ευκλείδην* 396,10-397,6), οι Προτάσεις 1.35 έως και 1.38

προξένησαν το ενδιαφέρον των Αρχαίων καθώς, όπως διαπιστώθηκε εξαρχής, διέφεραν σημαντικά από τις αρχικές Προτάσεις του Βιβλίου 1. Αναφέρεται μάλιστα ότι η εντύπωση που προκάλεσαν, ειδικά στους μη έχοντες γεωμετρική παιδεία, ήταν ότι πρόκειται για μάλλον 'παράδοξες' προτάσεις.

Παραθέτουμε το σχετικό χωρίο:

> ***"Τὸ μὲν δὴ τῶν προσεχῶς ζητηθησομένων θεωρημάτων εἶδος τοιοῦτόν ἐστι, τοπικὸν παρὰ τοῖς παλαιοῖς μαθηματικοῖς ἐπονομαζόμενον. δόξειεν δ' ἂν παντελῶς εἶναι θαυμαστὸν τοῖς ἀπείροις τῆς τοιαύτης θεωρίας, εἰ τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. πῶς γὰρ τοῦ μήκους τῶν συνισταμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως χωρίων ἐπ' ἄπειρον αὐξανομένου—ἐφ' ὅσον γὰρ τὰς παραλλήλους ἐκβάλλομεν, ἐπὶ τοσοῦτον καὶ τὰ μήκη τῶν παραλληλογράμμων αὔξειν δυνάμεθα—πῶς δὲ τούτου γινομένου μένει τῶν χωρίων ἡ ἰσότης, εἰκότως ἄν τις ἐπιζητήσειεν. εἰ γὰρ τὸ μὲν πλάτος ταὐτόν — ἡ γὰρ βάσις μία — τὸ δὲ μῆκος μεῖζον, πῶς οὐχὶ καὶ τὸ χωρίον μεῖζον; ἐστὶ μὲν οὖν τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ τὸ περὶ τῶν τριγώνων ἑξῆς τῶν παραδόξων ἐν τοῖς μαθήμασι καλουμένων θεωρημάτων. ἐξειργάσαντο γὰρ καὶ οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων τὸν παράδοξον λεγόμενον τόπον, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς ἐπὶ τῶν δειγμάτων, καὶ τίθενται καὶ τοῦτο τὸ θεώρημα τῶν τοιούτων εἶναι. καταπλήττει γοῦν τοὺς πολλοὺς εὐθύς, εἰ τὸ μῆκος πολλαπλασιαζόμενον οὐκ ἀναιρεῖ τὴν ἰσότητα τῶν χωρίων τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως."***

(Πρόκλος *εις Ευκλείδην* 396,10-397,6 στο Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, 2019, Σελ. 192)

Στο παραπάνω χωρίο αποτυπώνεται με σαφήνεια η αίσθηση που προκάλεσε η Πρόταση 1.35 "στους άπειρους περί την γεωμετρία". Πράγματι, η Πρόταση 1.35 χαρακτηρίζεται ως ένα από τα "παραδόξα θεωρήματα", καθώς είναι "παντελώς θαυμαστόν", το γεγονός ότι η περίμετρος αυξάνεται "επ' άπειρον", ενώ ταυτόχρονα "μένει η των χωρίων ισότης". Επιπλέον, τους πολλούς τους "καταπλήττει" το γεγονός ότι "ο πολλαπλασιασμός του μήκους της πλευράς δεν αναιρεί την ισότητα των χωρίων", αν και η βάση παραμένει η ίδια.

Εύλογα προκύπτουν τα εξής δύο ερωτήματα:

1ο. Ποιο είναι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της Πρότασης 1.35 και των επόμενων, αντίστοιχης φιλοσοφίας, Προτάσεων 1.36, 1.37 και 1.38, το οποίο τις καθιστά διαφορετικές σε σχέση με τις αρχικές Προτάσεις του Βιβλίου 1;

2ο. Για ποιο λόγο η Πρόταση 1.35, όπως και οι επόμενες Προτάσεις 1.36, 1.37 και 1.38 χαρακτηρίζονται 'παράδοξες';

Για να απαντήσουμε στο 1ο ερώτημα θα συγκρίνουμε την Πρόταση 1.35 με την Πρόταση 1.4. Ας θυμηθούμε το περιεχόμενο της Πρότασης 1.4.

Πρόταση 1.4

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες, μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες και θα είναι ίσα, δηλαδή θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες γωνίες τους.

Η Πρόταση 1.4 βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με την κοινή ανθρώπινη διαίσθηση και η ισχύς της είναι μάλλον προφανής. Η αυστηρή μαθηματική της απόδειξη μοιάζει απλά να επιβεβαιώνει κάτι που διαισθητικά γνωρίζουμε ότι είναι αληθές. Σε αντίθεση προς αυτήν, η Πρόταση 1.35, όπως και οι επόμενες παρόμοιες Προτάσεις 1.36, 1.37 και 1.38 είναι προτάσεις αρκετά διαφορετικής φιλοσοφίας. Η αλήθεια τους, η ισχύς τους, δεν είναι ούτε προφανής, ούτε εύλογη, καθώς πρόκειται για προτάσεις, το περιεχόμενο των οποίων αντίκεινται στην ανθρώπινη διαίσθηση. Ακριβώς όμως επειδή συνοδεύονται από αυστηρή αποδεικτική διαδικασία, είναι βέβαιο ότι πρόκειται για αληθείς προτάσεις και κανείς δεν μπορεί να τις αμφισβητήσει.

Οι Πυθαγόρειοι είχαν απόλυτη εμπιστοσύνη στην αποδεικτική διαδικασία, συνεπώς δεν υπήρχε ουδεμία αμφιβολία ως προς την ισχύ των συγκεκριμένων Προτάσεων, ανεξάρτητα από το πόσο εύλογες ή όχι αυτές μοιάζουν. Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, πρόκειται για την "πρώτη ένδειξη υπεροχής της μαθηματικής σκέψης σε σχέση με την κοινή διαίσθηση" (Σελ. 9 του άρθρου). Σε αυτό ακριβώς το σημείο εντοπίζεται η διαφορά των Προτάσεων 1.35, 1.36, 1.37 και 1.38 σε σχέση με τις αρχικές Προτάσεις του 1ου Βιβλίου.

Διαβάζουμε:

> Είμαστε εδώ μάρτυρες μιας νέας και πρωτόγνωρης κατάστασης στην Ιστορία των Μαθηματικών: τα Μαθηματικά δεν περιορίζονται πλέον μόνο στο να τακτοποιούν και ενδεχομένως να παρέχουν κάποιες αποδείξεις για Προτάσεις που είναι σύμφωνες με την υπάρχουσα εμπειρία και διαίσθηση, όπως συνέβαινε με τα Βαβυλωνιακά και τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά, αλλά και με τις Προτάσεις του Θαλή, αλλά προχωρούν στην απόδειξη Προτάσεων που έρχονται σε σύγκρουση με την κοινή εμπειρία και διαίσθηση, και υπερισχύουν αυτών. Συνειδητοποιείται ότι η μεν διαίσθηση, η οποία γενικά είναι ένας χρήσιμος οδηγός της σκέψης, δεν είναι αλάνθαστη, αντίθετα μερικές φορές μας οδηγεί σε λάθος δρόμο και συμπεράσματα, τα δε Μαθηματικά είναι η μόνη επιστήμη που είναι σε θέση να αποφανθεί με βεβαιότητα και ακρίβεια κατά πόσον μια Πρόταση, ένας

ισχυρισμός, ισχύει, αυτό δε, συμβαίνει μόνο όταν η Πρόταση έχει μαθηματική απόδειξη. (Σελ. 9 του άρθρου)

Ας περάσουμε τώρα στο 2ο ερώτημά μας.

Σύμφωνα με το συμπέρασμα της Πρότασης 1.35, όλα τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών, έχουν ίσα εμβαδά. Αυτό σημαίνει ότι, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από τη θέση των κορυφών του. Ακόμη και στην περίπτωση που οι δύο κορυφές του μετακινηθούν προς το άπειρο, το παραλληλόγραμμο που προκύπτει έχει σταθερό, πεπερασμένο εμβαδόν. Σε μία τέτοια περίπτωση όμως, καθώς οι δύο κορυφές του παραλληλογράμμου μετακινηθούν προς το άπειρο, η περίμετρός του είναι οσοδήποτε μεγάλη θέλουμε, ίσως ακόμη και άπειρη. Πρόκειται για μία περίπτωση μείξης απείρου – πέρατος και το φαινομένο αυτό δικαιολογεί απόλυτα τον χαρακτηρισμό των Προτάσεων 1.35, 1.36, 1.37 και 1.38 ως 'παράδοξες'.

Συμπερασματικά, ενώ οι Προτάσεις της Ουδέτερης Γεωμετρίας (Προτάσεις 1.1 έως και 1.26) είναι ευλογοφανείς, οι συνέπειες της Πρότασης 1.29, στην οποία, να υπενθυμήσουμε, χρησιμοποιείται για πρώτη φορά το 5ο Αίτημα, δεν περιέχουν προφανή συμπεράσματα, ενώ η ισχύς τους εξασφαλίζεται μόνο μέσα από την αυστηρή αποδεικτική διαδικασία. Τα συμπεράσματα κάποιων από αυτές (Προτάσεις 1.35 έως και 1.38) όχι μόνο δεν συμφωνούν με την ανθρώπινη διαίσθηση, αλλά έρχονται σε αντίθεση με αυτήν, σε βαθμό μάλιστα ώστε να είναι απολύτως δικαιολογημένος ο χαρακτηρισμός τους ως 'παράδοξες'. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω στοιχεία, μπορούμε να καταλήξουμε με ασφάλεια στο συμπέρασμα ότι η παραδοξότητα εισάγεται με την Πρόταση 1.29 και λογικά προέρχεται από το 5ο Αίτημα.

Τα σχόλια του Πρόκλου που αφορούν στη γνώση των Αρχαίων σχετικά με τις παράδοξες συνέπειες του 5ου Αιτήματος, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η παράδοξη φύση των μαθηματικών είχε γίνει αντιληπτή από τους Αρχαίους. Ο Αριστοτέλης, με τις παρατηρήσεις του που αφορούν στην ασυμμετρία [Μεταφυσικά 983α11–23], εντοπίζει ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης διαίσθησης: "με την παιδεία η ανθρώπινη διαίσθηση μεταβάλλεται και βελτιώνεται." (Σελ. 10 του άρθρου)

Γιατί όμως το 5ο Αίτημα εμπεριέχει παραδοξότητα; Η απάντηση στο νέο μας ερώτημα θα δοθεί στην 3η ενότητα του κεφαλαίου.

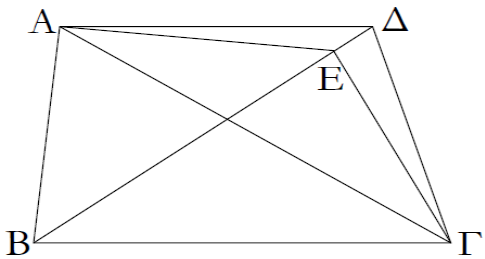
3.2.6 Οι Προτάσεις 1.39, 1.40

Οι Προτάσεις 1.39 και 1.40 είναι οι αντίστροφες των 1.37 και 1.38. Τις παραθέτουμε για λόγους πληρότητας του κειμένου.

Πρόταση 1.39

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν	Αν δύο τρίγωνα που έχουν ίσο εμβαδόν και την ίδια βάση, βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της κοινής τους βάσης, τότε περιέχονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με κοινή βάση ΒΓ, τέτοια ώστε τα σημεία Α, Δ να ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΓ και (ΑΒΓ) = (ΔΒΓ). Θα αποδείξουμε ότι ΑΔ // ΒΓ.

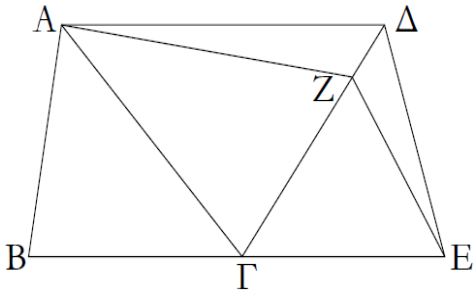
Ας υποθέσουμε ότι η ΑΔ δεν είναι παράλληλη στη ΒΓ.

Φέρουμε ΑΕ // ΒΓ και έχουμε (ΑΒΓ) = (ΒΕΓ) = (ΔΒΓ), κάτι που είναι άτοπο, αφού το ΕΒΓ περιέχεται στο ΔΒΓ. □

Πρόταση 1.40

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν	Αν δύο τρίγωνα που έχουν ίσο εμβαδόν και ίσες βάσεις, βρίσκονται προς το ίδιο μέρος των βάσεών τους, τότε περιέχονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ με ΒΓ = ΓΕ, (ΑΒΓ) = (ΔΓΕ).

Θα αποδείξουμε ότι ΑΔ // ΒΕ.

Ας υποθέσουμε ότι η ΑΔ δεν είναι παράλληλη στη ΒΕ.

Φέρουμε ΑΖ // ΒΕ.

Τότε (ΑΒΓ) = (ΖΓΕ) = (ΔΓΕ) [Πρόταση 1.36], κάτι που είναι άτοπο, αφού το ΖΓΕ περιέχεται στο ΔΓΕ. □

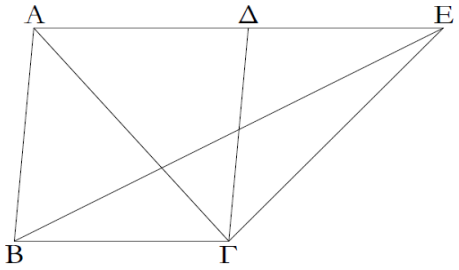
3.2.7 Οι Προτάσεις 1.41 έως και 1.46

Η Πρόταση 1.41 αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.34

Πρόταση 1.41

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου	Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει την ίδια βάση με ένα τρίγωνο και τα δύο σχήματα βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών, τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου.

Απόδειξη



Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τρίγωνο ΕΒΓ

με ΑΕ // ΒΓ. Θα αποδείξουμε (ΑΒΓΔ) = 2(ΕΒΓ).

Φέρουμε την ΑΓ. Είναι (ΑΒΓ) = (ΕΒΓ) [Πρόταση 1.37],

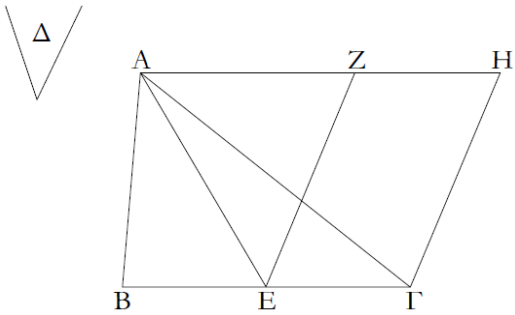
δηλαδή (ΑΒΓΔ) = 2 (ΕΒΓ). □

Η Πρόταση 1.42 αποτελεί έμμεση συνέπεια της Πρότασης 1.34, μέσω της Πρότασης 1.41.

Πρόταση 1.42

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ	Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο εμβαδού ίσου με δοσμένο τρίγωνο, του οποίου μία γωνία να ισούται με δοσμένη γωνία.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και δοσμένη γωνία $\hat{\Delta}$

Ονομάζουμε Ε το μέσο της ΒΓ [Πρόταση 1.10]

και με κορυφή το σημείο Ε και πλευρά την ΕΓ,

κατασκευάζουμε γωνία $Z\hat{E}\Gamma$ ίση με τη $\hat{\Delta}$

Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία ΑΖ // ΒΓ και από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία ΓΗ // ΕΖ.

Το τετράπλευρο ΕΖΗΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα 2 (ΑΕΓ) = (ΕΖΗΓ). [Πρόταση 1.41]

Όμως (ΑΒΕ) = (ΑΕΓ) [Πρόταση 1.38], άρα 2(ΑΕΓ) = (ΑΒΓ). □

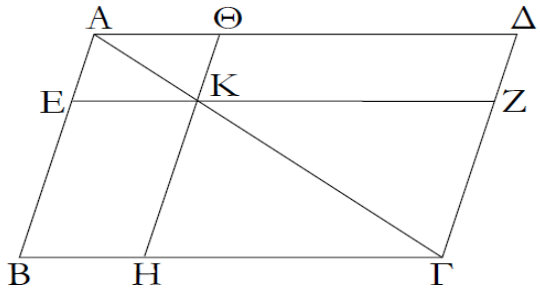
Η Πρόταση 1.43 είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.34. Πρόκειται για μία αρκετά απλή, αλλά εξαιρετικής σημασίας Πρόταση, καθώς σε αυτήν ερχόμαστε για πρώτη φορά σε επαφή με την

έννοια των **παραπληρωμάτων.**

Πρόταση 1.43

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΖΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι	Σε κάθε παραλληλόγραμμο τα παραπληρώματα ως προς μία διαγώνιο έχουν ίσα εμβαδά.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.

Από τυχαίο σημείο Κ της διαγωνίου ΑΓ,

φέρουμε ευθείες παράλληλες στις πλευρές,

όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θα αποδείξουμε ότι τα παραπληρώματα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή ισχύει (ΕΒΗΚ) = (ΘΚΖΔ)

- ΑΓ διαγώνιος του ΑΒΓΔ, άρα (ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) [Πρόταση 1.34]
- ΑΓ διαγώνιος του ΑΕΚΘ, άρα (ΑΕΚ) = (ΑΘΚ) [Πρόταση 1.34]
- ΑΓ διαγώνιος του ΚΗΓΖ, άρα (ΚΗΓ) = (ΚΖΓ) [Πρόταση 1.34]

Είναι:

(ΑΒΓ) – (ΑΕΚ) – (ΚΗΓ) = (ΑΓΔ) – (ΑΘΚ) – (ΚΖΓ), δηλαδή τα **παραπληρώματα** (ΕΒΗΚ) και (ΘΚΖΔ) είναι ίσα κατά το εμβαδόν. □

Οι επόμενες Προτάσεις 1.44 και 1.45 αποτελούν συνέπειες της Πρότασης 1.43 και σχετίζονται με τη λεγόμενη Πυθαγόρεια μέθοδο παραβολής ευθυγράμμων χωρίων, την οποία θα μελετήσουμε αναλυτικά σε επόμενη ενότητα του κεφαλαίου. Σύμφωνα με αυτές, κάθε ευθύγραμμο χωρίο έχει εμβαδόν ίσο με ένα παραλληλόγραμμο με δοθείσα πλευρά.

Πρόταση 1.44

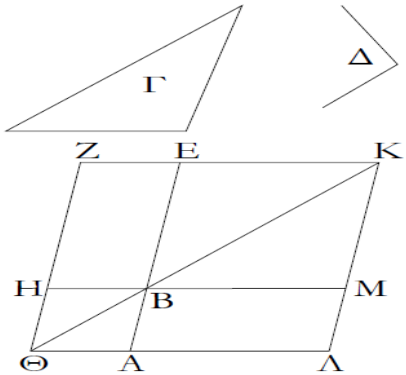
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ	Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο, του οποίου η πλευρά να είναι ίση με δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα, η μία γωνία να είναι ίση με δοσμένη γωνία και το εμβαδόν του να είναι ίσο

	με το εμβαδόν δοσμένου τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τρίγωνο Γ και γωνία Δ.

Προεκτείνουμε το τμήμα ΑΒ και κατασκευάζουμε $E\hat{B}H$ ίση με τη $\hat{\Delta}$ και παραλληλόγραμμο ΕΒΗΖ, τέτοιο, ώστε (ΕΒΗΖ) = (τρίγωνο Γ). Προεκτείνουμε τις ΖΕ, ΖΗ, ΗΒ και φέρουμε ΑΘ // ΒΗ, καθώς και την ΘΒ.



Ονομάζουμε Κ το σημείο που η ΘΒ τέμνει την προέκταση της ΖΕ και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΘΛΚΖ. Είναι (ΕΒΗΖ) = (Γ) = (ΑΒΜΛ) [Πρόταση 1.42 + 1.43] , ενώ $E\hat{B}H = A\hat{B}M$

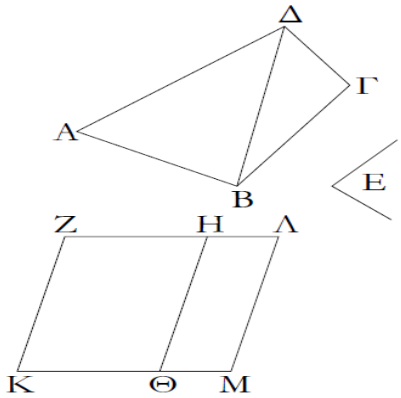
Άρα τελικά, το ΑΒΜΛ είναι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο. □

Πρόταση 1.45

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ	Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο, του οποίου η μία γωνία να είναι ίση με δοσμένη γωνία και το εμβαδόν του να είναι ίσο με το εμβαδόν δοσμένου πολυγώνου.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ πολύγωνο και γωνία Ε. Θα κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο, η μία γωνία του οποίου ισούται με την $\hat{E}$ ενώ το εμβαδόν του ισούται με το εμβαδόν του ΑΒΓΔ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ και κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμα:



- ΗΘΚΖ, τέτοιο ώστε (ΑΒΔ) = (ΗΘΚΖ), ΘΗ = ΒΔ και $\Theta\hat{K}Z = \hat{E}$ [Πρόταση 1.42]
- ΘΗΛΜ, τέτοιο ώστε (ΘΗΛΜ) = (ΔΓΒ), ΘΗ = ΒΔ και $M\hat{\Theta}H = \hat{E}$ [Πρόταση 1.42]

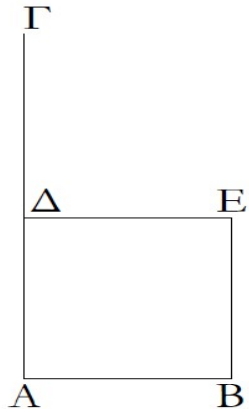
Για το παραλληλόγραμμο ΚΖΛΜ ισχύει ότι (ΚΖΛΜ) = (ΑΒΓΔ) και $M\hat{K}Z = \hat{E}$, άρα τελικά το ΚΖΛΜ είναι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο. □

Η Πρόταση 1.46 είναι έμμεση συνέπεια του 5ου Αιτήματος. Χρησιμοποιείται στην Πρόταση 1.47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) και στις Προτάσεις 2.4 έως και 2.8

Πρόταση 1.46

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι	Να κατασκευαστεί τετράγωνο πλευράς ίσης με δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.

Απόδειξη



Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θα κατασκευάσουμε τετράγωνο πλευράς ΑΒ.

Από το Α φέρουμε ευθεία ΑΓ κάθετη στην ΑΒ [Πρόταση 1.11]

και πάνω σε αυτή θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΒ [Πρόταση 1.2]

Από το σημείο Δ φέρουμε ΔΕ // ΑΒ, ενώ από το σημείο Β φέρουμε ΒΕ //ΑΓ.

Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο,

συνεπώς ΕΒ = ΑΔ και ΑΒ = ΔΕ.

Όμως, ΑΒ = ΑΔ = ΒΕ = ΕΔ, άρα το ΑΒΕΔ είναι ρόμβος. Ταυτόχρονα ισχύει $\hat{A} = 1$ ορθή, συνεπώς το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο. Άρα τελικά, το ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο. □

3.2.8 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα – Πρόταση 1.47 και η αρχική του θέση

Η Πρόταση 1.47, το περίφημο Πυθαγόρειο Θεώρημα, αποτελεί μία ακόμη συνέπεια της Πρότασης 1.34. Βασιζόμενος σε παλαιότερες πηγές που δεν κατονομάζει, ο Πρόκλος, στο έργο του *Εις Ευκλείδην* [426.6–10], πιστώνει το περιεχόμενο της Πρότασης 1.47 στον Πυθαγόρα, επισημαίνοντας όμως το γεγονός ότι η απόδειξη που παρουσιάζεται στα *Στοιχεία* είναι του ίδιου του Ευκλείδη, γεγονός που επιβεβαιώνει ο Πλούταρχος, στο έργο του *Συμποσιακά*, [720A1–7] (Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, 2019, Σελ. 224 – 225). Συνεπώς, η αρχική απόδειξη των Πυθαγορείων ήταν διαφορετική από εκείνη που παρουσιάζεται στα *Στοιχεία*.

Ας μελετήσουμε την απόδειξη της Πρότασης 1.47, όπως παρουσιάζεται από τον *Στοιχειωτή*.

Πρόταση 1.47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις	Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές

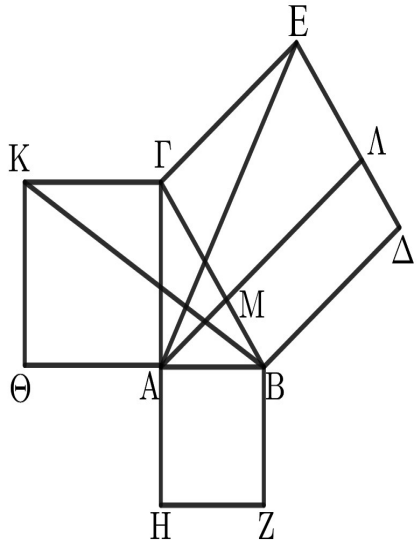
	του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}$ = 1 ορθή.

Θα αποδείξουμε ότι (ΒΓΕΔ) = (ΑΒΖΗ) + (ΑΓΚΘ)

Από το σημείο Α φέρουμε ΑΛ // ΒΔ και σχηματιζουμε τα τμήματα ΑΕ, ΒΚ.



Είναι $B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}H$ = 1ορθή, άρα τα ΗΑ, ΑΓ είναι τμήματα της ίδιας ευθείας. Αντίστοιχα για τα ΑΒ, ΑΘ.

Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΚΒΓ έχουν:

- ΓΕ = ΒΓ
- ΓΑ = ΚΓ
- $A\hat{\Gamma}E = K\hat{\Gamma}B$ = 1ορθή + $A\hat{\Gamma}B$

Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΚΒΓ είναι ίσα, άρα (ΑΓΕ) = (ΚΒΓ)

Όμως (ΓΕΛΜ) = 2(ΑΓΕ) [Πρόταση 1.41]

(ΑΓΚΘ) = 2(ΚΒΓ) [Πρόταση 1.41]

Άρα ισχύει (ΓΕΛΜ) = (ΑΓΚΘ) (1)

Αντίστοιχα έχουμε (ΒΔΛΜ) = (ΑΒΖΗ) (2)

Άρα τελικά, (1) + (2) $\Rightarrow$ (ΓΕΛΜ) + (ΒΔΛΜ) = (ΑΓΚΘ) + (ΑΒΖΗ)

$\Rightarrow$ (ΒΔΕΓ) = (ΑΓΚΘ) + (ΑΒΖΗ) □

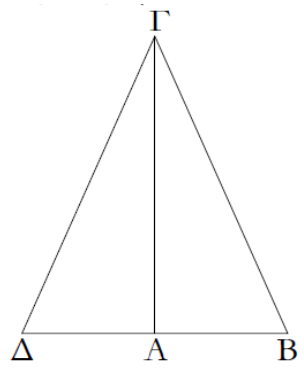
Η Πρόταση 1.48 είναι γνωστή και ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Πρόκειται προφανώς για την αντίστροφη πρόταση της Πρότασης 1.47.

Πρόταση 1.48

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν	Αν σε ένα τρίγωνο, το εμβαδόν του τετραγώνου μιας πλευράς ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και η ορθή γωνία βρίσκεται ανάμεσα στις δύο άλλες πλευρές του.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε, το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΒΓ να είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Θα αποδείξουμε ότι η $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή γωνία.



Φέρουμε την ΑΔ κάθετη στην ΑΓ και παίρνουμε ΑΔ = ΑΒ.

Τα τετράγωνα με πλευρές ΑΔ και ΑΒ είναι ίσα,

δηλαδή $A\Delta^2 = AB^2$, άρα $A\Delta^2 + A\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

Όμως, επειδή $\Gamma\hat{A}\Delta$ = 1ορθή, είναι $A\Delta^2 + A\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2$

Συνεπώς ισχύει ΓΔ = ΓΒ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:

- ΑΒ = ΑΔ
- ΓΒ = ΓΔ
- ΑΓ = ΑΓ

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, άρα τελικά $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma$ = 1ορθή. □

Στο σημείο αυτό θα παραθέσουμε, χωρίς να μελετήσουμε σε βάθος, ορισμένα στοιχεία σχετικά με την αρχική θέση των Προτάσεων 1.47 και 1.48. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στο βιβλίο τους με τίτλο *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαίτητου, Ευδόξου* (2019), σε μία προσπάθεια διερεύνησης του ρόλου του Πυθαγορείου θεωρήματος στα Πυθαγόρεια μαθηματικά και συγκεκριμένα στην ανακάλυψη της ασυμμετρίας, ανασκευάζουν την Πυθαγόρεια Γεωμετρία και προτείνουν μία διαφορετική θέση για το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Παρουσιάζουν ισχυρά επιχειρήματα των Bretschneider, Hankel κ.α, σύμφωνα με τα οποία, η αρχική θέση του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι ανάμεσα στις Προτάσεις 2.8 και 2.9 του 2ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Επιγραμματικά αναφέρουμε τα ακόλουθα επιχειρήματα:

1. Σύμφωνα με τον Πρόκλο (*Εις Ευκλείδην*, 426.6 – 10), η απόδειξη της Πρόταση 1.47 που παρουσιάζεται στα *Στοιχεία* ανήκει στον Ευκλείδη, συνεπώς διαφέρει της αρχικής Πυθαγόρειας απόδειξης.
2. Η απόδειξη της Πρότασης 1.47 που παρουσιάζεται στα *Στοιχεία* περιέχει την Πρόταση 2.2 που προφανώς έπεται της Πρότασης 1.47.

3. Στον Πλατωνικό διάλογο *Μένων* [84δ3 – 85β7] περιγράφεται μια αρχαία απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος για ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα, το πνεύμα της οποίας διαφέρει ριζικά από εκείνο της απόδειξης της Πρότασης 1.47. Επιπρόσθετα, η λογική επέκταση της μεθόδου απόδειξης που περιγράφεται στο χωρίο του διαλόγου *Μένων* και η χρήση της Πρότασης 2.8 των *Στοιχείων* οδηγεί σε μία γενική απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος.
4. Οι προτάσεις 2.1 έως και 2.8 του 2ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αποδεικνύονται όλες με Γνώμονες, χωρίς καμία χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, ενώ **κάθε** πρόταση από την 2.9 έως και τη 2.14 χρησιμοποιεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αυτό έχει ως συνέπεια το διαχωρισμό των προτάσεων του Βιβλίου 2 σε δύο μέρη.
5. Οι Προτάσεις 2.12 (Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για αμβλυγώνιο τρίγωνο) και 2.13 (Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για οξυγώνιο τρίγωνο), περιγράφουν ακριβέστερα το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος συγκριτικά με την Πρόταση 1.48. Πράγματι:

Πρόταση 2.12

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ	**Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα (αμβλυγώνιο τρίγωνο)** Σε κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, κατά το διπλάσιο του γινομένου της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν.

Πρόταση 2.13

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει,	**Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα (οξυγώνιο τρίγωνο)** Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από μία οξεία γωνία είναι μικρότερο από το άθροισμα

καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ	των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, κατά το διπλάσιο του γινομένου της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν**.**

Με βάση τα παραπάνω επιχειρήματα, οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη τοποθετούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα μεταξύ των Προτάσεων 2.8 και 2.9, στη θέση που καλούν Πρόταση 2.8/9α. Από τη νέα αυτή θέση γίνεται σαφέστερος ο ρόλος του Πυθαγορείου θεωρήματος ως εργαλείο, τόσο για τις Πυθαγόρειες αποδείξεις ασυμμετρίας, όσο και για τις μεθόδους εφαρμογής τετραγωνικών χωρίων, καθ' υπερβολή και κατ' έλλειψη, που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

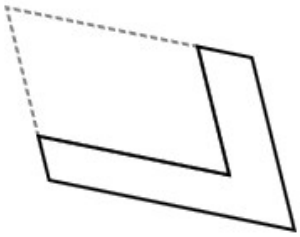
3.2.9 Το 2ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη – Η Θεωρία των Γνωμόνων

Στην ενότητα που ακολουθεί, θα μελετήσουμε το 2ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, οι Προτάσεις του οποίου αποτελούν συνέπειες της Πρότασης 1.34. Στο συγκεκριμένο Βιβλίο καθοριστικής σημασίας είναι οι Γνώμονες, ο δεύτερος δηλαδή από τους συνολικά δύο ορισμούς του Βιβλίου.

Όρος 2.2

Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω

Έστω παραλληλόγραμμο και τυχαίο σημείο μιας από τις διαγωνίους του. Από τυχαίο σημείο, φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του παραλληλογράμμου, όπως στο διπλανό σχήμα. Το χωρίο που σχηματίζεται καλείται γνώμονας.



Οι Γνώμονες αποτελούν ισχυρό αποδεικτικό εργαλείο, καθώς όλες οι Προτάσεις 2.1 έως και 2.8 του 2ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αποδεικνύονται με τη χρήση τους, χωρίς ταυτόχρονα να γίνεται καμία χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Να υπενθυμίσουμε ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα χρησιμοποιείται σε **κάθε** απόδειξη των Προτάσεων 2.9 έως και 2.14.

Θα μελετήσουμε τις Προτάσεις του 2ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη,

παραθέτοντας την αντίστοιχη αλγεβρική σχέση με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό.

3.2.9.1 Οι Στοιχειώδεις Προτάσεις 2.1, 2.2, 2.3

Οι Προτάσεις 2.1, 2.2, 2.3 σχετίζονται με την επιμεριστικότητα και αποτελούν συνέπειες της Πρότασης 1.46. Θα τις παραθέσουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 2.1

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $\alpha(\beta + \gamma + \delta + ...) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + ...$

Πρόταση 2.2

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** Αν $\alpha = \beta + \gamma$, τότε $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha^2$

Πρόταση 2.3

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $(\alpha + \beta)\alpha = \alpha\beta + \alpha^2$

3.2.9.2 Η Θεωρία των Γνωμόνων - Προτάσεις 2.4 έως και 2.8

Στις Προτάσεις 2.4 έως και 2.8 παρουσιάζεται η λεγόμενη Θεωρία των Γνωμόνων. Οι Προτάσεις 2.4, 2.6 και 2.8 έχουν προσθετικό χαρακτήρα, σε αντίθεση με τις Προτάσεις 2.5 και 2.7 που έχουν αφαιρετικό χαρακτήρα. Μεταξύ αυτών, ιδιαίτερη θέση καταλαμβάνει η Πρόταση 2.4, καθώς πρόκειται για μία εξαιρετικής σημασίας, μάλλον τετριμμένη πρόταση, η οποία όμως αποτελεί τρόπο σκέψης.

Ο Νεγρεπόντης ανασκευάζει τη σειρά των Προτάσεων του 2ου Βιβλίου των *Στοιχείων* και προτείνει την ακόλουθη:

Πρόταση 2.4

$\Downarrow$

Πρόταση 2.6

$\Downarrow$

Πρόταση 2.7

$\Downarrow$

Πρόταση 2.5

Την προτεινόμενη σειρά θα ακολουθήσουμε στην παρουσίαση των προτάσεων.

Πρόταση 2.4

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \Gamma$ (όπου $\Gamma = \beta^2 + 2\alpha\beta$)

Απόδειξη

Από την Πρόταση 2.1 έχουμε

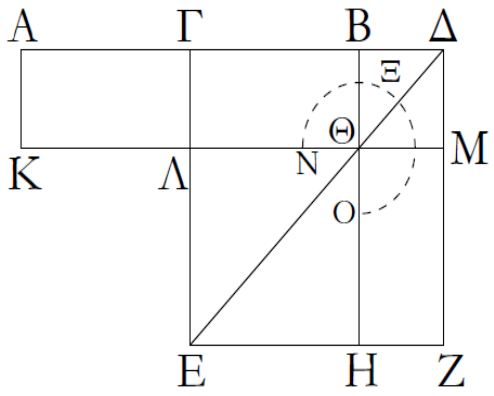
$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \\
&= \alpha(\alpha + \beta) + \beta(\alpha + \beta) = \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \\
&= \alpha^2 + \Gamma, \text{ όπου } \Gamma = \beta^2 + 2\alpha\beta \ \square
\end{aligned}
$$

Πρόταση 2.6

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + x(\alpha+x)$

Απόδειξη

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα α (το ΑΒ του σχήματος), το διχοτομούμε και το επεκτείνουμε κατά τμήμα x (το ΒΔ του σχήματος).



Από την Πρόταση 2.4 έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\Gamma =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\left(\frac{\alpha}{2}x\right)+x^2 =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+x(\alpha+x) \quad \square$$

Πρόταση 2.7

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

Απόδειξη

Έστω δύο ευθείες α, β με α > β.

Είναι: $\alpha^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2(\alpha - \beta)\,\beta + \beta^2 \Rightarrow$

$\alpha^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 \Rightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta.$ □

Πρόταση 2.5

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}-x\right)^2 + x(\alpha - x)$

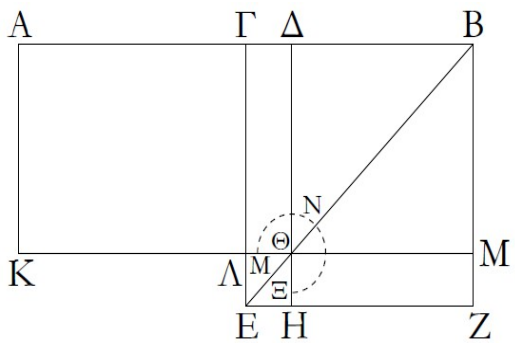
Απόδειξη

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα α (το ΚΜ του σχήματος), το διχοτομούμε και το ελαττώνουμε κατά τμήμα x (το ΛΘ του σχήματος), με $x < \frac{\alpha}{2}$

Από την Πρόταση 2.4 έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + \Gamma =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + x(\alpha - x) \square$$



Από τις Προτάσεις 2.5 και 2.6 απορρέουν εξαιρετικές συνέπειες και συμπεράσματα, γεγονός που τις καθιστά ιδιαίτερης σημασίας. Ο συνολικός τους ρόλος, ο οποίος θα διερευνηθεί στην επόμενη ενότητα, παρουσιάζεται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Πρόταση 2.5	**Πρόταση 2.6**
1. Πρόταση 2.8/9γ (Πυθαγόρεια μορφή παραβολής χωρίου κατ΄έλλειψη)	1. Πρόταση 2.8/9β (Πυθαγόρεια μορφή παραβολής χωρίου καθ' υπερβολή)
2. Πρόταση 2.14 (μέση ανάλογος)	2. Πρόταση 2.11 (χρυσή τομή)
3. Πρόταση 3.35	3. Πρόταση 3.36

Για λόγους πληρότητας του κειμένου, θα παραθέσουμε την Πρόταση 2.8 χωρίς απόδειξη, ολοκληρώνοντας έτσι τη μελέτη των Προτάσεων που προηγούνται του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Πρόταση 2.8 (Διπλός Γνώμονας)

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ	**Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta$

Από τη μελέτη που προηγήθηκε επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα δεν χρησιμοποιείται σε καμία από τις Προτάσεις που προηγούνται της Πρότασης 2.9, γεγονός που όπως είδαμε, αποτελεί ένα από τα επιχειρήματα των μελετητών υπέρ της μετακίνησης της Πρότασης 1.47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) στη θέση 2.8/9α. Αν δεχτούμε τη μετακίνηση αυτή, ποια θα μπορούσε άραγε να είναι η επόμενη Πρόταση;

3.2.9.3 Η μέθοδος παραβολής χωρίων – Η Γεωμετρική Άλγεβρα

Το 5ο και το 6ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη έχουν ως περιεχόμενο τη Θεωρία Λόγων Μεγεθών και έχουν πιστωθεί στον, μεταγενέστερο των Πυθαγορείων, μεγάλο μαθηματικό της αρχαιότητας Εύδοξο. Στις Προτάσεις 6.28 και 6.29, ο Εύδοξος παρουσιάζει μία Πυθαγόρεια τεχνική, την παραβολή χωρίων, όχι όμως στους τετράγωνους Γνώμονες των Πυθαγορείων, αλλά σε Γνώμονες όμοιων παραλληλογράμμων.

Συγκεκριμένα:

- Η παραβολή χωρίου καθ' υπερβολή παρουσιάζεται στην Πρόταση 6.29
- Η παραβολή χωρίου κατ' έλλειψη παρουσιάζεται στην Πρόταση 6.28, έχοντας ως βοηθητική Πρόταση την 6.27.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη. στο βιβλίο τους με τίτλο *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαίτητου, Ευδόξου* (2019), εξάγουν τις αρχικές Πυθαγόρειες Προτάσεις της παραβολής χωρίων για τετράγωνους Γνώμονες, από τις γενικότερες Προτάσεις 6.29 και 6.28, χωρίς τη Θεωρία Λόγων Μεγεθών. Τις νέες Προτάσεις τις τοποθετούν στο 2ο Βιβλίο των *Στοιχείων*, ανάμεσα στις Προτάσεις 2.8 και 2.9, στις θέσεις που καλούν 2.8/9β (παραβολή χωρίου καθ' υπερβολή) και 2.8/9γ (παραβολή χωρίου κατ΄ έλλειψη).

Ας τις μελετήσουμε προσεκτικά.

Πρόταση 2.8/9β (Πυθαγόρεια μορφή παραβολής χωρίου καθ' υπερβολή)

Δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και μ, να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα x, τέτοιο ώστε $x(\alpha + x) = \mu^2$

Απόδειξη

Θα περιγράψουμε τα βήματα της κατασκευής:

Βήμα 1ο: Διχοτομούμε το ευθύγραμμο τμήμα α, ώστε να προκύψουν τμήματα μήκους $\frac{\alpha}{2}$ το καθένα. [Πρόταση 1.10]

Βήμα 2ο: Κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$ [Πρόταση 1.46]

Βήμα 3ο: Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μ και $\frac{\alpha}{2}$ και καλούμε γ την

υποτείνουσά του.

Ισχύει: $\gamma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \mu^2$ (1)

Βήμα 4ο: Προφανώς ισχύει $\gamma > \frac{\alpha}{2}$ Ορίζουμε $x = \gamma - \frac{\alpha}{2}$

Βήμα 5ο: Από την Πρόταση 2.6 προκύπτει $\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + x(\alpha+x)$

άρα $\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = x(\alpha + x)$, δηλαδή $\gamma^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = x(\alpha + x)$ (2)

Άρα τελικά, από τις (1), (2) έχουμε $\mu^2 = x(\alpha + x)$ □

Πρόταση 2.8/9γ (Πυθαγόρεια μορφή παραβολής χωρίου κατ΄έλλειψη)

Δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και μ, με $\frac{\alpha}{2} > \mu$, να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα x, τέτοιο ώστε $x(\alpha - x) = \mu^2$

Απόδειξη

Θα περιγράψουμε τα βήματα της κατασκευής:

Βήμα 1ο: Διχοτομούμε το ευθύγραμμο τμήμα α, ώστε να προκύψουν τμήματα μήκους $\frac{\alpha}{2}$ το καθένα. [Πρόταση 1.10]

Βήμα 2ο: Κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$ [Πρόταση 1.46]

Βήμα 3ο: Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $\frac{\alpha}{2}$ και μία κάθετη πλευρά μ και καλούμε γ την άλλη κάθετη πλευρά του παραπάνω τριγώνου.

Ισχύει: $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \gamma^2 + \mu^2$ (1)

Βήμα 4ο: Προφανώς ισχύει $\gamma < \frac{\alpha}{2}$ Ορίζουμε $x = \frac{\alpha}{2} - \gamma$

Βήμα 5ο: Από την Πρόταση 2.5 και επειδή $\gamma < \frac{\alpha}{2}$,

έχουμε $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}-x\right)^2 + x(\alpha - x)$, άρα $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}-x\right)^2 = x(\alpha - x)$,

δηλαδή $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \gamma^2 = x(\alpha - x)$ (2)

Άρα τελικά, από τις (1), (2) έχουμε $\mu^2 = x(\alpha - x)$ □

Η Πυθαγόρεια τεχνική της παραβολής χωρίων, είτε καθ' υπερβολή, είτε κατ' έλλειψη εμπεριέχει κάτι πολύ βαθύτερο και εξαιρετικά ενδιαφέρον.

- Υπολογίσαμε το x ώστε να ισχύει $\mu^2 = x(\alpha + x)$

  Πώς το βρήκαμε;

  Είναι: $x = \gamma - \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \gamma$, όπου $\gamma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \mu^2$

  άρα $x = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \mu^2} = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\mu^2}}{2}$

Παρατηρούμε ότι με την Πυθαγόρεια τεχνική της παραβολής χωρίων, ο Ευκλείδης μας παρουσιάζει τη γεωμετρική μορφή της μίας ρίζας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 + \alpha x - \mu^2 = 0$, γεγονός εξαιρετικά εντυπωσιακό!

Μελετητές των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είχαν εντοπίσει από αρκετά νωρίς τη σχέση του 2ου Βιβλίου με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Αυτός είναι και ο λόγος που στο 2ο Βιβλίο των *Στοιχείων* έχει αποδοθεί ο τίτλος Γεωμετρική Άλγεβρα.

3.2.9.4 Συνέπειες της Πυθαγόρειας μορφής παραβολής χωρίου καθ' υπερβολή

Θα μελετήσουμε δύο συνέπειες της Πυθαγόρειας τεχνικής της παραβολής χωρίων καθ΄υπερβολή.

Πρόταση 2.11

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ	Έστω ευθύγραμμο τμήμα α. Να διαιρεθεί κατάλληλα σε δύο τμήματα ώστε, το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές α και το ένα τμήμα, να ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά το άλλο τμήμα. (Τα τμήματα α και x είναι σε σχέση *χρυσής τομής*) **Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** $\alpha(\alpha - x) = x^2$

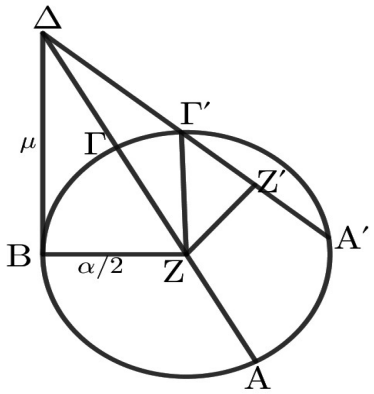
Απόδειξη

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.8/9β για μ = α . □

Πρόταση 3.36 (Δύναμη εσωτερικού σημείου ως προς κύκλο)

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ	Έστω κύκλος Κ με κέντρο Ζ, διάμετρο α και Δ σημείο εξωτερικό του κύκλου. Φέρουμε: • τη ΔΖ και ονομάζουμε Α, Γ τα σημεία που αυτή τέμνει τον κύκλο • την ΔΒ = μ εφαπτόμενη του κύκλου • ΔΓ΄Α΄ τυχαία τέμνουσα του κύκλου, με Γ΄Α΄=β. Αν ΔΓ = x και ΔΓ΄= y, τότε ισχύουν: 1. x (α + x) = μ^2 2. y (β + y) = x (α + x) =μ^2

Απόδειξη



[1] Για την ευθεία ΑΖΓΔ ισχύει η Πρόταση 2.6, συνεπώς

$$\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = x(\alpha+x) \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΒΖΔ και έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \mu^2 \quad (2)$$

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $x(\alpha+x) = \mu^2$

[2] Φέρουμε το απόστημα ΖΖ΄ της Α΄Γ΄

Για την ευθεία Α΄Ζ΄Γ΄Δ ισχύει η Πρόταση 2.6, συνεπώς

$$\left(\frac{\beta}{2}+y\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = y(\beta+y) \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΖΖ΄Δ και έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 = ZZ'^2 + \left(\frac{\beta}{2}+y\right)^2 \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΖΖ΄Γ΄ και έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = ZZ'^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει $\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2}+y\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2$

άρα, από [1] και (3) προκύπτει τελικά $y(\beta+y) = \mu^2$. □

3.2.9.5 Συνέπειες της Πυθαγόρειας μορφής παραβολής χωρίου κατ΄έλλειψη

Θα μελετήσουμε δύο συνέπειες της Πυθαγόρειας τεχνικής της παραβολής χωρίων κατ΄έλλειψη.

Στην Πρόταση 2.14 που ακολουθεί, κατασκευάζεται ο γεωμετρικός μέσος ή η μέση ανάλογος δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Στην απόδειξή της, εφαρμόζεται αρχικά η Πρόταση 2.5 και στη συνέχεια το Πυθαγόρειο Θεώρημα, σε αντίθεση με την Πρόταση 2.8/9γ (Πυθαγόρεια μορφή παραβολής χωρίου κατ΄έλλειψη), η οποία αποδεικνύεται εφαρμόζοντας, αρχικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα και στη συνέχεια την Πρόταση 2.5.

Πρόταση 2.14

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι	Να κατασκευαστεί τετράγωνο που το εμβαδόν του ισούται με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα. **Σύγχρονη αλγεβρική σχέση** Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ψ, ω. Να κατασκευαστεί ευθεία μ τέτοια ώστε $\psi \cdot \omega = \mu^2$ (κατασκευή μέσης αναλόγου δύο ευθειών)

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Το ψ ταυτίζεται με το ω: τότε το ζητούμενο τμήμα είναι το ψ.
- Το ψ δεν ταυτίζεται με το ω:
  Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ψ > ω.

  Θέτουμε $\alpha = \psi + \omega$

  $x = \omega$

Επειδή $\psi > \omega$, είναι $\psi + \omega > 2\omega$, άρα $\alpha > 2x$, δηλαδή $x < \frac{\alpha}{2}$

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.5 για τα α και x και έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 + x(\alpha - x) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 = x(\alpha - x) \Rightarrow$$

$$\psi\omega = \left(\frac{\psi+\omega}{2}\right)^2 - \left(\frac{\psi-\omega}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ώστε:

- η υποτείνουσά του να είναι ίση με $\left(\frac{\psi+\omega}{2}\right)$
- η μία κάθετη πλευρά του να είναι ίση με $\left(\frac{\psi-\omega}{2}\right)$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα [Πρόταση 1.47] προκύπτει ότι για το τετράγωνο της άλλης κάθετης πλευράς του τριγώνου, έστω μ, ισχύει

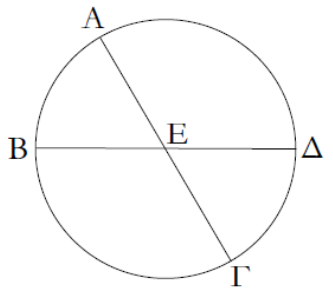
$$\mu^2 = \left(\frac{\psi+\omega}{2}\right)^2 - \left(\frac{\psi-\omega}{2}\right)^2 \quad (2)$$

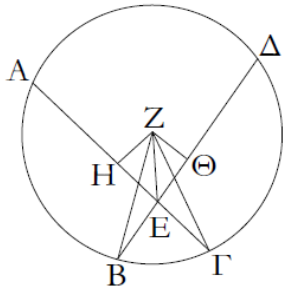
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\mu^2 = \psi\omega$ και το ζητούμενο τμήμα είναι το μ. □

Πρόταση 3.35 (Δύναμη εσωτερικού σημείου ως προς κύκλο)

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ	Έστω κύκλος C και η χορδή του ΑΓ. Αν μία άλλη χορδή του ΒΔ, τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε, τότε το γινόμενο ΑΕ · ΕΓ είναι σταθερό.

Απόδειξη





Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω Ε είναι το κέντρο του C. Τότε προφανώς το γινόμενο ΑΕ · ΕΓ είναι σταθερό.
- Έστω Ε δεν είναι το κέντρο του C. Τότε, έστω Ζ το κέντρο του C και ΑΓ = α.

Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ κάθετο στο ΑΓ.

Προφανώς είναι ΑΗ = ΗΓ = $\frac{\alpha}{2}$

Έστω ΕΓ = x. Είναι x < $\frac{\alpha}{2}$

Από την Πρόταση 2.5 έχουμε $x(\alpha - x) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2$, δηλαδή

$$AE \cdot E\Gamma = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΖΗΕ:

$ZE^2 = ZH^2 + HE^2 \Rightarrow$

$\delta^2 = ZH^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 \quad (2)$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΖΗΓ:

$ZH^2 + H\Gamma^2 = Z\Gamma^2 \Rightarrow$

$ZH^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \rho^2 \quad (3)$

Από τις (2) και (3) προκύπτει $\delta^2 - \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 = \rho^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, ή ισοδύναμα

$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 = \rho^2 - \delta^2 \quad (4)$

Από τις (1) και (4) προκύπτει $AE \cdot E\Gamma = \rho^2 - \delta^2$, άρα τελικά

$x(\alpha - x)$ = σταθερό, για κάθε x, α. □

3.2.10 Η αποδεικτική ισχύς του 5ου Αιτήματος συνολικά

Στην ομιλία που έδωσε στην Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης, ο Νεγρεπόντης παρουσίασε τον ακόλουθο πίνακα, στον οποίο περιγράφεται πλήρως η αποδεικτική ισχύς του 5ου Αιτήματος.

5ο Αίτημα Προτάσεις 1.27, 1.28, 1.29	
Πρόταση 1.32 **στον κύκλο**	**Πρόταση 1.34** **στα ευθύγραμμα σχήματα**
Πρόταση 3.21	Προτάσεις 1.35 – 1.38 (Βιβλίο 1)
Προτάσεις 3.20, 3.22	Προτάσεις 2ου Βιβλίου
Προτάσεις 3.31 – 3.33	Πυθαγόρειο Θεώρημα
	Προτάσεις 1.44 και 2.14 (κάθε ευθύγραμμο χωρίο τετραγωνίζεται)
	Πυθαγόρεια μορφή παραβολής χωρίου καθ' υπερβολή και κατ΄έλλειψη
	Γεωμετρική Άλγεβρα
	Προτάσεις 3.35 και 3.36 (Δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

Το 5ο Αίτημα χαρακτηρίζεται από τον Στράντζαλο ως "η ειδοποιός διαφορά της Ευκλείδειας από τις άλλου τύπου Γεωμετρίες" (Σελ. 28), ενώ η ισχύς του, κυρίως συγκριτικά με τα πρώτα τέσσερα Αιτήματα, δεν είναι διαισθητικά προφανής, ούτε εύλογη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης μοιάζει αρκετά διστακτικός ως προς τη χρήση του 5ου Αιτήματος, αφού στις αρχικές Προτάσεις του Βιβλίου 1, που αποτελούν την Ουδέτερη Γεωμετρία, δεν γίνεται καμία χρήση του. Το 5ο Αίτημα χρησιμοποιείται άμεσα για πρώτη φορά στην Πρόταση 1.29, ενώ στη συνέχεια χρησιμοποιείται άμεσα ή έμμεσα σε όλο το υπόλοιπο του 1ου Βιβλίου, δηλαδή στις Προτάσεις 1.30 έως 1.48, καθώς και στα επόμενα τρία Βιβλία των *Στοιχείων*. Την τεράστια αποδεικτική δύναμη του 5ου Αιτήματος στη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία επιβεβαιώσαμε από τη μελέτη των Προτάσεων των Βιβλίων 1, 2, 3 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη που προηγήθηκε. Το συμπέρασμα είναι αδιαμφισβήτητο: θεμελιώδη, μη τετριμμένα αποτελέσματα της επίπεδης Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και παράδοξες, αντίθετες προς την κοινή διαίσθηση προτάσεις, απορρέουν από αυτό.

Εύλογα, τίθεται το ερώτημα:

Ποια είναι άραγε η προέλευση της αποδεικτικής δύναμης του 5ου Αιτήματος και από πού πηγάζει η παραδοξότητα ορισμένων προτάσεων;

Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε την ερμηνεία των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη σε σχέση με την προέλευση της αποδεικτικής δύναμης του 5ου Αιτήματος, καθώς και την παραδοξότητα που εντοπίζεται σε ορισμένες προτάσεις – συνέπειες αυτού.

3.3 Το 5ο Αίτημα ως συμβατή περάτωση του Απείρου

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην εργασία τους με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* αναγνωρίζουν στο 5ο Αίτημα μία ακόμη περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Αν δεχτούμε την ερμηνεία τους τότε, η ισχυρή αποδεικτική του δύναμη, αλλά και η παραδοξότητα ορισμένων προτάσεων που προκύπτουν από αυτό, παύουν να αποτελούν μυστήριο και εξηγούνται απόλυτα, λόγω της προσέγγισης της αντίφασης.

Ας μελετήσουμε προσεκτικά τα επιχειρήματά τους.

Η εισαγωγή του απείρου στη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία αποδίδεται, όπως αναφέραμε, στο 2ο Αίτημα του Ευκλείδη. Η συγκεκριμένη απειρία όμως, δεν είναι πάντα διαχειρίσιμη. Παράδειγμα μιας τέτοιας περίπτωσης αδυναμίας διαχείρισης του απείρου, αποτελεί ο έλεγχος της παραλληλίας δύο ευθειών. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.23, παράλληλες καλούνται οι ευθείες οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις δεν πρόκειται να συναντηθούν.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ελέγξουμε δύο συνεπίπεδες ευθείες ως προς την παραλληλία. Αν ο έλεγχος γίνει χωρίς τη χρήση του 5ου Αιτήματος, τότε:

1. Οι υπό εξέταση ευθείες θα πρέπει να επεκταθούν όσο επιθυμούμε και να μην τέμνονται,
2. η επέκταση μιας ευθείας γίνεται με άμεση χρήση του 2ου Αιτήματος, άρα,
3. για να χαρακτηρίσουμε τις δύο ευθείες παράλληλες θα πρέπει να εφαρμόσουμε άπειρες φορές το 2ο Αίτημα σε καθεμία από τις ευθείες.

Σε μία προσπάθεια αποφυγής της άπειρης διαδικασίας, διερωτόμαστε εάν η πεπερασμένη εφαρμογή του 2ου Αιτήματος θα μπορούσε να αποτελέσει μια ασφαλή μέθοδο ελέγχου της παραλληλίας, με προφανή αρνητική απάντηση. Πράγματι, η πεπερασμένη εφαρμογή του 2ου

Αιτήματος δεν μας παρέχει ένα ικανό κριτήριο, ώστε να αποφανθούμε σχετικά με την παραλληλία δύο ευθειών και απαιτείται η εφαρμογή του 2ου Αιτήματος άπειρες το πλήθος φορές. Καθώς δεν είναι εφικτή η άπειρη εφαρμογή του 2ου Αιτήματος, ΑΡΑ, ο έλεγχος της παραλληλίας με την συνεχή επέκταση των ευθειών, δεν είναι εφικτός, εξαιτίας της άπειρης διαδικασίας που εμπεριέχει.

Ουσιαστικά λοιπόν, δεν είναι εφικτός ο έλεγχος παραλληλίας δύο ευθειών με τη χρήση μόνο του 2ου Αιτήματος του Ευκλείδη.

Την παραπάνω αδυναμία ελέγχου της παραλληλίας δύο ευθειών έρχεται να ανατρέψει το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη. Πράγματι, το 5ο Αίτημα αποτελεί ένα ασφαλές κριτήριο ελέγχου της παραλληλίας δύο ευθειών, το οποίο μάλιστα αποτελείται από δύο μόνο βήματα:

Βήμα 1ο: Φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τις δύο υπό εξέταση ευθείες.

Βήμα 2ο: Ελέγχουμε εάν οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται

- είναι ίσες: στην περίπτωση αυτή οι ευθείες είναι παράλληλες.
- δεν είναι ίσες: στην περίπτωση αυτή οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και είμαστε σε θέση να καθορίσουμε το ημιεπίπεδο ως προς την τρίτη ευθεία που τέμνονται οι ευθείες.

Είναι σαφές ότι το 5ο Αίτημα μετατρέπει μία μη αποδεκτή, λόγω των άπειρων βημάτων της, διαδικασία ελέγχου παραλληλίας δύο ευθειών, σε μία απόλυτα εφικτή και αποτελεσματική σε δύο μόνο βήματα, διαδικασία ελέγχου παραλληλίας. Κάτι δηλαδή που από τη φύση του είναι άπειρο, περατώνεται.

Το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη, ένα αίτημα τολμηρό και καθόλου τετριμμένο, στο οποίο οφείλεται η διαφοροποίηση της Ευκλείδειας από τις μη – Ευκλείδειες Γεωμετρίες, είναι πράγματι μία περίπτωση εφαρμογής της λεγόμενης Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Στο γεγονός ότι, ως περάτωση του απείρου, αποτελεί προσέγγιση της αντίφασης, αποδίδεται η εξαιρετικά μεγάλη αποδεικτική δύναμή του, αντίστοιχη με εκείνη της Αρχής του Ελαχίστου και της ισοδύναμής της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής στη Θεωρία Αριθμών, αλλά και η παραδοξότητα ορισμένων προτάσεων – συνεπειών του.

3.4 Η βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου

Στην παρούσα ενότητα, αρχικά θα παραθέσουμε ορισμένα στοιχεία για την αξιωματική μέθοδο και την εφαρμογή της στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Θα καταγράψουμε επιχειρήματα υπέρ της αναγκαιότητας της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο, όπου, σύμφωνα με το Υπουργείο Παιδείας, υλοποιείται "το πέρασμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη". (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2018) Τέλος, θα παραθέσουμε προσωπικούς και όχι μόνο, προβληματισμούς που αφορούν τη δεδομένη και αναμφίβολη υποβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο, κατά τις τελευταίες δεκαετίες, μάρτυρες της οποίας είμαστε όλοι μας.

3.4.1 Η αξιωματική μέθοδος και η εφαρμογή της στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη

Μία σύγχρονη και μάλλον διαδεδομένη θεώρηση σχετικά με τα μαθηματικά είναι το λεγόμενο DTP μοντέλο (definition – theorem – proof), που ο Thurston (Thurston, 1994) χαρακτηρίζει ως "popular model". Σύμφωνα με το DTP μοντέλο:

D: οι μαθηματικοί ξεκινούν από απλές βασικές μαθηματικές δομές και μία συλλογή αξιωμάτων που αφορούν σε αυτές τις δομές,

T: υπάρχει μία σειρά σημαντικών ερωτημάτων σχετικά με αυτές τις δομές, οι οποίες διατυπώνονται με τη μορφή αυστηρών μαθηματικών προτάσεων,

P: οι μαθηματικοί αναζητούν αυστηρές αποδείξεις για τις αυστηρά διατυπωμένες προτάσεις, ή για τις αρνήσεις των προτάσεων αυτών.

Όπως αναφέρουν οι Jaffe & Quinn, μία αδυναμία του DTP μοντέλου είναι ότι δεν εξηγείται ικανοποιητικά η προέλευση των ερωτημάτων και έτσι προτείνουν την προσθήκη της υπόθεσης (speculation) ως βασικό συστατικό του μοντέλου, μετονομάζοντας το μοντέλο σε DSTP. Η υπόθεση σχετίζεται με τον εντοπισμό συνδέσεων, την ανάδειξη ερωτημάτων, τη διατύπωση ευφυών εικασιών και τη δόμηση αποδεικτικών συλλογισμών.

Γυρίζοντας όμως πίσω στο χρόνο και μελετώντας τα πρώτα σωζόμενα καταγεγραμμένα

μαθηματικά κείμενα, θα παρατηρήσουμε ότι τα εμπειρικά μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων απέχουν παρασάγγας από τα μοντέλα DTP ή DSTP. Η πρώτη φορά που οι μαθηματικές προτάσεις αποδεικνύονται και μάλιστα χωρίς την επίκληση της εμπειρίας και αφορούν είδη και όχι συγκεκριμένα αντικείμενα συνέβη στην αρχαία Ελλάδα. Ποια ήταν άραγε η συνθήκη ή η ανάγκη που οδήγησε σε αυτό; Η απάντηση δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Στο Παράρτημα Α του σχολικού βιβλίου *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, *Τεύχος Α΄* της Α΄ Λυκείου, των Αργυρόπουλου, Η., Βλάμου, Π., Κατσούλη, Γ., Μαρκάτη, Σ., Σιδέρη, Π. (2017), περιγράφεται το γενικότερο πνεύμα της συγκεκριμένης εποχής. Αναφέρεται ότι στην αρχαία Ελλάδα καταγράφονται προσπάθειες ερμηνείας του κόσμου με βάση τη θεωρία του "πρωταρχικού στοιχείου" που σύμφωνα με τους Ίωνες φιλοσόφους ήταν η ενιαία αρχή του κόσμου, ενώ σύμφωνα με τους αρχαίους ατομιστές ήταν οι ελάχιστες αδιαίρετες οντότητες. (Σελ. 147) Εναρμονισμένη πλήρως με τη συγκεκριμένη θεώρηση, στον τομέα της οριοθέτησης μιας επιστημονικής θεωρίας όπως είναι τα μαθηματικά, είναι η προσπάθεια εντοπισμού ενός συνόλου βασικών ταυτολογιών και ενός συνόλου συλλογιστικών κανόνων, από τις οποίες προκύπτουν όλες οι προτάσεις.

Διαβάζουμε:

> Έτσι, η τάση να εξηγηθεί ο κόσμος ξεκινώντας από ένα πεπερασμένο αριθμό αρχικών στοιχείων με κάποιους ορθολογικούς κανόνες δέσποζε στην πνευματική ατμόσφαιρα της αρχαίας Ελλάδας. (Παράρτημα Α, Σελ. 147)

Οι μελετητές συμφωνούν ότι οι αρχαίοι Έλληνες πρώτοι συστηματοποίησαν τις αλήθειες, ώστε από κάποιες απλές και βασικές, να προκύπτουν με χρήση συγκεκριμένων κανόνων παραγωγής, όλες οι υπόλοιπες και μάλιστα χωρίς επίκληση της εμπειρίας, δηλαδή προσέγγισαν την έννοια του παραγωγικού συστήματος. Η επιστήμη, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, πρέπει να ακολουθεί τις εξής αρχές:

1. να είναι ένα σύνολο απόλυτων αληθειών,
2. να ξεκινά από κάποιες αρχές, από τις οποίες συνάγονται οι αλήθειες της επιστήμης,
3. να μελετά ιδεατά αντικείμενα που είναι σταθερά και αμετάβλητα στην πορεία του χρόνου. Απόλυτες αλήθειες μπορούν να διατυπωθούν μόνο για τα αντικείμενα αυτού του τύπου.

(Παράρτημα Α, Σελ. 147)

Ο Αριστοτέλης, στο έργο του *Αναλυτικά Ύστερα* [72α14 – 24] και [76α31 – 76β22], ορίζει τα συστατικά μιας αποδεικτικής επιστήμης, δίνοντας αυστηρούς ορισμούς για τις έννοιες, *θέσις*, *αξίωμα*, *ορισμός*, *υπόθεσις*.

Ἀμέσου δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι· ἣν δ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, ἀξίωμα· ἔστι γὰρ ἔνια τοιαῦτα· τοῦτο γὰρ μάλιστ' ἐπὶ τοῖς τοιούτοις εἰώθαμεν ὄνομα λέγειν. θέσεως δ' ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀντιφάσεως λαμβάνουσα, οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι, ὑπόθεσις, ἡ δ' ἄνευ τούτου ὁρισμός. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις μέν ἐστι· τίθεται γὰρ ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι κατὰ τὸ ποσόν· ὑπόθεσις δ' οὐκ ἔστι· τὸ γὰρ τί ἐστι μονὰς καὶ τὸ εἶναι μονάδα οὐ ταὐτόν [72α14 – 24]

Λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται, ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι· οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύναι. Ἔστι δ' ὧν χρῶνται ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς ἐπιστήμαις τὰ μὲν ἴδια ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ δὲ κοινά, κοινὰ δὲ κατ' ἀναλογίαν, ἐπεὶ χρήσιμόν γε ὅσον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ἐπιστήμην γένει· ἴδια μὲν οἷον γραμμὴν εἶναι τοιανδὶ καὶ τὸ εὐθύ, κοινὰ δὲ οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λοιπά. ἱκανὸν δ' ἕκαστον τούτων ὅσον ἐν τῷ γένει· ταὐτὸ γὰρ ποιήσει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ' ἐπὶ μεγεθῶν μόνον, τῷ δ' ἀριθμητικῷ ἐπ' ἀριθμῶν. Ἔστι δ' ἴδια μὲν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ' αὑτά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ἡ δὲ γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς. ταῦτα γὰρ λαμβάνουσι τὸ εἶναι καὶ τοδὶ εἶναι. τὰ δὲ τούτων πάθη καθ' αὑτά, τί μὲν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ μὲν ἀριθμητικὴ τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος, ἡ δὲ γεωμετρία τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν, ὅτι δ' ἔστι, δεικνύουσι διά τε τῶν κοινῶν καὶ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων. καὶ ἡ ἀστρολογία ὡσαύτως. πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, ὅσα τε εἶναι τίθεται (ταῦτα δ' ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική), καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει κνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμβάνει. ἐνίας μέντοι ἐπιστήμας οὐδὲν κωλύει ἔνια τούτων παρορᾶν, οἷον τὸ γένος μὴ ὑποτίθεσθαι εἶναι, ἂν ᾖ φανερὸν ὅτι ἔστιν (οὐ γὰρ ὁμοίως δῆλον ὅτι ἀριθμὸς ἔστι καὶ ὅτι ψυχρὸν καὶ θερμόν), καὶ τὰ

πάθη μὴ λαμβάνειν τί σημαίνει, ἂν ᾖ δῆλα· ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινὰ οὐ λαμβάνει τί σημαίνει τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον. ἀλλ' οὐδὲν ἧττον τῇ γε φύσει τρία ταῦτά ἐστι, περὶ ὅ τε δείκνυσι καὶ ἃ δείκνυσι καὶ ἐξ ὧν.

[76α31 – 76β22]

Η αξιωματική μέθοδος, όπως παρουσιάζεται στα παραπάνω χωρία, είναι ο τρόπος κατασκευής μιας αποδεικτικής ή παραγωγικής επιστημονικής θεωρίας. Ο Αριστοτέλης, αναφέροντας τα παραδείγματα της αριθμητικής και της γεωμετρίας, θεωρεί ότι τα δομικά στοιχεία που κάθε μαθηματική θεωρία επιβάλλεται να έχει, είναι:

1. Ένα σύνολο λογικών αρχών – λογικών κανόνων, κοινών για όλες τις επιστήμες.

2. Ένα σύνολο ειδικών αρχών – αξιωμάτων, που αναφέρονται αποκλειστικά στη συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία.

3. Ένα σύνολο ορισμών, το οποίο όμως δεν εγγυάται την ύπαρξη των αντικειμένων που ορίζονται.

4. Ένα σύνολο υποθέσεων, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι κάθετι που ορίστηκε, υπάρχει.

(Αναπολιτάνος, 1985, Σελ. 57)

Στο Παράρτημα Α του σχολικού βιβλίου της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας, Τεύχος Α΄* της Α΄ Λυκείου παρουσιάζονται στοιχεία για τα χαρακτηριστικά των όρων και των προτάσεων, από τον συνδυασμό των οποίων προκύπτει η γενική λογική δομή μιας αποδεικτικής επιστήμης.

Διαβάζουμε:

- Η αποδεικτική επιστήμη είναι μια ακολουθία προτάσεων για τα στοιχεία ενός πεδίου αντικειμένων [...]

- Οι προτάσεις αυτές διαιρούνται σε αναπόδεικτες ή αρχικές (αξιώματα, αιτήματα, αρχές, τα πρώτα) και αποδείξιμες ή παράγωγες (θεωρήματα).

- Οι όροι της πρότασης διαιρούνται σε μη οριζόμενους ή αρχικούς όρους (αρχές, τα πρώτα) και ορίσιμους ή παράγωγους όρους (τα εκ τούτων). [...]

- Από τις αρχικές προτάσεις, τα αξιώματα είναι προφανή και αναπόδεικτα, ενώ τα αιτήματα είναι υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη, αν και δεν είναι πάντοτε προφανείς.

- Οι αρχικοί όροι είναι άμεσα νοητοί και δεν ορίζονται.

- Από τις αρχικές προτάσεις, τα αξιώματα είναι αληθείς και αναγκαίες προτάσεις. Η αλήθεια των αιτημάτων όμως δεν είναι λογικά αναγκαία, αλλά γίνεται δεκτή χωρίς απόδειξη. (Παράρτημα Α, Σελ. 147)

Η πρώτη καταγεγραμμένη θεωρία που ακολουθεί πιστά τη δομή ενός αξιωματικά θεμελιωμένου συστήματος, σε απόλυτη συμφωνία με τους ορισμούς του Αριστοτέλη, είναι η βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπως παρουσιάζεται στα τέσσερα πρώτα Βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Εξαιτίας της δομής τους, τα *Στοιχεία* αποτέλεσαν για αιώνες "πρότυπο επιστημονικής μεθόδου και το ιδεώδες της μαθηματικής αυστηρότητας" (Παράρτημα Α, Σελ. 148) και "επηρέασαν όσο λίγα βιβλία τη μακροχρόνια διαδικασία προς την ωρίμανση της ανθρώπινης σκέψης και την πολιτισμική ανέλιξη" (Στράντζαλος, 1989, Σελ. 48). Κατά συνέπεια, η διδασκαλία της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι μοναδικής σημασίας, καθώς δεν πρόκειται απλά για έναν ακόμη κλάδο των Μαθηματικών, αλλά συνδέεται με την έναρξη της επιστήμης.

Στο Παράρτημα Α του σχολικού βιβλίου της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας, Τεύχος Α΄* της Α΄ Λυκείου παρουσιάζονται στοιχεία σχετικά με την αλλαγή του ρόλου της αξιωματικής θεμελίωσης, ως αποτέλεσμα του διαχωρισμού της έννοιας του αξιωματικού συστήματος από την ερμηνεία του, αλλά και της θεώρησης ότι τα αξιώματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως ερευνητικό εργαλείο. Αναφέρονται, μεταξύ άλλων, οι Lobachevsky και Bolyai με τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, οι Cayley, Kronecker, Hankel, Weber, Dedekind, που εργάστηκαν για την αξιωματικοποίηση της άλγεβρας, ο Pasch, που επιχείρησε να αξιωματικοποιήσει τη γεωμετρία (1882), ο Peano, που κατάφερε να αξιωματικοποιήσει τμήμα της γεωμετρίας (1889), οι Fano, Enriques, Pieri, που θεμελίωσαν την προβολική γεωμετρία, οι Grassmann, Cantor, Frege, Russell, που μελέτησαν την αξιωματικοποίηση της αριθμητικής, οι Dedekind και Peano, που το 1888 και το 1891 αντίστοιχα παρουσίασαν τα πρώτα πλήρη αξιωματικά συστήματα για την αριθμητική και τέλος ο David Hilbert, που το 1889 με το έργο του "Θεμέλια της Γεωμετρίας" επέβαλλε αυστηρό φορμαλισμό στη Γεωμετρία και υποστήριξε ότι τα αντικείμενα που ικανοποιούν τα αξιώματα ενός γεωμετρικού συστήματος, δεν είναι απαραίτητα μοναδικά, άρα προκύπτουν περισσότερα από ένα μοντέλα, ή ερμηνείες του συγκεκριμένου γεωμετρικού συστήματος.

Στο Παράρτημα Α του σχολικού βιβλίου της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας, Τεύχος Α΄* της Α΄ Λυκείου αναφέρονται, αλλά ίσως όχι με την απαραίτητα σαφήνεια, ορισμένα στοιχεία σχετικά με τις γενικές αρχές που ένα αξιωματικό σύστημα θα πρέπει να πληροί, δηλαδή:

1. τη συνέπεια (consistency): το σύστημα δεν θα πρέπει να περιέχει αντιφατικά αξιώματα ή αντιφατικές προτάσεις,

2. την ανεξαρτησία των αξιωμάτων (independency): κανένα αξίωμα δεν θα πρέπει να αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα,

3. την πληρότητα (complete): για κάθε πρόταση που παράγεται εντός του συστήματος, θα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να αποφανθούμε σχετικά με την ισχύ της ή την ισχύ της άρνησής της.

Κλείνοντας, να καταγράψουμε μία σύντομη, αλλά ουσιαστική παρατήρηση: τα στοιχεία που παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α του σχολικού βιβλίου της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας, Τεύχος Α΄* της Α΄ Λυκείου, έχουν εξαιρετικά μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον και με τις απαραίτητες τροποποιήσεις και τον εμπλουτισμό τους θα προσέγγιζαν ικανοποιητικά τα αντίστοιχα που περιέχονται σε πανεπιστημιακά εγχειρίδια. Όπως όμως γνωρίζουμε, το Παράρτημα Α, όπως και το σύνολο των παραρτημάτων των σχολικών βιβλίων, δεν αποτελεί διδακτέα ύλη, κατά συνέπεια οι παραπάνω πληροφορίες δεν φτάνουν, παρά με ελάχιστες ίσως εξαιρέσεις, στους μαθητές και στις μαθήτριες. Θεωρούμε ότι η αξιωματική μέθοδος, ως ένα εξαιρετικά σημαντικό επίτευγμα των αρχαίων Ελλήνων, αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της πολιτισμικής μας κληρονομιάς, με το οποίο οι μαθητές και οι μαθήτριες θα έπρεπε να έρχονται σε επαφή.

3.4.2 Η παιδευτική αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η υποβάθμιση της διδασκαλίας της στη δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Το Υπουργείο Παιδείας, σε έγγραφό του με τίτλο *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου* (Αρ.Φύλλου 1168, 8 Ιουνίου 2011), αναγνωρίζει την Ευκλείδεια Γεωμετρία "ως το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές και στις μαθήτριες την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών".

Διαβάζουμε:

Μέσα από την αξιωματική της θεμελίωση, τις προτάσεις και τα θεωρήματα που

αποδεικνύονται με χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων, η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας, καθώς και της έννοιας της απόδειξης στα Μαθηματικά. Παράλληλα μπορεί να τους βοηθήσει να αναπτύξουν ικανότητες εύρεσης αποδεικτικών διαδικασιών στην επίλυση προβλημάτων. Στο πλαίσιο της Θεωρητικής Γεωμετρίας, οι μαθητές αναγνωρίζουν το ρόλο του σχήματος στη Γεωμετρία, ως στοιχείο άρρηκτα συνδεδεμένο με τη γεωμετρική σκέψη. (Σελ. 2)

Δεδομένης της παιδευτικής αξίας της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αναγνωρισμένης από την Ακαδημία του Πλάτωνα, από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα και από το Υπουργείο Παιδείας, αλλά και τον χαρακτηρισμό της ως τον πλέον κατάλληλο κλάδο των μαθηματικών για την ανάπτυξη της ικανότητας δόμησης συλλογισμών και επιχειρημάτων και την κατανόηση των μαθηματικών αποδείξεων, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη της θέσης της βασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη σημερινή δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε εθνικό επίπεδο.

Τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων του Γυμνασίου χωρίζονται σε δύο μέρη, με το πρώτο να περιλαμβάνει στοιχεία της Άλγεβρας και το δεύτερο στοιχεία της βασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι συνολικά τέσσερις ώρες διδασκαλίας των μαθηματικών, ανά εβδομάδα, χωρίζονται αντίστοιχα σε δύο ώρες διδασκαλίας Άλγεβρας και δύο ώρες διδασκαλίας Γεωμετρίας, καθώς επιδιώκεται "μέσα από την εναρμόνιση της έκθεσης της ύλης των δύο αυτών θεματικών περιοχών (π.χ. διδασκαλία των αρρήτων μετά το Πυθαγόρειο Θεώρημα), να εξασφαλίζεται η αλληλεπίδραση, η αλληλοτροφοδότηση και η μέγιστη δυνατή διασύνδεσή τους." (έγγραφο του ΥΠΠΕΘ (Αρ.Πρωτ.222580/Δ2/18-12-2017), με τίτλο *Οδηγίες διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο*)

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο, έχει έναν μάλλον πρακτικό, θα λέγαμε, προσανατολισμό, με την έννοια ότι οι Προτάσεις παρουσιάζονται και βέβαια χρησιμοποιούνται για την επίλυση των ασκήσεων, χωρίς όμως να συνοδεύονται από τις αντίστοιχες μαθηματικές αποδείξεις, καθώς θεωρείται ότι η ηλικία των μαθητών και των μαθητριών δεν τους επιτρέπει την κατανόηση αυστηρών μαθηματικών αποδείξεων. Οι μαθητές και οι μαθήτριες έρχονται σε επαφή με τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, είναι σε θέση να συγκρίνουν τρίγωνα ως προς την ισότητα, αναγνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες σχημάτων κ.α, αλλά δεν γνωρίζουν γιατί ισχύουν όλα όσα επικαλούνται και το σημαντικότερο χωρίς, στην πλειοψηφία τους, να έχουν επίγνωση ότι οι περισσότεροι, σωστοί στην ουσία τους, ισχυρισμοί, είναι, ας μας επιτραπεί η έκφραση, "συνταγές" που τους δόθηκαν και αναμένεται η πιστή εφαρμογή τους.

Στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου, οι μαθητές και οι μαθήτριες διδάσκονται τη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία, ως ένα ανεξάρτητο γνωστικό αντικείμενο, με ξεχωριστό από την Άλγεβρα σχολικό βιβλίο και με έναν θεωρητικό, θα λέγαμε, προσανατολισμό. Στα σχολικά βιβλία αναπτύσσεται από μηδενική βάση το συνολικό οικοδόμημα των τεσσάρων Βιβλίων των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, δημιουργώντας ορισμένες φορές απορία στους μαθητές και στις μαθήτριες σχετικά με το τι είναι το καινούριο που μαθαίνουν. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να τους πείσουν για την αναγκαιότητα ύπαρξης αυστηρής μαθηματικής απόδειξης για κάθε Πρόταση, για κάθε ισχυρισμό που χρησιμοποιούν και να τους μυήσουν στη διατύπωση λογικών συλλογισμών. Στον πρόλογο των σχολικών βιβλίων των Α΄ και Β΄ Λυκείου, *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, των Αργυρόπουλου, Η., Βλάμου, Π., Κατσούλη, Γ., Μαρκάτη, Σ., Σιδέρη, Π. (2017), οι συγγραφείς αναφέρονται στον διττό ρόλο της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Διαβάζουμε:

> Η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει: να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό–επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές. Το βιβλίο αυτό [...] ευελπιστεί ότι θα οδηγήσει τους μαθητές του Λυκείου να γνωρίσουν την αυστηρή, αλλά και λιτή μαθηματική γλώσσα, ελπίζοντας ότι θα συνεισφέρει στη μαθηματική παιδεία του τόπου, αναπτύσσοντας τον ρεαλισμό της μαθηματικής λογικής και σκέψης. (Σελ. 3)

Κατά γενική ομολογία, η κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης υλοποιείται σε μεγάλο βαθμό μέσα από τη διδασκαλία της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Τα τελευταία χρόνια όμως, παρατηρείται διεθνώς και βέβαια και στη χώρα μας, μία διαρκής υποβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη μέση εκπαίδευση, η οποία συνδέεται με μία γενικότερη υποβάθμιση της διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Η υποβάθμιση σχολιάστηκε από τους Προέδρους των Μαθηματικών Τμημάτων των Ελληνικών ΑΕΙ στο πόρισμα που κατέληξαν κατά την 1η Σύνοδό τους. (Α.Π.Θ, 27/11/ 2018)

Διαβάζουμε:

> Αλλά και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση υποβαθμίζεται συνεχώς η παρεχόμενη μαθηματική παιδεία: σημαντικές μαθηματικές ενότητες έχουν περικοπεί από τη διδασκαλία ή δεν υπάγονται στην εξεταστέα ύλη των προαγωγικών ή πανελλαδικών εξετάσεων. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της υποβάθμισης

> της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενός μαθήματος που έχει παίξει καθοριστικό ρόλο στην ιστορία της ελληνικής και παγκόσμιας εκπαίδευσης και που, κατά κύριο λόγο, προάγει την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και της λογικής τεκμηρίωσης, με τον μαθητή να βιώνει την εμπειρία του χώρου και της γεωμετρικής κατασκευής. (Σελ. 2)

Η έναρξη της υποβάθμισης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας συνδέεται από πολλούς μελετητές με την ομιλία ενός από τα ιδρυτικά μέλη της ομάδας Bourbaki, του μαθηματικού Jean Dieudonne, σε ένα σεμινάριο στο Royaumont της Γαλλίας, περίπου το 1959. Κεντρικό θέμα της ομιλίας, όπως καταγράφεται στο άρθρο με τίτλο "New Thinking in School Mathematics" (1959), ήταν η παρουσίαση ενός νέου προγράμματος με τίτλο "Νέα Μαθηματικά", που συνοψίζεται, σύμφωνα με μαρτυρίες, στο σύνθημα "A bas Euclide! Mort aux triangles!" (Κάτω ο Ευκλείδης! Θάνατος στα τρίγωνα). Ο Dieudonne, ενώ υποστήριζε τη διδασκαλία προτάσεων και αποδείξεων αρκετά πιο αφηρημένων συγκριτικά με εκείνες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αναγνώριζε την Ευκλείδεια Γεωμετρία ως "ένα από τα σημαντικότερα διανοητικά επιτεύγματα που πραγματοποίησε ποτέ η ανθρωπότητα, πάνω στο οποίο βασίστηκε το πανύψηλο οικοδόμημα της σύγχρονης επιστήμης", ωστόσο αμφισβήτησε τη σπουδαιότητα των βασικών γεωμετρικών εννοιών στον χώρο των σύγχρονων Μαθηματικών. Η φιλοσοφία των "Νέων Μαθηματικών" επηρέασε και το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών, στα οποία βέβαια δεν συμπεριλήφθηκε πλέον η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το πρόγραμμα σύντομα αποδείχθηκε αποτυχημένο και εγκαταλήφθηκε, αλλά στην περίοδο που ακολούθησε δεν υπήρξε ουσιαστική αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, συνέδεσαν την υποβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τα "σοβαρά προβλήματα που εδώ και χρόνια αντιμετωπίζει η μαθηματική εκπαίδευση στο σχολείο", με ένα από αυτά να είναι ο εξοβελισμός της πλειοψηφίας των αυστηρών μαθηματικών αποδείξεων από τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, καθώς "η ουσία των Μαθηματικών είναι αδιαχώριστη από την αυστηρή απόδειξη." Οι συγγραφείς, παρόλο που αναγνωρίζουν "χαρακτηριστικά γήρανσης" στον τρόπο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, υποδεικνύουν τη διδασκαλία των Προτάσεών της ως τον βέλτιστο τρόπο, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να αποκτήσουν "στέρεη και μόνιμη κατανόηση" του βασικότερου χαρακτηριστικού της μαθηματικής επιστήμης, που είναι η έννοια και η διαδικασία της απόδειξης, καθώς "η μαθηματική θεωρητική σκέψη" συνδυάζεται "με την περίφημη γεωμετρική εποπτεία." (Σελ. 2)

Σε σχέση με τα σύγχρονα σχολικά βιβλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου, οι

Νεγρεπόντης – Φαρμάκη σημειώνουν ότι οι Προτάσεις "παρουσιάζονται κατατμημένες, χωρίς την απαραίτητη λογική ενότητα, με την οποία θα ισχυροποιηθεί στο μυαλό του μαθητή και της μαθήτριας η αξία της αποδεικτικής διαδικασίας, ως κάτι που έχει ενότητα και δεν είναι ένα σύνολο ασύνδετων ασκήσεων", παρά το γεγονός ότι οι Προτάσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είναι "Προτάσεις διαμάντια, ιδεώδεις ώστε να καταστήσουν κατανοητή στο μαθητή και στη μαθήτρια, αφενός τοπικά τη διαδικασία της απόδειξης και τη βασική απλότητα των επιχειρημάτων, αφετέρου σφαιρικά την ενότητα της γεωμετρικής και μαθηματικής σκέψης." (Σελ. 11)

Μία επιπλέον αδυναμία των σύγχρονων σχολικών βιβλίων της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου είναι η μη ανάδειξη των λεπτών συνδέσεων μεταξύ Ευκλείδειας Γεωμετρίας και Άλγεβρας, η οποία, όπως αναφέραμε, προτείνεται από το Υπουργείο Παιδείας για το Γυμνάσιο, ώστε να εξασφαλιστεί "η αλληλεπίδραση, η αλληλοτροφοδότηση και η μέγιστη δυνατή διασύνδεσή τους." (ΥΠΠΕΘ, 2017) Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την περίπτωση της ενδιαφέρουσας Πυθαγόρειας τεχνικής παραβολής χωρίων, καθ' υπερβολή και κατ' έλλειψη (Προτάσεις 2.8/9β και 2.8/9γ αντίστοιχα), η οποία σχετίζεται με τη γεωμετρική μορφή της μίας ρίζας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 + \alpha x - \mu^2 = 0$. Η συγκεκριμένη μέθοδος δεν παρουσιάζεται στα σύγχρονα σχολικά βιβλία του Λυκείου, κατά συνέπεια, η γεωμετρική και η αλγεβρική μέθοδος λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δεν συγκρίνονται. Η έλλειψη αυτή έχει ως αποτέλεσμα να μην γίνεται αντιληπτό από τους μαθητές και τις μαθήτριες ότι τα αλγεβρικά βήματα της λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τα γεωμετρικά βήματα της κατασκευής λύσης στην παραβολή χωρίων.

Αντίθετα, σε παλαιότερο σχολικό εγχειρίδιο με τίτλο *Ευκλείδειος Γεωμετρία , για τις Α, Β, Γ τάξεις Γενικού Λυκείου*, του Χρ. Γ. Παπανικολάου, (ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1977) και συγκεκριμένα στην παράγραφο με τίτλο *"Κατασκευή ριζών Δευτεροβάθμιας Εξίσωσης"*, (Σελ.110–111), παρουσιάζεται η γεωμετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, ακολουθώντας ουσιαστικά τη μέθοδο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Διαβάζουμε:

> Ορισμένοι τύποι εξισώσεων δευτέρου βαθμού επιδέχονται και γεωμετρική λύση, όταν δεχτούμε ότι οι συντελεστές και η άγνωστη μεταβλητή παριστάνουν τα μέτρα ευθυγράμμων τμημάτων.
>
> Δίνουμε τη γεωμετρική λύση τριών τύπων εξισώσεων δευτέρου βαθμού.
>
> i. $x^2 + 2\alpha x - \beta^2 = 0$
>
> ii. $x^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$

iii. $x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$

όπου τα α και β είναι τα μέτρα δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων.

i. Η εξίσωση αυτή γράφεται:

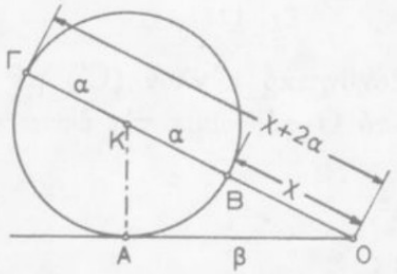
$$x(x + 2\alpha) = \beta^2.$$

Γράφουμε έναν κύκλο με ακτίνα α και φέρουμε σ' ένα σημείο του Α εφαπτομένη, πάνω στην οποία παίρνουμε τμήμα ΑΟ = β (σχ. 128). Αν Κ είναι το κέντρο του κύκλου, φέρουμε την ΟΚ, που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ.

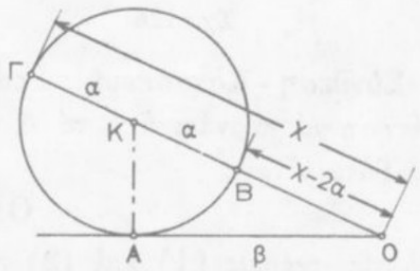
Το τμήμα ΟΒ είναι το ζητούμενο x , γιατί είναι:

$$OB \cdot O\Gamma = OA^2 \quad \text{ή}$$

$$x\,(x + 2\alpha) = \beta^2$$



Σχ. 128



Σχ. 129

ii. Η εξίσωση αυτή γράφεται:

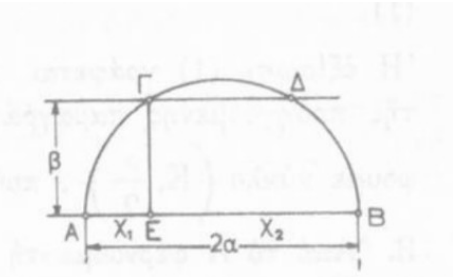
$$x\,(x - 2\alpha) = \beta^2$$

Η κατασκευή είναι ίδια με την προηγούμενη (σχ. 129), αλλά εδώ το τμήμα x είναι το ΟΓ. Πραγματικά είναι:

$$OB \cdot O\Gamma = OA^2 \quad \text{ή}$$

$$x\,(x - 2\alpha) = \beta^2$$

iii. $x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$. Παρατηρούμε ότι, αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεως, τότε θα έχουμε $x_1 + x_2 = 2\alpha$ και $x_1 \cdot x_2 = \beta^2$. Τότε κατασκευάζουμε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ = 2α και φέρουμε ευθεία παράλληλη της διαμέτρου σε απόσταση β (Σχ. 130). Αυτή έστω ότι τέμνει το ημικύκλιο στα Γ και Δ. Από το Γ φέρουμε τη ΓΕ⊥ΑΒ και τότε πάνω στην ΑΒ ορίζονται δύο τμήματα ΑΕ = x_1 και ΕΒ = x_2 = 2α , τα



Σχ. 130

οποία είναι οι ρίζες της δεδομένης εξισώσεως.

Πραγματικά είναι: $x_1 + x_2 = AB = 2\alpha$ και $x_1 \cdot x_2 = ΓΕ^2 = \beta^2$

Για να υπάρχει λύση, πρέπει προφανώς να είναι $\beta \leq \alpha$, οπότε στην περίπτωση που είναι $\beta = \alpha$ έχουμε $x_1 = x_2 = \alpha$.

Και στις τρεις περιπτώσεις οι συντελεστές α, β, καθώς και η άγνωστη μεταβλητή x, θεωρήθηκαν αριθμοί θετικοί αφού παριστάνουν τα μέτρα ευθυγράμμων τμημάτων. (Σελ. 110 – 111)

Θα κλείσουμε την ενότητα με μία θέση – πρόταση των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, από την Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί.

Διαβάζουμε:

Θεωρούμε βέβαια ότι στα Μαθηματικά οι αποδείξεις είναι «το άλας της γης», το sine qua non, και ότι είναι απολύτως αναγκαίο οι αποδείξεις να έχουν κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο. Ακόμη θεωρούμε ότι δεν έχει προκύψει υποκατάστατο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, πιο κατάλληλο για την διδασκαλία και κατανόηση της αποδεικτικής διδασκαλίας στο σχολείο. Και το αρχικό στάδιο της διδασκαλίας της διαδικασίας της απόδειξης πρέπει να βασίζεται στη στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία, δηλαδή στην Επίπεδη Γεωμετρία χωρίς λόγους και αναλογίες. Και η λογική δομή της διδασκαλίας θα πρέπει να ακολουθεί αρκετά πιστά, με κάποιες δευτερεύουσες τροποποιήσεις, τα τέσσερα πρώτα Βιβλία των *Στοιχείων*. (Σελ. 9)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την αποδεικτική δύναμη της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών, όπως αυτή παρουσιάζεται στα Βιβλία 5 και 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και θα επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε την προέλευση της δύναμης αυτής. Θα διερευνήσουμε τις σχέσεις μεταξύ της αρχαίας Θεωρίας Λόγων Μεγεθών και της σύγχρονης θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών του Dedekind. Θα επεκταθούμε σε εφαρμογές της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών που σχετίζονται με υπολογισμό εμβαδών και όγκων, όπως καταγράφονται στο Βιβλίο 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη με εφαρμογή της μεθόδου της εξάντλησης, αλλά και σε εργασίες του Αρχιμήδη και του Πτολεμαίου, οι οποίες, σύμφωνα με τον Loria, αποτελούν συμπληρώματα των *Στοιχείων*. Τέλος, θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών και των συνεπειών αυτής στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου.

4.1 Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη

Στα Βιβλία 5 και 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη παρουσιάζεται η Θεωρία Λόγων Μεγεθών, με τους Ορισμούς 5.4 (Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη), 5.5 (ισότητα λόγων) και 5.7 (ανισότητα λόγων) να αποτελούν σημείο αναφοράς για την πλειοψηφία των Προτάσεων που έπονται. Κατά γενική ομολογία των μελετητών, δεν πρόκειται για την πρώτη Θεωρία Λόγων Μεγεθών των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Προγενέστερη Θεωρία Λόγων Μεγεθών αποδίδεται στον Θεαίτητο και σε αυτήν σημείο αναφοράς είναι, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, η μέθοδος της Ανθυφαίρεσης. Η Θεωρία Λόγων Μεγεθών του 5ου και 6ου Βιβλίου των *Στοιχείων* όμως, είναι μία ιδιαίτερα γενική, πλούσια σε συμπεράσματα και βαθιά θεωρία, σχετικά με την οποία ο G.H. Hardy στο έργο του *A Mathematician's Apology* αναφέρει:

> [...]the construction of the much more profound theory of Eudoxus which is set out in the fifth book of the Elements and which is regarded by many modern mathematicians as the finest achievement of Greek mathematics. The theory is astonishingly modern in spirit and may be regarded as the beginning of the modern theory of irrational number, which has revolutionized mathematical analysis and had much influence on recent philosophy. (Σελ. 23)

Το 5ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη πιστώνεται στον Εύδοξο, όπως προκύπτει από το ακόλουθο χωρίο:

> ***Τοῦτο τὸ βιβλίον Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου τοῦ μαθηματικοῦ τοῦ κατὰ τοὺς Πλάτωνος χρόνους γεγονότος εἶναι λέγεται, ἐπιγέγραπται δὲ ὅμως Εὐκλείδου, ἀλλ' οὐ κατά τινα ψευδῆ ἐπιγραφήν· εὑρέσεως μὲν γὰρ ἕνεκα ἄλλου τινὸς οὐδὲν κωλύει εἶναι, τῆς μέντοι κατὰ στοιχεῖον αὐτῶν συντάξεως χάριν καὶ τῆς πρὸς ἄλλα τῶν οὕτω ταχθέντων ἀκολουθίας ὡμολόγηται παρὰ πᾶσιν Εὐκλείδου εἶναι. σκοπὸς δὲ τούτου τοῦ βιβλίου περὶ τῶν καθόλου μεγεθῶν ἐστι, ἐν ἄλλοις διδάσκοντος περί τινος μεγέθους τοῦ Εὐκλείδου. ἐπεὶ γὰρ τοῦ μεγέθους τρία εἴδη εἰσίν, γραμμή, ἐπιφάνεια, στερεόν· καὶ περὶ ἀναλογιῶν· κοινὸν γάρ ἐστι τοῦτο γεωμετρίας καὶ ἀριθμητικῆς καὶ ἁπλῶς πάσης μαθηματικῆς.***
>
> (Σχόλιο 3 στο 5ο Βιβλίο του Ευκλείδη [1 – 12])

Το βασικό ενδιαφέρον του Ευδόξου συνδέεται με τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Για τον λόγο αυτό, ο Εύδοξος ανέπτυξε μία νέα Θεωρία Λόγων Μεγεθών, την παρουσιάσε στα Βιβλία 5 και 6 των *Στοιχείων* και στη συνέχεια τη χρησιμοποίησε ως βάση για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων στο Βιβλίο 12. Η μέθοδος που εφάρμοσε στο Βιβλίο 12 είναι η μέθοδος της εξάντλησης, μια τεχνική που υιοθέτησαν μεταξύ άλλων ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος και σύμφωνα με την οποία, η εύρεση ενός ζητούμενου εμβαδού ή όγκου γίνεται μέσω διαδοχικών προσεγγίσεών του, κάτι ανάλογο δηλαδή με τις σύγχρονες διαμερίσεις. Με σημερινή ορολογία θα λέγαμε ότι, ο Εύδοξος εισήγαγε τα κάτω αθροίσματα Riemann, ενώ αργότερα ο Αρχιμήδης πρόσθεσε τα άνω αθροίσματα Riemann. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ο Εύδοξος και ο Αρχιμήδης θεωρούνται οι θεμελιωτές του σύγχρονου Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη του 5ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη με τους εμβληματικούς ορισμούς 5.4, 5.5, 5.7.

Όρος 5.4 (Αρχή Ευδόξου - Αρχιμήδη)

> ***Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν***

Με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη έχει τη μορφή:

Δύο μεγέθη α, β μπορούν να σχηματίσουν λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$, όταν:

- υπάρχει φυσικός μ, τέτοιος ώστε $\mu\alpha > \beta$, ή

- υπάρχει φυσικός ν, τέτοιος ώστε νβ > α.

Όρος 5.5 (Ορισμός ισότητας λόγων)

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα

Έστω α, β και γ, δ μεγέθη. Είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ αν και μόνο αν, για κάθε μ, ν φυσικούς αριθμούς, ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

- να < μβ αν και μόνο αν νγ < μδ
- να > μβ αν και μόνο αν νγ > μδ
- να = μβ αν και μόνο αν νγ = μδ

Όρος 5.7 (Ορισμός ανισότητας λόγων)

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον

Έστω α, β και γ, δ μεγέθη. Είναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ αν και μόνο αν, υπάρχουν μ, ν φυσικοί αριθμοί, ώστε να > μβ και μδ > νγ.

Σχόλια [(8)]

1. Ο Ορισμός 5.5 (ισότητα λόγων) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

Έστω α, β και γ, δ μεγέθη. Είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ αν και μόνο αν, για κάθε μ,ν φυσικούς ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

- $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}$ αν και μόνο αν $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\gamma}{\delta}$

(8) Οι αποδείξεις των Προτάσεων, καθώς και τα σχόλια προέρχονται από τις παραδόσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη του Νεγρεπόντη, ακ.έτος 2016 -17, ΠΜΣ: Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών και από το βιβλίο των Νεγρεπόντη Σ., Φαρμάκη Β. Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαίτητου, Ευδόξου, Αθήνα: εκδόσεις Εκκρεμές, 2019.

- $\frac{\mu}{\nu} > \frac{\alpha}{\beta}$ αν και μόνο αν $\frac{\mu}{\nu} > \frac{\gamma}{\delta}$

- $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}$ αν και μόνο αν $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\gamma}{\delta}$

2. Ο Ορισμός 5.7 (ανισότητα λόγων) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

Έστω α, β και γ, δ μεγέθη. Είναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ αν και μόνο αν, υπάρχουν μ, ν φυσικοί αριθμοί,

ώστε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\mu}{\nu} > \frac{\gamma}{\delta}$

Σύμφωνα με τον Νεγρεπόντη, για να οριστεί η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θα πρέπει:

- α, β ομοειδή μεγέθη, για τα οποία ισχύει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη,
- γ, δ ομοειδή μεγέθη, για τα οποία ισχύει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη,
- α, β και γ, δ, όχι απαραίτητα ομοειδή μεγέθη.

Στις παραδόσεις του μαθήματος *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη,* ο Νεγρεπόντης εντοπίζει και αποδεικνύει την ύπαρξη μιας 1 – 1 αντιστοιχίας μεταξύ των πραγματικών αριθμών και των λόγων μεγεθών που ικανοποιούν την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη. Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε αναλυτικά τα σχετικά επιχειρήματα.

4.2 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη

Το 5ο Βιβλίο πρόκειται, κατά γενική ομολογία, για το ευφυέστερο από όλα τα Βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, κυρίως λόγω της κομψότητας των 18 Ορισμών που περιέχει. Οι 25 Προτάσεις του ομαδοποιούνται, ως προς τη χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Πρόταση	**Χρήση της Αρχής Ευδόξου - Αρχιμήδη**
Προτάσεις 5.1, 5.5, 5.2, 5.3, 5.6	5 εντελώς **τετριμμένες** Προτάσεις Χωρίς την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη
Προτάσεις 5.4, 5.15, 5.7, 5.10, 5.11, 5.13, 5.12, 5.17, 5.18	9 **στοιχειώδεις** προτάσεις, Χωρίς την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, μόνο με χρήση των Ορισμών 5.5 και 5.7
Προτάσεις 5.8, 5.9, 5.14, 5.16, 5.19, 5.25, 5.20, 5.22, 5.21, 5.23	11 **μη στοιχειώδεις** προτάσεις **Χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη**
Πρόταση 5.8	**Άμεση χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, συνδυασμός με την Αρχή του Ελαχίστου**
Πρόταση 5.9	**Αντιθετοαντίστροφη της Πρότασης 5.8**

Θα μελετήσουμε επιλεγμένες προτάσεις και ορισμένες αποδείξεις της βασικής Θεωρίας Λόγων Μεγεθών, όπως παρουσιάζονται στα Βιβλία 5 και 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, με στόχο να διερευνήσουμε την αποδεικτική ισχύ της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη. Σημειώνουμε ότι η παρουσίαση των Προτάσεων του 5ου Βιβλίου θα είναι σύμφωνη με την ομαδοποίηση τους, ως προς τη χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

4.2.1 Οι τετριμμένες Προτάσεις 5.1, 5.5, 5.2, 5.3, 5.6, χωρίς τη χρήση της Αρχής Ευδόξου - Αρχιμήδη

Οι Προτάσεις 5.1, 5.5, 5.2, 5.3, 5.6 είναι τετριμμένες προτάσεις, ενώ στις αποδείξεις τους δεν χρησιμοποιείται η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη. Θα τις παραθέσουμε, για λόγους πληρότητας του κειμένου, χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 5.1

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων	Έστω α, β ομοειδή μεγέθη και μ φυσικός αριθμός. Τότε ισχύει μα + μβ = μ (α + β)

Πρόταση 5.5

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου	Έστω α, β ομοειδή μεγέθη, με α > β και μ φυσικός αριθμός. Τότε ισχύει μα – μβ = μ(α – β)

Πρόταση 5.2

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου	Έστω α μέγεθος και μ, ν φυσικοί αριθμοί. Τότε ισχύει μα + να = (μ + ν) α

Πρόταση 5.6

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια	Έστω α μέγεθος και μ, ν φυσικοί αριθμοί, με μ > ν. Τότε ισχύει μα – να = (μ – ν) α

Πρόταση 5.3

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου	Έστω α μέγεθος και μ, ν φυσικοί αριθμοί. Τότε ισχύει μ (ν α) = (μ ν) α

4.2.2 Οι στοιχειώδεις Προτάσεις 5.4, 5.15, 5.7, 5.10, 5.11, 5.13, 5.12, 5.17, 5.18, χωρίς τη χρήση της Αρχής Ευδόξου - Αρχιμήδη

Οι Προτάσεις 5.4, 5.15, 5.7, 5.10, 5.11, 5.13, 5.12, 5.17, 5.18 αποτελούν τη δεύτερη κατηγορία Προτάσεων του 5ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Πρόκειται για στοιχειώδεις Προτάσεις, οι αποδείξεις των οποίων δεν απαιτούν τη χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, αλλά πραγματοποιούνται με χρήση των Ορισμών 5.5 και 5.7. Θα παραθέσουμε επιλεκτικά ορισμένες από τις αποδείξεις.

Πρόταση 5.4

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα	Έστω α, β και γ, δ μεγέθη. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε ισχύει $\frac{\mu\alpha}{\nu\beta} = \frac{\mu\gamma}{\nu\delta}$, για κάθε μ, ν φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 5.15

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα	Έστω α, β μεγέθη και μ φυσικός αριθμός. Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu\alpha}{\mu\beta}$

Πρόταση 5.7

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα	Έστω α, β και γ, δ μεγέθη με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

	Τότε ισχύει $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$

Πρόταση 5.10

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν	Έστω α, β, γ μεγέθη, με $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ Τότε ισχύει α > β.

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν, ώστε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\mu}{\nu} > \frac{\beta}{\gamma}$ [Ορισμός 5.7]

Δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν, τέτοιοι ώστε να > μγ και μγ > νβ.

Άρα να > νβ και τελικά α > β. □

Πρόταση 5.11

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί	Έστω α, β, γ, δ, ε, ζ μεγέθη, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$

Απόδειξη

Έστω φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}$

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ θα είναι $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\gamma}{\delta}$ [Ορισμός 5.5]

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ θα είναι $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$ [Ορισμός 5.5]

Άρα τελικά $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ □

Πρόταση 5.13

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον	Έστω α, β, γ, δ, ε, ζ μεγέθη, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$

πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον	Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν, τέτοιοι ώστε $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\mu}{\nu} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$ [Ορισμός 5.7]

Όμως $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, συνεπώς $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\mu}{\nu} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$, δηλαδή τελικά $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$ □

Πρόταση 5.12

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα	Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ μεγέθη, με $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Πρόταση 5.17

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται	Έστω α, β, α΄, β΄ μεγέθη με α > β και α΄> β΄, τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\alpha'-\beta'}{\beta'}$

Απόδειξη

Έστω φυσικοί αριθμοί μ, ν, τέτοιοι ώστε $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha-\beta}{\beta}$

Τότε μβ < ν(α – β), ή μβ + νβ < να, δηλαδή (μ + ν)β < να. Άρα $\frac{\mu+\nu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}$

Όμως $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$, άρα $\frac{\mu+\nu}{\nu} < \frac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha'-\beta'}{\beta'}$ □

Πρόταση 5.18

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται	Έστω μεγέθη α, β, γ, δ με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

	Τότε ισχύει $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$

4.2.3 Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις 5.8, 5.9, 5.14, 5.16, 5.19, 5.25, 5.20, 5.22, 5.21, 5.23 με τη χρήση της Αρχής Ευδόξου - Αρχιμήδη

Η Πρόταση 5.8 χαρακτηρίζεται από τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη ως Πρόταση – κλειδί, στην οποία βασίζεται συνολικά η Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου. Στην απόδειξή της, που στηρίζεται στον Ορισμό 5.7, θέση αιτήματος κατέχει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη (Ορισμός 5.4), η οποία χρησιμοποιείται άμεσα για πρώτη φορά και συνδυάζεται αριστουργηματικά με την Αρχή του Ελαχίστου. Στη συνέχεια του 5ου Βιβλίου, η Πρόταση 5.8 χρησιμοποιείται στις αποδείξεις των Προτάσεων 5.14, 5.20 και 5.21, οι οποίες με τη σειρά τους χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις των εξαιρετικά ισχυρών Προτάσεων 5.16, 5.22 και 5.23. Η αποδεικτική ισχύς της Πρότασης 5.8 και άρα ουσιαστικά, η αποδεικτική ισχύς της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη παρουσιάζεται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Αρχή Ευδόξου - Αρχιμήδη **(Ορισμός 5.4)** ⇓		
Πρόταση 5.8 ⇓		
Πρόταση 5.14 ⇓	Πρόταση 5.20 ⇓	Πρόταση 5.21 ⇓
Πρόταση 5.16 (εναλλάξ) ⇓	Πρόταση 5.22 (δι' ίσου)	Πρόταση 5.23 (τεταραγμένης)
Πρόταση 5.19 ⇓		
Πρόταση 5.25		

Ας μελετήσουμε την απόδειξη της, κομβικής σημασίας, Πρότασης 5.8.

Πρόταση 5.8 (Άμεση χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, συνδυασμός με την Αρχή του Ελαχίστου)

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον	Έστω α, β, γ μεγέθη με α > β. Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Απόδειξη

Με εφαρμογή της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη [Ορισμός 5.4] για τα α – β και γ, υπάρχει φυσικός αριθμός ν, τέτοιος ώστε ν (α – β) > γ, συνεπώς να > νβ + γ (1)

Με εφαρμογή της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη [Ορισμός 5.4] για τα γ και νβ, υπάρχει φυσικός αριθμός μ, τέτοιος ώστε μγ > νβ (2)

Επιλέγουμε τον φυσικό αριθμό μ ώστε να είναι ο ελάχιστος (3) **[Αρχή του Ελαχίστου]**

Από τη (2) προκύπτει ότι $\frac{\mu}{\nu} > \frac{\beta}{\gamma}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισοδύναμα να > μγ.

Από τη σχέση (3) προκύπτουν δύο περιπτώσεις:

α) Έστω μ = 1. Τότε από τη (2) προκύπτει γ > νβ. Όμως από την (1) είναι να > νβ + γ, συνεπώς

$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{1}{\nu} > \frac{\beta}{\gamma}$. Ο αριθμός $\frac{1}{\nu}$ παρεμβάλλεται μεταξύ των $\frac{\alpha}{\gamma}$ και $\frac{\beta}{\gamma}$,

άρα τελικά $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ [Ορισμός 5.7]

β) Έστω μ > 1. Επειδή ο μ είναι ο ελάχιστος, η σχέση (2) δεν θα είναι αληθής για μικρότερους αριθμούς, συνεπώς (μ – 1) γ ≤ νβ.

Από την (1) προκύπτει να > νβ + γ ≥ (μ – 1)γ + γ = μγ, συνεπώς $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\mu}{\nu} > \frac{\beta}{\gamma}$. Ο αριθμός $\frac{\mu}{\nu}$

παρεμβάλλεται μεταξύ των $\frac{\alpha}{\gamma}$ και $\frac{\beta}{\gamma}$, άρα τελικά $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ [Ορισμός 5.7] □

Να σημειώσουμε ένα ιδιαίτερα σημαντικό σχόλιο σχετικά με την απόδειξη της Πρότασης 5.8. Εφαρμόζοντας την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη [Ορισμός 5.4] για τα μεγέθη γ και νβ, εξασφαλίσαμε την ύπαρξη φυσικού αριθμού μ, τέτοιος ώστε μγ > νβ (2). Στη συνέχεια επιλέξαμε

τον ελάχιστο φυσικό αριθμό μ (3). Η ύπαρξη του ελάχιστου αριθμού εξασφαλίζεται όμως από την Αρχή του Ελαχίστου, συνεπώς η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αποτελεί μια συνθήκη που επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί η Αρχή του Ελαχίστου στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών.

Η Πρόταση 5.9 είναι η αντιθετοαντίστροφη Πρόταση της 5.8, συνεπώς, σύμφωνα με τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής, πρόκειται για ισοδύναμες προτάσεις.

Ας τη μελετήσουμε προσεκτικά.

Πρόταση 5.9

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν	Έστω α, β, γ μεγέθη με $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ Τότε ισχύει α = β.

Απόδειξη

Έστω ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$. Θα αποδείξουμε ότι α = β.

- Ας υποθέσουμε ότι α > β. Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ [Πρόταση 5.8], κάτι που είναι άτοπο.
- Ας υποθέσουμε ότι β > α. Τότε ισχύει $\frac{\beta}{\gamma} > \frac{\alpha}{\gamma}$ [Πρόταση 5.8], κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά α = β.□

Η Πρόταση 5.14 αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.8, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.14

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον	Έστω μεγέθη α, β και γ, δ με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ Τότε: • αν α > γ τότε β > δ, • αν α = γ τότε β = δ, • αν α < γ τότε β < δ.

Απόδειξη

Έστω ότι για τα μεγέθη α, β και γ, δ ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και α > γ. Θα δείξουμε ότι β > δ.

Επειδή $\alpha > \gamma$ είναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$ [Πρόταση 5.8]

Όμως $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, άρα $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\gamma}{\beta}$ [Πρόταση 5.13], άρα τελικά $\beta > \delta$. [Πρόταση 5.10] □

Η Πρόταση 5.16 αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 5.14, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.16

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται	Έστω α, β, α΄, β΄ μεγέθη με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$

Απόδειξη

Έστω μ, ν φυσικοί αριθμοί. Από την Πρόταση 5.15 έχουμε $\frac{\nu\alpha}{\nu\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\mu\alpha'}{\mu\beta'} = \frac{\alpha'}{\beta'}$

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ είναι $\frac{\nu\alpha}{\nu\beta} = \frac{\mu\alpha'}{\mu\beta'}$ [Πρόταση 5.11]

Λόγω της Πρότασης 5.14 έχουμε:

$\nu\alpha > \mu\alpha'$, αν και μόνο αν, $\nu\beta > \mu\beta'$

$\nu\alpha < \mu\alpha'$, αν και μόνο αν, $\nu\beta < \mu\beta'$

$\nu\alpha = \mu\alpha'$, αν και μόνο αν, $\nu\beta = \mu\beta'$

Άρα τελικά $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ □

Η Πρόταση 5.19 αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 5.16, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.19

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον	Έστω μεγέθη α, β, γ, δ με $\alpha > \gamma$ και $\beta > \delta$, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ Τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}$

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ [Πρόταση 5.16]

Επειδή με $\alpha > \gamma$ και $\beta > \delta$ είναι $\frac{\alpha - \gamma}{\gamma} = \frac{\beta - \delta}{\delta}$ [Πρόταση 5.17],

άρα $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\beta}$ [Πρόταση 5.16]□

Η Πρόταση 5.25 αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 5.19, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.25

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν	Έστω μεγέθη α, β και γ, δ, με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και α είναι το μεγαλύτερο, ενώ δ το μικρότερο. Τότε ισχύει $\alpha + \delta > \beta + \gamma$.

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\beta}$ [Πρόταση 5.19]

Άρα $\frac{\beta}{\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\alpha - \gamma}$ [Πρόταση 5.16], συνεπώς $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ [Πρόταση 5.14]

Άρα τελικά $\alpha + \delta > \beta + \gamma$.□

Η Πρόταση 5.20 αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.8, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.20

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον	Έστω μεγέθη α, β, γ, δ, ε, ζ με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ τότε: • αν $\alpha > \gamma$ τότε $\delta > \zeta$, • αν $\alpha = \gamma$ τότε $\delta = \zeta$, • αν $\alpha < \gamma$ τότε $\delta < \zeta$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση.

Αφού $\alpha > \gamma$ έπεται ότι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$ [Πρόταση 5.8]

Επειδή $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ έπεται ότι $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\zeta}{\varepsilon}$ [ανάπαλιν λόγος]

Άρα $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\zeta}{\varepsilon}$ [Πρόταση 5.13] συνεπώς $\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{\zeta}{\varepsilon}$

Άρα τελικά $\delta > \zeta$ [Πρόταση 5.10] □

Η Πρόταση 5.22 αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 5.20, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.22

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται	Αν α, β, γ ομοειδή μεγέθη, α΄, β΄, γ΄ομοειδή μεγέθη, για τα οποία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$, τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}$

Απόδειξη

Έστω μ, ν φυσικοί αριθμοί, ώστε $\nu\alpha > \mu\gamma$.

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ ισχύει $\frac{\nu\alpha}{\mu\beta} = \frac{\nu\alpha'}{\mu\beta'}$ [Πρόταση 5.4]

Επειδή $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$ ισχύει $\frac{\mu\beta}{\mu\gamma} = \frac{\mu\beta'}{\mu\gamma'}$ [Πρόταση 5.15]

Επειδή $\nu\alpha > \mu\gamma$, άρα $\nu\alpha' > \mu\gamma'$ [Πρόταση 5.20] □

Η Πρόταση 5.21 αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.8, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.21

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ	Έστω μεγέθη α, β, γ, δ, ε, ζ με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ και

λόγῳ, ᾗ δὲ τεταραγμένη αὐ-τῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.	$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ τότε: • αν $\alpha > \gamma$ τότε $\delta > \zeta$ • αν $\alpha = \gamma$ τότε $\delta = \zeta$ • αν $\alpha < \gamma$ τότε $\delta < \zeta$

Απόδειξη

Έστω $\alpha > \gamma$. Θα αποδείξουμε ότι $\delta > \zeta$.

Αφού $\alpha > \gamma$ και β μέγεθος, είναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$ [Πρόταση 5.8]

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\delta}$, προκύπτει ότι $\frac{\varepsilon}{\zeta} > \frac{\varepsilon}{\delta}$ [Πρόταση 5.13].

Άρα τελικά $\zeta < \delta$ ή ισοδύναμα $\delta > \zeta$ [Πρόταση 5.10]

Ανάλογη είναι η απόδειξη των δύο άλλων περιπτώσεων. □

Η Πρόταση 5.23 αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 5.21, άρα έμμεση συνέπεια της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Πρόταση 5.23

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾗ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.	Έστω μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ Τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$

Απόδειξη

Είναι:

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi\alpha}{\pi\beta}$ και $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\rho\varepsilon}{\rho\zeta}$ [Πρόταση 5.15]
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$

Συνεπώς $\frac{\pi\alpha}{\pi\beta} = \frac{\rho\varepsilon}{\rho\zeta}$ (1) [Πρόταση 5.11]

Είναι:

- $\frac{\beta}{\delta} = \frac{\pi\beta}{\pi\delta}$ και $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\rho\gamma}{\rho\varepsilon}$ [Πρόταση 5.15]
- $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$, άρα $\frac{\beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$ [Πρόταση 5.16], συνεπώς $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\pi\beta}{\pi\delta}$ [Πρόταση 5.11]

Συνεπώς $\frac{\pi\beta}{\pi\delta} = \frac{\rho\gamma}{\rho\varepsilon}$ [Πρόταση 5.11], άρα $\frac{\pi\beta}{\rho\gamma} = \frac{\pi\delta}{\rho\varepsilon}$ (2) [Πρόταση 5.16]

Επειδή ισχύει $\frac{\pi\alpha}{\pi\beta} = \frac{\rho\varepsilon}{\rho\zeta}$ (1) και $\frac{\pi\beta}{\rho\gamma} = \frac{\pi\delta}{\rho\varepsilon}$ (2), λόγω της Πρότασης 5.21 έχουμε:

- αν $\pi\alpha > \rho\gamma$ τότε $\pi\delta > \rho\zeta$,
- αν $\pi\alpha = \rho\gamma$ τότε $\pi\delta = \rho\zeta$,
- αν $\pi\alpha < \rho\gamma$ τότε $\pi\delta < \rho\zeta$

Άρα τελικά, από τον Ορισμό 5.5 προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$ □

4.2.4 Βασικές Προτάσεις του 6ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη

Το 6ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη περιέχει 5 Ορισμούς και 33 Προτάσεις. Οι Προτάσεις 6.1 και 6.2 χαρακτηρίζονται από τους μελετητές ως βασικές προτάσεις. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.1, ο λόγος των εμβαδών τριγώνων ή παραλληλογράμμων με ίσα ύψη είναι ίσος με το λόγο των βάσεών τους, ενώ η Πρόταση 6.2 είναι το γνωστό, εσφαλμένα σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, Θεώρημα του Θαλή.

Ας μελετήσουμε τις προτάσεις προσεκτικά.

Πρόταση 6.1

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.	Έστω μεγέθη α, β, γ. Αν $A = \alpha \cdot \gamma$ και $B = \beta \cdot \gamma$, τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Ορισμού 5.5 και της Πρότασης 5.11. □

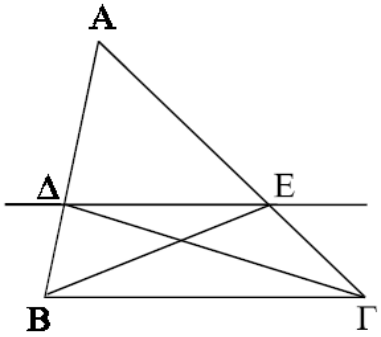
Η Πρόταση 6.2 παρουσιάζεται στα σχολικά βιβλία ως το Θεώρημα του Θαλή, άρα πιστώνεται ρητά στον Θαλή. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη διαφωνούν με αυτό και υποστηρίζουν ότι

η συγκεκριμένη Πρόταση δεν μπορεί να αποδοθεί στον Θαλή, καθώς περιλαμβάνεται στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου, που σίγουρα δεν ήταν γνωστή την εποχή που έζησε ο Θαλής.

Πρόταση 6.2

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.	**Με σύγχρονη ορολογία** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. α) Αν φέρουμε ευθεία ΔΕ // ΒΓ (Δ και Ε τα σημεία τομής της με τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα), τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στις ΑΒ και ΑΓ είναι ανάλογα. β) Αν φέρουμε ευθεία ΔΕ που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα και τα τμήματα που ορίζονται πάνω στις ΑΒ και ΑΓ είναι ανάλογα, τότε ισχύει ΔΕ//ΒΓ.

Απόδειξη



α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{ΒΔ}{ΔΑ} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ}$

Θεωρούμε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ.

Προφανώς ισχύει (ΒΔΕ) = (ΓΕΔ) [Πρόταση 1.38],

συνεπώς $\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΓΕΔ)}{(ΑΔΕ)}$

Είναι: $\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΒΔ}{ΔΑ}$ [Πρόταση 6.1]

$\frac{(ΓΔΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ}$ [Πρόταση 6.1]

άρα τελικά $\frac{ΒΔ}{ΔΑ} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ}$

β) Ας υποθέσουμε ότι $\frac{ΒΔ}{ΔΑ} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ}$ Θα αποδείξουμε ότι ΔΕ // ΒΓ.

Είναι: $\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΒΔ}{ΔΑ}$ [Πρόταση 6.1]

$$\frac{(\Gamma\Delta E)}{(A\Delta E)} = \frac{\Gamma E}{EA} \qquad \text{[Πρόταση 6.1]}$$

άρα $\frac{(B\Delta E)}{(A\Delta E)} = \frac{(\Gamma E\Delta)}{(A\Delta E)}$ δηλαδή (ΒΔΕ) = (ΓΕΔ) [Πρόταση 5.9]

Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ έχουν κοινή βάση τη ΔΕ και βρίσκονται μεταξύ των ΔΕ και ΒΓ προκύπτει τελικά ότι ΔΕ // ΒΓ. □

Μια ενδιαφέρουσα πρόταση του 6ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είναι η Πρόταση 6.16. Την παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 6.16

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.	Έστω μεγέθη α, β, γ, δ. Είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν, $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Οι επιλεγμένες προτάσεις του 5ου και του 6ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη που μελετήσαμε μέχρι τώρα, επιβεβαιώνουν την αποδεικτική ισχύ της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη. Πράγματι, η εν λόγω Αρχή, σε συνδυασμό με την Αρχή του Ελαχίστου, βρίσκεται στον πυρήνα της απόδειξης της βασικής Πρότασης – κλειδί 5.8, στην οποία στηρίζεται το σύνολο της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου. Η αποδεικτική δύναμη της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη θα ενισχυθεί σημαντικά στη συνέχεια, από τη μελέτη ορισμένων εφαρμογών της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου, όπως είναι η μέθοδος της εξάντλησης, το Θεώρημα της Σπασμένης χορδής του Αρχιμήδη και το Θεώρημα του Πτολεμαίου, οι οποίες, σύμφωνα με τον Loria, λειτουργούν συμπληρωματικά ως προς τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Πρώτα όμως θα μελετήσουμε την εντυπωσιακή σχέση ανάμεσα στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου και στη σύγχρονη Θεωρία των πραγματικών αριθμών του Dedekind.

4.2.5 Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου Vs Θεωρία πραγματικών αριθμών του Dedekind

Στο απόσπασμα του βιβλίου του Hardy, που παραθέσαμε στην ενότητα 4.1, αναφέρεται ότι η Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου θεωρείται από πολλούς σύγχρονους μαθηματικούς ως το πλέον σημαντικό επίτευγμα των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Πρόκειται για "μία εντυπωσιακά σύγχρονη στο πνεύμα της θεωρία, η οποία έφερε επανάσταση στη Μαθηματική Ανάλυση και είχε μεγάλη επίδραση στη φιλοσοφία, καθώς αποτελεί την απαρχή της σημερινής θεωρίας των άρρητων αριθμών". Στις παραδόσεις του μαθήματος *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη,* ο Νεγρεπόντης εντοπίζει και αναδεικνύει την ύπαρξη μιας 1 – 1 αντιστοιχίας μεταξύ των πραγματικών αριθμών και των λόγων μεγεθών που ικανοποιούν την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη. Θα εξετάσουμε προσεκτικά τα επιχειρήματα που παρουσιάζει, αφού πρώτα παραθέσουμε τον ορισμό των πραγματικών αριθμών ως τομών Dedekind, αλλά και τους σύγχρονους ορισμούς της ισότητας και της ανισότητας των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός – τομή Dedekind

Ένα υποσύνολο Δ των θετικών ρητών λέγεται τομή Dedekind, αν:

- το Δ είναι μη κενό σύνολο, δηλαδή υπάρχει θετικός ρητός x, ώστε $x \in \Delta$,
- το Δ είναι γνήσιο υποσύνολο των θετικών ρητών, δηλαδή υπάρχει ρητός x, ώστε $x \notin \Delta$,
- αν $x \in \Delta$, τότε, για κάθε θετικό ρητό ψ, με $\psi < x$, ισχύει $\psi \in \Delta$,
- αν $x \in \Delta$, τότε υπάρχει θετικός ρητός ψ, με $\psi \in \Delta$, τέτοιο ώστε $\psi > x$.

Ορισμός – πραγματικός αριθμός

Ένας πραγματικός αριθμός είναι μια τομή Dedekind.

Ορισμός – ισότητα πραγματικών αριθμών

Έστω x, ψ δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Θέτουμε $\Delta(x) = \{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < x\}$ και $\Delta(\psi) = \{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < \psi\}$

Ισχύει $x = \psi$, αν και μόνο αν, $\Delta(x) = \Delta(\psi)$.

Ορισμός – ανισότητα πραγματικών αριθμών

Έστω x, ψ δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Θέτουμε $\Delta(x) = \{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < x\}$ και $\Delta(\psi) = \{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < \psi\}$

Ισχύει $x < \psi$, αν και μόνο αν, $\Delta(x)$ γνήσιο υποσύνολο του $\Delta(\psi)$.

Ο συσχετισμός ανάμεσα στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου και στη Θεωρία των πραγματικών αριθμών του Dedekind πραγματοποιείται από τις ακόλουθες, εξαιρετικά ενδιαφέρουσες, προτάσεις(9).

Πρόταση 1

Έστω α, β ομοειδή μεγέθη, για τα οποία ισχύει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Θέτουμε $\Delta(\alpha, \beta) = \{\frac{\mu}{\nu} : \mu\beta < \nu\alpha\} = \{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}\}$

Τότε, το σύνολο $\Delta(\alpha, \beta)$ είναι μία τομή Dedekind.

Απόδειξη

1. Από την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, υπάρχει φυσικός αριθμός ν, τέτοιος ώστε $\nu\alpha > \beta$, άρα $\nu\alpha > 1\beta$ ή ισοδύναμα $1\beta < \nu\alpha$. Συνεπώς $(1, \nu) \in \Delta(\alpha, \beta)$.

   Άρα, το $\Delta(\alpha, \beta)$ είναι μη κενό σύνολο.

2. Από την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, υπάρχει φυσικός αριθμός μ, τέτοιος ώστε $\mu\beta > \alpha$, άρα $\mu\beta > 1\alpha$ ή ισοδύναμα $1\alpha < \mu\beta$. Συνεπώς $(1, \mu) \notin \Delta(\alpha, \beta)$.

   Άρα, το $\Delta(\alpha, \beta)$ είναι γνήσιο υποσύνολο των θετικών ρητών.

3. Έστω $(\mu, \nu) \in \Delta(\alpha, \beta)$. Τότε προφανώς ισχύει $\mu\beta < \nu\alpha$ ή ισοδύναμα $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}$

   Για κάθε $\frac{\mu_1}{\nu_1}$ με $\frac{\mu_1}{\nu_1} < \frac{\mu}{\nu}$, ή ισοδύναμα $\mu_1\nu < \mu\,\nu_1$, έχουμε:

   $\mu_1\nu < \mu\,\nu_1 \quad \Rightarrow$

   $\mu_1\nu\,\beta < \nu_1\,\mu\beta \quad \Rightarrow$

   $\mu_1\nu\,\beta < \nu_1\,\nu\,\alpha \quad \Rightarrow$

   $\mu_1\beta < \nu_1\,\alpha$, άρα $(\mu_1, \nu_1) \in \Delta(\alpha, \beta)$.

(9) Οι Προτάσεις προέρχονται από τις παραδόσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη του Νεγρεπόντη ,

ακ.έτος 2016 -17, ΠΜΣ: Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

4. Έστω $(\mu, \nu) \in \Delta(\alpha, \beta)$. Τότε προφανώς ισχύει $\mu\beta < \nu\alpha$ ή ισοδύναμα $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}$

Σχηματίζουμε το λόγο $\frac{\mu\beta}{\nu\beta}$

Ισχύει : $\frac{\mu\beta}{\nu\beta} < \frac{\nu\alpha}{\nu\beta}$ [Πρόταση 5.8]

Άρα, υπάρχει $\frac{\mu_1}{\nu_1}$ ώστε $\frac{\mu\beta}{\nu\beta} < \frac{\mu_1}{\nu_1} < \frac{\nu\alpha}{\nu\beta}$ [Ορισμός 5.7]

Όμως ισχύει $\frac{\nu\alpha}{\nu\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ [Πρόταση 5. 15]

Συνεπώς είναι:

- $\frac{\mu_1}{\nu_1} < \frac{\alpha}{\beta}$, άρα $(\mu_1, \nu_1) \in \Delta(\alpha, \beta)$ και
- $\nu_1 \mu\beta < \mu_1 \nu\beta$, δηλαδή $\nu_1 \mu < \mu_1 \nu$, άρα $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\mu_1}{\nu_1}$ □

Ας επανέλθουμε στους ορισμούς ισότητας και ανισότητας λόγων μεγεθών. Μία ισοδύναμη διατύπωση των Ορισμών 5.5 και 5.7 του Ευκλείδη, με σύγχρονη ορολογία, είναι η ακόλουθη:

Ορισμός – ισότητα λόγων μεγεθών

Έστω α, β και γ, δ μεγέθη, για τα οποία ισχύει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Θέτουμε $\Delta(\alpha, \beta) = \{\frac{\mu}{\nu} : \mu\beta < \nu\alpha\} = \{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}\}$

Ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν, $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\gamma, \delta)$.

Πρόταση 2

Ο Ορισμός – ισότητας λόγων μεγεθών είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 5.5.

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Έστω $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Θα αποδείξουμε ότι $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\gamma, \delta)$.

Έστω $(\mu, \nu) \in \Delta(\alpha, \beta)$. Τότε θα ισχύει $\mu\beta < \nu\alpha$, άρα $\mu\beta\delta < \nu\alpha\delta$ (1)

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι $\alpha\delta = \beta\gamma$ [Πρόταση 6.16],

συνεπώς (1) $\Rightarrow$ μβδ <νβγ , άρα μδ < νγ, δηλαδή (μ,ν) $\in$Δ(γ, δ).

Άρα τελικά Δ(α, β) $\subseteq$ Δ(γ, δ).

Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι Δ(γ, δ) $\subseteq$ Δ(α, β).

Άρα τελικά Δ(α, β) = Δ(γ, δ).

"$\Leftarrow$" Έστω Δ(α, β) = Δ(γ, δ). Θα αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Έστω (μ, ν)$\in$Δ(α, β). Τότε θα ισχύει μβ < να (2)

Επειδή Δ(α, β) = Δ(γ, δ) και (μ, ν)$\in$Δ(α, β), άρα (μ, ν)$\in$Δ(γ, δ). Συνεπώς είναι μδ < νγ (3)

(2), (3) $\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ □

Ορισμός – ανισότητα λόγων μεγεθών

Έστω α, β και γ, δ μεγέθη, για τα οποία ισχύει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Θέτουμε Δ(α, β) = $\{\frac{\mu}{\nu} : \mu\beta < \nu\alpha\}$ = $\{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}\}$

Ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν, Δ(α, β) γνήσιο υποσύνολο του Δ(γ, δ).

Πρόταση 3

Ο Ορισμός – ανισότητας λόγων μεγεθών είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 5.7

Απόδειξη

Ανάλογη της Πρότασης 2. □

Ο συσχετισμός μεταξύ Θεωρίας Λόγων Μεγεθών και Θεωρίας των πραγματικών αριθμών ολοκληρώνεται με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4

Έστω α, β και γ, δ, ομοειδή μεγέθη, για τα οποία ισχύει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ή
- $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ ή

- $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$

Απόδειξη

Κάθε λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ αντιστοιχεί σε μία τομή Dedekind Δ(α, β),

όπου $\Delta(\alpha, \beta) = \{\frac{\mu}{\nu} : \mu\beta < \nu\alpha\} = \{\frac{\mu}{\nu} : \frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}\}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν Δ(α, β) = Δ(γ, δ), τότε προφανώς $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$
- Αν Δ(α, β) ≠ Δ(γ, δ), τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:
    - Έστω ότι υπάρχει $x \in \Delta(\alpha, \beta)$ και $x \notin \Delta(\gamma, \delta)$, δηλαδή $\Delta(\gamma, \delta) \subset \Delta(\alpha, \beta)$. Τότε για $\psi \in \Delta(\gamma, \delta)$ και $\psi \notin \Delta(\alpha, \beta)$, είναι $x < \psi$, άρα $x \in \Delta(\gamma, \delta)$, κάτι που είναι άτοπο. Άρα $\Delta(\gamma, \delta) \subset \Delta(\alpha, \beta)$.
    - Έστω ότι υπάρχει $x \in \Delta(\gamma, \delta)$ και $x \notin \Delta(\alpha, \beta)$, δηλαδή $\Delta(\alpha, \beta) \subset \Delta(\gamma, \delta)$. Τότε για $\psi \in \Delta(\alpha, \beta)$ και $\psi \notin \Delta(\gamma, \delta)$, είναι $x < \psi$, άρα $x \in \Delta(\alpha, \beta)$, κάτι που είναι άτοπο. Άρα $\Delta(\gamma, \delta) \subset \Delta(\alpha, \beta)$. □

Τα συμπεράσματα είναι προφανή και ιδιαίτερα εντυπωσιακά! Οι αρχαίοι ορισμοί της ισότητας και της ανισότητας λόγων μεγεθών, όπως περιλαμβάνονται στο Βιβλίο 5 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και οι σύγχρονοι ορισμοί ισότητας και ανισότητας των θετικών πραγματικών αριθμών, όπως προτάθηκαν από τον Dedekind, συμπίπτουν απόλυτα.

Στο άρθρο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* διαβάζουμε:

> Εφόσον ο Dedekind, μετά από 22 αιώνες στα 1870!, ταύτισε έναν (θετικό) πραγματικό αριθμό με μια τομή Dedekind στους (θετικούς) ρητούς, έπεται ότι ο Εύδοξος, με τον ορισμό του λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ ευθυγράμμων τμημάτων έφθασε στον ορισμό των πραγματικών αριθμών. Αυτό αποτελεί ένα από τα κορυφαία επιτεύγματα των Ελληνικών Μαθηματικών. (Σελ. 15 του άρθρου)

Η ομοιότητα του ορισμού των πραγματικών αριθμών ως τομών Dedekind, με τους αρχαίους ορισμούς αναλογίας μεγεθών από τον Εύδοξο, δεν πέρασε απαρατήρητη και σχολιάστηκε από τη

μαθηματική κοινότητα της εποχής, όπως καταγράφεται στη σχετική με το θέμα αλληλογραφία των Dedekind – Lipscitz. Σε τι διαφέρει λοιπόν η Θεωρία των πραγματικών αριθμών του Dedekind από τη Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου; Οι πραγματικοί αριθμοί έχουν μία επιπλέον, θεμελιώδους σημασίας ιδιότητα, που δεν είναι άλλη από το Αξίωμα της Πληρότητας.

Διαβάζουμε:

> Ένα νέο στοιχείο στην περιγραφή των πραγματικών αριθμών είναι ότι υπάρχει όχι μόνο η σχέση διάταξης, όπως στους αρχαίους λόγους, αλλά και οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ως προς τις οποίες το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα. Στην αρχαιότητα, για λόγους που δεν έχουν πλήρως διευκρινισθεί, αλλά, πιθανώς λόγω της προέλευσης τους από τη μουσική, οι λόγοι δεν προστίθενται ποτέ και με πολύ κόπο πολλαπλασιάζονται. Όμως αυτό το στοιχείο δεν είναι ιδιαίτερα αποφασιστικό, καθώς γνωρίζουμε σήμερα ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών κατά Dedekind είναι μοναδικό, ακόμη και αν θεωρηθεί ως ένα σύνολο εφοδιασμένο μόνο με την πράξη της διάταξης.
>
> (Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, Σελ.17 του άρθρου)

Το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών και οι συνέπειές του θα μελετηθούν αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

4.2.6 Οι εφαρμογές της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου

4.2.6.1 Η μέθοδος της εξάντλησης

Οι γεωμέτρες που χρονικά προηγήθηκαν του Ευδόξου, θεωρούσαν ότι τα εμβαδά των καμπυλόγραμμων σχημάτων ήταν γεωμετρικά μεγέθη αντίστοιχου τύπου με τα εμβαδά πολυγωνικών σχημάτων (Γιαννακούλιας, 2006). Ο Ιπποκράτης ο Χίος και ο Δημόκριτος, συνέδεσαν τα ονόματά τους με το αρχικό στάδιο μίας πρωτοποριακής μεθόδου υπολογισμού εμβαδών και όγκων, της μεθόδου της εξάντλησης, στην οποία όμως τελική μορφή έδωσε ο Εύδοξος. Ας μελετήσουμε τις σχετικές μαρτυρίες.

Ο Σιμπλίκιος, στο έργο του *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη,* αναφέρει ρητά ότι, ο Ιπποκράτης ο Χίος είχε αποδείξει την πρόταση: "ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους." Στην παραπάνω πρόταση αναγνωρίζουμε την Πρόταση 12.2 του 12ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, της οποίας η απόδειξη περιέχει μία μορφή της μεθόδου της εξάντλησης. Παραθέτουμε το σχετικό χωρίο.

Καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δὲ τετραγωνισμοὶ δόξαντες εἶναι τῶν οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφησάν τε πρώτου καὶ κατὰ τρόπον ἔδοξαν ἀποδοθῆναι· διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθωμεν. ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει. (τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις)" ὅπερ Εὐκλείδης δεύτερον τέθεικεν ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν Στοιχείων βιβλίῳ, τὴν πρότασιν εἰπὼν οὕτως "οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα" ὡς γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν, οὕτως καὶ τὰ ὅμοια τμήματα.

Σιμπλίκιος, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη* , [61.1 – 61.12]

Ο Αρχιμήδης, στο έργο του *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος*, αναφέρει ότι, προγενέστεροι του Ευδόξου γεωμέτρες, όπως ο Δημόκριτος, γνώριζαν την ισχύ συγκεκριμένων Προτάσεων του Βιβλίου 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Παραθέτουμε το σχετικό χωρίο.

Διόπερ καὶ τῶν θεωρημάτων τούτων, ὧν Εὔδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσιν ἐχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀπόφασιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηναμένῳ.

Αρχιμήδης, *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος,* [84.3 – 84.10]

Στο χωρίο αναγνωρίζουμε τις Προτάσεις 12.7 και 12.10 του 12ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, των οποίων το περιεχόμενο είναι το ακόλουθο:

Πρόταση 12.7: Κάθε πυραμίδα είναι το ένα τρίτο του πρίσματος με την ίδια βάση και ίσο ύψος.

Πρόταση 12.10: Κάθε κώνος είναι το ένα τρίτο του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος.

Εκτός όμως από τη σύνδεση του Δημόκριτου με τη μέθοδο της εξάντλησης, στο παραπάνω χωρίο γίνεται προφανές ότι ο Αρχιμήδης πιστώνει στον Εύδοξο τις αυστηρές αποδείξεις των Προτάσεων 12.7 και 12.10 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, οι οποίες αποτελούν εφαρμογές της

μεθόδου της εξάντλησης. Την ίδια πληροφορία παραθέτει ο Αρχιμήδης ξανά στο έργο του *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου,* συνεπώς δεν υπάρχει καμία αμφιβολία: ο Εύδοξος ήταν ο επινοητής της ευφυούς μεθόδου της εξάντλησης.

> ***διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι.***
>
> Αρχιμήδης, *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου,* [9.1 – 9.11]

Η μέθοδος της εξάντλησης, εξαιρετικά σημαντική και πρόδρομος του Ολοκληρωτικού Λογισμού σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια, σχετίζεται με τον εγκλεισμό της ζητούμενης γεωμετρικής ποσότητας, (εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος ή όγκος στερεού), ανάμεσα σε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολυγωνικά σχήματα ή στερεά, των οποίων το πλήθος των πλευρών ή ακμών διαρκώς αυξάνει. Αυτό ισοδυναμεί με τη γεωμετρική κατασκευή μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας εμβαδών ή όγκων εγγεγραμένων σχημάτων και μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας εμβαδών ή όγκων περιγεγραμμένων σχημάτων αντίστοιχα, μεταξύ των οποίων βρίσκεται η ζητούμενη γεωμετρική ποσότητα. Με σύγχρονη ορολογία, η ζητούμενη γεωμετρική ποσότητα είναι ίση με το κοινό όριο των δύο ακολουθιών, ισχυρισμός εξαιρετικά μακρινός στους Αρχαίους, καθώς δεν είχαν συλλάβει την έννοια του ορίου.

Η Πρόταση που αποτελεί τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης είναι η Πρόταση 10.1 του 10ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Με δεδομένο ότι στην απόδειξη της Πρότασης 10.1 γίνεται άμεση χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, η αποδεκτική ισχύς της εν λόγω Αρχής ενισχύεται σημαντικά.

Ας μελετήσουμε την Πρόταση 10.1.

Πρόταση 10.1

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ	Έστω δύο μεγέθη άνισα. Αν από το μεγαλύτερο μέγεθος αφαιρέσουμε ένα μέγεθος μεγαλύτερο

καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.	από το μισό του, από το υπόλοιπο που προκύπτει αφαιρέσουμε ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του υπολοίπου και επαναλάβουμε διαρκώς αυτήν τη διαδικασία, τότε το μέγεθος που τελικά θα προκύψει θα είναι μικρότερο από καθένα από τα αρχικά μεγέθη.

Με σύγχρονη μαθηματική διατύπωση

Έστω M_0 και ε δύο ομοειδή μεγέθη και ακολουθία μεγεθών M_1, M_2, M_3 ..., τέτοια ώστε,

$$M_1 < \frac{M_0}{2} \quad (1)$$

$$M_2 < \frac{M_1}{2} \quad (2)$$

$$M_3 < \frac{M_2}{2} \quad (3)$$

...

Τότε, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $M_\nu < \varepsilon$.

Απόδειξη

Από την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, για τα μεγέθη M_0 και ε, προκύπτει ότι, υπάρχει φυσικός αριθμός ν, τέτοιος ώστε: $\nu \cdot \varepsilon > M_0$

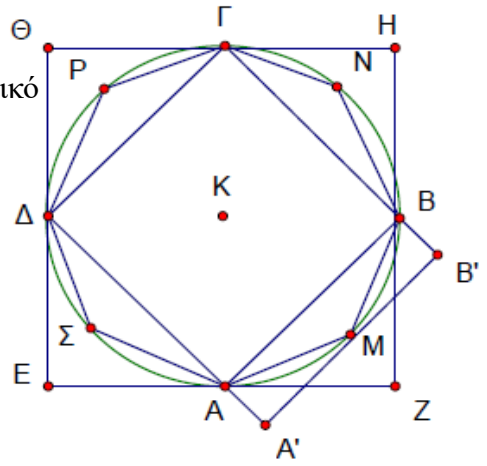
Επειδή $2^\nu > \nu$, ισχύει $2^\nu \cdot \varepsilon > \nu \cdot \varepsilon > M_0$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3),..., προκύπτει ότι $M_\nu < \frac{M_0}{2^\nu}$ ή ισοδύναμα $2^\nu \cdot M_\nu < M_0$.

Άρα τελικά, $M_\nu < \varepsilon$. □

Για να κατανοήσουμε πλήρως την τεχνική που περιγράφεται στην Πρόταση 10.1, θα παρουσιάσουμε μία βασική εφαρμογή της. Θα αποδείξουμε ότι η διαφορά των εμβαδών ενός κύκλου και του αντίστοιχου εγγεγραμμένου πολυγώνου μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμούμε, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν ενός κύκλου μπορεί να "εξαντληθεί" μέσω των εγγεγραμμένων στον κύκλο πολυγώνων.

Εφαρμογή Πρότασης 10.1[10]



Έστω ε > 0 και κύκλος C. Τότε, υπάρχει εγγεγραμμένο κανονικό ν – γωνο $E_ν$, τέτοιο ώστε εμβ (C) – εμβ ($E_ν$) < ε.

Απόδειξη

Έστω K το κέντρο του C και M_0 = εμβ (C)

Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ ως εξής:

- ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον C
- ΕΖΗΘ περιγεγραμμένο στον C

Επειδή εμβ (ΑΒΓΔ) = $\frac{\text{εμβ}(\text{ ΕΖΗΘ })}{2}$, άρα εμβ (ΑΒΓΔ) > $\frac{M_0}{2}$

Ορίζουμε M_1 = εμβ (C) – εμβ (ΑΒΓΔ) και είναι $M_1 < \frac{M_0}{2}$ (1)

Κατασκευάζουμε το κανονικό οκτάγωνο ΑΜΒΝΓΡΔΣ εγγεγραμμένο στον C.

Ορίζουμε M_2 = εμβ (C) – εμβ (ΑΜΒΝΓΡΔΣ) και είναι $M_2 < \frac{M_1}{2}$ (2), αφού το M_2 προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το M_1 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΜΒ, ΒΝΓ, ΓΡΔ, ΔΣΑ και αν φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ και κατασκευάσουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΒΆΆ. Άρα ισχύει εμβ (ΑΜΒ) = $\frac{\text{εμβ}(\text{ ΑΒΒΆΆ })}{2}$ ή εμβ (ΑΜΒ) > $\frac{\text{εμβ}(\text{ κυκλικού τμήματος ΑΜΒ })}{2}$

Συνεχίζουμε ανάλογα και έτσι σχηματίζεται η ακολουθία εμβαδών M_1, M_2, M_3, ..., τέτοια ώστε:

$$M_1 < \frac{M_0}{2} \quad (1)$$

$$M_2 < \frac{M_1}{2} \quad (2)$$

$$M_3 < \frac{M_2}{2} \quad (3)$$

...

Από την Πρόταση 10.1, υπάρχει ν∈ℕ, τέτοιο ώστε $M_ν$ < ε, ή ισοδύναμα, υπάρχει εγγεγραμμένο κανονικό ν – γωνο $E_ν$, τέτοιο ώστε εμβ (C) – εμβ ($E_ν$) < ε. □

(10) Το σχήμα προέρχεται από τη Διπλωματική εργασία με τίτλο Η Μέθοδος της εξάντλησης των Ευδόξου – Αρχιμήδη, του Βασιλείου, Γ. (2007).

Μία γενική περιγραφή των τριών βημάτων που συνθέτουν τη μέθοδο της εξάντλησης, με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν Ε ενός καμπυλόγραμμου σχήματος (αντίστοιχα είναι τα βήματα στην περίπτωση που το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του όγκου V ενός στερεού).

Βήμα 1ο: Κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες γνωστών εμβαδών, ώστε το Ε να περικλείεται μεταξύ αυτών. Η πρώτη ακολουθία (A_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει όρους τα εμβαδά των σχημάτων που είναι εγγεγραμμένα στο καμπυλόγραμμο σχήμα, ενώ η δεύτερη ακολουθία (B_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει όρους τα εμβαδά των σχημάτων που είναι περιγγεγραμμένα στο καμπυλόγραμμο σχήμα. Επειδή το Ε περικλείεται από τις δύο αυτές ακολουθίες, ισχύει $A_n \leq E \leq B_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 10.1, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $B_n - A_n < \varepsilon$.

Βήμα 2ο: Εντοπίζουμε έναν πραγματικό αριθμό α, έτσι ώστε $A_n \leq \alpha \leq B_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Βήμα 3ο: Αποδεικνύουμε ότι $E = \alpha$.

Από το Αξίωμα της τριχοτομίας έχουμε ότι, είτε $E = \alpha$, είτε $E < \alpha$, είτε $E > \alpha$. Για να αποδείξουμε ότι $E = \alpha$, αρκεί να αποκλείσουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις. Ο αποκλεισμός τους θα γίνει με τη διπλή εις άτοπο απαγωγή.

- Έστω ότι $E > \alpha$.

  Θέτουμε $\varepsilon = E - \alpha$. Από το Βήμα 1, υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, $B_n - A_n < \varepsilon$, δηλαδή υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, $B_n - A_n < E - \alpha$ ή ισοδύναμα $B_n < E - \alpha + A_n$ Όμως, από το Βήμα 2 ισχύει $A_n \leq \alpha$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα τελικά, $B_n < E - \alpha + A_n \leq E - \alpha + \alpha \leq E$, δηλαδή $B_n < E$, για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, κάτι που είναι άτοπο, αφού $E \leq B_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

- Έστω ότι $E < \alpha$.

  Θέτουμε $\varepsilon = \alpha - E$. Από το Βήμα 1, υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, $B_n - A_n < \varepsilon$, δηλαδή υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, $B_n - A_n < \alpha - E$ ή ισοδύναμα $A_n > B_n + E - \alpha$ Όμως, από το Βήμα 2 ισχύει $B_n \geq \alpha$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα τελικά, $A_n > B_n + E - \alpha \geq \alpha + E - \alpha = E$, δηλαδή $A_n > E$, για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, κάτι που είναι άτοπο, αφού $A_n \leq E$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Οι αποδείξεις των Προτάσεων 12.2, 12.3, 12.5, 12.10, 12.12, 12,16, 12.17 και 12.18 του 12ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, στηρίζονται στη μέθοδο της εξάντλησης. Ενδεικτικά θα

παραθέσουμε την απόδειξη της Πρότασης 12.2, η οποία προϋποθέτει τη γνώση της Πρότασης 12.1: *Δύο όμοια πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλους είναι ανάλογα των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων αυτών.*

Πρόταση 12.2

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.	Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Απόδειξη

Έστω δύο κύκλοι C_1, C_2 με ακτίνες r_1, r_2 αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

Από το Αξίωμα της τριχοτομίας έχουμε ότι, είτε $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$, είτε $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$, είτε $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Για να αποδείξουμε ότι $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$, αρκεί να αποκλείσουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις. Ο αποκλεισμός τους θα γίνει με τη διπλή εις άτοπο απαγωγή.

- **1η περίπτωση:** Έστω ότι $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$

  Ορίζουμε $S = \frac{\text{Εμβ}(C_1) r_2^2}{r_1^2}$ και είναι $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{S} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

  Προφανώς ισχύει Εμβ $(C_2) > S$, συνεπώς θέτουμε $\varepsilon = \text{Εμβ}(C_2) - S$.

  Από τη βασική εφαρμογή της Πρόταση 10.1, υπάρχει πολύγωνο E'_ν εγγεγραμμένο στον κύκλο C_2, τέτοιο ώστε Εμβ (C_2) – Εμβ $(E'_\nu) < \varepsilon$, άρα

  Εμβ (C_2) – Εμβ $(E'_\nu) <$ Εμβ $(C_2) - S$, δηλαδή Εμβ $(E'_\nu) > S$ (1)

  Έστω E_ν κανονικό, εγγεγραμμένο στον κύκλο C_1 πολύγωνο.

  Από την Πρόταση 12.1 ισχύει $\frac{\text{Εμβ}(E_\nu)}{\text{Εμβ}(E'_\nu)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\text{Εμβ}(C_1)}{S}$

  Είναι $\frac{S}{\text{Εμβ}(E'_\nu)} = \frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(E_\nu)} > 1$, αφού Εμβ $(C_1) >$ Εμβ (E_ν), άρα $S >$ Εμβ (E'_ν) (2)

  Από τις σχέσεις (1) και (2) οδηγούμαστε σε άτοπο.

- **2η περίπτωση:** Έστω ότι $\frac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$

Εναλλάσουμε τους ρόλους των δύο κύκλων της 1ης περίπτωσης και οδηγούμαστε με ανάλογους συλλογισμούς σε άτοπο.

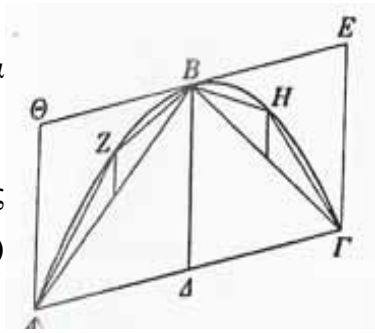
Άρα τελικά ισχύει $\dfrac{\text{Εμβ}(C_1)}{\text{Εμβ}(C_2)} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ □

Στο έργο του Αρχιμήδη με τίτλο *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής* παρουσιάζεται ένα από "τα πιο ωραία και χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου της εξάντλησης." (Νεγρεπόντης – Γιωτόπουλος – Γιαννακούλιας, Α.Λ Ι Σελ.191) Με σύγχρονη ορολογία θα λέγαμε ότι πρόκειται για τον υπολογισμό του εμβαδού του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τους άξονες x΄x και y΄y και την κατακόρυφη ευθεία x = 1. Οι αυστηρές αποδείξεις που παρουσίασε ο Αρχιμήδης είναι δύο: στην πρώτη απόδειξη εγγράφονται τρίγωνα στο χωρίο, ενώ στη δεύτερη εγγράφονται ορθογώνια στο χωρίο.

Πρόταση 24 (Τετραγωνισμός της παραβολής - Αρχιμήδη)

Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. **[193,6 – 193,8]**	Το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου που περικλείεται μεταξύ ευθυγράμμου τμήματος και παραβολής ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του εγγεγραμμένου, στο παραβολικό χωρίο, τριγώνου.

1η απόδειξη [11](Γεωμετρική απόδειξη)



Έστω το παραβολικό χωρίο του σχήματος και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Ονομάζουμε M_0 = Εμβ (παραβολικού χωρίου ΑΒΓ).

Από το μέσο Δ του ΑΓ, φέρουμε παράλληλη ευθεία, έστω (ε), προς τον άξονα της παραβολής και ονομάζουμε Β το σημείο τομής της (ε) με την παραβολή (κορυφή της παραβολής).

Επειδή Εμβ (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ Εμβ (ΑΓΕΘ), άρα θα ισχύει

$$\text{Εμβ}(\text{τριγώνου ΑΒΓ}) > \frac{1}{2}\ \text{Εμβ}(\text{παραβολικού χωρίου ΑΒΓ})$$, δηλαδή

$$\text{Εμβ}(\text{τριγώνου ΑΒΓ}) > \frac{M_0}{2}$$

(11) Η απόδειξη είναι από το βιβλίο του Χριστιανίδη, Γ., Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003.

Ορίζουμε M_1 = Εμβ (παραβολικού χωρίου ΑΒΓ) – Εμβ (ΑΒΓ) και είναι $M_1 < \frac{M_0}{2}$ (1)

Στα παραβολικά χωρία με τόξα τα ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, εγγράφουμε τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΒΗΓ.

Συνεχίζουμε ανάλογα και έτσι σχηματίζεται η ακολουθία εμβαδών M_1, M_2, M_3, ..., τέτοια ώστε:

$$M_1 < \frac{M_0}{2} \quad (1)$$

$$M_2 < \frac{M_1}{2} \quad (2)$$

$$M_3 < \frac{M_2}{2} \quad (3)$$

...

Από την Πρόταση 10.1, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $M_\nu < \varepsilon$.

Ας υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν.

Από τις ιδιότητες της παραβολής έχουμε (ΑΖΒ) + (ΒΗΓ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ). Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων τριγώνων ισούται με το $\frac{1}{4}$ του αθροίσματος των εμβαδών των τριγώνων (ΑΖΒ) και (ΒΗΓ). Προσθέτοντας τα εμβαδά όλων των παραπάνω τριγώνων υπολογίζουμε το ζητούμενο εμβαδόν του παραβολικού χωρίου, δηλαδή :

$$\text{Εμβ}\left(\text{παραβολικού χωρίου ΑΒΓ}\right) = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...\right)\text{Εμβ}\left(\text{τριγώνου ΑΒΓ}\right)$$

Σήμερα γνωρίζουμε ότι το άθροισμα $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...$ αποτελεί άθροισμα άπειρων όρων

γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = \frac{1}{4} \in (-1, 1)$, άρα $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

Πώς όμως έγινε ο υπολογισμός του αθροίσματος άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου, χωρίς τους σύγχρονους τύπους; Ο Αρχιμήδης είχε συλλάβει το αναμενόμενο αποτέλεσμα με τη λεγόμενη "μηχανική" μέθοδο, το οποίο στη συνέχεια επιβεβαίωσε εφαρμόζοντας τη λεγόμενη "γεωμετρική" μέθοδο, χωρίς να χρησιμοποιήσει άπειρες διαδικασίες.

Ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶτον μὲν ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. [*Τετραγωνισμός της παραβολής*, 165,23 – 165,26]

Ο υπολογισμός του εμβαδού του παραβολικού χωρίου ολοκληρώνεται με την απόδειξη της ισότητας $\text{Εμβ}(\text{παραβολικού χωρίου ΑΒΓ}) = \frac{4}{3}\,\text{Εμβ}(\text{τριγώνου ΑΒΓ})$, η οποία υλοποιείται με τη μέθοδο της διπλής αντίφασης.

Αποκλείοντας λοιπόν τις περιπτώσεις:

- $\text{Εμβ}(\text{παραβολικού χωρίου ΑΒΓ}) > \frac{4}{3}\,\text{Εμβ}(\text{τριγώνου ΑΒΓ})$ και
- $\text{Εμβ}(\text{παραβολικού χωρίου ΑΒΓ}) < \frac{4}{3}\,\text{Εμβ}(\text{τριγώνου ΑΒΓ})$

προκύπτει τελικά ότι $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\text{Εμβ}(\text{τριγώνου ΑΒΓ}) = \frac{4}{3}\,\text{Εμβ}(\text{τριγώνου ΑΒΓ})$ □

2η απόδειξη (με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό)

Έστω R το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τους άξονες x΄x και y΄y και την κατακόρυφη ευθεία x = 1. Θα ακολουθήσουμε τα τρία βήματα που συνθέτουν τη μέθοδο της εξάντλησης.

Βήμα 1ο

Φέρουμε κατακόρυφες ευθείες και διαιρούμε το τμήμα ΟΕ, μήκους 1 μονάδας, σε ν ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{\nu}$ το καθένα. Βρίσκουμε δύο προσεγγίσεις του R.

- κατ΄έλλειψη: πρόκειται για το κάτω άθροισμα (β_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω από την παραβολή,

  με $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}\cdot 0^2 + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2 =$

  $\left(\frac{1}{\nu}\right)^3 [1^2 + 2^2 + \ldots + (\nu-1)^2]$

- καθ΄υπεροχή: πρόκειται για το πάνω άθροισμα (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω από την παραβολή,

με $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2 =$

$\left(\frac{1}{\nu}\right)^3 [1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2]$

Προφανώς ισχύει $\beta_\nu < R < \alpha_\nu$.

Βήμα 2ο: Εντοπίζουμε τον πραγματικό αριθμό $\frac{1}{3}$, για τον οποίο ισχύει $\beta_\nu \leq \frac{1}{3} \leq \alpha_\nu$,

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Βήμα 3ο: Αποδεικνύουμε ότι $E = \frac{1}{3}$

Επειδή $\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, από την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη για τους αριθμούς 1 και ε, προκύπτει ότι, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $\nu \cdot \varepsilon > 1$, δηλαδή $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$. Συνεπώς, η διαφορά $\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ γίνεται οσοδήποτε μικρή καθώς το ν αυξάνει, κάτι που, με σύγχρονη ορολογία μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για το ζητούμενο εμβαδόν R ισχύει: $R = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \frac{1}{3}$ □

Οι ομοιότητες ανάμεσα στον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου με χρήση της μεθόδου της εξάντλησης και τον σύγχρονο τρόπο υπολογισμού του ίδιου χωρίου με χρήση των αθροισμάτων Riemann αιτιολογούν απόλυτα τη θέση ότι "οι αρχές του Ολοκληρωτικού Λογισμού θα πρέπει να αναζητηθούν στους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων της αρχαιότητας" (Νεγρεπόντης – Γιωτόπουλος – Γιαννακούλιας, Α.Λ Ι, Σελ. 185) και επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι "οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, μέσα από τη γεωμετρία, επινόησαν και έφθασαν σε υψηλή τελειότητα τη μέθοδο της εξάντλησης, που είναι ο πρόδρομος και ο στενός συγγενής του σημερινού Ολοκληρωτικού Λογισμού." (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, Α.Λ Ι, Σελ. 186) Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα καταθέτοντας την άποψη των Bourbaki, σύμφωνα με την οποία "τα αθροίσματα Riemann θα ήταν δικαιότερο ιστορικά να ονομάζονται αθροίσματα Ευδόξου – Αρχιμήδη." (Νεγρεπόντης – Γιωτόπουλος – Γιαννακούλιας, Α.Λ Ι, Σελ. 187)

4.2.6.2 Το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη

Σύμφωνα με τον Loria (G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος 1), ορισμένες από τις εργασίες του Αρχιμήδη μπορεί να θεωρηθούν συμπληρωματικές των *Στοιχείων* του Ευκλείδη,

καθώς ουσιαστικά αποτελούν προεκτάσεις των θεωριών που αναπτύσσονται στα *Στοιχεία*. Μεταξύ αυτών ιδιαίτερη θέση κατέχει το *Βιβλίο Λημμάτων* ή *Liber Assumptorum*. Πρόκειται για μία πραγματεία με δεκαπέντε προτάσεις σχετικά με τη φύση των κύκλων, στις οποίες γίνεται χρήση της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου. Η εργασία σώζεται μόνο σε αραβική μετάφραση και, μεταξύ άλλων, παρουσιάζεται το ιδιαίτερο Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής ή Θεώρημα της Τεθλασμένης Χορδής, το οποίο έχει συναρπαστικές προεκτάσεις στην τριγωνομετρία.

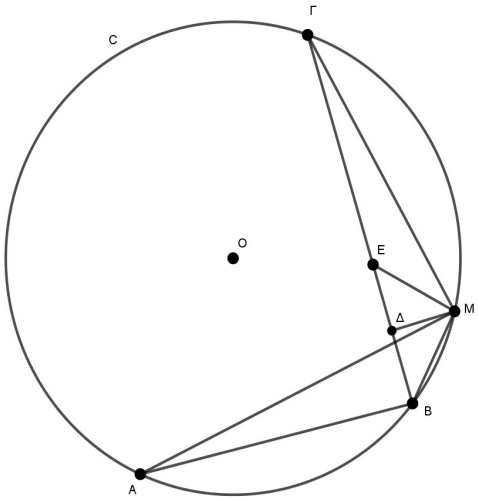
Ας το μελετήσουμε.

Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής (Αρχιμήδης)

Έστω κύκλος (Ο, ρ) και ΑΒ, ΒΓ δύο χορδές του. Αν Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΒΓ, Δ το ίχνος της κάθετης από το Μ προς τη μεγαλύτερη χορδή, τότε το Δ είναι το μέσο της σπασμένης (ή τεθλασμένης) χορδής ΑΒΓ, δηλαδή ισχύει ΑΒ + ΒΔ = ΔΓ.

Απόδειξη[12]

Έστω ΒΓ > ΑΒ. Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΜΕ = ΜΒ.



Επειδή Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΒΓ θα έχουμε ΜΑ = ΜΓ.

Οι γωνίες $M\hat{A}B$ και $M\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, άρα ισχύει $M\hat{A}B = M\hat{\Gamma}B$.

Εάν περιστρέψουμε το τρίγωνο ΜΒΓ γύρω από το σημείο Μ, τότε το σημείο Γ θα ταυτιστεί με το Α και το σημείο Β θα ταυτιστεί με το Ε.

Το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές, έτσι ΔΕ = ΔΒ.

Άρα τελικά, ΔΓ = ΓΕ + ΕΔ = ΑΒ + ΒΔ,

δηλαδή το Δ είναι το μέσο της σπασμένης (ή τεθλασμένης) χορδής ΑΒΓ. □

Το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη έχει, όπως αναφέραμε, εντυπωσιακές προεκτάσεις στην τριγωνομετρία. Πράγματι, από αυτό προκύπτει ο γνωστός θεμελιώδης τύπος της τριγωνομετρίας ημ(x – y) = ημx · συνy – ημy · συνx.

(12) Η απόδειξη προέρχεται από το εγχειρίδειο Crux Mathematicorum, Ιούνιος – Ιούλιος 1980, Σελ. 189 και αποδίδεται στον Gregg Patruno, φοιτητή στο Stuyvesant High School της Νέας Υόρκης, όπως αναφέρεται στη Μεταπτυχιακή Εργασία της Δρακάκη Μ., Κλασικά Θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η ιστορία τους, Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Κρήτης (2019). Την επιλέγουμε μεταξύ άλλων αποδείξεων, λόγω της απλότητάς της.

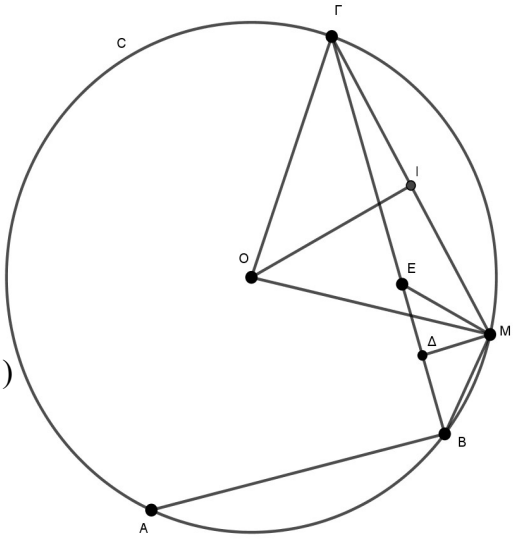
Ας μελετήσουμε την απόδειξη, με χρήση σύγχρονου μαθηματικού συμβολισμού.

Υπολογισμός της διαφοράς δύο τόξων

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ο κύκλος του ακόλουθου σχήματος είναι ο μοναδιαίος και συμβολίζουμε τα μήκη των τόξων ΜΓ και ΜΒ με 2x και 2y αντίστοιχα.

Η γωνία ΜΟΓ είναι 2x ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε τόξο 2x.

Το τρίγωνο ΜΟΓ είναι ισοσκελές, αφού ΟΜ = ΟΓ =1, ως ακτίνες του μοναδιαίου κύκλου.



Άρα, η διχοτόμος της γωνίας ΜΟΓ είναι

και διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΜΟΓ.

Καλούμε Ι το μέσο της ΓΜ. Τα τρίγωνα ΟΓΙ

και ΟΜΙ είναι προφανώς ίσα και ορθογώνια,

συνεπώς υπολογίζοντας το ημίτονο των γωνιών x

προκύπτει ότι ΓΙ = ημx και ΙΜ = ημx. Άρα ΓΜ = 2ημx (1)

Με ανάλογο επιχείρημα προκύπτει ότι ΜΒ = 2ημy (2)

Από το Θεώρημα Σπασμένης Χορδής έχουμε:

τόξο ΑΜ = τόξο ΜΓ, άρα

τόξο ΑΒ + τόξο ΜΒ = τόξο ΜΓ, δηλαδή

τόξο ΑΒ + 2y = 2x, άρα

τόξο ΑΒ = 2(x – y)

και χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα με εκείνα από τα οποία προέκυψε η σχέση (1)

προκύπτει ότι ΑΒ =2ημ(x – y) (3)

Η γωνία ΜΓΒ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΜΒ = 2y, άρα είναι ίση με το μισό του, δηλαδή ισχύει $M\hat{\Gamma}B = y$.

Στο τρίγωνο ΜΓΔ υπολογίζουμε το συνημίτονο της γωνίας ΜΓΔ και έχουμε

συνy = $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma M}$, άρα ΓΔ = 2ημxσυνy (4)

Ας υπολογίσουμε το ΔΒ.

Η γωνία ΜΒΓ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΜΓ = 2x, άρα είναι ίση με το μισό του, δηλαδή ισχύει $M\hat{B}\Gamma = x$.

Στο τρίγωνο ΜΔΒ υπολογίζουμε το συνημίτονο της γωνίας ΜΒΓ και έχουμε

συνx = $\frac{ΒΔ}{ΜΒ}$, άρα ΒΔ = 2ημυσυνx (5)

Από το Θεώρημα Σπασμένης Χορδής προκύπτει ότι ΑΒ + ΒΔ = ΔΓ, συνεπώς

2ημ(x – y) + 2ημυσυνx = 2ημxσυνy, άρα τελικά καταλήγουμε στον γνωστό τύπο της τριγωνομετρίας: ημ(x – y) = ημxσυνy – ημυσυνx. □

Η απόδειξη του τύπου υπολογισμού της διαφοράς δύο τόξων από το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη είναι πραγματικά αξιοθαύμαστη!

4.2.6.3 Το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (100 – 170 μ.χ) είναι κυρίως γνωστός για τη συνεισφορά του στον τομέα της αστρονομίας. Το σπουδαιότερο έργο του, η *Μαθηματική σύνταξις* ή *Μεγίστη* ή *Αλμαγέστη* είναι μία εργασία 13 Βιβλίων, αντίστοιχη των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όπου ο Πτολεμαίος παραθέτει ταξινομημένες ανακαλύψεις προγενέστερων σημαντικών αστρονόμων, όπως ο Ίππαρχος και ο Αρίσταρχος. Στο πρώτο από τα Βιβλία της *Μεγίστης* περιλαμβάνεται ένα ξεχωριστό και με σημαντικές προεκτάσεις στην τριγωνομετρία θεώρημα, γνωστό με το όνομα Θεώρημα του Πτολεμαίου ή Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων. Στην απόδειξη του εν λόγω Θεωρήματος γίνεται χρήση της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου.

Ας το μελετήσουμε.

Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων (Θεώρημα του Πτολεμαίου)

Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των δύο ζευγών των απέναντι πλευρών.

Με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό

Έστω κύκλος (Ο, ρ) και ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε αυτόν.

Τότε ισχύει: ΑΒ · ΓΔ + ΒΓ · ΔΑ =ΑΓ · ΒΔ

Απόδειξη

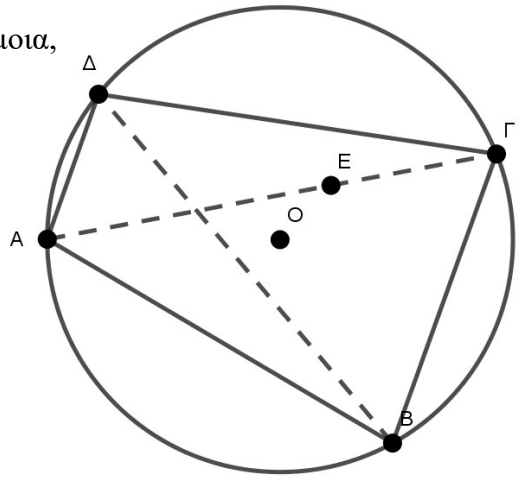
Ονομάζουμε Ε εκείνο το σημείο της διαγωνίου ΑΓ, για το οποίο ισχύει $A\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma$

Είναι:

$$A\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma \Rightarrow A\hat{B}E - E\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma - E\hat{B}\Delta \Rightarrow A\hat{B}\Delta = E\hat{B}\Gamma \quad (1)$$

Ισχύει $B\hat{\Delta}A = B\hat{\Gamma}E$ (2), αφού πρόκειται για γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Συνεπώς, (1), (2) $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι όμοια,



άρα $\frac{B\Gamma}{\Gamma E} = \frac{B\Delta}{\Delta A}$, ή ισοδύναμα $B\Gamma \cdot \Delta A = B\Delta \cdot \Gamma E$ (3)

Επίσης είναι:

$A\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma$ (4) και

$B\hat{A}E = B\hat{\Delta}\Gamma$ (5)

Συνεπώς, (4), (5) $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ είναι όμοια, άρα $\frac{BA}{AE} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$,

ή ισοδύναμα $BA \cdot \Delta\Gamma = B\Delta \cdot AE$ (6)

Τελικά (3) + (6) $\Rightarrow$ $B\Gamma \cdot \Delta A + BA \cdot \Delta\Gamma = B\Delta \cdot (\Gamma E + AE)$,

άρα, $A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot \Delta\Gamma + \Delta A \cdot B\Gamma$ □

Το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου, όπως ακριβώς και το Θεώρημα της Σπασμένης χορδής του Αρχιμήδη, έχει εντυπωσιακές προεκτάσεις στην τριγωνομετρία. Πράγματι, με εφαρμογή ειδικών περιπτώσεών του, προκύπτουν εύκολα οι τύποι υπολογισμού των χορδών του αθροίσματος και της διαφοράς δύο τόξων, καθώς και ο τύπος υπολογισμού του μισού τόξου.

Ας μελετήσουμε τις αποδείξεις, με χρήση σύγχρονου μαθηματικού συμβολισμού.

Μέθοδος για τον υπολογισμό του αθροίσματος δύο τόξων

Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση που ο κύκλος (Ο, ρ) έχει ακτίνα ρ = 1 και η διαγώνιος ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου, δηλαδή ισχύει ΑΓ = 2. Θα εκφράσουμε τη χορδή ΒΔ, ως συνάρτηση των χορδών ΒΓ και ΓΔ, δηλαδή θα εκφράσουμε το άθροισμα των δύο τόξων ως συνάρτηση των επιμέρους τόξων.

Είναι:

- $A\hat{B}\Gamma = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

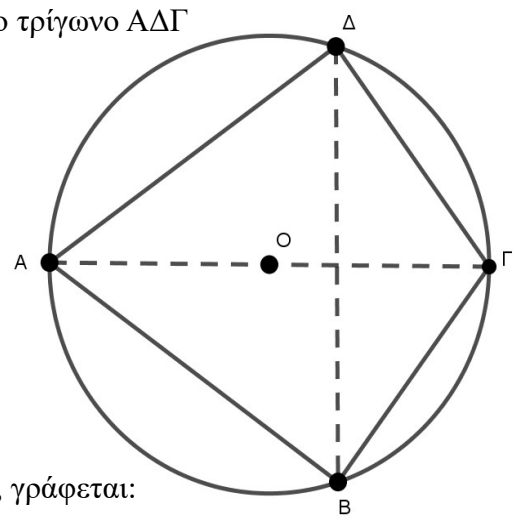
  Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

  και έχουμε $AB = \sqrt{4 - B\Gamma^2}$ (1)

- $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ

και έχουμε $ΑΔ = \sqrt{4-ΔΓ^2}$ (2)



Από το Θεώρημα του Πτολεμαίου ισχύει:

$ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΒ \cdot ΔΓ + ΑΔ \cdot ΒΓ \Rightarrow$

$2 \cdot ΒΔ = ΔΓ \cdot \sqrt{4-ΒΓ^2} + ΒΓ \cdot \sqrt{4-ΔΓ^2} \Rightarrow$

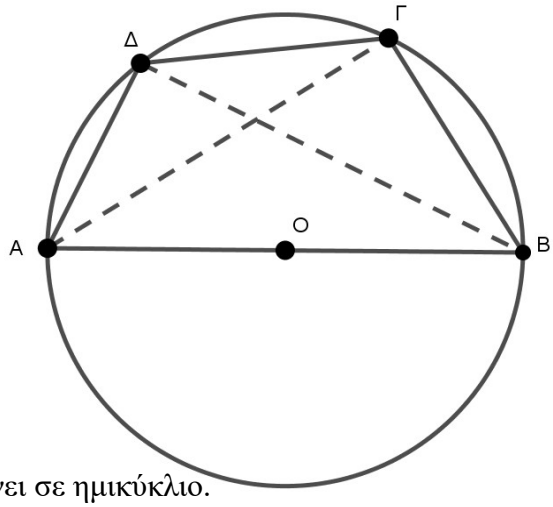
$ΒΔ = \frac{ΔΓ}{2} \cdot \sqrt{4-ΒΓ^2} + \frac{ΒΓ}{2} \cdot \sqrt{4-ΔΓ^2}$

Η παραπάνω σχέση, με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, γράφεται:

ημ(x + y) = ημxσυνy + συνxημy, όπου x, y είναι οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, με $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ □

Μέθοδος για τον υπολογισμό της διαφοράς δύο τόξων

Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση που ο κύκλος (Ο, ρ) έχει ακτίνα ρ = 1 και η πλευρά ΑΒ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου, δηλαδή ισχύει ΑΒ = 2. Θα εκφράσουμε τη χορδή ΓΔ, ως συνάρτηση των χορδών ΒΔ και ΒΓ, δηλαδή θα εκφράσουμε τη διαφορά των δύο τόξων ως συνάρτηση των επιμέρους τόξων.



Είναι:

- $A\hat{Γ}B = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

  Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ

  και έχουμε $ΑΓ = \sqrt{4-ΒΓ^2}$ (1)

- $A\hat{Δ}B = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

  Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ

  και έχουμε $ΑΔ = \sqrt{4-ΒΔ^2}$ (2)

Από το Θεώρημα του Πτολεμαίου ισχύει:

$ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΒ \cdot ΔΓ + ΑΔ \cdot ΒΓ \Rightarrow$

$\sqrt{4-ΒΓ^2} \cdot ΒΔ = 2 \cdot ΔΓ + \sqrt{4-ΒΔ^2} \cdot ΒΓ \Rightarrow$

$2 \cdot \Delta\Gamma = B\Delta \cdot \sqrt{4-B\Gamma^2} - B\Gamma \cdot \sqrt{4-B\Delta^2} \Rightarrow$

$\Delta\Gamma = \frac{B\Delta}{2} \cdot \sqrt{4-B\Gamma^2} - \frac{B\Gamma}{2} \cdot \sqrt{4-B\Delta^2}$

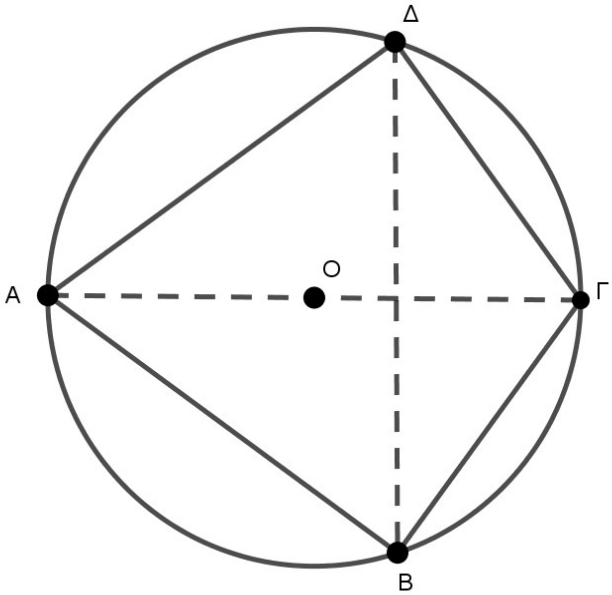
Η παραπάνω σχέση, με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, γράφεται:

ημ(x – y) = ημxσυνy – συνxημy, όπου x, y είναι οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα ΒΔ και ΒΓ αντίστοιχα, με $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ □

Μέθοδος για τον υπολογισμό του μισού τόξου

Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση που ο κύκλος (Ο, ρ) έχει ακτίνα ρ = 1 και η διαγώνιος ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου, δηλαδή ισχύει ΑΓ = 2. Θεωρούμε χορδή ΒΔ κάθετη στη διάμετρο ΑΓ και μικρότερη από αυτήν, ώστε ΔΓ = ΒΓ. Θα εκφράσουμε τη χορδή ΒΔ, ως συνάρτηση των χορδών ΓΔ και ΒΓ.

Είναι:



- $A\hat{B}\Gamma = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.
  Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε $AB = \sqrt{4-B\Gamma^2}$ (1)
- $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.
  Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ και έχουμε $A\Delta = \sqrt{4-\Gamma\Delta^2}$ (2)
- Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ίσα, άρα ΑΔ = ΑΒ (3)

Από το Θεώρημα του Πτολεμαίου ισχύει:

$A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot \Delta\Gamma + A\Delta \cdot B\Gamma \Rightarrow$

$2 \cdot B\Delta = \Gamma\Delta \cdot \sqrt{4-B\Gamma^2} + B\Gamma \cdot \sqrt{4-\Gamma\Delta^2} \Rightarrow$

$2 \cdot ΒΔ = ΒΓ \cdot \sqrt{4-ΒΓ^2} + ΒΓ \cdot \sqrt{4-ΒΓ^2} \Rightarrow$

$2 \cdot ΒΔ = 2 \cdot ΒΓ \cdot \sqrt{4-ΒΓ^2} \Rightarrow$

$ΒΔ = ΒΓ \cdot \sqrt{4-ΒΓ^2} \Rightarrow$

$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 \cdot (4 - ΒΓ^2) \Rightarrow$

$ΒΓ^4 - 4 \cdot ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 0$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς ΒΓ και θεωρώντας τη θετική λύση της εξίσωσης, αφού το ΒΓ παριστάνει χορδή, έχουμε:

$ΒΓ = \sqrt{2 - \sqrt{4 - ΒΔ^2}}$

Η παραπάνω σχέση, με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, γράφεται:

$ημ^2 \frac{θ}{2} = \frac{1-συνθ}{2}$, όπου θ είναι η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΒΔ, με $0 < θ < π$. □

Οι προεκτάσεις του Θεωρήματος του Πτολεμαίου στην τριγωνομετρία χαρακτηρίζονται τουλάχιστον εντυπωσιακές!

4.2.7 Η αποδεικτική ισχύς της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη συνολικά

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη επιλεγμένων προτάσεων των Βιβλίων 5, 6, 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, αλλά και των εργασιών των Αρχιμήδη και Πτολεμαίου, καταλήγουμε στο εξής αδιαμφισβήτητο συμπέρασμα: η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη διαθέτει τεράστια αποδεικτική δύναμη συνολικά. Πράγματι, η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, σε συνδυασμό με την Αρχή του Ελαχίστου, επέχει θέση αιτήματος στο 5ο Βιβλίο των *Στοιχείων*, ώστε να μπορέσει να αποδειχθεί, βάσει του Ορισμού 5.7 (ανισότητα λόγων μεγεθών), η Πρόταση – κλειδί 5.8, στην οποία βασίζεται το σύνολο της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου. Η μέθοδος της εξάντλησης, αλλά και οι εργασίες των Αρχιμήδη και Πτολεμαίου, που σύμφωνα με τον Loria αποτελούν συμπληρώματα των *Στοιχείων* και συνδέουν όπως είδαμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία με την τριγωνομετρία, αποτελούν εντυπωσιακές προεκτάσεις της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών.

Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη έχει αναμφίβολα τεράστια αποδεικτική δύναμη, καθώς αποτελεί την αφετηρία για θεμελιώδη, μη τετριμμένα αποτελέσματα της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών. Εύλογα, τίθεται το ερώτημα: Ποια είναι άραγε η προέλευση της αποδεικτικής δύναμης της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη;

Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε την ερμηνεία των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη σε

σχέση με την προέλευση της αποδεικτικής δύναμης της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

4.3 Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη ως συμβατή περάτωση του Απείρου

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην εργασία τους με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* αναγνωρίζουν στην Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Αν δεχτούμε την ερμηνεία τους, τότε η ισχυρή αποδεικτική δύναμη της εν λόγω Αρχής παύει να αποτελεί μυστήριο και εξηγείται απόλυτα λόγω της προσέγγισης της αντίφασης.

Ας μελετήσουμε προσεκτικά τα επιχειρήματά τους.

Αν α, β είναι δύο άνισα ομοειδή μεγέθη, τότε προφανώς ισχύει β < α ή α < β. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση. Σύμφωνα με την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη (Ορισμός 5.4), για τα α, β υπάρχει κάποιο πολλαπλάσιο του μικρότερου μεγέθους που είναι μεγαλύτερο από το άλλο μέγεθος, δηλαδή, υπάρχει κάποιο πολλαπλάσιο του β, που ξεπερνά το α. Προσεγγίζοντας ποιοτικά την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, παρατηρούμε ότι πρόκειται για ρητή καταγραφή μίας συνθήκης, που τα ομοειδή μεγέθη α, β πρέπει να ικανοποιούν, ώστε να ισχύουν γι' αυτά ορισμένες από τις Προτάσεις της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου. Πράγματι, η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη κατέχει θέση αιτήματος και σε συνδυασμό με την Αρχή του Ελαχίστου περιγράφει τη συνθήκη που δύο ομοειδή μεγέθη πρέπει να πληρούν, ώστε να ισχύουν γι' αυτά τόσο η "Πρόταση – κλειδί", όπως χαρακτηρίζουν οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη την Πρόταση 5.8, όσο και το σύνολο των Προτάσεων της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου, που αποτελούν συνέπειες αυτής.

Με τη συνθήκη που καταγράφεται στην Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, ο Εύδοξος επιλέγει τα μεγέθη τα οποία θα αφορά η Θεωρία του. Υπάρχουν βέβαια μεγέθη, τα οποία δεν επαληθεύουν τη συνθήκη και αυτομάτως δεν ικανοποιούν την Πρόταση 5.8 και τις συνέπειες αυτής, άρα αποκλείονται από τη Θεωρία Λόγων Μεγεθών. Παράδειγμα τέτοιου μεγέθους αποτελεί η κερατοειδής γωνία, η οποία σύμφωνα με τον Πρόκλο[13], είναι μικρότερη από κάθε άλλη ευθύγραμμη γωνία.

(13) Το σχόλιο προέρχεται από τις παραδόσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη του Νεγρεπόντη.

Ας μελετήσουμε αναλυτικά τις συνθήκες της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, αλλά και της άρνησης αυτής.

ΣΥΝΘΗΚΗ

Τα ομοειδή μεγέθη α, β ικανοποιούν την Πρόταση 5.8 και τις συνέπειες αυτής, όταν:

ΚΑΠΟΙΟ πολλαπλάσιο του β **ΞΕΠΕΡΝΑ** το α

Για τα μεγέθη που αποκλείονται, ισχύει προφανώς η άρνηση της συνθήκης, δηλαδή ισχύει:

ΑΡΝΗΣΗ ΣΥΝΘΗΚΗΣ

Τα ομοειδή μεγέθη α, β ΔΕΝ ικανοποιούν την Πρόταση 5.8 και τις συνέπειες αυτής, όταν:

ΚΑΘΕ πολλαπλάσιο του β **ΔΕΝ ΞΕΠΕΡΝΑ** το α

Η σύγχρονη μαθηματική διατύπωση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη είναι η ακόλουθη:

ΑΡΧΗ ΕΥΔΟΞΟΥ – ΑΡΧΙΜΗΔΗ (σύγχρονη μαθηματική διατύπωση)

Τα ομοειδή μεγέθη α, β ικανοποιούν την Πρόταση 5.8 και τις συνέπειες αυτής, όταν:

υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, $n \cdot \beta > \alpha$

Τι ισχύει όμως για τα μεγέθη που αποκλείονται από τη Θεωρία Λόγου Μεγεθών του Ευδόξου;

ΑΡΝΗΣΗ ΑΡΧΗΣ ΕΥΔΟΞΟΥ - ΑΡΧΙΜΗΔΗ (σύγχρονη μαθηματική διατύπωση)

Τα ομοειδή μεγέθη α, β ΔΕΝ ικανοποιούν την Πρόταση 5.8 και τις συνέπειες αυτής, όταν:

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ **ΙΣΧΥΕΙ** $n \cdot \beta \leq \alpha$

Η άρνηση περιέχει την έκφραση:

ΓΙΑ ΚΑΘΕ φυσικό αριθμό n, **ισχύει** $n \cdot \beta \leq \alpha$

Η παραπάνω έκφραση είναι ισοδύναμη με την έκφραση:

ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ φυσικούς αριθμούς, **ισχύει** $n \cdot \beta \leq \alpha$

ή ισοδύναμα

ΓΙΑ ΑΠΕΙΡΟΥΣ φυσικούς αριθμούς, **ισχύει** $n \cdot \beta \leq \alpha$

Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη μας απομακρύνει από την παραπάνω απειρία, καθώς σύμφωνα με αυτήν:

ΥΠΑΡΧΕΙ φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε, $n \cdot \beta > \alpha$

Με άλλα λόγια, για τα ομοειδή μεγέθη α, β, το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}: n\cdot\beta \leq \alpha\}$ ενδέχεται να είναι είτε πεπερασμένο, είτε άπειρο. Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αξιώνει ότι αυτό το σύνολο είναι πάντα πεπερασμένο, άρα η απειρία των φυσικών αριθμών που περιέχει η άρνηση της Αρχής, μετατρέπεται σε ύπαρξη ενός τουλάχιστον φυσικού αριθμού που περιέχει η Αρχή. Είναι φανερό ότι η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αποτελεί μία περίπτωση περάτωσης του απείρου, καθώς ένα εν δυνάμει άπειρο σύνολο μετατρέπεται σε πεπερασμένο. Κάτι δηλαδή που από τη φύση του είναι άπειρο, περατώνεται.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη διατυπώνουν τον ισχυρισμό ότι η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη είναι ισοδύναμη με τη σύγχρονη Πρόταση: *το σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.* Ας μελετήσουμε την απόδειξη της συγκεκριμένης Πρότασης.

Πρόταση

Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη είναι ισοδύναμη με το ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Έστω α, β δύο ομοειδή μεγέθη, για τα οποία ισχύει η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Τότε, **υπάρχει** $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $n\cdot\beta > \alpha$,

δηλαδή, **υπάρχει** $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\frac{n}{1} > \frac{\alpha}{\beta}$,

δηλαδή, **υπάρχει** $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{n}{1}$

Άρα, το σύνολο Α των λόγων $\{\frac{n}{1} : n\in\mathbb{N}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο στο σύνολο των λόγων, συνεπώς, το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

"$\Leftarrow$"

Αντιστρέφουμε τα βήματα. □

Στο σημείο αυτό έχει ενδιαφέρον να καταγράψουμε και μία διαφορετική οπτική σχετικά με το ρόλο της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών. Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αποτελεί μια τολμηρή συνθήκη που επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί η Αρχή του Ελαχίστου στη Θεωρία του Ευδόξου, κάτι που, όπως μελετήσαμε, συμβαίνει στην απόδειξη της Πρότασης 5.8,

τη βασικότερη και γονιμότερη Πρόταση του 5ου Βιβλίου των *Στοιχείων*. Με δεδομένο ότι η Αρχή του Ελαχίστου, λόγω της ισοδυναμίας της με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου, η περάτωση που εντοπίζεται στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών είναι αποτέλεσμα της κοινής λειτουργίας και του αριστουργηματικού συνδυασμού της Αρχή του Ελαχίστου και της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Σε κάθε περίπτωση, η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, ένα αίτημα τολμηρό και καθόλου τετριμμένο στο οποίο μάλιστα βασίζεται στο σύνολό της η Θεωρία Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου, είναι πράγματι μία περίπτωση εφαρμογής της λεγόμενης Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Στο γεγονός ότι, ως περάτωση του απείρου αποτελεί προσέγγιση της αντίφασης, αποδίδεται η εξαιρετικά μεγάλη αποδεικτική δύναμή της, αντίστοιχη με εκείνη της Αρχής του Ελαχίστου και της ισοδύναμής της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής στη Θεωρία Αριθμών και του 5ου Αιτήματος του Ευκλείδη στη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά και η παραδοξότητα ορισμένων προτάσεων – συνεπειών της.

Κλείνοντας την παρούσα ενότητα να αναφέρουμε ότι, ενώ η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αποτελεί, όπως είδαμε, αίτημα στη Θεωρία Λόγου Μεγεθών του Ευδόξου, στη σύγχρονη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών αποτελεί μία αποδείξιμη πρόταση, συνέπεια μάλιστα της ύπαρξης supremum. Και ενώ, όπως θα μελετήσουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, με βάση το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών αποδεικνύεται ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών συγκλίνει, στην Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη βασίζεται η απόδειξη της Πρότασης 10.1 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, σύμφωνα με την οποία, σε σύγχρονη διατύπωση, η φθίνουσα ακολυθία $\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο 0. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη διατυπώνουν την άποψη ότι:

> ο Εύδοξος θα μπορούσε ενδεχομένως να καταλήξει στην ιδιότητα supremum καθώς είχε γνώση των εξής δύο στοιχείων:
>
> 1. το συνεχές της ευθείας γραμμής, η οποία χωρίς αμφιβολία αποτελούσε μέρος της γεωμετρικής διαίσθησης των αρχαίων γεωμετρών, [...]
>
> 2. την έννοια του πραγματικού αριθμού ως την τομή Dedekind με τη μορφή βέβαια λόγου ευθυγράμμων τμημάτων ή ομοειδών μεγεθών.
>
> (Σελ. 18 – 19 του άρθρου)

4.4 Η Θεωρία Λόγων Μεγεθών και οι εφαρμογές της στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου

Στην ενότητα που ακολουθεί θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης, της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών, της σχέσης της με τους πραγματικούς αριθμούς, αλλά και των εφαρμογών αυτής, στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου συνολικά, με ενισχυμένο ενδιαφέρον στην Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.

4.4.1 Η Θεωρία Λόγων Μεγεθών στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης των ορισμών του λόγου, της ισότητας λόγων, καθώς και της ανισότητας λόγων μεγεθών.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, των Βανδουλάκη Ι., Καλλιγά Χ., Μαρκάκη Ν., Φερεντίνου Σ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 6ο, παράγραφος 6.2 με τίτλο *Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία,* ορίζεται ο λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, η ομοιότητα σχημάτων και η κλίμακα.

Διαβάζουμε:

- Το πηλίκο δύο αριθμών λέγεται και λόγος των αριθμών αυτών.
- Η ισότητα λόγων ονομάζεται αναλογία.
- Ο λόγος της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του ιδίου αντικειμένου, εφόσον οι αποστάσεις μετριούνται με την ίδια μονάδα, ονομάζεται κλίμακα.
- [...]
- Κάθε σχέση αναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$.

(Σελ. 91)

Η αίσθηση που έχουμε είναι ότι δημιουργείται σύγχυση στους μαθητές και στις μαθήτριες αναφορικά με τους λόγους αριθμών και τους λόγους μεγεθών, καθώς οι δύο έννοιες δεν διαχωρίζονται, δεν υπάρχουν ξεχωριστοί ορισμοί και δεν αναδεικνύονται οι βαθύτερες μεταξύ τους

συνδέσεις.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου, των Αργυράκη, Δ., Βουργάνα, Π., Μεντή, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργη, Μ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Β΄ – Κεφάλαιο 1 παράγραφος 1.2 με τίτλο *Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων*, διατυπώνεται ο ορισμός του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων.

Διαβάζουμε:

> Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ · ΑΒ. [...]
>
> Γενικά, ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.[...]
>
> Γενικά τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$. Η ισότητα $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ ονομάζεται αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ.
>
> (Σελ. 200 – 201)

Στη συνέχεια αναγνωρίζουμε κάποια από τα συμπεράσματα των Προτάσεων των Βιβλίων 5 και 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, χωρίς την αντίστοιχη απόδειξη, μιας και όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στο Γυμνάσιο τα Μαθηματικά διδάσκονται χωρίς τις απαραίτητες μαθηματικές αποδείξεις.

Διαβάζουμε:

> Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:
>
> Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.
>
> Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.
>
> Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.
>
> (Σελ. 201)

Στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Τεύχος Β΄) της Β΄Λυκείου, των

Αργυρόπουλου, Η., Βλάμου, Π., Κατσούλη, Γ., Μαρκάτη, Σ., Σιδέρη, Π. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 7ο, παράγραφος 7.3 με τίτλο *Γινόμενο ευθυγράμμου τμήματος με αριθμό – Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων,* ορίζεται σταδιακά για δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ:

- Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ = ν · ΑΒ, όπου ν φυσικός αριθμός.
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ = $\frac{1}{\nu}$ ΑΒ, όπου ν φυσικός αριθμός.
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ = $\frac{\mu}{\nu}$ ΑΒ, όπου μ, ν θετικοί ακέραιοι αριθμοί.
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ = 0 · ΑΒ.

Διαβάζουμε:

> Αποδεικνύεται ότι, για ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα θετικό άρρητο αριθμό ρ υπάρχει πάντοτε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, τέτοιο ώστε ΓΔ = ρ · ΑΒ. Η κατασκευή όμως, τέτοιων ευθυγράμμων τμημάτων με τον κανόνα και τον διαβήτη δεν είναι πάντοτε δυνατή. (Σελ. 9)

Στη συνέχεια ορίζεται ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων.

Διαβάζουμε:

> ορίζεται ως λόγος $\frac{\Gamma\Delta}{\text{ΑΒ}}$ των ευθυγράμμων τμημάτων ΓΔ και ΑΒ ο αριθμός q, για τον οποίο ισχύει ΓΔ = q · ΑΒ. (Σελ. 9)

Μάλιστα αναφέρεται ότι, αν τα ΑΒ και ΓΔ είναι σύμμετρα, τότε το q είναι ρητός, ενώ αν είναι ασύμμετρα, τότε το q είναι άρρητος, χωρίς πάλι να αποσαφηνίζονται οι δύο περιπτώσεις επαρκώς.

Στην επόμενη Παράγραφο 7.4 του ίδιου Κεφαλαίου, με τίτλο *Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Αναλογίες,* ορίζεται η ισότητα λόγων δύο ευθυγράμμων τμημάτων.

Διαβάζουμε:

> Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται ανάλογα προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ, δηλαδή όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ, ώστε να ισχύει α = λ· β και γ = λ· δ. (Σελ. 10)

Στο Ιστορικό Σημείωμα του Κεφαλαίου 7 παρουσιάζονται στοιχεία για την πρώτη Ελληνική θεωρία μέτρησης , αλλά και για τη γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου.

Για την πρώτη Ελληνική θεωρία μέτρησης διαβάζουμε:

> Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες είχαν βρει μια αποτελεσματική διαδικασία με την οποία μπορούσαν να βρουν το κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β αν υπάρχει. Πρόκειται για τη διαδικασία της ανθυφαίρεσης ή ανταναίρεσης (γνωστής σήμερα ως αλγόριθμος του Ευκλείδη), η οποία εκτίθεται στις δύο πρώτες προτάσεις του Βιβλίου VII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. (Σελ. 27)

Στη συνέχεια περιγράφεται η διαδικασία της ανθυφαίρεσης. Διαβάζουμε:

> Αν υποθέσουμε ότι Α > Β, τότε αφαιρούμε το Β από το Α όσες φορές γίνεται. Αν δεν περισσεύει υπόλοιπο, τότε το Β μετρά ακριβώς το Α και είναι το κοινό μέτρο. Ειδεμή έχουμε υπόλοιπο B_1, με $B > B_1$. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στα Β, B_1. Αν δεν προκύπτει υπόλοιπο, το B_1 είναι το κοινό μέτρο, ειδεμή έχουμε ένα νέο υπόλοιπο B_2. Αν η επανάληψη αυτής της διαδικασίας τερματιστεί σε κάποιο B_ν που μετρά ακριβώς το A_ν τότε το B_ν είναι το ζητούμενο κοινό μέτρο. Αν ο αλγόριθμος δεν τερματίζεται τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα. Πιθανότατα στο Θεαίτητο να ανήκει η ιδέα να εφαρμοστεί η ανθυφαίρεση ως κριτήριο ασυμμετρίας δύο τμημάτων. Το κριτήριο αυτό αποδεικνύεται στην Πρόταση 2 του Βιβλίου Χ των «Στοιχείων» (Σελ. 27 – 28)

Για τη γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου, παρουσιάζονται:

- Ο Ορισμός 4.4, η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, με βάση την οποία τα μεγέθη διακρίνονται σε *Αρχιμήδεια* (όσα ικανοποιούν την Αρχή) και *μη Αρχιμήδεια* (όσα δεν ικανοποιούν την Αρχή)
- Ο Ορισμός 5.5 με τη διαπίστωση ότι η σχέση της αναλογίας είναι σχέση ισοδυναμίας, με αποτέλεσμα τα ζεύγη των μεγεθών να διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Ο λόγος χαρακτηρίζεται "ως το κοινό χαρακτηριστικό που έχουν τα ζεύγη μεγεθών μιας κλάσης" (Σελ. 28)

Βέβαια, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα ιστορικά σημειώμα δεν αποτελούν διδακτέα ύλη, κατά συνέπεια τα παραπάνω στοιχεία δεν φτάνουν στους μαθητές και στις μαθήτριες.

Ο Νεγρεπόντης, στη διάλεξη που έδωσε στην Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης, παρατήρησε ότι ο ορισμός της αναλογίας μεγεθών που παρουσιάζεται στα σχολικά βιβλία είναι αντίστοιχος των

ορισμών που έχουν προταθεί και χρησιμοποιούνται σε διάφορα βιβλία της ξένης βιβλιογραφίας. Χαρακτηριστικά ανέφερε τα βιβλία των Birkhoff (1932), School Mathematics Study Group (SMSG) (1960–70) και Hartshorne (2000). Χαρακτήρισε τον σχολικό ορισμό ως "μη ικανοποιητικό και εντελώς ακατάλληλο", καθώς καλλιεργεί στους μαθητές και στις μαθήτριες την αίσθηση ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι γεωμετρικά αντικείμενα, ενώ ταυτόχρονα οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν γνωρίζουν, ούτε τον ορισμό της γεωμετρικής αναλογίας, ούτε τον ορισμό των πραγματικών αριθμών, συνεπώς δεν είναι σε θέση να καταλάβουν τη μεταξύ τους σχέση.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη υποστηρίζουν ότι ο Ορισμός 5.5 του 5ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είναι ο πλέον σημαντικός και θεμελιώδης για τα σχολικά μαθηματικά, καθώς αποτελεί τον συνδετικό κρίκο μεταξύ της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου και της Θεωρίας των πραγματικών αριθμών του Dedekind. Υιοθετώντας τη συγκεκριμένη οπτική, η διδασκαλία της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών κρίνεται απαραίτητη, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να οδηγηθούν σταδιακά, μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, σε βαθύτερη κατανόηση της έννοιας των πραγματικών αριθμών.

Θα ολοκληρώσουμε την παρούσα ενότητα με ένα σχόλιο σχετικά με την Πρόταση 6.2. Στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Τεύχος Β΄) της Β΄ Λυκείου, των Αργυρόπουλου, Η., Βλάμου, Π., Κατσούλη, Γ., Μαρκάτη, Σ., Σιδέρη, Π. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 7ο, Παράγραφος 7.7 με τίτλο *Θεώρημα του Θαλή,* αποδεικνύεται η Πρόταση 6.2, η οποία εσφαλμένα, όπως αναφέραμε, ονομάζεται Θεώρημα του Θαλή. Στην απόδειξη διακρίνονται δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι σύμμετρα, άρα υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ, και κ, λ φυσικοί αριθμοί ώστε ΑΒ = κμ και ΒΓ = λμ και η απόδειξη έχει κάποιο νόημα. Στην δεύτερη περίπτωση όμως, που τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι ασύμμετρα, δυστυχώς η απόδειξη δεν κρίνεται ικανοποιητική.

Διαβάζουμε:

> Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι ασύμμετρα, ο λόγος $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ είναι ασύμμετρος αριθμός. Αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η προηγούμενη αναλογία. (Σελ. 14 – 15)

Μάλιστα, στη συνέχεια τονίζεται ότι ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή, χωρίς όμως πάλι να αποδεικνύεται ο ισχυρισμός!

4.4.2 Η μέθοδος της εξάντλησης στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Τεύχος Β΄) της Β΄ Λυκείου, των Αργυρόπουλου, Η., Βλάμου, Π., Κατσούλη, Γ., Μαρκάτη, Σ., Σιδέρη, Π. και συγκεκριμένα στο Ιστορικό Σημείωμα του Κεφαλαίου 7, παρουσιάζονται ορισμένα στοιχεία για τη μέθοδο της εξάντλησης.

Διαβάζουμε:

> Η γενική θεωρία των αναλογιών αποτελεί τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης, η οποία εφαρμόστηκε από τους αρχαίους Έλληνες στη μέτρηση (μη στοιχειωδών) επιφανειών και όγκων. (Σελ. 28)

Στην συνέχεια αναφέρεται ότι βάση για τη μέθοδο της εξάντλησης αποτελεί η Πρόταση 10.1 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, σύμφωνα με την οποία "η διαφορά ανάμεσα σε μία μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε ένα όριο και στο όριο αυτό, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε με υποδιπλασιασμό της." (Σελ. 28). Επίσης παρουσιάζονται τρεις προτάσεις τις οποίες ο Εύδοξος απέδειξε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής (Τεύχος Β΄) της Γ΄ Λυκείου, των Ανδρεαδάκη, Σ., Κατσαργύρη, Β., Μέτη, Σ., Μπρουχούτα, Κ., Παπασταυρίδη, Σ., Πολύζου, Γ. και συγκεκριμένα στο Ιστορικό Σημείωμα του 3ου Κεφαλαίου (Σελ. 242 – 243), για το οποίο υπεύθυνος είναι ο Θωμαΐδης Ι., παρουσιάζεται η γεωμετρική απόδειξη του τετραγωνισμού της παραβολής του Αρχιμήδη, όπως την αναπτύξαμε στην ενότητα 4.2.6.1. Στην απόδειξη δεν χρησιμοποιούνται οι γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής, ενώ αναφέρεται ρητά ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε πεπερασμένο πλήθος όρων για να υπολογίσει το άπειρο άθροισμα της γεωμετρικής προόδου με τη μέθοδο της διπλής αντίφασης. Μία σύντομη παρατήρηση είναι ότι, τα στοιχεία που παρουσιάζονται στο Ιστορικό Σημείωμα του 3ου Κεφαλαίου προσεγγίζουν αρκετά εκείνα που παρουσιάζονται σε πανεπιστημιακά εγχειρίδια. Όπως όμως γνωρίζουμε, τα Ιστορικά σημειώματα δεν αποτελούν διδακτέα ύλη, κατά συνέπεια οι παραπάνω πληροφορίες δεν φτάνουν, ενδεχομένως, στους μαθητές και στις μαθήτριες. Θεωρούμε ότι η μέθοδος της εξάντλησης αποτελεί άλλο ένα αναπόσπαστο κομμάτι της πολιτισμικής μας κληρονομιάς, με το οποίο οι μαθητές και οι μαθήτριες θα έπρεπε να έρχονται σε επαφή.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα παρουσιάζεται αναλυτικά στην παράγραφο 3.4 του σχολικού

βιβλίου των Μαθηματικών Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής (Τεύχος Β΄) της Γ΄ Λυκείου, με τίτλο *Ορισμένο Ολοκλήρωμα*. Συγκεκριμένα, υπολογίζεται το εμβαδόν Ε του χωρίου που σχηματίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, με τους άξονες και την κατακόρυφη ευθεία $x = 1$, με τη χρήση της δεύτερης απόδειξης που παραθέσαμε στην ενότητα 4.2.6.1. Η μόνη διαφορά των δύο αποδείξεων σχετίζεται με τον υπολογισμό των άπειρων αθροισμάτων μεταξύ των οποίων βρίσκεται το ζητούμενο εμβαδόν, που με τη χρήση σύγχρονων εργαλείων, όπως των τύπων υπολογισμού απείρων αθροισμάτων και της έννοιας του ορίου, είναι μάλλον τετριμμένος.

Συγκεκριμένα:

- για το άθροισμα (β_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω από την παραβολή, ισχύει

$$\beta_\nu = \frac{1}{\nu}\cdot 0^2 + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^3 [1^2 + 2^2 + \ldots + (\nu-1)^2] =$$

$$\frac{1}{\nu^3}\ \frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6} =$$

$$\frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}$$

- για το άθροισμα (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω από την παραβολή, ισχύει

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^3 [1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2] =$$

$$\frac{1}{\nu^3}\ \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} =$$

$$\frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}$$

Επειδή $\beta_\nu \le E \le \alpha_\nu$ και $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\beta_\nu = \frac{1}{3}$, προκύπτει ότι $E = \frac{1}{3}$

Σε υποσημείωση της παραγράφου 3.4 αναφέρεται ότι τα αθροίσματα που χρησιμοποιούνται

για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος καλούνται αθροίσματα Riemann.

Με δεδομένο ότι τα ιστορικά σημειώματα δεν αποτελούν διδακτέα ύλη, είναι πολύ συχνό το φαινόμενο οι πληροφορίες που αυτά περιέχουν να μη φτάνουν στους μαθητές και στις μαθήτριες, γεγονός που κατά την άποψή μας είναι τεράστιο σφάλμα. Θεωρούμε ότι θα πρέπει τα σχολικά βιβλία να αναδεικνύουν ονόματα σημαντικών αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, όπως ο Εύδοξος και ο Αρχιμήδης, καθώς και εξαιρετικές εργασίες αυτών, όπως η κομψή, σύμφωνα με τον Hardy, Θεωρία Λόγων Μεγεθών και η μέθοδος της εξάντλησης. Στην επόμενη παράγραφο θα αναπτύξουμε περαιτέρω το συγκεκριμένο ζήτημα.

4.4.3 Η τριγωνομετρία στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου - Λυκείου

4.4.3.1 Τα Θεωρήματα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη και των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, των Βλάμου, Π., Δρούτσα, Π., Πρέσβη, Γ., Ρεκούμη, Κ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Β΄ – Κεφάλαιο 2 στις παραγράφους 2.1 με τίτλο *Εφαπτομένη οξείας γωνίας* και 2.2 με τίτλο *Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας*, αναφέρεται ότι οι έννοιες του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας προέκυψαν από τις παρατηρήσεις των Αστρονόμων της Αρχαιότητας και διατυπώνονται οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οξείας γωνίας.

Διαβάζουμε:

> Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται εφαπτομένη της γωνίας ω. (Σελ.137)

Δηλαδή ορίζεται: $\text{εφω} = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$

> Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας ω. (Σελ. 142)

Δηλαδή ορίζεται: $\text{ημω} = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$

> Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε

σταθερός και λέγεται συνημίτονο της γωνίας ω. (Σελ. 143)

Δηλαδή ορίζεται: $\text{συνω} = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου, των Αργυράκη, Δ., Βουργάνα, Π., Μεντή, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργη, Μ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Β΄ – Κεφάλαιο 2 παράγραφος 2.1 με τίτλο *Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με* $0^o \le \omega \le 180^o$, διατυπώνονται οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, με $0^o \le \omega \le 180^o$.

Διαβάζουμε:

> Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. (Σελ. 232)
>
> [...]
>
> Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.
>
> Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y), διαφορετικό από το O, τότε για την απόσταση ρ = OM ισχύει
>
> $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
>
> Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:
>
> $$\text{ημω} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{\rho}$$
>
> $$\text{συνω} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{\rho}$$
>
> $$\text{εφω} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$$ (Σελ. 233)

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες $\text{ημ}^2\omega+\text{συν}^2\omega = 1$ και $\text{εφω} = \dfrac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$, καθώς και οι Νόμοι των ημιτόνων και συνημιτόνων.

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου, των Ανδρεαδάκη, Σ., Κατσαργύρη, Β.,

Παπασταυρίδη, Σ., Πολύζου, Γ., Σβέρκου, Α. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 3, παράγραφος 3.1 με τίτλο *Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας*, γίνεται επανάληψη των ορισμών των τριγωνομετρικών γωνιών οξείας γωνίας και γωνίας ω, με $0^o \leq \omega \leq 360^o$ και επέκταση αυτών, ώστε να ισχύουν για γωνίες που, είτε είναι μεγαλύτερες των 360°, είτε είναι αρνητικές.

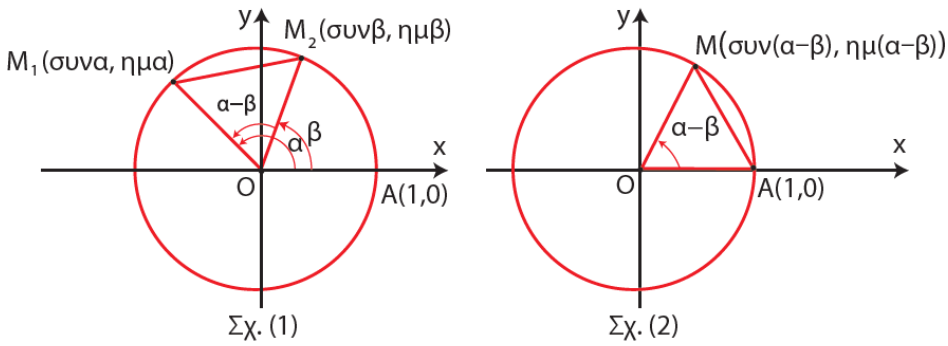
Διαβάζουμε:

> Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 360°, καθώς και των αρνητικών γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από 0° μέχρι 360°. (Σελ. 52)

Στις παραγράφους 3.6 και 3.7 παρουσιάζονται και αποδεικνύονται τύποι για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς γωνιών και τύποι για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της διπλάσιας γωνίας αντίστοιχα.

Διαβάζουμε:

> Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες α, β που οι τελικές τους πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M_1, M_2 αντιστοίχως.
>
> Έστω επιπλέον και η γωνία α – β, που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ.



> Όπως είναι γνωστό, τα σημεία M_1, M_2, Α και Μ έχουν συντεταγμένες:

το M_1: τετμημένη	συνα	και τεταγμένη	ημα
το M_2: τετμημένη	συνβ	και τεταγμένη	ημβ
το Α: τετμημένη	1	και τεταγμένη	0
το Μ: τετμημένη	συν(α – β)	και τεταγμένη	ημ(α – β)

> Επειδή οι γωνίες M_2OM_1 = AOM = α – β, θα είναι και (M_2M_1) = (AM). Άρα:

$(M_2M_1)^2 = (AM)^2$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μας τύπο:

$(P_1P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

που δίνει την απόσταση δύο σημείων $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ έχουμε:

$(M_2M_1)^2 = (\text{συνα} - \text{συνβ})^2 + (\text{ημα} - \text{ημβ})^2$

$= \text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta - 2\text{συνασυνβ} + \text{ημ}^2\alpha + \text{ημ}^2\beta - 2\text{ημαημβ}$

$= 2 - 2(\text{συνασυνβ} + \text{ημαημβ})$ και

$(AM)^2 = [\text{συν}(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\text{ημ}(\alpha - \beta) - 0]^2$

$= \text{συν}^2(\alpha - \beta) + 1 - 2\text{συν}(\alpha - \beta) + \text{ημ}^2(\alpha - \beta)$

$= 2 - 2\text{συν}(\alpha - \beta)$

Έτσι η σχέση $(M_2M_1)^2 = (AM)^2$ γράφεται

$2 - 2(\text{συνασυνβ} + \text{ημαημβ}) = 2 - 2\text{συν}(\alpha - \beta)$ ή

$\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συνασυνβ} + \text{ημαημβ}$ (Σελ. 89 – 90)

Οι αποδείξεις των τριγωνομετρικών τύπων που ακολουθούν προκύπτουν εύκολα από τον βασικό τύπο $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συνασυνβ} + \text{ημαημβ}$ (1)

Συγκεκριμένα:

- Η απόδειξη του τύπου $\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συνασυνβ} - \text{ημαημβ}$ (2) προκύπτει από τη σχέση $\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συν}[\alpha + (-\beta)]$ και τον τύπο (1)
- Η απόδειξη του τύπου $\text{ημ}(\alpha + \beta) = \text{ημασυνβ} + \text{συναημβ}$ (3) προκύπτει από τη σχέση

  $\text{ημ}(\alpha + \beta) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)$ και τον τύπο (1)
- Η απόδειξη του τύπου $\text{ημ}(\alpha - \beta) = \text{ημασυνβ} - \text{συναημβ}$ (4) προκύπτει από τη σχέση $\text{ημ}(\alpha - \beta) = \text{ημ}[\alpha + (-\beta)]$ και τον τύπο (3)
- Η απόδειξη του τύπου $\text{ημ}2\alpha = 2\text{ημασυνα}$ (5) προκύπτει από την εφαρμογή του τύπου (3) για $\alpha = \beta$.
- Η απόδειξη του τύπου $\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha$ (6) προκύπτει από την εφαρμογή του τύπου (2) για $\alpha = \beta$.

Στο σημείο αυτό να καταγράψουμε ένα σύντομο σχόλιο. Σύμφωνα με τις Οδηγίες για τη

διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕΛ, κατά τα τελευταία σχολικά έτη, οι παράγραφοι 3.6 και 3.7, στις οποίες παρουσιάζονται και αποδεικνύονται οι τύποι υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς γωνιών και οι τύποι υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών της διπλάσιας γωνίας, διδάσκονται χωρίς αποδείξεις. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται απλά να αποστηθίσουν όλους τους τριγωνομετρικούς τύπους, χωρίς να γνωρίζουν τη μαθηματική απόδειξη από την οποία προκύπτουν, τη λογική σκέψη που υπάρχει στη βάση τους. Το γεγονός αυτό καθιστά εντελώς ανήμπορους και εξαρτώμενους απόλυτα από τη μνήμη τους ακόμη και τους συνεπείς μαθητές και μαθήτριες, στην περίπτωση που με την πάροδο ικανού χρονικού διαστήματος, δεν είναι σε θέση να ανακαλέσουν σωστά κάποιον συγκεκριμένο τριγωνομετρικό τύπο.

Μία εναλλακτική πρόταση σχετικά με τη διδασκαλία των προαναφερθέντων τριγωνομετρικών τύπων παρουσιάστηκε στις ενότητες 4.2.6.2 και 4.2.6.3. Η τριγωνομετρία θα μπορούσε δηλαδή να εισαχθεί ως ένα κεφάλαιο της επίπεδης γεωμετρίας με λόγους μεγεθών και να συνδεθεί με τις αναλογίες των μεγεθών και την ομοιότητα. Το Θεώρημα της Σπασμένης χορδής του Αρχιμήδη και το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου, είναι δύο ιδιαίτερα θεωρήματα, δύο σημαντικών αρχαίων Ελλήνων μελετητών, τα οποία θα μπορούσαν να αποτελέσουν τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στην επίπεδη γεωμετρία και στην τριγωνομετρία, εξασφαλίζοντας το ομαλό πέρασμα από τον ένα κλάδο στον άλλον.

Στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου, το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου αποτελεί άσκηση, ενώ το Θεώρημα της Σπασμένης χορδής του Αρχιμήδη δεν αναφέρεται πουθενά, από όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε. Οι πληροφορίες που φτάνουν στους μαθητές και στις μαθήτριες συνολικά για τους δύο αυτούς σημαντικούς αρχαίους Έλληνες μελετητές είναι οι ακόλουθες:

Αρχιμήδης

Το όνομα του Αρχιμήδη αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, των Βλάμου, Π., Δρούτσα, Π., Πρέσβη, Γ., Ρεκούμη, Κ. και συγκεκριμένα στο Ιστορικό Σημείωμα του 3ου Κεφαλαίου, του Β΄ Μέρους, όπου παρουσιάζεται η προσπάθεια του να προσεγγίσει τον αριθμό π. (Σελ. 189). Στη συνέχεια του βιβλίου, στο Κεφάλαιο 4 του Μέρους Β΄ και συγκεκριμένα στην παράγραφο 4.6 με τίτλο *Η σφαίρα και τα στοιχεία της*, παρουσιάζονται ορισμένα από τα αποτελέσματα των εργασιών του Αρχιμήδη σχετικά με τη σφαίρα.

Στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Τεύχος Β΄) της Β΄ Λυκείου, των

Αργυρόπουλου, Η., Βλάμου, Π., Κατσούλη, Γ., Μαρκάτη, Σ., Σιδέρη, Π., το όνομα του Αρχιμήδη συνδέεται:

- με τη μέθοδο της εξάντλησης (Σελ. 28)
- με τη μέτρηση του κύκλου και την κατασκευή ενός κανονικού πολυγώνου (Σελ. 89 & 93)
- με την προσέγγιση του π (Σελ. 100)
- με την απόδειξη της πρότασης: το εμβαδόν κύκλου είναι ισοδύναμο με το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, η μία κάθετος του οποίου είναι η ακτίνα της περιφέρειας και η άλλη το μήκος της περιφέρειας (Σελ. 112)
- με τα Αρχιμήδεια στερεά (Σελ. 181)

Τέλος, όπως έχουμε αναφέρει, στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής (Τεύχος Β΄) της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Ιστορικό Σημείωμα του 3ου Κεφαλαίου παρουσιάζεται η γεωμετρική απόδειξη του τετραγωνισμού της παραβολής του Αρχιμήδη.

Άρα, το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη δεν παρουσιάζεται σε κάποιο από τα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου ή του Λυκείου και το βέβαιο είναι ότι η διδασκαλία της τριγωνομετρίας δεν συνδέεται με αυτό.

Ο μαθηματικός Mark Cowart στην ιστοσελίδα του αναφέρει μία σειρά από οφέλη που προκύπτουν από την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής.

Διαβάζουμε:

- allows students to use congruent triangle proofs they have practiced/mastered to prove a higher theory
- students develop concepts of congruent chords, inscribed angles, and congruent arcs
- allows for use of the GSP software to demonstrate and explore the theorem
- provides opportunity to develop the history of mathematics and Archimedes' contributions

Κλαύδιος Πτολεμαίος

Το όνομα του Κλαύδιου Πτολεμαίου αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, των Βλάμου, Π., Δρούτσα, Π., Πρέσβη, Γ., Ρεκούμη, Κ. και συγκεκριμένα στην Εισαγωγή του 2ου Κεφαλαίου του Β΄ Μέρους (Σελ. 135). Τονίζεται ότι, μεταξύ άλλων, ο Πτολεμαίος ασχολήθηκε με την Αστρονομία και ανακάλυψε σχέσεις που συνδέουν τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου, όπως επίσης ότι χρησιμοποίησε τριγωνομετρικούς πίνακες στο έργο του με τίτλο "Γεωγραφία". Στη συνέχεια, στο Ιστορικό Σημείωμα του Κεφαλαίου 3, παρουσιάζεται η προσπάθεια του να προσεγγίσει τον αριθμό π. (Σελ. 189)

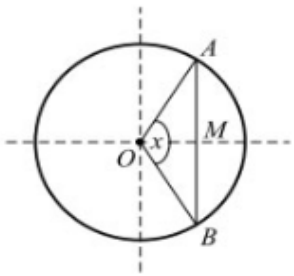
Μία δεύτερη αναφορά στο όνομα του Κλαύδιου Πτολεμαίου γίνεται στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Τεύχος Β΄) της Β΄ Λυκείου, των Αργυρόπουλου, Η., Βλάμου, Π., Κατσούλη, Γ., Μαρκάτη, Σ., Σιδέρη, Π. και συγκεκριμένα στις Γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου 8 (Ομοιότητα), στην 6η Γενική Άσκηση, όπου παρουσιάζεται το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων, χωρίς να συνοδεύεται από κάποιο άλλο σχόλιο.

Τέλος, το όνομα του Κλαύδιου Πτολεμαίου αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής (Τεύχος Β΄) της Γ΄ Λυκείου, των Ανδρεαδάκη, Σ., Κατσαργύρη, Β., Μέτη, Σ., Μπρουχούτα, Κ., Παπασταυρίδη, Σ., Πολύζου, Γ., και συγκεκριμένα στο Ιστορικό Σημείωμα του 1ου Κεφαλαίου, για το οποίο υπεύθυνος είναι ο Θωμαΐδης Ι., όπου παρουσιάζεται η ιδέα που είχαν οι Αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες για την έννοια της συνάρτησης. Τη συγκεκριμένη αναφορά θα μελετήσουμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα, καθώς συνδέεται με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

4.4.3.2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής (Τεύχος Β΄) της Γ΄ Λυκείου, των Ανδρεαδάκη, Σ., Κατσαργύρη, Β., Μέτη, Σ., Μπρουχούτα, Κ., Παπασταυρίδη, Σ., Πολύζου, Γ., και συγκεκριμένα στο Ιστορικό Σημείωμα του 1ου Κεφαλαίου, για το οποίο υπεύθυνος είναι ο Θωμαΐδης Ι., παρουσιάζεται η θεώρηση που είχαν οι Αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες για την έννοια της συνάρτησης με παράδειγμα τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Διαβάζουμε:



> Η έννοια της συνάρτησης, ως έκφρασης μιας εξάρτησης ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες ποσότητες εμφανίζεται μ΄ έναν υπονοούμενο τρόπο ήδη από την αρχαιότητα. Ένα

χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι πίνακες χορδών της "Αλμαγέστης", του Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου της αλεξανδρινής περιόδου Κλαύδιου Πτολεμαίου.

Στη μια στήλη των πινάκων υπάρχουν τα μήκη των τόξων ενός κύκλου και στην άλλη τα μήκη των αντίστοιχων χορδών. Χρησιμοποιώντας την έννοια του ημιτόνου στον μοναδιαίο κύκλο μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά τη "συνάρτηση" των πινάκων του Πτολεμαίου ως εξής:

χορδή τόξου (x) = ΑΒ = 2ΑΜ = $2\eta\mu\frac{x}{2}$ (Σελ. 86)

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της *Β΄ Λυκείου*, των Ανδρεαδάκη, Σ., Κατσαργύρη, Β., Παπασταυρίδη, Σ., Πολύζου, Γ., Σβέρκου, Α. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 3, παράγραφος 3.4 με τίτλο *Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις*, ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών.

Διαβάζουμε:

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε γωνία ω υπάρχει μία μόνο τιμή του ημω, με $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε γωνία ω αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της.

Πολλές εφαρμογές όμως των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν περιέχουν γωνίες, αλλά πραγματικούς αριθμούς, όπως, π.χ. ο τύπος της αρμονικής ταλάντωσης $f(t)=\alpha \cdot \eta\mu\omega t$, στον οποίο τα α και ω είναι σταθερές και t είναι ένας πραγματικός αριθμός που παριστάνει το χρόνο.

Για το λόγο αυτό ορίζουμε στη συνέχεια τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

Συγκεκριμένα:

- Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο ημ(x rad) λέγεται συνάρτηση ημίτονο και συμβολίζεται με ημ. Ορίζουμε δηλαδή ότι ημx = ημ(x rad) [...]

- Ομοίως ορίζουμε και τη συνάρτηση συνημίτονο που συμβολίζεται με συν. Ορίζουμε δηλαδή ότι συνx = συν (x rad) (Σελ. 74 – 75)

Στο ίδιο πνεύμα είναι και οι ορισμοί της συνάρτησης της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης.

Μελετώντας τον παραπάνω ορισμό εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει ένα κάπως "θολό" σημείο σε σχέση με τη φύση των μεταβλητών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Είναι γωνίες ή πραγματικοί αριθμοί και πώς άραγε πραγματοποιείται ομαλά η μετάβαση από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών σε τριγωνομετρικούς αριθμούς πραγματικών αριθμών; Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, φωτίζουν το συγκεκριμένο θέμα ξεκινώντας από τους Όρους 1.8 έως 1.12 του 1ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη οι οποίοι αναφέρονται σε γωνίες. Τους συγκεκριμένους ορισμούς έχουμε παρουσιάσει στο Κεφάλαιο 3, συνεπώς τους θεωρούμε γνωστούς.

Η γωνία ορίζεται ως η κλίση δύο τεμνόμενων ημιευθειών. Ο ορισμός αυτός καθιστά τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών, όπως αυτοί παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου και Λυκείου, απόλυτα κατανοητούς. Όταν όμως μεταβούμε στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οι μεταβλητές ενώ είναι πραγματικοί αριθμοί, γίνονται αντιληπτές και ως γωνίες. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη τονίζουν ότι θα πρέπει οι μαθητές και οι μαθήτριες να κατανοήσουν "τον τρόπο με τον οποίο μια γωνία είναι ή σχετίζεται ή μπορεί να θεωρηθεί πραγματικός αριθμός" (Σελ. 15, εισήγησης) και προτείνουν τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό της γωνίας:

Εναλλακτικός Ορισμός Γωνίας

Αν φέρουμε κύκλο Κ με κέντρο το σημείο τομής Ο των δύο ημιευθειών (πλευρών μιας γωνίας), καθορίζεται ένα κυκλικό τόξο τ(Κ). Έστω Τ(Κ) το κυκλικό τόξο του ίδιου κύκλου Κ που αντιστοιχεί στην ορθή γωνία. Ορίζουμε την γωνία θ των ημιευθειών να είναι ο λόγος $\frac{\tau(K)}{T(K)}$ (Σελ. 15, εισήγησης)

Με βάση τον εναλλακτικό ορισμό των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, η γωνία μπορεί να θεωρηθεί ως η κλάση ισοδυναμίας λόγων κυκλικών τόξων, σύμφωνα με την Πρόταση:

Πρόταση

Αν Λ είναι ένα άλλος κύκλος με κέντρο Ο, τότε $\frac{\tau(K)}{T(K)} = \frac{\tau(\Lambda)}{T(\Lambda)}$

(Σελ. 15, εισήγησης)

Στην απόδειξη της πρότασης χρησιμοποιούνται μέθοδοι του 12ου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Και συνεχίζουν:

> Ο ορισμός της συνάρτησης ημιτόνου για μια γωνία οξεία θ, με τον συνήθη τρόπο είναι στην ουσία ένας ορισμός μιας συνάρτησης από λόγους μεγεθών (κυκλικών τόξων) σε λόγους μεγεθών (ευθυγράμμων τμημάτων).
>
> Στην πραγματικότητα η τιμή της συνάρτησης ημιτόνου είναι μια κλάση ισοδυναμίας λόγων ευθυγράμμων τμημάτων [...]
>
> Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
>
> (Σελ. 16, εισήγησης)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε την αποδεικτική δύναμη του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, σε σχέση τόσο με τους πραγματικούς αριθμούς, όσο και με τα βασικά θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης που διδάσκονται οι μαθητές και οι μαθήτριες της Γ΄ Λυκείου, ενώ στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε την προέλευση της δύναμης αυτής. Θα εστιάσουμε ιδιαίτερα σε Προτάσεις – συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας, οι οποίες αντίκεινται στην διαίσθηση και μοιάζουν παράδοξες, όπως η ύπαρξη άρρητων και υπερβατικών αριθμών. Τέλος, θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης των πραγματικών αριθμών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου, καθώς και τον τρόπο παρουσίασης των βασικών Θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών / Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ΄ Λυκείου.

5.1 Το Αξίωμα της Πληρότητας στους πραγματικούς αριθμούς

Η ύπαρξη άρρητων αριθμών ήταν γνωστή στους μαθηματικούς από την αρχαιότητα, καθώς, όπως έχουμε αναφέρει, η διάλυση της σχολής των Πυθαγορείων αποδίδεται στην ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Η αναγκαιότητα ύπαρξης ενός αυστηρού ορισμού του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, προέκυψε από την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού από τους Newton και Leibniz (17ος –18ος αιώνας) και υλοποιήθηκε τελικά από τους Dedekind και Cantor στο τέλος του 19ου αιώνα (Νεγρεπόντης – Γιωτόπουλος – Γιαννακούλιας, Α.Λ Ι, Σελ. 24). Ο ρόλος του Αξιώματος της Πληρότητας στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών χαρακτηρίζεται "κεντρικός", κάτι που θα επιβεβαιώσουμε στη συνέχεια.

Σύμφωνα με τον Weiss (Weiss, 2015), το σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται "αρκετά περίπλοκα". Το πρώτο βήμα αφορά στην επιλογή της θεμελιώδους, μη οριζόμενης έννοιας. Ανάλογα με την επιλογή, προκύπτουν οι ακόλουθες δύο διαδρομές:

1η διαδρομή: $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$

Θεωρούμε ως θεμελιώδη και μη οριζόμενη έννοια εκείνη των πραγματικών αριθμών. Με δεδομένους τους πραγματικούς, ορίζουμε στη συνέχεια τους ρητούς και τους άρρητους, τους ακέραιους και τέλος τους φυσικούς αριθμούς.

Αν κάποιος επιλέξει αυτή τη διαδρομή, θα πρέπει να είναι εξαιρετικά προσεκτικός στην επιλογή του συνόλου των Αξιωμάτων, ώστε από αυτά και μόνο, να προκύπτουν όλα τα Θεωρήματα της αριθμητικής και της Μαθηματικής Ανάλυσης. Θα πρέπει δηλαδή να λειτουργήσει κατ' αναλογία με τον Ευκλείδη, ο οποίος με επιλογή πέντε μόνο αξιωμάτων, απέδειξε αυστηρά το σύνολο των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

2η διαδρομή: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Θεωρούμε ως θεμελιώδη και μη οριζόμενη έννοια εκείνη των φυσικών αριθμών. Με δεδομένους τους φυσικούς αριθμούς, ορίζουμε τους ακέραιους, τους ρητούς και τους άρρητους και τέλος τους πραγματικούς αριθμούς.

Αν κάποιος επιλέξει αυτή τη διαδρομή, θα πρέπει να είναι εξαιρετικά προσεκτικός κατά την επέκταση των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς.

Θα μελετήσουμε τις δύο διαδρομές κάπως συνοπτικά, έχοντας πάντα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θέση και το ρόλο του Αξιώματος της Πληρότητας.

5.1.1 Από τους πραγματικούς στους φυσικούς αριθμούς

Έστω ότι θεωρούμε ως θεμελιώδη και μη οριζόμενη έννοια εκείνη του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιάζεται με τις πράξεις της πρόσθεσης (+) και του πολλαπλασιασμού (·), καθώς και με μία σχέση διάταξης (<). Τα Αξιώματα για την πλήρη αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, χωρίζονται σε τρεις ομάδες:

Αξιώματα Σώματος Περιγράφουν όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$

Αξιώματα Διάταξης Περιγράφουν όλες τις ιδιότητες διάταξης του $\mathbb{R}$

Αξίωμα της Πληρότητας

Αναλυτικά:

Αξιώματα Σώματος

Π1: Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με 0, ώστε

$\alpha + 0 = \alpha$, για κάθε πραγματικό αριθμό α (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου της πρόσθεσης)

Π2: Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με $-\alpha$, ώστε $\alpha + (-\alpha) = 0$ (ύπαρξη αντίθετου στοιχείου)

Π3: Ισχύει $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης)

Π4: Ισχύει $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (μεταθετικότητα της πρόσθεσης)

Π5: Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με 1, ώστε $1 \neq 0$ και $\alpha \cdot 1 = \alpha$, για κάθε πραγματικό αριθμό α

(ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου του πολλαπλασιασμού)

Π6: Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με α^{-1}, ώστε $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ (ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου)

Π7: Ισχύει $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού)

Π8: Ισχύει $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού)

Π9: Ισχύει $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (επιμεριστική ιδιότητα)

Να θυμίσουμε ότι:

Ορισμός

Σώμα καλείται ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις $(+, \cdot)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες Π1– Π9.

Αξιώματα Διάταξης

Π10: Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$

Π11: Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$\alpha = \beta$ $\alpha < \beta$ $\alpha > \beta$

Π12: Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$

Π13: Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

Να θυμίσουμε ότι:

Ορισμός

Ολικά διατεταγμένο σώμα καλείται ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις $(+, \cdot)$ και μία σχέση διάταξης $(<)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες Π1 – Π13.

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ικανοποιεί τις ιδιότητες Π1 έως και

Π13, δηλαδή αποτελεί ένα ολικά διατεταγμένο σώμα.

Πριν μελετήσουμε προσεκτικά το Αξίωμα της Πληρότητας, στο οποίο οφείλεται, όπως θα αποδειχθεί, η διαφοροποίηση του συνόλου των πραγματικών από το σύνολο των ρητών αριθμών, θα παραθέσουμε ορισμένους βασικούς ορισμούς και απαραίτητες προτάσεις.

Ορισμός

- Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι το Α είναι άνω φραγμένο, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε $x \leqslant \alpha$, για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός α ονομάζεται άνω φράγμα του Α.
- Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι το Α είναι κάτω φραγμένο, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός β ώστε $x \geq \beta$, για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός β ονομάζεται κάτω φράγμα του Α.
- Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι το Α είναι φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Σύμφωνα με τους ορισμούς, τα διαστήματα (α, +∞), [α, +∞) είναι κάτω φραγμένα, τα διαστήματα (–∞, β), (–∞, β] είναι άνω φραγμένα, ενώ τα διαστήματα [α, β], (α, β], [α, β), (α, β) είναι φραγμένα.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, αν Α είναι ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι ένα άνω φράγμα του, τότε κάθε $\alpha' \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $\alpha' > \alpha$ είναι επίσης άνω φράγμα του Α. Αντίστοιχα, αν $\beta \in \mathbb{R}$ είναι ένα κάτω φράγμα του Α, τότε κάθε $\beta' \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $\beta' < \beta$ είναι επίσης κάτω φράγμα του Α. Συνεπώς, αν το Α έχει, έστω ένα, άνω ή κάτω φράγμα, τότε έχει άπειρα άνω, αντίστοιχα, κάτω φράγματα. Όμως, τα πλέον σημαντικά φράγματα, εάν υπάρχουν, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum και το μέγιστο κάτω φράγμα ή infimum.

Ορισμός

Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και $\alpha \in \mathbb{R}$. Το α ονομάζεται ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum του Α και συμβολίζεται *supA*, αν ισχύουν:

- α είναι άνω φράγμα του Α
- αν β είναι ένα άνω φράγμα του Α, τότε $\alpha \leqslant \beta$

Ορισμός

Έστω Α μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και $\alpha \in \mathbb{R}$. Το α ονομάζεται μέγιστο κάτω

φράγμα ή infimum του Α και συμβολίζεται *infA*, αν ισχύουν:

- α είναι κάτω φράγμα του Α
- αν β είναι ένα κάτω φράγμα του Α, τότε $\beta \leqslant \alpha$

Είναι προφανές ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών δεν έχουν supremum.

Η επόμενη Πρόταση εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του supremum, εάν βέβαια αυτό υπάρχει. Αντίστοιχη Πρόταση εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του infimum και πάλι με την προϋπόθεση της ύπαρξης.

Πρόταση

Αν το σύνολο Α έχει supremum, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι το supremum του συνόλου Α δεν είναι μοναδικό και έστω α, β, με $\alpha \neq \beta$, δύο ελάχιστα άνω φράγματα του Α. Επειδή το β είναι άνω φράγμα του Α και α το ελάχιστο άνω φράγμα του Α προκύπτει ότι $\alpha \leqslant \beta$. Αντίστοιχα, επειδή το α είναι άνω φράγμα του Α και β το ελάχιστο άνω φράγμα του Α, προκύπτει ότι $\beta \leqslant \alpha$. Συνεπώς τελικά $\alpha = \beta$. □

Το supremum ενός συνόλου Α μπορεί, είτε να ανήκει, είτε να μην ανήκει στο σύνολο Α. Έτσι, αν Α = [0, 1], τότε supA = 1 και προφανώς ισχύει $1 \in A$. Αν όμως Α = (0, 1), τότε το supremum του Α, με την προϋπόθεση ότι αυτό υπάρχει, δεν ανήκει στο Α.

Ας περάσουμε στο εξαιρετικά σημαντικό Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, το αξίωμα που διαφοροποιεί το σύνολο των πραγματικών από το σύνολο των ρητών αριθμών.

Αξίωμα της Πληρότητας

Π14: Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum.

Το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών είναι γνωστό και ως Αξίωμα της συνέχειας, ή Ιδιότητα του Supremum. Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια, "η ιδιότητα αυτή έχει απόλυτα κεντρική θέση στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού και γενικότερα της Μαθηματικής Ανάλυσης. Ο θεμελιώδης χαρακτήρας της είναι τέτοιος ώστε κάθε σημαντικό θεώρημα που θα αποδείξουμε στον Απειροστικό Λογισμό βασίζεται κατά τρόπο ουσιαστικό στην ιδιότητα της πληρότητας", (Α.Λ Ι, Σελ. 24) ισχυρισμός που θα επιβεβαιωθεί

στη συνέχεια.

Το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών (ιδιότητα supremum) είναι ισοδύναμο με την ακόλουθη συμμετρική ιδιότητα infimum.

Πρόταση

Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα, δηλαδή αν A ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε το A έχει infimum.

Απόδειξη

Έστω A ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Επειδή $A \neq \varnothing$ είναι $-A \neq \varnothing$.

Αν φ είναι ένα κάτω φράγμα του A, τότε προφανώς, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\varphi \leq x$.

Θεωρούμε το σύνολο $-A=\{x$, ώστε $-x \in A\}$. Τότε, για κάθε $x \in -A$, είναι $-x \in A$, συνεπώς $\varphi \leq -x$ ή ισοδύναμα $-\varphi \geq x$. Άρα, το $-A$ είναι άνω φραγμένο σύνολο.

Σύμφωνα με το Αξίωμα της Πληρότητας υπάρχει το supremum του $-A$, έστω s. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $-s = \inf A$.

Πράγματι, αφού $s = \sup(-A)$, για κάθε $x \in A$ είναι $-x \in -A$, άρα $-x \leq s$, δηλαδή $-s \leq x$. Συνεπώς, το $-s$ είναι κάτω φράγμα του A. Θα αποδείξουμε ότι το $-s$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

Ας υποθέσουμε ότι το $-s$ δεν είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A και έστω ότι υπάρχει $t \in \mathbb{R}$, με t κάτω φράγμα του A και $-s < t$. Τότε όμως, για κάθε $x \in A$, είναι $-x \in -A$, άρα $t \leq -x$ δηλαδή $x \leq -t$. Προκύπτει ότι το $-t$ είναι άνω φράγμα του $-A$. Άρα $s \leq -t$, δηλαδή $t \leq -s$, κάτι που είναι άτοπο, αφού $s = \sup(-A)$. Συνεπώς δεν υπάρχει κάτω φράγμα μεγαλύτερο από το $-s$, άρα τελικά $-s = \inf A$. □

Το supremum ενός μη κενού, άνω φραγμένου συνόλου A έχει την ακόλουθη χαρακτηριστική ιδιότητα:

Πρόταση – Χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum

Αν A είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε το α είναι το supremum του A, αν και μόνο αν, το α είναι άνω φράγμα του A και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.

Απόδειξη

" $\Rightarrow$" Επειδή το α είναι το supremum του Α, δηλαδή $x \leq \alpha$, για κάθε $x \in A$, το α είναι άνω φράγμα του Α. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή ο αριθμός α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α, ο αριθμός $\alpha - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του Α, συνεπώς υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $x > \alpha - \varepsilon$. Άρα προκύπτει το ζητούμενο.

" $\Leftarrow$ " Έστω ότι το α είναι άνω φράγμα του Α. Επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $x > \alpha - \varepsilon$ προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, το $\alpha - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του Α, δηλαδή το α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α, ή ισοδύναμα το supremum του Α. □

Η χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum ποιοτικά σημαίνει ότι:

- όλα τα στοιχεία του Α είναι μικρότερα από το supremum και
- υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του Α, όσο κοντά θέλουμε στο supremum.

Αντίστοιχα, το infimum ενός μη κενού, κάτω φραγμένου συνόλου Α έχει την ακόλουθη χαρακτηριστική ιδιότητα:

Πρόταση – Χαρακτηριστική ιδιότητα του infimum

Αν Α είναι ένα μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε το α είναι το infimum του Α, αν και μόνο αν, το α είναι κάτω φράγμα του Α και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $\alpha \leq x < \alpha + \varepsilon$.

Η χαρακτηριστική ιδιότητα του infimum ποιοτικά σημαίνει ότι:

- όλα τα στοιχεία του Α είναι μεγαλύτερα από το infimum και
- υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του Α, όσο κοντά θέλουμε στο infimum.

5.1.2 Από τους φυσικούς στους πραγματικούς αριθμούς

Ας μελετήσουμε την αντίστροφη πορεία. Έστω ότι θεωρούμε ως θεμελιώδη και μη οριζόμενη έννοια εκείνη του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Οι φυσικοί αριθμοί (το σύνολο $\mathbb{N}$)

Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα σύνολο που συμβολίζουμε $\mathbb{N}$, του οποίου τα στοιχεία καλούμε φυσικούς αριθμούς. Στο σύνολο αυτό δεχόμαστε τα εξής Αξιώματα:

Αξίωμα 1: Το $\mathbb{N}$ έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, το 1.

Αξίωμα 2: Σε κάθε $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένας $n' \in \mathbb{N}$, ο επόμενος του n.

Αξίωμα 3: Το 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού.

Αξίωμα 4: Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n' = m'$, τότε $n = m$.

Αξίωμα της Επαγωγής: Έστω σύνολο K, υποσύνολο του $\mathbb{N}$, για το οποίο ισχύουν:

- $1 \in K$
- αν $n \in K$, τότε $n' \in K$.

Τότε ισχύει $K = \mathbb{N}$.

Τα παραπάνω Αξιώματα είναι τα περίφημα Αξιώματα του Peano.

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών εφοδιάζεται με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και αποδεικνύονται αυστηρά οι σχετικές ιδιότητες. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ορίζεται επίσης η διάταξη και αποδεικνύονται αυστηρά οι σχετικές ιδιότητες. Ειδικότερα:

Για την πρόσθεση στο $\mathbb{N}$:

Θεώρημα

Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες:

- για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\varphi(n,1) = n'$
- για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, ισχύει $\varphi(n, m') = (\varphi(n,m))'$

Με βάση το παραπάνω Θεώρημα ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης δύο φυσικών αριθμών.

Ορισμός

Η πράξη που σε κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται το στοιχείο $\varphi(n, m)$ ονομάζεται πρόσθεση στο $\mathbb{N}$, ενώ το στοιχείο $\varphi(n, m)$ ονομάζεται άθροισμα των n, m και συμβολίζεται $n + m$.

Για τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{N}$:

Θεώρημα

Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες:

- για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\varphi(n,1) = n$
- για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, ισχύει $\varphi(n, m') = \varphi(n, m) + n$

Με βάση το παραπάνω Θεώρημα ορίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών.

Ορισμός

Η πράξη που σε κάθε n, m$\in\mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται το στοιχείο φ(n, m) ονομάζεται πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{N}$, ενώ το στοιχείο φ(n, m) ονομάζεται γινόμενο των n, m και συμβολίζεται n · m.

Για τη διάταξη στο $\mathbb{N}$:

Ορισμός

Έστω n, m$\in\mathbb{N}$. Αν υπάρχει k$\in\mathbb{N}$, για το οποίο ισχύει n = m + k, τότε λέμε ότι ο n είναι μεγαλύτερος του m και γράφουμε n > m, ή ισοδύναμα ότι ο m είναι μικρότερος του n και γράφουμε m < n.

Επεκτείνοντας κατάλληλα το σύνολο των φυσικών αριθμών, προκύπτει το σύνολο των ακεραίων. Θα μελετήσουμε αναλυτικά την επέκταση, αφού πρώτα θυμηθούμε κάποια απαραίτητα στοιχεία για τις σχέσεις ισοδυναμίας.

Ορισμός

Έστω σύνολο X. Μία διμελής σχέση ~ ⊂ X x X καλείται σχέση ισοδυναμίας, όταν επαληθεύει τις εξής ιδιότητες:

- x ~ x, για κάθε x$\in$X (αυτοπάθεια)
- αν x ~ y, τότε y ~ x, για κάθε x, y$\in$X (συμμετρικότητα)
- αν x ~ y και y ~ z, τότε x ~ z, για κάθε x, y, z$\in$X (μεταβατικότητα)

Για κάθε x$\in$X, ορίζεται η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας x̃ = {y$\in$X, ώστε x ~ y}. Η κλάση ισοδυναμίας του x είναι το σύνολο των στοιχείων του X που είναι ισοδύναμα με το x.

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας καλείται σύνολο πηλίκο ως προς τη σχέση ισοδυναμίας και συμβολίζεται X / ~ Είναι δηλαδή X / ~ = { x̃ , ώστε x$\in$X}

Αποδεικνύεται ότι:

- Δύο κλάσεις ισοδυναμίας, είτε είναι ίσες, είτε δεν έχουν κοινά στοιχεία.
- Η ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας ισούται με το σύνολο X.

Επιστρέφουμε στη μελέτη της επέκτασης του συνόλου των φυσικών στο σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Οι ακέραιοι αριθμοί (το σύνολο $\mathbb{Z}$)

Ορίζουμε διμελή σχέση ~ : $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}\rightarrow$ $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$, ώστε (m, n) ~ (p, q), αν και μόνο αν, m + q = p + n.

Αποδεικνύεται ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορίζουμε ως σύνολο των ακεραίων και συμβολίζουμε $\mathbb{Z}$, το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας ~

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών επεκτείνονται κατάλληλα οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών και αποδεικνύονται οι σχετικές ιδιότητες. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών επεκτείνεται κατάλληλα η διάταξη των φυσικών αριθμών και αποδεικνύονται οι σχετικές ιδιότητες.

Θα επεκτείνουμε περαιτέρω το σύνολο των ακεραίων αριθμών, στο σύνολο των ρητών.

Οι ρητοί αριθμοί (το σύνολο $\mathbb{Q}$)

Ορίζουμε διμελή σχέση $\sim : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ ώστε $(m, n) \sim (p, q)$, αν και μόνο αν, $m \cdot q = p \cdot n$.

Αποδεικνύεται ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορίζουμε ως σύνολο των ρητών και συμβολίζουμε $\mathbb{Q}$, το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας ~

Στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών επεκτείνονται κατάλληλα οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των ακεραίων αριθμών και αποδεικνύονται οι σχετικές ιδιότητες. Στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών επεκτείνεται κατάλληλα η διάταξη των ακεραίων αριθμών και αποδεικνύονται οι σχετικές ιδιότητες.

Ας περάσουμε στο πλέον ενδιαφέρον και λεπτό βήμα, δηλαδή στην επέκταση του συνόλου των ρητών αριθμών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Οι πραγματικοί αριθμοί (το σύνολο $\mathbb{R}$)

Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}_+$

Θα περιγράψουμε τον ορισμό των θετικών πραγματικών αριθμών ως τομών Dedekind.

Μία τομή Dedekind είναι ένα σύνολο θετικών ρητών αριθμών για το οποίο ισχύει:

- Περιέχει έναν τουλάχιστον θετικό ρητό αριθμό, αλλά δεν περιέχει όλους τους θετικούς ρητούς αριθμούς.
- Κάθε θετικός ρητός αριθμός που ανήκει στο σύνολο είναι μικρότερος από κάθε θετικό ρητό αριθμό που δεν ανήκει στο σύνολο.
- Δεν περιέχεται μέγιστος θετικός ρητός αριθμός.

Ο αυστηρός ορισμός ενός θετικού πραγματικού αριθμού x ως τομή Dedekind, με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός

Θετικός πραγματικός αριθμός x ονομάζεται κάθε υποσύνολο των θετικών ρητών αριθμών, για το οποίο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $x \neq \varnothing$
- $x \neq \mathbb{Q}$
- κάθε $\alpha \in x$ είναι μικρότερο από κάθε θετικό ρητό αριθμό β που δεν ανήκει στο x
- το x δεν έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή, για κάθε $\alpha \in x$, υπάρχει $\beta \in x$, με $\beta > \alpha$.

Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}_+$

Για να αποδείξουμε ότι κάποιο υποσύνολο θετικών ρητών αριθμών είναι θετικός πραγματικός αριθμός, θα πρέπει να αποδείξουμε τα εξής:

- το σύνολο περιέχει έναν τουλάχιστον θετικό ρητό αριθμό
- το σύνολο δεν περιέχει έναν τουλάχιστον θετικό ρητό αριθμό
- για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και κάθε θετικός ρητός μικρότερός του
- για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και κάποιος θετικός ρητός μεγαλύτερός του.

Στη συνέχεια δημιουργούμε ένα στοιχείο το οποίο ονομάζουμε μηδέν (0), που είναι διαφορετικό από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό.

Το σύνολο των αρνητικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}_-$

Για κάθε x δημιουργούμε ένα νέο στοιχείο, τον αντίθετο του x, τον οποίο συμβολίζουμε με –x. Ο –x ονομάζεται αρνητικός πραγματικός αριθμός, ενώ το σύνολο των αρνητικών πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}_-$

Άρα τελικά: $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών επεκτείνονται κατάλληλα οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών και αποδεικνύονται οι σχετικές ιδιότητες, με την επέκταση του πολλαπλασιασμού να απαιτεί λεπτούς χειρισμούς. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών επεκτείνεται κατάλληλα η διάταξη των ρητών αριθμών, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό και αποδεικνύονται οι σχετικές ιδιότητες.

Ορισμός

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Θα λέμε ότι $x < y$, όταν, για κάθε $\alpha \in x$ ισχύει $\alpha \in y$ και $x \neq y$.

Έχοντας ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς ως τομές Dedekind, το Αξίωμα της Πληρότητας μετατρέπεται σε μία αποδείξιμη πρόταση, με εξαιρετικά ενδιαφέρουσα απόδειξη που ολοκληρώνεται σε δύο βήματα: στο πρώτο βήμα αποδεικνύεται το Αξίωμα της Πληρότητας για το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και στο δεύτερο για το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών ορισμένων ως τομών Dedekind έχει την ιδιότητα του supremum.

Απόδειξη[14]

Θα αποδείξουμε ότι κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο A των θετικών πραγματικών αριθμών έχει μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα.

Θεωρούμε την ένωση όλων των συνόλων $\alpha \in A$ και τη συμβολίζουμε u_0, δηλαδή θεωρούμε το σύνολο $u_0 = \cup\{\alpha$, τέτοια ώστε $\alpha \in A\} = \{r \in \mathbb{Q}_+$, τέτοια ώστε $r \in \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A\}$

Ισχυρισμός 1: Το u_0 είναι θετικός πραγματικός αριθμός

Επειδή A μη κενό, υπάρχει $\alpha_0 \in A$ και $r_0 \in \mathbb{Q}_+$, τέτοιο ώστε $r_0 \in \alpha_0$. Συνεπώς $r_0 \in u_0$ ή ισοδύναμα $u_0 \neq \varnothing$

Επειδή A άνω φραγμένο υπάρχει u ένα άνω φράγμα του και υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, τέτοιο ώστε $s \notin u$.

Αν $r \in r_0$, τότε υπάρχει $\alpha \in A$, ώστε $r \in \alpha$. Επειδή $\alpha \leq u$, ισχύει $r \in u$, άρα $r \neq s$. Προκύπτει ότι $r \neq s$ για κάθε $r \in u_0$ άρα $s \notin u_0$, δηλαδή $u_0 \neq \mathbb{Q}$

Έστω $r \in u_0$ και $r_1 \in \mathbb{Q}_+$ με $r_1 < r$. Τότε υπάρχει $\alpha \in A$ ώστε $r \in \alpha$, συνεπώς $r_1 \in \alpha$. Άρα $r_1 \in u_0$

Έστω $r \in u_0$. Τότε υπάρχει $\alpha \in A$, ώστε $r \in \alpha$, άρα υπάρχει $r_1 \in \alpha$ με $r_1 > r$ ή ισοδύναμα υπάρχει

$r_1 \in u_0$ με $r_1 > r$.

(14) Οι αποδείξεις για την πληρότητα προέρχονται από το σύγγραμμα του Παπαδημητράκη Μ., Ανάλυση, Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης, Δεκέμβριος 2015

Ισχυρισμός: Το u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Α

Από τον ορισμό του u_0 προκύπτει ότι $\alpha \leq u_0$, για κάθε $\alpha \in A$, συνεπώς το u_0 είναι άνω φράγμα του Α. Έστω u ένα άνω φράγμα του Α. Επειδή $\alpha \leq u$, για κάθε $\alpha \in A$, προφανώς $u_0 \leq u$, άρα το u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α.

Ισχυρισμός: Το u_0 είναι το μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα του Α

Έστω u_0' είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Α. Επειδή το u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α και το u_0' είναι άνω φράγμα του Α ισχύει $u_0 \leq u_0'$. Επειδή το u_0' είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Α και το u_0 είναι άνω φράγμα του Α ισχύει $u_0' \leq u_0$. Άρα τελικά $u_0' = u_0$ □

Ας γενικεύσουμε την απόδειξη του Αξιώματος της Πληρότητας.

ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει την ιδιότητα του supremum.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών έχει μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα.

Ισχυρισμός: Το Α έχει ελάχιστο άνω φράγμα

Επειδή Α είναι άνω φραγμένο, υπάρχει $u_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha \leq u_1$, για κάθε $\alpha \in A$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω ότι το Α περιέχει ένα τουλάχιστον $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$

Θεωρούμε το σύνολο $A_1 = A \cap \mathbb{R}_+$ για το οποίο ισχύει $\alpha \leq u_1$, για κάθε $\alpha \in A_1$. Προφανώς το A_1 είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ συνεπώς σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $u_0 \in \mathbb{R}_+$ Αν $\alpha \in A$ με $\alpha \in \mathbb{R}_+$ τότε $\alpha \in A_1$, άρα $\alpha \leq u_0$. Αν $\alpha \in A$ με $\alpha \notin \mathbb{R}_+$ τότε $\alpha \leq \alpha_0$ και επειδή $\alpha_0 \leq u_0$ προκύπτει ότι $\alpha \leq u_0$. Συνεπώς το u_0 είναι ένα άνω φράγμα του Α. Αν u είναι ένα άνω φράγμα του Α, τότε το u είναι άνω φράγμα του A_1, συνεπώς ισχύει $u_0 \leq u$, αφού u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A_1. Άρα το u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α.

2η περίπτωση: Έστω ότι το Α δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $\mathbb{R}_+$

Αν $\alpha_0 \in A$, προφανώς $\alpha_0 \leq 0$. Θεωρούμε $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\alpha_0 + \alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ και ορίζουμε το σύνολο $A_1 = \{\alpha + \alpha_1$, έτσι ώστε $\alpha \in A\}$. Προφανώς το A_1 είναι μη κενό σύνολο. Ταυτόχρονα το A_1 είναι άνω φραγμένο σύνολο, αφού ισχύει $\alpha + \alpha_1 \leq u_1 + \alpha_1$, για κάθε $\alpha \in A$, άρα το $u_1 + \alpha_1$ είναι άνω φράγμα του.

Όμως, το A_1 περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του $\mathbb{R}_+$ και συγκεκριμένα το στοιχείο $\alpha_0+\alpha_1$ Σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση, το σύνολο A_1 έχει ελάχιστο άνω φράγμα έστω το u_2 άρα για κάθε $\alpha \in A$, ισχύει $\alpha+\alpha_1 \in A_1$ ή ισοδύναμα $\alpha+\alpha_1 \leq u_2$ ή $\alpha \leq u_2 - \alpha_1$. Συμπεραίνουμε ότι ο $u_0 = u_2 - \alpha_1$ είναι άνω φράγμα του Α.

Έστω u είναι ένα άνω φράγμα του Α. Τότε, για κάθε $\alpha \in A$ ισχύει $\alpha+\alpha_1 \leq u+\alpha_1$, άρα το $u+\alpha_1$ είναι άνω φράγμα του A_1. Επειδή u_2 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A_1 είναι $u+\alpha_1 \leq u_2$ ή $u \leq u_2 - \alpha_1 = u_0$ Άρα το u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α.

Ισχυρισμός: Το ελάχιστο άνω φράγμα του Α είναι μοναδικό

Έστω u_0' το ελάχιστο άνω φράγμα του Α. Επειδή το u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α και το u_0' είναι άνω φράγμα του Α ισχύει $u_0 \leq u_0'$. Επειδή το u_0' είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α και το u_0 είναι άνω φράγμα του Α ισχύει $u_0' \leq u_0$. Άρα τελικά $u_0' = u_0$. □

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, ο ρόλος του Αξιώματος της Πληρότητας κατά τη θεμελίωση του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, καθορίζεται πλήρως από την επιλογή της θεμελιώδους, μη οριζόμενης έννοιας. Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ως θεμελιώδη και μη οριζόμενη έννοια εκείνη των πραγματικών αριθμών, το Αξίωμα της Πληρότητας αποτελεί αξίωμα. Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ως θεμελιώδη και μη οριζόμενη έννοια εκείνη των φυσικών αριθμών, το Αξίωμα της Πληρότητας αποτελεί αποδείξιμη πρόταση.

Η διαπιστωμένη ιδιαιτερότητα του Αξιώματος της Πληρότητας, αλλά και το γεγονός ότι η ισχύς του δεν είναι διαισθητικά προφανής, ούτε εύλογη, καθιστά αναγκαία την περαιτέρω διερεύνηση του ακριβή του ρόλου και του προσδιορισμού της αποδεικτικής του δύναμης. Για το λόγο αυτό, στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε προσεκτικά ορισμένες ισχυρές συνέπειές του, τόσο στους πραγματικούς αριθμούς, όσο και σε ορισμένα σπουδαία Θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης που διδάσκονται οι μαθητές και οι μαθήτριες της Γ΄ Λυκείου.

5.2 Η αποδεικτική ισχύς του Αξιώματος της Πληρότητας στους πραγματικούς αριθμούς & στη Μαθηματική Ανάλυση

Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Ζαχαριάδη – Καλαμίδα – Φαρμάκη, η Μαθηματική Ανάλυση, ένας από τους βασικότερους κλάδους των μαθηματικών, έχει διπλό ρόλο: από τη μια μελετά τις εσωτερικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα την ύπαρξη πραγματικών αριθμών με ειδικές ιδιότητες, όπως είναι οι άρρηττοι και οι υπερβατικοί, ή ειδικά ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί, όπως οι αριθμοί π και e, ενώ από την άλλη μελετά συναρτήσεις μεταξύ των πραγματικών αριθμών (Γενική Τοπολογία & Συναρτησιακή Ανάλυση, Σελ. 26). Στην παρούσα ενότητα θα παραθέσουμε ορισμένες από τις εσωτερικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και επιλεγμένα θεωρήματα που αφορούν σε συναρτήσεις και αποτελούν άμεσες ή έμμεσες συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων προέρχονται από τα πανεπιστημιακά εγχειρίδια του Απειροστικού Λογισμού που αναφέρονται στη βιβλιογραφία. Λόγω του τεράστιου εύρους του αντικειμένου μελέτης, επιλέγουμε να παρουσιάσουμε εκείνα τα Θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης που αναφέρονται ή έστω προσεγγίζονται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών / Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ΄ Λυκείου, ώστε στη συνέχεια, να είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τους τρόπους παρουσίασής τους.

5.2.1 Βασικές συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας

Οι Νεγρεπόντης – Γιωτόπουλος – Γιαννακούλιας αναφέρουν ότι το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών "έχει υπαρξιακό χαρακτήρα, καθώς εξασφαλίζει την ύπαρξη όσο το δυνατόν περισσότερων πραγματικών αριθμών, όπως η εξασφάλιση της ύπαρξης του αριθμού $\sqrt{2}$, αλλά και της n – οστής ρίζας κάθε μη αρνητικού αριθμού, με n φυσικό αριθμό." (Α.Λ Ι, Σελ. 27)

Ας μελετήσουμε την απόδειξη της ύπαρξης του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$

5.2.1.1 Πρόταση (Ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$)

Υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός α, τέτοιος ώστε $\alpha^2 = 2$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$

Το σύνολο Α είναι μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο, αφού το 2 είναι ένα άνω φράγμα του. Από το Αξίωμα της Πληρότητας υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $\alpha = \sup A$.

Προφανώς $1 \in A$ και $\alpha \leq 2$, συνεπώς $\alpha > 0$. Θα αποδείξουμε ότι $\alpha^2 = 2$.

Έστω ότι $\alpha^2 \neq 2$. Τότε, είτε $\alpha^2 > 2$, είτε $\alpha^2 < 2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Έστω $\alpha^2 < 2$.

Επιλέγουμε πραγματικό αριθμό θ, με $0 < \theta < 1$ και $\alpha^2 < \alpha^2 + \theta < 2$ και θεωρούμε τον αριθμό

$\alpha + \frac{\theta}{10}$ Επειδή $\alpha < \alpha + \frac{\theta}{10}$, από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι

$\alpha + \frac{\theta}{10} \notin A$, συνεπώς $\left(\alpha + \frac{\theta}{10}\right)^2 \geqslant 2$

Όμως $\left(\alpha + \frac{\theta}{10}\right)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\frac{\theta}{10} + \frac{\theta^2}{100}$ άρα $\frac{\theta^2}{100} + 2\alpha\frac{\theta}{10} = \theta\left(\frac{\theta}{100} + \frac{2\alpha}{10}\right) < \theta\left(\frac{1}{100} + \frac{4}{10}\right) < \theta$

από όπου προκύπτει ότι $\left(\alpha + \frac{\theta}{10}\right)^2 < \alpha^2 + \theta < 2$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα δεν ισχύει $\alpha^2 < 2$.

β) Έστω $\alpha^2 > 2$.

Επιλέγουμε πραγματικό αριθμό θ, με $0 < \theta < 1$ και $2 < \alpha^2 - \theta < \alpha^2$ και θεωρούμε τον αριθμό

$\alpha - \frac{\theta}{10}$ Επειδή $0 < \alpha - \frac{\theta}{10} < \alpha$, από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι υπάρχει

$x \in A$ με $\alpha - \frac{\theta}{10} < x$, συνεπώς $\left(\alpha - \frac{\theta}{10}\right)^2 < x^2 < 2$

Όμως $\left(\alpha - \frac{\theta}{10}\right)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\frac{\theta}{10} + \frac{\theta^2}{100} > \alpha^2 - \frac{\alpha\theta}{5} > \alpha^2 - \theta > 2$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα δεν ισχύει $\alpha^2 > 2$.

Τελικά ισχύει $\alpha^2 = 2$. □

Η χρήση του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών στην απόδειξη της

ύπαρξης του αριθμού $\sqrt{2}$ είναι, όπως είδαμε, τεράστιας σημασίας. Η απόδειξη αρρητότητας του $\sqrt{2}$ έχει παρουσιαστεί στην ενότητα 1.2 της παρούσας διπλωματικής. Αφού λοιπόν ο αριθμός $\sqrt{2}$ υπάρχει και δεν ανήκει στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι, στο Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών οφείλεται η διαφοροποίηση του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών από το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

Πολλές από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, που μοιάζουν προφανείς και χρησιμοποιούνται από τα σχολικά χρόνια ακόμη και μάλιστα χωρίς ιδιαίτερο προβληματισμό, αποτελούν στην ουσία συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Πρόκειται για απλές, αλλά εξαιρετικά σημαντικές ιδιότητες, μεταξύ των οποίων η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.

5.2.1.2 Πρόταση (Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη)

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.

Απόδειξη

Έστω ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι άνω φραγμένο. Επειδή $\mathbb{N} \neq \varnothing$, σύμφωνα με το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, για τον οποίον ισχύει $\alpha = \sup\mathbb{N}$. Επειδή $\alpha - 1 < \alpha$, ο αριθμός $\alpha - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Άρα, υπάρχει φυσικός $n \in \mathbb{N}$, για τον οποίο $\alpha - 1 < n$, άρα $\alpha < n + 1$, κάτι που είναι άτοπο, αφού $\alpha = \sup\mathbb{N}$. □

Η σύγχρονη μαθηματική διατύπωση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη παρουσιάζεται στο επόμενο Πόρισμα.

5.2.1.3 Πόρισμα

Για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geq 1$, ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Απόδειξη

Επειδή το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, ο αριθμός $\frac{1}{\varepsilon}$ δεν είναι άνω φράγμα του.

Υπάρχει, δηλαδή, φυσικός αριθμός $n \geq 1$, τέτοιος ώστε $\frac{1}{\varepsilon} < n$, ή ισοδύναμα, υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geq 1$, τέτοιος ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Συνδυάζοντας τη μαθηματική διατύπωση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη με τις σύγχρονες

έννοιες της ακολουθίας και του ορίου μιας ακολουθίας, προκύπτει η απόδειξη της σύγκλισης στο 0 της στοιχειώδους ακολουθίας (α_n), $n\in\mathbb{N}$, με $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Για λόγους πληρότητας του κειμένου, θα παραθέσουμε τον ορισμό της ακολουθίας και της σύγκλισης μιας ακολουθίας σε έναν πραγματικό αριθμό.

Ορισμός

Ως ακολουθία πραγματικών αριθμών ορίζεται κάθε αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3,... στους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Η ακολουθία συμβολίζεται (α_n), $n\in\mathbb{N}$ ή $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$

Ορισμός

Έστω η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει όριο το α αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολίζουμε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Επιστρέφουμε στην απόδειξη της σύγκλισης στο 0 της στοιχειώδους ακολουθίας (α_n), $n\in\mathbb{N}$, με $\alpha_n = \frac{1}{n}$

5.2.1.4 Πρόταση

Ισχύει $\frac{1}{n} \to 0$, καθώς $n \to \infty$

Απόδειξη

Θεωρούμε την ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$, με $\alpha_n = \frac{1}{n}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, ώστε $n_0 \cdot \varepsilon > 1$

Τότε όμως, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, δηλαδή $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ (1)

Από τον ορισμό της σύγκλισης, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\frac{1}{n} \to 0$, καθώς $n \to \infty$ □

Η σύγκλιση μιας ακολουθίας συνδέεται με την ύπαρξη του supremum ενός συνόλου, με την ακόλουθη Πρόταση:

5.2.1.5 Πρόταση

Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο. Τότε:

1. υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το supremum του A,

2. κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του Α έχει όριο μικρότερο ή ίσο του supremum του Α.

Απόδειξη

1. Από το Αξίωμα της Πληρότητας, το Α έχει supremum έστω α. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ο αριθμός

   $\alpha - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του Α, συνεπώς υπάρχει όρος $\alpha_n\in A$, ώστε $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha_n \leq \alpha$.

   Άρα, υπάρχει ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ στο Α, ώστε $\alpha_n \to \alpha$.

2. Ας θεωρήσουμε ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ στο Α, με $\alpha_n \to \beta$.

   Επειδή $\alpha = \sup A$, ισχύει προφανώς $\alpha_n \leq \alpha$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, συνεπώς $\beta \leq \alpha$. □

   Ανάλογη πρόταση ισχύει για το infimum του Α.

Ο κεντρικός ρόλος της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη και στα σύγχρονα μαθηματικά επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι στις αποδείξεις των προτάσεων πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς και πυκνότητας των άρρητων στους πραγματικούς αριθμούς γίνεται χρήση της εν λόγω Αρχής.

Στις συγκεκριμένες αποδείξεις χρησιμοποιείται, επίσης, η Αρχή της Καλής Διάταξης ή Αρχή του Ελαχίστου.

5.2.1.6 Αρχή της Καλής Διάταξης (Αρχή του Ελαχίστου)

Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει ελάχιστο στοιχείο.

Ας μελετήσουμε τις αποδείξεις που εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός τουλάχιστον ρητού και ενός τουλάχιστον άρρητου μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διακριτών πραγματικών αριθμών.

5.2.1.7 Πρόταση (πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς)

Αν $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός γ, έτσι ώστε $\alpha < \gamma < \beta$.

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω $\alpha \geq 0$

  Επειδή $\alpha < \beta$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geq 1$, τέτοιος ώστε $\frac{1}{n} < \beta - \alpha$

  Θεωρούμε το σύνολο $A = \{ k\in\mathbb{N}$, ώστε $\frac{k}{n} > \alpha\}$ Από την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη το

σύνολο $\frac{1}{n} \cdot \mathbb{N}$, δεν είναι άνω φραγμένο, συνεπώς $A \neq \varnothing$.

Από την Αρχή της Καλής Διάταξης (Αρχή του Ελαχίστου) το σύνολο Α έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω k. Είναι δηλαδή $\frac{k-1}{n} \leqslant \alpha < \frac{k}{n}$

Τότε όμως θα είναι $\frac{k}{n} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} \leqslant \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + (\beta - \alpha) = \beta$ δηλαδή $\alpha < \frac{k}{n} < \beta$

Ο ζητούμενος ρητός, για τον οποίο ισχύει $\alpha < \gamma < \beta$, είναι ο $\gamma = \frac{k}{n}$

- Έστω $\alpha < 0$. Τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός m, τέτοιος ώστε $0 < m + \alpha$, συνεπώς $0 < m + \alpha < m + \beta$.
  Σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση, υπάρχει ρητός δ, ώστε $m + \alpha < \delta < m + \beta$.
  Ο ζητούμενος ρητός, για τον οποίο ισχύει $\alpha < \gamma < \beta$, είναι ο $\gamma = \delta - m$. □

5.2.1.8 Πρόταση (πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς αριθμούς)

Το σύνολο των άρρητων είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε υπάρχει ένας άρρητος αριθμός γ, έτσι ώστε $\alpha < \gamma < \beta$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$

Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς προκύπτει ότι υπάρχει ρητός $\delta \neq 0$,

ώστε $\frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \delta < \frac{\beta}{\sqrt{2}}$

Θέτουμε $\gamma = \delta \sqrt{2}$ και παρατηρούμε ότι ο γ είναι άρρητος και ισχύει $\alpha < \gamma < \beta$. Άρα τελικά, το σύνολο των άρρητων είναι πυκνό στους πραγματικούς αριθμούς. □

Η πυκνότητα των ρητών, αλλά και των άρρητων στους πραγματικούς αριθμούς συνοψίζονται στην ακόλουθη ιδιότητα της συνέχειας.

5.2.1.9 Η ιδιότητα συνέχειας

Έστω μη – κενά σύνολα Α, Β ώστε $\alpha \leq \beta$, για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε

$\alpha \leq \xi \leq \beta$, για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$.

Σύμφωνα με τον Παπαδημητρίου, η ιδιότητα της συνέχειας είναι ισοδύναμη με το Αξίωμα

της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών και ποιοτικά σημαίνει ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν έχει χάσματα, δηλαδή μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών υπάρχει πάντα ένας ακόμη πραγματικός αριθμός.

5.2.2 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις Ακολουθίες

Ας περάσουμε σε Προτάσεις – συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών που σχετίζονται με ακολουθίες και όρια ακολουθιών. Οι ακολουθίες αποτελούν άπειρες επιλογές πραγματικών αριθμών με συγκεκριμένη σειρά, ενώ σε σχέση με τη θέση τους στην Μαθηματική Ανάλυση, οι Νεγρεπόντης – Γιωτόπουλος – Γιαννακούλιας, αναφέρουν:

> η βάση της Μαθηματικής Ανάλυσης είναι η προσέγγιση του ζητούμενου, αλλά ενδεχομένως μη – τετριμμένου και πολύπλοκου μαθηματικού αντικειμένου, κατά τρόπο όλο ένα πιο ικανοποιητικό, από απλούστερα, συγκεκριμένα και κατασκευάσιμα αντικείμενα [...] φθάνουμε φυσιολογικά στην κεντρική ιδέα της σύγκλισης πραγματικών αριθμών σε ένα όριο, στο ζητούμενο, μέσα από αλλεπάλληλες διαδοχικές προσεγγίσεις. Η διαισθητική έννοια της σύγκλισης, παράγει, εμπεριέχει κατά κάποιο τρόπο την έννοια της ακολουθίας.
>
> (Α.Λ Ι, Σελ. 42)

Για να διευκολύνουμε τον αναγνώστη, επαναλαμβάνουμε τους ορισμούς της ακολουθίας και της σύγκλισης μιας ακολουθίας σε έναν πραγματικό αριθμό.

5.2.2.1 Ορισμός

Ως ακολουθία πραγματικών αριθμών ορίζεται κάθε αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3,... στους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Η ακολουθία συμβολίζεται (α_n), $n\in\mathbb{N}$ ή $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$

5.2.2.2 Ορισμός

Έστω η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει όριο το α αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολίζουμε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Αποδεικνύεται ότι το όριο μιας ακολουθίας, εάν υπάρχει, είναι μοναδικό. Θεωρούμε επίσης γνωστές όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων, καθώς και το κριτήριο παρεμβολής.

Δύο από τις βασικότερες κατηγορίες ακολουθιών είναι οι φραγμένες και οι μονότονες. Παραθέτουμε τους σχετικούς ορισμούς.

5.2.2.3 Ορισμός

- Μία ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη, όταν το σύνολο $\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο.
- Μία ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένη, όταν το σύνολο $\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}$ είναι κάτω φραγμένο.
- Μία ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φραγμένη, όταν το σύνολο $\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο.

Είναι προφανές ότι μία ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φραγμένη, αν και μόνο αν, υπάρχει πραγματικός αριθμός $M > 0$, τέτοιος ώστε $|\alpha_n| \leq M$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

5.2.2.4 Ορισμός

Μια ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι:

α) αύξουσα, αν $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

β) γνησίως αύξουσα, αν $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

γ) φθίνουσα, αν $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

δ) γνησίως φθίνουσα, αν $\alpha_n > \alpha_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

ε) μονότονη, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα,

στ) γνησίως μονότονη, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Το επόμενο Θεώρημα είναι ένα από τα σημαντικότερα της Μαθηματικής Ανάλυσης, άμεσα εξαρτόμενο από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Αποτελεί, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια, ένα βασικό κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών, το οποίο βρίσκεται στον πυρήνα της απόδειξης του Θεμελιώδους Θεωρήματος Bolzano – Weierstrass και εφαρμόζεται ακόμη και στην περίπτωση που δεν είναι γνωστή η τιμή του ορίου της ακολουθίας. Με την εφαρμογή του, μεταξύ άλλων:

- ορίζεται ο υπερβατικός αριθμός e,
- ορίζονται οι φυσικοί λογάριθμοι,
- αναπτύσσονται αλγόριθμοι υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας.

Ας το μελετήσουμε προσεκτικά.

5.2.2.5 Θεώρημα – Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει, δηλαδή:

1. Αν η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι αύξουσα και φραγμένη τότε

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup \alpha_n = \sup\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}$$

2. Αν η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη τότε

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \inf \alpha_n = \inf\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}$$

Απόδειξη

1. Αν η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε το σύνολο $A = \{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο. Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε $\alpha = \sup A$.

   Έστω $\varepsilon > 0$. Ο αριθμός $\alpha - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου Α, καθώς $\alpha - \varepsilon < \alpha$ και α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α. Συνεπώς, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\alpha - \varepsilon < \alpha_{n_0}$

   Τότε όμως, για $n \geq n_0$, είναι $|\alpha - \alpha_n| = \alpha - \alpha_n < \alpha - \alpha_{n_0} < \varepsilon$, συνεπώς τελικά, η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$, συγκλίνει και ισχύει $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$.

2. Αν η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε η ακολουθία $(-\alpha_n)$, $n\in\mathbb{N}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Μάλιστα, αν $\beta = \inf\alpha_n$, τότε $-\beta = \sup(-\alpha_n)$.

   Από την πρώτη περίπτωση της Πρότασης έχουμε $\lim_{n\to\infty}(-\alpha_n) = -\beta$ και άρα τελικά ισχύει $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \beta$. □

Εφαρμογή των παραπάνω και ταυτόχρονα συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών αποτελεί η περίφημη Αρχή του Κιβωτισμού.

5.2.2.6 Αρχή του κιβωτισμού

Έστω (α_n), $n\in\mathbb{N}$ μία αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών και (β_n), $n\in\mathbb{N}$ μία φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, ώστε να ισχύει $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subseteq [\alpha_n, \beta_n]$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$

Τότε: α) $\cap [\alpha_n, \beta_n] \neq \varnothing$

β) αν επιπλέον ισχύει $\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$, τότε $\cap [\alpha_n, \beta_n] = \{x\}$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

α) Η ακολουθία (β_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και άνω φραγμένη από το α_1, συνεπώς συγκλίνει στο infimum της (β_n), το οποίο καλούμε β.

Η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη από το β_1, συνεπώς συγκλίνει στο supremum της (α_n), το οποίο καλούμε α.

Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \beta_1$ και $\alpha_1 \leq \beta \leq \beta_1$

Η ακολουθία $(\beta_n - \alpha_n)$, $n\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, άρα συγκλίνει στο infimum της $(\beta_n - \alpha_n)$, $n\in\mathbb{N}$, το οποίο καλούμε δ. Προφανώς ισχύει $\delta \geq 0$.

Είναι: $\delta = \lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0 = \lim_{n\to\infty}\beta_n - \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \beta - \alpha$.

Άρα $\beta \geq \alpha$, συνεπώς $\cap [\alpha_n, \beta_n] = [\alpha, \beta]$

β) Αν $\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$ τότε έχουμε $0 = \delta = \beta - \alpha$, ή ισοδύναμα $\beta = \alpha$.

Συνεπώς ισχύει $\cap [\alpha_n, \beta_n] = \{ \alpha \} = \{ \beta \}$ □

Ο αριθμός e ορίζεται με διάφορους τρόπους, όλοι όμως, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, εμπεριέχουν την ιδιότητα του supremum. Ας μελετήσουμε εκείνον τον ορισμό που προκύπτει από το Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών.

5.2.2.7 Πρόταση

Η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ με $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει και ισχύει $2 < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. Το όριο αυτό συμβολίζουμε e, δηλαδή $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ με $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα.

Πράγματι, για n = 2, 3, 4,... έχουμε:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) <$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) =$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(n+1)(n+1-1)\ldots(n+1-k+1)}{(n+1)^k} =$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} < \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} =$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \alpha_{n+1}$$

'Αρα ισχύει $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$, για κάθε n = 1, 2,..., δηλαδή η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι αύξουσα.

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ με $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι φραγμένη και ισχύει $\alpha_n < 3$, για n = 1, 2,...

Πράγματι για n = 2, 3, … είναι $\alpha_n = 1+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le 1+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

Όμως $k \ge 1$, άρα $k! = 1\cdot 2 \ldots k \ge 1\cdot 2 \cdot 2 \ldots = 2^{k-1}$

Άρα, για $n \ge 2$ έχουμε: $\alpha_n \le 1+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1+ \frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

Σύμφωνα με το Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών, η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ συγκλίνει.

Συμβολίζουμε $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και θα αποδείξουμε ότι $2 < e < 3$.

Θεωρούμε την ακολουθία (β_n), $n\in\mathbb{N}$ με $\beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Ισχύει:

$$\frac{\alpha_n}{\beta_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}$$

Άρα $\alpha_n > \beta_{n-1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \alpha_{n-1}$

Επίσης:

$$\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$$

Άρα $\beta_{n-1} > \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) = \beta_n$

Συνεπώς, η ακολουθία (β_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και ισχύει $2 = \alpha_1 < \alpha_n < \beta_n < \beta_1 = 4$

Όμως, $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\alpha_n \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n = e$

Άρα $2 \le \alpha_n < e < \beta_n \le 4$, ενώ για $n = 4$, προκύπτει τελικά $2 < e < 3$. □

Εναλλακτικά ο αριθμός e ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας (α_n), $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

Με διάφορους τρόπους ορίζεται και ο φυσικός λογάριθμος κάθε θετικού πραγματικού αριθμού α, με έναν από αυτούς να στηρίζεται στο Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών.

5.2.2.8 Πρόταση

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α, το $\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right)$ υπάρχει και συμβολίζεται lnα. Ισχύει δηλαδή $\ln\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right)$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε ότι η ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha_n = n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συνεπώς από το Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών, συγκλίνει. Το όριό της καλούμε φυσικό λογάριθμο του α. □

Στην επόμενη Πρόταση παρουσιάζεται μία αναδρομική μέθοδος υπολογισμού των τετραγωνικών ριζών θετικών πραγματικών αριθμών. Περιγράφουμε την απόδειξη.

5.2.2.9 Πρόταση

Έστω $0 \le \alpha \le 1$. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$, με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_n^2)$.

Τότε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sqrt{\alpha}$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε ότι η ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συνεπώς από το Βασικό Κριτήριο σύγκλισης η ακολουθία συγκλίνει.

Έστω $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta$.

Τότε $\beta = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n + \frac{1}{2}\left(\alpha - \alpha_n^2\right)\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \frac{1}{2}\left(\alpha - \lim_{n\to\infty} \alpha_n^2\right) =$

$= \beta + \frac{1}{2}(\alpha - \beta^2)$

Άρα $\alpha = \beta^2$, ή ισοδύναμα $\beta = \sqrt{\alpha}$ □

Ας μελετήσουμε το περίφημο Θεώρημα Bolzano – Weiestrass, η σημασία του οποίου για την ανάπτυξη της Μαθηματικής Ανάλυσης χαρακτηρίζεται από τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια ως θεμελιώδης. Πρόκειται για ένα Θεώρημα που διατύπωσε ο Bernard Bolzano και απέδειξε ο Γερμανός μαθηματικός Karl Weiesrtass στις αρχές του 1870. Η απόδειξή του στηρίζεται στο Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, ενώ μία βασική έννοια που χρησιμοποιείται, είναι εκείνη της υπακολουθίας.

5.2.2.10 Ορισμός

Έστω (α_n), $n\in\mathbb{N}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε ως υπακολουθία της (α_n), $n\in\mathbb{N}$ και συμβολίζουμε (α_{k_n}), κάθε ακολουθία της μορφής (α_{k_1} , α_{k_2} ,..., α_{k_n} , $\alpha_{k_{n+1}}$,...), όπου $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$

Ουσιαστικά η υπακολουθία προκύπτει όταν επιλέξουμε άπειρες τιμές k_1 , k_2, …, k_n ,... του δείκτη n και θεωρήσουμε ως ακολουθία εκείνη που σχηματίζουν οι όροι της (α_n), $n\in\mathbb{N}$ που αντιστοιχούν στους δείκτες k_1 , k_2, …, k_n ,...

5.2.2.11 Ορισμός

Έστω (α_n), $n\in\mathbb{N}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε ως σημείο κορυφής της (α_n), $n\in\mathbb{N}$, κάθε φυσικό αριθμό k, για τον οποίο ισχύει $\alpha_k \geq \alpha_m$, για κάθε $m \geq k$.

Έχουμε όλους τους απαραίτητους ορισμούς για να μελετήσουμε την απόδειξη του περίφημου Θεωρήματος Bolzano – Weiestrass.

5.2.2.12 Θεώρημα Bolzano – Weiestrass

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη

Έστω (α_n), $n\in\mathbb{N}$ μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, αρκεί να αποδείξουμε ότι η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει μονότονη υπακολουθία.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει άπειρα το πλήθος σημεία κορυφής, έστω τα $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Τότε ισχύει $\alpha_{n_1} > \alpha_{n_2} > \alpha_{n_3} > \ldots$.

Συνεπώς, έχουμε προσδιορίσει μια γνησίως φθίνουσα υπακολουθία της (α_n), $n\in\mathbb{N}$

β) Η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής, έστω τα $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_k$

Θεωρούμε $\lambda_1 > m_k$. Προφανώς το λ_1 δεν θα είναι σημείο κορυφής, άρα θα υπάρχει $\lambda_2 > \lambda_1$, ώστε $\alpha_{\lambda_1} > \alpha_{\lambda_2}$ Όμοια το λ_2 δεν μπορεί να είναι σημείο κορυφής, άρα θα υπάρχει $\lambda_3 > \lambda_2$, ώστε $\alpha_{\lambda_3} > \alpha_{\lambda_2}$ κ.ο.κ

Με τον τρόπο αυτό έχουμε κατασκευάσει μια αύξουσα υπακολουθία της (α_n), $n\in\mathbb{N}$.

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, οι υπακολουθίες είναι μονότονες και φραγμένες, άρα, σύμφωνα με το Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών, συγκλίνουν. □

Εξαιρετικά σημαντική κατηγορία ακολουθιών είναι εκείνη των βασικών ή Cauchy ακολουθιών, ο αυστηρός ορισμός των οποίων είναι:

5.2.2.13 Ορισμός

Έστω η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, ώστε $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$, για κάθε $n, m \geq n_0$.

Προσεγγίζοντας ποιοτικά τον ορισμό θα λέγαμε ότι, μία ακολουθία είναι βασική ή Cauchy, όταν οι όροι της πλησιάζουν απεριόριστα ο ένας τον άλλο, καθώς οι δείκτες γίνονται μεγάλοι.

Για τις βασικές ακολουθίες ισχύουν οι επόμενες Προτάσεις:

5.2.2.14 Πρόταση

Αν μία ακολουθία συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη

Έστω η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$, με $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ και $\varepsilon > 0$.

Από τον ορισμό του ορίου, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n \geq n_0$

Συνεπώς, για $n, m \geq n_0$ έχουμε $|\alpha_n - \alpha_m| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\alpha - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Άρα τελικά, η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι ακολουθία Cauchy. □

Το Κριτήριο του Cauchy είναι ουσιαστικά το αντίστροφο της παραπάνω Πρότασης. Όταν γνωρίζουμε το όριο της ακολουθίας, μελετάμε τις αποστάσεις των όρων της ακολουθίας από το γνωστό όριο από κατάλληλο δείκτη και μετά. Όταν όμως δεν γνωρίζουμε το όριο της ακολουθίας και θέλουμε απλά να αποδείξουμε ότι αυτή συγκλίνει, καταφεύγουμε στο Κριτήριο του Cauchy, μελετώντας τις αποστάσεις των όρων της ακολουθίας μεταξύ τους, από κατάλληλο δείκτη και μετά.

Η απόδειξη του Κριτηρίου του Cauchy στηρίζεται στο Θεμελιώδες Θεώρημα Bolzano–Weierstrass, άρα αποτελεί έμμεση συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

5.2.2.15 Θεώρημα (Κριτήριο του Cauchy)

Αν μία ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει.

Απόδειξη

Έστω (α_n) $n\in\mathbb{N}$, ακολουθία Cauchy. Θεωρούμε $\varepsilon = 1$.

Από τον ορισμό των ακολουθιών Cauchy, υπάρχει $n_0 \in\mathbb{N}$, ώστε $|\alpha_n - \alpha_m| < 1$, για κάθε $n, m \geq n_0$.

Αν θεωρήσουμε $m = n_0$, τότε $|\alpha_n - \alpha_{n_0}| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$.

Συνεπώς είναι $|\alpha_n| \leq |\alpha_{n_0}| + 1$ για κάθε $n \geq n_0$.

Θέτοντας $M = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|,..., |\alpha_{n_0-1}|, |\alpha_{n_0}| + 1\}$, ισχύει $|\alpha_n| \leq M$, για $n=1, 2,...$, δηλαδή η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φραγμένη.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano Weistrass υπάρχει υπακολουθία (α_{k_n}) η οποία συγκλίνει. Καλούμε α το όριο της (α_{k_n}) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

- Επειδή η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$, ώστε $|\alpha_m - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$,

  για κάθε $n, m \geq n_1$.

- Επειδή α είναι το όριο της (α_{k_n}) υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$, ώστε $k_{n_2} \geq n_1$ και $|\alpha_{k_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$,

  για κάθε $n \geq n_2$.

Θέτουμε $k_{n_2} = n_0$.

Προφανώς ισχύει $|\alpha_{n_0} - \alpha| = |\alpha_{k_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

Συνεπώς: $|\alpha_n - \alpha| \leq |\alpha_n - \alpha_{n_0}| + |\alpha_{n_0} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Άρα τελικά $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. □

Τα υποακολουθιακά όρια μιας φραγμένης ακολουθίας, δηλαδή το ανώτατο όριο (limes superior) και το κατώτατο όριο (limes inferior), αποτελούν γενικεύσεις του ορίου της ακολουθίας

και εφαρμόζονται για όλες τις φραγμένες ακολουθίες, ανεξάρτητα από την ύπαρξη ή όχι του ορίου. Ένα επιπλέον ισχυρό συμπέρασμα λοιπόν που προκύπτει από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών είναι ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων κάθε φραγμένης ακολουθίας δεν είναι κενό.

5.2.2.16 Ορισμός

Έστω (α_n), $n\in\mathbb{N}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. Το α καλείται υποακολουθιακό όριο της (α_n), $n\in\mathbb{N}$, όταν υπάρχει τουλάχιστον μία υπακολουθία της (α_n), $n\in\mathbb{N}$, η οποία έχει όριο το α.

Όταν η ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι φραγμένη, τότε από το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass υπάρχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υπακολουθία αυτής. Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε:

5.2.2.17 Ορισμός

Έστω (α_n), $n\in\mathbb{N}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών.

- Θέτουμε $\beta_n = \sup\{\alpha_n, \alpha_{n+1},...\}$, για n = 1, 2,.... και ορίζουμε ως ανώτατο όριο ή limes superior της (α_n), $n\in\mathbb{N}$ το $\limsup \alpha_n = \inf \beta_n$
- Θέτουμε $\gamma_n = \inf\{\alpha_n, \alpha_{n+1},...\}$, για n = 1, 2,.... και ορίζουμε ως κατώτατο όριο ή limes inferior της (α_n), $n\in\mathbb{N}$ το $\liminf \alpha_n = \sup \gamma_n$

Αν μία ακολουθία συγκλίνει στο $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία αυτής συγκλίνει επίσης στο α. Στην περίπτωση αυτή το ανώτατο όριο και το κατώτατο όριο ταυτίζονται και είναι ίσα με α.

5.2.3 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις συνεχείς Συναρτήσεις

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε ενδιαφέρουσες Προτάσεις – συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, που σχετίζονται με τη θεμελιώδη έννοια της συνάρτησης. Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια, η έννοια της συνάρτησης, παρά την κεντρική θέση που κατέχει στα Μαθηματικά, είναι εξαιρετικά γενική. Στον Απειροστικό Λογισμό ασχολούμαστε με κατηγορίες συναρτήσεων που έχουν χρήσιμες και επιθυμητές ιδιότητες, όπως οι κατηγορίες των συνεχών συναρτήσεων, των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων, των διαφορίσιμων συναρτήσεων και των κατά Riemann ολοκληρώσιμων

συναρτήσεων. (Α.Λ Ι, Σελ. 138) Σε αυτές τις κατηγορίες πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής θα εστιάσουμε στη συνέχεια.

Ας ξεκινήσουμε με ορισμένους βασικούς ορισμούς.

5.2.3.1 Ορισμός

Μία διμελής σχέση $f \subset X \times Y$ καλείται συνάρτηση από το X στο Y και συμβολίζεται $f : X \to Y$, αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει ένα μοναδικό $y \in Y$, ώστε $(x, y) \in f$ ή ισοδύναμα $f(x) = y$.

Το X καλείται πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Το σύνολο $f(X) = \{y \in Y$, ώστε υπάρχει $x \in X$, με $f(x) = y\}$ καλείται σύνολο τιμών της συνάρτησης.

Αν $x \in X$ και $f(x) = y$, τότε το y καλείται τιμή της συνάρτησης στο x.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$

Για λόγους πληρότητας του κειμένου θα παραθέσουμε ορισμένους ορισμούς.

5.2.3.2 Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Η f καλείται:

α) αύξουσα, αν για κάθε $x, y \in X$, με $x < y$ ισχύει $f(x) \leq f(y)$.

β) γνησίως αύξουσα, αν για κάθε $x, y \in X$, με $x < y$ ισχύει $f(x) < f(y)$.

γ) φθίνουσα, αν για κάθε $x, y \in X$, με $x < y$ ισχύει $f(x) \geq f(y)$.

δ) γνησίως φθίνουσα, αν για κάθε $x, y \in X$, με $x < y$ ισχύει $f(x) > f(y)$.

ε) μονότονη, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

στ) γνησίως μονότονη, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

5.2.3.3 Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Η f καλείται:

- άνω φραγμένη, όταν το σύνολο τιμών της $\{f(x), x \in X\}$ είναι άνω φραγμένο.
- κάτω φραγμένη, όταν το σύνολο τιμών της $\{f(x), x \in X\}$ είναι κάτω φραγμένο.
- φραγμένη, όταν το σύνολο τιμών της $\{f(x), x \in X\}$ είναι φραγμένο.

Είναι προφανές ότι, η συνάρτηση f είναι φραγμένη, αν και μόνο αν, υπάρχει πραγματικός αριθμός $M > 0$, τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in X$.

5.2.3.4 Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης της f, όταν για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in X$, ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$, ή ισοδύναμα, όταν υπάρχουν στοιχεία του X, διαφορετικά του x_0, οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο x_0.

Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X, τότε αποτελεί μεμονωμένο σημείο.

Ο ακόλουθος ορισμός αναφέρεται στο όριο μιας συνάρτησης.

5.2.3.5 Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X. Θα λέμε ότι η f έχει όριο το α, καθώς x τείνει στο x_0, όταν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε, για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Αντίστοιχα με τις ακολουθίες, αποδεικνύεται ότι το όριο μιας συνάρτησης, εάν υπάρχει, είναι μοναδικό. Θεωρούμε γνωστές όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων, καθώς και το κριτήριο παρεμβολής.

Να σημειώσουμε ότι η έννοια του ορίου εμπεριέχει μία πιο εξειδικευμένη έννοια, εκείνη του πλευρικού ορίου. Έτσι, όταν το x ανήκει σε περιοχή της μορφής $(x_0 - \delta, x_0)$ κάνουμε λόγο για το αριστερό πλευρικό όριο, ενώ όταν το x ανήκει σε περιοχή της μορφής $(x_0, x_0 + \delta)$ κάνουμε λόγο για το δεξί πλευρικό όριο. Προφανώς, για να υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης, καθώς το x τείνει στο x_0, θα πρέπει τα πλευρικά όρια της συνάρτησης να είναι ίσα.

Η σύνδεση του ορίου μιας συνάρτησης με το όριο μιας ακολουθίας οφείλεται στη σημαντική Αρχή της Μεταφοράς.

5.2.3.6 Θεώρημα (Αρχή της Μεταφοράς)

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ σημείο συσσώρευσης του X και ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, για την οποία ισχύει:

- $\alpha_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$
- $\alpha_n \to x_0$

Τότε ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$, αν και μόνο αν, $f(\alpha_n) \to \beta$.

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Έστω $\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$ και ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, για την οποία ισχύει $\alpha_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \to x_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ είναι $|f(x) - \beta| < \varepsilon$.

Επειδή $\alpha_n \to x_0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $|\alpha_n - x_0| < \delta$, για κάθε $n \geq n_0$

Άρα $|f(\alpha_n) - \beta| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $f(\alpha_n) \to \beta$.

" $\Leftarrow$" Έστω ότι, για κάθε ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, για την οποία είναι $\alpha_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \to x_0$ ισχύει $f(\alpha_n) \to \beta$. Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \beta$.

Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - \beta| > \varepsilon$. Αφού για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ και $| f(x) - \beta| > \varepsilon$, κατασκευάζουμε ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\alpha_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \to x_0$, για την οποία όμως δεν ισχύει $f(\alpha_n) \to \beta$, κάτι που είναι άτοπο. Άρα τελικά $\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$. □

Το επόμενο Θεώρημα αποτελεί μία έμμεση συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, αντίστοιχο του Βασικού Κριτηρίου σύγκλισης ακολουθιών και γενικεύεται στην ακόλουθη μορφή: *Κάθε μονότονη συνάρτηση έχει δεξί ή αριστερό πλευρικό όριο σε κάθε σημείο συσσώρευσής της.* Αν επιπλέον η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στο σημείο συσσώρευσης, τότε το όριό της είναι ένας πραγματικός αριθμός.

5.2.3.7 Θεώρημα – Βασικό Κριτήριο Σύγκλισης συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του X.

- Αν η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \sup \{f(x), x \in X\}$
- Αν η f είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \inf \{f(x), x \in X\}$

Απόδειξη

- Έστω ότι η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{f(x), x \in X\}$, το οποίο είναι μη κενό και άνω φραγμένο. Από το Αξίωμα της Πληρότητας προκύπτει ότι υπάρχει το supremum, έστω α, του A. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

  Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\alpha = \sup A$, ο αριθμός $\alpha - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της f, συνεπώς υπάρχει $x_1 \in X$, για το οποίο $\alpha - \varepsilon < f(x_1)$.
  Η f είναι αύξουσα, άρα για κάθε $x \in X$ με $x > x_1$, είναι $f(x) \geq f(x_1) > \alpha - \varepsilon$.
  Ταυτόχρονα όμως ισχύει $f(x) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$, για κάθε $x \in X$. Συνεπώς, $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$, για κάθε $x \in X$, ή ισοδύναμα $| f(x) - \alpha| < \varepsilon$, κοντά στο x_0. Άρα τελικά, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

- Αντίστοιχα στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. □

Για τις συναρτήσεις ισχύει το ακόλουθο Κριτήριο, αντίστοιχο του Κριτηρίου Cauchy για τις ακολουθίες.

5.2.3.8 Θεώρημα (αντίστοιχο του Κριτηρίου Cauchy για τις ακολουθίες)

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Η f έχει όριο πραγματικό αριθμό, καθώς $x \to x_0$, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε, για κάθε $x_1, x_2 \in X$, με $|x_1 - x_2| < \delta$, ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Έστω ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ και $\varepsilon > 0$.

Τότε, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$, ισχύει $|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $|x_1 - x_2| < \delta$ έχουμε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - \alpha| + |f(x_2) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $|x_1 - x_2| < \delta$, ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες $\alpha_n \neq x_0$ και $\alpha_n \to x_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και το αντίστοιχο δ. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n \in X$ με $|x - x_n| < \delta$, για κάθε $n \ge n_0$.

Άρα, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \ge n_0$, ισχύει $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, συνεπώς η ακολουθία $(f(x_n))$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει.

Από την Αρχή της μεταφοράς προκύπτει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ □

Ακολούθως θα μελετήσουμε τις συνεχείς και τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, καθώς και τη μεταξύ τους σχέση. Ας ξεκινήσουμε από τους ορισμούς των εννοιών.

5.2.3.9 Ορισμός

Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ και συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$

- Η f είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Η f είναι συνεχής στο X, αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Ισοδύναμα, για να είναι μία συνάρτηση συνεχής σε κάποιο x_0, που ανήκει στο πεδίο

ορισμού της, θα πρέπει να υπάρχει το όριο της, καθώς το x τείνει στο x_0 και να είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο x_0.

Το επόμενο Θεώρημα ανάγει την έννοια της συνέχειας στην έννοια του ορίου μιας ακολουθίας.

5.2.3.10 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_0, αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, με $\alpha_n \to x_0$, ισχύει $f(\alpha_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, ώστε $\alpha_n \to x_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$.

Για το συγκεκριμένο δ, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, είναι $|\alpha_n - x_0| < \delta$.

Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$, ισχύει $|f(\alpha_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Άρα τελικά $f(\alpha_n) \to f(x_0)$.

"$\Leftarrow$" Έστω ότι, για κάθε ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, με $\alpha_n \to x_0$, είναι $f(\alpha_n) \to f(x_0)$.

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε, για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Για $\delta = \frac{1}{n}$ έχουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in X$ με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, κάτι που είναι άτοπο. Άρα τελικά, η f είναι συνεχής στο x_0. □

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια της συνέχειας περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση:

5.2.3.11 Πρόταση

Έστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $x_0 \in X$. Τότε:

- Αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.
- Αν $f(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.

Απόδειξη

- Επειδή f συνεχής στο $x_0 \in X$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$, ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

  Εφαρμόζουμε τη συνθήκη για $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $x \in X$ με

$|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{f(x_0)}{2}$

Άρα $0 < \dfrac{f(x_0)}{2} < f(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.

- Αντίστοιχα, εφαρμόζουμε τη συνθήκη για $\varepsilon = -\dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. □

Επόμενη, επίσης ενδιαφέρουσα κατηγορία συναρτήσεων είναι εκείνη των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων. Η βασική διαφορά της έννοιας της ομοιόμορφης συνέχειας από την έννοια της συνέχειας, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια, είναι ότι:

> η πρώτη είναι σφαιρική, ολική έννοια ενώ η δεύτερη είναι τοπική. [...] Ο αριθμός $\delta > 0$ που υπάρχει στη συνέχεια εξαρτάται από το σημείο x, όπου η συνάρτηση υποτίθεται ότι είναι συνεχής και από την επιλογή του $\varepsilon > 0$, ενώ στην ομοιόμορφη συνέχεια το $\delta > 0$ εξαρτάται μόνο από την επιλογή του $\varepsilon > 0$ και ισχύει ταυτόχρονα για όλα τα σημεία x, όπου ορίζεται η συνάρτηση.
>
> (Α.Λ Ι, Σελ. 156)

Ας μελετήσουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας.

5.2.3.12 Ορισμός

Έστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση.

Η f καλείται ομοιόμορφα συνεχής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x, y \in X$ με $|x - y| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Το επόμενο Θεώρημα ανάγει την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας στην έννοια του ορίου ακολουθιών.

5.2.3.13 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$.

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αν και μόνο αν, για κάθε δύο ακολουθίες $(x_n), (y_n), n \in \mathbb{N}$ του X,

με $x_n - y_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, είναι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Οι έννοιες της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνάρτησης συνδέονται με την Πρόταση: *Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής.* Η απόδειξη της συγκεκριμένης Πρότασης είναι τετριμμένη και δεν θα την παραθέσουμε. Η αντίστροφη όμως Πρόταση, σύμφωνα με την οποία *κάθε συνεχής συνάρτηση είναι και ομοιόμορφα συνεχής*, δεν ισχύει γενικά, κάτι που επιβεβαιώνεται και από το επόμενο παράδειγμα συνεχούς, αλλά όχι ομοιόμορφα

συνεχούς συνάρτησης.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Θα δείξουμε ότι η f είναι:

- ***Συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.***

  Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, θα πρέπει, για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει $\delta > 0$ (εξαρτώμενο από το ε και το x_0), ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

  Θέτουμε $\delta = \min \left\{1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}\right\}$

  Είναι: $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| < \varepsilon$.

  Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

- ***Ομοιόμορφα συνεχής***

  Έστω $\delta > 0$.

  Για $y > \frac{1}{\delta}$, θέτουμε $x = y + \frac{\delta}{2}$ Τότε $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$,

  ενώ $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| = \frac{\delta}{2}\left(2y + \frac{\delta}{2}\right) > 1$.

  Άρα, για $\varepsilon = 1$, δεν υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $|x - y| < \delta$,

  να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, δηλαδή η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Οι έννοιες της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας συμπίπτουν στην περίπτωση πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων σε κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$, συμπέρασμα που προκύπτει από το περίφημο Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων, για το οποίο θα παραθέσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη αποτελεί άμεση εφαρμογή του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, ενώ η δεύτερη αποτελεί έμμεση εφαρμογή του, μέσω του Θεωρήματος Bolzano – Weierstrass.

5.2.3.14 Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη 1η

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x, y \in [\alpha,\beta]$

με $|x - y| < \delta$, ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε το σύνολο

$A=\{z \in [\alpha, \beta]$ ώστε υπάρχει $\delta > 0$ για το οποίο αν $x, y \in [\alpha, z]$ και $|x - y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$

Είναι:

- $\alpha \in A$, συνεπώς A μη κενό σύνολο.
- $A \subset [\alpha, \beta]$, άρα A φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\gamma = \sup A$. Προφανώς $\alpha \le \gamma \le \beta$.

Ισχυρισμός 1: $\gamma = \beta$

Έστω ότι $\gamma < \beta$. Η f είναι συνεχής στο γ, άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε, αν $y \in [\alpha, \beta]$, με $|\gamma - y| < \delta_1$,

τότε $|f(\gamma) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ Επιλέγουμε h, τέτοιο ώστε $\gamma < h < \gamma + \frac{\delta_1}{2}$

Επειδή $\gamma = \sup A$, υπάρχει $\eta \in A$ με $\gamma - \frac{\delta_1}{2} < \eta \le \gamma$.

Όμως $\eta \in A$, άρα υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $y_1, y_2 \in [\alpha, \eta]$, με $|y_1 - y_2| < \delta_2$ να ισχύει $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$.

Θέτουμε $\delta(h) = \min \left\{\delta_2, \frac{\delta_1}{2}\right\} > 0$ και έστω $y_1, y_2 \in [\alpha, h]$, με $|y_1 - y_2| < \delta(h)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $y_1 \le y_2$.

Αν $y_2 \le \eta$, τότε επειδή $|y_1 - y_2| < \delta(h) \le \delta_2$, άρα $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$.

Αν $y_2 > \eta$, τότε $|\gamma - y_2| < \frac{\delta_1}{2}$ και επειδή $|y_1 - y_2| < \delta(h) \le \frac{\delta_1}{2}$,

έχουμε $|\gamma - y_1| \le |\gamma - y_2| + |y_2 - y_1| < \delta_1$.

Συνεπώς $|\gamma - y_1| < \delta_1$ και $|\gamma - y_2| < \delta_1$, άρα $|f(y_1) - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|f(y_2) - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$,

δηλαδή τελικά $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$.

Ισχυρισμός 2: $\beta \in A$

Επειδή η f είναι συνεχής στο β υπάρχει $\delta_1 > 0$, ώστε αν $y \in [\alpha, \beta]$, με $|\beta - y| < \delta_1$,

είναι $|f(\beta) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Όμως $\beta = \sup A$, άρα υπάρχει $\theta \in A$, ώστε $\beta - \frac{\delta_1}{2} < \theta \le \beta$.

Επειδή $\theta \in A$, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε, αν $y_1, y_2 \in [\alpha, \theta]$, με $|y_1 - y_2| < \delta_2$ να ισχύει $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$.

Θέτουμε $\delta(\beta) = \min \left\{\delta_2, \frac{\delta_1}{2}\right\} > 0$.

Έστω $y_1, y_2 \in [\alpha, \beta]$, με $|y_1 - y_2| < \delta(\beta)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $y_1 \leq y_2$.

Αν $y_2 \leq \theta$, τότε επειδή $|y_1 - y_2| < \delta(\beta) \leq \delta_2$, άρα $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$.

Αν $y_2 > \theta$, τότε $\beta - y_2 < \frac{\delta_1}{2}$ και επειδή $y_2 - y_1 < \delta_2 \leq \frac{\delta_1}{2}$, έχουμε $\beta - y_2 + y_2 - y_1 < \delta_1$.

Άρα $|f(\beta) - f(y_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|f(\beta) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή τελικά $|f(y_2) - f(y_1)| < \varepsilon$.

Απόδειξη 2η

Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε, για $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\alpha_n, \beta_n \in [\alpha, \beta]$, με $|\alpha_n - \beta_n| < \frac{1}{n}$

και $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon$.

- Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass, υπάρχει (α_{n_k}) υπακολουθία της (α_n), $n \in \mathbb{N}$, η οποία συγκλίνει, έστω στο ξ. Είναι $\alpha \leq \alpha_{n_k} \leq \beta$, για κάθε k, άρα $\alpha \leq \xi \leq \beta$.
- Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass, υπάρχει (β_{n_k}) υπακολουθία της (β_n), $n \in \mathbb{N}$, η οποία συγκλίνει, έστω στο η. Είναι $\alpha \leq \beta_{n_k} \leq \beta$, για κάθε k, άρα $\alpha \leq \eta \leq \beta$.

Προφανώς $|\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}| < \frac{1}{n}$ για n =1, 2, …, άρα $\xi = \eta$.

Επειδή η f είναι συνεχής έχουμε $0 = |f(\xi) - f(\eta)| = \lim \left|f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})\right| \geq \varepsilon$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. □

Οι πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$ διαθέτουν μια σειρά από ενδιαφέρουσες ιδιότητες, τις οποίες θα μελετήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια. Τρεις από τις πλέον σημαντικές είναι:

- Κάθε συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ είναι φραγμένη.

  (Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης)

- Κάθε συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$.

  (Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης τιμής)

- Κάθε συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στα f(α) και f(β).

(Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)

Για καθένα από τα τρία παραπάνω Θεωρήματα, θα παραθέσουμε δύο αποδείξεις: η πρώτη απόδειξη αποτελεί άμεση εφαρμογή του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, ενώ η δεύτερη αποτελεί έμμεση εφαρμογή του, μέσω του Θεωρήματος Bolzano – Weierstrass. Άρα επιβεβαιώνεται πέρα από κάθε αμφιβολία ο κεντρικός ρόλος του Αξιώματος της Πληρότητας.

Ας τις μελετήσουμε αναλυτικά.

5.2.3.15 Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης

Έστω f: [α, β] → ℝ συνάρτηση συνεχής στο [α, β]. Τότε η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη 1η

Θεωρούμε το σύνολο A = {x∈[α, β] ώστε η f να είναι φραγμένη στο [α, x]}

Είναι:

- α∈A, συνεπώς A μη κενό σύνολο.
- A ⊆ [α,β], άρα A φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι υπάρχει γ∈ℝ,

ώστε γ = supA, με α ≤ γ ≤ β.

Ισχυρισμός 1. γ = β

Έστω γ < β. Επειδή η f είναι συνεχής στο γ, υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο διάστημα [γ – δ, γ + δ]. Όμως η f είναι φραγμένη στο [α, γ – δ], άρα η f είναι φραγμένη στο [α, γ + δ], κάτι που είναι άτοπο. Άρα γ = β.

Συνεπώς η f είναι φραγμένη σε κάθε διάστημα της μορφής [α, x] με x < β.

Ισχυρισμός 2. β∈A

Επειδή η f είναι συνεχής στο β, υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο [β – δ, β]. Όμως η f είναι φραγμένη στο [α, β – δ], άρα η f είναι φραγμένη στο [α, β].

Τελικά προκύπτει ότι η f είναι φραγμένη. □

Απόδειξη 2η

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε, για κάθε n∈ℕ υπάρχει α_n∈[α, β], ώστε $|f(\alpha_n)| > n$.

Συνεπώς για την ακολουθία (α_n), n∈ℕ ισχύει $|f(\alpha_n)| > n$, δηλαδή $|f(\alpha_n)| \to +\infty$ (1)

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass, υπάρχει (α_{n_k}) υπακολουθία της (α_n), $n\in\mathbb{N}$, η οποία συγκλίνει, έστω στο ξ.

Είναι $\alpha \le \alpha_{n_k} \le \beta$, για κάθε k, άρα $\alpha \le \xi \le \beta$.

Όμως η f είναι συνεχής στο ξ, άρα $f(\alpha_{n_k}) \to f(\xi)$, κάτι που είναι άτοπο λόγω της (1)

Άρα τελικά, η f είναι φραγμένη. □

5.2.3.16 Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης τιμής

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in[\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη 1η

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Από το Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης προκύπτει ότι η f είναι φραγμένη, άρα το σύνολο τιμών $A = \{f(x), \text{ με } x \in[\alpha, \beta]\}$ είναι φραγμένο. Είναι:

- $f(\alpha)\in A$, συνεπώς A μη κενό σύνολο.
- A φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι υπάρχει $\gamma\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\gamma = \sup A$. Προφανώς ισχύει $f(x) \le \gamma$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.

Υποθέτουμε ότι $f(x) < \gamma$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{1}{\gamma - f(x)}$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα από το Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης, η g είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει M ώστε $g(x) \le M$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.

Άρα ισχύει $\dfrac{1}{\gamma - f(x)} \le M$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ ή ισοδύναμα $f(x) \le \gamma - \dfrac{1}{M}$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.

Προκύπτει ότι, ο αριθμός $\gamma - \dfrac{1}{M}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου A, κάτι που είναι άτοπο, αφού $\gamma = \sup A$. Συνεπώς, υπάρχει αριθμός $x_2\in[\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_2) = \gamma$, οπότε $f(x) \le f(x_2)$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.

Αντίστοιχα, αν δ είναι το infimum του συνόλου $A =\{f(x), \text{ με } x\in[\alpha, \beta]\}$, προκύπτει ότι υπάρχει $x_1\in[\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_1) = \delta$, οπότε $f(x_1) \le f(x)$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$. □

Απόδειξη 2η

Έστω f: [α, β] → ℝ συνεχής στο [α, β]. Από το Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης, η f είναι φραγμένη, άρα το σύνολο τιμών A = {f (x), με x∈[α, β]} είναι φραγμένο. Το A είναι μη κενό σύνολο, άρα από το Αξίωμα της Πληρότητας έχει supremum, έστω το γ.

Για κάθε n∈ℕ, ο αριθμός $\gamma - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, άρα υπάρχει $\alpha_n \in [\alpha, \beta]$,

τέτοιο ώστε $\gamma - \frac{1}{n} < f(\alpha_n)$.

Επειδή ο γ είναι άνω φράγμα του A είναι $\gamma - \frac{1}{n} < f(\alpha_n) \leq \gamma$, για κάθε n∈ℕ,

συνεπώς $f\left(\alpha_{n_k}\right) \to \gamma$ (1)

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass, υπάρχει $\left(\alpha_{n_k}\right)$ υπακολουθία της (α_n), n∈ℕ

η οποία συγκλίνει, έστω στο δ. Επειδή $\alpha_{n_k} \in [\alpha, \beta]$, για κάθε k, ισχύει δ ∈[α, β].

Η f είναι συνεχής στο δ, άρα $f\left(\alpha_{n_k}\right) \to f(\delta)$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι f(δ) = γ, συνεπώς f (x) ≤ f (δ), για κάθε x∈[α, β].

Αντίστοιχα αν θεωρήσουμε το infimum του συνόλου A. □

5.2.3.17 Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Έστω f: [α, β] → ℝ συνάρτηση συνεχής στο [α, β]. Τότε, για κάθε n ανάμεσα στα f(α) και f(β) υπάρχει ξ∈[α, β], ώστε f(ξ) = n.

Απόδειξη 1η

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι f(α) < f(β). Επειδή n ανάμεσα στα f(α) και f(β), είναι f(α) ≤ n ≤ f(β).

Θεωρούμε το σύνολο A = {x∈[α, β], ώστε f(x) ≤ n}

- β∈A, συνεπώς A μη κενό σύνολο.
- A ⊆ [α, β], άρα A φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι υπάρχει ξ∈ℝ,

ώστε ξ = supA. Προφανώς ξ∈[α, β] και A ⊆ [α, ξ].

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω $f(\xi) > n$.

Τότε προφανώς $\xi \in (\alpha, \beta]$ και επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει $\gamma \in [\alpha, \xi)$,

ώστε $f(x) > n$, για κάθε $x \in (\gamma, \xi]$. Από αυτό καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $A \subseteq [\alpha, \gamma]$, κάτι που είναι άτοπο. Άρα τελικά ισχύει $f(\xi) \leq n$. (1)

2η περίπτωση: Έστω $f(\xi) < n$.

Τότε προφανώς $\xi \in [\alpha, \beta)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο ξ υπάρχει $\gamma \in (\xi, \beta]$,

ώστε $f(x) < n$, για κάθε $x \in [\xi, \gamma)$. Από αυτό καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $[\xi, \gamma) \subseteq A$, κάτι που είναι άτοπο. Άρα τελικά ισχύει $f(\xi) \geq n$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(\xi) = n$, δηλαδή υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(\xi) = n$. □

Απόδειξη 2η

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Επειδή το n περιέχεται ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, είναι $f(\alpha) \leq n \leq f(\beta)$.

Θέτουμε $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$.

Βήμα 1: Διαιρούμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ στα ισομήκη διαστήματα

$$[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}] \text{ και } [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha) \leq n \leq f(\frac{\alpha+\beta}{2})$, τότε θέτουμε $\alpha_1 = \alpha$ και $\beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$
- Αν $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \leq n \leq f(\beta)$, τότε θέτουμε $\alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\beta_1 = \beta$.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν:

- $[\alpha_1, \beta_1] \subseteq [\alpha, \beta]$
- $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta-\alpha}{2}$
- $f(\alpha_1) \leq n \leq f(\beta_1)$

Βήμα 2: Διαιρούμε το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ στα ισομήκη διαστήματα

$[\alpha_{1,} \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]$ και $[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1]$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha_1) \leq n \leq f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})$ τότε θέτουμε $\alpha_2 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$
- Αν $f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}) \leq n \leq f(\beta_1)$, τότε θέτουμε $\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ και $\beta_2 = \beta_1$.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν:

- $[\alpha_2, \beta_2] \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$
- $\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$
- $f(\alpha_2) \leq n \leq f(\beta_2)$

Συνεχίζουμε επαγωγικά, θεωρώντας σε κάθε βήμα το μέσο του προηγούμενου διαστήματος. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μια ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_n, \beta_n]$ για τα οποία ισχύουν:

- $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subseteq [\alpha_n, \beta_n]$
- $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{\beta_n-\alpha_n}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2^n}$, συνεπώς $\beta_n - \alpha_n \to 0$
- $f(\alpha_{n+1}) \leq n \leq f(\beta_{n+1})$

Από την Αρχή του Κιβωτισμού, υπάρχει μοναδικός $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $\cap [\alpha_n, \beta_n] = \{\xi\}$,

όπου $\alpha_n \to \xi$ και $\beta_n \to \xi$.

Όμως η f είναι συνεχής, άρα $f(\xi) = \lim f(\alpha_n) \leq n \leq \lim f(\beta_n) = f(\xi)$.

Άρα τελικά ισχύει $f(\xi) = n$. □

Σύμφωνα με το επόμενο Θεώρημα, το οποίο αποτελεί συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, η εικόνα ενός διαστήματος, μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης, είναι επίσης διάστημα.

5.2.3.18 Θεώρημα

Έστω X διάστημα των πραγματικών αριθμών και συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο X, τότε και το σύνολο τιμών της $f(X) = \{f(x), x \in X\}$ είναι επίσης διάστημα.

Απόδειξη

Έστω $f(x_1), f(x_2) \in f(X)$ με $f(x_1) \leq f(x_2)$ και τυχαίο y, τέτοιο ώστε $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$. Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών προκύπτει ότι, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = y$. Άρα τελικά, το f(X) είναι διάστημα. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών με το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα.

5.2.3.19 Πόρισμα

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Η εικόνα $f([\alpha, \beta])$ του κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ είναι το διάστημα $[m, M]$, όπου $m=\inf\{f(x), \text{ με } x\in[\alpha, \beta]\}$ και $M=\sup\{f(x), \text{ με } x\in[\alpha, \beta]\}$.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής προκύπτει ότι, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$,

ώστε $m = f(x_1) \leq f(x_2) = M$, συνεπώς $f([\alpha, \beta]) \subset [m, M]$.

Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών προκύπτει ότι, για κάθε $m \leq y \leq M$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$,

τέτοιο ώστε $f(\xi) = y$, άρα $[m, M] \subset f([\alpha, \beta])$.

Άρα τελικά ισχύει $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$. □

Ας περάσουμε τώρα στο περίφημο Θεώρημα Bolzano, με το οποίο αποδεικνύεται η ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου μηδενισμού μιας συνάρτησης σε ένα ανοικτό διάστημα, όταν η συνάρτηση πληροί συγκεκριμένες συνθήκες. Για το Θεώρημα Bolzano θα παρουσιάσουμε τρεις αποδείξεις. Η πρώτη αποτελεί άμεση εφαρμογή του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, η δεύτερη αποτελεί έμμεση εφαρμογή μέσω του Θεωρήματος Bolzano –Weierstrass, ενώ η τρίτη αποτελεί εφαρμογή του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών.

Ας τις μελετήσουμε.

5.2.3.20 Θεώρημα Bolzano

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Απόδειξη 1η

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x\in[\alpha, \beta] : f(y) < 0, \text{ για κάθε } y\in[\alpha, x]\}$

- $\alpha \in A$, συνεπώς A μη κενό σύνολο.

- $A \subseteq [\alpha, \beta]$, άρα A φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$

ώστε $\xi = \sup A$. Προφανώς $\alpha < \xi < \beta$.

Ισχυρισμός 1: Είναι $f(\xi) \geq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $f(\xi) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ και $\alpha < \xi < \beta$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ ισχύει $f(x) < 0$.

Τότε όμως $f(x) < 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \xi + \frac{\delta}{2}]$ δηλαδή $\xi + \frac{\delta}{2} \in A$, ενώ $\xi + \frac{\delta}{2} > \xi$, κάτι που είναι άτοπο.

Ισχυρισμός 2: Είναι $f(\xi) \leq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $f(\xi) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ και $\alpha < \xi < \beta$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ ισχύει $f(x) > 0$.

Τότε όμως $f\left(\xi - \frac{\delta}{2}\right) > 0$ και άρα $\xi - \frac{\delta}{2} \notin A$, κάτι που είναι άτοπο. Άρα τελικά $f(\xi) = 0$. □

Απόδειξη 2η

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in [\alpha, \beta] : f(x) < 0\}$

- $\alpha \in A$, συνεπώς A μη κενό σύνολο.
- $A \subseteq [\alpha, \beta]$, άρα A φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο

ώστε $\xi = \sup A$. Προφανώς $\alpha < \xi < \beta$.

Για κάθε $n = 1, 2,...$ έχουμε $\xi - \frac{1}{n} < \xi$, συνεπώς υπάρχει $x_n \in A$, έτσι ώστε $\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi$.

Προφανώς $f(x_n) < 0$ και $x_n \to \xi$, καθώς $n \to \infty$

Επειδή η f είναι συνεχής προκύπτει ότι $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, συνεπώς $f(\xi) \leq 0$ (1)

Θέτουμε $y_n = \min\{\beta, \xi + \frac{1}{n}\}$ $n = 1, 2,...$ Επειδή $\xi \leq y_n \leq \xi + \frac{1}{n}$ έπεται ότι $y_n \to \xi$, καθώς $n \to \infty$

και $y_n \notin A$.

Όμως $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ συνεπώς $f(\xi) \geq 0$ (2)

Άρα τελικά, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(\xi) = 0$.

Απόδειξη 3η

Επειδή $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi) = 0$.□

Η τρίτη απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano αποτελεί, όπως είδαμε, μία εξαιρετικά απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών. Μπορούμε όμως να κινηθούμε αντίστροφα, δηλαδή να αποδείξουμε πρώτα το Θεώρημα Bolzano και με βάση αυτό να αποδείξουμε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη αποδείξει το Θεώρημα Bolzano, είτε εφαρμόζοντας άμεσα το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, είτε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass. Η απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών ως συνέπεια του Θεωρήματος Bolzano είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (απόδειξη ως συνέπεια του Θεωρήματος Bolzano)

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\theta \in \mathbb{R}$.

- Αν $f(\alpha) < \theta < f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = \theta$.
- Αν $f(\beta) < \theta < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = \theta$.

Απόδειξη

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \theta$.
  Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $g(\alpha) < 0 < g(\beta)$.
  Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $g(\theta) = 0$ ή ισοδύναμα
  $f(\xi) - \theta = 0$, δηλαδή τελικά $f(\xi) = \theta$.
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = -f(x) + \theta$.
  Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $g(\alpha) < 0 < g(\beta)$.
  Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $g(\theta) = 0$ ή ισοδύναμα
  $-f(\xi) + \theta = 0$, δηλαδή τελικά $f(\xi) = \theta$. □

Ενδιαφέρουσα συνέπεια του Θεωρήματος Bolzano αποτελεί η διατήρηση σταθερού προσήμου κάθε συνεχούς συνάρτησης, η οποία δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα.

5.2.3.21 Ιδιότητα Σταθερού Προσήμου Έστω $f: X \to \mathbb{R}$, όπου X διάστημα και f συνεχή συνάρτηση στο X. Αν $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in X$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο X, δηλαδή, είτε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in X$, είτε $f(x) < 0$, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Χ, δηλαδή υπάρχουν α, $\beta \in X$ με $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ισχύει $\alpha < \beta$.

- Το [α, β] είναι υποσύνολο του Χ και επειδή η f είναι συνεχής στο Χ συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο [α, β].
- Ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq X$, ώστε $f(\xi) = 0$, κάτι που είναι άτοπο, αφού $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in X$.

Άρα τελικά, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Χ. □

5.2.4 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Ολοκληρωτικό Λογισμό

Η επόμενη κατηγορία συναρτήσεων για την οποία θα παραθέσουμε θεωρήματα και ιδιότητες, που προκύπτουν άμεσα ή έμμεσα από το Αξιώμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, είναι εκείνη των ολοκληρώσιμων, κατά Riemann, συναρτήσεων. Αφετηρία της μελέτης μας θα αποτελέσουν ορισμένοι βασικοί ορισμοί.

5.2.4.1 Ορισμός

Έστω $\alpha \leq \beta$. Ονομάζουμε διαμέριση *P* του διαστήματος [α, β] ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων του [α, β], ένα από τα οποία είναι το α και ένα από τα οποία είναι το β, δηλαδή ένα σύνολο της μορφής $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta\}$

5.2.4.2 Ορισμός

Έστω φραγμένη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ διαμέριση του [α, β].

Θέτουμε $m_i = \inf \{f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ και $M_i = \sup \{f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$, για i=1,2,...n

Ορίζουμε ως κάτω άθροισμα της f ως προς τη διαμέριση *P* τον αριθμό $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$

Ορίζουμε ως άνω άθροισμα της f ως προς τη διαμέριση *P* τον αριθμό $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$

Να παρατηρήσουμε ότι απαραίτητη συνθήκη για να ορίζονται το κάτω και το άνω άθροισμα

μιας συνάρτησης f ως προς διαμέριση P του [α, β], είναι η f να είναι φραγμένη συνάρτηση.

Στο επόμενο Λήμμα αποδεικνύεται ότι το κάτω άθροισμα μιας συνάρτησης f ως προς διαμέριση P του [α, β], δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο άνω άθροισμα.

5.2.4.3 Λήμμα

Έστω φραγμένη συνάρτηση f: [α, β]→ ℝ και $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ διαμέριση του [α, β]. Τότε ισχύει $L(f, P) \leq U(f, P)$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό των $m_i = \inf \{f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ και $M_i = \sup \{f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$, προκύπτει ότι $m_i \leq M_i$, για i=1,2,...n.

Συνεπώς είναι:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = U(f, P) \square$$

Μία απλή παρατήρηση που προκύπτει εύλογα από τους ορισμούς είναι ότι για κάθε διαμέριση P του [α, β], θέτοντας m = inf f ([α, β]) και M = sup f ([α, β]), έχουμε:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= M(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \ldots + t_n - t_{n-1}) = M(t_n - t_0) = M(\beta - \alpha)$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m(t_i - t_{i-1}) = m\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= m(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \ldots + t_n - t_{n-1}) = m(t_n - t_0) = m(\beta - \alpha)$$

Άρα τελικά ισχύει $m(\beta - \alpha) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(\beta - \alpha)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία των κάτω και άνω αθροισμάτων της f ως προς διαμέριση P του [α, β], στην περίπτωση που η f είναι μη αρνητική, είναι η εξής:

- το κάτω άθροισμα $L(f, P)$ είναι ίσο με το εμβαδόν της ένωσης όλων των ορθογωνίων με βάση $t_i - t_{i-1}$ και ύψος το $\inf f([t_{i-1}, t_i])$, όπου i = 1, 2,...n.
- το άνω άθροισμα $U(f, P)$ είναι ίσο με το εμβαδόν της ένωσης όλων των ορθογωνίων με βάση $t_i - t_{i-1}$ και ύψος το $\sup f([t_{i-1}, t_i])$, όπου i = 1, 2,...n.

Οι διαμερίσεις ενός διαστήματος [α, β] μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους με εφαρμογή του επόμενου ορισμού.

5.2.4.4 Ορισμός

Έστω P και Q διαμερίσεις του [α, β]. Η Q είναι λεπτότερη της P, αν κάθε σημείο της P ανήκει στην Q, δηλαδή αν $P \subset Q$, ως πεπερασμένα υποσύνολα του [α, β].

Ακολουθούν θεωρήματα σχετικά με τις διαμερίσεις ενός διαστήματος [α, β].

5.2.4.5 Θεώρημα

Αν P και Q διαμερίσεις του [α, β], τότε υπάρχει διαμέριση του [α, β], η οποία είναι λεπτότερη τόσο της P, όσο και της Q.

Απόδειξη

Έστω P και Q διαμερίσεις του [α, β]. Προφανώς, η διαμέριση $R = P \cup Q$ είναι λεπτότερη τόσο από τη διαμέριση P, όσο και από τη διαμέριση Q. □

5.2.4.6 Λήμμα

Έστω f: [α, β] → ℝ μια φραγμένη συνάρτηση και P, Q διαμερίσεις του [α, β], τέτοιες ώστε $P \subset Q$. Τότε $L(f, P) \le L(f, Q) \le U(f, Q) \le U(f, P)$.

Απόδειξη

Από προηγούμενο Θεώρημα ισχύει $L(f, Q) \le U(f, Q)$. Για να αποδείξουμε τη ζητούμενη σχέση, αρκεί να αποδείξουμε ότι $U(f, Q) \le U(f, P)$, όταν $Q = P \cup \{t\}$, όπου $t \in [\alpha, \beta]$ και $t \notin P$. Η γενική περίπτωση όπου $P \subset Q$ αποδεικνύεται επαγωγικά.

Έστω $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ μια διαμέριση του [α, β].

Επειδή $Q = P \cup \{t\}$, με $t \in [\alpha, \beta]$ και $t \notin P$, υπάρχει μοναδικός δείκτης k με $0 \le k \le n$, τέτοιος ώστε $t_{k-1} < t < t_k$. Άρα $Q = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t < t_k < \ldots < t_n = \beta\}$

Συνεπώς:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sup f([t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) = (t_k - t_{k-1}) \cdot \sup f([t_{k-1}, t_k]) + \sum_{i \ne k} (t_i - t_{i-1}) \sup f([t_{i-1}, t_i])$$

$$= (t_k - t) \sup f([t_{k-1}, t_k]) + (t - t_{k-1}) \cdot \sup f([t_{k-1}, t_k]) + \sum_{i \ne k} (t_i - t_{i-1}) \sup f([t_{i-1}, t_i]) \ge$$

$$\ge (t_k - t) \sup f([t, t_k]) + (t - t_{k-1}) \cdot \sup f([t_{k-1}, t]) + \sum_{i \ne k} (t_i - t_{i-1}) \sup f([t_{i-1}, t_i])$$

$$= U(f, Q). \ \square$$

Από το επόμενο θεώρημα προκύπτει ότι, το κάτω άθροισμα, ως προς οποιαδήποτε

διαμέριση του [α, β] είναι πάντα μικρότερο ή ίσο από το άνω άθροισμα, ως προς οποιαδήποτε διαμέριση του [α, β].

5.2.4.7 Θεώρημα

Έστω f: [α, β]→ ℝ μια φραγμένη συνάρτηση και *P, Q* διαμερίσεις του [α, β].

Τότε ισχύει $L(f, P) \leq U(f, Q)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διαμέριση $R = P \cup Q$. Η R είναι λεπτότερη τόσο από την P όσο και από την Q. Συνεπώς έχουμε $L(f, P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f, Q)$. □

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για μια φραγμένη συνάρτηση f: [α, β]→ ℝ, τα σύνολα

- $A = \{U(f, Q)$: Q διαμέριση του [α, β]$\}$
- $B = \{L(f, P)$: P διαμέριση του [α, β]$\}$

είναι μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του ℝ.

Από το Αξιώμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, υπάρχει το inf A και το sup B, για τα οποία ισχύει sup B ≤ inf A

Είμαστε έτοιμοι να παραθέσουμε τον ορισμό του άνω και του κάτω ολοκληρώματος μιας φραγμένης συνάρτησης.

5.2.4.8 Ορισμός

Έστω f: [α, β] → ℝ μια φραγμένη συνάρτηση. Ορίζουμε ως:

- κάτω ολοκλήρωμα Riemann της συνάρτησης f στο [α, β] και συμβολίζουμε $\underline{\int_\alpha^\beta} f$ τον αριθμό sup $\{L(f, P)$: P διαμέριση του [α, β]$\}$.

  Είναι δηλαδή $\underline{\int_\alpha^\beta} f = \sup \{L(f, P)$: P διαμέριση του [α, β]$\}$.

- άνω ολοκλήρωμα Riemann της συνάρτησης f στο [α, β] και συμβολίζουμε $\overline{\int_\alpha^\beta} f$ τον αριθμό inf $\{U(f, Q)$: Q διαμέριση του [α, β]$\}$.

  Είναι δηλαδή $\overline{\int_\alpha^\beta} f = \inf \{U(f, Q)$: Q διαμέριση του [α, β]$\}$.

Το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο [α, β] συνδέονται προφανώς με τη σχέση

$$\underline{\int_\alpha^\beta} f \leq \overline{\int_\alpha^\beta} f$$

5.2.4.9 Ορισμός

Έστω f: [α, β] → ℝ μια φραγμένη συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη ή ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο [α, β], αν το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα της f στο [α, β] είναι ίσα, δηλαδή αν ισχύει $\underline{\int_\alpha^\beta f} = \overline{\int_\alpha^\beta f}$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β], τότε ορίζουμε ως ολοκλήρωμα ή ολοκλήρωμα Riemann της f στο [α, β] τον μοναδικό αριθμό $\underline{\int_\alpha^\beta f} = \overline{\int_\alpha^\beta f}$, τον οποίο συμβολίζουμε $\int_\alpha^\beta f$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Παρατηρούμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β], τότε το $\int_\alpha^\beta f$ είναι ο μοναδικός αριθμός με την ιδιότητα $L(f, P) \le \int_\alpha^\beta f \le U(f, P)$, για κάθε διαμέριση P του [α, β].

Ειδική περίπτωση του ορισμού του ολοκληρώματος είναι όταν α = β. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μοναδική διαμέριση P του [α, β], η P = {α}.

Θέτοντας $m_1 = M_1 = f(\alpha)$ προκύπτει ότι $L(f, P) = U(f, P) = 0$, συνεπώς $\int_\alpha^\alpha f = 0$.

Ένα παράδειγμα ορισμένου ολοκληρώματος με ιδιαίτερη βαρύτητα είναι το $2\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Η τιμή του συγκεκριμένου ολοκληρώματος δεν είναι άλλη από τον γνωστό υπερβατικό αριθμό π, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει η δυνατότητα ορισμού του αριθμού π ως συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Επιστρέφουμε στα θεωρήματα που σχετίζονται με τις κατά Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

5.2.4.10 Πρόταση – Κριτήριο Riemann

Έστω f: [α, β]→ ℝ μια φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β], αν και μόνο αν, για κάθε ε > 0, υπάρχει διαμέριση P του [α, β], τέτοια ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Απόδειξη

" ⇒" Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] και ε > 0.

Από τη χαρακτηριστική ιδιότητα του infimum, υπάρχει διαμέριση R του [α, β], τέτοια ώστε

$$U(f, R) < \int_\alpha^\beta f + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_\alpha^\beta f} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Από τη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum υπάρχει διαμέριση Q του [α, β], τέτοια ώστε

$L(f, Q) > \int_\alpha^\beta f - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_\alpha^\beta} f - \frac{\varepsilon}{2}$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = Q \cup R$, για την οποία ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, Q) \le L(f, P) \le U(f, P) \le U(f, R) < \int_\alpha^\beta f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Συνεπώς για τη διαμέριση P ισχύει $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Για κάθε διαμέριση P του $[\alpha, \beta]$ είναι $L(f, P) \le \underline{\int_\alpha^\beta} f \le \overline{\int_\alpha^\beta} f \le U(f, P)$.

Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$, είναι $\overline{\int_\alpha^\beta} f - \underline{\int_\alpha^\beta} f \le U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Άρα $\overline{\int_\alpha^\beta} f = \underline{\int_\alpha^\beta} f$ ή ισοδύναμα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$. □

Η ολοκληρωσιμότητα στο $[\alpha, \beta]$ μιας φραγμένης συνάρτησης f είναι δυνατό να αποδειχθεί, με ταυτόχρονο υπολογισμό της τιμής του ολοκληρώματος, με τη χρήση μιας ακολουθίας διαμερίσεων του $[\alpha, \beta]$.

5.2.4.11 Πόρισμα

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν υπάρχει μια ακολουθία διαμερίσεων (P_n), $n \in \mathbb{N}$ του $[\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}(U(f, P_n) - L(f, P_n)) = 0$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$

και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$

Ας περάσουμε σε βασικά θεωρήματα, η εφαρμογή των οποίων εξασφαλίζει την ολοκληρωσιμότητα συγκεκριμένων συναρτήσεων. Το πρώτο από αυτά είναι μάλλον τετριμμένο και παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.2.4.12 Θεώρημα

Έστω f, g συναρτήσεις ολοκληρώσιμες σε διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε:

1. Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma, \delta]$, όπου $\alpha \le \gamma \le \delta \le \beta$.
2. Η συνάρτηση $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει

   $$\int_\alpha^\beta [f(x) + g(x)]\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

3. Η συνάρτηση λf, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει

   $$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

4. Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].
5. Η συνάρτηση f^n, όπου $n \in \mathbb{N}$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].
6. Η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].
7. Αν επιπλέον $|f(x)| > \delta > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].

Τα επόμενα Θεωρήματα εξασφαλίζουν την ολοκληρωσιμότητα μαθηματικά σημαντικών συναρτήσεων, μεταξύ των οποίων οι μονότονες, οι κατά τμήματα μονότονες και οι συνεχείς συναρτήσεις.

5.2.4.13 Θεώρημα

Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια μονότονη συνάρτηση, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$, για κάθε $\alpha \le x \le \beta$, η f είναι φραγμένη συνάρτηση.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό $n \ge 1$, τέτοιος ώστε $\frac{\beta-\alpha}{n}(f(\beta) - f(\alpha)) < \varepsilon$.

Θεωρούμε διαμέριση $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$, με $t_i = \alpha + \frac{(\beta-\alpha)i}{n}$, για $i = 0,1,\ldots n$.

Σε κάθε διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$, είναι $m_i = f(t_{i-1})$ και $M_i = f(t_i)$, για $i=1,2,\ldots n$.

Άρα:

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) =$$

$$\frac{(\beta-\alpha)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) =$$

$$\frac{(\beta-\alpha)}{n}(f(\beta) - f(\alpha)) < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο Riemann προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β]. □

Γενικεύοντας την κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, θα αποδείξουμε ότι, οι κατά τμήματα μονότονες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Ας μελετήσουμε αρχικά τον ορισμό.

5.2.4.14 Ορισμός

Έστω συνάρτηση f: [α, β] → ℝ. Η f καλείται κατά τμήματα μονότονη, αν υπάρχει διαμέριση

$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ του [α, β], τέτοια ώστε η f να είναι μονότονη σε κάθε διάστημα της μορφής $[t_{i-1}, t_i]$, για i = 1,2,...n.

5.2.4.15 Θεώρημα

Αν f: [α, β]→ ℝ μία κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].

Απόδειξη

Επειδή η f είναι κατά τμήματα μονότονη, υπάρχει διαμέριση $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ του [α, β], τέτοια ώστε, η f να είναι μονότονη σε κάθε διάστημα της μορφής $[t_{i-1}, t_i]$, για i = 1,2,...n.

Από το προηγούμενο Θεώρημα, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[t_{i-1}, t_i]$, για i = 1,2,...n. Γενικεύοντας την ιδιότητα της προσθετικότητας που πληροί το ολοκλήρωμα Riemann, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β]. □

Όλες οι κλασικές συναρτήσεις, όπως οι πολυωνυμικές, οι ρητές, οι λογαριθμικές, οι εκθετικές, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές συναρτήσεις, είναι κατά τμήματα μονότονες στο πεδίο ορισμού τους, συνεπώς είναι ολοκληρώσιμες. Η κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων διευρύνεται περαιτέρω με το επόμενο Θεώρημα, από το οποίο προκύπτει ότι όλες οι συνεχείς σε κλειστό διάστημα συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.

5.2.4.16 Θεώρημα

Αν f: [α, β]→ ℝ μια συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].

Απόδειξη

Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], από το Θεμελιώδες Θεώρημα συνεχών συναρτήσεων προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο [α, β], ενώ από το Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης προκύπτει ότι είναι φραγμένη.

Έστω ε > 0. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο [α, β], υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε για κάθε x, y∈[α, β] με |x – y| < δ, ισχύει |f (x) – f (y)| < ε (1)

Επιλέγουμε διαμέριση $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ του [α, β], τέτοια ώστε $t_i - t_{i-1} < \delta$, για i = 1,2,...n.

Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], άρα θα είναι συνεχής και σε κάθε διάστημα της μορφής $[t_{i-1}, t_i]$,

για i = 1,2,...n. Από το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής, υπάρχουν ξ_i, $n_i \in [t_{i-1}, t_i]$,

ώστε $f(\xi_i)$ και $f(n_i)$ να είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[t_{i-1}, t_i]$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $|f(n_i) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon$, για i = 1,2,...n.

Είναι:

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (f(n_i) - f(\xi_i))(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) =$$

$$\varepsilon (\beta - \alpha)$$

Από το κριτήριο Riemann προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β]. □

Θα κλείσουμε την παρούσα παράγραφο παρουσιάζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, καθώς και ένα ενδιαφέρον Πόρισμα αυτού. Η απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού αποτελεί ουσιαστικά συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών.

5.2.4.17 Θεώρημα (Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Έστω f: [α, β]→ ℝ μια συνεχής συνάρτηση και g: [α, β]→ ℝ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο [α, β] με $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε, υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Απόδειξη

Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], θα είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β], συνεπώς η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].

Έστω: $m = \inf \{f(x), x \in [\alpha, \beta]\}$

$M = \sup \{f(x), x \in [\alpha, \beta]\}$

Είναι: $m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$, συνεπώς

$$m \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx \leq M \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = 0$, επιλέγουμε τυχαίο $\xi \in [\alpha, \beta]$.

- Αν $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx \neq 0$, τότε η (1) γίνεται $m \leq \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx} \leq M$ (2)

Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, προκύπτει ότι,

υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx}$,

άρα τελικά, υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$ □

5.2.4.18 Πόρισμα

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)\,(\beta - \alpha).$$

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού για τη συνάρτηση $g(x) = 1$. □

5.2.5 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Διαφορικό Λογισμό

Επόμενη σημαντική κατηγορία συναρτήσεων για την οποία θα παραθέσουμε θεωρήματα και ιδιότητες, που αποτελούν άμεσες ή έμμεσες συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, είναι εκείνη των παραγωγίσιμων ή διαφορίσιμων συναρτήσεων. Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια:

> ο Διαφορικός Λογισμός, εκτός από τη θεμελιώδη σημασία που έχει από μόνος του, είναι εντελώς απαραίτητος για την περαιτέρω ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού [...] το (πρώτο) θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, το κλειδί για την παραπέρα ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού και γενικότερα του Απειροστικού Λογισμού χρησιμοποιεί στη διατύπωσή του την έννοια της διαφόρισης. (Α.Λ Ι, Σελ. 320)

Για λόγους πληρότητας του κειμένου, παραθέτουμε κάποιους ορισμούς.

5.2.5.1 Ορισμός

Έστω συνάρτηση f: X → ℝ και $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Η f είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο x_0, αν υπάρχει στο ℝ το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Το όριο αυτό καλείται παράγωγος στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

Να σημειώσουμε ότι η έκφραση "υπάρχει το όριο" έχει την έννοια ότι τα πλευρικά όρια του λόγου $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός.

5.2.5.2 Ορισμός

Έστω f: X → ℝ. Θεωρούμε το σύνολο, έστω B, όλων των $x \in X$, για τα οποία υπάρχει στο ℝ το $f'(x)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f': B \to \mathbb{R}$, η οποία αντιστοιχεί κάθε x στο αντίστοιχο $f'(x)$. Η συνάρτηση αυτή καλείται παράγωγος της f.

Ανάλογα ορίζονται και οι παράγωγοι ανώτερης τάξεως της f. Συγκεκριμένα, ορίζεται η δεύτερη παράγωγος f'' της f, ως η παράγωγος της f' και η n –οστή παράγωγος της f από τον αναδρομικό τύπο $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, για $n \geq 3$.

Θεωρούμε γνωστούς τους τύπους των παραγώγων των γνωστών συναρτήσεων, καθώς και τους κανόνες παραγώγισης.

Το επόμενο Θεώρημα συνδέει την έννοια της παραγωγισιμότητας με την έννοια της συνέχειας.

5.2.5.3 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, υπάρχει στο ℝ το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Είναι:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)-f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} [\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.(x-x_0)] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x-x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Άρα τελικά ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι και συνεχής στο x_0. □

Να παρατηρήσουμε ότι το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν είναι απαραίτητα αληθές. Πράγματι, η συνάρτηση f, με f(x) = |x| είναι συνεχής, αλλά όπως εύκολα αποδεικνύεται δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Πριν μελετήσουμε το Θεώρημα (ή Αρχή) του Fermat, θα παραθέσουμε τους ορισμούς των τοπικών ακροτάτων.

5.2.5.4 Ορισμός

Έστω συνάρτηση f: X $\to \mathbb{R}$ και $\xi \in X$. Θα λέμε ότι:

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ, το f(ξ), όταν υπάρχει δ > 0, ώστε f(x) ≤ f(ξ), για κάθε $x \in X \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ, το f(ξ), όταν υπάρχει δ > 0, ώστε f(x) ≥ f(ξ), για κάθε $x \in X \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο ξ, όταν παρουσιάζει, είτε τοπικό μέγιστο, είτε τοπικό ελάχιστο στο ξ.

Το Θεώρημα του Fermat χαρακτηρίζεται από τους Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλο – Γιαννακούλια, ως μία κατά βάση απλή, αλλά εξαιρετικά γόνιμη παρατήρηση, η οποία προκύπτει από τον συνδυασμό των ορισμών της παραγώγου σε σημείο x_0 και του τοπικού ακροτάτου στο x_0. (Α.Λ ΙΙα, Σελ. 3) Ο συνδυασμός του με το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής μας οδηγούν σε σπουδαία θεωρήματα, όπως είναι τα Θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής και Ενδιαμέσων τιμών του Darboux, ενώ, με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής, αποδεικνύονται τα βασικά στοιχεία του Διαφορικού Λογισμού, όπως τα κριτήρια μονοτονίας, η ύπαρξη τοπικών ακροτάτων, το είδος της κυρτότητας και η ύπαρξη των σημείων καμπής μιας συνάρτησης.

Ας μελετήσουμε το Θεώρημα του Fermat προσεκτικά.

5.2.5.5 Θεώρημα Fermat

Έστω συνάρτηση f: (α, β) $\to \mathbb{R}$ και $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f στο (α, β), τότε f ΄(ξ) = 0.

Απόδειξη

Έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου για τη συνάρτηση f, δηλαδή, έστω ότι υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $f(x) \leq f(\xi)$, για κάθε $x \in X \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Ας υποθέσουμε ότι $f'(\xi) \neq 0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x \in (\xi - \delta, \xi)$, τότε το όριο του λόγου $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ καθώς $x \to \xi^-$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, ισχύει $f'(\xi) \geq 0$. (1)
- Αν $x \in (\xi , \xi + \delta)$, τότε το όριο του λόγου $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ καθώς $x \to \xi^+$ είναι μικρότερο ή ίσο του 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, ισχύει $f'(\xi) \leq 0$. (2)

Άρα τελικά, από τις (1), (2) προκύπτει $f'(\xi) = 0$. □

Ακολουθούν οι αποδείξεις ορισμένων σπουδαίων θεωρήματων, όπως είναι τα Θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής και Ενδιαμέσων τιμών του Darboux, οι οποίες προκύπτουν από τον συνδυασμό του Θεωρήματος του Fermat και του Θεωρήματος Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής.

5.2.5.6 Θεώρημα Rolle

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ώστε:

- f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- f παραγωγίσιμη στο (α, β),
- $f(\alpha) = f(\beta)$.

Τότε, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, δηλαδή ισχύει $f(x) = f(\alpha) = f(\beta)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Από τους τύπους των παραγώγων των γνωστών συναρτήσεων προκύπτει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$.
- Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0, τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq f(\alpha) = f(\beta)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
    - Έστω ότι $f(x_0) > f(\alpha) = f(\beta)$ (1)

Επειδή f συνεχής στο [α, β], από το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο [α, β], δηλαδή υπάρχει $x_1 \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε $f(x) \leq f(x_1)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, συνεπώς ισχύει $f(x_0) \leq f(x_1)$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f(x_1) > f(\alpha) = f(\beta)$, άρα $x_1 \in (\alpha, \beta)$, συνεπώς υπάρχει το $f'(x_1)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat ισχύει $f'(x_1) = 0$.

- Έστω ότι $f(x_0) < f(\alpha) = f(\beta)$ (3)

  Επειδή f συνεχής στο [α, β], από το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο [α, β], δηλαδή υπάρχει $x_2 \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε $f(x) \geq f(x_2)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, συνεπώς ισχύει $f(x_0) \geq f(x_2)$ (4)

  Από τις (3), (4) προκύπτει ότι $f(x_2) < f(\alpha) = f(\beta)$, άρα $x_2 \in (\alpha, \beta)$, συνεπώς υπάρχει το $f'(x_2)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat ισχύει $f'(x_2) = 0$. □

5.2.5.7 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Lagrange)

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ώστε:

- f συνεχής στο [α, β],
- f παραγωγίσιμη στο (α, β).

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, με $g(x) = (\beta - \alpha) f(x) - (f(\beta) - f(\alpha)) x$.
Είναι:

- g συνεχής στο [α, β], ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,
- g παραγωγίσιμη στο (α, β), ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων,

  με $g'(x) = (\beta - \alpha) f'(x) - (f(\beta) - f(\alpha))$,
- $g(\alpha) = g(\beta)$.

Άρα, από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$,

ή ισοδύναμα $(\beta - \alpha) f'(\xi) - (f(\beta) - f(\alpha)) = 0$, δηλαδή τελικά $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ □

5.2.5.8 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Cauchy)

Έστω συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ώστε:

- f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$,
- f, g παραγωγίσιμες στο (α, β).

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $(f(\beta) - f(\alpha))\, g'(\xi) = (g(\beta) - g(\alpha))\, f'(\xi)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, με $h(x) = (g(\beta) - g(\alpha))\, f(x) - (f(\beta) - f(\alpha))\, g(x)$.

Είναι:

- h συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- h παραγωγίσιμη στο (α, β), με $h'(x) = (g(\beta) - g(\alpha))\, f'(x) - (f(\beta) - f(\alpha))\, g'(x)$,
- $h(\alpha) = h(\beta)$.

Άρα, από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$, ή ισοδύναμα $(f(\beta) - f(\alpha))\, g'(\xi) = (g(\beta) - g(\alpha))\, f'(\xi)$. □

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας, καθώς το σύνολο των βασικών στοιχείων του Διαφορικού Λογισμού, όπως είναι τα κριτήρια μονοτονίας, η ύπαρξη τοπικών ακροτάτων, το είδος της κυρτότητας, η ύπαρξη των σημείων καμπής, αποδεικνύονται με βάση αυτό.

Το ακόλουθο Θεώρημα λειτουργεί ως κριτήριο για τη μονοτονία μιας συνάρτησης.

5.2.5.9 Θεώρημα – Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

1. Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).
2. Αν $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι αύξουσα στο (α, β).
3. Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β).
4. Αν $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο (α, β).
5. Αν $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι σταθερή στο (α, β).

Απόδειξη

Έστω x, y$\in$[α, β], με x < y.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα [x, y]. Είναι:

- f συνεχής στο [x, y] $\subseteq$ [α, β].
- f παραγωγίσιμη στο (x, y) $\subseteq$ (α, β).

Άρα, υπάρχει ξ$\in$(x, y) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ (1)

Επειδή x < y είναι y – x > 0. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Έστω f ΄(x) > 0, για κάθε x$\in$(α, β). Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Επειδή ξ$\in$(x, y), είναι f ΄(ξ) > 0, άρα από τη σχέση (1) έχουμε $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$.

Συνεπώς f(y) – f(x) > 0, ή ισοδύναμα f(y) > f(x). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Οι περιπτώσεις 2, 3, 4 αποδεικνύονται ανάλογα.

5. Έστω f ΄(x) = 0, για κάθε x$\in$(α, β). Θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο (α, β).

Επειδή ξ$\in$(x, y), είναι f ΄(ξ) = 0, άρα από τη σχέση (1) έχουμε $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$.

Συνεπώς f(y) – f(x) = 0, ή ισοδύναμα f(y) = f(x). Άρα η f είναι σταθερή στο (α, β). □

Από την 5η περίπτωση του προηγούμενου Θεωρήματος, προκύπτει το επόμενο Πόρισμα.

5.2.5.10 Πόρισμα

Έστω συναρτήσεις f, g: [α, β]$\to \mathbb{R}$ ώστε:

- f, g συνεχείς στο [α, β],
- f, g παραγωγίσιμες στο (α, β),
- f ΄(x) = g΄(x), για κάθε x$\in$(α, β).

Τότε υπάρχει c$\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε f(x) – g(x) = c, για κάθε x$\in$(α, β).

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση h: [α, β]$\to \mathbb{R}$ με h(x) = f(x) – g(x).

Είναι:

- h συνεχής στο [α, β], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- h παραγωγίσιμη στο (α, β), ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων,

  με $h'(x) = f'(x) - g'(x)$,

  Επειδή $f'(x) = g'(x)$, προκύπτει ότι $h'(x)= 0$, για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$.

Σύμφωνα με την 5η περίπτωση του Θεωρήματος – Κριτηρίου μονοτονίας συναρτήσεων, η h είναι σταθερή στο (α, β), δηλαδή υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $h(x) = c$, για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$.

Άρα τελικά ισχύει $f(x) - g(x) = c$, για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$. □

Με το επόμενο Θεώρημα, πραγματοποιείται ο έλεγχος σχετικά με την ύπαρξη τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

5.2.5.11 Θεώρημα – Κριτήριο ύπαρξης τοπικών ακροτάτων

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta]\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0\in(\alpha, \beta)$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), με εξαίρεση ίσως σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Τότε:

- Αν $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x\in(\alpha, x_0)$ και $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x\in(x_0, \beta)$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 .
- Αν $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x\in(\alpha, x_0)$ και $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x\in(x_0 ,\beta)$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

Απόδειξη

- Επειδή $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x\in(\alpha, x_0)$, η f είναι αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, συνεπώς ισχύει η συνεπαγωγή: $x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (1)

  Επειδή $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x\in(x_0, \beta)$, η f είναι φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$, συνεπώς ισχύει η συνεπαγωγή: $x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (2)

  Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$, άρα τελικά η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.
- Ανάλογη απόδειξη. □

Σε σχέση με την ύπαρξη τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης, ο έλεγχος μπορεί να γίνει με εφαρμογή του λεγόμενου Κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου.

5.2.5.12 Θεώρημα – Κριτήριο δεύτερης παραγώγου

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f'(x_0) = 0$, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει η δεύτερη παράγωγος στο x_0, δηλαδή υπάρχει το $f''(x_0)$.

- Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.
- Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Απόδειξη

- Επειδή $f''(x_0) > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $f'(x) < f'(x_0) = 0 < f'(y)$,
  για κάθε $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$.
  Από το κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(x_0, x_0 + \delta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο (α, β) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.
- Ανάλογη απόδειξη. □

Ακολουθούν ορισμένα ενδιαφέροντα συμπεράσματα των προηγούμενων Θεωρημάτων, τα οποία, ενώ δεν διατυπώνονται ρητά στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου, ωστόσο αποτελούν βοηθητικές προτάσεις που οι μαθητές και οι μαθήτριες της Γ΄ Λυκείου γνωρίζουν και χρησιμοποιούν.

5.2.5.13 Θεώρημα Darboux

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε το σύνολο τιμών $f'((\alpha,\beta))$ της f' είναι διάστημα. (αντίστοιχη σχέση ισχύει για το [α,β])

5.2.5.14 Πόρισμα

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α, β), δηλαδή, είτε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, είτε $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

5.2.5.15 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f: [α, β] → ℝ, συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β), με $m \leq f'(x) \leq M$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή ισχύει

$$m(\beta - \alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq M(\beta - \alpha)$$

5.2.5.16 Πρόταση

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β).

Τότε ισχύει $f''(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\right)$, για $x\in(\alpha, \beta)$.

Συνεχίζουμε με τη μελέτη της κυρτότητας μίας συνάρτησης και τα σημεία καμπής αυτής. Για λόγους πληρότητας θα παραθέσουμε τους αντίστοιχους ορισμούς.

5.2.5.17 Ορισμός

Έστω συνάρτηση f: X → ℝ. Θα λέμε ότι:

- Η f είναι κυρτή στο X, αν για κάθε x, y∈X, με x < y ισχύει

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \text{ για } 0 < \lambda < 1.$$

- Η f είναι γνησίως κυρτή στο X, αν για κάθε x, y∈X, με x < y ισχύει

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \text{ για } 0 < \lambda < 1.$$

- Η f είναι κοίλη στο X, αν για κάθε x, y∈X, με x < y ισχύει

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \text{ για } 0 < \lambda < 1.$$

- Η f είναι γνησίως κοίλη στο X, αν για κάθε x, y∈X, με x < y ισχύει

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \text{ για } 0 < \lambda < 1.$$

Εναλλακτικοί ισοδύναμοι ορισμοί για την κυρτή και αντίστοιχα για την κοίλη συνάρτηση είναι οι ακόλουθοι:

5.2.5.18 Ισοδύναμοι Ορισμοί κυρτότητας

Έστω συνάρτηση f: X → ℝ. Θα λέμε ότι:

- Η f είναι κυρτή στο X, αν και μόνο αν, για κάθε x, y, z∈X, με x < z < y ισχύει

$$f(z) \le \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$$

- Η f είναι κοίλη στο X, αν και μόνο αν, για κάθε x, y, z∈X, με x < z < y ισχύει

$$f(z) \ge \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$$

5.2.5.19 Ορισμός

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ και ξ∈(α, β). Το ξ καλείται σημείο καμπής της συνάρτησης f, αν υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε α < ξ – δ < ξ + δ < β και

- η f είναι γνήσια κυρτή στο διάστημα (ξ – δ, ξ] και γνήσια κοίλη στο [ξ, ξ + δ), είτε
- η f είναι γνήσια κοίλη στο διάστημα (ξ – δ, ξ] και γνήσια κυρτή στο [ξ, ξ + δ).

Με το ακόλουθο Θεώρημα ελέγχουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης.

5.2.5.20 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, παραγωγίσιμη στο (α, β).

- Αν η f ΄είναι αύξουσα στο (α, β), τότε η f είναι κυρτή στο (α, β).
- Αν η f ΄είναι φθίνουσα στο (α, β), τότε η f είναι κοίλη στο (α, β).

Απόδειξη

- Έστω ότι η f ΄είναι αύξουσα στο (α, β). Θα αποδείξουμε ότι η f είναι κυρτή στο (α, β).

  Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι κυρτή στο (α, β). Τότε υπάρχουν x, y∈(α, β), με x < y και 0 < λ < 1, τέτοιο ώστε f (λx + (1 – λ)y) > λ f(x) + (1 – λ) f(y).

  Θέτουμε z = λx + (1 – λ)y.

  Είναι x < z < y, ενώ ταυτόχρονα $f(z) > \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$,

  ή ισοδύναμα $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} > \frac{f(y)-f(z)}{y-x}$ (1)

  Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού σε καθένα από τα διαστήματα [x, z] και [z, y]. Υπάρχουν ξ∈(x, z) και n∈(z, y) τέτοια ώστε

  $f'(\xi) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ και $f'(n) = \frac{f(y)-f(z)}{y-x}$

  Όμως ισχύει ξ < n και λόγω της σχέσης (1) έχουμε f ΄(ξ) > f ΄(n), κάτι που είναι άτοπο, αφού η f ΄ είναι αύξουσα στο (α, β). Άρα τελικά η f είναι κυρτή στο (α, β).

- Ανάλογη απόδειξη. □

Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω Θεωρήματος, άρα τελικά ισχύει η ισοδυναμία: *Η f είναι κυρτή στο (α, β), αν και μόνο αν, η f ΄ είναι αύξουσα στο (α, β).*

Από τον συνδυασμό του Κριτηρίου μονοτονίας συναρτήσεων με το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα.

5.2.5.21 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β).

- Αν ισχύει $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η η f είναι κυρτή στο (α, β).
- Αν ισχύει $f''(x) \leq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η η f είναι κοίλη στο (α, β).

Απόδειξη

- Επειδή $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, από το Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων συμπεραίνουμε ότι η f' είναι αύξουσα στο (α, β), άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα, η f είναι κυρτή στο (α, β).
- Ανάλογη απόδειξη. □

Με το ακόλουθο Θεώρημα, πραγματοποιείται ο έλεγχος σχετικά με την ύπαρξη σημείου καμπής.

5.2.5.22 Θεώρημα

Έστω f: (α, β) → ℝ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\xi \in (\alpha, \beta)$. Αν το ξ είναι σημείο καμπής της f, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για τη συνάρτηση f'.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), από τον ορισμό του σημείου καμπής προκύπτει ότι,

υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $\alpha < \xi - \delta < \xi + \delta < \beta$ και:

- η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi, \xi + \delta]$, ή
- η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, \xi + \delta]$.

Σε κάθε περίπτωση, η f' παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο ξ. □

Το Θεώρημα που ακολουθεί είναι ανάλογο του Θεωρήματος Fermat, αλλά αναφέρεται στα σημεία καμπής.

5.2.5.23 Θεώρημα

Έστω f: (α, β) → ℝ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\xi \in (\alpha, \beta)$ σημείο καμπής της f. Αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο ξ, τότε ισχύει $f''(\xi) = 0$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του σημείου καμπής προκύπτει ότι, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$\alpha < \xi - \delta < \xi + \delta < \beta$ και,

- η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi, \xi + \delta]$, ή
- η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, \xi + \delta]$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi, \xi + \delta]$.

  Αν $x \in (\xi - \delta, \xi)$, τότε το όριο του λόγου $\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$, καθώς $x \to \xi^-$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0, δηλαδή $f''(\xi) \geq 0$ (1)

  Αν $x \in (\xi, \xi + \delta)$, τότε το όριο του λόγου $\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$, καθώς $x \to \xi^+$ είναι μικρότερο ή ίσο του 0, δηλαδή $f''(\xi) \leq 0$ (2)

  Επειδή υπάρχει το $f''(\xi)$, τα πλευρικά όρια του λόγου $\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$ είναι ίσα, συνεπώς, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f''(\xi) = 0$.

- Ανάλογη απόδειξη.□

5.2.5.24 Θεώρημα – Κριτήριο ύπαρξης σημείων καμπής

Έστω συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε,

- $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi)$ και $f''(x) \leq 0$, για κάθε $x \in (\xi, \xi + \delta)$, ή
- $f''(x) \leq 0$, για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi)$ και $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (\xi, \xi + \delta)$,

τότε το ξ είναι σημείο καμπής της f.

Απόδειξη

Προφανής.□

5.2.6 Σχέση Διαφόρισης και Ολοκλήρωσης

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης με την εύρεση του κάτω και του άνω ολοκληρώματος Riemann είναι συχνά αρκετά περίπλοκος, έως και ανέφικτος. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος:

- της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x, απαιτεί γνώση του τύπου του αθροίσματος $1 + 2 + \ldots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$
- της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2$, απαιτεί γνώση του τύπου του αθροίσματος $1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$
- της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^\kappa$, για κάθε κ = 1,2,…, απαιτεί γνώση του τύπου του αθροίσματος $1^\kappa + 2^\kappa + \ldots + \nu^\kappa$, το οποίο, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, εμπλέκει τους αριθμούς Bernoulli και δεν είναι προφανές, ούτε τετριμμένο. (Σελ. 22 του άρθρου)

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων μετατρέπεται όμως σε μία γενική και σχετικά εύκολη διαδικασία με την εφαρμογή του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, σύμφωνα με το οποίο, η παράγωγος του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης ταυτίζεται με την ίδια τη συνάρτηση. Η υπολογιστική δύναμη του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού είναι ισχυρή και αδιαμφισβήτητη, ενώ οι Νεγρεπόντης – Γιωτόπουλος – Γιαννακούλιας το χαρακτηρίζουν ως τη βασικότερη σχέση ανάμεσα στον Διαφορικό και στον Ολοκληρωτικό Λογισμό. (Α.Λ Ι, Σελ. 348)

Πριν μελετήσουμε την απόδειξή του, θα παραθέσουμε τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

5.2.6.1 Ορισμός

Έστω f: [α, β] → ℝ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η, καλώς ορισμένη, συνάρτηση F: [α, β] → ℝ, με $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ καλείται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, άρα και συνεχής στο [α, β].

Ας περάσουμε στην απόδειξη του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

5.2.6.2 Θεώρημα (1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

Έστω f: [α, β] → ℝ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και F: [α, β] → ℝ με $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $F'(x_0) = f(x_0)$.

Απόδειξη

Έστω ε > 0. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$, με $|t - x_0| < \delta$, ισχύει $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Προφανώς, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, με $x \neq x_0$, είναι $f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt$,

άρα, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|} \cdot \varepsilon \cdot |x - x_0| = \varepsilon.$$

Άρα τελικά, $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, δηλαδή $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού γενικεύεται ώστε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού αποτελεί μία ακόμη έμμεση συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, καθώς η απόδειξη ότι:

1. η συνάρτηση F είναι μια αντιπαράγωγος της συνάρτησης f , βασίζεται στο ότι
2. η συνεχής στο [α, β] συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, κάτι που ισχύει, καθώς
3. η συνεχής στο [α, β] συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο [α, β].

Συνεπώς η απόδειξη του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού στηρίζεται στο Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων, το οποίο με τη σειρά του αποτελεί συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών. (Σελ. 23 του άρθρου)

Στην περίπτωση που η παράγωγος μίας συνάρτησης είναι συνεχής στο [α, β], τότε ως συνέπεια του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος προκύπτει το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Ας το μελετήσουμε προσεκτικά.

5.2.6.3 Θεώρημα (2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

Έστω f: [α, β] → ℝ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε η f ΄ να είναι συνεχής στο [α, β].

Τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε F: [α, β] → ℝ με $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού προκύπτει ότι F΄(x) = f ΄(x), για κάθε x∈[α, β], συνεπώς F(x) = f(x) +c , ή ισοδύναμα $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = f(x) + c$ (1) , για κάθε x∈[α, β].

- Για x = α, (1) ⇒ 0 = f(α) + c, άρα c = – f(α).
- Για x = β, (1) ⇒ $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = f(\beta) + c$, άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = f(\beta) - f(\alpha)$. □

Με δεδομένο ότι η απόδειξη του 2ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού στηρίζεται ουσιωδώς στο 1ο, προκύπτει το ασφαλές συμπέρασμα ότι και το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα αποτελεί έμμεση συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας.

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη εννοιών και Θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως αυτά παρουσιάζονται στα πανεπιστημιακά εγχειρίδια του Απειροστικού Λογισμού που αναφέρουμε στη βιβλιογραφία, καταλήγουμε στο εξής αδιαμφισβήτητο συμπέρασμα: το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών διαθέτει τεράστια αποδεικτική δύναμη στα σύγχρονα μαθηματικά, καθώς πολλές από τις εσωτερικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και μεγάλο πλήθος Θεωρημάτων που αφορούν σε συναρτήσεις, αποτελούν άμεσες ή έμμεσες συνέπειες αυτού. Θεμελιώδη, μη τετριμμένα αποτελέσματα της Μαθηματικής Ανάλυσης, αλλά και παράδοξες, αντίθετες προς την κοινή διαίσθηση προτάσεις, όπως η ύπαρξη υπερβατικών αριθμών, απορρέουν

από αυτό. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, ισχυρίζονται ότι "κατ' ουσίαν όλη η σύγχρονη ανάλυση είναι συνέπεια της υπαρξιακής ιδιότητος supremum". (Σελ. 24 του άρθρου) Εύλογα, τίθεται το ερώτημα: Ποια είναι άραγε η προέλευση της αποδεικτικής δύναμης του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών;

Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε την ερμηνεία των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη σε σχέση με την προέλευση της αποδεικτικής δύναμης του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

5.3 Το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών ως συμβατή περάτωση του Απείρου

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη στην εργασία τους με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* αναγνωρίζουν στο Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών μία ακόμη περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Αν δεχτούμε την ερμηνεία τους, τότε η ισχυρή αποδεικτική δύναμη του Αξιώματος της Πληρότητας παύει να αποτελεί μυστήριο και εξηγείται απόλυτα λόγω της προσέγγισης της αντίφασης.

Ας μελετήσουμε τα επιχειρήματά τους προσεκτικά.

Αρχικά οι συγγραφείς εστιάζουν στη σύνδεση ανάμεσα στο Αξιώμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών και στην ιδιότητα της συμπάγειας. Για λόγους πληρότητας του κειμένου και με σκοπό να διερευνήσουμε σε βάθος την παραπάνω σχέση, θα παραθέσουμε ορισμούς και θεωρήματα που αφορούν μετρικούς χώρους γενικά, ενώ στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή αυτών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Ξεκινάμε από τη βασική έννοια του μετρικού χώρου.

Ορισμός

Έστω X μη κενό σύνολο. Μία απεικόνιση $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται μετρική στο X, όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, για κάθε $x, y \in X$ και $\rho(x, y) = 0$, αν και μόνο αν $x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, για κάθε $x, y \in X$. (συμμετρική ιδιότητα της ρ)
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, για κάθε $x, y, z \in X$. (τριγωνική ιδιότητα της ρ)

Ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\rho(x, y)$ ονομάζεται απόσταση των σημείων x, y ως προς τη μετρική ρ. Το ζεύγος (X, ρ) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Ο μετρικός χώρος που θα εστιάσουμε είναι ο χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$, όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και ρ η απλούστερη, μεταξύ άλλων, μετρική, που ορίζεται από τον τύπο $\rho(x, y) = |x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και καλείται συνήθης μετρική.

Ακολουθούν οι ορισμοί της ανοικτής και της κλειστής σφαίρας, του ανοικτού και του κλειστού συνόλου, καθώς και σημαντικές σχετικές Προτάσεις.

Ορισμός

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$.

- Ανοικτή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας ε ως προς τη μετρική ρ (συμβολίζουμε $S_\rho(x, \varepsilon)$ ή $S(x, \varepsilon)$) είναι το σύνολο των στοιχείων του X που η απόστασή τους από το x είναι γνήσια μικρότερη από το ε.
  Είναι δηλαδή $S(x, \varepsilon) = \{y \in X: \rho(x, y) < \varepsilon\}$
- Κλειστή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας ε ως προς τη μετρική ρ (συμβολίζουμε $\tilde{S}_\rho(x, \varepsilon)$ ή $\tilde{S}(x, \varepsilon)$) είναι το σύνολο των στοιχείων του X που η απόστασή τους από το x είναι μικρότερη ή ίση από το ε.
  Είναι δηλαδή $\tilde{S}(x, \varepsilon) = \{y \in X: \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$

Εφαρμογή στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$

- ανοικτές σφαίρες είναι τα διαστήματα της μορφής $S(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, με $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
- κλειστές σφαίρες είναι τα διαστήματα της μορφής $\tilde{S}(x, \varepsilon) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, με $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
- κάθε διάστημα της μορφής (α, β), όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$, αποτελεί ανοικτή σφαίρα κέντρου $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και ακτίνας $\frac{\beta-\alpha}{2}$

Ορισμός

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $G \subset X$. Το G καλείται ανοικτό ως προς τη μετρική ρ, ή απλά ανοικτό, αν για κάθε στοιχείο $x \in X$, υπάρχει ανοικτή σφαίρα με κέντρο το x που περιέχεται στο G, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subset G$.

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση

Κάθε ανοικτή σφαίρα σε ένα μετρικό χώρο είναι ανοικτό σύνολο.

Εφαρμογή στον μετρικό χώρο ($\mathbb{R}$, ρ)

- κάθε διάστημα της μορφής (α, β), όπου α, $\beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$ είναι ανοικτό.

Για τα ανοικτά διαστήματα ενός μετρικού χώρου ισχύει το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το $\varnothing$ και το X είναι ανοικτά σύνολα του X.
2. Η ένωση ανοικτών υποσυνόλων του X είναι ανοικτό υποσύνολο του X.
3. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών υποσυνόλων του X είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Απόδειξη

1. Από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου προκύπτει άμεσα ότι το $\varnothing$ και το X είναι ανοικτά σύνολα του X.
2. Έστω $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X και $G = \cup_{i\in I} G_i$

   Για κάθε $x\in G$ υπάρχει $i\in I$, ώστε $x\in G_i$. Επειδή όμως το G_i είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \subset G_i$

   Άρα $S(x, \varepsilon) \subset G$, επομένως το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.
3. Έστω $G_1, G_2,...,G_n$ ανοικτά υποσύνολα του X, $G = \cap_{i=1...n} G_i$ και $x\in G$.

   Επειδή το G_i είναι ανοικτό, υπάρχουν $\varepsilon_i > 0$, τέτοια ώστε $S(x, \varepsilon_i) \subset G_i$, για κάθε $i =1,2,...,n$ Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2,...,\varepsilon_n\} > 0$.

   Προφανώς $S(x, \varepsilon) \subset G_i$, για κάθε $i =1,2,...,n$.

   Άρα $S(x, \varepsilon) \subset G$, συνεπώς το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X. □

Εφαρμογή στον μετρικό χώρο ($\mathbb{R}$, ρ)

- τα ανοικτά διαστήματα της μορφής $\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, για κάθε n = 1,2,... είναι ανοικτές σφαίρες,

άρα ανοικτά σύνολα.

- από το προηγούμενο θεώρημα, η πεπερασμένη ή άπειρη ένωσή τους, όπως και η πεπερασμένη τομή τους είναι επίσης ανοικτό σύνολο.
- η άπειρη τομή τους δεν είναι ανοικτό σύνολο, αφού ισχύει $\bigcap_{n=1...\infty} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ και το μονοσύνολο $\{0\}$ δεν είναι ανοικτό σύνολο, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset \{0\}$

Σχετικά με τα ανοικτά σύνολα αποδεικνύεται ότι, ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι ανοικτό, αν και μόνο αν, είναι ίσο με την ένωση ανοικτών σφαιρών του χώρου. Έτσι τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ και $(\alpha, +\infty)$ είναι ανοικτά σύνολα.

Η οικογένεια των κλειστών συνόλων ενός μετρικού χώρου είναι ανάλογη της οικογένειας των ανοικτών συνόλων, με αντίστοιχες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Παραθέτουμε τον ορισμό.

Ορισμός

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $F \subset X$. Το F καλείται κλειστό ως προς τη μετρική ρ ή απλά κλειστό, αν το συμπληρωμά του $X \setminus F$ είναι ανοικτό.

Εφαρμογή στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$

- κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$, είναι κλειστό, επειδή το συμπλήρωμά του $\mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta] = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ είναι ανοικτό.

Το επόμενο θεώρημα είναι ανάλογο εκείνου που αναφέρεται στις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων, καθώς, σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Ζαχαριάδη – Καλαμίδα – Φαρμάκη, οι ιδιότητες των κλειστών συνόλων είναι δυϊκές, με την έννοια των συνολοθεωρητικών κανόνων του De Morgan, με τις αντίστοιχες ιδιότητες των ανοικτών συνόλων. (Σελ. 16)

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το $\varnothing$ και το X είναι κλειστά σύνολα.
2. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών υποσυνόλων του X είναι κλειστό υποσύνολο του X.
3. Η τομή κλειστών υποσυνόλων του X είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη

1. Από τον ορισμό του κλειστού συνόλου προκύπτει άμεσα ότι το $\varnothing$ και το X είναι κλειστά υποσύνολα του X.
2. Έστω $F_1, F_2, ..., F_n$ κλειστά υποσύνολα του X και $F = \cup_{i=1...n} F_i$

Είναι:

$X \setminus F = X \setminus (\cup_{i=1...n} F_i) = \cap_{i=1...n} (X \setminus F_i)$, ενώ τα $X \setminus F_i$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X για κάθε i=1,2,...n.

Από τις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων προκύπτει ότι το $X \setminus F$ είναι ανοικτό, άρα το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.

3. Έστω $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X και $F = \cap_{i\in I} F_i$

   Είναι:

   $X \setminus F = X \setminus (\cap_{i\in I} F_i) = \cup_{i\in I} (X \setminus F_i)$, ενώ τα $X \setminus F_i$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X, για κάθε $i\in I$.

   Από τις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων προκύπτει ότι το $X \setminus F$ είναι ανοικτό, άρα το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Εφαρμογή στον μετρικό χώρο (ℝ, ρ)

- τα κλειστά διαστήματα της μορφής $\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right]$, για κάθε n = 1,2,... είναι κλειστά σύνολα.
- από το προηγούμενο θεώρημα, η πεπερασμένη ή η άπειρη τομή τους, όπως και η πεπερασμένη ένωσή τους είναι επίσης κλειστό σύνολο.
- η άπειρη ένωσή τους δεν είναι κλειστό σύνολο, αφού είναι $\cup_{n=1...\infty} \left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right] = [0, 1)$

  και το σύνολο [0, 1) δεν είναι κλειστό, αφού το συμπλήρωμά του δεν είναι ανοικτό.

Ας περάσουμε στον ορισμό της θεμελιώδους έννοιας της συμπάγειας ενός μετρικού χώρου, καθώς και της συμπάγειας ενός υποσυνόλου μετρικού χώρου.

Ορισμός

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Ο X είναι συμπαγής, αν κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλαδή αν, για κάθε οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, με $X = U_{i\in I} G_i$, υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $i_1, i_2, ...i_n\in I$, ώστε $X = \cup_{k=1,...n} G_{i_k}$

Ορισμός

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $K \subset X$. Το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X αν, κάθε ανοικτή κάλυψη του K έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλαδή αν, για κάθε οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, ώστε $K \subset U_{i\in I} G_i$, υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $i_1, i_2, ...i_n\in I$ ώστε

$K \subset \cup_{k=1,\ldots n} \; G_{i_k}$

Εφαρμογή στον μετρικό χώρο (ℝ, ρ)

- Το σύνολο ℝ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη μετρική δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος, καθώς η ανοικτή κάλυψη {(– n, n) με n = 1, 2, …} του ℝ , δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.
- Τα διαστήματα (0, 1), [0, 1) και (0, 1] δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του ℝ, καθώς οι οικογένειες $\left(\left(\frac{1}{n},\ 1\right),\ \text{με}\, n=1,2,\ldots\right)$, $\left(\left(-1,\ 1-\frac{1}{n}\right),\ \text{με}\, n=1,2,\ldots\right)$, $\left(\left(\frac{1}{n},\ 2\right),\ \text{με}\, n=1,2,\ldots\right)$ είναι ανοικτές καλύψεις των (0, 1), [0, 1) και (0, 1] αντίστοιχα, που όμως δεν έχουν πεπερασμένες υποκαλύψεις.
- Για το διάστημα [0, 1] και συγκεκριμένα για την οικογένεια $G = \{ \left(x-\frac{1}{100},\ x+\frac{1}{100}\right)$ με $x \in \mathbb{R}\}$ που είναι ανοικτή κάλυψη του [0, 1] υπάρχει μία οικογένεια $G' = \{ \left(x_k-\frac{1}{100},\ x_k+\frac{1}{100}\right)$ με $x_k = \frac{k}{100}$, k = 0, 1, 2,...,100} που είναι πεπερασμένη υποκάλυψη του [0, 1]. Αυτό δεν είναι βέβαια αρκετό ώστε να χαρακτηρίσουμε το [0, 1] συμπαγές, καθώς δεν μας εξασφαλίζει ότι ισχύει για κάθε ανοικτή κάλυψη.

Αποδεικνύεται όμως ότι το κλειστό διάστημα [0, 1], όπως και κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του συνόλου ℝ των πραγματικών αριθμών είναι συμπαγές. Ας μελετήσουμε την απόδειξη.

Θεώρημα

Στον μετρικό χώρο (ℝ, ρ), όπου ℝ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και ρ η συνήθης μετρική, κάθε κλειστό διάστημα [α, β] είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω α = β.

Τότε [α, β] = {α}, άρα το διάστημα είναι συμπαγές σύνολο.

2η περίπτωση: Έστω α < β.

Θεωρούμε ανοικτή κάλυψη $(G_i)_{i\in I}$ του [α, β] με [α, β] $\subset U_{i\in I}G_i$ και το σύνολο

B = {x∈[α, β], ώστε υπάρχει n(x) = n∈ℕ ώστε [α, x] $\subset \cup_{k=1,\dots n} G_{i_k}$ }

Είναι:

- α∈B, συνεπώς B ≠ ∅.
- B είναι άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι, υπάρχει γ∈ℝ, τέτοιο ώστε γ = supB, με γ ≤ β, για κάθε x∈[α, β].

Ισχυρισμός: γ = β

Έστω γ < β.

Είναι α < γ, καθώς αν α = γ, τότε α = γ∈[α, β]$\subset U_{i\in I}G_i$, συνεπώς θα υπήρχε

$G_\gamma \in (G_i)_{i\in I}$ με γ∈G_γ και επειδή G_γ ανοικτό, θα υπήρχε r > 0, ώστε S(γ, r) $\subset G_\gamma$ και για

$n \geqslant [\frac{r}{\beta-\gamma}]+1$, θα ήταν $\gamma + \frac{r}{n} \leq \beta$ και $[\alpha, \gamma+\frac{r}{n}] = [\gamma, \gamma+\frac{r}{n}] \subset S(\gamma, r) \subset G_\gamma$, δηλαδή

$\gamma+\frac{r}{n} \in B$, συνεπώς $\gamma+\frac{r}{n} \leq \gamma$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα ισχύει η διάταξη α < γ < β.

Υπάρχει συνεπώς $G_\gamma \in (G_i)_{i\in I}$ με γ∈G_γ , άρα υπάρχει r > 0, ώστε S(γ, r) $\subset G_\gamma$.

Αν θεωρήσουμε $n_0 = \max\left([\frac{r}{\beta-\gamma}]+1, [\frac{r}{\gamma-\alpha}]+1\right)$, τότε είναι $\alpha < \gamma - \frac{r}{n_0} < \gamma < \beta$, συνεπώς

$[\alpha, \gamma-\frac{r}{n_0}] \subset \cup_{k=1,\dots m} G_{i_k}$, διαφορετικά θα είχαμε $\gamma - \frac{r}{n_0} \notin B$, ή $\gamma - \frac{r}{n_0} > \gamma$, κάτι που είναι άτοπο.

Τότε όμως θα ισχύει $[\alpha, \gamma+\frac{r}{n_0}] \subset (\cup_{k=1,\dots m} G_{i_k}) \cup G_\gamma$, άρα $\gamma + \frac{r}{n_0} \leq \beta$,

συνεπώς $\gamma + \frac{r}{n_0} \in B$. Θα έπρεπε να ισχύει $\gamma + \frac{r}{n_0} \leq \gamma$, κάτι που είναι άτοπο.

Άρα τελικά β = supB, δηλαδή τελικά, το κλειστό διάστημα [α, β] είναι συμπαγές σύνολο στον μετρικό χώρο (ℝ, ρ). □

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη συμπάγειας κάθε κλειστού και φραγμένου διαστήματος του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών γίνεται άμεση χρήση του Αξιώματος της Πληρότητας!

Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη – Ζαχαριάδη – Καλαμίδα – Φαρμάκη, η έννοια της συμπάγειας είναι ιδιαίτερης σημασίας τόσο στη Γενική Τοπολογία, όσο και στις εφαρμογές της στη Μαθηματική Ανάλυση. (Σελ. 159) Στην περίπτωση του Απειροστικού Λογισμού, η συμπάγεια εκφράζεται από το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass και κατέχει καθοριστικό ρόλο, καθώς όπως διαπιστώσαμε, πολλά θεωρήματα αποτελούν συνέπειες αυτού.

Ποια όμως είναι η βαθύτερη ιδιότητα της συμπάγειας;

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην εργασία τους με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της,* αναγνωρίζουν στη συμπάγεια μία ακόμη περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου.

Ο συλλογισμός τους είναι ο ακόλουθος:

- Το βαθύτερο νόημα της συμπάγειας είναι ότι, για κάθε άπειρη οικογένεια από ανοικτά διαστήματα, που καλύπτουν το αρχικό κλειστό διάστημα, υπάρχει μια πεπερασμένη υποοικογένεια η οποία καλύπτει το διάστημα.
- Από τη μελέτη του συνόλου των πραγματικών αριθμών προέκυψε ότι κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών είναι συμπαγές σύνολο.
- Άρα για κάθε άπειρη οικογένεια από ανοικτά διαστήματα, που καλύπτουν το αρχικό κλειστό και φραγμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών, υπάρχει μια πεπερασμένη υποοικογένεια η οποία καλύπτει το διάστημα.

Είναι προφανές ότι πρόκειται για μίξη απείρου – πέρατος, καθώς, για κάθε άπειρο ανοικτό κάλυμμα, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα, συνεπώς κάτι που από τη φύση του είναι άπειρο, περατώνεται. Για τους Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, η συμπάγεια αποτελεί μία συμβατή περάτωση του απείρου, η οποία χαρακτηρίζεται ως παράτολμη ιδιότητα, καθώς περατώνοντας το άπειρο ενδεχομένως εισάγεται κάποια αντίφαση.

Ο συλλογισμός των συγγραφέων όμως δεν σταματά εδώ:

- η συμπάγεια των κλειστών και φραγμένων διαστημάτων των πραγματικών αριθμών αποτελεί συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας,
- άρα το Αξίωμα της Πληρότητας εμπεριέχει τη συμπάγεια, δηλαδή εμπεριέχει μία συμβατή περάτωση του απείρου.

Το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, εξαιτίας της σύνδεσής του με την ιδιότητα της συμπάγειας, επίσης αποτελεί μία προσέγγιση της αντίφασης. Στο γεγονός αυτό αποδίδεται η ισχυρή αποδεικτική του δύναμη, αλλά και η παραδοξότητα ορισμένων προτάσεων. Η υπαρξιακή ιδιότητα του supremum είναι ακριβώς εκείνη η οποία επιτυγχάνει τη σύγχρονη συμβατή περάτωση του απείρου και η αποδεικτική δύναμη αυτής της περάτωσης φαίνεται καθαρά από το πλήθος των συνεπειών.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η περάτωση που επιχειρείται στη σύγχρονη περίοδο, είναι σημαντικά διαφορετική από την ανθυφαιρετική περάτωση της περιόδου των Πυθαγορείων. Εκεί αφορούσε σε έναν ειδικής μορφής πραγματικό αριθμό και πραγματοποιούνταν μέσω της περιοδικότητος του ανθυφαιρετικού αναπτύγματός του. Η σύγχρονη περάτωση αφορά σε κάθε μη κενό φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και πραγματοποιείται μέσω της συμπάγειας κάθε κλειστού διαστήματος των πραγματικών αριθμών.

5.4 Το Αξίωμα της Πληρότητας στα σχολικά βιβλία

5.4.1 Οι πραγματικοί αριθμοί

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τον τρόπο παρουσίασης των πραγματικών αριθμών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου.

5.4.1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί στο Γυμνάσιο

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, των Βανδουλάκη Ι., Καλλιγά Χ., Μαρκάκη Ν., Φερεντίνου Σ., επαναλαμβάνονται έννοιες και ιδιότητες των αριθμών, που οι μαθητές και οι μαθήτριες γνωρίζουν από το Δημοτικό. Συγκεκριμένα:

- Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 1ο – Οι φυσικοί αριθμοί, στην παράγραφο Α.1.1 με τίτλο *Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση,* γίνεται επανάληψη στους φυσικούς αριθμούς, γίνεται διαχωρισμός των αριθμών σε άρτιους και περιττούς και αναφέρονται κάποια στοιχεία για το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Στις παραγράφους που έπονται, ορίζονται οι πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών και αναφέρονται οι ιδιότητές τους.

  Διαβάζουμε:

  Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., 98, 99, 100, ..., 1999, 2000, 2001, ... ονομάζονται φυσικοί αριθμοί.

Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1. (Σελ. 11)

Πρόσθεση 13 + 5 = 18 (Προσθετέοι → Άθροισμα)

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, Μ (μειωτέος) και Α (αφαιρετέος) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στο Α δίνει το Μ.

Πολλαπλασιασμός 7 · 6 = 42 (Παράγοντες → Γινόμενο) (Σελ. 15)

- Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 2ο – Κλάσματα, στην παράγραφο Α.2.1 με τίτλο *Η έννοια του κλάσματος*, επιδιώκεται "η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού του 'όλου' σε μέρη και μέσα από διαδικασία αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων", όπως αναφέρεται στην εισαγωγή. (Σελ. 33) Στις παραγράφους που έπονται, ορίζονται οι πράξεις μεταξύ θετικών ρητών αριθμών και αναφέρονται οι ιδιότητές τους.
- Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 3ο – Δεκαδικοί αριθμοί, στην παράγραφο Α.3.1 με τίτλο *Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί – Διάταξη δεκαδικών αριθμών – Στρογγυλοποίηση*, αναφέρεται ότι "σε πολλές περιπτώσεις μετρήσεων οι φυσικοί αριθμοί δεν επαρκούν να εκφράσουν τα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων με ακρίβεια. Γι' αυτόν τον λόγο χρησιμοποιούμε τους δεκαδικούς αριθμούς". (Σελ. 56). Στις παραγράφους που έπονται ορίζονται οι πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών, αναφέρονται οι ιδιότητές τους και συνδέονται οι δεκαδικοί αριθμοί μέσω των δεκαδικών κλασμάτων με τους ρητούς.
- Μέρος Α΄ – Κεφάλαιο 7ο – Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί, στην παράγραφο Α.7.1 με τίτλο *Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου,* ορίζονται οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί, ορίζονται τα σύνολα των ακεραίων και των ρητών.

  Διαβάζουμε:

  Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

  Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα, δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς. (Σελ. 115)

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου των Βλάμου Π., Δρούτσα Π., Πρέσβη Γ., Ρεκούμη Κ. και συγκεκριμένα στο Μέρος Α, Κεφάλαιο 2ο – Οι πραγματικοί Αριθμοί,

παράγραφος Α2.1 με τίτλο *Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού,* οι μαθητές και οι μαθήτριες έρχονται σε πρώτη επαφή με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού. Στην επόμενη παράγραφο Α2.2 με τίτλο *Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί*, παρουσιάζονται αρχικά κάποια ιστορικά στοιχεία για την κοσμοθεωρία των Πυθαγορείων και για την κρίση που προκάλεσε η ανακάλυψη της ασυμμετρίας.

Διαβάζουμε:

> Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. (Σελ. 45)

Ως υπεύθυνος για την ανακάλυψη του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$ αναφέρεται ο Ίππασος, ενώ ο Εύδοξος παρουσιάζεται ως εκείνος που "έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών." (Σελ. 45) Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο ορισμός του άρρητου αριθμού ως τον αριθμό που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι, με $\nu \neq 0$ και αναφέρεται ότι οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να πάρει τη μορφή ρητού. Η απόδειξη δεν παρουσιάζεται, καθώς οι μαθητές και οι μαθήτριες του Γυμνασίου δεν διδάσκονται μαθηματικές αποδείξεις.

Διαβάζουμε:

> Αυτό σημαίνει ότι κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός. [...]
>
> $$1 < \sqrt{2} < 2$$
>
> $$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
>
> $$1{,}41 < \sqrt{2} < 1.42$$
>
> $$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
>
> $$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
>
> $$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$
>
> Επομένως, τον αριθμό $x = \sqrt{2}$, που προσπαθούμε να βρούμε, δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. [...] Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών όπως

ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π. (Σελ. 45 – 46)

Στην ενότητα με τίτλο *Πραγματικοί αριθμοί* παρουσιάζονται όλα τα σύνολα των αριθμών που οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν διδαχθεί και συνδέονται με τα αντίστοιχα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Διαβάζουμε:

- Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία. Στην αρχή Ο έχουμε τοποθετήσει το μηδέν.
- Οι ακέραιοι αριθμοί: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται πάλι με σημεία. Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.
- Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός. Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.
- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για τον λόγο αυτό την ευθεία αυτή, την ονομάζουμε ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών. (Σελ. 46)

5.4.1.2 Οι πραγματικοί αριθμοί στο Λύκειο

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου των Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Παπασταυρίδη Σ., Πολύζου Γ., Σβέρκου Α., Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2ο – Οι πραγματικοί Αριθμοί, παράγραφος 2.1 με τίτλο *Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους (επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)*, επαναλαμβάνονται κάποια στοιχεία σχετικά με τους αριθμούς που οι μαθητές και οι μαθήτριες γνωρίζουν από το Γυμνάσιο. Διαβάζουμε:

> Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών (Σελ. 43)

Ακολούθως, υπενθυμίζονται οι ορισμοί των ρητών, ως οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή κλάσματος και οι άρρητοι ως οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί. Διατυπώνεται ρητά

ότι "κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή." (Σελ. 43) Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού η αφαίρεση και η διαίρεση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Οι ιδιότητες των αναλογιών, μεταξύ των οποίων η ισότητα των χιαστί γινομένων ως ισοδύναμη έκφραση της ισοδυναμίας κλασμάτων, παρουσιάζονται και αποδεικνύονται στοιχειωδώς στην εφαρμογή 1 (Σελ. 50). Στην εφαρμογή 2 (Σελ. 50 – 51) αποδεικνύεται αυστηρά η αρρητότητα του αριθμού $\sqrt{2}$, με τη γνωστή αλγεβρική απόδειξη αρρητότητας και παρουσιάζεται ο εντοπισμός της θέσης των άρρητων αριθμών $\sqrt{2}$ και – $\sqrt{2}$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Αντίστοιχες πληροφορίες παρουσιάζονται και μάλιστα με ανάλογο τρόπο στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ΄ Λυκείου των Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Μέτη Σ., Μπρουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ., Πολύζου Γ. και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.1 με τίτλο *Πραγματικοί αριθμοί*. (Σελ. 11)

Σχόλια και παρατηρήσεις σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης των πραγματικών αριθμών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου θα παραθέσουμε στην επόμενη παράγραφο.

5.4.2 Η Μαθηματική Ανάλυση στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε και θα συγκρίνουμε τους τρόπους παρουσίασης των ορισμών και των αποδείξεων των Θεωρημάτων στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ΄ Λυκείου, με εκείνους που παραθέσαμε στην ενότητα 5.2 και προέρχονται από τα Πανεπιστημιακά εγχειρίδια που αναφέρονται στη βιβλιογραφία(15).

(15) Ορισμένα από τα σχόλια προέρχονται από την εργασία των Κυριαζή, Χ., Πρωτοπαπά, Ε. (2018), Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου, 10η μαθηματική εβδομάδα Θεσσαλονίκης.

5.4.2.1 Βασικές συνέπειες του Αξιώματος Πληρότητας

5.4.2.1.1 Πρόταση (Ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$) → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.2 Πρόταση (Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη) → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.3 Πόρισμα Για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geq 1$,

ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.4 Πρόταση Ισχύει $\frac{1}{n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.5 Πρόταση Έστω Α μη κενό άνω φραγμένο σύνολο. Τότε:

1. υπάρχει ακολουθία στο Α με όριο το supremum του Α
2. κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του Α έχει όριο μικρότερο ή ίσο του supremum του Α.

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.6 Αρχή της Καλής Διάταξης → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.7 Πρόταση (πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς)

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.8 Πρόταση (πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς αριθμούς)

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.1.9 Η ιδιότητα συνέχειας → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις Ακολουθίες

5.4.2.2.1 Ορισμός ακολουθίας

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 5, Παράγραφος 5.1 με τίτλο *Ακολουθίες*, παρουσιάζονται η έννοια της ακολουθίας, καθώς και ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά, χωρίς όμως αυστηρούς ορισμούς.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.7 με τίτλο *Όρια συνάρτησης στο άπειρο*, παρουσιάζεται ο ορισμός της έννοιας της ακολουθίας.

5.4.2.2.2 Ορισμός ορίου ακολουθίας

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.7 με τίτλο *Όρια συνάρτησης στο άπειρο*, παρουσιάζεται ο ορισμός του ορίου της ακολουθίας.

Διαβάζουμε:

> Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$
>
> (Σελ. 68)

5.4.2.2.3 Ορισμός φραγμένης ακολουθίας → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.4 Ορισμός μονοτονίας ακολουθίας → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.5 Θεώρημα – Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.6 Αρχή του κιβωτισμού → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.7 Ύπαρξη του e

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 5, Παράγραφος 5.1 με τίτλο *Εκθετική συνάρτηση*, υποπαράγραφος *Ο αριθμός e*, ορίζεται ο αριθμός e.

Διαβάζουμε:

> Παρατηρούμε ότι, καθώς το ν αυξάνει, αυξάνει και το $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e. Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στον μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό Leohard Euler (1707–1783). Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι e = 2,71828.
>
> Συμβολικά γράφουμε $e = \lim_{\nu \to \infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ (Σελ. 168)

5.4.2.2.8 Ύπαρξη του φυσικού λογάριθμου

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο σε αυτή τη μορφή

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 5,

Παράγραφος 5.2 με τίτλο *Λογάριθμοι*, υποπαράγραφος *Φυσικοί λογάριθμοι*, ο φυσικός λογάριθμος ορίζεται ως ειδική περίπτωση λογάριθμου με βάση e.

Διαβάζουμε:

> Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι. Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ συμβολίζεται με lnθ και όχι με $\log_e\theta$.
>
> Επομένως: $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$ (Σελ. 176)

5.4.2.2.9 Πρόταση (αναδρομική μέθοδος υπολογισμού τετραγωνικών ριζών)

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.10 Ορισμός υπακολουθίας → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.11 Ορισμός σημείου κορυφής ακολουθίας → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.12 Θεώρημα Bolzano – Weiestrass → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.13 Ορισμός βασικής ή ακολουθίας Cauchy → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.14 Πρόταση: Αν μία ακολουθία συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.15 Θεώρημα (Κριτήριο του Cauchy) → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.16 Ορισμός υποακολουθιακού ορίου ακολουθίας → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.2.17 Ορισμός ανώτατου ορίου ή limes superior και κατώτατου ορίου ή limes inferior

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στις συνεχείς Συναρτήσεις

5.4.2.3.1 Ορισμός της συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 6, Παράγραφος 6.1 με τίτλο *Η έννοια της συνάρτησης,* υποπαράγραφος *Εισαγωγή*, ορίζεται η έννοια

της συνάρτησης.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.2 με τίτλο *Συναρτήσεις*, υποπαράγραφος *Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης*, υπενθυμίζεται ο ορισμός.

5.4.2.3.2 Ορισμός μονοτονίας μιας συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.1 με τίτλο *Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Μονοτονία συνάρτησης*, δίνονται οι ορισμοί της γνησίως αύξουσας και της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.3 με τίτλο *Μονότονες συναρτήσεις – Αντίστροφη συνάρτηση*, υποπαράγραφος *Μονοτονία συνάρτησης*, υπενθυμίζονται οι ορισμοί, ενώ στο υποσέλιδο δίνονται οι ορισμοί της αύξουσας και της φθίνουσας συνάρτησης.

5.4.2.3.3 Ορισμός φραγμένης συνάρτησης → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.4 Ορισμός σημείου συσσώρευσης μιας συνάρτησης

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.4 με τίτλο *Όριο συνάρτησης στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, υποπαράγραφος *Η έννοια του ορίου*, παρουσιάζεται μία μάλλον ποιοτική προσέγγιση της έννοιας του σημείου συσσώρευσης.

Διαβάζουμε:

> Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x_0, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής
>
> $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) (Σελ. 41)

5.4.2.3.5 Ορισμός ορίου μιας συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.4 με τίτλο *Όριο συνάρτησης στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, υποπαράγραφος *Ορισμός του ορίου στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, δίνεται ο αυστηρός ορισμός του ορίου. Ο ορισμός όμως είναι με αστερίσκο, που σημαίνει ότι δεν αποτελεί διδακτέα ύλη.

5.4.2.3.6 Θεώρημα (Αρχή της Μεταφοράς) → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.7 Θεώρημα – Βασικό Κριτήριο Σύγκλισης συναρτήσεων

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.8 Θεώρημα – Κριτήριο του Cauchy → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.9 Ορισμός συνέχειας μιας συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.8 με τίτλο *Συνέχεια συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Ορισμός της συνέχειας,* δίνεται ο αυστηρός ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

5.4.2.3.10 Θεώρημα Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X για την οποία $\alpha_n \to x_0$, είναι $f(\alpha_n) \to f(x_0)$

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.11 Πρόταση Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, μια συνάρτηση συνεχής στο $x_0 \in X$. Τότε:

- Αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.
- Αν $f(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.5 με τίτλο *Ιδιότητες των ορίων*, υποπαράγραφος *Όριο και διάταξη,* η Πρόταση παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.3.12 Ορισμός ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνάρτησης

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.13 Θεώρημα Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n), $n \in \mathbb{N}$ του X με $x_n - y_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, είναι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, καθώς $n \to \infty$ → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.14 Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.15 Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.3.16 Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης τιμής

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.8 με τίτλο *Συνέχεια συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα*, η Πρόταση παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.3.17 Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.8 με τίτλο *Συνέχεια συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα*, το Θεώρημα παρατίθεται με απόδειξη. Η απόδειξη που παρουσιάζεται στηρίζεται στο Θεώρημα Bolzano, το οποίο προηγείται.

5.4.2.3.18 Θεώρημα

Έστω Χ διάστημα των πραγματικών αριθμών και συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο Χ, τότε και το σύνολο τιμών της $f(X) = \{f(x): x \in X\}$ είναι επίσης διάστημα.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1ο, Παράγραφος 1.8 με τίτλο *Συνέχεια συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα*, το Θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.3.19 Πόρισμα

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Η εικόνα $f([\alpha, \beta])$ του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ είναι το διάστημα $[m, M]$, όπου $m = \inf\{f(x) \text{ με } x \in [\alpha, \beta]\}$ και $M = \sup\{f(x) \text{ με } x \in [\alpha, \beta]\}$.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.8 με τίτλο *Συνέχεια συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα*, το Θεώρημα παρατίθεται ως σχόλιο, χωρίς απόδειξη.

Διαβάζουμε:

Από το παραπάνω Θεώρημα και το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι το

σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

(Σελ. 77)

5.4.2.3.20 Θεώρημα Bolzano

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.8 με τίτλο *Συνέχεια συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα*, το Θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.3.21 Ιδιότητα Σταθερού Προσήμου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.8 με τίτλο *Συνέχεια συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα*, το Θεώρημα παρατίθεται ως σχόλιο, χωρίς απόδειξη.

Διαβάζουμε:

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

– Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σελ. 74)

5.4.2.4 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Ολοκληρωτικό Λογισμό

5.4.2.4.1 Ορισμός διαμέρισης διαστήματος [α, β] → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.2 Ορισμός κάτω και άνω αθροίσματος → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.3 Λήμμα: Έστω φραγμένη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ διαμέριση του [α, β]. Τότε ισχύει $L(f, P) \leq U(f, P)$. → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.4 Ορισμός λεπτότερης διαμέρισης → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.5 Θεώρημα: Αν P και Q διαμερίσεις του [α, β], τότε υπάρχει διαμέριση του [α, β] η οποία

είναι λεπτότερη τόσο της P, όσο και της Q. → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.6 Λήμμα: Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και P, Q διαμερίσεις του $[\alpha, \beta]$, τέτοιες ώστε $P \subset Q$. Τότε $L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f,Q) \leq U(f, P)$.

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.7 Θεώρημα: Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και P, Q διαμερίσεις του $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει $L(f, P) \leq U(f,Q)$. → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.8 Ορισμός κάτω – άνω ολοκληρώματος Riemann → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.9 Ορισμός ολοκληρώσιμης συνάρτησης → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.10 Πρόταση – Κριτήριο Riemann → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.11 Πόρισμα: Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν υπάρχει μια ακολουθία διαμερίσεων (P_n), $n \in \mathbb{N}$ του $[\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}\left(U(f, P_n) - L(f, P_n)\right) = 0$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.12 Θεώρημα – ολοκληρωσιμότητα πράξεων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.13 Θεώρημα – ολοκληρωσιμότητα μονότονης συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.14 Ορισμός κατά τμήματα μονότονης συνάρτησης

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.15 Θεώρημα – ολοκληρωσιμότητα συνάρτησης κατά τμήματα μονότονης σε κλειστό διάστημα → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.16 Θεώρημα – ολοκληρωσιμότητα συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.17 Θεώρημα (Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.4.18 Πόρισμα: Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε, υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 3, Παράγραφος 3.6 με τίτλο *Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού,* το Πόρισμα παρατίθεται με απόδειξη, ως το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αλλά δεν αποτελεί διδακτέα ύλη.

5.4.2.5 Συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στον Διαφορικό Λογισμό

5.4.2.5.1 Ορισμός παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.1 με τίτλο *Η έννοια της παραγώγου*, υποπαράγραφος *Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο*, δίνεται ο αυστηρός ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

5.4.2.5.2 Ορισμός παραγώγου μιας συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.2 με τίτλο *Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση*, δίνεται ο αυστηρός ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης.

5.4.2.5.3 Θεώρημα Έστω συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.1 με τίτλο *Η έννοια της παραγώγου*, υποπαράγραφος *Παράγωγος και συνέχεια*, το Θεώρημα παρατίθεται με απόδειξη.

5.4.2.5.4 Ορισμός τοπικών ακροτάτων συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.7 με τίτλο *Τοπικά ακρότατα συνάρτησης,* υποπαράγραφος *Η έννοια του τοπικού ακροτάτου*, δίνονται οι αυστηροί ορισμοί των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης.

5.4.2.5.5 Θεώρημα του Fermat

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.7 με τίτλο *Τοπικά ακρότατα συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων*, το Θεώρημα παρατίθεται με απόδειξη.

5.4.2.5.6 Θεώρημα Rolle

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.5 με τίτλο *Το Θεώρημα Μέσης Τιμής*, το Θεώρημα Rolle παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.5.7 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Lagrange)

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.5 με τίτλο *Το Θεώρημα Μέσης Τιμής*, το Θεώρημα Μέσης Τιμής παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.5.8 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Cauchy)

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.9 Θεώρημα – Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.6 με τίτλο *Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής*, υποπαράγραφος *Μονοτονία συνάρτησης*, το Θεώρημα παρατίθεται με απόδειξη.

5.4.2.5.10 Πόρισμα

Έστω συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ώστε f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x) - g(x) = c$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.6 με τίτλο *Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής*, το Θεώρημα παρατίθεται με απόδειξη.

5.4.2.5.11 Θεώρημα – Κριτήριο ύπαρξης τοπικών ακροτάτων

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.7 με τίτλο *Τοπικά ακρότατα συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων*, το Θεώρημα παρατίθεται με απόδειξη.

5.4.2.5.12 Θεώρημα – Κριτήριο δεύτερης παραγώγου

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.7 με τίτλο *Τοπικά ακρότατα συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων*, το Θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη, αλλά δεν αποτελεί διδακτέα ύλη.

5.4.2.5.13 Θεώρημα Darboux → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.14 Πόρισμα

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f ΄ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α, β). → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.15 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f: [α, β] → ℝ, συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β), με $m \leq f'(x) \leq M$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε, η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή ισχύει

$$m(\beta - \alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq M(\beta - \alpha)$$

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.16 Πρόταση

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β).

Τότε ισχύει $f''(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\right)$ για $x \in (\alpha, \beta)$.

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.17 Ορισμός κυρτότητας μιας συνάρτησης → Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.18 Ισοδύναμοι Ορισμοί κυρτότητας → Δεν περιέχονται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.19 Ορισμός σημείου καμπής συνάρτησης

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2,

Παράγραφος 2.8 με τίτλο *Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Σημεία καμπής*, δίνεται ο ορισμός του σημείου καμπής συνάρτησης.

5.4.2.5.20 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, παραγωγίσιμη στο (α, β).

- Αν η f ΄ είναι αύξουσα στο (α, β), τότε η f είναι κυρτή στο (α, β).
- Αν η f ΄ είναι φθίνουσα στο (α, β), τότε η f είναι κοίλη στο (α, β).

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.8 με τίτλο *Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Κοίλα – κυρτά συνάρτησης*, το Θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη, ως Ορισμός της κυρτότητας.

5.4.2.5.21 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f: (α, β) → ℝ, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β).

- Αν ισχύει $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η η f είναι κυρτή στο (α, β).
- Αν ισχύει $f''(x) \leq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η η f είναι κοίλη στο (α, β).

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.8 με τίτλο *Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Κοίλα – κυρτά συνάρτησης*, το Θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.5.22 Θεώρημα

Έστω f: (α, β) → ℝ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\xi \in (\alpha, \beta)$. Αν το ξ είναι σημείο καμπής της f, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για τη συνάρτηση f ΄.

→ Δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο

5.4.2.5.23 Θεώρημα

Έστω f: (α, β) → ℝ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\xi \in (\alpha, \beta)$ σημείο καμπής της f. Αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο ξ, τότε ισχύει $f''(\xi) = 0$.

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.8 με τίτλο *Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Σημεία καμπής*,

το Θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.5.24 Θεώρημα – Κριτήριο ύπαρξης σημείων καμπής

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.8 με τίτλο *Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης*, υποπαράγραφος *Σημεία καμπής*, το Θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

5.4.2.6 Σχέση Διαφόρισης και Ολοκλήρωσης

5.4.2.6.1 Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 3, Παράγραφος 3.5 με τίτλο *Η συνάρτηση F(x) =* $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, ο ορισμός παρουσιάζεται, όχι ρητά διατυπωμένος, στο 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

5.4.2.6.2 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 3, Παράγραφος 3.5 με τίτλο *Η συνάρτηση F(x) =* $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, παρατίθεται το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού με μία μάλλον ποιοτική προσέγγιση της απόδειξης.

5.4.2.6.3 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 3, Παράγραφος 3.5 με τίτλο *Η συνάρτηση F(x) =* $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, παρατίθεται το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού με απόδειξη.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, θα καταγράψουμε στη συνέχεια κάποιες σκέψεις και προσωπικούς και όχι μόνο προβληματισμούς, σχετικά με τη διδασκαλία του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών στο Γυμνάσιο και το Λύκειο αλλά και με τη διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης στη Γ΄ Λυκείου.

Από τη μελέτη των σχολικών βιβλίων του Γυμνασίου και του Λυκείου σε σχέση με την παρουσίαση της αξιωματικής θεμελίωσης του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, διαπιστώσαμε ότι ακολουθείται, κατά κάποιο τρόπο και με σημαντικές ελλείψεις, η διαδρομή $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, δηλαδή ξεκινώντας από το σύνολο των φυσικών αριθμών καταλήγουμε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ως θεμελιώδης μη οριζόμενη έννοια θεωρείται εκείνη των φυσικών αριθμών και σταδιακά περιγράφονται και παρουσιάζονται μάλλον, παρά ορίζονται, οι ακέραιοι, οι ρητοί και οι άρρητοι. Ένα ζήτημα που εντοπίζει ο Παπαδημητρίου σε σχέση με τη διδασκαλία των άρρητων αριθμών είναι ότι, στο Λύκειο δεχόμαστε την ύπαρξη των ριζών χωρίς απόδειξη, καθώς η ύπαρξη βασίζεται στη βαθειά ιδιότητα του Αξιώματος της Πληρότητας και ασχολούμαστε αποκλειστικά με τον αλγεβρικό χειρισμό τους. (Σελ. 13)

Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, για πρώτη φορά, απλά αναφέρεται ότι όλοι μαζί οι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών και παρουσιάζονται σε πίνακα οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$. Οι ίδιες πληροφορίες επαναλαμβάνονται, χωρίς διαφοροποιήσεις και με ακριβώς τον ίδιο, μάλλον επιφανειακό, τρόπο και στα σχολικά βιβλία των επόμενων γυμνασιακών και λυκειακών τάξεων, με επίκληση της προϋπάρχουσας σχετικής γνώσης των πραγματικών αριθμών! Συνολικά στα σχολικά βιβλία δεν γίνεται καμία αναφορά στην έννοια του φράγματος και κατ' επέκταση καμία αναφορά στην έννοια του supremum, το οποίο όμως, κατά γενική ομολογία, είναι απαραίτητο σε πολλά κρίσιμα σημεία της ανάπτυξης της Μαθηματικής Ανάλυσης. Οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν γνωρίζουν στο σύνολό τους (πώς θα μπορούσαν άλλωστε, αφού δεν διδάσκονται) κανένα στοιχείο για τα αξιωματικά συστήματα, συνεπώς δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν την αυστηρή αξιωματική θεμελίωση του συνόλου $\mathbb{R}$ και να θαυμάσουν το γεγονός ότι, ξεκινώντας από ένα ελάχιστο πλήθος ιδιοτήτων που αποδεχόμαστε αξιωματικά για το σύνολο των φυσικών αριθμών, κατασκευάζουμε σταδιακά όλα τα σύνολα των αριθμών (ακέραιους, ρητούς, άρρητους, πραγματικούς), ορίζουμε τις πράξεις και αποδεικνύουμε τις σχετικές ιδιότητες.

Ένα λυπηρό συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη των σχολικών βιβλίων και ενισχύεται από τη διδακτική μας εμπειρία είναι ότι, η λυκειακή προσέγγιση δεν οδηγεί σε βαθειά κατανόηση του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, γεγονός που δημιουργεί επιπλέον γνωστικά εμπόδια όταν, σε μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές και οι μαθήτριες έρχονται σε επαφή με βασικές

και λεπτές έννοιες και θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης. Το πρόβλημα γίνεται εντονότερο, όταν αργότερα οι μαθητές και οι μαθήτριες βρεθούν σε πανεπιστημιακές σχολές και έρθουν σε επαφή με μία εντελώς διαφορετική προσέγγιση των πραγματικών αριθμών, που τους αφήνει μπερδεμένους και απογοητευμένους από τις σχολικές τους γνώσεις.

Η συγκρουσιακή κατάσταση των δύο διαφορετικών προσεγγίσεων σχετικά με το σύνολο των πραγματικών αριθμών περιγράφεται πλήρως σε μία περιεκτική φράση του Landau. Ο Landau, στο βιβλίο του με τίτλο *Grundlagen der Analysis (Foundations of Analysis),* συμβουλεύει τους μαθητές και τις μαθήτριές του :

"Please forget everything you have learnt in school; for you have not learnt it."

Η κατανόηση των βασικών εννοιών και των θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης που οι μαθητές και οι μαθήτριες διδάσκονται και εξετάζονται στην Γ΄ Λυκείου για την εισαγωγή τους στις πανεπιστημιακές σχολές προϋποθέτει την βαθειά κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, σημειώνουν ότι "είναι σαφές ότι η κατανόηση του Απειροστικού Λογισμού χωρίς προηγούμενη πραγματική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών δεν είναι δυνατή." Εντοπίζουν όμως και επιπλέον προβλήματα σε σχέση με τη διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης στη Γ΄Λυκείου.

Διαβάζουμε:

> Αλλά και ο Απειροστικός Λογισμός στην τρίτη Λυκείου διδάσκεται χωρίς γνώση των πραγματικών αριθμών, ως ένα σύνολο συνταγών και αναπόδεικτων ισχυρισμών, ως μια άσκοπη εκμάθηση πολύπλοκων τεχνικών ολοκλήρωσης ή διαφόρισης ή εύρεσης εξεζητημένων ορίων, οι οποίες ξεχνιούνται μετά τις Πανελλήνιες εξετάσεις χωρίς να αφήσουν κανένα ίχνος γνώσης. Το αποτέλεσμα είναι ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι καταλαβαίνουν Απειροστικό Λογισμό, και όταν αργότερα στο πανεπιστήμιο έλθουν αντιμέτωποι με αυστηρές αποδείξεις τότε είτε θεωρούν ότι αυτά ήδη τα γνωρίζουν και δεν χρειάζονται τις αποδείξεις (οπότε αναπτύσσουν διδακτικά εμπόδια κατά της κατανόησης της διαδικασίας της απόδειξης) ή τελικά αντιλαμβάνονται ότι στο σχολείο ακολουθούσαν τυφλές συνταγές και καθόλου επιστημονικές εξηγήσεις (οπότε αισθάνονται ίσως ότι έχουν παραπλανηθεί στις σχολικές τους σπουδές για την πραγματική φύση των Μαθηματικών). (Σελ. 3)

Η λυκειακή και η πανεπιστημιακή προσέγγιση συγκρούονται λοιπόν, όχι μόνο σε σχέση με τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών, αλλά και σε ζητήματα που αφορούν τη διδασκαλία του ιδιαίτερα απαιτητικού κλάδου της Μαθηματικής Ανάλυσης. Από τη μελέτη του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών της Γ΄Λυκείου διαπιστώσαμε ότι ένα μεγάλο ποσοστό των θεωρημάτων παρουσιάζονται χωρίς να αποδεικνύονται. Μία πρώτη απλοϊκή σκέψη είναι ότι δίχως την αυστηρή μαθηματική απόδειξη, οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν μπορούν και κατά την άποψή μας δεν πρέπει να πειστούν για την ισχύ των θεωρημάτων που χρησιμοποιούν.

Η σχολική πραγματικότητα βέβαια δεν επιτρέπει την ύπαρξη αμφιβολιών σχετικά με την αλήθεια όσων αναφέρονται στα σχολικά βιβλία. Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Γ΄Λυκείου καλούνται να αγνοήσουν τις όποιες αμφιβολίες τους και να αποδεχτούν άκριτα την ισχύ όλων των ισχυρισμών που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο, είτε αυτοί αποδεικνύονται, είτε όχι. Καλούνται να "μάθουν" και όχι να μελετήσουν ορισμούς και θεωρήματα, δίχως να γνωρίζουν τις βαθύτερες συνδέσεις και βάσει αυτών, να εξασκηθούν σε ένα ατελείωτο ασκησιολόγιο που περιλαμβάνει μελέτη συναρτήσεων και χάραξη των γραφικών τους παραστάσεων, υπολογισμό πολύπλοκων ολοκληρωμάτων, εμβαδών και ορίων, εφαρμογή υπαρξιακών θεωρημάτων για την απόδειξη ύπαρξης ριζών εξίσωσης και πλήθος ακόμα θεμάτων. Εκπαιδεύονται στο να εντοπίζουν κανονικότητες, να αναπαράγουν μεθοδολογίες, να εφαρμόζουν τεχνικές, χωρίς να αντιλαμβάνονται την ουσία, με βασικό και ίσως μοναδικό σκοπό την εξασφάλιση της εισαγωγής τους στην πανεπιστημιακή σχολή που τους ενδιαφέρει.

Η μάθησή τους είναι κατά κύριο λόγο μηχανιστική και πρόσκαιρη, με αποτέλεσμα την εξαφάνιση του μεγαλύτερου μέρους των γνώσεών τους μέσα σε μικρό χρονικό διάστημα από την ολοκλήρωση των εξετάσεών τους. Στην Εισήγηση που ετοίμασαν οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, διαβάζουμε:

> Το ορατό και δυσοίωνο αποτέλεσμα είναι ότι οι μαθητές, στην μεγάλη τους πλειοψηφία, τελειώνουν τις σχολικές τους σπουδές χωρίς να έχουν κατανοήσει την διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης. Αν από την σχολική ύλη αφαιρεθούν οι αποδείξεις, τότε αυτό που μένει είναι ένα σύνολο κανόνων και συνταγών, ένα γυμνό κέλυφος χωρίς ουσία, το οποίο οι μαθητές ξεχνούν μόλις τελειώσουν το σχολείο, χωρίς να τους μείνει κανένα μόνιμο ίχνος από την ουσία των Μαθηματικών στο σχολείο. Τα Μαθηματικά εν πολλοίς σήμερα παρουσιάζονται στους μαθητές βαρετά, απωθητικά, σαν μια αναγκαστική ρουτίνα, και χωρίς σκοπό. (Σελ. 3)

Κλείνουμε το κεφάλαιο με τη λυπηρή διαπίστωση ότι η σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών μοιάζει να απομακρύνει σιγά σιγά τους μαθητές και τις μαθήτριές μας από το "γιατί" των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και να τους στρέφει ξανά στο "πώς" των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων. Και αυτή τη φορά το "πώς" είναι πολύ πιο συγκεκριμένο. Είναι "πώς θα περάσω στην πανεπιστημιακή σχολή που επιθυμώ". Θέλουμε να πιστεύουμε ότι υπάρχουν ακόμη φωτεινές εξαιρέσεις.

ΣΥΝΟΨΗ

Σημείο αναφοράς της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η λεγόμενη Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο άρθρο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της*. Στην εν λόγω Αρχή οι συγγραφείς αποδίδουν την προέλευση της μυστηριώδους αποδεικτικής δύναμης των Μαθηματικών και υποστηρίζουν ότι η συγκεκριμένη ερμηνεία έχει σημαντικές επιπτώσεις στις βασικές κατευθύνσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Με την Αρχή της συμβατής περάτωσης του Απείρου ασχοληθήκαμε αναλυτικά στο 1ο Κεφάλαιο της εργασίας μας.

Η συνεπαγωγή, γνωστή στην αρχαία Ελλάδα ως συνημμένο, είναι ο προτασιακός γεννήτορας μέσω του οποίου παράγονται όλες οι υποθετικές προτάσεις. Από την αρχαιότητα ακόμη υπήρχαν διαφορετικές απόψεις σχετικά με το πότε μια υποθετική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής και έντονος προβληματισμός σε σχέση με την τιμή αληθείας στην περίπτωση που ο ηγούμενος όρος είναι ψευδής πρόταση. Ο πίνακας αληθείας της συνεπαγωγής που είχε κατανοήσει ο Φίλων ο Λογικός, όπως αναφέρει ο Σέξτος Εμπειρικός (*Προς Λογικούς ,* Βιβλίο 8: 113,1 – 115,1) ταυτίζεται απόλυτα με τη σύγχρονη θεώρηση. Συνεπώς, όταν ο ηγούμενος όρος α είναι ψευδής πρόταση τότε, ανεξάρτητα από την τιμή αληθείας του επόμενου όρου β, η συνεπαγωγή $\alpha \Rightarrow \beta$ είναι πάντα αληθής πρόταση. Όλες οι προτάσεις κατ' επέκταση, που προκύπτουν από μία ψευδή υπόθεση είναι αληθείς προτάσεις.

Η παρατήρηση σχετικά με τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, κάθε αξιωματικό σύστημα που περιέχει έστω ένα αντιφατικό αξίωμα, είναι μεταξύ όλων των αξιωματικών συστημάτων εκείνο με τη μεγαλύτερη αποδεικτική ισχύ και η προέλευση της αποτελεσματικότητάς του εξηγείται απολύτως λογικά. Όμως, ένα αντιφατικό αξιωματικό σύστημα απορρίπτεται, καθώς τα μόνα αξιωματικά συστήματα που γίνονται αποδεκτά είναι εκείνα που δεν περιέχουν αντιφάσεις ή τουλάχιστον εκείνα που ελπίζουμε ότι δεν θα μας οδηγήσουν μελλοντικά σε αντιφατικές προτάσεις. Για να μεγιστοποιήσουμε την αποδεικτική δύναμη ενός μη αντιφατικού αξιωματικού συστήματος προτείνεται η κατασκευή αξιωματικών συστημάτων που αποτελούν καλές προσεγγίσεις αντιφατικών αξιωματικών συστημάτων, χωρίς ωστόσο να είναι αντιφατικά.

Η αντίφαση παρουσιάζεται ως ένα είδος οριακού σημείου με συμβατές προσεγγίσεις. Μάλιστα, όσο πιο τολμηρές και κοντά στην αντίφαση είναι οι προσεγγίσεις, τόσο πιο ισχυρή αποδεικτική δύναμη διαθέτουν τα αξιωματικά συστήματα που τις περιέχουν. Σε αυτήν την κατηγορία των συμβατών προσεγγίσεων της αντίφασης εντάσσεται και η συμβατή περάτωση του

απείρου. Το άπειρο και το πέρας είναι λογικά αντίθετες έννοιες, συνεπώς αξιώματα που μετατρέπουν το άπειρο σε πεπερασμένο ή υποθέσεις που μετατρέπουν άπειρες διαδικασίες σε πεπερασμένες οδηγούν με βεβαιότητα σε αντίφαση και απορρίπτονται. Προτείνεται λοιπόν η θεώρηση τολμηρών, αλλά πάντα συμβατών προσεγγίσεων του απείρου και μάλιστα όσο πιο ισχυρή είναι η προσέγγιση, τόσο ισχυρότερη αποδεικτική δύναμη αποκτά το αξίωμα ή η υπόθεση που προκύπτει. Κατά τη μετάβαση από μια αντιφατική σε μια συμβατή προσέγγιση του απείρου, είναι αρκετά πιθανή η εμφάνιση παράδοξων προτάσεων, δηλαδή προτάσεων που αντίκεινται στην ανθρώπινη διαίσθηση.

Ένα παράδειγμα συμβατής περάτωσης του απείρου συνδέεται με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους, η οποία θεωρήθηκε αντίθετη προς την ανθρώπινη διαίσθηση και χαρακτηρίστηκε παράδοξη. Η Πυθαγόρεια απόδειξη της ασυμμετρίας των μεγεθών διάμετρος – πλευρά διαφοροποιείται από τη σύγχρονη αλγεβρική απόδειξη και έχει στον πυρήνα της τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης. Έτσι, για τα μεγέθη α, β, με $\alpha^2 = 2\beta^2$ ισχύει Ανθ(α, β) = [1, 2, 2, 2, ...], άρα σύμφωνα με την Πρόταση 10.2 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, τα μεγέθη α, β είναι ασύμμετρα. Υπάρχει όμως και ένα βαθύτερο και λιγότερο προφανές συμπέρασμα. Η πλήρης γνώση της άπειρης διαδικασίας της ανθυφαίρεσης των α, β, δεν είναι εφικτή λόγω της απειρίας. Όμως, τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα επαναλαμβάνονται, γεγονός που μας επιτρέπει τελικά την πλήρη γνώση της άπειρης διαιρετικής διαδικασίας στο τρίτο μόλις βήμα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η απειρία περατώνεται κατά έναν τρόπο που θα χαρακτηρίζαμε συμβατό.

Ένα παράδειγμα μη συμβατής περάτωσης του απείρου συνδέεται με την προτεινόμενη από τον Frege αξιωματικοποίηση της Συνολοθεωρίας, που στη βάση της έχει τη Γενική Αρχή της Συμπερίληψης, σύμφωνα με την οποία κάθε σύνολο περιγράφεται πλήρως από την ιδιότητα των στοιχείων του. Λίγο πριν τη δημοσίευση της εργασίας, ο Russell γνωστοποίησε στον Frege ένα απλό και σύντομο παράδοξο αποδεικνύοντας ουσιαστικά ότι η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης ήταν προβληματική. Ο Russell θεώρησε το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους και κατέληξε σε λογική αντίφαση. Ο λόγος που η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης εμπεριέχει αντιφατικότητα είναι ότι επιτρέπει την ύπαρξη ενός συνόλου που προσεγγίζει το σύνολο όλων των συνόλων, ένα σύνολο – *τερατογένεση*, ανεπίτρεπτα άπειρο, για το οποίο δεν υπάρχει τόσο μεγάλος αντίστοιχος πληθάριθμος. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η απειρία περατώνεται κατά ένα τρόπο που θα χαρακτηρίζαμε μη συμβατό.

Στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας διπλωματικής εργασίας μελετήσαμε διεξοδικά την εντυπωσιακή αποδεικτική ισχύ τεσσάρων τολμηρών αξιωμάτων, σε τέσσερις διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Παρουσιάσαμε επιχειρήματα που συνηγορούν υπέρ της άποψης ότι

καθεμία από τις συγκεκριμένες υποθέσεις αποτελεί μία συμβατή περάτωση του απείρου και μελετήσαμε τον τρόπο με τον οποίο οι παραπάνω κλάδοι των μαθηματικών, όπως και τα συγκεκριμένα τολμηρά αξιώματα, παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου.

Ασχοληθήκαμε με:

- Την Αρχή του Ελαχίστου και τη θέση της στη Θεωρία Αριθμών.
- Το 5ο Αίτημα και τη θέση του στη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.
- Την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη και τη θέση της στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών.
- Το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών και τη θέση του στη Μαθηματική Ανάλυση.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, σε σχέση με τα τέσσερα αξιώματα, αναφέρουν:

> Τα Μαθηματικά έχουν τη μοναδική ικανότητα να ανακαλύπτουν ή να δημιουργούν ισχυρές και γόνιμες συμβατές προσεγγίσεις του αντιφατικού, οι οποίες λειτουργούν ως μαθηματικές αρχές. Θεωρούμε ότι η μοναδική αιτία για την αποδεικτική δύναμη των τεσσάρων αρχών που εξετάσαμε είναι το γεγονός ότι αποτελούν συμβατές Περατώσεις του Απείρου. Υπ' αυτή την έννοια πιστεύουμε ότι έχουμε εντοπίσει ένα βασικό στοιχείο της φύσης των Μαθηματικών.
>
> (Σελ. 26)

Αντίστοιχη προσέγγιση της ερμηνείας των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη παρουσίασε ο Hermann Weyl, συνδέοντας την προέλευση της αποτελεσματικότητας των Μαθηματικών, με το γεγονός ότι τα Μαθηματικά μελετούν το άπειρο με μέσα και κατασκευές πεπερασμένες.

Στο βιβλίο του Weyl με τίτλο *The Open World, Three Lectures on the Metaphysical Implications of Science,* διαβάζουμε:

> Mathematics is the science of the infinite, its goal the symbolic comprehension of the infinite with human, that is finite, means. (Σελ. 38)

Ενώ στο άρθρο του Weyl με τίτλο *Axiomatic versus constructive procedures in mathematics,* διαβάζουμε:

> Mathematics has been called the science of the infinite. Indeed, the mathematician invents finite constructions by which questions are decided that by their very

nature refer to the infinite. That is his glory. (Σελ. 12)

Η Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου, ως ένα βασικό στοιχείο της αληθούς φύσης των μαθηματικών, αιτιολογεί πλήρως την αποδεικτική ικανότητά τους και την αποτελεσματικότητά τους στις φυσικές επιστήμες. Η κατανόηση της παράδοξης φύσης των μαθηματικών μέσω της ανάδειξης του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού τους έχει σημαντικές διδακτικές επιπτώσεις, καθώς προτάσεις και αποδείξεις που εύκολα χαρακτηρίζονται από τους μαθητές και τις μαθήτριες ως αδιάφορες, αποκτούν μια άλλη θεώρηση, λόγω της εξάρτησης τους από μία προσέγγιση του αντιφατικού.

6.1 Συμπεράσματα από τη μελέτη της Αρχής του Ελαχίστου στη Θεωρία Αριθμών

Ένα σημαντικό πλήθος Προτάσεων της Θεωρίας Αριθμών όπως παρουσιάζονται στα Αριθμητικά Βιβλία 7, 8, 9 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αποτελούν, είτε άμεσες, είτε έμμεσες συνέπειες των Προτάσεων 7.1, 7.2 και 7.31, στις αποδείξεις των οποίων χρησιμοποιείται η Αρχή του Ελαχίστου με την ισοδύναμη μορφή της *κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών είναι πεπερασμένη*. Οι βασικότερες άμεσες ή έμμεσες συνέπειες της Αρχής του Ελαχίστου στα Αριθμητικά Βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη παρουσιάζονται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Η Αρχή του Ελαχίστου Προτάσεις 7.1, 7.2, 7.31	**Εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη αριθμών** Προτάσεις 7.1, 7.2, 7.3 - Μέθοδος της Ανθυφαίρεσης **Αναλογία αριθμών - Ορισμός ισοδύναμων κλασμάτων** Ορισμός 7.21 + Πρόταση 7.4 $\rightarrow$ Κανονική μορφή του Ορισμού 7.21 **Περιγραφή της κλάσης ισοδυναμίας κλασμάτων – ρητού** $\{\frac{\mu\omega}{\nu\omega}$, όπου $\frac{\mu}{\nu}$ ανάγωγο κλάσμα και $\omega = 1,2,...\}$ Επιτυγχάνεται με τις Προτάσεις 7.20, 7.21, 7.22 **Απόδειξη αρρητότητος του $\sqrt{N}$, όπου N δεν είναι τετράγωνος αριθμός** Αποδεικνύεται αυστηρά με χρήση των Προτάσεων 7.21 και 7.27 **Ανάλυση κάθε φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών** Παρουσιάζεται στην Πρόταση 9.14 με χρήση της Πρότασης 7.30 **Η απειρία των πρώτων αριθμών** Αποδεικνύεται αυστηρά στην Πρόταση 9.20 με εφαρμογή της Πρότασης 7.31, εισάγοντας το άπειρο στους αριθμούς.

Αναμφίβολα η Αρχή του Ελαχίστου διαθέτει τεράστια αποδεικτική δύναμη. Η προέλευση της αποδεικτικής της ισχύος συνδέεται με την ισοδυναμία της με τη σύγχρονη Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, η οποία με τη σειρά της αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Πράγματι, η απόδειξη της ισχύος μιας πρότασης για όλους

τους φυσικούς αριθμούς αποτελείται από άπειρα βήματα, άρα δεν είναι αποδεκτή. Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής αποτελεί μία μέθοδο απόδειξης της ισχύος μιας πρότασης για όλους τους φυσικούς αριθμούς, η οποία ολοκληρώνεται σε δύο μόλις βήματα. Η μη αποδεκτή, εξαιτίας του άπειρου μήκους, απόδειξη μετατρέπεται σε μία απόλυτα αποδεκτή απόδειξη πεπερασμένου μήκους. Συνεπώς, τόσο η Αρχή του Ελαχίστου, όσο και η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής είναι παράτολμες υποθέσεις και προσεγγίζουν την αντίφαση, με αποτέλεσμα να εμπεριέχουν κάποιου είδους παραδοξότητα.

Σε σχέση με τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκρίνοντας τα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου με τα Βιβλία 7, 8, 9 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, διαπιστώσαμε ότι, ενώ ο συγκεκριμένος κλάδος αναγνωρίζεται από το Υπουργείο Παιδείας ως ίσως ο πιο ελκυστικός κλάδος της μαθηματικής επιστήμης, ο τρόπος που παρουσιάζεται το σύνολο των Προτάσεων της Θεωρίας Αριθμών στα σχολικά εγχειρίδια είναι μονοδιάστατος, επιφανειακός, δεν περιλαμβάνει αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις, δεν αναδεικνύει τις βαθύτερες συνδέσεις και γενικότερα δεν κρίνεται ικανοποιητικός. Εξαίρεση αποτελεί το Κεφάλαιο 4 – Θεωρία Αριθμών του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου, όπου οι Προτάσεις πλησιάζουν αρκετά το ύφος και τη δομή των Αριθμητικών Βιβλίων του Ευκλείδη. Δυστυχώς όμως, από το σχολικό έτος 2014 – 15 και μετά, το Κεφάλαιο 4 συνολικά δεν αποτελεί διδακτέα ύλη, με αποτέλεσμα οι μαθητές και οι μαθήτριες να ολοκληρώνουν τη φοίτησή τους στο σχολείο, χωρίς να γνωρίζουν ουσιαστικά στοιχεία της Θεωρίας Αριθμών.

6.2 Συμπεράσματα από τη μελέτη του 5ου Αιτήματος στη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία

Ο Ευκλείδης επιλέγει να οργανώσει τη βασική επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία ακολουθώντας τη γενική λογική δομή μιας αποδεικτικής επιστήμης, σύμφωνα με τους αντίστοιχους ορισμούς του Αριστοτέλη. Στα Βιβλία 1, 2, 3, 4 των *Στοιχείων* παραθέτει τους όρους, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες, ενώ κάθε πρόταση αποτελεί το συμπέρασμα μιας αυστηρής διαδικασίας απόδειξης, η οποία βασίζεται αποκλειστικά σε ορισμούς, αιτήματα, κοινές έννοιες, καθώς και σε ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις. Το 2ο Αίτημα είναι εκείνο που εισάγει την απειρία στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, καθώς μας παρέχει τη δυνατότητα να προεκτείνουμε απεριόριστα κάθε ευθύγραμμο τμήμα. Το 5ο Αίτημα χαρακτηρίζεται ως "η ειδοποιός διαφορά της Ευκλείδειας από τις άλλου τύπου Γεωμετρίες" (Στράντζαλος, Σελ. 28), ενώ ο ίδιος ο Ευκλείδης, αντιλαμβανόμενος την ιδιαιτερότητά του δεν το χρησιμοποιεί στο πρώτο μισό του 1ου Βιβλίου (Προτάσεις 1.1 έως και

1.26). Η πρώτη ευθεία χρήση του 5ου Αιτήματος εντοπίζεται στην απόδειξη της Πρότασης 1.29 (αντιθετοαντίστροφη του 5ου Αιτήματος) και συνδέεται με την παραδοξότητα ορισμένων Προτάσεων που έπονται. Μεταξύ των συνεπειών του 5ου Αιτήματος ιδιαίτερη θέση κατέχουν οι Προτάσεις 1.32 και 1.34 που χρησιμοποιούνται στις υπόλοιπες Προτάσεις του Βιβλίου 1, αλλά και στις Προτάσεις των Βιβλίων 2, 3, 4 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Οι βασικότερες άμεσες ή έμμεσες συνέπειες του 5ου Αιτήματος του Ευκλείδη στα Βιβλία 1, 2, 3, 4 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη παρουσιάζονται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

5ο Αίτημα Προτάσεις 1.27, 1.28. 1,29	
Πρόταση 1.32 **στον κύκλο**	**Πρόταση 1.34** **στα ευθύγραμμα σχήματα**
Πρόταση 3.21	Προτάσεις 1.35 – 1.38 (Βιβλίο 1)
Προτάσεις 3.20, 3.22, 3.31 – 3.33 (Βιβλίο 3)	Προτάσεις 2ου Βιβλίου
	Πυθαγόρειο Θεώρημα
	Προτάσεις 1.44 και 2.14 (κάθε ευθύγραμμο χωρίο τετραγωνίζεται)
	Πυθαγόρεια μορφή παραβολής χωρίου καθ' υπερβολή και κατ΄έλλειψη
	Γεωμετρική Άλγεβρα
	Προτάσεις 3.35 και 3.36 (Δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

Αναμφίβολα το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη διαθέτει τεράστια αποδεικτική δύναμη. Η προέλευση της αποδεικτικής του ισχύος συνδέεται με το γεγονός ότι το 5ο Αίτημα αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό, ο έλεγχος της παραλληλίας δύο ευθειών, απαιτεί την εφαρμογή του 2ου Αιτήματος άπειρες το πλήθος φορές και άρα δεν είναι εφικτός. Το 5ο Αίτημα αποτελεί ένα ασφαλές κριτήριο ελέγχου της παραλληλίας, το οποίο μάλιστα ολοκληρώνεται σε δύο βήματα. Η μη αποδεκτή, εξαιτίας των άπειρων εφαρμογών του 2ου Αιτήματος, διαδικασία, μετατρέπεται σε μία απόλυτα αποδεκτή διαδικασία δύο βημάτων μόνο. Συνεπώς, το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη είναι μία παράτολμη υπόθεση και προσεγγίζει την αντίφαση, με αποτέλεσμα να εμπεριέχει κάποιου είδους παραδοξότητα.

Σε σχέση με τη διδασκαλία της βασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια

εκπαίδευση και συγκρίνοντας τα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου με τα Βιβλία 1, 2, 3, 4 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, διαπιστώσαμε ότι, ενώ ο συγκεκριμένος κλάδος αναγνωρίζεται από το Υπουργείο Παιδείας "ως το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές και στις μαθήτριες την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών", ο τρόπος που παρουσιάζεται το σύνολο των Προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα σχολικά εγχειρίδια δεν βοηθά την ανάπτυξη της ικανότητας δόμησης συλλογισμών και επιχειρημάτων, δεν πείθει για την αναγκαιότητα ύπαρξης της αποδεικτικής διαδικασίας ως κάτι που έχει ενότητα, δεν αναδεικνύει τις λεπτές συνδέσεις μεταξύ Ευκλείδειας Γεωμετρίας και Άλγεβρας, κάτι που συνέβαινε σε παλαιότερα σχολικά βιβλία. Επιπρόσθετα, όλα τα στοιχεία που σχετίζονται με τα αξιωματικά συστήματα και την έναρξη της επιστήμης που σηματοδότησαν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α του βιβλίου *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Τεύχος Α΄* της Α΄ Λυκείου, χωρίς όμως να αποτελούν διδακτέα ύλη, με αποτέλεσμα οι μαθητές και οι μαθήτριες να ολοκληρώνουν τη φοίτησή τους στο σχολείο, χωρίς να έρθουν σε επαφή με ένα αναπόσπαστο κομμάτι της πολιτισμικής μας κληρονομιάς. Η δεδομένη διαρκής υποβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση που παρατηρείται τα τελευταία χρόνια στη χώρα μας και όχι μόνο, η οποία σχολιάστηκε και από τους Προέδρους των Μαθηματικών Τμημάτων των Ελληνικών ΑΕΙ στο πόρισμα που κατέληξαν κατά την 1η Σύνοδό τους, δημιουργεί γενικότερα διδακτικά εμπόδια σε σχέση με τη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης.

6.3 Συμπεράσματα από τη μελέτη της Αρχής Ευδόξου - Αρχιμήδη στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών

Στα Βιβλία 5 και 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, τα οποία πιστώνονται στον Εύδοξο, παρουσιάζεται η Θεωρία Λόγων Μεγεθών, μία ιδιαίτερα γενική, πλούσια σε συμπεράσματα και βαθιά θεωρία. Κεντρική θέση σε αυτήν κατέχουν ο Ορισμός 5.4, όπου παρουσιάζεται η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, ο Ορισμός 5.5 όπου ορίζεται η ισότητα λόγων δύο ομοειδών μεγεθών και ο Ορισμός 5.7 όπου ορίζεται η ανισότητα λόγων δύο ομοειδών μεγεθών. Στην Πρόταση 5.8 βασίζεται το σύνολο της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου, ενώ στην απόδειξή της χρησιμοποιείται άμεσα για πρώτη φορά η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, σε συνδυασμό με την Αρχή του Ελαχίστου.

Οι βασικότερες άμεσες ή έμμεσες συνέπειες της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, στα Βιβλία 5, 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη παρουσιάζονται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Αρχή Ευδόξου - Αρχιμήδη **(Ορισμός 5.4)** ⇓		
Πρόταση 5.8 ⇓		
Πρόταση 5.14 ⇓	Πρόταση 5.20 ⇓	Πρόταση 5.21 ⇓
Πρόταση 5.16 (εναλλάξ) ⇓	Πρόταση 5.22 (δι' ίσου)	Πρόταση 5.23 (τεταραγμένης)
Πρόταση 5.19 ⇓		
Πρόταση 5.25		

Η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη έχει όμως και άλλες, εξαιρετικά ενδιαφέρουσες συνέπειες, οι οποίες συνοπτικά είναι οι ακόλουθες:

- Υπάρχει μία 1 – 1 αντιστοιχία μεταξύ των πραγματικών αριθμών και των λόγων μεγεθών που ικανοποιούν την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.
- Η μέθοδος της εξάντλησης που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων στηρίζεται στην Πρόταση 10.1, η οποία αποδεικνύεται με χρήση της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη.
- Το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη, με εντυπωσιακές προεκτάσεις στην τριγωνομετρία, αποδεικνύεται στα πλαίσια της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου.
- Το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου, με εντυπωσιακές προεκτάσεις στην τριγωνομετρία, αποδεικνύεται στα πλαίσια της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου.

Αναμφίβολα η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη διαθέτει τεράστια αποδεικτική δύναμη. Η προέλευση της αποδεικτικής της ισχύος συνδέεται με το γεγονός ότι η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Πράγματι, για τα ομοειδή μεγέθη α, β, το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}: n\cdot\beta \leq \alpha\}$ ενδέχεται να είναι είτε πεπερασμένο, είτε

άπειρο. Στην Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη καταγράφεται ρητά η συνθήκη που τα μεγέθη πρέπει να ικανοποιούν, ώστε να ισχύουν γι' αυτά ορισμένες από τις Προτάσεις της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου, αξιώνοντας ότι το παραπάνω σύνολο είναι πάντα πεπερασμένο. Η απειρία των φυσικών αριθμών που περιέχει η άρνηση της Αρχής, μετατρέπεται σε ύπαρξη ενός τουλάχιστον φυσικού αριθμού που περιέχει η Αρχή, άρα ένα εν δυνάμει άπειρο σύνολο μετατρέπεται σε πεπερασμένο. Μία διαφορετική οπτική είναι ότι, η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη αποτελεί μια τολμηρή συνθήκη που επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί η Αρχή του Ελαχίστου στη Θεωρία του Ευδόξου, κάτι που συμβαίνει στην απόδειξη της Πρότασης 5.8, συνεπώς η περάτωση που εντοπίζεται στη Θεωρία Λόγων Μεγεθών είναι αποτέλεσμα της κοινής λειτουργίας και του αριστουργηματικού συνδυασμού της Αρχή του Ελαχίστου και της Αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη. Σε κάθε περίπτωση, η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη είναι μία παράτολμη υπόθεση και προσεγγίζει την αντίφαση, με αποτέλεσμα να εμπεριέχει κάποιου είδους παραδοξότητα.

Σε σχέση με τη διδασκαλία της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκρίνοντας τα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου με τα Βιβλία 5, 6, 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, διαπιστώσαμε ότι ο ορισμός της αναλογίας μεγεθών που παρουσιάζεται στα σχολικά βιβλία, όχι απλά δεν είναι ικανοποιητικός, αλλά είναι εντελώς ακατάλληλος, καθώς καλλιεργεί στους μαθητές και στις μαθήτριες την αίσθηση ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι γεωμετρικά αντικείμενα. Οι μαθητές και οι μαθήτριες χωρίς να γνωρίζουν ούτε τον ορισμό της γεωμετρικής αναλογίας, ούτε τον ορισμό των πραγματικών αριθμών, δεν είναι σε θέση να καταλάβουν τη μεταξύ τους σχέση. Αντιθέτως, ο Ορισμός 5.5 της ισότητας λόγων μεγεθών, ο οποίος παρατίθεται μόνο σε Ιστορικό Σημείωμα του σχολικού βιβλίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου και άρα δεν αποτελεί διδακτέα ύλη, είναι ο πλέον σημαντικός και θεμελιώδης για τα σχολικά μαθηματικά, αφού αποτελεί τον συνδετικό κρίκο μεταξύ της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου και της Θεωρίας των πραγματικών αριθμών του Dedekind. Η διδασκαλία της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών κρίνεται απαραίτητη, καθώς οι μαθητές και οι μαθήτριες, μέσω αυτής, μπορούν να οδηγηθούν σταδιακά, σε βαθύτερη κατανόηση της έννοιας των πραγματικών αριθμών. Δύο εξαιρετικές εφαρμογές της Θεωρίας του Ευδόξου, η τριγωνομετρία και η μέθοδος της εξάντλησης, θα μπορούσαν να παρουσιαστούν ως προεκτάσεις της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών, κάτι που δεν συμβαίνει στα υπάρχοντα σχολικά βιβλία. Η τριγωνομετρία μπορεί να συνδεθεί με το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη και το Θεώρημα των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου, ενώ μία απολύτως ομαλή και φυσική εισαγωγή στον Ολοκληρωτικό Λογισμό μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα από τη μέθοδο της εξάντλησης, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να γνωρίσουν δύο σημαντικά και αναπόσπαστα κομμάτια της πολιτισμικής μας κληρονομιάς.

6.4 Συμπεράσματα από τη μελέτη του Αξιώματος της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών στη Μαθηματική Ανάλυση

Το Αξίωμα Πληρότητας των πραγματικών αριθμών έχει απόλυτα κεντρική θέση τόσο στην αυστηρή θεμελίωση του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, όσο και στη γενικότερη ανάπτυξη της Μαθηματικής Ανάλυσης, καθώς κάθε σημαντικό θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού βασίζεται κατά τρόπο ουσιαστικό στην ιδιότητα της πληρότητας. Η διαφοροποίηση του συνόλου των πραγματικών από το σύνολο των ρητών αριθμών οφείλεται ουσιαστικά στο Αξίωμα της Πληρότητας, η ισχύς του οποίου δεν είναι διαισθητικά προφανής, ούτε εύλογη. Έχοντας ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς ως τομές Dedekind, το Αξίωμα της Πληρότητας μετατρέπεται σε μία αποδείξιμη πρόταση.

Οι βασικότερες άμεσες ή έμμεσες συνέπειες του Αξιώματος της Πληρότητας στους πραγματικούς αριθμούς και στη Μαθηματική Ανάλυση παρουσιάζονται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Αξίωμα Πληρότητας πραγματικών αριθμών	
Εσωτερικές Ιδιότητες πραγματικών αριθμών & Ακολουθίες	**Συναρτήσεις**
Ύπαρξη άρρητων αριθμών	Βασικό Κριτήριο Σύγκλισης συναρτήσεων
Ύπαρξη του e	Κριτήριο Σύγκλισης συναρτήσεων (αντίστοιχο του Κριτηρίου Cauchy για ακολουθίες)
Ύπαρξη φυσικού λογάριθμου κάθε θετικού πραγματικού αριθμού α	**Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων**
Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη ή ισοδύναμα $\frac{1}{n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$	**Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης**
πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς	**Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης τιμής**
πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς αριθμούς	**Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών**
ιδιότητα συνέχειας	Θεώρημα Bolzano
Βασικό Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών	Ιδιότητα Σταθερού Προσήμου

Θεώρημα Bolzano – Weiestrass	Ύπαρξη κάτω και άνω ολοκληρώματος Riemann φραγμένης συνάρτηση στο [α, β]
Κριτήριο του Cauchy	Ολοκληρωσιμότητα μονότονων, κατά τμήματα μονότονων και συνεχών συναρτήσεων στο [α, β]
Ύπαρξη υποακολουθιακών ορίων	Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού
	Θεώρημα του Fermat
	Θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής (Lagrange και Cauchy), Ενδιαμέσων τιμών του Darboux
	Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων
	Κριτήριο ύπαρξης τοπικών ακροτάτων
	Κριτήριο δεύτερης παραγώγου
	Κριτήριο κυρτότητας συναρτήσεων
	Κριτήριο ύπαρξης σημείων καμπής
	1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού
	2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Αναμφίβολα το Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών διαθέτει τεράστια αποδεικτική δύναμη. Η προέλευση της αποδεικτικής του ισχύος συνδέεται με το γεγονός ότι το Αξίωμα της Πληρότητας αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Πράγματι, αποδεικνύεται ως συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας ότι, κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών είναι συμπαγές σύνολο. Σύμφωνα με τον ορισμό της συμπάγειας, για κάθε άπειρη οικογένεια από ανοικτά διαστήματα που καλύπτουν το αρχικό κλειστό και φραγμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών, υπάρχει μια πεπερασμένη υποοικογένεια η οποία καλύπτει το διάστημα. Επειδή η συμπάγεια αποτελεί μία συμβατή περάτωση του απείρου και το Αξίωμα της Πληρότητας εμπεριέχει τη συμπάγεια, άρα εμπεριέχει μία συμβατή περάτωση του απείρου. Συνεπώς, το Αξίωμα της Πληρότητας είναι μία παράτολμη υπόθεση και προσεγγίζει την αντίφαση, με αποτέλεσμα να εμπεριέχει κάποιου είδους παραδοξότητα.

Σε σχέση με τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκρίνοντας τα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου με πανεπιστημιακά εγχειρίδια του Απειροστικού Λογισμού, διαπιστώσαμε ότι, η συνήθης λυκειακή προσέγγιση διαφέρει σημαντικά από την αντίστοιχη πανεπιστημική προσέγγιση, καθώς οι εξαιρετικά απλοϊκές αναφορές στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου ότι όλοι μαζί οι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών, επαναλαμβάνονται χωρίς διαφοροποιήσεις και στα σχολικά βιβλία των τάξεων του Λυκείου. Στα σχολικά εγχειρίδια, η ύπαρξη των ριζών γίνεται αποδεκτή χωρίς απόδειξη και βασικός στόχος είναι ο αλγεβρικός χειρισμός τους. Δεν γίνεται καμία αναφορά στην έννοια του φράγματος ή στην έννοια του supremum, δεν κατασκευάζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης είναι οι μαθητές και οι μαθήτριες να μην κατανοούν σε βάθος το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και τις ιδιότητές του, γεγονός που τους δημιουργεί επιπλέον γνωστικά εμπόδια όταν έρχονται σε επαφή με βασικές έννοιες και θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης σε μεγαλύτερες τάξεις.

Σε σχέση με τη διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης στη Γ΄ Λυκείου και συγκρίνοντας τα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου με πανεπιστημιακά εγχειρίδια του Απειροστικού Λογισμού, διαπιστώσαμε ξανά την ύπαρξη σύγκρουσης ανάμεσα στη λυκειακή και την πανεπιστημιακή προσέγγιση του αντικειμένου. Στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου, πολλά από τα Θεωρήματα παρουσιάζονται χωρίς αυστηρή μαθηματική απόδειξη και οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να αποδεχτούν σιωπηλά την ισχύ τους και να ακολουθήσουν μεθοδολογίες, να υπολογίσουν πολύπλοκα όρια, ιδιαίτερα ολοκληρώματα, λειτουργώντας κυρίως μηχανικά, χωρίς να καταλαβαίνουν την ουσία όσων κάνουν. Το πλέον επικίνδυνο είναι ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες πιστεύουν ότι γνωρίζουν μαθηματικά, ότι τα μαθηματικά είναι "ένα σύνολο συνταγών και αναπόδεικτων ισχυρισμών, μια άσκοπη εκμάθηση πολύπλοκων τεχνικών ολοκλήρωσης ή διαφόρισης ή εύρεσης εξεζητημένων ορίων, οι οποίες ξεχνιούνται μετά τις Πανελλήνιες εξετάσεις χωρίς να αφήσουν κανένα ίχνος γνώσης" (Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, Σελ. 3, της εισήγησης) και νιώθουν μπερδεμένοι και ενδεχομένως παραπλανημένοι, όταν αργότερα στις πανεπιστημιακές σχολές τα μαθηματικά τους παρουσιάζονται με μία διαφορετική φιλοσοφία.

6.5 Προτάσεις εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων και αναδιαμόρφωσης των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών

Η διαρκής υποβάθμιση της παρεχόμενης μαθηματικής παιδείας στη χώρα μας είναι δυστυχώς δεδομένη και σχολιάστηκε και από τους Προέδρους των Μαθηματικών Τμημάτων των Ελληνικών ΑΕΙ κατά την 1η Σύνοδό τους (Α.Π.Θ, 27/11/ 2018). Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, προτείνουν ένα μακροχρόνιο πρόγραμμα αντιστροφής της παρακμής της μαθηματικής, δευτεροβάθμιας κυρίως, εκπαίδευσης, το οποίο θέτει τρεις στόχους. Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιάσουμε τους τρεις στόχους, θα καταγράψουμε σχόλια και προσωπικούς προβληματισμούς σε σχέση με αυτούς και θα καταθέσουμε ορισμένες προσωπικές σκέψεις και προτάσεις.

6.5.1 Η μαθηματική απόδειξη

Ας ξεκινήσουμε με τον πρώτο στόχο που είναι η επανατοποθέτηση της αυστηρής μαθηματικής απόδειξης στην κορυφή των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στην Εισήγηση των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη διαβάζουμε:

> Η αυστηρή μαθηματική απόδειξη πρέπει να επανετεθεί στην κορυφή των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η απόδειξη αποτελεί γραμμή ζωής, από τις ζώσες θεμελιώδεις υποθέσεις στην Πρόταση και χωρίς αυτήν η Πρόταση είναι άψυχη. Το ιδεώδες όχημα για την κατανόηση της διαδικασίας της απόδειξης είναι η στοιχειώδης, χωρίς αναλογίες και ομοιότητες, Γεωμετρία των τεσσάρων πρώτων Βιβλίων των *Στοιχείων*. (Σελ. 1 της εισήγησης)

Θεωρούμε ως πρώτο και κυρίαρχο ζήτημα το να πειστούν οι μαθητές και οι μαθήτριες για την αναγκαιότητα ύπαρξης της αποδεικτικής διαδικασίας για κάθε μαθηματική πρόταση, η οποία τους παρουσιάζεται, είτε από τον διδάσκοντα, είτε από το σχολικό βιβλίο. Αυτό σημαίνει ότι στη σχολική τάξη θα πρέπει να καλλιεργηθεί μια διάθεση διερεύνησης των συλλογισμών και των επιχειρημάτων που πλαισιώνουν κάθε μαθηματική πρόταση ή μαθηματικό θεώρημα, καθώς και ένα κλίμα "αμφισβήτησης" της ισχύος τους, όσο αυτά παραμένουν αναπόδεικτα. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να στρέψουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες στη διερεύνηση και τον εντοπισμό επιχειρημάτων ώστε να αιτιολογηθεί το "γιατί" και όχι να αρκούμαστε στις απλοϊκές παρουσιάσεις του "πώς", περιμένοντας ότι αναπόδεικτοι ισχυρισμοί θα γίνουν άκριτα αποδεκτοί.

Η αναγνώριση της αναγκαιότητας και της αξίας της μαθηματικής απόδειξης θα αποτελέσει

το πρώτο απαραίτητο βήμα, με το επόμενο να είναι η σταδιακή καλλιέργεια της ικανότητας δόμησης συλλογισμών και επιχειρημάτων, σε όλους ανεξαιρέτως τους κλάδους των Μαθηματικών. Ως πλέον κατάλληλο κλάδο για την εξοικείωση των μαθητών και των μαθητριών με την αποδεικτική διαδικασία, ώστε να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος στόχος, θεωρούμε τη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Συμφωνούμε απόλυτα με τη θέση του Υπουργείου Παιδείας ότι η Θεωρητική Γεωμετρία ως αξιωματικό σύστημα και μέσα από τη λογική αλληλουχία των προτάσεων και των θεωρημάτων που αποδεικνύονται με βάση προηγούμενα αποτελέσματα, οδηγεί τους μαθητές και τις μαθήτριες στην κατανόηση της δομής μιας μαθηματικής θεωρίας, ενώ ταυτόχρονα τους βοηθά να αναπτύξουν ικανότητες εύρεσης αποδεικτικών διαδικασιών στην επίλυση προβλημάτων. Θα πρέπει να τονιστεί και ο σημαντικός ρόλος της γεωμετρικής εποπτείας των σχημάτων, ως ένα στοιχείο που ενισχύει την καταλληλότητα της βασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην υλοποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

Προτείνουμε λοιπόν την απόκτηση της επιθυμητής εξοικείωσης των μαθητών και των μαθητριών με την αποδεικτική διαδικασία μέσα από την ενασχόλησή τους με τις Προτάσεις της στοιχειώδους επίπεδης γεωμετρίας και μάλιστα ακολουθώντας τη σειρά των Προτάσεων των Βιβλίων 1, 2, 3, 4 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Θεωρούμε ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες θα πρέπει να μελετούν τη δομή της βασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως ένα αξιωματικό σύστημα υπό το πρίσμα των ορισμών του Αριστοτέλη, με σκοπό αφενός να κατανοήσουν τη δομή ενός αξιωματκού συστήματος και αφετέρου να συλλάβουν σε βάθος τις συνδέσεις και τους παραγωγικούς συλλογισμούς. Μία κάπως τολμηρή σκέψη των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, η οποία όμως εντάσσεται στο πλαίσιο της διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης, είναι οι μαθητές και οι μαθήτριες να έρθουν σε επαφή και να μελετήσουν τα πρωτότυπα κείμενα του Αριστοτέλη για τα αξιωματικά συστήματα και των *Στοιχείων* του Ευκλείδη για τη βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Να τονίσουμε ότι η μελέτη του κειμένου στην πρωτότυπη μορφή του είναι μια απίστευτη πολυτέλεια που μοναδικά κατέχουμε ως λαός.

6.5.2 Η κατανόηση των πραγματικών αριθμών και η μετάβαση στη Μαθηματική Ανάλυση

Ας περάσουμε στον δεύτερο στόχο του προτεινόμενου προγράμματος, ο οποίος σχετίζεται με τη βαθειά κατανόηση και βαθμιαία δόμηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Στην Εισήγηση των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη διαβάζουμε:

Η πιο σημαντική δομή των (σχολικών) Μαθηματικών είναι το σύνολο των

πραγματικών αριθμών και η κατανόησή της στο σχολείο πρέπει να δοθεί με άνεση και πολυτέλεια, αρχής γενομένης από την αυστηρή κατασκευή των ρητών αριθμών με τη βοήθεια του Ευκλείδειου αλγόριθμου και τη θεωρία και συνθήκη Ευδόξου για γεωμετρικές αναλογίες και ομοιότητες (Βιβλία 5, 6 *Στοιχείων*), συνεχίζοντας με την εφαρμογή της θεωρίας λόγων στην τριγωνομετρία (παρουσιαζόμενης αμιγώς ως μέρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας) και στην μέθοδο της εξάντλησης των Ευδόξου (Βιβλίο 12 των *Στοιχείων*) και Αρχιμήδη, φθάνοντας τέλος στον λεπτό, αλλά απλό ορισμό των πραγματικών αριθμών ως τομών Dedekind και την πλέον βασική ιδιότητα τους, το θεώρημα Bolzano – Weierstrass και τέλος, δρέποντας τους πλούσιους καρπούς, στην αυστηρή ανάπτυξη με ακολουθίες μόνο του Απειροστικού Λογισμού.

(Σελ. 1 της εισήγησης)

Η πρακτική που ακολουθούν τα σύγχρονα σχολικά βιβλία κρίνεται γενικά ως μη ικανοποιητική. Τα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου περιορίζονται σε μία εξαιρετικά πρόχειρη παρουσίαση των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων και απλά αναφέρεται ότι όλοι αυτοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ τα σχολικά βιβλία του Λυκείου επικαλούνται τις γνώσεις των μαθητών και των μαθητριών από το Γυμνάσιο! Η λυκειακή προσέγγιση του συνόλου των πραγματικών αριθμών με την αντίστοιχη πανεπιστημιακή έρχονται σε σύγκρουση, που περιγράφεται πλήρως από την φράση του Landau *"Please forget everything you have learnt in school; for you have not learnt it."*

Η έλλειψη δόμησης του οικοδομήματος των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων του, αποτέλεσμα της λυκειακής προσέγγισης, καθιστά σχεδόν απαγορευτική και σίγουρα εξαιρετικά δύσκολη την κατανόηση βασικών εννοιών και θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης. Όπως αναφέρουν χαρακτηριστικά οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη "η κατανόηση του Απειροστικού Λογισμού χωρίς προηγούμενη πραγματική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών δεν είναι δυνατή."

Η δόμηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών θα πρέπει να υλοποιηθεί σταδιακά, με χρήση της Αριθμητικής και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ξεκινώντας μάλιστα από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού και φτάνοντας μέχρι και τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου, όπου στη Γ΄ Λυκείου οι μαθητές και οι μαθήτριες θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις σχετικές τους γνώσεις και να τις εφαρμόσουν στα ιδιαίτερα απαιτητικά θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη, για τη βαθμιαία δόμηση και κατανόηση των:

- **ρητών αριθμών**, προτείνουν τη μαθηματική επαγωγή και τον Ευκλείδειο αλγόριθμο
- **πραγματικών αριθμών**, διακρίνουν δύο στάδια :
    - το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει μία μακροχρόνια προετοιμασία για την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα προτείνεται η διδασκαλία:
        - της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών (Βιβλία 5, 6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη) με ιδιαίτερη έμφαση στην Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη (Ορισμός 5.4) και στους ορισμούς ισότητας λόγων μεγεθών (Ορισμός 5.5) και ανισότητας λόγων μεγεθών (Ορισμός 5.7).
        - της τριγωνομετρίας, ως εφαρμογή της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών, με τον ορισμό της γωνίας ως λόγου κυκλικών τόξων, με ομοιότητες, με χρήση των Θεωρημάτων της Σπασμένης χορδής του Αρχιμήδη και των Εγγράψιμων Τετραπλεύρων του Πτολεμαίου για την απόδειξη των τριγωνομετρικών τύπων.
        - της μεθόδου της εξάντλησης (Βιβλίο 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και τετραγωνισμός της παραβολής του Αρχιμήδη), ως εφαρμογή της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών, για τον υπολογισμό όγκων και εμβαδών, προσεγγίζοντας ικανοποιητικά τη σύγχρονη οπτική του Ολοκληρωτικού Λογισμού.
    - το δεύτερο στάδιο περιλαμβάνει την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών ως απογεωμετρικοποιημένες τομές Dedekind. Προτείνεται η σύγκριση του Αξιώματος της Πληρότητας με την οποία είναι εφοδιασμένο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, με την ασθενέστερη Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη, με την οποία είναι εφοδιασμένο το σύνολο των λόγων μεγεθών της θεωρίας Ευδόξου, αλλά και η γενικότερη σύγκριση των δύο θεωριών: της Θεωρίας του Dedekind για τους πραγματικούς αριθμούς και της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών του Ευδόξου.

Η προτεινόμενη βαθμιαία δόμηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό την πανεπιστημιακή προσέγγιση, ενώ παράλληλα η παρουσίασή της σε μαθητές και μαθήτριες Γυμνασίου και Λυκείου δεν χαρακτηρίζεται εξαιρετικά δύσκολη ή ανέφικτη, αν λάβουμε υπόψη το ρόλο του σχήματος και τη βοήθεια που προκύπτει από τη γεωμετρική εποπτεία. Ταυτόχρονα, η προτεινόμενη προσέγγιση καθιστά εφικτή και σίγουρα πιο ομαλή,

συγκριτικά με τη σημερινή κατάσταση, τη διδασκαλία βασικών εννοιών και θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης στη Γ΄Λυκείου.

Ειδικότερα, για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης, στο πνεύμα των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη, προτείνεται η διδασκαλία των παρακάτω εννοιών και θεωρημάτων με την ακόλουθη σειρά:

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- **Ακολουθία πραγματικών αριθμών:** ως μία συνάρτηση από το σύνολο των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, που συμβολίζεται (α_n), $n\in\mathbb{N}$ ή (α_1, α_2, α_3, ...).
- **Όριο ακολουθίας πραγματικών αριθμών:** μια ακολουθία (α_n), $n\in\mathbb{N}$ συγκλίνει στο α, όταν η (α_n), $n\in\mathbb{N}$ είναι τελικά σε μια περιοχή του α.
- **Θεώρημα:** Κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει, με το όριο να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της ακολουθίας. Αντίστοιχα, κάθε φθίνουσα φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο μέγιστο κάτω φράγμα της ακολουθίας. Συγκριτική παρουσίαση της σύγκλισης κάθε φθίνουσας ακολουθίας θετικών πραγματικών αριθμών που εξασφαλίζεται από το Αξίωμα της Πληρότητας, με τη σύγκλιση στο 0 της στοιχειώδους φθίνουσας ακολυθίας $\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$ που αποδεικνύεται στην Πρόταση 10.1 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και εξασφαλίζεται από την Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη.
- **Υπακολουθία μιας ακολουθίας (α_n), $n\in\mathbb{N}$:** ως υπακολουθία της (α_n), $n\in\mathbb{N}$ (συμβολίζουμε (α_{k_n})), ορίζουμε κάθε ακολουθία της μορφής (α_{k_1} , α_{k_2} ,..., α_{k_n} , $\alpha_{k_{n+1}}$,...), όπου $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} <$
- **Θεώρημα Bolzano – Weierstrass:** κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μια υπακολουθία η οποία είναι μονότονη και άρα συγκλίνουσα. (απόδειξη με τα σημεία κορυφής & κάθε ακολουθία έχει μια μονότονη υπακολουθία)
- **Πραγματική Συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής:** Μία διμελής σχέση $f \subset X \times Y$ από το X στο Y, όπου για κάθε $x\in X$, υπάρχει ένα μοναδικό $y\in Y$, ώστε $f(x) = y$.
- **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:** ο ορισμός της γωνίας ως λόγου κυκλικών τόξων, επιτρέπει τη φυσιολογική τους θεώρηση ως πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

- **Σύγκλιση συνάρτησης με την Αρχή της Μεταφοράς:** (μέσω ακολουθιών) Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ σημείο συσσώρευσης του X και ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, για την οποία ισχύει $\alpha_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \to x_0$. Τότε ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$, αν και μόνο αν, $f(\alpha_n) \to \beta$.
- **Συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ στο $x_0 \in X$:** (μέσω ακολουθιών) Η f είναι συνεχής στο x_0, αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (α_n), $n \in \mathbb{N}$ στο X, με $\alpha_n \to x_0$, ισχύει $f(\alpha_n) \to f(x_0)$.
- **Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων:** (απόδειξη από το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass)
- **Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης:** (απόδειξη από το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass)
- **Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης τιμής:** (απόδειξη από το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass)
- **Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών:** (απόδειξη από το Θεώρημα Bolzano – Weiestrass)
- **Θεώρημα Bolzano:** (απόδειξη είτε από το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass, είτε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών).
- **Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών:** (απόδειξη από Θεώρημα Bolzano)
- **Ιδιότητα Σταθερού Προσήμου:** (απόδειξη από Θεώρημα Bolzano)

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

- **Ορισμοί κάτω και άνω αθροισμάτων Riemann** μιας φραγμένης συνάρτησης ως προς μία διαμέριση, με τη γεωμετρική τους ερμηνεία, στην περίπτωση που η f είναι μη αρνητική – σύγκριση με τη μέθοδο της εξάντλησης, όπως παρουσιάζεται στο 12ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και τον τετραγωνισμό της παραβολής του Αρχιμήδη.
- **Ορισμοί κάτω και άνω ολοκληρώματος Riemann** μιας φραγμένης συνάρτησης.
- **Ορισμός ολοκληρώσιμης ή ολοκληρώσιμης κατά Riemann** φραγμένης συνάρτησης.
- **Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος** φραγμένης συνάρτησης.
- **Κριτήριο Riemann** για την ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης: (απόδειξη με ακολουθία διαμερίσεων)
- **Θεώρημα** για την ολοκληρωσιμότητα μιας μονότονης συνάρτησης στο [α, β]: (απόδειξη από Κριτήριο Riemann)

- **Θεώρημα** για την ολοκληρωσιμότητα μιας κατά τμήματα μονότονης συνάρτησης στο [α, β]: (απόδειξη από Κριτήριο Riemann)
- **Θεώρημα** για την ολοκληρωσιμότητα μιας συνεχούς συνάρτησης στο [α, β]: (απόδειξη από Κριτήριο Riemann & Θεμελιώδες Θεώρημα συνεχών συναρτήσεων & Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής)
- **Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού:** (απόδειξη από Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης τιμής & ολοκληρωσιμότητα ως συνέπεια της συνέχειας στο [α, β])

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

- **Σχέση** συνέχειας και παραγωγισιμότητας.
- **Θεώρημα του Fermat:** (απόδειξη από ορισμούς)
- **Θεώρημα Rolle:** (απόδειξη από το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής & το Θεώρημα του Fermat).
- **Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Lagrange):** (απόδειξη από Θεώρημα Rolle)
- **Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Cauchy):** (απόδειξη από Θεώρημα Rolle)
- **Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων:** (απόδειξη από Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού)
- **Κριτήριο ύπαρξης τοπικών ακροτάτων:** (απόδειξη από Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων)
- **Κριτήριο δεύτερης παραγώγου:** (απόδειξη από Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων)
- **Κριτήριο κυρτότητας συναρτήσεων:** (απόδειξη από Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων)
- **Κριτήριο ύπαρξης σημείων καμπής:** (απόδειξη από Κριτήριο μονοτονίας συναρτήσεων)

ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ - ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

- **Ορισμός** αόριστου ολοκληρώματος: Έστω f: [α, β] → ℝ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η, καλώς ορισμένη, συνάρτηση F: [α, β] → ℝ, με $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ καλείται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

- **1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:** (απόδειξη από Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων & ολοκληρωσιμότητα ως συνέπεια της συνέχειας στο [α, β])
- **2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:** (απόδειξη από 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

6.5.3 Η κατανόηση του ρόλου της Περάτωσης του Απείρου και η ανάδειξη του κάλλους των μαθηματικών

Ο τρίτος στόχος του προτεινόμενου προγράμματος σχετίζεται γενικότερα με την απόδοση ηγετικού ρόλου στην Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου στον σχεδιασμό της μαθηματικής εκπαίδευσης στη χώρα μας. Στην Εισήγηση των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη διαβάζουμε:

> Ο τρίτος φιλόδοξος στόχος είναι η κατανόηση του ρόλου της Περάτωσης του Απείρου σε όλα τα (σχολικά) Μαθηματικά, η προκύπτουσα αποδεικτική δύναμη των Μαθηματικών, το κάλλος των Μαθηματικών (και η ανακάλυψη της φαντασίας και ελκυστικότητας στις "βαρετές" μαθηματικές αποδείξεις) και η κατά Wigner "παράλογη αποτελεσματικότητα" τους στις Φυσικές Επιστήμες.
>
> (Σελ. 1 της εισήγησης)

Ο στόχος αυτός δεν υφίσταται στη σύγχρονη διεθνή πραγματικότητα. Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη όμως θεωρούν ότι αποτελεί "αναπόφευκτο βήμα προόδου και ανθρώπινης επιβίωσης και γι' αυτό αργά ή γρήγορα η διεθνής κατεύθυνση της εκπαίδευσης θα αποδώσει στην Αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου τον ηγετικό ρόλο." (Σελ. 38 της εισήγησης) Εάν λοιπόν, η Μαθηματική παιδεία στη χώρα μας συμπεριλάβει στο κοντινό μέλλον τον συγκεκριμένο στόχο, τότε, αφενός θα υπάρξει διεθνής αναγνώριση της χώρας μας ως πρωτοπόρου και αφετέρου η ελληνική μαθηματική παιδεία θα αποτελέσει παγκόσμιο πρότυπο, ισχυρά ανώτερο σε σχέση με τα υπάρχοντα.

Οι τέσσερις κλάδοι των μαθηματικών, η Θεωρία Αριθμών, η βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία, η Θεωρία Λόγων Μεγεθών και η Μαθηματική Ανάλυση αποτελούν μαθηματικά οικοδομήματα, στα θεμέλια των οποίων εντοπίζεται μία ιδιαίτερη υπόθεση, διαφορετική σε κάθε κλάδο. Ειδικότερα, στη βάση της Θεωρίας Αριθμών εντοπίζεται η Αρχή του Ελαχίστου, στη βάση της βασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας εντοπίζεται το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη, στη βάση της Θεωρίας Λόγων Μεγεθών εντοπίζεται η Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη και τέλος στη βάση της Μαθηματικής Ανάλυσης

εντοπίζεται το Αξίωμα της Πληρότητας. Οι παράτολμες αυτές υποθέσεις, πέρα από την τεράστια αποδεικτική ισχύ που διαθέτουν, έχουν ένα ακόμα κοινό χαρακτηριστικό: αποτελούν περιπτώσεις εφαρμογής της Αρχής της συμβατής Περάτωσης του Απείρου. Η διδασκαλία λοιπόν των τεσσάρων αυτών κλάδων των μαθηματικών δεν θα πρέπει να αγνοεί το συγκεκριμένο κοινό τους χαρακτηριστικό, αλλά αντιθέτως, θα πρέπει να έχει ως βασικότερο στόχο την ανάδειξή του και τη σύνδεσή του με το μεγάλο πλήθος συνεπειών, καθώς και την ύπαρξη παράδοξων προτάσεων.

Με δεδομένο ότι έχουμε παρουσιάσει επιχειρήματα που αιτιολογούν πλήρως την τεράστια αποδεικτική ισχύ λόγω της προσέγγισης του αντιφατικού, που προκύπτει από περιπτώσεις εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου, θα αφιερώσουμε τις τελευταίες σελίδες της παρούσας διπλωματικής εργασίας στο μαθηματικό κάλλος και στη σχέση του με την εν λόγω Αρχή.

Στο άρθρο τους με τίτλο *The experience of mathematical beauty and its neural correlates* (2014), ο βραβευμένος με το βραβείο Fields (1966) και το βραβείο Abel (2004) μαθηματικός Michael Atiyah, οι νευροβιολόγοι Semir Zeki και John Paul Romaya και ο φυσικός Dionigi M.T. Benincasa, παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της έρευνας που διεξήγαγαν με σκοπό να εντοπίσουν τις περιοχές του εγκεφάλου που ενεργοποιούνται από το ωραίο στις τέχνες και το ωραίο στα Μαθηματικά. Οι ερευνητές, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απεικόνισης fMRI του εγκεφάλου, κατέγραψαν τις αντιδράσεις 15 μαθηματικών, καθώς τους παρουσίαζαν μαθηματικούς τύπους που θεωρούνται από τη μαθηματική κοινότητα ως "beautiful" (όμορφοι) (π.χ η εξίσωση του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$), "indifferent" (αδιάφοροι) ή "ugly" (άσχημοι). Το εντυπωσιακό συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν είναι ότι η περιοχή του εγκεφάλου που ενεργοποιείται από το ωραίο στις τέχνες ταυτίζεται με εκείνη που ενεργοποιείται από το ωραίο στα Μαθηματικά!!!

Σε συνέντευξη του Michael Atiyah στη δημοσιογράφο Siobhan Roberts, που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Quanta magazine τον Μάρτιο του 2016, με τίτλο *Michael Atiyah's Imaginative State of Mind* και σε ερώτηση σχετική με το προαναφερθέν άρθρο, διαβάζουμε :

> That's the most–read article I've ever written! It's been known for a long time that some part of the brain lights up when you listen to nice music, or read nice poetry, or look at nice pictures – and all of those reactions happen in the same place [the "emotional brain," specifically the medial orbitofrontal cortex]. And the question was: Is the appreciation of mathematical beauty the same, or is it different? And the conclusion was, it is the same. The same bit of the brain that appreciates beauty in music, art and poetry is also involved in the appreciation of mathematical beauty. And that was a big discovery.

Ο διάσημος μαθηματικός Andrew Wiles, σε δημόσια διάλεξή του τον Νοέμβριο του 2017, παρομοίασε την αισθητική απόλαυση από την ενασχόληση με τα μαθηματικά, με έναν περίπατο εξερεύνησης ενός μονοπατιού, όπου ξαφνικά ανακαλύπτουμε κάτι εντελώς νέο και αναπάντεχο. Άρα, το κάλλος των Μαθηματικών συνδέεται, κατά τον Wiles, με "εκείνη την ξαφνική στιγμή, όπου έκπληκτοι αντιλαμβανόμαστε ότι όλα όσα μέχρι τότε ήταν ασαφή και ακατανόητα, ξεκαθαρίζουν."

Ο Timothy Gowers, στο βιβλίο του *Mathematics, A Very Short Introduction*, αναφέρει:

> It is a notable feature of the second argument that it depends on a single idea, which, though unexpected, seems very natural as soon as one has understood it. It often puzzles people when mathematicians use words like 'elegant', 'beautiful', or even 'witty' to describe proofs, but an example such as this gives an idea of what they mean. Music provides a useful analogy: we may be entranced when a piece moves in an unexpected harmonic direction that later cornes to seem wonderfully appropriate, or when an orchestral à texture appears to be more than the sum of its parts in a way that we do not fully understand. Mathematical proofs can provide a similar pleasure with sudden revelations, unexpected yet natural ideas, and intriguing hints that there is more to be discovered. Of course, beauty in mathematics is not the same as beauty in music, but then neither is musical beauty the same as the beauty of a painting, or a poem, or a human face. (Σελ. 51)

Ο Godfrey Harold Hardy, στο βιβλίο του *A Mathematician's Apology*, σχολιάζοντας την Πυθαγόρεια Πρόταση αρρητότητας του $\sqrt{2}$ και την Πρόταση 9.20 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη σχετικά με την απειρία των πρώτων αριθμών, αναφέρει:

> I can hardly do better than go back to the Greeks. I will state and prove two of the famous theorems of Greek mathematics. They are "simple" theorems, simple both in idea and in execution, but there is no doubt at all about their being theorems of the highest class. Each is as fresh and significant as when it has discovered—two thousand years have not written a wrinkle on either of them. Finally, both the statements and the proofs can be mastered in an hour by any intelligent reader, however slender his mathematical equipment. (Σελ. 18)

Οι αποδείξεις των Προτάσεων στις οποίες αναφέρεται ο Hardy, δηλαδή η Πυθαγόρεια Πρόταση αρρητότητας του $\sqrt{2}$ και η Πρόταση 9.20 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη σχετίζονται, όπως διαπιστώσαμε από τη μελέτη τους, με την Αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου.

Ειδικότερα:

- στην Πυθαγόρεια Πρόταση αρρητότητας του $\sqrt{2}$, που παρουσιάσαμε αναλυτικά στην ενότητα 1.2.2 της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αποδεικνύεται ότι, η ανθυφαίρεση των μεγεθών πλευράς – διαμέτρου είναι άπειρη, άρα δεν είναι εφικτή η πλήρης γνώση της, γεγονός που τελικά ανατρέπεται λόγω της επανάληψης των ανθυφαιρετικών υπολοίπων. Επειδή η απειρία της ανθυφαίρεσης που προκύπτει από την ασυμμετρία, περατώνεται κατά έναν τρόπο που θα χαρακτηρίζαμε συμβατό, η απόδειξη της Πυθαγόρειας Πρότασης αρρητότητας του $\sqrt{2}$ αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου.
- Η Πρόταση 9.20 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη που παρουσιάσαμε αναλυτικά στην ενότητα 2.2.6 της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αποτελεί έμμεση συνέπεια της Αρχής του Ελαχίστου, καθώς στην απόδειξή της γίνεται χρήση της Πρότασης 7.31, η οποία με τη σειρά της αποδεικνύεται με εφαρμογή της Αρχής του Ελαχίστου. Η Αρχή του Ελαχίστου όμως, όπως επιχειρηματολογήσαμε σχετικά, αποτελεί μία περίπτωση εφαρμογής της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου.

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 1.2 της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ο Αριστοτέλης στα *Μεταφυσικά* [983α11-23], σε σχέση με την ασυμμετρία αναφέρει ότι πρόκειται για μια μαθηματική ανακάλυψη που αντίκειται στην ανθρώπινη διαίσθηση, με αποτέλεσμα όταν κάποιος πληροφορείται για την ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών να απορεί και να έχει την αίσθηση της παραδοξότητας. Σε δεύτερο χρόνο όμως, μετά την απόκτηση της γνώσης, παύει να απορεί, πείθεται εξαιτίας της δύναμης της αυστηρής μαθηματικής σκέψης και αναγνωρίζει το μαθηματικό κάλλος.

Ανάλογα είναι τα σχόλια του Πρόκλου (*Εις Ευκλείδην* 396,10-397,6) σχετικά με τις Προτάσεις 1.35 έως και 1.38, όπως τα παρουσιάσαμε στην ενότητα 3.2.5 της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι η εντύπωση που προκάλεσαν, ειδικά στους μη έχοντες γεωμετρική παιδεία, οι Προτάσεις 1.35 έως και 1.38 ήταν ότι πρόκειται για μάλλον παράδοξες προτάσεις και χαρακτηρίζει "παντελώς θαυμαστόν", το γεγονός ότι η περίμετρος αυξάνεται "επ' άπειρον", ενώ ταυτόχρονα "μένει η των χωρίων ισότης". Συνεπώς ο Πρόκλος συνέδεσε το μαθηματικό κάλλος με μία εφαρμογή της Αρχής της συμβατής περάτωσης του απείρου.

Όλοι οι μελετητές που αναφέραμε συγκλίνουν στην άποψη ότι, το κάλλος των Μαθηματικών συνδέεται στενά με το αναπάντεχο και ξαφνικό, την έκπληξη που βιώνουμε όταν οδηγούμαστε από την άγνοια, στην κατανόηση και τη γνώση, συνδέεται με το περίφημο "Εύρηκα"

του Αρχιμήδη και το "άναμμα του λαμπτήρα σε ένα σκοτεινό δωμάτιο" του Hadamard. Ταυτόχρονα παρατηρούμε ότι οι αποδείξεις των Προτάσεων που χαρακτηρίζονται ως "ωραίες" συνδέονται με την Αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου. Είναι απολύτως λογική η θεώρηση ότι, το μαθηματικό κάλλος προκύπτει από την αληθή φύση των Μαθηματικών και ειδικότερα από το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της, την Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου.

Η Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου λοιπόν, εκτός από την αποτελεσματικότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες και την παράλογη αποδεικτική ικανότητα που τους αποδίδει, συνδέεται και με το κάλλος, την ομορφιά που πολλοί από εμάς θεωρούμε ότι εμπεριέχουν τα μαθηματικά. Δυστυχώς, αυτήν την αισθητική απόλαυση που νιώθουμε μελετώντας και διδάσκοντας μαθηματικά, συχνά δεν καταφέρνουμε να την αναδείξουμε, να την περάσουμε στους μαθητές και στις μαθήτριές μας, με αποτέλεσμα να θεωρούμαστε αν όχι γραφικοί, τουλάχιστον υπερβολικοί και εκτός πραγματικότητας. Μεγάλο μέρος των μαθητών και των μαθητριών βιώνουν έντονα αρνητικά συναισθήματα για τα Μαθηματικά, απωθούνται από αυτά, τα θεωρούν άσκοπα, κουραστικά και χωρίς εσωτερική συνοχή και ομορφιά, ενώ για τις μαθηματικές αποδείξεις πιστεύουν ότι είναι ανώφελες, υπερβολικά αυστηρές και χωρίς φαντασία.

Οι Νεγρεπόντης – Φαρμάκη στην Εισήγηση που ετοίμασαν για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, αναφέρουν

> αυτός ο ουσιώδης συσχετισμός των Μαθηματικών με το κάλλος θα πρέπει ν΄αποτελέσει τη βάση ώστε τα Μαθηματικά να παρουσιάζονται στους μαθητές και στις μαθήτριες όχι βαρετά και απωθητικά, σαν μια αναγκαστική ρουτίνα, όπως εν πολλοίς θεωρούνται σήμερα, αλλά συναρπαστικά, με δημιουργική φαντασία και ανώτερη αισθητική. (Σελ. 37 της εισήγησης)

Θα κλείσουμε την παρούσα διπλωματική εργασία με μία φράση του περίφημου Bertrand Russel από το βιβλίο του με τίτλο *Mysticism and Logic and other essays* (1918)

"*Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty*"

με την οποία ταυτιζόμαστε απόλυτα, καθώς πιστεύουμε στην αλήθεια των Μαθηματικών, αλλά ταυτόχρονα πιστεύουμε και στην ομορφιά των Μαθηματικών. Θα ευχηθούμε λοιπόν ολόψυχα να επιτύχουμε ως καθηγητές, αφενός να αναδείξουμε την αληθή φύση των Μαθηματικών, αποδίδοντας στην Αρχή της συμβατής Περάτωσης του Απείρου το ρόλο που της αρμόζει και αφετέρου να καταστήσουμε τους μαθητές και τις μαθήτριές μας κοινωνούς της αισθητικής απόλαυσης που προκύπτει από τη μελέτη των Μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Βασιλείου, Γ. (2007). *Η Μέθοδος της εξάντλησης των Ευδόξου – Αρχιμήδη*. Διπλωματική εργασία ειδίκευσης. Αθήνα: ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Boyer, C., Merzbach, U. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Επιστημονικές & Τεχνικές Εκδόσεις Πνευματικού.

Γιαννακούλιας, Ε. (2007). *Απειροστικός Λογισμός, Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5ο π.χ έως και τον 19ο αιώνα.* Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Δημητρακόπουλος, Κ. (2003). *Μαθηματική Λογική.* Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Δρακάκη, Μ. (2019). *Κλασικά Θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η ιστορία τους.* Μεταπτυχιακή Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Dieudonné, J. (1961). *New thinking in school mathematics.* New thinking in school mathematics.

Gowers, T. (2002). *Mathematics: A very short introduction* (Vol. 66). Oxford Paperbacks.

Hardy, G. H. (1992). *A mathematician's apology.* Cambridge University Press.

Jaffe, A., Quinn, F. (1993). *"Theoretical mathematics": toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics.* Bulletin of the American Mathematical Society, 29(1), 1 – 13.

Κυριαζής, Χ., Πρωτοπαπάς, Ε. (2018). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου.* 10η μαθηματική εβδομάδα στη Θεσσαλονίκη.

Landau, E. (2001). *Foundations of analysis (No. 79)*. American Mathematical Soc.

Loria, G. (1933). *Ιστορία των Μαθηματικών.* Μετάφραση στα ελληνικά από Κωβαίο Κ. Μιχαήλ. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Μοσχοβάκης, Γ. (1993). *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1987). *Απειροστικός Λογισμός Ι, Τόμος Ι.* Αθήνα: Εκδόσεις Αίθρα.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (2000). *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙα.*

Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1999). *Απειροστικός Λογισμός Τόμος ΙΙβ.* Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Νεγρεπόντης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ., Καλαμίδας, Ν., Φαρμάκη, Β. (1989). *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση.* Αθήνα: Εκδόσεις Αίθρα.

Νεγρεπόντης, Σ. (2015 – 20). *Παραδόσεις των μαθημάτων Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία του Ευκλείδη και Πλάτων και Μαθηματικά.* ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2009). *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμή της.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, 41−82.

Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2019). *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαίτητου, Ευδόξου.* Αθήνα: Εκδόσεις Εκκρεμές.

Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2020). *Για την Αναγέννηση της Μαθηματικής Παιδείας στο Σχολείο*. Εισήγηση για τη 10η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί.

Negrepontis, S., Farmaki, V. *An Eudoxian Link Between Mathematical Induction and the Least Principle.* Athens University. (υπό έκδοση)

Παπανικολάου, Χρ. Γ (1977). *Ευκλείδειος Γεωμετρία, για τις Α, Β, Γ τάξεις Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Russel, B. (1918). *Mysticism and Logic and other essays.* Otowa, Barnes and Nobel Books, New York (1917/1981).

Spivak, M. *Calculus.* (1967). W. A. Benjamin Inc. Publish or Perish, 4th ed., 2008. Μετάφραση στα Ελληνικά: Γιαννόπουλος Α., *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σταμάτης, Ε. (1952). *Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία.* Τόμος Ι. Βιβλία 1, 2, 3, 4. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Σταμάτης, Ε. (1953). *Ευκλείδου Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών.* Τόμος ΙΙ. Βιβλία 5, 6, 7, 8, 9. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Σταμάτης, Ε. (1956). *Ευκλείδου Περί Ασυμμέτρων.* Τόμος ΙΙΙ. Βιβλίο 10. Αθήνα: Οργανισμός

Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Σταμάτης, Ε. (1970). *Αρχιμήδους Άπαντα.* Αθήνα: Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος.

Στράντζαλος, Χ. (1989). *Η εξέλιξη των Ευκλειδείων και των μη Ευκλειδείων Γεωμετριών.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Thurston, W. P. (1998). *On proof and progress in mathematics.* New directions in the philosophy of mathematics, 337–355.

Van der Waerden, B. L. (1954). *Science awakening*, Noordhoff, Groningen. (Μετάφραση στα Ελληνικά ως *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, από Χριστιανίδη, Γ., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1988).

Weiss, I. (2015). *Survey Article: The real numbers – A survey of constructions.* Rocky Mountain Journal of Mathematics, 45(3), 737–762.

Weyl., H. (1932) *The Open World: Three Lectures on the Metaphysical Implications of Science*.

Weyl., H. (1985). *Axiomatic versus constructive procedures in mathematics.* The mathematical intelligencer, 7(4), 10–17.

Wigner, E. P. (1990). *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*. Mathematics and Science (pp. 291–306).

Χριστιανίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Zeki, S., Romaya, J. P., Benincasa, D. M., & Atiyah, M. F. (2014). *The experience of mathematical beauty and its neural correlates.* Frontiers in Human Neuroscience, 8, 68.

Κείμενα στην αρχαία ελληνική γλώσσα

Αριστοτέλης, *Αναλυτικά Ύστερα*.

Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά.*

Αρχιμήδης, *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος.*

Αρχιμήδης, *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής.*

Ευκλείδης, *Στοιχεία*.

Πλάτων, *Νόμοι.*

Πλούταρχος, *Συμποσιακά.*

Πρόκλος, *Εις Ευκλείδην.*

Σχόλιο 3 στο 5ο Βιβλίο του Ευκλείδη.

Σέξτος Εμπειρικός, *Προς Λογικούς.*

Σιμπλίκιος, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη.*

Προέλευση κειμένων: *Θησαυρός της ελληνικής γλώσσας, Ηλεκτρονική Βιβλιοθήκη MUSAIOS.*

Διαλέξεις

Νεγρεπόντης, Σ. *Οι αρχαίες ρίζες του συνόλου των πραγματικών αριθμών,* Μαθηματικό Αθηνών, 10 Μαρτίου 2017 https://www.youtube.com/watch?v=aO49avPkafE

Νεγρεπόντης, Σ. *Είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία και τα Στοιχεία του Ευκλείδη ξεπερασμένα?*, Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης, Εργαστήριο Άλγεβρας, 2 Νοεμβρίου 2018. https://www.youtube.com/watch?v=yfh9QgI4Mf0

Νεγρεπόντης, Σ. *Πώς το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών του Λυκείου μπορεί να οργανωθεί με κορμό τα Στοιχεία του Ευκλείδη, ώστε να αναδεικνύεται η φύση των Μαθηματικών και η σημασία τους στον σύγχρονο κόσμο.* Διάλεξη στην Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Μαθηματικό Αθηνών, 12 Δεκεμβρίου 2018 https://www.youtube.com/watch?v=WhWskAvDMP0

Wiles, A. *Oxford Mathematics London Public Lecture and conversation with mathematician and broadcaster Hannah Fry.* 28 Νοεμβρίου 2017 youtube.com/watch?v=0kSYdOwVi4Y

Σχολικά Βιβλία

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος, Σ. *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ.

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σιδέρης, Π. *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Τεύχος Α΄, Α΄ Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος".

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σιδέρης, Π. *Ευκλείδεια Γεωμετρία Τεύχος Β΄ , Β΄ Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος".

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. *Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Β΄ Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος".

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος".

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. *Άλγεβρας Β΄ Λυκείου.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος".

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. *Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής (Τεύχος Β΄)*, Γ΄ *Λυκείου*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος".

Πηγές στο Διαδίκτυο

Αναπολιτάνος, Δ. *Κριτική για το Βιβλίο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαιτήτου, Ευδόξου, Τόμος Ι,* Books' Journal (τεύχος 99, Ιούνιος του 2019).

Ανακτήθηκε Οκτώβριος 07, 2019, από

http://booksjournal.gr/%CE%BA%CF%81%CE%B9%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B5%CF%82/%CE%B8%CE%B5%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AD%CF%82-%CE%B5%CF%80%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%AE%CE%BC%CE%B5%CF%82/item/2878-anthyfairesis,-peratosis-tou-apeirou,-peritton-kai-artion

Γιαννόπουλος, Απ. (2009). *Απειροστικός Λογισμός Ι Πρόχειρες σημειώσεις.* Αθήνα: Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο.

Ανακτήθηκε Μάρτιος 10, 2018, από https://eclass.uoa.gr/modules/document/index.php course=MATH130&openDir=/52b208cbQJT9/4acf909d890o

Μήτσης, Θ. *Σημειώσεις για τα Μαθήματα Εισαγωγή στην Ανάλυση Ι και Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ.* Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 15, 2017, από

https://sites.google.com/site/themismitsis2/notes

Μπεληγιάννης Α., Παπαδάκης Σ., (2013). *Πρόχειρες σημειώσεις για τη Θεωρία Αριθμών.* Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Ανακτήθηκε Μάρτιος 10, 2018, από

https://docplayer.gr/31520381-Theoria-arithuon-theoritika-theuata-akadiuaiko-etos-idaskontes-a-mpeligiannis-s-papadakis.html

Παπαδημητράκης Μ., (2015). *Ανάλυση, Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής.* Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης. Ανακτήθηκε Φεβρουάριος 09, 2018, από

http://fourier.math.uoc.gr/~papadim/analysis.pdf

Πόρισμα της 1ης Συνόδου Προέδρων των Τμημάτων Μαθηματικών των Ελληνικών Πανεπιστημίων. Θεσσαλονίκη, 27/11/2018.

Ανακτήθηκε Μάιος 14, 2019, από https://www.auth.gr/sites/default/files/2018_11_27_porisma_synodos_proedron_tmimaton_mathimatikon_ellinikon_panepistimion.pdf

Roberts, S. *Michael Atiyah's Imaginative State of Mind.* (2016). Συνέντευξη του Michael Atiyah στο περιοδικό Quanta magazine.

Ανακτήθηκε Απρίλιος 01, 2020, από

https://www.quantamagazine.org/michael-atiyahs-mathematical-dreams-20160303

Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008.*

Ανακτήθηκε Νοέμβριος 30, 2018 από,

https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?style=1&f=77&t=3355&sid=f33284fd7627c889516cf560b591742c

Υπουργείο Παιδείας Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων. *Καθορισμός και διαχείριση διδακτέας ύλης Θετικών Μαθημάτων, των Α΄ Β΄ και Γ΄ τάξεων Ημερήσιου και Εσπερινού Γενικού Λυκείου, για το σχολικό έτος 2010–11.*

Ανακτήθηκε Νοέμβριος 30, 2018, από

https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?style=1&f=77&t=9338&sid=f33284fd7627c889516cf560b591742c

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων. *Οδηγίες διδασκαλίας των μαθημάτων Α΄ και Β΄ τάξεων Ημερησίου ΓΕΛ και Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Εσπερινού ΓΕΛ για το σχ. Έτος 2014 - 2015.*

Ανακτήθηκε Νοέμβριος 30, 2018, από

https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?style=1&f=77&t=46424&sid=f33284fd7627c889516cf560b591742c

ΥΠ.Π.Ε.Θ. *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕ.Λ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. Έτος 2018 – 2019, αρ. Πρωτ. 141607/03-09-2018.*

Ανακτήθηκε Μάρτιος 28, 2019, από

https://www.minedu.gov.gr/lykeio-2/didaktea-exet-yli-lyk/37426-01-10-18-odigies-gia-ti-didaskalia-ton-mathimatikon-stis-a-v-takseis-imerisiou-ge-l-kai-a-v-g-takseis-esperinoy-gel-gia-to-sxol-etos-2018-2020

Υπουργείο Παιδείας Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων. *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου. (Αρ. Φύλλου 1168, 8 Ιουνίου 2011).* Ανακτήθηκε Νοέμβριος 30, 2018, από

https://edu.klimaka.gr/arxeio/nomothesia-fek/fek-1168-2011-programma-spoudwn-algebra-gewmetria-a-lykeiou-klimaka.pdf

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ *Οδηγίες διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο Αρ. Πρωτ. 222580/Δ2 / 18-12-2017 .*

Ανακτήθηκε Νοέμβριος 30, 2018, από

http://dide.chan.sch.gr/didekpthem/wp-content/uploads/2018/03/%CE%95%CE

%9E-222580-2017-%CE%9F%CE%94%CE%97%CE%93%CE%99%CE%95%CE%A3-%CE%94%CE%99%CE%94%CE%91%CE%A3%CE%9A%CE%91%CE%9B%CE%99%CE%91%CE%A3-%CE%A4%CE%9F%CE%A5-%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%9F%CE%A3-%CE%A4%CE%A9%CE%9D-%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%A9%CE%9D-%CE%A3%CE%A4%CE%9F-%CE%93%CE%A5%CE%9C%CE%9D%CE%91%CE%A3%CE%99%CE%9F.pdf

Για το Θεώρημα του Πτολεμαίου:

https://brilliant.org/wiki/ptolemys-theorem/

https://en.wikipedia.org/wiki/Almagest

https://grmath.blogspot.com/2012/08/blog-post_4307.html

Για το Θεώρημα της Σπασμένης Χορδής του Αρχιμήδη:

Cowart, Mark:

http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMT668.Folders.F97/Cowart/essay2/brokenchord.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Al-Biruni.html

http://skytoearth.com/biography/the-biography-of-abu-rayhan-al-biruni-a-forgotten-great scholar/

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/BookOfLemmas/index.shtml