



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*Διερεύνηση της κατανόησης του πραγματικού αριθμού στη
μετάβαση από τους ρητούς αριθμούς από μαθητές και
εκπαιδευτικούς*

Νασιοπούλου Ελπίδα

A.M. Δ201703

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής

Πόταρη Δέσποινα

Καθηγήτρια

Αθήνα, Ιούνιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό –Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Ιουνίου 2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

- Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα), Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
- Θ. Ζαχαριάδη, Καθηγητής ΕΚΠΑ
- Κ. Π. Χρήστου, Επικ. Καθηγητής Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

- Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα), Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
- Θ. Ζαχαριάδη, Καθηγητής ΕΚΠΑ
- Κ. Π. Χρήστου, Επικ. Καθηγητής Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Ευχαριστίες

Επιθυμώ να ευχαριστήσω την κα. Πόταρη, για την ιδιαίτερη υποστήριξη και την καθοδήγηση της στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τα στοχευμένα ερωτήματα που έθεσε, με βοήθησαν να προσαρμόσω το θέμα της αρχικής μου εργασίας, που χωρίς εκείνη δε θα είχε πραγματοποιηθεί.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ζαχαριάδη, που παρότι δεν είχαμε συνεργαστεί κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, άμεσα ανέλαβε θέση στη συμβουλευτική επιτροπή και μερίμνησε για την αρτιότητά της.

Ακόμη ευχαριστώ τον κ. Χρήστου για την θερμή ανταλλαγή απόψεων και ιδεών, στο πλαίσιο του μαθήματός του, που μου έδωσαν την αφορμή για την εργασία αυτή.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ την κα. Κλη και την κα. Μπακογιάννη, για την αφανή αλλά ουσιαστική βοήθεια καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο πρόγραμμα.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη.....	6
Abstract.....	7
1. Εισαγωγή.....	8
2. Εννοιολογικό πλαίσιο και οι πραγματικοί αριθμοί στα προγράμματα σπουδών.....	10
2.1 Τα προγράμματα σπουδών και οι πραγματικοί αριθμοί.....	10
2.2 Υπάρχουσες επισκοπήσεις γύρω από τους πραγματικούς αριθμούς.....	15
2.3 Μια επισκόπηση γύρω από τους άρρητους αριθμούς.....	24
3. Μεθοδολογία.....	27
3.1 Διαδικασία επιλογής των άρθρων.....	29
3.1 Ανάλυση Δεδομένων.....	29
4. Αποτελέσματα.....	35
4.1 Μαθηματικό περιεχόμενο.....	35
4.1.1 Ορισμοί.....	35
4.1.2. Παρανοήσεις.....	36
4.1.3 Αναπαραστάσεις.....	37
4.2 Σχεδιασμός έρευνας.....	40
4.2.1 Θεωρητικό εργαλείο.....	40
4.2.1.1 Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους μαθητές.....	41
4.2.1.2 Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους εκπαιδευτικούς.....	43
4.2.2.Μεθοδολογία εφαρμογής.....	45
4.2.2.1 Εφαρμογή σε μελέτες με μαθητές.....	45
4.2.2.2 Εφαρμογή σε μελέτες με εκπαιδευτικούς.....	48
4.3 Λειτουργίες των έργων με πραγματικούς αριθμούς.....	52
4.3.1 Επίλυση προβλήματος.....	52
4.3.1.1 Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους μαθητές.....	53
4.3.1.2 Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους εκπαιδευτικούς.....	54
4.3.2. Τρόποι συλλογισμού.....	57
4.3.2.1 Πτυχές της σκέψης των μαθητών.....	57
4.3.2.2 Πτυχές της σκέψης των εκπαιδευτικών.....	59
4.4 Διδακτικές προτάσεις και παρεμβάσεις για τους άρρητους.....	63
4.4.1 Εστιάζοντας στους μαθητές.....	63

4.4.2 Εστιάζοντας στους εκπαιδευτικούς.....	65
4.4.3 Εστιάζοντας στα σχολικά εγχειρίδια.....	69
5. Συζήτηση.....	74
6. Βιβλιογραφία.....	80

Περίληψη

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να καλύψει βιβλιογραφικά την έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών γύρω από την έννοια των άρρητων αριθμών, ως έννοια-κλειδί για τη διδασκαλία και την κατανόηση των πραγματικών αριθμών.

Μελετώντας τη βιβλιογραφία, σημειώνεται πως η ιδέα οι ρητοί, ενώ είναι πυκνοί, δεν καλύπτουν κάθε σημείο της συνεχούς αριθμογραμμής των πραγματικών αριθμών είναι εκ φύσεως δύσκολη οδηγώντας σε επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια. Υπογραμμίζεται ότι η έννοια του άρρητου αριθμού είναι ουσιαστική στη μετάβαση από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς, για αυτό απαιτείται προσεκτική διδασκαλία, για να επιτευχθεί κατάλληλα η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού.

Κλείνοντας, φάνηκε πως έργα με αναπαραστάσεις των αριθμών και η βαθιά γνώση της ισοδυναμίας των ορισμών τους, επιτρέπουν την ανάπτυξη πλουσιότερων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και ενισχύουν τον αφηρημένο συλλογισμό. Παράλληλα, τέτοιες δραστηριότητες αποκαλύπτουν τη συνοχή του αντικειμένου μελέτης των Μαθηματικών.

Ο στόχος της διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών ως ένα συνεκτικό αριθμητικό σύστημα, θα μπορούσε να οργανωθεί στη βάση της εμπειρικής μέτρησης και της λογικής αναπροσαρμογής της.

Λέξεις κλειδιά: άρρητοι, ρητοί, πραγματικοί, μετάβαση στους πραγματικούς αριθμούς, διδασκαλία πραγματικών αριθμών

Abstract

The present work aims to cover the literature concerning the concept of irrational numbers, as the key-concept in the introduction of real numbers.

In the literature review of Mathematics Education, the idea that rational numbers are dense but cannot cover every point on the continuous real number line is proved to be naturally difficult, leading to epistemological and cognitive obstacles. It is also highlighted that the concept of irrational numbers is essential in the transition from rational to the set of real numbers, therefore demands careful teaching, in order to properly develop the concept of number in general.

In conclusion, tasks including number representations and deep knowledge that definitions of irrational numbers are equivalent, consequently lead to richer problem-solving strategies and enhance abstract thinking. Moreover, such activities disclose the coherence of Mathematics.

The goal of teaching real numbers by building a coherent arithmetical system could be organized by blending the empirical activity of measurement and its reasonable adjustment.

Keywords: irrational number, rational number, real number, transition to real number, teaching real number

1. Εισαγωγή

Η αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών χρειάστηκε αιώνες για να επιτευχθεί, σε μια πορεία όπου οι μαθηματικοί έπρεπε να ξεπεράσουν αρκετά εμπόδια, από την αρχαιότητα έως τον 19ο αιώνα.

Οι φυσικοί αριθμοί είναι το πρώτο σύνολο αριθμών αντιλήφθηκε ο άνθρωπος. Προέκυψε άμεσα από τις αρχικές καθημερινές ανάγκες καταμέτρησης, για αυτό η θεμελίωσή του στηρίχθηκε σε ορισμένες πρωταρχικές ιδιότητες γνωστές ως *τα αξιώματα του Peano*.

Κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί ως η διαφορά δύο φυσικών $\alpha - \beta$ μέσω της απλής σχέσης της διάταξης. Αν $\alpha > \beta$ τότε ο $\alpha - \beta$ είναι θετικός ακέραιος, αλλιώς αν $\alpha < \beta$ τότε ο $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός ακέραιος, αλλιώς για $\alpha = \beta$ ο $\alpha - \beta$ είναι το μηδέν.

Οι ρητοί ορίζονται ως κλάσεις ισοδυναμίας διατεταγμένων ζευγών ακέραιων αριθμών α/β με $\beta \neq 0$.

Η πιο γνωστή προσέγγιση των πραγματικών αριθμών είναι οι *τομές Dedekind*. Ο Richard Dedekind μετέφερε την ουσία της συνέχειας μιας ευθείας στους αριθμούς, ως εξής:

Όλα τα σημεία της ευθείας διαιρούνται σε δύο κλάσεις, έτσι ώστε κάθε σημείο της πρώτης κλάσης να βρίσκεται *αριστερά* από κάθε σημείο της δεύτερης κλάσης. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη μοναδικού σημείου της ευθείας που δημιουργεί αυτόν τον διαχωρισμό της ευθείας.

Αντίστοιχα, μία τομή Dedekind ($A \mid B$) στο σύνολο των ρητών αριθμών είναι μια διαμέριση του συνόλου σε δύο μη κενές κλάσεις A και B έτσι ώστε κάθε ρητός αριθμός να ανήκει στην A ή στην B και κάθε στοιχείο της A να είναι *μικρότερο* από κάθε στοιχείο της B .

Η Sinkevich (2015) παρατηρεί πως ο Dedekind εισάγει την έννοια του πραγματικού αριθμού αφού πρώτα όρισε τους άρρητους μέσω των ρητών:

“... υπάρχει ένα άπειρο πλήθος σημείων της γραμμής που δεν αντιστοιχίζονται σε κάποιο ρητό, π.χ. Το μήκος της διαγωνίου σε τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς [$\sqrt{2}$]. Αυτό σημαίνει πως οι ρητοί χρειάζονται συμπλήρωση αριθμητικά, ώστε το εύρος του νέου αριθμού να είναι πλήρες και συνεχές όπως η γραμμή. Παλαιότερα, η άρρητοι είχαν συνδεθεί με τη μέτρηση εκτεταμένων τιμών (extended values), π.χ. Στη γεωμετρική τους αναπαράσταση. ... Αν το σύνολο των πραγματικών αριθμών χωριστεί σε δύο κλάσεις, έτσι ώστε κάθε αριθμός της πρώτης να είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της δεύτερης, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός που κάνει αυτόν τον διαχωρισμό. Όμως υπάρχουν απείρως πολλές τομές που δε δημιουργούνται από ρητό αριθμό. Για παράδειγμα, αν D είναι ένας μη τετράγωνος ακέραιος τότε θα υπάρχει ένας θετικός

ακέραιος λ ώστε $\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$. Άρα, η μια κλάση φαίνεται να μην έχει μεγαλύτερο και η άλλη να μην έχει μικρότερο [ρητό] αριθμό που να κάνει την τομή τους. Δηλαδή το σύνολο των ρητών είναι μη πλήρες και ασυνεχές. Αν είναι έτσι και αυτή η τομή δε γίνεται από κάποιον ρητό, τότε πρέπει να φτιάξουμε ένα νέο αριθμό, άρρητο, που να κάνει την τομή.”

(Sinkevich, 2015, σελ. 6)

Ο διδακτικός σχεδιασμός για την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών περιλαμβάνει μαθηματικές και άλλες έννοιες που διαμεσολαβούνται μέσω των δραστηριοτήτων της τάξης. Η κατανόηση είναι εκ φύσεως διαμεσολαβούμενη, εφόσον προϋποθέτει και συμπεριλαμβάνεται στη διαδικασία της μάθησης, δηλαδή της συνειδητής και σκόπιμης εμπλοκής με ιστορικά και πολιτισμικά κωδικοποιημένες μορφές σκέψης και πράξης (Radford, 2013, σελ. 39).

Η διδασκαλία των Μαθηματικών αφορά στην κατανόηση του περιεχομένου και στη μόρφωση των μαθητών. Από την αρχή η σχολική ζωή διαμορφώνει πολιτικά, κοινωνικά, ιστορικά υποκείμενα που δύναται να σταθούν κριτικά στις μαθηματικές *πρακτικές* (practices) και τους *λόγους* (discourses) που διαμορφώνονται ιστορικά και πολιτισμικά (Radford, 2013, σελ. 8). Η δομή των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών, ανά τάξη, έχει στόχο τη διαρκή επέκταση της γνώσης των μαθητών προβάλλοντας τόσο την πρακτική, όσο και τη θεωρητική ανάγκη της επέκτασης. Επομένως είναι αναγκαία η βαθιά γνώση του αντικειμένου από τη μεριά των εκπαιδευτικών, αφού όχι μόνο καθορίζει τη διδακτική τους πρακτική, αλλά και αποτελεί προαπαιτούμενο για την κατανόηση από την μεριά των μαθητών (Κόσσυβας, 2018).

Σκοπός της παρούσας επισκόπησης είναι να συγκεντρώσει έρευνες και διδακτικές προτάσεις, σχετικές με τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών, εστιάζοντας στη μετάβαση από τους ρητούς με κεντρική την έννοια του άρρητου αριθμού.

Στις παραπάνω μελέτες, σύμφωνα με τη *Θεωρία της Αντικειμενοποίησης* (Theory of Objectification) του Radford (2013, 2015), εξετάζονται η *γνώση* σε σχέση με την έννοια του πραγματικού αριθμού μέσα από τους ορισμούς και τις αναπαραστάσεις, οι δυσκολίες που σχετίζονται με την *κατανόηση* σε μαθητές και εκπαιδευτικούς και η *μάθηση* όπως υποστηρίζεται από τα σχέδια διδασκαλίας για την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών και τις εφαρμογές τους.

2. Εννοιολογικό πλαίσιο και οι πραγματικοί αριθμοί στα προγράμματα σπουδών

Η εκπαιδευτική και ερευνητική δραστηριότητα συντελείται εντός ενός συστήματος εκπαίδευσης, μέρος του οποίου αποτυπώνεται στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (από δω και πέρα ΑΠΣ), αποκρυσταλλώνοντας ορισμένες εκπαιδευτικές κατευθύνσεις (educational standards). Η συγκρότηση των κατευθύνσεων αυτών και η σχέση τους με το εκπαιδευτικό σύστημα της κάθε χώρας, δεν αποτελεί μέρος της εργασίας αυτής.

Η γνώση των Μαθηματικών, μέσω μιας μακράς διαδικασίας διαρκούς βελτίωσης και σύμπτυξης, εκφράζεται με διαφορετικούς τρόπους, γλωσσικά, συμβολικά, γραφικά, κ.α., ενώ παράλληλα κωδικοποιεί πολιτισμικές πρακτικές που πλέον είναι ενταγμένες στα διεθνή προγράμματα σπουδών (Radford, 2013, σελ. 17). Τα ΑΠΣ καθώς και τα σχολικά εγχειρίδια επηρεάζουν τόσο τη διαδικασία μάθησης όσο και την διδασκαλία, εφόσον “τα διδακτικά εγχειρίδια προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς το μαθηματικό περιεχόμενο που θα διδάξουν, καθορίζουν τη διαδοχή των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων και δίνουν οδηγίες για την επίτευξη της γνωστικής συμμετοχής των μαθητών στη μάθηση.” (Καραβασίλης και Κόσσυβας, 2016, σελ. 69).

Έτσι, μια σύντομη αναδρομή στην εξέλιξη των ΑΠΣ για τα Μαθηματικά διεθνώς και η σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα του ελληνικού σχολείου, πλαισιώνει καλύτερα την εργασία αυτή.

2.1 Τα προγράμματα σπουδών και οι πραγματικοί αριθμοί

Για τη σχέση κατευθύνσεων και ΑΠΣ διεθνώς αρκεί να αναφερθεί πως, σύμφωνα με το Common Core State Standards Initiative (CCSSI) των ΗΠΑ, οι εκπαιδευτικές κατευθύνσεις ανά μάθημα αποτελούν τους στόχους της εκπαίδευσης για το *τι πρέπει να μάθουν και να μάθουν να κάνουν* οι μαθητές τελειώνοντας την κάθε σχολική τάξη, ενώ τα ΑΠΣ είναι *το πως θα μάθουν*.

Σημαντικό μέρος των διεθνών ΑΠΣ, πρώτης και δεύτερης βαθμίδας του σχολείου, για τα Μαθηματικά αφιερώνεται στην έννοια του αριθμού. Οι Wijayanti και Bosch (2018) παρουσιάζουν την ιστορική εξέλιξη των αναλυτικών προγραμμάτων στη νεότερη εποχή, παρατηρώντας πως η έννοια του αριθμού στηρίζεται και αναπτύσσεται σε σχέση με την έννοια της σύγκρισης μεγεθών.

Στα *κλασικά Μαθηματικά*, όρος που εισάγει ο Atiyah (στο Wijayanti και Bosch, 2018, σελ. 175), οι λόγοι και οι αναλογίες είναι σημαντικά εργαλεία στη μελέτη των σχέσεων αριθμητικών, γεωμετρικών και φυσικών εννοιών. Η λεγόμενη *Κλασική Οργάνωση* περιέχει τριών ειδών

προβλήματα αναλογιών με τις αντίστοιχες τεχνικές επίλυσης: το ευθύ, το αντίστροφο, αυτό με σύνθετες αναλογίες ή τη μέθοδο των τριών.

Στόχος είναι η αντιμετώπιση μιας σειράς διαφορετικών καταστάσεων της καθημερινότητας, με την πολυπλοκότητα των προβλημάτων και των τεχνικών επίλυσης να διαφοροποιείται ανάλογα με την εκπαιδευτική βαθμίδα, την χρονική περίοδο ή τον συγγραφέα. Εντούτοις κοινός πυρήνας είναι η έννοια της συμμεταβολής ποσοτήτων με σταθερό λόγο, δηλαδή τα ανάλογα ποσά.

Η Θεωρία Λόγων και Αναλογιών εμφανίζεται απλουστευμένη στα βιβλία της Αριθμητικής και λίγο γενικότερα της Άλγεβρας. Μέχρι τη δεκαετία του 1960, η *Κλασική Οργάνωση (Classical mathematics)*, με βασικό εργαλείο τις αναλογίες για τη σχέση ποσοτήτων, αποτελεί τη βάση των σχολικών εγχειριδίων.

Καθόλη τη διάρκεια μεταξύ 1960-1980, σύμφωνα τον Kilpatrick (στο Wijayanti και Bosch, 2018), με τα *Νέα Μαθηματικά (New math reform)* συγκροτούνται ΑΠΣ με βασικά εργαλεία τις συναρτήσεις, τις μεταβλητές, τις ακολουθίες, τα σύνολα αριθμών κ.α. Η κλασική οργάνωση των λόγων και των αναλογιών αντικαθίσταται από τις συναρτησιακές σχέσεις. Η έννοια της ποσότητας αποφεύγεται και χρησιμοποιείται μόνο στις αναφορές άλλων φυσικών επιστημών, όπως τη Φυσική.

Στη δεκαετία του 1980, επανεμφανίστηκαν οι τεχνικές των αναλογιών σε συνδυασμό πλέον με τις συναρτήσεις και τις εξισώσεις. Στη *Σύγχρονη Αντι-Μεταρρύθμιση (Counter reform)*, όπως χαρακτηρίζει ο Kilpatrick τις αλλαγές στα ΑΠΣ ορισμένων χωρών (στο Wijayanti και Bosch, 2018, σελ. 178), ο ρόλος των μεγεθών ανακατασκευάζεται μέσω των πραγματικών αριθμών και των πραγματικών συναρτήσεων. Χωρίς να εισάγονται άμεσα στο σχολείο, έμμεσα διατρέχουν όλη την οργάνωση του αναλυτικού προγράμματος. Σε αυτή την κατάσταση βρίσκεται και το ελληνικό σχολείο σήμερα.

Ειδικότερα για το ελληνικό σχολείο, σύμφωνα με το ισχύον ΑΠΣ (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003), στις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, εισάγεται η έννοια των φυσικών αριθμών, η διάταξή τους στην αριθμογραμμή και οι πράξεις μεταξύ τους.

Στις τελευταίες τάξεις εισάγεται η έννοια του ρητού αριθμού με τη μορφή κλάσματος και των δεκαδικών αριθμών. Η μετατροπή από τη μία μορφή στην άλλη περιορίζεται στα δεκαδικά κλάσματα. Επιπλέον η μέθοδος διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή για τη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο της Ε Δημοτικού, αποδεικνύεται προβληματική όταν χρησιμοποιείται “σε επόμενες τάξεις, όπου η δεκαδική αναπαράσταση ενός κλάσματος παύει να είναι πεπερασμένη αλλά μπορεί να είναι και απειροσχήφια” (Σγουρού, 2019, σελ 33). Στις δραστηριότητες σύγκρισης των αριθμών

εμπλέκεται η έννοια της πυκνότητας μέσω των δραστηριοτήτων παρεμβολής αριθμών (Σγουρού, 2019, σελ. 34).

Στη δευτεροβάθμια, στο βιβλίο της Α Γυμνασίου (Βανδουλάκης, Καλλιγιάς, Μαρκάκης και Φερεντίνος, 2012) η γενική έννοια του κλάσματος είναι αποκλειστικά συνδεδεμένη με την έννοια μέρους-όλου, ενώ τα δεκαδικά κλάσματα συνδέονται με το πηλίκο και την έννοιά του ποσοστού. Ο κύριος διδακτικός στόχος είναι η ισοδυναμία κλασμάτων, η μετατροπή του σύνθετου σε απλό και οι πράξεις μεταξύ τους. Οι δεκαδικοί αριθμοί σχετίζονται με τη μέτρηση, στρογγυλοποιούνται και συγκρίνονται.

Ακολουθεί η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών χωρίς κάποια σύνδεση με τα προηγούμενα κεφάλαια για τους αριθμούς, αλλά όπως προκύπτει από τη λύση εξισώσεων. Ο ορισμός, η σύγκριση και η διάταξη των ρητών έπεται, χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή για τη διάταξή τους. Ακολουθούν οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, με ιδιαίτερη έμφαση στον κανόνα των προσήμων του πολλαπλασιασμού και της επιμεριστικής ιδιότητας στην απαλοιφή παρενθέσεων.

Στη Β Γυμνασίου, αρχικά από το βιβλίο της Α Γυμνασίου, διδάσκεται ξανά το κεφάλαιο για τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Επίσης διδάσκονται για πρώτη φορά, από το ίδιο βιβλίο, οι δυνάμεις ρητών με ακέραιο εκθέτη και η δεκαδική μορφή των ρητών. Η διδασκαλία των αριθμών συνεχίζεται από το νέο βιβλίο της Β Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης και Ρεκούμης, 2012). Μετά την εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής και των εξισώσεων, εισάγεται η έννοια της τετραγωνικής ρίζας μέσω της αντίστροφης διαδικασίας της τετραγωνικής δύναμης, ως λύση της τετραγωνικής εξίσωσης. Έτσι γίνεται για πρώτη φορά η αναφορά στους άρρητους αριθμούς, ως ξεχωριστό σύνολο αριθμών, κυρίως με τη μορφή της μη υπολογίσιμης τετραγωνικής ρίζας θετικών ρητών αριθμών και εφόσον έχει γίνει η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Πρόσθετα, δίνεται έμφαση στη γεωμετρική αναπαράσταση του $\sqrt{2}$. Η σχέση δεκαδικών αριθμών και άρρητων γίνεται μέσω ορισμένων παραδειγμάτων σε δεκαδική μορφή και στη δεκαδική προσέγγιση του $\sqrt{2}$.

Στη Γ Γυμνασίου (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου και Χρυσοβέργης, 2016) οι πραγματικοί αριθμοί υπενθυμίζονται συνοπτικά καθώς δίνεται βαρύτητα στις πράξεις, τις δυνάμεις και τις ιδιότητές για προετοιμάσουν την εισαγωγή της έννοιας του μονωνύμου, των ταυτοτήτων και με στόχο την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων.

Στην Α τάξη του Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος, Αδαμόπουλος και Δαμιανού, 2016), γίνονται επαναλήψεις και συμπληρώσεις σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς. Υπενθυμίζεται η δεκαδική και η κλασματική αναπαράσταση των

ρητών. Οι άρρητοι παρουσιάζονται ως το συμπλήρωμα των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για τους οποίους δεν δίνεται κάποιος τυπικός ορισμός και αποκλείεται οποιαδήποτε δεκαδική τους αναπαράσταση. Στο ίδιο πνεύμα με την προηγούμενη τάξη, η έμφαση δίνεται στις πράξεις και τις ιδιότητές τους. Εισάγονται οι μέθοδοι απόδειξης, με συγκεκριμένη εφαρμογή της απαγωγής σε άτοπο για την αρρητότητα του $\sqrt{2}$ και η κατασκευή του στον άξονα των πραγματικών αριθμών με κανόνα και διαβήτη.

Η διάταξη των αριθμών συνδέεται με τη σύγκριση και τις ιδιότητες των ανισοτήτων. Εισάγεται η έννοια του διαστήματος και δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής. Η απόσταση αριθμών δίνεται με διαρκή αναφορά στη γεωμετρική αναπαράσταση, μέσω του διαστήματος και της απόλυτης τιμής, ερμηνεύοντας γεωμετρικά τον τυπικό συμβολισμό που χρησιμοποιείται. Αυτό αποτυπώνεται και σε συγκεκριμένη άσκηση του σχετικού κεφαλαίου.

Στις Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄ και Β΄ τάξεις Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019 – 2020, προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους χρησιμοποιώντας κατάλληλα παραδείγματα, ως προς τη λεκτική διατύπωση και τη διερεύνηση των ιδιοτήτων των πράξεων, καθώς και τη σημασία της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των λογικών συνδέσμων «ή» και «και» για την ανάπτυξη αλγεβρικού λογισμού. Εν γένει αναγνωρίζεται η πολύ μεγάλη σημασία της γεωμετρικής ερμηνείας της απόλυτης τιμής. Επίσης προτείνεται, με δεδομένο πως η σύνδεση της αλγεβρικής σχέσης με τη γεωμετρική αναπαράσταση είναι δύσκολη, να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι ιδιότητες:

$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$ και $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$ καθώς και η γεωμετρική τους ερμηνεία. Ομοίως να μη διδαχθούν οι έννοιες του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Οι οδηγίες προτρέπουν τον εκπαιδευτικό να κάνει μια γενική διαπραγμάτευση παραδειγμάτων πάνω στην απόσταση και τη διαφορά αριθμών μέσω της απόλυτης τιμής και των ανισοτήτων.

Προχωρώντας στις δύο τελευταίες τάξεις του Λυκείου είναι δεδομένο ότι η απεύθυνση των εγχειριδίων δεν είναι ενιαία λόγω των ομάδων προσανατολισμού.

Αναφορικά στη Β τάξη του Λυκείου, στην Άλγεβρα Γενικής Παιδείας (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος και Σβέρκος, 2016β), ορίζονται οι δυνάμεις αριθμών με ρητό και άρρητο εκθέτη. Γίνεται υπενθύμιση της δεκαδικής προσέγγισης του $\sqrt{2}$, από τη Β Γυμνασίου, ώστε να μελετηθεί ο $3^{\sqrt{2}}$ ως παράδειγμα για το όριο της ακολουθίας a^n (σελ. 161-162). Επίσης γίνεται για πρώτη φορά η προσέγγιση του αριθμού e , ως το όριο του γνωστού τύπου στο πρόβλημα του ανατοκισμού (σελ. 168-169). Οι πραγματικοί αριθμοί επί της ουσίας δεν ορίζονται, παρά παρουσιάζονται ως η ένωση ρητών και άρρητων.

Παράλληλα στο βιβλίο των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β Λυκείου (Αδαμόπουλος, Βισκαδουράκης, Γαβαλάς, Πολύζος και Σβέρκος, 2013) υπάρχει ολόκληρο κεφάλαιο για τη Θεωρία Αριθμών με παραγράφους για τη Μαθηματική Επαγωγή, την Ευκλείδεια Διάρθρωση, τη διαιρετότητα και την εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη κ.ά., το οποίο είναι εκτός ύλης.

Στη Γ Λυκείου στο βιβλίο των Μαθηματικών Προσανατολισμού (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης και Πολύζος, 2016, σελ. 11) γίνονται υπενθυμίσεις ως προς τη δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών, των πράξεων, των διαστημάτων και της απόλυτης τιμής, από την Α Λυκείου. Μέχρι το 2015 διδάσκονταν και οι μιγαδικοί αριθμοί, έκτοτε και μέχρι σήμερα είναι εκτός ύλης. Στο βιβλίο της Γενικής Παιδείας δεν γίνεται καμία αναφορά στους αριθμούς.

Στις πρόσφατες προτάσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ) για τη αναμόρφωση του ΑΠΣ των Μαθηματικών (31/01/2020), οι πραγματικοί αριθμοί πραγματεύονται σε δύο συγκεκριμένες τάξεις.

Στην Β Γυμνασίου, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στην εισαγωγή των αρρήτων αριθμών μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, σε συνδυασμό με τη δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου για την εισαγωγή της τετραγωνικής ρίζας αριθμού, προτείνεται ο εμπλουτισμός με ασκήσεις για διάφορες περιπτώσεις υπολογισμού, π.χ. με τον υπολογισμό των πλευρών τετραγώνου δεδομένης επιφάνειας ή μέσω της μελέτης πινάκων για την καταγραφή των τετραγώνων δοσμένων αριθμών.

Συμπληρώνουν δε πως τα παραπάνω μπορούν να υποστηριχθούν με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων και εκτιμούν πως αυτό μπορεί να οδηγήσει στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του άρρητου αριθμού. Ένα παράδειγμα είναι η κατασκευή τετραγώνου και η μέτρηση της διαγωνίου του με στρογγυλοποίηση 2 δεκαδικών ψηφίων, στη συνέχεια με 3, με 4, με 5 κ.λ.π. ώστε να φανεί πως δεν παρουσιάζεται κάποια συστηματική επανάληψη ψηφίων στο δεκαδικό μέρος.

Στην Α Λυκείου το σύνολο των πραγματικών αριθμών παρουσιάζεται ως μέρος του Αλγεβρικού Λογισμού, αντί να γίνεται μια απλή αναφορά του στην εισαγωγή για τις Πιθανότητες, όπως συμβαίνει τώρα. Ειδικότερα, περιέχονται οι υποενότητες: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, *Πράξεις, Διάταξη, Απόλυτη τιμή και Ρίζες*. Στην πρόταση της ΕΜΕ δεν παρουσιάζονται αναλυτικότερα οι ενότητες. Όμως φαίνεται να μην συμπεριλαμβάνονται οι αποδεικτικές μέθοδοι ως διακριτό κεφάλαιο.

Μελετώντας τις προτάσεις της ΕΜΕ φαίνεται η σχολαστικότητα γύρω από την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών στο Γυμνάσιο, τη σύνδεσή τους με γεωμετρικές έννοιες, τη διερεύνηση

των διαφορετικών μορφών τους κλπ, ενώ αυτό δεν συμβαίνει στην Άλγεβρα της Α Λυκείου, που γίνεται εκ νέου η εισαγωγή τους. Προκύπτει ως εκ τούτου το ερώτημα: Ποιά είναι η ερευνητική δραστηριότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών σε αυτό το επίπεδο;

2.2 Υπάρχουσες επισκοπήσεις γύρω από τους πραγματικούς αριθμούς

Πριν την περιγραφή της παρούσας βιβλιογραφικής μελέτης, έχει σημασία η αναδρομή σε προηγούμενες επισκοπήσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΔΤΜ) για τη διδασκαλία των αριθμών, ειδικότερα των πραγματικών. Συγκεκριμένα, η παρακολούθηση της ερευνητικής δραστηριότητας ξεκίνησε από τα δύο βιβλία του *Psychology of Mathematics Education* (Gutiérrez και Boero, 2006· Gutiérrez, Leder και Boero, 2016).

Στην συλλογή του 1ου τόμου, στο άρθρο “Numerical Thinking” (Verschaffel, Greer και Torbeyns, 2006 στο Gutiérrez και Boero, 2006), παρουσιάζεται εκτενώς η βιβλιογραφία από το 1990 έως και το 2005.

Οι συγγραφείς περιέγραψαν τις ερευνητικές τάσεις από το 1990 έως και το 2005 σχετικά με τους αριθμούς και τις πράξεις. Παρατηρούν πως μέχρι το 1990 κατά κύριο λόγο υπήρχαν δύο μεθοδολογίες, η θεωρία του Piaget για τη λογική κατασκευή των φυσικών αριθμών και οι θεωρίες που υποστηρίζουν ότι τα αριθμητικά συστήματα αναπτύχθηκαν στη βάση της μέτρησης ποσοτήτων του φυσικού κόσμου. Εκ τότε οι εξελισσόμενες ερευνητικές μέθοδοι περιλάμβαναν τη μελέτη των φυσικών αριθμών για τις πρώτες σχολικές τάξεις, με επέκταση στη μελέτη της διδακτικής αξιοποίησης των κοινών δομών μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας. Εισαγωγικά σημείωσαν πως η σχέση αυτή είναι τόσο στενή, που αν δεν υπήρχε περιορισμός έκτασης θα είχαν συμπεριλάβει και ξεχωριστές μελέτες για τον αριθμητικό συλλογισμό (numerical thinking), τις πιθανότητες και τη διαχείριση δεδομένων και για τη σύνδεση αριθμητικής- γεωμετρίας (Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 52-53).

Είναι εμφανές πως τα διαφορετικά σύνολα αριθμών δίνουν άλλη οπτική στην έρευνα. Οι μελέτες για τους φυσικούς αριθμούς, εστίαζαν στις υπολογιστικές στρατηγικές όπως των Gray, Pitta και Tall (1997), του Gervasoni (2005), των Hopkins και Lawson (2004), του Ostad (1998) ή των Torbeyns, Verschaffel και Ghesquière (2004). Η γνωστική ανάλυση ξεκινούσε από την επίλυση προβλημάτων και στη συνέχεια μελετήθηκε η αριθμητική επάρκεια στα διαφορετικά πλαίσια προβλήματος (contexts). Οι έρευνες των Anghileri (2001, 2004), Cobb (1994), Gravemeijer, McClain και Stephan (1998), Kutscher, Linchevski και Eisenman (2002), Murray, Olivier και Human (1994, 1998), Steinberg, Carpenter και Fennema (1994), Whitenack, Cobb και McClain

(1995) ή του Wittmann (2001), συνέβαλαν στη διαμόρφωση ορισμένων αρχών για το σχεδιασμό προβλημάτων στο πλαίσιο των Ρεαλιστικών Μαθηματικών. Δηλαδή, πως οι μαθηματικές έννοιες δεν είναι αποκομμένες από την πραγματικότητα, συνεπώς η μάθηση είναι μια δραστηριότητα ανακατασκευής τους που οδηγεί σε ανώτερα επίπεδα αφαίρεσης και τυποποίησης του συλλογισμού, με αναγκαία την κοινωνική αλληλεπίδραση και τη συνεργασία για τη δημιουργία μιας καλά οργανωμένης γνωστικής βάσης για τα Μαθηματικά (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 55).

Η μελέτη της επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων δέχτηκε την επιρροή των κοινωνικών επιστημών. Ο Verschaffel (2002) αναγνώρισε μεταγνωστικούς παράγοντες στον τρόπο σκέψης και τη συμπεριφορά των μαθητών, που αφορούν είτε το *διδακτικό συμβόλαιο* (didactical contract) του Brousseau (1997) ή τις *κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες* των Yackel και Cobb (1996). Οι τελευταίοι μελέτησαν τη σημασία της κουλτούρας της σχολικής τάξης και διαμόρφωσαν παρεμβάσεις. Έγινε διάκριση μεταξύ σχολικών μαθηματικών (school mathematics) και αυτών της καθημερινότητας (everyday mathematics). Οι Nunes, Schliemann και Carraher (1993), Schliemann (1995), Schliemann, Araujo, Cassundé, Macedo και Nicéas (1994) κατέδειξαν τις διαφορετικές νοητικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που επιστρατεύουν οι μαθητές όταν βρίσκονται σε εξωσχολικό περιβάλλον (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 56, 57, 60).

Για την επίλυση προβλημάτων, οι Kyriakides, Philippou και Charalambous (2002), Philippou και Christou (1999) χρησιμοποίησαν γραφικές αναπαραστάσεις για την εννοιολογική κατανόηση σε λεκτικά προβλήματα. Αντίστοιχα οι Mekhmandarov, Meron και Peled (1996), Schliemann, Lara-Roth και Epstein (2000) εστίασαν σε προβλήματα σύγκρισης. Οι De Bock, Verschaffel και Janssens (1996), Pantziara, Gagatsis και Pitta-Pantazi (2004), Shimizu (2000) εξέτασαν το ρόλο των ευρετικών στρατηγικών, κατά Polya, σε μη αλγοριθμικά προβλήματα (non-routine problems). Η μελέτη των Lester και Kroll (1990) θεωρείται πρωτοπόρα στον σχεδιασμό εκπαιδευτικών προγραμμάτων για την ανάπτυξη ευρετικών στρατηγικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 59).

Οι έρευνες των Asman και Markovits (2001), Boaler (1998), Nesher και HersHKovitz (1997), Peled και Bassan-Cincinatus (2005), Ruwisch (1999), Van Dooren, De Bock, Janssens και Verschaffel (2005), Verschaffel (2002) εστίασαν στο πως διαμορφώνονται τα νοήματα από τη μαθηματική δραστηριότητα εντός τάξης και κατά πόσο συνδέονται με τον εξωσχολικό κόσμο. Ο Gravemeijer (2002) διατύπωσε την έννοια της “αναδυόμενης μοντελοποίησης” (emergent modeling) για να εξηγήσει πως το μοντέλο που προκύπτει από την άτυπη δραστηριότητα των μαθητών με ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, μπορεί σταδιακά να εξελιχθεί σε ένα μοντέλο τυπικού

μαθηματικού συλλογισμού. Αυτή άποψη για την μοντελοποίηση είναι η κυρίαρχη στο PME. Οι English και Watters (2005) βρήκαν πως στις δεξιότητες μοντελοποίησης, για τις μικρές ηλικίες, είναι δυνατόν να διακριθούν σημαντικές μαθηματικές έννοιες σε άτυπη μορφή, όπως η έννοια της μεταβολής ή της διάταξης των αριθμών (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 61-62).

Οι έρευνες για τους ρητούς εστίασαν στις ερμηνείες (Interpretations) και τις αναπαραστάσεις (representations), τη μορφή τους ως κλάσματα και δεκαδικούς. Μελετάται η επέκταση των πράξεων στους ρητούς.

Σε εμπειρική έρευνα οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2005) αναπαρήγαγαν το μοντέλο των Behr, Harel, Post και Silver (1983) για τις αναφορές του κλάσματος ως μέρος/όλο, πηλίκο, αναλογία και μέτρο. Αντίστοιχες έρευνες διεξήγαγαν οι Mamede, Nunes, και Bryant (2005), η Hannula (2003) και οι Herman, Ilucova, Kremsova, Pribyl, Ruppeldtova, Simpson, κ.ά. (2004). Ο Amato (2005) έβγαλε το συμπέρασμα πως πολλές φορές τα κλάσματα δεν νοούνται καν ως αριθμοί. Οι Murray, Olivier και De Beer (1999) διαπίστωσαν πως η διδασκαλία των κλασμάτων σε μεγαλύτερα παιδιά έχει σημαντικές δυσκολίες, παρότι τα έχουν ήδη διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Για την ανακατασκευή της έννοιας οι Olive και Steffe (Olive, 2002) επιστράτευσαν ψηφιακά εργαλεία και μικρές ράβδους, παραπέμποντας στην ιστορική ρίζα των κλασμάτων στην έννοια των σύμμετρων μεγεθών των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 61-64).

Για τη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών καταγράφεται πλήθος παρανοήσεων (misconceptions). Η Brekke (1996) βρήκε πως οι δεκαδικοί αριθμοί νοούνται ως ζευγάρι ακεραίων (αριθμητής-παρονομαστής). Οι Steinle και Stacey (2003, 2004) κατέγραψαν λεπτομερώς τις παρανοήσεις στη σύγκριση δεκαδικών, όπου συχνά ο δεκαδικός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία θεωρείται μεγαλύτερος από κάποιον άλλο με λιγότερα, π.χ. ο 6,412 θεωρείται μικρότερος του 6,5.

Η Fuglestad (1996) χρησιμοποίησε ακολουθίες δεκαδικών για να εντοπίσει παρανοήσεις σχετικά με την αξία των ψηφίων τους. Οι Basso, Bonotto και Sorzio (1998) και οι Boufi και Skaftourou (2002) σχεδίασαν διδακτικές προτάσεις αξιοποιώντας τη φυσική σχέση δεκαδικών και μέτρησης (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 65).

Για την επέκταση των πράξεων στους ρητούς οι Fischbein, Deri, Nello και Marino (1985) πρότειναν ένα διαισθητικό μοντέλο που στηρίζεται στο ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Το πρόβλημα προκύπτει όταν ο πολλαπλασιαστής δεν είναι ακέραιος, οπότε δεν μπορεί να ερμηνευθεί όπως περιγράφεται παραπάνω. Με το ίδιο μοντέλο υπονοείται πως κάθε γινόμενο είναι μεγαλύτερο του πολλαπλασιαστέου, το οποίο δεν ισχύει για πολλαπλασιαστή μικρότερο της μονάδας. Αντίστοιχα ως προς τη διαίρεση προτείνουν δύο

μοντέλα, της μεριστικής διαίρεσης (partitive division) και της ποσοτικής διαίρεσης (quotitive division). Το πρώτο στηρίζεται στην ιδέα του μοιράσματος μιας ποσότητας σε ίσα μέρη, ενώ το δεύτερο παραπέμπει στην προπαίδεια, εκφράζοντας το πόσες φορές χωράει ο παρονομαστής στον αριθμητή που είναι κατ' ανάγκη μεγαλύτερος.

Διαφορετικό διαισθητικό μοντέλο πρότειναν οι De Corte και Verschaffel (1994). Σε αυτό χρησιμοποίησαν μαθηματικές εκφράσεις και ζητούσαν να διατυπωθούν λεκτικά προβλήματα που λύνονται με ανάλογους υπολογισμούς. Έτσι κατέληξαν πως η αναφορά του κλάσματος ως μέρος/ όλο είναι περιορισμένη (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 66).

Το πεδίο πέραν των ρητών αριθμών αφορά την κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα οι Fischbein, Jehaim και Cohen (1994) διερεύνησαν τα επιστημολογικά εμπόδια σχετικά με τους άρρητους σε μαθητές και φοιτητές, διαμορφώνοντας, μέσω ιστορικής και γνωστικής προσέγγισης, τη θεμελιώδη διαισθητική θεωρία (theory of Intuition). Οι Romero και Rico (1996), μέσω μιας πειραματικής διδασκαλίας για την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών και συγκεκριμένα για τις άπειρες δεκαδικές εκφράσεις, εντόπισαν την ανάγκη μετάβασης (shift) από το συλλογισμό τους ως διαδικασία (process) στο συλλογισμό ως τους αντικείμενο (object). Ανάλογες παρατηρήσεις έκαναν για τις δυσκολίες καθηγητών σχετικά με στην έννοια της πυκνότητας (density) των πραγματικών αριθμών, σημειώνοντας πως είναι το βασικό στοιχείο αντίθεσης με τους φυσικούς. Η Merenluoto (2003) μελέτησε την αντίληψη της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών σε φοιτητές και κατέληξε πως απαιτείται η εννοιολογική αλλαγή (conceptual change) της ίδιας της έννοιας του αριθμού κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς και τους ακέραιους στους ρητούς (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 67-68).

Ανάλογες δυσκολίες αντιμετωπίζουν και οι εκπαιδευτικοί με τα κλάσματα (Philippou και Christou, 1994), τις αναπαραστάσεις των ρητών (Zazkis και Sirotic, 2004), ενώ εντοπίστηκαν ορισμένες παρανοήσεις (Pinto και Tall, 1996). Παρατηρήθηκαν συνολικά αδυναμίες σχετικά με την παιδαγωγική γνώση του αντικειμένου (PCK). Οι Klein, Barkai, Tirosh και Tsamir (1998), από τη μελέτη τους με υποψήφιους και ενεργούς εκπαιδευτικούς, διαπίστωσαν πως η διδακτική εμπειρία από μόνη της δεν ενισχύει απαραίτητα την αντίληψη του εκπαιδευτικού για το πως σκέφτονται οι μαθητές (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 69).

Μελετώντας πιο προσεκτικά τις ιδιότητες των αριθμητικών πράξεων και τη δομή των φυσικών αριθμών, οι Blanton και Kaput (2002) εντόπισαν την ανάγκη ενσωμάτωσης αλγεβρικών εργαλείων, όπως η γενίκευση, η αναγνώριση μοτίβου και η άτυπη απόδειξη, στη διδασκαλία των Μαθηματικών από τις πρώτες τάξεις. Μια τυπική μορφή τέτοιας δραστηριότητας στηρίζεται

στο μοτίβο γεωμετρικών ακολουθιών όπως παρουσίασαν στις έρευνες τους οι Radford (2001) και Warren (2005), όπου μέσω της δημιουργίας διαδοχικών σχημάτων επιχειρείται η διατύπωση του γενικού αλγεβρικού τύπου της ακολουθίας (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 69).

Οι Vermeulen, Olivier και Human (1996), στη βάση της *θεωρίας εννοιολογικών πεδίων* του Vergnaud (1996), πρότειναν ένα μοντέλο για την παρακολούθηση της αλγεβρικής σκέψης. Από το “θεώρημα-στην-πράξη” (theorem-in-action) που υπονοείται από τις ενέργειες των μαθητών, μέχρι το “θεώρημα, στην πράξη” (theorem, in action) που εκδηλώνεται συνειδητά σε αυτές, διαμορφώνεται ένα φάσμα που περιλαμβάνει την αυθόρμητη χρήση, την αναγνώριση, τη σκόπιμη χρήση, τη γενίκευση και τη δυνατότητα εξήγησης (στο Verschaffel, κ.ά., 2006, σελ. 70). Δεν είναι λοιπόν τυχαία η επικάλυψη ορισμένων ερευνών της Αριθμητικής με αντίστοιχες επισκοπήσεις για την Άλγεβρα ή την απόδειξη.

Στα συμπεράσματα της επισκόπησης αυτής, οι συγγραφείς τόνισαν πως όσο ανώτερο είναι το αριθμητικό σύστημα, τόσο λιγότερο έχει ερευνηθεί. Φαίνεται η αριθμητική επάρκεια να μην κρίνεται στη κατανόηση μεμονωμένων μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών και άμεσων εφαρμογών τους. Περισσότερο φαίνεται να χρειάζεται η ολοκληρωμένη και ευέλικτη εφαρμογή στοιχείων από διαφορετικά εννοιολογικά σχήματα (conceptual schemes) και στρατηγικές, που αντανακλώνται στον όρο “αίσθηση αριθμού” (number sense).

Εκτός της αριθμητικής επάρκειας, θεωρούν πως βαθιά μαθηματική αίσθηση (mathematical disposition) σημαίνει εκείνη τη νοητική δραστηριότητα που περιλαμβάνει τη δυνατότητα να κατανοείς από το συγκεκριμένο (το παράδειγμα) τις σχέσεις μεταξύ εικασίας και αναπαράστασης. Δηλαδή, θεωρούν πως όχι μόνο χρειάζεται η αναγνώριση ενός μοτίβου αλλά η κατανόηση του γιατί προκύπτει και πως αποδεικνύεται αυτό. Καταλήγουν πως είναι αναγκαία μια ριζοσπαστική εννοιολογική ανακατασκευή της έννοιας του αριθμού στην πρόοδο της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Παράλληλα οι έρευνες αποκλίνουν μεθοδολογικά από τη ατομική μελέτη συγκεκριμένων θεμάτων του αναλυτικού προγράμματος, με ερευνητικά εργαλεία στο πνεύμα των κλινικών συνεντεύξεων του Piaget, και δίνουν χώρο σε άλλες που εστιάζουν στη δραστηριότητα της σχολικής τάξης. Δηλαδή, δίνεται έμφαση στο περιβάλλον μάθησης και στη συνεργασία ερευνητή- εκπαιδευτικού. Στην προέκταση αυτού οι συγγραφείς (Verschaffel, κ.ά., 2006) έκαναν κάλεσμα για τη διερεύνηση του εξωσχολικού περιβάλλοντος.

Παράλληλα αναδείχθηκε πως στην πρώιμη αριθμητική (early arithmetic) βρίσκεται η βάση για την καλλιέργεια του μαθηματικού στοχασμού και της απόδειξης. Συνεπώς η επιλογή δραστηριοτήτων και η έμφαση που δίνει ο εκπαιδευτικός στη δομή αριθμητικών εκφράσεων,

χωρίς αποκλειστικό στόχο τον υπολογισμό της τιμής τους, μπορεί να καλλιεργήσει τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Άρα για την ανάπτυξη διδακτικών δραστηριοτήτων έχει σημασία τόσο η γνώση του επιστημονικού αντικειμένου (CK) όσο και η παιδαγωγική γνώση του αντικειμένου (PCK).

Εκτός της διαισθητικής θεωρίας του Fischbein από το 1987 και τη συγκρότηση της θεωρίας των εννοιολογικών πεδίων του Vergnaud το 1996, άρχισε η συσχέτιση των μαθηματικών διαδικασιών και των μαθηματικών αντικειμένων (Arzarello, Bartolini Bussi και Robutti, 2004) για την έννοια του απείρου (Verschaffel, κ.ά., 2006).

Αναπόφευκτα τίθενται ερωτήματα.

Πως θα διαμορφωθούν διδακτικά έργα που να αμβλύνουν τα επιστημολογικά εμπόδια για τους μαθητές, ενισχύοντας την αίσθηση τους για τους πραγματικούς αριθμούς; Αντίστοιχα ποιά είναι κατάλληλα για την εξήγηση και την καλλιέργεια της απόδειξης αλγεβρικών και αριθμητικών φαινομένων; Πως μπορεί να μελετηθεί ο τρόπος σκέψης εκπαιδευτικών για το πως επηρεάζει τη διδασκαλία τους;

Αναζητώντας απαντήσεις και προεκτάσεις των παραπάνω, καταλήγει κανείς στον 2ο τόμο του PME (Gutiérrez, κ.ά., 2016) και στο άρθρο “On Numbers: Concepts, Operations and Structure” (Zazkis και Mamolo, 2016 στο Gutiérrez, κ.ά., 2016), όπου παρουσιάζεται η σχετική βιβλιογραφία των επομένων 10 ετών, έως και το 2015. Οι νέες μεθοδολογικές τάσεις που διαμορφώθηκαν κυρίως αφορούν τη μελέτη της αριθμητικής δομής και του μαθηματικού συλλογισμού. Οι έρευνες τότε δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στη δομή, είτε των αριθμών, είτε του σχεδιασμού των εκπαιδευτικών έργων, ακόμη και τη δομή της μαθηματικής σκέψης.

Εξετάστηκαν οι πρώτες έννοιες για τον φυσικό αριθμό και την αίσθηση του (number sense). Έγινε συζήτηση για το κατά πόσο η διδασκαλία στις πρώτες τάξεις πρέπει να έχει αφετηρία τη διάταξη ή την πληθικότητα. Οι Pittalis, Pitta-Pantazi και Christou (2013) διαμόρφωσαν ένα θεωρητικό μοντέλο ώστε η αίσθηση του αριθμού να συμπεριλάβει τη λεγόμενη “αλγεβρική αριθμητική” (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Ως ερευνητικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε η αριθμογραμμή (number line), αφού πρώτα έγινε η εννοιολογική της διάκριση από την αριθμοσειρά (number track). Οι Diezmann και Lowrie (2007) απέδωσαν με τον όρο της *δομημένης αριθμογραμμής* (*structured number line*), την ίδια έννοια που ο Murphy (2008) ονόμασε *άδεια αριθμογραμμή* (*empty number line*). Χρησιμοποιήθηκε επίσης από τους Gervasoni κ.ά. (2011) και τον Williamson (2013) στη μελέτη της γνώσης των εκπαιδευτικών γύρω από τους αριθμούς (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Η Zazkis (2009) είχε εξετάσει τις έννοιες της Θεωρίας Αριθμών στη σύνδεσή τους με άλλες μαθηματικές περιοχές. Από πλήθος ερευνητών ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη, Barkai, Tabach, Tirosh, Tsamir και Dreyfus (2009), Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Barkai, και Tabach (2008), Gabel και Dreyfus (2013), Kempen και Biehler (2014), Toh, Leong, Toh, και Ho (2014), καθώς και στη χρήση παραδειγμάτων (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Περνώντας στους ρητούς αριθμούς, αναφέρεται πως οι Van Dooren, Van Hoof, Lijnen και Verschaffel (2012) διατύπωσαν την έννοια της *προκατάληψης του φυσικού αριθμού* (Natural Number Bias) (στο Zazkis και Mamolo, 2016). Ο όρος είναι ευρύτερα γνωστός στη βιβλιογραφία από τους Ni και Zhou (2005), ως *προκατάληψη του ακέραιου αριθμού* (στο Christou και Vosniadou, 2012).

Βρέθηκε πως ακόμη και άτομα μαθηματικά ώριμα, είχαν την αυθόρμητη τάση να πραγματεύονται τους αριθμούς έχοντας υπόψη μόνο τους φυσικούς. Συγχύσεις προέκυψαν ακόμη και σε έμπειρους μαθηματικούς κατά τη σύγκριση κλασμάτων, όπως εξειδίκευσαν συμπερασματικά οι Obersteiner, Van Hoof και Verschaffel (2013), έτσι διαφοροποιείται πλέον ο διαισθητικός από τον αναλυτικό συλλογισμό (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Ερευνήθηκε το κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους ρητούς ως δεκαδικούς αριθμούς. Από πολλούς ερευνητές επισημάνθηκαν ξανά τα επιστημολογικά εμπόδια για την πυκνότητα των ρητών, που σχετίζονται με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, όπως από τους Vamvakoussi και Vosniadou (2006), Vamvakoussi, Christou, και Van Dooren (2010), ή με την αντίληψη του απείρου όπως από τους Pehkonen, Hannula και Soro (2006). Οι Merenluoto και Lehtinen (2006) τόνισαν πως η εννοιολογική αλλαγή που απαιτείται για το πέρασμα στους πραγματικούς αριθμούς, εμποδίζεται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Οι πράξεις με κλάσματα άρχισαν να χρησιμοποιούνται ως κλίμακα μέτρησης δυσκολιών, που αποτυπώθηκε με το ιεραρχικό μοντέλο που παρουσίασαν οι Nikolaou και Pitta-Pantazi (2013). Διερευνήθηκε η σύνδεση άτυπων συλλογισμών με την αντίληψη του κλάσματος ως μέρος-όλο, ως μέτρο, ως αναλογία ή ως πηλίκο. Αυτό έγινε μέσω έργων εξίσωσης ή διάταξης (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2005) εξέτασαν την ευελιξία στη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων για τα κλάσματα, γεωμετρικών, δεκαδικών ή άλλων και τη χρησιμότητα των μετατροπών τους αναλόγως το πρόβλημα. Στη βάση της θεωρίας των Lesh, Post και Behr (1987), οι Kalogirou, Gagatsis, Michael και Deliyianni (2010) ανέδειξαν τη σημασία των

κλασματικών αναπαραστάσεων στις πράξεις και σε ποιόν βαθμό η κλασματική μορφή μπορεί να βοηθήσει στο να ξεπεραστούν δυσκολίες σχετικές με τη διαίρεση (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Η επιρροή των αναπαραστάσεων που προκύπτουν από το πλαίσιο του προβλήματος εξετάστηκε υπό το πρίσμα των κοινωνικο-μαθηματικών νορμών. Ο Bonotto (2006) θεώρησε πως τα ρεαλιστικά πλαίσια ευνοούν την αίσθηση του δεκαδικού αριθμού μέσω της έμμεσης αναφοράς του σε κοινωνικές καταστάσεις. Το ρεαλιστικό πλαίσιο αναδείχθηκε από τους Peled, Meron και Rota (2007), τονίζοντας τα οφέλη που παρουσιάζονται κατά την εμπλοκή των μαθητών, όπως η βαθιά σκέψη και η καλή επιχειρηματολογία (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Η δεκαδική αναπαράσταση συνέχισε να προκαλεί προβληματισμό τόσο ερευνητικά όσο και διδακτικά, ως προς το πως επηρεάζει τη μάθησης. Οι συνέπειες από θεμελιώδεις παρανοήσεις αποτυπώθηκαν ακόμη και για τους ενήλικες.

Αυτοτελώς εξετάστηκε το μηδέν. Οι αρνητικοί εξετάστηκαν βάσει της αίσθησης του αριθμού (number sense), από τον Kilhamn (2009) ως προς τη συμμετρία που παρουσιάζουν οι αντίθετοι αλλά και ως προς τις αναφορές τους. Οι Koukkoufis και Williams (2006) παρουσίασαν το παράδειγμα της “στρατηγικής ζημίας” παίζοντας παιχνίδια με πόντους. Ο Radford (2003) παρατήρησε πως ορισμένες φορές η διαισθητική προσέγγιση των μαθητών ευνοεί και την κατανόηση των συμβόλων (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Οι Chrysostomou και Mousoulides (2010) παρατήρησαν πως οι εκπαιδευτικοί συνήθως εξηγούν τους αρνητικούς μέσω κάποιας διαδικασίας, ως αποτέλεσμα κάποιας ενέργειας και όχι εννοιολογικά. Οι Heemsoth και Heinze (2013, 2014) κωδικοποίησαν ως *αρνητική γνώση* τις εσφαλμένες απαντήσεις και διέκριναν διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης κατά τη διδασκαλία. Οι δύο στρατηγικές διαχείρισης λαθών που αναδείχθηκαν είναι ο αναστοχασμός επί του συλλογισμού και ο αναστοχασμός επί του αποτελέσματος. Όσοι αναστοχάζονται πάνω στη λογική που οδήγησε στην εσφαλμένη λύση ενισχύουν τις γνώσεις τους πιο αποτελεσματικά σε σύγκριση με αυτούς που αναστοχάζονται μόνο επί του αποτελέσματος (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Ο Ekol (2010) μελέτησε τους αρνητικούς αριθμούς σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (dynamic geometry environment) αναπτύσσοντας ένα θεωρητικό μοντέλο για τον τρόπο συλλογισμού, με προσανατολισμό στη δράση (action-oriented thinking) (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Για την αρρητότητα και τους άρρητους αριθμούς σε σχολικό επίπεδο, οι González-Martin, Giraldo και Machado Souto (2011) ανέλυσαν τα επίσημα σχολικά εγχειρίδια της Βραζιλίας. Τους απασχόλησε η δομή των άρρητων αριθμών και το πως αναπτύσσεται η έννοια

χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή. Συγκεκριμένα εξετάστηκε το κατά πόσο οι μαθητές γνωρίζαν την ύπαρξη των άρρητων αριθμών, παρουσιάζοντάς τους μαθηματικά προβλήματα που δε λύνονται με ρητούς. Ο Shinno (2007) υποστηρίζει πως η ιστορική αναδρομή στην επίλυση εξισώσεων αποτελεί το πλαίσιο εκείνο που δίνει νόημα στους άρρητους και ευνοεί την κατανόηση της αρρητότητας. Σε μεταγενέστερη μελέτη του με τον Iwasaki (Shinno και Iwasaki, 2009) υποστήριξαν πως ο ευκλείδειος αλγόριθμος και η απαγωγή σε άτοπο είναι αναπόσπαστα στοιχεία του πλαισίου αυτού. Επισημαίνεται ξανά πως η κατανόηση της άρρητης ποσότητας σχετίζεται με την κατανόηση του απείρου στη βάση της έννοιας του αντικειμένου-διαδικασία (procept) των Gray και Tall (1994) (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Η μελέτη των Tsamir και Tirosh (2006) παρουσίασε έργα για τη μελέτη άπειρων συνόλων, της άπειρης διαιρετότητας, της σύγκρισης απειροστών αριθμών (transfinite cardinal) και ορίων. Επίσης, επισήμαναν πως η ανάπτυξη τέτοιων έργων, στο πλαίσιο της επιμόρφωσης εκπαιδευτικών, οφείλει να συνυπολογίζει τη σχέση μεταξύ διαισθητικής και τυπικής γνώσης. Οι Mamolo και Zazkis (2008) παρουσίασαν την πρώτη εμπειρική μελέτη για τις άρρητες επιρροές που έχουν φιλοσοφικές και συναισθηματικές πτυχές στην προσέγγιση του απείρου. Η μελέτη τους στηρίχθηκε στη χρήση μαθηματικών παράδοξων (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Η διάκριση του εν δυνάμει και ενεργού απείρου παίζει ρόλο στον τρόπο αφηρημένου συλλογισμού των ατόμων. Έρευνες διερεύνησαν τη διαφορά αυτή σε ένα φάσμα ηλικιακών κατηγοριών, με συμμετέχοντες νεαρούς μαθητές από τους Singer και Voica (2009), ενήλικες από τους Maes, Cornet, Verhoef και Hendrikse (2011), Narli, Delice και Narli (2009), σε φοιτητές και υποψήφιους δασκάλους από τους Mamolo και Zazkis (2009· Mamolo, 2014). Οι Dubinsky, Weller, McDonald και Brown (2005) εφάρμοσαν την θεωρία APOS αντιστοιχίζοντας το εν δυνάμει άπειρο με την έννοια της διαδικαστικής αντίληψης (process-based) και το ενεργό με την αντικειμενοστραφή (object-based) αντίληψη (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Ξεχωριστή ενότητα, στην επισκόπηση αυτή, αποτελεί η αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδασκαλία του αριθμού. Αυτή αφορά την υποστήριξη που δύναται να παρέχουν οι εικονικοί χειρισμοί (virtual manipulatives) έναντι των φυσικών, σε περιπτώσεις παιδιών με ειδικές ανάγκες γύρω από την ισοδυναμία κλασμάτων όπως μελέτησαν οι Suh και Moyer-Packenman (2007). Επίσης ο Olive (2011) είχε αξιοποιήσει τη δυναμική αριθμογραμμή και τα διαδραστικά ψηφιακά διαγράμματα για την κατανόηση των σχετικών μεγεθών και τη διάταξη κλασμάτων (στο Zazkis και Mamolo, 2016).

Μια άλλη διάσταση της τεχνολογίας αφορά την αξιοποίησή της ως ερευνητικό εργαλείο. Σε έρευνες για την πρώιμη Θεωρία Αριθμών, χρησιμοποιήθηκε τεχνολογία για την παρακολούθηση

της κίνησης των οφθαλμών του ματιού από τους Obersteiner, Moll, Beitlich, Cui, Schmidt, Khmelivska και Reiss (2014), ενώ οι Cimen και Campbell (2012) χρησιμοποίησαν πρόσθετα ηλεκτροκαρδιογράφους και μετρητές ρυθμού αναπνοής. Χρησιμοποιήθηκαν συστήματα της νευροεπιστήμης για την αντίληψη της πληθικότητας από τον Coles (2014), ενώ αντίστοιχη εφαρμογή έκαναν οι Iannese, Mellone και Tortora (2009) για τη μέτρηση και την απαρίθμηση. Μαγνητικοί τομογράφοι κατέγραψαν την εγκεφαλική δραστηριότητα κατά τη σύγκριση κλασμάτων και ακέραιων αριθμών στην έρευνα των Tzur και Depue (2014) (στο Zazkis και Mamolo, 2016). Χωρίς να έχουν άμεση σχέση με τη διδασκαλία των αριθμών, τα τεχνολογικά επιτεύγματα επέτρεψαν την πρόσβαση σε νέα δεδομένα.

Η πλειοψηφία των αναφορών των Zazkis και Mamolo (2016) εστίασαν στην παιδαγωγική γνώση του αντικειμένου (PCK) των εκπαιδευτικών. Ειδικά οι δάσκαλοι της πρωτοβάθμιας εξέφρασαν παρανοήσεις (misconceptions) για τη διάταξη δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων, όπως και για την αξία των ψηφίων στους δεκαδικούς.

Άλλες δυσκολίες σχετικές με τη διδασκαλία εντοπίστηκαν στον τρόπο αξιολόγησης, συγκεκριμένα σε ενδεχόμενες μη αλγοριθμικές λύσεις των μαθητών, όπου απαιτείται καλή γνώση του αντικειμένου από τον εκπαιδευτικό. Η δυνατότητα ευελιξίας και τελικά επιτυχημένης αξιολόγησης εξαρτάται από το βαθμό της εννοιολογικής κατανόησης του ίδιου. Η αναγκη εννοιολογικής αλλαγής επιβεβαιώθηκε για εκπαιδευτικούς και μαθητές.

Συνολικά, από τις δύο αυτές επισκοπήσεις φαίνεται πως οι έρευνες στη ΔτΜ για τη μελέτη των αριθμών κατά βάση αφορούν τους ακέραιους (κυρίως φυσικούς) αριθμούς και τα κλάσματα ή τους δεκαδικούς.

Εντούτοις η μετάβαση από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς ενέχει, ακόμη και για τους εκπαιδευτικούς, σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια σχετικά με δύσκολες φιλοσοφικές έννοιες, όπως το άπειρο και εννοιολογικές δυσκολίες γύρω από απαιτητικές μαθηματικές έννοιες, όπως η πυκνότητα. Έτσι η έννοια των άρρητων αριθμών αποδεικνύεται κρίσιμη.

2.3 Μια επισκόπηση γύρω από τους άρρητους αριθμούς

Τα άρθρα του PME καλύπτουν τη βιβλιογραφία της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών γύρω από τους αριθμούς γενικά και για το χρονολογικό διάστημα από το 1990 έως και το 2015. Ορισμένα πρόσθετα στοιχεία, αποκλειστικά για τους άρρητους, μπορούμε να δούμε στην επισκόπηση του Güner (2016).

Οι Arcavi, Bruckheimer και Ben-Zvi (1987) στη μελέτη τους με υποψήφιους εκπαιδευτικούς των

Μαθηματικών, παρατήρησαν πως εσφαλμένα θεωρούν άρρητο τον αριθμό 22/7, εφόσον πρόκειται για μια ρητή προσέγγιση του π . Αυτό το γεγονός χρησιμοποιήθηκε σε επόμενες έρευνες ως διαγνωστικό εργαλείο παρανοήσεων (στο Güner, 2016).

Αντίστοιχα, τα αποτελέσματα της έρευνας των Fischbein, Jehiam και Cohen (1994) συγκρότησαν μια θεωρητική βάση για τη μελέτη της γνώσης μαθητών και εκπαιδευτικών για τους άρρητους αριθμούς. Η διαισθητική δυσκολία του να υπάρχουν δύο διαφορετικά άπειρα σύνολα αριθμών εντός του ίδιου δεδομένου διαστήματος προκαλεί παρανοήσεις. Ανάλογη δυσκολία φάνηκε να παρουσιάζει η απειροψήφια μη περιοδική αναπαράσταση των άρρητων, που οδήγησε στη λανθασμένη εντύπωση ότι το άθροισμα (ή η διαφορά) άρρητων δεν μπορεί να υπολογιστεί (Gray και Tall, 1994).

Οι Peled και HersHKovitz (1999) αποκάλυψαν μια άλλη δυσκολία των υποψήφιων εκπαιδευτικών στο να μεταβαίνουν ευέλικτα μεταξύ των ορισμών των άρρητων αριθμών. Στο ίδιο πνεύμα οι Zazkis και Sirotic, μέσα από μια σειρά άρθρων (Zazkis και Sirotic, 2004· Sirotic και Zazkis, 2007a· 2007b) διερεύνησαν το πως αντιλαμβάνονται υποψήφιοι εκπαιδευτικοί τις αναπαραστάσεις των άρρητων και κατέληξαν πως έχουν ατελή ή απολύτως καμία εικόνα της έννοιας για την γεωμετρική τους αναπαράσταση.

Ο Güner στην επισκόπηση του αναφέρει ορισμένες διατριβές που δεν αναφέρονται στα PME. Η Arbour (2012) παρουσίασε στη διατριβή της τη γνώση φοιτητών φυσικών επιστημών για τους πραγματικούς αριθμούς στο τελείωμα των σπουδών τους. Διέκρινε τη ρητή (explicit) από την άρρητη γνώση (implicit knowledge) μέσα από ένα ερωτηματολόγιο. Οι Kara και Delice (2012) εξέτασαν το ίδιο θέμα με χρήση διαγραμμάτων Venn για τη συμπερίληψη των αριθμητικών συνόλων. Ο Adigüzel (2013) στη διατριβή του εξέτασε τις παρανοήσεις των άρρητων σε μαθητές Γυμνασίου, μέσω τεστ πολλαπλής επιλογής, και σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς, μέσα από ανοιχτές ερωτήσεις. Επιβεβαίωσε πως και στις δύο περιπτώσεις η γνώση είναι ελλιπής. Στο ίδιο θέμα ο Ercire (2014) πρότεινε το “τεστ της έννοιας του άρρητου αριθμού” για τη διερεύνηση των δυσκολιών στους μαθητές και αντίστοιχα συνεντεύξεις για τους καθηγητές Μαθηματικών που συμμετείχαν. Βρήκε πως οι εικόνες (images) που έχουν για τους άρρητους αριθμούς διαφέρουν. Ορισμένοι μαθητές άρρητο θεώρησαν τον μη περιοδικό απειροψήφιο αριθμό, ενώ άλλοι αυτόν που δεν γράφεται ως κλάσμα ακεραίων (στο Güner, 2016).

Σε δασκάλους μαθηματικών σε τάξεις του Δημοτικού, μέσα από ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, οι Güven, Çekmez & Karataş, (2011) εξέτασαν τους ορισμούς ρητών και άρρητων και βρήκαν πως κάποιοι τους μπερδεύουν ακόμη και με τους μιγαδικούς. Σε πρόβλημα τοποθέτησής στην αριθμογραμμή, βρήκαν πως η πλειοψηφία των συμμετεχόντων έπραξε σωστά χωρίς να μπορεί να εξηγήσει το γιατί (στο Güner, 2016).

Γύρω από τη γνώση των εκπαιδευτικών και των μαθητών για τους άρρητους αριθμούς, οι έρευνες παραμένουν λίγες κατά γενική ομολογία. Σε αυτές φαίνεται πως ο σχεδιασμός και η μεθοδολογία της έρευνας διαφοροποιούνται, ακόμη και επί του ίδιου θέματος.

Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν έντονα μια γενική παρανόηση (misunderstanding, misconception), κυρίως εννοιολογική, που αφορά τον ορισμό των άρρητων. Αν κάποιος γνωρίζει κάποιον ορισμό και τις ιδιότητες των άρρητων, δεν εξασφαλίζεται η αποφυγή δυσκολιών. Συνήθως η σύνδεση ορισμού και αναπαράστασης είναι προβληματική, γεγονός που επηρεάζει το πως λύνει προβλήματα και αποδεικνύει προτάσεις.

Δηλαδή δεν έχει ακόμη επιτευχθεί μια διδακτική πραγματικότητα που να ενισχύει την αίσθηση του πραγματικού αριθμού, να καλλιεργεί την απόδειξη και την εξήγηση και τελικά μαζί με την κατανόηση να αναπτύσσεται ένας ανώτερος, περίπλοκος λογικά, τρόπος σκέψης.

Συνεπώς υπάρχει ακόμη η ανάγκη για λεπτομερή καταγραφή των έργων που μπορούν να αναδείξουν τις αδυναμίες και πολύ περισσότερο να τις αμβλύνουν διδακτικά. Υπάρχει δηλαδή η ανάγκη για εκλεπτισμένα διαγνωστικά εργαλεία, παραδείγματα διδακτικών έργων και προτάσεις για τον σχεδιασμό των ΑΠΣ. Για τον σκοπό αυτό, μελετήθηκαν άρθρα, μεταγενέστερα του 2015 και μη, που να διερευνούν το σύνολο της διδακτικής δραστηριότητας, που θέτουν διαφορετικές όψεις της μετάβαση από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς μέσα από τους συμμετέχοντες, μαθητές και εκπαιδευτικούς.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η παρούσα βιβλιογραφική επισκόπηση απευθύνει τα εξής ερωτήματα:

1. Πως προσεγγίζει η σύγχρονη έρευνα τη μετάβαση από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς;
2. Ποιά είναι τα πρόσφατα έργα για τη διδασκαλία και η μελέτη των πραγματικών αριθμών;
3. Ποιοί τρόποι σκέψης και συλλογισμού καλλιεργούνται από τις προτάσεις διδασκαλίας γύρω από τους πραγματικούς αριθμούς;

3. Μεθοδολογία

Στη συνέχεια, με βάση τα δύο άρθρα του PME (Verschaffel, κ.ά., 2006· Zazkis και Mamolo, 2016), έγινε η αναζήτηση της νεότερης αρθρογραφίας στα επιστημονικά περιοδικά με συγκεκριμένες λέξεις κλειδιά (όπως σημειώνονται στην παρένθεση): για τους άρρητους (irrational number), τους ρητούς (rational number), τους πραγματικούς (real number), τη μετάβαση στους πραγματικούς αριθμούς (transition to real number) και τη διδασκαλία τους (teaching real number).

Συγκεκριμένα, τα περιοδικά ήταν:

- Educational studies
- Mathematical Thinking and Learning
- Journal for Research in Mathematics Education
- Journal of Mathematical behavior
- Journal of Mathematics and Science of Education
- Learning and Instruction
- Journal of Numerical Cognition
- International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education
- For the Learning of Mathematics
- Research in Mathematics Education
- Journal of Mathematics Teacher Education

Υπό το πρίσμα της διερεύνησης της μετάβαση από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς, στην πρώτη φάση διαλογής εξαιρέθηκαν τα άρθρα που αφορούσαν μόνο τους ακέραιους ή μόνο τους ρητούς. Οι αναφορές που προέκυψαν από την αναζήτηση των πραγματικών αριθμών, ως επί των πλείστον, είχαν επιστημολογική/ φιλοσοφική προσέγγιση ή αφορούσαν μεθόδους διδασκαλίας γύρω από την έννοια της σύγκλισης. Εφόσον δεν εστιάζουν στη μετάβαση κατά τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών απορρίπτονταν.

Από την αναζήτηση των πρόσφατων άρθρων επιβεβαιώθηκε η προηγούμενη παραδοχή, πως για τη μελέτη της μετάβασης από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς, η αναγκαία μονάδα ανάλυσης είναι οι άρρητοι αριθμοί.

Περαιτέρω, στη δεύτερη φάση διαλογής, εξαιρέθηκαν οι μελέτες που αφορούν αποκλειστικά την πρωτοβάθμια και την τριτοβάθμια εκπαίδευση, καθώς η διδασκαλία στο Δημοτικό αφορά κυρίως

τους φυσικούς και τους ρητούς ως κλάσματα ή δεκαδικούς και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, κυρίως σε τμήματα Μαθηματικών, η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών σχετίζεται με την Ανάλυση, συνεπώς η έμφαση δίνεται στην έννοια του ορίου και της συνάρτησης.

Παρά το γεγονός πως η Αριθμητική θεμελιώνεται στα πρώτα σχολικά χρόνια, συνήθως δεν τίθεται ζήτημα μετάβασης στους πραγματικούς αριθμούς. Εντούτοις δεν απορρίφθηκαν οι μελέτες που δίνουν ορισμένα συμπεράσματα ή προτάσεις για τη διδασκαλία των πραγματικών ως προετοιμασία για τη δευτεροβάθμια ή εξετάζουν τη γνώση υποψήφιων δασκάλων. Αντίστοιχα, απορρίφθηκαν οι μελέτες που εξετάζουν την τυπική επαναθεμελίωση της έννοιας του πραγματικού αριθμού, ενώ συμπεριλήφθηκαν αυτές που εξετάζουν τους φοιτητές ως μελλοντικούς εκπαιδευτικούς.

Επιπλέον, απορρίφθηκαν άρθρα που αναφέρονται στους πραγματικούς αριθμούς εστιάζοντας αμιγώς στη λογική απόδειξη, την επίλυση προβλημάτων γενικά ή την ιστορική τους εμφάνιση χωρίς κάποιο σχετικό, άμεσο διδακτικό συμπέρασμα.

Εν κατακλείδι, συμπεριλαμβάνονται όσα άρθρα μελετούν τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών αναλύοντας κάθε φύσης δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ή οι εκπαιδευτικοί και παρουσιάζονται σχετικές διδακτικές παρεμβάσεις.

Από την αναζήτηση στα περιοδικά βρέθηκαν 32 άρθρα, σύμφωνα με τις λέξεις κλειδιά και από τους πρώτους 100 τίτλους που εμφανίζονταν. Από τη γενική αναζήτηση (Google Scholar) προέκυψαν 34 αναφορές, εκ των οποίων ορισμένες ήταν κοινές με αυτές των περιοδικών. Επαληθεύτηκαν τα ευρήματα με τις αναφορές των κύριων άρθρων της επισκόπησης του ΡΜΕ. Στη συνολική λίστα προστέθηκαν άρθρα από τις αναφορές που προέκυψαν.

Ειδικότερα, τα άρθρα σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς, στα οποία δεν υπήρξε πρόσβαση ή που αναφέρονταν σε άλλη βαθμίδα εκπαίδευσης, έγινε αναζήτηση στις σχετικές τους αναφορές και σε άρθρα που τα αναφέρουν.

Η συνολική λίστα διαμορφώθηκε με 70 άρθρα, εκ των οποίων 41 αφορούν αμιγώς τους άρρητους, 7 αμιγώς τους ρητούς, 10 την έννοια του αριθμού γενικότερα. Επίσης σημειώνεται πως σε 12 από τα 70 δεν υπήρξε πρόσβαση ή ήταν σε γλώσσα άλλη από την αγγλική. Επίσης συμπεριλήφθηκαν ανάλογες ελληνικές αναφορές.

3.1 Διαδικασία επιλογής των άρθρων

1. Εξαιρέθηκαν όσα δεν ήταν προσβάσιμα ή ήταν σε γλώσσα άλλη από την αγγλική ή την ελληνική.
2. Απορρίφθηκαν όσα είχαν αναφορά μόνο σε ρητούς ή αριθμούς γενικώς. Για να εξασφαλιστεί αυτό, έγινε αναζήτηση εντός κειμένου με τις λέξεις κλειδιά για τους άρρητους και τους πραγματικούς.
3. Αν υπήρχε η αναφορά στους *άρρητους*, τότε εξετάστηκε κατά πόσο αποτελούν μονάδα ανάλυσης της έρευνας ή αν πρόκειται για απλή επικουρική αναφορά σε άλλο επιχείρημα ή παράδειγμα. Στη δεύτερη περίπτωση τα άρθρα γενικώς απορρίφθηκαν.
4. Απορρίφθηκαν όλα τα άρθρα που μελετούν αμιγώς τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτό δεν συνέβη στον ίδιο βαθμό για την τριτοβάθμια καθώς η εξέταση του τρόπου σκέψης και της κατανόηση σχετίζεται περισσότερο με την παρούσα επισκόπηση.

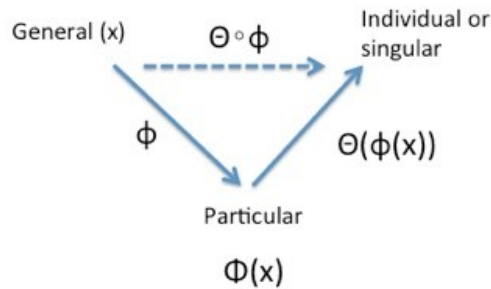
Καταληκτικά, σύμφωνα με τα παραπάνω κριτήρια, αναλύονται 38 άρθρα. Σε αυτά περιλαμβάνονται μελέτες μεταγενέστερες του 2016, καθώς και προηγούμενες που παρουσιάζουν ερευνητικό ενδιαφέρον σχετικό με τα ερωτήματα της εργασίας αυτής, ασχέτως με το αν εντάσσονται στα άρθρα του PME. Η εργασία υποστηρίζεται και από άλλα άρθρα, χωρίς να αποτελούν δεδομένα της βιβλιογραφικής έρευνας.

3.2 Ανάλυση Δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε βάσει της Θεωρίας της Αντικειμενοποίησης (Theory of Objectification) του Radford (2013, 2015). Ως γνώση νοείται η κωδικοποιημένη πολιτισμική δραστηριότητα, που αποκρυσταλλώνεται σε δράσεις και πράξεις χωρίς να εξομοιώνεται με κάποια συγκεκριμένη σειρά ενεργειών. Δεν είναι οι ενέργειες καθαυτές αλλά η ιδεατή μορφή τους, που τις διατρέχει ενώ ξεφεύγει από την εκάστοτε συγκεκριμένη έκφραση. Είναι οι “πολιτισμικά και ιστορικά ενσώματες διαδικασίες αντανάκλασης και δράσης” (Radford, 2013, σελ. 11).

Η *κατανόηση* νοείται ως το στιγμιότυπο της γνώσης, η πραγμάτωσή της, που τη διακρίνουν τρεις όψεις: Η γνώση νοείται ως η καθαρή δυνατότητα (pure possibility), η διαδικασία πραγμάτωσης φαίνεται στη δραστηριότητα από την οποία αποκτά περιεχόμενο και το αποτέλεσμα της κατανόησης νοείται ως αντικείμενο (Radford, 2013, σελ. 16).

Η *μάθηση* είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, που ορίζεται ως η αντικειμενοποίηση (objectification). Για την περιγραφή της, ο Radford δίνει το εξής σχήμα,



Σχήμα 1: Η σχέση γενικού, ειδικού και μοναδικού (Radford, 2013, σελ. 19)

Εδώ η γνώση (το γενικό), είναι διαμεσολαβούμενη εφόσον συντελείται με την εμπλοκή σε συγκεκριμένου τύπου έργα (μοναδικό), δεδομένης διατύπωσης και εφαρμογής, σε συγκεκριμένο χώρο και χρόνο (ειδικό). Η γνώση δεν περικλείεται στα υλικά και τα εργαλεία των έργων αυτά καθαυτά. Συμπληρωματικά, χωρίς αυτά δεν μπορεί να αποκαλυφθεί το εννοιολογικό περιεχόμενο. Συνεπώς τα επιμέρους έργα ενώ είναι αναγκαία δεν είναι από μόνα τους ικανά για την μάθηση.

Η μάθηση περιγράφεται ως δραστηριότητα *συμμετοχική* (participation) και συγχρόνως *εσωτερίκευσης* (internalization), όπου συντελείται η κατανόηση του γενικού από το ειδικό. Η μάθηση ορίζεται, λοιπόν, ως η διαδικασία αντικειμενοποίησης, δηλαδή ως “εκείνες οι κοινωνικές διαδικασίες που κάποιος προοδευτικά και κριτικά συνειδητοποιεί μια κωδικοποιημένη μορφή συλλογισμού και πράξης, δηλαδή αυτό για το οποίο σταδιακά σημειώνουμε και ταυτόχρονα του αποδίδουμε νόημα.” Με άλλα λόγια οι διαδικασίες της αντικειμενοποίησης “είναι οι συνειδητές πράξεις παρατήρησης αυτού που αποκαλύπτεται από την αισθητική μας αλληλεπίδραση με τον υλικό πολιτισμό.” (Radford, 2013, σελ. 26).

Ως εκ τούτου, η μάθηση των πραγματικών αριθμών είναι μια ζωντανή διαδικασία, πτυχές της οποίας σκιαγραφούνται από το πως προσεγγίζει η βιβλιογραφία την κατανόηση των πραγματικών αριθμών υπό το εξής πρίσμα:

- Η γνώση (βλ. Σχ.1, γενικό/ general) για τους πραγματικούς αριθμούς κωδικοποιείται και σημειώνεται στους ορισμούς, τις ιδιότητες και τις αναπαραστάσεις τους. Κάθε στοιχείο συμπληρώνει τα άλλα και συνολικά αποτυπώνουν το τι πρέπει να μάθει κανείς όσο μαθαίνει για τους πραγματικούς αριθμούς.
- Η κατανόηση συντελείται ως το αποτέλεσμα της αντιμετώπισης των έργων διδασκαλίας ή έρευνας. Αυτά άλλοτε εξετάζουν τη διάταξη, άλλοτε τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, τον τρόπο μοντελοποίησης καταστάσεων ή αξιοποιούν την ιστορία των

Μαθηματικών. Σε άλλες περιπτώσεις διαμορφώνονται έργα με στόχο την ανάδειξη της ισοδυναμίας ορισμών και σημειωτικών αναπαραστάσεων. Σε κάθε περίπτωση κάποιος κατανοεί όσο κάνει, πρακτικά ή λογικά. Δηλαδή κάθε έργο νοείται συνολικά, συνυπολογίζοντας και τη σχετική δραστηριότητα αντιμετώπισής του που διαμορφώνεται από τον εκπαιδευτικό (ή τον ερευνητή σε παρεμβατικές μελέτες). Έτσι έχει σημασία ο *σχεδιασμός* (βλ. Σχ.1, ειδικό/ particular) της έρευνας ή της διδασκαλίας, δηλαδή ποιά θεωρητική προσέγγιση καθοδηγεί τη μεθοδολογία, τα ερωτήματα, την ανάλυση. Πρόσθετα, έχει σημασία η μεθοδολογική οργάνωση της συγκεκριμένης *εφαρμογής*, πιο συγκεκριμένα η επιλογή των συμμετεχόντων, η εκπαιδευτική βαθμίδα, η μορφή της συμμετοχής ή της παρέμβασης, κ.ά. Εδώ, ξεχωρίζουν οι περιπτώσεις που αναφέρονται σε μαθητές ή εκπαιδευτικούς.

- Μέσα από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων σε ερωτηματολόγια, αλλά και η στρατηγική τους κατά τη *επίλυση προβλημάτων* ξεχωρίζουν οι *τρόποι συλλογισμού*, δηλαδή το πως διακρίνει κανείς το γενικό στο συγκεκριμένο (βλ. Σχ.1, διακεκομμένη γραμμή). Σε αυτές τις *λειτουργίες των έργων*, φαίνεται το ποιούς παράγοντες αξιολογούν οι συμμετέχοντες κατά την εμπλοκή τους με το εκάστοτε έργο αλλά και τον τρόπο που χρησιμοποιούν τη γνώση που ήδη έχουν. Εδώ συνυπολογίζεται πάλι η διαφορά μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικών, με τους τελευταίους να θεωρούνται μαθηματικά πιο ώριμοι.
- Όψεις της διδασκαλίας συμπυκνώνουν τις μορφές σκέψης, τις αντιλήψεις για το τι πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές και πως. Σαφώς κάθε διδακτική πρόταση εντάσσεται ή σχεδιάζεται για μια συνολικότερη δραστηριότητα διδασκαλίας, που εμπλέκει μαθητές και εκπαιδευτικούς. Το σύννηθες μέσο στο οποίο παρουσιάζονται συγκεκριμένα διδακτικά έργα (βλ. Σχ.1, μοναδικό/ singular) είναι τα *σχολικά εγχειρίδια* και γενικότερα τα ΑΠΣ.

Μια συνοπτική αποτύπωση των κατηγοριών, όπως περιγράφηκαν, γίνεται στο εξής δίκτυο:

- Μαθηματικό περιεχόμενο (βλ. Σχ.1, γενικό/ general)
 - Ορισμοί
 - Παρανοήσεις
 - Αναπαραστάσεις
- Σχεδιασμός έρευνας (βλ. Σχ.1, ειδικό/ particular)
 - Θεωρητικό εργαλείο
 - Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους μαθητές
 - Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους εκπαιδευτικούς
 - Μεθοδολογία εφαρμογής

- Εφαρμογή σε μελέτες με μαθητές
- Εφαρμογή σε μελέτες με εκπαιδευτικούς
- Λειτουργίες των έργων με πραγματικούς αριθμούς (βλ. Σχ.1, διακεκομμένη γραμμή)
 - Επίλυση προβλήματος
 - Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους μαθητές
 - Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους εκπαιδευτικούς
 - Τρόποι συλλογισμού
 - Πτυχές της σκέψης των μαθητών
 - Πτυχές της σκέψης των εκπαιδευτικών
- Διδακτικές προτάσεις για τους άρρητους (βλ. Σχ.1, μοναδικό/ singular)
 - Εστιάζοντας στους μαθητές
 - Εστιάζοντας στους εκπαιδευτικούς
 - Εστιάζοντας στα σχολικά εγχειρίδια

Υπό αυτό το πρίσμα εξετάζεται το σύνολο των δεδομένων της εργασίας, που διαμορφώνεται από 38 άρθρα ποικίλου περιεχομένου. Μετά την επιλογή των άρθρων, έγινε ανακατάταξη της βιβλιογραφίας ώστε να συγκεντρωθεί το έργο των κύριων ερευνητικών ομάδων σε ένα βάθος χρόνου με σκοπό την καλύτερη παρακολούθηση των ερευνητικών τάσεων. Για προεκτάσεις της ερευνητικής δραστηριότητας, δόθηκε έμφαση στις πιο πρόσφατες μελέτες, από το 2016 και έπειτα, καθώς δεν καλύπτονται από τις προηγούμενες επισκοπήσεις του PME.

Στις νεότερες αυτές μελέτες, εκτός της ίδιας της έρευνας, πρόσθετα μελετήθηκαν η βιβλιογραφική επισκόπηση που παρουσιάζουν και η σύνταξη του θεωρητικού τους πλαισίου. Έτσι ξεχώρισαν τα κύρια άρθρα που μπορούν να κατευθύνουν τη σύγχρονη έρευνα.

Σε κάθε άρθρο έγινε καταγραφή των κύριων σημείων του σύμφωνα με τα εξής:

1. Το ευρύτερο ερευνητικό θέμα (A1)
2. Τα συγκεκριμένα ερωτήματα της έρευνας και η θέση των ερευνητών (A2)
3. Το θεωρητικό πλαίσιο (A3)
4. Το ειδικό μαθηματικό περιεχόμενο (A4)
5. Οι συμμετέχοντες και η οργάνωση της έρευνας (A5)
6. Τα ερευνητικά εργαλεία και η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων (A6)
7. Τα αποτελέσματα έτσι όπως τα παρουσιάζουν οι συγγραφείς (A7)

Η καταγραφή επέτρεψε τη συγκρότηση, την προσαρμογή και την ομαδοποίηση των αξόνων ώστε να απαντηθούν τα ερωτήματα της παρούσας επισκόπησης.

Συγκεκριμένα, η προσέγγιση της κάθε μελέτης φαίνεται αφενός στο θέμα και το ειδικό μαθηματικό περιεχόμενο που αναλύει (π.χ. δεκαδικούς αριθμούς, τετραγωνικές ρίζες κ.α.) και αφετέρου στη θεωρητική προσέγγιση, που διακρίνεται κυρίως από το θεωρητικό πλαίσιο των ερευνητών. Στο θεωρητικό πλαίσιο στηρίζεται επίσης ο σχεδιασμός και η μεθοδολογία της έρευνας.

Τα αποτελέσματα είναι το πιο πλούσιο μέρος κάθε μελέτης, καθώς τα ευρήματα και το σύνολο των διαπιστώσεων προκύπτει από αυτά. Πρόσθετα, από τον σχολιασμό και τη συζήτηση των αποτελεσμάτων διακρίνεται τόσο η παιδαγωγική θεώρηση των ερευνητών, όσο και η κατεύθυνση για περαιτέρω εμβάθυνση συγκεκριμένων ζητημάτων που προκύπτουν, στοιχειοθετώντας ουσιαστικά νέες διδακτικές και ερευνητικές κατευθύνσεις αντίστοιχα.

Προσεγγίζοντας την κατανόηση των πραγματικών αριθμών κατά τη μετάβαση από τους ρητούς και αναδιατυπώνοντας τα ερωτήματα της εργασίας στη σύνδεσή τους με την ανάλυση των άρθρων, προκύπτουν τα εξής:

Για το (Ε1), το πώς προσεγγίζει η σύγχρονη έρευνα τη μετάβαση στους πραγματικούς αριθμούς, γίνεται λόγος για το τι πρέπει να μάθει κανείς όταν κατανοεί τους πραγματικούς αριθμούς από την σκοπιά των ερευνητών. Αυτό προκύπτει από τους άξονες:

- Ερευνητικό θέμα (Α1)
- Θεωρητικό πλαίσιο (Α3)
- Ειδικό μαθηματικό περιεχόμενο (Α4)

Για το (Ε2), το πώς διαμορφώνονται τα πρόσφατα έργα για τη διδασκαλία και η μελέτη των πραγματικών αριθμών, επί της ουσίας αφορά τον σχεδιασμό και την οργάνωση της εφαρμογής τους. Αυτά περιγράφονται από τους άξονες:

- Θεωρητικό πλαίσιο (Α3)
- Οι συμμετέχοντες και η οργάνωση της έρευνας (Α5)
- Τα ερευνητικά εργαλεία και η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων (Α6)

Σχετικά με το (Ε3), για το ποιές διδακτικές παρεμβάσεις είναι κατάλληλες για την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών στο επίπεδο του Λυκείου, πρέπει να λάβουμε υπόψη πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν ιδιαίτερα απαιτητικές έννοιες, ειδικά όσοι ακολουθήσουν συγκεκριμένες ομάδες προσανατολισμού αργότερα (Θετικές και Τεχνολογικές Επιστήμες, Επιστήμες Οικονομίας και Πληροφορικής, μέχρι πρόσφατα και Υγείας). Άρα στην εισαγωγική τάξη της Α Λυκείου είναι ανάγκη να καλλιεργηθούν μορφές σκέψης που να ενισχύουν τον αφαιρετικό συλλογισμό. Τέτοια στοιχεία αναμένεται να προκύψουν από τη συζήτηση των αποτελεσμάτων (Α7) και ως ένα βαθμό από τον σχεδιασμό της έρευνας (Α1, Α3, Α5, Α6).

Συνοπτικά, το παραπάνω δίκτυο συμπληρώνεται ως εξής:

- Μαθηματικό περιεχόμενο (βλ. Σχ.1, γενικό/ general) (A4)
 - Ορισμοί
 - Παρανοήσεις
 - Αναπαραστάσεις
- Σχεδιασμός έρευνας (βλ. Σχ.1, ειδικό/ particular) (A1)
 - Θεωρητικό εργαλείο (A3)
 - Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους μαθητές
 - Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους εκπαιδευτικούς
 - Μεθοδολογία εφαρμογής (A5, A6)
 - Εφαρμογή σε μελέτες με μαθητές
 - Εφαρμογή σε μελέτες με εκπαιδευτικούς
- Λειτουργίες των έργων με πραγματικούς αριθμούς (βλ. Σχ.1, διακεκομμένη γραμμή) (A6)
 - Επίλυση προβλήματος
 - Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους μαθητές
 - Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους εκπαιδευτικούς
 - Τρόποι συλλογισμού
 - Πτυχές της σκέψης των μαθητών
 - Πτυχές της σκέψης των εκπαιδευτικών
- Διδακτικές προτάσεις για τους άρρητους (βλ. Σχ.1, μοναδικό/ singular) (A2, A6, A7)
 - Εστιάζοντας στους μαθητές
 - Εστιάζοντας στους εκπαιδευτικούς
 - Εστιάζοντας στα σχολικά εγχειρίδια

4. Αποτελέσματα

Στις μελέτες της ΔτΜ οι έννοιες δεν αναφέρονται απαραίτητα με τον τυπικό μαθηματικό ορισμό τους. Κάθε ερευνητής μπορεί να εστιάζει σε κάποια διαφορετική, ισοδύναμη, διατύπωση των πραγματικών αριθμών, κάποια που να σχετίζεται με ότι διδάσκεται στο σχολείο που οπωσδήποτε δεν είναι ο τυπικός μαθηματικός ορισμός.

4.1 Μαθηματικό περιεχόμενο

Ο τυπικός ορισμός των πραγματικών αριθμών είναι αυτός που διατύπωσε ο Dedekind, όπως περιγράφεται στην εισαγωγή της παρούσας εργασίας. Σε αυτόν επιβεβαιώνεται η έννοια του άρρητου αριθμού ως θεμελιώδης για το πέρασμα στους πραγματικούς.

Αδυναμίες στην κατανόηση ή την εξήγηση του ορισμού και των ιδιοτήτων κατώτερων αριθμητικών συστημάτων είναι φύτρα παρανοήσεων για τους πραγματικούς αριθμούς. Το γεγονός αποτυπώνεται στη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των αριθμών σε προβλήματα ή άλλα έργα, διαμορφώνοντας τον τρόπο αντιμετώπισης και εμπλοκής με αυτά.

Ανάλογα σχεδιάζονται νέα έργα, διδακτικά ή ερευνητικά, που να αναδεικνύουν και ταυτόχρονα να αμβλύνουν τις παρανοήσεις αυτές.

4.1.1 Ορισμοί

Οι ορισμοί είναι θεμέλιο σε κάθε επιστήμη, ορόσημα της σύμπτυξης της γνώσης και εν μέρει της δραστηριότητας παραγωγής της. Η ακαδημαϊκή άποψη βλέπει τους πραγματικούς αριθμούς ως τομή Dedekind, ως κλάση ισοδυναμίας ακολουθιών Cauchy ή ως κλάση ισοδυναμίας εμφωλευμένων διαστημάτων ρητών αριθμών. Ο μαθηματικός-εκπαιδευτικός διαχειρίζεται την έννοια του πραγματικού αριθμού όπως προκύπτει από την επέκταση της έννοιας του αριθμού, που ήδη περιέχει τους ρητούς και τους φυσικούς.

Τα πιο αφηρημένα συστήματα αριθμών κατασκευάστηκαν ιεραρχικά πάνω στους φυσικούς αριθμούς. Σημειώνεται πως οι άρρητοι αριθμοί είναι το μόνο αριθμητικό σύστημα χωρίς αναφορά, χωρίς να στηρίζεται δηλαδή σε κάποιο διαισθητικό μοντέλο (Patel και Varma, 2018). Οι Zachariades, Christou και Pitta-Pantazi (2013) πραγματεύονται την επέκταση από το ένα σύστημα το άλλο, ξεκινώντας από τους φυσικούς, περνώντας στα κλάσματα με θετικούς όρους, έπειτα στους θετικούς δεκαδικούς, περιοδικούς ή μη, στη συνέχεια στους αρνητικούς. Τέλος εισάγουν τους ρητούς ως το σύνολο όλων των προηγούμενων και τους άρρητους ως το σύνολο των πραγματικών που δεν είναι ρητοί.

Ο ορισμός του άρρητου αριθμού στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση γίνεται με αναφορά στον ρητό αριθμό ή τη δεκαδική αναπαράσταση του αριθμού (Gonzalez-Martin, κ.ά., 2011). Από από τη μια πλευρά άρρητος ονομάζεται ο αριθμός που δεν είναι ρητός, δηλαδή ο αριθμός που δεν μπορεί να παρασταθεί ως κλάσμα ακέραιων όρων (Obersteiner και Hofreiter, 2017), όπου ο παρονομαστής είναι μη μηδενικός. Από την άλλη πλευρά άρρητος είναι όποιος δεκαδικός αριθμός έχει άπειρο πλήθος μη περιοδικών δεκαδικών ψηφίων.

Για την κατασκευή του σώματος των πραγματικών αριθμών η μετάβαση από τους ρητούς είναι ιδιαίτερα προβληματική, αντίθετα με την μετάβαση στους ρητούς που τίθεται ως συμπερίληψη συνόλων. Μια συμπυκνωμένη παρουσίαση, των πιο γνωστών μεθόδων αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών, στα ελληνικά, βρίσκεται στη διπλωματική εργασία του Ρωσσίδη (2019, σελ. 20-41). Η Kidron (2018) παρατηρεί πως μπορούμε εύκολα να διερευνήσουμε τους φυσικούς αριθμούς παρότι η ύπαρξή τους δεν εξαρτάται από εμάς. Με μικρές διαφοροποιήσεις ισχύει το ίδιο και για το σύνολο των ακεραίων. Αντίθετα, στους άρρητους δεν υπάρχει ευθεία αναλογία με φυσικά φαινόμενα που, χωρίς τη δική μας λογική εμπλοκή, να υποστηρίζει αυτή την συμπερίληψη και έτσι δημιουργείται αντίφαση.

Ο Voskoglou (2013) υποστηρίζει πως τελικά οι πραγματικοί αριθμοί δύνανται να οριστούν ως το σύνολο όλων των σύμμετρων και ασύμμετρων μεγεθών μαζί με τους αντίθετους τους.

4.1.2 Παρανοήσεις

Συνήθως οι άρρητοι εμφανίζονται στο σχολείο με τη μορφή της ρίζας. Πολλοί υποψήφιοι δάσκαλοι συσχετίζουν τους άρρητους αποκλειστικά με τα ριζικά και το π , δηλαδή δεν αναγνωρίζουν τους μη περιοδικούς απειροψήφιους αριθμούς ως άρρητους (Sirotic και Zazkis, 2007α).

Ο Ozkan (2019) σημειώνει πως οι μαθητές αποκτούν μόνο επιφανειακή πληροφορία για τα ριζικά γενικότερα και κατά πλειοψηφία απλώς απομνημονεύουν τον ορισμό τους. Παρατηρεί πως όχι μόνο υπάρχουν εννοιολογικές παρανοήσεις, αλλά και άλλες που σχετίζονται αμιγώς με τις πράξεις. Οι μαθητές δεν έχουν τον έλεγχο των ιδιοτήτων των ριζικών, έτσι αγνοούν τους περιορισμούς σχετικά με την τιμή της υπόρριζης ποσότητας, αφαιρούν οποιαδήποτε ποσότητα από τη ρίζα ως έχει, χωρίς να αξιολογήσουν το πρόσημό της.

Παρατηρείται επίσης ο *κανόνας του ακεραίου αριθμού* (whole number rule) που εκφράζει την παρανόηση πως όσο περισσότερα ψηφία έχει ο αριθμός, τόσο μεγαλύτερος είναι. Οι μαθητές επεκτείνουν τον κανόνα στους δεκαδικούς αριθμούς, αγνοώντας πως το δεκαδικό μέρος είναι κλασματικό μέρος του ακεραίου. Άλλες φορές αγνοούν εντελώς την υποδιαστολή ή δεν έχουν

αίσθηση της θέσης του ψηφίου με αποτέλεσμα π.χ. ο 6,03 και ο 6,3 να θεωρούνται ίδιοι. Οι υπεργενικεύσεις από τους ακέραιους είναι η ρίζα των παρανοήσεων (Takker και Subramaniam, 2019).

Η θεωρία των Fischbein κ.ά. (1994), στη βάση ιστορικών και ψυχολογικών παραμέτρων, εντόπισε τα δύο μεγάλα διασθητικά εμπόδια για τους άρρητους στην έννοια της ασυμμετρίας (incommensurability) και της μη απαριθμισιμότητας (non denumerability). Καταληκτικά, τα αναμενόμενα αυτά εμπόδια ξεπερνώνονται εφόσον έχει αναπτυχθεί ως ένα βαθμό η μαθηματική ωριμότητα.

Υποψήφιοι δάσκαλοι δεν γνωρίζουν πως όποιοι αριθμοί γράφονται ως πηλίκο ακεραίων είναι κατ' ανάγκη ρητοί (Sirotic και Zazkis, 2004). Μεγαλύτερες δυσκολίες παρατηρούνται για την πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών και τις τοπολογικές ιδιότητες. Σε άλλη έρευνα οι Zazkis και Sirotic (2005) βρίσκουν πως, όπως οι πρώτοι αριθμοί έτσι και οι άρρητοι ορίζονται μέσω της άρνησης κάποιων ιδιοτήτων, γεγονός που προκαλεί δυσκολίες.

Επιπλέον δυσκολίες υπάρχουν, όπως διατυπώθηκε παραπάνω, στην ισοδυναμία της απειροψηφίας μη περιοδικής δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων και της αδυναμίας να γραφεί ως κλάσμα. Παρόμοια *απουσία συνδέσμου* παρατηρείται στους ρητούς, μεταξύ δεκαδικής και κλασματικής αναπαράστασης, που το γινόμενο και το πηλίκο δε νοούνται ως αριθμοί, παρα μόνο ως σειρά εκτέλεσης πράξεων (Zazkis, 2005· Zazkis και Sirotic, 2010). Η κοινή δυσκολία αφορά την αντίληψη ενός αριθμού ως αντικείμενο και ως διεργασία.

Η ασυμμετρία των άρρητων, κατά τον Shinno (2008), επιτρέπει τη σύνδεση των άρρητων ως αποτέλεσμα μέτρησης και ως λύση αλγεβρικών εξισώσεων. Το ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι κλειστό ως προς τις πράξεις, γενικότερα τονίζεται με τη χρήση της αριθμογραμμής και της δομής της. Οι González-Martín, κ.ά. (2013) υπογραμμίζουν πως εκτός αυτού μπορεί να γίνει και μέσω προβλημάτων μέτρησης.

4.1.3 Αναπαραστάσεις

Εδώ εξετάζονται πιο συγκεκριμένα οι δυσκολίες που σχετίζονται με τις αναπαραστάσεις, ως τις διαισθητικά πιο άμεσες μορφές της έννοιας που επηρεάζουν έντονα τη διαδικασία της μάθησης. Το πιο συνηθισμένο λάθος είναι να αναγνωρίζονται τα κλάσματα ως μοναδική μορφή των ρητών και αντίστοιχα οι ρίζες των άρρητων (Voskoglou και Kosynas, 2012). Μελέτες (Fischbein, κ.ά., 1994· Robinet, 1986) εντοπίζουν πως ως άρρητοι νοούνται όλοι οι απειροψηφιοί δεκαδικοί ανεξάρτητα με το αν είναι περιοδικοί ή μη (στο González-Martín, κ.ά., 2013).

Η δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών και οι άστοχες γενικεύσεις οδηγούν σε

σφάλματα και δυσκολίες. Οι δεκαδικοί δεν αναγνωρίζονται ως μια πεπερασμένη ποσότητα, πόσο μάλλον αν είναι απειροσμήφιοι και ακόμη περισσότερο μη περιοδικοί. Για πολλούς μαθητές, μοιάζει αδιανόητο πως υπάρχουν αριθμοί που δεν προκύπτουν ως πηλίκο κάποιας διαίρεσης. Συνεπώς δεν αντιλαμβάνονται ούτε την ανάγκη ύπαρξης τους, ούτε τη χρησιμότητά τους. Οι παρανοήσεις στη βάση αυτών των στοιχείων πρέπει να συνυπολογίζονται στη διδασκαλία (Moreira και David, 2008).

Η ηλικία και το εύρος της μαθηματικής γνώσης παίζει σημαντικό ρόλο και διευκολύνει την κατανόηση (Voskoglou και Kosynas, 2011). Παρ' ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν την απαιτούμενη νοητική ωρίμανση να φανταστούν μια άπειρη διαδικασία προσθήκης νέου δεκαδικού ψηφίου σε ένα αριθμό (Kidron, 2016), εντούτοις δεν μπόρεσαν να συνδέσουν τις διαφορετικές πτυχές των άρρητων, όπως τον ορισμό με την αναπαράστασή τους, ή να συνδέσουν τους αριθμούς με άλλες έννοιες όπως το όριο.

Οι Zoitsakos, Zachariades και Sakonidis (2013) μελέτησαν πως ενεργοί εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται (understanding) τη δεκαδική αναπαράσταση του αριθμού 0.3999... και πως αυτό επηρεάζει τη διδακτική τους πρακτική. Παρουσίασαν το ακόλουθο διδακτικό σενάριο:

Ποιό είναι το νόημα της αναπαράστασης 0.3999... (άπειρα ψηφία 9);

Τέσσερις μαθητές έδωσαν τις εξής απαντήσεις:

(i) Μαθητής A: Η αναπαράσταση 0.3999... είναι μια διαδικασία που τείνει στο 0,4.

(ii) Μαθητής B: 0.3999... είναι ένας αριθμός που τείνει στο 0,4.

(iii) Μαθητής C: 0.3999... είναι ο αριθμός ακριβώς πριν τον 0,4.

(iv) Μαθητής D: Η αναπαράσταση 0.3999... είναι το άθροισμα $0.3+0.09+0.009+\dots$ αλλά όσο και να αυξάνεται, δεν μπορεί να γίνει ίσο με κάποιον συγκεκριμένο αριθμό.

(Zoitsakos, κ.ά., 2013, σελ. 3298)

Το συγκεκριμένο σενάριο αποτυπώνει συνήθεις παρανοήσεις μαθητών για τους απειροσμήφιους δεκαδικούς, όπου δεν τους αντιλαμβάνονται ως αντικείμενο (αριθμό) αλλά ως διαδικασία ατέλειωτων πράξεων, με έμμεση αναφορά στην έννοια του ορίου και της σύγκλισης. Οι ερευνητές ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να σχολιάσουν τις απαντήσεις των μαθητών και να περιγράψουν το πως θα παρενέβαιναν σε κάθε περίπτωση για να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους. Μια τέτοια παρέμβαση προϋποθέτει την κατανόηση και από τους ίδιους.

Η έρευνα των Sirotic και Zazkis (2004) ήταν πρωτοπόρα στη μελέτη των ορισμών των ρητών και των άρρητων μέσω της αναπαράστασής τους. Θεώρησαν πως οι δυσκολίες δεν αφορούν τόσο τον ορισμό των άρρητων, αλλά κυρίως την αποτελεσματική τους χρήση. Από την ερμηνεία

των αποτελεσμάτων διέκριναν μια υπέρμετρη τάση των εκπαιδευτικών να στηρίζονται στη δεκαδική αναπαράσταση όταν απαντούν. Σε επόμενες έρευνές τους (Zazkis και Sirotic, 2007α, 2007β, 2010) επιβεβαίωσαν γνωστές διαπιστώσεις για τη σχέση ορισμών και αναπαράστασης αριθμών (Peled και HersHKovitz, 1999). Μαθηματικοί ή άλλοι επιστήμονες φυσικών επιστημών δυσκολεύονται στην εκτίμηση του αριθμού και τη ρητή του προσέγγισή και αυτό προφανώς επηρεάζει τις απαντήσεις τους στα ερευνητικά ερωτηματολόγια. Πράγματι οι ορισμοί των άρρητων και των ρητών δεν υπάρχουν στο ενεργό ρεπερτόριό των υποψήφιων εκπαιδευτικών. Το γεγονός δεν επηρεάζει μόνο τις απαντήσεις που έδιναν στα ερωτηματολόγια της έρευνας, αλλά τη γενικότερη αντίληψη σχετικά με τους αριθμούς και τη γενικότερη ικανότητά τους να εκτιμήσουν την ισχύ ενός μαθηματικού ισχυρισμού.

Επιπλέον ο Shinno (2018) μελέτησε τη σημασία των σημαινόντων (signifiers) στην αναπαράσταση ενός άρρητου αριθμού. Η χρήση ενός νέου σημαινόμενου, π.χ. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, μπορεί να χαρακτηρίζεται από κάποια συγκεκριμένη ενέργεια, όπως ο υπολογισμός του. Οι μαθητές αντιλήφθηκαν πως κάτι πρέπει να κάνουν χωρίς να αναγνωρίζουν το πως, ούτε μπόρεσαν σε πολλές περιπτώσεις να ερμηνεύσουν το τι έβλεπαν, ως αποτέλεσμα. Όμως με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού το ίδιο σημαινόμενο μπορεί να συνδεθεί με ένα σύνολο σημαινόντων, συγκροτώντας νέα αντικείμενα, τους άρρητους αριθμούς (Shinno, 2018). Μπορεί η εναλλαγή από την αντίληψη ως διαδικασία (π.χ. πρόσθεση) στην αντίληψη ως αντικείμενο (π.χ. άθροισμα) να είναι ευαίσθητη και δύσκολη υπόθεση, εντούτοις κρίνεται ουσιαστική για την καλύτερη αντιμετώπιση των πραγματικών αριθμών γενικότερα (Hayfa και Saikaly, 2016). Άλλωστε αποδεικνύεται πως “για τους μαθητές είναι δύσκολο να κατανοήσουν έναν αριθμό όταν δεν γνωρίζουν έναν σαφή και ξεκάθαρο τρόπο γραφής του” (Κόσυβας, 2018, σελ. 16).

Σχετικά με την ανησυχία που προκαλεί η ασυνείδητη χρήση συμβόλων και τη σχέση της με την ανάπτυξη λεξιλογίου (μαθηματικών όρων), ενδεχομένως να χρειάζεται μια πιο μακροπρόθεσμη ανάλυση (Shinno, 2018). Τα αποτελέσματα της έρευνας δεν κρίνονται ικανοποιητικά από τον ίδιο τον ερευνητή, εφόσον δεν παρέχουν συγκεκριμένο τρόπο ανίχνευσης της *επικοινωνιο-γνωστικής σύγκρουσης* (commognitive conflict) που συντελείται κατά την κατανόηση, ούτε αναλύεται η ανησυχία που προκαλεί η ασυνείδητη χρήση σημαινόντων. Ενώ μπορούν να αναλυθούν διαφορετικές διδακτικές καταστάσεις και το κατά πόσο υπάρχει συμφωνία με τον κυρίαρχο λόγο (discourse) ή την πορεία της αλλαγής των λόγων (discursive change), δεν έχουν βρεθεί κατάλληλα αναλυτικά εργαλεία που να αποκαλύπτουν τη σχέση μεταξύ συμφωνίας και επικείμενης κοινωνικογνωστικής σύγκρουσης.

Οι Obersteiner και Hofreiter (2017) εξέτασαν την ικανότητα πρόσβασης (assessing) σε άρρητα

μεγέθη (number magnitude) μέσω της ριζικής μορφής τους. Μέχρι τότε οι περισσότερες μελέτες εστίαζαν σε θέματα κατανόησης με την ευρύτερη έννοια. Οι άρρητοι όμως διαφέρουν από τους ρητούς από πολλές απόψεις. Ενώ η πρόσβαση στα ρητά μεγέθη γίνεται μέσα από τα στοιχεία του συμβολισμού τους με έναν σχετικά ευθύ τρόπο, αυτό δεν συμβαίνει στα άρρητα μεγέθη. Ομοίως στα ακέραια μεγέθη η πρόσβαση γίνεται άμεσα από τα ψηφία τους, στη βάση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Με κάποια προσαρμογή αυτό συμβαίνει και για το αρνητικό πρόσημο. Η πρόσβαση στα κλάσματα γίνεται μέσω της πληροφορίας των ακεραίων όρων του και κάποιον συλλογισμό που να τους συνδέει, όπως στην περίπτωση μέρος/ όλο ή του πηλίκου. Αντίθετα ο αλγόριθμός που προσδιορίζει αν ένα μέγεθος είναι άρρητο είναι μια πολύπλοκη διαδικασία άπειρων βημάτων (Obersteiner και Hofreiter, 2017).

Τίθεται το ερώτημα αν η αναπαράσταση μεγεθών είναι πράγματι βαρύνουσας σημασίας στα ανώτερα αριθμητικά συστήματα, έτσι οι Patel και Varma (2018) εξέτασαν πως μπορεί να γίνει πιο επιτυχημένα η επεξεργασία των άρρητων αριθμών. Ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να τοποθετήσουν ριζικές εκφράσεις, ως συνεχείς ποσότητες, στη νοητή αριθμογραμμή. Βρήκαν επιτυχημένες τις στρατηγικές που αναφέρθηκαν σε πιο συγκεκριμένες έννοιες (concrete concepts) όπως οι φυσικοί και τα τέλεια τετράγωνα. Φαίνεται να προκύπτει μια έμφυτη τάση για φυσική αναφορά, ανεξάρτητα από το αριθμητικό σύστημα ή την μαθηματική εμπειρία του συμμετέχοντα.

4.2 Σχεδιασμός έρευνας

Το αντικείμενο της έρευνας μπορεί να αποτώνει ένα εκπαιδευτικό ή διδακτικό φαινόμενο, να είναι μια διδακτική παρέμβαση. Όταν οι ερευνητές συλλέγουν δεδομένα, μελετούν σχέσεις και προσπαθούν να εξηγήσουν τα φαινόμενα. Οι έρευνες διαφέρουν ως προς το σκοπό, τη μορφή των δεδομένων, τα εργαλεία ανάλυσης, την έμφαση στο γενικό ή στη λεπτομέρεια αλλά και σε φιλοσοφικές παραδοχές και θέσεις που τα υποστηρίζουν.

4.2.1 Θεωρητικό εργαλείο

Ο κάθε ερευνητής ορίζει και υποστηρίζει το θέμα μελέτης του με βάση κάποια θεωρητικά εργαλεία που λειτουργούν ως φίλτρο και αναλόγως καθορίζουν την διεξαγωγή της, την επιλογή των εργαλείων έρευνας και ανάλυσης. Ο σχεδιασμός συνίσταται στην επιλογή τόσο του θεωρητικού φίλτρου, όσο και της μεθοδολογικής σύνδεσης θεωρίας-εφαρμογής στο συγκεκριμένο ερευνητικό πλαίσιο.

4.2.1.1 Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους μαθητές

Ο Güner στηρίζει την επισκόπησή του διερευνώντας τους άρρητους ως προς την *αίσθηση του αριθμού* (number sense) του Dehaene (1997) (στο Güner, 2016). Ο Ozkan (2019), βλέπει τις δυσκολίες που σχετίζονται με την έννοια των τετραγωνικών ριζών υπό το πρίσμα που θέτει η Skemp (1978) για τις *παρανοήσεις* (misconceptions) των αφηρημένων εννοιών. Επιπλέον αναγνωρίζει ως σημαντική τη μάθηση που προκύπτει από τη σύνδεση παλιάς και νέας γνώσης, νέων *νοητικών σχημάτων* (schemas) (στο Ozkan, 2019).

Οι Hayfa και Saikaly (2016) παρακολούθησαν τη γνωστική, διαισθητική και αντιληπτική εξέλιξη των μαθητών για τους άρρητους, ως υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Η μελέτη τους στηρίχθηκε στο πως οι Sirotic και Zazkis (2007α) υιοθέτησαν τις γνωστικές διαστάσεις που πρότειναν οι Tirosh, Fischbein, Graeber and Wilson (1998), διακρίνοντας τη *διαδικαστική* (procedural) από την *εννοιο-διαδικαστική* (proceptual) γνώση.

Οι Shinno και Iwasaki (2008) αναλύουν τον περιγραφικό ρόλο της θεωρίας της *εννοιολογικής αλλαγής* (Theory of Conceptual Change) που προτείνει ο Confrey και πως αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν μαθητές με την έννοια του άρρητου αριθμού. Βάση τους είναι μια προηγούμενη έρευνα του πρώτου (Shinno, 2008) για τους επιστημολογικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη διδακτική κατάσταση (teaching situation). Ο Shinno (2018), σε επόμενη έρευνα, μελετά τα χαρακτηριστικά του διαλόγου και τις σημειωτικές διαδικασίες κατά τη διάρκεια του μαθήματος για τις τετραγωνικές ρίζες ως προς τη γνωστική τους διάσταση. Ο σχεδιασμός του στηρίζεται στο *επικοινωνιο-γνωστικό πλαίσιο* (commognitive framework) που προτείνει η Sfard (2008) και το *μοντέλο σημειωτικής αλυσίδας* (semiotic chaining) του Presmeg (2006) (στο Shinno, 2018). Για τις διαδικασίες απόδειξης στο περιβάλλον μάθησης είχε χρησιμοποιήσει το *μοντέλο αναδιοργάνωσης* (reconstruction of classroom proving processes) του Knipping (2008), διέκρινε τα *τοπικά* (local) από τα *ολικά* (global) επιχειρήματα με το *σχήμα Toulmin* (στο Shinno, 2017).

Για τις παρεμβάσεις στο περιβάλλον μάθησης, η έρευνα των Voskoglou και Kosynas (2011, 2012 και Voskoglou, 2013) στηρίζεται στο πλαίσιο της θεωρία APOS και ACE των Weller, Arnon και Dubinsky (2011). Η παιδαγωγική προσέγγιση της ανάλυσης APOS, συντελείται μέσα από ένα *διδασκτικό κύκλο* (teaching cycle) με δραστηριότητες στον Η/Υ, συζήτηση εντός τάξης και ασκήσεις με στόχο την ανάπτυξη των νοητικών δομών, σύμφωνα με τη θεωρία του Piaget.

Ιδιαίτερα το πείραμα τάξης στη συγκριτική μελέτη (comparative study) μαθητών Λυκείου και σπουδαστών μηχανολογίας του ΤΕΙ για την κατανόηση των πραγματικών αριθμών (Voskoglou και Kosynas, 2012), σχεδιάστηκε υπό την υπόθεση πως οι δυσκολίες των μαθητών να χειριστούν επιτυχώς πολλαπλές αναπαραστάσεις πραγματικών αριθμών είναι το βασικό

εμπόδιο για την κατανόηση.

Η Σάλτου (2015) μελετά τη συμβολή της γεωμετρικής αναπαράστασης των άρρητων αριθμών στη διδασκαλία και την αντίληψη μαθητών Γυμνασίου. Προτείνει ένα διδακτικό μοντέλο καθοδηγούμενης ανακάλυψης στη βάση της *οπτικοποίησης* των Zimmermann και Cunningham (1991).

Μια σειρά ερευνητών μελετούν την κοινή δραστηριότητα εντός σχολικής τάξης (π.χ. Κόσυβας, 2011), που προσφέρεται για να ξεδιπλωθεί η ιστορικότητα των αντιπαραθέσεων, όπως όταν επιχειρείται η χρήση ιστορικών κειμένων (Καλδρυμίδου και Τζεκάκη, 1995). Οι τελευταίες ερευνήτριες χρησιμοποίησαν τον ορισμό των άρρητων από το κείμενο *Μένων*, μελετώντας διαδικασίες απόδειξης, γενίκευσης και γεωμετρικής κατασκευής (στο Κόσυβας, 2018).

Τα παραπάνω, ο Κόσυβας τα συνδέει με κοινωνικο-κονστрукτιβιστικές απόψεις όπου “η μαθηματική γνώση είναι μια ανθρώπινη κοινωνική δραστηριότητα, η οποία δεν αποτελείται από αιώνιες, αντικειμενικές και απόλυτες αλήθειες, αλλά είναι προσωρινή, αβέβαιη και αναθεωρήσιμη” (Κόσυβας, 2018, σελ. 23)

Μια πιο θεσμική προσέγγιση (institutional approach) για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών επιχειρεί η ανάλυση σχολικών εγχειριδίων από τους González-Martín, κ.ά. (2013). Σημειώνουν πως η ανθρωπιστική θεωρία για τη διδασκαλία (Anthropological Theory of Didactics) του Chevallard (1999) αποδεικνύεται χρήσιμη στην ανάλυση του περιεχομένου και της οργάνωσης των εγχειριδίων. Σε συνδυασμό με την πιο εστιασμένη δουλειά του Bronner (1997) για τους πραγματικούς αριθμούς στα σχολικά εγχειρίδια, μέσω ορισμών, έργων, παραδειγμάτων, προτεινόμενων τεχνικών και κυρίως των στοιχείων προς απομνημόνευση, φαίνεται ποια είναι η γνώση που επί της ουσίας διδάσκεται (González-Martín, κ.ά., 2013).

Στο ίδιο θεωρητικό πλαίσιο στηρίζεται μια ανάλογη μελέτη των Khechine και González-Martín (2017) γύρω από την οργάνωση των σχολικών εγχειριδίων για την έννοια του ορίου και την προσέγγιση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα εξέτασαν το κατά πόσο ο τρόπος παρουσίασης επιτρέπει τη σύνδεση μεταξύ των δύο εννοιών.

Η ανάλυση εγχειριδίων από τους González-Martín, κ.ά. (2013) μαζί με τη θεωρία του Fishbein και το *θεσμικό διδακτικό κενό* (institutional didactic void) του Bronner (1997) στήριξαν την έρευνα της Kidron (2016, 2018) για την γνωστική ανάλυση των αντιλήψεων μαθητών.

4.2.1.2 Θεωρητικά πλαίσια στη μελέτη για τους εκπαιδευτικούς

Η πιο συστηματική, μακροπρόθεσμη έρευνα για μελέτη των αναπαραστάσεων παρουσιάζουν οι Zazkis και Sirotic μέσα από μια σειρά άρθρων (Zazkis και Sirotic, 2004, 2007α, 2007β·Zazkis, 2005·Zazkis και Sirotic, 2010). Η συνεισφορά τους στη διερεύνηση της κατανόησης των πραγματικών αριθμών, είναι η εξειδίκευση των *διαφανών* (transparent) και *αδιαφανών* (opaque) αναπαραστάσεων των Lesh, Behr and Post (1987) στην περίπτωση των άρρητων.

Αρχικά οι Zazkis και Sirotic στηρίχθηκαν στις *γνωστικές διαστάσεις* (dimensions of knowledge) για τους ρητούς αριθμούς από το έργο των Tirosh κ.ά. (1998) εξειδικεύοντας στην αρρητότητα (Zazkis και Sirotic, 2004· Zazkis, 2005). Στην πορεία αξιοποίησαν την *ισχύ των πιστεύω* (strength of belief) του Ginsburg (1981, 1997), τη διάκριση *τυπικής και άτυπης γνώσης* (Zazkis και Hazzan, 1998), *παρανοήσεις και επιστημολογικά εμπόδια* (Herscovics, 1989· Sierpinska, 1994) (στο Sirotic και Zazkis, 2007α).

Η μελέτη των Obersteiner και Hofreiter (2017), για την ικανότητα μαθηματικά έμπειρων ενηλίκων να εκτιμήσουν αριθμητικά μεγέθη άρρητων, όπως παρουσιάζονται συμβολικά σε προβλήματα σύγκρισης αριθμών, σχεδιάστηκε βάσει της θεωρίας της *αριθμητικής ανάπτυξης* (numerical development) των Siegler, Thompson και Schneider (2011), της *προκατάληψης του φυσικού αριθμού* (number bias) και της επίδρασης της απόστασης αριθμών (numerical distance effect) των Moyer και Landauer (1967) (στο Obersteiner και Hofreiter, 2017).

Οι Yan και Hanna μελέτησαν τη δυνατότητα ανακατασκευής αποδεικτικών έργων για την αρρητότητα, ψάχνοντας την *μαθηματική ιδέα-κλειδί* (key mathematical ideas) του Gowers (2007) που ενισχύει τη δυνατότητα ανακατασκευής.

Οι Patel και Varma εξέτασαν πως γίνεται ευκολότερα η πρόσβαση στους άρρητους αριθμούς, μέσω της αναπαράστασης μεγεθών (magnitude representations) ή μέσω των στρατηγικών επεξεργασίας τους (strategic processing). Διακρίνουν τη *εννοιολογική* από τη *διαδικαστική γνώση* και την *αναφορική επεξεργασία* (referential processing) (Patel και Varma, 2018).

Οι Anhalt και Cortez (2016) επικεντρώθηκαν στη διαδικασία μοντελοποίησης ως “τη διαδικασία επιλογής και χρήσης κατάλληλων μαθηματικών και στατιστικής για την ανάλυση εμπειρικών καταστάσεων, για την καλύτερη κατανόησή τους και τη βελτίωση αποφάσεων”, όπως περιγράφεται στο Common Core State Standards Initiative (CCSSI) 2010, p. 72) (στο Anhalt και Cortez,).

Οι Moreira και David μελετούν τη μαθηματική γνώση εκπαιδευτικών σε σχέση με τις απαιτήσεις της διδασκαλίας. Στηρίχθηκαν στην εκδοχή του Bromme (1994) για τη *γνώση του αντικείμενου* (Content Knowledge-CK) και στη *μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία* (Mathematical

Knowledge for Teaching-MKT) του Ball (2003) (στο Moreira και David, 2008).

Ανάλογη θεωρητική βάση είχαν οι Bair και Rich, που πρότειναν μια κατηγοριοποίηση για το πως αναπτύσσεται, σύμφωνα με το μοντέλο των Ball και Bass (2003), η MKT και η ειδική μαθηματική γνώση (Specialized Content Knowledge-SCK) κατά τη διδασκαλία των μαθημάτων του Αλγεβρικού Συλλογισμού και της Θεωρίας Αριθμών. Οι κατηγορίες τους προέκυψαν θεμελιωμένα επί των δεδομένων στο πλαίσιο της Grounded Theory των Strauss και Corbin (1990) (στο Bair και Rich, 2011).

Ο Kontorovich (2016) ακολούθησε την εμπλουτισμένη (Ball, Thames και Phelps, 2008) κατηγοριοποίηση της γνώσης των εκπαιδευτικών του Shulman (1986), για να διερευνήσει το γιατί επιλέγουν την μία ή την άλλη διδακτική προσέγγιση, (ορισμούς, σημειογραφία) και πως κρίνουν τις επιλογές των συναδέλφων τους. Δηλαδή τον ενδιέφερε ο λόγος επιλογής των ορισμών και της σημειογραφίας και ο τρόπος που εντάσσονται στην πρακτική του κάθε εκπαιδευτικού.

Οι Zachariades, κ.ά. (2013) ανέπτυξαν ένα ιεραρχικό μοντέλο για τον τρόπο συλλογισμού των εκπαιδευτικών βάσει του θεωρητικού μοντέλου της Sierpinska (model of theoretical thinking). Ανάλογα οι Zoitsakos, κ.ά. (2013), στη βάση του μοντέλου των Gray και Tall (2001) για το τι μπορεί να κάνει κάποιος την ώρα που χρησιμοποιεί μαθηματικές διαδικασίες, διεργασίες και εννοιο-διεργασίες (procepts) σε διαφορετικά πλαίσια.

Οι Belin και Akar (2017) μελέτησαν το πως καθηγητές των Μαθηματικών συλλογίζονται χρησιμοποιώντας δεκαδικές αναπαραστάσεις αριθμών. Έστησαν ένα πείραμα τάξης (Cobb, 2000) συνυπολογίζοντας τις παρανοήσεις που υπάρχουν για τους πραγματικούς αριθμούς, τη δυνατότητα ευέλικτων χειρισμών των πολλαπλών αναπαραστάσεών τους (Voskoglou, 2013) και αξιολόγησαν την ικανότητα ποσοτικού συλλογισμού (Thompson, 2011) στη δράση των συμμετεχόντων (στο Belin και Akar, 2017).

Οι Takker και Subramaniam εξέτασαν τη δυναμική φύση των γνωστικών απαιτήσεων, όπως προκύπτουν επί τόπου καθώς ο εκπαιδευτικός αποκρίνεται στις ενδεχόμενες καταστάσεις της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, με βάση εμπειρικά δεδομένα, μελέτησαν τη MKT όσο ο εκπαιδευτικός αντιμετωπίζει τις δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών γύρω από τους δεκαδικούς αριθμούς (Takker και Subramaniam, 2019).

Οι Leikin, Zazkis και Meller (2018) εξερεύνησαν τις απόψεις ερευνητών μαθηματικών για το τι πρέπει να διδάσκεται σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς. Θεώρησαν πως στο θεωρητικό εργαλείο της *τριάδας εκπαιδευτικού-επιμορφωτή* (teacher-educator triad) που εισάγουν οι Zaslavsky και Leikin (2004), τονίζεται ο σημαντικός ρόλος του επαγγελματία μαθηματικού στην επιμόρφωση των υποψήφιων εκπαιδευτικών, εφόσον η ίδια η πρακτική των ερευνητών μπορεί να συντελέσει

θετικά στην κατανόηση και ενισχυτικά στην πρακτική των εκπαιδευτικών. Έτσι σημειώθηκαν παραδείγματα *ανώτερης μαθηματικής γνώσης* (Advanced Mathematical Knowledge-AMK) σε μεταμαθηματικά θέματα όπως η απόδειξη, η κομψότητα της λύσης, η αυστηρότητα της διατύπωσης, και σε παιδαγωγικά όπως η σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών περιοχών (Leikin, κ.ά., 2018).

4.2.2 Μεθοδολογία εφαρμογής

Η διεξαγωγή μιας έρευνας αφορά τη διάρκεια και τον τρόπο πραγματοποίησης, το πλήθος και το προφίλ των συμμετεχόντων, τα εργαλεία συλλογής και δεδομένων ανάλυσης και τον ρόλο του ερευνητή.

4.2.2.1 Εφαρμογή σε μελέτες με μαθητές

Τη μεθοδολογία των Fischbein, κ.ά. (1994) και των Arcavi, κ.ά. (1984) ακολούθησαν οι Hayfa και Saikaly, δίνοντας ένα ερωτηματολόγιο σε 157 μαθητές της Α, Β και Γ Λυκείου στο Λίβανο. Το ερωτηματολόγιο επαναδιατυπώθηκε μέσα από μια πιλοτική μελέτη σε 30 μαθητές λίγους μήνες νωρίτερα από τη συγκεκριμένη μελέτη. Τα τελικά έργα χωρίζονταν σε δύο θεματικά τμήματα: στις επιστήμες ζωής και στις γενικές επιστήμες. Διερευνώντας τις γνωστικές διαστάσεις των συμμετεχόντων και τον τρόπο σκέψης τους, οι ερευνητές ανέλυσαν τις απαντήσεις σε κάθε ερώτημα ξεχωριστά. Η ποιοτική ταξινόμηση, ως προς τη συνοχή (consistency) τυπικής και άτυπης διάστασης, έδωσε ένα φάσμα στο οποίο η σύλληψη των άρρητων ως διαδικασία ή ως αντικείμενο χαρακτηρίστηκε ως μικτή διάσταση (Hayfa και Saikaly, 2016).

Στο πλαίσιο μιας ευρύτερης έρευνας για τις αντιλήψεις μαθητών του Λυκείου για τους άρρητους και τους ρητούς αριθμούς, η Kidron (2016) εξέτασε το αν κατά την εισαγωγή τους στο Πανεπιστήμιο βρίσκονται γνωστικά προετοιμασμένοι. Οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές ακαδημαϊκού σχολείου της Ιερουσαλήμ, με ειδικά κριτήρια επιλογής (όπως στα πρότυπα), από όλες τις τάξεις του Λυκείου. Το ερωτηματολόγιο είχε δύο μέρη, στο δεύτερο, αυτό για τους άρρητους, δεν συμμετείχαν οι νεότεροι μαθητές. Σε επόμενη έρευνα ανέλυσε τις απαντήσεις τους. Η ανάλυση έγινε σε δύο φάσεις, μία ως προς τη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων και η άλλη ως προς την τοποθέτησή τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδωσαν μια κατηγοριοποίηση για την αντίληψή τους σε κάθε περίπτωση (Kidron, 2018).

Μελέτη συγκριτικού τύπου έκαναν οι Voskoglou και Kosynas (2011) μεταξύ των απαντήσεων μαθητών Γυμνασίου και σπουδαστών του ΤΕΙ. Ο σκοπός ήταν, χρησιμοποιώντας ένα

ερωτηματολόγιο 15 ερωτήσεων, να ελέγξουν αν οι συμμετέχοντες μπορούσαν να αναγνωρίσουν τους άρρητους, να αναγνωρίσουν τους ρητούς μετατρέποντας δοσμένα κλάσματα σε δεκαδικούς, να υπολογίσουν τετραγωνικές ρίζες θετικών ακεραίων, να χρησιμοποιήσουν σωστά ιδιότητες άρρητων, τέλος να ελέγξουν αν και πως μπορούσαν να κατασκευάσουν ένα ασύμμετρο μέγεθος και να το αναπαραστήσουν ως άρρητο στον άξονα των πραγματικών αριθμών (Voskoglou και Kosynas, 2011).

Ο Ozkan, θέλοντας να αποτυπώσει τις παρανοήσεις των μαθητών για τη ρίζα αριθμού, μελέτησε τις απαντήσεις 90 μαθητών σε ένα ερωτηματολόγιο 7 θεμάτων με 12 ανοιχτού τύπου ερωτήσεις. Τα θέματα κάλυπταν τον υπολογισμό της τιμής της ρίζας και την τοποθέτηση στην αριθμογραμμή, τη μετατροπή της ρίζας σε εκθετική μορφή, τις πράξεις μεταξύ ριζών και την αντιμετώπιση των υπόρριζων ποσοτήτων σε δύναμη. Κατέληξε πως οι παρανοήσεις αναδεικνύονται με μεγαλύτερη σαφήνεια με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου από ότι τα δεδομένα των διαγωνισμάτων. Αυτό γιατί στην δεύτερη περίπτωση, οι μαθητές, βιάζονται να δώσουν απάντηση, ακόμη και μηχανιστικά (operational), χωρίς να έχουν απαραίτητα καταλάβει το ερώτημα (Ozkan, 2019).

Ο Κόσυβας (2018) έστησε ένα διδακτικό πείραμα ανοιχτού προβληματισμού, που έλαβε χώρα το 2004 στην Α Γυμνασίου του Ευρωπαϊκού Σχολείου Βρυξελλών III, με 21 μαθητές, κατά βάση από τα ανώτερα στρώματα υπηρεσιακών υπαλλήλων της Ευρωπαϊκής Κοινότητας. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε 5 ομάδες, τα δεδομένα προήλθαν από τη βιντεοσκόπηση του μαθήματος και τις γραπτές σημειώσεις των μαθητών. Το θέμα στηρίχθηκε στο Πυθαγόρειο θεώρημα με στόχο να διερευνηθούν οι αυθόρμητες αντιλήψεις των μαθητών που υπονοούν την έννοια της αρρητότητας. (Κόσυβας, 2018).

Πείραμα τάξης είχε κάνει και με τον Βόσκογλου (2012), με 78 μαθητές του 1ου πειραματικού Γυμνασίου της Αθήνας και 106 σπουδαστές του ΤΕΙ Πάτρας. Από τη σύγκριση, σκοπός ήταν να ανιχνεύσουν αν και πόσο επιδρά η ηλικία και η διαφορετική έκθεση στα Μαθηματικά, στην αντίληψη και τη χρήση των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον σκόπευαν να επιβεβαιώσουν την ύπαρξη εμποδίων, από την ατελή κατανόηση των ρητών και τις διαισθητικές δυσκολίες, σχετικά με την ασυμμετρία μεγεθών. Το έκαναν σχεδιάζοντας ένα ερωτηματολόγιο που συμπληρώθηκε από δεδομένα προσωπικών συνεντεύξεων (Voskoglou και Kosynas, 2012).

Στη βάση αυτής της έρευνας σχεδιάστηκε από τον Βόσκογλου (2013) ένα σενάριο διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών σε στοιχειώδες επίπεδο για τους σπουδαστές του ΤΕΙ, κάποιοι από το τμήμα των Μηχανολόγων και κάποιοι από τη Διοίκηση επιχειρήσεων με τον ίδιο καθηγητή. Οι πρώτοι διδάχθηκαν τους άρρητους στη βάση της μεθοδολογίας APOS/ACE του Dubinsky (βλ. Παρ. 4.2.1.1), όπου κάθε μαθηματικό θέμα χωριζόταν σε μικρότερα και κάθε επανάληψη του

κύκλου, που εφαρμοζόταν σε Η/Υ, αντιστοιχούσε σε ένα από αυτά. Οι δεύτεροι διδάχθηκαν με τον συνήθη τρόπο, στον πίνακα της τάξης. Όλοι οι συμμετέχοντες συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο πριν το πρώτο μάθημα και ένα μετά το τέλος του διδακτικού σεναρίου, το οποίο προσμετρούνταν στον τελικό βαθμό του μαθήματος. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως τέτοια διδασκαλία, σχεδιασμένη κατά τη θεωρία APOS/ACE, μπορεί να ενισχύσει σημαντικά τη δημιουργία γνωστικών σχημάτων για τα βασικά σύνολα αριθμών και ιδιαίτερα για τη διδασκαλία των άρρητων (Voskoglou, 2013).

Ο Shinno (2017, 2018) επιχειρεί μια ανακατασκευή της σειράς των μαθημάτων για τους άρρητους με στόχο να ενισχύσει την ολική δομή του επιχειρήματος (global argumentation structure) για την εισαγωγή τους. Οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές 9ης τάξης (14-15 χρονών), πρότυπου σχολείου πανεπιστημιακής δικαιοδοσίας, με επιδόσεις άνω του μέσου όρου σε σχέση με τα σχολεία της ευρύτερης περιοχής τους. Ο εκπαιδευτικός της τάξης τους είχε πάνω από 20 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, με ειδίκευση στην εκπαίδευση, με καλή μαθηματική γνώση για διδασκαλία (MKT). Ο ερευνητής ήταν απλώς παρατηρητής και οι αλληλεπιδράσεις εντός τάξης βιντεοσκοπήθηκαν. Τα επιχειρήματα των τεσσάρων πρώτων μαθημάτων που αφορούσαν τις τετραγωνικές ρίζες αναλύθηκαν σύμφωνα με το σχήμα Toulmin. Θεώρησε πως τα επιχειρήματα δύναται να συνδεθούν σαν μια αλυσίδα, όπου το *συμπέρασμα* (claim) από το ένα γίνεται *υποστήριξη* (backing) ή *εγγύηση* (warrant) για το επόμενο. Αυτή η διαδικασία φαίνεται να βοήθησε τους εκπαιδευτικούς στο σχεδιασμό της διδασκαλίας τους μακροπρόθεσμα, γιατί επέτρεψε τη βαθύτερη παρακολούθηση του πως νοηματοδοτούν νέες έννοιες οι μαθητές (Shinno, 2017, 2018).

Οι González-Martín, κ.ά. (2013) μελετούν εμπειρικά δεδομένα από σχολικά εγχειρίδια του βραζιλιάνικου σχολείου, θεωρημένα από το Υπουργείο Παιδείας, για τις τάξεις του Γυμνασίου. Η ανάλυση έγινε σε δύο συμπληρωματικές φάσεις: Πρώτον, ως προς τη δομή της θεωρίας, των ορισμών των παραδειγμάτων και των επιλεγμένων παραδειγμάτων, με έμφαση στη διάρθρωση και τη συνοχή της οργάνωσής τους. Δεύτερον, ως προς τις προτεινόμενες δραστηριότητες, τα μέσα και τις τεχνικές, και το κατά πόσο η χρήση της τεχνολογίας είναι άμεση ή έμμεση στο κεφάλαιο για τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών (González-Martín, κ.ά., 2013).

Αντίστοιχα οι Khechine και González-Martín (2017) μελέτησαν τα σχολικά βιβλία μεγαλύτερων τάξεων γενικής παιδείας, μαζί με τις οδηγίες διδασκαλίας του Υπουργείου Παιδείας της Τυνησίας. Η μελέτη έγινε ως προς τις δραστηριότητες, ειδικά αυτές για την προσέγγιση των άρρητων από ακολουθία δεκαδικών, με έμφαση στο αν υπόρρητα στηρίζονται στην έννοια του ορίου. Βρήκαν πως και στα δύο βιβλία οι δραστηριότητες ήταν ρουτίνας. Οι έννοιες γύρω από

τους πραγματικούς αριθμούς συνοδεύονταν από αλγοριθμικές τεχνικές, χωρίς να γίνεται συζήτηση για τη χρησιμότητά τους και τη γνώση που έδωσε η μελέτη τους (Khechine και González-Martín, 2017).

4.2.2.2 Εφαρμογή σε μελέτες με εκπαιδευτικούς

Οι Bair και Rich διεξήγαγαν μια μακροπρόθεσμη έρευνα (2011) με συμμετέχοντες 5000 φοιτητές ενός προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών μέσης εκπαίδευσης των ΗΠΑ, με διάρκεια φοίτησης από ένα εξάμηνο έως και πάνω από δύο. Αντιμετωπίζοντας τον εκπαιδευτικό ως ερευνητή, άντλησαν τα δεδομένα τους κατά τη διάρκεια τριών ετών από τα μαθήματα που διδάσκουν οι ίδιοι στο πλαίσιο του προγράμματος, είτε της Θεωρίας Αριθμών είτε του Αλγεβρικού Συλλογισμού. Δημιουργούσαν κατάλληλες δραστηριότητες βάσει του τρόπου σκέψης των φοιτητών και τα δεδομένα, γραπτά από τεστ και εργασίες, σημειώσεις πεδίου των διδασκόντων, αναλύοντας τα συγκριτικά. Συμπεριέλαβαν και πρόχειρα σημειώματα με γεγονότα όπως τεχνικές ερωτημάτων, ερωτήσεις και απαντήσεις των φοιτητών, παρανοήσεις, λάθη και στιγμές ανακάλυψης (“ah-hah” moments). Επιπλέον οι ερευνητές κρατούσαν σημειώσεις για τον αναστοχασμό της πορείας των μαθημάτων που, μαζί με τα δεδομένα, συζητούσαν σε εβδομαδιαίες συναντήσεις. Γινόταν συχνά αναταξινόμηση για να διακρίνουν τους δείκτες που θα οριοθετούσαν τα επίπεδα κατανόησης και βελτίωσης, ξεκινώντας από την ικανότητα των συμμετεχόντων να εξηγούν και να δικαιολογούν το τι κάνουν.

Στη συνέχεια, συνυπολόγισαν τη δυνατότητα αναγνώρισης και γενίκευσης σχέσεων μεταξύ εννοιολογικά ίδιων προβλημάτων. Η (ανα)διατύπωση προβλήματος ήταν το τελευταίο κριτήριο ταξινόμησης. Τελικά διαμόρφωσαν 5 επίπεδα για τη MKT, με τους φοιτητές του προγράμματος να φτάνουν στην καλύτερη περίπτωση το 4ο επίπεδο τελειώνοντας την επιμόρφωσή τους (Bair και Rich, 2011).

Η τυπολογία του Kontorovich (2016) για την γνώση των εκπαιδευτικών προέκυψε από ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις καθηγητών πανεπιστημίου. Η πρώτη ώρα αφορούσε τα κριτήρια επιλογής του εκπαιδευτικού για τον ορισμό και το συμβολισμό της τετραγωνικής ρίζας στο μάθημά του. Στο τέλος της συνέντευξης τους εξέθεσε, ανώνυμα, τι επέλεξαν άλλοι συνάδελφοί τους και τους ζητούσε να σχολιάσουν. Αυτός ο αναστοχασμός των εκπαιδευτικών ήταν επίσης μέρος των δεδομένων της έρευνας.

Οι Belin και Akar διεξήγαγαν μια σειρά διδακτικών πειραμάτων τάξης (classroom teaching experiment) σε 19 υποψήφιους δασκάλους και μαθηματικούς μέσης εκπαίδευσης. Ο πρώτος ερευνητής ήταν ο αναφερόμενος διδάσκων. Τα δεδομένα τους αντλήθηκαν από ατομικά γραπτά, βιντεοσκοπημένα μαθήματα, συζητήσεις των συμμετεχόντων και μια γραπτή

αξιολόγηση της γνώσης των συμμετεχόντων πριν και μετά το κάθε μάθημα. Η πρώτη φάση ξεκίνησε με την επανάληψη των ρητών αριθμών, των κλασμάτων και της ισοδυναμίας κλασμάτων. Στη δεύτερη οι συμμετέχοντες έδιναν παραδείγματα πεπερασμένων ή μη θετικών ρητών και προσπαθούσαν να βρουν τη σχέση μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων, όπως είναι η διαίρεση, η ακέραια διαίρεση, η διαγραμματική απεικόνιση. Η τρίτη φάση είχε τη μελέτη των ιδιοτήτων της δεκαδικής αναπαράστασης οποιουδήποτε ρητού ως ακολουθία αριθμών. Τέλος, στην τέταρτη φάση εξέτασαν τους άρρητους μέσα από τη δεκαδική αναπαράστασή τους, προσεγγίζοντας έναν διαφορετικό ορισμό για τους πραγματικούς αριθμούς σύμφωνα με τους Usiskin, Peressini, Marchisotto και Stanley (2003). Η ανάλυση που ακολούθησε έγινε έτσι ώστε να προκύψουν στοιχεία για τη μαθηματική σκέψη των συμμετεχόντων ξεχωριστά και της μαθηματικής σκέψης της τάξης ως σύνολο (Belin και Akar, 2017).

Οι Anhalt και Cortez μελέτησαν την κατανόηση μέσα από προβλήματα μοντελοποίησης στο πλαίσιο ενός προγράμματος επιμόρφωσης υποψηφίων μέσης εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα μελέτησαν το πως οι συμμετέχοντες διαμόρφωναν σταδιακά το μοντέλο τους, μέσα από έναν κύκλο μοντελοποίησης και εφαρμογής του στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος που αντιμετώπισαν. Παράλληλα εξέτασαν πως μπορεί μια μαθηματική δραστηριότητα μοντελοποίησης να προάγει άλλες μαθηματικές πρακτικές (Anhalt και Cortez, 2016).

Κατά τη συνήθη μεθοδολογία οι Zachariades, κ.ά. (2013) έφτιαξαν ένα διαγνωστικό μοντέλο κατηγοριών για τον συλλογισμό των εκπαιδευτικών μέσα από γραπτά και συνεντεύξεις. Στο ευρύτερο πλαίσιο της έρευνάς τους για την αντίληψη των άρρητων από υποψήφιους εκπαιδευτικούς, οι Sirotic και Zazkis (2007α, 2007β) μελέτησαν δεδομένα από συμμετέχοντες σε προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα στους 46 συμμετέχοντες στο μάθημα “Σχέδια μαθήματος: Μαθηματικά δευτεροβάθμιας”, έδωσαν το έργο “Πως θα τοποθετήσετε με ακρίβεια τον αριθμό $\sqrt{5}$ στην αριθμογραμμή;” (Sirotic και Zazkis, 2007β) και ένα ερωτηματολόγιο (Sirotic και Zazkis, 2007α). Τα δεδομένα συμπληρώθηκαν με κλινικές συνεντεύξεις σε 16 από τους συμμετέχοντες.

Το ερωτηματολόγιο ήταν το εξής:

- “1. (α) Ποιό σύνολο πιστεύεις ότι είναι πλουσιότερο, οι ρητοί ή οι άρρητοι (δηλαδή, ποιοί είναι πιο πολλοί) (β) Έστω ότι διαλέγεις έναν τυχαίο αριθμό του διαστήματος $[0,1]$ (του άξονα των πραγματικών αριθμών). Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξεις ένα ρητό αριθμό;
2. (α) Είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένας ρητός μεταξύ δύο άρρητων. Σωστό ή λάθος; Εξήγησε το σκεπτικό σου. (β) Είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένας άρρητος μεταξύ δύο

ρητών. Σωστό ή λάθος; Εξήγησε το σκεπτικό σου. (γ) Είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένας άρρητος μεταξύ δύο άρρητων. Σωστό ή λάθος; Εξήγησε το σκεπτικό σου. (δ) Είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένας ρητός μεταξύ δύο ρητών. Σωστό ή λάθος; Εξήγησε το σκεπτικό σου.

3. (α) Αν προσθέσεις δύο θετικούς άρρητους το αποτέλεσμα είναι πάντα άρρητος. Σωστό ή λάθος; Εξήγησε το σκεπτικό σου. (β) Αν πολλαπλασιάσεις δύο διαφορετικούς άρρητους το αποτέλεσμα είναι πάντα άρρητος. Σωστό ή λάθος; Εξήγησε το σκεπτικό σου.”

(Sirotic και Zazkis, 2007α, σελ. 53-54)

Σε επόμενη μελέτη (Zazkis και Sirotic, 2010) ανέλυσαν ποσοτικά τις γραπτές απαντήσεις, εστιάζοντας επιπλέον σε ορισμένες λεπτομέρειες των συνεντεύξεων, ψαχνοντας κοινές τάσεις στην προσέγγιση των συμμετεχόντων και συζητώντας μαζί τους τις πιο κοινές εσφαλμένες αντιλήψεις, όπως προέκυψαν, προσπαθώντας να αναγνωρίσουν την πηγή τους. Έτσι κατέληξαν σε 3 παρατάξεις (dispositions):

- 1) Η δεκαδική παράταξη περιλαμβάνει την απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση, την αντίληψη των άρρητων ως μη λογικούς αριθμούς (“Unreasonable” Numbers), τη διάκριση απειροψήφιων δεκαδικών έναντι πεπερασμένων, το π ως ειδική περίπτωση άρρητου.
- 2) Η κλασματική παράταξη περιλαμβάνει την αντίληψη του ρητού ως αναλογία αγνοώντας την απαίτηση των ακέραιων όρων.
- 3) Η ισορροπημένη παράταξη περιλαμβάνει τη συγχρονισμένη αντίληψη των ορισμών σε δύο κατευθύνσεις, από το κλάσμα σε περιοδικό δεκαδικό και αντίστροφα.

Οι Patel και Varma (2018), εξετάζοντας πως ένα αφηρημένο σύστημα αριθμών γίνεται κατανοητό με τη γενικότερη έννοια, επέλεξαν ένα τυχαίο δείγμα φοιτητών βάζοντας αφισάκια στο χώρο του πανεπιστημίου. Ανέλυσαν τα πειραματικά δεδομένα από ερωτηματολόγια 4 έργων που δόθηκαν τελικά σε 81 προπτυχιακούς φοιτητές.

Πιο εστιασμένο δείγμα φοιτητών είχε η έρευνα των Yan και Hanna (2019) για την μελέτη της ιδέας-κλειδί στην απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{k}$. Ανέλυσαν ποιοτικά δεδομένα από 107 πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος, που παρακολουθούσαν ένα εισαγωγικό μάθημα στην απόδειξη (transition-to-proof class). Το μάθημα ήταν κοινό και για το τμήμα Μαθηματικής Εκπαίδευσης του ίδιου πανεπιστημίου του Καναδά. Τα δεδομένα προέκυψαν από την εργασία που έκαναν εντός τάξης, σχεδιασμένη από τον διδάσκοντα. Οι συμμετέχοντες είχαν 40 λεπτά να διαβάσουν την απόδειξη και να απαντήσουν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας

και επιπλέον 30 λεπτά για την ανακατασκευή της απόδειξης. Οι ερωτήσεις σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να φανούν οι αντιλήψεις για την ιδέα-κλειδί της απόδειξης. Συνεκτιμήθηκαν ατομικές και ομαδικές εργασίες, οι τελικές εξετάσεις και αποσπάσματα από τις αποδείξεις των συμμετεχόντων στον πίνακα την ώρα του μαθήματος. Χρησιμοποιήθηκαν 5 πλήρεις αποδείξεις για να σχηματίσουν οι συμμετέχοντες την έννοια της ιδέα- κλειδί (Yan και Hanna, 2019).

Οι Obersteiner και Hofreiter ανάλυσαν δεδομένα από 45 μαθηματικά ικανούς ενήλικες. Άλλοι είχαν πτυχίο Μαθηματικών ή Φυσικής, άλλοι ήταν μεταπτυχιακοί φοιτητές με ειδίκευση είτε στη Φυσική είτε στα Μαθηματικά, κάποιοι ήταν βοηθοί έρευνας του τμήματος Μαθηματικών και 5 καθηγητές Μαθηματικών. Τους δόθηκαν 70 προβλήματα σύγκρισης αριθμών σε H/Y στα οποία οι άρρητοι εμφανίζονταν με κοινούς δείκτες (index), κοινά ριζικά (radicand) ή κανένα κοινό ακέραιο στοιχείο (component). Έτσι διακρίνονταν τα προβλήματα σε δύο κατηγορίες: Αυτά με κοινό στοιχείο (CC) και αυτά χωρίς κοινό στοιχείο (No-CC). Οι υποκατηγορίες τους ήταν κοινές. Αφενός υπήρχαν προβλήματα συμβατά (congruent) (CO), δηλαδή οι συγκρινόμενοι όροι είχαν κοινό στοιχείο. Αφετέρου υπήρχαν προβλήματα χωρίς σύγκλιση (incongruent) (IC). Η στατιστική ανάλυση έγινε σύμφωνα με προηγούμενη μελέτη σύγκρισης αριθμών των Obersteiner et al. (2013). Συγκρίθηκαν ο μέσος χρόνος απόκρισης μεταξύ των προβλημάτων, εφαρμόστηκαν t-tests ανά ζεύγος δεδομένων (paired samples t-tests). Για την ακρίβεια τα δεδομένα των απαντήσεων δεν ήταν κανονικοποιημένα. Χρησιμοποιήθηκαν μη παραμετρικοί έλεγχοι για τη σύγκρισή τους και πολλαπλή ανάλυση γραμμικής παλινδρόμησης για την εκτίμηση των χρόνων απόκρισης. Η ύπαρξη συστηματικών διαφορών μεταξύ προβλημάτων σύγκλισης και μη, εξετάστηκε εφόσον είχε υπολογιστεί ο μέσος χρόνος απόκρισης και η μέση ακρίβεια (στο Obersteiner και Hofreiter, 2017).

Οι Leikin, κ.ά. (2018) διερεύνησαν την άποψη 4 ερευνητών Μαθηματικών για το τι πρέπει να διδάσκονται οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί Μαθηματικών. Κατέληξαν πως όσο περισσότερα γνωρίζουμε για τον τρόπο σκέψης και την πρακτική των ειδικών, τόσο καλύτερα μπορεί να γίνει η προετοιμασία του εκπαιδευτικού. Τόνισαν δηλαδή τη σημασία της συμβολής των επαγγελματιών στη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών (Leikin, κ.ά., 2018).

Κοιτώντας την πρακτική των δασκάλων μέσης εκπαίδευσης για τη διδασκαλία των δεκαδικών κλασμάτων, στην έρευνα των Takker και Subramaniam (2019) διαμορφώθηκαν διάφορα έργα διδακτικών σεναρίων τάξης. Οι ερευνητές συζήτησαν με τους συμμετέχοντες τα λάθη και τα μοτίβα που διακρίνονται στις υποθετικές απαντήσεις μαθητών, καθώς και τις συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων. Επίσης έκαναν ανασκόπηση στις υποθετικές αποφάσεις και τους χειρισμούς των εκπαιδευτικών της τάξης.

Οι Zoitsakos, κ.α. (2013) έκαναν μια άλλη εφαρμογή υποθετικού διδακτικού σεναρίου, με 106

ενεργούς μαθηματικούς μέσης εκπαίδευσης, με διδακτική εμπειρία έως 15 έτη. Χρησιμοποίησαν τις κατηγορίες αντιλήψεων που είχαν διαμορφώσει σε προηγούμενη έρευνα για να μελετήσουν τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών.

Τα αποτελέσματά τους ήταν τα εξής:

- a) Καμία/ άσχετη απάντηση έδωσαν 10 συμμετέχοντες
- b) Ως διαδικασία αντιλαμβάνονται το '0.3999...' 30 συμμετέχοντες,
- c) Ως διαδικασία και έννοια (αποτέλεσμα και αριθμό), με τουλάχιστον ένα λάθος στην εξήγηση, αντιλαμβάνονται 31 από τους συμμετέχοντες.
- d) Ως διαδικασία και έννοια (αριθμό), διατηρώντας σωστές και λάθος αντιλήψεις για τη σημειογραφία του, αντιλαμβάνονται 12 συμμετέχοντες.
- e) Ως εννοιο-διεργασία (procept), χωρίς κανένα λάθος στη σημειογραφία, αντιλαμβάνονται 23 συμμετέχοντες.

Για τη σύνδεση της θεωρίας, της έρευνας και της πρακτικής στη ΔτΜ, οι Moreira και David (2008) έκαναν μια συγκριτική μελέτη της οπτικής των εκπαιδευτικών και των μαθηματικών για τη διδασκαλία. Ανέλυσαν, μέσω θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory), τα δεδομένα τους ως προς δύο κριτήρια: τη μαθηματική ορθότητα και τον βαθμό φορμαλισμού. Παρότι αντιμετώπισαν δυσκολίες στην επιλογή κατάλληλων ερωτημάτων από τη διαθέσιμη βιβλιογραφία, διαμόρφωσαν υλικό με ερωτήματα που διατρέχουν το σύνολο των φυσικών, των ρητών και τελικά το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων, τα κείμενα των βιβλιογραφικών αναφορών του προγράμματος UFMG και τέλος την σύγκριση αυτών, κατέληξαν στα αποτελέσματά τους.

4.3 Λειτουργίες των έργων με πραγματικούς αριθμούς

Στη διδασκαλία αξιολογείται όχι μόνο το τι ξέρουν αλλά και το τι μπορούν να κάνουν οι μαθητές. Πρόσθετα έχει σημασία το πως και το γιατί το κάνουν. Η δυνατότητα να αξιοποιεί κανείς αυτά που γνωρίζει πρακτικά και θεωρητικά, συνίσταται στην επιλογή στρατηγικών και μεθόδων ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζει. Η κατανόηση των ορισμών και ο ευέλικτος τρόπος χρήσης αναπαραστάσεων δεν μπορεί παρά να επηρεάζουν τη μεθοδολογία που αναπτύσει κανείς στην αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων, καθώς επηρεάζουν τον τρόπο σκέψης και επεξεργασίας.

4.3.1 Επίλυση προβλήματος

Είναι γνωστό πως η αντιμετώπιση προβλημάτων προϋποθέτει την κατανόηση. Αυτή αφορά

τόσο τη διατύπωση του δημιουργού, όσο και την ερμηνεία αυτού που το αντιμετωπίζει. Η ολοκλήρωση της επίλυσης περιλαμβάνει όλες τον σχεδιασμό της λύσης, την εφαρμογή της και τη διαδικασία ανάδρασης με το πλαίσιο του προβλήματος.

4.3.1.1 Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους μαθητές

Μελετώντας τα επίσημα σχολικά εγχειρίδια της Βραζιλίας, οι González-Martín, κ.ά. (2013) χαρτογράφησαν ορισμένους τύπους προβλημάτων και δραστηριοτήτων, που κωδικοποίησαν σε 6 κατηγορίες:

1. “Ταξινόμηση δεδομένου αριθμού ως ρητό ή άρρητο. Οι μαθητές βλέπουν παραδείγματα πραγματικών αριθμών, σε διαφορετικές μορφές (δεκαδικοί, κλάσματα, ριζικά και μικτές συμβολικές εκφράσεις).
2. Προσδιορισμός ρητού κλάσματος ίσου με δεκαδικό αριθμό. Χρειάζεται να βρουν ένα κλάσμα ίσο με έναν δεδομένο περιοδικό δεκαδικό αριθμό μέσω γενικών μεθόδων.
3. Εύρεση ενός ρητού ή άρρητου αριθμού μεταξύ δοσμένων αριθμών. Περιλαμβάνει τον αριθμητικό μέσο ή την προσαρμογή δεκαδικών αναπαραστάσεων.
4. Εύρεση πεπερασμένης δεκαδικής προσέγγισης δοσμένου άρρητου αριθμού. Αποτελούνται από τη χρήση πεπερασμένων δεκαδικών προσεγγίσεων για αριθμητικές εκφράσεις με άρρητους, δεδομένων των δεκαδικών προσεγγίσεων των άρρητων αυτών.
5. Διάταξη πραγματικών αριθμών. Οι πραγματικοί εκφράζονταν ως δεκαδικοί ή κλάσματα.
6. Αναπαράσταση στην αριθμογραμμή. Συσχέτιση αριθμών, δεκαδικών ή κλασμάτων, με σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών.”

(González-Martín, Giraldo και Souto, 2013, σελ. 237)

Ο Shinno διακρίνει τις διδακτικές επιπλοκές στο σχεδιασμό ενός μαθήματος, που συνυπολογίζει τα επιστημολογικά εμπόδια των άρρητων αριθμών, χρησιμοποιώντας το παράδοξο του Ζήνωνα ως την κατάλληλη προβληματική κατάσταση (Tirosh και Tsamir, 2004) για την αναπαράσταση του άρρητου αριθμού (στο Shinno, 2008).

Ο Κόσυβας (2018) ασχολήθηκε με το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου, σε ένα διδακτικό πείραμα για την ανίχνευση αυθόρμητων διαισθητικών αντιλήψεων συναφών με την αρρητότητα. Μελέτησε τον τρόπο σκέψης των μαθητών αξιοποιώντας ιστορικά κείμενα και προβλήματα που, με κατάλληλη ενσωμάτωση, μπορούν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον τους και συμπληρωματικά να ενισχύσουν την τάση τους για διερεύνηση, παρακολουθώντας την ανθρώπινη δραστηριότητα. Σε άλλη έρευνα για την ανάλυση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους πραγματικούς αριθμούς, οι Voskoglou και Kosynas (2012)

έδωσαν μια σειρά κατασκευαστικών προβλημάτων, υπό την υπόθεση πως η βασική δυσκολία αφορά τις πολλαπλές αναπαραστάσεις. Οι συμμετέχοντες από προσπάθησαν να κατασκευάσουν άρρητα μεγέθη όπως το $\sqrt{2}$, το $\sqrt{3}$ και δυσκολεύτηκαν να βρουν γεωμετρικές μεθόδους, παρότι ορισμένοι τις είχαν πρόσφατα διδαχθεί (Voskoglou και Kosynas, 2012).

Οι αδυναμίες των μαθητών φάνηκαν καλύτερα χρησιμοποιώντας ανοιχτές ερωτήσεις και όχι πολλαπλής επιλογής. Οι μαθητές στην έρευνα του Ozkan, που δυσκολεύτηκαν στην ανάλυση και στην κατανόηση της ερώτησης, έπεφταν σε εννοιολογικές παρανοήσεις και υπολογιστικά λάθη. Για αυτό και οι ίδιοι προτίμησαν τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που όμως, από ερευνητική άποψη, δυσκολεύουν τη μελέτη των ανώτερων λειτουργιών κατανόησης (high-level behaviours) (Ozkan, 2019).

4.3.1.2 Τρόποι αντιμετώπισης προβλημάτων από τους εκπαιδευτικούς

Η επίλυση ενός προβλήματος δεν συνεπάγεται απαραίτητα την κατανόηση. Στο ιεραρχικό μοντέλο των Zachariades, κ.ά. (2013) ο ανώτερος αναστοχαστικός τρόπος σκέψης εκδηλώνεται συναρτήσει των απαιτήσεων του προβλήματος. Ο τρόπος εκτέλεσης και επίλυσης, ακόμη και στην περίπτωση των μαθηματικών, εκδηλώνεται φασματικά αναλόγως με τις απαιτήσεις του γενικότερου πλαισίου στο οποίο χρησιμοποιούνται οι μαθητικές διαδικασίες και έννοιες.

Στην έρευνα των Zoitsakos, κ.ά. (2013) ο τρόπος λύσης και εξήγησης, φάνηκε να επηρεάζεται από το μαθητικό κοινό, δηλαδή το σε ποιούς απευθύνεται ο εκπαιδευτικός, ή τα αντίστοιχα παραδείγματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία. Φαίνεται πως η μαθηματική αυστηρότητα και η προσέγγιση των ορισμών που διέπνεαν τις απαντήσεις των συμμετεχόντων καθορίζονται και από εξωγενείς παράγοντες.

Υπάρχουν προβλήματα που προκάλεσαν τη γνωστική σύγκρουση στην περίπτωση την δεκαδικής αναπαράστασης. Στο ίδιο πνεύμα με τους Peled και Herskovitz (1999), οι Zazkis και Sirotic (2004), προκαλούν να γίνει η δοκιμή του παρακάτω παραδείγματος, χρησιμοποιώντας μια αριθμομηχανή 8 ψηφίων, ως ένα έργο που συμπυκνώνει διαφορετικές πτυχές των άρρητων αριθμών.

Αν υπολογίσουμε με την αριθμομηχανή την παράσταση $m = \sqrt{10000000} \div \sqrt{91} \div \sqrt{989011}$, η οθόνη θα δείξει 0.3333333, που μπορεί να παρερμηνευθεί ως δεκαδικός αριθμός με επαναλαμβανόμενα ψηφία, δηλαδή να θεωρηθεί ρητός. Όμως, στον υπολογισμό με παραγοντοποίηση του υπόρριζου, φαίνεται πως οι πρώτοι αριθμοί 91 και 989,011, έχουν τετραγωνικές ρίζες που είναι άρρητοι. Το ίδιο θα προκύψει και για $\sqrt{10000000} = 1000\sqrt{2}\sqrt{5}$.

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα των Sirotic και Zazkis (2007β) κατά πλειοψηφία δεν μπόρεσαν να τοποθετήσουν το $\sqrt{5}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών, εφόσον επί της ουσίας το ταυτίζουν με τη γραμμή των ρητών. Μελετώντας τα έργα που δόθηκαν στους συμμετέχοντες κατέληξαν πως οι εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν εύκολα να επιστρατεύσουν κάποια γεωμετρική μέθοδο, άλλη προσεγγιστική μέσω δεκαδικών ή γραφική μέσω της αναπαράστασης κάποιας τετραγωνικής συνάρτησης (Sirotic και Zazkis, 2007β). Για την ακρίβεια η γεωμετρική αναπαράσταση σχεδόν απουσίαζε, λίγοι κατάφεραν να επικαλεστούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ως κλασική μέθοδο για την κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος άρρητου μήκους. Εντούτοις η δυνατότητα γεωμετρικής αναπαράστασης είναι πολύ σημαντική γιατί δίνει τη δυνατότητα να γίνει σαφής διάκριση μεταξύ του άρρητου και της ρητής του προσέγγισης. Επιπλέον οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θεωρούσαν την αριθμογραμμή ως γραμμή ρητών αριθμών, με αποτέλεσμα να πρέπει πρώτα να στρογγυλοποιήσουν τον άρρητο και έπειτα να τον τοποθετήσουν σε αυτή.

Οι στρατηγικές τους διακρίθηκαν σε πέντε κατηγορίες:

1. Ακριβής τοποθέτηση με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος
2. Δεκαδική προσέγγιση καλή ακρίβειας
3. Αδρή προσέγγιση μεταξύ ακεραίων
4. Γραφική προσέγγιση μέσω σχετικής συνάρτησης
5. Ισχυρισμός πως είναι αδύνατο να γίνει

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση δεν καλύπτει όλους τους άρρητους, όμως φαίνεται να έχει νόημα στην περίπτωση των κατασκευάσιμων. Στη γενικότερη περίπτωση των άρρητων αριθμών, κατασκευάσιμων ή μη, δεν υπάρχει κάποια στρατηγική που να επιτρέπει την ευθεία πρόσβαση στο μέγεθος (Obersteiner και Hofreiter, 2017). Οι Obersteiner και Hofreiter στην έρευνά τους για τη σύγκρισή ριζικών, παρατηρούν πως οι μαθηματικοί δεν επέλεξαν απαραίτητα ολιστικές στρατηγικές λύσης, αλλά αντίθετα έψαχναν για την καταλληλότερη βάση του στόχου του συγκεκριμένου προβλήματος που αντιμετώπιζαν.

Σε άλλη περίπτωση η σύνδεση των αναπαραστάσεων επιτεύχθηκε (Belin και Akar, 2017). Οι συμμετέχοντες έκαναν την σύνδεση μεταξύ της διαίρεσης ρητών κάθε μορφής, όπως τα κλάσματα, την ισοδυναμία τους με τους δεκαδικούς και κατ' επέκταση έβγαλαν το συμπέρασμα πως οι διαφορετικές αναπαραστάσεις αντιστοιχούν στον ίδιο αριθμό. Η δεκαδική αναπαράσταση θετικών ρητών τους επέτρεψε το γενικότερο συμπέρασμα πως κάθε ρητός μπορεί να αναπαρασταθεί ως ακολουθία ρητών. Στο επόμενο παράδειγμα που τους δόθηκε για τους άρρητους μπόρεσαν να αντιληφθούν πως κάθε άρρητος μπορεί να προσεγγιστεί από δύο ακολουθίες ρητών αριθμών, ως το όριο των ακολουθιών αυτών και μέσω της συνεχούς

διαμέρισης του διαστήματος. Άρα το μοναδικό αφενός αφορά τη συλλογή έργων και αφετέρου τη σειρά εμπλοκής με αυτά, ώστε να καλλιεργηθούν σταδιακά οι διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις.

Αυτός ο πολύ απαιτητικός στόχος, της σύνδεσης των αναπαραστάσεων για τους άρρητους, ενδέχεται να καλλιεργεί την ανάπτυξη νέων στρατηγικών επεξεργασίας και ας μην είναι δυνατό να επιτευχθεί άμεσα με ένα γενικό τρόπο. Οι Patel και Varma (2018) θεωρούν πως η σημασία της αναπαράστασης μεγεθών φαίνεται να εξασθενεί όσο αυξάνεται η αφαιρετικότητα του αριθμητικού συστήματος. Σχολιάζουν πως οι φυσικοί αριθμοί και τα τέλεια τετράγωνα μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση των άρρητων μαζί με μια ποικιλία έργων. Μαθηματικά έργα όπως η σύγκριση μεγεθών, η εκτίμηση με χρήση της αριθμογραμμής και αριθμητικά προβλήματα μπορούν να επιβάλλουν υψηλές υπολογιστικές απαιτήσεις που χωρίς τους κατάλληλα υψηλούς γνωστικούς πόρους θα αποβούν άκαρπα.

Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι πλέον ένα σημαντικό στοιχείο των ΑΠΣ της μέσης εκπαίδευσης, που γενικά δεν αφορά μόνο τα λεγόμενα “ρεαλιστικά προβλήματα. Ως διαδικασία περιλαμβάνει την ανάλυση ή την πρόβλεψη γεγονότων ακόμη και σε φανταστικές καταστάσεις ή καθαρά μαθηματικά σενάρια, όπως η προσέγγιση των άρρητων μέσω κλασμάτων (Anhalt και Cortez, 2015). Κατά τη μοντελοποίηση, είναι ανάγκη ο εμπλεκόμενος να αναγνωρίσει τις κοινές δομές πίσω από καταστάσεις διαφορετικού περιεχομένου, να εντοπίσει τις μεταξύ τους σχέσεις και να αναδείξει τις κανονικότητες κατά την κίνηση από μια δοσμένη αρχική κατάσταση σε μια τελική κατάσταση.

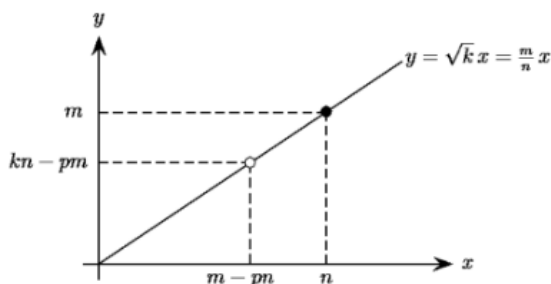
Ως πρόβλημα μπορεί να λειτουργήσει η διαδικασία της απόδειξης. Εστιάζοντας στις πτυχές της απόδειξης που παραπέμπουν στην επίλυση προβλήματος, δηλαδή την αντιμετώπιση μιας κατάστασης που δεν είναι προφανής η λύση της, μπορούμε να προσεγγίσουμε τον τρόπο που οι μαθηματικοί κατασκευάζουν πρωτότυπες αποδείξεις. Έτσι, υπό κατάλληλες συνθήκες, η εμπλοκή των μαθητών με την αναπαραγωγή αποδείξεων μπορεί να προωθήσει την ανάπτυξη βαθιάς μαθηματικής γνώσης και χρήσιμων αναπαραστάσεων συλλογισμού που σχετίζονται με σύνθετες έννοιες (Weber, 2005), όπως οι αρρητότητα.

Οι Yan και Hanna επιλέγουν, μεταξύ άλλων, την απόδειξη για την αρρητότητα του αριθμού $\sqrt{k}$ από το βιβλίο *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics* (Alsina και Nelsen, 2010), όπως φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 2 (στο Yan και Hanna, 2019, σελ. 3). Οι ερευνητές στηρίζονται στην ιδέα-κλειδί της απόδειξης, δηλαδή ένα μαθηματικό γεγονός ή μια έννοια γύρω από την οποία ανακατασκευάζεται. Η δόμηση μιας σειράς λογικών βημάτων, όχι αλγοριθμικά

αλλά με την εννοιολογική κατανόηση και σύνδεση, μπορεί να δώσει στην απόδειξη και τη λειτουργία της εξήγησης για αυτόν που την ανακατασκευάζει. Για παράδειγμα στην απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$ με την εις άτοπον απαγωγή, η ιδέα-κλειδί μπορεί να είναι η αρχική υπόθεση πως υπάρχει ελάχιστος ρητός $m/n = \sqrt{2}$ και στη συνέχεια η αναζήτηση ενός μικρότερου.

The irrationality of $\sqrt{k}$ for non-square k

In this proof, we interpret $\sqrt{k}$ as the slope of a line through the origin, as illustrated below.



Theorem: If k is not the square of an integer, then $\sqrt{k}$ is irrational.

Proof. Assume $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$ in lowest terms. Then the point on the line $y = \sqrt{k}x = \frac{m}{n}x$ closest to the origin with integer coordinates is (n, m) . However, if we let p be the greatest integer less than $\sqrt{k}$ so that $p < \sqrt{k} < p+1$, then the point with integer coordinates $(m-pn, kn-pm)$ lies on the line and is closer to the origin since $\frac{m}{n}(m-pn) = \frac{m^2}{n} - pm = kn - pm$, and $p < \frac{m}{n} < p+1$ implies $0 < m-pn < n$ and $0 < kn-pm < m$. Thus we have a contradiction and $\sqrt{k}$ is irrational. ■

Σχήμα 2: Η απόδειξη για την αρρητότητα του αριθμού $\sqrt{k}$ ως κλίση ευθείας
(Yan και Hanna, 2019, σελ. 3)

4.3.2 Τρόποι συλλογισμού

Το γενικό συμπέρασμα από τη μελέτη του συλλογισμού των μαθητών είναι πως στηρίζονται έντονα στις διαισθητικές διαδικασίες. Οι Fischbein κ.ά. (1994) παρατήρησαν πως οι διαισθητικές δομές είναι ουσιώδεις στην παραγωγική σκέψη (productive thinking). Ωστόσο οι διαφορές των αντιλήψεων μεταξύ των δύο ομάδων της έρευνάς τους, μαθητών και εκπαιδευτικών, συσχετίστηκαν με τη νοητική ωριμότητα της δεύτερης ομάδας. Η σύλληψη μιας άπειρης διαδικασίας όπου προστίθενται δεκαδικά ψηφία σε έναν αριθμό ή πολύ περισσότερο οι πράξεις με τέτοιους αριθμούς απαιτούν αυξημένη φαντασία.

4.3.2.1 Πτυχές της σκέψης των μαθητών

Στους φυσικούς αριθμούς υπάρχουν προβλήματα σύγκρισης μεγεθών (magnitude comparison-MC) και συνοδεύονται από το φαινόμενο της απόστασης (distance effect). Αναλυτικότερα, όσο

μεγαλύτερη είναι η απόσταση μεταξύ δύο αριθμών που συγκρίνονται, τόσο ταχύτερη είναι η απόφαση. Η σύγκριση στους ακέραιους προϋποθέτει πρόσθετα ένα συμβολικό χειρισμό, αφού στην περίπτωση αρνητικών αριθμών, η σύγκριση γίνεται αγνοώντας το πρόσημο και στη συνέχεια αντιστρέφοντας το συμπέρασμα. Άλλα προβλήματα είναι αυτά που εμπλέκουν την αριθμογραμμή (number line estimation-NLE) για την αναπαράσταση μεγεθών. Σε αυτά το συμπέρασμα προκύπτει από τον μέσο όρο της απόστασης των θέσεων που λανθασμένα δόθηκαν ως απάντηση και της πραγματικής θέσης του αριθμού (Patel και Varma, 2018).

Μια άλλη διάσταση για πως συλλογίζονται οι μαθητές, δεν αφορά μόνο το συλλογισμό τους καθαυτούς για τους άρρητους αριθμούς αλλά και τις γενικότερες πρακτικές συλλογισμού που αναπτύσσουν παράλληλα καθώς προσεγγίζουν την έννοια. Για παράδειγμα, το μεγαλύτερο σύνολο αριθμών για το οποίο οι μαθητές μπορούν να φανταστούν την ύπαρξή τους και τη λειτουργία των βασικών πράξεων είναι οι ρητοί (Fischbein κ.ά., 1994). Στους άρρητους παρατηρείται μια σύγκρουση μεταξύ διαίσθησης και τυπικών κανόνων σκέψης. Οι ερευνητές δίνουν έμφαση στο πόσο σημαντικό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τη διαδικασία που καταλήγει σε έναν απειροσδήποτε δεκαδικό αριθμό, όχι απλώς να τον αναγνωρίζουν ως τέτοιο. Δηλαδή να κατανοήσουν πως συντελείται μια δυναμική διαδικασία που σχετίζεται με τη δυναμική αντίληψη του απείρου.

Εδώ φαίνεται, κατά τον Fischbein, πως τα νοητικά μοντέλα ασκούν μια άρρητη επιρροή στην ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών για το άπειρο, ακόμη και όταν οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με την τυπική γνώση των εννοιών (στο Kidron, 2016).

Η τυπική γνώση παρουσιάζεται στους μαθητές μέσω καποιας σημειωτικής αναπαράστασης. Συχνά η ασυνείδητη χρήση συμβόλων προκαλεί αναστάτωση και χρειάζεται μια πιο μακροπρόθεσμη ανάλυση, του ρόλου και της ανάπτυξης του λεξιλογίου και της σχετικής ορολογίας της τυπικής αποτύπωσης (Shinno, 2018). Το μοντέλο της *σημειωτικής αλυσίδας* που παρουσίασε ο Shinno (2018), προσφέρεται ως αναλυτικό εργαλείο διακρίνοντας το πότε εκδηλώνεται η προαναφερθείσα γνωστική σύγκρουση.

Η σημειωτική αλυσίδα αφορά την αναθεώρηση συμβόλων, ως την πράξη που συνδέει ζεύγη *σημαίνοντος* (signifier) και *σημαινόμενου* (signified). Για να φανερωθεί η συντελούμενη αναθεώρηση αυτής της σύνδεσης, είναι σημαντικό να εντοπιστούν ορισμένα στοιχεία-διερμηνείς (interpretants) που συνοδεύουν την ανάπτυξη του σημαίνοντος, από τη διαδικαστική χρήση του έως τη συγκρότησή του ως έννοια. Μια τέτοια αναθεώρηση είχε επιχειρήσει ο Shinno (2017) σε προηγούμενη μελέτη για την επιχειρηματολογία και το συλλογισμό κατά την αποδεικτική διαδικασία. Παρακολουθώντας μια σειρά μαθημάτων, διέκρινε και μελέτησε κάποιες ουσιώδεις

διεργασίες που συντελούνταν εντός τάξης. Αυτές τον οδήγησαν να ανακασκευάσει την ακολουθία του μαθήματος, τη σειρά παρουσίασης και σύνδεσης των εννοιών, που αντικειμενικά άλλαξαν το ρου της επιχειρηματολογίας. Ένα βασικό συμπέρασμα ήταν πως υπάρχει μια γενικότερη αδυναμία στην επιχειρηματολογία των μαθητών.

Επομένως η έλλειψη μιας συνεκτικής και λειτουργικής παρουσίασης των άρρητων αριθμών μπορεί να επηρεάσει τη ροή του μαθήματος και ακολούθως τον τρόπο που συνηθίζουν οι μαθητές να αναπτύσσουν τον συλλογισμό τους. Ανάλογα, οι González-Martín, κ.ά. (2013) σημειώνουν πως η σειρά παρουσίασης των βιβλίων επίσης κρύβει πραξολογίες που τεχνικά και θεωρητικά απέχουν κατά πολύ από αυτές των ακαδημαϊκών Μαθηματικών.

Οι γνωστικές διαστάσεις των μαθητών για τους άρρητους, κατά τους Hayfa και Saikaly (2016), διακρίνονται από το πως χρησιμοποιούν τον ορισμό και από τη μέθοδο που επιλέγουν για την ταξινόμησή τους. Παρατήρησαν μια έντονη εξάρτηση από τη δεκαδική αναπαράσταση και κατά βάση τους αντιλαμβάνονταν ως ατέρμονες διαδικασίες και όχι ως αντικείμενα/ έννοιες. Η μετάβαση να γίνουν αντιληπτοί οι άρρητοι από διαδικασία ως εννοιο-διεργασία δεν είναι εύκολη. Οι ερευνητές υποστηρίζουν πως ένα τέτοιο επίτευγμα θα επιτρέψει στους μαθητές την αντίληψη της πληρότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών, που με τη σειρά της επηρεάζει την αντίληψη της συνέχειας των συναρτήσεων και της έννοιας του ορίου. Η αναγκασία μετάβαση μπορεί να δομηθεί σταδιακά, μέσω της διδασκαλίας που συνεκτικά συνδυάζει την τυπική και την άτυπη γνωστική διάσταση, χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των ορισμών και των γεωμετρικών αναπαραστάσεων (Hayfa και Saikaly, 2016).

4.3.2.2 Πτυχές της σκέψης των εκπαιδευτικών

Ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος συλλογισμού και αντίληψης των ενηλίκων. Αρχικά τέθηκε το ερώτημα αν μπορεί κανείς, ακόμη και με ανώτερου τύπου, πιο ώριμο, συλλογισμό όπως οι ενήλικες, να έχει πρόσβαση σε άρρητο μέγεθος (Obersteiner και Hofreiter, 2017). Σε αυτή τη βάση και με δεδομένο πως “οι γνωστικές επιστήμες έχουν αφήσει ανεξέταστους τους άρρητους, εστιάζοντας σε πιο συγκεκριμένα (concrete) σύνολα αριθμών” (Patel και Varma, 2018, σελ. 1643) οι ερευνητές συνέλεξαν προβλήματα σύγκρισης άρρητων μεγεθών με ριζική αναπαράσταση από τη γενικότερη βιβλιογραφία. Παρατήρησαν πως ορισμένες φορές οι ενήλικες συγκρίνουν τους αριθμούς με διαφορετικό τρόπο από ότι τα παιδιά. Για παράδειγμα, οι συμμετέχοντες, στη σύγκριση ετερόσημων ακέραιων άμεσα μπόρεσαν να εντοπίσουν το θετικό ως μεγαλύτερο, όπως και τα παιδιά. Αντίθετα, στη σύγκριση ομόσημων αρνητικών ακολούθησαν μια στρατηγική επεξεργασία των αριθμών, αποκτώντας όλο και

μεγαλύτερη πρόσβαση στο μέγεθός τους. Αυτό εκφράστηκε με το να θεωρήσουν τη συμμετρία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα, επιστρατεύοντας την ιδιότητα του αντίθετου στοιχείου $x+(-x)=0$, αντί την έννοια της απόστασης αριθμών όπως κάνουν τα παιδιά (Patel και Varma, 2018).

Είναι αξιοσημείωτο πως, ενώ έχουν μελετηθεί οι αδυναμίες και οι παρανοήσεις των εκπαιδευτικών, επιχειρήθηκε η δημιουργία μοντέλων, ώστε συστηματικά να διακρίνεται η γνώση τους για το μαθηματικό περιεχόμενο και το πως επεκτείνεται αυτό στην πρακτική τους.

Οι γνωστικές διαστάσεις των εκπαιδευτικών για τη σχέση ρητών και άρρητων, αφορούν την πυκνότητα, την πληρότητα, το πως συνυπάρχουν στον πραγματικό άξονα και τις πράξεις μεταξύ τους. Οι Sirotic και Zazkis (2007β) εντόπισαν πως αυτές φαίνονται καλύτερα στον τρόπο που οι ίδιοι περιγράφουν τις προθέσεις τους ή στο πως επιχειρηματολογούν και λιγότερο στο ποιόν τρόπο επιστρατεύουν για να τους τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή.

Οι Zazkis και Sirotic (2010) βρήκαν ορισμένα αξιολογικά στοιχεία στις καταφανώς λαθος απαντήσεις που έδωσαν ορισμένοι εκπαιδευτικοί στην έρευνά τους. Συγκεκριμένα, προβληματίστηκαν για την απουσία των ορισμών ρητών και άρρητων από το “ενεργό ρεπερτόριο της γνώσης τους”, με αποτέλεσμα να μην μπορέσουν να τους εντάξουν στο συλλογισμό τους κατά την εμπλοκή τους με ένα έργο. Για αυτό, οι συμμετέχοντες, προτίμησαν τη δεκαδική από την κλασματική αναπαράσταση των άρρητων, εφόσον με την αριθμομηχανή σύγκριναν ευκολότερα τους δοσμένους αριθμούς. Υπεργενίκευσαν την απειροψηφία των δεκαδικών αριθμών, χωρίς να έχουν συνυπολογίσει την περιοδικότητά τους, οδήγησε σε σύγχυση στην προσπάθειά τους να ταξινομήσουν δεκαδικούς αριθμούς.

Οι Zoitsakos κ.ά. (2013) παρουσίασαν φασματικά την επίδοση των εκπαιδευτικών βάσει του πως προτίθενται να προσαρμόσουν τις μαθηματικές έννοιες και διεργασίες που εμπλέκουν σε διαφορετικό πλαίσιο διδασκαλίας. Χαρακτήρισαν τη *προ-διαδικασία* (pre-procedure) όπου ο συμμετέχων δεν δίνει καμία απάντηση ή δίνει μερική. Τη *διαδικασία* (procedure), όπου ακολουθεί μια αλγοριθμική λύση σε προκαθορισμένα βήματα για προβλήματα ρουτίνας. Τη *διεργασία* (process), όπου παρουσιάζει μια ευέλικτη λύση με εννοιολογικές εναλλαγές. Την *εννοιο-διεργασία* (procept), όπου εκφράζει την ικανότητα σκέψης των μαθηματικών συμβολικά.

Παράλληλα, οι Zachariades, κ.ά. (2013) ανέπτυξαν ένα ιεραρχικό μοντέλο για την αναγνώριση του τρόπου συλλογισμού και της γνώσης τους για τους πραγματικούς αριθμούς. Συμπυκνώνοντας τα συμπεράσματα και άλλων ερευνών, διαμορφώθηκαν τρεις τύποι

συλλογισμού:

- *Αναστοχαστικός* τρόπος σκέψης χαρακτηρίστηκε αυτός που συνοδευόταν από βαθιά εννοιολογική κατανόηση και αντίληψη της δομής των πραγματικών αριθμών. Όσοι εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία αντιλήφθηκαν την πυκνότητα ρητών και άρρητων. Έτσι τους ήταν ξεκάθαρο πως μεταξύ δύο άνισων ρητών υπάρχουν άπειροι άρρητοι ανεξάρτητα από την αναπαράστασή τους.
- Ο *αναλυτικός* τρόπος εκφράζει την δυνατότητα αναγνώρισης και κατανόησης των ορισμών και ορισμένων χαρακτηριστικών των άρρητων, που όμως δεν επαρκούν για την αντιμετώπιση των αναστοχαστικών προβλημάτων. Όσοι εμπίπτουν στην κατηγορία αναγνώρισαν ρητούς και άρρητους σε κλασματική ή δεκαδική μορφή, από τους ορισμούς που έμαθαν στο σχολείο. Οι συνολοθεωρητικοί ορισμοί φάνηκαν χρήσιμοι για τη σωστή ταυτοποίηση ρητών και άρρητων, αλλά δεν επέτρεψαν τον εννοιολογικό ευέλικτο συλλογισμό γύρω από τη δομή τους. Ως εκ τούτου η πυκνότητα ήταν δυσνόητη έννοια για αυτούς. Μόνο μετά την καθοδήγηση του ερευνητή στη συνέντευξη, μπόρεσαν ορισμένοι να διορθώσουν την απάντησή τους για το πόσοι άρρητοι υπάρχουν μεταξύ δύο ρητών και μόνο μετά από την μετατροπή τους σε δεκαδικούς.
- Όσοι χαρακτηρίστηκαν με *συστημικό* τρόπο σκέψης φάνηκε να έχουν έντονες δυσκολίες και παρανοήσεις για τους πραγματικούς αριθμούς, κυρίως γιατί δεν μπόρεσαν να εφαρμόσουν ούτε τους ορισμούς, ούτε τις αναπαραστάσεις που ήξεραν. Δεν μπόρεσαν να κατατάξουν στο σωστό σύνολο τους αριθμούς και βασίστηκαν εντελώς στην εμπειρία τους με τους φυσικούς αριθμούς. Όμως ορισμένοι από αυτή την κατηγορία έδειξαν κάποια στοιχεία αναλυτικής σκέψης.

Οι Yan και Hanna (2019) βρήκαν πως οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα τους, όσο ανακατασκεύαζαν τις αποδείξεις, ενίσχυαν την επιχειρηματολογία τους προσπαθώντας να εξηγήσουν, κατά βάση στον εαυτό τους, το τι κάνουν.

Οι Belin και Akar (2018) διερεύνησαν τα νοήματα που ανέπτυξαν υποψήφιοι δάσκαλοι μαθηματικών κατά τη διάρκεια μιας σειράς μαθημάτων ποσοτικού συλλογισμού (quantitative reasoning). Στο μάθημα οι ποσότητες απεικονίστηκαν σε διαγράμματα, οι φοιτητές έκαναν συνδέσεις μεταξύ διαίρεσης και πολλαπλών αναπαραστάσεων των ρητών, χωρίζοντας το διάγραμμα σε ίσα μέρη, της ομαδοποιώντας και της απαριθμώντας τα μέρη αυτά. Κατά τη στρογγυλοποίηση των δεκαδικών έβγαλαν το συμπέρασμα πως οι ρητοί προσεγγίζονται από άλλους ρητούς. Οι ερευνητές ισχυρίστηκαν πως οι συμμετέχοντες τελικά έβγαλαν το συμπέρασμα πως και οι ρητοί προσεγγίζονται με ανάλογο τρόπο.

Ο Bair και Rich (2011) πρότειναν ένα πλαίσιο επιπέδων για τον χαρακτηρισμό της ΜΚΤ. Ανέπτυξαν το πλαίσιο πάνω σε τέσσερα στοιχεία που εκφράστηκαν σε πέντε επίπεδα προόδου. Όρισαν έτσι το δείκτη προόδου του κάθε στοιχείου της ΜΚΤ ως εξής:

1. Επίπεδο 0, Εισαγωγή
2. Επίπεδο 1, Αναδυόμενη
3. Επίπεδο 2, Αναπτυσσόμενη
4. Επίπεδο 3, Ωρίμανσης
5. Επίπεδο 4, Βαθιά συνδεδεμένη ΜΚΤ.

Στο επίπεδο 4 κατέταξαν όποιον κατόρθωσε να εξηγήσει το σκεπτικό του, είχε την ικανότητα να χρησιμοποιεί πολλαπλές αναπαραστάσεις, αναγνώρισε τις σχέσεις μεταξύ εννοιολογικά όμοιων προβλημάτων και τέλος μπόρεσε να αναδιατυπώσει ένα πρόβλημα.

Οι Anhalt και Cortez (2016) θεωρούν πως καλοσχεδιασμένες μαθηματικές δραστηριότητες μοντελοποίησης δύναται να ενσωματώνουν πολλαπλές μαθηματικές πρακτικές, εφόσον η μοντελοποίηση προϋποθέτει την τεκμηρίωση υποθέσεων, την επαλήθευση συμπερασμάτων, την επαναξιολόγηση επιλογών και υποθέσεων έως ότου να επιτευχθεί η επιθυμητή λύση. Τέτοιες πρακτικές αφορούν την επιμονή στην επίλυση του προβλήματος, τη δυνατότητα αφαιρετικού και ποσοτικού συλλογισμού, την εστίαση στην ακρίβεια. Η επικοινωνία της τελικής λύσης σε άλλους έπεται πως σε κάθε στάδιο του κύκλου απαιτείται πρόσθετα αιτιολόγηση και σαφήνεια.

Οι ερευνητές πιστεύουν πως οι ισχυρισμοί που αντανakλούν μια σημαντική μαθηματική ικανότητα είναι όσοι εντάσσουν μαθηματικούς όρους και έννοιες στο πλαίσιο του προβλήματος και αντίστροφα φανερώνουν τη σύνδεση της εμπειρικής κατάστασης με τους ορισμούς. Δηλαδή ο ισχυρισμός ενισχύεται όταν υπάρχει διαρκής έλεγχος στο που αναφέρεται το αναπτυσσόμενο μαθηματικό μοντέλο και πως ερμηνεύεται.

4.4 Διδακτικές προτάσεις και παρεμβάσεις για τους άρρητους

Οι συστάσεις για τη διδασκαλία αφορούν είτε τον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί απευθύνονται στους μαθητές, είτε στοιχεία για τις ανάγκες επιμόρφωσής τους ή είναι συστάσεις για τα σχολικά εγχειρίδια και το ΑΠΣ. Οι διδακτικές παρεμβάσεις αφορούν συνολικότερα τη ροή του μαθήματος, τον διαφορετικό τρόπο παρουσίασης κάποιου διδακτικού θέματος κ.ά.

4.4.1 Εστιάζοντας στους μαθητές

Οι επιστημολογικές δυσκολίες είναι αναπόφευκτες στα Μαθηματικά και έτσι γίνονται αναπόσπαστο κομμάτι της έννοιας της διδασκαλίας, ειδικά στην περίπτωση των άρρητων. Αυτές οι δυσκολίες προκύπτουν από τη φύση των άρρητων αριθμών και πρέπει να συνυπολογίζονται στο σχέδιο διδασκαλίας τους (Soylu, Akgün, Dündar και Isleyen, 2011).

Το θέμα των άρρητων αριθμών θα πρέπει να εξηγείται στη βάση των ιστορικών και ψυχολογικών παραμέτρων, συνυπολογίζοντας τα δύο μεγάλα διαισθητικά εμπόδια που ενυπάρχουν, την έννοια της ασυμμετρίας μεγεθών και του μη αριθμήσιμου άπειρου του συνόλου των άρρητων (Guner, 2016).

Η ιστορική πορεία του ορισμού των άρρητων αριθμών στη βάση των ρητών είναι απαραίτητο στοιχείο της μετάβασης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (Kidron, 2016). Το άπειρο είναι το νοητικό αντικείμενο (mental object) που λαμβάνεται από την αποκρυστάλλωση μιας ατέρμονης διαδικασίας. Χρειάζεται διερεύνηση ο τρόπος με τον οποίο θα κατορθώσουν οι μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την αντιστοιχισή της ασυμμετρίας μεγεθών, που δεν μπορούν να κατασκευαστούν γεωμετρικά, με σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών (Voskoglou, 2013).

Τα μαθηματικά προβλήματα ιστορικών κειμένων μπορούν να εμπλουτίσουν την καθημερινή διδασκαλία. Όχι ως απλή πληροφόρηση του τι συνέβη αλλά με τρόπο που να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών, να τους προκαλέσει να διερευνήσουν την ανθρώπινη δραστηριότητα, να αντιληφθούν πως ξεπεράστηκαν οι δυσκολίες που και εκείνοι αντιμετωπίζουν, ώστε να εμβαθύνουν τη μαθηματική τους κατανόηση (Κόσουβας, 2018).

Υπάρχουν ερευνητές που εντοπίζουν λάθη στη διδακτική πρακτική καταλήγοντας στο τι πρέπει να αποφεύγουν οι εκπαιδευτικοί. Ορισμένοι καθηγητές, για να διευκολύνουν τους μαθητές να καταλάβουν, τους ενθαρρύνουν να σκέφτονται τους άρρητους προσεγγιστικά μέσω των ρητών. Αυτό έχει αποδειχθεί πως προκαλεί παρανοήσεις (González-Martin, Giraldo, και Souto, 2013).

Sirotic και Zazkis, 2007β) και πρέπει να αποφεύγεται (Patel και Varma, 2018). Δεν έχει διδακτική αξία να παρουσιάζονται οι άρρητοι ως ένα νέο είδος αριθμού.

Η Kidron (2018) επιβεβαιώνει, αυτό που οι Zazkis και Sirotic (Zazkis και Sirotic, 2010· Zazkis, 2005) ονομάζουν *απουσία συνδέσμου* (missing link), δηλαδή την ανάγκη επισταμένης διδασκαλίας που να αναδεικνύει την ισοδυναμία των ορισμών των άρρητων, όπως δίνονται στα σχολικά βιβλία.

Χρειάζεται προσοχή στη διατύπωση ερωτημάτων κατά τη διδασκαλία και στην κατάλληλη σύνδεση σημαινόμενου με ένα σύνολο σημαινόντων (Shinno, 2018).

Η εισαγωγή των άρρητων μπορεί γίνει από το πρακτικό πρόβλημα της μέτρησης ή της λύσης αλγεβρικών εξισώσεων (Shinno, 2008). Ιδιαίτερη διδακτική προσοχή χρειάζεται να λυθεί η σύγχυση που προκύπτει για την ύπαρξη των ριζών της εξίσωσης $x^2=a$, $a>0$, με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας αριθμού ως θετικό αριθμό. Ο συγγραφέας πιστεύει πως η απόρριψη της αρνητικής ρίζας είναι ένας αυθαίρετος περιορισμός που επιβάλλει δυσκολίες στη διδασκαλία της ρίζας ανώτερης τάξης και δεν επιτρέπει να δουν οι μαθητές τη ρίζα ως την αντίστροφη διαδικασία της δύναμης αριθμού (Voskoglou, 2011).

Η εμβάθυνση στην έννοια του άρρητου συντελείται με τη διδασκαλία της ισοδυναμίας των ορισμών που δίνονται στα σχολικά βιβλία (απειροσμήφιοι μη περιοδικοί δεκαδικοί ή αριθμοί που δεν γράφονται ως κλάσμα ακέραιων όρων). Η συνοχή σχετικών εννοιών, ουσιαστικό στοιχείο στα Μαθηματικά, μπορεί να μην γίνει αντιληπτή αν δεν υπάρχει μια επισταμένη παρουσίαση του πως και γιατί ισοδυναμούν. Αυτή η προσπάθεια μπορεί να γίνει βάσει των αναπαραστάσεων και των αδιαφανών χαρακτηριστικών τους (Zazkis και Sirotic, 2010).

Ο όρος “τετραγωνική ρίζα” εισάγεται πριν από την εισαγωγή των όρων “ρητός αριθμός”, “άρρητος” και των αντίστοιχων συμβόλων (Shinno, 2017). Ο ορισμός των ρητών πρέπει να εισάγεται εφόσον έχει γίνει ξεκάθαρο πως τα κλάσματα και οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί είναι οι ίδιοι αριθμοί. Η έννοια της ασυμμετρίας (μη περιοδικότητας) δεκαδικών αριθμών πρέπει να γίνει η βάση για την εισαγωγή των άρρητων και του ορισμού των πραγματικών.

Η εναλλαγή μεταξύ της αντίληψης των άρρητων ως διαδικασίες ή ως αντικείμενα, θα εξασφαλιστεί με την διδασκαλία της ισοδυναμίας των ορισμών από κοινού με τη γεωμετρική τους αναπαραστάση (Hayfa και Saikaly, 2016). Είναι αναγκαία μια διδακτική προσέγγιση που να στηρίζεται γόνιμα στην ήδη υπάρχουσα άτυπη γνώση και αντίληψη των αριθμών. Η διδασκαλία θα πρέπει να γίνεται με πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών, εμπλουτίζοντας τη γεωμετρική αντίληψη των μαθητών (Voskoglou, 2012).

Ο εμπλουτισμός με παραδείγματα μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές με τις νοητικές κατασκευές

τους. Παραδείγματα στη βάση των αναπαραστάσεων μπορούν να επιτρέψουν στους μαθητές, όχι μόνο να δουν τα προφανή, αλλά να παρατηρήσουν και τα μη προφανή. “Να αναγνωρίσουν την έννοια όχι ως το τι είναι αλλά ως το τι δεν είναι” (Zazkis, 2005, σελ. 208).

Η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να βοηθά τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις νοητικές δομές (mental structures), που ήδη έχουν, για να κατανοήσουν όσα περισσότερα μπορούν και ταυτόχρονα να τους βοηθά να δημιουργήσουν νέες, ενισχυμένες για την κατανόηση όλο και ανώτερων Μαθηματικών (Voskoglou, 2013). Στη συγκεκριμένη έρευνα, ο Voskoglou προτείνει μια σειρά δραστηριοτήτων σε αυτό το πνεύμα.

4.4.2 Εστιάζοντας στους εκπαιδευτικούς

Στην έρευνα η κατανόηση της αρρητότητας σχετίζεται με τις αποδείξεις, τα όρια και το άπειρο (π.χ. Tall, 2001). Ο βαθμός που αυτές οι παρατηρήσεις συνδέονται με τις διδακτικές επιλογές και πρακτικές, θα πρέπει ενσωματώνεται στα προγραμμάτων επιμόρφωσης εκπαιδευτικών (στο Sirotic και Zazkis, 2007β).

Συγκεκριμένα χρειάζεται να βελτιωθεί και η διαίσθηση των εκπαιδευτικών για την πυκνότητα των ρητών και τη συνέχεια των πραγματικών αριθμών (Voskoglou, 2011). Η συνοχή των μαθηματικών ιδεών, στη λογική της μορφή, φαίνεται στην περίπτωση των αποδείξεων. Η διδασκαλία για την ανακατασκευή αποδείξεων της αρρητότητας αφορά και τους φοιτητές υποψήφιους εκπαιδευτικούς (Yan και Hanna, 2019).

Η ενσωμάτωση της ακαδημαϊκής γνώσης στην διδακτική πρακτική παρουσιάζει αντικρουόμενα στοιχεία (Moreira, και David, 2008). Είναι αναγκαία η έρευνα γύρω από τα χαρακτηριστικά που αποσαφηνίζουν τους λόγους για τους οποίους μαθηματικά ορθές αντιλήψεις δεν μεταφράζονται πάντα σε διδακτικές προσεγγίσεις χωρίς εσφαλμένες μαθηματικές ιδέες (Zoitsakos, κ.ά., 2013). Τα ερευνητικά ευρήματα υπογραμμίζουν σαφώς πως η μαθηματική γνώση είναι απαραίτητη όψη της διδασκαλίας, αν και αφορά μια από τις όψεις που κάθε εκπαιδευτικός ενσωματώνει τελικά στην πρακτική του (Leikin, κ.ά., 2018). Η διδακτική πρακτική έχει :

- Τις *μαθηματικές όψεις*, που γενικώς αφορούν το μαθηματικό περιεχόμενο και τις μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και τεχνικές απόδειξης.
- Τις *μεταμαθηματικές όψεις*, που στο πλαίσιο ενός σχολικού μαθήματος μπορεί να είναι η ουσία της απόδειξης, το νόημα των θεωρημάτων και των ορισμών, η αυστηρότητα των

μαθηματικής γλώσσας, η διάκριση μεταξύ στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και αλγορίθμων, η εκτίμηση της ομορφιάς των Μαθηματικών, η ιστορική τους εξέλιξης και η αφαίρεση.

- Τις *ψυχολογικές όψεις*, που παρουσιάζονται σε ένα μάθημα Μαθηματικών και περιλαμβάνουν τις *γνωστικές πτυχές*, όπως η διαδικασία απόκτησης της γνώσης ή οι δυσκολίες μάθησης, και *συναισθηματικές πτυχές*, όπως η περιέργεια, το ενδιαφέρον, το κίνητρο και η πρόκληση.
- Τις *διδακτικές όψεις* που είναι άμεσα συνδεδεμένες με τη στρατηγική διδασκαλίας και την οργάνωση του ΑΠΣ.

(Leikin, κ.ά., 2018, σελ. 456-457)

Όσοι θεωρούν τα Μαθηματικά ως μια αναπτυσσόμενη επιστήμη, πρότειναν την ενσωμάτωση του περιεχομένου της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία.

Άλλοι αντιμετωπίζουν τα Ανώτερα Μαθηματικά ως πηγή εμπλουτισμού της διδασκαλίας και της προετοιμασίας των εκπαιδευτικών. Υπό αυτό το πρίσμα κάποιος από τους συμμετέχοντες της έρευνας των Leikin, κ.ά. (2018) περιέγραψε πως στην προσπάθειά του να εισάγει νέα δύσκολα θέματα διαισθητικά και ψυχαγωγικά, ενσωματώνει διάφορες εικονογραφήσεις που εξηγούν και οπτικοποιούν το ζητούμενο, για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$ αποδεικνύεται άρρητος απλώς διπλώνοντας ένα χαρτί.

Άλλη άποψη θεωρεί τα Ανώτερα Μαθηματικά ως στοιχείο επέκτασης της γνώσης του εκπαιδευτικού. Οι πρακτικές που τη συνοδεύουν τείνουν στην ανάλυση του νοήματος των θεωρημάτων και των ορισμών. Βασικό διδακτικό εργαλείο σε αυτή την περίπτωση είναι η απόδειξη παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.

Οι συγγραφείς σημείωσαν ως σημαντική και ταυτόχρονα δύσκολη την ανάπτυξη μιας παραγωγικής σχέσης μεταξύ μαθηματικής και διδακτικής κοινότητας. Συμπληρωματικά σημείωσαν πως η υπέρβαση αυτών των δυσκολιών είναι κρίσιμη για την αποτελεσματικότερη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών μαθηματικών (Leikin, κ.ά., 2018).

Οι Takker και Subramaniam (2019) παρουσίασαν μια οργάνωση των γνωστικών απαιτήσεων για την επαγγελματική εξέλιξη των εκπαιδευτικών. Ξεχώρισαν έναν από τους συμμετέχοντες για τον τρόπο που έκανε την εισαγωγή των δεκαδικών αριθμών, αξιοποιώντας τη γνώση των μαθητών για τις αξίες των ψηφίων στους ακεραίους. Αρχικά χρησιμοποίησε παραδείγματα εκτίμησης μήκους, έκπτωσης τιμής και υπολογισμού μερικού όγκου. Στη συνέχεια έφτιαξε ένα ορθογώνιο, το χώρισε σε 10x10 κελιά, για να αναπαραστήσει κλάσματα με παρονομαστή το 100. Σιγά σιγά μετατόπισε τη συζήτηση στην αξία των ψηφίων του αριθμού 256 ρωτώντας πως

θα μπορούσε να αναπαρασταθεί. Καθόλη τη διάρκεια αξιολογούσε τις απαντήσεις των παιδιών ως προς την ακρίβεια, για το αν γίνονται κατανοητές από όλη την τάξη και σε ποιούς ορισμούς βασίστηκαν. Διαρκώς επέμενε στη διεξαγωγή συμπεράσματος. Με αφορμή τα παραπάνω, οι συγγραφείς κατέληξαν πως η κατανόηση χτίζεται στη σωστή σειρά των παραδειγμάτων, την τεκμηρίωσή τους, την προσπάθεια γενίκευσης και τα συμπεράσματα (Takker και Subramaniam, 2019).

Για τις διαφορετικές τυπολογίες εκπαιδευτικών, σύμφωνα με τον Kontorovich (2016), η διδασκαλία μπορεί να είναι τυπική, όταν υιοθετούνται αμιγώς τυπικές μαθηματικές μέθοδοι. Σε άλλη περίπτωση μπορεί να στηρίζεται αποκλειστικά σε άτυπες μεθόδους, δηλαδή να προσφεύγει κυρίως σε εμπειρικές, περιγραφικές και διαισθητικές προσεγγίσεις. Κάποιος μπορεί να παρουσιάζει συνδυασμό τυπικών και άτυπων μεθόδων, άμεσα ή έμμεσα.

Ο Kontorovich (2016) διέκρινε στρατηγικές διδασκαλίας που στηρίζονταν στην εντελώς αυθαίρετη επιλογή ενός ορισμού και συνεπώς έκρινε ότι μια επιλογή ενδέχεται να προκαλέσει μαθηματική αντίφαση χωρίς να έχει κάποιο παιδαγωγικό στόχο. Τέτοιες στρατηγικές, παρατήρησε, διακρίνονται από τη *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών* (knowledge of content and students-KCS) και τη *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας* (knowledge of content and teaching-KCT).

Κάποιος από τους συμμετέχοντες της έρευνας, χρησιμοποίησε ως παράδειγμα τις τετραγωνικές ρίζες στους μιγαδικούς αριθμούς. Θεωρώντας πως κάθε μαθηματικό σύμβολο πρέπει να έχει μοναδική αναφορά, είπε πως οι ρίζες πρέπει να δηλώνονται αποκλειστικά με τη δύναμη $\frac{1}{2}$, στο σύνολο $\mathbb{C}$, εφόσον δεν είναι διατεταγμένο και άρα δεν μπορούμε να επιλέξουμε τον θετικό κλάδο όπως στο $\mathbb{R}$. Σε αυτές τις στρατηγικές ο Kontorovich διέκρινε πως κυριαρχεί η *γνώση για το μαθηματικό περιεχόμενο* (knowledge of mathematical content) αφού στηρίχθηκαν στην επικλήση των ιδιοτήτων της έννοιας.

Σε ένα τρίτο παράδειγμα, όπου σε ένα γενικό μάθημα ο ίδιος εκπαιδευτικός θα παρουσίαζε μία μοναδική λύση, αυτή που η μιγαδική τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, εφόσον υποστηρίζει πως οι φοιτητές ενός τέτοιου γενικού μαθήματος δεν προορίζονται να γίνουν μαθηματικοί και επιπλέον τα βιβλία τους δεν προβλέπουν άλλη λύση. Ο Kontorovich θεωρεί πως όταν ο εκπαιδευτικός αλλάζει το μαθηματικό περιεχόμενο που επιλέγει να προβάλλει, ανάλογα με το κοινό που διδάσκει, τότε χαρακτηρίζεται από τη *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών* (KCS), τη *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας* (KCT) και τη *γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου* (horizon content knowledge- HCK).

Σε άλλη περίπτωση (Zoisakos, κ.α., 2013) εξετάζεται πως επηρεάζεται η προσέγγιση ενεργών

μαθηματικών, με διδακτική εμπειρία πάνω από 15 χρόνια, στις υποθετικές απαντήσεις των μαθητών τους. Αντιμετώπισαν ένα διδακτικό σενάριο γύρω από την ερώτηση: “Ποιό είναι το νόημα της αναπαράστασης $0.3999\dots$ (άπειρο πλήθος 9);” και πράγματι φάνηκε πως το πως επηρεάζονται άμεσα από τη γνώση που έχουν οι ίδιοι.

Σημαντικό μέρος των εκπαιδευτικών που κατανοούσαν ακριβώς την αναπαράσταση ‘ $0.3999\dots$ ’ προσέφυγαν σε καθαρά τυπικές προσεγγίσεις για τη διάρθρωση της διδακτικής τους στρατηγικής και την αντιμετώπιση σχετικών παρανοήσεων από τους μαθητές. Κάποιοι άλλοι αναγνώρισαν πως οι αμιγώς τυπικές μέθοδοι έχουν περιορισμένο βαθμό πειστικότητας για τους μαθητές και επέλεξαν να τις συνοδεύσουν με κατάλληλα διαισθητικά επιχειρήματα και περιγραφικές επεξηγήσεις.

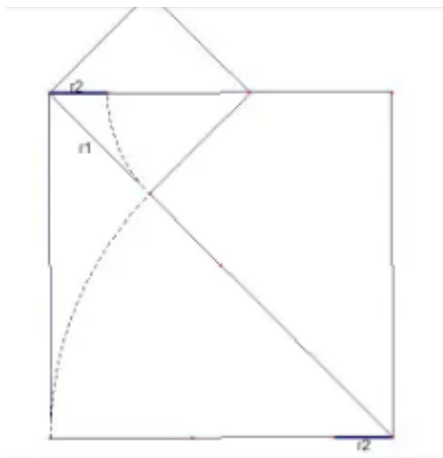
Η Sierpiska (2019) διαμόρφωσε ένα εγχειρίδιο προς εκπαιδευτικούς πανεπιστημίου, που διδάσκουν ένα μάθημα σχετικό με τις δυσκολίες των μαθητών στα Μαθηματικά, βάση της δικής της εμπειρίας από προγράμματα επιμόρφωσης. Το μάθημα είναι επί της ουσίας ένας συνδυασμός του MATH 630 Θέματα της Ψυχολογίας της ΔτΜ (Topics in the Psychology of Mathematics Education) και του MAST 652 Θέματα της Έρευνας της ΔτΜ (Topics in Research in Mathematics Education), του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Ειδίκευσης (ΜΠΕ) στη Διδασκαλία των Μαθηματικών (Master in the Teaching of Mathematics program) και της Διδακτικής των Μαθηματικών (Mathematics Education) στο πλαίσιο του ΜΠΕ του Μαθηματικού τμήματος αντίστοιχα.

Πρόκειται για μια εκτενή συλλογή διδακτικών έργων και δραστηριοτήτων ανά θέμα, που συνοδεύονται από την αντίστοιχη ερευνητική βιβλιογραφία. Προαπαιτούμενη γνώση για τους συμμετέχοντες του μαθήματος είναι η Γραμμική Άλγεβρα, ο Απειροστικός Λογισμός, οι Πιθανότητες, η Στατιστική και η Αφηρημένη Άλγεβρα. Για τους άρρητους παρουσιάζονται δραστηριότητες σύμφωνα με την ιστορική προσέγγιση, στη βάση της ασυμμετρίας.

Η Sierpiska σημειώνει πως οι περισσότερες αποδείξεις, που αναμένεται να δώσουν οι συμμετέχοντες, θα είναι με απαγωγή σε άτοπο αλλά αυτό δεν είναι πειστικό συνήθως για τους “κοινούς θνητούς” (Sierpiska, 2019, σελ. 31). Ένας λόγος που εξηγεί το φαινόμενο είναι πως η Αρχή Αποκλειόμενου Μέσου ισχύει μόνο στην τυπική μαθηματική λογική και όχι γενικά στη ζωή. Ένας άλλος λόγος αφορά τη μη διαισθητική ιδιότητα, ότι αν κάτι ψευδές προκύψει από μια υπόθεση μέσω σωστού συλλογισμού τότε κατ’ ανάγκη η υπόθεση θα είναι επίσης ψευδής.

Τονίζοντας την ανάγκη οι αποδείξεις όχι μόνο να αποδεικνύουν *πως* (that) κάτι ισχύει αλλά να αποδεικνύουν και το *γιατί* (why), προτείνει αρχικά να δίνεται μια άλλη μέθοδος που οπτικοποιεί τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο για την εύρεση ΜΚΔ, όπου ξεκινώντας από ένα αρχικό τετράγωνο

διαρκώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τετράγωνα πλευράς ίση με τη διαφορά διαγωνίου και πλευράς, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Ασυμμετρία πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου (Sierpinska, 2019, σελ. 31).

Σημασία έχει πως σε συνδυασμό με αυτή τη διαισθητική απόδειξη, παρουσιάζει και τρεις τυπικές αποδείξεις, δύο με τον συνηθή τρόπο απαγωγής σε άτοπο και μια με τη μέθοδο που ο Dedekind όρισε τους άρρητους αριθμούς (Sierpinska, 2019, σελ. 33-34). Σχολιάζει πως η μέθοδος του Dedekind αναπόφευκτα βασίζεται στην εις άτοπον απαγωγή αλλά στηρίζεται στο Αξίωμα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών, που είναι διαισθητικά πιο φυσικό και άρα μπορεί να πείσει καλύτερα.

4.4.3 Εστιάζοντας στα σχολικά εγχειρίδια

Οι Moreira και David (2008) αντιπαραβάλλοντας την ακαδημαϊκή και την παιδαγωγική σκοπιά, βρήκαν πως συνήθως στα σχολικά βιβλία οι άρρητοι εισαγωγικά ορίζονται ως οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσμα με ακέραιους όρους ή ως μη περιοδικοί απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί. Και οι δύο ορισμοί, θεώρησαν, δεν συνάδουν με την αντίληψη που έχουν οι μαθητές για τους αριθμούς μέχρι αυτό το σημείο, δηλαδή για το σύνολο των ρητών αριθμών. Ως εκ τούτου δεν μπορούν να δουν το νόημα των αριθμών αυτών.

Η αξιωματική προσέγγιση, δηλαδή το σύνολο των πραγματικών ως το μοναδικό πλήρες και διατεταγμένο σώμα αριθμών ως προς τη δομή του, επίσης δεν επιτρέπει στους μαθητές βρουν το νόημα στη φύση των στοιχείων του συνόλου.

Η προοπτική να παρουσιάζονται οι άρρητοι στη βάση της ασυμμετρίας μεγεθών, πιστεύουν, μπορεί να φανερώσει την ανεπάρκεια των ρητών για να εκφραστούν μετρήσιμα ευθύγραμμα τμήματα. Για αυτό οι ερευνητές τόνισαν την ανάγκη να υπάρξει μια διαφορετική επέκταση της

έννοιας του αριθμού για αυτό το φαινόμενο. Διατύπωσαν δηλαδή την ανάγκη οι μαθητές να μελετήσουν τις αναλογίες που δεν εκφράζονται ως λόγοι ακεραίων. Η σύνδεση της ασυμμετρίας μέσω της μέτρησης φέρνει στο φως τη σχέση της με τις άπειρες διαδικασίες και έτσι μπορεί να γίνει η σύνδεση με την απειροσική μη περιοδική έκφραση. Κατέληξαν πως “υπάρχει η ανάγκη για μια πιο σχολικο-προσανατολισμένη άποψη των πραγματικών αριθμών από αυτή που επικρατεί από την αποδοχή ενός αξιώματος που άμεσα τους δέχεται [τους πραγματικούς αριθμούς] ως μια εντελώς αφηρημένη δομή” (Moreira και David, 2008, σελ. 37).

Ο Ozkan (2019) πιστεύει πως οι έννοιες στη σχολική ζωή δεν θα πρέπει να αντικρούονται από αυτές της καθημερινής ζωής. Κατ’ αυτόν οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να κάνουν συνδέσεις μεταξύ εννοιών που γνωρίζουν και νέων που μαθαίνουν, κατά συνέπεια είναι καλό να χρησιμοποιούνται παραδείγματα που συναντούν στη ζωή τους. Συνιστά τα σχολικά βιβλία και οι εκπαιδευτικοί να εστιάζουν στις έννοιες, όλες οι παρανοήσεις θα πρέπει να διορθώνονται και κατόπιν να εισάγονται νέες έννοιες. Επίσης συνιστά η εκπαιδευτική διαδικασία να προετοιμάζεται με βάση συχνές δειγματοληπτικές έρευνες για τους μαθητές της τάξης. Η καθοδήγηση των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς θα πρέπει να συνοδεύει όλη τη διαδικασία εμπλοκής τους με τις νέες έννοιες. Προτείνει στους εκπαιδευτικούς να κρατούν σημειώσεις για το εκφράζει ο κάθε μαθητής στο πλαίσιο της εμπειρίας τους, ώστε να λειτουργήσουν στο μέλλον ως πηγή του αναστοχασμού τους για τις παρανοήσεις που δημιουργήθηκαν στο μάθημα (Ozkan, 2019).

Πολλοί ερευνητές αναγνώρισαν την ανάγκη τα μελετηθούν ΑΠΣ σε σχέση με τους πραγματικούς αριθμούς (Hayfa και Saikaly, 2016· Güner, 2016· González-Martín, κ.ά., 2013).

Οι Hayfa και Saikaly (2016) πιστεύουν πως οι στόχοι των ΑΠΣ για τους άρρητους πρέπει να διερευνηθούν ως προς το κατά πόσο εξασφαλίζουν τη σύλληψη της διττής φύσης τους, ως διαδικασία και ως αντικείμενο. Η έρευνά τους ήταν μια θεσμική ανάλυση για το πως εισάγονται οι πραγματικοί αριθμοί στη δευτεροβάθμια, μέσω της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων. Ταυτόχρονα παρουσίασαν, ως προϋπόθεση σωστής διδασκαλίας, την ισοδυναμία μεταξύ των ορισμών και τη σημασία των γεωμετρικών αναπαραστάσεων των άρρητων. Σχολίασαν πως οργάνωση της εισαγωγής των πραγματικών αριθμών, όπως ήταν διαμορφωμένη την περίοδο της έρευνας, δεν συνεισφέρει στη μαθηματική κουλτούρα, ούτε αναπτύσσει τις επιθυμητές δεξιότητες που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές τελειώνοντας το σχολείο. Πολύ περισσότερο δεν εξοπλίζει τους μαθητές που επιθυμούν πτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά.

Η διαισθητική ικανότητα των μαθητών αδυνατίζει από την έντονη αριθμητικοποίηση των Μαθηματικών εις βάρος της γεωμετρικής (Voskoglou και Kosyvas, 2011). Συμπληρωματικά οι

Sirotic και Zazkis (2007α) βρήκαν πως μέρος της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί με την απειρία δεκαδικών ψηφίων σχετίζεται με την εξασθένηση της Γεωμετρίας στα ΑΠΣ και την τμηματοποίησή τους.

Ο Guner (2016) υπογράμμισε πως το θέμα των άρρητων αριθμών θα πρέπει να εξηγείται στη βάση των ιστορικών και ψυχολογικών παραμέτρων, συνυπολογίζοντας τα δύο μεγάλα διαισθητικά εμπόδια που ενυπάρχουν, την έννοια της ασυμμετρίας μεγεθών και του μη αριθμήσιμου άπειρου του συνόλου των άρρητων. Υποστήριξε πως αν αυτά συνυπολογιστούν τότε οι μαθητές έχουν καλύτερες πιθανότητες να αποφύγουν τις παρανοήσεις. Σε αυτή τη βάση οι González-Martín, κ.ά. (2013) παρατήρησαν πως για τα προγράμματα σπουδών της Γ Γυμνασίου και της Α Λυκείου, θα πρέπει να προσαρμοστούν αναλόγως και τα αντίστοιχα βιβλία. Αυτό έχει αξία να σημειωθεί, καθώς οι μαθητές στηρίζονται εξ ολοκλήρου σε παραδείγματα των σχολικών βιβλίων για να κάνουν υποθέσεις και να τεκμηριώσουν τις ιδιότητες των άρρητων αριθμών.

Σε αντίστοιχη θεσμική ανάλυση μέσω εγχειριδίων, οι Khechine και González-Martín (2017) βρήκαν πως τα προβλήματα που παρουσιάζονται είναι ρουτίνας. Έκριναν πως στα βιβλία η προσέγγιση είναι πραγματιστική. Οι άρρητοι (οι τετραγωνικές ρίζες και το π) παρουσιάζονται μέσω αλγορίθμων, αφήνοντας το θεωρητικό υπόβαθρο αυτών των έργων θολό.

Η Σγουρού (2019) εστίασε στη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών και συγκεκριμένα, για το βιβλίο της Άλγεβρας της Α' Λυκείου, παρατηρεί πως η διάκριση των πραγματικών αριθμών γίνεται μόνο στη βάση των ορισμών για τους ρητούς και τους άρρητους, χωρίς καμία αναφορά στη δεκαδική τους αναπαράσταση. Μάλιστα σημειώνει πως από το βιβλίο απουσιάζει οποιοδήποτε παράδειγμα για την ασυμμετρία των άρρητων (Σγουρού, 2019, σελ. 50-51).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες συλλογές έργων, όπως συγκροτήθηκαν ως ερευνητικό εργαλείο ή ως διδακτικές προτάσεις σε προγράμματα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών. Μετά τη σύντομη αναφορά που συνοψίζεται στον Πίνακα 1, συγκροτείται το σύγχρονο κάλεσμα για την έρευνα και την παραγωγή νέων υλικών για την κατανόηση και την εισαγωγική διδασκαλία των πραγματικών αριθμών.

Πίνακας: Σύνοψη διδακτικών προτάσεων

Θεματολογία έργων Προτάσεις/ Παρατηρήσεις	Που στηρίζεται; Ερευνητικά αποτελέσματα/ Θεωρητικό πλαίσιο
Προβλήματα αναλογίας μεταξύ ακεραίων και της αξίας των ψηφίων για την εισαγωγή του δεκαδικού συμβολισμού.	Σύνδεση την γνώσης των μαθητών και επέκταση αυτής (Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία) (Bair και Rich, 2011).
Πείραμα σκέψης με διαδραστικές δραστηριότητες, όπως το δίπλωμα χαρτιού, με στόχο την εναλλαγή από τη πρακτική/ εμπειρική γνώση στη μαθηματική/ θεωρητική που απαιτείται για την συνειδητοποίηση της ασυμμετρίας, όπως ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος.	Συνυπολογίζει ιστορικά και επιστημολογικά εμπόδια ή δυσκολίες. Το ιστορικό πλαίσιο αναδομείται ως πλαίσιο ανακάλυψης εντός τάξης, μέσω μιας προβληματικής κατάστασης (Tirosh και Tsamir, 2004) για την αναπαράσταση αριθμών. Η εννοιολογική αλλαγή προκύπτει εκμηδενίζοντας την τάση να δεσμεύεται ο μαθητής στο συγκεκριμένο χειραπτικό μέσο (Shinno, 2008. Shinno και Iwasaki, 2008).
Απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$ με το δίπλωμα χαρτιού, η κάλυψη επιφάνειας με πλακάκια ντόμινο ως βοηθητική κατασκευή, η χρήση ταχυμέτρου για την απεικόνιση της παραγωγού.	Η Ανεπτυγμένη μαθηματική σκέψη (Advanced Mathematical Thinking) χρησιμοποιείται στη διδακτική πρακτική. Σχετίζεται με μετα-μαθηματικά θέματα όπως η απόδειξη, η κομψότητα και η αυστηρότητα της γλώσσας ή με παιδαγωγικά θέματα όπως η σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών πεδίων (Leikin, κ.ά., 2018).
Ανάπτυξη διδακτικού κύκλου με στόχο την ανάπτυξη των νοητικών δομών που ήδη υπάρχουν και της κατασκευής νέων, μέσα από δραστηριότητες σε Η/Υ, τη συζήτηση εντός τάξης και ασκήσεις .	Θεωρία APOS σε συνδυασμό με το πλαίσιο ACE για την ανάπτυξη διδακτικού κύκλου (teaching cycle) (Voskoglou, 2013).
Χρήση πέντε διαφορετικών αποδείξεων για να αναγνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια της ιδέας-κλειδί. Επέκταση και σύγκριση της πρωτότυπης απόδειξης για την αρρητότητα του $\sqrt{k}$, όπου k μη τετράγωνος αριθμός, ώστε να εκφράζει την κλίση της ευθείας $y=\sqrt{k}\cdot x$.	Κάθε απόδειξη κρύβει μια ιδέα-κλειδί και γύρω από αυτή κατασκευάστηκε και έτσι πρέπει να ανακατασκευαστεί. Αντί να απομνημονευει κανείς ολόκληρη την απόδειξη, αρκεί να θυμάται την ιδέα-κλειδί της (Yan και Hanna, 2019).
Εισαγωγική διδακτική πρόταση για τους άρρητους αριθμούς με αποφυγή του συμβολισμού. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων.	Ιστορική προσέγγιση που στηρίζεται στην υπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους ρητούς και την ανάλυση αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (Porovic, 2015).
Συλλογή αποδείξεων της αρρητότητας του $\sqrt{2}$. Δραστηριότητες για την εύρεση κοινού	Εγχειρίδιο μαθήματος για την επιμόρφωση εκπαιδευτικών (Sierpinska, 2019).

μέτρου μεγεθών χρησιμοποιώντας τη σχέση διαγώνιου και πλευράς τετραγώνου.	
Ενσωμάτωση στα σχολικά εγχειρίδια δραστηριοτήτων με θεωρητική προέκταση που να τροφοδοτούν τη χρησιμότητα των άρρητων αριθμών.	Οι δραστηριότητες δεν πρέπει να έχουν αλγοριθμικό χαρακτήρα, στην απλή εφαρμογή κανόνων. Περισσότερο χρειάζεται ένα πλαίσιο όπου να προκύπτουν αναγκαστικά οι νέοι αριθμοί, όπως σε προβλήματα μέτρησης (Gonzalez-Martin, κ.ά., 2013).
Ερωτηματικές παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού κατά τη συζήτηση του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης τετραγωνικών ριζών. Απόδειξη πως ο $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος αριθμός μέσω απαγωγής σε άτοπο και χρήσης βασικών ταυτοτήτων.	Χρειάζεται προσοχή ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός θέτει τα ερωτήματα εντός τάξης, με έμφαση στη σειρά που τα θέτει, ώστε να δημιουργηθεί η κατάλληλη σημειωτική αλυσίδα (Shinno, 2018).
Εμπειρική δραστηριότητα που απεικονίζει τις ιδιότητες της πρόσθεσης. Η προσεταιριστική και η επιμεριστική ιδιότητα βοηθούν στη διάκριση του $2 + \sqrt{3}$ από το $2\sqrt{3}$, με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.	Δραστηριότητα μέτρησης που συνδυάζει τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα με χειραπτικά μέσα. Συνυπολογίζει τις δυσκολίες που υπάρχουν στην εκτίμηση, τη διάταξη και τις ιδιότητες των άρρητων αριθμών αποφεύγοντας τους δεκαδικούς (Coffey, 2001).
Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος με αλγεβρικούς χειρισμούς του $\sqrt{2}$ και απόδειξη. Εκτίμηση όγκου με διαφορετικές δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ και του π .	Δραστηριότητα που αποκαλύπτει τις παγίδες των υπολογισμών με αριθμομηχανή (Dolan, 1981).
“Η σκάλα του Εύδοξου”, ρητή προσέγγιση των άρρητων. Απόδειξη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγώνιου τετραγώνου που διαρκώς μειώνεται ("infinite descent") και την εις άτοπον απαγωγή.	Στηρίζεται στην ιστορική ανακάλυψη των αρρήτων και το γεγονός πως δεν είναι όλοι κανονικοί, δηλαδή δεν έχουν κάποιο μοτίβο στο δεκαδικό τους μέρος (Gardner, 1997).

5. Συζήτηση

Στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών, οι μελέτες για τη γνώση των πραγματικών αριθμών, των εκπαιδευτικών, των υποψήφιων δασκάλων και των μαθητών, φανερώνουν ιδιαίτερες παρανοήσεις. Σε αυτές τις έρευνες, οι συμμετέχοντες συνήθως απαντούν σε ερωτήσεις σχεδιασμένες έτσι ώστε να φανεί η κατανόηση επί μέρους πτυχών των πραγματικών αριθμών και οι μέθοδοι που επιστρατεύουν για να απαντήσουν.

Όλες οι έρευνες βρίσκουν πως μαθητές και εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στην κατανόηση των άρρητων, είτε λόγω διαισθητικής αδυναμίας είτε άλλης εννοιολογικής παρανόησης. Οι δυσκολίες αυτές αντανakλώνται κάπως στον τρόπο αναπαράστασης των αριθμών, στην αντιμετώπιση προβλημάτων ή στις μεθόδους διδασκαλίας.

Μεγάλο μέρος της έρευνας, που αφορά τους μαθητές, επικεντρώνεται συστηματικά σε διδακτικές προτάσεις με στόχο να δώσουν ευκαιρίες για την ανάδειξη της σχέσης ορισμών και αναπαραστάσεων. Παράλληλα, άλλο τμήμα των ερευνητών επικεντρώνεται σε στοιχεία επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, καθώς η συμβολή τους στην μάθηση και την κατανόηση είναι αναπόφευκτη.

Στο σχολείο, τώρα και παλαιότερα, οι άρρητοι ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή μέσω της άρνησης ιδιοτήτων των ρητών. Ως εκ τούτου, για το υπόλοιπο της εργασίας, δεν έχει ιδιαίτερο νόημα ο διαχωρισμός εκπαιδευτικών και μαθητών, μιας και οι εκπαιδευτικοί του σήμερα υπήρξαν μαθητές του χθες.

Σχετικά με το πως προσεγγίζουν οι σύγχρονες έρευνες τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών, σημειώνεται πως δεν εστιάζουν ακριβώς στο ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο (γενικό, βλ. Σχήμα 1), με την έννοια ότι κάποιες εξετάζουν ποικιλία αναπαραστάσεων (Voskoglou και Kosyvas, 2012· Zachariades, κ.ά., 2013), άλλες αυστηρά την απειροσική μορφή (Zoitsakos, κ.ά., 2015· Belin και Akar, 2017· Takker και Subramaniam, 2019), με τις περισσότερες τελικά να εστιάζουν μόνο στους άρρητους.

Αναλόγως οι άρρητοι δεν προσεγγίζονται ενιαία. Κάποιοι μελετούν συγκεκριμένα τα ριζικά (Kontorovich, 2016· Obersteiner και Hofreiter, 2017· Patel και Varma, 2018· Shinno, 2018· Ozkan, 2019) ή τη σχέση τους με τετραγωνικές εξισώσεις. Υπάρχουν συνολοθεωρητικές προσεγγίσεις, που εξετάζουν τους άρρητους ως υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (Hayfa και Saikaly, 2016· Moreira και David, 2008) ή ως αριθμητικό σύστημα. Από κάποιες προκύπτει πως η ύπαρξη τέτοιων αριθμών δεν είναι καν δεδομένη για τους συμμετέχοντες (Kidron, 2018). Μελετώνται επίσης οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των άρρητων (Voskoglou και Kosyvas,

2011· Shinno, 2017), όπως και η σχέση τους με τους ρητούς σε δεκαδική μορφή (Kidron, 2016) ή μη (Sirotic και Zazkis, 2004, 2007β, 2010).

Η έρευνα που σχεδίασαν οι Fischbein κ.ά. (1994) για τη μελέτη της κατανόησης των πραγματικών αριθμών σε μαθητές και φοιτητές υποψήφιους δασκάλους, αποτελεί ακόμη οδηγό για τη μελέτη της διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών, καθώς έθεσε ορισμένους άξονες για τη διερεύνηση του θέματος. Αυτοί ήταν:

- Η τυπική γνώση για τους αριθμούς, δηλαδή η αναγνώριση σε ποιο σύνολο ανήκει ή τη διάταξή τους (Zazkis και Sirotic, 2004· Sirotic και Zazkis, 2007β· Moreira και David, 2008· Zachariades, κ.ά., 2013· Obersteiner και Hofreiter, 2017· Kidron, 2018).
- Η δυνατότητα ορισμού των άρρητων, ως πηλίκo ακεραίων ή ως περιοδικός δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία, και ο ορισμός των πραγματικών ως ένας αριθμός που είναι είτε ρητός ή άρρητος (Zazkis και Sirotic, 2004· Sirotic και Zazkis, 2007β· Zazkis και Sirotic, 2010· Zachariades, κ.ά., 2013· Zoitsakos, κ.ά., 2013· Kidron, 2016· Hayfa και Saikaly, 2016· Belin και Akar, 2017· Shinno, 2017· Κόσυβας, 2018).
- Η ύπαρξη άπειρων σημείων εντός ενός διαστήματος (Voskoglou και Kosyvas, 2011, 2012· Zachariades, κ.ά., 2013).
- Η σχέση των πραγματικών αριθμών, άρρητων και ρητών, με τον αριθμητικό άξονα (Sirotic και Zazkis, 2007α· Voskoglou και Kosyvas, 2011, 2012· Patel και Varma, 2018).

Ένα βασικό συμπέρασμα είναι πως εν γένει στα Μαθηματικά η ιεραρχία των αριθμητικών συνόλων δεν διδάσκεται με έναν συστηματικό τρόπο. Για την έννοια του άρρητου αριθμού ειδικά επικρατεί σύγχυση στους μαθητές, εφόσον δεν καταφέρνουν να συνειδητοποιήσουν την ουσιαστική διαφορά μεταξύ περιοδικών και μη περιοδικών δεκαδικών αριθμών, όπως ορίζονται στο σχολείο. Βάσει του άλλου σχολικού ορισμού, άρρητοι ονομάζονται όσοι αριθμοί δε γράφονται ως πηλίκo ακεραίων (Obersteiner και Hofreiter, 2017), χωρίς να γίνεται σαφές το πως ισοδυναμεί με τον ορισμό του ως απειροψηφίου μη περιοδικού αριθμού. Στη διαφορά των ορισμών και την ισοδυναμία τους, είναι που κρύβεται η έννοια του πραγματικού αριθμού. Επιβεβαιώνεται πως οι κοινές δυσκολίες που παρουσιάζονται, σε ρητούς και άρρητους, αφορούν τις βαθύτερες έννοιες της πυκνότητας (Zachariades, κ.ά., 2013· Voskoglou και Kosyvas, 2011· Giannakoulis, κ.ά., 2007· Sirotic και Zazkis, 2007α, 2007β) και του ορίου (Kidron, 2016· Voskoglou και Kosyvas, 2011· Peled και HersHKovitz, 1999).

Η έννοια του αριθμού, όπως τίθεται στο σχολείο, αφορά μόνο ακριβή και πεπερασμένα μεγέθη, χωρίς να γίνεται εύκολα η αντιστοιχία με την έννοια του άρρητου και αυτό δημιουργεί συχνά τη

γνωστική σύγκρουση (Moreira και David, 2008). Μπορούμε εύκολα να διερευνήσουμε τους φυσικούς αριθμούς παρότι η ύπαρξή τους δεν εξαρτάται από εμάς, μέσω της αισθητικής εμπειρίας. Αντίθετα, στους άρρητους δεν υπάρχει κάποια ευθεία αναλογία με φυσικά φαινόμενα. Άρα η πρόσβαση σε ένα άρρητο μεγέθους (Obersteiner και Hofreiter, 2017) απαιτεί κάποια λογική διεργασία. Οπότε η εμπειρική προσέγγιση δεν αρκεί για να τεκμηριώσει το αν υπάρχουν τέτοια μεγέθη (Kidron, 2016). Η πραγματικότητα είναι πως οι πραγματικοί αριθμοί συνολικά αναφέρονται σε μήκη, επιφάνειες και όγκους, δηλαδή σε συνεχείς ποσότητες (Porovic, 2015). Άρα θα υπάρχει κάποιος τρόπος διαισθητικά να προσεγγιστούν ακόμη και οι άρρητοι ως υποσύνολο τους.

Αφού σημειωθεί πως οι δυσκολίες που προκύπτουν από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, υπάρχουν και στους ρητούς (Voskoglou και Kosynvas, 2012· Vamvakoussi, Christou και Vosniadou, 2018) και πως παρόλο που η αναπαράσταση μεγεθών δεν είναι κατ' ανάγκη βαρύνουσας σημασίας στα ανώτερα αριθμητικά συστήματα, το ότι μαθηματικά έμπειροι ενήλικες επεξεργάζονται καλύτερα τους αριθμούς μέσω της φυσικής τους αναφοράς (Patel και Varma, 2018· Obersteiner και Hofreiter, 2017) κρατά ανοιχτή τη συζήτηση για το πως μπορούν να αναπαρασταθούν οι άρρητοι.

Οι άρρητοι γενικώς, ακόμη και ο κατασκευάσιμος με τη μορφή ριζικών, θεωρούνται συχνά από μαθητές μη αναγκαίοι και άσχετοι με την καθημερινότητα. Η συχνή τους χρήση, από μόνη της, δεν αποκαλύπτει το περιεχόμενό τους (Ozkan, 2019). Από την άλλη, η προσπάθεια ορισμένων εκπαιδευτικών να διευκολύνουν τους μαθητές προσεγγίζοντας τα ριζικά μέσω των ρητών, όχι μόνο δεν αρκεί αλλά συχνά προκαλεί τις παρανοήσεις (Gonzalez-Martin, κ.ά., 2013· Sirotic και Zazkis, 2007α).

Βέβαια η ιστορική πορεία του ορισμού των άρρητων αριθμών στη βάση των ρητών είναι αναπόφευκτο στοιχείο της μετάβασης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με την έννοια ότι είναι αναγκαία η διαδικασία που οδηγεί στην απειρία των δεκαδικών ψηφίων των άρρητων (Kidron, 2016· Shinno, 2018· Κόσυβας, 2018). Το ότι είναι λογικά απαιτητική δεν θα πρέπει να αποτρέπει τους εκπαιδευτικούς από το να την εντάσσουν στη διδασκαλία τους, ούτε να αρκεστούν στις ρητές προσεγγίσεις. Άλλωστε οι πραγματικοί αριθμοί δύναται να οριστούν ως το σύνολο όλων των σύμμετρων και ασύμμετρων μεγεθών μαζί με τους αντίθετους τους (Voskoglou, 2013), προβάλλοντας τη διάσταση και την ενότητά τους με την ταυτόχρονη φυσική τους αναφορά.

Κατ' επέκταση με αυτόν τον τρόπο ο χειρισμός των ιδιοτήτων θα γίνεται πιο ευέλικτος, κατανοώντας τους άρρητους ως διαδικασία αλλά και ως αντικείμενο (Shinno, 2018).

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να φανερώσει πως το ίδιο σημεινόμενο μπορεί να συνδεθεί με ένα σύνολο σημεινόντων, ώστε η χρήση συμβόλων που προκαλεί σύγχυση και λάθη (Voskoglou και Kosyvas, 2011), να μη γίνεται πλέον ασυνείδητα.

Ο εμπλουτισμός της διδασκαλίας με γεωμετρικές αναπαραστάσεις είναι χρήσιμος για την καλύτερη κατανόηση των πραγματικών αριθμών (Voskoglou, 2012). Επειδή η αριθμητικοποίηση των Μαθηματικών γίνεται νωρίς και έντονα, εις βάρος της γεωμετρικής διαισθητικής ικανότητας (Voskoglou και Kosyvas, 2011· Sirotic και Zazkis, 2007α), χάνεται η ευκαιρία για τη διαμόρφωση ευέλικτων συλλογισμών. Όσοι μαθητές στηρίζονται μόνο σε τυπικές μεθόδους και ορισμούς, παρουσιάζουν έναν πιο διαδικαστικό τρόπο σκέψης (Hayfa και Saikaly, 2016).

Οι ασύνδετοι ορισμοί και η στρεβλή αντίληψη της ισοδυναμίας των διαφορετικών μορφών τους καθορίζουν την μεθοδολογία και τις απαντήσεις μαθητών (Shinno, 2018), αδυνατίζοντας την επιχειρηματολογία τους (Shinno, 2017), όπως αντίστοιχα και των εκπαιδευτικών (Zazkis και Sirotic, 2007α, 2007β, 2010). Οι ανώριμες διαισθητικές αντιλήψεις σχετίζονται με την αδυναμία της τυπικής γνώσης και την έλλειψη αλγοριθμικής εμπειρίας.

Συμπερασματικά, η κατανόηση προϋποθέτει τη συνεπή σύνδεση αλγορίθμων, διαίσθησης και εννοιών. Η σύνδεση αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επεξεργασίας και της μοντελοποίησης προβλημάτων, με την προϋπόθεση η μαθηματική μοντελοποίηση να αφορά την αιτιολόγηση υποθέσεων και επιλογών κατά τη διαδικασία μετάφρασης μιας κατάστασης, όπως επίσης και του μαθηματικού μοντέλου που αναπτύσσεται ως λογικό σχήμα τεκμηρίωσης (Anhalt και Cortez, 2016). Άρα χρειάζονται δραστηριότητες που να προκαλούν τη συνειδητή επανεξέταση υποθέσεων, αναφοράς και αναδιατύπωσης των λύσεων. Δεν έχουν απολύτως κανένα νόημα προβλήματα που αρκεί η απομνημόνευση μιας σειράς αλγοριθμικών βημάτων, αγνοώντας σε όλη τη διαδικασία τον ίδιο το συλλογισμό. Η καθιερωμένη μαθηματική πρακτική για την επίλυση προβλημάτων με έμφαση στην ακρίβεια, μπορεί να εμπεδωθεί στους μαθητές, καλλιεργώντας την αναζήτηση αποτελεσματικότερων μέσων υπολογισμού. Η έννοια της ασυμμετρίας μεγεθών, όπως στην περίπτωση του λόγου πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου, αμβλύνει τη διαισθητική δυσκολία και αναπαριστά με ακρίβεια την έννοια του άρρητου αριθμού, ως διαδικασία εύρεσης κοινού μέτρου επιδιώκοντας διαρκώς την ακρίβεια. Παράλληλα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για απόδειξη της αρρητότητας ρίζας μη τετράγωνων αριθμών.

Στη μεταβατική τάξη της Α Λυκείου, οι μαθητές πρέπει να καλλιεργήσουν μια γνωστική βάση, με εύρος που να συνδυάζεται με τη δυνατότητα εμβάθυνσης, ώστε να αντιμετωπίσουν τις απαιτήσεις των επόμενων τάξεων και των μεταδευτεροβάθμιων σπουδών τους. Είναι

απαραίτητο η διδασκαλία να σχεδιάζεται με γνώμονα όχι απλώς για να αποκτήσουν νόημα οι αριθμοί, αλλά να γίνουν η πύλη για ανώτερες έννοιες. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να υποστηριχθούν γνωστικά και στην πρακτική τους, με αυτόν τον γνωστικό ορίζοντα του αντικειμένου τους (HCK) (Kontorovich, 2016). Η γνώση για το περιεχόμενο, για τις επιμέρους έννοιες, επηρεάζει τη διδακτική πρακτική (Kontorovich, 2016· Leikin, κ.ά., 2018) και την προσέγγισή τους (Zoitsakos, κ.α., 2013).

Η γνώση που εκδηλώνεται στην πράξη της διδασκαλίας σχετίζεται με συγκεκριμένα παραδείγματα, όμως ο αναστοχασμός γύρω από αυτή είναι πιθανό να οδηγήσει σε πιο γενικού τύπου γνώση. Αυτή η γνώση επιτρέπει την καλύτερη διαχείριση ερωτήσεων κατά τη διδασκαλία, εξοπλίζοντας τον εκπαιδευτικό με την ανάλογη ετοιμότητα την ώρα του μαθήματος. Παράλληλα η επιλογή και η προετοιμασία κατάλληλων πηγών θα πρέπει να έχει στόχο την ενίσχυση μιας πιο ολοκληρωμένης απάντησης εκ μέρους του εκπαιδευτικού. Με αυτά τα κριτήρια χρειάζεται να διαμορφώνονται τα υλικά στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, που να εστιάζουν στο αντικείμενο του θέματος (Takker και Subramaniam, 2019).

Πολλές διδακτικές προτάσεις, ανεξάρτητα αν έχουν ή όχι ενσωματωθεί στα σχολικά βιβλία, σχεδιάστηκαν πάνω σε ερευνητικά δεδομένα, χωρίς να μειώνεται η ανάγκη για τη δημιουργία έργων που θα ενσωματώνουν διαφορετικά πεδία γνώσης σχετικά με τους άρρητους (Peled και HersHKovitz, 1999).

Τονίζεται η ανάγκη οι μαθηματικές πρακτικές και αξίες να ενσωματωθούν προσεκτικά στη σχολική πραγματικότητα, για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές (Moreira και David, 2008), αφού ήδη υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία για τη σύνδεση έρευνας, θεωρίας και πρακτικής για τη ΔτΜ. Ταυτόχρονα υπάρχει η ανάγκη για την βαθύτερη ανάλυση της σύνδεσης αυτής, ώστε να διαμορφωθεί κατάλληλο υλικό για την επιμόρφωση εκπαιδευτικών σε σχέση με τη σχολική πρακτική.

Δεν αρκεί μόνο η σύσταση για την επιλογή δραστηριοτήτων από εγχειρίδια διδασκαλίας. Στόχος είναι να αντιληφθούν και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί το αναγκαίο που πρέπει να μάθουν και οι μαθητές, δηλαδή τον επιστημονικό τρόπο κρίσης και συλλογισμού.

Κάθε ιδέα που αξιολογεί ο εκπαιδευτικός στην πράξη, ίσως είναι μαθηματικά ορθή. Μπορεί να είναι ο συνδυασμός φαινομενικά σωστών και μη ιδεών να περιλαμβάνει ιδέες με αμφίβολη διατύπωση. Είναι αναγκαίο, κατά την προσαρμογή της μαθηματικής γνώσης για διδακτικούς σκοπούς, να αποφευχθεί ο κίνδυνος να υπονομεύεται το εννοιολογικό περιεχόμενο κατά την τροποποίηση των τυπικών μεθόδων. Όπως υπογραμμίζουν τα ευρήματα (Leikin, κ.ά., 2018), η μαθηματική γνώση είναι απαραίτητη όψη της διδασκαλίας, που δεν πρέπει να επισκιάζει, ούτε να επισκιάζεται από τις άλλες όψεις που κάθε εκπαιδευτικός ενσωματώνει τελικά στην πρακτική

του.

Εν κατακλείδι, είναι ενεργό το ερώτημα που έθεσαν οι Fischbein, κ.ά. (1994), για το πως είναι δυνατόν να νοηθεί ότι κάθε άρρητος είναι το όριο ακολουθίας ρητών, εφόσον η έννοια του άπειρου είναι κενή μαθηματικού περιεχομένου. Ποιός είναι ο κατάλληλος τρόπος ανά εκπαιδευτική βαθμίδα για τη μελέτη της συνεχούς ποσότητας και πόσο μπορεί να αξιοποιηθεί η Γεωμετρία σε αυτό; Έχει σημασία να βρούμε έργα και τρόπους να επικοινωνήσουμε στους μαθητές την εικόνα των Μαθηματικών ως ένα οργανωμένο επιστημονικό όλο (Voskoglou, 2012·Kontorovich, 2016), όπου τα αριθμητικά συστήματα έχουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη μεγεθών ποσοτικά και ποιοτικά για τις σχέσεις μεταξύ τους. Είναι αναγκαία η διερεύνηση για το πως το αφηρημένο γίνεται συγκεκριμένο μέσα από την ανακάλυψη, την κατανόηση και τη διδασκαλία διαφορετικών μαθηματικών πεδίων (Patel και Varma, 2018).

Ότι πιο συναφές, που σε μεγάλο βαθμό συμπεριλαμβάνει τα παραπάνω συμπεράσματα και αντιστοιχεί στις απαιτήσεις της Α Λυκείου, μπορεί να θεωρηθεί η δουλειά της Sierpinska (2019) για την απόδειξη της αρρητότητας. Στην εξέλιξη των Μαθηματικών η απόδειξη είναι κυρίαρχο στοιχείο συνεπώς δεν μπορεί να διαπραγματευεται στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ομοίως ο χειρισμός συμβόλων, οι τυπικές μέθοδοι και οι ορισμοί αποτυπώνουν τις διαισθητικές πτυχές της δραστηριότητας των μαθηματικών και πρέπει να διδάσκονται με προσοχή.

Στη λογική των έργων που προτείνει η Sierpinska, το ίδιο θέμα πραγματεύεται αρχικά μέσω μιας έντονης διαισθητικά δραστηριότητας γεωμετρικής απόδειξης (*μοναδικό*, βλ. Σχήμα 1), που σταδιακά προετοιμάζει την τυπική επιχειρηματολογία. Αυτή και άλλες αποδείξεις *άπειρης μείωσης* (Gardner, 1997), που στηρίζονται στην ιστορική μελέτη της ασυμμετρίας μεγεθών (*γενικό*, βλ. Σχήμα 1), μπορούν να αποκρυσταλλώσουν την έννοια του απείρου ως μια ατέρμονη διαδικασία. Μια τέτοια σειρά έργων μπορεί να υποστηρίξει την άποψη ότι η διαίσθηση δεν είναι τόσο άμορφη και αόριστη όσο συνήθως θεωρείται, αλλά αντίθετα λειτουργεί με τον βασικό μηχανισμό της *μεταφοράς* (Lakoff και Nunez, 2016), μια βαθιά δομή που υπαγορεύεται από την ίδια την ανθρώπινη φύση (στο Ρωσσίδης, 2019).

Στη θεωρία της *αντικειμενοποίησης* (Radford, 2013) η μάθηση είναι η συνειδητή και σκόπιμη εμπλοκή με ιστορικά και πολιτισμικά κωδικοποιημένους τρόπους σκέψης και πράξης, που ξεκινά με τη διάκριση του τι ξέρει κάποιος να κάνει με το τι του προσφέρεται να μάθει. Στην περίπτωση της αρρητότητας, αφορά τη διεργασία που δένεται στην ολότητά μιας δραστηριότητας, μέσω της οποίας η δυνατότητα εκτίμησης πως ένας αριθμός είναι άρρητος ή ο σωστός χειρισμός των πράξεων, δύναται να εξελιχθεί στη συνειδητοποίηση της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών.

6. Βιβλιογραφία

- Adıgüzel, N. (2013). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adayları ve 8. Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayılar ile İlgili Bilgileri ve bu Konudaki Kavram Yanılgıları*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). *Charming proofs: A journey into elegant mathematics*. The Mathematical Association of America.
- Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 2, 49–56.
- Anghileri, J. (2001). What are we trying to achieve in teaching standard calculating procedures? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 2, 41–48.
- Anghileri, J. (2004). Disciplined calculators or flexible problem solvers? In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 1, 41–46.
- Anhalt, C. O., & Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(6), 523-545.
- Arbour, D. (2012). *Students' Understanding of Real, Rational, and Irrational Numbers. A Thesis in the Department of Mathematics and Statistics*. Concordia University Montreal, Quebec, Canada.
- Arcavi, A.; Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for Teachers: The Case of Irrational Numbers. *For the Learning of Mathematics* 7: (2), 18-23.
- Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. G., & Robutti, O. (2004). Infinity as a multi-faceted concept in history and in the mathematics classroom. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 89–96.
- Asman, D., & Markovits, Z. (2001). The use of real world knowledge in solving mathematical problems. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 2, 65–72.
- Bair, S. L., & Rich, B. S. (2011). Characterizing the development of specialized mathematical content knowledge for teaching in algebraic reasoning and number theory. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(4), 292-321.
- Ball, D. L. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? Remarks prepared for the Secretary's summit on Mathematics, U.S. Department of

- Education, February 6, Washington, D.C. On line access: <http://www.ed.gov/rschstat/research/progs/mathscience/ball.html>.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes itspecial? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Barkai, R., Tabach, M., Tirosh, D., Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2009). Highschool teachers' knowledge about elementary number proofs constructed by students. *Proceedings of the 33th PME International Conference*, 2, 113–120.
- Basso, M., Bonotto, C., & Sorzio, P. (1998). Children's understanding of the decimal numbers through the use of the ruler. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, 72–79.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–125). New York, USA: Academic Press.
- Belin, M., & Akar, G. K. (2017). Prospective Mathematics Teachers' Making Sense Of The Decimal Representation Of Real Numbers As Rational Number Sequences Through Quantitative Reasoning. *The Eurasia Proceedings of Educational & Social Sciences*, 6, 38-42.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2002). Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 2, 105–112.
- Boaler, J. (1998). Beyond street mathematics. The challenge of situated cognition. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, 212–219.
- Bonotto, C. (2006). Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 2, 193–200.
- Boufi, A., & Skaftourou, F. (2002). Supporting students reasoning with decimal numbers: A study of a classroom's mathematical development. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 2, 153–160.
- Brekke, G. (1996). A decimal number is a pair of whole numbers. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 2, 137–144.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: a psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73–88). Dordrecht: Kluwer.
- Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre

- réel » et « racine carrée » [Grades X and Y teachers' relationship with the objects 'real number' and 'square root']. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 55–80. Retrieved from <http://rdm.penseesauvage.com/Les-rapports-d-enseignants-de.html>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 2, 233–240.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique [The analysis of teaching practices in the anthropological theory of didactics]. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266. Retrieved from <http://rdm.penseesauvage.com/L-analyse-des-pratiques.html>
- Chrysostomou, M., & Mousoulides, N. (2010). Pre-service teachers' knowledge of negative numbers. *Proceedings of the 34th PME International Conference*, 2, 265–272.
- Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(1), 1-27.
- Cimen, O. A., & Campbell, S. R. (2012). Studying, self-reporting, and restudying basic concepts of elementary number theory. *Proceedings of the 36th PME International Conference*, 2, 163–170.
- Cobb, P. (1994). A summary of four case studies of mathematical learning and small group interaction. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, 2, 201–208.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly, R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, pp. 307–333. Lawrence Erlbaum Associates.
- Coffey, M. E. (2001). Irrational numbers on the number line: Perfectly placed. *The Mathematics Teacher*, 94(6), 453.
- Coles, A. (2014). Ordinality, neuroscience, and the early learning of number. *Proceedings of the 38th PME International Conference*, 2, 329–336.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1996). The illusion of linearity: A persistent obstacle in students' thinking about problems involving length and area of similar plane figures. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International*

- Conference, 2, 273–280.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1994). Using student-generated word problems to further unravel the difficulty of multiplicative structures. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, 2, 256–263.
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics?* Oxford University Press: New York.
- Diezmann, C., & Lowrie, T. (2007). The development of primary students' knowledge of the structured number line. *Proceedings of the 31th PME International Conference*, 2, 201–208.
- Dolan, D. T. (1981). Some irrational results with irrational numbers. *The Mathematics Teacher*, 74(4), 258-261.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266.
- Ekol, G. (2010). Operations with negative integers in a dynamic geometry environment. *Proceedings of the 34th PME International Conference*, 2, 337–344.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2004). Mathematical modeling with young children. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 2, 335–342.
- Ercire, Y. E. (2014). *İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Yaşanılan Güçlüklerin İncelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3–17.
- Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1994). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29(1), 29-44.
- Fuglestad, A. B. (1996). Students' misconceptions with decimal numbers – Preliminary results from a study of computer based teaching. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 2, 369–376.
- Gabel, M., & Dreyfus, T. (2013). The flow of a proof – the example of the Euclidean algorithm. *Proceedings of the 37th PME International Conference*, 2, 321–328.
- Gardner, M. (1997). The Square Root of two= 1.41421 35623 73095.... *Math Horizons*, 4(4), 5-8.
- Gervasoni, A. (2005). The diverse learning needs of young children who were selected for an intervention program. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME*

- International Conference*, 3, 33–40.
- Gervasoni, A., Parish, L., Bevan, K., Croswell, M., Hadden, T., Livesey, C., & Turkenburg, K. (2011). Exploring the mystery of children who read, write, and order 2-digit numbers, but cannot locate 50 on a number line. *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 2, 401–408.
- Giannakoulis, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In *Proceedings of the fifth Congress of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 416-425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.
- Ginsburg, H. P. (1981). 'The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques', *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 4–11.
- Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the Child's Mind: The Clinical Interview in Psychological Research and Practice*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Machado Souto, A. (2011). Representations and tasks involving real numbers in school textbooks. *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 2, 449–456.
- González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 230-248.
- Gowers, W. T. (2007). Mathematics, memory, and mental arithmetic, In M. Leng, A. Paseau, & M. Potter (Eds.), *Mathematical knowledge*(pp. 33–58). Oxford, UK: Oxford University Press.
- Gravemeijer, K. (2002). Building new mathematical reality, or how emergent modeling may foster abstraction. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 1, 125–128.
- Gravemeijer, K., McClain, K., & Stephan, M. (1998). Supporting students' construction of increasingly sophisticated ways of reasoning through problem solving. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 1, 194–209.
- Gray, E. M., Pitta, D., & Tall, D. O. (1997). The nature of the object as an integral component of numerical processes. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 1, 115–130.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116–140.
- Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic precepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. v. d. Heuvel-Panhuizen

- (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 65–67). Utrecht, The Netherlands: PME.
- Güner, N. (2016) Irrational Number Knowledge of High School Graduates. *Developments in Educational Sciences*, 395.
- Gutiérrez, A., & Boero, P. (Eds.). (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Sense publishers.
- Gutiérrez, Á., Leder, G. C., & Boero, P. (Eds.). (2016). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues*. Springer.
- Güven, B.; Çekmez, E. & Karataş, İ. (2011) Examining Preservice Elementary Mathematics Teachers' Understandings about Irrational Numbers. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies* 21: (5) 401-416.
- Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 3, 17–24.
- Hayfa, N., & Saikaly, L. (2016). Dimensions of knowledge and ways of thinking of irrational numbers. *Athens Journal of Education*, 3(2), 137-154.
- Heemsoth, T., & Heinze, A. (2013). Learning fractions from errors. *Proceedings of the 37th PME International Conference*, 3, 25–32.
- Heemsoth, T., & Heinze, A. (2014). How should students reflect upon their own errors with respect to fraction problems?. *Proceedings of the 38th PME International Conference*, 3, 265–272.
- Herman, J., Ilucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, J., Simpson, A., et al. (2004). Images of fractions as processes and images of fractions in processes. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 249–256.
- Herscovics, N. (1989). 'Cognitive obstacles encountered in the learning of Algebra', in C. Kieran and S. Wagner (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.
- Hopkins, S., & Lawson, M. (2004). Explaining variability in retrieval times for addition produced by students with mathematical learning difficulties. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 3, 57–64.
- Iannece, D., Mellone, M., & Tortora, R. (2009). Counting vs. measuring: Reflections on number roots between epistemology and neuroscience. *Proceedings of the 33th PME International Conference*, 3, 209–216.
- Kalogirou, P., Gagatsis, A., Michael, P., & Deliyianni, E. (2010). An attempt to overcome the epistemological obstacle in the case of fraction division. *Proceedings of the 34th PME*

- International Conference*, 3, 153–160.
- Kara, F. & Delice, A. (2012). Kavram Tanımı mı? Yoksa Kavram İmgeleri mi? İrrasyonel Sayıların Temsilleri, *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Niğde.
- Kempen, L., & Biehler, R. (2014). The quality of argumentations of first-year pre-service teachers. *Proceedings of the 38th PME International Conference*, 3, 425–432.
- Khechine, H., & González-Martín, A. (2017, February). Connections between approximating irrationals by a sequence of rationals and introducing the notion of convergence. *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Feb 2017, Dublin, Ireland.
- Kidron, I. (2016). Understanding irrational numbers by means of their representation as non-repeating decimals. First conference of *International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Mar 2016, Montpellier, France.
- Kidron, I. (2018). Students' conceptions of irrational numbers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 94-118.
- Kilhamn, C. (2009). The notion of number sense in relation to negative numbers. *Proceedings of the 33th PME International Conference*, 3, 329–336.
- Klein, R., Barkai, R., Tirosh, D., & Tsamir, P. (1998). Increasing teachers awareness of students' conceptions of operations with rational numbers. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 120–127.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, 40, 427-441.
- Kontorovich, I. (2016). The answer depends on your lecturer. *Research in Mathematics Education*, 18(3), 283-298.
- Koukkoufis, A., & Williams, J. (2006). *Integer instruction: A semiotic analysis of the "compensation strategy"*. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 3, 473–480.
- Kutscher, B., Linchevski, L., & Eisenman, T. (2002). From the Lotto game to subtracting two-digit numbers in first-graders. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 3, 249–256.
- Kyriakides, L., Philippou, G., & Charalambous, C. (2002). Testing a developmental model of measuring problem solving skills based on schema theory. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 3, 257–265.
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2016). *Από που προέρχονται τα Μαθηματικά: πως ο ενσώματος τους καθιστά τα Μαθηματικά υπαρκτά*, Liberal Books.

- Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: Focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(5), 451-473.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lester, F. K., & Kroll, D. L. (1990). Teaching students to be reflective: A study of two grade-seven classes. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference*, 1, 151–158.
- Maes, R., Cornet, E., Verhoef, N., & Hendrikse, P. (2011). High school students' problems with infinity. *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 3, 169–176.
- Mamede, E., Nunes, T., & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 3, 281–288.
- Mamolo, A., & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a lens for exploring notions of infinity. *Proceedings of the 32th PME International Conference*, 3, 353–360.
- Mamolo, A. (2014). Cardinality and cardinal number of an infinite set: A nuanced relationship. *Proceedings of the 38th PME International Conference*, 4, 169–176.
- Mekhmandarov, I., Meron, R., & Peled, I. (1996). Performing and understanding: A closer look at comparison word problems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 3, 285–390.
- Merenluoto, K. (2003). Abstracting the density of numbers on the number line – A quasi-experimental study. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 3, 285–292.
- Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2006). Conceptual change in the number concept: Dealing with continuity and limit. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 1, 163–164.
- Moreira, P. C., & David, M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(1), 23-40
- Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215, 1519-1520. doi: 10.1038/2151519a0
- Murphy, C. (2008). The use of the empty number line in England and the Netherlands. *Proceedings of the 32th PME International Conference*, 4, 9–16.

- Murray, H., Olivier, A., & De Beer, T. (1999). Reteaching fractions for understanding. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 3, 305–312.
- Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1994). Fifth graders' multi-digit multiplication and division strategies after five years problem-centered learning. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, 3, 399–406.
- Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1998). Learning through problem solving. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 1, 169–185.
- Narli, S., Delice, A., & Narli, O. (2009). Secondary school students' concept of infinity: Primary and secondary intuitions. *Proceedings of the 33th PME International Conference*, 4, 209–216.
- Nesher, P., & HersHKovitz, S. (1997). Real world knowledge and mathematical knowledge. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 3, 280–287.
- Ni, Y., & Zhou, Y-D (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52. doi:10.1207/s15326985ep40013
- Nikolaou, A. A., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Hierarchical levels of fraction understanding at the elementary school. *Proceedings of the 37th PME International Conference*, 3, 377–384.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York, USA: Cambridge University Press.
- Obersteiner, A., & Hofreiter, V. (2017). Do we have a sense for irrational numbers?. *Journal of Numerical Cognition*, 2(3), 170-189.
- Obersteiner, A., Moll, G., Beitlich, J. T., Cui, C., Schmidt, M., Khmelivska, T., & Reiss, K. (2014). Expert mathematicians' strategies for comparing the numerical values of fractions – evidence from eye movements. *Proceedings of the 38th PME International Conference*, 4, 337–344.
- Obersteiner, A., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). Expert mathematicians' natural number bias in fraction comparison. *Proceedings of the 37th PME International Conference*, 3, 393–400.
- Olive, J. (2002). *The construction of commensurate fractions*. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 4, 1–8.
- Olive, J. (2011). Fractions on a dynamic number line. *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 3, 289–296.
- Ostad, S. A. (1998). Subtraction strategies in developmental perspective: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. In A. Olivier & K. Newstead

- (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 311–318.
- Ozkan, A. (2019). Misconceptions in radical numbers in secondary school mathematics. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences*, 6(1), 205-212.
- Pantziara, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). The use of diagrams in solving non-routine problems. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 3, 489–496.
- Patel, P., & Varma, S. (2018). How the abstract becomes concrete: Irrational numbers are understood relative to natural numbers and perfect squares. *Cognitive science*, 42(5), 1642-1676.
- Pehkonen, E., Hannula, M., Maujala, H., & Soro, R. (2006). Infinity of numbers: How students understand it. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 4, 345–352.
- Peled, I. & HersHKovitz, S. (1999). Difficulties in Knowledge Integration: Revisiting Zeno's Paradox with Irrational Numbers. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology* 30: 39-46.
- Peled, I., & Bassan-Cincinatus, R. (2005). Degrees of freedom in modeling: Taking certainty out of proportion. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 4, 57–64.
- Peled, I., Meron, R., & Rota, S. (2007). Using a multiplicative approach to construct decimal structure. *Proceedings the 31th PME International Conference*, 4, 65–72.
- Philippou, G., & Christou, C. (1994). *Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions*. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, 4, 33–40.
- Philippou, G., & Christou, C. (1999). A schema-based model for teaching problem solving. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 4, 57–64.
- Pinto, M., & Tall, D. (1996). *Student teachers' conceptions of the rational numbers*. In L. Puig, & A Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 4, 139–146.
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). A longitudinal study tracing the development of number sense components. *Proceedings of the 37th PME International Conference*, 4, 41–48.
- Popovic, G. (2015). Irrational Numbers, Square Roots, and Quadratic Equations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(8), 468-474.
- Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 163–182.
- Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalizations in algebra. In M. van den

- Heuvel- Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 4, 81–88.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18).
- Romero, I., & Rico, L. (1996). On the introduction of real numbers in secondary school. An action- research experience. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 4, 227–234.
- Ruwisch, S. (1999). Division with remainder strategies in real-world contexts. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 4, 137–144.
- Schliemann, A. D. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics to mathematics education. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, 1, 45–60.
- Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S., & Nicéas, L. (1994). School children versus street sellers' use of the commutative law for solving multiplication problems. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, 4, 209–216.
- Schliemann, A. D., Lara-Roth, S., & Epstein, J. (2000). Understanding how children solve compare problems. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 1, 184.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. NY: Cambridge University.
- Shimizu, N. (2000). An analysis of “make an organized list” strategy in problem solving process. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 4, 145–152.
- Shinno, Y. (2007). On the teaching situation of conceptual change: Epistemological considerations of irrational numbers. *Proceedings of the 31th PME International Conference*, 4, 185–192.
- Shinno, Y. (2008). On the teaching situation of irrational numbers: epistemological considerations as the basis of designing for conceptual change. *International Journal of Curriculum Development and Practice*, 10(1), 67-76.
- Shinno, Y. (2017). Reconstructing a lesson sequence introducing an irrational number as a

- global argumentation structure. In *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193-200).
- Shinno, Y. (2018). Reification in the learning of square roots in a ninth grade classroom: combining semiotic and discursive approaches. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(2), 295-314.
- Shinno, Y., & Iwasaki, H. (2009). An analysis of process of conceptual change in mathematics lessons: In the case of irrational numbers. *Proceedings of the 33th PME International Conference*, 5, 81–88.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62, 273-296.
doi: [10.1016/j.cogpsych.2011.03.001](https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001)
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*, Falmer Press, London.
- Sierpinska, A. (2019). *Materials for teaching a course on research in mathematics education about students' difficulties in mathematics*. Ανακτήθηκε 30 Απριλίου, 2020, από https://www.academia.edu/39941494/Materials_for_teaching_a_course_on_research_in_mathematics_education_about_students_difficulties_in_mathematics
- Singer, F. M., & Voica, C. (2009). When the infinite sets uncover structures: An analysis of students' reasoning on infinity. *Proceedings of the 33th PME International Conference*, 5, 121–128.
- Sinkevich, G. (2015). *On the history of analysis. The formation of definitions*. arXiv preprint arXiv:1502.06943. Ανακτήθηκε 30 Απριλίου, 2020, από <https://arxiv.org/pdf/1502.06943.pdf>
- Sirotic, N., & Zazkis, A. (2007α). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 49-76.
- Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007β). Irrational numbers on the number line—where are they?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477-488.
- Skemp, R. (1978). Relation understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15.
- Soylu, Y., Akgün, L., Dündar, S., & Isleyen, T. (2011). Indicating that one number is an irrational number with a different method. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 15, 3277-3280.
- Steinberg, R., Carpenter, T. C., & Fennema, E. (1994). Children's invented strategies and algorithms in division. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, 4, 305–312.

- Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 259–266.
- Steinle, V., & Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to expertise. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 225–232.
- Strauss, A. L., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.
- Suh, J. M., & Moyer-Packenman, P. S. (2007). The application of dual coding theory in multi-representational virtual mathematics environments. *Proceedings of the 31st PME International Conference*, 4, 209–216.
- Takker, S., & Subramaniam, K. (2019). Knowledge demands in teaching decimal numbers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(3), 257-280.
- Tall, D. O. (2001). 'Natural and formal infinities', *Educational Studies in Mathematics* 48 (2–3), 199–238.
- Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. and Wilson, J.: 1998, 'Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers', Retrieved June 5th, 2003 from the World WideWeb: <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts/Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html>.
- Tirosh, D. & Tsamir, P. 2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education?, *Learning and Instruction*, 14, 535-540.
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In S. Chamberlin, L.L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education: Papers from a planning conference for WISDOM* (pp. 33-57). Laramie: WY: University of Wyoming.
- Toh, P. C., Leong, Y. H., Toh, T. L., & Ho, F. H. (2014). Designing tasks for conjecturing and proving in number theory. *Proceedings of the 38th PME International Conference*, 5, 257–265.
- Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2004). Efficiency and adaptiveness of multiple school-taught strategies in the domain of simple addition. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 321–328.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R., & Tabach, M. (2008). Inservice teachers' judgement of proofs in ENT. *Proceedings of the 32th PME International Conference*, 4, 345–352.

- Tsamir, P., & Tirosh, D. (2006). PME 1 to 30 – *summing up and looking ahead: A personal perspective on infinite sets. Proceedings of the 30th PME International Conference*, 1, 49–66.
- Tzur, R., & Depue, B. E. (2014). Conceptual and brain processing of unit fraction comparisons: A cogneuro-mathed study. *Proceedings of PME 38*, 5, 297–304.
- Usiskin, Z., Peressini, A., Marchisotto, E. A. & Stanley, D. (2003). *Mathematics for high school teachers*. Prentice Hall: Upper Saddle River, New Jersey.
- Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 84–106, doi:10.5964/jnc.v4i1.82
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2006). Aspects of students' understanding of rational numbers. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 1, 161–162.
- Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Van Dooren, W. (2010). Greek and Flemish students' understanding of the density of rational numbers: more similar than different. *Proceedings of the 34th PME International Conference*, 4, 249–256.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Students' overreliance on linearity: An effect of school-like word problems?. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 4, 265–272.
- Van Dooren, W., Van Hoof, J., Lijnen, T., & Verschaffel, L. (2012). How students understand aspects of linearity: Searching for obstacles in representational flexibility. *Proceedings of the 36th PME International Conference*, 4, 187–194.
- Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219–239). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- Vermeulen, N., Olivier, A., & Human, P. (1996). Students' awareness of the distributive property. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 4, 379–386.
- Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: Promises and pitfalls. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 1, 64–80.
- Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 51-82). Brill Sense.
- Voskoglou, M. G. (2013). An application of the APOS/ACE approach in teaching the irrational numbers. *Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education*, 8(1), 30-47.

- Voskoglou, M. G., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 21, 127-141.
- Voskoglou, M., & Kosyvas, G. D. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 301-336.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 4, 305–312.
- Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 351-360.
- Weiler, K., Arnon, I., & Dubinsky, D. (2011). Preservice Teachers' Understandings of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion: Strength and Stability of Belief, *Canadian Journal for Science, Mathematics, and Technology Education*, 11(2), 129-159.
- Whitenack, J. W., Cobb, P., & McClain, K. (1995). A preliminary report of a first-grade teaching experiment: Mathematizing, modeling and mathematical learning in the classroom microculture. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, 3, 256–263.
- Wijayanti, D. & Bosch, M., (2018). The Evolution Of The knowledge To Be Taught Through Educational Reforms: The Case Of Proportionality. In Yoshinori, S. and Renuka, V. (Eds.) *Proceedings of the 24th ICMI Study School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 173-180). Tsukuba, Japan: Tsukuba
- Williamson, J. (2013). Young children's cognitive representations of number and their number line estimations. *Proceedings of the 37th PME International Conference*, 4, 401–408.
- Wittmann, E. C. (2001). Designing, researching and implementing mathematical learning environments – the research group “Mathe 2000”. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 1, 189–220.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentations, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458–477.
- Yan, K., & Hanna, G. (2019, February). Identifying key ideas in proof: the case of the irrationality of $\sqrt{k}$. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 38). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.
- Zachariades, T., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 5-22.

- Zaslavsky, O., & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher-educators: Growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 5–32.
- Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 207-217.
- Zazkis, R. (2009). Number theory in mathematics education: Queen and servant. *Mediterranean Journal of Mathematics Education*, 8(1), 73–88.
- Zazkis, R. and Hazzan, O. (1998). 'Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions', *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429–239.
- Zazkis, R., & Mamolo, A. (2016). On numbers: Concepts, operations, and structure. In *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 39-71). Brill Sense.
- Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 497–504.
- Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 1-27.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991): Editor's introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, (pp. 1-8). Mathematical Association of America, Washington, DC
- Zoitsakos, S., Zachariades, T., & Sakonidis, C. (2015, February). Secondary mathematics teachers' content knowledge for teaching in two contexts: Interpreting versus managing didactically students' understandings. CERME 9 - *Ninth Congress of the European Society for Research in Math-ematics Education*, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.3296-3302. hal-01289890
- Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2013). *Μαθηματικά Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»
- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής, Β΄ Μέρος*. Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»
- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2016). *Άλγεβρα Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου*. Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»

- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. (2016). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου*. Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»
- Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»
- Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγιάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2012). *Μαθηματικά Α Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»
- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2012). *Μαθηματικά Β Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»
- Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.
- Καλδρυμίδου, Μ. & Τζεκάκη, (1995). Ιστορία, επιστημολογία και διδασκαλία των Μαθηματικών: Μια εναλλακτική προσέγγιση του νοήματος των Μαθηματικών, *Πρακτικά 12ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε.*, 409-426.
- Καραβασίλης, Γ. & Κόσσυβας, Γ. (2016). Όψεις κριτικής αποτίμησης του σχολικού βιβλίου μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου: το εγχειρίδιο υποστηρίζει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας;. *Έρευνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών– Επιστημονικών Θεμάτων*, Τεύχος 10ο, 68-84
- Κόσσυβας, Γ. (2011). Είδη συλλογισμού κατά την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος του κουμπαρά στην Α Γυμνασίου, *Ευκλείδης Γ*, 74, 56-82, Αθήνα: ΕΜΕ.
- Κόσσυβας, Γ. (2018). Αριθμητική προσέγγιση ή γεωμετρική ακρίβεια; αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων που αγγίζουν την αρρητότητα. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 0(7), 9 - 48. doi:<https://doi.org/10.12681/enedim.18837>
- Ρωσσίδης, Ι. (2019). *Οι πραγματικοί αριθμοί μέσα από τη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών*. (Μεταπτυχιακή διατριβή, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Θεσσαλονίκη). Ανακτήθηκε 1 Ιουλίου, 2020, από https://apothesis.eap.gr/bitstream/repo/44150/1/101235_%CE%A1%CE%A9%CE%A3%CE%A3%CE%99%CE%94%CE%97%CE%A3_%CE%99%CE%A9%CE%A3%CE%97%CE%A6.pdf
- Σάλτου, Ε. (2015). *Γεωμετρική αναπαράσταση στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών. Η περίπτωση των άρρητων αριθμών σε μαθητές Γυμνασίου*. (Μεταπτυχιακή διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα). Ανακτήθηκε 1 Μαΐου, 2020, από [https://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/9002/3/Saltou\(math\).pdf](https://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/9002/3/Saltou(math).pdf)
- Σγουρού, Στ. (2019). *Η ιστορική εξέλιξη της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών*

αριθμών και η αξιοποίησή της στη διδασκαλία των Μαθηματικών. (Μεταπτυχιακή διατριβή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Φλώρινα). Ανακτήθηκε 1 Μαΐου, 2020, από <https://dspace.uowm.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/1667/%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20.pdf?sequence=1>