

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΑ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΕΤΑΡΤΗΣ
ΤΑΞΗΣ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΡΟΥΣΗΣ Γεώργιος

A.M. 173603

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

31-07-2020



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επιβλέποντες

Γ.Μπαρμπάτης,καθηγητής(Επιβλέπων)

Δ. Χελιώτης,Αναπλ. καθηγητής

Ι.Στρατής,καθηγητής

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, τον επιβλέποντα της Διπλωματικής μου αυτής Εργασίας, τον Καθηγητή κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη, για την αμέριστη συμπαράσταση και την πολύτιμη καθοδήγησή του στην εκπόνηση αυτής της εργασίας, καθώς και για όλο το χρόνο που αφιέρωσε σ' αυτήν. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ.κ. Ιωάννη Στρατή και Δημήτριο Χελιώτη, για τις καίριες παρατηρήσεις και συμβουλές τους. Τέλος αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Βασίλη και Σωτηρία, για την υποστήριξη που μου παρείχαν, καθώς και τους Κώστα, Σοφία και όλους όσους βοήθησαν, οι οποίοι, όλοι μαζί αλλά και ο καθένας/καθεμία ξεχωριστά, με βοήθησαν ουσιαστικά, με τον τρόπο τους, να πετύχω τους στόχους μου.

Στην οικογένειά μου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου σε παραβολικά προβλήματα τέταρτης τάξης σε δύο διαστάσεις. Αρχικά παραθέτουμε και αναλύουμε έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για τη παρουσίαση και διατύπωση της Μεθόδου, όπως ασυμπτωτικές ακολουθίες, το Λήμμα του *Watson*, και ολοκληρώματα μορφής *Laplace*. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την εφαρμογή της Μεθόδου σε παραβολικά προβλήματα ανώτερης τάξης σε μια διάσταση, όπως της μορφής $\partial_t u(x, t) = (-1)^{m+1} \partial_x^{2m} u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$. Στο τελευταίο κεφάλαιο παραθέτουμε την εφαρμογή της Μεθόδου σε παραβολικά προβλήματα 4^{ης} τάξης σε δύο διαστάσεις, και καταλήγουμε σε δύο Θεωρήματα, τα οποία αποτελούν και τα βασικά συμπεράσματα της παρούσας εργασίας. .

Abstract

In this master thesis we apply the Steepest Descent Method in parabolic problems of fourth order in two dimensions. First, we present the needed notations, such as asymptotic sequences, Watson's lemma, Laplace Integrals, e.t.c., in order to obtain the capability to calculate the asymptotic expansions of functions defined by Laplace integrals and then we present the calculation of those integrals, via the Deepest Descent Method. Then we use the Method to study parabolic problems of high order in one dimension, such as $\partial_t u(x, t) = (-1)^{m+1} \partial_x^{2m} u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$. In the final chapter we apply the method to a fourth order parabolic problems in two dimensions, which is the main result of the thesis.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	8
2	Ασυμπτωτικές Μέθοδοι στη μια διάσταση	9
2.1	Μεγάλο Όμικρον και Μικρό Όμικρον	9
2.1.1	Μεγάλο Όμικρον	9
2.1.2	Μικρό Όμικρον	9
2.2	Ασυμπτωτικά Ισοδύναμη Συνάρτηση (ή Ισοδύναμη Συνάρτηση)	9
2.3	Ασυμπτωτική Ακολουθία	10
2.4	Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα ή Ασυμπτωτική Προσέγγιση συνάρτησης	10
2.4.1	Κυρίαρχος Όρος Άσυμπτωτικού Αναπτύγματος	10
2.5	Λήμμα του Watson	12
2.5.1	Συνάρτηση Γάμμα και Ατελής Συνάρτηση Γάμμα	12
2.5.2	Ανάπτυγμα Taylor	12
2.6	Υπολογισμός Άσυμπτωτικού Αναπτύγματος Ολοκληρώματος Μορ- φής Laplace στο Μιγαδικό Επίπεδο	18
2.7	Μέθοδος Επικλινέστατης Καθόδου	19
2.7.1	Περιγραφή Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου	24
2.7.2	Εφαρμογή της Μεθόδου για τον υπολογισμό ολοκληρω- μάτων μορφής Laplace	26
3	Εφαρμογή της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου σε Πα- ραβολικά Προβλήματα Ανώτερης Τάξης στη μια Διάστα- ση	32
3.1	Κρίσιμα Σημεία της $\phi(z)$	34
3.2	Καμπύλες της Επικλινέστατης Καθόδου	35
3.2.1	Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα για το $\int_{\gamma_-} e^{\lambda\phi(z)}$	36
3.2.2	Ασυμπτωτική Εκτίμηση του $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\left(is-\frac{s^{2m}}{2m}\right)} ds$	39
3.2.3	Πώς γίνεται η επιλογή των κρίσιμων σημείων για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του $F(\lambda)$.	41
4	Εφαρμογή της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου Σε Πα- ραβολικά Προβλήματα 4^{ης} τάξης στις δύο Διαστάσεις	50

4.1	Η Μέθοδος Επικλινέστατης Καθόδου για Διπλά Ολοκληρώματα	50
4.2	Η ισχυρή κυρτότητα	51
4.3	Ένα Παραβολικό Πρόβλημα 4 ^{ης} Τάξης στον $\mathbb{R}^2$	56

1 Εισαγωγή

Στην πλειονότητα των περιπτώσεων κατά την επίλυση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων, προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν είναι ακριβείς και αναλυτικές. Τέτοιες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται μεταξύ άλλων με τη θεωρία της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης. Η Ασυμπτωτική Ανάλυση αναπτύσσει τεχνικές εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων οι οποίες μπορούν να είναι αναλυτικές, όταν για παράδειγμα κάποια από τις μεταβλητές ενός ολοκληρώματος ή μίας εξίσωσης παίρνει πάρα πολύ μικρές ή πάρα πολύ μεγάλες τιμές ή βρίσκεται σε κάποια περιοχή όπου η λύση δεν είναι αναλυτική.

Μία από τις τεχνικές της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης είναι η Μέθοδος Επικλινέστατης Καθόδου, μέθοδος η οποία θα αναλυθεί στην παρούσα εργασία.

Παραθέτουμε βασικές έννοιες, όπως Μεγάλο και Μικρό Όμικρον, Ασυμπτωτικά Ισοδύναμες Συναρτήσεις, Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα, Ολοκληρώματα τύπου Laplace, Λήμμα του Watson. Έννοιες οι οποίες θα χρειαστούν για την ανάπτυξη και διατύπωση της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου. Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αναπτύσσουμε τη Μέθοδο Επικλινέστατης Καθόδου και παρουσιάζουμε την εφαρμογή της σε παραβολικά Προβλήματα Ανώτερης Τάξης, σε μια διάσταση.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τη γενίκευση της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου σε πολλαπλά ολοκληρώματα. Διατυπώνουμε ένα θεώρημα σχετικά με την επιλογή εκείνων των κρίσιμων σημείων που απαιτούνται κατά την εφαρμογή της Μεθόδου και η συνεισφορά των οποίων είναι σημαντική στην ασυμπτωτική εκτίμηση. Επίσης αναφέρουμε τον ορισμό της ισχυρής κυρτότητας του συμβόλου $A(\xi)$ ενός ελλειπτικού τελεστή, σε δύο διαστάσεις, ο οποίος είναι απαραίτητος κατά την εφαρμογή της Μεθόδου. Τελειώνοντας διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε δύο Θεωρήματα τα οποία μας δίνουν τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις και τα οποία διαφοροποιούνται μεταξύ τους ανάλογα με το αν το σύμβολο του τελεστή είναι ή δεν είναι ισχυρά κυρτό.

2 Ασυμπτωτικές Μέθοδοι στη μια διάσταση

2.1 Μεγάλο Όμικρον και Μικρό Όμικρον

2.1.1 Μεγάλο Όμικρον

Έστω οι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, ορισμένες σε ένα υποσυνόλου D του μιγαδικού επιπέδου, και $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Θα λέμε ότι η $f(z)$ είναι Μεγάλο Όμικρον της $g(z)$ καθώς το $z \rightarrow z_0$ εάν υπάρχει $\Lambda \geq 0$ και μια περιοχή K του z_0 έτσι ώστε $|f(z)| \leq \Lambda|g(z)|$, $\forall z \in K$. Συμβολικά γράφεται $f(z) = O(g(z))$ καθώς $z \rightarrow z_0$.

2.1.2 Μικρό Όμικρον

Έστω οι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, ορισμένες σε ένα υποσυνόλου D του μιγαδικού επιπέδου, και $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Θα λέμε ότι η $f(z)$ είναι Μικρό Όμικρον της $g(z)$ καθώς το $z \rightarrow z_0$, αν για $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει περιοχή K_ϵ του z_0 τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq \epsilon|g(z)|$ $\forall z \in K_\epsilon$. Συμβολικά γράφεται $f(z) = o(g(z))$ καθώς $z \rightarrow z_0$.

Δηλαδή αν σε μια γειτονιά του z_0 η $g(z)$ είναι μη-μηδενική τότε το $f(z) = o(g(z))$ δηλώνει ότι $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$

Οπότε εάν η $f(z)$ είναι :

1. Μεγάλο όμικρον της συνάρτησης $g(z)$ σε μια περιοχή του z_0 , δεν μεγαλώνει γρηγορότερα από την $g(z)$, καθώς $z \rightarrow z_0$.
2. Μικρό όμικρον της συνάρτησης $g(z)$ σε μια περιοχή του z_0 , μικραίνει ταχύτερα από την $g(z)$ καθώς $z \rightarrow z_0$.

2.2 Ασυμπτωτικά Ισοδύναμη Συνάρτηση (ή Ισοδύναμη Συνάρτηση)

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f(z)$ είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμη με την συνάρτηση $g(z)$ καθώς $z \rightarrow z_0$ αν οι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ είναι τέτοιες ώστε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

Θα γράφουμε τότε $f(z) \sim g(z)$ καθώς $z \rightarrow z_0$.

2.3 Ασυμπτωτική Ακολουθία

Ασυμπτωτική ακολουθία στο $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ ονομάζεται μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n(z)\}, n \in \mathbb{N}$, αν για όλα τα n ισχύει $f_{n+1}(z) = o(f_n(z))$ καθώς $z \rightarrow z_0$. Άρα, αν η $f_n(z)$ είναι μη-μηδενική στην περιοχή του z_0 , τότε $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} = 0$.

Παραδείγματα ασυμπτωτικών ακολουθιών

$$\begin{aligned} &\{(z - z_0)^n\}, \quad z \rightarrow z_0 \\ &\{(\log z)^{-n}\}, \quad z \rightarrow \infty \\ &\{e^z z^{-a_n}\}, \quad z \rightarrow \infty, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad \text{με } a_{n+1} > a_n \end{aligned}$$

2.4 Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα ή Ασυμπτωτική Προσέγγιση συνάρτησης

Αν η $\{f_n(z)\}, n \in \mathbb{N}$, καθώς $z \rightarrow z_0$, είναι ασυμπτωτική ακολουθία συναρτήσεων τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(z)$ όπου a_n σταθερές, είναι το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ή η ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης $f(z)$ αν για $\forall N \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$f(z) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(z) + o(f_N(z))$$

2.4.1 Κυρίαρχος Όρος Άσυμπτωτικού Αναπτύγματος

Αν η $f(z)$ έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(z) + o(f_N(z)),$$

τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές a_n .

Για τον a_1 , έχουμε

$$f(z) = a_1 f_1(z) + o(f_1(z))$$

και άρα

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{f_1(z)}$$

Για τον a_2 , $N = 2$ γράφουμε

$$f(z) = a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z) + o(f_2(z))$$

και άρα

$$a_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - a_1 f_1(z)}{f_2(z)}$$

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε για τον a_N

$$a_N = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n f_n(z)}{f_N(z)}$$

Κυρίαρχος όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της συνάρτησης $f(z)$ ονομάζεται ο πρώτος μη-μηδενικός όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος, δηλαδή $a_1 = a_2 = \dots = a_{N-1} = 0$ και $a_N \neq 0$ για κάποιο N , τότε γράφουμε $f(z) \sim a_N f_N(z)$

2.5 Λήμμα του Watson

2.5.1 Συνάρτηση Γάμμα και Ατελής Συνάρτηση Γάμμα

Η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad \text{με } a > 0$$

και έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, με $a \in \mathbb{R}^+$
2. $\Gamma(m+1) = m!$, με $m \in \mathbb{Z}^+$

Η Ατελής Συνάρτηση Γάμμα ορίζεται ως

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt \quad \text{με } a, x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.1)$$

2.5.2 Ανάπτυγμα Taylor

Ανάπτυγμα Taylor μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(t)$ σε μια γειτονιά ενός αριθμού a ονομάζεται το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a) + (t-a) \frac{f'(a)}{1!} + (t-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (t-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{aligned}$$

Οπότε για το ανάπτυγμα *Taylor* της συνάρτησης e^{-t} στο $a=0$ έχουμε

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots, \quad t \in \mathbb{R}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.1) και ολοκληρώνοντας κάθε όρο παίρνουμε

$$\begin{aligned} \gamma(a, x) &= \int_0^x \left\{ 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots \right\} t^{a-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(a+n)n!} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο D'Alembert, με

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(a+n)n!}$$

Μέσω του λήμματος του Watson έχουμε την δυνατότητα να προσεγγίσουμε ασυμπτωτικά ολοκληρώματα Laplace, δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \quad \text{καθώς το } x \rightarrow \infty$$

όπου η συνάρτηση $f(z)$ είναι απείρως παραγωγίσιμη και για την κάθε παράγωγό της ισχύει $f^{(n)}(t) = O(e^{at})$, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Λήμμα 2.5.1. (Λήμμα του Watson)

Έστω το ολοκλήρωμα της μορφής Laplace

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \quad (2.2)$$

και έστω ότι η συνάρτηση $f(t)$ του ολοκληρώματος έχει τη μορφή $t^\lambda g(t)$, όπου $g(t)$ συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και η οποία αναπτύσσεται σε σειρά Taylor σε περιοχή γύρω από το μηδέν, με $g(0) \neq 0$. Αν $\lambda > -1$ και $T > 0$ τότε έχουμε

$$I(x) = \int_0^T e^{-xt} t^\lambda g(t) dt \sim \sum_{n=0}^\infty a_n \Gamma(\lambda + n + 1) x^{-(\lambda+n+1)} \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

$$\text{όπου } a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

Απόδειξη

Η $g(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor σε μια περιοχή του μηδενός, δηλαδή

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + tg'(0) + t^2 \frac{g''(0)}{2} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^\infty t^n \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

τότε

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^M a_n t^n + r_M(t), \end{aligned}$$

όπου

$$r_M(t) = \sum_{n=M}^{\infty} a_n t^n, \quad (2.4)$$

με

$$|r_M(t)| \leq L t^{M+1} \quad (2.5)$$

για $|t| \leq R$, όπου R η ακτίνα σύγκλισης της σειράς και L κατάλληλη σταθερά. Θεωρώντας $T \leq R$ και αντικαθιστώντας τη $g(t)$ με το ανάπτυγμά της, έχουμε

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^T \{e^{-xt} t^\lambda \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \} \} dt \\ &= \int_0^T \{e^{-xt} t^\lambda \{ \sum_{n=0}^M a_n t^n + \sum_{n=M}^{\infty} a_n t^n \} \} dt \\ &= \int_0^T \{e^{-xt} t^\lambda \{ \sum_{n=0}^M a_n t^n \} \} dt + \int_0^T \{e^{-xt} t^\lambda \{ \sum_{n=M}^{\infty} a_n t^n \} \} dt \\ &= I_1(x) + I_2(x) \end{aligned}$$

όπου

$$I_1(x) = \int_0^T \{e^{-xt} t^\lambda \{ \sum_{n=0}^M a_n t^n \} \} dt \quad (2.6)$$

και λόγω της (2.4)

$$I_2(x) = \int_0^T \{e^{-xt} t^\lambda r_M(t)\} dt \quad (2.7)$$

Για τη σχέση (2. 7) λόγω της (2. 5) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^T \{e^{-xt}t^\lambda r_M(t)\}dt &\leq \int_0^T \{e^{-xt}t^\lambda Lt^{M+1}\}dt \\ &= L \int_0^T \{e^{-xt}t^{\lambda+M+1}\}dt\end{aligned}$$

και πραγματοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $\tau = xt$ έχουμε

$$\begin{aligned}L \int_0^T \{e^{-xt}t^{\lambda+M+1}\}d\tau &= L \int_0^{xT} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}x^{-(\lambda+M+1)}x^{-1}\}d\tau \\ &= L \int_0^{xT} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}x^{-(\lambda+M+2)}\}d\tau \\ &= Lx^{-(\lambda+M+2)} \int_0^{xT} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau \\ &= Lx^{-(\lambda+M+2)} \left\{ \int_0^{xT} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{xT}^{\infty} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_{xT}^{\infty} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau \right\} = \\ L \int_0^T \{e^{-xt}t^{\lambda+M+1}\}d\tau &= Lx^{-(\lambda+M+2)} \left\{ \int_0^{\infty} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau - \int_{xT}^{\infty} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau \right\}\end{aligned}\tag{2. 8}$$

και λόγω της $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{a-1}dt$, η (2. 8) για $a = \lambda + M + 2$ γίνεται

$$L \int_0^T \{e^{-xt}t^{\lambda+M+1}\}d\tau = Lx^{-(\lambda+M+2)} \left\{ \Gamma(\lambda + M + 2) - \int_{xT}^{\infty} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau \right\}$$

Τώρα για την προσέγγιση του

$$Lx^{-(\lambda+M+2)} \int_{xT}^{\infty} \{e^{-\tau}\tau^{\lambda+M+1}\}d\tau\tag{2. 9}$$

πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $\tau = xT(1+v)$ και η (2. 9) γίνεται

$$\begin{aligned}
& Lx^{-(\lambda+M+2)} \int_{xT}^{\infty} \{e^{xT(1+v)} \{xT(1+v)\}^{\lambda+M+1} xT\} dv = \\
& Lx^{-(\lambda+M+2)} x^{\lambda+M+2} T^{\lambda+M+2} e^{-xT} \int_0^{\infty} e^{-xTv} (1+v)^{\lambda+M+1} dv = \\
& LT^{\lambda+M+2} e^{-xT} \int_0^{\infty} e^{-xTv} (1+v)^{\lambda+M+1} dv \quad (2. 10)
\end{aligned}$$

Για $a > 0$ και $v > 0$ ισχύει $(1+v)^a < e^{av}$, για $a = 1$ έχουμε $1+v < e^v$ και άρα

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \{e^{-xTv} (1+v)^{\lambda+M+1}\} dv &< \int_0^{\infty} \{e^{-xTv} e^{v(\lambda+M+1)}\} dv \\
&= \int_0^{\infty} e^{-v(xT-\lambda-M-1)} dt \\
&= \frac{-e^{-v(xT-\lambda-M-1)}}{xT-\lambda-M-1} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{xT-\lambda-M-1} \\
&= \frac{1}{xT} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda+M+1}{xT}} \\
&= \frac{1}{xT} \cdot \left\{ 1 + \frac{\lambda+M+1}{xT} + \left(\frac{\lambda+M+1}{xT}\right)^2 + \dots \right\}
\end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι $xT > \lambda + M + 1$ καταλήγουμε στην εξής σχέση

$$\int_0^{\infty} e^{-v(xT-\lambda-M-1)} dv \sim \frac{1}{xT} \quad \text{και από τη σχέση}$$

$$LT^{\lambda+M+2} e^{-xT} \int_0^{\infty} e^{-xTv} (1+v)^{\lambda+M+1} dv < LT^{\lambda+M+2} e^{-xT} \int_0^{\infty} e^{-v(xT-M-\lambda-1)} dv$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
LT^{\lambda+M+2}e^{-xT} \int_0^\infty e^{-xTv}(1+v)^{\lambda+M+1}dv &\sim LT^{\lambda+M+2}e^{-xT} \frac{1}{xT} \\
&= LT^{\lambda+M+1} \frac{1}{x} e^{-xT} \\
&= o(e^{-xT}) \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε για το $I_2(x)$ της (2. 7)

$$\begin{aligned}
I_2(x) &\sim x^{-(\lambda+M+2)}\Gamma(\lambda+M+2) + o(e^{-xT}) \\
&= x^{-(\lambda+M+2)}\Gamma(\lambda+M+2) + o(x^{-(\lambda+M+2)}), \text{ καθώς } x \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

$$\left| \int_0^\infty e^{-xT} t^\lambda r_M(t) dt \right| < L \int_0^\infty e^{-xT} t^{\lambda+M+1} dt$$

Οπότε

$$\int_0^\infty e^{-xT} t^\lambda r_M(t) dt = O(x^{-(\lambda+M+2)}), \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty$$

Για τη σχέση (2. 6) έχουμε

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_0^T \{e^{-xt} t^\lambda \{ \sum_{n=0}^M a_n t^n \} \} dt \\
&= \sum_{n=0}^M \{ a_n \int_0^T e^{-xT} t^{\lambda+n} dt \} \\
&= \sum_{n=0}^M \{ a_n \{ \int_0^T e^{-xT} t^{\lambda+n} dt + \int_T^\infty e^{-xT} t^{\lambda+n} dt - \int_T^\infty e^{-xT} t^{\lambda+n} dt \} \} \\
&= \sum_{n=0}^M \{ a_n \{ \int_0^\infty e^{-xT} t^{\lambda+n} dt - \int_T^\infty e^{-xT} t^{\lambda+n} dt \} \} \sim \\
&\sim \sum_{n=0}^M a_n \Gamma(\lambda+n+1) x^{-(\lambda+n+1)} + o(x^{-(\lambda+n+1)}), \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε βρεί ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το $I(x)$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \\
&\sim \sum_{n=0}^M a_n \Gamma(\lambda + n + 1) x^{-(\lambda+n+1)} + o(x^{-(\lambda+n+1)}) \\
&= \sum_{n=0}^M a_n \Gamma(\lambda + n + 1) x^{-(\lambda+n+1)}, \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty, \quad \text{όπου } a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^\lambda g(t) dt \sim \sum_{n=0}^M a_n \Gamma(\lambda + n + 1) x^{-(\lambda+n+1)} \quad (2.11)$$

□

2.6 Υπολογισμός Ασυμπτωτικού Αναπτύγματος Ολοκληρώματος Μορφής Laplace στο Μιγαδικό Επίπεδο

Θεώρημα 2.6.1. Έστω οι συναρτήσεις $w(z)$ και $g(z)$, για τις οποίες έχουμε ότι η πρώτη είναι συνεχής στο z_0 και η δεύτερη είναι αναλυτική στο z_0 , z_0 κρίσιμο σημείο πρώτης τάξης για την $w(z)$ ($w'(z_0) = 0$ και $w''(z_0) \neq 0$). Τότε για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος $I(\lambda)$ κατα μήκος του δρόμου επικλινέστατης καθόδου, καθώς $\lambda \rightarrow \infty$ θα ισχύει ότι

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{\lambda w(z)} dz \sim g(z_0) \left[-\frac{2\pi}{\lambda w''(z_0)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{\lambda w(z_0)} + O\left(\frac{e^{\lambda w(z_0)}}{\lambda}\right)$$

2.7 Μέθοδος Επικλινέστατης Καθόδου

Σκοπός της μεθόδου είναι ο υπολογισμός της ασυμπτωτικής εκτίμησης του ολοκληρώματος

$$I(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda w(z)} dz,$$

καθώς $\lambda \rightarrow \infty$, όπου οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι μιγαδικές, αναλυτικές στο πεδίο ορισμού τους, ανεξάρτητες της πραγματικής θετικής σταθεράς λ και το C μια διαδρομή στο πεδίο ορισμού τους D .

Έστω Δ το σύνολο όλων των διαδρομών οι οποίες προκύπτουν από παραμόρφωση της αρχικής διαδρομής C , αλλά τα άκρα παραμένουν ίδια. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Cauchy, το ολοκλήρωμα $I(\lambda)$ παρμένει σταθερό κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής του Δ . Το μήκος της διαδρομής, το οποίο είναι πεπερασμένο, περιμένουμε ότι δεν θα επηρεάσει την εκτίμηση μας καθώς το $\lambda \rightarrow \infty$ και το λ βρίσκεται στον εκθέτη της συνάρτησης $e^{\lambda w(z)}$. Το πώς ενεργεί η $w(z)$ έχει σημαντικότερο ρόλο, από το πώς ενεργεί η $g(z)$, στον υπολογισμό της εκτίμησης.

Οπότε η εκτίμηση γίνεται

$$|I(\lambda)| \leq D(g, C) \max\{e^{\lambda \operatorname{Re}(w(z))}\}$$

όπου $D(g, C)$ σταθερά η οποία δεν εξαρτάται από το λ , αλλά μόνο από την $g(z)$ και την διαδρομή C . Άρα ψάχνουμε ένα σημείο σε συγκεκριμένη διαδρομή όπου μεγιστοποιείται η ποσότητα $\operatorname{Re}(w(z))$, με αυτόν τον τρόπο ψάχνουμε διαδρομή πάνω στην οποία να έχουμε τη μικρότερη τιμή του $\max\{e^{\lambda \operatorname{Re}(w(z))}\}$, τιμή την οποία μπορούμε να βρούμε από το Θεώρημα του Cauchy, μιας και μας επιτρέπει να αλλάζουμε διαδρομή ολοκλήρωσης χωρίς να αλλοιώνεται η τιμή του ολοκληρώματος. Μέσω αυτού μπορούμε να ψάξουμε διαδρομή ολοκλήρωσης ή άθροισμα διαδρομών, έτσι ώστε να μην αλλοιώνεται το ολοκλήρωμα $I(\lambda)$, αλλά και τα ολοκληρώματα που θα παίρνουμε, μετά την αλλαγή των διαδρομών, να είναι της μορφής Laplace. Άρα η εύρεση κατάλληλου φράγματος για την παραπάνω εκτίμηση, με απώτερο σκοπό τον υπολογισμό της προσέγγισης του $I(\lambda)$, μπορεί να επιτευχθεί με την κατάλληλη αλλαγή διαδρομής.

Έστω $z = x + iy$, τότε $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, όπου $u(x, y), v(x, y)$ πραγματικές συναρτήσεις.

Ορισμός 2.7.1. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$, σημείο του τόπου D . Μια κατεύθυνση η οποία περνάει από το σημείο z_0 και κατα μήκος της η $u(x, y)$ φθίνει (αυξάνει) από την τιμή της $u(x_0, y_0)$ ονομάζεται κατεύθυνση καθόδου (ανόδου)

Ορισμός 2.7.2. Ονομάζουμε δρόμο καθόδου (ανόδου) την καμπύλη C η οποία ενώνει το σημείο z_0 με το σημείο z , το οποίο δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένο αν σε κάθε σημείο της η εφαπτομένη της είναι σε κατεύθυνση καθόδου (ανόδου).

Από το σημείο z_0 ενδέχεται να περνούν πολλές κατευθύνσεις καθόδου ή ανόδου και άρα πολλοί δρόμοι καθόδου ή ανόδου. Στόχος μας να εντοπίσουμε κατευθύνσεις κατα τις οποίες ο ρυθμός καθόδου ή ανόδου είναι ο μέγιστος.

Ορισμός 2.7.3. Κατευθύνσεις κατα τις οποίες ο ρυθμός καθόδου(ανόδου) είναι μέγιστος λέγονται κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου(ανόδου).

Πρέπει να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι σε $\forall z \in D$ στο οποίο $\nabla u \neq 0$ η κατεύθυνση της επικλινέστατης καθόδου είναι μοναδική και είναι ίδια με αυτή του διανύσματος $-\nabla u$, ενώ η αντίστοιχη της επικλινέστατης ανόδου είναι η ίδια με του διανύσματος ∇u .

Ορισμός 2.7.4. Δρόμος επικλινέστατης καθόδου (ανόδου) λέγεται μια καμπύλη που σε κάθε σημείο της η εφαπτομένη της έχει την κατεύθυνση της επικλινέστατης καθόδου (ανόδου)

Ορισμός 2.7.5. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ και $z_1 = x_1 + iy_1$. Θα λέμε ότι το z_1 βρίσκεται σε λόφο της $w(z)$ ως προς το z_0 αν ισχύει $u(x_0, y_0) < u(x_1, y_1)$. Θα λέμε ότι το z_1 βρίσκεται σε κοιλάδα της $w(z)$ αν ισχύει ότι $u(x_1, y_1) < u(x_0, y_0)$. Επιπλέον θα λέμε ότι το z_1 βρίσκεται στο σύνορο του λόφου και της κοιλάδας της $w(z)$ αν ισχύει ότι $u(z_1) = u(z_0)$ ($u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0)$).

Λήμμα 2.7.6. Οι καμπύλες επικλινέστατης καθόδου και ανόδου ορίζονται από τη σχέση $v(x_0, y_0) = v(x, y) = \text{Im}(w(z))$ για κάθε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$

Απόδειξη

Ορίζουμε τη μεταβολή της $w(z)$,

$$\begin{aligned}\delta w(z) &= w(z) - w(z_0), \\ \delta u(x, y) &= u(x, y) - u(x_0, y_0), \\ i\delta v(x, y) &= i\{v(x, y) - v(x_0, y_0)\}.\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\delta w(z) &= w(z) - w(z_0) \\ &= u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \\ &= u(x, y) - u(x_0, y_0) + i\{v(x, y) - v(x_0, y_0)\} \\ &= \delta u(x, y) + i\delta v(x, y).\end{aligned}$$

οπότε το μέτρο του $\delta w(z)$ είναι το

$$|\delta w(z)|^2 = |\delta u(x, y)|^2 + |\delta v(x, y)|^2$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$|\delta u(x, y)| \leq |\delta w(z)|$$

Από το οποίο λαμβάνουμε ότι

$$\max |\delta u(x, y)| = |\delta w(z)|$$

Το οποίο μας οδηγεί στο $\delta v(x, y) = 0 \Rightarrow v(x, y) = v(x_0, y_0) = \text{Im}(w(z))$, αν $\max |\delta u(x, y)| = |\delta w(z)| \quad \square$

Ορισμός 2.7.7. Ένα σημείο z_0 λέγεται κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $w(z)$ αν ισχύει

$$\left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = 0$$

Ορισμός 2.7.8. Λέμε ότι ένα κρίσιμο σημείο z_0 μιας συνάρτησης $w(z)$ είναι τάξης n αν ισχύει ότι

$$\left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{d^2w(z)}{dz^2} \right|_{z=z_0} = \dots = \left. \frac{d^nw(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} = 0$$

και

$$\left. \frac{d^{n+1}w(z)}{dz^{n+1}} \right|_{z=z_0} \neq 0$$

Ορισμός 2.7.9. Ύψος ενός κρίσιμου σημείου z_0 μιας συνάρτησης $w(z)$ λέγεται ο αριθμός $\operatorname{Re}(w(z_0))$

Λήμμα 2.7.10. Έστω $\left. \frac{d^q w(z)}{dz^q} \right|_{z=z_0} = 0, \quad z = z_0, \quad q = 1, 2, 3, \dots, n-1$

και $\frac{d^n w(z)}{dz^n} = a e^{i\alpha}, a > 0, .$ Θέτοντας $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$, τότε οι γωνίες κατευθύνσεων της επικλινέστατης καθόδου, επικλινέστατης ανόδου και των κατευθύνσεων στις οποίες $u(x, y) = \text{const}$ στο $z = z_0$ είναι αντίστοιχα:

1. επικλινέστατης καθόδου

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + (2\rho + 1)\frac{\pi}{n}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.12)$$

2. επικλινέστατης ανόδου

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + 2\rho\frac{\pi}{n}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.13)$$

3. $u(x, y) = \text{const}$

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.14)$$

Απόδειξη

Η $w(z)$ είναι αναλυτική σε περιοχή του z_0 οπότε αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} \rho^n e^{in\theta} \\ &= \frac{a e^{i\alpha}}{n!} \rho^n e^{in\theta} \{1 + O(\rho)\}, \quad \text{και } |z - z_0| < \rho. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \delta w(z) &= w(z) - w(z_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} (z_0 - z_0)^n \\ &= \frac{a e^{i\alpha}}{n!} \rho^n e^{in\theta} \{1 + O(\rho)\} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\delta w(z) = \frac{ae^{i\alpha}}{n!} \rho^n e^{in\theta} \{1 + O(\rho)\} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta w(z)}{\rho^n} = \frac{ae^{i\alpha}}{n!} e^{in\theta} \{1 + O(\rho)\}$$

Όμως η κατεύθυνση της επικλινέστατης καθόδου σε κάθε σημείο είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός, οπότε και η ποσότητα $\frac{\delta w(z)}{\rho^n}$ αρνητικός πραγματικός αριθμός, αφού $\alpha > 0$ θα πρέπει $e^{i\alpha} e^{in\theta} = e^{i(\alpha+n\theta)}$ να είναι πραγματικός αρνητικός αριθμός, άρα

$$e^{i(\alpha+n\theta)} = e^{i(2\rho\pi+\pi)} \Rightarrow$$

$$\alpha + n\theta = 2\rho\pi + \pi, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + (2\rho + 1)\frac{\pi}{n}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ δηλαδή η σχέση } (2.12)$$

Επίσης η κατεύθυνση της επικλινέστατης ανόδου σε κάθε σημείο είναι θετικός αριθμός, οπότε και η ποσότητα $\frac{\delta w(z)}{\rho^n}$ θετικός πραγματικός αριθμός οπότε θα πρέπει, αφού $\alpha > 0$, $e^{i\alpha} e^{in\theta} = e^{i(\alpha+n\theta)}$ να είναι πραγματικός θετικός αριθμός, άρα

$$e^{i(\alpha+n\theta)} = e^{i(2\rho\pi)} \Rightarrow$$

$$\alpha + n\theta = 2\rho\pi, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + 2\rho\frac{\pi}{n}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{δηλαδή η σχέση} \quad (2.13)$$

Όταν $u(x, y) = \text{const}$ τότε η ποσότητα $\frac{\delta w(z)}{\rho^n}$ θα είναι φανταστικός αριθμός, οπότε

$$e^{i(\alpha+n\theta)} = e^{i(2\rho\pi + \frac{\pi}{2})} \Rightarrow$$

$$\alpha + n\theta = 2\rho\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + (\rho + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{δηλαδή η σχέση} \quad (2.14)$$

□

2.7.1 Περιγραφή Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου

Γενικότερα για να εφαρμοστεί η μέθοδος επικλινέστατης καθόδου ακολουθούνται τα εξής πέντε βασικά βήματα:

1. Αναζητούνται τα κρίσιμα σημεία του ολοκληρώματος $I(\lambda)$. Όπου κρίσιμα σημεία νοούνται τα άκρα ολοκλήρωσης, τα κρίσιμα σημεία της $w(z)$ καθώς και τα σημεία στα οποία οι συναρτήσεις $w(z)$ και $g(z)$ δεν είναι αναλυτικές.
2. Σε κάθε κρίσιμο σημείο καθορίζονται οι δρόμοι επικλινέστατης καθόδου που του αντιστοιχεί.
3. Παραμόρφωση του δρόμου ολοκλήρωσης, έτσι ώστε ο αλλαγμένος δρόμος να διέρχεται από δρόμους επικλινέστατης καθόδου, μόνο, κρίσιμων σημείων. Η παραμόρφωση αυτή διακαυχολογείται μέσω του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Cauchy.
4. Υπολογισμός ασυμπτωτικού αναπτύγματος όλων των ολοκληρωμάτων, ολοκληρώματα τα οποία είναι μορφής Laplace, που προέκυψαν από την παραμόρφωση του δρόμου.

5. Η ασυμπτωτική προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(\lambda)$, είναι το άθροισμα όλων των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων.

2.7.2 Εφαρμογή της Μεθόδου για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μορφής Laplace

Έστω ότι έχουμε πραγματοποιήσει τα τρία πρώτα βασικά βήματα της μεθόδου και έστω C ο δρόμος επικλινέστατης καθόδου, ο οποίος διέρχεται από το κρίσιμο σημείο z_0 . Στο 4ο βήμα υπολογίζουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του

$$I(\lambda) = \int_c g(z) e^{\lambda w(z)} dz, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Το z_0 κρίσιμο σημείο πρώτης τάξης, δηλαδή

$$\left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = 0, \quad \text{και} \quad \left. \frac{d^2w(z)}{dz^2} \right|_{z=z_0} \neq 0$$

Αναπτύσσουμε τη $w(z)$ σε σειρά Taylor

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= w(z_0) + w'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} w''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \\ &= w(z_0) + \frac{1}{2} w''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \\ &= w(z_0) + \frac{1}{2} w''(z_0)(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Εάν } w''(z_0) = \left. \frac{d^2w(z)}{dz^2} \right|_{z=z_0} &= a e^{i\alpha}, \quad a > 0 \text{ και } z - z_0 = \rho e^{i\theta}, \text{ τότε παίρνουμε} \\ w(z) &= w(z_0) + \frac{1}{2} a e^{i\alpha} \rho^2 e^{i2\theta} + O(\rho^3), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$u(x, y) + i v(x, y) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) + \frac{1}{2} a \rho^2 e^{i(\alpha+2\theta)} + O(\rho^3)$$

Εξισώνουμε πραγματικά και φανταστικά μέρη στα δύο μέλη,

$$e^{i(\alpha+2\theta)} = \cos(\alpha + 2\theta) + i \sin(\alpha + 2\theta)$$

και παίρνουμε

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\rho^2 a \cos(\alpha + 2\theta) + O(\rho^3), \quad \text{για τα πραγματικά μέρη}$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\rho^2 a \sin(\alpha + 2\theta) + O(\rho^3), \quad \text{για τα φανταστικά μέρη}$$

Στο κρίσιμο σημείο $z = z_0$, έχουμε

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{και} \quad v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

.

Από την εξίσωση των πραγματικών μερών συμπεραίνουμε ότι οι καμπύλες

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

εφάπτονται σε δύο κάθετες γραμμές, οι οποίες είναι λύσεις της

$$\cos(\alpha + 2\theta) = 0 \Rightarrow \alpha + 2\theta = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4},$$

οπότε

$$\theta = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \tag{2. 15}$$

$$\theta = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \tag{2. 16}$$

Από την εξίσωση των φανταστικών συμπεραίνουμε ότι οι καμπύλες

$$v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

εφάπτονται σε δύο κάθετες γραμμές οι οποίες είναι λύσεις της

$$\sin(\alpha + 2\theta) = 0 \Rightarrow \alpha + 2\theta = \pm \pi \Rightarrow \theta = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (2.17)$$

$$\theta = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (2.18)$$

και θα πρέπει να διχοτομούν τις προηγούμενες γωνίες.

Σε μία περιοχή του z_0 και για z πάνω στη καμπύλη επικλινέστατης καθόδου έχουμε

$$w(z) - w(z_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(z - z_0)^2 w''(z_0) < 0,$$

το οποίο είναι πραγματικός αριθμός διότι τα φανταστικά μέρη αλληλοεξουδετερώνονται.

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητής ως εξής

$$w(z) - w(z_0) = -\tau^2, \quad \text{όπου } \tau \in \mathbb{R}$$

Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $w(z)$ στον δρόμο επικλινέστατης καθόδου, αφού είναι $1-1$, μπορούμε να βρούμε την αντίστροφή της, έστω $z(\tau)$ και μάλιστα $z(\tau) = w^{-1}(w(z_0) - \tau^2)$ και αντικαθιστώντας στο $I(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda w(z)} dz$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{-\tau_a}^{\tau_b} g(z(\tau)) e^{\lambda(w(z_0) - \tau^2)} \frac{dz}{d\tau} d\tau \\ &= e^{\lambda w(z_0)} \int_{-\tau_a}^{\tau_b} g(z(\tau)) e^{-\lambda \tau^2} \frac{dz}{d\tau} d\tau, \end{aligned}$$

όπου $\tau_a > 0$ και $\tau_b > 0$, αντιστοιχούν στα νέα άκρα ολοκλήρωσης που προέκυψαν από την αλλαγή μεταβλητής

$$w(z) - w(z_0) = -\tau^2.$$

Τώρα μέσω του Λήμματος Watson μπορούμε να υπολογίσουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $I(\lambda)$ και να γράψουμε

$$I(\lambda) \sim e^{\lambda w(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} g(z(\tau)) e^{-\lambda \tau^2} \frac{dz}{d\tau} d\tau, \quad \text{όπου } z(\tau) = w^{-1}(w(z_0) - \tau^2)$$

Για να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό του εν λόγω ασυμπτωτικού αναπτύγματος χρειάζεται να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της $w(z) - w(z_0) = -\tau^2$ πάνω στην καμπύλη της επικλινέστατης καθόδου $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ για τον υπολογισμό των $z(\tau)$ και $\frac{dz}{d\tau}$.

Από τη σχέση

$$w(z) = w(z_0) + \frac{1}{2}w''(z_0)(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$

παίρνουμε ότι

$$w(z) - w(z_0) = \frac{1}{2}w''(z_0)(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$

και συνδυάζοντάς την με τη σχέση

$$w(z) - w(z_0) = -\tau^2$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \left(\frac{-2\tau^2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} + O(\tau^2) \\ &= \left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau + O(\tau^2) \end{aligned}$$

$$w''(z_0) \in \mathbb{C} \Rightarrow \left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}$$

Οπότε θα πρέπει να επιλέξουμε τον κατάλληλο κλάδο του μιγαδικού $\left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}}$, όταν το z κινείται στον δρόμο της επικλινέστατης καθόδου. Αυτό μπορεί να καθοριστεί, με την έννοια της κατεύθυνσης, δηλαδή από ποια πλευρά προσεγγίζουμε το κρίσιμο σημείο. Αν υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ο δρόμος παραμορφώνεται με σκοπό να ταυτιστεί με το δρόμο της επικλινέστατης καθόδου $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ με την ολοκλήρωση να συμβαίνει για z σε μια περιοχή του z_0 κατά μήκος αυτού, από $\arg(z - z_0) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ στο $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Στην προκειμένη περίπτωση ο κατάλληλος κλάδος είναι αυτός για τον οποίο το $\arg \left[\left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$ θα μας δώσει $\tau > 0$, όταν το z θα ανήκει στην αντίστοιχη κοιλάδα και άρα $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Οπότε από

$z - z_0 = \left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau + O(\tau^2)$ παίρνουμε $\tau > 0$ αν $z \rightarrow z_0$ στην περιοχή όπου $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Τότε έχουμε $w''(z_0) = ae^{i\alpha} = |w''(z_0)|e^{i\alpha}$ και η σχέση $z - z_0 = \left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau + O(\tau^2)$ γίνεται

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \left(\frac{-2}{|w''(z_0)|e^{i\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau + O(\tau^2) \\ &= \left(\frac{-2}{|w''(z_0)|} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau \cdot e^{-i\frac{\alpha}{2}} + O(\tau^2) \\ &= i\sqrt{2}|w''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \tau \cdot e^{-i\frac{\alpha}{2}} + O(\tau^2) \end{aligned}$$

Αν τώρα $z \rightarrow z_0$ από την περιοχή $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ τότε έχουμε $\tau < 0$. Στη συνέχεια για να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος, αναπτύσσουμε την $g(z(\tau))$ σε δυναμοσειρά,

$$g(z(\tau)) = g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + \dots$$

και αντικαθιστώντας σε αυτήν την σχέση

$$z - z_0 = \left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau + O(\tau^2),$$

παίρνουμε

$$g(z(\tau)) = g(z_0) + g'(z_0) \left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau + O(\tau^2)$$

.

Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα του Watson

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= e^{\lambda w(z_0)} g(z_0) \left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} d\tau + \dots \\ &\sim g(z_0) \left[\frac{-2\pi}{\lambda w''(z_0)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{\lambda w(z_0)} + O\left(\frac{e^{\lambda w(z_0)}}{\lambda} \right), \quad \text{καθώς } \lambda \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Σύμφωνα, τώρα, με τα παραπάνω το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\left(\frac{-2}{w''(z_0)} \right)^{\frac{1}{2}}$ πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε να συμφωνεί με την κατεύθυνση που θα διέρχεται από το κρίσιμο σημείο z_0

Αν τώρα η κατεύθυνση περνάει από την περιοχή $\arg(z - z_0) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ στην περιοχή με $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Τότε έχουμε

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} |w''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} g(z_0) e^{\lambda w(z_0) + \frac{i}{2}(\pi - \alpha)}$$

3 Εφαρμογή της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου σε Παραβολικά Προβλήματα Ανώτερης Τάξης στη μια Διάσταση

Τα παραβολικά προβλήματα ανώτερης τάξης με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι της μορφής

$$\partial_t u(x, t) = (-1)^{m+1} \partial_x^{2m} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

με αρχική συνθήκη $u(x, 0) = u_0(x)$.

Χρησιμοποιώντας Μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) G(x - y, t) dy \quad (3. 1)$$

όπου

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x - \kappa^{2m} t} d\kappa \quad (3. 2)$$

Επειδή δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το $G(x, t)$, μπορούμε να μελετήσουμε την ασυμπτωτική του συμπεριφορά του καθώς $t \rightarrow 0$ ή καθώς $x \rightarrow \infty$. Στην σχέση (3. 2) πραγματοποιούμε την εξής αλλαγή μεταβλητής

$$t^{-\frac{1}{2m}} \eta = \kappa \Rightarrow t^{-\frac{1}{2m}} d\eta = d\kappa, \quad \kappa \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \eta \rightarrow \pm\infty$$

Τότε η (3. 2) γίνεται

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x - \kappa^{2m} t} d\kappa \\ &= \frac{1}{2\pi} t^{-\frac{1}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta(t^{-\frac{1}{2m}}) - t^{-1}\eta^{2m} t} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} t^{-\frac{1}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta(t^{-\frac{1}{2m}}) - \eta^{2m}} d\eta \\ &= t^{-\frac{1}{2m}} H(xt^{-\frac{1}{2m}}, 1) \\ &= t^{-\frac{1}{2m}} H(xt^{-\frac{1}{2m}}), \end{aligned}$$

όπου

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta - \eta^{2m}} d\eta \quad (3.3)$$

και του οποίου θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $x \rightarrow \infty$.

Πραγματοποιούμε την εξής αλλαγή μεταβλητής,

$$\eta = s \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \Rightarrow d\eta = \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} ds, \eta \rightarrow \pm\infty \Rightarrow s \rightarrow \pm\infty$$

προκειμένου να φέρουμε το ολοκλήρωμα στην επιθυμητή μορφή για να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική του εκτίμηση.

Οπότε η (3.3) γίνεται

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta - \eta^{2m}} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \exp \left[ixs \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} - s^{2m} \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{2m}{2m-1}} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{x^{\frac{2m}{2m-1}}}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}} \left(is - \frac{s^{2m}}{2m} \right) \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} F(\lambda), \end{aligned}$$

όπου

$$\lambda = \frac{x^{\frac{2m}{2m-1}}}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}}$$

και

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(is - \frac{s^{2m}}{2m})} ds$$

δηλαδή

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\phi(z)} dz \quad (3.4)$$

με

$$\phi(z) = iz - \frac{z^{2m}}{2m} \quad (3.5)$$

3.1 Κρίσιμα Σημεία της $\phi(z)$

Για την υλοποίηση της μεθόδου της επικλινέστατης καθόδου, χρειάζεται να βρεθούν πρώτα τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$\phi(z) = iz - \frac{z^{2m}}{2m}$$

προκειμένου να υπολογιστεί το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της σχέσης (3. 4). Η $\phi(z)$ είναι παντού αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, οπότε παραγωγίζοντας την, ως προς z και εξισώνοντας την παραγωγό της με μηδέν, θα βρούμε τα κρίσιμα σημεία της..

Άρα έχουμε

$$\phi'(z) = i - z^{2m-1}$$

και

$$\phi'(z) = 0 \Rightarrow i - z^{2m-1} = 0 \Rightarrow z^{2m-1} = i$$

και από τη σχέση

$$i = e^{i(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2})} = \cos\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3. 6)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} z_{\kappa}^{2m-1} &= \cos\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ z_{\kappa} &= \cos\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) + i \sin\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right), \quad \mu\epsilon \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, 2(m-1) \\ z_{\kappa} &= e^{i \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}}, \kappa = 0, 1, 2, \dots, 2(m-1) \end{aligned} \quad (3. 7)$$

3.2 Καμπύλες της Επικλινέστατης Καθόδου

Παραγωγίζουμε δύο φορές την (3. 5) και παίρνουμε

$$\phi''(z) = -(2m-1)z^{2m-2} \quad (3. 8)$$

άρα κάθε z_κ είναι κρίσιμο σημείο πρώτης τάξης.

Αφού η $\phi(z)$ είναι αναλυτική, μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά Taylor, γύρω από το z_κ , οπότε

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{2m} \frac{\phi^{(n)}(z_\kappa)}{n!} (z - z_\kappa)^n \Rightarrow$$

$$\phi(z) = \phi(z_\kappa) + \phi'(z_\kappa)(z - z_\kappa) + \frac{\phi''(z_\kappa)}{2!}(z - z_\kappa)^2 + \dots + \frac{\phi^{(2m)}(z_\kappa)}{(2m)!}(z - z_\kappa)^{2m} \Rightarrow$$

$$\phi(z) - \phi(z_\kappa) = \frac{\phi''(z_\kappa)}{2}(z - z_\kappa)^2 + O((z - z_\kappa)^3)$$

και θέτοντας $z - z_\kappa = \rho e^{i\theta}$ και λόγω της (3. 8) παίρνουμε

$$\phi(z) - \phi(z_\kappa) = \frac{2m-1}{2} \rho^2 e^{2i\theta} e^{-i(\frac{2\kappa+\frac{\pi}{2}}{2m-1} + \frac{\pi}{2})} + O(\rho^3) \Rightarrow$$

$$\phi(z) - \phi(z_\kappa) = \frac{2m-1}{2} \rho^2 \exp \left[i \left(2\theta - \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1} - \frac{\pi}{2} \right) \right] + O(\rho^3)$$

όπου οι κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου είναι $\theta = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ όπως προκύπτει από τις σχέσεις (2. 17), (2. 18).

Επίσης η ποσότητα $\phi(z) - \phi(z_\kappa)$ είναι πραγματικός αρνητικός αριθμός και κατα μήκος των κατευθύνσεων θα παραμένει αρνητικός και μάλιστα θα γίνεται και πιο "άρνητικός". Εξισώνοντας το εκθετικό μέρος με -1 μπορούμε να υπολογίσουμε αυτές τις κατευθύνσεις.

Οπότε για κάθε σημείο z_κ , το οποίο είναι κρίσιμο σημείο, θα έχουμε

$$\exp \left[i \left(2\theta - \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = -1 = \exp [\pm i\pi] \Rightarrow$$

$$2\theta - \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1} - \frac{\pi}{2} = \pm\pi \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} \quad (3.9)$$

Άρα οι κατευθύνσεις που αντιστοιχούν στο κρίσιμο σημείο z_κ είναι αυτές της σχέσης (3.9), οι θ και οι οποίες διαφέρουν κατά π .

Έστω

$$\begin{aligned} \theta_+^\kappa &= \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ \theta_+^\kappa &= \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} + \frac{3\pi}{4} \end{aligned} \quad (3.10)$$

και

$$\begin{aligned} \theta_-^\kappa &= \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \\ \theta_-^\kappa &= \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (3.11)$$

οι οποίες αντιστοιχούν στις καμπύλες επικλινέστατης καθόδου γ_+^κ και γ_-^κ , αντίστοιχα, του κρίσιμου σημείου z_κ .

3.2.1 Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα για το $\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}$

Αναπτύσσουμε την $\phi(z)$ σε σειρά Taylor και αφού $\phi'(z_\kappa) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(z_\kappa) + (z - z_\kappa)^2 \frac{\phi''(z_\kappa)}{2} + O((z - z_\kappa)^3) \Rightarrow \\ \phi(z) - \phi(z_\kappa) &= (z - z_\kappa)^2 \frac{\phi''(z_\kappa)}{2} + O((z - z_\kappa)^3). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Θέτοντας

$$\phi(z) - \phi(z_\kappa) = \eta$$

και

$$\begin{aligned} z - z_\kappa &= \Lambda \eta^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ \Lambda^2 &= \frac{(z - z_\kappa)^2}{\eta} \end{aligned}$$

από την (3.12) έχουμε

$$\Lambda^2 = \frac{(z - z_\kappa)^2}{\eta} \sim -\frac{2}{\phi''(z_\kappa)}$$

και λόγω της σχέσης $\phi''(z_\kappa) = -(2m-1)ie^{-i\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Lambda^2 &\sim -\frac{2}{\phi''(z_\kappa)} \\ &= -\frac{2}{-(2m-1)ie^{-i\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}}} \\ &= \frac{2}{(2m-1)i}e^{i\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}}\end{aligned}$$

και λόγω της (3. 7) έχουμε

$$\Lambda^2 \sim \frac{2}{(2m-1)i}z_\kappa \quad (3. 13)$$

Θέτοντας τον Λ , ότι είναι μιγαδικός,

$$\Lambda = \Lambda_-^\kappa = \sqrt{\frac{2}{2m-1}}e^{i\theta_-^\kappa},$$

τότε

$$\Lambda^2 = \frac{2}{2m-1}e^{2i\theta_-^\kappa},$$

και λόγω της (3. 11) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Lambda^2 &= \frac{2}{2m-1} \exp \left[2i \left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{2}{2m-1} e^{i\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}} e^{-i\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

και λόγω της (3. 7) παίρνουμε

$$\Lambda^2 = \frac{2}{(2m-1)i}z_\kappa \quad ,$$

δηλαδή τη σχέση (3. 13)

Για τον υπολογισμό του $\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)} dz$ χρησιμοποιούμε την εξής αντικατάσταση

$$z - z_\kappa = \Lambda \eta^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dz = \frac{1}{2} \Lambda \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta$$

και

$$\phi(z) - \phi(z_\kappa) = \eta$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda \phi(z)} &= \int_0^\infty e^{\lambda(\phi(z_\kappa) - \eta)} \frac{1}{2} \Lambda \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \Lambda e^{\lambda \phi(z_\kappa)} e^{-\lambda \eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &= \frac{1}{2} \Lambda e^{\lambda \phi(z_\kappa)} \int_0^\infty e^{-\lambda \eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma_-^\kappa} e^{-\lambda \eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta$ είναι τύπου Laplace, οπότε από το Λήμμα του Watson έχουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} s^{-\frac{1}{2}} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)$$

και άρα

$$\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda \phi(z)} dz = \frac{\Lambda_-^\kappa}{2} e^{\lambda \phi(z_\kappa)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)$$

Όπου Λ_-^κ σταθερά η οποία εξαρτάται από την γ_-^κ , δηλαδή την καμπύλη της επικλινέστατης καθόδου, κατα μήκος της οποίας γίνεται η ολοκλήρωση.

Τώρα υπολογίζουμε την ποσότητα $\phi(z_\kappa)$ από την σχέση (3. 5), δηλαδή στα κρίσιμα σημεία της $\phi(z)$

$$\phi(z) = iz - \frac{z^{2m}}{2m} \Rightarrow$$

$$\phi(z_\kappa) = iz_\kappa - \frac{z_\kappa^{2m}}{2m}$$

Επειδή το z_κ κρίσιμο σημείο έχουμε ότι

$$i = z_\kappa^{2m-1} \Rightarrow$$

$$iz_\kappa = z_\kappa^{2m}$$

Τότε η $\phi(z)$ γίνεται

$$\begin{aligned}\phi(z_\kappa) &= iz_\kappa - \frac{z_\kappa^{2m}}{2m} \\ &= iz_\kappa - \frac{iz_\kappa}{2m} \\ &= \frac{2m-1}{2m} iz_\kappa\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)} dz &\sim \frac{\Lambda_-^\kappa}{2} e^{\lambda\phi(z_\kappa)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \\ &= \frac{\Lambda_-^\kappa}{2} e^{\lambda \frac{2m-1}{2m} iz_\kappa} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\end{aligned}$$

και αν $z_\kappa = x_\kappa + iy_\kappa$ και $\Lambda_-^\kappa = \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{i\theta_-^\kappa}$ τότε

$$\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)} dz \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{-\lambda y_\kappa \frac{2m-1}{2m}} e^{i(\lambda x_\kappa \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^\kappa)} \quad (3.14)$$

Όπου

$$z_\kappa = \cos\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) + i \sin\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \quad (3.15)$$

$$x_\kappa = \cos\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \quad (3.16)$$

$$y_\kappa = \sin\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \quad (3.17)$$

3.2.2 Ασυμπτωτική Εκτίμηση του $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\left(is - \frac{s^{2m}}{2m}\right)} ds$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\left(is - \frac{s^{2m}}{2m}\right)} ds,$$

ολοκλήρωμα το οποίο προκύπτει από τις σχέσεις (3.4), (3.5). Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2.1. Για κάθε $\Lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} dz = \int_{\text{Im}(z)=\Lambda} e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} dz, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε $K > 0$ και ολοκληρώνουμε πάνω σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο έχει κορυφές K , $K+i\Lambda$, $-K+i\Lambda$, $-K$. Τότε από το θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\int_{-K}^K e^{\lambda\left(ix - \frac{x^{2m}}{2m}\right)} dx + \int_K^{K+i\Lambda} e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} dz + \int_{K+i\Lambda}^{-K+i\Lambda} e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} dz + \int_{-K+i\Lambda}^{-K} e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} dz = 0$$

Θεωρώντας ότι $z = \rho e^{i\theta}$ για τα ολοκληρώματα πάνω στις πλευρές $x = -K$ και $x = K$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_K^{K+i\Lambda} e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} dz \right| \leq \int_K^{K+i\Lambda} \left| e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} \right| |dz| \\ &= \int_K^{K+i\Lambda} \left| e^{\lambda iz} \right| \left| e^{-\lambda \frac{z^{2m}}{2m}} \right| |dz| \\ &\leq \int_K^{K+i\Lambda} \left| e^{\lambda i \cos \theta} \right| \left| e^{-\lambda \sin \theta} \right| \left| e^{-\lambda \frac{\rho^{2m}}{2m} (\cos 2m\theta + i \sin 2m\theta)} \right| |dz| \\ &\leq \int_K^{K+i\Lambda} \left| e^{\lambda i \cos \theta} \right| \left| e^{-\lambda \sin \theta} \right| \left| e^{-\lambda \frac{\rho^{2m}}{2m} \cos 2m\theta} \right| \left| e^{-i\lambda \frac{\rho^{2m}}{2m} \sin 2m\theta} \right| |dz| \\ &\leq \int_K^{K+i\Lambda} \left| e^{-\lambda \sin \theta} \right| \left| e^{-\frac{\rho^{2m} e^{i2m\theta}}{2m}} \right| |dz| \\ &= O(e^{-\frac{\rho^{2m}}{2m}}) \end{aligned}$$

Όταν το $x \rightarrow \infty$ τότε και το $\rho \rightarrow \infty$,
άρα το

$$\left| \int_K^{K+i\Lambda} e^{\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)} dz \right| \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } K \rightarrow \infty$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το συμμετρικό σημείο $z_{K'}$ του z_K , ως προς τον κατακόρυφο άξονα, το οποίο θα βρίσκεται για $\text{Im}(z) > 0$, δηλαδή στο θετικό

ημιεπίπεδο.

Το z_κ υπολογίζεται από τον τύπο (3. 7) $z_\kappa = e^{i\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}}$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots, 2(m-1)$
Επίσης τα δύο αυτά κρίσιμα σημεία $z_\kappa, z_{\kappa'}$ θα έχουν ίδιες τεταγμένες (άξονας των y) και αντίθετες τετμημένες (άξονας των x), οπότε για το συμμετρικό $z_{\kappa'}$ θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} z_{\kappa'} &= e^{i(\pi - \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1})} \\ &= e^{i\frac{(2m-1)\pi - 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}{2m-1}} e^{i\frac{(2m\pi - \pi - 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2})}{2m-1}} \\ &= e^{i\frac{2m\pi - \pi - 2\kappa\pi - (\pi - \frac{\pi}{2})}{2m-1}} \\ &= e^{i\frac{2m\pi - \pi - 2\kappa\pi - \pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}} \\ &= e^{i\frac{2m\pi - 2\pi - 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}} \\ &= e^{i\frac{2(m-1-\kappa)\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}} \\ &= z_{m-1-\kappa} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_{\kappa'} = z_{m-1-\kappa}$$

Οπότε το συμμετρικό του z_κ , ως προς τον κατακόρυφο άξονα είναι το $z_{m-1-\kappa}$
□

3.2.3 Πώς γίνεται η επιλογή των κρίσιμων σημείων για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του $F(\lambda)$

Σε αυτό το σημείο θυμίζουμε ότι

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\phi(z)} dz$$

και

$$\phi(z) = iz - \frac{z^{2m}}{2m}$$

Τα σημεία z_κ έχουν οριστεί στη σχέση (3. 7)

Λήμμα 3.2.2. Πάνω στην ευθεία, $\text{Im}(z) = \text{Im}(z_0)$ ισχύει ότι

$$\text{Re}(\phi(z)) \leq \text{Re}(\phi(z_0)) = \text{Re}(\phi(z_{m-1})),$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $z = z_0$ και $z = z_{m-1}$

Απόδειξη

Έστω $z = x + iy$ τέτοιο ώστε $\text{Im}(z) = \text{Im}(z_0)$.

Τότε $\text{Re}(iz) = \text{Re}(iz_0)$ και άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε z της μορφής $z = x + iy_0$, ισχύει

$$\text{Re}(z^{2m}) \geq \text{Re}(z_0^{2m})$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $z = z_0$ και $z = z_{m-1}$

Αν $z = \rho e^{i\omega} = \rho [\cos \omega + i \sin \omega] = x + iy$, $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$ τότε

$$z^{2m} = \rho^2 e^{i2m\omega} = \rho^{2m} [\cos(2m\omega) + i \sin(2m\omega)],$$

Οπότε

$$\text{Re}(z^{2m}) = \rho^{2m} \cos(2m\omega)$$

και αφού $y = \rho \sin \omega \Rightarrow \rho^{2m} = y^{2m} (\sin \omega)^{-2m}$

Οπότε

$$\text{Re}(z^{2m}) = y^{2m} (\sin \omega)^{-2m} \cos 2m\omega.$$

Θέτουμε

$$h(\omega) = (\sin(\omega))^{-2m} \cos(2m\omega),$$

οπότε

$$\text{Re}(z^{2m}) = y_0^{2m} h(\omega)$$

για $\omega \in (0, \pi)$ και το πρόβλημα ανάγεται στην ελαχιστοποίηση της $h(\omega)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} h'(\omega) &= -2m(\sin(\omega))^{-2m-1} \cos(\omega) \cos(2m\omega) - 2m \sin(2m\omega) (\sin(\omega))^{-2m} \\ &= -2m [\sin(\omega)^{-2m-1} \cos(\omega) \cos(2m\omega) + \sin(2m\omega) (\sin(\omega))^{-2m}] \\ &= -2m \sin(\omega)^{-2m-1} [\cos(\omega) \cos(2m\omega) + \sin(2m\omega) \sin(\omega)] \\ &= -2m \sin(\omega)^{-2m-1} \cos [\omega(2m - 1)] \end{aligned}$$

Άρα για να έχουμε

$$h'(\omega) = 0 \Rightarrow -2m \sin(\omega)^{-2m-1} \cos [\omega(2m - 1)] = 0$$

Αφού $0 < \omega < \pi$ $\sin(\omega) \neq 0$ πρέπει $\cos[\omega(2m-1)] = 0$

$$\omega(2m-1) = \gamma\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{\gamma\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}, \quad 0 \leq \gamma \leq 2m-2$$

Οπότε θέτουμε

$$\omega_\gamma = \frac{\gamma\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}, \quad 0 \leq \gamma \leq 2m-2,$$

τα οποία είναι τα υποψήφια σημεία για ολικό ελάχιστο της $h(\omega)$.
Δείχνοντας ότι $h(\omega_0) \leq h(\omega_\gamma)$, με $\gamma = 0, \dots, 2m-2$, θα έχουμε δείξει την ανισότητα που χρειαζόμαστε για την απόδειξη. Οπότε

$$h(\omega_0) \leq h(\omega_\gamma) \Rightarrow (\sin(\omega_0))^{-2m} \cos(2m\omega_0) \leq (\sin(\omega_\gamma))^{-2m} \cos(2m\omega_\gamma)$$

$$\begin{aligned} \cos(2m\omega_0) &= \cos\left[2m\frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1}\right] \\ &= \cos\left[(2m-1)\frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1} + \frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1}\right] \\ &= \cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1}\right] \\ &= \cos\left[\frac{\pi}{2} + \omega_0\right] \\ &= -\sin(\omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin(\omega_\gamma))^{-2m} \cos(2m\omega_\gamma) &> (\sin(\omega_0))^{-2m} \cos(2m\omega_0) \\ &= (\sin(\omega_0))^{-2m} (-\sin(\omega_0)) \\ &= -(\sin(\omega_0))^{-2m+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\sin(\omega_\gamma))^{-2m} \cos(2m\omega_\gamma) > -(\sin(\omega_0))^{-2m+1}$$

Επειδή $\cos(2m\omega_\gamma) \leq 0$ πάνω στο δρόμο επικλινέστατης καθόδου , αρκεί

$$\begin{aligned} (\sin(\omega_\gamma))^{-2m} &\leq (\sin(\omega_0))^{-2m+1} \Rightarrow \\ \frac{(\sin(\omega_\gamma))^{2m}}{(\sin(\omega_0))^{2m-1}} &> 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 2m-2 \end{aligned}$$

Για $\gamma = 1$ έχουμε $\omega_1 = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2m-1} = 3\frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1} = 3\omega_0$
Άρα

$$\begin{aligned} \frac{(\sin(\omega_1))^{2m}}{(\sin(\omega_0))^{2m-1}} &= \frac{(\sin(3\omega_0))^{2m}}{(\sin(\omega_0))^{2m-1}} \\ &= \frac{(3\sin(\omega_0) - 4\sin^3(\omega_0))^{2m}}{(\sin(\omega_0))^{2m-1}} \\ &= \frac{(\sin(\omega_0))^{2m}(3 - 4\sin^2(\omega_0))^{2m}}{(\sin(\omega_0))^{2m-1}} \\ &= 3^{2m} \sin(\omega_0) \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2(\omega_0)\right)^{2m} \end{aligned}$$

Όμως για τα παραβολικά προβλήματα έχουμε ότι $\omega_0 \leq \frac{\pi}{6}$, οπότε

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0) &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \sin^2(\omega_0) &\leq \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \frac{4}{3} \sin^2(\omega_0) &\leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \\ 1 - \frac{4}{3} \sin^2(\omega_0) &\geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \\ \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2(\omega_0)\right)^{2m} &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^{2m} \Rightarrow \\ 3^{2m} \sin(\omega_0) \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2(\omega_0)\right)^{2m} &\geq 3^{2m} \sin(\omega_0) \left(\frac{2}{3}\right)^{2m} \\ &= 2^{2m} \sin(\omega_0) \\ &\geq 2^{2m} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{(\sin(\omega_1))^{2m}}{(\sin(\omega_0))^{2m-1}} \geq 2^{2m} > 2 > 1$$

Άρα για $\gamma = 1$ ισχύει. Οπότε,

$$\frac{(\sin(\omega_\gamma))^{2m}}{(\sin(\omega_0))^{2m-1}} > 1$$

□

Το Λήμμα 3.2.2 μας βοηθάει να εντοπίσουμε ποια κρίσιμα σημεία να επιλέξουμε και τους αντίστοιχους δρόμους επικλινέστατης καθόδου και με το Λήμμα 3.2.1 να ολοκληρώσουμε πάνω σε κάποια ευθεία Λ η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα των πραγματικών και η οποία διέρχεται από αυτά τα κρίσιμα σημεία.

Επιστρέφοντας στο $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.1, γνωρίζουμε ότι εάν το υπολογίσουμε πάνω σε κάποια ευθεία παράλληλη στον άξονα των πραγματικών αριθμών, θα έχει σταθερή τιμή. Τώρα θεωρούμε την ευθεία που διέρχεται από τα συμμετρικά κρίσιμα σημεία z_0 και z_{m-1} , η ευθεία είναι η $y = y_0$, οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz \\ &= \int_{y=y_0} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz \end{aligned}$$

$$F(\lambda) \sim \int_{\Lambda_1} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz + \int_{\Lambda_2} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz \quad (3. 18)$$

όπου Λ_1 και Λ_2 είναι μικρές περιοχές πάνω στη ευθεία $y = y_0$ στις οποίες ανήκουν αντίστοιχα τα κρίσιμα σημεία z_0 και z_{m-1} .

Στη συνέχεια από τις σχέσεις (3. 11), (3. 14), (3. 16), (3. 17) για τα κρίσιμα συμμετρικά σημεία z_0 και z_{m-1} έχουμε

$$\int_{\gamma_-^0} e^{\lambda\phi(z)} dz \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{-\lambda y_0 \frac{2m-1}{2m}} e^{i(\lambda x_0 \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^0)} \quad (3. 19)$$

$$\int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)} dz \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{-\lambda y_{m-1} \frac{2m-1}{2m}} e^{i(\lambda x_{m-1} \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^{m-1})} \quad (3. 20)$$

$$x_0 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \quad (3. 21)$$

$$\begin{aligned} x_{m-1} &= \cos\left(\frac{2(m-1)\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \\ &= \cos\left(\frac{(2m-1)\pi - \pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4m-2}\right) \Rightarrow \\ x_{m-1} &= -\cos\left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \end{aligned} \quad (3. 22)$$

Από τις σχέσεις (3. 21), (3. 22) παίρνουμε

$$x_0 = -x_{m-1} \quad (3. 23)$$

$$y_0 = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \quad (3. 24)$$

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= \sin\left(\frac{2(m-1)\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \\ &= \sin\left(\frac{(2m-1)\pi - \pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \\ &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4m-2}\right) \Rightarrow \\ y_{m-1} &= \sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \end{aligned} \quad (3. 25)$$

Από τις σχέσεις (3. 24), (3. 25) παίρνουμε

$$y_0 = y_{m-1} \quad (3. 26)$$

$$\begin{aligned} \theta_-^0 &= \frac{\frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2(1-m)\pi}{4(2m-1)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\theta_-^0 = \frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \theta_-^{m-1} &= \frac{2(m-1)\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2\pi(m-1)}{4(2m-1)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\theta_-^{m-1} = \frac{\pi(m-1)}{2(2m-1)} \quad (3.28)$$

και από τις σχέσεις (3.27), (3.28) παίρνουμε

$$\theta_-^0 = \theta_-^{m-1} \quad (3.29)$$

Οπότε προσθέτοντας τις σχέσεις (3.19) και (3.20), και λόγω των σχέσεων (3.23), (3.25), (3.29)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-^0} e^{\lambda\phi(z)} dz + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)} dz &\sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{-\lambda y_0 \frac{2m-1}{2m}} e^{i(\lambda x_0 \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^0)} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{-\lambda y_{m-1} \frac{2m-1}{2m}} e^{i(\lambda x_{m-1} \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^{m-1})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{-\lambda y_0 \frac{2m-1}{2m}} \left[e^{i(\lambda x_0 \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^0)} + e^{-i(\lambda x_0 \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^0)} \right] \end{aligned}$$

Από την σχέση $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$ παίρνουμε

$$\int_{\gamma_-^0} e^{\lambda\phi(z)} dz + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)} dz \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{-\lambda y_0 \frac{2m-1}{2m}} 2\cos\left(\lambda x_0 \frac{2m-1}{2m} + \theta_-^0\right)$$

και λόγω των σχέσεων (3.22), (3.24) και (3.27) η τελευταία σχέση γίνεται

$$\int_{\gamma_-^0} e^{\lambda\phi(z)} dz + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)} dz \sim$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} \exp\left[-\lambda \sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \frac{2m-1}{2m}\right] 2\cos\left(\lambda \left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \frac{2m-1}{2m} + \frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_{\gamma_-^0} e^{\lambda\phi(z)} dz + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)} dz \sim \\
&\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda(2m-1)}} \exp \left[-\lambda \frac{2m-1}{2m} \sin \left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \right] \cdot \\
&\cdot 2 \cos \left(\lambda \left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \frac{2m-1}{2m} + \frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)} \right) \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})}$ είναι ολόμορφη στο μιγαδικό επίπεδο. Χρησιμοποιώντας και πάλι το Θεώρημα Cauchy μπορούμε να παραμορφώσουμε το δρόμο ολοκλήρωσης κοντά στο z_0 και αντί του ευθύγραμμου τμήματος Λ_1 να ολοκληρώσουμε σε καμπύλη η οποία έχει τα ίδια άκρα με το Λ_1 και μέρος της συμπίπτει με μέρος της καμπύλης επικλινέστατης καθόδου γ_-^0 . Όμοια θα έχουμε και για το z_{m-1} κατα το ευθύγραμμο τμήμα Λ_2 .

Οπότε θα έχουμε λόγω των σχέσεων (3.18), (3.19), (3.20) και (3.30)

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz \\
&\sim \int_{\Lambda_1} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz + \int_{\Lambda_2} e^{\lambda(iz - \frac{z^{2m}}{2m})} dz \\
&\sim \int_{\gamma_-^0} e^{\lambda\phi(z)} dz + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)} dz \\
&\sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda(2m-1)}} \exp \left[-\lambda \frac{2m-1}{2m} \sin \left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \right] \cdot \\
&\cdot 2 \cos \left(\lambda \left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \frac{2m-1}{2m} + \frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)} \right)
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας τώρα στη σχέση

$$\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} F(\lambda) \\
&\sim \frac{1}{2\pi} 2 \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda(2m-1)}} \exp \left[-\lambda \frac{2m-1}{2m} \sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \right] \cdot \\
&\cdot \cos \left(\lambda \left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \frac{2m-1}{2m} + \frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)} \right) \\
&\sim \left(\frac{x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda(2m-1)}} \exp \left[-\lambda \frac{2m-1}{2m} \sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right) \right] \cdot \\
&\cdot \cos \left(\lambda \left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \frac{2m-1}{2m} + \frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)} \right)
\end{aligned}$$

και στη συνέχεια από τη σχέση

$G(x, t) = t^{-\frac{1}{2m}} H(t^{-\frac{1}{2m}} x)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
G(x, t) &\sim t^{-\frac{1}{2m}} \left[\frac{xt^{-\frac{1}{2m}}}{2m} \right]^{\frac{1}{2m-1}} \sqrt{\frac{1}{\lambda\pi(4m-2)}} e^{-\lambda \frac{2m-1}{2m} \sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)} \cdot \\
&\cdot \cos \left[\frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)} + \lambda \frac{2m-1}{2m} \cos \left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \right] \quad (3.31)
\end{aligned}$$

όπου

$$\lambda = \frac{x^{\frac{2m}{2m-1}}}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}}$$

4 Εφαρμογή της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου Σε Παραβολικά Προβλήματα 4^{ης} τάξης στις δύο Διαστάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς η μέθοδος της επικλινέστατης καθόδου μπορεί να γενικευθεί σε πολλαπλά ολοκληρώματα και, στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο προκειμένου να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Green $G(x, t)$ μίας παραβολικής εξίσωσης δ' τάξης στον $\mathbb{R}^2$.

4.1 Η Μέθοδος Επικλινέστατης Καθόδου για Διπλά Ολοκληρώματα

Θεωρούμε ολοκλήρωμα της μορφής

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{\lambda \phi(z)} dz$$

όπου

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, \quad dz = dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

Ενδιαφερόμαστε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του $F(\lambda)$ καθώς $\lambda \rightarrow +\infty$.

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f(z)$, $\phi(z)$ είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C}^n$. Ένα σημείο $z_0 = (z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0n})$ θα λέγεται κρίσιμο σημείο της $\phi(z)$ εάν ισχύει $\nabla \phi(z_0) = 0$, και εάν επιπλέον ισχύει ότι $\det \phi''(z_0) \neq 0$ τότε θα λέγεται απλό κρίσιμο σημείο, όπου

$$\det \phi''(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial_{z_1} \partial_{z_1}} & \dots & \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial_{z_1} \partial_{z_n}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial_{z_n} \partial_{z_1}} & \dots & \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial_{z_n} \partial_{z_n}} \end{pmatrix}$$

Όπως και στην περίπτωση ολοκληρωμάτων στη μία διάσταση, το κρίσιμο θέμα είναι να προσδιοριστούν τα κρίσιμα σημεία της $\phi(z)$ τα οποία συμβάλλουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του ανωτέρω ολοκληρώματος. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα, αφού πρώτα δώσουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 4.1.1. Τα απλά κρίσιμα σημεία $z_1, z_2, \dots, z_l$ της $\phi(z)$, αποτελούν ένα αποδεκτό σύνολο κρίσιμων σημείων, εάν στον χώρο $\mathbb{C}^n$ υπάρχει μία λεία και προσανατολισμένη επιφάνεια γ ομομορφική προς τον χώρο $\mathbb{R}^n$, η οποία περιέχει τα εν λόγω κρίσιμα σημεία και είναι τέτοια ώστε

1. $\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\phi(z)} dz = \int_{\gamma} e^{\lambda\phi(z)} dz$
2. Η μέγιστη τιμή της $\operatorname{Re}(\phi(z))$ στην επιφάνεια γ λαμβάνεται στα ανωτέρω κρίσιμα σημεία.

Για τη χρήση του επόμενου Θεωρήματος παραπέμπουμε στο [4]

Θεώρημα 4.1.2. Έστω ότι τα σημεία $z_1, z_2, \dots, z_l$ αποτελούν ένα αποδεκτό σύνολο κρίσιμων σημείων της $\phi(z)$. Τότε η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $F(\lambda) = \int_{\gamma^n} f(z) e^{\lambda\phi(z)} dz$ προκύπτει ως άθροισμα συνεισφορών από το κάθε z_k , και η κάθε συνεισφορά $\operatorname{contr}(z_k)$ δίνεται από τη σχέση

$$\operatorname{contr}(z_k) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} (\det \phi''(z_k))^{-\frac{1}{2}} f(z_k) e^{\lambda\phi(z_k)}$$

4.2 Η ισχυρή κυρτότητα

Για να ορίσουμε τη σημαντική έννοια της ισχυρής κυρτότητας θα χρησιμοποιήσουμε κάποιους από τους συμβολισμούς των πολυδεικτών.

Έστω δύο πολυδείκτες γ και α , με $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ και $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ όπου α_i και γ_i μη αρνητικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $\gamma \leq \alpha$

Ιδιότητες πολυδεικτών:

1. $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
3. $c_{\gamma}^{\alpha} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha - \gamma)!}$ και $c_{\alpha}^{|\alpha|} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$
4. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$
5. $D^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial_n}\right)^{\alpha_n}$

Το σύμβολο ενός ελλειπτικού διαφορικού τελεστή τάξης $2m$ με σταθερούς συντελεστές είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $2m$, άρα μπορεί να γραφεί ως

$$A(\xi) = \sum_{|\gamma|=2m} \tilde{a}_\gamma \xi^\gamma$$

για κάποιες σταθερές $\tilde{a}_\gamma$.

Ορίζοντας καινούργιες σταθερές a_γ , από τη σχέση $\tilde{a}_\gamma = c_\gamma^{2m} a_\gamma$, η ανωτέρω σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$A(\xi) = \sum_{|\gamma|=2m} c_\gamma^{2m} a_\gamma \xi^\gamma$$

Έστω $\nu = (n, m)$ είναι ο αριθμός των πολυδευκτών του μήκους m . Ορίζουμε τη sesquilinear μορφή $\Gamma(\cdot, \cdot)$, στον $\mathbb{C}^\nu$ θέτοντας

$$\Gamma(p, q) = \sum_{\substack{|\alpha|=m, \\ |\beta|=m}} a_{\alpha+\beta} p_\alpha \bar{q}_\beta, \quad p = (p_\alpha), \quad q = (q_\beta) \in \mathbb{C}^\nu$$

και με $\Gamma(\cdot)$ συμβολίζουμε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\Gamma(p) = \Gamma(p, p), \quad p \in \mathbb{C}^\nu,$$

$$\Gamma(p) = \sum_{\substack{|\alpha|=m, \\ |\beta|=m}} a_{\alpha+\beta} p_\alpha \bar{p}_\beta, \quad p \in \mathbb{C}^\nu$$

Ορισμός 4.2.1. Το σύμβολο $A(\xi)$ του ελλειπτικού τελεστή είναι ισχυρά κυρτό, εάν η μορφή $\Gamma(p)$ είναι θετικά ορισμένη.

Η ακόλουθη ειδική περίπτωση θα μας είναι χρήσιμη στη συνέχεια.

Πρόταση 4.2.2. Έστω $2m = 4$, $n = 2$. Το σύμβολο

$$A(\xi) = a\xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \gamma\xi_2^4$$

είναι ισχυρά κυρτό αν και μόνο αν $0 < \beta < 3\sqrt{a\gamma}$

Απόδειξη

Για $2m = 4 \Rightarrow m = 2$, $n = 2$, και $|\gamma| = 4$, έχουμε ότι

$$\{\gamma : |\gamma| = 4\} = \{(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)\}.$$

$$\{\alpha : |\alpha| = 2\} = \{(2, 0), (0, 2), (1, 1)\}$$

$$\{\beta : |\beta| = 2\} = \{(2, 0), (0, 2), (1, 1)\}$$

Άρα το σύμβολο $A(\xi)$ γράφεται

$$\begin{aligned} A(\xi) &= c_{(4,0)}^4 a_{(4,0)} \xi_1^4 + c_{(3,1)}^4 a_{(3,1)} \xi_1^3 \xi_2 \\ &\quad + c_{(2,2)}^4 a_{(2,2)} \xi_1^2 \xi_2^2 + c_{(1,3)}^4 a_{(1,3)} \xi_1 \xi_3 \\ &\quad + c_{(0,4)}^4 a_{(0,4)} \xi_2^4 \\ &= \binom{4}{(4,0)} a_{(4,0)} \xi_1^4 + \binom{4}{(3,1)} a_{(3,1)} \xi_1^3 \xi_2 \\ &\quad + \binom{4}{(2,2)} a_{(2,2)} \xi_1^2 \xi_2^2 + \binom{4}{(1,3)} a_{(1,3)} \xi_1 \xi_3 \\ &\quad + \binom{4}{(0,4)} a_{(0,4)} \xi_2^4 \end{aligned}$$

και πραγματοποιώντας τους ακόλουθους υπολογισμούς

- $\binom{4}{(4,0)} = \binom{|(4,0)|}{(4,0)} = \frac{4!}{4!0!} = 1$

- $\binom{4}{(3,1)} = \binom{|(3,1)|}{(3,1)} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

- $\binom{4}{(2,2)} = \binom{|(2,2)|}{(2,2)} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

- $\binom{4}{(1,3)} = \binom{|(1,3)|}{(1,3)} = \frac{4!}{1!3!} = 4$

- $\binom{4}{(0,4)} = \binom{|(0,4)|}{(0,4)} = \frac{4!}{0!4!} = 1$

η τελευταία σχέση για τον ελλειπτικό τελεστή γίνεται

$$A(\xi) = a_{(4,0)}\xi_1^4 + 4a_{(3,1)}\xi_1^3\xi_2 + 6a_{(2,2)}\xi_1^2\xi_2^2 + 4a_{(1,3)}\xi_1\xi_3 + a_{(0,4)}\xi_2^4.$$

Εξισώνοντάς την τελευταία σχέση με την

$$A(\xi) = a\xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \gamma\xi_2^4$$

λαμβάνουμε ότι

- $a_{(4,0)} = a$

- $a_{(3,1)} = 0$

- $a_{(2,2)} = \frac{\beta}{3}$

- $a_{(1,3)} = 0$

- $a_{(0,4)} = \gamma$

Επειδή το $m = 2$ και $n = 2$, οι πολυδείκτες που μπορούν να υπάρξουν είναι μόνο οι ακόλουθοι τρεις $(2, 0), (0, 2), (1, 1)$, οπότε $\nu = 3$ και άρα

$$p = (p_{(2,0)}, p_{(0,2)}, p_{(1,1)})$$

και ο πίνακας που θα αντιστοιχεί στην τετραγωνική μορφή $\Gamma(p)$,

$$\begin{aligned}\Gamma(p) &= a_{((2,0)+(2,0))}p_{(2,0)}\bar{p}_{(2,0)} + a_{((2,0)+(0,2))}p_{(2,0)}\bar{p}_{(0,2)} + a_{((2,0)+(1,1))}p_{(2,0)}\bar{p}_{(1,1)} \\ &+ a_{((0,2)+(2,0))}p_{(0,2)}\bar{p}_{(2,0)} + a_{((0,2)+(0,2))}p_{(0,2)}\bar{p}_{(0,2)} + a_{((0,2)+(1,1))}p_{(0,2)}\bar{p}_{(1,1)} \\ &+ a_{((1,1)+(2,0))}p_{(1,1)}\bar{p}_{(2,0)} + a_{((1,1)+(0,2))}p_{(1,1)}\bar{p}_{(0,2)} + a_{((1,1)+(1,1))}p_{(1,1)}\bar{p}_{(1,1)}\end{aligned}$$

θα είναι ο

$$K = \{a_{\alpha+\beta}\}_{\substack{|\alpha|=2 \\ |\beta|=2}} = \begin{array}{c|c|c|c} & (2,0) & (0,2) & (1,1) \\ \hline (2,0) & a_{(4,0)} & a_{(2,2)} & a_{(3,1)} \\ (0,2) & a_{(2,2)} & a_{(0,4)} & a_{(1,3)} \\ (1,1) & a_{(3,1)} & a_{(1,3)} & a_{(2,2)} \end{array} \Rightarrow$$

$$K = \begin{pmatrix} a_{(4,0)} & a_{(2,2)} & a_{(3,1)} \\ a_{(2,2)} & a_{(0,4)} & a_{(1,3)} \\ a_{(3,1)} & a_{(1,3)} & a_{(2,2)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$K = \begin{pmatrix} a & \frac{\beta}{3} & 0 \\ \frac{\beta}{3} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{3} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας K που προέκυψε είναι συμμετρικός και λόγω του ορισμού 4.2.1 το $A(\xi)$ είναι ισχυρά κυρτό αν και μόνο αν ο K είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Οπότε

- $\lambda_1 = \frac{\beta}{3}$
- $\lambda_2 = \frac{\gamma + a + \sqrt{(\gamma - a)^2 - \frac{4\beta^2}{9}}}{2}$
- $\lambda_3 = \frac{\gamma + a - \sqrt{(\gamma - a)^2 - \frac{4\beta^2}{9}}}{2}$

τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lambda_1 &> 0 \iff \\ \beta &> 0\end{aligned}$$

και

$$\lambda_3 > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma + a - \sqrt{(\gamma - a)^2 - \frac{4\beta^2}{9}}}{2} > 0 \iff$$

$$\gamma + a > \sqrt{(\gamma - a)^2 - \frac{4\beta^2}{9}} \iff$$

$$(\gamma + a)^2 > (\gamma - a)^2 - \frac{4\beta^2}{9} \iff$$

$$4a\gamma > \frac{4\beta^2}{9} \iff$$

$$3\sqrt{a\gamma} > \beta$$

Άρα το $A(\xi)$ είναι ισχυρά κυρτό αν και μόνο αν

$$0 < \beta < 3 \cdot \sqrt{a\gamma}$$

□

4.3 Ένα Παραβολικό Πρόβλημα 4ης Τάξης στον $\mathbb{R}^2$

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι ο προσδιορισμός της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς καθώς $t \rightarrow 0+$ της συνάρτησης Green $G(x, t)$ του παραβολικού προβλήματος

$$u_t = -(a\partial_{x_1}^4 + 2\beta\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + \gamma\partial_{x_2}^4)u, \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.1)$$

Υποθέτουμε ότι $\beta > -1$ καθώς στην αντίθετη περίπτωση ο αντίστοιχος διαφορικός τελεστής δεν είναι ελλειπτικός.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μια αλλαγή μεταβλητών στην σχέση (4. 1) ανάγει το πρόβλημα στην ειδική περίπτωση, όπου $a = \gamma = 1$, οπότε στο εξής θεωρούμε την

$$u_t = -(\partial_{x_1}^4 + 2\beta\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_2}^4)u, \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4. 2)$$

Το σύμβολο του ελλειπτικού τελεστή της (4. 2) είναι το

$$A(\xi) = \xi_1^4 + 2\beta\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (4. 3)$$

όπου $\beta > -1$.

Η συνάρτηση Green της (4. 2) βρίσκεται με χρήση μετασχηματισμού Fourier και είναι η

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi \cdot x - tA(\xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \quad (4. 4)$$

Η απόδειξη της σχέσης (4. 4) είναι παρόμοια με της (3. 2) και παραλείπεται.

Το β παίρνει τιμές στο $(-1, +\infty)$. Συγκεκριμένα προκύπτουν πέντε περιπτώσεις, το β να παίρνει τιμές στα διαστήματα $(-1, 0)$, $(0, 3)$, $(3, +\infty)$, καθώς επίσης και όταν $\beta = 0$ και $\beta = 3$. Όπως θα δούμε, θα πρέπει να μελετηθεί η κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Οπότε σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι η απόδειξη των Θεωρημάτων 4.3.1 και 4.3.2 που ακολουθούν.

Στο Θεώρημα 4.3.1 το σύμβολο του τελεστή δεν είναι ισχυρά κυρτό. Για τεχνικούς λόγους το x δεν είναι τυχαίο, αλλά ανήκει σε κάποια ευθεία.

Στο Θεώρημα 4.3.2 έχουμε ότι το σύμβολο του τελεστή είναι ισχυρά κυρτό και για για τυχόν $x \in \mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 4.3.1. *Για οποιοδήποτε $s > 0$ έχουμε τις ακόλουθες ασυμπτωτικές εκτιμήσεις καθώς $t \rightarrow 0^+$*

1. *Εάν $-1 < \beta < 0$ και $x = (s, s)$ τότε*

$$G(x, t) \sim \frac{1}{\pi(3^{\frac{1}{2}})(4^{\frac{1}{3}})} \frac{(1 - \beta)^{\frac{1}{6}}}{(3 - \beta)^{\frac{1}{2}}(1 + \beta)^{\frac{1}{6}}} s^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \exp \left[-\frac{3}{4^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{s^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} \right] \quad (4. 5)$$

2. *Εάν $\beta = 0$ και $x = (s, s)$ τότε*

$$G(x, t) \sim \frac{1}{\pi \cdot 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} s^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \exp \left[-\frac{3}{4^{\frac{4}{3}}} \frac{s^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} \right] \left(1 + \cos \left[\frac{3\sqrt{3}}{4^{\frac{4}{3}}} \frac{s^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{\pi}{3} \right] \right) \quad (4. 6)$$

3. Εάν $\beta = 3$ και $x = (s, 0)$ τότε

$$G(x, t) \sim \frac{1}{\pi \cdot 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} s^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \exp \left[-\frac{3}{8 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} \frac{s^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} \right] \left(1 + \cos \left[\frac{3\sqrt{3}}{8 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} \frac{s^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{\pi}{3} \right] \right) \quad (4. 7)$$

4. Εάν $\beta > 3$ και $x = (s, 0)$ τότε

$$G(x, t) \sim \frac{1}{\pi \cdot 2^{\frac{7}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} \beta^{-\frac{1}{2}} (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{6}} s^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \exp \left[-\frac{3}{4^{\frac{4}{3}}} \frac{s^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right] \quad (4. 8)$$

Απόδειξη

Πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητών $\xi = (4 \cdot t)^{-\frac{1}{3}}$, οπότε από την σχέση (4. 4) η $G(x, t)$ γράφεται

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 (4t)^{\frac{2}{3}}} F\left(\frac{1}{(4t)^{\frac{1}{3}}}\right) \quad (4. 9)$$

όπου

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\lambda(ix \cdot \xi - \frac{1}{4}A(\xi))} d\xi \quad (4. 10)$$

Μέσω της μεθόδου της επικλινέστατης καθόδου έχουμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος $F(\lambda)$, καθώς το $\lambda \rightarrow \infty$.

Οπότε θεωρούμε σταθερό $x \in \mathbb{R}^2$ και την μιγαδική αναλυτική συνάρτηση $\phi(z)$ δύο μεταβλητών, όπου $z = (z_1, z_2)$,

$$\phi(z) = ix \cdot z - \frac{1}{4}A(z) \Rightarrow$$

$$\phi(z) = i(x_1 z_1 + x_2 z_2) - \frac{1}{4}(z_1^4 + 2\beta z_2^2 z_1^2 + z_2^4) \quad (4. 11)$$

και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Cauchy, για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, θα παραμορφώσουμε τον $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, σε κάποια άλλη επιφάνεια του $\mathbb{C}^2$, η οποία θα περιέχει τα κρίσιμα σημεία της $\phi(z)$ και τα οποία είναι αυτά που θα συνεισφέρουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος $F(\lambda)$ της σχέσης (4. 10). Θεωρούμε παραμορφώσεις οι οποίες είναι παράλληλες μετατοπίσεις από ένα σημείο στον $i\mathbb{R}^2$.

Όπως και στο παραβολικό πρόβλημα στη μια διάσταση που μελετήσαμε στο 3ο Κεφάλαιο, έτσι και εδώ το θέμα που είναι μείζονος σημασίας, είναι ο προσδιορισμός των κρίσιμων σημείων της συνάρτησης $\phi(z)$ από τα οποία προκύπτει η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $F(\lambda)$ καθώς το $\lambda \rightarrow \infty$. Επίσης σημαντικό είναι το ύψος της $\phi(z)$, δηλαδή το $\text{Re}(\phi(z))$. Να σημειώσουμε ότι τα κρίσιμα σημεία δεν είναι αυτά που απαραίτητα θα δίνουν το μεγαλύτερο ύψος στην $\phi(z)$, αλλά αυτά για τα οποία υπάρχει επιτρεπτή παραμόρφωση τέτοια ώστε σε αυτά να επιτυγχάνεται το μεγαλύτερο ύψος της $\phi(z)$.

Στο εξής θα γράφουμε το τυχόν $z \in \mathbb{C}^2$, ως $z = (z_1, z_2)$ και $z = \xi + i\eta$ με $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\eta \in \mathbb{R}^2$, αλλά και ως $z_1 = \xi_1 + i\eta_1$, $z_2 = \xi_2 + i\eta_2$. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 αρκεί να αποδείξουμε την περίπτωση $s = 1$ αφού ισχύει

$$G(sx, t) = \frac{1}{s^2} G(x, \frac{t}{s^4}) \quad (4. 12)$$

Πράγματι για $\xi = \frac{u}{s}$ παίρνουμε από τη σχέση (4. 3)

$$A(\frac{u}{s}) = \frac{1}{s^4} (u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + u_2^4) = \frac{1}{s^4} A(u)$$

και άρα από τη σχέση (4. 4) έχουμε

$$G(sx, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{isx\frac{u}{s} - tA(\frac{u}{s})} \frac{1}{s^2} du = \frac{1}{s^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ixu - \frac{t}{s^4} A(u)} du = \frac{1}{s^2} G(x, \frac{t}{s^4})$$

Για $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ από την σχέση (4. 3) έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Re}(A(\xi + i\eta)) &= \xi_1^4 - 6\xi_1^2 \eta_1^2 + \eta_1^4 \\ &\quad + 2\beta(\xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_1^2 \eta_2^2 - \xi_2^2 \eta_1^2 - 4\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2 + \eta_1^2 \eta_2^2) \\ &\quad + \xi_2^4 - 6\xi_2^2 \eta_2^2 + \eta_2^4 \end{aligned}$$

1. Περίπτωση $-1 < \beta \leq 0$

Έχουμε $x = (1, 1)$ και τα δύο κρίσιμα σημεία είναι τα

$$z_0^\pm = \pm \xi_0 + i\eta_0 \quad (4. 13)$$

όπου

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \frac{(3 - \beta)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \beta)^{\frac{1}{6}} (1 - \beta)^{\frac{1}{3}}} (1, -1), \quad \eta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{\frac{1}{3}} (1, 1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Cauchy μπορεί να δει κανείς, σε αναλογία με το Λήμμα 3.2.1 ότι το $F(\lambda)$ δεν αλλάζει αν παραμορφώνουμε τον $\mathbb{R}^2$ παράλληλα κατά $i\eta_0$, οπότε έχουμε

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2 + i\eta_0} e^{\lambda\phi(z)} dz$$

(α') Περίπτωση $-1 < \beta < 0$

Σε αυτήν την περίπτωση τα σημεία τα οποία συνεισφέρουν είναι μόνο τα κρίσιμα σημεία $z_0^\pm$, της σχέσης (4. 13)

Λόγω του Θεωρήματος 4.1.2 αυτό θα έπεται αν δείξουμε ότι

$$\operatorname{Re}(\phi(z)) \leq \operatorname{Re}(\phi(z_0^+)), z \in \mathbb{R}^2 + i\eta_0 \quad (4. 14)$$

με ισότητα μόνο για $z = z_0^\pm \Rightarrow \operatorname{Re}(iz) + \operatorname{Re}(-\frac{1}{4}A(z)) \leq \operatorname{Re}(iz_0) + \operatorname{Re}(-\frac{1}{4}A(z_0))$

και επειδή $iz = i\xi - \eta_0$ και $iz = i\xi_0 - \eta_0$, η σχέση (4. 14) γίνεται

$$\operatorname{Re}(A(z)) \geq \operatorname{Re}(A(z_0)) \quad (4. 15)$$

Από την (4. 3) στο σημείο z_0 για το $\text{Re}(A(z))$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\text{Re}(A(z_0)) &= \xi_{0_1}^4 - 6\xi_{0_1}^2\eta_{0_1}^2 + \eta_{0_1}^4 \\
&\quad + 2\beta (\xi_{0_1}^2\xi_{0_2}^2 - \xi_{0_1}^2\eta_{0_2}^2 - \xi_{0_2}^2\eta_{0_1}^2 - 4\xi_{0_1}\xi_{0_1}\eta_{0_1}\eta_{0_2} + \eta_{0_1}^2\eta_{0_2}^2) \\
&\quad + \xi_{0_2}^4 - 6\xi_{0_2}^2\eta_{0_2}^2 + \eta_{0_2}^4 \\
&= \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right)^4 - 6 \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^4 \\
&\quad + 2\beta \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \\
&\quad - 2\beta \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\
&\quad - 2\beta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\
&\quad - 8\beta \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \\
&\quad + 4\beta \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right)^4 \\
&\quad - 6 \left(-\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left(\frac{\beta+1}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1-\beta)^2}{1+\beta} \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{2\beta}{1-\beta} - 2 \frac{(\beta-3)^2}{1-\beta} + \frac{(\beta+1)^2}{1-\beta} + \frac{(\beta-3)^2}{1-\beta} \right] \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{\beta+1}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{(\beta+1)^2 - (\beta-3)^2}{1-\beta} \right] \\
&= - \left(\frac{\beta+1}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Τότε για την σχέση (4. 15) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\operatorname{Re}(A(\xi + i\eta_0)) + \left(\frac{\beta+1}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \quad (4. 16)$$

το οποίο ισχύει διότι

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(A(\xi + i\eta_0)) + \left(\frac{\beta+1}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} &= \\
&- \beta (\xi_1^2 - \xi_2^2) \\
&+ (\beta+1) \left(\xi_1^2 - \frac{3-\beta}{4(1+\beta)^{\frac{1}{3}}(1-\beta)^{\frac{2}{3}}} \right)^2 \\
&+ (\beta+1) \left(\xi_2^2 - \frac{3-\beta}{4(1+\beta)^{\frac{1}{3}}(1-\beta)^{\frac{2}{3}}} \right)^2 \\
&- \beta \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{2}{3}} (\xi_1 + \xi_2)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για τα σημεία $\xi = \pm \xi_0$ και αυτά αντιστοιχούν στα $z_0^\pm$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.2 η συνεισφορά του z_0^+ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\operatorname{contr}(z_0^+) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda \phi(z_0^+)} \quad (4. 17)$$

Τώρα βρίσκουμε το $\phi(z_0^+)$

$$\begin{aligned}
\phi(z_0^+) &= i(z_{0_1} + z_{0_2}) - \frac{1}{4}(z_{0_1}^4 + 2\beta z_{0_1}^2 z_{0_2}^2 + z_{0_2}^4) \\
&= i(\xi_{0_1} + i\eta_{0_1} + \xi_{0_2} + i\eta_{0_2}) \\
&\quad - \frac{1}{4}[(\xi_{0_1} + i\eta_{0_1})^4 + 2\beta(\xi_{0_1} + i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2} + i\eta_{0_2})^2 + (\xi_{0_2} + i\eta_{0_2})^4] \\
&= i\left(\frac{1}{2}\frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i\frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i\frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i\frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4 \\
&\quad + \frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i\frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \\
&\quad \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i\frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i\frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4 \\
&= \frac{(1-\beta)^{\frac{7}{3}}(\beta+1)^{\frac{5}{3}}(\frac{1+\beta}{1-\beta})^{\frac{1}{3}}}{(1-\beta)^{\frac{7}{3}}(\beta+1)^{\frac{5}{3}}} \cdot \left[\frac{-32\beta^2 + 32 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 + \beta^3 + \beta^2 + 3\beta}{1 - \beta^2}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{9 - 6\beta^2 + 2\beta^2 + 2\beta + 2\beta^3 - 10\beta^2 + 6\beta + 18}{1 - \beta^2}\right] \\
&= -\frac{1}{32}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{24(1-\beta^2)}{1-\beta^2} \\
&= -\frac{3}{4}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\left(\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\phi(z) = i(z_1 + z_2) - \frac{1}{4}(z_1^4 + 2\beta z_2^2 z_1^2 + z_2^4) \quad (4.18)$$

$$\phi_{z_1}(z) = i - \frac{1}{4}(4z_1^3 + 4\beta z_1 z_2^2) \quad (4.19)$$

$$\phi_{z_2}(z) = i - \frac{1}{4}(4z_2^3 + 4\beta z_1^2 z_2) \quad (4.20)$$

$$\phi_{z_1 z_1}(z) = -3z_1^2 - \beta z_2^2 \quad (4.21)$$

$$\phi_{z_2 z_2}(z) = -3z_2^2 - \beta z_1^2 \quad (4.22)$$

$$\phi_{z_1 z_2}(z) = -2\beta z_1 z_2 \quad (4.23)$$

$$\phi_{z_2 z_1}(z) = -2\beta z_1 z_2 \quad (4.24)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \det(\phi_{z_i z_j}) &= \begin{bmatrix} \phi_{z_1 z_1} & \phi_{z_1 z_2} \\ \phi_{z_2 z_1} & \phi_{z_2 z_2} \end{bmatrix} \\ &= (-3z_1^2 - \beta z_2^2)(-3z_2^2 - \beta z_1^2) \\ &\quad - (-2\beta z_1 z_2)(-2\beta z_1 z_2) \\ &= 3\beta z_1^4 + 3\beta z_2^4 + 9z_1^2 z_2^2 - 3\beta z_1^2 z_2^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+} &= 3\beta (\xi_{0_1} + i\eta_{0_1})^4 \\ &\quad + 3\beta (\xi_{0_2} + i\eta_{0_2})^4 \\ &\quad + 9(\xi_{0_1} + i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2} + i\eta_{0_2})^2 \\ &\quad - 3\beta (\xi_{0_1} + i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2} + i\eta_{0_2})^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+} &= 3\beta \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i \frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^4 \\
&\quad + 3\beta \left(-\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i \frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^4 \\
&\quad + 9 \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i \frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\
&\quad \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i \frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\
&\quad - 3\beta \left(\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i \frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\
&\quad \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(3-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{6}}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}} + i \frac{1}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\
&= \frac{(1-\beta)^{\frac{7}{3}}(\beta+1)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{3}}}{16(1-\beta)^{\frac{7}{3}}(\beta+1)^{\frac{5}{3}}} \frac{1}{1-\beta^2} [48\beta^3 - 144\beta^2 - 48\beta + 144] \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-\beta^2} [48\beta(\beta^2-1) - 144(\beta^2-1)] \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} [48(3-\beta)] \\
&= 3(3-\beta) \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Όμως η συνεισφορά των z_0^+ και z_0^- στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του $F(\lambda)$ η είναι διπλάσια συνεισφορά του πραγματικού μέρους του z_0^+ , άρα

$$\begin{aligned}
\text{contr}(z_0^\pm) &= \text{contr}(z_0^+) + \text{contr}(z_0^-) \\
&= 2\text{contr}(z_0^+) \\
&= 2\frac{2\pi}{\lambda} \left(\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda\phi(z_0^+)} \\
&= \frac{4\pi}{\lambda} \left[3(3-\beta) \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\lambda \frac{3}{4} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\
&= \frac{4\pi}{\lambda} \frac{(1-\beta)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{3}(3-\beta)^{\frac{1}{2}}(1+\beta)^{\frac{1}{6}}} \exp \left[-\frac{3\lambda}{4} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right]
\end{aligned}$$

(β') Περίπτωση $\beta = 0$

Άρα η σχέση (4. 16) για $\beta = 0$ γίνεται

$$\text{Re}(A(\xi + i\eta_0)) + 1 \geq 0$$

που ισχύει διότι

$$\text{Re}(A(\xi + i\eta_0)) + 1 = \left(\xi_1^2 - \frac{3}{4} \right)^2 + \left(\xi_2^2 - \frac{3}{4} \right)^2 \geq 0$$

Τα σημεία $z_0^\pm$ που υπολογίστηκαν προηγουμένως είναι επίσης κρίσιμα σημεία και για την περίπτωση $\beta = 0$, οπότε η συνεισφορά τους, συνεισφορά η οποία υπολογίζεται όπως πιο πάνω, είναι

$$\begin{aligned}
\text{contr}(z_0^+) + \text{contr}(z_0^-) &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} e^{-\frac{3\lambda}{4}} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} e^{-\frac{3\lambda}{4}} \\
&= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3\lambda}{4}}
\end{aligned}$$

Όμως σε αυτή την περίπτωση έχουμε άλλα δύο κρίσιμα σημεία, τα

$$z_*^\pm = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(1, 1) + i\eta_0(1, 1)$$

$$\text{όπου } \xi_* = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(1, 1) \text{ και } \eta_* = \frac{1}{2}(1, 1)$$

Έτσι υπολογίζουμε το $\phi(z_*^+)$

$$\begin{aligned}\phi(z_*^+) &= i(z_{*1}^+ + z_{*2}^+) - \frac{1}{4} \left((z_{*1}^+)^4 + (z_{*2}^+)^4 \right) \\ &= i(\xi_{*1}^+ + i\eta_{*1} + \xi_{*2}^+ + i\eta_{*2}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[(\xi_{*1}^+ + i\eta_{*1})^4 + (\xi_{*2}^+ + i\eta_{*2})^4 \right]\end{aligned}$$

με $\xi_{*1}^+ = \xi_{*2}^+ = \xi_{*1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta_{*1} = \eta_{*2} = \eta_0 = \frac{1}{2}$, τότε

$$\begin{aligned}\phi(z_*^+) &= -\frac{\eta_0^2}{2} + 2i\eta_0^3\xi_{*1} + \eta_0^2\xi_{*1}^2 - 2i\eta_0\xi_{*1}^3 - 2\eta_0 - \frac{\xi_{*1}^4}{2} + 2i\xi_{*1} \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{9}{16} - 1 - \frac{9}{32} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - 3\frac{\sqrt{3}}{8} + \sqrt{3} \right) \\ &= -\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Ομοίως για τον υπολογισμό του $\phi(z_*^-)$ με $\xi_{*1}^- = \xi_{*2}^- = \xi_{*1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

και $\eta_{*1} = \eta_{*2} = \eta_0 = \frac{1}{2}$,

$$\phi(z_*^-) = -\frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Οπότε

$$\phi(z_*^\pm) = -\frac{3}{4} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Υπολογισμός του $\left(\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+} \right)^{-\frac{1}{2}}$

Από τις σχέσεις (4. 18), (4. 19), (4. 20), (4. 21), (4. 22), (4. 23), (4. 24) και 4. 25 για $\beta = 0$ παίρνουμε

$$\phi(z) = i(z_1 + z_2) - \frac{1}{4}(z_1^4 + z_2^4) \quad (4.26)$$

$$\phi_{z_1}(z) = i - z_1^3 \quad (4.27)$$

$$\phi_{z_2}(z) = i - z_2^3 \quad (4.28)$$

$$\phi_{z_1 z_1}(z) = -3z_1^2 \quad (4.29)$$

$$\phi_{z_2 z_2}(z) = -3z_2^2 \quad (4.30)$$

$$\phi_{z_1 z_2}(z) = 0 \quad (4.31)$$

$$\phi_{z_2 z_1}(z) = 0 \quad (4.32)$$

$$\det(\phi_{z_i z_j}) = +9z_1^2 z_2^2 \quad (4.33)$$

Οπότε, με $\xi_{*1}^+ = \xi_{*2}^+ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta_{*1} = \eta_{*2} = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+} &= +9(z_{*1}^+)^2 (z_{*2}^+)^2 \\ &= 9\eta_*^4 - 36i\eta_*^3 \xi_{*1} - 54\eta_*^2 \xi_{*1}^2 + 36i\eta_* \xi_{*1}^3 + 9\xi_{*1}^4 \\ &= \frac{9}{16} - i\frac{36\sqrt{3}}{16} - \frac{162}{16} + i\frac{108\sqrt{3}}{16} + \frac{81}{16} \\ &= -\frac{72}{16} + i\frac{72\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{72}{8} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 9e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

και $\xi_{*1}^- = \xi_{*2}^- = \xi_{*1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta_{*1} = \eta_{*2} = \frac{1}{2}$. Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned} \det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^-} &= +9(z_{*1}^-)^2 (z_{*2}^-)^2 \\ &= 9\eta_*^4 - 36i\eta_*^3 \xi_{*1} - 54\eta_*^2 \xi_{*1}^2 + 36i\eta_* \xi_{*1}^3 + 9\xi_{*1}^4 \\ &= \frac{9}{16} + i\frac{36\sqrt{3}}{16} - \frac{162}{16} - i\frac{108\sqrt{3}}{16} + \frac{81}{16} \\ &= -\frac{72}{16} - i\frac{72\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{72}{8} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 9e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^\pm} = 9e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.2 η συνολική συνεισφορά των δύο κρίσιμων σημείων είναι

$$\begin{aligned} \text{contr}(z_*^\pm) &= \text{contr}(z_*^+) + \text{contr}(z_*^-) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(9e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda\frac{3}{4} + i\lambda\frac{3\sqrt{3}}{4}} + \frac{2\pi}{\lambda} \left(9e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda\frac{3}{4} - i\lambda\frac{3\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{4}\lambda} \left[e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda)} e^{i(+\frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda)} \right] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{4}\lambda} \left[e^{i(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3})} e^{-i(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3})} \right] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{4}\lambda} \left[2 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{4}\lambda} \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Άρα η συνολική συνεισφορά των κρίσιμων σημείων $z_0^\pm, z_*^\pm$ είναι

$$\begin{aligned} \text{contr}(z_0^\pm) + \text{contr}(z_*^\pm) &= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{4}\lambda} + \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{4}\lambda} \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{4}\lambda} \left[1 + \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda - \frac{\pi}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

2. Περίπτωση $\beta \geq 3$

Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε $x = (1, 0)$ και δύο κρίσιμα σημεία τα οποία θα συνεισφέρουν θα είναι τα

$$z_0^\pm = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \left[\left(0, \pm\sqrt{\beta}\right) + i(1, 0) \right]$$

(α') Περίπτωση $\beta > 3$

Στην προκειμένη περίπτωση τα κρίσιμα σημεία που θα συνεισφέρουν

θα είναι ακριβώς τα

$$z_0^\pm = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \left[\left(0, \pm \sqrt{\beta} \right) + i (1, 0) \right]$$

Το οποίο προκύπτει από τις σχέσεις (4. 14) και (4. 15) για $\xi_{0_1} = 0$, $\xi_{0_2}^\pm = \pm (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\beta}$, $\eta_{0_1} = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$ και $\eta_{0_2} = 0$

Όπου

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A(z_0)) &= \xi_{0_1}^4 - 6\xi_{0_1}^2\eta_{0_1}^2 + \eta_{0_1}^4 \\ &\quad + 2\beta (\xi_{0_1}^2\xi_{0_2}^2 - \xi_{0_1}^2\eta_{0_2}^2 - \xi_{0_2}^2\eta_{0_1}^2 - 4\xi_{0_1}\xi_{0_1}\eta_{0_1}\eta_{0_2} + \eta_{0_1}^2\eta_{0_2}^2) \\ &+ \xi_{0_2}^4 - 6\xi_{0_2}^2\eta_{0_2}^2 + \eta_{0_2}^4 \\ &= \eta_{0_1}^4 - 2\beta\xi_{0_2}^2\eta_{0_1}^2 + \xi_{0_2}^4 \\ &= -2\beta \frac{\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\ &= -\frac{\beta^2 - 1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\ &= -(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.2 αρκεί να δείξουμε

$$\operatorname{Re}(A(\xi + i\eta_0)) + (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \geq 0 \quad (4. 34)$$

που ισχύει διότι

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A(\xi + i\eta_0)) + (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} &= \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \beta (\beta^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \right)^2 \\ &\quad + 2(\beta - 1) \xi_1^2 \xi_2^2 + 2(\beta - 3) (\beta^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \xi_1^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Εύρεση του $\phi(z_0^+)$, με $\xi_{0_1} = 0$, $\xi_{0_2}^+ = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\beta}$, $\eta_{0_1} = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$ και $\eta_{0_2} = 0$

$$\begin{aligned}
\phi(z_0^+) &= iz_1^+ - \frac{1}{4} [(z_1^+)^4 + 2\beta(z_1^+)^2(z_2^+)^2 + (z_2^+)^4] \\
&= i(\eta_{0_1}^+) - \frac{1}{4} [(i\eta_{0_1}^+)^4 + 2\beta(i\eta_{0_1}^+)^2(\xi_{0_2}^+)^2 + (\xi_{0_2}^+)^4] \\
&= -\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{2\beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \right] \\
&= -\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{4} \frac{\beta^2 - 1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= -\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{4} \frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} \\
&= -\frac{3}{4} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Επίσης υπολογίζουμε το $\phi(z_0^-)$, με $\xi_{0_1} = 0$, $\xi_{0_2}^- = -(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\beta}$, $\eta_{0_1} = (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$ και $\eta_{0_2} = 0$

$$\begin{aligned}
\phi(z_0^-) &= iz_1^- - \frac{1}{4} [(z_1^-)^4 + 2\beta(z_1^-)^2(z_2^-)^2 + (z_2^-)^4] \\
&= i(\eta_{0_1}^-) - \frac{1}{4} [(i\eta_{0_1}^-)^4 + 2\beta(i\eta_{0_1}^-)^2(\xi_{0_2}^-)^2 + (\xi_{0_2}^-)^4] \\
&= -\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{2\beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \right] \\
&= -\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{4} \frac{\beta^2 - 1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= -\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{4} \frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{3}}} \\
&= -\frac{3}{4} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\phi(z_0^\pm) = -\frac{3}{4} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$$

Τώρα υπολογίζουμε το $\left(\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\phi(z) = iz_1 - \frac{1}{4} (z_1^4 + 2\beta z_2^2 z_1^2 + z_2^4) \quad (4.35)$$

$$\phi_{z_1}(z) = i - \frac{1}{4} (4z_1^3 + 4\beta z_1 z_2^2) \quad (4.36)$$

$$\phi_{z_2}(z) = i - \frac{1}{4} (4z_2^3 + 4\beta z_1^2 z_2) \quad (4.37)$$

$$\phi_{z_1 z_1}(z) = -3z_1^2 - \beta z_2^2 \quad (4.38)$$

$$\phi_{z_2 z_2}(z) = -3z_2^2 - \beta z_1^2 \quad (4.39)$$

$$\phi_{z_1 z_2}(z) = -2\beta z_1 z_2 \quad (4.40)$$

$$\phi_{z_2 z_1}(z) = -2\beta z_1 z_2 \quad (4.41)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \det(\phi_{z_i z_j}) &= \begin{bmatrix} \phi_{z_1 z_1} & \phi_{z_1 z_2} \\ \phi_{z_2 z_1} & \phi_{z_2 z_2} \end{bmatrix} \\ &= (-3z_1^2 - \beta z_2^2) (-3z_2^2 - \beta z_1^2) \\ &\quad - (-2\beta z_1 z_2) (-2\beta z_1 z_2) \\ &= 3\beta z_1^4 + 3\beta z_2^4 + 9z_1^2 z_2^2 - 3\beta z_1^2 z_2^2 \quad (4.42) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+} &= 3\beta (\xi_{0_1}^+ + i\eta_{0_1})^4 \\ &\quad + 3\beta (\xi_{0_2}^+ + i\eta_{0_2})^4 \\ &\quad + 9 (\xi_{0_1}^+ + i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^+ + i\eta_{0_2})^2 \\ &\quad - 3\beta (\xi_{0_1}^+ + i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^+ + i\eta_{0_2})^2 \\ &= 3\beta (i\eta_{0_1})^4 + 3\beta (\xi_{0_2}^+)^4 \\ &\quad + 9 (i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^+)^2 - 3\beta (i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^+)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+} &= \frac{3\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{3\beta^3}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{9\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{3\beta^3}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{3\beta + 3\beta^3 - 9\beta + 3\beta^3}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{6\beta^3 - 6\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{6\beta(\beta^2 - 1)}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= 6\beta(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^-} &= 3\beta(\xi_{0_1}^- + i\eta_{0_1})^4 + 3\beta(\xi_{0_2}^- + i\eta_{0_2})^4 + 9(\xi_{0_1}^- + i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^- + i\eta_{0_2})^2 \\
&\quad - 3\beta(\xi_{0_1}^- + i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^- + i\eta_{0_2})^2 \\
&= 3\beta(i\eta_{0_1})^4 + 3\beta(\xi_{0_2}^-)^4 + 9(i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^-)^2 - 3\beta(i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^-)^2 \\
&= \frac{3\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{3\beta^3}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} - \frac{9\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{3\beta^3}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{3\beta + 3\beta^3 - 9\beta + 3\beta^3}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{6\beta^3 - 6\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{6\beta(\beta^2 - 1)}{(\beta^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \\
&= 6\beta(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^\pm} = 6\beta(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$$

Τότε έχουμε για την συνεισφορά των $z_0^\pm$

$$\begin{aligned}
\text{contr}(z_0^\pm) &= \text{contr}(z_0^+) + \text{contr}(z_0^-) \\
&= \frac{2\pi}{\lambda} \left[6\beta (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{3\lambda}{4} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right] \\
&+ \frac{2\pi}{\lambda} \left[6\beta (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{3\lambda}{4} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right] \\
&= \frac{4\pi}{\lambda} \left[6\beta (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{3\lambda}{4} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right] \\
&= \frac{4\pi}{\lambda} (6\beta)^{-\frac{1}{2}} (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{6}} \exp \left[-\frac{3\lambda}{4} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \right]
\end{aligned}$$

(β') Περίπτωση $\beta = 3$

Η σχέση (4. 34) για $\beta = 3$ γίνεται

$$\text{Re}(A(\xi + i\eta_0)) + (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{3}{4} \right)^2 + 4\xi_1^2\xi_2^2 \geq 0$$

και με την ισότητα να ισχύει όχι μόνο για τα $\xi_0^\pm$ αλλά και για τα

$$\xi_*^\pm = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

Οπότε στο $\mathbb{C}^2$ είναι τα σημεία

$$z_*^\pm = \pm \xi_* + i\eta_0$$

$$\text{όπου } \xi_* = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \text{ και } \eta_0 = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Προσδιορισμός του $\phi(z_0^+)$, για $\beta = 3$, άρα $\xi_{0_1} = 0$, $\xi_{0_2}^+ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\eta_{0_1} = \frac{1}{2}$ και $\eta_{0_2} = 0$

$$\begin{aligned}
\phi(z_0^+) &= iz_1^+ - \frac{1}{4} [(z_1^+)^4 + 6(z_1^+)^2(z_2^+)^2 + (z_2^+)^4] \\
&= i(i\eta_{0_1}) - \frac{1}{4} [(i\eta_{0_1})^4 + 6(i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^+)^2 + (\xi_{0_2}^+)^4] \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{16} - \frac{18}{16} + \frac{9}{16} \right] \\
&= -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Υπολογισμός του $\phi(z_0^-)$, για $\beta = 3$, άρα $\xi_{0_1} = 0$, $\xi_{0_2}^- = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\eta_{0_1} = \frac{1}{2}$ και $\eta_{0_2} = 0$

$$\begin{aligned}
\phi(z_0^-) &= iz_1^- - \frac{1}{4} [(z_1^-)^4 + 6(z_1^-)^2(z_2^-)^2 + (z_2^-)^4] \\
&= i(i\eta_{0_1}) - \frac{1}{4} [(i\eta_{0_1})^4 + 6(i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^-)^2 + (\xi_{0_2}^-)^4] \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{16} - \frac{18}{16} + \frac{9}{16} \right] \\
&= -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\phi(z_0^\pm) = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^+} &= 9(\xi_{0_1}^+ + i\eta_{0_1})^4 + 9(\xi_{0_2}^+ + i\eta_{0_2})^4 + 9(\xi_{0_1}^+ + i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^+ + i\eta_{0_2})^2 \\
&\quad - 27(\xi_{0_1}^+ + i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^+ + i\eta_{0_2})^2 \\
&= 9(i\eta_{0_1})^4 + 9(\xi_{0_2}^+)^4 + 9(i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^+)^2 - 27(i\eta_{0_1})^2(\xi_{0_2}^+)^2 \\
&= \frac{9}{16} + \frac{81}{16} - \frac{27}{16} + \frac{81}{16} \\
&= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^-} &= 9 (\xi_{0_1}^- + i\eta_{0_1})^4 + 9 (\xi_{0_2}^- + i\eta_{0_2})^4 + 9 (\xi_{0_1}^- + i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^- + i\eta_{0_2})^2 \\
&- 27 (\xi_{0_1}^- + i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^- + i\eta_{0_2})^2 \\
&= 9 (i\eta_{0_1})^4 + 9 (\xi_{0_2}^-)^4 + 9 (i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^-)^2 - 27 (i\eta_{0_1})^2 (\xi_{0_2}^-)^2 \\
&= \frac{9}{16} + \frac{81}{16} - \frac{27}{16} + \frac{81}{16} \\
&= 9
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_0^\pm} = 9$$

Τότε έχουμε για την συνεισφορά των $z_0^\pm$

$$\begin{aligned}
\text{contr}(z_0^\pm) &= \text{contr}(z_0^+) + \text{contr}(z_0^-) \\
&= \frac{2\pi}{\lambda} 9^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{3\lambda}{8}} + \frac{2\pi}{\lambda} 9^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{3\lambda}{8}} \\
&= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3\lambda}{8}}
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε το $\phi(z_*)$, με $\xi_{0_1}^+ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\xi_{0_2} = 0$, $\eta_{0_1} = \frac{1}{2}$ και $\eta_{0_2} = 0$

$$\begin{aligned}
\phi(z_*) &= iz_{*1}^+ - \frac{1}{4} [(z_{*1}^+)^4 + 2\beta(z_{*1}^+)^2(z_{*2}^+)^2 + (z_{*2}^+)^4] \\
&= i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right]^4 \\
&= i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right] \\
&= -\frac{3}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(z_*^-) &= iz_{*1}^- - \frac{1}{4} [(z_{*1}^-)^4 + 2\beta(z_{*1}^-)^2(z_{*2}^-)^2 + (z_{*2}^-)^4] \\
&= i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]^4 \\
&= -i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] \\
&= -\frac{3}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\phi(z_*^\pm) = -\frac{3}{8} \pm i\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Προσδιορισμός του $\left(\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\phi(z) = iz_1 - \frac{1}{4} (z_1^4 + 2\beta z_2^2 z_2^2 + z_2^4) \quad (4.43)$$

$$\phi_{z_1}(z) = i - \frac{1}{4} (4z_1^3 + 4\beta z_1 z_2^2) \quad (4.44)$$

$$\phi_{z_2}(z) = i - \frac{1}{4} (4z_2^3 + 4\beta z_1^2 z_2) \quad (4.45)$$

$$\phi_{z_1 z_1}(z) = -3z_1^2 - \beta z_2^2 \quad (4.46)$$

$$\phi_{z_2 z_2}(z) = -3z_2^2 - \beta z_1^2 \quad (4.47)$$

$$\phi_{z_1 z_2}(z) = -2\beta z_1 z_2 \quad (4.48)$$

$$\phi_{z_2 z_1}(z) = -2\beta z_1 z_2 \quad (4.49)$$

Οπότε για $\beta = 3$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j}) &= \begin{bmatrix} \phi_{z_1 z_1} & \phi_{z_1 z_2} \\ \phi_{z_2 z_1} & \phi_{z_2 z_2} \end{bmatrix} \\
&= (-3z_1^2 - 3z_2^2) (-3z_2^2 - 3z_1^2) \\
&\quad - (-6z_1 z_2) (-6z_1 z_2) \\
&= 9z_1^4 + 9z_2^4 + 9z_1^2 z_2^2 - 9z_1^2 z_2^2 \Rightarrow \quad (4.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+} &= 9 (\xi_{*1}^+ + i\eta_{01})^4 \\
&= 9 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= 9e^{\frac{2\pi}{3}i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^-} &= 9 (\xi_{01}^- + i\eta_{01})^4 \\
&= 9 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= 9e^{-\frac{2\pi}{3}i}
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^\pm} = 9e^{\pm \frac{2\pi}{3}i}$$

Τότε έχουμε για την συνεισφορά των $z_*^\pm$

$$\begin{aligned}
\text{contr}(z_*^\pm) &= \text{contr}(z_*^+) + \text{contr}(z_*^-) \\
&= \frac{2\pi}{\lambda} \left[9e^{\frac{2\pi}{3}i} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda(-\frac{3}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8})} \\
&+ \frac{2\pi}{\lambda} \left[9e^{-\frac{2\pi}{3}i} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda(-\frac{3}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8})} \\
&= \frac{2\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{8}\lambda} \left[e^{(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda - \frac{\pi}{3})i} + e^{(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda + \frac{\pi}{3})i} \right] \\
&= \frac{2\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{8}\lambda} \left[e^{(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda - \frac{\pi}{3})i} + e^{-(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda - \frac{\pi}{3})i} \right] \\
&= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{8}\lambda} \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda + \frac{\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$

Άρα η συνολική συνεισφορά των $z_0^\pm$ και $z_*^\pm$ είναι

$$\begin{aligned} \text{contr}(z_0^\pm) + \text{contr}(z_*^\pm) &= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3\lambda}{8}} + \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3}{8}\lambda} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3\lambda} e^{-\frac{3\lambda}{8}} \left[1 + \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda + \frac{\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

□

Στο επόμενο Θεώρημα εξετάζουμε την ασυμπτωτική εκτίμηση όταν έχουμε ότι το σύμβολο του ελλειπτικού τελεστή είναι ισχυρά κυρτό.

Θεώρημα 4.3.2. Στην περίπτωση όπου $0 < \beta < 3$, δηλαδή όταν έχουμε ισχυρή κυρτότητα, μπορούμε να βρούμε την ασυμπτωτική εκτίμηση της $G(x, t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, με $x \neq 0$ καθώς το $t \rightarrow 0^+$ και είναι

$$G(x, t) \sim \frac{4^{-\frac{1}{3}}}{\pi} h(x)^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \cdot \exp\left[-\frac{3}{8 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} \frac{A(q)}{t^{\frac{1}{3}}}\right] \cdot \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{8 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} \frac{A(q)}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{\pi}{3}\right] \quad (4. 51)$$

Απόδειξη

Κατά την επιλογή των κρίσιμων σημείων τα οποία θα συνεισφέρουν στην ασυμπτωτική εκτίμηση, πρώτα παρατηρούμε ότι λόγω της ισχυρής κυρτότητας του συμβόλου του $A(\xi)$, μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $q = q(x) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{4} \nabla A(q) = x$$

Όντως

$$\frac{1}{4} \nabla A(q) = x \Rightarrow$$

$$q_1^3 + \beta q_1 q_2^2 = x_1 \quad (4. 52)$$

$$q_2^3 + \beta q_2 q_1^2 = x_2 \quad (4. 53)$$

Για $x_1 = 0$ έχουμε από την (4. 52) ότι

$$\begin{aligned} q_1^3 + \beta q_1 q_2^2 &= 0 \Rightarrow \\ q_1(q_1^2 + \beta q_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

εάν $(q_1^2 + \beta q_2^2) \neq 0$ τότε από τις σχέσεις (4. 52) και (4. 53) έχουμε ότι $q_1 = 0$ και $q_2 = x_2^{\frac{1}{3}}$, εάν $(q_1^2 + \beta q_2^2) = 0$ τότε $q_1 = q_2 = 0$

Ομοίως εάν $x_2 = 0$ παίρνουμε ότι $q_2 = 0$ και $q_1 = x_1^{\frac{1}{3}}$ και $q_1 = q_2 = 0$
Έστω $x_1 > 0$ και $x_2 > 0$, τότε

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{q_2^3 + \beta q_2 q_1^2}{q_1^3 + \beta q_1 q_2^2} = \frac{1 + \beta(\frac{q_2}{q_1})^2}{(\frac{q_2}{q_1})^3 + \beta \frac{q_2}{q_1}}$$

Έστω η συνάρτηση $g(t) = \frac{1 + \beta t^2}{t^3 + \beta t}$, $t > 0$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = +\infty$ και $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, άρα υπάρχει $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$g(t_0) = \frac{x_2}{x_1}$$

Τότε το ζητούμενο $q = (q_1, q_2)$ θα είναι της μορφής $q = (\lambda, \lambda t_0)$ και από τις σχέσεις (4. 52) και (4. 53) έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \beta \lambda^2 t_0^2 &= x_1 \\ \lambda^3 t_0^3 + \beta \lambda^2 \lambda t_0 &= x_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\lambda^3(1 + \beta t_0^2) = x_1 \quad (4. 54)$$

$$\lambda^3(t_0^3 + \beta t_0) = x_2 \quad (4. 55)$$

Λόγω της επιλογής του t_0 , το λ λύνει και την (4. 54) αλλά και την (4. 55)

Τότε, ένα σημείο $z = \alpha q \in \mathbb{C}^2$, θα είναι κρίσιμο σημείο της ϕ εάν $\alpha^3 = i$.
Όντως

$$\begin{aligned} \nabla \phi(z) &= 0 \Leftrightarrow \\ \nabla \phi(\alpha q) &= 0 \Leftrightarrow \\ (i\alpha x_1 - \alpha^4 q_1^3 - \alpha^4 \beta q_1 q_2^2, i\alpha x_2 - \alpha^4 q_1^2 q_2 - \alpha^4 q_2^3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha(i x_1 - \alpha^3 q_1^3 - \alpha^3 \beta q_1 q_2^2, i x_2 - \alpha^3 q_1^2 q_2 - \alpha^3 q_2^3) &= 0 \Leftrightarrow \\ i x - \frac{1}{4} \alpha^3 \nabla A(q) &= 0 \Leftrightarrow \\ x(i - \alpha^3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha^3 &= i \end{aligned}$$

Έστω το $\alpha = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ που ικανοποιεί την ανωτέρω σχέση. Τότε τα

$$z_*^\pm = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)q = \pm \xi_* + i\eta_*, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^2$$

θα είναι τα δύο από τα κρίσιμα σημεία που θα χρησιμοποιήσουμε.

Όπως και στο Θεώρημα 4.3.1 έτσι και εδώ θα αλλάζουμε το δρόμο ολοκλήρωσης από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2 + i\eta_*$, το οποίο θα προκύψει αν δείξουμε τη σχέση

$$\operatorname{Re}(\phi(z)) \leq \operatorname{Re}(\phi(z_*)), \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 + i\eta_*$$

με την ισότητα και πάλι να ισχύει στα σημεία $z_*^\pm$, το οποίο προκύπτει από τη σχέση

$$\operatorname{Re} A(\xi + i\eta_*) \geq \operatorname{Re} A(\xi_* + i\eta_*), \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

με την ισότητα να ισχύει για $\xi = \pm\xi_*$.

Για

$$\alpha = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A(\xi_* + i\eta_*) &= \operatorname{Re} A(\alpha q) \\ &= \operatorname{Re}(\alpha^4 q_1^4 + 2\beta \alpha^2 q_1^2 \alpha^2 q_2^2 + \alpha^4 q_2^4) \\ &= \operatorname{Re}[-\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}i)A(q)] \\ &= -\frac{1}{2}A(q) \\ &= -\frac{1}{2}A(2\eta_*) \\ &= -\frac{1}{2}16A(q) \\ &= -8A(q) \end{aligned}$$

Δηλαδή, θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\operatorname{Re} A(\xi + i\eta_*) + 8 \operatorname{Re} A(\eta_*) \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για τα $\xi = \pm\xi_*$

Αυτό πράγματι ισχύει για κάθε $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, διότι

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} A(\xi + i\eta) + 8A(q) &= \frac{\beta}{3}\{(\xi_1^2 - 3\eta_1^2 + (\xi_2^2 - 3\eta_2^2))\}^2 \\
&+ \frac{4\beta}{3}(\xi_1\xi_2 - 3\eta_1\eta_2)^2 \\
&+ \frac{3-\beta}{3}\{(\xi_1^2 - 3\eta_1^2)^2 + (\xi_2^2 - 3\eta_2^2)^2\} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα τη συνεισφορά των δύο αυτών σημείων. Πρώτα υπολογίζουμε το $\phi(z_*^\pm)$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x = \frac{1}{4}\nabla A(q)$, $\alpha^3 = i$ και $z_*^\pm = \alpha q$

$$\begin{aligned}
\phi(z_*^\pm) &= ixz_*^\pm - \frac{1}{4}A(z_*^\pm) \\
&= \frac{1}{4}\nabla A(q)\alpha^3\alpha q - \frac{1}{4}A(\alpha q) \\
&= \frac{1}{4}\alpha^4\nabla A(q)q - \frac{1}{4}\alpha^4A(q) \\
&= \frac{1}{4}\alpha^44A(q) - \frac{1}{4}\alpha^4A(q) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(z_*^\pm) &= \frac{3}{4}\alpha^4 4A(q) \\
&= -\frac{3}{4}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)A(q) \\
&= \frac{3}{4}e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}A(q) \\
&= -\frac{3}{8}A(q) \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}A(q)i
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ποσότητα $\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+}$

$$\det(\phi_{z_i z_j}) = \begin{pmatrix} \phi_{z_1 z_1} & \phi_{z_1 z_2} \\ \phi_{z_2 z_1} & \phi_{z_2 z_2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+} &= 9z_{*1}^2 z_{*2}^2 + 3\beta z_{*1}^4 + 3\beta z_{*2}^4 - 3\beta^2 z_{*1}^2 z_{*2}^2 \\
&= 9\alpha^2 q_1^2 \alpha^2 q_2^2 + 3\beta[\alpha^4 q_1^4 + \alpha^4 q_2^4] - 3\beta^2 \alpha^2 q_1^2 \alpha^2 q_2^2 \\
&= \alpha^4 [9q_1^2 q_2^2 + 3\beta q_1^4 + 3\beta q_2^4 - 3\beta^2 q_1^2 q_2^2] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^4 [9q_1^2 q_2^2 + 3\beta q_1^4 + 3\beta q_2^4 - 3\beta^2 q_1^2 q_2^2] \\
&= (e^{\frac{\pi}{6}i})^4 [9q_1^2 q_2^2 + 3\beta q_1^4 + 3\beta q_2^4 - 3\beta^2 q_1^2 q_2^2] \\
&= e^{\frac{2\pi}{3}i} [9q_1^2 q_2^2 + 3\beta q_1^4 + 3\beta q_2^4 - 3\beta^2 q_1^2 q_2^2]
\end{aligned}$$

και αν

$$h(x)^{\frac{4}{3}} = [9q_1^2 q_2^2 + 3\beta q_1^4 + 3\beta q_2^4 - 3\beta^2 q_1^2 q_2^2]$$

η οποία είναι θετική και ομογενής πρώτου βαθμού. Όντως έστω το τριώνυμο $f(t) = 3\beta t^4 + (9-3\beta^2)t^2 + 3\beta$ το οποίο ζητάμε να είναι θετικό και για $t^2 = \delta \geq 0$, το τριώνυμο γίνεται $f(\delta) = 3\beta\delta^2 + (9-3\beta^2)\delta + 3\beta$,
 $f'(\delta) = 6\beta\delta + 9 - 3\beta^2$

$$f'(\delta) = 0 \Rightarrow \delta_* = \frac{3\beta^2 - 9}{6\beta} \text{ και επειδή } \delta \geq 0 \Rightarrow \beta \geq \sqrt{3}$$

Η $f(\delta)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο δ_* , ίσο με

$$f(\delta_*) = -\frac{3(\beta^2 - 1)(\beta^2 - 9)}{4\beta} > 0$$

Τότε

$$\det(\phi_{z_i z_j})|_{z=z_*^+} = e^{\frac{2\pi}{3}i} h(x)^{\frac{4}{3}}$$

Ομοίως παίρνουμε

$$\begin{aligned}\det(\phi_{z_i z_j})\Big|_{z=z_*^-} &= 9z_{*1}^2 z_{*2}^2 + 3\beta z_{*1}^4 + 3\beta z_{*2}^4 - 3\beta^2 z_{*1}^2 z_{*2}^2 \\ &= h(x)^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{2\pi}{3}i}\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.1.2 η συνολική συνεισφορά των κρίσιμων σημείων $z_*^\pm$ θα είναι

$$\begin{aligned}\text{contr}(z_*^+) + \text{contr}(z_*^-) &= \frac{2\pi}{\lambda} [\det(\phi''(z_*^+))^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda\phi(z_*^+)} + \frac{2\pi}{\lambda} [\det(\phi''(z_*^-))^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda\phi(z_*^-)}] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} (h(x)^{\frac{4}{3}} e^{\frac{2\pi}{3}i})^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda(-\frac{3}{8}A(q) + \frac{3\sqrt{3}}{8}A(q)i)} \\ &\quad + \frac{2\pi}{\lambda} (h(x)^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{2\pi}{3}i})^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda(-\frac{3}{8}A(q) - \frac{3\sqrt{3}}{8}A(q)i)} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} h(x)^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{\pi}{3}i} e^{\lambda(-\frac{3}{8}A(q) + \frac{3\sqrt{3}}{8}A(q)i)} \\ &\quad + \frac{2\pi}{\lambda} h(x)^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{\pi}{3}i} e^{\lambda(-\frac{3}{8}A(q) - \frac{3\sqrt{3}}{8}A(q)i)} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} h(x)^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3}{8}\lambda A(q)} \{e^{-\frac{\pi}{3}i} e^{\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda A(q)i} + e^{\frac{\pi}{3}i} e^{-\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda A(q)i}\} \\ &= \frac{4\pi}{\lambda} h(x)^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3}{8}\lambda A(q)} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda A(q) - \frac{\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$F(\lambda) \sim \frac{4\pi}{\lambda} h(x)^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3}{8}\lambda A(q)} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda A(q) - \frac{\pi}{3}\right]$$

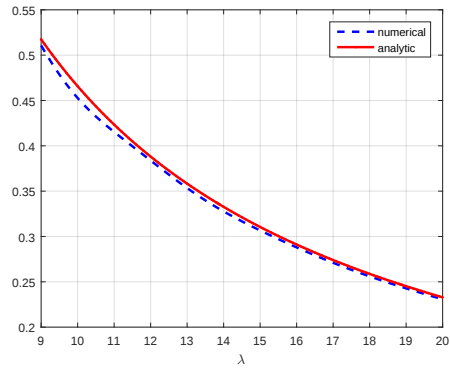
Οπότε η ασυμπτωτική εκτίμηση για τα $z_*^\pm$ είναι

$$\begin{aligned}G(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2(4t)^{\frac{2}{3}}} F((4t)^{-\frac{1}{3}}) \\ &\sim \frac{1}{4\pi^2(4t)^{\frac{2}{3}}} \frac{4\pi}{(4t)^{-\frac{1}{3}}} h(x)^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3}{8}(4t)^{-\frac{1}{3}}A(q)} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}(4t)^{-\frac{1}{3}}A(q) - \frac{\pi}{3}\right] \\ &= \frac{(4t)^{-\frac{1}{3}}}{\pi} h(x)^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{3}{8}(4t)^{-\frac{1}{3}}A(q)} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}(4t)^{-\frac{1}{3}}A(q) - \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

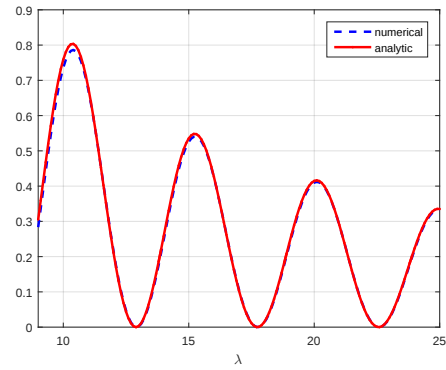
$$G(x, t) \sim \frac{4^{-\frac{1}{3}}}{\pi} h(x)^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \cdot \exp\left[-\frac{3}{8 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} \frac{A(q)}{t^{\frac{1}{3}}}\right] \cdot \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{8 \cdot 4^{\frac{1}{3}}} \frac{A(q)}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{\pi}{3}\right] \quad (4. 56)$$

□

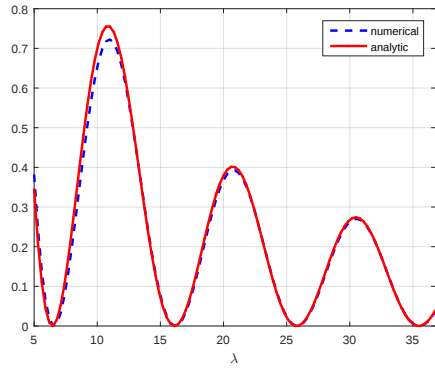
Σε κάθε ένα από τα διαγράμματα που ακολουθούν έχει σχεδιαστεί με μπλε διακεκομμένη γραμμή η πραγματική τιμή της $F(\lambda)e^{\sigma\lambda}$, όπου σ η θετική σταθερά στην ασυμπτωτική εκτίμηση και η $F(\lambda)$ έχει υπολογιστεί με αριθμητική μέθοδο μεγάλης ακρίβειας, ενώ με κόκκινη συνεχή γραμμή είναι η ασυμπτωτική προσέγγιση που προέκυψε με χρήση της μεθόδου.



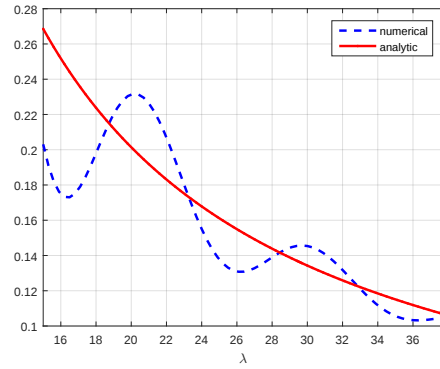
Σχήμα 1: $\beta = -0.5, x = (1, 1)$



Σχήμα 2: $\beta = 0, x = (1, 1)$



Σχήμα 3: $\beta = 3, x = (1, 0)$



Σχήμα 4: $\beta = 4, x = (1, 0)$

Αναφορές

- [1] J.D. Murray, *Asymptotic Analysis*, Springer-Verlag New York Inc. ,1984. ISBN 0-387-90937-0
- [2] Norman Bleistein, Richard A. Handelsman *Asymptotic Expansions of Integrals*,second ed.,Dover Publications, Inc.,New York ,1986 ISBN 0-486-65082-0
- [3] M.A. Evgrafov, M.M. Postnikov *Asymptotic Behavior Of Green's Functions For Parabolic And Elliptic Equations With Constant Coefficients*, Math. USSR Sbornik, 1970
- [4] M.V. Fedoryuk *Asymptotic methods in analysis*, in Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 13 (ed. R.V. Gamkrelidze), Springer 1986
- [5] G. Barbatis, *Explicit Estimates on the Fundamental Solution of Higher-Order Parabolic Equations with Measurable Coefficients*, Journal of Differential Equations 174, 442-463, 2001.
- [6] G. Barbatis, P. Branikas, *On the heat kernel of a class of fourth order operators in two dimensions: sharp Gaussian estimates and short time asymptotics* , Journal of Differential Equations 265, 5237-5261, 2018
- [7] Στ. Παπαδόπουλος, *Εφαρμογή της Μεθόδου Επικλινέστατης Καθόδου σε Παραβολικά Προβλήματα Ανώτερης Τάξης* , Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 2018