ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΜΣ

«ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ & ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ»

Διπλωματική εργασία

«Ακολουθίες που σχετίζονται με αναμενόμενες τιμές διατεταγμένων δειγμάτων»

ΤΣΕΛΙΟΥ ΜΑΡΘΑ-ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΠΑΔΑΤΟΣ Ν.

Αθήνα, 2020

Πρόλογος

Η διπλωματική αυτή εργασία έχει στόχο να εξετάσει υπό ποιες προϋποθέσεις (συνθήκες) οι όροι μίας δεδομένης ακολουθίας αριθμών παριστάνουν κάποια περιγραφικά μέτρα (αναμενόμενα μέγιστα ή αναμενόμενα εύρη) από διατεταγμένα δείγματα.

Τα περιγραφικά μέτρα, παρόλο που διαφέρουν από δείγμα σε δείγμα, μας βοηθούν να έχουμε μία εκτίμηση για μία άγνωστη προς εμάς παράμετρο του πληθυσμού, αλλά δεν επαρκούν για να έχουμε ακριβή γνώση της κατανομής από την οποία προήλθε το δείγμα.

Όπως όμως απέδειξε ο Hoeffding, και θα αναφερθεί στην αρχή του πρώτου κεφαλαίου, εάν διατάξουμε τα απλά τυχαία δείγματα, και πάρουμε τις αναμενόμενες τιμές στα διατεταγμένα, αυτές και μόνο επαρκούν ώστε να γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομής F των αρχικών δειγμάτων. Επειδή οι αναμενόμενες τιμές των διατεταγμένων, όπως θα αποδειχθεί αναλυτικά στη συνέχεια, καθορίζονται πλήρως μόνο με βάση τα αναμενόμενα μέγιστα, εξετάζουμε, στα πρώτα δύο κεφάλαια, συνθήκες κάτω από τις οποίες οι όροι της ακολουθίας παριστάνουν αναμενόμενα μέγιστα.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μαζί με το παραπάνω αποτέλεσμα και η απόδειξή του, η οποία στηρίζεται στον αντίστροφο μετασχηματισμό πιθανότητας. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στις συνθήκες που απέδειξε ο Kadane οι οποίες ,όταν ισχύουν, εξασφαλίζουν ότι η ακολουθία παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα. Στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου παρατίθεται ένα θεώρημα που προκύπτει από συνθήκες ισοδύναμες με αυτές του Kadane και αφορά επίσης ακολουθίες αναμενόμενων μεγίστων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο οι συνθήκες που αναζητούμε να ισχύουν για δεδομένη ακολουθία βρίσκονται σε ολοκληρωτική μορφή, και επαληθεύονται ευκολότερα. Θα δούμε ότι αν η ακολουθία επιδέχεται κάποιας ειδικής μορφής επέκταση, τότε παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα. Ακόμη, θα τονιστεί η σύνδεση ακολουθιών αναμενόμενων μεγίστων και συναρτήσεων Bernstein, και θα παρουσιαστεί ένα θεώρημα το οποίο εξασφαλίζει ότι μία ακολουθία παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα τυχαίας μεταβλητής με απόλυτα συνεχή κατανομή, στήριγμα ανοικτό διάστημα και συνάρτηση πυκνότητας αυστηρά θετική και συνεχή σε αυτό.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε συνθήκες (αντίστοιχες με αυτές του δεύτερου κεφαλαίου) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι οι όροι της ακολουθίας παριστάνουν αναμενόμενα εύρη. Η γνώση των ευρών των διατεταγμένων δειγμάτων δεν επιτρέπει επακριβή γνώση της κατανομής όπως συμβαίνει στην περίπτωση των αναμενόμενων μεγίστων. Ωστόσο μελετάμε και την περίπτωση των αναμενόμενων ευρών, διότι όπως θα δούμε υπάρχει άμεση σύνδεση με αυτές των αναμενόμενων μεγίστων καθώς αν μία ακολουθία παριστάνει αναμενόμενα εύρη μιας τ.μ., τότε και μόνο τότε θα παριστάνει και αναμενόμενα μέγιστα μίας τ.μ. συμμετρικής γύρω από το 0.

Ευχαριστίες

Πριν παρουσιαστεί αναλυτικά η διπλωματική αυτή εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Κύριο Παπαδάτο για την συνεχή καθοδήγηση και επίβλεψη της εργασίας μου, τους καθηγητές μου για τις γνώσεις που μου προσέφεραν σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο, καθώς και τους γονείς μου για την σημαντική στήριξή τους σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

<u>Περιεχόμενα</u>

Κεφάλαιο 1

Ακολουθίες αναμενόμενων μεγίστων

Θεωρούμε αρχικά τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_k$(ανεξάρτητες, ισόνομες, ολοκληρώσιμες και μη εκφυλισμένες τυχαίες μεταβλητές με άγνωστη συνάρτηση κατανομής F) και στη συνέχεια τοποθετούμε αυτές τις k τυχαίες μεταβλητές σε αύξουσα σειρά κατασκευάζοντας έτσι το διατεταγμένο δείγμα $X_{1:k}, X_{2:k}, \dots, X_{k:k}$.

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι εάν δεδομένης μιας ακολουθίας μ_n, μπορεί να ισχύει $E(X_{n:n}) = \mu_n \ \forall\ n$, δηλαδή εάν οι όροι της ακολουθίας παριστάνουν τα αναμενόμενα μέγιστα του δείγματος.

Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα (Hoeffding 1953) είναι ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε την F του τυχαίου δείγματος βασιζόμενοι αποκλειστικά στις μέσες τιμές $\mu_{i:k}$ του παραπάνω διατεταγμένου δείγματος. Οι διατεταγμένες μέσες τιμές δείγματος μεγέθους k σχηματίζουν τριγωνικό πίνακα:

$$\begin{array}{c}
\mu_{1:1} \\
\mu_{1:2} \qquad \mu_{2:2} \\
\mu_{1:3} \qquad \mu_{2:3} \qquad \mu_{3:3} \\
. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
\mu_{1:i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu_{i:i} \\
. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
\mu_{1:k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu_{k:k}
\end{array}$$

Όμως όπως θα αποδείξουμε κάθε διατεταγμένη μέση τιμή $\mu_{i:k}$ είναι γραμμική συνάρτηση μόνο των $\mu_{i:i}\ για\ 1 \leq i \leq k$, επομένως για να την καθορίσουμε αρκεί να γνωρίζουμε μόνο τα αναμενόμενα μέγιστα (από i και κάτω)

Προκειμένου να δείξουμε ότι τα $\mu_{i:k}$ είναι συναρτήσεις αναμενόμενων μεγίστων θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό πιθανότητας ο οποίος μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να παράγουμε τυχαίο δείγμα από οποιαδήποτε συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας f (και αθροιστική συνάρτηση κατανομής F), έχοντας τυχαίο δείγμα από ομοιόμορφες τ.μ. στο διάστημα (0,1). Αυτό πετυχαίνεται μέσω του μετασχηματισμού $X = F^{-1}(U)$, όπου U η ομοιόμορφη τ.μ. και $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$, $0 < u < 1$.

Απόδειξη:

Έστω συνάρτηση F που ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής (αύξουσα, δεξιά συνεχής , F (-∞)=0, F(+∞)=1).

Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας (Ω,Α,P)=((0,1),B(0,1),λ) των Borel υποσυνόλων του (0,1), με λ το μέτρο Lebesgue στο (0,1). Είναι προφανές ότι η τ.μ. $U\ με\ U(\omega) = \omega, 0 < \omega < 1$, ακολουθεί ομοιόμορφη συνεχή κατανομή, στο διάστημα $(0,1)$.

Ορίζουμε τώρα την τ.μ. $X = F^{-1}(U)$, όπου $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$,

$όπου\ 0 < u < 1.$

Σταθεροποιούμε ένα $u \in (0,1)$ και θέτουμε $Iu = \{x: F(x) \geq u\}$

Ισχύουν τα εξής:

1. $Iu \neq \emptyset$

Η F έχει τις ιδιότητες της σ.κ. και επομένως $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 > u.$

2. Το Iu είναι διάστημα:

Έστω $x_1 \in Iu$ και $x_2 > x_1$. Τότε αφού η F είναι αύξουσα ισχύει:

$F(x_2) \geq F(x_1) \geq u$, οπότε $x_2 \in Iu$.

3. $Iu \neq \mathbb{R}$:

$A\varphi o\acute{\upsilon} \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$ υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ με $F(x) < u$.

Άρα το Iu είναι ένα διάστημα της μορφής $(b,+\infty)$ ή $[b,+\infty)$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$ (το b εξαρτάται από το u δηλαδή $b = b(u)$).

Αν $Iu = (b, +\infty) \Rightarrow F(b + \frac{1}{n}) \geq u$ για n=1,2,... και $F(b) < u$, το οποίο δε μπορεί να συμβεί αφού η F είναι δεξιά συνεχής ($u > F(b) = \lim\limits_{n} F(b + \frac{1}{n}) \geq u$).

Συνεπώς το Iu είναι διάστημα της μορφής $[b(u),+\infty)$.

Προφανώς ισχύει $infIu = b(u) = F^{-1}(u)$

Έστω τώρα τυχαίο $x\epsilon\mathbb{R}$.

Τότε: $x\epsilon Iu \iff F^{-1}(u) \leq x.$

Από τον ορισμό του $Iu = \{x: F(x) \geq u\}$:

$x\epsilon Iu \iff u \leq F(x)$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\{u: F^{-1}(u) \leq x\} = \{u: u \leq F(x)\} = \begin{cases} \varnothing \text{ , αν } F(x) = 0 \\ (0, F(x)] \text{, αν } 0 < F(x) < 1 \\ (0,1) \text{, αν } F(\ x) = 1. \end{cases}$$

Οπότε: $P[F^{-1}(U) \leq x] = \lambda\{u: F^{-1}(u) \leq x\} = \lambda(\{u: u \leq F(x)\}) = F(x).$

Έτσι αποδείξαμε ότι η τ.μ. $X = F^{-1}(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής την F στον χώρο (Ω, A, P) (αντίστροφος μετασχηματισμός πιθανότητας).

Θεωρούμε τώρα τυχαίο δείγμα $U_1, U_{2,\dots,} U_n \sim$ U(0,1) από ομοιόμορφες και θέτουμε:

$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (F^{-1}\ (U_1), F^{-1}(U_2), \dots, F^{-1}(U_n))$, οπότε οι τ.μ. $F^{-1}(U_i)$ είναι ανεξάρτητες με σ.κ. F .

Λόγω του ότι η F είναι αύξουσα έχουμε τώρα ότι οι διατεταγμένες τ.μ $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ και $(F^{-1}\,(U_{1:n}), F^{-1}(U_{2:n}), \dots, F^{-1}(U_{n:n}))$ είναι ισόνομες,

δηλαδή:

$$(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}) \overset{d}{=} (F^{-1}\,(U_{1:n}), F^{-1}(U_{2:n}), \dots, F^{-1}(U_{n:n}))$$

Αφού λοιπόν οι παραπάνω τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια κατανομή θα έχουν και ίσες μέσες τιμές,

δηλαδή:

$$\mu_{i:n} = E(X_{i:n}) = E(F^{-1}(U_{i:n})) = \int_0^1 F^{-1}(x) f_{i:n}(x)dx \qquad (\mathbf{1.1}),$$

όπου $f_{i:n}(x)$ η πυκνότητα της $U_{i:n}$ όταν $U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ προέρχονται από τις $U_1, U_{2,\dots,} U_n$.

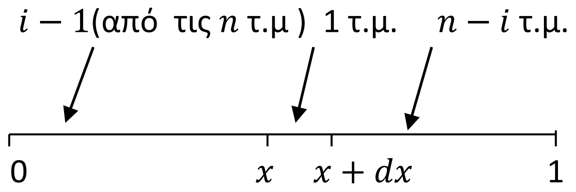
Συνεπώς η διατεταγμένη μέση τιμή $\mu_{i:n}$ έχει εκφραστεί πλέον ως ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας της i-οστής διατεταγμένης από n ομοιόμορφες τ.μ., δηλαδή της $f_{i:n}$.

Όμως η συνάρτηση πυκνότητας $f_{i:n}$ μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά και να αποδειχθεί ότι ακολουθεί κατανομή Βήτα:

$$f_{i:n}(x)dx = \mathrm{P}(\text{ η } U_{i:n} \text{ να ανήκει στο} (x, x+dx]) \qquad \mathbf{(1.2)}$$

Δηλαδή θα πρέπει να συμβούν τα εξής 3 ενδεχόμενα: οι $i-1$ από τις n τυχαίες μεταβλητές να ανήκουν στο διάστημα$(0, x]$, η μία να ανήκει στο $(x, x+dx]$ και οι υπόλοιπες $n-i$ να ανήκουν στο $(x+dx, 1]$.

Σχηματικά:



Η κατανομή εκείνη η οποία εξετάζει την πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα 3 ενδεχόμενα, καθένα με κάποια πιθανότητα , σε n συνολικά επαναλήψεις του πειράματος τύχης είναι η τριωνυμική.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μία από τις n ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές βρίσκεται στο διάστημα $(0, x]$ με πιθανότητα x και στα διαστήματα$(x, x + dx]$ και $(x + dx, 1]$ με πιθανότητες dx και $1 - x - dx$ αντίστοιχα.

Επομένως:

P($i - 1$ τ.μ. $\in (0, x]$, 1 τ.μ. $\in (x, x + dx], n - i$ τ.μ. $\in (x + dx, 1]) =$
$\frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} x^{i-1} dx^1 (1 - x - dx)^{n-i}$.

Οπότε, η **(1.2)** δίνει:

$$f_{i:n}(x)dx = \text{P(η } U_{i:n} \text{ να ανήκει στο } (x, x + dx] \text{)=}$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} x^{i-1} dx^1 (1 - x - dx)^{n-i} + \ o(dx) \ ,$$

Όπου το $o(dx)$ αφορά την πιθανότητα να υπάρξουν > 1 τυχαίες μεταβλητές στο διάστημα$(x, x + dx]$. Διαιρώντας με dx και παίρνοντας όρια έχουμε:

$$f_{i:n}(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{\frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} x^{i-1} dx^1 (1-x-dx)^{n-i} + o(dx)}{dx}$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1 - x - dx)^{\text{n-i}}, \quad 0 < x < 1 \qquad \textbf{(1.3)}$$

Συνεπώς, η $U_{i:n} \sim Beta(i, n + 1 - i)$.

Από την **(1.3)** μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ελάχιστη και την μέγιστη διατεταγμένη από τις n ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές:

$$f_{1:n} = n(1 - x)^{n-1}$$

$$f_{n:n} = nx^{n-1}, \qquad 0 < x < 1.$$

Αντικαθιστώντας τώρα την $f_{i:n}$ στην **(1.1)** έχουμε:

$$\mu_{i:n} = E(X_{i:n}) = \int_0^1 F^{-1}(x) \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} x^{i-1} (1 - x)^{n-i} dx =$$

(και κάνοντας χρήση του τύπου του διωνύμου του Νεύτωνα)

$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \int_0^1 F^{-1}(x) x^{i-1} x^j dx$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \int_0^1 F^{-1}(x) x^{i+j-1} dx$$

$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}\frac{(-1)^j}{i+j}\underbrace{\int_0^1 (i+j)F^{-1}(x)x^{i+j-1}dx}_{\mu_{i+j:i+j}}$

$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}\frac{\mu_{i+j:i+j}}{i+j}$

(Θέτοντας $k=i+j$)

$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}\frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\frac{\mu_{k:k}}{k}$

$\Rightarrow \mu_{i:n}=\frac{n!}{(i-1)!}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}\frac{1}{(k-i)!(n-k)!}\frac{\mu_{k:k}}{k}$.

Αποδείξαμε δηλαδή ότι οι διατεταγμένες μέσες τιμές $\mu_{i:n}$ εξαρτώνται γραμμικά μόνο από αναμενόμενα μέγιστα, και συγκεκριμένα από όλα τα αναμενόμενα μέγιστα από i έως n .

Για παράδειγμα για να προσδιορίσουμε την $\mu_{6:8}$ αρκεί να γνωρίζουμε τα αναμενόμενα μέγιστα $\mu_{6:6}, \mu_{7:7}\ \kappa\alpha\iota\ \mu_{8:8}$.

Επειδή λοιπόν η ακολουθία των αναμενόμενων μεγίστων καθορίζει εμμέσως και την ακολουθία διατεταγμένων μέσων τιμών, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ακολουθία η οποία παριστάνει τα αναμενόμενα μέγιστα είναι από μόνη της αρκετή για να καθορίσει την άγνωστη συνάρτηση κατανομής F του τυχαίου δείγματος (Hoeffding 1953).

Στα επόμενα κάθε ακολουθία η οποία παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα μιας κατανομής καλείται ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων.

Δηλαδή η μ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων αν υπάρχει τ.μ. X με πεπερασμένη μέση τιμή ώστε:

$\mu_k = \mu_k(X) := Emax\{X_1, \ldots . X_k\},\ \ k \geq 1,$

όπου $X_i, i>1$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων της τ.μ X .

Ένα θεώρημα το οποίο μας εξασφαλίζει και ασθενή σύγκλιση στην τ.μ. (έστω X) με σ.κ. την άγνωστη F αλλά και ότι η δοθείσα ακολουθία είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων, είναι αυτό που απέδειξαν οι Hill και Spruill (1994):

<u>Θεώρημα 1.1</u>:'Εστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών, $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία τυχαίων αριθμών και $\mu_k(X_n)$ τα αναμενόμενα μέγιστα από τυχαίο δείγμα k τυχαίων μεταβλητών. Εάν $\mu_k(X_n) \to \mu_k$ καθώς $n \to \infty$ για $k \geq 1$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Υπάρχει ολοκληρώσιμη τ.μ. X τέτοια ώστε $X_n \overset{W}{\to} X$ και $\mu_k(X) = \mu_k$ για $\forall k \geq 1$
2. $\mu_k = o(k)$ και $\sum_{j=1}^{k}(-1)^k \binom{k}{j} \mu_j = o(k)$, καθώς $k \to \infty$.

Υπάρχουν κι άλλες συνθήκες που μας εξασφαλίζουν ότι μια ακολουθία μ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων. Μία από αυτές τις συνθήκες (ικανή και αναγκαία) διατύπωσε ο Kadane (1974) αποδεικνύοντας ότι αν η ακολουθία $\{\mu_{k+2} - \mu_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία ροπών ενός πεπερασμένου μέτρου στο ανοιχτό διάστημα (0,1), δηλαδή αν υπάρχει ένα πεπερασμένο μέτρο τ στο [0,1] τέτοιο ώστε

$$\tau(\{0\}) = \tau(\{1\}) = 0 \quad (\mathbf{1.4}) \quad \text{και}$$

$$\mu_{n+2} - \mu_{n+1} = \int_{[0,1]} u^n d\tau(u),\ n = 0,1 \dots\ , (\mathbf{1.5})$$

τότε η μ_k είναι πράγματι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων.

Σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό του Hausdorff (1921) η $(\mathbf{1.5})$ είναι ισοδύναμη με την συνθήκη:

$$(-1)^s \Delta^s(\mu_{k+2} - \mu_{k+1}) \geq 0, \qquad s \geq 0, k \geq 0, \quad (\mathbf{1.6})$$

$\acute{o}\pi o\upsilon\ \Delta\ o\ \tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\omega}\nu$,

δηλαδή Δ: $\Delta^0 \alpha_k = \alpha_k,\ \Delta^1(\alpha_k) = \Delta\alpha_k = a_{k+1} - a_k\ , \Delta^{s+1} = \Delta\Delta^s$.

Η μη αρνητικότητα στη συνθήκη $(\mathbf{1.6})$ εξασφαλίζεται λόγω της ταυτότητας

$$(-1)^k (\Delta^k \mu)_n = \int_0^1 x^n (1-x)^k d\tau(x)\,,$$

αφού το ολοκλήρωμα μη-αρνητικής συνάρτησης είναι μη αρνητικό.

Συνεπώς μία αναγκαία συνθήκη ώστε η μ_k να αποτελεί ακολουθία ροπών πεπερασμένου μέτρου στο ανοιχτό διάστημα (0,1) είναι να είναι, σύμφωνα με τον Hausdorff, γνήσια μονότονη.

Σημειώνεται ότι οι οριακές συνθήκες $\tau(\{0\}) = \tau(\{1\}) = 0$ είναι ισοδύναμες με $\mu_k = o(k)$ και $\sum_{j=1}^{k}(-1)^k \binom{k}{j} \mu_j = o(k)$, καθώς $k \to \infty$ (Kolodynski, 2000).

Από την συνθήκη του Kadane και τις παραπάνω ισοδυναμίες προκύπτει το εξής θεώρημα για τον χαρακτηρισμό μιας ακολουθίας ως ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων:

<u>Θεώρημα 1.2</u>: Μία ακολουθία $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα μιας μη-εκφυλισμένης ολοκληρώσιμης τ.μ. αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. $(-1)^{s+1}\Delta^s\mu_k > 0, \qquad s \geq 1, k \geq 1$
2. $\mu_k = o(k)$, καθώς $k \to \infty$
3. $\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} \mu_j = o(k)$, καθώς $k \to \infty$

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η απόδειξη του θεωρήματος 1.2 η οποία χρησιμοποιεί το θεώρημα που απέδειξαν οι Hill και Spruill όπως και το αποτέλεσμα του Hoeffding αλλά δεν εμπλέκει το πρόβλημα των ροπών.

<u>Απόδειξη θεωρήματος 1.2:</u>

Έστω ολοκληρώσιμη και μη εκφυλισμένη τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής F. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_k = E(X_{k:k}) = \mu_k(X)$, δηλαδή ότι η μ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων.

<u>Λήμμα 1.1</u>:Η μέση τιμή του k-οστού μεγίστου από k ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής F δίνεται από τον τύπο:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [1(X > 0) - F^k(x)]\, dx$$

<u>Απόδειξη:</u>

Γνωρίζουμε ότι για μία τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής F , η μέση τιμή δίνεται από το τύπο:

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [1(x > 0) - F(x)]dx$$

όπου 1 η δείκτρια συνάρτηση.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο για την μέση τιμή του k - οστού μεγίστου έχουμε:

$$E(X_{k:k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1(x > 0) - F^k(x)]dx, \qquad (\mathbf{1.7})$$

διότι η maximum τ.μ. από k ανεξάρτητες και ισόνομες έχει σ.κ.

$$\begin{aligned} P(X_{k:k} \leq x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_k \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \dots P(X_k \leq x) \\ &= F^k(x) \ . \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια και με τη βοήθεια του Λήμματος 1.2 ότι:

$(-1)^{s-1}\Delta^s\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} F^k\,(x)(1 - F(x))^s dx > 0.$

Από τους υπολογισμούς των τελεστών διαφορών προκύπτει:

$\Delta^1\mu_k = \mu_{k+1} - \mu_k$

$\Delta^2\mu_k = \Delta(\mu_{k+1} - \mu_k) = \mu_{k+2} - \mu_{k+1} - (\mu_{k+1} - \mu_k) = \mu_{k+2} - 2\mu_{k+1} + \mu_k$

$\Delta^3\mu_k = \cdots = \mu_{k+3} - 3\mu_{k+2} + 3\mu_{k+1} - \mu_k$

$\Delta^4\mu_k = \cdots = \mu_{k+4} - 4\mu_{k+3} + 6\mu_{k+2} - 4\mu_{k+1} + \mu_k$

Το παρακάτω Λήμμα αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο s:

Λήμμα 1.2: $Ισχύει\ \Delta^s\mu_k = \sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}\mu_{k+j}\ ,\ \forall s \in \mathbb{N}\ .$

Οπότε, από το Λήμμα 1.2 και την $(\mathbf{1.7})$ έχουμε:

$$\Delta^s\mu_k = \sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}\int_{\mathbb{R}} [1(x > 0) - F^{k+j}(x)]dx$$

$$= 1(x > 0)\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{s}{j} - \int_{\mathbb{R}} F^k(x)\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}F^j(x)\binom{s}{j}dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} F^k(x)(F(x) - 1)^s\,dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} F^k(x)(1-F(x))^s(-1)^s \; dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} (-1)^s\, F^k(x)(1-F(x))^s\, dx$$

$$Επομένως:\; (-1)^{s-1}\Delta^s\mu_k = \int_{\mathbb{R}} (-1)^{s-1}(-1)^{s-1}\, F^k(x)(1-F(x))^s\, dx$$

$$\Rightarrow\; (-1)^{s-1}\Delta^s\mu_k = \int_{\mathbb{R}} F^k(x)(1-F(x))^s\, dx > 0\,.$$

$Επίσης$:

$$\frac{\mu_k}{k} = \int_0^1 u^{k-1}F^{-1}(u)du \quad (\mathbf{1.8})$$

$,όπου$ $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$, $0 < u < 1$, είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός της F .

Από Θ.Κ.Σ συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{\kappa\to\infty} \frac{\mu_k}{k} = 0$, δηλαδή $\mu_k = o(k)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Ελέγχουμε τις υποθέσεις του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης:

$f_k = u^{k-1}F^{-1}(u)$, $0 < u < 1$

$f_k \to 0$

$|f_k| = u^{k-1}|F^{-1}(u)| \leq |F^{-1}(u)|$

$\int |F^{-1}(u)|du = E|F^{-1}(u)| = E|X| < \infty \qquad (λόγω\ ισονομίας)$

Οπότε εφαρμόζοντας Θ.Κ.Σ προκύπτει:

$$\lim_{\kappa}\int f_k = \int \lim_{k} f_k = \int \lim_{k} u^{k-1}\, F^{-1}(u) = 0 \quad (\mathbf{1.9})$$

Οπότε από $(\mathbf{1.8}), (\mathbf{1.9}) \Rightarrow \lim\limits_{\kappa\to\infty}\frac{\mu_k}{k} = 0$.

Αντίστοιχα, πάλι λόγω Θ.Κ.Σ αποδεικνύεται ότι:

$\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^1 (1-u)^{k-1}\, F^{-1}(u)du = 0$, διότι κάνοντας χρήση του Διωνύμου του Νεύτωνα μπορεί να δειχθεί ότι:

$\int_0^1 (1-u)^{k-1} F^{-1}(u)du = -\left(1/_k\right) \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \mu_j .$

Οπότε: $\lim_{k\to\infty} -\left(1/_k\right) \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \mu_j = 0$,

κι έτσι $\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \mu_j = o(k)$, καθώς $k \to \infty$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες του Θεωρήματος 1.2 και ορίζουμε:

$$\beta_{i,n} = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{(-1)^j}{i+j} \mu_{i+j}, \quad 1 \le i \le n \ , n \ge 1.$$

Τότε:

$$\beta_{i+1,n} - \beta_{i,n} =$$

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i-1)!} \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} \frac{(-1)^j}{i+j+1} \mu_{i+j+1} - \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{(-1)^j}{i+j} \mu_{i+j}$$

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i-1)!} \sum_{j=1}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} \frac{(-1)^j}{i+j} \mu_{i+j} - \frac{n!\,i}{i!\,(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{(-1)^j}{i+j} \mu_{i+j}$$

$$= \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{(n-i)!\,j}{j!\,(n-i-j)!} \frac{(-1)^{j-1}}{i+j} \mu_{i+j} - \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \frac{i}{i+j} \mu_{i+j}$$

$$= -\binom{n}{i} \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \frac{j}{i+j} \mu_{i+j} - \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \frac{i}{i+j} \mu_{i+j}$$

$$= -\binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \mu_{i+j} \left(\frac{j}{i+j} + \frac{i}{i+j} \right)$$

$$= \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^{2n-2i+1-j} \mu_{i+j}$$

$$= \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^{n-i-j} \binom{n-i}{j} \mu_{i+j} (-1)^{n-i+1}$$

$$= \binom{n}{i} (-1)^{n-i+1} \Delta^{n-i} \mu_i \ > 0 \ .$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία από διακριτές ομοιόμορφες τ.μ. X_n , με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από την σχέση:

$$P(X_n = \beta_{i,n}) = \frac{1}{n}\ , \qquad 1 \leq i \leq n,$$

και στήριγμα το σύνολο $\{\beta_{1,n}, \beta_{2,n,\dots,}\beta_{n,n}\}$ με $\beta_{1,n} < \beta_{2,n} < \cdots < \beta_{n,n}$.

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $k \geq 1$ και θέτουμε:

$Z_{n,k} = max\{X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k}\}$, όπου $X_{n,1}, X_{n,2,\dots.}X_{n,k}$ ανεξάρτητες και ισόνομες με την X_n.

Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τ.μ. $Z_{n,k}$ είναι:

$$P(Z_{n,k} = \beta_{i,n}) = P(Z_{n,k} \leq \beta_{i,n}) - P(Z_{n,k} \leq \beta_{i-1,n}) = \left(\frac{i}{n}\right)^k - \left(\frac{i-1}{n}\right)^k.$$

Επομένως, $$\mu_k(X_n) = E[Z_{n,k}] = \sum_{\iota=1}^{n} \beta_{i,n} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^k - \left(\frac{i-1}{n}\right)^k\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^k - \left(\frac{i-1}{n}\right)^k\right] \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{(-1)^j}{i+j} \mu_{i+j}.$$

Θέτοντας $s = i + j$, οπότε $s \in \{1, \dots., n\}$ και $j = s - i$, έχουμε:

$$\mu_k(X_n) = \sum_{s=1}^{n} \frac{n!\,(n-i)!\,(s-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!\,(s-i)!\,(n-s)!\,s!} \frac{\mu_s}{n^k} (-1)^{s-i} \sum_{i=1}^{n} [i^k - (i-1)^k]$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \frac{\mu_s}{n^k} \sum_{i=1}^{s} (-1)^{s-i} \binom{s-1}{i-1} [i^k - (i-1)^k]$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \frac{\mu_s}{n^k} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{s-1-i} \binom{s-1}{i} [i^k - (i-1)^k]$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \frac{\mu_s}{n^k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \left\{\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{s-1-i} \binom{s-1}{i} i^m\right\},$$

Όπου το άθροισμα στις αγκύλες είναι πολλαπλάσιο του αριθμού Stirling δεύτερου είδους (Charalambides 2002, Theorem 8.4, p.164).

Εάν ορίσουμε $S(s,m) := \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{s-1-i} \binom{s-1}{i} i^m$,

θεωρήσουμε m διακεκριμένες μπάλες και $s-1$ διακεκριμένα κελιά ($s \geq 2, m \geq 1$), και τοποθετήσουμε τυχαία τις μπάλες στα κελιά τότε η πιθανότητα το κάθε κελί να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:

$$p(s,m) := P(\text{κάθε κελί περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα})$$

Έστω E_i το ενδεχόμενο το $i -$ κελί να περιέχει μία τουλάχιστον μπάλα $i = 1, \ldots, s-1$.

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p(s,m) = P\left(\bigcap_{i=1}^{s-1} E_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{s-1} E_i^c\right)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{s-1} P(E_i^c) + \sum_{i<j} P(E_i^c E_j^c) - \cdots - (-1)^{s-2} \sum_{i_1<\cdots<i_m} P(E_{i_1}^c \ldots E_{i_m}^c),$$

όπου: $P(E_i^c) = \dfrac{(s-2)^m}{(s-1)^m}, P(E_i^c E_j^c) = \dfrac{(s-3)^m}{(s-1)^m}, P\left(E_{i_1}^c \ldots E_{i_m}^c\right) = \dfrac{1}{(s-1)^m}$

οπότε:

$$p(s,m) = 1 - \binom{s-1}{1}\frac{(s-2)^m}{(s-1)^m} + \binom{s-1}{2}\frac{(s-3)^m}{(s-1)^m} - \cdots (-1)^{s-2}\binom{s-1}{s-2}\frac{1}{(s-1)^m}$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{s-1}{i} \left(\frac{s-1-i}{s-1}\right)^m.$$

$$\text{Έτσι}, p(s,m) = \frac{1}{(s-1)^m} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{s-1-i} \binom{s-1}{i} i^m$$

$$= \frac{1}{(s-1)^m} S(s,m).$$

Επειδή η πιθανότητα $p(s,m)$ είναι μηδέν όταν οι μπάλες είναι λιγότερες από τα κελιά, δηλαδή όταν $1 \leq m < s-1$, συμπεραίνουμε ότι $S(s,m) = 0 \; για \; s \geq 3 \; και \; m = 1, \ldots s-2$.

Ακόμη, ισχύει $S(s,0)=0$ για $s\geq 2$, άρα μπορούμε να γραψουμε $S(s,m)=S(s,m)1(s\leq m+1), m\geq 0, s\geq 2$,

$ενώ\ p(s,s-1)=P(καθένα\ από\ τα\ s-1\ κελιά\ να\ περιέχει\ 1\ τουλάχιστον\ από\ τις\ s-1\ συνολικά\ μπάλες)=P(κάθε\ κελί\ να\ περιέχει\ ακριβώς\ μία\ μπάλα)=$

$$\frac{(s-1)!}{(s-1)^{s-1}}, s\geq 2 \quad (Κλασικός\ ορισμός\ πιθανότητας),$$

και $S(1,0)=1$ από σύμβαση, οπότε έχουμε επίσης ότι

$$S(s,s-1)=(s-1)!\ και\ S(s,0)=1(s=1), \quad s\geq 1$$

Επομένως,

$$S(s,m)=S(s,m)1(s\leq m+1), \qquad m\geq 0, s\geq 1,$$

Δηλαδή με απλά λόγια το άθροισμα $S(s,m)$ είναι αριθμός διάφορος του μηδενός μόνο όταν οι μπάλες είναι ίσες ή περισσότερες από τα κελιά.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση, συμπεραίνουμε ότι για $n\geq k$,

$$\begin{aligned}\mu_\kappa(X_n)&=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k}{m}S(s,m)1(s\leq m+1)\right)\binom{n}{s}\frac{\mu_s}{n^k}\\&=\sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{m=s-1}^{k-1}\binom{k}{m}S(s,m)\right)\binom{n}{s}\frac{\mu_s}{n^k},\end{aligned}$$

επειδή, για $s>k$, έχουμε $1(s\leq m+1)=0\ \ \forall\, m=0,\dots,k-1$.

Επομένως παίρνοντας όρια έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\mu_k(X_n)=\sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{m=s-1}^{k-1}\binom{k}{m}S(s,m)\right)\lim_{n\to\infty}\binom{n}{s}\frac{\mu_s}{n^k} \ .$$

Προφανώς,

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{s}\frac{\mu_s}{n^k}=0\ για\ s<k,$$

Οπότε ο μοναδικός όρος στο παραπάνω όριο που δεν είναι μηδέν, είναι ο όρος για $s=k$ κι έτσι έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_\kappa(X_n) = \binom{k}{k-1} S(k,k-1) \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{\mu_k}{n^k} = kS(k,k-1)\frac{\mu_\kappa}{k!} = \mu_k .$$

Επειδή λοιπόν $\mu_k(X_n) \to \mu_k$, καθώς $n \to \infty$, $\forall k \geq 1$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες 2 , 3 από υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη τ.μ. X τέτοια ώστε $X_n \overset{W}{\to} X$ και $\mu_k(X) = \mu_k$ $\forall k$, δηλαδή τελικά η ακολουθία μ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων.

Η προηγούμενη απόδειξη μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε πάντα να κατασκευάζουμε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n τέτοια ώστε τα αναμενόμενα μέγιστά της να συγκλίνουν στους όρους της ακολουθίας δηλαδή, $\mu_k(X_n) \to \mu_k$. Ωστόσο χωρίς τις συνθήκες 2,3 του θεωρήματος 1.2, δεν είναι βέβαιο ότι θα ισχύει $\mu_k(X) = \mu_k$,

δηλαδή ότι οι όροι της ακολουθίας μ_k θα παριστάνουν τα αναμενόμενα μέγιστα της X.

Παράδειγμα :

Ορίζουμε την ακολουθία $\mu_k = k - \dfrac{1}{k+1}$. Τότε οι τιμές $m_k = \mu_{k+2} - \mu_{k+1}$

$$= k + 2 - \frac{1}{k+3} - \left[k + 1 - \frac{1}{k+2}\right] = 1 - \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+2}$$
$$= 1 + \frac{1}{(k+2)(k+3)},$$

αντιστοιχούν στις ροπές ενός πεπερασμένου μέτρου στο διάστημα [0,1].

Ειδικότερα μπορεί να δειχθεί ότι

$$m_k = \tfrac{7}{6}\mathrm{E}(Y^k),$$

όπου η τ.μ. Y έχει σ.κ. $F_y = \frac{1}{7}F_1 + \frac{6}{7}F_2$, με F_1 να είναι η σ.κ της εκφυλισμένης τ.μ. με τιμή 1 (μέτρο Dirac) και η F_2 η σ.κ της $Beta(2,2)$, δηλαδή της τ.μ. με πυκνότητα $f_2(y) = 6y(1-y),\ 0 < y < 1$.

Απόδειξη:

Υπολογισμός της $\mathrm{E}(Y^k)$:

$$E(Y^k) = \frac{6}{7}1 + \frac{1}{7}\int_0^1 y^k 6y(1-y) = \frac{6}{7} + \frac{6}{7}\int_0^1 y^k y(1-y) =$$

$$= \frac{6}{7} + \frac{6}{7}\int_0^1 y^{k+1} - y^{k+2} dy$$

$$= \frac{6}{7}\left(1 + \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right),$$

επομένως,

$$E(Y^k) = \frac{6}{7} m_k,$$

δηλαδή,

$$m_k = \tfrac{7}{6}\mathrm{E}(Y^k)\,.$$

Μετά από πράξεις και κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Νεύτωνα προκύπτει ότι για $k \geq 0\ και\ s \geq 1$,

$$\sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \binom{s}{j} \mu_{k+j}$$

$$= \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \binom{s}{j} \left(k + j - \frac{1}{k+j+1}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{j+1} \binom{s}{j} (k+j) - \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{k+j+1} (-1)^{j+1} \binom{s}{j}$$

$$= k \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{j+1} \binom{s}{j} + \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} j \binom{s}{j} + \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j} \binom{s}{j} \int_0^1 x^{k+j}\, dx$$

$$= 0 + \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \frac{s!\, j}{j!\,(s-j)!} + \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j} \binom{s}{j} \int_0^1 x^{k+j}\, dx$$

$$= s \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \frac{(s-1)!}{(j-1)!\,(s-j)!} + \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j} \binom{s}{j} \int_0^1 x^{k+j}\, dx$$

$$= s \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \binom{s-1}{j-1} + \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j} \binom{s}{j} \int_0^1 x^{k+j}\, dx$$

$$= s\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^j\binom{s-1}{j} + \sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{s}{j}\int_0^1 x^{k+j}\,dx$$

$$= s1(s=1) + \int_0^1 x^k \sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{s}{j}x^j dx$$

$$= s1(s=1) + \int_0^1 x^k(1-x)^s\,dx,$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω υπολογισμούς, καθώς και το γνωστό ολοκλήρωμα από την κατανομή Βήτα

$$\int_0^1 x^k(1-x)^s = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(k+s+2)} = B(k+1, s+1)$$

προκύπτει ότι
για $k \geq 1, s \geq 1$,

$$(-1)^{s+1}\Delta^s\mu_k = \sum_{j=0}^{s}(-1)^{j+1}\binom{s}{j}\mu_{k+j} = 1(s=1) + \frac{k!\,s!}{(k+s+1)!} > 0\,,$$

και

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\mu_j = \frac{k}{k+1} - 1(k=1) = o(k), \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ k \to \infty.$$

Επομένως, ικανοποιούνται οι υποθέσεις 1 και 3 του θεωρήματος 2, αλλά παρόλα αυτά η ακολουθία μ_k δεν είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων επειδή δεν ισχύει η υπόθεση 2. (Εδώ $\mu_k \neq o(k), \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ k \to \infty$)

Κεφάλαιο 2

Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες σε Ολοκληρωτική Μορφή

Πολλές φορές ο έλεγχος τόσο των συνθηκών του Kadane όσο και αυτών του θεωρήματος 1.2 είναι ιδιαίτερα δύσκολος. Για να δείξουμε λοιπόν ότι μία ακολουθία είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων θα αναζητήσουμε συνθήκες οι οποίες μπορούν να επαληθευτούν ευκολότερα, και βρίσκονται, όπως θα δούμε, σε ολοκληρωτική μορφή. Προκειμένου να διατυπώσουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου ένα από τα βασικά θεωρήματα που περιέχει τις συνθήκες αυτές, διατυπώνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1: Λέμε ότι μία συνάρτηση $g\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ γράφεται σε γενικευμένη ολοκληρωτική μορφή, εάν υπάρχει πεπερασμένο (θετικό) μέτρο μ στο $(0, \infty)$ και μετρήσιμες συναρτήσεις $s \; και \; h$, με $h \geq 0$, τέτοιες ώστε:

$$\int_{(0,\infty)} h(y)e^{-y}\,(1 - e^{-y})d\mu(y) < \infty,$$

$$g(x) = \int_{(0,\infty)} h(y)(s(y) - e^{-xy})d\mu(y) < \infty\,, x \geq 1 \qquad (\mathbf{2.1})$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{g}$ την κλάση όλων αυτών των συναρτήσεων g και με $\mathcal{g}^*$ το υποσύνολο που περιέχει όλες τις μη σταθερές συναρτήσεις $g \in \mathcal{g}$. Μία συνάρτηση g της $(\mathbf{2.1})$ συμβολίζεται και με $g = G_s(h;\, \mu)$. Στην ειδική περίπτωση όπου $h(y) = h_0(y), με$

$$h_0(y) = \frac{e^y}{1 - e^{-y}}, \qquad 0 < y < \infty,$$

λέμε ότι η g γράφεται σε κανονική μορφή, και συμβολίζουμε με $g = G_s(\mu) \equiv G_s(h_0; \mu)$.

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια βασικά λήμματα- προτάσεις που είναι χρήσιμα για την εξαγωγή του κύριου αποτελέσματος.

<u>Λήμμα 2.1:</u> Κάθε $g \in \mathcal{g}$ μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή.

<u>Απόδειξη:</u> $Για\ g = G_s(h;\mu) \in \mathcal{g}$, ορίζουμε μέτρο v:

$$v(A) = \int_A e^{-y}(1-e^{-y})h(y)d\mu(y), \qquad A\ Borel, A \subseteq (0,\infty).$$

Το μέτρο v είναι πεπερασμένο, επειδή

$$\int_{(0,\infty)} dv(y) = \int_{(0,\infty)} e^{-y}(1-e^{-y})h(y)d\mu(y) < \infty.$$

Οπότε,

$$g(x) = \int_{(0,\infty)} h_0(y)\,(s(y)-e^{-xy})(e^{-y}(1-e^{-y})h(y))d\mu(y)$$

$$= \int_{(0,\infty)} h_0(y)\,(s(y)-e^{-xy})dv(y)\ \forall x \geq 1,$$

άρα $g = G_s(v)$.

<u>Λήμμα 2.2:</u>

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $g_1, g_2 \in \mathcal{g}, όπου g_1 = G_{s_1}(\mu_1)\ και\ g_2 = G_{s_2}(\mu_2)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $g_1(k) - g_2(k) = c\ , k = 1,2,\dots$
2. $g_1(x) - g_2(x) = c\ \forall x \geq 1$
3. $\mu_1 = \mu_2$

<u>Απόδειξη:</u>

Οι συνεπαγωγές $\mathbf{3.} \Rightarrow \mathbf{2.} \Rightarrow \mathbf{1.}$ είναι τετριμμένες, επομένως θα δείξουμε την συνεπαγωγή $\mathbf{1.} \Rightarrow \mathbf{3.}$

Προφανώς από την **1.** συμπεραίνουμε ότι $g_2(k) - g_2(1) = g_1(k) - g_1(1)$, δηλαδή

$$\int_{(0,\infty)} h_0\,(y)(e^{-y}-e^{-ky})d\mu_1(y)=\int_{(0,\infty)} h_0\,(y)(e^{-y}-e^{-ky})d\mu_2(y), \quad (\mathbf{2.2})$$

για $k = 2,3 \ldots.$.

Θεωρούμε τώρα τα μέτρα v_i $(i = 1,2)$ που ορίζονται ως εξής:

$$v_i\big((0,u]\big) = \mu_\iota\big([-logu,\infty)\big), 0 < u < 1.$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής στην **(2.2)**, και συγκεκριμένα θέτοντας $y = -logu$ έχουμε:

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{u(1-u)}(u-u^k)dv_1(u) = \int_{(0,1)} \frac{1}{u(1-u)}(u-u^k)dv_2(u) \quad (\mathbf{2.3})$$

διότι

$$h_0(y) = h_0(-logu) = \frac{1}{u(1-u)}$$

και

$$e^{-y} = u, \;\; e^{-ky} = u^k \,.$$

Η σχέση $(\mathbf{2.3})$ γίνεται

$$\int_{(0,1)} \frac{1-u^{k-1}}{1-u}dv_1(u) = \int_{(0,1)} \frac{1-u^{k-1}}{1-u}dv_2(u)$$

επομένως,

$$\int_{(0,1)} 1+u+u^2+\cdots+\; u^{k-2}dv_1(u) = \int_{(0,1)} 1+u+u^2+\cdots+u^{k-2}dv_2(u),$$

$k = 2,3,\ldots$.

ή

$$\int_{(0,1)} 1+u+u^2+\cdots+\; u^{n}dv_1(u) = \int_{(0,1)} 1+u+u^2+\cdots+u^{n}dv_2(u),$$

$n = 0,1,\ldots$.

Με επαγωγή στο n, έπεται ότι τα πεπερασμένα μέτρα v_1 και v_2 έχουν όλες τις ροπές τους ίσες και επειδή έχουν φραγμένα στηρίγματα, τα μέτρα ταυτίζονται (Billingsley 1995, p.388, Theorem 30.1).

Επομένως, για κάθε $y \in (0,\infty)$, $\mu_1\big((0,y]\big) = v_1\big([e^{-y},1)\big) = v_2\big([e^{-y},1)\big) = \mu_2\big((0,y]\big)$, δηλαδή $\mu_1 = \mu_2$.

<u>Πόρισμα 2.1:</u> Το μέτρο μ που εμφανίζεται στην κανονική μορφή της $g \in \mathcal{g}$ είναι μοναδικό. Κατά συνέπεια, $g(x) = G_s(\mu)(x) = 0$, αν και μόνο αν $\mu = 0$ για κάθε μη μηδενική σταθερή συνάρτηση $g \notin \mathcal{g}$.

Στην ακόλουθη πρόταση δείχνουμε ότι κάθε συνάρτηση $g \in \mathcal{g}^*$είναι μια μεταφορά κάποιας συνάρτησης Bernstein. Υπενθυμίζουμε ότι μία μη αρνητική συνάρτηση β: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ καλείται συνάρτηση Bernstein εάν είναι συνεχής στο $[0,\infty)$, απείρως διαφορίσιμη στο (0,∞), και η ν-οστή παράγωγος $\beta^{(n)}$ ικανοποιεί την συνθήκη $(-1)^{n+1}\beta^{(n)}(x) \geq 0$ $(n = 1,2,\dots, x > 0)$ *(Schilling et al. 2012, p.21, Definition 3.1).*

<u>Πρόταση 2.1:</u> Θεωρούμε μία συνάρτηση $g = G_s(h;\mu) \epsilon\, \mathcal{g}^*$. Τότε η g είναι συνεχής στο $[1,\infty)$, απείρως διαφορίσιμη στο $(1,\infty)$ και η ν-οστή της παράγωγος δίνεται από την σχέση:

$$(-1)^{n+1} g^{(n)}(x) = \int_{(0,\infty)} y^n\, h(y) e^{-xy} d\mu(y) > 0, \quad n = 1,2,\dots, x > 1 \qquad (\mathbf{2.4})$$

<u>Απόδειξη:</u>

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της$(\mathbf{2.4})$ είναι αυστηρά θετικό ∀ $x > 1$, διότι γράφεται:

$$\int_{(0,\infty)} y^n\, h(y) e^{-xy} d\mu(y) = \int_{(0,\infty)} \frac{y^n h(y) e^{-xy}}{e^{-y}(1-e^{-y}) h_0(y)} dv(y)$$

$$= \int_{(0,\infty)} y^n\, h(y) e^{-xy} dv(y),$$

όπου $v \neq 0$ είναι το μέτρο στην κανονική μορφή της g.

Επιπλέον, η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x = 1$, επειδή για $y > 0$ *και* $\varepsilon \in (0,1)$,ισχύει $1 - e^{-\varepsilon y} \leq 1 - e^{-y}$. Έτσι από την $(\mathbf{2.1})$ και χρησιμοποιώντας κυριαρχημένη σύγκλιση έχουμε:

$$g(1+\varepsilon)-g(1)=\int_{(0,\infty)} h(y)e^{-y}(1-e^{-\varepsilon y})d\mu(y) \to 0, καθώς\ \varepsilon \to 0\ .$$

Είναι προφανές ότι

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(h(y)(s(y)-e^{-xy})\big)=(-1)^{n+1}y^n h(y)e^{-xy}\ ,$$

$$για\ n=1,2,\dots\ (x>1) \qquad \mathbf{(2.5)}$$

Η συνάρτηση του δεύτερου μέλους της $(\mathbf{2.5})$ είναι συνεχής ως προς $x>1$ για κάθε σταθερό $y>0$. Σταθεροποιούμε ένα $\delta>1$. Τότε θέτοντας $\theta=\delta-1>0$, έχουμε:

$$y^n h(y)e^{-xy} \le h(y)e^{-y}(1-e^{-y})\frac{y^n e^{-\theta y}}{1-e^{-y}}$$

$$\le\ h(y)e^{-y}(1-e^{-y})sup_{y>0}\frac{y^n e^{-\theta y}}{1-e^{-y}} \qquad ,x>\delta, y>0.$$

Η (θετική)συνάρτηση $t(y)=\dfrac{y^n e^{-\theta y}}{1-e^{-y}}$ είναι φραγμένη:

$$t(y)\le\begin{cases}\dfrac{y}{1-e^{-y}}\le\dfrac{1}{1-e^{-1}}, & 0<y\le 1\\ \dfrac{y^n e^{-\theta y}}{1-e^{-1}}\le\dfrac{\max\{e^{-\theta},(n/\theta)^n e^{-n}\}}{1-e^{-1}}, & y>1\end{cases}.$$

Έτσι, επιλέγοντας $C=\max\{1,(n/\theta)^n e^{-n}\}/(1-e^{-1})$, βλέπουμε ότι

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(h(y)(s(y)-e^{-xy})\big)\right| = y^n h(y)e^{-xy}\le Ch(y)e^{-y}(1-e^{-y}),$$

$$για\ \ y>0, x>\delta.$$

Επειδή η συνάρτηση $K(y)=Ch(y)e^{-y}(1-e^{-y})$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο μ, μπορούμε να διαφορίσουμε την $(\mathbf{2.1})$ εναλλάσσοντας την παράγωγο και το ολοκλήρωμα (Ferguson 1996 p.124),και επειδή το δ είναι αυθαίρετο $(x>\delta>1)$ προκύπτει η σχέση $(\mathbf{2.4})$.

Πράγματι παραγωγίζοντας την $(\mathbf{2.1})$ έχουμε:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{(0,\infty)} h(y)(s(y) - e^{-xy}) d\mu(y)$$

$$\Rightarrow g^{(n)}(x) = \int_{(0,\infty)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} h(y)(s(y) - e^{-xy}) d\mu(y)$$

$$\Rightarrow \; g^{(n)}(x) = \int_{(0,\infty)} (-1)^{n+1} y^n \, h(y) e^{-xy} d\mu(y) \; (\lambda ό\gamma\omega \; \tau\eta\varsigma \; (\mathbf{2.5}))$$

$$\Rightarrow (-1)^{n+1} g^{(n)}(x) = \int_{(0,\infty)} y^n \, h(y) e^{-xy} d\mu(y),$$

δηλαδή η σχέση $(\mathbf{2.4})$.

Από την Πρόταση 2.1 βλέπουμε ότι εάν $g \; \epsilon \mathcal{g}^*$ τότε η συνάρτηση $B(x) \coloneqq g(x+1) - g(1), \; x > 0$ είναι συνάρτηση Bernstein (ειδικής μορφής).

Είναι γνωστό ότι κάθε συνάρτηση Bernstein β μπορεί να εκφραστεί από την αναπαράσταση Levy-khintchine *(Levy-khintchine representation ή LKR):*

$$\beta(x) = a_0 + a_1 x + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-xy}) dv(y), \qquad x \geq 0 \qquad (\mathbf{2.6})$$

(Schilling et al. 2012 p.21, Theorem 3.2). Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε συνάρτηση που μπορεί εκφραστεί όπως η $(\mathbf{2.6})$ είναι συνάρτηση Bernstein.

Η τριάδα $(\alpha_0, \alpha_1, \nu)$ στην LKR είναι καθορίζεται μονοσήμαντα από την β, το μέτρο ν ικανοποιεί την σχέση $\int_{(0,\infty)} \min\{1, y\} \, dv(y) < \infty$, και οι σταθερές α_0, α_1 είναι μη-αρνητικές. Συγκρίνοντας την LKR της β με την κανονική μορφή της $g = G_s(\mu) \in g^*$ διαπιστώνουμε (με την βοήθεια της$(\mathbf{2.1})$ ότι:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-xy}) dv(y) &= g(x+1) - g(1) \\ &= \int_{(0,\infty)} e^{-y} h_0(y)(1 - e^{-xy}) d\mu(y), \;\; x \geq 0. \end{aligned}$$

$\Gamma\iota\alpha \; \alpha_0 = \alpha_1 = 0$ και $dv(y) = e^{-y} h_0(y) d\mu(y)$ προκύπτει η LKR της $B(x) = g(x+1) - g(1)$.

Αντίστροφα, εάν η B^* παριστάνει την κλάση των συναρτήσεων Bernstein με LKR (0,0,ν), τότε επειδή $g(x+1)-g(x) \in B^*$ συμπεραίνουμε ότι $g \in \mathcal{g}^*$. Επειδή λοιπόν $g \in \mathcal{g}^*$, εάν και μόνο αν $B \in \mathcal{B}^*$, καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση:

<u>Πρόταση 2.2:</u> Μια συνάρτηση $g: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ανήκει στην $\mathcal{g}^*$ εάν και μόνο εάν η $B(x) \coloneqq g(x+1) - g(1), x \geq 0$ είναι μία συνάρτηση Bernstein που έχει LKR της μορφής $(\mathbf{2.6})$ με $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, v \neq 0$.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το κύριο αποτέλεσμα:

<u>Θεώρημα 2.1:</u> Για μία ακολουθία $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Υπάρχει μη εκφυλισμένη τ.μ. X τέτοια ώστε $\mu_k(X) = \mu_k,\ \ k = 1,2,\ldots,$
2. Η ακολουθία $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ο περιορισμός στους φυσικούς αριθμούς μιας συνάρτησης $g \in \mathcal{g}^*$, δηλαδή $\mu_k = g(k), k = 1,2,\ldots$
3. Υπάρχει μία συνάρτηση Bernstein B με LKR $(0,0;v), v \neq 0$ τέτοια ώστε $\mu_k = \mu_1 + B(\kappa-1), k = 1,2,\ldots$.

Εάν ένα από τα 1,2,3 ικανοποιείται από την ακολουθία $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, τότε η συνάρτηση $g \in \mathcal{g}^*$ της 2. είναι μοναδική και γράφεται ως εξής:

$$g(x) = \int_{(0,\infty)} \frac{\lambda e^y}{1-e^{-y}} \left(\frac{\mu_1}{\lambda} e^{-y}(1-e^{-y}) + e^{-y} - e^{-xy}\right) dF_Y(y),$$

$$x \geq 1, \quad (\mathbf{2.7})$$

όπου $\lambda = \mu_2 - \mu_1$, $\mathrm{F_y}$ η συνάρτηση κατανομής της $\mathrm{τ.μ.\,Y} = -\log\mathrm{F(\,V)}$,

F η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X, και η τ.μ. V έχει πυκνότητα

$$f_V(x) = \frac{1}{\lambda} F(x)\big(1-F(x)\big), \ \ -\infty < x < \infty.$$

Η συνάρτηση Bernstein B στην συνθήκη 3 συνδέεται με την g από την σχέση

$$B(x) = g(x+1) - \mu_1,\ \ x \geq 0 \,.$$

<u>Απόδειξη:</u>

2. $\Longrightarrow$ 1. Υποθέτουμε ότι $\mu_k = g(k), k = 1,2,\ldots$ για κάποια $g = G_s(h;\mu) \epsilon\, \mathcal{g}^*$.

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες $1-3$ του θεωρήματος 2 (σελ.7) για την μ_k .

Από την $(\mathbf{2.5})$ έχουμε ότι $g'(x) > 0 \; για \; x > 1$. Έτσι από μονότονη σύγκλιση και συνέχεια της $g \; στο \; 1+$, έχουμε ότι:

$$\int_1^x g'(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^x g'(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} [g(x) - g(1+\varepsilon)] = g(x) - g(1),$$

$$x > 1 \; (\mathbf{2.8})$$

Με επαγωγή στο s και κάνοντας χρήση της σχέσης $(\mathbf{2.8})$ αποδεικνύεται ότι:

$$\sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} \binom{s}{j} g(k+j) = \int_k^{k+1} \int_{t_1}^{t_1+1} \dots \int_{t_{s-1}}^{t_{s-1}+1} g^{(s)}(t_s) dt_s \dots dt_2 dt_1 \;,$$

$$s > 1, k > 1 \;.$$

Επιπλέον, επειδή $\mu_{k+j} = g(k+j)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(-1)^{s+1} \Delta^s \mu_k &= \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \binom{s}{j} g(k+j) \\ &= \int_k^{k+1} \int_{t_1}^{t_1+1} \dots \int_{t_{s-1}}^{t_{s-1}+1} (-1)^{s+1} \, g^{(s)}(t_s) dt_s dt_2 dt_1.\end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση επαληθεύει τη συνθήκη 1 του θεωρήματος 1.2, αφού το ολοκλήρωμα είναι αυστηρά θετικό (σχέση $(\mathbf{2.4})$).

Η συνθήκη 2 του θεωρήματος 2 προκύπτει από κυριαρχημένη σύγκλιση διότι $\frac{1-e^{-ky}}{k} \leq 1 - e^{-y}$ και προφανώς $\frac{1-e^{-ky}}{k} \to 0, \; καθώς \; k \to \infty$.

Συνεπώς,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mu_k}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\mu_{k+1} - \mu_1}{k} = \lim_{k \to \infty} \int_{(0,\infty)} e^{-y} \, h(y) \left(\frac{1 - e^{-ky}}{k} \right) d\mu(y) = 0.$$

Θέτουμε $v_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \mu_j$, έτσι ώστε $v_1 = -\mu_1$.

Παρατηρούμε ότι

$$v_{s+1} - v_s = \sum_{j=1}^{s+1} (-1)^j \binom{k}{j} \mu_j - \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \binom{k}{j} \mu_j$$

$$= (-1)^{s+1} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} \binom{s}{j} \mu_{j+1} \quad = (-1)^{s+1} \Delta^s \mu_1 > 0$$

$$, \acute{o}\pi o \upsilon \; \Delta^s \mu_1 = \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} \binom{s}{j} \mu_{j+1} \, .$$

Ορίζοντας $y_s \coloneqq (-1)^{s+1} \Delta^s \mu_1 > 0, έχουμε$:

$$v_k = -\mu_1 + \sum_{s=1}^{k-1} (-1)^{s+1} \Delta^s \mu_1 = -\mu_1 + \sum_{s=1}^{k-1} y_{s} \, .$$

Εάν δείξουμε ότι $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$, τότε έπεται ότι:

$\lim_{k\to\infty} \frac{v_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{y_1 + \cdots y_{k-1}}{k} = 0,$

Δηλαδή, η ακολουθία μ_k ικανοποιεί την συνθήκη 3. του θεωρήματος 2.

Λόγω της σχέσης $(\mathbf{2.1})$ έχουμε ότι

$$y_k = (-1)^{k+1} \Delta^k \mu_1 = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} g(j+1)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \int_{(0,\infty)} h(y)(s(y) - e^{-(j+1)y}) d\mu(y)$$

$$= \int_{(0,\infty)} h(y) e^{-y} (1 - e^{-y})^k d\mu(y) \to 0, καθώς \;\; k \to \infty,$$

από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

$1. \Longrightarrow 2.$

Έστω F η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X. Ορίζουμε:

$\alpha = \inf\{x: F(x) > 0\}, \omega = \sup\{x: F(x) < 1\}.$

Επειδή η τ.μ X είναι μη- εκφυλισμένη (από υπόθεση) έπεται ότι

$-\infty \leq \alpha < \omega \leq +\infty$ και το ανοιχτό διάστημα (α, ω) έχει αυστηρά θετικό (ή άπειρο) μήκος.

Ορίζουμε την οικογένεια των συναρτήσεων κατανομής $\{F^t, t \geq 1\}$, και συμβολίζουμε με X_t μια τ.μ με συνάρτηση κατανομής F^t, έτσι ώστε $X_1 = X$.

Επειδή η X είναι ολοκληρώσιμη το ίδιο θα ισχύει για κάθε τ.μ X_t.

Πράγματι,

$F^t(x) \leq F(x) \; και \; 1 - F^t(x) \leq t\big(1 - F(x)\big) \; για \; κάθε \; x \in \mathbb{R} \; και \; t \geq 1.$

Οπότε,

$$EX_t^- = \int_{-\infty}^{0} F^t(x)dx \leq \int_{-\infty}^{0} F(x)dx < \infty$$

$$EX_t^+ = \int_{0}^{\infty} \big(1 - F^t(x)\big)dx \leq t\int_{0}^{\infty} \big(1 - F(x)\big)dx < \infty,$$

όπου $X^+ = \max\{X, 0\}$ και $X^- = \max\{-X, 0\}$ παριστάνουν το θετικό και το αρνητικό μέρος της τ.μ X, αντίστοιχα.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $g: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$g(t) \coloneqq EX_t = \int_{-\infty}^{\infty} [1(x > 0) - F^t(x)]dx, \qquad t \geq 1.$$

Εξ᾽ ορισμού, $g(k) = \mu_k \; για \; k = 1,2, \ldots$. Για $t \epsilon [1, \infty)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} g(t) - g(1) &= \int_{\alpha}^{\omega} [F(x) - F^t(x)]dx \\ &= \int_{\alpha}^{\omega} F(x)(1 - F(x)) \frac{F(x) - F^t(x)}{F(x)(1 - F(x))} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\omega} F(x)\big(1 - F(x)\big) \frac{e^{-\delta(x)} - e^{-t\delta(x)}}{e^{-\delta(x)}\big(1 - e^{-\delta(x)}\big)} dx \quad (\mathbf{2.9}) \end{aligned}$$

όπου $\delta(x) = -logF(x)$.

Να σημειωθεί ότι η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ είναι γνήσια θετική και αυστηρά μικρότερη της μονάδας, δηλαδή $0 < F(x) < 1 \; για \; κάθε \; x \epsilon (a, \omega)$, έτσι ώστε να ισχύει $\delta(x) > 0$. Θέτοντας $\lambda = \mu_2 - \mu_1 = g(2) - g(1) = \int_a^\omega F(x)\big(1 - F(x)\big)dx > 0$, διαπιστώνουμε ότι για την συνάρτηση

$f_V(x) \coloneqq F(x)(1 - F(x))/\lambda$, ισχύουν τα εξής:

- $f_V(x) \geq 0$
- $\int_a^\omega \frac{F(x)(1-F(x)}{\int_a^\omega F(x)(1-F(x)dx} dx = 1$.

Επομένως, η $f_V(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας με στήριγμα το διάστημα (α, ω). Θεωρούμε τώρα μία τυχαία μεταβλητή V με πυκνότητα f_V. Η σχέση $(\mathbf{2.9})$ γράφεται:

$$g(t) - g(1) = \lambda \mathrm{E}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\delta(V)}}{1 - \mathrm{e}^{-\delta(\mathrm{V})}}\left(\mathrm{e}^{-\delta(V)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}\delta(\mathrm{V})}\right)\right\}, \mathrm{t} \geq 1,$$

όπου $\delta(V) = -\log F(V)$ είναι μία θετική τ.μ, επειδή $\alpha < V < \omega$, με πιθανότητα 1.

Θέτοντας $Y \coloneqq \delta(V) > 0$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} g(t) - g(1) &= \lambda E\left\{\frac{e^Y}{1 - e^{-Y}}(e^{-Y} - e^{-tY})\right\} \\ &= \lambda \int_{(0,\infty)} h_0(y)(e^{-y} - e^{-ty}) dF_y(y), t \geq 1, \end{aligned}$$

όπου $h_0(y) = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}$ και F_Y είναι η σ.κ της τ.μ Y.

Ορίζοντας τώρα το μέτρο μ με

$$\mu(A) = P(Y \in A)$$

για κάθε σύνολο Borel $A \subseteq (0, \infty)$, η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή:

$$g(t) - g(1) = \int_{(0,\infty)} h_0(y)(e^{-y} - e^{-ty}) d\mu(y), t \geq 1.$$

Επιπλέον, επειδή $h_0(y) > 0$,

$$0 < \int_{(0,\infty)} h_0(y)e^{-y}(1-e^{-y})d\mu(y) = \int_{(0,\infty)} d\mu(y) = \mu(0,\infty) = \lambda < \infty.$$

Παρατηρώντας όμως ότι:

$$g(1) = \mu_1 = \frac{\mu_1}{\lambda}\int_{(0,\infty)} d\,\mu(y) = \int_{(0,\infty)} h_0(y)\left(\frac{\mu_1}{\lambda}e^{-y}(1-e^{-y})\right)d\mu(y),$$

έχουμε:

$$g(t) = g(1) + \big(g(t) - g(1)\big)$$

$$= \int_{(0,\infty)} h_0(y)\left(\frac{\mu_1}{\lambda}e^{-y}(1-e^{-y}) + e^{-y} - e^{-ty}\right)d\mu(y), \quad t \geq 1,$$

αποδεικνύοντας έτσι την $(\mathbf{2.7})$.

Η ισοδυναμία των 2. και 3. έπεται από την Πρόταση 2.2 και η μοναδικότητα των $g\ \kappa\alpha\iota\ \mu$ είναι προφανής από το Λήμμα 2.2.

Ο επόμενος ορισμός αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για να ελέγξουμε εάν μία δοθείσα συνάρτηση g, ανήκει στην g^*.

Ορισμός 2.2: Έστω$g: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ μία αυθαίρετη συνάρτηση. Λέμε ότι η g βρίσκεται σε ολοκληρωτική μορφή εάν υπάρχουν μετρήσιμες συναρτήσεις $h_1: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ και $s: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, με $h_1 \geq 0$ έτσι ώστε:

$$0 < \int_0^\infty h_1(y)\, e^{-y}(1-e^{-y})dy < \infty \quad (\mathbf{2.10})$$

και

$$g(x) = \int_0^\infty h_1(y)\,(s(y) - e^{-xy})dy, \quad x \geq 1 \quad (\mathbf{2.11})$$

Συμβολίζουμε ℓ την κλάση όλων αυτών των συναρτήσεων, και δεδομένου ότι η h_1 ικανοποιεί την συνθήκη $(\mathbf{2.10})$, η $(\mathbf{2.11})$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $g = I_s(h_1)$.

Λήμμα 2.3: Ισχύει ότι: $\ell \subset \mathscr{g}^*$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $g = I_s(h_1) \in \ell$ και ορίζουμε το θετικό μέτρο μ ως εξής:

$$\mu\big((0, y]\big) = \int_0^y h_1(x) e^{-x}(1 - e^{-x}) dx < \infty\,, \quad y > 0\,.$$

Εξ΄ ορισμού, το μέτρο μ είναι απόλυτα συνεχές και η παράγωγος (Radon-Nikodym) είναι:

$$\frac{d\mu(y)}{dy} = h_1(y) e^{-y}(1 - e^{-y}), \quad \text{σχεδόν για όλα τα } y > 0.$$

Το μέτρο μ είναι προφανώς πεπερασμένο, οπότε τώρα η $(\mathbf{2.11})$ γράφεται:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{(0,\infty)} h_0(y)(s(y) - e^{-xy})(h_1\,(y) e^{-y}(1 - e^{-y}))dy \\ &= \int_{(0,\infty)} h_0(y)(s(y) - e^{-xy}) d\mu(y), \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Επιπλέον από την $(\mathbf{2.10})$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{(0,\infty)} h_0(y)\, e^{-y}(1 - e^{-y}) d\mu(y) \\ &= \int_{(0,\infty)} d\mu(\,y) = \int_0^\infty h_1(y) e^{-y}(1 - e^{-y}) d\,y < \infty. \end{aligned}$$

Έτσι, $\mathscr{g} = G_s(\mu)\ \mu\varepsilon\ \mu \neq 0.$

Πόρισμα 2.2: Η συνάρτηση h_1 στην ολοκληρώσιμη μορφή της $(\mathbf{2.11})$ για οποιαδήποτε $\mathscr{g} = I_s(h_1) \in \ell$ είναι (σχεδόν παντού) μοναδική.

Απόδειξη: Εάν εκφράσουμε την συνάρτηση $g = I_s(h_1) \in \mathscr{g}$ στην κανονική της μορφή καθώς $g = G_s(\mu)$ (βλ. Λήμμα 2.1) τότε η συνάρτηση $\frac{h_1(y)}{h_0(y)}$ είναι (Radon-Nikodym) παραγωγίσιμη ως προς το μέτρο μ. Το αποτέλεσμα έπεται από το πόρισμα 2.1 και το γεγονός ότι η παράγωγος Radon-Nikodym είναι (σχεδόν παντού) μοναδική.

Το πόρισμα που ακολουθεί αποτελεί ικανή συνθήκη για να παριστάνει μία ακολουθία αναμενόμενα μέγιστα και είναι αρκετά χρήσιμο σε πρακτικές εφαρμογές:

Πόρισμα 2.3 Εάν μία συνάρτηση $g\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση ℓ (βλ. ορισμό 2.2) τότε η ακολουθία $\mu_k = g(k), k = 1,2, \ldots$ παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα από μία ολοκληρώσιμη και μη- εκφυλισμένη τ.μ.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι προφανής από το Θεώρημα 2.1 και το Λήμμα 2.3.

Εάν $g = G_s(h_1) \in \mathcal{g}^*$ και το μέτρο μ έχει παράγωγο Radon-Nikodym h_μ, η συνθήκη $(\mathbf{2.1})$ ισοδυναμεί με τις$(\mathbf{2.10}), (\mathbf{2.11})$.

Πράγματι, εάν διαλέξουμε $h_1 = h_0 h_\mu$, έχουμε:

$$g(x) = \int_{(0,\infty)} h_0\,(y)(s(y) - e^{-xy})d\mu(y) = \int_0^\infty h_\mu(y)h_0(y)(s(y) - e^{-xy})dy.$$

Προφανώς μια συνάρτηση $g = G_s(\mu) \in \ell$ εάν και μόνο αν το μέτρο μ στην κανονική μορφή του g είναι $\neq 0$ και απόλυτα συνεχές. Δεδομένης λοιπόν μίας αυθαίρετης ακολουθίας μ_k, αφού αποδείξουμε ότι αυτή είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων (π.χ χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.2 ή 2.1 ή το πόρισμα 2.3), θα θέλαμε να γνωρίζουμε εάν αυτή αντιστοιχεί σε απόλυτα συνεχή τ.μ. $X \in \mathcal{F}$, όπου το σύνολο $\mathcal{F}$ ορίζεται παρακάτω. Να σημειωθεί ότι η συνθήκη $g = G_s(\mu) \in \ell$ δεν αποτελεί ούτε ικανή ούτε αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό.

Ορισμός 2.3: Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ το υποσύνολο των απόλυτα συνεχών τ.μ X με στήριγμα το διάστημα $(\alpha, \omega) = (\alpha_X, \omega_X), -\infty \leq a < \omega \leq +\infty$, διαφορίσιμη συνάρτηση κατανομής F στο (α, ω), και πυκνότητα την $f(x) = F'(x)$, η οποία είναι αυστηρά θετική και συνεχής στο διάστημα (α, ω).

Θεώρημα 2.2: Για μία δεδομένη ακολουθία $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η ακολουθία μ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων μίας ολοκληρώσιμης τ.μ. $X \in \mathcal{F}$
2. Υπάρχει επέκταση $g: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ της ακολουθίας μ_k, (δηλαδή $\mu_k = g(k), k = 1,2, \ldots.$) που μπορεί να εκφραστεί στη μορφή$(\mathbf{2.11})$ με την h_1 να ικανοποιεί τη σχέση $(\mathbf{2.10})$ και να είναι αυστηρά θετική και συνεχής στο $(0, \infty)$.

   Επιπλέον εάν ισχύει μία από τις παραπάνω συνθήκες τότε η συνάρτηση g είναι μοναδική και η h_1 της σχέσης $(\mathbf{2.10})$ ορίζεται μονοσήμαντα ως εξής:

$$h_1(y) = \frac{e^{-2y}(1 - e^{-y})}{f\left(F^{-1}(e^{-y})\right)}, \quad 0 < y < \infty, \quad (\mathbf{2.12})$$

όπου f και F^{-1} είναι αντίστοιχα η πυκνότητα και η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής της μοναδικής τ.μ. $X \in \mathcal{F}$ με αναμενόμενα μέγιστα $\mu_{k.}$ Επίσης, κάθε άλλη h_2 είναι ίση με την h_1 σχεδόν παντού στο (0,∞).

<u>Απόδειξη:</u>

Υποθέτουμε ότι ισχύει η 1, συμβολίζουμε με F την συνάρτηση κατανομής της X, και θέτουμε $(\alpha, \omega) = \{0 < F(x) < 1\}$. Επειδή $X \in \mathcal{F},\ \lambda \coloneqq \mu_2 - \mu_1 > 0$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η τ.μ V έχει πυκνότητα

$$f_v(x) = \frac{1}{\lambda} F(x)\big(1 - F(x)\big), \qquad a < x < \omega$$

η επιπλέον υπόθεση $X \in \mathcal{F}$ δείχνει ότι η τ.μ. $Y = -logF(V)$ έχει αυστηρά θετική πυκνότητα

$$f_y(y) = \frac{e^{-2y}(1 - e^{-y})}{\lambda f(F^{-1}(e^{-y}))}, \quad 0 < y < \infty,$$

όπου f η παράγωγος και F^{-1} η αντίστροφη του περιορισμού της F στο (α, ω).

Αντικαθιστώντας τώρα στην $(\mathbf{2.7})$ την σχέση $dF_Y(y) = f_Y(y)dy$ έχουμε:

$$g(x) = \int_{(0,\infty)} \frac{\lambda e^y}{1 - e^{-y}} \Big(\frac{\mu_1}{\lambda} e^{-y}(1 - e^{-y}) + e^{-y} - e^{-xy}\Big) f_Y(y)dy \ , x \geq 1,$$

δηλαδή

$$g(x) = \int_0^\infty h_1(y)\,(s(y) - e^{-xy})dy, \quad x \geq 1,$$

όπου $h_1(y)$ είναι όπως στην $(\mathbf{2.10})$ και $s(y) = \frac{\mu_1}{\lambda} e^{-y}(1 - e^{-y}) + e^{-y}$,

δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη 2.

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη 2 ισχύει. Από την$(\mathbf{2.11})$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_k - \mu_1 &= g(k) - g(1) \\ &= \int_0^{\infty} h_1(y)\,(s(y) - e^{-ky})dy - \int_0^{\infty} h_1(y)\,(s(y) - e^{-y})dy \\ &= \int_0^{\infty} h_1\,(y)(e^{-y} - e^{-ky})dy, \quad k = 1,2,\ldots \quad (\mathbf{2.13}) \end{aligned}$$

Επίσης λόγω του Πορίσματος 2.3 έχουμε ότι η ακολουθία $\mu_k = g(k), k = 1,2,\ldots$ είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων μιας μοναδικής μη-εκφυλισμένης τ.μ. X. Μένει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση κατανομής F της τ.μ. X ανήκει στο σύνολο $\mathcal{F}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$G(u) := \begin{cases} c_1 - \int_u^{1/2} \frac{1}{t} h_1(-logt)dt, & 0 < u \le \frac{1}{2} \\ \\ c_1 - \int_{1/2}^{u} \frac{1}{t} h_1(-logt)dt, & \frac{1}{2} < u < 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{2.14})$$

όπου η σταθερά c_1 θα προσδιοριστεί αργότερα. Επειδή η συνάρτηση h_1 είναι αυστηρά θετική και συνεχής, η συνάρτηση G είναι γνήσια αύξουσα και διαφορίσιμη στο διάστημα $(0,1)$. Επιπλέον η G είναι ολοκληρώσιμη, επειδή από την σχέση $(\mathbf{2.10})$ και το θεώρημα του Tonelli έχουμε:

$$\int_0^1 |G(u) - c_1|\,du$$

$$= \int_0^{1/2}\int_u^{1/2} \frac{1}{t} h_1(-logt)dtdu + \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{u} \frac{1}{t} h_1(-logt)dtdu$$

$$= \int_0^{1/2} h_1\,(-logt)dt + \int_{1/2}^{1} \frac{1-t}{t} h_1(-logt)dt$$

$$= \int_{log2}^{\infty} e^{-y} h_1(y)dy + \int_0^{log2} (1 - e^{-y}) h_1(y)dy < \infty.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι U είναι μία τ.μ. που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$, και ορίζουμε την τ.μ. $\Upsilon \coloneqq G(U)$ με συνάρτηση κατανομής F_Y, δηλαδή $G = F_Y^{-1}$. Προφανώς ισχύει ότι $\mathbb{E}|\Upsilon| = \mathbb{E}|G(U)| < \infty$. Θα αποδείξουμε ότι $Y \in \mathcal{F}$. Πράγματι, θέτοντας $\alpha_Y := \lim\limits_{u\to 0} G(u)$ και $\omega_Y \coloneqq \lim\limits_{u\to 1} G(u)$, έχουμε ότι η $G: (0,1) \to (a_Y, \omega_Y)$ είναι γνήσια θετική και διαφορίσιμη με συνεχή, γνήσια θετική παράγωγο $G'(u) = \frac{h_1(-logu)}{u}$.
Συνεπάγεται λοιπόν ότι η αντίστροφη $G^{-1} = F_Y: (a_Y, \omega_Y) \to (0,1)$, έχει επίσης συνεχή, γνήσια θετική παράγωγο $f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{G'(G^{-1}(y))}$.

Παρατηρώντας ότι $F_Y(y) = G^{-1}(y) \to 0$, καθώς το $y \to a_y$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι:

$$\int_{\alpha_Y}^{y} f_Y(x)dx = \lim_{a\searrow a_Y} \int_{\alpha}^{y} F_Y'(x)dx = \lim_{a\searrow a_Y} [F_Y(y) - F_Y(a)] = F_Y(y),$$

$$\text{όπου } \ a_Y < y < \omega_Y, \qquad (\mathbf{2.15})$$

Παίρνοντας τώρα, καθώς $y \to \omega_Y$, όρια στην $(\mathbf{2.15})$ και χρησιμοποιώντας πάλι το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το γεγονός ότι $G^{-1}(y) \to 1$, καθώς $y \nearrow \omega_Y$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{a_Y}^{\omega_Y} f_Y(x)dx = \lim_{y\nearrow\omega_Y} \int_{\alpha_Y}^{y} f_y(x)dx = \lim_{y\nearrow\omega_Y} F_Y(y) = \lim_{y\nearrow\omega_Y} G^{-1}(y) = 1,$$

επομένως $\Upsilon \epsilon \mathcal{F}$.

Σύμφωνα με την συνεπαγωγή $1. \Rightarrow 2.$ η ακολουθία $\widetilde{\mu_k} \coloneqq \mu_k(Y)$ επιδέχεται μία επέκταση $g_2: [1, \infty)$ της μορφής

$$g_2(x) = \int_0^\infty h_2(y)(s(y) - e^{-xy})dy, \quad x \geq 1,$$

όπου η h_2 ικανοποιεί την $(\mathbf{2.10})$

(με h_2στη θέση της h_1), είναι συνεχής και γνήσια θετική στο $(0, \infty)$.

Επομένως, έχουμε:

$$\widetilde{\mu_k} - \widetilde{\mu_1} = g_2(k) - g_2(1) = \int_0^\infty h_2(y)(e^{-y} - e^{-ky})dy \ k = 1,2, \ldots. \quad (\mathbf{2.16}).$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ίδιες ποσότητες αξιοποιώντας ότι $G = F_Y^{-1}$, ως εξής:

$$\widetilde{\mu_k} - \widetilde{\mu_1} = \int_0^1 ku^{k-1}\, G(u)du - \int_0^1 G(u)du$$

$$= -\int_0^{1/2} ku^{k-1} \int_u^{1/2} \frac{1}{t} h_1(-logt)dtdu$$
$$+ \int_0^{1/2} \int_u^{1/2} \frac{1}{t} h_1(-logt)dtdu$$
$$+ \int_{1/2}^1 ku^{k-1} \int_{1/2}^u \frac{1}{t} h_1(-logt)dtdu - \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^u \frac{1}{t} h_1\,(-logt)dtdu.$$

Επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι μη-αρνητικά μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης (Θεώρημα Fubini). Έτσι,

$$\widetilde{\mu_k} - \widetilde{\mu_1} = -\int_0^{1/2} t^{k-1}\, h_1(-logt)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} h_1\,(-logt)dt$$
$$+ \int_{1/2}^1 \frac{1-t^k}{t} h_1(-logt)dt - \int_{1/2}^1 \frac{1-t}{t} h_1(-logt)dt$$
$$= \int_{log2}^{\infty} (-e^{-ky} + e^{-y}) h_1(y)dy$$
$$+ \int_0^{log2} ((1-e^{-ky}) - (1-e^{-y})) h_1(y)dy$$
$$= \int_0^{\infty} (e^{-y} - e^{-ky}) h_1(y)dy, \qquad k = 1,2,\ldots. \qquad (\mathbf{2.17})$$

Από τις σχέσεις $(\mathbf{2.13})$, $(\mathbf{2.16})$, $(\mathbf{2.17})$ συμπεραίνουμε ότι:

$$g(k) - g(1) = \mu_k - \mu_1 = \widetilde{\mu_k} - \widetilde{\mu_1} = g_2(k) - g_2(1), \qquad k = 1,2,\ldots .$$

Επομένως, αφού η g , $g_2 \in \ell \subseteq \mathcal{g}^*$, έπεται από το Λήμμα 2.2 ότι

$$g(x) - g_2(x) = \mu_1 - \widetilde{\mu_1} = constant, \;\; x \geq 1.$$

Επιλέγοντας την σταθερά c_1 στην σχέση $(\mathbf{2.14})$ έτσι ώστε $\widetilde{\mu_1} = \mu_1$, έχουμε ότι $\widetilde{\mu_k} = \mu_k$, για κάθε k, το οποίο σημαίνει ότι $g = g_2$ $και$ $F = F_Y$, επομένως $X \epsilon \mathcal{F}$.

Η μοναδικότητα των συναρτήσεων g και h_1, έπεται από το θεώρημα 2.1 και το Πόρισμα 2.2, αντίστοιχα.

<u>Παρατήρηση 2.1:</u> Υποθέτουμε ότι $g \in \mathcal{g}^*$. Η επιπλέον υπόθεση $g\epsilon\ell$ δεν είναι αναγκαία ούτε επαρκεί για να εξασφαλίσει ότι η ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$αντιστοιχεί σε τυχαία μεταβλητή $X\epsilon\mathcal{F}$, όπως φαίνεται από τα παρακάτω δύο παραδείγματα:

1. Θεωρούμε την τ.μ. X με πυκνότητα

$f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}(-2 < x < -1) + \frac{1}{2}\mathbf{1}(1 < x < 2)$ έτσι ώστε $\mu_k = \mu_K(X) = 2\left(\frac{k}{k+1} - 2^{-k}\right)$. Οπότε, έχουμε $\mu_1 = 0,\ \lambda = \mu_2 - \mu_1 = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{5}{6},$ και

με την βοήθεια της σχέσης $(\mathbf{2.7})$ διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής F_Y είναι η μίξη δύο άλλων σ.κ, της(εκφυλισμένης) $F_1 = log2$ και της F_2, η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας $f_2(y) = 6e^{-2y}(1 - e^{-y}), y > 0$. Επειδή $\mu(\{log2\}) = \lambda\mathbb{P}(Y = log2) = \frac{1}{2}$, η συνάρτηση $g(x) = 2\frac{x}{x+1} - 2^{-x} = G_s(\mu)(x)\epsilon\mathcal{g}$ δεν έχει απόλυτα συνεχές κανονικό μέτρο μ. Οπότε $g \notin \ell$.

2. Για $h_1(y) = \mathbf{1}(0 < y < 1)\kappa\alpha\iota\ s(y) = 1$, η σχέση $(\mathbf{2.11})$ γίνεται:

$$
\begin{aligned}
I_s(h_1)(x) &= g(x) \\
&= \int_0^{\infty} \mathbf{1}(0 < y < 1)(1 - e^{-xy})dy \\
&= \int_0^{1} (1 - e^{-xy})dy \\
&= y + \frac{e^{-xy}}{x}\Big|_0^1 \\
&= 1 + \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x} \qquad , x \geq 1.
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω ακολουθία $g(x)$ έχει συνάρτηση κατανομής F, με αντίστροφη $F^{-1}(u) = (1 + logu)\mathbf{1}(e^{-1} < u < 1)$. Ωστόσο δεν υπάρχει συνάρτηση πυκνότητας που να αντιστοιχεί στην παραπάνω συνάρτηση κατανομής F (λόγω του ότι υπάρχει θετική πιθανότητα ίση με e^{-1} για να πάρει η τ.μ την τιμή 0).

Εφαρμογές για συγκεκριμένες ακολουθίες

1. Θεωρούμε την ακολουθία $\mu_k = k^\theta, 0 < \theta < 1$ και ορίζουμε $g(x) = x^\theta, x \geq 1$. Παρατηρούμε ότι:

$$x^\theta = \int_0^x \theta t^{\theta-1} dt = \int_0^x \frac{\theta}{t^{1-\theta}} dt. \qquad (\mathbf{2.18})$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας ότι το ολοκλήρωμα

$\int_0^\infty \frac{t^{1-\theta}}{\Gamma(1-\theta)} y^{-\theta} e^{-ty} dy$ ισούται με μονάδα (αφού είναι η πυκνότητα της κατανομής $Gamma(1-\theta, t)$) η $(\mathbf{2.18})$ γράφεται:

$$\frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} \int_0^x \int_0^\infty y^{-\theta} e^{-ty}\, dy dt = \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} \int_0^\infty y^{-\theta} \int_0^x e^{-ty}\, dt dy.$$

Η αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης οφείλεται στο θεώρημα Tonelli. Οπότε έχουμε:

$$x^\theta = \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} \int_0^\infty y^{-\theta} \frac{e^{-ty}}{-y}\bigg|_0^x dy = \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} \int_0^\infty y^{-\theta} \left(\frac{e^{-xy}}{-y} + \frac{1}{y}\right) dy$$
$$= \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} \int_0^\infty \frac{-e^{-xy}}{y y^\theta} + \frac{1}{y y^\theta} dy$$

δηλαδή τελικά, $$x^\theta = \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} \int_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{y^{1+\theta}} dy \ , x \geq 0,$$
$$0 < \theta < 1 \ \ (\mathbf{2.19})$$

που είναι μία εξίσωση της μορφής $(\mathbf{2.11})$ με $h_1(y) = \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} y^{-1-\theta}$

και $s(y) = 1$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η σχέση$(\mathbf{2.7})$ μας οδηγεί στο να χρησιμοποιήσουμε μία διαφορετική συνάρτηση s, η οποία είναι η

$$\tilde{s}(y) = e^{-y} + \frac{e^{-y} - e^{-2y}}{2^\theta - 1},$$

δηλαδή η συνάρτηση s της $(\mathbf{2.11})$ δεν είναι μοναδική.

Η σχέση $(\mathbf{2.10})$ ικανοποιείται αφού προφανώς

$0 < \int_0^\infty \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} y^{-1-\theta}\, e^{-y}(1-e^{-y})dy < \infty.$

Έπεται λοιπόν από το Πόρισμα 3, ότι η ακολουθία $\mu_k = k^\theta$, όπου

$0 < \theta < 1$, παριστάνει ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων.

Από το θεώρημα 2.2 διαπιστώνουμε ότι η δεδομένη ακολουθία $\mu_k = k^\theta$ αντιστοιχεί στην τ.μ. $X \epsilon\, \mathcal{F}$ με αντίστροφη συνάρτηση κατανομής G, η οποία δίνεται από την σχέση$(\mathbf{2.14})$, δηλαδή:

$$F^{-1}(u) = G(u) = \int \frac{1}{u} h_1(-logu)du$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(1-\theta)} \int \frac{(-logu)^{-1-\theta}}{u} du = \frac{(-logu)^{-\theta}}{\Gamma(1-\theta)} + C.$$

Επειδή $\mu_1 = \int_0^1 F^{-1}(u)du = 1$, βρίσκουμε ότι η σταθερά $C = 0$, και η συνάρτηση κατανομής της τ.μ X ικανοποιεί την σχέση $F(x) = \exp\left(-\lambda x^{-1/\theta}\right), x > 0, όπου\ \lambda = \Gamma(1-\theta)^{-1/\theta} > 0$, επομένως η τ.μ. $1/X$ ακολουθεί την κατανομή *Weibull.*

Προφανώς λόγω του Θεωρήματος 2.2 και της σχέσης $(\mathbf{2.19})$ προκύπτει ότι η ακολουθία $\mu_k = \{(k+c)^\theta\}_{k=1}^\infty$ είναι μία ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων (EMS) για κάθε $c \in [-1, \infty)$ και $\theta \in (0,1)$, και οι αντίστοιχες συναρτήσεις της σχέσης $(\mathbf{2.11})$ μπορούν να υπολογιστούν όπως προηγουμένως και να βρεθούν ίσες με:

$$h_1(y) = \frac{\theta e^{-cy}}{\Gamma(1-\theta) y^{1+\theta}}\ και \qquad s(y) = e^{cy}.$$

2. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $\mu_k = logk$ και ορίζουμε αντίστοιχα την λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = logx, x \geq 1$. Τώρα προκειμένου να σχηματήσουμε την σχέση της μορφής $(\mathbf{2.11})$ εργαζόμαστε ως εξής:

   Πολλαπλασιάζουμε με το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty te^{-ty}dt = 1$, το οποίο αποτελεί την πυκνότητα της exp(t), την σχέση $logx = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Οπότε προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
logx &= \int_1^x \int_0^\infty e^{-ty}\, dydt \\
&= \int_0^\infty \int_1^x e^{-ty} dtdy \quad (\Theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ Tonelli) \\
&= \int_0^\infty \left.\frac{e^{-ty}}{-y}\right|_1^x dy \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} dy, \qquad (\mathbf{2.20})
\end{aligned}
$$

δηλαδή, $h_1(y) = \frac{1}{y}$ και $s(y) = e^{-y}$. Επιπλέον, η ισχύς της σχέσης $(\mathbf{2.10})$ είναι προφανής αφού:

$$0 < \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-y}(1 - e^{-y}) dy < \infty.$$

Συνεπώς λόγω του Πορίσματος 3, έπεται ότι και η ακολουθία $\mu_k = logk$ είναι κι αυτή μία ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων. Η σχέση $(\mathbf{2.14})$ δίνει ότι για την αντίστροφη συνάρτηση F^{-1}, ισχύει:

$$F^{-1}(u) = -\,log(-logu) + C, 0 < u < 1.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = -logu$, προκύπτει:

$$\mu_1 = \int_0^1 F^{-1}(u) du = C - \int_0^\infty e^{-y} logydy = C + \gamma, \quad (\mathbf{2.21})$$

όπου γ είναι μία σταθερά της θεωρίας αριθμών, γνωστή ως σταθερά του Euler. Ειδικότερα η σταθερά αυτή ορίζεται ως εξής (βλ. Lagarias 2013, σελ. 528):

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - logn \right)$$

και η τιμή της προσεγγιστικά είναι $\gamma \cong 0{,}57721$. Η σταθερά αυτή σχετίζεται και με την συνάρτηση γάμμα μέσω της σχέσης

$$\Gamma'(1) = -\gamma$$

(Βλ. L.Euler Novi Coment. Acad. Sci. Petrop. 13 (1769), 3–66), η οποία είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$-\gamma = \int_0^\infty e^{-x} \, logxdx \qquad (\mathbf{2.22})$$

(βλ. Lagarias 2013, σελ. 535) .

Με αντικατάσταση της $(\mathbf{2.22})$ προκύπτει η $(\mathbf{2.21})$.

Επειδή η $\mu_1 = log1 = 0$, έπεται ότι $C = -\gamma$, και η συνάρτηση κατανομής $F(x) = \exp\left(-e^{-(x+\gamma)}\right)$ δηλαδή η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή ακραίων τιμών (Extreme Value ή Gumbel distribution). Από το θεώρημα 2.2 και την σχέση $(\mathbf{2.20})$ προκύπτει ότι η ακολουθία $\mu_k = \{\log(k+c)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων για κάθε τιμή $c \in (-1, \infty)$. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις της σχέσης $(\mathbf{2.11})$ σε αυτή την περίπτωση είναι $h_1(y) = \frac{e^{-cy}}{y}$ και $s(y) = e^{(c-1)y}$.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση που ορίστηκε από τον Euler ως εξής:

$$H(x) \coloneqq \int_0^1 \frac{1-u^x}{1-u} dx, \qquad x > -1 \quad (\mathbf{2.23})$$

(βλ. Lagarias 2013, p.532) και υπολογίζει τους αρμονικούς αριθμούς $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, με τη χρήση ολοκληρώματος. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$H(0) = 0$$

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

ενώ αν θεωρήσουμε τη συνεχή μεταβλητή x, προκύπτει ο αναδρομικός τύπος:

$$H(x) = H(x-1) + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Εφαρμόζοντας τώρα την αλλαγή μεταβλητής $u = e^{-y}$η σχέση $(\mathbf{2.23})$γίνεται:

$$H(x) \coloneqq \int_0^1 \frac{1-u^x}{1-u} du = \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} (1-e^{-xy}) \, dy, \quad (\mathbf{2.24})$$

δηλαδή η $H(x)$ είναι της μορφής $(\mathbf{2.11})$ με $h_1(y) = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}$ και $s(y) = 1$.

Συνεπώς λόγω του θεωρήματος 2.2 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\mu_k = H(k)$, $k = 1,2, \ldots$ παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα τυχαίας μεταβλητής $X \in \mathcal{F}$.

<u>Παρατήρηση 2.2:</u> Γενικότερα, κάθε συνάρτηση της μορφής $g(x) = H(x+c)$ με $c \in (-2, \infty)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $(\mathbf{2.10})$, $(\mathbf{2.11})$ με $h_1(y) = \frac{e^{-(c+1)y}}{1-e^{-y}}$ και $s(y) = e^{cy}$, επομένως κάθε ακολουθία $\mu_k = H(k+c)$ είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων. Η ειδική περίπτωση όπου $c = 0$, αντιστοιχεί στη συνάρτηση $H(x)$ της σχέσης $(\mathbf{2.24})$.

<u>Παρατήρηση 2.3:</u>Η συνάρτηση $\psi(x) = (d/dx)log\Gamma(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ έχει αποδειχτεί ότι σχετίζεται άμεσα με την συνάρτηση $H(x)$ μέσω της σχέσης $\psi(x) + \gamma = H(x-1)$(βλ. Lagarias 2013, p.557):

Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\psi(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών:

$$\Delta\psi(x+1) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

δηλαδή,
$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}, \qquad x > 0, \qquad (\mathbf{2.25})$$

η οποία προκύπτει από την γνωστή σχέση για την συνάρτηση Γάμμα,

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

Έχει ακόμη αποδειχθεί (Gauss 1813) ότι η $\psi(x)$ γράφεται στην ολοκληρωτική μορφή

$$\psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt.$$

Η εξίσωση διαφορών $(\mathbf{2.25})$ δίνει:

$$\psi(x) = \psi(x+n) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{x+j}, \qquad (\mathbf{2.26})$$

Παίρνοντας τώρα όρια στην $(\mathbf{2.26})$ για $n \to \infty$ έχουμε:

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty}\left(logn - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{x+j}\right),$$

απ΄ όπου προκύπτει και η γνωστή σχέση $\Gamma'(1) = -\gamma$. Η σταθερά γ του Euler δίνει τις τιμές της συνάρτησης $\psi(x)$ σε όλους τους θετικούς ακεραίους καθώς και στα μισά τους. Ο Euler (1765) υπολόγισε τις τιμές$\Gamma(1), \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \Gamma'(1), \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$ της συνάρτησης Γάμμα (βλ.L. Euler, *De curva hypegeometrica hac aequatione expressa y* = 1.2.3*. . . . .*.*x*, Novi Coment.Acad. Sci. Petrop. 13 (1769), 3–66). Όμως αυτές οι τιμές καθορίζουν τις τιμές $\psi\left(\frac{1}{2}\right), \psi(1)$, ενώ με τη βοήθεια της εξίσωσης διαφορών $(\mathbf{2.25})$ προκύπτουν οι τιμές της ψ στα μισά όλων των ακεραίων. Πιο αναλυτικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

<u>Θεώρημα 2.3</u> (Euler 1765): Η συνάρτηση $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ ικανοποιεί, για κάθε ακέραιο, $x \geq 1$ την σχέση:

$$\psi(x) = -\gamma + H(x-1), \qquad (\mathbf{2.27})$$

όπου $H(0) = 0$.

Επίσης , στα μισά των ακεραίων, ισχύει η σχέση:

$$\psi\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2log2 + 2H(2x-1) - H(x-1), \quad x \geq 0 \qquad (\mathbf{2.28})$$

όπου $H(-1) = 0$.

<u>Απόδειξη:</u> Η σχέση $(\mathbf{2.27})$έπεται από τη σχέση $\psi(1) = -\gamma$, με τη βοήθεια της $(\mathbf{2.25})$, δηλαδή:

$$\psi(2) = \psi(1) + \frac{1}{1} \Rightarrow \psi(2) = -\gamma + H(1) \Rightarrow \psi(2) = -\gamma + H(2-1)$$
$$\psi(3) = \psi(2) + \frac{1}{2} \Rightarrow \psi(3) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \psi(3) = -\gamma + H(2)$$

‘Αρα επαγωγικά:

$$\psi(x) = \psi(x-1) + \frac{1}{x} \Rightarrow \psi(x) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x-1}$$
$$\Rightarrow \psi(x) = -\gamma + H(x-1), \quad x \geq 1.$$

Η σχέση $(\mathbf{2.28})$ προκύπτει πάλι από την εξίσωση διαφορών $(\mathbf{2.25})$ η οποία τώρα εφαρμόζεται στα μισά των ακεραίων, δηλαδή:

Για $x = \frac{1}{2}$, έχουμε: $\quad \psi\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) + 2$

Για $x = 1 + \frac{1}{2}$, έχουμε: $\quad \psi\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \psi\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \psi\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

Άρα επαγωγικά: $\psi\left(\frac{1}{2}+x\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2x-1}\right),\ x\geq 0.\quad (\mathbf{2.29})$

Η ζητούμενη σχέση $(\mathbf{2.28})$ έπεται από την $(\mathbf{2.29})$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma+log2,\qquad (\mathbf{2.30})$$

η οποία προκύπτει λογαριθμίζοντας και στη συνέχεια παραγωγίζοντας την σχέση:

$$\Gamma(2x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\qquad (\mathbf{2.31}).$$

Θέτοντας $x=\frac{1}{2}$ στην $(\mathbf{2.31})$ και λύνοντας ως προς $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$, οδηγούμαστε στην ταυτότητα $(\mathbf{2.30})$.

Τελικά συνδυάζοντας τις σχέσεις $(\mathbf{2.29})$, $(\mathbf{2.30})$ έχουμε:

$$\psi\left(\frac{1}{2}+x\right)=-\gamma+log2+2\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2x-1}\right)$$
$$\Rightarrow\ \psi\left(x+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2log2+2H(2x-1)-H(x-1),\quad x\geq 0.$$

Στο παράδειγμα 3 έγινε σαφές ότι η ακολουθία $\mu_k=\{H(k+c)\}_{k=1}^{\infty}$, $c>-2$ είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων, ενώ όπως αποδείχθηκε προηγουμένως, η συνάρτηση $H(x)$, συνδέεται με την $\psi(x)$ μέσω της σχέσης $\psi(x)+\gamma=H(x-1)$. Εύκολα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι και η ακολουθία $\{\psi(k+c)\}_{k=1}^{\infty}$ παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα ,όταν $c>-1$.

4. Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x)=1+\frac{1}{2^\theta}+\cdots+\frac{1}{x^\theta},\theta>0.$
Αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση:

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty\frac{y^{\theta-1}e^{-y}}{1-e^{-y}}(1-e^{-xy})dy,\quad \theta>0,\ \ x=1,2,\ldots\ ,$$

η οποία είναι της μορφής $(\mathbf{2.11})$,εάν θέσουμε

$$h_1(y)=\frac{\frac{1}{\Gamma(\theta)}y^{\theta-1}e^{-y}}{1-e^{-y}}\ \kappa\alpha\iota\ s(y)=1.$$

Συνεπώς η ακολουθία $\mu_k=1+\frac{1}{2^\theta}+\cdots+\frac{1}{k^\theta},\ \theta>0,k=1,2,\ldots$ είναι επίσης μία ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων.

<u>Παρατήρηση 2.4</u>: Μπορούμε να επαληθεύσουμε εάν μία ακολουθία παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα και από τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ αυτών των ακολουθιών και των συναρτήσεων Bernstein (Θεώρημα 2.1). Ειδικότερα, στο παράδειγμα 1 αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση $g_1(x) = (x+c)^\theta, x \geq 1, \quad 0 < \theta < 1$ ανήκει στην κλάση ℓ (ορισμός 2.2). Από το Λήμμα 2.3 έχουμε ότι $g_1(x) \in \mathcal{g}^*$, ενώ θέτοντας $c = -1$ στην g_1 έχουμε ότι η συνάρτηση $B_1(x) \coloneqq g_1(x+1) - g_1(1) = x^\theta, x \geq 0$ είναι Bernstein (Πρόταση 2.2).

Παρομοίως, στο παράδειγμα 2. έχουμε θεωρήσει τη λογαριθμική συνάρτηση $g_2(x) = \log(x+c)$, $x \geq 0$. Θέτουμε $c = 0$, οπότε τώρα η συνάρτηση $B_2(x) = g_2(x+1) - g_2(1) = \log(x+1)$, $x \geq 0$ είναι Bernstein.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι και η ακολουθία $\mu_k = (logk)^\theta$, η οποία αντιστοιχεί στη σύνθετη συνάρτηση $B_1(B_2(x)) = (\log(x+1))^\theta$, είναι κι αυτή ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων. Για να το δείξουμε αυτό πρέπει αρχικά να επισημάνουμε ότι οι συναρτήσεις Bernstein είναι κλειστές ως προς τη σύνθεσή τους (βλ. Schilling et al. 2012, p.28). Δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

<u>Θεώρημα 2.4</u>: Εάν θεωρήσουμε δύο συναρτήσεις Bernstein g_1, g_2, τότε και η σύνθετη συνάρτηση $g_1 o g_2$ είναι επίσης Bernstein.

<u>Απόδειξη:</u> Υποθέτουμε δύο συναρτήσεις Bernstein g_1, g_2. Για κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση g έχουμε ότι $gog_1 \in \mathcal{CM}$ (Shilling et al. 2012, p.27 Θεώρημα 3.7).
Επομένως, $go(g_1 o g_2) = (gog_1)og_2 \in \mathcal{CM}$. Η συνεπαγωγή $ii) \Rightarrow i)$ του θεώρηματος 3.7 (Shilling et al. 2012, p.27) αποδεικνύει ότι η σύνθεση $g_1 o g_2$ είναι Bernstein.

(Υπενθυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $g \in \mathcal{CM}$, δηλαδή είναι γνησίως μονότονη, όταν είναι απείρως διαφορίσιμη, δηλαδή $g \in C^\infty$, και επιπλέον ισχύει η σχέση $(-1)^n f^n(\lambda) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \kappa\alpha\iota\ \lambda > 0$ (βλ. Schilling et al. 2012, p.2)).

Λόγω του παραπάνω θεωρήματος λοιπόν έπεται ότι η σύνθεση $\beta(x) \coloneqq B_1(B_2(x)) = (\log(x+1))^\theta,\ x \geq 0$ είναι συνάρτηση Bernstein με LKR της μορφής $(\mathbf{2.6})$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$\alpha_0 = \beta(0) = 0 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\beta(x)}{x} = 0,$$

επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.2 για την συνάρτηση $g(x) \coloneqq \beta(x-1) = (logx)^{\theta},\ \ x \geq 1,\ \ 0 < \theta \leq 1.$ Έχουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $B(x) \coloneqq g(x+1) - g(1) = log(x+1)^{\theta}\ είναι\ Bernstein$ με LKR$(0,0,\nu), \nu \neq 0\ \Rightarrow g\epsilon \mathcal{g}^{*}$ (Πρόταση 2.2).

Οπότε, λόγω του Θεωρήματος 2.1 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\mu_k = (logk)^{\theta}$ είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων.

5. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $\mu_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\ \ k = 1,2...$ και ορίζουμε αντίστοιχα την συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}, x \geq 1$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} &= \int_1^x \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2} y e^{-ty} dy\, dt = \int_0^{\infty} \frac{y}{2} \int_1^x e^{-ty} dt\, dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y}{2} \frac{e^{-ty}}{-y}\bigg|_1^x dy = \int_0^{\infty} \frac{y}{2}\left(\frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y}\right) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(e^{-y} - e^{-xy}) dy,\end{aligned}$$

δηλαδή τελικά η συνάρτηση g είναι της μορφής $(\mathbf{2.11})$ με $h_1(y) = \frac{1}{2}$ και $s(y) = e^{-y}$.

Η σχέση $(\mathbf{2.10})$ ικανοποιείται διότι:

$$0 < \int_0^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-y}(1 - e^{-y}) dy < \infty.$$

Επομένως η μ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων τυχαίας μεταβλητής $X \in \mathcal{F}$.

Κεφάλαιο 3

Ακολουθίες αναμενόμενων ευρών

Μέχρι τώρα αναζητήσαμε συνθήκες ώστε οι όροι μιας δεδομένης ακολουθίας να παριστάνουν τα αναμενόμενα μέγιστα από ένα διατεταγμένο δείγμα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναζητήσουμε συνθήκες ώστε οι όροι της δοθείσας ακολουθίας να παριστάνουν τα αναμενόμενα εύρη του διατεταγμένου δείγματος.

Για το σκοπό αυτό αρχικά υπενθυμίζουμε τον ορισμό της έννοιας του εύρους:

Στην στατιστική, το εύρος είναι ένα μέτρο της διασποράς της κατανομής. Συγκεκριμένα ορίζεται ως η διαφορά της μικρότερης από την μεγαλύτερη παρατήρηση. Δηλαδή:

$$R = X_{max} - X_{min}.$$

Ένα μειονέκτημα του εύρους είναι ότι επηρεάζεται σημαντικά από τις ακραίες τιμές του δείγματος. Αυτό σημαίνει ότι όταν υπάρχουν κάποιες τιμές υπερβολικά υψηλές ή χαμηλές από τις υπόλοιπες, τότε το εύρος δεν βοηθά να έχουμε σωστή εικόνα για την διασπορά της κατανομής. Για παράδειγμα αν 10 παρατηρήσεις ενός δείγματος έχουν τις τιμές: 5,5,5,5,6,6,6,6,6,15, τότε το εύρος ορίζεται ως $R = 15 - 5 = 10$, όμως στην πραγματικότητα οι τιμές του δείγματος έχουν πολύ μικρότερη διασπορά, αφού οι περισσότερες ανήκουν στο σύνολο $\{5,6\}$. Το εύρος σε αυτή την περίπτωση δεν είναι αντιπροσωπευτική παράμετρος απόκλισης λόγω της μίας ακραίας παρατήρησης.

Ωστόσο πολλές φορές το εύρος είναι χρήσιμο κυρίως επειδή ο υπολογισμός του δεν έχει δυσκολίες.

Έστω τώρα δεδομένη ακολουθία $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$. Θα εξετάσουμε υπό ποιες προϋποθέσεις υπάρχει τ.μ. X με $\mathbb{E}R_k(X) = \rho_k, \quad k = 1,2, \dots$, δηλαδή πότε η ακολουθία ρ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων ευρών.

Το θεώρημα 2.1 που αφορούσε αναμενόμενα μέγιστα ισχύει αντίστοιχα και για τα αναμενόμενα εύρη. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Θεώρημα 3.1: Μία ακολουθία $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία αναμενόμενων ευρών μιας μη-εκφυλισμένης τ.μ. X εάν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. $(-1)^{s+1}\Delta^s\rho_k > 0$ για κάθε $s \geq 1$ και $k \geq 1$
2. $\rho_k = o(k)$, καθώς $k \to \infty$
3. $\rho_k = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} \rho_j$ για κάθε $k \geq 1$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $\mathbb{E}R_k(X) = \rho_k$, για κάποια ολοκληρώσιμη τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής F. Τότε έχουμε:

$$\rho_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F^k(x) - (1 - F(x))^k] dx, \qquad k \geq 1.$$

Επίσης, για κάθε $s \geq 1$ και $k \geq 1$, έχουμε ότι ισχύει:

$$(-1)^{s+1}\Delta^s\rho_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [F^k(x)(1 - F(x))^s + F^s(x)(1 - F(x))^k] dx > 0.$$

Πράγματι, παίρνοντας τους τελεστές διαφορών προκύπτει ότι:

$$\Delta\rho_k = \rho_{k+1} - \rho_k \qquad (Τελεστής\ πρώτης\ διαφοράς)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 - F^{k+1}(x) - (1 - F(x))^{k+1} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 1 - F^k(x) - (1 - F(x))^k\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F^k(x)\big(1 - F(x)\big) + (1 - F(x))^k \Big(1 - \big(1 - F(x)\big)\Big) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F^k(x)\big(1 - F(x)\big) + F(x)(1 - F(x))^k\, dx$$

$$\Delta^2\rho_k = \Delta(\rho_{k+1} - \rho_k) \qquad (Τελεστής\ δεύτερης\ διαφοράς)$$

$$= \rho_{k+2} - \rho_{k+1} - (\rho_{k+1} - \rho_k)$$

$$= \rho_{k+2} - \rho_{k+1} - \rho_{k+1} + \rho_k = \rho_{k+2} - 2\rho_{k+1} + \rho_k$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 - F^{k+2}(x) - (1 - F(x))^{k+2}\, dx$$

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty} 1 - F^{k+1}(x) - (1 - F(x))^{k+1} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 1 - F^{k}(x) - (1 - F(x))^{k}\, dx$$

Κάνοντας πράξεις (όμοια με τον τελεστή πρώτης διαφοράς) προκύπτει ότι:

$$-\Delta^2 \rho_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [F^k(x)(1 - F(x))^2 + F^2(x)(1 - F(x))^k] dx.$$

Γενικότερα με επαγωγή στο s αποδεικνύεται η σχέση (συνθήκη 1):

$$(-1)^{s+1}\Delta^s \rho_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [F^k(x)(1 - F(x))^s + F^s(x)(1 - F(x))^k] dx > 0,$$

$$s \geq 1, k \geq 1.$$

Για να αποδείξουμε την συνθήκη 2 θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της F,

$$F^{-1}(u) = inf\{x: F(x) \geq u\}, \;\; 0 < u < 1,$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\rho_k}{k} = \frac{\mathbb{E}R_k(X)}{k} = \int_0^1 [u^{k-1} - (1 - u)^{k-1}] F^{-1}(u)\, du \to 0, \qquad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ k \to \infty,$$

όπου εφαρμόσαμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Έτσι προκύπτει η συνθήκη 2.

Για την απόδειξη της συνθήκης 3 έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \rho_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} [1 - F^j(x) - (1 - F(x))^j] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F^k(x) - (1 - F(x))^k]\, dx = \rho_k.$$

Αντιστρόφως, τώρα υποθέτουμε ότι οι συνθήκες 1-3 ισχύουν και θεωρούμε την ακολουθία $\mu_k = \frac{1}{2}\rho_k$. Προφανώς, οι συνθήκες που έχουμε υποθέσει ισχύουν και για την ακολουθία μ_k(θεώρημα 1.2). Οπότε μπορούμε να βρούμε μία ολοκληρώσιμη τ.μ. X τέτοια ώστε $\mathbb{E}X_{k:k} = \frac{1}{2}\rho_k$, για κάθε $k \geq 1$. Επειδή όμως, για κάθε ολοκληρώσιμη τ.μ. X ισχύει $\mathbb{E}X_{1:k} = -\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} \mathbb{E}X_{j:j}$, η συνθήκη 3 δίνει $\mathbb{E}X_{1:k} = -\frac{1}{2}\rho_k$, και κατά συνέπεια $\mathbb{E}[X_{k:k} - X_{1:k}] = \rho_k$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Από την συνθήκη 3 έχουμε ότι $\rho_1 = 0$, και $\rho_3 = \frac{3}{2}\rho_2$, ενώ η συνθήκη 1 δείχνει ότι $0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots$.
2. Η τ.μ. X που θεωρήσαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι συμμετρική, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $X, -X$ είναι ισόνομες. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εάν θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_i = -X_i$, όπου οι X_ι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την X τυχαίες μεταβλητές. Τότε έχουμε ότι $\mathbb{E}Y_{k:k} = \mathbb{E}max\{Y_1, \ldots, Y_k\} =$ $\mathbb{E}max\{-X_1, \ldots, -X_k\}$
$= -\mathbb{E}min\{X_1, \ldots, X_k\} = \frac{1}{2}\rho_k = \mathbb{E}X_{k:k}$ για κάθε $k \geq 1$.
Οπότε από το αποτέλεσμα του Hoeffding, προκύπτει ότι οι τ.μ. X, Y είναι ισόνομες. Να σημειωθεί ότι η X είναι η μοναδική συμμετρική τ.μ. που δίνει τα αναμενόμενα εύρη. Πράγματι, αν Y μία συμμετρική τ.μ. με $\mathbb{E}R_k(Y) = \rho_k$, λόγω συμμετρίας, $\mathbb{E}Y_{k:k} =$ $-\mathbb{E}Y_{1:k}$, οπότε έχουμε $\rho_k = 2\mathbb{E}Y_{k:k}$ για κάθε $k \geq 1$.
3. Για κάθε ολοκληρώσιμη τ.μ. Y, μπορούμε να βρούμε μία συμμετρική, επίσης ολοκληρώσιμη τ.μ. X με τα ίδια αναμενόμενα εύρη. Πράγματι, εάν θεωρήσουμε την ακολουθία που παριστάνει τα αναμενόμενα εύρη μίας όχι απαραίτητα συμμετρικής τ.μ. Y, δηλαδή την $\rho_k = \mathbb{E}R_k(Y)$, τότε η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες $1. - 3.$ του θεωρήματος 3.1. Συνεπώς, με βάση τις τιμές της ακολουθίας ρ_k, μπορούμε να κατασκευάσουμε συμμετρική τ.μ. X. Αναλυτικότερα, παρατηρούμε ότι μία συνάρτηση κατανομής F είναι συμμετρική, δηλαδή αντιστοιχεί σε συμμετρική τ.μ. X, αν και μόνο αν:
$F^{-1}(u) = -F^{-1}\big((1-u)+\big), 0 < u < 1$, όπου $F^{-1}(x+)$ είναι το δεξί όριο της συνάρτησης F^{-1} στο σημείο $x \in (0,1)$. Έτσι αποδεικνύεται η σχέση που συνδέει τα αντίστροφα των συναρτήσεων κατανομής των τ.μ. X και Y:

$$F_X^{-1}(u) = \frac{1}{2}[F_Y^{-1}(u) - F_Y^{-1}(1-u)+], \quad 0 < u < 1 \qquad (\mathbf{3.1})$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η τ.μ. X της οποίας η αντίστροφη κατανομή ορίζεται από την σχέση $(\mathbf{3.1})$ είναι η μοναδική συμμετρική τ.μ. που έχει τα ίδια αναμενόμενα εύρη με την Y.

<u>Παράδειγμα 1:</u> Είναι γνωστό ότι η i-οστή διατεταγμένη από k ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν την εκθετική κατανομή έχει μέση τιμή που δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbb{E}Y_{i:k} = \sum_{j=k-i+1}^{k} \frac{1}{j}, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

Κατά συνέπεια, οι όροι της ακολουθίας των αναμενόμενων ευρών σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν από την σχέση:

$$\rho_k = \mathbb{E}R_k(Y) = \mathbb{E}[Y_{k:k} - Y_{1:k}] = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k-1}\,, \qquad όπου\ \rho_1 = 0.$$

Από το θεώρημα 3.1 και την πρώτη παρατήρηση, έπεται ότι υπάρχει συμμετρική τ.μ. X με αναμενόμενα εύρη τους όρους της ακολουθίας ρ_k. Επειδή ισχύει ότι $F^{-1}(u) = -\log(1-u)$, από την σχέση $(\mathbf{3.1})$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(u) &= \frac{1}{2}[F_Y^{-1}(u) - F_Y^{-1}(1-u) +] \\ &= \frac{1}{2}[-\log(1-u) - (-\log u)] \\ &= \frac{1}{2}[+\log u - \log(1-u)] \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{u}{1-u}\right), \qquad 0 < u < 1, \end{aligned}$$

η οποία αντιστοιχεί σε μία λογαριθμική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{\pi^2}{12}$.

<u>Παράδειγμα 2:</u> Αν θεωρήσουμε την τ.μ. $X \sim Bernoulli(p)$, τότε τα αναμενόμενα εύρη είναι:

$$\rho_k = 1 - p^k - (1-p)^k.$$

Τα παραπάνω αναμενόμενα εύρη προκύπτουν και αν θεωρήσουμε την τρίτιμη τ.μ:

$$X = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ με πιθανότητα } min\{p, 1-p\} \\ 0 \text{ με πιθανότητα } 1 - 2min\{p, 1-p\} \\ \frac{1}{2} \text{ με πιθανότητα } min\{p, 1-p\}. \end{cases}$$

Το παραπάνω παράδειγμα αποδεικνύει ότι τα αναμενόμενα εύρη δεν καθορίζουν μονοσήμαντα την κατανομή της τ.μ.

<u>Παράδειγμα 3:</u> Έστω $U_1, U_2, \dots, U_k$ τυχαίο δείγμα από $U(0,1)$ και $U_{1:k}, U_{2:k}, \dots, U_{k:k}$ το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα.

Γνωρίζουμε ότι για το i-οστό διατεταγμένο στατιστικό στοιχείο δείγματος μεγέθους k (πρώτο κεφάλαιο σελ. 9) ισχύει:

$$U_{i:k} \sim Beta(i, k+1-i).$$

Επομένως η αναμενόμενη τιμή του στοιχείου αυτού δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E}(U_{i:k}) = \frac{i}{k+1}, \ i = 1, \dots, k.$$

Συνεπώς, οι όροι της ακολουθίας των αναμενόμενων ευρών σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν από την σχέση:

$$\mathrm{E}(R_k(U)) = E(U_{k:k} - U_{1:k}) = E(U_{k:k}) - E(U_{1:k}) = \frac{k}{k+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{k+1}, \text{ όπου } \rho_1 = 0.$$

<u>Παρατήρηση 4</u>: Εάν Y είναι μία τ.μ. (συμμετρική γύρω από το μέσο της, έστω μ) τότε η συμμετρική τ.μ. με τα ίδια αναμενόμενα εύρη είναι η $X = Y - \mu$. Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε την τ.μ.$Y \sim Uniform(a, b)$, τότε η $X \sim Uniform\left(-\frac{1}{2}(b-a), \frac{1}{2}(b-a)\right)$, ενώ αν θεωρήσουμε την $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η $X \sim N(0, \sigma^2)$. Να σημειωθεί ότι υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές που δεν ακολουθούν ούτε την ομοιόμορφη ούτε την κανονική κατανομή αλλά έχουν τα ίδια αναμενόμενα εύρη (Arnold et al. 1992, p.145-146). Για παράδειγμα, υποθέτουμε την $X \sim N(0,1)$ με συνάρτηση πυκνότητας φ, συνάρτηση κατανομής Φ, και αντίστροφη την Φ^{-1}. Διαλέγουμε επιπλέον τυχαίο $\varepsilon \in (0, \sqrt{2\pi})$ και ορίζουμε $h(u) = \Phi^{-1}(u) + u(1-u)\varepsilon$. Τότε $h \in L^1(0,1)$ και

$h'(u) = \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(u))} + (1-2u)\varepsilon > 0,\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ u\epsilon(0,1).$

Θα δείξουμε ότι η h είναι γνήσια αύξουσα.

Για τις τιμές $0 < u \leq \frac{1}{2}$ είναι προφανές ότι $h'(u) > 0$, οπότε μένει να δείξουμε ότι ισχύει $h'(u) > 0$ για τις τιμές $\frac{1}{2} < u < 1$. Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\varepsilon < \frac{1}{(2u-1)\varphi(\Phi^{-1}(u))},\quad \acute{o}\tau\alpha\nu\ \frac{1}{2} < u < 1.$

Αυτό όντως ισχύει, διότι

$$inf_{\frac{1}{2}<u<1}\left\{\frac{1}{(2u-1)\varphi\big(\Phi^{-1}(u)\big)}\right\} = \frac{1}{sup_{\frac{1}{2}<u<1}\big\{(2u-1)\varphi\big(\Phi^{-1}(u)\big)\big\}} \geq \sqrt{2\pi},$$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\qquad sup_{\frac{1}{2}<u<1}\big\{(2u-1)\varphi\big(\Phi^{-1}(u)\big)\big\} = sup_{x>0}\{(2\Phi(x)-1)\varphi(x)\}$$
$$\leq sup_{x>0}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ορίζοντας τώρα την τ.μ. $\Upsilon = h(U)$, όπου $U\sim Uniform(0,1)$, διαπιστώνουμε ότι $F_\Upsilon^{-1} = h$, δηλαδή η Υ είναι μη κανονική, αλλά έχει τα αναμενόμενα εύρη της X:

$$\mathbb{E}R_k(\Upsilon) = k\int_0^1 (u^{k-1} - (1-u)^{k-1})\Phi^{-1}(u)du$$
$$+k\varepsilon\int_0^1 (u^{k-1} - (1-u)^{k-1})u(1-u)du$$
$$= k\int_0^1 (u^{k-1} - (1-u)^{k-1})\,\Phi^{-1}(u)du$$
$$= \mathbb{E}R_k(X), \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ k \geq 1\,.$$

Ομοίως, μπορεί να δειχθεί ότι η τ.μ. $X\sim Uniform(0,1)$ έχει τα ίδια αναμενόμενα εύρη με την τ.μ. $\Upsilon\sim Beta\left(\frac{1}{2},1\right)$, η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας $f_y(y) = \left(2\sqrt{y}\right)^{-1}\mathbf{1}(0 < y < 1)$.

Από την παραπάνω παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι οι ακολουθίες αναμενόμενων ευρών δεν μπορούν να χαρακτηρίσουν την οικογένεια θέσης κατανομών της τυχαίας μεταβλητής, αφού υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές με διαφορετικές κατανομές οι οποίες έχουν τα ίδια αναμενόμενα εύρη. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε ακολουθίες αναμενόμενων μεγίστων.

Τα παραπάνω οδηγούν στο παρακάτω βασικό θεώρημα:

<u>Θεώρημα 3.2</u>:

1. Μία ακολουθία $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ παριστάνει τα αναμενόμενα εύρη, μίας ολοκληρώσιμης τυχαίας μεταβλητής αν και μόνο αν παριστάνει τα αναμενόμενα μέγιστα μιας συμμετρικής (γύρω από το 0) ολοκληρώσιμης τυχαίας μεταβλητής.
2. Για κάθε ολοκληρώσιμη τ.μ. Y, υπάρχει μοναδική συμμετρική τυχαία μεταβλητή X, που έχει τα ίδια αναμενόμενα εύρη με την Y. Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y συνδέονται μέσω της σχέσης $(\mathbf{3.1})$.
3. Οι ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν τα ίδια αναμενόμενα εύρη, αν και μόνο αν οι γενικευμένες αντίστροφες των συναρτήσεων κατανομής, δηλαδή οι F_X^{-1}, F_Y^{-1} ικανοποιούν τη σχέση:

$$F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) = F_X^{-1}\big((1-u)+\big) - F_Y^{-1}\big((1-u)+\big), \quad 0 < u < 1, \qquad (\mathbf{3.2})$$

δηλαδή αν και μόνο αν η συνάρτηση $h(u) = F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)$, είναι συμμετρική γύρω από το $\frac{1}{2}$, σχεδόν για κάθε $u \epsilon (0,1)$.

<u>Απόδειξη</u>:

Τα 1. και 2. Έχουν σχολιαστεί στις παρατηρήσεις.
Να σημειωθεί ότι η τ.μ. X (της οποίας τα αναμενόμενα μέγιστα συμπίπτουν τα αναμενόμενα εύρη της Y) συνδέεται με την Y μέσω της σχέσης:

$$F_X^{-1}(u) = F_Y^{-1}(u) - F_Y^{-1}\big((1-u)+\big) \quad ,0 < u < 1.$$

Για να αποδείξουμε το 3. του θεωρήματος, υποθέτουμε πρώτα ότι η $h := F_X^{-1} - F_Y^{-1}$ είναι σχεδόν παντού συμμετρική γύρω από το $\frac{1}{2}$. Τότε:

$$\mathbb{E}R_k(X) - \mathbb{E}R_k(Y) = k\int_0^1 [u^{k-1} - (1-u)^{k-1}]\, h(u)du = 0, \text{για κάθε } k \geq 1,$$

επειδή για την συνάρτηση $g(u) = [u^{k-1} - (1-u)^{k-1}]h(u)$, ισχύει ότι $g(1-u) = -g(u)$, σχεδόν για κάθε u, δηλαδή η $g(u)$ είναι αντισυμμετρική γύρω από το $\frac{1}{2}$.

Αντίστροφα, ισχύει $\mathbb{E}R_k(X) = \mathbb{E}R_k(Y)$ για κάθε k, επομένως έχουμε:

$$\int_0^1 [u^{k-1} - (1-u)^{k-1}][F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)]du$$
$$= \int_0^1 u^{k-1} g(u) du = 0, \ \ \text{για κάθε } \kappa \geq 1,$$

όπου $g(u) = [F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)] - [F_X^{-1}(1-u) - F_Y^{-1}(1-u)]$. Επειδή $g \epsilon L^1(0,1)$ και $\int_0^1 u^n g(u) du = 0$, για $n = 0,1, \ldots$, έπεται ότι $g = 0$, σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Αυτό σημαίνει ότι σχεδόν για κάθε $u \in (0,1)$ ισχύει η σχέση:

$F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) = F_X^{-1}(1-u) - F_Y^{-1}(1-u)$, σχεδόν για κάθε $u \in (0,1)$,

από την οποία (παίρνοντας όρια για $u \nearrow u_0^-$ και στα δύο μέλη) προκύπτει η $(\mathbf{3.2})$.

Συνεπώς, κάθε ακολουθία αναμενόμενων ευρών είναι στην ουσία μία μεταφορά ακολουθίας αναμενόμενων μεγίστων μίας συμμετρικής ,γύρω από το μέσο της, τυχαίας μεταβλητής. Με χρήση του θεωρήματος 2.1 προκύπτει το επόμενο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 3.3: Θεωρούμε την κλάση των μη εκφυλισμένων, ολοκληρώσιμων τ.μ. που είναι συμμετρικές γύρω από τον μέσο τους, έστω $\mathcal{X}_s$. Μία ακολουθία $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ παριστάνει τα αναμενόμενα μέγιστα μίας τ.μ. $X \epsilon \mathcal{X}_s$ εάν και μόνο αν μπορεί να επεκταθεί σε μία συνάρτηση $g = G_s(\mu) \epsilon \mathscr{g}^*$ και επιπλέον το μοναδικό μέτρο μ στην κανονική μορφή της g ικανοποιεί την σχέση:

$$\mu\big((0,y]\big) = \mu\big([-\log(1-e^{-y}), \infty)\big), \ \ 0 < y < \infty \qquad (\mathbf{3.3})$$

Η επέκταση αυτή της g, εάν υπάρχει, είναι μοναδική και δίνεται από την σχέση $(\mathbf{2.7})$.

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία $\mu_k = \mu_k(X)$ παριστάνει τα αναμενόμενα μέγιστα μίας τ.μ. $X \in \mathcal{X}_s$. Από το θεώρημα 2.1 η μ_k επεκτείνεται σε συνάρτηση $g = G_s(\mu) \epsilon \mathcal{g}^*$. Επίσης, η τ.μ. $X - \mu_1$ είναι συμμετρική γύρω από το 0, οπότε σύμφωνα με το 1. του θεωρήματος 3.2 η ακολουθία $\rho_k = \mu_k - \mu_1$ παριστάνει τα αναμενόμενα εύρη της $X - \mu_1$. Ειδικότερα, η ακολουθία $\rho_k = \mu_k - \mu_1$ ικανοποιεί τη συνθήκη 3. Του θεωρήματος 3.1, δηλαδή:

$\rho_k = \mu_k - \mu_1 = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} (\mu_j - \mu_1)$ για $k = 1,2, \dots$.

Αντικαθιστώντας

$\mu_j - \mu_1 = g(j) - g(1) = \int_{(0,\infty)} h_0\,(y)(e^{-y} - e^{-jy}) d\mu(y)$ $(j = 1,2, .. k)$,

έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mu_k - \mu_1 &= \int_{(0,\infty)} h_0(y)(e^{-y} - e^{-ky}) d\mu(y) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \int_{(0,\infty)} h_0(y)(e^{-y} - e^{-jy}) d\mu(y) \\
&= \int_{(0,\infty)} h_0(y)(1 - e^{-y} - (1 - e^{-y})^k) d\mu(y), \quad k = 1,2, \dots \quad (\mathbf{3.4})
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε ότι το μέτρο v ορίζεται ως: $v\big((0, y]\big) = \mu\big([-\log(1 - e^{-y}), \infty)\big)$, $0 < y < \infty$. Προφανώς το v είναι $\neq 0$ και πεπερασμένο. Κάνουμε τώρα αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $y = -\log(1 - e^{-w})$ στην σχέση $(\mathbf{3.4})$ και επειδή $h_0(-\log(1 - e^{-w})) = h_0(w), 0 < w < \infty$, έχουμε:

$$
\int_{(0,\infty)} h_0(y)(e^{-y} - e^{-ky}) d\mu(y) = \int_{(0,\infty)} h_0(w)(e^{-w} - e^{-kw}) dv(w), \quad k = 1,2, \dots \quad (\mathbf{3.5})
$$

Θέτοντας $s_0(y) = e^{-y}$, η συνάρτηση $g_2 \coloneqq G_{s_0}(v) \epsilon \mathcal{g}^*$ και η σχέση $(\mathbf{3.5})$ δείχνει ότι $g(k) - g_2(k) = \mu_1 = \sigma\tau\alpha\theta$ για $k = 1,2, \dots$, επομένως $\mu = v$ (βλ. Λήμμα 2.2). Έτσι, για κάθε $0 < y < \infty$ έχουμε:

$$
\mu\big((0, y]\big) = v\big((0, y]\big) = \mu\big([-\log(1 - e^{-y}), \infty)\big),
$$

οπότε η $(\mathbf{3.3})$ έπεται.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει μία επέκταση $g = G_s(\mu) \in \mathcal{g}^*$ της ακολουθίας μ_k, όπου το μέτρο μ ικανοποιεί την σχέση (3.3). Από το

Θεώρημα 2.1, βλέπουμε ότι η ακολουθία μ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων, συνεπώς και η ακολουθία $\rho_k = \mu_k - \mu_1$ είναι επίσης ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων. Επομένως η ρ_k ικανοποιεί τις συνθήκες 1. και 2. του θεωρήματος 3.1. Επιπλέον, έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\int_{(0,\infty)} h_0\,(y)(e^{-y} - e^{-jy})d\mu(y)$$
$$= \int_{(0,\infty)} h_0(y)\,(1 - e^{-y} - (1 - e^{-y})^k)d\mu(y), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = -\log(1 - e^{-w})$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα, και λόγω της $(\mathbf{3.3})$ διαπιστώνουμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό ισούται με ρ_k, οπότε ικανοποιείται και η συνθήκη 3. του θεωρήματος 3.1 από την ρ_k. Εκτός όμως από το ότι οι όροι της ακολουθίας ρ_k παριστάνουν τα αναμενόμενα εύρη μίας τυχαίας μεταβλητής, παριστάνουν επίσης και τα αναμενόμενα μέγιστα μίας συμμετρικής (γύρω από το 0) τυχαίας μεταβλητής Y, δηλαδή ισχύει ότι η ακολουθία $\mu_k = \mu_1 + \rho_k$ παριστάνει τα αναμενόμενα μέγιστα της τ.μ. $X = \mu_1 + Y$, η οποία είναι συμμετρική γύρω από τον μέσο μ_1. Την μοναδικότητα εξασφαλίζει το Λήμμα 2.2.

<u>Πόρισμα 3.1</u>: Μία ακολουθία ρ_k είναι ακολουθία αναμενόμενων ευρών μίας μη- εκφυλισμένης τ.μ. Y αν και μόνο αν $\rho_1 = 0$ και υπάρχει μία επέκταση $g = G_s(\mu) \in \mathcal{g}^*$της ρ_k τέτοια ώστε το μέτρο μ να ικανοποιεί την σχέση

$$\mu\big((0,y]\big) = \mu\big([-\log(1 - e^{-y})\,,\infty)\big),\;\; 0 < y < \infty\,,$$

δηλαδή την σχέση $(\mathbf{3.3})$.

<u>Πόρισμα 3.2:</u> Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί την ολοκληρωτική αναπαράσταση της σχέσης $(\mathbf{2.11})$, όπου η συνάρτηση h_1 ικανοποιεί την $(\mathbf{2.10})$, δηλαδή $g = I_s(h_1) \in \ell$. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. Η ακολουθία $\mu_k = g(k)$ είναι μία ακολουθία αναμενόμενων μεγίστων μίας συμμετρικής , γύρω από τη μέση τιμή, μη-εκφυλισμένης τυχαίας μεταβλητής αν και μόνο αν ικανοποιείται η σχέση:

$$h_1(-\log(1 - e^{-y})) = (e^y - 1)h_1(y), \qquad (\mathbf{3.6})$$

σχεδόν για κάθε $y \in (0, \infty)$.

2. Η ακολουθία $\rho_k = g(k)$ είναι ακολουθία αναμενόμενων ευρών μίας μη εκφυλισμένης τυχαίας μεταβλητής, αν και μόνο αν ισχύει $\rho_1 = 0$ και ικανοποιείται η σχέση $(\mathbf{3.6})$.

<u>Απόδειξη</u>: Η υπόθεση για την συνάρτηση g, δηλαδή $g = I_s(h_1) \in \ell$ δείχνει ότι $g \in \ell \subseteq \mathcal{g}^*$ κι έτσι έχουμε $g = G_s(\mu)$, για ένα μοναδικό μέτρο $\mu \neq 0$. Από την σχέση $(\mathbf{2.10})$ συμπεραίνουμε ότι το μ είναι απόλυτα συνεχές μέτρο, με παράγωγο Radon-Nikodym που δίνεται από τον τύπο:

$$h_\mu \coloneqq \frac{h_1}{h_0},$$

όπου $h_0(y) = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}$.

Επιπλέον, εάν ν είναι το μέτρο που ορίζεται ως:

$$\nu\big((0, y]\big) = \mu\big([-\log(1 - e^{-y}), \infty)\big), \quad 0 < y < \infty,$$

τότε το ν είναι απόλυτα συνεχές μέτρο, επειδή ισχύει:

$$\nu\big((0, y]\big) = \mu\big([-\log(1 - e^{-y}), \infty)\big) = \int_{-\log(1-e^{-y})}^{\infty} h_\mu(x)dx, \quad 0 < y < \infty.$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης, έπεται ότι η παράγωγος του ν δίνεται από τον τύπο:

$$h_\nu(y) \coloneqq \frac{d\nu(y)}{dy} = \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} h_\mu(-\log(1 - e^{-y})), \quad 0 < y < \infty.$$

Επειδή ισχύει $\mu = \nu$ αν και μόνο αν $h_\mu = h_\nu$, σχεδόν παντού στο διάστημα $(0, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι η σχέση $(\mathbf{3.3})$ είναι ισοδύναμη με την $(\mathbf{3.6})$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει από το 1. του θεωρήματος 3.2 και το θεώρημα 3.3.

<u>Παράδειγμα 4</u>: Εάν H είναι η αρμονική συνάρτηση της εφαρμογής 3. σελ. 39 τότε ορίζω: $g(x) \coloneqq H(x + c) = I_s(h_1)(x), c > -2,$ όπου

$$h_1(y) = \frac{e^{-(c+1)y}}{(1-e^{-y})}\ \kappa\alpha\iota\ s(y) = e^{cy}\ (\ \beta\lambda.\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (\mathbf{2.23}))$$

Οπότε η σχέση $(\mathbf{3.6})$ μέσω της $(\mathbf{2.23})$γίνεται:

$$h_1(-\log(1-e^{-y})) = (e^y - 1)h_1(y)$$

$$\frac{e^{-(c+1)(-\log(1-e^{-y}))}}{1-e^{-(-\log(1-e^{-y}))}} = (e^y-1)\frac{e^{-(c+1)y}}{1-e^{-y}}$$

$$\frac{(1-e^{-y})^{c+1}}{1-1+e^{-y}(e^y-1)} = \frac{e^{-(c+1)y}}{1-e^{-y}}$$

$$(1-e^{-y})^c = \frac{e^{-(c+1)y}}{1-e^{-y}}$$

$$\left(\frac{1-e^{-y}}{e^{-y}}\right)^{c+1} = 1$$

Επομένως η σχέση $(\mathbf{3.6})$ τελικά γίνεται: $(e^y-1)^{c+1} = 1$,

η οποία ικανοποιείται αν και μόνο αν $c = -1$.

<u>Παράδειγμα 5:</u> Για την συνάρτηση $g(x) = \log(x+c) = I_s(h_1)(x)(c > -1)$,

$$h_1(y) = e^{-cy}/y\ \kappa\alpha\iota\ s(y) = e^{-(c-1)y}\big(\beta\lambda.\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (\mathbf{2.20})\big).$$

Έτσι, η σχέση $(\mathbf{3.6})$ τώρα γίνεται:

$$h_1(-\log(1-e^{-y})) = (e^{-y}-1)h_1(y)$$

$$\frac{e^{-c(-\,log(1-e^{-y}))}}{-\log(1-e^{-y})} = (e^y-1)\frac{e^{-cy}}{y}$$

$$\frac{(1-e^{-y})^c}{-\log(1-e^{-y})} = (e^y-1)\frac{e^{-cy}}{y}$$

$$\frac{y}{-\log(1-e^{-y})} = (e^y-1)\frac{e^{-yc}}{(1-e^{-y})^c}$$

$$\frac{y}{-\log(1-e^{-y})} = (e^y-1)\left(\frac{1-e^{-y}}{e^{-y}}\right)^{-c}$$

$$\frac{y}{-\log(1-e^{-y})} = (e^{y}-1)(e^{y}-1)^{-c}$$

$$\frac{y}{-\log(1-e^{-y})} = (e^{y}-1)^{-c+1}$$

$$\frac{-\log(1-e^{-y})}{y} = (e^{y}-1)^{c-1},$$

η οποία δεν ισχύει όταν $c > -1$. Συνεπώς οι ακολουθίες αναμενόμενων μεγίστων του παραδείγματος 2 του προηγούμενου κεφαλαίου αντιστοιχούν σε μη συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές.

<u>Παράδειγμα 6</u>: Για την συνάρτηση $g(x) \coloneqq (x+c)^{\theta} = I_s(h_1)(x)$

$\big(c > -1, \theta \in (0,1)\big), h_1(y) = \beta_\theta \frac{e^{-cy}}{y^{1+\theta}} \, \kappa\alpha\iota \; s(y) = e^{cy}$
, όπου β_θ μία θετική σταθερά $\big($βλ. σχέση $(\mathbf{2.19})\big)$.

Έτσι, η σχέση $(\mathbf{3.6})$ τώρα γίνεται:

$$h_1(-\log(1-e^{-y})) = (e^{y}-1)h_1(y) \qquad \forall \; y > 0$$

$$\beta_\theta \frac{e^{-c(-\log(1-e^{-y}))}}{-\log(1-e^{-y})^{1+\theta}} = (e^{y}-1)\beta_\theta \frac{e^{-cy}}{y^{1+\theta}}$$

$$\frac{(1-e^{-y})^{c}}{\left(\frac{-\log(1-e^{-y})}{y}\right)^{1+\theta}} = e^{-cy}(e^{y}-1)$$

$$\left(\frac{-\log(1-e^{-y})}{y}\right)^{1+\theta} = \left(\frac{1-e^{-y}}{e^{-y}}\right)^{c}(e^{y}-1)$$

$$\left(\frac{-\log(1-e^{-y})}{y}\right)^{1+\theta} = (e^{y}-1)^{c-1}.$$

Η παραπάνω σχέση είναι αδύνατη $\forall \; c \geq -1 \; \kappa\alpha\iota \; \theta \in (0,1)$, επομένως οι ακολουθίες του παραδείγματος 1 του προηγούμενου κεφαλαίου αντιστοιχούν σε μη συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές.

<u>Παράδειγμα 7:</u> Έστω η συνάρτηση $g(x) = 1 - \frac{1}{x+c} = I_s(h_1)(x) \; (c > -1),$

όπου $h_1(y) = e^{-cy}$ $και$ $s(y) = e^{(c-1)y}$. Με την χρήση αυτών των συναρτήσεων η σχέση $(\mathbf{3.6})$ γίνεται:

$$h_1(-\log(1-e^{-y})) = (e^y - 1)h_1(y)$$

$$e^{-c(-\log(1-e^{-y}))} = (e^y - 1)e^{-cy}$$

$$(1-e^{-y})^c = \frac{e^y - 1}{e^{cy}}$$

$$(1-e^{-y})^c (e^y)^c = e^y - 1$$

$$(e^y - 1)^c = e^y - 1$$

Άρα τελικά: $$(e^y - 1)^{c-1} = 1.$$

Προφανώς, η παραπάνω σχέση ικανοποιείται αν και μόνο αν $c = 1$, και η αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή είναι η τυπική ομοιόμορφη. Συνεπώς, η ακολουθία $\{g(k)\}_{k=1}^{\infty}$ παριστάνει αναμενόμενα μέγιστα $\forall\ c > -1$ (Θεώρημα 2.2) , αλλά οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές δεν είναι συμμετρικές εκτός από την περίπτωση όπου $c = 1$. Λόγω της σχέσης $(\mathbf{2.14})$ συμπεραίνουμε ότι η τιμή $c = 0$ αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή $1 - Y$, όπου Y η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Βιβλιογραφικές Αναφορές:

1. **1.** Ν.Παπαδάτος (2006) : Θεωρία Πιθανοτήτων
2. **2.** Hoeffding W. (1953): On the distribution of the expected values of the order statistics. *Ann. Math. Statist.Prob.Lett*. 24, p. 93-100.
3. **3.** Ν.Παπαδάτος (2017): On sequences of expected maxima and expected ranges *J.Appl.Prob.54, 1144-1166*.
4. **4.** Kolodynski S. (2000): a note on the sequence of expected extremes. *Statist. Prob.Lett*.47, p.295-300.
5. **5.** Hill, T. P. and Spruill, M.C (1994). On the relationship between convergence in distribution and convergence of expected extremes. *Proc.Amer.Math.Soc*. 121,p. 1235-1243.
6. **6.** Charalambides, C.A. (2002) *Enumerative Combinatorics.*
7. **7.** Kadane, J.B. (1971). A moment problem for order statistics. *Ann.Math.Statist.* 42, p.745-751.
8. **8.** Billingsley P. (1995). Probability and Measure, third edition, John Wiley, New York.
9. **9.** Schilling, R.L., Song,R. and Vondracek,Z.(2012).Berstein Functions:Theory and applications.
10. **10.** Kadane ,J.B. (1974). A characterization of triangular arrays which are expectations of order-statistics.J.Appl.Prob.11, p.413-416.
11. **11.** Arnold B.C.,Balakrishnan,N. and Nagaraja,H.N.(1992). A first course in order statistics.John Wiley, New York.
12. **12.** Ferguson,T.S. (1996).A course in Large Sample Theory. Chapman and Hall, London.
13. **13.** Haussdorf, F.(1921) Summationmethoden and momentfolgen.I.Math.Z. 9, 74-109.
14. **14.** Huang,J.S. (1998) Sequences of expectations of maximum-order statistics.Ann.Math.Statist.Prob.Lett.38,p.117-123.
15. **15.** Lagarias J.C. (2013).Euler's constant:Euler's work and modern developments.Bull.Amer.Math.Soc.(N.S.) 50, p.527-628.