

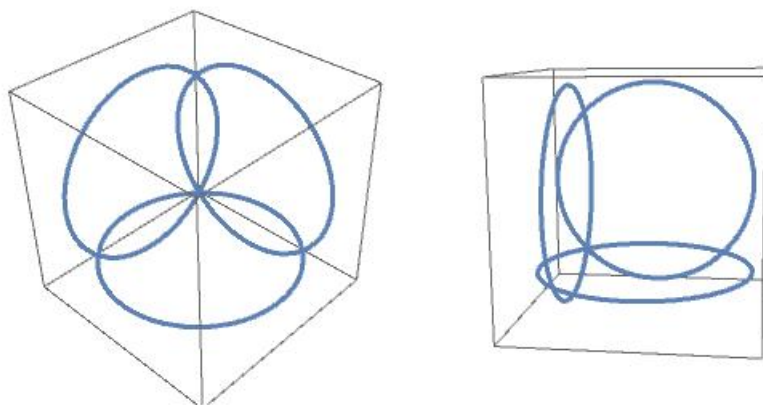


ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Κλασσική και κβαντική θεώρησις χωρικώς ομογενών χωροχρόνων διαστάσεως $D = 3, 4, 5$

Διδακτορική Διατριβή

Παῖλας Θεόδωρος
ΑΜ: 2015520



Αθήνα, 2020



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
————— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —————

Κλασσική και κβαντική θεώρησις χωρικώς ομογενών χωροχρόνων διαστάσεως $D = 3, 4, 5$

Διδακτορική διατριβή

Παῦλας Θεόδωρος
ΑΜ: 2015520

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης, Καθηγητής (Κύριος επιβλέπων)
Θεοχάρης Αποστολάτος, Καθηγητής
Βασίλειος Σπανός, Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, 2020

Ευχαριστίες

Η παρούσα διατριβή κατέσται δυνατό να ολοκληρωθεί λόγω της παρουσίας των παρακάτω ατόμων στη ζωή μου, τους οποίους το λιγότερο που μπορώ να κάνω είναι να τους ευχαριστήσω.

Αρχικά, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου, τους γονείς μου Αφροδίτη και Νικόλαο, και τον αδερφό μου Γιάννη, για τη συνεχή στήριξη και ενθάρρυνση τους όλα αυτά τα χρόνια.

Στη Σέβη που βρισκόταν συνέχεια στο πλευρό μου. Εκείνη γνωρίζει καλύτερα πόσα της οφείλω.

Ευγνωμοσύνη χρωστάω στον επιβλέποντα καθηγητή μου Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη. Αρχικά, ήταν αυτός που με μύησε στον κόσμο των συμμετριών και των προτύπων Bianchi. Επιπλέον, δέχθηκε να είναι ο επιβλέπων καθηγητής της διατριβής μου, συνεπώς εκ των πραγμάτων αυτή δε θα υπήρχε αν δεν ήταν εκείνος. Οι συζητήσεις, οι εντάσεις, οι εποικοδομητικές διαφωνίες μας ήταν αυτές που με έκαναν να αγαπήσω ακόμη περισσότερο το συγκεκριμένο αντικείμενο.

Στον Διδάκτωρα Πέτρο Τερζή, ο οποίος εκτός από τη συμβολή του μέσω των συζητήσεων, κατασκεύαζε προγραμματιστικούς κώδικες εν ριπή οφθαλμού, οι οποίοι σε αρκετές περιπτώσεις λειτούργησαν ως μάννα εξ ουρανού.

Στον Αναπληρωτή Καθηγητή Θεοχάρη Αποστολάτο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Βασίλειο Σπανό, οι οποίοι ήταν μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής επιτροπής (πέραν του Καθ. Θεοδόσιου Χριστοδουλάκη), οι συμβουλές των οποίων ήταν χρήσιμες σε μεγάλο βαθμό. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής για τις παρατηρήσεις τους και τις διορθώσεις, τον Καθηγητή Νικόλαο Τετράδη, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Γεώργιο Διαμάντη, τον Επίκουρο Καθηγητή Θεοφάνη Γραμμένο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Γεώργιο Κοφινά.

Σε ορισμένους υποψήφιους διδάκτορες του τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματίων καθώς και Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής, τα ονόματα των οποίων δε θα αναφέρω από φόβο μη ξεχάσω κάποιον. Οι ανταλλαγές απόψεων και οι ασταμάτητες συζητήσεις κρατούσαν ενδιαφέροντα τα απογεύματα στη σχολή.

Στη δεσποινίδα Σοφία Ζαρμπούτη, τη γραμματέα του Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής η οποία πάντα πρόσφερε απλόχερα τη βοήθεια και το χαμόγελο της.

Τη φοιτητική εστία (Φ.Ε.Τ.) του Ιδρύματος Βαρώνου Μιχαήλ Τσοίτσα, της οποίας ήμουν οικοτρόφος καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Τον διευθυντή Χρήστο Παπαχρήστου, υπεύθυνο λειτουργίας της (Φ.Ε.Τ.), τον Βασίλειο Τσάλη, υπεύθυνο σίτισης των υποτρόφων και τον Ιωάννη Τάμπα, επίσης υπεύθυνο σίτισης. Η διαβίωσή μου χάρη στις προσπάθειες τους κατέσται η καλύτερη δυνατή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛΙΔΕΚ) και τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ) τα οποία στήριξαν μέρος της παρούσας διατριβής, μέσω χρηματοδότησης.



Το έργο χρηματοδοτήθηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛΙΔΕΚ) και από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ), στο πλαίσιο της Δράσης «Υποτροφίες ΕΛΙΔΕΚ Υποψηφίων Διδακτόρων»(αρ. Σύμβασης 14501).

Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
I Θεωρία	5
1 Σημειακές συμμετρίες διαφορικών εξισώσεων	7
I Εισαγωγή	7
I.1 Παραμετρικοί, σημειακοί μετασχηματισμοί	9
I.2 Απειροστοί, παραμετρικοί μετασχηματισμοί	10
I.3 Ελεκτεταμένος γεννήτορας (Prolonged generator)	11
I.4 Συνθήκη συμμετρίας, πρώτος φορμαλισμός	13
I.5 Συνθήκη συμμετρίας, δεύτερος φορμαλισμός	16
I.6 Πρώτη μέθοδος ολοκλήρωσης	16
2 $(d + 1)$ Ανάλυση	23
I Εισαγωγή	23
I.1 Κινηματική ανάλυση	24
I.2 Υπερ-επιφάνειες, μοναδιαίο άνυσμα κάθετο σε υπερ-επιφάνεια	26
I.3 Βαρύτητα+Ηλεκτρομαγνητισμός+Ρευστά	30
3 Ομογενείς υπερ-επιφάνειες (Κλάσεις “Bianchi”)	33
I Εισαγωγή	33
I.1 Μη μεταβατική, απλά και πολλαπλά μεταβατική δράση	33
I.2 Ομογενής υπερ-επιφάνεια και αναλλοίωτη βάση	35
I.3 Εμβάπτιση των ομογενών d -διάστατων υπερ-επιφανειών σε $(d + 1)$ διαστάσεις	37
4 Συμμετρίες των εξισώσεων Einstein+Maxwell+Ρευστών σε ομογενείς χωροχρόνους.	39
I Εισαγωγή	39
I.1 “Χρονικά” εξαρτώμενοι Αυτομορφισμοί	40
I.2 Χρήση των Αυτομορφισμών	42
I.3 Ομάδα σταθερών Αυτομορφισμών	44
II Εφαρμογές	46
5 Ο χώρος λύσεων των εξισώσεων Einstein στο κενό, για το $(4 + 1)$-διάστατο πρότυπο Bianchi I, (Type $4A_1$)	48
I Εισαγωγή	48
I.1 Η μορφή των εξισώσεων για τα πρότυπα Bianchi I	49
I.2 Η χρήση των σταθερών Αυτομορφισμών	51
I.3 Ο χώρος των λύσεων και η μελέτη των ιδιοτήτων τους	53

I.4	Φυσική εφαρμογή στο πλαίσιο της κοσμολογίας “βράνης”	62
I.5	Ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς	65
I.6	Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων	66
6	Κλασσική και κβαντική ανάλυση 3D ηλεκτρομαγνητικών pp-wave χωροχρόνων	68
I	Εισαγωγή	68
I.1	Κλασσική περιγραφή	70
I.2	Κβαντική περιγραφή	80
I.3	Κβαντική περιγραφή, μη-δυναμικό $n(t)$	81
I.4	Κβαντική περιγραφή, δυναμικό $n(t)$	82
II	Ανάλυση Bohm	82
II.1	Μη-δυναμικό $n(t)$	83
II.2	Δυναμικό $n(t)$	86
II.3	Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων	87
7	Δυναμικά ισοδύναμες εξισώσεις ΛCDM υπό την ύπαρξη γεωμετρίας Bianchi	91
I	Εισαγωγή	91
I.1	Πρωταρχική υπόθεση και χρήση των σταθερών Αυτομορφισμών	93
II	“Απορρόφηση” μέσω ελεύθερου βαθμωτού πεδίου	99
III	“Απορρόφηση” μέσω ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	101
III.1	Πρότυπο $VI_{(-1)}$ ή $A_{3,4}$ ή $E(1,1)$	102
III.2	Πρότυπο $VIII$ ή $A_{3,8}$ ή $SU(1,1)$	105
III.3	Πρότυπο IX ή $A_{3,9}$ ή $SU(2)$	106
III.4	Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων	108
8	Η απειροδιάστατη ομάδα συμμετρίας των εξισώσεων Friedmann	112
I	Εισαγωγή	112
II	Οι κοσμολογικές εξισώσεις και οι συμμετρίες τους	113
II.1	Συμμετρίες οι οποίες διατηρούν την καταστατική εξίσωση	113
II.2	Συμμετρίες των εξισώσεων για διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις	115
III	Αναπαράγωγή γνωστών αποτελεσμάτων	116
IV	Παραγωγή νέων λύσεων από ήδη γνωστές	119
IV.1	Κοσμολογικές εποχές	120
IV.2	Δύσκαμπτη ύλη (stiff matter) και γενικευμένο (Αντι-) Chaplygin ρευστό από καταστατική εξίσωση δύσκαμπτου(stiff) ρευστού	122
IV.3	Καταστατική εξίσωση εξαρτώμενη από τον παράγοντα κλίμακας, μέσω της $P = 0$	122
IV.4	Επίδραση των συμμετριών στο επίπεδο της βασικής θεωρίας	123
V	Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων	125
9	“Χρονικά”-συναλλοίωτη εξίσωση Schrödinger και η κανονική κβάντωση της μελανής οπής Reissner-Nordström	126
I	Εισαγωγή	126
II	Κλασσική περιγραφή	129
II.1	Στατική, σφαιρικά συμμετρική μετρική	129
II.2	Ιδιάζουσα, minisuperspace λαγκρανζιανή	130
II.3	Απλοποιημένη, μη-ιδιάζουσα, “χρονικά” εξαρτημένη λαγκρανζιανή πυκνότητα	131
II.4	Minisuperspace γεωμετρία και μετασχηματισμοί των μεταβλητών. Η γενική λύση σε τυχαία βαθμίδα.	133
III	Κβαντική περιγραφή	135
III.1	Επαναορισμοί μεταβλητών	135
III.2	Κανονική χαμιλτονιανή πυκνότητα και διατηρήσιμα φορτία	136
III.3	“Χρονικά”-συναλλοίωτη εξίσωση Schrödinger	137

IV	Ανάλυση Bohm	140
IV.1	Συνάρτηση δέλτα του Dirac	141
IV.2	Αρχική κατάσταση Gauss	141
IV.3	Ιδιάζοντα σημεία	143
IV.4	Ορίζοντες γεγονότων	146
V	Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων	147

III Εφαρμογές σε εξέλιξη 151

10 Παρατηρησιακές παράμετροι για ένα ανισοτροπικό κοσμολογικό πρότυπο, με δυναμικά ισοδύναμες εξισώσεις ΛCDM	153
I Το ανισοτροπικό κοσμολογικό πρότυπο	153
I.1 Πρότυπο IX ή $A_{3,9}$ ή SU(2)	153
I.2 Αλλαγές και ορισμοί	155
II Κοσμολογικές παράμετροι	157
II.1 Γωνιακή απόσταση και απόσταση φωτεινότητας	158

Επίλογος 160

Appendices	162
I Εξισώσεις για χωροχρόνους με εμβαπτισμένες ομογενείς υπερ-επιφάνειες	164
II Υπόθεση $E_i(t, x)$, $B_{ij}(t, x)$, $J_i(t, x)$	168
III Minisuperspace για 2D Κλάσεις “Bianchi”	169
III.1 Κλάση “Bianchi” I	169
III.2 Κλάση “Bianchi” II	170
IV Ορθογωνιότητα των κυματοσυναρτήσεων	170
IV.1 Μη-δυναμικό $n(t)$, ιδιοκατάσταση ψ_3	170
IV.2 Δυναμικό $n(t)$, ιδιοκατάσταση ψ_3	172
V Εξισώσεις Einstein υπό την υπόθεση $\gamma_{\mu\nu} = a(t)^2 m_{\mu\nu}$	173
VI Απόδειξη των σχέσεων $\partial_i \phi(t, x) = \phi_\alpha \sigma_i^\alpha(x)$, $\phi_\alpha C_{\beta\lambda}^\alpha = 0$	173

Πρόλογος

Τα πρότυπα Bianchi μελετήθηκαν αρχικά στο πλαίσιο της κοσμολογίας. Πρόκειται για την απλούστερη γενίκευση του προτύπου FLRW, καθώς διατηρείται η ομογένεια των τρισδιάστατων, χωρικών υπερ-επιφανειών αλλά δεν υπάρχει πλέον η χωρική ισοτροπία. Πιο συγκεκριμένα, αντί να υπάρχει ένας μοναδικός παράγοντας κλίμακας όπως στη περίπτωση των FLRW, έχουμε πολλούς, σε κάποιες περιπτώσεις έως και εννέα. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, ο αριθμός αυτός δεν είναι πραγματικός, καθώς με διάφορα μαθηματικά επιχειρήματα μπορεί να μειωθεί σημαντικά. Η αναζήτηση λύσεων και επιπλέον η μοναδικότητα αυτών, για το εκάστοτε πρότυπο Bianchi, δεν είναι καθόλου τετριμμένη υπόθεση καθώς, το σύστημα των εξισώσεων Einstein είναι ένα μη-γραμμικό, πεπλεγμένο σύνολο από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Οι πρώτες προσπάθειες που έγιναν από την επιστημονική κοινότητα στην αναζήτηση λύσεων, βασίστηκαν σε διαισθητικές απλοποιήσεις της χωρικής μετρικής, οδηγώντας έτσι σε απλουστεύσεις του συστήματος των εξισώσεων και τελικά στην επίλυση αυτού. Ωστόσο, χωρίς να είναι καλά καθορισμένη η γενικότητα αυτών των λύσεων.

Οι προσπάθειες έγιναν μεθοδικές και μαθηματικά πιο πλήρεις από τη στιγμή που άρχισε να χρησιμοποιείται η έννοια της συμμετρίας: Συμμετρίες του ίδιου του χωρόχρονου και συμμετρίες των διαφορικών εξισώσεων Einstein. Όπως θα δούμε παρακάτω, η θεωρία του Lie σχετικά με την ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων με χρήση των συμμετριών τους, οδηγεί στην εύρεση όλου του χώρου λύσεων για κάποια από τα πρότυπα, απαντώντας τελικά και στο ερώτημα της μοναδικότητας. Καθοριστικό ρόλο κατέχει η ομάδα των Αυτομορφισμών η οποία υποδεικνύει τους γεννήτορες των συμμετριών Lie.

Ένας από τους σκοπούς αυτής της εργασίας είναι να αναδείξουμε την σημαντικότητα των προτύπων Bianchi τόσο στην σύγχρονη κοσμολογία (μελέτη τετραδιάστατων και πενταδιάστατων προτύπων) καθώς και την εμφάνισή τους σε άλλου είδους χωροχρόνους όπως οι pp-wave. Παράλληλα, επιθυμούμε να καταστεί προφανής και η αναγκαιότητα χρήσης της μεθόδου Lie ώστε να επιτευχθεί η μαθηματική πληρότητα στην ολοκλήρωση του συστήματος των εξισώσεων.

Συγκεκριμένα, η εργασία αποτελείται από τρία μέρη: Μέρος I: Θεωρία, Μέρος II: Εφαρμογές, Μέρος III: Εφαρμογές σε εξέλιξη.

Σχετικά με το πρώτο μέρος, παρουσιάζουμε όλη τη βασική θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε στα υπόλοιπα δύο μέρη. Αυτή αποτελείται από τις εξής ενότητες: I) Σημειακές συμμετρίες διαφορικών εξισώσεων, II) $(d+1)$ Ανάλυση, III) Ομογενείς υπερ-επιφάνειες (Κλάσεις “Bianchi”), IV) Συμμετρίες των εξισώσεων Einstein+Maxwell+Ρευστά σε ομογενείς χωροχρόνους.

Όσον αφορά το δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε τις εργασίες που δημοσιεύθηκαν στο πλαίσιο της διατριβής, συγκεκριμένα:

1) **Ο χώρος λύσεων των εξισώσεων Einstein στο κενό, για το $(4+1)$ -διάστατο πρότυπο Bianchi I (Type 4A1).**

The solution space of Einstein’s vacuum field equations for the case of five-dimensional Bianchi Type I (Type 4A1) July 26, 2018 Classical and Quantum Gravity 35(14), 145003.

Αναζητήθηκε ο χώρος των λύσεων των εξισώσεων Einstein στο κενό για την περίπτωση του πενταδιάστατου προτύπου Bianchi Type I (Type 4A1). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την ομάδα των Αυτομορφισμών των αλγεβρών Lie, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι η γενική γραμμική τετραδιάστατη ομάδα, βρέθηκαν 7 οικογένειες λύσεων, 21 διαφορετικές μετρικές εκ των οποίων μόνο οι 5 ήταν γνωστές. Η διαδικασία σαρώνει όλο το χώρο των λύσεων. Για μια από αυτές, αναζητήθηκε μια φυσική ερμηνεία στα πλαίσια της κοσμολογίας βράνης. Το βασικό αποτέλεσμα ήταν πως η ύλη στον τετραδιάστατο χωρόχρονο,

αν αναπαρασταθεί με τον τανυστή ενέργειας ορμής ενός ιδανικού ρευστού, τότε ο τετραδιάστατος χωρόχρονος γίνεται FLRW και μπορεί να ερμηνευθεί ως η κίνηση της βράνης στον πενταδιάστατο χωρόχρονο. Ακόμη, εκφράστηκαν οι σταθερές οι οποίες εμφανίζονται μέσα στις λύσεις, σαν συνάρτηση αναλλοίωτων ποσοτήτων, το οποίο εγγυάται πως είναι ουσιώδεις. Επιπλέον, εξετάστηκαν σε μικρό βαθμό οι αλλαγές που θα προκύψουν αν κανείς λάβει υπόψη του και την ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς.

2)Κλασσική και κβαντική ανάλυση 3D ηλεκτρομαγνητικών pp-wave χωροχρόνων.

Classical and quantum analysis of 3D electromagnetic pp-wave spacetime T Pailas, N Dimakis, A Karagiorgos, Petros A Terzis, G O Papadopoulos and T Christodoulakis, 2019 Class.Quantum Grav. 36 135010.

Μελετήθηκε το σύστημα των εξισώσεων Einstein-Maxwell στις τρεις διαστάσεις υπό την υπόθεση pp-wave μετρικής. Βρέθηκε όλος ο χώρος λύσεων ο οποίος αποτελείται από δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από τρεις κλάσεις, ενώ η δεύτερη περιγράφεται από μια εξίσωση Riccati η οποία περιέχει μια αυθαίρετη συνάρτηση. Αποδείχθηκε ότι για κάθε διαφορετική μορφή της συνάρτησης προκύπτει και διαφορετική γεωμετρία. Όσον αφορά τις τρεις πρώτες κλάσεις αναπαράχθηκε η λύση μέσω Χαμιλτονιανού φορμαλισμού παρότι η Einstein-Hilbert δράση είναι ταυτοτικά μηδέν λόγω της υποθέσεως pp-wave μετρικής. Η Χαμιλτονιανή περιέχει ένα μη πραγματικό βαθμό ελευθερίας $n(t)$. Οι κλασσικές λύσεις μπορούν να αναπαραχθούν αντιμετωπίζοντας τον μη πραγματικό βαθμό ελευθερίας, είτε ως δυναμική (παραλλαγή της δράσης ως προς $n(t)$) ή μη δυναμική (αυθαίρετη συνάρτηση του t χωρίς παραλλαγή) μεταβλητή. Στη συνέχεια η κανονική κβάντωση έδωσε τις κυματοσυναρτήσεις του συστήματος. Οι λύσεις (κυματοσυναρτήσεις) προέκυψαν μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Schrödinger ($n(t)$ =μη δυναμική μεταβλητή) και αντίστοιχα μέσω της Wheeler-DeWitt ($n(t)$ =δυναμική μεταβλητή). Η ερμηνεία των κυματοσυναρτήσεων μέσω της ανάλυσης κατά Bohm οδήγησε σε δυο διαφορετικές ημικλασσικά διορθωμένες μετρικές, υποδεικνύοντας πως έχει αρθεί πλέον η κλασσική ισοδυναμία των δύο θεωρήσεων του $n(t)$.

3)Δυναμικά ισοδύναμες εξισώσεις Λ CDM υπό την ύπαρξη γεωμετρίας Bianchi.

Dynamically equivalent Λ CDM equations with underlying Bianchi Type geometry. T. Pailas, T. Christodoulakis, JCAP 07 (2019) 029

Σε αυτή την εργασία μελετήθηκαν τα τετραδιάστατα πρότυπα Bianchi υπό την παρουσία ενός σύμμορφου διανυσματικού πεδίου Killing. Συγκεκριμένα, έχοντας χρησιμοποιηθεί η ομάδα των σταθερών αυτομορφισμών η μετρική μετασχηματίζεται στην πλέον ανάγωγη μορφή της. Λόγω του σύμμορφου διανυσματικού πεδίου Killing, υπάρχει ένας μοναδικός παράγοντας κλίμακας με αποτέλεσμα η ανισοτροπία των προτύπων να είναι «παγωμένη» (όχι χρονικώς εξελισσόμενη). Υποθέτοντας την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και φορτισμένης ύλης, μπορεί να «απορροφηθεί» αυτή η παραμένουσα ανισοτροπία, οδηγώντας έτσι τις εξισώσεις να είναι ισοδύναμες με εκείνες του κοσμολογικού προτύπου Λ CDM. Ως αποτέλεσμα, αποδεικνύεται σε μαθηματικό επίπεδο, πως η ομογένεια και ισοτροπία της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου δεν οδηγεί μονοσήμαντα στην επιλογή FLRW μετρικής η οποία χρησιμοποιείται στο κοσμολογικό πρότυπο Λ CDM.

4)Η απειροδιάστατη ομάδα συμμετρίας των εξισώσεων Friedmann

Infinite dimensional symmetry groups of the Friedmann equations. T. Pailas, N. Dimakis, Andronikos Paliathanasis, Petros A. Terzis, T. Christodoulakis, Phys. Rev. D 102, 063524 (2020)

Θεωρήσαμε γεωμετρία FLRW υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς και ενός ιδανικού ρευστού με τυχαία αλλά δοθείσα καταστατική εξίσωση. Αναζητήσαμε τις συμμετρίες των εξισώσεων, θεωρώντας διάφορες παραλλαγές, για παράδειγμα, θεώρηση της πίεσης ως βαθμού ελευθερίας στη μια περίπτωση και ως συνάρτηση της πυκνότητας ενέργειας σε άλλη. Αποδείξαμε πως η ομάδα συμμετρίας είναι απειροδιάστατη. Με την χρήση των συμμετριών, βρήκαμε νέες λύσεις από ήδη γνωστές. Επιπλέον, δείξαμε με ποιόν τρόπο μέσω των συμμετριών, μπορούμε να παράξουμε τις καταστατικές εξισώσεις των διαφόρων κοσμολογικών εποχών, ξεκινώντας από την εποχή του πληθωρισμού. Τέλος, αναζητήσαμε την επίδραση των συμμετριών στο επίπεδο της βασικής θεωρίας. Συγκεκριμένα, θεωρήσαμε ένα βαθμωτό πεδίο και το αντίστοιχο ρευστό με το οποίο αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί.

5)“Χρονικά”-συναλλοιώτη εξίσωση Schrödinger και η κανονική κβάντωση της μελανής οπής Reissner-Nordström

“Time”-Covariant Schrödinger Equation and the Canonical Quantization of the Reissner–Nordström Black Hole. Theodoros Pailas, Quantum Reports 2020, 2(3), 414-441.

Στη συγκεκριμένη εργασία κατασκευάσαμε μια “χρονικά” συναλλοιώτη εξίσωση Schrödinger για την περίπτωση της μελανής οπής Reissner-Nordström. Ακολουθήσαμε μια διαφορετική μέθοδο από τις υπάρχουσες στη βιβλιογραφία. Η διαφορετικότητα εντοπίζεται στο σημείο αντιμετώπισης της συνδεσμικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα, επιλύοντας αυτήν την εξίσωση ως προς τον βαθμό ελευθερίας Lapse, μπορέσαμε να κατασκευάσουμε μια λαγκρανζιανή η οποία είναι μη-ιδιάζουσα (regular) και “χρονικά” εξαρτημένη. Συνεπώς, δεν υπάρχει πλέον συνδεσμική εξίσωση και εμφανίζεται μια παράμετρος μέσα στην λαγκρανζιανή η οποία μπορεί να αντιμετωπιστεί ως παράμετρος “χρόνου”. Επιπλέον, εξακολουθεί να υπάρχει η ελευθερία επιλογής βαθμίδας, επομένως, οι διαφορετικές κβαντικές περιγραφές, για διαφορετική επιλογή βαθμίδας, είναι εξ’ ορισμού ισοδύναμες. Αποδείξαμε την ισοδυναμία του παραπάνω συστήματος με εκείνο της εργασίας (2), στο επίπεδο των εξισώσεων. Παρουσιάσαμε ένα κριτήριο σχετικά με τα ιδιάζοντα (ανωμαλίες) σημεία: “λιγότερο” ιδιάζων χαρακτηρίζεται εκείνος ο χωρόχρονος του οποίου η ανωμαλία είναι πιο εντοπισμένη γύρω από το σημείο ενδιαφέροντος.

Τέλος, εντοπίσαμε μια ασυμφωνία σχετικά με την ύπαρξη ανωμαλίας, μεταξύ της γεωμετρικής ερμηνείας στο πλαίσιο της ανάλυσης Bohm και την πρόταση DeWitt (μηδενική πυκνότητα πιθανότητας στο κλασσικό σημείο ανωμαλίας).

Όσον αφορά το τρίτο μέρος της διατριβής, παρουσιάζουμε την έως τώρα ανάλυση που έχει γίνει, σχετικά με την δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων που παράχθηκαν στην εργασία (3), με παρατηρήσεις.

Μέρος I

Θεωρία

Κεφάλαιο 1

Σημειακές συμμετρίες διαφορικών εξισώσεων

I Εισαγωγή

Η έννοια της συμμετρίας εμφανίζεται σε κάθε θεμελιώδη θεωρία της φυσικής (Ειδική και Γενική Σχετικότητα, Κβαντική θεωρία πεδίου, Καθιερωμένο Πρότυπο,...). Για μια εκτενή ανάλυση παραπέμπουμε στο βιβλίο [1]. Υπάρχουν αρκετοί κλάδοι οι οποίοι αντιστοιχούν στα διαφορετικά είδη συμμετριών. Ένας από τους σημαντικότερους είναι ο κλάδος που αναφέρεται ως “**συνεχείς συμμετρίες διαφορικών εξισώσεων**” και αφορά τη μελέτη των συνεχών (και αντιστρέψιμων) μετασχηματισμών, οι οποίοι απεικονίζουν λύσεις σε λύσεις των εξισώσεων προς μελέτη, είτε αυτές είναι συνήθεις είτε μερικές διαφορικές εξισώσεις. Την έννοια των ομάδων των συνεχών μετασχηματισμών συμμετρίας (οι οποίες πλέον καλούνται ομάδες Lie) εισήγαγε και μελέτησε αρχικά, σε μια σειρά δημοσιεύσεων [2–7], ο Sophus Lie; ο βασικός στόχος του ήταν η ενοποίηση και η επέκταση μεθόδων σχετιζόμενες με, ομογενείς και χωριζόμενων μεταβλητών εξισώσεις, μετασχηματισμό Laplace, μείωση της τάξης μιας διαφορικής και άλλα. Η μέθοδος του Lie μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε επιστήμη στην οποία εμφανίζονται διαφορικές εξισώσεις.

Με σκοπό να εκφράσουμε τη σημαντικότητα αυτού του κλάδου, αναφέρουμε μερικές από την πληθώρα εφαρμογών και γενικεύσεων της μεθόδου Lie. Κατασκευή ειδικών λύσεων, μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση μετασχηματισμών συμμετρίας παρουσιάστηκαν αρχικά στις [8–11]. Ειδικές λύσεις οι οποίες αναφέρονται ως λύσεις ομοιότητας (similarity solutions) για κάποιες διαφορικές εξισώσεις, καθώς και συνθήκες υπό τις οποίες κάποιες μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι ισοδύναμες με κάποιες αντίστοιχες γραμμικές, μελετήθηκαν στις εξής δημοσιεύσεις [12–18]. Η E. Noether μελέτησε [19] τις συμμετρίες του ολοκληρώματος δράσης και τη σύνδεση αυτών με διατηρήσιμες ποσότητες επί των εξισώσεων Euler-Lagrange. Αυτές οι συμμετρίες μπορούν να βρεθούν με τη μέθοδο του Lie, καθώς αποτελούν συμμετρίες των αντίστοιχων εξισώσεων.

Στο πεδίο της Γενικής Σχετικότητας υπάρχουν πολλές εφαρμογές επίσης. Σημειακές συμμετρίες Lie των γεωδαισιακών εξισώσεων μελετήθηκαν στη [20] και εφαρμόστηκαν στα παρακάτω παραδείγματα: χωρόχρονοι Einstein, Schwarzschild και FLRW. Λύση της εξίσωσης Wheeler-DeWitt που αντιστοιχεί σε ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό, παράχθηκε με τη βοήθεια των συμμετριών Lie [21]. Επίσης, βρέθηκαν λύσεις και περιορισμοί μέσω της μεθόδου σε $f(R)$ θεωρίες βαρύτητας [22]. Ο χώρος λύσεων για τα τετραδιάστατα πρότυπα Bianchi Type $I-VII$ στο κενό, βρέθηκε με τη βοήθεια της ομάδας των Αυτομορφισμών. Αυτή η ομάδα, όπως θα δούμε και παρακάτω, αποτελεί υποσύνολο της ομάδας των συμμετριών Lie των εξισώσεων Einstein για τη γεωμετρία των προτύπων Bianchi. [23–25]. Τέλος, μελετήθηκαν οι σημειακές συμμετρίες Lie για πρότυπα minisuperspace στη βαρύτητα και ο τρόπος που βοηθούν ώστε να βρεθεί η αναλυτική λύση [26].

Ο A. V. Bäcklund στις δημοσιεύσεις [27–30] παρουσίασε μια γενίκευση της μεθόδου Lie, όπου οι μετασχηματισμοί “αναμειγνύουν” όχι μόνο τις εξαρτημένες με τις ανεξάρτητες μεταβλητές, αλλά και

με τις παραγώγους αυτών. Μια συγκεκριμένη υπο-περίπτωση αποτελούν οι μετασχηματισμοί “επαφής” (contact transformations), [31] και κάποιες εφαρμογές μπορούν να βρεθούν στη [32]. Ο Robert Geroch στις δημοσιεύσεις [33, 34], παρουσίασε μια μέθοδο παραγωγής νέων λύσεων των εξισώσεων Einstein, από ήδη γνωστές, οι οποίες επιδέχονται κάποιο γεννήτορα συμμετρίας Killing. Ο μετασχηματισμός που συνδέει τις δύο μετρικές αποδεικνύεται πως είναι μετασχηματισμός Lie-Bäcklund, παρόλο που ο Geroch δεν ακολούθησε αυτή τη μέθοδο. Οι μετασχηματισμοί Lie-Bäcklund μελετώνται λεπτομερώς από τους Anderson και Ibragimov [35], Ibragimov [36] και Olver [37]. Όπως αποδείχθηκε από τον Olver [37], η αναλοιώτητα κάποιας μερικής διαφορικής εξίσωσης υπό μετασχηματισμό Lie-Bäcklund, συνήθως οδηγεί στην ύπαρξη άπειρου πλήθους τέτοιων μετασχηματισμών και αντίστοιχα συμμετριών, οι οποίες συνδέονται μέσω τελεστών “επανάληψης” (recursion operators).

Υπάρχει γενίκευση της μεθόδου Lie και στη περίπτωση όπου οι εξισώσεις προς μελέτη είναι εξισώσεις διαφορών [38]. Επίσης, η περίπτωση συνδυασμού εξισώσεων διαφορικών-διαφορών και η εφαρμογή στο “πλέγμα” Toda (Toda lattice) μελετήθηκε από τους D. Levi και P. Winterwitz [39]. Τέλος, μια μέθοδος εύρεσης των σημειακών συμμετριών σε σύστημα μερικών διαφορικών-διαφορών εξισώσεων παρουσιάστηκε στη [40]. Αυτή η μέθοδος εφαρμόστηκε στην εξίσωση Kacvan-Moerbeke και βρέθηκε πως οι γεννήτορες των συμμετριών σχηματίζουν άλγεβρα Kac-Moody-Virasoro.

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές των συμμετριών Lie, είναι η χρήση τους στη μείωση της τάξης και επομένως στη (μερική ή ολική) ολοκλήρωση των συνηθών, διαφορικών εξισώσεων. Μέχρι στιγμής υπάρχουν τρεις βασικές μέθοδοι να επιτευχθεί μια τέτοια μείωση της τάξης. Κάποιες από αυτές παρουσιάζονται και μελετώνται εκτενώς στη [37], ενώ άλλες στις [41] και [42]. Ένα βασικό πρόβλημα στο οποίο όλες προσπαθούν να απαντήσουν είναι, πώς μπορούν οι γεννήτορες συμμετριών να χρησιμοποιηθούν με τον “καλύτερο” τρόπο. Όπου ως “καλύτερο”, εννοούμε τη χρήση όσο περισσότερων γεννητόρων γίνεται.

Η πρώτη μέθοδος η οποία εμφανίζεται σε όλα τα παραπάνω βιβλία, αναφέρεται ως “Κανονική μορφή των γεννητόρων στο χώρο των μεταβλητών”. Για απλότητα θα αναφέρουμε αυτή τη μέθοδο ως “Πρώτη μέθοδος ολοκλήρωσης”. Αυτή θα παρουσιαστεί εκτενώς σε παρακάτω κεφάλαια, συνεπώς δεν θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ.

Η δεύτερη μέθοδος η οποία παρουσιάζεται στο βιβλίο [41] καλείται “Κανονική μορφή των γεννητόρων στο χώρο των πρώτων ολοκληρωμάτων”. Όπως αποδεικνύεται εκεί, αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν το πλήθος των γεννητόρων συμμετρίας είναι ίσο ή μεγαλύτερο από την τάξη της διαφορικής εξίσωσης. Ένα σημαντικό σημείο, άξιο αναφοράς, είναι πως οι γεννήτορες πρέπει να χρησιμοποιηθούν με συγκεκριμένη σειρά. Αυτή εξαρτάται από την άλγεβρα των γεννητόρων. Όταν υπάρχει “επιλύσιμη” υπο-άλγεβρα διάστασης ίσης με την τάξη της διαφορικής και επιπλέον η ολοκλήρωση γίνεται με τη σωστή σειρά, τότε η λύση δίνεται πλήρως με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων. Παρατηρούμε πως έχουμε ένα συνδυασμό μιας συγκεκριμένης μεθόδου ολοκλήρωσης και μιας ιδιότητας της άλγεβρας των γεννητόρων που χρησιμοποιούμε, δηλαδή την επιλυσιμότητα.

Η τελευταία μέθοδος σκιαγραφείται στο [41] (σελίδες 87 – 88), και μελετάται εκτενώς στο [37]. Αναφέρεται ως η μέθοδος των “Διαφορικών αναλλοιώτων”. Έχει αποδειχθεί πως όλα τα διαφορικά αναλλοιώτα ανώτερης τάξης, προκύπτουν από την παράγωγο των δύο αναλλοιώτων χαμηλότερης τάξης, θεωρώντας το ένα ως ανεξάρτητη και το άλλο ως εξαρτημένη μεταβλητή. Αυτή η μέθοδος μπορεί να συνδυαστεί με την ιδιότητα της επιλυσιμότητας, ενώ ταυτόχρονα πρέπει να ακολουθήσουμε τη σωστή σειρά ώστε να χρησιμοποιηθούν όλοι οι γεννήτορες.

Το μειονέκτημα της δεύτερης μεθόδου είναι πως απαιτεί την ύπαρξη αριθμού γεννητόρων τουλάχιστον ίσου με την τάξη της διαφορικής. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ειδικά όταν μελετάμε σύστημα εξισώσεων και όχι μόνο μια, δε συμβαίνει κάτι τέτοιο. Η τρίτη μέθοδος δεν απαιτεί κάποιο κάτω όριο γεννητόρων ώστε να χρησιμοποιηθεί, όμως δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση συστήματος εξισώσεων. Αυτό οφείλεται στο ότι η κατασκευή των διαφορικών αναλλοιώτων ανώτερης τάξης από τα δύο πρώτα, είναι μακράν μη τετριμμένη. Η πιο απλή μέθοδος φαίνεται πως είναι η πρώτη. Η χρήση της δεν εξαρτάται από το πλήθος των γεννητόρων, ούτε και από το αν θα εφαρμοστεί σε σύστημα ή μόνο σε μια εξίσωση.

Κλείνουμε αυτή την εισαγωγή αναφέροντας επιγραμματικά τις ενότητες που θα παρουσιάσουμε παρακάτω, το περιεχόμενο των οποίων μελετήθηκε και χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια αυτής της διατριβής:

1. Παραμετρικοί, σημειακοί μετασχηματισμοί

2. Απειροστοί, παραμετρικοί μετασχηματισμοί
3. Ελεγκτατάμενος γεννήτορας
4. Συνθήκη συμμετρίας, πρώτος φορμαλισμός
5. Συνθήκη συμμετρίας, δεύτερος φορμαλισμός
6. Πρώτη μέθοδος ολοκλήρωσης

I.1 Παραμετρικοί, σημειακοί μετασχηματισμοί

Η ανάλυση και οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε στη παρούσα ενότητα βασίζεται κατά κύριο λόγο στο βιβλίο [41]. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας κάποια συνήθης διαφορική εξίσωση μ-οστής-τάξεως η οποία μπορεί εν γένει να γραφεί στη μορφή

$$H(x, y, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \quad (1.1)$$

όπου, x είναι η ανεξάρτητη και y η εξαρτημένη μεταβλητή, ήτοι $y = y(x)$, ενώ με $(y_1, y_2, \dots)$ θα συμβολίζουμε τις παραγώγους, $y_1 = \frac{dy}{dx}$, $y_2 = \frac{dy_1}{dx}$, και ούτω καθεξής.

Η αναζήτηση **σημειακών** μετασχηματισμών συμμετρίας της (1.1), ξεκινά με την υπόθεση ύπαρξης κάποιου αντιστρέψιμου μετασχηματισμού της μορφής

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y), \quad (1.2)$$

όπου $(\tilde{x}, \tilde{y})$ οι νέες, ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητές αντίστοιχα. Η λέξη **σημειακοί**, εκφράζει τη μη εξάρτηση αυτών των μετασχηματισμών από παραγώγους της εξαρτημένης μεταβλητής ως προς την ανεξάρτητη. Από εδώ και στο εξής, για λόγους απλότητας δεν θα αναφέρουμε τη λέξη σημειακοί, εκτός και αν απαιτηθεί, εννοώντας βέβαια πως εξετάζουμε αυτού του είδους τους μετασχηματισμούς. Εφόσον η εξίσωση (1.1) εξαρτάται και από τις παραγώγους, θα πρέπει να υποθέσουμε μετασχηματισμούς των παραγώγων αντίστοιχα, $(\tilde{y}_1 = \tilde{y}_1(x, y, y_1), \tilde{y}_2 = \tilde{y}_2(x, y, y_1, y_2), \dots)$, οι οποίοι όμως “δεσμεύονται” μέσω των **συνθηκών συνέπειας**, δηλαδή από την απαίτηση $(\tilde{y}_1 = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}, \tilde{y}_2 = \frac{d\tilde{y}_1}{d\tilde{x}}, \dots)$. Η αναζήτηση τέτοιων γενικών μετασχηματισμών συμμετρίας (1.2) είναι εν γένει εξαιρετικά δύσκολη και σίγουρα όχι αλγοριθμική.

Η ιδέα του Lie βασίστηκε στην αναζήτηση **παραμετρικών** μετασχηματισμών, δηλαδή

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y; \epsilon), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \epsilon), \quad (1.3)$$

όπου ϵ κάποια παράμετρος, ως προς την οποία ο παραπάνω μετασχηματισμός αποτελεί ομάδα υπό την πράξη της σύνθεσης των συναρτήσεων.

1. **“Κλειστότητα” (Closure).** Δοθέντων δύο παραμετρικών μετασχηματισμών

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y; \epsilon_1), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \epsilon_1) \quad \text{και} \quad \hat{x} = \hat{x}(\tilde{x}, \tilde{y}; \epsilon_2), \quad \hat{y} = \hat{y}(\tilde{x}, \tilde{y}; \epsilon_2), \quad (1.4)$$

τότε υπάρχει παράμετρος $\epsilon_3 = f(\epsilon_1, \epsilon_2)$, τέτοια ώστε

$$\bar{x} := \hat{x} \circ \tilde{x} = \bar{x}(x, y; \epsilon_3), \quad \bar{y} := \hat{y} \circ \tilde{y} = \bar{y}(x, y; \epsilon_3). \quad (1.5)$$

2. **Προσεταιριστικότητα (Associativity).** Για μετασχηματισμούς (x, y) , $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $(\hat{x}, \hat{y})$ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

$$(x \circ \tilde{x}) \circ \hat{x} = x \circ (\tilde{x} \circ \hat{x}), \quad (y \circ \tilde{y}) \circ \hat{y} = y \circ (\tilde{y} \circ \hat{y}). \quad (1.6)$$

3. **Ύπαρξη ταυτοτικού στοιχείου (Existence of identity element).** Υπάρχει στοιχείο ϵ_0 για το οποίο

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y; \epsilon_0) = x, \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \epsilon_0) = y. \quad (1.7)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε $\epsilon_0 = 0$.

4. **Ύπαρξη αντιστρόφου στοιχείου (Existence of inverse element).** Για κάθε παράμετρο $\bar{\epsilon}$ πρέπει να υπάρχει παράμετρος $\hat{\epsilon}$ έτσι ώστε η σύνθεση των μετασχηματισμών $(\tilde{x}, \tilde{y})$ και $(\hat{x}, \hat{y})$ να είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= f(\epsilon, \hat{\epsilon}) \Leftrightarrow \\ \epsilon_0 &= f(\epsilon, \hat{\epsilon}) \Leftrightarrow \\ f(\epsilon, \hat{\epsilon}) &= 0.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Η ομάδα των παραμετρικών μετασχηματισμών που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται “μονοπαραμετρική ομάδα Lie”, με την προϋπόθεση πως η συνάρτηση f είναι αναλυτική.

I.2 Απειροστοί, παραμετρικοί μετασχηματισμοί

Η ύπαρξη της παραμέτρου δεν απλοποιεί τη διαδικασία εύρεσης των μετασχηματισμών συμμετρίας χωρίς κάποια επιπλέον πληροφορία. Η πληροφορία αυτή μας δίνεται από την απαίτηση η f να είναι αναλυτική, ώστε να μπορούμε να αναλύσουμε κατά Taylor τους μετασχηματισμούς “κοντά” στην ταυτότητα. Μιλώντας μη αυστηρά, ο λόγος που εισήχθη η παράμετρος είναι η “γραμμικοποίηση” του εν γένει μη γραμμικού μετασχηματισμού (1.3), αναμένοντας πως οι συνθήκες συμμετρίας, τις οποίες θα δούμε παρακάτω, θα είναι επίσης γραμμικές εξισώσεις. Επομένως

$$\begin{aligned}\tilde{x} &\simeq x + \left. \frac{\partial \tilde{x}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \tilde{y} \simeq y + \left. \frac{\partial \tilde{y}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \Leftrightarrow \\ \tilde{x} &\simeq x + \xi(x, y)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \tilde{y} \simeq y + \eta(x, y)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \Leftrightarrow \\ \tilde{x} &\simeq x + \epsilon \mathbf{Z}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \tilde{y} \simeq y + \epsilon \mathbf{Z}(y) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{1.9}$$

όπου

$$\xi(x, y) = \left. \frac{\partial \tilde{x}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad \eta(x, y) = \left. \frac{\partial \tilde{y}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0},\tag{1.10}$$

ενώ ο τελεστής $\mathbf{Z}$ ορίζεται ως

$$\mathbf{Z} := \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.\tag{1.11}$$

Για απλότητα από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \dots)$. Ο τελεστής αυτός ονομάζεται **γεννήτορας** των πεπερασμένων παραμετρικών μετασχηματισμών. Μπορεί να ειδωθεί ως ένα ανυσματικό πεδίο στον εφαπτόμενο χώρο όπου η βάση αποτελείται από τα ανυσματικά πεδία (∂_x, ∂_y) . Οι μεταβλητές (x, y) αντιμετωπίζονται ως ανεξάρτητες. Σε κάθε σημείο της καμπύλης $[\tilde{x} = \tilde{x}(x, y; \epsilon), \tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \epsilon)]$ ο $\mathbf{Z}$ αναπαριστά το εφαπτόμενο άνυσμα. Η ονομασία γεννήτορας βασίζεται στο ότι ο **πεπερασμένος** παραμετρικός μετασχηματισμός μπορεί να βρεθεί εαν γνωρίζουμε τις συνιστώσες του $\mathbf{Z}$, επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\xi[\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon)] = \frac{d\tilde{x}(\epsilon)}{d\epsilon}, \quad \eta[\tilde{x}(\epsilon), \tilde{y}(\epsilon)] = \frac{d\tilde{y}(\epsilon)}{d\epsilon},\tag{1.12}$$

με τις συνθήκες

$$\tilde{x}(0) = x, \quad \tilde{y}(0) = y.\tag{1.13}$$

Η ύπαρξη λύσεων του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών, αποδεικνύεται μέσω του θεωρήματος Peano, όπου οι συναρτήσεις ξ, η είναι συνεχείς στις μεταβλητές τους. Η μοναδικότητα της λύσης απαιτεί πιο “ισχυρή” συνέχεια και αποδεικνύεται μέσω του θεωρήματος Picard–Lindelöf. Η σημαντικότητα των παραπάνω θεωρημάτων είναι προφανής αν αναλογιστούμε πως, βρίσκοντας τους απειροστούς μετασχηματισμούς συμμετρίας μιας διαφορικής εξίσωσης, οι αντίστοιχοι πεπερασμένοι θα μπορούν πάντα να κατασκευαστούν.

I.2.1 Πολυ-παραμετρικοί απειροστοί μετασχηματισμοί και η άλγεβρα των γεννητόρων

Στη περίπτωση που αναζητούμε μετασχηματισμούς εξαρτώμενους πέραν της μιας παραμέτρου, τότε αναφερόμαστε σε **πολυ-παραμετρικούς** απειροστούς μετασχηματισμούς, με τις προηγούμενες σχέσεις να γενικεύονται σχετικά απλά

$$\tilde{x} \simeq x + \epsilon^I \mathbf{Z}_I(x) + \mathcal{O}(\epsilon^I \epsilon^J), \quad \tilde{y} \simeq y + \epsilon^I \mathbf{Z}_I(y) + \mathcal{O}(\epsilon^I \epsilon^J), \quad (1.14)$$

όπου οι δείκτες $(I, J, \dots)$ μετρούν το πλήθος των γεννητόρων και έχει χρησιμοποιηθεί η αθροιστική σύμβαση. Γνωρίζουμε βέβαια πως δεν υπάρχει κάποια γεωμετρική δομή στο σύνολο των γεννητόρων, συνεπώς δεν έχει σημασία αν οι δείκτες βρίσκονται “πάνω” ή “κάτω” στο εκάστοτε αντικείμενο. Αποδεικνύεται πως το σύνολο των γεννητόρων $\mathbf{Z}_I$ ικανοποιούν τις ιδιότητες (αξιώματα) της **άλγεβρας** υπό την πράξη της αγκύλης Lie $[\cdot, \cdot]$. Η δράση της ορίζεται ως

$$[\mathbf{Z}_I, \mathbf{Z}_J] = \mathbf{Z}_I(\mathbf{Z}_J) - \mathbf{Z}_J(\mathbf{Z}_I), \quad (1.15)$$

επομένως

$$[\mathbf{Z}_I, \mathbf{Z}_J] = C_{IJ}^M \mathbf{Z}_M, \quad (1.16)$$

όπου με βάση τα θεωρήματα Lie, τα C_{IJ}^M ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες

1. $C_{IJ}^M = \text{σταθερές}$,
2. $C_{IJ}^M = -C_{JI}^M$,
3. $C_{IJ}^M C_{LM}^N + C_{JL}^M C_{IM}^N + C_{LI}^M C_{JM}^N = 0$,
4. $C_{IJ}^M C_{LM}^L = 0$.

Τα σύμβολα C_{IJ}^M ονομάζονται **σταθερές δομής**. Οι σταθερές δομής δεν είναι μοναδικές για την εκάστοτε άλγεβρα. Υποθέτοντας την ύπαρξη κάποιου σταθερού και αντιστρέψιμου πίνακα B_L^I , ο οποίος μετασχηματίζει τους γεννήτορες $\mathbf{Z}_I$ στους $\mathbf{Y}_L$ μέσω της σχέσης $\mathbf{Y}_L = B_L^I \mathbf{Z}_I$, μπορεί να αποδειχθεί πως

$$[\mathbf{Y}_L, \mathbf{Y}_S] = \tilde{C}_{LS}^N \mathbf{Y}_N, \quad (1.17)$$

όπου

$$B_L^I B_S^J C_{IJ}^M = \tilde{C}_{LS}^N B_N^M. \quad (1.18)$$

Στην περίπτωση λοιπόν που έχουμε δύο σύνολα γεννητόρων με σταθερές δομής $C_{(1)IJ}^M, C_{(2)IJ}^M$ και υπάρχει πίνακας B_J^I ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση (1.18), τότε λέμε πως τα σύνολα ανήκουν στην ίδια **κλάση**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση σε διαφορετικές. Παρατηρούμε λοιπόν πως μπορεί να υπάρξει κατηγοριοποίηση των αλγεβρών σε κλάσεις με βάση τις σταθερές δομής τους [43–50]. Σε παρακάτω κεφάλαια θα ασχοληθούμε με μια συγκεκριμένη οικογένεια τέτοιων κλάσεων η οποία ονομάζεται **Bianchi** και οι αντίστοιχες κλάσεις **Bianchi Types**. Να τονίσουμε το γεγονός πως η κατηγοριοποίηση δεν απαιτεί την **πραγμάτωση** (ή αλλιώς αναπαράσταση) των γεννητόρων σε κάποια βάση.

I.3 Επεκτεταμένος γεννήτορας (Prolonged generator)

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η εξίσωση εξαρτάται και από τις παραγώγους, συνεπώς απαιτούμε (ή αναμένουμε) σε απειροστή μορφή να ισχύει

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= y_1 + \epsilon \eta^{(1)}(x, y, y_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \tilde{y}_2 &= y_2 + \epsilon \eta^{(2)}(x, y, y_1, y_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &\vdots \\ \tilde{y}_m &= y_m + \epsilon \eta^{(m)}(x, y, y_1, y_2, \dots, y_m) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= y_1 + \epsilon \mathbf{P}_Z^{(m)}(y_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \tilde{y}_2 &= y_2 + \epsilon \mathbf{P}_Z^{(m)}(y_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &\vdots \\ \tilde{y}_m &= y_m + \epsilon \mathbf{P}_Z^{(m)}(y_m) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}$$

όπου ορίσαμε τον τάξεως (m) **επεκτεταμένο** γεννήτορα ως

$$\mathbf{P}_Z^{(m)} = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y + \eta^{(1)}(x, y, y_1) \partial_{y_1} + \eta^{(2)}(x, y, y_1, y_2) \partial_{y_2} + \dots + \eta^{(m)}(x, y, y_1, y_2, \dots, y_m) \partial_{y_m}. \quad (1.19)$$

Οι μεταβλητές $(x, y, y_1, \dots, y_m)$ θεωρούνται ανεξάρτητες στο χώρο διαστάσεως (m), ενώ ταυτόχρονα στον επαπτόμενο χώρο η συντεταγμένη βάση είναι $(\partial_x, \partial_y, \partial_{y_1}, \partial_{y_2}, \dots, \partial_{y_m})$. Οι συνιστώσες του επεκτεταμένου γεννήτορα $(\eta^{(1)}(x, y, y_1), \eta^{(2)}(x, y, y_1, y_2), \dots, \eta^{(m)}(x, y, y_1, y_2, \dots, y_m))$, λόγω των συνθηκών συνέπειας αποδεικνύεται πως είναι εξαρτημένες από τις συνιστώσες του βασικού γεννήτορα $(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Για την $\eta^{(1)}(x, y, y_1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \Leftrightarrow \\ \tilde{y}_1 &= \frac{\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} y_1}{\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} y_1} \Leftrightarrow \\ \tilde{y}_1 &= \frac{y_1 + \epsilon \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y_1 \right)}{1 + \epsilon \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} y_1 \right)} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\tilde{y}_1 = y_1 + \epsilon \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y_1 \right) - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} y_1 \right) y_1 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.20)$$

όπου από την προ-τελευταία στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε ανάπτυγμα Taylor ως προς την παράμετρο ϵ κρατώντας έως πρώτης τάξης όρους. Ανακαλώντας την προηγούμενη σχέση του $\tilde{y}_1$, προκύπτει

$$\eta^{(1)}(x, y, y_1) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y_1 \right) - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} y_1 \right) y_1, \quad (1.21)$$

ή ισοδύναμα

$$\eta^{(1)}(x, y, y_1) = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dx} y_1. \quad (1.22)$$

Με αντίστοιχο τρόπο βρίσκονται και οι υπόλοιπες συνιστώσες, καταλήγοντας στην αναδρομική σχέση

$$\eta^{(m)}(x, y, y_1, y_2, \dots, y_m) = \frac{d\eta^{(m-1)}}{dx} - \frac{d\xi}{dx} y_m. \quad (1.23)$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως μέχρι στιγμής δεν έχουμε χρησιμοποιήσει σε κάποιο σημείο τη διαφορική εξίσωση, παρά μόνο ως εναρκτήριο λάκτισμα. Συνεπώς, όλα τα παραπάνω είναι καλώς ορισμένα και χωρίς την ύπαρξη κάποιας διαφορικής εξίσωσης. Για μια πιο γεωμετρική προσέγγιση στην εύρεση του επεκτεταμένου γεννήτορα παραπέμπουμε στο βιβλίο [35]. Επίσης, οι επεκτεταμένοι ικανοποιούν την ίδια άλγεβρα με τους βασικούς γεννήτορες. Μια απόδειξη αυτού υπάρχει στο [41].

I.3.1 Παράδειγμα

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα ώστε να γίνουν πιο κατανοητές οι παραπάνω έννοιες. Δίνεται ο γεννήτορας $\mathbf{Z} = -y\partial_x + x\partial_y$ και επομένως

$$\xi(x, y) = -y, \quad \eta(x, y) = x. \quad (1.24)$$

Θα υπολογίσουμε τον (2)-ης τάξης επεκτεταμένο γεννήτορα $\mathbf{P}_Z^{(2)}$.

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(x, y, y_1) &= \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dx}y_1 \Leftrightarrow \\ \eta^{(1)}(x, y, y_1) &= \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y_1 \right) - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y_1 \right) y_1 \Rightarrow \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\eta^{(1)}(x, y, y_1) = 1 + y_1^2. \quad (1.26)$$

Για την τελευταία συνιστώσα έχουμε

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x, y, y_1, y_2) &= \frac{d\eta^{(1)}}{dx} - \frac{d\xi}{dx}y_2 \Leftrightarrow \\ \eta^{(2)}(x, y, y_1, y_2) &= \left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial y}y_1 + \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial y_1}y_2 \right) - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y_1 \right) y_2 \Rightarrow \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\eta^{(2)}(x, y, y_1, y_2) = 3y_1y_2, \quad (1.28)$$

συνεπώς, με βάση τις (1.26), (1.28)

$$\mathbf{P}_Z^{(2)} = -y\partial_x + x\partial_y + (1 + y_1^2)\partial_{y_1} + 3y_1y_2\partial_{y_2}. \quad (1.29)$$

Σχετικά με τον πεπερασμένο, παραμετρικό μετασχηματισμό, οι εξισώσεις (1.12) έχουν ως λύση

$$\tilde{x}(\epsilon) = c_1 \cos \epsilon - c_2 \sin \epsilon, \quad \tilde{y}(\epsilon) = c_2 \sin \epsilon + c_1 \cos \epsilon, \quad (1.30)$$

με την επιβολή των (1.13) να δίνει

$$\tilde{x}(x, y; \epsilon) = x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, \quad \tilde{y}(x, y; \epsilon) = y \sin \epsilon + x \cos \epsilon. \quad (1.31)$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι πως οι “σταθερές” ολοκλήρωσης είναι συναρτήσεις των αρχικών συντεταγμένων (x, y) οι οποίες όμως παραμένουν “βουβές” κατά την ολοκλήρωση των εξισώσεων (1.12), με την έννοια πως αντιμετωπίζονται ως οι αρχικές τιμές των συναρτήσεων $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

I.4 Συνθήκη συμμετρίας, πρώτος φορμαλισμός

Μέχρι στιγμής μελετήσαμε μετασχηματισμούς των μεταβλητών μιας διαφορικής εξίσωσης. Ας δούμε τώρα πως μετασχηματίζεται η ίδια η διαφορική υπό τους μετασχηματισμούς (1.2):

$$\begin{aligned} H(x, y, y_1, \dots, y_m) &= 0 \Rightarrow \\ H(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y}), y_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1), \dots, y_m(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)) &= 0 \Rightarrow \\ \tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) &= 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

όπου $\tilde{H}$ είναι η νέα μορφή της διαφορικής εξίσωσης. Συνεπώς, ο νόμος μετασχηματισμού είναι ίδιος με το νόμο μετασχηματισμού ενός βαθμωτού μεγέθους.

$$H(x, y, y_1, \dots, y_m) = \tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m). \quad (1.33)$$

Ο εκάστοτε μετασχηματισμός θα καλείται **μετασχηματισμός συμμετρίας** αν η μορφή της διαφορικής εξίσωσης παραμένει ίδια, είτε την εκφράσουμε στις νέες είτε στις παλαιές μεταβλητές:

$$H(x, y, y_1, \dots, y_m) = \tilde{H}(x, y, y_1, \dots, y_m), \quad (1.34)$$

ή

$$\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m). \quad (1.35)$$

Σε αυτό το σημείο θα αναζητήσουμε τη **συνθήκη συμμετρίας** που πρέπει να ικανοποιείται θεωρώντας τους απειροστούς, παραμετρικούς μετασχηματισμούς που μελετήσαμε παραπάνω. Ξεκινάμε από τη σχέση (1.33)

$$\begin{aligned} H(x, y, y_1, \dots, y_m) &= \tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \Rightarrow \\ H(x, y, y_1, \dots, y_m) &= \tilde{H}(x + \epsilon \xi, y + \epsilon \eta, y_1 + \epsilon \eta^{(1)}, \dots, y_m + \epsilon \eta^{(m)}) \Rightarrow \\ H(x, y, y_1, \dots, y_m) &= \tilde{H}(x, y, y_1, \dots, y_m) + \epsilon \left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\epsilon=0} \xi + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\epsilon=0} \eta + \dots + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}_m} \Big|_{\epsilon=0} \eta^{(m)} \right] \xrightarrow{(1.34)} \\ 0 &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\epsilon=0} \xi + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\epsilon=0} \eta + \dots + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}_m} \Big|_{\epsilon=0} \eta^{(m)} \Rightarrow \\ \xi \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial y} + \dots + \eta^{(m)} \frac{\partial H}{\partial y_m} &= 0 \xrightarrow{(1.19)} \\ \mathbf{P}_Z^{(m)} H &= 0, \end{aligned} \quad (1.36)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως σε πρώτη τάξη ισχύει $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial x}, \dots$ Η εξίσωση (1.36) περιέχει παραγώγους των συναρτήσεων $\xi(x, y), \eta(x, y)$ ως προς τις μεταβλητές (x, y) και είναι πολυωνμική ως προς τις μεταβλητές $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Επειδή θέλουμε να επιβάλουμε την παραπάνω συνθήκη επί των λύσεων της εξίσωσης (δηλαδή στην υπερεπιφάνεια $H = 0$ του επεκτεταμένου χώρου), πριν αναζητήσουμε λύσεις για τις συναρτήσεις $\xi(x, y), \eta(x, y)$ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και την ίδια την εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει επιλύοντας την (1.1) ως προς κάποια από τις παραγώγους, συνήθως επιλέγουμε τη μέγιστης τάξης, υποθέτοντας πως κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει για την εξίσωση που μελετάμε.

$$\begin{aligned} H(x, y, y_1, \dots, y_m) &= 0 \Leftrightarrow \\ y_m &= \omega(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ως επακόλουθο, η συνθήκη (1.36) θα γραφεί ως

$$\mathbf{P}_Z^{(m)} H = 0, \text{ mod } H = 0. \quad (1.38)$$

Στη παρακάτω υπο-ενότητα θα βρούμε τους γεννήτορες συμμετρίας για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ώστε να γίνουν πιο κατανοητές οι έννοιες που αναφέραμε.

1.4.1 Παράδειγμα

Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y_2 + cy^2 = 0, \quad (1.39)$$

όπου c σταθερά διάφορη του μηδενός. Στη παραπάνω εξίσωση οι παράγωγοι είναι ως προς τη μεταβλητή x . Η συνθήκη συμμετρίας πριν αντικαταστήσουμε την εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} 2cy\eta(x, y) + y_2\partial_y\eta(x, y) - 3y_1y_2\partial_y\xi(x, y) + y_1^2\partial_{y,y}\eta(x, y) - y_1^3\partial_{y,y}\xi(x, y) - 2y_2\partial_x\xi(x, y) + \\ + 2y_1\partial_{x,y}\eta(x, y) - 2y_1^2\partial_{x,y}\xi(x, y) + \partial_{x,x}\eta(x, y) - y_1\partial_{x,x}\xi(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

ενώ αντικαθιστώντας τη μέγιστη παράγωγο από την εξίσωση ($y_2 = -cy^2$) έχουμε

$$-y_1^3 \partial_{y,y} \xi(x, y) + y_1^2 [\partial_{y,y} \eta(x, y) - 2\partial_{x,y} \xi(x, y)] + y_1 [3cy^2 \partial_y \xi(x, y) + 2\partial_{x,y} \eta(x, y) - \partial_{x,x} \xi(x, y)] + (2cy\eta(x, y) - cy^2 \partial_y \eta(x, y) + 2cy^2 \partial_x \xi(x, y) + \partial_{x,x} \eta(x, y)) = 0. \quad (1.41)$$

Η εξίσωση (1.41) είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού ως προς τη μεταβλητή y_1 με συντελεστές συναρτήσεις των (x, y) . Η απαίτηση να λύνεται η παραπάνω εξίσωση για κάθε y_1 , παράγει ένα σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων για τις συναρτήσεις $\xi(x, y), \eta(x, y)$:

$$\begin{aligned} \partial_{y,y} \xi(x, y) &= 0, \quad \partial_{y,y} \eta(x, y) - 2\partial_{x,y} \xi(x, y) = 0, \quad 3cy^2 \partial_y \xi(x, y) + 2\partial_{x,y} \eta(x, y) - \partial_{x,x} \xi(x, y) = 0 \\ 2cy\eta(x, y) - cy^2 \partial_y \eta(x, y) + 2cy^2 \partial_x \xi(x, y) + \partial_{x,x} \eta(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις λύνονται σχετικά απλά

$$\xi(x, y) = y \xi_1(x) + \xi_2(x), \quad \eta(x, y) = y \eta_1(x) + \eta_2(x) + y^2 \partial_x \xi(x). \quad (1.42)$$

Συνεχίζουμε αντικαθιστώντας τις (1.42) στις υπόλοιπες δύο εξισώσεις:

$$y^3 (2c\partial_x \xi_1(x)) + y^2 [c\eta_2(x) + 2c\partial_x \xi_2(x) + \partial_{x,x} \xi_1(x)] + y [2c\eta_1(x) + [\partial_{x,x} \eta_2(x)] + \partial_{x,x} \eta_1(x)] = 0, \quad (1.43)$$

$$y^2 (3c\xi_1(x)) + 3y\partial_{x,x} \xi_1(x) + [2\partial_x \eta_2(x) - \partial_{x,x} \xi_2(x)] = 0. \quad (1.44)$$

Όπως και πριν, θέλουμε λύση για κάθε y συνεπώς μηδενίζουμε κάθε συντελεστή. Από την (1.44) προκύπτει $\xi_1(x) = 0$ και $\eta_2(x) = m_1 + \frac{\partial_x \xi_2(x)}{2}$ όπου $m_1 = \text{σταθερά}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.43) προκύπτει

$$y^2 c \left[m_1 + \frac{5}{2} \partial_x \xi_2(x) \right] + y \left[2c\eta_1(x) + \frac{1}{2} \partial_{x,x} \xi_2(x) \right] + \partial_{x,x} \eta_1(x) = 0.$$

Από τον συντελεστή του y^2 και τον “σταθερό” όρο έχουμε $\eta_1(x) = m_2 x + m_3$, $\xi_2(x) = -\frac{2m_1 x}{5} + m_4$. Τέλος, ο συντελεστής του y δίνει

$$m_3 + m_2 x = 0,$$

συνεπώς για κάθε x πρέπει να ισχύει $m_3 = 0$, $m_2 = 0$. Ο γεννήτορας προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των δύο γεννητόρων βάσης

$$\mathbf{Z} = m_4 \mathbf{Z}_1 - \frac{5}{2} m_1 \mathbf{Z}_2, \quad (1.45)$$

όπου

$$\mathbf{Z}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{Z}_2 = x\partial_x - 2y\partial_y. \quad (1.46)$$

Η άλγεβρα των γεννητόρων είναι μη αβελιανή

$$[\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2] = -\mathbf{Z}_1. \quad (1.47)$$

Ο πεπερασμένος, παραμετρικός μετασχηματισμός που παράγει το ανυσματικό πεδίο $\mathbf{Z}_1$ είναι μια μετάθεση

$$\tilde{x}(x, y; \epsilon_1) = x + \epsilon_1, \quad \tilde{y}(x, y; \epsilon_1) = y. \quad (1.48)$$

Εφόσον δεν υπάρχει εκπεφρασμένη εξάρτηση της εξίσωσης (1.39) από τη μεταβλητή x , είναι εύκολο να παρατηρήσουμε πως ο (1.48) είναι μετασχηματισμός συμμετρίας. Ο δεύτερος γεννήτορας παράγει τον πεπερασμένο, παραμετρικό μετασχηματισμό

$$\tilde{x}(x, y; \epsilon_2) = x e^{\epsilon_2}, \quad \tilde{y}(x, y; \epsilon_2) = y e^{-2\epsilon_2}. \quad (1.49)$$

Υπολογίζοντας τις $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ έχουμε $\tilde{y}_1 = y_1 e^{-3\epsilon_2}$, $\tilde{y}_2 = y_2 e^{-4\epsilon_2}$, ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$x = \tilde{x} e^{-\epsilon_2}, \quad y = \tilde{y} e^{2\epsilon_2}, \quad y_1 = \tilde{y}_1 e^{3\epsilon_2}, \quad y_2 = \tilde{y}_2 e^{4\epsilon_2}. \quad (1.50)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.50) στην εξίσωση (1.39) προκύπτει

$$\begin{aligned} e^{4\epsilon_2} (\tilde{y}_2 + c\tilde{y}^2) &= 0 \Rightarrow \\ \tilde{y}_2 + c\tilde{y}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως και ο $\mathbf{Z}_2$ γεννά μετασχηματισμούς συμμετρίας.

I.5 Συνθήκη συμμετρίας, δεύτερος φορμαλισμός

Υπάρχει και δεύτερος φορμαλισμός της συνθήκης συμμετρίας ο οποίος κάνει προφανή τη σύνδεση μεταξύ μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης και μιας γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Έστω πως η διαφορική εξίσωση (1.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y_m = \omega(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}). \quad (1.52)$$

Ένα πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης αυτής της διαφορικής, θα έχει εν γένει τη μορφή $w = w(x, y, y_1, \dots, y_{m-1})$ και θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dw}{dx} = 0, \quad (1.53)$$

επί της εξίσωσης (1.52). Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = 0 &\Rightarrow \\ \partial_x w + y_1 \partial_y w + \dots + y_m \partial_{y_{m-1}} w &= 0 \Rightarrow \\ \partial_x w + y_1 \partial_y w + \dots + \omega(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}) \partial_{y_{m-1}} w &= 0 \Rightarrow \\ \mathbf{A}w &= 0, \end{aligned} \quad (1.54)$$

όπου αντικαταστήσαμε την ανώτερης τάξης παράγωγο από την εξίσωση (1.52). Λόγω αυτής της αντικατάστασης, ο τελεστής $\mathbf{A}$ αναπαριστά την εξίσωση στο χώρο των ανυσματικών πεδίων με διάσταση $m+1$.

$$\mathbf{A} = \partial_x + y_1 \partial_y + \dots + \omega(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}) \partial_{y_{m-1}}. \quad (1.55)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Κάθε ολοκλήρωμα της κίνησης μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης τάξης m , (1.52), είναι λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης σε $m+1$ μεταβλητές, (1.54). Ισχύει και το αντίστροφο.

Όσον αφορά τη συνθήκη συμμετρίας σε αυτό το φορμαλισμό, αυτή είναι

$$[\mathbf{P}_Z^{(m-1)}, \mathbf{A}] = \lambda(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}) \mathbf{A} \equiv -(\mathbf{A}\xi) \mathbf{A}. \quad (1.56)$$

Η απόδειξη πως η (1.56) αποτελεί συνθήκη συμμετρίας καθώς και η ισοδυναμία μεταξύ των δύο φορμαλισμών αποδεικνύεται στο βιβλίο [41]. Παρατηρούμε τα εξής:

1. Σε αντίθεση με τον πρώτο φορμαλισμό, εδώ χρειαζόμαστε τον επεκτεταμένο γεννήτορα τάξης $(m-1)$ και όχι τάξης m .
2. Η συνθήκη (1.56) είναι ανυσματική ενώ η (1.38) είναι βαθμωτή. Παρόλα αυτά, προκύπτει πως όλες οι συνιστώσες της (1.56) εκτός της τελευταίας, ικανοποιούνται ταυτοτικά.
3. Ο φορμαλισμός μέσω ανυσματικών πεδίων παρέχει ευχέρεια σχετικά με κάποιες ιδιότητες που αφορούν στη χρήση των γεννητόρων, όπως θα δούμε παρακάτω.

I.6 Πρώτη μέθοδος ολοκλήρωσης

Έστω η παρακάτω διαφορική εξίσωση και ο αντίστοιχος διαφορικός τελεστής της

$$y_m = \omega(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}), \quad (1.57)$$

$$\mathbf{A} = \partial_x + y_1 \partial_y + \dots + \omega(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}) \partial_{y_{m-1}}. \quad (1.58)$$

Επιπλέον, υποθέτουμε πως η (1.57) επιδέχεται μια ομάδα συμμετρίας διαστάσεως r με γεννήτορες $\mathbf{Z}_I$, $I = 1, \dots, r$. Επιλέγουμε έναν από τους γεννήτορες, χωρίς βλάβη της γενικότητας τον $\mathbf{Z}_1$. Αναζητούμε αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς $t(x, y)$, $s(x, y)$ όπου t η νέα ανεξάρτητη και s η νέα εξαρτημένη μεταβλητή,

έτσι ώστε στις νέες συντεταγμένες (t, s) ο γεννήτορας να μετασχηματιστεί στην κανονική του μορφή, δηλαδή είτε $\mathbf{Z}_1 = \partial_t$, είτε $\mathbf{Z}_1 = \partial_s$. Αυτή ονομάζεται “**κανονική μορφή των γεννητόρων στο χώρο των μεταβλητών**”. Αποδεικνύεται πως για ένα γεννήτορα, αυτό μπορεί πάντα να επιτευχθεί. Στις νέες μεταβλητές η εξίσωση καθώς και ο αντίστοιχος τελεστής αποκτούν τη μορφή

$$s_m = \tilde{\omega}(t, s, s_1, \dots, s_{m-1}), \quad (1.59)$$

$$\mathbf{A} = \partial_t + s_1 \partial_s + \dots + \omega(t, s, s_1, \dots, s_{m-1}) \partial_{s_{m-1}}. \quad (1.60)$$

1.6.1 Περίπτωση $\mathbf{Z}_1 = \partial_t$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη συμμετρίας (1.56) σε αυτή την περίπτωση παρατηρώντας πως η επέκταση κάθε ταξής ενός γεννήτορα στην κανονική του μορφή, ταυτίζεται με το γεννήτορα, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(m-1)} = \partial_t$.

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(m-1)}, \mathbf{A}] &= -(\mathbf{A}\xi_1)\mathbf{A} \Rightarrow \\ \partial_t \tilde{\omega}(t, s, s_1, \dots, s_{m-1}) &= 0 \Rightarrow \\ \tilde{\omega}(t, s, s_1, \dots, s_{m-1}) &= \tilde{\omega}(s, s_1, \dots, s_{m-1}). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Συνεπώς, η εξίσωση (1.59) είναι *αυτόνομη* στις νέες μεταβλητές, δηλαδή δεν εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή,

$$s_m = \tilde{\omega}(s, s_1, \dots, s_{m-1}). \quad (1.62)$$

Το μόνο που κάναμε ήταν να επιλέξουμε ένα διαφορετικό σύστημα μεταβλητών, επομένως οι εξισώσεις (1.57), (1.62) περιγράφουν το ίδιο φυσικό σύστημα. Αυτό συνεπάγεται πως η μη αυτονομία μιας διαφορικής εξίσωσης, η οποία επιδέχεται ένα τουλάχιστον γεννήτορα συμμετρίας, μπορεί να θεωρηθεί ως “κακή” επιλογή συστήματος μεταβλητών.

1.6.2 Περίπτωση $\mathbf{Z}_1 = \partial_s$

Ο επεκτεταμένος γεννήτορας και σε αυτή την περίπτωση έχει τις ίδιες μη μηδενικές συνιστώσες με το βασικό γεννήτορα, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(m-1)} = \partial_s$ οδηγώντας μέσω της συνθήκης συμμετρίας στην απλοποίηση

$$\tilde{\omega}(t, s, s_1, \dots, s_{m-1}) = \tilde{\omega}(t, s_1, \dots, s_{m-1}). \quad (1.63)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η εξίσωση θα λάβει τη μορφή

$$s_m = \tilde{\omega}(t, s_1, \dots, s_{m-1}), \quad (1.64)$$

δηλαδή δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή s . Αυτό δίνει τη δυνατότητα να περιοριστούμε στην υπερ-επιφάνεια $s = \text{σταθερά}$, η οποία ορίζουμε πως θα έχει ως “εσωτερικές” μεταβλητές τις $t, u, u_1, \dots, u_{m-1}$. Η μετάβαση από τον πλήρη χώρο στην υπερ-επιφάνεια δίνεται από τη σχέση $s = \text{σταθερά}, u = s_1, u_1 = s_2, \dots, u_{m-1} = s_m$. Επομένως, η εξίσωση (1.64) είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση τάξεως $(m-1)$ και ένα ολοκλήρωμα

$$u_{m-1} = \tilde{\omega}(t, u, u_1, \dots, u_{m-2}), \quad (1.65)$$

$$s(t) = \int u(t) dt + c_1, \quad (1.66)$$

όπου c_1 κάποια σταθερά ολοκλήρωσης. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1:

Οι λύσεις μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης (Σ. Δ. Ε.) τάξεως (m) , η οποία επιδέχεται τουλάχιστον ένα γεννήτορα συμμετρίας (Γ. Σ.), μπορούν να βρεθούν από την επίλυση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης τάξεως $(m-1)$ και ένα ολοκλήρωμα.

$$(\text{Σ. Δ. Ε.}) \text{ τάξεως } (m) + 1(\text{Γ. Σ.}) \equiv (\text{Σ. Δ. Ε.}) \text{ τάξεως } (m-1) + 1(\text{Ολοκλήρωμα}). \quad (1.67)$$

Παρατηρήσεις:

1. Έχοντας μια εξίσωση της μορφής (1.57), θα μπορούσε κάποιος να αναζητήσει στην “τύχη” μετασχηματισμούς των μεταβλητών που οδηγούν είτε σε μια ισοδύναμη αυτόνομη εξίσωση (Περίπτωση 1), είτε σε μια ισοδύναμη εξίσωση τάξεως κατά ένα μικρότερης συν ένα ολοκληρώμα (Περίπτωση 2). Ένα από τα πλεονεκτήματα που παρέχει η γνώση των γεννητόρων συμμετρίας είναι ένας συστηματικός τρόπος εύρεσης αυτών των μετασχηματισμών.
2. Όσον αφορά την επίλυση της εξίσωσης, παρατηρούμε πως εν γένει είναι “καλύτερο” να μετασχηματίσουμε το γεννήτορα σε κανονική μορφή ως προς τη νέα εξαρτημένη μεταβλητή (Περίπτωση 2) καθώς έτσι θα μειωθεί η τάξη της διαφορικής εξίσωσης με την εισαγωγή των μεταβλητών της υπερ-επιφάνειας.
3. Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχει τρόπος ώστε να γνωρίζουμε ποιοι από τους υπόλοιπους γεννήτορες συμμετρίας της αρχικής διαφορικής εξίσωσης, θα “κληροδοτηθούν” στη μειωμένης τάξης (1.65). Αυτό εξαρτάται από την επιλογή του $\mathbf{Z}_1$.
4. Εάν επαναλάβουμε τη συνθήκη συμμετρίας για την εξίσωση (1.65), ο αριθμός των γεννητόρων συμμετρίας που θα βρεθούν, θα διαφέρει εν γένει από τον αριθμό των κληρονομηθέντων. Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις οι γεννήτορες που κληρονομούνται είναι το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε, καθώς η επίλυση των συνθηκών συμμετρίας είναι αρκετά δύσκολη. Επιπλέον, όταν καταλήξουμε σε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, αυτή επιδέχεται άπειρο πλήθος συμμετριών, ωστόσο δεν υπάρχει αλγοριθμικός τρόπος να βρεθεί ούτε μια [41]. Όπως θα δούμε και σε μια από τις εφαρμογές με τις οποίες ασχοληθήκαμε στη συγκεκριμένη διατριβή, σε κάποιες περιπτώσεις η εύρεση των γεννητόρων συμμετρίας γίνεται μέσω γεωμετρικών συνθηκών-απαιτήσεων χωρίς να ασχοληθούμε με τις συνθήκες συμμετρίας. Αν δεν υπάρχει κάποιος γεννήτορας που κληρονομείται τότε δεν μένει άλλη επιλογή από τις συνθήκες συμμετρίας.
5. Τετριμμένα μπορεί κάποιος να καταλήξει στο συμπέρασμα: εάν η διαδικασία μείωσης της τάξης μπορεί να επαναληφθεί (m) φορές, δηλαδή όσο και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης, τότε η αναλυτική της λύση μπορεί να βρεθεί μέσω της λύσης μιας αλγεβρικής εξίσωσης και (m) ολοκληρωμάτων.

I.6.3 Συνθήκες “κληρονομικότητας”

Ας δούμε τώρα ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί ένας γεννήτορας ώστε να αποτελεί γεννήτορα συμμετρίας και της μειωμένης τάξης διαφορικής εξίσωσης. Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο [41].

Θεώρημα 2:

Έστω διαφορική εξίσωση τάξεως (m) με αντίστοιχο διαφορικό τελεστή $\mathbf{A}$ στις μεταβλητές $(x, y, y_1, \dots, y_{m-1})$, η οποία επιδέχεται r το πλήθος $\mathbf{Z}_M$ γεννήτορες συμμετρίας, $M = 1, \dots, r$. Χρησιμοποιούμε μεταβλητές (t, s) στις οποίες ένας από τους γεννήτορες, έστω ο $\mathbf{Z}_1$, μετασχηματίζεται σε κανονική μορφή ως προς τη μεταβλητή s . Τότε οι γεννήτορες $\mathbf{Z}_{\tilde{l}}, \tilde{l} = 2, \dots, \tilde{M} \leq M$, οι οποίοι κληρονομούνται θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη “κληρονομικότητας”

$$[\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_{\tilde{l}}] = C_{1\tilde{l}}^1 \mathbf{Z}_1 \Leftrightarrow C_{1\tilde{l}}^\mu = 0, \mu = 2, \dots, M. \quad (1.68)$$

Αξίζει να σημειώσουμε, αν και είναι σχετικά προφανές, πως η βέλτιστη επιλογή $\mathbf{Z}_1$ είναι εκείνη για την οποία το πλήθος των $\mathbf{Z}_{\tilde{l}}$ είναι μέγιστο. Τέλος, η διαφορική εξίσωση μειωμένης τάξης θα έχει ως βασικές μεταβλητές τις (t, u) , όπου $u = s_1$, συνεπώς οι γεννήτορες που θα κληρονομηθούν θα πρέπει να εκφραστούν στη βάση (∂_t, ∂_u) . Επειδή $u = s_1$, για να κατασκευάσουμε το σωστό γεννήτορα που κληρονομείται και παράγει σημειακές συμμετρίες της μειωμένης τάξης διαφορικής εξίσωσης, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πρώτη επέκταση των γεννητόρων $\mathbf{Z}_{\tilde{l}}$:

$$\mathbf{Y}_{\tilde{l}} = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\tilde{l}}}^{(1)}(t)\partial_t + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\tilde{l}}}^{(1)}(u)\partial_u. \quad (1.69)$$

Ελπίζουμε πως αυτή η διαδικασία θα γίνει κατανοητή με το παρακάτω παράδειγμα.

I.6.4 Παράδειγμα

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y_2 - \frac{(xy_1 - y)^3}{x^2} = 0, \quad (1.70)$$

η οποία επιδέχεται δύο γεννήτορες συμμετρίας

$$\mathbf{Z}_1 = x\partial_x, \mathbf{Z}_2 = x\partial_y, [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2] = \mathbf{Z}_2. \quad (1.71)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την άλγεβρα που σχηματίζουν και τις συνθήκες κληρονομικότητας, πρέπει να ξεκινήσουμε τη διαδικασία με το γεννήτορα $\mathbf{Z}_2$.

I.6.5 “Ορθή” διαδικασία μείωσης της τάξης

Αναζητούμε νέα ανεξάρτητη $t(x, y)$ και εξαρτημένη μεταβλητή $s(x, y)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2(t(x, y)) &= 0, \mathbf{Z}_2(s(x, y)) = 1 \Leftrightarrow \\ x\partial_y t(x, y) &= 0, x\partial_y s(x, y) = 1 \Rightarrow \\ t(x, y) &= \tilde{t}(x), s(x, y) = \frac{y}{x} + \tilde{s}(x). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Οι συναρτήσεις $\tilde{t}(x)$, $\tilde{s}(x)$ είναι αυθαίρετες εν γένει, ωστόσο η περίπτωση $\tilde{t}(x) = 0$ δεν είναι αποδεκτή, διότι ο μετασχηματισμός πρέπει να είναι αντιστρέψιμος. Για λόγους απλότητας επιλέγουμε $\tilde{t}(x) = x$, $\tilde{s}(x) = 0$. Υπολογίζουμε τις παραγώγους $s_1 = \frac{ds}{dt}$, $s_2 = \frac{ds_1}{dt}$,

$$s_1 = \frac{xy_1 - y}{x^2}, s_2 = \frac{x^2 y_2 + 2(y - xy_1)}{x^3}, \quad (1.73)$$

και αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό έχουμε

$$x = t, y = st, y_1 = s + s_1 t, y_2 = 2s_1 + s_2 t. \quad (1.74)$$

Υπό το μετασχηματισμό (1.74) η εξίσωση (1.70), οι γεννήτορες και η πρώτη επέκταση τους λαμβάνουν τη μορφή

$$s_2 - \frac{s_1(-2 + s_1^2 t^4)}{t} = 0. \quad (1.75)$$

$$\mathbf{Z}_1 = t\partial_t - s\partial_s, \mathbf{Z}_2 = \partial_s, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(1)} = t\partial_t - s\partial_s - 2s_1\partial_{s_1}, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_2}^{(1)} = \partial_s. \quad (1.76)$$

Η μείωση της τάξης είναι προφανής στις μεταβλητές (t, u) όπου $u = s_1$, καθώς

$$u_1 - \frac{u(-2 + u^2 t^4)}{t} = 0. \quad (1.77)$$

Η εξίσωση μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια νέα εξίσωση με μεταβλητές (t, u) . Οι σημειακές της συμμετρίες θα παράγονται από γεννήτορες οι οποίοι θα έχουν συνιστώσες στη βάση (∂_t, ∂_u) . Όμως επειδή ισχύει $u = s_1$ για να γίνει σωστά η σύνδεση μεταξύ των γεννητόρων στα δύο “επίπεδα”, χρειαζόμαστε την πρώτη επέκταση αυτών στις μεταβλητές (x, y) . Αναλυτικά θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(1)}(t)\partial_t + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(1)}(u)\partial_u \Leftrightarrow \\ \mathbf{Y}_1 &= [t\partial_t(t) - s\partial_s(t) - 2s_1\partial_{s_1}(t)]\partial_t + [t\partial_t(u) - s\partial_s(u) - 2s_1\partial_{s_1}(u)]\partial_u \Leftrightarrow \\ \mathbf{Y}_1 &= [t\partial_t(t) - s\partial_s(t) - 2s_1\partial_{s_1}(t)]\partial_t + [t\partial_t(s_1) - s\partial_s(s_1) - 2s_1\partial_{s_1}(s_1)]\partial_u \Leftrightarrow \\ \mathbf{Y}_1 &= t\partial_t - 2s_1\partial_u \xrightarrow{(1.73)} \\ \mathbf{Y}_1 &= t\partial_t - 2u\partial_u. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα καταλήγουμε στο μάλλον αναμενόμενο αποτέλεσμα $\mathbf{Y}_2 = 0$. Ας ελέγξουμε πως πράγματι ο γεννήτορας $\mathbf{Y}_1$ παράγει συμμετρίες της διαφορικής εξίσωσης (1.77). Επιλύουμε τις εξισώσεις (1.12) με τις αρχικές συνθήκες (1.13) για το γεννήτορα $\mathbf{Y}_1$ και προκύπτει

$$\tilde{t} = e^\lambda t, \tilde{u} = e^{-2\lambda} u, \tilde{u}_1 = e^{-3\lambda} u_1,$$

με αντίστροφο

$$t = e^{-\lambda} \tilde{t}, u = e^{2\lambda} \tilde{u}, u_1 = e^{3\lambda} \tilde{u}_1. \quad (1.79)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.79) στην εξίσωση (1.77) προκύπτει

$$\begin{aligned} e^{3\lambda} \tilde{u}_1 - \frac{e^{2\lambda} \tilde{u} (-2 + e^{4\lambda} \tilde{u}^2 e^{-4\lambda} \tilde{t}^4)}{e^{-\lambda} \tilde{t}} &= 0 \Leftrightarrow \\ e^{3\lambda} \left[\tilde{u}_1 - \frac{\tilde{u} (-2 + \tilde{u}^2 \tilde{t}^4)}{\tilde{t}} \right] &= 0 \Rightarrow \\ \tilde{u}_1 - \frac{\tilde{u} (-2 + \tilde{u}^2 \tilde{t}^4)}{\tilde{t}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Πράγματι λοιπόν παράγει συμμετρίες ο $\mathbf{Y}_1$ καθώς η εξίσωση είναι ίδια στη μορφή στο σύστημα $(\tilde{t}, \tilde{u})$, συνεπώς μπορούμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία.

Έστω νέες μεταβλητές (τ, w) στις οποίες ο γεννήτορας $\mathbf{Y}_1$ λαμβάνει τη μορφή $\mathbf{Y}_1 = \partial_w$. Ο μετασχηματισμός είναι

$$\tau = t^2 u, w = \ln t, w_1 = \frac{1}{2t^2 u + t^3 u_1}, \quad (1.81)$$

$$t = e^w, u = e^{-2w} \tau, u_1 = \frac{e^{-3w} (1 - 2w_1 \tau)}{w_1}, \quad (1.82)$$

με την εξίσωση (1.77) να μετασχηματίζεται στη

$$w_1 = \frac{1}{\tau^3}. \quad (1.83)$$

Σε αυτό το σημείο η περαιτέρω εισαγωγή μεταβλητής $q = w_1$ ώστε να είναι προφανής η μείωση της τάξης είναι τετριμμένη, καθώς η παραπάνω εξίσωση ολοκληρώνεται.

$$w(\tau) = m_1 - \frac{1}{2\tau^2}, \quad (1.84)$$

όπου m_1 σταθερά ολοκλήρωσης. Αν θέλουμε να επιστρέψουμε στις αρχικές μεταβλητές, αρκεί να ανακαλέσουμε τους μετασχηματισμούς που κάναμε σε κάθε βήμα. Από τις μεταβλητές (τ, w) επιστρέφουμε στις (t, u) μέσω του (1.81).

$$\ln t = m_1 - \frac{1}{2t^4 u^2} \Rightarrow u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2t^2 \sqrt{m_1 - \ln t}}}. \quad (1.85)$$

Τώρα επιστρέφουμε στο αρχικό επίπεδο όπου $u = s_1$

$$\begin{aligned} s_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{2t^2 \sqrt{m_1 - \ln t}}} \Rightarrow s(t) = \pm \int \frac{1}{\sqrt{2t^2 \sqrt{m_1 - \ln t}}} dt \Rightarrow \\ s(t) &= m_2 \mp e^{-m_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erfi} \left(\sqrt{m_1 - \ln t} \right), \end{aligned} \quad (1.86)$$

όπου $Erfi$ η μιγαδική συνάρτηση σφάλματος και m_2 η δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης. Τέλος, μέσω του μετασχηματισμού (1.72) πηγαίνουμε από τις μεταβλητές (t, s) στις (x, y) . Η λύση έχει τη μορφή

$$y(x) = x \left[m_2 \mp e^{-m_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} Erfi \left(\sqrt{m_1 - \ln x} \right) \right]. \quad (1.87)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε πως σε αρκετές περιπτώσεις καταλήγουμε να έχουμε βρει τη γενική λύση στις συντεταγμένες (t, s) αλλά όταν χρησιμοποιήσουμε τις συντεταγμένες (x, y) η λύση δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $y = f(x)$. Αυτό δε σημαίνει πως η λύση δεν έχει βρεθεί, καθώς όπως παρατηρούμε, ήδη στο επίπεδο που έχουμε την έκφραση $s = s(t)$, έχουμε τη γενική λύση της αρχικής εξίσωσης απλώς σε ένα διαφορετικό σύστημα μεταβλητών. Θεωρούμε σε αυτό το σημείο πως η συμβολική αναπαράσταση των βημάτων που ακολουθήσαμε θα βοηθούσε:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\xrightarrow[\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2]{\text{Κανονική μορφή του } \mathbf{Z}_2} (\mathbf{t}, \mathbf{s}) \xrightarrow[\mathbf{Z}_1 \rightarrow \mathbf{Y}_1 = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(1)}(t) \partial_t + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(1)}(u) \partial_u]{\text{Μείωση τάξης } (u=s_1)} (\mathbf{t}, \mathbf{u}) \rightarrow \\ (\mathbf{t}, \mathbf{u}) &\xrightarrow[\text{Ολοκλήρωση}]{\text{Κανονική μορφή του } \mathbf{Y}_1} (\tau, \mathbf{w}) \xrightarrow[\text{Ολοκλήρωση}]{\text{Τετριμμένη μείωση τάξης}} \mathbf{w} = \mathbf{w}(\tau, m_1) \rightarrow \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}(\tau, m_1) &\xrightarrow[\tau = \tau(t, u)]{w=w(t, u)} \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t}, m_1) \xrightarrow[\text{Ολοκλήρωση}]{u=s_1} \mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{t}, m_1, m_2) \rightarrow \\ \mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{t}, m_1, m_2) &\xrightarrow[s=s(x, y)]{t=t(x, y)} \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, m_1, m_2). \end{aligned} \quad (1.88)$$

1.6.6 Μη “ορθή” διαδικασία μείωσης της τάξης

Σε αυτή την υπο-ενότητα θα επιβεβαιώσουμε πως αν ξεκινήσουμε τη διαδικασία με το γεννήτορα $\mathbf{Z}_1$ τότε ο γεννήτορας $\mathbf{Z}_2$ δε θα παραμείνει γεννήτορας συμμετρίας της μειωμένης τάξης διαφορικής εξίσωσης. Θεωρούμε και πάλι μεταβλητές (t, s) στις οποίες $\mathbf{Z}_1 = \partial_s$ υπό το μετασχηματισμό

$$t = y, s = \ln x, s_1 = \frac{1}{xy_1}, s_2 = -\frac{y_1 + xy_2}{x^2 y_1^3}, \quad (1.89)$$

$$x = e^s, y = t, y_1 = \frac{e^{-s}}{s_1}, y_2 = -\frac{e^{-2s} (s_1^2 + s_2)}{s_1^3}. \quad (1.90)$$

Η εξίσωση, οι γεννήτορες και οι πρώτες επεκτάσεις των γεννητόρων είναι

$$s_2 = (-1 + s_1 t)^3 - s_1^2, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \partial_s, \mathbf{Z}_2 = e^s \partial_t, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_1}^{(1)} = \partial_s, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_2}^{(1)} = e^s (\partial_t - s_1^2 \partial_s). \quad (1.92)$$

Στην επιφάνεια $s = \text{σταθερά}$ με τις μεταβλητές (t, u) όπου $u = s_1$, ο παράγοντας e^s μπροστά από το γεννήτορα $\mathbf{Z}_2$ είναι σταθερός. Η τάξη της εξίσωσης μειώνεται και ο αντίστοιχος γεννήτορας $\mathbf{Y}_2$ είναι

$$u_1 = (-1 + ut)^3 - u^2, \quad (1.93)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \partial_t - u^2 \partial_u. \quad (1.94)$$

Το ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε είναι εάν ο $\mathbf{Y}_2$ είναι γεννήτορας συμμετρίας της (1.93). Όπως και πριν, βρίσκουμε τον πεπερασμένο μετασχηματισμό

$$\tilde{t} = t + \lambda, \tilde{u} = \frac{u}{1 + u\lambda}, \tilde{u}_1 = \frac{u_1}{(1 + u\lambda)^2}, \quad (1.95)$$

$$t = \tilde{t} - \lambda, u = \frac{\tilde{u}}{1 - \tilde{u}\lambda}, u_1 = \frac{\tilde{u}_1}{(1 - \tilde{u}\lambda)^2}. \quad (1.96)$$

Χρησιμοποιούμε τις (1.96) στην εξίσωση (1.93) και καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή

$$\tilde{u}_1 = -\tilde{u}^2 + \frac{1 - 3\tilde{t}\tilde{u} + 3\tilde{t}^2\tilde{u}^2 - \tilde{t}^3\tilde{u}^3}{-1 + \tilde{u}\lambda}. \quad (1.97)$$

Παρατηρούμε πως αυτή η εξίσωση διαφέρει σε μορφή από την (1.93), συνεπώς ο $\mathbf{Y}_2$ δεν είναι γεννήτορας συμμετρίας. Όπως αναφέραμε στη παρατήρηση (4) της ενότητας II.2.2, δεν υπάρχει αλγοριθμικός τρόπος να βρεθεί κάποια συμμετρία μιας πρώτης τάξης διαφορικής εξίσωσης, συνεπώς ακολουθώντας αυτή τη διαδρομή δε μπορούμε να καταλήξουμε στην ολοκλήρωση του συστήματος.

Κεφάλαιο 2

$(d + 1)$ Ανάλυση

I Εισαγωγή

Ο $(3 + 1)$ φορμαλισμός (και αντίστοιχα η $(d + 1)$ γενίκευση αυτού) είναι μια μέθοδος μελέτης της γενικής σχετικότητας η οποία βασίζεται στη δυνατότητα περιγραφής της πολλαπλότητας M ως Καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times S$, όπου S είναι 3-διάστατες υπερ-επιφάνειες και $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αυτή η μέθοδος μπορεί να ειπωθεί ως ανάλυση του χωρόχρονου σε “χώρο” + “χρόνο”, επιτρέποντας τη μελέτη της χρονικής εξέλιξης μεγεθών τα οποία είναι ορισμένα στις υπερ-επιφάνειες. Φυσικά αυτή η ανάλυση δεν αποτελεί κάποια *a priori* δομή του χωρόχρονου, αλλά επαφίεται στην εκάστοτε επιλογή συστήματος συντεταγμένων. Ταυτόχρονα επιτρέπει και τη μορφοποίηση των εξισώσεων Einstein ως ένα πρόβλημα Cauchy με συνδέσμους. Ωστόσο, με στόχο να διατηρηθεί η μορφή της μετρικής σε αυτή την επιλογή συστήματος συντεταγμένων, “χαλάει” η συναλλοιότητα των εξισώσεων Einstein υπό χωροχρονικούς μετασχηματισμούς. Παραμένει βέβαια η θεωρία συναλλοιώτη κάτω από “χωρικούς” και “χρονικούς” ξεχωριστά μετασχηματισμούς. Η πρώτη αναφορά αυτής της ανάλυσης έγινε από τον George Darmois [51]. Στη συνέχεια έχουμε τη συμβολή του Andre Lichnerowicz με τις εξής δημοσιεύσεις [52–54]. Η Yvonne Choquet-Bruhat κατάφερε να αποδείξει πως το πρόβλημα Cauchy έχει μοναδική λύση τοπικά [55, 56].

Η προσπάθεια κατασκευής Χαμιλτονιανής η οποία θα περιγράφει τη δυναμική των εξισώσεων Einstein ξεκίνησε από τον Dirac [58, 231], με τη συνέχεια να γίνεται από τον Schwinger ο οποίος χρησιμοποίησε το φορμαλισμό της γενικής σχετικότητας μέσω των τετράδων [59, 60]. Στις μέρες μας, ο Χαμιλτονιανός φορμαλισμός που χρησιμοποιείται περισσότερο είναι εκείνος των Arnowitt, Deser, and Misner (ADM) [62–64, 232]. Ο Wheeler ήταν αυτός που εισήγαγε αυτό που σήμερα καλείται γεωμετροδυναμική και τις ονομασίες lapse και shift [240]. Η $(3 + 1)$ ανάλυση χρησιμοποιείται ευρέως στις αριθμητικές μεθόδους ολοκλήρωσης των εξισώσεων Einstein. Ο York κατέχει το ρόλο του εισηγητή καθώς έφερε στη κατάλληλη μορφή τις αντίστοιχες εξισώσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται πλέον από την κοινότητα [66, 67].

Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται και ο όρος $(1 + 3)$ ανάλυση ο οποίος μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση. Στην ουσία πρόκειται για ένα φορμαλισμό ο οποίος προσπαθεί να αναλύσει και να περιγράψει τα φυσικά πεδία μέσω ποσοτήτων, όπως η πυκνότητα, η πίεση και τα λοιπά. Η όλη προσπάθεια βασίζεται στον ορισμό αυτών των ποσοτήτων με συναλλοίωτο τρόπο, δηλαδή αποφεύγοντας τη χρήση κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Αυτό είναι εφικτό με την εισαγωγή ενός ανυσματικού πεδίου, του οποίου οι ολοκληρωτικές γραμμές διατρέχουν το χωρόχρονο. Συνεπώς έχουμε μονοδιάστατες ολοκληρωτικές καμπύλες, $(1 + 3)$ ανάλυση έναντι, 3-διάστατων υπερ-επιφανειών, $(3+1)$ ανάλυση. Οι δύο αυτοί φορμαλισμοί συμπίπτουν όταν το ανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο και οι αντίστοιχες υπερ-επιφάνειες στις οποίες είναι κάθετο χρησιμοποιούνται ώστε να αναλυθεί η πολλαπλότητα σε γινόμενο $\mathbb{R} \times S$. Οι συνιστώσες κάθε ταυνοστικού αντικειμένου αναλύονται κάθετα και παράλληλα ως προς αυτό το πεδίο. Παραθέτουμε μόνο ελάχιστες από τις αναφορές. Η αρχή έγινε με τους Heckmann, Schucking και Raychaudhuri [68, 69]. Η εξίσωση Raychaudhuri είναι αυτή που χρησιμοποιείται ευρέως στη μελέτη των ανωμαλιών, για παράδειγμα σε

βαρυτική κατάρρευση ή στην ανωμαλία της μεγάλης έκρηξης [70, 71]. Μια σύγχρονη αναδρομή δίνεται στις [72, 73]. Εκτενής είναι η χρήση της συγκεκριμένης ανάλυσης και στο πεδίο της κοσμολογίας [74, 75].

Στην παρούσα διατριβή, οι συμβολισμοί βασίζονται κατά κύριο λόγο στα εξής βιβλία [75–77]. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναφέρουμε επιγραμματικά τις ενότητες

1. Κινηματική ανάλυση
2. Υπερ-επιφάνειες, μοναδιαίο άνυσμα κάθετο σε υπερ-επιφάνεια
3. Βαρύτητα+Ηλεκτρομαγνητισμός+Ρευστά

I.1 Κινηματική ανάλυση

Έστω πολλαπλότητα M διάστασης $(d + 1)$ και σύστημα συντεταγμένων $\mathcal{U}$ με συντεταγμένες x^μ . Θεωρούμε την πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μετρική $\mathbf{g} = g_{\mu\nu}(x^\sigma)dx^\mu \otimes dx^\nu$. Για λόγους απλότητας, θα θεωρήσουμε δεδομένη την εξάρτηση από τις συντεταγμένες, αναγράφοντας τα αντικείμενα ως εξής $A_{\mu\nu\dots}(x^\sigma) = A_{\mu\nu\dots}$ εκτός και αν χρειαστεί να αναφέρουμε κάτι διαφορετικό. Υποθέτουμε την ύπαρξη ενός τυχαίου ανυσματικού πεδίου u^μ δεσμευοντάς το με τη συνθήκη σταθερού, μη μηδενικού μέτρου

$$u^\mu u_\mu = \epsilon \equiv \begin{cases} -1, & \text{χρονοειδές,} \\ 1, & \text{χωροειδές.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Η ύπαρξη αυτού του ανυσματικού πεδίου παρέχει μια “κατεύθυνση” μέσα στο χωρόχρονο. Κάθε άλλο πεδίο μπορεί να αναλυθεί “κάθετα” και “παράλληλα” ως προς αυτό. Οι ολοκληρωτικές γραμμές αυτού του πεδίου διατρέχουν το χωρόχρονο ως “νήματα” και οδηγούν στη λεγόμενη $(1 + d)$ ανάλυση, όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή. Η διαφορά με τη $(d+1)$ ανάλυση την οποία θα δούμε παρακάτω, βασίζεται στο ότι το πεδίο αυτό, εν γένει δεν είναι αστρόβιλο. Ως αποτέλεσμα, δεν μπορεί να βρεθεί βαθμωτό Φ έτσι ώστε το $u^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi$ να είναι το κάθετο ανυσματικό πεδίο στις επιφάνειες $\Phi - c = 0$, όπου c σταθερά. Επομένως, δεν μπορεί ο χωρόχρονος να “φυλλοποιηθεί” με βάση d -διάστατες υπερ-επιφάνειες. Θα δούμε περισσότερα σε παρακάτω ενότητες.

Ο τρόπος ώστε να προβάλλουμε “κάθετα” στο ανυσματικό πεδίο u^μ θα γίνει μέσω του ορισμού του **προβολικού τανυστικού πεδίου** $h_{(\mu)(\nu)}$. Από εδώ και στο εξής, η παρένθεση γύρω από κάθε δείκτη θα συμβολίζει τη “κάθετη” προβολή. Θέλουμε να κατασκευάσουμε αυτό το τανυστικό πεδίο από αντικείμενα που ήδη έχουμε ορίσει να υπάρχουν, δηλαδή τη μετρική και το ανυσματικό πεδίο. Εν γένει θα ισχύει

$$h_{(\mu)(\nu)} = \alpha g_{\mu\nu} + \beta u_\mu u_\nu, \quad (2.2)$$

όπου α, β συναρτήσεις προς προσδιορισμό. Απαιτούμε ο $h_{(\mu)(\nu)}$ να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

1. $h_{(\mu)(\nu)}u^\mu = 0 = h_{(\mu)(\nu)}u^\nu$,
2. $h_{(\mu)(\nu)}h^{(\mu)(\nu)} = d$,

όπου $h^{(\mu)(\nu)} = g^{\mu\sigma}h_{(\sigma)(\rho)}g^{\rho\nu}$. Με βάση τις δύο αυτές ιδιότητες και την $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = d + 1$, καταλήγουμε στις

$$\beta = -\epsilon\alpha, \quad \alpha = \pm 1. \quad (2.3)$$

Επιλέγουμε το πρόσημο $(+1)$ για το α έτσι ώστε ο $h_{(\mu)(\nu)}$ να έχει το ίδιο πρόσημο στην υπογραφή του με τη μετρική. Καταλήγουμε λοιπόν στον εξής ορισμό και κάποιες χρήσιμες αναδιατυπώσεις του

$$h_{(\mu)(\nu)} = g_{\mu\nu} - \epsilon u_\mu u_\nu, \quad h_{(\mu)}^{(\nu)} = \delta_\mu^\nu - \epsilon u_\mu u^\nu, \quad \delta_\mu^\nu = h_{(\mu)}^{(\nu)} + \epsilon u_\mu u^\nu. \quad (2.4)$$

Η τρίτη εξίσωση αναφέρεται και ως ανάλυση του ταυτοτικού πίνακα.

Θα δούμε τώρα πως αναλύεται ένα αντικείμενο στα **ανάγωγα** (δεν αναλύονται περαιτέρω) μέρη του. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τις συνιστώσες του τανυστικού πεδίου $\nabla \mathbf{u} = \nabla_\mu u_\nu dx^\mu \otimes dx^\nu$.

Χρησιμοποιούμε την ανάλυση του ταυτοτικού πίνακα υπενθυμίζοντας πως για τη συνοχή Levi-Civita που χρησιμοποιούμε στην παρούσα διατριβή, ισχύει $\nabla_\mu \delta_\nu^\alpha = 0$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα γραφής της ταυτότητας

$$\begin{aligned} \nabla_\mu u_\nu &= \delta_\mu^\kappa \delta_\nu^\lambda \nabla_\kappa u_\lambda \xrightarrow{(2.4)} \\ \nabla_\mu u_\nu &= \left(h_{(\mu)}^{(\kappa)} + \epsilon u_\mu u^\kappa \right) \left(h_{(\nu)}^{(\lambda)} + \epsilon u_\nu u^\lambda \right) \nabla_\kappa u_\lambda \Rightarrow \\ \nabla_\mu u_\nu &= h_{(\mu)}^{(\kappa)} h_{(\nu)}^{(\lambda)} \nabla_\kappa u_\lambda + \epsilon \left(h_{(\mu)}^{(\kappa)} u^\lambda \nabla_\kappa u_\lambda \right) u_\nu + \epsilon u_\mu \left(u^\kappa h_{(\nu)}^{(\lambda)} \nabla_\kappa u_\lambda \right) + \epsilon^2 u_\mu u_\nu \left(u^\kappa u^\lambda \nabla_\kappa u_\lambda \right) \Rightarrow \\ \nabla_\mu u_\nu &= \Omega_{(\mu)(\nu)} + \epsilon u_\mu \alpha_{(\nu)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

όπου ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος είναι μηδέν λόγω της παρακάτω εξίσωσης

$$\begin{aligned} u^\lambda \nabla_\kappa u_\lambda &= \nabla_\kappa (u^\lambda u_\lambda) - u_\lambda \nabla_\kappa u^\lambda \xrightarrow{(2.1)} \\ u^\lambda \nabla_\kappa u_\lambda &= \nabla_\kappa \epsilon - u^\lambda \nabla_\kappa u_\lambda \Rightarrow \\ u^\lambda \nabla_\kappa u_\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Το τανυστικό πεδίο $\Omega_{(\mu)(\nu)}$ μπορεί να αναλυθεί στο αντι-συμμετρικό $\omega_{(\mu)(\nu)}$ και το συμμετρικό κομμάτι του $\Sigma_{(\mu)(\nu)}$. Επιπλέον, το συμμετρικό, στο ίχνος και στο άιχνο συμμετρικό κομμάτι του. Συνολικά έχουμε

$$\nabla_\mu u_\nu = \omega_{(\mu)(\nu)} + \sigma_{(\mu)(\nu)} + \frac{1}{d} \theta h_{(\mu)(\nu)} + \epsilon u_\mu \alpha_{(\nu)}, \quad (2.7)$$

όπου $\omega_{(\mu)(\nu)}$ ο τανυστής “στροβιλισμού” (vorticity), $\sigma_{(\mu)(\nu)}$ ο τανυστής “διάτμησης” (shear), θ το βαθμωτό “διαστολής” (expansion) και $\alpha_{(\nu)}$ το άνυσμα “επιτάχυνσης” (acceleration) δίνονται από τις σχέσεις

$$\omega_{(\mu)(\nu)} = h_{[(\mu)}^{(\kappa)} h_{(\nu)]}^{(\lambda)} \nabla_\kappa u_\lambda, \quad \sigma_{(\mu)(\nu)} = h_{((\mu)}^{(\kappa)} h_{(\nu)}^{(\lambda)} \nabla_\kappa u_\lambda - \frac{1}{d} \theta h_{(\mu)(\nu)}, \quad (2.8)$$

$$\theta = h^{(\kappa)(\lambda)} \nabla_\kappa u_\lambda \equiv \nabla_\kappa u^\kappa, \quad \alpha_{(\nu)} = h_{(\nu)}^{(\lambda)} u^\kappa \nabla_\kappa u_\lambda \equiv h_{(\nu)}^{(\lambda)} \dot{u}_\lambda, \quad (2.9)$$

με τις εξής ιδιότητες να ικανοποιούνται

$$h^{(\mu)(\nu)} \omega_{(\mu)(\nu)} = 0, \quad h^{(\mu)(\nu)} \sigma_{(\mu)(\nu)} = 0. \quad (2.10)$$

Ορίσαμε το αντικείμενο $\dot{u}_\lambda = u^\kappa \nabla_\kappa u_\lambda$ και το ονομάζουμε “**παράλληλη**” παράγωγο, ενώ χρησιμοποιήσαμε το συνήθη συμβολισμό ενός συμμετρικού και ενός αντι-συμμετρικού τανυστή, $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$, $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$. Η εξίσωση (2.7) είναι μια ταυτότητα. Συνήθως υπάρχουν δύο τρόποι χρήσης αυτής. Είτε γνωρίζουμε τις τέσσερις αυτές ανάγωγες ποσότητες, είτε γνωρίζουμε το συνολικό αντικείμενο $\nabla_\mu u_\nu$ και για λόγους καλύτερης γεωμετρικής κατανόησης τις υπολογίζουμε.

Στην παρούσα διατριβή θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου το αντι-συμμετρικό κομμάτι είναι μηδέν, $\omega_{(\mu)(\nu)} = 0$.

1.1.1 “Παράλληλη” και “Κάθετη” παράγωγος

Σε αναλογία με την παράγωγο $\dot{A}^\mu = u^\kappa \nabla_\kappa A^\mu$, μπορεί να οριστεί και η “**κάθετη**” παράγωγος $\nabla_{(\nu)} A_{(\mu)} = h_{(\nu)}^{(\kappa)} h_{(\mu)}^{(\lambda)} \nabla_\kappa A_{(\lambda)}$ για το χωρικό κομμάτι της ένα-μορφής A_μ , ήτοι $A_{(\mu)}$. Αποδεικνύεται πως αυτή ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί μια παράγωγος. Επιπλέον, πρόκειται για συναλλοίωτη παράγωγο Levi-Civita αν θεωρήσουμε πως η μετρική του “κάθετου” χώρου είναι η $h_{(\mu)(\nu)}$. Θα αποδείξουμε μόνο το τελευταίο.

$$\begin{aligned} \nabla_{(\kappa)} h_{(\mu)(\nu)} &= h_{(\kappa)}^{(\lambda)} h_{(\mu)}^{(\tau)} h_{(\nu)}^{(\pi)} \nabla_\lambda h_{(\tau)(\pi)} \xrightarrow{(2.4)} \\ \nabla_{(\kappa)} h_{(\mu)(\nu)} &= h_{(\kappa)}^{(\lambda)} h_{(\mu)}^{(\tau)} h_{(\nu)}^{(\pi)} [\nabla_\lambda g_{\tau\pi} - \epsilon (\nabla_\kappa u_\tau) u_\pi - \epsilon u_\tau (\nabla_\kappa u_\pi)] \Rightarrow \\ \nabla_{(\kappa)} h_{(\mu)(\nu)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι μηδέν λόγω της συνοχής Levi-Civita στο μεγάλο χώρο, ενώ οι δύο άλλοι όροι μηδενίζονται λόγω της ιδιότητας $h_{(\kappa)}^{(\beta)} u_{\beta} = 0$. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σχολιάσουμε το εξής: ο τανυστής $h_{(\mu)(\nu)}$ δε μπορεί να θεωρηθεί ως η μετρική κάποιας υπερ-επιφάνειας: πρώτον είναι ορισμένος στην πολλαπλότητα M (συνεπώς είναι αντικείμενο διάστασης $(d + 1)$ και πάντα έχει μηδενική ορίζουσα) και δεύτερον το u^{μ} δεν είναι εν γένει αστρόβιλο ώστε να μπορούμε να βρούμε υπερ-επιφάνειες στις οποίες είναι κάθετο. Παρακάτω θα δούμε υπό ποιές συνθήκες και με ποιό τρόπο μπορεί να οριστεί μετρική σε κάποια υπερ-επιφάνεια.

I.2 Υπερ-επιφάνειες, μοναδιαίο άνυσμα κάθετο σε υπερ-επιφάνεια

Με τον όρο υπερ-επιφάνεια, θα αναφερόμαστε σε επιφάνειες οποιασδήποτε διάστασης. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι ώστε να ορίσουμε μια υπερ-επιφάνεια. Δοθέντος ενός συστήματος συντεταγμένων με συντεταγμένες x^{μ} , $\mu = 1, \dots, N_M$, η υπερ-επιφάνεια S μπορεί να οριστεί ως ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων (ως ένας δεσμός), τα οποία ικανοποιούν κάποια συγκεκριμένη εξίσωση. Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\Phi(x^{\mu}) = 0. \quad (2.12)$$

Η (2.12) μετασχηματίζεται ως βαθμωτό κάτω από αλλαγές του συστήματος συντεταγμένων.

Ο δεύτερος τρόπος είναι η **παραμετρική** περιγραφή της υπερ-επιφάνειας, εννοώντας εύρεση κατάλληλων συντεταγμένων y^i , $i = 1, \dots, N_S < N_M$ επί της επιφάνειας, έτσι ώστε οι $x^{\mu} = f^{\mu}(y^i)$ να ικανοποιούν την (2.12). Οι y^i αντιμετωπίζονται ως **“εσωτερικές”** συντεταγμένες της υπερ-επιφάνειας.

Έστω η περιγραφή της υπερ-επιφάνειας μέσω της $\Phi(x^{\mu})$. Ορίζουμε την ένα-μορφή $d\Phi$ και το αντίστοιχο άνυσμα $\vec{\nabla}\Phi$

$$d\Phi = \partial_{\mu}\Phi dx^{\mu}, \quad \vec{\nabla}\Phi = \partial^{\mu}\Phi \partial_{\mu}, \quad (2.13)$$

όπου $\partial^{\mu} = g^{\mu\nu}\partial_{\nu}$ με $g^{\mu\nu}$ τον αντίστροφο της μετρικής $g_{\mu\nu}$. Λόγω της $\Phi = 0$ ισχύει $d\Phi = 0$ αλλά όχι και $\partial_{\mu}\Phi = 0$, καθώς νοείται πως πρώτα υπολογίζουμε τις παραγώγους και στη συνέχεια επιβάλλουμε το δεσμό $\Phi = 0$. Η απόδειξη πως το άνυσμα $\vec{\nabla}\Phi$ είναι κάθετο στην υπερ-επιφάνεια είναι σχετικά απλή, αρκεί να θεωρήσουμε καμπύλη επί της υπερ-επιφάνειας και να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση $d\Phi = 0$.

Ορίζουμε το άνυσμα $n = n^{\mu}\partial_{\mu}$ έτσι ώστε οι συνιστώσες του να δίνονται από τη σχέση

$$n^{\mu} = \pm \frac{\partial^{\mu}\Phi}{\sqrt{\epsilon \partial_{\nu}\Phi \partial^{\nu}\Phi}}, \quad (2.14)$$

όπου $\epsilon = \pm 1$ με την υπόθεση $\partial_{\mu}\Phi \partial^{\mu}\Phi \neq 0$. Για το μέτρο του ανύσματος ισχύει

$$n^{\mu}n_{\mu} = \epsilon \equiv \begin{cases} -1, & \text{χρονοειδές,} \\ 1, & \text{χωροειδές.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Η σταθερά ϵ μπορεί να λάβει τιμή (-1) μόνο αν υποθέσουμε πως μελετάμε χώρο με υπογραφή Lorentz $(-, +, +, \dots)$. Επίσης, συνήθως επιλέγουμε το πρόσημο $(+)$ στη σχέση (2.14) αλλά είναι απλώς μια σύμβαση. Εφόσον το άνυσμα n είναι κάθετο στην υπερ-επιφάνεια, τότε το εσωτερικό γινόμενο του με κάθε άνυσμα επί της υπερ-επιφάνειας θα είναι μηδέν. Αυτό συνεπάγεται πως για μετρική με υπογραφή Lorentz, όταν το n είναι χρονοειδές, η επιφάνεια είναι χωροειδής και αντίστροφα.

I.2.1 Τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας

Στη κινηματική ανάλυση που κάναμε παραπάνω αντικαθιστούμε το ανυσματικό πεδίο u^{μ} με το n^{μ} . Όπως θα δούμε ωστόσο, ο αντι-συμμετρικός τανυστής $\omega_{(\mu)(\nu)}$ είναι μηδέν. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $n_{\mu} = \lambda \nabla_{\mu}\Phi$, όπου $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \partial_{\nu}\Phi \partial^{\nu}\Phi}}$, ενώ η μερική παράγωγος αντικαταστάθηκε από τη συναλλοίωτη για

λόγους απλότητας. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, εκτός αν πρόκειται για συναλλοίωτη παράγωγο Levi-Civita και ταυτόχρονα δρα σε βαθμωτό πεδίο.

$$\begin{aligned}\omega_{(\mu)(\nu)} &= \frac{1}{2} h_{(\mu)}^{(\tau)} h_{(\nu)}^{(\pi)} (\nabla_\tau n_\pi - \nabla_\pi n_\tau) \Rightarrow \\ \omega_{(\mu)(\nu)} &= \frac{1}{2} h_{(\mu)}^{(\tau)} h_{(\nu)}^{(\pi)} [(\nabla_\tau \lambda)(\nabla_\pi \Phi) + \lambda \nabla_\tau \nabla_\pi \Phi - (\nabla_\pi \lambda)(\nabla_\tau \Phi) - \lambda \nabla_\pi \nabla_\tau \Phi] \Rightarrow \\ \omega_{(\mu)(\nu)} &= \frac{1}{2} h_{(\mu)}^{(\tau)} h_{(\nu)}^{(\pi)} \left(\frac{\nabla_\tau \lambda}{\lambda} n_\pi - \frac{\nabla_\pi \lambda}{\lambda} n_\tau \right) + \frac{\lambda}{2} h_{(\mu)}^{(\tau)} h_{(\nu)}^{(\pi)} (\nabla_\tau \nabla_\pi \Phi - \nabla_\pi \nabla_\tau \Phi) \Rightarrow \\ \omega_{(\mu)(\nu)} &= 0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Η πρώτη παρένθεση είναι μηδέν διότι κάθε όρος περιέχει προβολή κατά μήκος του n και συνεπώς μηδενίζεται λόγω του όρου $h_{(\mu)}^{(\tau)} h_{(\nu)}^{(\pi)}$. Η δευτέρα παρένθεση μηδενίζεται διότι έχουμε θεωρήσει συνοχή χωρίς στρέψη (Levi-Civita).

Ορίζουμε ως **εξωτερική καμπυλότητα** το συμμετρικό κομμάτι, δηλαδή

$$K_{(\mu)(\nu)} = -\Sigma_{(\mu)(\nu)},\tag{2.17}$$

όπου το πρόσημο είναι απλή σύμβαση. Συνολικά θα έχουμε

$$h_{(\mu)}^{(\nu)} = \delta_\mu^\nu - \epsilon n_\mu n^\nu, \quad n_\mu n^\mu = \epsilon, \quad h_{(\mu)}^{(\nu)} n^\mu = 0 = h_{(\mu)}^{(\nu)} n_\nu,\tag{2.18}$$

$$\nabla_\mu n_\nu = -K_{(\mu)(\nu)} + \epsilon n_\mu \alpha_{(\nu)},\tag{2.19}$$

$$K_{(\mu)(\nu)} = -h_{((\mu)}^{(\kappa)} h_{(\nu))}^{(\lambda)} \nabla_\kappa n_\lambda, \quad K = -\nabla_\mu n^\mu.\tag{2.20}$$

Εξ' ορισμού, ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας είναι συμμετρικός και αναπαριστά το συνολικό τανυστή διάτμησης για την εκάστοτε υπερ-επιφάνεια. Το ίχνος του είναι το βαθμωτό διαστολής.

Ι.2.2 “Εσωτερικός” προβολικός τανυστής

Εως αυτό το σημείο έχουμε ορίσει αντικείμενα τα οποία είναι κάθετα στο άνυσμα n^μ , ωστόσο είναι ορισμένα στο χωρόχρονο M και όχι στην υπερ-επιφάνεια S . Αν θέλουμε λοιπόν να ορίσουμε αντικείμενα “εσωτερικά” στην S , πρέπει να πρώτα να ορίσουμε μια απεικόνιση από τον χώρο M στο χώρο S . Επειδή $N_M > N_S$ αυτή η απεικόνιση δεν θα είναι αντιστρέψιμη. Ένας τρόπος να βρούμε αυτή την απεικόνιση είναι μέσω της παραμετρικής περιγραφής της υπερ-επιφάνειας και συγκεκριμένα ορίζοντας τον **“εσωτερικό” προβολικό τανυστή**

$$e^{(\mu)}_i = \frac{\partial x^\mu(y)}{\partial y^i}, \quad e^{(\mu)}_i n_\mu = 0,\tag{2.21}$$

όπου $x^\mu, \mu = 1, \dots, N_M$ οι συντεταγμένες στο χωρόχρονο και $y^i, i = 1, \dots, N_S$ οι συντεταγμένες στην υπερ-επιφάνεια. Το αντικείμενο αυτό μετασχηματίζεται ως άνυσμα κάτω από μετασχηματισμούς $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = f^\mu(x^\nu)$, ενώ ως ένα-μορφή κάτω από μετασχηματισμούς $y^i \rightarrow \tilde{y}^i = f^i(y^j)$. Με βάση αυτό τον τανυστή μπορούμε να ορίσουμε την εσωτερική μετρική $\gamma_{ij}(y)$ ως εξής

$$\gamma_{ij}(y) = g_{\mu\nu}(x(y)) e^{(\mu)}_i e^{(\nu)}_j, \quad \gamma_{ij}(y) = h_{(\mu)(\nu)} e^{(\mu)}_i e^{(\nu)}_j.\tag{2.22}$$

Εξ' ορισμού, με το αντικείμενο $e^{(\mu)}_i$ μπορούμε να προβάλλουμε μόνο συναλλοίωτα αντικείμενα της M στην S . Γνωρίζοντας ένα αντικείμενο ορισμένο στην υπερ-επιφάνεια, τότε μπορούμε να ανακατασκευάσουμε μόνο το ανταλλοίωτο κάθετο κομμάτι ενός αντικειμένου στο χωρόχρονο. Για παράδειγμα, γνωρίζοντας τη μετρική $\gamma_{ij}(y)$, βρίσκουμε την αντίστροφη της $\gamma^{ij}(y)$ και από αυτή κατασκευάζουμε τον ανταλλοίωτο προβολικό τανυστή

$$h^{(\mu)(\nu)} = \gamma^{ij} e^{(\mu)}_i e^{(\nu)}_j.\tag{2.23}$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε αντικείμενο. Ένα σημαντικό αντικείμενο που μπορούμε και πρέπει να ορίσουμε είναι η εσωτερική συναλλοίωτη παράγωγος

$$D_i A_i = (\nabla_{(\mu)} A_{(\nu)}) e^{(\mu)}_i e^{(\nu)}_j, \quad (2.24)$$

η οποία αποδεικνύεται πως είναι Levi-Civita ως προς τη μετρική γ_{ij} [76].

1.2.3 Παράδειγμα

Παραθέτουμε το εξής παράδειγμα ώστε να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω αντικείμενα. Θεωρούμε τον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο με συντεταγμένες (x, y, z) και διαγώνια μετρική $\mathbf{g} = \text{diag}(1, 1, 1)$. Θεωρούμε την υπερ-επιφάνεια

$$\Phi_s := \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2 - 1. \quad (2.25)$$

Μια προφανής παραμετρική περιγραφή της υπερ-επιφάνειας δίνεται μέσω των εσωτερικών συντεταγμένων $\tilde{x}, \tilde{y}$ όπου

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \pm \sqrt{\alpha^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}.$$

Ωστόσο, υπάρχει παραμετρική περιγραφή η οποία κάνει πιο προφανείς κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες της υπερ-επιφάνειας:

$$x = \alpha \sin \theta \cos \phi, \quad y = \alpha \sin \theta \sin \phi, \quad z = \alpha \cos \theta,$$

με $\theta \in [0, \pi)$ και $\phi \in [0, 2\pi)$. Λόγω της συγκεκριμένης μορφής υπερ-επιφάνειας, είναι προτιμότερο να εκφράσουμε εξ αρχής τη μετρική του χώρου σε σφαιρικές συντεταγμένες $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, έτσι ώστε η υπερ-επιφάνεια να εκφράζεται ως συνθήκη επί μίας εκ των νέων συντεταγμένων

$$\Phi_s = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 - 1. \quad (2.26)$$

Η μετρική του χώρου αποκτά τη μορφή $\mathbf{g} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Η παραμετρική περιγραφή της (2.26) δίνεται μέσω των συντεταγμένων (θ, ϕ)

$$r = \alpha, \quad \theta = \tilde{\theta}, \quad \phi = \tilde{\phi}. \quad (2.27)$$

Η ένα-μορφή και ο αντίστοιχος προβολικός τανυστής είναι

$$\mathbf{n} = dr, \quad \mathbf{h} = r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \quad (2.28)$$

Η εξωτερική καμπυλότητα και το ίχνος της δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{K} = r d\theta \otimes d\theta + r \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi, \quad K = \frac{2}{r}. \quad (2.29)$$

Θέλοντας τώρα να ορίσουμε τα αντίστοιχα εσωτερικά αντικείμενα, υπολογίζουμε πρώτα το αντικείμενο $e^{(\mu)}_i$

$$e^{(\mu)}_i = \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{\theta}}(\alpha) & \partial_{\tilde{\phi}}(\alpha) \\ \partial_{\tilde{\theta}}(\theta) & \partial_{\tilde{\phi}}(\theta) \\ \partial_{\tilde{\theta}}(\phi) & \partial_{\tilde{\phi}}(\phi) \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.27)} e^{(\mu)}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Έτσι καταλήγουμε στα εσωτερικά αντικείμενα

$$\gamma = \alpha^2 \left(d\tilde{\theta} \otimes d\tilde{\theta} + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi} \otimes d\tilde{\phi} \right), \quad \mathbf{K} = \alpha \left(d\tilde{\theta} \otimes d\tilde{\theta} + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi} \otimes d\tilde{\phi} \right), \quad K = \frac{2}{\alpha} \quad (2.31)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, τα εσωτερικά αντικείμενα δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή r , παρά μόνο από την τιμή που λαμβάνει αυτή στην εκάστοτε υπερ-επιφάνεια, δηλαδή α . Η μετρική γ είναι εκείνη μιας σφαιρικής υπερ-επιφάνειας δύο διαστάσεων ακτίνας α . Ανακαλώντας τον ορισμό του ίχνους της βαθμωτής καμπυλότητας $K = \nabla_\mu n^\mu$, παρατηρούμε πως η απόκλιση του κάθετου ανύσματος σε κάθε σφαιρική υπερ-επιφάνεια έχει μη μηδενική απόκλιση, η οποία μάλιστα εξαρτάται αντιστρόφως από την ακτίνα της σφαίρας.

1.2.4 Συνάρτηση μετάπτωσης (Lapse function) και άνυσμα μετατόπισης (Shift vector)

Η περιγραφή των εξισώσεων Einstein ως δυναμική εξέλιξη d -διάστατων επιφανειών, απαιτεί την εισαγωγή ενός ειδικού συστήματος συντεταγμένων, που κατά κάποιο τρόπο “σπάει” την τετραδιάστατη συναλλοιότητα, με απώτερο στόχο την ευκολότερη εξαγωγή φυσικών και γεωμετρικών συμπερασμάτων. Το σύστημα αυτό ονομάζεται συνήθως **προσαρμοσμένο σύστημα συντεταγμένων** (adapted coordinate system) [76]. Έστω οι συντεταγμένες (t, y^i) όπου η t αναπαριστά τη μεταβλητή του “χρόνου” ενώ οι y^i τις εσωτερικές μεταβλητές σε κάθε υπερ-επιφάνεια $t = \text{σταθερά}$. Ως συνάρτηση **Lapse** (N) ορίζεται ο συντελεστής κανονικοποίησης στη μονάδα του κάθετου ανύσματος n_μ στις επιφάνειες $t - c = 0$, όπου c σταθερά. Συγκεκριμένα

$$n_\mu = -N \nabla_\mu t, \quad n_\mu n^\mu = \epsilon, \quad N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon g^{\mu\nu} \nabla_\mu t \nabla_\nu t}}, \quad (2.32)$$

όπου έχει επιλεγεί το πρόσημο $(-)$ για λόγους σύμβασης. Στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων προκύπτει

$$\mathbf{n} = -N dt, \quad N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon g^{tt}}}. \quad (2.33)$$

Έστω τώρα καμπύλες $x^\mu(\lambda)$ με παράμετρο λ , οι οποίες διαπερνούν τις υπερ-επιφάνειες $t - c = 0$. Επιλέγουμε ως παράμετρο τη μεταβλητή t . Αυτό συνεπάγεται πως το εφαπτόμενο άνυσμα σε αυτές τις καμπύλες θα είναι το

$$\mathbf{U} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Rightarrow \mathbf{U} = \frac{dt}{dt} \partial_t + \frac{dy^i}{dt} \partial_{y^i} \Rightarrow \mathbf{U} = \partial_t, \quad (2.34)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες $\frac{dy^i}{dt} = 0$. Το άνυσμα $\mathbf{U}$ έχει συνιστώσες κάθετα και παράλληλα στις υπερ-επιφάνειες $t - c = 0$. Η ανάλυση του είναι η εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U^\mu \partial_\mu \Rightarrow \\ \mathbf{U} &= \delta^\mu{}_\nu U^\nu \partial_\mu \Rightarrow \\ \mathbf{U} &= \left(h^{(\mu)}{}_{(\nu)} + \epsilon n^\mu n_\nu \right) U^\nu \partial_\mu \Rightarrow \\ \mathbf{U} &= \left(h^{(\mu)}{}_{(\nu)} U^\nu + \epsilon n_\nu U^\nu n^\mu \right) \partial_\mu \Rightarrow \\ \mathbf{U} &= \left(h^{(\mu)}{}_{(\nu)} \delta^\nu{}_0 + \epsilon n_\nu \delta^\nu{}_0 n^\mu \right) \partial_\mu \Rightarrow \\ \mathbf{U} &= \left(h^{(\mu)}{}_{(0)} - \epsilon N n^\mu \right) \partial_\mu \Rightarrow \\ \mathbf{U} &= \left(N^{(\mu)} - \epsilon N n^\mu \right) \partial_\mu, \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε $N^{(\mu)} = h^{(\mu)}_{(0)}$. Ανακαλώντας πως $\mathbf{U} = \partial_t$, έχουμε σε ανυσματική και μορφή συνιστωσών

$$\partial_t = -\epsilon N \mathbf{n} + \mathbf{N}, \quad \delta^\mu_0 = -\epsilon N n^\mu + N^{(\mu)}. \quad (2.35)$$

Παράλληλα, ο εσωτερικός προβολικός τανυστής αποκτά την απλή μορφή $e^0_i = 0$, $e^i_i = \delta^i_j$. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε πως υπάρχει N^i στις υπερ-επιφάνειες το οποίο είναι άνυσμα ως προς τις συντεταγμένες y^i , και ισχύει $N^{(\mu)} = e^{(\mu)}_i N^i$. Οι N^i αποτελούν τις συνιστώσες του αποκαλούμενου ανυσματικού πεδίου **μετατόπισης** (Shift vector field). Η μετρική σε αυτές τις συντεταγμένες αποκτά τη μορφή

$$\mathbf{g} = (\epsilon N^2 + \gamma_{ij} N^i N^j) dt \otimes dt + 2\gamma_{ij} N^j dt \otimes dy^i + \gamma_{ij} dy^i \otimes dy^j, \quad (2.36)$$

με την αντίστροφή της να είναι

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\epsilon N^2} \partial_t \otimes \partial_t - 2 \frac{N^i}{\epsilon N^2} \partial_t \otimes \partial_{y^i} + \left(\gamma^{ij} + \frac{1}{\epsilon N^2} N^i N^j \right) \partial_{y^i} \otimes \partial_{y^j}. \quad (2.37)$$

Η ορίζουσα δίνεται από την απλή σχέση $\text{Det}(g_{\mu\nu}) = \epsilon N^2 \text{Det}(\gamma_{ij})$. Το αντικείμενο γ_{ij} αποτελεί τη μετρική των υπερ-επιφανειών $t - c = 0$. Η (2.36) αποτελεί τη $(d + 1)$ ανάλυση της μετρικής. Τέλος, ο προβολικός τανυστής σε αυτές τις συντεταγμένες έχει ως συνιστώσες

$$h_{(\mu)(\nu)} = \begin{pmatrix} \gamma_{ij} N^i N^j & N_j \\ N_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad h_{(\mu)}^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 0 & N^j \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix}, \quad h^{(\mu)(\nu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Όπως έχουμε αναφέρει, η σύνδεση μεταξύ αντικειμένων της υπερ-επιφάνειας και του χωρόχρονου γίνεται μέσω του $\mathbf{h}$ και του εσωτερικού προβολικού τανυστικού πεδίου. Η μετρική έχει παραμετροποιηθεί μέσω των (N, N^i, γ_{ij}) οι οποίες αποτελούν τις δυναμικές μεταβλητές για το βαρυτικό πεδίο. Ένα από τα σημαντικότερα επακόλουθα αυτής της παραμετροποίησης είναι η δυνατότητα εύρεσης συστήματος συντεταγμένων όπου $(N = 1, N^i = 0)$. Αυτό σημαίνει πως $(d + 1)$ συνιστώσες από τις $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ αντιστοιχούν σε ένα “ψεύτικο” βαρυτικό πεδίο, δηλαδή ένα πεδίο το οποίο μπορεί να εξαφανιστεί με κατάλληλη επιλογή συστήματος συντεταγμένων. Οι συντεταγμένες αυτές ονομάζονται Gauss και θα τις συναντήσουμε παρακάτω.

1.3 Βαρύτητα+Ηλεκτρομαγνητισμός+Ρευστά

Σε αυτή τη διατριβή θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της βαρύτητας και του ηλεκτρομαγνητισμού καθώς και τις εξισώσεις διατήρησης για ένα ρευστό. Η $(d + 1)$ ανάλυση αυτών, χρησιμοποιώντας το προσαρμοσμένο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να βρεθεί σε διάφορα βιβλία. Θεωρούμε πως δεν είναι σκόπιμο να αναπαραγάγουμε τη διαδικασία εύρεσης αυτών των εξισώσεων στη παρούσα εργασία. Υπάρχουν κάποιες διαφορές σχετικά με συμβάσεις και ορισμούς αντικειμένων μεταξύ της βιβλιογραφίας και αυτών που θα παρουσιάσουμε παρακάτω, όμως αποδεικνύεται πως είναι ισοδύναμες. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν τις εξισώσεις και θα σχολιάσουμε τα αντικείμενα που εμφανίζονται σε αυτές, καθώς και τις ενδεχόμενες διαφορές με τη βιβλιογραφία. Υποθέτουμε συντεταγμένες (t, x^i) , όπου οι Λατινικοί χαρακτήρες $(i, j, l, \dots)$ λαμβάνουν τιμές $(1, 2, 3)$. Το σύστημα που θα μελετήσουμε αποτελείται από τη βαρύτητα συζευγμένη με ένα σύνολο από ρευστά. Για τους σκοπούς αυτής της εργασίας, ο συνολικός τανυστής ενέργειας ορμής $T_{(tot)}^{\mu\nu}$ αποτελείται από τρία κομμάτια: το κομμάτι που αντιστοιχεί σε ηλεκτρομαγνητικά αφόρτιστη ύλη $T_{(u)}^{\mu\nu}$, εκείνο της ηλεκτρομαγνητικά φορτισμένης ύλης $T_{(u)}^{\mu\nu}$ και το ηλεκτρομαγνητικό κομμάτι $T_{(em)}^{\mu\nu}$, όπου οι ελληνικοί δείκτες λαμβάνουν τις τιμές $(1, 2, 3, 4)$. Έχουμε θεωρήσει την ανάλυση του εκάστοτε τανυστή ενέργειας-ορμής στα ανάγωγα μέρη του και τέλος έχουμε επιλέξει το κάθετο άνυσμα $\mathbf{n}$ να είναι χρονοειδές ($\epsilon = -1$), συνεπώς οι επιφάνειες $t - c = 0$ έχουν χωροειδή χαρακτήρα. Η συγκεκριμένη μορφή των εξισώσεων παρουσιάστηκε σε μια από τις εργασίες αυτής της διατριβής [78].

Εξισώσεις πεδίου του Einstein (EFE)

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$R^{(d)} + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 2\kappa\rho^{(tot)}, \quad (2.39)$$

$$D_i K - D_j K_i^j = \kappa q_i^{(tot)}, \quad (2.40)$$

$$\partial_t K_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{N}} K_{ij} = N R_{ij}^{(d)} - N \left(2K_i^l K_{lj} - K K_{ij} \right) - D_j D_i N - \kappa N \left[\pi_{ij}^{(tot)} + \frac{1}{d-1} \left(\rho^{(tot)} - P^{(tot)} \right) \gamma_{ij} \right]. \quad (2.41)$$

Τα αντικείμενα $R_{ij}^{(d)}$, $R^{(d)}$, K_{ij} , K , αντιστοιχούν στον τανυστή και το βαθμωτό Ricci, στην εξωτερική καμπυλότητα, και το ίχνος αυτής, των d -διάστατων υπερ-επιφανειών $t-c=0$. Η παράγωγος Lie [79,80] κατά μήκος του ανύσματος μετατόπισης αναπαρίσταται ως $\mathcal{L}_{\vec{N}}$ και θα χρησιμοποιείται από εδώ και στο εξής όπου χρειάζεται. Επιπλέον, η εξωτερική καμπυλότητα K_{ij} εκφράζεται ως συνάρτηση των γ_{ij} , N και N_i

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} (\partial_t \gamma_{ij} - D_j N_i - D_i N_j). \quad (2.42)$$

Όσον αφορά τον ολικό τανυστή ενέργειας-ορμής, έχουμε χρησιμοποιήσει την αναπαράσταση ως ρευστό, ως προς το κάθετο άνυσμα $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N} \right)$ στις υπερ-επιφάνειες. Αυτό συνεπάγεται πως η “ταχύτητα” του ρευστού ταυτίζεται με αυτό το άνυσμα. Στη βιβλιογραφία [75, 76], υπάρχει ανάλυση ως προς κάποιο άλλο άνυσμα, για παράδειγμα u^μ , το οποίο αναλύεται αντίστοιχα παράλληλα και κάθετα ως προς το $\mathbf{n}$. Οι ποσότητες $\rho^{(tot)}$, $P^{(tot)}$, $q_i^{(tot)}$, $\pi_{ij}^{(tot)}$ αντιστοιχούν στην πυκνότητα, ισοτροπική πίεση, ροή και άϊχνο μέρος του ανισοτροπικού τανυστή πίεσης ως προς το άνυσμα $\mathbf{n}$. Σε κάποια βιβλία η ροή αναφέρεται και ως ορμή [76]. Τέλος, κ είναι η σταθερά συζευξης $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ με G τη βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα και c η ταχύτητα του φωτός.

Συνεχίζουμε με τη διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής, το οποίο μας παρέχει τις εξισώσεις κίνησης των ρευστών.

Εξισώσεις ηλεκτρομαγνητικά αφόρπισης ύλης (UMFE)

$$\nabla_\nu T_{(u)}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\partial_t \rho_{(u)} - \mathcal{L}_{\vec{N}} \rho_{(u)} - (\rho_{(u)} + P_{(u)}) NK - D_i (N q_{(u)}^i) - q_{(u)}^i D_i N - N \pi_{(u)}^{ij} K_{ij} = 0, \quad (2.43)$$

$$\partial_t q_i^{(u)} - \mathcal{L}_{\vec{N}} q_i^{(u)} - (\rho_{(u)} + P_{(u)}) D_i N - N D_i P_{(u)} - N K q_i^{(u)} - D_j (N \pi_i^{(u)j}) = 0. \quad (2.44)$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τη γενίκευση των εξισώσεων διατήρησης της ενέργειας και της ορμής αντίστοιχα. Στο [76] βρίσκεται μια σύντομη απόδειξη στο πώς αυτές καταλήγουν στις εξισώσεις Euler λαμβάνοντας τα κατάλληλα όρια.

Εξισώσεις ηλεκτρομαγνητικά φορτισμένης ύλης (CMFE)

$$\nabla_\nu T_{(c)}^{\mu\nu} + \nabla_\nu T_{(em)}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla_\nu T_{(c)}^{\mu\nu} - F^{\mu\sigma} J_\sigma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\partial_t \rho_{(c)} - \mathcal{L}_{\vec{N}} \rho_{(c)} - (\rho_{(c)} + P_{(c)}) NK - D_i (N q_{(c)}^i) - q_{(c)}^i D_i N - N \pi_{(c)}^{ij} K_{ij} = N E^i J_i, \quad (2.45)$$

$$\partial_t q_i^{(c)} - \mathcal{L}_{\vec{N}} q_i^{(c)} - (\rho_{(c)} + P_{(c)}) D_i N - N D_i P_{(c)} - N K q_i^{(c)} - D_j (N \pi_i^{(c)j}) = -N (\rho_{(c)} E_i + B_{ij} J^j), \quad (2.46)$$

όπου $F^{\mu\sigma}$ ο τανυστής Faraday και J_σ η πυκνότητα ρεύματος η οποία έχει ως “χρονική” συνιστώσα την πυκνότητα φορτίου $\rho_{(e)}$ και ως “χωρικές” συνιστώσες τη χωρική πυκνότητα ρεύματος J_i . Χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Poynting $\nabla_\nu T_{(em)}^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma} J_\sigma$ το οποίο ισχύει επί των εξισώσεων Maxwell. Σε αυτό το σημείο

είναι που διαφοροποιούμαστε από τη συνήθη βιβλιογραφία. Έχουμε το ηλεκτρικό πεδίο E^i ως συνήθως, όμως ορίζουμε το μαγνητικό πεδίο ως ένα τανυστή δεύτερης τάξης, αντι-συμμετρικό B^{ij} . Ο λόγος είναι ότι έχουμε αναλύσει τις εξισώσεις για κάθε διάσταση $(d + 1)$. Μόνο στην περίπτωση $d = 3$ υπάρχει ο πλήρως αντι-συμμετρικός τανυστής Levi-Civita, ϵ^{kij} , με τον οποίο μπορούμε να αναπαραστήσουμε πλήρως το μαγνητικό πεδίο ως άνυσμα, $B^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}B_{ij}$.

Το αριστερό μέλος αυτών των εξισώσεων είναι ίδιες με τις προηγούμενες, όμως στο δεξιό έχουμε τους όρους αλληλεπίδρασης της ηλεκτρομαγνητικά φορτισμένης ύλης με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Συγκεκριμένα, στην εξίσωση (2.45) εμφανίζεται ο όρος $E^i J_i$ ο οποίος αντιστοιχεί στο παραγόμενο έργο λόγω της αλληλεπίδρασης των φορτίων με το ηλεκτρικό πεδίο, ενώ στην αντίστοιχη εξίσωση του Νεύτωνα (2.46), εμφανίζεται η πυκνότητα της δύναμης Lorentz $(\rho_{(e)}E_i + B_{ij}J^j)$. Η ενδεχόμενη διαφορά σε πρόσημα βασίζεται σε συμβάσεις.

Το επόμενο βήμα είναι οι εξισώσεις Maxwell.

Εξισώσεις πεδίου του Maxwell (MFE)

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \nabla_{[\kappa} F_{\mu\nu]} = 0 \Leftrightarrow$$

$$D_i E^i = \mu_0 \rho_{(e)}, \quad \partial_t E^i - \mathcal{L}_{\vec{N}} E^i - D_j (N B^{ij}) - N K E^i + \mu_0 N J^i = 0, \quad (2.47)$$

$$D_{[l} B_{ij]} = 0, \quad \partial_t B_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{N}} B_{ij} + 2D_{[i} N E_{j]} = 0. \quad (2.48)$$

Οι πρώτες δύο εξισώσεις αντιστοιχούν στον ηλεκτρικό νόμο Gauss και στην εξίσωση Ampere-Maxwell. Οι (2.48) αντιστοιχούν στο μαγνητικό νόμο Gauss και στο νόμο Faraday. Οι εξισώσεις αποκτούν μια πιο γνώριμη μορφή όταν επιλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων όπου $(N = 1, N^i = 0)$.

Εξίσωση διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου (CCFE)

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow \partial_t \rho_{(e)} - \mathcal{L}_{\vec{N}} \rho_{(e)} - N K \rho_{(e)} + D_i (N J^i) = 0. \quad (2.49)$$

Κεφάλαιο 3

Ομογενείς υπερ-επιφάνειες (Κλάσεις “Bianchi”)

I Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στις ομογενείς υπερ-επιφάνειες. Τι ονομάζουμε όμως ομογένεια? Μέσω της καθημερινότητας μας έχουμε την εξής διαίσθηση: Στεκόμαστε σε σημείο A δεχόμενοι την έλξη της βαρύτητας από τη γη και την αντίδραση του δαπέδου. Κάνουμε ένα βήμα ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση καταλήγοντας σε σημείο B. Αν δεν αντιληφθούμε κάποια αλλαγή στην έλξη της βαρύτητας τότε λέμε πως η δύναμη της βαρύτητας είναι ίδια στο σημείο A και στο σημείο B. Το βαθύτερο νόημα είναι το εξής: Αν κάποιος μας τοποθετήσει είτε στο σημείο A είτε στο σημείο B, δε θα μπορέσουμε μέσω κάποιου πειράματος που βασίζεται στη δύναμη της βαρύτητας να καταλάβουμε σε πιο σημείο βρισκόμαστε. Με αυτή τη λογική, τα σημεία είναι ισοδύναμα. Στο όριο που τα σημεία βρίσκονται απειροστά κοντά και επαναλάβουμε τη διαδικασία αρκετές φορές βρίσκοντας συνεχώς τα ίδια αποτελέσματα, τότε κατασκευάζουμε στη ουσία μια καμπύλη από ισοδύναμα σημεία. Λέμε λοιπόν πως η βαρύτητα κατά μήκος αυτής της καμπύλης είναι ομογενής.

Ωστόσο, θέλουμε να απαλλαγούμε από την αίσθηση μας, καθώς έτσι θα μπορούμε να κατανοήσουμε την ομογένεια και σε χώρους με πιο περίεργη γεωμετρία. Επομένως, αυτό που πρέπει να γίνει είναι η έκφραση αυτών των εννοιών με μαθηματικό τρόπο, στην ουσία, η κατασκευή καμπύλης ισοδύναμων σημείων. Αυτός ο στόχος έχει επιτευχθεί και συνδέεται με όσα αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο. Η μελέτη μας έχει βασιστεί στα εξής βιβλία [79, 82–84, 253].

Αναφέρουμε επιγραμματικά τις ενότητες αυτού του κεφαλαίου

1. Μη μεταβατική, απλά και πολλαπλά μεταβατική δράση
2. Ομογενής υπερ-επιφάνεια και αναλλοίωτη βάση
3. Εμβάπτιση των ομογενών d -διάστατων υπερ-επιφανειών σε $(d + 1)$ διαστάσεις.

I.1 Μη μεταβατική, απλά και πολλαπλά μεταβατική δράση

Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Για λόγους απλότητας και καλύτερης κατανόησης θεωρούμε υπερ-επιφάνεια S δύο διαστάσεων, με συντεταγμένες (x, y) . Έστω πως η μετρική γ της S επιδέχεται το εξής άνυσμα $\xi_1 = \partial_x$ ως συμμετρία Killing.

$$\mathcal{L}_{\xi_1} \gamma = 0, \tag{3.1}$$

Οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί που επάγονται από αυτό το άνυσμα είναι οι ολοκληρωτικές του γραμμές σε αντιστοιχία με ό,τι είχαμε αναφέρει στο κεφάλαιο 1.

$$x_1 = x + \lambda, \quad y_1 = y, \quad (3.2)$$

όπου λ η παράμετρος. Έστω σημείο A με συντεταγμένες (x_A, y_A) . Για κάθε σημείο B με συντεταγμένη $y_B = y_A$, υπάρχει τιμή της παραμέτρου λ , συγκεκριμένα $(\lambda = x_B - x_A)$ τέτοια ώστε τα δύο σημεία να συνδέονται με τον μετασχηματισμό συμμετρίας. Δηλαδή τα δύο αυτά σημεία είναι ισοδύναμα. Υπάρχουν όμως σημεία Γ στο χώρο για τα οποία ισχύει $y_\Gamma \neq y_A$. Ως αποτέλεσμα, σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να συνδέσουμε όλα τα σημεία του διδιάστατου χώρου μεταξύ τους με το μετασχηματισμό συμμετρίας. Αυτού του είδους η δράση θα ονομαστεί **μη μεταβατική**. Αφού του δούμε και τις υπόλοιπες δυνατές περιπτώσεις θα δώσουμε ένα πιο γενικό ορισμό.

Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε την ύπαρξη ενός επιπλέον ανύσματος Killing $\xi_2 = \partial_y$, του οποίου οι ολοκληρωτικές γραμμές είναι

$$x_2 = x, \quad y_2 = y + s, \quad (3.3)$$

με s κάποια παράμετρο αντίστοιχα. Όπως και πριν, θεωρούμε σημεία A και B με συντεταγμένες (x_A, y_A) , (x_B, y_B) αντίστοιχα. Χωρίς να περιορίσουμε το σύνολο των σημείων B , είναι εύκολο να δούμε πως με τα δύο Killing μπορούμε να συνδέσουμε οποιαδήποτε σημεία (A, B) με κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, συγκεκριμένα $(\lambda = x_B - x_A, s = y_B - y_A)$. Η δράση αυτή θα καλείται **μεταβατική**. Τρεις σημαντικές παρατηρήσεις: 1) Το πλήθος των πεδίων Killing ισούται με τη διάσταση του χώρου στον οποίο δρουν, σε αντίθεση με την περίπτωση της μη μεταβατικής δράσης. 2) Τα δύο πεδία είναι γραμμικά και συναρτησιακά ανεξάρτητα. 3) Εφόσον έχουμε δύο πεδία, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαδρομές από το εκάστοτε σημείο A στο σημείο B . Είναι αυτές οι διαδρομές ισοδύναμες; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα βασίζεται στην άλγεβρα που ικανοποιούν αυτά τα πεδία. Αν η άλγεβρα είναι Αβελιανή τότε οι δυο διαδρομές είναι ισοδύναμες, ενώ σε αντίθετη περίπτωση όχι.

Τέλος, θεωρούμε ένα ακόμη άνυσμα Killing $\xi_3 = -y\partial_x + x\partial_y$ με ολοκληρωτικές γραμμές

$$x_3 = x \cos \tau - y \sin \tau, \quad y_3 = y \cos \tau + x \sin \tau, \quad (3.4)$$

με τ την αντίστοιχη παράμετρο. Εφόσον αυτός ο χώρος ήδη έχει χαρακτηριστεί ως μεταβατικός λόγω των (ξ_1, ξ_2) , τι επιπλέον προσφέρει το άνυσμα ξ_3 ; Αυτό που προσφέρει είναι πολλαπλοί τρόποι σύνδεσης δύο σημείων με μετασχηματισμούς συμμετρίας. Να το εξηγήσουμε καλύτερα, υπάρχουν σημεία τα οποία μπορούν να συνδεθούν με οποιοδήποτε από τα τρία ζεύγη, (ξ_1, ξ_2) , (ξ_1, ξ_3) και (ξ_2, ξ_3) . Επομένως διαχωρίζουμε τις δύο περιπτώσεις, καλώντας την προηγούμενη δράση ως **απλά μεταβατική** και αυτή ως **πολλαπλά μεταβατική**, για προφανή λόγο. Να σημειώσουμε τα εξής: 1) Το πλήθος των ανυσμάτων σε αυτή την περίπτωση είναι μεγαλύτερο από τη διάσταση του χώρου. 2) Τα ανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όχι όμως και συναρτησιακά, καθώς $\xi_3 = -y\xi_1 + x\xi_2$.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να δώσουμε τους γενικούς ορισμούς.

Ορισμός:

Έστω υπερ-επιφάνεια S διαστάσεως d με μετρική γ και $N > d$ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα, ανυσματικά πεδία Killing ξ_I , $(\mathcal{L}_{\xi_I} \gamma = 0)$, όπου ο δείκτης I μετρά το πλήθος των πεδίων $(I = 1, \dots, N)$, τα οποία σχηματίζουν άλγεβρα Lie. Υποθέτουμε την ύπαρξη υπο-άλγεβρας $\mathcal{A}$ διαστάσεως $N_{\mathcal{A}} < N$ με ανύσματα ζ_J , $(J = 1, \dots, N_{\mathcal{A}})$. Η δράση της $\mathcal{A}$ επί της S χαρακτηρίζεται ως

1. **Μη μεταβατική:** Εάν η διάσταση της υπο-άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι μικρότερη από τη διάσταση της υπερ-επιφάνειας S , $N_{\mathcal{A}} < d$.
2. **Απλά μεταβατική:** Εάν η διάσταση της υπο-άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι ίση με τη διάσταση της υπερ-επιφάνειας S , $N_{\mathcal{A}} = d$, και τα ανυσματικά πεδία ζ_J είναι γραμμικά και συναρτησιακά ανεξάρτητα.
3. **Πολλαπλά μεταβατική:** Εάν η διάσταση της υπο-άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι μεγαλύτερη από τη διάσταση της υπερ-επιφάνειας S , $N_{\mathcal{A}} > d$ και κάποιο υποσύνολο του συνόλου των ζ_J , αποτελούν συναρτησιακά εξαρτημένα πεδία Killing.

I.2 Ομογενής υπερ-επιφάνεια και αναλλοίωτη βάση

Έχοντας ορίσει τις δράσεις μιας υπο-άλγεβρας επί μιας υπερ-επιφάνειας, και σε συνάρτηση, αλλά όχι μιλώντας αυστηρά, με το παράδειγμα που δώσαμε, προκύπτει ο εξής ορισμός

Ορισμός: Ορίζουμε ως **ομογενή**, εκείνη την υπερ-επιφάνεια διαστάσεως d και μετρικής γ , η οποία επιδέχεται μια **απλά μεταβατική** ομάδα, της οποίας οι γεννήτορες ικανοποιούν τη σχέση $\mathcal{L}_{\xi_I} \gamma = 0$, ($I = 1, \dots, d$).

Θεωρούμε τη συντεταγμένη βάση ανυσμάτων $\{\partial_{x^i}\}$ με ($i = 1, \dots, d$) και την αναλλοίωτη της $\{dx^i\}$ έτσι ώστε $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta^i_j$. Σε αυτή τη βάση η μετρική δίνεται από τη σχέση

$$\gamma = \gamma_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j, \quad (3.5)$$

και η παράγωγος Lie αυτής υπολογίζεται σε τανυστική μορφή ως εξής:

$$\mathcal{L}_{\xi_I} [\gamma(\partial_i, \partial_j)] = (\mathcal{L}_{\xi_I} \gamma)(\partial_i, \partial_j) + \gamma(\mathcal{L}_{\xi_I} \partial_i, \partial_j) + \gamma(\partial_i, \mathcal{L}_{\xi_I} \partial_j). \quad (3.6)$$

Η απαίτηση τα ξ_I να είναι ανύσματα Killing της μετρικής γ , δηλαδή $\mathcal{L}_{\xi_I} \gamma = 0$ οδηγεί στην εξίσωση Killing

$$\mathcal{L}_{\xi_I} [\gamma(\partial_i, \partial_j)] = \gamma(\mathcal{L}_{\xi_I} \partial_i, \partial_j) + \gamma(\partial_i, \mathcal{L}_{\xi_I} \partial_j), \quad (3.7)$$

όπου $\gamma(\partial_i, \partial_j) = \gamma_{lm} dx^l \otimes dx^m(\partial_i, \partial_j) = \gamma_{lm} dx^l(\partial_i) dx^m(\partial_j) = \gamma_{ij}$.

Η εξίσωση Killing (3.7) μπορεί να απλοποιηθεί αν αντί της βάσης ∂_i , χρησιμοποιήσουμε κάποια **αναλλοίωτη** βάση ανυσμάτων η_I . Αναλλοίωτη εννοούμε ως προς τη δράση της ομάδας, δηλαδή

$$\mathcal{L}_{\xi_I} \eta_J = 0. \quad (3.8)$$

Μια τέτοια βάση δε μπορεί πάντα να βρεθεί, όμως στη περίπτωση των ομογενών υπερ-επιφανειών αυτό είναι πάντα εφικτό. Την αντίστοιχη δύικη βάση των η_I θα τη συμβολίσουμε ως σ^I , $\sigma^I(\eta_J) = \delta^I_J$. Η σύνδεση μεταξύ των συντεταγμένων βάσεων και των αναλλοίωτων είναι

$$\eta_I = \eta_I^i(x) \partial_i, \quad \partial_i = \eta_i^I(x) \eta_I, \quad (3.9)$$

$$\sigma^I = \sigma^I_i(x) dx^i, \quad dx^i = \sigma^i_I(x) dx^I. \quad (3.10)$$

Συνεπώς, στην αναλλοίωτη βάση η μετρική είναι $\gamma = \gamma_{IJ}(x) \sigma^I(x) \otimes \sigma^J(x)$, όπου $\gamma_{IJ}(x) = \gamma_{ij}(x) \sigma^i_I(x) \sigma^j_J(x)$. Μετά από κάποιες απλές πράξεις μπορεί ναδειχθεί πως η εξίσωση Killing λαμβάνει τη μορφή

$$\xi_I^i(x) [\partial_i \gamma_{JL}(x)] \eta_J^J(x) \eta_L^L(x) = 0. \quad (3.11)$$

Επειδή τα ανύσματα ξ_I είναι συναρτησιακά ανεξάρτητα, αντίστοιχα και τα η_J , οι πίνακες $\xi_I^i(x)$, $\eta_i^J(x)$ έχουν αντίστροφο, συνεπώς η (3.11) είναι ισοδύναμη με

$$\partial_i \gamma_{JL}(x) = 0 \Rightarrow \gamma_{JL}(x) = \gamma_{JL} \equiv \text{σταθερές}. \quad (3.12)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως εκφράζοντας τη μετρική στην αναλλοίωτη βάση, οι συνιστώσες της είναι σταθερές ως προς αυτή. Ας ξεκαθαρίσουμε το εξής: Είτε εκφράσουμε τη μετρική στη συντεταγμένη βάση, είτε στην αναλλοίωτη, είτε σε οποιαδήποτε άλλη, αυτό δεν αλλάζει το γεγονός πως θα αναφερόμαστε σε ομογενή υπερ-επιφάνεια. Ισοδύναμα, σε οποιαδήποτε βάση θα επιδέχεται κάποια απλά μεταβατική ομάδα. Αυτό που κάνει ιδιαίτερη την αναλλοίωτη βάση είναι η “απορρόφηση” της (x^i) εξάρτησης στα ανύσματα βάσης. Επομένως, τα γεωμετρικά αντικείμενα, όπως ο τανυστής Einstein, η καμπυλότητα και άλλα, σε αυτή τη βάση είναι ανεξάρτητα από τις συντεταγμένες (x^i) . Παρατηρούμε λοιπόν κάποια σύνδεση με τη διαίσθηση που αναφέραμε στην εισαγωγή. Ωστόσο, θα γίνει καλύτερα κατανοητή η έννοια της ομογένειας και αντίστοιχα της ανισοτροπίας, η οποία είναι εγγενής σε αυτά τα πρότυπα, όταν εμβαπτίσουμε τις υπερ-επιφάνειες σε ένα χώρο διαστάσεως $(d+1)$. Επειδή οι συνιστώσες της μετρικής είναι σταθερές, ενδεχομένως κάποιος θα περίμενε πως η καμπυλότητα της d -διάστατης υπερ-επιφάνειας θα ήταν μηδέν και η μετρική θα περιέγραφε τον επίπεδο χώρο. Όμως πρέπει να προσέξουμε πως η βάση που χρησιμοποιούμε

δεν είναι η συντεταγμένη και ως αποτέλεσμα τα στοιχεία της δεν μετατίθενται, δηλαδή αποδεικνύεται [253] πως ισχύει

$$d\sigma^L = -\frac{1}{2}C_{IJ}^L\sigma^I \wedge \sigma^J, \quad (3.13)$$

$$[\xi_I, \xi_J] = C_{IJ}^L\xi_L, \quad (3.14)$$

όπου C_{IJ}^L οι σταθερές δομής της άλγεβρας Lie, $d\sigma^L$ η εξωτερική παράγωγος των σ^L και $\sigma^I \wedge \sigma^J = \frac{1}{2}(\sigma^I \otimes \sigma^J - \sigma^J \otimes \sigma^I)$. Σε μη συντεταγμένη βάση λοιπόν, η καμπυλότητα ενός χώρου έχει συνεισφορά και από τις σταθερές δομής. Ως αποτέλεσμα, υπάρχουν τόσοι διαφορετικοί ομογενείς χώροι, όσες και οι διαφορετικές κλάσεις. Όπως είχαμε αναφέρει σε παραπάνω κεφάλαιο υπάρχουν πολλές τέτοιες κλάσεις η κατηγοριοποίηση των οποίων γίνεται μέσω των σταθερών δομής. Ας αναφέρουμε μόνο κάποια πράγματα για τις 2 και 3 διαστάσεις.

I.2.1 Ομογενείς υπερ-επιφάνειες διαστάσεως $d = 2$

Σε δύο διαστάσεις έχουμε δύο ανύσματα Killing. Η μία προφανής κλάση είναι πάντα η αβελιανή, δηλαδή όλες οι σταθερές δομής είναι μηδέν, $[\xi_1, \xi_2] = 0$. Οι υπόλοιπες κλάσεις είναι μη-αβελιανές δηλαδή θα ισχύει εν γένει, $[\xi_1, \xi_2] = C_{12}^1\xi_1 + C_{12}^2\xi_2$. Όμως αποδεικνύεται πως πρόκειται για μόνο μια κλάση η οποία μπορεί πάντα, με μια αλλαγή βάσης $\xi_I = B_I^J\xi_J$ με B_I^J σταθερό αντιστρέψιμο πίνακα, να γραφεί στη μορφή $[\zeta_1, \zeta_2] = \zeta_1$ ή ισοδύναμα $[\zeta_1, \zeta_2] = \zeta_2$. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τις σταθερές δομής, μια από τις δυνατές πραγματώσεις των ανυσματικών πεδίων ξ_I και τις αντίστοιχες ένα-μορφές σ^I σε σύστημα με συντεταγμένες (x, y) .

Σταθερές δομής	ξ_I	σ^I
$C_{12}^1 = 0 = -C_{21}^1$,	$\xi_1 = \partial_x, \xi_2 = \partial_y$	$\sigma^1 = dx, \sigma^2 = dy$
$C_{12}^1 = 1 = -C_{21}^1$,	$\xi_1 = \partial_x, \xi_2 = x\partial_x + y\partial_y$	$\sigma^1 = \frac{1}{y}dx, \sigma^2 = \frac{1}{y}dy$

Πίνακας 3.1: Αυτός ο πίνακας περιέχει τις δύο κλάσεις ομογενών χώρων, τα ανύσματα Killing και τις αντίστοιχες ένα-μορφές.

Οι συνιστώσες των αντίστοιχων μετρικών στη συντεταγμένη βάση για αυτές τις δύο κλάσεις είναι

$$\text{Κλάση I, } \gamma_{ij} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ Κλάση II, } \gamma_{ij} = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

όπου, c_i και $\alpha_i, (i = 1, 2, 3)$ σταθερές. Η πρώτη μετρική αντιστοιχεί σε επίπεδο χώρο, είτε Ευκλείδειας είτε Lorentz υπογραφής. Η δεύτερη αντιστοιχεί σε χώρο σταθερής καμπυλότητας, με καμπυλότητα Ricci $R = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3}$.

I.2.2 Ομογενείς υπερ-επιφάνειες διαστάσεως $d = 3$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τρία ανύσματα Killing. Η κατηγοριοποίηση των κλάσεων δόθηκε από τον Bianchi [43] και οι αντίστοιχες κλάσεις αναφέρονται ως **Bianchi Types**. Υπάρχουν εννιά τέτοια πρότυπα. Πώς είναι δυνατόν να υπάρχουν 9 διαφορετικοί ομογενείς χώροι; Αρχικά μπορούμε να σκεφτούμε πως υπάρχουν θετικής, αρνητικής και μηδενικής καμπυλότητας τριδιάστατες υπερ-επιφάνειες. Αυτές χωρίζονται περαιτέρω με βάση τις διδιάστατες υπερ-επιφάνειες που μπορούν να υποστηρίξουν. Αυτό συνδέεται άμεσα με το αν η άλγεβρα των γεννητόρων εμπεριέχει υπο-άλγεβρες και ποιά η διάστασή τους. Επειδή κάποια στιγμή θα αναφέρουμε τις σταθερές δομής αυτών σε κάποια από τις εφαρμογές, είναι περιττό να τις αναφέρουμε και εδώ. Η βιβλιογραφία που έχουμε χρησιμοποιήσει για τις σταθερές δομής και τις αντίστοιχες πραγματώσεις είναι κυρίως [49, 50, 85, 253].

I.3 Εμβάπτιση των ομογενών d -διάστατων υπερ-επιφανειών σε $(d+1)$ διαστάσεις

Οι χωρόχρονοι που θέλουμε να μελετήσουμε, επιθυμούμε να είναι διαστάσεως $(d+1)$ και να εμπεριέχουν ομογενείς υπερ-επιφάνειες διαστάσεως d . Δηλαδή επιθυμούμε η $(d+1)$ μετρική να δέχεται τα ίδια και μόνο αυτά, πεδία Killing που επιδέχεται η μετρική των υπερ-επιφανειών. Όμως αυτά είναι διαστάσεως d εφόσον τα κατασκευάσαμε για την μετρική γ . Πώς θα κατασκευάσουμε την αντίστοιχη επέκτασή τους; Ένας τρόπος είναι η τετριμμένη επέκταση, δηλαδή θεωρούμε μηδενική την επιπλέον συνιστώσα του ανύσματος Killing. Αυτή η επιλογή εξασφαλίζει πως και η άλγεβρα των ανυσμάτων παραμένει ίδια. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε πως χωρίς βλάβη της γενικότητας, η μετρική σε σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) θα έχει τη γενική μορφή

$$\mathbf{g} = g_{00}(t, x)dt \otimes dt + g_{0i}(t, x)\frac{1}{2}(dt \otimes dx^i + dx^i \otimes dt) + \gamma_{IJ}(t)\sigma^I{}_i(x)\sigma^J{}_j(x)dx^i \otimes dx^j. \quad (3.16)$$

Για ποιό λόγο αφήσαμε το $\gamma_{IJ}(t)$ να εξαρτάται από τη μεταβλητή t ενώ είχαμε δείξει πως πρέπει να είναι σταθερά; Η απάντηση είναι πως πρέπει να είναι ανεξάρτητη μόνο από τις μεταβλητές της υπερ-επιφάνειας, δηλαδή τα x^i και όχι από τις επιπλέον μεταβλητές του χωρόχρονου στον οποίο εμβαπτίσαμε τις υπερ-επιφάνειες. Επιπλέον, δεν αρκεί να επεκτείνουμε τετριμμένα τους γεννήτορες. Για να εξασφαλίσουμε πως είναι γεννήτορες συμμετριών και της μετρικής $\mathbf{g}$, πρέπει να ισχύει

$$g_{00}(t, x) = g_{00}(t), \quad g_{0i}(t, x) = g_{0I}(t)\sigma^I{}_i(x). \quad (3.17)$$

Χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα τη $(d+1)$ ανάλυση, η μετρική για χωρόχρονους οι οποίοι επιδέχονται ομογενείς υπερ-επιφάνειες διαστάσεως d αποκτά τη μορφή

$$\mathbf{g} = [\epsilon N(t)^2 + N_I(t)N^I(t)] dt \otimes dt + N_I(t)\sigma^I{}_i(x)\frac{1}{2}(dt \otimes dx^i + dx^i \otimes dt) + \gamma_{IJ}(t)\sigma^I{}_i(x)\sigma^J{}_j(x)dx^i \otimes dx^j, \quad (3.18)$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathbf{g} = [\epsilon N(t)^2 + N_I(t)N^I(t)] dt \otimes dt + N_I(t)\frac{1}{2}(dt \otimes \sigma^I + \sigma^I \otimes dt) + \gamma_{IJ}(t)\sigma^I \otimes \sigma^J. \quad (3.19)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε τις εξισώσεις του προηγούμενου κεφαλαίου χρησιμοποιώντας αυτή τη μετρική. Οι πράξεις για το πώς καταλήγουμε στις εξισώσεις βρίσκονται στο παράρτημα. Για απλότητα, οι Λατινικοί δείκτες της συντεταγμένης βάσης θα αντικατασταθούν από ελληνικούς. Η μορφή αυτών παρουσιάστηκε στην εργασία [78] αυτής της διατριβής.

(EFE)

$$R^{(d)} + K^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = 2\kappa\rho^{(tot)}, \quad (3.20)$$

$$K_{\alpha}{}^{\beta}C_{\beta\lambda}^{\alpha} + K_{\lambda}{}^{\beta}C_{\beta\alpha}^{\alpha} = \kappa q_{\lambda}^{(tot)}, \quad (3.21)$$

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = NR_{\alpha\beta}^{(d)} - N(2K_{\alpha}{}^{\lambda}K_{\lambda\beta} - KK_{\alpha\beta}) - N^{\epsilon}(K_{\alpha\lambda}C_{\epsilon\beta}^{\lambda} + K_{\beta\lambda}C_{\epsilon\alpha}^{\lambda}) - \kappa N\left(\pi_{\alpha\beta}^{(tot)} + \frac{\rho^{(tot)} - P^{(tot)}}{d-1}\gamma_{\alpha\beta}\right), \quad (3.22)$$

όπου η εξωτερική και η καμπυλότητα Ricci δίνονται από τις εκφράσεις

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2N}(\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + N^{\lambda}C_{\lambda\beta}^{\epsilon}\gamma_{\epsilon\alpha} + N^{\lambda}C_{\lambda\alpha}^{\epsilon}\gamma_{\epsilon\beta}), \quad (3.23)$$

$$R_{\mu\nu}^{(d)} = -\frac{1}{2}C_{\beta\mu}^{\alpha}(C_{\alpha\nu}^{\beta} + \gamma^{\beta\epsilon}\gamma_{\alpha\epsilon}C_{\epsilon\nu}^{\alpha}) + \frac{1}{4}\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}\gamma^{\zeta\tau}\gamma^{\epsilon\theta}C_{\zeta\epsilon}^{\alpha}C_{\tau\theta}^{\beta} - \frac{1}{2}C_{\tau\beta}^{\alpha}\gamma^{\tau\alpha}(C_{\alpha\mu}^{\zeta}\gamma_{\nu\zeta} + C_{\alpha\nu}^{\zeta}\gamma_{\mu\zeta}). \quad (3.24)$$

(UMFE)

$$\dot{\rho}_{(u)} - (\rho_{(u)} + P_{(u)}) NK + Nq_{(u)}^{\mu} C_{\mu\alpha}^{\alpha} - N\pi_{(u)}^{\alpha\mu} K_{\alpha\mu} = 0, \quad (3.25)$$

$$\dot{q}_{\mu}^{(u)} + N^{\beta} q_{\alpha}^{(u)} C_{\beta\mu}^{\alpha} - NK q_{\mu}^{(u)} + N \left(C_{\beta\alpha}^{\alpha} \pi_{\mu}^{(u)\beta} + \pi_{\alpha}^{(u)\beta} C_{\beta\mu}^{\alpha} \right) = 0. \quad (3.26)$$

(CMFE)

$$\dot{\rho}_{(c)} - (\rho_{(c)} + P_{(c)}) NK + Nq_{(c)}^{\mu} C_{\mu\alpha}^{\alpha} - N\pi_{(c)}^{\alpha\mu} K_{\alpha\mu} = NE^{\alpha} J_{\alpha}, \quad (3.27)$$

$$\dot{q}_{\mu}^{(c)} + N^{\beta} q_{\alpha}^{(c)} C_{\beta\mu}^{\alpha} - NK q_{\mu}^{(c)} + N \left(C_{\beta\alpha}^{\alpha} \pi_{\mu}^{(c)\beta} + \pi_{\alpha}^{(c)\beta} C_{\beta\mu}^{\alpha} \right) = -N (\rho_{(e)} E_{\mu} + B_{\mu\alpha} J^{\alpha}). \quad (3.28)$$

(MFE)

$$C_{\mu\alpha}^{\alpha} E^{\mu} = -\mu_0 \rho_{(e)}, \quad \dot{E}^{\mu} + E^{\beta} N^{\alpha} C_{\beta\alpha}^{\mu} + N \left(B^{\mu\lambda} C_{\lambda\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} C_{\lambda\alpha}^{\mu} B^{\lambda\alpha} \right) - NKE^{\mu} + \mu_0 NJ^{\mu} = 0, \quad (3.29)$$

$$B_{\mu[\alpha} C_{\beta\lambda]}^{\mu} = 0, \quad \dot{B}_{\mu\nu} + N^{\alpha} (B_{\mu\lambda} C_{\alpha\nu}^{\lambda} + B_{\lambda\nu} C_{\alpha\mu}^{\lambda}) - NE_{\lambda} C_{\mu\nu}^{\lambda} = 0. \quad (3.30)$$

(CCFE)

$$\dot{\rho}_{(e)} - NK\rho_{(e)} - NC_{\mu\alpha}^{\alpha} J^{\mu} = 0. \quad (3.31)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1. Το σύμβολο $(\cdot)$ αναπαριστά παράγωγο ως προς τη μεταβλητή t . Όλα τα παραπάνω αντικείμενα εξαρτώνται μόνο από αυτή τη μεταβλητή, συνεπώς οι εξισώσεις του συστήματος μετατράπηκαν από μερικές διαφορικές σε συνήθειες. Αυτό είναι και το βασικό αποτέλεσμα της ομογένειας: Η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από βαθμούς ελευθερίας που δεν εξαρτώνται από τις x^i συντεταγμένες. Στις περιπτώσεις όπου η μεταβλητή t αναπαριστά το χρόνο, τότε έχουμε χωρική ομογένεια.
2. Αν κάνουμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων ή αλλάξουμε τη βάση, τότε η μορφή της μετρικής (3.19) θα “χαλάσει”. Αυτό δεν συνεπάγεται πως η μετρική δεν επιδέχεται πλέον ομογενείς υπερ-επιφάνειες, απλώς δεν είναι προφανής η ομογένεια. Θα ονομάσουμε τη μορφή (3.19) **προφανή**.
3. Για να γραφούν οι εξισώσεις σε αυτή τη μορφή, έχουμε υποθέσει τα εξής $E_i(t, x) = E_{\alpha}(t)\sigma^{\alpha}_i(x)$, $B_{ij}(t, x) = B_{\alpha\mu}(t)\sigma^{\alpha}_i(x)\sigma^{\mu}_j(x)$ και $J_i(t, x) = J_{\alpha}(t)\sigma^{\alpha}_i(x)$. Αντίστοιχη ανάλυση θεωρήσαμε και για τις ποσότητες που περιγράφουν τα ρευστά. Θα εξηγήσουμε στο Παράρτημα για ποιο λόγο πρέπει να υποθέσουμε κάτι τέτοιο.

Κεφάλαιο 4

Συμμετρίες των εξισώσεων Einstein+Maxwell+Ρευστών σε ομογενείς χωροχρόνους.

I Εισαγωγή

Στο πεδίο της γενικής σχετικότητας οι συμμετρίες της μετρικής (και επομένως των εξισώσεων Einstein) έχουν χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο βαθμό προς απλοποίηση και σε κάποιες περιπτώσεις επίλυση των εξισώσεων Einstein. Επίσης με βάση τις συμμετρίες της μετρικής μπορεί να υπάρξει και κατηγοριοποίηση των λύσεων. Μια εκτενής μελέτη μπορεί να βρεθεί στα [83], [84]. Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα αποτελεί η ομάδα των Αυτομορφισμών, η οποία αποτελεί ομάδα συμμετρίας των εξισώσεων Einstein στην περίπτωση χωροχρόνων με εμβλαπτισμένες ομογενείς υπερ-επιφάνειες. Μια διαφορετική ονομασία με την οποία μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία είναι “rigid” συμμετρίες [86]. Οι Ashtekar και Samuel ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν την ομάδα των Αυτομορφισμών από γεωμετρική σκοπιά [87]. Στην περίπτωση των εξισώσεων Einstein στο κενό στις $(3 + 1)$ διαστάσεις, για τις κλάσεις Bianchi, η χρήση της ομάδας των Αυτομορφισμών αποδείχθηκε πολύ χρήσιμη, καθώς οδήγησε τελικώς στην εύρεση του χώρου λύσεων για τις κλάσεις Bianchi (I-VII) [88], [23], [24], [25]. Επιπλέον, η ομάδα αυτή παρέχει έναν αλγόριθμο ώστε να μετρηθεί το πλήθος των ουσιωδών σταθερών σε αυτές τις γεωμετρίες και ως αποτέλεσμα να υπάρξει αναλλοίωτος χαρακτηρισμός των προς μελέτη χωροχρόνων [89], [90], [91]. Ουσιώδεις ονομάζονται εκείνες οι σταθερές οι οποίες δεν μπορούν να “απορροφηθούν” (εξαφανιστούν) με κάποιο μετασχηματισμό συντεταγμένων, όπως για παράδειγμα η “μάζα” στη μετρική Schwarzschild.

Σε αυτό το κεφάλαιο λοιπόν θα μελετήσουμε συμμετρίες των εξισώσεων Einstein για αυτής της μορφής χωροχρόνους. Στη γενικότητα τους, οι εξισώσεις Einstein επιδέχονται ως γεννήτορα συμμετρίας Lie τον

$$\mathbf{Z} = \xi^\mu(x^\lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \left[\partial_\mu \xi^\sigma(x^\lambda) g_{\sigma\nu}(x^\lambda) + \partial_\nu \xi^\sigma(x^\lambda) g_{\mu\sigma}(x^\lambda) + \alpha g_{\mu\nu}(x^\lambda) \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \right], \quad (4.1)$$

όπου x^λ , $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ οι συντεταγμένες και η μετρική του χωροχρόνου [41]. Παρατηρούμε πως αυτός ο γεννήτορας εμπεριέχει μια σταθερά α η οποία αντιστοιχεί σε σημειακή, παραμετρική συμμετρία Lie. Επομένως έχουμε μονοπαραμετρική ομάδα Lie. Σε τι αντιστοιχεί αυτή η συμμετρία; Αν έχουμε μια λύση των εξισώσεων, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με μια σταθερά τη μετρική και θα είναι επίσης λύση των εξισώσεων Einstein. Όμως υπάρχει και ένα αυθαίρετο άνυσμα. Εν γένει, ο γεννήτορας των σημειακών συμμετριών Lie των μερικών διαφορικών εξισώσεων ενδέχεται να περιέχει αυθαίρετες συναρτήσεις σε αντίθεση με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται στην ελευθερία επιλογής συνοριακών συνθηκών για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, σε κάποια εγγενή gauge ελευθερία ή και σε συνδυασμό των δύο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αυτή η συμμετρία οφείλεται στη συναλλοιότητα των εξισώσεων

Einstein υπό γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Να τονίσουμε σε αυτό το σημείο πως το σύνολο των γεννητόρων οι οποίοι περιέχουν αυθαίρετες συναρτήσεις δεν σχηματίζουν άλγεβρα Lie.

Τι γίνεται λοιπόν στη περίπτωση που μελετάμε εμείς; Προφανώς δεν εξετάζουμε τις εξισώσεις Einstein στη γενικότητα τους αλλά έχουμε περιοριστεί σε μια συγκεκριμένη οικογένεια. Ως αποτέλεσμα του συγκεκριμένου περιορισμού οι εξισώσεις από μερικές διαφορικές έχουν μετατραπεί σε συνήθεις. Αυτό που ενδεχομένως περιμένουμε είναι να εμφανιστούν περισσότερες σταθερές στο γεννήτορα και έτσι η ομάδα των συμμετριών Lie να γίνει από μονοπαραμετρική, πολυπαραμετρική.

Οι ενότητες που περιλαμβάνονται είναι οι εξής

1. “Χρονικά” εξαρτώμενοι Αυτομορφισμοί
2. Χρήση των Αυτομορφισμών
3. Ομάδα των σταθερών Αυτομορφισμών

I.1 “Χρονικά” εξαρτώμενοι Αυτομορφισμοί

Ανακαλούμε την προφανή ομογενή μορφή του στοιχείου μήκους για ένα χωρόχρονο με ομογενείς υπερ-επιφάνειες. Θα θεωρήσουμε $\epsilon = -1$

$$ds^2 = [-N(t)^2 + N_\mu(t)N^\mu(t)] dt^2 + 2N_\mu(t)\sigma^\mu_i(x)dt dx^i + \gamma_{\mu\nu}(t)\sigma^\mu_i(x)\sigma^\nu_j(x)dx^i dx^j, \quad (4.2)$$

όπου $(\mu, \nu = 1, \dots, d)$ και $(i, j = 1, \dots, d)$. Η ιδέα είναι η αναζήτηση μετασχηματισμών οι οποίοι διατηρούν την προφανή ομογένεια και ως επιπλέον αποτέλεσμα αποτελούν συμμετρίες των εξισώσεων Einstein. Παραθέτουμε συνοπτικά την ιδέα η οποία μπορεί να βρεθεί αναλυτικά στις εξής εργασίες [92, 93]. Ταυτόχρονα, τίθεται και το ερώτημα αν μπορούμε ακόμη να βρούμε συντεταγμένες Gauss ($N(t) = 0$, $N_\mu(t) = 0$), δηλαδή αφότου έχουμε μετασχηματίσει τη μετρική στην προφανή ομογενή μορφή της. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η απάντηση είναι ναι.

Ας θεωρήσουμε τους παρακάτω αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς

$$t \mapsto \tilde{t} = t, \quad (4.3)$$

$$x^i \mapsto \tilde{x}^i = h^i(t, x^l), \quad x^i = f^i(\tilde{t}, \tilde{x}^l), \quad (4.4)$$

οι οποίοι ύστερα από κάποιες πράξεις μετασχηματίζουν το στοιχείο μήκους στη μορφή

$$ds^2_{(d+1)} = \left\{ [-N(\tilde{t})^2 + N_\mu(\tilde{t})N^\mu(\tilde{t})] + 2N_\mu(\tilde{t})\sigma^\mu_i(f)\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}} + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t})\sigma^\mu_i(f)\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}}\sigma^\nu_j(f)\frac{\partial f^j}{\partial \tilde{t}} \right\} d\tilde{t}^2 + \\ 2 \left[N_\mu(\tilde{t})\sigma^\mu_i(f)\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t})\sigma^\mu_i(f)\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}}\sigma^\nu_j(f)\frac{\partial f^j}{\partial \tilde{x}^m} \right] d\tilde{t}d\tilde{x}^m + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t})\sigma^\mu_i(f)\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m}\sigma^\nu_j(f)\frac{\partial f^j}{\partial \tilde{x}^n} d\tilde{x}^m d\tilde{x}^n. \quad (4.5)$$

Για λόγους απλότητας εισάγουμε τις συντομογραφίες

$$\sigma^\mu_i(f)\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}} = P^\mu(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad (4.6)$$

$$\sigma^\mu_i(f)\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} = \Lambda^\mu_m(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad (4.7)$$

με το στοιχείο μήκους να αποκτά τη μορφή

$$ds^2_{(d+1)} = \left\{ [-N(\tilde{t})^2 + N_\mu(\tilde{t})N^\mu(\tilde{t})] + 2N_\mu(\tilde{t})P^\mu(\tilde{t}, \tilde{x}) + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t})P^\mu(\tilde{t}, \tilde{x})P^\nu(\tilde{t}, \tilde{x}) \right\} d\tilde{t}^2 + \\ 2 [N_\mu(\tilde{t})\Lambda^\mu_m(\tilde{t}, \tilde{x}) + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t})P^\mu(\tilde{t}, \tilde{x})\Lambda^\nu_n(\tilde{t}, \tilde{x})] d\tilde{t}d\tilde{x}^m + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t})\Lambda^\mu_m(\tilde{t}, \tilde{x})\Lambda^\nu_n(\tilde{t}, \tilde{x})d\tilde{x}^m d\tilde{x}^n. \quad (4.8)$$

Όπως εξηγήσαμε και παραπάνω, το (4.8) επιδέχεται την ίδια ομάδα συμμετρίας με το (4.2). Αν δεν επιβάλουμε κάποια συνθήκη επί των P^μ , Λ^μ_ν , τότε απλώς “χαλάσαμε” την προφανή ομογένεια. Απαιτώντας να διατηρείται η προφανής ομογένεια, τότε πρέπει ο πίνακας Λ^μ_ν και η d -πλέτα P^μ να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\Lambda^\mu_m(\tilde{t}, \tilde{x}) = \Lambda^\mu_\nu(\tilde{t}) \sigma^\nu_m(\tilde{x}), \quad (4.9)$$

$$P^\mu(\tilde{t}, \tilde{x}) = P^\mu(\tilde{t}). \quad (4.10)$$

Ο περιορισμός (4.9) εισάγει την παλαιά βάση των ένα-μορφών υπολογισμένων στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Οι εξισώσεις (4.6), (4.7) γίνονται

$$\sigma^\mu_i(f) \frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}} = P^\mu(\tilde{t}), \quad (4.11)$$

$$\sigma^\mu_i(f) \frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} = \Lambda^\mu_\nu(\tilde{t}) \sigma^\nu_m(\tilde{x}), \quad (4.12)$$

ενώ το στοιχείο μήκους (4.8) αποκτά τη μορφή

$$ds^2_{(d+1)} = \left[-\tilde{N}(\tilde{t}) + \tilde{N}_\mu(\tilde{t}) \tilde{N}^\mu(\tilde{t}) \right] d\tilde{t}^2 + 2\tilde{N}_\mu(\tilde{t}) \sigma^\mu_m(\tilde{x}) d\tilde{t} d\tilde{x}^m + \tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\tilde{t}) \sigma^\mu_m(\tilde{x}) \sigma^\nu_n(\tilde{x}) d\tilde{x}^m d\tilde{x}^n. \quad (4.13)$$

Παρατηρούμε πως το στοιχείο μήκους έχει την ίδια μορφή με το αρχικό, όμως χρησιμοποιήσαμε τις εξής συντομεύσεις

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(\tilde{t}) = \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t}) \Lambda^\mu_\alpha(\tilde{t}) \Lambda^\nu_\beta(\tilde{t}), \quad (4.14)$$

$$\tilde{N}_\alpha(\tilde{t}) = (N_\mu(\tilde{t}) + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t}) P^\nu(\tilde{t})) \Lambda^\mu_\alpha(\tilde{t}), \quad (4.15)$$

$$\tilde{N}(\tilde{t}) = N(\tilde{t}). \quad (4.16)$$

Εφόσον το στοιχείο μήκους αποκτά την ίδια μορφή, αυτό συνεπάγεται πως αν βρούμε μια λύση των εξισώσεων Einstein ($N(t)$, $N_\mu(t)$, $\gamma_{\mu\nu}(t)$), τότε και η αντίστοιχη τριπλέτα ($\tilde{N}(\tilde{t})$, $\tilde{N}_\mu(\tilde{t})$, $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\tilde{t})$) που προκύπτει από τις (4.14)–(4.16), θα είναι και πάλι λύση των εξισώσεων. Πρώτα βέβαια θα πρέπει να εξασφαλίσουμε πως υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις $f^i(\tilde{t}, \tilde{x})$ για κάποια $\Lambda^\mu_\nu(t)$ και $P^\mu(t)$ αντίστοιχα.

Το σύστημα των (4.11), (4.12) αποτελείται από $d(d+1)$ πρώτης τάξης, μερικές διαφορικές εξισώσεις ως προς τις συναρτήσεις f^i . Εκμεταλλευόμαστε την αντιστρεψιμότητα των $\sigma^\mu_i(f)$, πολλαπλασιάζοντας και τις δύο σχέσεις με τους αντίστροφους πίνακες $\sigma^i_\mu(f)$

$$\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}} = \sigma^i_\mu(f) P^\mu(\tilde{t}), \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} = \sigma^i_\mu(f) \Lambda^\mu_\nu(\tilde{t}) \sigma^\nu_m(\tilde{x}). \quad (4.18)$$

Η ύπαρξη λύσεων του συστήματος (4.17), (4.18) εγγνύεται από το θεώρημα Frobenius αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ικανές και αναγκαίες συνθήκες:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{t}} - \frac{\partial^2 f^i}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^m} = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^n} - \frac{\partial^2 f^i}{\partial \tilde{x}^n \partial \tilde{x}^m} = 0, \quad (4.20)$$

Μετά από αρκετές πράξεις προκύπτουν οι εξής περιορισμοί επί των $\Lambda^\mu_\nu(t)$, $P^\mu(t)$

$$\Lambda^\alpha_\mu(\tilde{t}) C^\mu_{\beta\nu} = C^\alpha_{\mu\sigma} \Lambda^\mu_\beta(\tilde{t}) \Lambda^\sigma_\nu(\tilde{t}), \quad (4.21)$$

$$\dot{\Lambda}^\alpha_\beta(\tilde{t}) = \Lambda^\mu_\beta(\tilde{t}) C^\alpha_{\mu\nu} P^\nu(\tilde{t}), \quad (4.22)$$

όπου $C^\mu_{\nu\sigma}$ οι σταθερές δομής της ομάδας συμμετρίας.

1. Αποδεικνύεται [93] πως τα $\Lambda^\mu{}_\nu(t)$, $P^\mu(t)$ σχηματίζουν ομάδα, με εσωτερικές πράξεις

$$\Lambda^\mu{}_{(3)\alpha}(\tilde{t}) = \Lambda^\mu{}_{(1)\beta}(\tilde{t})\Lambda^\beta{}_{(2)\alpha}(\tilde{t}), \quad (4.23)$$

$$P^\mu{}_{(3)}(\tilde{t}) = P^\mu{}_{(1)}(\tilde{t}) + \Lambda^\mu{}_{(1)\beta}(\tilde{t})P^\beta{}_{(2)}(\tilde{t}), \quad (4.24)$$

για κάθε $(P^\mu{}_{(1)}(\tilde{t}), P^\mu{}_{(2)}(\tilde{t}), \Lambda^\mu{}_{(1)\beta}(\tilde{t}), \Lambda^\mu{}_{(2)\beta}(\tilde{t}))$ τα οποία ικανοποιούν τις (4.21),(4.22).

2. Παρατηρούμε επιπλέον πως για κάθε διαφορετική κλάση (διαφορετικές σταθερές δομής) αναμένουμε διαφορετικές λύσεις των εξισώσεων (4.21),(4.22).
3. Η εξίσωση (4.21) είναι αλγεβρική, επομένως μπορεί να βρεθεί η λύση της ανεξάρτητα από την (4.22). Επιπλέον, μοιάζει με την εξίσωση (1.18) η οποία μας δίνει το νόμο μετασχηματισμού των σταθερών δομής,

$$B^\alpha{}_\mu \tilde{C}^\mu{}_{\beta\nu} = C^\alpha{}_{\mu\sigma} B^\mu{}_\beta B^\sigma{}_\nu. \quad (4.25)$$

Όμως σε αυτή την περίπτωση, ισχύει $\tilde{C}^\mu{}_{\beta\nu} = C^\mu{}_{\beta\nu}$, επομένως οι $\Lambda^\mu{}_\alpha(\tilde{t})$ είναι πίνακες οι οποίοι διατηρούν τη μορφή των σταθερών δομής. Αποτελούν στην ουσία, ομάδα συμμετρίας της ομάδας συμμετρίας του χωρόχρονου. Τέτοιου είδους πίνακες ονομάζονται **Αυτομορφισμοί**.

I.2 Χρήση των Αυτομορφισμών

Ας ανακαλέσουμε τι βρήκαμε μέχρι στιγμής: Αναζητήσαμε μετασχηματισμούς οι οποίοι διατηρούν την προφανή ομογένεια του στοιχείου μήκους. Αποδεικνύεται πως τέτοιοι μετασχηματισμοί υπάρχουν και δίνονται ως συναρτήσεις των $\Lambda^\mu{}_\alpha(t)$, P^μ , τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Lambda^\alpha{}_\mu(\tilde{t}) C^\mu{}_{\beta\nu} = C^\alpha{}_{\mu\sigma} \Lambda^\mu{}_\beta(\tilde{t}) \Lambda^\sigma{}_\nu(\tilde{t}), \quad (4.26)$$

$$\dot{\Lambda}^\alpha{}_\beta(\tilde{t}) = \Lambda^\mu{}_\beta(\tilde{t}) C^\alpha{}_{\mu\nu} P^\nu(\tilde{t}). \quad (4.27)$$

Για κάθε λύση των εξισώσεων Einstein $(N(t), N_\mu(t), \gamma_{\mu\nu}(t))$, η τριπλέτα $(\tilde{N}(\tilde{t}), \tilde{N}_\mu(\tilde{t}), \tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\tilde{t}))$ η οποία δίνεται από τις σχέσεις

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(\tilde{t}) = \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t}) \Lambda^\mu{}_\alpha(\tilde{t}) \Lambda^\nu{}_\beta(\tilde{t}), \quad (4.28)$$

$$\tilde{N}_\alpha(\tilde{t}) = (N_\mu(\tilde{t}) + \gamma_{\mu\nu}(\tilde{t}) P^\nu(\tilde{t})) \Lambda^\mu{}_\alpha(\tilde{t}), \quad (4.29)$$

$$\tilde{N}(\tilde{t}) = N(\tilde{t}), \quad (4.30)$$

αποτελεί και πάλι λύση των εξισώσεων Einstein: αποδεικνύεται πως οι τελευταίες μετασχηματίζονται συναλλοίωτα υπό τους μετασχηματισμούς (4.28)-(4.30). Φυσικά, υπό την παρουσία ύλης, τα αντίστοιχα πεδία θα μετασχηματιστούν κατάλληλα. Συμπερασματικά, οι μετασχηματισμοί αυτοί αποτελούν σημειακούς μετασχηματισμούς συμμετρίας των εξισώσεων Einstein. Σε συνδυασμό με το κεφάλαιο των σημειακών συμμετριών Lie, το σύστημα αποτελείται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με εξαρτημένες μεταβλητές τα $(N(t), N_\mu(t), \gamma_{\mu\nu}(t))$ και ανεξάρτητη τη μεταβλητή t . Ο μετασχηματισμός μεταξύ παλαιών και νέων εξαρτημένων μεταβλητών δίνεται από τις (4.28)-(4.30) ενώ για την ανεξάρτητη μεταβλητή ισχύει $t = \tilde{t}$. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις συμμετρίες ώστε να απλοποιήσουμε ή ακόμη και να ολοκληρώσουμε το σύστημα των εξισώσεων. Παρατηρούμε πως λόγω των (4.28),(4.29), αυτοί οι μετασχηματισμοί δεν αποτελούν εν γένει συμμετρίες της ίδιας της μετρικής.

Ωστόσο, πρέπει πρώτα να απαντήσουμε στο κατά πόσο γίνεται να βρούμε συντεταγμένες Gauss και ταυτόχρονα να διατηρήσουμε την προφανή ομογένεια. Η απάντηση δίνεται από το νόμο μετασχηματισμού (4.29) ο οποίος μοιάζει με το νόμο μετασχηματισμού μιας συνοχής. Δηλαδή μπορούμε να απαιτήσουμε το μετασχηματισμένο άνυσμα μετατόπισης να ισούται με μηδέν

$$\tilde{N}_\mu(\tilde{t}) = 0 \Rightarrow P^\nu(\tilde{t}) = -\gamma^{\nu\mu}(\tilde{t}) N_\mu(\tilde{t}). \quad (4.31)$$

Αυτό βέβαια δεσμεύει το $P^\nu(\tilde{t})$. Πώς είμαστε σίγουροι πως κάτι τέτοιο μπορεί πάντα να γίνει για κάθε κλάση; Με άλλα λόγια, πώς είμαστε σίγουροι πως η λύση των συνθηκών ύπαρξης (4.26), (4.27), θα περιέχει d αυθαίρετες συναρτήσεις του t για κάθε κλάση, όσες δηλαδή και οι συνιστώσες του ανύσματος μετατόπισης που θέλουμε να μηδενίσουμε; Από όσο γνωρίζουμε δεν υπάρχει κάποια αυστηρή απόδειξη, ωστόσο έχει βρεθεί πως ισχύει για όλες τις κλάσεις στις ($d = 2, d = 3$) διαστάσεις και κάποιες κλάσεις (αυτές που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία) σε $d = 4$.

Οι εξισώσεις με $N_\mu(t) = 0$ απλοποιούνται αρκετά καθώς και το στοιχείο μήκους,

$$ds_{(d+1)}^2 = -N(t)^2 dt^2 + \gamma_{\mu\nu}(t) \sigma^\mu_i(x) \sigma^\nu_j(x) dx^i dx^j. \quad (4.32)$$

Τι γίνεται με το $N(t)$; Δεν είναι δύσκολο να δούμε πως με ένα μετασχηματισμό $t \rightarrow h(\tilde{t}), x^i \rightarrow \tilde{x}^i$ προκύπτει πως το $N(t)$ και το $\gamma_{\mu\nu}(t)$ μετασχηματίζονται ως

$$\tilde{N}(\tilde{t}) = N(h(\tilde{t})) \frac{dh(\tilde{t})}{d\tilde{t}}, \quad (4.33)$$

$$\tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\tilde{t}) = \gamma_{\mu\nu}(h(\tilde{t})), \quad (4.34)$$

με το αντίστοιχο στοιχείο μήκους να γράφεται ως

$$ds_{(d+1)}^2 = -\tilde{N}(\tilde{t})^2 d\tilde{t}^2 + \tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\tilde{t}) \sigma^\mu_i(x) \sigma^\nu_j(x) dx^i dx^j. \quad (4.35)$$

Λόγω της (4.33) μπορούμε να επιλέξουμε $\tilde{N}(\tilde{t}) = 1$, το οποίο αποδεικνύει πως μπορούμε να βρούμε συντεταγμένες Gauss και ταυτόχρονα να διατηρηθεί η προφανής ομογένεια. Καταλήγουμε λοιπόν πως το στοιχείο μήκους και οι εξισώσεις για χώρους με εμβαπτισμένες ομογενείς υπερ-επιφάνειες μπορούν πάντα να αποκτήσουν τη μορφή

$$ds_{(d+1)}^2 = -dt^2 + \gamma_{\mu\nu}(t) \sigma^\mu_i(x) \sigma^\nu_j(x) dx^i dx^j. \quad (4.36)$$

(EFE)

$$R^{(d)} + K^2 - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} = 2\kappa \rho^{(tot)}, \quad (4.37)$$

$$K_{\alpha}^{\beta} C_{\beta\lambda}^{\alpha} + K_{\lambda}^{\beta} C_{\beta\alpha}^{\alpha} = \kappa q_{\lambda}^{(tot)}, \quad (4.38)$$

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(d)} - \left(2K_{\alpha}^{\lambda} K_{\lambda\beta} - K K_{\alpha\beta} \right) - \kappa \left(\pi_{\alpha\beta}^{(tot)} + \frac{\rho^{(tot)} - P^{(tot)}}{d-1} \gamma_{\alpha\beta} \right). \quad (4.39)$$

Η εξωτερική καμπυλότητα απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad (4.40)$$

$$R_{\mu\nu}^{(d)} = -\frac{1}{2} C_{\beta\mu}^{\alpha} (C_{\alpha\nu}^{\beta} + \gamma^{\beta\epsilon} \gamma_{\alpha\epsilon} C_{\epsilon\nu}^{\zeta}) + \frac{1}{4} \gamma_{\mu\alpha} \gamma_{\nu\beta} \gamma^{\zeta\tau} \gamma^{\epsilon\theta} C_{\zeta\epsilon}^{\alpha} C_{\tau\theta}^{\beta} - \frac{1}{2} C_{\tau\beta}^{\alpha} \gamma^{\tau\alpha} (C_{\alpha\mu}^{\zeta} \gamma_{\nu\zeta} + C_{\alpha\nu}^{\zeta} \gamma_{\mu\zeta}). \quad (4.41)$$

(UMFE)

$$\dot{\rho}_{(u)} - (\rho_{(u)} + P_{(u)}) K + q_{(u)}^{\mu} C_{\mu\alpha}^{\alpha} - \pi_{(u)}^{\alpha\mu} K_{\alpha\mu} = 0, \quad (4.42)$$

$$\dot{q}_{\mu}^{(u)} - K q_{\mu}^{(u)} + \left(C_{\beta\alpha}^{\alpha} \pi_{\mu}^{(u)\beta} + \pi_{\alpha}^{(u)\beta} C_{\beta\mu}^{\alpha} \right) = 0. \quad (4.43)$$

(CMFE)

$$\dot{\rho}_{(c)} - (\rho_{(c)} + P_{(c)}) K + q_{(c)}^{\mu} C_{\mu\alpha}^{\alpha} - \pi_{(c)}^{\alpha\mu} K_{\alpha\mu} = E^{\alpha} J_{\alpha}, \quad (4.44)$$

$$\dot{q}_{\mu}^{(c)} - K q_{\mu}^{(c)} + \left(C_{\beta\alpha}^{\alpha} \pi_{\mu}^{(c)\beta} + \pi_{\alpha}^{(c)\beta} C_{\beta\mu}^{\alpha} \right) = -(\rho_{(e)} E_{\mu} + B_{\mu\alpha} J^{\alpha}). \quad (4.45)$$

(MFE)

$$C_{\mu\alpha}^{\alpha} E^{\mu} = -\mu_0 \rho_{(e)}, \quad \dot{E}^{\mu} + \left(B^{\mu\lambda} C_{\lambda\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} C_{\lambda\alpha}^{\mu} B^{\lambda\alpha} \right) - K E^{\mu} + \mu_0 J^{\mu} = 0, \quad (4.46)$$

$$B_{\mu[\alpha} C_{\beta\lambda]}^{\mu} = 0, \quad \dot{B}_{\mu\nu} - E_{\lambda} C_{\mu\nu}^{\lambda} = 0. \quad (4.47)$$

(CCFE)

$$\dot{\rho}_{(e)} - K \rho_{(e)} - C_{\mu\alpha}^{\alpha} J^{\mu} = 0. \quad (4.48)$$

I.3 Ομάδα σταθερών Αυτομορφισμών

Στην προηγούμενη ενότητα φάνηκε πως χρησιμοποιήσαμε όλη την ελευθερία έτσι ώστε να μηδενίσουμε τον παράγοντα μετατόπισης και να κάνουμε το lapse μονάδα. Ωστόσο, για το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων υπάρχει παραμένονσα συμμετρία, η οποία είναι υπο-ομάδα της προηγούμενης. Συγκεκριμένα, καταλήξαμε στο στοιχείο μήκους

$$ds_{(d+1)}^2 = -dt^2 + \gamma_{\mu\nu}(t) \sigma^{\mu}_{\ i}(x) \sigma^{\nu}_{\ j}(x) dx^i dx^j. \quad (4.49)$$

Θέλουμε να διατηρήσουμε μηδενικό το shift και μονάδα το lapse, συνεπώς η μεταβλητή t δεν μπορεί να περιέχεται στις νέες μεταβλητές $\tilde{x}^i$. Ο μετασχηματισμός είναι

$$t = \tilde{t}, \quad (4.50)$$

$$x^i = f^i(\tilde{x}). \quad (4.51)$$

Δε χρειάζεται να επαναλάβουμε τη διαδικασία, η διαφορά έγκειται στο ότι έχουμε σταθερούς πίνακες $\Lambda^{\alpha}_{\ \mu}$, οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση των Αυτομορφισμών

$$\Lambda^{\alpha}_{\ \mu} C_{\beta\nu}^{\mu} = C_{\mu\sigma}^{\alpha} \Lambda^{\mu}_{\ \beta} \Lambda^{\sigma}_{\ \nu}, \quad (4.52)$$

με τις συνιστώσες της μετρικής των υπερ-επιφανειών να μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\tilde{t}) = \gamma_{\sigma\rho}(\tilde{t}) \Lambda^{\sigma}_{\ \mu} \Lambda^{\rho}_{\ \nu}. \quad (4.53)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, στην εξίσωση (4.53) οι συνιστώσες της μετρικής είναι εξαρτώμενες από τη μεταβλητή $\tilde{t}$ ενώ οι πίνακες $\Lambda^{\sigma}_{\ \mu}$ είναι σταθεροί. Τι μπορεί λοιπόν να μας προσφέρει αυτός ο πίνακας;

Σε αυτό το σημείο αναγνωρίζουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η μετρική έχει την ειδική μορφή (λόγω φυσικών-γεωμετρικών απαιτήσεων)

$$\gamma_{\mu\nu}(t) = \alpha(t) m_{\mu\nu}, \quad (4.54)$$

όπου $m_{\mu\nu}$ σταθερός, συμμετρικός πίνακας. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες $\Lambda^{\sigma}_{\ \mu}$ που θα προκύψουν για κάθε κλάση, έτσι ώστε να απλοποιήσουμε το πίνακα $m_{\mu\nu}$. Αυτή την περίπτωση μελετήσαμε σε μια από τις εργασίες της διατριβής και θα την παρουσιάσουμε στο δεύτερο μέρος με αρκετές λεπτομέρειες.

Στη δεύτερη περίπτωση δε περιορίζουμε τη μορφή της μετρικής, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και πάλι την εξίσωση (4.53) ως μετασχηματισμό Lie, όπου οι αρχικές ανεξάρτητη και εξαρτημένες μεταβλητές είναι οι $(t, \gamma_{\mu\nu}(t))$, ενώ οι μετασχηματισμένες οι $(\tilde{t}, \tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\tilde{t}))$. Έχουμε δηλαδή σημειακές συμμετρίες Lie των εξισώσεων, για χωροχρόνους με ομογενείς υπερ-επιφάνειες. Σε σύνδεση με όσα αναφέραμε στην εισαγωγή, στις περισσότερες περιπτώσεις ο πίνακας $\Lambda^{\sigma}_{\ \mu}$ αποτελείται από παραμέτρους πέραν της μιας.

Πριν ολοκληρώσουμε όμως αυτή την ενότητα, αξίζει να δούμε τον απειροστό, παραμετρικό μετασχηματισμό των (4.53). Θεωρούμε παραμετρικούς πίνακες $\Lambda^{\sigma}_{\ \mu}(\epsilon)$, όπου ϵ^I οι παράμετροι, έτσι ώστε $\Lambda^{\sigma}_{\ \mu}(0) = \delta^{\sigma}_{\ \mu}$.

Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor, έχουμε

$$\begin{aligned}\Lambda^\sigma{}_\mu(\epsilon) &\simeq \delta^\sigma{}_\mu + \epsilon^I \frac{d\Lambda^\sigma{}_\mu}{d\epsilon^I} \Big|_{\epsilon^J=0} + \mathcal{O}(\epsilon^I \epsilon^J) \Leftrightarrow \\ \Lambda^\sigma{}_\mu(\epsilon) &\simeq \delta^\sigma{}_\mu + \epsilon^I \lambda_{(I)\mu}^\sigma + \mathcal{O}(\epsilon^I \epsilon^J).\end{aligned}\quad (4.55)$$

Η εξίσωση (4.53) μέσω της (4.55) ισούται με

$$\tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\epsilon) \simeq \gamma_{\mu\nu} + \epsilon^I \left(\gamma_{\mu\beta} \lambda_{(I)\nu}^\beta + \gamma_{\beta\nu} \lambda_{(I)\mu}^\beta \right) + \mathcal{O}(\epsilon^I \epsilon^J). \quad (4.56)$$

Οι πίνακες $\lambda_{(I)\mu}^\sigma$ θα πρέπει να ικανοποιούν σε πρώτη τάξη και τη συνθήκη ύπαρξης (4.52) η οποία ισούται με

$$\lambda_{(I)\beta}^\sigma C_{\mu\nu}^\beta = C_{\mu\beta}^\sigma \lambda_{(I)\nu}^\beta + C_{\beta\nu}^\sigma \lambda_{(I)\mu}^\beta. \quad (4.57)$$

Η εξίσωση (4.57) ικανοποιείται αν επιλέξουμε $\lambda_{(I)\beta}^\sigma = C_{I\beta}^\sigma$ λόγω της ταυτότητας Jacobi που ικανοποιούν οι σταθερές δομής. Επομένως από όλους τους Αυτομορφισμούς, κάποιοι παράγονται από τις σταθερές δομής της εκάστοτε κλάσης. Αυτοί ονομάζονται **εσωτερικοί** (Inner) Αυτομορφισμοί και **εξωτερικοί** (Outer) οι υπόλοιποι. Μάλιστα, σε κάποια πρότυπα όπως τα $(3+1)$ Bianchi Type $VIII, IX$ υπάρχουν μόνο οι εσωτερικοί. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στην αναφορά [94].

Μέρος II

Εφαρμογές

Κεφάλαιο 5

Ο χώρος λύσεων των εξισώσεων Einstein στο κενό, για το $(4 + 1)$ -διάστατο πρότυπο Bianchi I, (Type $4A_1$)

I Εισαγωγή

Η ύπαρξη επιπλέον διαστάσεων εισήχθη στη μαθηματική φυσική με τις εργασίες των Kaluza και Klein [95], [96]. Η θεωρία τους ήταν ένα αρχέτυπο για θεωρίες που εξελίχθηκαν στα επόμενα χρόνια όπως, θεωρία χορδών, θεωρία βρανών, υπερ-βαρύτητα, υπερ-συμμετρία κ.λ.π. Παραθέτουμε ενδεικτικά κάποιες εργασίες [97–104].

Στο πλαίσιο της κοσμολογίας σε επιπλέον διαστάσεις έχουν επίσης υπάρξει αρκετές εργασίες. Οι P. Forgacs και Z. Horvath [105], μελετήσανε ομογενή και ισοτροπικά σύμπαντα υπό τη παρουσία πεδίων βαθμίδας (gauge fields) και δύο επιπλέον συμπαγών (compact) διαστάσεων. Η ιδέα πως οι ιδιότητες της ύλης του τετραδιάστατου σύμπαντος, μπορούν να περιγραφούν γεωμετρικά προσθέτοντας επιπλέον διαστάσεις, βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία για τη περίπτωση των επίπεδων κοσμολογικών λύσεων θεωρώντας επίσης την ύπαρξη ιδανικών ρευστών [106]. Η επέκταση αυτής, στη περίπτωση των προτύπων FLRW με οποιαδήποτε τιμή χωρικής καμπυλότητας, παρουσιάστηκε στην εργασία [107]. Επίσης, μια κλάση κυματικών-λύσεων παρήχθησαν στην [108]. Πιο πρόσφατα [109], βρέθηκαν μη-διαχωρίσιμες πενταδιάστατες λύσεις στις οποίες η εμβαπτισμένη μετρική έχει τη μορφή της FLRW λύσης.

Η πρώτη απόπειρα μελέτης ανισοτροπικών πενταδιάστατων προτύπων έγινε από τους Alan Chodos και Steven Detweiler [110], οι οποίοι μελέτησαν πενταδιάστατες επεκτάσεις της λύσης Kasner [111], [112]. Μια σειρά εργασιών με θέμα, ανώτερης διάστασης ανισοτροπικές λύσεις των εξισώσεων Einstein, παραλλαγές αυτής όπως η θεωρία Brans-Dicke και η υπερ-βαρύτητα, παρουσιάστηκαν από τον D. Lorenz-Petzold [113–120]. Η ύπαρξη χαστικών λύσεων σε κάποιους πενταδιάστατους ομογενείς χωροχρόνους μελετήθηκε από τον Paul Halpern [121]. Στη δημοσίευση [122], ο Sigbjorn Hervik κατηγοριοποιεί τα πενταδιάστατα κοσμολογικά πρότυπα με βάση το αν οι χωρικές υπερ-επιφάνειες αντιστοιχούν σε συνεκτικές ή απλά συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε πως έχουν βρεθεί κυματικές λύσεις του κενού για πενταδιάστατα ομογενή πρότυπα [123].

Όπως αναφέραμε και στο κομμάτι της θεωρίας, η βασική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την ομάδα των Αυτομορφισμών με σκοπό την ολοκλήρωση των εξισώσεων Einstein για συγκεκριμένα πρότυπα Bianchi. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, θεωρούμε απουσία ύλης και μελετάμε το χώρο λύσεων του πενταδιάστατου προτύπου Bianchi I. Πρόκειται για ένα από τα πιο απλά πρότυπα καθώς οι σταθερές δομής του είναι όλες ίσες με μηδέν, δηλαδή τα ανύσματα Killing σχηματίζουν Αβελιανή άλγεβρα.

Παρουσιάζουμε επιγραμματικά τις ενότητες του κεφαλαίου.

1. Η μορφή των εξισώσεων για τα πρότυπα Bianchi I.
2. Η χρήση των σταθερών Αυτομορφισμών.
3. Ο χώρος των λύσεων και η μελέτη των ιδιοτήτων τους.
4. Φυσική εφαρμογή στο πλαίσιο της κοσμολογίας “βράνης”.
5. Ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς.
6. Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων.

I.1 Η μορφή των εξισώσεων για τα πρότυπα Bianchi I

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, δεν υπάρχει παρουσία ύλης. Θεωρούμε ομογενείς υπερ-επιφάνειες διαστάσεως 4, εμβαπτισμένες σε 5-διάστατη πολλαπλότητα. Αρχικά επιλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το άνυσμα μετατόπισης είναι μηδέν, ενώ το Lapse παραμένει αυθαίρετο. Οι εξισώσεις (4.37)-(4.41) αποκτούν την εξής μορφή

$$R^{(4)} + K^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.1)$$

$$K_{\alpha}{}^{\beta}C_{\beta\lambda}^{\alpha} + K_{\lambda}{}^{\beta}C_{\beta\alpha}^{\alpha} = 0, \quad (5.2)$$

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = NR_{\alpha\beta}^{(4)} - N \left(2K_{\alpha}{}^{\lambda}K_{\lambda\beta} - K K_{\alpha\beta} \right), \quad (5.3)$$

όπου

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2N}\dot{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad (5.4)$$

$$R_{\mu\nu}^{(4)} = -\frac{1}{2}C_{\beta\mu}^{\alpha} \left(C_{\alpha\nu}^{\beta} + \gamma^{\beta\epsilon}\gamma_{\alpha\epsilon}C_{\epsilon\nu}^{\zeta} \right) + \frac{1}{4}\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}\gamma^{\zeta\tau}\gamma^{\epsilon\theta}C_{\zeta\epsilon}^{\alpha}C_{\tau\theta}^{\beta} - \frac{1}{2}C_{\tau\beta}^{\alpha}\gamma^{\tau\alpha} \left(C_{\alpha\mu}^{\zeta}\gamma_{\nu\zeta} + C_{\alpha\nu}^{\zeta}\gamma_{\mu\zeta} \right). \quad (5.5)$$

Η ομάδα συμμετρίας των προτύπων Bianchi I είναι Αβελιανή

$$C_{\beta\lambda}^{\alpha} = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \lambda, = 1, 2, 3, 4, \quad (5.6)$$

οδηγώντας σε υπερ-επιφάνειες με μηδενική, εσωτερική καμπυλότητα Ricci $R_{\alpha\beta}^{(4)} = 0$. Οι εξισώσεις (5.2) ικανοποιούνται ταυτοτικά, ενώ οι υπόλοιπες απλοποιούνται ως εξής:

$$K^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.7)$$

$$\dot{K}_{\alpha\beta} + 2NK_{\alpha}{}^{\lambda}K_{\lambda\beta} - NKK_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.8)$$

Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις αντιστοιχεί στον τετραγωνικό σύνδεσμο, ενώ το δεύτερο σέτ αντιστοιχεί στις δυναμικές. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (5.4) στην εξίσωση (5.8), καταλήγουμε στις δυναμικές εξισώσεις εκφρασμένες ως προς τη χωρική μετρική και το Lapse

$$\ddot{\gamma}_{\alpha\beta} - \dot{\gamma}_{\alpha\lambda}\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} = \left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu} \right) \dot{\gamma}_{\alpha\beta}. \quad (5.9)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα

$$\frac{\dot{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

όπου γ η ορίζουσα της μετρικής, $\gamma = \text{Det}(\gamma_{\mu\nu})$, έτσι ώστε

$$\ddot{\gamma}_{\alpha\beta} - \dot{\gamma}_{\alpha\lambda}\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} = \left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{\gamma}} \right) \dot{\gamma}_{\alpha\beta}. \quad (5.11)$$

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την παραμένουσα ελευθερία επιλογής του Lapse. Υπάρχει το σύστημα συντεταγμένων Gauss, στο οποίο ισχύει $N = 1$ όπου η μετρική αποκτά σχετικά απλή μορφή. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει πως είναι πάντα η “καλύτερη” επιλογή βαθμίδας όσον αφορά την απλοποίηση των εξισώσεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η “καλύτερη” επιλογή φαίνεται να είναι η $N = \sqrt{\gamma}$, καθώς οι δυναμικές εξισώσεις αποκτούν την απλή μορφή

$$\ddot{\gamma}_{\alpha\beta} - \dot{\gamma}_{\alpha\lambda}\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} = 0. \quad (5.12)$$

Μάλιστα, σε αυτή τη μορφή μπορούν να ολοκληρωθούν σχετικά απλά:

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_{\alpha\beta} - \dot{\gamma}_{\alpha\lambda}\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} &= 0 \Rightarrow \\ \gamma^{\sigma\alpha}\ddot{\gamma}_{\alpha\beta} - \gamma^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\lambda}\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\gamma^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta}) - \dot{\gamma}^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{d}{dt}(\gamma^{\sigma\alpha}\gamma_{\alpha\lambda})\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} + \dot{\gamma}^{\sigma\alpha}\gamma_{\alpha\lambda}\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\gamma^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta}) - \dot{\gamma}^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{d}{dt}(\delta^\sigma_\lambda)\gamma^{\lambda\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} + \dot{\gamma}^{\sigma\alpha}\delta^\rho_\alpha\dot{\gamma}_{\rho\beta} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\gamma^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta}) - \dot{\gamma}^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + \dot{\gamma}^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\gamma^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta}) &= 0 \Rightarrow \\ \gamma^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= \theta^\sigma{}_\beta \Rightarrow \\ \gamma_{\mu\sigma}\gamma^{\sigma\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= \gamma_{\mu\sigma}\theta^\sigma{}_\beta \Rightarrow \\ \dot{\gamma}_{\mu\beta} &= \gamma_{\mu\sigma}\theta^\sigma{}_\beta, \end{aligned} \quad (5.13)$$

όπου ο $\theta^\sigma{}_\beta$ είναι κάποιος σταθερός πίνακας. Με μορφή πινάκων η εξίσωση (5.13) μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{\gamma} = \gamma\theta, \quad (5.14)$$

ή ισοδύναμα

$$\dot{\gamma} = \theta^T \gamma, \quad (5.15)$$

όπου πλέον με γ θα συμβολίζουμε τη μετρική σε μορφή πίνακα και θ^T ο ανάστροφος του πίνακα θ . Η εξίσωση (5.15) ισχύει λόγω της ιδιότητας της μετρικής $\gamma = \gamma^T$. Η γενική λύση της (5.15) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\gamma = ce^{\theta^T t}, \quad (5.16)$$

όπου c κάποιος σταθερός πίνακας. Το γινόμενο $ce^{\theta^T t}$ πρέπει να είναι συμμετρικό.

Έως αυτό το σημείο έχουμε επιλύσει μόνο τις δυναμικές εξισώσεις, παραμένει και ο τετραγωνικός σύνδεσμος

$$\begin{aligned} K^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} &= 0 \Rightarrow \\ \left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\gamma^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu} \right) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} \right) \gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} \left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\dot{\gamma}_{\mu\nu} \right) &= 0 \xrightarrow{(5.13)} \\ \gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\sigma}\theta^\sigma{}_\beta\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\rho}\theta^\rho{}_\nu - \gamma_{\alpha\sigma}\theta^\sigma{}_\beta\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}\gamma_{\mu\rho}\theta^\rho{}_\nu &= 0 \Rightarrow \\ \delta^\beta_\sigma\theta^\sigma{}_\beta\delta^\nu_\rho\theta^\rho{}_\nu - \delta^\mu_\sigma\theta^\sigma{}_\beta\theta^\beta{}_\mu &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\theta^\sigma{}_\sigma \theta^\rho{}_\rho - \theta^\sigma{}_\beta \theta^\beta{}_\sigma = 0 \Leftrightarrow (Tr\theta)^2 - Tr(\theta^2) = 0, \quad (5.17)$$

όπου με Tr αναφερόμαστε στο ίχνος.

Επομένως, η γενική λύση δίνεται από τη σχέση (5.16), με τον πίνακα να ικανοποιεί τις αλγεβρικές εξισώσεις (5.17). Εν γένει, ο πίνακας έχει 16 μη μηδενικές συνιστώσες. Ακόμη και στην περίπτωση που μπορούσαμε να ικανοποιήσουμε τις αλγεβρικές εξισώσεις (5.17), το να υπολογίσουμε το εκθετικό ενός τέτοιου πίνακα θα ήταν αρκετά δύσκολο, οδηγώντας παράλληλα σε μια “άσχημη”, αναλυτική μορφή μετρικής, δύσκολη να εξάγουμε οποιοδήποτε φυσικό συμπέρασμα. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ομάδα των σταθερών Αυτομορφισμών και να “χωρίσουμε” τις αναλυτικές λύσεις σε οικογένειες. Εφόσον οι Αυτομορφισμοί είναι συμμετρίες των εξισώσεων, δεν πρόκειται να χαθεί κάποια λύση, απλώς θα διαχωριστούν με βάση κάποια χαρακτηριστικά.

I.2 Η χρήση των σταθερών Αυτομορφισμών

Ας θυμηθούμε την εξίσωση των Αυτομορφισμών

$$\Lambda^\alpha{}_\mu C^\mu_{\beta\nu} = C^\alpha_{\mu\sigma} \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\sigma{}_\nu. \quad (5.18)$$

Εφόσον οι σταθερές δομής αυτού του προτύπου είναι μηδέν, οι εξισώσεις (5.18) ικανοποιούνται ταυτοτικά, αφήνοντας το $\Lambda^\alpha{}_\beta$ ελεύθερο, δηλαδή $\Lambda \in GL(4, \mathbb{R})$. Σε μορφή πινάκων ισχύει για τη μετρική

$$\tilde{\gamma} = \Lambda^T \gamma \Lambda. \quad (5.19)$$

Παραγωγίζουμε και απαιτούμε να ισχύει $\dot{\tilde{\gamma}} = \tilde{\theta}^T \tilde{\gamma}$ ώστε να έχουμε της ίδιας μορφής λύσεις.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}} &= \Lambda^T \dot{\gamma} \Lambda \Rightarrow \\ \tilde{\theta}^T \tilde{\gamma} &= \Lambda^T \theta^T \gamma \Lambda \Rightarrow \\ \tilde{\theta}^T \Lambda^T \gamma \Lambda &= \Lambda^T \theta^T \gamma \Lambda \Rightarrow \\ \tilde{\theta}^T \Lambda^T \gamma \Lambda &= \Lambda^T \theta^T (\Lambda^T)^{-1} \Lambda^T \gamma \Lambda \Rightarrow \\ \left[\tilde{\theta}^T - \Lambda^T \theta^T (\Lambda^T)^{-1} \right] \Lambda^T \gamma \Lambda &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\tilde{\theta}^T = \Lambda^T \theta^T (\Lambda^T)^{-1}, \quad (5.20)$$

ή ισοδύναμα,

$$\tilde{\theta} = \Lambda^{-1} \theta \Lambda. \quad (5.21)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως οι πίνακες $\theta, \tilde{\theta}$, συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας, με τον αντιστρέψιμο πίνακα να αντιστοιχεί στον πίνακα των σταθερών Αυτομορφισμών. Όπως έχει γίνει κατανοητό έως τώρα, σε αυτή την περίπτωση δε θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Lie για την ολοκλήρωση των εξισώσεων, λόγω της απλότητας αυτών. Ωστόσο, το γεγονός πως αυτές επιδέχονται αναλυτικές λύσεις είναι απόρροια της ύπαρξης συμμετριών.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι ο βαθμός απλοποίησης του πίνακα θ . Ο βαθμός εξαρτάται από τα ιδιοανύσματα του πίνακα, τη διάσταση που αυτά καλύπτουν, καθώς και αν είναι πραγματικά ή μιγαδικά. Συγκεκριμένα, όταν τα ιδιοανύσματα είναι πραγματικά, ο πίνακας μπορεί να μετασχηματιστεί στις κανονικές μορφές Jordan, ενώ αν περιέχει ζεύγη συζυγών ιδιοανυσμάτων, μπορεί να μετασχηματιστεί στις κανονικές ρητές μορφές. Παρουσιάζουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις στον πίνακα 5.1.

Ιδιοανύσματα	Μορφή του πίνακα θ
Τέσσερα πραγματικά, γραμμικά ανεξάρτητα	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}$
Τρία πραγματικά, γραμμικά ανεξάρτητα	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$
Δύο πραγματικά, γραμμικά ανεξάρτητα	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 \end{pmatrix}$
Ένα πραγματικό ιδιοάνυσμα	$\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}$
Τέσσερα γραμμικά ανεξάρτητα, εκ των οποίων, δύο συζυγή μιγαδικά	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_4 \\ 0 & 0 & -p_4 & p_3 \end{pmatrix}$
Τρία γραμμικά ανεξάρτητα, εκ των οποίων, δύο συζυγή μιγαδικά	$\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & -p_3 & p_2 \end{pmatrix}$
Τέσσερα γραμμικά ανεξάρτητα, δύο ζεύγη συζυγή μιγαδικά	$\theta = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 \\ -p_2 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_4 \\ 0 & 0 & -p_4 & p_3 \end{pmatrix}$

Πίνακας 5.1: Τα πλήθος ανεξάρτητων ιδιοανυσμάτων και οι κανονικές μορφές του πίνακα με $(p_i, i = 1, 2, 3, 4)$ τις ιδιοτιμές.

I.3 Ο χώρος των λύσεων και η μελέτη των ιδιοτήτων τους

Θεωρούμε πως είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε αναλυτικά τις πράξεις για την εύρεση των λύσεων σε δύο από τις οικογένειες. Στις υπόλοιπες ακολουθούμε την ίδια διαδικασία εύρεσης και μπορούν να βρεθούν είτε σε μορφή αρχείου mathematica, είτε σε μορφή pdf. στο link https://www.dropbox.com/sh/zkmi77ha1u1yyw/AABq_v5aVMBuP-KvIF0qTDnWa?dl=0.

Να τονίσουμε σε αυτό το σημείο το εξής: μέχρι στιγμής, δεν έχουμε κάνει κάποια υπόθεση ώστε να περιορίσουμε την υπογραφή των λύσεων που θα προκύψουν, ούτε έχουμε υποθέσει πως η μεταβλητή t αντιστοιχεί στη “χρονική” μεταβλητή. Όπως θα δούμε, προκύπτει πληθώρα λύσεων οι οποίες δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως “κοσμολογικές”. Εν γένει, η ύπαρξη ομογενών υπερ-επιφανειών δεν περιορίζεται στη κοσμολογία. Αρχικά όμως χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη χωρικά ανισοτροπικών κοσμολογικών προτύπων για αυτό και έχουν συνδεθεί με αυτή. Ωστόσο, είναι παράλληλα αρκετά δύσκολο να βρεθεί κάποια άλλη φυσική εφαρμογή τους.

I.3.1 Τρία πραγματικά, γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοανύσματα

Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας θ μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\theta = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix},$$

με p_i , ($i = 1, 2, 3$) τις ιδιοτιμές. Το τετραδιάστατο στοιχείο μήκους μπορεί να γραφεί ως

$$ds_{(4)}^2 = k_1 e^{p_1 t} dx^2 + k_2 e^{p_2 t} dy^2 + 2k_3 e^{p_3 t} dz dw + (k_4 + k_3 t) e^{p_3 t} dw^2,$$

όπου $k_i \forall (i = 1, 2, 3, 4)$ είναι σταθερές οι οποίες παρέμειναν από τον πίνακα c μετά τη συμμετροποίηση. Ο τετραγωνικός σύνδεσμος αποκτά τη μορφή

$$p_1 p_2 + 2p_1 p_3 + 2p_2 p_3 + p_3^2 = 0. \quad (5.22)$$

Αν όλες οι ιδιοτιμές είναι μηδενικές, τότε το στοιχείο μήκους αντιστοιχεί στον επίπεδο χώρο Minkowski. Αναζητώντας μη τετριμμένες λύσεις υποθέτουμε πως τουλάχιστον μια από τις ιδιοτιμές είναι μη μηδενική, έστω η p_3 . Διαιρούμε το σύνδεσμο (5.22) με p_3^2 και σχηματίζουμε τους λόγους των ιδιοτιμών ($\alpha = \frac{p_1}{p_3}, \beta = \frac{p_2}{p_3}$) έτσι ώστε

$$1 + 2\alpha + 2\beta + \alpha\beta = 0. \quad (5.23)$$

Για λύσεις του κενού, επιλύουμε την (5.23) ως προς μια εκ των σταθερών, επιλέγουμε την α ,

$$\alpha = -\frac{1 + 2\beta}{2 + \beta}.$$

Ο κλάδος ($\beta = -2$), οδηγεί την εξίσωση του συνδέσμου να είναι της μορφής ($-3 = 0, \forall \alpha$) η οποία είναι αδύνατη. Η πενταδιάστατη μετρική αποκτά τη μορφή

$$ds_{(5)}^2 = k_1 k_2 k_3^2 e^{\phi_3 p_3 t} dt^2 + k_1 e^{\phi_4 p_3 t} dx^2 + k_2 e^{\beta p_3 t} dy^2 + 2k_3 e^{p_3 t} dz dw + (k_4 + k_3 t) e^{p_3 t} dw^2,$$

όπου ($\phi_3 = \frac{3+2\beta+\beta^2}{2+\beta}, \phi_4 = -\frac{1+2\beta}{2+\beta}$). Οι ιδιοτιμές της μετρικής είναι

$$\lambda_\mu = (k_1 k_2 k_3^2 e^{\phi_3 p_3 t}, k_1 e^{\phi_4 p_3 t}, k_2 e^{\beta p_3 t}, \lambda_4, \lambda_5),$$

με

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}e^{p_3 t} \left(k_4 + k_3 t - \sqrt{k_4^2 + 2k_3 k_4 t + k_3^2 (4 + t^2)} \right),$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}e^{p_3 t} \left(k_4 + k_3 t + \sqrt{k_4^2 + 2k_3 k_4 t + k_3^2 (4 + t^2)} \right).$$

Τα πρόσημα των σταθερών (k_3, k_4) επηρεάζουν μόνο τις ιδιοτιμές (λ_4, λ_5) , όμως πάντα η μία είναι θετική και η άλλη αρνητική ($\forall t \in \mathbb{R}$). Συνεπώς, η διαφορετική υπογραφή της μετρικής εξαρτάται μόνο από τα πρόσημα των (k_1, k_2) . Θα παρουσιάσουμε μόνο μια από τις περιπτώσεις.

I.3.1.1 $k_i > 0, \forall (i = 1, 2)$ Χρησιμοποιώντας ένα πραγματικό μετασχηματισμό συντεταγμένων και επαναορίζοντας την ιδιοτιμή p_3 ,

$$t = \frac{\tilde{t}}{p_3}, \quad x = \frac{\sqrt{k_2 k_3}}{p_3} \tilde{x}, \quad y = \frac{\sqrt{k_1 k_3}}{p_3} \tilde{y}, \quad z = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3}} \frac{1}{2p_3^{3/2}} (k_4 p_3 \tilde{w} - 2k_3 \tilde{z}), \quad w = -\sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3}{p_3}} \tilde{w},$$

$$p_3 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m}} k_3,$$

το πενταδιάστατο στοιχείο μήκους αποκτά τη μορφή

$$ds_{(5)}^2 = e^{\phi_3 t} dt^2 + e^{\phi_4 t} dx^2 + e^{\beta t} dy^2 + 2e^t dz dw + t e^t dw^2,$$

όπου η σταθερά m η οποία εμφανίστηκε στον επαναορισμό της p_3 απορροφήθηκε λόγω της ύπαρξης ομοθετικού ανυποστατικού πεδίου

$$\xi_h = \left[1, \frac{2+\beta}{2}x, \frac{3y}{4+2\beta}, \frac{z(1+\beta+\beta^2) - w(2+\beta)}{2(2+\beta)}, \frac{w(1+\beta+\beta^2)}{2(2+\beta)} \right].$$

για τη συγκεκριμένη μετρική. Ας σημειώσουμε πως συμβολίσαμε και πάλι τις συντεταγμένες ως (t, x, y, z, w) για λόγους απλότητας.

Υπογραφή:

Ο τρόπος να αποφανθούμε για την υπογραφή αυτής της μετρικής είναι μέσω των ιδιοτιμών της

$$\lambda_\mu = \left[e^{\phi_3 t}, e^{\phi_4 t}, e^{\beta t}, \frac{1}{2}e^t (t - \sqrt{4+t^2}), \frac{1}{2}e^t (t + \sqrt{4+t^2}) \right].$$

Ισχύει $(\lambda_4 < 0, \forall t \in \mathbb{R})$ ενώ όλες οι υπόλοιπες είναι θετικές. Η υπογραφή είναι Lorentz $\mathbf{s} = (1, 4)$ και η συντεταγμένη με το “χρονικό” χαρακτήρα είναι είτε η z είτε η w .

AKVF:

Η συγκεκριμένη λύση επιδέχεται επιπλέον ανύσματα Killing για συγκεκριμένες τιμές των λόγων.

α	β	ξ_5
1	-1	$(0, w, 0, -x, 0)$
-1	1	$(0, 0, w, -y, 0)$

Αυτό συνεπάγεται πως ο χώρος εκτός από ομογενής, στις συγκεκριμένες περιπτώσεις εμφανίζει και ισοτροπία γύρω από κάποιον άξονα.

Ι.3.2 Τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοανύσματα εκ των οποίων, δύο συζυγή μιγαδικά

Ο πίνακας θ μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\theta = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & -p_3 & p_2 \end{pmatrix},$$

όπου (p_2, p_3) είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών ιδιοτιμών αντίστοιχα. Το τετραδιάστατο στοιχείο μήκους αποκτά τη μορφή

$$ds_{(4)}^2 = 2k_1 e^{p_1 t} dx dy + (k_2 + k_1 t) e^{p_1 t} dy^2 + e^{p_2 t} [k_3 \cos(p_3 t) + k_4 \sin(p_3 t)] (-dz^2 + dw^2) \\ + 2e^{p_2 t} [k_4 \cos(p_3 t) - k_3 \sin(p_3 t)] dz dw,$$

και ο τετραγωνικός σύνδεσμος είναι

$$p_1^2 + 4p_1 p_2 + p_2^2 + p_3^2 = 0. \quad (5.24)$$

Το φανταστικό μέρος των μιγαδικών ιδιοτιμών πρέπει να είναι διαφορετικό του μηδενός, $p_3 \neq 0$. Διαιρούμε την (5.24) με p_3^2 σχηματίζοντας τους λόγους, $(\alpha = \frac{p_1}{p_3}, \beta = \frac{p_2}{p_3})$.

$$1 + \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = 0. \quad (5.25)$$

Για λύσεις του κενού, επιλύουμε την (5.25) ως προς α .

$$\alpha = -2\beta + \epsilon \sqrt{-1 + 3\beta^2}, \quad \beta \in \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

όπου το σύμβολο ϵ αντιστοιχεί σε $\pm$ και θα χρησιμοποιείται όπου χρειάζεται. Ο περιορισμός στο πεδίο ορισμού του β είναι λόγω της απαίτησης η ιδιοτιμή α να είναι πραγματική. Το πενταδιάστατο στοιχείο μήκους αποκτά τη μορφή

$$ds_{(5)}^2 = -k_1^2 (k_3^2 + k_4^2) e^{\phi_7 p_3 t} dt^2 + 2k_1 e^{\phi_8 p_3 t} dx dy + (k_2 + k_1 t) e^{\phi_8 p_3 t} dy^2 \\ + e^{\beta p_3 t} [k_3 \cos(p_3 t) + k_4 \sin(p_3 t)] (-dz^2 + dw^2) + 2e^{\beta p_3 t} [k_4 \cos(p_3 t) - k_3 \sin(p_3 t)] dz dw,$$

όπου $(\phi_7 = -2\beta + 2\epsilon \sqrt{-1 + 3\beta^2}, \phi_8 = -2\beta + \epsilon \sqrt{-1 + 3\beta^2})$, ενώ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_\mu = \left[-k_1^2 (k_3^2 + k_4^2) e^{\phi_7 p_3 t}, \lambda_2, \lambda_3, -\sqrt{k_3^2 + k_4^2} e^{\beta p_3 t}, \sqrt{k_3^2 + k_4^2} e^{\beta p_3 t} \right],$$

με

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} e^{\phi_8 p_3 t} \left(k_2 + k_1 t - \sqrt{k_2^2 + 2k_1 k_2 t + k_1^2 (4 + t^2)} \right), \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} e^{\phi_8 p_3 t} \left(k_2 + k_1 t + \sqrt{k_2^2 + 2k_1 k_2 t + k_1^2 (4 + t^2)} \right).$$

Οι ιδιοτιμές (λ_2, λ_3) εξαρτώνται από τα πρόσημα των (k_1, k_2) , όμως πάντα η μια είναι θετική και η άλλη αρνητική. Επίσης, μόνο τα τετράγωνα των (k_3, k_4) εμφανίζονται, συνεπώς τα πρόσημα τους δεν

επηρεάζουν την υπογραφή της μετρικής. Επομένως, υπάρχει μόνο μια περίπτωση. Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω μετασχηματισμό και τον επαναορισμό του p_3

$$\begin{aligned} t &= \frac{\tilde{t}}{p_3}, \quad x = -\sqrt{\frac{k_3^2 + k_4^2}{k_1}} \frac{1}{2p_3^{3/2}} (2k_1\tilde{x} + k_2p_3\tilde{y}), \quad y = \sqrt{\frac{k_1(k_3^2 + k_4^2)}{p_3}} \tilde{y}, \\ z &= \frac{k_1 \left[-k_4\tilde{w} + \left(-k_3 + \sqrt{k_3^2 + k_4^2} \right) \tilde{z} \right]}{\sqrt{2 \left(-k_3 + \sqrt{k_3^2 + k_4^2} \right) p_3}}, \quad w = \frac{k_1 \left[k_4\tilde{z} + \left(-k_3 + \sqrt{k_3^2 + k_4^2} \right) \tilde{w} \right]}{\sqrt{2 \left(-k_3 + \sqrt{k_3^2 + k_4^2} \right) p_3}}, \\ p_3 &= \sqrt{k_1^2 \frac{k_3^2 + k_4^2}{m}}, \end{aligned}$$

ώστε να μετασχηματίσουμε το στοιχείο μήκους στην απλή μορφή

$$ds_{(5)}^2 = -e^{\phi_7 t} dt^2 - 2e^{\phi_8 t} dx dy + te^{\phi_8 t} dy^2 + \cos t e^{\beta t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\beta t} dz dw,$$

με το αντίστοιχο ομοθετικό πεδίο να απορροφά και πάλι τη σταθερά m

$$\begin{aligned} \xi_h &= \left(1, \frac{y + \epsilon x \sqrt{-1 + 3\beta^2}}{2}, \frac{\epsilon y \sqrt{-1 + 3\beta^2}}{2}, \xi_{h4}, \xi_{h5} \right), \\ \xi_{h4} &= -\frac{w + 3\beta z - 2z\epsilon \sqrt{-1 + 3\beta^2}}{2}, \\ \xi_{h5} &= \frac{z - 3\beta w + 2w\epsilon \sqrt{-1 + 3\beta^2}}{2}. \end{aligned}$$

Υπογραφή:

Οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_\mu = \left(-e^{\phi_7 t}, \frac{t - \sqrt{4 + t^2}}{2} e^{\phi_8 t}, \frac{t + \sqrt{4 + t^2}}{2} e^{\phi_8 t}, e^{\beta t}, -e^{\beta t} \right).$$

και η αντίστοιχη υπογραφή, $\mathbf{s} = (3, 2)$, με μεταβλητή “χρόνου” είτε (t, x, w) είτε (y, z) .

AKVF:

Για τις τιμές $\left(\alpha = -\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \right)$ το επιπλέον πεδίο Killing είναι

$$\xi_5 = \left(1, \frac{y + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}x}{2}, \frac{\epsilon y}{2\sqrt{2}}, -\frac{2w + \epsilon z\sqrt{2}}{4}, \frac{2z - \epsilon w\sqrt{2}}{4} \right).$$

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζουμε τους πίνακες με τις λύσεις που βρήκαμε για τις 7 διαφορετικές οικογένειες. Επίσης, υπάρχει ένας πίνακας στον οποίο εμφανίζονται τα επιπλέον ανύσματα Killing και το ομοθετικό.

I.3.3 Πίνακες λύσεων

Τέσσερα πραγματικά, γραμμικά ανεξάρτητα		
Όνομα λύσης	Στοιχείο μήκους	Υπογραφή/ “Χρονική” μεταβλητή(ες)
s_1	$ds_{(5)}^2 = -e^{\phi_1 t} dt^2 + e^t dx^2 + e^{\phi_2 t} dy^2 + e^{\beta t} dz^2 + e^{\gamma t} dw^2$	$(1, 4) / t$
s_2	$ds_{(5)}^2 = e^{\phi_1 t} dt^2 + e^t dx^2 + e^{\phi_2 t} dy^2 + e^{\beta t} dz^2 - e^{\gamma t} dw^2$	$(1, 4) / w$
s_3	$ds_{(5)}^2 = -e^{\phi_1 t} dt^2 + e^t dx^2 + e^{\phi_2 t} dy^2 - e^{\beta t} dz^2 - e^{\gamma t} dw^2$	$(3, 2) / (t, z, w) \text{ ή } (x, y)$
s_4	$ds_{(5)}^2 = e^{\phi_1 t} dt^2 + e^t dx^2 - e^{\phi_2 t} dy^2 - e^{\beta t} dz^2 - e^{\gamma t} dw^2$	$(3, 2) / (y, z, w) \text{ ή } (t, x)$
s_5	$ds_{(5)}^2 = \pm (e^{\phi_1 t} dt^2 + e^t dx^2 + e^{\phi_2 t} dy^2 + e^{\beta t} dz^2 + e^{\gamma t} dw^2)$	$(5, 0) \text{ ή } (0, 5) / (t, x, y, z, w) \text{ ή καμία}$

Πίνακας 5.2: Χρησιμοποιήθηκαν οι εξής συντομεύσεις $\left(\phi_1 = \frac{1+\beta+\gamma+\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2}{1+\beta+\gamma}, \phi_2 = -\frac{\beta+\gamma+\beta\gamma}{1+\beta+\gamma}\right)$. Οι περιορισμοί για τους λόγους των ιδιοτιμών είναι $(\beta \neq \{-1 - \gamma\}, \forall \gamma \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\})$.

Τρία πραγματικά, γραμμικά ανεξάρτητα		
Όνομα λύσης	Στοιχείο μήκους	Υπογραφή/ “Χρονική” μεταβλητή(ες)
s_6	$ds_{(5)}^2 = e^{\phi_3 t} dt^2 + e^{\phi_4 t} dx^2 + e^{\beta t} dy^2 + 2e^t dz dw + t e^t dw^2$	$(1, 4) / z \text{ ή } w$
s_7	$ds_{(5)}^2 = -e^{\phi_3 t} dt^2 + e^{\phi_4 t} dx^2 - e^{\beta t} dy^2 + 2e^t dz dw + t e^t dw^2$	$(3, 2) / (t, y, z) \text{ ή } (x, z)$
s_8	$ds_{(5)}^2 = e^{\phi_3 t} dt^2 - e^{\phi_4 t} dx^2 - e^{\beta t} dy^2 + 2e^t dz dw + t e^t dw^2$	$(3, 2) / (x, y, z) \text{ ή } (t, z)$

Πίνακας 5.3: Χρησιμοποιήθηκαν οι εξής συντομεύσεις $\left(\phi_3 = \frac{3+2\beta+\beta^2}{2+\beta}, \phi_4 = -\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)$. Οι περιορισμοί στους λόγους των ιδιοτιμών είναι $\beta \in \mathbb{R} - \{-2, \}$.

Δύο πραγματικά, γραμμικά ανεξάρτητα		
Όνομα λύσης	Στοιχείο μήκους	Υπογραφή/ “Χρονική” μεταβλητή(ες)
s_9	$ds_{(5)}^2 = e^{(1+3\alpha)t} dt^2 + e^t dx^2 + 2e^{\alpha t} dy dw + e^{\alpha t} dz^2 + 2t e^{\alpha t} dz dw + \frac{1}{2} t^2 e^{\alpha t} dw^2$	$(1, 4) / y$
s_{10}	$ds_{(5)}^2 = -e^{(1+3\alpha)t} dt^2 + e^t dx^2 - 2e^{\alpha t} dy dw - e^{\alpha t} dz^2 + 2t e^{\alpha t} dz dw - \frac{1}{2} t^2 e^{\alpha t} dw^2$	$(3, 2) / (t, z, w) \text{ ή } (x, y)$
s_{11}	$ds_{(5)}^2 = e^{(1+3\alpha)t} dt^2 - e^t dx^2 - 2e^{\alpha t} dy dw - e^{\alpha t} dz^2 + 2t e^{\alpha t} dz dw - \frac{1}{2} t^2 e^{\alpha t} dw^2$	$(3, 2) / (x, z, w) \text{ ή } (t, y)$

Πίνακας 5.4: Υπάρχουν μόνο δύο δυνατές τιμές των λόγων για τις οποίες υπάρχει λύση του κενού, $(\alpha = 0 \text{ or } \alpha = -1)$.

Ένα πραγματικό ιδιοάνυσμα		
Όνομα λύσης	Στοιχείο μήκους	Υπογραφή/ “Χρονική” μεταβλητή(ες)
s_{12}	$ds_{(5)}^2 = -dt^2 - 2dx dw - 2dy dz - 2t dy dw + t dz^2 + t^2 dz dw + \frac{t^3}{6} dw^2$	$(3, 2) / (t, z, w) \text{ ή } (x, y)$
s_{13}	$ds_{(5)}^2 = -\left(dt^2 + 2dx dw + 2dy dz + 2t dy dw + t dz^2 + t^2 dz dw + \frac{t^3}{6} dw^2\right)$	$(3, 2) / (x, z, w) \text{ ή } (t, y)$

Πίνακας 5.5: Δεν χρησιμοποιήθηκαν συντομεύσεις

Τέσσερα γραμμικά ανεξάρτητα, εκ των οποίων, δύο συζυγή μιγαδικά		
Όνομα λύσης	Στοιχείο μήκους	Υπογραφή/ “Χρονική” μεταβλητή(ες)
s_{14}	$ds_{(5)}^2 = e^{\phi_5 t} dt^2 + e^{\phi_6 t} dx^2 + e^{\beta t} dy^2 + \cos t e^{\gamma t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\gamma t} dz dw$	$(1, 4) / w$
s_{15}	$ds_{(5)}^2 = -e^{\phi_5 t} dt^2 + e^{\phi_6 t} dx^2 - e^{\beta t} dy^2 + \cos t e^{\gamma t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\gamma t} dz dw$	$(3, 2) / (t, y, w) \dot{\eta} (x, z)$
s_{16}	$ds_{(5)}^2 = e^{\phi_5 t} dt^2 - e^{\phi_6 t} dx^2 - e^{\beta t} dy^2 + \cos t e^{\gamma t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\gamma t} dz dw$	$(3, 2) / (x, y, w) \dot{\eta} (t, z)$
s_{17}	$ds_{(5)}^2 = e^{\alpha t} (dt^2 + dx^2) + e^{-\frac{2\phi_5}{\sqrt{3}} t} dy^2 + \cos t e^{\frac{\gamma}{\sqrt{3}} t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\frac{\gamma}{\sqrt{3}} t} dz dw$	$(1, 4) / w$
s_{18}	$ds_{(5)}^2 = e^{\alpha t} (-dt^2 + dx^2) - e^{-\frac{2\phi_5}{\sqrt{3}} t} dy^2 + \cos t e^{\frac{\gamma}{\sqrt{3}} t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\frac{\gamma}{\sqrt{3}} t} dz dw$	$(3, 2) / (t, y, w) \dot{\eta} (x, z)$
s_{19}	$ds_{(5)}^2 = e^{\alpha t} (dt^2 - dx^2) - e^{-\frac{2\phi_5}{\sqrt{3}} t} dy^2 + \cos t e^{\frac{\gamma}{\sqrt{3}} t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\frac{\gamma}{\sqrt{3}} t} dz dw$	$(3, 2) / (x, y, w) \dot{\eta} (t, z)$

Πίνακας 5.6: Οι εξής συντομεύσεις χρησιμοποιήθηκαν $\left(\phi_5 = \frac{-1+\beta^2+2\beta\gamma+3\gamma^2}{\beta+2\gamma}, \phi_6 = -\frac{1+2\beta\gamma+\gamma^2}{\beta+2\gamma}\right)$. Οι περιορισμοί στους λόγους των ιδιοτιμών είναι $\beta \in \mathbb{R} - \{-2\gamma, \}, \forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Τρία γραμμικά ανεξάρτητα, εκ των οποίων, δύο συζυγή μιγαδικά		
Όνομα λύσης	Στοιχείο μήκους	Υπογραφή/ “Χρονική” μεταβλητή(ες)
s_{20}	$ds_{(5)}^2 = -e^{\phi_7 t} dt^2 - 2e^{\phi_8 t} dx dy + te^{\phi_8 t} dy^2 + \cos t e^{\beta t} (dz^2 - dw^2) + 2 \sin t e^{\beta t} dz dw$	$(3, 2) / (t, x, w) \dot{\eta} (y, z)$

Πίνακας 5.7: Οι εξής συντομεύσεις χρησιμοποιήθηκαν $\left(\phi_7 = -2\beta + 2\epsilon\sqrt{-1+3\beta^2}, \phi_8 = -2\beta + \epsilon\sqrt{-1+3\beta^2}\right)$. Οι περιορισμοί στους λόγους των ιδιοτιμών είναι $\beta \in \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Τέσσερα γραμμικά ανεξάρτητα, δύο ζεύγη συζυγή μιγαδικά		
Όνομα της λύσης	Στοιχείο μήκους	Υπογραφή/ “Χρονική” μεταβλητή(ες)
s_{21}	$ds_{(5)}^2 = -e^{\phi_9 t} dt^2 + \cos(\beta t) e^{\phi_{10} t} (dx^2 - dy^2) + 2 \sin(\beta t) e^{\phi_{10} t} dx dy + 2 \sin t e^{\gamma t} dz dw + \cos t e^{\gamma t} (dz^2 - dw^2)$	$(3, 2) / (t, y, w) \dot{\eta} (x, z)$

Πίνακας 5.8: Οι συντομεύσεις ϕ_9, ϕ_{10} είναι $\left(\phi_9 = -2\gamma + 2\epsilon\sqrt{-1-\beta^2+3\gamma^2}, \phi_{10} = -2\gamma + \epsilon\sqrt{-1-\beta^2+3\gamma^2}\right)$. Οι περιορισμοί επί των λόγων των ιδιοτιμών είναι $\beta \in \left(-\sqrt{-1+3\gamma^2}, \sqrt{-1+3\gamma^2}\right) - \left\{\frac{1}{2} \left(-2\gamma + \epsilon\sqrt{-2+2\gamma^2}\right)\right\}$, $\gamma \in \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

S	AKVF/Τιμές για τις οποίες εμφανίζονται	Ομοθετικό πεδίο
s_1	$(0, -y, x, 0, 0)/\alpha = 1, \beta = -\frac{1+2\gamma}{2+\gamma}, \gamma = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$	$\left[1, \frac{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}{2(1+\beta+\gamma)}x, \frac{y(1+\beta+\gamma)}{2}, \frac{z(1+\gamma+\gamma^2)}{2(1+\beta+\gamma)}, \frac{w(1+\beta+\beta^2)}{2(1+\beta+\gamma)}\right]$
	$(0, -z, 0, x, 0)/\alpha = -\frac{1+2\gamma}{2+\gamma}, \beta = 1, \gamma = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$	
	$(0, -w, 0, 0, x)/\alpha = -\frac{1+2\beta}{2+\beta}, \beta = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}, \gamma = 1$	
s_2	ίδιο με s_1	
	ίδιο με s_1	
	$(0, w, 0, 0, x)/\alpha = -\frac{1+2\beta}{2+\beta}, \beta = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}, \gamma = 1$	
s_3	ίδιο με s_1	
	$(0, z, 0, x, 0)/\alpha = -\frac{1+2\gamma}{2+\gamma}, \beta = 1, \gamma = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$	
	ίδιο με s_2	
s_4	$(0, y, x, 0, 0)/\alpha = 1, \beta = -\frac{1+2\gamma}{2+\gamma}, \gamma = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$	
	ίδιο με s_3	
	ίδιο με s_2	
s_5	ίδιο με s_1	
	ίδιο με s_1	
	ίδιο με s_1	
s_6	$(0, w, 0, -x, 0)/\alpha = 1, \beta = -1$	$\left[1, \frac{2+\beta}{2}x, \frac{3y}{4+2\beta}, \frac{z(1+\beta+\beta^2)-w(2+\beta)}{2(2+\beta)}, \frac{w(1+\beta+\beta^2)}{2(2+\beta)}\right]$
	$(0, 0, w, -y, 0)/\alpha = -1, \beta = 1$	
s_7	ίδιο με s_6	
	$(0, 0, w, y, 0)/\alpha = -1, \beta = 1$	
s_8	$(0, w, 0, x, 0)/\alpha = 1, \beta = -1$	
	ίδιο με s_7	
s_9	κανένα επιπλέον Killing πεδίο	$\left[1, \frac{3\alpha}{2}x, \frac{(y-z+2\alpha y)}{2}, \frac{(-w+z+2\alpha z)}{2}, \frac{1+2\alpha}{2}w\right]$
s_{10}	κανένα επιπλέον Killing πεδίο	
s_{11}	κανένα επιπλέον Killing πεδίο	
s_{12}	$(1, -\frac{y}{2}, \frac{z}{2}, -\frac{w}{2}, 0)$	$(t, \frac{5x}{2}, \frac{3y}{2}, \frac{z}{2}, -\frac{w}{2})$
s_{13}	$(1, -\frac{y}{2}, -\frac{z}{2}, -\frac{w}{2}, 0)$	
s_{14}		$\left[1, \frac{\beta+2\gamma}{2}x, \frac{-1+3\gamma^2}{2(\beta+2\gamma)}y, \xi_{h4}, \xi_{h5}\right]$ $\xi_{h4} = \frac{-w(\beta+2\gamma)+z(-1+\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)}{2(\beta+2\gamma)}$ $\xi_{h5} = \frac{z(\beta+2\gamma)+w(-1+\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)}{2(\beta+2\gamma)}$
s_{15}	$\left[1, \frac{x(\gamma+\epsilon\sqrt{1-2\gamma^2})}{2}, \frac{y(\gamma-\epsilon\sqrt{1-2\gamma^2})}{2}, -\frac{w+z\gamma}{2}, \frac{z-w\gamma}{2}\right]/$ $\alpha = \frac{-1+\gamma^2-2\epsilon\gamma\sqrt{1-2\gamma^2}}{\gamma+\epsilon\sqrt{1-2\gamma^2}}$ $\beta = -\gamma + \epsilon\sqrt{1-2\gamma^2}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$	
s_{16}		

S	AKVF/Τιμές για τις οποίες εμφανίζονται	Ομοθετικό πεδίο
s_{17}	$\left(1, 0, \frac{\epsilon y}{\sqrt{3}}, -\frac{3w+\epsilon z\sqrt{3}}{6}, \frac{3z-\epsilon w\sqrt{3}}{6}\right)/\alpha = 0$	$\left(1, 0, y\frac{\sqrt{3}\alpha+2\epsilon}{2\sqrt{3}}, \frac{3\alpha z-3w-\epsilon z\sqrt{3}}{6}, \frac{3\alpha w+3z-\epsilon w\sqrt{3}}{6}\right)$
s_{18}		
s_{19}		
s_{20}	$\left(1, \frac{\sqrt{2}y+\epsilon x}{2\sqrt{2}}, \frac{\epsilon y}{2\sqrt{2}}, -\frac{2w+\epsilon z\sqrt{2}}{4}, \frac{2z-\epsilon w\sqrt{2}}{4}\right)/$ $\left(\alpha = -\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(1, \frac{y+\epsilon x\sqrt{-1+3\beta^2}}{2}, \frac{\epsilon y\sqrt{-1+3\beta^2}}{2}, \xi_{h4}, \xi_{h5}\right)$ $\xi_{h4} = -\frac{w+3\beta z-2z\epsilon\sqrt{-1+3\beta^2}}{2}, \xi_{h5} = \frac{z-3\beta w+2w\epsilon\sqrt{-1+3\beta^2}}{2}$
s_{21}	$\left(1, \frac{ \gamma x-y\sqrt{-1+2\gamma^2}}{2}, \frac{ \gamma y+x\sqrt{-1+2\gamma^2}}{2}, \xi_4, \xi_5\right)$ $\xi_4 = -\frac{w}{2} + z\left(-\frac{3\gamma}{2} + \gamma \right), \xi_5 = \frac{z}{2} + w\left(-\frac{3\gamma}{2} + \gamma \right)/$ $\alpha = -2\gamma + \epsilon \gamma , \beta = \epsilon\sqrt{-1+2\gamma^2}$ $\gamma \in \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(1, \frac{-\beta y+\epsilon x\sqrt{-1-\beta^2+3\gamma^2}}{2}, \frac{\beta x+\epsilon y\sqrt{-1-\beta^2+3\gamma^2}}{2}, \xi_{h4}, \xi_{h5}\right)$ $\xi_{h4} = -\frac{w}{2} - \frac{3\gamma z}{2} + \epsilon z\sqrt{-1-\beta^2+3\gamma^2}$ $\xi_{h5} = \frac{z}{2} - \frac{3\gamma w}{2} + \epsilon w\sqrt{-1-\beta^2+3\gamma^2}$

I.3.4 Αναλλοίωτος χαρακτηρισμός των λύσεων

Στις λύσεις που παρουσιάσαμε παραπάνω, υπάρχουν κάποιες σταθερές οι οποίες ενδέχεται να “φέρουν” κάποιο φυσικό νόημα (ανεξάρτητα από το ποιο είναι αυτό). Εάν μια σταθερά δεν μπορεί να απορροφηθεί με κάποιο μετασχηματισμό συντεταγμένων, τότε θα την ονομάζουμε “ουσιώδη” και θα αντιστοιχεί σε σταθερά που περιέχει κάποιο φυσικό νόημα. Οι υπόλοιπες σταθερές θα αναφέρονται ως “μη ουσιώδεις”. Στη περίπτωση των προτύπων με τα οποία ασχολούμαστε (χωρόχρονοι με ομογενείς υπερ-επιφάνειες), ο αναμενόμενος μέγιστος αριθμός των ουσιωδών σταθερών ισούται (για $d + 1$ διαστάσεις) $N=(2 \times \#$ ανεξάρτητα $\gamma_{\alpha\beta}-2 \times \#$ ανεξάρτητες εξισώσεις συνδέσμων-#διάσταση των εξωτερικών Αυτομορφισμών). Όσον αφορά το Bianchi Type I οι σταθερές δομής είναι μηδέν, επομένως οι γραμμικοί σύνδεσμοι ικανοποιούνται ταυτοτικά, ενώ ταυτόχρονα οι εξωτερικοί Αυτομορφισμοί αποτελούνται από την $GL(4, \mathbb{R})$. Συνεπώς, $N = (2 \times 10 - 2 - 16) = 2$, το οποίο ικανοποιείται από όλες τις λύσεις που έχουμε βρει. Με ποιο τρόπο μπορούμε να αποφανθούμε για το αν μια σταθερά είναι ουσιώδης; Φαίνεται πως υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στις αναλλοίωτες σχέσεις, δηλαδή σχέσεις μεταξύ των βαθμωτών καμπυλότητας και βαθμωτά των παραγώγων της καμπυλότητας. Τα βαθμωτά καμπυλότητας παρέχουν ένα τρόπο χαρακτηρισμού των διαφορετικών γεωμετριών. Έτσι και εδώ, αν μπορέσουμε να εκφράσουμε μια σταθερά ως ένα συνδυασμό από βαθμωτά, τότε αυτή δε θα μπορεί να απορροφηθεί από κάποιο μετασχηματισμό συντεταγμένων. Ας εξετάσουμε το παράδειγμα των λύσεων $s_{17} - s_{19}$. Αυτές περιέχουν τη σταθερά α . Εφόσον είναι λύσεις του κενού, δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ταυνοστή $R_{\mu\nu}$ και το αντίστοιχο βαθμωτό R . Το πρώτο βαθμωτό θα είναι το Kretschmann $K = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ το οποίο ισούται με

$$K = \frac{4\alpha e^{-2\alpha t}}{\sqrt{3}}. \quad (5.26)$$

Παρατηρούμε πως εμφανίζεται η σταθερά α , αλλά και η μεταβλητή t . Χρειαζόμαστε λοιπόν άλλο ένα τουλάχιστον βαθμωτό ώστε να απαλειφθεί η μεταβλητή t . Κατασκευάζουμε το $Q = g^{\mu\nu}\nabla_\mu K \nabla_\nu K$ το οποίο ισούται με

$$Q = \frac{64}{3}\alpha^4 e^{-5\alpha t}. \quad (5.27)$$

S	Αναλλοίωτες σχέσεις	Αριθμός ουσιωδών σταθερών
s_1-s_5	$\frac{Q}{K^{5/2}} = f_1(\beta, \gamma), \frac{W}{K^{3/2}} = f_2(\beta, \gamma)$	2
s_6-s_8	$\frac{Q}{K^{5/2}} = f_3(\beta)$	1
$s_9-s_{11}/\alpha = -1$	$\frac{Q}{K^{5/2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$	0
$s_9-s_{11}/\alpha = 0$	None	0
$s_{12}-s_{13}$	None	0
$s_{14}-s_{16}$	$\frac{Q}{K^{5/2}} = f_4(\beta, \gamma), \frac{W}{K^{3/2}} = f_5(\beta, \gamma)$	2
$s_{17}-s_{19}$	$\frac{Q}{K^{5/2}} = 2 \times 3^{1/4} \alpha^{3/2}$	1
s_{20}	$\frac{Q}{K^{5/2}} = f_6(\beta)$	1
s_{21}	$\frac{Q}{K^{5/2}} = f_7(\beta, \gamma), \frac{W}{K^{3/2}} = f_8(\beta, \gamma)$	2

Πίνακας 5.9: Ισχύουν οι συντομεύσεις $K = R^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho}$, $Q = g^{\mu\nu} \nabla_\mu K \nabla_\nu K$, $W = \nabla^\lambda R^{\mu\nu\sigma\rho} \nabla_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho}$.

Τα δύο βαθμωτά πρέπει να είναι ανεξάρτητα ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Συγκεκριμένα μπορούμε να απαιτήσουμε τη μη μηδενικότητα της ορίζουσας του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \partial_t K & \partial_\alpha K \\ \partial_t Q & \partial_\alpha Q \end{pmatrix}.$$

Προκύπτει

$$\text{Det}(A) = -\frac{256\alpha^5 e^{-7\alpha t}}{\sqrt{3}} \neq 0, \quad (5.28)$$

συνεπώς η μεταβλητή t απαλείφεται και η σταθερά α μπορεί να εκφραστεί ως

$$\alpha = \frac{Q^{2/3}}{2^{2/3} \sqrt[3]{3} K^{5/3}}. \quad (5.29)$$

Η (5.29) είναι η αναλλοίωτη σχέση η οποία εκφράζει τον ουσιώδη χαρακτήρα της σταθεράς α .

Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στην αναζήτηση λύσεων σε μια εξίσωση παράμοια με την εξίσωση Killing

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \partial_\lambda g_{\alpha\beta}, \quad (5.30)$$

όπου λ η σταθερά προς εξέταση. Εάν υπάρχει ξ , τότε η λ είναι απορροφήσιμη και οι ολοκληρωτικές γραμμές του ξ ορίζουν το μετασχηματισμό απορρόφησης. Εάν δεν υπάρχει τέτοιο ξ τότε η λ είναι ουσιώδης. Η μέθοδος αυτή και ο τρόπος εύρεσης της εξίσωσης (5.30) δίνονται στη [124]. Η δεύτερη μέθοδος έχει το πλεονέκτημα πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση χωροχρόνων όπως τα pp-waves, τα οποία έχουν όλα τα βαθμωτά καμπυλότητας εξ'ορισμού ίσα με μηδέν. Στον πίνακα 5.9 παρουσιάζουμε τις αναλλοίωτες σχέσεις και τον αριθμό των ουσιωδών σταθερών. Η ακριβής μορφή των συναρτήσεων $f_i, i = 1, \dots, 8$ μπορεί να βρεθεί στο https://www.dropbox.com/sh/zkmih77ha1ulyyw/AABq_v5aVMBuP-KvIF0qTDnWa?dl=0.

Σε αυτό το σημείο ας κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις

I.3.4.1 Παρατηρήσεις

1. Έχοντας ψάξει όσο περισσότερο μπορούσαμε στη βιβλιογραφία, καταλήξαμε στο ό,τι μόνο η πρώτη οικογένεια λύσεων είναι γνωστή. Αυτή αντιστοιχεί στις πενταδιάστατες λύσεις Kasner [111], [112].
2. Για τις λύσεις s_1-s_5 υπάρχει η δυνατότητα επιλογής οποιουδήποτε από τους λόγους των ιδιοτιμών να ισούται με μηδέν, ως υποθέσουμε $\gamma = 0$. Αυτή η ειδική περίπτωση αντιστοιχεί στις τετραδιάστατες μετρικές Kasner [111], [112], εμβαπτισμένες σε μια πενταδιάστατη πολλαπλότητα.
3. Στις περιπτώσεις (s_9, s_{10}, s_{11}) , για μια εκ των δύο δυνατών τιμών του λόγου, ($\alpha = 0$), το πεδίο Killing ($\xi = \partial_y$) ικανοποιεί τις ιδιότητες,

$$\begin{aligned}\xi_\mu \xi^\mu &= 0, \\ \nabla_\mu \xi_\nu &= 0.\end{aligned}$$

Αυτός είναι ο ορισμός των pp-wave [125] χωροχρόνων, οι οποίοι είναι λύσεις των εξισώσεων Einstein και αναπαριστούν “ισχυρά” βαρυτικά κύματα διαδιδόμενα κατά μήκος φωτοειδών καμπυλών. Στην περίπτωση μας, το εφαπτόμενο άνυσμα στις φωτοειδείς καμπύλες είναι το $\xi = \partial_y$. Θα δούμε περισσότερα για αυτού του είδους τις λύσεις σε παρακάτω κεφάλαιο.

4. Οι λύσεις (s_{12}, s_{13}) είναι επίσης pp-waves, με ($\xi = \partial_x$) να είναι το φωτοειδές άνυσμα.

I.4 Φυσική εφαρμογή στο πλαίσιο της κοσμολογίας “βράνης”

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να σχολιάσουμε τη δυνατότητα σύνδεσης αυτών των πενταδιάστατων λύσεων με τετραδιάστατα κοσμολογικά πρότυπα. Θα ερευνήσουμε αυτή τη δυνατότητα στο πλαίσιο της κοσμολογίας “βράνης”, δηλαδή θεωρώντας πως το τετραδιάστατο σύμπαν είναι περιορισμένο σε μια βράνη (υπερ-επιφάνεια) (Σ, h_{ab}) μέσα στον πενταδιάστατο χωρόχρονο $(V, g_{\mu\nu})$ [126]. Οι ενεργές βαρυτικές εξισώσεις θα δίνονται μέσω των εξισώσεων Gauss-Codazzi στη βράνη [127], και λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες συνέχειας του Israel [128, 129]. Δηλαδή θεωρούμε λύσεις των εξισώσεων Einstein οι οποίες έχουν τη μορφή κατανομής.

Θεωρούμε το κάθετο n^μ άνυσμα στις υπερ-επιφάνειες και τον εσωτερικό προβολικό τανυστή $e^{(\mu)}_i$. Η μετρική της βράνης και η εξωτερική καμπυλότητα θα οριστούν όπως και στο πρώτο μέρος με τη μόνη διαφορά ένα πρόσθετο στην εξωτερική καμπυλότητα

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} e^{(\mu)}_i e^{(\nu)}_j, \quad (5.31)$$

$$K_{ij} = \nabla_\mu n_\nu e^{(\mu)}_i e^{(\nu)}_j. \quad (5.32)$$

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής αναλύεται σε δύο μέρη, εκείνο που αντιστοιχεί στη βράνη $T_\Sigma^{\alpha\beta}$ και εκείνο έξω από αυτή $T_V^{\alpha\beta}$. Θα θεωρήσουμε τη βράνη ως μια πολύ λεπτή επιφάνεια, το οποίο μπορεί να μεταφραστεί ως

$$T_\Sigma^{\alpha\beta} = \delta(\ell) S^{\alpha\beta}, \quad (5.33)$$

όπου $\delta(\ell)$ η δυνάμηση δέλτα του Dirac, με ℓ την παράμετρο της καμπύλης η οποία τέμνει κάθετα την υπερ-επιφάνεια Σ . Για την ακρίβεια, θεωρούμε πλήθος καμπυλών, συνεπώς η ℓ μπορεί να θεωρηθεί ως βαθμωτό πεδίο. Συγκεκριμένα, το άνυσμα n^μ ορίζεται ως

$$n^\mu = \epsilon g^{\mu\nu} \partial_\nu \ell, \quad (5.34)$$

όπου $\epsilon = \pm 1$. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής $S^{\alpha\beta}$ ορίζεται μόνο επί της υπερ-επιφάνειας, συνεπώς συνδέεται με τον εσωτερικό τανυστή S_{ij} της βράνης, όπως κάθε τανυστικό αντικείμενο, μέσω του εσωτερικού προβολικού τανυστή

$$S_{ij} = S_{\mu\nu} e^{(\mu)}_i e^{(\nu)}_j. \quad (5.35)$$

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $[A] = A(\ell \rightarrow 0^+) - A(\ell \rightarrow 0^-)$ όπου A οποιαδήποτε τανυστική ποσότητα η οποία ορίζεται και στις δύο πλευρές της υπερ-επιφάνειας. Αν επιθυμούμε τα σύμβολα Christoffel να έχουν και αυτά μορφή κατανομής, τότε αποδεικνύεται πως η μετρική της υπερ-επιφάνειας πρέπει να είναι συνεχής (για μια πλήρη περιγραφή [77])

$$[h_{ij}] = 0. \quad (5.36)$$

Παράλληλα, αποδεικνύεται πως ο τανυστής Riemann έχει μορφή κατανομής, όμως περιέχει όρο ο οποίος απειρίζεται επί της υπερ-επιφάνειας. Αυτό ο όρος μεταφέρεται στον τανυστή ενέργειας-ορμής μέσω των εξισώσεων Einstein και εμφανίζεται με τη μορφή του S_{ij} , ο οποίος εκφράζεται ως συνάρτηση του τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας

$$S_{ij} = -\frac{\epsilon}{\kappa} ([K_{ij}] - h_{ij} [K]), \quad (5.37)$$

όπου κ μια κατάλληλη σταθερά των εξισώσεων Einstein. Στην περίπτωση $[K_{ij}] = 0$, τότε ο τανυστής Riemann δεν εμφανίζει απειρισμό στην υπερ-επιφάνεια. Στην αντίθετη περίπτωση, εμφανίζεται απειρισμός, όμως υπάρχει άμεση φυσική εξήγηση: υπάρχει επιφανειακό φορτίο S_{ij} κατά μήκος της υπερ-επιφάνειας. Εφόσον, στη συγκεκριμένη περίπτωση εμείς επιθυμούμε να υπάρχει, πρέπει να επιβάλουμε κάποια συνθήκη για την εξωτερική καμπυλότητα. Η πιο συνήθης επιλογή είναι αυτή της συμμετρίας $\mathbb{Z}_2$ δηλαδή,

$$K_{ij}^+ = -K_{ij}^- = \frac{1}{2} [K_{ij}]. \quad (5.38)$$

Στην περίπτωση μας, έχουμε λύσει τις εξισώσεις Einstein στο κενό, $T_V^{\alpha\beta} = 0$ και στις δύο πλευρές της υπερ-επιφάνειας. Από όλες τις λύσεις που βρήκαμε, θα επικεντρωθούμε στην s_1 . Επιπλέον, θέλουμε το επιφανειακό φορτίο S_{ab} να έχει τη μορφή ενός ιδανικού ρευστού, ώστε να μπορεί να περιγράψει κάποια συγκεκριμένη μορφή του κοσμολογικού προτύπου Λ CDM.

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυση μας υποθέτοντας πως η βράνη περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $w - F(t) = 0$. Το στοιχείο μήκους της θα δίνεται από τη μορφή

$$ds_{(4)}^2 = -(e^{\phi_1 t} - e^{\gamma t} F'(t))^2 dt^2 + e^t dx^2 + e^{\phi_2 t} dy^2 + e^{\beta t} dz^2. \quad (5.39)$$

Οι συνιστώσες του εσωτερικού προβολικού τανυστή καθώς και το μοναδιαίο άνυσμα (επιλέξαμε $\epsilon = -1$) αποκτούν τη μορφή

$$e_1 = \partial_t + F'(t)\partial_w, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_y, \quad e_4 = \partial_z, \quad (5.40)$$

$$n^\mu = -\frac{1}{\sqrt{e^{-\gamma t} - e^{-\phi_1 t} F'(t)^2}} (e^{-\phi_1 t} F'(t)\partial_t + e^{-\gamma t} \partial_z), \quad (5.41)$$

όπου $e^{-\gamma t} - e^{-\phi_1 t} F'(t)^2 \neq 0$ (διαφορετικά η υπερ-επιφάνεια θα ήταν φωτοειδής), και ο τανυστής ενέργειας ορμής S_{ij}

$$S_{ij} = (\rho + p)u_i u_j + p h_{ij}, \quad (5.42)$$

όπου u^i το ανυσματικό πεδίο το οποίο περιγράφει την ταχύτητα του ρευστού. Θεωρούμε πως είναι κανονικοποιημένο στη μονάδα, έτσι ώστε

$$u_i = \left(-\sqrt{e^{\phi_1 t} - e^{\gamma t} F'(t)^2}, 0, 0, 0 \right). \quad (5.43)$$

Οι συνθήκες συνέχειας (5.37) επιβάλουν τις παρακάτω τιμές για τις σταθερές β, γ

$$\beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad (5.44)$$

και ταυτόχρονα η πυκνότητα ρ και πίεση p δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho = -\frac{3\sqrt{e^t - e^{-2t}F'(t)^2} (F'(t)^3 - 2e^{3t}(2F'(t) - F''(t)))}{2\kappa_G (e^{3t} - F'(t)^2)^2}, \quad (5.45)$$

$$p = \frac{3e^{-2t}F'(t)}{2\kappa_G \sqrt{e^t - e^{-2t}F'(t)^2}}, \quad (5.46)$$

όπου κ_G η συνήθης σταθερά των εξισώσεων Einstein. Το ενδιαφέρον της παραπάνω κατασκευής είναι πως για να έχουμε ιδανικό ρευστό στη βράνη πρέπει να η μετρική να είναι χωρικά ισοτροπική (το οποίο συμβαίνει εδώ για τις τιμές $\beta=1, \gamma=-1$),

$$ds_{(4)}^2 = - (e^{2t} - e^{-t}F'(t)^2) dt^2 + e^t (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.47)$$

κάτι το οποίο είχε παρατηρηθεί και στο [130]. Επιπλέον, η συνάρτηση $F(t)$ παραμένει αυθαίρετη, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε τη μορφή της καταστατικής εξίσωσης που επιθυμούμε. Αν υποθέσουμε μια βαροτροπική καταστατική εξίσωση $p = Q\rho$, τότε η συνάρτηση $F(t)$ πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$F''(t) = \frac{e^{-3t}F'(t)}{2Q} (e^{3t}(4Q - 1) - (Q - 1)F'(t)^2), \quad (5.48)$$

όπου ο κλάδος ($Q = 0$) οδηγεί σε μια “στατική” βράνη $F(t) = \text{σταθερά}$. Όμως μια τέτοια βράνη δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε τανυστή ενέργειας-ορμής ιδανικού ρευστού, καθώς όπως βλέπουμε από τις (5.45), (5.46), οδηγεί σε μηδενική πυκνότητα και πίεση. Η εξίσωση (5.48) μπορεί να απλοποιηθεί με το μετασχηματισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής $t = 2Q/(4Q - 1) \ln \xi$, ο οποίος οδηγεί στην ισοδύναμη εξίσωση

$$F''(\xi) = -\mu \xi^\nu F'(\xi)^3, \quad \mu = \frac{(4Q - 1)(Q - 1)}{4Q^2}, \quad \nu = \frac{2Q + 1}{-4Q + 1}. \quad (5.49)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση ολοκληρώνεται οδηγώντας στη λύση

$$F(t) = k_2 + \frac{2\sqrt{k_1}}{|\alpha + 3|} e^{(\alpha+3)t/2} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha + 3}{2\alpha}, \frac{3(\alpha + 1)}{2\alpha}, -k_1 e^{\alpha t} \right], \quad (5.50)$$

όπου $\alpha = (Q - 1)/Q$, k_1, k_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης και ${}_2F_1$ η υπερ-γεωμετρική συνάρτηση. Η μετρική στη βράνη αποκτά τη μορφή

$$ds_{(4)}^2 = -\frac{e^{2t}}{1 + k_1 e^{\alpha t}} dt^2 + e^t (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.51)$$

με τις αντίστοιχες πυκνότητα και πίεση να δίνονται από τις σχέσεις

$$p = \pm \frac{3}{4\kappa} e^{(\alpha-2)t/2} \sqrt{k_1}, \quad (5.52)$$

$$\rho = \pm \frac{3}{4\kappa} e^{(\alpha-2)t/2} \sqrt{k_1} (1 - \alpha), \quad (5.53)$$

(όπου $\pm$ αντιστοιχεί σε $Q < \frac{1}{4}$ και $Q > \frac{1}{4}$). Επίσης, παρατηρούμε πως για να έχουμε πραγματική πυκνότητα και πίεση, πρέπει η k_1 να είναι θετική σταθερά ($k_1 > 0$).

Υπάρχουν δύο κλάδοι με βάση τη μορφή της $F(t)$. Η περίπτωση ($\alpha = -3 \Rightarrow Q = \frac{1}{4}$) οδηγεί σε μορφή μετρικής ίδια με την (5.51), όμως η επιφάνεια προκύπτει φανταστική, εκτός και αν $k_1 < 0$ το οποίο οδηγεί σε φανταστική πυκνότητα και πίεση, συνεπώς απορρίπτεται. Η άλλη περίπτωση είναι η ($\alpha = 0 \Rightarrow Q = 1$)

η οποία οδηγεί στις εξής εκφράσεις

$$F(t) = \frac{2}{3} e^{3t/2} \sqrt{\frac{k_1}{1+k_1}} + k_2, \quad (5.54)$$

$$\rho = \frac{3}{4\kappa} e^{-t} \sqrt{k_1}, \quad (5.55)$$

$$p = \frac{3}{4\kappa} e^{-t} \sqrt{k_1}, \quad (5.56)$$

$$ds_{(4)}^2 = -\frac{e^{2t}}{1+k_1} dt^2 + e^t (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.57)$$

Οι πράξεις βρίσκονται αναλυτικά στο φάκελο “Brane interpretation s1 solution” στο dropbox https://www.dropbox.com/sh/zkmih77ha1ulyyw/AABq_v5aVMBuP-KvIF0qTDnWa?dl=0.

I.5 Ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη όπου υποθέτουμε μη μηδενική κοσμολογική σταθερά στις πέντε διαστάσεις. Άμεσα μπορούμε να συμπεράνουμε πως όλες οι λύσεις pp-wave δε θα υπάρχουν για τον εξής λόγο: Το ίχνος των εξισώσεων Einstein ισούται με

$$\frac{2-D}{2} R = -\Lambda D, \quad (5.58)$$

όπου D η διάσταση του χωροχρόνου. Μια από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των χωροχρόνων pp-wave, είναι πως όλα τα βαθμωτά καμπυλότητας είναι μηδέν. Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (5.58) πρέπει αναγκαστικά $\Lambda = 0$.

Εκτός από αυτή την απλή παρατήρηση, μπορούμε να περιγράψουμε σε κάποιο βαθμό τη μορφή που αναμένουμε να έχουν οι λύσεις. Ο τετραγωνικός σύνδεσμος και οι δυναμικές εξισώσεις θα αλλάξουν ως εξής (θεωρώντας την ίδια επιλογή βαθμίδας),

$$\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)^2 - \dot{\gamma}_{\sigma\rho} \gamma^{\sigma\alpha} \gamma^{\rho\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} = 8\gamma\Lambda, \quad (5.59)$$

$$\partial_t (\gamma^{\sigma\rho} \dot{\gamma}_{\rho\kappa}) = \frac{4}{3} \Lambda \gamma \delta_{\kappa}^{\sigma}, \quad (5.60)$$

όπου γ η ορίζουσα της τετραδιάστατης υπερ-επιφάνειας. Υπολογίζοντας το ίχνος της (5.60) και χρησιμοποιώντας το στην ίδια, καταλήγουμε στη μορφή

$$\partial_t \left(\gamma^{\sigma\rho} \dot{\gamma}_{\rho\kappa} - \frac{1}{4} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \delta_{\kappa}^{\sigma} \right) = 0, \quad (5.61)$$

η οποία ολοκληρώνεται

$$\dot{\gamma}_{\sigma\rho} = \frac{1}{4} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \gamma_{\sigma\rho} + \gamma_{\sigma\kappa} \tilde{\theta}_{\rho}^{\kappa}, \quad (5.62)$$

όπου $\tilde{\theta}_{\rho}^{\kappa}$ είναι πλέον ένας άιχνος, σταθερός πίνακας. Η εξίσωση (5.62) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον τετραγωνικό σύνδεσμο, το οποίο οδηγεί σε μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση για την ορίζουσα της μετρικής,

$$\frac{3}{4} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)^2 - Tr(\tilde{\theta}^2) = 8\gamma\Lambda, \quad (5.63)$$

με λύση

$$\gamma = -\frac{Tr(\tilde{\theta}^2)}{8\Lambda} \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} \sqrt{Tr(\tilde{\theta}^2)} \left(m - \frac{2}{\sqrt{3}} t \right) \right]^2, \quad (5.64)$$

και m σταθερά ολοκλήρωσης. Η χρήση της (5.64) στη (5.62) οδηγεί, σε μορφή πίνακα,

$$\dot{\gamma} = f(t)\gamma + \tilde{\theta}^T \gamma, \quad (5.65)$$

η οποία αποτελεί τροποποίηση της (5.15). Η γενική λύση της έχει τη μορφή

$$\gamma = H(t)e^{\tilde{\theta}^T t} c. \quad (5.66)$$

Οι συναρτήσεις $f(t)$, $H(t)$ δίνονται παρακάτω

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{Tr(\tilde{\theta}^2)} \tanh \left[\frac{1}{2} \sqrt{Tr(\tilde{\theta}^2)} \left(m - \frac{2}{\sqrt{3}} t \right) \right], \quad (5.67)$$

$$H(t) \equiv e^{\int f(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{\cosh \left[\frac{1}{2} \left(m - \frac{2}{\sqrt{3}} t \right) Tr(\tilde{\theta}^2) \right]}} \mathbf{I}, \quad (5.68)$$

όπου $\mathbf{I}$ ο τετραδιάστατος, ταυτοτικός πίνακας. Η ορίζουσα της (5.66) θα πρέπει να είναι ίση με την (5.64), δίνοντας μια σχέση μεταξύ του σταθερού πίνακα c και της κοσμολογικής σταθεράς.

Όπως και στην περίπτωση $\Lambda = 0$, η ομάδα των αυτομορφισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απλοποίηση του πίνακα $\tilde{\theta}$. Έχοντας τη γενική μορφή της λύσης, μπορούμε να δούμε πως η αλλαγή που έχει επιφέρει η ύπαρξη της κοσμολογικής σταθεράς είναι η συνάρτηση $H(t)$. Αν για παράδειγμα, θεωρήσουμε όριο $t \rightarrow \infty$, τότε η $H(t)$ έχει την ασυμπτωτική μορφή $(\sim e^{-(Tr(\tilde{\theta}^2)/2\sqrt{3})t})$ η οποία εν γένει μπορεί να “αποσβέσει” (damp) κάποιον από τους όρους $(\sim e^{\theta t})$. Η ανισοτροπία του προτύπου δεν επιτρέπει την πλήρη “απόσβεση” (damping) όπως συμβαίνει σε ένα πρότυπο FLRW. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κοσμολογικά πρότυπα βράνης όπου απαιτούμε η επιπλέον διάσταση να μην είναι συμπαγής, δηλαδή φαίνεται να υπάρχει ένας φυσικός τρόπος ώστε οι επιπλέον διαστάσεις να μην είναι παρατηρήσιμες σε κλίμακες του παρατηρήσιμου σύμπαντος.

I.6 Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων

Όπως είδαμε, η ομάδα των μετασχηματισμών τα οποία διατηρούν την προφανή ομογενή μορφή του στοιχείου μήκους (σταθεροί Αυτομορφισμοί), παρέχουν ένα τρόπο απλοποίησης και ολοκλήρωσης των εξισώσεων Einstein. Στο συγκεκριμένο πρότυπο, με κατάλληλη επιλογή του Lapse, οι εξισώσεις ολοκληρώθηκαν χωρίς να χρειαστεί να εφαρμόσουμε κάποια από τις μεθόδους ολοκλήρωσης που περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο της θεωρίας. Ένας από τους λόγους που φαίνεται να ήταν δυνατή η ολοκλήρωση, ήταν ο μηδενισμός του τανυστή Ricci της ομογενούς υπερ-επιφάνειας λόγω των σταθερών δομής του προτύπου $C_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να μην εξαρτάται ο τετραγωνικός σύνδεσμος από το βαθμωτό Ricci. Αυτό δεν ισχύει για κανένα από τα άλλα πρότυπα. Η εκτεφρασμένη μορφή των αναλυτικών λύσεων, κατέστη δυνατή λόγω του διαχωρισμού του χώρου των λύσεων σε οικογένειες. Αυτός ο διαχωρισμός έγινε με βάση την ομάδα των σταθερών Αυτομορφισμών (τα οποία αποτελούν συμμετρίες των εξισώσεων), συνεπώς δεν υπήρξε κάποια βλάβη της γενικότητας. Με βάση αυτή τη μέθοδο, καταφέραμε να αναπαράγουμε τις ήδη γνωστές λύσεις, καθώς και νέες. Στο σύνολο, προέκυψαν 7 οικογένειες λύσεων με 21 διαφορετικές λύσεις. Κάποιες από αυτές έχουν υπογραφή Lorentz, κάποιες Ευκλείδεια και κάποιες υπογραφή (3, 2). Η συντεταγμένη t η οποία εμφανίζεται ως η ανεξάρτητη μεταβλητή στις διαφορικές εξισώσεις, σε κάποιες λύσεις μπορεί να χαρακτηριστεί ως χρονική (θα μπορούσε να περιγράψει κοσμολογικό πρότυπο) και σε άλλες ως χωρική (κάποιο είδος χωροχρόνου το οποίο περιέχει ομογενείς χωροχρονικές, τετραδιάστατες υπερ-επιφάνειες). Παράλληλα, προέκυψαν λύσεις της οικογένειας των pp-wave, δηλώνοντας ακόμη πιο έντονα το πλούσιο περιεχόμενο των προτύπων Bianchi. Χρησιμοποιήθηκαν αναλλοίωτες σχέσεις προς χαρακτηρισμό των διαφορετικών γεωμετρικών, μέσω των ουσιαστών σταθερών που αυτές φέρουν.

Χρησιμοποιώντας τη λύση s_1 (γενίκευση της λύσης Kasner), παρουσιάσαμε τα φυσικά χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει ένα κοσμολογικό πρότυπο το οποίο περιγράφει το σύμπαν, αν θεωρηθεί πως αποτελεί μια βράνη μέσα στον πενταδιάστατο χωρόχρονο. Οι συνθήκες συνέχειας και η υπόθεση, το επιφανειακό

φορτίο της βράνης να περιγράφεται ως ιδανικό ρευστό, επέβαλλαν στη μετρική της βράνης να είναι χωρικά ισοτροπική (ανήκει δηλαδή στη κλάση των FLRW). Επιπλέον, απαιτώντας το ιδανικό ρευστό να περιγράφεται από βαροτροπική καταστατική εξίσωση, προσδιορίσαμε την επιφάνεια η οποία περιγράφει τη βράνη.

Τέλος, σκιαγραφήσαμε τον τρόπο που θα αλλάξουν τα αποτελέσματα αν επιλέξουμε την ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς. Ως πρώτο συμπέρασμα, αποδείξαμε πως δε μπορούν να υπάρξουν λύσεις pp-wave. Σε δεύτερο βήμα, είδαμε πως η ουσιώδης διαφορά είναι η ύπαρξη ενός πολλαπλασιαστικού όρου στη γενική μορφή της λύσης που βρήκαμε παραπάνω, ο οποίος εξαρτάται από την κοσμολογική σταθερά. Αυτός ο όρος, μπορεί ενδεχομένως να “ακυρώσει” τη χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας κατά μήκος μιας χωρικής διάστασης. Παρατηρήσαμε πως λόγω της ανισοτροπίας δε γίνεται να υπάρξει καθολική “ακύρωση” όπως σε κάποιο πρότυπο FLRW. Αυτό αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο χρήσης αυτής της ιδιότητας σε κοσμολογικά πρότυπα βράνης, στα οποία η επιπλέον διάσταση απαιτούμε να μην είναι συμπαγής. Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο πως αν υποθέσουμε παραπάνω από μια επιπλέον διαστάσεις, η κοσμολογική σταθερά θα μπορέσει να ακυρώσει μόνο μια εξ αυτών.

Κεφάλαιο 6

Κλασσική και κβαντική ανάλυση 3D ηλεκτρομαγνητικών pp-wave χωροχρόνων

I Εισαγωγή

Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο με μια μικρή, ιστορική αναδρομή στην έννοια των βαρυτικών κυμάτων. Η ιδέα των βαρυτικών κυμάτων στην προσέγγιση ασθενούς πεδίου είχε προβλεφθεί θεωρητικά από τον ίδιο τον Einstein [131], [132]. Ο Eddington ήταν από τους πρώτους που σχολίασαν τις κυματικές βαρυτικές λύσεις και την ταχύτητα με την οποία αυτά τα κύματα διαδίδονται [133]. Αργότερα, οι Einstein και Rosen δημοσίευσαν μια εργασία στην οποία προβλέπεται η ύπαρξη κυλινδρικών βαρυτικών κυμάτων. Οι ίδιοι τη χαρακτήρησαν ως μη-φυσική, καθώς παρουσιάζεται ανωμαλία [134]. Όπως παρατηρήθηκε από τον Howard P. Robertson με γράμμα του στους συγγραφείς, αυτή ήταν μια ανωμαλία του συστήματος συντεταγμένων και όχι της γεωμετρίας. Από τότε, έχει υπάρξει αρκετή πρόοδος στο συγκεκριμένο πεδίο, με ένα από τα σημαντικότερα γεγονότα να είναι η έμμεση ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων από τους Russel Alan Hulse και Joseph Hooton Taylor Jr. μέσω των ενεργειακών απωλειών και των απωλειών στροφορμής, ενός διπλού pulsar [135], [136]. Η άμεση παρατήρηση βαρυτικών κυμάτων έγινε μόλις το 2015: η συγχώνευση δύο μελανών οπών προκάλεσε την εκπομπή βαρυτικών κυμάτων [137].

Όλες οι εργασίες τις οποίες αναφέραμε στη προηγούμενη παράγραφο, είχαν ως εναρκτήριο λάκτισμα τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις Einstein. Η ύπαρξη αναλυτικών λύσεων των μη-γραμμικών εξισώσεων Einstein, έχει επίσης αποδειχθεί θεωρητικά. Η πρώτη φαίνεται να παρουσιάζεται από τον Brinkmann [138] ο οποίος μελετούσε σύμμορφες απεικονίσεις μεταξύ χώρων Einstein. Οι Baldwin και Jeffery στη δημοσίευση [139] θεώρησαν σύζευξη βαρύτητας και ηλεκτρομαγνητισμού, υποθέτοντας επίπεδα κύματα τα οποία διαδίδονται με μια συγκεκριμένη ταχύτητα. Λόγω όμως των δυσκολιών στον ορισμό ενός κύματος εν τη απουσία μη-δυναμικού υποβάθρου, έπρεπε να υπάρξει κάποιος γεωμετρικός ορισμός. Ο Petron κατάφερε να κατηγοριοποιήσει αλγεβρικά τον τανυστή Weyl, ο οποίος είναι το κομμάτι εκείνο του τανυστή καμπυλότητας το οποίο δεν επηρεάζεται από τη παρουσία τοπικής ύλης [140]. Με βάση την ονοματολογία αυτή, ο τύπος N συνδέεται με βαρυτική ακτινοβολία, σε αντιστοιχία με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τα οποία χαρακτηρίζονται από “φωτοειδές” πεδίο Maxwell. Αργότερα, ο Sachs εισήγαγε την οπτική βαρυτικών κυμάτων [141] και ο Kundt μελέτησε επίπεδα βαρυτικά κύματα [125].

Μια ειδική κλάση αυτών καλούνται pp-waves τα οποία έχουν την ιδιότητα όλα τα πρώτου είδους βαθμωτά καμπυλότητας να είναι ίσα με μηδέν. Ακόμη ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό είναι πως αυτοί οι χωρόχρονοι δεν είναι καθολικά υπερβολικοί, όπως απέδειξε ο Roger Penrose [142]. Οι pp-wave χωρόχρονοι εμφανίζονται σε αρκετά ευρύ πεδίο, από τη γενική σχετικότητα, στη θεωρία χορδών και βρανών καθώς και στην υπερ-βαρύτητα. Αναφέρουμε ενδεικτικά κάποια παραδείγματα. Οι συγγραφείς της δημοσίευσης [143], μετασχημάτισαν τις εξισώσεις του Νεύτωνα για N μη σχετικιστικά αλληλεπιδρώντα σωματίδια,

στη μορφή φωτοειδών γεωδαισιακών, σε pp-wave χωρόχρονο διαστάσεως $(3N + 2)$. Στην εργασία [144] αποδείχθηκε πως η σύμμορφη αναλλοιώτητα ενός σ - προτύπου, δεν οδηγεί μόνο σε μετρική Robertson-Walker, αλλά και σε ένα συγκεκριμένο είδος pp-wave. Στη περίπτωση μποζονικής χορδής σε ειδικά επιλεγμένο pp-wave χωρόχρονο, η σύμμορφη ανωμαλία εξαφανίζεται [145], ενώ αποδείχθηκε πως τα pp-waves, είναι κατάλληλα, με κάποιους περιορισμούς, ώστε να παρέχουν, για διαταρακτικά πρότυπα σίγμα, την κατάσταση κενού σε όλες τις τάξεις [146]. Επίσης, Brinkmann χωρόχρονοι σε ανώτερες διαστάσεις, των οποίων οι επιπλέον συνιστώσες της μετρικής μπορούν να θεωρηθούν ως εξωτερικά πεδία βαθμίδας, με τη μάζα ως σταθερά σύζευξης, μελετήθηκαν στην εργασία [147]. Το όριο Penrose σε υπόβαθρα της Θεωρίας-M διερευνήθηκε στην [148]. Οι Brandhuber και Sfetsos μελέτησαν pp-waves τα οποία προκύπτουν ως το όριο Penrose βρανών-D3 [149]. Όσον αφορά την εξίσωση της γεωδαισιακής απόκλισης, οι Svarc και Rodolsky διερεύνησαν τις ιδιότητες αυτής σε χωροχρόνους Kundt κάθε διάστασης, όπως αναφέρουν στη δουλειά τους [150]. Το ανάλογο των pp-waves εισήχθη στη γεωμετρία Finsler από τους Fuster και Pabst [151]. Σχετικά πιο πρόσφατα [152], κατηγοριοποιήθηκαν οι συμμετρίες της κυματικής και της εξίσωσης Klein-Gordon θεωρώντας υπόβαθρο pp-wave. Η γεωμετρία αυτής της κλάσης χωροχρόνων εμφανίστηκε ως ο θεσογραφικός χώρος της minisuperspace Λαγκρανζιανής για το πρότυπο Bianchi III LRS σε σύζευξη με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο [153]. Τέλος, κάποιες από τις λύσεις για τετραδιάστατα και πενταδιάστατα πρότυπα Bianchi στο κενό, αναγνωρίστηκαν ως pp-waves [88], [154].

Μέχρι στιγμής, το σύμπαν φαίνεται να περιγράφεται με βάση την ύπαρξη τεσσάρων διαστάσεων. Παρόλα αυτά, η μελέτη των νόμων της φυσικής σε διαστάσεις λιγότερες ή περισσότερες των τεσσάρων, οδηγεί στην απόκτηση χρήσιμων πληροφοριών. Για παράδειγμα, η μελέτη της βαρύτητας στις $(2 + 1)$ διαστάσεις είναι ενδιαφέρουσα λόγω της απουσίας τοπικών, βαρυτικών βαθμών ελευθερίας. Ο Edward Witten μελέτησε τη σχέση μεταξύ της θεωρίας Chern-Simons και της αντίστοιχης βαρυτικής, υποθέτοντας συγκεκριμένη ομάδα βαθμίδας. [155], [156]. Η πιο γνωστή λύση στις $(2 + 1)$ διαστάσεις αποτελεί η μελανή οπή BTZ η οποία ονομάστηκε έτσι προς τιμή των συγγραφέων Maximo Bañados, Claudio Teitelboim και Jorge Zanelli [157]. Στη [158], οι συγγραφείς μελέτησαν τη σύμμορφη βαρύτητα στις $(2 + 1)$ διαστάσεις, όπου ο τανυστής Cotton τέθηκε ίσος με τον τανυστή ενέργειας-ορμής ενός βαθμωτού πεδίου. Βρέθηκαν ακριβείς λύσεις σε pp-wave χωρόχρονο και παράλληλα προέκυψε ισοδυναμία με την τοπολογικά “μαζική” βαρύτητα (massive gravity). Πληθώρα αναλυτικών λύσεων μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο [159]. Τέλος, μια πιο πρόσφατη δημοσίευση παρέχει το χώρο λύσεων στις $(2 + 1)$ διαστάσεις σε χωροχρόνους με Λ , ακτινοβολία και gyratons [160].

Στη συγκεκριμένη εργασία, σκοπός μας είναι να μελετήσουμε pp-wave χωροχρόνους υπό την παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, τόσο σε κλασσικό όσο και σε κβαντικό επίπεδο. Παράλληλα, θα αναζητήσουμε κατηγοριοποίηση των λύσεων με βάση τις συμμετρίες τους και θα δούμε αν υπάρχει κάποια σύνδεση αυτών με τα πρότυπα Bianchi στις $(2+1)$ διαστάσεις. Η μελέτη στο κβαντικό επίπεδο θα γίνει στην περίπτωση που υπάρχει τρόπος κατασκευής κάποιας minisuperspace Λαγκρανζιανής. Η ανάλυση κατά Bohm θα χρησιμοποιηθεί ώστε να ερμηνεύσουμε τις κυματοσυναρτήσεις με γεωμετρικούς όρους.

Παραθέτουμε επιγραμματικά τις ενότητες

1. Η γενική κλασσική λύση.
2. Κατηγοριοποίηση με βάση τα πεδία Killing.
3. Κατασκευή Minisuperspace Λαγκρανζιανής.
4. Minisuperspace Χαμιλτονιανή.
5. Κλασσική περιγραφή, μη-δυναμικό $n(t)$.
6. Κλασσική περιγραφή, δυναμικό $n(t)$.
7. Κβαντική περιγραφή, μη-δυναμικό $n(t)$.
8. Κβαντική περιγραφή, δυναμικό $n(t)$.
9. Ανάλυση Bohm.
10. Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων.

I.1 Κλασσική περιγραφή

I.1.1 Η γενική κλασσική λύση

Το σημείο εκκίνησης είναι η παράθεση των συνιστωσών μιας τρισδιάστατης μετρικής η οποία επιδέχεται ένα φωτεινές ανυσματικό πεδίο Killing. Έστω (w, r, u) οι συντεταγμένες ως προς τις οποίες το άνωμα έχει την κανονική του μορφή. Επιπλέον, θεωρώντας τη $(2+1)$ ανάλυση ως προς τη μεταβλητή r , η μετρική αποκτά την εξής μορφή [159]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f(r, u) \\ 0 & 1 & 0 \\ f(r, u) & 0 & h(r, u) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

με το ανυσματικό πεδίο Killing να είναι το

$$\xi^\mu = (1, 0, 0). \quad (6.2)$$

Στη συγκεκριμένη εργασία θα μελετήσουμε μια ακόμη πιο περιορισμένη οικογένεια γεωμετριών, εκείνη στην οποία το (6.2) είναι συναλλοίωτα σταθερό. Αυτή η νέα απαίτηση οδηγεί στην επιπλέον συνθήκη

$$f(r, u) = \tilde{f}(u). \quad (6.3)$$

Η μετρική (6.1) μπορεί να γραφεί ως

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h(r, u) \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

όπου η συνάρτηση $\tilde{f}(u)$ έχει απορροφηθεί με ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής $(w \rightarrow \tilde{w}, r \rightarrow \tilde{r}, u \rightarrow \tilde{u} = \int f(u) du)$, όπου για λόγους απλότητας, χρησιμοποιήσαμε τα ίδια σύμβολα αναπαράστασης των συντεταγμένων. Η μετρική (6.4) καλείται *pp-wave* μετρική [125], και έχει την ιδιότητα πως όλα τα βαθμωτά καμπυλότητας πρώτους είδους, όπως $(R, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho}, \dots)$ είναι ίσα με μηδέν [161]. Η μοναδική μη-μηδενική συνιστώσα του τανυστή Einstein $(G_{\mu\nu})$ είναι η

$$G_{33} = -\frac{1}{2} \partial_{rr} h(r, u), \quad (6.5)$$

όπου συμβολίζουμε με ∂_{rr} τη δεύτερη παράγωγο ως προς τη μεταβλητή r και θα χρησιμοποιείται από εδώ και στο εξής όπου απαιτείται.

Όσον αφορά το ηλεκτρομαγνητικό μέρος του συστήματος που μελετάμε, παραθέτουμε τον τανυστή Faraday ως συνάρτηση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1(w, r, u) & -E_2(w, r, u) \\ E_1(w, r, u) & 0 & B_1(w, r, u) \\ E_2(w, r, u) & -B_1(w, r, u) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Η αρχική χρήση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου έναντι του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού $A_\mu(w, r, u)$ γίνεται μόνο για την απλοποίηση των διαφορικών εξισώσεων. Όπως θα δούμε, κάποιες συνθήκες είναι πιο απλές αν χρησιμοποιήσουμε αυτά τα πεδία. Σε αυτό το σημείο ας ξεκαθαρίσουμε πως τα σύμβολα, ηλεκτρικό (E) και μαγνητικό (B) πεδίο, είναι μόνο κατ' όνομα, με την έννοια πως δεν γνωρίζουμε εξ' αρχής ποιά από τις μεταβλητές θα έχει το ρόλο του "χρόνου". Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το θέμα [162].

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων Einstein-Maxwell ¹ σε μορφή τανυστικών συνιστωσών είναι το εξής

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (6.7)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (6.8)$$

$$\nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0, \quad (6.9)$$

όπου οι αγκύλες $[\]$ αναφέρονται στον πλήρη αντι-συμμετροποίηση ως προς τους έγκλειστους δείκτες, και $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας-ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho}. \quad (6.10)$$

Πριν ξεκινήσουμε την αναζήτηση λύσεων, είναι πιο απλό να προβούμε σε κάποιες απλοποιήσεις. Οι χωρόχρονοι pp-wave ικανοποιούν την εξής ιδιότητα

$$G_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = 0 \xrightarrow{(6.7)} T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = 0 \Rightarrow E_1(w, r, u) = 0. \quad (6.11)$$

Επιπλέον, ισχύουν οι εξής αλγεβρικές συνθήκες βασισμένες στο μηδενισμό κάποιων εκ των συνιστωσών του τανυστή Einstein,

$$\forall i, j \text{ with } i = j \neq 3, G_{ij} = 0 \xrightarrow{(6.7)} T_{ij} = 0 \Rightarrow E_2(w, r, u) = 0. \quad (6.12)$$

Τέλος, ισχύει η συνθήκη Killing,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi G_{\mu\nu} = 0 \xrightarrow{(6.7)} \mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} = 0, \quad (6.13)$$

όπου $\mathcal{L}_\xi$ η παράγωγος Lie, και οδηγεί στην απλοποίηση

$$B_1(w, r, u) = B(r, u). \quad (6.14)$$

Υπό το πρίσμα των παραπάνω, οι εξισώσεις (6.7), (6.8) αποκτούν τη μορφή

$$\frac{1}{2} \partial_{rr} h(r, u) + B(r, u)^2 = 0, \quad (6.15)$$

$$\partial_r B(r, u) = 0, \quad (6.16)$$

ενώ η (6.9) ικανοποιείται ταυτοτικά. Το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων ολοκληρώνεται σχετικά απλά, με τη γενική λύση να είναι της μορφής

$$h(r, u) = -r^2 b(u)^2 + r h_2(u) + h_1(u), \quad (6.17)$$

$$B(r, u) = b(u), \quad (6.18)$$

με τις συναρτήσεις $(b(u), h_1(u), h_2(u))$ να παραμένουν αυθαίρετες. Μπορεί να αποδειχθεί πως με τη χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών συντεταγμένων και ηλεκτρομαγνητικών μετασχηματισμών βαθμίδας, οι συναρτήσεις $(h_1(u), h_2(u))$ είναι απορροφήσιμες. Επομένως, μπορούμε να τις αγνοήσουμε πλήρως εφόσον δεν υπάρχει κάποια φυσική σημασία με την οποία να είναι συνδεδεμένες. Παρατηρούμε πως για $b(u) = 0, h_1(u) \neq 0, h_2(u) \neq 0$ το σύστημα αναπαριστά τον επίπεδο χώρο Minkowski. Καταλήγουμε λοιπόν, πως η γενική αναλυτική λύση έχει τη μορφή

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -r^2 b(u)^2 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

$$A_\mu = (0, 0, r b(u)), \quad (6.20)$$

¹Οι εξισώσεις δίνονται στο σύστημα μονάδων Gauss και επιπλέον επιλέγουμε για απλότητα $c = 1, G = \frac{1}{2}, \hbar = 1$, όπου c η ταχύτητα του φωτός, G η Νευτώνεια βαρυτική σταθερά και $\hbar$ η σταθερά του Planck.

όπου A_μ το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, με $b(u)$ κάποια τυχαία συνάρτηση. Θεωρήσαμε $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ ώστε να προσδιορίσουμε το A_μ .

Το ερώτημα που τίθεται σε αυτό το σημείο είναι το κατά πόσο οι διαφορετικές μορφές της συνάρτησης $b(u)$ ορίζουν διαφορετικές γεωμετρίες. Με το σκεπτικό να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, είναι πιο βολικό να μετασχηματίσουμε τη μετρική και το δυναμικό στις συντεταγμένες $\tilde{u}$, $d\tilde{u} = b(u)du$, ενώ ονομάζουμε και πάλι το $\tilde{u}$ ως u για λόγους απλότητας.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f(u) \\ 0 & 1 & 0 \\ f(u) & 0 & -r^2 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

$$A_\mu = (0, 0, r), \quad (6.22)$$

Η συνάρτηση $b(u)$ “απορροφήθηκε” από τη συνιστώσα g_{uu} της (6.19) και αναπαρίσταται πλέον ως $f(u) = \frac{1}{b(u)}$. Μια πολλαπλασιαστική σταθερά (k_0) στη συνιστώσα g_{uu} δεν λήφθηκε υπόψη, καθώς το μόνο που προσέφερε είναι η ύπαρξη του επίπεδου χωροχρόνου (για $k_0 = 0$). Το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό γίνεται ανεξάρτητο της μεταβλητής u ενώ αντίστοιχα ο τανυστής Faraday αποκτά μόνο μια μη-μηδενική σταθερή συνιστώσα, $F_{ru} = 1$. Το μόνο που χρειάζεται να ελέγξουμε για να απαντήσουμε στο ερώτημα είναι κατά πόσο μια άλλη μετρική με διαφορετική συνάρτηση, $f_1(u)$, μπορεί να συνδεθεί με τη (6.21) μέσω ενός μετασχηματισμού συντεταγμένων.

Ας ξεκινήσουμε με την (6.21) υποθέτοντας ένα γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής

$$w = h_1(w_1, r_1, u_1), \quad r = h_2(w_1, r_1, u_1), \quad u = h_3(w_1, r_1, u_1), \quad (6.23)$$

απαιτώντας η νέα μετρική να είναι της μορφής

$$g_{\mu\nu}(w_1, r_1, u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_1(u_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ f_1(u_1) & 0 & -r_1^2 \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

Αν ο παραπάνω μετασχηματισμός πράγματι συνδέει τις δύο μετρικές, τότε το ίδιο θα κάνει και για τους αντίστοιχους τανυστές Ricci. Όμως και οι δύο τανυστές Ricci έχουν μόνο μια μη-μηδενική συνιστώσα $R_{uu} = 1$. Τα δύο σύνολα εξισώσεων

$$g_{\sigma\tau}(w_1, r_1, u_1) = g_{\mu\nu}(w, r, u) \frac{\partial q^\mu}{\partial \tilde{q}^\sigma} \frac{\partial q^\nu}{\partial \tilde{q}^\tau}, \quad R_{\sigma\tau}(w_1, r_1, u_1) = R_{\mu\nu}(w, r, u) \frac{\partial q^\mu}{\partial \tilde{q}^\sigma} \frac{\partial q^\nu}{\partial \tilde{q}^\tau}, \quad (6.25)$$

όπου $q^\mu = (w, r, u)$, $\tilde{q}^\sigma = (w_1, r_1, u_1)$, δεσμεύουν τις συναρτήσεις f_1 σε απλό πολλαπλάσιο της f με μια σταθερά. Η σταθερά αυτή μπορεί να απορροφηθεί με ένα μετασχηματισμό βαθμονόμησης (scaling) της συντεταγμένης w_1 . Επομένως, το συμπέρασμα είναι πως οι συναρτήσεις $f(u)$ είναι ουσιώδεις, δηλαδή κάθε διαφορετική $f(u)$ αντιστοιχεί σε διαφορετική γεωμετρία. Παρατηρούμε μια περίεργη κατάσταση στην οποία, ένα σύνολο από γεωμετρίες (παραμετροποιημένες με $f(u)$) είναι συνεπής με μοναδικό στη μορφή, συναλλοίωτο τανυστή Faraday, $F_{ru} = 1$. Ποιός είναι ο βαθύτερος λόγος αυτής της περιέργης συμπεριφοράς; Είναι η απουσία βαρυτικών βαθμών ελευθερίας στις 3 διαστάσεις ή αποτελεί χαρακτηριστικό του συστήματος (pp-wave + ηλεκτρομαγνητικό πεδίο); Ένα κομμάτι της απάντησης πιστεύουμε πως βρίσκεται σε μια διαφορετική ερμηνεία του ενεργού τανυστή ενέργειας-ορμής σχετιζόμενου με μια οικογένεια γεωμετριών (6.21). Πράγματι, ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο μπορεί επίσης να αποτελέσει πηγή με $\phi(u) = u \equiv f^{-1}(f(u))$, με τη μόνη μη-μηδενική του συνιστώσα να είναι η $T_{uu} = (\partial_u \phi(u))^2$; επομένως το $f(u)$ πλέον ανήκει και στη γεωμετρία αλλά και στο κομμάτι της ύλης. Ο εκφυλισμός λοιπόν φαίνεται να υπάρχει λόγω του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το άλλο κομμάτι της απάντησης απαιτεί τη γνώση κάποιου αντίστοιχου προτύπου (3+1), όπου βαρυτικοί βαθμοί ελευθερίας θα υπάρχουν σίγουρα. Ευτυχώς, μπορούμε να εμβαπτίσουμε το παραπάνω σύστημα σε ένα τετραδιάστατο. Όσον αφορά τη μετρική, $ds_{(4)}^2 = dt^2 +$

$2f(u)dwdu + dr^2 - r^2du^2$, με t την τρίτη χωρική μεταβλητή. Επίσης χρησιμοποιούμε τις τετριμμένες επεκτάσεις του φωτοειδούς ανυσματικού πεδίου και του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού, $\xi_{(4)} = (0, 1, 0, 0)$, $A_\mu^{(4)} = (0, 0, 0, r)$ αντίστοιχα. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως το $\xi_{(4)}$ είναι φωτοειδές ανυσματικό πεδίο Killing το οποίο είναι ταυτόχρονα συναλλοίωτα σταθερό, οδηγώντας μας στο συμπέρασμα πως ο χωρόχρονος είναι 4D pp-wave. Ο τανυστής Faraday έχει μόνο μια μη-μηδενική συνιστώσα όπως και πριν. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε πως, ενώ υπάρχουν βαρυτικοί βαθμοί ελευθερίας, ο ίδιος εκφυλισμός παραμένει. Ως αποτέλεσμα, καταλήγουμε πως ο εκφυλισμός οφείλεται στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και την υπόθεση pp-wave χωροχρόνων. Η ίδια η ύπαρξη τυχαίων συναρτήσεων στη μετρική, αποτελεί μια συνέπεια της φύσης των pp-wave χωροχρόνων. Στη τελευταία ενότητα, θα επανέλθουμε σε μια σχετική συζήτηση επ' αυτού.

1.1.2 Κατηγοριοποίηση με βάση τα πεδία Killing

Όπως αναφέραμε παραπάνω, κάθε διαφορετική συνάρτηση $f(u)$ αντιστοιχεί σε διαφορετικές γεωμετρίες. Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν οικογένειες διαφορετικών γεωμετριών οι οποίες διαχωρίζονται με βάση τις ισομετρίες. Αναζητούμε λοιπόν τα ανύσματα Killing της παραπάνω μετρικής, όπου κατά την επίλυση, μπορεί να προκύψουν κλάδοι για τη συνάρτηση $f(u)$. Κλάδους εννοούμε τις περιπτώσεις εκείνες για τις οποίες όταν το $f(u)$ θα λαμβάνει κάποια συγκεκριμένη μορφή, το πλήθος και η άλγεβρα Lie των πεδίων Killing θα διαφέρει. Όπως θα δούμε, προέκυψαν δύο οικογένειες τις οποίες και θα παρουσιάσουμε. Ας αναφέρουμε για πληρότητα την εξίσωση Killing-Homothetic

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \omega g_{\mu\nu}, \quad (6.26)$$

όπου ξ κάποιο γενικό ανυσματικό πεδίο και ω η ομοθετική παράμετρος. Η κατηγοριοποίηση θα βασιστεί στο πλήθος των Killing, ωστόσο μας ενδιαφέρει και η ενδεχόμενη ύπαρξη κάποιου ομοθετικού ανύσματος. Αρχικά, επειδή κάποια μη-ουσιώδης σταθερά μπορεί να απορροφηθεί μέσω των ολοκληρωτικών γραμμών αυτού του πεδίου. Επίσης, σύμφωνα με το [163], εάν υπάρχει ομοθετικό και η βαθμίδα ενός ανύσματος Killing, τότε μπορεί να κατασκευαστεί ένας μη-τετριμμένος τανυστής Killing, ο οποίος μπορεί να βοηθήσει στην ολοκλήρωση των γεωδαισιακών εξισώσεων. Ξεκινάμε λοιπόν από ένα γενικό ανυσματικό πεδίο ξ , επιλύουμε την εξίσωση Killing-Homothetic έως ότου φτάνουμε στο εξής σημείο

$$c_1 \left(\frac{\dot{f}(u)^2}{f(u)} - \ddot{f}(u) \right) = 0, \quad (6.27)$$

$$\dot{\zeta}(u) - \frac{\dot{f}(u)}{f(u)}\zeta(u) - \zeta(u)^2 - 1 = 0, \quad (6.28)$$

με το ανυσματικό πεδίο να έχει τη μορφή (μέχρι αυτό το σημείο)

$$\xi = \left(c_2 + w\omega + \frac{r}{f(u)}\zeta(u)e^{c_3 - \int \zeta(u)du} - c_1 w \frac{\dot{f}(u)}{f(u)}, e^{c_3 - \int \zeta(u)du} + \frac{r\omega}{2}, 0 \right). \quad (6.29)$$

Οι σταθερές c_1, c_2, c_3, ω είναι οι παράμετροι οι οποίες συνδέονται με τους γεννήτορες Killing και Homothetic αντίστοιχα. Η εξίσωση (6.28) εφόσον είναι πρώτης τάξης, αναμένεται να δώσει μια ακόμη σταθερά το πολύ. Επομένως, το μέγιστο πλήθος Killing αναμένεται να είναι τέσσερα. Όσον αφορά την εξίσωση (6.27), υπάρχουν δύο επιλογές: είτε c_1 είναι μηδέν, επομένως η διάσταση της Lie άλγεβρας θα είναι 3 με την $f(u)$ να παραμένει αυθαίρετη, ή $c_1 \neq 0$ και η συνάρτηση αποκτά συγκεκριμένη μορφή.

1.1.2.1 Περίπτωση I, Τέσσερα ανυσματικά πεδία Killing Όπως αναφέρεται και στον τίτλο, αυτή η περίπτωση προκύπτει για $c_1 \neq 0$ και επομένως από την (6.27) προκύπτει

$$f(u) = Me^{mu}. \quad (6.30)$$

Η σταθερά M μπορεί να απορροφηθεί από τη μετρική (6.21) μέσω ενός μετασχηματισμού της μορφής $w = \frac{\tilde{w}}{M}, r = \tilde{r}, u = \tilde{u}$. Με βάση τις τιμές της σταθεράς m οι εξής περιπτώσεις προκύπτουν, οι οποίες διαφέρουν ως προς την άλγεβρα Lie:

$f(u)$	Killing πεδία	Σταθερές δομής
1	$\xi_1 = (1, 0, 0), \xi_2 = (0, 0, 1),$ $\xi_3 = (r \sin u, \cos u, 0), \xi_4 = (-r \cos u, \sin u, 0)$	$C_{23}^4 = -C_{32}^4 = -1, C_{24}^3 = -C_{42}^3 = 1,$ $C_{34}^1 = -C_{43}^1 = -1$
e^{2u}	$\xi_1 = (1, 0, 0), \xi_2 = (-2w, 0, 1),$ $\xi_3 = (-r(1+u)e^{-u}, ue^u, 0),$ $\xi_4 = (-re^{-u}, e^u, 0)$	$C_{12}^1 = -C_{21}^1 = -2, C_{23}^3 = -C_{32}^3 = 1,$ $C_{23}^4 = -C_{32}^4 = 1, C_{24}^4 = -C_{42}^4 = 1,$ $C_{34}^1 = -C_{43}^1 = 1$
$e^{mu}, m \neq 0, 2$	$\xi_1 = (1, 0, 0), \xi_2 = (-mw, 0, 1),$ $\xi_3 = (-\frac{r(m-\alpha)}{2}e^{-1/2(m+\alpha)u}, e^{1/2(m-\alpha)u}, 0),$ $\xi_4 = (-\frac{r(m+\alpha)}{2}e^{-1/2(m-\alpha)u}, e^{1/2(m+\alpha)u}, 0)$	$C_{12}^1 = -C_{21}^1 = -m, C_{23}^3 = -C_{32}^3 = \frac{m-\alpha}{2},$ $C_{24}^4 = -C_{42}^4 = \frac{(m+\alpha)}{2}, C_{34}^1 = -C_{43}^1 = -\alpha$

όπου $\alpha = \sqrt{-4 + m^2}$. Όλες οι περιπτώσεις επιδέχονται το ίδιο ομοθετικό πεδίο $\xi_h = (w, \frac{r}{2}, 0)$. Έχουμε επιβεβαιώσει πως υπάρχουν μετασχηματισμοί της βάσης των Killing, οι οποίοι απεικονίζουν τις ευρεθείσες σταθερές δομής, σε εκείνες των τετραδιάστατων αλγεβρών $A_{(4,10)}, A_{(4,7)}, A_{(4,9)}^b$, με $0 < |b| < 1$, αντίστοιχα. Η σταθερά m πρέπει να επαναοριστεί με βάση τη σταθερά b ως $m = \frac{1+b}{\sqrt{b}}$. Αυτός ο τρόπος αρίθμησης των αλγεβρών μπορεί να βρεθεί στην εργασία των J. Patera και P. Winternitz [49], επομένως είναι ασφαλές να πούμε πως υπάρχουν τρεις διαφορετικές κλάσεις στην ίδια οικογένεια.

Παρατηρήσεις:

1. Όλες οι μετρικές έχουν υπογραφή Lorentz, με σύμβαση προσήμων $(+, +, -)$.
2. Δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιος περιορισμός στο πεδίο ορισμού των μεταβλητών, $w, r, u \in \mathbb{R}$.
3. Η μεταβλητή u αντιστοιχεί στη μεταβλητή “χρόνου”, εφόσον η νόρμα των εφαπτόμενων ανυσμάτων, $v^\mu = (0, 0, 1)$, στις καμπύλες $w = \text{σταθερά}, r = \text{σταθερά}$, αντιστοιχεί σε χρονοειδές πεδίο $\forall w, r, u \in \mathbb{R}$.
4. Για όλες τις περιπτώσεις, υπάρχει μια μόνο απλά μεταβατική υπο-ομάδα. Αυτή δρα στο επίπεδο (w, u) και αποτελείται από τα δύο πρώτα Killing πεδία κάθε κλάσης. Η μόνη διαφορά είναι πως στη πρώτη κλάση, η άλγεβρα τους είναι Αβελιανή, ενώ είναι μη-Αβελιανή στις άλλες δύο.
5. Με βάση την αναζήτηση που πραγματοποιήσαμε, αυτές είναι καινούργιες λύσεις εκτός από την πρώτη κλάση. Στην εργασία του Clement [164] μια λύση με το ίδιο φυσικό περιεχόμενο (pp-wave ηλεκτρομαγνητικός χωρόχρονος) έχει βρεθεί, μέσω μιας διαφορετικής μεθόδου και εκφρασμένη σε διαφορετικές μεταβλητές (t, ρ, θ) ,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ \alpha & 0 & \frac{\theta_0}{m\alpha^2}(\rho^2 + c) \end{pmatrix},$$

$$A_\mu = \left(0, 0, \frac{\pi^0}{\alpha}\rho\right), \quad (6.31)$$

όπου $(\alpha, \theta_0, m, c, \pi^0)$ είναι σταθερές. Η σταθερά m δεν σχετίζεται με τη δική μας. Μια διαφορετική σύμβαση έχει επιλεγεί για την υπογραφή Lorentz $(+, -, -)$. Λόγω αυτού, ο μετασχηματισμός που συνδέει τις δύο μετρικές είναι φανταστικός,

$$w = \alpha \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\theta_0}} t + \frac{c}{2\alpha^2} \frac{\sqrt{\theta_0}}{\sqrt{m}} \theta, r = \frac{i}{\alpha} \rho, u = \frac{\sqrt{\theta_0}}{\sqrt{m}} \theta. \quad (6.32)$$

Επίσης, ισχύουν οι εξής σχέσεις μεταξύ των σταθερών, $\theta_0 = -m(\pi^0)^2$, ($m < 0$ and $\pi^0 > 0$) έτσι ώστε να συμβαδίζει με τις δικές μας συμβάσεις των μονάδων μέτρησης.

1.1.2.2 Περίπτωση II, Τρία ανυσματικά πεδία Killing Σε αυτή την περίπτωση, $c_1 = 0$ και η συνάρτηση $f(u)$ παραμένει απροσδιόριστη. Ο μόνος περιορισμός είναι πως οι συγκεκριμένες μορφές οι οποίες αντιστοιχούν στις κλάσεις της πρώτης περίπτωσης ($1, e^{2u}, e^{mu}$) πρέπει να αποκλειστούν, διαφορετικά θα έχουμε χάσει κάποιο από τα Killing. Η τελευταία συνιστώσα της εξίσωσης Killing-Homothetic που μένει να επιλυθεί είναι η

$$\dot{\zeta}(u) - \frac{\dot{f}(u)}{f(u)} \zeta(u) - \zeta(u)^2 - 1 = 0. \quad (6.33)$$

Η (6.33) είναι μια εξίσωση Riccati. Έως αυτό το σημείο το γενικό άνυσμα έχει τη μορφή

$$\xi = \left(c_2 + w\omega + \frac{r}{f(u)} \zeta(u) e^{c_3 - \int \zeta(u) du}, e^{c_3 - \int \zeta(u) du} + \frac{r\omega}{2}, 0 \right), \quad (6.34)$$

όπου c_2, c_3 είναι παράμετροι από τις οποίες θα προκύψουν τα δύο εκ των ανυσμάτων Killing και ω η ομοθετική παράμετρος. Όμως αναφέραμε και προηγουμένως η (6.33) είναι πρώτης τάξης συνήθους διαφορική ως προς τη μεταβλητή $\zeta(u)$, επομένως μόνο μια σταθερά ολοκλήρωσης αναμένεται να προκύψει. Συνεπώς, θα υπάρχουν τρεις γεννήτορες Killing.

1.1.3 Κατασκευή Minisuperspace Λαγκρανζιανής.

Σε αυτή την παράγραφο θέλουμε να κατασκευάσουμε μια minisuperspace Λαγκρανζιανή η οποία θα περιγράφει τη δυναμική του παραπάνω συστήματος. Πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε το εξής, μια απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη μιας τέτοιας Λαγκρανζιανής είναι πως, ένας χωρόχρονος διαστάσεως $(d + 1)$ πρέπει να επιδέχεται μια μεταβατική (απλά ή πολλαπλά) ομάδα συμμετρίας Lie, η οποία θα δρα σε υπερ-επιφάνειες διαστάσεως d . Στην προηγούμενη παράγραφο ξεκινήσαμε από μια μετρική η οποία επιδέχεται ένα συναλλοίωτα σταθερό, πεδίο Killing. Φυσικά, επί των λύσεων, επιπλέον Killing εμφανίστηκαν, τα οποία παρουσιάσαμε στην κατηγοριοποίηση. Μόνο οι κλάσεις της πρώτης περίπτωσης βρέθηκε πως επιδέχονται μια απλά μεταβατική ομάδα διαστάσεως 2, η οποία δρα στις υπερ-επιφάνειες $r = \text{σταθερό}$. Επομένως, αναμένουμε σε αυτή την περίπτωση να υπάρχει μια minisuperspace περιγραφή για αυτές τις κλάσεις. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να είχαμε ξεκινήσει από μια μετρική η οποία επιδέχεται αυτές τις απλά μεταβατικές ομάδες και να αναπαράξουμε τις σωστές λύσεις της προηγούμενης παραγράφου. Για κάθε κλάση η ομάδα είναι διαφορετική. Παρατηρούμε πως για τη κλάση $A_{(4,10)}$ τα πεδία Killing είναι, $\{\xi_1 = (1, 0, 0), \xi_2 = (0, 0, 1)\}$ τα οποία σχηματίζουν Αβελιανή υπο-άλγεβρα, ενώ στις κλάσεις $A_{(4,7)}$, $\{\xi_1 = (1, 0, 0), \xi_2 = (-2w, 0, 1)\}$ και $A_{(4,9)}^b$, $\{\xi_1 = (1, 0, 0), \xi_2 = (-mw, 0, 1)\}$ η υπο-άλγεβρα είναι μη-Αβελιανή. Λόγω της απλά μεταβατικής τους δράσης, αυτές οι ομάδες ανήκουν στις δύο υπάρχουσες διδιάστατες κλάσεις "Bianchi". Στην παρακάτω παράγραφο παρουσιάζουμε τη μετρική και τα αντίστοιχα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά. Ο λόγος που αυτά αποκτούν τη συγκεκριμένη μορφή παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

I.1.3.1 Κλάση $A_{(4,10)}$. Οι συνιστώσες της μετρικής σε συντεταγμένες (z, t, τ) και του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού αποκτούν τη μορφή

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{\omega} \\ 0 & n(t)^2 & 0 \\ \tilde{\omega} & 0 & c(t) \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

$$\tilde{A}_\mu = (0, 0, A(t)), \quad (6.36)$$

όπου $\tilde{\omega}$ κάποια σταθερά. Ας γράψουμε το σύστημα των εξισώσεων Einstein-Maxwell και ας αναφερθούμε σε ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό τους.

$$\ddot{c}(t) = -2\dot{A}(t)^2 + \dot{c}(t) \frac{\dot{n}(t)}{n(t)}, \quad (6.37)$$

$$\ddot{A}(t) = \dot{A}(t) \frac{\dot{n}(t)}{n(t)}. \quad (6.38)$$

όπου $\dot{(\cdot)}$ αναπαριστά την παράγωγο ως προς t . Υπάρχουν μόνο δύο δεύτερης τάξης, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, και καθόλου σύνδεσμος. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το τι ενδεχομένως θα περιμέναμε, καθώς εξακολουθεί να υπάρχει η ελευθερία επαναορισμού της μεταβλητής t . Διαφορετικά, μπορεί να ειπωθεί ως εξής; το $n(t)$ είναι μη-πραγματικός βαθμός ελευθερίας (δηλαδή, είναι μια συνάρτηση Lapse), παρόλα αυτά δεν υπάρχει εξίσωση συνδέσμου. Φαίνεται πως αυτό είναι χαρακτηριστικό της γεωμετρίας των pp-wave. Επιλέγουμε $n(t) = 1$ και βρίσκουμε τη λύση

$$A(t) = \mu_1 + \mu_2 t, \quad (6.39)$$

$$c(t) = -\mu_2^2 t^2 + \mu_3 t + \mu_4, \quad (6.40)$$

όπου οι $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Με τον παρακάτω μετασχηματισμό, η μετρική (6.35) αποκτά τη μορφή την οποία βρήκαμε στην προηγούμενη ενότητα,

$$z = \frac{\mu_2}{\tilde{\omega}} w - \frac{\mu_3^2 + 4\mu_4\mu_2^2}{8\mu_2^3\tilde{\omega}} u, \quad t = r + \frac{\mu_3}{2\mu_2^2}, \quad \tau = \frac{1}{\mu_2} u.$$

Επιπλέον, το δυναμικό (6.22) μπορεί να παραχθεί μέσω μετασχηματισμού συντεταγμένων και μετασχηματισμού βαθμίδας από το (6.36), επί της λύσης

$$A_\mu = \tilde{A}_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} + \nabla_\mu \Lambda,$$

όπου το Λ είναι

$$\Lambda(w, r, u) = -\frac{2\mu_1\mu_2 + \mu_3}{2\mu_2^2} u,$$

και $x^\nu = (\zeta, t, \tau), y^\mu = (w, r, u)$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην αρχική μας επιθυμία να βρούμε μια minisuperspace Λαγκρανζιανή. Ο συνήθης τρόπος αναζήτησης μιας τέτοιας Λαγκρανζιανής είναι να υπολογίσουμε τη δράση Einstein-Hilbert+Ηλεκτρομαγνητική για τη μετρική (6.35) και το δυναμικό (6.36). Ωστόσο αυτή η μέθοδος δεν μπορεί να λειτουργήσει εδώ καθώς όπως έχουμε αναφέρει, για κάθε pp-wave χωρόχρονο όλα τα βαθμωτά καμπυλότητας είναι μηδέν. Μπορούμε να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα, προσπαθώντας να κατασκευάσουμε μια Λαγκρανζιανή μέσω παρατήρησης των εξισώσεων (6.37), (6.38). Όπως μπορούμε να δούμε, δεν υπάρχει “δυναμικό” μέρος, επομένως η Λαγκρανζιανή θα αποτελείται μόνο από “κινητικό” όρο. Υπάρχουν δύο δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας $(c(t), A(t))$ οι οποίοι σχετίζονται με τις δύο δεύτερης τάξης, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι γραμμικές στη δεύτερη παράγωγο. Επομένως, αν το “κινητικό”

μέρος εξαρτάται τετραγωνικά ως προς τις “ταχύτητες” $(\dot{c}(t), \dot{A}(t))$ αυτό θα είναι αρκετό. Επιπλέον, εφόσον εμφανίζεται μόνο πρώτη παράγωγος του $n(t)$ στις εξισώσεις, η Λαγκρανζιανή θα πρέπει να εξαρτάται το πολύ από το $n(t)$. Αυτά τα στοιχεία μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενική μορφή

$$\mathcal{L} = \tilde{G}_{ij}(n, c, A) \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

όπου $q^i = (c, A)$, ενώ η εξάρτηση από το t έχει παραβλεφθεί για λόγους απλότητας. Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πρωθύστερη γνώση σχετικά με minisuperspace Λαγκρανζιανές, συνδεσμικών συστημάτων

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2n} G_{ij}(c, A) \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Με αυτή, μπορούμε να αναπαραγάγουμε τις εξισώσεις (6.37), (6.38) μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange, αν και μόνο αν η minisuperspace μετρική G_{ij} έχει τη μορφή

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4A \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

Ωστόσο μια εξίσωση συνδέσμου θα προκύψει, λόγω της μεταβολής ως προς n

$$\dot{c} + 2A\dot{A} = 0. \quad (6.42)$$

Υπολογίζοντας αυτή επί των λύσεων, η εξής σχέση πρέπει να ικανοποιείται για τις σταθερές

$$\mu_2 (2\mu_1 \mu_2 + \mu_3) = 0. \quad (6.43)$$

Αυτό φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τις λύσεις των εξισώσεων της προηγούμενης ενότητας. Η επιπλέον συνδεσμική εξίσωση (6.42) φαίνεται πως επιβάλλει περιορισμούς στις σταθερές οι οποίες εμφανίζονται στις λύσεις (6.39), (6.40). Ένας τρόπος να το αποφύγουμε αυτό είναι να αντιμετωπίσουμε το n ως μια μη-δυναμική μεταβλητή, αλλά ως ένα “χρονικά” εξαρτώμενο όρο $1/\text{“μάζα”}$ και επομένως να μην υπολογίσουμε τη μεταβολή της δράσης ως προς αυτή. Αν το αντιμετωπίσουμε με αυτό τον τρόπο, τότε έχουμε μόνο τις εξισώσεις (6.37), (6.38).

Ωστόσο, το ενδιαφέρον είναι πως ακόμη και αν αντιμετωπίσουμε το $n(t)$ δυναμικά και επομένως να καταλήξουμε στην (6.42), η συνθήκη (6.43) δεν έχει καμία επίπτωση επί του φυσικού περιεχομένου των λύσεων. Ο λόγος είναι πως δεν υπάρχουν ουσιώδεις σταθερές στη γεωμετρία αυτής της κλάσης, όσες εμφανίζονται είναι απορροφήσιμες μέσω μετασχηματισμών συντεταγμένων ή ηλεκτρομαγνητικής βαθμίδας και συνεπώς η εξίσωση του συνδέσμου θα ικανοποιείται πάντα επί των λύσεων. Φαίνεται λοιπόν να υπάρχουν δύο τρόποι αντιμετώπισης του n , οι οποίοι οδηγούν στις ίδιες κλασσικές λύσεις. Ίσως, ο λόγος που συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι πως δεν υπάρχουν ουσιώδεις σταθερές. Ας δούμε αν συμβαίνει κάτι αντίστοιχο και στη δεύτερη κλάση.

I.1.3.2 Κλάσεις $A_{(4,7)}, A_{(4,9)}^b$. Λόγω της μη-Αβελιανής φύσης της ομάδας στις δύο αυτές κλάσεις, μπορούμε να τις αντιμετωπίσουμε και τις δύο ταυτόχρονα. Εισάγουμε την παράμετρο $\tilde{m}$ προς παραμετροποίηση των δύο κλάσεων. Θυμίζουμε πως η μετρική η οποία επιδέχεται τη μη-Αβελιανή ομάδα, διαχωρίζεται στις δύο αυτές κλάσεις μόνο αφότου οι δύο λύσεις έχουν βρεθεί. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι ίδια με πριν, επομένως παρουσιάζουμε μόνο τα σημαντικά ευρήματα. Παρέχουμε τις συνιστώσες της μετρικής και του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού.

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\tilde{m}\tau}\tilde{\omega} \\ 0 & n(t)^2 & 0 \\ e^{\tilde{m}\tau}\tilde{\omega} & 0 & c(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{m} \neq 0, \\ \tilde{A}_\mu = (0, 0, A(t)).$$

Προκύπτει πως οι εξισώσεις Einstein-Maxwell, και για τις δύο κλάσεις είναι ίδιες στη μορφή με εκείνες της κλάσης $A_{(4,10)}$ όπως δίνονται στις (6.37), (6.38). Επομένως θα προκύψουν οι ίδιες λύσεις για τα $c(t)$, $A(t)$. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων και ηλεκτρομαγνητικής βαθμίδας οι οποίοι μετασχηματίζουν τις λύσεις στη μορφή που δίνονται στην προηγούμενη παράγραφο είναι

$$z = \frac{\mu_2}{\tilde{\omega}} w + \frac{\mu_3^2 + 4\mu_4\mu_2^2}{8\mu_2^2\tilde{\omega}\tilde{m}} e^{-\frac{\tilde{m}}{\mu_2}u}, \quad t = r + \frac{\mu_3}{2\mu_2^2}, \quad \tau = \frac{u}{\mu_2},$$

$$\Lambda(w, r, u) = -\frac{2\mu_1\mu_2 + \mu_3}{2\mu_2^2} u,$$

όπου χρησιμοποίησαμε και πάλι την ελευθερία να θέσουμε $n(t) = 1$. Η κλάση $A_{(4,7)}$ προκύπτει για $\tilde{m} = 2\mu_2$, ενώ η κλάση $A_{(4,9)}^b$ όταν $\tilde{m} = m\mu_2$, $m \neq 0, 2$.

Εφόσον οι εξισώσεις για τα $c(t)$, $A(t)$ είναι ίδιες, η Λαγκρανζιανή η οποία μπορεί να αναπαράξει τη δυναμική τους θα είναι ίδια με εκείνη της προηγούμενης κλάσης. Όπως και πριν, ο σύνδεσμος δεν μπορεί να επηρεάσει το φυσικό περιεχόμενο των λύσεων, εφόσον καμία από τις σταθερές οι οποίες εμφανίζονται στο σύνδεσμο δεν είναι ουσιώδης, παρόλο που η κλάση $A_{(4,9)}^m$ έχει μια ουσιώδη σταθερά, την m .

Ακόμη ένα σημείο άξιο αναφοράς είναι το εξής: Αν συγκρίνουμε το βαθμωτό της ηλεκτρομαγνητικής βαθμίδας Λ για κάθε κλάση, και τον επί των λύσεων σύνδεσμο (6.43), είναι εύκολο να δούμε πως υπάρχει ένας κοινός παράγοντας

$$2\mu_1\mu_2 + \mu_3.$$

Όταν μια λύση αυτής της εξίσωσης έχει δοθεί, δηλαδή ο σύνδεσμος έχει ικανοποιηθεί, φαίνεται πως δεν υπάρχει λόγος χρήσης ηλεκτρομαγνητικού μετασχηματισμού βαθμίδας, ο μετασχηματισμός συντεταγμένων αρκεί ώστε να μετασχηματιστεί το $\tilde{A}_\mu$ στη μορφή (6.22). Ίσως αυτό αποτελεί μια ακόμη δυνατή εξήγηση για ποιο λόγο οι εξισώσεις είναι φυσικά ισοδύναμες, είτε θεωρήσουμε το n δυναμική ή μη-δυναμική μεταβλητή: ο σύνδεσμος είναι ενσωματωμένος στην ηλεκτρομαγνητική βαθμίδα.

Τέλος, όπως είδαμε, υπάρχει ισοδυναμία στο επίπεδο των κλασικών λύσεων μεταξύ των δύο διαφορετικών τρόπων αντιμετώπισης του $n(t)$. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε εάν κάτι τέτοιο συνεχίζει να υφίσταται και στο κβαντικό επίπεδο.

1.1.4 Minisuperspace Χαμιλτονιανή

Σε αυτή την ενότητα θα κατασκευάσουμε την αντίστοιχη minisuperspace Χαμιλτονιανή για τις τρεις Κλάσεις. Όπως αναφέραμε και παραπάνω έχουμε μόνο μια Λαγκρανζιανή, επομένως θα υπάρχει μόνο μια Χαμιλτονιανή. Ωστόσο, η κατασκευή αυτής εξαρτάται από το αν θα αντιμετωπίσουμε το $n(t)$ ως δυναμικό ή μη-δυναμικό βαθμό ελευθερίας. Θα εξετάσουμε και τις δύο περιπτώσεις. Ως αρχικό σημείο, ας αναφέρουμε κάποια στοιχεία για την minisuperspace μετρική τα οποία θα προσφέρουν μια πιο απλή περιγραφή του συστήματος.

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε πως η (6.41) αντιστοιχεί σε μια επίπεδη μετρική υπογραφής Lorentz. Συνεπώς, υπάρχει μετασχηματισμός συντεταγμένων ο οποίος φέρει τη μετρική στη συνήθη μορφή Minkowski, διαγώνια με ιδιοτιμές $(-1, 1)$:

$$c = -(y+x)^2 - \frac{1}{2}(y-x), \quad A = y+x.$$

Η Λαγκρανζιανή σε αυτή την παραμετροποίηση αποκτά τη μορφή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2n} (-\dot{y}^2 + \dot{x}^2),$$

όπου $(\cdot)$ είναι η παράγωγος ως προς t . Εφόσον ο χώρος είναι επίπεδος, υπάρχουν τα εξής Killing

$$\zeta_1 = (1, 0), \quad \zeta_2 = (0, 1), \quad \zeta_3 = (x, y),$$

με το πρώτο στοιχείο να αντιστοιχεί στη μεταβλητή y , ενώ ικανοποιούν την άλγεβρα Lie

$$[\zeta_1, \zeta_2]_L = 0, [\zeta_2, \zeta_3]_L = \zeta_1, [\zeta_3, \zeta_1]_L = -\zeta_2.$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange είναι απλά

$$\dot{y}^2 - \dot{x}^2 = 0, \ddot{y} = \frac{\dot{n}}{n} \dot{y}, \ddot{x} = \frac{\dot{n}}{n} \dot{x}.$$

όπου το n αντιμετωπίστηκε ως δυναμική μεταβλητή. Αν όχι, τότε απλώς δεν λαμβάνουμε υπόψη το σύνδεσμο.

Στις επόμενες παραγράφους, οι δύο Χαμιλτονιανές περιγραφές παρουσιάζονται.

I.1.5 Κλασσική περιγραφή, Μη-δυναμικό $n(t)$

Εφόσον το $n(t)$ αντιμετωπίζεται ως μη-δυναμική μεταβλητή, η Λαγκρανζιανή είναι ομαλή (*regular*) και κατασκευάζουμε την κανονική Χαμιλτονιανή ως συνήθως, υπολογίζοντας τις “ορμές” των δυναμικών μεταβλητών:

$$p_y = -\frac{\dot{y}}{n}, p_x = \frac{\dot{x}}{n}.$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις ως προς τις “ταχύτητες” προκύπτει

$$\dot{y} = -n p_y, \dot{x} = n p_x,$$

με την αντίστοιχη κανονική Χαμιλτονιανή να δίνεται μέσω του μετασχηματισμού Legendre

$$\mathcal{H}_{can} = \frac{n}{2} (-p_y^2 + p_x^2).$$

Η χρονική εξέλιξη μια ποσότητας B στο φασικό χώρο θα δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \{B, \mathcal{H}_{can}\},$$

όπου $B = B(t, y, x, p_y, p_x)$. Οι εξισώσεις κίνησης στο φασικό χώρο είναι

$$\dot{y} = -n p_y, \dot{x} = n p_x, \dot{p}_y = 0, \dot{p}_x = 0.$$

Εξαιτίας της εκπεφρασμένης εξάρτησης της Χαμιλτονιανής από το “χρόνο”, αυτή δε διατηρείται

$$\frac{d\mathcal{H}_{can}}{dt} = \frac{1}{2} (-p_y^2 + p_x^2) \dot{n} \equiv \mathcal{H}_{can} \frac{\dot{n}}{n}.$$

Λόγω του θεωρήματος της Noether, κάθε ένα από τα ανύσματα Killing συνδέεται με μια διατηρήσιμη ποσότητα, στην περίπτωση μας αυτές είναι

$$Q_1 = p_y, Q_2 = p_x, Q_3 = x p_y + y p_x.$$

Αυτά τα φορτία θα αποδειχθούν αρκετά χρήσιμα στην κβαντική περιγραφή.

I.1.6 Κλασσική περιγραφή, δυναμικό $n(t)$

Στην περίπτωση που το $n(t)$ θεωρείται δυναμική μεταβλητή η Λαγκρανζιανή είναι ιδιάζουσα (*singular*). Επομένως, ακολουθούμε τη διαδικασία εύρεσης Χαμιλτονιανής για συνδεσμικά συστήματα.

Οι κανονικές “ορμές” ορίζονται ως συνήθως

$$p_y = -\frac{\dot{y}}{n}, p_x = \frac{\dot{x}}{n}, p_n = 0.$$

Αντίστοιχα η κανονική Χαμιλτονιανή

$$\mathcal{H}_{can} = \frac{n}{2} (-p_y^2 + p_x^2), \quad (6.44)$$

ενώ ο πρωτογενής σύνδεσμος είναι

$$\Phi_1 := p_n.$$

Η πλήρης Χαμιλτονιανή ορίζεται ως

$$\mathcal{H}_{tot} := \mathcal{H}_{can} + \lambda \Phi_1,$$

όπου λ κάποιος πολλαπλασιαστής Lagrange, ο οποίος παραμένει αυθαίρετος επί των κλασσικών τροχιών. Ο σύνδεσμος πρέπει να ικανοποιεί την “ασθενή ισότητα”

$$\Phi_1 \approx 0,$$

όπου εννοείται πως πρώτα θα υπολογιστούν οι εγκύλες Poisson και στη συνέχεια επιβάλλεται ο σύνδεσμος. Με την απαίτηση παραμονής στην επιφάνεια του συνδέσμου κατά την εξέλιξη του συστήματος, προκύπτει η εξής συνθήκη

$$\dot{\Phi}_1 := [\Phi_1, \mathcal{H}_{tot}]_P \approx 0,$$

η οποία οδηγεί στο δευτερογενή σύνδεσμο

$$\Phi_2 := \frac{1}{2} (-p_y^2 + p_x^2).$$

Η διατήρηση αυτού, ικανοποιείται ταυτοτικά, επομένως δεν υπάρχει άλλος σύνδεσμος. Με βάση τη θεωρία του Dirac, αυτοί οι δύο ονομάζονται *πρώτης τάξης*, καθώς ικανοποιούν την ιδιότητα

$$[\Phi_1, \Phi_2]_P \approx 0.$$

Υπό το πρίσμα των παραπάνω, η ολική Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός πρώτης τάξης συνδέσμων

$$\mathcal{H}_{tot} = n \Phi_2 + \lambda \Phi_1.$$

Αυτή η Χαμιλτονιανή αναπαράγει σωστά τις εξισώσεις κίνησης. Οι δύο σύνδεσμοι διατηρούνται καθώς και τα αντίστοιχα φορτία τα οποία αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα.

I.2 Κβαντική περιγραφή

Για το σκοπό αυτής της εργασίας επιλέγουμε τη διαδικασία της κανονικής κβάντωσης. Οι κανονικές “ορμές” και “θέσεις” μετατρέπονται σε τελεστές ($p_j \rightarrow \hat{p}_j, x^j \rightarrow \hat{x}^j$) οι οποίοι ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες

1. Αυτο-συζυγής

$$\langle \hat{p}_j \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{p}_j^* \phi \rangle, \quad \langle \hat{x}^j \psi | \phi \rangle = \langle \psi | (\hat{x}^j)^* \phi \rangle,$$

με $\langle \psi | \phi \rangle = \int d^2x \mu \psi^* \phi$ το εσωτερικό γινόμενο και $\mu = \sqrt{|\det(G_{jl})|}$ το μέτρο [165].

2. κανονικές σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{x}^j, \hat{x}^l]_C = 0, \quad [\hat{x}^j, \hat{p}_l]_C = i \delta_l^j, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_l]_C = 0,$$

όπου $[\cdot, \cdot]_C$ ο μεταθέτης και δ_l^j το δέλτα του Kronecker. Η αναπαράσταση θέσης αρκεί ώστε να ικανοποιούνται οι προηγούμενες ιδιότητες

$$\hat{p}_j = -i \partial_j, \quad \hat{x}^j = x^j.$$

I.3 Κβαντική περιγραφή, μη-δυναμικό $n(t)$

Όπως είναι γνωστό, κατά τη μετάβαση από την κλασσική στην κβαντική περιγραφή εμφανίζεται το πρόβλημα της σειράς δράσης των τελεστών (factor ordering problem). Η επίλυση αυτού μπορεί να βασιστεί στο κλασσικό σύστημα. Το κλασσικό σύστημα είναι συναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς $n \rightarrow \tilde{n} \omega^{-1}(y, x)$, όταν το Lapse αντιμετωπίζεται ως δυναμικός βαθμός ελευθερίας, οδηγώντας στην ασθενή ισότητα με το μηδέν, της Χαμιλτονιανής. Επομένως, ο Χαμιλτονιανός τελεστής πρέπει να είναι συναλλοίωτος υπό τον παραπάνω μετασχηματισμού. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε την σύμμορφη Λαπλασιανή ή αλλιώς τον τελεστή Yamabe,

$$\hat{\mathcal{H}}_{can} = -n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \partial_j (\mu G^{jl} \partial_l) - \frac{d-2}{8(d-1)} \mathcal{R} \right). \quad (6.45)$$

Στην περίπτωση που το n δεν είναι δυναμικό και επομένως η Χαμιλτονιανή δεν είναι ασθενώς μηδέν, το παραπάνω επιχείρημα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Ωστόσο, για λόγους καθολικότητας, μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο τελεστή. Παρατηρούμε πως στη συγκεκριμένη περίπτωση, η τελική μορφή του τελεστή είναι αυτή του Laplace-Beltrami καθώς ο χώρος είναι επίπεδος, $\mathcal{R} = 0$, και διδιάστατος. Όσον αφορά τα διατηρήσιμα φορτία, κατασκευάζουμε τους εξής γραμμικούς τελεστές

$$\hat{Q}_I = -i \left[\zeta_I^j \partial_j + \frac{1}{2\mu} \partial_j (\mu \zeta_I^j) \right], \quad (6.46)$$

όπου ($I = 1, 2, 3$). Παρατηρούμε πως επειδή τα ζ_I είναι πεδία Killing, ο δεύτερος όρος εξαφανίζεται. Εύκολα αποδεικνύεται πως

$$\left[\hat{\mathcal{H}}_{can}, \hat{Q}_I \right]_C \psi = 0, \left[\hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \right]_C \psi = 0, \left[\hat{Q}_2, \hat{Q}_3 \right]_C \psi = -i \hat{Q}_1 \psi, \left[\hat{Q}_3, \hat{Q}_1 \right]_C \psi = i \hat{Q}_2 \psi, \quad (6.47)$$

επομένως υπάρχουν δύο μέγιστες, διαφορετικές υπο-άλγεβρες οι οποίες μας ενδιαφέρουν. Η πρώτη είναι η $(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{\mathcal{H}}_{can})$ και η δεύτερη η $(\hat{Q}_3, \hat{\mathcal{H}}_{can})$.

Το πιο ενδιαφέρον στοιχείο αυτής της περίπτωσης, το οποίο σχετίζεται με το μη-δυναμικό χαρακτήρα του $n(t)$ και επομένως την ιδιότητας της Λαγκρανζιανής να είναι ομαλή (*regular*), είναι η δυνατότητα ορισμού μιας εξίσωσης τύπου Schrodinger αντί της συνήθους Wheeler-DeWitt για συνδεσμικά συστήματα. Αυτό δεν είναι καθόλου σύνηθες, καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις (δηλαδή κοσμολογία ή σημειακές πηγές), αν όχι σε όλες, η minisuperspace Λαγκρανζιανή είναι ιδιάζουσα (*singular*) και ορισμένοι περιορισμοί απαιτούνται ώστε να καταλήξουμε με μια εξίσωση τύπου Schrödinger. Ως αποτέλεσμα αυτού του ενδιαφέροντος στοιχείου, οι κβαντικές καταστάσεις υπόκεινται σε χρονική εξέλιξη ως προς την παράμετρο t . Υποθέτουμε πως το t , όπου εδώ το αντιμετωπίζουμε ως παράμετρο, είναι σε αντιστοιχία με την παράμετρο “χρόνου” που εμφανίζεται στην κβαντική περιγραφή, μη-σχετικιστικών σωματιδίων. Επομένως, το σύστημα των εξισώσεων προς επίλυση για κάθε υπο-άλγεβρα είναι

$$i \partial_t \psi = \hat{\mathcal{H}}_{can} \psi, \quad (6.48)$$

$$\hat{Q}_I \psi = p_I \psi, \quad (6.49)$$

με p_I τις ιδιοτιμές. Παρατηρούμε πως η (6.48), σε αντίθεση με τη συνήθη εξίσωση Schrodinger, είναι συναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς της μορφής $t \rightarrow \tilde{t} = \tilde{t}(t)$. Αυτό οφείλεται στο νόμο μετασχηματισμού του $n(t)$ (το οποίο κληρονομείται από το γεωμετρικό του χαρακτήρα) και στο γεγονός πως η μερική παράγωγος στο αριστερό μέλος έχει τον ίδιο νόμο μετασχηματισμού. Αναμένουμε λοιπόν, τα αποτελέσματα να μην εξαρτώνται από την επιλογή του $n(t)$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε τις λύσεις των (6.48), (6.49).

Υπο-άλγεβρα	Ιδιοκατάσταση
$(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{\mathcal{H}}_{can})$	$\psi_{12}(t, y, x) = \frac{1}{2\pi} e^{-iE_{12} \int n(t) dt} e^{i(p_1 y + p_2 x)}$
$(\hat{Q}_3, \hat{\mathcal{H}}_{can})$	$\psi_3(t, \sigma, \theta) = e^{-iE_3 \int n(t) dt} e^{ip_3 \theta} [q_1 J_{ip_3}(-i\sqrt{2E_3}\sigma) + q_2 Y_{ip_3}(-i\sqrt{2E_3}\sigma)]$

όπου $E_{12} = \frac{1}{2}(-p_1^2 + p_2^2)$, και οι ιδιοκαταστάσεις ψ_{12} έχουν κανονικοποιηθεί με τη χρήση της συνάρτησης δέλτα του Dirac.

$$\langle \psi_{p_1 p_2}(y, x) | \psi_{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2}(y, x) \rangle = \delta(p_1 - \tilde{p}_1) \delta(p_2 - \tilde{p}_2).$$

Επίσης, οι $J_\nu(z), Y_\nu(z)$ αναπαριστούν τις συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα, q_1, q_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης και E_3 η ιδιοτιμή της t -ανεξάρτητης εξίσωσης Schrodinger. Οι μεταβλητές σ, θ , είναι εκείνες οι οποίες μετασχηματίζουν τον τελεστή $\hat{Q}_3$ στην κανονική του μορφή.

$$y = \sigma \cosh \theta, x = \sigma \sinh \theta, \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{y^2 - x^2}, \theta = \text{ArcTanh} \left(\frac{x}{y} \right), G_{jl} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Κάποιες πληροφορίες σχετικά με την ορθοκανονικότητα της ψ_3 μπορούν να βρεθούν στο Παράρτημα.

I.4 Κβαντική περιγραφή, δυναμικό $n(t)$

Για την περίπτωση δυναμικού n , ακολουθούμε τον αλγόριθμο Dirac-Bergmann, εννοώντας πως οι τελεστές που αντιστοιχούν στους συνδέσμους, καθώς δρουν στις φυσικές καταστάσεις θα πρέπει να δίνουν μηδενικό αποτέλεσμα, $\hat{\Phi}_J \psi = 0$. Το σύνολο των τελεστών αποτελείται από

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \partial_j (\mu G^{jl} \partial_l) + \frac{d-2}{8(d-1)} \mathcal{R}, \\ \hat{\Phi}_1 &= -i \partial_n, \\ \hat{Q}_I &= -i \left[\zeta_I^j \partial_j + \frac{1}{2\mu} \partial_j (\mu \zeta_I^j) \right]. \end{aligned}$$

Οι λύσεις παρουσιάζονται παρακάτω,

Υπο-άλγεβρα	Ιδιοκατάσταση
$(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2)$	$\psi_{12}(n, y, x) = \frac{1}{2\pi} e^{i(p_1 y + p_2 x)}$
$(\hat{Q}_3, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2)$	$\psi_3(n, \sigma, \theta) = e^{ip_3 \theta} (q_1 e^{ip_3 \sigma} + q_2 e^{-ip_3 \sigma})$

όπου η εξίσωση

$$-p_1^2 + p_2^2 = 0 \tag{6.50}$$

πρέπει να ικανοποιείται και η ψ_{12} κανονικοποιήθηκε όπως και πριν. Για τους ίδιους λόγους με πριν, στη δεύτερη υπο-άλγεβρα εφαρμόστηκε ο εξής μετασχηματισμός,

$$y = e^\sigma \cosh \theta, x = e^\sigma \sinh \theta, \Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{2} \text{Log}(y^2 - x^2), \theta = \text{ArcTanh} \left(\frac{x}{y} \right), G_{jl} = e^{2\sigma} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στο Παράρτημα υπάρχουν πληροφορίες σχετικά με την κανονικοποίηση της ψ_3 .

II Ανάλυση Bohm

Στην προηγούμενη ενότητα βρήκαμε την αναλυτική έκφραση των κυματοσυναρτήσεων για όλες τις περιπτώσεις. Λόγω της δυσκολίας στην ερμηνεία των κυματοσυναρτήσεων στο πλαίσιο της συνήθους κβαντομηχανικής, θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση Bohm [273–275] η οποία παρέχει ντετερμινιστικές τροχιές (δηλαδή γεωμετρίες). Αυτή η ανάλυση εμπεριέχει την έννοια της κλασσικής τροχιάς και επομένως

μας δίνει τη δυνατότητα σύγκρισης κβαντικά διορθωμένων μετρικών με τις αντίστοιχες κλασσικές. Στη συγκεκριμένη εργασία θα επιλέξουμε να αναλύσουμε και να συγκρίνουμε τις λύσεις για τις υπο-άλγεβρες $(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{H}_{can})$ και $(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2)$. Ας ανακαλέσουμε σε λίγες γραμμές την ανάλυση κατά Bohm: Έστω, η περιγραφή ενός συστήματος από το Χαμιλτονιανό τελεστή

$$\hat{H} = -\alpha \nabla_j \nabla^j + V,$$

και οι αντίστοιχες καταστάσεις οι οποίες μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\psi = \Omega e^{iS}, \quad (6.51)$$

όπου $V(x^j)$ κάποιο δυναμικό, $\Omega(x^j)$ είναι το πλάτος και $S(x^j)$ η φάση. Με χρήση της (6.51) στην εξίσωση Schrödinger, το φανταστικό μέρος μπορεί να αντιστοιχηθεί σε κάποιου είδους εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + 2\alpha \nabla^j \Omega \nabla_j S + \alpha \Omega \nabla_j \nabla^j S = 0,$$

ενώ το πραγματικό με μια εξίσωση μορφής Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} + \alpha \nabla_j S \nabla^j S + V - Q = 0,$$

όπου $Q = \alpha \frac{\nabla_j \nabla^j \Omega}{\Omega}$, το αποκαλούμενο κβαντικό δυναμικό. Σε αυτή την ανάλυση λοιπόν, φαίνεται πως οι κβαντικές διορθώσεις εμπεριέχονται στο λεγόμενο κβαντικό δυναμικό, το οποίο είναι η νέα προσθήκη στην κατά τα άλλα, κλασσικής μορφής, εξίσωση Hamilton-Jacobi. Κατά τον Bohm, η σύνδεση με το κλασσικό επίπεδο μπορεί να επιτευχθεί αν υποθέσουμε πως ο όρος $\nabla_j S$ μπορεί να θεωρηθεί ως η “ορμή” του συστήματος. Συνεπώς, η ταυτοποίηση με τη κλασσική “ορμή” οδηγεί στο εξής σύστημα των εξισώσεων

$$\nabla_j S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}. \quad (6.52)$$

Εν τη απουσία του κβαντικού δυναμικού, αναμένουμε να προκύψουν οι κλασσικές λύσεις.

II.1 Μη-δυναμικό $n(t)$

II.1.1 Ιδιοκατάσταση

Η ιδιοκατάσταση ψ_{12} είναι ήδη στην απαιτούμενη μορφή, συνεπώς το πλάτος και η φάση έχουν τη μορφή

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}, \quad S = p_1 y + p_2 x - \frac{1}{2}(-p_1^2 + p_2^2) \int n(t) dt.$$

Εφόσον το Ω είναι σταθερό, το κβαντικό δυναμικό είναι μηδέν.

Η λύση των (6.52) είναι

$$y(t) = \nu_1 - p_1 \int n(t) dt, \quad x(t) = \nu_2 + p_2 \int n(t) dt, \quad (6.53)$$

όπου ν_1, ν_2 σταθερές ολοκλήρωσης. Μετασχηματίζουμε τις λύσεις στους βαθμούς ελευθερίας c, f , και χρησιμοποιούμε την ελευθερία να θέσουμε $n(t) = 1$. Οι τρεις κλάσεις προκύπτουν όπως αναμέναμε, αν χρησιμοποιήσουμε επιπλέον τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων και ηλεκτρομαγνητικής βαθμίδας

1. Κλάση $A_{(4,10)}$

$$z = \frac{p_2 - p_1}{\tilde{\omega}} w + \frac{p_2^2 (1 - 16\nu_1) + p_1^2 (1 + 16\nu_2) + 2p_1 p_2 (1 + 8\nu_1 - 8\nu_2)}{32\tilde{\omega} (p_1 - p_2)^3} u,$$

$$t = r + \frac{(p_2 + p_1) - 4(p_2 - p_1)(\nu_1 + \nu_2)}{4(p_1 - p_2)^2}, \quad \tau = \frac{1}{p_2 - p_1} u,$$

$$\Lambda = -\frac{p_1 + p_2}{4(p_1 - p_2)^2} u.$$

2. Κλάσεις $A_{(4,7)}, A_{(4,9)}^b$

$$\begin{aligned} z &= \frac{p_2 - p_1}{\tilde{\omega}} w + \frac{p_2^2 (1 - 16\nu_1) + p_1^2 (1 + 16\nu_2) + 2p_1 p_2 (1 + 8\nu_1 - 8\nu_2)}{32\tilde{\omega}\tilde{m} (p_1 - p_2)^2} e^{-\tilde{m}u/(p_2 - p_1)}, \\ t &= r + \frac{(p_2 + p_1) - 4(p_2 - p_1)(\nu_1 + \nu_2)}{4(p_1 - p_2)^2}, \quad \tau = \frac{1}{p_2 - p_1} u, \\ \Lambda &= -\frac{p_1 + p_2}{4(p_1 - p_2)^2} u, \end{aligned}$$

όπου $\tilde{m} = 2(p_2 - p_1)$ για την $A_{(4,7)}$ και $\tilde{m} = m(p_2 - p_1)$ για την $A_{(4,9)}^b, m \neq 0, 2$.

Η επιλογή $p_1 = p_2$ στην (6.53) οδηγεί στον επίπεδο χώρο.

Όπως ήταν αναμενόμενο, η απουσία του κβαντικού δυναμικού οδηγεί τις ημι-κλασσικές τροχιές να ταυτιστούν με τις κλασσικές. Προκύπτει το εξής ερώτημα. Είναι δυνατό να προκύψει κάποια διαφορετική λύση από τις κλασσικές; Η απάντηση είναι ναι, όμως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε καταστάσεις οι οποίες δεν είναι ιδιοκαταστάσεις.

II.1.2 Gaussian αρχική κατάσταση

Υποθέτουμε πως η αρχική κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από μια υπέρθεση ιδιοκαταστάσεων, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι μια Gaussian,

$$\Phi_0(y, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\lambda}{2}(y^2 + x^2)},$$

με την “χρονική” της εξέλιξη να δίνεται από την

$$\psi(t, y, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(p_1, p_2) \Phi_{p_1 p_2}(y, x) e^{-iE_{12} \int n(t) dt} dp_1 dp_2, \quad (6.54)$$

όπου

$$\Phi_{p_1 p_2}(y, x) = \frac{1}{2\pi} e^{ip_1 y} e^{ip_2 x}, \quad c(p_1 p_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{p_1 p_2}^* \Phi_0(y, x) dy dx.$$

Η παράμετρος λ καθορίζει τη συγκέντρωση της αρχικής κατάστασης στην περιοχή του σημείου $(y, x) = (0, 0)$. Όσο πιο μεγάλη η τιμή της, τόσο μεγαλύτερη η συγκέντρωση. Ύστερα από κάποιες πράξεις, βρίσκουμε την επιθυμητή μορφή της κατάστασης (6.54), με το πλάτος και τη φάση να είναι

$$\Omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 B(t)^2}} \exp \left[-\frac{\lambda}{2(1 + \lambda^2 B(t)^2)} (y^2 + x^2) \right], \quad S = \frac{\lambda^2 B(t)}{2(1 + \lambda^2 B(t)^2)} (x^2 - y^2),$$

όπου $B(t) = \int n(t) dt$. Το κβαντικό δυναμικό δεν είναι μηδέν πλέον

$$Q = \frac{n(t) (-y^2 + x^2) \lambda^2}{2 \left[1 + \lambda^2 \left(\int n(t) dt \right)^2 \right]}.$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, η λύση για $n(t) = 1$ είναι

$$y(t) = \nu_1 \sqrt{1 + t^2 \lambda^2}, \quad x(t) = \nu_2 \sqrt{1 + t^2 \lambda^2}.$$

Ως αποτέλεσμα, οι εξής ημι-κλασσικές λύσεις προέκυψαν

1. Αβελιανό (Bianchi Type I)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -r^2 \left(1 + \sigma \frac{\sqrt{1+r^2\lambda^2}}{r^2\lambda^2}\right) \end{pmatrix}, A_\mu = \left(0, 0, \frac{\sqrt{1+r^2\lambda^2}}{\lambda}\right), \quad (6.55)$$

όπου $\sigma = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2(\nu_1 + \nu_2)^2}$, ενώ χρησιμοποιήθηκαν και οι εξής μετασχηματισμοί συντεταγμένων

$$z = \frac{\lambda(\nu_1 + \nu_2)}{\tilde{\omega}} w + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2\lambda\tilde{\omega}} u, t = r, \tau = \frac{1}{\lambda(\nu_1 + \nu_2)} u.$$

Ο κλάδος $\nu_1 + \nu_2 = 0$, οδηγεί στη λύση

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{1+r^2\lambda^2} \end{pmatrix}, A_\mu = (0, 0, 0), \quad (6.56)$$

μετά το μετασχηματισμό

$$z = \frac{\sqrt{\nu_2}}{\tilde{\omega}} w, t = r, \tau = \frac{1}{\sqrt{\nu_2}} u.$$

2. Μη-Αβελιανό (Bianchi Type II)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\tilde{m}u/\lambda(\nu_1+\nu_2)} \\ 0 & 1 & 0 \\ e^{\tilde{m}u/\lambda(\nu_1+\nu_2)} & 0 & -r^2 \left(1 + \sigma \frac{\sqrt{1+r^2\lambda^2}}{r^2\lambda^2}\right) \end{pmatrix}, A_\mu = \left(0, 0, \frac{\sqrt{1+r^2\lambda^2}}{\lambda}\right), \quad (6.57)$$

με τον αντίστοιχο μετασχηματισμό να είναι

$$z = \frac{\lambda(\nu_1 + \nu_2)}{\tilde{\omega}} w - \frac{(\nu_1 + \nu_2)^2}{2\tilde{m}\tilde{\omega}} e^{-\tilde{m}u/\lambda(\nu_1+\nu_2)}, t = r, \tau = \frac{1}{\lambda(\nu_1 + \nu_2)} u.$$

Αντίστοιχα, ο κλάδος $\nu_1 + \nu_2 = 0$ οδηγεί στη λύση

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\tilde{m}u/\sqrt{\nu_2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ e^{\tilde{m}u/\sqrt{\nu_2}} & 0 & \sqrt{1+r^2\lambda^2} \end{pmatrix}, A_\mu = (0, 0, 0), \quad (6.58)$$

με

$$z = \frac{\sqrt{\nu_2}}{\tilde{\omega}} w, t = r, \tau = \frac{1}{\sqrt{\nu_2}} u.$$

Παρατηρήσεις:

1. Η μετρική (6.55) επιδέχεται μόνο τα δύο αρχικά πεδία Killing του Αβελιανού προτύπου, $\xi_1 = (1, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, 0, 1)$, και όχι το ομοθετικό. Το ίδιο ισχύει και για την (6.57) με τη μη-Αβελιανή ομάδα να αποτελείται από τα, $\xi_1 = (1, 0, 0)$, $\xi_2 = \left(-\frac{\tilde{m}w}{\lambda(\nu_1+\nu_2)}, 0, 1\right)$.

2. Καμία εκ των δύο λύσεων (6.55), (6.57), δεν ικανοποιεί τις εξισώσεις Einstein-Maxwell χωρίς φορτία. Η ύπαρξη ενός τρι-ρεύματος και ενός επιπλέον τανυστή ενέργειας-ορμής απαιτείται και για τις δύο περιπτώσεις,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{1+r^2\lambda^2}+\sigma}{2(1+r^2\lambda^2)^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad J_\mu = \left(0, 0, -\frac{\lambda}{4\pi(1+r^2\lambda^2)^{3/2}} \right). \quad (6.59)$$

3. Οι δύο κλάδοι που εμφανίζονται, (6.56), (6.58), χαρακτηρίζονται από την απουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, ωστόσο, δεν αντιστοιχούν στον επίπεδο χώρο, όπως ίσως θα αναμέναμε. Για την ακρίβεια, ικανοποιούν τις εξισώσεις Einstein, με τανυστή ενέργειας ορμής της μορφής

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{2(1+r^2\lambda^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Π.2 Δυναμικό $n(t)$

Π.2.1 Υπο-άλγεβρα $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$

Η ιδιοκατάσταση είναι ήδη στην επιθυμητή μορφή, επομένως

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}, \quad S = p_1 y + p_2 x.$$

Προκύπτει πως οι λύσεις είναι ίδιες με τις αρχικές, όπως περιγράφονται στην (6.53). Αν λάβουμε υπόψη τη συνθήκη (6.50), τότε έχουμε τον επίπεδο χωρόχρονο για $p_1 = p_2$. Για $p_1 = -p_2$, οι κλασσικές λύσεις ανακτώνται στη μορφή που δίνεται παραπάνω, αν χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων και ηλεκτρομαγνητικής βαθμίδας

1. Κλάση $A_{(4,10)}$

$$z = \frac{2p_2}{\tilde{\omega}} w + \frac{\nu_1 - \nu_2}{8p_2} u, \quad \rho = r - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2p_2}, \quad \tau = \frac{1}{2p_2} u, \quad \Lambda = 0.$$

2. Κλάσεις $A_{(4,7)}, A_{(4,9)}^b$

$$z = \frac{2p_2}{\tilde{\omega}} w - \frac{\nu_1 - \nu_2}{4\tilde{m}\tilde{\omega}} e^{-\tilde{m}u/2p_2}, \quad \rho = r - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2p_2}, \quad \tau = \frac{1}{2p_2} u, \quad \Lambda = 0.$$

με $\tilde{m} = 4p_2$ for $A_{(4,7)}$ and $\tilde{m} = 2mp_2, m \neq 0, 2$, for $A_{(4,9)}^b$.

Οι ημι-κλασσικές και κλασσικές τροχιές ταυτίζονται όπως αναμέναμε. Σε αντίθεση με την περίπτωση όπου το n ήταν μη-δυναμικό, η χρήση μιας άλλης αρχικής κατάστασης, όπως για παράδειγμα Gaussian, δεν θα οδηγούσε σε μια επιθυμητή μορφή όπως η (6.51), έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση. Αυτό οφείλεται στην απουσία “χρονικής εξέλιξης” σε συνδεσμικά συστήματα (κατάσταση “παγωμένη” στο “χρόνο”). Επομένως, δεν υπάρχει τρόπος να κατασκευάσουμε μη-μηδενικό κβαντικό δυναμικό σε αυτή την περίπτωση. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως οι δύο τρόποι αντιμετώπισης του n διαφέρουν στο κβαντικό επίπεδο σε αντίθεση με το κλασσικό.

II.3 Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων

Σε αυτή την εργασία μελετήσαμε χωροχρόνους pp-wave, διαστάσεως (2+1) με πεδίο ύλης το ηλεκτρομαγνητικό. Ξεκινήσαμε χρησιμοποιώντας τη (2+1) ανάλυση και επιλέγοντας ($N^i = 0, N = 1$). Το δεύτερο βήμα ήταν να επιβάλλουμε τις απαραίτητες ιδιότητες ώστε ένας χωροχρόνος να χαρακτηριστεί ως pp-wave. Στη συνέχεια, ένα σύνολο από συνθήκες, προερχόμενες από τις συμμετρίες του προβλήματος, επιβλήθηκαν επί του τανυστή ενέργειας-ορμής, οδηγώντας τελικά σε μόνο δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις προς επίλυση. Η λύση τους βρέθηκε, ενώ ταυτόχρονα προέκυψε το ενδιαφέρον αποτέλεσμα: αυτή εξαρτάται από μια αυθαίρετη συνάρτηση. Αποδείξαμε πως αυτή η συνάρτηση είναι ουσιώδης, δηλαδή κάθε διαφορετική μορφή της, οδηγεί σε διαφορετική γεωμετρία. Μάλιστα, υπάρχει σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο συναλλοίωτος τανυστής Faraday είναι σταθερός, συνεπώς, υπάρχουν άπειρες διαφορετικές λύσεις για μια και μόνο μορφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Από όσο γνωρίζουμε, αυτό δε συμβαίνει σε κοσμολογικές ή λύσεις με εντοπισμένη ύλη, καθώς σε εκείνες τις περιπτώσεις μια συγκεκριμένη μορφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου προσδιορίζει τη γεωμετρία το πολύ με την ύπαρξη σταθερών. (για παράδειγμα η λύση Reisner-Nordstrom). Με σκοπό να το εξηγήσουμε αυτό κάπως καλύτερα, ας θεωρήσουμε την εξής περίπτωση: Έστω οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις Einstein (για τις οποίες το h_{ij} παρακάτω, θεωρείται πως ικανοποιεί τη συνθήκη $|h_{ij}| \ll 1$), και το στοιχείο μήκους, επίπεδων κυμάτων κατά μήκος του άξονα z , το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}(z-t)) dy^i dy^j, \quad (6.60)$$

όπου $h_{ij}(z-t)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις, (t, z, y^i) οι συντεταγμένες του χωροχρόνου, δ_{ij} η μετρική του επίπεδου Ευκλείδειου χώρου και οι δείκτες i μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε μετρήσιμη τιμή, επομένως η (6.60) ισχύει για κάθε διάσταση. Στην περίπτωση λύσεων του κενού, ο πίνακας h_{ij} πρέπει να είναι άιχνος, ενώ σε αντίθετη περίπτωση, κάποιου είδους συνθήκη θα επιβληθεί, λαμβάνοντας υπόψη την παρούσα ύλη. Η αυθαιρεσία της συνάρτησης, συνδέεται με το γεγονός πως είναι δυνατή η ύπαρξη λύσεων οι οποίες αποτελούν υπέρθεση. Ας χρησιμοποιήσουμε τις συντεταγμένες του κώνου φωτός $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-t)$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+t)$ οι οποίες μετασχηματίζουν το στοιχείο μήκους στη μορφή

$$ds^2 = 2dUdV + (\delta_{ij} + h_{ij}(\sqrt{2}U)) dy^i dy^j.$$

Αν η υπόθεση πως το h_{ij} είναι σχετικά μικρό δεν ισχύει πια, και μπορούμε να βρούμε μια λύση της μορφής

$$ds^2 = 2dUdV + \tilde{g}_{ij}(U) dy^i dy^j, \quad (6.61)$$

τότε η (6.61) θα λέμε πως αναπαριστά επίπεδο κύμα των μη-γραμμικών εξισώσεων Einstein. Οι (U, V, y^i) ονομάζονται συντεταγμένες Rosen. Αν για κάποιο λόγο, οι συναρτήσεις $\tilde{g}_{ij}(U)$ παραμείνουν αυθαίρετες, τότε η υπέρθεση θα εξακολουθεί να ισχύει και στο μη-γραμμικό επίπεδο. Μέχρι στιγμής, όσα είπαμε ισχύουν για οποιαδήποτε διάσταση.

Στην περίπτωση μας, η γενική λύση (6.19) παρουσιάστηκε στις λεγόμενες συντεταγμένες Brinkmann

$$ds^2 = 2dwdu - r^2 b(u)^2 du^2 + dr^2.$$

Με ένα μετασχηματισμό της μορφής $w = V - \frac{y^2 M(U)}{2} \text{Exp}[2 \int M(U) dU]$, $r = y \text{Exp}[\int M(U) dU]$, $u = U$ το στοιχείο μήκους μετασχηματίζεται στις συντεταγμένες Rosen

$$ds^2 = 2dUdV + \text{Exp}[2 \int M(U) dU] dy^2, \quad (6.62)$$

αν και μόνο αν, η συνάρτηση $M(U)$ ικανοποιεί την εξίσωση Riccati

$$\dot{M}(U) + M(U)^2 + b(U)^2 = 0. \quad (6.63)$$

Η (6.62) έχει την ίδια μορφή με την (6.61) για $i = 1, j = 1$. Η αυθαιρεσία της συνάρτησης $b(U)$ μεταφέρεται στη μετρική (6.62) μέσω των λύσεων της εξίσωσης (6.63). Επομένως, η φυσική σημασία της αυθαίρετης

συνάρτησης $b(u)$ εντοπίζεται στην υπέρθεση των λύσεων ηλεκτρομαγνητο-βαρυτικών pp-wave χωροχρόνων. Εν τη απουσία, πραγματικών βαρυτικών βαθμών ελευθερίας, αν η $b(u)$ ήταν μηδέν (επομένως απουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου), τότε η λύση αντιστοιχεί σε επίπεδο χωρόχρονο. Παρατηρούμε λοιπόν πως η ύπαρξη αυθαίρετης συνάρτησης είναι χαρακτηριστικό της κυματικής φύσης των λύσεων και αναμένουμε να ισχύει σε κάθε διάσταση. Σε αντίθεση, αν θεωρήσουμε δύο εντοπισμένες πηγές, οι οποίες αποτελούν λύση των εξισώσεων Einstein, η υπέρθεση τους δε θα αποτελεί και πάλι λύση. Σε αυτό το σημείο, θα παρουσιάσουμε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα συναρτήσεων $b(U)$ για τα οποία είναι εμφανής η υπέρθεση. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζουμε τις συγκεκριμένες μορφές των συναρτήσεων $b(U)$, $M(U)$ σε τρεις περιπτώσεις. Επιπλέον, δίνεται ο όρος $\text{Exp}[2 \int M(U)dU]$ του στοιχείου μήκους (6.62). Οι επιλεγμένες συναρτήσεις $b(U)$, $M(U)$ ικανοποιούν την εξίσωση (6.63) και οδηγούν σε συγκεκριμένο παράδειγμα υπέρθεσης λύσεων.

$b(u)$	$M(u)$	$\text{Exp}[2 \int M(U)dU]$
$\sqrt{2\sec(2U)^2 - \tan(2U)^2}$	$-\tan(2U)$	$\cos(2U)$
$\sqrt{2\csc(2U)^2 - \cot(2U)^2}$	$\cot(2U)$	$\sin(2U)$
$\sqrt{\frac{3+\sin(4U)}{1+\sin(4U)}}$	$\frac{\cos(2U)-\sin(2U)}{\cos(2U)+\sin(2U)}$	$\cos(2U) + \sin(2U)$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η υπέρθεση δεν ισχύει για το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, το οποίο στις συντεταγμένες Rosen έχει τη μορφή

$$A_\mu = (0, 0, y b(U) \text{Exp}[\int M(U)dU]),$$

από την οποία είναι προφανές το παραπάνω.

Όσον αφορά την ιδέα κατηγοριοποίησης του χώρου των λύσεων με βάση τις ομάδες συμμετρίας, φάνηκε πως απέδωσε καρπούς. Συγκεκριμένα, προέκυψαν δύο περιπτώσεις:

Η περίπτωση *I* χωρίστηκε σε τρεις Κλάσεις, όπου η αυθαίρετη συνάρτηση που αναφέραμε παραπάνω αποκτούσε συγκεκριμένη μορφή, διαφορετική σε κάθε μια Κλάση. Βρέθηκε η μορφή των πεδίων Killing σε κάθε μια από τις Κλάσεις και ο αριθμός αυτών, ο οποίος είναι τέσσερα.

Η περίπτωση *II*, στην οποία η συνάρτηση παρέμεινε αυθαίρετη ενώ ο αριθμός των πεδίων Killing μειώθηκε σε τρία. Δε δίνεται η συγκεκριμένη μορφή τους, αλλά καταφέραμε να περιορίσουμε το άγνωστο κομμάτι τους στην εύρεση της λύσης μιας εξίσωσης Riccati.

Σχετικά με τις τρεις Κλάσεις της περίπτωσης *I*, καταφέραμε να αναπαραγάγουμε τις λύσεις μέσω μιας minisuperspace Λαγκρανζιανής, αφότου πρώτα είδαμε πως το στοιχείο μήκους αυτών (Κλάσεων), μπορεί να προκύψει από τα πρότυπα Bianchi στις (2+1) διαστάσεις. Ο θεσεογραφικός χώρος της Λαγκρανζιανής είναι διαστάσεως τρία. Η μεταβολή της αντίστοιχης δράσης ως προς τις δύο δυναμικές μεταβλητές, οδηγεί στις δύο μοναδικές, διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν το σύστημα. Ο τρίτος βαθμός ελευθερίας, το Lapse $n(t)$; όταν θεωρείται δυναμικός βαθμός ελευθερίας (ισοδύναμα η Λαγκρανζιανή είναι ιδιάζουσα (singular), προκύπτει μια επιπλέον εξίσωση συνδέσμου, συνεπώς υπάρχει διαφορά στον αριθμό των εξισώσεων Euler-Lagrange και του συστήματος. Όταν το $n(t)$ θεωρείται μη-δυναμικό, (δηλαδή ομαλή (regular) Λαγκρανζιανή), δηλαδή ως μια απλά t -εξαρτώμενη συνάρτηση, δεν υπάρχει διαφορά στον αριθμό των εξισώσεων. Παρόλα αυτά, στο κλασσικό επίπεδο αυτή η διαφορά δεν είναι ουσιώδης, καθώς αποδείξαμε πως οι λύσεις είναι ισοδύναμες. Φαίνεται πως οι λύσεις δεν επηρεάζονται από τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε το $n(t)$. Προσπαθώντας να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό, παρουσιάσαμε δύο πιθανούς λόγους: ο πρώτος βασίζεται στην απουσία ουσιωδών σταθερών στην εξίσωση του συνδέσμου όταν την υπολογίσουμε επί των λύσεων των δυναμικών εξισώσεων. Ο δεύτερος σχετίζεται με την πλήρη απορρόφηση του συνδέσμου μέσα στη βαθμίδα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Θέλοντας να κατανοήσουμε λίγο καλύτερα τη σημασία της απουσίας συνδέσμου, σχετικά με τις μετρικές *II.4*, *II.4.1*, θεωρούμε καταλληλότερη τη χρήση του παρακάτω συστήματος συντεταγμένων. Ανακαλούμε πως οι αρχικές συντεταγμένες είναι οι (z, t, τ) όπου το t είναι χωρική συντεταγμένη, ενώ το

φωτοειδές άνυσμα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι $\xi = \partial_z$. Οι μετασχηματισμοί για την (II.4) και τη μη-Αβελιανή περίπτωση (II.4.1) έχουν τη μορφή

$$z = -\frac{1}{2\tilde{\omega}} [(u-y) + (u+y)c(x)], \quad t = x, \quad \tau = u+y, \quad (II.4)$$

$$z = \frac{1}{2} \left[-(u-y) + \frac{c(x)}{\tilde{m}^2(u+y)} \right], \quad t = x, \quad \tau = -\frac{1}{\tilde{m}} \text{Log} \left[\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{m}(u+y)} \right], \quad (II.4.1)$$

όπου οι νέες συντεταγμένες είναι οι (u, x, y) με u τη χρονική συντεταγμένη. Η x είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με την t , επομένως οι εξισώσεις Einstein-Maxwell δεν αλλάζουν, ούτε και η μορφή της Λαγκρανζιανής η οποία περιγράφει τη δυναμική του συστήματος. Το στοιχείο μήκους και το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό (II.4) αποκτούν τη μορφή

$$ds_{(2+1)} = n(x)^2 dx^2 - (u+y)\dot{c}(x) dx du - (u+y)\dot{c}(x) dx dy - du^2 + dy^2, \\ A = A(x) du + A(x) dy,$$

ενώ για την (II.4.1)

$$ds_{(2+1)} = n(x)^2 dx^2 + \frac{\dot{c}(x)}{\tilde{m}^2(u+y)} dx du + \frac{\dot{c}(x)}{\tilde{m}^2(u+y)} dx dy - du^2 + dy^2, \\ A = \frac{A(x)}{\tilde{m}(u+y)} du + \frac{A(x)}{\tilde{m}(u+y)} dy.$$

Χρησιμοποιώντας την $(2+1)$ ανάλυση της μετρικής κατά μήκος της χωρικής συντεταγμένης x , μπορούμε να κατανοήσουμε την ύπαρξη συνάρτησης Lapse $n(x)$ και ανύσματος Shift $N = -\frac{(u+y)\dot{c}(x)}{2} du - \frac{(u+y)\dot{c}(x)}{2} dy$ και $N = \frac{\dot{c}(x)}{2\tilde{m}^2(u+y)} du + \frac{\dot{c}(x)}{2\tilde{m}^2(u+y)} dy$, στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα. Το στοιχείο μήκους για τις επιφάνειες $x = \text{σταθερά}$, είναι $ds_{(2)} = -du^2 + dy^2$. Ως προς την εσωτερική μετρική, τα Shift είναι φωτοειδή, και είναι αυτά που εμπεριέχουν τις δυναμικές μεταβλητές του συστήματος σε αυτές τις συντεταγμένες. Επιπλέον, το κυματικό άνυσμα διάδοσης αποκτά τη μορφή $\xi = -\partial_u + \partial_y$. Ας ανακαλέσουμε τις εξισώσεις των συνδέσμων στην $(2+1)$ ανάλυση:

$$G_{00} = \frac{1}{2} \left(-R^{(2)} + K^2 - K_{ij}K^{ij} \right), \\ G_{0i} = D_i K - D_j K_i^j,$$

όπου $R^{(2)}$, K_{ij} , K το βαθμωτό Ricci των επιφανειών $x = \text{σταθερά}$, ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας και το ίχνος του αντίστοιχα, ενώ D_i η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς την εσωτερική μετρική. Ο δείκτης i αναφέρεται στις συντεταγμένες (u, y) των επιφανειών. Ο τανυστής K_{ij} μπορεί να εκφραστεί ως

$$K_{ij} = \frac{1}{2n(x)} (\partial_x h_{ij} - D_i N_j - D_j N_i),$$

με την μετρική να είναι

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Με βάση τη μορφή της εσωτερικής μετρικής, μπορούμε να κατανοήσουμε πως οι διδιάστατες επιφάνειες είναι επίπεδες με υπογραφή Lorentz, συνεπώς $R^{(2)} = 0$, και στις δύο περιπτώσεις. Ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας έχει την εξής μορφή, στις δύο περιπτώσεις,

$$K_{ij} = \frac{\dot{c}(x_0)}{2n(x_0)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_{ij} = \frac{\dot{c}(x_0)}{2\tilde{m}^2(u+y)^2 n(x_0)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

όπου έχει υπολογιστεί σε κάποια επιφάνεια $x = x_0$ αφότου υπολογίσαμε τις παραγώγους.

Η πληροφορία σχετικά με την εμβάπτιση αυτών των επίπεδων επιφανειών στον τρισδιάστατο χωρόχρονο, δίνεται μέσω του τανυστή της εξωτερικής καμπυλότητας. Εύκολα μπορεί να υπολογιστεί πως $K = 0$, $K_{ij}K^{ij} = 0$, $D_j K_i^j = 0$. Κάτω από μετασχηματισμούς των συντεταγμένων (u, y) , οι πρώτες δύο ποσότητες μετασχηματίζονται ως βαθμωτά, ενώ το τρίτο ως ένα-μορφή, επομένως είναι ίσα με μηδέν και στο μετασχηματισμένο σύστημα. Η ισότητα $K = 0$, δηλώνει πως μια δέσμη καμπυλών οι οποίες τέμνουν κάθετα τις επιφάνειες, δεν θα παρουσιάζει ούτε σύγκλιση ούτε απόκλιση. Επομένως, ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας, δρα ως άιχνος τανυστής διάτμησης σε καμπύλες επί της επιφάνειας. Η ισότητα $K_{ij}K^{ij} = 0$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που η επιφάνεια έχει μετρική με υπογραφή Lorentz, ενώ εφόσον η επιφάνεια έχει διάσταση 2, οι συνιστώσες του K_{ij} είναι ίσες. Μια πιο οπτική προσέγγιση σχετικά με την επίδραση του τανυστή διάτμησης μπορεί να βρεθεί στην εργασία [77]. Τέλος, η εξίσωση $D_j K_i^j = 0$, μπορεί να ερμηνευθεί ως η ανάλυση του τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας σε δύο μηδενικής απόκλισης ανυσματικά πεδία, K_1^j, K_2^j . Μια δέσμη φωτειδών καμπυλών επί της επιφάνειας, η οποία παράγεται από το άνυσμα διάδοσης, δεν επηρεάζεται από τον τανυστή διάτμησης.

Συνοψίζοντας, η απουσία συνδέσμου μπορεί να ερμηνευθεί ως η εμβάπτιση διδιάστατων, υπογραφής Lorentz, επίπεδων επιφανειών στον τρισδιάστατο χωρόχρονο, κατά μήκος της χωρικής μεταβλητής x . Αυτές οι επιφάνειες είναι παράλληλες ή μια στην άλλη λόγω της $K = 0$. Ως φυσικό συμπέρασμα, προκύπτει πως ένας παρατηρητής ο οποίος στέκεται σε συντεταγμένη απόσταση $x = x_0$, θα παρατηρεί κύματα να διαδίδονται κατά μήκος της διεύθυνσης y με την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Όσον αφορά το κβαντικό επίπεδο, επιβάλλαμε την κανονική κβάντωση και στις δύο περιπτώσεις Λαγκρανζιανών. Με σκοπό την ερμηνεία των κυματοσυναρτήσεων σε γεωμετρικό πλαίσιο, χρησιμοποιήσαμε την ανάλυση Bohm. Όπως αποδείξαμε, μόνο όταν η Λαγκρανζιανή είναι ομαλή (regular) και η κβαντική κατάσταση αποτελεί υπέρθεση των ιδιοκαταστάσεων, (συγκεκριμένα θεωρήσαμε αρχική κατάσταση της μορφής ενός Gaussian κυματοπακέτου) προκύπτει μη-μηδενικό κβαντικό δυναμικό και ως αποτέλεσμα οι ημι-κλασσικές λύσεις διαφέρουν από τις κλασσικές. Καταλήγοντας, η ισοδυναμία που φαίνεται να υπάρχει στο επίπεδο των λύσεων στην κλασσική περιγραφή, μεταξύ των δύο τρόπων θεώρησης του $n(t)$, δεν ισχύει στο κβαντικό επίπεδο.

Οι μη-τετριμμένες ημι-κλασσικές λύσεις που βρέθηκαν, δεν ικανοποιούν τις ελεύθερες εξισώσεις Einstein-Maxwell; απαιτείται να θεωρήσουμε την ύπαρξη ενός τρι-ρεύματος και επιπλέον ενός τανυστή ενέργειας ορμής. Τα δύο αυτά επιπρόσθετα αντικείμενα, εξαφανίζονται για μεγάλες τιμές της συντεταγμένης $r, r \rightarrow \infty$, το οποίο αντιστοιχεί σε απλωμένο κυματοπακέτο σε σχέση με την αρχική κατάσταση. Παρατηρούμε πως σε αυτό το όριο, η λύση (6.55) ταυτίζεται με αυτή της κλάσης $A_{(4,10)}$, ενώ η (6.57) με εκείνη της κλάσης $A_{(4,7)}$ όταν $\tilde{m} = 2\lambda(\nu_1 + \nu_2)$ και με την $A_{(4,9)}^b$ όταν $\tilde{m} = m\lambda(\nu_1 + \nu_2)$, $m \neq 0, 2$. Συνεπώς, το σημαντικό συμπέρασμα είναι πως παρόλο που θεωρήσαμε μια σχετικά απλή αρχική κβαντική κατάσταση, όλες οι Κλάσεις εμπεριέχονται στην ημι-κλασσική λύση.

Τέλος, ακόμη μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι η εξής: όταν αντιμετωπίζουμε το $n(t)$ ως μη-δυναμική μεταβλητή, η Χαμιλτονιανή του συστήματος μοιάζει με εκείνη η οποία περιγράφει την κίνηση ενός ελεύθερου σωματιδίου με μεταβλητή μάζα στις δύο διαστάσεις. Όμως υπάρχει μια σημαντική διαφορά: Η εξίσωση Schrodinger ήταν αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς $t \rightarrow f(\tilde{t})$ και αυτό οφείλεται στο νόμο μετασχηματισμού του $n(t)$. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση της μεταβλητής μάζας καθώς αυτή μετασχηματίζεται ως βαθμωτό. Με βάση αυτή τη σκέψη, εφόσον έχουμε κατασκευάσει χώρο Hilbert στη περίπτωση της Gaussian αρχικής κατάστασης, μπορούμε να κατασκευάσουμε πυκνότητα πιθανότητας

$$P(t, y, x) = \frac{\lambda}{\pi \left[1 + \lambda^2 \left(\int n(t) dt \right)^2 \right]} \exp \left[-\frac{\lambda (y^2 + x^2)}{1 + \lambda^2 \left(\int n(t) dt \right)^2} \right].$$

Πράγματι, ακόμη και αν κάποιος δεν ήθελε να ερμηνεύσει τις κυματοσυναρτήσεις μέσω της κλασσικής, γεωμετρικής οδού, η πυκνότητα πιθανότητας δεν εξαρτάται από την επιλογή του t .

Κεφάλαιο 7

Δυναμικά ισοδύναμες εξισώσεις ΛCDM υπό την ύπαρξη γεωμετρίας Bianchi

I Εισαγωγή

Με βάση τις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις του τηλεσκοπίου Planck [169], η Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB) είναι ισοτροπική και ομογενής σε μεγάλες κλίμακες (250 εκατομμύρια έτη φωτός). Αυτές οι παρατηρήσεις υποστηρίζουν τη λεγόμενη Κοσμολογική Αρχή, δηλαδή πως το σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό στις προαναφερθείσες κλίμακες. Μέχρι στιγμής, το πρότυπο που χρησιμοποιείται για τη καλύτερη περιγραφή των παρατηρήσεων είναι το επονομαζόμενο Λ CDM, όπου η γεωμετρία περιγράφεται από τη μετρική FLRW. Όπως είναι γνωστό, το χαρακτηριστικό μιας FLRW μετρικής, είναι η χωρική ομογένεια και ισοτροπία της, επομένως φαίνεται να είναι η καταλληλότερη υποψήφια για τη περιγραφή των παρατηρήσεων. Μπορεί να τεθεί το εξής ερώτημα: Αν κάποιος λάβει υπόψη του τις παρατηρήσεις για το CMB και αναζητήσει τη μετρική η οποία θα αναπαραγάγει τις παρατηρήσεις, τότε καταλήγει αναγκαστικά στην FLRW μετρική για το χωρόχρονο;

Οι J. Ehlers, P. Geren και R. K. Sachs μελέτησαν σε κάποιο βαθμό, σε μορφή θεωρήματος γνωστό ως (EGS), το ερώτημα, κατά πόσο η ισοτροπία του CMB υπονοεί την ισοτροπία της χωροχρονικής μετρικής [170]. Γενικεύσεις αυτού του θεωρήματος μπορούν να βρεθούν στη δημοσίευση [171], καθώς και στις [172–174]. Όπως έχει αποδειχθεί στην [175], ένας χωρόχρονος ο οποίος επιδέχεται ένα σύμμορφο πεδίο Killing ($\nabla_{(\sigma}\xi_{\mu)} = \omega g_{\sigma\mu}$, όπου ω κάποιος σύμμορφος παράγοντας), το οποίο είναι παράλληλο με την ταχύτητα του ρευστού που αναπαριστά την ύλη, οδηγεί σε ένα σύμπαν χωρίς παράλλαξη. Επιπλέον, η ύπαρξη του εγγυάται πως η θερμοκρασία T ενός ρευστού ακτινοβολίας (υποθέτοντας φάσμα μελανού σώματος) είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση παρατήρησης [176]. Ας θεωρήσουμε σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ισχύει ($N = 1$, $N^i = 0$, $i = 1, 2, 3$). Το στοιχείο μήκους θα έχει εν γένει τη μορφή

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + \gamma_{ij}(t, x)dx^i dx^j. \quad (7.1)$$

Υποθέτουμε πως είμαστε παρατηρητές συγκινούμενοι με τα κοσμικά ρευστά: το ανυσματικό πεδίο της τετραταχύτητας και το σύμμορφο πεδίο Killing θα έχουν λοιπόν τη μορφή

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (7.2)$$

$$\xi^\mu = a(t)u^\mu. \quad (7.3)$$

Ο μόνος τρόπος ώστε να υπάρχει τέτοιο σύμμορφο πεδίο Killing, είναι η μετρική να περιοριστεί στη μορφή

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij}(x)dx^i dx^j. \quad (7.4)$$

Όσον αφορά τη θερμοκρασία μελανού σώματος, αποδεικνύεται [177] πως ισχύει εν γένει

$$T_o = T_e \frac{(k^\mu u_\mu)_o}{(k^\mu u_\mu)_e}. \quad (7.5)$$

όπου το o συμβολίζει τη λήψη και το e την εκπομπή του φωτεινού σήματος, ενώ k^μ είναι το εφαπτόμενο άνυσμα στις καμπύλες φωτός, οι οποίες συνδέουν το σημείο εκπομπής και το σημείο λήψης. Αυτό σημαίνει πως η θερμοκρασία εν γένει θα εξαρτάται από την κατεύθυνση παρατήρησης [178]. Όσον αφορά τις καμπύλες φωτός, υποθέτουμε την προσέγγιση γεωμετρικής οπτικής (ray optics approximation), έτσι ώστε να ισχύει

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad (7.6)$$

$$k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0. \quad (7.7)$$

Η πρώτη εξίσωση αντιστοιχεί στο φωτοειδή χαρακτήρα του εφαπτόμενου ανύσματος, ενώ η δεύτερη στο ότι οι καμπύλες είναι γεωδαισιακές. Έστω λ μια παράμετρος των φωτοειδών καμπυλών $x^\mu(\lambda)$. Τότε το γινόμενο $k^\mu \xi_\mu$ είναι σταθερό κατά μήκος αυτών των καμπυλών

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (k^\mu \xi_\mu) &= k^\sigma \nabla_\sigma (k^\mu \xi_\mu) \\ &= (k^\sigma \nabla_\sigma k^\mu) \xi_\mu + k^\sigma k^\mu \nabla_{(\sigma} \xi_{\mu)} \\ &= \omega k^\sigma k^\mu g_{\sigma\mu} = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με μηδέν επειδή τα φωτόνια κινούνται σε γεωδαισιακές, ενώ ο δεύτερος επειδή αυτές οι γεωδαισιακές είναι φωτοειδείς. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, προκύπτει πως

$$k^\mu u_\mu = \frac{c}{a(t)}, \quad (7.9)$$

όπου c κάποια σταθερά. Με χρήση της (7.9) στην (7.5) καταλήγουμε στη σχέση

$$T_o = T_e \frac{a(t_e)}{a(t_o)}. \quad (7.10)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η θερμοκρασία εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα κλίμακας και όχι από την κατεύθυνση. Αυτό αντιστοιχεί σε ισοτροπικό φάσμα. Το στοιχείο μήκους (7.4) περιλαμβάνει πληθώρα γεωμετριών και μάλιστα, αντιστοιχεί και σε γεωμετρίες οι οποίες είναι χωρικά ανομοιογενείς. Ένας τρόπος να περιορίσουμε το φάσμα των επιλογών είναι να ασχοληθούμε με τα πρότυπα Bianchi, τα οποία όπως έχουμε αναφέρει, είναι χωρικά ομογενή αλλά ανισοτροπικά. Η ανισοτροπία αυτών των προτύπων είναι δυναμική εν γένει, κάτι το οποίο θα προκαλούσε ανισοτροπία του CMB σε μεγάλες κλίμακες, το οποίο δε προκύπτει από τα παρατηρησιακά δεδομένα, [179–181]. Με σκοπό τα πρότυπα Bianchi να επιδέχονται ένα σύμμορφο πεδίο Killing όπως αναφέραμε παραπάνω, η ανισοτροπία τους πρέπει να είναι “παγωμένη” και όχι δυναμική, δηλαδή $\gamma_{\mu\nu} = \alpha(t)^2 m_{\mu\nu}$, όπου $\gamma_{\mu\nu}$ και $m_{\mu\nu}$ είναι η χωρική μετρική και ένας σταθερός πίνακας αντίστοιχα, στη βάση των Bianchi.

Το επόμενο βήμα είναι η αναζήτηση πεδίων ικανά να “απορροφήσουν” αυτή την “παγωμένη” ανισοτροπία. Με τη λέξη απορρόφηση εννοούμε πως θα ικανοποιήσουν εκείνο το κομμάτι των εξισώσεων Einstein το οποίο δεν αντιστοιχεί στην εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας $a(t)$. Στη [182] οι δύο συγγραφείς μελέτησαν το πρότυπο Bianchi III με την ύπαρξη ενός ελευθέρου βαθμωτού πεδίου και κατάφεραν να βρουν μια λύση. Οι σχέσεις μεταξύ απόστασης-ερυθρομετατόπισης και η εκτίμηση των κοσμολογικών παραμέτρων στο συγκεκριμένο πρότυπο βρέθηκαν στην [183]. Παράλληλα, πρότυπα τα οποία είναι ελεύθερα διατμήσεων αλλά παραμένουν ανισοτροπικά έχουν μελετηθεί εκτενώς [184–187]. Η περίπτωση της μελέτης της χωρικής κατανομής των υπερκαινοφανών με χρήση μοντέλων Bianchi, τα οποία παρουσιάζουν συμπεριφορά FLRW εμφανίζεται στη δημοσίευση [188]. Μια ενδιαφέρουσα και εκτεταμένη εργασία εκτελέστηκε από τον Mikjel Thorsrud [189] όπου χρησιμοποιήθηκε ένα σύνολο από n ανεξάρτητες p -μορφές, προς “απορρόφηση”

της ανισοτροπίας. Απέδειξε πως το μόνο πρότυπο Bianchi, στο οποίο η ανισοτροπία μπορεί να “απορροφηθεί” μόνο από ένα ελεύθερο βαθμωτό πεδίο το οποίο έχει θετική ενεργειακή πυκνότητα, είναι το Τοπικά Περιστρεφόμενο Συμμετρικό (LRS) πρότυπο III, το οποίο είχε προηγουμένως μελετηθεί στην [182]. Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη κοσμολογικών διαταραχών σε ανισοτροπικό υπόβαθρο όπως παρουσιάστηκε στις [190–194].

Στη συγκεκριμένη εργασία έχουμε ως βασικό σκοπό να χρησιμοποιήσουμε ένα πεδίο προς “απορρόφηση” της ανισοτροπίας, το οποίο γνωρίζουμε πως υπάρχει στη φύση, συγκεκριμένα το ηλεκτρομαγνητικό. Η ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε σύζευξη με τη βαρύτητα θεωρώντας γεωμετρία προτύπων Bianchi, έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς στη διάρκεια των ετών. Παρουσιάζουμε μόνο μερικές εκ των δημοσιεύσεων. Λύσεις με μεγάλης κλίμακας μαγνητικά πεδία έχουν βρεθεί στην εργασία [195]. Στην [196] οι συγγραφείς κατάφεραν να απομονώσουν το πρόβλημα της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πρότυπο Bianchi I, στην ολοκλήρωση μιας δεύτερης τάξης, διαφορική εξίσωση. Ο M.S. Madsen μελέτησε τη συμπεριφορά του βαθμωτού ηλεκτρομαγνητισμού στο προηγούμενο πρότυπο [197]. Αναλυτικές λύσεις ενός άμαζου πεδίου Dilaton σε αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχουν βρεθεί για τα πρότυπα Bianchi I, II καθώς και για τα Kantowski-Sachs [198]. Ο συγγραφέας Kei Yamamoto έδειξε με χρήση της ανάλυσης δυναμικών συστημάτων, πως μια οικογένεια από επίπεδα κύματα είναι λύσεις των εξισώσεων Einstein-Maxwell και συγκεκριμένα αποτελούν το σταθερό ελκυστή για επιταχυνόμενα σύμπαντα στη περίπτωση των προτύπων Bianchi Κλάσης B [199]. Η κβαντική ανάλυση ενός προτύπου Bianchi III LRS συζευγμένου με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παρουσιάστηκε στην [153].

Όπως έχει αποδειχθεί, [182], [189], το ελεύθερο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να “απορροφήσει” την ανισοτροπία. Με βάση αυτό, θα θεωρήσουμε πως υπάρχει φορτισμένο ρευστό το οποίο “κουβαλά” πυκνότητα τετραρεύματος και αλληλεπιδρά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αυτός ο συνδυασμός ύλης, ενδέχεται να υπάρχει στο σύμπαν κατά την περίοδο της νουκλεοσύνθεσης (Big Bang nucleosynthesis) και την εποχή των φωτονίων (Photon epoch), όπου οι θερμοκρασίες είναι πολύ υψηλές ώστε να εμφανίζονται ουδέτερα άτομα. Θεωρούμε λοιπόν, πως αυτή η επιλογή είναι σε κάποιο βαθμό, φυσικά αποδεκτή. Επιπλέον, με βάση τη μορφή της μετρικής που αναφέραμε παραπάνω, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σταθεροί Αυτομορφισμοί κατευθείαν επί της χωρικής μετρικής. Βρισκόμαστε δηλαδή στη δεύτερη περίπτωση την οποία περιγράψαμε στο κομμάτι της θεωρίας. Η σημαντικότητα αυτού βρίσκεται στο εξής: Με το πέρας της χρήσης των Αυτομορφισμών, η μετρική δε θα περιλαμβάνει μη-ουσιώδεις σταθερές, δηλαδή σταθερές οι οποίες μπορούν να απορροφηθούν με μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Ο αριθμός των ουσιωδών σταθερών θα είναι ελάχιστος, το οποίο συνεπάγεται πως είναι πιο εύκολο να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τις παρατηρήσεις και να ταυτοποιήσουμε ποιές από αυτές έχουν κάποια φυσική σημασία. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μάζα του συμπαγούς αντικείμενου στη μετρική Schwarzschild. Συνεπώς, θα έχουμε την πιο απλή μορφή λύσης χωρίς βλάβη της γενικότητας. Έχουμε σκοπό να απαραγάγουμε τη λύση του προτύπου Bianchi III υπό την παρουσία ελευθέρου βαθμωτού πεδίο ώστε να επιβεβαιώσουμε αυτόν τον ισχυρισμό.

Η δομή που ακολουθείται είναι η εξής:

1. Πρωταρχική υπόθεση και χρήση των σταθερών Αυτομορφισμών.
2. “Απορρόφηση” μέσω ελεύθερου βαθμωτού πεδίου.
3. “Απορρόφηση” μέσω ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.
4. Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων.

I.1 Πρωταρχική υπόθεση και χρήση των σταθερών Αυτομορφισμών

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, ένας χωρόχρονος ο οποίος επιδέχεται ένα σύμμορφο ανυσματικό πεδίο Killing, παράλληλο με το ανυσματικό πεδίο το οποίο περιγράφει τον συγκινούμενο παρατηρητή και αντίστοιχα το ρευστό ακτινοβολίας, είναι ελεύθερο παραλλακτικών φαινομένων και η θερμοκρασία, υποθέτοντας πως ως προς τον παρατηρητή έχουμε φάσμα μελανού σώματος, δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση παρατήρησης. Όσον αφορά τα πρότυπα Bianchi, για να επιδέχονται ένα τέτοιο σύμμορφο

πεδίο Killing πρέπει να ικανοποιούν την εξής συνθήκη

$$\gamma_{\mu\nu} = a(t)^2 m_{\mu\nu}, \quad (7.11)$$

όπου $m_{\mu\nu}$ είναι ένα σταθερός, συμμετρικός πίνακας 3×3 . Θυμίζουμε πως οι δείκτες μ, ν είναι δείκτες της βάσης των σ^μ και λαμβάνουν τιμές από 1 έως 3. Ο αντίστροφος πίνακας δίνεται από τη σχέση

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{a(t)^2} m^{\mu\nu}, \text{ έτσι ώστε } \gamma^{\lambda\mu} \gamma_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda \Rightarrow m^{\lambda\mu} m_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda. \quad (7.12)$$

Όπως εξηγήσαμε στο κομμάτι της θεωρίας, το στοιχείο μήκους λαμβάνει τη μορφή

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + \alpha(t)^2 m_{\mu\nu} \sigma^\mu(x) \sigma^\nu(x). \quad (7.13)$$

Με τον όρο “παγωμένη” ανισοτροπία αναφερόμαστε στην ύπαρξη μόνο ενός παράγοντα κλίμακας $\alpha(t)$. Ισοδύναμα, υπάρχει μεταβλητή χρόνου $\tilde{t}$ έτσι ώστε το στοιχείο μήκους να γραφεί στη “σύμμορφη” χρονική βαθμίδα

$$ds_{(4)}^2 = \tilde{\alpha}(\tilde{t}) [-d\tilde{t}^2 + m_{\mu\nu} \sigma^\mu(x) \sigma^\nu(x)], \quad (7.14)$$

Το σύμμορφο πεδίο Killing στις αρχικές και στις τελικές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$\xi_{(c)} = \alpha(t)n, \text{ και, } \xi_{(c)} = \tilde{a}(\tilde{t})\tilde{n} \quad (7.15)$$

όπου $n = \partial_t$ και $\tilde{n} = \frac{1}{\tilde{\alpha}(\tilde{t})} \partial_{\tilde{t}}$ το κάθετο άνωσμα στις επιφάνειες $t = \text{σταθερό}$. Στην ανάλυση μας, αυτό αντιστοιχεί στην τετραταχύτητα των ρευστών ως προς τα οποία οι παρατηρητές είναι συγκινούμενοι. Είναι εύκολο να δειχθεί πως για κάθε πρότυπο Bianchi ισχύει

$$\mathcal{L}_{\xi_{(c)}} g_{IJ} = 2\dot{\alpha}(t)g_{IJ}, \quad (7.16)$$

όπου g_{IJ} η μετρική του χωροχρόνου για το στοιχείο μήκους (7.13), ($I, J = 1, 2, 3, 4$). Οι εξισώσεις Einstein λαμβάνουν την εξής μορφή:

(EFE)

$$H^2 = \kappa \frac{\rho^{(tot)}}{3} - \frac{\tilde{R}}{6} \frac{1}{a^2}, \quad (7.17)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\kappa \frac{1}{6} \left(\rho^{(tot)} + 3P^{(tot)} \right), \quad (7.18)$$

$$q_\mu^{(tot)} = 0, \quad (7.19)$$

$$\pi_{\mu\nu}^{(tot)} = \frac{1}{\kappa} \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \tilde{R} m_{\mu\nu} \right), \quad (7.20)$$

όπου η εξάρτηση από το χρόνο έχει αμεληθεί για λόγους απλότητας και $H = \frac{\dot{a}}{a}$ είναι η συνάρτηση Hubble. Στο παράρτημα παρέχονται κάποιες λεπτομέρειες για το πώς καταλήξαμε στη μορφή αυτών των εξισώσεων. Παρατηρούμε επίσης πως ο τανυστής $\tilde{R}_{\mu\nu}$ είναι σταθερός και δίνεται από τη σχέση (4.41) με την αντικατάσταση της $\gamma_{\mu\nu}$ από τον πίνακα $m_{\mu\nu}$, συνεπώς αντίστοιχα ισχύει $\tilde{R} = m^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu}$. Με τον επαναορισμό $\tilde{R} = 6k$ (όπου k θα αναπαριστά σε ειδικές περιπτώσεις την χωρική καμπυλότητα των προτύπων FLRW) οι εξισώσεις (7.17), (7.18) είναι ίδιες σε μορφή, με εκείνες που θα είχαμε αν το πρότυπο που είχε επιλεγεί ήταν το FLRW. Όπως παρατηρούμε, το ρευστό το οποίο θα “απορροφήσει” την ανισοτροπία θα πρέπει να έχει: μηδενική ροή (7.19), και ο άιχνος ανισοτροπικός τανυστής να δίνεται από την εξίσωση (7.20). Η “παγωμένη” ανισοτροπία των προτύπων Bianchi έχει “απορροφηθεί”, αν και μόνο αν οι εξισώσεις (7.19), (7.20) ικανοποιηθούν. Σε αυτό το σημείο, δίνουμε και τις υπόλοιπες εξισώσεις

των ρευστών.

(UMFE)

$$\dot{\rho}_{(u)} + 3(\rho_{(u)} + P_{(u)})H + q_{(u)}^\mu C_{\mu\alpha}^\alpha = 0, \quad (7.21)$$

$$\dot{q}_\mu^{(u)} + 3q_\mu^{(u)}H + \left(C_{\beta\alpha}^\alpha \pi_\mu^{(u)\beta} + \pi_\alpha^{(u)\beta} C_{\beta\mu}^\alpha \right) = 0. \quad (7.22)$$

(CMFE)

$$\dot{\rho}_{(c)} + 3(\rho_{(c)} + P_{(c)})H + q_{(c)}^\mu C_{\mu\alpha}^\alpha = E^\alpha J_\alpha, \quad (7.23)$$

$$\dot{q}_\mu^{(c)} + 3q_\mu^{(c)}H + \left(C_{\beta\alpha}^\alpha \pi_\mu^{(c)\beta} + \pi_\alpha^{(c)\beta} C_{\beta\mu}^\alpha \right) = -(\rho_{(c)}E_\mu + B_{\mu\alpha}J^\alpha). \quad (7.24)$$

(MFE)

$$C_{\mu\alpha}^\alpha E^\mu = -\mu_0 \rho_{(e)}, \quad \dot{E}^\mu + 3E^\mu H + \left(B^{\mu\lambda} C_{\lambda\alpha}^\alpha + \frac{1}{2} C_{\lambda\alpha}^\mu B^{\lambda\alpha} \right) + \mu_0 J^\mu = 0, \quad (7.25)$$

$$B_{\mu[\alpha} C_{\beta\lambda]}^\mu = 0, \quad \dot{B}_{\mu\nu} - E_\lambda C_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (7.26)$$

(CCFE)

$$\dot{\rho}_{(e)} + 3\rho_{(e)}H - C_{\mu\alpha}^\alpha J^\mu = 0. \quad (7.27)$$

Προτού συνεχίσουμε με την αναζήτηση ρευστών τα οποία μπορούν να απορροφήσουν την “παγωμένη” ανισοτροπία, ας δούμε με ποιό τρόπο θα χρησιμοποιήσουμε τους σταθερούς Αυτομορφισμούς. Όπως αναφέραμε και στο κομμάτι της θεωρίας, είμαστε στην ειδική περίπτωση (4.54), συνεπώς καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\tilde{m}_{\mu\nu} = m_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu. \quad (7.28)$$

Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τους σταθερούς Αυτομορφισμούς ώστε να απλοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο τον πίνακα $m_{\alpha\beta}$. Σε μορφή πίνακα, παρέχουμε τους, $\Lambda^\alpha_\mu, m_{\alpha\beta}$ για κάθε ένα από τα πρότυπα Bianchi. Οι σταθερές δομής που έχουμε χρησιμοποιήσει μπορούν να βρεθούν στις παρακάτω δημοσιεύσεις [253], [49], [85]. Για να είναι συνεπής με τις συμβάσεις μας, ένα μείον απαιτείται $C_{\beta\mu}^\alpha \rightarrow -C_{\beta\mu}^\alpha$. Για κάθε πρότυπο παρουσιάζουμε μόνο τις μη-μηδενικές σταθερές δομής. Οι πράξεις με τις οποίες καταλήξαμε στις παρακάτω μορφές βρίσκονται στο φάκελο “Automorphisms” του [dropbox https://www.dropbox.com/sh/zkmih77ha1u1yyw/AABq_v5aVMBuP-KvIF0qTDnWa?dl=0](https://www.dropbox.com/sh/zkmih77ha1u1yyw/AABq_v5aVMBuP-KvIF0qTDnWa?dl=0).

Πρότυπα Bianchi, Σταθερές δομής	Αυτομορφισμοί	Μετρική
I	$\begin{pmatrix} e^{b_1} & b_2 & b_3 \\ b_4 & e^{b_5} & b_6 \\ b_7 & b_8 & e^{b_9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
II, $C_{23}^1 = -1$	$\begin{pmatrix} e^{b_5+b_6} - b_3b_4 & b_1 & b_2 \\ 0 & e^{b_5} & b_3 \\ 0 & b_4 & e^{b_6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}$
III, $C_{13}^1 = -1$	$\begin{pmatrix} e^{b_1} & 0 & b_2 \\ 0 & e^{b_3} & b_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m_1 & 0 \\ m_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$
IV, $C_{13}^1 = -1, C_{23}^1 = -1, C_{23}^2 = -1$	$\begin{pmatrix} e^{b_1} & b_2 & b_3 \\ 0 & e^{b_1} & b_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$
V, $C_{13}^1 = -1, C_{23}^2 = -1$	$\begin{pmatrix} e^{b_1} & b_2 & b_3 \\ b_4 & e^{b_5} & b_6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}$
$VI_{(h)}, h \neq \{0, 1\}, C_{13}^1 = -1, C_{23}^2 = -h$	$\begin{pmatrix} e^{b_1} & 0 & b_2 \\ 0 & e^{b_3} & b_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m_1 & 0 \\ m_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$
$VII_{(h)}, h \geq 0, C_{13}^1 = -h, C_{13}^2 = 1, C_{23}^1 = -1, C_{23}^2 = -h$	$\begin{pmatrix} e^{b_1} & -b_2 & b_3 \\ b_2 & e^{b_1} & b_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$
VIII, $C_{23}^1 = 1, C_{13}^2 = 1, C_{12}^3 = -1$	$\Lambda_{(1)\alpha}^\mu \Lambda_{(2)\beta}^\alpha \Lambda_{(3)\nu}^\beta$	$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$
IX, $C_{23}^1 = -1, C_{13}^2 = 1, C_{12}^3 = -1$	$\Lambda_{(4)\alpha}^\mu \Lambda_{(5)\beta}^\alpha \Lambda_{(6)\nu}^\beta$	$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$

Πίνακας 7.1: Αυτός ο πίνακας περιέχει τις σταθερές δομής, τους σταθερούς πίνακες των Αυτομορφισμών και την ανάγωγη μορφή της μετρικής για κάθε πρότυπο Bianchi.

Παρατηρούμε πως η σταθερά m_1 η οποία εμφανίζεται στη μετρική των προτύπων Types III, VI πρέπει να έχει πεδίο ορισμού το $(-1,1)$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, οι σταθερές m_1, m_2, m_3 , πρέπει να είναι θετικές έτσι ώστε ο $m_{\alpha\beta}$ να είναι θετικά ορισμένος και η μετρική του χωρόχρονου να έχει υπογραφή

Lorentz. Επίσης, για τα πρότυπα VIII, IX οι πίνακες των Αυτομορφισμών δίνονται παρακάτω.

$$\begin{aligned} \Lambda_{(1)\alpha}^\mu &= \begin{pmatrix} \cosh(b_1) & \sinh(b_1) & 0 \\ \sinh(b_1) & \cosh(b_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_{(2)\beta}^\alpha = \begin{pmatrix} \cosh(b_2) & 0 & \sinh(b_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(b_2) & 0 & \cosh(b_2) \end{pmatrix}, \Lambda_{(3)\nu}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b_3) & -\sin(b_3) \\ 0 & \sin(b_3) & \cos(b_3) \end{pmatrix}, \\ \Lambda_{(4)\alpha}^\mu &= \begin{pmatrix} \cos(b_1) & -\sin(b_1) & 0 \\ \sin(b_1) & \cos(b_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_{(5)\beta}^\alpha = \begin{pmatrix} \cos(b_2) & 0 & -\sin(b_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(b_2) & 0 & \cos(b_2) \end{pmatrix}, \Lambda_{(6)\nu}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b_3) & -\sin(b_3) \\ 0 & \sin(b_3) & \cos(b_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ένα σημείο το οποίο αξίζει να αναφέρουμε είναι ένας διαφορετικός τρόπος κατηγοριοποίησης των προτύπων Bianchi, ο οποίος βασίζεται στην ανάλυση Behr, στην οποία οι σταθερές δομής αναλύονται ως εξής

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijl} \eta^{lk} + a_l (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l), \quad (7.29)$$

όπου τα a_l, η^{lk} δίνονται από τις σχέσεις

$$a_i = -\frac{1}{2} C_{ij}^j, \quad (7.30)$$

$$\eta^{mk} = C_{ij}^{(k} \epsilon^{m)ij}. \quad (7.31)$$

Για περισσότερες πληροφορίες, καθώς και την έκφραση του τανυστή και του βαθμωτού Ricci των υπερ-επιφανειών, ως συνάρτηση των a_l, η^{lk} μπορούν να βρεθούν στη [200].

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός του τανυστή και του βαθμωτού Ricci, καθώς και του άιχνου, ανισοτροπικού πίνακα όπως αυτός δίνεται από τη σχέση (7.20). Παρέχουμε ένα πίνακα με τον $\pi_{\alpha\beta}^{(tot)}$ και το βαθμωτό Ricci, ώστε να σχολιάσουμε το αν οι υπερ-επιφάνειες έχουν θετική, αρνητική ή μηδενική καμπυλότητα. Οι πράξεις βρίσκονται στο ίδιο αρχείο του `dropbox` που αναφέραμε παραπάνω.

Πρότυπο Bianchi	$\pi_{\alpha\beta}^{(tot)}$	$\tilde{R}$
I	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0
II	$\frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \frac{2}{3m_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3m_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2m_1} < 0$
III	$\frac{1}{\kappa} \frac{1}{3(1-m_1^2)} \begin{pmatrix} \frac{-1+3m_1^2}{m_2} & \frac{2m_1}{m_2} & 0 \\ \frac{2m_1}{m_2} & \frac{2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-\frac{4-3m_1^2}{2m_2(1-m_1^2)} < 0$
IV	$\frac{1}{\kappa} \frac{1}{3m_1} \begin{pmatrix} \frac{2}{m_2} & -\frac{3m_1}{m_2} & 0 \\ -\frac{3m_1}{m_2} & -\frac{m_1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-\frac{1+12m_1}{2m_1m_2} < 0$
V	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{6}{m_1} < 0$
VI, $h \neq 0, 1$	$\frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \frac{(-1+h)(1+2h-3m_1^2)}{3(1-m_1^2)m_2} & \frac{2(-1+h)^2m_1}{3(1-m_1^2)m_2} & 0 \\ \frac{2(-1+h)^2m_1}{3(1-m_1^2)m_2} & \frac{f}{3(1-m_1^2)m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(-1+h)^2}{3(1-m_1^2)} \end{pmatrix}$	$-\frac{4(1+h+h^2)-3(1+h)^2m_1^2}{2(1-m_1^2)m_2} < 0$
VII, $h \geq 0$	$\frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \frac{2-m_1(1+m_1)}{3m_1m_2} & \frac{h(-1+m_1)}{m_2} & 0 \\ \frac{h(-1+m_1)}{m_2} & \frac{-1+m_1(2m_1-1)}{3m_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(-1+m_1)^2}{3m_1} \end{pmatrix}$	$-\frac{1+m_1(-2+12h^2+m_1)}{2m_1m_2} < 0$
VIII	$\frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \frac{f_1}{3m_2m_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_2}{3m_1m_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_3}{3m_1m_2} \end{pmatrix}$	$-\frac{m_1[m_1+2(m_2+m_3)]+(m_2-m_3)^2}{2m_1m_2m_3} < 0$
IX	$\frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \frac{f_4}{3m_2m_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_5}{3m_1m_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_6}{3m_1m_2} \end{pmatrix}$	$-\frac{m_1[m_1-2(m_2+m_3)]+(m_2-m_3)^2}{2m_1m_2m_3}$

Πίνακας 7.2: Ο άιχνος, ανισοτροπικός τανυστής και το βαθμωτό Ricci $\tilde{R}$ παραθέτονται σε αυτό τον πίνακα. Επίσης, με βάση το πρόσημο του $\tilde{R}$, η καμπυλότητα των υπερ-επιφανειών χαρακτηρίζεται ως θετική, αρνητική ή μηδέν.

Χρησιμοποιήσαμε τις εξής συντομεύσεις, για το πρότυπο **Type VI**, $f = (-1+h) [-2 + h(-1 + 3m_1^2)]$, για το **Type VIII**, $f_1 = m_1(2m_1 + m_2 + m_3) - (m_2 - m_3)^2$, $f_2 = m_2(2m_2 + m_1 - m_3) - (m_1 + m_3)^2$, $f_3 = m_3(2m_3 + m_1 - m_2) - (m_1 + m_2)^2$ και για το **Type IX**, $f_4 = m_1(2m_1 - m_2 - m_3) - (m_2 - m_3)^2$, $f_5 = m_2(2m_2 - m_1 - m_3) - (m_1 - m_3)^2$, $f_6 = m_3(2m_3 - m_1 - m_2) - (m_1 - m_2)^2$.

Για το πρότυπο IX δε χρησιμοποιήσαμε κάποιο σύμβολο ανισότητας και ο λόγος είναι πως μπορούν να υπάρξουν και οι τρεις περιπτώσεις. Συγκεκριμένα,

$$\tilde{R}_{(IX)} = \begin{cases} \geq 0, & m_2 + m_3 - 2\sqrt{m_2 m_3} \leq m_1 \leq m_2 + m_3 + 2\sqrt{m_2 m_3}, \\ < 0, & \text{διαφορετικές τιμές.} \end{cases} \quad (7.32)$$

Είναι στο όριο της μικρής ανισοτροπίας που το πρότυπο Bianchi Type IX έχει θετική καμπυλότητα Ricci. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο αν υποθέσουμε μικρές διαταραχές

$$m_i = 1 + \tilde{\epsilon}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.33)$$

$$\tilde{\epsilon}_i \ll 1, \quad (7.34)$$

με 1 την τιμή του υποβάθρου (η οποία οδηγεί στο κλειστό FLRW). Υπό αυτή την υπόθεση, έχουμε

$$-\frac{m_1 [m_1 - 2(m_2 + m_3)] + (m_2 - m_3)^2}{2m_1 m_2 m_3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2 + \tilde{\epsilon}_3) + \mathcal{O}(\tilde{\epsilon}^2). \quad (7.35)$$

Επομένως, η τιμή της καμπυλότητας υποβάθρου είναι θετική όπως θα περιμέναμε. Σε πρώτη τάξη, έχουμε παραμόρφωση της σφαιρικής γεωμετρίας σε ελλειψοειδές. Οι διορθώσεις ανώτερης τάξης, μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε πρόσημο. Για περισσότερες πληροφορίες στο συγκεκριμένο θέμα, παραθέτουμε τις εξής εργασίες [201], [202].

Τα πρότυπα I και V αντιστοιχούν στο επίπεδο και το ανοιχτό FLRW (για την υπόθεση που έχουμε κάνει) αντίστοιχα, επομένως δε θα ασχοληθούμε μαζί τους περαιτέρω. Το κλειστό FLRW παρέχεται από το πρότυπο IX όταν $m_1 = m_2 = m_3$, επομένως, ούτε και αυτή η περίπτωση θα μας απασχολήσει. Ακόμη ένας λόγος που δε θα μας απασχολήσουν είναι πως ο άιχνος, ανισοτροπικός τανυστής είναι μηδέν, ενώ εμείς ενδιαφερόμαστε για ανισοτροπικές υπερ-επιφάνειες. Σε αυτό το σημείο, θα μελετήσουμε τα πεδία που θα μπορούσαν να “απορροφήσουν” αυτή την ανισοτροπία η οποία αναπαρίσταται μέσω του $\pi_{\alpha\beta}^{(tot)}$.

II “Απορρόφηση” μέσω ελεύθερου βαθμωτού πεδίου

Σε αυτή την παράγραφο, δεν υπάρχει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ηλεκτρικά φορτισμένο ρευστό, ούτε και πυκνότητα τετραρεύματος, επομένως οι αντίστοιχες εξισώσεις (4.44)-(4.48) ικανοποιούνται ταυτοτικά. Όσον αφορά το αφόρτιστο ρευστό, υποθέτουμε πως αποτελείται από ένα σύνολο ιδανικών ρευστών (σκόνη, ακτινοβολία, κοσμολογική σταθερά), και ένα ελεύθερο βαθμωτό πεδίο. Επιπλέον, υποθέτουμε πως τα ρευστά είναι μη-αλληλεπιδρώντα. Λαμβάνοντας όλα αυτά υπόψη, καταλήγουμε

$$\rho^{(tot)} = \rho^{(d)} + \rho^{(r)} + \rho^{(\Lambda)} + \rho^{(\phi)}, \quad (7.36)$$

$$P^{(tot)} = P^{(d)} + P^{(r)} + P^{(\Lambda)} + P^{(\phi)}, \quad (7.37)$$

$$q_\mu^{(tot)} = q_\mu^{(\phi)}, \quad (7.38)$$

$$\pi_{\mu\nu}^{(tot)} = \pi_{\mu\nu}^{(\phi)}, \quad (7.39)$$

όπου το (d) συμβολίζει τη σκόνη, το (r) την ακτινοβολία, το (Λ) την κοσμολογική σταθερά και το (ϕ) το βαθμωτό πεδίο. Συνεπώς, η ολική ροή και ο άιχνος, ανισοτροπικός τανυστής πίεσης, είναι ίσοι με τα αντίστοιχα του βαθμωτού πεδίου. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής, καθώς και οι αντίστοιχες $(3 + 1)$ ποσότητες για το βαθμωτό πεδίο δίνονται παρακάτω

$$T_{\mu\nu} = M \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \right), \quad (7.40)$$

όπου M είναι κάποια σταθερά. Οι δείκτες μ, ν αντιστοιχούν σε δείκτες συντεταγμένης βάσης και λαμβάνουν τιμές από 1 έως 4.

$$\rho^{(\phi)} = \frac{M}{2} [(\partial_t \phi)^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi], \quad P^{(\phi)} = \frac{M}{2} \left[(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{3} \partial_i \phi \partial^i \phi \right], \quad (7.41)$$

$$q_i^{(\phi)} = M \partial_t \phi \partial_i \phi, \quad (7.42)$$

$$\pi_{ij}^{(\phi)} = M \left(\partial_i \phi \partial_j \phi - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \partial_l \phi \partial^l \phi \right). \quad (7.43)$$

Σε συνδυασμό, οι εξισώσεις (7.19), (7.38), (7.42), οδηγούν είτε σε $\partial_t \phi = 0$ είτε σε $\partial_i \phi = 0$. Αν ισχύει το δεύτερο, τότε από την (7.43) ο άγχος, ανισοτροπικός τανυστής πίεσης μηδενίζεται. Επομένως, η μοναδική επιλογή για το σκοπό μας είναι η $\partial_t \phi = 0$. Επιπλέον, ο όρος $\partial_i \phi$ εκφράζεται αναγκαστικά στη βάση των προτύπων Bianchi, $\partial_i \phi(t, x) = \phi_\alpha \sigma_i^\alpha(x)$, όπου ϕ_α κάποια σταθερή μορφή, η οποία ικανοποιεί την εξής συνθήκη

$$\phi_\alpha C_{\beta\lambda}^\alpha = 0. \quad (7.44)$$

Οι δείκτες α, β, λ λαμβάνουν τιμές από 1 έως 3. Μια απόδειξη αυτού βρίσκεται στο παράρτημα. Οι ποσότητες του ρευστού αποκτούν τη μορφή

$$\rho^{(\phi)} = \frac{M}{2a^2} \phi_\alpha \phi^\alpha, \quad P^{(\phi)} = -\frac{M}{6a^2} \phi_\alpha \phi^\alpha, \quad (7.45)$$

$$q_\alpha^{(\phi)} = 0, \quad \pi_{\alpha\beta}^{(\phi)} = M \left(\phi_\alpha \phi_\beta - \frac{1}{3} m_{\alpha\beta} \phi_\lambda \phi^\lambda \right), \quad (7.46)$$

όπου $\phi_\alpha \phi^\alpha = \phi_\alpha m^{\alpha\beta} \phi_\beta$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις καταστατικές εξισώσεις των ρευστών καθώς και όσα αναφέραμε για το βαθμωτό πεδίο, οι εξισώσεις λαμβάνουν τη μορφή

(EFE)

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\rho^{(d)} + \rho^{(r)} + \rho^{(\Lambda)} \right) - \frac{1}{6} \frac{(\tilde{R} - \kappa M \phi_\alpha \phi^\alpha)}{a^2}, \quad (7.47)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{6} \left(\rho^{(d)} + 2\rho^{(r)} - 2\rho^{(\Lambda)} \right), \quad (7.48)$$

$$M \left(\phi_\alpha \phi_\beta - \frac{1}{3} m_{\alpha\beta} \phi_\lambda \phi^\lambda \right) = \frac{1}{\kappa} \left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \tilde{R} m_{\alpha\beta} \right). \quad (7.49)$$

(UMFE)

$$\dot{\rho}^{(d)} + 3\rho^{(d)} H = 0, \quad (7.50)$$

$$\dot{\rho}^{(r)} + 4\rho^{(r)} H = 0, \quad (7.51)$$

$$\dot{\rho}^{(\Lambda)} = 0. \quad (7.52)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις συνέχειας για το βαθμωτό πεδίο ικανοποιούνται ταυτοτικά. Αν μια λύση βρεθεί για την εξίσωση (7.49) οι εξισώσεις που παραμένουν είναι ισοδύναμες σε μορφή με εκείνες του Λ CDM, όπου υπάρχει φυσικά μια ενεργός καμπυλότητα της υπερ-επιφάνειας και δίνεται από τη σχέση $k_{(eff)} = \frac{1}{6} (\tilde{R} - \kappa M \phi_\alpha \phi^\alpha)$. Δε θα επεκταθούμε περισσότερο στην εύρεση της λύσης, καθώς όπως έχει αποδειχθεί, [182], [189], η μόνη περίπτωση όπου ικανοποιείται η (7.49) και το βαθμωτό πεδίο έχει θετική

πυκνότητα ενέργειας είναι το πρότυπο Bianchi III. Με βάση τη μέθοδο που ακολουθήσαμε παρουσιάζουμε τη λύση η οποία έχει εκκαθαριστεί από όλες τις μη-ουσιώδεις σταθερές, χωρίς βλάβη της γενικότητας.

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 (m_2 dx^2 + e^{-2x} dy^2 + dz^2), \quad \phi = \pm \frac{z}{\sqrt{\kappa m_2 M}}, \quad (7.53)$$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) + \frac{1}{2m_2 a(t)^2}, \quad (7.54)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι γνωστές λύσεις των εξισώσεων (7.50), (7.51) και (7.52)

$$\rho^{(d)} = \frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3}, \rho^{(r)} = \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4}, \rho^{(\Lambda)} = \rho_0^{(\Lambda)}, \quad (7.55)$$

με $\rho_0^{(d)}, \rho_0^{(r)}, \rho_0^{(\Lambda)}$ κάποιες σταθερές. Η σταθερά m_1 του προτύπου έπρεπε να είναι ίση με μηδέν ώστε να υπάρχει κάποια λύση. Τέλος, η ενεργός καμπυλότητα είναι $k_{(eff)} = -\frac{1}{2m_2}$, το οποίο σημαίνει πως αντιστοιχεί σε ένα ενεργά, ανοιχτό σύμπαν. Η παράμετρος m_2 σχετίζεται με την καμπυλότητα του σύμπαντος και είναι η μόνη που σχετίζεται με τη γεωμετρία. Υπάρχει επίσης η δυνατότητα κανονικοποίησης της σταθεράς M έτσι ώστε $M = \frac{1}{\kappa m_2}$ και

$$\phi = \pm z. \quad (7.56)$$

III “Απορρόφηση” μέσω ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε την ύπαρξη ενός ηλεκτρικά φορτισμένου ρευστού το οποίο αλληλεπιδρά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ταυτόχρονα θεωρούμε τα συνήθη μη-αλληλεπιδρώντα ιδανικά ρευστά (σκόνη, ακτινοβολία, κοσμολογική σταθερά). Θα θεωρήσουμε πως και το φορτισμένο ρευστό είναι ιδανικό με καταστατική εξίσωση της μορφής $P^{(c)} = w\rho^{(c)}$. Έχουμε λοιπόν

$$\rho^{(tot)} = \rho^{(d)} + \rho^{(r)} + \rho^{(\Lambda)} + \rho^{(c)} + \rho^{(em)}, \quad (7.57)$$

$$P^{(tot)} = P^{(d)} + P^{(r)} + P^{(\Lambda)} + P^{(c)} + P^{(em)}, \quad (7.58)$$

$$q_\mu^{(tot)} = q_\mu^{(em)}, \quad \pi_{\mu\nu}^{(tot)} = \pi_{\mu\nu}^{(em)}, \quad (7.59)$$

Οι δείκτες μ, ν, λ σε αυτή την ενότητα είναι δείκτες τριάδων, με τιμές από 1 έως 3. Παράλληλα, με βάση αυτό που αποδείξαμε για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στα πρότυπα Bianchi, δείτε Παράρτημα, η αναπαράσταση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ως ρευστό οδηγεί στις εξής ποσότητες

$$\rho^{(em)} = \frac{1}{2\mu_0} \left(E_\mu E^\mu + \frac{1}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right), \quad P^{(em)} = \frac{1}{6\mu_0} \left(E_\mu E^\mu + \frac{1}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right), \quad (7.60)$$

$$q_\mu^{(em)} = -\frac{1}{\mu_0} B_{\mu\nu} E^\nu, \quad \pi_{\mu\nu}^{(em)} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_{\mu\lambda} B_\nu{}^\lambda - \frac{a^2}{3} B_{\lambda\sigma} B^{\lambda\sigma} m_{\mu\nu} - E_\mu E_\nu + \frac{a^2}{3} E_\lambda E^\lambda m_{\mu\nu} \right), \quad (7.61)$$

όπου α ο παράγοντας κλίμακας.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ικανοποιεί καταστατική εξίσωση της μορφής $P^{(em)} = \frac{1}{3}\rho^{(em)}$. Παρατηρούμε επίσης πως τα εσωτερικά γινόμενα υπολογίζονται με βάση τη μετρική $\gamma_{\mu\nu}$. Καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις προς επίλυση.

(EFE)

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\rho^{(d)} + \rho^{(r)} + \rho^{(\Lambda)} \right) - \frac{\tilde{R}}{6} \frac{1}{a^2} + \frac{\kappa}{3} \left(\rho^{(c)} + \rho^{(em)} \right) \quad (7.62)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{6} \left(\rho^{(d)} + 2\rho^{(r)} - 2\rho^{(\Lambda)} \right) - \frac{\kappa}{6} \left[(1 + 3w) \rho^{(c)} + 2\rho^{(em)} \right], \quad (7.63)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} B_{\mu\nu} E^\nu = 0, \quad (7.64)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \left(B_{\mu\lambda} B_\nu{}^\lambda - \frac{a^2}{3} B_{\lambda\sigma} B^{\lambda\sigma} m_{\mu\nu} - E_\mu E_\nu + \frac{a^2}{3} E_\lambda E^\lambda m_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{\kappa} \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \tilde{R} m_{\mu\nu} \right). \quad (7.65)$$

(UMFE)

$$\dot{\rho}^{(d)} + 3\rho^{(d)} H = 0, \quad \dot{\rho}^{(r)} + 4\rho^{(r)} H = 0, \quad \dot{\rho}^{(\Lambda)} = 0. \quad (7.66)$$

(CMFE)

$$\dot{\rho}^{(c)} + 3(1 + w)\rho^{(c)} H - E^\mu J_\mu = 0, \quad \rho_{(e)} E_\mu + B_{\mu\nu} J^\nu = 0. \quad (7.67)$$

(MFE)

$$C_{\mu\alpha}^\alpha E^\mu = -\mu_0 \rho_{(e)}, \quad \dot{E}^\mu + 3E^\mu H + \left(B^{\mu\lambda} C_{\lambda\alpha}^\alpha + \frac{1}{2} C_{\lambda\alpha}^\mu B^{\lambda\alpha} \right) + \mu_0 J^\mu = 0, \quad (7.68)$$

$$B_{\mu[\alpha} C_{\beta\lambda]}^\mu = 0, \quad \dot{B}_{\mu\nu} - E_\lambda C_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (7.69)$$

(CCFE)

$$\dot{\rho}_{(e)} + 3\rho_{(e)} H - C_{\mu\alpha}^\alpha J^\mu = 0. \quad (7.70)$$

Όπως μπορούμε να δούμε, οι εξισώσεις (7.62), (7.63) περιέχουν συνεισφορά από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και το φορτισμένο ρευστό, με πιο περίπλοκο τρόπο από την περίπτωση του βαθμωτού πεδίου. Περίπλοκο με την εξής έννοια, δεν είναι σίγουρο αν αυτά θα συνεισφέρουν μόνο στην ενεργό χωρική καμπυλότητα. Στην επερχόμενη ενότητα παρουσιάζουμε τις λύσεις που προέκυψαν. Λύσεις βρέθηκαν μόνο για 3 πρότυπα.

III.1 Πρότυπο $\text{VI}_{(-1)}$ ή $\text{A}_{3,4}$ ή $\text{E}(1, 1)$

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε εκτενώς το πως βρήκαμε τη λύση για το συγκεκριμένο πρότυπο. Στις επόμενες ενότητες μόνο τα αποτελέσματα θα δοθούν, οι πράξεις μπορούν να βρεθούν στο αρχείο “Code Bianchi EM and Fluid” του [dropbox](https://www.dropbox.com/sh/zkmih77ha1ulygyw/AABq_v5aVMBuP-KvId1=0) https://www.dropbox.com/sh/zkmih77ha1ulygyw/AABq_v5aVMBuP-KvId1=0. Όλες οι λύσεις βρέθηκαν με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica* ©. Ας ξεκινήσουμε δίνοντας τα εξής αντικείμενα $E_\mu, B_{\mu\nu}, J_\mu$:

$$E_\mu = (E_1(t), E_2(t), E_3(t)), \quad (7.71)$$

$$B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1(t) & -B_2(t) \\ -B_1(t) & 0 & B_3(t) \\ B_2(t) & -B_3(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.72)$$

$$J_\mu = (J_1(t), J_2(t), J_3(t)). \quad (7.73)$$

Με τη χρήση των σταθερών δομής για το εξής πρότυπο, βρίσκουμε τα αποτελέσματα:

$$\begin{aligned}\dot{B}_{\mu\nu}(t) - E_\lambda(t)C_{\mu\nu}^\lambda &= 0 \Rightarrow \\ \dot{B}_1(t) &= 0,\end{aligned}\tag{7.74}$$

$$E_1(t) - \dot{B}_2(t) = 0,\tag{7.75}$$

$$E_2(t) - \dot{B}_3(t) = 0.\tag{7.76}$$

Από την (7.74) προκύπτει $B_1(t) = \beta$. Οι λύσεις των εξισώσεων (7.64), (7.65) βρίσκονται με αλγεβρικό τρόπο να είναι

$$E_1(t) = 0, E_2(t) = 0, B_2(t) = 0, B_3(t) = 0,\tag{7.77}$$

$$E_3(t) = \frac{\sqrt{-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 a(t)^2}}{\sqrt{\kappa} a(t)}, m_1 = 0.\tag{7.78}$$

Το επόμενο βήμα είναι οι εξισώσεις (7.68) τις οποίες γράφουμε στη μορφή

$$\rho_{(e)}(t) = 0,\tag{7.79}$$

$$J_1(t) = 0,\tag{7.80}$$

$$J_2(t) = 0,\tag{7.81}$$

$$J_3(t) + \frac{2\dot{\alpha}(t)}{\sqrt{\kappa}\sqrt{-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 \alpha(t)^2}} = 0,\tag{7.82}$$

όπου από την τελευταία προκύπτει $J_3(t) = -\frac{2\dot{\alpha}(t)}{\sqrt{\kappa}\sqrt{-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 \alpha(t)^2}}$. Συνολικά έχουμε

$$E_\mu = \left(0, 0, \frac{\sqrt{-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 \alpha^2(t)}}{\sqrt{\kappa} \alpha(t)}\right),\tag{7.83}$$

$$B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{7.84}$$

$$J_\mu = \left(0, 0, -\frac{2\dot{\alpha}(t)}{\sqrt{\kappa}\sqrt{-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 \alpha(t)^2}}\right).\tag{7.85}$$

Για να εκφράσουμε το στοιχείο μήκους και τον τανυστή Faraday στη συντεταγμένη βάση, ανακαλούμε τις ένα-μορφές για το συγκεκριμένο πρότυπο [253]

$$\sigma_i^\lambda = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & e^z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\tag{7.86}$$

και υπολογίζουμε τις εκφράσεις $E_i(t, x) = E_\alpha(t)\sigma_i^\alpha(x)$, $B_{ij}(t, x) = B_{\alpha\mu}(t)\sigma_i^\alpha(x)\sigma_j^\mu(x)$ και $J_i(t, x) = J_\alpha(t)\sigma_i^\alpha(x)$. Ο τανυστής $\mathbf{F}$ και το τετράρευμα $\mathbf{J}$ δίνονται από τις σχέσεις $\mathbf{F} = -E_i dt \wedge dx^i + B_{ij} dx^i \wedge dx^j$, $\mathbf{J} = -\rho_{(e)} dt + J_i dx^i$, με $j > i, i, j = 1, 2, 3$. Παρατηρούμε επίσης πως $x^i = (x, y, z)$. Οι εκφράσεις είναι αναλυτικά

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 (e^{-2z} dx^2 + e^{2z} dy^2 + m_2 dz^2),\tag{7.87}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 a(t)^2}}{\sqrt{\kappa} a(t)} dt \wedge dz + \beta dx \wedge dy,\tag{7.88}$$

$$\mathbf{J} = -\frac{2\dot{\alpha}(t)}{\sqrt{\kappa}\sqrt{-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 a^2(t)}} dz,\tag{7.89}$$

όπου το σύμβολο $\wedge$ αναφέρεται στο εξωτερικό γινόμενο $dt \wedge dz = dt \otimes dz - dz \otimes dt$. Η αρχική παράμετρος m_1 ισούται με μηδέν και παραμένει μόνο η m_2 . Αυτή η μετρική, επιδέχεται μόνο τα τρία αρχικά πεδία Killing του προτύπου Bianchi $VI_{(h)}$.

Ένα σημαντικό σημείο είναι το εξής: με σκοπό το τετράρευμα και ο τανυστής Faraday να παραμένουν πραγματικά, πρέπει ο παράγοντας κλίμακας να είναι κάτω φραγμένος.

$$-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 a^2(t) \geq 0 \Rightarrow a^2(t) \geq \frac{\kappa m_2 \beta^2}{2\mu_0}. \quad (7.90)$$

Η ελάχιστη τιμή εξαρτάται από τη σταθερή τιμή του μαγνητικού πεδίου β , τη σχετιζόμενη με τη γεωμετρία παράμετρο m_2 , και τις δύο εμπλεκόμενες σταθερές της φύσης, κ, μ_0 .

Όσον αφορά το ηλεκτρικά φορτισμένο ρευστό, μελετήσαμε τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων, μη σχετικιστικό ($w = 0$), σχετικιστικό ($w = \frac{1}{3}$), και σκοτεινής ενέργειας ($w = -1$). Στον παρακάτω πίνακα, δίνονται η ενεργειακή πυκνότητα του ρευστού, το δεξιό μέλος της εξίσωσης (7.62) και η ενεργός καμπυλότητα.

w	$\rho^{(c)}$	H^2	$k_{(eff)}$
0	$-\frac{2}{\kappa m_2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^3}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right)$	0
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{\kappa m_2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^4}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) + \frac{1}{3m_2 a(t)^2}$	$-\frac{1}{3m_2} < 0$
-1	$\frac{1}{\kappa m_2 a(t)^2} + \rho_0^{(c)}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} + \rho_0^{(c)} \right) + \frac{1}{m_2 a(t)^2}$	$-\frac{1}{m_2} < 0$

Πίνακας 7.3: Η πυκνότητα ενέργειας του φορτισμένου ρευστού $\rho^{(c)}$, το τετράγωνο της συνάρτησης Hubble H^2 και η ενεργός, χωρική καμπυλότητα $k_{(eff)}$ παρουσιάζονται για τις τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων του ηλεκτρικά φορτισμένου ρευστού: μη-σχετικιστικό $w = 0$, σχετικιστικό $w = \frac{1}{3}$ και σκοτεινή ενέργεια $w = -1$.

Η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι ίδια και για τις τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων, $\rho^{(em)} = \frac{1}{\kappa m_2 a(t)^2} > 0$. Για $a(t)$ θετικό $\forall t \in \mathbb{R}$, ο όρος της $\rho^{(c)}$ που περιέχει τη σταθερά $\rho_0^{(c)}$ κυριαρχεί στο όριο $a(t) \rightarrow 0$ για τις δύο πρώτες περιπτώσεις. Επομένως, το $\rho_0^{(c)}$ πρέπει να είναι θετικό ώστε η ενεργειακή πυκνότητα να είναι θετική σε αυτό το όριο. Ωστόσο, με σκοπό να ικανοποιείται η ασθενής ενεργειακή συνθήκη (weak energy condition) [203] σε όλη την εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας, πρέπει να υπάρχει άνω όριο για τις δύο πρώτες περιπτώσεις.

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa m_2 \rho_0^{(c)}}{2} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \kappa m_2 \rho_0^{(c)}. \quad (7.91)$$

Όσον αφορά την τρίτη περίπτωση, η σταθερά $\rho_0^{(c)}$ κυριαρχεί στο όριο $a(t) \rightarrow \infty$, επομένως, χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα όπως προηγουμένως, πρέπει $\rho_0^{(c)} > 0$. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει άνω όριο. Παρατηρούμε επίσης πως η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρικά φορτισμένου ρευστού, συνεισφέρει στη συνθήκη ύλη με την οποία έχει την ίδια καταστατική εξίσωση, για παράδειγμα, όταν $w = 0 \Rightarrow \rho^{(c)} \sim \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^3}$ και ούτω καθεξής. Αυτό οφείλεται στο χαρακτήρα της μάζας του ρευστού. Εκτός από αυτό, υπάρχει συνεισφορά η οποία εξαρτάται από τον παράγοντα κλίμακας ως εξής $\sim \frac{1}{a(t)^2}$ και πηγάζει από τον όρο $\int E^i J_i dt$; την αλληλεπίδραση του φορτισμένου ρευστού με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Για τη συνθήκη ύλη, $w = 0$, $w = \frac{1}{3}$, αυτός ο όρος έχει ένα πρόσθετο μείον, το οποίο θα λέγαμε πως αντιστοιχεί σε ενεργειακές απώλειες. Στη τρίτη περίπτωση, όταν $w = -1$ το πρόσθετο είναι θετικό; κατά κάποιο τρόπο, το ρευστό κερδίζει ενέργεια από την αλληλεπίδραση του με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Θα συζητήσουμε ξανά αυτό το θέμα στο τέλος του κεφαλαίου.

III.2 Πρότυπο VIII ή $A_{3,8}$ ή $SU(1, 1)$

Οι λύσεις που βρέθηκαν σε αυτό το πρότυπο μπορούν να χωριστούν σε δύο περιπτώσεις. Η δομή του κειμένου που ακολουθούμε είναι ίδια με την προηγούμενη ενότητα.

III.2.1 Περίπτωση 1, $m_2 > m_1$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[m_1 dx^2 - 2m_1 \sinh y dx dz + (m_2 - m_1 \sin^2 x) dy^2 - 2m_1 \cos x \sin x \cosh y dy dz + [(m_2 - m_1 \cos^2 x) \cosh^2 y + m_1 \sinh^2 y] dz^2 \right], \quad (7.92)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{2m_2 m_1 \mu_0 a(t)^2 - \kappa(m_2 - m_1)A(t)^2}}{\sqrt{\kappa m_2 m_1 a(t)^2}} \left[\sin x dt \wedge dy - \cos x \cosh(y) dt \wedge dz \right] + A(t) \left[-\cos x dx \wedge dy + \sin x \cosh y dx \wedge dz - \cos x \sinh y dy \wedge dz \right], \quad (7.93)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{2\sqrt{m_2 m_1} \dot{a}(t)}{\sqrt{\kappa} \sqrt{2m_2 m_1 \mu_0 a(t)^2 - \kappa(m_2 - m_1)A(t)^2}} [\sin x dy + \cos x \cosh y dz]. \quad (7.94)$$

Η συνάρτηση $A(t)$ πρέπει να προσδιοριστεί από την εξής πρώτη τάξης διαφορική εξίσωση

$$\dot{A}(t) = \frac{\sqrt{2m_2 m_1 \mu_0 a(t)^2 - \kappa(m_2 - m_1)A(t)^2}}{\sqrt{\kappa m_2 m_1 a(t)^2}}. \quad (7.95)$$

Παρόλο που δε μπορούμε να βρούμε την αναλυτική έκφραση του $A(t)$ ως συνάρτηση του $a(t)$, αυτό δεν επηρεάζει την “απορρόφηση” της ανισοτροπίας, ούτε και την έκφραση για το H^2 . Αυτή η συνάρτηση εμφανίζεται μόνο στον τανυστή Faraday και το τετράρευμα, επομένως για κάθε λύση $a(t)$ των ενεργών εξισώσεων Λ CDM, μια λύση της προηγούμενης εξίσωσης θα μπορεί να δοθεί, αν δύναται, αναλυτικά. Η παράμετρος m_3 εκφράζεται μέσω των m_1 και m_2 ως $m_3 = m_2 - m_1$, έτσι καταλήγουμε στη συνθήκη $m_2 > m_1$. Όπως και πριν, υπάρχει κάτω φράγμα για τον παράγοντα κλίμακας

$$a(t)^2 \geq \frac{\kappa(m_2 - m_1)A(t)^2}{2m_2 m_1 \mu_0}. \quad (7.96)$$

Σχετικά με τις ενεργές εξισώσεις Λ CDM και τα άνω όρια για τον παράγοντα κλίμακας όσον αφορά τις δύο πρώτες καταστατικές εξισώσεις, έχουν την ίδια μορφή με το πρότυπο $VI_{(-1)}$. Η μόνη διαφορά είναι πως η παράμετρος m_2 του προτύπου Type $VI_{(-1)}$ έχει αντικατασταθεί από τη διαφορά $m_2 - m_1$ των παραμέτρων m_2, m_1 του προτύπου $VIII$.

w	$\rho^{(c)}$	H^2	$k_{(eff)}$
0	$-\frac{2}{\kappa(m_2 - m_1)a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^3}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right)$	0
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{\kappa(m_2 - m_1)a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^4}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) + \frac{1}{3(m_2 - m_1)a(t)^2}$	$-\frac{1}{3(m_2 - m_1)} < 0$
-1	$\frac{1}{\kappa(m_2 - m_1)a(t)^2} + \rho_0^{(c)}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} + \rho_0^{(c)} \right) + \frac{1}{(m_2 - m_1)a(t)^2}$	$-\frac{1}{(m_2 - m_1)} < 0$

Πίνακας 7.4: Η πυκνότητα ενέργειας του φορτισμένου ρευστού $\rho^{(c)}$, το τετράγωνο της συνάρτησης Hubble H^2 και η ενεργός χωρική καμπυλότητα $k_{(eff)}$ παρουσιάζονται για τις τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων του φορτισμένου ρευστού: μη-σχετικιστικό $w = 0$, σχετικιστικό $w = \frac{1}{3}$ και σκοτεινή ενέργεια $w = -1$.

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa(m_2 - m_1)\rho_0^{(c)}}{2} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \kappa(m_2 - m_1)\rho_0^{(c)}. \quad (7.97)$$

Η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ισούται με $\rho^{(em)} = \frac{1}{\kappa(m_2 - m_1)a(t)^2} > 0$.

III.2.2 Περίπτωση 2, $m_3 > m_1$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[m_1 dx^2 - 2m_1 \sinh y \, dx dz + (m_3 - m_1 \cos^2 x) dy^2 \right. \\ \left. + 2m_1 \cos x \sin x \cosh y \, dy dz + [(m_3 - m_1 \sin^2 x) \cosh^2 y + m_1 \sinh^2 y] dz^2 \right], \quad (7.98)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{2m_3 m_1 \mu_0 a(t)^2 - \kappa(m_3 - m_1)A(t)^2}}{\sqrt{\kappa m_3 m_1 a(t)^2}} [\cos x \, dt \wedge dy - \sin x \cosh y \, dt \wedge dz] + \\ A(t) [\sin x \, dx \wedge dy + \cos x \cosh y \, dx \wedge dz + \sin x \sinh y \, dy \wedge dz], \quad (7.99)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{2\sqrt{m_3 m_1} \dot{a}(t)}{\sqrt{\kappa} \sqrt{2m_3 m_1 \mu_0 a(t)^2 - \kappa(m_3 - m_1)A(t)^2}} [\cos x \, dy - \sin x \cosh y \, dz]. \quad (7.100)$$

Η συνάρτηση $A(t)$ καθορίζεται από την ίδιας μορφής εξίσωση όπως και πριν με την m_2 να αντικαθίσταται από την m_3 . Η παράμετρος m_2 δίνεται ως συνάρτηση των m_1 και m_3 ως $m_2 = m_3 - m_1$, έτσι προκύπτει η συνθήκη $m_3 > m_1$. Η μέγιστη τιμή για τον παράγοντα κλίμακας και οι ενεργές εξισώσεις είναι ίδιες με εκείνες της προηγούμενης περίπτωσης, όπου το m_2 πρέπει να αντικατασταθεί από το m_3 . Αυτή η μετρική, επιδέχεται μόνο τα τρία αρχικά πεδία Killing του προτύπου Bianchi VIII.

III.3 Πρότυπο IX ή $A_{3,9}$ ή $SU(2)$

Τέλος, παρουσιάζουμε τις λύσεις που βρέθηκαν για το πρότυπο IX. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις.

III.3.1 Περίπτωση 1, $m_2 > m_3$, $m_3 = m_2 - m_4$, $m_4 > 0$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[m_2 dx^2 + 2m_2 \sin y \, dx dz + (m_2 - m_4 \sin^2 x) dy^2 \right. \\ \left. - 2m_4 \cos x \sin x \cos y \, dy dz + [m_2 - m_4 \cos^2 x \cos^2 y] dz^2 \right], \quad (7.101)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{m_2 - m_4} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa m_2 a(t)}} [\sin x \, dt \wedge dy + \cos x \cos y \, dt \wedge dz] + \\ A(t) [-\cos x \, dx \wedge dy + \sin x \cos y \, dx \wedge dz + \cos x \sin y \, dy \wedge dz], \quad (7.102)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{m_4 \sqrt{m_2 - m_4} \dot{a}(t)}{\sqrt{\kappa m_2} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}} [\sin x \, dy + \cos x \cos y \, dz]. \quad (7.103)$$

Η συνάρτηση $A(t)$ θα πρέπει να προσδιοριστεί από τη διαφορική εξίσωση $\dot{A}(t) = \frac{\sqrt{m_2 - m_4} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa m_2 a(t)}}$. Έχουμε εισάγει τη παράμετρο m_4 προς απλοποίηση των εκφράσεων, ενώ η m_1 είναι ίση με την m_2 . Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις υπάρχει κάτω όριο για τον παράγοντα κλίμακας

$$a(t)^2 \geq \frac{\kappa A(t)^2}{m_4 \mu_0}. \quad (7.104)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε τις ενεργές εξισώσεις

w	$\rho^{(c)}$	H^2	$k_{(eff)}$
0	$-\frac{m_4}{\kappa m_2^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^3}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{m_2 + m_4}{4m_2^2 a(t)^2}$	$\frac{m_2 + m_4}{4m_2^2} > 0$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{m_4}{2\kappa m_2^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^4}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{3m_2 + m_4}{12m_2^2 a(t)^2}$	$\frac{3m_2 + m_4}{12m_2^2} > 0$
-1	$\frac{m_4}{2\kappa m_2^2 a(t)^2} + \rho_0^{(c)}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} + \rho_0^{(c)} \right) - \frac{m_2 - m_4}{4m_2^2 a(t)^2}$	$\frac{m_2 - m_4}{4m_2^2} > 0$

Πίνακας 7.5: Η πυκνότητα ενέργειας του φορτισμένου ρευστού $\rho^{(c)}$, το τετράγωνο της συνάρτησης Hubble H^2 και η ενεργός χωρική καμπυλότητα $k_{(eff)}$ παρουσιάζονται για τις τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων του φορτισμένου ρευστού: μη-σχετικιστικό $w = 0$, σχετικιστικό $w = \frac{1}{3}$ και σκοτεινή ενέργεια $w = -1$.

Η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από την έκφραση $\rho^{(em)} = \frac{m_4}{2\kappa m_2^2 a(t)^2} > 0$. Παρατηρούμε πως αυτή η μετρική επιδέχεται μόνο τα τρία αρχικά Killing. Ακόμη ένα χαρακτηριστικό είναι πως η ενεργός χωρική καμπυλότητα για $w = 0$, είναι μη-μηδενική και για την ακρίβεια είναι πάντοτε θετική. Παρόλα αυτά, πρέπει να υπάρχουν όρια για τον παράγοντα κλίμακας.

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa m_2^2 \rho_0^{(c)}}{m_4} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \frac{2\kappa m_2^2 \rho_0^{(c)}}{m_4}. \quad (7.105)$$

III.3.2 Περίπτωση 2, $m_3 > m_2$, $m_2 = m_3 - m_4$, $m_4 > 0$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[m_3 dx^2 + 2m_3 \sin y dx dz + (m_3 - m_4 \cos^2 x) dy^2 + 2m_4 \cos x \sin x \cos y dy dz + [m_3 - m_4 \sin^2 x \cos^2 y] dz^2 \right], \quad (7.106)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{m_3 - m_4} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa m_3 a(t)}} \left[\cos x dt \wedge dy - \sin x \cos y dt \wedge dz \right] + A(t) \left[\sin x dx \wedge dy + \cos x \cos y dx \wedge dz - \sin x \sin y dy \wedge dz \right], \quad (7.107)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{m_4 \sqrt{m_3 - m_4} \dot{a}(t)}{\sqrt{\kappa m_3} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}} [\cos x dy - \sin x \cos y dz]. \quad (7.108)$$

Η συνάρτηση $A(t)$ και οι ενεργές εξισώσεις είναι ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση με μόνη διαφορά την αντικατάσταση του m_2 από το m_3 . Η αρχική παράμετρος m_1 είναι ίση με την m_3 . Αυτή η μετρική επιδέχεται τα ίδια πεδία Killing με την προηγούμενη.

III.3.3 Περίπτωση 3, $m_3 > m_1$, $m_3 = m_1 + m_4$, $m_4 > 0$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[m_1 dx^2 + 2m_1 \sin y dx dz + (m_1 + m_4) dy^2 + [m_1 + m_4 \cos^2 y] dz^2 \right], \quad (7.109)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{m_1} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa (m_1 + m_4) a(t)}} \left[dt \wedge dx + \sin y dt \wedge dz \right] - A(t) \cos y dy \wedge dz, \quad (7.110)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{\sqrt{m_1} m_4 \dot{a}(t)}{\sqrt{\kappa (m_1 + m_4)} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}} [dx + \sin y dz]. \quad (7.111)$$

Η συνάρτηση $A(t)$ πρέπει να προσδιοριστεί από την εξίσωση $\dot{A}(t) = \frac{\sqrt{m_1} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa(m_1 + m_4) a(t)}}$. Η παράμετρος m_2 είναι ίση με την m_3 . Τα ίδια όρια ισχύουν για τον παράγοντα κλίμακας όπως και πριν. Στο παρακάτω πίνακα δίνονται οι ενεργές εξισώσεις.

w	$\rho^{(c)}$	H^2	$k_{(eff)}$
0	$-\frac{m_4}{\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^3}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{m_1 + 2m_4}{4(m_1 + m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{m_1 + 2m_4}{4(m_1 + m_4)^2} > 0$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^4}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{3m_1 + 4m_4}{12(m_1 + m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{3m_1 + 4m_4}{12(m_1 + m_4)^2} > 0$
-1	$\frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \rho_0^{(c)}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} + \rho_0^{(c)} \right) - \frac{m_1}{4(m_1 + m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{m_1}{4(m_1 + m_4)^2} > 0$

Πίνακας 7.6: Η πυκνότητα ενέργειας του φορτισμένου ρευστού $\rho^{(c)}$, το τετράγωνο της συνάρτησης Hubble H^2 και η ενεργός χωρική καμπυλότητα $k_{(eff)}$ παρουσιάζονται για τις τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων του φορτισμένου ρευστού: μη-σχετικιστικό $w = 0$, σχετικιστικό $w = \frac{1}{3}$ και σκοτεινή ενέργεια $w = -1$.

Τέλος, η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχει τη μορφή $\rho^{(em)} = \frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} > 0$. Παρατηρούμε σε αντίθεση με όλες τις άλλες περιπτώσεις, πως αυτή η μετρική επιδέχεται ένα ακόμη πεδίο Killing, $\zeta = \partial_x$, το οποίο σημαίνει πως ανήκει στην υπο-οικογένεια των Τοπικά, Περιστροφόμενων, Συμμετρικών (LRS) χωροχρόνων του προτύπου IX. Η μέγιστη τιμή του παράγοντα κλίμακας για τις δύο πρώτες περιπτώσεις είναι

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa(m_1 + m_4)^2 \rho_0^{(c)}}{m_4} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \frac{2\kappa(m_1 + m_4)^2 \rho_0^{(c)}}{m_4}. \quad (7.112)$$

III.4 Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων

Στη παρούσα εργασία μελετήσαμε υπό ποιές προϋποθέσεις, προκύπτουν δυναμικά ισοδύναμες ενεργές εξισώσεις Λ CDM, θεωρώντας πως η γεωμετρία είναι εκείνη των προτύπων Bianchi. Η πρωταρχική υπόθεση είναι η ύπαρξη μοναδικού παράγοντα κλίμακας, το οποίο συνεπάγεται το “πάγωμα” της ανισοτροπίας των προαναφερθέντων προτύπων. Αυτή είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός σύμμορφου πεδίου Killing, παράλληλου στην τετραταχύτητα των συγκινούμενων παρατηρητών. Από αυτό συνεπάγεται πως ο χωρόχρονος είναι ελεύθερος παραλλακτικών φαινομένων και η θερμοκρασία ενός συγκινούμενου ρευστού ακτινοβολίας, όπως το CMB, θεωρώντας φάσμα μελανού σώματος, είναι ανεξάρτητο της διεύθυνσης παρατήρησης [175], [176]. Το επόμενο βήμα ήταν η αναζήτηση πεδίων τα οποία είναι ικανά να “απορροφήσουν” αυτή την ανισοτροπία, έτσι ώστε να παραμείνουν μόνο οι εξισώσεις του Λ CDM. Αποδείξαμε πως για να συμβεί κάτι τέτοιο πρέπει η ροή των ρευστών να ισούνται με μηδέν και ο αΐχνος, ανισοτροπικός τανυστής να είναι συνάρτηση του τανυστή Ricci $R_{\mu\nu}$ και του αντίστοιχου βαθμωτού R , των χωρικών υπερ-επιφανειών.

Ένα σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση μας ήταν η ομάδα των σταθερών Αυτομορφισμών, η οποία χρησιμοποιήθηκε για το μετασχηματισμό του πίνακα $m_{\mu\nu}$ στην ανάγωγη μορφή του, δηλαδή περιέχει μόνο τις ουσιώδεις σταθερές που χαρακτηρίζουν το χώρο. Παρουσιάσαμε για κάθε πρότυπο τους πίνακες των Αυτομορφισμών $\Lambda^\mu{}_\nu$ και τον αντίστοιχο πίνακα $m_{\mu\nu}$: Το πρότυπο Bianchi I δεν έχει καμία παραμένουσα σταθερά, τα πρότυπα II, V έχουν από μια, τα πρότυπα VIII, IX έχουν τρεις, ενώ τα υπόλοιπα (III, IV, VI_(h), VII_(h)) από δύο. Ο μέγιστος αριθμός ανήκει στα πρότυπα VIII, IX έτσι, κατά κάποιο τρόπο, αυτά αποτελούν τις πιο “πλούσιες” γεωμετρίες του συνόλου. Η τελική μορφή της μετρικής είναι η πιο απλή, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Θεωρούμε πως αυτό μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμο, αν οι λύσεις συγκριθούν με παρατηρησιακά δεδομένα, εφόσον οι σταθερές που παραμένουν είναι μόνο οι ουσιώδεις και αναμένουμε να σχετίζονται με κάποια φυσική ποσότητα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του προτύπου VI₍₋₁₎ η μόνη παραμένουσα σταθερά είναι η m_2 η οποία εμφανίζεται στην ενεργό καμπυλότητα k_{eff} . Στην περίπτωση μη-χρήσης των Αυτομορφισμών, εκτός της δυσκολίας στις πράξεις, εμφανίζονται πολλές

σταθερές από τις οποίες είναι δύσκολο να απομονώσουμε τις ουσιώδεις. Για του λόγου το αληθές, υποθέτοντας την ύπαρξη ενός ελεύθερου βαθμωτού πεδίου, αναπαράξαμε μια ήδη γνωστή λύση. Η μορφή που παρουσιάσαμε έχει μόνο μια ουσιώδη σταθερά και ισχυριζόμαστε πως είναι η πιο γενική λύση που μπορεί να βρεθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Η παράμετρος αυτή εμφανίζεται στην ενεργό καμπυλότητα $k_{(eff)} = -\frac{1}{2m_2}$ και εφόσον η m_2 είναι αυστηρά θετική (ώστε ο χωρόχρονος να έχει υπογραφή Lorentz) ισχύει $k_{(eff)} < 0$.

Ο δεύτερος και βασικός σκοπός ήταν η “απορρόφηση” της ανισοτροπίας μέσω του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Ένας τρόπος για να υπάρξει ένα τέτοιο ενδεχόμενο είναι να υποθέσουμε παράλληλα την ύπαρξη ενός φορτισμένου ρευστού το οποίο αλληλεπιδρά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η δευτερογενής υπόθεση ήταν πως αυτό το ρευστό είναι ιδανικό με καταστατική εξίσωση $P^{(c)} = w\rho^{(c)}$. Συνεπώς, η ολική ροή και ο άιχνος ανισοτροπικός τανυστής, ταυτίζονται με εκείνα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Μελετήσαμε τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων, μη-σχετικιστικό ($w = 0$), σχετικιστικό ($w = \frac{1}{3}$) και σκοτεινής ενέργειας ($w = -1$) για το φορτισμένο ρευστό. Οι λύσεις που βρέθηκαν αντιστοιχούν στα πρότυπα $VI_{(-1)}$, $VIII$, IX .

Σχετικά με την περίπτωση του $VI_{(-1)}$: Από τις δύο αρχικές παραμέτρους, μόνο μια παρέμεινε επί της λύσης. Με σκοπό η λύση να είναι πραγματική, ο παράγοντας κλίμακας $a(t)^2$ πρέπει να είναι κάτω φραγμένος. Αυτό το όριο, εξαρτάται από τη γεωμετρική παράμετρο, το σταθερό μαγνητικό πεδίο και δύο σταθερές της φύσης. Η ύπαρξη ενός τέτοιου ορίου μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα σύμπαν χωρίς αρχική ανωμαλία (Big Bang). Η ενεργός καμπυλότητα είναι ίση με μηδέν στην περίπτωση $w = 0$; συνεπώς πρόκειται για ισοδύναμο πρότυπο με εκείνο του επίπεδου FLRW. Οι άλλες δύο περιπτώσεις αντιστοιχούν σε ανοιχτό FLRW, $k_{(eff)} < 0$. Η γεωμετρική παράμετρος εμφανίζεται και στις δύο περιπτώσεις. Επιπλέον, όταν $w = 0$, $w = \frac{1}{3}$, με σκοπό η ενεργειακή πυκνότητα του φορτισμένου ρευστού να είναι θετική πρέπει να υπάρχει και άνω όριο στον παράγοντα κλίμακας, διαφορετικό σε κάθε περίπτωση. Αυτό το όριο εξαρτάται από το κ και κάποια σταθερά η οποία σχετίζεται με την ενεργειακή πυκνότητα του ρευστού. Η λύση επιδέχεται μόνο τα τρία πεδία Killing τα οποία αντιστοιχούν στις ομογενείς υπερ-επιφάνειες.

Σχετικά με το πρότυπο $VIII$, δύο περιπτώσεις εμφανίστηκαν: από τις τρεις αρχικές παραμέτρους, μόνο δύο παρέμειναν σε κάθε περίπτωση. Μια πρώτης τάξης, διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $A(t)$ μένει να επιλυθεί, ώστε να έχουμε την ακριβή μορφή του τανυστή Faraday και της πυκνότητας τετραρεύματος. Αυτό ωστόσο δεν επηρεάζει την όλη ανάλυση περί “απορρόφησης” της ανισοτροπίας. Αυτή η συνάρτηση είναι συνδεδεμένη με το μαγνητικό πεδίο. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση εμφανίζεται κάτω όριο το οποίο εξαρτάται από τις δύο γεωμετρικές παραμέτρους, τη συνάρτηση $A(t)$ και τις δύο σταθερές κ , μ_0 . Για $w = 0$ η ενεργός καμπυλότητα μηδενίζεται, συνεπώς έχουμε το ισοδύναμο επίπεδο FLRW, ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις προκύπτει και πάλι ανοιχτό FLRW. Στην ενεργό καμπυλότητα των ανοιχτών χώρων, μόνο η διαφορά των δύο γεωμετρικών παραμέτρων εμφανίζεται. Ύπαρξη άνω ορίου εμφανίζεται και εδώ για τον παράγοντα κλίμακας, στις περιπτώσεις $w = 0$ και $w = \frac{1}{3}$. Τα πεδία Killing των λύσεων είναι μόνο αυτά του αντίστοιχου προτύπου.

Τέλος, στην περίπτωση του προτύπου IX , υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: σε κάθε μια παραμένουν δύο γεωμετρικές παράμετροι. Όπως και στο πρότυπο $VIII$, παραμένει μια συνάρτηση προς προσδιορισμό και υπάρχει κάτω φράγμα για τον παράγοντα κλίμακας. Για κάθε περίπτωση και είδος ρευστού, η ενεργός καμπυλότητα είναι θετική, συνεπώς αντιστοιχεί σε κλειστό FLRW. Σε συμφωνία με τα προηγούμενα αποτελέσματα, υπάρχουν άνω όρια για τον παράγοντα κλίμακας στις περιπτώσεις σχετικιστικού και μη-σχετικιστικού φορτισμένου ρευστού. Στην τρίτη περίπτωση, ένα επιπλέον πεδίο Killing εμφανίζεται με την προκύπτουσα μετρική να ανήκει στην οικογένεια των (LRS) προτύπων.

Παρατηρούμε λοιπόν πως βρέθηκαν με ενεργό τρόπο, όλες οι γεωμετρίες FLRW, κλειστή, ανοιχτή και επίπεδη. Ωστόσο, αυτό προκύπτει με κάποιο κόστος, δηλαδή, την ύπαρξη άνω ορίων για τον παράγοντα κλίμακας. Θα έπρεπε οι παραπάνω λύσεις να χαρακτηρίζονται ως μη-φυσικές; Αν η πυκνότητα του φορτισμένου ρευστού ήταν καθαρά αρνητική για κάθε χρονική στιγμή, τότε η αλάντωση θα ήταν ναι. Στις περιπτώσεις που μελετήσαμε εδώ, η εξάρτηση της $\rho^{(c)}$ από τον παράγοντα κλίμακας είναι τέτοια ώστε, ενώ αρχικά είναι θετική, όταν ο $a(t)$ ξεπεράσει τα συγκεκριμένα όρια, αυτή γίνεται αρνητική. Η εξήγηση αυτής της συμπεριφοράς μπορεί ίσως να εντοπιστεί στην ισορροπία μεταξύ του χαρακτήρα “μάζας” του φορτισμένου ρευστού, ο οποίος δίνει συνεισφορά $\frac{1}{a(t)^3}$ ή $\frac{1}{a(t)^4}$ (αν αναφερόμαστε σε μη-σχετικιστικό ή σχετικιστικό ρευστό αντίστοιχα), και το χαρακτήρα του “φορτίου” ο οποίος συνεισφέρει ως $-\frac{1}{a(t)^2}$ και σχετίζεται με

τον όρο $\int E^i J_i dt$. Το πρόβλημα της αρνητικής ενεργειακής πυκνότητας εντοπίζεται στο συνδυασμό του αρνητικού προσήμου και της δύναμης του παράγοντα κλίμακας στον όρο $\int E^i J_i dt$. Το αρνητικό πρόσημο μπορεί να ερμηνευθεί ως ενεργειακές απώλειες λόγω της αλληλεπίδρασης με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Με σκοπό να γίνει πιο ξεκάθαρο, ας θεωρήσουμε την περίπτωση $w = 0$ για το πρότυπο $VI_{(-1)}$ και την ίδια στιγμή, ας υποθέσουμε πως ο παράγοντας κλίμακας βρίσκεται εντός των επιτρεπτών ορίων για συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , $a(t) = a(t_0)$: για ένα αφόρτιστο ρευστό, η ενεργειακή πυκνότητα έχει τη μορφή

$$\rho^{(d)} = \frac{\rho_0}{a(t_0)^3}, \quad (7.113)$$

ενώ για ένα φορτισμένο με την ίδια καταστατική εξίσωση, έχουμε

$$\rho^{(c)} = \frac{\rho_0}{a(t_0)^3} - \frac{2}{\kappa m_2 a(t_0)^2}, \quad (7.114)$$

όπου θεωρήσαμε πως και στις δύο περιπτώσεις, τα ρευστά έχουν την ίδια αρχική ενεργειακή πυκνότητα ρ_0 . Είναι προφανές πως $\rho^{(c)} < \rho^{(d)}$ συνεπώς, κάποιο τμήμα της ενέργειας έχει καταναλωθεί στην αλληλεπίδραση. Όσον αφορά τη δύναμη στην οποία εμφανίζεται ο παράγοντας κλίμακας στον όρο $\int E^i J_i dt$, αυτή συνδέεται άμεσα με την “απορρόφηση” της ανισοτροπίας και για αυτό είναι ίδια σε κάθε περίπτωση καταστατικής εξίσωσης. Μάλιστα, είναι ο όρος που συνεισφέρει και στην ενεργό καμπυλότητα. Για να κλείσουμε αυτή την παράγραφο, οι λύσεις θα πρέπει να θεωρούνται φυσικά αποδεκτές, μόνο για συγκεκριμένο χρονικό (και επομένως για παράγοντα κλίμακας) διάστημα.

Θεωρήσαμε και την περίπτωση που το φορτισμένο ρευστό έχει την ίδια καταστατική εξίσωση με ένα ρευστό σκοτεινής ενέργειας. Σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, δεν υπάρχει το πρόβλημα της αρνητικής ενεργειακής πυκνότητας, λόγω του θετικού προσήμου στον όρο $\frac{1}{a(t)^2}$. Φαίνεται πως σε αυτή την περίπτωση το ρευστό απορροφά ενέργεια από την αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ας τονίσουμε ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο σχετικά με την περίπτωση αυτής της καταστατικής εξίσωσης: θεωρούμε το πρότυπο $VI_{(-1)}$, όπου η πρώτη εξίσωση Friedmann και η ενεργειακή πυκνότητα του φορτισμένου ρευστού έχουν τη μορφή

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} + \rho_0^{(c)} \right) + \frac{1}{m_2 a(t)^2}, \quad (7.115)$$

$$\rho^{(c)} = \frac{1}{\kappa m_2 a(t)^2} + \rho_0^{(c)}. \quad (7.116)$$

Φαίνεται πως υπάρχει η δυνατότητα να μη λάβουμε υπόψη μας το αφόρτιστο κοσμολογικό ρευστό που αναπαριστά την σκοτεινή ενέργεια, ή αλλιώς να ταυτοποιήσουμε ως $\rho_0^{(\Lambda)}$ την $\rho_0^{(c)}$; οι εξισώσεις θα είναι και πάλι δυναμικά ισοδύναμες με εκείνες του Λ CDM όπου έχουμε ενεργά, ανοιχτή γεωμετρία FRLW.

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) + \frac{1}{m_2 a(t)^2}, \quad (7.117)$$

$$\rho^{(c)} = \frac{1}{\kappa m_2 a(t)^2} + \rho_0^{(\Lambda)}. \quad (7.118)$$

Επομένως, για $a(t) \rightarrow 0$, η ενεργειακή πυκνότητα του φορτισμένου ρευστού, συμπεριφέρεται ως $\frac{1}{\kappa m_2 a(t)^2}$, με άλλα λόγια ως η ενεργός καμπυλότητα, ενώ για $a(t) \rightarrow \infty$ ακολουθεί τη συμπεριφορά ενός ρευστού σκοτεινής. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως υπάρχει η πιθανότητα το ρευστό της σκοτεινής ενέργειας να είναι ηλεκτρομαγνητικά φορτισμένο.

Ας σχολιάσουμε επίσης κάτι σχετικά με την νόρμα της πυκνότητας ρεύματος J^i : θεωρούμε το πρότυπο $VI_{(-1)}$ στο οποίο υπάρχει η ακριβής μορφή.

$$|J| = \sqrt{\frac{4}{\kappa m_2 (-\kappa m_2 \beta^2 + 2\mu_0 a(t)^2)}} H(t). \quad (7.119)$$

Σε παράγοντες κλίμακας μακριά από το κάτω όριο ισχύει

$$|J| \sim \frac{1}{a(t)} H(t). \quad (7.120)$$

Αν για παράδειγμα μελετάμε την εποχή στην οποία κυριαρχεί η ακτινοβολία, $H^2 \sim \frac{1}{a(t)^4} \Rightarrow |J| \sim \frac{1}{a(t)^3}$, επομένως συμπεριφέρεται ως μη σχετικιστική ύλη. Ενδεχομένως να υπάρχουν αποτυπώματα αυτής της πυκνότητας ρεύματος στο CMB, ωστόσο πρέπει να εξετάσουμε πιο ενδελεχώς αυτή την ιδέα σε κάποια μελλοντική εργασία.

Εν κατακλείδι, σε μαθηματικό επίπεδο, θεωρούμε πως απαντήσαμε (αρνητικά) στο ερώτημα του κατά πόσο, η μεγάλης κλίμακας ισοτροπία του CMB, οδηγεί στη θεώρηση της γεωμετρίας FLRW ως το μοναδικό πρότυπο. Φυσικά, αυτό ισχύει λαμβάνοντας υπόψη όλους τους περιορισμούς που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Κεφάλαιο 8

Η απειροδιάστατη ομάδα συμμετρίας των εξισώσεων Friedmann

I Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια έχουμε ήδη εκθειάσει τη σημαντικότητα της μεθόδου Lie. Μια ομάδα απειροστών μετασχηματισμών η οποία αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις ενός δυναμικού συστήματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση νόμων διατήρησης. Επίσης, αν μια λύση του συστήματος είναι γνωστή, τότε οι συμμετρίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να παραχθούν νέες λύσεις. Ένα παράδειγμα είναι η ιδιότητα Gasperini-Veneziano του πεδίου dilaton [208], σε ένα χωρικά επίπεδο χωρόχρονο Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW): πρόκειται για μια διακριτή συμμετρία η οποία συνδέεται με μια συνεχή συμμετρία [209]. Συγκεκριμένα, η $O(d, d)$ αναλλοιώτητα του διδιάστατου γραμμικού συστήματος με υπογραφή Lorentz, μπορεί να μετασχηματιστεί στη δυϊκή αναλλοιώτητα Gasperini-Veneziano [210].

Μια οικογένεια μετασχηματισμών οι οποίοι συνδέουν διαφορετικές πληθωριστικές συμπεριφορές υπό την παρουσία ενός βαθμωτού πεδίου μελετήθηκαν στην εργασία [212]. Σχετικά με μια εναλλακτική μέθοδο αναπαραγωγής πληθωριστικών λύσεων από άλλες γνωστές λύσεις παραθέτουμε τη δημοσίευση [213]. Πιο πρόσφατα, [214], παρουσιάστηκε ένας νέος σημειακός μετασχηματισμός ο οποίος αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις ενός χωρικά επίπεδου FLRW χωροχρόνου υπό την παρουσία ιδανικού ρευστού.

Σε αυτή την εργασία θεωρούμε χωρόχρονο FLRW υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς και ενός ιδανικού ρευστού με τυχαία αλλά δοθείσα καταστατική εξίσωση. Όπως θα αποδείξουμε, υπάρχουν τρεις απειροδιάστατες οικογένειες συμμετριών οι οποίες αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις. Ως αποτέλεσμα, γενικεύουμε κάποια προηγούμενα ευρήματα και επιπλέον, με τις νέες αυτές συμμετρίες παράγουμε νέες λύσεις ξεκινώντας από κάποια γνωστή.

Η δομή που ακολουθεί είναι η εξής:

1. Οι κοσμολογικές εξισώσεις και οι συμμετρίες τους.
2. Αναπαραγωγή γνωστών αποτελεσμάτων.
3. Παραγωγή νέων λύσεων από ήδη γνωστές.
4. Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων.

II Οι κοσμολογικές εξισώσεις και οι συμμετρίες τους

Ας ξεκινήσουμε από το στοιχείο μήκους Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (\text{II.1})$$

σε συνδυασμό με ένα ιδανικό ρευστό ενεργειακής πυκνότητας ρ και πίεσης P . Ο τανυστής ενέργειας-ορμής θα έχει τη μορφή

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (\text{II.2})$$

όπου $u_\mu = (N, 0, 0, 0)$ η τετραταχύτητα των συγκινούμενων παρατηρητών, $u^\mu u_\mu = -1$.

Το σύστημα των προς επίλυση εξισώσεων αποτελείται από τις εξισώσεις Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (\text{II.3})$$

σε συνδυασμό με τις εξισώσεις συνέχειας $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (όπου θεωρούμε μονάδες $G = c = 1$). Οι τελευταίες, με ταυτόχρονη χρήση της χρονικής συνιστώσας των (II.3), αποτελούν ένα σύστημα από πρώτης τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$E_1 := \Lambda - \frac{3k}{a^2} + 8\pi\rho - 3 \left(\frac{\dot{a}}{Na} \right)^2 = 0, \quad (\text{II.4})$$

$$E_2 := 3 \frac{\dot{a}}{a} (P + \rho) + \dot{\rho} = 0. \quad (\text{II.5})$$

Από τις χωρικές συνιστώσες των εξισώσεων (II.3) μόνο μια είναι ανεξάρτητη

$$E_3 := \Lambda - \frac{k}{a^2} - 8\pi P - 3 \left(\frac{\dot{a}}{Na} \right)^2 - \frac{2}{N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{Na} \right) = 0, \quad (\text{II.6})$$

η οποία ωστόσο, μπορεί να παραχθεί με τη χρήση των (II.4), (II.5) και τις παραγώγους αυτών.

II.1 Συμμετρίες οι οποίες διατηρούν την καταστατική εξίσωση

Ξεκινούμε την ανάλυση μας θεωρώντας δεδομένη καταστατική εξίσωση, συνεπώς η πίεση P θεωρείται ως συνάρτηση της ενεργειακής πυκνότητας ρ στις εξισώσεις (II.4)-(II.6). Ως αποτέλεσμα, σε αυτή την περίπτωση δεν λαμβάνουμε υπόψη μεταβολές ως προς τη μεταβλητή P . Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι $x = (N, a, \rho)$ και ο αντίστοιχος γεννήτορας είναι της μορφής

$$X = \chi(t, N, a, \rho) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t, N, a, \rho) \frac{\partial}{\partial N} + \xi^2(t, N, a, \rho) \frac{\partial}{\partial a} + \xi^3(t, N, a, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (\text{II.7})$$

Το σύστημα μας αποτελείται από δύο εξισώσεις πρώτης τάξης, $E_1 = 0$ και $E_2 = 0$. Όπως έχουμε αναφέρει, η συνθήκη συμμετρίας απαιτεί η δράση του επεκτεταμένου γεννήτορα πάνω στις εξισώσεις να είναι μηδέν επί των εξισώσεων. Αυτό μπορεί να τυποποιηθεί ως εξής: απαιτούμε η δράση του επεκτεταμένου γεννήτορα να είναι ένα πολλαπλάσιο των εξισώσεων

$$\text{pr}^2 X(E_1) = (\sigma_1 \dot{a} + \sigma_2 \dot{\rho} + \sigma_3) E_1 + (\sigma_4 \dot{a}^2 + \sigma_5 \dot{a} + \sigma_6) E_2, \quad (\text{II.8a} \square)$$

$$\text{pr}^2 X(E_2) = (\sigma_7 \dot{a} + \sigma_8 \dot{\rho} + \sigma_9) E_1 + \left(\sigma_{10} \dot{a}^2 + \sigma_{11} \dot{a} + \sigma_{12} \dot{\rho} + \sigma_{13} \dot{N} + \sigma_{14} \right) E_2, \quad (\text{II.8b} \square)$$

όπου όλα τα σ_i , $i = 1, \dots, 14$ είναι συναρτήσεις των t , a , ρ και N . Η εκπεφρασμένη εξάρτηση από τις παραγώγους των $\dot{a}$, $\dot{\rho}$ και $\dot{N}$ στο δεξιό μέλος των (II.8) έχει επιλεγθεί έτσι ώστε να είναι σε συμφωνία με την τάξη όρων που προκύπτουν στο αριστερό μέλος. Εφόσον οι συναρτήσεις χ και ξ δεν εξαρτώνται από τις παραγώγους, οι συντελεστές των όρων που περιλαμβάνουν παραγώγους στις (II.8) πρέπει να είναι ξεχωριστά ίσες με μηδέν. Ως αποτέλεσμα, προκύπτει ένα σύνολο από μερικές διαφορικές εξισώσεις για τα χ , ξ και αλγεβρικές για τα σ_i .

Το γενικό άνυσμα που ικανοποιεί τις εξισώσεις (II.8) ανήκει σε κάποια από τις εξής τρεις κατηγορίες:

1. Το άνυσμα

$$X_1 = \chi_1(t)\chi_2(a, \rho)\frac{\partial}{\partial t} - N\dot{\chi}_1(t)\chi_2(a, \rho)\frac{\partial}{\partial N}, \quad (\text{II.9})$$

με $\chi_1(t)$ τυχαία συνάρτηση, ενώ η $\chi_2(a, \rho)$ πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$a\frac{\partial\chi_2}{\partial a} - 3(P(a, \rho) + \rho)\frac{\partial\chi_2}{\partial\rho} = 0. \quad (\text{II.10})$$

Η ειδική λύση $\chi_2 = \text{σταθερά}$ οδηγεί στο γεννήτορα αναπαραμετροποίησης

$$X_{par} = \chi_1(t)\frac{\partial}{\partial t} - N\dot{\chi}_1(t)\frac{\partial}{\partial N}. \quad (\text{II.11})$$

Περιγράφει την γνωστή ιδιότητα των εξισώσεων (II.4), (II.5) και (II.6) να είναι αναλλοίωτες κάτω από τυχαίες αλλαγές της χρονικής μεταβλητής: αυτή η συμμετρία είναι παρούσα σε όλα τα κοσμολογικά συστήματα [217].

2. Η δεύτερη περίπτωση χαρακτηρίζεται από τον γεννήτορα

$$X_2 = \frac{4\pi a^2 N f(a, \rho)}{3k - a^2(\Lambda + 8\pi\rho)}\frac{\partial}{\partial N} + f(a, \rho)\frac{\partial}{\partial\rho}, \quad (\text{II.12})$$

υπό τη συνθήκη

$$3f(a, \rho)\left(\frac{\partial P}{\partial\rho} + 1\right) - 3\frac{\partial f}{\partial\rho}(P(a, \rho) + \rho) + a\frac{\partial f}{\partial a} = 0. \quad (\text{II.13})$$

3. Τέλος, έχουμε το γεννήτορα συμμετρίας

$$\begin{aligned} X_3 = N \left[\frac{\partial\xi}{\partial a} - \frac{3}{a}(P(a, \rho) + \rho)\frac{\partial\xi}{\partial\rho} + \frac{a(12\pi P(a, \rho) + 4\pi\rho - \Lambda)}{a^2(\Lambda + 8\pi\rho) - 3k}\xi(a, \rho) \right] \frac{\partial}{\partial N} \\ + \xi(a, \rho)\frac{\partial}{\partial a} - \frac{3(P(a, \rho) + \rho)}{a}\xi(a, \rho)\frac{\partial}{\partial\rho}, \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

όπου $\xi(a, \rho)$ μια τυχαία συνάρτηση.

Παρατηρούμε επίσης πως οι παραπάνω γεννήτορες είναι ταυτοτικά συμμετρίες και της εξίσωσης E_3

$$\text{pr}^2 X_i(E_3) = \Sigma^j E_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (\text{II.15})$$

όπου Σ^i πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις.

Υπάρχουν λοιπόν τρεις διαφορετικές απειροδιάστατες ομάδες συμμετρίας. Μπορεί ναδειχθεί πως, μέσω των συνθηκών (II.10) και (II.13), οι υποάλγεβρες X_1 , X_2 και X_3 είναι ξεχωριστά κλειστές. Για παράδειγμα, ο μεταθέτης δύο διαφορετικών γεννητόρων του είδους X_1 , είναι και πάλι άνυσμα του είδους X_1 . Σχετικά με τους υπόλοιπους μεταθέτες έχουμε: $[X_1, X_2]$ είναι ένα X_1 άνυσμα, $[X_2, X_3]$ είναι του είδους X_3 , ενώ $[X_1, X_3] = 0$ μέσω της (II.13).

Σε όλα τα παραπάνω βήματα, θεωρήσαμε $P = P(a, \rho)$. Ωστόσο, η διαδικασία μπορεί να γενικευτεί ώστε να περιλαμβάνει μια καταστατική εξίσωση η οποία εμπεριέχει τη συνάρτηση Hubble. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε πως η πίεση είναι $P = P(a, \rho, \frac{\dot{a}}{N})$. Ο συνδυασμός $\frac{\dot{a}}{N}$ έχει επιλεγεί καθώς είναι βαθμωτό κάτω από χρονικούς μετασχηματισμούς και εφόσον η συνάρτηση Hubble σε γενική βαθμίδα έχει τη μορφή $H = \frac{1}{N}\frac{\dot{a}}{a}$. Ας υποθέσουμε για απλότητα πως υπάρχει ένας όρος σε κάποια δύναμη,

$$P = P_1(a, \rho) + P_2(a, \rho)\left(\frac{\dot{a}}{N}\right)^\mu. \quad (\text{II.16})$$

Με τη χρήση μιας τέτοιας έκφρασης, θεωρώντας επίσης $P_2 \propto a^{-\mu}$, μπορεί να εμφανιστεί μια εξάρτηση της μισοστής δύναμης της συνάρτησης Hubble. Μπορεί να αποδειχθεί πως οι παρακάτω γεννήτορες παράγουν συμμετρίες των εξισώσεων:

1. Ο γεννήτορας X_1 της (II.9) υπό τη συνθήκη

$$a \frac{\partial \chi_2}{\partial a} - 3 \left[\rho + P_1(a, \rho) + 3P_2(a, \rho)\Sigma(a, \rho)^{\mu/2} \right] \frac{\partial \chi_2}{\partial \rho} = 0. \quad (\text{II.17})$$

2. Ο X_2 της (II.12) για οποιαδήποτε λύση της συνθήκης

$$\begin{aligned} 3f(a, \rho) \left[\frac{\partial P_1}{\partial \rho} + 1 + \Sigma(a, \rho)^{\mu/2} \frac{\partial P_2}{\partial \rho} + \frac{4\mu\pi}{3} a^2 \Sigma(a, \rho)^{\frac{\mu-2}{2}} P_2(a, \rho) \right] \\ - 3 \left[P_1(a, \rho) + \rho + P_2(a, \rho)\Sigma(a, \rho)^{\mu/2} \right] \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial a} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Η σύγκριση με τις προηγούμενες περιπτώσεις είναι εμφανής, καθώς θέτοντας $P_2 = 0$ στις (II.17) και (II.18) οδηγούμαστε στις (II.10) και (II.13) αντίστοιχα.

3. Τέλος, έχουμε το γεννήτορα συμμετρίας

$$\begin{aligned} X_3 = N \left[\frac{\partial \xi}{\partial a} - \frac{3(P_1 + P_2 \Sigma(a, \rho)^{\mu/2} + \rho)}{a} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \frac{a(12\pi(P_1 + P_2 \Sigma(a, \rho)^{\mu/2}) + 4\pi\rho - \Lambda)}{3\Sigma(a, \rho)} \xi(a, \rho) \right] \frac{\partial}{\partial N} \\ + \xi(a, \rho) \frac{\partial}{\partial a} - \frac{3(P_1 + P_2 \Sigma(a, \rho)^{\mu/2} + \rho)}{a} \xi(a, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

με $\xi(a, \rho)$ μια τυχαία συνάρτηση, όπου για απλότητα έχουμε θέσει $\Sigma(a, \rho) = \frac{1}{3}a^2(\Lambda + 8\pi\rho) - k$ σε όλες τις προηγούμενες σχέσεις. Προφανώς, θέτοντας $P_2 = 0$, επιστρέφουμε και πάλι στην προηγούμενη περίπτωση και το γεννήτορα (II.14).

II.2 Συμμετρίες των εξισώσεων για διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις

Μέχρι στιγμής έχουμε συζητήσει την αναλλοiotητα των εξισώσεων για μια δεδομένη καταστατική εξίσωση. Ωστόσο, σε αυτή την ενότητα θα επιτρέψουμε το P να είναι δυναμική μεταβλητή. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα ανύσματα συμμετρίας ώστε να απεικονίσουμε γνωστές λύσεις με απλή καταστατική εξίσωση, σε πιο περίπλοκες.

Θεωρούμε τον γεννήτορα

$$\begin{aligned} X = \chi(t, N, a, \rho, P) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t, N, a, \rho, P) \frac{\partial}{\partial N} + \xi^2(t, N, a, \rho, P) \frac{\partial}{\partial a} + \xi^3(t, N, a, \rho, P) \frac{\partial}{\partial \rho} \\ + \xi^4(t, N, a, \rho, P) \frac{\partial}{\partial P}. \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Ελεγκτίνουμε λοιπόν τον γεννήτορα με μια επιπλέον συνιστώσα, ∂_P , ενώ και οι συντελεστές μπορούν να εξαρτώνται και από το P . Η συνθήκη συμμετρίας έχει τη μορφή

$$\text{pr}^2 X(E_1) = (\sigma_1 \dot{a} + \sigma_2 \dot{\rho} + \sigma_3) E_1 + (\sigma_4 \dot{a}^2 + \sigma_5 \dot{a} + \sigma_6) E_2 \quad (\text{II.21a} \square)$$

$$\text{pr}^2 X(E_2) = (\sigma_7 \dot{a} + \sigma_8 \dot{\rho} + \sigma_9) E_1 + (\sigma_{10} \dot{a}^2 + \sigma_{11} \dot{a} + \sigma_{12} \dot{\rho} + \sigma_{13} \dot{N} + \sigma_{14} \dot{P} + \sigma_{15}) E_2, \quad (\text{II.21b} \square)$$

με τη διαφορά να έγκειται στην εισαγωγή ενός επιπλέον όρου γραμμικού στο $\dot{P}$.

Οι γεννήτορες που προκύπτουν είναι

1. Το ανυσματικό πεδίο X_{par} , (II.11).

2. Ο γεννήτορας συμμετρίας

$$X_4 = X_2 + \left[(P + \rho) \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{a}{3} \frac{\partial f}{\partial a} - f(a, \rho) \right] \frac{\partial}{\partial P}, \quad (\text{II.22})$$

όπου ο X_2 δίνεται από την (II.12), με τη διαφορά πως η συνάρτηση $f(a, \rho)$ που εμφανίζεται εδώ δεν είναι δεσμευμένη από τη συνθήκη (II.13): είναι μια τυχαία συνάρτηση.

3. Ο γεννήτορας

$$\begin{aligned} X_5 = N & \left[\frac{\partial \sigma}{\partial a} - \frac{3(P + \rho)}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} - \frac{a(\Lambda + 8\pi\rho)}{a^2(\Lambda + 8\pi\rho) - 3k} \sigma(a, \rho) \right] \frac{\partial}{\partial N} + \sigma(a, \rho) \frac{\partial}{\partial a} \\ & + \left[\frac{3(P + \rho)^2}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} - (P + \rho) \frac{\partial \sigma}{\partial a} + \frac{(P + \rho)}{a} \sigma(a, \rho) \right] \frac{\partial}{\partial P}, \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

όπου $\sigma(a, \rho)$ ακόμη μια τυχαία συνάρτηση.

Επομένως, εμφανίστηκαν δύο επιπλέον γεννήτορες οι οποίοι περιλαμβάνουν μετασχηματισμούς στο επίπεδο της πίεσης. Όσον αφορά την άλγεβρα, για $X_4^{(f)}$ και $X_5^{(\sigma)}$ με συναρτήσεις $f(a, \rho)$ και $\sigma(a, \rho)$ αντίστοιχα, έχουμε:

$$[X_4^{(f)}, X_5^{(\sigma)}] = - \left(X_4^{(\tilde{f})} + X_5^{(\tilde{\sigma})} \right),$$

όπου $\tilde{f}(a, \rho)$ και $\tilde{\sigma}(a, \rho)$ είναι συναρτήσεις οι οποίες συνδέονται με τις $f(a, \rho)$ και $\sigma(a, \rho)$ μέσω των διαφορικών εξισώσεων

$$\sigma(a, \rho) \frac{\partial f}{\partial a} = \tilde{f}(a, \rho), \quad f(a, \rho) \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = -\tilde{\sigma}(a, \rho).$$

III Αναπαραγωγή γνωστών αποτελεσμάτων

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την σύνδεση των αποτελεσμάτων μας με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας και τον τρόπο με τον οποίο αυτά γενικεύονται.

Πρόσφατα, μια νέα συμμετρία των εξισώσεων Friedmann για τη περίπτωση χωρικά επίπεδου FLRW χωροχρόνου, χωρίς την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς και με καταστατική εξίσωση $P = w\rho$, μελετήθηκε στην εργασία [214]. Ας αποδείξουμε με ποιον τρόπο, αυτή είναι συγκεκριμένη περίπτωση που προκύπτει από τον παραπάνω γεννήτορα X_3 όπως αυτός είναι εκφρασμένος στην (II.14). Ο μετασχηματισμός συμμετρίας που παρουσιάστηκε στην [214] είναι:

$$\tilde{a} = a^s, \quad \tilde{\rho} = a^{-3(w+1)(s-1)}\rho, \quad d\tilde{t} = sa^{\frac{3}{2}(w+1)(s-1)}dt, \quad (\text{III.1})$$

όπου $s = \text{σταθερή}$ είναι η παράμετρος του μετασχηματισμού. Αυτός ο μετασχηματισμός αποτελεί συμμετρία των εξισώσεων Friedmann στη χρονική βαθμίδα $N = 1$. Στον δικό μας φορμαλισμό, όπου χρησιμοποιούμε γενική χρονική βαθμίδα, οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να θεωρηθούν ως αλλαγές του N , ενώ το t δεν αλλάζει. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\tilde{N} = sa^{\frac{3}{2}(w+1)(s-1)}N, \quad \tilde{t} = t. \quad (\text{III.2})$$

Ο γεννήτορας συμμετρίας θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\tilde{t}}{ds} \Big|_{s=1} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \left(\frac{d\tilde{N}}{ds} \Big|_{s=1} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{N}} + \left(\frac{d\tilde{a}}{ds} \Big|_{s=1} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{a}} + \left(\frac{d\tilde{\rho}}{ds} \Big|_{s=1} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} = \\ & N \left(1 + \frac{3}{2}(w+1) \ln(a) \right) \frac{\partial}{\partial N} + a \ln(a) \frac{\partial}{\partial a} - 3(w+1)\rho \ln(a) \frac{\partial}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

Όμως, αυτός είναι ο γεννήτορας που θα αποκτήσουμε, αν στο γεννήτορα X_3 , θέσουμε $P = w\rho, k = \Lambda = 0$ και $\xi(a, \rho) = a \ln(a)$.

Μπορούμε τώρα να δούμε πως θα γενικευθεί το προηγούμενο αποτέλεσμα στην περίπτωση, των χωρικά καμπυλομένων προτύπων. Θεωρώντας $k \neq 0 \neq \Lambda$, από την (II.14) λαμβάνουμε

$$X_3 = N \left[1 + \frac{3 \ln(a) (k - 4\pi a^2 \rho (w+1))}{3k - a^2(\Lambda + 8\pi\rho)} \right] \frac{\partial}{\partial N} + a \ln(a) \frac{\partial}{\partial a} - 3(w+1)\rho \ln(a) \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (\text{III.3})$$

και στο μετασχηματισμό

$$\tilde{a} = a^s, \quad \tilde{\rho} = a^{-3(w+1)(s-1)}\rho, \quad \tilde{N} = \frac{sNa^{\frac{1}{2}s(3w+5)-1}\sqrt{3k - a^2(\Lambda + 8\pi\rho)}}{\sqrt{3ka^{3s(w+1)} - 8\pi\rho a^{2s+3(w+1)} - \Lambda a^{s(3w+5)}}}, \quad \tilde{t} = t. \quad (\text{III.4})$$

Αντίστοιχα, αν επιθυμούμε αναλλοιότητα στη βαθμίδα $\tilde{N} = 1$ και θεωρήσουμε χρονικό μετασχηματισμό, τα παραπάνω μπορούν να ερμηνευθούν ως

$$\tilde{a} = a^s, \quad \tilde{\rho} = a^{-3(w+1)(s-1)}\rho, \quad d\tilde{t} = \frac{sa^{\frac{1}{2}s(3w+5)-1}\sqrt{3k - a^2(\Lambda + 8\pi\rho)}}{\sqrt{3ka^{3s(w+1)} - 8\pi\rho a^{2s+3(w+1)} - \Lambda a^{s(3w+5)}}} dt, \quad (\text{III.5})$$

οδηγώντας έτσι στη γενίκευση των (III.1) για την περίπτωση μη μηδενικής χωρικής καμπυλότητας και κοσμολογικής σταθεράς.

Στην εργασία [211] μια άλλη συμμετρία των εξισώσεων Friedmann εν τη απουσία χωρικής καμπυλότητας και κοσμολογικής σταθεράς παρουσιάζεται. Εμπεριέχει μια αυθαίρετη συνάρτηση και επομένως αντιστοιχεί σε απειροδιάστατη ομάδα συμμετρίας. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\rho), \quad (\text{III.6a}\square)$$

$$\bar{H} = \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)^{1/2} H, \quad (\text{III.6b}\square)$$

$$\bar{P} = -\bar{\rho} + \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} (\rho + P) \frac{d\bar{\rho}}{d\rho}, \quad (\text{III.6γ}\square)$$

όπου $H = \frac{\dot{a}}{a}$ η συνάρτηση Hubble στη βαθμίδα $N = 1$ αφήνει τις εξισώσεις

$$3H^2 - 8\pi\rho = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\rho} + 3H(P + \rho) = 0, \quad (\text{III.7})$$

αναλλοιώτες.

Προς έκπληξη μας, ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός συμμετρίας δεν έχει ακριβές ισοδύναμο στην ανάλυση που κάναμε παραπάνω και αυτό οφείλεται στο ότι η αντιμετώπιση του H ως βασική μεταβλητή αλλάζει τον φορμαλισμό. Ας δούμε ωστόσο με κάποια λεπτομέρεια τι συμβαίνει και πώς η παραπάνω συμμετρία μπορεί να ανακτηθεί από τους γεννήτορες που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Ο γεννήτορας X_4 , (II.22), οδηγεί σε ένα μετασχηματισμό της πίεσης όπως στην εργασία (III.6a□) αν θεωρήσουμε την περίπτωση $k = 0 = \Lambda$ και $f = f(\rho)$: τότε,

$$X_4 = -\frac{Nf(\rho)}{2\rho} \frac{\partial}{\partial N} + f(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + [(P + \rho)f'(\rho) - f(\rho)] \frac{\partial}{\partial P}. \quad (\text{III.8})$$

Η απειροστή αλλαγή σε πρώτη τάξη ως προς την παράμετρο του μετασχηματισμού, έστω λ , είναι

$$\bar{\rho} \sim \rho + \lambda f(\rho), \quad (\text{III.9})$$

$$\bar{N} \sim N - \lambda \frac{Nf(\rho)}{2\rho}, \quad (\text{III.10})$$

$$\bar{P} \sim P + \lambda [(P + \rho)f'(\rho) - f(\rho)]. \quad (\text{III.11})$$

Με χρήση των (III.9) και (III.10) έχουμε

$$\bar{H} = \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{N}\bar{a}} \sim \frac{1}{N(1 - \lambda \frac{f(\rho)}{2\rho})} \frac{\dot{a}}{a} \sim \left(1 + \lambda \frac{f(\rho)}{2\rho}\right) H, \quad (\text{III.12})$$

ο οποίος είναι ο απειροστός μετασχηματισμός που προκύπτει από την (III.6β□) για $\bar{\rho}(\rho)$ να δίνεται από την (III.9), εφόσον

$$\bar{H} = \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)^{1/2} H \sim H \left(1 + \lambda \frac{f(\rho)}{2\rho}\right). \quad (\text{III.13})$$

Επομένως, ο αναγκαίος μετασχηματισμός του H που αφήνει αναλλοίωτη την εξίσωση (II.4) οφείλεται στην αλλαγή της μεταβλητής βαθμίδας N . Ωστόσο, η περίπτωση για την πίεση δεν είναι ίδια: Εισάγουμε την (III.9) στην (III.6γ□)

$$\bar{P} = -\bar{\rho} + \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^{1/2} (\rho + P) \frac{d\bar{\rho}}{d\rho} \sim P + \lambda [(P + \rho)f'(\rho) - f(\rho)] + \lambda(P + \rho)f'(\rho), \quad (\text{III.14})$$

η οποία είναι διαφορετική από την (III.11).

Ο λόγος για την παραπάνω διαφορά είναι η θεώρηση του H στη θέση των a και N , ή αντίστοιχα του dt , ως βασική μεταβλητή. Η συνάρτηση Hubble σε μια γενική βαθμίδα είναι $H = \frac{\dot{a}}{Na}$. Κάθε μετασχηματισμός του H , μπορεί να οφείλεται στο a ή το N και dt εναλλακτικά. Στην προκειμένη περίπτωση του (III.8), η αλλαγή στο H οφείλεται στο μετασχηματισμό του N , ή ισοδύναμα στο χρόνο του a -φορμαλισμού αν θέλουμε να θεωρήσουμε το N δεδομένο (παράδειγμα $N = 1$). Ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις (III.7) στη βαθμίδα $N = 1$. Μέσω ενός τέτοιου μετασχηματισμού, ο όρος $\dot{\rho}$ που εμφανίζεται στη δεύτερη εκ των (III.7) θα μετασχηματιστεί επίσης. Στην αντίθετη περίπτωση, αν “ξεχάσουμε” πως το H έχει κατασκευαστεί και το θεωρήσουμε ως βασική μεταβλητή, δεν υπάρχει λόγος να επιβάλλουμε ένα μετασχηματισμό στον όρο $\dot{\rho}$ στην εξίσωση (III.7). Επομένως, η διαφορά μεταξύ των δύο καταστάσεων θα περάσει στην πίεση, η οποία οφείλει να είναι διαφορετική ώστε να παραμείνουν οι εξισώσεις αναλλοίωτες στις δύο αυτές διαφορετικές περιπτώσεις. Αυτός είναι και ο λόγος για τη διαφορά που εμφανίζεται μεταξύ (III.14) και (III.11).

Όπως και στις προηγούμενες ενότητες, μπορούμε να βρούμε το γεννήτορα συμμετρίας για την ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού (III.6) στον H -φορμαλισμό των εξισώσεων Friedmann. Θεωρούμε το γεννήτορα της μορφής

$$X = \chi(t, H, \rho, P) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t, H, \rho, P) \frac{\partial}{\partial H} + \xi^2(t, H, \rho, P) \frac{\partial}{\partial \rho} + \xi^3(t, H, \rho, P) \frac{\partial}{\partial P}, \quad (\text{III.15})$$

ο οποίος απαιτούμε να παράγει συμμετρίες των εξισώσεων

$$,E_1^H := -3H^2 + 8\pi\rho + \Lambda = 0, \quad (\text{III.16α□})$$

$$E_2^H := 3H(P + \rho) + \dot{\rho} = 0, \quad (\text{III.16β□})$$

$$E_3^H := -3H^2 - 2\dot{H} + \Lambda - 8\pi P = 0. \quad (\text{III.16γ□})$$

Θεωρούμε επιπλέον και την ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς.

Εφόσον η πρώτη εξίσωση είναι αλγεβρική, θα ξεκινήσουμε από τις δύο επόμενες,

$$\text{pr}^1 X(E_2^H) = 0, \quad \text{mod} \quad E_2^H = 0, \quad E_3^H = 0, \quad (\text{III.17})$$

$$\text{pr}^1 X(E_3^H) = 0, \quad \text{mod} \quad E_2^H = 0, \quad E_3^H = 0. \quad (\text{III.18})$$

Οι γεννήτορες συμμετρίας που προκύπτουν ικανοποιούν και την εξίσωση $X(E_1) = 0$, ενώ μπορούν να χωριστούν σε δύο μέρη:

1. Ο πρώτος γεννήτορας συνδέεται με τις αλλαγές που επιβάλλει στις υπόλοιπες μεταβλητές, ένας μετασχηματισμός στη μεταβλητή του χρόνου

$$\begin{aligned}
 X_6 = & \chi \frac{\partial}{\partial t} - 4\pi \int (\rho + P) \frac{\partial \chi}{\partial P} dP \frac{\partial}{\partial H} - 3H \int (\rho + P) \frac{\partial \chi}{\partial P} dP \frac{\partial}{\partial \rho} + \left[3H \int (\rho + P) \frac{\partial \chi}{\partial P} dP \right. \\
 & - 4\pi (\rho + P) \int (\rho + P) \frac{\partial^2 \chi}{\partial P \partial H} dP + \int (\rho + P) \frac{\partial^2 \chi}{\partial P \partial t} dP - 3H(P + \rho) \int (\rho + P) \frac{\partial^2 \chi}{\partial P \partial H} dP \\
 & \left. - (\rho + P) (\partial_t \chi + 3H\chi) + (\rho + P)^2 \left(3H \frac{\partial \chi}{\partial \rho} + 4\pi \frac{\partial \chi}{\partial H} \right) \right] \frac{\partial}{\partial P},
 \end{aligned} \tag{III.19}$$

όπου $\chi = \chi(t, H, \rho, P)$ κάποια τυχαία συνάρτηση.

2. Στο δεύτερο μέρος έχουμε

$$X_7 = h(t, H, \rho) \frac{\partial}{\partial H} + \frac{3H}{4\pi} h(t, H, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi} \left[(\rho + P) \left(3H \frac{\partial h}{\partial \rho} + 4\pi \frac{\partial h}{\partial H} \right) - \frac{\partial h}{\partial t} - 3Hh(t, H, \rho) \right] \frac{\partial}{\partial P}, \tag{III.20}$$

όπου και πάλι η $h(t, H, \rho)$ είναι μια τυχαία συνάρτηση.

Η συγκεκριμένη περίπτωση του μετασχηματισμού συμμετρίας (III.6) προκύπτει όταν θέσουμε $h(t, H, \rho) = \frac{4\pi f(\rho)}{3H}$ το οποίο οδηγεί στο γεννήτορα

$$X_7 = \frac{4\pi f(\rho)}{3H} \frac{\partial}{\partial H} + f(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \left[(P + \rho) f'(\rho) - f(\rho) - \frac{4\pi(P + \rho)}{3H^2} f(\rho) \right] \frac{\partial}{\partial P}. \tag{III.21}$$

Ο συγκεκριμένος γεννήτορας είναι συνεπής με το μετασχηματισμό (III.6) της πίεσης, με την επιπλέον χρήση της σχέσης $H^2 = \frac{8\pi\rho}{3}$. Ωστόσο, με απλή χρήση της σχέσης $H^2 = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}$ στην (III.21) η γενίκευση του (III.6) στην περίπτωση $\Lambda \neq 0$ μπορεί να επιτευχθεί. Παρατηρούμε λοιπόν πως η χρήση του H ως βασική μεταβλητή, οδηγεί σε διαφορετικό γεννήτορα συμμετρίας από την περίπτωση θεώρησης του παράγοντα κλίμακας ως βασικής μεταβλητής.

IV Παραγωγή νέων λύσεων από ήδη γνωστές

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την παραγωγή ή καλύτερα την απεικόνιση γνωστών λύσεων σε νέες. Επίσης, θα δούμε πώς συνδέεται η έννοια της συμμετρίας στο επίπεδο της πυκνότητας και της πίεσης, με εκείνη της βασικής θεωρίας, για παράδειγμα θεωρώντας ένα βαθμωτό πεδίο.

Ας ξεκινήσουμε με τους γεννήτορες X_4 και X_5 οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν ώστε να συνδέσουμε κοσμολογικά πρότυπα με διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις, τα οποία αντιστοιχούν στις διαφορετικές κοσμολογικές εποχές.

Ας ξεκινήσουμε με κάποια γενικά στοιχεία. Η μέθοδος παραγωγής νέων λύσεων από ήδη γνωστές μπορεί να βρεθεί στις [215, 216]. Παρουσιάζουμε συνοπτικά τη μέθοδο. Ας υποθέσουμε πως είναι γνωστός ο γεννήτορας συμμετρίας και για κάποιο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων έχει τη μορφή

$$\mathbf{Z} = \xi^i(x^j, u^\beta) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x^j, u^\beta) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{IV.1}$$

με $\xi^i(x^j, u^\beta)$, $\eta^\alpha(x^j, u^\beta)$ γνωστές συναρτήσεις. Ο πεπερασμένος μετασχηματισμός μπορεί να παραχθεί, όπως έχουμε αναφέρει, μέσω των ολοκληρωτικών γραμμών του συστήματος

$$\xi^l [\tilde{x}^j(\lambda), \tilde{u}^\beta(\lambda)] = \frac{d\tilde{x}^l(\lambda)}{d\lambda}, \quad \eta^\alpha [\tilde{x}^j(\lambda), \tilde{u}^\beta(\lambda)] = \frac{d\tilde{u}^\alpha(\lambda)}{d\lambda}, \tag{IV.2}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\tilde{x}^i(0) = x^i, \quad \tilde{u}^\alpha(0) = u^\alpha. \tag{IV.3}$$

Το αποτέλεσμα θα είναι εν γένει

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j, u^\beta; \lambda), \quad \tilde{u}^\alpha = \tilde{u}^\alpha(x^j, u^\beta; \lambda), \quad (\text{IV.4})$$

και εφόσον ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος,

$$x^i = x^i(\tilde{x}^j, \tilde{u}^\beta; \lambda), \quad u^\alpha = u^\alpha(\tilde{x}^j, \tilde{u}^\beta; \lambda), \quad (\text{IV.5})$$

όπου λ η παράμετρος.

Κάποια απλή ειδική λύση του συστήματος των εξισώσεων θα έχει εν γένει τη μορφή

$$u^\alpha = f^\alpha(x^i), \quad \text{ή,} \quad u^\alpha - f^\alpha(x^i) = 0 \Leftrightarrow F(u^\alpha, x^i) = 0. \quad (\text{IV.6})$$

Επομένως, μπορούμε να αντιληφθούμε τη λύση ως μια επιφάνεια η οποία περιγράφεται από την (IV.6) στο χώρο των μεταβλητών (x^i, u^α) . Λόγω της (IV.5) έχουμε

$$\begin{aligned} F(u^\alpha, x^i) &= 0 \xrightarrow{\text{(IV.5)}} \\ F[x^i(\tilde{x}^j, \tilde{u}^\beta; \lambda), u^\alpha(\tilde{x}^j, \tilde{u}^\beta; \lambda)] &= 0 \Rightarrow \\ \tilde{F}(\tilde{x}^j, \tilde{u}^\beta; \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Η επιφάνεια (IV.7) θα αναπαριστά μια νέα μορφή της λύσης και ελπίζουμε πως θα είμαστε σε θέση να την εκφράσουμε στη μορφή

$$\tilde{u}^\beta = \tilde{f}^\beta(\tilde{x}^j; \lambda), \quad (\text{IV.8})$$

όπου η παράμετρος λ θα θεωρείται ως σταθερά ολοκλήρωσης.

Πότε αναμένουμε να βρούμε μια διαφορετική μορφή λύσης; Η επιφάνεια η οποία αναπαριστά την αρχική λύση, δεν θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση του γεννήτορα, δηλαδή

$$\mathbf{Z}[F(u^\alpha, x^i)] \neq 0. \quad (\text{IV.9})$$

Αν η παραπάνω συνθήκη δεν ισχύει, τότε θα ανακτήσουμε την ίδια μορφή λύσης στις νέες μεταβλητές $\tilde{x}^i, \tilde{u}^\alpha$.

IV.1 Κοσμολογικές εποχές

Η αφετηρία είναι η λύση των εξισώσεων Einstein υπό την παρουσία ιδανικού ρευστού για επίπεδη μετρική FLRW ($k = 0$), θεωρώντας παράλληλα ($\Lambda = 0$). Υποθέτουμε την καταστατική εξίσωση ($P = w_1 \rho$) με $w_1 < -\frac{1}{3}$, η οποία αντιστοιχεί στην πληθωριστική εποχή. Επιπλέον, θα επιλέξουμε τη βαθμίδα ($N = 1$). Ως αποτέλεσμα, οι εξισώσεις αποκτούν τη μορφή

$$8\pi\rho - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0, \quad (\text{IV.10})$$

$$3(1 + w_1)\frac{\dot{a}}{a}\rho + \dot{\rho} = 0, \quad (\text{IV.11})$$

με λύση

$$P = w_1\rho, \quad (\text{IV.12})$$

$$N = 1, \quad (\text{IV.13})$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w_1)}, \quad (\text{IV.14})$$

$$a(t) = [6\pi(1 + w_1)^2 \rho_0]^{1/3(1+w_1)} t^{2/3(1+w_1)}. \quad (\text{IV.15})$$

Σχηματίζουμε το γεννήτορα

$$Z = X_4 + X_5. \quad (\text{IV.16})$$

Οι συναρτήσεις $\sigma(a, \rho)$, $f(a, \rho)$ είναι τυχαίες, συνεπώς μπορούμε να τις επιλέξουμε κατάλληλα. Απαιτούμε η συνιστώσα ∂_N του γεννήτορα να είναι ίση με μηδέν έτσι ώστε να παραμείνουμε στη βαθμίδα $\tilde{N} = 1$, όπου $\tilde{N}$ η μετασχηματισμένη μεταβλητή. Αυτή η επιλογή υπονοεί πως οι παρατηρητές παραμένουν συγκινούμενοι στο μετασχηματισμένο σύστημα. Επιπρόσθετα, επιλέγουμε τη συνιστώσα ∂_ρ να είναι ίση με ρ , που οδηγεί τη συνιστώσα του ∂_P να είναι ανεξάρτητη του a . Επομένως, η μετασχηματισμένη καταστατική εξίσωση θα παραμείνει μια συνάρτηση των $\tilde{\rho}$, $\tilde{P}$. Αυτές οι απλοποιήσεις οδηγούν στη μορφή του γεννήτορα

$$\sigma(a, \rho) = \frac{a}{2} \ln a, \quad f(a, \rho) = \rho, \quad (\text{IV.17})$$

$$Z = \frac{a}{2} \ln a \partial_a + \rho \partial_\rho + \frac{P - \rho}{2} \partial_P. \quad (\text{IV.18})$$

Οι εξισώσεις (IV.2) για τον γεννήτορα Z έχουν τη μορφή

$$\left. \frac{d\tilde{t}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{N}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{a}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{\tilde{a}}{2} \ln \tilde{a}, \quad \left. \frac{d\tilde{\rho}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \tilde{\rho}, \quad \left. \frac{d\tilde{P}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{\tilde{P} - \tilde{\rho}}{2}, \quad (\text{IV.19})$$

όπου λ η παράμετρος των καμπυλών, η οποία έχει επιλεγεί έτσι ώστε για $\lambda = 0$ ο μετασχηματισμός να είναι ο ταυτοτικός. Ο μετασχηματισμός καθώς και ο αντίστροφός του είναι

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{N} = N, \quad \tilde{a} = a e^{\lambda/2}, \quad \tilde{\rho} = e^\lambda \rho, \quad \tilde{P} = -e^\lambda \rho + e^{\lambda/2} (P + \rho), \quad (\text{IV.20})$$

$$t = \tilde{t}, \quad N = \tilde{N}, \quad a = \tilde{a} e^{-\lambda/2}, \quad \rho = e^{-\lambda} \tilde{\rho}, \quad P = e^{-\lambda} [-\tilde{\rho} + e^{\lambda/2} (\tilde{P} + \tilde{\rho})]. \quad (\text{IV.21})$$

Το μόνο που έχουμε να κάνουμε τώρα είναι να χρησιμοποιήσουμε την (IV.21) στις (IV.12)-(IV.15) και να λύσουμε ως προς τις νέες μεταβλητές

$$\tilde{P} = (-1 + (1 + w_1) e^{-\lambda/2}) \tilde{\rho}, \quad (\text{IV.22})$$

$$\tilde{N} = 1, \quad (\text{IV.23})$$

$$\tilde{\rho} = e^\lambda \rho_0 \tilde{a}^{-3(1+w_1)e^{-\lambda/2}}, \quad (\text{IV.24})$$

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = [6\pi(1 + w_1)^2 \rho_0]^{1/3(1+w_1)e^{\lambda/2}} \tilde{t}^{2/3(1+w_1)e^{\lambda/2}}. \quad (\text{IV.25})$$

Με την επιλογή $\lambda = 2 \ln \frac{3(1+w_1)}{4}$ και τον επαναορισμό $\rho_0 = \frac{16}{9(1+w_1)^2} \tilde{\rho}_0$, η λύση που αντιστοιχεί στην εποχή του πληθωρισμού, μετασχηματίζεται στην εποχή της ακτινοβολίας.

$$\tilde{P} = \frac{1}{3} \tilde{\rho}, \quad (\text{IV.26})$$

$$\tilde{N} = 1, \quad (\text{IV.27})$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \tilde{a}^{-4}, \quad (\text{IV.28})$$

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = 2 \left(\frac{2\pi}{3} \tilde{\rho}_0 \right)^{1/4} \tilde{t}^{1/2}. \quad (\text{IV.29})$$

Στη συνέχεια μπορούμε να επαναλάβουμε το μετασχηματισμό (IV.21) με μια διαφορετική παράμετρο λ και ως γνωστές λύσεις τις (IV.26)-(IV.29). Υπάρχει παράμετρος λ η οποία μετασχηματίζει την εποχή ακτινοβολίας στην εποχή της ύλης. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε τις τιμές της παραμέτρου και τις αντίστοιχες μεταβάσεις μεταξύ των εποχών, καθώς και τις καταστατικές εξισώσεις.

Όπως μπορούμε να δούμε, η τελευταία μετάβαση μπορεί να επιτευχθεί μόνο ως όριο της παραμέτρου λ .

Μεταβάσεις	λ	Καταστατικές εξισώσεις
Πληθωρισμός $\rightarrow$ Ακτινοβολία,	$2 \ln \frac{3(1+w_1)}{4}$	$w_i < -\frac{1}{3} \rightarrow w_r = \frac{1}{3}$
Ακτινοβολία $\rightarrow$ Ύλη,	$\ln \frac{16}{9}$	$w_r = \frac{1}{3} \rightarrow w_d = 0$
Ύλη $\rightarrow$ De Sitter,	$\rightarrow \infty$	$w_d = 0 \rightarrow w_{dS} = -1$

Πίνακας 8.1: Απεικόνιση μεταξύ των λύσεων για διαφορετικές τιμές του λ .

IV.2 Δύσκαμπτη ύλη (stiff matter) και γενικευμένο (Αντι-) Chaplygin ρευστό από καταστατική εξίσωση δύσκαμπτου(stiff) ρευστού

Ας υποθέσουμε καταστατική εξίσωση η οποία περιγράφει δύσκαμπτη ύλη $P = \rho$ και $k = 0$ με τυχαίο Λ . Η λύση είναι

$$P = \rho, \quad (IV.30)$$

$$N = 1, \quad (IV.31)$$

$$\rho = \rho_0 a^{-6} \quad (IV.32)$$

$$a(t) = \sqrt{2} \left(\frac{\pi \rho_0}{\Lambda} \right)^{1/6} \sinh^{1/3} \left(\sqrt{3\Lambda} t \right). \quad (IV.33)$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, μόνο ο γεννήτορας X_4 θα χρησιμοποιηθεί, ενώ επιλέγουμε η συνάρτηση $f(a, \rho)$ να έχει τη μορφή

$$f(a, \rho) = \rho^{-\nu}, \quad (IV.34)$$

$$X_4 = -\frac{4\pi N \rho^{-\nu}}{\Lambda + 8\pi \rho} \partial_N + \rho^{-\nu} \partial_\rho - \rho^{-1-\nu} [\nu P + (1 + \nu) \rho] \partial_P, \quad (IV.35)$$

όπου ν κάποια τυχαία σταθερά. Οι μετασχηματισμένες λύσεις είναι

$$\tilde{P} = \tilde{\rho} - \frac{2\lambda(1 + \nu)}{\tilde{\rho}^\nu}, \quad (IV.36)$$

$$\tilde{N} = \frac{\sqrt{\Lambda + 8\pi \tilde{\rho}}}{\sqrt{\Lambda + 8\pi [(1 + \nu) \lambda + \tilde{\rho}^{1+\nu}]^{\frac{1}{1+\nu}}}}, \quad (IV.37)$$

$$\tilde{\rho} = \left[(\rho_0 \tilde{a}^{-6})^{1+\nu} + (1 + \nu) \lambda \right]^{1/(1+\nu)}, \quad (IV.38)$$

$$\tilde{a} = \sqrt{2} \left(\frac{\pi \rho_0}{\Lambda} \right)^{1/6} \sinh^{1/3} \left(\sqrt{3\Lambda} \tilde{t} \right). \quad (IV.39)$$

Από την (IV.36) η γενικευμένη Αντι-Chaplygin ύλη μπορεί να βρεθεί αν $\lambda < 0$ ενώ η Chaplygin για $\lambda > 0$ (υποθέτωντας φυσικά πως για τον εκθέτη του $\tilde{\rho}$ ισχύει $\nu > 0$). Παρατηρούμε ωστόσο, στην περίπτωση αυτή οι παρατηρητές δεν είναι συγκινούμενοι πια, καθώς $\tilde{N} \neq 1$.

IV.3 Καταστατική εξίσωση εξαρτώμενη από τον παράγοντα κλίμακας, μέσω της $P = 0$.

Η μόνη διαφορά με την πρώτη υποενότητα είναι η επιλογή διαφορετικών συναρτήσεων $\sigma(a, \rho)$, $f(a, \rho)$ και επιλέγουμε ως αρχική λύση την περίπτωση ύλης $P = 0$. Θέλουμε να διατηρήσουμε την επιλογή βαθμίδας, αλλά δεν υπάρχει άλλος περιορισμός. Οι συναρτήσεις και ο γεννήτορας έχουν τη μορφή

$$\sigma(a, \rho) = \alpha^2, \quad f(a, \rho) = 2a\rho, \quad (IV.40)$$

$$Z = \alpha^2 \partial_a + 2a\rho \partial_\rho + a \left(P - \frac{5}{3}\rho \right) \partial_P. \quad (IV.41)$$

Ο επαγόμενος μετασχηματισμός είναι

$$t = \tilde{t}, \quad N = \tilde{N}, \quad a = \frac{\tilde{a}}{1 + \lambda \tilde{a}}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{(1 + \lambda \tilde{a})^2}, \quad P = \frac{3\tilde{P}(1 + \lambda \tilde{a}) + 5\lambda \tilde{a} \tilde{\rho}}{3(1 + \lambda \tilde{a})^2}, \quad (\text{IV.42})$$

και η νέα λύση

$$\tilde{P} = -\frac{5\lambda \tilde{a}}{3(1 + \lambda \tilde{a})} \tilde{\rho}, \quad (\text{IV.43})$$

$$\tilde{N} = 1, \quad (\text{IV.44})$$

$$\tilde{\rho} = \frac{(1 + \lambda \tilde{a})^5}{\tilde{a}^3} \rho_0, \quad (\text{IV.45})$$

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = \frac{(6\pi \rho_0)^{1/3} \tilde{t}^{2/3}}{1 - \lambda(6\pi \rho_0)^{1/3} \tilde{t}^{2/3}}. \quad (\text{IV.46})$$

Όπως παρατηρούμε από την (IV.43), η καταστατική εξίσωση εξαρτάται από τον παράγοντα κλίμακας. Επιπλέον, με χρήση της (IV.46) και επαναορισμό της παραμέτρου λ , ως $\lambda = -\frac{3^{2/3}}{5(2\pi \rho_0)^{1/3}} w$, η καταστατική εξίσωση αποκτά τη μορφή

$$\tilde{P} = w \tilde{t}^{2/3} \tilde{\rho}. \quad (\text{IV.47})$$

IV.4 Επίδραση των συμμετριών στο επίπεδο της βασικής θεωρίας

Με γεννήτορες της μορφής $X_i, i = 1, 2, 3$ βρήκαμε μετασχηματισμούς οι οποίοι σε αφήνουν στην ίδια θεωρία, δηλαδή δεν αλλάζουν την καταστατική εξίσωση. Αντίθετα, μετασχηματισμοί που προκύπτουν από τα $X_i, i = 4, \dots, 7$ μας παρέχουν σύνδεση μεταξύ διαφορετικών ρευστών. Το πρώτο σενάριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μείωση του βαθμού των εξισώσεων, που όμως λόγω της απλότητας αυτών η μείωση θα είναι κατά κάποιο τρόπο τετριμμένη. Παράλληλα, αυτοί οι γεννήτορες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να παραχθούν γενικές λύσεις μέσω της γνώσης κάποιας ειδικής. Η σημαντικότητα του δεύτερου σενάριου εντοπίζεται στην εξαγωγή πληροφοριών όσον αφορά κάποια βασική θεωρία.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον γεννήτορα X_7 της (III.20) ο οποίος είναι συμμετρία της (III.16). Έστω πως έχουμε στα χέρια μας ένα πρότυπο με συνάρτηση Hubble $H(t)$ και επιθυμούμε να μελετήσουμε ποιο πρότυπο θα μας έδινε μια νέα συνάρτηση Hubble $H \mapsto \bar{H} = H^\lambda$. Ένας νόμος δύναμης μπορεί να παραχθεί θεωρώντας στην (III.20) μια συνάρτηση της μορφής $h(t, H, \rho) = H \ln H$. Με μια τέτοια επιλογή, ο γεννήτορας X_7 μπορεί να γραφεί ως

$$X_7 = H \ln H \frac{\partial}{\partial H} + \frac{3}{4\pi} H^2 \ln H \frac{\partial}{\partial \rho} + \left[\left(-\frac{3H^2}{4\pi} + P + \rho \right) \ln H + P + \rho \right] \frac{\partial}{\partial P}, \quad (\text{IV.48})$$

ο οποίος μας οδηγεί στον επιθυμητό μετασχηματισμό $\rho \mapsto \bar{\rho}$ και $P \mapsto \bar{P}$. Συνολικά έχουμε:

$$H = \bar{H}^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (\text{IV.49α□})$$

$$\rho = \bar{\rho} + \frac{3}{8\pi} \left(\bar{H}^{\frac{2}{\lambda}} - \bar{H}^2 \right), \quad (\text{IV.49β□})$$

$$P = \frac{\bar{H}^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}{\lambda} (\bar{P} + \bar{\rho}) - \bar{\rho} - \frac{3}{8\pi} \left(\bar{H}^{\frac{2}{\lambda}} - \bar{H}^2 \right), \quad (\text{IV.49γ□})$$

όπου λ η παράμετρος του μετασχηματισμού η ταυτοτική απεικόνιση προκύπτει για $\lambda = 1$.

Παρατηρούμε πως ο μετασχηματισμός είναι γενικός, δηλαδή δεν εξαρτάται από κάποιο συγκεκριμένο πρότυπο. Στόχος είναι να βρούμε ποιά θεωρία θα μας δώσει H^λ , ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε πρότυπο με συνάρτηση Hubble H . Για παράδειγμα, αν ξεκινήσουμε από μια θεωρία με $P = w\rho$, τότε με χρήση των

(IV.49β□), (IV.49γ□) και της εξίσωσης συνδέσμου $-3\bar{H}^2 + 8\pi\bar{\rho} + \Lambda = 0$ από την οποία θα αντικαταστήσουμε το $\bar{H}$, μπορούμε να βρούμε τη νέα καταστατική εξίσωση

$$\bar{P}(\bar{\rho}) = \frac{3^{-\frac{\lambda+1}{2\lambda}} \lambda(w+1)}{8\pi} (\Lambda + 8\pi\bar{\rho})^{\frac{\lambda-1}{2\lambda}} \left(3(\Lambda + 8\pi\bar{\rho})^{\frac{1}{\lambda}} - 3^{\frac{1}{\lambda}} \Lambda \right) - \bar{\rho}. \quad (\text{IV.50})$$

Σε αυτό το επίπεδο, είναι δύσκολο να καταλάβουμε ποιά θεωρία θα μπορούσε να περιγράφεται από μια τέτοια καταστατική εξίσωση.

Ας θεωρήσουμε την ύπαρξη ενός βαθμωτού πεδίου συζευγμένου με τη βαρύτητα. Η αντίστοιχη πίεση και πυκνότητα δίνονται από τις εξισώσεις

$$P = \frac{\dot{\phi}}{2} - V(\phi), \quad \rho = \frac{\dot{\phi}}{2} + V(\phi). \quad (\text{IV.51})$$

Οι παραπάνω εκφράσεις μας δίνουν έναν τρόπο σύνδεσης των νέων μεταβλητών με τις παλαιές, δηλαδή $(t, H, \rho, P) \mapsto (t, H, \dot{\phi}, V)$. Παρατηρούμε πως η παρουσία των $\dot{\phi}$ στις συντεταγμένες, δεν παράγει μια ανώτερης τάξης συμμετρία στις νέες μεταβλητές, διότι το V θεωρείται ανεξάρτητο του $\dot{\phi}$ (όσο φυσικά δεν επιλέγουμε μια συγκεκριμένη μορφή $V(\phi)$). Στις νέες συντεταγμένες έχουμε για τον γεννήτορα X_7 της (IV.48)

$$X_7 = H \ln H \frac{\partial}{\partial H} + \frac{1}{2} (\ln H + 1) \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} + \left[\frac{1}{4\pi} (3H^2 - 2\pi\dot{\phi}^2) \ln H - \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right] \frac{\partial}{\partial V}. \quad (\text{IV.52})$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως είναι μια συμμετρία Lie των εξισώσεων (III.16) όταν οι (IV.51) χρησιμοποιούνται.

Ο μετασχηματισμός $(\phi, V) \mapsto (\psi, U)$ σε ένα νέο βαθμωτό πρότυπο, εκτός από την (IV.49α□) που μένει ίδια, είναι

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \bar{H}^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda}-1)} \dot{\psi}, \quad (\text{IV.53α□})$$

$$V = U + \frac{3}{8\pi} \left(\bar{H}^{\frac{2}{\lambda}} - \bar{H}^2 \right) + \frac{(\lambda \bar{H} - \bar{H}^{1/\lambda})}{2G\lambda} \dot{\psi}^2. \quad (\text{IV.53β□})$$

Ο στόχος είναι να δούμε ποιό δυναμικό $U(\psi)$ μπορεί να αλλάξει τη συνάρτηση Hubble από H (η οποία δίνεται για $V(\phi)$) σε H^λ . Ας θεωρήσουμε μια γνωστή λύση με $\Lambda = 0$

$$H(t) = \frac{\kappa}{t}, \quad \phi(t) = -\frac{\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{\pi}} \ln t, \quad V(\phi) = \frac{\kappa(3\kappa-1)}{8\pi} e^{\frac{4\sqrt{\pi}\phi}{\sqrt{\kappa}}}. \quad (\text{IV.54})$$

Αυτή είναι μια ειδική λύση. Η γενική λύση για ένα εκθετικό βαθμωτό πεδίο μπορεί να βρεθεί στην [218]. Αυτή η λύση αντιστοιχεί σε $P = \left(\frac{2}{3\kappa} - 1 \right) \rho$.

Με χρήση της (IV.54) είναι εύκολο να καταλάβουμε από τις (IV.49α□) και (IV.53), πως για να αποκτήσουμε ένα ρυθμό μεταβολής $\bar{H} = H^\lambda = \frac{\kappa^\lambda}{t^\lambda}$ χρειαζόμαστε δυναμικό της μορφής

$$U(\psi) = \frac{3}{8} \pi^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \left(\frac{(\lambda-1)^2}{\kappa\lambda} \right)^{\frac{2\lambda}{\lambda-1}} \psi^{\frac{4\lambda}{\lambda-1}} - \frac{\lambda^2}{8} \pi^{\frac{2}{\lambda-1}} (\lambda-1)^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda-1}} \left(\frac{1}{\kappa\lambda} \right)^{\frac{2\lambda}{\lambda-1}} \psi^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda-1}}. \quad (\text{IV.55})$$

με το βαθμωτό πεδίο να είναι

$$\psi(t) = \frac{\sqrt{\lambda}\kappa^{\lambda/2}}{\sqrt{\pi}(\lambda-1)} t^{(1-\lambda)/2} \quad (\text{IV.56})$$

Για τις τιμές $0 < \lambda < 1$ ο παραπάνω τύπος δυναμικού λέγεται πως περιγράφει ένα είδος ενδιάμεσου πληθωρισμού, με την έννοια πως ο ρυθμός μεταβολής είναι κάτι ανάμεσα σε εκθετικό νόμο και νόμο δύναμης. Παρατηρούμε επίσης πως στο όριο $\lambda \gg 1$, $\kappa \sim \lambda$ προσεγγίζει δυναμικό της μορφής Higgs.

Επιπλέον, αν επιτρέψουμε αρνητικές τιμές του λ , τότε η λύση αντιστοιχεί σε πεδίο phantom με το $\psi(t)$ να γίνεται φανταστικό. Παράλληλα, ο χαρακτηρισμός phantom μπορεί να δικαιολογηθεί με την καταστατική εξίσωση για τη νέα λύση, καθώς από την (IV.50) με $\Lambda = 0$ προκύπτει

$$\bar{P}(\bar{\rho}) = \frac{1}{3} \left(-3\bar{\rho} + \lambda \frac{2^{\frac{+3-\lambda}{2\lambda}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{-1+\lambda}{2\lambda}} \bar{\rho}^{\frac{1+\lambda}{2\lambda}}}{\kappa} \right),$$

συνεπώς για $\lambda < 0 \Rightarrow \bar{P}(\bar{\rho}) < 0$.

Επομένως, ο μετασχηματισμός συμμετρίας μας βοήθησε να βρούμε με αλγοριθμικό τρόπο την θεωρία υποβάθρου που θα χρειαζόταν ώστε να αλλάξουμε τον ρυθμό μεταβολής κατά επιθυμητό τρόπο.

V Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων

Όπως είδαμε, μελετήσαμε τις εξισώσεις Friedmann και βρήκαμε πως οι ομάδες συμμετρίας τους είναι απειροδιάστατες. Μάλιστα, θεωρήσαμε όσο το δυνατόν πιο γενικά πρότυπα, μη επιβάλλοντας κάποια συγκεκριμένη βαθμίδα.

Μελετήσαμε δύο σενάρια: Στην πρώτη περίπτωση, η καταστατική εξίσωση δίνεται και αντικαθίσταται στις εξισώσεις κίνησης. Ως αποτέλεσμα, οι γεννιήτορες συμμετρίας αφήνουν αναλλοίωτη την καταστατική εξίσωση. Στη δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε την πίεση ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Θεωρώντας μια τέτοια αλλαγή των μεταβλητών, μπορεί να υπάρξει σύνδεση μεταξύ λύσεων οι οποίες έχουν διαφορετική καταστατική εξίσωση.

Ως εφαρμογή, θεωρήσαμε το μετασχηματισμό ο οποίος συνδέει τις διαφορετικές κοσμολογικές εποχές. Επίσης, ξεκινήσαμε από μια απλή λύση η οποία αντιστοιχεί σε μια γραμμική καταστατική εξίσωση, όπως $P = \rho$, και αποδείξαμε πως μπορεί μέσω ενός μετασχηματισμού συμμετρίας να απεικονιστεί σε ένα πιο περίεργο πρότυπο, της μορφής ενός stiff ρευστού σε σύνδεση με ρευστό Chaplygin. Επιπλέον, είδαμε πως μπορούμε να παράγουμε και καταστατική εξίσωση η οποία εξαρτάται από τον παράγοντα κλίμακας.

Για να προβάλλουμε τη γενίκευση που προσφέρει η ανάλυση μας, συγκρίναμε τα αποτελέσματα μας με ήδη γνωστά. Επιπλέον, θεωρήσαμε τη σύνδεση με μια θεωρία βαθμωτού πεδίου και του ρευστού με το οποίο αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί. Μέσω ενός απλού παραδείγματος, παρουσιάσαμε τον τρόπο με τον οποίο ένας μετασχηματισμός σε κάποια μεταβλητή όπως ο παράγοντας Hubble, μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για την βασική θεωρία. Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε σε αυτό το σημείο πως οι εξισώσεις Friedmann φαίνεται να εκτείνονται και στο φάσμα πέραν της κοσμολογίας. Παραθέτουμε κάποιες σχετικές δημοσιεύσεις [219, 220].

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε πως ακόμη μεγαλύτερη ομάδα συμμετρίας μπορεί να βρεθεί αν επιτρέψουμε τον προσδιορισμό του N μέσω του τετραγωνικού συνδέσμου E_2 . Σε αυτή την περίπτωση, δεν θα υπάρχει συνιστώσα $\frac{\partial}{\partial N}$ και θα υπάρχει μόνο μια εξίσωση να ικανοποιηθεί, η E_1 . Η εφαρμογή αυτής της ιδέας, όπως και η θεώρηση άλλων κοσμολογικών προτύπων, βρίσκεται σε εξέλιξη.

Κεφάλαιο 9

“Χρονικά”-συναλλοιώτη εξίσωση Schrödinger και η κανονική κβάντωση της μελανής οπής Reissner-Nordström

I Εισαγωγή

Η κβάντωση της βαρύτητας κατέχει θεμελειώδη ρόλο στη θεωρητική φυσική. Σύμφωνα με τον Claus Kiefer [221], υπάρχουν τρεις βασικοί λόγοι οι οποίοι παρακινούν μια τέτοια αναζήτηση: ο πρώτος βασίζεται περισσότερο σε φιλοσοφικές αναζητήσεις και στην ιδέα πως όλες οι θεμελειώδεις αλληλεπιδράσεις οφείλουν να είναι ενοποιημένες σε κάποια ενεργειακή κλίμακα. Επομένως, αν υπάρχει κάποια κβαντική θεωρία η οποία περιγράφει όλες αυτές τις αλληλεπιδράσεις, μέσα σε αυτές θα πρέπει να εμπεριέχεται και η βαρύτητα. Ο δεύτερος λόγος συνδέεται με την εμφάνιση χωροχρονικών ανωμαλιών στην κλασσική θεωρία της βαρύτητας. Η ελπίδα είναι πως η κβαντική θεωρία της βαρύτητας δε θα εμφανίζει τέτοιες παθολογικές καταστάσεις. Τέλος, ο τρίτος λόγος είναι αυτός που αποκαλείται ως “πρόβλημα του χρόνου” όπως αναφέρεται στις [222–227]. Ο βασικός λόγος που εμφανίζεται ένα τέτοιο πρόβλημα είναι διότι στη συνήθη κβαντική θεωρία, ο χρόνος είναι μια εξωτερική παράμετρος, ενώ στη γενική θεωρία της σχετικότητας, δεν υπάρχει προτιμητέα μεταβλητή η οποία να “κουβαλά” την έννοια του χρόνου. Αυτό οφείλεται στη αναλλοiotτητα της θεωρίας υπό τους διαφορομορφισμούς (diffeomorphism invariance). Επιπλέον, αυτή η αναλλοiotτητα έχει ως αποτέλεσμα την περιγραφή της θεωρίας μέσω μιας ιδιάζουσας (singular) λαγκρανζιανής και χαμιλτονιανής πυκνότητας αντίστοιχα, η οποία με τη σειρά της οδηγεί στην ύπαρξη συνδεσμικών εξισώσεων. Η σύνδεση μεταξύ διαφορομορφισμών και συνδεσμικών εξισώσεων μπορεί να βρεθεί στις [228], [229].

Η εμφάνιση των συνδέσμων οδηγεί σε δύο βασικές μεθόδους κβάντωσης τέτοιων συστημάτων: η πρώτη είναι η λύση των συνδεσμικών εξισώσεων πριν τη κβάντωση, ενώ η δεύτερη στην εφαρμογή των συνδέσμων επί του κβαντικού επιπέδου, ως περιορισμοί του χώρου των λύσεων. Όσον αφορά την διαδικασία, μια από αυτές είναι η λεγόμενη “κανονική κβάντωση”, όπου οι κανονικές μεταβλητές οι οποίες περιγράφουν το βαρυτικό πεδίο αντικαθίστανται από τελεστές, με τον μεταθέτη των τελεστών να λαμβάνει τη θέση των αγκύλων Poisson. Από τις αρχικές εργασίες στην κατεύθυνση του χαμιλτονιανού φορμαλισμού είναι οι [230–239].

Σχετικά με τη δεύτερη διαδικασία, το πιο γνωστό αποτέλεσμα είναι η εξίσωση Wheeler-DeWitt [240–245] η οποία προέρχεται από τον τετραγωνικό σύνδεσμο των εξισώσεων Einstein, η με άλλα λόγια στη μεταβολή της βαρυτικής δράσης ως προς τη συνάρτηση Lapse στα πλαίσια της κανονικής κβάντωσης. Αυτή η εξίσωση δεν περιέχει καμία μεταβλητή στην οποία η έννοια του χρόνου μπορεί να αποδοθεί. Λόγω της υπερβολικής της φύσης, η παράμετρος “χρόνος”, εμπεριέχεται ανάμεσα στους βαθμούς ελευθερίας,

για αυτό και συνήθως καλείται ως “εσωτερικός χρόνος”. Επομένως, επιπλέον υποθέσεις απαιτούνται έτσι ώστε να οριστεί μια μεταβλητή “χρόνου” και να φτάσει κανείς σε μια εξίσωση της μορφής Schrödinger. Ένα από τα προβλήματα που εμφανίζονται σε αυτή τη μέθοδο είναι η δυσκολία ορισμού του χώρου Hilbert.

Όσον αφορά την πρώτη διαδικασία, η συνήθης προσέγγιση είναι η εισαγωγή ποσοτήτων χ^A , οι οποίες θα είναι συναρτησοειδή των βαθμών ελευθερίας, και επιβάλουν την επιλογή βαθμίδας. Μέσω αυτού, μια “πραγματική” χαμιλτονιανή πυκνότητα h_A μπορεί να κατασκευαστεί, η οποία εξαρτάται μόνο από τους πραγματικούς βαθμούς ελευθερίας. Η εξίσωση του συνδέσμου θα έχει τη μορφή

$$P_A + h_A = 0, \quad (\text{I.1})$$

όπου P_A θα είναι οι συζυγείς ορμές των ποσοτήτων χ^A . Μια εξίσωση της μορφής Schrödinger μπορεί να κατασκευαστεί, με την αντικατάσταση $P_A = i\hbar \frac{\delta}{\delta \chi^A}$

$$i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta \chi^A} = \hat{h}_A \Psi. \quad (\text{I.2})$$

Μια εκτεταμένη ανάλυση αυτής της μεθόδου μπορεί να βρεθεί στις εργασίες [225, 246, 247]. Εφόσον στην γενική μορφή του συνδέσμου, οι ορμές εμφανίζονται με τετραγωνικό τρόπο, σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να καταλήξουμε σε μια κλειστή μορφής χαμιλτονιανή πυκνότητα h_A . Αυτός είναι ένας από τους λόγους που αρκετοί συγγραφείς έχουν υποθέσει την ύπαρξη ύλης ώστε να ορίσουν μέσω αυτής τη μεταβλητή του χρόνου [248–251]. Σε αυτή τη περίπτωση, μπορεί να κατασκευαστεί χώρος Hilbert και παράλληλα μπορεί να υπάρξει πιθανοκρατική ερμηνεία των αποτελεσμάτων [225]. Ωστόσο, όπως έχει αναφερθεί από τον Barvinsky [226], επιλέγοντας μια συγκεκριμένη βαθμίδα, “σπάει” η αναλλοiotητα της θεωρίας, επομένως, για κάθε διαφορετική βαθμίδα (κλασσικά ισοδύναμα συστήματα) εμφανίζονται διαφορετικές κβαντικές θεωρίες, οι οποίες κάθε φορά θα πρέπει να αποδειχθεί πως είναι ισοδύναμες. Ακόμη ένα πρόβλημα, είναι πως η χαμιλτονιανή πυκνότητα h_A είναι η τετραγωνική ρίζα των πραγματικών βαθμών ελευθερίας και των μεταβλητών του χρόνου, το οποίο σημαίνει πως θα είναι πραγματική μόνο για συγκεκριμένα τιμές του πεδίου ορισμού. Επιπλέον, εφόσον θα αναπαρασταθεί ως ένας τελεστής τετραγωνικής ρίζας, γνωρίζουμε πως μπορεί να είναι καλώς ορισμένος ως τελεστής, μόνο αν η υπόριζη ποσότητα έχει τις ιδιότητες: self-adjoint, θετικά ορισμένη [225]. Παρατηρούμε επίσης πως οι $\hat{h}_A$ είναι “χρονικά” εξαρτώμενες, επομένως δεν μπορεί να παραχθεί η εξίσωση Wheeler-DeWitt από αυτές (I.2). Φυσικά, αυτό από μόνο του δεν είναι κάτι αρνητικό, απλώς αποκαλύπτει τις διαφορετικές κατευθύνσεις που μπορεί να ακολουθήσει κανείς, όσον αφορά την κβάντωση της βαρύτητας. Μια ενδιαφέρουσα νέα προσέγγιση σχετικά με το πρόβλημα του χρόνου, παρουσιάζεται στην εργασία [252].

Αυτές οι ενδιαφέρουσες ερωτήσεις είναι πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστούν στην πλήρη θεωρία της βαρύτητας. Με σκοπό να αποκτηθεί κάποια γνώση σχετικά με το τι συμβαίνει, η επιστημονική κοινότητα έχει εργαστεί σε απλοποιημένα πρότυπα, όπως για παράδειγμα minisuperspace λαγκρανζιανές, όπου οι ισομετρίες του χωρόχρονου είναι αρκετές ώστε το σύστημα μετατρέπεται από απειροδιάστατο σε πεπερασμένη διάστασης. Για παράδειγμα, στην κοσμολογία τέτοια παραδείγματα είναι οι FLRW γεωμετρίες, τα πρότυπα Bianchi και τα Kantowski-Sachs [253]. Επιπλέον, υπάρχουν οι λύσεις που περιγράφουν σημειακές πηγές όπως οι Schwarzschild (S) [254] και Reissner-Nordström (RN) [255] χωρόχρονοι. Για παράδειγμα, στην [256] ο συγγραφέας υπερασπίζεται την άποψη πως οι κλασσικές ιδιότητες μιας “εσωτερικής” χρονικής μεταβλητής, όπως ο παράγοντας κλίμακας στη γεωμετρία FLRW, θα προκύψει κατά κάποιο τρόπο μέσω της αλληλεπίδρασης με φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Η ημικλασσική, κβαντική κοσμολογία για το minisuperspace FLRW πρότυπο με ηλεκτρομαγνητικές διαταραχές ως προς το υπόβαθρο, έχουν μελετηθεί στην εργασία [257]. Κυματοπακέτα έχουν κατασκευαστεί για τη σύζευξη της βαρύτητας με ένα άμαζο καθώς και ένα βαθμωτό πεδίο με μάζα στη γεωμετρία FLRW [258]. Ακόμη μια εργασία με την ίδια γεωμετρία και την παρουσία βαθμωτού πεδίου μπορεί είναι η [259]. Για την περίπτωση, γενικών χωρικών ομογενών χωροχρόνων υπό την παρουσία βαθμωτού πεδίου έχουν βρεθεί αναλυτικές λύσεις [260]. Έχει αποδειχθεί [261], πως στην περίπτωση όπου η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι διαχωρίσιμη (separable) για τα κοσμολογικά πρότυπα προς μελέτη, τότε μπορεί να εφαρμοστεί η κβάντωση όπως για τα συνήθη βαθμιδικά συστήματα. Οι λύσεις της εξίσωσης Wheeler-DeWitt για τη μελανή οπή Reissner-Nordström-deSitter έχουν ερμηνευτεί μέσω της θεωρίας de Broglie-Bohm στην εργασία [262]. Η θεωρία

των υπό συνθήκη (conditional) συμμετριών για την περίπτωση της κβαντικής περιγραφής του προτύπου Bianchi I, έχει εφαρμοστεί στην εργασία [263]. Στο ίδιο μήκος κύματος, η κανονική κβάντωση της μελανής οπής Reissner-Nordström μπορεί να βρεθεί στην [264], όπου η ερμηνεία των λύσεων της εξίσωσης WDW βασίζεται στην ημικλασσικά διορθωμένη γεωμετρία μέσω της ανάλυσης Bohm. Μια εργασία με την οποία η παρούσα έχει κάποια κοινά στοιχεία είναι η [265]. Οι συγγραφείς έχουν καταφέρει να αποδεσμεύσουν την αναλλοiotτητα παραμετροποίησης για κάποια πρότυπα minisuperspace και επομένως να απλοποιήσουν το σύστημα. Επιπλέον, παρέχουν ένα γενικευμένο ορισμό πιθανότητας. Για μια ερμηνεία των κυματοσυναρτήσεων μέσω του ορισμού ομοθετικού χρόνου παραθέτουμε την εργασία [266]. Μια διαφορετική οπτική σχετικά με τις κβαντικές διορθώσεις της μελανής οπής Schwarzschild δίνεται στην [267]. Οι συγγραφείς μελετούν επίσης την συνεισφορά στην εντροπία Bekenstein λόγω των κβαντικών διορθώσεων. Ακόμη μια διαφορετική προσέγγιση μπορεί να βρεθεί στις [268] και [269] όπου μια εξίσωση της μορφής Schrödinger για τις μελανές οπές Schwarzschild και Reissner-Nordström έχει κατασκευαστεί. Οι κβαντικές μελανές οπές αντιμετωπίζονται ως ένα βαρυτικό άτομο υδρογόνου και παρέχεται το ενεργειακό τους φάσμα. Οι συγγραφείς της [270] περιγράφουν μια κβαντική οπή Schwarzschild μέσω ενός μη-ιδιάζοντος κυματοπακέτου αποτελούμενου από επίπεδα κύματα, τα οποία είναι ιδιοκαταστάσεις του συζυγούς τελεστή ορμής του τελεστή μάζας. Επιπλέον, στην [271], υπάρχει μια ερμηνεία ενός προκύπτοντος χωροχρόνου ως το κβαντικό κενό Schwarzschild, το οποίο φαίνεται πως είναι άμαζο, αλλά έχει μη μηδενική αβεβαιότητα στη μάζα. Αυτές είναι μόνο μερικές εργασίες από όλη τη λίστα εργασιών με κβαντικά minisuperspace πρότυπα.

Στόχος αυτής της εργασίας είναι να κατασκευάσουμε μια εξίσωση της μορφής Schrödinger για την minisuperspace μελανή οπή Reissner-Nordström, χωρίς τη χρήση κάποια συγκεκριμένης βαθμίδας, ούτε και με την εισαγωγή επιπλέον συναρτησοειδών της μορφής χ^A με σκοπό την επιλογή κάποια μεταβλητής “χρόνου”. Ένας τρόπος ώστε να πετύχουμε κάτι τέτοιο, είναι να αναγνωρίσουμε αρχικά πως μια από τις πηγές των διαφόρων προβλημάτων που παρουσιάσαμε παραπάνω, είναι η ύπαρξη των συνδεσμικών εξισώσεων και επομένως η ιδιάζουσα μορφή της λαγκρανζιανής πυκνότητας. Ο σκοπός μας είναι να ικανοποιήσουμε την εξίσωση του συνδέσμου χωρίς να επιβάλουμε κάποια συνθήκη και στη συνέχεια να κατασκευάσουμε κάποια λαγκρανζιανή πυκνότητα η οποία δεν θα είναι ιδιάζουσα ως προς κάποιους βαθμούς ελευθερίας, ενώ ταυτόχρονα δεν θα έχει τη μορφή τετραγωνικής ρίζας. Εφόσον η ελευθερία βαθμίδας δεν θα έχει “σπάσει”, αναμένουμε μη πραγματικούς βαθμούς ελευθερίας να εμφανίζονται μέσα στην λαγκρανζιανή πυκνότητα. Αυτοί θα μας βοηθήσουν να εντοπίσουμε κάποια παράμετρο η οποία θα μπορεί να ερμηνευτεί ως η μεταβλητή του “χρόνου” και επομένως να κατασκευάσουμε μια εξίσωση της μορφής Schrödinger. Για όποιες κυματοσυναρτήσεις προκύψουν, έχουμε σκοπό να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση κατά Bohm έτσι ώστε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα μας με γεωμετρικά μέσα. Επιπλέον, παρέχουμε ένα κριτήριο με το οποίο θα αποφασίσουμε, ποιός μεταξύ δύο ιδιάζοντων χωροχρόνων είναι πιο “ιδιάζων” σε σύγκριση. Με την κατασκευή του χώρου Hilbert, μια πυκνότητα πιθανότητας θα μπορεί να κατασκευαστεί, στην οποία εφαρμόζουμε την ιδέα του DeWitt σχετικά με το πότε δεν υπάρχουν ιδιάζουσες επιφάνειες και σημεία αντίστοιχα. (Η πυκνότητα πιθανότητας πρέπει να είναι μηδέν στα σημεία του θεσεογραφικού χώρου στα οποία απαντάται η κλασσική ιδιομορφία).

Η εργασία αποτελείται από τις εξής ενότητες:

1. Κλασσική περιγραφή.
2. Κβαντική περιγραφή.
3. Ανάλυση Bohm.
4. Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων.

II Κλασσική περιγραφή

II.1 Στατική, σφαιρικά συμμετρική μετρική

Το σημείο από το οποίο θα ξεκινήσουμε είναι η δράση Einstein-Hilbert-Maxwell η οποία περιγράφει την αλληλεπίδραση της βαρύτητας με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} dx^4 \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4\mu_0} F \right), \quad (\text{II.1})$$

όπου $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ και $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, με $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$ το βαθμωτό Ricci, τη μετρική και τον τανυστή Faraday αντίστοιχα. Επιπλέον, c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα και $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, με G την βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα. Το σύστημα των εξισώσεων σε μορφή συνιστωσών είναι

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (\text{II.2})$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{II.3})$$

όπου

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (\text{II.4})$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4} F g_{\mu\nu} \right), \quad (\text{II.5})$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (\text{II.6})$$

και $A_\mu = (-\frac{\Phi}{c}, A_i)$, το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), (i = 1, 2, 3)$.

Ο περιορισμός στη οικογένεια των χωροχρόνων που μας ενδιαφέρουν (στατικοί, σφαιρικά συμμετρικοί) επιτυγχάνεται με την απαίτηση η μετρική να επιδέχεται την άλγεβρα Lie, αποτελούμενη από τα εξής ανύσματα

$$\xi_1 = \sin \phi \partial_\theta + \cos \phi \cot \theta \partial_\phi, \quad \xi_2 = \cos \phi \partial_\theta - \sin \phi \cot \theta \partial_\phi, \quad \xi_3 = \partial_\phi, \quad \xi_4 = \partial_t. \quad (\text{II.7})$$

Οι συντεταγμένες (t, r, θ, ϕ) έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το στοιχείο μήκους αποκτά τη μορφή

$$ds_{(4)}^2 = -a(r)^2 dt^2 + n(r)^2 dr^2 + b(r)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (\text{II.8})$$

Με χρήση της (II.8), όλες οι μη διαγώνιες συνιστώσες του τανυστή Einstein είναι ίσες με μηδέν. Όσον αφορά το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, οι εξής ιδιότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να καταλήξουμε στις μη μηδενικές συνιστώσες του:

1. “Κληρονομιά” των ισομετριών

$$\forall \xi_I : \mathcal{L}_{\xi_I} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\xi_I} G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\xi_I} T_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.9})$$

2. Αλγεβρικές συνθήκες για την συγκεκριμένη μετρική

$$\forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 : \nu > \mu \Rightarrow G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow T_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{II.10})$$

$$G_{44} = \sin^2 \theta G_{33} \Rightarrow T_{44} = \sin^2 \theta T_{33}. \quad (\text{II.11})$$

3. Ηλεκτρομαγνητική ελευθερία βαθμίδας

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \Lambda. \quad (\text{II.12})$$

Κάθε μια από τις παραπάνω ιδιότητες δεν περιέχει κάποια υπόθεση, επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό αποκτά τη γενική μορφή

$$A_\mu = \left(-\frac{\Phi(r)}{c}, 0, 0, B \cos \theta \right), \quad (\text{II.13})$$

όπου B κάποια τυχαία σταθερά. Στη συγκεκριμένη εργασία θα υποθέσουμε πως αυτή είναι μηδέν, έτσι καταλήγουμε

$$A_\mu = \left(-\frac{\Phi(r)}{c}, 0, 0, 0 \right). \quad (\text{II.14})$$

II.2 Ιδιάζουσα, minisuperspace λαγκρανζιανή

Οι βαθμοί ελευθερίας που περιγράφουν αυτό το σύστημα είναι οι $a(r)$, $n(r)$, $b(r)$ και $\Phi(r)$. Ωστόσο, δεν είναι όλοι τους πραγματικοί. Για να δούμε ποιοι εξ αυτών είναι, θα θεωρήσουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής $r = f(\tilde{r})$. Οι βαθμοί ελευθερίας μετασχηματίζονται ως εξής

$$a(f(\tilde{r})) = \tilde{a}(\tilde{r}), \quad n(f(\tilde{r})) \frac{df(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = \tilde{n}(\tilde{r}), \quad b(f(\tilde{r})) = \tilde{b}(\tilde{r}), \quad \Phi(f(\tilde{r})) = \tilde{\Phi}(\tilde{r}). \quad (\text{II.15})$$

Ο νόμος μετασχηματισμού ενός βαθμωτού αντιστοιχεί στους (a, b, Φ) και εκείνος μιας πυκνότητας στο n . Συνεπώς, η παραμένουσα ελευθερία μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε οποιαδήποτε από τις (a, b, Φ) να τεθεί ίση με μια συνάρτηση του r αλλά όχι σταθερά, ενώ για το n , ακόμη και κάποια σταθερή τιμή είναι επιτρεπτή. Η συνήθης “βαθμιδική” επιλογή είναι $b(r) = r^2$ έτσι ώστε το στοιχείο μήκους για $(t = , r = \alpha =)$ είναι εκείνο που περιγράφει κάποια σφαίρα με ακτίνα α .

Στην παρούσα εργασία, δεν θα υπάρξει κάποια επιλογή βαθμίδας, πριν την επίλυση των εξισώσεων. Λόγω της παραμένουσας ελευθερίας, το σύστημα των εξισώσεων Einstein-Maxwell αποτελείται από τρεις δυναμικές εξισώσεις, δηλαδή, τρεις, δεύτερης τάξης, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\ddot{a} = -\frac{an^2}{2b^2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{b} + \frac{a\dot{b}^2}{2b^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}}{n} + \frac{3\kappa\dot{\Phi}^2}{4c^2\mu_0 a}, \quad (\text{II.16})$$

$$\ddot{b} = \frac{n^2}{2b} - \frac{\dot{b}^2}{2b} + \frac{\dot{b}\dot{n}}{n} - \frac{\kappa b\dot{\Phi}^2}{4c^2\mu_0 a^2}, \quad (\text{II.17})$$

$$\ddot{\Phi} = \frac{\dot{a}\dot{\Phi}}{a} - \frac{2\dot{b}\dot{\Phi}}{b} + \frac{\dot{n}\dot{\Phi}}{n}, \quad (\text{II.18})$$

και μια συνδεσμική εξίσωση

$$-\frac{n^2}{b^2} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\kappa\dot{\Phi}^2}{2c^2\mu_0 a^2} = 0, \quad (\text{II.19})$$

όπου δεν εμφανίζεται δεύτερη παράγωγος των βαθμών ελευθερίας. Την ίδια στιγμή, δεν υπάρχει σε καμία από τις εξισώσεις, δεύτερη παράγωγος του n . Αν κάποιος μπορούσε να επιλύσει τις δυναμικές εξισώσεις, τότε ο σύνδεσμος θα επέβαλλε περιορισμούς επί των λύσεων.

Στη προσπάθεια κατασκευής μιας λαγκρανζιανής πυκνότητας από την οποία θα μπορούσαμε να παράξουμε τις εξισώσεις (II.16)-(II.19) μέσω της μεθόδου Euler-Lagrange, η μορφή της μετρικής (II.8) και του δυναμικού (II.14) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη δράση Einstein-Hilbert-Maxwell. Λόγω της εξάρτησης των βαθμών ελευθερίας μόνο από την μεταβλητή r , και παράλληλα αμελώντας κάποιους επιφανειακούς όρους, η δράση μπορεί να γραφεί ως

$$S = \int V dx^3 \int L(n, a, \dot{a}, b, \dot{b}, \Phi, \dot{\Phi}) dr. \quad (\text{II.20})$$

Εφόσον, ύστερα από ολοκλήρωση ο όρος $\int V dx^3$ είναι απλώς μια πολλαπλασιαστική σταθερά (αυτή είναι πάντα άπειρη λόγω της ολοκλήρωσης ως προς t , ωστόσο δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω), η επιθυμητή μορφή της minisuperspace λαγκρανζιανής πυκνότητας μέσω της οποίας μπορούμε να αναπαράξουμε τις εξισώσεις είναι

$$L = \frac{1}{2n} G_{\mu\nu}(q) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - nV(q), \quad (\text{II.21})$$

όπου $q^\mu = (a, b, \Phi)$, $\dot{q} = \frac{dq^\mu}{dr}$, $G_{\mu\nu}(q)$ η minisuperspace μετρική

$$G_{\mu\nu}(q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\kappa}b & 0 \\ \frac{2}{\kappa}b & \frac{2}{\kappa}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2\mu_0} \frac{b^2}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.22})$$

και το δυναμικό

$$V(q) = -\frac{1}{\kappa}a. \quad (\text{II.23})$$

Η ιδιάζουσα μορφή της λαγκρανζιανής πυκνότητας σχετίζεται με την απουσία όρου της μορφή $\dot{n}$, επομένως, η εξίσωση του συνδέσμου προκύπτει από τη μεταβολή ως προς το n . Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, κάποια από τα προβλήματα στην κβάντωση της βαρύτητας οφείλονται στην ιδιάζουσα αυτή μορφή, και οι περισσότερες συζητήσεις περιστρέφονται γύρω από τον τρόπο με τον οποίο θα αντιμετωπιστούν οι σύνδεσμοι κατά την κβαντική διαδικασία.

II.3 Απλοποιημένη, μη-ιδιάζουσα, “χρονικά” εξαρτημένη λαγκρανζιανή πυκνότητα

Από που επιθυμούμε να πετύχουμε σε αυτήν την ενότητα είναι να μετατρέψουμε το σύστημα των εξισώσεων σε μη-ιδιάζον, δηλαδή να κατασκευάσουμε μια λαγκρανζιανή με αυτή την ιδιότητα, ενώ ταυτόχρονα να διατηρήσουμε την συναλλοιότητα κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής $r = f(\tilde{r})$. Η διαδικασία είναι η εξής: αρχικά επιλύουμε την συνδεσμική εξίσωση ως προς τη μεταβλητή n . Αυτό γίνεται απλά, καθώς αυτή εμφανίζεται στην εξίσωση με αλγεβρικό τρόπο. Συγκεκριμένα έχουμε

$$n = \frac{1}{\sqrt{2\mu_0 c}} \frac{1}{a} \sqrt{4c^2\mu_0 ab\dot{a}\dot{b} + 2c^2\mu_0 a^2\dot{b}^2 + \kappa b^2\dot{\Phi}^2}. \quad (\text{II.24})$$

Ως αποτέλεσμα, η εξίσωση (II.19) ικανοποιείται ταυτοτικά, ενώ οι υπόλοιπες τρεις (II.16)-(II.18), απλοποιούνται. Για να είμαστε ακριβείς, μόνο δύο εξ αυτών είναι ανεξάρτητες,

$$\ddot{a} = -\frac{\dot{a}^2}{a} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{b} + \frac{\kappa}{2\mu_0 c^2} \frac{\dot{\Phi}^2}{a} + \dot{a} \frac{\ddot{b}}{b}, \quad (\text{II.25})$$

$$\ddot{\Phi} = -\frac{2\dot{b}\dot{\Phi}}{b} + \dot{\Phi} \frac{\ddot{b}}{b}. \quad (\text{II.26})$$

Με τη συνήθη επιλογή βαθμίδας $b(r) = r$, η λύση των εξισώσεων είναι

$$\Phi = -\frac{\gamma_1}{r} + \gamma_2, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 \kappa + 4c^2 r (\gamma_3 + \gamma_4 r) \mu_0}}{\sqrt{2} c \sqrt{\mu_0} r}, \quad (\text{II.27})$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 = \text{σταθερές}$. Η επιλογή $\gamma_2 = 0$ συνεπάγεται πως στο όριο $r \rightarrow \infty$ το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό ισούται με μηδέν. Επιπλέον, με τον επαναορισμό $\gamma_3 = -r_s \gamma_4$, $\gamma_1 = \frac{2c\sqrt{\gamma_4 \mu_0} r_q}{\sqrt{\kappa}}$ και τον μετασχηματισμό

συντεταγμένων $t = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{2\gamma_4}}$, η γνωστή λύση Reissner-Nordström προκύπτει

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{II.28})$$

$$A_\mu = \left(-\sqrt{2\frac{\mu_0}{\kappa}} \frac{r_q}{r}, 0, 0, 0\right), \quad (\text{II.29})$$

όπου ισχύουν οι εξής σχέσεις $r_q^2 = \frac{Q^2 \kappa}{32\pi^2} \mu_0 c^2$, και $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ η ακτίνα Schwarzschild.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις

Παρατηρήσεις

1. Η εξίσωση (II.24) δεν αποτελεί επιλογή βαθμίδας. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να κατανοήσουμε κάτι τέτοιο: ο πρώτος τρόπος βασίζεται στην παρατήρηση πως μόνο δύο εξισώσεις παραμένουν (II.25)-(II.26) ενώ υπάρχουν τρεις βαθμοί ελευθερίας (a, b, Φ) . Ο δεύτερος βασίζεται στην εκτέλεση ενός μετασχηματισμού της μορφής $r = f(\tilde{r})$ και στην παρατήρηση πως η ελευθερία επιλογής βαθμίδας παραμένει. Με βάση την μορφή που έχουμε εκφράσει τις εξισώσεις, αυτή η ελευθερία μεταφέρθηκε στην συνάρτηση b .
2. Αν λοιπόν αυτό που κάναμε δεν ήταν επιλογή βαθμίδας, τότε τι είναι; Από ό,τι φαίνεται, είναι απλώς μια “πολύ καλή” αρχική παραμετροποίηση του στοιχείου μήκους με την εξής έννοια: Αν κάποιος ήταν αρκετά τυχερός ή έξυπνος, θα μπορούσε να είχε κάνει εξαρχής αυτήν την επιλογή για το $n(r)$ όπως δίνεται στην (II.24), πριν καν υπολογίσει τις εξισώσεις Einstein-Maxwell. Σε αυτή την περίπτωση, δεν θα υπήρχε καμία εξίσωση συνδέσμου. Για να είμαστε πιο ακριβείς, η εξίσωση του συνδέσμου θα ικανοποιηθεί ταυτοτικά μόλις βρεθεί η λύση των (II.25), (II.26).
3. Οι απλοποιημένες εξισώσεις θα μπορούσαν να λυθούν για ένα, οποιοδήποτε, από τα ζεύγη $(\ddot{a}, \ddot{\Phi})$, $(\ddot{a}, \ddot{b})$ ή $(\ddot{b}, \ddot{\Phi})$. Εμείς απλώς επιλέξαμε το πρώτο.

Ας συνεχίσουμε τώρα με την απλοποιημένη λαγκρανζιανή πυκνότητα. Αυτή μπορεί να κατασκευαστεί μέσω της αντικατάστασης (II.24) στην (II.21),

$$L = \frac{1}{c\kappa\sqrt{\mu_0}} \sqrt{8c^2\mu_0 a b \dot{a} \dot{b} + 4c^2\mu_0 a^2 \dot{b}^2 + 2\kappa b^2 \dot{\Phi}^2}. \quad (\text{II.30})$$

Αυτή εξακολουθεί να είναι ιδιάζουσα όσον αφορά τις δυναμικές μεταβλητές (a, b, Φ) , εφόσον η ορίζουσα του πίνακα A , είναι μηδέν

$$A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu}, \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Det}(A) = 0. \quad (\text{II.32})$$

Ωστόσο, εφόσον η συνδεσμική εξίσωση ικανοποιείται ταυτοτικά έχοντας πρώτα επιλύσει τις δυναμικές εξισώσεις, αυτό μας οδηγεί να σκεφτούμε πως η μεταβλητή b μπορεί να θεωρηθεί ως μη δυναμικός βαθμός ελευθερίας, αλλά μόνο ως μια συνάρτηση του “χρόνου” (r). Η μεταβολή ως προς τους βαθμούς ελευθερίας (a, Φ) παράγει τις εξισώσεις (II.25), (II.26). Λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη υπόθεση, η λαγκρανζιανή τώρα είναι μη-ιδιάζουσα, αλλά “χρονικά” εξαρτημένη. Παρατηρούμε πως η λέξη χρόνος χρησιμοποιείται μόνο κατ’ όνομα, εφόσον η μεταβλητή r είναι μια χωρική συντεταγμένη στο επίπεδο της γεωμετρίας. Ο λόγος που την αποκαλούμε παράμετρο “χρόνου” θα γίνει αντιληπτός στις επόμενες ενότητες.

Παρόλα αυτά, λόγω της τετραγωνικής ρίζας, η διαδικασία της κανονικής κβάντωσης θα είναι αρκετά δύσκολη. Με σκοπό να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα, αναζητούμε λαγκρανζιανή πυκνότητα η οποία θα αναπαράγει τις σωστές εξισώσεις και θα έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2} h(b, \dot{b}) G_{\mu\nu}(q) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu, \quad (\text{II.33})$$

όπου $q^\mu = (a, \Phi)$. Κάποιος θα μπορούσε να προβλέψει αυτή τη μορφή με τον εξής τρόπο: δεν υπάρχει πουθενά στις εξισώσεις κάποιο δυναμικό κομμάτι (II.25), (II.26), συνεπώς δεν χρειάζεται κάποια συνάρτηση δυναμικού στην λαγκρανζιανή πυκνότητα. Επίσης, οι εξισώσεις είναι γραμμικές ως προς την δευτέρα παράγωγο των δυναμικών βαθμών ελευθερίας, με αποτέλεσμα η τετραγωνική εξάρτηση ως προς τις “ταχύτητες” να είναι αρκετή. Επιπλέον, συγκεκριμένος συνδυασμός των μεταβλητών $b, \dot{b}$ έχει ρόλο παρόμοιο με εκείνο της συνάρτησης Lapse. Εν κατακλείδι, η λαγκρανζιανή πυκνότητα έχει τη μορφή

$$L_{(r)} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{\dot{b}} G_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu, \quad (\text{II.34})$$

όπου

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & -\frac{\kappa}{2\mu_0 c^2} a \Phi \\ -\frac{\kappa}{2\mu_0 c^2} a \Phi & \frac{\kappa^2 \Phi^2 - 8\mu_0^2 c^4}{4\mu_0^2 c^4} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.35})$$

Ο συγκεκριμένος συνδυασμός $\frac{b^2}{\dot{b}}$ εγγυάται πως η λαγκρανζιανή πυκνότητα μετασχηματίζεται ως πυκνότητα κάτω από επαναπαραμετροποιήσεις της (r) , εννοώντας πως η δράση $S = \int L dr$ είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτές, το ίδιο και οι εξισώσεις Euler-Lagrange. Για πληρότητα, το γεγονός πως η λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι μη-ιδιάζουσα στο χώρο των μεταβλητών (a, Φ) , αποδεικνύεται μέσω της ορίζουσας

$$\text{Det} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu} \right) = -\frac{2a^2 b^4}{\dot{b}^2}. \quad (\text{II.36})$$

II.4 Minisuperspace γεωμετρία και μετασχηματισμοί των μεταβλητών. Η γενική λύση σε τυχαία βαθμίδα.

Η minisuperspace μετρική (II.35) αντιστοιχεί στον επίπεδο χώρο με υπογραφή Lorentz. Αυτό σημαίνει πως υπάρχουν μεταβλητές, έστω (u, w) τέτοιες ώστε, αυτή να αποκτά την απλή διαγώνια μορφή της μετρικής Minkowski. Ο μετασχηματισμός είναι

$$a = \frac{\sqrt{\kappa u^2 + 8\mu_0 c^2 w}}{2c\sqrt{\mu_0}}, \quad (\text{II.37})$$

$$\Phi = \frac{u}{\sqrt{2}}. \quad (\text{II.38})$$

Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $m(r)$ τέτοια ώστε

$$\frac{b^2(r)}{\dot{b}(r)} = \frac{1}{m(r)} \Rightarrow b(r) = -\frac{1}{\int m(r) dr}, \quad (\text{II.39})$$

Λόγω της (II.39), η νέα συνάρτηση $m(r)$ μετασχηματίζεται ως μια συνάρτηση Lapse. Με βάση αυτούς τους μετασχηματισμούς, η λαγκρανζιανή πυκνότητα αποκτά τη μορφή

$$L = \frac{1}{2m(r)} \tilde{G}_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu, \quad (\text{II.40})$$

όπου

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q^\mu = (u, w). \quad (\text{II.41})$$

Σε αυτές τις μεταβλητές, οι εξισώσεις (II.25), (II.26), μετασχηματίζονται στην απλή μορφή

$$\ddot{u} = \frac{\dot{m}}{m} \dot{u}, \quad \ddot{w} = \frac{\dot{m}}{m} \dot{w}. \quad (\text{II.42})$$

Αυτό που κάναμε είναι να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία σχετικά με την γεωμετρία της minisuperspace μετρικής, και να αναζητήσουμε τις μεταβλητές εκείνες στις οποίες η μετρική και το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό οδηγούν τις εξισώσεις Einstein-Maxwell να αποκτήσουν την μορφή (II.42). Για λόγους πληρότητας, η χωροχρονική μετρική και το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό σε αυτές τις μεταβλητές έχουν την μορφή

$$g_{00} = - \left(\frac{\kappa u^2}{4\mu_0 c^2} + 2w \right), \quad (\text{II.43})$$

$$g_{11} = \frac{m^2 (\kappa u^2 + 8\mu_0 c^2 w) + \kappa (\int m dr)^2 \dot{u}^2 - 2m \int m dr (\kappa u \dot{u} + 4\mu_0 c^2 \dot{w})}{(\kappa u^2 + 8\mu_0 c^2 w) (\int m dr)^4}, \quad (\text{II.44})$$

$$g_{22} = \frac{1}{(\int m dr)^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{33}, \quad (\text{II.45})$$

$$A_0 = - \frac{1}{\sqrt{2}c} u. \quad (\text{II.46})$$

Προφανώς, αυτές οι εκφράσεις δεν είναι τόσο “κομψες”, όμως μπορούμε να το υπομείνουμε λαμβάνοντας υπόψη την απλή μορφή των εξισώσεων. Παρατηρούμε ακόμη πως αυτοί οι μετασχηματισμοί, μετασχηματίζουν τις εξισώσεις σε αυτή τη μορφή ανεξάρτητα από το ποιά minisuperspace λαγκρανζιανή πυκνότητα χρησιμοποιήσαμε. Η λαγκρανζιανή πυκνότητα (II.34) απλώς μας βοήθησε να τους αποκαλύψουμε.

Υπάρχει ακόμη ένα σημείο άξιο παρατήρησης. Η ίδια μορφή εξισώσεων έχει βρεθεί και στην εργασία [272] η οποία περιγράφει 3D ηλεκτρομαγνητικές pp-waves μετρικές. Ποιός είναι ο λόγος αυτής της ισοδυναμίας; Ένας λόγος θα μπορούσε να είναι πως και οι δύο χωρόχρονοι είναι επίπεδοι κατά Ricci, $R = 0$. Αυτό ισχύει στις τέσσερις διαστάσεις, λόγω της μηδενικότητας του ίχνους του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$. Αυτή είναι μια ιδιότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κάθε χωρόχρονο, όταν η διάσταση αυτού ισούται με τέσσερα. Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, αυτή είναι ιδιότητα των pp-wave χωροχρόνων, επομένως, η συνθήκη $T = 0$ επιβάλλεται.

Επομένως, μπορούμε να αποκτήσουμε τη γενική, ηλεκτρικά φορτισμένη, στατική και σφαιρικά συμμετρική μετρική, σε τυχαία βαθμίδα, με την επίλυση μια αλγεβρικής εξίσωσης (II.19), και μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$\ddot{y} = \frac{\dot{m}}{m} \dot{y}. \quad (\text{II.47})$$

Αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί πολύ απλά,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln \dot{y} &= \frac{d}{dr} \ln m \Rightarrow \\ \ln \dot{y} &= \ln m + \mu_1 \Rightarrow \\ \dot{y} &= \mu_2 m \Rightarrow \\ y(r) &= \mu_3 + \mu_2 \int m(r) dr. \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Συνεπώς,

$$u(r) = c_2 + c_1 \int m(r) dr, \quad w(r) = c_4 + c_3 \int m(r) dr, \quad (\text{II.49})$$

όπου (c_1, c_2, c_3, c_4) σταθερές ολοκλήρωσης. Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στην συνάρτηση $b(r)$, μέσω της (II.39), εφόσον οι συνιστώσες της μετρικής είναι πιο γνώριμες με βάση αυτή την τυχαία συνάρτηση. Με τις εξής επιλογές των σταθερών

$$c_2 = 0, c_1 = \sqrt{2} \frac{Q\sqrt{2c_4}}{4\pi\epsilon_0}, c_3 = r_s c_4, \quad (\text{II.50})$$

και τον μετασχηματισμό $t = \frac{-\tilde{t}}{\sqrt{2c_4}}$, η χωροχρονική μετρική και το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό αποκτούν την μορφή

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_s}{b(r)} + \frac{r_q^2}{b(r)^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b(r)^2}{\left(1 - \frac{r_s}{b(r)} + \frac{r_q^2}{b(r)^2}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b(r)^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{II.51})$$

$$A_\mu = \left(-\sqrt{2\frac{\mu_0}{\kappa}} \frac{r_q}{b(r)}, 0, 0, 0\right) \quad (\text{II.52})$$

Η σταθερά c_2 θεωρείται ίση με μηδέν καθώς επιθυμούμε το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό να ισούται με μηδέν καθώς $b(r) \rightarrow \infty$.

III Κβαντική περιγραφή

III.1 Επαναορισμοί μεταβλητών

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την διαδικασία κβάντωσης. Ωστόσο, πριν κάνουμε κάτι τέτοιο, αξίζει να μελετήσουμε τις φυσικές μονάδες των αντικειμένων που έχουν οριστεί μέχρι στιγμής. Εφόσον, οι μεταβλητές “θέσης” οι οποίες θα εμφανίζονται στον τελεστή της χαμιλτονιανής πυκνότητας είναι οι (u, w) , είναι απαραίτητο να ορίσουμε ένα νέο ζεύγος (τ, σ) το οποίο θα έχει μονάδες μήκους. Δύο χαρακτηριστικά μεγέθη μήκους που εμφανίζονται στην κλασσική λύση είναι τα (r_s, r_q) . Παρατηρούμε επίσης πως, η μεταβλητή w είναι αδιάστατη, ενώ η u έχει μονάδες ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού. Αυτό μπορεί να βρεθεί από την (II.38). Συνεπώς, οι κατάλληλοι επαναορισμοί είναι

$$u = 2c\sqrt{\frac{\mu_0}{\kappa}} \frac{\tau}{r_q}, w = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{r_s}. \quad (\text{III.1})$$

Παράλληλα, η $m(r)$ θα επαναοριστεί έτσι ώστε, η λαγκρανζιανή η οποία περιγράφει το σύστημα να έχει μονάδες ενέργειας. Στη συνήθη βαθμίδα, $m(r) \sim \frac{1}{[\mu\eta\kappa\omicron\varsigma]^2}$, επομένως εισάγουμε τυχαίες σταθερές με τις κατάλληλες μονάδες ως εξής

$$m = \frac{M_p c^2}{r_p^2 M}, \quad (\text{III.2})$$

όπου $M_p c^2 \sim [\epsilon\eta\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha]$, $r_p \sim [\mu\eta\kappa\omicron\varsigma]$ and $M \sim [\epsilon\eta\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha]$. Ως αποτέλεσμα, η παλαιά λαγκρανζιανή πυκνότητα, μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο μιας σταθεράς και μιας νέας λαγκρανζιανής πυκνότητας

$$L = \frac{r_p^2}{M_p c^2} \tilde{L}, \tilde{L} = \frac{M(r)}{2} (-\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2). \quad (\text{III.3})$$

Για απλότητα, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το σύμβολο L . Οι εξισώσεις κίνησης δεν εξαρτώνται από καμία εκ των προηγούμενων σταθερών που εισήχθησαν, λόγω της ύπαρξης ενός ομοθετικού ανυσματικού

πεδίου το οποίο επιδέχεται η minisuperspace μετρική. Η μόνη αλλαγή που προκύπτει είναι ένα μείον πρόσημο λόγω της σχέσης $m \sim \frac{1}{M}$. Συγκεντρωτικά,

$$L = \frac{M(r)}{2} (-\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2), \quad (\text{III.4})$$

$$\ddot{\tau} = -\frac{\dot{M}}{M}\dot{\tau}, \quad \ddot{\sigma} = -\frac{\dot{M}}{M}\dot{\sigma}, \quad (\text{III.5})$$

όπου $M \sim [\text{ενέργεια}]$, $(\tau, \sigma) \sim [\text{μήκος}]$, $(\dot{\tau}, \dot{\sigma}) \sim [\text{αδιάστατες}]$ και $L \sim [\text{ενέργεια}]$. Αυτή η λαγκρανζιανή μοιάζει με εκείνη ενός ελεύθερου σχετικιστικού σωματίου, με “χρονικά” εξαρτώμενη μάζα. Παρατηρούμε ωστόσο πως αυτή η περιγραφή δεν μπορεί να είναι ισοδύναμη με εκείνη των συστημάτων με χρονικά εξαρτώμενη μάζα καθώς, η $M(r)$ έχει διαφορετικό νόμο μετασχηματισμού λόγω της γεωμετρικής της προέλευσης. Η μάζα μετασχηματίζεται ως βαθμωτό, ενώ η $M(r)$ ως πυκνότητα.

III.2 Κανονική χαμιλτονιανή πυκνότητα και διατηρήσιμα φορτία

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η κανονική κβάντωση, συνεπώς θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό της χαμιλτονιανής πυκνότητας μέσω του μετασχηματισμού Legendre. Οι κανονικές ορμές ορίζονται ως

$$p_\tau = -M\dot{\tau}, \quad p_\sigma = M\dot{\sigma}, \quad (\text{III.6})$$

$$\dot{\tau} = -\frac{p_\tau}{M}, \quad \dot{\sigma} = \frac{p_\sigma}{M}. \quad (\text{III.7})$$

Η κανονική χαμιλτονιανή πυκνότητα αποκτά τη μορφή

$$H_{can} = \frac{1}{2M} (-p_\tau^2 + p_\sigma^2). \quad (\text{III.8})$$

και η εξέλιξη κάποια ποσότητας B στον χώρο των φάσεων, ως προς την παράμετρο r θα δίνεται από την σχέση

$$\frac{dB}{dr} = \frac{\partial B}{\partial r} + \{B, H_{can}\}, \quad (\text{III.9})$$

όπου $B = B(r, \tau, \sigma, p_\tau, p_\sigma)$. Επομένως, οι εξισώσεις στον χώρο των φάσεων είναι

$$\dot{\tau} = -\frac{p_\tau}{M}, \quad \dot{\sigma} = \frac{p_\sigma}{M}, \quad \dot{p}_\tau = 0, \quad \dot{p}_\sigma = 0. \quad (\text{III.10})$$

Λόγω της εκπεφρασμένης εξάρτησης από το r , η κανονική χαμιλτονιανή πυκνότητα δεν διατηρείται,

$$\begin{aligned} \frac{dH_{can}}{dr} &= \frac{\partial H_{can}}{\partial r} + \{H_{can}, H_{can}\} \Rightarrow \\ \frac{dH_{can}}{dr} &= \frac{\partial H_{can}}{\partial r} \Rightarrow \\ \frac{dH_{can}}{dr} &= -\frac{1}{2M^2} \dot{M}(-p_\tau^2 + p_\sigma^2) \Rightarrow \\ \dot{H}_{can} &= -\frac{\dot{M}}{M} H_{can} \Rightarrow \\ \frac{d}{dr} (MH_{can}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Όπως βλέπουμε όμως, υπάρχει διατηρήσιμη ποσότητα, και αυτή είναι η H_{con} ,

$$\begin{aligned} H_{con} &= MH_{can} \Rightarrow \\ H_{con} &= \frac{1}{2} (-p_\tau^2 + p_\sigma^2). \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Επιπρόσθετα, με βάση το θεώρημα της Noether, κάθε Killing ανυσματικό πεδίο της minisuperspace μετρικής σχετίζεται με ένα διατηρήσιμο φορτίο. Στη περίπτωση μας έχουμε

$$Q_1 = p_\tau, \quad Q_2 = p_\sigma, \quad Q_3 = \sigma p_\tau + \tau p_\sigma. \quad (\text{III.13})$$

III.3 “Χρονικά”-συναλλοιώτη εξίσωση Schrödinger

Όπως και στη συνήθη κβάντωση ενός ελευθέρου σωματιδίου, οι κανονικές θέσεις και ορμές θα αντικατασταθούν από τελεστές, $(q^\mu \rightarrow \hat{q}^\mu, p_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu)$ οι οποίοι θα ικανοποιούν τις ιδιότητες: **αυτο-συζυγής**

$$\langle \hat{p}_j \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{p}_j^* \phi \rangle, \quad \langle \hat{x}^j \psi | \phi \rangle = \langle \psi | (\hat{x}^j)^* \phi \rangle, \quad (\text{III.14})$$

και **κανονικές συνθήκες μετάθεσης**

$$[\hat{x}^j, \hat{x}^l]_C = 0, \quad [\hat{x}^j, \hat{p}_l]_C = i\hbar c \delta_l^j, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_l]_C = 0, \quad (\text{III.15})$$

όπου $[\cdot, \cdot]_C$ είναι ο μεταθέτης, δ_l^j το δέλτα του Kronecker, $\langle \psi | \phi \rangle = \int d^2x \sqrt{|\mu|} \psi^* \phi$ το εσωτερικό γινόμενο και $\sqrt{|\mu|}$ ένα κατάλληλο μέτρο. Σε αυτή την περίπτωση, επιλέγουμε $\mu = \det(\tilde{G}_{\mu\nu})$. Η αναπαράσταση θέσης αρκεί ώστε να ικανοποιηθούν οι παραπάνω ιδιότητες.

$$\hat{p}_\tau = -i\hbar c \partial_\tau, \quad \hat{p}_\sigma = -i\hbar c \partial_\sigma, \quad (\text{III.16})$$

$$\hat{\tau} = \tau, \quad \hat{\sigma} = \sigma, \quad (\text{III.17})$$

όπου η ταχύτητα του φωτός c στον τελεστή της ορμής χρησιμοποιήθηκε για διαστατικούς λόγους. Σε αυτή την εργασία, μας ενδιαφέρουν κυματοσυναρτήσεις οι οποίες θα είναι ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών $\hat{H}_{can}, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$. Οι τελεστές αυτοί έχουν την μορφή

$$\hat{H}_{can} = \frac{1}{M} \hat{H}_{con}, \quad (\text{III.18})$$

$$\hat{H}_{con} = -\frac{\hbar^2 c^2}{2} (-\partial_{\tau,\tau} + \partial_{\sigma,\sigma}), \quad (\text{III.19})$$

$$\hat{Q}_1 = -i\hbar c \partial_\tau, \quad (\text{III.20})$$

$$\hat{Q}_2 = -i\hbar c \partial_\sigma, \quad (\text{III.21})$$

και επιδέχονται κοινό σύνολο ιδιοκαταστάσεων

$$[\hat{H}_{con}, \hat{Q}_1] = 0, \quad [\hat{H}_{con}, \hat{Q}_2] = 0, \quad [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] = 0. \quad (\text{III.22})$$

Παρατηρήστε πως δεν χρειάζεται να ελέγξουμε την μεταθετικότητα με την $\hat{H}_{can}$, είναι αρκετό να χρησιμοποιήσουμε την $\hat{H}_{con}$, εφόσον διαφέρουν μόνο κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα ο οποίος είναι ανεξάρτητος των θέσεων και των ορμών.

Ας συνεχίσουμε με την κβαντική εξίσωση η οποία θα περιγράφει αυτό το σύστημα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι μη-ιδιάζουσα, “χρονικά” εξαρτώμενη και μετασχηματίζεται ως πυκνότητα κάτω από τον νόμο μετασχηματισμού του $M(r)$. Δεν έχουμε επιλέξει κάποια μεταβλητή “χρόνου” όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό από την υπερβολική φύση του τελεστή της χαμιλτονιανής πυκνότητας. Επομένως, δεν θα ακολουθήσουμε την διαδικασία του “εσωτερικού χρόνου” τον οποίο αναφέραμε στην εισαγωγή. Επιπλέον, λόγω του ότι η χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι μη-ιδιάζουσα, μπορούμε να ορίσουμε αντί της εξίσωσης Wheeler-DeWitt, μια εξίσωση της μορφής Schrödinger και να έχουμε εξέλιξη των καταστάσεων, σε αντίθεση με την “παγωμένη” εικόνα η οποία σχετίζεται με την κβάντωση των συνδεσμικών συστημάτων. Ποιά θα είναι η “χρονική” παράμετρος στην εξίσωση Schrödinger εφόσον δεν έχουμε ξεχωρίσει κάποια “χρονική” μεταβλητή; Σε αυτή την εργασία, υπερασπιζόμαστε την άποψη πως η επιθυμητή παράμετρος παρέχεται στο σημείο όπου η $M(r)$ αντιμετωπίζεται ως συνάρτηση του r και όχι ως δυναμική μεταβλητή. Επομένως, η r εμφανίζεται ως μια εξωτερική παράμετρος στην χαμιλτονιανή

πυκνότητα και κάνει την τελευταία να είναι r -εξαρτώμενη. Επιπρόσθετα, η επιθυμία να κατασκευάσουμε μια συναλλοίωτη εξίσωση Schrödinger κάτω από “χρονικούς” μετασχηματισμούς και να αποφυγούμε τη μοίρα του φορμαλισμού του “εσωτερικού” χρόνου (διαφορετικές “χρονικές” επιλογές οδηγούν σε διαφορετική κβαντική περιγραφή), περιορίζει το πεδίο επιλογών “χρόνου” στην παράμετρο r . Για να είμαστε πιο ακριβείς, κάθε συνάρτηση του r μπορεί να αντιμετωπιστεί ως “χρονική” παράμετρος, όμως αυτή η ελευθερία περιέχεται ήδη στην συναλλοιότητα της εξίσωσης. Εν κατακλείδι, η πιο απλή έκφραση είναι

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \hat{H}_{con} \Psi \Leftrightarrow i\hbar c \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{M} \hat{H}_{con} \Psi. \quad (\text{III.23})$$

Παρατηρούμε πως λόγω του μετασχηματισμού της M , ο οποίος προέρχεται από την γεωμετρική της φύση και του μετασχηματισμού του αριστερού μέλους της εξίσωσης, κάτω από επαναπαραμετροποιήσεις της μορφής $r = f(\tilde{r})$ με τυχαίες συναρτήσεις f , αυτή η εξίσωση είναι πράγματι συναλλοίωτη, σε αντίθεση με τη συνήθη εξίσωση Schrödinger η οποία είναι το πολύ αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς $r \rightarrow \tilde{r} + \alpha$, όπου α κάποια σταθερά. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να κατανοήσουμε για ποιο λόγο η χρήση της λέξης “χρόνος” για την παράμετρο r είναι μόνο κατ’ όνομα: όπως παρατηρούμε από την (77), εμφανίζεται στη θέση της χρονικής παραμέτρου στη συνήθη κβαντική μηχανική.

Οι λύσεις που μας ενδιαφέρουν είναι οι κοινές ιδιοσυναρτήσεις $\psi(\tau, \sigma)$ των τελεστών $(\hat{H}_{con}, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2)$, επομένως το σύστημα προς επίλυση είναι το

$$\hat{H}_{con} \psi = -\frac{E^2 c^4}{2} \psi, \quad (\text{III.24})$$

$$\hat{Q}_1 \psi = k_1 \psi, \quad (\text{III.25})$$

$$\hat{Q}_2 \psi = k_2 \psi, \quad (\text{III.26})$$

όπου (E, k_1, k_2) κάποιες σταθερές. Το σημείο εκκίνησης είναι να υποθέσουμε πως $\Psi = T(r)\psi(\tau, \sigma)$,

$$\begin{aligned} (\text{III.23}) \Rightarrow i\hbar c \dot{T}(r) \psi(\tau, \sigma) &= \frac{1}{M(r)} T(r) \hat{H}_{con} \psi(\tau, \sigma) \Rightarrow \\ i\hbar c M(r) \frac{\dot{T}(r)}{T(r)} &= \frac{\hat{H}_{con} \psi(\tau, \sigma)}{\psi(\tau, \sigma)} \Rightarrow \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

$$i\hbar c M(r) \frac{\dot{T}(r)}{T(r)} = -\frac{E^2 c^4}{2} \Rightarrow \quad (\text{III.28})$$

$$T(r) = \nu e^{\frac{i}{2\hbar c} E^2 c^4 \int \frac{1}{M(r)} dr}, \quad (\text{III.29})$$

όπου ν κάποια σταθερά κανονικοποίησης η οποία θα απορροφηθεί εν τέλει στις ιδιοσυναρτήσεις ψ . Οι ιδιοσυναρτήσεις ψ μπορούν να προσδιοριστούν μέσω των εξισώσεων (III.25), (III.26),

$$\psi(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\hbar c} e^{\frac{i}{\hbar c} k_1 \tau} e^{\frac{i}{\hbar c} k_2 \sigma}, \quad (\text{III.30})$$

όπου ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας προσδιορίστηκε μέσω της κανονικοποίησης της ψ , με χρήση της συνάρτησης δέλτα του Dirac

$$\langle \psi_{k_1, k_2} | \psi_{\tilde{k}_1, \tilde{k}_2} \rangle = \delta(k_1 - \tilde{k}_1) \delta(k_2 - \tilde{k}_2). \quad (\text{III.31})$$

Συνδυάζοντας τις (III.30) και (III.24) το αποτέλεσμα είναι

$$\Psi = \frac{1}{2\pi\hbar c} e^{\frac{i}{2\hbar c} E^2 c^4 \int \frac{1}{M(r)} dr} e^{\frac{i}{\hbar c} k_1 \sigma} e^{\frac{i}{\hbar c} k_2 \tau}, \quad (\text{III.32})$$

$$E^2 c^4 = k_1^2 - k_2^2. \quad (\text{III.33})$$

Όπως αναμέναμε, οι καταστάσεις αυτού του συστήματος έχουν καλά καθορισμένες ορμές (k_1, k_2) λόγω της μορφής των $\hat{Q}_1 \leftrightarrow \hat{p}_\tau, \hat{Q}_2 \leftrightarrow \hat{p}_\sigma$. Επιπλέον, η κατάσταση είναι αναλλοίωτη κάτω από επαναπαραμετροποιήσεις, καθώς προέκυψε ως λύση μιας εξίσωσης που μοιράζεται την ίδια ιδιότητα.

Ένα από τα πιο σημαντικά επακόλουθα είναι πως μπορούμε να παρατηρήσουμε εξέλιξη των καταστάσεων. Θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις, η μια θα αποτελεί το όριο της άλλης. Να θυμίσουμε σε αυτό το σημείο πως, δεδομένης μιας αρχικής κατάστασης $\Psi_0(\tau, \sigma)$, η εξέλιξη της θα δίνεται από την

$$\Psi_{ev0}(r, \tau, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(k_1, k_2) \Psi(r, \tau, \sigma) dk_1 dk_2, \quad (\text{III.34})$$

όπου $\Psi(r, \tau, \sigma)$ η ιδιοκατάσταση (III.32) και η $c(k_1, k_2)$ προκύπτει από

$$c(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\tau, \sigma) \Psi_0(\tau, \sigma) d\tau d\sigma, \quad (\text{III.35})$$

με $\psi^*(\tau, \sigma)$ τη συζυγή μιγαδική κατάσταση της (III.30).

III.3.1 Συνάρτηση δέλτα του Dirac

Σε αυτήν την υποενότητα υποθέτουμε αρχική κατάσταση της μορφής

$$\Psi_0(\tau, \sigma) = \delta(\tau - \tau_0) \delta(\sigma - \sigma_0). \quad (\text{III.36})$$

Η “θέση” έχει καλά καθορισμένη τιμή. Με βάση αυτή την αρχική κατάσταση καταλήγουμε στις

$$c(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi\hbar c} e^{-\frac{i}{\hbar c} k_1 \tau_0} e^{-\frac{i}{\hbar c} k_2 \sigma_0}, \quad (\text{III.37})$$

$$\Psi_\delta(r, \tau, \sigma) = \Omega(r, \tau, \sigma) e^{\frac{i}{\hbar c} S(r, \tau, \sigma)}, \quad (\text{III.38})$$

$$\Omega(r, \tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\hbar c B(r)}, \quad (\text{III.39})$$

$$S(r, \tau, \sigma) = \frac{1}{2B(r)} [-(\tau - \tau_0)^2 + (\sigma - \sigma_0)^2], \quad (\text{III.40})$$

όπου για απλότητα χρησιμοποιήσαμε την συντόμευση $B(r) = \int \frac{1}{M(r)} dr$ και θα την χρησιμοποιούμε όπου χρειάζεται. Εφόσον ο χώρος Hilbert είναι καλώς ορισμένος, η πιθανότητα και η πυκνότητα πιθανότητας μπορούν να οριστούν επίσης

$$\Pi(k_1, k_2) = c^*(k_1, k_2) c(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi\hbar c)^2}, \quad (\text{III.41})$$

$$P(r, \tau, \sigma) = \Psi_\delta^*(r, \tau, \sigma) \Psi_\delta(r, \tau, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\hbar c B(r))^2}. \quad (\text{III.42})$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, εφόσον η “θέση” έχει καλά καθορισμένη τιμή, όλες οι τιμές της “ορμής” έχουν την ίδια πιθανότητα (III.41). Η πυκνότητα πιθανότητας είναι αναλλοίωτη κάτω από επαναπαραμετροποιήσεις επομένως το ίδιο θα ισχύει και για την πιθανότητα.

III.3.2 Αρχική κατάσταση Gauss

Η αρχική κατάσταση έχει τη μορφή

$$\Psi_0(\tau, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda^2}} e^{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{\lambda^2}} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\lambda^2}}. \quad (\text{III.43})$$

Η αρχική κατάσταση της προηγούμενης ενότητας μπορεί να αντιμετωπιστεί ως το όριο $\lambda \rightarrow 0$ της παραπάνω. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, έχουμε

$$c(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi\hbar c} \sqrt{2\pi\lambda^2} e^{-\frac{\lambda^2}{4\hbar^2 c^2} k_1^2 - \frac{i}{\hbar c} \tau_0 k_1} e^{-\frac{\lambda^2}{4\hbar^2 c^2} k_2^2 - \frac{i}{\hbar c} \sigma_0 k_2}, \quad (\text{III.44})$$

$$\Psi_G(r, \tau, \sigma) = \Omega(r, \tau, \sigma) e^{\frac{i}{\hbar c} S(r, \tau, \sigma)}, \quad (\text{III.45})$$

$$\Omega(r, \tau, \sigma) = \frac{\lambda^2}{2\pi\hbar c} \sqrt{2\pi\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\hbar c B(r)}{\lambda^2}\right)^2}} e^{-[(\tau - \tau_0)^2 + (\sigma - \sigma_0)^2]/\lambda^2 \left[1 + \left(\frac{2\hbar c B(r)}{\lambda^2}\right)^2\right]}, \quad (\text{III.46})$$

$$S(r, \tau, \sigma) = \frac{2\hbar^2 c^2 B(r)}{\lambda^4 \left[1 + \left(\frac{2\hbar c B(r)}{\lambda^2}\right)^2\right]} [-(\tau - \tau_0)^2 + (\sigma - \sigma_0)^2]. \quad (\text{III.47})$$

Οι αντίστοιχες πυκνότητες πιθανότητας αποκτούν την μορφή

$$\Pi(k_1, k_2) = \frac{2\pi\lambda^2}{(2\pi\hbar c)^2} e^{-\frac{\lambda^2}{2\hbar^2 c^2} k_1^2} e^{-\frac{\lambda^2}{2\hbar^2 c^2} k_2^2}, \quad (\text{III.48})$$

$$P(r, \tau, \sigma) = \lambda^4 \frac{2\pi\lambda^2}{(2\pi\hbar c)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\hbar c B(r)}{\lambda^2}\right)^2} e^{-2[(\tau - \tau_0)^2 + (\sigma - \sigma_0)^2]/\lambda^2 \left[1 + \left(\frac{2\hbar c B(r)}{\lambda^2}\right)^2\right]}. \quad (\text{III.49})$$

Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, οι τιμές της “ορμής” δεν είναι όλες ισοπίθανες.

IV Ανάλυση Bohm

Παρόλο που έχουμε βρει τις λύσεις και υπάρχει η δυνατότητα για πιθανοκρατική ερμηνεία, θεωρούμε πως θα είναι πιο εύκολο να ερμηνεύσουμε αυτές τις λύσεις με την επίδραση τους στο επίπεδο της γεωμετρίας. Δηλαδή, τι είδους κβαντικές διορθώσεις θα εμφανιστούν επί των κλασικών λύσεων.

Ένας από τους τρόπους για να γίνει κάτι τέτοιο βασίζεται στην ανάλυση κατά Bohm [273–275]. Η ερμηνεία de Broglie-Bohm για την περίπτωση της πλήρους βαρύτητας (χωρίς περιορισμό σε κάποιο minisuperspace πρότυπο) μπορεί να βρεθεί στην εργασία [276]. Επίσης, μια πιο πρόσφατη ανάλυση παρουσιάζεται στην [277]. Όπως περιγράψαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, για καταστάσεις της μορφής

$$\Psi(r, q) = \Omega(r, q) e^{\frac{i}{\hbar c} S(r, q)}, \quad (\text{IV.1})$$

όπου $\Omega(r, q)$, $S(r, q)$ πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες καλούνται πλάτος και φάση της κατάστασης αντίστοιχα, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της εξίσωσης Schrödinger είναι

$$\frac{\partial \Omega^2}{\partial r} + \nabla_\mu \left[\Omega^2 \frac{\nabla^\mu S}{m(r)} \right] = 0, \quad (\text{IV.2})$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{2M(r)} \nabla_\mu S \nabla^\mu S + V - Q_p = 0, \quad (\text{IV.3})$$

όπου

$$Q_p = \frac{\hbar^2 c^2}{2M(r)} \frac{\nabla_\mu \nabla^\mu \Omega}{\Omega}, \quad (\text{IV.4})$$

το αποκαλούμενο “κβαντικό δυναμικό”. Η εξίσωση (IV.2) έχει τη μορφή μιας εξίσωσης συνέχειας με Ω^2 την “πυκνότητα” και $\frac{\nabla^\mu S}{M(r)}$ την “ταχύτητα” του “ρευστού”. Αυτή είναι η έκφραση της τοπικής διατήρησης της πιθανότητας. Επιπρόσθετα, η (IV.3) είναι μια παραλλαγή της εξίσωσης Hamilton-Jacobi, η οποία οφείλεται στο κβαντικό δυναμικό.

Η σύνδεση με το κλασσικό επίπεδο επιτυγχάνεται στην υπόθεση πως η “ορμή του ρευστού” ($p_\mu^{(Q)} = \nabla_\mu S$) είναι ίση με την κλασσική ($p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}$), δηλαδή

$$\begin{aligned} p_\mu^{(Q)} &= p_\mu \Leftrightarrow \\ \nabla_\mu S &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}. \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Η εξίσωση (IV.5) είναι ένα σύστημα πρώτης τάξης διαφορικών εξισώσεων για τις “θέσεις” q^μ , και η επίλυση του μας οδηγεί σε αυτό που αποκαλείται “ημικλασσικές τροχιές”.

Για λόγους απλότητας, ο απλούστερος τρόπος να συγκρίνουμε τις κλασσικές με τις ημικλασσικές τροχιές είναι να επιλέξουμε την γνωστή βαθμίδα

$$M(r) = -\frac{M_p c^2}{r_p^2} r^2, \quad (IV.6)$$

η οποία σημαίνει πως για $t = \text{σταθερά}$, $r = \text{σταθερά}$ το στοιχείο μήκους έχει τη μορφή

$$ds_{(2)}^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (IV.7)$$

IV.1 Συνάρτηση δέλτα του Dirac

Σε αυτή την περίπτωση, το κβαντικό δυναμικό είναι ίσο με μηδέν. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς όπως παρατηρούμε από την (III.39), το πλάτος της κατάστασης είναι ανεξάρτητο από τις συντεταγμένες (τ, σ) . Η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται, με “ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας”

$$J^\mu = -\frac{M_p^2 c^2}{4\pi^2 \hbar^2 r_p^4} (\tau - \tau_0, \sigma - \sigma_0). \quad (IV.8)$$

Όπως είναι αναμενόμενο, οι εξισώσεις (IV.5) είναι της μορφής

$$\dot{\tau} = -\frac{1}{r} (\tau - \tau_0), \quad \dot{\sigma} = -\frac{1}{r} (\sigma - \sigma_0), \quad (IV.9)$$

η ολοκλήρωση των οποίων οδηγεί στις κλασσικές λύσεις

$$\tau = \tau_0 + \frac{\nu_1}{r}, \quad \sigma = \sigma_0 + \frac{\nu_1}{r}. \quad (IV.10)$$

Παρατηρούμε πως οι σταθερές (τ_0, σ_0) τις οποίες είχαμε εισάγει στην αρχική κβαντική κατάσταση, εμφανίζονται ως σταθερές ολοκλήρωσης για τις ημικλασσικές τροχιές. Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα είναι πως, με βάση τη συγκεκριμένη κβαντική περιγραφή, όταν η αρχική κατάσταση είναι καλά εντοπισμένη στον χώρο των θέσεων, δηλαδή έχει άπειρη “απροσδιοριστία” στις “ορμές”, η ημικλασσική λύση ταυτίζεται με την κλασσική.

IV.2 Αρχική κατάσταση Gauss

Η εισαγωγή μιας αρχικής κατάστασης Gauss αναμένεται να μας δώσει έναν από τους δυνατούς τρόπους με τον οποίο μπορούμε να βρούμε μια κβαντικά διορθωμένη λύση, εφόσον προσεγγίζει την συνάρτηση δέλτα μόνο στο όριο $\lambda \rightarrow 0$, όπως αναφέραμε και προηγουμένως. Για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις, τις οποίες εισαγάγαμε για διαστατικούς λόγους, θεωρούμε την παράμετρο l_p μέσω της σχέσης

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\hbar}{cM_p}} r_p \frac{1}{\sqrt{l_p}}, \quad (IV.11)$$

ή με βάση το μήκος Planck,

$$\lambda = \sqrt{2} \frac{r_p^{3/2}}{l_p^{1/2}}. \quad (IV.12)$$

Συνεπώς, η κατάσταση δέλτα προκύπτει στο όριο $l_p \rightarrow \infty$ και αντίστοιχα οι κλασσικές τροχιές. Παρατηρούμε επίσης πως η l_p έχει μονάδες μήκους.

Το κβαντικό δυναμικό είναι διάφορο του μηδενός σε αυτή την περίπτωση

$$Q_p = \frac{M_p c^2 l_p^2}{2r_p^2(l_p^2 + r^2)^2} (\tau + \sigma - \tau_0 - \sigma_0) (\tau - \sigma - \tau_0 + \sigma_0), \quad (IV.13)$$

και η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται και πάλι, με “ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας”

$$J^\mu = -\frac{4\hbar r_p^6 r}{\pi c^5 M_p^3 l_p (l_p^2 + r^2)^2} \text{Exp} \left[-\frac{M_p c l_p r^2 [(\tau - \tau_0)^2 + (\sigma - \sigma_0)^2]}{\hbar r_p^2 (l_p^2 + r^2)} \right] (\tau - \tau_0, \sigma - \sigma_0). \quad (IV.14)$$

Οι εξισώσεις (IV.5) είναι της μορφής

$$\dot{\tau} = -\frac{l_p^2}{r(l_p^2 + r^2)} (\tau - \tau_0), \quad (IV.15)$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{l_p^2}{r(l_p^2 + r^2)} (\sigma - \sigma_0), \quad (IV.16)$$

οι οποίες δεν ταυτίζονται με τις κλασσικές. Οι ημικλασσικές λύσεις είναι

$$\tau = \tau_0 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l_p}\right)^2} \frac{\nu_1}{r}, \quad (IV.17)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l_p}\right)^2} \frac{\nu_2}{r}, \quad (IV.18)$$

όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης (ν_1, ν_2) θα οριστούν με τέτοιο τρόπο ώστε στα κατάλληλα όρια, να ταυτίζεται η λύση με την κλασσική. Επομένως, οι ακτίνες r_q, r_s εισάγονται και πάλι. Η αντιστοιχία μεταξύ των σταθερών μπορεί να βρεθεί στο όριο ταύτισης των λύσεων $l_p \rightarrow \infty$. Έχουμε λοιπόν $c_2 \leftrightarrow \tau_0, c_1 \leftrightarrow \nu_1, c_4 \leftrightarrow \sigma_0, c_3 \leftrightarrow \nu_2$. Η τελική μορφή της μετρικής και του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού είναι

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -g_{00}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{00}(r)} \left[1 - \frac{\left(\frac{r_q}{l_p}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{l_p}\right)^2} \right] - \frac{1 - g_{00}(r)}{g_{00}(r)} \frac{\left(\frac{r}{l_p}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{l_p}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (IV.19)$$

$$A_\mu = (-\sqrt{2\frac{\mu_0}{\kappa}} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l_p}\right)^2} \frac{r_q}{r}, 0, 0, 0), \quad (IV.20)$$

όπου η $g_{00}(r)$ είναι ίση με

$$g_{00}(r) = 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l_p}\right)^2} \frac{r_s}{r} + \left(\frac{r_q}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_q}{l_p}\right)^2. \quad (IV.21)$$

Επιπλέον, ανεξάρτητα από την διαφορετική μορφή της μετρικής και του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού από τις κλασσικές εκφράσεις, οι (IV.19), (IV.20) δεν ικανοποιούν τις ελεύθερες εξισώσεις Einstein-Maxwell. Πρέπει να προστεθεί ένας τανυστής ενέργειας ορμής και ένα τετράρευμα,

$$G_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu}^{(em)} + T_{\mu\nu}^{(Q)}), \quad (IV.22)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J_{(Q)}^\mu. \quad (IV.23)$$

Τα $T_{\mu\nu}^{(Q)}$, $J_{(Q)}^\mu$ θεωρούνται κβαντομηχανικής προέλευσης. Για πληρότητα, παρέχουμε τις μη μηδενικές συνιστώσες τους

$$T_{00}^{(Q)} = \frac{1}{\kappa} \frac{g_{00}(r)^2}{l_p^2} \frac{2 \left(\frac{r_q}{l_p} \right)^2 - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l_p} \right)^2} \left(\frac{r_s}{r} \right)}{\left[1 + \left(\frac{r}{l_p} \right)^2 g_{00}(r) - \left(\frac{r_q}{l_p} \right)^2 \right]^2}, \quad (\text{IV.24})$$

$$T_{22}^{(Q)} = \frac{1}{4\kappa} \frac{4 \left(\frac{r_q}{l_p} \right)^2 - \left(\frac{r_s}{l_p} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r}{l_p} \right)^2 g_{00}(r) - \left(\frac{r_q}{l_p} \right)^2 \right]^2}, \quad (\text{IV.25})$$

$$T_{33}^{(Q)} = T_{22} \sin^2 \theta, \quad (\text{IV.26})$$

$$J_{(Q)}^0 = -\sqrt{\frac{2}{\kappa\mu_0}} \frac{r_q}{l_p^2 r \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l_p} \right)^2}} \frac{1 + \left(\frac{r}{l_p} \right)^2 g_{00}(r) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l_p} \right)^2} \frac{r_s}{r}}{\left[1 + \left(\frac{r}{l_p} \right)^2 g_{00}(r) - \left(\frac{r_q}{l_p} \right)^2 \right]^2}. \quad (\text{IV.27})$$

Υπολογίζοντας προσεχτικά το όριο $l_p \rightarrow \infty$ των παραπάνω εκφράσεων, παρατηρούμε πως τείνουν στο μηδέν, όπως θα περιμέναμε. Συνεπώς, η πραγμάτωση των κβαντικών φαινομένων εντοπίζεται στην αλλαγή της μορφής των πεδίων, καθώς και στην εισαγωγή πηγών στο σύνολο των εξισώσεων.

IV.3 Ιδιάζοντα σημεία

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε για τη ύπαρξη ανωμαλιών ή αλλιώς ιδιάζουσών επιφανειών. Όσον αφορά την κλασσική λύση, το βαθμωτό Ricci ισούται με μηδέν, λόγω της ιδιότητας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στις τέσσερις διαστάσεις, δηλαδή το ίχνος του τανυστή ενέργειας ορμής είναι ίσο με μηδέν. Αυτό είναι γενικό ανεξάρτητα αν αναφερόμαστε σε κλασσική ή ημικλασσική λύση. Όπως έχουμε δει, για την ημικλασσική λύση χρειάζεται να προστεθεί ακόμη ένας επιπλέον τανυστής ενέργειας ορμής. Αυτό οδηγεί σε ένα μη μηδενικό βαθμωτό Ricci το οποίο μηδενίζεται στο όριο $l_p \rightarrow \infty$. Η συμπεριφορά αυτού του βαθμωτού για μικρές τιμές του r (παρουσιάζουμε μόνο τους όρους που απειρίζονται) είναι

$$R \simeq -\frac{r_s r_q^2}{l_p^2} \frac{1}{r^3} + \frac{4r_q^2 (r_q^2 - r_s^2) + l_p^2 (-4r_q^2 + 3r_s^2)}{2l_p^4} \frac{1}{r^2} + \frac{rs [-2l_p^4 + 12r_q^4 - 6r_q^2 r_s^2 + l_p^2 (-11r_q^2 + 6r_s^2)]}{2l_p^6} \frac{1}{r}. \quad (\text{IV.28})$$

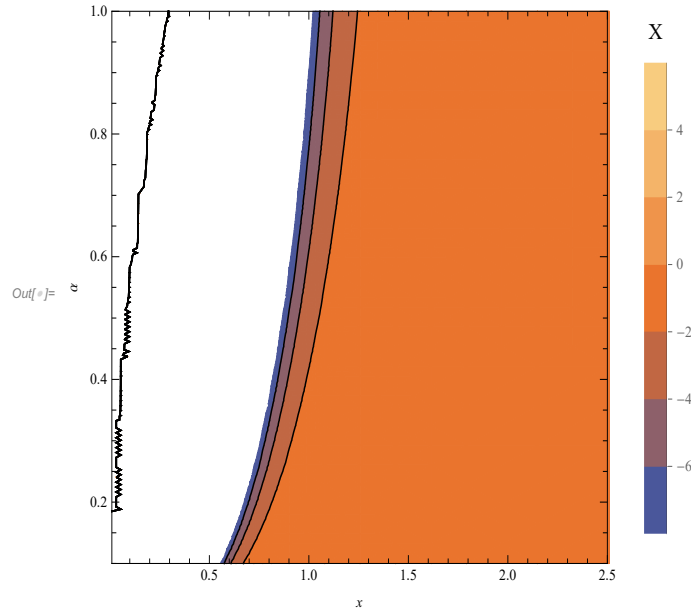
Επομένως, μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα πως αυτός ο χωρόχρονος παρουσιάζει ένα ιδιάζον σημείο στο $r = 0$. Εφόσον στην κλασσική περίπτωση ισχύει $R = 0$, το βαθμωτό Ricci δεν είναι ένας αρκετά καλός τρόπος σύγκρισης για το αν η ημικλασσική μετρική είναι “περισσότερο” ή “λιγότερο” ιδιάζουσα από την κλασσική μετρική Reissner-Nordström. Ας εξηγήσουμε σε αυτό το σημείο τι εννοούμε με το “περισσότερο” ή “λιγότερο” ιδιάζουσα:

Θεωρούμε τις περιπτώσεις των μελανών οπών Schwarzschild και Reissner-Nordström. Εφόσον και στις δύο περιπτώσεις $R = 0$, θα χρησιμοποιήσουμε το βαθμωτό Kretschmann $K = R^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho}$ για τον σκοπό μας, το οποίο είναι αντίστοιχα

$$K_{(S)} = \frac{12r_s^2}{r^6}, \quad (\text{IV.29})$$

$$K_{(RN)} = \frac{56r_q^4}{r^8} - \frac{48r_q^2 r_s}{r^7} + \frac{12r_s^2}{r^6}. \quad (\text{IV.30})$$

Θέλοντας να δουλέψουμε με αδιάστατα αντικείμενα, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο με r_s^4 και παρέχουμε τις (r_q, r) ως συναρτήσεις του r_s , συγκεκριμένα $r_q = \alpha \frac{r_s}{2}$, $r = x r_s$, με $(0 \leq \alpha < 1)$ έτσι ώστε να μην


 Figure 9.1: Το γράφημα της X στον χώρο των παραμέτρων (x, α) .

υπάρχουν γυμνές ανωμαλίες.)

$$X_{(RN)} = K_{(RN)} r_s^4 = \frac{7}{2} \frac{\alpha^4}{x^8} - 12 \frac{\alpha^2}{x^7} + \frac{12}{x^6}, \quad (\text{IV.31})$$

$$X_{(S)} = K_{(S)} r_s^4 = \frac{12}{x^6}. \quad (\text{IV.32})$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο ορίζεται

$$X = X_{(RN)} - X_{(S)} = \frac{7}{2} \frac{\alpha^4}{x^8} - 12 \frac{\alpha^2}{x^7}, \quad (\text{IV.33})$$

και παρουσιάζουμε το γράφημα αυτής στον χώρο των δύο παραμέτρων (α, x) .

Όπως μπορούμε να δούμε από την εικόνα 9.1, η συνάρτηση X λαμβάνει μόνο αρνητικές τιμές στο πεδίο ορισμού των παραμέτρων. Αυτό σημαίνει πως $|X_{(S)}| > |X_{(RN)}|$, και επομένως μπορούμε να “κινηθούμε” προς μικρότερες τιμές του x (ή r) στη περίπτωση της Reissner-Nordström αντί της Schwarzschild, πριν η καμπυλότητα “εκτιναχθεί” στο άπειρο. Κατά κάποιο τρόπο, η εισαγωγή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (ένα σημειακό φορτίο), οδηγεί σε μια πιο εντοπισμένη ανωμαλία γύρω από το σημείο $r = 0$ και επομένως, με βάση αυτό το κριτήριο, μια “λιγότερο” ιδιάζουσα μετρική.

Συνεπώς, θα συγκρίνουμε την κλασσική Reissner-Nordström με την κβαντικά διορθωμένη (QRN) βασιζόμενοι στο παραπάνω κριτήριο. Η σταθερά l_p εκφράζεται μέσω της r_s ως $l_p = \frac{r_s}{\beta}$, όπου για $\beta \rightarrow 0$ προκύπτει η κλασσική Reissner-Nordström. Η κβαντική RN έχει αρκετούς όρους που απειρίζονται, κρατάμε όμως μόνο τους ανώτερης τάξης, οι οποίοι συμπίπτουν σε δυνάμεις του r με εκείνους της κλασσικής λύσης. Για πληρότητα,

$$X_{(QRN)} = X_{(RN)} + \frac{23}{4} \frac{(\alpha^2 \beta)^2}{x^7} + \frac{(\alpha \beta)^2}{x^6} \left\{ -\frac{37}{2} + \alpha^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{111}{16} \beta^2 - \frac{9}{8} (\alpha \beta)^2 \right] \right\}, \quad (\text{IV.34})$$

$$X = \frac{23}{4} \frac{(\alpha^2 \beta)^2}{x^7} + \frac{(\alpha \beta)^2}{x^6} \left\{ -\frac{37}{2} + \alpha^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{111}{16} \beta^2 - \frac{9}{8} (\alpha \beta)^2 \right] \right\}. \quad (\text{IV.35})$$

Τώρα ο χώρος των παραμέτρων είναι τρισδιάστατος και θα μπορούσαμε να παρουσιάσουμε ένα γράφημα πυκνότητας. Ωστόσο, είδαμε πως δεν ήταν ευπαρουσίαστο και δεν θα μπορούσαν εύκολα να βγουν

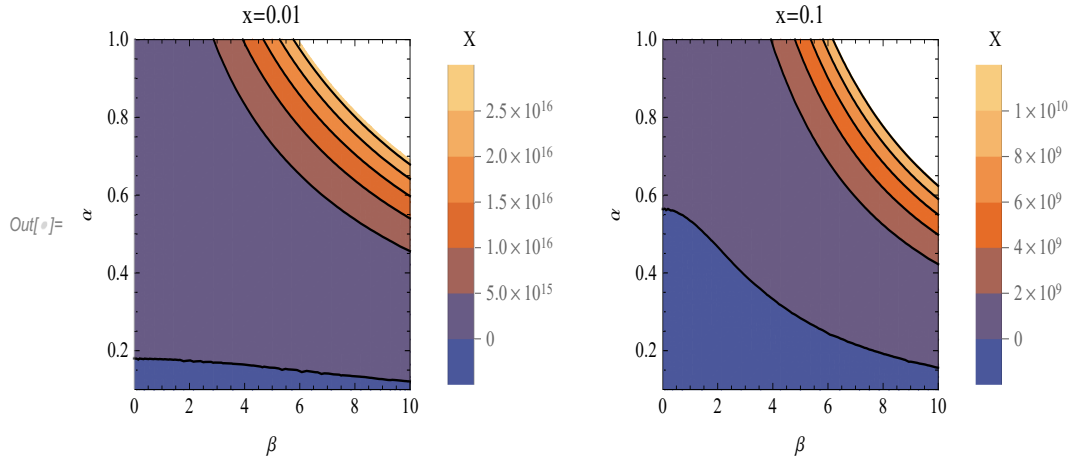


Figure 9.2: Αυτά είναι τα γραφήματα της X στον χώρο των παραμέτρων (α, β) για τιμές του x , ($x = 0.01$), ($x = 0.1$).

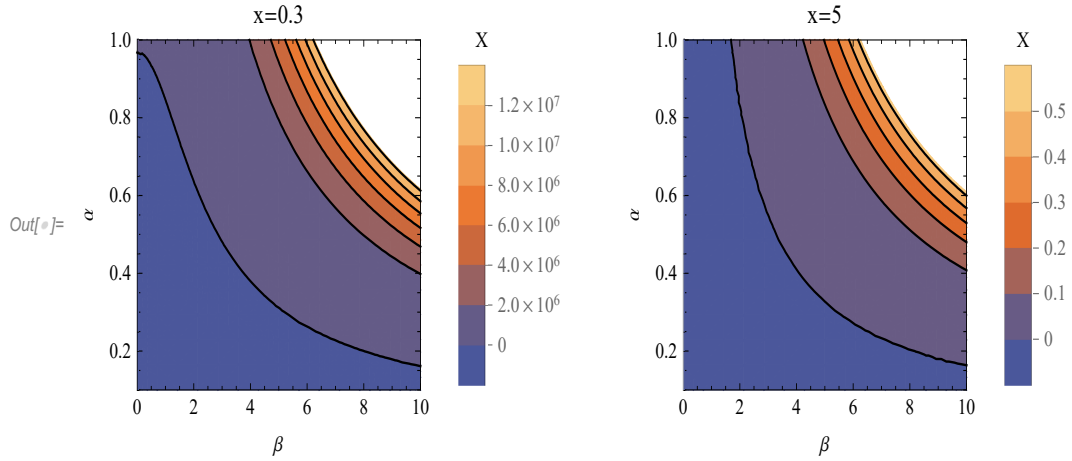


Figure 9.3: Αυτά είναι τα γραφήματα της X στον χώρο των παραμέτρων (α, β) για τιμές του x , ($x = 0.3$), ($x = 5$).

κάποια συμπεράσματα. Αποφασίσαμε να κατασκευάσουμε επίπεδα γραφήματα στον χώρο των παραμέτρων (α, β) για συγκεκριμένες τιμές του x . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στις εικόνες 9.2, 9.3.

Έχουμε τις εξής παρατηρήσεις: Αρχικά, υπάρχουν τιμές των παραμέτρων για τις οποίες $|X_{(QRN)}| > |X_{(RN)}|$, το οποίο σημαίνει πως ο κβαντικά διορθωμένος χωρόχρονος είναι “περισσότερο” ιδιάζων από τον κλασικό με βάση το παραπάνω κριτήριο. Το δεύτερο είναι πως και στις τέσσερις περιπτώσεις υπάρχει η βαθιά μπλέ περιοχή η οποία αντιστοιχεί σε $|X_{(QRN)}| < |X_{(RN)}|$ και συνεπώς ο κβαντικά διορθωμένος χωρόχρονος είναι “λιγότερο” ιδιάζων. Τέλος, καθώς πλησιάζουμε το $(x = 0)$, η επιθυμητή περιοχή γίνεται όλο και μικρότερη. Συνεπώς, πάντα μπορούμε να βρούμε “λιγότερο” ιδιάζουσα μετρική για κάποιες τιμές του β , όμως τα χαρακτηριστικά αυτών των μελανών οπών (τα οποία περιγράφονται μέσω του α) είναι περιορισμένα σε συγκεκριμένα όρια. Αν τώρα εστιάσουμε σε μια συγκεκριμένη απόσταση x , τότε παρατηρούμε πως για μεγαλύτερες τιμές του β , δηλαδή ισχυρότερα κβαντικά φαινόμενα, η περιοχή με τις επιθυμητές τιμές του α είναι πιο κοντά στο $\alpha = 0$, το οποίο αντιστοιχεί σε μελανή οπή Schwarzschild.

IV.4 Ορίζοντες γεγονότων

Στη λύση που βρήκαμε εμφανίζονται και ορίζοντες γεγονότων όπως στη κλασσική Reissner-Nordström. Από την (IV.19) η επίλυση της $g_{00}(r) = 0$ οδηγεί στην απόκλιση του δεύτερου, μη μηδενικού, στοιχείου μήκους της μετρικής. Υπάρχουν τέσσερις λύσεις, όμως μόνο δύο έχουν θετικό πρόσημο για το r . Το αποτέλεσμα είναι

$$r_+^{(Q)} = r_+ \sqrt{\frac{l_p^2}{l_p^2 - r_+^2}}, \quad r_-^{(Q)} = r_- \sqrt{\frac{l_p^2}{l_p^2 - r_-^2}}, \quad (IV.36)$$

όπου $r_{\pm}$ ο εσωτερικός και εξωτερικός ορίζοντας της μετρικής Reissner-Nordström

$$r_+ = \frac{1}{2} \left(r_s + \sqrt{-4r_q^2 + r_s^2} \right), \quad r_- = \frac{1}{2} \left(r_s - \sqrt{-4r_q^2 + r_s^2} \right). \quad (IV.37)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε τα εξής.

1. Η ύπαρξη εσωτερικού και εξωτερικού ορίζοντα γεγονότων είναι δυνατή μόνο αν ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$l_p > r_+. \quad (IV.38)$$

2. Στη περίπτωση $l_p = r_+$ υπάρχει μόνο ένας ορίζοντας την ακτίνα του οποίου θα συμβολίσουμε με $r_{(+)}$

$$r_{(+)}^{(Q)} = \frac{r_+ r_-}{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}} \Leftrightarrow r_{(+)}^{(Q)} = \frac{r_q^2}{\sqrt{r_s} (-4r_q^2 + r_s^2)^{1/4}}. \quad (IV.39)$$

3. Στην περίπτωση $l_p = r_-$ δεν υπάρχει καθόλου ορίζοντας. Ένας καλύτερος τρόπος να το εκφράσουμε είναι πως η τιμή της μεταβλητής r στην οποία $g_{00}(r) = 0$, είναι φανταστική. Για την συγκεκριμένη τιμή, $l_p = r_-$ η παράμετρος β γίνεται συνάρτηση του α , $\beta = \frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha^2}}$. Εν τη απουσία ορίζοντα, παρατηρούμε την ύπαρξη γυμνής ανωμαλίας, καθώς, όπως παρατηρείται και στην εικόνα 9.4, δεν υπάρχουν τιμές (α, x) για τις οποίες $|X_{(QRN)}| < |X_{(RN)}|$.
4. Από τις δύο παραπάνω παρατηρήσεις, συμπεραίνουμε πως όσο τα κβαντικά φαινόμενα γίνονται πιο ισχυρά, δηλαδή $l_p \rightarrow 0$, οι ορίζοντες εξαφανίζονται. Για παράδειγμα, μια μελανή οπή με $l_p > r_+$, θα εμπεριέχει μια περιοχή $r \leq r_+^{(Q)}$ από την οποία δεν θα μπορούσε να διαφύγει κάποια πληροφορία. Στην περίπτωση $l_p = r_+$, αυτή η περιοχή ορίζεται ως $r \leq r_{+-}^{(Q)}$. Εφόσον $r_{+-}^{(Q)} < r_+^{(Q)}$, τότε πληροφορίες μπορούν να διαφύγουν από περιοχές που δεν μπορούσαν προηγουμένως.
5. Υπάρχει επίσης και η περίπτωση του extremal ορίζοντα $r_s = 2r_q$ και αντιστοιχεί σε εκφυλισμό όπως και στην κλασσική περίπτωση

$$r_+^{(Q)} = r_-^{(Q)}. \quad (IV.40)$$

Αυτή η περίπτωση δεν θα μπορούσε να υπάρχει για $l_p = r_+$.

6. Στο αποδεκτό πεδίο ορισμού του l_p , με σκοπό να υπάρχουν οι $r_+^{(Q)}, r_-^{(Q)}$, πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής ανισότητες

$$r_+^{(Q)} > r_+, \quad (IV.41)$$

$$r_-^{(Q)} > r_-. \quad (IV.42)$$

Επιπλέον, ακόμη μια ισχύει για $l_p > \frac{r_+ r_-}{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}}$

$$r_-^{(Q)} > r_+. \quad (IV.43)$$

Επομένως, οι ορίζοντες της (QRN) έχουν μεγαλύτερη ακτίνα από εκείνους της κλασσικής λύσης.

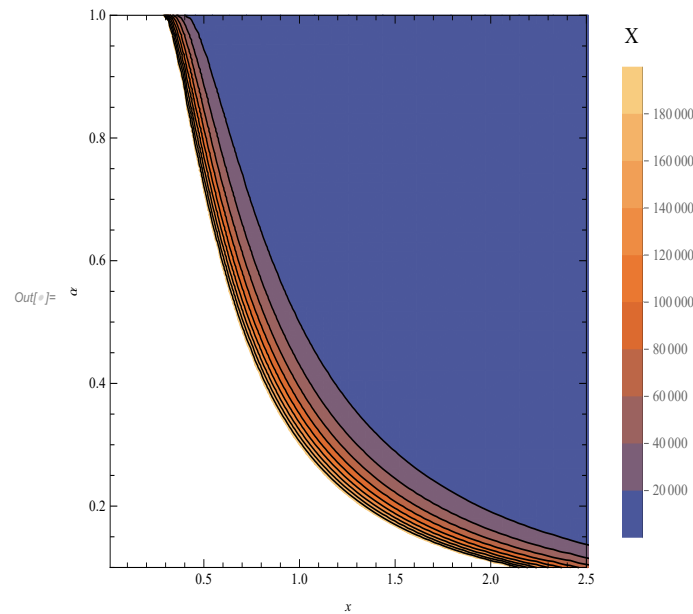


Figure 9.4: Αυτό είναι το γράφημα της X στον χώρο των παραμέτρων (x, α) .

V Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων

Ο πρωταρχικός στόχος αυτής της εργασίας ήταν η κατασκευή μιας εξίσωσης ίδιας στη μορφή με την εξίσωση Schrödinger, αντί της Wheeler-DeWitt, για την περίπτωση της κβαντικής περιγραφής μιας μελανής οπής Reissner-Nordström, με την ιδιότητα πως θα είναι συναλλοιώτη κάτω από επαναπαραμετροποιήσεις της επιλεγμένης “χρονικής” παραμέτρου. Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, ακολουθήσαμε μια διαφορετική διαδικασία από τις ήδη υπάρχουσες στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, η ιδιάζουσα λαγκρανζιανή πυκνότητα (II.21), (II.22), (II.23), η οποία περιγράφει το σύστημα, έχει εξάρτηση από τους βαθμούς ελευθερίας (a, b, Φ) και το Lapse n . Η μεταβολή της δράσης ως προς το n οδηγεί σε μια συνδεσμική εξίσωση (II.19), ενώ δυναμικές εξισώσεις προκύπτουν από την μεταβολή ως προς τους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας (II.16), (II.17), (II.18). Εφόσον, πολλά από τα προβλήματα που υπάρχουν όσον αφορά τις διαδικασίες κβάντωσης σχετίζονται με την ύπαρξη συνδεσμικών εξισώσεων, θεωρήσαμε πως θα ήταν καλύτερο αν δεν υπήρχαν, ή πιο σωστά, αν αυτοί ικανοποιούνται ταυτοτικά επί της λύσης των δυναμικών εξισώσεων. Ένας τρόπος για να γίνει κάτι τέτοιο, χωρίς να επιλέξουμε κάποια συγκεκριμένη βαθμίδα, είναι να λύσουμε την εξίσωση του συνδέσμου ως προς την συνάρτηση Lapse. Συνεπώς, από τις προκύπτουσες εξισώσεις, μόνο δύο εξ αυτών είναι ανεξάρτητες (II.25), (II.26), ενώ παραμένουν τρεις βαθμοί ελευθερίας (a, b, Φ) . Αυτό υποδεικνύει πως η ελευθερία επιλογής βαθμίδας υπάρχει ακόμη και θα μπορούσαμε να έχουμε φτάσει σε αυτές τις δύο εξισώσεις από την αρχή, αν με κάποιον τρόπο είμασταν ικανοί να μαντέψουμε την κατάλληλη μορφή του Lapse ως συνάρτηση των υπολοίπων βαθμών ελευθερίας (II.24).

Η απλοποιημένη λαγκρανζιανή πυκνότητα έχει μορφή τετραγωνικής ρίζας (II.30) και εξακολουθεί να είναι ιδιάζουσα στις μεταβλητές (a, b, Φ) όσο όλες τους θεωρούνται ως βαθμοί ελευθερίας. Ωστόσο, εφόσον υπάρχουν μόνο δύο ανεξάρτητες εξισώσεις, αυτές μπορούν να παραχθούν από την απλοποιημένη λαγκρανζιανή πυκνότητα θεωρώντας μεταβολή μόνο ως προς δύο βαθμούς ελευθερίας εξ αυτών. Υπάρχει η ελευθερία να επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε από τα ζευγάρια (a, b) , (a, Φ) ή (b, Φ) . Εμείς επιλέξαμε το (a, Φ) , επομένως το b θεωρείται πλέον ως συνάρτηση της συντεταγμένης r και όχι ως βαθμός ελευθερίας. Εν κατακλείδι, η λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι μη-ιδιάζουσα ως προς τις (a, Φ) , είναι “χρονικά” εξαρτημένη λόγω της ύπαρξης του $b(r)$ και η ελευθερία επιλογής βαθμίδας παραμένει.

Όπως υποδείξαμε παραπάνω, η λαγκρανζιανή πυκνότητα έχει μορφή τετραγωνικής ρίζας και όπως είναι γνωστό, προβλήματα προκύπτουν στη διαδικασία κβάντωσης τέτοιων συστημάτων. Προς αποφυγή

τους, αναζητήσαμε μια τετραγωνική στις “ταχύτητες” λαγκρανζιανή πυκνότητα η οποία αναπαράγει τις εξισώσεις κίνησης (II.34), (II.35), (II.36).

Πριν προχωρήσουμε στην κβαντική περιγραφή, παρατηρήσαμε πως η minisuperspace μετρική αντιστοιχεί σε επίπεδο χωρόχρονο Minkowski. Αυτό υπονοεί την ύπαρξη νέων συντεταγμένων (u, w) στις οποίες οι μετρική αποκτά διαγώνια μορφή με ιδιοτιμές $(-1, 1)$. Συνεπώς, η απλοποιημένη λαγκρανζιανή πυκνότητα αποκτά την μορφή (II.42) και η λύση σε γενική βαθμίδα βρέθηκε με την επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης και μιας γραμμικής, δεύτερης τάξης, διαφορικής εξίσωσης. Θεωρούμε πως αυτός είναι ένας από τους πιο απλούς τρόπους εύρεσης της συγκεκριμένης λύσης σε τυχαία βαθμίδα.

Σε αυτό το σημείο παρατηρήσαμε την ύπαρξη μιας ισοδυναμίας: οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης, έχουν ακριβώς την ίδια μορφή και είναι ίσες σε αριθμό, με τις εξισώσεις κίνησης για ένα 3D ηλεκτρομαγνητικό pp-wave χωρόχρονο, τον οποίο μελετήσαμε σε προηγούμενη εργασία [272]. Αυτή η ενδιαφέρουσα σύμπτωση μας βάζει σε σκέψεις σχετικά με την ύπαρξη κάποιας κατηγοριοποίησης χωροχρόνων+ύλης, βασισμένη στην ισοδυναμία της μορφής των εξισώσεων, με τον πιθανό λόγο να βρίσκεται στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της minisuperspace μετρικής.

Η εύρεση της χαμιλτονιανής πυκνότητας ήταν σχετικά απλή. Παρατηρήσαμε πως εφόσον είναι “χρονικά” εξαρτημένη ποσότητα, δεν διατηρείται. Ωστόσο, υπάρχει η H_{con} (III.12) και τρία φορτία Noether (III.13) τα οποία διατηρούνται επί των εξισώσεων. Σχετικά με την κβαντική περιγραφή, ακολουθήσαμε την κανονική κβάντωση, δηλαδή, τα παρατηρήσιμα μεγέθη περιγράφονται από αυτοσυζυγείς τελεστές και οι αγκύλες Poisson αντικαθίστανται από μεταθέτες. Εφόσον η χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι μη ιδιάζουσα, η κατασκευή μιας εξίσωσης της μορφής Schrödinger αποδείχθηκε πιθανή. Επιπλέον, η υπερβολική φύση της χαμιλτονιανής πυκνότητας υποδεικνύει πως δεν έχουμε ορίσει κάποια “εσωτερική μεταβλητή χρόνου” (δεν έχουμε “σπάσει” την ελευθερία βαθμίδας). Η ιδέα ήταν να χρησιμοποιήσουμε ως παράμετρο “χρόνου” την μεταβλητή (r) , η οποία εμφανίζεται εκπεφρασμένα στην χαμιλτονιανή πυκνότητα μέσω της συνάρτησης $M(r)$ (ή $b(r)$ ισοδύναμα). Η εξίσωση αυτή (III.23) μοιάζει σαν υβρίδιο μεταξύ της εξίσωσης “εσωτερικού χρόνου” Schrödinger και της Wheeler-DeWitt τις οποίες περιγράψαμε στην εισαγωγή. Η διαφορά με την πρώτη βρίσκεται στην ιδιότητα της “χρονικής”-συναλλοιωτότητας, επομένως εξ ορισμού, οι κβαντικές περιγραφές για κάθε διαφορετική επιλογή βαθμίδας, είναι ισοδύναμες. Σχετικά με την δεύτερη, η διαφορά εμφανίζεται στην δυνατότητα εξέλιξης των καταστάσεων στην περιγραφή μας, σε αντίθεση με την “παγωμένη” εικόνα της εξίσωσης Wheeler-DeWitt. Παρατηρούμε πως η λέξη “χρόνος” χρησιμοποιήθηκε μόνο κατ’ όνομα στα διάφορα σημεία του κειμένου, καθώς όπως μπορούμε να δούμε από το χωροχρονικό στοιχείο μήκους, η μεταβλητή r είναι μια χρονική συντεταγμένη. Παράλληλα, κάθε αναφορά σε εξέλιξη των καταστάσεων είναι ως προς την “εξωτερική” παράμετρο r και δεν θα πρέπει να υπάρχει σύγχυση με τη συνήθη χρονική εξέλιξη των καταστάσεων στο πεδίο της κβαντικής μηχανικής.

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης βρέθηκαν για την περίπτωση των κοινών ιδιοκαταστάσεων των τελεστών $\hat{H}_{con}, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$. Η εξέλιξη δύο αρχικών καταστάσεων μελετήθηκε με την χρήση των συναρτήσεων δέλτα του Dirac και Gauss. Αυτές οι δύο συνδέονται, καθώς η παράμετρος που καθορίζει το πλάτος της συνάρτησης Gauss, για συγκεκριμένο όριο, οδηγεί στην δέλτα. Οι ιδιοκαταστάσεις υπολογίστηκαν καθώς και οι πυκνότητες πιθανότητας (III.42), (III.49) αντίστοιχα. Με σκοπό να αποδώσουμε κάποια γεωμετρική ερμηνεία στα αποτελέσματά μας, χρησιμοποιήσαμε την ανάλυση κατά Bohm. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής: για την αρχική κατάσταση δέλτα, το κβαντικό δυναμικό ισούται με μηδέν, συνεπώς οι ημικλασσικές τροχιές ταυτίζονται με τις κλασσικές. Όσον αφορά την αρχική κατάσταση Gauss, προέκυψε μη μηδενικό κβαντικό δυναμικό, το οποίο με τη σειρά του οδήγησε σε ημικλασσικές τροχιές διαφορετικές από τις κλασσικές (IV.19), (IV.20), (IV.21). Οι κβαντικές διορθώσεις στο επίπεδο του χωρόχρονου, εμφανίζονται ως διορθώσεις επί των κλασσικών λύσεων, καθώς και την ανάγκη θεώρησης ενός επιπλέον τανυστή ενέργειας ορμής $T_{\mu\nu}^{(Q)}$ και μιας πυκνότητας τετραρεύματος $J_{(Q)}^\mu$ στο σύστημα των εξισώσεων Einstein-Maxwell. Η συγκεκριμένη μορφή αυτών μπορεί να βρεθεί στις εξισώσεις (IV.24)-(IV.27). Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ημικλασσικών λύσεων είναι πως αναπαράγουν τις κλασσικές, σε κατάλληλο όριο, συγκεκριμένα στο όριο που τα $T_{\mu\nu}^{(Q)}, J_{(Q)}^\mu$ μηδενίζονται.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, ένα από τα κίνητρα στην αναζήτηση μιας κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας είναι η αποφυγή των ανωμαλιών. Όπως προέκυψε στην ενότητα IV.3, η κβαντικά διορθωμένη μετρική RN εξακολουθεί να περιέχει ανωμαλία. Ένας τρόπος παρατήρησης αυτού είναι μέσω του βαθμωτού

Ricci, το οποίο οφείλεται μόνο στον τανυστή ενέργειας ορμής $T_{\mu\nu}^{(Q)}$. Για μικρές τιμές της r , αυτός ο όρος αποκλίνει ως $R \sim \frac{1}{r^3}$, συνεπώς καθώς $r \rightarrow 0$, απειρίζεται. Σε αυτό το σημείο, εφόσον η κλασική λύση RN έχει μηδενικό βαθμωτό Ricci, θεωρήσαμε πιο προσοδοφόρο να συγκρίνουμε τα βαθμωτά Kretschmann των δύο χωροχρόνων. Ορίσαμε ένα κριτήριο με το οποίο θα αποφασίσουμε κατά πόσο η κατάσταση είναι καλύτερη ή χειρότερη όσον αφορά την QRN σχετικά με την απόκλιση του βαθμωτού Kretschmann. Το κριτήριο είναι το εξής:

Μεταξύ δύο χωροχρόνων οι οποίοι έχουν την ίδια μορφή ανωμαλία, στη συγκεκριμένη περίπτωση μια σημειακή, “λιγότερο” ιδιάζων θα χαρακτηριστεί εκείνος του οποίου η ανωμαλία είναι πιο εντοπισμένη γύρω από το σημείο ενδιαφέροντος.

Σχετικά με τις μελανές οπές QRN και RN, υπάρχουν αποδεκτές τιμές των παραμέτρων για τις οποίες η QRN είναι “λιγότερο” ιδιάζουσα, καθώς και τιμές για τις οποίες είναι “περισσότερο”. Στις εικόνες που παρουσιάσαμε, υπάρχει η εξής τάση: καθώς $\beta \rightarrow \infty$, (δηλαδή πιο ισχυρά κβαντικά φαινόμενα, απομάκρυνση από την συνάρτηση δέλτα) τα χαρακτηριστικά εκείνων των μελανών οπών, τα οποία περιγράφονται μέσω του α , για τις οποίες η QRN είναι “λιγότερο” ιδιάζουσα, πλησιάζουν στο μηδέν. Η άνω τιμή του α για συγκεκριμένες τιμές του β , εξαρτάται επίσης και από την εγγύτητα στο σημείο $r = 0$.

Ακόμη ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα το οποίο σχετίζεται με την ύπαρξη των ανωμαλιών είναι το εξής: Εφόσον έχουμε κατασκευάσει τον χώρο Hilbert και έχουμε υπολογίσει τις πυκνότητες πιθανότητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση του DeWitt [243] η οποία αναφέρει ότι: αν μια κυματοσυνάρτηση ή καλύτερα η πυκνότητα πιθανότητας μηδενίζεται στα σημεία του θεσεογραφικού χώρου όπου εμφανίζεται η κλασική ανωμαλία, τότε αυτή δεν υπάρχει στο κβαντικό επίπεδο. Η κλασική ανωμαλία εμφανίζεται στο $r \rightarrow 0$ το οποίο μεταφράζεται σε $\tau \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$. Υπολογίζοντας προσεκτικά το όριο, οι πυκνότητες πιθανότητας και για τις δύο περιπτώσεις αρχικών καταστάσεων, (III.42), (III.49) είναι ίσες με μηδέν. Συνεπώς, με βάση την παραπάνω πρόταση, οι ανωμαλίες δεν υπάρχουν στο κβαντικό επίπεδο. Υπάρχει λοιπόν διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων. Μια πιθανή εξήγηση θα μπορούσε να είναι πως η ανάλυση κατά Bohm, είναι προσεγγιστική μέθοδος και βασίζεται στην ταυτοποίηση (IV.5) της κλασικής και ημικλασικής ορμής. Ένα πρόσφατο άρθρο σχετικά με την αποφυγή των ανωμαλιών και την εξάρτηση αυτών στην επιλογή του χρόνου είναι το [278].

Ας αναφερθούμε επίσης σε κάποια πιθανή ερμηνεία των πυκνοτήτων πιθανότητας. Όπως έχουμε εξηγήσει, η εξωτερική παράμετρος r θεωρείται ως η παράμετρος του “χρόνου” στην εξίσωση Schrödinger. Συνεπώς, η $P(r, \tau, \sigma) = |\Psi(r, \tau, \sigma)|^2$ μπορεί να γίνει κατανοητή ως η πυκνότητα πιθανότητας για τις μεταβλητές (τ, σ) στο “χρόνο” r . Αυτού του είδους η ερμηνεία δεν είναι άγνωστη, εμφανίζεται και στον φορμαλισμό του “εσωτερικού χρόνου” της πλήρους βαρύτητας, όπου μια εξίσωση Schrödinger κατασκευάζεται με πολλές παραμέτρους “χρόνου”. Για περισσότερες πληροφορίες παραθέτουμε την [225]. Στη συγκεκριμένη εργασία, χρησιμοποιήσαμε συμμετρίες ώστε να περιοριστούμε σε ένα minisuperspace πρότυπο, το οποίο σημαίνει πως για το συγκεκριμένο πρότυπο, μόνο μια χωρική παράμετρος, η r , παραμένει ώστε να χαρακτηριστεί ως “χρόνος”. Αν κάποιο κοσμολογικό πρότυπο είχε χρησιμοποιηθεί αντίστοιχα, θα παρέμενε η χρονική μεταβλητή t . Σχετικά με την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης ύστερα από κάποια μέτρηση, θα μπορούσαμε να πούμε πως η συνήθης κβαντομηχανική ερμηνεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Ωστόσο, εν τη απουσία μιας κβαντικής θεωρίας της πλήρους βαρύτητας, είναι σχεδόν απίθανο να γνωρίζουμε αν κάποια τέτοια κβαντική περιγραφή ενός minisuperspace προτύπου θα μπορούσε να προκύψει ως κάποιο όριο της πλήρους θεωρίας και συνεπώς να καταστεί αυτή φυσική. Σε αυτό το σημείο, το καλύτερο που μπορούμε να πούμε είναι πως πρόκειται περισσότερο για ένα μαθηματικό πρότυπο, με κάποια εν δυνάμει φυσική ερμηνεία μόνο μέσω της ανάλυσης Bohm: θα μπορούσε να υπάρξει κάποια σύγκριση της κβαντικά διορθωμένης μετρικής με τις παρατηρήσεις.

Ορίζοντες γεγονότων (εσωτερικός και εξωτερικός) εμφανίζονται και στην μελανή οπή QRN, υπό την υπόθεση πως η σταθερά l_p , ικανοποιεί την συνθήκη $l_p > r_+$, όπου r_+ ο εξωτερικός ορίζοντας της RN. Σε σύγκριση με τους ορίζοντες της κλασικής λύσης, βρήκαμε πως έχουν μεγαλύτερη ακτίνα. Ο λόγος για κάτι τέτοιο, ενδέχεται να οφείλεται στην παρουσία του επιπλέον τανυστή ενέργειας-ορμής. Υπάρχει επίσης η περίπτωση ενός extremal ορίζοντα. Επιπρόσθετα, για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου l_p , υπάρχουν οι περιπτώσεις που εμφανίζονται δύο ορίζοντες, μόνο ένας εκφυλισμένος και κανένας, με την τελευταία να υποδηλώνει την ύπαρξη γυμνής ανωμαλίας. Όλα τα αποτελέσματα που προέκυψαν μέσω της ανάλυσης Bohm, είναι συμβατά και με την μελανή οπή Schwarzschild, με την υπόθεση πως $r_q = 0$.

Σε μελλοντική εργασία θα ήταν ενδιαφέρον να εξετάσουμε τις γεωδαισιακές εξισώσεις και τις αλλαγές που εμφανίζονται λόγω των κβαντικών διορθώσεων.

Επιγραμματικά αναφέρουμε τα πιο σημαντικά σημεία:

1. Απλοποίηση της ιδιάζουσας minisuperspace λαγκρανζιανής (χαμιλτονιανής) πυκνότητας της μελανής οπής Reissner-Nordström, σε μη-ιδιάζουσα, “χρονικά”-εξαρτημένη λαγκρανζιανή (χαμιλτονιανή) πυκνότητα, χωρίς την επιλογή βαθμίδας.
2. Απόδειξη ισοδυναμίας στο επίπεδο των εξισώσεων, μεταξύ του παραπάνω συστήματος και ενός 3D ηλεκτρομαγνητικού pp-wave.
3. Κατασκευή μιας “χρονικά”-συναλλοίωτης εξίσωσης Schrödinger, ως ένα υβρίδιο ανάμεσα στους φορμαλισμούς της “εσωτερικού χρόνου” εξίσωσης Schrödinger και της εξίσωσης Wheeler-DeWitt.
4. Κριτήριο σχετικά με ιδιάζοντα σημεία: “λιγότερο” ιδιάζων μεταξύ δύο χωροχρόνων θα χαρακτηρίζεται εκείνος του οποίου η ανωμαλία είναι πιο εντοπισμένη γύρω από το σημείο ενδιαφέροντος.
5. Αποκάλυψη μη-συμφωνίας σχετικά με την ύπαρξη ανωμαλίας, μεταξύ της γεωμετρικής ερμηνείας στο πλαίσιο της ανάλυσης Bohm και την πρόταση DeWitt (μηδενική πυκνότητα πιθανότητας στο κλασσικό σημείο ανωμαλίας).

Μέρος ΙΙΙ

Εφαρμογές σε εξέλιξη

Κεφάλαιο 10

Παρατηρησιακές παράμετροι για ένα ανισοτροπικό κοσμολογικό πρότυπο, με δυναμικά ισοδύναμες εξισώσεις ΛCDM

I Το ανισοτροπικό κοσμολογικό πρότυπο

Από τα πρότυπα που βρέθηκαν στο μέρος II, κεφάλαιο (7) θα εστιάσουμε στις λύσεις του προτύπου Bianchi IX. Θα ανακαλέσουμε τη μορφή των λύσεων και θα εφαρμόσουμε κάποιες αλλαγές οι οποίες θα απλοποιήσουν τη μελέτη.

I.1 Πρότυπο IX ή $A_{3,9}$ ή $SU(2)$

I.1.1 Περίπτωση 1, $m_2 > m_3, m_3 = m_2 - m_4, m_4 > 0, m_3 > 0$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[m_2 dx^2 + 2m_2 \sin y dx dz + (m_2 - m_4 \sin^2 x) dy^2 - 2m_4 \cos x \sin x \cos y dy dz + [m_2 - m_4 \cos^2 x \cos^2 y] dz^2 \right], \quad (I.1)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{m_2 - m_4} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa} m_2 a(t)} \left[\sin x dt \wedge dy + \cos x \cos y dt \wedge dz \right] + A(t) \left[-\cos x dx \wedge dy + \sin x \cos y dx \wedge dz + \cos x \sin y dy \wedge dz \right], \quad (I.2)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{m_4 \sqrt{m_2 - m_4} \dot{a}(t)}{\sqrt{\kappa} m_2 \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}} [\sin x dy + \cos x \cos y dz]. \quad (I.3)$$

Η συνάρτηση $A(t)$ πρέπει να προσδιοριστεί από τη διαφορική εξίσωση $\dot{A}(t) = \frac{\sqrt{m_2 - m_4} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa} m_2 a(t)}$, όπου m_2, m_4 είναι σταθερές. Με στόχο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και το τετράρευμα να είναι πραγματικά, υπάρχει κάτω φράγμα για τον παράγοντα κλίμακας.

$$a(t)^2 \geq \frac{\kappa A(t)^2}{m_4 \mu_0}. \quad (I.4)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ενεργές εξισώσεις

w	$\rho^{(c)}$	H^2	$k_{(eff)}$
0	$-\frac{m_4}{\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^3}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{m_1+2m_4}{4(m_1+m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{m_1+2m_4}{4(m_1+m_4)^2} > 0$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^4}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{3m_1+4m_4}{12(m_1+m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{3m_1+4m_4}{12(m_1+m_4)^2} > 0$
-1	$\frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \rho_0^{(c)}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} + \rho_0^{(c)} \right) - \frac{m_1}{4(m_1+m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{m_1}{4(m_1+m_4)^2} > 0$

Πίνακας 10.1: Η πυκνότητα ενέργειας του φορτισμένου ρευστού $\rho^{(c)}$, το τετράγωνο της συνάρτησης Hubble H^2 και η ενεργός χωρική καμπυλότητα $k_{(eff)}$ παρουσιάζονται για τις τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων του φορτισμένου ρευστού: μη-σχετικιστικό $w = 0$, σχετικιστικό $w = \frac{1}{3}$ και σκοτεινή ενέργεια $w = -1$.

Η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $\rho^{(em)} = \frac{m_4}{2\kappa m_2^2 a(t)^2} > 0$. Αυτή η μετρική επιδέχεται μόνο τα αρχικά, τρία πεδία Killing του προτύπου. Η ενεργός καμπυλότητα είναι θετική σε κάθε περίπτωση. Ο παράγοντας κλίμακας πρέπει να είναι άνω φραγμένος για τις δύο πρώτες καταστατικές εξισώσεις.

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa m_2^2 \rho_0^{(c)}}{m_4} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \frac{2\kappa m_2^2 \rho_0^{(c)}}{m_4}. \quad (I.5)$$

I.1.2 Περίπτωση 3, $m_3 > m_1, m_3 = m_1 + m_4, m_4 > 0$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[m_1 dx^2 + 2m_1 \sin y dx dz + (m_1 + m_4) dy^2 + [m_1 + m_4 \cos^2 y] dz^2 \right], \quad (I.6)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\sqrt{m_1} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa(m_1 + m_4) a(t)}} \left[dt \wedge dx + \sin y dt \wedge dz \right] - A(t) \cos y dy \wedge dz, \quad (I.7)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{\sqrt{m_1} m_4 \dot{a}(t)}{\sqrt{\kappa(m_1 + m_4) \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}} [dx + \sin y dz]. \quad (I.8)$$

Η συνάρτηση $A(t)$ μένει να προσδιοριστεί από την εξίσωση $\dot{A}(t) = \frac{\sqrt{m_1} \sqrt{m_4 \mu_0 a(t)^2 - \kappa A(t)^2}}{\sqrt{\kappa(m_1 + m_4) a(t)}}$. Το ίδιο όριο για τον παράγοντα κλίμακας εμφανίζεται όπως και πριν. Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται οι ενεργές εξισώσεις.

w	$\rho^{(c)}$	H^2	$k_{(eff)}$
0	$-\frac{m_4}{\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^3}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{m_1+2m_4}{4(m_1+m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{m_1+2m_4}{4(m_1+m_4)^2} > 0$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^4}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)} + \rho_0^{(c)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} \right) - \frac{3m_1+4m_4}{12(m_1+m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{3m_1+4m_4}{12(m_1+m_4)^2} > 0$
-1	$\frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} + \rho_0^{(c)}$	$\frac{\kappa}{3} \left(\frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \rho_0^{(\Lambda)} + \rho_0^{(c)} \right) - \frac{m_1}{4(m_1+m_4)^2 a(t)^2}$	$\frac{m_1}{4(m_1+m_4)^2} > 0$

Πίνακας 10.2: Η πυκνότητα ενέργειας του φορτισμένου ρευστού $\rho^{(c)}$, το τετράγωνο της συνάρτησης Hubble H^2 και η ενεργός χωρική καμπυλότητα $k_{(eff)}$ παρουσιάζονται για τις τρεις περιπτώσεις καταστατικών εξισώσεων του φορτισμένου ρευστού: μη-σχετικιστικό $w = 0$, σχετικιστικό $w = \frac{1}{3}$ και σκοτεινή ενέργεια $w = -1$.

Τέλος, η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχει τη μορφή $\rho^{(em)} = \frac{m_4}{2\kappa(m_1+m_4)^2 a(t)^2} > 0$. Ανακαλούμε επίσης πως ένα επιπλέον ανυσματικό πεδίο Killing εμφανίστηκε για αυτή τη μετρική, $\zeta = \partial_x$, το οποίο την κατατάσσει στην οικογένεια των (LRS) μετρικών, του συγκεκριμένου προτύπου. Η μέγιστη τιμή του παράγοντα κλίμακας για τις δύο πρώτες καταστατικές εξισώσεις έχει τη μορφή

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa(m_1+m_4)^2 \rho_0^{(c)}}{m_4} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \frac{2\kappa(m_1+m_4)^2 \rho_0^{(c)}}{m_4}. \quad (I.9)$$

Παρατηρήστε πως δεν αναφέραμε την περίπτωση 2 η οποία παρουσιάστηκε στην εργασία [204], διότι αποδείξαμε εκ των υστέρων πως πρόκειται για ισοδύναμη περίπτωση με την 1, υπό το μετασχηματισμό συντεταγμένων $(x = \bar{x} + \frac{\pi}{2})$.

I.2 Αλλαγές και ορισμοί

Παρατηρούμε το εξής: και στις δύο περιπτώσεις τα πεδία Killing για $t = \text{σταθερό}$, $x = \text{σταθερό}$, είναι ίδια στη μορφή με εκείνα των σφαιρικά συμμετρικών, διδιάστατων επιφανειών. Τη συνήθη μορφή που αυτά παρουσιάζονται μέσω των συντεταγμένων (θ, ϕ) , μπορούμε να την αποκτήσουμε με τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $(y = \theta - \frac{\pi}{2}, z = \phi)$. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε το κλειστό πρότυπο FLRW στο οποίο η συντεταγμένη χ , συνδέεται με αυτή που χρησιμοποιούμε παραπάνω μέσω του μετασχηματισμού $(x = \chi + \frac{\pi}{2})$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτούς τους μετασχηματισμούς, τα πεδία Killing και οι ένα-μορφές του προτύπου λαμβάνουν τη μορφή

$$\xi_{(1)} = \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \partial_\chi + \sin \phi \partial_\theta + \cos \phi \cot \theta \partial_\phi \quad (I.10)$$

$$\xi_{(2)} = -\frac{\sin \phi}{\sin \theta} \partial_\chi + \cos \phi \partial_\theta - \sin \phi \cot \theta \partial_\phi \quad (I.11)$$

$$\xi_{(3)} = \partial_\phi \quad (I.12)$$

$$\sigma_{(1)} = d\chi - \cos \theta d\phi \quad (I.13)$$

$$\sigma_{(2)} = -\sin \chi d\theta - \cos \chi \sin \theta d\phi \quad (I.14)$$

$$\sigma_{(3)} = \cos \psi d\theta - \sin \chi \sin \theta d\phi \quad (I.15)$$

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να ορίσουμε την αδιάστατη σταθερά $\epsilon^2 = \frac{m_4}{m_2}$ έτσι ώστε με τον επαναορισμό του παράγοντα κλίμακας ως $a(t) \rightarrow \frac{a(t)}{\sqrt{m_2}}$, υπάρχει μόνο μια ουσιώδης σταθερά και αυτή είναι η ϵ . Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε την αδιάστατη συνάρτηση $q(t)$ από την εξίσωση

$$\sin q(t) = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu_0}} \frac{1}{|\epsilon|} \frac{A(t)}{a(t)}, \quad (I.16)$$

έτσι ώστε η ύπαρξη κάτω ορίου για τον παράγοντα κλίμακας να δίνεται από την γνωστή ανισότητα

$$-1 \leq \sin q(t) \leq 1, \quad (I.17)$$

ενώ η εξίσωση που προσδιορίζει αυτή τη συνάρτηση και αντίστοιχα το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αποκτά μια διαφορετική μορφή όπως θα δούμε παρακάτω. Όσον αφορά τις μονάδες των διαφόρων μεγεθών που εμφανίζονται, $[t] \sim \text{μήκος}$, $[\chi], [\theta], [\phi] \sim \text{αδιάστατες}$, $[a(t)] \sim \text{μήκος}$, $[q(t)] \sim \text{αδιάστατο}$. Παράλληλα έχουμε τα πεδία ορισμού $t \in (-\infty, +\infty)$, $\chi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $\epsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Η τιμή $\epsilon = 0$ δεν είναι αποδεκτή καθώς ο τανυστής ενέργειας ορμής του πεδίου είναι μηδέν, ενώ ο τανυστής Faraday είναι μιγαδικός. Αντίστοιχα οι τιμές $(-1, +1)$ δεν είναι αποδεκτές διότι μηδενίζεται η οριζουσα της μετρικής.

Σχετικά με την περίπτωση δύο, το μόνο που αλλάζει σε σχέση με τα παραπάνω είναι ο ορισμός της ϵ , $\epsilon^2 = \frac{m_4}{m_1}$, ο επαναορισμός $a(t) \rightarrow \frac{a(t)}{\sqrt{m_1}}$ και το πεδίο ορισμού για το ϵ το οποίο είναι $\epsilon \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Παράλληλα, για καλύτερη κατανόηση της μορφής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, θα εκφράσουμε τον τανυστή Faraday μέσω του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα. Στην ανάλυση έχει χρησιμοποιηθεί ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής Levi-Civita $L_{\mu\nu\sigma\rho} = \sqrt{-\text{Det}(g)}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$, όπου $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ τα αντίστοιχα σύμβολα. Με χρήση του εσωτερικού προβολικού τανυστή και της τετραταχύτητας των συγκινούμενων παρατηρητών u^μ , μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή Levi-Civita στις τρεις διαστάσεις

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} e^\mu_i e^\nu_j e^\sigma_k u^\rho. \quad (\text{I.18})$$

Λαμβάνοντας όλες αυτές τις αλλαγές υπόψη, έχουμε για τις δύο περιπτώσεις:

I.2.1 Περίπτωση I , $\epsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[d\chi^2 - 2\cos\theta d\chi d\phi + (1 - \epsilon^2 \cos^2\chi) d\theta^2 + 2\epsilon^2 \cos\chi \sin\chi \sin\theta d\theta d\phi + (1 - \epsilon^2 \sin^2\chi \sin^2\theta) d\phi^2 \right], \quad (\text{I.19})$$

$$E^i = \frac{|\epsilon|}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\kappa}} \frac{\cos q(t)}{a(t)^2} S^i(\chi, \theta), \quad (\text{I.20})$$

$$B^i = \tan q(t) E^i, \quad J^i = -\frac{1}{\mu_0} H(t) \frac{1}{\cos^2 q(t)} E^i, \quad (\text{I.21})$$

όπου $S^i(\chi, \theta)$ οι συνιστώσες του ανύσματος

$$S(\chi, \theta) = -\cot\theta \sin\chi \partial_\chi + \cos\chi \partial_\theta - \csc\theta \sin\chi \partial_\phi. \quad (\text{I.22})$$

Για τις νόρμες των πεδίων ισχύει

$$|E| = |\epsilon| \sqrt{\frac{\mu_0}{\kappa}} \frac{\cos q(t)}{a(t)}, \quad |B| = \tan q(t) |E|, \quad |J| = \frac{1}{\mu_0} \frac{H(t)}{\cos^2 q(t)} |E|. \quad (\text{I.23})$$

Η διαφορική εξίσωση για το $q(t)$ έχει τη μορφή

$$\dot{q}(t) + H(t) \tan q(t) = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{a(t)}. \quad (\text{I.24})$$

Τέλος, οι ενεργές εξισώσεις καθώς και τα άνω φράγματα είναι

$$\rho^{(c)} = \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^{3(1+w)}} - \frac{\epsilon^2}{\kappa(1+3w)a(t)^2}, \quad (\text{I.25})$$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\rho_0^{(\Lambda)} + \frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^{3(1+w)}} \right) - \frac{1+3w+(1-w)\epsilon^2}{4(1+3w)} \frac{1}{a(t)^2}, \quad (\text{I.26})$$

$$k_{(eff)} = \frac{1+3w+(1-w)\epsilon^2}{4(1+3w)}. \quad (\text{I.27})$$

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa \rho_0^{(c)}}{\epsilon^2} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \frac{2\kappa \rho_0^{(c)}}{\epsilon^2}. \quad (\text{I.28})$$

I.2.2 Περίπτωση II, $\epsilon \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$ds_{(4)} = -dt^2 + a(t)^2 \left[d\chi^2 - 2 \cos \theta d\chi d\phi + (1 + \epsilon^2) d\theta^2 + (1 + \epsilon^2 \sin^2 \theta) d\phi^2 \right], \quad (\text{I.29})$$

$$E^i = \frac{|\epsilon|}{1 + \epsilon^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\kappa}} \frac{\cos q(t)}{a(t)^2} S^i(\chi), \quad (\text{I.30})$$

$$B^i = \tan q(t) E^i, \quad J^i = -\frac{1}{\mu_0} H(t) \frac{1}{\cos^2 q(t)} E^i, \quad (\text{I.31})$$

όπου $S^i(\chi)$ οι συνιστώσες του ανύσματος

$$S(\chi) = \partial_\chi. \quad (\text{I.32})$$

Οι νόρμες των πεδίων έχουν τη μορφή

$$|E| = \frac{|\epsilon|}{1 + \epsilon^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\kappa}} \frac{\cos q(t)}{a(t)}, \quad |B| = \tan q(t) |E|, \quad |J| = \frac{1}{\mu_0} \frac{H(t)}{\cos^2 q(t)} |E|. \quad (\text{I.33})$$

ενώ η διαφορική εξίσωση για το $q(t)$ είναι

$$\dot{q}(t) + H(t) \tan q(t) = \frac{1}{(1 + \epsilon^2)a(t)}. \quad (\text{I.34})$$

Τέλος, οι ενεργές εξισώσεις καθώς και τα άνω φράγματα αποκτούν τη μορφή

$$\rho^{(c)} = \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^{3(1+w)}} - \frac{\epsilon^2}{\kappa(1+3w)(1+\epsilon^2)^2 a(t)^2}, \quad (\text{I.35})$$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\rho_0^{(\Lambda)} + \frac{\rho_0^{(d)}}{a(t)^3} + \frac{\rho_0^{(r)}}{a(t)^4} + \frac{\rho_0^{(c)}}{a(t)^{3(1+w)}} \right) - \frac{1+3w+2(1+w)\epsilon^2}{4(1+3w)(1+\epsilon^2)^2} \frac{1}{a(t)^2}, \quad (\text{I.36})$$

$$k_{(eff)} = \frac{1+3w+2(1+w)\epsilon^2}{4(1+3w)(1+\epsilon^2)^2}. \quad (\text{I.37})$$

$$w = 0 \rightarrow a(t)^2 \leq \left(\frac{\kappa(1+\epsilon^2)^2 \rho_0^{(c)}}{\epsilon^2} \right)^2, \quad w = \frac{1}{3} \rightarrow a(t)^2 \leq \frac{2\kappa(1+\epsilon^2)^2 \rho_0^{(c)}}{\epsilon^2}. \quad (\text{I.38})$$

Η ουσιώδης σταθερά ϵ , η οποία υπάρχει και στις δύο περιπτώσεις, σχετίζεται με την καμπυλότητα Ricci του χωρόχρονου και εμφανίζεται στην ενεργό χωρική καμπυλότητα των προτύπων. Παρατηρούμε επίσης πως το ηλεκτρικό, το μαγνητικό και η πυκνότητα ρεύματος είναι παράλληλα μεταξύ τους, με το ρεύμα να έχει αντίθετη φορά από τα άλλα δύο.

II Κοσμολογικές παράμετροι

Εφόσον οι εξισώσεις έχουν την ίδια δυναμική μορφή με εκείνες του προτύπου k - Λ CDM, οι περισσότερες κοσμολογικές σχέσεις έχουν επίσης την ίδια μορφή. Ορίζουμε μόνο κάποιες από αυτές:

$a(z)$	$E(z)$	$\chi(z)$	t_o	$q(z)$
$\frac{1}{1+z}$	$\sqrt{\Omega_0^{(r)}(1+z)^4 + \Omega_0^{(d)}(1+z)^4 + \Omega_0^{(\epsilon)}(1+z)^2 + \Omega_0^{(\Lambda)}}$	$\frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{E(\bar{z})}$	$\frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{d\bar{z}}{(1+\bar{z})E(\bar{z})}$	$-1 + (1+z) \frac{E'(z)}{E(z)}$

Πίνακας 10.3: $a(z)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας, z η ερυθρομετατόπιση, $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$, οι παράμετροι πυκνότητας $\Omega_0^{(r)}, \Omega_0^{(d)}, \Omega_0^{(\epsilon)}, \Omega_0^{(\Lambda)}$, $\chi(z)$ η απόσταση για φωτεινικές καμπύλες με θ, ϕ =σταθερά, t_o η ηλικία του σύμπαντος και $q(z)$ η παράμετρος επιβράδυνσης.

Έχουμε εκφράσει όλες τις ποσότητες συναρτήσει της ερυθρομετατόπισης z . Επιπλέον, ο παράγοντας κλίμακας έχει κανονικοποιηθεί ώστε να έχει τιμή ίση με τη μονάδα στη σημερινή εποχή, $z = 0$. Ως συνήθως, $\Omega_{(0)}^{(r)} = \frac{\rho_0^{(r)}}{\rho_0}$, $\Omega_0^{(d)} = \frac{\rho_0^{(d)}}{\rho_0}$, $\Omega_{(0)}^{(\Lambda)} = \frac{\rho_0^{(\Lambda)}}{\rho_0}$, όπου $\rho_0 = \frac{3H_0^2}{\kappa}$ και H_0 η παράμετρος Hubble σήμερα. Τέλος, $\Omega_0^{(\epsilon)} = -\frac{k_{(eff)}}{H_0^2}$ όπου $k_{(eff)}$ είναι πάντοτε θετικό στις περιπτώσεις μας αλλά διαφορετικό σε κάθε μια.

II.1 Γωνιακή απόσταση και απόσταση φωτεινότητας

Όπως αποδεικνύεται στις [188], [205] και χρησιμοποιείται στην [183], ο ορισμός της απόστασης γωνιακής διαμέτρου (angular-diameter) πρέπει να αλλάξει ώστε να ληφθεί υπόψη και η ανισοτροπία των προτύπων. Συγκεκριμένα, ο ορισμός που δίνεται είναι

$$d_A = \sqrt{\frac{dA}{d\Omega}}, \quad (\text{II.1})$$

όπου $dA = \sqrt{\text{Det}(g_{(\mu\nu)}^{(2)})} d\theta d\phi$ η αναλλοίωτη επιφάνεια των διδιάστατων επιφανειών $t = \text{σταθερό}$, $\chi = \text{σταθερό}$ και $\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ η στερεά γωνία. Λόγω του θεωρήματος αμοιβαιότητας (reciprocity theorem), [206], σε κάθε μετρική Riemann, η απόσταση φωτεινότητας δίνεται από τη σχέση

$$d_L = (1+z)^2 d_A. \quad (\text{II.2})$$

Στον παρακάτω πίνακα έχουν υπολογιστεί αυτά τα αντικείμενα για τις δύο περιπτώσεις

	d_A	d_L
Περίπτωση I	$\frac{1}{1+z} \left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2(\cos^2 \chi(z) + \sin^2 \chi(z) \sin^2 \theta)}}{\sin \theta} \right)^{1/2}$	$(1+z) \left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2(\cos^2 \chi(z) + \sin^2 \chi(z) \sin^2 \theta)}}{\sin \theta} \right)^{1/2}$
Περίπτωση II	$\frac{1}{1+z} \left(\frac{\sqrt{(1+\epsilon^2)(1+\epsilon^2 \sin^2 \theta)}}{\sin \theta} \right)^{1/2}$	$(1+z) \left(\frac{\sqrt{(1+\epsilon^2)(1+\epsilon^2 \sin^2 \theta)}}{\sin \theta} \right)^{1/2}$

Πίνακας 10.4: $\chi(z)$ είναι η ιδιοαπόσταση των φωτοειδών καμπυλών για $\theta, \phi = \text{σταθερά}$.

Παρατηρούμε πως, σε αντίθεση με τα πρότυπα FLRW, η απόσταση φωτεινότητας εξαρτάται και από τη γωνία παρατήρησης. Αναμένουμε δηλαδή, δύο ίδιοι υπερκαινοφανείς, ο ένας σε γωνία $\theta = \frac{\pi}{3}$ και ο άλλος σε $\theta = \frac{\pi}{4}$, να παρουσιάζουν διαφορετική απόσταση φωτεινότητας λόγω της ανισοτροπίας του χωρόχρονου.

Επίλογος

Η παρούσα εργασία αποτελεί στην ουσία ένα σύνολο από μικρότερες εργασίες. Στο τέλος κάθε εργασίας αναφέραμε τα σχετικά συμπεράσματα που αποτυπώνουν την σημαντικότητα αυτής.

Κλείνοντας, θα θέλαμε να τονίσουμε ακόμη περισσότερο την προσφορά αυτής της εργασίας στην επιστημονική κοινότητα, παρουσιάζοντας συνοπτικά για κάθε μια από τις εργασίες, τις προοπτικές που ανοίγονται.

1) Ο χώρος λύσεων των εξισώσεων Einstein στο κενό, για το $(4 + 1)$ -διάστατο πρότυπο Bianchi I, (Type 4A1)

1. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο, μπορούν να μελετηθούν τα υπόλοιπα πενταδιάστατα πρότυπα Bianchi.
2. Εκτενής μελέτη του χώρου λύσεων για την περίπτωση παρουσίας κοσμολογικής σταθεράς. Μπορεί η ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς να “ακυρώσει” τη χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας κατά μήκος μιας χωρικής διάστασης και να οδηγήσει με φυσικό τρόπο από τις πέντε στις τέσσερις διαστάσεις;

2) Κλασσική και κβαντική ανάλυση 3D ηλεκτρομαγνητικών pp-wave χωροχρόνων.

1. Ανάλυση του αντίστοιχου τετραδιάστατου συστήματος και μελέτη των διαφορών λόγω της παρουσίας βαρυτικών βαθμών ελευθερίας.
2. Κατασκευή κάποια λαγκρανζιανής η οποία είναι ικανή να περιγράψει το σύστημα της Περίπτωσης II. Πιθανή κβαντική περιγραφή.

3) Δυναμικά ισοδύναμες εξισώσεις Λ CDM υπό την ύπαρξη γεωμετρίας Bianchi

1. Αναζήτηση άλλου είδους πεδίου το οποίο μπορεί να απορροφήσει την ανισοτροπία των προτύπων Bianchi, όπως για παράδειγμα κάποιο πεδίο Dirac.
2. Επέκταση της μεθόδου πέραν των προτύπων Bianchi. Παρουσία ανομοιογενειών.
3. Αναζήτηση τρόπου σύγκρισης των αποτελεσμάτων με παρατηρησιακά δεδομένα. Ειδικά σε ό,τι αφορά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και την πυκνότητα τετραρεύματος.

4) Η απειροδιάστατη ομάδα συμμετρίας των εξισώσεων Friedmann

1. Επίλυση της συνδεσμικής εξίσωσης ως προς τον παράγοντα Lapse (N) και αναζήτηση των συμμετριών της παραμένουσας εξίσωσης. Σύγκριση με τα παραπάνω αποτελέσματα.
2. Εκτενής μελέτη της σύνδεσης μεταξύ των συμμετριών, στο επίπεδο περιγραφής της θεωρίας μέσω ενός ρευστού και στη βασική θεωρία (π.χ. ηλεκτρομαγνητικό πεδίο). Αναζήτηση για τυχόν ανάγκη ορισμού ανώτερης συμμετρίας (contact συμμετρίες,...).

5) “Χρονικά”-συναλλοίωτη εξίσωση Schrödinger και η κανονική κβάντωση της μελανής οπής Reissner-Nordström

1. Εφαρμογή της μεθόδου σε κοσμολογικά πρότυπα.
2. Πιθανή επέκταση αυτής σε midisuperspace πρότυπα ή ακόμη και στην πλήρη θεωρία της βαρύτητας.
3. Μελέτη του κριτηρίου για ιδιάζοντα σημεία και σε άλλα πρότυπα. Σύγκριση με άλλα κριτήρια.
4. Κατηγοριοποίηση minisuperspace προτύπων με βάση την ισοδυναμία των εξισώσεων τους και τις γεωμετρικές ιδιότητες της minisuperspace μετρικής.

Παράρτημα

I Εξισώσεις για χωροχρόνους με εμβαπτισμένες ομογενείς υπερ-επιφάνειες

Ξεκινάμε με τις ένα-μορφές σ^I οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} d\sigma^L &= -\frac{1}{2}C_{IJ}^L\sigma^I \wedge \sigma^J \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(\partial_i\sigma^L_j - \partial_j\sigma^L_i)dx^i \wedge dx^j &= -\frac{1}{2}C_{IJ}^L\sigma^I_i\sigma^J_jdx^i \wedge dx^j \Rightarrow \\ \partial_i\sigma^L_j - \partial_j\sigma^L_i &= -C_{IJ}^L\sigma^I_i\sigma^J_j. \end{aligned} \quad (I.1)$$

Επίσης, λόγω της σχέσης $\sigma^L_L\sigma^L_j = \delta^L_j$ παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\partial_i\sigma^M_j = -\sigma^L_j(\partial_i\sigma^L_L)\sigma^M_L, \quad \partial_i\sigma^L_M = -\sigma^j_M(\partial_i\sigma^L_j)\sigma^L_L. \quad (I.2)$$

Τώρα υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2}\gamma^{ls}(\partial_i\gamma_{sj} + \partial_j\gamma_{si} - \partial_s\gamma_{ij}) \Rightarrow \\ \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2}\sigma^L_I\sigma^s_J\gamma^{IJ}[\partial_i(\sigma^A_s\sigma^B_j\gamma_{AB}) + \partial_j(\sigma^A_s\sigma^B_i\gamma_{AB}) - \partial_s(\sigma^A_i\sigma^B_j\gamma_{AB})] \Rightarrow \\ \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2}\sigma^L_I\sigma^s_J\gamma^{IJ}\sigma^A_s(\partial_i\sigma^B_j + \partial_j\sigma^B_i)\gamma_{AB} + \frac{1}{2}\sigma^L_I\sigma^s_J\gamma^{IJ}(\partial_i\sigma^A_s - \partial_s\sigma^A_i)\sigma^B_j\gamma_{AB} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^L_I\sigma^s_J\gamma^{IJ}(\partial_j\sigma^A_s - \partial_s\sigma^A_j)\sigma^B_i\gamma_{AB} \xrightarrow{(I.1)} \\ \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2}\sigma^L_I\sigma^s_J\gamma^{IJ}\sigma^A_s(\partial_i\sigma^B_j + \partial_j\sigma^B_i)\gamma_{AB} - \frac{1}{2}\sigma^L_I\sigma^s_J\gamma^{IJ}C_{TP}^A\sigma^T_i\sigma^P_s\sigma^B_j\gamma_{AB} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\sigma^L_I\sigma^s_J\gamma^{IJ}C_{TP}^A\sigma^T_j\sigma^P_s\sigma^B_i\gamma_{AB} \Rightarrow \\ \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2}\sigma^L_B(\partial_i\sigma^B_j + \partial_j\sigma^B_i) - \frac{1}{2}C_{TJ}^A\sigma^{lJ}(\sigma_{Aj}\sigma^T_i + \sigma_{Ai}\sigma^T_j), \end{aligned} \quad (I.3)$$

όπου $\sigma_{Ai} = \sigma^B_i\gamma_{AB}$ και $\sigma^{lJ} = \sigma^L_I\gamma^{IJ}$.

Μπορούμε να αρχίσουμε την ανάλυση με τον τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\frac{1}{2N}(\partial_t\gamma_{ij} - D_iN_j - D_jN_i) \Rightarrow \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}(\dot{\gamma}_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j - \partial_iN_j + \Gamma_{ij}^lN_l - \partial_jN_i + \Gamma_{ji}^lN_l) \Rightarrow \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}(\dot{\gamma}_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j - \partial_iN_j - \partial_jN_i + 2\Gamma_{ij}^lN_l) \xrightarrow{(I.3)} \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}[\dot{\gamma}_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j - \partial_iN_j - \partial_jN_i + \sigma^L_B(\partial_i\sigma^B_j + \partial_j\sigma^B_i)N_l - C_{TJ}^A\sigma^{lJ}(\sigma_{Aj}\sigma^T_i + \sigma_{Ai}\sigma^T_j)N_l] \Rightarrow \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}[\dot{\gamma}_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j - \partial_iN_j - \partial_jN_i + N_B\partial_i\sigma^B_j + N_B\partial_j\sigma^B_i - C_{TJ}^AN^J(\sigma_{Aj}\sigma^T_i + \sigma_{Ai}\sigma^T_j)] \Rightarrow \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}[\dot{\gamma}_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j - \partial_iN_j - \partial_jN_i + \partial_i(N_B\sigma^B_j) + \partial_j(N_B\sigma^B_i) - C_{TJ}^AN^J(\sigma_{Aj}\sigma^T_i + \sigma_{Ai}\sigma^T_j)] \Rightarrow \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}[\dot{\gamma}_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j - \partial_iN_j - \partial_jN_i + \partial_iN_j + \partial_jN_i - C_{TJ}^AN^J(\sigma_{Aj}\sigma^T_i + \sigma_{Ai}\sigma^T_j)] \Rightarrow \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}[\dot{\gamma}_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j - C_{TJ}^AN^J(\sigma_{Aj}\sigma^T_i + \sigma_{Ai}\sigma^T_j)] \Rightarrow \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}(\dot{\gamma}_{AB} + N^LC_{LB}^M\gamma_{MA} + N^LC_{LA}^M\gamma_{MB})\sigma^A_i\sigma^B_j \Rightarrow \\ K_{ij} &= K_{AB}\sigma^A_i\sigma^B_j, \end{aligned}$$

όπου βγάλαμε τους κοινούς παράγοντες και χρησιμοποιήσαμε την μη εξάρτηση του σ^A_i από το t . Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση

$$K_{AB} = -\frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{AB} + N^L C_{LB}^M \gamma_{MA} + N^L C_{LA}^M \gamma_{MB}). \quad (I.4)$$

Συνεχίζουμε με όρους που υπάρχουν στις εξισώσεις, συγκεκριμένα υπολογίζουμε τον όρο $\mathcal{L}_N K_{ij}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N K_{ij} &= \mathcal{L}_N (K_{AB} \sigma^A_i \sigma^B_j) \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= K_{AB} (\mathcal{L}_N \sigma^A_i) \sigma^B_j + K_{AB} \sigma^A_i (\mathcal{L}_N \sigma^B_j) \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= K_{AB} (N^l \partial_l \sigma^A_i + \sigma^A_l \partial_i N^l) \sigma^B_j + K_{AB} \sigma^A_i (N^l \partial_l \sigma^B_j + \sigma^B_l \partial_j N^l) \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= K_{AB} [N^l \partial_l \sigma^A_i + \partial_i (\sigma^A_l N^l) - N^l \partial_i \sigma^A_l] \sigma^B_j + K_{AB} \sigma^A_i [N^l \partial_l \sigma^B_j + \partial_j (\sigma^B_l N^l) - N^l \partial_j \sigma^B_l] \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= K_{AB} (N^l \partial_l \sigma^A_i + \partial_i N^A - N^l \partial_i \sigma^A_l) \sigma^B_j + K_{AB} \sigma^A_i (N^l \partial_l \sigma^B_j + \partial_j N^B - N^l \partial_j \sigma^B_l) \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= K_{AB} N^l (\partial_l \sigma^A_i - \partial_i \sigma^A_l) \sigma^B_j + K_{AB} \sigma^A_i N^l (\partial_l \sigma^B_j - \partial_j \sigma^B_l) \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= -K_{AB} N^l C_{IJ}^A \sigma^I_l \sigma^J_i \sigma^B_j - K_{AB} \sigma^A_i N^l C_{IJ}^B \sigma^I_l \sigma^J_j \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= -N^I (K_{AB} C_{IJ}^A \sigma^I_j \sigma^B_j + K_{AB} \sigma^A_i C_{IJ}^B \sigma^I_j) \Rightarrow \\ \mathcal{L}_N K_{ij} &= -N^I (K_{JB} C_{IA}^J \sigma^A_i \sigma^B_j + K_{AJ} \sigma^A_i C_{IB}^J \sigma^B_j) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_N K_{ij} = -N^I (K_{JL} C_{IA}^J + K_{AJ} C_{IL}^J) \sigma^A_i \sigma^L_j. \quad (I.5)$$

Υπάρχουν και άλλοι όροι που περιλαμβάνουν την παράγωγο Lie ως προς το άνυσμα μετατόπισης, $\mathcal{L}_N q_i$, $\mathcal{L}_N \rho$, $\mathcal{L}_N E^i$ και $\mathcal{L}_N B_{ij}$. Για τον τελευταίο όρο θα έχουμε ακριβώς την ίδια σχέση με την (I.5), παρόλο που το K_{ij} είναι συμμετρικό ενώ το B_{ij} αντι-συμμετρικό, δεν χρησιμοποιήσαμε αυτή την ιδιότητα στην εξαγωγή της παραπάνω σχέσης. Συνεπώς

$$\mathcal{L}_N B_{ij} = -N^I (B_{JL} C_{IA}^J + B_{AJ} C_{IL}^J) \sigma^A_i \sigma^L_j. \quad (I.6)$$

Όσον αφορά τους όρους $\mathcal{L}_N q_i$, $\mathcal{L}_N E^i$. Ξεκινάμε με το q_i το οποίο είναι συναλλοίωτο άνυσμα όπως και το K_{ij} όμως με ένα μόνο δείκτη. Αυτό συνεπάγεται πως υπάρχει μόνο ένας όρος και αυτός θα είναι ο αντίστοιχος πρώτος όρος της (I.5).

$$\mathcal{L}_N q_i = -N^I q_J C_{IA}^J \sigma^A_i \quad (I.7)$$

Τέλος, έχουμε τον όρο $\mathcal{L}_N \rho$, ο οποίος ισούται με μηδέν καθώς θεωρούμε πως λόγω της ομογένειας η πυκνότητα εξαρτάται μόνο από το t .

$$\mathcal{L}_N \rho = 0. \quad (I.8)$$

Ας μελετήσουμε τώρα τους όρους που περιλαμβάνουν τη συναλλοίωτη παράγωγο D_i . Όπως και πριν, για όλους τους όρους οι οποίοι μετασχηματίζονται ως βαθμωτά υπό τις συντεταγμένες x^i ισχύει

$$D_i K = 0, \quad D_i N = 0, \quad D_i P = 0. \quad (I.9)$$

Έχουμε επιπλέον τους όρους της μορφής $D_l K_{ij}$.

$$\begin{aligned} D_l K_{ij} &= K_{IJ} D_l (\sigma^I_i) \sigma^J_j + K_{IJ} \sigma^I_i D_l (\sigma^J_j) \Rightarrow \\ D_l K_{ij} &= K_{IJ} (\partial_l \sigma^I_i - \Gamma_{li}^s \sigma^I_s) \sigma^J_j + K_{IJ} \sigma^I_i (\partial_l \sigma^J_j - \Gamma_{lj}^s \sigma^J_s) \Rightarrow \\ D_l K_{ij} &= K_{IJ} \sigma^J_j \partial_l \sigma^I_i - K_{IJ} \sigma^I_i \sigma^J_j \left[\frac{1}{2} \sigma^s_M (\partial_l \sigma^M_i + \partial_i \sigma^M_l) - \frac{1}{2} C_{TQ}^A \sigma^s_Q (\sigma_{Ai} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_i) \right] \\ &\quad + K_{IJ} \sigma^I_i \partial_l \sigma^J_j - K_{IJ} \sigma^J_j \sigma^I_i \left[\frac{1}{2} \sigma^s_M (\partial_l \sigma^M_j + \partial_j \sigma^M_l) - \frac{1}{2} C_{TQ}^A \sigma^s_Q (\sigma_{Aj} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_j) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_l K_{ij} &= K_{IJ} \sigma^J_j \partial_l \sigma^I_i - K_{IJ} \sigma^J_j \frac{1}{2} (\partial_l \sigma^I_i + \partial_i \sigma^I_l) + \frac{1}{2} K_{IJ} C_{TQ}^A \sigma^J_j \gamma^{IQ} (\sigma_{Ai} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_i) \\
&+ K_{IJ} \sigma^I_i \partial_l \sigma^J_j - K_{IJ} \sigma^I_i \frac{1}{2} (\partial_l \sigma^J_j + \partial_j \sigma^J_l) + \frac{1}{2} K_{IJ} C_{TQ}^A \sigma^I_i \gamma^{JQ} (\sigma_{Aj} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_j) \Rightarrow \\
D_l K_{ij} &= \frac{1}{2} K_{IJ} \sigma^J_j (\partial_l \sigma^I_i - \partial_i \sigma^I_l) + \frac{1}{2} K_{IJ} C_{TQ}^A \sigma^J_j \gamma^{IQ} (\sigma_{Ai} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_i) \\
&+ \frac{1}{2} K_{IJ} \sigma^I_i (\partial_l \sigma^J_j - \partial_j \sigma^J_l) + \frac{1}{2} K_{IJ} C_{TQ}^A \sigma^I_i \gamma^{JQ} (\sigma_{Aj} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_j) \Rightarrow \\
D_l K_{ij} &= -\frac{1}{2} K_{IJ} \sigma^J_j C_{LA}^I \sigma^L_l \sigma^A_i + \frac{1}{2} K^Q_J C_{TQ}^A \sigma^J_j (\sigma_{Ai} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_i) \\
&- \frac{1}{2} K_{IJ} \sigma^I_i C_{LA}^J \sigma^L_l \sigma^A_j + \frac{1}{2} K^Q_I C_{TQ}^A \sigma^I_i (\sigma_{Aj} \sigma^T_l + \sigma_{Al} \sigma^T_j) \Rightarrow \\
D_l K_{ij} &= -\frac{1}{2} (K_{AJ} C_{LI}^A + K_{IA} C_{LJ}^A) \sigma^I_i \sigma^J_j \sigma^L_l + \frac{1}{2} K^Q_J C_{TQ}^A \sigma^J_j (\gamma_{AM} \sigma^M_i \sigma^T_l + \gamma_{AM} \sigma^M_l \sigma^T_i) \\
&+ \frac{1}{2} K^Q_I C_{TQ}^A \sigma^I_i (\gamma_{AM} \sigma^M_j \sigma^T_l + \gamma_{AM} \sigma^M_l \sigma^T_j) \Rightarrow \\
D_l K_{ij} &= -\frac{1}{2} (K_{AJ} C_{LI}^A + K_{IA} C_{LJ}^A) \sigma^I_i \sigma^J_j \sigma^L_l + \frac{1}{2} K^Q_J (C_{LQ}^A \gamma_{AI} + C_{IQ}^A \gamma_{AL}) \sigma^I_i \sigma^J_j \sigma^L_l \\
&+ \frac{1}{2} K^Q_I (C_{LQ}^A \gamma_{AJ} + C_{JQ}^A \gamma_{AL}) \sigma^I_i \sigma^J_j \sigma^L_l \Rightarrow \\
D_l K_{ij} &= \frac{1}{2} [- (K_{AJ} C_{LI}^A + K_{IA} C_{LJ}^A) + K^Q_J (C_{LQ}^A \gamma_{AI} + C_{IQ}^A \gamma_{AL}) + K^Q_I (C_{LQ}^A \gamma_{AJ} + C_{JQ}^A \gamma_{AL})] \sigma^I_i \sigma^J_j \sigma^L_l.
\end{aligned} \tag{I.10}$$

Η ίδιας μορφής εξίσωση ισχύει για το B_{ij} και το π_{ij} .

$$D_l B_{ij} = \frac{1}{2} [- (B_{AJ} C_{LI}^A + B_{IA} C_{LJ}^A) + B^Q_J (C_{LQ}^A \gamma_{AI} + C_{IQ}^A \gamma_{AL}) + B^Q_I (C_{LQ}^A \gamma_{AJ} + C_{JQ}^A \gamma_{AL})] \sigma^I_i \sigma^J_j \sigma^L_l. \tag{I.11}$$

$$D_l \pi_{ij} = \frac{1}{2} [- (\pi_{AJ} C_{LI}^A + \pi_{IA} C_{LJ}^A) + \pi^Q_J (C_{LQ}^A \gamma_{AI} + C_{IQ}^A \gamma_{AL}) + \pi^Q_I (C_{LQ}^A \gamma_{AJ} + C_{JQ}^A \gamma_{AL})] \sigma^I_i \sigma^J_j \sigma^L_l. \tag{I.12}$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε τους όρους $D_l K_i^l$, $D_l (N B_i^l) = N D_l B_i^l$, $D_l (N \pi_i^l) = N D_l \pi_i^l$ οι οποίοι εμφανίζονται στις εξισώσεις.

$$\begin{aligned}
D_l K_i^l &= \gamma^{lj} D_l K_{ij} \Rightarrow \\
D_l K_i^l &= \frac{1}{2} [- (K_{AJ} C_{LI}^A + K_{IA} C_{LJ}^A) + K^Q_J (C_{LQ}^A \gamma_{AI} + C_{IQ}^A \gamma_{AL}) + K^Q_I (C_{LQ}^A \gamma_{AJ} + C_{JQ}^A \gamma_{AL})] \sigma^I_i \gamma^{JL} \Rightarrow \\
D_l K_i^l &= \frac{1}{2} [- (K_{AJ} \gamma^{JL} C_{LI}^A + K_{IA} C_{LJ}^A \gamma^{JL}) + K^Q_J \gamma^{JL} (C_{LQ}^A \gamma_{AI} + C_{IQ}^A \gamma_{AL})] \sigma^I_i + \\
&+ \frac{1}{2} K^Q_I (C_{LQ}^A \gamma_{AJ} \gamma^{JL} + C_{JQ}^A \gamma_{AL} \gamma^{JL}) \sigma^I_i \Rightarrow \\
D_l K_i^l &= \frac{1}{2} (-K_A^L C_{LI}^A + K^L_A C_{IL}^A + K^Q_I C_{LQ}^L + K^Q_I C_{LQ}^L) \sigma^I_i \Rightarrow \\
D_l K_i^l &= \frac{1}{2} (-2K_A^L C_{LI}^A + 2K^Q_I C_{LQ}^L) \sigma^I_i \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$D_l K_i^l = (K_I^M C_{LM}^L - K_M^L C_{LI}^M) \sigma^I_i. \tag{I.13}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως $(C_{IJ}^L \gamma^{IJ} = 0, C_{IJ}^L K^{IJ} = 0)$ ως συστολή αντι-συμμετρικού και συμμετρικού αντικειμένου στους δείκτες (I, J) . Επειδή και το αντικείμενο π_{IJ} είναι συμμετρικό στους αντίστοιχους

δείκτες, προκύπτει η ίδια ακριβώς έκφραση

$$D_I \pi_i^l = (\pi_I^M C_{LM}^L - \pi_M^L C_{LI}^M) \sigma^I_i. \quad (I.14)$$

Τα πράγματα διαφέρουν λίγο για το B_{IJ} λόγω αντισυμμετρικότητας

$$\begin{aligned} D_I B_i^l &= \frac{1}{2} [-(B_{AJ} \gamma^{JL} C_{LI}^A + B_{IA} C_{LJ}^A \gamma^{JL}) + B^Q_J \gamma^{JL} (C_{LQ}^A \gamma_{AI} + C_{IQ}^A \gamma_{AL})] \sigma^I_i + \\ &+ \frac{1}{2} B_I^Q (C_{LQ}^A \gamma_{AJ} \gamma^{JL} + C_{JQ}^A \gamma_{AL} \gamma^{JL}) \sigma^I_i \Rightarrow \\ D_I B_i^l &= \frac{1}{2} (-B_A^L C_{LI}^A + B^{QL} C_{LQ}^A \gamma_{AI} + B^{QL} C_{IQ}^A \gamma_{AL} + 2B_I^Q C_{LQ}^L) \sigma^I_i \Rightarrow \\ D_I B_i^l &= \frac{1}{2} (-B_A^L C_{LI}^A - B^{LQ} C_{LQ}^A \gamma_{AI} + B^L_A C_{IL}^A + 2B_I^Q C_{LQ}^L) \sigma^I_i \Rightarrow \\ D_I B_i^l &= \frac{1}{2} (-B_A^L C_{LI}^A - B^{LQ} C_{LQ}^A \gamma_{AI} + B_A^L C_{LI}^A + 2B_I^Q C_{LQ}^L) \sigma^I_i \Rightarrow \end{aligned}$$

$$D_I B_i^l = \left(B_I^M C_{LM}^L - \frac{1}{2} B^{LM} C_{LM}^A \gamma_{AI} \right) \sigma^I_i. \quad (I.15)$$

Οι όροι που μένει να υπολογίσουμε είναι οι $D_i E^i$, $D_i q^i$, $D_i J^i$, οι οποίοι θα έχουν την ίδια μορφή. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για τον όρο $D_I K_{ij}$ ώστε να καταλήξουμε γρήγορα στον όρο $D_I E_i$. Για την ακρίβεια μπορούμε να μαντέψουμε και από τη σχέση (I.13) ή την (I.15)

$$D_I K_i^l = (K_I^M C_{LM}^L - K_M^L C_{LI}^M) \sigma^I_i.$$

Η διαφορά μεταξύ του $D_I K_i^l$ ή αντίστοιχα του $D_I B_i^l$ με τον όρο $D_I E^l$ βρίσκεται στο δείκτη i . Συνεπώς μπορούμε να μαντέψουμε πως από το τελικό αποτέλεσμα θα λείπουν οι όροι που αθροίζεται αυτός ο δείκτης, διότι δεν θα μπορούσαν να υπάρχουν εξ' αρχής. Το αποτέλεσμα είναι

$$D_I E^l = E^M C_{LM}^L. \quad (I.16)$$

Φυσικά έχουμε επιβεβαιώσει με πράξεις πως αυτό ισχύει, θεωρούμε όμως πως αυτός είναι ένας απλός τρόπος να φτάσει κανείς στο σωστό αποτέλεσμα.

Αντικαθιστώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (2.39)-(2.49) και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως οι πίνακες σ^I_i έχουν αντίστροφο, καταλήγουμε στις εξισώσεις για χωροχρόνους με ομογενείς υπερ-επιφάνειες.

Μένει να σκιαγραφήσουμε την απόδειξη για το πώς καταλήγει κάποιος στην έκφραση για τον τανυστή Ricci των υπερ-επιφανειών. Σε μη συντεταγμένη βάση, αποδεικνύεται πως ο τανυστής Riemann έχει τη μορφή

$$R_{IPJ}^M = e_P (\Gamma_{JI}^M) - e_J (\Gamma_{PI}^M) + \Gamma_{PA}^M \Gamma_{JI}^A - \Gamma_{JA}^M \Gamma_{PI}^A - C_{PJ}^A \Gamma_{AI}^M, \quad (I.17)$$

όπου e_P τα ανύσματα της μη συντεταγμένης βάσης, C_{PJ}^A οι συντελεστές δομής τους (εν γένει μη σταθερές). Οι συντελεστές συνοχής Γ_{AI}^M δίνονται από τη σχέση

$$\Gamma_{JI}^M = \Gamma_{(c)JI}^M + \frac{1}{2} (C_{JI}^M + \gamma^{MA} \gamma_{JB} C_{AI}^B + \gamma^{MA} \gamma_{BI} C_{AJ}^B), \quad (I.18)$$

όπου $\Gamma_{(c)JI}^M$ τα σύμβολα Christoffel. Στην περίπτωση ομογενούς υπερ-επιφάνειας όλα τα αντικείμενα έχουν εξάρτηση μόνο από τη μεταβλητή t και οι συντελεστές δομής είναι σταθερές. Συνεπώς μηδενίζονται οι εξής όροι

$$\Gamma_{(c)JI}^M = 0, \quad e_P (\Gamma_{JI}^M) = 0, \quad e_J (\Gamma_{PI}^M) = 0. \quad (I.19)$$

Ο τανυστής Ricci δίνεται από τη σχέση

$$R_{IJ} = R_{IMJ}^M = \Gamma_{MA}^M \Gamma_{JI}^A - \Gamma_{JA}^M \Gamma_{MI}^A - C_{MJ}^A \Gamma_{AI}^M. \quad (I.20)$$

Μετά από αυτό το σημείο είναι απλή αντικατάσταση των συντελεστών συνοχής και χρήση των ταυτοτήτων που ικανοποιούν οι σταθερές δομής.

II Υπόθεση $E_i(t, x)$, $B_{ij}(t, x)$, $J_i(t, x)$

Στην περίπτωση όπου μια μετρική επιδέχεται ένα σύνολο από πεδία Killing, τότε αποδεικνύεται πως ισχύει

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(tot)} = 0, \quad (\text{II.1})$$

όπου $T_{\mu\nu}^{(tot)}$ ο ολικός τανυστής ενέργειας-ορμής. Όπως αναφέραμε σε παραπάνω ενότητα, ο ολικός τανυστής αποτελείται από ρευστά και ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Για να μπορέσουμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein στη βάση των ομογενών υπερ-επιφανειών, πρέπει να υποθέσουμε πως κάθε ανάγωγη ποσότητα του τανυστή ενέργειας-ορμής έχει την κατάλληλη μορφή. Έστω λοιπόν πως ισχύει $\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(fluids)} = 0$, τότε μένει να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη $\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(other)} = 0$, όπου $T_{\mu\nu}^{(em)} = \frac{1}{\mu_0} (F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2)$ και $F = F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho}$. Παρατηρούμε πως εν γένει, η συμμετρία δεν κληρονομείται στον τανυστή Faraday:

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(em)} = 0 \neq \mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{II.2})$$

ενώ το αντίθετο είναι πάντα αληθές (εφόσον η παράγωγος Lie ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz)

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(em)} = 0. \quad (\text{II.3})$$

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτό μπορούν να βρεθούν στο κεφάλαιο 11 του δεύτερου μέρους του βιβλίου (αναφορά Stephani et.al). Ας εκφράσουμε τον τανυστή Faraday στη συντεταγμένη βάση

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = F_{0i} dt \otimes dx^i + F_{i0} dx^i \otimes dt + F_{ij} dx^i \otimes dx^j \Rightarrow \\ \mathbf{F} &= F_{0i} dt \wedge dx^i + F_{ij} dx^i \wedge dx^j. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Εισάγουμε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{F} = -E_i(t, x) dt \wedge dx^i + B_{ij}(t, x) dx^i \wedge dx^j. \quad (\text{II.5})$$

όπου $B_{ij}(t, x) = -B_{ji}(t, x)$. Κάνοντας ένα μετασχηματισμό βάσης, $dx^i = \sigma_\alpha^i(x) \sigma^\alpha$ όπου σ^α η βάση των ένα-μορφών για τους ομογενείς χωροχρόνους, η (II.5) τώρα γράφεται ως ακολούθως:

$$\mathbf{F} = -E_i(t, x) \sigma_\alpha^i(x) dt \wedge \sigma^\alpha + B_{ij}(t, x) \sigma_\alpha^i(x) \sigma_\beta^j(x) \sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta. \quad (\text{II.6})$$

Όλες οι συμμετρίες του χωροχρόνου (π.χ. των ομογενών υπερ-επιφανειών) θα κληρονομηθούν στον τανυστή Faraday, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} E_i(t, x) \sigma_\alpha^i(x) &= E_\alpha(t) \Rightarrow \\ E_i(t, x) &= E_\alpha(t) \sigma_\alpha^i(x), \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} B_{ij}(t, x) \sigma_\alpha^i(x) \sigma_\beta^j(x) &= B_{\alpha\beta}(t) \Rightarrow \\ B_{ij}(t, x) &= B_{\alpha\beta}(t) \sigma_\alpha^i(x) \sigma_\beta^j(x), \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

όπου $\sigma_\alpha^i(x)$ ο αντίστροφος του σ_α^i . Επομένως, οι προηγούμενες εξισώσεις είναι υποθέσεις, εφόσον μπορεί να είχαμε εν γένει

$$E_i(t, x) \sigma_\alpha^i(x) = E_\alpha(t, x), \quad (\text{II.9})$$

$$B_{ij}(t, x) \sigma_\alpha^i(x) \sigma_\beta^j(x) = B_{\alpha\beta}(t, x), \quad (\text{II.10})$$

όπου κάποιες από τις συμμετρίες θα είχαν κληρονομηθεί λόγω της $\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(em)} = 0$, αλλά ενδεχομένως όχι όλες. Με το ίδιο σκεπτικό οδηγούμαστε και στην ίδια υπόθεση για το $J_i(t, x)$. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε πως αν οι (II.7), (II.8), δεν ίσχυαν, τότε οι εξισώσεις (3.27)-(3.31) δε θα μπορούσαν να γραφούν σε αυτή τη μορφή.

III Minisuperspace για 2D Κλάσεις “Bianchi”

Στο πλαίσιο του κανονικού φορμαλισμού [232] το στοιχείο μήκους για μια $(2+1)$ -διάστατη πολλαπλότητα M , σε συντεταγμένες (v, y^i) , $i = 1, 2$, έχει τη μορφή

$$ds_{(2+1)}^2 = (n^2 + N_i N^i) dv^2 + 2 N_i dy^i dv + \gamma_{ij} dy^i dy^j, \quad (\text{III.1})$$

όπου $n(v, y^l)$, $N_i(v, y^l)$ είναι το Lapse και το Shift αντίστοιχα, όπως τα ορίσαμε στο πρώτο μέρος. Επίσης $\gamma_{ij}(v, y^l)$ η μετρική των διδιάστατων υπερ-επιφανειών $v = \text{constant}$.

Εφόσον μας ενδιαφέρει μια πολλαπλότητα M η οποία επιδέχεται μια ομάδα ισομετρίας G 2-διαστάσεων, η οποία δρα απλά μεταβατικά στις υπερ-επιφάνειες $v = \text{constant}$, γνωρίζουμε πως υπάρχει βάση από ένα-μορφές $\{\sigma^\alpha\}$ οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις στροβιλισμού [253]

$$d\sigma^\alpha = -\frac{1}{2} C_{\beta\epsilon}^\alpha \sigma^\beta \wedge \sigma^\epsilon \Leftrightarrow \partial_i \sigma_j^\alpha - \partial_j \sigma_i^\alpha = -C_{\beta\epsilon}^\alpha \sigma_i^\beta \sigma_j^\epsilon,$$

όπου οι Ελληνικοί δείκτες λαμβάνουν τιμές 1 έως 2 και $C_{\beta\epsilon}^\alpha$ οι σταθερές δομής της ομάδας ισομετρίας. Υπάρχει λοιπόν σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η μετρική αποκτά τη μορφή

$$ds_{(2+1)}^2 = [n(t)^2 + N_\alpha(t) N^\alpha(t)] dt^2 + 2 N_\alpha(t) \sigma_i^\alpha(x^l) dx^i dt + \gamma_{\alpha\beta}(t) \sigma_i^\alpha(x^l) \sigma_j^\beta(x^l) dx^i dx^j.$$

Όπως έχουμε αποδείξει στο πρώτο μέρος, μπορούμε πάντα να μετασχηματίσουμε τη μετρική στη μορφή

$$ds_{(2+1)}^2 = n(t)^2 dt^2 + \gamma_{\alpha\beta}(t) \sigma_i^\alpha(x^l) \sigma_j^\beta(x^l) dx^i dx^j. \quad (\text{III.2})$$

III.1 Κλάση “Bianchi” I

Επιλέγουμε να αναπαραστήσουμε τις συντεταγμένες x^i της (III.2) ως (z, τ) . Οι συνιστώσες των ένα-μορφών για την Αβελιανή περίπτωση είναι

$$\sigma^{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε πως οι $\gamma_{\alpha\beta}$ είναι

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix},$$

τότε η μετρική του τρισδιάστατου χώρου στις συντεταγμένες (z, t, τ) θα έχει τη μορφή

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & b(t) \\ 0 & n(t)^2 & 0 \\ b(t) & 0 & c(t) \end{pmatrix}.$$

Αυτή η μορφή μοιάζει με εκείνη που κάποιος θα ξεκινούσε ώστε να αναπαράξει την μελανή οπή BTZ [207]. Όπως αναφέραμε στην παράγραφο με τη minisuperspace λαγκρανζιανή, υποθέτουμε πως ένα από τα πεδία Killing, συγκεκριμένα το $\xi_1 = (1, 0, 0)$, είναι φωτοειδές και συναλλοίωτα σταθερό, το οποίο οδηγεί στην έκφραση

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{\omega} \\ 0 & n(t)^2 & 0 \\ \tilde{\omega} & 0 & c(t) \end{pmatrix},$$

όπου $\tilde{\omega}$ κάποια σταθερά, ενώ το ηλεκτροδυναμικό δυναμικό αποκτά τη μορφή

$$\tilde{A}_\mu = (0, 0, A(t)).$$

III.2 Κλάση “Bianchi” II

Όπως και πριν, το άνυσμα που απαιτούμε να είναι φωτοειδές και συναλλοίωτα σταθερό είναι το $\xi_1 = (1, 0, 0)$. Οι συνιστώσες των 1-μορφών για την μη-Αβελιανή περίπτωση είναι

$$\sigma^\alpha_i = \begin{pmatrix} e^{\tilde{m}\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{m} \neq 0.$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την προηγούμενη περίπτωση, καταλήγουμε στα εξής

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\tilde{m}\tau}\tilde{\omega} \\ 0 & n(t)^2 & 0 \\ e^{\tilde{m}\tau}\tilde{\omega} & 0 & c(t) \end{pmatrix}, \tilde{A}_\mu = (0, 0, A(t)).$$

IV Ορθογωνιότητα των κυματοσυναρτήσεων

IV.1 Μη-δυναμικό $n(t)$, ιδιοκατάσταση ψ_3

Ας ανακαλέσουμε την ιδιοκατάσταση

$$\psi_3(t, \sigma, \theta) = e^{-iE_3 \int n(t)dt} e^{ip_3\theta} \left[q_1 J_{ip_3}(-i\sqrt{2E_3}\sigma) + q_2 Y_{ip_3}(-i\sqrt{2E_3}\sigma) \right],$$

όπου $\sigma \in (0, +\infty)$, $\theta \in (-1, 1)$. Η διαφορική εξίσωση

$$\sigma \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{dF}{d\sigma} \right) - (a^2\sigma^2 - k^2)F = 0,$$

έχει τη γενική λύση

$$F = C_1 J_{ik}(ia\sigma) + C_2 Y_{ik}(ia\sigma),$$

με $a \in \mathbb{R}$ να είναι η ιδιοτιμή της εξίσωσης. Ας επιλέξουμε μια λύση από εκείνες που ανήκουν στην F , την οποία καλούμε $f_{k,a}$. Φυσικά, ικανοποιεί την ίδια εξίσωση

$$\sigma \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{df_{k,a}}{d\sigma} \right) - (a^2\sigma^2 - k^2)f_{k,a} = 0. \quad (\text{IV.1})$$

Δεδομένου πως $\sigma, k \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συζυγή μιγαδική αυτής της εξίσωσης, θεωρώντας διαφορετική ιδιοτιμή την οποία καλούμε $b \in \mathbb{R}$ και έχουμε

$$\sigma \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{d\overline{f_{k,b}}}{d\sigma} \right) - (b^2\sigma^2 - k^2)\overline{f_{k,b}} = 0. \quad (\text{IV.2})$$

Πολλαπλασιασμός της (IV.1) με $\overline{f_{k,b}}$, της (IV.2) με $f_{k,a}$ και αφαίρεση κατά μέλη των δύο οδηγεί στις εξής σχέσεις

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\sigma \left(\overline{f_{k,b}} \frac{d}{d\sigma} f_{k,a} - f_{k,a} \frac{d}{d\sigma} \overline{f_{k,b}} \right) \right] - (a^2 - b^2) \sigma \overline{f_{k,b}} f_{k,a} = 0.$$

Ολοκληρώνοντας στο πεδίο ορισμού της σ καταλήγουμε στη

$$(a^2 - b^2) \int_0^{+\infty} \sigma \overline{f_{k,b}} f_{k,a} d\sigma = \left[\sigma \left(\overline{f_{k,b}} \frac{d}{d\sigma} f_{k,a} - f_{k,a} \frac{d}{d\sigma} \overline{f_{k,b}} \right) \right]_0^{+\infty}. \quad (\text{IV.3})$$

Από το δεξιό μέλος παρατηρούμε πως για ορθογωνιότητα, όταν το $a \neq \pm b$, χρειαζόμαστε μια συνάρτηση, η οποία και αυτή και η παράγωγος της είναι πεπερασμένες στο $\sigma \rightarrow 0$, και τείνουν στο μηδέν πιο γρήγορα όταν το σ τείνει στο άπειρο.

Αν θεωρήσουμε $a, b > 0$, τέτοια συνάρτηση είναι η Hankel δευτέρου είδους η οποία ορίζεται ως

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z),$$

όπου ν, z έχουν επιλεγεί έτσι ώστε

$$H_{ik}^{(2)}(-ia\sigma) = J_{ik}(-ia\sigma) - iY_{ik}(-ia\sigma).$$

Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους δίνονται από τη σειρά

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)},$$

ενώ για εκείνες του δευτέρου είδους ισχύει

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Αυτό σημαίνει πως στο όριο $\sigma \rightarrow 0$ η συνάρτηση $H_{ik}^{(2)}(-ia\sigma)$ ταλαντώνεται αλλά με πεπερασμένο πλάτος. Επίσης ισχύει πως

$$\frac{d}{dz}C_\nu(z) = \frac{\nu}{z}C_\nu(z) - C_{\nu+1}(z), \quad \nu, z \in \mathbb{C}, \quad (\text{IV.4})$$

όπου $C_\nu(z)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ ή κάποιος συνδυασμός τους. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\sigma \left(\overline{f_{k,b}} \frac{d}{d\sigma} f_{k,a} - f_{k,a} \frac{d}{d\sigma} \overline{f_{k,b}} \right) \right] = 0,$$

με $f_{k,a} = H_{ik}^{(2)}(-ia\sigma)$. Παρατηρούμε επίσης πως $\overline{f_{k,b}} = \overline{H_{ik}^{(2)}(-ib\sigma)} = H_{-ik}^{(1)}(ib\sigma)$, όπου $H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους. Σύμφωνα με την (IV.4) προκύπτει

$$\frac{d}{d\sigma} f_{k,a} = \frac{d}{d\sigma} H_{ik}^{(2)}(-ia\sigma) = ia \left(H_{1+ik}^{(2)}(-ia\sigma) + \frac{k}{a\sigma} H_{ik}^{(2)}(-ia\sigma) \right), \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{d}{d\sigma} \overline{f_{k,b}} = \frac{d}{d\sigma} H_{-ik}^{(1)}(ib\sigma) = -ib \left(H_{1-ik}^{(1)}(ib\sigma) + \frac{k}{b\sigma} H_{-ik}^{(1)}(ib\sigma) \right). \quad (\text{IV.6})$$

Με σκοπό να υπολογίσουμε το όριο του δεξιού μέλους της (IV.3) στο άπειρο χρειαζόμαστε μόνο τους κυρίαρχους όρους $\sigma \rightarrow +\infty$. Για τις δύο συναρτήσεις Hankel που εμπλέκονται, αυτοί είναι (εφόσον έχουμε υποθέσει πως ισχύει $a, b > 0$):

$$H_{ik}^{(2)}(-ia\sigma) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi a\sigma}} e^{-\frac{\pi k}{2} - a\sigma}, \quad H_{-ik}^{(1)}(ib\sigma) = \frac{(1-i)}{\sqrt{i\pi b\sigma}} e^{-\frac{\pi k}{2} - b\sigma}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία και τη (IV.5) καταλήγουμε στις

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left[\sigma \left(\overline{f_{k,b}} \frac{d}{d\sigma} f_{k,a} - f_{k,a} \frac{d}{d\sigma} \overline{f_{k,b}} \right) \right] = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left[e^{-\sigma(a+b)} \left(-\frac{2(a-b)}{\pi\sqrt{ab}} e^{-\pi k} + \mathcal{O}(\sigma^{-1}) \right) \right] = 0.$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την (IV.3) στη μορφή

$$(a^2 - b^2) \int_0^{+\infty} \sigma \overline{f_{k,b}} f_{k,a} d\sigma = -\frac{2(a-b)}{\pi\sqrt{ab}} e^{-\pi k} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left(e^{-\sigma(a+b)} \right) = 0, \quad a \neq b.$$

Ως αποτέλεσμα, για $a \neq b$ η $f_{k,a} = H_{ik}^{(2)}(-ia\sigma)$ είναι ορθογώνια (με βάρος σ) με τη συζυγή της να έχει μια διαφορετική ιδιοτιμή.

IV.2 Δυναμικό $n(t)$, ιδιοκατάσταση ψ_3

Η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση είναι

$$\psi_3 = e^{ip_3\theta} (q_1 e^{ip_3\sigma} + q_2 e^{-ip_3\sigma}).$$

Ας επιλέξουμε $q_2 = -q_1$ έτσι ώστε

$$\psi_3 = 2q_1 i e^{ip_3\theta} \sin(p_3\sigma).$$

Παρατηρούμε πως είναι σημαντικό να πάρουμε τη συνάρτηση ημιτόνου, αφού αντίστοιχη ανάλυση δεν ισχύει για τη συνάρτηση του συνημιτόνου.

Για να κανονικοποιήσουμε τη πιθανότητα χρειαζόμαστε

$$\begin{aligned} P &= \int \mu \psi_3(p'_3)^* \psi_3(p_3) d\theta d\sigma = 4q_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p'_3 - p_3)\theta} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sigma} \sin(p'_3\sigma) \sin(p_3\sigma) d\sigma \\ &= 8\pi q_1^2 \delta(p'_3 - p_3) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sigma} \sin^2(p_3\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

όπου λόγω της συνάρτησης δέλτα πρέπει να επιλέξουμε $p'_3 = p_3$ στο παραμένον ολοκλήρωμα. Ας μελετήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sigma} \sin^2(p_3\sigma) d\sigma = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L e^{2\sigma} \sin^2(p_3\sigma) d\sigma \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{2L}}{4(1+p_3^2)} (p_3^2 - p_3 \sin(2p_3L) - \cos(2p_3L) + 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-2L}}{4(1+p_3^2)} (p_3^2 + p_3 \sin(2p_3L) - \cos(2p_3L) + 1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Μπορούμε τώρα να συσχετίσουμε την p_3 με το όριο και θεωρούμε πως είναι συνάρτηση $p_3(L)$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$p_3^2 - p_3 \sin(2p_3L) - \cos(2p_3L) + 1 = 4(1+p_3^2)e^{-2L}, \quad (\text{IV.8})$$

να ικανοποιείται. Παρατηρούμε πως η δύναμη στο εκθετικό του δεξιού μέλους πρέπει να είναι ακριβώς $-2L$ έτσι ώστε στο όριο το οποίο εμφανίζεται στην (IV.7) δε θα είναι ούτε μηδέν, ούτε θα αποκλίνει. Μια πολλαπλασιαστική σταθερά μπορούμε να υποθέσουμε πως υπάρχει στο δεξιό μέλος, εφόσον όμως απορροφηθεί από την κανονικοποίηση, δεν έχει νόημα η χρήση της.

Λήμμα: Υπάρχει θετικός αριθμός $L = L_0$, έτσι ώστε η αλγεβρική εξίσωση (IV.8) έχει τουλάχιστον δύο λύσεις ως προς p_3 .

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(p_3) = p_3^2 - p_3 \sin(2p_3L) - \cos(2p_3L) + 1 - 4(1+p_3^2)e^{-2L}.$$

Αρχικά παρατηρούμε πως $f(0) = -4e^{-2L} < 0$. Παρατηρούμε πως για $p_3 \geq 0$ μπορούμε να γράψουμε (θεωρώντας το ημίτονο και το συνημίτονο υπολογισμένα στις ελάχιστες τιμές τους)

$$f(p_3) > (1 - 4e^{-2L}) p_3^2 - p_3 - 4e^{-2L}. \quad (\text{IV.9})$$

Υποθέτουμε πως το $L = L_0$ είναι τέτοιο ώστε $e^{2L_0} > 4$ τότε η εξίσωση $(1 - 4e^{-2L}) p_3^2 - p_3 - 4e^{-2L} = 0$ έχει μια θετική ρίζα, έστω $p_3^{(+)} > 0$. Όταν $p_3 > p_3^{(+)}$ η έκφραση στο δεξιό μέλος της ανισότητας (IV.9) και αντίστοιχα η $f(p_3)$ είναι θετική. Ως αποτέλεσμα έχουμε αποδείξει πως για $L = L_0$ έχουμε αλλαγή προσήμου για την $f(p_3)$ καθώς η p_3 παίρνει τιμές από μηδέν έως $p_3^{(+)}$. Επομένως, δεδομένης της συνέχειας της $f(p_3)$, μια πραγματική λύση $p_3 = p_3^{(0)}$ της $f(p_3) = 0$ υπάρχει σε αυτή την περιοχή.

Εφόσον $f(p_3) = f(-p_3)$, αν $p_3 = p_3^{(0)}$ είναι μια λύση, τότε η $p_3 = -p_3^{(0)}$ είναι επίσης λύση. Επιπλέον, μπορούμε να δούμε από τη μορφή της $p_3^{(+)} = \frac{1+\sqrt{1+16e^{-2L_0}-64e^{-4L_0}}}{2(1-4e^{-2L_0})}$, πως το $p_3^{(+)}$ τείνει στο μηδέν όταν το L_0 γίνεται ολόένα και μεγαλύτερο. Επομένως οι δύο ρίζες $p_3 = \pm p_3^{(0)}$ οι οποίες βρίσκονται στην περιοχή $(-p_3^{(+)}, p_3^{(+)})$ τείνουν να “συναντηθούν” στο μηδέν καθώς $L \rightarrow \infty$.

Το τελευταίο σημαίνει ως $\lim_{L \rightarrow \infty} p_3^{(0)}(L) = 0$, όπου $p_3^{(0)}(L)$ ικανοποιεί την εξίσωση (IV.8). Τότε, αυτό συνεπάγεται πως $I = 1$ και

$$P = 8\pi q_1^2 \delta(p'_3 - p_3),$$

έτσι ώστε η σταθερά κανονικοποίησης πρέπει να είναι $q_1 = \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}}$ και η κυματοσυνάρτηση γίνεται

$$\psi_3 = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} e^{ip_3\theta} \sin(p_3\sigma),$$

με τις τιμές του p_3 να συγκεντρώνονται “ισχυρά” γύρω από το μηδέν για ένα χώρο με σύνορο στο άπειρο.

V Εξισώσεις Einstein υπό την υπόθεση $\gamma_{\mu\nu} = a(t)^2 m_{\mu\nu}$

Ας ξεκινήσουμε από τον τανυστή και το βαθμωτό Ricci. Ο τανυστής Ricci εξαρτάται από τις σταθερές δομής της εκάστοτε άλγεβρας, τη χωρική μετρική και την αντίστροφή της, όπως μπορούμε να δούμε από τη σχέση (3.24). Η εξάρτηση από τη μετρική και την αντίστροφή της εμφανίζεται πάντα σε ζεύγη, εννοώντας $\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\sigma\lambda}$, το οποίο σημαίνει πως ο παράγοντας κλίμακας $a(t)^2$ απλοποιείται, οδηγώντας στη σχέση $R_{\mu\nu}(t) = \tilde{R}_{\mu\nu}$. Επομένως, όσον αφορά το βαθμωτό Ricci, μπορούμε να συνάγουμε το εξής: $R(t) = \gamma^{\mu\nu}(t)R_{\mu\nu}(t) = \frac{1}{a(t)^2}m^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} \Rightarrow R(t) = \frac{1}{a(t)^2}\tilde{R}$. Τώρα ας συνεχίσουμε με τον τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας ο οποίος υπολογίζεται πως είναι $K_{\mu\nu}(t) = -a(t)\dot{a}(t)m_{\mu\nu}$, ενώ το αντίστοιχο βαθμωτό $K(t) = -3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = -3H$. Με τη χρήση αυτών των εκφράσεων στις εξισώσεις (4.37), (4.38), (4.39) το αποτέλεσμα είναι

$$(4.37) \rightarrow H^2 = \kappa \frac{\rho^{(tot)}}{3} - \frac{\tilde{R}}{6} \frac{1}{a^2}, \quad (V.1)$$

$$(4.38) \rightarrow q_\mu^{(tot)} = 0, \quad (V.2)$$

$$(4.39) \rightarrow \frac{\ddot{a}}{a}m_{\mu\nu} = -2H^2m_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \left(\rho^{(tot)} - P^{(tot)} \right) m_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{a^2} \pi_{\mu\nu}^{(tot)} - \frac{1}{a^2} \tilde{R}m_{\mu\nu}. \quad (V.3)$$

Με αντικατάσταση του H^2 στη (V.3) από την (V.1) καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\frac{\ddot{a}}{a}m_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{6} \left(\rho^{(tot)} + 3P^{(tot)} \right) m_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{a^2} \pi_{\mu\nu}^{(tot)} - \frac{1}{a^2} \left(\tilde{R}m_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\tilde{R}m_{\mu\nu} \right). \quad (V.4)$$

Το ίχνος της (V.4) μας παρέχει τη μοναδική δυναμική εξίσωση

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} \left(\rho^{(tot)} + 3P^{(tot)} \right) \text{ or } \dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{6} \left(\rho^{(tot)} + 3P^{(tot)} \right), \quad (V.5)$$

με τη χρήση της οποίας η (V.4) αναγκάζει τον αἶχνο τανυστή ανισοτροπικής πίεσης να είναι

$$\pi_{\mu\nu}^{(tot)} = \frac{1}{\kappa} \left(\tilde{R}m_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\tilde{R}m_{\mu\nu} \right). \quad (V.6)$$

VI Απόδειξη των σχέσεων $\partial_i\phi(t, x) = \phi_\alpha\sigma_i^\alpha(x)$, $\phi_\alpha C_{\beta\lambda}^\alpha = 0$

Σε αυτή την ενότητα, οι Ελληνικοί δείκτες $\mu, \nu, \dots$ λαμβάνουν τιμές από 0 έως 3, οι κεφαλαίοι Λατινικοί, $I, J, \dots$ από 1 έως 3 και τέλος οι πεζοί Λατινικοί $i, j, \dots$ από 1 έως 3. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ και το

ίχνος του $T^{(\phi)}$ για κάποιο ελεύθερο βαθμωτό πεδίο έχει τη μορφή

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = M \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \right), \quad T^{(\phi)} = -M \frac{d-1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi, \quad (\text{VI.1})$$

όπου d η διάσταση της υπερ-επιφάνειας.

Αν ο χωρόχρονος επιδέχεται μια συμμετρία Killing, τότε ισχύει

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(tot)} = 0, \quad (\text{VI.2})$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Einstein από το δεύτερο στο τρίτο βήμα και $T_{\mu\nu}^{(tot)}$ είναι ο ολικός ταυνοστής ενέργειας-ορμής. Στην περίπτωση που μελετάμε, αυτός αναλύεται στον ταυνοστή ενέργειας-ορμής ενός συνόλου ιδανικών ρευστών $T_{\mu\nu}^{(pf)}$ και τον $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$. Η εξίσωση $\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(pf)} = 0$ ικανοποιείται ταυτοτικά για τις ομάδες συμμετρίας των προτύπων Bianchi, επομένως μένει να ικανοποιηθεί και η

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{(\phi)} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi (\partial_\mu \phi) \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \mathcal{L}_\xi (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \partial^\sigma \phi \mathcal{L}_\xi (\partial_\sigma \phi) = 0. \quad (\text{VI.3})$$

Υπολογίζουμε το ίχνος της (VI.3) και για $d \neq 1$ βρίσκουμε

$$\partial^\sigma \phi \mathcal{L}_\xi (\partial_\sigma \phi) = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Με χρήση της (VI.4) στη (VI.3) προκύπτει

$$\mathcal{L}_\xi (\partial_\mu \phi) \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \mathcal{L}_\xi (\partial_\nu \phi) = 0. \quad (\text{VI.5})$$

Υπολογίζουμε τη συστολή της (VI.5) με το άνυσμα $\partial^\sigma \phi$

$$\partial^\mu \phi \mathcal{L}_\xi (\partial_\mu \phi) \partial_\nu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \mathcal{L}_\xi (\partial_\nu \phi) = 0 \xrightarrow{(\text{VI.4})} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \mathcal{L}_\xi (\partial_\nu \phi) = 0 \Rightarrow$$

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = 0 \quad \text{or} \quad \mathcal{L}_\xi (\partial_\nu \phi) = 0. \quad (\text{VI.6})$$

Όπως παρατηρούμε υπάρχουν δύο πιθανά ενδεχόμενα. Στην περίπτωση μας, $\partial_t \phi = 0$ επομένως ισχύει $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = \partial^i \phi \partial_i \phi$, ενώ η απαίτηση, η χωρική μετρική να είναι θετικά ορισμένη οδηγεί στο συμπέρασμα πως $\partial^i \phi \partial_i \phi \neq 0$ για πραγματικό βαθμωτό πεδίο και μη-τετριμμένες περιπτώσεις $\phi = \text{σταθερό}$ (Εφόσον η μετρική είναι θετικά ορισμένη, μπορεί κάποιος να θεωρήσει μια αντιστρέψιμη, πραγματική, μη-συντεταγμένη βάση $\hat{e}_I$ στην οποία η μετρική γίνεται εκείνη του Ευκλείδειου χώρου και η παραπάνω συνθήκη λαμβάνει τη μορφή $(\hat{e}_1[\phi])^2 + (\hat{e}_2[\phi])^2 + (\hat{e}_3[\phi])^2 = 0$). Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα, πως πρέπει να ικανοποιείται ο δεύτερος κλάδος

$$\mathcal{L}_\xi (\partial_\nu \phi) = 0. \quad (\text{VI.7})$$

Αυτή η εξίσωση χωρίζεται σε χρονική και χωρικές συνιστώσες. Θεωρούμε επίσης τα ανύσματα Killing των προτύπων Bianchi, έτσι έχουμε

$$\nu = t, \quad \mathcal{L}_{\xi_I} (\partial_t \phi) = 0 \Rightarrow \xi_I^i \partial_i (\partial_t \phi) = 0 \Rightarrow \partial_t (\partial_i \phi) = 0, \quad (\text{VI.8})$$

$$\nu = j, \quad \mathcal{L}_{\xi_I} (\partial_j \phi) = 0 \Rightarrow \partial_j \phi(t, x) = \phi_J(t) \sigma_j^J, \quad (\text{VI.9})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ύπαρξη του αντιστρόφου του ξ_I^i και το γεγονός πως το βαθμωτό πεδίο έχει “καλή” συμπεριφορά στο πεδίο ορισμού που μας ενδιαφέρει ϕ , $\partial_i \partial_t \phi = \partial_t \partial_i \phi$. Με χρήση της (VI.9) στην (VI.8) το αποτέλεσμα είναι $\phi_J(t) = \phi_J$ εφόσον υπάρχει ο αντίστροφος των σ_j^J .

Το τελευταίο βήμα είναι να υπολογίσουμε τη χωρική παράγωγο της (VI.9)

$$\partial_i \partial_j \phi = \phi_J \partial_i \sigma_j^J \quad (\text{VI.10})$$

εναλλάσσοντας τους δείκτες l, j , αφαιρώντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\partial_l \partial_j \phi = \partial_j \partial_l \phi$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\phi_J (\partial_l \sigma_j^J - \partial_j \sigma_l^J) = 0 \xrightarrow{(3.13)} -\phi_J C_{IL}^J \sigma_l^I \sigma_j^L = 0, \quad (\text{VI.11})$$

από την οποία βρίσκουμε

$$\phi_J C_{IL}^J = 0, \quad (\text{VI.12})$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

Βιβλιογραφία

- [1] Kurt Sundermeyer. *Symmetries in fundamental physics*, volume 176. Springer, Cham, Switzerland, 2014.
- [2] S. Lie. Berguendung einer Invariantentheorie der Beruehrungstransformationen. *Math. Ann.*, 8:215–288, 1874.
- [3] S. Lie. Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichungen. *Arch. for Math.*, 6:328–268, 1881.
- [4] S. Lie. Classification und Integration von gewöhnlichen differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. *Mathematische Annalen*, 32:213–281, 1888.
- [5] Sophus Lie. *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*. Teubner, 1891.
- [6] S. Lie. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. *Berichte, Leipz.*, 47:53–128, 1895.
- [7] S. Lie. Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Korollar der Theorie der Differentialinvarianten. *Berichte, Leipz.*, 49:342–357, 1897.
- [8] L. V. Ovsiannikov. Groups and invariant-group solutions of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 118:439–442, 1958.
- [9] L. V. Ovsiannikov. Group properties of the nonlinear heat conduction equation. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 125:492–495, 1959.
- [10] L. V. Ovsiannikov. *Group Properties of Differential Equations*. Novosibirsk, 1962.
- [11] L. V. Ovsiannikov. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press, 1982.
- [12] G. W. Bluman and J. D. Cole. The general similarity solutions of the heat equation. *J. Math. Mech.*, 18:1025–1042, 1969.
- [13] G. W. Bluman. Similarity solutions of the one-dimensional Fokker-Planck equation. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 6:143–153, 1971.
- [14] G. W. Bluman. Applications of the general similarity solution of the heat equation to boundary value problems. *Quart. Appl. Math.*, 31:403–415, 1974a.
- [15] G. W. Bluman. Use of group methods for relating linear and nonlinear partial differential equations. *Proceedings of Symposium on Symmetry, Similarity and Group Theoretic Methods in Mechanics*, pages 203–218, 1974b.
- [16] S. Kumei and G. W. Bluman. When nonlinear differential equations are equivalent to linear differential equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 42:1157–1173, 1982.

- [17] F. Schwarz. Symmetries of the two dimensional Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan*, 51:2387–2388, 1982.
- [18] J. Doyle and M. J. Englefield. Similarity Solutions of a Generalized Burgers Equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 44(2):145–153, 1990.
- [19] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918:235–257, 1918.
- [20] Michael Tsamparlis and Andronikos Paliathanasis. Lie and Noether symmetries of geodesic equations and collineations. *Gen. Rel. Grav.*, 42:2957–2980, 2010.
- [21] Andronikos Paliathanasis. Dust fluid component from Lie symmetries in Scalar field Cosmology. *Mod. Phys. Lett.*, A32(37):1750206, 2017.
- [22] Andronikos Paliathanasis, Michael Tsamparlis, and Spyros Basilakos. Constraints and analytical solutions of $f(R)$ theories of gravity using Noether symmetries. *Phys. Rev.*, D84:123514, 2011.
- [23] T. Christodoulakis and Petros A. Terzis. The General solution of Bianchi type III vacuum cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 24:875–887, 2007.
- [24] Petros A. Terzis and T. Christodoulakis. The General Solution of Bianchi Type VII(h) Vacuum Cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, 41:469–495, 2009.
- [25] Petros A. Terzis and T. Christodoulakis. Lie algebra automorphisms as Lie point symmetries and the solution space for Bianchi Type I, II, IV, V vacuum geometries. *Class. Quant. Grav.*, 29:235007, 2012.
- [26] T. Christodoulakis, N. Dimakis, and Petros A. Terzis. Lie point and variational symmetries in minisuperspace Einstein gravity. *J. Phys.*, A47:095202, 2014.
- [27] A. V. Backlund. Einiges ueber curven und flachen Transformationen. *Afdelningen for Mathematik och Naturetenskap*, II:1–2, 1873.
- [28] A. V. Backlund. Ueber Flachentransformationen. *Math. Ann.*, IX:297–320, 1876.
- [29] A. V. Backlund. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.*, XVII:285–328, 1880.
- [30] A. V. Backlund. Zur Theorie der flachentransformationen. *Math. Ann.*, XIX:387–422, 1882.
- [31] S. Lie and F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen ii. *Teubner Leipzig*, 1890.
- [32] N. Dimakis, Petros A. Terzis, and T. Christodoulakis. Contact symmetries of constrained systems and the associated integrals of motion. *J. Phys. Conf. Ser.*, 633(1):012040, 2015.
- [33] Robert Geroch. A method for generating solutions of Einstein’s equations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(6):918–924, 1971.
- [34] Robert Geroch. A method for generating new solutions of Einstein’s equation. ii. *Journal of Mathematical Physics*, 13(3):394–404, 1972.
- [35] R. L. Anderson and N. H. Ibragimov. *Lie-Backlund transformations in applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.
- [36] N. H. Ibragimov. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1985.

- [37] P. J. Olver. Evolution equations possessing infinitely many symmetries. *J. Math. Phys.*, 18:1212–1215, 1977.
- [38] SHIGERU MAEDA. The Similarity Method for Difference Equations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 38(2):129–134, 05 1987.
- [39] D. Levi and P. Winternitz. Continuous symmetries of discrete equations. *Physics Letters A*, 152(7):335 – 338, 1991.
- [40] G. R. W. Quispel, H. W. Capel, and R. Sahadevan. Continuous symmetries of differential-difference equations: the Kac-Van Moerbeke equation and Painlevé reduction. *Physics Letters A*, 170(5):379 – 383, 1992.
- [41] Hans Stephani. *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries*. Cambridge University Press, 1990.
- [42] G.W. Bluman and S. Kumei. *Symmetries and Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013.
- [43] L. Bianchi. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui nite di trasformazioni. *Enrico Spoerri*, 550, 1918.
- [44] J. Dozias. Sur les algebres de Lie resolubles reelles de dimension inferieure ou egale a 5. *These de 3e Cycle*, Falculte des Sciences de Paris, 1963.
- [45] G. M. Mubarakzjanov. On solvable Lie algebras (in Russian). *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat*, 32:114–123, 1963.
- [46] G. M. Mubarakzjanov. Classification of real structures of Lie algebras of the 5 th order (in Russian). *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 34:99–106, 1963.
- [47] G. M. Mubarakzjanov. Classification of solvable Lie algebras of the 6 th order with a non-nilpotent basis elements (in Russian). *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 35:104–116, 1963.
- [48] J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus. Invariants of Real Low Dimension Lie Algebras. *J. Math. Phys.*, 17:986–994, 1976.
- [49] J. Patera and P. Winternitz. Subalgebras of real three and four dimensional lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 18(7):1449–1455, 1977.
- [50] J. Patera and P. Winternitz. Solvable Lie algebras of dimension lower or equal than 4 over perfect fields. *Linear Algebra and its Applications*, 142:1 – 17, 1990.
- [51] G. Darmois. Les equations de la gravitation einsteinienne. *Memorial des Sciences Mathematiques*, Paris 1927.
- [52] A. Lichnerowicz. Sur certains problemes globaux relatifs au systeme des equations d’Einstein. *Hermann*, Paris 1939.
- [53] A. Lichnerowicz. L’integration des equations de la gravitation relativiste et le probleme des n corps. *J. Math. Pures Appl.* 23, Paris 1944.
- [54] A. Lichnerowicz. Sur les equations relativistes de la gravitation. *Bulletin de la S.M.F.* 80, 237, 1952.
- [55] Yvonne Choquet-Bruhat. Theoreme d’existence pour certains systemes d’equations aux derivees partielles non lineaires. *Acta Mathematica* 88, 141, 1952.

- [56] Yvonne Choquet-Bruhat. Sur l'integration des equations de la relativite generale. *J. Ration. Mech. Anal.* 5, 1956.
- [57] Paul A.M. Dirac. The theory of gravitation in hamiltonian form. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, A246:333–343, 1958.
- [58] P. A. M. Dirac. Fixation of coordinates in the hamiltonian theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 114:924–930, May 1959.
- [59] Julian Schwinger. Quantized gravitational field. *Phys. Rev.*, 130:1253–1258, May 1963.
- [60] Julian Schwinger. Quantized gravitational field. ii. *Phys. Rev.*, 132:1317–1321, Nov 1963.
- [61] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Phys. Rev.*, 116:1322–1330, Dec 1959.
- [62] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Canonical variables for general relativity. *Phys. Rev.*, 117:1595–1602, Mar 1960.
- [63] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Consistency of the canonical reduction of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 1(5):434–439, 1960.
- [64] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Gravitational-electromagnetic coupling and the classical self-energy problem. *Phys. Rev.*, 120:313–320, Oct 1960.
- [65] J.A. Wheeler. Geometrodynamics and the issue of final state. In *Relativité, Groupes et Topologie: Proceedings, Ecole d'été de Physique Théorique, Session XIII, Les Houches, France, Jul 1 - Aug 24, 1963*, pages 317–522, 1964.
- [66] Jr. York, James W. Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity. *J. Math. Phys.*, 14:456–464, 1973.
- [67] Jr. York, J. W. Kinematics and dynamics of general relativity. In L. L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pages 83–126, January 1979.
- [68] O. Heckmann and E. Schucking. Newtonsche und Einsteinsche Kosmologie *Zeits. f. Astroph.*, 38:95, 1955.
- [69] Raychaudhuri. Relativistic and Newtonian cosmology *Zeits. f. Astroph.*, 43:161, 1957.
- [70] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [71] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.
- [72] Naresh Dadhich. Derivation of the Raychaudhuri equation. 2005, eprint = gr-qc/0511123 archivePrefix = arXiv, primaryClass = gr-qc, SLACcitation = "
- [73] Sayan Kar and Soumitra SenGupta. The Raychaudhuri equations: A brief review. *Pramana*, 69:49, 2007.
- [74] George F. R. Ellis and Henk van Elst. Cosmological models: Cargese lectures 1998. *NATO Sci. Ser. C*, 541:1–116, 1999.
- [75] Christos G. Tsagas, Anthony Challinor, and Roy Maartens. Relativistic cosmology and large-scale structure. *Phys. Rept.*, 465:61–147, 2008.

- [76] Ericourgoulhon. 3+1 formalism and bases of numerical relativity. 2012, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [77] Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 12 2009.
- [78] T. Pailas and T. Christodoulakis. Dynamically equivalent Λ CDM equations with underlying Bianchi type geometry. *JCAP*, 1907:029, 2019.
- [79] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [80] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 7 2019.
- [81] Ryan M. P. and Shepley L. C. *Homogeneous Relativistic Cosmologies*. Princeton University Press, 1975.
- [82] Hans Stephani. *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 3 edition, 2004.
- [83] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2 edition, 2003.
- [84] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [85] Petros A. Terzis. Faithful representations of Lie algebras and Homogeneous Spaces. *arXiv e-prints*, page arXiv:1304.7894, Apr 2013.
- [86] Olivier Coussaert and Marc Henneaux. Bianchi cosmological models and gauge symmetries. *Class. Quant. Grav.*, 10:1607–1618, 1993.
- [87] A Ashtekar and J Samuel. Bianchi cosmologies: the role of spatial topology. *Class. Quant. Grav.*, 8:2191, 1991.
- [88] T. Christodoulakis and Petros A. Terzis. Automorphism inducing diffeomorphisms and the general solution of Bianchi type III vacuum cosmology. *J. Math. Phys.*, 47:102502, 2006.
- [89] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum. A class of homogeneous cosmological models. *Comm. Math. Phys.*, 12:108–141, 1969.
- [90] G O Papadopoulos T Christodoulakis and A Dimakis. Automorphisms of real four-dimensional Lie algebras and the invariant characterization of homogeneous 4-spaces. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36:427, 2003.
- [91] S. Hervik T. Christodoulakis and G. O. Papadopoulos. Essential constants for spatially homogeneous Ricci flat manifolds of dimension-(4+1). *J. Phys.*, A37:4039–4058, 2004.
- [92] Robert T. Jantzen. The dynamical degrees of freedom in spatially homogeneous cosmology. *Comm. Math. Phys.*, 64:211–232, 1979.
- [93] E. Korfiatis G. O. Papadopoulos T. Christodoulakis, G. Kofinas and A. Paschos. Time dependent automorphism inducing diffeomorphisms and the complete closed form solutions of Bianchi types ii and v vacuum cosmologies. *J. Math. Phys.*, 42:3580–3608, 2001.
- [94] T. Christodoulakis, E. Korfiatis, and G. O. Papadopoulos. Automorphism inducing diffeomorphisms and invariant characterization of Bianchi type geometries. *Commun. Math. Phys.*, 226:377–391, 2002.

- [95] Theodor Kaluza. On the problem of unity in physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, pages 966–972, 1921.
- [96] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, pages 895–906, 1926.
- [97] John A. Wheeler. On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure. *Phys. Rev.*, 52:1107–1122, 1937.
- [98] W. Heisenberg. Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen. *Zeitschrift für Physik*, 7:513–538, 1943.
- [99] Y. Nambu. Quark model and the factorization of the Veneziano amplitude. *Zeitschrift für Physik*, 1969.
- [100] Leonard Susskind. Structure of hadrons implied by duality. *Phys. Rev.*, D1:1182–1186, 1970.
- [101] J. Scherk and John H. Schwarz. Dual models for non-hadrons. *Nuclear Physics B*, 1:118–144, 1974.
- [102] Michael B. Green and John H. Schwarz. Anomaly cancellations in supersymmetric $d = 10$ gauge theory and superstring theory. *Physics Letters B*, 1:117–122, 1984.
- [103] C.N. Pope E. Sezgin M.J. Duff, T. Inami and K.S. Stelle. Semiclassical quantization of the supermembrane. *Nuclear Physics B*, 3:515–538, 1988.
- [104] Lisa Randall and Raman Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370–3373, 1999.
- [105] P. Forgacs and Z. Horvath. On the influence of extra dimensions to the homogeneous isotropic universe. *Gen. Rel. Grav.*, 11:250, 1979.
- [106] P. S. Wesson. The properties of matter in Kaluza-Klein cosmology. *Mod. Phys. Lett.*, A7:921–926, 1992.
- [107] D. J. McManus. Five-dimensional cosmological models in induced matter theory. *Journal of Mathematical Physics*, 35:4889–4896, 1994.
- [108] H. Liu and P. S. Wesson. Cosmological solutions and their effective properties of matter in Kaluza-Klein theory. *Int. J. Mod. Phys.*, D3:627–637, 1994.
- [109] Sanjeev S. Seahra Takao Fukui and Paul S. Wesson. Cosmological implications of a nonseparable 5-d solution of the vacuum Einstein field equations. *J. Math. Phys.*, 42:5195–5201, 2001.
- [110] Alan Chodos and Steven Detweiler. Where has the fifth dimension gone? *Phys. Rev. D*, 21:2167–2170, 1980.
- [111] Edward Kasner. Geometrical theorems on Einstein’s cosmological equations. *American Journal of Mathematics*, 43:217–221, 1921.
- [112] Edward Kasner. An algebraic solution of the einstein’s equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 27:101–105, 1925.
- [113] D. Lorenz-Petzold. Higher dimensional cosmologies. *Phys. Lett.*, 148B:43–47, 1984.
- [114] D. Lorenz-Petzold. Higher dimensional extensions of Bianchi type i cosmologies. *Phys. Rev.*, D31:929–931, 1985.

- [115] D. Lorenz-Petzold. Kaluza-Klein-Bianchi-Kantowski-Sachs cosmologies. *Phys. Lett.*, 149B:79–81, 1984.
- [116] D. Lorenz-Petzold. Anisotropic supergravity cosmologies. *Physics Letters B*, 2:105–110, 1985.
- [117] D. Lorenz-Petzold. Higher dimensional perfect fluid cosmologies. *Phys. Lett.*, 153B:134–136, 1985.
- [118] Dieter Lorenz-Petzold. Exact five-dimensional cosmological solutions. *Astrophysics and Space Science*, 113:419–422, 1985.
- [119] D. Lorenz-Petzold. Nontrivial anisotropic supergravity cosmological solution. *Lett. Nuovo Cim.*, 42:309–312, 1985.
- [120] D. Lorenz-Petzold. Higher dimensional Brans-Dicke cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 17:1189–1203, 1985.
- [121] P. Halpern. Behavior of homogeneous five-dimensional space-times. *Phys. Rev.*, D33:354–362, 1986.
- [122] Sigbjorn Hervik. Multidimensional cosmology: Spatially homogeneous models of dimension (4+1). *Class. Quant. Grav.*, 19:5409–5428, 2002.
- [123] Sigbjorn Hervik. Vacuum plane waves in 4+1 d and exact solutions to Einstein's equations in 3+1 d. *Classical and Quantum Gravity*, 19:4315, 2003.
- [124] G.O. Papadopoulos. Essential constants in general relativity. *J. Math. Phys.*, 47:092502, 2006.
- [125] Wolfgang Kundt. The plane-fronted gravitational waves. *Zeitschrift für Physik*, 163:77–86, 1961.
- [126] Philippe Brax and Carsten van de Bruck. Cosmology and brane worlds: A review. *Class. Quant. Grav.*, 20:R201–R232, 2003.
- [127] Kei-ichi Maeda Tetsuya Shiromizu and Misao Sasaki. The Einstein equations on the 3-brane world. *Phys. Rev. D*, 62:024–012, 2000.
- [128] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 44:1–14, 1966.
- [129] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 48:463, 1967.
- [130] David Matravers Antonio Campos, Roy Maartens and Carlos F. Sopuerta. Braneworld cosmological models with anisotropy. *Phys. Rev. D*, 68:103520, 2003.
- [131] A. Einstein. Näherungsweise integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 688-696., 1916.
- [132] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167., 1918.
- [133] A. S. Eddington. The propagation of gravitational waves. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 102:268–282, dec 1922.
- [134] A. Einstein and N. Rosen. On gravitational waves. *Journal of the Franklin Institute*, 223(1):43 – 54, 1937.
- [135] J. H. Taylor, L. A. Fowler, and P. M. McCulloch. Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar psr 1913+16. *Nature*, 277:437–440, 1979.

- [136] J. H. Taylor and J. M. Weisberg. A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar ps r 1913+16. *Astrophys. J.*, 253:908–920, 1982.
- [137] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [138] H.W. Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, 94:119–145, 1925.
- [139] O. R. Baldwin and G. B. Jeffery. The relativity theory of plane waves. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 111:95–104, May 1926.
- [140] A. Z. Petrov. The classification of spaces defining gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 32:1665–1685, August 2000.
- [141] A. Sachs. Gravitational waves in general relativity. vi. the outgoing radiation condition. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 264(1318):309–338, 1961.
- [142] Roger Penrose. A remarkable property of plane waves in general relativity. *Rev. Mod. Phys.*, 37:215–220, Jan 1965.
- [143] Christian Duval, Gary Gibbons, and Péter Horváthy. Celestial mechanics, conformal structures, and gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 43:3907–3922, Jun 1991.
- [144] Does σ -model conformal invariance imply a Robertson-Walker universe? *Physics Letters B*, 287(1):69 – 72, 1992.
- [145] C. Duval, Z. Horvath, and P. A. Horvathy. Vanishing of the conformal anomaly for strings in a gravitational wave. *Phys. Lett.*, B313:10–14, 1993.
- [146] C. Duval, Z. Horvath, and P. A. Horvathy. Strings in plane fronted gravitational waves. *Mod. Phys. Lett.*, A8:3749–3756, 1993.
- [147] C. Duval, P. A. Horvathy, and L. Palla. Conformal Properties of Chern-Simons Vortices in External Fields. *Phys. Rev.*, D50:6658–6661, 1994.
- [148] Matthias Blau, José Figueroa-O’Farrill, and George Papadopoulos. Penrose limits, supergravity and brane dynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 19(18):4753, 2002.
- [149] Andreas Brandhuber and Konstadinos Sfetsos. PP waves from rotating and continuously distributed D3-branes. *JHEP*, 12:050, 2002.
- [150] Robert Švarc and Jiří Podolský. Geodesic deviation in Kundt spacetimes of any dimension. *Springer Proc. Phys.*, 157:229–237, 2014.
- [151] Andrea Fuster and Cornelia Pabst. Finsler pp-waves. *Phys. Rev.*, D94(10):104072, 2016.
- [152] A. Paliathanasis, M. Tsamparlis, and M. T. Mustafa. Classification of the Lie and Noether point symmetries for the Wave and the Klein-Gordon equations in pp-wave spacetimes. *Commun. Non-linear Sci. Numer. Simul.*, 55:68, 2018.
- [153] A. Karagiorgos, T. Pailas, N. Dimakis, Petros A. Terzis, and T. Christodoulakis. Quantum cosmology of a Bianchi III LRS geometry coupled to a source free electromagnetic field. *JCAP*, 1803(03):030, 2018.
- [154] T. Pailas, Petros A. Terzis, and T. Christodoulakis. The solution space of the Einstein’s vacuum field equations for the case of five-dimensional Bianchi Type I (Type 4A1). *Class. Quant. Grav.*, 35(14):145003, 2018.

- [155] E. Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311:46–78, December 1988.
- [156] Edward Witten. Three-Dimensional Gravity Revisited. 2007, arXiv:0706.3359.
- [157] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1849–1851, 1992.
- [158] Stanley Deser, R. Jackiw, and S. Y. Pi. Cotton blend gravity pp waves. *Acta Phys. Polon.*, B36:27–34, 2005.
- [159] Alberto A. García-Díaz. *Exact Solutions in Three-Dimensional Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2017.
- [160] Jiri Podolsky, Robert Svarc, and Hideki Maeda. All solutions of Einstein’s equations in 2+1 dimensions: Λ -vacuum, pure radiation, or gyratons. *Class. Quant. Grav.*, 36(1):015009, 2019.
- [161] Pascual Jordan, Jürgen Ehlers, and Wolfgang Kundt. Republication of: Exact solutions of the field equations of the general theory of relativity. *General Relativity and Gravitation*, 41(9):2191–2280, Sep 2009.
- [162] C. G. Tsagas. Electromagnetic fields in curved spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22:393–407, January 2005.
- [163] S. B. Edgar, R. Rani, and A. Barnes. Irreducible Killing tensors from conformal Killing vectors. *eConf*, C0306234:708–714, 2003.
- [164] G Clement. Classical solutions in three-dimensional Einstein-Maxwell cosmological gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 10(5):L49, 1993.
- [165] T. Christodoulakis and J. Zanelli. Operator ordering in quantum mechanics and quantum gravity. *Nuovo Cimento B Serie*, 93:1–21, May 1986.
- [166] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of ”hidden” variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [167] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of ”hidden” variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.
- [168] D. Bohm and B. J. Hiley. Measurement understood through the quantum potential approach. *Foundations of Physics*, 14(3):255–274, Mar 1984.
- [169] Planck Collaboration and Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *arXiv e-prints*, page arXiv:1807.06209, Jul 2018.
- [170] J. Ehlers, P. Geren, and R. K. Sachs. Isotropic solutions of the Einstein–Liouville equations. *Journal of Mathematical Physics*, 9(9):1344–1349, 1968.
- [171] C. A. Clarkson and R. K. Barrett. Does the isotropy of the CMB imply a homogeneous universe? Some generalized EGS theorems. *Classical and Quantum Gravity*, 16:3781–3794, December 1999.
- [172] G. F. R. Ellis, R. Maartens, and S. D. Nel. The expansion of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 184:439–465, August 1978.
- [173] J. J. Ferrando, J. A. Morales, and M. Portilla. Inhomogeneous space-times admitting isotropic radiation: Vorticity-free case. *Phys. Rev. D*, 46:578–584, July 1992.

- [174] S. J. Stoeger, William R., Roy Maartens, and G. F. R. Ellis. Proving almost homogeneity of the universe: An Almost Ehlers-Geren-Sachs theorem. *Astrophys. J.*, 443:1, 1995.
- [175] W. Hasse and V. Perlick. Geometrical and kinematical characterization of parallax-free world models. *Journal of Mathematical Physics*, 29:2064–2068, September 1988.
- [176] Y. N. Obukhov. Rotation in cosmology. *General Relativity and Gravitation*, 24:121–128, February 1992.
- [177] George F. R. Ellis, Roy Maartens, and Malcolm A. H. MacCallum. *Relativistic Cosmology*. 2012.
- [178] C. B. Collins and S. W. Hawking. The rotation and distortion of the universe *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 162:307, 1973.
- [179] J. D. Barrow, R. Juszkiewicz, and D. H. Sonoda. Universal rotation - How large can it be? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 213:917–943, 1985.
- [180] Sigbjørn Hervik, David F. Mota, and Mikjel Thorsrud. Inflation with stable anisotropic hair: is it cosmologically viable? *Journal of High Energy Physics*, 2011(11):146, Nov 2011.
- [181] Mikjel Thorsrud, David F. Mota, and Sigbjørn Hervik. Cosmology of a scalar field coupled to matter and an isotropy-violating maxwell field. *Journal of High Energy Physics*, 2012(10):66, Oct 2012.
- [182] Saulo Carneiro and Guillermo A. Mena Marugan. Anisotropic cosmologies containing isotropic background radiation. *Phys. Rev.*, D64:083502, 2001.
- [183] Jr. Menezes, R. S., C. Pigozzo, and S. Carneiro. Distance-redshift relations in an anisotropic cosmological model. *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, 2013:033, Mar 2013.
- [184] J P Mimoso and P Crawford. Shear-free anisotropic cosmological models. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):315–326, feb 1993.
- [185] Alan A Coley and Des J McManus. On spacetimes admitting shear-free, irrotational, geodesic time-like congruences. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):1261–1282, may 1994.
- [186] Des J McManus and Alan A Coley. Shear-free, irrotational, geodesic, anisotropic fluid cosmologies. *Classical and Quantum Gravity*, 11(8):2045–2058, aug 1994.
- [187] George F. R. Ellis. Shear free solutions in general relativity theory. *General Relativity and Gravitation*, 43:3253–3268, Dec 2011.
- [188] Tomi S. Koivisto, David F. Mota, Miguel Quartin, and Tom G. Zlosnik. On the Possibility of Anisotropic Curvature in Cosmology. *Phys. Rev.*, D83:023509, 2011.
- [189] Mikjel Thorsrud. Balancing anisotropic curvature with gauge fields in a class of shear-free cosmological models. *Classical and Quantum Gravity*, 35(9):095011, mar 2018.
- [190] K. Tomita and M. Den. Gauge-invariant perturbations in anisotropic homogeneous cosmological models. *Phys. Rev. D*, 34:3570, December 1986.
- [191] Thiago S Pereira, Cyril Pitrou, and Jean-Philippe Uzan. Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(09):006–006, sep 2007.
- [192] A Emir Gümrükçüo, Carlo R Contaldi, and Marco Peloso. Inflationary perturbations in anisotropic backgrounds and their imprint on the cosmic microwave background. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(11):005–005, nov 2007.

- [193] Lev Kofman, Jean-Philippe Uzan, and Cyril Pitrou. Perturbations of generic Kasner spacetimes and their stability. *JCAP*, 1105:011, 2011.
- [194] Felipe O. Franco and Thiago S. Pereira. Tensor perturbations in anisotropically curved cosmologies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(11):022–022, nov 2017.
- [195] L. P. Hughston and K. C. Jacobs. Homogeneous Electromagnetic and Massive-Vector Fields in Bianchi Cosmologies. *apj*, 160:147, April 1970.
- [196] A. Sagnotti and B. Zwiebach. Electromagnetic Waves in a Bianchi Type I Universe. *Phys. Rev.*, D24:305–319, 1981.
- [197] M. S. Madsen. Symmetry breaking in dynamical space-times. *Gen. Rel. Grav.*, 26:681–686, 1994.
- [198] Asit Banerjee and T. Ghosh. Dilaton electromagnetic fields in Bianchi models. *Class. Quant. Grav.*, 16:3981–3986, 1999.
- [199] Kei Yamamoto. Bianchi Class B Spacetimes with Electromagnetic Fields. *Phys. Rev.*, D85:043510, 2012.
- [200] Øyvind Grøn and Sigbjørn Hervik. *Einstein’s General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*. Springer, 2007.
- [201] Andrew Pontzen and Anthony Challinor. Linearization of homogeneous, nearly-isotropic cosmological models. *Class. Quant. Grav.*, 28:185007, 2011.
- [202] D. H. King. Gravity-wave insights to Bianchi type-IX universes. *Phys. Rev. D*, 44:2356–2368, October 1991.
- [203] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2011.
- [204] T. Pailas and T. Christodoulakis. Dynamically equivalent Λ CDM equations with underlying Bianchi Type geometry. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(07):029–029, jul 2019.
- [205] Yuri N. Obukhov. On physical foundations and observational effects of cosmic rotation. In *Published in Colloquium on Cosmic Rotation: Proceedings. Edited by M. Scherfner, T. Chrobok and M. Shefaat (Wissenschaft und Technik Verlag: Berlin, 2000) pp. 23–96*, pages 23–96, 2000.
- [206] I.M.H. Etherington. Lx. on the definition of distance in general relativity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 15(100):761–773, 1933.
- [207] T. Christodoulakis, N. Dimakis, Petros A. Terzis, and G. Doulis. Canonical quantization of the BTZ black hole using noether symmetries. *Phys. Rev. D*, 90:024052, Jul 2014.
- [208] M. Gasperini and G. Veneziano, *Phys. Rept. The Pre-Big Bang Scenario in String Cosmology***373**, 1 (2003)
- [209] A. Paliathanasis and S. Capozziello, *Mod. Phys. Lett. A*, Noether symmetries and duality transformations in cosmology, **31**, 1650183 (2016)
- [210] G. Gionti S.J and A. Paliathanasis, *Mod. Phys. Lett. A*, Duality transformation and conformal equivalent scalar–tensor theories, **33**, 1850093 (2018)
- [211] L. P. Chimento, Symmetry and inflation, *Phys. Rev. D* **65**, 063517 (2002)
- [212] P. Parsons and J.D. Barrow, New inflation from old, *Class. Quantum Grav.* **12**, 1715 (1995)

- [213] J.D. Barrow and A. Paliathanasis, Reconstructions of the dark-energy equation of state and the inflationary potential, *Gen. Rel. Grav.* **50**, 82 (2018)
- [214] V. Faraoni, A Symmetry of the Einstein–Friedmann Equations for Spatially Flat, Perfect Fluid, Universes, *Symmetry* **12**, 147 (2020)
- [215] H. Stephani, *Differential Equations. Their solutions using symmetries.*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester (1989)
- [216] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd edn, Berlin, Springer, (2000)
- [217] T. Christodoulakis, N. Dimakis and Petros A. Terzis, *J. Phys. A: Math. Theor.* Lie point and variational symmetries in minisuperspace Einstein gravity, **47** (2014) 095202
- [218] A. A. Andrianov, F. Cannata and A. Yu. Kamenshchik, General solution of scalar field cosmology with a (piecewise) exponential potential, *JCAP*10 (2011) 004
- [219] V. Faraoni, Cosmic Analogues of Classic Variational Problems, *Universe* **6**(6), (2020) 71
- [220] V. Faraoni, F. Atieh and S. Dussault, Cosmological analogies, Lagrangians, and symmetries for convective–radiative heat transfer, *Eur. Phys. J. C* **80**, (2020) 706
- [221] Claus Kiefer. Conceptual problems in quantum gravity and quantum cosmology. *ISRN Math. Phys.*, 2013:509316, 2013.
- [222] K.V. Kuchar. Time and interpretations of quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, 20:3–86, 2011.
- [223] William G. Unruh and Robert M. Wald. Time and the interpretation of canonical quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 40:2598–2614, Oct 1989.
- [224] J.J. Halliwell, J. Perez-Mercader, and W.H. Zurek, editors. *Physical origins of time asymmetry. Proceedings, NATO Advanced Research Workshop, Mazagon, Spain, September 29 - October 4, 1991*, 10 1994.
- [225] C.J. Isham. Canonical quantum gravity and the problem of time. *NATO Sci. Ser. C*, 409:157–287, 1993.
- [226] A.O. Barvinsky. Unitarity approach to quantum cosmology. *Phys. Rept.*, 230:237–367, 1993.
- [227] Edward Anderson. The problem of time in quantum gravity. 9, 2010, arXiv:1009.2157.
- [228] J.M. Pons, D.C. Salisbury, and K.A. Sundermeyer. Revisiting observables in generally covariant theories in the light of gauge fixing methods. *Phys. Rev. D*, 80:084015, 2009.
- [229] Julian Barbour and Brendan Z. Foster. Constraints and gauge transformations: Dirac’s theorem is not always valid. *arXiv:0808.1223*, 8 2008.
- [230] P. A. M. Dirac. Generalized hamiltonian dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 246(1246):326–332, 1958.
- [231] Paul A.M. Dirac. The theory of gravitation in hamiltonian form. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, A246:333–343, 1958.
- [232] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Phys. Rev.*, 116:1322–1330, Dec 1959.
- [233] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Quantum theory of gravitation: General formalism and linearized theory. *Phys. Rev.*, 113:745–750, 1959.

- [234] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Canonical variables for general relativity. *Phys. Rev.*, 117:1595–1602, 1960.
- [235] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Consistency of the canonical reduction of general relativity. *J. Math. Phys.*, 1:434–439, 1960.
- [236] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Energy and criteria for radiation in general relativity. *Phys. Rev.*, 118:1100–1104, 1960.
- [237] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Finite self-energy of classical point particles. *Phys. Rev. Lett.*, 4:375–377, 1960.
- [238] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. *Phys. Rev.*, 122:997–1006, 1961.
- [239] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Wave zone in general relativity. *Phys. Rev.*, 121:1556–1566, 1961.
- [240] J.A. Wheeler. Geometrodynamics and the issue of final state. In *Les Houches Summer School of Theoretical Physics*.
- [241] J.A. Wheeler. *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics*, volume 3, pages 27–92. 1987.
- [242] Bryce S. DeWitt. The quantization of geometry. pages 266–381, 1962.
- [243] Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, 160:1113–1148, Aug 1967.
- [244] Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Phys. Rev.*, 162:1195–1239, Oct 1967.
- [245] Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. iii. applications of the covariant theory. *Phys. Rev.*, 162:1239–1256, Oct 1967.
- [246] Ralph F. Baierlein, David H. Sharp, and John A. Wheeler. Three-dimensional geometry as carrier of information about time. *Phys. Rev.*, 126:1864–1865, Jun 1962.
- [247] K. Kuchar. Canonical quantization of cylindrical gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 4:955–986, 1971.
- [248] J.David Brown and Karel V. Kuchar. Dust as a standard of space and time in canonical quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 51:5600–5629, 1995.
- [249] Stephon Alexander, Martin Bojowald, Antonino Marciano, and David Simpson. Electric time in quantum cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 30:155024, 2013.
- [250] Martin Bojowald, Philipp A Hoehn, and Artur Tsobanjan. An effective approach to the problem of time. *Class. Quant. Grav.*, 28:035006, 2011.
- [251] Carlo Rovelli. Time in quantum gravity: Physics beyond the schrodinger regime. *Phys. Rev. D*, 43:442–456, 1991.
- [252] Philipp A. Höhn, Alexander R.H. Smith, and Maximilian P.E. Lock. The Trinity of Relational Quantum Dynamics. *arXiv:1912.00033*, 11 2019.
- [253] Ryan M. P. and Shepley L. C. *Homogeneous Relativistic Cosmologies*. Princeton University Press, 1975.

- [254] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:189–196, 1916.
- [255] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, January 1916.
- [256] Claus Kiefer. Continuous measurement of intrinsic time by fermions. *Class. Quant. Grav.*, 6:561, 1989.
- [257] Jorma Louko. Quantum Cosmology With Electromagnetism. *Phys. Rev. D*, 38:478, 1988.
- [258] Claus Kiefer. Wave Packets in Minisuperspace. *Phys. Rev. D*, 38:1761–1772, 1988.
- [259] Don N. Page. Minisuperspaces With Conformally and Minimally Coupled Scalar Fields. *J. Math. Phys.*, 32:3427–3438, 1991.
- [260] T. Christodoulakis and E. Korfiatis. Quantum mechanics of the general spatially homogeneous geometry coupled to a scalar field. *J. Math. Phys.*, 33:2863–2876, 1992.
- [261] Claudio Simeone. Quantization of minisuperspaces as ordinary gauge systems. *J. Math. Phys.*, 39:3131–3137, 1998.
- [262] Masakatsu Kenmoku, Hiroto Kubotani, Eiichi Takasugi, and Yuki Yamazaki. de Broglie-Bohm interpretation for wave function of Reissner-Nordstrom-de Sitter black hole. *Int. J. Mod. Phys. A*, 15:2059–2076, 2000.
- [263] T. Christodoulakis, T. Gakis, and G.O. Papadopoulos. Conditional symmetries and the quantization of Bianchi type I vacuum cosmologies with and without cosmological constant. *Class. Quant. Grav.*, 19:1013–1026, 2002.
- [264] T. Christodoulakis, N. Dimakis, Petros A. Terzis, Babak Vakili, E. Melas, and Th. Grammenos. Minisuperspace canonical quantization of the Reissner-Nordström black hole via conditional symmetries. *Phys. Rev. D*, 89(4):044031, 2014.
- [265] N. Dimakis, Petros A. Terzis, Adamantia Zampeli, and T. Christodoulakis. Decoupling of the reparametrization degree of freedom and a generalized probability in quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 94(6):064013, 2016.
- [266] A. Karagiorgos, T. Pailas, N. Dimakis, G.O. Papadopoulos, Petros A. Terzis, and T. Christodoulakis. Quantum cosmology of Bianchi VIII, IX LRS geometries. *JCAP*, 04:006, 2019.
- [267] P. Bargueño, S. Bravo Medina, M. Nowakowski, and D. Batic. Quantum-mechanical corrections to the Schwarzschild black-hole metric. *EPL (Europhysics Letters)*, 117(6):60006, March 2017.
- [268] Christian Corda and Fabiano Feleppa. The quantum black hole as a gravitational hydrogen atom. *arXiv:1912.06478*, 12 2019.
- [269] C. Corda, F. Feleppa, and F. Tamburini. On the quantization of the extremal Reissner-Nordstrom black hole. *arXiv:2003.07173*, 3 2020.
- [270] Aharon Davidson and Ben Yellin. Quantum black hole wave packet: Average area entropy and temperature dependent width. *Phys. Lett. B*, 736:267–271, 2014.
- [271] Aharon Davidson and Ben Yellin. Schwarzschild mass uncertainty. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1662, 2014.
- [272] T. Pailas, N. Dimakis, A. Karagiorgos, Petros A. Terzis, G.O. Papadopoulos, and T. Christodoulakis. Classical and quantum analysis of 3d electromagnetic pp-wave spacetime. *Class. Quant. Grav.*, 36(13):135010, 2019.

-
- [273] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [274] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.
- [275] D. Bohm and B. J. Hiley. Measurement understood through the quantum potential approach. *Foundations of Physics*, 14(3):255–274, Mar 1984.
- [276] Yuri Shtanov. Pilot wave quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 54:2564–2570, 1996.
- [277] Nelson Pinto-Neto and Ward Struyve. Bohmian quantum gravity and cosmology. *arXiv:1801.03353*, 1 2018.
- [278] Steffen Gielen and Lucía Menéndez-Pidal. Singularity resolution depends on the clock. *arXiv:2005.05357*, 5 2020.