ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Κατηγορικές μορφές ενός κλασικού αποτελέσματος στην θεωρία των χώρων Hardy

Φοιτητής: Θήριος Ευστράτιος

Καθηγητής: Νεστορίδης Βασίλειος

Επιτροπή Παρακολούθησης:

Καθηγητής: Συσκάκης Αριστομένης

Καθηγητής: Χατζηαφράτης Τηλέμαχος

18 Ιανουαρίου 2021

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την γυναίκα μου Χριστίνα και την κόρη μου Άννα Μαρία Σταυρούλα για την υπομονή και την συμπαράσταση που μου έδειξαν και τον καθηγητή μου κύριο Βασίλη Νεστορίδη για την καθοδήγηση τις διορθώσεις και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω αλφαβητικά τους καθηγητές κύριο Αριστομένη Συσκάκη και κύριο Τηλέμαχο Χατζηαφράτη για τις παρατηρήσεις και τις διορθώσεις του κειμένου που κάνανε.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.. 5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Προκαταρτικά 7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Τα αποτελέσματα 17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Σκιαγράφηση περαιτέρω αποτελεσμάτων.. 31
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.. 35

Περίληψη

Είναι γνωστό ότι για $0 < p < 1$ αν η συνάρτηση f ανήκει στην κλάση του Hardy H_p, στον μοναδιαίο δίσκο του επιπέδου, τότε η παράγουσα F της f ανήκει στο χώρο H_q όπου $q = \frac{p}{1-p}$. Ακόμη για κάθε $\alpha > q$ υπάρχει συνάρτηση $g_{p,a}$ κλάσης H_p ώστε η παράγουσα της δεν ανήκει στο χώρο H_α.

Ένας πρώτος στόχος της εργασίας είναι την $g_{p,a}$ να την διαλέξουμε ανεξάρτητη του α και να δείξουμε ότι το σύνολο όλων αυτών των συναρτήσεων g_p είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο στον χώρο H_p(2ης κατηγορίας). Ακόμη να θεωρήσουμε τις τοπικοποιημένες μορφές αυτού του αποτελέσματος καθώς και αντικατάσταση του χώρου H_p από χώρους της μορφής $\bigcap_{\beta<p} H_\beta$ και να δείξουμε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά των χώρων Hardy H_p.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όταν υπάρχει ένα αντικείμενο με μία κακή ιδιότητα, μία γενική αρχή είναι ότι το σύνολο όλων των αντικειμένων με αυτή την κακή ιδιότητα είναι μεγάλο, δηλαδή υπάρχουν πολλά τέτοια αντικείμενα. Για παράδειγμα ένας ρητός αριθμός είναι καλός και ένας άρρητος κακός. Σύμφωνα με την προηγούμενη αρχή, το σύνολο των αρρήτων είναι μεγάλο υπό τις επόμενες έννοιες:

1. Το πλήθος των αρρήτων είναι υπεραριθμήσιμο ενώ των ρητών είναι αριθμήσιμο. (πληθαριθμική έννοια)

2. Το σύνολο των αρρήτων είναι G_δ και πυκνό στο $\mathbb{R}$ ($2^{ης}$ κατηγορίας), ενώ το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών με κενό εσωτερικό συνόλων δηλαδή $1^{ης}$ κατηγορίας (τοπολογική έννοια).

3. Το μέτρο Lebesgue των ρητών είναι $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ ενώ των αρρήτων είναι $\lambda(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = +\infty$ (μετροθεωρητική έννοια).

Σύμφωνα με αυτή την γενική αρχή, βασιζόμενοι στο Θεώρημα 5.12 του βιβλίου του Peter L. Duren [1] και αρχικά στο Θεώρημα Baire, για σταθεροποιημένα $0 < p < 1$ και $\alpha > q = \frac{p}{1-p}$, η ύπαρξη συνάρτησης g του χώρου Hardy H_p, της οποίας η παράγουσα $F(g) \notin H_a$, συνεπάγεται την ύπαρξη ενός συνόλου τέτοιων συναρτήσεων πυκνού και G_δ στον H_p.
Ομοίως σε μία Πρόταση της Μ. Συσκάκη, η ύπαρξη μη φραγμένης συνάρτησης έχει ως συνέπεια το σύνολο όλων των μη φραγμένων συναρτήσεων να είναι G_δ και πυκνό. Ωστόσο σε αυτό το αποτέλεσμα δεν προϋποτίθεται η πληρότητα του χώρου στον οποίο εργαζόμαστε και κατ' επέκταση δεν γίνεται χρήση του θεωρήματος του Baire.
Σε αυτή την εργασία, στο Κεφάλαιο 2, θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση της Μ. Συσκάκη για να ισχυροποιήσουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.12 του βιβλίου του Peter L. Duren [1] και το Θεώρημα του Baire για να αποδείξουμε την πλειονότητα των θεωρημάτων του Κεφαλαίου 2.
Το ισχυρότερο αποτέλεσμα σχετικά με το Θεώρημα 5.12 του βιβλίου του Peter L. Duren [1] το οποίο επιτυγχάνουμε είναι το ακόλουθο. Έστω $0 < p < 1$ τότε υπάρχει $f \in H_p$ ώστε η παράγουσα $F(f)$ να ικανοποιεί $sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta < +\infty$, όπου $q = \frac{p}{1-p}$, ενώ για κάθε $\alpha > q$ και οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[A, B]$ με $A, B \in \mathbb{R}$ και $A < B$ να ισχύει $sup_{0<r<1} \int_{A}^{B} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^a d\theta = +\infty$. Μάλιστα το σύνολο αυτών των κακών συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι είναι G_δ και πυκνό στον H_p.
Ένα παρόμοιο φαινόμενο παρουσιάζεται στο τέλος του Κεφαλαίου 2 με τον τοπολογικό διανυσματικό χώρο $\Upsilon = \bigcap_{0<p<1} H_p$ να είναι μεν πολύ κοντά στον H_1, αλλά σε αντίθεση με το ότι συμβαίνει στον H_1, όπου για κάθε $f \in H_1$ η παράγουσα είναι φραγμένη, το σύνολο των $f \in \Upsilon$ ούτως ώστε η παράγουσα $F(f)$ να είναι ολικά μη φραγμένη στον $D(0,1)$, να είναι G_δ και πυκνό σε αυτόν. Σημειώνουμε ότι μία

συνάρτηση είναι ολικά μη φραγμένη στο $D(0,1)$ αν δεν είναι φραγμένη σε κάθε περιοχή κάθε σημείου της μοναδιαίας περιφέρειας.

Τέλος η οργάνωση της εργασίας αυτής είναι ως ακολούθως. Το κεφαλαίο 1 περιέχει προκαταρκτικά στοιχεία, τα οποία είτε είναι άμεσα απαραίτητα για την επίλυση των Θεωρημάτων του Κεφαλαίου 2 είτε έχουν έμμεση σχέση με αυτό. Στο Κεφάλαιο 2 περιέχονται τα πρωτότυπα αποτελέσματα αυτής της εργασίας που αφορούν τους χώρους H_p για $0 < p < 1$. Στο κεφάλαιο 3 γίνεται μία σκιαγράφηση περαιτέρω αποτελεσμάτων των οποίων οι αποδείξεις είναι παρόμοιες με αυτές των θεωρημάτων του κεφαλαίου 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Προκαταρτικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα τα οποία είτε είναι άμεσα απαραίτητα για την επίλυση των Θεωρημάτων του Κεφαλαίου 2 είτε έχουν έμμεση σχέση. Τα αποτελέσματα αυτά προέρχονται κατά κύριο λόγο από τα βιβλία του Peter L. Duren [1] και του Paul Koosis [3]. Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες που σχετίζονται με τις συναρτήσεις, ορισμένες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο, που ανήκουν στους χώρους Hardy H_p για $p \in (0,+\infty]$.

Ορισμός 1.1: $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

Ορισμός 1.2: Έστω $f \in \{\, h: D(0,1) \to \mathbb{C} \,|h\ ολόμορφη\,\}$ και έστω $r \in (0,1)$. Ορίζουμε τις ποσότητες,

$$M_p(r,f) = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \text{ για } p \in (0,+\infty)$$

$$M_\infty(r,f) = sup_{-\pi<\theta\leq\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = max_{-\pi<\theta\leq\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \text{ για } p = +\infty$$

Παρατηρούμε ότι αν η f είναι ολόμορφη στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο τότε τα $M_p(r,f)$ είναι αύξουσες ως προς $r \in (0,1)$ για κάθε $p \in (0,+\infty]$. Τότε θα λέμε ότι $f \in H_p(Χώρος\ Hardy)$ για $p \in (0,+\infty]$, αν

$$sup_{0<r<1} M_p(r,f) < +\infty$$

Ορισμός 1.3: Θέτουμε για $p \in (0,+\infty)$,

$$\|f\|_p = sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

και

$$d_p(f,g) = sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|(f-g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta.$$

Εάν $p = +\infty$ θέτουμε,

$$\|f\|_\infty = sup_{0<r<1} sup_{-\pi<\theta\leq\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$$

Η απεικόνιση $\|\ \ \|_p: H_p \to [0,+\infty)$ είναι νόρμα για $1 \leq p \leq +\infty$ και η απεικόνιση $d_p: H_p x H_p \to [0,+\infty)$ είναι μετρική στον H_p για $0 < p < 1$.

Για την περίπτωση που $1 \leq p \leq +\infty$, η ιδιότητα της τριγωνικής ανισότητας οφείλεται στην ανισότητα Minkowski. Συγκεκριμένα σταθεροποιούμε ένα $0 < r < 1$ και κάνοντας χρήση της ανισότητας Minkowski για κάθε $h \in H_p$,προκύπτει ότι,

$$\left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left|(f-g)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left|(f-h)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left|(g-h)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

Κατά συνέπεια μπορούμε να μεταβούμε στο supremum των όρων της προηγούμενης ανισότητας,

$$\|f-g\|_p = sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|(f-g)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|(f-h)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|(g-h)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = \|f-h\|_p + \|h-g\|_p$$

Για την περίπτωση όπου $0 < p < 1$, η ιδιότητα της τριγωνικής ανισότητας οφείλεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.4: έστω $0 \leq a$, $0 \leq b$ και $0 < p < 1$. Τότε ισχύει ότι $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το b σταθερό και ορίζουμε την απεικόνιση $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$g(a) = (a+b)^p - a^p - b^p$$

Παραγωγίζοντας την g προκύπτει ότι,

$$g'(a) = p\left(\frac{a^{1-p} - (a+b)^{1-p}}{a^{1-p}(a+b)^{1-p}}\right) \leq 0$$

Εφόσον το $g(0) = 0$, είναι άμεσο ότι $g(a) \leq 0$. Δηλαδή για κάθε $0 \leq a$ και $0 \leq b$ ισχύει ότι

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p$$

που είναι και το ζητούμενο.

Συνεπώς έχουμε ότι για κάθε $0 < r < 1$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left|(f+g)(re^{i\theta})\right|^p d\theta \le \int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta + \int_{-\pi}^{+\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^p d\theta$$

Είναι άμεσο ότι για κάθε $h \in H_p$, με $0 < p < 1$, ισχύουν τα ακόλουθα,

$$d_p(f,g) = sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|(f-g)(re^{i\theta})\right|^p d\theta$$
$$\le sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|(f-h)(re^{i\theta})\right|^p d\theta$$
$$+ sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|(h-g)(re^{i\theta})\right|^p d\theta \le d_p(f,h) + d_p(h,g)$$

Οι αποδείξεις των επόμενων προτάσεων μπορούν να βρεθούν στα βιβλία του Peter L. Duren [1] και του Paul Koosis [3].

Πρόταση 1.5: Οι χώροι H_p για $1 \le p \le +\infty$ είναι Banach. Οι χώροι H_p, για $0 < p < 1$, είναι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι των οποίων η τοπολογία ορίζεται από μία μετρική και είναι πλήρεις ως προς αυτή την μετρική.

Θεώρημα 1.6: (*Ανισότητα Jensen*) Έστω χώρος θετικού μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ με $\mu(\Omega) = 1$ και f μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο Ω, με $f \in L_1(\mu)$, έτσι ώστε $a < f(x) < b$ για κάθε $x \in \Omega$. Αν η φ είναι κυρτή στο ανοικτό διάστημα (a,b) τότε,

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f\, d\mu\right) \le \int_{\Omega} \varphi o f\, d\mu$$

Πρόταση 1.7: Εάν $0 < p < q \le +\infty$, τότε $H_\infty \subseteq H_q \subseteq H_p$.

Απόδειξη: Έστω $f \in H_q$. Σταθεροποιώντας το $0 < r < 1$ και κάνοντας χρήση της ανισότητας *Jensen*, ισχύουν τα ακόλουθα,

$$\left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^q \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\left|f(re^{i\theta})\right|^p\right)^{\frac{q}{p}} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}} \ge \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{q}{pq}}$$
$$= \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Εφόσον το r είναι τυχαίο, ισχύει ότι η $\|f\|_p \le \|f\|_q$. Δηλαδή έχουμε ότι $H_q \subseteq H_p$. Σημειώνουμε ότι στην προηγούμενη ανισότητα η σχέση,

$$\|f\|_p = sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

ισχύει ακόμα και για $p < 1$. Μόνο που για $0 < p < 1$ η συνάρτηση $\| \quad \|_p$ δεν είναι νόρμα στον H_p, ενώ για $1 \leq p$ αυτή είναι νόρμα.

Σταθεροποιώντας το $0 < r < 1$ για κάθε $0 < p < +\infty$ ισχύει ότι,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq sup_{-\pi\leq\theta<\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p$$

Συνεπώς για κάθε $0 < p < +\infty$ προκύπτει ότι $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Άρα για κάθε $0 < p < +\infty$ έχουμε ότι $H_\infty \subseteq H_p$.

Επίσης είναι άμεσο από την **Ανισότητα *Jensen*** και την **Πρόταση 1.7** πως για $1 \leq p < q \leq +\infty$, και $\{\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f\} \subseteq H_q$, αν $\|f_n - f\|_q \to 0$ τότε $\|f_n - f\|_p \to 0$ καθώς $n \to +\infty$, δεδομένου ότι $\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f\|_q$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως αν $0 < p < q < 1$ και $d_q(f_n, f) \to 0$ τότε $d_p(f_n, f) \to 0$ καθώς $n \to +\infty$. Σημειώνουμε επίσης ότι τα προηγούμενα αποτελέσματα επεκτείνονται εύκολα και στην περίπτωση που $0 < p < 1 \leq q \leq +\infty$.

Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποια σημαντικά θεωρήματα των χώρων Hardy. Κάποια από αυτά είναι απαραίτητα για την διεκπεραίωση των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 2.

Θεώρημα 1.8: Η σύγκλιση στους χώρους H_p για $0 < p \leq +\infty$ συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου. Δηλαδή αν $\{\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f\} \subseteq H_p$ με $f_n \to f$ για $n \to +\infty$, ως προς την τοπολογία του H_p τότε η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)$.

Έστω $f \in H_p$ με $0 < p < +\infty$, για $0 < r < 1$ ορίζουμε την συνάρτηση f_r με $f_r(z) = f(rz)$. Προφανώς αυτή η συνάρτηση είναι ολόμορφη σε ένα δίσκο με κέντρο 0 και ακτίνα γνήσια μεγαλύτερη του 1. Άρα προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο $D(0,1)$ από τα μερικά της αθροίσματα, τα οποία είναι πολυώνυμα. Η ομοιόμορφη προσέγγιση στο $D(0,1)$, συνεπάγεται την προσέγγιση στην τοπολογία του H_p. Άρα κάθε f_r μπορεί να προσεγγιστεί από πολυώνυμα στην τοπολογία του H_p.

Ακόμα στα βιβλία του Peter L. Duren και του Paul Koosis αναφέρεται ότι για $p < +\infty$ οι f_r συγκλίνουν στην f ως προς την τοπολογία του H_p όταν $r \to 1$ με $0 < r < 1$. Με την βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας καταλήγουμε ότι κάθε $f \in H_p$, $0 < p < +\infty$, μπορεί να προσεγγιστεί στην τοπολογία του H_p από πολυώνυμα. Έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.9: Για $0 < p < +\infty$ τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον H_p. Για $p = +\infty$ τα πολυώνυμα δεν είναι πυκνά στον H_∞. Η κλειστότητα τους μέσα στον H_∞ είναι η άλγεβρα

$$A\big(D(0,1)\big) = \left\{f\colon D(0,1) \to \mathbb{C} \mid f \text{ ολόμορφη με συνεχή επέκταση στην } \overline{D(0,1)}\right\}$$

η οποία είναι γνήσιο υποσύνολο του H_∞.

Θεώρημα 1.10: Μία από τις βασικότερες ιδιότητες των χώρων Hardy είναι η ύπαρξη του πεπερασμένου ακτινικού ορίου $\lim_{r\to 1} f\big(re^{i\theta}\big) = \tilde{f}\big(e^{i\theta}\big)$ με $0 < r < 1$, σχεδόν παντού στο $[-\pi, \pi)$ για κάθε $f \in H_p$ με $p \in (0,+\infty]$. Δηλαδή ορίζεται η συνοριακή συνάρτηση της f στο μοναδιαίο κύκλο, και τη συμβολίζουμε ως $\tilde{f}$. Ισχύει ότι $\tilde{f}\big(e^{i\theta}\big) \in L_p\big([-\pi, \pi)\big)$.

Ισχύει και κάτι ισχυρότερο. Σχεδόν παντού τα προηγούμενα ακτινικά όρια συμπίπτουν με μη εφαπτομενικά όρια. Αλλά δεν θα επεκταθούμε σε αυτή την κατεύθυνση.

Πρόταση 1.11: Έστω $f(z) = \frac{1}{1-z}$ τότε η $f \in H_p$ αν και μόνο αν $0 < p < 1$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η $f \in H_p$ και θα δείξουμε ότι $0 < p < 1$. Αν η $f \in H_p$ τότε η συνοριακή συνάρτηση,

$$\tilde{f}\big(e^{i\theta}\big) = \frac{1}{1 - e^{i\theta}} \in L_p([-\pi, \pi])$$

κατά συνέπεια $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$.

Όμως ισχύει ότι $\left|1 - e^{i\theta}\right| \leq |\theta|$ στο $[-\pi, \pi]$. Άρα ισχύει ότι $\frac{1}{|\theta|^p} \leq \frac{1}{\left|1-e^{i\theta}\right|^p}$ για κάθε $\theta \in [-\pi, \pi]$. Είναι άμεσο ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|\theta|^p} d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 - e^{i\theta}|^p} d\theta < +\infty$$

Άρα η $\frac{1}{\theta} \in L_p([-\pi, \pi])$. Αυτό συνεπάγεται ότι $p < 1$. Δεδομένου ότι εργαζόμαστε για $p > 0$ καταλήγουμε στο ζητούμενο.
Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $0 < p < 1$ και θα δείξουμε ότι $f \in H_p$, δηλαδή,

$$sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = sup_{\frac{1}{2}<r<1} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta < +\infty$$

Σημειώνουμε ότι η προηγούμενη ισότητα ισχύει διότι υπάρχει μονοτονία των ολοκληρωμάτων ως προς $0 < r < 1$ [1]. Ακόμα για να δείξουμε ότι $f \in H_p$ αρκεί το $sup_{\frac{1}{2}<r<1} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta < +\infty$, διότι η f είναι φραγμένη στο $\overline{D\left(0, \frac{1}{2}\right)}$.

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $\frac{1}{2} < r < 1$. Θεωρούμε την μεσοκάθετο ε του ευθυγράμμου τμήματος $[r, 1]$. Ο κύκλος $C(0, r)$ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο ως προς ε που περιέχει το r. Κατά συνέπεια,

$$d\left(re^{i\theta}, r\right) \leq d\left(re^{i\theta}, 1\right). \text{ Άρα } \quad r\left|1 - e^{i\theta}\right| \leq \left|1 - re^{i\theta}\right|$$

για κάθε $-\pi \leq \theta < \pi$. Συνεπώς,

$$\frac{1}{|1 - re^{i\theta}|^p} \leq \frac{1}{r^p |1 - e^{i\theta}|^p}$$

για κάθε $-\pi \leq \theta < \pi$. Όμως υπάρχει σταθερά $0 < c < +\infty$ έτσι ώστε $\left|1 - e^{i\theta}\right| \geq c|\theta|$ για κάθε $-\pi \leq \theta < \pi$. Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι,

$$\frac{1}{|1 - re^{i\theta}|^p} \leq \frac{1}{r^p |1 - e^{i\theta}|^p} \leq \frac{1}{c^p (|\theta|. r)^p}$$

Δεδομένου ότι $0 < p < 1$ ισχύει $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{|\theta|^p} d\theta = m < +\infty$. Άρα το

$$sup_{\frac{1}{2}<r<1} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{|1 - re^{i\theta}|^p} d\theta \leq sup_{\frac{1}{2}<r<1} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{c^p (|\theta|. r)^p} d\theta \leq \frac{m. 2^p}{c^p} < +\infty$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Η προηγούμενη απόδειξη της **Πρόταση 1.11** υποδείχθηκε από τον Βασίλη Νεστορίδη.

Πόρισμα 1.12: Έστω $h(z) = \frac{1}{(1-z)^\gamma}$ με $0 < \gamma < +\infty$ και έστω $0 < p < +\infty$. Τότε ισχύει $h \in H_p$ αν και μόνο αν $\gamma. p < 1$. Ισοδύναμα $p < \frac{1}{\gamma}$.

Απόδειξη: Ισχύουν τα ακόλουθα,

$$h \in H_p \text{ αν και μόνο αν } \frac{1}{(1-z)^{\gamma p}} \in H_1. \text{ Ισοδύναμα } \gamma. p < 1$$

που είναι και το ζητούμενο.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι το **Θεώρημα 5.12** στο βιβλίο του Peter L. Duren [1].

Θεώρημα 1.13: Εάν $f \in H_p$ για κάποιο $0 < p < 1$, τότε $F(f) \in H_q$ όπου $q = \frac{p}{1-p}$. Με $F(f)$ συμβολίζουμε την παράγουσα της f, η οποία μηδενίζεται στο μηδέν δηλαδή $F(f)(z) = \int_0^z f(\omega)\, d\omega$. Για κάθε τιμή του $0 < p < 1$ ο όρος q είναι ο καλύτερος δυνατός υπό την έννοια ότι αν $a > q$ τότε υπάρχει $g \in H_p$ τέτοιο ώστε $F(g) \notin H_a$.

Συναρτήσεις με την ιδιότητα αυτή μπορούν να επιλεγούν να είναι της μορφής αυτής $g(z) = \frac{1}{(1-z)^\beta} \in H_p$, για κατάλληλο $\beta > 0$. Συγκεκριμένα αν $0 < p < 1$ τότε για κάθε $a > q$ υπάρχει συνάρτηση $g \in H_p$ της μορφής $g(z) = \frac{1}{(1-z)^\beta}$, για κατάλληλο $\beta > 0$, της οποίας η παράγουσα $F(g) \notin H_a$, δηλαδή το $sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty$.

Αρκεί να επιλέξουμε το $\beta \in \left[1 + \frac{1}{a}, \frac{1}{p}\right)$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο αυτό συμπίπτει με το σύνολο $\left\{\beta > 0 : \frac{1}{(1-z)^\beta} \in H_p \; και \; F\left(\frac{1}{(1-z)^\beta}\right) \notin H_a\right\}$.
Για $\beta = 1$ η παράγουσα της g είναι η συνάρτηση $F\left(\frac{1}{(1-z)^\beta}\right) = -log(1-z)$. Αύτη η τελευταία συνάρτηση ανήκει σε όλους τους H_a με $0 < a < +\infty$. Άρα το $\beta = 1$ δεν ανήκει στο προηγούμενο σύνολο.
Θεωρούμε τώρα $\beta \neq 1$. Τότε η παράγουσα της g είναι η συνάρτηση $F\left(\frac{1}{(1-z)^\beta}\right) = \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{(1-z)^{\beta-1}} - 1\right)$. Εφαρμόζοντας τώρα το **Πόρισμα 1.12** οι απαιτήσεις μας είναι ισοδύναμες με το σύστημα $\beta p < 1$ και $(\beta - 1)a \geq 1$. Λύνοντας αυτό το σύστημα βρίσκουμε πράγματι ότι το σύνολο που ψάχνουμε είναι το $\left[1 + \frac{1}{a}, \frac{1}{p}\right)$.

Σημειώνουμε ότι εφόσον το $\alpha > q = \frac{p}{1-p}$ για $0 < p < 1$, προκύπτει ότι $1 + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{p}$. Δηλαδή το διάστημα $\left[1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{p}\right)$ είναι μη κενό.

Σε αποτελέσματα του κεφαλαίου 2 θα είναι απαραίτητη η χρήση του Θεωρήματος Baire, δεδομένου ότι οι χώροι H_p είναι πλήρεις.

Θεώρημα 1.14 (Baire): Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ είναι πυκνή στον X.

Με χρήση των τύπων του De Morgan περνώντας σε συμπληρώματα, το προηγούμενο θεώρημα παίρνει την ακόλουθη μορφή. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με κενό εσωτερικό, τότε η ένωση των $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει κενό εσωτερικό στο X. Αυτό προκύπτει εύκολα αν λάβουμε υπόψη μας την ακόλουθη **Πρόταση 1.15**.

Πρόταση 1.15: Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $F\subseteq X$ κλειστό. Τότε το $intF=\emptyset$ αν και μόνο αν το $X\backslash F$ είναι ανοικτό και πυκνό στον X.

Το σύνολο $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ στο **Θεώρημα 1.14** είναι G_δ και πυκνό στον X και το σύνολο των $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ είναι F_σ $1^{ης}$ κατηγορίας *(F_σ -meager)*. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος **Baire** είναι το **Θεώρημα 1.16**.

Θεώρημα 1.16: Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ και $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $intF_{n_o}\neq\emptyset$.

Πρόταση 1.17(Ανισότητα Hardy): Για κάθε $f\in H_1$, με ανάπτυγμα Taylor $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο, ισχύει ότι,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n+1}\leq \pi\|f\|_1$$

Ένα από τα βασικά θεωρήματα του κεφαλαίου 2 μπορεί να αποδειχθεί χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Baire. Συγκεκριμένα το **Θεώρημα 2.3** του κεφαλαίου 2 είναι άμεσο Πόρισμα ενός αποτελέσματος της Μ. Συσκάκη [5] που δημοσιεύθηκε στο J.M.A.A.. Η **Πρόταση 5.2** του άρθρου της Μ. Συσκάκη [5] που έχει αναρτηθεί στο arxiv:1611.05386 είναι η ακόλουθη,

Πρόταση 1.18: Έστω $(V,\mathcal{T}_V)$ ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathbb{C}^X$ το σύνολο των μιγαδικών συναρτήσεων $h: X\to\mathbb{C}$. Θεωρούμε $T: V\to\mathbb{C}^X$ γραμμικό τελεστή έτσι ώστε για κάθε $x\in X$ η απεικόνιση $V\ni f\to T(f)(x)\in\mathbb{C}$ να είναι συνεχής.
Θέτουμε $S=\{f\in V: T(f)\ \delta\epsilon\nu\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\ \sigma\tau o\ X\}$. Τότε ή $S=\emptyset$ ή S πυκνό και G_δ υποσύνολο του V.

Στην συνέχεια η **Πρόταση 5.2** του άρθρου της Μ. Συσκάκη [5] ελαφρά τροποποιήθηκε από τους Κιουλάφα, Νεστορίδη και Χατζιαφράτη. Στο άρθρο που έχει αναρτηθεί στο arxiv:1703.00423 [2] αποδεικνύεται ότι η προηγούμενη πρόταση εξακολουθεί να ισχύει ακόμα και αν ο τελεστής $T: V\to\mathbb{C}^X$ δεν είναι γραμμικός, αρκεί να ικανοποιεί $|T(f+g)|\leq|T(f)|+|T(g)|$ και $|T(\lambda f)|=|\lambda||T(f)|$ για κάθε $f,g\in V$ και λ βαθμωτό.

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η συνθήκη $|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|$ μπορεί να αντικατασταθεί με την συνθήκη $|T(\lambda f)| = |\lambda|^c|T(f)|$ για κάθε $f \in V$ και λ βαθμωτό, όπου $0 < c < +\infty$ μία σταθερά ανεξάρτητη του f και λ.

Πρόταση 1.19: Έστω $(V, \mathcal{T}_V)$ ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathbb{C}^X$ το σύνολο των μιγαδικών συναρτήσεων $h: X \to \mathbb{C}$. Θεωρούμε τελεστή $T: V \to \mathbb{C}^X$ ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \text{ και } |T(\lambda f)| = |\lambda|^c|T(f)|$$

έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ η απεικόνιση $V \ni f \to T(f)(x) \in \mathbb{C}$ να είναι συνεχής, όπου $0 < c < +\infty$ είναι σταθερά ανεξάρτητη του f και λ.
Θέτουμε $S = \{f \in V: T(f) \text{ δεν είναι φραγμένη στο } X\}$. Τότε ή $S = \emptyset$ ή S πυκνό και G_δ υποσύνολο του V.

Απόδειξη: Ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες,

$$S = \{f \in V: T(f) \text{ δεν είναι φραγμένη στο } X\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in X}\{f \in V: |T(f)(x)| > m\}.$$

Αλλά το ακόλουθο σύνολο,

$$\{f \in V: |T(f)(x)| > m\} = T(\quad)(x)^{-1}\big((m, +\infty)\big)$$

είναι ανοικτό, εφόσον η $T(\quad)(x)$ είναι συνεχής. Συνεπώς το σύνολο S είναι G_δ.
Έστω $S \neq \emptyset$ και $f \in S$. Άρα η $T(f)$ δεν είναι φραγμένη.
Έστω S όχι πυκνό στο V. Τότε υπάρχει $g \in U \subseteq V \backslash S$, όπου U ανοικτό, $U \cap S = \emptyset$ και $T(g)$ φραγμένο στο X. Έστω $|T(g)(x)| < M < +\infty$ για κάθε $x \in X$.
Εφόσον ο $(V, \mathcal{T}_V)$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος τότε ισχύει ότι

$$g + \frac{1}{n}f \xrightarrow[n\to+\infty]{} g \text{ ως προς την τοπολογία } \mathcal{T}_V.$$

Άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει ότι $g + \frac{1}{n}f \in U \subseteq V \backslash S$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_o$ η συνάρτηση $T\left(g + \frac{1}{n}f\right)$ είναι φραγμένη.
Λόγω των υποθέσεων της **Πρότασης 1.19** για τον τελεστή T, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^c |T(f)(x)| = \left|T\left(g + \frac{1}{n}f - g\right)(x)\right| \leq \left|T\left(g + \frac{1}{n}f\right)(x)\right| + |T(g)(x)|.$$

Συνεπώς για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^c |T(f)(x)| < \left|T\left(g + \frac{1}{n}f\right)(x)\right| + M$$

Άρα,

$$+\infty = sup_{x\in X}\left(\frac{1}{n}\right)^{c}|T(f)(x)| \leq M + sup_{x\in X}\left|T\left(g+\frac{1}{n}f\right)(x)\right|$$

Συνεπώς ισχύει ότι,

$$sup_{x\in X}\left|T\left(g+\tfrac{1}{n}f\right)(x)\right| = +\infty.$$

Άτοπο. Άρα το S είναι πυκνό στο τοπολογικό διανυσματικό χώρο $(V, \mathcal{T}_V)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Τα αποτελέσματα

Σύμφωνα με το **Θεώρημα 5.12** στο βιβλίο του Peter L. Duren [1] εάν $f \in H_p$ για κάποιο $0 < p < 1$, τότε $F(f) \in H_q$ όπου $q = \frac{p}{1-p}$. Με $F(f)$ συμβολίζουμε την παράγουσα της f, η οποία μηδενίζεται στο μηδέν δηλαδή $F(f)(z) = \int_0^z f(\omega)\, d\omega$.
Για κάθε τιμή του $0 < p < 1$ ο όρος q είναι ο καλύτερος δυνατός υπό την έννοια αν $a > q$ τότε υπάρχει $g \in H_p$ τέτοιο ώστε $F(g) \notin H_a$.
Υπάρχουν συναρτήσεις $g \in H_p$ ώστε η παράγουσα τους $F(g) \notin H_a$. Σαν τέτοιες συναρτήσεις μπορούμε να διαλέξουμε συναρτήσεις της μορφής,

$$g(z) = \frac{1}{(1-z)^\beta},$$

για κατάλληλο $\beta > 0$. Αρκεί να επιλέξουμε το $\beta \in \left[1 + \frac{1}{a}, \frac{1}{p}\right)$. Από τη σχέση $a > q = \frac{p}{1-p}$ για $0 < p < 1$ είναι άμεσο ότι το διάστημα αυτό είναι μη κενό.
Στη συνέχεια θα δείξουμε κάτι ποιο γενικό. Συγκεκριμένα οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν $sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty$ για οποιαδήποτε $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < 0 < B$.

Πρόταση 2.1: Έστω $0 < p < 1$ και $a > q = \frac{p}{1-\mathrm{p}}$. Έστω $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < 0 < B$, τότε υπάρχει συνάρτηση της μορφής $g(z) = \frac{1}{(1-z)^\beta}$ έτσι ώστε να ισχύει $g \in H_p$ και $sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^a d\theta = +\infty$.

Απόδειξη: Έστω $a > q = \frac{p}{1-\mathrm{p}}$. Τότε όπως είδαμε, υπάρχει συνάρτηση της μορφής $g(z) = \frac{1}{(1-z)^\beta} \in H_p$ με $F(g) \notin H_a$. Εφόσον η g είναι ολόμορφη στον απλά συνεκτικό τόπο $D(0,1)$ έχει παράγουσα της μορφής,

$$F(g)(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-\omega)^\beta} d\omega = \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{(1-z)^{\beta-1}} - 1\right).$$

Συνεπώς ισχύουν τα ακόλουθα,

$$+\infty = sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta$$

$$= sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta + sup_{0<r<1} \int_B^{2\pi+A} \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta$$

όπου $A < 0 < B$.

Εφόσον η $F(g)$ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $\overline{D(0,1)} \backslash L$, όπου $L = \left\{z \in \overline{D(0,1)}: για\ z = re^{i\theta} με\ A < \theta < B\ και\ 0 \le r \le 1\right\}$, όπου $\overline{D(0,1)}$ να είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος, συνεπάγεται ότι υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $B \le \theta \le 2\pi + A$ και για κάθε $0 \le r \le 1$ να ισχύει $\left|F(g)(re^{i\theta})\right| \le M$.
Κατά συνέπεια προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα,

$$\int_B^{2\pi+A} \left|F(g)(re^{i\theta})\right|^\alpha d\theta \le M^a \int_B^{2\pi+A} d\theta = M^a(2\pi + A - B) < +\infty$$

για κάθε $0 \le r \le 1$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα,

$$sup_{0<r<1} \int_B^{2\pi+A} \left|F(g)(re^{i\theta})\right|^\alpha d\theta \le sup_{0\le r\le 1} \int_B^{2\pi+A} \left|F(g)(re^{i\theta})\right|^\alpha d\theta < +\infty.$$

Άρα προκύπτει ότι,

$$sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)(re^{i\theta})\right|^\alpha d\theta = +\infty.$$

που είναι και το ζητούμενο.

Πρόταση 2.2: Έστω $A < B$ με $A, B \in \mathbb{R}$ και $a > q = \frac{p}{1-\mathrm{p}}$ με $0 < p < 1$**.** Τότε υπάρχει συνάρτηση $\varphi_{A,B,a,p} \in H_p$, τέτοια ώστε το $sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(\varphi_{A,B,a,p})(re^{i\theta})\right|^\alpha d\theta = +\infty$.

Απόδειξη: Έστω $A < w < B$ τότε $A - w < 0 < B - w$. Εφαρμόζουμε την **Πρόταση 2.1** στο ανοικτό διάστημα $(A - w, B - w)$. Τότε για $0 < p < 1$ και $a > q = \frac{p}{1-p}$ υπάρχει $g \in H_p$ έτσι ώστε το $sup_{0<r<1} \int_{A-w}^{B-w} \left|F(g)(re^{i\theta})\right|^a d\theta = +\infty$.
Θέτουμε $\varphi_{A,B,a,p}(z) = g(ze^{-iw})$. Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(\varphi_{A,B,a,p})(re^{i\theta})\right|^\alpha d\theta = sup_{0<r<1} \int_{A-w}^{B-w} \left|F(g)(re^{i\theta})\right|^a d\theta = +\infty$$

που είναι και το ζητούμενο.

Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα δούμε ότι οι συναρτήσεις $\varphi_{A,B,a,p}$ μπορούν να γίνουν ανεξάρτητες από τα A, B, a.

Θεώρημα 2.3: Έστω $A < B$ με $A, B \in \mathbb{R}$ και $\alpha > q = \frac{p}{1-\mathrm{p}}$ με $0 < p < 1$. Όλα αυτά είναι σταθεροποιημένα. Τότε το σύνολο

$$M = \left\{ f \in H_p : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)(re^{i\theta})\right|^{\alpha} d\theta = +\infty \right\}$$

είναι G_δ και πυκνό στο H_p.

Απόδειξη: Εφόσον ο χώρος (H_p, T_{H_p}) είναι πλήρης μετρικός χώρος, αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι το συμπλήρωμα

$$M^c = \left\{ f \in H_p : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)(re^{i\theta})\right|^{\alpha} d\theta < +\infty \right\}$$

είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων στον (H_p, T_{H_p}) με κενό εσωτερικό. Ισχύουν τα ακόλουθα,

$$M^c = \left\{ f \in H_p : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)(re^{i\theta})\right|^{\alpha} d\theta < +\infty \right\}$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ f \in H_p : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)(re^{i\theta})\right|^{\alpha} d\theta \le n \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$$

όπου θέτουμε,

$$W_n = \left\{ f \in H_p : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)(re^{i\theta})\right|^{\alpha} d\theta \le n \right\}.$$

Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε τους ακόλουθους δύο ισχυρισμούς,

1. Το εσωτερικό σύνολο του W_n είναι το κενό.
2. Το σύνολο W_n είναι κλειστό στον H_p.

Αποδεικνύουμε τώρα τον ισχυρισμό 1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: i)$1 > a > q$ και ii) $a \ge 1$.

i)$1 > a > q$. Έστω $intW_n \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $f \in V \subseteq W_n$ με $V \in T_{H_p}$. Επίσης από την **Πρόταση 2.2** υπάρχει $g \in H_p$ με $sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)(re^{i\theta})\right|^{\alpha} d\theta = +\infty$.
Εφόσον ο (H_p, T_{H_p}) είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος προκύπτει ότι $f + \frac{1}{m} g \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f$. Από τον ορισμό της σύγκλισης υπάρχει $m_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $m \ge m_o$ να ισχύει ότι $f + \frac{1}{m} g \in V$, διότι το σύνολο V είναι ανοικτό. Συνεπώς $f + \frac{1}{m_o} g, f \in V \subseteq W_n \subseteq M^c$. Άρα για κάθε $0 < r < 1$ ισχύει

$$\frac{1}{m_o^a}\int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = \int_A^B \left|F\left(f+\frac{1}{m_o}g\right)\left(re^{i\theta}\right) - F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta$$
$$\leq \int_A^B \left(\left|F\left(f+\frac{1}{m_o}g\right)\left(re^{i\theta}\right)\right| + \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)^a d\theta$$
$$\leq \int_A^B \left|F\left(f+\frac{1}{m_o}g\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta + \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \leq 2n$$

Η τριγωνική ιδιότητα, που εφαρμόστηκε στις προαναφερθείσες ανισότητες, οφείλεται στη χρήση της ανισότητας $(\alpha+b)^p \leq \alpha^p + b^p$ για $a, b \geq 0$ και $0 < p < 1$.
Από τα προαναφερθέντα καταλήγουμε στη σχέση,

$$+\infty = sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \leq 2nm_o^a < +\infty,$$

Το οποίο είναι άτοπο. Άρα $intW_n = \emptyset$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

ii) Θεωρούμε τώρα την περίπτωση $a \geq 1$. Υποθέτουμε ότι $intW_n \neq \emptyset$. Όπως και πριν υπάρχει $f \in V \subseteq W_n$ με $V \in T_{H_p}$. Έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει $g \in H_p$ έτσι ώστε στο κλειστό διάστημα $[A, B]$, με $A < B$ να ισχύει $sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty$.
Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ισχύει η ακόλουθη σύγκλιση $f + \frac{1}{m} g \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ ως προς την τοπολογία T_{H_p}. Άρα υπάρχει $m_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε η $f + \frac{1}{m_o} g \in V$. Κατά συνέπεια για κάθε $0 < r < 1$ ισχύουν τα ακόλουθα,

$$\left(\frac{1}{m_o^a}\int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta\right)^{\frac{1}{a}} \leq \left(\int_A^B \left(\left|F\left(f+\frac{1}{m_o}g\right)\left(re^{i\theta}\right)\right| + \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)^a d\theta\right)^{\frac{1}{a}}$$
$$\leq \left(\int_A^B \left|F\left(f+\frac{1}{m_o}g\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta\right)^{\frac{1}{a}} + \left(\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta\right)^{\frac{1}{a}} \leq 2n$$

Η τριγωνική ιδιότητα οφείλεται στην ανισότητα Minkowski δεδομένου ότι το $a \geq 1$. Εφόσον η προαναφερόμενη ανισότητα ισχύει για κάθε $0 < r < 1$ καταλήγουμε στο εξής άτοπο,

$$+\infty = sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(g)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \leq 2^a nm_o^a < +\infty. \text{ Συνεπώς το } intW_n = \emptyset$$

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη του ισχυρισμού 2.

Πρώτος τρόπος. Πράγματι έστω $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq W_n$ με $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ ως προς την τοπολογία της H_p. Τότε για κάθε $z\epsilon\overline{D(0,r)} = \{w: |w| \leq r\}$ ισχύει ότι,

$$|F(f_m)(z) - F(f)(z)| = \left|\int_0^z f_m(\omega)\, d\omega - \int_0^z f(\omega)\, d\omega\right| \le \int_0^z |f_m(\omega) - f(\omega)|\, |d\omega| \le r.sup_{|x|\le r}\{|f_m(x) - f(x)|\}.$$

Έστω $0 < r < 1$ σταθεροποιημένο, τότε για κάθε $z\epsilon\overline{D(0,r)} = \{w: |w| \le r\}$, όπου $z = r_o e^{i\theta}$ με $0 < r_o \le r$ και $A < \theta < B$, ισχύει η κατά σημείο σύγκλιση,

$$\left|F(f_m)\left(r_o e^{i\theta}\right)\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left|F(f)\left(r_o e^{i\theta}\right)\right|$$

Κατ' επέκταση, για κάθε $0 < r < 1$ και για κάθε $A < \theta < B$, συνεπάγεται η κατά σημείο σύγκλιση,

$$\left|F(f_m)\left(\mathrm{r}e^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left|F(f)\left(\mathrm{r}e^{i\theta}\right)\right|^{\alpha}$$

Από το λήμμα Fatou, για κάθε $0 < r < 1$ σταθεροποιημένο προκύπτει ότι,

$$\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta = \int_A^B liminf \left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta \le liminf \int_A^B \left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta \le n.$$

Δηλαδή το $f \in W_n$. Το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Δεύτερος τρόπος. Έχει ήδη δειχθεί στον πρώτο τρόπο, ότι η ακολουθία $F(f_m)\left(re^{i\theta}\right) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} F(f)\left(re^{i\theta}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $\theta \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο $0 < r < 1$.
Κατά συνέπεια και η ακολουθία $\left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $\theta \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, για κάθε $0 < r < 1$.
Για συγκεκριμένο $0 < r < 1$ οι απεικονίσεις $\left\{\left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ και $\left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|$ είναι συνεχείς ως προς θ στο $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. Συνεπώς είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\theta \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ να ισχύει $\left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|, \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right| \in [0, M]$.
Η απεικόνιση $\varphi(x) = x^{\alpha}$ με $\varphi: [0, M] \to [0, M^{\alpha}]$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x, w \in [0, M]$ με $|x - w| < \delta(\varepsilon)$ να ισχύει $|x^a - w^a| < \varepsilon$. Δεδομένου ότι για συγκεκριμένο $0 < r < 1$ η ακολουθία $\left\{\left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|$ ως προς $\theta \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, υπάρχει $m_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $m \ge m_{\delta(\varepsilon)}$ να ισχύει ότι

$$\left|\left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right| - \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|\right| < \delta(\varepsilon)$$

για κάθε $\theta \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. Άρα

$$\left|\left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} - \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha}\right| < \varepsilon$$

για κάθε $m \ge m_{\delta(\varepsilon)}$ και για κάθε $\theta \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. Δηλαδή η ακολουθία $\left\{\left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha}$ ως προς το $\theta \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. Αυτό έχει ως συνέπεια τα ολοκληρώματα της ακολουθίας να συγκλίνουν,

$$\int_A^B \left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta.$$

Δεδομένου ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $0 < r < 1$ ισχύει ότι $\int_A^B \left|F(f_m)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \leq n$, είναι άμεσο ότι $\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \leq n$. Δηλαδή $f \in W_n$. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του **Θεωρήματος 2.3**.

Παρατήρηση 2.4: Στην απόδειξη του **Θεωρήματος 2.3** χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Baire και την πληρότητα των χώρων H_P. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο όπως παρατήρησε η κυρία Ειρήνη Δεληγιάννη. Έχουμε να δείξουμε δύο πράγματα,

1. Ότι το σύνολο $M = \left\{ f \in H_p : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty \right\}$ είναι G_δ.
2. Το M είναι πυκνό στον H_p.

Για το πρώτο γράφουμε $M^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ και δείχνουμε ότι κάθε W_n είναι κλειστό όπως το κάνουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3. Έτσι δείχνουμε ότι το M^c είναι F_σ σύνολο, δηλαδή το M είναι G_δ σύνολο.
Για το δεύτερο αρκεί το M^c να έχει εσωτερικό κενό. Όμως

$$M^c = \left\{ f \in H_p : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta < +\infty \right\}$$

Και εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι ο M^c είναι διανυσματικός χώρος και υπόχωρος του H_p γνήσιος, διότι η συνάρτηση $\varphi_{A,B,a,p} \in M$.
Όμως κάθε γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος κάθε τοπολογικού διανυσματικού χώρου έχει κενό εσωτερικό και η απόδειξη ολοκληρώθηκε χωρίς την χρήση του Θεωρήματος Baire.
Παρόλα αυτά σε μελλοντικά αποτελέσματα θα είναι απαραίτητη η χρήση της πληρότητας των χώρων H_p και του Θεωρήματος Baire.
Στην επόμενη παρατήρηση θα δούμε ότι το Θεώρημα 2.3 είναι άμεσο Πόρισμα ενός αποτελέσματος της Μ. Συσκάκη [5] που δημοσιεύθηκε στο J.M.A.A. και στην συνέχεια ελαφρά τροποποιήθηκε από τους Κιουλάφα, Νεστορίδη και Χατζιαφράτη [2]. Σε αυτά τα αποτελέσματα δεν υποτίθεται η πληρότητα των χώρων και δεν χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα του Baire.

Παρατήρηση 2.5: Η **Πρόταση 5.2** του άρθρου της Μ. Συσκάκη που έχει αναρτηθεί στο arxiv:1611.05386 [5] είναι η ακόλουθη,

Πρόταση: Έστω V ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και X ένα μη κενό σύνολο. Θέτουμε $\mathbb{C}^X$ να είναι το σύνολο των μιγαδικών συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{C}$. Θεωρούμε ένα γραμμικό τελεστή $T: V \to \mathbb{C}^X$ με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x \in X$ η απεικόνιση $V \ni f \to T(f)(x) \in \mathbb{C}$ να είναι συνεχής. Έστω

$$S = \{f \in V: T(f)\ \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \sigma\tau o\ X\}$$

Τότε ή $S = \emptyset$ ή το S είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του V.

Στο άρθρο που έχει αναρτηθεί στο arxiv:1703.00423 [2] αποδεικνύεται μεταξύ άλλων ότι η προηγούμενη πρόταση εξακολουθεί να ισχύει ακόμα και αν ο τελεστής $T: V \to \mathbb{C}^X$ δεν είναι γραμμικός, αρκεί να ικανοποιεί $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$ και $|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|$ για κάθε $f, g \in V$ και λ βαθμωτό.

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η συνθήκη $|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|$ μπορεί να αντικατασταθεί με την συνθήκη $|T(\lambda f)| = |\lambda|^c|T(f)|$ για κάθε $f \in V$ και λ βαθμωτό, όπου $0 < c < +\infty$ μία σταθερά ανεξάρτητη του f και λ. Αυτό το αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στο τέλος του Κεφαλαίου 1.

Το Θεώρημα 2.3 έπεται άμεσα. Αρκεί να θέσουμε $V = H_p$ με $0 < p < 1$, $X = [0,1]$, $x = r$ με $r \in (0,1)$ και

$$T(f)(r) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta\right)^{\frac{1}{a}} & ,1 \leq a \\ \displaystyle\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta & ,0 < a < 1 \end{cases}$$

Το επόμενο θεώρημα συμπληρώνει το **Θεώρημα 2.3.**

Θεώρημα 2.6: Έστω $0 < p < 1$, τότε το σύνολο

$$\left\{f \in H_p: sup_{0<r<1} sup_{A<\theta<B}\left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right| = +\infty\right\}$$

είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του H_p.

Απόδειξη: Θέτουμε στην **Πρόταση** της **Παρατήρησης 2.5**, όπου $V = H_p$ με $0 < p < 1$, $\mathrm{X} = \left\{z \in D(0,1): z = re^{i\theta},\ 0 < r < 1\ \kappa\alpha\iota\ A < \theta < B\right\}$ και $T(f)(z) = F(f)(z)$. Παρατηρούμε επίσης η απεικόνιση $T: H_p \to \mathbb{C}^X$ πληροί τις δύο ιδιότητες της **Πρότασης**.

1. Η $T(\quad)(z): H_p \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής.

Πράγματι έστω $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq H_p$ με $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ ως προς H_p, κατά συνέπεια ισχύουν τα ακόλουθα,

$$|F(f_m)(z) - F(f)(z)| = \left|\int_0^z f_m(\omega)\,d\omega - \int_0^z f(\omega)\,d\omega\right| \le \int_0^z |f_m(\omega) - f(\omega)|\,d\omega$$
$$\le r.sup_{|x|\le r}|f_m(x) - f(x)| \to 0$$

2. Η $T: H_p \to \mathbb{C}^X$ είναι γραμμική. Είναι άμεσο, εφόσον η παράγουσα είναι γραμμική.

Από την Πρόταση της **Παρατήρησης 2.5** προκύπτει για το σύνολο,

$$S = \{f \in H_p: sup_{0<r<1} sup_{A<\theta<B}|F(f)(re^{i\theta})| = +\infty\}$$

$$= \{f \in H_p: T(f)\ \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\ \sigma\tau o\nu\ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa\acute{o}\ \tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha\ 0 < r < 1\ \kappa\alpha\iota\ A < \theta < B\}$$

ότι ή $S = \emptyset$ ή S είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του H_p.

Το σύνολο S είναι μη κενό. Πράγματι αν θέσουμε $f(\omega) = \frac{1}{1-\omega e^{-i\delta}}$, με $A < \delta < B$, η παράγουσα της είναι η $F(f)(z) = \int_0^z \frac{1}{1-\omega e^{-i\delta}} d\omega = c.log(1 - ze^{-i\delta})$, όπου c είναι μη μηδενική σταθερά. Άρα για $z \to e^{i\delta}$ το $F(f)(z) = c.log(1 - ze^{-i\delta}) \to +\infty$.

Αφού $p < 1$ η συνάρτηση $f \in H_p$. Άρα $S \neq \emptyset$. Κατά συνέπεια το S είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του H_p.

Πρόταση 2.7: Έστω $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ και $0 < a < b$. Τότε υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $c = C(A, B, a, b)$ ώστε για κάθε συνεχή συνάρτηση h να ισχύει,

$$\left(\int_A^B |h(x)|^a\,dx\right)^{\frac{1}{a}} \le c\left(\int_A^B |h(x)|^b\,dx\right)^{\frac{1}{b}}$$

Απόδειξη: Βασιζόμενοι στην ανισότητα Jensen, αν υποθέσουμε ότι $\Omega = [A, B]$ με $A, B \in \mathbb{R}$ και $A < B$, $\Sigma = Borel([A, B])$, $\mu = \frac{1}{B-A}\lambda|_{[A,B]}$ και $g: [A, B] \to \mathbb{R}$ με $g \ge 0$, προκύπτει άμεσα ότι ισχύει,

$$\varphi\left(\frac{1}{B-A}\int_A^B g(x)\,dx\right) \le \frac{1}{B-A}\int_A^B \varphi(g(x))\,dx,$$

όπου $\varphi(x) = x^r$ με $r \ge 1$ και $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Η φ είναι κυρτή και όχι φθίνουσα διότι η πρώτη και η δεύτερη παραγωγός της είναι θετικές σε όλο το $[0, +\infty)$.
Θεωρούμε τώρα συνεχή συνάρτηση $h: [A, B] \to \mathbb{R}$ και κατά συνέπεια οι $|h|^a, |h|^b \in L_1([A, B])$. Βασιζόμενοι στην προηγούμενη ανισότητα ισχύουν τα ακόλουθα,

$$\left(\frac{1}{B-A}\int_A^B |h(x)|^b\,dx\right)^{\frac{1}{b}} = \left(\frac{1}{B-A}\int_A^B |h(x)|^{a\frac{b}{a}}\,dx\right)^{\frac{1}{b}} = \left(\frac{1}{B-A}\int_A^B (|h(x)|^a)^{\frac{b}{a}}\,dx\right)^{\frac{1}{b}}$$

$$\geq \left(\left(\frac{1}{B-A}\int_A^B |h(x)|^a\,dx\right)^{\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{(B-A)^{\frac{1}{a}}}\left(\int_A^B |h(x)|^a\,dx\right)^{\frac{1}{a}}$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι,

$$C(A,B,a,b)\left(\int_A^B |h(x)|^b\,dx\right)^{\frac{1}{b}} \geq \left(\int_A^B |h(x)|^a\,dx\right)^{\frac{1}{a}}$$

όπου $C(A,B,a,b) = (B-A)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$.

Παρατήρηση 2.8: Θεωρούμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της **Πρότασης 2.7** και συνεπώς $0 < a < b$. Για κάθε ολόμορφη συνάρτηση f, η **Πρόταση 2.7** συνεπάγεται άμεσα τα ακόλουθα δύο πορίσματα,

1. Αν $sup_{0<r<1}\int_A^B \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^b d\theta < +\infty$ τότε $sup_{0<r<1}\int_A^B \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta < +\infty$.
2. Αν $sup_{0<r<1}\int_A^B \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^a d\theta = +\infty$ τότε $sup_{0<r<1}\int_A^B \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^b d\theta = +\infty$.

Θεώρημα 2.9: Θεωρούμε τις συνθήκες, $0 < p < 1$, $q = \frac{p}{1-p}$ και $A, B \in \mathbb{R}$, με $A < B$, να είναι σταθεροποιημένα. Το σύνολο

$$\left\{f \in H_p : \forall\, a > q \;\; sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty\right\}$$

είναι G_δ και πυκνό στον H_p.

Απόδειξη: Ορίζουμε το σύνολο

$$C_{A,B} = \left\{f \in H_p : \forall\, a > q \;\; sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty\right\} = \bigcap_{a>q} A_a$$

όπου,

$$A_a = \left\{f \in H_p : sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty\right\}$$

Από το δεύτερο πόρισμα της **Παρατήρησης 2.8,** προκύπτει ότι αν $a < a'$ με $sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta = +\infty$, τότε και το $sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha'} d\theta = +\infty$. Συνεπώς $A_a \subseteq A_{a'}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα,

$$C_{A,B} = \cap_{a>q} A_a = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_{q+\frac{1}{n}}.$$

Από το **Θεώρημα 2.3** τα σύνολα $A_{q+\frac{1}{n}}$ είναι G_δ και πυκνά στον H_p. Συγκεκριμένα $A_{q+\frac{1}{n}} = \cap_{m\in\mathbb{N}} V_m^n$ με V_m^n ανοικτό και πυκνό στον H_p, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
Εφόσον ο χώρος (H_p, d_p) είναι πλήρης μετρικός χώρος και ισχύει

$$C_{A,B} = \bigcap_{a>q} A_a = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} V_m^n$$

από το Θεώρημα του Baire το $C_{A,B}$ είναι G_δ και πυκνό στον H_p.

Θεώρημα 2.10: Θεωρούμε ότι $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$. Τότε το σύνολο $\{f \in H_p : \forall\, a > q \text{ το } F(f) \notin H_a\}$ είναι G_δ και πυκνό στον H_p.

Απόδειξη: Στο **Θεώρημα 2.9** έχουμε δείξει ότι για σταθεροποιημένα $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$, το σύνολο $\left\{f \in H_p : \forall\, a > q\ sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta = +\infty\right\}$ είναι G_δ και πυκνό στον H_p. Αν θέσουμε όπου Α = 0 και όπου Β = 2π τότε το σύνολο,

$$\left\{f \in H_p : \forall\, a > q\ \ sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta = +\infty\right\} = \{f \in H_p : \forall\, a > q\ F(f) \notin H_a\}$$

είναι G_δ και πυκνό στον H_p.

Θεώρημα 2.11: Θεωρούμε ότι $0 < p < 1$ και $a > q = \frac{p}{1-p}$ σταθεροποιημένο. Τότε το σύνολο

$$C_a = \left\{f \in H_p : \forall A, B \in \mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ A < B, \tau o\ \ sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta = +\infty\right\}$$

είναι G_δ και πυκνό στον H_p.

Απόδειξη: Από το **Θεώρημα 2.3** γνωρίζουμε ότι αν σταθεροποιήσουμε τα $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ και για σταθεροποιημένο $a > q$ το σύνολο,

$$\left\{f \in H_p :\ sup_{0<r<1}\int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha} d\theta = +\infty\right\}$$

είναι G_δ και πυκνό στον H_p. Έστω $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ τότε από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν $A', B' \in \mathbb{Q}$, με $A' < B'$, έτσι ώστε $[A', B'] \subseteq [A, B]$. Όλα τα κλειστά διαστήματα με ρητά άκρα και γνήσια θετικό μήκος είναι αριθμήσιμα το πλήθος, άρα μπορούν να παρασταθούν με μια ακολουθία $\{[A_n, B_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα για το διάστημα $[A, B]$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $[A_n, B_n] \subseteq [A, B]$. Αν η

$$h \in C_{A_n,B_n} = \left\{ f \in H_p\colon\ sup_{0<r<1} \int_{A_n}^{B_n} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty \right\}$$

τότε για κάθε $0 < r < 1$ έχουμε ότι,

$$\int_{A_n}^{B_n} \left|F(h)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \leq \int_A^B \left|F(h)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta$$

συνεπώς,

$$+\infty = \ sup_{0<r<1} \int_{A_n}^{B_n} \left|F(h)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta \leq \ sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(h)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta$$

Κατά συνέπεια ισχύει $h \in C_{A,B} = \left\{ f \in H_p\colon\ sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty \right\}$. Δηλαδή έχουμε ότι $C_{A_n,B_n} \subseteq C_{A,B}$. Τότε είναι άμεσο ότι η

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{A_n,B_n} = \bigcap_{A,B\in\mathbb{R}\ \&A<B} C_{A,B}.$$

Εφόσον ο χώρος (H_p, d_p) είναι πλήρης και τα $\{C_{A_n,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι G_δ και πυκνά στον (H_p, d_p), από το Θεώρημα Baire και η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{A_n,B_n}$ είναι G_δ και πυκνή στον (H_p, d_p). Άρα το σύνολο

$$C_a = \bigcap_{A,B\in\mathbb{R}\ \&A<B} C_{A,B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{A_n,B_n}$$

είναι G_δ και πυκνό στον (H_p, d_p) που είναι και το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.12: Θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες, $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$. Τότε προκύπτει ότι το σύνολο

$$D_p = \left\{ f \in H_p : \forall A, B \in \mathbb{R}\ \ \mu\varepsilon\ \ A < B, \right.$$

$$\left. \forall\ \alpha > q\ \tau o\ \ sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty \right\}$$

είναι G_δ και πυκνό στον (H_p, d_p).

Απόδειξη: Από το **Θεώρημα 2.11** το σύνολο,

$$C_a = \left\{ f \in H_p : \forall A, B \in \mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ A < B, \tau o \ sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty \right\}$$

για κάθε $\alpha > q$, είναι G_δ και πυκνό στον $\left(H_p, d_p\right)$.
Έστω $f \in C_a$ και $a < b$. Τότε για $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ ισχύει

$$sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta = +\infty.$$

Από το δεύτερο πόρισμα της **Παρατήρησης 2.8** προκύπτει ότι

$$sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^b d\theta = +\infty.$$

Δηλαδή $C_a \subseteq C_b$, διότι αν το $f \in C_a$ τότε $f \in C_b$. Κατά συνέπεια προκύπτει ότι το σύνολο $D_p = \bigcap_{a>q} C_a$ συμπίπτει με την αριθμήσιμη τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{q+\frac{1}{n}}$.
Εφόσον ο $\left(H_p, d_p\right)$ είναι πλήρης, από το Θεώρημα Baire, το σύνολο D_p είναι G_δ και πυκνό στον $\left(H_p, d_p\right)$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Παρατήρηση 2.13: Το **Θεώρημα 2.12** είναι το ισχυρότερο αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 2. Εκτός των άλλων συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $\varphi_{A,B,a,p}$ της **Πρότασης 2.2** μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα από τα A, B, a.
Λαμβάνοντας υπόψη το **Θεώρημα 5.12** του βιβλίου του Peter L. Duren [1], η εκφώνηση του **Θεωρήματος 2.12** μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα: Έστω $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$ τότε υπάρχει συνάρτηση $f \in H_p$ ώστε $sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta < +\infty$. Αλλά για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ και για κάθε $\alpha > q$, να ισχύει $sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^a d\theta = +\infty$. Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων $f \in H_p$ είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του $\left(H_p, d_p\right)$.

Παρατήρηση 2.14: Τα σύνολα των **Θεωρημάτων 2.9, 2.10, 2.11** και **2.12** δεν μεταβάλλονται αν το a επιτρέπεται να πάρει την τιμή $+\infty$ ή όχι. Διότι αν $\beta < +\infty$ και για h μία συνεχή συνάρτηση αν ισχύει ότι $\int_A^B |h(x)|^\beta dx = +\infty$ τότε αυτόματα έχουμε $sup_{x\in[A,B]}|h(x)| = +\infty$. Αυτό οφείλεται στην ανισότητα,

$$\frac{1}{B-A} \int_A^B |h(x)|^\beta dx \leq \ sup_{x\in[A,B]}|h(x)|^\beta.$$

Επανερχόμενοι στο **Θεώρημα 2.6** παρατηρούμε ότι αν $[A_n, B_n]$ για $n = 1,2, \dots$ είναι μία αρίθμηση των κλειστών διαστημάτων με θετικό μήκος και ρητά άκρα, τότε σύμφωνα με το **Θεώρημα Baire** και το **Θεώρημα 2.6**, η τομή

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f \in H_p : sup_{0<r<1} sup_{A_n<\theta<B_n} |F(f)(re^{i\theta})| = +\infty\}$$

είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του (H_p, d_p) για $0 < p < 1$. Επειδή κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[A, B]$ με $A, B \in \mathbb{R}$ και $A < B$, περιέχει ένα $[A_n, B_n]$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, η προηγούμενη τομή συμπίπτει με το σύνολο,

$$\{f \in H_p : \forall A, B \in \mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ A < B\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ \tau o\ sup_{0<r<1} sup_{A<\theta<B} |F(f)(re^{i\theta})| = +\infty\}$$

Έτσι έχουμε αποδείξει το ακόλουθο,

Θεώρημα 2.15: Έστω $0 < p < 1$. Τότε το σύνολο,

$$\{f \in H_p : \forall A, B \in \mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ A < B\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ \tau o\ sup_{0<r<1} sup_{A<\theta<B} |F(f)(re^{i\theta})| = +\infty\}$$

είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του χώρου (H_p, d_p).

Η συνθήκη $sup_{0<r<1} sup_{A<\theta<B} |F(f)(re^{i\theta})| = +\infty$, για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$, είναι ισοδύναμη με το ότι για κάθε $\zeta \in \mathbb{C}$ με $|\zeta| = 1$ και κάθε $r > 0$ ο περιορισμός της συνάρτησης $F(f)$ στην τομή $D(0,1) \cap D(\zeta, r)$ είναι συνάρτηση μη φραγμένη, δηλαδή η $F(f)$ είναι ολικά μη φραγμένη συνάρτηση στο $D(0,1)$ (Totally unbounded) [4],[2].

Έτσι το **Θεώρημα 2.15** έχει την επαναδιατύπωση ότι το σύνολο,

$$\{f \in H_p : \eta\ F(f)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ o\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}\ \mu\eta\ \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \sigma\tau o\ D(0,1)\}$$

είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του χώρου H_p όταν $0 < p < 1$.

Αυτό είναι σε πλήρη αντίθεση με το τι συμβαίνει για $p = 1$. Αν $f \in H_1$, τότε σύμφωνα με την ανισότητα του Hardy, δες Κεφάλαιο 1, η παράγουσα $F(f)$ έχει σειρά Taylor που συγκλίνει απολύτως. Πράγματι αν $f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$ με $|\zeta| < 1$, τότε η παράγουσα της έχει την μορφή $F(f)(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \zeta^{n+1}$. Κατά συνέπεια, κάνοντας χρήση της ανισότητας Hardy, ισχύουν τα ακόλουθα ,

$$|F(f)(\zeta)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n+1}\right| \le \pi \|f\|_{H_1} < +\infty$$

Οπότε η $F(f)$ είναι φραγμένη στο $D(0,1)$.

Ένας άλλος τοπολογικός διανυσματικός χώρος Y πολύ κοντά στον H_1, με $H_1 \subseteq Y$ είναι $Y = \bigcap_{0<p<1} H_p$. Σε αυτό τον χώρο επίσης κατ' αντίθεση με το ότι συμβαίνει στον H_1, το σύνολο των $f \in Y$ ώστε $F(f)$ να είναι ολικά άφρακτη στον $D(0,1)$ είναι G_δ και πυκνό.
Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του **Θεωρήματος 2.15**, δεδομένου ότι $g(z) = \frac{1}{1-z} \in Y$, αλλά $g \notin H_1$.

Θέτουμε

$$K = \left\{ W \subseteq \bigcap_{0<p<1} H_p : \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\, p' < 1\; \kappa\alpha\iota\;\; U \in \mathcal{T}_{p'}\;\; \acute{\varepsilon}\tau\sigma\iota\; \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\; W = U \cap \bigcap_{0<p<1} H_p \right\}$$

Ο χώρος $\left(\bigcap_{0<p<1} H_p, \mathcal{T}(K)\right)$ είναι πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Για σταθεροποιημένα $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$, κάνοντας χρήση της **Πρόταση 5.2** του άρθρου της Μ. Συσκάκη [5], θέτουμε όπου $V = \bigcap_{0<p<1} H_p$, $X = \{z \in D(0,1) \colon z = re^{i\theta}\; \mu\varepsilon\;\; 0 < r < 1\; \kappa\alpha\iota\; A < \theta < B\}$ και $T(f)(z) = F(f)(z)$ με $T \colon \bigcap_{0<p<1} H_p \to \mathbb{C}^X$.

1) Η $T(\quad)(z) \colon \bigcap_{0<p<1} H_p \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής.

Πράγματι έστω $\{(f_m)_{m\in\mathbb{N}}, f\} \subseteq \bigcap_{0<p<1} H_p$ με $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ ως προς την τοπολογία της $\bigcap_{0<p<1} H_p$. Από τον ορισμό της τοπολογίας $\mathcal{T}(K)$ προκύπτει ότι η $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ ως προς την τοπολογία της H_p για κάθε $0 < p < 1$. Κατά συνέπεια για κάθε συμπαγές υποσύνολο του μοναδιαίου ανοικτού δίσκου ισχύει ότι η $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ ομοιόμορφα. Συνεπώς ισχύουν τα ακόλουθα,

$$|F(f_m)(z) - F(f)(z)| \leq r.\, sup_{|x|\leq r} |f_m(x) - f(x)|$$

όπου $z \in D(0,1)$ και $0 < r < 1$ έτσι ώστε $|z| \leq r$.

2) Είναι άμεσο ότι η απεικόνιση $T \colon \bigcap_{0<p<1} H_p \to \mathbb{C}^X$ είναι γραμμική.

Από την **Πρόταση 1.11** για την απεικόνιση $g(x) = \frac{1}{1-xe^{-i\delta}}$, με $A < \delta < B$, ισχύει ότι η $g \in \bigcap_{0<p<1} H_p$ ενώ η $g \notin H_\alpha$ για κάθε $\alpha \geq 1$. Επίσης όπως έχει ήδη δειχθεί στο **Θεώρημα 2.6** η παράγουσα της g στο σύνολο X είναι μη φραγμένη. Άρα το σύνολο,

$$S = \left\{ f \in \bigcap_{0<p<1} H_p : sup_{0<r<1} sup_{A<\theta<B} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right| = +\infty \right\}$$

είναι μη κενό. Συνεπώς, από την **Πρόταση 5.2** του άρθρου της Μ. Συσκάκη [5], το S είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του χώρου $\left(\bigcap_{0<p<1} H_p, \mathcal{T}(K)\right)$.

Όπως έχει ήδη δειχθεί στο **Θεώρημα 2.15** ισχύουν τα ακόλουθα,

$$M = \left\{ f \in \bigcap_{0<p<1} H_p : \forall A, B \in \mathbb{R}\; \mu\varepsilon\; A < B\; \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\; \acute{o}\tau\iota\; \tau o\; sup_{0<r<1} sup_{A<\theta<B} \left| F(f)\left(re^{i\theta}\right) \right| \right.$$

$$\left. = +\infty \right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ f \in \bigcap_{0<p<1} H_p : sup_{0<r<1} sup_{A_n<\theta<B_n} \left| F(f)\left(re^{i\theta}\right) \right| = +\infty \right\}$$

όπου $[A_n, B_n]$ για $n = 1,2, \dots$ είναι μία αρίθμηση των κλειστών διαστημάτων με θετικό μήκος και ρητά άκρα.

Συνεπώς από το **Θεώρημα Baire** το σύνολο M είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του χώρου $\left(\bigcap_{0<p<1} H_p, \mathcal{T}(K)\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Σκιαγράφηση περαιτέρω αποτελεσμάτων

Στο παρόν κεφάλαιο αρχικά, για κάθε $0 < p \leq 1$, θα αντικαταστήσουμε τον χώρο H_p με το χώρο $\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$ του οποίου η τοπολογία $\mathcal{T} = \mathcal{T}(C)$ είναι η ελάχιστη που περιέχει το σύνολο,

$$C = \left\{V \in P\left(\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha\right): υπάρχει\ \alpha < p\ και\ W \in \mathcal{T}_\alpha\ έτσι\ ώστε\ V = W \cap \bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha\right\}.$$

Η τομή $\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$ ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι, αν $0 < p$ και $f(z) = \frac{1}{(1-z)^\gamma}$ με $f \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$, από το **Πόρισμα 1.12**, εφόσον $f \in H_\alpha$ για κάθε $\alpha < p$ συνεπάγεται ότι $\gamma \leq \frac{1}{p}$. Αν $\gamma = \frac{1}{p}$ και $f \in H_p$ τότε προκύπτει ότι $\frac{1}{1-z} \in H_1$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την **Πρόταση 1.11**.
Άρα αν $\gamma = \frac{1}{p}$ η $f \notin H_p$ ενώ ανήκει στην $\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$. Το τελευταίο προκύπτει από την **Πρόταση 1.11**, εφόσον για να ισχύει $f(z) = \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{p}}} \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$, αρκεί $\frac{1}{p}\alpha < 1$ για κάθε $0 < \alpha < p$, το οποίο και ισχύει.

Για $p = 1$ τότε η $f \in \bigcap_{0<\alpha<1} H_\alpha$ και είναι άμεσο από το **Θεώρημα 5.12** του βιβλίου του Peter L. Duren [1] ότι η παράγουσα $F(f) \in \bigcap_{0<c<+\infty} H_c$.
Επίσης από το **Πόρισμα 1.12** και το **Θεώρημα 5.12** του βιβλίου του Peter L. Duren [1] για $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$ και $f(z) = \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{p}}}$, παρατηρούμε ότι η παράγουσα

$$F(f)(z) = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{p}-1}} - 1\right) \in \bigcap_{0<c<q} H_c$$

ενώ η $F(f) \notin H_q$.
Πράγματι για κάθε $0 < c < +\infty$ ισχύουν τα ακόλουθα: Ο H_c είναι διανυσματικός χώρος και αν g μία σταθερή συνάρτηση τότε $g \in H_c$. Αν ισχύει ότι η $F(f) \in H_q$ τότε $\frac{q}{(1-z)^{\frac{1}{q}}} = \frac{q}{(1-z)^{\frac{1}{q}}} - q + \mathrm{q} \in H_q$. Από το **Πόρισμα 1.12** καταλήγουμε σε άτοπο εφόσον $\frac{q}{(1-z)^{\frac{1}{q}}} \notin H_q$.
Συνεπώς η $F(f) \notin H_r$ για κάθε $r \geq q$.

Από το **Θεώρημα 5.12** του βιβλίου του Peter L. Duren [1] ισχύει ότι αν $h \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$, με $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$, η παράγουσα της $F(h) \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \bigcap_{0<c<q} H_c$ ενώ για $p = 1$ η $F(h) \in \bigcap_{0<\alpha<1} H_{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \bigcap_{0<c<+\infty} H_c$.
Οι ισότητες των τομών οφείλονται στο ότι η συνάρτηση $\frac{x}{1-x}$ με $x \in (0,1)$ είναι αύξουσα και συνεχής.

Από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι για $0 < p < 1$ ο χώρος $\bigcap_{0<c<q} H_c$ είναι ο καλύτερος δυνατός με την έννοια που αναφέρεται στο τέλος του **Θεωρήματος 5.12** του βιβλίου του Peter L. Duren [1].

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν στους χώρους $\left(\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha, \mathcal{T}\right)$ για $0 < p < 1$ είναι παρόμοια με αυτά του κεφαλαίου 2 και βασίζονται στο ακόλουθο θεώρημα,

Έστω $A < B$ όπου $A, B \in \mathbb{R}$ και $c \geq q = \frac{p}{1-\mathrm{p}}$ για $0 < p < 1$. Όλα αυτά είναι σταθεροποιημένα. Τότε το σύνολο

$$M = \left\{ f \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha : sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^c d\theta = +\infty \right\}$$

είναι G_δ και πυκνό στο χώρο $\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$.

Το ισχυρότερο αποτέλεσμα που έχουμε σε αυτή την περίπτωση είναι το ακόλουθο,

Έστω $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$ τότε υπάρχει συνάρτηση $f \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$ ώστε $sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^c d\theta < +\infty$ για κάθε $c < q$. Αλλά για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ και για κάθε $c \geq q$, να ισχύει ότι το $sup_{0\leq r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^c d\theta = +\infty$. Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του $\left(\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha, \mathcal{T}\right)$.

Αποτελέσματα παρόμοια με αυτά του κεφαλαίου 2, για $0 < p < 1$, μπορούμε να δούμε και σε ένα μεγαλύτερο πλήρη μετρικοποιήσιμο τοπολογικό διανυσματικό χώρο του H_p. Ο χώρος αυτός είναι ο τοπικοποιημένος Hardy $H_{p,J}$ [6], όπου $J = \{e^{i\theta} : x \leq \theta \leq w\}$, για κάποια $x, w \in \mathbb{R}$ με $x < w$, ο οποίος αποτελείται από τις ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες στον μοναδιαίο δίσκο με $sup_{0\leq r<1} \int_x^w \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta < +\infty$. Για $1 \leq p < +\infty$ η τοπολογία των $H_{p,J}$ [6], είναι η Frechet τοπολογία η οποία παράγεται από τις ημινόρμες,

$$\|f\|_{1,p,J} = sup_{0\leq r<1} \left(\int_x^w \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \text{ για } m = 1$$

και

$$\|f\|_{m,p,J} = sup_{|z|\leq 1-\frac{1}{m}} |f(z)| \text{ για } m = 2,3,4, \dots$$

Η αντίστοιχη μετρική, για $f, g \in H_{p,J}$, είναι,

$$d_{p,J}(f,g) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f-g\|_{m,p,J}}{1 + \|f-g\|_{m,p,J}}$$

Για $0 < p < 1$ θέτουμε

$$d_{1,p,J}(f,g) = \ sup_{0\le r<1} \int_{x}^{w} \left|f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})\right|^{p} d\theta$$

και

$$d_{m,p,J}(f,g) = \ sup_{|z|\le 1-\frac{1}{m}}|f(z) - g(z)| \quad \text{για } m = 2,3,4,\ldots$$

Σε αυτή τη περίπτωση η μετρική έχει την ακόλουθη μορφή,

$$d_{p,J}(f,g) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d_{m,p,J}(f,g)}{1 + d_{m,p,J}(f,g)}$$

Για σταθεροποιημένα $0 < p < 1$ και $\alpha > q = \frac{p}{1-p}$, η ύπαρξη συνάρτησης g στους χώρους $H_{p,J}$, της οποίας η παράγουσα $F(g) \notin H_{a,I}$ είναι άμεση από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2 στους χώρους Hardy H_p, διότι ο $H_{p,J}$ περιέχει τον H_p. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη ενός συνόλου τέτοιων συναρτήσεων πυκνού και G_δ στον $H_{p,J}$. Για τα διαστήματα I, J ισχύουν τα ακόλουθα είτε $I = J$ είτε $I \neq J$ με $I \cap J \neq \emptyset$ είτε $I \cap J = \emptyset$.
Σύμφωνα με αυτή την αρχή το ισχυρότερο αποτέλεσμα το οποίο επιτυγχάνουμε για αυτούς τους χώρους είναι το ακόλουθο,

Έστω $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$, τότε υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f \in H_{p,J}$ ώστε για κάθε $\alpha > q$ και οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[A, B]$ με $A, B \in \mathbb{R}$ και $A < B$ να ισχύει $sup_{0<r<1} \int_A^B \left|F(f)(re^{i\theta})\right|^{a} d\theta = +\infty$. Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων είναι G_δ και πυκνό στον $H_{p,J}$.
Σημειώνουμε ότι στην προηγούμενη διατύπωση δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παράγουσα της συνάρτησης f ανήκει στον $H_{q,J}$ διότι δεν γνωρίζουμε αν το **Θεώρημα 5.12** του βιβλίου του Peter L. Duren [1], εξακολουθεί να ισχύει στους $H_{p,J}$. Πιστεύουμε μάλιστα ότι δεν ισχύει.

Στη συνέχεια για κάθε $0 < p < 1$, αντικαθιστούμε τον χώρο $H_{p,J}$ με το χώρο $\bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}$ του οποίου η τοπολογία $\mathcal{T}_J = \mathcal{T}_J(C)$ είναι η ελάχιστη που περιέχει το σύνολο,

$$C = \left\{V \in P\left(\bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}\right): \text{υπάρχει } \alpha < p \text{ και } W \in \mathcal{T}_{\alpha,J} \text{ έτσι ώστε } V = W \cap \bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}\right\}.$$

Το σύνολο $\bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}$ ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_J$ είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι και πλήρης.

Παρόμοια με τη περίπτωση του χώρου $\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$ για $0 < p < 1$, υπάρχει συνάρτηση $f \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}$ έτσι ώστε η παράγουσα της $F(f) \notin H_{q,I}$. Όμοια με την περίπτωση του χώρου $\bigcap_{0<\alpha<p} H_\alpha$ για $0 < p < 1$, αποδεικνύεται ότι το σύνολο των συναρτήσεων που παρουσιάζουν αυτά τα χαρακτηριστικά είναι πυκνό και G_δ στον χώρο $\bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}$.

Και σε αυτή την περίπτωση το ισχυρότερο αποτέλεσμα το οποίο επιτυγχάνουμε είναι το ακόλουθο,

Έστω $0 < p < 1$ και $q = \frac{p}{1-p}$ τότε υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}$ ώστε για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ και για κάθε $c \geq q$, να ισχύει ότι το $sup_{0\leq r<1} \int_A^B \left|F(f)\left(re^{i\theta}\right)\right|^c d\theta = +\infty$.

Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων $f \in \bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}$, είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του χώρου $\left(\bigcap_{0<\alpha<p} H_{\alpha,J}, \mathcal{T}_J\right)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Peter L. Duren, “Theory of $\mathrm{H_p}$ spaces”, Academic Press New York and London 1970.

[2] Hatziafratis T., Kioulafa K., Nestoridis V. “On Bergman type spaces of holomorphic functions and the density, in these spaces , of certain classes of singular functions.” Complex Var. Elliptic Equ, 63 (2018, no 7-8, 1011-1032. Δες επίσης arxiv:1703.00423.

[3] Paul Koosis, “Introduction to H_p spaces”, Cambridge University Press 1980.

[4] Nestoridis V., “From Universality to generic non-extendability and total unboundedness of holomorphic functions.”, Anal. Math. Phys. 9 (2019), no 2, 887-897.

[5] Siskaki Maria , “Boundedness of derivatives and anti-derivatives of holomorphic functions as a rare phenomenon”, J. Math. Anal. Appl. 426 (2018), no 2, 1073-1086. Δες επίσης arxiv: 1611.05386.

[6] V. Nestoridis, A. G. Siskakis, A. Stavrianidi and S. Vlachos, “Generic non-extendability and total unboundedness in function spaces”, J. Math. Anal. Appl. 475 (2019), Issue 2, 1720-1731. Δες επίσης arxiv: 1811.04408.