Μοναδιαία κβαντικά κανάλια, κυριαρχία και το θεώρημα του Nielsen

Διπλωματική Εργασία
Αργυρώ Καρίμαλη

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2021

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Μιχαήλ Ανούσης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Αιγαίου
Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Αριστείδης Κατάβολος, Ομότιμος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας είναι μια γρήγορα αναπτυσσόμενη επιστημονική περιοχή που συγκεντρώνει ιδέες από την Κλασική Θεωρία Πληροφορίας, την Κβαντική Μηχανική και την Επιστήμη των υπολογιστών. Στη μελέτη των προβλημάτων αυτής της περιοχής, χρησιμοποιούνται και αναπτύσσονται τεχνικές διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών, όπως της Θεωρίας Τελεστών, της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Κβαντικής Στατιστικής Φυσικής.

Η Κλασική Θεωρία Πληροφορίας είναι η μαθηματική θεωρία που αφορά στην επεξεργασία πληροφοριών, δηλαδή αποθήκευση και μεταφορά των πληροφοριών, ενώ η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο η επεξεργασία αυτή μπορεί να γίνει με τη χρήση κβαντικών μηχανικών συστημάτων. Ασχολείται με το πώς μπορούν να αξιοποιηθούν οι κβαντο-μηχανικές ιδιότητες των φυσικών συστημάτων για να επιτευχθεί αποτελεσματική αποθήκευση και μετάδοση των πληροφοριών.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε θέματα από την Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας. Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε τη βασική θεωρία των κβαντικών καναλιών και στοιχεία της θεωρίας κυριαρχίας.

Στο 2ο κεφάλαιο της εργασίας αναφέρουμε για λόγους πληρότητας βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια. Επίσης εισάγουμε τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Ο όρος καταχωρητής χρησιμοποιείται για να περιγράψει το στοιχείο ενός υπολογιστή στο οποίο μπορούμε να αποθηκεύσουμε και να διαχειριστούμε πεπερασμένο πλήθος δεδομένων. Κάθε φυσικό σύστημα στο οποίο μπορεί να αποθηκευτεί πεπερασμένο πλήθος δεδομένων και του οποίου η κατάσταση αλλάζει με το πέρασμα του χρόνου, μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν καταχωρητής. Στο 3ο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των καταχωρητών και των καταστάσεών τους. Στη θεωρία της κβαντικής πληροφορίας, οι καταχωρητές περιγράφουν με αφηρημένες μαθηματικές έννοιες τα φυσικά αντικείμενα που αποθηκεύουν πληροφορίες, ή μέρος τέτοιων φυσικών αντικειμένων. Οι πιθανοτικές καταστάσεις των καταχωρητών αναπαριστώνται με διανύσματα πιθανότητας, ενώ οι κβαντικές καταστάσεις αναπαριστώνται με τελεστές πυκνότητας.

Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της θεωρίας των κβαντικών καναλιών. Τα κβαντικά κανάλια αντιπροσωπεύουν φυσικές αλλαγές στις καταστάσεις των καταχωρητών. Τα βήματα ενός κβαντικού υπολογισμού, η επεξεργασία κβαντικών πληροφοριών, οι επιπτώσεις των σφαλμάτων και του θορύβου στους κβαντικούς καταχωρητές, μπορούν να μοντελοποιηθούν ως κβαντικά κανάλια. Στην εργασία μας, κβαντικό κανάλι είναι μια γραμμική απεικόνιση από έναν χώρο $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ σε έναν άλλο χώρο $\mathrm{L}(\mathcal{Y})$, που έχει δύο ιδιότητες: είναι πλήρως θετική απεικόνιση και διατηρεί το ίχνος των τελεστών. Λόγω των ιδιοτήτων αυτών, ένα κβαντικό κανάλι απεικονίζει κάθε τελεστή πυκνότητας σε τελεστή πυκνότητας. Με άλλα λόγια απεικονίζει μια κατάσταση του συστήματος σε μία άλλη κατάσταση. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αναπαραστάσεις καναλιών και κατηγορίες καναλιών. Παρουσιάσουμε τέσσερις αναπαραστάσεις των κβαντικών καναλιών, καθώς και τη σχέση μεταξύ τους. Οι αναπαραστάσεις των καναλιών αναδεικνύουν τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την μελέτη τους. Παρουσιάζουμε επίσης σημαντικές κατηγορίες καναλιών. Η ανάλυση των καναλιών που παρουσιάζουμε μας επιτρέπει να κατανοήσουμε βασικές έννοιες της θεωρίας καθώς και την σχέση κλασικής και κβαντικής επικοινωνίας. Μια κατηγορία καναλιών που θα παρουσιάσουμε είναι τα completely dephasing channels. Όταν ένα completely dephasing channel κανάλι δρα σε έναν τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, μηδενίζει όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στη διαγώνιό του και αφήνει αμετάβλητα τα στοιχεία της διαγωνίου. Επομένως, το κανάλι Δ είναι ιδανικό κανάλι για την κλασική επικοινωνία, γιατί, δρα σαν την ταυτοτική απεικόνιση πάνω σε κάθε διαγώνιο τελεστή πυκνότητας και άρα μεταφέρει αποτελεσματικά και χωρίς λάθη τις πιθανοτικές καταστάσεις, ενώ όλες τις άλλες καταστάσεις τις μετατρέπει σε πιθανοτικές καταστάσεις που προκύπτουν από τα διαγώνια στοιχεία τους.

Ο όρος κλασικός καταχωρητής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραπέμψει σε καταχωρητή ο οποίος, δεν θα επηρεαζόταν από την εφαρμογή του completely dephasing channel Δ, οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της ύπαρξής του. Κάθε κατάσταση ενός κλασικού καταχωρητή είναι απαραίτητα ένας διαγώνιος τελεστής πυκνότητας, που αντιστοιχεί σε μία πιθανοτική κατάσταση, εφόσον αυτοί είναι οι τελεστές πυκνότητας που μένουν αμετάβλητοι όταν δρα επάνω τους το κανάλι Δ.

Στο 5ο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την έννοια της κυριαρχίας και αποδεικνύουμε το θεώρημα του Nielsen. Τα separable κανάλια είναι μια σημαντική κατηγορία καναλιών. Έχουν την ιδιότητα να διατηρούν τις separable καταστάσεις. Χρησιμοποιούνται για ποσοτική εκτίμηση του entanglement μιας κατάστασης. Το θεώρημα του Nielsen μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να μεταφερθεί μια καθαρή κατάσταση σε μια άλλη επίσης καθαρή κατάσταση. Η συνθήκη αφορά τις μειώσεις της αρχικής και τις τελικής καθαρής κατάστασης σε ένα χώρο και έχει την προϋπόθεση, η μείωση της αρχικής κατάστασης να κυριαρχείται από τη μείωση της τελικής κατάστασης. Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός separable καναλιού που μεταφέρει την αρχική κατάσταση στην τελική.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Γιαννόπουλο που ανέλαβε την ολοκλήρωση της Διπλωματικής μου εργασίας και ανταποκρίθηκε άμεσα σε ό,τι χρειάστηκα.

Ευχαριστώ, επίσης, τον κύριο Κατάβολο για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή και για όσα μου έμαθε στο μάθημα της Θεωρίας Τελεστών. Ήταν καθοριστικά για την επιλογή του θέματος αυτής της εργασίας.

Θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κύριο Ανούση. Χάρη στην παρότρυνσή του και στην εμπιστοσύνη που μου έδειξε ξεκίνησα το μεταπτυχιακό αυτό. Τον ευχαριστώ επίσης για την πολύτιμη βοήθειά του, την καθοδήγησή του και τον χρόνο που μου αφιέρωσε για την εκπόνηση της εργασίας μου.

Θα ήθελα να πω και ένα μεγάλο ευχαριστώ στο σύζυγό μου και στα παιδιά μου για τη στήριξη και τη βοήθειά τους.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι ήταν ιδιαίτερα σημαντική για τη Διπλωματική αυτή εργασία η συμβολή του εκλιπόντος καθηγητή Δημήτρη Γατζούρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές έννοιες

2.1 Μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι

Σύνολο δεικτών ή αλφάβητο, είναι ένα πεπερασμένο και μη κενό σύνολο. Παραδείγματα συνόλων δεικτών είναι το δυαδικό αλφάβητο $\{0,1\}$, το Καρτεσιανό γινόμενο $\{0,1\}^n = \{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots\times\{0,1\}$ (n φορές) του δυαδικού αλφάβητου, και το αλφάβητο $\{1,\ldots,n\}$, όπου n ένας θετικός ακέραιος.

Για κάθε σύνολο δεικτών Σ, συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^\Sigma$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το Σ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{C}$. Το σύνολο $\mathbb{C}^\Sigma$ είναι διανυσματικός χώρος με διάσταση $|\Sigma|$ πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, όπου η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζονται ως εξής:

1. Πρόσθεση: Αν έχουμε δύο διανύσματα $u, v \in \mathbb{C}^\Sigma$, τότε το διάνυσμα $u+v \in \mathbb{C}^\Sigma$ ορίζεται από την ισότητα $(u+v)(a) = u(a) + v(a)$ για κάθε $a \in \Sigma$.

2. Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Έστω ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^\Sigma$ και ένα βαθμωτό μέγεθος $\alpha \in \mathbb{C}$. Το διάνυσμα $\alpha u \in \mathbb{C}^\Sigma$ ορίζεται από την ισότητα $(\alpha u)(a) = \alpha u(a)$ για κάθε $a \in \Sigma$.

Ένας διανυσματικός χώρος που ορίζεται με αυτό τον τρόπο, λέγεται μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος.

Η τιμή $u(a)$ αναφέρεται στην καταχώρηση του u στη θέση a για κάθε $u \in \mathbb{C}^\Sigma$ και για κάθε $a \in \Sigma$. Το διάνυσμα του οποίου όλες οι καταχωρήσεις είναι ίσες με μηδέν συμβολίζεται 0.

Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, συνηθίζουμε να γράφουμε $\mathbb{C}^n$ αντί για $\mathbb{C}^{\{1,\ldots,n\}}$. Άρα, ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^n$ είναι μια $n-$άδα της μορφής $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ή ένα διάνυσμα-στήλη της μορφής

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

όπου $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Αν Σ είναι τυχόν σύνολο δεικτών, ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{C}^\Sigma$ είναι ισομορφικός με τον $\mathbb{C}^n$ όπου $n = |\Sigma|$, αν θεωρήσουμε έναν ισομορφισμό

$$f: \ \{1, \dots, n\} \to \Sigma$$

και με τον ισομορφισμό $u \to u \circ f$ αντιστοιχίσουμε κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^\Sigma$ στο διάνυσμα του $\mathbb{C}^n$ του οποίου η καταχώρηση στη θέση k είναι ίση με $u(f(k))$, για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$.

Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v\rangle$ δύο διανυσμάτων $u, v \in \mathbb{C}^\Sigma$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle u, v\rangle = \sum_{a\in\Sigma} \overline{u(a)} v(a) \tag{2.1.1}$$

Η απεικόνιση αυτή

$$\langle \ , \ \rangle : \mathbb{C}^\Sigma \times \mathbb{C}^\Sigma \to \mathbb{C} \tag{2.1.2}$$

ορίζει πράγματι ένα εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Είναι γραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή: για κάθε $u, v, w \in \mathbb{C}^\Sigma$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle. \tag{2.1.3}$$

(ii) Για κάθε $u, v \in \mathbb{C}^\Sigma$,

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}. \tag{2.1.4}$$

(iii) Για κάθε $u \in \mathbb{C}^\Sigma$,

$$\langle u, u\rangle \geq 0. \tag{2.1.5}$$

(iv) Ισχύει ότι

$$\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0. \tag{2.1.6}$$

Η Ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος $u \in \mathbb{C}^\Sigma$ ορίζεται ως εξής:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{a\in\Sigma} |u(a)|^2}. \tag{2.1.7}$$

Η Ευκλείδεια νόρμα ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που ορίζουν γενικά μια νόρμα:

(i) $\|u\| \geq 0$ για κάθε $u \in \mathbb{C}^\Sigma$.

(ii) $\|u\| = 0 \iff u = 0$.

(iii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ για κάθε $u \in \mathbb{C}^\Sigma$ και για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iv) (τριγωνική ανισότητα) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ για κάθε $u, v \in \mathbb{C}^\Sigma$.

Επίσης, ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \tag{2.1.8}$$

για κάθε $u, v \in \mathbb{C}^{\Sigma}$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα u και v είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Δύο διανύσματα $u, v \in \mathbb{C}^{\Sigma}$ λέγονται ορθογώνια αν και μόνο αν $\langle u, v\rangle = 0$. Αν τα διανύσματα u, v είναι ορθογώνια τότε γράφουμε $u \perp v$. Γενικά, αν έχουμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}^{\Sigma}$, γράφουμε $u \perp A$ αν $\langle u, v\rangle = 0$ για κάθε $v \in A$.

Μια συλλογή διανυσμάτων

$$\{u_a : a \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}^{\Sigma}, \tag{2.1.9}$$

όπου Γ ένα σύνολο δεικτών, λέγεται ορθογώνιο σύνολο αν ισχύει $\langle u_a, u_b\rangle = 0$ για κάθε $a, b \in \Gamma$ με $a \neq b$. Μια συλλογή από μη μηδενικά ορθογώνια διανύσματα είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητη.

Ένα ορθογώνιο σύνολο από μοναδιαία διανύσματα λέγεται ορθοκανονικό σύνολο. Αν ένα τέτοιο σύνολο είναι βάση του χώρου, τότε λέγεται ορθοκανονική βάση. Ένα σύνολο της μορφής (2.1.9) είναι βάση του $\mathbb{C}^{\Sigma}$ αν και μόνο αν $|\Gamma| = |\Sigma|$. Η συνήθης βάση του $\mathbb{C}^{\Sigma}$ είναι η ορθοκανονική βάση $\{e_a : a \in \Sigma\}$, όπου

$$e_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a = b \\ 0 & \text{αν } a \neq b \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών του συνόλου $\{u_a : a \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}^{\Sigma}$ συμβολίζεται ως

$$\operatorname{span}\{u_a : a \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}^{\Sigma}. \tag{2.1.10}$$

Ευθύ άθροισμα των n Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}, \ldots, \mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n}$ είναι ο Ευκλείδειος χώρος

$$\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n} \tag{2.1.11}$$

όπου $\Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n$ συμβολίζει την ξένη ένωση των συνόλων $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, δηλαδή,

$$\Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n = \bigcup_{k \in \{1, \ldots, n\}} \{(k, a) : a \in \Sigma_k\}. \tag{2.1.12}$$

Αν έχουμε τα διανύσματα $u_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n \in \mathcal{X}_n$, τότε για το διάνυσμα $u_1 \oplus \cdots \oplus u_n \in \mathcal{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_n$ έχουμε

$$(u_1 \oplus \cdots \oplus u_n)(k, a) = u_k(a), \tag{2.1.13}$$

για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ και $a \in \Sigma_k$. Αν κάθε διάνυσμα u_k το δούμε σαν διάνυσμα-στήλη διάστασης $|\Sigma_k|$, τότε το διάνυσμα $u_1 \oplus \cdots \oplus u_n$ θα είναι το διάνυσμα-στήλη

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}$$

το οποίο έχει πλήθος καταχωρήσεων $|\Sigma_1| + \cdots + |\Sigma_n|$. Κάθε στοιχείο του $\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_n$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $u_1 \oplus \cdots \oplus u_n$ όπου $u_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n \in \mathcal{X}_n$.

Για κάθε $u_1, v_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n, v_n \in \mathcal{X}_n$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$u_1 \oplus \cdots \oplus u_n + v_1 \oplus \cdots \oplus v_n = (u_1 + v_1) \oplus \cdots \oplus (u_n + v_n), \tag{2.1.14}$$

$$\alpha(u_1 \oplus \cdots \oplus u_n) = (\alpha u_1) \oplus \cdots \oplus (\alpha u_n) \tag{2.1.15}$$

και

$$\langle u_1 \oplus \cdots \oplus u_n, v_1 \oplus \cdots \oplus v_n \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle u_n, v_n \rangle. \tag{2.1.16}$$

Το τανυστικό γινόμενο των $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}, \ldots, \mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n}$ είναι ο Ευκλείδειος χώρος

$$\mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n}. \tag{2.1.17}$$

Αν έχουμε τα διανύσματα $u_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n \in \mathcal{X}_n$, τότε για το διάνυσμα $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in \mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n$ έχουμε

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(a_1, \ldots, a_n) = u_1(a_1) \cdots u_n(a_n). \tag{2.1.18}$$

Κάθε διάνυσμα της μορφής $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ ονομάζεται στοιχειώδης τανυστής. Τα διανύσματα αυτά παράγουν το χώρο $\mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n$, αλλά δεν ισχύει ότι κάθε στοιχείο του χώρου αυτού είναι στοιχειώδης τανυστής.

Για κάθε $u_1, v_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n, v_n \in \mathcal{X}_n$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\begin{aligned} & u_1 \otimes \cdots \otimes u_{k-1} \otimes (\alpha u_k + \beta v_k) \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n \\ & \quad = \alpha(u_1 \otimes \cdots \otimes u_{k-1} \otimes u_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n) \\ & \qquad + \beta(u_1 \otimes \cdots \otimes u_{k-1} \otimes v_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n) \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

και

$$\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle \cdots \langle u_n, v_n \rangle. \tag{2.1.20}$$

Η παρακάτω πρόταση παρουσιάζει το τανυστικό γινόμενο Ευκλείδειων χώρων με τρόπο πιο αφηρημένο αλλά, συχνά, πιο εφαρμόσιμο:

Πρόταση 2.1.1. *Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδιοι χώροι $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ και $\mathcal{Y}$ και*

$$\phi : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{Y} \tag{2.1.21}$$

μια πολυγραμμική συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι η απεικόνιση

$$u_k \mapsto \phi(u_1, \ldots, u_n) \tag{2.1.22}$$

είναι γραμμική για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ και κάθε σταθερή επιλογή διανυσμάτων $u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n$. Υπαρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$A : \mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n \to \mathcal{Y} \tag{2.1.23}$$

τέτοια ώστε

$$\phi(u_1, \ldots, u_n) = A(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \tag{2.1.24}$$

για κάθε $u_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n \in \mathcal{X}_n$.

2.2 Γραμμικοί τελεστές

Αν $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ είναι δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, συμβολίζουμε με $\mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων της μορφής

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}. \tag{2.2.1}$$

Οι απεικονίσεις αυτής της μορφής λέγονται και γραμμικοί τελεστές ή απλά τελεστές από τον $\mathcal{X}$ στον $\mathcal{Y}$. Αν $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, συνηθίζουμε να συμβολίζουμε με Au αντί για $A(u)$ το διάνυσμα που προκύπτει από την εφαρμογή του A σε ένα διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$.

Το σύνολο $\mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος όπου η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζονται ως εξής:

1. Πρόσθεση: Αν $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι δύο τελεστές, ο τελεστής $A + B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζεται από την ισότητα

   $$(A + B)u = Au + Bu \tag{2.2.2}$$

   για κάθε $u \in \mathcal{X}$.

2. Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Αν $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι ένας τελεστής και $\alpha \in \mathbb{C}$ ένας μιγαδικός αριθμός, ο τελεστής $\alpha A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζεται από την ισότητα

   $$(\alpha A)u = \alpha A u \tag{2.2.3}$$

   για κάθε $u \in \mathcal{X}$.

Ένας πίνακας μιγαδικών αριθμών είναι μια απεικόνιση της μορφής

$$M : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C} \tag{2.2.4}$$

όπου Γ, Σ δύο σύνολα δεικτών. Για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$, η τιμή $M(a, b)$ λέγεται (a, b)-καταχώρηση του πίνακα M. Τα στοιχεία a, b λέγονται δείκτες. Το a δείχνει τη γραμμή και το b δείχνει τη στήλη στην οποία βρίσκεται η καταχώρηση $M(a, b)$. Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός των πινάκων ορίζονται με τον παρακάτω τρόπο:

1. Πρόσθεση: Αν έχουμε δύο πίνακες $M : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C}$ και $N : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C}$, τότε ο πίνακας $M + N$ ορίζεται από τη σχέση:

   $$(M + N)(a, b) = M(a, b) + N(a, b) \tag{2.2.5}$$

   για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$.

2. Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Αν έχουμε έναν πίνακα $M : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C}$ και έναν μιγαδικό αριθμό $\alpha \in \mathbb{C}$, τότε ο πίνακας αM ορίζεται από τη σχέση:

   $$(\alpha M)(a, b) = \alpha M(a, b) \tag{2.2.6}$$

   για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$.

Επίσης, ορίζεται και ο πολλαπλασιασμός πινάκων με τον εξής τρόπο:

3. Πολλαπλασιασμός πινάκων: Αν έχουμε δύο πίνακες $M : \Gamma \times \Lambda \to \mathbb{C}$ και $N : \Lambda \times \Sigma \to \mathbb{C}$, τότε ο πίνακας $MN : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$(MN)(a,b) = \sum_{c \in \Lambda} M(a,c)N(c,b) \tag{2.2.7}$$

για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$.

Αν $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Gamma}$ είναι δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, υπάρχει μία 1-1 και επί γραμμική αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ των τελεστών και της συλλογής των πινάκων της μορφής $M : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C}$: Σε κάθε τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ αντιστοιχίζεται ο πινακας M που ορίζεται από τη σχέση

$$M(a,b) = \langle e_a, Ae_b \rangle \tag{2.2.8}$$

για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$. Ο τελεστής A ορίζεται μοναδικά από τον πίνακα M, και μπορεί να προσδιοριστεί αν έχουμε δεδομένο τον πίνακα M, από τη σχέση

$$(Au)(a) = \sum_{b \in \Sigma} M(a,b)u(b) \tag{2.2.9}$$

για κάθε $a \in \Gamma$ και για κάθε $u \in \mathcal{X}$. Σύμφωνα με αυτή την αντιστοιχία, ο πολλαπλασιασμός των πινάκων είναι ισοδύναμος με τη σύνθεση των τελεστών.

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε την αντιστοιχία τελεστή-πίνακα χωρίς να βάζουμε στον πίνακα όνομα διαφορετικό από αυτό που έχει ο τελεστής. Δηλαδή, για κάθε τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Gamma}$, θα έχουμε τον πίνακα $A : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C}$ με

$$A(a,b) = \langle e_a, Ae_b \rangle \tag{2.2.10}$$

για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$.

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Gamma}$. Για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$, ο τελεστής $E_{a,b} \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζεται ως εξής:

$$E_{a,b}u = u(b)e_a \tag{2.2.11}$$

για κάθε $u \in \mathcal{X}$. Ισοδύναμα, ο τελεστής $E_{a,b}$ δίνεται από τη σχέση:

$$E_{a,b}(c,d) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (c,d) = (a,b) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $c \in \Gamma$ και $d \in \Sigma$. Η συλλογή

$$\{E_{a,b} : a \in \Gamma, b \in \Sigma\} \tag{2.2.12}$$

είναι μια βάση του $\mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ γνωστή ως συνήθης βάση του χώρου αυτού. Το πλήθος των στοιχείων της βάσης αυτής ικανοποιεί και τη σχέση: $\dim(\mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = \dim(\mathcal{X})\dim(\mathcal{Y})$.

Μια χρήσιμη ιδιότητα αυτών των τελεστών είναι η εξής:

$$E_{a,b}E_{c,d} = \begin{cases} E_{a,d} & \text{αν } b = c \\ 0 & \text{αν } b \neq c \end{cases}$$

όταν $E_{a,b} \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $E_{c,d} \in L(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$ για κάποιους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$.

Αυτό προκύπτει από τους παρακάτω υπολογισμούς: Για κάθε $u \in \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} E_{a,b}E_{c,d}u &= E_{a,b}u(d)e_c = u(d)E_{a,b}e_c = u(d)e_c(b)e_a \\ &= \begin{cases} u(d)e_a & \text{αν } b = c \\ 0 & \text{αν } b \neq c \end{cases} = \begin{cases} E_{a,d}u & \text{αν } b = c \\ 0 & \text{αν } b \neq c. \end{cases} \end{aligned}$$

Για κάθε τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^\Gamma$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, ορίζονται οι τελεστές:

$$\overline{A} \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \quad \text{και} \quad A^\intercal, A^* \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \tag{2.2.13}$$

με τον εξής τρόπο:

(i) Ο τελεστής $\overline{A} \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, που ονομάζεται συζυγής τελεστής του A, είναι ο τελεστής με πίνακα ο οποίος έχει για στοιχεία τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς των αντίστοιχων στοιχείων του πίνακα του A. Δηλαδή

$$\overline{A}(a, b) = \overline{A(a, b)} \tag{2.2.14}$$

για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$.

(ii) Ο τελεστής $A^\intercal \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, που ονομάζεται ανάστροφος του A, είναι ο τελεστής με πίνακα τον ανάστροφο του πίνακα του A. Δηλαδή:

$$A^\intercal(b, a) = A(a, b) \tag{2.2.15}$$

για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$.

(iii) Ο τελεστής $A^* \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, που ονομάζεται ανάστροφος συζυγής (adjoint)του A, είναι ο τελεστής ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση:

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle \tag{2.2.16}$$

για κάθε $u \in \mathcal{X}$ και $v \in \mathcal{Y}$.

Ισχύει ότι

$$A^* = \overline{A^\intercal}. \tag{2.2.17}$$

Οι απεικονίσεις $A \mapsto \overline{A}$ και $A \mapsto A^*$ είναι συζυγώς γραμμικές και η απεικόνιση $A \mapsto A^\intercal$ είναι γραμμική. Δηλαδή

$$\begin{aligned} \overline{\alpha A + \beta B} &= \overline{\alpha}\overline{A} + \overline{\beta}\ \overline{B} \\ (\alpha A + \beta B)^* &= \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* \\ (\alpha A + \beta B)^\intercal &= \alpha A^\intercal + \beta B^\intercal, \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

για κάθε $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Για τις απεικονίσεις αυτές ισχύουν τα εξής:

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad (A^*)^* = A, \quad (A^\intercal)^\intercal = A. \tag{2.2.19}$$

Κάθε διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$ ενός μιγαδικού Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{X}$ μπορεί να ταυτιστεί με γραμμικό τελεστή του $\mathrm{L}(\mathbb{C}, \mathcal{X})$ με την απεικόνιση $\alpha \mapsto \alpha u$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$. Σύμφωνα με αυτή την ταύτιση, οι γραμμικές απεικονίσεις $\overline{u} \in \mathrm{L}(\mathbb{C}, \mathcal{X})$ και $u^\intercal, u^* \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ ορίζονται όπως έχουμε περιγράψει παραπάνω. Το διάνυσμα $\overline{u} \in \mathcal{X}$ έχει για καταχωρήσεις τους συζυγείς μιγαδικούς των καταχωρήσεων του u. Δηλαδή, αν $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$, τότε

$$\overline{u}(a) = \overline{u(a)} \tag{2.2.20}$$

για κάθε $a \in \Sigma$.

Επίσης, για κάθε διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$, η απεικόνιση $u^* \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ ικανοποιεί τη σχέση

$$u^* v = \langle u, v \rangle \tag{2.2.21}$$

για κάθε $v \in \mathcal{X}$.

Επομένως, για τα διανύσματα $u \in \mathcal{X}$ και $v \in \mathcal{Y}$, ο τελεστής $vu^* \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(vu^*)w = v(u^* w) = \langle u, w \rangle v \tag{2.2.22}$$

για κάθε $w \in \mathcal{X}$.

Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^\Gamma$ τότε για κάθε $a \in \Gamma$ και $b \in \Sigma$ ισχύει ότι

$$e_a e_b^* = E_{a,b}, \tag{2.2.23}$$

αφού $(e_a e_b^*)u = \langle e_b, u \rangle e_a = u(b) e_a = E_{a,b} u$ για κάθε $u \in \mathcal{X}$.

Ο πυρήνας ενός τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι ο υπόχωρος του $\mathcal{X}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\ker(A) = \{u \in \mathcal{X} : Au = 0\}, \tag{2.2.24}$$

και η εικόνα του τελεστή A είναι ο υπόχωρος του $\mathcal{Y}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{im(A)} = \{Au : u \in \mathcal{X}\}. \tag{2.2.25}$$

Για κάθε τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ισχύει ότι

$$\ker(A) = \ker(A^* A) \ \text{ και } \ \mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(AA^*) \tag{2.2.26}$$

και

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{im}(A)) = \dim(\mathcal{X}). \tag{2.2.27}$$

Η τάξη ενός τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ συμβολίζεται $\mathrm{rank}(A)$ και είναι η διάσταση της εικόνας του A. Δηλαδή

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{im}(A)). \tag{2.2.28}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.2.26) (2.2.27), ισχύει και ότι

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^*) = \mathrm{rank}(A^* A). \tag{2.2.29}$$

Για τον τελεστή $vu^* \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, αν τα διανύσματα $u \in \mathcal{X}$ και $v \in \mathcal{Y}$ είναι μη μηδενικά, από τη σχέση (2.2.22) βλέπουμε ότι έχει τάξη 1. Κάθε τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τάξης 1, μπορεί να γραφτεί στη μορφή vu^*.Τα διανύσματα u και v είναι μοναδικά, με την έννοια ότι, αν $vu^* = v_1 u_1^*$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, τέτοιο ώστε $v_1 = \lambda v$ και $u_1 = \frac{1}{\lambda} u$.

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι

(2.2.30) $$\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}, \ldots, \mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n} \quad \text{και} \quad \mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}^{\Gamma_1}, \ldots, \mathcal{Y}_m = \mathbb{C}^{\Gamma_m},$$

όπου $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ και $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ σύνολα δεικτών. Για κάθε τελεστή

(2.2.31) $$A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_m)$$

υπάρχει μοναδική συλλογή τελεστών

(2.2.32) $$\{A_{j,k} \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_j) : 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$$

τέτοια ώστε

(2.2.33) $$A_{j,k}(a, b) = A\left((j, a), (k, b)\right)$$

για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in \Gamma_j$ και $b \in \Sigma_k$.

Για όλα τα διανύσματα $u_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n \in \mathcal{X}_n$ ισχύει

(2.2.34) $$A(u_1 \oplus \cdots \oplus u_n) = v_1 \oplus \cdots \oplus v_m,$$

όπου τα διανύσματα $v_1 \in \mathcal{Y}_1, \ldots, v_m \in \mathcal{Y}_m$ ορίζονται από τη σχέση

(2.2.35) $$v_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} u_k$$

για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Αντίστροφα, για κάθε συλλογή τελεστών της μορφής (2.2.32), υπάρχει μοναδικός τελεστής της μορφής (2.2.31) που ικανοποιεί τις σχέσεις (2.2.34) και (2.2.35) για όλα τα διανύσματα $u_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n \in \mathcal{X}_n$.

Υπάρχει, λοιπόν, μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των τελεστών της μορφής (2.2.31) και των συλλογών τελεστών της μορφής (2.2.32). Σύμφωνα με τους πίνακες που αντιστοιχούν στους τελεστές αυτούς, η αντιστοιχία αυτή μπορεί να γραφτεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \ldots & & \ldots \\ A_{m,1} & \ldots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

όπου, στο δεξί μέλος της ισότητας έχουμε μία συλλογή τελεστών της μορφής (2.2.32) και αριστερά είναι ο αντίστοιχος τελεστής της μορφής (2.2.31).

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι

(2.2.36) $$\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}, \ldots, \mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n} \ \text{ και } \ \mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}^{\Gamma_1}, \ldots, \mathcal{Y}_m = \mathbb{C}^{\Gamma_m},$$

όπου $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ και $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ σύνολα δεικτών. Για δοθέντες τελεστές

(2.2.37) $$A_1 \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), \ldots, A_n \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n),$$

ορίζεται το τανυστικό γινόμενό τους

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n), \tag{2.2.38}$$

το οποίο είναι ο μοναδικός τελεστής που ικανοποιεί τη σχέση

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = (A_1 u_1) \otimes \cdots \otimes (A_n u_n) \tag{2.2.39}$$

για κάθε $u_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, u_n \in \mathcal{X}_n$. Ο τελεστής αυτός μπορεί να οριστεί μέσω του πίνακα που τον αντιπροσωπεύει, ως εξής:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) = A_1(a_1, b_1) \cdots A_n(a_n, b_n) \tag{2.2.40}$$

για κάθε $a_1 \in \Gamma_1, \ldots, a_n \in \Gamma_n$ και $b_1 \in \Sigma_1, \ldots, b_n \in \Sigma_n$.

Για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_n$ και $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_n$, τους τελεστές $A_1, B_1 \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), \ldots, A_n, B_n \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n), C_1 \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1), \ldots, C_n \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Z}_n)$ και τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} &A_1 \otimes \cdots \otimes A_{k-1} \otimes (\alpha A_k + \beta B_k) \otimes A_{k+1} \otimes \cdots \otimes A_n \\ &\quad = \alpha(A_1 \otimes \cdots \otimes A_{k-1} \otimes A_k \otimes A_{k+1} \otimes \cdots \otimes A_n) \\ &\qquad + \beta(A_1 \otimes \cdots \otimes A_{k-1} \otimes B_k \otimes A_{k+1} \otimes \cdots \otimes A_n), \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

$$(C_1 \otimes \cdots \otimes C_n)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = (C_1 A_1) \otimes \cdots \otimes (C_n A_n), \tag{2.2.42}$$

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^{\mathsf{T}} = A_1^{\mathsf{T}} \otimes \cdots \otimes A_n^{\mathsf{T}}, \tag{2.2.43}$$

$$\overline{A_1 \otimes \cdots \otimes A_n} = \overline{A_1} \otimes \cdots \otimes \overline{A_n}, \tag{2.2.44}$$

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^* = A_1^* \otimes \cdots \otimes A_n^*. \tag{2.2.45}$$

Ο συμβολισμός $A^{\otimes n}$ χρησιμοποιείται για να εκφράσει το τανυστικό γινόμενο του A n φορές με τον εαυτό του.

Αν $\mathcal{X}$ είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, γράφουμε $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ αντί για $\mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Ένας τελεστής του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ λέγεται τετραγωνικός, και ο πίνακας που τον αντιπροσωπεύει είναι τετραγωνικός, δηλαδή οι δείκτες των γραμμών και των στηλών του αντλούνται από το ίδιο σύνολο.

Ο χώρος $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα: είναι διανυσματικός χώρος και η σύνθεση των τετραγωνικών τελεστών είναι προσεταιριστική και διγραμμική:

$$\begin{aligned} (XY)Z &= X(YZ) \\ Z(\alpha X + \beta Y) &= \alpha ZX + \beta ZY \\ (\alpha X + \beta Y)Z &= \alpha XZ + \beta YZ \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

για κάθε $X, Y, Z \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Ο ταυτοτικός τελεστής $\mathbb{1} \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι ο τελεστής ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\mathbb{1}u = u$ για κάθε $u \in \mathcal{X}$. Ο ταυτοτικός τελεστής μπορεί να οριστεί και από τον πίνακα που τον αντιπροσωπεύει, ο οποίος είναι ο πίνακας που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbb{1}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a = b \\ 0 & \text{αν } a \neq b \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$, αν $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Γράφουμε $\mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ αντί για $\mathbb{1}$, όταν θέλουμε να τονίσουμε τη δράση αυτού του τελεστή πάνω στον $\mathcal{X}$.

Αν $\mathcal{X}$ είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, ένας τελεστής $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ λέγεται αντιστρέψιμος αν υπάρχει τελεστής $Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $YX = \mathbb{1}$. Αν υπάρχει τέτοιος τελεστής Y, τότε είναι μοναδικός και συμβολίζεται X^{-1}. Όταν ο αντίστροφος X^{-1} του X υπάρχει, τότε ισχύει $XX^{-1} = X^{-1}X = \mathbb{1}$.

Οι διαγώνιες καταχωρήσεις ενός τετραγωνικού τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ για $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, είναι αυτές που έχουν τη μορφή $X(a, a)$, όπου $a \in \Sigma$. Το ίχνος ενός τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι το άθροισμα των διαγώνιων καταχωρήσεών του:

$$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{a \in \Sigma} X(a, a). \tag{2.2.47}$$

Το ίχνος είναι η μοναδική γραμμική συνάρτηση $\mathrm{Tr} : \mathrm{L}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τη σχέση: για όλα τα διανύσματα $u, v \in \mathcal{X}$,

$$\mathrm{Tr}(uv^*) = \langle v, u \rangle. \tag{2.2.48}$$

Αν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, για όλους τους τελεστές $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $B \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ισχύει ότι

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA). \tag{2.2.49}$$

Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως *κυκλική ιδιότητα* του ίχνους.

Με τη βοήθεια του ίχνους, ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ως εξής:

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^* B) \tag{2.2.50}$$

για κάθε $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Μπορεί να επαληθευτεί ότι αυτή η σχέση ικανοποιεί τις απαιτούμενες ιδιότητες για να είναι εσωτερικό γινόμενο:

1. Γραμμικότητα ως προς τη δεύτερη μεταβλητή:

   $$\langle A, \alpha B + \beta C \rangle = \alpha \langle A, B \rangle + \beta \langle A, C \rangle \tag{2.2.51}$$

   για κάθε $A, B, C \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Για κάθε $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$,

   $$\langle A, B \rangle = \overline{\langle B, A \rangle}. \tag{2.2.52}$$

3. Για κάθε $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$,

   $$\langle A, A \rangle \geq 0 \tag{2.2.53}$$

   με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $A = 0$.

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ για $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, ορίζεται από την ισότητα

$$\mathrm{Det}(X) = \sum_{\pi \in \mathrm{Sym}(\Sigma)} \mathrm{sign}(\pi) \prod_{a \in \Sigma} X(a, \pi(a)). \tag{2.2.54}$$

Το σύνολο $\mathrm{Sym}(\Sigma)$ συμβολίζει τη συλλογή όλων των μεταθέσεων $\pi : \Sigma \to \Sigma$, και $\mathrm{sign}(\pi) \in \{-1, +1\}$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης π.

Η ορίζουσα είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$\mathrm{Det}(XY) = \mathrm{Det}(X)\mathrm{Det}(Y) \tag{2.2.55}$$

για κάθε $X, Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Επίσης $\mathrm{Det}(X) \neq 0$ αν και μόνο αν ο X είναι αντιστρέψιμος.

Έστω ένας τελεστής $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε

$$Xu = \lambda u \tag{2.2.56}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε το u λέγεται ιδιοδιάνυσμα του X και το λ είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή του.

Για κάθε τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, έχουμε ότι το

$$p_X(\alpha) = \mathrm{Det}(\alpha \mathbb{1}_{\mathcal{X}} - X) \tag{2.2.57}$$

είναι ένα πολυώνυμο που έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1, μεταβλητή το α και βαθμό ίσο με $\dim(\mathcal{X})$. Το πολυώνυμο αυτό λέγεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* X. Το φάσμα του X, το οποίο συμβολίζεται $\mathrm{spec}(\mathcal{X})$, είναι το σύνολο που αποτελείται από τις ρίζες του πολυωνύμου p_X. Κάθε ρίζα εμφανίζεται τόσες φορές όσο και η πολλαπλότητά της. Επομένως, για το p_X ισχύει ότι

$$p_X(\alpha) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(X)} (\alpha - \lambda)^{m_\lambda} \tag{2.2.58}$$

όπου m_λ η πολλαπλότητα της ρίζας λ.

Κάθε στοιχείο $\lambda \in \mathrm{spec}(X)$ είναι απαραίτητα ιδιοτιμή του X, και κάθε ιδιοτιμή του X ανήκει στο $\mathrm{spec}(X)$.

Το ίχνος του τελεστή και η ορίζουσά του, εκφράζονται με τη βοήθεια των όρων του φάσματος του τελεστή με τον εξής τρόπο:

$$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{\lambda \in \mathrm{spec}(X)} m_\lambda \lambda \quad \text{και} \quad \mathrm{Det}(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(X)} \lambda^{m_\lambda} \tag{2.2.59}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Η *φασματική ακτίνα* ενός τελεστή X είναι η μέγιστη απόλυτη τιμή $|\lambda|$ των ιδιοτιμών λ του X. Για οποιουσδήποτε τελεστές $X, Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ισχύει ότι

$$\mathrm{spec}(XY) = \mathrm{spec}(YX). \tag{2.2.60}$$

Ένα σύνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{X})$ λέγεται *υποάλγεβρα* του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ αν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό και τη σύνθεση τελεστών. Δηλαδή, για κάθε $X, Y \in \mathcal{A}$ και $\alpha \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι

$$X + Y \in \mathcal{A}, \quad \alpha X \in \mathcal{A} \quad \text{και} \quad XY \in \mathcal{A}. \tag{2.2.61}$$

Μια υποάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{X})$ λέγεται *αυτοσυζυγής* αν ισχύει ότι $X^* \in \mathcal{A}$ για κάθε $X \in \mathcal{A}$ και λέγεται *μοναδιαία* αν ισχύει ότι $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$.

Για δύο τελεστές $X, Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, η *αγκύλη Lie* $[X, Y] \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι ο τελεστής που ορίζεται από τη σχέση:

$$[X, Y] = XY - YX. \tag{2.2.62}$$

Ισχύει ότι $[X, Y] = 0$ αν και μόνο αν $XY = YX$ δηλαδή αν και μόνο αν οι τελεστές X, Y αντιμετατίθενται.

Για κάθε σύνολο τελεστών $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ορίζεται ο μεταθέτης του:

$$\mathrm{comm}(\mathcal{A}) = \{Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X}) : [X, Y] = 0 \text{ για κάθε } X \in \mathcal{A}\}. \tag{2.2.63}$$

Ο μεταθέτης κάθε υποσυνόλου του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι μοναδιαία υποάλγεβρα του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$.

2.3 Κατηγορίες τελεστών

Οι παρακάτω κατηγορίες τελεστών έχουν ιδιαίτερη σημασία για τη θεωρία της κβαντικής πληροφορίας:

(i) *Κανονικοί τελεστές*: Ένας τελεστής $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ λέγεται κανονικός αν αντιμετατίθεται με τον συζυγή του. Δηλαδή αν $[X, X^*] = 0$, ή ισοδύναμα $XX^* = X^*X$.

(ii) *Ερμιτιανοί τελεστές*: Ένας τελεστής $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ λέγεται Ερμιτιανός αν $X = X^*$. Το σύνολο των Ερμιτιανών τελεστών που δρουν σε ένα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$, συμβολίζεται με $\mathrm{Herm}(\mathcal{X})$:

$$\mathrm{Herm}(\mathcal{X}) = \{X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}) : X = X^*\}. \tag{2.3.1}$$

Κάθε Ερμιτιανός τελεστής είναι και κανονικός τελεστής.

(iii) *Θετικά ημιορισμένοι τελεστές*: Ένας τελεστής $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ λέγεται θετικά ημιορισμένος αν ισχύει ότι $X = YY^*$ για κάποιον $Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Η συλλογή των θετικά ημιορισμένων τελεστών που δρουν σε ένα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$, συμβολίζεται με $\mathrm{Pos}(\mathcal{X})$:

$$\mathrm{Pos}(\mathcal{X}) = \{YY^* : Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})\}. \tag{2.3.2}$$

Κάθε θετικά ημιορισμένος τελεστής είναι Ερμιτιανός.

(iv) *Γνήσια θετικός τελεστής*: Ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ λέγεται γνήσια θετικός αν είναι και αντιστρέψιμος. Το σύνολο των γνήσια θετικών τελεστών που δρουν σε ένα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$, συμβολίζεται με $\mathrm{Pd}(\mathcal{X})$:

$$\mathrm{Pd}(\mathcal{X}) = \{P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X}) : \mathrm{Det}(P) \neq 0\}. \tag{2.3.3}$$

(v) *Τελεστές πυκνότητας*: Οι θετικά ημιορισμένοι τελεστές που έχουν ίχνος ίσο με 1, λέγονται τελεστές πυκνότητας. Η συλλογή των τελεστών πυκνότητας που δρουν σε ένα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$, συμβολίζεται με $\mathrm{D}(\mathcal{X})$:

$$\mathrm{D}(\mathcal{X}) = \{\rho \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X}) : \mathrm{Tr}(\rho) = 1\}. \tag{2.3.4}$$

(vi) *Τελεστές προβολής*: Ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής $\Pi \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ λέγεται τελεστής προβολής, αν ικανοποιεί και την ισότητα $\Pi^2 = \Pi$. Ισοδύναμα, ένας τελεστής προβολής είναι ένας Ερμιτιανός τελεστής ο οποίος έχει ιδιοτιμές μόνο το 0 και το 1. Η συλλογή όλων των τελεστών προβολής που δρουν σε ένα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$, συμβολίζεται με $\mathrm{Proj}(\mathcal{X})$. Για κάθε υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ υπάρχει ένας μοναδικά ορισμένος τελεστής προβολής $\Pi \in \mathrm{Proj}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $\mathrm{im}(\Pi) = \mathcal{V}$. Είναι βολικό να συμβολίζουμε με $\Pi_{\mathcal{V}}$ αυτό τον τελεστή προβολής.

(vii) *Ισομετρίες*: Ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ λέγεται ισομετρία αν διατηρεί την Ευκλείδεια νόρμα: $\|Au\| = \|u\|$ για κάθε $u \in \mathcal{X}$. Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την: $A^*A = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$. Την κλάση αυτών των τελεστών την συμβολίζουμε με $\mathrm{U}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$:

$$\mathrm{U}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : A^*A = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\}. \tag{2.3.5}$$

Για να υπάρχει μια ισομετρία της μορφής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ πρέπει να ισχύει η ανισότητα $\dim(\mathcal{Y}) \geq \dim(\mathcal{X})$. Κάθε ισομετρία διατηρεί, εκτός από την Ευκλείδεια νόρμα, και το εσωτερικό γινόμενο: $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ για κάθε $u, v \in \mathcal{X}$.

(viii) *Unitary τελεστές*: Το σύνολο των ισομετριών από ένα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$ στον εαυτό του, συμβολίζεται $\mathrm{U}(\mathcal{X})$. Οι τελεστές που ανήκουν στο σύνολο αυτό λέγονται unitary τελεστές. Κάθε unitary τελεστής $U \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί τη σχέση

$$UU^* = U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \tag{2.3.6}$$

άρα είναι και κανονικός τελεστής.

(ix) *Διαγώνιοι τελεστές*: Ένας τελεστής $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, όπου $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος με $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$, λέγεται διαγώνιος τελεστής αν $X(a, b) = 0$ για κάθε $a, b \in \Sigma$ με $a \neq b$. Για δεδομένο διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$, συμβολίζουμε με $\mathrm{Diag}(u) \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ το διαγώνιο τελεστή που ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Diag}(u)(a, b) = \begin{cases} u(a) & \text{αν } a = b \\ 0 & \text{αν } a \neq b \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$.

Το άθροισμα δύο Ερμιτιανών τελεστών είναι Ερμιτιανός τελεστής, όπως επίσης και το βαθμωτό γινόμενο ενός Ερμιτιανού τελεστή με πραγματικό αριθμό.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο Ερμιτιανών τελεστών είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως, για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$, ο χώρος $\mathrm{Herm}(\mathcal{X})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, και είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο.

Αν $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$, τότε ο χώρος $\mathrm{Herm}(\mathcal{X})$ και ο πραγματικός Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^{\Sigma \times \Sigma}$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι: υπάρχει ένας γραμμικός ισομορφισμός

$$\phi : \mathbb{R}^{\Sigma \times \Sigma} \to \mathrm{Herm}(\mathcal{X}) \tag{2.3.7}$$

με την ιδιότητα

$$\langle \phi(u), \phi(v) \rangle = \langle u, v \rangle \tag{2.3.8}$$

για κάθε $u, v \in \mathbb{R}^{\Sigma\times\Sigma}$. Η ύπαρξη ενός τέτοιου ισομορφισμού επιτρέπει να μεταφερθούν πολλές ιδιότητες του πραγματικού Ευκλείδειου χώρου στον χώρο των Ερμιτιανών τελεστών που δρουν πάνω σε ένα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο.

Ένας τρόπος για να οριστεί η παραπάνω απεικόνιση ϕ είναι ο ακόλουθος: Θεωρούμε ότι το Σ είναι ολικά διατεταγμένο και ορίζουμε τη συλλογή

$$\{H_{a,b} : (a,b) \in \Sigma \times \Sigma\} \subset \mathrm{Herm}(\mathcal{X}) \tag{2.3.9}$$

με

$$H_{a,b} = \begin{cases} E_{a,a} & \text{αν } a = b \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{a,b} + E_{b,a}) & \text{αν } a < b \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\imath E_{a,b} - \imath E_{b,a}) & \text{αν } a > b \end{cases}$$

για κάθε ζευγάρι $(a,b) \in \Sigma \times \Sigma$. Ισχύει ότι, το σύνολο (2.3.9) είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο (σύμφωνα με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στον $\mathrm{L}(\mathcal{X})$), και επιπλέον, κάθε στοιχείο του $\mathrm{Herm}(\mathcal{X})$ μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των τελεστών του συνόλου αυτού. Η απεικόνιση ϕ ορίζεται από την ισότητα

$$\phi(e_{(a,b)}) = H_{a,b}, \tag{2.3.10}$$

επεκτείνεται γραμμικά σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^{\Sigma\times\Sigma}$ και ικανοποιεί τη σχέση (2.3.8).

Οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού τελεστή είναι πραγματικοί αριθμοί και γι' αυτό μπορούν να διαταχθούν σε φθίνουσα διάταξη. Για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$ και για κάθε Ερμιτιανό τελεστή $H \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$, ορίζουμε το διάνυσμα

$$\lambda(H) = (\lambda_1(H), \lambda_2(H), \ldots, \lambda_n(H)) \in \mathbb{R}^n \tag{2.3.11}$$

όπου $n = |\Sigma|$, $\lambda_1(H), \lambda_2(H), \ldots, \lambda_n(H)$ είναι ιδιοτιμές του H οι οποίες εμφανίζονται με την πολλαπλότητά τους και

$$\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \ldots \geq \lambda_n(H). \tag{2.3.12}$$

Ο συμβολισμός $\lambda_k(H)$ χρησιμοποιείται για την ιδιοτιμή ενός Ερμιτιανού τελεστή H, που βρίσκεται στη θέση k όταν οι ιδιοτιμές γράφονται σε φθίνουσα διάταξη.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να περιγράψουμε τους θετικά ημιορισμένους τελεστές, οι οποίοι είναι πολύ χρήσιμοι, ανάλογα με την περίπτωση. Συγκεκριμένα, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για κάθε τελεστή $P \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$:

(i) Ο P είναι θετικά ημιορισμένος.

(ii) $P = A^*A$ όπου $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ένας τελεστής, για κάποιον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Y}$.

(iii) Ο P είναι Ερμιτιανός και κάθε ιδιοτιμή του είναι μη αρνητική.

(iv) Ο $\langle u, Pu\rangle$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός για κάθε $u \in \mathcal{X}$.

(v) Ο $\langle Q, P\rangle$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός για κάθε $Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$.

(vi) Υπάρχει μια συλλογή διανυσμάτων $\{u_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $P(a,b) = \langle u_a, u_b\rangle$ για κάθε $a, b \in \Sigma$.

(vii) Υπάρχει μια συλλογή διανυσμάτων $\{u_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{Y}$, για κάποιον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Y}$, τέτοια ώστε $P(a, b) = \langle u_a, u_b \rangle$ για κάθε $a, b \in \Sigma$.

Όμοια, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για κάθε τελεστή $P \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$:

(i) Ο P είναι γνήσια θετικός.

(ii) Ο P είναι Ερμιτιανός και κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική.

(iii) Ο $\langle u, Pu \rangle$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$.

(iv) Ο $\langle Q, P \rangle$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός για κάθε μη μηδενικό τελεστή $Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$.

(v) Υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $P - \varepsilon\mathbb{1} \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$.

Ο συμβολισμός $P \geq 0$ και $0 \leq P$ χρησιμοποιείται για να δηλωσει ότι ο P είναι θετικά ημιορισμένος, και ο συμβολισμός $P > 0$ και $0 < P$ για να δηλώσει ότι ο P είναι γνήσια θετικός. Γενικά, αν X, Y είναι Ερμιτιανοί τελεστές, γράφουμε $X \geq Y$ ή $Y \leq X$ όταν ο $X - Y$ είναι θετικά ημιορισμένος, και $X > Y$ ή $Y < X$ όταν ο $X - Y$ είναι γνήσια θετικός.

Αν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, οι γραμμικές απεικονίσεις της μορφής

$$\Phi : \mathrm{L}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}(\mathcal{Y}) \tag{2.3.13}$$

παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία της κβαντικής πληροφορίας. Το σύνολο αυτών των απεικονίσεων συμβολίζεται με $\mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, και αποτελεί ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο όπου η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται με τον κλασικό τρόπο:

(i) Πρόσθεση: Για δύο απεικονίσεις $\Phi, \Psi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, η απεικόνιση $\Phi + \Psi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζεται ως εξής:

$$(\Phi + \Psi)(X) = \Phi(X) + \Psi(X) \tag{2.3.14}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(ii) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Για μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και έναν αριθμό $\alpha \in \mathbb{C}$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$(\alpha\Phi)(X) = \alpha\Phi(X) \tag{2.3.15}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Για μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, η adjoint της Φ ορίζεται ως η μοναδική απεικόνιση $\Phi^* \in \mathrm{T}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle \Phi^*(Y), X \rangle = \langle Y, \Phi(X) \rangle \tag{2.3.16}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και $Y \in L(\mathcal{Y})$.

Τα τανυστικά γινόμενα των απεικονίσεων του χώρου $\mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζονται όμοια με τα τανυστικά γινόμενα τελεστών. Πιο συγκεκριμένα, για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ και $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_n$ και τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\Phi_1 \in \mathrm{T}(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), \ldots, \Phi_n \in \mathrm{T}(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n) \tag{2.3.17}$$

ορίζεται το τανυστικό γινόμενο των απεικονίσεων αυτών

$$\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n \in \mathrm{T}(\mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n) \tag{2.3.18}$$

να είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί τη σχέση

$$(\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n)(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = \Phi_1(X_1) \otimes \cdots \otimes \Phi_n(X_n) \tag{2.3.19}$$

για κάθε $X_1 \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_1), \ldots, X_n \in \mathrm{L}(\mathcal{X}_n)$.

Όπως για τα διανύσματα και τους τελεστές, έτσι και γι' αυτές τις απεικονίσεις, το $\Phi^{\otimes n}$ συμβολίζει το τανυστικό γινόμενο της απεικόνισης Φ με τον εαυτό της n φορές.

Τον χώρο $T(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ τον συμβολίζουμε πιο απλά με $T(\mathcal{X})$. Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})} \in T(\mathcal{X})$ είναι η απεικόνιση για την οποία ισχύει

$$\mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})}(X) = X \tag{2.3.20}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Η συνάρτηση του ίχνους ορίζεται για τους τελεστές που δρούν πάνω στον $\mathcal{X}$ ως μια γραμμική απεικόνιση της μορφής

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{L}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}. \tag{2.3.21}$$

Αν κάνουμε την ταύτιση $L(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση του ίχνους είναι μια γραμμική απεικόνιση της μορφής

$$\mathrm{Tr} \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C}). \tag{2.3.22}$$

Για έναν δεύτερο μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Y}$ λοιπόν, θα ισχύει ότι

$$\mathrm{Tr} \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Y})} \in \mathrm{T}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \tag{2.3.23}$$

και σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του τανυστικού γινομένου, αυτή είναι η μοναδική απεικόνιση που ικανοποιεί τη σχέση

$$(\mathrm{Tr} \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Y})})(X \otimes Y) = \mathrm{Tr}(X)Y \tag{2.3.24}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και $Y \in \mathrm{L}(\mathcal{Y})$. Αυτή η απεικόνιση ονομάζεται *μερικό ίχνος*, και τη συμβολίζουμε με $\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}$. Με τον ίδιο τρόπο, η απεικόνιση $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}} \in \mathrm{T}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}} = \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})} \otimes \mathrm{Tr} \tag{2.3.25}$$

Γενίκευση αυτών των απεικονίσεων μπορεί να οριστεί για τρεις ή περισσότερους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους, όπως θα δούμε παρακάτω.

Στην εργασία αυτή θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες για τις επόμενες κατηγορίες απεικονίσεων της μορφής (2.3.13):

(i) *Απεικονίσεις που διατηρούν τους ερμιτιανούς τελεστές*: Λέμε ότι μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ διατηρεί τους ερμιτιανούς τελεστές αν ισχύει ότι

$$\Phi(H) \in \mathrm{Herm}(\mathcal{Y}) \tag{2.3.26}$$

για κάθε ερμιτιανό τελεστή $H \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$.

(ii) *Θετικές απεικονίσεις*: Μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ λέγεται θετική αν ισχύει ότι

$$\Phi(P) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y}) \tag{2.3.27}$$

για κάθε θετικά ημιορισμένο τελεστή $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$.

(iii) *Πλήρως θετικές απεικονίσεις*: Μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ λέγεται πλήρως θετική αν ισχύει ότι η

$$\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})} \tag{2.3.28}$$

είναι θετική απεικόνιση για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$. Το σύνολο όλων των πλήρως θετικών απεικονίσεων αυτής της μορφής συμβολίζεται με $CP(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

(iv) *Απεικονίσεις που διατηρούν το ίχνος*: Λέμε ότι μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ διατηρεί το ίχνος αν ισχύει ότι

$$\mathrm{Tr}(\Phi(X)) = \mathrm{Tr}(X) \tag{2.3.29}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(v) *Μοναδιαίες απεικονίσεις*: Μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ λέγεται μοναδιαία αν ισχύει ότι

$$\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}. \tag{2.3.30}$$

2.4 Η απεικόνιση vec

Υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των χώρων $\mathrm{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ και $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ για κάθε επιλογή Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Gamma}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\mathrm{vec} : \mathrm{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \to \mathcal{X}\otimes\mathcal{Y} \tag{2.4.1}$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathrm{vec}(E_{a,b}) = e_a \otimes e_b \tag{2.4.2}$$

για κάθε $a \in \Sigma$ και $b \in \Gamma$. Η απεικόνιση αυτή στέλνει τη συνήθη βάση του $\mathrm{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ στη συνήθη βάση του $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$, άρα είναι γραμμικός ισομορφισμός. Από τη γραμμικότητα προκύπτει ότι

$$\mathrm{vec}(uv^*) = u \otimes \overline{v} \tag{2.4.3}$$

για κάθε $u \in \mathcal{X}$ και $v \in \mathcal{Y}$. Από αυτή τη σχέση παίρνουμε και τις ειδικές περιπτώσεις

$$\mathrm{vec}(u) = u \quad \text{και} \quad \mathrm{vec}(v^*) = \overline{v}. \tag{2.4.4}$$

Η πρώτη περίπτωση προκύπτει όταν $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ και $v = 1 \in \mathbb{C}$, οπότε η $v^* \in \mathrm{L}(\mathbb{C})$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, ενώ η δεύτερη όταν $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ και $v = 1 \in \mathbb{C}$.

Η απεικόνιση vec είναι γραμμικός ισομορφισμός, οπότε κάθε διάνυσμα $u \in \mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ προσδιορίζει μονοσήμαντα έναν τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ τέτοιον ώστε $\mathrm{vec}(A) = u$. Είναι επίσης και ισομετρία, δηλαδή

$$\langle A, B\rangle = \langle \mathrm{vec}(A), \mathrm{vec}(B)\rangle \tag{2.4.5}$$

για κάθε $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. Κάποιες ιδιότητες της απεικόνισης vec που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω είναι οι εξής:

(i) Για όλους τους τελεστές $A_0 \in L(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0)$, $A_1 \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1)$ και $B \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_0)$, όπου $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι,

$$(A_0 \otimes A_1)\mathrm{vec}(B) = \mathrm{vec}(A_0 B A_1^{\mathsf{T}}). \tag{2.4.6}$$

(ii) Για όλους τους τελεστές $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{vec}(A)\mathrm{vec}(B)^*) = AB^* \tag{2.4.7}$$

και

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(\mathrm{vec}(A)\mathrm{vec}(B)^*) = A^{\mathsf{T}}\overline{B}. \tag{2.4.8}$$

(iii) Αν $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τότε

$$\mathrm{vec}(AXB^*) = (A \otimes \overline{B})\mathrm{vec}(X). \tag{2.4.9}$$

(iv) Για κάθε $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$,

$$(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathrm{vec}(A) \tag{2.4.10}$$

και

$$\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*(A^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathrm{vec}(A)^*. \tag{2.4.11}$$

Οι αποδείξεις των σχέσεων αυτών γίνονται με απλούς υπολογισμούς. Για τη σχέση (2.4.6), αν αντικαταστήσουμε τους τελεστές με στοιχεία από τη συνήθη βάση των αντίστοιχων χώρων, θα έχουμε

$$\begin{aligned}(E_{a,b} \otimes E_{c,d})\mathrm{vec}(E_{k,l}) &= (E_{a,b} \otimes E_{c,d})(e_k \otimes e_l) = E_{a,b}e_k \otimes E_{c,d}e_l \\ &= e_k(b)e_a \otimes e_l(d)e_c = \begin{cases} e_a \otimes e_c & \text{αν } \ b = k \ \text{ και } \ d = l \\ 0 & \text{αν } \ b \neq k \ \text{ ή } \ d \neq l \end{cases}\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

και

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(E_{a,b}E_{k,l}E_{c,d}^{\mathsf{T}}) &= \mathrm{vec}(E_{a,b}E_{k,l}E_{d,c}) \\ &= \begin{cases} \mathrm{vec}(E_{a,b}E_{k,c}) & \text{αν } \ d = l \\ 0 & \text{αν } \ d \neq l \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathrm{vec}(E_{a,c}) & \text{αν } \ b = k \ \text{ και } \ d = l \\ 0 & \text{αν } \ b \neq k \ \text{ ή } \ d \neq l \end{cases} \\ &= \begin{cases} e_a \otimes e_c & \text{αν } \ b = k \ \text{ και } \ d = l \\ 0 & \text{αν } \ b \neq k \ \text{ ή } \ d \neq l \end{cases}.\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Άρα ισχύει η ισότητα για τα στοιχεία της βάσης, και λόγω γραμμικότητας θα ισχύει για όλους τους τελεστές.

Για τη σχέση (2.4.7),

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{vec}(E_{a,b})\mathrm{vec}(E_{c,d})^*) &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}((e_a \otimes e_b)(e_c \otimes e_d)^*) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}((e_a \otimes e_b)(e_c^* \otimes e_d^*)) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}((e_a e_c^* \otimes e_b e_d^*) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(E_{a,c} \otimes E_{b,d}) = \mathrm{Tr}(E_{b,d})E_{a,c} \\ &= \begin{cases} E_{a,c} & \text{αν } \; b = d \\ 0 & \text{αν } \; b \neq d \end{cases} \\ &= E_{a,b}E_{d,c} = E_{a,b}E_{c,d}^*. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Για τη σχέση (2.4.9), θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.4.6):

$$\mathrm{vec}(AXB^*) = (A \otimes (B^*)^{\mathsf{T}})\mathrm{vec}(X) = (A \otimes \overline{B})\mathrm{vec}(X). \tag{2.4.15}$$

Για την (2.4.10), έχουμε για $A = E_{a,b}$, όταν $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Gamma}$ και $a \in \Gamma, b \in \Sigma$:

$$\begin{aligned}(E_{a,b} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) &= (E_{a,b} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}\left(\sum_{c\in\Sigma} E_{c,c}\right) \\ &= (E_{a,b} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\sum_{c\in\Sigma}(e_c \otimes e_c) \\ &= \sum_{c\in\Sigma}(E_{a,b}e_c \otimes e_c) \\ &= \sum_{c\in\Sigma}(e_c(b)e_a \otimes e_c) \\ &= e_a \otimes e_b = \mathrm{vec}(E_{a,b}), \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

οπότε, λόγω γραμμικότητας, η σχέση θα ισχύει για κάθε $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Επίσης,

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(A)^* &= ((A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}))^* = \mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})^* \\ &= \mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*(A^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}). \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

2.5 Αναπαραστάσεις τελεστών

Θεώρημα 2.5.1 (Το φασματικό θεώρημα)**.** *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ένας κανονικός τελεστής. Υπάρχουν, ένας θετικός ακέραιος m, διακεκριμένοι μιγαδικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, και μη μηδενικοί τελεστές προβολής $\Pi_1, \ldots, \Pi_m \in \mathrm{Proj}(\mathcal{X})$ με $\Pi_1 + \cdots + \Pi_m = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$, τέτοιοι ώστε*

$$X = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Pi_k. \tag{2.5.1}$$

Οι αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ και οι τελεστές προβολής $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$ είναι μοναδικά ορισμένοι: κάθε λ_k είναι μια ιδιοτιμή του X με πολλαπλότητα ίση με την τάξη του Π_k, και Π_k είναι ο τελεστής προβολής πάνω στο χώρο που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα του X που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_k.

Η αναπαράσταση ενός κανονικού τελεστή X στη μορφή (2.5.1) λέγεται φασματική αναπαράσταση του X.

Πόρισμα 2.5.1. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος με διάσταση n, και $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ένας κανονικός τελεστής. Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\chi_1, \ldots, \chi_n$ του $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε*

$$X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_k \chi_k^* \tag{2.5.2}$$

όπου $\lambda_k \in \mathrm{spec}(X)$ για κάθε k.

Κάθε χ_k είναι ιδιοδιάνυσμα του X που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k. Ισχύει ότι κάθε τελεστής X που αναπαρίσταται στη μορφή (2.5.2) είναι κανονικός τελεστής. Επομένως, η κανονικότητα του X είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας ορθοκανονικής βάσης από ιδιοδιανύσματα του X.

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος με διάσταση n και $X, Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ κανονικοί τελεστές τέτοιοι ώστε $[X, Y] = 0$. Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\chi_1, \ldots, \chi_n$ του $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε*

$$X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_k \chi_k^* \quad \textit{και} \quad Y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_k \chi_k^* \tag{2.5.3}$$

όπου $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ μιγαδικοί αριθμοί με $\alpha_k \in \mathrm{spec}(X)$ και $\beta_k \in \mathrm{spec}(Y)$ για κάθε k.

Κάθε Ερμιτιανός τελεστής είναι κανονικός και οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί. Σύμφωνα λοιπόν με το φασματικό θεώρημα, για κάθε ερμιτιανό τελεστή $H \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$, υπάρχουν ένας θετικός ακέραιος m, μη μηδενικοί τελεστές προβολής $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$ με

$$\Pi_1 + \cdots + \Pi_m = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \tag{2.5.4}$$

και πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε

$$H = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Pi_k. \tag{2.5.5}$$

Αν ορίσουμε τους τελεστές

$$P = \sum_{k=1}^{m} \max\{\lambda_k, 0\} \Pi_k \quad \text{και} \quad Q = \sum_{k=1}^{m} \max\{-\lambda_k, 0\} \Pi_k, \tag{2.5.6}$$

τότε $P, Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$, $PQ = 0$ και

$$H = P - Q. \tag{2.5.7}$$

Η αναπαράσταση ενός Ερμιτιανού τελεστή H στη μορφή (2.5.7), όπου P, Q θετικά ημιορισμένοι τελεστές τέτοιοι ώστε $PQ = 0$, λέγεται αναπαράσταση Jordan-Hahn του H. Η αναπαράσταση Jordan-Hahn ενός τελεστή $H \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$ είναι μοναδική: οι τελεστές P, Q που ικανοποιούν τις σχέσεις $P, Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$, $PQ = 0$ και $H = P - Q$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι.

Θεώρημα 2.5.3. *Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ένας μη μηδενικός τελεστής με τάξη ίση με r. Υπάρχουν ορθοκανονικά σύνολα $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \mathcal{X}$ και $\{y_1, \ldots, y_r\} \subset \mathcal{Y}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $s_1, \ldots, s_r$, τέτοιοι ώστε*

$$A = \sum_{k=1}^{r} s_k y_k x_k^*. \tag{2.5.8}$$

Μια έκφραση του A της μορφής (2.5.8) λέγεται αναπαράσταση του A με ιδιάζουσες τιμές.

Πόρισμα 2.5.2. *Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ένας μη μηδενικός τελεστής, και $r = \mathrm{rank}(A)$. Υπάρχουν, ένας διαγώνιος και γνήσια θετικός τελεστής $D \in \mathrm{Pd}(\mathbb{C}^r)$ και δύο ισομετρίες $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^r, \mathcal{X})$ και $V \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^r, \mathcal{Y})$ ώστε $A = VDU^*$.*

Για κάθε τετραγωνικό τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, υπάρχουν, ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ και ένας unitary τελεστής $W \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ τέτοιοι ώστε

$$X = WP. \tag{2.5.9}$$

Αυτό προκύπτει από το Πόρισμα 2.5.2 αν θέσουμε $W = VU^*$ και $P = UDU^*$.

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$X = P'W' \tag{2.5.10}$$

για κάποιους τελεστές $P' \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ και $W' \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ (οι οποίοι είναι, γενικά, διαφορετικοί από αυτούς στην παραπάνω ισότητα). Οι σχέσεις (2.5.9) και (2.5.10) είναι γνωστές ως πολικές αναπαραστάσεις του X.

Για κάθε τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή $A^+ \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, ο οποίος είναι γνωστός ως Moore - Penrose ψευδοαντίστροφος του A, που να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $AA^+A = A$,

(ii) $A^+AA^+ = A^+$ και

(iii) οι AA^+ και A^+A είναι και οι δύο Ερμιτιανοί τελεστές.

Αν η αναπαράσταση με ιδιάζουσες τιμές του A είναι η

$$A = \sum_{k=1}^{r} s_k y_k x_k^*, \tag{2.5.11}$$

τότε ο τελεστής A^+ που ικανοποιεί τα παραπάνω, είναι ο

$$A^+ = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{s_k} x_k y_k^*. \tag{2.5.12}$$

Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Η απεικόνιση vec είναι ισομορφισμός, οπότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $u = \mathrm{vec}(A)$. Για κάθε αναπαράσταση με ιδιάζουσες τιμές του A

$$A = \sum_{k=1}^{r} s_k x_k y_k^*, \tag{2.5.13}$$

ισχύει ότι

$$u = \mathrm{vec}(A) = \mathrm{vec}\left(\sum_{k=1}^{r} s_k x_k y_k^*\right) = \sum_{k=1}^{r} s_k x_k \otimes \overline{y_k}. \tag{2.5.14}$$

Από την ορθοκανονικότητα του $\{y_1, \ldots, y_r\}$ προκύπτει ότι το $\{\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_r}\}$ είναι επίσης ορθοκανονικό. Επομένως, αν θέσουμε $\overline{y_i} = z_i$ για κάθε $i \in \{1, ..., r\}$, έχουμε ότι κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$u = \sum_{k=1}^{r} s_k x_k \otimes z_k \tag{2.5.15}$$

όπου $s_1, \ldots, s_r$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, και τα $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \mathcal{X}$ και $\{z_1, \ldots, z_r\} \subset \mathcal{Y}$ είναι ορθοκανονικά σύνολα. Μια έκφραση του u αυτής της μορφής λέγεται αναπαράσταση Schmidt του u.

Θεώρημα 2.5.4 (Το θεώρημα του Καραθεοδωρή)**.** *Έστω $\mathcal{V}$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\mathcal{A}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Επίσης, έστω ότι ο $\mathcal{A}$ περιέχεται σε έναν συσχετισμένο υπόχωρο του $\mathcal{V}$ που έχει διάσταση n. Για κάθε διάνυσμα $v \in \mathrm{conv}(\mathcal{A})$, υπάρχουν $m \leq n+1$ διανύσματα $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $v \in \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_m\})$.*

Ορισμός 2.5.1. Ένα σημείο $w \in \mathcal{C}$ λέγεται ακραίο σημείο του συνόλου $\mathcal{C}$, αν κάθε έκφραση της μορφής

$$w = \lambda u + (1-\lambda) v \tag{2.5.16}$$

όπου $u, v \in \mathcal{C}$ και $\lambda \in (0,1)$, συνεπάγεται ότι $u = v = w$.

Θεώρημα 2.5.5 (Minkowski)**.** *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, πάνω στους πραγματικούς ή στους μιγαδικούς αριθμούς, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο, και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ το σύνολο των ακραίων σημείων του $\mathcal{C}$. Ισχύει ότι $\mathcal{C} = \mathrm{conv}(\mathcal{A})$.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κβαντικές καταστάσεις των καταχωρητών

3.1 Καταχωρητές και καταστάσεις

Ο όρος καταχωρητής χρησιμοποιείται για να περιγράψει το στοιχείο ενός υπολογιστή στο οποίο μπορούμε να αποθηκεύσουμε και να διαχειριστούμε πεπερασμένο πλήθος δεδομένων. Πρέπει όμως να γίνει κατανοητό ότι κάθε φυσικό σύστημα στο οποίο μπορεί να αποθηκευτεί πεπερασμένο πλήθος δεδομένων και του οποίου η κατάσταση αλλάζει με το πέρασμα του χρόνου, μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν καταχωρητής.

Για παράδειγμα, ένας καταχωρητής θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει ένα μέσο που χρησιμοποιείται για να μεταφερθούν πληροφορίες από έναν αποστολέα σε κάποιον δέκτη. Διαισθητικά, είναι πολύ σημαντικό το ότι οι καταχωρητές περιγράφουν με αφηρημένες μαθηματικές έννοιες τα φυσικά αντικείμενα που αποθηκεύουν πληροφορίες, ή μέρος τέτοιων φυσικών αντικειμένων.

Ο παρακάτω τυπικός ορισμός του καταχωρητή, δίνεται για να συλλάβει μια βασική αλλά πολύ σημαντική ιδέα: πολλοί καταχωρητές μαζί, μπορούν να θεωρηθούν ως μέρη ενός ενιαίου καταχωρητή.

Ορισμός 3.1.1. Ένας καταχωρητής X είναι ένα από τα δύο παρακάτω αντικείμενα:

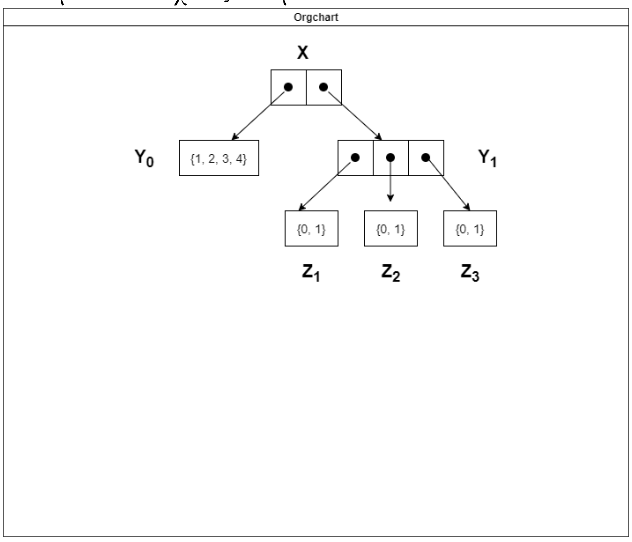
(i) Ένα σύνολο δεικτών Σ.

(ii) Μία n-άδα $X = (Y_1, \dots, Y_n)$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος και $Y_1, \dots, Y_n$ είναι καταχωρητές.

Στην πρώτη περίπτωση οι καταχωρητές λέγονται απλοί καταχωρητές και στη δεύτερη περίπτωση λέγονται σύνθετοι καταχωρητές.

Στην περίπτωση ενός απλού καταχωρητή $X = \Sigma$, το σύνολο δεικτών Σ αντιπροσωπεύει το σύνολο των κλασικών καταστάσεων που μπορεί να αποθηκεύσει ο καταχωρητής. Το σύνολο των κλασικών καταστάσεων που σχετίζεταιι με έναν σύνθετο καταχωρητή, θα καθοριστεί παρακάτω.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1, παρατηρούμε ότι υπάρχει η δομή δέντρου σε κάθε καταχωρητή και κάθε κόμβος φύλλων αντιστοιχεί σε έναν απλό καταχωρητή. Ένας καταχωρητής Y λέγεται υποκαταχωρητής του X αν το δέντρο που σχετίζεται με τον Y είναι υποδέντρο του δέντρου που σχετίζεται με τον X.



Παράδειγμα 3.1.1. Ορίζουμε τους καταχωρητές $X, Y_0, Y_1, Z_1, Z_2, Z_3$ ως εξής:

$$\begin{array}{rrr} X = (Y_0, Y_1) & Y_0 = \{1,2,3,4\} & Z_1 = \{0,1\} \\ & Y_1 = (Z_1, Z_2, Z_3) & Z_2 = \{0,1\} \\ & & Z_3 = \{0,1\} \end{array}$$

Το δέντρο που σχετίζεται με τον καταχωρητή X απεικονίζεται στο παραπάνω διάγραμμα.

Οι υποκαταχωρητές του X είναι οι Y_0, Y_1, Z_1, Z_2, Z_3 και (τετριμμένα) ο ίδιος ο X.

Ορισμός 3.1.2. Το σύνολο των κλασικών καταστάσεων ενός καταχωρητή X ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

(i) Αν $X = \Sigma$ είναι ένας απλός καταχωρητής, τότε το σύνολο των κλασικών καταστάσεών του είναι το σύνολο Σ.

(ii) Αν $X = (Y_1, \dots, Y_n)$ είναι ένας σύνθετος καταχωρητής, τότε το σύνολο των κλασικών καταστάσεων του X είναι το Καρτεσιανό γινόμενο

$$\Sigma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n, \tag{3.1.1}$$

όπου το Γ_k συμβολίζει το σύνολο των κλασικών καταστάσεων που σχετίζεται με τον καταχωρητή Y_k για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου των κλασικών καταστάσεων ενός καταχωρητή λέγονται κλασικές καταστάσεις του καταχωρητή αυτού.

Ο όρος κλασικές καταστάσεις χρησιμοποιείται για να αντιπροσωπεύσει την κλασική έννοια της κατάστασης όπως αυτή ορίζεται στην επιστήμη των υπολογιστών. Μια κλασική κατάσταση ενός καταχωρητή μπορεί να αναγνωριστεί σαν τις τιμές 0 και 1 που αποθηκεύονται από ένα στοιχείο μνήμης ενός bit. Δεν πρέπει να συγχέουμε τον όρο κλασική κατάσταση με τον όρο κατάσταση γιατί, σε αυτή την εργασία, ο όρος κατάσταση θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει κβαντική κατάσταση.

Ένας καταχωρητής ονομάζεται τετριμμένος, αν το σύνολο των κλασικών καταστάσεών του αποτελείται μόνο από ένα στοιχείο. Οι τετριμμένοι καταχωρητές είναι αδιάφοροι από την άποψη της επεξεργασίας πληροφοριών, αλλά είναι μαθηματικά βολικό να επιτραπεί η ύπαρξή τους. Οι καταχωρητές με κενό σύνολο κλασικών καταστάσεων, δεν επιτρέπονται εξ' ορισμού. Αυτό συμφωνεί και με την ιδέα ότι οι καταχωρητές αντιπροσωπεύουν φυσικά συστήματα: ενώ είναι δυνατό ένα φυσικό σύστημα να έχει μόνο μία πιθανή κλασική κατάσταση, είναι παράλογο ένα σύστημα να μην έχει απολύτως καμία κατάσταση.

Κάθε κλασική κατάσταση ενός καταχωρητή, ορίζει μονοσήμαντα μια κλασική κατάσταση για κάθε υποκαταχωρητή του. Υποθέτουμε ότι

$$X = (Y_1, \ldots, Y_n) \tag{3.1.2}$$

είναι ένας σύνθετος καταχωρητής. Αν $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ συμβολίζουν τα σύνολα των κλασικών καταστάσεων των καταχωρητών $Y_1, \ldots, Y_n$ αντίστοιχα, τότε το σύνολο των κλασικών καταστάσεων του X είναι το $\Sigma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$. Μια δεδομένη κλασική κατάσταση $\alpha = (b_1, \ldots, b_n)$ του X μας δίνει ότι η κλασική κατάσταση του Y_k είναι η $b_k \in \Gamma_k$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Αντίστροφα, η κλασική κατάσταση ενός καταχωρητή ορίζεται μονοσήμαντα από τις κλασικές καταστάσεις των απλών υποκαταχωρητών του. Επομένως, κάθε κλασική κατάσταση ενός καταχωρητή X ορίζει μονοσήμαντα μια κλασική κατάσταση σε κάθε καταχωρητή που οι απλοί υποκαταχωρητές του είναι υποσύνολο των απλών υποκαταχωρητών του X. Για παράδειγμα, αν ο X είναι της μορφής (3.1.2), μπορούμε να θεωρήσουμε έναν νέο καταχωρητή

$$Z = (Y_{K_1}, \ldots, Y_{k_m}) \tag{3.1.3}$$

για κάποιους δείκτες $1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_m \leq n$. Αν $\alpha = (b_1, \ldots, b_n)$ είναι η κλασική κατάσταση του X σε μια συγκεκριμένη στιγμή, τότε η αντίστοιχη κατάσταση του Z είναι η $(b_{k_1}, \ldots, b_{k_m})$.

Οι κβαντικες καταστάσεις, όπως θα παρουσιαστούν σε αυτή την εργασία, μπορούν να θεωρηθούν ως ανάλογες με τις πιθανοτικές καταστάσεις.

3.2 Κβαντικές καταστάσεις των καταχωρητών

Μια πιθανοτική κατάσταση ενός καταχωρητή αναφέρεται σε μια κατανομή πιθανότητας, ή ένα τυχαίο μείγμα, των κλασικών καταστάσεων αυτού του καταχωρητή. Αν το σύνολο των κλασικών καταστάσεων του X είναι το Σ, μια πιθανοτική κατάσταση του X ταυτίζεται με ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$: η τιμή $p(\alpha)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα που σχετίζεται με την κλασική κατάσταση $\alpha \in \Sigma$. Ουσιαστικά, μια πιθανοτική κατάσταση είναι μια μαθηματική αναπαράσταση του περιεχομένου του καταχωρητή, ή της γνώσης ενός υποθετικού ατόμου για το περιεχόμενο του καταχωρητή, σε μια συγκεκριμένη στιγμή.

Η διαφορά μεταξύ των πιθανοτικών καταστάσεων και των κβαντικών καταστάσεων, είναι ότι ενώ οι πιθανοτικές καταστάσεις αναπαρίστανται από διανύσματα πιθανότητας, οι κβαντικές καταστάσεις αναπαρίστανται από τελεστές πυκνότητας. Σε αντίθεση με την έννοια της πιθανοτικής κατάστασης, η οποία είναι σχετικά σαφής και διαισθητική, η έννοια της κβαντικής κατάστασης μπορεί να φαίνεται μη διαισθητική. Σε αυτή την εργασία, οι κβαντικές καταστάσεις θα θεωρηθούν μαθηματικά αντικείμενα και τίποτα παραπάνω.

Ορισμός 3.2.1. Ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με έναν καταχωρητή X ορίζεται να είναι ο $\mathbb{C}^{\Sigma}$, όπου Σ είναι το σύνολο των κλασικών καταστάσεων του X.

Ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με έναν συγκεκριμένο καταχωρητή συμβολίζεται με το ίδιο γράμμα που συμβολίζει και τον καταχωρητή αλλά με άλλη γραμματοσειρά. Για παράδειγμα, ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με έναν καταχωρητή X συμβολίζεται $\mathcal{X}$, και οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι που σχετίζονται με τους καταχωρητές $Y_1, \ldots, Y_n$ συμβολίζονται $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_n$.

Ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{X}$ που σχετίζεται με έναν σύνθετο καταχωρητή $X = (Y_1, \ldots, Y_n)$ δίνεται από το τανυστικό γινόμενο

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n. \tag{3.2.1}$$

Αυτό προκύπτει από το ότι το σύνολο των κλασικών καταστάσεων του X είναι το $\Sigma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$, αν θεωρήσουμε ότι $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ είναι τα σύνολα κλασικών καταστάσεων των $Y_1, \ldots, Y_n$ αντίστοιχα. Οπότε, ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με τον καταχωρητή X είναι ο

$$\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma} = \mathbb{C}^{\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n} = \mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n, \tag{3.2.2}$$

όπου $\mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}^{\Gamma_1}, \ldots, \mathcal{Y}_n = \mathbb{C}^{\Gamma_n}$.

Ορισμός 3.2.2. Μια κβαντική κατάσταση είναι ένας τελεστής πυκνότητας της μορφής $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$, όπου $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος.

Όταν αναφερόμαστε σε μια κβαντική κατάσταση ενός καταχωρητή X, τότε αυτή η κατάσταση θα παίρνει τη μορφή $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$, όπου $\mathcal{X}$ ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με τον X. Ο όρος κατάσταση χρησιμοποιείται αντί για τον όρο κβαντική κατάσταση στο χώρο της κβαντικής πληροφορίας.

Για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$, το σύνολο $\mathrm{D}(\mathcal{X})$ είναι κυρτό σύνολο. Επομένως ισχύει ότι για κάθε σύνολο δεικτών Γ, για μια συλλογή κβαντικών καταστάσεων

$$\{\rho_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \subseteq \mathrm{D}(\mathcal{X}) \tag{3.2.3}$$

και ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Gamma)$, ο κυρτός συνδυασμός

$$\rho = \sum_{\alpha \in \Gamma} p(\alpha) \rho_\alpha \tag{3.2.4}$$

είναι ένα στοιχείο του $\mathrm{D}(\mathcal{X})$. Η κατάσταση ρ που ορίζεται από τη σχέση (3.2.4) λέγεται μείγμα των καταστάσεων $\{\rho_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ σύμφωνα με το διάνυσμα πιθανότητας p.

Έστω ότι X είναι ένας καταχωρητής που σχετίζεται με τον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$. Παίρνουμε σαν αξίωμα ότι μια τυχαία επιλογή του $\alpha \in \Gamma$ σύμφωνα με το διάνυσμα πιθανότητας p, ακολουθούμενη από προετοιμασία του X στην κατάσταση ρ_α, έχει σαν αποτέλεσμα να μεταβεί ο X στην κατάσταση ρ που δίνεται από τη σχέση (3.2.4). Πιο συγκεκριμένα, τυχαίες επιλογές κβαντικών καταστάσεων θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύονται από κυρτούς συνδυασμούς τελεστών πυκνότητας.

Η έννοια της κατανομής πιθανότητας πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο κβαντικών καταστάσεων εμφανίζεται συχνά στη θεωρία της κβαντικής πληροφορίας. Μια τέτοια κατανομή μπορεί να παρουσιαστεί με μια συνάρτηση

$$\eta : \Gamma \to \mathrm{Pos}(\mathcal{X}) \tag{3.2.5}$$

τέτοια ώστε

$$\operatorname{Tr}\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\eta(\alpha)\right)=1. \tag{3.2.6}$$

Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται σύνολο καταστάσεων. Η ερμηνεία ενός συνόλου καταστάσεων $\eta : \Gamma \to \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ είναι ότι, για κάθε στοιχείο $\alpha \in \Gamma$, ο τελεστής $\eta(\alpha)$ αντιπροσωπεύει μια κατάσταση μαζί με την πιθανότητα που σχετίζεται με αυτήν την κατάσταση: η πιθανότητα είναι $\operatorname{Tr}(\eta(\alpha))$ ενώ η κατάσταση είναι

$$\rho_\alpha=\frac{\eta(\alpha)}{\operatorname{Tr}(\eta(\alpha))}. \tag{3.2.7}$$

Ο τελεστής ρ_α ορίζεται όταν $\eta(\alpha)\neq 0$. Στην περίπτωση που $\eta(\alpha)=0$ για κάποιο α, πρέπει να οριστεί ένας συγκεκριμένος τελεστής πυκνότητας ρ_α, καθώς αντιστοιχεί σε ένα διακριτό συμβάν που συμβαίνει με πιθανότητα μηδέν.

Ορισμός 3.2.3. Μια κβαντική κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ λέγεται καθαρή κατάσταση αν έχει τάξη ίση με 1. Ισοδύναμα, η ρ είναι καθαρή κατάσταση αν υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε

$$\rho = uu^*. \tag{3.2.8}$$

Σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα, κάθε κβαντική κατάσταση είναι ένα μείγμα από καθαρές καταστάσεις.

Πρόταση 3.2.1. *Μια κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ είναι καθαρή αν και μόνο αν είναι ακραίο σημείο του συνόλου $\mathrm{D}(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\rho = uu^*$ για κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$. Τότε ισχύει ότι $\rho u = u$. Έστω ότι $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ για κάποια $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ και $\lambda \in (0,1)$. Έχουμε:

$$1=\langle u,u\rangle=\langle \rho u,u\rangle=\langle(\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2)\,u,u\rangle=\lambda\langle\rho_1u,u\rangle+(1-\lambda)\langle\rho_2u,u\rangle. \tag{3.2.9}$$

Επίσης, επειδή $\|\rho_1\| \leq \operatorname{Tr}(\rho_1) = 1$, έχουμε

$$\langle\rho_1u,u\rangle\leq\|\rho_1\|\|u\|\leq 1. \tag{3.2.10}$$

Όμοια,

$$\langle\rho_2u,u\rangle\leq 1. \tag{3.2.11}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\langle\rho_1u,u\rangle=1 \quad \text{και} \quad \langle\rho_2u,u\rangle=1. \tag{3.2.12}$$

Επίσης, $\langle\rho_1u,u\rangle \leq \|\rho_1u\|\|u\|$ άρα $\|\rho_1u\|\geq 1$ και $\|\rho_1u\|\leq\|\rho_1\|\|u\|\leq 1$, οπότε $\langle\rho_1u,u\rangle = 1 = \|\rho_1u\| = \|\rho_1u\|\|u\|$. Άρα, υπάρχει $b\in\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\rho_1u = bu$. Τότε έχουμε $1=\langle\rho_1u,u\rangle=\langle bu,u\rangle=b$. Άρα $\rho_1u=u$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι $\rho_2u=u$.

Για κάθε $w\in\{u\}^\perp$ ισχύει:

$$\rho w=0, \quad \text{άρα} \quad \lambda\rho_1w+(1-\lambda)\rho_2w=0, \tag{3.2.13}$$

οπότε

$$\lambda\langle\rho_1 w, w\rangle + (1-\lambda)\langle\rho_2 w, w\rangle = 0 \tag{3.2.14}$$

και επειδή είναι όλες μη αρνητικές ποσότητες, θα είναι

$$\langle\rho_1 w, w\rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle\rho_2 w, w\rangle = 0. \tag{3.2.15}$$

Επομένως, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Άρα η ρ είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{D}(\mathcal{X})$.

Αντίστροφα, έστω $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ ακραίο σημείο του $\mathrm{D}(\mathcal{X})$. Εφόσον η ρ είναι θετικά ημιορισμένη απεικόνιση, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.5.1 υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ και μια ορθοκανονική βάση $u_1, \ldots, u_n$ του $\mathcal{X}$ τέτοιοι ώστε $\rho = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* + \cdots + \lambda_n u_n u_n^*$, και ισχύει

$$1 = \mathrm{Tr}(\rho) = \mathrm{Tr}\left(\lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* + \cdots + \lambda_n u_n u_n^*\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

Επειδή η ρ είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{D}(\mathcal{X})$, θα είναι αναγκαστικά $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$. Άρα $\rho = uu^*$ για κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$. □

Ορισμός 3.2.4. Μια κβαντική κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ λέγεται επίπεδη κατάσταση αν ισχύει ότι

$$\rho = \frac{\Pi}{\mathrm{Tr}(\Pi)} \tag{3.2.16}$$

για κάποιον μη μηδενικό τελεστή προβολής $\Pi \in \mathrm{Proj}(\mathcal{X})$.

Το σύμβολο ω χρησιμοποιείται συχνά για να συμβολίσει μια επίπεδη κατάσταση, και ο συμβολισμός

$$\omega_{\mathcal{V}} = \frac{\Pi_{\mathcal{V}}}{\mathrm{Tr}(\Pi_{\mathcal{V}})} \tag{3.2.17}$$

χρησιμοποιείται για να συμβολίσει την επίπεδη κατάσταση που σχετίζεται με την προβολή $\Pi_{\mathcal{V}}$ πάνω στον μη μηδενικό υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$. Παραδείγματα επίπεδων καταστάσεων μας δίνουν οι καθαρές καταστάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στην περίπτωση που Π είναι μια προβολή τάξης 1, και η completely mixed state

$$\omega = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{\dim(\mathcal{X})} \tag{3.2.18}$$

Η completely mixed state δεν δίνει καμία πληροφορία, όπως και μία ομοιόμορφη πιθανότητα.

Αν X είναι ένας καταχωρητής και Σ το σύνολο των κλασικών καταστάσεών του, τότε ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με τον X είναι ο $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Μπορούμε να παρουσιάσουμε τις πιθανές καταστάσεις του X με τον εξής τρόπο: ο τελεστής $E_{\alpha,\alpha} \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ θεωρείται η αναπαράσταση του να βρίσκεται ο καταχωρητής X στην κλασική κατάσταση α, για κάθε $\alpha \in \Sigma$. Σύμφωνα με αυτό τον συσχετισμό, οι πιθανοτικές καταστάσεις ενός καταχωρητή αντιστοιχούν σε διαγώνιους τελεστές πυκνότητας. Κάθε πιθανοτική κατάσταση $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$ αντιπροσωπεύεται από τον τελεστή πυκνότητας

$$\sum_{\alpha\in\Sigma} p(\alpha) E_{\alpha,\alpha} = \mathrm{Diag}(p). \tag{3.2.19}$$

Με αυτό τον τρόπο, οι πιθανοτικές καταστάσεις ενός καταχωρητή σχηματίζουν ένα υποσύνολο του συνόλου των κβαντικών καταστάσεων του καταχωρητή.

Συνήθως, είναι απαραίτητο ή κατάλληλο να προσδιορίζεται ότι ένας ή περισσότεροι καταχωρητές είναι κλασικοί καταχωρητές. Κλασικός καταχωρητής είναι αυτός που οι καταστάσεις του περιορίζονται σε διαγώνιους τελεστές πυκνότητας, που αντιστοιχούν σε κλασικές (πιθανοτικές) καταστάσεις όπως περιγράφονται παραπάνω.

3.3 Καταστάσεις γινόμενα

Έστω $X = (Y_1, \dots, Y_n)$ ένας σύνθετος καταχωρητής. Μία κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ λέγεται κατάσταση γινόμενο (product state) του X αν είναι της μορφής

$$\rho = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \tag{3.3.1}$$

όπου $\sigma_1 \in \mathrm{D}(\mathcal{Y}_1), \dots, \sigma_n \in \mathrm{D}(\mathcal{Y}_n)$ είναι καταστάσεις των καταχωρητών $Y_1, \dots, Y_n$ αντίστοιχα. Οι καταστάσεις γινόμενα εκφράζουν την ανεξαρτησία μεταξύ των καταχωρητών αυτών, και όταν ο σύνθετος καταχωρητής είναι σε μία κατάσταση γινόμενο ρ της μορφής (3.3.1), οι καταχωρητές $Y_1, \dots, Y_n$ λέγονται ανεξάρτητοι. Όταν οι $Y_1, \dots, Y_n$ δεν είναι ανεξάρτητοι, λέγονται συσχετισμένοι.

Παράδειγμα 3.3.1. Έστω ένας σύνθετος καταχωρητής της μορφής $X = (Y, Z)$, όπου Y και Z καταχωρητές που έχουν και οι δύο σύνολο κλασικών καταστάσεων το $\{0, 1\}$. (Οι καταχωρητές με σύνολο κλασικών κατάστασεων το $\{0, 1\}$ λέγονται qubits. Το όνομα αυτό είναι συντομογραφία του quantum bits.)

Η κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{1}{4} E_{0,0} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{4} E_{0,0} \otimes E_{1,1} + \frac{1}{4} E_{1,1} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{4} E_{1,1} \otimes E_{1,1} \tag{3.3.2}$$

είναι ένα παράδειγμα μιας κατάστασης γινόμενο γιατί μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\rho = \left(\frac{1}{2} E_{0,0} + \frac{1}{2} E_{1,1} \right) \otimes \left(\frac{1}{2} E_{0,0} + \frac{1}{2} E_{1,1} \right). \tag{3.3.3}$$

Ισοδύναμα, για τους αντίστοιχους πίνακες ισχύει ότι

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Οι καταστάσεις $\sigma, \tau \in \mathrm{D}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\sigma = \frac{1}{2} E_{0,0} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{2} E_{1,1} \otimes E_{1,1} \tag{3.3.4}$$

και

$$\tau = \frac{1}{2} E_{0,0} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{2} E_{0,1} \otimes E_{0,1} + \frac{1}{2} E_{1,0} \otimes E_{1,0} + \frac{1}{2} E_{1,1} \otimes E_{1,1} \tag{3.3.5}$$

είναι παραδείγματα καταστάσεων που δεν είναι καταστάσεις γινόμενα, γιατί δεν μπορούν να γραφτούν ως τανυστικά γινόμενα, οπότε δηλώνουν συσχέτιση μεταξύ των καταχωρητών Y και Z. Οι αντίστοιχοι πίνακες των καταστάσεων αυτών είναι οι εξής:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Οι καταστάσεις ρ και σ είναι διαγώνιες, άρα αντιστοιχούν σε πιθανοτικές καταστάσεις. Η ρ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία οι καταχωρητές Y και Z αποθηκεύουν ανεξάρτητα τυχαία κομμάτια, ενώ η σ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία οι καταχωρητές Y και Z αποθηκεύουν τέλεια συσχετισμένα τυχαία κομμάτια. Η κατάσταση τ δεν αντιπροσωπεύει πιθανοτική κατάσταση, και πιο συγκεκριμένα, είναι ένα παράδειγμα entangled κατάστασης. Entanglement είναι ένας τύπος συσχέτισης που έχει μεγάλη σημασία στη θεωρία της κβαντικής πληροφορίας.

3.4 Βάσεις από τελεστές πυκνότητας

Για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχουν σύνολα που παράγουν το χώρο $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ τα οποία αποτελούνται μόνο από τελεστές πυκνότητας.

Πράγματι, έστω $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τυχών τελεστής. Τότε,

$$A = X + \mathrm{i}Y \tag{3.4.1}$$

όπου X, Y οι Ερμιτιανοί τελεστές

$$X = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad Y = \frac{A - A^*}{2\mathrm{i}}. \tag{3.4.2}$$

Αφού οι X, Y είναι Ερμιτιανοί τελεστές, θα είναι

$$X = X_+ - X_- \quad \text{και} \quad Y = Y_+ - Y_- \tag{3.4.3}$$

όπου X_+, X_-, Y_+, Y_- θετικά ημιορισμένοι τελεστές. Θεωρούμε τους τελεστές

$$\rho_1 = \frac{X_+}{\mathrm{Tr}(X_+)}, \quad \rho_2 = \frac{X_-}{\mathrm{Tr}(X_-)}, \quad \rho_3 = \frac{Y_+}{\mathrm{Tr}(Y_+)}, \quad \rho_4 = \frac{Y_-}{\mathrm{Tr}(Y_-)}. \tag{3.4.4}$$

Τότε, $\rho_k \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ για κάθε $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ και ο A είναι γραμμικός συνδυασμός των τελεστών ρ_k.

Μια συνέπεια αυτού του γεγονότος, είναι το ότι κάθε γραμμική απεικόνιση της μορφής

$$\phi : \mathrm{L}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C} \tag{3.4.5}$$

είναι μονοσήμαντα ορισμένη από τη δράση της πάνω στα στοιχεία του $\mathrm{D}(\mathcal{X})$. Αυτό δηλώνει και ότι τα κανάλια ορίζονται μονοσήμαντα από τη δράση τους πάνω στους τελεστές πυκνότητας.

Το παρακάτω παράδειγμα περιγράφει έναν τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται ένα τέτοιο σύνολο τελεστών πυκνότητας που παράγει όλο τον $\mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Παράδειγμα 3.4.1. Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών στο οποίο υποθέτουμε ότι υπάρχει μια σχέση ολικής διάταξης. Για κάθε ζευγάρι $(a,b) \in \Sigma \times \Sigma$ ορίζουμε έναν τελεστή πυκνότητας $\rho_{a,b} \in \mathrm{D}(\mathbb{C}^{\Sigma})$ ως εξής:

$$\rho_{a,b} = \begin{cases} E_{a,a} & , \text{ αν } \quad a = b \\ \frac{1}{2}(e_a + e_b)(e_a + e_b)^* & , \text{ αν } \quad a < b \\ \frac{1}{2}(e_a + ie_b)(e_a + ie_b)^* & , \text{ αν } \quad a > b. \end{cases}$$

Για κάθε ζευγάρι $(a,b) \in \Sigma \times \Sigma$ με $a < b$, έχουμε

$$\left(\rho_{a,b} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) - i\left(\rho_{b,a} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) = E_{a,b}, \tag{3.4.6}$$

και

$$\left(\rho_{a,b} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) + i\left(\rho_{b,a} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) = E_{b,a}, \tag{3.4.7}$$

άρα $\mathrm{span}\{\rho_{a,b} : (a,b) \in \Sigma \times \Sigma\} = \mathrm{L}(\mathbb{C}^{\Sigma})$.

3.5 Μειώσεις και purifications των κβαντικών καταστάσεων

Μπορεί κανείς να μελετήσει τη δημιουργία ενός καταχωρητή από την κατάργηση ενός ή περισσότερων υποκαταχωρητών ενός δεδομένου σύνθετου καταχωρητή. Η κβαντική κατάσταση ενός καταχωρητή που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την κατάσταση του αρχικού σύνθετου καταχωρητή. Παρακάτω, θα εξηγήσουμε πώς καθορίζεται αυτή η κατάσταση. Η ειδική περίπτωση κατα την οποία ο αρχικός καταχωρητής βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση, είναι ιδιαίτερα σημαντική.

3.5.1 Το μερικό ίχνος και μειώσεις των κβαντικών καταστάσεων

Έστω ένας σύνθετος καταχωρητής $X = (Y_1, \ldots, Y_n)$, όπου $n \geq 2$. Για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$, μπορεί να σχηματιστεί ένας νέος καταχωρητής

$$(Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n) \tag{3.5.1}$$

αν αφαιρεθεί ο καταχωρητής Y_k από τον X και μείνουν οι υπόλοιποι καταχωρητές αμετάβλητοι. Για κάθε κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ του X, η κατάσταση του καταχωρητή (3.5.1) που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία λέγεται μείωση (reduction) της ρ στον καταχωρητή (3.5.1), και συμβολίζεται $\rho[Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n]$. Η κατάσταση αυτή ορίζεται ως εξής:

$$\rho[Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}_k}(\rho), \tag{3.5.2}$$

όπου

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}_k} \in \mathrm{T}\left(\mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_{k-1} \otimes \mathcal{Y}_{k+1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n\right) \tag{3.5.3}$$

η απεικόνιση του μερικού ίχνους. Αυτή είναι η μοναδική απεικόνιση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}_k}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \mathrm{Tr}(A_k) A_1 \otimes \cdots \otimes A_{k-1} \otimes A_{k+1} \otimes \cdots \otimes A_n \tag{3.5.4}$$

για όλους τους τελεστές $A_1 \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}_1), \ldots, A_n \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}_n)$. Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε το μερικό ίχνος με τον παρακάτω τρόπο:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}_k} = \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Y}_1)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Y}_{k-1})} \otimes \mathrm{Tr} \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Y}_{k+1})} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Y}_n)}, \tag{3.5.5}$$

όπου το ίχνος στο δεξί μέλος της ισότητας δρα επάνω στον $\mathrm{L}(\mathcal{Y}_k)$.

Αν τα σύνολα των κλασικών καταστάσεων των $Y_1, \ldots, Y_n$ είναι $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ αντίστοιχα, γράφουμε την καταχώρηση $((\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n), (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_n))$ της κατάστασης $\rho[Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n]$ ως

$$\sum_{c \in \Gamma_k} \rho\left((\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, c, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n), (b_1, \ldots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \ldots, b_n)\right) \tag{3.5.6}$$

για κάθε $\alpha_j, b_j \in \Gamma_j$ με $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$.

Παράδειγμα 3.5.1. Έστω οι καταχωρητές Y και Z, οι οποίοι έχουν και οι δύο σύνολο κλασικών καταστάσεων το Σ, και $X = (Y, Z)$. Θεωρούμε το διάνυσμα $u \in \mathcal{X} = \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}$ που ορίζεται ως εξής:

$$u = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha \otimes e_\alpha. \tag{3.5.7}$$

Τότε,

$$uu^* = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\alpha, b \in \Sigma} E_{\alpha,b} \otimes E_{\alpha,b} \tag{3.5.8}$$

και ισχύει

$$uu^*[Y] = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\alpha, b \in \Sigma} Tr\left(E_{\alpha,b}\right) E_{\alpha,b} = \frac{1}{|\Sigma|} \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}. \tag{3.5.9}$$

Η κατάσταση uu^* είναι ένα κανονικό παράδειγμα μιας maximally entangled κατάστασης δύο καταχωρητών που μοιράζονται το ίδιο σύνολο κλασικής κατάστασης.

Εφαρμόζοντας πολλές φορές την παραπάνω διαδικασία, μπορούμε να δούμε ότι κάθε κατάσταση ρ του καταχωρητή $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ορίζει μονοσήμαντα την κατάσταση του καταχωρητή $(Y_{k_1}, \ldots, Y_{k_m})$, όπου $k_1, \ldots, k_m$ είναι δείκτες τέτοιοι ώστε $1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n$.

Σε πολλές καταστάσεις που προκύπτουν στην κβαντική θεωρία πληροφορίας, όπου εξετάζεται ένας δεδομένος καταχωρητής X, είναι χρήσιμο να θεωρούμε ότι ο X είναι ένας υποκαταχωρητής ενός σύνθετου καταχωρητή (X, Y), και να βλέπουμε κάθε δεδομένη κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ του X σαν να έχει ληφθεί ως μείωση μιας κατάστασης σ του (X, Y):

$$\rho = \sigma[X] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(\sigma). \tag{3.5.10}$$

Σε αυτή την περίπτωση η σ λέγεται επέκταση της ρ.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να εξετάσουμε την περίπτωση που η σ είναι μια καθαρή κατάσταση και να δούμε ποιες είναι οι πιθανές καταστάσεις του X που μπορούν να προκύψουν με αυτό τον τρόπο, από μια καθαρή κατάσταση του (X, Y). Στην πραγματικότητα, μια κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ μπορεί να προκύψει με αυτό τον τρόπο αν και μόνο αν η τάξη της ρ δεν υπερβαίνει το πλήθος των κλασικών καταστάσεων του καταχωρητή Y ο οποίος αφαιρέθηκε από τον (X, Y) για να σχηματιστεί ο X.

Ορισμός 3.5.1. Έστω δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$, ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ και ένα διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. Το διάνυσμα u λέγεται purification του P αν

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P. \tag{3.5.11}$$

Σε αυτό τον ορισμό, ο P δεν χρειάζεται να έχει ίχνος τη μονάδα. Το ότι επιτρέπεται να είναι ο P ένας αυθαίρετος θετικά ημιορισμένος τελεστής είναι μια χρήσιμη γενίκευση που δεν θα δημιουργήσει προβλήματα στην ανάπτυξη της έννοιας της purification. Επίσης, το u είναι αυτό που λέμε ότι purifies τον P και όχι ο τελεστής uu^*. Αυτό είναι απλώς θέμα ευκολίας. Είναι συνηθισμένο να αναφέρεται και ο τελεστής uu^* ως purification.

3.5.2 Συνθήκες για την ύπαρξη purifications

Η απεικόνιση vec είναι πολύ χρήσιμη για την κατανόηση της έννοιας της purification. Εφόσον αυτή η απεικόνιση είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός από τον $L(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ στον $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, κάθε διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ μπορεί να γραφτεί ως $u = \mathrm{vec}(A)$ για κάποιον τελεστή $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Οπότε από την ιδιότητα(2.4.7) έχουμε

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{vec}(A)\mathrm{vec}(A)^*) = AA^*. \tag{3.5.12}$$

Σύμφωνα με την ισότητα αυτή, υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των παρακάτω προτάσεων, για κάθε $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$:

(i) Υπάρχει μία purification $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ του P.

(ii) Υπάρχει ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $P = AA^*$.

Το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη στηρίζεται σε αυτή την ισοδυναμία, δίνει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μιας purification ενός δεδομένου τελεστή.

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω δυο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$. Υπάρχει ένα διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P$ αν και μόνο αν $\dim(\mathcal{Y}) \geq \mathrm{rank}(P)$.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει ένα διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P$, τότε υπάρχει ένας τελεστής $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $P = AA^*$. Ισχύει $\mathrm{rank}(P) = \mathrm{rank}(A)$, οπότε $\dim(\mathcal{Y}) \geq \mathrm{rank}(P)$.

Αντίστροφα, αν $\dim(\mathcal{Y}) \geq \mathrm{rank}(P)$, θέτουμε $r = \mathrm{rank}(P)$ και σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα (Πόρισμα 2.5.1) ισχύει

$$P = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k(P) \chi_k \chi_k^* \tag{3.5.13}$$

όπου $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\} \subset \mathcal{X}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο και $\lambda_k(P) \neq 0$ για κάθε k. Για κάθε ορθοκανονικό σύνολο $\{y_1, \ldots, y_r\} \subset \mathcal{Y}$, που υπάρχει σίγουρα γιατί $\dim(\mathcal{Y}) \geq \mathrm{rank}(P)$, ο τελεστής

$$A = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k(P)} \chi_k y_k^* \tag{3.5.14}$$

ικανοποιεί τη σχέση $AA^* = P$. □

Πόρισμα 3.5.1. *Έστω δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ τέτοιοι ώστε $\dim(\mathcal{Y}) \geq \dim(\mathcal{X})$. Για κάθε θετικά ημιορισμένο τελεστή $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ υπάρχει ένα διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P$.*

Θεώρημα 3.5.2 (Unitary equivalence of purifications). *Έστω δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και δύο διανύσματα $u, v \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(vv^*). \tag{3.5.15}$$

Υπάρχει ένας unitary τελεστής $U \in \mathrm{U}(\mathcal{Y})$ τέτοιος ώστε $v = (\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes U)u$.

Απόδειξη. Έστω $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ οι τελεστές για τους οποίους ισχύει $u = \mathrm{vec}(A)$ και $v = \mathrm{vec}(B)$, και έστω ο $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ για τον οποίο ισχύει

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(vv^*). \tag{3.5.16}$$

Τότε θα ισχύει και $AA^* = P = BB^*$. Αν θέσουμε $r = \mathrm{rank}(P)$, θα είναι και $\mathrm{rank}(A) = r = \mathrm{rank}(B)$.

Έστω $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \mathcal{X}$ μια ορθοκανονική ακολουθία από ιδιοδιανύσματα του P και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1(P), \ldots, \lambda_r(P)$. Επειδή ισχύει $AA^* = P = BB^*$, μπορούμε να γράψουμε τους τελεστές A, B στη μορφή

$$A = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k(P)} \chi_k y_k^* \quad \text{και} \quad B = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k(P)} \chi_k w_k^* \tag{3.5.17}$$

όπου $\{y_1, \ldots, y_r\} \subset \mathcal{Y}$ και $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset \mathcal{Y}$ ορθοκανονικά σύνολα.

Έστω ο unitary τελεστής $V \in \mathrm{U}(\mathcal{Y})$ που ικανοποιεί τη σχέση $Vw_k = y_k$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, r\}$. Τότε θα ισχύει $AV = B$. Αν θεωρήσουμε τον τελεστή $U = V^{\mathsf{T}}$, θα έχουμε:

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes U)u = (\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes V^{\mathsf{T}})\mathrm{vec}(A) = \mathrm{vec}(AV) = \mathrm{vec}(B) = v. \tag{3.5.18}$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κβαντικά κανάλια

4.1 Ορισμοί και βασικές έννοιες

Ορισμός 4.1.1. Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Κβαντικό κανάλι ή απλά κανάλι ονομάζεται μια γραμμική απεικόνιση

$$\Phi : \mathrm{L}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}(\mathcal{Y}) \tag{4.1.1}$$

που ικανοποιεί τα εξής:

(i) Η Φ είναι πλήρως θετική.

(ii) Η Φ διατηρεί το ίχνος.

Το σύνολο όλων των καναλιών συμβολίζεται $\mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Παράδειγμα 4.1.1. Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $U \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ ένας unitary τελεστής. Η απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(X) = UXU^* \tag{4.1.2}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, είναι κανάλι.

Απόδειξη. Η Φ είναι γραμμική: Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ και για κάθε $X, Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ισχύει:

$$\Phi(aX + bY) = U(aX + bY)U^* = aUXU^* + bUYU^* = a\Phi(X) + b\Phi(Y). \tag{4.1.3}$$

Η Φ διατηρεί το ίχνος:

$$\mathrm{Tr}(\Phi(X) = \mathrm{Tr}(UXU^*) = \mathrm{Tr}(U^*UX) = \mathrm{Tr}(\mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})}X) = \mathrm{Tr}(X). \tag{4.1.4}$$

Η Φ είναι πλήρως θετική: Έστω $\mathcal{Z}$ μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $X \otimes Z \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Z})$. Τότε:

$$((\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})})(X \otimes Z)) = UXU^* \otimes Z = (U \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})})(X \otimes Z)(U \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})})^* \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Z}).$$

Άρα, η $\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})}$ είναι θετική. □

Τα κανάλια αυτής της μορφής ονομάζονται unitary κανάλια. Το ταυτοτικό κανάλι $\mathbb{1}_{L(\mathcal{X})}$ είναι ένα unitary κανάλι που προκύπτει αν βάλουμε $U = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$. Το κανάλι αυτό αντιπροσωπεύει ένα ιδανικό κβαντικό κανάλι επικοινωνίας ή ένα τέλειο συστατικό στη μνήμη ενός κβαντικού υπολογιστή, το οποίο δεν προκαλεί αλλαγές στον καταχωρητή στον οποίο εφαρμόζεται.

Έστω οι καταχωρητές $X_1, \ldots, X_n, Y_1 \ldots, Y_n$ και $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \ldots, \mathcal{Y}_n$ οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι που σχετίζονται με αυτούς. Ένα κανάλι

$$\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n) \tag{4.1.5}$$

το οποίο μετατρέπει τους $(X_1, \ldots, X_n)$ σε $(Y_1, \ldots, Y_n)$ λέγεται κανάλι γινόμενο αν

$$\Phi = \Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_n \tag{4.1.6}$$

όπου $\Psi_1 \in \mathrm{C}(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), \ldots, \Psi_n \in \mathrm{C}(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)$.

Τα κανάλια γινόμενα αντιπροσωπεύουν την ανεξάρτητη εφαρμογή μιας ακολουθίας καναλιών σε μια ακολουθία καταχωρητών. Όμοια και οι καταστάσεις γινόμενα αντιπροσωπεύουν ανεξαρτησία ανάμεσα στους καταχωρητές.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση που εμπλέκει ανεξάρτητα κανάλια είναι όταν ένα κανάλι εκτελείται σε έναν καταχωρητή ενώ τίποτα δεν γίνεται στους υπόλοιπους καταχωρητές (αυτό είναι ισοδύναμο με το να εκτελείται το ταυτοτικό κανάλι στους άλλους καταχωρητές).

Παράδειγμα 4.1.2. Έστω οι καταχωρητές X, Y και Z, και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ένα κανάλι που μετατρέπει τον X στον Y. Υποθέτουμε ότι ο σύνθετος καταχωρητής (X, Z) είναι σε κάποια συγκεκριμένη κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Z})$ κάποια στιγμή, και το κανάλι Φ εφαρμόζεται στον X και τον μετατρέπει στον Y. Η κατάσταση του (Y, Z) που προκύπτει σαν αποτέλεσμα, δίνεται από τη σχέση:

$$(\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})})(\rho) \in \mathrm{D}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}).$$

Αυτή είναι μία περίπτωση όπου το ταυτοτικό κανάλι $\mathbb{1}_{L(\mathcal{Z})}$ εφαρμόζεται ανεξάρτητα στον καταχωρητή Z.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει πόσο σημαντική προϋπόθεση είναι το να είναι το κανάλι πλήρως θετική απεικόνιση. Αυτό, μαζί με τη γραμμικότητα της Φ και την ιδιότητα που έχει να διατηρεί το ίχνος, μας εξασφαλίζει το ότι ο $(\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})})(\rho)$ είναι ένας τελεστής πυκνότητας για κάθε Z και για κάθε τελεστή πυκνότητας $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Z})$.

Πρόταση 4.1.1. *Έστω $\mathcal{Y}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})$ ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής. Η απεικόνιση $\Phi \in T(\mathbb{C}, \mathcal{Y})$ η οποία ορίζεται ως εξής: $\Phi(a) = aP$ για κάθε $a \in \mathbb{C}$, είναι πλήρως θετική.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{Z}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος. Η δράση του $\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})}$ σε έναν τελεστή $Z \in \mathrm{L}(\mathcal{Z}) = \mathrm{L}(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Z})$ δίνεται από τη σχέση:

$$(\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})})(Z) = P \otimes Z. \tag{4.1.7}$$

Αν ο Z είναι θετικά ημιορισμένος, τότε ο $P \otimes Z$ είναι θετικά ημιορισμένος, άρα η Φ είναι πλήρως θετική. □

Πρόταση 4.1.2. *Έστω μια θετική απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Η απεικόνιση Φ^* είναι θετική.*

Απόδειξη. Επειδή η Φ είναι θετική, ισχύει ότι $\Phi(P) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})$ για κάθε θετικά ημιορισμένο τελεστή $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$, δηλαδή

$$\langle Q, \Phi(P) \rangle \geq 0 \tag{4.1.8}$$

για κάθε $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ και $Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})$.

Οπότε έχουμε

$$\langle \Phi^*(Q), P \rangle = \langle Q, \Phi(P) \rangle \geq 0 \tag{4.1.9}$$

για κάθε $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ και $Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})$, το οποίο σημαίνει ότι $\Phi^*(Q) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ για κάθε $Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})$.

Άρα η απεικόνιση Φ^* είναι θετική. □

Από την πρόταση αυτή έπεται ότι αν $\Phi \in \mathrm{CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι μία πλήρως θετική απεικόνιση, τότε και η συζυγής απεικόνιση Φ^* είναι πλήρως θετική. Κι αυτό γιατί, αν η Φ είναι πλήρως θετική, τότε η $\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})}$ είναι θετική απεικόνιση για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$, άρα και η $(\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Z})})^* = \Phi^* \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{Z})}$ είναι θετική απεικόνιση.

Πόρισμα 4.1.1. *Η απεικόνιση του ίχνους* $\mathrm{Tr} \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ *είναι πλήρως θετική απεικόνιση για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο* $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Η συζυγής απεικόνιση του ίχνους δίνεται από τη σχέση: $\mathrm{Tr}^*(a) = a\mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ για κάθε $a \in \mathbb{C}$. Αυτή η απεικόνιση είναι πλήρως θετική, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.1, άρα και η απεικόνιση Tr είναι πλήρως θετική. □

Όπως έχουμε πει, ένας καταχωρητής λέγεται τετριμμένος αν το σύνολο των κλασικών καταστάσεών του αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο. Άρα ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με έναν τετριμμένο καταχωρητή θα έχει διάσταση 1 και θα είναι της μορφής $\mathbb{C}^a$, όπου $\{a\}$ η κλασική κατάσταση του καταχωρητή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, αν συσχετίσουμε έναν τέτοιο χώρο με το σώμα των μιγαδικών αριθμών, και θεωρώντας ότι $L(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, μπορούμε να δούμε ότι το 1 είναι η μόνη πιθανή κατάσταση για έναν τετριμμένο καταχωρητή. Ένας τέτοιος καταχωρητής δεν είναι χρήσιμος από άποψη επεξεργασίας πληροφοριών γιατί η παρουσία του δίνει απλά το τανυστικό γινόμενο του διανύσματος 1 με την κατάσταση του άλλου καταχωρητή που βρίσκεται υπό εξέταση.

Είναι χρήσιμο όμως να εξετάσουμε τις ιδιότητες των καναλιών που εμπλέκουν τετριμμένους καταχωρητές. Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι τετριμμένος καταχωρητής και ο Y είναι τυχών καταχωρητής. Έστω ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ το οποίο μετατρέπει τον X σε Y. Επειδή η Φ είναι γραμμική απεικόνιση, θα ισχύει ότι

$$\Phi(a) = a\rho \tag{4.1.10}$$

για κάθε $a \in \mathbb{C}$, όπου $\rho = \Phi(1) \in \mathrm{D}(\mathcal{Y})$.

Ένα κανάλι τέτοιας μορφής, μπορεί να θεωρηθεί ως μία προετοιμασία της κβαντικής κατάστασης ρ σε έναν νέο καταχωρητή Y. Η προετοιμασία αυτή πραγματοποιείται όποτε εκτελείται το κανάλι Φ. Με αυτό τον τρόπο, η κατασκευή μιας κατάστασης μπορεί να θεωρηθεί ως εφαρμογή ενός τέτοιου καναλιού.

Κάθε απεικόνιση της μορφής αυτής είναι κανάλι, γιατί:

(i) Η Φ είναι γραμμική.

(ii) Η Φ διατηρεί το ίχνος: $\mathrm{Tr}(\Phi(a)) = \mathrm{Tr}(a\rho) = a\mathrm{Tr}(\rho) = a$, όταν $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

(iii) Η Φ είναι πλήρως θετική σύμφωνα με την πρόταση (για $P = \rho$).

Μια άλλη περίπτωση καναλιού που εμπλέκει τετριμμένο καταχωρητή, είναι η περίπτωση που το κανάλι μετατρέπει τυχόντα καταχωρητή X σε έναν τετριμμένο καταχωρητή Y. Αν ταυτίσουμε πάλι τον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Y}$ με τους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$, όπως πριν, τότε το κανάλι θα είναι της μορφής $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$.

Η μόνη απεικόνιση αυτής της μορφής που διατηρεί το ίχνος, είναι η ίδια η απεικόνιση «ίχνος», η Tr, άρα θα είναι

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}(X) \tag{4.1.11}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Επομένως, όταν ο καταχωρητής X μετατρέπεται σε έναν τετριμμένο καταχωρητή Y, μπορούμε να πούμε ότι ο X καταστρέφεται, απορρίπτεται ή παραβλέπεται.

Το ότι η απεικόνιση «ίχνος» είναι πράγματι κανάλι, προκύπτει από τη γραμμικότητα του ίχνους και από την πρόταση που μας εξασφαλίζει ότι είναι πλήρως θετική απεικόνιση.

4.2 Αναπαραστάσεις και χαρακτηρισμοί των καναλιών

Έστω ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ όπου $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Σε κάποιες περιπτώσεις, αρκεί να δούμε την Φ με τις ιδιότητες που έχει εξ ορισμού, δηλαδή ως μία πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος και είναι της μορφής $\Phi : \mathrm{L}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}(\mathcal{Y})$. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που είναι χρήσιμο να λάβουμε υπ΄ όψιν πιο συγκεκριμένες αναπαραστάσεις ενός καναλιού.

Θα μελετήσουμε τέσσερις ειδικές αναπαραστάσεις ενός καναλιού (και γενικά, μιας απεικόνισης της μορφής $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι). Οι αναπαραστάσεις αυτές αποκαλύπτουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες των καναλιών και είναι πολύ χρήσιμες για την απόδειξη σημαντικών θεωρημάτων. Οι σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις αναπαραστάσεις αυτές, μας επιτρέπουν να μεταφερόμαστε από τη μία αναπαράσταση στην άλλη και να επιλέγουμε κάθε φορά αυτήν που ταιριάζει καλύτερα σε αυτό που μελετάμε.

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$. Για κάθε γραμμική απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathrm{vec}(X) \to \mathrm{vec}(\Phi(X))$$

ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\mathrm{vec}} & \mathcal{X} \otimes \mathcal{X} \\ {\scriptstyle \Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle K(\Phi)} \\ L(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{\mathrm{vec}} & \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \end{array}$$

Υπάρχει λοιπόν ένας γραμμικός τελεστής $K(\Phi) \in L(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y})$ τέτοιος ώστε

$$K(\Phi)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(\Phi(X)) \tag{4.2.1}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Ο τελεστής $K(\Phi)$ που ορίζεται μονοσήμαντα από τη σχέση αυτή, ονομάζεται *φυσική αναπαράσταση της* Φ. Η $K(\Phi)$ είναι γραμμική ως σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων.

Η απεικόνιση

$$\begin{aligned} K : \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to& \mathrm{L}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}) \\ \Phi \mapsto& K(\Phi) \end{aligned}$$

είναι γραμμική γιατί:

$$K(a\Phi + b\Psi) = aK(\Phi) + bK(\Psi) \tag{4.2.2}$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ και για κάθε $\Phi, \Psi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Η K είναι ισομορφισμός: Για κάθε τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ο τελεστής $Y = \Phi(X)$ είναι ο μοναδικός τελεστής ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση: $\mathrm{vec}(Y) = K(\Phi)\mathrm{vec}(X)$. Οπότε, όλες οι ιδιότητες της Φ μπορούν να γίνουν γνωστές από την $K(\Phi)$.

Επίσης η K διατηρεί την *, δηλαδή: $K(\Phi^*) = K(\Phi)^*$ για κάθε $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$. Ορίζεται η απεικόνιση $J : \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathrm{L}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ με τύπο

$$J(\Phi) = (\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})})(\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*) \tag{4.2.3}$$

για κάθε $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Εφόσον $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, ισχύει ότι:

$$J(\Phi) = \sum_{a,b \in \Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b} \tag{4.2.4}$$

όπως προκύπτει από τα εξής:

$$\begin{aligned} J(\Phi) =& (\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})})(\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\ \mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*) \\ =& (\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})})((\sum_{a \in \Sigma} e_a \otimes e_a)(\sum_{b \in \Sigma} e_b \otimes e_b)^*) \\ =& (\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})})(\sum_{a,b \in \Sigma} (e_a e_b^*) \otimes (e_a e_b^*)) \\ =& (\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})})(\sum_{a,b \in \Sigma} E_{a,b} \otimes E_{a,b}) \\ =& \sum_{a,b \in \Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b}. \end{aligned}$$

Ο τελεστής $J(\Phi)$ ονομάζεται αναπαράσταση Choi (ή τελεστής Choi) της Φ.

Η απεικόνιση J είναι γραμμικός ισομορφισμός. Αυτό μπορούμε εύκολα να το δούμε από την παρακάτω ισότητα:

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(J(\Phi)(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes X^{\mathsf{T}})), \tag{4.2.5}$$

η οποία αποδεικνύεται με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_{\mathcal{X}}(J(\Phi)(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes X^{\mathsf{T}})) &= \operatorname{Tr}_{\mathcal{X}}\left(\sum_{a,b\in\Sigma} (\Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b})(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes X^{\mathsf{T}})\right) \\
&= \operatorname{Tr}_{\mathcal{X}}\left(\sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b}X^{\mathsf{T}}\right) \\
&= \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b})\operatorname{Tr}(E_{a,b}X^{\mathsf{T}}) \\
&= \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(\operatorname{Tr}(E_{a,b}X^{\mathsf{T}})E_{a,b}) \\
&= \Phi\left(\sum_{a,b\in\Sigma} \operatorname{Tr}(E_{a,b}X^{\mathsf{T}})E_{a,b}\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{a,b\in\Sigma} \operatorname{Tr}\left(E_{a,b}\sum_{c,d\in\Sigma} X(d,c)E_{c,d}\right)E_{a,b}\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{a,b\in\Sigma} \operatorname{Tr}\left(\sum_{c,d\in\Sigma} X(d,c)E_{a,b}E_{c,d}\right)E_{a,b}\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{a,b\in\Sigma} \operatorname{Tr}\left(\sum_{d\in\Sigma} X(d,b)E_{a,d}\right)E_{a,b}\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{a,b\in\Sigma} X(a,b)E_{a,b}\right) = \Phi(X).
\end{aligned}$$

Για κάθε $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, η τάξη της αναπαράστασης Choi $J(\Phi)$ λέγεται τάξη Choi της Φ.

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$, ένα σύνολο δεικτών Σ και οι συλλογές

$$\{A_a : a \in \Sigma\} \text{ και } \{B_a : a \in \Sigma\}$$

τελεστών από τον χώρο $L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ ως εξής:

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \tag{4.2.6}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Η μορφή αυτή λέγεται αναπαράσταση Kraus της απεικόνισης Φ. Θα δείξουμε παρακάτω ότι κάθε απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ έχει αναπαράσταση Kraus. Σε αντίθεση με την φυσική αναπαράσταση και την αναπαράσταση Choi, η αναπαράσταση Kraus δεν είναι μοναδική.

Αν η Φ ορίζεται από τη σχέση (4.2.6) τότε ισχύει ότι

$$\Phi^*(Y) = \sum_{a\in\Sigma} A_a^* Y B_a. \tag{4.2.7}$$

Αυτό προκύπτει από τις εξής ισότητες: Για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και $Y \in \mathrm{L}(\mathcal{Y})$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi^*(Y), X\rangle = \langle Y, \Phi(X)\rangle = \operatorname{Tr}\left(Y^*\Phi(X)\right) &= \operatorname{Tr}\left(Y^* \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*\right) \\
&= \sum_{a\in\Sigma} \operatorname{Tr}(Y^* A_a X B_a^*) = \sum_{a\in\Sigma} \operatorname{Tr}(B_a^* Y^* A_a X) \\
&= \sum_{a\in\Sigma} \operatorname{Tr}\left((A_a^* Y B_a)^* X\right) = \left\langle \sum_{a\in\Sigma} A_a^* Y^* B_a, X \right\rangle,
\end{aligned}
$$

οπότε $\Phi^*(Y) = \sum_{a\in\Sigma} A_a^* Y B_a$ για κάθε $Y \in L(\mathcal{Y})$.

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ και οι τελεστές $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z})$. Τότε ορίζεται η απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ως εξής:

$$
\Phi(X) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^*) \tag{4.2.8}
$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Η μορφή αυτή της Φ λέγεται αναπαράσταση Stinespring της Φ. Όπως η αναπαράσταση Kraus, έτσι και η αναπαράσταση Stinespring υπάρχει για κάθε απεικόνιση Φ και δεν είναι μοναδική.

Αν η απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ παίρνει τη μορφή (4.2.8) τότε ισχύει ότι:

$$
\Phi^*(Y) = A^*(Y \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})B. \tag{4.2.9}
$$

Αυτό προκύπει από τις εξής ισότητες: Για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και $Y \in \mathrm{L}(\mathcal{Y})$,

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi^*(Y), X\rangle &= \langle Y, \Phi(X)\rangle = \langle Y, \operatorname{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^*)\rangle = \langle Y\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}, AXB^*\rangle \\
&= \operatorname{Tr}((Y\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})^* AXB^*) = \operatorname{Tr}(B^*(Y\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})^* AX) = \langle A^*(Y\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})B, X\rangle.
\end{aligned}
$$

Πρόταση 4.2.1. *Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, Σ ένα σύνολο δεικτών, $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ συλλογές τελεστών και $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) (*Φυσική αναπαράσταση*) *Ισχύει ότι*

$$
K(\Phi) = \sum_{a\in\Sigma} A_a \otimes \overline{B}_a. \tag{4.2.10}
$$

(ii) (*Αναπαράσταση Choi*) *Ισχύει ότι*

$$
J(\Phi) = \sum_{a\in\Sigma} \operatorname{vec}(A_a)\operatorname{vec}(B_a)^*. \tag{4.2.11}
$$

(iii) (*Αναπαράσταση Kraus*) *Ισχύει ότι*

$$
\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \tag{4.2.12}
$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(iv) (*Αναπαράσταση Stinespring*) *Για* $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^\Sigma$ *και* $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ *με*

$$A = \sum_{a\in\Sigma} A_a \otimes e_a \text{ και } B = \sum_{a\in\Sigma} B_a \otimes e_a \tag{4.2.13}$$

ισχύει ότι

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^*) \tag{4.2.14}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα την ισοδυναμία (i) $\Longleftrightarrow$ (iii).Έχουμε

$$\begin{aligned}
&K(\Phi) = \sum_{a\in\Sigma} A_a \otimes \overline{B}_a \\
&\Longleftrightarrow K(\Phi)\mathrm{vec(X)} = \left(\sum_{a\in\Sigma} A_a \otimes \overline{B}_a\right)\mathrm{vec(X)} \text{ για κάθε } X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}) \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{vec}(\Phi(X)) = \sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes \overline{B}_a)\mathrm{vec(X)} \text{ για κάθε } X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}) \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{vec}(\Phi(X)) = \sum_{a\in\Sigma} \mathrm{vec}(A_a X (\overline{B}_a)^T) \text{ για κάθε } X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}) \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{vec}(\Phi(X)) = \mathrm{vec}\left(\sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*\right) \text{ για κάθε } X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}) \\
&\Longleftrightarrow \Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \text{ για κάθε } X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}).
\end{aligned}$$

Για την ισοδυναμία (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), έχουμε: Αν

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τότε

$$\begin{aligned}
J(\Phi) &= \sum_{c,d\in\Sigma} \Phi(E_{c,d}) \otimes E_{c,d} \\
&= \sum_{c,d\in\Sigma}\left(\sum_{a\in\Sigma} A_a E_{c,d} B_a^* \otimes E_{c,d}\right) \\
&= \sum_{a\in\Sigma}\left(\sum_{c,d\in\Sigma} A_a E_{c,d} B_a^* \otimes E_{c,d}\right) \\
&= \sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\left(\sum_{c,d\in\Sigma}(E_{c,d} \otimes E_{c,d})(B_a^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\right) \\
&= \sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*(B_a^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}) \\
&= \sum_{a\in\Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(B_a)^*.
\end{aligned}$$

Αντίστροφα: Αν $J(\Phi) = \sum_{a\in\Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(B_a)^*$ τότε:

$$\begin{aligned}
\Phi(X) =& \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(J(\Phi)(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes X^T)) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}\left(\sum_{a\in\Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(B_a)^*)(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes X^T)\right) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}\left(\sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*(B_a^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}})(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes X^T)\right) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}\left(\sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}) \sum_{c,d\in\Sigma}(E_{c,d} \otimes E_{c,d})(B_a^* \otimes X^T)\right) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}\left(\sum_{a\in\Sigma}\sum_{c,d\in\Sigma} A_a E_{c,d} B_a^* \otimes E_{c,d}X^T\right) \\
&= \sum_{a\in\Sigma}\sum_{c,d\in\Sigma} A_a E_{c,d} B_a^* \mathrm{Tr}(E_{c,d}X^T) \\
&= \sum_{a\in\Sigma} A_a \left(\sum_{c,d\in\Sigma} \mathrm{Tr}(E_{c,d}X^T)E_{c,d}\right) B_a^* \\
&= \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \qquad \text{για κάθε } X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}).
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε και την ισοδυναμία (iii) $\iff$ (iv): Έστω $A_a, B_a \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^\Sigma$ και $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ τέτοιοι ώστε:

$$A = \sum_{a\in\Sigma} A_a \otimes e_a \quad \text{και} \quad B = \sum_{a\in\Sigma} B_a \otimes e_a.$$

Για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και για κάθε $y \otimes z \in \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
AXB^*(y \otimes z) &= \sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes e_a)X \sum_{a\in\Sigma}(B_a^* \otimes e_a^*)(y \otimes z) \\
&= \sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes e_a)X \sum_{a\in\Sigma} B_a^*(y) \otimes e_a^*(z) \\
&= \sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes e_a)X \sum_{a\in\Sigma} B_a^*(y)\langle e_a, z\rangle \\
&= \sum_{a\in\Sigma}(A_a \otimes e_a) \sum_{a\in\Sigma} X B_a^*(y)\langle e_a, z\rangle \\
&= \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*(y) \otimes \langle e_a, z\rangle e_a \\
&= \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*(y) \otimes e_a e_a^*(z) \\
&= \left(\sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \otimes (e_a e_a^*)\right)(y \otimes z),
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$AXB^* = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \otimes e_a e_a^* \text{ για κάθε} X \in \mathrm{L}(\mathcal{X}).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^*) &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(\sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \otimes e_a e_a^*)\\ &= \sum_{a\in\Sigma} \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(A_a X B_a^* \otimes e_a e_a^*)\\ &= \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \mathrm{Tr}(e_a e_a^*)\\ &= \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.2.1. *Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ μία μη μηδενική γραμμική απεικόνιση και $r = \mathrm{rank}(J(\Phi))$ η τάξη Choi της Φ. Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε σύνολο δεικτών Σ με $|\Sigma| = r$, υπάρχει αναπαράσταση Kraus της Φ, της μορφής:*

(4.2.15) $$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*$$

για κάποιες συλλογές $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

(ii) *Για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$ με $\dim(\mathcal{Z}) = r$ υπάρχει αναπαράσταση Stinespring της Φ, της μορφής:*

(4.2.16) $$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^*)$$

για κάποιους τελεστές $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$.

Απόδειξη. Έστω σύνολο δεικτών Σ με $|\Sigma| = r$. Τότε ισχύει ότι:

(4.2.17) $$J(\Phi) = \sum_{a\in\Sigma} u_a v_a^*$$

για κάποια διανύσματα

$$\{u_a : a \in \Sigma\}, \{v_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X},$$

όπου για $\{u_a : a \in \Sigma\}$ μπορούμε να πάρουμε μια βάση της εικόνας της $J(\Phi)$ και τότε αυτά θα ορίσουν μονοσήμαντα τη συλλογή $\{v_a : a \in \Sigma\}$ για την οποία θα ισχύει η σχέση (4.2.17). Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι $\{A_a : a \in \Sigma\}$ και $\{B_a : a \in \Sigma\}$ είναι οι τελεστές για τους οποίους ισχύει

$$\mathrm{vec} A_a = u_a, \mathrm{vec} B_a = v_a,$$

τότε έχουμε ότι

$$J(\Phi) = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(B_a)^*, \tag{4.2.18}$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.1,

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X B_a^* \tag{4.2.19}$$

και

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^*), \tag{4.2.20}$$

όπου $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ με

$$A = \sum_{a \in \Sigma} A_a \otimes e_a \quad \text{και} \quad B = \sum_{a \in \Sigma} B_a \otimes e_a. \tag{4.2.21}$$

□

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Φ είναι πλήρως θετική.*

(ii) *Η $\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})}$ είναι θετική.*

(iii) $J(\Phi) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$

(iv) *Υπάρχει μια συλλογή $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου Σ ένα σύνολο δεικτών, τέτοια ώστε:*

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.2.22}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(v) *Ο ισχυρισμός* (iv) *ισχύει για Σ τέτοιο ώστε $|\Sigma| = \mathrm{rank} J(\Phi)$.*

(vi) *Υπάρχει τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$, όπου $\mathcal{Z}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, τέτοιος ώστε*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*) \tag{4.2.23}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(vii) *Ο ισχυρισμός* (vi) *ισχύει για μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$ που έχει διάσταση ίση με* $\mathrm{rank} J(\Phi)$.

Απόδειξη. (i) $\implies$ (ii): Αν η Φ είναι πλήρως θετική, τότε εξ ορισμού η $\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})}$ είναι θετική.
(ii) $\implies$ (iii): Έστω ότι η $\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})}$ είναι θετική. Εφόσον

$$\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^* \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X})$$

θα ισχύει και ότι

$$J(\Phi) = (\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})})(\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}).$$

(iii) $\implies$ (iv), (v): Έστω ότι $J(\Phi) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$. Σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα, και γνωρίζοντας ότι οι ιδιοτιμές ενός θετικά ημιορισμένου τελεστή είναι μη αρνητικές, η $J(\Phi)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$J(\Phi) = \sum_{a \in \Sigma} u_a u_a^*$$

για κάποιο σύνολο δεικτών Σ με $|\Sigma| = \mathrm{rank} J(\Phi)$ και μια συλλογή διανυσμάτων $\{u_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}$. Θεωρούμε ότι $A_a \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι ο τελεστής για τον οποίο ισχύει $\mathrm{vec}(A_a) = u_a$ για κάθε $a \in \Sigma$. Τότε έχουμε:

$$J(\Phi) = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(A_a)^*. \tag{4.2.24}$$

Οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.1 θα έχουμε ότι

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.2.25}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Μπορούμε για $\{u_a : a \in \Sigma\}$ να πάρουμε μια βάση της εικόνας της $J(\Phi)$. Σε αυτή την περίπτωση οι τελεστές $\{A_a : a \in \Sigma\}$ θα είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.
(iv) $\implies$ (i): Έστω ότι

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^*$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, για κάποιο σύνολο δεικτών Σ και μια συλλογή τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Γνωρίζουμε ότι για έναν μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{W}$ και έναν θετικά ημιορισμένο τελεστή $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{W})$, ισχύει ότι:

$$(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})P(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})^* \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W}) \tag{4.2.26}$$

και ότι το σύνολο $\mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W})$ είναι κυρτός κώνος. Άρα έχουμε ότι για κάθε $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{W})$ θα είναι και

$$(\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})})(P) = \sum_{a \in \Sigma} (A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})P(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})^* \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W}),$$

οπότε η Φ είναι πλήρως θετική.
(v) $\implies$ (vi), (vii): Αυτή η συνεπαγωγή προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.2.1.
(vi) $\implies$ (i): Έστω ότι

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*)$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, για κάποιον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$ και έναν τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$. Για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{W}$ και κάθε θετικά ημιορισμένο $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{W})$ ισχύει

$$(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})P(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})^* \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{W}), \tag{4.2.27}$$

οπότε

$$(\Phi \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{W})})(P) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}((A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})P(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})^*) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W}) \tag{4.2.28}$$

αφού το ίχνος Tr είναι πλήρως θετική απεικόνιση. Επομένως η Φ είναι πλήρως θετική απεικόνιση. □

Πόρισμα 4.2.2. *Έστω ένα σύνολο δεικτών Σ, $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, και δύο συλλογές τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιες ώστε*

$$\sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* = \sum_{a \in \Sigma} B_a X B_a^* \tag{4.2.29}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Τότε, υπάρχει ένας unitary τελεστής $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^\Sigma)$ τέτοιος ώστε

$$B_a = \sum_{b \in \Sigma} U(a,b) A_b \tag{4.2.30}$$

για κάθε $a \in \Sigma$.

Απόδειξη. Οι απεικονίσεις

$$X \mapsto \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* \quad \text{και} \quad X \mapsto \sum_{a \in \Sigma} B_a X B_a^* \tag{4.2.31}$$

ταυτίζονται για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, οπότε οι Choi αναπαραστάσεις τους θα είναι ίσες:

$$\sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(A_a)^* = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(B_a)\mathrm{vec}(B_a)^*. \tag{4.2.32}$$

Έστω $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^\Sigma$. Ορίζουμε τα διανύσματα $u, v \in \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{Z}$ ως εξής:

$$u = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(A_a) \otimes e_a \quad \text{και} \quad v = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(B_a) \otimes e_a. \tag{4.2.33}$$

Τότε,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(uu^*) = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(A_a)^* = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(B_a)\mathrm{vec}(B_a)^* = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(vv^*). \tag{4.2.34}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.2, υπάρχει ένας unitary τελεστής $U \in \mathrm{U}(\mathcal{Z})$ τέτοιος ώστε

$$v = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}} \otimes U)u. \tag{4.2.35}$$

Επομένως, για κάθε $a \in \Sigma$ έχουμε:

$$\mathrm{vec}(B_a) = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}} \otimes e_a^*)v = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}} \otimes e_a^* U)u = \sum_{b \in \Sigma} U(a,b)\mathrm{vec}(A_b), \tag{4.2.36}$$

άρα,

$$B_a = \sum_{b \in \Sigma} U(a,b) A_b. \tag{4.2.37}$$

□

Πόρισμα 4.2.3. *Έστω $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και $\mathcal{Z}$ τρεις μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ δύο τελεστές για τους οποίους ισχύει:*

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(BXB^*) \tag{4.2.38}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Τότε, υπάρχει ένας unitary τελεστής $U \in \mathrm{U}(\mathcal{Z})$ τέτοιος ώστε

$$B = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes U) A. \tag{4.2.39}$$

Απόδειξη. Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών τέτοιο ώστε $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Ορίζουμε δύο συλλογές τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιες ώστε

$$A_a = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes e_a^*) A \quad \text{και} \quad B_a = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes e_a^*) B, \tag{4.2.40}$$

για κάθε $a \in \Sigma$. Οπότε,

$$A = \sum_{a \in \Sigma} A_a \otimes e_a \quad \text{και} \quad B = \sum_{a \in \Sigma} B_a \otimes e_a. \tag{4.2.41}$$

Από τη σχέση (4.2.38) έχουμε και ότι

$$\sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* = \sum_{a \in \Sigma} B_a X B_a^*, \tag{4.2.42}$$

οπότε, σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.2, υπάρχει ένας unitary τελεστής $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^{\Sigma})$ τέτοιος ώστε

$$B_a = \sum_{b \in \Sigma} U(a,b) A_b, \tag{4.2.43}$$

άρα $B = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes U) A$. □

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Φ διατηρεί τους ερμιτιανούς τελεστές.*

(ii) *Ισχύει ότι $(\Phi(X))^* = \Phi(X^*)$ για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.*

(iii) *Ισχύει ότι $J(\Phi) \in \mathrm{Herm}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$.*

(iv) *Υπάρχουν πλήρως θετικές απεικονίσεις $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathrm{CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιες ώστε $\Phi = \Phi_0 - \Phi_1$.*

(v) *Υπάρχουν θετικές απεικονίσεις $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιες ώστε $\Phi = \Phi_0 - \Phi_1$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Έστω ότι η Φ διατηρεί τους ερμιτιανούς τελεστές. Γνωρίζουμε ότι κάθε τελεστής $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $X = H + \mathrm{i}K$, όπου $H, K \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$ είναι οι τελεστές που ορίζονται ως εξής:

$$H = \frac{X + X^*}{2}, K = \frac{X - X^*}{2\mathrm{i}}. \tag{4.2.44}$$

Επειδή η Φ διατηρεί τους ερμιτιανούς τελεστές, οι τελεστές $\Phi(H)$ και $\Phi(K)$ είναι αυτοσυζυγείς. Επίσης, η Φ είναι γραμμική. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}(\Phi(X))^* &= (\Phi(H + \mathrm{i}K))^* = (\Phi(H) + \mathrm{i}\Phi(K))^* \\ &= \Phi(H) - \mathrm{i}\Phi(K) = \Phi(H - \mathrm{i}K) = \Phi(X^*).\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Έστω ότι $(\Phi(X))^* = \Phi(X^*)$ για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και έστω Σ ένα σύνολο δεικτών τέτοιο ώστε $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$. Τότε έχουμε:

$$J(\Phi)^* = \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b})^* \otimes E^*_{a,b} = \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E^*_{a,b}) \otimes E^*_{a,b} = \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b} = J(\Phi).$$

Επομένως, η $J(\Phi)$ είναι αυτοσυζυγής.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv), (v): Έστω ότι η $J(\Phi)$ είναι αυτοσυζυγής. Θεωρούμε ότι $J(\Phi) = P_0 - P_1$ είναι η Jordan-Hahn αναπαράστασή της και ότι $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathrm{CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι οι απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει ότι $J(\Phi_0) = P_0$ και $J(\Phi_1) = P_1$. Επειδή οι $J(\Phi_0)$ και $J(\Phi_1)$ είναι θετικά ημιορισμένες απεικονίσεις, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.1 οι απεικονίσεις Φ_0, Φ_1 θα είναι επίσης πλήρως θετικές, και ισχύει ότι $J(\Phi) = J(\Phi_0) - J(\Phi_1) = J(\Phi_0 - \Phi_1)$, άρα $\Phi = \Phi_0 - \Phi_1$.

(v) $\Longrightarrow$ (i): Έστω ότι υπάρχουν θετικές απεικονίσεις $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιες ώστε $\Phi = \Phi_0 - \Phi_1$. Θεωρούμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $H \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$ και $H = P_0 - P_1$ την Jordan-Hahn αναπαράστασή του, όπου $P_0, P_1 \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$. Τότε θα ισχύει ότι $\Phi_0(P_0), \Phi_0(P_1), \Phi_1(P_0), \Phi_1(P_1) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})$ επειδή οι Φ_0, Φ_1 είναι θετικές απεικονίσεις. Επίσης

$$\Phi(H) = (\Phi_0(P_0) + \Phi_1(P_1)) - (\Phi_0(P_1) + \Phi_1(P_0)),$$

άρα η $\Phi(H)$ είναι αυτοσυζυγής ως διαφορά δύο θετικά ημιορισμένων τελεστών. □

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω μια απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Φ διατηρεί το ίχνος.*

(ii) *Η Φ^* είναι μοναδιαία απεικόνιση.*

(iii) $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$.

(iv) *Υπάρχουν συλλογές τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, όπου Σ ένα σύνολο δεικτών, τέτοιες ώστε:*

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^* \tag{4.2.45}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και

$$\sum_{a\in\Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}. \tag{4.2.46}$$

(v) *Αν δύο συλλογές τελεστών* $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *ικανοποιούν τη σχέση* (4.2.45) *τότε θα ικανοποιούν και τη σχέση* (4.2.46).

(vi) *Υπάρχουν τελεστές* $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$, *όπου* $\mathcal{Z}$ *μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, τέτοιοι ώστε*

$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*) \tag{4.2.47}$$

και

$$A^*B = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}. \tag{4.2.48}$$

(vii) *Αν δύο τελεστές ικανοποιούν τη σχέση* (4.2.47) *τότε ικανοποιούν και την* (4.2.48).

Απόδειξη. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii): Έστω ότι η Φ διατηρεί το ίχνος. Τότε:

$$\langle \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, X\rangle = \mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(\Phi(X)) = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}, \Phi(X)\rangle = \langle \Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}), X\rangle,$$

επομένως $\langle \mathbb{1}_{\mathcal{X}} - \Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}), X\rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Άρα, $\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$, δηλαδή η Φ^* είναι μοναδιαία απεικόνιση. Αντίστροφα, αν η Φ^* είναι μοναδιαία απεικόνιση, τότε έχουμε:

$$\mathrm{Tr}(\Phi(X)) = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}, \Phi(X)\rangle = \langle \Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}), X\rangle = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, X\rangle = \mathrm{Tr}(X)$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Επομένως, η Φ διατηρεί το ίχνος.
(ii) $\Longrightarrow$ (v): Έστω $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοια ώστε η Φ^* να είναι μοναδιαία. Έστω επίσης μια αναπαράσταση Kraus της Φ,

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*,$$

όπου $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Τότε,

$$\Phi^*(Y) = \sum_{a\in\Sigma} A_a^* Y B_a,$$

οπότε

$$\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \Rightarrow \sum_{a\in\Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

(v) $\Longrightarrow$ (iv): Για κάθε $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ υπάρχει αναπαράσταση Kraus, δηλαδή υπάρχουν $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιοι ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*$$

και σύμφωνα με τον ισχυρισμό (v) θα ισχύει για τους τελεστές αυτούς και ότι

$$\sum_{a\in\Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Έστω ότι υπάρχουν συλλογές τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ που ικανοποιούν τις σχέσεις (4.2.45) και (4.2.46). Τότε

$$\Phi^*(Y) = \sum_{a\in\Sigma} A_a^* Y B_a$$

για κάθε $Y \in L(\mathcal{Y})$, οπότε έχουμε:

$$\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \sum_{a\in\Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}},$$

δηλαδή η Φ^* είναι μοναδιαία απεικόνιση.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (vi), (vii): Για κάθε $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει αναπαράσταση Stinespring, δηλαδή, υπάρχουν τελεστές $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z})$, όπου $\mathcal{Z}$ μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, τέτοιοι ώστε

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^*).$$

Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (4.2.9), ισχύει

$$\Phi^*(Y) = A^*(Y\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})B,$$

οπότε $\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = A^*B$. Επομένως, η Φ^* είναι μοναδιαία αν και μόνο αν $A^*B = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii): Έστω ότι $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Gamma$, όπου Γ ένα σύνολο δεικτών. Τότε,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}\Big(\sum_{a,b\in\Gamma} \Phi(E_{a,b})\otimes E_{a,b}\Big) = \sum_{a,b\in\Gamma} \mathrm{Tr}(\Phi(E_{a,b}))E_{a,b}. \tag{4.2.49}$$

Αν η Φ διατηρεί το ίχνος, τότε

$$\mathrm{Tr}(\Phi(E_{a,b})) = \mathrm{Tr}(E_{a,b}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a = b \\ 0 & \text{αν } a \neq b \end{cases},$$

οπότε

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \sum_{a\in\Gamma} E_{a,a} = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Αντίστροφα, αν $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$, τότε

$$\sum_{a,b\in\Gamma} \mathrm{Tr}(\Phi(E_{a,b}))E_{a,b} = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \text{άρα } \ \mathrm{Tr}(\Phi(E_{a,b})) = \mathrm{Tr}(E_{a,b}).$$

Η Φ λοιπόν διατηρεί το ίχνος των τελεστών $\{E_{a,b}, a, b\in\Gamma\}$ που είναι βάση του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ και είναι και γραμμική, άρα είναι απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος. □

Από τα Θεωρήματα 4.2.1 και 4.2.2 προκύπτουν τα εξής:

Πόρισμα 4.2.4. *Έστω μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, όπου $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Φ είναι κανάλι.*

(ii) *$J(\Phi) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{X})$ και $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$.*

(iii) *Υπάρχει μια συλλογή $\{A_a : a\in\Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, όπου Σ ένα σύνολο δεικτών, τέτοια ώστε:*

$$\sum_{a\in\Sigma} A_a^*A_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \quad \textit{και} \quad \Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.2.50}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(iv) *Ο ισχυρισμός* (iii) *ισχύει για* Σ *τέτοιο ώστε* $|\Sigma| = \operatorname{rank}(J(\Phi))$.

(v) *Υπάρχει ένας τελεστής* $A \in \mathrm{U}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$, *όπου* $\mathcal{Z}$ *ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, τέτοιος ώστε*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*) \tag{4.2.51}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(vi) *Ο ισχυρισμός* (v) *ισχύει για μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο* $\mathcal{Z}$ *που έχει* $\dim(\mathcal{Z}) = \operatorname{rank}(J(\Phi))$.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω* $\mathcal{X}$ *και* $\mathcal{Y}$ *δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Το σύνολο* $\mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *είναι συμπαγές και κυρτό.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση $J : \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ που καθορίζει την αναπαράσταση Choi είναι γραμμική και αντιστρέψιμη. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.4 αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}) : \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(X) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\} \tag{4.2.52}$$

τότε ισχύει ότι $\mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = J^{-1}(\mathcal{A})$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι συμπαγές και κυρτό.

Το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό και κυρτό γιατί είναι η τομή δύο κλειστών και κυρτών χώρων: Του $\mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ και του υπόχωρου

$$\{X \in \mathrm{L}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}) : \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(X) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\}. \tag{4.2.53}$$

Επίσης το $\mathcal{A}$ είναι φραγμένο: Για κάθε $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\|X\|_1 = \mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(X)) = \mathrm{Tr}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \dim(\mathcal{X}). \tag{4.2.54}$$

Επομένως το $\mathcal{A}$ είναι συμπαγές. □

4.3 Παραδείγματα καναλιών

4.3.1 Ισομετρικά και unitary κανάλια

Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(X) = AXB^* \tag{4.3.1}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Αν ο A είναι ισομετρία από τον $\mathcal{X}$ στον $\mathcal{Y}$ και $A = B$, τότε σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.4 η Φ είναι κανάλι. Ένα τέτοιο κανάλι ονομάζεται ισομετρικό κανάλι.

Αν $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ και ο $A = B$ είναι unitary τελεστής, τότε η Φ λέγεται unitary κανάλι.

Αν η Φ είναι ορισμένη σύμφωνα με τη σχέση (4.3.1) τότε, όπως έχουμε δει στην Πρόταση 4.2.1, η φυσική αναπαράστασή της θα είναι

$$K(\Phi) = A \otimes \overline{B} \tag{4.3.2}$$

και η Choi αναπαράστασή της, η

$$J(\Phi) = \mathrm{vec}(A)\mathrm{vec}(B)^*. \tag{4.3.3}$$

Η σχέση (4.3.1) είναι και μία αναπαράσταση Kraus της Φ και μπορεί να θεωρηθεί και ως παράδειγμα Stinespring αναπαράστασής της, αν πάρουμε $\mathcal{Z} = \mathbb{C}$ οπότε το ίχνος δρα σαν την ταυτοτική απεικόνιση στον $\mathbb{C}$.

Το ταυτοτικό κανάλι $\mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ είναι ένα παράδειγμα unitary καναλιού. Η φυσική αναπαράστασή του είναι ο ταυτοτικός τελεστής $\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ και η Choi αναπαράστασή του ο τελεστής $\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*$ που έχει τάξη 1.

4.3.2 Replacement channels and the completely depolarizing channel

Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X}), B \in \mathrm{L}(\mathcal{Y})$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(X) = \langle A, X\rangle B \tag{4.3.4}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Θα αποδείξουμε ότι η φυσική αναπαράσταση της Φ δίνεται από τη σχέση:

$$K(\Phi) = \mathrm{vec}(B)\mathrm{vec}(A)^*. \tag{4.3.5}$$

Πράγματι, αν $\{e_a : a \in \Sigma\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{X}$ τότε:

$$\begin{aligned} K(\Phi)(e_a \otimes e_b) &= K(\Phi)\mathrm{vec}(E_{a,b}) = \mathrm{vec}(\Phi(E_{a,b})) = \mathrm{vec}(\langle A, E_{a,b}\rangle B) \\ &= \mathrm{vec}(\mathrm{Tr}(A^* E_{a,b})B) = \mathrm{Tr}(A^* E_{a,b})\mathrm{vec}B \\ &= \mathrm{Tr}(\overline{A}^{\mathsf{T}} E_{a,b})\mathrm{vec}B = \overline{A}(a,b)\mathrm{vec}B. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(A)^*(e_a \otimes e_b) &= \mathrm{vec}\Big(\sum_{c,d\in\Sigma} A(c,d)E_{c,d}\Big)^*(e_a \otimes e_b) \\ &= \Big(\sum_{c,d\in\Sigma} A(c,d)\mathrm{vec}(E_{c,d})\Big)^*(e_a \otimes e_b) \\ &= \Big(\sum_{c,d\in\Sigma} A(c,d)(e_c \otimes e_d)\Big)^*(e_a \otimes e_b) \\ &= \sum_{c,d\in\Sigma} \overline{A}(c,d)(e_c \otimes e_d)^*(e_a \otimes e_b) = \sum_{c,d\in\Sigma} \overline{A}(c,d)\langle e_c \otimes e_d, e_a \otimes e_b\rangle \\ &= \sum_{c,d\in\Sigma} \overline{A}(c,d)\langle e_c, e_a\rangle\langle e_d \otimes e_b\rangle = \overline{A}(a,b), \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

άρα

$$K(\Phi)(e_a \otimes e_b) = \overline{A}(a,b)\mathrm{vec}B = \mathrm{vec}(B)\mathrm{vec}(A)^*(e_a \otimes e_b) \tag{4.3.8}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$. Και εφόσον το $\{e_a \otimes e_b : \ a, b \in \Sigma\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}$ και η $K(\Phi)$ είναι γραμμική, προκύπτει ότι

$$K(\Phi) = \mathrm{vec}(B)\mathrm{vec}(A)^*. \tag{4.3.9}$$

Για την αναπαράσταση Choi της Φ έχουμε: Για κάθε $u \otimes v \in \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} J(\Phi)(u \otimes v) &= \Big(\sum_{a,b \in \Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b} \Big)(u \otimes v) \\ &= \Big(\sum_{a,b \in \Sigma} \langle A, E_{a,b} \rangle B \otimes E_{a,b} \Big)(u \otimes v) \\ &= \sum_{a,b \in \Sigma} \langle A, E_{a,b} \rangle Bu \otimes E_{a,b} v = \sum_{a,b \in \Sigma} Bu \otimes \langle A, E_{a,b} \rangle E_{a,b} v \\ &= \sum_{a,b \in \Sigma} Bu \otimes \mathrm{Tr}(A^* E_{a,b}) E_{a,b} v = Bu \otimes \sum_{a,b \in \Sigma} \mathrm{Tr}(\overline{A}^{\mathsf{T}} E_{a,b}) E_{a,b} v \\ &= Bu \otimes \overline{A} v = (B \otimes \overline{A})(u \otimes v). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Από αυτή τη σχέση, και από τη γραμμικότητα της $J(\Phi)$, συμπεραίνουμε ότι

$$J(\Phi) = B \otimes \overline{A}. \tag{4.3.11}$$

Μία αναπαράσταση Kraus της Φ είναι η

$$\Phi(X) = \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} C_{a,b} X D_{a,b}^*, \tag{4.3.12}$$

όπου τα $C_{a,b}, D_{a,b}$ προκύπτουν ως εξής: Αν

$$A = \sum_{a \in \Sigma} u_a x_a^* \text{ και } B = \sum_{b \in \Gamma} v_b y_b^* \tag{4.3.13}$$

όπου

$$\begin{gathered} \{u_a : \ a \in \Sigma\}, \{x_a : \ a \in \Sigma\} \subset \mathcal{X} \\ \{v_b : b \in \Gamma\}, \{y_b : b \in \Gamma\} \subset \mathcal{Y} \end{gathered} \tag{4.3.14}$$

τότε $C_{a,b} = v_b u_a^*$ και $D_{a,b} = y_b x_a^*$ για κάθε $a \in \Sigma$ και $b \in \Gamma$.

Πράγματι, για κάθε $\xi \in \mathcal{Y}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle A, X \rangle B\xi &= \mathrm{Tr}(A^* X) B\xi = \mathrm{Tr}(XA^*) B\xi = \mathrm{Tr}\Big(X \sum_{a \in \Sigma} x_a u_a^* \Big) \sum_{b \in \Gamma} v_b y_b^* \xi \\ &= \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{Tr}(X x_a u_a^*) \sum_{b \in \Gamma} v_b y_b^* \xi = \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} \langle u_a, X x_a \rangle \langle y_b, \xi \rangle v_b \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} C_{a,b} X D_{a,b}^* \xi &= \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} v_b u_a^* X x_a y_b^* \xi = \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} v_b u_a^* X \langle y_b, \xi \rangle x_a \\ &= \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} \langle y_b, \xi \rangle v_b u_a^* X x_a = \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} \langle y_b, \xi \rangle \langle u_a, X x_a \rangle v_b, \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

επομένως, οι δύο απεικονίσεις ταυτίζονται.

Επίσης, αν η (4.3.12) είναι αναπαράσταση Kraus της Φ, από την Πρόταση 4.2.1 παίρνουμε ότι μία Stinespring αναπαράστασή της θα είναι η

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(CXD^*) \tag{4.3.17}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, όπου

$$C = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} C_{a,b} \otimes e_{(a,b)} \quad \text{και} \quad D = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} D_{a,b} \otimes e_{(a,b)} \tag{4.3.18}$$

και $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^{\Sigma\times\Gamma}$.

Αν οι A και B είναι θετικά ημιορισμένοι, και η Φ δίνεται από τη σχέση (4.3.4), τότε η $J(\Phi) = B \otimes \overline{A}$ είναι θετικά ημιορισμένη, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.1 η Φ είναι πλήρως θετική.

Ειδικά στην περίπτωση που $A = \mathbb{1}_{\mathrm{L}(\mathcal{X})}$ και $B = \sigma$ για κάποιον τελεστή πυκνότητας $\sigma \in \mathrm{D}(\mathcal{Y})$, η Φ δίνεται από τον τύπο:

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}(X)\sigma \tag{4.3.19}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Η απεικόνιση αυτή είναι κανάλι, γιατί είναι πλήρως θετική όπως δείξαμε παραπάνω και διατηρεί το ίχνος: $\mathrm{Tr}(\Phi(X)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(X)\sigma) = \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(\sigma) = \mathrm{Tr}(X)$, αφού ο σ είναι τελεστής πυκνότητας.

Ισχύει ότι $\Phi(\rho) = \sigma$ για κάθε $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ και γι' αυτό η Φ εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο απορρίπτεται ο καταχωρητής X και αντικαθίσταται από τον καταχωρητή Y στην κατάσταση σ. Κανάλια της μορφής (4.3.19) λέγονται κανάλια αντικατάστασης.

Ένα σημαντικό κανάλι αντικατάστασης είναι το completely depolarizing channel, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\Omega(X) = \mathrm{Tr}(X)\omega \tag{4.3.20}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, όπου

$$\omega = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{\dim(\mathcal{X})}. \tag{4.3.21}$$

Το ω συμβολίζει το completely mixed state στο χώρο $\mathcal{X}$ και η απεικόνιση Ω είναι το μοναδικό κανάλι που μετατρέπει κάθε τελεστή πυκνότητας σε completely mixed state γιατί $\Omega(\rho) = \omega$ για κάθε $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$. Από τις σχέσεις (4.3.9) και (4.3.11) προκύπτει ότι η φυσική αναπαράσταση του completely depolarizing channel $\Omega \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι η

$$K(\Omega) = \frac{\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*}{\dim(\mathcal{X})} \tag{4.3.22}$$

και η Choi αναπαράστασή του η

$$J(\Omega) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{\dim(\mathcal{X})}. \tag{4.3.23}$$

4.3.3 Η απεικόνιση «ανάστροφος»

Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών, $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $T \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ η απεικόνιση «ανάστροφος», δηλαδή

$$T(X) = X^{\mathsf{T}} \tag{4.3.24}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Για την φυσική αναπαράσταση του T, παρατηρούμε το εξής: Αν $u, v \in \mathcal{X}$, τότε για τον $X = uv^{\mathsf{T}}$ ισχύει ότι $\mathrm{vec}(X) = u \otimes v$, επομένως

$$K(T)(u \otimes v) = K(T)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(T(X)) = \mathrm{vec}(X^{\mathsf{T}}) = \mathrm{vec}(vu^{\mathsf{T}}) = v \otimes u, \tag{4.3.25}$$

δηλαδή $K(T) = W$ όπου W ο τελεστής swap που έχει τύπο $W(u \otimes v) = v \otimes u$ για κάθε $u, v \in \mathcal{X}$. Για την αναπαράσταση Choi έχουμε·

$$J(T) = \sum_{a,b \in \Sigma} T(E_{a,b}) \otimes E_{a,b} = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{b,a} \otimes E_{a,b} = W, \tag{4.3.26}$$

γιατί

$$\begin{aligned} J(T)(u \otimes v) &= \sum_{a,b \in \Sigma} E_{b,a} \otimes E_{a,b}(u \otimes v) = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{b,a}u \otimes E_{a,b}v \\ &= \sum_{a,b \in \Sigma} u(a)e_b \otimes v(b)e_a = \sum_{a,b \in \Sigma} v(b)e_b \otimes u(a)e_a \\ &= v \otimes u = W(u \otimes v). \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Για την απεικόνιση W μπορούμε να δείξουμε ότι δεν είναι θετικά ημιορισμένη: Έστω $u, v \in \mathcal{X}$ δύο μη μηδενικά κάθετα διανύσματα. Τότε για $\xi = u \otimes v - v \otimes u$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \xi, W(\xi) \rangle &= \langle u \otimes v - v \otimes u, v \otimes u - u \otimes v \rangle \\ &= \langle u \otimes v, v \otimes u \rangle - \langle u \otimes v, u \otimes v \rangle - \langle v \otimes u, v \otimes u \rangle + \langle v \otimes u, u \otimes v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, u \rangle - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle \langle u, v \rangle \\ &= -2 \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle < 0. \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

Επομένως η $J(T) = W$ δεν είναι θετικά ημιορισμένη και σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.1 η Τ δεν είναι πλήρως θετική απεικόνιση. Μία αναπαράσταση Kraus της T είναι η

$$T(X) = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{a,b} X E_{b,a}^{*} \tag{4.3.29}$$

και μία Stinespring αναπαράστασή της η

$$T(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXB^{*}) \tag{4.3.30}$$

για $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^{\Sigma \times \Sigma}$ και $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Z})$ με

$$A = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{a,b} \otimes e_{(a,b)} \text{ και } B = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{b,a} \otimes e_{(a,b)}. \tag{4.3.31}$$

4.3.4 The completely dephasing channel

Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών και $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$. Η απεικόνιση $\Delta \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ με τύπο

$$\Delta(X) = \sum_{a\in\Sigma} X(a,a)E_{a,a} \tag{4.3.32}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, είναι ένα κανάλι γνωστό ως the completely dephasing channel. Όταν το κανάλι αυτό δρα σε έναν τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, μηδενίζει όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στη διαγώνιό του και αφήνει αμετάβλητα τα στοιχεία της διαγωνίου. Επομένως, το κανάλι Δ είναι ιδανικό κανάλι για την κλασική επικοινωνία, γιατί, δρα σαν την ταυτοτική απεικόνιση πάνω σε κάθε διαγώνιο τελεστή πυκνότητας και άρα μεταφέρει αποτελεσματικά και χωρίς λάθη τις πιθανοτικές καταστάσεις, ενώ όλες τις άλλες καταστάσεις τις μετατρέπει σε πιθανοτικές καταστάσεις που προκύπτουν από τα διαγώνια στοιχεία τους.

Για την φυσική αναπαράσταση της Δ έχουμε:

$$K(\Delta)\mathrm{vec}(E_{a,b}) = \begin{cases} \mathrm{vec}(E_{a,b}) & \text{αν } a = b \\ 0 & \text{αν } a \neq b \end{cases}$$

οπότε

$$K(\Delta)(e_a \otimes e_b) = \begin{cases} (e_a \otimes e_b) & \text{αν } a = b \\ 0 & \text{αν } a \neq b \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$. Επομένως,

$$K(\Delta) = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} \otimes E_{a,a}. \tag{4.3.33}$$

Όπως για την απεικόνιση T, έτσι και για την Δ, η Choi αναπαράστασή της ταυτίζεται με την φυσική αναπαράσταση:

$$J(\Delta) = \sum_{a\in\Sigma} \Delta(E_{a,a}) \otimes E_{a,a} = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} \otimes E_{a,a}. \tag{4.3.34}$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι $J(\Delta) \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X})$ και

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(J(\Delta)) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}\Big(\sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} \otimes E_{a,a}\Big) = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a}\mathrm{Tr}(E_{a,a}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Σύμφωνα λοιπόν με το Πόρισμα 4.2.4 η Δ είναι κανάλι. Μία αναπαράσταση Kraus της Δ είναι η

$$\Delta(X) = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} X E_{a,a}^* \tag{4.3.35}$$

και μία Stinespring αναπαράστασή της η

$$\Delta(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*), \tag{4.3.36}$$

όπου $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^\Sigma$ και

$$A = \sum_{a\in\Sigma} (e_a \otimes e_a)e_a^*. \tag{4.3.37}$$

Οι κλασικές πιθανοτικές καταστάσεις μπορούν να συσχετιστούν με διαγώνιους τελεστές πυκνότητας, αλλά οι κλασικοί καταχωρητές δεν διακρίνονται εύκολα από τους συνηθισμένους κβαντικούς καταχωρητές. Μπορούμε όμως να δούμε με περισσότερη ακρίβεια τον όρο του κλασικού καταχωρητή, τώρα που έχουμε παρουσιάσει τα κανάλια. Ο όρος κλασικός καταχωρητής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραπέμψει σε καταχωρητή ο οποίος, από τη φύση των υπό εξέταση διαδικασιών, δεν θα επηρεαζόταν από την εφαρμογή του completely dephasing channel Δ, οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της ύπαρξής του. Κάθε κατάσταση ενός κλασικού καταχωρητή είναι απαραίτητα ένας διαγώνιος τελεστής πυκνότητας, που αντιστοιχεί σε μία πιθανοτική κατάσταση, εφόσον αυτοί είναι οι τελεστές πυκνότητας που μένουν αμετάβλητοι όταν δρα επάνω τους το κανάλι Δ.

4.4 Ακραία κανάλια

Αν $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, τότε το σύνολο των καναλιών $\mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι συμπαγές και κυρτό, όπως δείξαμε παραπάνω. Ένας χαρακτηρισμός των ακραίων σημείων του συνόλου αυτού, δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί. Για την απόδειξη του θεωρήματος, θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.4.1. *Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $A \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ένας τελεστής. Ισχύει ότι*

$$\{P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X}) : \mathrm{im}(P) \subseteq \mathrm{im}(A)\} = \{AQA^* : Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})\}. \tag{4.4.1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})$ ισχύει ότι ο AQA^* είναι θετικά ημιορισμένος και ότι $\mathrm{im}(AQA^*) \subseteq \mathrm{im}(A)$. Άρα.

$$\{AQA^* : Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})\} \subseteq \{P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X}) : \mathrm{im}(P) \subseteq \mathrm{im}(A)\}. \tag{4.4.2}$$

Για το αντίστροφο: Έστω $P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $\mathrm{im}(P) \subseteq \mathrm{im}(A)$. Τότε, αν θεωρήσουμε τον τελεστή Q με

$$Q = A^+ P (A^+)^*, \tag{4.4.3}$$

όπου A^+ ο Moore-Penrose ψευδοαντίστροφος του A, τότε

$$AQA^* = (AA^+) P (AA^+)^* = \Pi_{\mathrm{im}(A)} P \Pi_{\mathrm{im}(A)} = P, \tag{4.4.4}$$

επομένως,

$$\{P \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X}) : \mathrm{im}(P) \subseteq \mathrm{im}(A)\} \subseteq \{AQA^* : Q \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y})\}. \tag{4.4.5}$$

Οπότε ισχύει η ισότητα. □

Θεώρημα 4.4.1 (Choi)**.** *Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων τελεστών τέτοιο ώστε*

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.4.6}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Το κανάλι Φ είναι ακραίο σημείο του συνόλου $\mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ αν και μόνο αν οι τελεστές $\{A_b^* A_a : (a, b) \in \Sigma \times \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Θεωρούμε τον τελεστή $M \in \mathrm{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ με

$$M = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(A_a) e_a^*. \tag{4.4.7}$$

Παρατηρούμε ότι

$$MM^* = \sum_{a \in \Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(A_a)^* = J(\Phi). \tag{4.4.8}$$

Αφού το σύνολο τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, ισχύει ότι $\ker(M) = \{0\}$.

Έστω ότι η Φ δεν είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Τότε υπάρχουν κανάλια $\Psi_0, \Psi_1 \in \mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με $\Psi_0 \neq \Psi_1$ και $\lambda \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$\Phi = \lambda \Psi_0 + (1 - \lambda)\Psi_1. \tag{4.4.9}$$

Λόγω της γραμμικότητας της J, θα ισχύει και

$$J(\Phi) = \lambda J(\Psi_0) + (1 - \lambda) J(\Psi_1). \tag{4.4.10}$$

Αν θέσουμε λοιπόν $P = J(\Phi)$, $Q_0 = J(\Psi_0)$ και $Q_1 = J(\Psi_1)$ τότε

$$P = \lambda Q_0 + (1 - \lambda) Q_1. \tag{4.4.11}$$

Επιπλέον, από το Πόρισμα 4.2.4, επειδή οι Φ, Ψ_0, Ψ_1 είναι κανάλια, έχουμε ότι $P, Q_0, Q_1 \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ και

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(P) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(Q_0) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(Q_1) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}. \tag{4.4.12}$$

Ο λ είναι θετικός και οι τελεστές Q_0 και Q_1 είναι θετικά ημιορισμένοι, άρα από τη σχέση (4.4.11) έχουμε

$$\mathrm{im}(Q_0) \subseteq \mathrm{im}(P) = \mathrm{im}(MM^*) = \mathrm{im}(M). \tag{4.4.13}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.4.1, υπάρχει ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής $R_0 \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Z})$ τέτοιος ώστε $Q_0 = MR_0M^*$. Όμοια αποδεικνύεται ότι υπάρχει $R_1 \in \mathrm{Pos}(\mathcal{Z})$ τέτοιος ώστε $Q_1 = MR_1M^*$.

Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $H = R_0 - R_1$, τότε

$$0 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(Q_0) - \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(Q_1) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(MHM^*) = \sum_{a,b \in \Sigma} H(a,b)(A_b^* A_a)^{\mathsf{T}}, \tag{4.4.14}$$

οπότε

$$\sum_{a,b \in \Sigma} H(a,b) A_b^* A_a = 0 \tag{4.4.15}$$

και $H \neq 0$, γιατί $\Psi_0 \neq \Psi_1$ άρα $Q_0 \neq Q_1$, επομένως $R_0 \neq R_1$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο τελεστών $\{A_b^* A_a : (a,b) \in \Sigma \times \Sigma\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Αντίστροφα, έστω ότι $\{A_b^* A_a : (a,b) \in \Sigma \times \Sigma\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένοι τελεστές. Τότε

$$\sum_{a,b \in \Sigma} Z(a,b) A_b^* A_a = 0 \tag{4.4.16}$$

για κάποιους μη μηδενικούς τελεστές $Z \in \mathrm{L}(\mathcal{Z})$. Παίρνοντας τον συζυγή και στα δύο μέλη αυτής της ισότητας, έχουμε:

$$\sum_{a,b\in\Sigma} Z^*(a,b)A_b^*A_a = 0, \tag{4.4.17}$$

οπότε θα ισχύει επίσης ότι

$$\sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b)A_b^*A_a = 0 \tag{4.4.18}$$

για τους δύο αυτοσυζυγείς τελεστές

$$H = \frac{Z+Z^*}{2} \ \text{και} \ H = \frac{Z-Z^*}{2\imath}. \tag{4.4.19}$$

Τουλάχιστον ένας από τους δύο αυτούς τελεστές είναι μη μηδενικός, άρα η σχέση (4.4.18) ισχύει για κάποιον μη μηδενικό αυτοσυζυγή τελεστή H. Υποθέτουμε ότι γι' αυτόν τον τελεστή H ισχύει επιπλέον ότι $\|H\| = 1$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, γιατί, αν δεν ισχύει, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον H με τον $H = \frac{H}{\|H\|}$.

Έστω $\Psi_0, \Psi_1 \in T(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ οι απεικονίσεις που ορίζονται ως εξής:

$$J(\Psi_0) = M(\mathbb{1}+H)M^* \ \text{και} \ J(\Psi_1) = M(\mathbb{1}-H)M^*. \tag{4.4.20}$$

Ο H είναι αυτοσυζυγής και $\|H\| = 1$, άρα οι τελεστές $(\mathbb{1}+H)$ και $(\mathbb{1}-H)$ είναι θετικά ημιορισμένοι. Επομένως και οι τελεστές $M(\mathbb{1}+H)M^*$ και $M(\mathbb{1}-H)M^*$ είναι θετικά ημιορισμένοι. Από το Θεώρημα 4.2.1 προκύπτει ότι οι Ψ_0 και Ψ_1 είναι πλήρως θετικοί. Επίσης,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(MHM^*) &= \sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b)(A_b^*A_a)^{\mathsf{T}} \\ &= \Big(\sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b)(A_b^*A_a)\Big)^{\mathsf{T}} = 0,\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

άρα

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Psi_0)) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(MM^*) + \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(MHM^*) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \tag{4.4.22}$$

και

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Psi_1)) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(MM^*) - \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(MHM^*) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}. \tag{4.4.23}$$

Από τα παραπάνω, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.3, προκύπτει ότι οι απεικονίσεις Ψ_0 και Ψ_1 διατηρούν το ίχνος. Άρα, οι Ψ_0 και Ψ_1 είναι κανάλια.

Αφού $H \neq 0$ και $\ker(M) = \{0\}$ θα είναι και $J(\Psi_0) \neq J(\Psi_1)$, οπότε και $\Psi_0 \neq \Psi_1$. Επειδή

$$\frac{1}{2}J(\Psi_0) + \frac{1}{2}J(\Psi_1) = MM^* = J(\Phi), \tag{4.4.24}$$

θα είναι και

$$\Phi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_1. \tag{4.4.25}$$

Άρα η Φ δεν είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. □

Παράδειγμα 4.4.1. Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι τέτοιοι ώστε $\dim(\mathcal{X}) \leq \dim(\mathcal{Y})$, $A \in \mathrm{U}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ ισομετρία και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ ένα ισομετρικό κανάλι το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(X) = AXA^* \tag{4.4.26}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Το σύνολο $\{A^*A\}$ που αποτελείται από έναν μόνο μη μηδενικό τελεστή, είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4.1 η Φ είναι ακραίο σημείο του συνόλου $\mathrm{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Παράδειγμα 4.4.2. Έστω $\Sigma = \{0,1\}$ το δυαδικό αλφάβητο, $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Sigma\times\Sigma}$. Ορίζουμε τους τελεστές $A_0, A_1 \in \mathrm{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ ως εξής:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2E_{00,0} + E_{01,1} + E_{10,1}\right) \\ A_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2E_{11,1} + E_{01,0} + E_{10,0}\right), \end{aligned}$$

όπου $ab = (a,b) \in \Sigma \times \Sigma$. Αν εκφράσουμε με πίνακες τους τελεστές αυτούς, έχουμε:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ που δίνεται από τη σχέση

$$\Phi(X) = A_0XA_0^* + A_1XA_1^* \tag{4.4.27}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Ισχύει ότι

$$A_0^*A_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_0^*A_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1^*A_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1^*A_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το σύνολο $\{A_0^*A_0, A_0^*A_1, A_1^*A_0, A_1^*A_1\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4.1 η Φ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου $\mathrm{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

4.5 Μοναδιαία κανάλια και μικτά unitary κανάλια

Ορισμός 4.5.1. Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος. Ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ λέγεται μοναδιαίο κανάλι όταν $\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$.

Γενικά, αν $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ είναι δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ είναι κανάλι που ικανοποιεί τη σχέση $\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$, τότε η Φ λέγεται μοναδιαίο κανάλι. Εφόσον το κανάλι είναι απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος, για να υπάρχει μοναδιαίο κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, θα πρέπει να είναι $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y})$.

Ορισμός 4.5.2. Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ ένα κανάλι. Λέμε ότι η Φ είναι μικτό unitary κανάλι αν υπάρχει ένα σύνολο δεικτών Σ, ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$, και μια συλλογή unitary τελεστών $\{U_a : a \in \Sigma\}$ τέτοια ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} p(a)U_aXU_a^* \tag{4.5.1}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Ισοδύναμα, η Φ είναι μικτό unitary κανάλι αν είναι κυρτός συνδυασμός unitary καναλιών.

Κάθε μικτό unitary κανάλι είναι μοναδαίο αφού κάθε unitary κανάλι είναι μοναδιαίο. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει:

Παράδειγμα 4.5.1. Έστω $\mathcal{X} = \mathbb{C}^3$ και η απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(X) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1} - \frac{1}{2}X^{\mathsf{T}} \tag{4.5.2}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Είναι προφανές ότι η Φ διατηρεί το ίχνος. Για να δείξουμε ότι η Φ είναι πλήρως θετική, θα υπολογίσουμε την Choi αναπαράστασή της. Έχουμε:

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b} = \sum_{a,b\in\Sigma} \Big(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(E_{a,b})\mathbb{1} - \frac{1}{2}E_{a,b}^{\mathsf{T}}\Big) \otimes E_{a,b} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{a,b\in\Sigma} \mathrm{Tr}(E_{a,b})\mathbb{1} \otimes E_{a,b} - \sum_{a,b\in\Sigma} E_{b,a} \otimes E_{a,b}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} \otimes \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} - W\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - W\right), \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

όπου W είναι ο τελεστής swap με $W(u\otimes v) = v\otimes u$ για κάθε $u, v \in \mathcal{X}$, όπως έχουμε δείξει στη σχέση (4.3.27). Η $J(\Phi)$ λοιπόν είναι θετικά ημιορισμένη, άρα η Φ είναι πλήρως θετική απεικόνιση. Επίσης, $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Επομένως η Φ είναι μοναδιαίο κανάλι. Όμως η Φ δεν είναι μικτό unitary κανάλι. Για να το αποδείξουμε αυτό, θα δείξουμε ότι η Φ είναι ακραίο σημείο του συνόλου $\mathrm{C}(\mathcal{X})$. Παρατηρούμε ότι

$$\Phi(X) = A_1XA_1^* + A_2XA_2^* + A_3XA_3^* \tag{4.5.4}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, όπου

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το γεγονός ότι η σχέση (4.5.4) ισχύει για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ προκύπτει από το ότι η αναπαράσταση Choi της απεικόνισης αυτής είναι

$$J(\Phi) = \sum_{a\in\Sigma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(A_a)^* = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - W\right), \tag{4.5.5}$$

δηλαδή είναι ίση με την αναπαράσταση Choi της απεικόνισης που δίνεται από τη σχέση (4.5.2).

Το σύνολο $\{A_j^* A_k : 1 \leq j, k \leq 3\}$ περιέχει τους τελεστές:

$$A_1^*A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad A_1^*A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1^*A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^*A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2^*A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_2^*A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3^*A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3^*A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3^*A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι τελεστές αυτοί είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4.1 η Φ είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{C}(\mathcal{X})$. Η Φ δεν είναι από μόνη της unitary κανάλι, άρα δεν μπορεί να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός unitary καναλιών.

Ορισμός 4.5.3. Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος. Λέμε ότι ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι pinching channel αν υπάρχει μια συλλογή προβολών $\{\Pi_a : a \in \Sigma\}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{a \in \Sigma} \Pi_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \quad \text{και} \quad \Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} \Pi_a X \Pi_a \tag{4.5.6}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Παράδειγμα 4.5.2. Το κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathbb{C}^5)$ με τύπο

$$\Phi(X) = \Pi_0 X \Pi_0 + \Pi_1 X \Pi_1 \tag{4.5.7}$$

όπου

$$\Pi_0 = E_{1,1} + E_{2,2} \quad \text{και} \quad \Pi_1 = E_{3,3} + E_{4,4} + E_{5,5} \tag{4.5.8}$$

είναι ένα παράδειγμα pinching channel. Αυτό το κανάλι δρα επάνω σε ένα τελεστή του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$ με τον εξής τρόπο:

$$\Phi \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}.$$

Η δράση αυτού του καναλιού στον πίνακα που αντιπροσωπεύει τον τελεστή, μοιάζει σαν να τον «τσιμπάει» προκαλώντας ένα συγκεκριμένο μοτίβο, στο οποίο κάποιοι όροι εκτός διαγωνίου γίνονται 0. Όταν ένα pinching channel ορίζεται από συλλογή προβολών που δεν είναι διαγώνιες ως προς την standard βάση, τότε ο όρος pinching channel δεν περιγράφει ακριβώς το αποτέλεσμα, αλλά χρησιμοποιείται παρ' όλα αυτά.

Παρακάτω θα δείξουμε ότι κάθε pinching κανάλι είναι μικτό unitary κανάλι.

Πρόταση 4.5.1. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, Σ ένα σύνολο δεικτών και $\{\Pi_a : a \in \Sigma\}$ μια συλλογή προβολών, τέτοια ώστε*

$$\sum_{a\in\Sigma} \Pi_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}. \tag{4.5.9}$$

Το κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} \Pi_a X \Pi_a \tag{4.5.10}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, είναι μικτό unitary κανάλι.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συλλογή $\{-1,1\}^{\Sigma}$ των διανυσμάτων του $\mathbb{C}^{\Sigma}$ που οι συντεταγμένες τους είναι στοιχεία του συνόλου $\{-1,1\}$, και ορίζουμε έναν unitary τελεστή

$$U_w = \sum_{a\in\Sigma} w(a)\Pi_a \tag{4.5.11}$$

για κάθε διάνυσμα $w \in \{-1,1\}^{\Sigma}$. Τότε ισχύει ότι

$$\frac{1}{2^{|\Sigma|}} \sum_{w\in\{-1,1\}^{\Sigma}} U_w X U_w^* = \frac{1}{2^{|\Sigma|}} \sum_{a,b\in\Sigma} \sum_{w\in\{-1,1\}^{\Sigma}} w(a)w(b)\Pi_a X \Pi_b \tag{4.5.12}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, όπου

$$\frac{1}{2^{|\Sigma|}} \sum_{w\in\{-1,1\}^{\Sigma}} w(a)w(b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a = b \\ 0 & \text{αν } a \neq b \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$. Οπότε,

$$\frac{1}{2^{|\Sigma|}} \sum_{w\in\{-1,1\}^{\Sigma}} U_w X U_w^* = \sum_{a\in\Sigma} \Pi_a X \Pi_a = \Phi(X) \tag{4.5.13}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Επομένως η Φ είναι μικτό unitary κανάλι. □

Παράδειγμα 4.5.3. Το completely dephasing channel $\Delta \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$, ορισμένο σε οποιονδήποτε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ είναι ένα pinching channel γιατί ισχύει ότι

$$\Delta(X) = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} X E_{a,a}, \tag{4.5.14}$$

άρα συμφωνεί με τον Ορισμό 4.5.3, με τη συλλογή προβολών να είναι οι τελεστές $\{E_{a,a} : a \in \Sigma\}$.

Έστω ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ του οποίου μία Stinespring αναπαράσταση είναι η

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*)$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, για κάποιον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$ και μια ισομετρία $A \in \mathrm{U}(\mathcal{X}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Z})$. Η environment–assisted channel correction αναφέρεται στην ύπαρξη ενός συνόλου δεικτών Σ, μιας συλλογής καναλιών

$$\{\Psi_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{C}(\mathcal{X}) \tag{4.5.15}$$

και μιας μέτρησης $\mu : \Sigma \to \mathrm{Pos}(\mathcal{Z})$, για τα οποία ισχύει

$$X = \sum_{a \in \Sigma} \Psi_a \left(\mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}} \left((\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mu(a)) A X A^* \right) \right) \tag{4.5.16}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Μια ερμηνεία της σχέσης αυτής είναι η εξής: Έστω ότι ο καταχωρητής X περιέχει μια κβαντική κατάσταση $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$. Η δράση της απεικόνισης $X \mapsto AXA^*$ έχει σαν αποτέλεσμα να κωδικοποιήσει αυτή την κατάσταση σε μία κατάσταση του καταχωρητή (X, Z) όπου Z είναι ένας δεύτερος καταχωρητής. Από την αποσύνθεση ως προς τον καταχωρητή Z, ο X θα έχει μία κατάσταση $\Phi(\rho)$ η οποία μπορεί να είναι πολύ διαφορετική από την ρ. Στην πραγματικότητα, ο Z αντιπροσωπεύει ένα «περιβάλλον» στο οποίο, κάποια κομμάτια της κωδικοποίησης της κατάστασης ρ μπορούν να διαφύγουν ή να διαρρεύσουν. Μετά τη μέτρηση μ στον Z, ακολουθεί η εφαρμογή της Ψ_a στον X (για οποιοδήποτε αποτέλεσμα $a \in \Sigma$ έχει προκύψει από τη μέτρηση), που είναι μια προσπάθεια να διορθωθεί ο X και να επιστρέψει στην κατάσταση ρ. Η σχέση (4.5.16) περιγράφει την κατάσταση κατά την οποία επιτυγχάνεται μια τέλεια διόρθωση αυτού του είδους.

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ότι τέλεια διόρθωση τέτοιου είδους επιτυγχάνεται αν και μόνο αν η Φ είναι μικτό unitary κανάλι.

Θεώρημα 4.5.1. *Έστω μια ισομετρία $A \in \mathrm{U}(\mathcal{X}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Z})$, όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, και ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ με τύπο*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*)$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) *Η Φ είναι μικτό unitary κανάλι.*

(ii) *Υπάρχει ένα σύνολο δεικτών Σ, μια μέτρηση $\mu : \Sigma \to \mathrm{Pos}(\mathcal{Z})$ και μια συλλογή καναλιών $\{\Psi_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{C}(\mathcal{X})$ τέτοια ώστε*

$$X = \sum_{a \in \Sigma} \Psi_a \left(\mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}} \left((\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mu(a)) A X A^* \right) \right) \tag{4.5.17}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Έστω ότι η Φ είναι μικτό unitary κανάλι. Τότε,

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} p(a) U_a X U_a^* \tag{4.5.18}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, όπου Σ ένα σύνολο δεικτών, $\{U_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{U}(\mathcal{X})$ μια συλλογή unitary τελεστών, και $p \in P(\Sigma)$ ένα διάνυσμα πιθανότητας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $|\Sigma| \geq \dim(\mathcal{Z})$, γιατί μπορούμε να προσθέσουμε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων στο Σ, παίρνοντας $p(a) = 0$ και επιλέγοντας αυθαίρετα $U_a \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ για τα επιπλέον στοιχεία, ώστε να ισχύει η σχέση (4.5.18). Οπότε, υπάρχει μια συλλογή διανυσμάτων $\{v_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{Z}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{a \in \Sigma} v_a v_a^* = \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}. \tag{4.5.19}$$

Σταθεροποιούμε αυτή τη συλλογή διανυσμάτων και ορίζουμε τους τελεστές $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ως εξής:

$$A_a = (\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes v_a^*)A \tag{4.5.20}$$

για κάθε $a \in \Sigma$. Ισχύει ότι

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}(AXA^*) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.5.21}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.2 υπάρχει ένας unitary τελεστής $W \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^{\Sigma})$ τέτοιος ώστε

$$\sqrt{p(a)}U_a = \sum_{b \in \Sigma} W(a,b) A_b \tag{4.5.22}$$

για κάθε $a \in \Sigma$.

Για κάθε σύμβολο $a \in \Sigma$, ορίζουμε ένα διάνυσμα $u_a : a \in \mathcal{Z}$ με

$$u_a = \sum_{b \in \Sigma} \overline{W(a,b)} v_b, \tag{4.5.23}$$

και ορίζουμε $\mu : \Sigma \to \mathrm{Pos}(\mathcal{Z})$ με $\mu(a) = u_a u_a^*$ για κάθε $a \in \Sigma$. Επειδή ο W είναι unitary τελεστής, ισχύει ότι

$$\sum_{a \in \Sigma} \mu(a) = \sum_{a,b,c \in \Sigma} \overline{W(a,b)} W(a,c) v_b v_c^* = \sum_{b \in \Sigma} v_b v_b^* = \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}, \tag{4.5.24}$$

οπότε η μ είναι μέτρηση. Επίσης ορίζουμε τη συλλογή καναλιών $\{\Psi_a : a \in \Sigma\}$ με

$$\Psi_a(X) = U_a^* X U_a \tag{4.5.25}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και για κάθε $a \in \Sigma$.

Ισχύει λοιπόν

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes u_a^*)A = \sum_{b \in \Sigma} W(a,b) A_b = \sqrt{p(a)} U_a, \tag{4.5.26}$$

οπότε

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}\left((\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mu(a))AXA^*\right) = p(a) U_a X U_a^*, \tag{4.5.27}$$

για κάθε $a \in \Sigma$. Άρα,

$$\sum_{a \in \Sigma} \Psi_a\left(\mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}\left((\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mu(a))AXA^*\right)\right) = \sum_{a \in \Sigma} p(a) U_a^* U_a X U_a^* U_a = X \tag{4.5.28}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει ο ισχυρισμός (ii). Για κάθε $a \in \Sigma$, ορίζουμε $\Phi_a \in \mathrm{CP}(\mathcal{X})$ με

$$\Phi_a(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{Z}}\left((\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mu(a))AXA^*\right) \tag{4.5.29}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Έστω επίσης

$$\{A_{a,b} : a \in \Sigma, b \in \Gamma\} \quad \text{και} \quad \{B_{a,b} : a \in \Sigma, b \in \Gamma\} \tag{4.5.30}$$

συλλογές τελεστών του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$, όπου Γ το κατάλληλο σύνολο δεικτών που παίρνουμε από τις αναπαραστάσεις Kraus

$$\Psi_a(X) = \sum_{b\in\Gamma} A_{a,b}XA_{a,b}^* \quad \text{και} \quad \Phi_a(X) = \sum_{c\in\Gamma} B_{a,c}XB_{a,c}^* \tag{4.5.31}$$

για κάθε $a \in \Sigma$ και για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. (Παίρνουμε ένα κοινό σύνολο δεικτών Γ γι' αυτές τις αναπαραστάσεις, για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, χωρίς βλάβη της γενικότητας: μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον μηδενικό τελεστή στις αναπαραστάσεις αυτών των απεικονίσεων όσες φορές θέλουμε). Από τον ισχυρισμό (ii) έχουμε

$$\sum_{a\in\Sigma} \Psi_a\Phi_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \tag{4.5.32}$$

οπότε από τις αναπαραστάσεις Choi των απεικονίσεων στα δύο μέλη αυτής της ισότητας έχουμε:

$$\sum_{a\in\Sigma}\sum_{b,c\in\Gamma} \mathrm{vec}(A_{a,b}B_{a,c})\mathrm{vec}(A_{a,b}B_{a,c})^* = \sum_{a\in\Sigma} \mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})\mathrm{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*. \tag{4.5.33}$$

Άρα, υπάρχει μια συλλογή από μιγαδικούς αριθμούς $\{a_{a,b,c} : a \in \Sigma, b, c \in \Gamma\}$ τέτοια ώστε

$$A_{a,b}B_{a,c} = a_{a,b,c}\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \tag{4.5.34}$$

για κάθε $a \in \Sigma$ και για κάθε $b, c \in \Gamma$. Για τους αριθμούς αυτούς, ισχύει επιπλέον

$$\sum_{a\in\Sigma}\sum_{b,c\in\Gamma} |a_{a,b,c}|^2 = 1. \tag{4.5.35}$$

Επομένως, έχουμε

$$\sum_{b\in\Gamma} |a_{a,b,c}|^2\mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \sum_{b\in\Gamma} B_{a,c}^*A_{a,b}^*A_{a,b}B_{a,c} = B_{a,c}^*B_{a,c} \tag{4.5.36}$$

για κάθε $a \in \Sigma$ και $c \in \Gamma$ λόγω του ότι η απεικόνιση Ψ_a είναι κανάλι. Επίσης, για κάθε $a \in \Sigma$ και $c \in \Gamma$ ισχύει ότι

$$B_{a,c} = \beta_{a,c}U_{a,c} \tag{4.5.37}$$

για κάποιους unitary τελεστές $U_{a,c} \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ και μιγαδικούς αριθμούς $\beta_{a,c} \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$|\beta_{a,c}|^2 = \sum_{b\in\Gamma} |a_{a,b,c}|^2. \tag{4.5.38}$$

Άρα,

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} \Phi_a(X) = \sum_{a\in\Sigma}\sum_{c\in\Gamma} p(a,c) U_{a,c} X U_{a,c}^*, \tag{4.5.39}$$

όπου $p \in \mathrm{P}(\Sigma \times \Gamma)$ είναι ένα διάνυσμα πιθανότητας τέτοιο ώστε $p(a,c) = |\beta_{a,c}|^2$ για κάθε $a \in \Sigma$ και $c \in \Gamma$. Επομένως, το κανάλι Φ είναι μικτό unitary κανάλι. □

Κάθε μικτό unitary κανάλι είναι στοιχείο της κυρτής θήκης του συνόλου των unitary καναλιών. Σύμφωνα με το θεώρημα του Καραθεοδωρή, υπάρχει άνω φράγμα για το πλήθος των unitary καναλιών που χρησιμοποιούνται σε κάθε μικτό unitary κανάλι.

Πρόταση 4.5.2. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, $n = \dim(\mathcal{X})$ και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ ένα μικτό unitary κανάλι. Υπάρχουν, ένας θετικός ακέραιος m που ικανοποιεί τη σχέση*

$$m \le n^4 - 2n^2 + 2, \tag{4.5.40}$$

ένα διάνυσμα πιθανότητας $(p_1, \ldots, p_m)$ και μια συλλογή $\{U_1, \ldots, U_m\} \subset \mathrm{U}(\mathcal{X})$ unitary τελεστών τέτοια ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{m} p_k U_k X U_k^* \tag{4.5.41}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\Xi : \mathrm{Herm}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}) \to \mathrm{Herm}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\Xi(X \otimes Y) = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}(X)Y & 0 \\ 0 & \mathrm{Tr}(Y)X \end{bmatrix}$$

για κάθε $X, Y \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$, και ορίζουμε ορθογώνια βάση $\{\mathbb{1}, H_1, \ldots, H_{n^2-1}\}$ του $\mathrm{Herm}(\mathcal{X})$, που περιέχει και τον ταυτοτικό τελεστή. Αφού η βάση είναι ορθογώνια, ισχύει ότι

$$\langle \mathbb{1}, H_k \rangle = 0 \iff \mathrm{Tr}(H_k) = 0, \text{για κάθε } k \in \{1, \ldots, n^2 - 1\}, \tag{4.5.42}$$

οπότε

$$\Xi(H_j \otimes H_k) = 0 \ \text{ για κάθε } \ j, k \in \{1, \ldots, n^2 - 1\}. \tag{4.5.43}$$

Επιπλέον, οι τελεστές $\Xi(\mathbb{1} \otimes H_k)$, $\Xi(H_k \otimes \mathbb{1})$, $\Xi(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})$ είναι όλοι μη μηδενικοί και ορθογώνιοι ανά ζεύγη. Επομένως, ο πυρήνας της Ξ είναι ίσος με τον υπόχωρο που παράγεται από την ορθογώνια συλλογή $\{H_j \otimes H_k, 1 \le j,k \le n^2 - 1\}$. Άρα, η διάσταση του πυρήνα της Ξ είναι $\left(n^2-1\right)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$.

Έστω $U \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ ένας unitary τελεστής, και $\Psi_U \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ το unitary κανάλι που ορίζεται ως εξής: $\Psi_U(X) = UXU^*$ για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Τότε:

$$\Xi\left(J(\Psi_U)\right) = \Xi\left(\mathrm{vec}(U)\mathrm{vec}(U)^*\right) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}.$$

Αυτό προκύπτει από το ότι $\mathrm{Tr}(X)Y = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(X \otimes Y)$ και $\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(\mathrm{vec}(U)\mathrm{vec}(U)^*) = UU^* = \mathbb{1}$.

Η αναπαράσταση Choi της Ψ_U σχηματίζεται από στοιχεία ενός συσχετισμένου υπόχωρου του $\mathrm{Herm}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X})$ που έχει διάσταση $n^4 - 2n^2 + 1$. Επειδή η Φ είναι μικτό unitary κανάλι, η αναπαράσταση Choi $J(\Phi)$ της Φ περιέχεται στην κυρτή θήκη των τελεστών της μορφής $J(\Psi_U)$, $U \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Καραθεοδωρή, θα ισχύει

$$J(\Phi) = \sum_{k=1}^{m} p_k J(\Psi_{U_k}) \tag{4.5.44}$$

για κάποιον θετικό ακέραιο m με $m \le n^4 - 2n^2 + 2$, κάποιους unitary τελεστές $U_1, \ldots, U_m \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ και ένα διάνυσμα πιθανότητας $(p_1, \ldots, p_m)$. Ισοδύναμα,

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{m} p_k U_k X U_k^* \tag{4.5.45}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, για κάποια $m, U_1, \ldots, U_m$ και $(p_1, \ldots, p_m)$. □

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ μία μη κενή συλλογή από κανάλια και $\Phi \in \mathrm{conv}(\mathcal{A})$ ένα κανάλι από την κυρτή θήκη του $\mathcal{A}$. Υπάρχει θετικός ακέραιος*

$$m \le \mathrm{rank}(J(\Phi))^2, \tag{4.5.46}$$

ένα διάνυσμα πιθανότητας $(p_1, \ldots, p_m)$ και κανάλια $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε

$$\Phi = p_1 \Psi_1 + \cdots + p_m \Psi_m. \tag{4.5.47}$$

Απόδειξη. Έστω $r = \mathrm{rank}(J(\Phi))$ και Π η προβολή πάνω στην εικόνα της $J(\Phi)$. Ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\Xi : \mathrm{Herm}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}) \to \mathrm{Herm}\left(\mathbb{C} \oplus (\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}) \oplus (\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})\right) \tag{4.5.48}$$

με

$$\Xi(H) = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}(H) & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbb{1} - \Pi) H (\mathbb{1} - \Pi) & (\mathbb{1} - \Pi) H \Pi \\ 0 & \Pi H (\mathbb{1} - \Pi) & 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $H \in \mathrm{Herm}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$. Ισχύει ότι $\Xi(H) = 0$ μόνο για τους αυτοσυζυγείς τελεστές που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$H = \Pi H \Pi \quad \text{και} \quad \mathrm{Tr}(H) = 0, \tag{4.5.49}$$

οπότε, ο πυρήνας της Ξ έχει διάσταση $r^2 - 1$. Έστω

$$\mathcal{B} = \{\Psi \in \mathcal{A} : \mathrm{im}\,(J(\Psi)) \subseteq \mathrm{im}\,(J(\Phi))\}. \tag{4.5.50}$$

Παρατηρούμε ότι $\Phi \in \mathrm{conv}(\mathcal{B})$ εφόσον $\Phi \in \mathrm{conv}(\mathcal{A})$. Επίσης, για κάθε κανάλι $\Psi \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι

$$\Xi\,(J(\Psi)) = \begin{bmatrix} \dim(\mathcal{X}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, υπάρχει ένας συσχετισμένος υπόχωρος του $\mathrm{Herm}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ διάστασης $r^2 - 1$ που περιέχει την $J(\Psi)$ για κάθε $\Psi \in \mathcal{B}$. Επειδή η $J(\Phi)$ είναι κυρτός συνδυασμός τελεστών αυτού του συσχετισμένου υπόχωρου, από το θεώρημα του Καραθεοδωρή προκύπτει ότι υπάρχουν ακέραιος $m \leq (r^2 - 1) + 1 = r^2$, διάνυσμα πιθανότητας $(p_1, \dots, p_m)$ και κάποια κανάλια $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε

$$J(\Phi) = p_1 J(\Psi_1) + \cdots + p_m J(\Psi_m), \tag{4.5.51}$$

άρα θα ισχύει και ότι

$$\Phi = p_1 \Psi_1 + \cdots + p_m \Psi_m. \tag{4.5.52}$$

□

Πόρισμα 4.5.1. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδιος χώρος και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ ένα μικτό unitary κανάλι. Υπάρχουν θετικός ακέραιος $m \leq \mathrm{rank}(J(\Phi))^2$, unitary τελεστές $U_1, \dots, U_m \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$, και ένα διάνυσμα πιθανότητας $(p_1, \dots, p_m)$ τέτοια ώστε*

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{m} p_k U_k X U_k^* \tag{4.5.53}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

4.6 Weyl συναλλοίωτα κανάλια

Για κάθε θετικό ακέραιο n, ορίζεται το σύνολο $\mathbb{Z}_n$ ως εξής:

$$\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}. \tag{4.6.1}$$

Αυτό το σύνολο είναι δακτύλιος, εφοδιασμένος με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό modulo n, και όποτε ένα στοιχείο του εμφανίζεται μέσα σε αριθμητική παράσταση, θεωρούμε ότι όλοι οι υπολογισμοί γίνονται modulo n. Οι διακριτοί Weyl τελεστές, είναι μια συλλογή unitary τελεστών που δρουν πάνω στον $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ για κάποιον θετικό ακέραιο n, και ορίζονται με τον εξής τρόπο: Ορίζουμε τη βαθμωτή τιμή

$$\zeta = \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}\right), \tag{4.6.2}$$

και τους unitary τελεστές

$$U = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} E_{c+1,c} \quad \text{και} \quad V = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} \zeta^c E_{c,c}. \tag{4.6.3}$$

Για κάθε ζευγάρι $(a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ οι διακριτοί Weyl τελεστές $W_{a,b} \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ είναι οι τελεστές με τύπο

$$W_{a,b} = U^a V^b \tag{4.6.4}$$

ή ισοδύναμα

$$W_{a,b} = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{bc} E_{a+c,c}. \tag{4.6.5}$$

Παράδειγμα 4.6.1. Για $n = 2$ οι διακριτοί Weyl τελεστές είναι οι

$$W_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισοδύναμα,

$$W_{0,0} = \mathbb{1}, \quad W_{0,1} = \sigma_x, \quad W_{1,0} = \sigma_z, \quad W_{1,1} = -\mathrm{i}\sigma_y \tag{4.6.6}$$

όπου

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

οι τελεστές Pauli. Ισχύει ότι

$$UV = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} \zeta^c E_{c+1,c} \quad \text{και} \quad VU = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{c+1} E_{c+1,c}, \tag{4.6.7}$$

άρα ισχύει ότι

$$VU = \zeta UV. \tag{4.6.8}$$

Από αυτή τη σχέση και με υπολογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ταυτότητες:

$$\overline{W_{a,b}} = W_{a,-b}, \quad W_{a,b}^{\mathsf{T}} = \zeta^{-ab} W_{-a,b} \quad W_{a,b}^* = \zeta^{ab} W_{-a,-b} \tag{4.6.9}$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}_n$.

Επίσης,

$$W_{a,b} W_{c,d} = \zeta^{bc} W_{a+c,b+d} = \zeta^{bc-ad} W_{c,d} W_{a,b} \tag{4.6.10}$$

για κάθε $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$.

Από τη σχέση

$$\sum_{c \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{ac} = \begin{cases} n & \text{αν } a = 0 \\ 0 & \text{αν } a \in \{1, \ldots, n-1\} \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\mathrm{Tr}(W_{a,b}) = \begin{cases} n & \text{αν } (a,b) = (0,0) \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$\langle W_{a,b}, W_{a,b} \rangle = \begin{cases} n & \text{αν } (a,b) = (c,d) \\ 0 & \text{αν } (a,b) \neq (c,d) \end{cases}$$

για κάθε $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$. Άρα, το σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} W_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \right\} \tag{4.6.11}$$

είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο. Επειδή το πλήθος των στοιχείων του συνόλου είναι ίσο με τη διάσταση του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$, αποτελεί μια ορθοκανονική βάση αυτού του χώρου.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier $F \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ με τύπο

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{ab} E_{a,b} \tag{4.6.12}$$

έχει μια ιδιαίτερη σχέση με τους διακριτούς τελεστές Weyl. Ο F είναι unitary γιατί

$$F^* F = \frac{1}{n} \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{a(b-c)} E_{c,b} = \sum_{b \in \mathbb{Z}_n} E_{b,b} = \mathbb{1}. \tag{4.6.13}$$

Επίσης, ισχύει ότι $FU = VF$ και $FV = U^* F$, επομένως

$$F W_{a,b} = \zeta^{-ab} W_{-b,a} F \tag{4.6.14}$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}_n$.

Ορισμός 4.6.1. Έστω $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ για κάποιον θετικό ακέραιο n. Μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ ονομάζεται Weyl συναλλοίωτη απεικόνιση αν

$$\Phi(W_{a,b} X W_{a,b}^*) = W_{a,b} \Phi(X) W_{a,b}^* \tag{4.6.15}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και για κάθε $(a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Αν η Φ είναι Weyl συναλλοίωτη απεικόνιση και είναι και κανάλι, τότε λέγεται Weyl συναλλοίωτο κανάλι.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το σύνολο των Weyl συναλλοίωτων απεικονίσεων $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathrm{T}(\mathcal{X})$: Για κάθε δύο Weyl συναλλοίωτες απεικονίσεις $\Phi, \Psi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ και για $a, b \in \mathbb{C}$, η απεικόνιση $a\Phi + b\Psi$ είναι επίσης Weyl συναλλοίωτη απεικόνιση. Επίσης, το σύνολο των Weyl συναλλοίωτων καναλιών $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathrm{C}(\mathcal{X})$.

Θεώρημα 4.6.1. *Έστω $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ για κάποιον θετικό ακέραιο n και μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Φ είναι Weyl συναλλοίωτη απεικόνιση.*

(ii) *Υπάρχει ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε*

$$\Phi(W_{a,b}) = A(a, b) W_{a,b} \tag{4.6.16}$$

για κάθε $(a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.

(iii) *Υπάρχει ένας τελεστής $B \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε*

$$\Phi(X) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} B(a, b) W_{a,b} X W_{a,b}^* \tag{4.6.17}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Με την προϋπόθεση ότι ισχύουν τα παραπάνω, οι τελεστές A και B συνδέονται με τη σχέση:

$$A^{\mathsf{T}} = n F^* B F. \tag{4.6.18}$$

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Έστω ότι η Φ είναι Weyl συναλλοίωτη απεικόνιση. Θεωρούμε τον τελεστή $W_{a,b}^*\Phi(W_{a,b})$ για τυχόν ζευγάρι $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Τότε, για κάθε $(c,d) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ ισχύει:

$$\begin{aligned} W_{a,b}^*\Phi(W_{a,b})W_{c,d}^* &= W_{a,b}^*W_{c,d}^*W_{c,d}\Phi(W_{a,b})W_{c,d}^* = W_{a,b}^*W_{c,d}^*\Phi(W_{c,d}W_{a,b}W_{c,d}^*) \\ &= W_{c,d}^*W_{a,b}^*\Phi(W_{a,b}W_{c,d}W_{c,d}^*) = W_{c,d}^*W_{a,b}^*\Phi(W_{a,b}), \end{aligned} \tag{4.6.19}$$

γιατί

$$W_{c,d}W_{a,b} = \alpha W_{a,b}W_{c,d} \quad \text{και} \quad W_{a,b}^*W_{c,d}^* = \overline{\alpha}W_{c,d}^*W_{a,b}^*, \tag{4.6.20}$$

όπου $\alpha = \zeta^{ad-bc}$.

Επομένως,

$$[W_{a,b}^*\Phi(W_{a,b}), W_{c,d}^*] = 0 \tag{4.6.21}$$

για κάθε $(c,d) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Αφού το σύνολο των διακριτών Weyl τελεστών αποτελεί βάση του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$, ο τελεστής $W_{a,b}^*\Phi(W_{a,b})$ θα αντιμετατίθεται με όλους τους τελεστές του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$, και άρα είναι ίσος με ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή. Επομένως, θεωρούμε τον τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, έτσι ώστε για κάθε $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ να ισχύει

$$W_{a,b}^*\Phi(W_{a,b}) = A(a,b)\mathbb{1}, \tag{4.6.22}$$

και τότε θα είναι

$$\Phi(W_{a,b}) = A(a,b)W_{a,b}. \tag{4.6.23}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Έστω ότι υπάρχει ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε

$$\Phi(W_{a,b}) = A(a,b)W_{a,b} \tag{4.6.24}$$

για κάθε $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.

Θεωρούμε τυχόν ζευγάρι $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Τότε, για κάθε $(c,d) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi(W_{a,b}W_{c,d}W_{a,b}^*) &= \Phi(\zeta^{bc}W_{a+c,b+d}\zeta^{ab}W_{-a,-b}) = \Phi(\zeta^{bc+ab}W_{a+c,b+d}W_{-a,-b}) \\ &= \Phi(\zeta^{bc+ab}\zeta^{-a(b+d)}W_{c,d}) = \zeta^{bc-ad}\Phi(W_{c,d}) \\ &= A(c,d)\zeta^{bc-ad}W_{c,d} = A(c,d)W_{a,b}W_{c,d}W_{a,b}^*. \end{aligned} \tag{4.6.25}$$

Αφού οι Weyl τελεστές αποτελούν βάση του $\mathrm{L}(\mathcal{X})$, και λόγω της γραμμικότητας της Φ, θα ισχύει ότι

$$\Phi(W_{a,b}XW_{a,b}^*) = W_{a,b}\Phi(X)W_{a,b}^* \tag{4.6.26}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Έστω ότι υπάρχει ένας τελεστής $B \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_n} B(a,b)W_{a,b}XW_{a,b}^* \tag{4.6.27}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Τότε, κάνοντας όμοια τις πράξεις που είδαμε στη σχέση (4.6.25), έχουμε:

$$\Phi(W_{c,d}) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} B(a,b) W_{a,b} W_{c,d} W_{a,b}^* = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{bc-ad} B(a,b) W_{c,d} \tag{4.6.28}$$

για κάθε $(c,d) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Αν θεωρήσουμε τον τελεστή $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ έτσι ώστε

$$A(c,d) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{bc-ad} B(a,b) \tag{4.6.29}$$

για κάθε $(c,d) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, ή ισοδύναμα $A = (nF^* BF)^{\intercal}$, τότε ισχύει

$$\Phi(W_{c,d}) = A(c,d) W_{c,d} \tag{4.6.30}$$

για κάθε $(c,d) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Έστω ότι υπάρχει ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε

$$\Phi(W_{a,b}) = A(a,b) W_{a,b} \tag{4.6.31}$$

για κάθε $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.

Ορίζουμε $B = \frac{1}{n} F A^{\intercal} F^*$. Τότε,

$$\begin{aligned} \Phi(W_{a,b}) = A(a,b) W_{a,b} &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} \zeta^{bc-ad} B(a,b) W_{c,d} \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} B(a,b) W_{a,b} W_{c,d} W_{a,b}^* \end{aligned} \tag{4.6.32}$$

για κάθε $(c,d) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, οπότε

$$\Phi(X) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} B(a,b) W_{a,b} X W_{a,b}^* \tag{4.6.33}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ λόγω της γραμμικότητας της Φ. □

Πόρισμα 4.6.1. *Έστω $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ για κάποιον θετικό ακέραιο n και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ ένα Weyl συναλλοίωτο κανάλι. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in P(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ τέτοιο ώστε*

$$\Phi(X) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} p(a,b) W_{a,b} X W_{a,b}^* \tag{4.6.34}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Άρα η Φ είναι μικτό unitary κανάλι.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.6.1, υπάρχει τελεστής $B \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} B(a,b) W_{a,b} X W_{a,b}^* \tag{4.6.35}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Επομένως,

$$J(\Phi) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_n} B(a,b) \mathrm{vec}(W_{a,b}) \mathrm{vec}(W_{a,b})^*. \tag{4.6.36}$$

Αφού η Φ είναι πλήρως θετική, η $J(\Phi)$ είναι θετικά ημιορισμένος τελεστής, άρα ο $B(a,b)$ είναι μη αρνητικός για κάθε ζευγάρι $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, γιατί τα διανύσματα $\mathrm{vec}(W_{a,b})$ σχηματίζουν ορθογώνιο σύνολο. Επίσης,

$$\mathrm{Tr}\left(\Phi(X)\right) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_n} B(a,b)\mathrm{Tr}\left(W_{a,b}XW_{a,b}^*\right) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_n} B(a,b)\mathrm{Tr}(X) \tag{4.6.37}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Αφού η Φ διατηρεί το ίχνος, θα είναι

$$\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_n} B(a,b) = 1. \tag{4.6.38}$$

Ορίζουμε $p(a,b) = B(a,b)$ για κάθε ζευγάρι $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Τότε το p είναι διάνυσμα πιθανότητας και ικανοποιεί το ζητούμενο. □

4.7 Completely depolarizing and dephasing channels

Το completely depolarizing κανάλι $\Omega \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ και το completely dephasing κανάλι $\Delta \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι ορισμένα για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$ ως εξής:

$$\Omega(X) = \frac{\mathrm{Tr}(X)}{\dim(\mathcal{X})}\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \tag{4.7.1}$$

και

$$\Delta(X) = \sum_{a\in\Sigma} X(a,a)E_{a,a} \tag{4.7.2}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Αν ο $\mathcal{X}$ είναι της μορφής $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ για κάποιον θετικό ακέραιο n, τότε τα δύο αυτά κανάλια είναι Weyl συναλλοίωτα κανάλια, γιατί:

$$\Omega(W_{a,b}) = \begin{cases} W_{a,b} & \text{αν } (a,b) = (0,0) \\ 0 & \text{αν } (a,b) \neq (0,0) \end{cases},$$

δηλαδή $\Omega(W_{a,b}) = E_{0,0}(a,b)W_{a,b}$ για κάθε $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Επίσης ισχύει ότι

$$\frac{1}{n}FE_{0,0}F^* = \frac{1}{n^2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_n} E_{a,b}. \tag{4.7.3}$$

Οπότε, από το Θεώρημα 4.6.1 έχουμε

$$\Omega(X) = \frac{1}{n^2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_n} W_{a,b}XW_{a,b}^* \tag{4.7.4}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης της σχέσης (4.7.4) είναι να υπολογίσουμε την αναπαράσταση Choi της απεικόνισης που βρίσκεται δεξιά, η οποία θα είναι:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_n} \mathrm{vec}(W_{a,b})\mathrm{vec}(W_{a,b})^* = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = J(\Omega). \tag{4.7.5}$$

Η έννοια του διακριτού τελεστή Weyl από έναν χώρο της μορφής $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ σε έναν αυθαίρετο μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{C}^{\Sigma}$ μεταφράζεται ως μια σταθερή αντιστοιχία μεταξύ του Σ και του $\mathbb{Z}_n$, όπου $n = |\Sigma|$. Άρα το completely depolarizing κανάλι $\Omega \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι ένα μικτό unitary κανάλι για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, γιατί είναι ίσο με το Weyl συναλλοίωτο κανάλι που ορίζεται παραπάνω σε σχέση με την επιλεγμένη αντιστοιχία μεταξύ του Σ και του $\mathbb{Z}_n$.

Το completely dephasing κανάλι είναι Weyl συναλλοίωτο κανάλι γιατί:

$$\Delta(W_{a,b}) = \begin{cases} W_{a,b} & \text{αν } a = 0 \\ 0 & \text{αν } a \neq 0 \end{cases},$$

δηλαδή $\Delta(W_{a,b}) = A(a,b)W_{a,b}$, όπου

$$A = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} E_{0,c} \tag{4.7.6}$$

για κάθε $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Επίσης,

$$FA^{\mathsf{T}}F^* = A. \tag{4.7.7}$$

Άρα, από το Θεώρημα 4.6.1 έχουμε

$$\Delta(X) = \frac{1}{n} \sum_{c \in \mathbb{Z}_n} W_{0,c} X W_{0,c}^* \tag{4.7.8}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$.

4.8 Κανάλια Schur

Ορισμός 4.8.1. Έστω $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, όπου Σ ένα σύνολο δεικτών. Μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ λέγεται απεικόνιση Schur αν υπάρχει ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε

$$\Phi(X) = A \odot X, \tag{4.8.1}$$

όπου $A \odot X$ συμβολίζει το κατά συντεταγμένη γινόμενο των A και X:

$$(A \odot X)(a,b) = A(a,b)X(a,b), \tag{4.8.2}$$

για κάθε $(a,b) \in \Sigma$. Αν επιπλέον η Φ είναι κανάλι, τότε λέγεται κανάλι Schur.

Πρόταση 4.8.1. *Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών, $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ένας τελεστής και $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ μια απεικόνιση Schur τέτοια ώστε $\Phi(X) = A \odot X$ για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο A είναι θετικά ημιορισμένος.*

(ii) *Η Φ είναι θετική.*

(iii) *Η Φ είναι πλήρως θετική.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (iii): Έστω ότι ο A είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε,

$$J(\Phi) = \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b} = \sum_{a,b\in\Sigma} A(a,b)E_{a,b} \otimes E_{a,b} = VAV^*, \tag{4.8.3}$$

όπου $V \in U(\mathcal{X}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{X})$ η ισομετρία

$$V = \sum_{a\in\Sigma} (e_a \otimes e_a)e_a^*. \tag{4.8.4}$$

Άρα, η $J(\Phi)$ είναι θετικά ημιορισμένη. Οπότε η Φ είναι πλήρως θετική.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Κάθε πλήρως θετική απεικόνιση είναι και θετική.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Έστω ότι η Φ είναι θετική απεικόνιση. Θεωρούμε τον τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ που ορίζεται έτσι ώστε $X(a,b) = 1$ για κάθε $a, b \in \Sigma$. Ο X είναι θετικά ημιορισμένος, οπότε από τη θετικότητα της Φ προκύπτει ότι ο $\Phi(X) = A$ είναι θετικά ημιορισμένος. □

Πρόταση 4.8.2. *Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών, $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$, $A \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ένας τελεστής και $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ μια απεικόνιση Schur τέτοια ώστε $\Phi(X) = A \odot X$ για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *$A(a,a) = 1$ για κάθε $a \in \Sigma$.*

(ii) *Η Φ διατηρεί το ίχνος.*

(iii) *Η Φ είναι μοναδιαία.*

Απόδειξη. Έστω ότι $A(a,a) = 1$ για κάθε $a \in \Sigma$. Τότε

$$\Phi(\mathbb{1}) = A \odot \mathbb{1} = \sum_{a\in\Sigma} A(a,a)E_{a,a} = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} = \mathbb{1}. \tag{4.8.5}$$

Άρα η Φ είναι μοναδιαία.

Επίσης

$$\mathrm{Tr}(\Phi(X)) = \sum_{a\in\Sigma} (A \odot X)(a,a) = \sum_{a\in\Sigma} A(a,a)X(a,a) = \sum_{a\in\Sigma} X(a,a) = \mathrm{Tr}(X) \tag{4.8.6}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Επομένως, η Φ διατηρεί το ίχνος.

Αντίστροφα, έστω ότι η Φ διατηρεί το ίχνος. Τότε,

$$A(a,a) = \mathrm{Tr}\left(A(a,a)E_{a,a}\right) = \mathrm{Tr}\left(\Phi(E_{a,a})\right) = \mathrm{Tr}(E_{a,a}) = 1 \tag{4.8.7}$$

για κάθε $a \in \Sigma$.

Επίσης, αν η Φ είναι μοναδιαία, τότε

$$\sum_{a\in\Sigma} A(a,a)E_{a,a} = \Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a}, \tag{4.8.8}$$

οπότε $A(a,a) = 1$ για κάθε $a \in \Sigma$. □

Θεώρημα 4.8.1. *Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών, $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $\Phi \in CP(\mathcal{X})$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Φ είναι απεικόνιση Schur.*

(ii) *Υπάρχει μια αναπαράσταση Kraus της Φ της μορφής*

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Gamma} A_a X A_a^* \tag{4.8.9}$$

για κάποιο σύνολο δεικτών Γ, τέτοια ώστε ο $A_a \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ να είναι διαγώνιος τελεστής για κάθε $a \in \Gamma$.

(iii) *Για κάθε αναπαράσταση Kraus της Φ που έχει τη μορφή (4.8.9), ο $A_a \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι διαγώνιος τελεστής για κάθε $a \in \Gamma$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (iii): Έστω ότι η Φ είναι απεικόνιση Schur με $\Phi(X) = P \odot X$ για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$, για κάποιον τελεστή $P \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Αφού η Φ είναι πλήρως θετική, σύμφωνα με την Πρόταση 4.8.1, ο P είναι θετικά ημιορισμένος. Στην απόδειξη της ίδιας πρότασης είδαμε ότι η αναπαράσταση Choi της Φ θα είναι

$$J(\Phi) = VPV^*, \tag{4.8.10}$$

όπου

$$V = \sum_{b \in \Sigma} (e_b \otimes e_b) e_b^*. \tag{4.8.11}$$

Αν μια αναπαράσταση Kraus της Φ έχει τη μορφή (4.8.9) για κάποιο σύνολο δεικτών Γ και μια συλλογή τελεστών $\{A_a : a \in \Gamma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X})$, τότε η αναπαράσταση Choi της Φ θα είναι

$$J(\Phi) = \sum_{a \in \Gamma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(A_a)^*. \tag{4.8.12}$$

Οπότε θα ισχύει

$$\sum_{a \in \Gamma} \mathrm{vec}(A_a)\mathrm{vec}(A_a)^* = VPV^*. \tag{4.8.13}$$

Επομένως,

$$\mathrm{vec}(A_a) \in \mathrm{im}(V) = \mathrm{span}\{e_b \otimes e_b : b \in \Sigma\} \tag{4.8.14}$$

για κάθε $a \in \Gamma$. Άρα ο A_a είναι διαγώνιος για κάθε $a \in \Gamma$.

Όταν ισχύει ο ισχυρισμός (iii), προφανώς ισχύει και ο (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Έστω ότι μια αναπαράσταση Kraus της Φ είναι της μορφής (4.8.9), όπου Γ ένα σύνολο δεικτών και $\{A_a : a \in \Gamma\}$ μια συλλογή διαγώνιων τελεστών. Έστω $\{v_a : a \in \Gamma\} \subset \mathcal{X}$ η συλλογή των διανυσμάτων για τα οποία ισχύει $A_a = \mathrm{Diag}(v_a)$ για κάθε $a \in \Gamma$. Ορίζουμε

$$P = \sum_{a \in \Gamma} v_a v_a^*. \tag{4.8.15}$$

Τότε,

$$P \odot X = \sum_{a \in \Gamma} \sum_{b,c \in \Sigma} X(b,c) v_a(b) \overline{v_a(c)} E_{b,c} = \sum_{a \in \Gamma} A_a X A_a^* = \Phi(X) \tag{4.8.16}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Άρα η Φ είναι απεικόνιση Schur. □

4.9 Ακραία σημεία του συνόλου των μοναδιαίων καναλιών

Στο Θεώρημα 4.4.1 είδαμε ποιο κριτήριο μπορεί να καθορίσει αν ένα κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι ακραίο σημείο του συνόλου όλων των καναλιών $\mathrm{C}(\mathcal{X})$. Θα δούμε παρακάτω ότι ένα παρόμοιο κριτήριο ισχύει όταν το σύνολο $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ αντικατασταθεί με το σύνολο των μοναδιαίων καναλιών $\{\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}) : \Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\}$.

Θεωρούμε τον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$ και ορίζουμε έναν τελεστή

$$V \in \mathrm{L}\left(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}, (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}) \otimes (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})\right) \tag{4.9.1}$$

όπου

$$V \operatorname{vec}(X) = \operatorname{vec} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Ισχύει ότι $V^* V = 2\mathbb{1}_{\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}}$.

Για κάθε $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ ορίζουμε την απεικόνιση $\phi(\Phi) \in \mathrm{T}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ να είναι η μοναδική απεικόνιση για την οποία ισχύει

$$J\left(\phi(\Phi)\right) = V J(\Phi) V^*. \tag{4.9.2}$$

Η απεικόνιση $\phi : \mathrm{T}(\mathcal{X}) \to \mathrm{T}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι γραμμική και ένα προς ένα.

Αν η $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ ορίζεται από μια αναπαράσταση Kraus

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X B_a^* \tag{4.9.3}$$

τότε μια αναπαράσταση Kraus της $\phi(\Phi)$ είναι η

$$\phi(\Phi) \begin{bmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} \\ X_{1,0} & X_{1,1} \end{bmatrix} = \sum_{a \in \Sigma} \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_a^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} \\ X_{1,0} & X_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_a & 0 \\ 0 & B_a^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^*. \tag{4.9.4}$$

Επίσης ισχύουν τα εξής:

(i) Μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ είναι πλήρως θετική αν και μόνο αν η $\phi(\Phi) \in T(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ είναι πλήρως θετική.

(ii) Μια απεικόνιση $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ διατηρεί το ίχνος και είναι μοναδιαία αν και μόνο αν η $\phi(\Phi) \in \mathrm{T}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ διατηρεί το ίχνος.

(iii) Η $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι μοναδιαίο κανάλι αν και μόνο αν η $\phi(\Phi) \in \mathrm{C}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ είναι κανάλι. Σε αυτή την περίπτωση, η $\varphi(\Phi)$ είναι και μοναδιαία απεικόνιση.

Λήμμα 4.9.1. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδιος χώρος, $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ ένα μοναδιαίο κανάλι και $\phi(\Phi) \in \mathrm{C}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ το κανάλι που ορίζεται από την Φ σύμφωνα με τη σχέση* (4.9.2). *Ισχύει ότι η Φ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των μοναδιαίων καναλιών του* $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ *αν και μόνο αν η $\phi(\Phi)$ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καναλιών* $\mathrm{C}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$.

Απόδειξη. Έστω ότι η Φ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου των μοναδιαίων καναλιών του $\mathrm{C}(\mathcal{X})$. Τότε υπάρχουν μοναδιαία κανάλια $\Psi_0, \Psi_1 \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ με $\Psi_0 \neq \Psi_1$ και $\lambda \in (0,1)$ τέτοια ώστε

$$\Phi = \lambda\Psi_0 + (1-\lambda)\Psi_1. \tag{4.9.5}$$

Επειδή η ϕ είναι γραμμική, θα ισχύει ότι

$$\phi(\Phi) = \lambda\phi(\Psi_0) + (1-\lambda)\phi(\Psi_1). \tag{4.9.6}$$

Η $\phi(\Phi)$ λοιπόν είναι κυρτός συνδυασμός διαφορετικών μεταξύ τους καναλιών. Επομένως η $\phi(\Phi)$ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καναλιών $\mathrm{C}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\phi(\Phi)$ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καναλιών $\mathrm{C}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$. Τότε υπάρχουν μοναδιαία κανάλια $\Xi_0, \Xi_1 \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ με $\Xi_0 \neq \Xi_1$ και $\lambda \in (0,1)$ τέτοια ώστε

$$\phi(\Phi) = \lambda\phi(\Xi_0) + (1-\lambda)\phi(\Xi_1). \tag{4.9.7}$$

Παίρνοντας την αναπαράσταση Choi και στα δύο μέλη αυτής της σχέσης, έχουμε:

$$VJ(\Phi)V^* = \lambda J(\Xi_0) + (1-\lambda)J(\Xi_1). \tag{4.9.8}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.4.1, υπάρχουν θετικά ημιορισμένοι τελεστές Q_0 και $Q_1 \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X})$ τέτοιοι ώστε

$$J(\Xi_0) = VQ_0V^* \quad \text{και} \quad J(\Xi_1) = VQ_1V^*. \tag{4.9.9}$$

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\Psi_0, \Psi_1 \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ για τις οποίες ισχύει

$$J(\Psi_0) = Q_0 \quad \text{και} \quad J(\Psi_1) = Q_1, \tag{4.9.10}$$

οπότε

$$\Xi_0 = \phi(\Psi_0) \quad \text{και} \quad \Xi_1 = \phi(\Psi_1). \tag{4.9.11}$$

Αφού $\Xi_0 \neq \Xi_1$, θα είναι επίσης $\Psi_0 \neq \Psi_1$ και θα ισχύει

$$\phi(\Phi) = \lambda\phi(\Psi_0) + (1-\lambda)\phi(\Psi_1), \tag{4.9.12}$$

άρα και

$$\Phi = \lambda\Psi_0 + (1-\lambda)\Psi_1. \tag{4.9.13}$$

Επομένως η Φ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου των μοναδιαίων καναλιών του $\mathrm{C}(\mathcal{X})$. □

Θεώρημα 4.9.1. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδιος χώρος, $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ ένα μοναδιαίο κανάλι, Σ ένα σύνολο δεικτών και $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων τελεστών με*

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.9.14}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Η Φ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των μοναδιαίων καναλιών του $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ αν και μόνο αν οι τελεστές

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_b^* A_a & 0 \\ 0 & A_a A_b^* \end{bmatrix} : (a,b) \in \Sigma \times \Sigma \right\} \tag{4.9.15}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα, η Φ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των μοναδιαίων καναλιών του $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ αν και μόνο αν η $\phi(\Phi)$ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καναλιών $C(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$, όπου $\phi : \mathrm{T}(\mathcal{X}) \to \mathrm{T}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση (4.9.2). Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4.1, η $\phi(\Phi)$ είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{C}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ αν και μόνο αν οι τελεστές

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_b^* A_a & 0 \\ 0 & \overline{A_b A_a^{\mathsf{T}}} \end{bmatrix} : (a, b) \in \Sigma \times \Sigma \right\} \tag{4.9.16}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Παίρνοντας τον ανάστροφο του κάτω δεξιά στοιχείου, το σύνολο παραμένει γραμμικά ανεξάρτητο, οπότε προκύπτει ότι η $\phi(\Phi)$ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καναλιών $\mathrm{C}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ αν και μόνο αν το σύνολο (4.9.27) είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

Λήμμα 4.9.2. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδιος χώρος, και $A_0, A_1 \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ τελεστές, τέτοιοι ώστε*

$$A_0^* A_0 + A_1^* A_1 = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = A_0 A_0^* + A_1 A_1^*. \tag{4.9.17}$$

Τότε υπάρχουν unitary τελεστές $U, V \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ τέτοιοι ώστε οι VA_0U^* και VA_1U^* να είναι διαγώνιοι τελεστές.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι υπάρχει ένας unitary τελεστής $W \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε οι τελεστές WA_0 και WA_1 να είναι κανονικοί και να ισχύει

$$[WA_0, WA_1] = 0. \tag{4.9.18}$$

Έστω $U_0, U_1 \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ και $P_0, P_1 \in \mathrm{Pos}(\mathcal{X})$ οι τελεστές που σχηματίζουν τις πολικές αναπαραστάσεις των τελεστών A_0, A_1, οπότε ισχύει $A_0 = U_0 P_0$ και $A_1 = U_1 P_1$. Θεωρούμε τον τελεστή $W = U_0^*$.

Έχουμε ότι $WA_0 = P_0$ άρα ο WA_0 είναι θετικά ημιορισμένος, επομένως είναι και κανονικός. Θα δείξουμε ότι και ο WA_1 είναι κανονικός: Στη σχέση (4.9.17), αν αντικαταστήσουμε τους A_0, A_1 με τις πολικές αναπαραστάσεις τους, παίρνουμε ότι:

$$P_1^2 = \mathbb{1} - P_0^2 \quad \text{και} \quad U_1 P_1^2 U_1^* = \mathbb{1} - U_0 P_0^2 U_0^*. \tag{4.9.19}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} (WA_1)(WA_1)^* &= U_0^* U_1 P_1^2 U_1^* U_0 = U_0^* (\mathbb{1} - U_0 P_0^2 U_0^*) U_0 \\ &= \mathbb{1} - P_0^2 = P_1^2 = P_1 U_1^* U_0 U_0^* U_1 P_1 = (WA_1)^* (WA_1). \end{aligned} \tag{4.9.20}$$

Άρα και ο WA_1 είναι κανονικός.

Θα δείξουμε τώρα ότι οι τελεστές WA_0 και WA_1 αντιμετατίθενται: Αφού ισχύει ότι $P_1^2 = \mathbb{1} - P_0^2$, οι τελεστές P_0^2 και P_1^2 αντιμετατίθενται, και είναι και θετικά ημιορισμένοι, άρα και οι τελεστές P_0 και P_1 αντιμετατίθενται. Επίσης,

$$\begin{aligned} U_1 P_1^2 U_1^* &= \mathbb{1} - U_0 P_0^2 U_0^* \\ &\Longrightarrow U_1 (\mathbb{1} - P_0^2) U_1^* = \mathbb{1} - U_0 P_0^2 U_0^* \\ &\Longrightarrow U_1 P_0^2 U_1^* = U_0 P_0^2 U_0^*. \end{aligned} \tag{4.9.21}$$

Παίρνοντας τετραγωνική ρίζα και στα δύο μέλη, έχουμε ότι ισχύει

$$U_0 P_0 U_0^* = U_1 P_0 U_1^*, \tag{4.9.22}$$

άρα

$$P_0 U_0^* U_1 = U_0^* U_1 P_0. \tag{4.9.23}$$

Επομένως οι τελεστές P_0 και $U_0^* U_1$ αντιμετατίθενται. Έχουμε λοιπόν:

$$(WA_0)(WA_1) = P_0 U_0^* U_1 P_1 = U_0^* U_1 P_0 P_1 = (WA_1)(WA_0), \tag{4.9.24}$$

άρα οι WA_0 και WA_1 αντιμετατίθενται.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.2 υπάρχει τελεστής U τέτοιος ώστε οι UWA_0U^* και UWA_1U^* είναι διαγώνιοι. Αν συμβολίσουμε $V = UW$, τότε έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.9.2. *Εστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδιος χώρος με $\dim(\mathcal{X}) = 2$. Κάθε μοναδιαίο κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι μικτό unitary κανάλι.*

Απόδειξη. Το σύνολο των μοναδιαίων καναλιών

$$\{\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X}) : \Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\} \tag{4.9.25}$$

είναι συμπαγές και κυρτό γιατί προκύπτει από την τομή του συμπαγούς και κυρτού συνόλου $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ και του κλειστού συσχετισμένου υπόχωρου όλων των απεικονίσεων $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ που ικανοποιούν τη σχέση $\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$. Αφού το σύνολο είναι συμπαγές και κυρτό, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.5 (Minkowski), είναι ίσο με την κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του. Θα δείξουμε λοιπόν ότι κάθε ακραίο σημείο του συνόλου αυτού είναι unitary κανάλι, οπότε κάθε μοναδιαίο κανάλι, αφού είναι κυρτός συνδυασμός ακραίων σημείων, θα είναι μικτό unitary κανάλι.

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μοναδιαίο κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ που δεν είναι unitary κανάλι, δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου (4.9.25). Έστω $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ τυχόν μοναδιαίο κανάλι, και $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X})$ μια συλλογή γραμμικά ανεξάρτητων τελεστών, τέτοια ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.9.26}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Ισχύει ότι η Φ είναι unitary κανάλι αν και μόνο αν $|\Sigma| = 1$. Έστω ότι η Φ δεν είναι unitary κανάλι. Τότε $|\Sigma| \geq 2$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.9.36 η Φ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των μοναδιαίων καναλιών του $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ αν και μόνο οι τελεστές

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_b^* A_a & 0 \\ 0 & A_a A_b^* \end{bmatrix} : (a,b) \in \Sigma \times \Sigma \right\} \subset L(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}) \tag{4.9.27}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Επειδή $|\Sigma| \geq 2$, θα είναι $|\Sigma| \geq 3$ ή $|\Sigma| = 2$.

Αν $|\Sigma| \geq 3$ τότε η συλλογή (4.9.27) περιέχει τουλάχιστον 9 τελεστές του 8-διάστατου υπόχωρου

$$\left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} : (X,Y) \in \mathrm{L}(\mathcal{X}) \right\} \tag{4.9.28}$$

επομένως δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη, άρα η Φ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου (4.9.25).

Αν $|\Sigma| = 2$, τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\Sigma = \{0, 1\}$ και $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Αφού η Φ είναι μοναδιαία και διατηρεί το ίχνος, θα ισχύει ότι

$$A_0^* A_0 + A_1^* A_1 = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = A_0 A_0^* + A_1 A_1^*. \tag{4.9.29}$$

Από το Λήμμα 4.9.2 έχουμε ότι θα υπάρχουν unitary τελεστές $U, V \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ τέτοιοι ώστε οι VA_0U^* και VA_1U^* να είναι διαγώνιοι τελεστές:

$$\begin{aligned} VA_0U^* &= \alpha_0 E_{0,0} + \beta_0 E_{1,1}, \\ VA_1U^* &= \alpha_1 E_{0,0} + \beta_1 E_{1,1}. \end{aligned}$$

Οπότε, για κάθε $a, b \in \Sigma$, ισχύει

$$\begin{aligned} A_b^* A_a &= \alpha_a \overline{\alpha_b} U^* E_{0,0} U + \beta_a \overline{\beta_b} U^* E_{1,1} U, \\ A_a A_b^* &= \alpha_a \overline{\alpha_b} V^* E_{0,0} V + \beta_a \overline{\beta_b} V^* E_{1,1} V. \end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο (4.9.27) περιέχεται στον υπόχωρο που παράγεται από το σύνολο τελεστών:

$$\left\{ \begin{bmatrix} U^* E_{0,0} U & 0 \\ 0 & V^* E_{0,0} V \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U^* E_{1,1} U & 0 \\ 0 & V^* E_{1,1} V \end{bmatrix} \right\}. \tag{4.9.30}$$

Η συλλογή (4.9.27) περιέχει 4 τελεστές του 2-διάστατου χώρου, επομένως δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη, άρα η Φ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου (4.9.25).

Κάθε ακραίο σημείο λοιπόν, είναι unitary κανάλι, οπότε κάθε μοναδιαίο κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ είναι μικτό unitary κανάλι. □

Θεώρημα 4.9.3. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδιος χώρος και $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ μία θετική απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος. Τότε υπάρχει ένας τελεστής πυκνότητας $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $\Phi(\rho) = \rho$.*

Απόδειξη. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n, ορίζουμε την απεικόνιση $\Psi_n \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ με

$$\Psi_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \Phi^k(X) \tag{4.9.31}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ και το σύνολο

$$C_n = \{\Psi_n(\rho) : \rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})\}. \tag{4.9.32}$$

Αφού η Φ είναι γραμμική, θετική και διατηρεί το ίχνος, το ίδιο ισχύει και για την Ψ_n, οπότε το C_n είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathrm{D}(\mathcal{X})$. Από την κυρτότητα του C_n προκύπτει ότι

$$\Psi_{n+1}(\rho) = \frac{1}{2}\Psi_n(\rho) + \frac{1}{2}\Psi_n\left(\Phi^{2^n}(\rho)\right) \in C_n \tag{4.9.33}$$

για κάθε $\rho \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$, άρα $C_{n+1} \subseteq C_n$ για κάθε n. Αφού η $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων, η τομή τους είναι μη κενή, δηλαδή, υπάρχει $\rho \in C_0 \cap C_1 \cap \cdots$ Αν πάρουμε ένα ρ στην τομή των συνόλων, τότε για τυχόντα μη αρνητικό ακέραιο n θα ισχύει ότι $\rho = \Psi_n(\sigma)$ για κάποιο $\sigma \in \mathrm{D}(\mathcal{X})$. Οπότε,

$$\Phi(\rho) - \rho = \Phi\left(\Psi_n(\sigma)\right) - \Psi_n(\sigma) = \frac{\Phi^{2^n}(\sigma) - \sigma}{2^n}. \tag{4.9.34}$$

Η απόσταση μεταξύ δύο τελεστών πυκνότητας δεν μπορεί να υπερβαίνει το 2, άρα

$$\|\Phi(\rho) - \rho\|_1 \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{4.9.35}$$

Αυτό ισχύει για κάθε n. Επομένως $\|\Phi(\rho) - \rho\|_1 = 0$. Άρα $\Phi(\rho) = \rho$. □

Θεώρημα 4.9.4. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδιος χώρος και $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ ένα μοναδιαίο κανάλι. Έστω επίσης ένα σύνολο δεικτών Σ και $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X})$ μια συλλογή τελεστών, τέτοια ώστε*

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X A_a^* \tag{4.9.36}$$

για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Για κάθε $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ ισχύει ότι: $\Phi(X) = X$ αν και μόνο αν $[X, A_a] = 0$ για κάθε $a \in \Sigma$.

Απόδειξη. Αν $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι ένας τελεστής για τον οποίο ισχύει $[X, A_a] = 0$ για κάθε $a \in \Sigma$, τότε

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X A_a^* = \sum_{a\in\Sigma} X A_a A_a^* = X\Phi(\mathbb{1}) = X. \tag{4.9.37}$$

Αντίστροφα, αν $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$ είναι ένας τελεστής για τον οποίο ισχύει ότι $\Phi(X) = X$, τότε, αν θεωρήσουμε τον θετικά ημιορισμένο τελεστή

$$\sum_{a\in\Sigma} [X, A_a][X, A_a]^*, \tag{4.9.38}$$

και παίρνοντας υπ' όψιν το ότι η Φ είναι μοναδιαίο κανάλι, $\Phi(X) = X$ και $\Phi(X^*) = X^*$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in\Sigma} [X, A_a][X, A_a]^* &= \sum_{a\in\Sigma} (XA_a - A_a X)(A_a^* X^* - X^* A_a^*) \\
&= \sum_{a\in\Sigma} (XA_a A_a^* X^* - A_a X A_a^* X^* - X A_a X^* A_a^* + A_a X X^* A_a^*) \\
&= XX^* - \Phi(X)X^* - X\Phi(X^*) + \Phi(XX^*) = \Phi(XX^*) - XX^*.
\end{aligned} \tag{4.9.39}$$

Εφόσον η Φ είναι κανάλι, το ίχνος του τελεστή $\Phi(XX^*) - XX^*$ είναι ίσο με μηδέν. Άρα και το ίχνος του τελεστή (4.9.38) είναι ίσο με μηδέν. Όμως, ο μόνος θετικά ημιορισμένος τελεστής που έχει μηδενικό ίχνος είναι ο μηδενικός τελεστής. Δηλαδή,

$$\sum_{a\in\Sigma} [X, A_a][X, A_a]^* = 0. \tag{4.9.40}$$

Αυτό σημαίνει ότι $[X, A_a][X, A_a]^* = 0$, άρα και $[X, A_a] = 0$ για κάθε $a \in \Sigma$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Κυριαρχία και το θεώρημα του Nielsen

5.1 Κυριαρχία για πραγματικά διανύσματα

Ορισμός 5.1.1. Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών. Θεωρούμε τον πραγματικό Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^\Sigma$. Ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^\Sigma)$ λέγεται στοχαστικός, αν:

(i) $A(a,b) \geq 0$ για κάθε $a, b \in \Sigma$, και

(ii) $\sum_{a\in\Sigma} A(a,b) = 1$ για κάθε $b \in \Sigma$.

Όταν ο A είναι στοχαστικός τελεστής, τότε το Ae_b είναι διάνυσμα πιθανότητας για κάθε $b \in \Sigma$. Ισοδύναμα, ο A απεικονίζει κάθε διάνυσμα πιθανότητας σε διάνυσμα πιθανότητας.

Ορισμός 5.1.2. Ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^\Sigma)$, λέγεται διπλά στοχαστικός, αν:

(i) $A(a,b) \geq 0$ για κάθε $a, b \in \Sigma$,

(ii) $\sum_{a\in\Sigma} A(a,b) = 1$ για κάθε $b \in \Sigma$, και

(iii) $\sum_{b\in\Sigma} A(a,b) = 1$ για κάθε $a \in \Sigma$.

Δηλαδή, ένας τελεστής A είναι διπλά στοχαστικός αν και μόνο αν και οι δύο τελεστές A και A^T (ή ισοδύναμα και οι δύο τελεστές A και A^*) είναι στοχαστικοί. Αυτό σημαίνει ότι κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πίνακα που αντιπροσωπεύει τον τελεστή A είναι διάνυσμα πιθανότητας.

Οι διπλά στοχαστικοί τελεστές έχουν άμεση σχέση με τους τελεστές μετάθεσης. Για κάθε μετάθεση $\pi \in \mathrm{Sym}(\Sigma)$, ορίζεται ένας τελεστής μετάθεσης $V_\pi \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^\Sigma)$ ως εξής:

$$V_\pi(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a = \pi(b) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

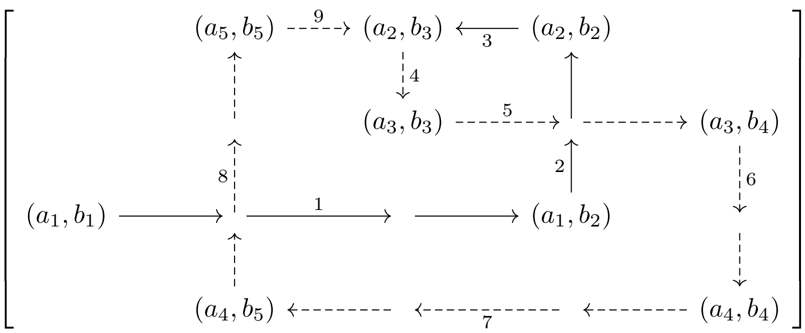
για κάθε $a, b \in \Sigma \times \Sigma$. Ισοδύναμα, ο V_π είναι ο μοναδικός τελεστής που ικανοποιεί τη σχέση $V_\pi(e_b) = e_{\pi(b)}$ για κάθε $b \in \Sigma$. Ο τελεστής μετάθεσης είναι διπλά στοχαστικός τελεστής.

Θεώρημα 5.1.1 (Birkhoff–von Neumann). *Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών και ένας τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^\Sigma)$. Ισχύει ότι ο A είναι διπλά στοχαστικός αν και μόνο αν υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\mathrm{Sym}(\Sigma))$ τέτοιο ώστε*

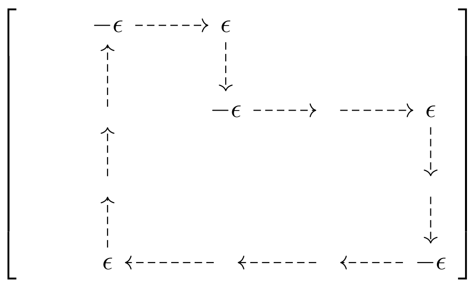
$$A = \sum_{\pi \in \mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi) V_\pi. \tag{5.1.1}$$

Απόδειξη. Το σύνολο όλων των διπλά στοχαστικών τελεστών που δρουν πάνω στον $\mathbb{R}^\Sigma$ είναι κυρτό και συμπαγές, άρα είναι ίσο με την κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.5. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ακραίο σημείο του συνόλου αυτού είναι τελεστής μετάθεσης. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι αν ο A είναι διπλά στοχαστικός τελεστής και δεν είναι τελεστής μετάθεσης, τότε δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου των διπλά στοχαστικών τελεστών.

Έστω A ένας διπλά στοχαστικός τελεστής που δεν είναι τελεστής μετάθεσης. Τότε, υπάρχει ένα τουλάχιστον ζευγάρι $(a_1, b_1) \in \Sigma \times \Sigma$ τέτοιο ώστε $A(a_1, b_1) \in (0,1)$. Αφού $\sum_{b\in\Sigma} A(a_1, b) = 1$ και $A(a_1, b_1) \in (0,1)$, υπάρχει σίγουρα $b_2 \neq b_1$ τέτοιο ώστε $A(a_1, b_2) \in (0,1)$. Ομοίως, επειδή και $\sum_{a\in\Sigma} A(a, b_2) = 1$, υπάρχει και $a_2 \neq a_1$ τέτοιο ώστε $A(a_2, b_2) \in (0,1)$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό μονοπάτι με καταχωρήσεις του A που περιέχονται στο διάστημα $(0,1)$, κινούμενοι εναλλάξ μεταξύ αντίστοιχης γραμμής και στήλης κάθε φορά. Αν και υπάρχουν πολλές τέτοιες καταχωρήσεις, με κατάλληλη επιλογή μπορούμε να σχηματίσουμε ένα βρόγχο με το μικρότερο δυνατό μήκος.



Έστω $\epsilon \in (0,1)$ το minimum όλων των καταχωρήσεων που επιλέχθηκαν για το σχηματισμό του κλειστού μονοπατιού που περιγράψαμε παραπάνω και έστω B ο τελεστής που σχηματίζεται ως εξής: στις καταχωρήσεις του κλειστού μονοπατιού βάζουμε τις τιμές $\pm\epsilon$ εναλλάσσοντας το πρόσημο μεταξύ των καταχωρήσεων και σε όλες τις άλλες καταχωρήσεις βάζουμε την τιμή 0.



Παίρνουμε τους τελεστές $A+B$ και $A-B$. Επειδή ο τελεστής A είναι διπλά στοχαστικός και κάθε γραμμή και κάθε στήλη του B έχει άθροισμα 0, ισχύει ότι οι $A+B$ και $A-B$ έχουν επίσης άθροισμα κάθε στήλης και κάθε γραμμής ίσο με 1. Επιπλέον, αφού το ϵ είναι το minimum όλων των καταχωρήσεων του κλειστού μονοπατιού, όλες οι καταχωρήσεις των $A+B$ και $A-B$ είναι μη αρνητικές. Επομένως οι $A+B$ και $A-B$ είναι διπλά στοχαστικοί τελεστές. Αφού ο B είναι μη μηδενικός, για τους τελεστές $A+B$ και $A-B$ έχουμε $A+B \neq A-B$ και

$$A = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B). \tag{5.1.2}$$

Άρα ο A είναι κυρτός συνδυασμός διπλά στοχαστικών τελεστών, οπότε δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου των διπλά στοχαστικών τελεστών. □

Ορισμός 5.1.3. Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών και τα διανύσματα $u, v \in \mathbb{R}^\Sigma$. Λέμε ότι το u κυριαρχεί το v (u majorizes v), και γράφουμε $v \prec u$ αν υπάρχει ένας διπλά στοχαστικός τελεστής $A \in L(\mathbb{R}^\Sigma)$ τέτοιος ώστε $v = Au$.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Birkhoff - von Neumann (5.1.1) μπορούμε να δούμε αυτό τον ορισμό ως μια φόρμα για τη «διαδικασία της τυχαίας ανάμειξης». Ένας τελεστής A είναι διπλά στοχαστικός αν και μόνο αν είναι ίσος με έναν κυρτό συνδυασμό τελεστών μετάθεσης. Άρα η σχέση $v \prec u$ ισχύει όταν το v μπορεί να ληφθεί ως εξής: Επιλέγουμε μια μετάθεση $\pi \in \mathrm{Sym}(\Sigma)$ σύμφωνα με κάποια κατανομή $p \in \mathcal{P}\left(\mathrm{Sym}(\Sigma)\right)$, αναδιατάσσουμε τις καταχωρήσεις του u σύμφωνα με την μετάθεση π, και υπολογίζουμε τη μέση τιμή των διανυσμάτων που προκύπτουν σε σχέση με το p.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει δύο διαφορετικούς χαρακτηρισμούς της κυριαρχίας για πραγματικά διανύσματα. Για το θεώρημα αυτό θα χρειαστούμε τα εξής: Για κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^\Sigma$ και για $n = |\Sigma|$, συμβολίζουμε

$$r(u) = (r_1(u), \ldots, r_n(u)) \tag{5.1.3}$$

το διάνυσμα που λαμβάνεται με ταξινόμηση των καταχωρήσεων σε φθίνουσα διάταξη. Δηλαδή,

$$\{u(a) : a \in \Sigma\} = \{r_1(u), \ldots, r_n(u)\} \tag{5.1.4}$$

και

$$r_1(u) \geq \cdots \geq r_n(u). \tag{5.1.5}$$

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω Σ ένα σύνολο δεικτών και τα διανύσματα $u, v \in \mathbb{R}^\Sigma$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $v \prec u$.

(ii) *Για $n = |\Sigma|$, έχουμε*

$$r_1(u) + \cdots + r_m(u) \geq r_1(v) + \cdots + r_m(v) \tag{5.1.6}$$

για κάθε $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ και

$$r_1(u) + \cdots + r_n(u) = r_1(v) + \cdots + r_n(v). \tag{5.1.7}$$

(iii) *Υπάρχει ένας unitary τελεστής* $U \in U(\mathbb{C}^\Sigma)$ *τέτοιος ώστε, για τον διπλά στοχαστικό τελεστή* $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^\Sigma)$ *με*

$$A(a,b) = |U(a,b)|^2 \tag{5.1.8}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$, *να ισχύει* $v = Au$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Έστω ότι $v \prec u$. Τότε υπάρχει ένας διπλά στοχαστικός τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^\Sigma)$ τέτοιος ώστε $v = Au$. Επειδή ο A είναι διπλά στοχαστικός τελεστής, ισχύει:

$$\sum_{a\in\Sigma} v(a) = \sum_{a\in\Sigma}(Au)(a) = \sum_{a,b\in\Sigma} A(a,b)u(b) = \sum_{a\in\Sigma} u(a), \tag{5.1.9}$$

οπότε η σχέση (5.1.7) αποδείχθηκε.

Από το θεώρημα Birkhoff–von Neumann (Θεώρημα 5.1.1) έχουμε ότι

$$A = \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi) V_\pi \tag{5.1.10}$$

για κάποιο διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\mathrm{Sym}(\Sigma))$. Άρα, για κάθε $u \in \mathbb{R}^\Sigma$

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi)V_\pi u = \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi)V_\pi \sum_{b\in\Sigma} u(b)e_b \\ &= \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi)\sum_{b\in\Sigma} u(b)V_\pi e_b = \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi)\sum_{b\in\Sigma} u(b)e_{\pi(b)}. \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Για κάθε $a \in \Sigma$ λοιπόν, είναι

$$(Au)(a) = \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi)\sum_{b\in\Sigma} u(b)e_{\pi(b)}(a) = \begin{cases} \sum\limits_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi)u(b) & \text{αν } a = \pi(b) \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οπότε για τυχόν υποσύνολο $S \subseteq \Sigma$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{a\in S} v(a) &= \sum_{a\in S}(Au)(a) = \sum_{a\in S}\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi)u(\pi^{-1}(a)) \\ &= \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(\Sigma)} p(\pi) \sum_{b\in\pi^{-1}(S)} u(b). \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

Ένας κυρτός συνδυασμός μιας συλλογής πραγματικών αριθμών δεν μπορεί να υπερβαίνει το μέγιστο στοιχείο της συλλογής αυτής, άρα θα υπάρχει μια μετάθεση $\pi \in \mathrm{Sym}(\Sigma)$ τέτοια ώστε

$$\sum_{b\in\pi^{-1}(S)} u(b) \geq \sum_{a\in S} v(a). \tag{5.1.13}$$

Επειδή $|\pi^{-1}(S)| = |S|$, αν θέσουμε $T = \pi^{-1}(S)$ τότε έχουμε ότι $T \subseteq \Sigma$, $|T| = |\Sigma|$ και

$$\sum_{a\in T} u(a) \geq \sum_{a\in S} v(a), \tag{5.1.14}$$

οπότε ισχύει και η σχέση (5.1.6).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Θα αποδείξουμε ότι το (ii) συνεπάγεται το (iii) με επαγωγή στο $n = |\Sigma|$. Για $n = 1$, ισχύει. Θα υποθέσουμε ότι $n \geq 2$ για το υπόλοιπο της απόδειξης. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ με $u_1 \geq \cdots \geq u_n$ και $v = (v_1, \ldots, v_n)$ με $v_1 \geq \cdots \geq v_n$.

Αν ισχύει ο ισχυρισμός (ii), πρέπει να ισχύει $u_1 \geq v_1 \geq u_k$ για κάποια $k \in \{1, \ldots, n\}$. Σταθεροποιούμε το k, παίρνοντάς το ίσο με το ελάχιστο όλων αυτών των δεικτών. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: $k = 1$ ή $k > 1$.

(α) Αν $k = 1$, τότε $u_1 = v_1$, οπότε,

$$u_2 + \cdots + u_m \geq v_2 + \cdots + v_m \tag{5.1.15}$$

για κάθε $m \in \{2, \ldots, n-1\}$, και επιπλέον

$$u_2 + \cdots + u_n = v_2 + \cdots + v_n. \tag{5.1.16}$$

Ορίζουμε τα διανύσματα $x = (u_2, \ldots, u_n)$ και $y = (v_2, \ldots, v_n)$. Από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει ένας unitary τελεστής V, του οποίου οι καταχωρήσεις παίρνουν δείκτες από το σύνολο $\{2, \ldots, n\}$, τέτοιος ώστε, για τον διπλά στοχαστικό τελεστή B που ορίζεται από τη σχέση

$$B(a, b) = |V(a, b)|^2 \tag{5.1.17}$$

για κάθε $a, b \in \{2, \ldots, n\}$ να ισχύει $y = Bx$. Θεωρούμε τον unitary τελεστή U με

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

και έστω A ο τελεστής που ορίζεται ως εξής:

$$A(a, b) = |U(a, b)|^2 \tag{5.1.18}$$

για κάθε $a, b \in \{1, \ldots, n\}$. Τότε ισχύει ότι $v = Au$.

(β) Έστω ότι $k > 1$. Τότε $u_1 > v_1 \geq u_k$, οπότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\lambda \in [0, 1)$ τέτοιος ώστε $v_1 = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_k$. Ορίζουμε τα διανύσματα $x = (x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_2, \ldots, y_n)$ με

$$\begin{aligned} x &= (u_2, \ldots, u_{k-1}, (1-\lambda)u_1 + \lambda u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n), \\ y &= (v_2, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

Για $m \in \{2, \ldots, k-1\}$ ισχύει ότι

$$x_2 + \cdots + x_m = u_2 + \cdots + u_m > (m-1)v_1 \geq v_2 + \cdots + v_m \tag{5.1.19}$$

λόγω του ότι το k είναι ο ελάχιστος δείκτης για τον οποίο ισχύει $v_1 \geq u_k$. Για $m \in \{k, \ldots, n\}$ ισχύει

$$\begin{aligned} x_2 + \cdots + x_m &= (1-\lambda)u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} + \lambda u_k + u_{k+1} + \cdots + u_m \\ &= u_1 + \cdots + u_m - v_1 \geq v_1 + \cdots + v_m - v_1 = v_2 + \cdots + v_m, \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $m = n$. Από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει ένας unitary τελεστής V, του οποίου οι καταχωρήσεις παίρνουν δείκτες από το σύνολο $\{2, \ldots, n\}$, τέτοιος ώστε, για τον διπλά στοχαστικό τελεστή B που ορίζεται από τη σχέση

$$B(a, b) = |V(a, b)|^2 \tag{5.1.21}$$

για κάθε $a, b \in \{2, \ldots, n\}$ να ισχύει $y = Bx$. Έστω W ο unitary τελεστής που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} We_1 &= \sqrt{\lambda} e_1 - \sqrt{1-\lambda} e_k \\ We_k &= \sqrt{1-\lambda} e_1 + \sqrt{\lambda} e_k \end{aligned}$$

και $We_a = e_a$ για κάθε $a \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$, και έστω

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} W.$$

Αν υπολογίσουμε τις καταχωρήσεις του U, έχουμε:

$$\begin{aligned} U(1,1) &= \sqrt{\lambda} & \qquad U(a,1) &= -\sqrt{1-\lambda} V(a,k) \\ U(1,k) &= \sqrt{1-\lambda} & U(1,1) &= \sqrt{\lambda} V(a,k) \\ U(1,b) &= 0 & U(a,b) &= V(a,b) \end{aligned} \tag{5.1.22}$$

για $a \in \{2, \ldots, n\}$ και $b \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$. Έστω A ο διπλά στοχαστικός τελεστής για τον οποίο ισχύει

$$A(a, b) = |U(a, b)|^2 \tag{5.1.23}$$

για κάθε $a, b \in \{1, \ldots, n\}$, δηλαδή ένας τελεστής του οποίου οι καταχωρήσεις είναι:

$$\begin{aligned} A(1,1) &= \lambda & \qquad A(a,1) &= (1-\lambda) B(a,k) \\ A(1,k) &= 1-\lambda & A(1,1) &= \lambda B(a,k) \\ A(1,b) &= 0 & A(a,b) &= B(a,b) \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

για $a \in \{2, \ldots, n\}$ και $b \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$. Ισοδύναμα,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} D,$$

όπου D είναι ο διπλά στοχαστικός τελεστής που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} De_1 &= \lambda e_1 + (1-\lambda) e_k, \\ De_k &= (1-\lambda) e_1 + \lambda e_k, \end{aligned}$$

και $De_a = e_a$ για κάθε $a \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$. Ισχύει ότι

$$Du = \begin{bmatrix} u_1 \\ x \end{bmatrix},$$

οπότε

$$Au = \begin{bmatrix} u_1 \\ Bx \end{bmatrix} = v.$$

(iii) $\implies$ (i):Αν $v = Au$, ισχύει ότι $v \prec u$. □

Παρατήρηση: Μετά την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί αν κάθε διπλά στοχαστικός τελεστής $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^\Sigma)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A(a,b) = |U(a,b)|^2$, για κάποιον unitary τελεστή $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^\Sigma)$. Αυτό δεν ισχύει: ο τελεστής $A \in L(\mathbb{R}^3)$ που ορίζεται ως

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

είναι ένας διπλά στοχαστικός τελεστής ο οποίος δεν μπορεί να δοθεί από έναν unitary τελεστή σύμφωνα με την παραπάνω σχέση. Αν γινόταν αυτό για κάποιον unitary τελεστή $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^3)$, τότε ο U θα ήταν της μορφής

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_1 \\ \beta_3 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ μιγαδικοί αριθμοί που ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο. Υποθέτοντας ότι ο U είναι unitary τελεστής, θα είχαμε:

$$\mathbb{1} = UU^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 & \alpha_1\overline{\beta_1} & \alpha_2\overline{\beta_2} \\ \overline{\alpha_1}\beta_1 & |\alpha_3|^2 + |\beta_1|^2 & \alpha_3\overline{\beta_3} \\ \overline{\alpha_2}\beta_2 & \overline{\alpha_3}\beta_3 & |\beta_2|^2 + |\beta_3|^2 \end{bmatrix}. \tag{5.1.25}$$

Αυτό είναι αδύνατον γιατί τα στοιχεία του πίνακα που είναι εκτός διαγωνίου δεν μπορούν να είναι ίσα με μηδέν, αφού οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ είναι μιγαδικοί αριθμοί που ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.

5.2 Κυριαρχία για ερμιτιανούς τελεστές

Ορισμός 5.2.1. Έστω $X, Y \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$ δύο ερμιτιανοί τελεστές, όπου $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος. Λέμε ότι ο X κυριαρχεί τον Y και γράφουμε $Y \prec X$, αν υπάρχει ένα μικτό unitary κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ τέτοιο ώστε $\Phi(X) = Y$.

Θεώρημα 5.2.1 (Uhlmann). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και δύο ερμιτιανοί τελεστές $X, Y \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $Y \prec X$.

(ii) *Υπάρχει ένα μοναδιαίο κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ τέτοιο ώστε $\Phi(X) = Y$.*

(iii) *Υπάρχει μια θετική και μοναδιαία απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος, $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$, τέτοια ώστε $\Phi(X) = Y$.*

(iv) $\lambda(Y) \prec \lambda(X)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $Y \prec X$. Τότε υπάρχει ένα μικτό unitary κανάλι $\Phi \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$ τέτοιο ώστε $Y = \Phi(X)$. Το κανάλι αυτό, αφού είναι μικτό unitary κανάλι, είναι και μοναδιαίο. Επομένως (i) $\implies$ (ii). Επίσης, κάθε μοναδιαίο κανάλι είναι θετική απεικόνιση και διατηρεί το ίχνος. Άρα από τον ισχυρισμό (ii) έπεται ο (iii).

Υποθέτουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός (iii). Έστω $n = \dim(\mathcal{X})$, και

$$X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(X) x_j x_j^* \quad \text{και} \quad Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(Y) y_k y_k^* \tag{5.2.1}$$

οι φασματικές αναπαραστάσεις των τελεστών X, Y αντίστοιχα. Αφού $\Phi(X) = Y$, ισχύει ότι:

$$\lambda_k(Y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(X) y_k^* \Phi(x_j x_j^*) y_k \tag{5.2.2}$$

για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ισοδύναμα, $\lambda(Y) = A\lambda(X)$, όπου $A \in L(\mathbb{R}^n)$ ο τελεστής που ορίζεται ως εξής:

$$A(k, j) = y_k^* \Phi(x_j x_j^*) y_k \tag{5.2.3}$$

για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Κάθε καταχώρηση του A είναι μη αρνητική λόγω της θετικότητας της Φ. Επίσης, επειδή η Φ διατηρεί το ίχνος, ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} A(k, j) = 1 \tag{5.2.4}$$

για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, και επειδή η Φ είναι μοναδιαία, ισχύει και ότι

$$\sum_{j=1}^{n} A(k, j) = 1 \tag{5.2.5}$$

για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Άρα ο A είναι διπλά στοχαστικός τελεστής, οπότε $\lambda(Y) \prec \lambda(X)$.

Έστω ότι $\lambda(Y) \prec \lambda(X)$. Υποθέτουμε πάλι ότι οι φασματικές αναπαραστάσεις των X, Y είναι αυτές που δίνονται από τη σχέση (5.2.1). Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.1, υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(S_n)$ τέτοιο ώστε

$$\lambda(Y) = \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) V_\pi \lambda(X). \tag{5.2.6}$$

Αν ορίσουμε τον unitary τελεστή

$$U_\pi = \sum_{j=1}^{n} y_{\pi(j)} x_j^* \tag{5.2.7}$$

για κάθε $\pi \in S_n = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$, τότε για το μικτό unitary κανάλι $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ με $\Phi(X) = \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) U_\pi X U_\pi^*$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) U_\pi X U_\pi^* \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) \lambda_j(X) y_{\pi(j)} y_{\pi(j)}^* = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(Y) y_k y_k^* = Y. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Άρα, $Y \prec X$. □

Θεώρημα 5.2.2 (Schur–Horn). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος διάστασης $\dim(\mathcal{X}) = n$, και ένας ερμιτιανός τελεστής $X \in \mathrm{Herm}(\mathcal{X})$. Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του $\mathcal{X}$, το διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ με $v(k) = x_k^* X x_k$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ ικανοποιεί τη σχέση $v \prec \lambda(X)$.*

(ii) *Για κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τη σχέση $v \prec \lambda(X)$, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε $v(k) = x_k^* X x_k$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_1, \ldots, x_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{X}$ και $v \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα με $v(k) = x_k^* X x_k$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ορίζουμε το κανάλι $\Phi \in \mathrm{T}(\mathcal{X})$ με

$$\Phi(Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k^* Y x_k x_k^* \tag{5.2.9}$$

για κάθε $Y \in \mathrm{L}(\mathcal{X})$. Η Φ είναι ένα pinching κανάλι, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.5.1, είναι μικτό unitary κανάλι. Έχουμε λοιπόν $\Phi(X) \prec X$ άρα και $\lambda\left(\Phi(X)\right) \prec \lambda(X)$ σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.1. Επειδή

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{n} v(k) x_k x_k^* \tag{5.2.10}$$

θα ισχύει ότι

$$\mathrm{spec}\left(\Phi(X)\right) = \{v(1), \ldots, v(n)\}, \tag{5.2.11}$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda\left(\Phi(X)\right) = V_\pi v \tag{5.2.12}$$

για κάποιον τελεστή μετάθεσης V_π, οπότε οι καταχωρήσεις του είναι ταξινομημένες από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη:

$$(V_\pi v)(1) \geq \cdots \geq (V_\pi v)(n). \tag{5.2.13}$$

Επομένως, $v \prec \lambda(X)$.

Έστω ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τη σχέση $v \prec \lambda(X)$ και έστω

$$X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(X) u_k u_k^* \tag{5.2.14}$$

η φασματική αναπαράσταση του X. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.2, αφού $v \prec \lambda(X)$, υπάρχει ένας unitary τελεστής $U \in U(\mathbb{C}^n)$ τέτοιος ώστε, για τον τελεστή $A \in L(\mathbb{R}^n)$ με

$$A(j,k) = |U(j,k)|^2 \tag{5.2.15}$$

για κάθε $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, να ισχύει $v = A\lambda(X)$. Ορίζουμε τον τελεστή $V \in U(\mathcal{X}, \mathbb{C}^n)$ με

$$V = \sum_{k=1}^{n} e_k u_k^* \tag{5.2.16}$$

και έστω

$$x_k = V^* U^* V u_k \tag{5.2.17}$$

για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ο τελεστής $V^* U^* V \in \mathrm{U}(\mathcal{X})$ είναι ένας unitary τελεστής, άρα το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{X}$, και ισχύει ότι

$$x_k^* X x_k = \sum_{j=1}^{n} |U(k,j)|^2 \lambda_j(X) = (A\lambda(X))(k) = v(k). \tag{5.2.18}$$

□

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Ευκλείδειος χώρος, $\rho \in D(\mathcal{X})$ ένας τελεστής πυκνότητας, $n = \dim(\mathcal{X})$ και $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ένα διάνυσμα πιθανότητας. Υπάρχει μια συλλογή από μοναδιαία διανύσματα $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathcal{X}$ (όχι απαραίτητα ορθογώνια) τέτοια ώστε*

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} p_k u_k u_k^* \tag{5.2.19}$$

αν και μόνο αν $p \prec \lambda(\rho)$.

Απόδειξη. Έστω ότι

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} p_k u_k u_k^* \tag{5.2.20}$$

για κάποια συλλογή από μοναδιαία διανύσματα $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathcal{X}$. Ορίζουμε $A \in \mathrm{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{X})$ με

$$A = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} u_k e_k^* \tag{5.2.21}$$

οπότε $AA^* = \rho$. Επίσης,

$$AA^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_j p_k} \langle u_k, u_j \rangle E_{k,j} \tag{5.2.22}$$

άρα

$$e_k^* A A^* e_k = p_k \tag{5.2.23}$$

για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Από το Θεώρημα 5.2.2, αυτό συνεπάγεται ότι $p \prec \lambda(A^*A)$. Επειδή $\lambda(A^*A) = \lambda(AA^*) = \lambda(\rho)$, έχουμε ότι $p \prec \lambda(\rho)$.

Αντίστροφα, έστω ότι $p \prec \lambda(\rho)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.2, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε $p(k) = x_k^* \rho x_k$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Έστω

$$y_k = \sqrt{\rho} x_k \tag{5.2.24}$$

και
$$u_k = \begin{cases} \frac{y_k}{\|y_k\|} & \text{αν} \;\; y_k \neq 0 \\ z & \text{αν} \;\; y_k = 0 \end{cases}$$
για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$, όπου $z \in \mathcal{X}$ είναι τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα.

Ισχύει

(5.2.25)
$$\|y_k\|^2 = \langle \sqrt{\rho} x_k, \sqrt{\rho} x_k \rangle = x_k^* \rho x_k = p_k$$
για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$, οπότε

(5.2.26)
$$\sum_{k=1}^{n} p_k u_k u_k^* = \sum_{k=1}^{n} y_k y_k^* = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\rho} x_k x_k^* \sqrt{\rho} = \rho.$$

□

5.3 Το Θεώρημα του Nielsen

Ορισμός 5.3.1. Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ και $\mathcal{W}$. Το σύνολο $\mathrm{Sep\ CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} : \mathcal{Y}, \mathcal{W})$ είναι το σύνολο όλων των πλήρως θετικών απεικονίσεων της μορφής

(5.3.1)
$$\Xi \in \mathrm{CP}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \otimes \mathcal{W})$$
για τις οποίες υπάρχουν, ένα σύνολο δεικτών Σ και συλλογές πλήρως θετικών απεικονίσεων $\{\Phi_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ και $\{\Psi_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{CP}(\mathcal{Y}, \mathcal{W})$, τέτοιες ώστε

(5.3.2)
$$\Xi = \sum_{a \in \Sigma} \Phi_a \otimes \Psi_a.$$

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{Sep\ CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} : \mathcal{Y}, \mathcal{W})$ ονομάζονται separable απεικονίσεις.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ και $\mathcal{W}$, και $\Xi \in \mathrm{CP}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \otimes \mathcal{W})$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Ισχύει ότι*

(5.3.3)
$$\Xi \in \mathrm{Sep\ CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} : \mathcal{Y}, \mathcal{W})$$
αν και μόνο αν υπάρχουν, ένα σύνολο δεικτών Σ και συλλογές τελεστών

(5.3.4)
$$\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) \quad \textit{και} \quad \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{W})$$
τέτοιες ώστε

(5.3.5)
$$\Xi(X) = \sum_{a \in \Sigma} (A_a \otimes B_a) X (A_a \otimes B_a)^*$$
για κάθε τελεστή $X \in \mathrm{L}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$.

Ορισμός 5.3.2. Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ και $\mathcal{W}$. Separable κανάλια ονομάζονται τα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{Sep\ C}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} : \mathcal{Y}, \mathcal{W})$ όπου

(5.3.6)
$$\mathrm{Sep\ C}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} : \mathcal{Y}, \mathcal{W}) = \mathrm{Sep\ CP}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} : \mathcal{Y}, \mathcal{W}) \cap \mathrm{C}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \otimes \mathcal{W}).$$

Το σύνολο Sep C($\mathcal{X}, \mathcal{X} : \mathcal{Y}, \mathcal{Y}$) το συμβολίζουμε πιο απλά Sep C($\mathcal{X} : \mathcal{Y}$).

Θεώρημα 5.3.1 (Το Θεώρημα του Nielsen)**.** *Έστω δυο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και $u, v \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ μοναδιαία διανύσματα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) \prec \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(vv^*)$.

(ii) *Υπάρχουν, ένα σύνολο δεικτών Σ και συλλογές τελεστών*

$$\{U_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{U}(\mathcal{X}) \quad \textit{και} \quad \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{Y}) \tag{5.3.7}$$

τέτοιες ώστε

$$\sum_{a\in\Sigma} B_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \tag{5.3.8}$$

και

$$vv^* = \sum_{a\in\Sigma} (U_a \otimes B_a) uu^* (U_a \otimes B_a)^*. \tag{5.3.9}$$

(iii) *Υπάρχουν, ένα σύνολο δεικτών Σ και συλλογές τελεστών*

$$\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}) \quad \textit{και} \quad \{V_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{U}(\mathcal{Y}) \tag{5.3.10}$$

τέτοιες ώστε

$$\sum_{a\in\Sigma} A_a^* A_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \tag{5.3.11}$$

και

$$vv^* = \sum_{a\in\Sigma} (A_a \otimes V_a) uu^* (A_a \otimes V_a)^*. \tag{5.3.12}$$

(iv) *Υπάρχει ένα separable κανάλι $\Phi \in$ Sep C($\mathcal{X} : \mathcal{Y}$) τέτοιο ώστε*

$$vv^* = \Phi(uu^*). \tag{5.3.13}$$

Απόδειξη. Έστω $X, Y \in \mathrm{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ οι τελεστές που ικανοποιούν τις σχέσεις $u = \mathrm{vec}(X)$ και $v = \mathrm{vec}(Y)$ και έστω ότι μια αναπαράσταση με ιδιάζουσες τιμές του X είναι η

$$X = \sum_{k=1}^{r} s_k x_k y_k^* \tag{5.3.14}$$

όπου $r = \mathrm{rank}(X)$.

Έστω ότι $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) \prec \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(vv^*)$. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι $XX^* \prec YY^*$. Οπότε, υπάρχει ένα σύνολο δεικτών Σ, ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$, και μια συλλογή unitary τελεστών $\{W_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{U}(\mathcal{X})$ ώστε

$$XX^* = \sum_{a\in\Sigma} p(a) W_a YY^* W_a^*. \tag{5.3.15}$$

Έστω $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Ορίζουμε τον τελεστή $Z \in \mathrm{L}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}, \mathcal{X})$ με

$$Z = \sum_{a\in\Sigma} \sqrt{p(a)} W_a Y \otimes e_a^*. \tag{5.3.16}$$

Τότε, θα ισχύει

$$ZZ^* = \sum_{a\in\Sigma} p(a) W_a Y Y^* W_a^* = XX^*, \tag{5.3.17}$$

άρα οι τελεστές Z και X έχουν τις ίδιες ιδιάζουσες τιμές και τα ίδια αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα. Επομένως, ο Z γράφεται στη μορφή

$$Z = \sum_{k=1}^{r} s_k x_k w_k^* \tag{5.3.18}$$

όπου $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset \mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z}$ μια ορθοκανονική συλλογή διανυσμάτων. Έστω $V \in \mathrm{U}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z})$ μια ισομετρία τέτοια ώστε $Vy_k = w_k$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, r\}$. Άρα θα είναι $XV^* = Z$.

Ορίζουμε τους τελεστές

$$U_a = W_a^* \quad \text{και} \quad B_a = (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes e_a^*)\overline{V} \tag{5.3.19}$$

για κάθε $a \in \Sigma$. Εφόσον ο V είναι ισομετρία, ο $\overline{V}$ θα είναι επίσης ισομετρία, οπότε

$$\sum_{a\in\Sigma} B_a B_a^* = \sum_{a\in\Sigma} V^{\mathsf{T}} (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes E_{a,a}) \overline{V} = V^{\mathsf{T}}\overline{V} = \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}. \tag{5.3.20}$$

Επομένως, ισχύει

$$W_a^* X B_a^{\mathsf{T}} = W_a^* X V^* (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes e_a) = W_a^* Z (\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes e_a) = \sqrt{p(a)} Y \tag{5.3.21}$$

για κάθε $a \in \Sigma$, άρα

$$\begin{aligned} \sum_{a\in\Sigma} (U_a \otimes B_a) uu^* (U_a \otimes B_a)^* &= \sum_{a\in\Sigma} \mathrm{vec}(W_a^* X B_a^{\mathsf{T}}) \mathrm{vec}(W_a^* X B_a^{\mathsf{T}})^* \\ &= \sum_{a\in\Sigma} p(a) \mathrm{vec}(Y) \mathrm{vec}(Y)^* = vv^*. \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Άρα (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Η συνεπαγωγή (i) $\Longrightarrow$ (iii) αποδεικνύεται όμοια, αν ανταλλάξουμε τις θέσεις των χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, εφόσον η σχέση $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) \prec \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(vv^*)$ είναι ισοδύναμη με την $\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(uu^*) \prec \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(vv^*)$.

Από τα (ii) και (iii) το (iv) προκύπτει άμεσα, καθώς οι απεικονίσεις

$$uu^* \mapsto \sum_{a\in\Sigma} (U_a \otimes B_a) uu^* (U_a \otimes B_a)^*, \tag{5.3.23}$$

$$uu^* \mapsto \sum_{a\in\Sigma} (A_a \otimes V_a) uu^* (A_a \otimes V_a)^* \tag{5.3.24}$$

είναι και οι δύο separable κανάλια.

Θα δείξουμε ότι (iv) $\Longrightarrow$ (i). Έστω ότι υπάρχει ένα separable κανάλι $\Phi \in \mathrm{Sep\ C}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ τέτοιο ώστε $\Phi(uu^*) = vv^*$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lambda(XX^*) \prec \lambda(YY^*), \tag{5.3.25}$$

το οποίο, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.1, είναι ισοδύναμο με το ότι $XX^* \prec YY^*$, άρα $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(uu^*) \prec \mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}}(vv^*)$.

Έστω $n = \dim(\mathcal{X})$. Τα διανύσματα u, v είναι μοναδιαία διανύσματα, άρα

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(XX^*) = \mathrm{Tr}(XX^*) = 1 = \mathrm{Tr}(YY^*) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(YY^*). \tag{5.3.26}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.2, αν δείξουμε ότι

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda_k(YY^*) \leq \sum_{k=m}^{n} \lambda_k(XX^*) \tag{5.3.27}$$

για κάθε $m \in \{1, \ldots, n\}$ τότε θα ισχύει και η σχέση (5.3.25). Από τη separability του καναλιού Φ έπεται ότι υπάρχουν ένα σύνολο δεικτών Σ και δύο συλλογές τελεστών

$$\{A_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{X}) \quad \text{και} \quad \{B_a : a \in \Sigma\} \subset \mathrm{L}(\mathcal{Y}), \tag{5.3.28}$$

ώστε

$$vv^* = \sum_{a \in \Sigma} (A_a \otimes B_a) uu^* (A_a \otimes B_a)^*. \tag{5.3.29}$$

Επειδή ο vv^* είναι τελεστής τάξης 1, θα υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$ τέτοιο ώστε

$$(A_a \otimes B_a) uu^* (A_a \otimes B_a)^* = p(a) vv^*, \tag{5.3.30}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathrm{vec}(A_a X B_a^{\mathsf{T}}) \mathrm{vec}(A_a X B_a^{\mathsf{T}})^* = p(a) \mathrm{vec}(Y) \mathrm{vec}(Y)^*, \tag{5.3.31}$$

για κάθε $a \in \Sigma$. Αν πάρουμε το μερικό ίχνος ως προς $\mathcal{Y}$, έχουμε

$$A_a X B_a^{\mathsf{T}} \overline{B_a} X^* A_a^* = p(a) YY^* \tag{5.3.32}$$

για κάθε $a \in \Sigma$, οπότε

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda_k(YY^*) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{a \in \Sigma} \lambda_k(A_a X B_a^{\mathsf{T}} \overline{B_a} X^* A_a^*) \tag{5.3.33}$$

για κάθε $m \in \{1, \ldots, n\}$.

Για κάθε $a \in \Sigma$ και $m \in \{1, \ldots, n\}$, θεωρούμε τον τελεστή προβολής $\Pi_{a,m} \in \mathrm{Proj}(\mathcal{X})$ πάνω στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου του $\mathcal{X}$ που παράγεται από το σύνολο $\{A_a x_1, \ldots, A_a x_{m-1}\}$, υποθέτοντας ότι $x_k = 0$ για κάθε $k > r$. Από τον ορισμό του τελεστή προβολής, προκύπτει ότι

$$\langle \Pi_{a,m}, A_a X B_a^{\mathsf{T}} \overline{B_a} X^* A_a^* \rangle = \langle \Pi_{a,m}, A_a X_m B_a^{\mathsf{T}} \overline{B_a} X_m^* A_a^* \rangle \tag{5.3.34}$$

για κάθε $a \in \Sigma$ και $m \in \{1, \ldots, n\}$, όπου

$$X_m = \sum_{k=m}^{r} s_k x_k y_k^*, \tag{5.3.35}$$

με $X_m = 0$ για $m > r$. Επειδή κάθε τελεστής $\Pi_{a,m}$ είναι προβολή, και ο τελεστής $A_a X_m B_a^{\intercal} \overline{B_a} X_m^* A_a^*$ είναι θετικά ημιορισμένος, έπεται ότι

$$\langle \Pi_{a,m}, A_a X_m B_a^{\intercal} \overline{B_a} X_m^* A_a^* \rangle \leq \operatorname{Tr}(A_a X_m B_a^{\intercal} \overline{B_a} X_m^* A_a^*). \tag{5.3.36}$$

Η απεικόνιση Φ είναι κανάλι, άρα διατηρεί το ίχνος. Επομένως,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Sigma} \operatorname{Tr}(A_a X_m B_a^{\intercal} \overline{B_a} X_m^* A_a^*) &= \operatorname{Tr}\left(\Phi(\operatorname{vec}(X_m)\operatorname{vec}(X_m)^*)\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(\operatorname{vec}(X_m)\operatorname{vec}(X_m)^*\right) \\ &= \operatorname{Tr}(X_m X_m^*) = \sum_{k=m}^{n} \lambda_k(XX^*) \end{aligned} \tag{5.3.37}$$

για κάθε $m \in \{1, \ldots, n\}$.

Επίσης, επειδή είναι $\operatorname{rank}(\Pi_{a,m}) \geq n - m + 1$ για κάθε $a \in \Sigma$ και $m \in \{1, \ldots, n\}$, ισχύει ότι

$$\langle \Pi_{a,m}, A_a X B_a^{\intercal} \overline{B_a} X^* A_a^* \rangle \geq \sum_{k=m}^{r} \lambda_k(A_a X B_a^{\intercal} \overline{B_a} X^* A_a^*). \tag{5.3.38}$$

Από τις σχέσεις (5.3.33), (5.3.34), (5.3.36), (5.3.37) και (5.3.38) προκύπτει ότι

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda_k(YY^*) \leq \sum_{k=m}^{n} \lambda_k(XX^*), \tag{5.3.39}$$

οπότε

$$\lambda(XX^*) \prec \lambda(YY^*). \tag{5.3.40}$$

□

Βιβλιογραφία

[1] J. Watrous, *The Theory of Quantum Information*, Cambridge University Press (2018).

[2] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer (1997).

[3] M. D. Choi, *Completely positive linear maps on complex matrices*, Linear Algebra and Its Applications, 10 (1975), 285–290.

[4] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*, Second edn, Wiley Interscience (2006).

[5] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1985).

[6] K. Kraus, *General state changes in quantum theory*, Annals of Physics, 64 (1971), 311—335.

[7] K. Kraus, *States, effects, and operations: fundamental notions of quantum theory*, Springer–Verlag (1983).

[8] T. K. Lee, *Extreme points related to Matrix Algebras*, Kangweon-Kyungki Math. Jour. 9 (2001), 45–52.

[9] M. Nielsen, *Conditions for a class of entanglement transformations*, Physical Review Letters, 83 (1999), 436–439.

[10] N. Nielsen, *Probability distributions consistent with a mixed state*, Physical Review A, 62 (2000), 052308.

[11] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000).

[12] R. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).

[13] W. Stinespring, *Positive functions on C^*-algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, 6 (1955), 211–216.

Περίληψη

Η εργασία αυτή παρουσιάζει θέματα από την Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας. Η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας μελετάει το πώς μπορούν να αξιοποιηθούν οι κβαντο-μηχανικές ιδιότητες των φυσικών συστημάτων για να επιτευχθεί αποτελεσματική αποθήκευση και μετάδοση των πληροφοριών. Αντικείμενο μελέτης της εργασίας αυτής είναι τα κβαντικά κανάλια και η θεωρία κυριαρχίας.

Στο 2ο κεφάλαιο αναφέρονται βασικές έννοιες που χρειάζονται για την παρουσίαση των καναλιών, καθώς και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί.

Στο 3ο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των καταχωρητών και των καταστάσεών τους. Επίσης παρουσιάζεται η έννοια της purification καταστάσεων και μελετώνται συνθήκες για την ύπαρξή της.

Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της θεωρίας των κβαντικών καναλιών. Μελετάμε τις ιδιότητες και τις αναπαραστάσεις των κβαντικών καναλιών. Επίσης εισάγουμε διάφορες κατηγορίες κβαντικών καναλιών, όπως τα μοναδιαία κανάλια, τα μικτά unitary κανάλια, τα completely dephasing channels, τα κανάλια αντικατάστασης, τα κανάλια Schur, τα Weyl συναλλοίωτα κανάλια και το completely depolarizing κανάλι.

Στο 5ο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την κυριαρχία διανυσμάτων και τελεστών και διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα του Nielsen.

Abstract

In this thesis we present some key topics of interest pertaining to the Theory of Quantum Information. The Theory of Quantum Information studies how quantum-mechanical properties of physical systems can be utilized, in order to carry off storage and transmission of information more efficiently. The emphasis in this Thesis is on Quantum Channels and the Majorization Theory.

The key terms that needed for studying Quantum Channels, as well as the notation being used, are all mentioned in Chapter 2.

Chapter 3 presents Registers and their states. Additionally, we define the notion of Purification of states and study conditions for its existence.

Some key elements of the Theory of Quantum Channels are being explored in Chapter 4. Properties and representations of Quantum Channels are also studied in this Chapter. Furthermore, we present various categories of Quantum Channels such as Unital Channels, Mixed Unitary Channels, Completely Dephasing Channels, Replacement Channels, Schur Channels, Weyl-covariant Channels and the Completely Depolarizing Channel.

In Chapter 5, we study the notion of Majorization for real vectors and for Hermitian operators. We also formulate and prove Nielsen's theorem.