ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΘΑΝΟΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΜΣ ¨ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ¨

Τριμελής επιτροπή:

Εμμανουήλ Ιωάννης (επιβλ.)
Ντόκας Ιωάννης
Βάρσος Δημήτριος

2020
ΕΘΝΙΚΌ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΌ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η Ομολογία και η Συνομολογία θεωρούνται εν γένει δυικές μεταξύ τους. Αν όμως η ομάδα G είναι πεπερασμένη φαίνεται να έχουν περισσότερο «όμοιες» παρά δυικές ιδιότητες. Η συνομολογία του Tate η οποία θα παρουσιαστεί στο στο σχετικό κεφάλαιο, είναι ένας καλός τρόπος να περιγραφούν οι ομοιότητες αυτές. Αργότερα, θα προχωρήσουμε στην περίγραφή της equivariant Ομολογίας η οποία παρέχει ένα εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την G από την δράση της G σε έναν τοπολογικό χώρο X. Τέλος, ο ορισμός των $H_*(G, M)$ και $H^*(G, M)$ μας επιτρέπει την επιλογή αιθαίρετων προβολικών αναλύσεων π.χ. $P = (P_i)_{i \leq 0}$ του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}G$. Όμοια, στην περίπτωση που δούμε την κατασκευή αυτή από την οπτική της τοπολογίας, μπορούμε να υπολογίσουμε τις $H_*(G, M)$ και $H^*(G, M)$ μέσω αυθαίρετου $K(G, 1)$ συμπλόκου (complex) Y. Εφόσον υπάρχει αυτή η ελευθερία επιλογής, είναι λογικό να προσπαθήσει κανείς να επιλέξει P (ή Y αντίστοιχα) όσο το δυνατόν «μικρότερα». Αυτό οδηγεί σε διάφορες συνθήκες περατότητας για την ομάδα G. Η ανάλυσή μας δεν θα περιοριστεί αποκλειστικά στις συνθήκες περατότητας αλλά θα επεκταθούμε σε διάφορες σχετιζόμενες έννοιες ή ιδιότητες που έχουν ενδιαφέρον για την Συνομολογία Ομάδων.

Κεφάλαιο 2

Κάποιες βασικές προτάσεις

Το κεφάλαιο αυτό δεν ακολουθεί την λογική δομή των υπολοίπων αλλά έχει κύριο σκοπό την καταγραφή/παρουσίαση κάποιων ειδικών προτάσεων που ε-ίναι μεγάλης σημασίας για την πληρότητα των αποδείξεων στα κεφάλαια που ακολουθούν. Κάποιες προτάσεις θα αποδειχθούν αναλυτικά ενώ άλλες μόνο θα διατυπωθούν. Σε κάθε περίπτωση για το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας θα θεωρούμε πως ο αναγνώστης έχει κάποια εξοικείωση με τα βασικά εργαλεία της συνομολογίας ομάδων. Για ακόμα πιο στοιχειώδη αντιμετώπιση των εννοιών ο αναγνώστης παραπέμπεται στην προπτυχιακή μου εργασία [2] και στα εισαγωγικά κεφάλαια της σχετικής βιβλιογραφίας [1].

Λήμμα 1. *Τα ελεύθερα πρότυπα είναι προβολικά.*

Απόδειξη. Έστω F ελεύθερο πρότυπο με βάση (e_a), και θεωρούμε το πρόβλημα απεικόνισης

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "0"] & \\ M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "j"'] & M'' \end{tikzcd}$$

Με ακριβή σειρά. Τότε $\phi(e_a) \in kerj = imi$, και έτσι μπορούμε να ε-πιλέξουμε $x_a \in M'$ με $i(x_a) = \phi(e_a)$. Θέτουμε το ψ να είναι η μοναδική R-πρότυπο απεικόνιση με $\psi(e_a) = x_a$. □

Λήμμα 2. *Υποθέτουμε πως δίνεται το παρακάτω διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d"] \arrow[d, dotted, "g"'] & Q \arrow[d, "f"] & \\ M' \arrow[r, "d_1"'] & M \arrow[r, "d_2"'] & M'' \end{tikzcd}$$

'Οπου $d_2 f d = 0$ και θέλουμε ένα g έτσι ώστε $d_1 g = fd$. Αν το P είναι προβολικό και η κατώτερη σειρά είναι ακριβής, τότε ένα τέτοιο g υπάρχει.

Απόδειξη. Το διάγραμμα είναι ίδιο με το διάγραμμα του 2, αρκεί να θέσουμε $fd = \phi$ και $d_2 f d = 0$. □

Λήμμα 3. *Υποθέτουμε πως δίνεται ένα διάγραμμα (όχι απαραίτητα μεταθετικό)*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "k"'] & Q \arrow[dl, "h"] \\ M' \arrow[r, "d_1"'] & M \arrow[r, "d_2"'] & M'' \end{tikzcd}$$

όπου $d_2 hd = d_2 f$ και θέλουμε ένα k έτσι ώστε $d_1 k + hd = f$. Αν το P είναι προβολικό, και η κατώτερη σειρά είναι ακριβής, τότε ένα τέτοιο k υπάρχει.

Απόδειξη. Το πρόβλημα είναι της μορφής 1 με $\phi = f - hd$. Αυτό γιατί αντικαθιστώντας το f με $\phi + hd$ παίρνουμε, $d_1 k + hd = f \to d_1 k + hd = \phi + hd \to d_1 k = \phi$. □

Λήμμα 4. *Έστω (C, ∂) και (C', ∂') να είναι αλυσιδωτά σύμπλοκα και r ένας ακέραιος. Έστω $(f_i : C_i \to C'_i)_{i \leqslant r}$ να είναι μια οικογένεια απεικονίσεων τ.ω. $\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_i$ για $i \leqslant r$. Αν το C_i είναι προβολικό για $i > r$ και $H_i(C') = 0$ για $i \geqslant r$, τότε η $(f_i)_{i \leqslant r}$ επεκτείνεται σε μια αλυσιδωτή απεικόνιση $f : C \to C'$, και f είναι μοναδική ως προς την ομοτοπία. Συγκεκριμένα, οποιεσδήποτε δύο επεκτάσεις, είναι ομοτοπικές με μια ομοτοπία h τ.ω. $h_i = 0$ για $i \leqslant r$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε επαγωγικά, πως η f_i έχει οριστεί για $i \leqslant n$, όπου $n \geqslant r$, και ότι $\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_i$ για $i \leqslant n$. Έτσι έχουμε ένα πρόβλημα απεικόνισης:

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'"'] & C'_{n-1} \end{tikzcd}$$

όπου $\partial' f_n \partial = f_{n-1}\partial\partial = 0$. Άρα η επιθυμητή f_{n+1} υπάρχει, απο το 2. Τώρα υποθέτουμε ότι η g είναι μια δεύτερη επέκταση της $(f_i)_{i \leqslant r}$. Θα θέλαμε να βρούμε μια ομοτοπία h μεταξύ της f και g. Θεωρούμε επαγωγικά ότι $h_i : C_i \to C'_{i+1}$ έχει οριστεί για $i \leqslant n$, όπου $n \geqslant r$, και ότι $\partial' h_i + h_{i-1}\partial = f_i - g_i$. Θέτοντας $\tau_i = f_i - g_i$, οδηγούμαστε στο πρόβλημα απεικόνισης:

$$\begin{tikzcd} & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, dotted, "h_{n+1}"'] \arrow[d, "\tau_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "\tau_n"'] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"] \\ C'_{n+2} \arrow[r, "\partial'"'] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"'] & C'_n & \end{tikzcd}$$

με
$$\partial' h_n \partial = (\tau_n - h_{n-1}\partial)\partial = \tau_n \partial = \partial' \tau_{n+1}$$
η πρώτη ισότητα από επαγωγική υπόθεση,
η δεύτερη γιατί $\partial^2 = 0$
και η τρίτη εφόσον το τ είναι μια αλυσιδωτή απεικόνιση.
Άρα το επιθυμητό h_{n+1} με $\partial' h_{n+1} + h_n \partial = \tau_{n+1}$ υπάρχει, λόγω του Λήμματος 3. □

Λήμμα 5. *Έστω $F_n \to ... \to F_0 \to \mathbb{Z}$ μια ακριβής ακολουθία από $\mathbb{Z}G$-πρότυπα όπου κάθε F_i είναι προβολικό. Τότε $H_i G \cong H_i(F_G)$ για $i < n$ και υπάρχει μια ακριβής ακολουθία*
$$0 \to H_{n+1}(G) \to (H_n F)_G \to H_n(F_G) \to H_n(G) \to 0$$

Απόδειξη. Επεκτείνουμε την F σε μια πλήρη ανάλυση F^+ επιλέγοντας ένα προβολικό πρότυπο F'_{n+1} που να απεικονίζεται επί του $H_n F$, δηλαδή:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & F'_{n+2} \arrow[r] & F'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & F_n \arrow[r] & ... \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
 & & H_n F \arrow[ur, hook] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Μπορούμε να ελενξουμε ότι $H_i(F^+_G) = H_i(F_G)$ για $i < n$ και ότι υπάρχει μια ακριβής ακολουθία:
$$0 \to H_{n+1}(F^+_G) \to A \to H_n(F_G) \to H_n(F^+_G) \to 0$$
όπου $A = Coker(F'_{n+2})_G \to (F'_{n+1})_G$. Αυτός ο συ-πυρήνας μπορεί τα ταυτιστεί με $(H_n F)_G$ και έτσι προκύπτει το λήμμα.

□

Πρόταση 6. *Για ένα S-πρότυπο και μια απεικόνιση R-προτύπων $f : M \to N$, υπάρχει μοναδική απεικόνιση S-προτύπων $g : S \otimes_R M \to N$ τ.ω. $gi = f$:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & S \otimes_R M \arrow[dl, dotted, "g"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

από όπου προκύπτει και ο ισομορφισμός:
$$Hom_S(S \otimes_R M, N) \approx Hom_R(M, N).$$

Αντίστοιχα με την παραπάνω, ισχύει και η δυική της κατασκευή με χρήση Hom αντί για $\otimes$:

Πρόταση 7. *Για ένα S-πρότυπο N και μια απεικόνιση R-προτύπων $f : N \to M$, υπάρχει μοναδική απεικόνιση S-προτύπων $g : N \to Hom_R(S, M)$ τ.ω. $\pi g = f$:*

$$\begin{tikzcd} & Hom_R(S,M) \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

από όπου προκύπτει και ο ισομορφισμός:

$$Hom_S(N, Hom_R(S,M)) \approx Hom_R(N,M)$$

Παρατήρηση. *Αν θέσουμε στην 7 $M = N$ θεωρώντας τα ως R-πρότυπα, και $f = id_N$, παίρνουμε την κανονική απεικόνιση S-προτύπων:*

$$N \to Hom_R(S,N).$$

Πρόταση 8. *Έστω M ένα G-πρότυπο και M_0 η σχετική αβελιανή ομάδα του. Τότε το $\mathbb{Z}G \otimes M$ (με την διαγώνια G-δράση) είναι ισομορφικό (με κανονικό τρόπο) με το επαγόμενο (ινδυςεδ) πρότυπο $\mathbb{Z}G \otimes M_0$. Ειδικότερα το $\mathbb{Z}G \otimes M$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$-πρότυπο αν το M είναι ελεύθερο ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο.*

Πρόταση 9. *Αν $(G : H) < \infty$ τότε $Ind_H^G \approx Coind_H^G M$.*

Πρόταση 10. *Έστω M και N να είναι G-πρότυπα. Αν M είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-στρέψης τότε*

$$Tor_*^G(M,N) \approx H_*(G, M \otimes N),$$

όπου η G δρα διαγώνια στο $M \otimes N$. Αν το M είναι $\mathbb{Z}$-ελεύθερο, τότε:

$$Ext_G^*(M,N) \approx H^*(G, Hom(M,N)),$$

όπου η G δρα διαγώνια στο $Hom(M,N)$.

Πρόταση 11 (λήμμα του Shapiro)**.** *Αν $H \subseteq G$ και M ένα H-πρότυπο, τότε ισχύουν οι ισομορφισμοί:*

$$H_*(H,M) \approx H_*(G, Ind_H^G M)$$

και

$$H^*(H,M) \approx H^*(G, Coind_H^G M).$$

Απόδειξη. Έστω F μια προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}G$. Σε αυτή την περίπτωση η F μπορεί επίσης να θεωρηθεί σαν προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}H$. Μπορούμε δηλαδή αν γράψουμε:

$$H_*(H,M) \approx H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M).$$

- Ο πρώτος ισομορφισμός έπεται από:

$$F \otimes_{\mathbb{Z}H} M \approx F \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \approx F \otimes_G (Ind_H^G M).$$

- Ο δεύτερος ισομορφισμός προκύπτει από την καθολική co-induction ιδιότητα:

$$\mathscr{H}om_H(F,M) \approx \mathscr{H}om_G(F, Coind_H^G M).$$

$\square$

Κεφάλαιο 3

Συνομολογία πεπερασμένων ομάδων

Συνηθίζεται να βλέπει κανείς την ομολογία και την συνομολογία ως έννοιες δυικές η μία της άλλης λόγω του πλήθους των δυικών ιδιοτήτων τους. Ό-ταν όμως πρόκειται για μια πεπερασμένη ομάδα G, τότε η ομολογία και η συνομολογία έχουν περισσότερο ¨όμοιες¨ παρά ¨δυικές¨ ιδιότητες. Ο Tate περιέγραψε έναν τρόπο να διερευνηθούν αυτές οι ομοιότητες των H_* και H^* στην περίπτωση της πεπερασμένης ομάδας G. Ειδικότερα, έδειξε την ύπαρξη ενός πηλίκου της H_0, δηλαδή του $\widetilde{H}_0$ και ενός υποσυναρτητή $\widetilde{H}_0 \subseteq H_o$ ώστε οι συναρτητές

$$\ldots, H_2, H_1, \widetilde{H}_0, \widetilde{H}^0, H^1, H^2 \ldots$$

να ¨ταιριάζουν¨ με τρόπο που να δημιουργούν μια θεωρία συνομολογίας $\widehat{H}^*$ όπου

$$\ldots,\ H_2 = \widehat{H}^{-3},\ H_1 = \widehat{H}^{-2}, \widetilde{H}^0 = \widehat{H}^{-1}, \widetilde{H}^0 = \widehat{H}^0, H^1 = \widehat{H}^1, H^2 = \widehat{H}^2, \ldots$$

και ούτω καθεξής για όλους τους δείκτες. Ο κύριος σκοπός αυτού του κεφαλαίου θα είναι να κατασκευάσουμε αυτή την ομολογική θεωρία του Tate και να δείξουμε την χρησιμότητά της παρουσιάζοντας την θεωρία συνομολογίας για συνομολογικά τετριμμένα πρότυπα των Nakayama-Rim, και στην συνέχεια την θεωρία ομάδων με περιοδική συνομολογία.

3.1 Σχετική (Relative) Ομολογική Άλγεβρα

Θα συμβολίζουμε G και H μια ομάδα και μια υποομάδα της αντίστοιχα. Η περίπτωση που θα μας ενδιαφέρει κυρίως σε αυτό το κεφάλαιο, θα είναι η περίπτωση όπου G είναι πεπερασμένη και $H = \{1\}$.

Ορισμός 12 (admissible εμφύτευση). *Μια εμφύτευση $i : M' \hookrightarrow M$ από G-πρότυπα, θα καλείται ¨admissible¨ εάν είναι διασπαστική εμφύτευση όταν θεωρηθεί ως μια εμφύτευση από H-πρότυπα. Δηλαδή αν υπάρχει μια H-απεικόνιση $\pi : M \to M'$ τ.ω. $\pi i = id_{M'}$*

Ορισμός 13 (admissible ακριβής ακολουθία)**.** *Μια ακριβής ακολουθία*

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$$

θα καλείται admissible εάν ο εγκλεισμός $im(j) \hookrightarrow M''$ είναι admissible

Ορισμός 14 (admissible αλυσιδωτά σύμπλοκα)**.** *Ένα άκυκλο αλυσιδωτό σύμπλοκο C από G-πρότυπα, θα καλείται admissible εάν κάθε ακριβής ακολουθία $C_{i+1} \to C_i \to C_{i-1}$ είναι admissible*

Ορισμός 15 (σχετικά εμφυτεύσιμο)**.** *Ένα G-πρότυπο Q θα καλείται ¨σχετικά εμφυτεύσιμο¨ αν ικανοποιεί τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:*

1. *Το πρόβλημα απεικόνισης*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[dl, dotted] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

με την ακριβή σειρά να είναι admissible μπορεί να λυθεί

2. *Κάθε πρόβλημα απεικόνισης της μορφής*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & M \arrow[dl, dotted] \\ Q & \end{tikzcd}$$

με την i να είναι admissible εμφύτευση μπορεί να λυθεί

3. *Ο contravariant συναρτητής $Hom_G(\_, Q)$ στέλνει admissible εμφυτεύσεις από G-πρότυπα σε επιμορφοσμούς αβελιανών ομάδων.*

Πρόταση 16. *Για οποιοδήποτε H-πρότυπο N, το G-πρότυπο $Coind_H^G(N)$ είναι σχετικά εμφυτεύσιμο*

Απόδειξη. Από την καθολική ιδιότητα της co-induction 7 , έχουμε

$$Hom_G(\_, Coind_H^G(N)) \approx Hom_H(Res_H^G(\_), N)$$

Ο συναρτητής στα δεξιά στέλνει κάθε admissible εμφύτευση από G-πρότυπα σε έναν επιμορφισμό αβελιανών ομάδων. □

Συμπέρασμα 17. *Για κάθε G-πρότυπο M υπάρχει μια κανονική admissible εμφύτευση $M \hookrightarrow \overline{M}$, όπου $\overline{M}$ είναι σχετικά εμφυτεύσιμο. Αν $(G : H) < \infty$, τότε αυτή η κατασκευή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (α) Αν M είναι ελεύθερο (αντίστοιχα προβολικό) ως $\mathbb{Z}H$-πρότυπο, τότε το $\overline{M}$ είναι ελευθερο (αντίστοιχα προβολικό) στο $\mathbb{Z}G$. (β) Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως G-πρότυπο, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\overline{M}$*

Απόδειξη. Παίρνουμε το $\overline{M} = Coind_H^G Res_H^G$ και με χρήση της H-διασπαστικής εμφύτευσης $M \hookrightarrow \overline{M}$ της παρατήρησης 2 που βασίζεται την πρόταση 7. Αν $(G : H) < \infty$, τότε έχουμε $Coind_H^G(\_) \approx Ind_H^G(\_)$ και εξ αυτών προκύπτουν τα (α) και (β). □

Συμπέρασμα 18. *Υποθέτουμε ότι $(G : H) < \infty$. Τότε κάθε $\mathbb{Z}G$-προβολικό πρότυπο είναι σχετικά εμφυτεύσιμο.*

Απόδειξη. Μπορεί κανείς να δει ότι το ευθύ άθροισμα σχετικά εμφυτεύσιμων προτύπων είναι σχετικά εμφυτεύσιμο. Επομένως αρκεί να εργαστούμε με ελεύθερα πρότυπα. Αν το F είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$-πρότυπο, τότε

$$F \approx \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} F' = Ind_H^G(F')$$

όπου F' είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}H$-πρότυπο της ίδιας τάξης. Όμως

$$Ind_H^G(F') \approx Coind_H^G(F')$$

που λόγο της πρότασης 16 είναι σχετικά εμφυτεύσιμο. □

Τώρα θα προχωρήσουμε στην βασικότερη πρόταση της παραγράφου, την πρόταση αυτή μπορεί κανείς αν την δεί σαν δυική της 4:

Πρόταση 19. *Έστω δύο αλυσιδωτά σύμπλοκα C και C' από αλυσιδωτά G-πρότυπα και έστω r ένας ακέραιος. Υποθέτουμε ότι C'_i είναι σχετικά εμφυτεύσιμο για $i < r$ και ότι $C_{i+1} \to C_i \to C_{i-1}$ είναι ακριβής και admissible για $i \leq r$*

α') Κάθε οικογένεια $(f_i : C_i \to C'_i)_{i \geq r}$ απεικονίσεων που μετατίθονται με τους συνοριακούς τελεστές, επεκτείνεται σε μια αλυσιδωτή απεικόνιση $C \to C'$

β') Έστω οι αλυσιδωτές απεικονίσεις $f, g : C \to C'$ και έστω $(h_i : C_i \to C'_{i+1})_{i \geq r-1}$ μια οικογένεια απεικονίσεων τ.ω. $\partial'_{i+1} h_i + h_{i-1}\partial_i = f_i - g_i$ για $i \geq r$. Τότε η $(h_i)_{i \geq r-1}$ επεκτείνεται σε μια ομοτοπία από την f στην g

Απόδειξη. Ακριβώς αντίστοιχη με της 4 , με τα βέλη των απεικονίσεων όμως να είναι αντίστροφα. □

Ορισμός 20 (σχετικά εμφυτεύσιμες αναλύσεις)**.** *Σχετικά εμφυτεύσιμες αναλύσεις ενός G-προτύπου, θα ονομάζουμε ένα μη-αρνητικό συναλυσιδωτό σύμπλοκο Q από σχετικά αναλύσιμα, το οποίο επιπλέον ικανοποιεί μια ασθενή ισοδυναμία $\eta : M \to Q$ τ.ω. το επαυξημένο σύμπλοκο*

$$0 \to M \to Q^0 \to Q^1 \to ...$$

να είναι admissible

Το παρακάτω συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 19

Συμπέρασμα 21. *Δύο οποιεσδήποτε σχετικά εμφυτεύσιμες αναλύστεις του M είναι ομοτοπικά ισοδύναμες*

Πρόταση 22. *Υποθέτουμε ότι $(G : H) < \infty$. Αν το M είναι ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο το οποίο είναι επίσης προβολικό (αντ. πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό) ως $\mathbb{Z}H$-πρότυπο, τότε το M δέχεται μια σχετικά εμφυτεύσιμη ανάλυση $\eta : M \to Q$ τ.ω. κάθε Q^n να είναι προβολικό (αντ. πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό) $\mathbb{Z}G$-πρότυπο.*

Απόδειξη. Υπάρχουν σχετικά εμφυτεύσιμες αναλύσεις για οποιοδήποτε M. Για να το δούμε αυτό μπορούμε να πάρουμε την απεικόνιση

$$\eta : M \to Q^0$$

να είναι η κανονική admissible εμφύτευση του συμπεράσματος 17 και να εφαρμόσουμε το 17 ξανά ώστε να πάρουμε μια admissible εμφύτευση

$$coker(\eta) \hookrightarrow Q^1$$

και ούτω καθεξής. Επιπλέον αν $(G : H) < \infty$ και το M είναι προβολικό ως $\mathbb{Z}G$-πρότυπο, τότε τα πρότυπα Q^n αυτής της ανάλυσης θα είναι προβολικά πάνω στο $\mathbb{Z}G$. Συνεχίζοντας επαγωγικά αποδεικνύεται το ζητούμενο. (Όμοια αν M πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε Q^n). □

3.2 Πλήρεις Αναλύσεις

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την εξειδικευμένη μορφή της σχετικής (relative) ομολογικής άλγεβρας που περιγράφεται στην παράγραφο 3.1, δηλαδή περιορισμένη στην περίπτωση όπου η G είναι πεπερασμένη και η $H = \{1\}$.

Ορισμός 23 (πλήρης ανάλυση)**.** *Πλήρης ανάλυση (complete resolution) θα καλείται ένα άκυκλο σύμπλοκο $F = (F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ προβολικών $\mathbb{Z}G$-προτύπων, μαζί με μια απεικόνιση $\epsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $\epsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ να είναι μια ανάλυση (με τον συνήθη ορισμό) όπου $F_+ = (F_i)_{i\geq 0}$.*

Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πλήρη ανάλυση χρησιμοποιώντας την πρόταση 22:

Παράδειγμα. *Από την προταση 22 γνωρίζουμε πως το G-πρότυπο $\mathbb{Z}$ έχει την αντίστροφη ανάλυση:*

$$0 \to \mathbb{Z} \to Q^0 \to Q^1 \to Q^2 \to \cdots$$

όπου κάθε ένα από τα Q^* είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό. Θέτοντας $F_i = Q^{-i-1}$ παίρνει την μορφή:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots$$

Συγκολλώντας τώρα την τελευταία ανάλυση σε μια φυσιολογική προβολική ανάλυση

$$\epsilon : (F_n)_{n\geq 0} \to \mathbb{Z}$$

καταλήγουμε σε ένα άκυκλο σύμπλοκο:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\epsilon"'] & F_{-1} \arrow[r] & F_{-2} \arrow[r] & \cdots \\
 & & & \mathbb{Z} \arrow[ur, hook, "\eta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

το οποίο ικανοποιεί τον ορισμό της πλήρης ανάλυσης όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Λήμμα 24. *Κάθε άκυκλο αλυσιδωτό σύμπλοκο C από ελεύθερες αβελιανές ομάδες είναι συσταλτό.*

Απόδειξη. Η αβελιανή ομάδα Z_n από n-κύκλους είναι ελεύθερη ως υποομάδα μιας ελεύθερης αβελιανής ομάδας. Επομένως η ακολουθία

$$0 \to Z_{n+1} \to C_{n+1} \to Z_n \to 0$$

είναι διασπαστική. □

Πρόταση 25. *Αν οι $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ και $\epsilon' : F' \to \mathbb{Z}$ είναι πλήρεις αναλύσεις, τότε υπάρχει μια μοναδική κλάση ομοτοπίας από απεικονίσεις από το F στο F' που διατηρούν τις επαυξήσεις (augmentation-preserving). Αυτές οι απεικονίσεις είναι ομοτοπικές ισοδυναμίες.*

Απόδειξη. Απο το 4 μπορούμε να βρούμε μια αλυσιδωτή απεικόνιση $\tau_+ : F_+ \to F'_+$ που διατηρεί τις επαυξήσεις. Από το λήμμα 24, η F είναι άκυκλη και admissible και η F' είναι (για κάθε διάσταση) σχετικά εμφυτεύσιμη. Άρα η τ_+ μπορεί να επεκταθεί και στις αρνητικές διαστάσεις από την πρόταση 19. Όμοια, αν μας δωθούν δύο απεικονίσεις που διατηρούν τις επαυξήσεις: $\tau,\ \tau' : F \to F'$, έχουμε από το 4 μια ομοτοπία μεταξύ των τ_+ και τ'_+ η οποία μπορεί να επεκταθεί και στις αρνητικές διαστάσεις μέσω της πρότασης 19. Επομένως λόγω μοναδικότητας, κάθε απεικόνιση πλήρων αναλύσεων είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία. □

Τώρα θα δείξουμε ότι το ¨αρνητικό¨ τμήμα μιας πεπερασμένης πλήρης ανάλυσης είναι δυικό μιας κλασσικής προβολικής ανάλυσης του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}G$.

Πρόταση 26. *Για κάθε πεπερασμένη ομάδα G και κάθε αριστερό G-πρότυπο M, υπάρχει ένας ισομορφισμος G-προτύπων:*

$$\psi : Hom(M,\mathbb{Z}) \to M^* = Hom_G(M,\mathbb{Z}G)$$

ο οποίος ορίζεται ως

$$\psi(u)(m) = \sum_{g\in G} u(g^{-1}m)g \ \ \text{με} \ \ u \in Hom(M,\mathbb{Z}),\ m \in M$$

Απόδειξη. Το $\mathbb{Z}G$ είναι το επαγόμενο (induced) πρότυπο $\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}$ και επομένως είναι ισομορφικό με το coinduced πρότυπο $Hom(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ λόγο της πρότασης 9. Επομένως έχουμε ότι

$$Hom_G(M, \mathbb{Z}G) \approx Hom(M, \mathbb{Z})$$

λόγο της καθολικής ιδιότητας 7 του coinduction. Από τα δύο θεωρήματα που αναφέρθηκαν προκύπτει η ύπαρξη ενός ισομορφισμού ψ ο οποίος είναι συμβατός με την G-δράση. □

Ορισμός 27 (δυικό αλυσιδωτού συμπλόκου F)**.** *Θα ονομάζουμε ¨δυικό του αλυσιδωτού συμπλόκου F¨ πάνω σε τυχαίο δακτύλιο, το σύμπλοκο*

$$\overline{F} = \mathscr{H}\!om_R(F, R)$$

Επομένως έχουμε

$$\overline{F}^n = \overline{F}_{-n} = Hom_R(F_n, R) = (F_n)^*.$$

Πρόταση 28. *Έστω μια πεπερασμένη προβολική ανάλυση $\epsilon : P \to \mathbb{Z}$ του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}G$ με πεπερασμένη G. Τότε η $\epsilon^* : \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \to \overline{P}$ είναι μια αντίστροφη προβολική ανάλυση. Επιπλέον κάθε πεπερασμένη αντίστροφη προβολική ανάλυση παράγεται με αυτό τον τρόπο (ύπο ισομορφισμό).*

Απόδειξη. Το επαυξημένο αλυσιδωτό σύμπλοκο που σχετίζεται με την

$$\epsilon : P \to \mathbb{Z}$$

είναι συσταλτό ως σύμπλοκο αβελιανών ομάδων λόγω του 24. Επομένως παραμένει συσταλτό όταν εφαρμοστεί ο συναρτητής $(\ )^* \approx Hom(\_, \mathbb{Z})$ και άρα η

$$\epsilon^* : \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \to \overline{P}$$

είναι μια αντίστροφη προβολική ανάλυση. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ταυτίσουμε το Q μιας οποιαδήποτε πεπερασμένης και αντίστροφης προβολικής ανάλυσης $\mathbb{Z} \to Q$ (της οποίας το δυικό είναι μια κανονική προβολική ανάλυση $\overline{Q} \to \mathbb{Z}$) με το δυικό του $\overline{Q}$. □

3.3 Κατασκευή της συνομολογίας Tate

Ορισμός 29 (συνομολογία Tate)**.** *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Η Tate συνομολογία της G με παράγοντες σε ένα G-πρότυπο M ορίζεται ως*

$$\widehat{H}^i(G, M) = H_i(\mathscr{H}\!om_G(F, M))$$

για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, όπου το F είναι πλήρης ανάλυση για G. Το H^i είναι καλά ορισμένο από το 25 (υπό κανονικό ισομορφισμό).

Παρατήρηση. *Έστω $F_+ = (F_i)_{i\geq 0}$ και $F_- = (F_i)_{i\leq 0}$ και έστω C_+ (ή αντ. C^-) το σύμπλοκο $\mathscr{H}om_G(F_+, M)$ (ή αντίστοιχα με F_-). Τότε από το λήμμα 5 έχουμε:*

$$\widehat{H}^i(G, M) = \begin{cases} H^i(C_+) & i > 0 \\ H^i(C^-) & i < -1 \end{cases}$$

και υπάρχει μια ακριβής ακολουθία:

$$0 \to \widehat{H}^{-1}(G, M) \to H^{-1}(C^-) \xrightarrow{\alpha} H^0(C^+) \to \widehat{H}^0(G, M) \to 0$$

όπου η α επάγεται από το συ-συνοριακό τελεστή $\delta : C^{-1} \to C^0$. Δηλαδή προσδιορίζεται από το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} C^{-1} & \xrightarrow{\delta} & C^0 \\ \big\downarrow & & \big\uparrow \\ H^{-1}(C^-) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(C^+) \end{array}$$

Παρατήρηση. *Έστω $\epsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ μια προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ και έτσι $H^i(C^+) \approx H^i(G, M)$. Υποθέτοντας ότι F πεπερασμένο, τότε από πρόταση 28, έπεται ότι $F_- = \overline{\Sigma P}$ για κάποια πεπεραρσμένη προβολική ανάλυση $P \to \mathbb{Z}$. Ο ισομορφισμός δυικότητάς του μας δίνει*

$$C^- = \mathscr{H}om_G(F_-, M) = \mathscr{H}om_G(\overline{\Sigma P}, M) \approx \Sigma P \otimes_G M$$

και έτσι έχουμε

$$H^i(C^-) \approx H_{-i}(\Sigma P \otimes_G M) = H_{-i-1}(P \otimes_G M) = H_{-i-1}(G, M)$$

άρα καταλήγουμε

$$\star \quad \widehat{H}^i(G, M) = \begin{cases} H^i(G, M) & i > 0 \\ H_{-i-1}(G, M) & i < -1 \end{cases}$$

και επομένως υπάρχει η ακριβής ακολουθία

$$0 \to \widehat{H}^{-1}(G, M) \to H_0(G, M) \xrightarrow{\alpha} H^0(G, M) \to \widehat{H}^0(G, M) \to 0.$$

Πρόταση 30. *Η απεικόνιση α είναι η απεικόνιση norm $\overline{N} : M_G \to M^G$.*

Απόδειξη. Εφόσον οι αναλύσεις F_+ και P της παρατήρησης 3.3 είναι τυχαίες πεπερασμένες προβολικές, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν το $\mathbb{Z}G$ στην μηδενική διάσταση και ότι ξεκινούν και οι δύο με την κανονική επαύξηση $\mathbb{Z}G$. Τότε η απεικόνιση

$$\eta = \epsilon^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$$

δίνεται ως

$$\eta(1) = \sum_{g\in G} g$$

Το διάγραμμα της παρατήρησης 3.3 θα πάρει την μορφή:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "N"] \arrow[d, two heads] & M \\ H_0(G,M) \arrow[r, "\alpha"] & H^0(G,M) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

γιατί

$$Hom_G(\mathbb{Z}G, M) = M$$

Εδώ οι κάθετες απεικονίσεις είναι κανονικές απεικονίσεις $M \twoheadrightarrow M_G$ και $M^G \hookrightarrow M$. □

Συμπέρασμα 31. *Έχουμε επομένως δείξει τα εξής*

$$\star \quad \widehat{H}^{-1}(G,M) = ker(\overline{N}) \subseteq H_0(G,M)$$

και

$$\star \quad \widehat{H}^0(G,M) = coker(\overline{N}) \twoheadleftarrow H^0(G,M).$$

Δηλαδή έχουμε καταλήξει στα:

$$\widehat{H}^i = \begin{cases} H^i & i > 0 \\ H_{-i-1} & i < -1 \\ ker(\overline{N}) & i = -1 \\ coker(\overline{N}) & i = 0 \end{cases}$$

με αντίστοιχα επιχειρήματα καταλήγουμε στα:

$$\widehat{H}_i = \begin{cases} H_i & i > 0 \\ H^{-i-1} & i < -1 \\ coker(\overline{N}) & i = -1 \\ ker(\overline{N}) & i = 0 \end{cases}$$

Δηλαδή $\widehat{H}_i = \widehat{H}^{-i-1}$.

Τέλος, στο παρακάτω διάγραμμα συνοψίζουμε τα αποτελέσματα:

$$\begin{tikzcd} & & & H^0 \arrow[d, two heads] & H^1 \arrow[d, equal] & H^2 \cdots \arrow[d, equal] \\ \cdots \widehat{H}^{-3} \arrow[d, equal] & \widehat{H}^{-2} \arrow[d, equal] & \widehat{H}^{-1} \arrow[d, hook] & \widehat{H}^0 & \widehat{H}^0 & \widehat{H}^2 \cdots \\ \cdots H_2 & H_1 & H_0 \arrow[uur, "\overline{N}"'] & & & \end{tikzcd}$$

3.4 Ιδιότητες της συνομολογίας Tate

Η συνομολογία Tate ορίστηκε μέσω αναλύσεων και έτσι μπορεί να δειχθεί πως πολλές ιδιότητες της H^* συνεχίζουν να ισχύουν και για την $\widehat{H}^*$. Τέτοιες προτάσεις είναι οι παρακάτω:

Πρόταση 32. *Μια βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

από G-πρότυπα οδηγεί σε μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^i(G, M') \to \widehat{H}^i(G, M) \to \widehat{H}^i(G, M'') \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^{i+1}(G, M') \to \cdots$$

Το λήμμα του Shapiro πέρνει την παρακάτω μορφή:

Πρόταση 33. *Αν $H \subseteq G$ και M ένα H-πρότυπο, τότε*

$$\widehat{H}^*(H, M) \approx \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M).$$

Απόδειξη. Εφόσον μια πλήρη αναλύση για την G μπορεί επίσης να θεωρηθεί πλήρης ανάλυση οποιουδήποτε $H \subseteq G$, το λήμμα του Shapiro μπορεί να περιγραφεί και σε αυτή την περίπτωση. Εφόσον η G είναι πεπερασμένη το co-induction και το *induction* ταυτίζονται. □

Πρόταση 34. *Η $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$ για κάθε αβελιανή ομάδα A, και συνεπώς κάθε $\widehat{H}^i$ είναι effaceable και co-effaceable.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει παίρνοντας $H = \{1\}$ και παρατηρώντας ότι

$$\widehat{H}^*(\{1\}, \_) = 0.$$

□

Τα 32 και 34 μας επιτρέπουν να κάνουμε shifting-διάστασης. Δηλαδή για δοθέν G-πρότυπο M μπορούν να βρεθούν G-πρότυπα K και C τ.ω.:

Πρόταση 35. *$\widehat{H}^i(G, M) \approx \widehat{H}^{i+1}(G, K)$ και $\widehat{H}^i(G, M) \approx \widehat{H}^{i-1}(G, C)$ για κάθε ακέραιο i.*

Με επιχειρήματα ανάλογα όπως στην H^*, μπορεί τώρα να δειχθεί ότι η Tate συνομολογία ορίζεται πλήρως από οποιοδήποτε μεμονωμένο συναρτητή $\widehat{H}^i$.

Σημείωση. *Για μία οποιαδήποτε $H \subseteq G$ και ένα G-πρότυπο M, έχουμε τις απεικονίσεις περιορισμού*

$$\mathscr{H}om_G(F, M) \hookrightarrow \mathscr{H}om_H(F, M)$$

και

$$\mathscr{H}om_H(F, M) \hookrightarrow \mathscr{H}om_G(F, M)$$

όπου η δεύτερη απεικόνιση είναι μια απεικόνιση μεταφοράς.

Πρόταση 36. *Για μια $H \subseteq G$ και ένα G-πρότυπο M, έχουμε μια απεικόνιση περιορισμού*

$$\widehat{H}^*(G,M) \to \widehat{H}^*(H,M)$$

και την απεικόνιση συ-περιορισμού

$$\widehat{H}^*(H,M) \to \widehat{H}^*(G,M).$$

Οι ιδιότητες των απεικονίσεων αυτών είναι ανάλογες όσων ισχύουν για τις απεικονίσεις περιορισμού και συ-περιορισμού.

Τώρα θα περιγράψουμε πως η θεωρία των cup γινομένων επεκτείνεται στην περίπτωση της $\widehat{H}^*$:

Πρόταση 37. *Υπάρχει ένα γινόμενο cup*

$$\widehat{H}^p(G,M) \otimes \widehat{H}^q(G,N) \to \widehat{H}^{p+q}(G, M \otimes N)$$

το οποίο έχει τις αντίστοιχες ιδιότητες που έχει και το cup όπως ορίζεται για την περίπτωση της $H^*(\_,\_)$.

Η κατασκευή του cup γινομένου δεν μπορεί να γίνει με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση της απλής συν-ομολογίας. Αυτό γιατί επιχειρώντας κανείς να εφαρμόσει μεθόδους όπως αυτόν που βασίζεται στο γεγονός ότι το τανυστικό γινόμενο αναλύσεων είναι ανάλυση, δεν θα οδηγήσει σε κάποια προφανή μέθοδο για τον ορισμό του γινομένου cup εφόσον για μια πλήρη ανάλυση F δεν είναι απαραίτητο η $F \otimes F$ να είναι επίσης πλήρης ανάλυση. Έτσι η εναλλακτική μέθοδος της διαγώνιας προσέγγισης είναι απαραίτητη στην περίπτωση της Tate συν-ομολογίας αφού όμως χρησιμοποιηθεί η κατάλληλη απεικόνιση διαγώνιας προσέγγισης.

Ορισμός 38 (πλήρες τανυστικό γινόμενο)**.** *Το γινόμενο $C \widehat{\otimes} C'$, όπου C, C' είναι διαβαθμισμένα πρότυπα, θα ορίζεται ως*

$$(C \widehat{\otimes} C')_n = \prod_{p+q=n} C_p \otimes C'_q$$

και θα καλείται πλήρες τανυστικό γινόμενο

Παρατήρηση. *Για δύο διαφορετικά διαβαθμισμένα πρότυπα D, D' και απεικονίσεις $u : C \to D$ και $v : C' \to D'$ βαθμού r και s αντίστοιχα, υπάρχει η απεικόνιση βαθμού $r+s$:*

$$u \widehat{\otimes} v : C \widehat{\otimes} C' \to D \widehat{\otimes} D'$$

που ορίζεται ως:

$$(u \widehat{\otimes} v)_n = \prod_{p+q=n} (-1)^{ps} u_p \otimes v_q : \prod_{p+q=n} C_p \otimes C'_q \to \prod_{p+q=n} D_{p+r} \otimes D'_{q+s}$$

Σημείωση. *Για διαφορικό d, και F πλήρη ανάλυση $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$, το $F\widehat{\otimes}F$ έχει «μερικά διαφορικά» $d\widehat{\otimes}id_F$ και $id_F\widehat{\otimes}d$ τα οποία μπορεί να ελεγχθεί πως είναι αντιμεταθετικά και μηδέν για «τετράγωνα». Επομένως το «πλήρες διαφορικό»*

$$\partial = d\widehat{\otimes}id_F + id_F\widehat{\otimes}d$$

είναι μηδέν για τετράγωνα και κάνει το $F\widehat{\otimes}F$ αλυσιδωτό σύμπλοκο.

Επιπλέον θα έχουμε την «επαύξηση»

$$\epsilon\widehat{\otimes}\epsilon : F\widehat{\otimes}F \to \mathbb{Z}\widehat{\otimes}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Ορισμός 39 (πλήρης διαγώνια προσέγγιση)**.** *Με τον όρο «πλήρης διαγώνια προσέγγιση» θα εννοούμε την αλυσιδωτή απεικόνιση $\Delta : F \to F\widehat{\otimes}F$ η οποία διατηρεί τις επαυξήσεις.*

Την ύπαρξη της παραπάνω απεικόνισης θα δείξουμε αργότερα (προσωρινά θα υποθέτουμε την ύπαρξή της).

Ορισμός 40 (συν-αλυσιδωτό γινόμενο cup)**.** *Το συν-αλυσιδωτό γινόμενο cup θα ορίζεται ως*

$$\mathscr{Hom}_G(F, M) \otimes \mathscr{Hom}_G(F, N) \xrightarrow{\smile} \mathscr{Hom}_G(F, M \otimes N)$$

όπου $u \smile v = (u\widehat{\otimes}v) \circ \Delta$

Τώρα με χρήση shifting-διάστασης επιχειρημάτων θα δείξουμε πως το γινόμενο cup είναι ανεξάρτητο της επιλογής των F και Δ.

Λήμμα 41. *Υπάρχει ένα το πολύ γινόμενο cup για $\widehat{H}^*(G, \_)$, το οποίο να ικανοποιεί τις αντίστοιχες ιδιότητες συμβατότητας με τον συνδετικό ομομορφισμό δ και για τις ιδιότητες για γινόμενο cup για συντελεστές διάστασης 0, $\widehat{H}^0$.*

Απόδειξη. Έστω ένα πρότυπο M. Θεωρούμε το $\bar{M}$ που έπεται από το πρότυπο $\mathbb{Z}G \otimes M$ και θεωρούμε την κανονική -διασπαστική ακριβής ακολουθία:

$$0 \to K \to \bar{M} \to M \to 0.$$

Για οποιοδήποτε G-πρότυπο N, η ακολουθία

$$0 \to K \otimes N \to \bar{M} \otimes N \to M \otimes N \to 0$$

είναι ακριβής και από αυτή έπεται το πρότυπο $\bar{M} \otimes N$. Επομένως έχουμε τους ισομορφισμούς shifting-διάστασης:

$$\delta : \widehat{H}^i(G, M) \xrightarrow{\approx} \widehat{H}^{i+1}(G, K)$$

και

$$\delta : \widehat{H}^i(G, M \otimes N) \xrightarrow{\approx} \widehat{H}^{i+1}(G, K \otimes N)$$

επιπλέον κάθε γινόμενο cup συμβατό με τον συνδετικό ομομορφισμό, είναι συμβατό με αυτούς τους ισομορφισμούς με την έννοια ότι το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται για κάθε $v \in \widehat{H}^q(G, N)$:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^p(G,M) \arrow[r, equal] \arrow[d, "*\smile v"] & \widehat{H}^{p+1}(G,K) \arrow[d, "*\smile v"] \\
\widehat{H}^{p+q}(G,M\otimes N) \arrow[r, equal] & \widehat{H}^{p+q+1}(G,K\otimes N)
\end{tikzcd}$$

Ας υποθέσουμε τώρα πως υπάρχουν δύο τέτοια γινόμενα cup $\widehat{H}^p \otimes \widehat{H}^q \to \widehat{H}^{p+q}$. Τότε αυτά θα συμφωνούν για $p = q = 0$ απο υπόθεση. Επομένως το παραπάνω διάγραμμα επιτρέπει να δείξουμε πως συμφωνούν στο p για $p \leq 0$ και $q = 0$ (μέσω φθίνουσας επαγωγής). Όμοια, γράφοντας το N ως πηλίκο ενός επαγόμενου (induced) προτύπου, μπορούμε να επεκτείνουμε την επαγωγή στο q για την περίπτωση $p \leq 0$, $q \leq 0$. Στην συνέχεια εμφυτεύοντας το M σε ένα επαγόμενο πρότυπο δείχνουμε επαγωγικά πως τα γινόμενα cup συμφωνούν για αυθαίρετο p και $q \leq 0$. Τέλος εμφυτεύοντας και το N σε επαγόμενο πρότυπο δείχνουμε πως συμφωνούν για κάθε p και q. □

Υποθέτοντας την ύπαρξη της Δ μπορούν να δειχθούν όλες οι αντίστοιχες ιδιότητες του γινομένου cup, όπως:

- προσεταιριστικότητα (με shifting διάστασης)
- μεταθετικότητα (ανάλογη απόδειξη ή έμμεσα με χρήση λήμματος 41)
- το $1 \in \mathbb{Z}/|G| \cdot \mathbb{Z} = \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z})$ αποτελεί ταυτότητα (ανάλογη απόδειξη ή με shifting διάστασης)
- το γινόμενο cup σέβεται τις απεικονίσεις περιορισμού και συ-περιορισμού (αποδείξεις ανάλογες ή μέσω shifting διάστασης)

Θα χρειαστούμε τρία λήμματα για να προχωρήσουμε στην απόδειξη ύπαρξης της «διαγώνιας προσέγγισης», ολοκληρώνοντας έτσι την κατασκευή του γινομένου cup:

Λήμμα 42. *Το $F\widehat{\otimes}F$ είναι άκυκλο και σχετικά εμφυτεύσιμο (για κάθε διάσταση)*

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι για κάθε κατευθυνόμενο γινόμενο σχετικών εμφυτεύσεων είναι σχετικά εμφυτεύσιμο, έπεται ότι είναι σχετικά εμφυτεύσιμο. Τώρα για το «άκυκλο», έστω $h : F \to F$ μια συσταλτή ομοτοπία για το F θεωρούμενο ως σύμπλοκο αβελιανών ομάδων και έστω $H = h\widehat{\otimes}id_F$. Το H είναι μια συσταλτή ομοτοπία για το $F\widehat{\otimes}F$ γιατί έχουμε:

$$\begin{aligned}
\partial H + H\partial &= (d\widehat{\otimes}id_F + id_F\widehat{\otimes}d) \circ (h\widehat{\otimes}id_F) \\
&\quad + (h\widehat{\otimes}id_F) \circ (d\widehat{\otimes}id_F + id_F\widehat{\otimes}d) \\
&= dh\widehat{\otimes}id_F - h\widehat{\otimes}d + hd\widehat{\otimes}id_F + h\widehat{\otimes}d \\
&= (dh + hd)\widehat{\otimes}id_F \\
&= id_F\widehat{\otimes}id_F \\
&= id_{F\widehat{\otimes}F}
\end{aligned}$$

απ'όπου έπεται το ζητούμενο.

□

Λήμμα 43. *Έστω (C, ∂) και (C', ∂') δύο άκυκλα αλυσιδωτά σύμπλοκα από $\mathbb{Z}G$-πρότυπα. Υποθέτουμε πως τα C_i είναι προβολικά και κάθε C'_i είναι σχετικά εμφυτεύσιμο. Εάν $\tau_0 : C_0 \to C'_0$ είναι μια απεικόνιση τ.ω. $\partial'_0\tau_0\partial_1 = 0$, τότε η τ_0 επεκτείνεται σε μια αλυσιδωτή απεικόνιση $\tau : C \to C'$.*

Απόδειξη. Εφόσον το C είναι προβολικό και το C' άκυκλο, η $(\tau_i)_{i\geq 0}$ μπορεί να κατασκευαστεί όμοια όπως η αντίστοιχη απεικόνιση στην πρόταση 19. Από το 24 γνωρίζουμε ότι το C' είναι σχετικά εμφυτεύσιμο και άκυκλο, επομένως η $(\tau_i)_{i\geq 0}$ μπορεί να επεκταθεί για αρνητικές διαστάσεις μέσω της 19. □

Λήμμα 44. *Έστω C ένα admissible άκυκλο σύμπλοκο από $\mathbb{Z}G$-πρότυπα. Για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$-πρότυπο P το πρότυπο $P \otimes C$ (υπό την διαγώνια G-δράση) είναι συσταλτό ως σύμπλοκο $\mathbb{Z}G$-προτύπων.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειθχούν τα προηγούμενα για $P = \mathbb{Z}G$. Από την πρόταση 8 έχουμε ότι $\mathbb{Z}G \otimes C$ είναι ισομορφικό με το επαγόμενο σύμπλοκο $\mathbb{Z}G \otimes C'$ όπου C' είναι το C θεωρούμενο ως σύμπλοκο αβελιανών ομάδων. Εφόσον το C' είναι συσταλτό (από υπόθεση) έπεται ότι το $\mathbb{Z}G \otimes C$ είναι συσταλτό. □

Τώρα έχουμε ότι χρειάζεται για να προχωρήσουμε στην απόδειξη του 37.

Απόδειξη (του 37). Υπό την οπτική των 42 και 43 η κατασκευή της $\Delta : F \to F\widehat{\otimes}F$ μπορεί να αναθχεί στην κατασκευή μιας απεικόνισης $\alpha = (\alpha_p) : F_0 \to \prod_{p\in\mathbb{Z}} F_p \otimes F_{-p}$ τ.ω.

1. $\partial\alpha | B_0 = 0$
2. και $(\epsilon \otimes \epsilon)\alpha_0 = \epsilon$ όπου $B_0 \subset F_0$ είναι το πρότυπο 'συνόρων'.

Έστω

$$\partial'_{pq} = d_p \otimes F_q : F_p \otimes F_q \to F_{p-1} \otimes F_q$$

και έστω

$$\partial''_{pq} = (-1)^p F_p \otimes d_q : F_p \otimes F_q \to F_p \otimes F_{q-1}.$$

Τότε η

$$\partial\alpha : F_0 \to \prod_{p\in\mathbb{Z}} F_{p-1} \otimes F_{-p}$$

έχει συνιστώσες $\partial'_{p,-p}\alpha_p + \partial''_{p-1,1-p}\alpha_{p-1}$. Έτσι το (1) είναι ισοδύναμο με το (1'): $(\partial'\alpha_p + \partial''\alpha_{p-1})|B_0 = 0$ (με παράληψη των δεικτών στα διαφορικά). Αρχίζουμε την κατασκευή της α θεωρώντας πως η απεικόνιση $\alpha_0 : F_0 \to F_0 \otimes F_0$ είναι οποιαδήποτε απεικόνιση ικανοποιεί το (2). Αυτό είναι εφικτό διότι το F_0 είναι προβολικό. Υποθέτοντας πως $p > 0$ και ότι η α_{p-1} έχει οριστεί, θα θέλαμε να ορίσουμε μια $\alpha_p : F_p \otimes F_{-p}$ τ.ω. το παρακάτω διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
 & B_0 \arrow[dl, "\alpha_p|B_0"'] \arrow[d, "\beta|B_0"] & \\
F_p \otimes F_{-p} \arrow[r, "\partial'"] & F_{p-1} \otimes F_{-p} \arrow[r, "\partial'"] & F_{p-2} \otimes F_{-p}
\end{tikzcd}
$$

όπου $\beta = -\partial''\alpha_{p-1}$, να είναι μεταθετικό.

Ισχυριζόμαστε πως $\partial'\beta|B_0 = 0$. Ειδικότερα αν $p > 1$ μπορούμε να υποθέσουμε επαγωγικά ότι $(\partial'\alpha_{p-1} + \partial''\alpha_{p-2})|B_0 = 0$ ώστε στο B_0 να έχουμε

$$
\begin{aligned}
\partial'\beta &= -\partial'\partial''\alpha_{p-1} \\
&= -\partial''\partial'\alpha_{p-1} \\
&= -\partial''\partial''\alpha_{p-2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

στην περίπτωση που $p = 1$ τότε στο B_0 έχουμε

$$
\begin{aligned}
\partial'\beta &= -\partial'\partial''\alpha_0 \\
&= -(d_0 \otimes d_0)\alpha_0 \\
&= -(\eta \otimes \eta)(\epsilon \otimes \epsilon)\alpha_0 \\
&= -(\eta \otimes \eta)\epsilon \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Από το λήμμα 44 έχουμε ότι το σύμπλοκο $(F_* \otimes F_{-p}, \partial')$ είναι συσταλτό. Και επομένως μπορούμε να συμπληρώσουμε το επαγωγικό βήμα επιλέγοντας μια συσταλτή ομοτοπία h και θέτοντας $\alpha_p = h\beta$. Με αντίστοιχο επιχείρημα μπορεί να κατασκευαστεί το α_p για $p < 0$ με φθίνουσα επαγωγή. Έτσι η απόδειξη του 37 είναι πλήρης.

□

Με ανάλογο τρόπο ορίζει κανείς γινόμενα cap για την θεωρία Tate.

3.5 Ένα θεώρημα δυικότητας

Σκοπός αυτής της παραγράφου θα είναι να δείξουμε πως οι ομάδες $\widehat{H}^i(G,\mathbb{Z})$ και $\widehat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z})$ είναι δυικές πεπερασμένες αβελιανές ομάδες των οποίων η δυικότητα δίνεται από το γινόμενο cup:

$$\widehat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \otimes \widehat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|G| \cdot \mathbb{Z}.$$

Θα δώσουμε μια απόδειξη με χρήση της ομολογίας Tate. Όμως πρώτα, θα παρουσιάσουμε κάποια στοιχεία δυικότητας αβελιανών ομάδων:

Για κάθε αβελιανή ομάδα A θέτουμε $A' = Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ο συναρτητής $(\_)'$ είναι contravariant και ακριβής και το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ εμφυτευτικό. Εάν $nA = 0$ για κάποιο θετικό n τότε μπορούμε να ταυτίσουμε το A' με $Hom(A, \mathbb{Z}_n)$ διότι θα έχουμε

$$Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom(A, n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \approx Hom(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Συγκεκριμένα αν το A είναι n τάξης τότε το ίδιο ισχύει και για το A'. Άρα καταλήξαμε στο παρακάτω:

Λήμμα 45. *$A \approx A'$ για κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα A.*

Σημείωση. *Ο παραπάνω ισομορφισμός δεν είναι ο φυσικός, για τον φυσικό θα πρέπει να περάσουμε στο δις-δυικό δηλαδή: Υπάρχει μια φυσική απεικόνιση $A \to A''$ δωσμένη ως $\alpha \mapsto (f \mapsto f(\alpha))$ που είναι ισομορφισμός αν το A είναι πεπερασμένο.*

Ορισμός 46 (ζεύγος δυικότητας)**.** *Θα λέμε ότι μια απεικόνιση $\rho : A \otimes B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ η οποία επάγει μια απεικόνιση $\overline{\rho} : A \to B'$ είναι ζεύγος δυικότητας (duality pairing) αν η $\overline{\rho}$ είναι ισομορφισμός.*

Λήμμα 47. *Ένα ζεύγος δυικότητας από πεπερασμένες αβελιανές ομάδες παρέχει έναν ισομορφισμό απο την μία στο δυικό της άλλης.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση ρ επάγει (επιπλέον) μια απεικόνιση

$$\overline{\overline{\rho}} : B \to A'$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την σύνθεση $B \to B'' \xrightarrow{\overline{\rho}'} A'$. Έπεται πως αν τα A και B είναι πεπερασμένα τότε η ρ είναι ζεύγος δυικότητας ανν η $\overline{\overline{\rho}}$ είναι ισομορφισμός. □

Αν $nA = 0$ και $nB = 0$ τότε μπορούμε με όμοιο τρόπο να μιλούμε για δυικό ζεύγος $A \otimes B \to \mathbb{Z}_n$.

Ορισμός 48 (evaluation ζεύγος)**.** *Για ομάδα G και M ένα G-πρότυπο, έχουμε ότι το $M' = Hom(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ μπορεί να δεχθεί μια G-δράση με τον συνήθη τρόπο: $(gu)(m) = u(g^{-1}m)$ για $g \in G$, $u \in M'$, $m \in M$. Η*

$$\rho : H^i(G, M') \otimes H_i(G, M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

θα ονομάζεται evaluation ζεύγος και κατασκευάζεται με σύνθεση της $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (των γινομένων cap) και της evaluation απεικόνισης

$$M' \otimes_G M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Όμοια, για G πεπερασμένη, υπάρχει το ζεύγος

$$\widehat{\rho} : \widehat{H}^i(G, M) \otimes \widehat{H}_i(G, M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Πρόταση 49. *Τα ζεύγη ρ και $\widehat{\rho}$ είναι ζεύγη δυικότητας. Άρα*

$$H^i(G, M') \approx H_i(G, M)'$$

για κάθε G και M, και επιπλέον $\widehat{H}^i(G, M') \approx \widehat{H}_i(G, M)'$ αν η G πεπερασμένη.

Απόδειξη. Έστω F μια προβολική ανάλυση $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}G$. Τότε $\mathscr{H}om_G(F, M') = \mathscr{H}om_G(F, Hom(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \approx \mathscr{H}om_G(F \otimes M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathscr{H}om_G(F \otimes_G M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (F \otimes_G M)'$. Εφόσον ο $(\_)'$ είναι ακριβής, μπορούμε να περάσουμε σε ομολογίες και έχουμε

$$H^*(G, M') \approx H_*(G, M').$$

Εύκολα ελέγχεται ότι αυτός ο ισομορφισμός αντιστοιχεί στο ζεύγος ρ. Με αντίστοιχο επιχείρημα δείχνεται για το $\widehat{\rho}$. □

Τώρα θα υποθέτουμε ότι η G είναι πεπερασμένη. Θα δείξουμε την ύπαρξη ενός ισομορφισμού της μορφής $\widehat{H}^i(G, M) \approx \widehat{H}_{-1-i}(G, M)$, ο οποίος δίνεται μέσω γινομένου cap με μια ¨θεμελιώδης κλάση¨.

Λήμμα 50. *Έστω C αλυσιδωτό σύμπλοκο πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών R-προτύπων, και $\overline{C}$ το δυικό σύμπλοκο πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών δεξιών R-προτύπων $\mathscr{H}om_R(C, R)$. Για κάθε $z \in (\overline{C}\widehat{\otimes}_R C)_n$ και κάθε αλυσιδωτό σύμπλοκο C', υπάρχει μια διαβαθμισμένη απεικόνιση $\psi_z : \mathscr{H}om_R(C, C') \to \overline{C}\widehat{\otimes}_R C'$ τάξης n και δίνεται ως $\psi_z(u) = (id_{\overline{C}}\widehat{\otimes} u)(z)$. Θεωρώντας τα παραπάνω, υπάρχει ένας ¨κύκλος¨ $z \in (\overline{C}\widehat{\otimes}_R C)_0$ ώστε για κάθε C', ψ_z να είναι το αντίστροφο του ισομορφισμού $\phi : \overline{C}\widehat{\otimes}_R C' \xrightarrow{\approx} \mathscr{H}om_R(C, C')$.*

Πρόταση 51. *Υπάρχει ένα στοιχείο $z \in \widehat{H}_{-1}(G, \mathbb{Z})$ τέτοιο ώστε η απεικόνιση γινομένου cap $\frown z : \widehat{H}^i(G, M) \to \widehat{H}_{-1-i}(G, M)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε G-πρότυπο M.*

Απόδειξη. Έστω (F, d) μια πλήρης ανάλυση πεπερασμένου τύπου, με $d_0 = \eta\epsilon$ (όπως στην υποπαράγραφο 3.2) και έστω $\overline{F}$ το δυικό σύμπλοκο $\mathscr{H}om_G(F, \mathbb{Z}G)$. Επομένως $\overline{F}_i = (F_{-i})^*$. Από την απόδειξη 28 γνωρίζουμε ότι το $\overline{F}$ θα παραμείνει προβολικό και άκυκλο. Ο συνοριακός τελεστής $\overline{F}_1 \to \overline{F}_2$ είναι η σύνθεση

$$(F_{-1})^* \xrightarrow{\eta^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon^*} (F_0)^*$$

όπου η^* επιμορφισμός και ϵ^* μονομορφισμός. Αν εξαιρέσουμε τους δείκτες το $\overline{F}$ είναι μια πλήρης ανάλυση (ειδικότερα το $\overline{F}$ είναι το suspension ΣE μιας πλήρης ανάλυσης E). Τώρα εφαρμόζουμε τον ισομορφισμό δυικότητας $\mathscr{H}om_G(F, M) \approx \overline{F} \otimes_G M$. Αυτό οδηγεί στο:

$$\widehat{H}^i(G, M) \approx H_{-i}(\overline{F} \otimes_G M) = H_{-i-1}(E \otimes_G M) = \widehat{H}_{-i-1}(G, M).$$

Ισχυριζόμαστε πως αυτός ο ισομορφισμός δίνεται (παραλείποντας πρόσημα) από ένα γινόμενο cap με ένα καθολικό στοιχείο $z \in \widehat{H}_{-1}(G, \mathbb{Z})$. Έστω w_0 να είναι ο 0-κύκλος στο $\overline{F}\widehat{\otimes}_G F$ που μέσω του κανονικού ισομορφισμού $\overline{F}\widehat{\otimes}_G F \approx \mathscr{Hom}_G(F,F)$ αντιστοιχεί στο id_F. Με χρήση του συμβολισμού του λήμματος 50, βρίσκουμε τον ισομορφισμό

$$\mathscr{Hom}_G(F,M) \xrightarrow{\approx} \overline{F} \otimes_G M$$

που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω είναι η απεικόνιση ψ_{w_0}. Τώρα έχουμε $\overline{F}\widehat{\otimes}_G F = \Sigma E\widehat{\otimes}_G F$, έτσι το w_0 μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ενας (-1)-κύκλος w_{-1} στο $E\widehat{\otimes}_G F$. Επιπλέον με έλεγχο των ορισμών μπορούμε να καταλήξουμε ότι η απεικόνιση

$$\psi_{w_{-1}}\mathscr{Hom}_G(F,M)_i \to (E \otimes_G M)_{i-1}$$

είναι ισοδύναμη με την:

$$(-1)^i\psi_{w_0} : \mathscr{Hom}_G(F,M)_i \to (\overline{F} \otimes_G M)_i.$$

Επομένος ο ισομορφισμός $\widehat{H}^i(G,M) \to \widehat{H}_{-i-1}(G,M)$ επάγεται (παραβλέποντας πρόσημα) από την ψ_{w-1}. Από την άλλη όμως η ψ_{w-1} είναι ακριβώς το συνθετικό γινόμενο (composition product) με w_{-1}. Επομένως επάγει το γινόμενο cap με την κλάση $z \in \widehat{H}_{-1}(G,\mathbb{Z})$ αναπαραστώμενη από το w_{-1}. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό και την πρόταση. □

Παρατήρηση. *Το στοιχείο z που εμφανίζεται παραπάνω, είναι απαραίτητα γεννήτορας της κυκλικής ομάδας $\widehat{H}_{-1}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$. Για τον ισομορφισμό του γινομένου cap $\frown z : \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{H}_{-1}(G,\mathbb{Z})$ στέλνει το $1 \in \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z})$ στο $1 \frown z = z$.*

Συμπέρασμα 52. *Για κάθε G-πρότυπο M, η σύδεση*

$$\widehat{H}^i(G,M') \otimes \widehat{H}^{-1-i}(G,M) \xrightarrow{\smile} H^{-1}(G,M' \otimes M) \xrightarrow{\alpha_*} \widehat{H}^{-1}(G,\widehat{Q}/\mathbb{Z})$$

είναι δυικό ζεύγος, όπου το α_* επάγεται από την ¨κανονική¨ ζεύξη:

$$\alpha : M' \otimes M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Σημείωση. *Παρατηρούμε ότι το παραπάνω βγάζει νόημα γιατί:*

$$\widehat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = ker\{\overline{N} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_G \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^G\} = |G|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

και το $\widehat{H}^*(G,\_)$ μηδενίζεται από το $|G|$.

Απόδειξη. Από τις προτάσεις 49 και 51 έχουμε

$$\widehat{H}^i(G,M') \xrightarrow{\approx} \widehat{H}_i(G,M)' \xrightarrow{\approx} \widehat{H}^{-1-i}(G,M)'.$$

Ο σύνθετος ισομορφισμός δίνεται από $u \mapsto (v \mapsto \overline{\alpha}\langle u, v \frown z\rangle)$ όπου η $\overline{\alpha} : M' \otimes_G M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ επάγεται από το α. Εφόσον $\overline{\alpha}\langle u, v \frown z\rangle = \overline{\alpha}\langle u \smile v, z\rangle = \langle \alpha_*(u \smile v), z\rangle$, προκύπτει πως η σύνθεση:

$$\widehat{H}^i(G,M') \otimes \widehat{H}^{-1-i}(G,M) \xrightarrow{\smile} \widehat{H}^{-1}(G,M' \otimes M) \xrightarrow{\alpha_*} \widehat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\langle\_,z\rangle} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

είναι ένα δυικό ζεύγος. Για την ολοκλήρωση της θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η $\langle \_, z\rangle$ απεικονίζει το $\widehat{H}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ισομορφικά επί του $|G|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Πράγματι, η $\langle \_, z\rangle$ είναι η σύνθεση: $\widehat{H}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\approx} \widehat{H}_{-1}(G, \mathbb{Z})' \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, όπου η πρώτη απεικόνιση δίνεται από την πρόταση 49 και η δεύτερη είναι το evaluation στον γεννήτορα $z \in \widehat{H}_{-1}(G, \mathbb{Z})$. Παρατηρούμε πως αν A είναι μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα, τότε η απεικόνιση evaluation στον γεννήτορα του A δίνει έναν ισομορφισμό $A' \xrightarrow{\approx} |A|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. □

Θεώρημα 53. *Το γινόμενο cup* $\widehat{H}^i(G, \mathbb{Z}) \otimes \widehat{H}^{-i}(G, \mathbb{Z}) \to \widehat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|G|\cdot\mathbb{Z}$ *είναι δυικό ζεύγος.*

Απόδειξη. Εφόσον $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Q}) = 0$, η ακολουθία $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ οδηγεί για κάθε j σε έναν ισομορφισμό:

$$\widehat{H}^j(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\approx} \widehat{H}^{j+1}(G, \mathbb{Z}).$$

Έχουμε επιπλέον το μεταθετικό διάγραμμά (λόγω ιδιοτήτων των γινομένων cup):

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^{i-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes \widehat{H}^{-i}(G, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "\approx"', "\delta\otimes id"] & \widehat{H}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "\approx"', "\delta"] \\
\widehat{H}^{i}(G, \mathbb{Z}) \otimes \widehat{H}^{-i}(G, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\smile"] & \widehat{H}^{0}(G, \mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

Γνωρίζουμε από την συμπέρασμα 52 πως η πάνω σειρά είναι δυικό ζεύγος, αυτό μπορούμε να το δούμε αντικαθιστώντας το M με $\mathbb{Z}$. Όμοια, δυικό ζεύγος είναι επίσης και η κάτω σειρά.

□

3.6 Συνομολογιακά τετριμμένα πρότυπα

Ορισμός 54 (συνομολογικά τετριμμένο G-πρότυπο)**.** *Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Ένα G-πρότυπο καλείται ¨συνομολογιακά τετριμμένο¨ αν:*

$$\widehat{H}^i(H, M) = 0 \ \ \forall i \in \mathbb{Z} \ \ \textit{και} \ \forall \ H \subseteq G.$$

Παράδειγμα. *Για παράδειγμα κάθε επαγόμενο πρότυπο $\mathbb{Z}G \otimes A$ είναι σύνομολογιακά τετριμμένο γιατί το $\mathbb{Z}G \otimes A$ συνεχίζει να είναι επαγόμενο πρότυπο όταν θεωρηθεί ως ένα H-πρότυπο για οποιαδήποτε H υποομάδα της G. (από την πρόταση 34).*

Σημείωση. *Ισχύει ότι για k οποιοδήποτε μεταθετικό δακτύλιο, κάθε ελεύθερο kG-πρότυπο είναι συνομολογιακά τετριμμένο. Επομένως, το ίδιο ισχύει και για κάθε προβολικό kG-πρότυπο.*

Σε αυτή την υποπαράγραφο, στόχος θα είναι να δείξουμε πως:

1. υπο τις κατάλληλες υποθέσεις τα συνομολογιακά τετριμμένα kG-πρότυπα είναι προβολικά (δλδ το αντίστροφο της παραπάνω σημείωσης) και

2. να βρούμε κάποια κριτήρια για να αποφανθούμε εάν ένα πρότυπο είναι ομολογιακά τετριμμένο.

Η παρακάτω πρόταση είναι για την περίπτωση όπου η G είναι p-ομάδα για p πρώτο:

Πρόταση 55. *Αν η G είναι μια p-ομάδα και το M ένα G-πρότυπο του οποίου κάθε στοιχείο είναι τάξης ίσης με δύναμη του p, τότε $M^G \neq 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως G-πρότυπο (άρα και ως αβελιανή ομάδα). Όμως τότε το M θα είναι πεπερασμένο και τάξης κάποιας δύναμης του p. Εφόσον κάθε G-τροχιά στο M έχει τάξη p^α για κάποιο $\alpha \geq 0$, έπεται ότι $|M^G| \equiv |M| \equiv 0 mod p$ ώστε $M^G \neq 0$. □

Συμπέρασμα 56. *Αν k σώμα χαρακτηριστικής p, G μία p-ομάδα και M ένα απλό kG-πρότυπο (δλδ πρότυπο που δεν περιέχει μη μηδενικά υποπρότυπα), τότε $M \approx k$ μέσω της τετριμμένης G-δράσης.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 55 έχουμε ότι $M^G \neq 0$. Πρέπει να έχουμε $M^G = M$, και η G δρα στο M τετριμμένα. Τέλος, επειδή είναι απλό πρότυπο, έχουμε ότι $dim_K M = 1$. □

Συμπέρασμα 57. *Αν G είναι μια p-ομάδα και k σώμα χαρακτηριστικής p τότε το ιδεώδες επαύξησης I του kG είναι μηδενοδύναμο.*

Σημείωση (υπενθύμιση). *Το I είναι ιδεώδες επαύξησης του kG αν ο πυρήνας του ομομορφισμού k-άλγεβρας $\epsilon : kG \to k$ με $\epsilon(g) = 1 \; \forall g \in G$. Ή αλλιώς το I είναι "μηδενιστής" του kG-προτύπου.*

Απόδειξη. Η διάσταση του kG πάνω στο k είναι πεπερασμένη. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε μια συνθετική σειρά

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n = kG$$

για kG θεωρούμενο ως ένα αριστερό kG-πρότυπο. Επομένως κάθε J_i είναι ένα αριστερό ιδεώδες και τα J_i/J_{i-1} είναι απλά για $1 \leq i \leq n$. Απο το συμπέρασμα 56, το I μηδενίζει το J_i/J_{i-1}, και άρα $IJ_i \subseteq J_{i-1}$. Επομένως $I^n = I^n J_n \subseteq J_0 = 0$. □

Συμπέρασμα 58. *Έστω G μια p-ομάδα και k σώμα χαρακτηριστικής p. Αν M είναι ένα kG-πρότυπο τ.ω. $H_0(G, M) = 0$ τότε $M = 0$.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι $H_0(G, M) = M/IM$. Επομένως

$$H_0(G, M) = 0 \Rightarrow M = IM \Rightarrow M = I^n M$$

για κάθε n. Από την οπτική του συμπεράσματος 57 αυτό συνεπάγεται ότι $M = 0$. □

Θεώρημα 59. *Έστω μια p-ομάδα G και k σώμα χαρακτηριστικής p. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα kG-πρότυπο:*

1. *Το M είναι ελεύθερο.*
2. *Το M είναι προβολικό.*
3. *Το M είναι συνομολογιακά τετριμμένο.*
4. $H_1(G, M) = 0$.
5. $\widehat{H}^i(G, M) = 0$ *για κάποιο* $i \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές από το 1 εώς το 5 είναι προφανείς. Θα δείξουμε τις συνεπαγωγές 4⇒ 5 και την 5⇒ 4. Επιλέγουμε μια k-βάση για το διανυσματικό χώρο M_G, ανυψώνουμε τα στοιχεία της βάσης στα στοιχεία $m_j (j \in J)$ του M. Έστω F ένα ελεύθερο kG-πρότυπο με βάση $(e_j)_{j \in J}$ και ορίζουμε την $f : F \to M$ ως $f(e_j) = m_j$. Επομένως από κατασκευής έχουμε τον ισομορφισμό

$$H_0(G, f) : H_0(G, F) \to H_0(G, M).$$

Λόγω ακρίβειας της $H_0(G, \_)$ προς τα δεξιά, έχουμε ότι $H_0(G, coker(f)) = 0$ και μέσω του συμπεράσματος 58 έχουμε ότι $coker(f) = 0$. Θεωρούμε τώρα την μακρά ακριβή ακολουθία που σχετίζεται με την

$$0 \to ker(f) \to F \to M \to 0.$$

Εάν $H_1(G, M) = 0$ τότε επειδή η $H_0(G, f)$ είναι ισομορφισμός προκύπτει ότι $H_0(G, ker(f)) = 0$. Εφαρμόζοντας και πάλι το συμπέρασμα 58, συμπεραίνουμε πως $ker(f) = 0$ και άρα η f είναι ισομορφισμός. Δηλαδή το M πρέπει να είναι ελεύθερο, έχοντας έτσι δείξει ότι 4⇒ 1.

Υποθέτουμε τώρα ότι το 5 ισχύει. Μέσω shifting-διάστασης μπορούμε να βρούμε ένα kG-πρότυπο N ώστε $\widehat{H}^n(G, N) \approx \widehat{H}^{n+i+2}(G, M)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ειδικότερα, $H_1(G, N) = \widehat{H}^{-2}(G, N) = \widehat{H}^i(G, M) = 0$, και επομένως λόγω της προηγούμενης παραγράφου το N είναι ελεύθερο. Τότε όμως $\widehat{H}^*(G, N) = 0$, και επομένως $\widehat{H}^*(G, M) = 0$ και άρα $H_1(G, M) = 0$. Δηλαδή 5⇒ 4. □

Σημείωση. *Συγκεκριμένα, από το παραπάνω θεώρημα, προκύπτει ότι αν η G είναι μια μη-τετριμμένη p-ομάδα, τότε $H^i(G, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ για κάθε $i > 0$.*

Παρακάτω, συνεχίζοντας με την υπόθεση πως η G είναι p-ομάδα, θα συμπεριλάβουμε ακόμα πιο γενικά G-πρότυπα.

Λήμμα 60. *Έστω μια p-ομάδα G και ένα G-πρότυπο M το οποίο είναι ελεύθερο p-στρέψης. Αν χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $M_p = M \otimes \mathbb{Z}_p = M/pM$, τότε ισχύει: Για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, $\widehat{H}^i(G, M_p) = 0$ αν και μόνο αν*

$$\widehat{H}^i(G, M) = \widehat{H}^{i+1}(G, M) = 0.$$

Απόδειξη. Η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \to M \xrightarrow{p} M \to M_p \to 0$$

μας οδηγεί στην ακριβή ακολουθία:

$$\widehat{H}^i(G,M) \xrightarrow{p} \widehat{H}^i(G,M) \to \widehat{H}^i(G,M_p) \to \widehat{H}^{i+1}(G,M) \xrightarrow{p} \widehat{H}^{i+1}(G,M).$$

Αν ισχύει ότι $\widehat{H}^i(G,M) = \widehat{H}^{i+1}(G,M) = 0$, τότε $\widehat{H}^i(G,M_p) = 0$. Αν αντίστροφα $\widehat{H}^i(G,M_p) = 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι η $\widehat{H}^i(G,M)$ είναι μια p-διαιρέσιμη ομάδα και η $\widehat{H}^{i+1}(G,M)$ είναι ελεύθερη p-στρέψης. Όμως η $\widehat{H}^*(G,M)$ μηδενίζεται από την $|G|$ η οποία είναι δύναμη του p. Επομένως $\widehat{H}^{i+1}(G,M) = 0$. □

Θεώρημα 61. *Αν G είναι μια p-ομάδα, τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι για κάθε G-πρότυπο ισοδύναμες:*

1. *Το M είναι συνομολογιακά τετριμμένο.*
2. *Για δύο διαδόχικούς ακέραιους i: $\widehat{H}^i(G,M) = 0$.*

⋆ *Αν επιπλέον το M είναι ελεύθερο p-στρέψης, τότε τα προηγούμενα είναι επίσης ισοδύναμα με τα:*

3. *$\widehat{H}^i(G,M_p) = 0$ για κάποιο i.*
4. *Το M_p είναι συνομολογιακά τετριμμένο*
5. *Το M_p είναι ελεύθερο πάνω στο $\mathbb{Z}_p[G]$.*

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε πως το M είναι ελεύθερο p-στρέψης. Τότε το $1 \Rightarrow 2$ είναι τετριμμένο, το $2 \Rightarrow 3$ προκύπτει από το λήμμα 60, από το θεώρημα 59 έχουμε τα $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$, και το $4 \Rightarrow 1$ από το λήμμα 60 όταν εφαρμοστεί για G και όλες του τις υποομάδες. Εάν το M είναι τυχαίο, μπορούμε τότε να αποδείξουμε την ισοδυναμία των 1 και 2 με χρήση shifting-διάστασης. Τότε θα το πρόβλημα θα έχει μειωθεί σε αυτό της προηγούμενης περίπτωσης εφόσον μπορούμε να επιλέξουμε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to M' \to F \to M \to 0$$

με το F ελεύθερο πάνω στο $\mathbb{Z}G$ και στην συνέχεια εφαρμόζουμε την προηγούμενη περίπτωση για M'. □

Στην συνέχεια εργαζόμαστε για την περίπτωση που η G είναι τυχαία πεπερασμένη ομάδα:

Πρόταση 62. *Ένα G-πρότυπο είναι συνομολογιακά τετριμμένο αν και μόνο αν ο περιορισμός του στην $G(p)$ είναι συνομολογιακά τετριμμένος για κάθε p. Όπου η $G(p)$ συμβολίζει μια p-Sylow υποομάδα για p πρώτο που να διαιρεί την $|G|$.*

Απόδειξη. Το αντίστροφο της ισοδυναμίας είναι τετριμμένο. Για το ευθύ, παρατηρούμε πως αν ο περιορισμός του M στην $G(p)$ είναι συνομολογιακά τετριμμένος τότε $\widehat{H}^*(P, M) = 0$ για οποιαδήποτε p-ομάδα $P \subseteq G$. Γνωρίζουμε ότι $gPg^{-1} \subseteq G(p)$ για κάποιο $g \in G$ και έτσι υπάρχει ένας ισομορφισμός συζυγίας:

$$\widehat{H}^*(P, M) \approx \widehat{H}^*(gPg^{-1}, M) = 0.$$

Αν η $H \subseteq G$ είναι τυχαία υποομάδα, γνωρίζουμε από την θεωρία μεταφοράς (transfer) ότι

$$\widehat{H}^*(H, M) = \bigoplus_p \widehat{H}^*(H, M)_{(p)} \hookrightarrow \bigoplus_p \widehat{H}^*(H(p), M) = 0,$$

όπου το p τρέχει στις τιμές των πρώτων που διαιρούν την $|H|$ ενώ $H(p)$ είναι p-Sylow υποομάδα της H. Συμπεραίνουμε επομένως πως το M είναι συνομολογιακά τετριμμένο. □

Η πρόταση 62 σε συνδυασμό με τα προηγούμενα αποτελέσματα για ομολογιακά τετριμμένα πρότυπα πάνω σε p-ομάδες απαντούν στο 2ο πρόβλημα που καταγράφηκε στην αρχή της υποπαραγράφου:

Θεώρημα 63. *Ένα G-πρότυπο είναι συνομολογιακά τετριμμένο αν και μόνο αν για κάθε p πρώτο υπάρχουν δύο διαδοχικοί ακαίρεοι i ώστε $\widehat{H}^i(G(p), M) = 0$.*

Την απάντηση στο 1ο πρόβλημα που καταγράφηκε στην αρχή της υποπαραγράφου δίνει το παρακάτω θεώρημα, αφού πρώτα όμως διατυπώσουμε ένα λήμμα που θα φανεί χρήσιμο στην απόδειξή του:

Λήμμα 64. *Έστω M και K δύο G-πρότυπα τα οποία είναι $\mathbb{Z}$-ελεύθερα. Αν το M συνομολογιακά τετριμμένο τότε το ίδιο ισχύει και για το $Hom(M, K)$.*

Απόδειξη. Λόγω της πρότασης 62, θα χρειαστεί να λάβουμε υπόψιν μόνο την περίπτωση όπου η G είναι μια p-ομάδα. Από το θεώρημα 61 γνωρίζουμε πως αρκεί να δείξουμε ότι το $Hom(M, K)_p$ είναι συνομολογιακά τετριμμένο. Εφόσον το M είναι $\mathbb{Z}$-ελεύθερο, από την ακριβή ακολουθία

$$0 \to K \xrightarrow{p} K \to K_p \to 0$$

παίρνουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \to Hom(M, K) \xrightarrow{p} Hom(M, K) \to Hom(M, K_p) \to 0.$$

Επομένως

$$Hom(M, K)_p \approx Hom(M, K_p) = Hom(M_p, K_p).$$

Όμως το M_p είναι $\mathbb{Z}_p[G]$-ελεύθερο λόγω του θεωρήματος 61. Τέλος μπορεί να δειχθεί πως το $Hom(M_p, K_p)$ είναι επαγόμενο (induced) και άρα συνομολογιακά τετριμμένο. □

Θεώρημα 65. *Έστω M ένα G-πρότυπο το οποίο είναι $\mathbb{Z}$-ελεύθερο και συνομολογιακά τετριμμένο, τότε το M είναι $\mathbb{Z}G$-προβολικό.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια βραχεία ακριβής ακουλουθία

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

με το F να είναι $\mathbb{Z}G$-ελεύθερο. Θα δείξουμε ότι το M είναι ευθύ άθροισμα του F και επομένως προβολικό, δείχνοντας πως η παραπάνω ακριβής ακολουθία είναι διασπάσιμη (splits). Ισχυριζόμαστε πως το ¨εμπόδιο¨ για να γίνει διάσπαση της ακολουθίας οφείλεται στην $H^1(G, Hom(M, K))$. Συγκεκριμένα έχουμε την βραχεία ακριβής ακολουθία από G-πρότυπα:

$$0 \to Hom(M, K) \to Hom(M, F) \to Hom(M, M) \to 0$$

επειδή το M είναι $\mathbb{Z}$-ελεύθερο και αυτό οδηγεί στην ακριβή ακολουθία:

$$Hom_G(M, F) \to Hom_G(M, M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, Hom(M, K)).$$

Επομένως η επέκταση είναι διασπάσιμη αν και μονο αν $\delta(id_M) = 0$, και άρα μας αρκεί το αποτέλεσμα του λήμματος 64. □

Στην συνέχεια, με χρήση του θεωρήματος 65 θα χαρακτηρίσουμε τα συνομολογιακά τετριμμένα πρότυπα στην περίπτωση που δεν είναι απαραίτητα $\mathbb{Z}$-ελεύθερα.

Ορισμός 66 (προβολική διάσταση του M)**.** *Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα R-πρότυπο. Η προβολική διάσταση του M ορίζεται ως το infimum του συνόλου των ακεραίων n τ.ω. το M να έχει μια προβολική ανάλυση*

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

με μήκος n. Θα συμβολίζεται ως $proj\ dim_R\ M$ ή απλά $proj\ dim\ M$.

Σημείωση. *Στην περίπτωση που το M δεν έχει προβολική ανάλυση πεπερασμένου μήκους θα συμβολίζουμε ως $proj\ dim\ M = \infty$*

Θεώρημα 67. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα $\mathbb{Z}G$-πρότυπο M:*

1. *Το M είναι συνομολογιακά τετριμμένο.*
2. *$proj\ dim\ M \leq 1$.*
3. *$proj\ dim\ M \leq \infty$*

Απόδειξη. Για την συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$: Υποθέτουμε ότι το M είναι συνομολογιακά τετριμμένο και επιλέγουμε μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

όπου το P_0 είναι $\mathbb{Z}G$-προβολικό. Τότε το P_1 είναι συνομολογιακά τετριμμένο και $\mathbb{Z}$-ελεύθερο και επομένως προβολικό (από το θεώρημα 65). Δηλαδή το 2 ισχύει. Για την συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$ είναι τετριμμένο. Τέλος για την συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$: Υποθέτουμε πως $proj\ dim\ M < \infty$ και έστω μια πεπερασμένου μήκους προβολική ανάλυση

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

Σπάζοντας αυτή την ανάλυση σε βραχείες ακριβείς ακολοθίες

$$0 \to Z_i \to P_i \to Z_{i-1} \to 0$$

βλέπουμε πως το Z_i είναι συνομολογιακά τετριμμένο, μέσω φθίνουσας επαγωγής στο i. Ειδικότερα το $M = Z_{-1}$ είναι και αυτό συνομολογιακά τετριμμένο. □

3.7 Ομάδες με περιοδική συνομολογία

Ο υπολογισμός της $\widehat{H}^*G$ απλοποιείται σημαντικά στην περίπτωση που γνωρίζουμε πως η ομάδα G έχει ¨περιοδική συνομολογία¨ (όπως την ορίζουμε παρακάτω). Για τον λόγο αυτό, σε αυτή την υποπαράγραφο θα ασχοληθούμε με την εύρεση κριτηρίων για να αποφανθούμε αν μια ομάδα G είναι περιοδικής συνομολογίας.

Ορισμός 68 (περιοδική συνομολογία)**.** *Για μία πεπερασμένη ομάδα G, λέμε πως έχει περιοδική συνομολογία αν υπάρχει ένα στοιχείο $u \in \widehat{H}^d(G,\mathbb{Z})$ το οποίο είναι αντιστρέψιμο στον δακτύλιο $\widehat{H}^*(G,\mathbb{Z})$ για κάποιο $d \neq 0$.*

Ορισμός 69 (ισομορφισμός περιοδικότητας)**.** *Ο ισομορφισμός περιοδικότητας δίνεται από το γινόμενο cup με το u του προηγούμενου ορισμού. Δηλαδή ο ισομορφισμός περιοδικότητας είναι:*

$$u \smile \_ : \widehat{H}^n(G,M) \xrightarrow{\approx} \widehat{H}^{n+d}(G,M)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε G-πρότυπο M.

Θεώρημα 70. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Η G έχει περιοδική συνομολογία.*

2. *Υπάρχουν ακέραιοι n και d με $d \neq 0$, τ.ω. $\widehat{H}^n(G,M) \approx \widehat{H}^{n+d}(G,M)$ για κάθε G-πρότυπο M.*

3. *Υπάρχει* $d \neq 0$ *τ.ω.* $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/|G| \cdot \mathbb{Z}$.

4. *Υπάρχει* $d \neq 0$ *τ.ω.* $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z})$ *να περιέχει ένα στοιχείο* u *τάξης* $|G|$.

Απόδειξη. Η πρώτη συνεπαγωγή έπεται αυτόματα. Για την δεύτερη: Αν το 2 ισχύει, τότε έχουμε $\widehat{H}^n(G, M) \approx \widehat{H}^{n+d}(G, M)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ μέσω shifting-διάστασης. Δηλαδη για $n = 0$ και για $M = \mathbb{Z}$ καταλήγουμε στο 3. Η συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 4$ έπεται επίσης τετριμμένα. Τέλος, υποθέτουμε ότι το 4 ισχύει. Σε αυτή την περίπτωση είναι γνωστό πως υπάρχει μια απεικόνιση

$$\widehat{H}^d(G, \widehat{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

τ.ω. $u \mapsto 1/|G| mod \mathbb{Z}$. Από το θεώρημα 53 (θεώρημα δυικότητας), αυτή η απεικόνιση δίνεται από

$$\widehat{H}^d(G, \widehat{Z}) \xrightarrow{-\smile u} \widehat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \approx |G|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

για κάποιο $u \in \widehat{H}^{-d}(G, \mathbb{Z})$. Και άρα $uv = 1$, δηλαδή έπεται το 1. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα θα μας καλύψει ως προς την εύρεση κριτηρίων για περιοδική συνομολογία (για κάποια ομάδα G) στην περίπτωση όπου G είναι μια p-ομάδα. Υπενθυμίζουμε ότι μια αβελιανή p-ομάδα r τάξης ≥ 0, είναι ισομορφική με το r-καρτεσιανό γινόμενο όπου καθένας από τους r πλήθους παράγοντες του είναι η $\mathbb{Z}_p$.

Πρόταση 71. *Έστω* G *να είναι μία* p*-ομάδα για κάποιο πρώτο* p. *Τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Η* G *είναι περιοδική συνομολογίας.*

2. *Κάθε αβελιανή υποομάδα της* G *είναι κυκλική.*

3. *Κάθε στοιχειώδης αβελιανή* p*-ομάδα της* G *έχει τάξη μικρότερη του 1.*

4. *Η* G *έχει μοναδική υποομάδα τάξης* p.

5. *Η* G *είναι κυκλική ή ομάδα γενικευμένων κουαρτενίων.*

Η παρακάτω πρόταση βοηθά στο πέρασμα από την περίπτωση των p-ομάδων, σε ομάδες πιο γενικά.

Λήμμα 72. *Εάν μια ομάδα* G *έχει περιοδική συνομολογία, τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε* H *υποομάδα της.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η απεικόνιση περιορισμού (restriction map)

$$\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}) \to \widehat{H}^*(H, \mathbb{Z})$$

αποτελεί δακτύλιο ομομορφισμών και έτσι θα πρέπει να απεικονίζει αντιστρέψιμα στοιχεία σε αντιστρέψιμα. Εναλλακτικά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και το λήμμα του Shappiro. □

Πρόταση 73. *Μία πεπερασμένη ομάδα G, έχει περιοδική συνομολογία αν και μόνο αν κάθε $Sylow$ υποομάδα της έχει περιοδική συνομολογία.*

Απόδειξη. Το αντίστροφο έπεται από το λήμμα 72. Για το ευθύ, σταθεροποιούμε ένα πρώτο p και έστω $H \subseteq G$ να είναι μια p-Sylow υποομάδα. Από υπόθεση, η $\widehat{H}(H, \mathbb{Z})$ περιέχει ένα αντιστρέψιμο στοιχείο u βαθμού $d \neq 0$. Ισχυριζόμαστε ότι κάποια δύναμη του u είναι G-αναλλοίωτο. Έστω $e > 0$ να είναι ακέραιος τ.ω. $\alpha^e = 1$ για κάθε $\alpha \in (\mathbb{Z}/|H| \cdot \mathbb{Z})^*$ (δηλαδή η ομάδα των μονάδων της $\mathbb{Z}/|H| \cdot \mathbb{Z}$). Για τυχαίο $g \in G$, τα στοιχεία $u = res^H_{H \cap gHg^{-1}} u$ και $w = res^{gHg^{-1}}_{H \cap gHg^{-1}} gu$ είναι αντιστρέψιμα στην $\widehat{H}^*(H \cap gHg^{-1}, \mathbb{Z})$ και άρα παράγουν την κυκλική ομάδα $\widehat{H}^d(H \cap gHg^{-1}, \mathbb{Z})$. Δηλαδή έχουμε $u = aw$ για κάποιο $\alpha \in (\mathbb{Z}/|H| \cdot \mathbb{Z})^*$, μιας και η απεικόνιση

$$(\mathbb{Z}/|H| \cdot \mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/|H'| \cdot \mathbb{Z})^*$$

είναι επιμορφισμός για κάθε $H' \subseteq H$. Επομένως $u^e = w^e$ και έχουμε οτι το $u^e \in \widehat{H}^{de}(H, \mathbb{Z})$ είναι αναλλοίωτο. Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε πως και το u^e είναι αναλλοίωτο. Λαμβάνοντας υπόψιν τις συνομολογιακές ιδιότητες στην μορφή συνομολογίας Tate, αυτό δείχνει πως ο δακτύλιος $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$ έχει αντιστρέψιμο στοιχείο $u(p)$ μη-μηδενικού βαθμού $d(p)$. Τέλος, αντικαθιστώντας το $u(p)$ με μια κατάλληλη δύναμή $u(p)^{e(p)}$, μπορούμε να υποθέσουμε πως το $d(p)$ είναι το ίδιο για κάθε πρώτο τ.ω. $p \mid |G|$. Αυτό διότι $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ είναι το ευθύ γινόμενο των δακτυλίων $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$ από το οποίο προκύπτει πως η $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ περιέχει ένα αντιστρέψιμο στοιχείο θετικού βαθμού. □

Θεώρημα 74. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια πεπερασμένη ομάδα G:*

1. *Η ομάδα G έχει περιοδική συνομολογία.*
2. *Κάθε αβελιανή υποομάδα της G είναι κυκλική.*
3. *Κάθε στοιχειώδης αβελιανή p-υποομάδα της G έχει τάξη μέχρι 1.*
4. *Οι υποομάδες Sylow της G είναι κυκλικές ή ομάδες γενικευμένων τετρακτονίων.*

Απόδειξη. Προκύπτει από την σύνθεση των προτάσεων 71 και 73. □

Επειδή οι περιπτώσεις που εξετάσαμε προηγουμένως, κατά τις οποίες όλες οι Sylow υποομάδες μιας G είναι είτε κυκλικές, είτε γενικευμένα τετρακτόνια δεν είναι κατηγορία με αρκετό εύρος, θα ορίσουμε επίσης κάποιες έννοιες που είναι κατά μία έννοια πιο ¨τοπικές¨. Δηλαδή για συγκεκριμένο πρώτο p.

Ορισμός 75 (p-περιοδική συνομολογία)**.** *Θα λέμε πως μια ομάδα G έχει p-περιοδική συνομολογία αν ο δακτύλιος $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$ περιέχει ένα αντιστρέψιμο στοιχείο μη-μηδενικού βαθμού d.*

Ορισμός 76 (ισομορφισμός p-περιοδικότητας)**.** *Το γινόμενο cup με το αντιστρέψιμο στοιχείο (όπως περιγράφηκε στον προηγούμενο ορισμό) δίνει τον ισομορφισμό περιοδικότητας:*

$$\widehat{H}^n(G,M)_{(p)} \approx \widehat{H}^{n+d}(G,M)_{(p)}$$

για οποιοδήποτε G-πρότυπο M.

Σημείωση. *Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω ορισμούς, τα ανάλογα των θεωρημάτων 74, 73 και 70 συνεχίζουν να ισχύουν. Ειδικότερα ισχύει το παρακάτω θεώρημα:*

Θεώρημα 77. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια πεπερασμένη ομάδα G:*

1. *Η ομάδα G έχει p-περιοδική συνομολογία.*
2. *Ο δακτύλιος $\widehat{H}^*(G,\mathbb{Z}_p)$ περιέχει αντιστρέψιμο στοιχείο βαθμού $\neq 0$.*
3. *Κάθε στοιχειώδης αβελιανή p-υποομάδα της G έχει τάξη μέχρι 1.*
4. *Οι υποομάδες p-Sylow της G είναι κυκλικές ή ομάδες γενικευμένων τετρακτονίων.*

Κεφάλαιο 4

Equivariant ομολογία και φασματικές ακολουθίες

Η equivariant ομολογία μπορεί να θεωρεί σαν μία «μίξη» των ομολογιών $H(G)$ και $H(X)$, όπου X είναι τοπολογικός χώρος στον οποίο δρά μια ομάδα G. Μέσω αυτής της θεωρίας μπορούμε να λάβουμε πληροφορίες για την G, με χρήση ομολογικών μεθόδων, μέσω της δράσης της G στον X. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την κατασκευή της equivariant ομολογίας και τις βασικές της ιδιότητες. Για απλούστευση θα θεωρούμε πως ο χώρος X είναι G-σύμπλοκο.

4.1 Φασματικές ακολουθίες φιλτραρισμένων συμπλεγμάτων

Ορισμός 78 (αυξανόμενο φιλτράρισμα)**.** *Έστω R δακτύλιος, αυξανόμενο φιλτράρισμα (increasing filtration) ενός R-προτύπου, θα καλείται μια οικογένεια υπο-προτύπων F_pM, $p \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $F_pM \subseteq F_{p+1}M$.*

Ορισμός 79 (πεπερασμένο φιλτράρισμα)**.** *Ένα φιλτράρισμα θα λέμε πως είναι πεπερασμένο αν $F_pM = 0$ για αρκετά μικρό p, ενώ $F_pM = M$ για p αρκετά μεγάλο.*

Ορισμός 80 (σχετιζόμενο διαβαθμισμένο πρότυπο)**.** *Δεδομένου ενός φιλτραρίσματος κάποιου προτύπου M, το σχετιζόμενο διαβαθμισμένο πρότυπο $Gr\ M$ θα ορίζεται ως*

$$Gr_p = F_pM/F_{p-1}M.$$

Θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί το M σαν να «αποτελείται» από κομμάτια Gr_pM. Αυτή την κατεύθυνση υποδεικνύει και το παρακάτων λήμμα:

Λήμμα 81. *Έστω $f : M \to M'$ να είναι μια απεικόνιση που διατηρεί το φιλτράρισμα, όπου M και M' πρότυπα πεπερασμένου φιλτραρίσματος. Αν η*

$$Gr\ f : Gr\ M \to Gr\ M'$$

είναι ισομορφισμός, τότε και η f είναι ισομορφισμός.

Παρατήρηση. *Εάν έχουμε ορίσει κάποια έννοια «τάξης» για τα R-πρότυπα, ώστε για κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

να ισχύει $rk\ M = rk\ M' + rk\ M''$, τότε η τάξη ενός προτύπου πεπερασμένου φιλτραρίσματος μπορεί να υπολογιστεί από το σχετιζόμενο διαβαθμισμένο πρότυπο:

$$rk\ M = \sum_{p \in \mathbb{Z}} rk\ Gr_p M. \qquad (*)$$

Ορισμός 82 (σχετιζόμενο διπλά διαβαθμισμένου προτύπου)**.** *Έστω ένα φιλτραρισμένο πρότυπο M το οποίο είναι το ίδιο διαβαθμισμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε ένα φιλτράρισμα $\{F_p M_n\}$ στο M_n. Επομένως υπάρχει ένας προφανής τρόπος για να σχετίσουμε ένα διπλά διαβαθμισμένο πρότυπο με το M. Σε αυτή την περίπτωση θα συμβολίζουμε με:*

$$Gr_{pq}\ M = F_p M_{p+q} / F_{p-1} M_{p+q}.$$

Για ένα στοιχείο του $GrpqM$ θα λέμε ότι έχει:

- *βαθμό φιλτραρίσματος p.*
- *συμπληρωματικό βαθμό q.*
- *συνολικό βαθμό $p+q$.*

Για απλούστευση συμβολισμού μπορούμε να παραλείπουμε τον δεύτερο δείκτη γράφοντας απλά:

$$Gr_p M = F_p M / F_{p-1} M.$$

Έστω τώρα το $C = (C_n)_{n\mathbb{Z}}$ να είναι ένα φιλτραρισμένο αλυσιδωτό σύμπλοκο όπου κάθε $F_p C$ είναι υποσύμπλοκο. Θα υποθέτουμε ότι το φιλτράρισμα είναι πεπερασμένο ανα διάσταση, δηλαδή ότι το $\{F_p C_n\}_{p \in \mathbb{Z}}$ είναι πεπερασμένο φιλτράρισμα του C_n για κάθε n. Τότε ορίζουμε:

Ορισμός 83 (επαγόμενο φιλτράρισμα στην ομολογία)**.** *Το επαγόμενο φιλτράρισμα στην ομολογία $H(C)$, ορίζεται ως*

$$F_p H(C) = Im\{H(F_p C) \to H(C)\}.$$

Μπορούμε δηλαδή να ταυτίσουμε το $F_p H(C)$ με $(F_p C \cap Z)/(F_p C \cap B)$, όπου τα Z και B είναι τα πρότυπα των κύκλων και των των συνόρων αντίστοιχα.

Ορισμός 84 (σχετιζόμενο διπλά διαβ. πρότυπο στην ομολογία)**.** *Στην περίπτωση της ομολογίας το σχετιζόμενο διπλά διαβαθμισμένο πρότυπο $Gr\ H(C)$ δίνεται από*

$$Gr_p\ H(C) = (F_p C \cap Z)/((F_p C \cap B) + (F_{p-1} C \cap Z)). \qquad (**)$$

Τώρα θα περιγράψουμε την *φασματική ακολουθία* που σχετίζεται με το φιλτραρισμένο σύμπλοκο C. Αυτή είναι μια ακολουθία $\{E^r\}_{r\geq 0}$ από «διαδοχικές προσεγγίσεις» στο $Gr\ H(C)$.

Ορισμός 85 (φασματική ακολουθία φιλτραρισμένου συμπλόκου)**.** *Έστω*

$$Z_p^r = F_pC \cap \partial^{-1}F_{p-r}C.$$

(δηλαδή $Z_p^r = F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}F_{p-r}C_{p+q-1}$ αν δεν παραλείψουμε τον 2ο δείκτη.) Έστω επίσης $Z_p^\infty = F_pC \cap Z$. Έχουμε

$$F_pC = Z_p^0 \supseteq Z_p^1 \supseteq \cdots \supseteq Z_p^\infty.$$

Εφόσον το φιλτράρισμα $\{F_pC\}$ είναι πεπερασμένο σε κάθε διάσταση, αυτή η ακολουθία των σταθεροποιείται σε μια ακολουθία από ισότητες. Δηλαδή για κάποιο σταθεροποιημένο (p,q) έχουμε

$$Z_{pq}^r = Z_{pq}^{r+1} = \cdots = Z_{pq}^\infty$$

για r αρκετά μεγάλο. Έστω

$$B_p^r = F_pC \cap \partial F_{p+r-1}C = \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$$

και έστω $B_p^\infty = F_pC \cap B$. Τότε έχουμε $B_p^0 \subseteq B_p^1 \subseteq \cdots \subseteq B_p^\infty$, και έχω πάλι σταθεροποίηση σε ισότητα για κάθε διάσταση. Επομένως τώρα έχουμε:

$$B_p^0 \subseteq B_p^1 \subseteq \cdots \subseteq B_p^\infty \subseteq Z_p^\infty \subseteq \cdots \subseteq Z_p^1 \subseteq Z_p^0 = F_pC,$$

και θέτουμε

$$E_p^r = Z_p^r/(B_p^r + Z_{p-1}^{r-1}) = Z_p^r/(B_p^r + (F_{p-1}C \cap Z_p^r))$$

και

$$E^\infty = Z_p^\infty/(B_p^\infty + Z_{p-1}^\infty) = Gr_p\ H(C)$$

(βλέπε εξίσωση (**)). Για σταθεροποιημένα (p,q) και r αρκετά μεγάλο, έχουμε

$$E_{pq}^r = E_{pq}^{r+1} = \cdots = E_{pq}^\infty.$$

Επομένως η ακολουθία $\{E^r\}$ 'συγκλίνει' στο $Gr\ H(C)$ καθώς $r \to \infty$.

Σημείωση. *Μερικές φορές το 'Gr' παραλείπεται από τον συμβολισμό και λέμε απλώς ότι η φασματική ακολουθία συγκλίνει στην $H(C)$.*

Παρατήρηση. *Τα πρότυπα E^r είναι ιδιαίτερα ευκολα να περιγραφούν για $r = 1$ και για $r = 1$:*

- $E_p^0 = F_pC/F_{p-1}C = Gr_pC$
- $E_p^1 = (F_pC \cap \partial^{-1}F_{p-1}C)/(\partial F_pC + F_{p-1}C) \approx H(F_pC/F_{p-1}C).$

Δηλαδή $E^1_{pq} \approx H_{p+q}(F_pC/F_{p-1}C)$. Επομένως το E^1 είναι η ομολογία του E^0 για το διαφορικό που επάγεται στο E^0 από την ∂. Γενικότερα, μπορεί κανείς να δείξει πως η ∂^r επάγει ένα διαφορικό d^r στο E^r με αντίστοιχους βαθμούς για κάθε δείκτη: $(-r, r-1)$, δηλαδή:

$$d^r : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$$

και ότι $E^{r+1} \approx H(E^r)$.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί σημαντική συνέπεια της παραπάνω παρατήρησης.

Πρόταση 86. *Έστω $\tau : C \to C'$ να είναι μια αλυσιδωτή απεικόνιση που διατηρεί το φιλτράρισμα. Τα C και C' έχουν σε κάθε διάσταση πεπερασμένα φιλτραρίσματα. Εάν η επαγόμενη απεικόνιση*

$$E^\tau : E^r(C) \to E^r(C')$$

φασματικών ακολουθιών είναι ισομορφισμός για κάποιο r, τότε η

$$H(\tau) : H(C) \to H(C')$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Αν η $E^r(\tau)$ είναι ισομορφισμός, τότε το ίδιο ισχύει και για την $E^s(\tau)$ για $s > r$, εφόσον $E^s = H(E^{s-1})$. Επομένως $E^\infty = Gr\ H(\tau)$ είναι ισομορφισμός και η πρόταση έπεται λόγω του λήμματος 81 $\square$

Σημείωση. *Μια διαφορετική χρήση των φασματικών ακολουθιών είναι για τον υπολογισμό χαρακτηριστικών Euler: Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι R είναι σώμα ή ότι $R = \mathbb{Z}$. Για οποιοδήποτε R-πρότυπο $A = (A_n)$ (ή αντίστοιχα για πρότυπο διπλής διαβάθμισης $A = (A_{pq})$), έστω $\chi(A) = \sum_n (-1)^n\ rk\ A_n$ (ή αντίχτοιχα $\chi(A) = \sum_{p,q}(-1)^{p+q}\ rk\ A_{pq}$ για διπλή διαβάθμιση), και θεωρούμε πως όλες οι τάξεις είναι πεπερασμένες και σχεδόν όλες τους 0. Στην περίπτωση που το A έχει διαφορικό, είναι γνωστό αποτέλεσμα πως $\chi(A) = \chi(H(A))$. Ειδικότερα, αν το C είναι φιλτραρισμένο σύμπλοκο όπως παραπάνω και $\chi(E^r)$ ορίζεται για κάποιο r, τότε έπεται ότι:*

$$\chi(E^r) = \chi(E^{r+1}) = \cdots = \chi(E^\infty) = \chi(H(C)),$$

όπου η τελευταία ακολουθία είναι συνέπεια της εξίσωσης (*).

Τέλος θα αναφέρουμε τον συμβολισμό για την δυική περίπτωση όπου δουλεύουμε με συναλυσιδωτά σύμπλοκα:

Σημείωση. *Αν το C είναι με δείκτες όπως ένα συναλυσιδωτό σύμπλοκο $(C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, με διαφορικό βαθμού $+1$, τότε:*

- *Το φιλτράρισμα σημειώνεται ως* $\{F^p\}$ *και θεωρείται ως φθίνον (δηλαδή* $F^pC \supseteq F^{p+1}C$*).*
- *Οι όροι της συνομολογίας φασματικής ακολουθίας που προκύπτει συμβολίζονται ως* E_r^{pq}
- *έχουμε επίσης* $E_\infty^{pq} = Gr^{pq}\ H(C) = F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$.
- *τέλος, το διαφορικό* d_r *με (διπλή) τάξη* $(r, -r+1)$ *δίνει τις απεικονίσεις που αναλογούν, δηλαδή:* $d_r : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$.

Ένα συνηθισμένο παράδειγμα φιλτραρίσματος συναλυσιδωτού συμπλόκου είναι το $\mathscr{H}\!om(C, M)$, όπου το C είναι φιλτραρισμένο αλυσιδωτό σύμπλοκο. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε

$$F^p\mathscr{H}\!om(C, M) = \mathscr{H}\!om(C/F_{p-1}C, M).$$

4.2 Διπλά σύμπλοκα

Ορισμός 87 (διπλό σύμπλοκο)**.** *Θα ονομάζουμε διπλό σύμπλοκο ένα διπλά διαβαθμισμένο πρότυπο* $C = (C_{pq})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ *με το οριζόντιο διαφορικό* ∂' *να είναι βαθμού* $(-1, 0)$ *και το κάθετο διαφορικό* ∂'' *να είναι βαθμού* $(0, -1)$
τ.ω. $\partial'\partial'' = \partial''\partial'$*:*

$$\begin{tikzcd} C_{p-1,q} \arrow[d, "\partial''"] & C_{pq} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "\partial''"] \\ C_{p-1,q-1} & C_{p,q-1}. \arrow[l, "\partial'"'] \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση. *Ένα διπλό σύμπλοκο μπορεί να θεωρηθεί ως αλυσιδωτό σύμπλοκο με δύο διαφορετικούς τρόπους:*

- *Για κάθε* q *έχουμε ένα οριζόντιο αλυσιδωτό σύμπλοκο* $C_{*,q}$ *με διαφορικό* ∂' *και μας δίνονται απεικονίσεις* $\partial'' : C_{*,q} \to C_{*,q-1}$ *τ.ω.* $\partial''\partial'' = 0$.
- *Αντίστοιχα για κάθε* p *έχουμε μια κάθετη αλυσίδα* $C_{p,*}$ *διαφορικού* ∂''*, και μας δίνονται αλυσιδωτές απεικονίσεις* $\partial' : C_{p,*} \to C_{p-1,*}$ *με* $\partial'\partial' = 0$.

Ορισμός 88 (ολικό (total) σύμπλοκο)**.** *Το ολικό σύμπολοκο* TC *παράγεται από ένα διπλό σύμπολοκο* C *ως εξής:*

$$(TC)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{pq}$$

με το διαφορικό ∂ *να δίνεται ως* $\partial|C_{pq} = \partial' + (-1)^p\partial''$.

Παράδειγμα. *Ένα παράδειγμα της παραπάνω κατασκευής είναι το τανυστικό γινόμενο δύο αλυσιδωτών συμπλόκων C' και C''. Πράγματι, έχουμε ένα διπλό σύμπλοκο C με $C_{pq} = C'_p \otimes C''_q$ και το TC είναι το σύνηθες τανυστικό γινόμενο αλυσιδωτών συμπλόκων: $C' \otimes C''$.*

Στην συνέχεια θα δώσουμε 2 φασματικές ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν στο $H(TC)$. Προσοχή: Αυτό γενικά δεν σημαίνει πως θα έχουν τον ίδιο όρο E^∞, αυτό γιατί θα έχουμε 2 φιλτραρίσματα στο $H(TC)$ και επομένως δύο διαφορετικούς E^∞ στο $Gr\ H(TC)$.

1. Για την πρώτη φασματική ακολουθία, φιλτράρουμε το TC θέτοντας $F_p(TC)_n = \bigotimes_{i \leq p} C_{i,n-i}$. Αυτό το φιλτράρισμα είναι ανα διάσταση πεπερασμένο, δεδομένου ότι το C έχει πεπερασμένου πλήθους μη-μηδενικά πρότυπα C_{pq} σε κάθε συνολικό βαθμό $p + q$. Επομένως έχουμε μια φασματική ακολουθία $\{E^r\}$ που συγκλίνει στο $H_*(TC)$.

2. Για την δεύτερη φασματική ακολουθία, μπορούμε να φιλτράρουμε το TC μέσω του $F_p(TC) = \bigotimes_{i \leq p} C_{n-j,j}$. Έτσι και αυτή η ακολουθία αντίστοιχα συγκλίνει στο $H(TC)$.

Παρατήρηση. *Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του 1 είναι άμεσο από τους ορισμούς ότι $E^0_{pq} = C_{pq}$ και ότι $d^0 = \pm\partial''$. Συνεπώς το E^1 είναι η κάθετη ομολογία του C, δηλαδή $E^1_{pq} = H_p(C_p, *)$. Το διαφορικό $d^1 : E^1_{pq} \to E^1_{p-1,q}$ είναι η απεικόνιση που επάγεται από το αλυσιδωτό σύμπλοκο $\partial' : C_{p,*} \to C_{p-1,*}$. Δηλαδή ένα στοιχείο του E^1_{pq} αναπαρίσταται από ένα στοιχείο $c \in C_{pq}$ τ.ω. $\partial'' c = 0$, και για ένα τέτοιο c έχουμε $\partial c = \partial' c$. Επομένως το E^2 μπορεί να περιγραφεί ως η οριζόντια ομολογία της κάθετης ομολογίας του C.*
Για την περίπτωση του 2 αντίστοιχα, έχουμε $E^0_{pq} = C_{qp}$, $E^1_{pq} = H_q(C_*, p)$ και $d^1 : E^1_{pq} \to E^1_{p-1,p}$ ίσα (υπό πρόσημο) με την απεικόνιση που επάγεται από το $\partial'' : C_{*,p} \to C_{*,p-1}$.

4.3 Ομολογία ομάδων με συντελεστές σε αλυσιδωτά σύμπολοκα

Όπως ήδη γνωρίζουμε, η $H_*(G, M)$ ορίζεται ως $H_*(F \otimes_G M)$, όπου F μια προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}G$. Μια χρήσιμη γενίκευση είναι να επιτρέψουμε συντελεστές σε ένα μη-μηδενικό αλυσιδωτό σύμπλοκο $C = (C_n)_{n \geq 0}$. Δηλαδή θέτουμε:

$$H_*(G, C) = H_*(F \otimes_G C)$$

Το οποίο είναι καλά ορισμένο υπό κανονικούς ισομορφισμούς. Στην περίπτωση που το C αποτελείται από ένα μεμονωμένο πρότυπο M συγκεντρωμένο στην διάσταση 0, τότε η $H_*(G, C)$ ταυτίζεται με την $H_*(G, M)$. Τα παραπάνω ως μια βασική υπενθύμιση για να προχωρήσουμε στα ακόλουθα.

Το $F \otimes_G C$ είναι ολικό σύμπλοκο διπλών συμπλόκων αβελιανών ομάδων $(F_p \otimes_G C_q)$. Από την υποπαράγραφο 4.2, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 2 φασματικές ακολουθίες που συγκλίνουν στην $H_*(G, C)$.

-Για την πρώτη φασματική ακολουθία:

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$E^1_{pq} = H_q(F_p \otimes_G C_*) = F_p \otimes_G H_q(C)$$

εφόσον ο συναρτητής $F_p \otimes_G \_$ είναι ακριβής. Παίρνοντας τώρα την ομολογία στο p έχουμε $E^2_{pq} = H_p(G, H_q C)$. Και η φασματική ακολουθία θα έχει την μορφή:

$$E^2_{pq} = H_p(G, H_q C) \Rightarrow H_{p+q}(G, C).$$

Όπου εδώ με '$\Rightarrow$' συμβολίζουμε την σύγκλιση σε ότι βρίσκεται στο δεξί μέλος. Μια συνέπεια είναι η πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 89. *Αν $\tau : C \to C'$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία από σύμπλοκα G-αλυσίδων, τότε η tau επάγει τον ισομορφισμό $H_*(G, C) \xrightarrow{\approx} H_*(G, C')$.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση τ επάγει μια απεικόνιση φασματικών ακολουθιών η οποία είναι ισομορφισμός στο επίπεδο των E^2, και επομένως η τ επάγει έναν ισομορφισμό λόγω του 86. $\square$

-Για την δεύτερη φασματική ακολουθία:

Στην περίπτωση της δεύτερης ακολουθίας έχουμε

$$E^1_{pq} = H_q(F_* \otimes_G C_p) = H_q(G, C_p).$$

Και επομένως έχουμε:

$$E^1_{pq} = H_q(G, C_p) \Rightarrow H_{p+q}(G, C).$$

Επομένως η ομάδα E^2_{pq} μπορεί να περιγραφεί ως η p-στή ομολογία του συμπλόκου που παίρνουμε από το C όταν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $H_q(G, \_)$ κατά διάσταση.

Σημείωση. *Ως συμπέρασμα των προηγουμένων, μπορούμε να θεωρούμε τις δύο φασματικές ακολουθίες ως ¨προσεγγίσεις¨ των $H_*(G, C)$ μέσω των συνηθισμένων ομάδων ομολογίας της μορφής $H_*(G, M)$.*

Πρόταση 90. *Έστω C ένα μη-μηδενικό αλυσιδωτό σύμπλοκο από G-πρότυπα τ.ω. κάθε C_n να είναι H_*-άκυκλο. Τότε υπάρχει μια φασματική ακολουθία της μορφής*

$$E^2_{pq} = H_p(G, H_p C) \Rightarrow H_{p+q}(C_G).$$

Απόδειξη. Ο E^1-όρος της ακολουθίας στην περίπτωση της δεύτερης φασματικής ακολουθίας που είδαμε παραπανω, συγκεντρώνεται στην ¨γραμμή¨ $q = 0$ και έχουμε $E^1_{p,0} = (C_p)_G$. Η φασματική ακολουθία επομένως στο E^2 οδηγεί στο $H_*(G, C) \approx H_*(C_G)$. □

Σε αντιστοιχία με όσα είδαμε για τις ομολογίες, μπορούν να οριστούν και για συνομολογίες. Δηλαδή για $H^*(G, C)$ όπου $C = (C^n)_{n\geq 0}$ να είναι ένα μή-μηδενικό συναλυσιδωτό σύμπλοκο. Επομένως θέτουμε:

$$H^*(G, C) = H^*(\mathscr{H}\text{-}om_G(F, C)),$$

όπου το F είναι προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}G$. Το ολικό σύμπλοκο θα είναι το $\mathscr{H}\text{-}om_G(F, C)$ και είναι το ολικό σύμπλοκο που σχετίζεται με το διπλό σύμπλοκο $C^{pq} = Hom_G(F, C)$. Επιπλέον οι συνήθεις γνωστές ιδιότητες και θεωρήματα όπως επέκταση σε μακρά ακριβή ακολουθία, το λήμμα του Shapiro, ανάλογα των γινομένων cup κτλ ισχύουν για την ομολογία με συντελεστές σε αλυσιδωτά σύμπλοκα (ή συναλυσιδωτά για τα δυικά της).

4.4 Equivariant Ομολογία

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα εξειδικεύσουμε την θεωρία που παρουσιάσαμε στην 4.3, για την περίπτωση όπου το αλυσιδωτό σύμπλοκο $C(X)$ είναι ένα G-σύμπλοκο X.

Ορισμός 91 (equivariant ομάδες ομολογίας)**.** *Θα συμβολίζουμε τις ομάδες ομολογίας $H_*(G, C(X))$ με $H^G_*(X)$ και θα τις καλούμε equivariant ομάδες ομολογίας των (G, X). Γενικότερα, αν M είναι ένα G-πρότυπο, τότε υπάρχει μια διαγώνια G-δράση στο $C(X, M) = C(X) \otimes M$ και θέτουμε:*

$$H^G_*(X, M) = H_*(G, C(X, M)).$$

Σημείωση. *Όμοια ορίζονται και οι $equivariant$ ομάδες συνομολογίας:*

$$H^*_G(X, M) = H^*(G, C^*(X, M))$$

Ορισμός 92 (equivariant Tate ομάδες συνομολογίας)**.** *Αν το X είναι πεπερασμένης διάστασης και η ομάδα G πεπερασμένη, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις equivariant Tate ομάδες συνομολογίας, ως:*

$$\widehat{H}^*_G(X, M) = \widehat{H}^*(G, C^*(X, M)).$$

Σημείωση. *Εάν $Y \subseteq X$ είναι μία G-αναλλοίωτο υποσύμπλοκο, τότε υπάρχουν οι σχετικά equivariant ομολογίες και συνομολογίες, που ορίζονται μέσω του σχετικού συμπλόκου $C(X, Y) = C(X)/C(Y)$.*

Για λόγους απλούστευσης θα παρουσιάσουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για την περίπτωση της ομολογίας ομάδων $H^G_*(X, M)$, όμως υπάρχουν ανάλογα αποτελέσματα για σχετικές (relative) ομολογικές και συνομολογικές ομάδες.

Πρόταση 93. *Για μια απεικόνιση κελιών από G-σύμπλοκα $f : X \to Y$ τ.ω. $f_* : H_*X \to H_*Y$ να είναι ισομορφισμός, η f επάγει έναν ισομορφισμό $H_*^G(X,M) \xrightarrow{\approx} H_*^G(Y,M)$ για κάθε G-πρότυπο M. Συγκεκριμένα, αν το X είναι άκυκλο τότε η κανονική απεικόνιση $H_*^G(X,M) \to H_*(G,M)$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $H_*^G(pt., M) = H_*(G,M)$. Εφόσον κάθε G-σύμπολοκο επάγει μια G-απεικόνιση σε σημείο, έχουμε την ύπαρξη μιας κανονικής απεικόνισης

$$H_*^G(X,M) \to H_*(G,M).$$

Γράφοντας την φασματική ακολουθία της εισαγωγής του 4.3 για την περίπτωσή μας:

$$E^2_{pq} = H_p(G, H_p(X,M)) \Rightarrow H^G_{p+q}(X,M).$$

(Εδώ ο όρος E^2 περιέχει της διαγώνια δράση της G στην $H_*(Q,M)$ η οποία επάγεται από την δράση της G στον X και το M.) Ως συνέπεια της φασματικής ακολουθίας και της πρότασης 89 έπεται πρόταση. □

Θεώρημα 94. *Έστω X ένα ελεύθερο G-σύμπλοκο, τότε υπάρχει μια φασματική ακολουθία της μορφής*

$$E^2_{pq} = H_p(G, H_qX) \Rightarrow H_{p+q}(X/G).$$

Απόδειξη. Αναλύουμε την 'δεύτερη' φασματική ακολουθία της υποπαραγράφου 4.3 αποδομώντας το $C_p(X) \otimes M$. Για κάθε p-κελί σ του X έχουμε ένα G_σ-πρότυπο $\mathbb{Z}_\sigma$ το οποίο είναι προσθετικά ισομορφικό με το $\mathbb{Z}$ όπου η G_σ δρα μέσω του 'χαρακτήρα διεύθυνσης¨ $\chi_\sigma : G_\sigma \to \{\pm 1\}$. Έστω

$$M_\sigma = \mathbb{Z}_\sigma \otimes M,$$

επομένως το M_σ είναι ένα G-πρότυπο που είναι ισομορφικό με το M με την G_σ-δράση 'αλλοιωμένη¨ μέσω του χ_σ. Έστω X_p το σύνολο των p-κελιών του X και έστω Σ_p ένα σύνολο αντιπροσώπων του X_p/G. Τότε έχουμε την προσθετική αποσύνθεση:

$$C_p(X,M) = C_p(X) \otimes M = \bigoplus_{\sigma \in X_p} M_\sigma,$$

για το οποίο έχουμε την αποσύνθεση σε G-πρότυπο:

$$C_p(X,M) \approx \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} Ind^G_{G_\sigma} M_\sigma.$$

Το λήμμα του Shapiro μας δίνει το

$$H_q(G, C_p(X,M)) \approx \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma),$$

έτσι η δεύτερη φασματική ακολουθία της υποπαραγράφου 4.3 παίρνει την μορφή

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma) \Rightarrow H^G_{p+q}(X, M).$$

Π.χ. ας υποθέσουμε ότι η G-δράση είναι ελεύθερη έτσι ώστε κάθε $G_\sigma = \{1\}$ και ας θεωρήσουμε πως $M = \mathbb{Z}$ για απλούστευση. Τότε η φασματική ακολουθία γίνεται E^2 και μέσω όσων γνωρίζουμε από την προηγούμενη υποπαράγραφο οδηγεί στο $H^G_* \approx H_*(C(X)_G) = H_*(X/G)$. Τώρα συνδυαζοντας την τελευταία εξίσωση με την E^2 όπως εμφανίζεται στην απόδειξη του 93 μαζί με τα αποτελέσματα της υποπαραγράφου 4.3 έχουμε την πρόταση. □

Παρατήρηση. *Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να εξάγουμε ένα χρήσιμο εργαλείο για την ομολογία ομάδων:*
Ας θεωρήσουμε πως έχουμε ένα X άκυκλο όπου η G-δράση δεν είναι απαραίτητα ελεύθερη, έτσι

$$H^G_*(X, M) \approx H_*(G, M)$$

από την πρόταση 93 και τα αποτελέσματα για την E^1_{pq} στην απόδειξη της 94, μπορούμε να γράψουμε την αντίστοιχη φασματική ακολουθία ως

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma) \Rightarrow H_{p+q}(G, M).$$

Η προηγούμενη παρατήρηση έχει ενδιαφέρον γιατί στην περίπτωση που η G είναι ελεύθερο γινόμενο αμαλγάματος, για κατάλληλη επιλογή του X, μπορεί να οδηγήσει σε ακολουθία Mayer-Vietoris.

4.5 Equivariant Συνομολογία Tate

Η χρησιμότητα της Tate equivariant συνομολογίας προέρχεται από το γεγονός ότι μας επιτρέπει να 'αγνοήσουμε' τις ελεύθερες δράσεις, κάτι που φαίνεται στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 95. *Έστω Y ένα G-αναλλοίωτο υποσύμπλοκο του X τ.ω. η ισοτροπική ομάδα G_σ να είναι τετριμμένη για κάθε κελί σ του X που δεν περιέχεται στο Y. Τότε ο εγκλεισμός $Y \hookrightarrow X$ επάγει τον ισομορφισμό*

$$\hat{H}^*_G(X, M) \xrightarrow{\approx} \hat{H}^*_G(Y, M).$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε πως βρισκόμαστε στην Tate συνομολογίας έκδοση της φασματικής ακολουθίας που είδαμε για το E^1_pq στην απόδειξη του 93 για (G, X) και (G, Y). Από υπόθεση έχουμε ότι $\hat{H}^*(G_\sigma, M) = 0$ αν το σ είναι κελί του $X - Y$. Επομένως ο εγκλεισμός $Y \hookrightarrow X$ επάγει έναν ισομορφισμό στις φασμαστικές ακολουθίες και άρα ισομορφισμό στα $\hat{H}^*_G(X, M)$ και $\hat{H}^*_G(Y, M)$. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι μια καλή εφαρμογή της πρότασης 95:

Πρόταση 96. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα που έχει πεπερασμένης διάστασης G-σύμπλοκο X τ.ω. $H_*(X) \approx H_*(S^{2k-1})$. Τότε η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο $= 2k$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 95 για $Y = \emptyset$ έχουμε $\hat{H}^*_G(X, M) = 0$. Από την άλλη έχουμε την φασματική ακολουθία

$$E_2^{pq} = \hat{H}^p(G, H^q(X, M)) \Rightarrow \hat{H}^{p+q}_G(X, M)$$

όπως στην απόδειξη της πρότασης 93. Εφόσον η φασματική ακολουθία είναι συγκεντρωμένη στις οριζόντιες γραμμές $q = 0$ και $q = 2k - 1$ έπεται ότι το διαφορικό d_{2k} είναι ο ισομορφισμός:

$$\hat{H} * p(G, H^{2k-1}(X, M)) \xrightarrow{\approx} \hat{H}^{p+2k}(G, M).$$

Από την οπτική του ισομορφισμού καθολικών συντελεστών (universal coefficient isomorphism) έχουμε

$$H^{2k-1}(X, M) \approx Hom(H_{2k-1}X, M)$$

ο οποίος είναι φυσικός και άρα ισομορφισμός από G-πρότυπα. Για να είναι πλήρης η απόδειξη χρειάζεται να δείξουμε ότι η G δρα τετριμμένα στην άπειρη κυκλική ομάδα $H_{2k-1}X$. Αυτό έπεται από το γενικό θεώρημα σταθερού σημείου Lefschetz όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να δειχθεί ευκολότερα: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε κυκλική υποομάδα της G δρα τετριμμένα στο $H_{2k-1}X$. Έτσι βρισκόμαστε αμέσως στην περίπτωση όπου η G είναι κυκλική και μη τετριμμένη. Σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε τον ισομορφισμό που είδαμε πριν για την περίπτωση όπου $M = \mathbb{Z}$ και $p = 0$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{H}^0(G, H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})) \approx \hat{H}^{2k}(G, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/|G| \cdot \mathbb{Z}.$$

από το οποίο έχουμε ότι $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})^G \neq 0$ το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο αν η G δρα τετριμμένα στο $H_{2k-1}X$. □

Ως άλλη μια εφαρμογή της equivariant Tate συνομολογίας θα δείξουμε κάποια κλασσικά αποτελέσματα της θεωρίας σταθερού σημείου.

Θεώρημα 97. *Έστω X ένα G-σύμπλοκο πεπερασμένης διάστασης, όπου η G έχει τάξη πρώτου p. Υποθέτουμε πως το σύνολο σταθερών σημείων X^G αποτελεί υποσύμπλοκο.*

1. *Αν το $H^*(X, \mathbb{Z}_|)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το ίδιο ισχύει και για το $H^*(X^G, \mathbb{Z}_p)$.*

2. *Αν το X είναι άκυκλο* $\mod p$*, δηλαδή* $H^*(pt., \mathbb{Z}_p))$ *τότε το ίδιο ισχύει και για το* X^G.

3. *Αν ο X είναι σφαίρα συνομολογίας* $\mod p$*, δηλαδή* $H^*(X, \mathbb{Z}_p) \approx H^*(S^n, \mathbb{Z}_p)$ *για κάποιο* $n \geq 0$*, τότε το ίδιο ισχύει και για το* X^G *αν* $X^G \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Έχουμε $\hat{H}^*_G(X, \mathbb{Z}_p) \approx \hat{H}^*_G(X^G, \mathbb{Z}_p)$ από την πρόταση 95. Εφόσον η G δρα τετριμμένα στον X^G, από τον Kunneth ισομορφισμό έχουμε ότι

$$\hat{H}^*_G(X^G, \mathbb{Z}_p) \approx \hat{H}^*(G, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^G, \mathbb{Z}_p).$$

Επειδή $dim_{\mathbb{Z}_p} \hat{H}^n_G(X, \mathbb{Z}_p) = \sum_{i \geq 0} dim_{\mathbb{Z}_p} H^i(X^G, \mathbb{Z}_p)$ για κάθε n. Υποθέτοντας πως το $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, η φασματική ακολουθία της πρότασης 96 για το E_2^{pq} θέτοντας $M = \mathbb{Z}_p$ δίνει ότι το $\hat{H}^n_G(X, \mathbb{Z}_p)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Έτσι έπεται το 1 (από την προηγούμενη εξίσωση για την διάσταση). Όμοια αν το X είναι άκυκλο $\mod p$ τότε το αριστερό μέρος της εξίσωσης για τις διαστάσεις ισούται με 1, άρα και το δεξί μέλος το ίδιο και αυτό μας δίνει το 2. Η απόδειξη του 3 είναι όμοια με του 2 με την διαφορά ότι γίνεται με χρήση σχετικών (relative) ομολογικών ομάδων του ζεύγους (Q, v), όπου το v είναι μια κορυφή του X^G. □

Κεφάλαιο 5

Συνθήκες περατότητας

Οι ορισμοί των $H_*(G, M)$ και $H^*(G, M)$ μας επιτρέπουν την επιλογή μιας αυθαίρετης προβολική ανάλυσης $P = (P_i)_{i \geq 0}$ του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}G$. Όμοια και από την τοπολογική σκοπιά υπολογίζοντας τα $H_*(G, M)$ και $H^*(G, M)$ μέσω αυθαίρετων $K(G, 1)$-συμπλόκων του Y.

Εφόσον υπάρχει αυτή η ελευθερία επιλογής, θα θέλαμε να επιλέξουμε τα P (ή Y στην περίπτωση της τοπολογίας) όσο πιο μικρά γίνεται. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί με διάφορες έννοιες, για παράδειγμα μπορεί να σημαίνει πως κάθε P_i είναι πεπερασμένα παραγόμενο (ή αντίστοιχα πως το Y έχει πεπερασμένου πλήθους κελιά). Σε αυτή την περίπτωση οδηγούμαστε στις συνθήκες 'FP' και 'FL'. Διαφορετικά μπορεί κανείς να θεωρήσει ως μικρές τις αναλύσεις P ανάλογα με το μήκος τους ή αντίστοιχα την διάσταση του Y για την τοπολογία.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τις σχετικές συνθήκες περατότητας και κάποια παραδείγματα. Καθώς στο πεδίο συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται πολλά παραδείγματα που προέρχονται απο τις ομάδες Lie, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο Γ για τις διακριτές ομάδες, όπως συνηθίζεται για τις διακρικτές υποομάδες μιας ομάδας Lie G.

5.1 Συνομολογική Διάσταση

Υπενθύμιση 1. *Αν έχουμε ένα δακτύλιο R, ένα R-πρότυπο M και ένα μημηδενικό ακέραιο n, τότε για την προβολική διάσταση $proj\ dim_R M$ έχουμε $proj\ dim_R M \leq n$ αν και μόνο αν το M επιδέχεται μια μήκους n προβολική ανάλυση την μορφής:*

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

Υπενθύμιση 2. *Οι τελεστές Ext ορίζονται ως*

$$Ext^i_R(M, \_) = H^i(\mathcal{H}om_R(P, \_))$$

όπου το P είναι μια προβολική ανάλυση του M. Συγκεκριμένα

$$Ext^i_{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathbb{Z}, \_) = H^i(\Gamma, \_).$$

Λήμμα 98. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. $proj\ dim_R M \leq n$.
2. $Ext^i_R(M, \_) = 0$ *για* $i > n$.
3. $Ext^{n+1}_R(M, \_) = 0$.
4. *Αν η ακολουθία* $0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ *είναι τυχαία ακριβής ακολουθία* R*-προτύπων όπου κάθε όρος* P_i *είναι προβολικός, τότε το* K *είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές από 1 μέχρι το 3 και η $4 \Rightarrow 1$ είναι προφανείς. Μας μένει επομένως να δείξουμε ότι $3 \Rightarrow 4$: Έστω μία μερική ανάλυση (resolution) όπως στο 4. Την συνεχίζουμε σε προβολική ανάλυση της μορφής:

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

όπου τα

$$P_{n+1} \to P_n$$

και

$$P_n \to P_{n-1}$$

σπάνε σε αντίστοιχα σε

$$P_{n+1} \twoheadrightarrow L \hookrightarrow P_n$$

και

$$P_n \twoheadrightarrow K \hookrightarrow P_{n-1}.$$

Για κάθε R-πρότυπο N ένας $(n-1)$-συκύκλος (cocycle) στο $\mathscr{H}om_R(P, N)$ είναι μια απεικόνιση $P_{n+1} \to N$ της οποίας η σύνθεση με $P_{n+2} \to P_{n+1}$ είναι μηδέν. Επομένως αυτός ο σύκυκλος μπορεί να θεωρηθεί σαν μια απεικόνιση $P_n \to N$. Επομένως από το 3 έχουμε ότι κάθε απεικόνιση στο L επεκτείνεται στο P_n. Ειδικότερα, η ταυτοτική απεικόνιση στο L μπορεί να επεκταθεί στο P_n ώστε να ισχύει ο ισομορφισμός $P_n \approx L \oplus K$ και επομένως το K είναι προβολικό. □

Παρατήρηση. *Η συνεπαγωγή* $1 \Rightarrow 4$ *του λήμματος 98 δείχνει πως αν υπάρχουν προβολικές αναλύσεις μήκους* n*, τότε μπορούμε να τις βρούμε κάποια 'εύκολα'. Αυτό γιατί οποιαδήποτε μερική ανάλυση μήκους* $n-1$ *μπορεί να επεκταθεί σε προβολική ανάλυση* n *μήκους.*

Στην πορεία θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}\Gamma$ και $M = \mathbb{Z}$.

Ορισμός 99 (συνομολογική διάσταση ομάδας)**.** *Η συνομολογική διάσταση μιας ομάδας* Γ *θα συμβολίζεται με* $cd\,\Gamma$*, και ορίζεται ως ο μικρότερος ακέραιος* n *για τον οποίο ισχύουν οι συνθήκες του λήμματος 98. Αν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος θα θεωρούμε ότι* $cd\,\Gamma = \infty$.

Δηλαδή με βάση τον προηγούμενο ορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned} cd\,\Gamma &= proj\ dim_{\mathbb{Z}\Gamma}\mathbb{Z} \\ &= \inf\{n : \mathbb{Z} \text{ ώστε να έχει προβολική ανάλυση μήκους } n\} \\ &= \inf\{n : H^i(\Gamma, \_) = 0 \text{ για } i > n\} \\ &= \sup\{n : H^n(\Gamma, M) \neq 0 \text{ για κάποιο } \Gamma - \text{πρότυπο } M\}. \end{aligned}$$

Παρακάτω δίνουμε το τοπολογικό ανάλογο της συνομολογικής διάστασης και μια άμεση σχέση μέσω της πρότασης που ακολουθεί:

Ορισμός 100 (γεωμετρική διάσταση)**.** *Η γεωμετρική διάσταση μιας ομάδας* Γ *θα συμβολίζεται ως* $geom\ dim\ \Gamma$ *και ορίζεται ως την ελάχιστη διάσταση ενός* $K(\Gamma, 1)$*-συμπλόκου.*

Πρόταση 101. *Ισχύει το παρακάτω:* $cd\,\Gamma \leq geom\ dim\Gamma$.

Απόδειξη. Το αλυσιδωτό σύμπλοκο κελιών του καθολικού καλύμματος ενός $K(\Gamma, 1)$ συμπλόκου Y οδηγεί σε μια ελεύθερη ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$, η οποία έχει μήκος ίσο με την διάσταση του Y. Επομένως έπεται η πρόταση. □

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητες της συνομολογικής διάστασης:

Πρόταση 102. *Αν* $cd\Gamma < \infty$ *τότε*

$$cd\Gamma = sup\{n : H^n(\Gamma, F) \neq 0 \text{ για κάποιο ελεύθερο } \mathbb{Z}\Gamma - \text{πρότυπο } F\}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $n = cd\,\Gamma$. Ο συναρτητής $H^n(\Gamma, \_)$ είναι ακριβής προς τα δεξία ως μακρά ακριβής συνομολογιακή ακολουθία. Εφόσον $H^n(\Gamma, M) \neq 0$ για κάποιο M, έπεται ότι $H^n(\Gamma, F) \neq 0$ για κάθε ελεύθερο πρότυπο F που απεικονίζεται επί του M. □

Πρόταση 103. *α΄. Αν έχουμε* $\Gamma' \subset \Gamma$ *τότε*

$$cd\,\Gamma' \leq cd\,\Gamma$$

η ισότητα ικανοποιείται αν $cd\,\Gamma < \infty$ *και* $(\Gamma : \Gamma') < \infty$.

β΄. Αν η ακολουθία ομάδων $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *είναι μια ακριβής ακολουθία, τότε*

$$cd\,\Gamma \leq cd\,\Gamma' + cd\,\Gamma''.$$

γ΄. Αν $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$ *(όπου* $A \hookrightarrow \Gamma_i$ *), τότε*

$$cd\,\Gamma \leq \max\{cd\,\Gamma_1, cd\,\Gamma_2, 1 + cd\,A\}.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα του α' έπεται άμεσα από το λήμμα του Shapiro ή αλλιώς με χρήση του ότι μια προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$ μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μια προβολική ανάλυσγ του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma'$. Για να δείξουμε το δεύτερο μέρος του α', υποθέτουμε ότι $cd\ \Gamma = n < \infty$. Από το 102 υπάρχει ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}\Gamma$-πρότυπο F με $H^n(\Gamma, F) \neq 0$. Εάν F' είναι ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}\Gamma'$-πρότυπο της ίδιας τάξης, τότε $F \approx Ind_{\Gamma'}^{\Gamma} F'$, και άρα το λήμμα του Shapiro δίνει ότι

$$H^n(\Gamma', F') \approx H^n(\Gamma, F) \neq 0.$$

Επομένως $cd\ \Gamma' \geq n$, και έπεται το α'. Το β' είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Hochschild-Serre για τις φασματικές ακολουθίες. Τέλος, το γ' έπεται από την συνομολογική εκδοχή της ακολουθίας Maeyer-Vietoris. □

Συμπέρασμα 104. *Αν $cd\ \Gamma \leq \infty$ τότε η Γ είναι ελεύθερη στρέψης (torsion free).*

Απόδειξη. Αν η Γ δεν είναι ελεύθερη στρέψης τότε περιέχει μια πεπερασμένη μη-τετριμμένη κυκλική υποομάδα Γ'. Για την Γ θα ισχύει $cd\ \Gamma' = \infty$. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι $H^{2k}(\Gamma', \mathbb{Z}) \neq 0$ για κάθε k. Έτσι από το α' της πρότασης 103 έχουμε ότι $cd\ \Gamma = \infty$. □

Συμπέρασμα 105. *Αν $\Gamma' \subset \Gamma$ και $(\Gamma : \Gamma') < \infty$, τότε από το α' της πρότασης 103 έπεται ότι $cd\ \Gamma' = cd\ \Gamma$ εκτός και ικανοποιούνται τα*

$$cd\ \Gamma = \infty$$

και

$$cd\ \Gamma' < \infty.$$

(Τα οποία ικανοποιούνται όπως θα δούμε στο παρακάτω παραδειγμα.)

Παράδειγμα. *Έστω Γ μια ομάδα τάξης 2 και $\Gamma' = \{1\}$. Γενικότερα αν Γ είναι μια ομάδα με στρέψη τότε από το 104 $cd\ \Gamma = \infty$. Όμως η Γ ενδεχομένως να έχει πεπερασμένου δείκτη υποομάδες Γ' που να είναι ελεύθερες στρέψης με $cd\ \Gamma' < \infty$. (Στην επόμενη υποπαράγραφο όπου θα δείξουμε το θεώρημα του Serre θα δούμε πως αν η Γ είναι ελεύθερη στρέψης τότε τα $cd\ \Gamma = \infty$ και $cd\ \Gamma' < \infty$ δεν ικανοποιούνται.*

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει πως όταν εργαζόμαστε με συνομολογική διάσταση μας αρκούν οι ελεύθερες προβολικές αναλύσεις. Δηλαδή δεν χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν μη-ελεύθερες.

Πρόταση 106. *Για κάθε ομάδα Γ υπάρχει μια ελεύθερη ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$ που το μήκος της είναι ίσο με την $cd\ \Gamma$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε πρώτα το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 107. *Αν P είναι ένα προβολικό πρότυπο πάνω από τυχαίο δακτύλιο R, τότε υπάρχει ένα ελεύθερο πρότυπο F τ.ω. $P \oplus F \approx F$.*

Απόδειξη. Το P είναι προβολικό και άρα υπάχει ένα πρότυπο Q τ.ω. το $P \otimes Q$ να είναι ελεύθερο. Υποθέτουμε πως το F είναι ένα αριθμήσιμο ευθύ άθροισμα:

$$(P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \cdots .$$

Τότε το F είναι ελεύθερο ως ευθύ άθροισμα ελεύθερων προτύπων. Το F μπορεί όμως να περιγραφεί και ως το άθροισμα μετρήσιμου πλήθους αντιγράφων του P και αριθμήσιμου πλήθους αντιγράφων του Q. Η επισύναψη ενός επιπλέον αντιγράφου του P δεν το αλλάζει αυτό και επομένως $P \oplus F \approx F$. $\square$

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη της πρότασης 106.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι $n = cd\ \Gamma$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $0 < n < \infty$. Επιλέγουμε μια μερική ελεύθερη ανάλυση μήκους $n-1$ της μορφής

$$F_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

με το P να είναι ίσο με τον πυρήνα της $\partial : F_{n-1} \to F_{n-2}$. Δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση αν $n = 1$ θέτουμε $F_{-1} = \mathbb{Z}$. Από τις προτάσεις 98 και 107 παίρνουμε ένα ελεύθερο πρότυπο F τ.ω. το άθροισμα $P \oplus F$ να είναι ελεύθερο. Άρα αντικαθιστώντας το F_{n-1} από $F_{n-1} \oplus F$ και θέτοντας $\partial | F = 0$ έχουμε μια μερική ελεύθερη ανάλυση με μήκος $n-1$ και τον πυρήνα $ker(\partial)$ ελεύθερο, και άρα έπεται το ζητούμενο. $\square$

5.2 Το θεώρημα του Serre

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα διατυπώσουμε και θα δείξουμε το θεώρημα του Serre.

Θεώρημα 108. *Έστω Γ μια ομάδα ελεύθερη στρέψης και μιά υποομάδα Γ' πεπερασμένου δείκτη. Τότε $cd\ \Gamma' = cd\ \Gamma$.*

Σημείωση. *Στην απόδειξη που θα ακολουθήσουμε, η οποία είναι η τοπολογική εκδοχή, θα θεωρούμε δεδομένο το παρακάτω αποτέλεσμα των Eilenberg και Ganea:*
"Αν Γ είναι ομάδα τ.ω. $cd\ \Gamma < \infty$ τότε υπάρχει ένα $K(\Gamma, 1)$- σύμπλοκο πεπερασμένης διάστασης."

Απόδειξη. Από το α' του 103 γνωρίζουμε ότι αρκεί να δείξουμε πως αν $cd\ \Gamma' < \infty$ τότε $cd\ \Gamma < \infty$.

Από το αποτέλεσμα των Eilenberg και Ganea γνωρίζουμε ότι εφόσον μας δίνεται ότι $cd\ \Gamma' < \infty$ υπάρχει σύμπλοκο $K(\Gamma', 1)$ πεπερασμένης διάστασης. Επομένως το καθολικό του κάλυμμα, X' είναι πεπερασμένης διάστασης,

συσταλτό και ελεύθερο Γ'-σύμπλοκο. Από το X' θα κατασκευάσουμε ένα συσταλτό, πεπερασμένης διάστασης και ελεύθερο Γ-σύμπλοκο X ώστε να δείξουμε ότι $cd\,\Gamma < \infty$. Η κατασκευή έχει ως εξής:
Το υποκείμενο σύνολο του X ορίζεται ως $X = Hom_{\Gamma'}(\Gamma, X')$ όπου η Γ' δρα στο Γ από τα αριστερά και το $Hom_{\Gamma'}(\_,\_)$ συμβολίζει τις απεικονίσεις στην κατηγορία των αριστερών Γ'-συνόλων. Εφόσον η δεξιά δράση της Γ στον εαυτό της μετατίθεται με την αριστερή δράση της Γ' στο Γ, υπάρχει μια επαγόμενη αριστερή δράση της Γ στο X, η οποία δίνεται ως

$$(\gamma_0 f)(\gamma) = f(\gamma\gamma_0)$$

για $f \in X$ και $\gamma, \gamma_0 \in \Gamma$.
Εάν επιλέξουμε ένα σύνολο αντιπροσώπων των $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ για $\Gamma' \setminus \Gamma$, τότε μέσω αυτών έχουμε τον ισομορφισμό:

$$\phi : X \xrightarrow{\approx} \prod_{i=1}^{n} X'.$$

Εφόσον το γινόμενο από τα δεξιά έχει μια φυσική CW δομή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ϕ για να δώσουμε στο X μια τοπολογία και μια δομή CW.
Η δομή αυτή είναι ανεξάρτητη της επιλογής των αντιπροσώπων για τα σύμπλοκα. Αυτό γιατί αν αντικαταστήσουμε τους αντιπροσώπους με $\gamma_1'\gamma, \cdots, \gamma_n'\gamma_n$ (όπου $\gamma_i' \in \Gamma$), τότε την νέα απεικόνιση ϕ μπορούμε να την πάρουμε από την παλιά μέσω σύνθεσης με τον CW-ισομορφισμό:

$$\prod_{i=1}^{n} \gamma_i' : \prod_{i=1}^{n} X' \to \prod_{i=1}^{n} X'.$$

Έπεται ότι η Γ-δράση στο X διατηρεί την δομή CW. Πράγματι, για τυχαίο $\gamma \in \Gamma$ έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\phi'"'] & & X \arrow[dl, "\phi"] \\ & \prod_{i=1}^{n} X' & \end{tikzcd}$$

όπου η ϕ ορίζεται μέσω τους αντιπρόσωπους $(\gamma_i)_{1\leq i\leq n}$ και η ϕ' ορίζεται μέσω $(\gamma_i\gamma)_{1\leq i\leq n}$. Επομένως το X είναι καλά ορισμένο ως Γ-σύμπλοκο το οποίο είναι επίσης συσταλτό και πεπερασμένης διάστασης.
Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του ότι $cd\,\Gamma < \infty$, μένει να δείξουμε ότι η Γ δρα ελεύθερα στον X. Υπάρχει μια κανονική απεικόνιση $X \to X'$ η οποία δίνεται μέσω της εικόνας από το $1 \in \Gamma$. Η απεικόνιση αυτή είναι Γ'-equivariant και στέλνει τα κελιά σε κελιά. Εφόσον η Γ' δρα ελεύθερα στο X' έπεται ότι δρα ελεύθερα και στο X. Για κάθε κελί σ του X θα έχουμε $\Gamma_\sigma \cap \Gamma' = \{1\}$ και άρα το Γ_σ είναι πεπερασμένο. Το Γ είναι όμως ελεύθερο στρέψης και επομένως οι πεπερασμένες ισοτροπικές αυτές ομάδες Γ_σ είναι τετριμμένες.

$\square$

5.3 Αναλύσεις πεπερασμένου τύπου

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα μελετήσουμε συνθήκες περατότητας κατά τις οποίες απαιτούμε την ύπαρξη μιας προβολικής ανάλυσης P για την οποία κάθε P_i είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Αρχικά θα παρουσιάσουμε γενικά αποτελέσματα για τέτοιες αναλύσεις πάνω από δακτύλιο R, ενώ σε επόμενες υποπαραγράφους θα μιλήσουμε ειδικότερα για αναλύσεις του $\mathbb{Z}$ πάνω από το $\mathbb{Z}\Gamma$.

Για τα πεπερασμένα παριστόμενα πρότυπα έχουμε τα εξής :

Πρόταση 109. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για ένα R-πρότυπο M.*

1. *Για κάποιους ακεραίους m, n, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία της μορφής*
$$R^m \to R^n \to M \to 0.$$
2. *Για πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά P_0, P_1, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία της μορφής*
$$P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$
3. *Αν M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και για κάθε επιμορφισμό*
$$\epsilon : P \twoheadrightarrow M$$
όπου P να είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, τότε ο πυρήνας $ker(\epsilon)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης χρειαζόμαστε το λήμμα του Schanuel:

Λήμμα 110 (λήμμα του Schanuel)**.** *Έστω οι ακριβείς ακολουθίες*
$$0 \to K \to P \to M \to 0$$
και
$$0 \to K' \to P' \to M \to 0$$
όπου τα P και P' είναι προβολικά. Τότε ισχύει
$$P \oplus K' \approx P' \oplus K.$$

Απόδειξη. Έστω Q να είναι το pullback των απεικονίσεων:
$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\pi'"] \\ P \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

Δηλαδή το Q είναι υπο-πρότυπο του $P \times P'$ και αποτελείται από τα ζεύγη (x, x') τ.ω. $\pi(x) = \pi'(x')$. Επομένως μπορεί να ελεγχθεί πως το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

οι οριζόντιες και παράλληλες σειρές είναι ακριβείς, και εφόσον τα P και P' είναι προβολικά οι ακολουθίες που περιλαμβάνουν το Q είναι διασπάσιμες πράγμα που οδηγεί στο $P \oplus K' \approx Q \approx P' \oplus K$.

□

τώρα συνεχίζουμε στην απόδειξη της πρότασης 5.3.

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ είναι προφανείς και θέλουμε τώρα να δείξουμε την $2 \Rightarrow 3$. Παρατηρούμε ότι αν ισχύει το 2, τότε το M θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο εφόσον το P_0 είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Εφαρμόζουμε το λήμμα 110 και πέρνουμε

$$P \oplus ker\{P_0 \to M\} \approx P_0 \oplus ker(\epsilon).$$

Το αριστερό μέλος είναι πεπερασμένα παραγόμενο από υπόθεση και συνεπάγεται πως το $P_0 \oplus ker(\epsilon)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επομένος και το $ker(\epsilon)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. □

Ορισμός 111 (πεπερασμένα παραστάσιμο πρότυπο)**.** *Το M θα λέγεται πεπερασμένα παραστάσιμο αν ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη της πρότασης 5.3. Μια ακολουθίας της μορφής του 1 της πρότασης 5.3 θα λέμε ότι δίνει πεπερασμένη παράσταση του M με n γεννήτορες και m σχέσεις.*

Ορισμός 112 (πεπερασμένου τύπου ανάλυση)**.** *Μια ανάλυση ή μερική ανάλυση (P_i) θα λέγεται πεπερασμένου τύπου αν κάθε P_i είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Ορισμός 113 (πρότυπο τύπου FP_n)**.** *Ένα πρότυπο M θα λέγεται τύπου FP_n (όπου $n \geq 0$) αν υπάρχει μια μερική προβολική ανάλυση*

$$P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

που να είναι πεπερασμένου τύπου.

Παρατήρηση. *Επομένως η συνδήκη FP_0 δηλώνει απλώς ότι έχουμε πεπερασμένα παραγόμενα, η FP_1 πεπερασμένα παριστάμενα και οι μεταλύτερης τάξης είναι ισχυροποιήσεις της πεπερασμένης παράστασης.*

Η παρακάτω πρόταση έιναι γενίκευση της πρότασης 5.3 :

Πρόταση 114. *Τα παρακάτω είναι ισοδυναμα για κάθε πρότυπο M και $n \geq 0$:*

1. *Υπάρχει μια μερική ανάλυση $F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ με κάθε F_i να είναι ελεύθερο πεπερασμένης τάξης.*
2. *Το M είναι τύπου FP_n.*
3. *Το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και για κάθε μερική προβολική ανάλυση $P_k \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ πεπερασμένου τύπου με $k < n$, ο πυρήνας $ker\{P_k \to P_{k-1}\}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την παρακάτω γενίκευση του 5.3:

Λήμμα 115. *Έστω*

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

και

$$0 \to P'_n \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$$

να είναι ακριβείς ακολουθίες με τα P_i και P'_i προβολικά για $i \leq n-1$. Τότε ισχύει:

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \approx P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \cdots .$$

Επομένως αν τα P_i και P'_i είναι πεπερασμένα παραγόμενα για $i \leq n-1$, τότε το P_n είναι πεπερασμένα παραγόμενο αν και μόνον αν το P'_n είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο n. Έστω K (για το K' αντίστοιχα) να είναι ο πυρήνας του $P_{n-2} \to P_{n-3}$ (αντίστοιχα με P'). Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$K \oplus Q \approx K' \oplus Q'$$

όπου $Q = P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots$ και $Q' = P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots$. Επίσης έχουμε τις ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] & P_{n-1} \oplus Q \arrow[r] & K \oplus Q \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r] & P'_{n-1} \oplus Q' \arrow[r] & K' \oplus Q' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Εφόσον τα $P_{n-1} \oplus Q$ και $P'_{n-1} \oplus Q'$ είναι προβολικά, από το λήμμα 110 έχουμε ότι

$$P_n \oplus P'_{n-1} \oplus Q' \approx P'_n \oplus P_{n-1} \otimes Q$$

που είναι ο ισομορφισμούς που θέλαμε. □

συνεχίζουμε στην απόδειξη του 114

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ έπεται τετριμμένα, θα δείξουμε την $2 \Rightarrow 3$: Αν το πρότυπο M είναι τύπου FP_n, τότε για κάθε $k < n$ υπάρχει μια πεπερασμένου τύπου προβολική ανάλυση

$$P_k \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

με πεπερασμένα παραγόμενο πυρήνα $ker\{P_k \to P_{k-1}\}$. Απο το 115 έπεται ότι κάθε άλλη μερική προβολική ανάλυση

$$P'_k \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$$

πεπερασμένου τύπου και μήκους k έχει πυρήνα $ker\{P'_k \to P'_{k-1}\}$ πεπερασμένα παραγόμενο και έτσι το 3 ικανοποιείται. Τώρα για την συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$: Αν ισχύει το 3 τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε βήμα προς βήμα την επιθυμητή ακολουθία $F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$. □

Οι παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες χαρακτηρίζουν την περίπτωση όπου οι συνθήκες του 114 ισχύουν για κάθε θετικό n. Αυτή είναι και η περίπτωση που μας ενδιαφέρει περισσότερο:

Πρόταση 116. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Το M έχει ελεύθερη ανάλυση πεπερασμένου τύπου.*

2. *Το M έχει προβολική ανάλυση πεπερασμένου τύπου.*

3. *Το M είναι τύπου FP_n για κάθε $n \geq 0$.*

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές $1 \Rightarrow 2$ και $2 \Rightarrow 3$ είναι προφανείς. Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3 και με χρήση του τρίτου από το 114 μπορούμε να φτιάξουμε μια ελεύθερη ανάλυση πεπερασμένου τύπου βηματικά και έτσι ισχύει και η $3 \Rightarrow 1$. □

Ορισμός 117 (FP_∞)**.** *Θα λέμε πως το πρότυπο M είναι τύπου FP_∞ αν οι συνθήκες της πρότασης 116 ικανοποιούνται.*

Τώρα θα παρουσιάσουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες στην γενική τους μορφή για την περίπτωση όπου M είναι τύπου FP_n. Η γενική μορφή των ιδιοτήτων θα παρουσιαστεί για τους συναρτητές $Tor_*^R(M, \_)$ και $Ext_*^R(M, \_)$ όμως γνωρίζουμε πως στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν (για $R = \mathbb{Z}\Gamma$, $M = \mathbb{Z}$) οι παραπάνω συναρτητές πέρνουν την μορφή $H_*(\Gamma, \_)$ και $H^*(\Gamma, \_)$.

Σημείωση. *Οι συναρτητές* Tor_*^R *μετατίθενται με ευθέα (αλλιώς κατευθυνόμενα) όρια με την έννοια που περιγράφουμε στο παρακάτω λήμμα.*

Λήμμα 118. *Έστω* $\{N_i\}_{i\in I}$ *κατευθυνόμενο σύστημα* R*-προτύπων όπου* I *κατευθυνόμενο σύνολο και* $N = \varinjlim_{i\in I} N_i$. *Οι απεικονίσεις της συμβατής οικογένειας απεικονίσεων* $N_i \to N$ *για* $i \in I$, *επάγουν μια συμβατή οικογένεια ομομορφισμών αβελιανών ομάδων* $Tor_*^R(M, N_i) \to Tor_*^R(M, N)$ *από τα οποία προκύπτει η απεικόνιση:*

$$\phi : \varinjlim_{i\in I} Tor_*(M, N_i) \to Tor_*(M, N)$$

όπου η ϕ *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Θα σκιαγραφίσουμε την απόδειξη παρέχοντας μερικά κλασσικά αποτελέσματα. Το γεγονός ότι η ϕ είναι ισομορφισμός προκύπτει από τον ορισμό του $Tor_*^R(M, \_)$ ως $H_*(P \otimes_R \_)$ όπου το P είναι προβολική ανάλυση του M, σε συνδυασμό με τα παρακάτω γνωστά αποτελέσματα: 1) Το $P \otimes_R \_$ μετατίθεται με τα ευθέα αθροίσματα, και 2) $H_*(\_)$ μετατίθεται επίσης με τα ευθέα αθροίσματα. □

Για τον Ext_R^* δεν ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες μεταθετικότητας με ευθέα/κατευθυνόμενα όρια μιας και ο συναρτητής $\mathscr{Hom}_R(P, \_)$ γενικά δεν μετατίθεται με κατευθυνόμενα όρια. Όμως η επόμενη πρόταση δίνει κατάλληλες υποθέσεις για να έχουμε μεταθετικότητα:

Πρόταση 119. *Αν το* M *είναι τύπου* FP_∞ *τότε ο* $Ext_R^*(M, \_)$ *μετατίθεται με κατευθυνόμενα όρια.*

Η απόδειξη έπεται άμεσα από το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 120. *Αν το* P *είναι πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό* R*-πρότυπο τότε ο συναρτητής* $Hom_R(P, \_)$ *μετατίθεται με κατευθυνόμενα όρια.*

Απόδειξη. Ο συναρτητής $Hom_R(P, \_)$ είναι ισοδύναμος με τον $P^* \otimes_R \_$ μέσω του 'ισομορφισμού δυικότητας' και καθώς το δεύτερο μετατίθεται με κατευθυνόμενα όρια το ίδιο ισχύει και για το πρώτο. □

Ενδιαφέρον έχει πως οι ιδιότητες μεταθετικότητας των συναρτητών αυτών αρκούν για να χαρακτηρίσουν την ιδιότητα FP_∞. Όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα που παρέχουμε χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 121. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Το* M *είναι τύπου* FP_∞
2. *Ο* $Ext_R^*(M, \_)$ *μετατίθεται με κατευθυνόμενα όρια.*
3. *Ο* Tor_*^R *μετατίθεται με κατευθυνόμενα γινόμενα.*

5.4 Ομάδες τύπου FP_n

Ειδικεύουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποπαραγράφου στην περίπτωση που $R = \mathbb{Z}\Gamma$ και $M = \mathbb{Z}$. Θα λέμε πως η Γ είναι τύπου FP_n (για πεπ. θετικό n) αν το $\mathbb{Z}$ είναι τύπου FP_n ως $\mathbb{Z}\Gamma$-πρότυπο.

Σημείωση. *Με βασή τα παραπάνω κάθε ομάδα είναι τύπου FP_0 και μπορεί κανείς να διαπιστώσει πως μια ομάδα Γ είναι τύπου FP_1 ανν είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

Σημείωση. *Η συνθήκη FP_2 ειναι πιο περίπλοκη και λιγότερο κατανοητή. Είναι γνωστό πως οι πεπερασμένα παριστούμενες ομάδες Γ είναι τύπου FP_2 γιατί αν Y σύμπλοκο μήκους 2 με $\pi_1 Y = \Gamma$ τότε το σύμπλοκο κελιών του καθολικού καλύματος του Y είναι μερική ελεύθερη ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$ μήκους 2 και πεπερασμένου τύπου. Δεν είναι όμως γνωστό αν ισχύει και το αντίστροφο.*

Όπως φαίνεται στην παρακάτω πρόταση, οι συνθήκες FP_n συμπεριφέρονται καλά σε υποομάδες πεπερασμένου δείκτη:

Πρόταση 122. *Έστω $\Gamma' \subseteq \Gamma$ μια υποομάδα πεπερασμένου δείκτη. Η Γ είναι τύπου FP_n με $0 \leq n \leq \infty$ ανν Γ' είναι τύπου FP_n.*

Απόδειξη. Κάθε πεπερασμένου τύπου μερική προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$, μπορεί να θεωρηθεί και ως μερική προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma'$ και θα είναι και πάλι πεπερασμένου τύπου εφόσον $(\Gamma : \Gamma') < \infty$. Αυτό μας δίνει την μία κατεύθυνση της πρότασης. Για το αντίστροφο υποθέτουμε πως η Γ' είναι τύπου FP_n. Θα δείξουμε ότι το $\mathbb{Z}\Gamma$-πρότυπο $\mathbb{Z}$ ικανοποιεί την τρίτη συνθήκη του 114. Έστω P να είναι μερική προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma'$, που να είναι πεπερασμένου τύπου και μήκους $k < n$. Τώρα θεωρώντας το P σαν μια μερική προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}\Gamma'$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το τρίτο της 114 και συμπεραίνουμε ότι ο πυρήνας της $P_k \to P_{k-1}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma'$. Όμως ο πυρήνας της $P_k \to P_{k-1}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$ και άρα το τρίτο του 114 ισχύει για $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$. $\square$

Συμπέρασμα 123. *Στην παραπάνω πρόταση αν θέσουμε δείκτη $n = 1$ πέρνουμε ότι η Γ είναι πεπερασμένα παραγόμενη ανν η Γ' είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

Πρόταση 124. *Έστω Γ ομάδα τύπου FP_∞ και έστω n ακέραιος τ.ω. $H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) = 0$. Τότε $H^n(\Gamma, F) = 0$ για κάθε ελεύθερο $\mathbb{Z}\Gamma$-πρότυπο F.*

Απόδειξη. Αν το F είναι πεπερασμένης τάξης τότε έπεται από την προσθετικότητα του $H^n(\Gamma, \_)$. Για την γενική περίπτωση, επιλέγουμε μια βάση $(e_i)_{i \in I}$ για κάποιο F. Το F είναι το κατευθυνόμενο ορίο των F_J, δηλαδή $F = \varinjlim F_J$, όπου το J κυμαίνεται στα πεπερασμένα υποσύνολα του I και το F_J είναι το υποπρότυπο του F που παράγεται από το e_i για $i \in J$. Τότε το F είναι ελεύθερο πεπερασμένης τάξης. Τώρα με χρήση της 119 καταλήγουμε πως $H^n(\Gamma, F) = \varinjlim H^n(\Gamma, F_J) = 0$. $\square$

5.5 Ομάδες τύπου FP και FL

Στην υποπαράγραφο αυτή θα συνδυάσουμε τους δύο τύπους συνθηκών περατότητας που συναντήσαμε προηγουμένως.

Ορισμός 125 (πεπερασμένη ανάλυση)**.** *Θα λέμε πως μια ανάλυση είναι πεπερασμένη αν είναι ταυτόχρονα πεπερασμένου τύπου και πεπερασμένου μήκους.*

Ορισμός 126 (FP)**.** *Μια ομάδα Γ θα λέμε πως είναι τύπου FP αν το $\mathbb{Z}$ έχει πεπερασμένη προβολική ανάλυση πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$.*

Πρόταση 127. *Η Γ είναι τύπου FP αν μόνον αν $cd\,\Gamma < \infty$ και Γ είναι τύπου FP_∞.*

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής. Για το αντίστροφο, αν $cd\,\Gamma < \infty$ και Γ είναι τύπου FP_∞, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πεπερασμένη ανάλυση ως εξής: Παίρνουμε μια μερική ανάλυση πεπερασμένου τύπου της μορφής:

$$P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

όπου $n = cd\,\Gamma$ και έστω $P_n = ker\{P_{n-1} \to P_{n-2}\}$. Τότε το P_n είναι προβολικό (από το 4ο στο λήμμα 98) και πεπερασμένα παραγόμενο (από το 3ο του 114). Επομένως έχουμε μια πεπερασμένη προβολική ανάλυση:

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

□

Συμπέρασμα 128. *Αν η Γ είναι τύπου FP τότε υπάρχει μια πεπερασμένη προβολική ανάλυση*

$$0 \to P \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

με κάθε F_i ελεύθερο.

Απόδειξη. Αν στην απόδειξη της πρότασης 127 υποθέσουμε πως η Γ είναι τύπου FP_n αντί για FP_∞, όπου $n = cd\,\Gamma$, έπεται πως μια ομάδα Γ πεπερασμένης παράστασης, με $cd\,\Gamma = 2$ είναι τύπου FP. Παρατηρούμε επίσης ότι η μερική ανάλυση $(P_i)_{i \leq n-1}$ μπορεί κανείς να την θεωρήσει ελεύθερη. □

Επειδή δεν υπάρχει λόγος να αναμένουμε πως είναι εφικτό να πάρουμε το P ελεύθερο, θα εισάγουμε ισχυρότερες συνθήκες περατότητας:

Ορισμός 129 (FL)**.** *Μια ομάδα Γ είναι τύπου FL αν το $\mathbb{Z}$ έχει πεπερασμένη ελεύθερη ανάλυση πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$.*

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τοπολογία για να βρούμε παραδείγματα ομάδων τύπου FL με προφανή τρόπο, όπως περιγράφεται στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 130. *Αν υπάρχει ένα σύμπλοκο $K(\Gamma, 1)$ πεπερασμένο, τότε η Γ είναι τύπου FL.*

Παρατήρηση. *Από τα προηγούμενα μπορούμε να βρούμε εύκολα παραδείγματα ομάδων τύπου FL: Δηλαδή ελεύθερες ομάδες πεπερασμένης τάξης, ομάδες επιφανειών, ελεύθερες αβελιανές ομάδες πεπερασμένης τάξης κ.α. Με περισσότερη προεργασία προκύπτει ότι οι ελεύθερης στρέψης, πεπερασμένα παραγόμενες και μηδενοδύναμες ομάδες είναι επισής τύπου FL.*

Η ιδιότητα του FP επιδέχεται επίσης τοπολογική ερμηνεία. Για αυτό χρειαζόμαστε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 131 (χώρος πεπερασμένα κυριαρχούμενος (dominated»**.** *Ένας χώρος Y θα καλείται πεπερασμένα κυριαρχούμενος αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύμπλοκο K τ.ω. το Y να είναι συστολή του K στην κατηγορία της ομοτοπίας. (Δηλαδή χρειαζόμαστε απεικονίσεις $i : Y \to K$ και $r : K \to Y$ με $ri \approx id_Y$).*

Το αντίστροφο της επόμενης πρότασης είναι επίσης αληθές θα το δείξουμε όμως αργότερα για ομάδα Γ πεπερασμένης παράστασης.

Πρόταση 132. *Αν υπάρχει ένα πεπερασμένα κυριαρχούμενο σύμπλοκο $K(\Gamma, 1)$, τότε η Γ είναι τύπου FP.*

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη: Έστω Y ένα $K(\Gamma, 1)$-σύμπλοκο κυριαρχούμενο από ένα πεπερασμένο σύμπλοκο K. Μπορούμε να επιλέξουμε K τέτοιο ώστε οι απεικονίσεις $Y \leftrightarrows K$ να επάγουν π_1-ισομορφισμούς. Αν τα $\tilde{Y}$ και $\tilde{K}$ είναι καθολικά καλύμματα, μπορεί κανείς να δείξει πως το αλυσιδωτό σύμπλοκο κελιών $C(\tilde{Y})$ είναι συστολή του $C(\tilde{K})$ στην κατηγορία ομοτοπίας των αλυσιδωτών συμπλόκων πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$. Εφόσον το $C(\tilde{Y})$ είναι ελεύθερη ανάλυση του $\mathbb{Z}$ και $C(\tilde{K})$ είναι πεπερασμένο ελεύθερο σύμπλοκο, έπεται ότι το $H^*(\Gamma, \_)$ μετατίθεται με τα κατευθυνόμενα αθροίσματα και πως $H^i(\Gamma, \_) = 0$ για $i > dim\ K$. Αυτό από το 121 δίνει ότι η Γ είναι τύπου FP. $\square$

Να σημειώσουμε πως δεν υπάρχουν γνωστά παραδείγματα ομάδων τύπου FP που να μην είναι τύπου FL. Η αλλιως από τοπολογική σκοπιά: Από τα γνωστά παραδείγματα πεπερασμένα κυριαρχούμενων χώρων ο οποίοι δεν έχουν τύπο ομοτοπίας πεπερασμένου συμπλόκου, κανένα παράδειγμα δεν είναι $K(\Gamma, 1)$. Θα δώσουμε πρώτα έναν ορισμό χρήσιμο για την πρόταση που ακολουθεί, η οποία θα μας δώσει περισσότερα στοιχεία σχετικά με το πρόβλημα που αναφέραμε. Πιο συγκεκριμένα το ερώτημα της υπαρξης ομάδων τύπου FP που να μην είναι τύπου FL, οδηγεί σε ένα πιο θεμελιωδες ερώτημα: Υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα που να μην είναι σταθερά ελεύθερα;

Ορισμός 133 (σταθερά ελεύθερο πρότυπο (stably free »**.** *Ένα πρότυπο P που εμφανίζεται στην μέγιστη διάσταση μιας πεπερασμένης προβολικής ανάλυσης, θα λέγεται σταθερά ελεύθερο αν έχει την ιδιότητα το $P \oplus F$ να είναι ελεύθερο για κάποιο ελεύθερο και πεπερασμένης τάξης πρότυπο F.*

Πρόταση 134. *Έστω Γ ομάδα τύπου FP και έστω η πεπερασμένη προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$ όπου κάθε F_i είναι ελεύθερο :*

$$0 \to P \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Τότε η Γ είναι τύπου FL ανν το P είναι σταθερά ελεύθερο.

Απόδειξη. Έστω Γ να είναι τύπου FP και επιλέγουμε πεπερασμένη προβολική ανάλυση που να είναι ελεύθερη εκτός από την μέγιστη διάσταση (οπως στο συμπέρασμα 128). Θα θεωρήσουμε το P σταθερά ελεύθερο. Τότε μπορούμε να μετατρέψουμε την ανάλυση του 128 ώστε να πάρουμε μια πεπερασμένη ελεύθερη ανάλυση. Αντίστροφα, αν υπάρχει μια πεπερασμένη ελεύθερη ανάλυση, τότε μπορούμε να την συγκρίνουμε με αυτήν του 128 μέ χρήση του λήμματος 115. Έτσι θα συμπεράνουμε πως το P είναι σταθερά ελεύθερο. Στην περίπτωση όπου κάποια από τις δύο αναλύσεις εχει διαφορετικό μήκος μπορούμε πάντα να επεκτείνουμε με μηδενικά. □

Σημείωση. *Να σημειώσουμε πως η απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε προηγουμένως είναι θετική για ένα τυχαίο δακτύλιο. Όμως δεν υπάρχουν γνωστά παραδείγματα ομάδων ελεύθερων στρέψης, ενώ είναι γνωστό που μια ομάδα τύπου FP πρέπει να είναι ελεύθερη στρέψης.*

Το αποτέλεσμα της παρακάτω πρότασης αφορά για ομάδες τύπου FP. Δεν είναι γνωστό αν ισχύει το ανάλογο για ομάδες τύπου FL.

Πρόταση 135. *Έστω Γ μια ομάδα ελεύθερη στρέψης και Γ' μια υποομάδα πεπερασμένου δείκτη. Τότε η Γ είναι τύπου FP ανν η Γ' είναι τύπου FP.*

Απόδειξη. Είναι αποτέλεσμα των 108 μαζί με το 122. □

Τέλος, θα παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητες την μέγιστης διάστασης συνομολογίας ομάδων τύπου FP.

Πρόταση 136. *Αν Γ είναι ομάδα τύπου FP τότε $cd\,\Gamma = \max\{n : H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \neq 0\}$.*

Απόδειξη. Έπεται από τις προτάσεις 102 και 124. □

Πρόταση 137. *Αν η Γ είναι τύπου FP και $n = cd\,\Gamma$, τότε η απεικόνιση*

$$\phi : H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M \to H^n(\Gamma, M)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε Γ-πρότυπο M.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πως οι ομάδες συνομολογίας $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ επιδέχονται δομή κανονικού δεξιού Γ-προτύπου. Για κάθε αριστερό Γ-πρότυπο M, μπορούμε να σχηματίσουμε το τανυστικό γινόμενο $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M$ και υπάρει η κανονική απεικόνιση:

$$\phi : H^*(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M \to H^*(\Gamma, M).$$

Η απεικόνιση αυτή ορίζεται στο επίπεδο της συνομολογίας ως εξής: Έστω P μια προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$. Για μια συναλυσιδα $u \in \mathscr{H}om_\Gamma(P, \mathbb{Z}\Gamma)$ και ένα στοιχείο $m \in M$, απεικονίζουμε το $u \otimes m$ στην συναλυσίδα $x \mapsto u(x)m$, όπου $x \in P$, στο $(Hom_\Gamma)(P, M)$.
Θεωρούμε την ϕ ως τον φυσικό μετασχηματισμό μεταξύ των συναρτητών του M. Εφόσον και οι δύο συναρτητές είναι δεξιά ακριβείς, αρκεί να δείξουμε πως η ϕ είναι ισομορφισμός όταν το M είναι ελεύθερο. Και οι δύο συναρτητές είναι προσθετικοί και μετατίθενται με τα κατευθυνόμενα όρια. Επομένως αρκεί να λάβουμε υπόψη την μόνο την περίπτωση όπου το M είναι ελεύθερο από τάξη 1, δηλαδή υποθέτουμε πως $M = \mathbb{Z}\Gamma$. Σε αυτή όμως την περίπτωση η

$$\phi : H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} \mathbb{Z}\Gamma \to H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$$

είναι απλώς ο ισομορφισμός $u \otimes r \mapsto ur$.

□

Παρατήρηση. *Ο ισομορφισμός της πρότασης 137 μπορεί να γραφεί και ως εξής:*

Έστω D να είναι το Γ-πρότυπο $H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ ώστε

$$H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M = D \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M = (D \otimes M)_\Gamma = H_0(\Gamma, D \otimes M)$$

όπου $D \otimes M = D \otimes_{\mathbb{Z}} M$ με την διαγώνια δράση. Δηλαδή, εφόσον το D είναι δεξί πρότυπο και το M αριστερό, η διαγώνια δράση ορίζεται ως $\gamma \cdot (d \otimes m) = d\gamma^{-1} \otimes \gamma m$ για $\gamma \in \Gamma$, $d \in D$, $m \in M$. Και άρα μπορεί κανείς να δει τον ισομορφισμό της πρότασης 137 ως

$$H^n(\Gamma, M) \approx H_0(\Gamma, D \otimes M).$$

5.6 Τοπολογική ερμηνεία

Υπενθυμίζουμε πως η ύπαρξη $K(\Gamma, 1)$ συμπλόκου πεπερασμένης διάστασης συνεπάγεται ότι η Γ έχει πεπερασμένη συνομολογική διάσταση. Όμοια, οι προτάσεις 130 και 132 δείχνουν πως η ύπαρξη πεπερασμένου $K(\Gamma, 1)$ σύμπλοκο συνεπάγεται ότι η Γ είναι τύπου FL (αντίστοιχα για πεπερασμένα κυριαρχούμενο σύμπλοκο έχουμε FP). Σε αυτή την υποπαράγραφο θα μελετήσουμε τις αντίστροφες κατευθύνσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων. Τέλος θα δώσουμε μια τοπολογική ερμηνεία για τα Γ-πρότυπα $H^*(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ που είδαμε στην προηγούμενη υποπαράγραφο.

Θεώρημα 138. *Έστω Γ τυχαία ομάδα και έστω $n = \max\{cd\ \Gamma, 3\}$. Τότε υπάρχει ένα n-διάστατο $K(\Gamma, 1)$-σύμπλοκο Y. Αν η Γ μπορεί να παρασταθεί πεπερασμένα και είναι τύπου FL (αντ. FP) τότε το Y μπορεί να επιλεχθεί ώστε να είναι πεπερασμένο (αντ. πεπερασμένα κυριαρχούμενο).*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά τον σκελετό Y^k του επιθυμητού Y. Έστω ότι το Y^2 είναι το 2-σύμπλοκο που σχετίζεται με κάποια αναπαράσταση της Γ, και επομένως $\pi_1 Y^2 \approx \Gamma$. Αν η Γ είναι πεπερασμένα παραστώμενη τότε το Y^2 μπορεί να επιλεγεί πεπερασμένο. Να σημειώσουμε πως το καθολικό του κάλυμμα X^2 έχει $H_i = 0$ για $0 < i < 2$. Υποθέτουμε τώρα επαγωγικά πως το Y^{k-1} έχει κατασκευασθεί και πως το καθολικό του κάλυμμα X^{k-1} έχει $H_i = 0$ για $0 < i < k-1$. Αν η Γ είναι πεπερασμένα παραστώμενη και FP τύπου, τότε υποθέτουμε επιπλέον πως το Y^{k-1} είναι πεπερασμένο. Επιλέγουμε τώρα σύνολο γεννητόρων (z_α) για το Γ-πρότυπο $H_{k-1}X^{k-1}$. Από το θεώρημα του Hurewicz μπορούμε για κάθε α να βρούμε μια απεικόνιση

$$f_\alpha : S^{k-1} \to X^{k-1}$$

η οποία αναπαριστά το z_α με την έννοια ότι η

$$H_{k-1}(f_\alpha) : H_{k-1}S^{k-1} \to H_{k-1}X^{k-1}$$

στέλνει έναν γεννήτορα του $H_{k-1}S^{k-1}$ στο z_α. Τώρα θέτουμε

$$Y^k = Y^{k-1} \cup \bigcup e_\alpha^k$$

όπου το k-κελί e_α^k είναι προσκολλημένο στο Y^{k-1} μέσω την σύνθεσης

$$S^{k-1} \xrightarrow{f_\alpha} X^{k-1} \to Y^{k-1}.$$

Θεωρώντας το X^k ως το καθολικό κάλυμμα του Y^k θα πρέπει να ελέγχθεί ότι $H_i X^k = 0$ για $0 < i < k$. Το X^{k-1} μπορούμε να το δούμε ως τον $(k-1) - skelet$ του X^k. Πράγματι το X^k μπορούμε να το πάρουμε από το X^{k-1} επισυνάπτοντας k-κελιά εν μέσω της απεικόνισης f_α και του μετασχηματισμού τους μέσω την δράσης της Γ στον X^{k-1}. Γίνεται εμφανές πως $H_i X^k = H_i X^{k-1} = 0$ για $0 < i < k-1$ και έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$H_k(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\theta} H_{k-1}X^{k-1} \to H_{k-1}X^k \to 0.$$

Άρα αρκεί να δείξουμε πως η θ είναι επιμορφισμός.

Υπενθυμίζουμε πως $H_k(X^k, X^{k-1})$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}\Gamma$-πρότυπο με ένα στοιχείο βάσης για κάθε k-κελί του Y^k (δηλαδή για κάθε δείκτη α). Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια βάση (u_α) την οποία πέρνουμε ως εξής:

Αν η παρακάτω απεικόνιση είναι χαρακτηριστική απεικόνιση για το κελί που επισυνάπτεται εν μέσω της f_α:

$$\chi_\alpha : (E^k, S^{k-1}) \to (X^k, X^{k-1})$$

τότε το $u_\alpha \in H_k(X^k, X^{k-1})$ ορίζεται ως η εικόνα ενώς γεννήτορα $H_k(E^k, S^{k-1})$ υπό την απεικόνιση

$$H_k(\chi_\alpha) : H_k(E^k, S^{k-1}) \to H_k(X^k, X^{k-1}).$$

Από το παρακάτω διάγραμμα προκύπτει ότι $\partial u_\alpha = z_\alpha$

$$\begin{tikzcd} H_k(E^k, S^{k-1}) \arrow[r, "\approx", "\partial"'] \arrow[d, "H_k(z_\alpha)"] & H_{k-1}S^{k-1} \arrow[d, "H_{k-1}(f_\alpha)"] \\ H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[r, "\partial"] & H_{k-1}X^{k-1} \end{tikzcd}$$

και έτσι η ∂ είναι πράγματι επιμορφισμός.

Για να ολοκληρωθεί το επαγωγικό βήμα πρέπει να δείξουμε πως το Y^k μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι πεπερασμένα αν η Γ μπορεί να παρασταθεί πεπερασμένα και είναι τύπου FP. Δηλαδή, στην συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να δείξουμε ότι η $H_{k-1}X^{k-1}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο Γ-πρότυπο. Για να φανεί αυτό αρκεί να σημειώσουμε πως το αλυσιδωτό σύμπλοκο κελιών

$$C_{k-1} \to \cdots \to C_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

από X^{k-1} είναι μερική ελεύθερη ανάλυση πεπερασμένου τύπου. Αυτό επειδή το Y^{k-1} έχει θεωρηθεί πεπερασμένο. Επομένως η $H_{k-1} = ker\{C_{k-1} \to C_{k-2}\}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη μιας και η Γ είναι τύπου FP (αυτό λόγω του 114).

Στην περίπτωση όπου $n = \infty$ συνεχίζουμε την επαγωγική διαδικασία επ αορίστου και $Y = \bigcup_k Y^k$ είναι το $K(\Gamma, 1)$ σύμπλοκο που θέλαμε. Στην περίπτωση όπου $n < \infty$ θεωρούμε πως έχουμε το X^{n-1}. Το σύμπλοκο κελιών του ειναι το αλυσιδωτό σύμπλοκο:

$$C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

το οποίο είναι μερική ελεύθερη ανάλυση με μήκος $n-1$. Επομένως από την πρόταση 98 έχουμε πως το $H_{n-1}X^{n-1}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}\Gamma$-πρότυπο. Τώρα από το 107 έχουμε την ύπαρξη ενός ελεύθερου προτύπου F τ.ω. το $H_{n-1}H^{n-1} \oplus F$ να είναι ελεύθερο. Αν αντικαταστήσουμε το Y^n με $Y^{\bar{n}-1} = Y^{n-1} \vee S^{n-1} \vee S^{n-1} \vee \cdots$, όπου υπάρχει ένα αντίγραφο του S^{n-1} για κάθε στοιχείο βάσης του F. Για το $C(X^{n-1})$ αντιστοιχεί στο να επισυνάψουμε το F στο C_{n-1} μέσω $\partial|F = 0$. Το καθολικό κάλυμμα $X^{\bar{n}-1}$ έχει τώρα ελεύθερη H_{n-1}. Μπορούμε άρα να επισυνάψουμε κελιά n διάστασης e^n_α στο $Y^{\bar{n}-1}$ που να αντιστοιχούν στα στοιχεία της βάσης z_α του $H_{n-1}X^{\bar{n}-1}$. Και επομένως το $\bar{Y^n}$ που προκύπτει θα είναι σύμπλοκο $K(\Gamma, 1)$ n διάστασης.

Υποθέτουμε πως η Γ μπορεί να παρασταθεί πεπερασμένα και είναι FL τύπου. Τότε η Y^{n-1} είναι πεπερασμένη και το προβολικό $H_{n-1}X^{n-1}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Γνωρίζουμε ακόμη από την πρόταση 134 πως το $H_{n-1}X^{n-1}$ είναι σταθερά ελεύθερο και άρα υπάρχει ένα ελεύθερο πρότυπο F πεπερασμένης τάξης ώστε το $H_{n-1}X^{n-1} \oplus F$ να είναι ελεύθερο πεπερασμένης τάξης. Συνεχίζοντας όπως προηγουμένως το $\bar{Y^n}$ θα είναι πεπερασμένο $K(\Gamma, 1)$.

Τέλος, υποθέτουμε πως η Γ μπορεί να παρασταθεί πεπερασμένα αλλά είναι μόνο τύπου FP. Το γενικό επαγωγικό βήμα μας δίνει ένα πεπερασμένο σύμπλοκο της μορφής

$$Y^n = Y^{n-1} \cap e^n \cap \cdots \cap e^n$$

το οποίο για $0 < i < n$ έχει καθολικό κάλυμμα με $H_i = 0$. Άρα για $1 < i < n$, η i-στή ομάδα ομοτοπίας του Y^n και η i-στή του X^n είναι τετριμμένες. Επίσης γνωρίζουμε πως υπάρχει σύμπλοκο $K(\Gamma, 1)$ της μορφής:

$$\bar{Y^n} = Y^{n-1} \vee S^{n-1} \vee \cdots \cup e^n \cup \cdots$$

ώστε $\pi_i \bar{Y^n} = 0$ για κάθε $i > 1$. Κάνουμε τον ισχυρισμό πως το Y^n κυριαρχεί στο $\bar{Y^n}$. Πράγματι η απεικονίσεις

$$\bar{Y^n} \xrightarrow{i} Y^n \xrightarrow{r} \bar{Y^n}$$

όπου $ri \approx id$ μπορούν να κατασκευαστούν ώς εξής:
Τα i και r ορίζονται ως το ταυτοτικό του κοινού υποσυμπλόκου Y^{n-1}. Τέλος, η ομοτοπία $ri \approx id$ ορίζεται να είναι η σταθερή ομοτοπία στο Y^n και επεκτείνεται σε όλα τα $\bar{Y^n}$. □

Συμπέρασμα 139. *Αν έχουμε $cd\,\Gamma \geq 3$ τότε η $cd\,\Gamma$ είναι ίση με την $geom\ dim\,\Gamma$.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ειδίκευση της πρότασης 138 :

Πρόταση 140. *Το σύμπλοκο Y της 138 μπορούμε να το επιλέξουμε ώστε να είναι simplicial σύμπλοκο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε επαγωγικά πως το Y^{k-1} είναι simplicial. Από το θεώρημα προσέγγισης μπορούμε των simplexes μπορούμε να επιλέξουμε κάθε απεικόνιση συγκόλισης

$$f_\alpha : S^{k-1} \to Y^{k-1}$$

να είναι simplicial με κάποια τριγωνοποίηση του S^{k-1}. Ο χώρος που πέρνουμε είναι τριγωνοποιήσιμος από θεώρημα του Whitehead. □

Παρακάτω θα δώσουμε μια τοπολογική ερμηνεία για τα δεξία Γ-σύμπλοκα $H^*(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ υπό την υπόθεση ότι η Γ μπορεί να παρασταθεί πεπερασμένα και είναι τύπου FL. Πρώτα όμως θα χρειαστούμε κάποιες παρατηρήσεις.

Λήμμα 141. *Έστω Γ μια ομάδα και M αριστερό Γ-πρότυπο. Έστω $Hom_c(M, \mathbb{Z}) \subset Hom(M, \mathbb{Z})$ να αποτελείται από όλους τους αβελιανούς ομομορφιμούς ομάδων $f : M \to \mathbb{Z}$ ώστε για κάθε $m \in M$ να ισχύει $f(\gamma m) = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένου πλήθους $\gamma \in \Gamma$. Τότε υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$Hom_\Gamma(M, \mathbb{Z}\Gamma) \approx Hom_c(M, \mathbb{Z}).$$

Απόδειξη. Μια απεικόνιση $\mathbb{Z}$-προτύπων $F : M \to \mathbb{Z}\Gamma$ θα έχει την μορφή $F(m) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(m)\gamma$ όπου $f_\gamma : M \to \mathbb{Z}$ και για κάθε $m \in M$ η $f_\gamma(m) = 0$ σχεδόν για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Μπορεί επίσης να ελεγχθεί πως ένα τέτοιο F είναι ένας ομομορφισμός Γ-προτύπων ανν

$$f_\gamma(m) = f_1(\gamma^{-1}m) \;\; \forall\gamma \in \Gamma.$$

Επομένως έχουμε μια απεικόνιση

$$Hom_\Gamma(M, \mathbb{Z}\Gamma) \to Hom_c(M, \mathbb{Z})$$

που δίνεται ως

$$F \mapsto f_1.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι ισομορφισμός με την αντίστροφή της να είναι η:

$$f \mapsto \{m \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma^{-1}m)\gamma\}.$$

Ο παραπάνω ισορμορφισμός είναι επίσης φυσικός και συμβατός με τις δεξιές δράσεις της Γ. □

Συμπέρασμα 142. *Ο ισομορφισμός της 141 είναι ισομορφισμός από δεξιά Γ-πρότυπα όπου η Γ δρα στο $Hom_\Gamma(M, \mathbb{Z}\Gamma)$ εν μέσω της δεξιάς δράσης του $\mathbb{Z}\Gamma$ ενώ η Γ δρά στο $Hom_c(M, \mathbb{Z})$ εν μέσω της αριστερής δράσης στο M. Δηλαδή:*

$$(f\gamma)(m) - f(\gamma m)$$

όπου $f \in Hom_c(M, \mathbb{Z})$ με το γ να ανήκει στο Γ και το m στο M.

Πρόταση 143. *Αν ο X είναι συσταλτός χώρος και Γ-σύμπλοκο με συμπαγές πηλίκο X/Γ, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$H^*(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \approx H_c^*(X; \mathbb{Z})$$

από δεξιά Γ-σύμπλοκα όπου η δεξιά δράση της Γ στο $H_c^*(X; \mathbb{Z})$ επάγεται από την αριστερή δράση της Γ στον X.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πως η Γ μπορεί να παρασταθεί πεπερασμένα και είναι τύπου FL. Τότε από το θεώρημα 138 έχουμε ότι υπάρχει σύσταλτό και ελεύθερο Γ-σύμπλοκο X όπου το πηλίκο X/Γ να είναι πεπερασμένο. Τότε το $C(X)$ είναι μια πεπερασμένη ελεύθερη ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$ και η συνομολογία του $\mathscr{H}om_\Gamma(C(X), \mathbb{Z}\Gamma)$ είναι $H^*(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$. Από την οπτική του λήμματος 141 έχουμε τον ισομορφισμό:

$$\mathscr{H}om_\Gamma(C(X), \mathbb{Z}\Gamma) \approx \mathscr{H}om_c(C(X), \mathbb{Z}) \subset \mathscr{H}om(C(X), \mathbb{Z}).$$

Ο παραπάνω ισομορφισμός είναι συμβατός με δεξιά δράση του Γ και τους συ-συνοριακούς τελεστές λόγω της φυσικότητας. Υπενθυμίζουμε ότι το $C(X)$ έχει μια $\mathbb{Z}$-βάση με ένα στοιχείο από κάθε κελί σ του X. Τα στοιχεία της βάσης τα μεταθέτει ελεύθερα η Γ και εμπίπτουν σε πεπερασμένου πεπερασμένου πλήθους τροχιές. Επομένως μπορεί να ελεγχθεί πως το $\mathscr{H}om_c(C(X),\mathbb{Z})$ αποτελείται από τα $f \in \mathscr{H}om(C(X),\mathbb{Z})$ για τα οποία ισχύει $f(\sigma) = 0$ για όλα πλην πεπερασμένων σ κελιών. Η συνομολογία του συμπλόκου αυτού ονομάζεται και 'ομολογία του X με σύμπαγή στηρίγματα' και **σύμβολίζεται με** $H_c^*(X;\mathbb{Z})$ όπως διατυπώσαμε και στην πρόταση. □

Συμπέρασμα 144. *Αν ο X είναι όπως στην προηγούμενη πρόταση, τότε:*

$$cd\,\Gamma = \max\{n : H_c^n(X;\mathbb{Z}) \neq 0\}.$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της πρότασης 136. □

5.7 Ομάδες δυικότητας

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα μελετήσουμε τις ομάδες Γ για τις οποίες ισχύει ο ισομορφισμός:

$$H^i(\Gamma, M) \approx H_{n-i}(\Gamma, D \otimes M).$$

Ο παραπάνω ισομορφισμός είναι γενίκευση του ισομορφισμού που συναντήσαμε στην παρατήρηση 5.5 και θα ασχοληθούμε με τις ομάδες για τις οποίες η παραπάνω γενίκευση ισχύει. Απο την 5.5 γνωρίζουμε πως για κάθε ομάδα Γ που είναι τύπου FP, υπάρχει ο ισομορφισμός: $H^n(\Gamma, M) \approx H_0(\Gamma, D \otimes M)$. Εδώ το M είναι τυχαίο Γ-πρότυπο με $n = cd\ \Gamma$ και το D είναι το δεξιό Γ-πρότυπο $H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$. Το $D \otimes M = D \otimes_{\mathbb{Z}} M$ με την διαγώνια Γ-δράση.

Θεώρημα 145. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια ομάδα Γ τύπου FP:*

1. *Υπάρχει ακέραιος n και Γ-πρότυπο D τ.ω.*

   $$H^i(\Gamma, M) \approx H_{n-i}(\Gamma, D \otimes M)$$

   για κάθε Γ-πρότυπο M και ακέραιο i.

2. *Υπάρχει ακέραιος n τ.ω. $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma \otimes A) = 0$ για κάθε $i \neq n$ και κάθε αβελιανή ομάδα A.*

3. *Υπάρχει ακέραιος n τ.ω. $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) = 0$ για κάθε $i \neq n$ και $H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ είναι ελεύθερο στρέψης ως αβελιανή ομάδα.*

4. *Υπάρχουν οι φυσικοί ισομορφισμοί*

   $$H^i(\Gamma, \_) \approx H_{n-i}(\Gamma, D \otimes \_),$$

όπου $n = cd\ \Gamma$ και $D = H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$, οι οποίοι είναι συμβατοί με τους συνδετικούς ομομορφισμούς των μακρών ακριβών ακολουθιών ομολογίας και συνομολογίας που σχετίζονται με μια βραχεία ακριβής ακολουθία προτύπων.

Απόδειξη. Για την συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$, εφαρμόζουμε το 1 με το M να είναι ένα επαγόμενο (induced) πρότυπο $\mathbb{Z}\Gamma \otimes A$. Τότε το $D \otimes M$ είναι επίσης επαγόμενο (συμπέρασμα γνωστής πρότασης). Εφόσον τα επαγόμενα πρότυπα είναι H_*-άκυκλα, έπεται από το 1 ότι

$$H^i(\Gamma, M) \approx H_{n-i}(\Gamma, D \otimes M) = 0$$

για $i \neq n$.
Για την συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$, εφαρμόζουμε το 2 για $A = \mathbb{Z}$ και έχουμε $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) = 0$ για $i \neq n$. Εφαρμόζουμε το 2 με $A = \mathbb{Z}_k$ όπου $k > 0$, και με χρησιμοποιούμε την ακριβή ακολουθία συνομολογίας που σχετίζεται με την βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$0 \to \mathbb{Z}\Gamma \xrightarrow{k} \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma \otimes \mathbb{Z}_k \to 0.$$

Έτσι οδηγούμαστε στο:

$$0 = H^{n-1}(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma \otimes \mathbb{Z}_k) \to H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) \xrightarrow{k} H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma),$$

δείχνοντας έτσι πως η $H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ δεν έχει k-στρέψη.

Για την συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 4$: Μια πρώτη παρατήρη είναι οτι ο ακέραιος n του 3 είναι απαραίτητα ίσο με $cd\ \Gamma$ όπως προκύπτει από το 136. Έστω πως το $P = (P_i)_{0 \leq i \leq n}$ είναι μια πεπερασμένη προβολική ανάλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω στο $\mathbb{Z}\Gamma$ μήκους n. Θεωρούμε το δυικό σύμπλοκο $\bar{P} = \mathscr{H}om_\Gamma(P, \mathbb{Z}\Gamma)$. Εφόσον $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) = 0$ για $i \neq n$, το $\bar{P}$ μας δίνει μια προβολική ανάλυση του $D = H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$:

$$\cdots \to \bar{P}^{n-1} \to \bar{P}^n \to D \to 0.$$

Ειδικότερα, το n-στο suspension $\sum^n \bar{P}$ είναι μια προβολική ανάλυση του D. Μέσω του γνωστού ισομορφισμού δυικότητας:

$$\mathscr{H}om_\Gamma(P, M) \approx \bar{P} \otimes_\Gamma M$$

προκύπτει ότι

- $H^i(\Gamma, M) \approx H_{-i}(\bar{P} \otimes_\Gamma M) = H_{n-i}(\sum^n \bar{P} \otimes_\Gamma M) = Tor^\Gamma_{n-i}(D, M)$ για κάθε Γ-πρότυπο M. Εφόσον το D είναι ελεύθερο στρέψης, εφαρμόζοντας την πρόταση 10, έχουμε ότι:

- $Tor^\Gamma_{n-i}(D, M) \approx H_{n-i}(\Gamma, D \otimes M)$.

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι φυσικές και συμβατές με τους συνδετικούς ομομορφισμούς και έτσι έπεται το 4.

Η συνεπαγωγή $4 \Rightarrow 1$ είναι τετριμμένη.

$\square$

Ορισμός 146 (ομάδα δυικότητας)**.** *Αν η Γ ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος θα λέμε πως είναι 'ομάδα δυικότητας', ενώ το Γ-πρότυπο $D = H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ θα καλείται 'πρότυπο δυικότητας' της Γ.*

Σημείωση. *Αν επιπλέον το πρότυπο D (όπως ορίστηκε παραπάνω) είναι άπειρη κυκλική ομάδα ως αβελιανή ομάδα, τότε η Γ ονομάζεται 'ομάδα δυικότητας Poincare'. Στην περίπτωση αυτή η Γ καλείται 'προσανατολίσιμη' αν δρα τετριμμένα στο D.*

Αν η Γ είναι προσανατολίσιμη ομάδα δυικότητας Poincare, τότε το 4 του θεωρήματος πέρνει την γνωστή μορφή που ξέρουμε για την δυικότητα Poincare των κλειστών προσανατολίσιμων πολλαπλοτήτων: $H^i(\Gamma, M) \approx H_{n-i}(\Gamma, M)$

Βιβλιογραφία

[1] Kenneth S. Brown (1982), «Cohomology of Groups», Springer, ISBN: 978-1-4684-9327-6 .

[2] Δ. Θάνος (2017), πτυχιακή εργασία «Ομολογικές και συνομολογικές ομάδες», Βιβλιοθήκη Παν. Αιγαίου.

[3] Kenneth S. Brown (2009), «Lectures on the Cohomology of Groupss», *Cohomology of Groups and Algebraic K-the., p. 131-166.*

[4] Spanier, Edwin H. (1966), «Algebraic Topology», Springer, ISBN 978-1-4684-9322-1 .

[5] MacLane, Saunders (1995), «Homology», Springer, ISBN 978-3-642-62029-4.