

Η Γεωμετρική Ανισότητα Hardy

Βάγια Στάμου

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Ειδίκευση στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ιούλιος 2021



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επιβλέποντες

Γ. Μπαρμπάτης, καθηγητής(Επιβλέπων)

Ι. Στρατής, καθηγητής

Δ. Χελιώτης, αναπληρωτής καθηγητής

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη, επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, για την πάντα πρόθυμη παρουσία του σε όλη τη διάρκεια της εξερεύνησης του θέματος και για την πολύτιμη βοήθεια που γενναιόδωρα μου προσέφερε.

Ευχαριστώ επίσης τον σύντροφο μου Γιώργο για την αμέριστη συμπαράσταση και κατανόηση που επέδειξε στο πρόσωπο μου.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένεια και τους φίλους μου, οι οποίοι με στερήθηκαν για λίγο διάστημα, αλλά δεν άψαν να με στηρίζουν, ώστε να ολοκληρώσω κάτι που αγαπώ.

Αφιερωμένο στον γιο μου,
το κίνητρο μου προς την εξέλιξη.

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία ασχολούμαστε με ανισότητες Hardy, που αφορούν απόσταση από το σύνορο του χωρίου. Σε αυτές τις ανισότητες έχει σημασία η γεωμετρία του χωρίου που εργαζόμαστε. Ξεκινώντας με τη μελέτη της μονοδιάστατης Hardy μεταβαίνουμε στην αντίστοιχη πολυδιάστατη για κυρτά χωρία. Στη συνέχεια βλέπουμε την επέκταση της σε mean convex χωρία, καθώς και μία εναλλακτική απόδειξη για κυρτά χωρία, στην οποία χρησιμοποιούμε για την περιγραφή τους, μία αύξουσα ακολουθία πολυπλεύρων. Επίσης μελετάμε την ανισότητα Rellich, την ανισότητα Hardy δηλαδή σε ανώτερη τάξη. Επιπροσθέτως παρουσιάζουμε και μία μορφή βελτιωμένης ανισότητας Hardy. Τέλος ερευνούμε την συμπεριφορά της βέλτιστης σταθεράς Hardy σε ένα μη κυρτό, άπειρο κυκλικός τομέα.

In this thesis we consider Hardy inequalities, which concern distance from the boundary of the domain. In these inequalities, the geometry of the domain we work in, matters. Considering first the one-dimensional Hardy inequality, we move to the corresponding multidimensional inequality for convex domains. We then study its extension to mean convex domains, as well as an alternative proof for convex domains, which uses an increasing sequence of polyedra. We also investigate Rellich inequalities, that is, the higher-order versions of Hardy inequalities. Finally, we investigate the behavior of the optimal Hardy constant, in a non-convex, infinite circular sector.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	6
2	Βασικές έννοιες	8
2.1	Χώροι Sobolev	8
2.2	Μετασχηματισμός Fourier	10
2.3	Όγκος αστρόμορφου χωρίου	11
3	Η ανισότητα Hardy	12
3.1	Ανισότητα Hardy σε μία διάσταση	12
3.2	Ανισότητα Hardy στις πολλές διαστάσεις	16
4	Δεύτερη απόδειξη της ανισότητας Hardy	21
5	Τρίτη απόδειξη της ανισότητας Hardy	27
6	Η ανισότητα Rellich	31
7	Βελτιωμένες ανισότητες Hardy	35
8	Η ανισότητα Hardy σε άπειρο κυκλικό τομέα	38

1 Εισαγωγή

Η ανισότητα Hardy αποτελεί κομμάτι των νεότερων μαθηματικών στον τομέα της μαθηματικής ανάλυσης. Έχει εφαρμογές σε ελλειπτικές και παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με ιδιάζοντα δυναμικά.

Η γενική μορφή της ανισότητας Hardy δίνεται από τον τύπο

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq c(\Omega, K) \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d_K^p} dx.$$

Εδώ $p > 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $K \subset \bar{\Omega}$ κλειστό, $d_K(x) = \text{dist}(x, K)$ και απαιτούμε η ανισότητα να ισχύει για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Οι δύο περιπτώσεις για το K που έχουν απασχολήσει περισσότερο τους μαθηματικούς είναι

$$K = \{0\} \quad \text{και} \quad K = \partial\Omega.$$

Ειδικότερα εμείς θα ασχοληθούμε με την περίπτωση

$$K = \partial\Omega,$$

στην οποία έχει σημασία η γεωμετρία του Ω , γι' αυτό το λόγο, με αυτή τη συνθήκη για το K , η ανισότητα ονομάζεται γεωμετρική ανισότητα Hardy.

Για $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, η βέλτιστη σταθερά Hardy δίνεται από τον τύπο

$$H_p = \inf \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx}$$

Εμείς θα δουλέψουμε με χωρία για τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς τη βέλτιστη σταθερά Hardy.

Θα δούμε λοιπόν παρακάτω αναλυτικά πως για χωρίο Ω κυρτό, αλλά και γενικότερα για ασθενώς mean convex χωρία, δηλαδή $\Delta d \leq 0$:

$$H_p = \left(\frac{p-1}{p} \right)^p,$$

για χωρίο Ω το οποίο περιγράφεται ως ένας άπειρος τομέας γωνίας $\beta > \pi$:

$$\Omega_\beta = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \beta\},$$

η $H_2(\Omega_\beta)$ υπολογίζεται και

$$H_2(\Omega_\beta) \leq \frac{1}{4}.$$

Στην εργασία αυτή θα δούμε τις εξής μεθόδους απόδειξης:

- Μέθοδος μέσης απόστασης του Davies.
- Μέθοδος θετικής υπερλύσης.
- Προσέγγιση του χωρίου Ω , μέσω μίας αύξουσας ακολουθίας κυρτών πολυπλεύρων.

Ένα ακόμη θέμα που έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές είναι η βελτίωση της εν λόγω ανισότητας, προσθέτοντας θετικούς όρους στο δεύτερο μέλος της.

Μία βελτιωμένη εκδοχή, της οποίας την απόδειξη της θα δούμε στη συνέχεια είναι

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right) \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx + K_p \left(\frac{a_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{p}{N}} \int_{\Omega} |u|^p dx, \quad u \in C_c^\infty(\Omega),$$

όπου K_p σταθερά εξαρτώμενη από το p και a_N ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας.

Τέλος, να αναφέρουμε ότι η ανισότητα Hardy αποτελεί ειδική περίπτωση μίας άλλης ανισότητας ανώτερης τάξης, της ανισότητας Rellich:

$$\int_{\Omega} |\Delta^{\frac{m}{2}} u|^p dx \geq A(m, p) \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^{pm}} dx,$$

όπου $A(m, p)$ σταθερά εξαρτώμενη από τα $m \in \mathbb{N}$ και $p > 1$.

Την συγκεκριμένη θα την αποδείξουμε παρακάτω για $p = 2$.

2 Βασικές έννοιες

Ξεκινώντας θα εισάγουμε τις βάσεις των εννοιών που θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία.

2.1 Χώροι Sobolev

Έστω Ω ένα ανοικτό χωρίο του $\mathbb{R}^N$. Για $1 < p \leq \infty$, ορίζουμε

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ μετρήσιμη και } u \in L^1(U), \text{ για κάθε } U \subset\subset \Omega\}$$

Ορίζουμε επίσης

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ και } \text{supp}(u) \subset\subset \Omega\}$$

Ορισμός 2.1. (ασθενής παραγωγός) Λέμε ότι η συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη, αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, g_2, \dots, g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\Omega} u(x) \phi_{x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} g_i(x) \phi(x) dx, \quad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq n$$

Οι $g_1, g_2, \dots, g_n$ είναι μοναδικές (μέχρι σύνολα μέτρου 0), ονομάζονται ασθενείς παράγωγοι της u και συμβολίζονται u_{x_i} .

Ορισμός 2.2. (Χώρος Sobolev) Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^N$ και $p \geq 1$, ορίζουμε

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ ασθενώς παραγωγίσιμη και } u_{x_i} \in L^p(\Omega)\}$$

Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος και ονομάζεται χώρος Sobolev με νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ορισμός 2.3. Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Εκτός από τον χώρο $W^{1,p}(\Omega)$, στην παράγραφο 6 εργαζόμαστε και στον χώρο $W^{k,2}(\Omega)$ ο οποίος σε ακριβή αντιστοιχία με τον $W^{1,p}(\Omega)$ είναι επίσης χώρος Sobolev.

Ορισμός 2.4. Ο χώρος *Sobolev* $W^{k,2}(\Omega)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $u \in L^2(\Omega)$ που έχουν ασθενείς μερικές παραγώγους $D^a u$, $a \in \mathbb{N}_0^d$ τάξης έως και k , $|a| \leq k$, και όλες αυτές οι μερικές παράγωγοι ανήκουν στον $L^2(\Omega)$. Στο χώρο αυτό ορίζεται η νόρμα

$$\|u\|_{k,2} = \left(\sum_{|a| \leq k} \|D^a u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.2 Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 2.5. (μετασχηματισμός Fourier) Έστω $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ορίζουμε

$$\widehat{u}(\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(x) dx, \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^N$$

Διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη τις ακόλουθες ιδιότητες

(i) (αντίστροφος μετασχηματισμός)

Ο $\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ επεκτείνεται σε έναν μοναδιαίο τελεστή (ισομετρία και επί)

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

και επιπλέον για $v \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ ισχύει

$$(\mathcal{F}^{-1}v)(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} v(\xi) d\xi, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^N$$

(ii) Αν $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ τότε

$$\widehat{u_{x_k}}(\xi) = i\xi_k \widehat{u}(\xi)$$

Για $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, συνέπεια των παραπάνω ιδιοτήτων είναι τα εξής

$$\int_{\Omega} |\partial_{\omega}^m u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\omega \cdot \xi)^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.1)$$

και

$$\int_{\Omega} |\Delta^{\frac{m}{2}} u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.2)$$

Στην σχέση (2.2) και στην περίπτωση που m είναι περιττός, δηλαδή $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, το πρώτο ολοκλήρωμα ερμηνεύεται ως εξής

$$\int_{\Omega} |\Delta^{\frac{m}{2}} u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \Delta^k u|^2 dx.$$

2.3 Όγκος αστρόμορφου χωρίου

Ορισμός 2.6. Το χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ονομάζεται αστρόμορφο ως προς την αρχή των αξόνων αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση

$$g : S^{N-1} \rightarrow (0, \infty) \text{ τέτοια ώστε } \Omega = \{(r, \omega) : r < g(\omega)\}$$

Πρόταση 2.7. Αν Ω αστρόμορφο και $u(x)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο Ω , τότε

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \int_{S^{N-1}} \int_0^{g(\omega)} u(r, \omega) r^{N-1} dr dS(\omega)$$

Ειδικεύοντας την Πρόταση 2.7 για να υπολογίσουμε τον όγκο του χωρίου Ω , έχουμε

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_{\Omega} dx \\ &= \int_{S^{N-1}} \int_0^{g(\omega)} r^{N-1} dr dS(\omega) \\ &= \frac{1}{N} \int_{S^{N-1}} g^N(\omega) dS(\omega) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Συμβολίζουμε a_N τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας, οπότε

$$\int_{S^{N-1}} dS(\omega) = Na_N \quad (2.4)$$

Έστω $ds(\omega)$ το σύνηθες μέτρο στη μοναδιαία σφαίρα, κανονικοποιημένο, έτσι ώστε $\int_{S^{N-1}} ds(\omega) = 1$. Τότε

$$dS(\omega) = Na_N ds(\omega)$$

Με το κανονικοποιημένο μέτρο και λόγω της (2.4), η (2.3) γίνεται,

$$\begin{aligned} |\Omega| &= Na_N \frac{1}{N} \int_{S^{N-1}} g^N(\omega) ds(\omega) \\ &= a_N \int_{S^{N-1}} g^N(\omega) ds(\omega) \end{aligned} \quad (2.5)$$

3 Η ανισότητα Hardy

Η γεωμετρική ανισότητα Hardy για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, δίνεται απο τον τύπο

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq c \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx, \quad u \in C_c^\infty(\Omega),$$

όπου $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, c σταθερά εξαρτώμενη από το p και $p > 1$.

Αποδεικνύεται ότι αν το Ω είναι φραγμένο με ομαλό σύνορο, τότε ισχύει η ανισότητα Hardy, δηλαδή $c > 0$.

Αν το $\partial\Omega$ είναι ομαλό, ή γενικότερα έχει ένα ομαλό κομμάτι, τότε $c \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p$.

3.1 Ανισότητα Hardy σε μία διάσταση

Αρχικά θα αποδείξουμε την μονοδιάστατη ανισότητα Hardy, για να το καταφέρουμε θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.

Εστω $b > 0$. Ορίζουμε $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$.

Λήμμα 3.1. Έστω $g \in C^1((0, b])$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_0^{2b} |u'(t)|^p dt \geq \int_0^{2b} \{g'(\rho) - (p-1)|g(\rho)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt - 2g(b)|u(b)|^p \\ \text{(ii)} \quad & \int_0^{2b} |u'(t)|^p dt \geq \int_0^{2b} \{g'(\rho) - (p-1)|g(\rho) - g(b)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt \end{aligned}$$

για όλες τις $u \in C_c^\infty(0, 2b)$

Απόδειξη. Για το (i) για $u \in C_c^\infty(0, 2b)$ εφαρμόζοντας τις ανισότητες Hölder και Young έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^b g'(t)|u(t)|^p dt &= g(b)|u(b)|^p - p \int_0^b g(t)|u(t)|^{p-2} u(t) u'(t) dt \\ &\leq g(b)|u(b)|^p + p \left(\int_0^b |u'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^b |g(t)|^{\frac{p}{p-1}} |u(t)|^p dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq g(b)|u(b)|^p + \int_0^b |u'(t)|^p dt + (p-1) \int_0^b |g(t)|^{\frac{p}{p-1}} |u(t)|^p dt \end{aligned}$$

οπότε,

$$\int_0^b |u'(t)|^p dt \geq \int_0^b \{g'(t) - (p-1)|g(t)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt - g(b)|u(b)|^p.$$

Με παρόμοια βήματα ολοκληρώνοντας στο διάστημα $(b, 2b)$ έχουμε

$$\int_b^{2b} |u'(t)| dt \geq \int_b^{2b} \{g'(2b-t) - (p-1)|g(2b-t)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt - g(b)|u(b)|^p.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_0^{2b} |u'(t)| dt &\geq \int_0^b \{g'(t) - (p-1)|g(t)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt \\ &\quad + \int_b^{2b} \{g'(2b-t) - (p-1)|g(2b-t)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt - 2g(b)|u(b)|^p \\ &\geq \int_0^{2b} \{g'(\rho) - (p-1)|g(\rho)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt - 2g(b)|u(b)|^p \end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. Για την απόδειξη του (ii) αρκεί να βάλουμε στην (i) όπου $g(x)$ το $g(x) - g(b)$.

□

Για να φτάσουμε στην ανισότητα Hardy θα χρειαστεί να ορίσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις

$$\begin{aligned} g(s) &= -\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} s^{-(p-1)} \\ A(s) &= g'(s) - (p-1)|g(s) - g(b)|^{\frac{p}{p-1}} - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p s^{-p} \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου $s \in (0, b)$

Για αυτές λοιπόν τις συναρτήσεις έχουμε το λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 3.2. Έστω $p > 1$ ισχύουν τα εξής

- (i) $g'(s) - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p s^{-p} = (p-1)|g(s)|^{\frac{p}{p-1}} \quad s > 0$
- (ii) $A(s)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του s

Απόδειξη. Για την απόδειξη του (i) ξεκινώντας από το πρώτο μέλος με πράξεις θα καταλήξουμε στο δεύτερο μέλος.

$$\begin{aligned}
g'(s) - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p s^{-p} &= -\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} [-(p-1)] s^{-(p-1)-1} - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p s^{-p} \\
&= \frac{(p-1)^p s^{-p}}{p^{p-1}} - \frac{(p-1)^p s^{-p}}{p^p} \\
&= (p-1) \left(\frac{p-1}{p}\right)^p s^{-p} \\
&= (p-1) \left[\left\{ \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} s^{-(p-1)} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \right]^p \\
&= (p-1) |g(s)|^{\frac{p}{p-1}}
\end{aligned}$$

Για το (ii) θα δούμε εύκολα ότι η παράγωγος της $A(s)$ είναι αρνητική για $p > 1$.

$$\begin{aligned}
A'(s) &= g''(s) - p|g(s) - g(b)|g'(s) - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p (-p)s^{-p-1} \\
&= -\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{p}{s} \left(\frac{p-1}{s} + p|g(s) - g(b)| \right) < 0
\end{aligned}$$

□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δούμε την ανισότητα Hardy στη μία διάσταση.

Θεώρημα 3.3. Έστω $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$ και $p > 1$. Τότε

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \int_0^{2b} |u'(t)|^p dt \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^{2b} \frac{|u(t)|^p}{\rho^p(t)} dt, \quad \forall u \in C_c^\infty(0, 2b) \\
\text{(ii)} \quad & \int_0^b |u'(t)|^p dt \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^b \frac{|u(t)|^p}{t^p} dt, \quad \forall u \in C^\infty(0, b] \\
& \text{τέτοια ώστε } u = 0 \text{ κοντά στο } 0. \tag{3. 7}
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του (i) θα πάρουμε την σχέση (i) του Λήμματος 3.1 όπου θέτοντας $g(t)$ την συνάρτηση της (3. 6) και χρησιμοποιώντας το

συμπέρασμα της (3.2) θα καταλήξουμε στο ζητούμενο. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2b} |u'(t)|^p dt &\geq \int_0^{2b} \{g'(\rho) - (p-1)|g(\rho)|^{\frac{p}{p-1}}\} |u(t)|^p dt - 2g(b)|u(b)|^p \\
&= \int_0^{2b} \{g'(\rho) - g'(\rho) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \rho^{-p}\} |u(t)|^p dt \\
&\quad + 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} b^{-(p-1)} |u(b)|^p \\
&= \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^{2b} \frac{|u(t)|^p}{\rho^p} dt + 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} b^{-(p-1)} |u(b)|^p \\
&\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^{2b} \frac{|u(t)|^p}{\rho^p(t)} dt
\end{aligned}$$

Για το (ii) ομοίως όπως και στο (i) παρατηρώντας την σχέση (i) του Λήμματος 3.1, καθώς και την απόδειξη της βλέπουμε πως η σχέση αληθεύει και στο διάστημα $(0, b)$ με μόνη διαφορά τον τελευταίο όρο που θα υποδιπλασιαστεί, πράγμα που δεν εμποδίζει τα παραπάνω βήματα, καθώς ο όρος παραμένει θετικός και απλοποιείται. $\square$

3.2 Ανισότητα Hardy στις πολλές διαστάσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα μεταβούμε από τη μονοδιάστατη ανισότητα Hardy στην αντίστοιχη πολυδιάστατη.

Έστω Ω ανοικτό κυρτό σύνολο, επιλέγουμε τυχαίο $\omega \in S^{m-1}$. Θεωρούμε ευθεία L πάνω στην κατεύθυνση του ω . Αν y_0, y_1 είναι τα σημεία τομής της ευθείας με το $\partial\Omega$, τότε ορίζουμε $b = \frac{|y_1 - y_0|}{2}$.

Μία παραμέτρηση του ω είναι $x(t) = y_0 + \frac{t}{2b}(y_1 - y_0), 0 \leq t \leq 2b$

Θα χρειαστεί να ορίσουμε τις παρακάτω θετικές συναρτήσεις

$$r_\omega(x) = \inf\{s > 0 : x + s\omega \notin \Omega\}$$

$$d_\omega(x) = \min\{r_\omega(x), r_{-\omega}(x)\}$$

Πρόταση 3.4. Υπάρχει σταθερά c_p , εξαρτώμενη από το p η οποία έχει την ιδιότητα

$$\int_{S^{N-1}} |v \cdot \omega|^p ds(\omega) = c_p |v|^p, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{R}^N \quad (3.8)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε συναρτησοειδές ως εξής

$$f(v) = \int_{S^{N-1}} |v \cdot \omega|^p ds(\omega), v \in \mathbb{R}^N.$$

Έστω $\bar{v}$ με $|\bar{v}| = |v|$. Υπάρχει τότε T ορθογώνιος πίνακας τέτοιος ώστε $Tv = \bar{v}$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\omega = T\omega'$, και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(\bar{v}) &= \int_{S^{N-1}} |\bar{v} \cdot \omega|^p ds(\omega) = \int_{S^{N-1}} |Tv \cdot \omega|^p ds(\omega) = \int_{S^{N-1}} |Tv \cdot T\omega'|^p ds(\omega') \\ &= \int_{S^{N-1}} |v \cdot \omega'|^p ds(\omega') = f(v) \end{aligned}$$

Άρα το $f(v)$ εξαρτάται μόνο από το μέτρο του v . Επίσης εύκολα παρατηρούμε ότι

$$f(\lambda v) = |\lambda|^p f(v).$$

Ορίζω $v^* = (|v|, 0, \dots, 0)$. Τότε $|v| = |v^*|$ οπότε

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v^*) = f(|v|, 0, \dots, 0) = f(|v|(1, 0, \dots, 0)) = |v|^p f(1, 0, \dots, 0) \\ &= |v|^p \int_{S^{N-1}} |\omega_1|^p ds(\omega) = |v|^p c_p \end{aligned}$$

Τελικά

$$f(v) = c_p |v|^p$$

□

Συνεχίζουμε λοιπόν τη μελέτη μας, μέσω του λήμματος που ακολουθεί

Λήμμα 3.5. Έστω Ω κυρτό χωρίο και $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Τότε

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{S^{N-1}} \int_{\Omega} |\partial_{\omega} u|^p dx ds(\omega) = c_p \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \\ \text{(ii)} \quad & \int_{S^{N-1}} \frac{1}{d_{\omega}^p(x)} ds(\omega) \geq c_p \frac{1}{d^p(x)}, \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

όπου $\partial_{\omega} u$ η κατά κατεύθυνση παράγωγος του u στην κατεύθυνση του ω .

Απόδειξη. Για το (i) η απόδειξη προκύπτει άμεσα αν θέσουμε στην σχέση (3.8) όπου $u(x)$ την συνάρτηση $\int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx$ και έχοντας δεδομένο ότι $|\partial_{\omega} u| = |\nabla u \cdot \omega|$.

Για το (ii) θεωρούμε $y \in \partial\Omega$ τέτοιο ώστε $|y - x| = d(x)$. Ορίζω τη μισή σφαίρα

$$S^+ = \{\omega \in S^{N-1} : \omega \cdot (y - x) > 0\}$$

και έστω P_y υπερεπίπεδο στήριξης του ω στο y , το οποίο είναι κάθετο στο $y - x$ (βλέπε σχήμα 1). Τότε για όλα τα $\omega \in S^+$ έστω $\sigma_{\omega}(x) > 0$ με

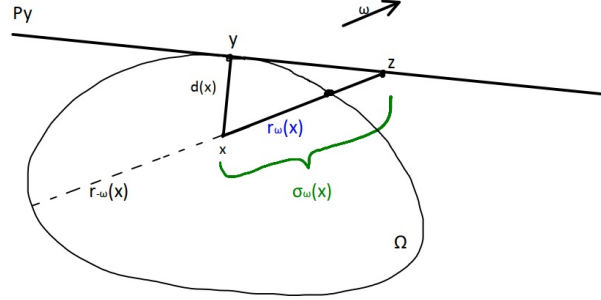
$$z(x) = x + \sigma_{\omega}(x) \cdot \omega \in P_y,$$

τέτοιο ώστε

$$\omega \cdot \frac{y - x}{|y - x|} = \frac{|y - x|}{\sigma_{\omega}(x)}$$

Δηλαδή

$$\sigma_{\omega}(x) = \frac{d^2(x)}{(y - x) \cdot \omega}.$$



Σχήμα 1: P_y υπερεπίπεδο στήριξης

Παρατηρούμε ότι λόγω κυρτότητας του Ω έχουμε

$$d_\omega(x) \leq r_\omega(x) \leq \sigma_\omega(x).$$

Και εφόσον $d_\omega(x)$ άρτια συνάρτηση, μπορούμε να ολοκληρώσουμε στη μισή σφαίρα. Έτσι λοιπόν έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{S^{N-1}} \frac{1}{d_\omega^p(x)} ds(\omega) &= 2 \int_{S^+} \frac{1}{d_\omega^p(x)} ds(\omega) \\ &\geq 2 \int_{S^+} \frac{1}{r_\omega^p(x)} ds(\omega) \\ &\geq 2 \int_{S^+} \frac{1}{\sigma_\omega^p(x)} ds(\omega) \\ &= 2 \int_{S^+} \left| \frac{(y-x) \cdot \omega}{d^2(x)} \right|^p ds(\omega) \\ &= \frac{2}{d^{2p}(x)} \int_{S^+} |(y-x) \cdot \omega|^p ds(\omega) \\ &= \frac{1}{d^{2p}(x)} \int_{S^{N-1}} |y-x|^p |\omega|^p ds(\omega) \\ &= \frac{1}{d^{2p}(x)} \int_{S^{N-1}} d^p(x) |\omega|^p ds(\omega) \\ &= c_p \frac{1}{d^p(x)} \end{aligned}$$

□

Με τη βοήθεια του παραπάνω λήμματος μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη της πολυδιάστατης ανισότητας Hardy.

Θεώρημα 3.6. Έστω Ω ανοικτό κυρτό σύνολο, και $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ τότε,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx \quad (3.9)$$

όπου $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Παρατήρηση: Λόγω της πυκνότητας του $C_c^\infty(\Omega)$ στο $W_0^{1,p}(\Omega)$ αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $g(t) = u(x(t))$, τότε για την g θα ισχύει η σχέση (i) της (3.7) δηλαδή,

$$\int_0^{2b} |g'(t)|^p dt \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^{2b} \frac{|g(t)|^p}{\rho^p(t)} dt \quad (3.10)$$

έχουμε,

$$g'(t) = \frac{d}{dt} u(x(t)) = (\nabla u)(x(t))x'(t) = (\nabla u)(x(t)) \frac{y_1 - y_0}{2b} = (\partial_\omega u)(x(t)).$$

Αντικαθιστώντας την $g'(t)$ στην (3.10) προκύπτει

$$\int_0^{2b} |(\partial_\omega u)(x(t))|^p dt \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^{2b} \frac{|u(x(t))|^p}{d_\omega^p(t)} dt.$$

Εφόσον L η ευθεία η οποία έχει την κατεύθυνση του ω , τότε τα παραπάνω ολοκληρώματα θεωρούνται επικαμπύλια ως εξής

$$\int_L |\partial_\omega u|^p ds \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_L \frac{|u|^p}{d_\omega^p} ds.$$

Ολοκληρώνοντας στο υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο ω και λόγω κυρτότητας του Ω έχουμε

$$\int_{\Omega} |\partial_\omega u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d_\omega^p} dx.$$

Τώρα ολοκληρώνουμε την πάνω σχέση ως προς $\omega \in S^{N-1}$

$$\int_{S^{N-1}} \int_{\Omega} |\partial_\omega u|^p dx ds(\omega) \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{S^{N-1}} \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d_\omega^p} dx ds(\omega).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Λήμματος 3.5 βρίσκουμε

$$c_p \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \geq c_p \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} \, dx .$$

Τελικά διαιρώντας με c_p έχουμε το ζητούμενο. □

4 Δεύτερη απόδειξη της ανισότητας Hardy

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε και θα αποδείξουμε την γεωμετρική ανισότητα Hardy και με άλλους τρόπους.

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα έχουμε την ακόλουθη υπόθεση κυρτότητας για το χωρίο Ω

$$\Delta d \leq 0.$$

Θα συζητήσουμε τώρα την έννοια της υπόθεσης $\Delta d \leq 0$. Έυκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$|d(x) - d(y)| \leq |x - y|.$$

Δηλαδή η $d(x)$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1, όμως η d δεν είναι απαραίτητα C^1 . Από το θεώρημα του Rademacher η d είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη και η παράγωγος της ταυτίζεται με την ασθενή της παράγωγο και ισχύει $|\nabla d| \leq 1$.

Παρακάτω με μία παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta d \leq 0 &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \Delta d \phi \, dx \leq 0 \\ &\Leftrightarrow - \int_{\Omega} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx \geq 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \phi \geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ξεκινάμε λοιπόν τη διερεύνηση της απόδειξης της ανισότητας Hardy για το δεδομένο χωρίο, με το λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 4.1. Έστω T διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του Ω . Τότε για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \geq \int_{\Omega} \left(\operatorname{div} T - (p-1)|T|^{\frac{p}{p-1}} \right) |u|^p \, dx \quad (4.12)$$

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε με παραγοντική ολοκλήρωση, όπου ο συνοριακός όρος της παραγοντικής μηδενίζεται καθώς η u έχει συμπαγή φορέα και στη

συνέχεια θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Hölder και Young, έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} T |u|^p dx &= -p \int_{\Omega} (T \cdot \nabla u) |u|^{p-2} u dx \\ &\leq p \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |T|^{\frac{p}{p-1}} |u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + (p-1) \int_{\Omega} |T|^{\frac{p}{p-1}} |u|^p dx. \end{aligned}$$

Αλλάζοντας μέλη, προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Συνεχίζουμε με την δεύτερη απόδειξη της ανισότητας Hardy.

Θεώρημα 4.2. Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $\Delta d \leq 0$, και $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx \quad (4.13)$$

Απόδειξη. Επιλέγω

$$T(x) = - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{\nabla d(x)}{d^{p-1}(x)}$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\operatorname{div} T = - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{d \Delta d - (p-1) |\nabla d|^2}{d^p} \geq - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{1-p}{d^p}$$

Η τελευταία ανίσωση προκύπτει επειδή $\Delta d \leq 0$, $p > 1$ και $d(x)$ Lipschitz συνεχής με $|\nabla d| = 1$ οπότε,

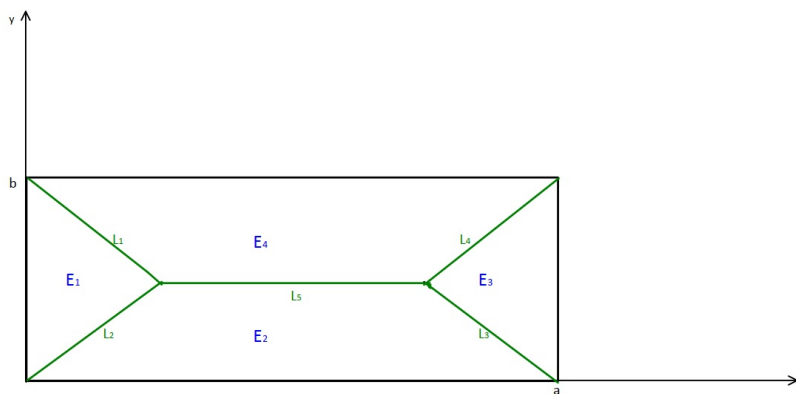
$$\begin{aligned} \operatorname{div} T - (p-1) |T|^{\frac{p}{p-1}} &\geq - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{1-p}{d^p} - (p-1) \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{1}{d^p} \\ &= \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{1}{d^p} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην (4.12) καταλήγουμε στην (4.13). $\square$

Σε αυτό το σημείο έχουμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση, στην Παράγραφο 3.2 αποδείξαμε την ανισότητα Hardy για Ω κυρτό σύνολο, πράγμα που συνεπάγεται $\Delta d \leq 0$. Οπότε το συμπέρασμα αυτής της παραγράφου είναι ακόμα πιο ισχυρό, καθώς λείπει η υπόθεση Ω κυρτό.

Στη συνέχεια θα κάνουμε ένα παράδειγμα για να δούμε στη πράξη πως το Ω κυρτό συνεπάγεται $\Delta d \leq 0$, αλλά και να μελετήσουμε την συμπεριφορά της δεύτερης παραγώγου της d .

Έστω F κυρτό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$ με κορυφές $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$, όπου $a < b$, τότε κάθε σημείο στο εσωτερικό του ορθογωνίου θα βρίσκεται πλησιέστερα μίας εκ των τεσσάρων πλευρών του. Φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών του και το ορθογώνιο χωρίζεται σε τέσσερις επιφάνειες E_1, E_2, E_3, E_4 όπως στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων a, b .

Έστω $\phi \in C_c^\infty(F)$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, αν το σημείο (x, y) βρίσκεται στο E_1 , τότε $d(x, y) = x$, συνεπώς $\nabla d = \left(\frac{\partial d}{\partial x}, \frac{\partial d}{\partial y} \right) = (1, 0)$, με

$$L_1 : (x(t), y(t)) = (b - t, t) \quad , \frac{b}{2} \leq t \leq b$$

$$L_2 : (x(t), y(t)) = (t, t) \quad , 0 \leq t \leq \frac{b}{2}$$

Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}
\int_{E_1} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx &= \int_{E_1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx dy = \int_{\partial E_1} \phi \, dy = \int_{L_1} \phi \, dy + \int_{L_2} \phi \, dy \\
&= \int_{\frac{b}{2}}^b \phi(b-t, t) t' \, dt + \int_0^{\frac{b}{2}} \phi(t, t) t' \, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{b}{2}}^b \phi(b-t, t) \sqrt{((b-t)')^2 + (t')^2} \, dt \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \phi(t, t) \sqrt{(t')^2 + (t')^2} \, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_1} \phi \, ds + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_2} \phi \, ds
\end{aligned}$$

όπου εφαρμόσαμε θεώρημα Green και στη συνέχεια μετατρέψαμε τα ολοκληρώματα σε επικαμπύλια.

Αν το σημείο (x, y) βρίσκεται στο E_3 , τότε $d(x, y) = a - x$, συνεπώς

$$\nabla d = \left(\frac{\partial d}{\partial x}, \frac{\partial d}{\partial y} \right) = (-1, 0), \text{ με}$$

$$L_3 : (x(t), y(t)) = (t, a-t) \quad , a - \frac{b}{2} \leq t \leq a$$

$$L_4 : (x(t), y(t)) = (a-t, b-t) \quad , 0 \leq t \leq \frac{b}{2}$$

Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}
\int_{E_3} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx &= \int_{E_3} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx dy = \int_{\partial E_3} -\phi \, dy = -\int_{L_3} \phi \, dy - \int_{L_4} \phi \, dy \\
&= -\int_{a-\frac{b}{2}}^a \phi(t, a-t)(a-t)' \, dt - \int_0^{\frac{b}{2}} \phi(a-t, b-t)(b-t)' \, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a-\frac{b}{2}}^a \phi(t, a-t) \sqrt{1^2 + (-1)^2} \, dt \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \phi(a-t, b-t) \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_3} \phi \, ds + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_4} \phi \, ds
\end{aligned}$$

Αναμενόμενο αποτέλεσμα λόγω συμμετρίας των E_1, E_3 .

Αν το σημείο (x, y) βρίσκεται στο E_2 τότε $d(x, y) = y$, συνεπώς

$$\nabla d = \left(\frac{\partial d}{\partial x}, \frac{\partial d}{\partial y} \right) = (0, 1), \text{ με}$$

$$L_2 : (x(t), y(t)) = \left(\frac{b}{2} - t, \frac{b}{2} - t \right) \quad , 0 \leq t \leq \frac{b}{2}$$

$$L_3 : (x(t), y(t)) = (a - t, t) \quad , 0 \leq t \leq \frac{b}{2}$$

$$L_5 : (x(t), y(t)) = \left(a - t, \frac{b}{2} \right) \quad , \frac{b}{2} \leq t \leq a - \frac{b}{2}$$

Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{E_2} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx &= \int_{E_2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx dy = - \int_{\partial E_2} \phi \, dx = - \int_{L_2} \phi \, dx - \int_{L_3} \phi \, dx - \int_{L_5} \phi \, dx \\ &= - \int_0^{\frac{b}{2}} \phi\left(\frac{b}{2} - t, \frac{b}{2} - t\right) \left(\frac{b}{2} - t\right)' dt - \int_0^{\frac{b}{2}} \phi(a - t, t) (a - t)' dt \\ &\quad - \int_{\frac{b}{2}}^{a - \frac{b}{2}} \phi\left(a - t, \frac{b}{2}\right) (a - t)' dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \phi\left(\frac{b}{2} - t, \frac{b}{2} - t\right) \sqrt{2} \, dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \phi(a - t, t) \sqrt{2} \, dt \\ &\quad + \int_{\frac{b}{2}}^{a - \frac{b}{2}} \phi\left(a - t, \frac{b}{2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_2} \phi \, ds + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_3} \phi \, ds + \int_{L_5} \phi \, ds \end{aligned}$$

Τέλος αν το σημείο (x, y) βρίσκεται στο E_4 τότε $d(x, y) = b - y$, συνεπώς

$$\nabla d = \left(\frac{\partial d}{\partial x}, \frac{\partial d}{\partial y} \right) = (0, -1), \text{ με}$$

$$L_1 : (x(t), y(t)) = (t, b - t) \quad , 0 \leq t \leq \frac{b}{2}$$

$$L_4 : (x(t), y(t)) = (t + a - b, t) \quad , \frac{b}{2} \leq t \leq b$$

$$L_5 : (x(t), y(t)) = \left(t, \frac{b}{2} \right) \quad , \frac{b}{2} \leq t \leq a - \frac{b}{2}$$

Τότε με παρόμοια βήματα και λόγω συμμετρίας των E_2, E_4 έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{E_4} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx &= \int_{E_4} -\frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx dy = - \int_{\partial E_4} -\phi \, dx = \int_{L_1} \phi \, dx + \int_{L_4} \phi \, dx + \int_{L_5} \phi \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_1} \phi \, ds + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_4} \phi \, ds + \int_{L_5} \phi \, ds \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα μας έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx &= \int_{E_1} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{E_2} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{E_3} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{E_4} \nabla d \cdot \nabla \phi \, dx \\ &= \sqrt{2} \int_{L_1} \phi \, ds + \sqrt{2} \int_{L_2} \phi \, ds + \sqrt{2} \int_{L_3} \phi \, ds \\ &\quad + \sqrt{2} \int_{L_4} \phi \, ds + 2 \int_{L_5} \phi \, ds \geq 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(F) : \phi \geq 0 \end{aligned}$$

Όπου το παραπάνω, από τη σχέση (4. 11) συνεπάγεται $\Delta d \leq 0$.

Βλέπουμε επίσης ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε αποτελείται από επικαμπύλια ολοκληρώματα, πάνω στις γραμμές L_k για $k = 1, 2, \dots, 5$. Η Δd είναι ιδιάζων από την άποψη πως δίνει τιμές στην ϕ από μία χαμηλότερη διάσταση. Δηλαδή η Δd έχει νόημα με την έννοια των κατανομών και ο φορέας της, αν την θεωρήσουμε κατανομή είναι η ένωση αυτών των γραμμών.

5 Τρίτη απόδειξη της ανισότητας Hardy

Εδώ θα αναλύσουμε την περίπτωση που το Ω είναι κυρτό πολύπλευρο ή προσεγγίζεται από μία αύξουσα ακολουθία κυρτών πολυπλεύρων. Ξεκινάμε τη μελέτη μας με το ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 5.1. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ ανοικτό πολύπλευρο και έστω συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής θετική, ορίζουμε

$$A = \{(x', x_n) : x' \in E : 0 < x_n < f(x')\}.$$

Τότε

$$\int_A |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_A \frac{|u|^p}{x_n^p} dx \quad (5.14)$$

για κάθε $u \in C^\infty(A)$ τέτοια ώστε $u = 0$ κοντά στο E .

Απόδειξη. Για $x' \in E$ έστω ευθεία

$$L_{x'} = \{(x', x_n) : 0 < x_n < f(x')\},$$

τότε θα ισχύει η μονοδιάστατη Hardy δηλαδή η σχέση (ii) της (3.7) ως εξής

$$\int_{L_{x'}} |u_{x_n}|^p ds \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{L_{x'}} \frac{|u|^p}{x_n^p} ds$$

όπου u_{x_n} η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στην κατεύθυνση της x_n .

Ολοκληρώνοντας στο E και γνωρίζοντας πως $|\nabla u| \geq |u_{x_n}|$ έχουμε

$$\int_E \int_{L_{x'}} |\nabla u|^p ds dx' \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_E \int_{L_{x'}} \frac{|u|^p}{x_n^p} ds dx'$$

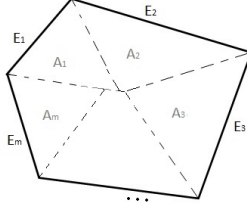
Γράφοντας το παραπάνω ως διαδοχικό ολοκλήρωμα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Προχωράμε διακρίνοντας τις περιπτώσεις που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου.

1η περίπτωση: $\Omega := P$ κυρτό πολύπλευρο m πλευρών (Σχήμα 3).

Τότε $\partial P = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m$, όπου E_k οι πλευρές του πολυπλεύρου διαστάσεων $N-1$. Το P μπορεί να γραφτεί σε μορφή ένωσης συνόλων ως εξής $P = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, όπου

$$A_k = \{x \in P : d(x) = \text{dist}(x, E_k)\}$$



Σχήμα 3: P κυρτό πολύπλευρο

Θα αποδείξουμε την (3. 9), δηλαδή την πολυδιάστατη Hardy για αυτό το Ω .

Απόδειξη. Για την πρώτη ανίσωση θα χρησιμοποιήσουμε την (5. 14) που αποδείξαμε παραπάνω. Έχουμε λοιπόν

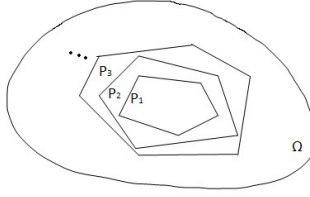
$$\begin{aligned}
 \int_P |\nabla u|^p dx &= \int_{A_1} |\nabla u|^p dx + \int_{A_2} |\nabla u|^p dx + \dots + \int_{A_m} |\nabla u|^p dx \\
 &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{A_1} \frac{|u|^p}{\text{dist}^p(x, E_1)} dx + \dots + \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{A_m} \frac{|u|^p}{\text{dist}^p(x, E_m)} dx \\
 &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{A_1} \frac{|u|^p}{d^p(x)} dx + \dots + \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{A_m} \frac{|u|^p}{d^p(x)} dx \\
 &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_P \frac{|u|^p}{d^p(x)} dx
 \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\int_P |\nabla u|^p dx = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_P \frac{|u|^p}{d^p(x)} dx \quad (5. 15)$$

□

2η περίπτωση:(γενική περίπτωση) Ω ανοικτό κυρτό σύνολο. Αυτή τη φορά θα προσεγγίσουμε το Ω μέσα από μία αύξουσα ακολουθία κυρτών πολυπλεύρων $P_1, P_2, \dots, P_n$, όπου $P_n \subset P_{n+1} \subset \Omega$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \Omega$.



Σχήμα 4: Προσέγγιση του Ω μέσω της P_n

Ορίζω $d_n(x) = \text{dist}(x, \partial P_n)$. Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Για μεγάλο n θα ισχύει $\text{supp}(u) \subset P_n$, συνεπώς και $u \in C_c^\infty(P_n)$.

Θα αποδείξουμε λοιπόν την (3. 9) και για αυτή την περίπτωση του Ω .

Απόδειξη. Για κάθε n θα ισχύει η (5. 15), ως εξής

$$\int_{P_n} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{P_n} \frac{|u|^p}{d_n^p} dx$$

θα υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d_n^p} dx$$

Παίρνοντας όριο $n \rightarrow \infty$, έχουμε

$$d_n(x) \rightarrow d(x)$$

άρα και

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d_n^p} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx.$$

Οπότε για $n \rightarrow \infty$, έχουμε τελικά

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^P}{d^p} dx$$

□

6 Η ανισότητα Rellich

Διατηρώντας τους συμβολισμούς και τους ορισμούς του Κεφαλαίου 3, η γενική ανισότητα της οποίας ειδική περίπτωση αποτελεί η ανισότητα Hardy για $m = 1$ είναι η εξής

$$\int_{\Omega} |\Delta^{\frac{m}{2}} u|^p dx \geq A(m, p) \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^{pm}} dx$$

όπου $A(m, p)$ σταθερά εξαρτώμενη από τα m και p .

Αυτή η ανισότητα ονομάζεται Rellich. Σε αυτή τη παράγραφο θα αφήσουμε αυθαίρετο το m και θα επιλέξουμε $p = 2$.

Θα ξεκινήσουμε όπως και στην πρώτη απόδειξη της ανισότητας Hardy με τη μελέτη της μονοδιάστατης.

Λήμμα 6.1. Έστω $b > 0$ και έστω $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$. Τότε για κάθε $u \in C_c^\infty(0, 2b)$ ισχύει

$$\int_0^{2b} |u^{(m)}(t)|^2 dt \geq \frac{(2m-1)^2(2m-3)^2 \dots 1^2}{4^m} \int_0^{2b} \frac{|u(t)|^2}{\rho^{2m}(t)} dt \quad (6.16)$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη με επαγωγή. Για $m = 1$ το έχουμε ήδη δείξει στο Θεώρημα 3. 7 για $p = 2$. Έστω ότι η σχέση ισχύει και για κάποιο m τότε θα δείξουμε ότι θα ισχύει και για $m + 1$.

Αρχικά θα αποδείξουμε μία χρήσιμη ανισότητα για το επαγωγικό βήμα. Για συντομία θέτω $\lambda = \frac{2m+1}{2}$.

Τότε

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{|u'|^2}{t^{2m}} dt &= \int_0^b \frac{|t^\lambda (t^{-\lambda} u)' + \lambda t^{-1} u|^2}{t^{2m}} dt \\ &\geq \lambda^2 \int_0^b \frac{|u|^2}{t^{2m+2}} dt + 2\lambda \int_0^b (t^{-\lambda} u)' t^{-2m-1+\lambda} u dt \\ &= \lambda^2 \int_0^b \frac{|u|^2}{t^{2m+2}} dt + 2\lambda \int_0^b (t^{-\lambda} u)' t^{-\lambda} u dt \\ &= \lambda^2 \int_0^b \frac{|u|^2}{t^{2m+2}} dt + \lambda [(t^{-\lambda} u)^2]_0^b \\ &= \lambda^2 \int_0^b \frac{|u|^2}{t^{2m+2}} dt + \lambda (b^{-\lambda} u(b))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \lambda^2 \int_0^b \frac{|u|^2}{t^{2m+2}} dt \\
&= \frac{(2m+1)^2}{4} \int_0^b \frac{|u|^2}{t^{2m+2}} dt
\end{aligned}$$

με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\int_b^{2b} \frac{|u'|^2}{(2b-t)^{2m}} dt \geq \frac{(2m+1)^2}{4} \int_b^{2b} \frac{|u|^2}{(2b-t)^{2m+2}} dt$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ανισώσεις κατά μέλη, προκύπτει

$$\int_0^{2b} \frac{|u'|^2}{\rho^{2m}} dt \geq \frac{(2m+1)^2}{4} \int_0^{2b} \frac{|u|^2}{\rho^{2m+2}} dt \quad (6.17)$$

Τώρα θα δείξουμε πως ισχύει η σχέση του λήμματος και για $m+1$. Η πρώτη ανίσωση θα προκύψει από την (6.17) που μόλις αποδείξαμε.

$$\begin{aligned}
\frac{(2m+1)^2}{4} \int_0^{2b} \frac{|u|^2}{\rho^{2(m+1)}} dt &\leq \int_0^{2b} \frac{|u'(t)|^2}{\rho^{2m}} dt \\
&\leq \frac{4^m}{(2m-1)^2(2m-3)^2 \dots 1^2} \int_0^{2b} |u^{(m+1)}(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Όπου η τελευταία ανίσωση προκύπτει από τη δεδομένη σχέση της επαγωγής για m στην συνάρτηση $u'(t)$. Η τελευταία σχέση μας δίνει και το επαγωγικό βήμα που ζητούσαμε. $\square$

Σε συνέχεια της συλλογιστικής της Παραγράφου 3.2 έχουμε και το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.2. Έστω $\omega \in S^{N-1}$, $u \in C_c^\infty(\Omega)$ και $\xi \in \mathbb{R}^N$. Τότε

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad &\int_{S^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega \cdot \xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi ds(\omega) = c_{2m} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
\text{(ii)} \quad &\int_{S^{N-1}} \frac{1}{d_\omega^{2m}(x)} ds(\omega) \geq c_{2m} \frac{1}{d^{2m}(x)}
\end{aligned}$$

Όπου c_{2m} σταθερά εξαρτώμενη από το m .

Απόδειξη. Για το (i) από την απόδειξη της σχέσης (3. 8) γνωρίζουμε ότι $c_p = \int_{S^{N-1}} |\omega|^p ds(\omega)$, εάν θέσω όπου $p = 2m$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{S^{N-1}} \int_{R^N} |\omega \cdot \xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi ds(\omega) &= \int_{S^{N-1}} |\omega|^{2m} ds(\omega) \int_{R^N} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= c_{2m} \int_{R^N} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Για το (ii) η απόδειξη βγαίνει άμεσα αν στην σχέση (ii) του Λήμματος 3.5 θέσουμε όπου $p = 2m$. $\square$

Προχωράμε με την απόδειξη της πολυδιάστατης ανισότητας Rellich

Θεώρημα 6.3. Έστω Ω ανοικτό κυρτό σύνολο, και $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε

$$\int_{\Omega} |\Delta^{\frac{m}{2}} u|^2 dx \geq \frac{(2m-1)^2(2m-3)^2 \dots 1^2}{4^m} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d^{2m}} dx \quad (6. 18)$$

όπου $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Απόδειξη. Για λόγους συντομίας θα ονομάσουμε την παράσταση

$$\frac{(2m-1)^2(2m-3)^2 \dots 1^2}{4^m} = A(m).$$

Ορίζουμε $g(t) = u(x(t))$ τότε $g^{(m)}(t) = \partial_\omega^m u(x(t))$, όπου $\omega \in S^{N-1}$.

Θα εφαρμόσουμε την (6. 16) για την g

$$\int_0^{2b} |\partial_\omega^m u(x(t))|^2 dt \geq A(m) \int_0^{2b} \frac{|u(x(t))|^2}{d_\omega^{2m}(t)} dt.$$

Αν L ευθεία με την κατεύθυνση του ω , τότε τα παραπάνω ολοκληρώματα θεωρούνται επικαμπύλια ως εξής

$$\int_L |\partial_\omega^m u|^2 ds \geq A(m) \int_L \frac{|u|^2}{d_\omega^{2m}} ds.$$

Ολοκληρώνοντας στο υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο ω έχουμε

$$\int_{\Omega} |\partial_\omega^m u|^2 dx \geq A(m) \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d_\omega^{2m}} dx.$$

Εφαρμόζουμε την (2. 1) του μετασχηματισμού Fourier,

$$\int_{R^N} (\omega \cdot \xi)^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq A(m) \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d_{\omega}^{2m}} dx .$$

Ολοκληρώνουμε ως προς $\omega \in S^{N-1}$,

$$\int_{S^{N-1}} \int_{R^N} (\omega \cdot \xi)^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi ds(\omega) \geq A(m) \int_{S^{N-1}} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d_{\omega}^{2m}} dx ds(\omega) .$$

Από τις σχέσεις του Λήμματος 6.2 βλέπουμε ότι

$$c_{2m} \int_{R^N} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq c_{2m} A(m) \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d^{2m}} dx .$$

Χρησιμοποιώντας την (2. 2) του μετασχηματισμού Fourier και διαιρώντας με c_{2m} έχουμε τελικά

$$\int_{\Omega} |\Delta^{\frac{m}{2}} u|^2 dx \geq A(m) \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d^{2m}} dx .$$

□

7 Βελτιωμένες ανισότητες Hardy

Θα προσπαθήσουμε σε αυτή τη παράγραφο να βελτιώσουμε την πολυδιάστατη Hardy προσθέτοντας έναν θετικό όρο στο δεξί της μέλος.

Διατηρούμε τους συμβολισμούς της Παραγράφου 3.2 όσο αναφορά τα $\Omega, \omega, r_\omega(x), d_\omega(x), d(x)$ και ορίζουμε επιπλέον την παρακάτω θετική συνάρτηση

$$b_\omega(x) = \frac{1}{2}(r_\omega(x) + r_{-\omega}(x))$$

Θα δούμε πρώτα ένα βοηθητικό λήμμα, για να φτάσουμε στην απόδειξη της ανισότητας που αναφέραμε.

Λήμμα 7.1. Για κάθε $p > 1$ και για κάθε $x \in \Omega$ ισχύει

$$\left(\int_{S^{N-1}} r_\omega^N(x) ds(\omega) \right)^{-\frac{p}{N}} \leq \int_{S^{N-1}} \frac{1}{b_\omega^p(x)} ds(\omega) \quad (7.19)$$

Απόδειξη. Από την στοιχειώδη ανάλυση γνωρίζουμε ότι $\min_{t>0} \left(\frac{1+t^N}{(1+t)^N} \right) = 2^{-(N-1)}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{(N-1)p}{N+p}} &\leq \int_{S^{N-1}} \frac{(r_\omega^N + r_{-\omega}^N)^{\frac{p}{N+p}}}{(r_\omega + r_{-\omega})^{\frac{Np}{N+p}}} ds(\omega) \\ &\leq \left(\int_{S^{N-1}} (r_\omega^N + r_{-\omega}^N) ds(\omega) \right)^{\frac{p}{N+p}} \left(\int_{S^{N-1}} \frac{1}{(r_\omega + r_{-\omega})^p} ds(\omega) \right)^{\frac{N}{N+p}} \\ &= 2^{\frac{p}{N+p}} \left(\int_{S^{N-1}} r_\omega^N ds(\omega) \right)^{\frac{p}{N+p}} 2^{-\frac{pN}{N+p}} \left(\int_{S^{N-1}} \frac{1}{b_\omega^p} ds(\omega) \right)^{\frac{N}{N+p}}, \end{aligned}$$

το οποίο με απλοποίηση των συντελεστών συνεπάγεται

$$\left(\int_{S^{N-1}} r_\omega^N ds(\omega) \right)^{-\frac{p}{N+p}} \leq \left(\int_{S^{N-1}} \frac{1}{b_\omega^p} ds(\omega) \right)^{\frac{N}{N+p}}.$$

Υψώνοντας εις την $\frac{N+p}{N}$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. $\square$

Συνεχίζουμε με την διατύπωση και την απόδειξη της βελτιωμένης ανισότητας που συζητήσαμε στην αρχή της παραγράφου.

Θεώρημα 7.2. Για κάθε $u \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right) \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx + K_p \left(\frac{a_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{p}{N}} \int_{\Omega} |u|^p dx \quad (7. 20)$$

όπου K_p σταθερά εξαρτώμενη από το p και a_N ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας.

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε την παραμέτρηση του ω που χρησιμοποιήσαμε στην Παράγραφο 3.2, $x(t) = y_0 + \frac{t}{2b}(y_1 - y_0)$, $0 \leq t \leq 2b$.

Ορίζω συνάρτηση $f(t) = u(x(t))$ με $u \in C_c^\infty(\Omega)$, Για την f θα ισχύει η σχέση (ii) του Λήμματος 3.1, η οποία κάνοντας αντικατάσταση και ολοκληρώνοντας την στο υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο Ω , γίνεται

$$\int_{\Omega} |\nabla u \cdot \omega|^p dx \geq \int_{\Omega} \{g'(d_{\omega}(x)) - (p-1)|g(d_{\omega}(x)) - g(b_{\omega}(x))|^{\frac{p}{p-1}}\} |u|^p dx.$$

Κάνουμε ολοκλήρωση ως προς ω και έχουμε

$$\int_{S^{N-1}} \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \omega|^p dx ds(\omega) \geq \int_{S^{N-1}} \int_{\Omega} \{g'(d_{\omega}) - (p-1)|g(d_{\omega}) - g(b_{\omega})|^{\frac{p}{p-1}}\} |u|^p dx ds(\omega).$$

Εφαρμόζουμε την πρώτη σχέση του Λήμματος 3.5 και παίρνουμε

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \frac{1}{c_p} \int_{\Omega} \int_{S^{N-1}} \left\{ g'(d_{\omega}) - (p-1)|g(d_{\omega}) - g(b_{\omega})|^{\frac{p}{p-1}} \right\} ds(\omega) |u| dx. \quad (7. 21)$$

Επιλέγουμε ως συνάρτηση g την συνάρτηση της σχέσης (3. 6) και ορίζουμε συναρτήσεις

$$A_{\omega,x} := g'(s) - (p-1)|g(s) - g(b_{\omega})|^{\frac{p}{p-1}} - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p s^{-p}.$$

Τότε κάθε μία απο αυτές, λόγω του Λήμματος 3.2 είναι φθίνουσα συνάρτηση του $s \in (0, b_{\omega})$. Οπότε

$$\begin{aligned} d_{\omega}(x) \leq b_{\omega}(x) &\Leftrightarrow A_{\omega,x}(d_{\omega}) \geq A_{\omega,x}(b_{\omega}) \\ &\Leftrightarrow g'(d_{\omega}) - (p-1)|g(d_{\omega}) - g(b_{\omega})|^{\frac{p}{p-1}} - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p d_{\omega}^{-p} \geq A_{\omega,x}(b_{\omega}) \\ &\Leftrightarrow g'(d_{\omega}) - (p-1)|g(d_{\omega}) - g(b_{\omega})|^{\frac{p}{p-1}} \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p d_{\omega}^{-p} \\ &\quad + g'(b_{\omega}) - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p b_{\omega}^{-p}. \end{aligned}$$

Συνεπώς λόγω της τελευταίας ανισότητας η (7. 21) γίνεται

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \frac{1}{c_p} \int_{\Omega} \int_{S^{N-1}} \left\{ \left(\frac{p-1}{p} \right)^p d_{\omega}^{-p} + g'(b_{\omega}) - \left(\frac{p-1}{p} \right)^p b_{\omega}^{-p} \right\} ds(\omega) |u|^p dx$$

Χρησιμοποιώντας για τον πρώτο όρο του αθροίσματος το Λήμμα 3.5 και για τους άλλους δύο όρους το Λήμμα 3.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx &\geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx + \frac{1}{c_p} \int_{\Omega} \int_{S^{N-1}} (p-1) |g(b_{\omega})|^{\frac{p}{p-1}} ds(\omega) |u|^p dx \\ &= \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx + \frac{1}{c_p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^p (p-1) \int_{\Omega} \int_{S^{N-1}} \frac{1}{b_{\omega}^p} ds(\omega) |u|^p dx \\ &\geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^p} dx + K_p \int_{\Omega} \left\{ \int_{S^{N-1}} r_{\omega}^N ds(\omega) \right\}^{-\frac{p}{N}} |u|^p dx. \end{aligned}$$

Όπου την τελευταία σχέση την βρήκαμε χρησιμοποιώντας την (7. 19).

Το Ω είναι κυρτό για κάθε $x \in \Omega$ και μπορεί να περιγραφεί σε πολικές συντεταγμένες με κέντρο x ως εξής

$$\Omega = \{(r, \omega) : 0 < r < r_{\omega}(x) : \omega \in S^{N-1}\}.$$

Έτσι λοιπόν λόγω της (2. 5) ισχύει

$$a_N \int_{S^{N-1}} r_{\omega}^N ds(\omega) = |\Omega| \Leftrightarrow \int_{S^{N-1}} r_{\omega}^N ds(\omega) = \frac{|\Omega|}{a_N}$$

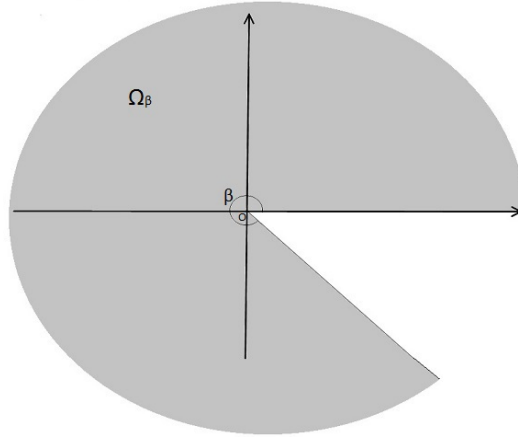
και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

8 Η ανισότητα Hardy σε άπειρο κυκλικό τομέα

Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου το Ω είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο για $\beta \in (0, 2\pi]$, περιγράφεται ως εξής

$$\Omega_\beta = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \beta\}.$$

Δηλαδή σαν ένας άπειρος κυκλικός τομέας, όπως στο σχήμα.



Σχήμα 5: Άπειρος κυκλικός τομέας ακτίνας $r > 0$.

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξετάσουμε την συμπεριφορά της σταθεράς Hardy $c(\Omega_\beta)$ όπου στη κυρτή περίπτωση και δουλεύοντας για $p = 2$ μας δίνει αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$.

Τότε για $\beta \leq \pi$ το Ω_β είναι κυρτό, συνεπώς $c(\Omega_\beta) = \frac{1}{4}$. Μένει λοιπόν να δούμε τι συμβαίνει όταν $\beta > \pi$ όπου το Ω_β είναι μη κυρτό.

Οι ακόλουθοι λοιπόν συλλογισμοί είναι για $\beta > \pi$. Το $d(x)$ σε αυτή τη περίπτωση δίνεται από τον τύπο $d(x) = rV_\beta(\theta)$, όπου

$$V_\beta(\theta) = \begin{cases} \sin \theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < \theta < \beta - \frac{\pi}{2} \\ \sin(\beta - \theta), & \beta - \frac{\pi}{2} < \theta < \beta \end{cases}$$

Η σταθερά της μονοδιάστατης Hardy για το δυναμικό $V_\beta(\theta)$ δίνεται από τον τύπο

$$c_\beta = \inf \frac{\int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta}.$$

Όπου το infimum λαμβάνεται ως προς όλες τις $\psi \in C_c^\infty(0, \beta)$.
Και αντίστοιχα της πολυδιάστατης από τον τύπο

$$c(\Omega_\beta) = \inf \frac{\int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega_\beta} \frac{u^2(x)}{d^2(x)} dx}.$$

Λήμμα 8.1. Για κάθε $\beta > \pi$ ισχύει

$$c_\beta = c(\Omega_\beta)$$

Απόδειξη. (i) $c_\beta \leq c(\Omega_\beta)$

Για να το αποδείξουμε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 dx \geq c_\beta \int_{\Omega_\beta} \frac{u^2(x)}{d^2(x)} dx$$

Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega_\beta)$, $u = u(r, \theta)$. Τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει η μονοδιάστατη Hardy ως εξής

$$\int_0^\beta |u'(\theta)|^2 d\theta \geq c_\beta \int_0^\beta \frac{u^2(r, \theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta.$$

Πολλαπλασιάζω με $\frac{1}{r}$ και ολοκληρώνω ως προς r .

$$\int_0^\infty \frac{1}{r} \int_0^\beta |u'(\theta)|^2 d\theta dr \geq c_\beta \int_0^\infty \frac{1}{r} \int_0^\beta \frac{u^2(r, \theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta dr \quad (8.22)$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την κλίση με πολικές συντεταγμένες της u και

στο προτελευταίο βήμα την (8. 22) που μόλις δείξαμε.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 dx &= \int_0^\infty \int_0^\beta (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2) r d\theta dr \\
&\geq \int_0^\infty \int_0^\beta \frac{1}{r} u_\theta^2 d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^\beta \frac{1}{r} |u'(\theta)|^2 d\theta dr \\
&\geq c_\beta \int_0^\infty \int_0^\beta \frac{u^2(r, \theta)}{[rV_\beta(\theta)]^2} r d\theta dr \\
&= c_\beta \int_{\Omega_\beta} \frac{u^2(x)}{d^2(x)} dx
\end{aligned}$$

δείξαμε το ζητούμενο, συνεπώς πράγματι $c_\beta \leq c(\Omega_\beta)$.

(ii) $c_\beta \geq c(\Omega_\beta)$

Έστω $\delta > 0$, από τις ιδιότητες του infimum υπάρχει $\psi \in C_c^\infty(0, \beta)$:

$$\frac{\int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta} < c_\beta + \delta$$

Θέτουμε $u_\varepsilon(r, \theta) = g_\varepsilon(r)\psi(\theta)$, $\varepsilon > 0$, όπου

$$g_\varepsilon(r) = \begin{cases} r^\varepsilon, & r < 1 \\ 2 - r, & 1 < r < 2 \\ 0, & r > 2 \end{cases}$$

Τότε $u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega_\beta)$ και έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\Omega_\beta} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx}{\int_{\Omega_\beta} \frac{u_\varepsilon^2(x)}{d^2(x)} dx} &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\beta (u_{\varepsilon,r}^2 + \frac{1}{r^2} u_{\varepsilon,\theta}^2) r d\theta dr}{\int_0^\infty \int_0^\beta \frac{g_\varepsilon^2(r) \psi^2(\theta)}{r^2 V_\beta^2(\theta)} r d\theta dr} \\
&= \frac{\int_0^\infty \int_0^\beta [\psi^2(\theta) g_\varepsilon'(r)^2 + \frac{1}{r^2} g_\varepsilon^2(r) \psi'(\theta)^2] r d\theta dr}{\int_0^\infty \int_0^\beta \frac{g_\varepsilon^2(r) \psi^2(\theta)}{r^2 V_\beta^2(\theta) r} d\theta dr} \\
&= \frac{\int_0^\beta \psi^2(\theta) d\theta \int_0^\infty g_\varepsilon'(r)^2 r dr}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta \int_0^\infty \frac{g_\varepsilon^2(r)}{r} dr} + \frac{\int_0^\beta \psi'(\theta)^2 d\theta \int_0^\infty \frac{g_\varepsilon^2(r)}{r} dr}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta \int_0^\infty \frac{g_\varepsilon^2(r)}{r} dr}
\end{aligned}$$

Ας δούμε τον πρώτο όρο του αθροίσματος

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^\beta \psi^2(\theta) d\theta \int_0^\infty g_\varepsilon'(r)^2 r dr}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta \int_0^\infty \frac{g_\varepsilon^2(r)}{r} dr} &= \frac{\int_0^\beta \psi^2(\theta) d\theta \left(\int_0^1 \varepsilon^2 r^{2\varepsilon-1} dr + \int_1^2 r dr + \int_2^\infty 0 dr \right)}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta \left(\int_0^1 r^{2\varepsilon-1} dr + \int_1^2 \frac{(2-r)^2}{r} dr + \int_2^\infty 0 dr \right)} \\
&= \frac{\int_0^\beta \psi^2(\theta) d\theta \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{2} \right)}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta \left(\frac{1}{2\varepsilon} + 4 \ln 2 - \frac{5}{2} \right)}
\end{aligned}$$

Συνεπώς ο πρώτος όρος για $\varepsilon \rightarrow 0$, τείνει στο 0, στο δεύτερο όρο τα ολοκληρώματα dr απλοποιούνται, και έτσι για $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε,

$$\frac{\int_{\Omega_\beta} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx}{\int_{\Omega_\beta} \frac{u_\varepsilon^2(x)}{d^2(x)} dx} \rightarrow \frac{\int_0^\beta \psi'(\theta)^2 d\theta}{\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta} < c_\beta + \delta$$

Εφόσον δ τυχαίο,

$$\frac{\int_{\Omega_\beta} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx}{\int_{\Omega_\beta} \frac{u_\varepsilon^2(x)}{d^2(x)} dx} \leq c_\beta$$

οπότε πράγματι $c_\beta \geq c(\Omega_\beta)$.

Από (i) και (ii) έχουμε $c_\beta = c(\Omega_\beta)$. □

Το παραπάνω λήμμα μας βοηθάει να βγάλουμε συμπεράσματα για τη σταθερά της πολυδιάστατης δουλεύοντας στη μία διάσταση. Για λόγους ευκολίας θέτουμε

$$h_\beta = \frac{1}{c_\beta}.$$

Λήμμα 8.2. *Το h_β είναι μία αύξουσα, συνεχής συνάρτηση του $\beta \in [0, 2\pi]$.*

Απόδειξη. Για $0 \leq \beta \leq \pi$ γνωρίζουμε $h_\beta = 4$, αρκεί να δείξω πως h_β κυρτή συνάρτηση του $\beta \in [0, 2\pi]$, ώστε να είναι και αύξουσα. Καθώς στο $[0, \pi]$ είχε σταθερή τιμή η h_β , η παράγωγος της ήταν 0, αν η παράγωγος αρχίσει να αυξάνει τότε θα παίρνει θετικές τιμές, οπότε και η συνάρτηση h_β θα είναι αύξουσα. Κάνοντας στη μονοδιάστατη Hardy την αλλαγή μεταβλητής

$$\phi = \frac{\theta\pi}{\beta},$$

παίρνουμε το εξής

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta &\leq \frac{1}{c_\beta} \int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta \Leftrightarrow \\ \int_0^\pi \frac{\psi^2\left(\frac{\beta\phi}{\pi}\right)}{V_\beta^2\left(\frac{\beta\phi}{\pi}\right)} \frac{\beta}{\pi} d\phi &\leq h_\beta \int_0^\pi \left|\psi'\left(\frac{\beta\phi}{\pi}\right)\right|^2 \frac{\pi}{\beta} \frac{\beta}{\pi} d\phi \end{aligned}$$

Και άρα η h_β είναι η βέλτιστη σταθερά για την ανισότητα

$$\int_0^\pi T(\beta, \phi) \zeta^2(\phi) d\phi \leq h_\beta \int_0^\pi |\zeta'(\phi)|^2 d\phi \quad , \forall \zeta \in C_c^\infty(0, \pi)$$

όπου

$$T(\beta, \phi) := \frac{\beta^2}{\pi^2 V_\beta^2 \left(\frac{\beta\phi}{\pi} \right)} = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\pi^2 \sin^2 \left(\frac{\beta\phi}{\pi} \right)}, & 0 < \frac{\beta\phi}{\pi} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\beta^2}{\pi^2}, & \frac{\pi}{2} < \frac{\beta\phi}{\pi} < \beta - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\beta^2}{\pi^2 \sin^2 \left(\beta - \frac{\beta\phi}{\pi} \right)}, & \beta - \frac{\pi}{2} < \frac{\beta\phi}{\pi} < \beta \end{cases}$$

Θα δείξουμε πως για κάθε $\phi \in [0, \pi]$ η $T(\beta, \phi)$ είναι κυρτή συνάρτηση του β . Για σταθερό ϕ αλλάζουμε μεταβλητή και πηγαίνουμε από το β σε νέα μεταβλητή $t = \beta\phi/\pi$.

Τότε στη περίπτωση $0 < \frac{\beta\phi}{\pi} < \frac{\pi}{2}$, έχουμε

$$T(\beta, \phi) = \frac{t^2}{\phi^2 \sin^2 t}, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Για να είναι αυτή κυρτή αρκεί να είναι κυρτή η $\frac{t}{\sin t}$. Υπολογίζουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{t}{\sin t} = \frac{t \sin^2 t + 2 \cos t (t - \sin t)}{\sin^3 t} > 0,$$

αφού $t > \sin t$ στο $(0, \pi/2)$.

Για $\frac{\pi}{2} < \frac{\beta\phi}{\pi} < \beta - \frac{\pi}{2}$, έχουμε

$$T(\beta, \phi) = \frac{t^2}{\phi^2}, \quad t \in (\frac{\pi}{2}, \beta - \frac{\pi}{2})$$

οπότε,

$$\frac{d^2 T(\beta, \phi)}{dt^2} = \frac{2}{\phi^2} > 0$$

Και λόγω συμμετρίας της συνάρτησης θα είναι θετική και για $\beta - \frac{\pi}{2} < \frac{\beta\phi}{\pi} < \beta$, οπότε η $T(\beta, \phi)$ είναι κυρτή συνάρτηση του β για κάθε $\phi \in (0, \pi)$.

Από τον ορισμό της κυρτότητας μίας συνάρτησης έχουμε πως αν

$$\beta = \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2, \quad \text{για κάποιο } \lambda \in (0, 1)$$

τότε,

$$T(\beta, \phi) \leq \lambda T(\beta_1, \phi) + (1 - \lambda)T(\beta_2, \phi)$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi T(\beta, \phi) |\psi(\phi)|^2 d\phi &\leq \lambda \int_0^\pi T(\beta_1, \phi) |\psi(\phi)|^2 d\phi + (1 - \lambda) \int_0^\pi T(\beta_2, \phi) |\psi(\phi)|^2 d\phi \\ &\leq \lambda h_{\beta_1} \int_0^\pi |\psi'(\phi)|^2 d\phi + (1 - \lambda) h_{\beta_2} \int_0^\pi |\psi'(\phi)|^2 d\phi. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\int_0^\pi T(\beta, \phi) |\psi(\phi)|^2 d\phi}{\int_0^\pi |\psi'(\phi)|^2 d\phi} \leq \lambda h_{\beta_1} + (1 - \lambda) h_{\beta_2}.$$

Και εφόσον

$$h_\beta = \sup \frac{\int_0^\pi T(\beta, \phi) |\psi(\phi)|^2 d\phi}{\int_0^\pi |\psi'(\phi)|^2 d\phi}.$$

Άρα,

$$h_\beta \leq \lambda h_{\beta_1} + (1 - \lambda) h_{\beta_2}.$$

Και έτσι καταλήγουμε πως h_β κυρτή ως προς β . □

Έχουμε λοιπόν πως h_β αύξουσα, με $h_\beta = 4$ για $0 < \beta \leq \pi$.

Πρόταση 8.3. Υπάρχει $\beta_c \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο ώστε, $h_\beta = 4$ για $0 < \beta < \beta_c$ και $h_\beta > 4$ για $\beta_c \leq \beta \leq 2\pi$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Γνωρίζουμε πως $h_\beta = 4$ για $0 < \beta \leq \pi$. Αν υποθέσουμε πως η πρόταση δεν ισχύει τότε έχουμε δύο πιθανά ενδεχόμενα.

- Είτε $h_\beta = 4$ για $\beta > \pi$.
- Είτε $h_\beta > 4$ για $\beta > \pi$.

Θα απορρίψουμε αρχικά τον πρώτο ισχυρισμό, θέτοντας στην ανισότητα Hardy $b = 2\pi$ και επιλέγοντας $\psi(\theta) = \sin(\frac{\theta}{2})$, αυτές οι επιλογές μας δίνουν το εξής,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{V_{2\pi}^2(\theta)} d\theta \leq h_{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} |\cos(\frac{\theta}{2})|^2 d\theta \quad (8. 23)$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{V_{2\pi}^2(\theta)} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^2 \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2(\frac{\theta}{2}) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους μας δίνει

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} |\cos(\frac{\theta}{2})|^2 d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Οπότε από την (8. 23) έχουμε

$$h_{2\pi} \geq 2 + \frac{8}{\pi} > 4,546.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η τιμή της σταθεράς δεν παραμένει 4 για κάθε $\beta > \pi$.

Τέλος θα απρρίψουμε και τον ισχυρισμό που η τιμή της σταθεράς αυξάνεται μόλις το β ξεπεράσει το π .

Θα δουλέψουμε με τη μέθοδο της θετικής υπερλύσης. Έστω $f(\theta)$ θετική, $\theta \in (0, \beta)$. Τότε για κάθε $\psi \in C_c^\infty(0, \beta)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\beta |\psi'(\theta) - \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \psi(\theta)|^2 d\theta \\ &= \int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta + \int_0^\beta \frac{|f'(\theta)|^2}{f^2(\theta)} \psi^2(\theta) d\theta - \int_0^\beta \left(\psi^2(\theta) \right)' \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta + \int_0^\beta \frac{f''(\theta)}{f(\theta)} \psi^2(\theta) d\theta - \left[\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \psi^2(\theta) \right]_0^\beta. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος μηδενίζει καθώς η ψ έχει συμπαγή φορέα, άρα

$$\int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta \geq - \int_0^\beta \frac{f''(\theta)}{f(\theta)} \psi^2(\theta) d\theta \quad (8. 24)$$

Επιλέγουμε

$$f(\theta) = \sqrt{\theta}\sqrt{\beta - \theta} \quad , \theta \in (0, \beta) ,$$

με απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε

$$-\frac{f''(\theta)}{f(\theta)} = \frac{\beta^2}{4\theta^2(\beta - \theta)^2} ,$$

και με αντικατάσταση στην (8. 24) έχουμε

$$4 \int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta \geq \int_0^\beta \frac{\beta^2}{\theta^2(\beta - \theta)^2} \psi^2(\theta) d\theta . \quad (8. 25)$$

Για $\beta = 4$ θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{V_\beta^2(\theta)} \leq \frac{\beta^2}{\theta^2(\beta - \theta)^2} . \quad (8. 26)$$

Για να το αποδείξουμε για $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ αποτετραγωνίζουμε τις σχέσεις και καθώς έχουμε θετικές ποσότητες η (8. 26) γίνεται

$$\theta^2 + 4 \sin \theta - 4\theta \geq 0 .$$

Θέτουμε συνάρτηση $g(\theta) = \theta^2 + 4 \sin \theta - 4\theta$, τότε

$$g'(\theta) = 2\theta + 4 \cos \theta - 4$$

$$g''(\theta) = 2 - 4 \sin \theta .$$

Η $g''(\theta)$ μηδενίζει στο $\frac{\pi}{6}$, και έτσι βρίσκουμε πως η $g(\theta)$ είναι αύξουσα και κυρτή για $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ και κοίλη για $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, άρα η $g(\theta)$ θα λαμβάνει το ελάχιστο σε ένα από τα άκρα της, εφόσον $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ και $g(0) = 0$, ελαχιστοποιείται για $\theta = 0$, οπότε ισχύει.

Για $\theta \in (\frac{\pi}{2}, 4 - \frac{\pi}{2})$ η (8. 26) γίνεται

$$(\theta - 2)^2 \geq 0 ,$$

το οποίο αληθεύει.

Και για $\theta \in (4 - \frac{\pi}{2}, 4)$ ομοίως ισχύει λόγω συμμετρίας με το πρώτο διάστημα. Έτσι από τις (8. 25) και (8. 26) έχουμε τελικά,

$$\int_0^\beta \frac{\psi^2(\theta)}{V_\beta^2(\theta)} d\theta \leq 4 \int_0^\beta |\psi'(\theta)|^2 d\theta .$$

Οπότε $h_\beta = 4$ για $\beta = 4$. Δηλαδή βρήκαμε $\beta > \pi$ στο οποίο η τιμή της h_β παραμένει 4.

Τελικά και οι δύο ισχυρισμοί κατέληξαν σε άτοπο, οπότε υπάρχει $\beta_c > \pi$ και μάλιστα $\beta_c > 4$, όπου η τιμή της σταθεράς h_β αρχίζει και αυξάνει. $\square$

παρατήρηση: Να αναφέρουμε πως έχει βρεθεί ότι το β_c δίνεται από τον τύπο

$$\tan\left(\frac{\beta_c - \pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right)^2$$

και η σταθερά c_β για $\beta \geq \beta_c$ από τον τύπο

$$\sqrt{c_\beta} \tan\left(\sqrt{c_\beta} \left(\frac{\beta - \pi}{2}\right)\right) = 2 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3 + \sqrt{1 - 4c_\beta}}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4c_\beta}}{4}\right)} \right)^2$$

Αναφορές

- [1] Balinsky A., Evans W.D. and Lewis R. The analysis and geometry of Hardy's inequality, Universitext. Springer, (2015). xv+263 pp.
- [2] Barbatis, G., Filippas, S. and Tertikas A. A unified approach to improved L_p Hardy inequalities with best constants. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 6, 2169–2196.
- [3] Barbatis, G., Filippas S. and Tertikas, A. Refined geometric L_p Hardy inequalities. Communications in Contemporary Mathematics, Vol.5, No.6, (2003), 869-881.
- [4] Barbatis G. Improved Rellich inequalities for the polyharmonic operator. Indiana University Mathematics Journal, Vol.55, No.4, (2006).
- [5] Barbatis G. and Tertikas A. On the Hardy constant of non-convex planar domains: the case of the quadrilateral. J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 6, 3701–3725.
- [6] Brezis H.M. Moshe Hardy's inequalities revisited. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 25 (1997), 217–237.
- [7] Davies E.B. Spectral theory and differential operators. Cambridge University Press, (1995).
- [8] Davies E.B. The Hardy constant, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 46 (1995), no. 184, 417–431.
- [9] Owen M.P. The Hardy-Rellich inequality for polyharmonic operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 129 (1999), no. 4, 825–839.