



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
—ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837—



Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

Τμήμα Μαθηματικών
Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Διδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Διπλωματική εργασία με τίτλο:

«Εισαγωγή των μαθητών της Β' Λυκείου στην έννοια της παραγώγου μέσω
ρεαλιστικών προβλημάτων με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων»

ΜΠΑΚΟΥΛΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

A.M.: Δ201927

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΨΥΧΑΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ – ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Λιυδρυσματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδασκτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 28^η Σεπτεμβρίου 2021 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από
τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Πολυχρόνη Κυνηγό	Καθηγητής ΕΚΠΑ
▪ Γεώργιο Ψυχάρη	Επικ. καθηγητής
▪ Χρυσανγή Τριανταφύλλου	Επικ. καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την
καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Πολυχρόνη Κυνηγό	Καθηγητής ΕΚΠΑ
▪ Γεώργιο Ψυχάρη	Επικ. καθηγητής
▪ Γεωργία Πετροπούλου	Δρ. στη Διδασκτική των Μαθηματικών

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον κ. Ψυχάρη τόσο για την καθοδήγησή του στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας όσο και για τη συνεισφορά του στο προπτυχιακό και το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών, όπου οι γνώσεις του για το αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών και η διάθεση του να βοηθήσει όλους τους φοιτητές και να ακούσει τις απόψεις τους έκαναν τα μαθήματα πιο ευχάριστα και πιο ενδιαφέροντα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Πετροπούλου για την ευχάριστη συνεργασία μας και τις χρήσιμες συμβουλές που μου έδωσε για τη συγγραφή αυτής της διπλωματικής εργασίας αλλά και για τη βοήθεια που παρείχε σε εμένα και άλλους συμφοιτητές μου στο μάθημα της ποιοτικής έρευνας του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμη τον κ. Κυνηγό που συμμετείχε στην τριμελή επιτροπή της εργασίας μου, του οποίου οι καινοτόμες ιδέες για την αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών ήταν ένας ακόμη λόγος για να εστιάσω σε αυτόν τον κλάδο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Δε θα μπω μπορούσα να μην ευχαριστήσω και την κ. Μπακογιάννη, καθώς συμμετείχε και εκείνη στο μάθημα της ποιοτικής έρευνας, το οποίο αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εφόδιο για τη συγγραφή μίας διπλωματικής εργασίας, και έδωσε σημαντικές συμβουλές σε εμένα και τους συμφοιτητές μου. Επίσης, από το πόστο της γραμματείας καθοδηγούσε και έλυνε την απορία οποιουδήποτε φοιτητή διατηρώντας πάντα την καλή της διάθεση.

Θέλω να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ και στα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα που έκανα.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, η οποία όποτε θέτω κάποιο στόχο, με τη στήριξή της και την κατανόηση που δείχνει, τον κάνει πάντοτε πιο εύκολο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	7
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.	
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.....	11
1.1. Η παράγωγος και οι συναφείς με αυτήν έννοιες.....	11
1.2. Η γραφική κατανόηση της έννοιας της παραγώγου.....	12
1.3. Εικόνα της έννοιας & ορισμός της έννοιας.....	13
1.4. Η θεωρία των ρεαλιστικών μαθηματικών.....	15
1.5. Η αξία της ενσώματης προσέγγισης νέων μαθηματικών εννοιών.....	16
1.6. Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στην ενσώματη προσέγγιση της έννοιας της παραγώγου.....	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	23
3.1. Ερευνητικά ερωτήματα.....	23
3.2. Ψηφιακά εργαλεία.....	23
3.3. Συλλογή δεδομένων.....	27
3.4. Σχεδιασμός - ανάλυση δραστηριοτήτων.....	27
3.5. A priori ανάλυση.....	34
3.6. Μέθοδος ανάλυσης.....	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	37
4.1. Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας και του λόγου $\Delta x/\Delta t$ στα διαφορετικά μαθηματικά πεδία εργασίας.....	37

4.1.1 Πεδίο εργασίας: Γράφημα Strava – Νοηματοδότηση του λόγου $\Delta x/\Delta t$ με αξιοποίηση του γραφήματος του Strava.....	37
4.1.2. Πεδίο εργασίας: Στήλη με pace του Strava - Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας μέσω της σύνδεσης της στήλης του Strava με το γράφημα και το χάρτη.....	41
4.1.3. Μετάβαση από το Strava στο Geogebra.....	44
4.1.4. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra - Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας μέσω της εφαρμογής του τύπου $\Delta x/\Delta t$ αξιοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις.....	46
4.1.5. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra - Εφαρμογή του τύπου $\Delta x/\Delta t$ σε μικρότερα χρονικά διαστήματα.....	48
4.1.6. Πεδίο εργασίας: Δομήματα του Geogebra που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό – Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας και του λόγου $\Delta x/\Delta t$ μέσω αξιοποίησης του «τριγώνου της ανάλυσης».....	52
4.2. Η προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας και η μετάβαση σε αυτή από τη μέση ταχύτητα μέσα από τα διαφορετικά μαθηματικά πεδία εργασίας.....	57
4.2.1. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra – Νοηματοδότηση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της στρατηγικής της μείωσης των χρονικών διαστημάτων.....	57
4.2.2. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra – Προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της γραφικής αναπαράστασης δύο διαφορετικών κινήσεων.....	61
4.2.3. Πεδίο εργασίας: Δομήματα του Geogebra που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό – Η προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω του «τριγώνου της ανάλυσης» και της στρατηγικής της μείωσης των χρονικών διαστημάτων.....	64
4.3. Πεδίο εργασίας: Δομήματα του Geogebra που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό - Η πρώτη επαφή με την έννοια του ορίου και η σύνδεσή της με τη στιγμιαία ταχύτητα μέσω του «τριγώνου της ανάλυσης».....	67

4.4. Η κλίση της εφαπτομένης στα διαφορετικά πεδία εργασίας του Geogebra και η σύνδεσή της με το ρυθμό μεταβολής.....	72
---	----

4.4.1. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra – Η νοηματοδότηση της έννοιας της κλίσης μέσω της γραφικής αναπαράστασης δύο διαφορετικών προπονήσεων.....	72
--	----

4.4.2. Πεδίο εργασίας: Ψηφιακά δομήματα με δυναμικό χειρισμό – Η νοηματοδότηση της έννοιας της κλίσης γενικότερα και της κλίσης εφαπτομένης ειδικότερα μέσω κατάλληλα διαμορφωμένων ψηφιακών δομημάτων.....	77
---	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	84
-------------------	----

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	92
-------------------	----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	95
----------------	----

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία συγγράφτηκε με σκοπό τη μελέτη των ενεργειών των μαθητών της Β' Λυκείου κατά την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων που έχουν ως κεντρικό θέμα την εισαγωγή στην έννοια της παραγώγου. Οι ενέργειες των μαθητών εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις γνώσεις που ήδη έχουν, από το περιβάλλον μέσα στο οποίο εργάζονται και τα εργαλεία τα οποία αυτό διαθέτει. Κυρίαρχο ρόλο σε αυτήν την εργασία έχουν τα ψηφιακά μέσα, καθώς οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν προκειμένου οι μαθητές να αξιοποιήσουν τα πλεονεκτήματα των εργαλείων που προσφέρουν αυτές οι σύγχρονες τεχνολογίες. Στόχος, λοιπόν, της εργασίας είναι να μελετήσει πως νοηματοδοτούν οι μαθητές της Β' Λυκείου τις έννοιες που σχετίζονται με εκείνη της παραγώγου προτού διδαχθούν τον τυπικό ορισμό της ανάλογα με το διαφορετικό μαθηματικό χώρο εργασίας (mathematical working space) που βρίσκονται κάθε φορά αλλά και ποιος είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων που διαθέτει ο κάθε ένας από αυτούς. Στην έρευνα που έγινε συμμετείχαν τρεις μαθήτριες της Β' Λυκείου ενός ολιγομελούς τμήματος φροντιστηρίου που δεν είχαν συναντήσει ποτέ ξανά στο παρελθόν την έννοια της παραγώγου. Οι μαθήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν στα ερωτήματα τριών δραστηριοτήτων, για τα οποία χρειάστηκαν παραπάνω από μία συναντήσεις που διεξήχθησαν όχι εντός τάξεως αλλά μέσω υπολογιστή λόγω των περιοριστικών μέτρων κατά της COVID-19 και τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αφορούσαν τόσο στους μεταξύ τους διαλόγους όσο και στις παρεμβάσεις τους στα αντίστοιχα ψηφιακά περιβάλλοντα. Από τη μελέτη αυτών των δεδομένων αναδείχθηκε ο τρόπος με τον οποίο έγινε η νοηματοδότηση της κάθε έννοιας στην οποία βασίζεται αυτή της παραγώγου, καθώς και η συμβολή που είχε σε αυτή ένα λογισμικό που χρησιμοποιούν στην καθημερινότητά πολλά άτομα που ασχολούνται με τον αθλητισμό και το δημοφιλές μαθηματικό λογισμικό Geogebra.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παράγωγος είναι μία βασική έννοια των μαθηματικών και αποτελεί σημαντικό μέρος της ύλης της Γ' Λυκείου, στην οποία εξετάζονται οι μαθητές προκειμένου να εισαχθούν στα ιδρύματα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι περισσότεροι μαθητές σε αυτό το κεφάλαιο εξοικειώνονται με το χειρισμό της παραγώγου ως διαδικασία είτε μέσω των κανόνων παραγωγίσης είτε μέσω της εφαρμογής της στην επίλυση προβλημάτων ακολουθώντας μία καθορισμένη μεθοδολογία. Περιορίζονται δηλαδή στην εκτέλεση μίας σειράς κανόνων η οποία δεν εξασφαλίζει την εννοιολογική κατανόηση της παραγώγου και την εδραίωσή της ως μαθηματικό αντικείμενο στη σκέψη τους. Το γεγονός αυτό οφείλεται από τη μία στην έμφαση που δίνεται τόσο από τους καθηγητές και τους μαθητές στις μεθοδολογίες που υπάρχουν στο εκάστοτε κεφάλαιο της διδακτέας ύλης, τις οποίες απλά εφαρμόζουν ανάλογα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης που έχουν να λύσουν κάθε φορά, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιλαμβάνονται πολλές μαθηματικές έννοιες, ειδικά στον κλάδο της ανάλυσης, ως απλές διαδικασίες και να μην τις αφομοιώνουν ως μαθηματικά αντικείμενα (Sfard, 1992). Από την άλλη, όμως, η δυσκολία στην εννοιολογική κατανόηση της παραγώγου έχει να κάνει και με την ίδια την παράγωγο, η οποία είναι εξ' ορισμού μία πολύπλοκη έννοια. Σε αντίθεση με άλλα κεφάλαια της διδακτέας ύλης των μαθηματικών, όπως αυτό των εμβαδών από τον κλάδο της γεωμετρίας, ή αυτό των εξισώσεων από τον κλάδο της άλγεβρας τα οποία οι μαθητές μπορούν να τα αντιληφθούν διαισθητικά και να τα συνδέσουν με την καθημερινότητά τους και τις εμπειρίες τους, η παράγωγος ορίζεται με ένα σύνθετο τύπο $(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})$, τον οποίο δυσκολεύονται να αποκωδικοποιήσουν και να τον κατανοήσουν με βάση τη διαίσθησή τους.

Αξίζει βέβαια να γίνει αναφορά και στους δύο βασικούς τρόπους με τους οποίους εμφανίζεται η παράγωγος σε γραφικές παραστάσεις και σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Ο ένας είναι η κλίση της εφαπτομένης καμπύλης και ο άλλος είναι ο ρυθμός μεταβολής, και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούνται αρκετά λάθη και παρανοήσεις από τους μαθητές, ενώ είναι επίσης πολύ δύσκολη και η σύνδεση μεταξύ αυτών των δύο τρόπων έκφρασης της παραγώγου (Orton, 1983). Όσον αφορά στον ρυθμό μεταβολής η πιο συνηθισμένη μορφή με την οποία εμφανίζεται σε ρεαλιστικά προβλήματα και διευκολύνει σε ένα βαθμό τη διαισθητική του προσέγγιση είναι αυτή

της ταχύτητας (Sahin, Yenmez, Erbas, 2015). Για το λόγο αυτό έχει κεντρικό ρόλο στις δραστηριότητες της συγκεκριμένης εργασίας, οι οποίες ξεκινούν με τη μελέτη της προπόνησης ενός δρομέα που τρέχει μεγάλες αποστάσεις και συνεχίζουν με τη μελέτη των κινήσεων ενός ποδηλάτη και ενός μοτοσικλετιστή, με απώτερο σκοπό τη μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα και τη σύνδεση αυτής με την κλίση εφαπτομένης. Ο Tall (2003) μάλιστα έχει επισημάνει την αξία των δραστηριοτήτων που προάγουν και την αισθητηριακή αντίληψη των μαθηματικών εννοιών και τη δημιουργία μαθηματικών συλλογισμών από τους μαθητές πριν την αυστηρή διατύπωσή του αντίστοιχου ορισμού.

Εκτός από το πρόβλημα της διαισθητικής προσέγγισης, η παράγωγος αποτελεί μία πολύ σύνθετη έννοια αφού σε αυτή εμπλέκονται πέντε ακόμη έννοιες, αυτή του λόγου, του ορίου, της συνάρτησης, της κλίσης εφαπτομένης και του ρυθμού μεταβολής (Zandieh, 2000). Είναι πολύ σύνηθες στα μαθηματικά όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή είτε με νέες έννοιες είτε με ασκήσεις που δεν έχουν λύσει ξανά στο παρελθόν να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που ήδη έχουν ή κάποιες παρόμοιες εμπειρίες τους ως βάση και πάνω σε αυτές να προσπαθούν να χτίσουν τις νέες τους γνώσεις. Μάλιστα σύμφωνα με τη Sfard (1992) ένα αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο χτίζεται με βάση κάποιο άλλο, ενώ όσον αφορά στα προβλήματα ο Polya στο γνωστό του βιβλίο «How to solve it» αναφέρει πως όταν ένας μαθητής καλείται να λύσει κάποιο δύσκολο πρόβλημα είναι χρήσιμο να σκέφτεται άλλα παρόμοια που έχει λύσει στο παρελθόν. Για το λόγο αυτό οι διαφορετικές έννοιες που σχετίζονται με την παράγωγο εμφανίζονται σε παραπάνω από ένα ερωτήματα των δραστηριοτήτων και μάλιστα με κλιμακούμενη δυσκολία. Η έρευνα, λοιπόν, εστιάζει στην εισαγωγή των μαθητών σε αυτή τη νέα και δύσκολη έννοια μέσα από δραστηριότητες που έχουν ως στόχο την νοηματοδότηση εκείνων των εννοιών στις οποίες πρέπει να στηριχθούν προκειμένου να καταλάβουν την παράγωγο και τον τυπικό ορισμό της. Κάποιες από αυτές τις γνωρίζουν ήδη, όπως τη μέση ταχύτητα και το λόγο $\Delta x / \Delta t$ που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ή την εφαπτομένη καμπύλης, ενώ κάποιες άλλες δεν τις γνωρίζουν καθόλου, όπως είναι για παράδειγμα αυτή του ορίου. Ένας πολύ βασικός στόχος των δραστηριοτήτων είναι η σύνδεση όλων αυτών των εννοιών, η οποία θα επιφέρει την καλύτερη κατανόηση της παραγωγού, και κυρίως η μελέτη των ενεργειών που κάνουν οι μαθητές προκειμένου νοηματοδοτήσουν και να συνδυάσουν όλες αυτές τις έννοιες μεταξύ τους.

Σε αυτό το μεταβατικό στάδιο από την ύλη της Β' Λυκείου στην παράγωγο εκτός από την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και το είδος των δραστηριοτήτων που δίνονται προς επίλυση είναι πολύ σημαντικό και το περιβάλλον μέσα στο οποίο θα εργαστούν. Στη συγκεκριμένη έρευνα το περιβάλλον αυτό αποτελείται από σύγχρονα ψηφιακά μέσα, τα οποία διευκολύνουν ακόμα περισσότερο τη διαισθητική προσέγγιση των νέων εννοιών και την αξιοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης. Τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν από συγκεκριμένα πλεονεκτήματα των ψηφιακών μέσων, η χρήση των οποίων γίνεται όλο και πιο έντονη στη διδακτική των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια. Χάρη σε αυτά οι μαθητές έρχονται σε επαφή με πολλαπλές αναπαραστάσεις που αφορούν στην ίδια έννοια, τις οποίες παρατηρούν και κάθε μία ξεχωριστά αλλά και τις συγκρίνουν μεταξύ τους. Έτσι, καταλήγουν σε κάποια συμπεράσματα για τα οποία απαιτείται κάποια επιβεβαίωση, την οποία την αναζητούν είτε ξανά μέσω της παρατήρησης είτε μέσω κάποιου μαθηματικού συλλογισμού. Πέρα από την παρατήρηση, πολύ σημαντικός είναι και ο πειραματισμός από τους ίδιους τους μαθητές. Τα λογισμικά που περιέχουν εργαλεία κατασκευής σχημάτων ή δομήματα που αλλάζουν μέσω δυναμικού χειρισμού έχουν το πλεονέκτημα της εξερεύνησης και της δημιουργίας. Οι μαθητές δρώντας σε τέτοιου είδους λογισμικά είτε κάνουν σκέψεις και εικασίες οι οποίες καθορίζουν τις ενέργειές τους στο αντίστοιχο ψηφιακό περιβάλλον είτε καταλήγουν σε κάποιες υποθέσεις έπειτα από τον πειραματισμό με τα εργαλεία που έχουν στη διάθεσή τους. Επομένως, ο δεύτερος στόχος των δραστηριοτήτων που έχουν σχεδιαστεί είναι η μελέτη της επίδρασης που έχουν τα ψηφιακά λογισμικά στις ενέργειες των μαθητών.

Στα παρακάτω κεφάλαια της εργασίας θα αναλυθούν λεπτομερώς όλες οι ενέργειές τους σχετικά με την παρατήρηση και την ερμηνεία των αναπαραστάσεων, τις παρεμβάσεις με τα εργαλεία των λογισμικών αλλά και τους συλλογισμούς τους με βάση την προϋπάρχουσα γνώση τους στην προσπάθειά τους να νοηματοδοτήσουν τις έννοιες που διαμορφώνουν εκείνη της παραγωγού μέσα από τη δράση σε διαφορετικούς μαθηματικούς χώρους εργασίας (Kuzniak, Tanguay, Elia, 2016).

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1.1. Η παράγωγος και οι συναφείς με αυτήν έννοιες

Οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με την παράγωγο αποτελούν την αφορμή για πολλές έρευνες στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών εδώ και αρκετά χρόνια. Παρά την άνεση που έχουν στην παραγωγή συναρτήσεων, ύστερα από εξάσκηση, οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ στην εννοιολογική κατανόηση της παραγώγου (Borji, Alamolhodaei, Radmehr, 2018) με τη δυσκολία αυτή να οφείλεται στη σύνθετη μορφή που έχει η παράγωγος, καθώς σε αυτή συμπεριλαμβάνονται 5 επιμέρους έννοιες, αυτή της συνάρτησης, του λόγου, της κλίσης εφαπτομένης, του ρυθμού μεταβολής και του ορίου. Η Zandieh (2000), λοιπόν, η οποία θεωρεί ότι ο διαφορικός λογισμός είναι ο βασικός πυρήνας των μαθηματικών στις μεγαλύτερες τάξεις του Λυκείου, και συγκεκριμένα στην Γ' όσον αφορά στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, δημιούργησε ένα πλαίσιο για τον τρόπο νοηματοδότησης της παραγώγου με βάση τις παραπάνω έννοιες. Σε αυτό συμπεριλαμβάνονται τρεις από αυτές (λόγος, όριο, συνάρτηση) και πολλές ακόμα αναπαραστάσεις, ή γενικότερα καταστάσεις, στις οποίες εμφανίζεται η παράγωγος. Για την καλύτερη μελέτη της σύνδεσης που κάνουν οι μαθητές μεταξύ αυτών των εννοιών και των καταστάσεων στις οποίες εμφανίζονται, η Zandieh έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα (βλ. Σχήμα 1), ο οποίος έχει αξιοποιηθεί και από άλλους ερευνητές.

	Contexts				
	Graphical	Verbal	Paradigmatic	Symbolic	Other
	Slope	Rate	Physical Velocity	Difference Quotient	
Ratio	○				
Limit	○				
Function					

Σχήμα 1

Από τις παραπάνω έννοιες, η συνάρτηση προκαλεί αρκετά προβλήματα στους μαθητές όταν ασχολούνται με την παράγωγο λόγω της μεγάλης εξάρτησης της

δεύτερης από την πρώτη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ότι πολλοί μαθητές δεν συνειδητοποιούν ότι η παράγωγος μίας αρχικής συνάρτησης είναι και αυτή συνάρτηση ενώ επίσης πολλοί αδυνατούν να διαχωρίσουν τον παράγωγο αριθμό ($f'(a)$) από την παράγωγο συνάρτηση ($f'(x)$) (Park, 2013). Μάλιστα, κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι το αποτέλεσμα $f'(a)$ όταν αυτό υπολογίζεται με τον ορισμό είναι διαφορετικό από όταν υπολογίζεται με τους κανόνες παραγωγίσης (Areaya, Sidelil, 2012). Αυτό το παράδειγμα αποτελεί μία ακόμη επιβεβαίωση της προτίμησης των μαθητών στο διαδικαστικό κομμάτι που σχετίζεται με την παράγωγο και της δυσκολίας στην κατανόηση της ίδιας της έννοιας και του ορισμού της. Αυτή η συνήθης προτίμηση των ασκήσεων που περιλαμβάνουν εκτέλεση πράξεων και μεθοδολογιών από τους μαθητές, αποτελεί σημαντικό μέρος του ερευνητικού έργου της Sfard (1992) η οποία έχει επισημάνει ότι η εδραίωση μίας έννοιας στη σκέψη των μαθητών ως μαθηματικό αντικείμενο και ο χειρισμός της ως τέτοιο σε άλλες μαθηματικές καταστάσεις είναι πολύ πιο δύσκολη από την απλή εφαρμογή της ως διαδικασία. Παρόμοια είναι και η θεωρία του Skemp (1976) περί νοηματοδότησης στα μαθηματικά, κατά την οποία διαχωρίζει την κατανόηση σε εργαλειακή (instrumental) και συσχετιστική (relational). Με την πρώτη εννοείται ο χειρισμός μίας έννοιας ως διαδικασία τα βήματα της οποίας εκτελούνται μηχανικά, χωρίς ο μαθητής να γνωρίζει σε τι οφείλονται αυτά, ενώ με τη δεύτερη εννοείται η πλήρης κατανόηση όλων όσων σχετίζονται με την αντίστοιχη έννοια.

1.2. Η γραφική κατανόηση της έννοιας της παραγώγου

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, όταν πρόκειται για την παράγωγο οι μαθητές προτιμούν το διαδικαστικό μέρος της εκτέλεσης των κανόνων παραγωγίσης και συναντούν μεγάλες δυσκολίες όταν αυτή εμφανίζεται σε ρεαλιστικές καταστάσεις ή άλλες αναπαραστάσεις όπως είναι για παράδειγμα σε γραφικές παραστάσεις. Το γεγονός αυτό καθιστά απολύτως λογικό το συμπέρασμα του Tall (1991) πως η κατανόηση από τους μαθητές στον κλάδο της ανάλυσης γενικότερα, και στο κεφάλαιο της παραγώγου ειδικότερα, είναι κυρίως αλγεβρική παρά γραφική. Γραφικά εμφανίζεται κυρίως ως ρυθμός μεταβολής και ως κλίση εφαπτομένης με αποτέλεσμα τη δημιουργία αρκετών ακόμα παρανοήσεων εκ μέρους των μαθητών. Όσον αφορά στο ρυθμό μεταβολής, οι μαθητές δυσκολεύονται να καταλάβουν ότι εκφράζει το λόγο της μεταβολής ενός μεγέθους προς τη μεταβολή ενός άλλου, γνωρίζουν μόνο τον τύπο $\Delta x / \Delta t$ από το μάθημα της Φυσικής και αποδίδουν καλύτερα σε εφαρμογές

της παραγώγου όταν αυτή εμφανίζεται ως ταχύτητα. Σε έρευνα που έκαναν οι Sahin, Yenmez και Erbas (2015) διαπιστώθηκε ότι φοιτητές που συμμετείχαν σε αυτή αντιμετώπισαν μεγαλύτερη δυσκολία σε μία εφαρμογή όπου ο ρυθμός μεταβολής σχετιζόταν με την πίεση του αίματος και όχι με την ταχύτητα. Σχετικά με την έννοια της κλίσης εφαπτομένης και τη σύνδεσή της με την έννοια της παραγώγου, οι βασικότεροι λόγοι για τους οποίους οι μαθητές συναντούν δυσκολίες είναι ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται την εφαπτομένη μιας καμπύλης από τις προηγούμενες τάξεις και η μη καλή κατανόηση της έννοιας του ορίου. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές από την τάξη της Α' Γυμνασίου αντιλαμβάνονται οπτικά την έννοια της εφαπτομένης λόγω της ενότητας Β.1.13 του σχολικού βιβλίου «Θέσεις ευθείας και κύκλου» στην οποία γίνεται λόγος για τις σχετικές θέσεις που μπορεί να έχουν στο επίπεδο μία ευθεία και ένας κύκλος. Από αυτήν την ενότητα έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η εφαπτομένη είναι μία ευθεία η οποία έχει ένα και μόνο σημείο τομής με την αντίστοιχη καμπύλη, που στα παραδείγματα της Α' Γυμνασίου είναι ο κύκλος. Την παρανόηση αυτή έχει τονίσει και ο Vinner (1982), ο οποίος αναφέρει ότι οι πρώτες εμπειρίες των μαθητών πάνω στην εφαπτομένη κύκλου έχουν ως αποτέλεσμα να θεωρούν πως η εφαπτομένη είναι μία ευθεία που έχει μόνο ένα σημείο επαφής με τον κύκλο χωρίς να τον τέμνει και σε κάποιο ακόμα. Την έννοια της εφαπτομένης οι μαθητές τη συναντούν και στην τάξη της Β' Λυκείου και συγκεκριμένα στα μαθηματικά προσανατολισμού, όπου και πάλι μελετούν την εφαπτομένη κύκλου, όπως επίσης και άλλων κωνικών τομών όπως της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής. Και σε αυτές τις περιπτώσεις, οι μαθητές παρατηρώντας τα αντίστοιχα σχήματα καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η εφαπτομένη είναι μία ευθεία που έχει μόνο ένα σημείο τομής με την αντίστοιχη καμπύλη. Στη Γ' Λυκείου ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται η έννοια της εφαπτομένης ξεπερνά τον παραπάνω απλοϊκό ορισμό που προκύπτει μέσω παρατήρησης και εκφράζεται μέσω της σύγκλισης μίας τέμνουσας ευθείας μίας καμπύλης στην οριακή της θέση.

1.3.Εικόνα της έννοιας & ορισμός της έννοιας

Την κατανόηση της εφαπτομένης από τους μαθητές έχει μελετήσει ο Tall (1987), ο οποίος κατέληξε στο συμπέρασμα πως η κατασκευή της εικόνας της έννοιας (concept image) της εφαπτομένης είναι αρκετά δύσκολη διαδικασία. Με τον όρο «εικόνα της έννοιας» εννοείται όλο το σύνολο των γνωστικών δομών που υπάρχουν στο μυαλό

ενός ατόμου σχετικά με μία συγκεκριμένη έννοια (Tall & Vinner, 1981). «Τα μαθηματικά αποτελούν ένα αντικείμενο που διακρίνεται από μεγάλη ακρίβεια και συμπεριλαμβάνει έννοιες οι οποίες ορίζονται πολύ αυστηρά προκειμένου να αποτελούν στέρεα δομή για μαθηματικές θεωρίες. Πολλές έννοιες, είτε εύκολες είτε σύνθετες, οι μαθητές τις έχουν συναντήσει πριν από τον τυπικό ορισμό τους με αποτέλεσμα να προϋπάρχει ήδη στο μυαλό τους μία σύνθετη γνωστική δομή». Με βάση την άποψή τους αυτή οι Tall και Vinner (1981) μελέτησαν το ρόλο όλων των παραγόντων που συμβάλλουν στην κατασκευή μίας έννοιας από τους μαθητές και κατέληξαν στη δημιουργία δύο όρων: ο ένας που αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι η εικόνα της έννοιας (concept image) που περιλαμβάνει όλες τις νοερές εικόνες, τις ιδιότητες και τις διαδικασίες που σχετίζονται με μία έννοια των μαθηματικών. Ο άλλος όρος είναι ο ορισμός της έννοιας (concept definition) με τον οποίο εννοείται το σύνολο των λέξεων που χρησιμοποιούνται για να προσδιοριστεί η αντίστοιχη έννοια. Η εικόνα της έννοιας και ο ορισμός της έννοιας εκφράζουν δύο πολύ διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας κατασκευής μίας έννοιας από τους μαθητές αλλά συνδέονται σε σημαντικό βαθμό μεταξύ τους, διότι η πλήρης κατανόηση ενός τυπικού ορισμού προϋποθέτει μία κατάλληλη εικόνα της έννοιας. Αυτή διαμορφώνεται μέσα από τις εμπειρίες των μαθητών και τις συνδέσεις που κάνουν μεταξύ των ρεαλιστικών καταστάσεων και των μαθηματικών τους γνώσεων, χωρίς να περιορίζονται μόνο σε μαθηματικούς συλλογισμούς και σε θεωρίες, αλλά ενεργοποιώντας παράλληλα την αισθητηριακή τους αντίληψη και τη διαίσθησή τους. Κάθε άτομο λοιπόν μπορεί να έχει διαφορετική εικόνα για μία έννοια ανάλογα με τον τρόπο που τη νοηματοδοτεί ακόμα και αν στα σχολικά εγχειρίδια δίνεται ένας τυπικός ορισμός που είναι ευρέως αποδεκτός από όλη την εκπαιδευτική κοινότητα και δεν μπορεί να αμφισβητηθεί. Για το λόγο αυτό οι Tall και Vinner κάνουν λόγο για τον «προσωπικό ορισμό μίας έννοιας» (personal concept definition), τον οποίο διαχωρίζουν από τον «τυπικό ορισμό μίας έννοιας» (formal concept definition) και τον συνδέουν σε ένα βαθμό με την αντίστοιχη εικόνα της έννοιας. Πολλές φορές δεν εφαρμόζεται ακριβώς ο ορισμός ή ο τύπος που αντιστοιχεί σε μία έννοια αλλά σχετικές διαδικασίες, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της συνάρτησης όπου ο ορισμός αναφέρει την αντιστοίχιση όλων των στοιχείων ενός συνόλου A σε ένα ακριβώς στοιχείο ενός άλλου συνόλου B , αλλά οι μαθητές έχουν εδραιώσει στο μυαλό τους τη διαδικασία αντικατάστασης του x στον τύπο της συνάρτησης που δίνει το αντίστοιχο αποτέλεσμα y . Όσον αφορά στην παράγωγο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι παρόμοια

είναι η εφαρμογή των κανόνων παραγωγίσης που προκύπτουν από τον ορισμό και όχι η χρήση του ίδιου του ορισμού. Επίσης, είναι πιθανή και η σωστή χρήση ενός ορισμού από τους μαθητές, χωρίς όμως εκείνοι να έχουν διαμορφώσει μία κατάλληλη εικόνα για την αντίστοιχη έννοια. Δηλαδή κάποιοι μαθητές συνηθίζουν να εφαρμόζουν σε ασκήσεις τύπους και ορισμούς που αφορούν μία έννοια χωρίς να τους συνδέουν ούτε με εμπειρίες από την καθημερινότητά τους, ούτε με κάποιες αναπαραστάσεις και γενικότερα με καμία γνωστική δομή που υπάρχει στο μυαλό τους και σχετίζεται με την αντίστοιχη έννοια. Το γεγονός αυτό μας θυμίζει τις έρευνες της Sfard για τη διαφορά μαθηματικής διαδικασίας και μαθηματικού αντικειμένου και του Skemp για την εργαλειακή και συσχετιστική κατανόηση. Επομένως, για να πούμε ότι ένας μαθητής ξέρει μία έννοια πρέπει να γνωρίζει τον ορισμό της, να τον χειρίζεται σωστά σε ασκήσεις και να τον αντιλαμβάνεται διαισθητικά συνδέοντάς τον με τις δικές τους εμπειρίες και εικόνες.

1.4. Η θεωρία των ρεαλιστικών μαθηματικών

Για τη διαισθητική αντίληψη των μαθηματικών εννοιών είναι ιδιαίτερα σημαντική η εμπλοκή των μαθητών με ρεαλιστικά προβλήματα που τις πραγματεύονται. Τις βάσεις για τη μελέτη της αξίας αυτών των προβλημάτων έχει θέσει ο Freudenthal από τη δεκαετία του 70' με την ανάπτυξη της θεωρίας των ρεαλιστικών μαθηματικών (Realistic Mathematics Education). Η θεωρία αυτή μελετά πως τα ρεαλιστικά προβλήματα με μαθηματικό περιεχόμενο (context problems) αναδεικνύουν τη χρησιμότητα μίας μαθηματικής έννοιας και αυξάνουν το κίνητρο για τους μαθητές προκειμένου να επανεφεύρουν οι ίδιοι τα μαθηματικά (Gravemeijer & Doorman, 1999). Με τον όρο «επανεφεύρεση των μαθηματικών» εννοείται η ανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών από τους ίδιους τους μαθητές, αντί να τους δίνεται κατευθείαν κάποιος ορισμός και στη συνέχεια κάποια επεξήγηση αυτού. Ωστόσο, δεν μπορούν οι μαθητές από μόνοι τους να επανεφεύρουν τα μαθηματικά και για αυτό το λόγο είναι πολύ σημαντική η καθοδηγούμενη επανεφεύρεση (guided reinvention), κατή την οποία, σύμφωνα και με τους Stephan, Underwood-Gregg και Yackel (2014), ο καθηγητής διαμορφώνει τα προβλήματα που δίνει στους μαθητές με τέτοιο τρόπο ώστε να ανακαλύψουν νέες μαθηματικές έννοιες μέσω των δικών τους ενεργειών, μαθηματοποιώντας τα αντίστοιχα προβλήματα. Με τον όρο μαθηματοποίηση εννοείται η οργάνωση και η κωδικοποίηση μίας δραστηριότητας μέσω των μαθηματικών συμβόλων, με τον Treffers (1987) να τη διαχωρίζει σε οριζόντια και

κάθετη. Η οριζόντια εκφράζει τη μετάβαση από τον πραγματικό στο μαθηματικό κόσμο καθώς ο μαθητής μεταφράζει ένα πρόβλημα με μαθηματικούς όρους και σύμβολα, ενώ η κάθετη αφορά στη δράση του μαθητή αποκλειστικά στον κόσμο των μαθηματικών συμβόλων (Gravemeijer & Doorman, 1999). Για αυτή τη μετάβαση από τον πραγματικό στο μαθηματικό κόσμο και από τα άτυπα στα τυπικά μαθηματικά είναι σημαντικός ο ρόλος των μοντέλων που προκύπτουν από τη δράση των μαθητών, τα οποία οι Gravemeijer και Stephan (2002) έχουν χαρακτηρίσει ως αναδυόμενα μοντέλα (emergent models). Πιο συγκεκριμένα, μέσω της επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές και εφαρμόζουν μεθόδους με βάση την εμπειρία τους ενώ πολλές φορές ανακαλύπτουν μοντέλα τα οποία στη συνέχεια γενικεύουν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα προβλήματα που πραγματεύονται καταστάσεις στις οποίες εμπλέκονται τα μεγέθη του χρόνου, της απόστασης και της ταχύτητας με τις γραφικές παραστάσεις να αποτελούν συνήθως το *μοντέλο της* (model of) κατάστασης, το οποίο μέσα από τη δράση και τις σκέψεις των μαθητών μετατρέπεται σε ένα *μοντέλο για* (model for) συλλογισμούς σχετικά με έννοιες του κλάδου της ανάλυσης που στηρίζονται στα τυπικά μαθηματικά (Gravemeijer & Doorman, 1999). Μία τέτοια έννοια η οποία εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τα τρία προαναφερθέντα μεγέθη είναι εκείνη της παραγώγου καθώς όταν αυτή εμφανίζεται ως ταχύτητα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης ενός κινητού.

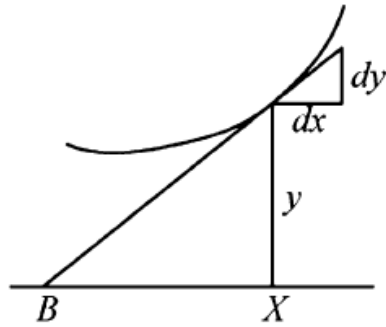
1.5. Η αξία της ενσώματης προσέγγισης νέων μαθηματικών εννοιών

Σε πιο σύγχρονη έρευνά (2003) του ο Tall, προσπαθώντας να μελετήσει τη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές διέκρινε τρία στάδια προσέγγισης αυτών, ανάλογα με τον τρόπο αναπαράστασής τους: το ενσώματο (embodied), το συμβολικό-αντιληπτικό (symbolic-proceptual) και το τυπικό-αξιοματικό (formal-axiomatic), εστιάζοντας περισσότερο στο ενσώματο στο οποίο επισήμανε ότι η τεχνολογία έχει τα φόντα να διαδραματίσει καταλυτικό ρόλο. Αυτά τα διαφορετικά στάδια ο Tall τα χαρακτηρίζει ως μαθηματικούς κόσμους αναπαράστασης (representational worlds) με τον ενσώματο να στηρίζεται στις αντιληπτικές ικανότητες και στις ενέργειες των μαθητών σε δραστηριότητες που προέρχονται από τον πραγματικό κόσμο. Στον συμβολικό-αντιληπτικό οι μαθητές συνδυάζουν το ρόλο των συμβόλων της αριθμητικής, της άλγεβρας και της ανάλυσης και τα αντιλαμβάνονται τόσο ως διαδικασίες (processes) όσο και ως έννοιες

(concepts). Στον τρίτο μαθηματικό κόσμο, τον τυπικό-αξιωματικό, κυριαρχούν τα αξιώματα και οι μαθηματικοί συλλογισμοί των μαθητών με στόχο την απόδειξη θεωρημάτων. Από τους παραπάνω, ο ενσώματος είναι ιδιαίτερα σημαντικός για τη νοηματοδότηση μίας νέας έννοιας διότι σε αυτό είναι πιο έντονη η αισθητηριακή αντίληψη των μαθητών και οι διαδικασίες σύνδεσης με τον πραγματικό κόσμο. Για το λόγο αυτό ο Tall χρησιμοποίησε τον όρο «embodied», τον οποίο «δανείστηκε» από τη θεωρία της ενσώματης νόησης (embodied cognition) του Lakoff (Lakoff and Johnson, 1999, Lakoff and Nunez, 2000, Nunez et al 1999), η οποία υποστηρίζει πως η νόηση του ατόμου δεν περιορίζεται μόνο στο χειρισμό αφηρημένων συμβόλων αλλά στηρίζεται στη δράση του ίδιου του ατόμου και στη σκέψη του εντός ρεαλιστικών πλαισίων (Anderson, 2003). Ο Tall, λοιπόν, χρησιμοποίησε τον όρο «embodied» για το πρώτο στάδιο νοηματοδότησης μίας έννοιας προκειμένου να αναδείξει τη σημασία της διαισθητικής αντίληψης των μαθητών και της δράσης τους σε καταστάσεις που προέρχονται από τις καθημερινές τους εμπειρίες. Παρόλο που σε αυτό το στάδιο δεν είναι εφικτή η απόδειξη μίας μαθηματικής πρότασης ή ενός θεωρήματος δημιουργείται ένα καλό υπόβαθρο για αυτή και ο μαθητής μπορεί να μεταβεί στο συμβολικό στάδιο, όπου η σκέψη του γίνεται πιο αλγεβρική αφού χρησιμοποιεί σύμβολα και εφαρμόζει διαδικασίες για να αποτυπώσει τις ιδέες του και μετέπειτα να πάει στο ανώτερο στάδιο, το αξιωματικό, όπου κυριαρχεί ο φορμαλισμός και η αιτιολόγηση αποκλειστικά με μαθηματικά αξιώματα και θεωρήματα. Ωστόσο, το γεγονός ότι το πρώτο στάδιο εστιάζει περισσότερο στη διαίσθηση του μαθητή δε σημαίνει ότι δε θα κάνει και πιο προχωρημένες και σύνθετες σκέψεις. Όσες περισσότερες εμπειρίες έχει ο μαθητής τόσο καλύτερα μπορεί να συνδέσει μία μαθηματική έννοια με την πραγματικότητα και να της δώσει περισσότερες από μία ερμηνείες. Από όλες τις μαθηματικές έννοιες, ο Tall (2003) έδωσε ιδιαίτερη έμφαση σε αυτές της ανάλυσης, η οποία, όπως αναφέρει, έχει πολλές εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο με αποτέλεσμα ο μαθητής να μπορεί να τις αντιληφθεί με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με τον κόσμο αναπαράστασης στον οποίο λειτουργεί γνωστικά. Χρησιμοποιεί μάλιστα ως παράδειγμα από το κεφάλαιο των παραγώγων τη γραφική αναπαράσταση του ρυθμού μεταβολής. Γενικότερα, για τη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών που συμπεριλαμβάνονται στον κλάδο της ανάλυσης είναι πολύ σημαντικός ο ρόλος της οπτικοποίησης (Zimmermann, 1991) και η αξιοποίηση των γραφικών παραστάσεων.

1.6.Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στην ενσώματη προσέγγιση της έννοιας της παραγώγου

Η εξέλιξη της τεχνολογίας και η εισαγωγή των υπολογιστών στη διδακτική των μαθηματικών έχουν το πλεονέκτημα της άμεσης πρόσβασης σε πολλαπλές αναπαραστάσεις όσον αφορά μία έννοια, όπως για παράδειγμα αυτή του ρυθμού μεταβολής, αλλά και αυτό του δυναμικού χειρισμού. Με τη χρήση των κατάλληλων λογισμικών ο μαθητής μπορεί να πειραματίζεται είτε κάνοντας κατασκευές είτε μετακινώντας σχεδιασμένα ψηφιακά δομήματα και μέσω αυτών των διαδικασιών να νοηματοδοτεί όποια μαθηματική έννοια σχετίζεται με τη δραστηριότητα με την οποία ασχολείται στο εκάστοτε ψηφιακό περιβάλλον. Ο Tall, λοιπόν, επισημαίνει την αξία δύο βασικών παραγόντων για την ενσώματη προσέγγιση μίας μαθηματικής έννοιας. Ο ένας είναι η ύπαρξη ενός πρωτογενούς πλαισίου (generic organizer), δηλαδή ενός περιβάλλοντος εντός του οποίου ο μαθητής μπορεί να εμπλέκεται με δραστηριότητες που να αφορούν μία μαθηματική έννοια ή κάποιες άλλες που σχετίζονται με αυτή. Ο άλλος, εξίσου σημαντικός, παράγοντας για την προσέγγιση μίας έννοιας είναι η ύπαρξη μίας γνωστικής ρίζας (cognitive root), δηλαδή μίας έννοιας την οποία μπορεί να νοηματοδοτήσει ο μαθητής και να τη μετατρέψει σε μία βάση στην οποία θα στηριχθεί για να μεταβεί στους τυπικούς ορισμούς της θεωρίας των μαθηματικών. Ως παράδειγμα αναφέρει την τοπική ευθύτητα μίας καμπύλης, η οποία αποτελεί τη γνωστική ρίζα της παραγωγικής. Με τον όρο τοπική ευθύτητα μίας καμπύλης εννοείται το αποτέλεσμα της συνεχούς μεγέθυνσης ενός τμήματος μίας καμπύλης, το οποίο τείνει να πάρει τη μορφή μίας ευθείας η οποία συμπίπτει με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο που γίνεται η μεγέθυνση. Κατά τον τρόπο αυτό διευκολύνεται ο υπολογισμός της κλίσης της εφαπτομένης και κατά συνέπεια η ενσώματη προσέγγιση του ορισμού του Leibniz για την παράγωγο (Tall, 2009), καθώς το τμήμα της καμπύλης που μοιάζει με ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να αποτελέσει την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου των οποίων οι κάθετες πλευρές έχουν μήκος dy και dx (βλ. Σχήμα 2). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως για την καλή κατανόηση μίας γνωστικής ρίζας απαιτείται και η αξιοποίηση του κατάλληλου πρωτογενούς πλαισίου, το οποίο στην περίπτωση της τοπικής ευθύτητας είναι ένα ψηφιακό περιβάλλον που προσφέρει στο μαθητή τη δυνατότητα της μεγέθυνσης και της αλλαγής των διαστάσεων του τριγώνου που δημιουργείται για τον υπολογισμό της κλίσης εφαπτομένης.



Σχήμα 2

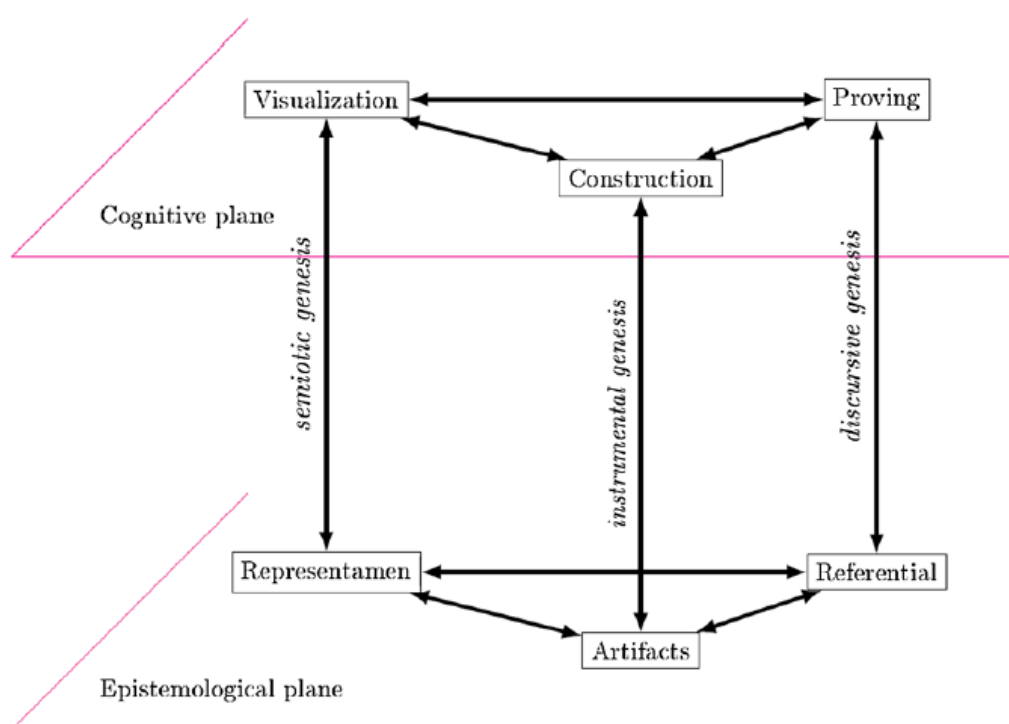
Οι Weber, Tallman, Byerley και Thompson (2012) εστίασαν στο ρόλο αυτού του τριγώνου στη νοηματοδότηση της έννοιας της παραγώγου και το χαρακτήρισαν μάλιστα ως «τρίγωνο της ανάλυσης» (calculus tringle). Το βασικό πλεονέκτημα αυτού του τριγώνου είναι πως δίνει στο μαθητή την ευκαιρία να παρατηρήσει τα μεγέθη που μεταβάλλονται καθώς αλλάζουν οι διαστάσεις του, και μάλιστα μπορεί ο ίδιος να το κάνει τόσο μικρό όσο εκείνος επιθυμεί. Έτσι, ο μαθητής νοηματοδοτεί καλύτερα μέσα από τις δικές του ενέργειες και εμπειρίες, δηλαδή με ενσώματο τρόπο, την έννοια του ρυθμού μεταβολής και πιο συγκεκριμένα του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής, ο οποίος μέσω του τριγώνου συνδέεται με την κλίσης εφαπτομένης και έτσι δημιουργείται μία πιο καλή και στέρεα βάση για την κατανόηση του τυπικού ορισμού της παραγώγου. Πέρα από τους ερευνητές που αναφέρθηκαν προηγουμένως, η έρευνα του Tall σχετικά με το τρίγωνο που συμβάλλει στην ενσώματη προσέγγιση της παραγώγου επηρέασε και άλλους ερευνητές όπως τους Sari, Hadiyan και Antari (2018), που έκριναν σημαντική τη δημιουργία του τριγώνου μέσω του ψηφιακού περιβάλλοντος του Geogebra. Αυτό που κάνει πολύτιμο το Geogebra για τη νοηματοδότηση της παραγώγου είναι πως συνδυάζει και την αλγεβρική και τη γεωμετρική φύση του κλάδου της ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, το Geogebra ανήκει και στην κατηγορία των περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας (Dynamic Geometry Environment) αλλά και στην κατηγορία των ψηφιακών αλγεβρικών συστημάτων (Computer Algebra Systems). Δύο πολύτιμες λειτουργίες του σχετικά με το «τρίγωνο της ανάλυσης» είναι αυτή του δυναμικού χειρισμού που συμβάλλει στη δημιουργία πολλών διαφορετικών τριγώνων και αυτή της απειροελάχιστης προσέγγισης, με την οποία το τρίγωνο μπορεί να γίνει πολύ μικρό με αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής και της εφαπτομένης ως μία τέμνουσα της καμπύλης που τείνει σε στην οριακή της θέση.

2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όλες οι παραπάνω έρευνες σχετίζονται με τη σταδιακή προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και ειδικότερα εκείνη της παραγώγου καθώς και με το ρόλο που έχει το περιβάλλον μέσα στο οποίο ο μαθητής αναπτύσσει τη δική του δράση. Ωστόσο, για τη μελέτη των νοητικών διεργασιών του μαθητή και της επίδρασης που δέχεται από το πεδίο στο οποίο δρα, προκειμένου να νοηματοδοτήσει την έννοια της παραγώγου και να κατανοήσει ουσιαστικά τον τυπικό ορισμό της, απαιτείται ένα κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο. Ένα τέτοιο πλαίσιο είναι εκείνο των μαθηματικών χώρων εργασίας. Το συγκεκριμένο πλαίσιο, αν και αναπτύχθηκε από τους Houdement και Kuzniak το 2006 για τη μελέτη παραδειγμάτων από τον κλάδο της γεωμετρίας εξελίχθηκε σε ένα ευρύτερο πλαίσιο που μελετά τις ενέργειες που κάνουν οι μαθητές για να κατασκευάσουν μία έννοια (Artigue, 2016). Οι ενέργειες αυτές συνδέουν δύο επίπεδα στα οποία εντάσσονται από τη μία το περιεχόμενο των μαθηματικών έργων με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές και από την άλλη η δράση τους και οι γνωστικές ενέργειες στις οποίες προβαίνουν. Το επίπεδο που σχετίζεται με το μαθηματικό περιεχόμενο είναι το επιστημολογικό και περιλαμβάνει ένα σύνολο αντικειμένων, σχημάτων και συμβόλων (Representamen), ένα σύνολο τεχνουργημάτων (Artifacts), στα οποία συμπεριλαμβάνονται και τα ψηφιακά λογισμικά, και ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς (Referential) που αποτελείται από θεωρήματα, ορισμούς, ιδιότητες και τύπους. Το άλλο επίπεδο είναι το γνωστικό και αποτελείται από την οπτικοποίηση (visualization) μέσω της οποίας οι μαθητές ερμηνεύουν και αποκωδικοποιούν τα διαθέσιμα σύμβολα και αναπαραστάσεις, την κατασκευή (construction) που πετυχαίνουν μέσω της αξιοποίησης των τεχνουργημάτων και την αποδεικτική διαδικασία (proving) η οποία γίνεται με βάση το θεωρητικό σύστημα αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου.

Η κατασκευή μίας μαθηματικής έννοιας, λοιπόν, από τους μαθητές προκύπτει από τη σύνδεση που προσπαθούν να κάνουν μεταξύ αυτών των δύο επιπέδων. Αυτή η σύνδεση γίνεται μέσω τριών γενεσιουργών διαδικασιών: τη σημειωτική γένεση (Semiotic Genesis), την εργαλειακή γένεση (Instrumental Genesis) και τη διαλογική γένεση (Discursive Genesis), δρώντας αντίστοιχα στο σημειωτικό, το εργαλειακό και το διαλογικό επίπεδο νοηματοδότησης. Η πρώτη από αυτές τις διαδικασίες

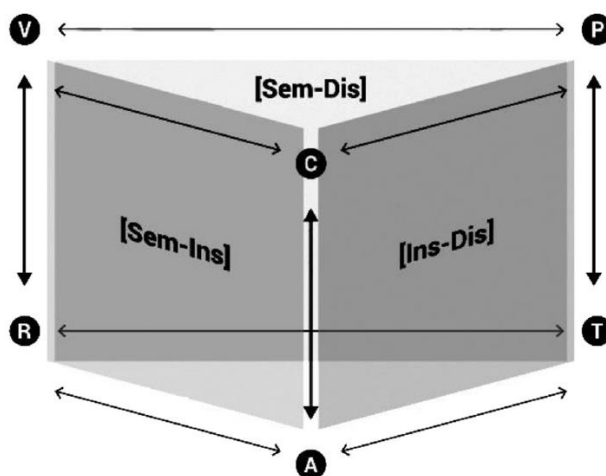
αποτελείται από το σύνολο των ενεργειών που κάνουν οι μαθητές προκειμένου να συνδυάσουν τις σκέψεις, τις εικασίες τους και τα συμπεράσματά τους με τα σύμβολα και τις αναπαραστάσεις που τους προσφέρονται. Η δεύτερη είναι η διαδικασία κατά την οποία το τεχνούργημα γίνεται εργαλείο μέσω της δράσης και του πειραματισμού των μαθητών. Μάλιστα, η Artigue (2002) χωρίζει την εργαλειακή γένεση σε δύο κατηγορίες: τη διαμόρφωση δραστηριότητας μέσω του εργαλείου (*instrumentation*), όπου οι ενέργειες των μαθητών καθορίζονται από τα τεχνουργήματα και την τροποποίηση εργαλείου (*instrumentalization*) όπου η παρέμβαση που γίνεται στα διαθέσιμα τεχνουργήματα είναι στοχευμένη αφού προέρχεται από κάποια σχετική ιδέα των μαθητών. Τέλος, η διαλογική γένεση είναι η οργάνωση και η σύνδεση όλων των ιδιοτήτων ενός θεωρητικού συστήματος αναφοράς που γίνεται με στόχο τη μαθηματική αιτιολόγηση εκ μέρους των μαθητών ή την επικύρωση κάποιου συλλογισμού τους.



Σχήμα 3

Οι τρεις αυτές διαδικασίες όμως δεν είναι αποκομμένες η μία από την άλλη και γι' αυτό γίνεται λόγος για κάποια νέα επίπεδα που συνδυάζουν τις παραπάνω διαδικασίες. Αυτά είναι το Sem-Dis plane που συνδέει το σημειωτικό με το διαλογικό

επίπεδο, το Ins-Dis plane που συνδέει το εργαλειικό με το διαλογικό και το Sem-Ins plane που συνδέει το σημειωτικό με το εργαλειικό επίπεδο.



Σχήμα 4

Το παραπάνω πλαίσιο, λοιπόν, αν και δημιουργήθηκε για έρευνες στον κλάδο της γεωμετρίας, εξελίχθηκε και χρησιμοποιείται γενικότερα για τη μελέτη της νοηματοδότησης πολλών και διαφορετικών μαθηματικών εννοιών. Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία για παράδειγμα χρησιμοποιεί αυτό το πλαίσιο των μαθηματικών χώρων εργασίας για τη μελέτη της νοηματοδότησης της έννοιας της παραγώγου από τις μαθήτριες που συμμετέχουν στην αντίστοιχη έρευνα. Επίσης, παρόλο που το πλαίσιο της Zandieh είναι χρήσιμο για τη μελέτη της κατανόησης της παραγώγου και έχει εφαρμοστεί κατά καιρούς και από άλλους ερευνητές δεν αξιοποιήθηκε σε αυτή την εργασία, αλλά αποτέλεσε την αφορμή για την εστίαση στις διαφορετικές έννοιες που είναι απαραίτητες ώστε να επιτευχθεί η νοηματοδότηση της παραγώγου. Αυτή πετυχαίνεται μέσω των ενεργειών των μαθητριών κυρίως εντός του ενσώματου μαθηματικού κόσμου, όπως αναφέρει και ο Tall (2003) αφού οι δραστηριότητες απαιτούν τη δράση από τις ίδιες τις μαθήτριες σε κατάλληλα ψηφιακά περιβάλλοντα. Παρόλο που το ερευνητικό έργο των Zandieh και Tall είχε καθοριστικό ρόλο για τη διαμόρφωση της συγκεκριμένης εργασίας, το βασικό πλαίσιο με το οποίο έγινε η ανάλυση των δεδομένων είναι εκείνο των μαθηματικών χώρων εργασίας καθώς με βάση αυτό έγινε η μελέτη των ενεργειών των μαθητριών στα ψηφιακά λογισμικά που χρησιμοποιούσαν για να απαντήσουν σε δραστηριότητες που αφορούσαν στην παράγωγο και τις επιμέρους έννοιες που τη διαμορφώνουν, πριν μεταβούν στο αξιωματικό επίπεδο και την εκμάθηση του τυπικού ορισμού της.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στόχος της έρευνας είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο νοηματοδοτούν οι μαθητές τις βασικές έννοιες που σχετίζονται με εκείνη της παραγώγου όταν αυτές εμφανίζονται μέσα σε μία ρεαλιστική κατάσταση. Δύο πολύ καθοριστικοί παράγοντες για τη δράση των μαθητών είναι οι γνώσεις που ήδη έχουν και τα ψηφιακά εργαλεία που τους προσφέρονται. Αυτά τα εργαλεία αποτελούν κάποια από τα βασικά χαρακτηριστικά της εφαρμογής αθλητικού περιεχομένου Strava και του μαθηματικού λογισμικού Geogebra. Για την καλύτερη μελέτη του ρόλου αυτών των λογισμικών, τα εργαλεία τους χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες, οι οποίες αποτέλεσαν τα τρία μαθηματικά πεδία εργασίας (Kuzniak, Tanguay, Elia, 2016) στα οποία έδρασαν οι μαθητές με στόχο τη νοηματοδότηση των εννοιών που σχετίζονται με εκείνη της παραγώγου.

3.1.Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που προκύπτουν λοιπόν είναι τα εξής:

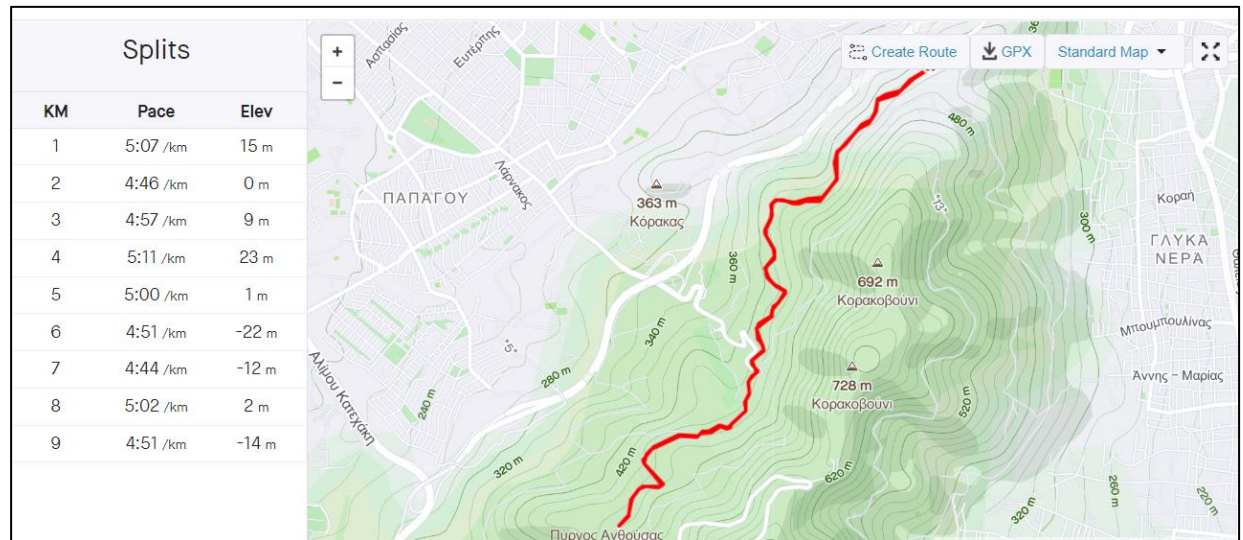
- i) Πώς νοηματοδοτούν οι μαθητές της Β' Λυκείου τις έννοιες που σχετίζονται με εκείνη της παραγώγου προτού διδαχθούν τον τυπικό ορισμό της, καθώς εργάζονται με προβλήματα σε διαφορετικά πεδία εργασίας;
- ii) Ποιος είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στη διαδικασία νοηματοδότησης;

3.2.Ψηφιακά εργαλεία

Strava

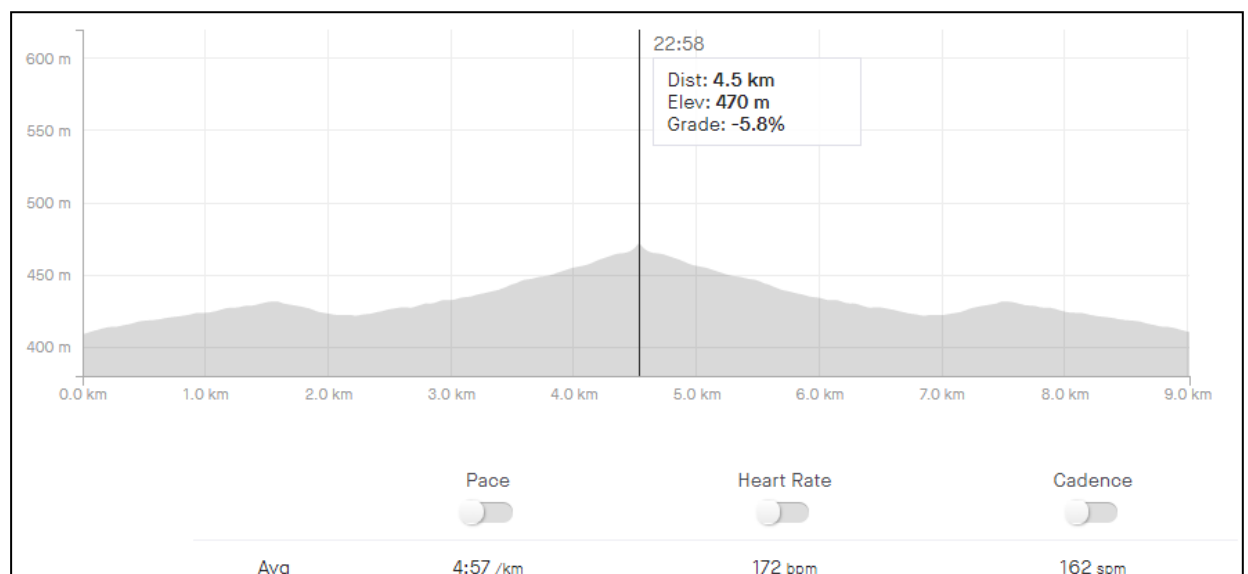
Το Strava είναι ένα πολύ δημοφιλές πρόγραμμα που χρησιμοποιούν όσοι ασχολούνται είτε επαγγελματικά είτε ερασιτεχνικά με τον αθλητισμό για να έχουν μία πλήρη εικόνα των προπονήσεων που κάνουν. Στις δραστηριότητες της συγκεκριμένης εργασίας το Strava χρησιμοποιείται για τη μελέτη της προπόνησης ενός δρομέα και παρέχει πληροφορίες για τον συνολικό χρόνο, για τη συνολική απόσταση που έκανε και για το ρυθμό τρεξίματος (pace), ένα μέγεθος που εκφράζει πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας δείχνοντας πόσο χρόνο χρειάζεται για να διανύσει το ένα χιλιόμετρο. Εκτός από αυτά τα βασικά χαρακτηριστικά, το Strava περιέχει επίσης κάποιες στατικές και

δυναμικές αναπαραστάσεις, όπως τον χάρτη της διαδρομής την οποία έκανε ο δρομέας, μία στήλη με το ρυθμό τρεξίματος του δρομέα ανά χιλιόμετρο (Σχήμα 5)



Σχήμα 5

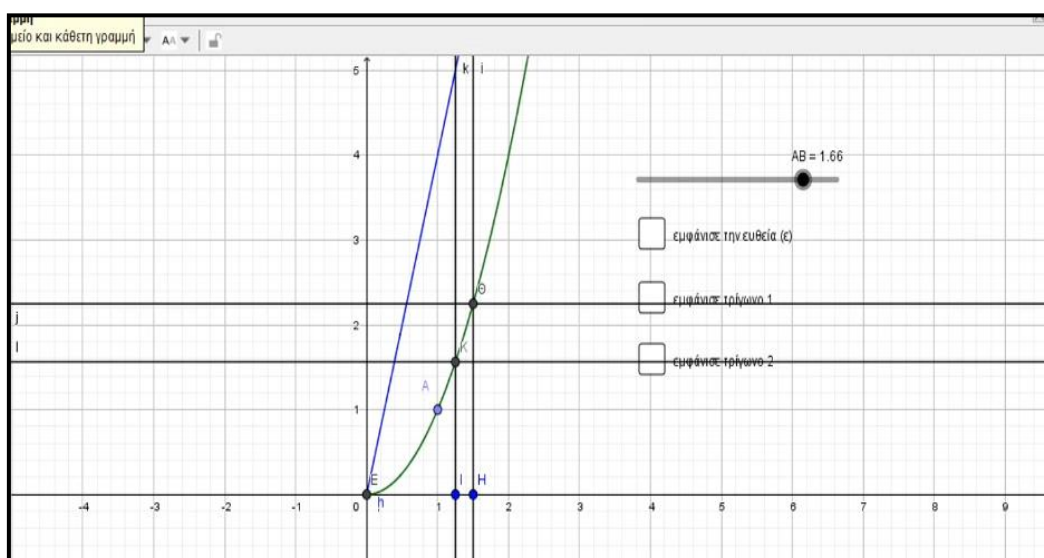
και ένα γράφημα με μία γραμμή η οποία ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται δίνει κάποιες πληροφορίες για την προπόνηση του δρομέα όπως την αντίστοιχη χρονική στιγμή, την συνολική απόσταση που έχει διανύσει μέχρι τότε, το υψόμετρο και την κλίση του δρόμου (Σχήμα 6). Τη γραμμή αυτή ο χρήστης του Strava έχει τη δυνατότητα να τη μετακινεί κατά μήκος όλης της διαδρομής, σύροντας το ποντίκι του υπολογιστή προς τα αριστερά και τα δεξιά. Όλες αυτές οι αναπαραστάσεις διαμορφώνουν το πρώτο μαθηματικό πεδίο εργασίας.



Σχήμα 6

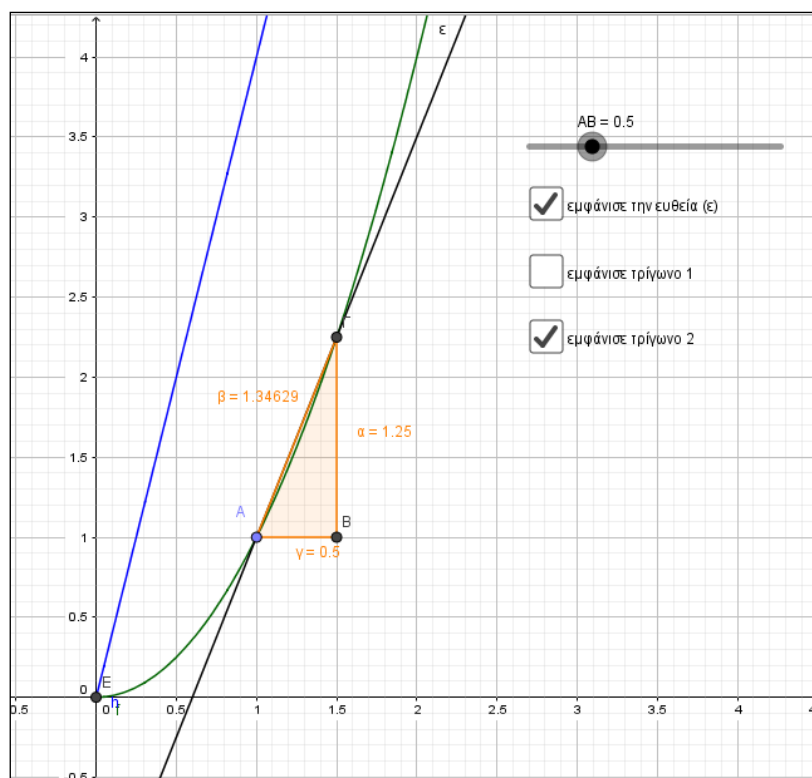
Geogebra

Τα άλλα δύο μαθηματικά πεδία εργασίας που θα μελετηθούν περιλαμβάνουν αναπαραστάσεις από το άλλο λογισμικό, το Geogebra. Αυτό αποτελεί ένα από τα πιο δημοφιλή περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (DGE) και χρησιμοποιείται από πολλούς μαθητές και καθηγητές παγκοσμίως, χάρη σε συγκεκριμένα πλεονεκτήματα που έχει, τα οποία είχαν σημαντικό ρόλο και στις δραστηριότητες αυτής της εργασίας. Το περιβάλλον του Geogebra περιέχει δύο βασικούς χώρους, εκείνον της άλγεβρας και εκείνον των γραφικών. Στο χώρο των γραφικών υπάρχει η δυνατότητα παρουσίασης έτοιμων ψηφιακών δομημάτων, όπως για παράδειγμα γραφικές παραστάσεις, αλλά και κατασκευής νέων, μέσω των εργαλείων σχεδιασμού βασικών σχημάτων όπως για παράδειγμα σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, κύκλοι και άλλα (Σχήμα 7).



Σχήμα 7

Τα χαρακτηριστικά όλων αυτών των σχημάτων, όπως ονομασίες, μήκη, εμβαδά και τύποι απεικονίζονται στην αλγεβρική στήλη. Πέρα από την κατασκευή και την παρατήρηση των σχημάτων, σε συνδυασμό και με τις τιμές τους στην αλγεβρική στήλη, το Geogebra προσφέρει επίσης την πολύ σημαντική δυνατότητα του δυναμικού χειρισμού, πολλές φορές και με τη χρήση κάποιου δρομέα (Σχήμα 8).



Σχήμα 8

Με τον όρο αυτό εννοείται η κάθε κίνηση που κάνει ο χειριστής ενός DGE η οποία επιφέρει κάποιες μεταβολές σε ένα δοθέν σχήμα. Ο δυναμικός χειρισμός μπορεί να γίνει είτε με τη διαδικασία του συρσίματος αντικειμένων που περιέχονται σε ένα ψηφιακό δόμημα, όπως για παράδειγμα σημείων, είτε με τη μετακίνηση ενός δρομέα στον οποίο αντιστοιχεί η τιμή ενός αντικείμενου του δομήματος, με το σύρσιμο προς τα αριστερά να συνεπάγεται μείωση ενώ προς τα δεξιά αύξηση αυτής. Σε κάθε περίπτωση η διαδικασία του συρσίματος προκαλεί τον πειραματισμό των μαθητών με αποτέλεσμα τη δημιουργία εικασιών, τις οποίες στη συνέχεια καλούνται να αποδείξουν (Baccaglini- Frank, Mariotti, 2010). Γενικότερα το Geogebra, μέσω των εργαλείων και των αναπαραστάσεων που διαθέτει, προκαλεί τη δράση των μαθητών σε όλα τα επίπεδα νοηματοδότησης δηλαδή και στο σημειωτικό και το εργαλειώδες και το διαλογικό αφού παρατηρούν, κατασκευάζουν, τροποποιούν σχήματα, δημιουργούν εικασίες, τις οποίες στη συνέχεια προσπαθούν να επιβεβαιώσουν είτε με περισσότερο πειραματισμό στο Geogebra είτε μέσω συλλογισμών που στηρίζονται σε ορθώς τεκμηριωμένα μαθηματικά επιχειρήματα. Επομένως τα άλλα δύο μαθηματικά πεδία εργασίας είναι, πρώτον, οι στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra και δεύτερον τα ψηφιακά του δομήματα που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό.

3.3. Συλλογή δεδομένων

Στην έρευνα που διεξήχθη συμμετείχαν 3 μαθήτριες της Β' Λυκείου, οι οποίες χωρίστηκαν σε μία που δούλεψε ατομικά και σε μία ομάδα των δύο ατόμων με τη διδακτική παρέμβαση στη μία μαθήτρια να διαρκεί περίπου 6 ½ ώρες ενώ στην ομάδα 6 ώρες. Λόγω της έξαρσης του κορωνοϊού στην Ελλάδα όλα τα μαθήματα γίνονταν διαδικτυακά κατά την περίοδο διεξαγωγής της έρευνας, με αποτέλεσμα η συλλογή των δεδομένων να γίνει μέσω Skype. Χάρη στην αξιοποίηση αυτής της πλατφόρμας όλοι οι συμμετέχοντες είχαν τη δυνατότητα διαμοιρασμού της οθόνης τους ενώ υπήρχε και η δυνατότητα καταγραφής τόσο της οθόνης όσο και των διαλόγων μέσω του ίδιου του Skype. Πιο συγκεκριμένα, η συλλογή των δεδομένων έγινε το μήνα Απρίλιο, δηλαδή σε μία χρονική περίοδο που είχαν ήδη διδαχθεί τα κεφάλαια της τριγωνομετρίας, της ευθείας και του κύκλου με το τελευταίο από αυτά να είναι ιδιαίτερα σημαντικό λόγω της έννοιας της εφαπτομένης. Στις μαθήτριες, λοιπόν, που είχαν γνώση όλων αυτών των κεφαλαίων αλλά δεν είχαν συναντήσει ποτέ την έννοια της παραγώγου δόθηκαν τρεις δραστηριότητες.

3.4. Σχεδιασμός - ανάλυση δραστηριοτήτων

Απώτερος σκοπός όλων αυτών των δραστηριοτήτων ήταν η σταδιακή μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα και την έννοια του ορίου, και τελικά η σύνδεση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής με την κλίση εφαπτομένης. Ξεκινώντας από την πρώτη δραστηριότητα, στόχος της ήταν σε πρώτη φάση η εξοικείωση των μαθητριών με την εφαρμογή Strava, την οποία δεν είχαν χρησιμοποιήσει ποτέ ξανά στο παρελθόν ώστε να νοηματοδοτήσουν μέσω των εργαλείων της την έννοια της μέσης ταχύτητας και να τη συνδέσουν με το μέγεθος του ρυθμού τρεξίματος, το οποίο εκφράζει και αυτό το πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας.

Δραστηριότητα 1

Α) Κάτω από το χάρτη υπάρχει ένα γράφημα. Ποιες πληροφορίες μπορείτε να αντλήσετε από αυτό;

Β) Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο δρομέας για να διανύσει τα πρώτα 2,4 χιλιόμετρα;

Γ) Από τα 9 χιλιόμετρα που έτρεξε ο δρομέας βρείτε εκείνο το χιλιόμετρο που έκανε πιο γρήγορα, εξετάζοντας το γράφημα που βρίσκεται κάτω από τον χάρτη (Σχήμα 1). Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Δ) Από τα δεδομένα που σας προσφέρει το πρόγραμμα, μπορείτε να βρείτε κάποιο μέγεθος που να εκφράζει το πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας;

Ε) Ο ποδηλάτης έκανε όλη τη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα 14,4 km/h. Ποιος τερμάτισε πρώτος τη διαδρομή ο δρομέας ή ο ποδηλάτης;

Τα δύο πρώτα ερωτήματα δόθηκαν προκειμένου να εξερευνήσουν αυτό το νέο λογισμικό και να μάθουν πως μπορούν να αντλήσουν τα δεδομένα που θα είναι χρήσιμα για τα επόμενα ερωτήματα στα οποία θα εμπλακούν με έννοιες οι οποίες είναι σχετικές με την παράγωγο. Μία από αυτές είναι εκείνη της ταχύτητας και για το λόγο αυτό τα ερωτήματα Γ έως Ε είχαν στόχο την αξιοποίηση της μέσης ταχύτητας και του τύπου $\Delta x / \Delta t$. Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα Γ εστιάζει στο μέγεθος του χρόνου, από το οποίο εξαρτάται η ταχύτητα, και στον υπολογισμό του Δt μέσω του δυναμικού χειρισμού της γραμμής που περιέχεται στο γράφημα. Το ερώτημα Δ αποσκοπούσε στη σύνδεση του τύπου $\Delta x / \Delta t$, που εκφράζει τη μέση ταχύτητα, με το ρυθμό τρεξίματος (pace) του δρομέα, ο οποίος αν και διαφέρει από το μέγεθος της ταχύτητας εκφράζει μία σχέση μεταξύ της μεταβολής του χρόνου και της μεταβολής της μετατόπισης. Η σύνδεση αυτή πετυχαίνεται ακόμα καλύτερα μέσω του ερωτήματος Ε, στο οποίο οι μαθήτριες έπρεπε να συγκρίνουν την ταχύτητα του δρομέα με εκείνη του ποδηλάτη και για το λόγο αυτό ήταν απαραίτητη η μετατροπή του ρυθμού τρεξίματος σε ταχύτητα ή το αντίστροφο.

Στη συνέχεια δόθηκε η δεύτερη δραστηριότητα προκειμένου να γίνει η μετάβαση από την εφαρμογή του Strava στο λογισμικό του Geogebra. Τα εργαλεία αυτού θα συνέβαλαν στη νοηματοδότηση της έννοιας της μέσης ταχύτητας, της κλίσης αλλά και σε μία πρώτη προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας, πρώτα με την παρατήρηση των στατικών γραφικών παραστάσεων και στη συνέχεια με την τροποποίηση σχημάτων μέσω της δυνατότητας του δυναμικού χειρισμού.

Δραστηριότητα 2

A) Προσπαθήστε να σχεδιάσετε στο Geogebra τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της θέσης (σε m) του δρομέα σε σχέση με το χρόνο (σε s).

B) Σας δίνονται δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων θέσης (σε m) σε σχέση με το χρόνο (σε s). Η μία αναπαριστά την προπόνηση που έκανε ο δρομέας μαζί με το

φίλο του τον ποδηλάτη (δραστηριότητα 1). Η άλλη αναπαριστά μία προπόνηση που έκανε ο δρομέας κάποια άλλη μέρα μόνος του.

i) Ποια από τις δύο γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να αναπαριστά την προπόνηση που έκανε μαζί με τον φίλο του;

ii) Ποιες διαφορές παρατηρείτε ανάμεσα στις δύο προπονήσεις μέσω των γραφημάτων;

iii) Κατά τη διάρκεια ποιας προπόνησης πιστεύετε ότι ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη ταχύτητα;

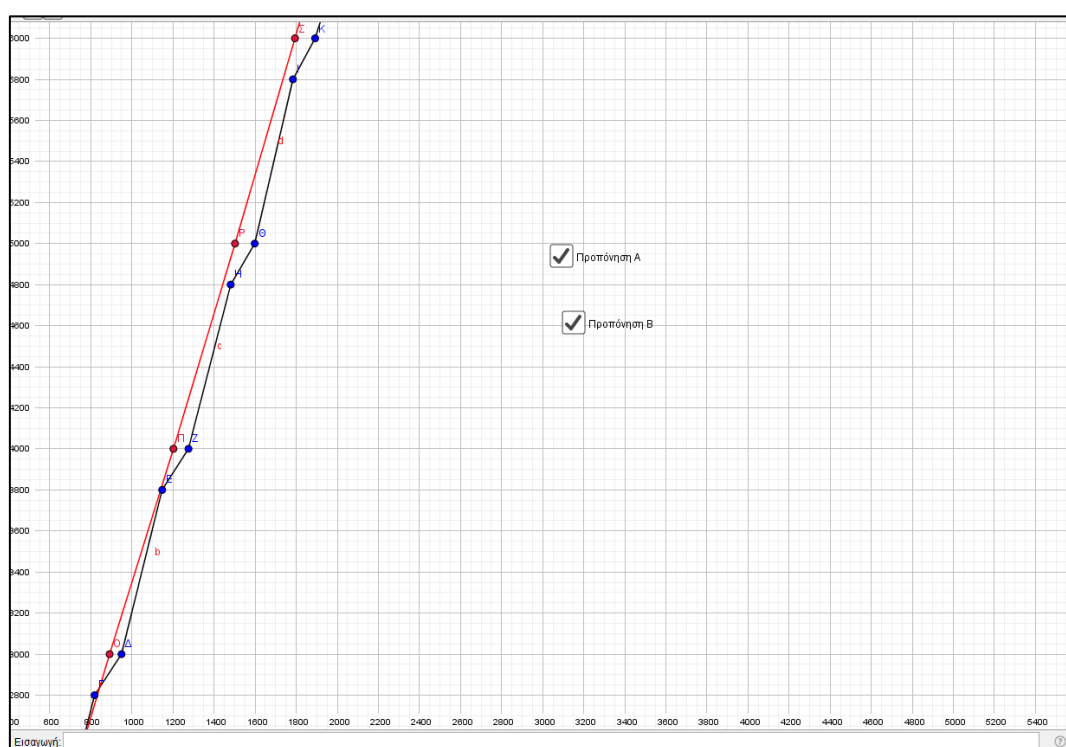
iv) Στην προπόνηση Α υπολογίστε τη μέση ταχύτητα που έχει ο δρομέας στο 1^ο, στο 5^ο και στο 9^ο χιλιόμετρο.

Γ) Ο ποδηλάτης διένυσε όλη τη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα 14,4 km/h. Στη γραφική παράσταση που σας δίνεται μετακινήστε κατάλληλα τα δοσμένα σημεία έτσι ώστε να αναπαριστά τη συνάρτηση της θέσης (σε m) του ποδηλάτη σε σχέση με το χρόνο (σε s).

Δ) Σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα παρατηρείτε πώς συνδέεται η μέση ταχύτητα με τη γραφική παράσταση;

Οι μαθήτριες στην πρώτη δραστηριότητα είχαν μελετήσει την προπόνηση του δρομέα και κλήθηκαν μέσω του ερωτήματος Α να μεταφέρουν όλα τα δεδομένα στο Geogebra για να μπορέσουν να κατανοήσουν πιο εύκολα τι αναπαριστούν οι γραφικές παραστάσεις που δίνονταν έτοιμες στα επακόλουθα ερωτήματα. Αυτά είχαν στόχο την πρόκληση διαδικασιών παρατήρησης, σύγκρισης, δημιουργίας εικασιών, πειραματισμού, συρσίματος και κατασκευής βοηθητικών σχημάτων μέσω του περιβάλλοντος του Geogebra προκειμένου να επιτευχθεί η νοηματοδότηση των εννοιών της ταχύτητας και της κλίσης. Όσον αφορά στην έννοια της ταχύτητας οι μαθήτριες θα εμπλέκονταν ξανά με τη μέση και τον τύπο $\Delta x / \Delta t$ αλλά αυτή τη φορά μέσω των γραφικών παραστάσεων και όχι των αναπαραστάσεων του Strava. Για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας ήταν απαραίτητες οι αρχικές και τελικές τιμές της θέσης και του χρόνου και η εύρεση αυτών απαιτούσε είτε την παρατήρηση είτε την τροποποίηση των δοθέντων γραφικών παραστάσεων. Επίσης, η δραστηριότητα 2 αποτέλεσε την αφορμή για μία πρώτη επαφή και με τη στιγμιαία ταχύτητα εκτός από τη μέση, χάρη στο ερώτημα Biii το οποίο ζητούσε από τις μαθήτριες να βρουν κατά

τη διάρκεια ποιας προπόνησης ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη ταχύτητα. Ένα άλλο πλεονέκτημα των γραφικών παραστάσεων που προσφέρει το Geogebra, σε αντίθεση με το Strava, είναι η εμφάνιση της έννοιας της κλίσης η οποία συνδέεται με αυτήν της ταχύτητας και στόχος όλων των ερωτημάτων μετά το Α ήταν οι μαθήτριες να μελετήσουν το ρόλο της κλίσης και να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα για τη σχέση της με τη μέση ταχύτητα. Το πρώτο ερώτημα στο οποίο ήταν εμφανής ο ρόλος της ήταν το Β όπου η βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο γραφικές παραστάσεις ήταν η απότομη αλλαγή στην κλίση (βλ. Σχήμα 9) και παρουσιάζει ενδιαφέρον η επίδραση που μπορεί να έχει στη σκέψη και τις ενέργειες των μαθητριών.



Σχήμα 9

Το ερώτημα Γ ήταν το έναυσμα για να αξιοποιηθεί για πρώτη φορά το πλεονέκτημα του δυναμικού χειρισμού που προσφέρει το Geogebra. Στόχος του συγκεκριμένου ερωτήματος ήταν η κατασκευή μίας γραφικής παράστασης που αναπαριστούσε την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ενός ποδηλάτη και μέσω της παρατήρησης αυτής να προκύψει το συμπέρασμα ότι η σταθερή ταχύτητα απεικονίζεται ως σταθερή κλίση. Από την άλλη, στο ερώτημα Β η αλλαγή στην κλίση της μπλε γραφικής παράστασης σήμαινε αλλαγή στην ταχύτητα και όλες αυτές τις παρατηρήσεις οι μαθήτριες έπρεπε να τις λάβουν υπόψη προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα Ε το οποίο είχε ένα

ρόλο ανακεφαλαίωσης όλων των συμπερασμάτων για τη σχέση μεταξύ κλίσης και μέσης ταχύτητας από όλα τα προηγούμενα ερωτήματα.

Ιδιαίτερη έμφαση στο δυναμικό χειρισμό δόθηκε στην τρίτη δραστηριότητα, όπου εμφανίζεται το τρίγωνο της ανάλυσης του οποίου οι συντεταγμένες αλλάζουν μέσω ενός δρομέα με στόχο τη μετάβαση των μαθητριών από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα και τη σύνδεση της δεύτερης με την κλίση εφαπτομένης καμπύλης.

Δραστηριότητα 3

Ο ποδηλάτης, ο οποίος όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα ερωτήματα διένυσε όλη τη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα 14,4 km/h, συνάντησε στο 3^ο χιλιόμετρο της προπόνησής του ένα μοτοσικλετιστή, ο οποίος είχε μόλις ξεκινήσει να οδηγεί τη μηχανή του. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης θέσης ($x(t)$) και του ποδηλάτη και του μοτοσικλετιστή σε σχέση με το χρόνο για το διάστημα 0-5s.

A) Σε ποια χρονική στιγμή προσπερνά ο μοτοσικλετιστής τον ποδηλάτη;

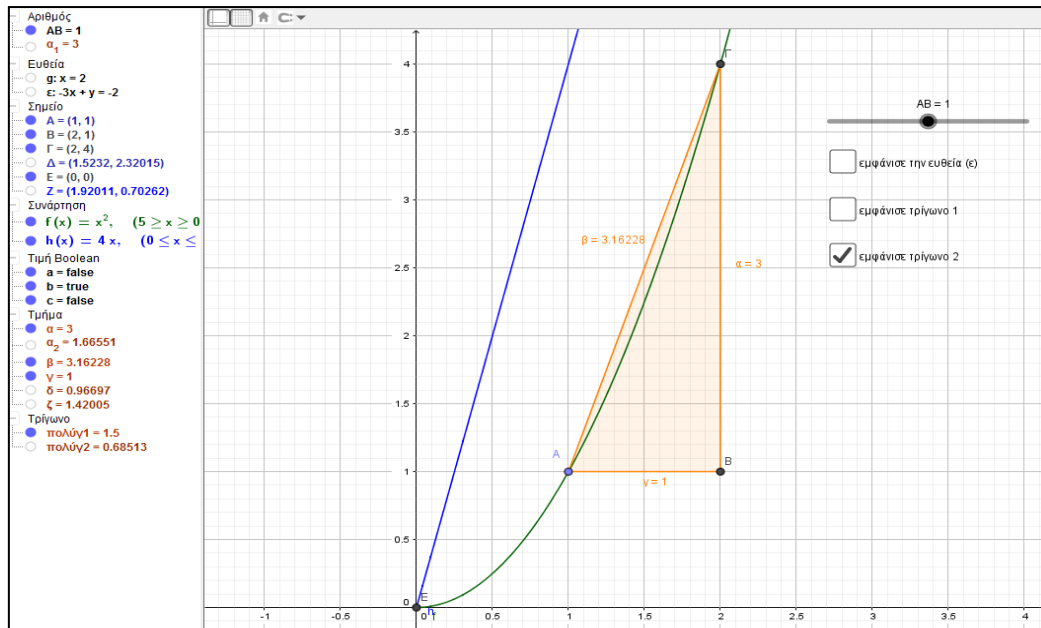
B) Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα του μοτοσικλετιστή στα χρονικά διαστήματα 1-2s, 1-1.5s και 1-1.25s.

Γ) Υπολογίστε την ταχύτητα που έχει ο ποδηλάτης τη χρονική στιγμή $t=1s$.

Δ) Προσπαθήστε να βρείτε την ταχύτητα του μοτοσικλετιστή τη χρονική στιγμή $t=1s$.

E) Ποια είναι η σχέση μεταξύ της ευθείας (ϵ) και της καμπύλης;

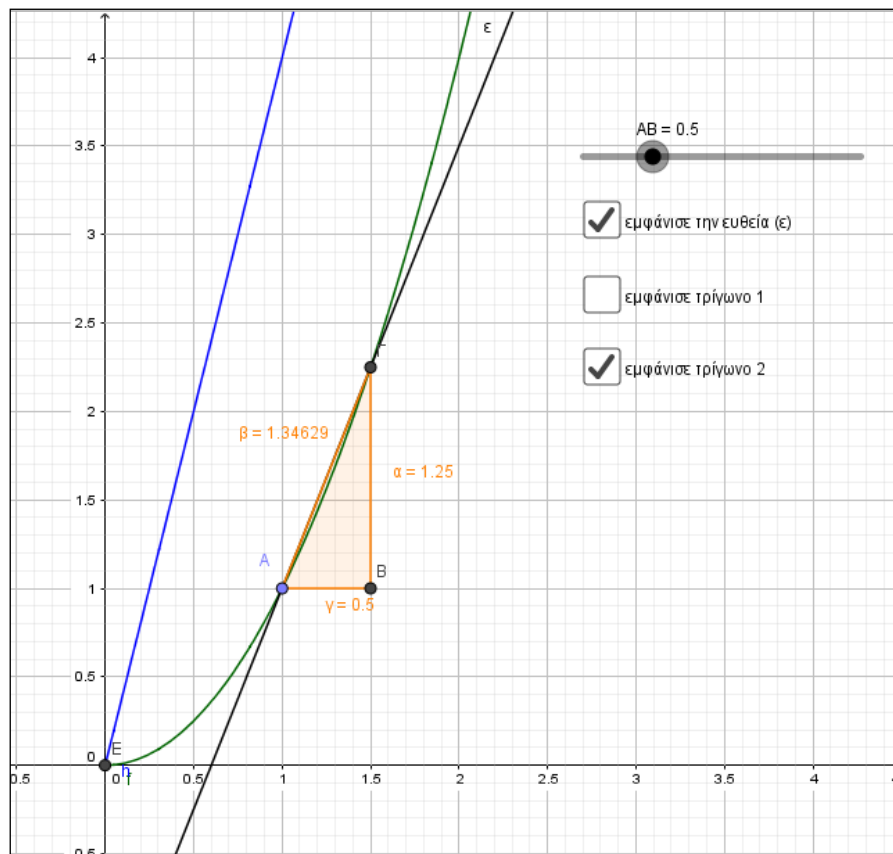
Ύστερα από την ενασχόληση των μαθητριών με τις έννοιες της μέσης ταχύτητας, της κλίσης και από μία πρώτη επαφή με τη στιγμιαία ταχύτητα ακολούθησε η δραστηριότητα 3 η οποία αποσκοπούσε σε μία πιο λεπτομερή διερεύνηση της σχέσης μεταξύ κλίσης και ταχύτητας και στην νοηματοδότηση των εννοιών του ορίου και της κλίσης εφαπτομένης. Η δραστηριότητα 3 ήταν επίσης πολύ σημαντική για τη μελέτη των ενεργειών των μαθητριών χάρη σε δύο πολύ χρήσιμα εργαλεία : το τρίγωνο με κορυφή το σημείο A (βλ. Σχήμα 10) το οποίο οι Weber, Tallman, Byerley και Thompson (2012) το χαρακτηρίζουν ως «τρίγωνο της ανάλυσης» (calculus triangle) και τον δρομέα AB ο οποίος καθώς κινείται δυναμικά από το χρήστη του Geogebra αλλάζει το μήκος της πλευράς AB του «τριγώνου της ανάλυσης» και κατά συνέπεια όλες τις διαστάσεις του.



Σχήμα 10

Το ερώτημα Β ζητούσε την εύρεση της μέσης ταχύτητας σε τρία χρονικά διαστήματα. Αυτή τη διαδικασία υπολογισμού οι μαθήτριες την είχαν εκτελέσει και σε προηγούμενα ερωτήματα, επομένως ο σκοπός σε αυτό δεν ήταν απλά μία ακόμα εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας αλλά η σύνδεση της μέσης ταχύτητας με το τρίγωνο της ανάλυσης. Το ερώτημα Β, ουσιαστικά, δόθηκε προκειμένου οι μαθήτριες να αναγνωρίσουν στο σχήμα τον τύπο $\Delta x / \Delta t$, καθώς το Δx αποτελεί το μήκος της πλευράς ΒΓ ενώ το Δt το μήκος της πλευράς ΑΒ. Επομένως, η μέση ταχύτητα ισούται με το λόγο ΒΓ/ΑΒ ο οποίος αλλάζει μέσω του δυναμικού χειρισμού του δρομέα ΑΒ και δίνει τη δυνατότητα στις μαθήτριες να υπολογίσουν πολλές διαφορετικές μέσες ταχύτητες. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν οι μαθήτριες θα προσπαθήσουν στο ερώτημα Δ να προσεγγίσουν τη στιγμιαία ταχύτητα μέσω αυτού του λόγου και της σύγκλισης του Β προς το Α προκειμένου το ΑΒ να τείνει να πάρει την τιμή 0 και το χρονικό διάστημα να τείνει να μετατραπεί σε χρονική στιγμή. Το ερώτημα Δ, λοιπόν, παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον αφού οι μαθήτριες χωρίς να γνωρίζουν την έννοια του ορίου κλήθηκαν να προσεγγίσουν την τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της συνεχούς μείωσης του μήκους της πλευράς ΑΒ, μέσω του πειραματισμού με τα αντίστοιχα εργαλεία του GeoGebra. Όπως, έχει ήδη τονιστεί στόχος της εργασίας ήταν η εισαγωγή των μαθητριών στην παράγωγο μέσω της νοηματοδότησης όλων των εννοιών που σχετίζονται με αυτή. Πέρα από το ρυθμό μεταβολής, ο οποίος σε αυτήν την εργασία εκφράζεται ως στιγμιαία ταχύτητα, η

παράγωγος ερμηνεύεται και ως κλίση της εφαπτομένης. Σκοπός, λοιπόν, του τελευταίου ερωτήματος της εργασίας ήταν η σύνδεση μεταξύ αυτών των δύο εννοιών. Δεδομένου ότι σε όλα τα προηγούμενα οι μαθήτριες είχαν καταλάβει την έννοια της μέσης ταχύτητας, την είχαν συνδέσει με εκείνη της στιγμιαίας μέσω της οριακής σύγκλισης αλλά και με εκείνη της κλίσης μέσω του τριγώνου της ανάλυσης, τους δόθηκε στο ερώτημα E μία ευθεία που διέρχεται σταθερά από το σημείο A και αποτελεί τον φορέα της πλευράς AG (βλ. Σχήμα 11).



Σχήμα 11

Πρόκειται δηλαδή για μία τέμνουσα της καμπύλης, η οποία έχει πάντα για κλίση την εφαπτομένη της γωνίας A, δηλαδή το λόγο $BΓ/AB$ ή α/γ , ο οποίος από τα προηγούμενα ερωτήματα ερμηνεύεται ως η μέση ταχύτητα του μοτοσικλετιστή στο χρονικό διάστημα που εκφράζει η πλευρά AB. Επομένως, οι μαθήτριες κλήθηκαν ξανά με την ίδια διαδικασία, δηλαδή τον δυναμικό χειρισμό του δρομέα AB και τη σύγκλιση του B προς το A, να παρατηρήσουν ότι η τέμνουσα ευθεία τείνει να γίνει εφαπτομένη της καμπύλης καθώς το B προσεγγίζει το A με την κλίση της να ταυτίζεται με τη στιγμιαία ταχύτητα του μοτοσικλετιστή.

3.5.A priori ανάλυση

Όπως φαίνεται και από την ανάλυση των δραστηριοτήτων που προηγήθηκε, για τη νοηματοδότηση των εννοιών που σχετίζονται με εκείνη της παραγώγου ήταν πολύ καθοριστικός ο ρόλος των μαθηματικών πεδίων εργασίας, με κάθε ένα από αυτά να έχει συγκεκριμένους στόχους για τη δράση των μαθητριών στα διαφορετικά επίπεδα κατασκευής νοήματος, οι οποίοι αναλύονται συνοπτικά παρακάτω:

Strava

Το Strava είναι το πρώτο μαθηματικό πεδίο εργασίας εντός του οποίου έδρασαν οι μαθήτριες δεδομένου ότι έπρεπε να αντλήσουν από αυτό όλα τα δεδομένα που ήταν απαραίτητα για την εύρεση των απαντήσεων στα ερωτήματα της πρώτης δραστηριότητας. Το συγκεκριμένο περιβάλλον προσέφερε στις μαθήτριες τη δυνατότητα να νοηματοδοτήσουν τη μέση ταχύτητα και το λόγο $\Delta x/\Delta t$ που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της, εξερευνώντας όλα τα διαθέσιμα εργαλεία του είτε στο σημειωτικό επίπεδο, μέσω της απλής παρατήρησης, είτε στο εργαλειακό επίπεδο με την παρέμβαση σε αυτά. Όσον αφορά στο διαλογικό επίπεδο, η δράση τους σε αυτό συσχετιζόταν σε μεγάλο βαθμό με την αξιοποίηση του τύπου $\Delta x/\Delta t$ και τη σύνδεση της ταχύτητας με τον ρυθμό τρεξίματος του δρομέα. Δηλαδή, οι μαθήτριες μέσω του Strava θα έμπαιναν αρχικά σε κάποιες διαδικασίες παρατήρησης και εξερεύνησης εντός του σημειωτικού και εργαλειακού επιπέδου για να κατανοήσουν τον τρόπο λειτουργίας αυτού του νέου ψηφιακού περιβάλλοντος, προτού επεκτείνουν τη δράση τους και στο διαλογικό επίπεδο.

Στατικές γραφικές παραστάσεις Geogebra

Αυτές είναι οι γραφικές παραστάσεις οι οποίες έμεναν αμετάβλητες σε όλη την εργασία των μαθητριών. Δεν υπήρχε η δυνατότητα αλλαγής τους παρά μόνο ήταν εφικτή η παρατήρηση αυτών, η μεγέθυνση και η σμίκρυνσή τους και ο σχεδιασμός επιπλέον στοιχείων με τα εργαλεία του Geogebra. Στόχος ήταν να προκαλέσουν τη δράση των μαθητριών σε όλα τα επίπεδα νοηματοδότησης εστιάζοντας κυρίως στην έννοια της κλίσης και τη σχέση της με την ταχύτητα. Μέσω της οπτικοποίησης εντός σημειωτικού επιπέδου θα παρατηρούσαν ότι αλλαγή στην κλίση σημαίνει αλλαγή στην ταχύτητα, συμπέρασμα το οποίο θα έπρεπε να αιτιολογήσουν με βάση συλλογισμούς που σχετίζονται με τον τύπο $\Delta x/\Delta t$, δρώντας δηλαδή στο διαλογικό επίπεδο νοηματοδότησης. Όσον αφορά στο εργαλειακό επίπεδο, η εφαρμογή του

τύπου $\Delta x/\Delta t$ για κάποια συγκεκριμένα διαστήματα απαιτεί την εύρεση των αντίστοιχων τιμών για τις οποίες ορισμένες φορές ήταν απαραίτητη η παρέμβαση στη γραφική παράσταση.

Δομήματα του Geogebra με δυναμικό χειρισμό

Πρόκειται για εκείνα τα δομήματα που οι μαθήτριες μπορούσαν να τροποποιήσουν μέσω συρσίματος, είτε των ίδιων των στοιχείων των δομημάτων είτε κάποιου δρομέα στον οποίο αντιστοιχούσε κάποιο στοιχείο τους. Το πιο χαρακτηριστικό από αυτά είναι το τρίγωνο της ανάλυσης, η αξιοποίηση του οποίου είχε ως στόχο μία πιο ακριβή παρατήρηση της σχέσης μεταξύ μέσης ταχύτητας και κλίσης, τη μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα και τελικά την εύρεση την σχέσης μεταξύ της στιγμιαίας ταχύτητας και της κλίσης εφαπτομένης κατά την παράλληλη εργασία των μαθητριών και στα τρία επίπεδα νοηματοδότησης. Η δράση στο εργαλειακό επίπεδο χάρη σε αυτά τα δομήματα, όπως για παράδειγμα στο τρίγωνο της ανάλυσης, ήταν δεδομένη αφού οι μαθήτριες ενεπλάκησαν με τη διαδικασία του συρσίματος. Επίσης, οι αλλαγές τις οποίες προκαλούσε η συγκεκριμένη παρέμβαση είχε ως αποτέλεσμα την παρατήρηση κάθε νέου σχήματος που προέκυπτε σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες τιμές στη στήλη της άλγεβρας, οδηγώντας δηλαδή τις μαθήτριες στη δράση εντός του σημειωτικού επιπέδου νοηματοδότησης. Τέλος, η σύνδεση που έκαναν οι μαθήτριες με τις εμπειρίες τους από τα προηγούμενα ερωτήματα και τις έννοιες της ταχύτητας και της κλίσης, με βασικό εργαλείο τον τύπο $\Delta x/\Delta t$, αποδεικνύουν ότι τα δομήματα που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό ήταν η αφορμή για τη δημιουργία μαθηματικών συλλογισμών εντός του διαλογικού επιπέδου.

3.6.Μέθοδος ανάλυσης

Ύστερα από τη συλλογή όλων των δεδομένων ακολούθησε η απομαγνητοφώνηση των διαλόγων και η μελέτη αυτών σε συνδυασμό με την παρακολούθηση των ενεργειών των μαθητριών στα δύο ψηφιακά περιβάλλοντα μέσα από την καταγραφή της οθόνης. Για λόγους δεοντολογίας η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά θα αναφέρεται παρακάτω ως μαθήτρια1 (M1) ενώ οι μαθήτριες της ομάδας ως M2, M3. Για τον ερευνητή θα χρησιμοποιηθεί το αρχικό «Ε». Η έρευνα που έγινε αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης αφού επιλέχθηκαν μαθήτριες συγκεκριμένα από τη Β' Λυκείου και σε μία χρονική περίοδο, κοντά στις διακοπές του Πάσχα, όπου γνώριζαν τις

έννοιες της ευθείας, του κύκλου και της εφαπτομένης κύκλου και ήταν έτοιμες να διδαχθούν την ύλη της Γ' Λυκείου για τις Πανελλήνιες εξετάσεις της επόμενης χρονιάς. Εκτός από την επιλογή των μαθητριών, ιδιαίτερα προσεκτική ήταν και η επιλογή των προγραμμάτων που χρησιμοποιήθηκαν γιατί μέσω της ανάλυσης των δεδομένων θα προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα για το ρόλο τους σχετικά με τη δράση των μαθητριών. Έτσι, μπορεί να γίνει μια γενίκευση για τη δράση των μαθητών που έχουν διδαχθεί την ύλη της Β' Λυκείου σε δραστηριότητες που αφορούν έννοιες σχετικές με την παράγωγο, πριν την παρουσίαση του τυπικού ορισμού, αλλά και για το πώς επηρεάζουν οι ψηφιακές τεχνολογίες τις ενέργειές τους σε αυτό το μεταβατικό στάδιο. Κατά την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ανοιχτής κωδικοποίησης- open coding (Strauss, Corbin, 1998) με τους κωδικούς να αναφέρονται στις έννοιες τις οποίες προσπαθούσαν να νοηματοδοτήσουν οι μαθήτριες μέσω των δραστηριοτήτων, όπως επίσης και στα διαφορετικά πεδία εργασίας στα οποία δούλευαν κάθε φορά. Οι κωδικοί για τις αντίστοιχες έννοιες είναι «μέση ταχύτητα», $\Delta x / \Delta t$, «στιγμιαία ταχύτητα», «όριο», «κλίση» και «κλίση εφαπτομένης». Όσον αφορά στα μαθηματικά πεδία εργασίας αυτά διακρίθηκαν στις τρεις κατηγορίες που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, με τους αντίστοιχους κωδικούς να είναι «Strava», «στατικές γραφικές παραστάσεις Geogebra» και «δομήματα του Geogebra με δυναμικό χειρισμό». Η μελέτη όλων των απομαγνητοφωνημένων διαλόγων και των καταγεγραμμένων ενεργειών των μαθητριών στα προγράμματα έγινε με βάση τους παραπάνω κωδικούς με αποτέλεσμα τη δημιουργία τεσσάρων ενοτήτων στο επόμενο κεφάλαιο, με κάθε μία από αυτές να εστιάζει στις έννοιες που σχετίζονται με εκείνη της παραγώγου και να περιλαμβάνει επεισόδια από τη δράση των μαθητριών στα διαφορετικά πεδία εργασίας στην προσπάθειά τους να νοηματοδοτήσουν την αντίστοιχη έννοια που πραγματεύεται η κάθε ενότητα.

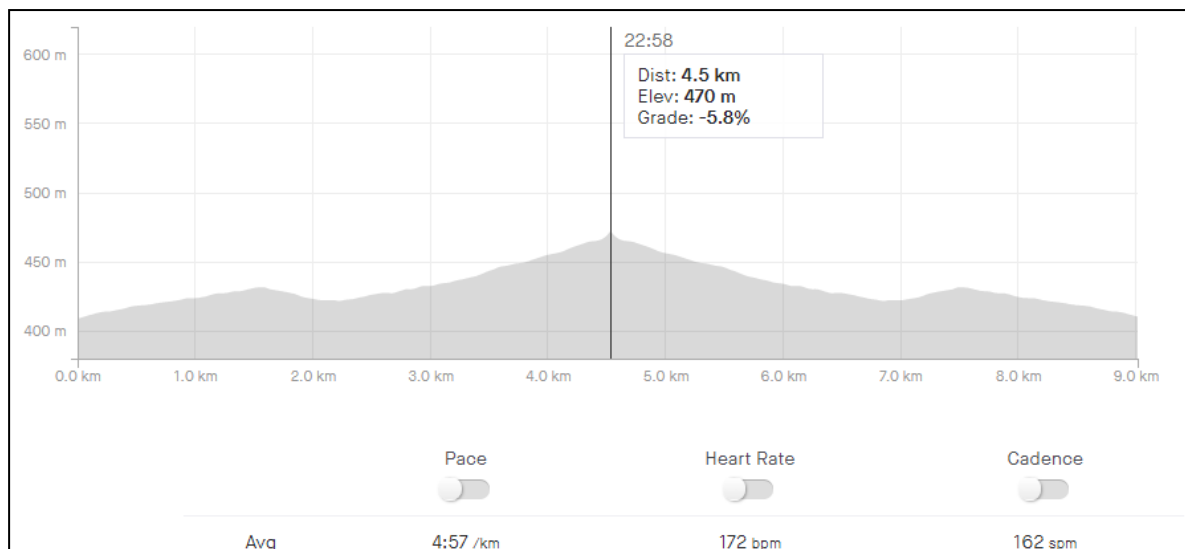
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας και του λόγου $\Delta x/\Delta t$ στα διαφορετικά μαθηματικά πεδία εργασίας

Η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης ενός σώματος σε σχέση με το χρόνο και η δράση των μαθητριών σε όλες τις δραστηριότητες αποδεικνύει ότι αντιλήφθηκαν τη σχέση μεταξύ αυτών των τριών μεγεθών. Σε πρώτη φάση συνδύαζαν αυτά τα τρία μεγέθη ερμηνεύοντας τα δεδομένα είτε από το πρόγραμμα του τρεξίματος Strava είτε από το Geogebra κάνοντας λογικούς ισχυρισμούς και εικασίες που στηρίζονταν στη διαίσθησή τους και τις εμπειρίες τους. Στη συνέχεια, λόγω της εμπειρίας τους στα μαθηματικά και λόγω του διδακτικού συμβολαίου που επιβάλλει κάθε τους απάντηση να είναι σωστά δικαιολογημένη στράφηκαν στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς (referential) και πιο συγκεκριμένα στον τύπο $\Delta x/\Delta t$. Αυτός άλλωστε είναι και ο τύπος που συμπεριλαμβάνεται στον ορισμό της παραγώγου και με βάση αυτόν οι μαθήτριες θα κατασκευάσουν αυτήν την έννοια.

4.1.1 Πεδίο εργασίας: Γράφημα Strava – Νοηματοδότηση του λόγου $\Delta x/\Delta t$ με αξιοποίηση του γραφήματος του Strava

Ξεκινώντας από τη μαθήτριά που δούλεψε ατομικά και το ερώτημα Γ της πρώτης δραστηριότητας που ζητούσε να βρεθεί το χιλιόμετρο το οποίο έκανε πιο γρήγορα ο δρομέας από τα 9 που είχε τρέξει στο σύνολο παρατηρείται στην αρχή της δράσης της μία διαισθητική προσέγγιση. Η μορφή του γραφήματος, στο οποίο είναι εμφανής η κλίση του δρόμου σε όλα τα σημεία της διαδρομής, οδήγησε τη Μ1 στη σύνδεση της κλίσης με την ταχύτητα του δρομέα και όπως χαρακτηριστικά ανέφερε: «Ναι. Ωραία, λοιπόν, πιστεύω ότι θα είναι κάποιο από την κατηφόρα, διότι όταν τρέχουμε σε κατηφόρα πάμε πιο γρήγορα». Βέβαια, κατάλαβε αμέσως ότι η παραπάνω αιτιολόγηση δεν ήταν αρκετή για να απαντήσει στο ερώτημα και εφάρμοσε μία νέα στρατηγική στην οποία πάλι κεντρικό ρόλο είχε το γράφημα και πιο συγκεκριμένα ο δυναμικός χειρισμός της γραμμής που περιέχεται σε αυτό (βλ. Σχήμα 12).



Σχήμα 12

Η μαθήτρια, λοιπόν, αποφάσισε να αξιοποιήσει τα μεγέθη του χρόνου και της απόστασης, από τα οποία εξαρτάται το μέγεθος της ταχύτητας και υπολόγισε το χρόνο που έκανε ο δρομέας σε κάθε χιλιόμετρο δεδομένου ότι σε κάθε ένα από αυτά η απόσταση είναι η ίδια. Μάλιστα, μετά από την εύρεση της χρονικής διάρκειας του κάθε χιλιόμετρου είπε χαρακτηριστικά: «Οπότε..... η ερώτηση ήταν σε ποιο σημείο έχει κάνει τα λιγότερα λεπτά;» φράση η οποία αποδεικνύει ότι είχε ταυτίσει το ερώτημα για την ταχύτητα με ένα αντίστοιχο ερώτημα για το χρόνο επειδή η απόσταση ήταν σταθερή. Για τον υπολογισμό αυτών των χρονικών διαστημάτων ήταν καθοριστικός ο ρόλος του γραφήματος και της αντίστοιχης γραμμής καθώς μέσω αυτών η μαθήτρια εύρισκε την τελική και την αρχική τιμή του χρόνου σε κάθε χιλιόμετρο προκειμένου να εφαρμόσει τον τύπο $\Delta t = t_{\text{ελ}} - t_{\text{αρχ}}$. Επομένως, αν και δεν χρησιμοποίησε καθόλου αυτόν τον συμβολισμό στα γραπτά της, παρατηρήθηκε στη δράση της η αξιοποίηση του τύπου $\Delta x / \Delta t$ αφού ουσιαστικά κρατούσε σταθερό το Δx και υπολόγιζε κάθε φορά το Δt .

Εκτός, από τη μαθήτρια που δούλεψε ατομικά και οι μαθήτριες που εργάστηκαν σε ομάδα επηρεάστηκαν από το γράφημα και την εμφανή κλίση του δρόμου σε αυτό. Επειδή υπήρχε η ανάγκη να βρουν στο πρόγραμμα ένα μέγεθος που να εκφράζει το πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας στράφηκαν σε αυτό που αναγραφόταν ως grade, το οποίο εκφράζει την κλίση του δρόμου σε κάθε σημείο της διαδρομής. Η επιλογή αυτού του μεγέθους προέκυψε λόγω της μη αναγραφής της στιγμιαίας ή της μέσης ταχύτητας ανά χιλιόμετρο και οι μαθήτριες αποφάσισαν να διαλέξουν το μέγεθος της

κλίσης επειδή θεώρησαν λογική τη σύνδεση αυτής με την ταχύτητα. Έτσι, μετακινώντας τη γραμμή στο γράφημα έβλεπαν σε κάθε σημείο της διαδρομής την τιμή του μεγέθους grade και από εκεί έβγαζαν το ανάλογο συμπέρασμα για την ταχύτητα του δρομέα. Αυτή τους η δράση αποτυπώνεται καλύτερα στο παρακάτω απόσπασμα:

1	E	Άρα λέτε ότι το 5 ^ο χιλιόμετρο το έκανε πιο γρήγορα απ' όλα έτσι;
2	M2	Ναι
3	E	Και σε τι το στηρίζατε στο grade;
4	M2	Ναι
5	E	Εκεί που είναι μεγαλύτερο το grade
6	M2	Ναι
7	E	Ωραία τι είχατε πει για το grade; Πείτε μου πάλι
8	M2	Ότι βασίζεται περισσότερο στο βαθμό δυσκολίας και ότι θέλει περισσότερη ενέργεια για να προχωρήσει, ας πούμε εδώ στην ανηφόρα χρειάζεται περισσότερη ενέργεια να ανέβει και μόλις εκεί πέρα ανέβει στο μέγιστο ύψος που θέλει την περισσότερη ενέργεια και μετά για να κατέβει
9	E	Ωραία κατάλαβα, άρα εκεί είναι το κομμάτι που θέλει την περισσότερη ενέργεια, που έχει τη μεγαλύτερη ανηφόρα
10	M3	Ναι
11	E	Ωραία και λέτε ότι αυτό το έκανε πιο γρήγορα απ' όλα
12	M2	Ναι το 5 ^ο χιλιόμετρο
13	E	Οκ και οι δύο το ίδιο λέτε
14	M2	Ναι
15	E	Οπότε λέτε ότι πάει πιο γρήγορα στο 5 ^ο χιλιόμετρο από εκεί που έχει τη μεγάλη ανηφόρα και μετά που κατεβαίνει από αυτήν. Σας φαίνεται λογικό αυτό; Να έχει κάνει αυτό πιο γρήγορα ο δρομέας;
16	M3	Το grade δε θα μπορούσε να είναι το πεδίο δυσκολίας;
17	E	Το grade τι είπατε ότι είναι; Πάμε πάλι
18	M3	Εγώ είπα ότι είναι η κλίση, ίσως το πόση είναι η δυσκολία
19	E	Ωραία κάτι με δυσκολία λες και κλίση
20	M3	Ναι οπότε ίσως εκεί που πάει πιο γρήγορα είναι εκεί που έχει πιο λίγο οπότε να πάμε ανάποδα
21	E	Οπότε που λες εσύ ότι έχει κάνει πιο γρήγορα ο δρομέας; Το πιο γρήγορο χιλιόμετρο πως θα το βρούμε;
22	M2	-6;
23	M3	Μήπως αυτό που έχει το πιο μικρό, μείον κάτι, ίσως μπορούμε να το βρούμε τελείως διαφορετικά ας πούμε με το χρόνο και τα χιλιόμετρα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το grade

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω διάλογο οι μαθήτριες έκαναν το λάθος να ταυτίσουν το grade με την ταχύτητα, θεωρώντας πως όταν αυτό γίνεται μέγιστο ο δρομέας θα φτάνει και τη μέγιστη ταχύτητα (βλ. Σχήμα 12). Το λάθος αυτό όμως το διόρθωσαν όταν προσπάθησαν να συνδέσουν το γράφημα με την πραγματικότητα υποστηρίζοντας ότι όσο πιο κατηφορικός είναι ο δρόμος, ο δρομέας είναι πιο ξεκούραστος και τρέχει πιο γρήγορα. Τελικά, θεώρησαν ότι ο καλύτερος τρόπος για να βρουν τη σωστή απάντηση είναι να εκφράσουν την ταχύτητα μέσω μίας σχέσης που να συνδέει την απόσταση με το χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, η M3 πρότεινε να εξετάσουν πόσο χρόνο χρειάστηκε ο δρομέας για να διανύσει το κάθε χιλιόμετρο της διαδρομής και η M2 παρατήρησε ότι αυτός αναγράφεται στην στήλη που βρίσκεται στα αριστερά της οθόνης καθώς εξερευνούσαν το πρόγραμμα του τρεξίματος, όπως φαίνεται και από τη συνέχεια του προηγούμενου αποσπάσματος:

E	Δηλαδή;
M3	Δηλαδή ας πούμε ανά χιλιόμετρο πόση ώρα κάνει
E	Ωραία, M2. άκουσες τι είπε η M3.;
M2	Ναι να πάμε εδώ, με τη βοήθεια αυτού του πίνακα να το βρούμε

Σύνοψη

Παρατηρώντας, λοιπόν, τις ενέργειες και της μαθήτριας που δούλεψε μόνη αλλά και των μαθητριών που δούλεψαν σε ομάδα, εντοπίζεται ένα παρόμοιο μοτίβο δράσης στην προσπάθεια νοηματοδότησης της μέσης ταχύτητας μέσα στο περιβάλλον του Strava. Αυτό το μοτίβο ξεκινά με τη δράση τους στο σημειωτικό επίπεδο, με τις τρεις μαθήτριες να στηρίζονται πολύ στη διαίσθησή τους, αφού προσπάθησαν σε πρώτη φάση να αποκωδικοποιήσουν το γράφημα και να βγάλουν από εκεί κάποιο συμπέρασμα για την ταχύτητα του δρομέα. Έκαναν, λοιπόν, μία λογική σύνδεση της κλίσης του δρόμου (grade) με την ταχύτητα αλλά όταν είδαν ότι αυτή η διαισθητική προσέγγιση δεν ήταν αρκετή για να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους στο ερώτημα που ζητούσε το πιο γρήγορο χιλιόμετρο του δρομέα, στράφηκαν στον τύπο $\Delta x/\Delta t$ και από το σημειωτικό επίπεδο μετέβησαν στο εργαλειακό και το διαλογικό. Η δράση των μαθητριών δεν ήταν ανεξάρτητη από το ένα επίπεδο στο άλλο αλλά αποτελούσε ένα συνδυασμό αυτών (επίπεδο Ins-Dis). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθήτριες αποφάσισαν να βρουν ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς (referential) στο οποίο περιέχεται ο λόγος $\Delta x/\Delta t$ που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μέσης

ταχύτητας και ο συλλογισμός τους πλέον στηρίχθηκε σε αυτόν. Όταν χρειάστηκε να τον εφαρμόσουν κράτησαν σταθερό το Δx και εστίασαν στο Δt για τον υπολογισμό του οποίου ήταν απαραίτητη η αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων του προγράμματος. Επομένως, όποια ενέργεια έκαναν στο γράφημα γινόταν με βάση τη θεωρία και γι' αυτό το λόγο οι μαθήτριες έδιναν νόημα στην έννοια της μέσης ταχύτητας ενεργώντας εντός του εργαλειακού επιπέδου και πιο συγκεκριμένα μέσω της διαδικασίας της τροποποίησης εργαλείου κατά την οποία η σκέψη του μαθητή καθορίζει τις ενέργειές του στο λογισμικό και όχι το αντίστροφο.

4.1.2. Πεδίο εργασίας: Στήλη με *pace* του Strava - Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας μέσω της σύνδεσης της στήλης του Strava με το γράφημα και το χάρτη

Στη συνέχεια με αφορμή το επόμενο ερώτημα, Δ, που ζητούσε να βρεθεί κάποιο μέγεθος στο πρόγραμμα που να εκφράζει πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας, μία μαθήτρια από την ομάδα τόνισε επίσης ότι θα μπορούσαν να βρουν την αρχική και την τελική χρονική στιγμή του κάθε διαστήματος και να τις αφαιρέσουν, όπως δηλαδή έκανε και η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά. Όπως φαίνεται και στους στίχους 7-15 του αποσπάσματος που ακολουθεί, η μαθήτρια κατάλαβε ότι οι τιμές που υπάρχουν στην αριστερή στήλη και δείχνουν το χρόνο που αντιστοιχεί σε κάθε χιλιόμετρο προκύπτουν από τον τύπο $\Delta t = t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}$ και λογικά κατά αυτόν τον τρόπο ο προγραμματιστής υπολόγισε αυτές τις τιμές, τις οποίες παρουσιάζει έτοιμες στο χρήστη μέσω της στήλης που προαναφέρθηκε. Δηλαδή, η μαθήτρια προσπάθησε να συνδέσει το γράφημα με την αριστερή στήλη του προγράμματος, που περιέχει το ρυθμό τρεξίματος (*pace*) του δρομέα σε κάθε χιλιόμετρο, μέσω του τύπου $\Delta x / \Delta t$ θεωρώντας το Δx σταθερό με 1 χιλιόμετρο και υπολογίζοντας το Δt μέσω της αφαίρεσης της αρχικής από την τελική τιμή του χρονικού διαστήματος που αντιστοιχεί σε κάθε χιλιόμετρο μέσω του γραφήματος. Κατά αυτόν τον τρόπο, η μαθήτρια δεν εκμεταλλεύτηκε μόνο τα δεδομένα που παρείχε το Strava, αλλά κατάλαβε και πως αυτό είναι φτιαγμένο από τον προγραμματιστή μέσω του τύπου $\Delta x / \Delta t$.

M3	Από αυτά που έχει δε νομίζω πως κάποιο είναι το υ όπως λέμε στη φυσική, απλά ίσως από αυτά που δίνει για το χρόνο και τα χιλιόμετρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα για το πιο γρήγορα
E	Δηλαδή;
M3	Δηλαδή όπως είδαμε τώρα που σε τόσο χρόνο έκανε το ένα

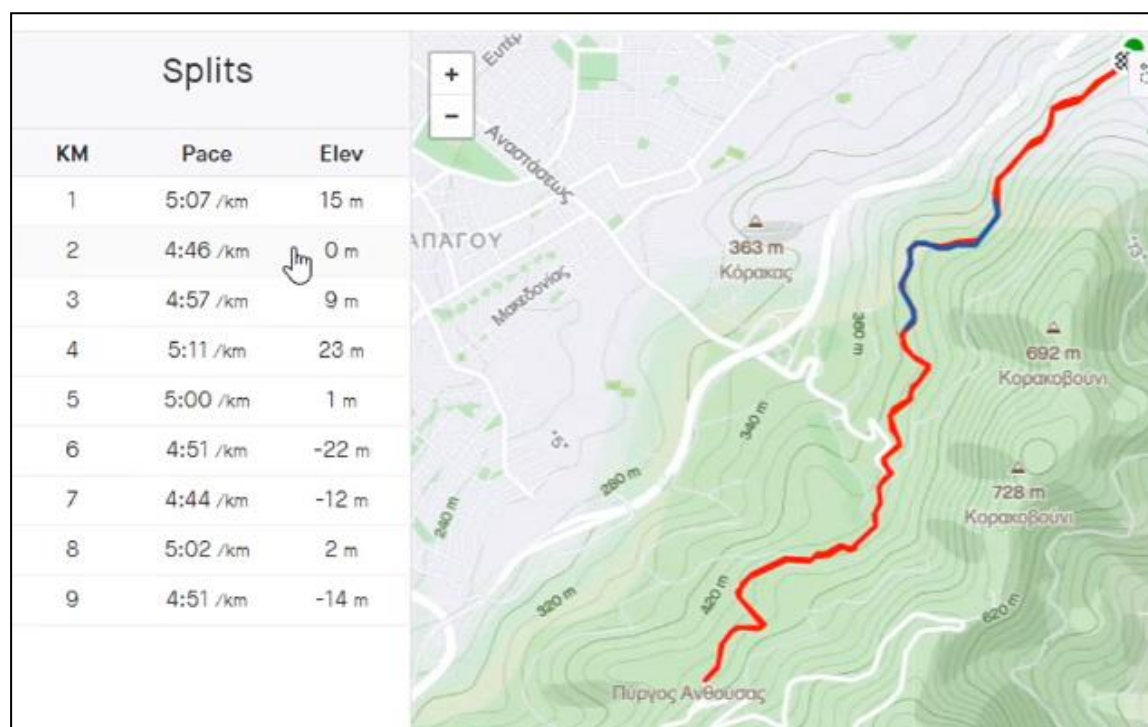
	χιλιόμετρο οπότε έτσι να βλέπουμε πόσο γρήγορα πάει
E	Ωραία και αυτά που φαίνονται;
M3	Στο πινακάκι φαίνονται, αλλά και στο γράφημα περίπου μπορείς να το δεις, αλλά είναι πιο εύκολο στο πινακάκι, σου τα έχει λίγο πιο έτοιμα να το πω έτσι
E	Στο γράφημα πως μπορείς να το δεις;
M3	Ας πούμε πας στο 6 ^ο χιλιόμετρο και βλέπεις από το 6 ^ο μέχρι το 7 ^ο πόσο χρόνο πήρε
E	Αυτό πως το κάνεις;
M3	Με αφαίρεση
E	Τι αφαιρείς;
M3	Ας πούμε κάνει από το 7 ^ο χιλιόμετρο μείον το 6 ^ο για να βρεις πόσο χρόνο πήρε
E	Ωραία
M3	Και κάπως έτσι κάνεις σε όλα και βρίσκεις το χρόνο που έκανε στο κάθε χιλιόμετρο, δηλαδή κάπως έτσι θα έκαναν για να βρουν τις τιμές για το πινακάκι
E	Δηλαδή λες ότι αυτοί που έφτιαξαν το πρόγραμμα έκαναν έτσι το πινακάκι
M3	Ναι

Στο παραπάνω απόσπασμα (στ.1) φαίνεται επίσης και η ανάγκη της μαθήτριας να εκφράσει το πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας μέσω του μεγέθους της ταχύτητας το οποίο είναι το πιο σύνηθες και το γνωρίζει ήδη από το μάθημα της φυσικής. Παρατηρεί, λοιπόν, ότι πουθενά στο πρόγραμμα δεν αναγράφεται η ταχύτητα του δρομέα και έτσι αποφασίζει μόνη της να εφαρμόσει τον τύπο $\Delta x / \Delta t$ παίρνοντας το Δt από τη στήλη που δείχνει το ρυθμό (pace) του δρομέα, δηλαδή το μέγεθος που εκφράζει το πόσο γρήγορα πάει δείχνοντας το χρόνο που χρειάζεται ανά χιλιόμετρο. Από την άλλη, η μαθήτρια που εργάστηκε ατομικά ακολούθησε, και σε αυτό το ερώτημα που έπρεπε να βρει στο πρόγραμμα ένα μέγεθος που να εκφράζει πόσο γρήγορα πάει ο δρομέας, ένα παρόμοιο μοτίβο δράσης με αυτό του ερωτήματος (Γ). Δηλαδή, σε πρώτη φάση παρατήρησε το γράφημα όπου είναι κυρίαρχη η αποτύπωση της κλίσης του δρόμου και την συνέδεσε και σε αυτό το ερώτημα με την ταχύτητα του δρομέα όπως φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα:

M1	Εεε λοιπόν, θα μας το δείχνει το ... από εκεί που είναι η ανηφόρα και η κατηφόρα
E	Η ανηφόρα και η κατηφόρα σου δείχνουν το έδαφος, αν είναι ανηφορικό ή κατηφορικό
M1	Α επειδή στις κατηφόρες συνήθως πάμε πιο γρήγορα

Η διαισθητική αυτή προσέγγιση δεν ήταν αρκετή για να απαντήσει η μαθήτρια στο ερώτημα και έτσι έστρεψε την προσοχή της στην στήλη με το μέσο ρυθμό τρεξίματος ανά χιλιόμετρο, χάρη σε μία λειτουργία του λογισμικού. Πιο συγκεκριμένα, η μαθήτρια παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τον κέρσορα πάνω σε μία τιμή του ρυθμού τρεξίματος στη στήλη αριστερά χρωματίζεται το αντίστοιχο χιλιόμετρο πάνω στο χάρτη (βλ. Σχήμα 13). Το γεγονός αυτό την βοήθησε να καταλάβει ότι ο ρυθμός τρεξίματος υποδηλώνει ουσιαστικά το χρόνο που χρειάστηκε ο δρομέας για να καλύψει το κάθε χιλιόμετρο, δηλαδή το Δt το οποίο είχε υπολογίσει στο προηγούμενο ερώτημα για το κάθε χιλιόμετρο. Χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω διάλογος:

E	Για αναζήτησε το πρόγραμμα, αν έχεις αυτήν την εφαρμογή και την ψάχνεις, τι πληροφορίες σου δίνει; Για ψαξ' τη είναι πολύ χρήσιμη για όσους ασχολούνται με τον αθλητισμό
M1	Εδώ δίπλα; (στήλη)
E	Αυτά εκεί τι είναι;
M1	Κάθε φορά που ακουμπάμε το καθένα μας μπλεδίζει το σημείο
E	Τι μας μπλεδίζει;
M1	Το συγκεκριμένο χιλιόμετρο, βασικά μπορεί να είναι τα χιλιόμετρα αλλά είναι 9 οπότε το συγκεκριμένο γιατί είναι εις διπλούν αφού ξαναγυρνάει



Σχήμα 13

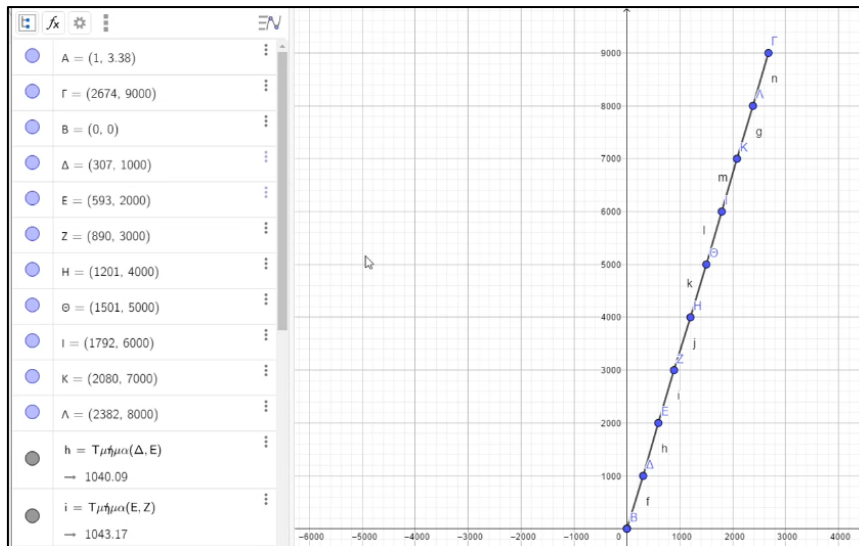
Σύνοψη

Επομένως, από τη μία μεριά η M1 που εργάστηκε ατομικά προσπάθησε να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα ξεκινώντας πάλι τη δράση της από το σημειωτικό επίπεδο, προσεγγίζοντας διαισθητικά το μέγεθος της ταχύτητας μέσω της αναπαράστασης του γραφήματος, και πιο συγκεκριμένα μέσω της κλίσης του. Από την άλλη, οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα, και ειδικά η M3 που αντιλήφθηκε γρήγορα τη σύνδεση μεταξύ της στήλης και του γραφήματος, εργάστηκαν παράλληλα και στο σημειωτικό και στο διαλογικό επίπεδο αφού κατάφεραν να αποκωδικοποιήσουν και τις δύο αναπαραστάσεις της προπόνησης του δρομέα αξιοποιώντας από τη θεωρία τον τύπο $\Delta x / \Delta t$. Όσον αφορά στη M1 που εργάστηκε ατομικά, η αδυναμία της να βρει ποιο μέγεθος του Strava εκφράζει το πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας μέσω του σημειωτικού επιπέδου την οδήγησε στον πειραματισμό με το λογισμικό και κατά συνέπεια η δράση της επεκτάθηκε και στο εργαλειακό επίπεδο. Σε αυτό επετεύχθη η σύνδεση μεταξύ της στήλης του Strava με το χάρτη, και όχι με το γράφημα όπως στην περίπτωση της ομάδας, χάρη στη λειτουργία του χρωματισμού του χιλιόμετρου που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή του ρυθμού τρεξίματος που βρίσκεται στη στήλη. Παρατηρήθηκε, λοιπόν, η διαδικασία της διαμόρφωσης δραστηριότητας μέσω εργαλείου (Artigue, 2002) αφού ο συλλογισμός της δημιουργήθηκε χάρη στις παρεμβάσεις της στο λογισμικό.

4.1.3. Μετάβαση από το Strava στο Geogebra

Οι δύο προηγούμενες ενότητες εστίασαν στη μελέτη της νοηματοδότησης του τύπου $\Delta x / \Delta t$ εντός του ψηφιακού περιβάλλοντος του Strava και στο ρόλο των εργαλείων που διαθέτει. Σε αντίθεση με το θεωρητικά συνηθισμένο τρόπο έκφρασης της επίδοσης ενός δρομέα που είναι η ταχύτητα, οι μαθήτριες σε αυτό το νέο περιβάλλον συνάντησαν το μέγεθος του ρυθμού τρεξίματος. Όπως και η ταχύτητα, έτσι και ο ρυθμός τρεξίματος αποτυπώνει τη μεταβολή των μεγεθών της απόστασης και του χρόνου, μόνο που αντί για απόσταση προς χρόνο υπολογίζει χρόνο προς απόσταση. Ζητούμενο, λοιπόν, ήταν η μετάβαση από το μέγεθος του ρυθμού τρεξίματος σε αυτό της ταχύτητας, που είναι βασικό για τη νοηματοδότηση της παραγώγου και έγινε μέσω του ερωτήματος E, αλλά κυρίως μέσω της δεύτερης δραστηριότητας. Αυτή η δραστηριότητα ήταν η αφορμή για την εμπλοκή των μαθητριών με το μαθηματικό χώρο εργασίας του Geogebra ξεκινώντας από τις στατικές γραφικές παραστάσεις και

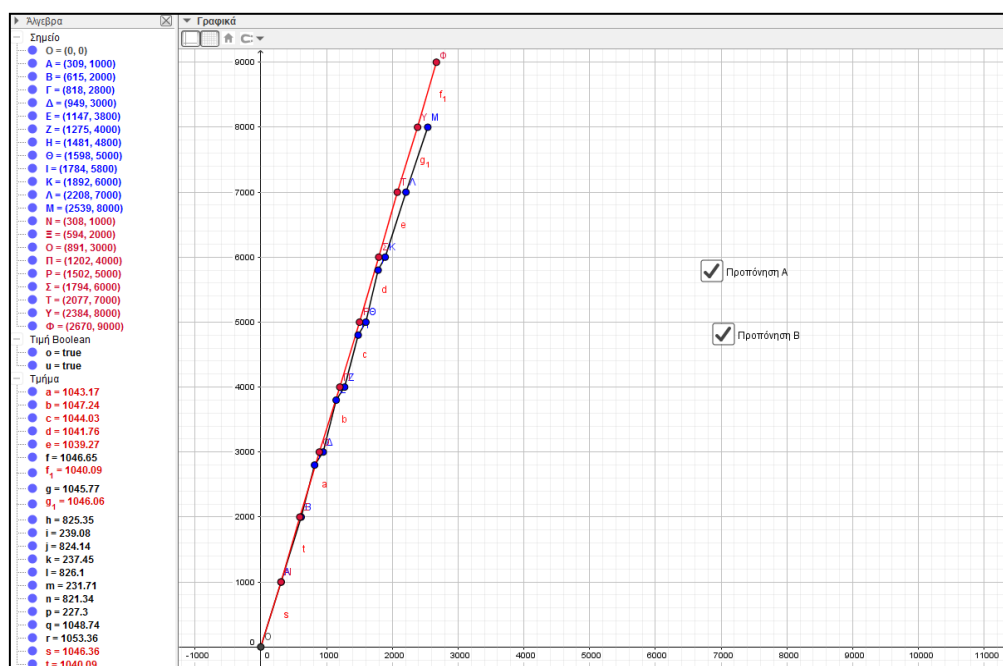
την αλγεβρική στήλη του λογισμικού. Το πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας αυτής ζητούσε την αποτύπωση των δεδομένων της προπόνησης του δρομέα από το Strava στο Geogebra ώστε να γίνει ομαλά η μετάβαση από το ένα πεδίο εργασίας στο άλλο πριν οι μαθήτριες ασχοληθούν με δυσκολότερα ερωτήματα που ήταν κρίσιμα για τη νοηματοδότηση των εννοιών που σχετίζονται με την παράγωγο. Στο ερώτημα Α αυτής όλες οι μαθήτριες εργάστηκαν εντός εργαλειακού και του διαλογικού επιπέδου και στηρίχθηκαν στη στήλη με το ρυθμό τρεξίματος του Strava για να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση στο Geogebra. Οι μαθήτριες της ομάδας αν και αρχικά προσέγγισαν συνολικά την προπόνηση σχεδιάζοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα που έδειχνε τη συνολική απόσταση και το συνολικό χρόνο που έκανε ο δρομέας διαπίστωσαν ότι δεν τρέχει με σταθερή ταχύτητα αλλά κάνει διαφορετικό χρόνο σε κάθε χιλιόμετρο. Έτσι, λοιπόν, αποφάσισαν να βρουν το συνολικό χρόνο που είχε διανύσει ο δρομέας από την αρχή έως και το τέλος του κάθε χιλιομέτρου, όπως έκανε και η M1, και να σχεδιάσουν τα αντίστοιχα 9 σημεία στο σύστημα συντεταγμένων του Geogebra. Παρατηρείται δηλαδή η διαδικασία της τροποποίησης εργαλείου αφού ο σχεδιασμός των σημείων έγινε με βάση τον υπολογισμό των συντεταγμένων τους από τη στήλη του Strava με το ρυθμό τρεξίματος. Όλες οι μαθήτριες θεώρησαν πως ο σωστός τρόπος για να ενώσουν αυτά τα σημεία είναι μέσω ευθυγράμμων τμημάτων κάτι το οποίο ενδεχομένως να οφείλεται είτε στο γεγονός ότι είναι ο πιο απλός τρόπος ένωσης δύο σημείων ή στην εμπειρία τους σχετικά με τα διαγράμματα x-t από το μάθημα της φυσικής. Το αποτέλεσμα αυτών των ενεργειών ήταν η δημιουργία του παρακάτω σχήματος (βλ. Σχήμα 14). Και αυτό και κάποια άλλα παρόμοια σχήματα αποτέλεσαν το πεδίο εργασίας των μαθητριών στην ενασχόλησή τους με τα υπόλοιπα ερωτήματα της δραστηριότητας 2.



Σχήμα 14

4.1.4. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra - Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας μέσω της εφαρμογής του τύπου $\Delta x / \Delta t$ αξιοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις

Στο ερώτημα Biv της δεύτερης δραστηριότητας όπου η προπόνηση του δρομέα αναπαρίσταται μέσω της κόκκινης γραφικής παράστασης (βλ. Σχήμα 15) ζητήθηκε από τις μαθήτριες να υπολογίσουν τη μέση ταχύτητα που είχε στο 1^ο, στο 5^ο και στο 9^ο χιλιόμετρο.



Σχήμα 15

Ξεκάθαρος στόχος αυτού του ερωτήματος ήταν η εφαρμογή του τύπου $\Delta x/\Delta t$ αντλώντας τα δεδομένα από το Geogebra. Όλες οι μαθήτριες συνειδητοποίησαν αμέσως ότι έπρεπε να εφαρμόσουν την παραπάνω στρατηγική επίλυσης με τη μαθήτρια που δούλεψε ατομικά να δηλώνει χαρακτηριστικά, αμέσως μετά την ανάγνωση της εκφώνησης: «Ωραία αν πάρουμε τον τύπο της μέσης ταχύτητας που είναι $\Delta v = \Delta x/\Delta t$ ». Στη συνέχεια εντόπιζε τα σημεία της γραφικής παράστασης στα οποία άρχιζε και τελείωνε το καθένα από τα ζητούμενα χιλιόμετρα και με τη βοήθεια της αλγεβρικής στήλης έβρισκε τις συντεταγμένες τους. Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο υπολόγισε τη μέση ταχύτητα του πρώτου χιλιόμετρου και πως αξιοποίησε τη στήλη της άλγεβρας: «Τα αρχικά είναι 0 οπότε φεύγουν και μετά το $v_{\text{τελικό}}$ (λάθος, αλλά εννοούσε $x_{\text{τελικό}}$) είναι τα 1000 μέτρα, το t που έχει είναι, θα το δούμε από εδώ (στήλη άλγεβρας), 308. Άρα προς 308». Στη συνέχεια, αν και δυσκολεύτηκε σε πρώτη φάση να καταλάβει ποιο είναι το 5ο και ποιο το 9ο χιλιόμετρο, κατάφερε να υπολογίσει τη μέση ταχύτητα σε κάθε ένα από αυτά με τον ίδιο τρόπο, όπως φαίνεται και από το σχήμα 16.

The image shows three rows of handwritten calculations on lined paper, each representing the average velocity for a different interval. The first row is for the interval from 0 to 1000 meters, with the final time calculated as 308 seconds. The second row is for the interval from 4000 to 5000 meters, with a time interval of 300 seconds. The third row is for the interval from 8000 to 9000 meters, with a time interval of 286 seconds.

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} \quad 5^{\circ} \quad 9^{\circ} \\
 \Delta v = \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{v_{\text{τελ}} - v_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}} = \frac{1000}{308} = 3,247 \text{ m/s} \\
 5^{\circ} \quad \Delta v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5000 - 4000}{1502 - 1202} = \frac{1000}{300} = 3,3 \text{ m/s} \\
 9^{\circ} \quad \Delta v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{9000 - 8000}{2670 - 2384} = \frac{1000}{286} = 3,5 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Σχήμα 16

Και η δράση των μαθητριών που δούλεψαν σε ομάδα ήταν παρόμοια, αφού και εκείνες κατάλαβαν αμέσως ότι έπρεπε να εφαρμόσουν τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ και για να βρουν τις απαραίτητες τιμές για το χρόνο και την απόσταση παρατήρησαν τη γραφική παράσταση και τη στήλη της άλγεβρας.

Σύνοψη

Επομένως, στο ερώτημα που ζητούσε τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας σε συγκεκριμένα τμήματα της διαδρομής όλες οι μαθήτριες εργάστηκαν μεταξύ του

εργαλειακού και του διαλογικού επιπέδου και ειδικότερα μέσω της διαδικασίας της τροποποίησης εργαλείου, αφού κατάλαβαν ότι έπρεπε να αξιοποιήσουν τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ από το θεωρητικό σύστημα αναφοράς και στη συνέχεια άντλησαν τα απαραίτητα δεδομένα από τις αναπαραστάσεις του Geogebra.

4.1.5. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra - Εφαρμογή του τύπου $\Delta x/\Delta t$ σε μικρότερα χρονικά διαστήματα

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί για τη δράση της ομάδας των μαθητριών σχετικά με τη μέση ταχύτητα στο Geogebra είναι ότι χρησιμοποίησαν τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ από το ερώτημα (iii), το οποίο ζητούσε την επιλογή της προπόνησης κατά την οποία ο δρομέας ανέπτυξε τη μεγαλύτερη ταχύτητα. Σε αυτό το ερώτημα, λοιπόν, παρατήρησαν αρχικά τη βασική διαφορά στο στυλ της κάθε προπόνησης, δηλαδή ότι στη μία ο δρομέας πάει περίπου με σταθερή ταχύτητα ενώ στην άλλη κάνει διαλείμματα με την βοήθεια της κλίσης (βλ. Ενότητα 4.4.1) με τη M2 να λέει χαρακτηριστικά: «Στην άλλη δραστηριότητα πως πήγαινε; Έκανε και εκεί πέρα με ανάσες ή ήταν ευθεία σταθερά;». Επίσης, προσπάθησαν να βγάλουν κάποιο συμπέρασμα από τις γραφικές παραστάσεις κάνοντας μεγέθυνση προκειμένου να βρουν όσο το δυνατόν πιο ακριβείς τιμές, όπως αποδεικνύει και το παρακάτω απόσπασμα:

M3	Κάτσε να δούμε λίγο ζουμ. Λοιπόν, εδώ στην κόκκινη (NΞ), σε αυτό το σημείο, σε αυτό εδώ το χιλιόμετρο πάει πιο γρήγορα απ' ότι πάει η μπλε
E	Γιατί;
M3	Γιατί ουσιαστικά βλέπουμε το χιλιόμετρο εδώ και είναι πιο αριστερά απ' ότι είναι η μπλε, σε λιγότερο χρόνο

Η παραπάνω παρατήρηση βέβαια δεν ήταν αρκετή και εμφανίστηκε η ανάγκη για χρήση του τύπου $\Delta x/\Delta t$ και η M3 είπε: «Βασικά δεν είναι σε χιλιόμετρα, δηλαδή εδώ είναι σταθερό και είναι 1 χιλιόμετρο, κάνει αυτό το χρόνο, αλλά αν όμως πούμε να βγάλουμε τα 200άρια, τα 800 αν πάρουμε ίσως είναι πιο γρήγορα, αλλά αυτό θέλει πράξεις. Δηλαδή να δούμε ανά τόσα μέτρα ποιο έκανε πιο γρήγορα». Αυτά τα λόγια της μαθήτριας δείχνουν ότι για να κάνει σύγκριση μεταξύ της στιγμιαίας ταχύτητας του δρομέα στις δύο προπονήσεις υπολογίζει τη μέση ταχύτητά του σε μικρότερα χρονικά διαστήματα, όπως για παράδειγμα ανά 800m για τα οποία και οι δύο μαθήτριες είχαν παρατηρήσει ότι υπάρχει κάποιο μοτίβο. Το μοτίβο που παρατήρησαν ήταν ότι ο

δρομέας για 800 μέτρα έτρεχε και μετά για 200 μέτρα περπατούσε (βλ. Ενότητα 4.4.1). Έτσι, η μαθήτρια πήρε την απόφαση να υπολογίσει τη μέση ταχύτητα μόνο στα τμήματα των 800 μέτρων, στρατηγική η οποία είναι πολύ σημαντική για τη μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα. Η μετάβαση αυτή είναι ο βασικός στόχος του ερωτήματος Δ της τρίτης δραστηριότητας και θα αναλυθεί λεπτομερώς στην ενότητα 2. Ο τρόπος με τον οποίο εφάρμοσε την παραπάνω ιδέα χρησιμοποιώντας τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ και τις αναπαραστάσεις του Geogebra παρουσιάζεται στο παρακάτω απόσπασμα:

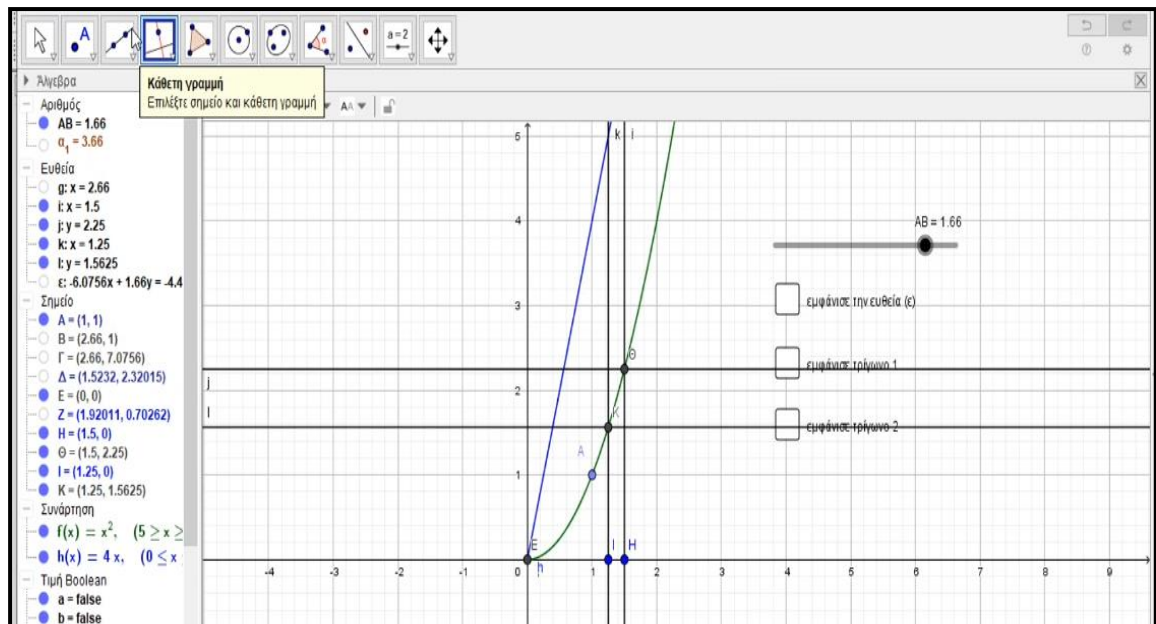
M3	Λοιπόν πήρα το σημείο Ω το οποίο είναι το 831.6 στην κόκκινη γραμμή, αποκλίνει κάποια δευτερόλεπτα (εννοεί από το Γ), οπότε ουσιαστικά θα πρέπει να βρούμε το υ του άλλου, πόσο κάνει στα 203 μέτρα εεε τα 203 δευτερόλεπτα
E	Το 203 τι είναι;
M3	Το 203 είναι η διαφορά 818-615 που δείχνουμε από εδώ (στήλη άλγεβρας), βέβαια εδώ (X,Ψ) αχ δε μπορώωω δε μπορώωω. Οπότε πάμε να κάνουμε...αυτό είναι ο χρόνος που έκανε ο άλλος, θα πάρουμε και το χρόνο που έκανε ο άλλος που είναι 615, κάτσε...594 και το άλλο είναι 831 οπότε έχουμε....οπότε ουσιαστικά σε αυτό εδώ το χιλιόμετρο πιο γρήγορα πάει το μπλε και εδώ πέρα πρέπει να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό ίσως και να δούμε πόσο χρόνο του παίρνει, με πόση ταχύτητα πηγαίνει
E	Κάτσε πως κατάλαβες ότι πάει πιο γρήγορα;
M3	Γιατί κάνει λιγότερο χρόνο

Η εφαρμογή του τύπου $\Delta x/\Delta t$ εδώ είναι παρόμοια με εκείνη που είχε προηγηθεί από όλες τις μαθήτριες στο ερώτημα Γ της πρώτης δραστηριότητας, αφού και σε αυτήν την περίπτωση σταθεροποιούν την απόσταση και υπολογίζουν το χρόνο που χρειάστηκε ο δρομέας για να την καλύψει. Ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος των εργαλείων του Geogebra αφού η επιλογή της κοινής απόστασης των 800 μέτρων και στις δύο προπονήσεις έγινε ύστερα από παρέμβαση της μαθήτριας στη γραφική παράσταση. Πιο συγκεκριμένα, μετά από αρκετή μεγέθυνση τοποθέτησε σημεία, όπως το Ω (βλ. απόσπασμα διαλόγου), στην κόκκινη γραμμή ώστε να πετύχει έναν παρόμοιο διαχωρισμό με εκείνον της μπλε και να κάνει τη σύγκριση της ταχύτητας του δρομέα σε κάποια από τα 4 τμήματα των 800 μέτρων.

Επομένως, η ύπαρξη της γραφικής παράστασης προκάλεσε αρχικά τη δράση της μαθήτριας στο σημειωτικό επίπεδο αφού υπήρχε η ανάγκη για την αποκωδικοποίηση αυτής, αλλά αυτή δεν ήταν αρκετή για την επιλογής της σωστής διαδρομής. Ακολούθησε, λοιπόν, η δράση της μαθήτριας μεταξύ του εργαλειακού και του

διαλογικού επιπέδου (Ins- Dis), αφού μετά την επιλογή της χρήσης του τύπου $\Delta x/\Delta t$ έκανε πολλές καθοριστικές παρεμβάσεις στο σχήμα, όπως για παράδειγμα η τοποθέτηση των νέων σημείων πάνω στην κόκκινη γραμμή προκειμένου να εφαρμόσει το πλάνο της για την εύρεση της προπόνησης με τη μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα, αξιοποιώντας τη μέση και τον αντίστοιχο τύπο της.

Οι γραφικές παραστάσεις και η στήλη της άλγεβρας επηρέασαν σημαντικά τη δράση των μαθητριών και στην τρίτη δραστηριότητα. Μάλιστα, σε αντίθεση με τις προηγούμενες δραστηριότητες, αυτή είχε σαφή στόχο τη δράση των μαθητριών αποκλειστικά στο Geogebra. Δόθηκαν, λοιπόν, έτοιμες οι γραφικές παραστάσεις για την κίνηση του ποδηλάτη που είχε αναφερθεί στα προηγούμενα ερωτήματα και για έναν μοτοσικλετιστή τον οποίο συνάντησε σε κάποια στιγμή της προπόνησής του. Το ερώτημα που σχετιζόταν με την έννοια της μέσης ταχύτητας ήταν το B, το οποίο ζητούσε τον υπολογισμό αυτής στην κίνηση του μοτοσικλετιστή για τα χρονικά διαστήματα 1-2s, 1-1.5s και 1-1.25s. Το ερώτημα αυτό μοιάζει με το (Biv) της δεύτερης δραστηριότητας αλλά η βασική διαφορά είναι ότι η κίνηση του μοτοσικλετιστή είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη. Επίσης, μέσω της μείωσης του χρονικού διαστήματος αυτό το ερώτημα έχει ταυτόχρονα έναν εισαγωγικό ρόλο για το επόμενο του, με το οποίο οι μαθήτριες θα προσέγγιζαν τη στιγμιαία ταχύτητα. Κατά την προσπάθεια του υπολογισμού της μέσης ταχύτητας σε αυτά τα 3 διαφορετικά χρονικά διαστήματα οι μαθήτριες ήταν αναγκαίο να αξιοποιήσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης x^2 , η οποία αναπαριστούσε την επιταχυνόμενη κίνηση του μοτοσικλετιστή. Εστιάζοντας στη δράση της μαθήτριας που δούλεψε ατομικά παρατηρείται ξανά η εφαρμογή του τύπου $\Delta x/\Delta t$ και η ανάγκη εύρεσης των αρχικών και τελικών τιμών της θέσης και του χρόνου μέσω του Geogebra. Η μαθήτρια, λοιπόν, για να βρει τις χρονικές στιγμές 1, 1.25, 1.5, 2 και τις αντίστοιχες θέσεις του μοτοσικλετιστή προσπάθησε να βρει τα σημεία της γραφικής παράστασης με τετμημένες 1, 1.25, 1.5, 2. Αυτό το πέτυχε όχι απλά παρατηρώντας το σχήμα αλλά κάνοντας σημαντικές παρεμβάσεις πάνω σε αυτό. Για παράδειγμα, στο χρονικό διάστημα 1-1,5 εντόπισε αρχικά το σημείο (1.5,0) ρωτώντας χαρακτηριστικά: «μπορώ να βάλω εγώ σημείο για το 1,5 για να είμαι σίγουρη;» και στη συνέχεια έφερε μία κάθετη γραμμή (βλ. Σχήμα 17) η οποία έτεμνε την παραβολή x^2 στο σημείο (1.5,2.25). Κατά αυτόν τον τρόπο βρήκε τη θέση του μοτοσικλετιστή τη χρονική στιγμή $t=1.5s$ και μετά υπολόγισε τη μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα 1-1,5.



Σχήμα 17

Από την άλλη, οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα προσπάθησαν και αυτές να βρουν τα παραπάνω σημεία αλλά με διαφορετικό τρόπο. Εκείνες στράφηκαν στη διαδικασία της μεγέθυνσης αλλά όση και να έκαναν δε μπορούσαν να βρουν με ακρίβεια τα σημεία που ήθελαν. Τότε αποφάσισαν να αποκωδικοποιήσουν απλά τη γραφική παράσταση χωρίς να κάνουν κάποια παρέμβαση σε αυτή, αλλά παρατηρώντας την σε συνδυασμό και με τη στήλη της άλγεβρας. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που περιγράφεται στο παρακάτω απόσπασμα:

M3	Στη συνάρτηση την πράσινη αν βάλουμε το 1.5;
M2	A ναι έχει το x^2
M3	Ναι οπότε αν βάλουμε όπου x το 1.5
M2	1.5 στο τετράγωνο πόσο κάνει; Κάνει 2.25, εμείς έχουμε βάλει 2.2

Μάλιστα, η σύνδεση αυτή του τύπου που βρίσκεται στην αλγεβρική στήλη με την αντίστοιχη γραφική παράσταση γίνεται πιο εύκολη χάρη στο πλεονέκτημα του Geogebra που τα αποτυπώνει στην οθόνη με το ίδιο χρώμα (βλ. Σχήμα 17).

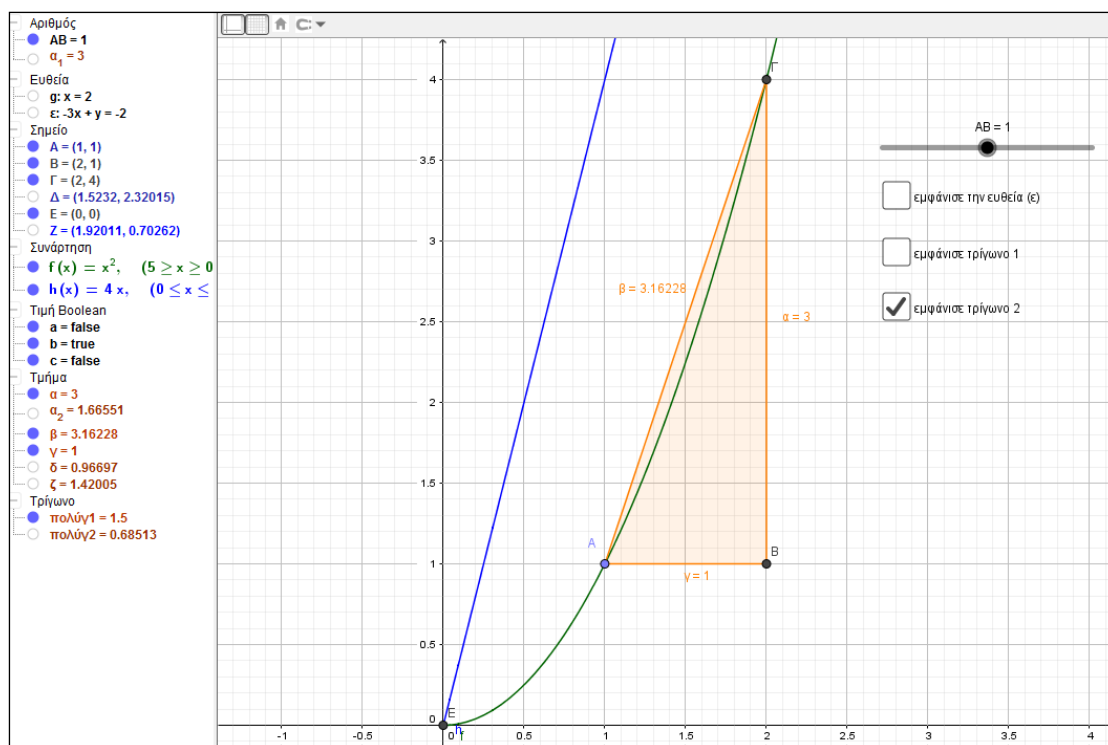
Σύνοψη

Επομένως, οι μαθήτριες προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα Biii της δεύτερης δραστηριότητας και στο ερώτημα B της τρίτης δραστηριότητας, τα οποία περιλάμβαναν τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας σε μικρότερα διαστήματα, έδρασαν εντός και των τριών επιπέδων νοηματοδότησης. Όσον αφορά στο ερώτημα

Biii της δεύτερης δραστηριότητας η μαθήτρια M3 πήρε η ίδια την πρωτοβουλία να αξιοποιήσει από τη θεωρία τη μέση ταχύτητα και τον τύπο της για το διάστημα των 800 μέτρων βρίσκοντας τις απαραίτητες τιμές με κατάλληλες παρεμβάσεις στο σχήμα, χάρη όμως στη σύγκριση που έκανε αρχικά μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων εντός του σημειωτικού επιπέδου. Όσον αφορά στο ερώτημα Β όπου η μείωση των χρονικών διαστημάτων προκλήθηκε από την ίδια την εκφώνηση, οι προσεγγίσεις όλων των μαθητριών ήταν πάνω κάτω οι ίδιες, όπως αναμενόταν, αφού ουσιαστικά έπρεπε απλά να εφαρμόσουν τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ αντλώντας πρώτα τα απαραίτητα δεδομένα από το Geogebra. Διαφορά υπήρξε στις ενέργειές τους στο εργαλειώκο επίπεδο αφού από τη μία έγινε η κατασκευή των καθέτων και από την άλλη μεγέθυνση. Η ομάδα, που δεν κατάφερε να πετύχει το στόχο της, στράφηκε στη συνέχεια προς το σημειωτικό επίπεδο, όπως αποδεικνύει η ερμηνεία της γραφικής παράστασης με τη συμβολή της αλγεβρικής στήλης.

4.1.6. Πεδίο εργασίας: Δομήματα του Geogebra που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό – Η νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας και του λόγου $\Delta x/\Delta t$ μέσω αξιοποίησης του «τριγώνου της ανάλυσης»

Το ψηφιακό δόμημα το οποίο αποτέλεσε την αφορμή για πολύ πειραματισμό με τον δυναμικό χειρισμό του δρομέα, για πολλή σκέψη και για πολλές εικασίες είναι το τρίγωνο της ανάλυσης. Η εμπλοκή των μαθητριών με αυτό ξεκίνησε στο ερώτημα Δ της τρίτης δραστηριότητας. Όσον αφορά στις μαθήτριες που δούλεψαν ομαδικά, δυσκολεύτηκαν πολύ σε αυτό το ερώτημα και για αυτό το λόγο έγινε η προτροπή για σύνδεση του τριγώνου της ανάλυσης με το ερώτημα Β που είχαν απαντήσει προηγουμένως. Έτσι, οι μαθήτριες ασχολήθηκαν ξανά με τη μέση ταχύτητα και τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ αλλά αυτή τη φορά με μία διαφορετική αναπαράσταση την οποία μάλιστα μπορούσαν να αλλάξουν μέσω του δυναμικού χειρισμού ενός δρομέα του Geogebra. Ξεκινώντας, λοιπόν, τον πειραματισμό τους με το τρίγωνο της ανάλυσης οι μαθήτριες αποφάσισαν να τοποθετήσουν το σημείο Α στη θέση (1,1) και μέσω του δρομέα να κάνουν την πλευρά ΑΒ ίση με 1 (βλ. Σχήμα 18) με στόχο την εύρεση της μέσης ταχύτητας του μοτοσικλετιστή στο διάστημα 1-2s.



Σχήμα 18

Η Μ2, λοιπόν, κατάλαβε άμεσα τι πρέπει να κάνει και ξεκίνησε να δρα εντός του διαλογικού επιπέδου, καθώς εξηγούσε αναλυτικά τις σκέψεις της με αναφορές στη θεωρία και εφάρμοζε επιτυχώς τους τύπους για τη μέση ταχύτητα και την εφαπτομένη μίας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Από την παρακάτω στιχομυθία μεταξύ της μαθήτριας και του ερευνητή

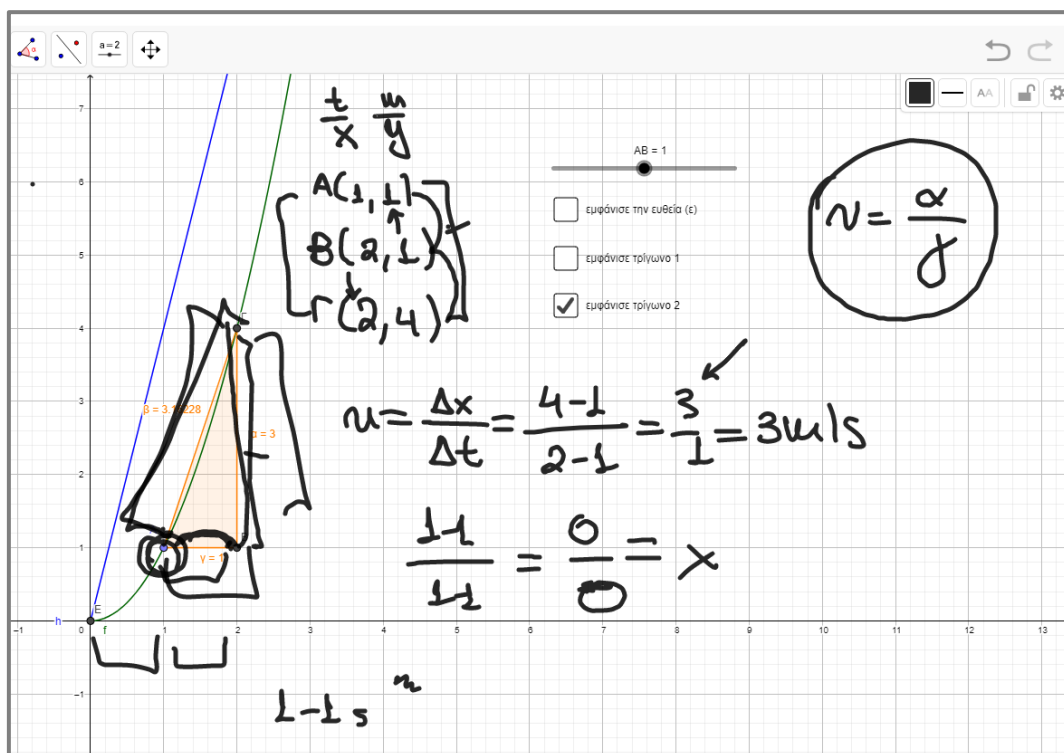
E	Αυτό θέλω, να συνδυάσετε λίγο τους υπολογισμούς που χρειάζονται για να βρούμε τη μέση ταχύτητα, δηλαδή πως υπολογίζουμε μέση ταχύτητα; Και πως αυτό συνδέεται με το τρίγωνο;
M2	Εδώ αφαιρούμε τα x και εδώ αφαιρούμε τα y να το πω έτσι
E	Ωραία εκεί αφαιρούμε x και εκεί αφαιρούμε y, αλλά τι είναι το x και το y;
M2	Τα x είναι ο χρόνος τα y είναι τα μέτρα

και από αυτή την παρακάτω φράση της μαθήτριας: «Ενώ εδώ τα y του Γ και του Β εκφράζουν τα μέτρα και έτσι βρίσκουμε τη μεταβολή των μέτρων, της θέσης και του χρόνου, αφαιρώντας τις συντεταγμένες τους, δηλαδή εδώ αφαιρούμε τα x εδώ αφαιρούμε τα y», προκύπτει ότι έκανε εύκολα τη σύνδεση μεταξύ της μέσης ταχύτητας και του τριγώνου και αυτό οφείλεται στην καλή γνώση όλων των απαιτούμενων τύπων τους οποίους αξιοποίησε προκειμένου να ερμηνεύσει το σχήμα που της δινόταν. Η προσπάθεια της μαθήτριας να αποκωδικοποιήσει το σχήμα χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη θεωρία μέσω των κατάλληλων τύπων δείχνει ότι η

δράση της τοποθετείται παράλληλα και στο σημειωτικό και το διαλογικό επίπεδο (Sem-Dis) και αυτό αποδεικνύεται με τη μελέτη του συλλογισμού που έκανε και παρουσιάζεται παρακάτω:

M2	Του Β είναι (2,1), του Γ είναι (2,4)
M3	Ναι
M2	Η μέση ταχύτητα είναι $v = \Delta x / \Delta t$, δηλαδή πριν εμείς κάναμε για το 1-2, είπαμε εδώ τα x που είναι 4-1 και εδώ είναι 2-1 και όλο αυτό κάνει 3/1 άρα 3m/s
E	Πολύ ωραία
M2	Ναι, εδώ πέρα είχα πει ότι μπορούσα...εδώ πέρα τα x εκφράζουν το χρόνο και τα y εκφράζουν τα μέτρα
M3	Ναι
M2	Οπότε είπα ότι αν αφαιρέσουμε από τα Β, για να βρούμε το χρόνο αφαιρούμε το 2-1 και για να βρούμε τη μεταβολή των μέτρων αφαιρούμε 4-1, κατάλαβες; Κάνω αυτό και αυτό κατάλαβες;

Εδώ, φαίνεται ότι έχει καταλάβει πως εμφανίζεται στο σχήμα η μέση ταχύτητα και για να το εξηγήσει στη συμμαθήτριά της χρησιμοποιεί ένα από τα παραδείγματα του ερωτήματος Β αναφέροντας τι αναπαριστά στο τρίγωνο το κάθε νούμερο που χρησιμοποίησαν στον τύπο $\Delta x / \Delta t$, ο οποίος στο σχήμα εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας Α (βλ. Σχήμα 19).



Σχήμα 19

Όλος αυτός ο συλλογισμός και η πολύ αναλυτική διατύπωσή του είχαν ως αποτέλεσμα την παρατήρηση ότι η ταχύτητα εμφανίζεται στο σχήμα ως ο λόγος α/γ . Το γεγονός αυτό κατέστησε περιττή την επανάληψη της ίδιας διαδικασίας για τα άλλα δύο χρονικά διαστήματα και αξίζει να σημειωθεί ότι οι μόνες παρεμβάσεις που έγιναν στο τρίγωνο της ανάλυσης ήταν η μετακίνηση του σημείου A και η τοποθέτηση του δρομέα AB στην τιμή 1. Από την άλλη, η μαθήτρια που εργάστηκε ατομικά δεν κατάλαβε εύκολα πως συνδέεται το τρίγωνο της ανάλυσης με τη μέση ταχύτητα οπότε ασχολήθηκε περισσότερο με το δυναμικό χειρισμό του δρομέα. Αρχικά, πρέπει να αναφερθεί ότι βρήκε τη σωστή απάντηση του ερωτήματος B χρησιμοποιώντας τους τύπους από τη φυσική για την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και στη συνέχεια της ζητήθηκε να συνδέσει την ταχύτητα με το τρίγωνο της ανάλυσης. Τότε σκέφτηκε να δράσει όπως και στο ερώτημα B και να φέρει την κατακόρυφη γραμμή $x=2$, όμως, της έγινε η παρατήρηση να αναζητήσει περεταίρω το περιβάλλον του Geogebra επειδή υπήρχε ο δρομέας που αλλάζει τις διαστάσεις του τριγώνου της ανάλυσης. Ουσιαστικά, με το συγκεκριμένο εργαλείο η μαθήτρια πετυχαίνει ακριβώς τον ίδιο στόχο με την παραπάνω στρατηγική, ενώ ταυτόχρονα έχει τη δυνατότητα να κάνει πολλές αλλαγές και να εξετάζει τις διαφορετικές τιμές των στοιχείων του. Έτσι, όταν εντόπισε το δρομέα επέλεξε να του δώσει την τιμή 1 και να εξετάσει τη σχέση του τριγώνου της ανάλυσης με τη μέση ταχύτητα. Όταν, λοιπόν, ρωτήθηκε για τη συμβολή του τριγώνου της ανάλυσης απάντησε πως της φάνηκαν χρήσιμες μόνο οι συντεταγμένες των κορυφών του ενώ στη συνέχεια παρατήρησε ότι αναγράφονται στο λογισμικό και το ύψος και η βάση. Προσπαθώντας να βρει μια σχέση μεταξύ αυτών των στοιχείων του τριγώνου και της μέσης ταχύτητας, είπε ότι *«το ύψος είναι ίσο με τη μέση ταχύτητα...το ύψος επί τη βάση»*, δηλαδή κατά τη δράση της στο σημειωτικό επίπεδο επιχείρησε να ερμηνεύσει το ύψος και τη βάση του τριγώνου που έβλεπε καταλήγοντας σε μία σχέση που βγάζει το αποτέλεσμα 3, το οποίο είχε βρει προηγουμένως. Σε αντίθεση με προηγούμενες ενέργειές της όπου προσπαθούσε να βγάλει κάποιο συμπέρασμα μέσω της γραφικής παράστασης, η μαθήτρια τώρα προσπάθησε να ερμηνεύσει τη γραφική παράσταση μέσω των αποτελεσμάτων που είχε βρει. Δηλαδή, στήριξε την απάντησή της στο σωστό νούμερο που είχε ήδη βρει και όχι στον τύπο $\Delta x/\Delta t$ που εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας A, ο οποίος αποτελεί σημαντικό παράγοντα για τη σύνδεση της στιγμιαίας ταχύτητας με την έννοια της παραγώγου. Το παραπάνω λάθος διορθώθηκε στο επόμενο παράδειγμα με τη μετάβαση σε αυτό να γίνεται με το

δυναμικό χειρισμό του δρομέα στον οποίο η μαθήτρια έδωσε την τιμή 0,5. Μέσω του νέου σχήματος, προέκυψε το συμπέρασμα ότι το αποτέλεσμα στο προηγούμενο παράδειγμα βγήκε σωστό συμπτωματικά, και η μαθήτρια κατάλαβε ότι η μέση ταχύτητα υπολογίζεται από τον τύπο a/γ και όχι από τον $a*\gamma$, όπου a είναι το ύψος και γ η βάση. Επομένως, αν και η μαθήτρια δεν αναγνώρισε άμεσα το Δx και το Δt στο σχήμα και συνεπώς ούτε τη μέση ταχύτητα ως το λόγο a/γ συνδυάζοντάς τον με την εφαπτομένη της γωνίας, το πέτυχε στηριζόμενη στα αποτελέσματα που είχε βρει από το ερώτημα Β. Η ερμηνεία αυτή των αποτελεσμάτων μέσω του σχήματος φαίνεται στο παρακάτω χαρακτηριστικό απόσπασμα των διαλόγων:

M1	Όμως αν κάνουμε όπως και πριν πάλι τον τύπο, αν κάνουμε $(2,25-1)/(1,5-1)$ θα μας βγει $1,25/0,5$
E	Ωραία
M1	Άρα δεν είναι $3*1$, είναι $3/1$
E	Μπράβο. Άρα είναι;
M1	$1,25/0,5$ άρα είναι a/γ
E	Μπράβο, αυτό το a/γ τι μπορεί να είναι στο σχήμα μας;
M1	Το a είναι το ύψος, το γ είναι η βάση και από τον τύπο Δx είναι το a ενώ Δt είναι το γ

Σύνοψη

Συμπερασματικά, το τρίγωνο της ανάλυσης αποτέλεσε την αφορμή ώστε οι μαθήτριες να εργαστούν συνδυαστικά σε όλα τα επίπεδα κατασκευής νοήματος για την έννοια της μέσης ταχύτητας και περισσότερο στο σημειωτικό και το διαλογικό και όχι τόσο στο εργαλειακό παρά τη δυνατότητα του δυναμικού χειρισμού του δρομέα. Ειδικά στην περίπτωση της ομάδας, οι μαθήτριες εργάστηκαν μόνο στο σημειωτικό και διαλογικό επίπεδο λόγω της γρήγορης εύρεσης της σχέσης $a/\gamma = \Delta x/\Delta t$ η οποία επετεύχθη με την αξιοποίηση του τύπου της μέσης ταχύτητας και της παρατήρησης του σχήματος. Από την άλλη, η δράση της M1 μόνο στα δύο επίπεδα, όπου προσπάθησε να ερμηνεύσει το σχήμα αποκλειστικά μέσω των αριθμητικών τιμών των πλευρών του τριγώνου, την οδήγησε σε λάθος αποτέλεσμα το οποίο ήταν η αφορμή για τη δράση της και στο εργαλειακό επίπεδο. Σε αυτό το σημείο αποδεικνύεται ο σημαντικός ρόλος του δυναμικού χειρισμού του δρομέα που αλλάζει τη βάση του τριγώνου της ανάλυσης διότι συμβάλλει στη δημιουργία και την παρατήρηση διαφορετικών σχημάτων και διευκολύνει τη σύνδεση μεταξύ αυτών και του τύπου $\Delta x/\Delta t$. Και σε αυτό το ερώτημα, λοιπόν εφαρμόζεται αυτός ο τύπος για τη μέση

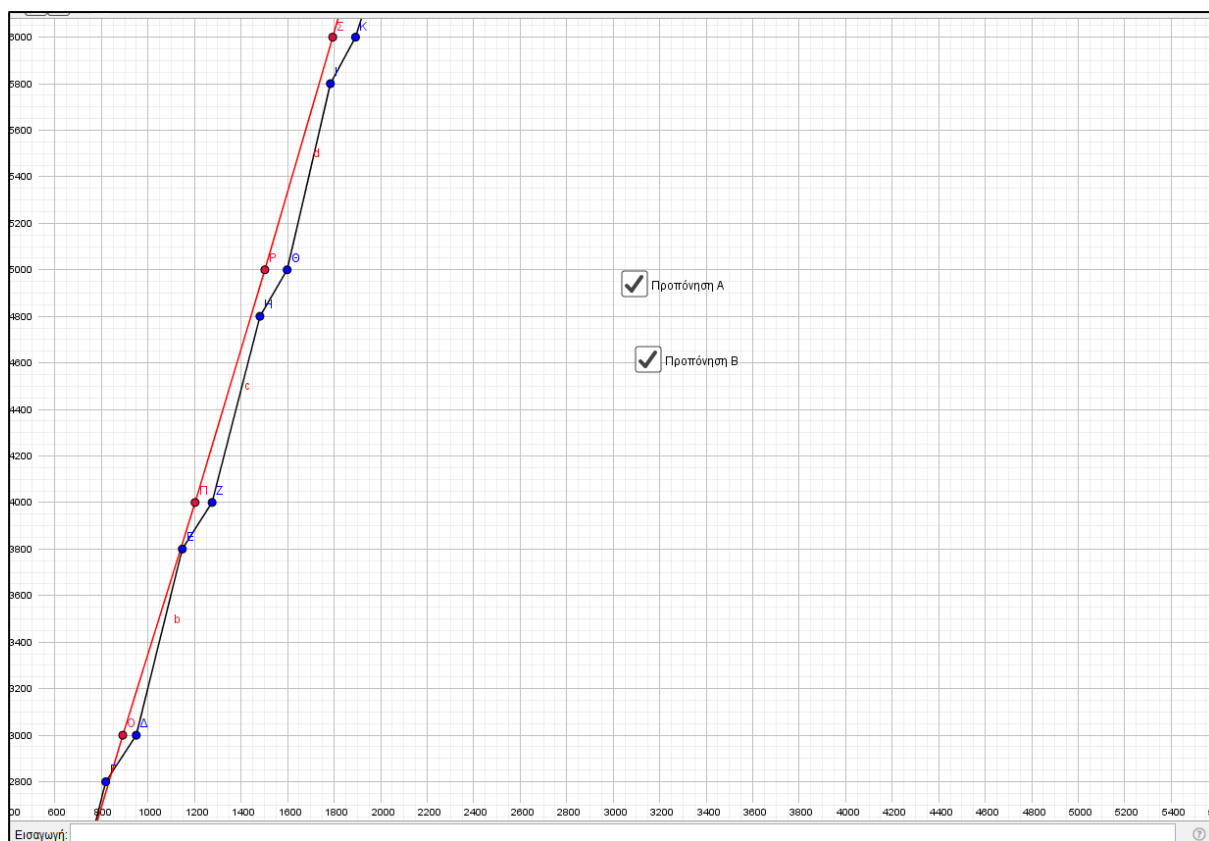
ταχύτητα, όπως δηλαδή στα περισσότερα ερωτήματα που είχαν προηγηθεί, αλλά ο αριθμητής και ο παρονομαστής δε χρειάζεται να υπολογίζονται από την αρχή αφού αποτελούν ουσιαστικά τα μήκη των κάθετων πλευρών του τριγώνου της ανάλυσης. Στο συγκεκριμένο ερώτημα βέβαια οι μαθήτριες μετακίνησαν το δρομέα μόνο λίγες φορές και περισσότερο η M1 που αντιμετώπισε δυσκολία στη σύνδεση του σχήματος με τη θεωρία. Πιο πολλές αλλαγές στην τιμή του έκαναν στο επόμενο ερώτημα που αφορούσε στη στιγμιαία ταχύτητα του μοτοσικλετιστή.

4.2. Η προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας και η μετάβαση σε αυτή από τη μέση ταχύτητα μέσα από τα διαφορετικά μαθηματικά πεδία εργασίας

Το ερώτημα το οποίο ήταν καθοριστικό για τη μετάβαση των μαθητριών από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα ήταν το Δ της τρίτης δραστηριότητας που ζητούσε την ταχύτητα που είχε ο μοτοσικλετιστής τη χρονική στιγμή $t=1s$ και μάλιστα ήταν από τα ερωτήματα στα οποία αφιέρωσαν περισσότερο χρόνο. Ωστόσο, όπως είχε αναφερθεί και στην προηγούμενη ενότητα οι μαθήτριες είχαν εμπλακεί με την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας και σε προηγούμενα ερωτήματα τα οποία είχαν ουσιαστικά έναν εισαγωγικό ρόλο για το ερώτημα Δ.

4.2.1. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra – Νοηματοδότηση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της στρατηγικής της μείωσης των χρονικών διαστημάτων

Η πρώτη επαφή των μαθητριών με τη στιγμιαία ταχύτητα έγινε στο ερώτημα (Biii) της δεύτερης δραστηριότητας, όπου έπρεπε να βρουν την προπόνηση στην οποία ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη ταχύτητα. Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 4.1.5 οι μαθήτριες προσπαθώντας να αποκωδικοποιήσουν τις γραφικές παραστάσεις που αναπαριστούσαν τις προπονήσεις και να κάνουν μία σύνδεση με την πραγματικότητα κατάλαβαν ότι στην προπόνηση Α ο δρομέας διατηρούσε περίπου σταθερή ταχύτητα ενώ στην προπόνηση Β ακολουθούσε ένα μοτίβο κατά το οποίο για 800 μέτρα έτρεχε και για 200 περπατούσε (βλ. Σχήμα 20) .



Σχήμα 20

Η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά διατύπωσε άμεσα το λογικό συμπέρασμα πως ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα στην προπόνηση Β επειδή σε αυτή έκανε διαλλείματα για 200 μέτρα και συνεπώς στα 800 που ακολουθούσαν θα πήγαινε πιο γρήγορα λέγοντας χαρακτηριστικά: «Γιατί παρόλο που στην προπόνηση Α παρατηρούμε ότι έχει μια σταθερή ταχύτητα στην προπόνηση Β βλέπουμε ότι παρόλο που πήγαινε σταθερά μετά έκοβε για να κάνει ένα διάλειμμα και στη συνέχεια προσπαθούσε να βρει την προηγούμενή του ταχύτητα οπότε μπορεί να την ξεπέρασε κιόλας». Όσον αφορά στις μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα, και αυτές ξεκίνησαν να παρατηρούν τις γραφικές παραστάσεις για να τις ερμηνεύσουν. Η μία από τις δύο μαθήτριες, λοιπόν, πρότεινε να κάνουν μεγέθυνση και να εστιάσουν στο 2^ο χιλιόμετρο των δύο προπονήσεων (βλ. Σχήμα 20), όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα των διαλόγων:

M3	Κάτσε να δούμε λίγο ζουμ. Λοιπόν, εδώ στην κόκκινη (ΝΞ), σε αυτό το σημείο, σε αυτό εδώ το χιλιόμετρο πάει πιο γρήγορα απ' ότι πάει η μπλε
E	Γιατί;
M3	Γιατί ουσιαστικά βλέπουμε το χιλιόμετρο εδώ και είναι πιο αριστερά απ' ότι είναι η μπλε, σε λιγότερο χρόνο

M2	Ναι αυτό το χιλιόμετρο σε λιγότερο χρόνο άρα το έκανε πιο γρήγορα
----	---

Τα λόγια της M3 δείχνουν ότι και σε αυτό το ερώτημα προσπαθεί να βγάλει κάποιο συμπέρασμα μέσω των μεγεθών του χρόνου και της μετατόπισης σε συνδυασμό με τη γραφική παράσταση αφού παρατηρεί ότι ο δρομέας ξεκινά το 2^ο χιλιόμετρο την ίδια χρονική στιγμή και στις δύο προπονήσεις και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αυτό που έκανε πιο γρήγορα είναι αυτό που έκανε σε λιγότερο χρόνο. Δηλαδή και σε αυτήν την περίπτωση, όπως είχε κάνει στην πρώτη δραστηριότητα, σταθεροποίησε το Δx , ασχολήθηκε μόνο με το Δt και κατέληξε στη μετάφραση του «πιο αριστερά» ως «πιο γρήγορα» και του «πιο δεξιά» ως «πιο αργά» όταν αναφερόταν στο σημείο που τελειώνει το ευθύγραμμο τμήμα που αναπαριστούσε το 2^ο χιλιόμετρο. Η μετάφραση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι ο χρόνος αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης $x(t)$ και ότι οι τιμές του βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα του συστήματος συντεταγμένων. Με βάση αυτή τη λογική οι μαθήτριες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ταχύτητα του δρομέα θα είναι μεγαλύτερη σε εκείνη την προπόνηση της οποίας η γραφική παράσταση θα βρίσκεται πιο αριστερά από αυτή της άλλης. Το σκεπτικό αυτό διαπιστώνεται και από την αναφορά της M2 στο σημείο Γ (βλ. Σχήμα 20) στο οποίο υποστήριξε ότι ο δρομέας έχει μεγαλύτερη ταχύτητα επειδή βρίσκεται πιο αριστερά από την κόκκινη γραφική παράσταση λέγοντας χαρακτηριστικά *«Μόνο μία μπλε κουκίδα είναι αριστερά από την κόκκινη»* και στη συνέχεια *«τώρα είναι ένα σημείο αυτό και αυτό το σημείο θα μπορούσε να είναι και το σημείο που έκανε τη μεγαλύτερη ταχύτητα και από τις δύο φορές»*. Το παραπάνω συμπέρασμα της μαθήτριας προέκυψε αποκλειστικά από την παρατήρηση της γραφικής παράστασης χωρίς να κάνει κάποιο υπολογισμό και χωρίς να στηριχθεί σε κάποιο τύπο. Το γεγονός αυτό προβλημάτισε την άλλη μαθήτρια η οποία ήθελε να βρει κάποιες συγκεκριμένες τιμές για την ταχύτητα του δρομέα στις δύο προπονήσεις προκειμένου να κάνει κάποια σύγκριση. Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 4.1.5 αποφάσισε να συγκρίνει την ταχύτητα του δρομέα στα τμήματα των προπονήσεων στα οποία εκείνος έτρεχε, δηλαδή να κάνει τη σύγκριση ανά 800 μέτρα και όχι ανά χιλιόμετρο, αφού χαρακτηριστικά ανέφερε *«Βασικά δεν είναι σε χιλιόμετρα, δηλαδή εδώ είναι σταθερό και είναι 1 χιλιόμετρο, κάνει αυτό το χρόνο, αλλά ας πούμε αν βγάλουμε τα 200άρια, τα 800 αν πάρουμε ίσως είναι πιο γρήγορα, αλλά αυτό θέλει πολλές πράξεις. Δηλαδή να δούμε ανά τόσα μέτρα ποιο έκανε πιο γρήγορα»*. Η μαθήτρια κατάλαβε ότι η μέση ταχύτητα του κάθε χιλιομέτρου επηρεάζεται και από τα 800 και από τα 200 μέτρα και έτσι αποφάσισε να αφαιρέσει τα διαστήματα που

μείωναν σημαντικά τη μέση ταχύτητα και να κρατήσει μόνο αυτά στα οποία η ταχύτητα ήταν κοινή, όπως προκύπτει και από τα λεγόμενά της: «στα 800άρια τώρα το κοιτάμε γιατί στο 1000άρι τώρα είναι λίγο διαφορετικό, πάνε περίπου με τον ίδιο ρυθμό οπότε εκεί δεν το υπολογίζουμε». Η προπόνηση Β, όπως φαίνεται και από το σχήμα 20, είναι χωρισμένη σε τμήματα των 800 και 200 μέτρων και η μαθήτρια ήθελε να κάνει το ίδιο και για την προπόνηση Α. Έτσι, ξεκίνησε η παρέμβασή της πάνω στο σχήμα παίρνοντας πάνω σε αυτή νέα σημεία μέσω των αντίστοιχων εργαλείων του Geogebra, όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα από τους διαλόγους:

M3	Λοιπόν πήρα το σημείο Ω το οποίο είναι το 831.6 στην κόκκινη γραμμή, αποκλίνει κάποια δευτερόλεπτα (εννοεί από το Γ), οπότε ουσιαστικά θα πρέπει να βρούμε το υ του άλλου, πόσο κάνει στα 203 μέτρα εεε τα 203 δευτερόλεπτα
E	Το 203 τι είναι;
M3	Το 203 είναι η διαφορά 818-615 που δείχνουμε από εδώ (στήλη άλγεβρας), βέβαια εδώ (Χ,Ψ) αχ δε μπορώωω δε μπορώωω. Οπότε πάμε να κάνουμε...αυτό είναι ο χρόνος που έκανε ο άλλος, θα πάρουμε και το χρόνο που έκανε ο άλλος που είναι 615, κάτσε...594 και το άλλο είναι 831 οπότε έχουμε...οπότε ουσιαστικά σε αυτό εδώ το χιλιόμετρο πιο γρήγορα πάει το μπλε και εδώ πέρα πρέπει να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό ίσως και να δούμε πόσο χρόνο του παίρνει, με πόση ταχύτητα πηγαίνει
E	Κάτσε πως κατάλαβες ότι πάει πιο γρήγορα;
M3	Γιατί κάνει λιγότερο χρόνο

Τη διαδικασία αυτή για την προπόνηση Α την εκτέλεσε ,όμως, μόνο μία φορά επειδή θυμήθηκε το συμπέρασμα που είχαν βγάλει προηγουμένως μέσω της αντίστοιχης κόκκινης γραφικής παράστασης για τη σχεδόν σταθερή ταχύτητα που είχε ο δρομέας σε όλη τη διάρκεια της προπόνησης Α. Άρα, οι υπολογισμοί της Μ3 στη συνέχεια αφορούσαν μόνο στα 800άρια της προπόνησης Β και έγιναν με την αξιοποίηση του τύπου $\Delta x / \Delta t$ και της αντίστοιχης μπλε γραφικής παράστασης.

Σύνοψη

Συγκρίνοντας τη δράση όλων των μαθητριών προκύπτει αρχικά το συμπέρασμα ότι εκείνη που δούλεψε ατομικά κατά τη μετάβαση από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο περιορίστηκε μόνο στην εργασία εντός του σημειωτικού επιπέδου αφού έβγαλε κάποια συμπεράσματα από τις γραφικές παραστάσεις και στη συνέχεια

απάντησε στο ερώτημα κάνοντας κάποιες λογικές συνδέσεις με τη ρεαλιστική κατάσταση του δρομέα που τρέχει. Από την άλλη, και οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα έδρασαν εντός του σημειωτικού επιπέδου καθώς ερμήνευσαν τα χαρακτηριστικά των γραφικών παραστάσεων, αλλά δεν έμειναν μόνο σε αυτό. Η επιθυμία της M3 να υπολογίσουν κάποιες ταχύτητες ήταν η αφορμή για τη δράση τους μεταξύ του εργαλειακού και του διαλογικού επιπέδου (Ins-Dis) μια και έκαναν σωστούς συλλογισμούς για την ταχύτητα με βάση τα μεγέθη της απόστασης και του χρόνου, και του τύπου $\Delta x/\Delta t$, τους οποίους χρησιμοποίησαν ως οδηγό για να παρέμβουν στο σχήμα χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του Geogebra. Η παρέμβαση που έκαναν στο σχήμα είναι η μείωση των αποστάσεων στην προπόνηση Α, όπου η μαθήτρια αντί να υπολογίσει τη μέση ταχύτητα ανά χιλιόμετρο επέλεξε να κάνει υπολογισμούς ανά 800 μέτρα για να προσεγγίσει καλύτερα τη στιγμιαία ταχύτητα του δρομέα.

4.2.2. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra – Προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της γραφικής αναπαράστασης δύο διαφορετικών κινήσεων

Μετά το ερώτημα Biii της δεύτερης δραστηριότητας οι μαθήτριες ενεπλάκησαν ξανά με τη στιγμιαία ταχύτητα στα ερωτήματα Γ και Δ της τρίτης δραστηριότητας. Το Γ ζητούσε τη στιγμιαία ταχύτητα του ποδηλάτη τη χρονική στιγμή $t=1s$ ενώ το Δ τη στιγμιαία ταχύτητα του μοτοσικλετιστή την ίδια χρονική στιγμή. Στο ερώτημα Γ όλες οι μαθήτριες, και αυτή που δούλεψε ατομικά και αυτές που δούλεψαν σε ομάδα, έδωσαν γρήγορα τη σωστή απάντηση. Η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά ήξερε από τα προηγούμενα ερωτήματα αλλά και από τη σταθερή κλίση της γραφικής παράστασης ότι ο ποδηλάτης εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και εφάρμοσε τον τύπο $v=x/t$ δίνοντας τελικά την απάντηση 4 m/s. Από την άλλη, οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα δεν αξιοποίησαν τον τύπο x/t αλλά τον τύπο $\Delta x/\Delta t$, δηλαδή υπολόγισαν τη μέση ταχύτητα του ποδηλάτη για το χρονικό διάστημα 0-1s αλλά επειδή έτρεχε με σταθερή ταχύτητα η στιγμιαία ταυτιζόταν με τη μέση. Συμπερασματικά, και η δράση της μαθήτριας που δούλεψε ατομικά και η δράση των μαθητριών που δούλεψαν σε ομάδα εντάσσονται στο διαλογικό επίπεδο νοηματοδότησης αφού χρησιμοποίησαν αμέσως τους τύπους x/t και $\Delta x/\Delta t$ αντίστοιχα προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα Γ. Στη συνέχεια, όλες οι μαθήτριες προσπάθησαν να εφαρμόσουν τον ίδιο τύπο και στο ερώτημα Δ όπου η κίνηση του

μοτοσικλετιστή ήταν επιταχυνόμενη, όμως συνειδητοποίησαν ότι η επιλογή αυτού του τύπου δεν είναι σωστή. Χαρακτηριστικά η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά ανέφερε «Ωραία ο μοτοσικλετιστής βλέπουμε ότι και αυτός είναι στο 1^ο δευτερόλεπτο στο 1^ο μέτρο, άρα αν πάρουμε τον ίδιο τύπο, αλλά όχι ο μοτοσικλετιστής δεν πάει με σταθερή ταχύτητα» ενώ οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα έδωσαν πρώτα την απάντηση 1 m/s και μόλις τους έγινε παρατήρηση για το λανθασμένο αποτέλεσμα κατάλαβαν σε τι οφειλόταν αυτό. Όπως φαίνεται και από τις παρακάτω απαντήσεις τους «Βέβαια ο μοτοσικλετιστής κάνει λίγο επιταχυνόμενη» και «Μα μας ζητάει ξεκάθαρα στο 1s, δηλαδή αφού το κάναμε και πριν γιατί να είναι σωστό και αυτό λάθος αφού πάνε με τον ίδιο τρόπο. Αα αυτό είναι ευθεία και αυτό καμπύλη, α εντάξει κατάλαβα» αντίστοιχα, ήταν ιδιαίτερα σημαντική η συμβολή της γραφικής παράστασης καθώς μέσω της καμπυλότητάς της οι μαθήτριες κατάλαβαν ότι ο μοτοσικλετιστής εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Η συγκεκριμένη ερμηνεία της γραφικής παράστασης οφείλεται ενδεχομένως στις γνώσεις και τις εμπειρίες των μαθητριών από το μάθημα της φυσικής όπου η επιταχυνόμενη κίνηση αναπαρίσταται συνήθως κατά αυτόν τον τρόπο. Μάλιστα, η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά στηρίχθηκε ακόμα περισσότερο στις γνώσεις της από τη φυσική αφού βρήκε τελικά τη σωστή απάντηση στο ερώτημα Δ χρησιμοποιώντας όλους τους σχετικούς τύπους της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης αντλώντας τα αντίστοιχα δεδομένα από τη γραφική παράσταση που προσέφερε το Geogebra. Ο τρόπος επίλυσης που εφάρμοσε περιγράφεται αναλυτικά στο παρακάτω απόσπασμα:

M1	Άρα αν πούμε ότι μόλις ξεκίνησε και πάρουμε τον τύπο $x=(1/2)at^2$ και για x βάλουμε το 1 και t το 1, τότε βλέπουμε ότι η επιτάχυνσή του είναι $2m/s^2$
E	Ωραία
M1	Και αν πάρουμε τώρα τον τύπο $v=at$ τότε θα βρούμε ότι η ταχύτητα του μοτοσικλετιστή είναι 2m/s

Από την άλλη, οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα δεν αξιοποίησαν του τύπους από τη φυσική και συγκεντρώθηκαν στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης και στην εξαγωγή συμπερασμάτων αποκλειστικά από αυτή. Κατά τη μελέτη της γραφικής παράστασης, λοιπόν, οι μαθήτριες μέσω της οπτικοποίησης κατέληξαν σε δύο κύρια συμπεράσματα, τα οποία όμως στερούνταν κάποιας αιτιολόγησης με βάση κάποιον ορισμό ή κάποια ιδιότητα. Το πρώτο είναι ότι η ταχύτητα εκφράζεται στο σχήμα μέσω του εμβαδού. Όπως χαρακτηριστικά ανέφερε η M2: «Βασικά θυμάμαι κάτι από

τη Φυσική, ότι στο διάγραμμα στη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου σίγουρα το εμβαδό της είναι η μετατόπιση. Τώρα στο διάγραμμα μετατόπισης- χρόνου μήπως το εμβαδό είναι η ταχύτητα; Δεν είναι, το σκέφτομαι, πως θα συνδέσουμε το εμβαδό με το...», ενώ και η Μ3 συμφώνησε με αυτήν την ιδέα. Το παραπάνω χωρίο αποδεικνύει ότι αυτή η προσέγγιση είναι διαισθητική και στηρίζεται στις γνώσεις και τις εμπειρίες των μαθητριών από κάποιο παρόμοιο παράδειγμα που έχουν συναντήσει στη φυσική και δεν κάνουν κάποιο συλλογισμό που να στηρίζεται σε κάποιο κομμάτι της θεωρίας είτε των μαθηματικών είτε της φυσικής. Και η μαθήτρια που προσέγγισε το ερώτημα μέσω των τύπων της επιταχυνόμενης κίνησης, όταν της ζητήθηκε να υπολογίσει την ταχύτητα με τη βοήθεια του τριγώνου η πρώτη της σκέψη ήταν να χρησιμοποιήσει το εμβαδό. Χαρακτηριστικά είναι τα δύο παρακάτω αποσπάσματα:

Απόσπασμα 1

E	Ναι ναι, πως μπορεί να σε βοηθήσει το τρίγωνο να υπολογίσεις μέση ταχύτητα
M1	Ααα από το εμβαδόν του
E	Δηλαδή;
M1	Αν βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο είναι $\frac{1}{2}βυ$ και δούμε ότι η βάση είναι το $γ= 1,66$ επί το ύψος που είναι το $α=6,0756$ δια 2 οπότε αν πολλαπλασιάσουμε αυτά θα μας βγει $10,0546/2...$ βγαίνει πολύ μεγάλο

Απόσπασμα 2

E	Τι σε οδήγησε σε αυτό το συμπέρασμα να πάρεις το εμβαδό;
M1	Επειδή ήταν παρόμοια με αυτά που ήταν στη Φυσική

Επομένως, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι όλες οι μαθήτριες μέσω της οπτικοποίησης της γραφικής παράστασης και χωρίς να πειραματιστούν πολύ με τα εργαλεία του Geogebra σκέφτηκαν να αξιοποιήσουν το εμβαδό του τριγώνου, όχι επειδή έκαναν σύνδεση με κάποιο κομμάτι της θεωρίας αλλά επειδή ήταν μια συνηθισμένη πρακτική που είχαν ακολουθήσει σε παρόμοιες εφαρμογές. Το δεύτερο συμπέρασμα που έβγαλαν μέσω του σχήματος οι μαθήτριες της ομάδας είναι ότι η ταχύτητα ενδέχεται να εκφράζεται μέσω του μήκους της καμπύλης, αλλά δεν είχαν τις απαιτούμενες γνώσεις προκειμένου να κάνουν έναν τέτοιο υπολογισμό και εγκατέλειψαν αυτήν την προσέγγιση.

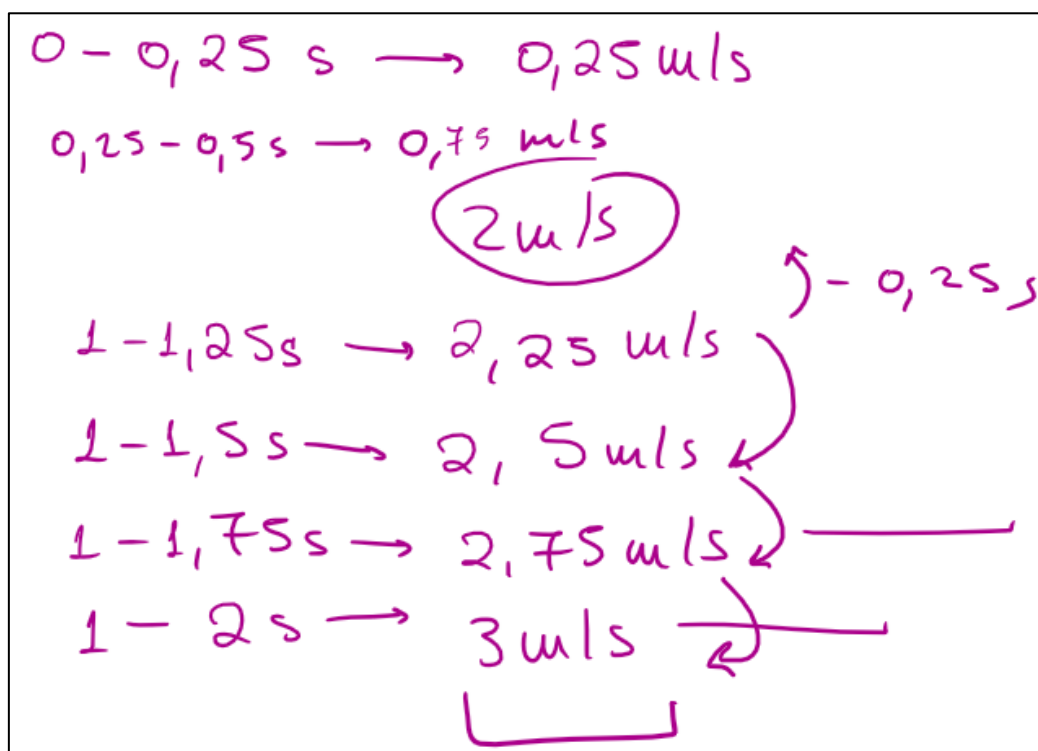
Σύνοψη

Συνοψίζοντας τις δράσεις όλων των μαθητριών, προκύπτει το συμπέρασμα ότι εντάσσονται στο σημειωτικό και το διαλογικό επίπεδο. Όσον αφορά στη M1 ξεκίνησε να δρα εντός του σημειωτικού επιπέδου, καθώς βρήκε το είδος της κίνησης του μοτοσικλετιστή μέσω της αντίστοιχης γραφικής παράστασης. Μόλις κατάλαβε ότι ο μοτοσικλετιστής κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα η μαθήτρια αξιοποίησε όλους τους τύπους από τη φυσική γεγονός που αποδεικνύει τη δράση της και στο διαλογικό επίπεδο, ενώ τις τιμές για την εφαρμογή των τύπων τις άντλησε ξανά μέσω της γραφικής παράστασης. Η δράση των μαθητριών που δούλεψαν σε ομάδα εντάσσεται μόνο στο σημειωτικό επίπεδο αφού και τα δύο συμπεράσματα που αναφέρθηκαν προηγουμένως προέκυψαν μέσω της οπτικοποίησης της γραφικής παράστασης και την προσπάθεια ερμηνείας αυτής, χωρίς να υπάρχει καμία αναφορά σε κάποιο κομμάτι της θεωρίας είτε της φυσικής είτε των μαθηματικών.

4.2.3. Πεδίο εργασίας: Δομήματα του Geogebra που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό – Η προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω του «τρίγωνου της ανάλυσης» και της στρατηγικής της μείωσης των χρονικών διαστημάτων

Και στη μαθήτρια που βρήκε την απάντηση στο ερώτημα Δ μέσω των τύπων της φυσικής και στις μαθήτριες που έκαναν κάποιες εικασίες μέσω της γραφικής παράστασης, αλλά δε βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα, έγινε η προτροπή να ασχοληθούν με το τρίγωνο της ανάλυσης και να το συνδέσουν αρχικά με το ερώτημα Β της τρίτης δραστηριότητας. Η οδηγία αυτή δόθηκε στις μαθήτριες προκειμένου να επιτευχθεί η μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα. Το βασικότερο εργαλείο για την εύρεση της απάντησης στο ερώτημα Δ της τρίτης δραστηριότητας είναι η στρατηγική της μείωσης της απόστασης για μια καλύτερη εκτίμηση της στιγμιαίας ταχύτητας την οποία εφάρμοσε η M3 στο ερώτημα που αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Πριν όμως την εφαρμόσουν όλες οι μαθήτριες σε αυτό το ερώτημα, την είχαν εφαρμόσει και στο Biii της δεύτερης δραστηριότητας που αναφέρθηκε προηγουμένως αλλά και στο Β της τρίτης που ζητούσε τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας στα χρονικά διαστήματα 1-2s, 1-1.5s, 1-1.25s. Όπως φαίνεται από τις τιμές των αρχικών και των τελικών χρονικών στιγμών των διαστημάτων, κάθε επόμενο προέκυπτε από μία μείωση της διάρκειας του προηγούμενου. Αυτή η μείωση στο χρονικό διάστημα έγινε μέσω του δυναμικού χειρισμού του δρομέα και

συγκεκριμένα με την επιλογή των τιμών 1,0.5,0.25 που εκφράζουν το μήκος της πλευράς AB του τριγώνου της ανάλυσης. Οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα, λοιπόν, παρατηρώντας τη μέση ταχύτητα του μοτοσικλετιστή σε αυτά τα τρία χρονικά διαστήματα εντόπισαν ένα μοτίβο, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 21.



Σχήμα 21

Σύμφωνα με αυτό, κάθε φορά που το χρονικό διάστημα μειώνεται κατά 0,25s η ταχύτητα μειώνεται και αυτή κατά 0,25 m/s, όπως ανέφερε χαρακτηριστικά μία από τις δύο μαθήτριες «Δηλαδή κάθε 0,25s αυξάνει την ταχύτητά του κατά 0,25 m/s». Μέσα από αυτό το μοτίβο οι μαθήτριες κατέληξαν τελικά στην απάντηση 2 m/s η οποία είναι και η σωστή απάντηση για το ερώτημα, χωρίς όμως να μουν σε κάποια διαδικασία απόδειξης αυτού του μοτίβο. Δηλαδή, οι μαθήτριες περιόρισαν τη δράση τους κυρίως εντός του σημειωτικού επιπέδου και σε ένα βαθμό και του εργαλειακού αφού το μοτίβο ήταν μία εικασία στην οποία κατέληξαν μέσω της παρατήρησης των τιμών της μέσης ταχύτητας στα σταδιακώς μειωμένα χρονικά διαστήματα αλλάζοντας την τιμή του δρομέα AB. Επίσης, δεν έγινε καμία ενέργεια εντός του διαλογικού επιπέδου αφού δεν προσπάθησαν να καταλάβουν σε ποιες μαθηματικές αρχές οφείλεται αυτό το μοτίβο. Το μόνο που έκανε η μαθήτρια που είχε αναλάβει το δυναμικό χειρισμό του Geogebra ήταν η επιβεβαίωση της παραπάνω εικασίας με ένα

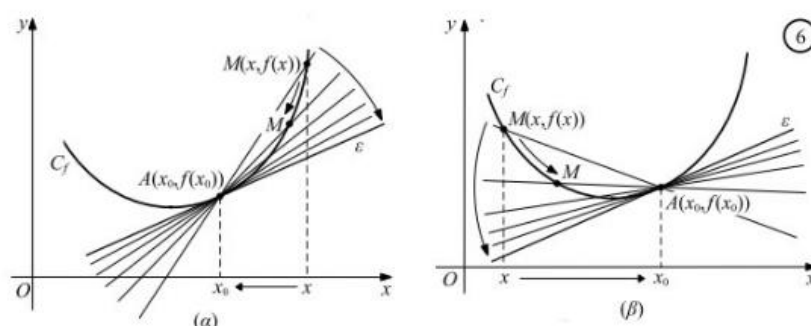
ακόμη παράδειγμα. Πιο συγκεκριμένα, η μαθήτρια τοποθέτησε την κορυφή Α του τριγώνου στην αρχή των αξόνων και έδωσε στο δρομέα AB την τιμή 0,25 και κάνοντας τις πράξεις υπολόγισε ότι η μέση ταχύτητα του μοτοσικλετιστή στο διάστημα 0-0,25 είναι 0,25m/s. Το γεγονός αυτό αποτέλεσε την αφορμή να τους ζητηθεί να απαντήσουν ξανά σε τι οφείλεται αυτό και τότε η άλλη μαθήτρια πρότεινε να παρατηρήσουν ξανά τη γραφική παράσταση λέγοντας συγκεκριμένα «*Λίγο το σχήμα να δούμε, εκεί πέρα που είναι σαν καμπύλη αρχίζει και ανεβαίνει προς τα πάνω, σαν ευθεία συνεχόμενα και αρχίζει και πάει πάλι....ναι*». Συγχρόνως, η μαθήτρια που είχε αναλάβει το δυναμικό χειρισμό του Geogebra επέλεξε να επιβεβαιώσει την εικασία στην οποία είχαν καταλήξει με ένα ακόμα παράδειγμα, τοποθετώντας αυτή τη φορά το σημείο Α στη θέση (0.25,0.0625) και δίνοντας στο δρομέα AB την τιμή 0,25. Και σε αυτό το χρονικό διάστημα που διαρκούσε 0,25s περίμενε να βγάλει τη μέση ταχύτητα 0,25 m/s αλλά τελικά το σωστό αποτέλεσμα ήταν 0,75m/s. Επομένως, σε όλη αυτή τη δράση της μαθήτριας στο εργαλείο επίπεδο παρατηρείται η διαδικασία της διαμόρφωσης δραστηριότητας μέσω εργαλείου διότι από τη στιγμή που είχε καταλήξει σε μία εικασία, έκανε παρεμβάσεις στη γραφική παράσταση ώστε να μελετήσει και άλλες περιπτώσεις που θα την επιβεβαίωναν. Επειδή όμως καμία από τις δύο μαθήτριες δεν κατάφερε να αποδείξει το μοτίβο που αναφέρθηκε προηγουμένως τους δόθηκε η οδηγία να παρατηρήσουν τη σχέση μεταξύ του τριγώνου και της μέσης ταχύτητας.

Σύνοψη

Σε αυτή τη φάση της δραστηριότητας, λοιπόν, όλες οι μαθήτριες συνειδητοποίησαν ότι η σχέση που συνδέει τη μέση ταχύτητα με το τρίγωνο είναι ο υπολογισμός αυτής μέσω του λόγου a/γ όπου a είναι το ύψος του τριγώνου και γ η βάση του, όπως αναλύθηκε εκτενώς στην ενότητα 4.1.6. Επομένως, μέσω όλων αυτών των ερωτημάτων οι μαθήτριες εξοικειώθηκαν με τη στρατηγική μείωσης του χρονικού διαστήματος κατάλαβαν τη σύνδεση της ταχύτητας με το τρίγωνο μέσω του τύπου a/γ και η προσοχή του στράφηκε στο δυναμικό χειρισμό του δρομέα AB με στόχο πλέον την προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t=1s$ συγκλίνοντας το σημείο Β προς το σημείο Α.

4.3. Πεδίο εργασίας: Δομήματα του Geogebra που περιλαμβάνουν δυναμικό χειρισμό - Η πρώτη επαφή με την έννοια του ορίου και η σύνδεσή της με τη στιγμιαία ταχύτητα μέσω του «τριγώνου της ανάλυσης»

Στόχος όλων των προηγούμενων ερωτημάτων πριν από το Δ της τρίτης δραστηριότητας ήταν αυτή η εξοικείωση των μαθητριών με τη μείωση του χρονικού διαστήματος για να καταλάβουν ότι η προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας γίνεται καθώς το χρονικό διάστημα τείνει να γίνει χρονική στιγμή. Με βάση αυτή τη διαδικασία γίνεται και η εισαγωγή των μαθητών της Γ' Λυκείου στην έννοια της παραγώγου καθώς στο σχολικό βιβλίο (σ. 93), προτού δοθεί ο τυπικός ορισμός της, δίνεται ένα σχήμα με μία καμπύλη και μία ευθεία που την τέμνει στα σημεία Α και Μ όπου το σημείο Μ τείνει να πέσει στο σημείο Α και μέσω αυτής της σύγκλισης προκύπτει ο ορισμός της παραγώγου που αποτελεί ουσιαστικά το όριο του κλάσματος $\Delta x/\Delta t$ (βλ. Σχήμα 22).



Σχήμα 22

Στη δραστηριότητα που δόθηκε στις μαθήτριες το ρόλο του σημείου Μ κατέχει το σημείο Β και στόχος αυτής είναι η μελέτη των ενεργειών των μαθητριών σχετικά με τη σύγκλιση του σημείου Β προς το σημείο Α χωρίς να γνωρίζουν όμως την έννοια του ορίου. Ξεκινώντας από τη μαθήτρια που δούλεψε ατομικά, όταν προσπάθησε να βρει τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=1s$ έδωσε στο δρομέα ΑΒ την τιμή 0 και παρατήρησε ότι ο λόγος a/γ που εκφράζει την ταχύτητα βγαίνει $0/0$, ύστερα από αντικατάσταση. Αυτή ήταν και η πρώτη φορά που έγινε λόγος για κλάσμα της μορφής $0/0$, το οποίο αποτελεί μία από τις πιο συνηθισμένες μορφές ορίων που δίνονται προς επίλυση στους μαθητές της Γ' Λυκείου και για τον υπολογισμό του απαιτείται άρση της απροσδιοριστίας. Αυτήν την απροσδιοριστία η μαθήτρια έπρεπε να την ξεπεράσει χωρίς να ξέρει κάποια αλγεβρική μεθοδολογία αλλά μέσω του

Geogebra και του δυναμικού χειρισμού του δρομέα AB. Το πρόβλημα, λοιπόν, που είχε ήταν ότι το τρίγωνο είχε εξαφανιστεί αφού οι πλευρές του, α και γ , είχαν μήκος 0 και για αυτό το λόγο πρότεινε να δημιουργήσει εκείνη ένα, ξεχνώντας ότι είχε ήδη ένα έτοιμο του οποίου απλά άλλαζε τις διαστάσεις. Στη συνέχεια της δόθηκε η οδηγία να αξιοποιήσει αυτό το έτοιμο ψηφιακό δόμημα και αποφάσισε να δώσει την τιμή 1 στο δρομέα AB. Κατά αυτόν τον τρόπο πέτυχε την εμφάνιση του τριγώνου αλλά ο λόγος α/γ έδινε τη μέση ταχύτητα για το χρονικό διάστημα 1-2. Έτσι, αποφάσισε να αλλάξει τη θέση του τριγώνου λέγοντας χαρακτηριστικά: *«Αν τώρα αυτό το τρίγωνο μεταφορικά το μετακινήσουμε και βάλουμε για βάση του το 0-1, άρα το γ θα ναι πάλι 1»* αλλά και πάλι κατάλαβε ότι υπολογίζει τη μέση ταχύτητα, απλά αυτή τη φορά στο διάστημα 0-1 αντί του 1-2. Οι ενέργειές της αυτές δείχνουν ότι δεν μπορούσε να σκεφτεί ότι η στιγμιαία ταχύτητα προσεγγίζεται με τη σύγκλιση του B προς το A παρά και τη μείωση των χρονικών διαστημάτων που είχε προηγηθεί σε προηγούμενα ερωτήματα. Η δυσκολία αυτή της μαθήτριας ήταν η αφορμή για να τοποθετήσει ξανά το σημείο A στη θέση (1,1) και να της γίνει μία υπενθύμιση για το ερώτημα B της τρίτης δραστηριότητας, όπου είχε βρει τη μέση ταχύτητα για τα σταδιακά μειωμένα χρονικά διαστήματα, αλλά και για την ενεργοποίηση του υπολογιστικού φύλλου. Το βασικό πλεονέκτημα της χρήσης αυτού ήταν η εμφάνιση όλων των αποτελεσμάτων για το λόγο α/γ ανάλογα με τις διαφορετικές τιμές του δρομέα AB μέσω του δυναμικού χειρισμού του. Η μαθήτρια σε αυτή τη φάση της δραστηριότητας εστίασε στη μετακίνηση του δρομέα AB παρατηρώντας ταυτόχρονα όλες τις αλλαγές στις τιμές του λόγου α/γ , όπως αυτές αποτυπώνονταν στο υπολογιστικό φύλλο. Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια αυτών των ενεργειών γνώριζε ότι το αποτέλεσμα έπρεπε να βγει 2, αφού το είχε βρει σωστά μέσω των τύπων της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Το γεγονός αυτό είχε καθοριστικό ρόλο στον τρόπο δράσης της αφού όπως είπε και η ίδια: *«Α και όσο το προχωράω αλλάζουν, άρα αν το φέρω σε σημείο όπου να βρω το 2;»*. Εξετάζοντας τη σχέση που έχει το τρίγωνο και ο δυναμικός χειρισμός του με την έννοια του ορίου, πρέπει να τονιστεί ότι η μαθήτρια φέρνοντας το σημείο B κοντά στο A δεν κατάφερε να πετύχει ακριβώς τον αριθμό 2 αλλά να φτάσει πολύ κοντά σε αυτόν και όταν το B ταυτίστηκε με το A παρατήρησε ότι στο υπολογιστικό φύλλο για το λόγο α/γ εμφανιζόταν ένα ερωτηματικό. Με βάση όλες τις ενέργειες που είχε κάνει προηγουμένως και τη καλή κατανόηση της σχέσης μεταξύ του τριγώνου και της μέσης ταχύτητας κατάφερε να εξηγήσει την εμφάνιση

αυτού του ερωτηματικού μέσω της απροσδιοριστίας του λόγου a/γ λέγοντας χαρακτηριστικά: «Γιατί είναι αδύνατο το $0/0$ ».

Από την άλλη, οι μαθήτριες που εντόπισαν την ύπαρξη του μοτίβο κατά τη μελέτη της σχέσης μεταξύ του τριγώνου και της ταχύτητας παρατήρησαν ότι αυτή μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο $(y_{\Gamma} - y_A)/(x_{\Gamma} - x_A)$. Έτσι, για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t=1s$ εφάρμοσαν τον παραπάνω τύπο παίρνοντας τις συντεταγμένες (1,1) και για το σημείο Α και για το σημείο Γ, όπως φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα των διαλόγων:

M2	Ναι αυτό σου λέω. Τώρα βρήκαμε ότι θα μπορούμε απλά να αφαιρούμε τις συντεταγμένες του Α με το Γ. Αντί να κάνουμε αυτές και αυτές θα κάνουμε κατευθείαν το Α και το Γ
M3	Απλά ουσιαστικά αν πάμε να το κάνουμε αυτό, γιατί ουσιαστικά ψάχνουμε στο 1s βγαίνει 1
M2	1-1/1-1
M3	Γιατί βγαίνει έτσι αφού έχουμε το (0,0), αυτό δε ψάχνουμε το (0,0); ααα το πιασα, οπότε θα βγει 0; Θα βγει άρρητο, αδύνατο
M2	Θα είναι 0/0 που αυτό δεν κάνει 0, είναι αδύνατο

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις κατέληξαν και αυτές σε ένα κλάσμα της μορφής $0/0$, το οποίο κατάλαβαν ότι είναι αδύνατο. Όπως και η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά, έτσι και οι μαθήτριες της ομάδας προσπάθησαν να αποφύγουν τη δημιουργία ενός τέτοιου κλάσματος και να εμφανίσουν ένα πιο κατάλληλο τρίγωνο αλλάζοντας τη θέση και τις διαστάσεις του δοθέντος. Αρχικά, η μαθήτρια που είχε αναλάβει το δυναμικό χειρισμό τοποθέτησε το Α στην αρχή των αξόνων και έδωσε στο δρομέα ΑΒ την τιμή 1. Αφού συνειδητοποίησε ότι με αυτόν τον τρόπο δεν υπολογίζεται η στιγμιαία ταχύτητα αλλά η μέση, ξεκίνησε να κινεί προς πίσω το δρομέα και να παρατηρεί το τρίγωνο χωρίς όμως να καταφέρνει να βγάλει κάποιο συμπέρασμα για τη στιγμιαία ταχύτητα. Δηλαδή και στην περίπτωση της ομάδας ήταν δύσκολη η προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της σύγκλισης του Β προς το Α, ακόμα και αν οι μαθήτριες αφιέρωσαν πολύ χρόνο στα ερωτήματα στα οποία έπρεπε να μειώνουν σταδιακά το χρονικό διάστημα 1-2s. Εξαιτίας αυτής της δυσκολίας, τους δόθηκε η εντολή να αξιοποιήσουν το εργαλείο του υπολογιστικού φύλλου. Οι μαθήτριες όταν ρωτήθηκαν για τη χρησιμότητα αυτού του εργαλείου κατάλαβαν ότι θα συνέβαλε στον υπολογισμό του λόγου a/γ και πληκτρολόγησαν τον αντίστοιχο τύπο. Το πρώτο αποτέλεσμα που βγήκε ήταν 2,5 δεδομένου ότι το σημείο

Α ήταν στη θέση (1,1), ο δρομέας είχε την τιμή 0,5 και ο λόγος α/γ εξέφραζε τη μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα 1-1,5s. Στη συνέχεια ακολούθησε η επαλήθευση για τις τιμές της μέσης ταχύτητας και στα υπόλοιπα χρονικά διαστήματα του ερωτήματος Β και μόλις οι μαθήτριες είδαν ότι είναι ίδια αποφάσισαν να τοποθετήσουν το σημείο Γ πάνω στο Α, μετακινώντας το δρομέα, με στόχο την εύρεση της στιγμιαίας ταχύτητας. Το αποτέλεσμα αυτής της ενέργειας ήταν να εμφανιστεί στο υπολογιστικό φύλλο το ερωτηματικό που εκφράζει την απροσδιοριστία του λόγου α/γ . Με βάση αυτό η μαθήτρια που είχε αναλάβει το δυναμικό χειρισμό είπε : «Σε οποιοδήποτε σημείο και αν το κάναμε θα είχε $\alpha=0$ και $\gamma=0$ και θα είχε ερωτηματικό, δεν είναι μόνο στο 1» , απάντηση η οποία αποδεικνύει ότι είχε καταλάβει πως η απροσδιοριστία οφείλεται στο μηδενισμό των πλευρών του τριγώνου. Για το λόγο αυτό η επόμενη ενέργειά της ήταν να πλησιάσει το Γ πολύ κοντά στο σημείο Α, μετακινώντας κατάλληλα το δρομέα ΑΒ. Παρά τη σύγκλιση του Γ ,και κατά συνέπεια και του Β, στο Α οι μαθήτριες δεν παρατήρησαν ότι η ταχύτητα τείνει να πάρει την τιμή 2 που είχαν θεωρήσει ως σωστή προηγουμένως. Μία από τις δύο μαθήτριες, λοιπόν, στηριζόμενη στην απροσδιοριστία του λόγου α/γ υπέθεσε πως μπορεί να μην ορίζεται η ταχύτητα του μοτοσικλετιστή σε αυτό το σημείο με αποτέλεσμα την επανεξέταση της κίνησής του μέσω της γραφικής παράστασης. Πιο συγκεκριμένα, υπέθεσε ότι εκείνη τη στιγμή ο μοτοσικλετιστής έχει σβηστή τη μηχανή και κοιτώντας παράλληλα τη γραφική παράσταση είπε: «Όχι μετά το 1s έχει βάλει μπροστά και έχει αρχίσει και ανεβαίνει, εκεί έχει ταχύτητα, μετά το 1s παίρνει ταχύτητα, ενώ ο ποδηλάτης έχει ξεκινήσει κατευθείαν, ο μοτοσικλετιστής όχι και μετά ο μοτοσικλετιστής πάει όλο και πιο γρήγορα, γι' αυτό δε βγαίνει». Η αδυναμία εύρεσης της σωστής απάντησης, λοιπόν, την οδήγησε στην μελέτη της γραφικής παράστασης από την οποία έβγαλε ένα νέο αλλά ταυτόχρονα λανθασμένο συμπέρασμα και για αυτό το λόγο τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν ξανά το τρίγωνο. Το τρίγωνο ήταν η αφορμή να επαναλάβουν τις τιμές της μέσης ταχύτητας στα σταδιακά μειωμένα χρονικά διαστήματα και να δώσουν την απάντηση 2m/s για τη στιγμιαία ταχύτητα με βάση το μοτίβο που είχαν εντοπίσει νωρίτερα. Τότε η μαθήτρια που είχε αναλάβει το δυναμικό χειρισμό μετακινούσε το δρομέα και παρατήρησε ότι καθώς τον κουνούσε προς τα δεξιά η ταχύτητα αυξανόταν ενώ όταν τον πήγαινε προς τα αριστερά μειωνόταν. Έτσι έδωσε την τιμή 1 στο ΑΒ όπου στο υπολογιστικό φύλλο εμφανίστηκε η τιμή 3 για την ταχύτητα, στη συνέχεια μείωσε την τιμή του δρομέα στο 0,5 και η ταχύτητα έβγαине 2,5. Στηριζόμενη, λοιπόν, στο μοτίβο μείωσε ακόμα

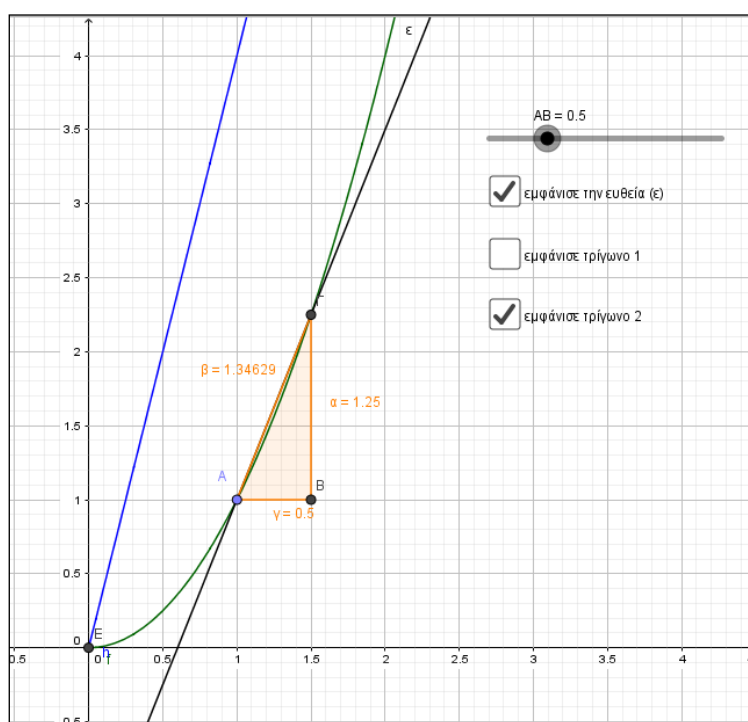
περισσότερο την τιμή του δρομέα πλησιάζοντας το 0 ώστε η ταχύτητα να πάρει την τιμή 2. Σε αυτό το σημείο προέκυψε ξανά το πρόβλημα της εμφάνισης του ερωτηματικού με τη μαθήτρια να αναφέρει χαρακτηριστικά ότι η ταχύτητα «πάει να γίνει και καλά 2,1», συνειδητοποιώντας ότι τείνει να πάρει την τιμή 2 χωρίς όμως τελικά να την παίρνει.

Σύνοψη

Σε αντίθεση με όλα τα προηγούμενα ερωτήματα, οι μαθήτριες δεν ενήργησαν καθόλου εντός του διαλογικού επιπέδου, κάτι το οποίο είναι πολύ λογικό δεδομένου ότι δε γνώριζαν την έννοια του ορίου. Η απουσία κάποιου θεωρητικού υπόβαθρου σηματοδότησε την πιο έντονη δράση στο σημειωτικό και το εργαλειακό επίπεδο. Όσον αφορά στη μαθήτρια που δούλεψε ατομικά, το μεγαλύτερο μέρος της δράσης της εκτυλίχθηκε εντός του εργαλειακού επιπέδου, όπου ήταν κυρίαρχη η διαδικασία της διαμόρφωσης δραστηριότητας μέσω εργαλείου γιατί μετακινούσε συνεχώς το δρομέα AB και παρατηρούσε τις αλλαγές στο τρίγωνο και τις τιμές του λόγου a/γ στο υπολογιστικό φύλλο προκειμένου να βγάλει κάποιο συμπέρασμα για τη στιγμιαία ταχύτητα. Η διαδικασία της διαμόρφωσης δραστηριότητας μέσω εργαλείου παρατηρήθηκε και στη δράση των μαθητριών της ομάδας αφού και εκείνες μετακινούσαν το δρομέα εξετάζοντας τις μεταβολές στο σχήμα και στο υπολογιστικό φύλλο. Σε αντίθεση όμως με τη μαθήτρια που δούλεψε μόνη της, οι μαθήτριες της ομάδας έδρασαν και στο σημειωτικό επίπεδο, εφόσον η M3 προσπάθησε να ερμηνεύσει εκ νέου τη γραφική παράσταση και να βγάλει κάποιο συμπέρασμα για την κίνηση του μοτοσικλετιστή ύστερα από την εμφάνιση της απροσδιοριστίας 0/0. Μέσω, λοιπόν, της οπτικοποίησης του σχήματος, σε συνδυασμό με την παρατήρηση των τιμών της μέσης ταχύτητας στα διάφορα χρονικά διαστήματα, προέκυψε και το μοτίβο για το οποίο έγινε λόγος. Συμπερασματικά, οι μαθήτριες χωρίς να ξέρουν την έννοια του ορίου, είχαν μία πρώτη επαφή με αυτή μέσω του Geogebra και του δυναμικού χειρισμού του δρομέα διότι χάρη σε αυτά συνειδητοποίησαν ότι η ταχύτητα τείνει να πάρει την τιμή 2 χωρίς όμως να παίρνει ακριβώς αυτήν τιμή. Αυτή η προσέγγιση του αριθμού 2 ύστερα και από την εμφάνιση της απροσδιοριστίας 0/0 του λόγου a/γ αποτελεί μία καλή βάση για τη νοηματοδότηση της έννοιας του ορίου, η οποία σε συνδυασμό με τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ που εκφράζεται μέσω του λόγου a/γ , κάνει ευκολότερη της κατασκευή του ορισμού της παραγώγου για τις μαθήτριες της Β' Λυκείου.

4.4. Η κλίση της εφαπτομένης στα διαφορετικά πεδία εργασίας του Geogebra και η σύνδεσή της με το ρυθμό μεταβολής

Κατά τη Zandieh (2000), η κλίση της εφαπτομένης αποτελεί μια από τις βασικές έννοιες που σχετίζονται με αυτήν της παραγώγου. Για το λόγο αυτό δόθηκε στο τέλος της τρίτης δραστηριότητας το ερώτημα Ε, σκοπός του οποίου ήταν να καταλάβουν οι μαθήτριες ότι η ευθεία που τέμνει την παραβολή στα σημεία Α και Γ τείνει να γίνει η εφαπτομένη αυτής στο σημείο Α καθώς το Β συγκλίνει προς αυτό (βλ. σχήμα 23). Αυτή η έννοια, όμως, εμφανίστηκε και σε προηγούμενα ερωτήματα και οι μαθήτριες έκαναν πολλές παρατηρήσεις και παρεμβάσεις στο Geogebra σχετικά με αυτήν.



Σχήμα 23

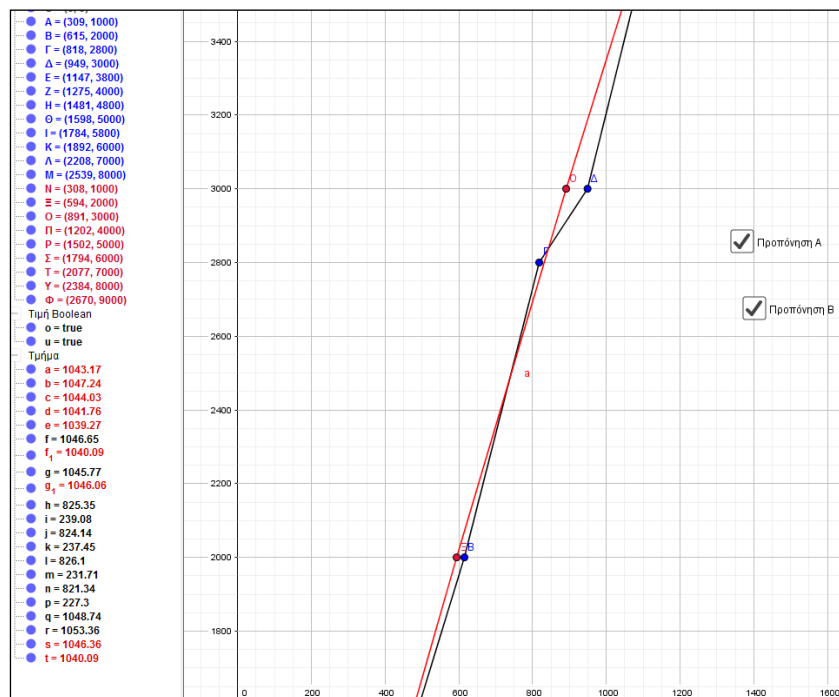
4.4.1. Πεδίο εργασίας: Στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra – Η νοηματοδότηση της έννοιας της κλίσης μέσω της γραφικής αναπαράστασης δύο διαφορετικών προπονήσεων

Ξεκινώντας από τη μαθήτρια που δούλεψε ατομικά, η πρώτη φορά που ανέφερε τη λέξη «κλίση» ήταν στη δεύτερη δραστηριότητα και το ερώτημα Βι, το οποίο ζητούσε την αναγνώριση της γραφικής παράστασης που αναπαριστούσε την προπόνηση του δρομέα από το ερώτημα Α. Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις του Geogebra (βλ. Σχήμα 20), η μαθήτρια επισήμανε για την κόκκινη ότι «υπάρχει μία, πώς να το

πω, μία συνεχόμενη αύξηση. Έτσι, όπως φαίνεται και από μακριά ότι ανεβαίνει συνεχώς και έχει μία συγκεκριμένη κλίση», ενώ για την μπλε είπε ότι «στη δεύτερη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η κλίση αλλάζει, δεν παραμένει παντού η ίδια». Αυτή ήταν και η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στις δύο γραφικές παραστάσεις και η μαθήτριά κλήθηκε να βρει σε τι οφειλόταν αυτή, όπως φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα:

E	Αυτή η αλλαγή σε τι μπορεί να οφείλεται;
M1	Ας πούμε στα 2800 να υπήρξε ανηφόρα κατηφόρα

Παρατηρώντας παράλληλα και το σχήμα 24 προκύπτει το συμπέρασμα ότι η μαθήτριά θεώρησε πως η αλλαγή στην κλίση σε κάποια σημεία της μπλε γραφικής παράστασης οφείλεται στην αλλαγή της κλίσης του δρόμου. Ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτής της παρανόησης αποτελεί η εξέταση του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ, όπου συμβαίνει η πρώτη απότομη αλλαγή στην κλίση της μπλε γραφικής παράστασης.



Σχήμα 24

Η μαθήτριά ερμήνευσε αυτήν την αλλαγή «σαν να υπήρξε μία ανηφόρα», κάτι το οποίο ενδέχεται να προέκυψε από την ενασχόλησή της με το γράφημα του Strava στη δραστηριότητα 1, δηλαδή στηρίχθηκε απλά σε μία πρόσφατη εμπειρία της και στη διαίσθησή της. Οι εμπειρίες της από τη δραστηριότητα 1 και την εργασία στο χώρο

εργασίας του Strava φάνηκε να επηρέασαν τη δράση της σε αυτό το ερώτημα της δεύτερης δραστηριότητας διότι μετά την ερμηνεία της αλλαγής της κλίσης της γραφικής παράστασης ως αλλαγή στην κλίση του δρόμου, κατέληξε σε μία νέα εικασία σύμφωνα με την οποία η μορφή της μπλε γραφικής παράστασης προέκυπτε από αλλαγές στην πορεία του δρομέα. Η μαθήτρια χαρακτηριστικά είπε: «Ναι ότι ουσιαστικά είναι σαν στροφές να το πω έτσι. Από το E στο Θ αντί να πάει κατευθείαν σαν να υπάρχει ένας δρόμος ευθύς είναι σαν να μπαίνει από στενά ή στροφές» και προκύπτει το συμπέρασμα ότι θεωρεί τη γραφική παράσταση ως μία αντίστοιχη αναπαράσταση με αυτή του χάρτη του Strava, δηλαδή σαν να βλέπει από ψηλά τη διαδρομή που διένυσε ο δρομέας. Κατά την εξέταση της γραφικής παράστασης η μαθήτρια αποφάσισε επίσης να αξιοποιήσει και την αλγεβρική στήλη του Geogebra, μέσω της οποίας βρήκε τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε κάθε θέση του δρομέα και υπολόγισε το χρόνο που χρειάστηκε για να διανύσει κάποια από τα διαστήματα της μπλε διαδρομής. Παρά την αξιοποίηση και της αλγεβρικής στήλης δεν κατάλαβε τη σχέση της κλίσης με την ταχύτητα αλλά παρατήρησε ένα μοτίβο σχετικά με τη γραφική παράσταση, το οποίο περιγράφεται αναλυτικά στο παρακάτω απόσπασμα:

M1	Ναι ο δρόμος και επίσης παρατηρούμε ότι έτσι όπως είναι και στο πλάι τα σημεία ότι κάθε φορά εκεί που αλλάζει, όταν είναι να αλλάξει, θα αλλάξει στα 800. :Ας πούμε 2800, 3800
E	Μμ κατάλαβα
M1	Από τα 2000 μέχρι τα 5000 αλλάζει εναλλάξ

Σε όλες αυτές τις εικασίες ήταν διακριτή η αδυναμία της μαθήτριας να συνδέσει την ταχύτητα με την κλίση, ενώ προσπαθούσε να μεταφράσει τη γραφική παράσταση μέσω της πραγματικότητας. Τελικά, αυτή τη δυσκολία την ξεπέρασε όταν εστίασε την προσοχή της στο μέγεθος του χρόνου, μέσω του οποίου έβγαλε ένα συμπέρασμα για την ταχύτητα του δρομέα, όπως φαίνεται από το παρακάτω απόσπασμα:

E	Αυτό θέλω να συζητήσουμε, πες τρέχει ο δρομέας, κάνει 1000 μέτρα μέχρι το Α, μετά κάνει άλλα 1000 μέχρι το Β, μετά κάνει άλλα 800 μέχρι το Γ, μετά κάνει άλλα 200 μέχρι το Δ
M1	Ναι
E	Αλλά τι αλλάζει στην κάθε απόσταση; Στο κάθε κομματάκι τι αλλάζει;
M1	Ο χρόνος
E	Ότι αλλάζει ο χρόνος
E	Ωραία οπότε εσύ πως πιστεύεις ότι αλλάζει ας πούμε; Γιατί είπες να πάρει δυνάμεις

M1	A δεν τρέχει με μία σταθερή ταχύτητα
E	Ωραία
M1	Και την αλλάζει
E	Άρα τι κάνει; Πες μου μία προσομοίωση της προπόνησης Β. Πώς μπορεί να τρέχει ας πούμε ο δρομέας;
M1	Θα τρέχει σταθερά από τότε που ξεκίνησε μέχρι το σημείο Γ. Από το Γ μέχρι το Δ ίσως να πηγαίνει πιο ήρεμα και μετά από το Δ μέχρι το Ε τρέχει και από το Ε μέχρι το Ζ πάλι να χαλαρώνει..σαν να είναι μικρά διαλείμματα

Με λίγα λόγια, όλες αυτές οι παρατηρήσεις της μαθήτριας δείχνουν ότι προσπάθησε να ερμηνεύσει την αλλαγή της κλίσης που ήταν διακριτή σε κάποια σημεία της γραφικής παράστασης μέσω της οπτικοποίησης εντός του σημειωτικού επιπέδου. Στηριζόμενη στη διαίσθησή της και σε ένα βαθμό και στις εμπειρίες της από τη δραστηριότητα 1 κατέληγε σε ορισμένες εικασίες για τις οποίες περίμενε απλά να ακούσει μία επιβεβαίωση και όχι να την εξηγήσει μέσω κάποιου μαθηματικού συλλογισμού.

Εντός του σημειωτικού επιπέδου έδρασαν και οι μαθήτριες της ομάδας αλλά εκείνες συνειδητοποίησαν πολύ πιο γρήγορα τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας και της κλίσης. Καθοριστικό ρόλο είχε η αναγνώριση του μοτίβο στη μπλε γραφική παράσταση χάρη στην έντονη αλλαγή της κλίσης σε κάποια σημεία της. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω αποσπάσματα, μέσω αυτού του μοτίβο οι μαθήτριες έβγαλαν με μεγάλη ευκολία το συμπέρασμα πως ο δρομέας στα διαστήματα των 200 μέτρων ρίχνει απότομα την ταχύτητά του, γεγονός το οποίο μπορεί να οφείλεται στην εμπειρία τους με τα διαγράμματα x-t από το μάθημα της φυσικής. Επίσης, η παρατήρηση της αλγεβρικής στήλης και η δυνατότητα εμφάνισης των συντεταγμένων κάποιων σημείων, σε συνδυασμό και με τη γραφική παράσταση οδήγησε τις μαθήτριες σε μία ακόμα πιο ακριβή περιγραφή της προπόνησης του δρομέα (βλ. Απόσπασμα 2).

Απόσπασμα 1

M2	Μπορείς να πας και λίγο πιο κάτω;
M2	Παρατηρώ ένα μοτίβο εκεί πέρα στα ζιγκ ζαγκ
M3	Εδώ;
M2	Ναι βλέπεις; Έχουν ίδια απόσταση και μετά κάνει ένα ζιγκ ζαγκ ίδια απόσταση
M3	Είναι σαν να παίρνει ανάσα ουσιαστικά
M2	Ναι

Απόσπασμα 2

M3	Ωραία οπότε κάνει 800 μέτρα τρέξιμο και μετά είναι 200 μέτρα περπάτημα
M2	Ναι
M3	Και μετά στο τέλος το πάει μόνο τρέξιμο, όπως το ίδιο και στην αρχή, εδώ είναι 1 και 2 χιλιόμετρα μετά 2800 στην αρχή μετά 200 μέτρα περπάτημα, μετά πάλι 1 χιλιόμετρο, μετά 200 μέτρα περπάτημα πάλι 1 χιλιόμετρο.....800 ,γιατί κόλλησα στο χιλιόμετρο. Πάντως είναι όντως μοτίβο έχεις δίκιο

Η καλή κατανόηση της σχέσης μεταξύ κλίσης και ταχύτητας από της μαθήτριες της ομάδας φάνηκε και σε μία αναφορά τους στην άλλη γραφική παράσταση, την κόκκινη, για την οποία η M2 χαρακτηριστικά είπε ότι «*Στην άλλη δραστηριότητα πως πήγαινε; Έκανε και εκεί πέρα με ανάσες ή ήταν ευθεία σταθερά;*». Παρόλο που στην κόκκινη γραφική παράσταση δεν υπάρχει μία ευθεία όλες οι αποκλίσεις είναι μικρές με αποτέλεσμα οι μαθήτριες να θεωρήσουν ότι ο δρομέας τρέχει με σταθερή ταχύτητα και όχι διαλειμματικά. Επίσης, και η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά ύστερα από την κατανόηση της σχέσης μεταξύ κλίσης και ταχύτητας, παρατηρώντας ταυτόχρονα τις δύο γραφικές παραστάσεις του Geogebra τόνισε και εκείνη πως στην κόκκινη γραφική παράσταση η σταθερή κλίση συνεπάγεται σταθερή ταχύτητα, αφού χαρακτηριστικά είπε: «*Γιατί παρόλο που στην προπόνηση Α παρατηρούμε ότι έχει μια σταθερή ταχύτητα στην προπόνηση Β βλέπουμε ότι παρόλο που πήγαινε σταθερά μετά έκοβε για να κάνει ένα διάλειμμα και στη συνέχεια προσπαθούσε να βρει την προηγούμενή του ταχύτητα οπότε μπορεί να την ξεπέρασε κιόλας και όπως βλέπουμε και την κλίση στο σημείο Θ με Ι ή και στο Ζ με Η βλέπουμε ότι δεν είναι τόσο διαγώνιες όσο στην προπόνηση Α*».

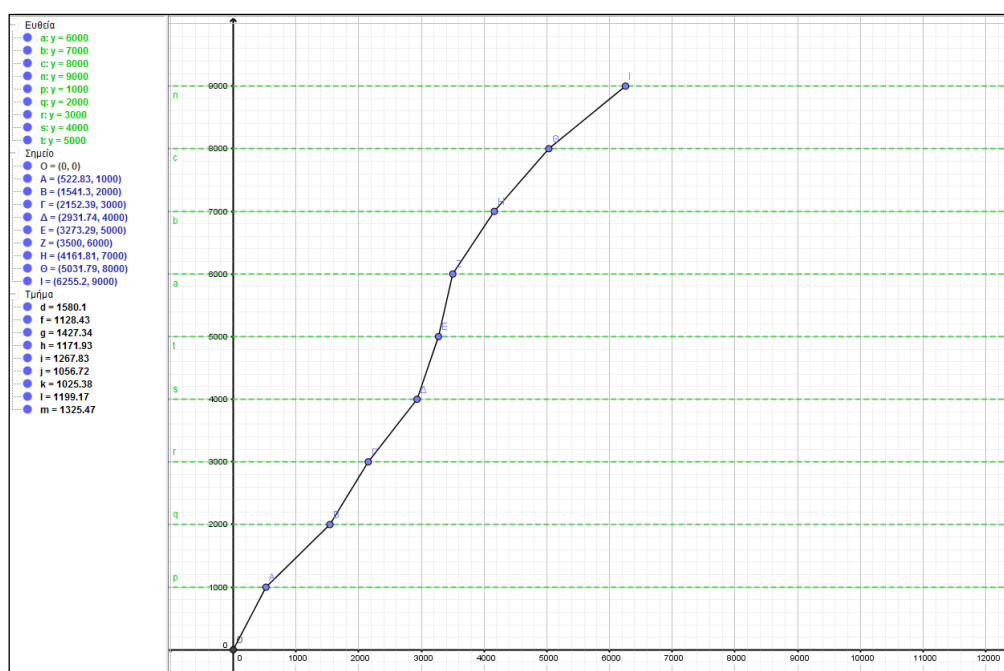
Σύνοψη

Επομένως, από όλες αυτές τις ενέργειες των μαθητριών αναδεικνύεται ο κεντρικός ρόλος που έχει η οπτικοποίηση κατά την εργασία τους στο σημειωτικό επίπεδο. Η παρατήρηση των γραφικών παραστάσεων και η σύγκριση μεταξύ τους ήταν βασικές ενέργειες όλων των μαθητριών σε αυτό το επίπεδο νοηματοδότησης, ενώ αξίζει να σημειωθεί η περίπτωση της M1 η οποία επηρεάστηκε από τον τρόπο δράσης της στη δραστηριότητα 1 όπου παρατηρούσε το χάρτη και το γράφημα του Strava. Εν τέλει, και η M1 και οι μαθήτριες της ομάδας συνειδητοποίησαν ότι η αλλαγή στην κλίση σημαίνει αλλαγή στην προπόνηση του δρομέα και ύστερα από κάποιες εικασίες όλες

κατέληξαν σε μία καλή σύνδεση της γραφικής παράστασης με τη ρεαλιστική κατάσταση που μελετάται εκφράζοντας πως αλλαγή στην κλίση σημαίνει αλλαγή στην ταχύτητα. Καθοριστικό ρόλο σε αυτή τη σύνδεση είχε η εξοικείωση των μαθητριών με τα διαγράμματα x-t και η παρατήρηση των τιμών της απόστασης και του χρόνου από τα οποία εξαρτάται το μέγεθος της ταχύτητας.

4.4.2. Πεδίο εργασίας: Ψηφιακά δομήματα με δυναμικό χειρισμό – Η νοηματοδότηση της έννοιας της κλίσης γενικότερα και της κλίσης εφαπτομένης ειδικότερα μέσω κατάλληλα διαμορφωμένων ψηφιακών δομημάτων

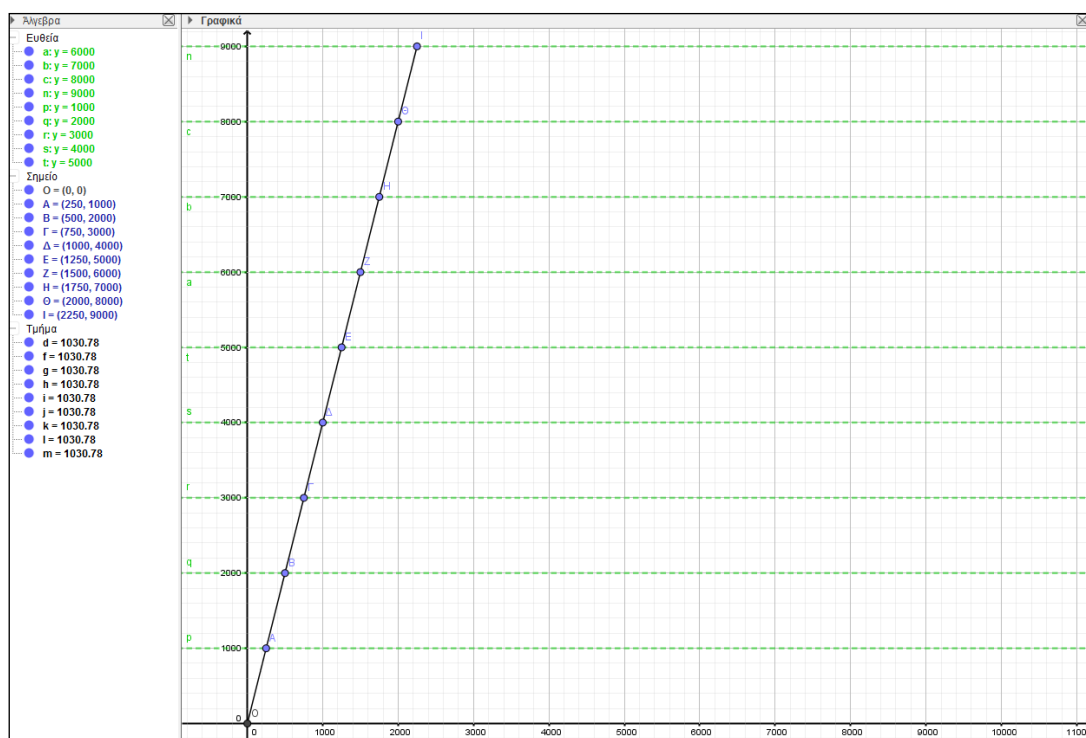
Εκτός από τα ερωτήματα που αναλύθηκαν στην προηγούμενη δραστηριότητα ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ κλίσης και ταχύτητας είχε και το ερώτημα Γ της δεύτερης δραστηριότητας. Σε αυτό δινόταν μία έτοιμη γραφική παράσταση της οποίας τα σημεία έπρεπε να μετακινηθούν κατάλληλα έτσι ώστε να αναπαριστά την προπόνηση ενός ποδηλάτη που κινείται με σταθερή ταχύτητα (βλ. Σχήμα 25).



Σχήμα 25

Η πρώτη ενέργεια που έκαναν όλες οι μαθήτριες ήταν να μετατρέψουν τη μονάδα μέτρησης της ταχύτητας από km/h σε m/s. Η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά μέσω αυτής της μετατροπής συμπέρανε ότι ο ποδηλάτης έκανε τα 9 χιλιόμετρα σε 2250 δευτερόλεπτα και κάνοντας χιαστί βρήκε το χρόνο που χρειάστηκε για το 1

χιλιόμετρο, για τα 2 χιλιόμετρα, για τα 3 κ.ο.κ. Κατά αυτόν τον τρόπο βρήκε τις συντεταγμένες που πρέπει να έχουν όλα τα σημεία, τα έφερε στις κατάλληλες θέσεις (βλ. Σχήμα 26) και παρατηρώντας τη μορφή που είχε πάρει η γραφική παράσταση είπε πως «είναι σαν μία ευθεία».



Σχήμα 26

Εστιάζοντας στη μορφή της γραφικής παράστασης τόνισε επίσης ότι «θα μπορούσε να είναι σαν μία ευθεία γιατί είναι στρογγυλοποιημένοι οι αριθμοί», δηλαδή έδωσε έμφαση και στην αλγεβρική στήλη του Geogebra και επιμένοντας στην παρατήρηση των τεταγμένων των σημείων κατέληξε σε ένα νέο συμπέρασμα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα:

M1	Με 250 πάει στα 1000, άρα είναι σαν να προσθέτει 250 τη φορά
E	Ωραία προσθέτει 250. Αυτό τι σημαίνει για τον ποδηλάτη;
M1	Ότι πάει σταθερά
E	Τι εννοείς;
M1	Ότι έχει μία σταθερή ταχύτητα

Η παρατήρηση ήταν κρίσιμη για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ κλίσης και ταχύτητας, την οποία είχε αντιληφθεί και από τα προηγούμενα ερωτήματα, με τα οποία μάλιστα έκανε και κάποια σύγκριση αφού είπε χαρακτηριστικά: «Είναι σαν του

δρομέα, αλλά ο δρομέας δεν ήταν τόσο σταθερός στην ταχύτητά του, δεν είχε σταθερή ταχύτητα». Από την άλλη οι μαθήτριες που δούλεψαν σε ομάδα, κατά τη μετατροπή των μονάδων μέτρησης συνειδητοποίησαν ότι ο ποδηλάτης χρειάστηκε για το κάθε χιλιόμετρο 250 δευτερόλεπτα και προσθέτοντάς τα κάθε φορά βρήκαν όλα τα κατάλληλα σημεία και μέσω του δυναμικού χειρισμού του Geogebra κατέληξαν και αυτές στη μορφή του σχήματος 26. Παρατηρώντας αυτό το σχήμα οι μαθήτριες κατέληξαν και αυτές στο συμπέρασμα ότι αποτελεί ένα ενιαίο ευθύγραμμο τμήμα με σταθερή κλίση, γεγονός το οποίο συνέδεσαν άμεσα με τη σταθερή ταχύτητα του ποδηλάτη και μάλιστα σχετικά εύκολα δεδομένης και της εμπειρίας τους από τα προηγούμενα ερωτήματα. Χαρακτηριστικά είναι και τα λόγια των μαθητριών αφού η μία είπε ότι «έχει ουσιαστικά μία σταθερή ταχύτητα, οπότε δε μεταβάλλεται» ενώ η άλλη παρατήρησε ότι «εδώ ουσιαστικά είναι 2000 μέτρα και εδώ είναι 500 second έτσι; 2000/500 κάνει 4. Μετά 3000/750=4 κάνει και αυτό μετά 4000 /1000=4, 5000 δια αυτό 4, 6000/1500=4, 7000 δια αυτό 4, 8000 δια αυτό 4 όλα είναι 4». Αξίζει μάλιστα να σημειωθεί ότι στο τελευταίο ερώτημα Δ της δραστηριότητας, που ζητούσε ένα γενικό συμπέρασμα για τη σχέση της μέσης ταχύτητας με τις γραφικές παραστάσεις, οι μαθήτριες τόνισαν πως αυτή αναπαρίσταται μέσω της κλίσης, αξιοποιώντας μάλιστα και τον τύπο y/x για αυτή όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα του διαλόγου:

E	Και να μου απαντήσετε έτσι αθροιστικά, σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα παρατηρείτε πως συνδέεται η ταχύτητα με τη γραφική παράσταση;
M2	Εε ουσιαστικά το $y/x=4$
E	Και τι είναι αυτό το y/x ;
M2	Οι συντεταγμένες ενός σημείου που βρίσκεται πάνω σε αυτή την ευθεία
M3	Είναι η κλίση
M2	Ναι όντως
M2	Είναι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης, οι συντεταγμένες τους, το y/x
E	Άρα η ταχύτητα λέτε ότι είναι το y/x άρα η κλίση

Επομένως, στο ερώτημα Γ όπου είναι κυρίαρχος ο ρόλος της σχέσης μεταξύ κλίσης και ταχύτητας, οι μαθήτριες έδρασαν και στα τρία επίπεδα νοηματοδότησης. Η δράση τους ξεκίνησε από το διαλογικό επίπεδο με τη μετατροπή των μονάδων μέτρησης και

την εύρεση των σωστών σημείων από τα οποία έπρεπε να περάσει η γραφική παράσταση. Στη συνέχεια εργάστηκαν στο εργαλειακό επίπεδο και συγκεκριμένα μέσω της διαδικασίας της τροποποίησης εργαλείου, αφού είχαν υπολογίσει ακριβώς τις συντεταγμένες των σημείων και το μόνο που έμενε ήταν η μετακίνησή τους στις κατάλληλες θέσεις μέσω του δυναμικού χειρισμού. Όταν, λοιπόν, έγινε αυτή η σωστή τοποθέτηση των σημείων και προέκυψε το σχήμα 26, έγιναν αντιληπτές οι ενέργειες των μαθητριών και στο σημειωτικό επίπεδο. Μέσω της οπτικοποίησης, συνειδητοποίησαν πως αναπαρίσταται στο Geogebra η σταθερή ταχύτητα παρατηρώντας τόσο τη γραφική παράσταση όσο και την αλγεβρική στήλη. Από τη μία παρατήρησαν ότι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούν ένα μεγαλύτερο με σταθερή κλίση και από την άλλη εντόπισαν ένα μοτίβο αύξησης του χρόνου σε κάθε χιλιόμετρο κατά 250 δευτερόλεπτα, καταλήγοντας έτσι στη σχέση που συνδέει την κλίση με την ταχύτητα, με τις μαθήτριες μάλιστα να κάνουν αναφορά και στον τύπο y/x .

Σε όλα τα προηγούμενα ερωτήματα οι μαθήτριες ενεπλάκησαν γενικότερα με την έννοια της κλίσης πριν να ασχοληθούν με το Ε της τρίτης δραστηριότητας. Στόχος αυτού ήταν να νοηματοδοτήσουν την έννοια της κλίσης εφαπτομένης και να τη συνδέσουν με την έννοια του ρυθμού μεταβολής, και πιο συγκεκριμένα της στιγμιαίας ταχύτητας, συνδυάζοντας όλες τις παρατηρήσεις που είχαν κάνει προηγουμένως. Η ακριβής διατύπωση του ερωτήματος ήταν η εξής: «Ποια είναι η σχέση μεταξύ της ευθείας (ε) και της καμπύλης;». Η ανοιχτή μορφή του έδωσε την ευκαιρία στις μαθήτριες να εκφράσουν αρκετές σκέψεις καθώς παρατηρούσαν το σχήμα και έσυραν το δρομέα AB. Η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά προσπάθησε αρχικά να υπολογίσει την κλίση της ευθείας μέσω του τύπου $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ και γι' αυτό το λόγο προσπάθησε να βρει δύο σημεία της. Με αρκετή ευκολία παρατήρησε το Α αλλά δυσκολεύτηκε να βρει το δεύτερο με αποτέλεσμα να κάνει πολύ ζουμ για να το βρει. Η αδυναμία της να το βρει με αυτόν τον τρόπο την οδήγησε στην μετακίνηση του δρομέα AB και την παρατήρηση της σύνδεσης μεταξύ του τριγώνου και της κλίσης της ευθείας, με τη μαθήτρια να δηλώνει χαρακτηριστικά ότι «όσο μετακινούμε το τρίγωνο αλλάζει και η κλίση της». Συνεχίζοντας, λοιπόν, να κουνάει το δρομέα δεξιά και αριστερά προκειμένου να βγάλει και κάποιο άλλο συμπέρασμα, αντιλήφθηκε ότι συνδέονται επίσης η καμπύλη με την ευθεία επισημαίνοντας ότι έχουν πάντα ως κοινά σημεία τα Α και Γ. Η παρατήρηση αυτή ήταν η αφορμή για να

τοποθετήσει το σημείο Γ πάνω στο Α με αποτέλεσμα την εξαφάνιση του τριγώνου και της ευθείας. Το πρόβλημα αυτό της εξαφάνισης του τριγώνου σε συνδυασμό με την εμπειρία της από το προηγούμενο ερώτημα με τη στιγμιαία ταχύτητα την οδήγησαν στη σύγκλιση του Γ πολύ κοντά στο Α, η οποία αποτέλεσε την αφορμή για την αναγνώριση της ευθείας ως εφαπτομένη της καμπύλης, όπως φαίνεται και από τον παρακάτω διάλογο:

M1	Όταν είναι πολύ κοντά εε η ευθεία είναι πάρα πολύ πλάγια;
E	Είναι πολύ πλάγια όντως αλλά τη σχέση της με την καμπύλη
M1	Αα είναι σαν εφαπτομένη;
E	Ωραία είναι σαν εφαπτομένη όντως
E	Είναι; Είναι εφαπτομένη;
M1	Τώρα όχι, δεν είναι εφαπτομένη
E	Γιατί δεν είναι εφαπτομένη τώρα;
M1	Γιατί έχει 2 σημεία
E	Μπράβο οπότε ουσιαστικά πάει να γίνει εφαπτομένη

Επίσης, είναι πολύ σημαντική η κατανόηση της οριακής θέσης που πάει να πάρει η ευθεία (ε) μέσω της παρατήρησης για τα δύο κοινά της σημεία με την καμπύλη. Όπως είχε αναφερθεί προηγουμένως, στόχος της μαθήτριας ήταν βρει την κλίση της ευθείας (ε) και εφόσον είχε αποφασίσει ότι θα το κάνει μέσω των σημείων Α και Γ άλλαξε ξανά τις διαστάσεις του τριγώνου και ξεκίνησε τους υπολογισμούς. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που παρουσιάζεται στον παρακάτω διάλογο:

M1	Άρα τώρα αν πάμε στο 3/1 και κάνουμε yΓ το 4 μείον το 1 προς το 2-1 μας βγαίνει πάλι 3/1 άρα 3
E	Γιατί είπες πάλι;
M1	Γιατί είναι ίδια πράξη με αυτό που ψάχναμε να βρούμε την ταχύτητα
E	Δηλαδή ποια;
M1	Το α/γ
E	Άρα παρατηρείς ότι η κλίση της εφαπτομένης είναι πόσο γενικά;
M1	Παρόμοια με την ταχύτητα;
E	Δηλαδή;
M1	Έχουν παρόμοιες τιμές και βγαίνουν με τον ίδιο σχεδόν τρόπο καθώς είναι α/γ δηλαδή y/x
E	Πολύ ωραία
E	Άρα τι συμπέρασμα προκύπτει εδώ με βάση τα όσα είπαμε και τις παρατηρήσεις που έκανες;

M1	Ότι η ταχύτητα με την κλίση της ευθείας ταυτίζονται καθώς μπορούμε να τις βρούμε με τον ίδιο τρόπο κάνοντας την πράξη y/x
----	---

Από αυτόν αναδεικνύεται η επιτυχία της μαθήτριας να συνδέσει τη στιγμιαία ταχύτητα με την κλίση της εφαπτομένης, με την παρατήρηση των κοινών αριθμών από το προηγούμενο ερώτημα να αποτελεί έναν πολύ καθοριστικό παράγοντα. Περνώντας στη μελέτη της δράσης των μαθητριών που δούλεψαν σε ομάδα, και εκείνες πειραματίστηκαν πολύ με το δρομέα AB. Κατά τη διάρκεια αυτού του πειραματισμού παρατήρησαν και εκείνες μία σχέση μεταξύ της ευθείας και του τριγώνου. Όπως φαίνεται από τον παρακάτω διάλογο:

M3	Και η ευθεία ταυτίζεται αρκετά με το τρίγωνο γιατί μαζί με το τρίγωνο αυξομειώνονται; Δηλαδή ας πούμε αλλάξαμε τα σημεία και αυξομειωνόταν και το τρίγωνο και άλλαζε και η ευθεία
M2	Αλλάζει η κλίση της ευθείας, αυτό λες;
M3	Λέω ότι η πλευρά του τριγώνου ουσιαστικά είναι η ευθεία, είναι ένα κομμάτι της ευθείας το οποίο επειδή αυξομειώνουμε το τρίγωνο ουσιαστικά αλλάζει και η ευθεία λόγω του τριγώνου επειδή είναι η ευθεία το τρίγωνο να το πω έτσι

οι μαθήτριες κατάλαβαν ότι η ευθεία (ϵ) είναι ο φορέας της πλευράς AG και ότι καθώς αλλάζουν οι διαστάσεις του τριγώνου αλλάζει η ευθεία και κατά συνέπεια και η κλίση της. Οι μαθήτριες παρατήρησαν επίσης για την ευθεία και την καμπύλη ότι έχουν κοινά σημεία τα A και Γ. Οι πρόσφατες εμπειρίες τους από την τάξη της Β' Λυκείου φάνηκε να τις επηρέασαν αφού προέκυψε η ανάγκη εύρεσης της κλίσης της ευθείας (ϵ) και όταν επιχείρησαν να κάνουν τον αντίστοιχο υπολογισμό το σημείο Γ ήταν στη θέση (2,4) ενώ το A στη θέση (1,1). Οι αριθμοί αυτοί έδωσαν το αποτέλεσμα 3 για την κλίση της ευθείας (ϵ) και ο υπολογισμός αυτός ήταν το παράδειγμα που οδήγησε τις μαθήτριες σε μία γενίκευση. Πιο συγκεκριμένα, διαπίστωσαν ότι η κλίση ταυτίζεται με τη μέση ταχύτητα με τη M3 να δηλώνει χαρακτηριστικά: «Γενικότερα ισχύει αυτό γιατί είναι ουσιαστικά τα σημεία που πήραμε και πριν». Η εστίαση στα σημεία A και Γ τις οδήγησε ξανά στο σύρσιμο του δρομέα AB, με τη M2 που είχε αναλάβει το δυναμικό χειρισμό του Geogebra να μηδενίζει την τιμή του δρομέα τοποθετώντας έτσι το σημείο Γ πάνω στο A. Έτσι, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η καμπύλη με την ευθεία έχουν πάντα δύο κοινά σημεία εκτός από μία περίπτωση, δηλαδή την ταύτιση του Γ με το A, για την οποία η μία από τις δύο μαθήτριες είπε χαρακτηριστικά: «Ναι αυτό λέω δεν υπάρχουν καν, οπότε πάλι... δεν μπορεί να οριστεί ευθεία γιατί δεν ορίζεται ούτε κλίση ούτε εφαπτομένη, άρα δεν

ορίζεται ούτε η μέση ταχύτητα που τη βρήκα εδώ πέρα ας πούμε και ήτανε ίσες». Όπως και η μαθήτρια που δούλεψε ατομικά, έτσι και εκείνες της ομάδας όταν συνάντησαν το πρόβλημα εξαφάνισης του τριγώνου και κατά συνέπεια της ευθείας, αποφάσισαν να σύρουν πάλι το δρομέα AB με στόχο τη σύγκλιση των σημείων B και Γ προς το A. Η κίνηση αυτή αποτέλεσε την αφορμή για την παρατήρηση ότι η ευθεία είναι εφαπτομένη της καμπύλης και στη συνέχεια η εστίαση στην κλίση αυτής, η οποία σε αυτό το σημείο όπου το Γ βρισκόταν πολύ κοντά στο A ήταν ίση με $0,2/0,1=2$ τις οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η κλίση της εφαπτομένης ταυτίζεται με τη στιγμιαία ταχύτητα. Άρα, και στην περίπτωση της ομάδας η παρατήρηση των αριθμών και η σύγκριση με το ερώτημα Δ ήταν καθοριστικές για την αναγνώριση της σχέσης μεταξύ κλίσης εφαπτομένης και στιγμιαίας ταχύτητας.

Σύνοψη

Τα ψηφιακά δομήματα με δυναμικό χειρισμό οδήγησαν τις μαθήτριες σε ενέργειες εντός του σημειωτικού και του εργαλειακού προκειμένου να καταλάβουν τη σχέση που συνδέει την έννοια της κλίσης με αυτή της ταχύτητας τόσο στο ερώτημα Γ της δεύτερης δραστηριότητας με την μετακίνηση των σημείων όσο και στο ερώτημα Ε της τρίτης δραστηριότητας με την κινούμενη εφαπτομένη της καμπύλης. Στο μεν πρώτο η παρατήρηση ότι η σταθερή κλίση ερμηνεύεται ως σταθερή ταχύτητα τις οδήγησε στη διαδικασία της τροποποίησης εργαλείου στο εργαλειακό επίπεδο με το σχεδιασμό του ενιαίου τμήματος (βλ. Σχήμα 26). Στο δε δεύτερο η δράση όλων των μαθητριών εντοπίζεται κυρίως στο εργαλειακό επίπεδο όπου σημαντικό ρόλο κατέχει η διαδικασία της διαμόρφωσης δραστηριότητας μέσω εργαλείου γιατί όλες οι παρατηρήσεις και οι ενέργειες των μαθητριών καθορίστηκαν από την ύπαρξη του δρομέα AB, με τον οποίο ο πειραματισμός ήταν συνεχής. Οι κινήσεις του δρομέα είχαν στόχο είτε την εύρεση κάποιας σχέσης μεταξύ ευθείας και καμπύλης, είτε μεταξύ της ευθείας και του τριγώνου είτε τον υπολογισμό της κλίσης της ευθείας (ε). Όλες αυτές οι ενέργειες σε συνδυασμό με τις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητριών από τα προηγούμενα ερωτήματα και ειδικότερα το Δ συνέβαλαν στην αναγνώριση της ευθείας ως εφαπτομένη της καμπύλης και στην ταύτιση της κλίσης της με τη στιγμιαία ταχύτητα.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων εντός του περιβάλλοντος του Strava και εκείνο του Geogebra έγινε εντός του πλαισίου της καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης και είχε ως στόχο την ανακάλυψη της έννοιας της παραγώγου μέσω της κατασκευής ενός μαθησιακού δρόμου από τον οποίο θα αναδύονταν όλες οι μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με εκείνη της παραγώγου. Το αποτέλεσμα ήταν η δράση των μαθητριών της Β' Λυκείου στον ενσώματο και στον συμβολικό μαθηματικό κόσμο αναπαράστασης (Tall, 2003) προκειμένου να νοηματοδοτήσουν αυτές τις έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση του τυπικού ορισμού της παραγώγου που θα ακολουθήσει στον αξιωματικό κόσμο αναπαράστασης, με τον οποίο θα εμπλακούν στην τάξη της Γ' Λυκείου. Το γεγονός ότι στις δραστηριότητες έχει κυρίαρχο ρόλο το μέγεθος της ταχύτητας για την εισαγωγή στην έννοια της παραγώγου μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις σε διαφορετικούς χώρους εργασίας οδήγησε τις μαθήτριες σε ενέργειες που εντάσσονται και στα τρία επίπεδα μετάβασης από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο προκειμένου να επιτευχθεί η «γέννηση» του νοήματος. Παρατηρώντας συνολικά τη δράση των μαθητριών σε όλες τις δραστηριότητες προκύπτει το συμπέρασμα πως κάθε φορά που συναντούσαν κάποιο ερώτημα όπου ήταν δύσκολο να βρουν άμεσα κάποιο αποτέλεσμα ή κάποια αναπαράσταση με την οποία δεν είχαν εξοικειωθεί αρκετά, ενεργοποιούσαν τη διαίσθησή τους, τις αισθητηριακές τους ικανότητες και σχετικές εμπειρίες είτε από την καθημερινή τους ζωή, είτε από τα μαθήματα των μαθηματικών και της φυσικής. Οι προσπάθειες ερμηνείας των δεδομένων των ερωτημάτων και αποκωδικοποίησης των συμβόλων και των αναπαραστάσεων οδηγούσε τις μαθήτριες στη δημιουργία πολλών εικασιών. Η ανάγκη για επιβεβαίωση ή γενικότερα για έλεγχο αυτών είχε ως αποτέλεσμα τη δράση των μαθητριών και στο εργαλειακό και στο διαλογικό επίπεδο νοηματοδότησης. Στο πρώτο ήταν έντονος ο πειραματισμός με τα εργαλεία των λογισμικών και η εκτέλεση αρκετών δοκιμών σχετικά με τις εικασίες που είχαν κάνει στο σημειωτικό επίπεδο. Στο δεύτερο ήταν συχνή η εφαρμογή τύπων είτε από τη θεωρία των μαθηματικών είτε της φυσικής με βασικότερο τον $\Delta x/\Delta t$ για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας. Από την άλλη, όταν συναντούσαν ευκολότερα ερωτήματα στρέφονταν κατευθείαν στο διαλογικό επίπεδο νοηματοδότησης και οποία ενέργεια γινόταν στα άλλα δύο είχε αποκλειστικό στόχο την εύρεση των

αριθμητικών τιμών που χρειάζονταν για την εφαρμογή των τύπων από το θεωρητικό σύστημα αναφοράς.

Σε αυτή τη δράση των μαθητριών μεταξύ των τριών επιπέδων κατασκευής νοήματος καθοριστικό ρόλο είχαν τα λογισμικά που χρησιμοποιήθηκαν. Δεδομένου ότι το περιβάλλον και τις λειτουργίες του Geogebra τα γνώριζαν σε ένα βαθμό, ήταν αρκετά ενδιαφέρουσα η μελέτη των ενεργειών τους στο Strava, με το οποίο ήρθαν σε επαφή για πρώτη φορά. Η σύνδεσή του με την πραγματικότητα, μέσω της καταγραφής ρεαλιστικών δεδομένων συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη της ενσώματης νόησης (Lackof) αφού οι μαθήτριες μπήκαν στη θέση του δρομέα και χειρίστηκαν το λογισμικό όπως κάθε αθλητής που θέλει να δει σημαντικές λεπτομέρειες για την προπόνησή του. Η βασική διαφορά είναι πως οι μαθήτριες δεν είχαν χρησιμοποιήσει ποτέ ξανά στο παρελθόν αυτό το λογισμικό γεγονός που είχε ως λογική συνέπεια την εξερεύνηση όλων των εργαλείων του, των δεδομένων που παρείχε η κάθε αναπαράσταση, τη σύγκριση μεταξύ αυτών καθώς και τη δημιουργία πολλών εικασιών, όπως αναφέρθηκε καινωρίτερα. Σε όλες αυτές τις ενέργειες δεν ήταν σημαντική μόνο η ύπαρξη και η συνδυαστική παρατήρηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων αλλά επίσης και ο δυναμικός χειρισμός που προσέφερε το λογισμικό. Πιο συγκεκριμένα, η ύπαρξη της κάθετης γραμμής στο γράφημα του Strava και η δυνατότητα μετακίνησης αυτής βοήθησε τις μαθήτριες να καταλάβουν την προσομοίωση της προπόνησης του δρομέα σε συνδυασμό με τη χάραξη της διαδρομής που έκανε στο χάρτη αλλά και να αξιοποιήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις προκειμένου να καταλήξουν σε πιο προχωρημένα συμπεράσματα και να μην μείνουν μόνο σε εικασίες που οφείλονταν στη διαισθητική τους προσέγγιση. Η δημιουργία τέτοιων συμπερασμάτων απαιτούσε την παράλληλη δράση σε παραπάνω από ένα επίπεδα νοηματοδότησης όπως για παράδειγμα μεταξύ του εργαλειακού και του διαλογικού. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του ερωτήματος που ζητούσε την εύρεση του γρηγορότερου χιλιομέτρου της διαδρομής του δρομέα, στο οποίο όπως αναλύθηκε και στην προηγούμενη ενότητα οι μαθήτριες της ομάδας παρατήρησαν ότι ο χρόνος που διήρκεσε το κάθε χιλιόμετρο εκφράζεται μέσω του μεγέθους του ρυθμού τρεξίματος (pace). Επίσης, παρατήρησαν ότι το συγκεκριμένο μέγεθος αποτυπώνεται στην αντίστοιχη στήλη του Strava και υπολογίζεται από το γράφημα μέσω της διαφοράς $\Delta t = t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}$, καταλαβαίνοντας ουσιαστικά και τον τρόπο με τον οποίο φτιάχτηκε το λογισμικό από τον προγραμματιστή.

Από την άλλη, το λογισμικό του Geogebra δεν ήταν πρωτόγνωρο για τις μαθήτριες με αποτέλεσμα οι ενέργειές τους σε αυτό να είναι πιο στοχευμένες, ειδικά στις περιπτώσεις όπου έπρεπε να βρουν κάποιες τιμές για τη θέση του δρομέα ή για κάποια χρονική στιγμή της προπόνησής του. Δηλαδή και στο λογισμικό του Geogebra οι μαθήτριες έδρασαν συνδυαστικά μεταξύ των τριών σταδίων μετάβασης από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο (Kuzniak, Tanguay, Elia, 2016). Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληγαν και οι απαντήσεις που έδιναν προέρχονταν είτε άμεσα είτε έμμεσα από τον πειραματισμό τους με τα εργαλεία του λογισμικού. Όπως και στην περίπτωση του Strava, έτσι και στο Geogebra όταν οι μαθήτριες συναντούσαν κάποια νέα ή σύνθετη αναπαράσταση ή κάποιο ερώτημα που δεν ήταν εύκολο να απαντηθεί άμεσα στρέφονταν στον πειραματισμό με τις αναπαραστάσεις και τα εργαλεία του λογισμικού και μέσω αυτού κατέληγαν σε διάφορες εικασίες και συμπεράσματα. Δηλαδή, σε τέτοιες περιπτώσεις γινόταν αντιληπτή στη δράση τους εντός του εργαλειακού επιπέδου κατασκευής νοήματος η διαδικασία της διαμόρφωσης δραστηριότητας μέσω εργαλείου (Artigue, 2002). Στα ερωτήματα, όμως, τα οποία ήταν πιο εύκολα και στηρίζονταν σε γνώσεις που κατείχαν καλά οι μαθήτριες, όπως για παράδειγμα τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας σε συγκεκριμένα διαστήματα της διαδρομής είτε του δρομέα, είτε του ποδηλάτη, είτε του μοτοσυκλετιστή μέσω του τύπου $\Delta x / \Delta t$, εργάζονταν μεταξύ του διαλογικού και του εργαλειακού επιπέδου και μάλιστα μεταβαίνοντας από το πρώτο στο δεύτερο. Σε αυτό χρησιμοποιούσαν τα κατάλληλα εργαλεία για να πάρουν τις απαραίτητες τιμές για τα μεγέθη της θέσης και του χρόνου. Πρόκειται δηλαδή για τη διαδικασία της τροποποίησης εργαλείου (Artigue, 2002) όπου η επιλογή και η χρήση ενός τεχνουργήματος προκύπτει από τη σκέψη του μαθητή και στη συνέχεια μετατρέπεται σε εργαλείο. Τέτοιες ενέργειες στο λογισμικό του Geogebra ήταν αυτή της μεγέθυνσης για την εύρεση κάποιου κρίσιμου σημείου, η τοποθέτηση του κέρσορα πάνω σε αυτό για την εμφάνιση των συντεταγμένων του, η παρατήρηση της αλγεβρικής στήλης και των τιμών που αντιστοιχούν σε κάθε σημαντικό στοιχείο μίας γραφικής παράστασης ή και η κατασκευή νέων σχεδίων.

Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στις μαθήτριες, με τα αντίστοιχα ερωτήματά τους και με τα λογισμικά στα οποία εκτυλίχθηκαν, ήταν σημαντικές και για την εστίασή τους στις έννοιες από τις οποίες εξαρτάται αυτή της παραγωγού καθώς η νοηματοδότηση αυτής προϋποθέτει την νοηματοδότηση εκείνων των εννοιών

(Zandieh, 2000). Πιο συγκεκριμένα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως και αναλύθηκε εκτενώς στην προηγούμενη ενότητα η έννοια της μέσης ταχύτητας και η χρήση του λόγου $\Delta x/\Delta t$ ήταν καθοριστικές για την επίλυση των δραστηριοτήτων αφού σε πολλά ερωτήματα οι μαθήτριες αξιοποιούσαν τον παραπάνω τύπο λαμβάνοντας τις απαραίτητες τιμές από τις αναπαραστάσεις των λογισμικών. Ο ρόλος των λογισμικών, όμως, δεν περιορίστηκε σε αυτή τη διαδικασία όσον αφορά στην έννοια της μέσης ταχύτητας. Ιδιαίτερα σημαντικός ήταν ο ρόλος του Geogebra και πιο συγκεκριμένα του τριγώνου της ανάλυσης (Byerley, Tallman, Thompson, 2012) καθώς μέσω αυτού οι μαθήτριες κατάφεραν να συνδέσουν την έννοια της μέσης ταχύτητας με την εφαπτομένη της γωνίας A του τριγώνου, το οποίο είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας για την εισαγωγή στην έννοια της παραγώγου και τη νοηματοδότησή της ως ρυθμό μεταβολής και κλίση εφαπτομένης. Η σύνδεση αυτή επετεύχθη χάρη στην εξοικείωση των μαθητριών με τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας με την παράλληλη αξιοποίηση των γραφικών παραστάσεων του Geogebra, τόσο στο ερώτημα που περιλάμβανε το τρίγωνο της ανάλυσης όσο και στα προηγούμενα. Παράλληλα με τους υπολογισμούς αυτούς, σημαντική ήταν και η παρατήρηση των τιμών σημαντικών στοιχείων των γραφικών παραστάσεων, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της μαθήτριας που δούλεψε ατομικά, η οποία συνέδεσε τη μέση ταχύτητα με το τρίγωνο της ανάλυσης μέσω της παρατήρησης των τιμών των πλευρών α και γ του τριγώνου αλλά και του λόγου α/γ.

Ένα πολύ κομβικό σημείο σε όλη αυτή την εισαγωγή των μαθητριών στην έννοια της παραγώγου μέσω της νοηματοδότησης των επιμέρους εννοιών της ήταν η μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα. Η μετάβαση αυτή δυσκόλεψε αρκετά τις μαθήτριες, ειδικά στο στάδιο όπου αξιοποιήθηκε το τρίγωνο της ανάλυσης, παρά την καλή προσέγγιση που προηγήθηκε σε άλλα ερωτήματα που αφορούσαν τις στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra. Πιο συγκεκριμένα, στο ερώτημα Biii της δραστηριότητας 2 που ζητούσε την εύρεση της προπόνησης στην οποία ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη ταχύτητα έκαναν κάποιες σωστές παρατηρήσεις είτε με βάση τη διαίσθηση και τις εμπειρίες τους είτε με βάση την εφαρμογή του τύπου $\Delta x/\Delta t$. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της M3 η οποία συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις των δύο προπονήσεων και ερμηνεύοντας την κλίση της κάθε μίας αποφάσισε να υπολογίσει τη μέση ταχύτητα σε μικρότερα διαστήματα όπου η ταχύτητα φαινόταν να είναι παρόμοια. Αυτή ήταν η πρώτη φορά που εμφανίστηκε η

στρατηγική μείωσης των διαστημάτων και μάλιστα με πρωτοβουλία της ίδιας της μαθήτριας. Παρόλο που αυτή η στρατηγική εφαρμόστηκε και στη συνέχεια από τις μαθήτριες στο ερώτημα Β της δραστηριότητας 3, δυσκολεύτηκαν πολύ όταν κλήθηκαν να προσεγγίσουν τη στιγμιαία ταχύτητα μέσω της συνεχούς μείωσης του ευθυγράμμου τμήματος AB με την σύγκλιση του B προς το A. Η δυσκολία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθήτριες δεν ήταν εξοικειωμένες με την έννοια του ορίου και τη σύγκλιση ενός σημείου προς ένα άλλο χωρίς να ταυτίζονται.

Όσον αφορά στην έννοια του ορίου, η δράση των μαθητριών έλαβε χώρα αποκλειστικά στο εργαλειακό και σημειωτικό επίπεδο και καθόλου στο διαλογικό δεδομένης της μη γνώσης της έννοιας. Για την προσέγγιση αυτής της νέας έννοιας και για την αντιμετώπιση των δυσκολιών στο εργαλειακό και σημειωτικό επίπεδο ήταν καθοριστική η συμβολή του Geogebra με τη δυνατότητα της απειροελάχιστης προσέγγισης μεταξύ των σημείων και το εργαλείο του υπολογιστικού φύλλου. Χάρη σε αυτά τα δύο πλεονεκτήματα του λογισμικού και μία μικρή καθοδήγηση εκ μέρους του καθηγητή κατάλαβαν ότι η στιγμιαία ταχύτητα είναι αδύνατο να υπολογιστεί με ακρίβεια αλλά είναι εφικτή μία πολύ καλή προσέγγιση αυτής. Στην περίπτωση της ταύτισης του σημείου B με το A, μέσω της εφαρμογής του τύπου $\Delta x / \Delta t$ όπου συνάντησαν για πρώτη φορά το λόγο $0/0$, της εμφάνισης του ερωτηματικού στο υπολογιστικό φύλλο και της εξαφάνισης του τριγώνου, οι μαθήτριες ξεκίνησαν να χειρίζονται δυναμικά το δρομέα και εν τέλει παρατήρησαν ότι η στιγμιαία του ταχύτητα έτεινε να πάρει την τιμή 2. Δηλαδή, κατάλαβαν ότι η έννοια του ορίου είναι ένα είδος προσέγγισης μέσω της ταυτόχρονης παρατήρησης των τιμών του υπολογιστικού φύλλου και της γραφικής παράστασης καθώς χειρίζονταν δυναμικά το δρομέα.

Τελικός στόχος όλων των δραστηριοτήτων ήταν η νοηματοδότηση της έννοιας της στιγμιαίας ταχύτητας και της κλίσης εφαπτομένης και η σύνδεση μεταξύ τους κατά τη δράση των μαθητριών στον ενσώματο και συμβολικό μαθηματικό κόσμο προκειμένου να γίνει κατανοητή η παρουσίαση του τυπικού ορισμού στο αξιωματικό κόσμο αναπαράστασης. Σε αυτό το σκοπό ήταν πολύ σημαντικός ο ρόλος του Geogebra καθώς κατέστησε πιο δυναμική την επαφή των μαθητριών με την αναπαράσταση του ορισμού της παραγώγου (βλ. Σχήμα 22) κατά την οποία μία τέμνουσα ευθεία της καμπύλης τείνει προς την οριακή της θέση. Προτού όμως ασχοληθούν με εκείνο το ερώτημα που περιλαμβάνει αυτή τη δυναμική

αναπαράσταση, οι μαθήτριες είχαν συνδέσει την έννοια της ταχύτητας με αυτήν της κλίσης. Δουλεύοντας εντός του σημειωτικού και του διαλογικού επιπέδου ερμηνεύοντας τις γραφικές παραστάσεις, παρατηρώντας τις τιμές όλων των στοιχείων και αξιοποιώντας τον τύπο $\Delta x/\Delta t$ κατάλαβαν ότι η μέση ταχύτητα εκφράζεται μέσω της κλίσης. Ήδη από τη δραστηριότητα 2 οι μαθήτριες με βάση την εμπειρία τους πάνω στα γραφήματα $x-t$ από το μάθημα της φυσικής κατάφεραν να ερμηνεύσουν την αλλαγή στην κλίση ως αλλαγή στην ταχύτητα, με το συμπέρασμα αυτό να γίνεται πιο καθαρό στο ερώτημα με τη δυναμική μετακίνηση των σημείων στην προπόνηση του ποδηλάτη όπου η σταθερή του ταχύτητα είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός ευθύγραμμου τμήματος με σταθερή κλίση. Πέρα από αυτό το ψηφιακό δόμημα όμως πολύ κρίσιμος για τη σύνδεση μεταξύ μέσης ταχύτητας και κλίσης ήταν ο ρόλος του τριγώνου της ανάλυσης. Η καλή γνώση του τύπου $\Delta x/\Delta t$ και του τύπου για την εφαπτομένη γωνίας στην περίπτωση της M2 και η παρατήρηση των αποτελεσμάτων για το λόγο a/γ σε σχέση με τη μέση ταχύτητα στην περίπτωση της M1, δείχνουν πως από τη μία η δράση στο διαλογικό επίπεδο νοηματοδότησης και πως από την άλλη η δράση στο σημειωτικό επίπεδο οδήγησαν στη σύνδεση της μέσης ταχύτητας με την κλίση. Η ερμηνεία του τύπου $\Delta x/\Delta t$ ως a/γ αποτέλεσε τη βάση για τη σύνδεση της στιγμιαίας ταχύτητας με την κλίση εφαπτομένης στο τελευταίο ερώτημα των δραστηριοτήτων όπου ο φορέας της πλευράς ΑΓ του τριγώνου της ανάλυσης αποτελούσε μία τέμνουσα ευθεία της καμπύλης. Η ύπαρξη του δρομέα και ο δυναμικός χειρισμός του αποτέλεσε για άλλη μια φορά την αφορμή για τη δράση των μαθητριών στο εργαλειακό και το σημειωτικό επίπεδο, όπου έκαναν παρόμοιες παρατηρήσεις με το ερώτημα που ζητούσε την εύρεση της στιγμιαίας ταχύτητας. Η εξαφάνιση του τριγώνου και της ευθείας όταν τα σημεία Β και Γ ταυτίζονταν με το Α ήταν μία εικόνα την οποία οι μαθήτριες είχαν συναντήσει στο προηγούμενο ερώτημα για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας και κατά συνέπεια ακολούθησαν μία παρόμοια στρατηγική στη δράση τους στο εργαλειακό επίπεδο μετακινώντας το δρομέα με στόχο τη σύγκλιση του Β προς το Α. Παρατηρώντας όλες αυτές τις αλλαγές στο σχήμα οι μαθήτριες συμπέραναν πως η ευθεία τείνει να γίνει εφαπτομένη, όπως και η στιγμιαία ταχύτητα τείνει να γίνει 2, με τη δεύτερη να εκφράζει την κλίση της πρώτης. Επομένως, το τρίγωνο της ανάλυσης και ο δυναμικός χειρισμός του δρομέα αποτελούν δύο παρά πολύ χρήσιμα εργαλεία για την νοηματοδότηση της έννοιας του ορίου και τη σύνδεση της στιγμιαίας ταχύτητας με την κλίση εφαπτομένης χάρη στη δυναμική αναπαράσταση της προσέγγισης της

τέμνουσας ευθείας στην οριακή της θέση η οποία στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου παρουσιάζεται απλά ως στιγμιότυπο.

Συνολικά, όλες οι δραστηριότητες συνέβαλαν στη σταδιακή μετάβαση των μαθητριών από την ύλη της Β' Λυκείου στον ορισμό της παραγώγου μέσω της νοηματοδότησης της μέσης ταχύτητας σε πρώτη φάση, και στη συνέχεια της στιγμιαίας παράλληλα με εκείνη του ορίου και της κλίσης εφαπτομένης, μέσα από τη δράση των ίδιων των μαθητριών σε δύο διαφορετικά ψηφιακά περιβάλλοντα. Όσον αφορά στο λογισμικό Strava, αποδείχθηκε πως η παράγωγος, πάρα τη σύνθετη μορφή της και τη δύσκολη διαισθητική της κατανόηση σχετίζεται με μία πολύ κοινή αθλητική δραστηριότητα, όπως το τρέξιμο, αλλά και πως μπορούν να αξιοποιηθούν πολλά δεδομένα από μία εφαρμογή που είναι πολύ χρήσιμη για πολλούς αθλητές, επαγγελματίες και μη, παγκοσμίως. Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό γιατί πέρα από την ενσώματη νόηση των παιδιών και τη δημιουργία μίας εικόνας της έννοιας της παραγώγου προκαλεί ένα μεγαλύτερο ενδιαφέρον και δίνει ένα παραπάνω κίνητρο στα παιδιά για ενασχόληση με αυτή τη δύσκολη έννοια. Σκοπός ολόκληρης της εργασίας ήταν η εισαγωγή στην έννοια παραγώγου μέσω της πιο συνηθισμένης μορφής ρυθμού μεταβολής, της ταχύτητας, για το λόγο αυτό αξιοποιήθηκε το πρόγραμμα του Strava το οποίο αποτυπώνει τα δεδομένα της προπόνησης ενός δρομέα. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι πως τα εργαλεία και οι αναπαραστάσεις του λογισμικού που χρησιμοποιήθηκαν για αυτή την εργασία δεν περιλάμβαναν καμία μέτρηση της ταχύτητας του δρομέα σε km/h ή σε m/s. Αντί αυτών υπήρχε ο ρυθμός του τρεξίματος, γεγονός που είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον γιατί ανάγκασε τις μαθήτριες να μελετήσουν πως οι μεταβολές στα μεγέθη της μετατόπισης και του χρόνου σχετίζονται μεταξύ τους και με ποιον τρόπο συνδέονται με το μέγεθος της ταχύτητας χωρίς να έχουν στη διάθεσή τους τη κλασική μονάδα μέτρησης που έχουν συνηθίσει να χειρίζονται. Επειδή, όμως για τη νοηματοδότηση της έννοιας του ορίου και της κλίσης εφαπτομένης ήταν πολύ χρήσιμες οι γραφικές παραστάσεις και ο δυναμικός χειρισμός αυτών, ήταν απαραίτητη η μετάβαση από το λογισμικό του Strava σε εκείνο του Geogebra. Η μετάβαση αυτή ήταν ιδιαίτερα κρίσιμη ενώ παράλληλα απέδειξε πως είναι εφικτή η μεταφορά των δεδομένων από ένα πρόγραμμα αθλητικό σε ένα πρόγραμμα αμιγώς μαθηματικό το οποίο μπορεί και αυτό να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη μιας προπόνησης ενός αθλητή. Εντός, λοιπόν, του περιβάλλοντος του Geogebra οι μαθήτριες έκαναν πολλές

ενέργειες αξιοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία του και μέσω αυτών διαπιστώθηκε κυρίως η αξία του δυναμικού χειρισμού με την ταυτόχρονη παρατήρηση των αλλαγών που προκαλεί αλλά και η συνεχής προσέγγιση ενός σημείου σε ένα άλλο, η οποία μπορεί να γίνει και απειροελάχιστη. Η συγκεκριμένη λειτουργία ήταν ιδιαίτερα σημαντική για τη νοηματοδότηση της έννοιας του ορίου και της στιγμιαίας ταχύτητας αλλά και για την ερμηνεία της εφαιπτομένης ως μία τέμνουσα του κύκλου που τείνει στην οριακή θέση.

Παρόμοιες δραστηριότητες μπορούν να αξιοποιηθούν και για άλλα μαθηματικά αντικείμενα τόσο στη Β' και Γ' Λυκείου όσο και σε μικρότερες τάξεις. Στην Γ' Λυκείου το Geogebra με τα πλεονεκτήματα που έχει και αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορεί να αξιοποιηθεί αποκλειστικά για τη νοηματοδότηση της έννοιας του ορίου χωρίς αυτή να σχετίζεται υποχρεωτικά με τη στιγμιαία ταχύτητα. Επίσης, το μέγεθος της ταχύτητας αποτελεί ένα κλασικό αντικείμενο μελέτης σε πολλές τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όπου πολλές φορές είναι χρήσιμο για τη νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης. Μέσω των λογισμικών του Strava και του Geogebra είναι εφικτή η παρατήρηση της συμμεταβολής των μεγεθών της ταχύτητας, της μετατόπισης και του χρόνου με το σχεδιαστή των δραστηριοτήτων να έχει τη δυνατότητα να φτιάξει ο ίδιος όποια συνάρτηση επιθυμεί και τα κατάλληλα ψηφιακά δομήματα που προκαλούν τη δράση του ίδιου του μαθητή. Επίσης, το Geogebra διαθέτει πολλούς τρόπους αναπαράστασης μίας συνάρτησης όπως τον τύπο και την αντίστοιχη γραφική παράσταση ενώ είναι δυνατή η δημιουργία μοτίβο μέσω της παρατήρησης του οποίου προκύπτει η έννοια της συνάρτησης. Όσον αφορά στο κεφάλαιο της παραγώγου, η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών δεν περιορίζεται μόνο στην εισαγωγή των μαθητών στον ορισμό της αλλά μπορεί να αξιοποιηθεί και για την κατανόηση των κανόνων παραγωγής και της σχέσης μεταξύ παραγώγου και αρχικής συνάρτησης, τη μονοτονία και την κυρτότητα μίας συνάρτησης και κατά συνέπεια του σχεδιασμού της γραφικής της παράστασης ή και για βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Anderson, M. L. (2003). Embodied cognition: A field guide. *Artificial intelligence*, 149(1), 91-130.
- Areaya, S., & Sidelil, A. (2012). Students' difficulties and misconceptions in learning concepts of limit, continuity and derivative. *The Ethiopian Journal of Education*, 32(2), 1-37.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning*, 7(3), 245-274.
- Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939.
- Baccaglioni-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253.
- Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(7), 2947-2967.
- G. Lakoff, M. Johnson (Eds.), *Philosophy in the Flesh: The Embodied Mind and its Challenge to Western Thought*, Basic Books, New York, 1999
- G. Lakoff, R.E. Núñez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York, 2000.
- Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, 39(1), 111-129.
- Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Springer, Dordrecht.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics*, 14(3), 235-250.
- Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 624-640.
- Polya, G. (1991). Πώς να το λύσω. *Εκδόσεις Καρδαμίτσα*
- Sahin, Z., Yenmez, A. A., & Erbas, A. K. (2015). Relational understanding of the derivative concept through mathematical modeling: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(1), 177-188.
- Sari, P., Hadiyan, A., & Antari, D. (2018). Exploring derivatives by means of GeoGebra. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 2(1), 65-78.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 59-84.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Stephan, M., Underwood-Gregg, D., & Yackel, E. (2014). Guided reinvention: What is it and how do teachers learn this teaching approach?. In *Transforming mathematics instruction* (pp. 37-57). Springer, Cham.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research techniques* (pp. 1-312). Thousand oaks, CA: Sage publications.
- Tall, D. (1987, July). Constructing the concept image of a tangent. In *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 69-75).
- Tall, D. O. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM*, 41(4), 481-492.
- Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 19, 105-119.

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. *Historia e tecnologia no Ensino da Matemática*, 1, 1-28.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.

Treffers, A. (1987), Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project, D. Reidel, Dordrecht.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 24-28). Antwerp, Belgium: Universitaire Instelling Antwerpen

Weber, E., Tallman, M., Byerley, C., & Thompson, P. W. (2012). Understanding the derivative through the calculus triangle. *The Mathematics Teacher*, 106(4), 274-278..

W.J. Freeman, R. Núñez, Reclaiming Cognition: The Primacy of Action, Intention and Emotion, ImprintAcademic, Thorverton, UK, 1999

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 103-127.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127–137). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., (2016), Μαθηματικά Β' Μέρος Γ' Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων « Διόφαντος»

Βανδουλάκης Ι., Καλλιγιάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ., (2007), ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' Γυμνασίου, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο εργασίας

Δραστηριότητα 1

- A) Κάτω από το χάρτη υπάρχει ένα γράφημα. Ποιες πληροφορίες μπορείτε να αντλήσετε από αυτό;
- B) Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο δρομέας για να διανύσει τα πρώτα 2,4 χιλιόμετρα;
- Γ) Από τα 9 χιλιόμετρα που έτρεξε ο δρομέας βρείτε εκείνο το χιλιόμετρο που έκανε πιο γρήγορα, εξετάζοντας το γράφημα που βρίσκεται κάτω από τον χάρτη (Σχήμα 1). Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Δ) Από τα δεδομένα που σας προσφέρει το πρόγραμμα, μπορείτε να βρείτε κάποιο μέγεθος που να εκφράζει το πόσο γρήγορα τρέχει ο δρομέας;
- E) Ο ποδηλάτης έκανε όλη τη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα 14,4 km/h. Ποιος τερμάτισε πρώτος τη διαδρομή ο δρομέας ή ο ποδηλάτης;

Δραστηριότητα 2

- A) Προσπαθήστε να σχεδιάσετε στο Geogebra τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της θέσης (σε m) του δρομέα σε σχέση με το χρόνο (σε s).
- B) Σας δίνονται δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων θέσης (σε m) σε σχέση με το χρόνο (σε s). Η μία αναπαριστά την προπόνηση που έκανε ο δρομέας μαζί με το φίλο του τον ποδηλάτη (δραστηριότητα 1). Η άλλη αναπαριστά μία προπόνηση που έκανε ο δρομέας κάποια άλλη μέρα μόνος του.
- i) Ποια από τις δύο γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να αναπαριστά την προπόνηση που έκανε μαζί με τον φίλο του;
- ii) Ποιες διαφορές παρατηρείτε ανάμεσα στις δύο προπονήσεις μέσω των γραφημάτων;
- iii) Κατά τη διάρκεια ποιας προπόνησης πιστεύετε ότι ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη ταχύτητα;
- iv) Στην προπόνηση A υπολογίστε τη μέση ταχύτητα που έχει ο δρομέας στο 1°, στο 5° και στο 9° χιλιόμετρο.

Γ) Ο ποδηλάτης διένυσε όλη τη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα 14,4 km/h. Στη γραφική παράσταση που σας δίνεται μετακινήστε κατάλληλα τα δοσμένα σημεία έτσι ώστε να αναπαριστά τη συνάρτηση της θέσης (σε m) του ποδηλάτη σε σχέση με το χρόνο (σε s).

Δ) Σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα παρατηρείτε πώς συνδέεται η μέση ταχύτητα με τη γραφική παράσταση;

Δραστηριότητα 3

Ο ποδηλάτης, ο οποίος όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα ερωτήματα διένυσε όλη τη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα 14,4 km/h, συνάντησε στο 3^ο χιλιόμετρο της προπόνησής του ένα μοτοσικλετιστή, ο οποίος είχε μόλις ξεκινήσει να οδηγεί τη μηχανή του. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης θέσης ($x(t)$) και του ποδηλάτη και του μοτοσικλετιστή σε σχέση με το χρόνο για το διάστημα 0-5s.

A) Σε ποια χρονική στιγμή προσπερνά ο μοτοσικλετιστής τον ποδηλάτη;

B) Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα του μοτοσικλετιστή στα χρονικά διαστήματα 1-2s, 1-1.5s και 1-1.25s.

Γ) Υπολογίστε την ταχύτητα που έχει ο ποδηλάτης τη χρονική στιγμή $t=1s$.

Δ) Προσπαθήστε να βρείτε την ταχύτητα του μοτοσικλετιστή τη χρονική στιγμή $t=1s$.

E) Ποια είναι η σχέση μεταξύ της ευθείας (ϵ) και της καμπύλης;