

Ανισότητες Hardy με πολλαπλές αποστάσεις

Αθανάσιος Ι. Ηλίας

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Ειδίκευση στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ιούλιος 2022



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επιβλέποντες

Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής

Ευαγγελία Κόττα - Αθανασιάδου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Γεράσιμος Μπαρμπάτης, Καθηγητής (**Επιβλέπων**)

Στους γονείς μου, Γιάννη και Κωνσταντίνα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη για την υπόδειξη του θέματος, την καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια του, αλλά και για τον προσωπικό χρόνο που αφιέρωσε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Απόστολο Γιαννόπουλο και την κ. Ευαγγελία Κόττα - Αθανασιάδου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάμε βελτιώσεις της ανισότητας Hardy οι οποίες περιλαμβάνουν διάφορες συναρτήσεις απόστασης. Δουλεύοντας στον πάνω ημίχωρο $\mathbb{R}_+^n$, παίρνουμε ανισότητες τύπου Hardy, οι οποίες περιλαμβάνουν σταθερά πολλαπλάσια του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης από γραμμικές πολλαπλότητες διαφορετικών διαστάσεων του συνόρου $\partial\mathbb{R}_+^n$. Στην πραγματικότητα ειμαστε σε θέση να δώσουμε μία πλήρη περιγραφή της δομής αυτού του τύπου των βελτιωμένων ανισοτήτων Hardy. Συγκεκριμένα, έχουμε μεγάλη ελευθερία στην επιλογή αυτών των σταθερών και θα δείξουμε ότι όλες οι διαμορφώσεις των σταθερών μας είναι, κατά μια φυσική έννοια, οι βέλτιστες.

Abstract

In this work we study improvements of Hardy's inequality that involve various distance functions. Working in the upper half-space $\mathbb{R}_+^n$, we obtain Hardy type inequalities that involve constant multiples of the inverse square of the distance to linear submanifolds of different codimensions of the boundary $\mathbb{R}_+^n$. Actually, we are able to give a complete description of the structure of this kind of improved Hardy inequalities. In particular, we have a lot of freedom in choosing these constants and we will show that all our configurations of constants are, in a natural sense, optimal.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
2	Ανισότητες Hardy στον Ημιχώρο	9
3	Βελτιωμένη Ανισότητα Hardy στον Ημιχώρο	17

1 Εισαγωγή

Ο Godfrey Harold Hardy (1877-1947) ήταν σημαντικός Άγγλος μαθηματικός γνωστός για την συμβολή του στην Θεωρία Αριθμών και την Ανάλυση.

Η ανισότητα Hardy αποτελεί κομμάτι των νεωτέρων μαθηματικών στον τομέα της μαθηματικής Ανάλυσης.

Η ιστορία των ανισοτήτων Hardy ξεκινά από το 1920 με την ανισότητα

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x) dx \quad 1 < p < \infty \quad (1.0.1)$$

για μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις f .

Ένα ανάλογο της (1.0.1) στον $\mathbb{R}^n$ είναι η

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \left| \frac{p}{p-n} \right|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \quad 1 < p < \infty \quad (1.0.2)$$

η οποία ισχύει για όλες τις συναρτήσεις $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ για $n < p < \infty$ και όλες τις $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ για $1 \leq p \leq n$.

Από τότε η (1.0.1) έχει γενικευτεί και τροποποιηθεί προς πολλές κατευθύνσεις εξαιτίας των πολλών εφαρμογών της, κυρίως στην θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Για $p = 2$ και με την υπόθεση ότι $\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x) dx = 1$ η (1.0.2) σχετίζεται με την

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{n}{2} \quad (1.0.3)$$

η οποία είναι η μαθηματική έκφραση της Αρχής Απροσδιοριστίας του Heisenberg στην Κβαντομηχανική, σύμφωνα με την οποία είναι αδύνατο να προσδιορίσουμε ταυτόχρονα και με ακρίβεια την θέση και την ορμή ενός σωματιδίου στον μικρόκοσμο.

Ο ίδιος ο Hardy στο βιβλίο του *A Mathematician's Apology* είχε εκφράσει την άποψη ότι "ένα θεώρημα για να είναι σημαντικό πρέπει να έχει γενικότητα και βάθος".

Μια εκδοχή της ανισότητας Hardy σε διάσταση $n \geq 2$ λέει ότι αν Ω είναι ένα φραγμένο κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο (τουλάχιστον τάξης C^2) τότε για κάθε $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{\delta^2} dx \quad (1.0.4)$$

όπου $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf\{|x - z| : z \in \partial\Omega\}$, $\forall x \in \Omega$ με την δύναμη $\frac{1}{\delta^2}$ να είναι η βέλτιστη και για αυτή τη δύναμη η σταθερά $\frac{1}{4}$ να είναι η καλύτερη δυνατή.

Έχουν υπάρξει αρκετές βελτιώσεις της (1.0.4). Για παράδειγμα οι Brezis και Marcus απέδειξαν ότι

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{\delta^2} dx + \frac{C}{\text{diam}^2(\Omega)} \int_{\Omega} |u|^2 dx. \quad (1.0.5)$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι βελτιώσεις της (1.0.4) στον πάνω ημίχωρο $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$, δηλαδή της

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{\delta^2} dx. \quad (1.0.6)$$

Στην περίπτωση αυτή η (1.0.5) δεν μπορεί να εφαρμοστεί διότι $\text{diam}(\mathbb{R}_+^n) = +\infty$.

Μια βελτίωση της (1.0.6) είναι αυτή του Maz'ya που αναφέρεται στο βιβλίο του "Sobolev Spaces"

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx + \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx. \quad (1.0.7)$$

Στο πρώτο μέρος της εργασίας αυτής αποδεικνύουμε την (1.0.6) και την (1.0.7) αλλά με την σταθερά $\frac{1}{8}$ αντί της $\frac{1}{16}$.

Στο δεύτερο και κύριο μέρος αποδεικνύουμε ανισότητες τύπου Hardy στον ημίχωρο $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ που περιλαμβάνουν αποστάσεις από διάφορες αφινικές υποπολλαπλότητες του συνόρου $\partial\mathbb{R}_+^n$.

2 Ανισότητες Hardy στον Ημιχώρο

Έστω Ω ένα μη κενό χωρίο του $\mathbb{R}^n$ που έχει μη κενό σύνορο $\partial\Omega$. Ορίζουμε ως συνάρτηση απόστασης την

$$\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf\{|x - z| : z \in \partial\Omega\}, \quad \forall x \in \Omega$$

Στην συνέχεια θα θεωρούμε σαν $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 > 0\}$ τον πάνω ημίχωρο και $\delta(x) = x_1$.

Θεώρημα 2.1. (Ανισότητα Hardy στον ημίχωρο) Έστω $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Τότε ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx \quad (2.1.1)$$

με την σταθερά $\frac{1}{4}$ να είναι η καλύτερη δυνατή.

Απόδειξη. Ισχύει

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \frac{u^2(t, x_2, x_3, \dots, x_n)}{t^2} dt \\ &= \int_0^{x_1} u^2(t, x_2, x_3, \dots, x_n) \left(-\frac{1}{t}\right)' dt \\ &= \left(-\frac{1}{t} u^2(t, x_2, x_3, \dots, x_n)\right) \Big|_0^{x_1} + \int_0^{x_1} 2u(t, x_2, x_3, \dots, x_n) u_{x_1}(t, x_2, x_3, \dots, x_n) \frac{1}{t} dt \\ &\stackrel{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}{\leq} 2 \int_0^{x_1} \frac{u(t, x_2, x_3, \dots, x_n)}{t} u_{x_1}(t, x_2, x_3, \dots, x_n) dt \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} 2 \left(\int_0^{x_1} \frac{u^2(t, x_2, x_3, \dots, x_n)}{t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{x_1} u_{x_1}^2(t, x_2, x_3, \dots, x_n) dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\int_0^{x_1} \frac{u^2(t, x_2, \dots, x_n)}{t^2} dt \leq 2 \left(\int_0^{x_1} \frac{u^2(t, x_2, \dots, x_n)}{t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{x_1} u_{x_1}^2(t, x_2, \dots, x_n) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Άρα

$$\left(\int_0^{x_1} \frac{u^2(t, x_2, \dots, x_n)}{t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\int_0^{x_1} u_{x_1}^2(t, x_2, \dots, x_n) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Επομένως

$$\int_0^{x_1} \frac{u^2(t, x_2, \dots, x_n)}{t^2} dt \leq 4 \int_0^{x_1} u_{x_1}^2(t, x_2, \dots, x_n) dt \quad (2.1.2)$$

Αφήνοντας το $x_1 \rightarrow +\infty$ και αλλάζοντας την μεταβλητή t σε x_1 παίρνουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1^2} dx_1 \leq 4 \int_0^{+\infty} u_{x_1}^2(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \quad (2.1.3)$$

Ολοκληρώνουμε την (2.1.3) από το $-\infty$ έως το $+\infty$ ως προς $x_2, x_3, \dots, x_n$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^2(x)}{x_1^2} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n \\ & \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_{x_1}^2(x) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2(x)}{x_1^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}_+^n} u_{x_1}^2(x) dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

Οπότε

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2(x)}{x_1^2} dx$$

□

Μια πρώτη βελτίωση της (2.1.1) που περιέχει δύο συναρτήσεις απόστασης είναι η

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2} dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx \quad (2.1.4)$$

Για να αποδείξουμε την (2.1.4) θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.2. Έστω Ω ένα χωρίο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η $\delta(x)$ να είναι $C^2(\Omega)$. Έστω $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ ένα διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^n$ με $F_1, F_2, \dots, F_n \in C^1(\Omega)$ και $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Τότε

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{\delta^2} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|u|^2 \Delta \delta}{\delta} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} |u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1 - |\nabla \delta - \delta \vec{F}|^2}{\delta^2} |u|^2 dx \quad (2.2.1)$$

Απόδειξη. Έστω $\vec{n}$ το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο του χωρίου Ω , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) |u(x)|^2 \right) dx - \int_{\Omega} 2u(x) \left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) \cdot \nabla u(x) dx \\ &= \int_{\partial \Omega} |u(x)|^2 \left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) \cdot \vec{n} dS(x) - \int_{\Omega} 2u(x) \left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) \cdot \nabla u(x) dx \\ &\stackrel{u \in C_0^\infty(\Omega)}{=} 2 \int_{\Omega} u(x) \left(\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right) \cdot \nabla u(x) dx \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) |u(x)|^2 dx \right|^2 \\
&= 4 \left| \int_{\Omega} u(x) \left(\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right) \cdot \nabla u(x) dx \right|^2 \\
&\leq 4 \left[\int_{\Omega} \left| u(x) \left(\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right) \cdot \nabla u(x) \right| dx \right]^2 \\
&\stackrel{C.S.}{\leq} 4 \left[\left(\int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&= 4 \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right|^2 |u(x)|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

Επομένως

$$4 \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right|^2 |u(x)|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) |u(x)|^2 dx \right|^2 \quad (2.2.2)$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(-\frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} + \vec{F}(x) \right) &= -\frac{\Delta \delta(x) \cdot \delta(x) - (\nabla \delta(x))^2}{(\delta(x))^2} + \operatorname{div} \vec{F}(x) \\
&= -\frac{\Delta \delta(x)}{\delta(x)} + \frac{|\nabla \delta(x)|^2}{\delta^2(x)} + \operatorname{div} \vec{F}(x) \\
&\stackrel{|\nabla \delta(x)|=1}{=} -\frac{\Delta \delta(x)}{\delta(x)} + \frac{1}{\delta^2(x)} + \operatorname{div} \vec{F}(x)
\end{aligned}$$

Οπότε η (2.2.2) γίνεται

$$4 \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right|^2 |u(x)|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \left| \int_{\Omega} \left(-\frac{\Delta \delta(x)}{\delta(x)} + \frac{1}{\delta^2(x)} + \operatorname{div} \vec{F}(x) \right) |u(x)|^2 dx \right|^2$$

Οπότε

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \frac{\left| \int_{\Omega} \left(-\frac{\Delta \delta(x)}{\delta(x)} + \frac{1}{\delta^2(x)} + \operatorname{div} \vec{F}(x) \right) |u(x)|^2 dx \right|^2}{\int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right|^2 |u(x)|^2 dx} \quad (2.2.3)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(A - B)^2 \geq 0 \Rightarrow A^2 - 2AB + B^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{|A|^2}{B} \geq 2A - B, \quad B > 0$$

η (2.2.3) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx &\geq \frac{1}{4} \left[2 \int_{\Omega} \left(-\frac{\Delta \delta(x)}{\delta(x)} + \frac{1}{\delta^2(x)} + \operatorname{div} \vec{F}(x) \right) |u(x)|^2 dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \delta(x)}{\delta(x)} - \vec{F}(x) \right|^2 |u(x)|^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\Delta \delta(x)}{\delta(x)} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x) |u(x)|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{\delta^2(x)} |\nabla \delta(x) - \delta(x) \vec{F}(x)|^2 |u(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\Delta \delta(x)}{\delta(x)} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x) |u(x)|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1 - |\nabla \delta(x) - \delta(x) \vec{F}(x)|^2}{\delta^2(x)} |u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.3. Έστω $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Τότε

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx \quad (2.3.1)$$

Απόδειξη. Στην σχέση (2.1.1) του Λήμματος 2.2 θεωρούμε $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, $\delta(x) = x_1$ οπότε $\nabla \delta(x) = (1, 0, 0, \dots, 0)$ και $\Delta \delta(x) = 0$

Έτσι η (2.2.1) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx &\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^n} \operatorname{div} \vec{F}(x) |u(x)|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1 - |\nabla \delta(x) - \delta(x) \vec{F}(x)|^2}{\delta^2(x)} |u(x)|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

1. Για

$$\vec{F}(x) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, 0, \dots, 0 \right),$$

βρίσκουμε

$$\operatorname{div} \vec{F}(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\left| \nabla \delta(x) - \delta(x) \vec{F}(x) \right|^2 &= \left| (1, 0, 0, \dots, 0) - \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, 0, \dots, 0 \right) \right|^2 \\
&= \left| \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, 0, \dots, 0 \right) \right|^2 = \frac{x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}
\end{aligned}$$

και

$$1 - |\nabla \delta(x) - \delta(x) \vec{F}(x)|^2 = 1 - \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.3.2) παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2} dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx \tag{2.3.3}$$

2. Για

$$\vec{F}(x) = \left(\frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, \dots, 0 \right), \alpha \geq 0,$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F}(x) &= -\frac{1}{2} \frac{2\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha}{x_1^2 + x_2^2} \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq -\frac{\alpha}{x_1^2 + x_2^2}
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\left| \nabla \delta(x) - \delta(x) \vec{F}(x) \right|^2 &= \left| (1, 0, \dots, 0) - \left(\frac{\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, \dots, 0 \right) \right|^2 \\
&= \left| \left(1 - \frac{\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, \dots, 0 \right) \right|^2 \\
&= \left(1 - \frac{\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \\
&= 1 - \frac{2\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha^2 x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}
\end{aligned}$$

και άρα

$$1 - \left| \nabla \delta(x) - \delta(x) \vec{F}(x) \right|^2 = \frac{2\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha^2 x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.3.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx &\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2} dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{x_1^2} \left(\frac{2\alpha x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha^2 x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)} \right) |u(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2} dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx - \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2} dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx - \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx$$

$\forall a \geq 0 \quad (2.3.4)$

3. Πολλαπλασιάζοντας την (2.3.3) με $\alpha^2 + 2\alpha$ και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στην (2.3.4) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
(\alpha^2 + 2\alpha + 1) \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx &\geq \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2} dx + \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx - \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1^2} dx + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)^2} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u(x)|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (2.3.5)$$

Η συνάρτηση $g(a) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)^2}$, $\alpha \geq 0$, έχει πρώτη παράγωγο $g'(a) = \frac{1-\alpha^2}{2(\alpha+1)^2}$ και παίρνει την μέγιστη τιμή της για $\alpha = 1$ την $g(1) = \frac{1}{8}$.
Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

□

3 Βελτιωμένη Ανισότητα Hardy στον Ημιχώρο

Λήμμα 3.1. 1. Έστω $\vec{F} \in C^1(\Omega)$. Τότε:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2) |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \quad (3.1.1)$$

2. Έστω $\phi > 0$, $\phi \in C^2(\Omega)$ και $u = \phi v$. Τότε:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega} \frac{\Delta \phi}{\phi} u^2 dx + \int_{\Omega} \phi^2 |\nabla v|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \quad (3.1.2)$$

Απόδειξη. 1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx &= \int_{\Omega} \left((\nabla u)^2 + 2 \nabla u \cdot \vec{F}u + (\vec{F}u)^2 \right) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \vec{F}u dx + \int_{\Omega} |\vec{F}u|^2 dx \end{aligned}$$

Οπότε

$$\int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \vec{F}u dx + \int_{\Omega} |\vec{F}u|^2 dx \quad (3.1.3)$$

Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \vec{F}u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cdot (F_1 u, F_2 u, \dots, F_n u) \\ &= \frac{1}{2} \left(F_1 \frac{\partial u^2}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + \dots + F_n \frac{\partial u^2}{\partial x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} (F_1, F_2, \dots, F_n) \cdot \left(\frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \frac{\partial u^2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \vec{F} \cdot \nabla u^2 \end{aligned}$$

Έτσι η (3.1.3) γίνεται:

$$\int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla u^2 dx + \int_{\Omega} |\vec{F}u|^2 dx \quad (3.1.4)$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla u^2 dx$ με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla u^2 dx = \int_{\Omega} \nabla(\vec{F}u^2) dx - \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div} \vec{F} dx = \int_{\partial\Omega} u^2 \vec{F} \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div} \vec{F} dx$$

και επειδή η u έχει συμπαγή φορέα $\int_{\partial\Omega} u^2 \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$. Άρα:

$$\int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla u^2 dx = - \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div} \vec{F} dx \quad (3.1.5)$$

Από τις (3.1.4), (3.1.5) παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx - \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla u^2 dx - \int_{\Omega} |\vec{F}|^2 |u|^2 dx$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 \operatorname{div} \vec{F} dx - \int_{\Omega} |\vec{F}|^2 |u|^2 dx$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2) |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

2. Θέτουμε στην (3.1.1) όπου $\vec{F} = -\frac{\nabla\phi}{\phi}$ $\phi > 0, \phi \in C^2(\Omega)$.

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{\phi}\right) = -\frac{\operatorname{div}(\nabla\phi)\phi - \nabla\phi \cdot \nabla\phi}{\phi^2} \\ &= -\frac{\phi\Delta\phi}{\phi^2} + \frac{(\nabla\phi)^2}{\phi^2} = -\frac{\Delta\phi}{\phi} + \frac{(\nabla\phi)^2}{\phi^2} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\frac{\Delta\phi}{\phi} + \frac{(\nabla\phi)^2}{\phi^2} \quad (3.1.6)$$

Ακόμη,

$$|\vec{F}|^2 = \left| -\frac{\nabla\phi}{\phi} \right|^2 = \frac{(\nabla\phi)^2}{\phi^2} \quad (3.1.7)$$

Από τις (3.1.6), (3.1.7) παίρνουμε ότι:

$$\operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2 = -\frac{\Delta\phi}{\phi} \quad (3.1.8)$$

Βρίσκουμε επιπλέον ότι:

$$|\nabla u + \vec{F}u| = |\nabla(\phi v) + (-\frac{\nabla\phi}{\phi})\phi v| = |\phi\nabla v + v\nabla\phi - \nabla\phi v| = |\phi\nabla v|$$

Άρα,

$$|\nabla u + \vec{F}u| = |\phi\nabla v| \quad (3.1.9)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.1.8), (3.1.9) στην (3.1.1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2) |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{-\Delta\phi}{\phi}\right) u^2 dx + \int_{\Omega} |\phi\nabla v|^2 dx \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega} \frac{\Delta\phi}{\phi} u^2 dx + \int_{\Omega} \phi^2 |\nabla v|^2 dx, \quad u = \phi v$$

□

Θεώρημα 3.2 (Βελτιωμένη Ανισότητα Hardy με πολλαπλές αποστάσεις). Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί και

$$\beta_1 = -\alpha_1^2 + \frac{1}{4}, \beta_2 = -\alpha_2^2 + (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2, \dots, \beta_m = -\alpha_m^2 + (\alpha_{m-1} - \frac{1}{2})^2, \quad m = 2, 3, \dots, n.$$

Τότε για οποιαδήποτε $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_1^2 + x_2^2} + \dots + \frac{\beta_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right) u^2 dx \quad (3.2.1)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (x_1, 0, \dots, 0), & |\vec{x}_1|^2 &= x_1^2 \\ \vec{x}_2 &= (x_1, x_2, 0, \dots, 0), & |\vec{x}_2|^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ &\vdots & &\vdots \\ \vec{x}_k &= (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0), & |\vec{x}_k|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \quad 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Έστω $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Αν θέσουμε $\phi = |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n}$, $\vec{F} = -\frac{\nabla \phi}{\phi}$ τότε έχουμε για $i \leq k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}_k|^{-\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}_k|^{2(-\frac{\gamma_k}{2})} = -\frac{\gamma_k}{2} |\vec{x}_k|^{2(-\frac{\gamma_k}{2}-1)} 2x_i = -\gamma_k |\vec{x}_k|^{-\gamma_k-2} x_i$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}_k|^{-\gamma_k} &= -\gamma_k |\vec{x}_k|^{-\gamma_k-2} x_i & 1 \leq i \leq k \\ \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}_k|^{-\gamma_k} &= 0 & k < i \leq n \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} (|\vec{x}_1|^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} \right) (|\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n}) + |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \right) \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n} + \dots + \\
&\quad + |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_1} |\vec{x}_n|^{-\gamma_n} \right) \\
&= -\gamma_1 |\vec{x}_1|^{-2} \phi x_1 - \gamma_2 |\vec{x}_2|^{-2} \phi x_1 \dots - \gamma_n |\vec{x}_n|^{-2} \phi x_1 \\
&= -\phi \left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) x_1 \\
\frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} (|\vec{x}_1|^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} \right) (|\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n}) + |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \right) \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n} + \dots + \\
&\quad + |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_2} |\vec{x}_n|^{-\gamma_n} \right) \\
&= |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} (-\gamma_2 |\vec{x}_2|^{-2} x_2) |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_n|^{-\gamma_n} + |\vec{x}_1|^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots (-\gamma_n |\vec{x}_n|^{-2} x_2) |\vec{x}_n|^{-\gamma_n} \\
&= \frac{-\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} \phi x_2 - \frac{\gamma_3}{|\vec{x}_3|^2} \phi x_2 \dots - \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \phi x_2 \\
&= -\phi \left(\frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \frac{\gamma_3}{|\vec{x}_3|^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) x_2
\end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x_3} &= -\phi \left(\frac{\gamma_3}{|\vec{x}_3|^2} + \frac{\gamma_4}{|\vec{x}_4|^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) x_3 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \phi}{\partial x_n} &= -\phi \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} x_n
\end{aligned}$$

Αρα,

$$\nabla\phi = \left(-\phi\left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}\right)x_1, -\phi\left(\frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \frac{\gamma_3}{|\vec{x}_3|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}\right)x_2, \cdots -\phi\frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}x_n \right)$$

και

$$\vec{F} = -\frac{\nabla\phi}{\phi} = \left(\left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}\right)x_1, \left(\frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \frac{\gamma_3}{|\vec{x}_3|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}\right)x_2, \dots, \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}x_n \right)$$

$$= \left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2}x_1, 0, \dots, 0 \right) + \left(\frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2}x_1, \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2}x_2, 0, \dots, 0 \right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\gamma_k}{|\vec{x}_k|^2}x_1, \frac{\gamma_k}{|\vec{x}_k|^2}x_2, \dots, \frac{\gamma_k}{|\vec{x}_k|^2}x_k, 0, \dots, 0 \right) + \cdots + \left(\frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}x_1, \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}x_2, \dots, \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}x_n \right)$$

$$= \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2}(x_1, 0, \dots, 0) + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2}(x_1, x_2, 0, \dots, 0) + \cdots + \frac{\gamma_k}{|\vec{x}_k|^2}(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

$$+ \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2}\vec{x}_1 + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2}\vec{x}_2 + \cdots + \frac{\gamma_k}{|\vec{x}_k|^2}\vec{x}_k + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}\vec{x}_n$$

$$= \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m}{|\vec{x}_m|^2}\vec{x}_m$$

Επομένως,

$$\vec{F} = \sum_{m=1}^n \gamma_m \frac{\vec{x}_m}{|\vec{x}_m|^2} \quad (3.2.2)$$

Γράφουμε την $\vec{F}$ πάλι στην μορφή.

$$\vec{F} = \left(\left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}\right)x_1, \left(\frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \frac{\gamma_3}{|\vec{x}_3|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}\right)x_2, \dots, \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2}x_n \right)$$

$$= (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

Έχουμε

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}_k|^{-2} = \frac{\partial}{\partial x_i} (|\vec{x}_k|^2)^{-1} = -(|\vec{x}_k|^2)^{-2} 2x_i = -2 \frac{x_i}{|\vec{x}_k|^4} \quad \text{για } i \leq k$$

Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) x_1 \right) \\ &= \left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} |\vec{x}_1|^{-2} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_1} |\vec{x}_2|^{-2} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial}{\partial x_1} |\vec{x}_n|^{-2} + \right) x_1 + \\ &\quad + \left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) \\ &= \left(-2 \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^4} - 2 \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^4} - \cdots - 2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} \right) x_1^2 + \left(\frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) \end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} &= \left(-2 \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^4} - 2 \frac{\gamma_3}{|\vec{x}_3|^4} - \cdots - 2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} \right) x_2^2 + \left(\frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_n} &= -2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} x_n^2 + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \\
&= -2 \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^4} x_1^2 - 2 \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^4} x_2^2 - \cdots - 2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} x_n^2 + \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \\
&\quad - 2 \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^4} x_2^2 - \cdots - 2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} x_n^2 + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad - 2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} x_n^2 + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \\
&= -2 \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^4} x_1^2 - 2 \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^4} (x_1^2 + x_2^2) - \cdots - 2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \\
&\quad + \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{2\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{n\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \\
&= -2 \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^4} |\vec{x}_1|^2 - 2 \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^4} |\vec{x}_2|^2 - \cdots - 2 \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^4} |\vec{x}_n|^2 + \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{2\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{n\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \\
&= (1-2) \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} + (2-2) \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + (n-2) \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \\
&= \sum_{m=1}^n \frac{(m-2)\gamma_m}{|\vec{x}_m|^2}
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_{m=1}^n \frac{(m-2)\gamma_m}{|\vec{x}_m|^2} \quad (3.2.3)$$

Επιπλέον ισχύει

$$\vec{F} = \sum_{m=1}^n \gamma_m \frac{\vec{x}_m}{|\vec{x}_m|^2} = \frac{\gamma_1}{|\vec{x}_1|^2} \vec{x}_1 + \frac{\gamma_2}{|\vec{x}_2|^2} \vec{x}_2 + \cdots + \frac{\gamma_n}{|\vec{x}_n|^2} \vec{x}_n$$

Τότε

$$|\vec{F}|^2 = \frac{\gamma_1^2}{|\vec{x}_1|^4} \vec{x}_1^2 + \frac{\gamma_2^2}{|\vec{x}_2|^4} \vec{x}_2^2 + \cdots + \frac{\gamma_n^2}{|\vec{x}_n|^4} \vec{x}_n^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\gamma_i \gamma_j \vec{x}_i \vec{x}_j}{|\vec{x}_i|^2 |\vec{x}_j|^2}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 &= x_1^2 = |\vec{x}_1|^2, & \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_3 &= x_1^2 = |\vec{x}_1|^2, & \dots & \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_n = |x_1|^2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 &= x_1^2 + x_2^2 = |\vec{x}_2|^2, & \dots & \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_n = |\vec{x}_2|^2 \\ &\vdots \\ \vec{x}_k \cdot \vec{x}_{k+1} &= |\vec{x}_k|^2, & \dots & \vec{x}_k \cdot \vec{x}_n = |\vec{x}_k|^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = |\vec{x}_i|^2, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

Επομένως

$$|\vec{F}|^2 = \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m^2}{|\vec{x}_m|^2} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\gamma_i \gamma_j}{|\vec{x}_j|^2}$$

$$|\vec{F}|^2 = \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m^2}{|\vec{x}_m|^2} + 2 \sum_{m=1}^n \sum_{j=m+1}^n \frac{\gamma_m \gamma_j}{|\vec{x}_j|^2} \quad (3.2.4)$$

Ισχύει ότι $1 \leq m \leq n$, $m+1 \leq j \leq n$, $m \leq j-1 \leq n$

Έτσι,

$$\sum_{m=1}^n \sum_{j=m+1}^n \frac{\gamma_m \gamma_j}{|\vec{x}_j|^2} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{j-1} \frac{\gamma_m \gamma_j}{|\vec{x}_j|^2}$$

και με εναλλαγή $m \leftrightarrow j$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{j=m+1}^n \frac{\gamma_m \gamma_j}{|\vec{x}_j|^2} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\gamma_j \gamma_m}{|\vec{x}_m|^2}$$

Έτσι η (3.2.4) γίνεται

$$|\vec{F}|^2 = \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m^2}{|\vec{x}_m|^2} + 2 \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\gamma_j \gamma_m}{|\vec{x}_m|^2} \quad (3.2.5)$$

Βρίσκουμε

$$-\Delta\phi = -\operatorname{div}(\nabla\phi) = -\operatorname{div}(-\phi\vec{F}) = \operatorname{div}(\phi\vec{F}) = \nabla\phi \cdot \vec{F} + \phi\operatorname{div}\vec{F} = -\phi\vec{F} \cdot \vec{F} + \phi\operatorname{div}\vec{F}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta\phi}{\phi} &= \operatorname{div}\vec{F} - |\vec{F}|^2 \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m(m-2)}{|\vec{x}_m|^2} - \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m^2}{|\vec{x}_m|^2} - 2 \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\gamma_m \gamma_j}{|\vec{x}_m|^2} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m(m-2)}{|\vec{x}_m|^2} - \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m^2}{|\vec{x}_m|^2} - 2 \sum_{m=1}^n \left(\frac{\gamma_m}{|\vec{x}_m|^2} \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j \right) \end{aligned}$$

Άρα

$$-\frac{\Delta\phi}{\phi} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{|\vec{x}_m|^2} (-\gamma_m) \left[(2-m) + \gamma_m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j \right] \quad m = 2 \dots n$$

Αν θέσουμε

$$\beta_1 = -\gamma_1(1 + \gamma_1) \quad \text{και} \quad \beta_m = -\gamma_m \left[(2 - m) + \gamma_m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j \right] \quad m = 2 \dots n$$

τότε

$$-\frac{\Delta\phi}{\phi} = \operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2 = \sum_{m=1}^n \frac{\beta_m}{|\vec{x}_m|^2}$$

και αν επιλέξουμε

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_1 - \frac{1}{2} \\ \gamma_2 &= a_2 - \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) \\ &\vdots \\ \gamma_m &= a_m - \left(a_{m-1} - \frac{1}{2}\right) \quad m = 2, \dots, n \end{aligned}$$

Τότε

$$\beta_1 = -(a_1 - \frac{1}{2})(a_1 + \frac{1}{2}) = -a_1^2 + \frac{1}{4}$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= a_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= a_3 + \frac{1}{2} \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 &= a_4 + 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επαγωγικά παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j = a_{m-1} + (m-3)\frac{1}{2} \quad m \geq 2$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\beta_m &= -\gamma_m(2 - m + \gamma_m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j) \\
&= -(a_m - a_{m-1} + \frac{1}{2})(2 - m + a_m - a_{m-1} + \frac{1}{2} + 2(a_{m-1} + \frac{1}{2}(m - 3))) \\
&= -(a_m - a_{m-1} + \frac{1}{2})(2 - m + a_m - a_{m-1} + \frac{1}{2} + (2a_{m-1} + m - 3)) \\
&= -(a_m - a_{m-1} + \frac{1}{2})(a_m + a_{m-1} - \frac{1}{2}) \\
&= -(a_m - (a_{m-1} - \frac{1}{2}))(a_m + (a_{m-1} - \frac{1}{2})) \\
&= -a_m^2 + (a_{m-1} - \frac{1}{2})^2
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2 &= \frac{\beta_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\beta_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\beta_n}{|\vec{x}_n|^2} \\
\text{όπου } \beta_1 &= -a_1^2 + \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \beta_m = -a_m^2 + (a_{m-1} - \frac{1}{2})^2 \quad \text{για } m \geq 2
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Από την σχέση (3.1.1) του Λήμματος 3.1 ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} (\operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2) |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u + \vec{F}u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} (\operatorname{div} \vec{F} - |\vec{F}|^2) |\vec{u}|^2 dx$$

Και από την σχέση (3.2.6) παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\beta_1}{|\vec{x}_1|^2} + \frac{\beta_2}{|\vec{x}_2|^2} + \cdots + \frac{\beta_n}{|\vec{x}_n|^2} \right) u^2 dx$$

$\mathbb{A}\rho\alpha,$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \right) u^2 dx$$

$$\begin{aligned} \mu\varepsilon \quad \beta_1 &= -a_1^2 + \frac{1}{4} \\ \beta_2 &= -a_2 + (a_1 - \frac{1}{2})^2 \\ &\vdots \\ \beta_m &= -a_m^2 + (a_{m-1} - \frac{1}{2})^2 \quad m \geq 2 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

□

Παρατήρηση 1. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι για οποιαδήποτε επιλογή από n πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$ μπορούμε να βρούμε n μη θετικούς αριθμούς $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ που δίνουν τις ίδιες σταθερές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι μη θετικοί.

Στο παραπάνω θεώρημα έχουμε μεγάλη ελευθερία. Μπορούμε να επιλέξουμε τα γ_i με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, όπου κάθε επιλογή δίνει μια διαφορετική ανισότητα. Μπορούμε για παράδειγμα να μεγιστοποιήσουμε πρώτα το β_1 και μετά το β_2 και ούτω καθεξής.

Γενικότερα μπορούμε να θέσουμε τα πρώτα $m - 1$ β_j ίσα με το μηδέν και μετά να μεγιστοποιήσουμε τα β_m με αυξανόμενη σειρά και να πάρουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1. Έστω $k = 1, 2, \dots, n$. Τότε $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{k^2}{4} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2} + \dots + \frac{1}{4} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right) u^2 dx,$$

Απόδειξη. Για $k = 1$ αντικαθιστούμε στην (3.2.7) $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Σε αυτή την περίπτωση όλα τα β_k είναι ίσα με $\frac{1}{4}$.

Για $k > 1$ αντικαθιστούμε στην (3.2.7) $a_m = -\frac{m}{2}$ για $m = 1, 2, \dots, k - 1$ και $a_m = 0$ για $m = k, k + 1, \dots, n$, οπότε:

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = 0, \beta_k = \frac{k^2}{4} \text{ και } \beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \dots = \beta_n = \frac{1}{4}$$

□

Θεώρημα 3.3 (Βελτιωμένη Ανισότητα Hardy, αντίστροφο). Υποθέτουμε ότι για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ισχύει η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_1^2 + x_2^2} + \dots + \frac{\beta_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right) u^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

Τότε υπάρχουν μη θετικοί αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ τέτοιοι ώστε:

$$\beta_1 = -a_1^2 + \frac{1}{4}, \beta_2 = -a_2^2 + (a_1 - \frac{1}{2})^2, \dots, \beta_m = -a_m^2 + (a_{m-1} - \frac{1}{2})^2, \quad 2 \leq m \leq n$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $\beta_1 \leq \frac{1}{4}$, οπότε $\beta_1 = -a_1^2 + \frac{1}{4}$ για κατάλληλο $a_1 \leq 0$.

Για το β_1 αυτό θα δείξουμε ότι $\beta_2 = -a_2^2 + (a_1 - \frac{1}{2})^2$ για κατάλληλο $a_2 \leq 0$ και ούτω καθεξής.

1. Θα αποδείξουμε πρώτα την εκτίμηση για το β_1 . Για τον σκοπό αυτό θέτουμε:

$$Q_1[u] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - \sum_{i=2}^n \beta_i \frac{u^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2}{x_1^2} dx}$$

Ισχύει $\beta_1 \leq \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} Q_1[u]$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} Q_1[u] \leq \frac{1}{4}$.

Ορίζουμε την εξής οικογένεια συναρτήσεων αποκοπής.

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} 0, & t < \epsilon_j^2 \\ 1 - \frac{\ln \frac{t}{\epsilon_j^2}}{\ln \epsilon_j}, & \epsilon_j^2 \leq t < \epsilon_j \\ 1, & t \geq \epsilon_j \end{cases}$$

$$h_j(x) = \varphi_j(x) = \varphi_j(|\vec{x}_j|), \quad r_j = |\vec{x}_j| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_j^2}.$$

Άρα,

$$h_j(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\vec{x}_j| < \epsilon_j^2 \\ 1 - \frac{\ln \frac{|\vec{x}_j|}{\epsilon_j^2}}{\ln \epsilon_j}, & \epsilon_j^2 \leq |\vec{x}_j| < \epsilon_j \\ 1, & |\vec{x}_j| \geq \epsilon_j \end{cases}$$

$$\frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{για } i > j$$

$$\frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\ln \epsilon_j} \frac{1}{|\vec{x}_j|} \frac{1}{\epsilon_j} \frac{1}{2|\vec{x}_j|} 2x_i = -\frac{1}{\ln \epsilon_j} \frac{1}{|\vec{x}_j|^2} x_i \quad \text{για } 1 \leq i \leq j$$

Αρα,

$$\begin{aligned}\nabla h_j(x) &= -\frac{1}{\ln \epsilon_j} \frac{1}{|\vec{x}_j|^2} (x_1, x_2, \dots, x_j, 0, \dots, 0) \\ |\nabla h_j(x)|^2 &= \frac{1}{\ln^2 \epsilon_j} \frac{|\vec{x}_j|^2}{|\vec{x}_j|^4} = \frac{1}{\ln^2 \epsilon_j} \frac{1}{|\vec{x}_j|^2}\end{aligned}$$

Οπότε,

$$|\nabla h_j(x)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{\ln^2 \epsilon_j} \frac{1}{|\vec{x}_j|^2}, & \epsilon_j^2 \leq |\vec{x}_j| \leq \epsilon_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θεωρούμε ακτινικά συμμετρική συνάρτηση $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $0 \leq \phi(x) \leq 1$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Θεωρούμε ακόμη την οικογένεια συναρτήσεων $u_1(x) = x_1^{\frac{1}{2}} h_1(x) \phi(x)$, $x_1 > 0$ και θα αποδείξουμε ότι καθώς $\epsilon_1 \rightarrow 0$

$$Q_1[u_1] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_1|^2 dx - \sum_{i=2}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2}{x_1^2} dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_1|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2}{x_1^2} dx} + o(1)$$

Εξετάζουμε αρχικά την συμπεριφορά του παρονομαστή. Έχουμε:

$$\frac{u_1^2(x)}{x_1^2} = \frac{x_1 h_1^2(x) \phi^2(x)}{x_1^2} = x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x_1 < \epsilon_1^2 \\ x_1^{-1} (1 - \frac{\ln \frac{x_1}{\epsilon_1}}{\ln \epsilon_1})^2, & \epsilon_1^2 \leq x_1 \leq \epsilon_1 \\ x_1^{-1}, & \epsilon_1 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Επίσης ορίζουμε $B_R^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R, x_1 > 0\}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2(x)}{x_1^2} dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) dx \geq \int_{B_{\frac{1}{2}}^+} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) dx \\
&= \int_{B_{\frac{1}{2}}^+} x_1^{-1} h_1^2(x) dx = \int_{B_{\frac{1}{2}}^+} (x_1^{-1} h_1^2(x) dx_1) dx_2 \dots dx_n \\
&= C \int_{\epsilon_1^2}^{\frac{1}{2}} x_1^{-1} h_1^2(x) dx_1 \\
&= C \left[\int_{\epsilon_1^2}^{\epsilon_1} x_1^{-1} \left(1 - \frac{\ln \frac{x_1}{\epsilon_1}}{\ln \epsilon_1}\right)^2 dx_1 + \int_{\epsilon_1}^{\frac{1}{2}} x_1^{-1} dx_1 \right] \\
&> C \int_{\epsilon_1}^{\frac{1}{2}} x_1^{-1} dx > -C \ln \epsilon_1
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2}{x_1^2} dx} < -\frac{1}{C \ln \epsilon_1} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } \epsilon_1 \rightarrow 0^+$$

Επιπλέον οι όροι $\sum_{i=2}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2} dx$ του αριθμητή από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue είναι φραγμένοι καθώς $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$

Συνεπώς πράγματι,

$$Q_1[u_1] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_1|^2 dx - \sum_{i=2}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2}{x_1^2} dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_1|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2}{x_1^2} dx} + o(1)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τον όρο κλίσης

$$\nabla u_1(x) = \nabla(x_1^{\frac{1}{2}} h_1(x) \phi(x)) = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} h_1(x) \phi(x) + x_1^{\frac{1}{2}} \nabla h_1(x) \phi(x) + x_1^{\frac{1}{2}} h_1(x) \nabla \phi(x)$$

$$|\nabla u_1(x)|^2 = \frac{1}{4} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) + x_1 |\nabla h_1(x)|^2 \phi^2(x) + x_1 h_1^2(x) |\nabla \phi(x)|^2 + \text{μικτοί όροι}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_1(x)|^2 dx &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1 |\nabla h_1(x)|^2 \phi^2(x) dx + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1 h_1^2(x) |\nabla \phi(x)|^2 dx + \text{μικτοί όροι} \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι ίσο με τον παρονομαστή.

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) dx > -C \ln \epsilon_1$$

επομένως τείνει στο άπειρο καθώς $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1 |\nabla h_1(x)|^2 \phi^2(x) dx &\leq C \int_{B_1^+} x_1 |\nabla h_1(x)|^2 dx = C \int_{B_1^+} x_1 |\nabla h_1(x)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &\leq C \int_{\epsilon_1^2}^{\epsilon_1} x_1 \frac{1}{\ln^2 \epsilon_1} \frac{1}{x_1^2} dx_1 = C \frac{1}{\ln^2 \epsilon_1} \int_{\epsilon_1^2}^{\epsilon_1} x_1^{-1} dx_1 = \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} (-\ln \epsilon_1) = -\frac{C}{\ln \epsilon_1} \end{aligned}$$

Επειδή $|\nabla \phi| \leq C_1$ το τρίτο ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1 h_1^2(x) |\nabla \phi(x)|^2 dx \leq C_1 \int_{B_1^+} x_1 h_1^2(x) dx \leq C_2$$

δηλαδή είναι φραγμένο.

Οι μικτοί όροι με χρήση της ανισότητας *Cauchy-Schwarz* εκτιμώνται από τα τρία παραπάνω ολοκληρώματα και είναι της τάξης $o(-\ln \epsilon_1)$ καθώς $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$

Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_1(x)|^2 dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) dx + o(-\ln \epsilon_1)$$

και

$$Q_1[u_1] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_1|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_1^2}{x_1^2} dx} + o(1) = \frac{\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) dx + o(-\ln \epsilon_1)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-1} h_1^2(x) \phi^2(x) dx} + o(1)$$

και καθώς $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$, $Q_1[u_1] = \frac{1}{4} + o(1)$

Επομένως $\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} Q_1[u] \leq \frac{1}{4}$, οπότε υπάρχει μη θετική σταθερά a_1 τέτοια ώστε $\beta_1 = -a_1^2 + \frac{1}{4}$.

Θέτουμε επίσης $\gamma_1 = a_1 - \frac{1}{2}$.

2. Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\beta_2 \leq (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2$. Για τον λόγο αυτό θέτουμε

$$Q_2[u] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - (\frac{1}{4} - \alpha_1^2) \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2}{x_1^2} dx - \sum_{i=3}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2}{|\vec{x}_i|^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2}{|\vec{x}_2|^2} dx} \quad (3.3.1)$$

και θα αποδείξουμε ότι

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} Q_2[u] \leq (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2$$

Θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων

$$\begin{aligned} u_{1,2}(x) &= x_1^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{a_1 - \frac{1}{2}} h_1(x) h_2(x) \phi(x) = x_1^{-\gamma_1} v_{1,2}(x) \\ \text{όπου } v_{1,2}(x) &= |\vec{x}_2|^{a_1 - \frac{1}{2}} h_1(x) h_2(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Τότε

$$Q_2[u_{1,2}] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_{1,2}(x)|^2 dx - (\frac{1}{4} - \alpha_1^2) \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,2}^2(x)}{x_1^2} dx - \sum_{i=3}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,2}^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,2}^2(x)}{|\vec{x}_2|^2} dx}$$

και αντικαθιστώντας την $u_{1,2}(x)$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,2}^2(x)}{|\vec{x}_2|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x_1^{-2\gamma_1}}{|\vec{x}_2|^2} v_{1,2}^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{1,2}^2(x) dx, \\ \sum_{i=3}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,2}^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx &= \sum_{i=3}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,2}^2(x) dx \end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} u_{1,2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{-\gamma_1} v_{1,2}(x)) = -\gamma_1 x_1^{-\gamma_1-1} v_{1,2}(x) + x_1^{-\gamma_1} \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u_{1,2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^{-\gamma_1} v_{1,2}(x)) = x_1^{-\gamma_1} \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} u_{1,2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_n} (x_1^{-\gamma_1} v_{1,2}(x)) = x_1^{-\gamma_1} \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_n} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\nabla u_{1,2}(x) &= \left(-\gamma_1 x_1^{-\gamma_1-1} v_{1,2}(x) + x_1^{-\gamma_1} \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1}, x_1^{-\gamma_1} \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_2}, \dots, x_1^{-\gamma_1} \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_n} \right) \\
&= \left(-\gamma_1 x_1^{-\gamma_1-1} v_{1,2}(x), 0, \dots, 0 \right) + x_1^{-\gamma_1} \left(\frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_n} \right) \\
&= \left(-\gamma_1 x_1^{-\gamma_1-1} v_{1,2}(x), 0, \dots, 0 \right) + x_1^{-\gamma_1} \nabla v_{1,2}(x)
\end{aligned}$$

και

$$|\nabla u_{1,2}(x)|^2 = \gamma_1^2 x_1^{-2\gamma_1-2} v_{1,2}^2(x) + x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 - 2\gamma_1 x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}(x) \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_{1,2}(x)|^2 dx - \left(\frac{1}{4} - a_1^2 \right) \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,2}^2(x)}{x_1^2} dx \\
&= \gamma_1^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-2} v_{1,2}^2(x) dx - 2\gamma_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}(x) \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx - (-\gamma_1^2 - \gamma_1) \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-2} v_{1,2}^2(x) dx \\
&= (2\gamma_1^2 + \gamma_1) \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-2} v_{1,2}^2(x) dx - 2\gamma_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}(x) \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx \\
&= -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{-2\gamma_1-1}) v_{1,2}^2(x) dx - 2\gamma_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}(x) \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}^2(x)) dx + 2\gamma_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}(x) \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1} dx \\
&\quad - 2\gamma_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}(x) \frac{\partial v_{1,2}(x)}{\partial x_1} dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx \\
&= -\gamma_1 \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1-1} v_{1,2}^2(x) (\vec{n} \cdot \vec{e}_1) dS(x) + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx, \quad \text{εφόσον } v_{1,2}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$Q_2[u_{1,2}] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx - \sum_{i=3}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,2}^2(x) dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{1,2}^2(x) dx} \quad (3.3.3)$$

Ισχύει,

$$v_{1,2}(x) = |x_2|^{a_1 - \frac{1}{2}} h_1(x) h_2(x) \phi(x), \quad a_1 - \frac{1}{2} = \gamma_1$$

όπου,

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= \begin{cases} 0, & 0 < x_1 < \epsilon_1^2 \\ 1 - \frac{\ln \frac{x_1}{\epsilon_1}}{\ln \epsilon_1}, & \epsilon_1^2 \leq x_1 \leq \epsilon_1 \\ 1, & x_1 \geq \epsilon_1 \end{cases} \\
|\nabla h_1(x)|^2 &= \begin{cases} \frac{1}{\ln^2 \epsilon_1} \frac{1}{x_1^2}, & \epsilon_1^2 \leq x_1 \leq \epsilon_1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\
h_2(x) &= \begin{cases} 0, & 0 < |\vec{x}_2| \leq \epsilon_2^2 \\ 1 - \frac{\ln \frac{|\vec{x}_2|}{\epsilon_2}}{\ln \epsilon_2}, & \epsilon_2^2 \leq |\vec{x}_2| \leq \epsilon_2 \\ 1, & |\vec{x}_2| > \epsilon_2 \end{cases} \\
|\nabla h_2(x)|^2 &= \begin{cases} \frac{1}{\ln^2 \epsilon_2} \frac{1}{|\vec{x}_2|^2}, & \epsilon_2^2 \leq |\vec{x}_2| \leq \epsilon_2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τον κάθε όρο του παραπάνω κλάσματος.

Έτσι για τον παρονομαστή έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{1,2}^2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{1-2\alpha_1} (x_1^2 + x_2^2)^{-1} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha_1 - \frac{1}{2}} h_1^2(x) h_2^2(x) \phi^2(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{1-2\alpha_1} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha_1 - \frac{3}{2}} h_1^2(x) h_2^2(x) \phi^2(x) dx
\end{aligned}$$

Επειδή καθώς $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$ ισχύει $h_1(x) \rightarrow 1$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{0,2}^2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{1-2\alpha_1} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha_1 - \frac{3}{2}} h_2^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\geq \int_{B_{\frac{1}{2}}^+} x_1^{1-2\alpha_1} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha_1 - \frac{3}{2}} h_2^2(x) dx \\
&= \int_{B_{\frac{1}{2}}^+} x_1^{1-2\alpha_1} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha_1 - \frac{3}{2}} h_2^2(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
&\geq C \int_{\epsilon_2 \leq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}} x_1^{1-2\alpha_1} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha_1 - \frac{3}{2}} dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες.

Θέτουμε $x_1 = r \sin \theta$, $x_2 = r \cos \theta$, $0 \leq \theta < \pi$ οπότε $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{0,2}^2(x) dx &\geq C \int_0^\pi \int_{\epsilon_2}^{\frac{1}{2}} r^{1-2\alpha_1} (\sin \theta)^{1-2\alpha_1} r^{2(\alpha_1 - \frac{3}{2})} r dr d\theta \\
&= C \int_0^\pi \int_{\epsilon_2}^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^{1-2\alpha_1} r^{-1} dr d\theta \stackrel{\alpha_1 \leq 0}{\geq} C \int_{\epsilon_2}^{\frac{1}{2}} r^{-1} dr \geq -C \ln \epsilon_2
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{0,2}^2(x) dx \geq -C \ln \epsilon_2 \quad (3.3.4)$$

Οι όροι του αριθμητή που είναι πολλαπλασιασμένοι με τα β_i είναι φραγμένοι, καθώς τα ϵ_1 ή ϵ_2 τείνουν στο μηδεν.

Ακόμη

$$\begin{aligned}\nabla v_{1,2}(x) &= \nabla(|\vec{x}_2|^{\alpha_1 - \frac{1}{2}})h_1(x)h_2(x)\phi(x) + |\vec{x}_2|^{\alpha_1 - \frac{1}{2}}\nabla(h_1(x)h_2(x))\phi(x) \\ &\quad + |\vec{x}_2|^{\alpha_1 - \frac{1}{2}}h_1(x)h_2(x)\nabla\phi(x) \\ &= (\alpha_1 - \frac{1}{2})|\vec{x}_2|^{\alpha_1 - \frac{5}{2}}\vec{x}_2h_1(x)h_2(x)\phi(x) + |\vec{x}_2|^{\alpha_1 - \frac{1}{2}}\nabla(h_1(x)h_2(x))\phi(x) \\ &\quad + |\vec{x}_2|^{\alpha_1 - \frac{1}{2}}h_1(x)h_2(x)\nabla\phi(x)\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}|\nabla v_{1,2}(x)|^2 &= (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2|\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 3}h_1^2(x)h_2^2(x)\phi^2(x) + |\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 1}|\nabla(h_1(x)h_2(x))|^2\phi^2(x) \\ &\quad + |\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 1}h_1^2(x)h_2^2(x)|\nabla\phi(x)|^2 + \text{μικτοί όροι}\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1}|\nabla v_{1,2}|^2 dx &= (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1}|\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 3}h_1^2(x)h_2^2(x)\phi^2(x)dx + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1}|\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 1}|\nabla(h_1(x)h_2(x))|^2\phi^2(x)dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1}|\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 1}h_1^2(x)h_2^2(x)|\nabla\phi(x)|^2 dx + \text{μικτοί όροι}\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1}|\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 3}h_1^2(x)h_2^2(x)\phi^2(x)dx$$

είναι ίσο με τον παρονομαστή που υπολογίσαμε παραπάνω (3.3.4).

Επειδή $|\nabla\phi(x)| \leq C_1$ το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1}|\vec{x}_2|^{2\alpha_1 - 1}h_1^2(x)h_2^2(x)|\nabla\phi(x)|^2 dx$$

είναι φραγμένο όσο μικρά και αν είναι τα ϵ_1, ϵ_2 .

Τέλος για το ολοκλήρωμα

$$M[v_{1,2}] = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla(h_1(x)h_2(x))|^2 \phi^2(x) dx$$

έχουμε

$$\begin{aligned} M[v_{1,2}] &= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla h_1(x)h_2(x) + \nabla h_2(x)h_1(x)|^2 \phi^2(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla h_1(x)|^2 h_2^2(x) \phi^2(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla h_2(x)|^2 h_1^2(x) \phi^2(x) dx + \text{μικτοί όροι} \\ &= I_1 + I_2 + \text{μικτοί όροι} \end{aligned}$$

Έτσι

$$M[v_{1,2}] = I_1 + I_2 + \text{μικτοί όροι} \quad (3.3.6)$$

Ισχύει

$$|\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} \cdot h_2^2(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha_1-\frac{1}{2}} h_2^2(x) \leq C_{\epsilon_2}, \quad 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$$

Οπότε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla h_1(x)|^2 h_2^2(x) \phi^2(x) dx \\ &\leq C \int_{B_1^+} x_1^{-2(\alpha_1-\frac{1}{2})} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} h_2^2(x) |\nabla h_1(x)|^2 dx \leq C_{\epsilon_2} \int_{B_1^+} x_1^{1-2\alpha_1} |\nabla h_1(x)|^2 dx \\ &= C_{\epsilon_2} \int_{B_1^+} x_1^{1-2\alpha_1} |\nabla h_1(x)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq C \int_{\epsilon_1^2}^{\epsilon_1} x_1^{1-2\alpha_1} \frac{1}{\ln^2 \epsilon_1} \frac{1}{x_1^2} dx_1 \\ &= \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} \int_{\epsilon_1^2}^{\epsilon_1} x_1^{-1-2\alpha_1} dx_1 \stackrel{\alpha_1 \leq 0}{\leq} \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} \int_{\epsilon_1^2}^{\epsilon_1} x_1^{-1} dx_1 = -\frac{C}{\ln \epsilon_1} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$I_1 \leq -\frac{C}{\ln \epsilon_1}, \quad \epsilon_1 \rightarrow 0^+ \quad (3.3.7)$$

Επίσης

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla h_2(x)|^2 h_1^2(x) \phi^2(x) dx$$

και επειδή $h_1^2(x) \leq 1$ για κάθε ϵ_1 αρκετά μικρό,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla h_2(x)|^2 \phi^2(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} |\vec{x}_2|^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{2\alpha_1-1} |\nabla h_2(x)|^2 \phi^2(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} |\vec{x}_2|^{1-2\alpha_1+2\alpha_1-1} |\nabla h_2(x)|^2 \phi^2(x) dx \leq C \int_{B_1^+} |\nabla h_2(x)|^2 dx \\ &= C \int_{B_1^+} |\nabla h_2(x)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq \frac{C}{\ln^2 \epsilon_2} \int_{\epsilon_2^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_2} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{C}{\ln^2 \epsilon_2} \int_0^\pi \int_{\epsilon_2^2}^{\epsilon_2} \frac{1}{r^2} r dr d\theta \leq \frac{C}{\ln^2 \epsilon_2} \int_{\epsilon_2^2}^{\epsilon_2} r^{-1} dr \\ &= -\frac{C}{\ln \epsilon_2} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$I_2 \leq -\frac{C}{\ln \epsilon_2} \quad \text{καθώς } \epsilon_2 \rightarrow 0^+ \quad (3.3.8)$$

Από (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8)

$$M[v_{0,2}] = o(1) \quad \text{καθώς } \epsilon_2 \rightarrow 0^+$$

Έτσι καθώς $\epsilon_2 \rightarrow 0^+$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\nabla v_{1,2}(x)|^2 dx = (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{1,2}^2(x) dx + o(-\ln \epsilon_2)$$

Επομένως

$$Q_2[u_{0,2}] = \frac{(\alpha_1 - \frac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{0,2}^2(x) dx + o(-\ln \epsilon_2)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-2\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2} v_{0,2}^2(x) dx} + o(1) \quad (3.3.9)$$

$$Q_2[u_{0,2}] = (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2 + o(1) \quad \text{καθώς } \epsilon_2 \rightarrow 0^+$$

Συνεπώς $\beta_2 \leq (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2$.

Άρα υπάρχει $\alpha_2 \leq 0$ τέτοιο ώστε $\beta_2 = -\alpha_2^2 + (\alpha_1 - \frac{1}{2})^2$.

Θέτουμε επίσης $\gamma_2 = \alpha_2 - (\alpha_1 - \frac{1}{2}) = \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{1}{2}$

3. Το επαγωγικό βήμα

Στο $(q-1)$ βήμα, $1 \leq q \leq n$, έχουμε ήδη αποδείξει ότι

$$\beta_1 = -\alpha_1^2 + \frac{1}{4}$$

$$\beta_m = -\alpha_m^2 + (\alpha_{m-1} - \frac{1}{2})^2 \quad m = 2, 3, \dots, q-1$$

για κατάλληλες μη θετικές σταθερές α_i .

Έχουμε επίσης ορίσει

$$\gamma_1 = \alpha_1 - \frac{1}{2}$$

$$\gamma_m = \alpha_m - (\alpha_{m-1} - \frac{1}{2}) = \alpha_m - \alpha_{m-1} + \frac{1}{2} \quad m = 2, 3, \dots, q-1.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\beta_q^2 \leq (\alpha_{q-1} - \frac{1}{2})^2$.

Θεωρούμε το πηλικό

$$Q_q[u] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2(x)}{|\vec{x}_q|^2} dx} \quad (3.3.10)$$

και την συνάρτηση δοκιμής

$$\begin{aligned}
u_{1,q}(x) &= x_1^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_{q-1}|^{-\gamma_{q-1}} |\vec{x}_q|^{\alpha_{q-1}-\frac{1}{2}} h_1(x) h_q(x) \phi(x) \\
&= x_1^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-\gamma_2} \dots |\vec{x}_{q-1}|^{-\gamma_{q-1}} v_{1,q}(x)
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

όπου $v_{1,q}(x) = |\vec{x}_q|^{\alpha_{q-1}-\frac{1}{2}} h_1(x) h_q(x) \phi(x)$

Αντικαθιστώντας την $u_{1,q}$ στους όρους του κλάσματος $Q_q[u]$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
&\bullet \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_{1,q}(x)|^2 dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,q}^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla \left(\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-\gamma_j} v_{1,q}(x) \right)|^2 dx - \sum_{i=1}^{q-1} \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,q}^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx - \sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,q}^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left[v_{1,q}(x) \nabla \left(\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-\gamma_j} \right) + \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-\gamma_j} \nabla v_{1,q}(x) \right]^2 dx \\
&\quad - \sum_{i=1}^{q-1} \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} v_{1,q}^2(x) |\vec{x}_q|^{-2} dx - \sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} v_{1,q}^2(x) |\vec{x}_q|^{-2} dx
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Στην απόδειξη του θεωρήματος (3.2) έχουμε υπολογίσει (3.2.2) ότι για την συνάρτηση $\phi = \prod_{m=1}^n |\vec{x}_m|^{-\gamma_m}$ ισχύει ότι

$$\nabla \phi = -\phi \sum_{m=1}^n \gamma_m \frac{\vec{x}_m}{|\vec{x}_m|^2} \tag{3.3.13}$$

και για $\vec{F} = -\frac{\nabla \phi}{\phi}$ από (3.2.3)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \left(-\frac{\nabla \phi}{\phi} \right) = \operatorname{div} \left(\sum_{m=1}^n \gamma_m \frac{\vec{x}_m}{|\vec{x}_m|^2} \right) = \sum_{m=1}^n \frac{(m-2)\gamma_m}{|\vec{x}_m|^2}$$

Συνεπώς

$$\operatorname{div} \left(\sum_{m=1}^n \gamma_m \frac{\vec{x}_m}{|\vec{x}_m|^2} \right) = \sum_{m=1}^n \frac{(m-2)\gamma_m}{|\vec{x}_m|^2} \tag{3.3.14}$$

και από (3.2.4)

$$|\vec{F}|^2 = \left| \sum_{m=1}^n \gamma_m \frac{\vec{x}_m}{|\vec{x}_m|^2} \right|^2 = \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m^2}{|\vec{x}_m|^2} + 2 \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\gamma_j \gamma_m}{|\vec{x}_m|^2} \quad (3.3.15)$$

Επιπλέον ισχύει

$$\beta_m = -\gamma_m[(2-m) + \gamma_m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j], \quad m = 2, \dots, n \quad (3.3.16)$$

από τις (3.3.13), (3.3.14), (3.3.15), (3.3.16) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \left[v_{1,q}(x) \nabla \left(\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-\gamma_j} \right) + \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-\gamma_j} \nabla v_{1,q}(x) \right]^2 \\ &= \left[- \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} v_{1,q}(x) + \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-\gamma_j} \nabla v_{1,q}(x) \right]^2 \\ &= \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \left(\sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} \right)^2 v_{1,q}^2(x) - 2 \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} v_{1,q}(x) \nabla v_{1,q}(x) \\ &\quad + \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{1,q}(x)|^2 \\ &= \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \left[\sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i^2}{|\vec{x}_i|^2} + 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\gamma_k \gamma_i}{|\vec{x}_i|^2} \right] v_{1,q}^2(x) - 2 \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} v_{1,q}(x) \nabla v_{1,q}(x) \\ &\quad + \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{1,q}(x)|^2 \end{aligned}$$

και

$$\sum_{i=1}^{q-1} \beta_i = \sum_{i=1}^{q-1} \left(-\gamma_i(2-i+\gamma_i+2 \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k) \right) = - \sum_{i=1}^{q-1} (\gamma_i^2 + (2-i)\gamma_i) - 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_i \gamma_k$$

οπότε η (3.3.12) γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_{1,q}(x)|^2 dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,q}^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} v_{1,q}^2(x) \left[\sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i^2 |\vec{x}_i|^{-2} + 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_k \gamma_j |\vec{x}_i|^{-2} \right] dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i \vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} (2v_{1,q}(x) \nabla v_{1,q}(x)) dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{1,q}(x)|^2 dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q-1} (\gamma_i^2 + (2-i)\gamma_i) \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_i \gamma_k \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx - \sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{1,q}(x)|^2 dx - \sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{q-1} (\gamma_i^2 + (2-i)\gamma_i) + 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_i \gamma_k \right] \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i \vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} \nabla v_{1,q}^2(x) dx \\
&= K_1 + K_2 + K_3.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
K_3 &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i \vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} \nabla v_{1,q}^2(x) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla \left(\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i \vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} v_{1,q}^2(x) \right) dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} v_{1,q}^2(x) \nabla \left(\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i \vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} \right) dx \\
&= - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i}{|\vec{x}_i|^2} v_{1,q}^2(x) \vec{x}_i \cdot \vec{n} dS(x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} v_{1,q}^2(x) \left[\nabla \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i \vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} + \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i \vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} \right) \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{1,q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \int_{\mathbb{R}_+^n} \left[- \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \left(\sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^2} \right)^2 + \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(i-2)\gamma_i}{|\vec{x}_i|^2} \right] v_{1,q}^2(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} v_{1,q}^2(x) \left[- \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\gamma_i^2}{|\vec{x}_i|^2} - 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\gamma_i \gamma_k}{|\vec{x}_i|^2} - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(2-i)\gamma_i}{|\vec{x}_i|^2} \right] dx \\
&= - \left[\sum_{i=1}^{q-1} (\gamma_i^2 + (2-i)\gamma_i) + 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_i \gamma_k \right] \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&= -K_2
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u_{1,q}(x)|^2 dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,q}^2(x)}{|\vec{x}_i|^2} dx = K_1 = \\
& \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{1,q}(x)|^2 dx - \sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx
\end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_{1,q}^2(x)}{|\vec{x}_q|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{-\gamma_1} |\vec{x}_2|^{-2\gamma_2} \dots |\vec{x}_{q-1}|^{-2\gamma_{q-1}} |\vec{x}_q|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&\stackrel{x_1=|\vec{x}_1|}{=} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx
\end{aligned}$$

Επομένως το πηλίκο $Q_q[u_{1,q}]$ είναι ίσο με:

$$Q_q[u_{1,q}] = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{1,q}(x)|^2 dx - \sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx} \quad (3.3.17)$$

Εξετάζουμε αρχικά τον παρονομαστή του παραπάνω κλάσματος. Έχουμε

$$\begin{aligned}
D_q[v_{1,q}] &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2a_{q-1}-3} h_1^2(x) h_q^2(x) \phi^2(x) dx
\end{aligned}$$

Αφήνουμε $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$ οπότε $h_1(x) \rightarrow 1$, συνεπώς

$$\begin{aligned}
D_q[v_{0,q}] &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2a_{q-1}-3} h_q^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\leq C \int_{B_1^+ \cap \{\epsilon_q^2 \leq |\vec{x}_q| \leq \epsilon_q\}} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2a_{q-1}-3} dx_1 dx_2 \dots dx_q \dots dx_n \\
&\leq C \int_{\epsilon_q^2 \leq |\vec{x}_q| \leq \epsilon_q} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2a_{q-1}-3} dx_1 dx_2 \dots dx_q
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Για την εκτίμηση του $D_q[v_{1,q}]$ χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες $(x_1, x_2, \dots, x_q) \mapsto (r_q, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1})$ όπου

$$\begin{aligned}
x_1 &= r_q \sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\
x_2 &= r_q \sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\
x_3 &= r_q \sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\
&\vdots \\
x_{q-1} &= r_q \sin \theta_{q-1} \cos \theta_{q-2} \\
x_q &= r_q \cos \theta_{q-1}
\end{aligned}$$

όπου $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_m < \pi$, $m = 2, 3, \dots, q-1$

Το μέτρο της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας είναι ίσο με $C(\sin \theta_{q-1})^{q-2} (\sin \theta_{q-2})^{q-3} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1}$

Έτσι

- $dx_1 dx_2 \dots dx_q = \left| \det \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial(r_q, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1})} \right| dr_q d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1}$
 $= r_q^{q-1} \sin \theta_2 (\sin \theta_3)^2 \dots (\sin \theta_{q-1})^{q-2} dr_q d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1}$
- $|\vec{x}_q| = r_q$
- $r_j = |\vec{x}_j| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_j^2)^{\frac{1}{2}} = r_q \sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \dots \sin \theta_j$,
 $1 \leq j \leq q-1$

Υπολογίζουμε πρώτα το γινόμενο

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} &= \prod_{j=1}^{q-1} \left(r_q \sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \dots \sin \theta_j \right)^{-2\gamma_j} \\
&= r_q^{-2 \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j} \left(\sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \dots \sin \theta_1 \right)^{-2\gamma_1} \\
&\quad \left(\sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \dots \sin \theta_2 \right)^{-2\gamma_2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left(\sin \theta_{q-1} \sin \theta_{q-2} \right)^{-2\gamma_{q-2}} \left(\sin \theta_{q-1} \right)^{-2\gamma_{q-1}} \\
&= r_q^{-2 \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j} \left(\sin \theta_{q-1} \right)^{-2(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{q-1})} \left(\sin \theta_{q-2} \right)^{-2(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{q-2})} \dots \\
&\quad \left(\sin \theta_2 \right)^{-2(\gamma_1 + \gamma_2)} \left(\sin \theta_1 \right)^{-2\gamma_1} \\
&= r_q^{-2 \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j} \left(\sin \theta_{q-1} \right)^{-2 \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j} \left(\sin \theta_{q-2} \right)^{-2 \sum_{j=1}^{q-2} \gamma_j} \dots \\
&\quad \left(\sin \theta_2 \right)^{-2(\gamma_1 + \gamma_2)} \left(\sin \theta_1 \right)^{-2\gamma_1}
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Έχουμε ορίσει

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= a_1 - \frac{1}{2} \\
\gamma_2 &= a_2 - \left(a_1 - \frac{1}{2} \right), & \gamma_1 + \gamma_2 &= \alpha_2 \\
\gamma_3 &= \alpha_3 - \alpha_2 + \frac{1}{2}, & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= \alpha_3 + \frac{1}{2}(3 - 2) \\
&\vdots & & \vdots \\
\gamma_m &= a_m - a_{m-1} + \frac{1}{2}, & \sum_{j=1}^m \gamma_j &= \alpha_m + \frac{1}{2}(m - 2)
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j = a_{q-1} + \frac{1}{2} \left((q-1) - 2 \right) = a_{q-1} + \frac{1}{2}(q-3) \tag{3.3.20}$$

άρα

$$\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} = r_q^{-2\alpha_{q-1}-(q-3)} \left(\sin \theta_{q-1} \right)^{-2\alpha_{q-1}-(q-3)} \left(\sin \theta_{q-2} \right)^{-2\alpha_{q-2}-(q-4)} \dots$$

$$\left(\sin \theta_2 \right)^{-2\alpha_2} \left(\sin \theta_1 \right)^{-2\alpha_1+1}$$

Επομένως η (3.3.18) γίνεται

$$\begin{aligned} D_q[v_{0,q}] &\leq C \int_{\epsilon_q^2 \leq |\vec{x}_q| \leq \epsilon_q} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2a_{q-1}-3} dx_1 dx_2 \dots dx_q \\ &= C \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon_q^2}^{\epsilon_q} r_q^{-2\alpha_{q-1}-q+3} \left(\sin \theta_{q-1} \right)^{-2\alpha_{q-1}-q+3} \left(\sin \theta_{q-2} \right)^{-2\alpha_{q-2}-q+4} \dots \\ &\quad \left(\sin \theta_2 \right)^{-2\alpha_2} \left(\sin \theta_1 \right)^{-2\alpha_1+1} r_q^{2\alpha_{q-1}-3} \\ &\quad r_q^{q-1} \sin \theta_2 (\sin \theta_3)^2 \dots (\sin \theta_{q-1})^{q-2} dr_q d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1} \\ &= C \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon_q^2}^{\epsilon_q} r_q^{-2\alpha_{q-1}-q+3+2\alpha_{q-1}-3+q-1} (\sin \theta_1)^{-2\alpha_1+1} (\sin \theta_2)^{-2\alpha_2+1} \dots \\ &\quad (\sin \theta_{q-2})^{-2\alpha_{q-2}-q+4+q-3} (\sin \theta_{q-1})^{-2\alpha_{q-1}-q+3+q-2} dr_q d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1} \\ &= C \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon_q^2}^{\epsilon_q} r_q^{-1} \prod_{j=1}^{q-1} (\sin \theta_j)^{1-2\alpha_j} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1} dr_q \\ &\stackrel{a_j \leq 0}{\leq} C \int_{\epsilon_q^2}^{\epsilon_q} r_q^{-1} dr_q \\ &= -C \ln \epsilon_q \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε επίσης ότι καθώς $\epsilon_q \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned}
D_q[v_{0,q}] &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2a_{q-1}-3} h_q^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\geq \int_{B_{\frac{1}{2}}^+ \cap \{\epsilon_q \leq |\vec{x}_q| \leq \frac{1}{2}\}} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2a_{q-1}-3} h_q^2(x) dx \\
&= \int_{\epsilon_q \leq |\vec{x}_q| \leq \frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-3} dx \\
&\stackrel{(3.3.21)}{=} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon_q}^{\frac{1}{2}} r_q^{-1} \prod_{j=1}^{q-1} (\sin \theta_j)^{1-2\alpha_j} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1} dr_q \\
&\geq -C \ln \epsilon_q
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τους όρους του αριθμητή του κλάσματος $Q_q[u_{1,q}]$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} h_1^2(x) h_q^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_{q+1}|^{-2} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} h_1^2(x) h_q^2(x) \phi^2(x) dx
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

αφού για $i \geq q+1$

$$|\vec{x}_i|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_i^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{q+1}^2 = |\vec{x}_{q+1}|^2 \Rightarrow |\vec{x}_i|^{-2} \leq |\vec{x}_{q+1}|^{-2}$$

Αφήνοντας πρώτα το $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$ και μετά $\epsilon_q \rightarrow 0^+$ οπότε $h_1(x) \rightarrow 1$, $h_q(x) \rightarrow 1$, το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει στο

$$\begin{aligned}
I_q &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_{q+1}|^{-2} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} \phi^2(x) dx \\
&\leq C \int_{B_1^+} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_{q+1}|^{-2} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} dx_1 dx_2 \dots dx_q dx_{q+1}
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Για να αποδείξουμε ότι το I_q είναι πεπερασμένο χρησιμοποιούμε όπως και παραπάνω σφαιρικές συντεταγμένες

$$(x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}) \mapsto (r_{q+1}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{q+1} \sin \theta_q \sin \theta_{q-1} \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ x_2 &= r_{q+1} \sin \theta_q \sin \theta_{q-1} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ x_3 &= r_{q+1} \sin \theta_q \sin \theta_{q-1} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\ &\vdots \\ x_{q-1} &= r_{q+1} \sin \theta_q \sin \theta_{q-1} \cos \theta_{q-2} \\ x_q &= r_{q+1} \sin \theta_q \cos \theta_{q-1} \\ x_{q+1} &= r_{q+1} \cos \theta_q \end{aligned}$$

$$\text{όπου } 0 \leq \theta_1 < 2\pi \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta_m < \pi, \quad m = 2, 3, \dots, q.$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 \dots dx_q dx_{q+1} &= \left| \det \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1})}{\partial(r_{q+1}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)} \right| dr_{q+1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_q \\ &= r_{q+1}^q \sin \theta_2 (\sin \theta_3)^2 \dots (\sin \theta_{q-1})^{q-2} (\sin \theta_q)^{q-1} dr_{q+1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1} d\theta_q \end{aligned}$$

και

$$r_j = |\vec{x}_j| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_j^2)^{\frac{1}{2}} = r_{q+1} \sin \theta_q \sin \theta_{q-1} \dots \sin \theta_j \quad 1 \leq j \leq q,$$

$$r_{q+1} = |\vec{x}_{q+1}|$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} |\vec{x}_{q+1}|^{-2} \\ &= r_{q+1}^{-2\alpha_{q-1}-q+3} (\sin \theta_q)^{-2\alpha_{q-1}-q+3} (\sin \theta_{q-1})^{-2\alpha_{q-1}-q+3} (\sin \theta_{q-2})^{-2\alpha_{q-2}-q+4} \dots \\ &\quad (\sin \theta_2)^{-2\alpha_2} (\sin \theta_1)^{-2\alpha_1+1} r_{q+1}^{2\alpha_{q-1}-1} (\sin \theta_q)^{2\alpha_{q-1}-1} r_{q+1}^{-2} \\ &= r_{q+1}^{-2\alpha_{q-1}-q+3+2\alpha_{q-1}-1-2} (\sin \theta_q)^{-2\alpha_{q-1}-q+3+2\alpha_{q-1}-1} (\sin \theta_{q-1})^{-2\alpha_{q-1}-q+3} \\ &\quad (\sin \theta_{q-2})^{-2\alpha_{q-2}-q+4} \dots (\sin \theta_2)^{-2\alpha_2} (\sin \theta_1)^{-2\alpha_1+1} \\ &= r_{q+1}^{-q} (\sin \theta_q)^{-q+2} (\sin \theta_{q-1})^{-2\alpha_{q-1}-q+3} (\sin \theta_{q-2})^{-2\alpha_{q-2}-q+4} \dots \\ &\quad (\sin \theta_2)^{-2\alpha_2} (\sin \theta_1)^{-2\alpha_1+1} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
I_q &\leq C \int_{B_1^+} r_{q+1}^{-q} (\sin \theta_q)^{-q+2} (\sin \theta_{q-1})^{-2\alpha_{q-1}-q+3} (\sin \theta_{q-2})^{-2\alpha_{q-2}-q+4} \dots (\sin \theta_2)^{-2\alpha_2} \\
&\quad (\sin \theta_1)^{-2\alpha_1+1} r_{q+1}^q \sin \theta_2 (\sin \theta_3)^2 \dots (\sin \theta_{q-2})^{q-3} \\
&\quad (\sin \theta_{q-1})^{q-2} (\sin \theta_q)^{q-1} dr_{q+1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_q \\
&= C \int_{B_1^+} (\sin \theta_q)^{-q+2+q-1} (\sin \theta_{q-1})^{-2\alpha_{q-1}-q+3+q-2} (\sin \theta_{q-2})^{-2\alpha_{q-2}-q+4+q-3} \dots \\
&\quad (\sin \theta_2)^{-2\alpha_2+1} (\sin \theta_1)^{-2\alpha_1+1} dr_{q+1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_q \\
&= C \int_{B_1^+} \sin \theta_q (\sin \theta_{q-1})^{-2\alpha_{q-1}+1} (\sin \theta_{q-2})^{-2\alpha_{q-2}+1} \dots (\sin \theta_2)^{-2\alpha_2+1} \\
&\quad (\sin \theta_1)^{-2\alpha_1+1} dr_{q+1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_q \Rightarrow \\
I_q &\leq C \int_{B_1^+} \sin \theta_q \prod_{j=1}^{q-1} (\sin \theta_j)^{1-2\alpha_j} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_q dr_{q+1} < \infty \quad (3.3.25)
\end{aligned}$$

αφού $\alpha_j \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, q-1$

Οπότε και το άθροισμα

$$\sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{1,q}^2(x) dx < \infty \quad (3.3.26)$$

Τέλος υπολογίζουμε τον όρο κλίσης

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{1,q}|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \left| \nabla (|x_q|^{\alpha_{q-1}-\frac{1}{2}} h_1(x) h_q(x) \phi(x)) \right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} \left[(\alpha_{q-1} - \frac{1}{2}) |\vec{x}_q|^{\alpha_{q-1}-\frac{5}{2}} \vec{x}_q h_1(x) h_q(x) \phi(x) \right. \\
&\quad \left. + |\vec{x}_q|^{\alpha_{q-1}-\frac{1}{2}} \nabla (h_1(x) h_q(x)) \phi(x) + |\vec{x}_q|^{\alpha_{q-1}-\frac{1}{2}} h_1(x) h_q(x) \nabla \phi(x) \right]^2 dx \\
&= (\alpha_{q-1} - \frac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-3} h_1^2(x) h_q^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} |\nabla (h_1(x) h_q(x))|^2 \phi^2(x) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} h_1^2(x) h_q^2(x) |\nabla \phi(x)|^2 dx + \text{μικτοί όροι}
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Ο πρώτος όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι ίσος με τον παρονομάστη $D_q[v_{1,q}]$.

Επειδή $|\nabla \phi(x)| \leq C_1$ και για μικρά ϵ_1, ϵ_q ισχύει $h_1^2(x) \leq 1$, $h_q^2(x) \leq 1$, για τον τρίτο όρο του αθροίσματος βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} h_1^2(x) h_q^2(x) |\nabla \phi(x)|^2 dx \\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} dx \\
&\leq C_1 \int_{B_1^+} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} dx
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}
& C_1 \int_{B_1^+} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} dx \\
& \leq C_1 \int_{B_1^+} r_q^{-2\alpha_{q-1}-q+3} r_q^{2\alpha_{q-1}-1} r_q^{q-1} \prod_{j=1}^{q-1} (\sin \theta_j)^{1-2\alpha_j} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_q dr_q \\
& = C_1 \int_{B_1^+} r_q \prod_{j=1}^{q-1} (\sin \theta_j)^{1-2\alpha_j} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_q dr_q \\
& \stackrel{\alpha_j \leq 0}{\leq} C_2 \int_0^1 r_q dr_q < \infty
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Τέλος για το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
M[v_{1,q}] &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} |\nabla(h_1(x)h_q(x))|^2 \phi^2(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} |\nabla h_1(x)|^2 h_q^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}} h_1^2(x) |\nabla h_q(x)|^2 \phi^2(x) dx + \text{μικτοί όροι} \\
&= J_1 + J_2 + \text{μικτοί όροι}
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} |\nabla h_1(x)|^2 h_q^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\leq C \int_{B_1^+} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} \frac{1}{\ln^2 \epsilon_1} \frac{1}{x_1^2} h_q^2(x) \phi^2(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} \int_{B_1^+} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}-1} x_1^{-2} dx \\
&\leq \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} \int_{B_1^+} |\vec{x}_1|^{-2\alpha_{q-1}-(q-3)} |\vec{x}_1|^{2\alpha_{q-1}-1} |\vec{x}_1|^{-2} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
&\leq \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} \int_{B_1^+} |\vec{x}_1|^{-q} dx_1 \leq \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} \int_{\epsilon_1^2}^{\epsilon_1} x_1^{-q} dx_1 = \frac{C}{\ln^2 \epsilon_1} \epsilon_1^{1-q} (1 - \epsilon_1) \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}} h_1^2(x) |\nabla h_q(x)|^2 \phi^2(x) dx \\
&\leq C \int_{B_1^+} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{2\alpha_{q-1}} \frac{1}{\ln^2 \epsilon_q} \frac{1}{|\vec{x}_q|^2} dx
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq \frac{C}{\ln^2 \epsilon_q} \int_{B_1^+} r_q^{-2\alpha_{q-1}-(q-3)} r_q^{2\alpha_{q-1}-1} r_q^{-2} r_q^{q-1} \prod_{j=1}^{q-1} (\sin \theta_j)^{1-2\alpha_j} dr_q d\theta_1 \dots d\theta_q \\
&= \frac{C}{\ln^2 \epsilon_q} \int_{\epsilon_q^2}^{\epsilon_q} r_q^{-1} dr_q = -\frac{C}{\ln \epsilon_q} < \infty
\end{aligned} \tag{3.3.31}$$

Συνεπώς, $M[v_{1,q}] = o(1)$ καθώς $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$, $\epsilon_q \rightarrow 0^+$

Ακόμη οι μικτοί όροι της (3.3.27) χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz εκτιμώνται από τους τρεις πρώτους όρους και είναι της τάξης $o(-\ln \epsilon_q)$.

Έτσι για τον όρο κλίσης έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_1|^{-2\gamma_j} |\nabla v_{0,q}|^2 dx = (\alpha_{q-1} - \frac{1}{2})^2 D_q[v_{0,q}] + o(-\ln \epsilon_q) \quad \text{καθώς} \quad \epsilon_q \rightarrow 0^+ \tag{3.3.32}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
Q_q[u_{0,q}] &= \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j| |\nabla v_{0,q}(x)|^2 dx - \sum_{i=q+1}^n \beta_i \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_i|^{-2} v_{0,q}^2(x) dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{q-1} |\vec{x}_j|^{-2\gamma_j} |\vec{x}_q|^{-2} v_{0,q}^2(x) dx} \\
&= (\alpha_{q-1} - \frac{1}{2})^2 + o(1), \quad \text{καθώς } \epsilon_q \rightarrow 0^+
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Επομένως $\beta_q \leq (\alpha_{q-1} - \frac{1}{2})^2$.

Άρα υπάρχει $\alpha_q \leq 0$ τέτοιο ώστε $\beta_q = -\alpha_q^2 + (\alpha_{q-1} - \frac{1}{2})^2$.

Το επαγωγικό βήμα έχει ολοκληρωθεί και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

□

Πόρισμα 2. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ $1 \leq k \leq n-1$ μη θετικές σταθερές και

$$\beta_1 = -\alpha_1^2 + \frac{1}{4}, \quad \beta_m = -\alpha_m^2 + (\alpha_{m-1} - \frac{1}{2})^2, \quad m = 2, 3, \dots, k.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά β_{k+1} τέτοια ώστε η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_1^2 + x_2^2} + \dots + \frac{\beta_{k+1}}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2} \right) u^2 dx \tag{3.3.34}$$

να ισχύει για οποιαδήποτε $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$.

Τότε

$$\beta_{k+1} \leq (\alpha_k - \frac{1}{2})^2 \tag{3.3.35}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - \beta_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx - \beta_2 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx - \dots - \beta_k \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2} dx} \\
= (\alpha_k - \frac{1}{2})^2 \tag{3.3.36}
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Η σχέση $\beta_{k+1} \leq (\alpha_k - \frac{1}{2})^2$ προκύπτει άμεσα από το παραπάνω θεώρημα 3.3.

Παίρνοντας infimum στην (3.3.33) προκύπτει το " $\leq$ " της σχέσης (3.3.36).

Για την αντίστροφη ανισότητα " $\geq$ " της (3.3.36) θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.2 και συγκεκριμένα την σχέση (3.2.7)

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2} + \frac{\beta_{k+1}}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2} \right. \\ \left. + \cdots + \frac{\beta_n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \right) u^2 dx$$

όπου $\beta_k = -\alpha_k^2 + (\alpha_{k-1} - \frac{1}{2})^2$, $k \geq 0$

Αν θέσουμε $\alpha_{k+l} = -\frac{l-1}{2}$ για $l = 1, 2, \dots, n-k$ τότε

$$\beta_{k+l+1} = -\alpha_{k+l+1}^2 + (\alpha_{k+l} - \frac{1}{2})^2 = -(\frac{l}{2})^2 + [-\frac{l-1}{2} - \frac{1}{2}]^2 = -\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n-k$$

Δηλαδή $\beta_{k+2} = \beta_{k+3} = \cdots = \beta_n = 0$ και η (3.2.7) γίνεται

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx \geq \beta_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx + \beta_2 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx + \cdots + \beta_k \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2} dx \\ + \beta_{k+1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2} dx$$

Οπότε

$$\frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - \beta_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx - \beta_2 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx - \cdots - \beta_k \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2} dx} \geq \beta_{k+1} \quad (3.3.37)$$

$$\text{με } \beta_{k+1} = -\alpha_{k+1}^2 + (\alpha_k - \frac{1}{2})^2 = 0 + (\alpha_k - \frac{1}{2})^2 = (\alpha_k - \frac{1}{2})^2$$

Παίρνοντας infimum στην (3.3.37) προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

□

Άμεση συνέπεια του παραπάνω πορίσματος είναι η πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 1. Για $1 \leq k \leq n$, ισχύει:

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} dx} = \frac{k^2}{4} \quad (3.3.38)$$

και για $k \leq m < n$, ισχύει

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{k^2}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2} dx - \dots - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2} dx} = \frac{1}{4} \quad (3.3.39)$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την (3.3.38) αντικαθιστούμε στην (3.3.36) $\alpha_l = -\frac{l}{2}$ για $l = 1, 2, \dots, k-1$ οπότε

$$\begin{aligned} \beta_l &= -\alpha_l^2 + (\alpha_{l-1} - \frac{1}{2})^2, \quad l = 1, 2, \dots, k-1 \\ \beta_l &= -\frac{l^2}{4} + (-\frac{l-1}{2} - \frac{1}{2})^2 = -\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

και η (3.3.36) γίνεται

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - \beta_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx - \beta_2 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2} dx - \dots - \beta_{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k-1}^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} dx} = (\alpha_{k-1} - \frac{1}{2})^2$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = 0 \\ \Rightarrow \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} dx} = (\alpha_{k-1} - \frac{1}{2})^2 = (-\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2})^2 = \frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

Τέλος για να αποδείξουμε την (3.3.39) αντικαθιστούμε στην (3.3.36) $\alpha_l = -\frac{l}{2}$ για $l = 1, 2, \dots, k-1$ οπότε $\beta_l = 0$ για $l = 1, 2, \dots, k-1$ και $\alpha_l = 0$ για $k \leq l \leq m$ οπότε $\beta_l = -\alpha_l^2 + (\alpha_{l-1} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ για $l = k+1, k+2, \dots, m$, $\beta_k = -\alpha_k^2 + (\alpha_{k-1} - \frac{1}{2})^2 = 0 + (-\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2})^2 = \frac{k^2}{4}$

Έτσι η (3.3.36) γίνεται

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - \beta_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2} dx - \dots - \beta_{k+1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2} dx - \dots - \beta_m \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2} dx} = (\alpha_m - \frac{1}{2})^2$$

Άρα

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{k^2}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2} dx - \dots - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} dx}{\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|u|^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2} dx} = (0 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

□

Αναφορές

- [1] Alexander Balinsky, Desmond Evans, and Roger Lewis. *The analysis and geometry of Hardy's inequality*. Vol. 1. Springer, 2015.
- [2] Haïm Brezis and Moshe Marcus. *Hardy's inequalities revisited*. Vol. 25. 1-2. 1997, pp. 217–237.
- [3] Lawrence Evans. *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Soc., 2010.
- [4] Stathis Filippas, Achilles Tertikas, and Jesper Tidblom. *On the structure of Hardy–Sobolev–Maz'ya inequalities*. Vol. 11. 6. 2009, pp. 1165–1185.
- [5] Vladimir Maz'ya. *Sobolev spaces*. Springer, 2013.
- [6] Jesper Tidblom. *A Hardy inequality in the half-space*. Vol. 221. 2. Elsevier, 2005, pp. 482–495.
- [7] Τηλέμαχος Χατζηαφράτης. *Απειροστικός λογισμός σε πολλές μεταβλητές*. Vol. 1. Συμμετρία, 2009.