



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΑΥΤΟΜΟΡΦΙΣΜΟΥΣ
ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ
ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Ιωάννης Παπαβασιλείου

Επιβλέπων: Μιχαήλ Συκιώτης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα 2022

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Δημήτριος Βάρσος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Ιωάννης Εμμανουήλ, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Μιχαήλ Συκιώτης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, Επιβλέπων

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ.κ. Δημήτριο Βάρσο και Ιωάννη Εμμανουήλ για τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή και την υποστήριξή τους καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο τμήμα Μαθηματικών.

Ευχαριστώ θερμά, επίσης, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχάλη Συκιώτη για τη διακριτική καθοδήγηση και την ακούραστη υποστήριξη τα τελευταία τρία χρόνια των μεταπτυχιακών και διδακτορικών σπουδών μου. Οι συζητήσεις μαζί του άλλαξαν σταδιακά τη θεώρησή μου απέναντι στα μαθηματικά και αποτελούν ανεκτίμητο εφόδιο.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου και όλους τους φίλους που αποτελούν το στήριγμά μου όλα αυτά τα χρόνια.

Τίς σοφὸς καὶ ἐπιστήμων ἐν ὑμῖν;
δειξάτω ἐκ τῆς καλῆς ἀναστροφῆς τὰ
ἔργα αὐτοῦ ἐν πραύτητι σοφίας.

Ιακ. 3,13

Περιεχόμενα

1	Ύπαρξη train track αντιπροσώπων για αυτομορφισμούς ελεύθερων ομάδων	9
1.1	Εισαγωγικά	9
1.2	Γραφήματα	10
1.3	Υποδιαιρέσεις και διπλώσεις	12
1.4	Μαρκαρισμένα γραφήματα	14
1.5	Μετρικά Γραφήματα	16
1.6	Ο εξωτερικός χώρος μιας ελεύθερης ομάδας F_n	17
1.7	Τοπολογίες στον εξωτερικό χώρο	21
1.8	Η δράση της $\text{Out}(F_n)$ στον εξωτερικό χώρο	23
1.9	Η μετρική του Lipschitz στον εξωτερικό χώρο	24
1.10	Ύπαρξη βέλτιστων απεικονίσεων	26
1.11	Ιδιότητες της μετρικής του Lipschitz	28
1.12	Υπολογισμός της απόστασης δύο γραφημάτων	31
1.12.1	Δομή train track	33
1.13	Εφαρμογές της μετρικής στον εξωτερικό χώρο	38
1.14	Τριχοτομία	39
1.14.1	Τοπολογικοί αντιπρόσωποι	40
1.14.2	Ελλειπτικοί αυτομορφισμοί	42
1.14.3	Υπερβολικοί αυτομορφισμοί	44
1.14.4	Παραβολικοί αυτομορφισμοί	48
1.15	Train tracks και το βασικό αποτέλεσμα	52
2	Η ασυμμετρία του εξωτερικού χώρου	56
2.1	Εισαγωγή	56
2.2	Εξωτερικός χώρος και εφαπτόμενοι χώροι	56

2.3	Η ασυμμετρία και το βασικό θεώρημα	58
2.4	Η μετρική Finsler	62
2.5	Διορθωμένη νόρμα	64
2.6	Μήκη μονοπατιών	69
2.7	Εφαρμογές	70
3	Ο εξωτερικός χώρος ενός ελεύθερου γινομένου	75
3.1	Ελεύθερα γινόμενα	75
3.2	Γραφήματα ομάδων	76
3.3	G -δέντρα	78
3.4	Η διάσπαση Grushko μιας ομάδας	80
3.5	Αυτομορφισμοί ελευθέρων γινομένων	80
3.5.1	Η ομάδα $\text{Aut}(G)$	81
3.6	Ο εξωτερικός χώρος $\mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k)$	87
3.7	Χώροι μετασχηματισμών	89
3.8	Simplicial δομή και τοπολογίες στον εξωτερικό χώρο $\mathcal{O}$	91
3.9	Train tracks σε μαρκαρισμένα γραφήματα και σε δέντρα	92
3.9.1	Ανάγωγοι αυτομορφισμοί	92
3.9.2	Train track απεικονίσεις	95
3.10	Βέλτιστες απεικονίσεις	97
3.11	Το λήμμα της φραγμένης διαγραφής	101
4	Γραμμές	104
4.1	Εισαγωγικά	104
4.2	Ευσταθείς γραμμές για train track σημεία πλήρως ανάγωγων αυτομορ- φισμών	107
4.3	Επέκταση της ευσταθούς γραμμώσης σε αυθαίρετα σημεία	113
4.4	Υποομάδες που φέρουν τη γραμμώση	116
4.5	Έλκουσες γραμμές για ελεύθερα γινόμενα.	119
4.6	Εφαρμογές των γραμμώσεων και των train-tracks	122
4.6.1	Αναζήτηση ελευθέρων υποομάδων στην $\text{Out}(F_n)$	122
4.6.2	Μήκη μετατόπισης στην $\text{Out}(F_n)$ και το εναλλακτικό του Tits . . .	131
	Α' Το θεώρημα Perron-Frobenius	150

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία βασικό αντικείμενο μελέτης είναι η ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών $\text{Out}(F_n)$ της ελεύθερης ομάδας F_n τάξης n που έχει κεντρικό ρόλο τόσο στη συνδυαστική όσο και στη γεωμετρική θεωρία ομάδων. Η $\text{Out}(F_n)$ προκύπτει ως πηλίκο της ομάδας αυτομορφισμών $\text{Aut}(F_n)$ με την κανονική υποομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών $\text{Inn}(F_n) = \{\tau_g \in \text{Aut}(F_n) | \tau_g(x) = gxg^{-1}\}$.

Η ομάδα F_n και οι εξωτερικοί αυτομορφισμοί της έχουν πλούσια θεωρία η οποία αναπτύσσεται χρησιμοποιώντας αναλογίες τόσο μεταξύ της θεωρία επιφανειών και των mapping class groups όσο και μεταξύ των αριθμητικών ομάδων όπως η $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Η ταξινόμηση των στοιχείων της mapping class group μιας επιφάνειας από τους Nielsen και Thurston επέφερε μεγάλη ανάπτυξη στην θεωρία των mapping class groups και κατά συνέπεια στη μελέτη των εξωτερικών αυτομορφισμών των ελεύθερων ομάδων. Το 1992 οι Bestvina και Handel κατασκεύασαν relative train track αντιπροσώπους για κάθε εξωτερικό αυτομορφισμό της F_n , οι οποίοι αντιστοιχούν στην κανονική μορφή του Thurston για mapping classes. Οι Bestvina, Feighn και Handel σε μία σειρά εργασιών απέδειξαν ότι το εναλλακτικό του Tits ισχύει για την ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών $\text{Out}(F_n)$. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποίησαν (και που χρησιμοποιείται γενικότερα κατά κόρο τα τελευταία χρόνια για τη μελέτη των αυτομορφισμών ελευθέρων ομάδων) είναι οι train-track αντιπρόσωποι, δηλαδή, “κατάλληλοι” και υπό μια έννοια “αποτελεσματικοί” τοπολογικοί αντιπρόσωποι αυτομορφισμών ελευθέρων ομάδων. Η τεχνική των train-tracks έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα αποδοτική για την κατανόηση της δυναμικής ενός αυτομορφισμού Φ μιας ελεύθερης ομάδας, δηλαδή των ιδιοτήτων των δυνάμεων του Φ^n καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα. Μέσω relative train track αντιπροσώπων αντιστοίχισαν σε κάθε αυτομορφισμό ένα πεπερασμένο σύνολο από έλκουσες γραμμώσεις (attractive laminations) και απέδειξαν επιπροσθέτως ότι η ομάδα $\text{Out}(F_n)$ ικανοποιεί μια ισχυρότερη διχοτομία, η οποία αναφέρεται ως “το ισχυρό εναλλακτικό του Tits”

(the strong Tits alternative). Μια ομάδα λέμε ότι ικανοποιεί το ισχυρό εναλλακτικό του Tits αν κάθε υποομάδα της είτε περιέχει ως υποομάδα μια ελεύθερη ομάδα τάξης δύο, είτε είναι σχεδόν αβελιανή.

Ένα ακόμα βασικό εργαλείο για τη μελέτη της ομάδας $\text{Out}(F_n)$ αποτελεί ο εξωτερικός χώρος CV_n τον οποίον εισήγαγαν το 1986 οι Culler και Vogtmann. Είναι ένας συσταλτός χώρος ο οποίος επιδέχεται δράση της $\text{Out}(F_n)$ με πεπερασμένες σταθεροποιούσες σημείων. Η δράση της $\text{Out}(F_n)$ στον εξωτερικό χώρο μπορεί να θεωρηθεί ως ανάλογο της δράσης μιας αριθμητικής ομάδας στον αντίστοιχο ομογενή χώρο ή ως ανάλογο της δράσης μιας mapping class group μιας επιφάνειας στον αντίστοιχο χώρο του Teichmuller. Ο εξωτερικός χώρος CV_n έχει ως στοιχεία του γραφήματα με θεμελιώδη ομάδα ισόμορφη με την F_n και η $\text{Out}(F_n)$ δρα αλλάζοντας τον ισομορφισμό μεταξύ θεμελιώδους ομάδας και F_n . Κάθε τέτοιο γράφημα είναι εφοδιασμένο με μια μετρική και καθώς μεταβάλλουμε τα μήκη των ακμών του γραφήματος κινούμαστε στον CV_n . Επιτρέπεται το μήκος μιας ακμής να γίνει 0 εφόσον η θεμελιώδης ομάδα του γραφήματος δεν αλλάζει. Σε αντίθεση με τους ομογενείς ή τους χώρους του Teichmuller, ο χώρος CV_n δεν είναι πολλαπλότητα.

Το θεώρημα του Van Kampen στην αλγεβρική τοπολογία υπογραμμίζει τη σημασία της μελέτης των ελευθέρων γινομένων ως άμεση γενίκευση των ελευθέρων ομάδων. Έτσι, τα τελευταία χρόνια η ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών $\text{Out}(G)$ ενός ελευθέρου γινομένου $G = \ast_{i=1}^n G_i$ αποτελεί βασικό αντικείμενο μελέτης μέσω της οποίας έχουν προκύψει ουσιαστικές γενικεύσεις των ήδη υπαρχουσών τεχνικών για την $\text{Out}(F_n)$ αλλά και νέα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, το 2007 οι Guirardel και Levitt γενίκευσαν την έννοια του εξωτερικού χώρου για ελεύθερα γινόμενα, ο οποίος συμβολίζεται συνήθως με $\mathcal{O}$, χρησιμοποιώντας μαρκαρισμένα μετρικά γραφήματα ομάδων και απέδειξαν ότι είναι συσταλτός χώρος. Επίσης, η χρήση των train track απεικονίσεων είναι ευρύτατα διαδεδομένη και στη μελέτη των αυτομορφισμών ελευθέρων γινομένων ή γενικότερα θεμελιωδών ομάδων γραφημάτων ομάδων.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας αναφέρονται οι βασικές έννοιες που αφορούν την ομάδα $\text{Out}(F_n)$. Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός του εξωτερικού χώρου CV_n μέσω μαρκαρισμένων μετρικών γραφημάτων. Τέλος, παρουσιάζεται η απόδειξη του βασικού θεωρήματος για την ύπαρξη train track αντιπροσώπων για ανάγωγους αυτομορφισμούς. Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναπτύσσεται αναλυτικότερα η μετρική του Lipschitz που ορίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο και παρουσιάζεται το βασικό αποτέλεσμα για την α-

συμμετρία της. Το τρίτο κεφάλαιο αφορά αυτομορφισμούς ελευθέρων γινομένων. Δίνεται ο ορισμός του σχετικού εξωτερικού χώρου μέσω G -δέντρων καθώς και τα αποτελέσματα για την ύπαρξη train track αντιπροσώπων. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη έννοια των γραμμώσεων (laminations) και παρουσιάζονται διάφορες εφαρμογές μεταξύ των οποίων το translation discreteness και το εναλλακτικό Θεώρημα του Tits για την $\text{Out}(F_n)$. Εκτός από πλήρης αποδείξεις, πολλές φορές σκιαγραφούμε αποδείξεις για να καταδείξουμε την ισχύ των σχετικών εννοιών (train tracks, γραμμώσεις, σχετικού εξωτερικού χώρου κ.τ.λ.) μέσω της χρήσης τους για την απόκτηση ισχυρών αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 1

Ύπαρξη train track αντιπροσώπων για αυτομορφισμούς ελευθέρων ομάδων

1.1 Εισαγωγικά

Ο στόχος του κεφαλαίου είναι να δοθεί μια απόδειξη του βασικού θεωρήματος που αφορά train track αντιπροσώπους αυτομορφισμών ελευθέρων ομάδων ακολουθώντας το [34]:

Θεώρημα 1.1.1. *Κάθε ανάγωγος αυτομορφισμός $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ έχει τοπολογικό αντιπρόσωπο ο οποίος είναι train track απεικόνιση.*

Η ιδέα προέρχεται από μια απόδειξη του Bers για ένα θεώρημα του Thurston που αφορούσε την ταξινόμηση ομοιομορφισμών επιφανειών. Σε αυτή την απόδειξη, για έναν ομοιομορφισμό επιφανειών Φ εξετάζεται η απεικόνιση μετατόπισης $\bar{\Phi}$ στο χώρο του Teichmuller $\mathcal{T}$ με τη μετρική του Teichmuller, δηλαδή η απεικόνιση

$$\bar{\Phi}(x) = d(x, \Phi(x)).$$

Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

- $\inf \bar{\Phi} = 0$ και το infimum επιτυγχάνεται. Τότε η $\bar{\Phi}$ έχει ένα σταθερό σημείο και άρα η Φ είναι ισοτοπική με ένα ομοιομορφισμό πεπερασμένης τάξης.

- $\inf \bar{\Phi} > 0$ και το infimum επιτυγχάνεται. Τότε ο Φ είναι ισοτοπικός με ένα pseudo-Anosov ομοιομορφισμό.
- Το infimum δεν επιτυγχάνεται. Τότε ο Φ είναι μη-ανάγωγος (reducible).

Στο [34] μεταφέρεται το επιχείρημα του Bers στην $\text{Out}(F_n)$ η οποία δρα στον εξωτερικό χώρο CV_n . Τον ρόλο της μετρικής του Teichmuller παίζει η μετρική του Lipschitz του CV_n , η οποία είναι ακριβές ανάλογο της μετρικής του Lipschitz του Thurston στον χώρο του Teichmuller.

1.2 Γραφήματα

Δίνουμε αρχικά τους απαραίτητους ορισμούς και εισάγουμε το συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να οριστεί στη συνέχεια ο εξωτερικός χώρος CV_n .

Ορισμός 1.2.1. Ένα γράφημα Γ είναι ένα πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών (cell complex) διάστασης μικρότερης ή ίσης του 1. Το σύνολο $V(\Gamma)$ είναι το σύνολο των 0-κελιών και τα στοιχεία του ονομάζονται κορυφές του Γ . Το σύνολο $E(\Gamma)$ είναι το σύνολο των 1-κελιών και τα στοιχεία του ονομάζονται ακμές του Γ .

Συνεπώς, μια ακμή e ενός γραφήματος Γ είναι η εικόνα μια συνεχούς απεικόνισης $f(t) : [0, 1] \rightarrow \Gamma$ η οποία είναι ομοιομορφισμός στο $(0, 1)$. Η εικόνα του 0 ονομάζεται αρχή της e και συμβολίζεται με $i(e)$, ενώ η εικόνα του 1 ονομάζεται τέλος της e και συμβολίζεται με $t(e)$. Για κάθε ακμή e ενός γραφήματος Γ που αναπαρίσταται από μια συνεχή απεικόνιση f όπως πριν, συμβολίζουμε με e^{-1} ή $\bar{e}$ την αντίστροφη της δηλαδή την ακμή που αναπαρίσταται από την απεικόνιση $f(1 - t)$.

Στο εξής χωρίς να το αναφέρουμε θα χρησιμοποιούμε πεπερασμένα γραφήματα.

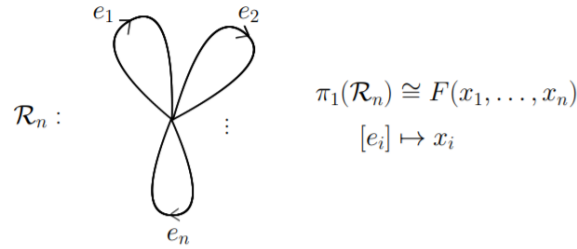
Ορισμός 1.2.2. Ο βαθμός μιας κορυφής $u \in V(\Gamma)$ είναι το μέγιστο πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $U - \{u\}$ για αυθαίρετα μικρές ανοικτές περιοχές U της κορυφής u στο Γ .

Ορισμός 1.2.3. Ένα γράφημα ονομάζεται γράφημα πυρήνας (core), αν όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

Ένα σημαντικό γράφημα για τον ορισμό του εξωτερικού χώρου (outer space) CV_n είναι το παρακάτω:

Ορισμός 1.2.4. Έστω n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 2. Το γράφημα με n ακμές και μια κορυφή ονομάζεται n -μπουκέτο n -rose $\mathcal{R}_n$. (Δηλαδή $\mathcal{R}_n = \vee_n S^1$)

Σχήμα 1.1: Το n -μπουκέτο και η θεμελιώδης ομάδα του



Ορισμός 1.2.5. Ένα μονοπάτι γ σε ένα γράφημα Γ είναι μια ακολουθία $e_1 e_2 \cdots e_n$ διαδοχικών ακμών, δηλαδή $i(e_{i+1}) = t(e_i)$. Η αρχή $i(e_1)$ είναι η αρχή $i(\gamma)$ του γ και το τέλος $t(e_n)$ είναι το τέλος $t(\gamma)$ του μονοπατιού γ . Το μονοπάτι γ θα λέγεται ανηγμένο αν δεν περιέχει παλινδρομίσσεις δηλαδή δεν περιέχει διαδοχικές ακμές της μορφής e, e^{-1} . Κάθε κορυφή θεωρείται μονοπάτι μηδενικού μήκους το οποίο ονομάζεται τετριμμένο μονοπάτι.

Αν δεν αναφέρεται ρητά το αντίθετο, στο εξής θα θεωρούμε ότι τα μονοπάτια έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$.

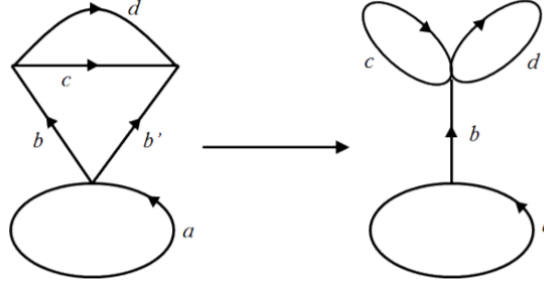
Ορισμός 1.2.6. Ένας μορφισμός $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μεταξύ δύο γραφημάτων είναι μια απεικόνιση η οποία απεικονίζει κορυφές σε κορυφές και ακμές σε ακμές έτσι ώστε $i(f(e)) = f(i(e))$ και $t(f(e)) = f(t(e))$ για κάθε ακμή e .

Ορισμός 1.2.7. Μια απεικόνιση $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ η οποία απεικονίζει κορυφές σε κορυφές και ακμές σε μονοπάτια έτσι ώστε $i(f(e)) = f(i(e))$ και $t(f(e)) = f(t(e))$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$ ονομάζεται απεικόνιση γραφημάτων.

Ορισμός 1.2.8. Έστω $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μια απεικόνιση γραφημάτων. Αν τα γραφήματα Γ, Γ' είναι εφοδιασμένα με μετρικές $l, l' : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αντίστοιχα, και e είναι μια ακμή του Γ , τότε η κλίση της f στην ακμή e ορίζεται ως το πηλίκο $\frac{l'(f(e))}{l(e)}$.

Ορισμός 1.2.9. Ένας μορφισμός γραφημάτων $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ λέγεται εμφύτευση αν είναι τοπικά 1-1 (locally injective).

Σχήμα 1.2: Παράδειγμα μορφοισμού γραφημάτων που δεν είναι εμφύτευση



1.3 Υποδιαίρεσεις και διπλώσεις

Στη συνέχεια περιγράφουμε τη διαδικασία της υποδιαίρεσης (subdivision) μιας ακμής ενός γραφήματος Γ . Έστω $e \in E(\Gamma)$ με αρχή v_1 και τέλος v_2 . Αντικαθιστούμε στο Γ την ακμή e με δύο νέες ακμές e_1, e_2 και προσθέτουμε μια νέα κορυφή v έτσι ώστε στο νέο γράφημα η e_1 να έχει αρχή v_1 και τέλος v και η e_2 να έχει αρχή v και τέλος v_2 . Για τη

Σχήμα 1.3: Υποδιαίρεση μιας ακμής



συνέχεια, θεωρούμε μια απεικόνιση γραφημάτων $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Αν $e \in E(\Gamma)$ και $f(e) = p'p''$ είναι μια υποδιαίρεση του μονοπατιού $f(e)$ και συμβολίσουμε με $i(p), t(p)$ την αρχή και το τέλος, αντίστοιχα, του μονοπατιού p , θα έχουμε:

$$t(p') = i(p'') \in V(\Gamma).$$

Υποδιαίρουμε την e , προσθέτοντας μια νέα κορυφή w , σε δύο νέες ακμές e', e'' . Έτσι προκύπτει ένα γράφημα Γ_1 με κορυφές $V(\Gamma_1) = V(\Gamma) \cup \{w\}$ και ακμές $E(\Gamma_1) = (E(\Gamma) - \{e\}) \cup \{e', e''\}$.

Για ένα μονοπάτι p στο Γ συμβολίζουμε με $\hat{p}$ το μονοπάτι στο Γ_1 που προκύπτει από το p αντικαθιστώντας κάθε εμφάνιση της e με $e'e''$.

Στο νέο γράφημα ορίζουμε μια απεικόνιση γραφημάτων $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ ως εξής:

$$f_1(v) = f(v), \text{ για κάθε } v \in V(\Gamma) \text{ και } f_1(w) = i(p'')$$

$$f_1(e_1) = \widehat{f(e_1)}, \text{ για κάθε } e_1 \in E(\Gamma) - \{e\} \text{ και } f_1(e') = \hat{p}', f_1(e'') = \hat{p}''.$$

Θα λέμε ότι η απεικόνιση $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ προκύπτει από την $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ με **υποδιαίρεση** (subdivision) της ακμής e σύμφωνα με την υποδιαίρεση του μονοπατιού $f(e) = p'p''$.

Υποθέτουμε ότι δύο ακμές $e_1, e_2 \in E(\Gamma)$ με κοινή αρχή έχουν την ίδια εικόνα μέσω της f . Κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα Γ_2 ταυτίζοντας αυτές τις δύο ακμές (και τα άκρα τους). Δηλαδή $E(\Gamma_2) = E(\Gamma) - \{e_1, e_2\} \cup \{z\}$ όπου z είναι η ακμή που προκύπτει από την ταύτιση των e_1, e_2 . Ορίζουμε απεικόνιση $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2$ ως εξής:

- Αν $e \in E(\Gamma_2) - \{z\}$, τότε το $f_2(e)$ είναι το μονοπάτι που προκύπτει από το $f(e)$ αντικαθιστώντας τις εμφανίσεις των e_1, e_2 με z .
- Αν $e = z$, τότε το $f_2(e)$ προκύπτει από το μονοπάτι $f(e_1)$ με τον ίδιο τρόπο.

Θα λέμε ότι η απεικόνιση γραφημάτων $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2$ προκύπτει από την απεικόνιση $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ με **στοιχειώδη (ή απλή) δίπλωση** (elementary folding) στις ακμές e_1, e_2 και θα συμβολίζουμε $\Gamma_2 = \Gamma/[e_1 = e_2]$.

Τώρα δίνουμε τον ορισμό της δίπλωσης (folding).

Έστω $e_1, e_2 \in E(\Gamma)$ δύο ακμές με κοινή αρχή και τέτοιες ώστε τα μονοπάτια $f(e_1), f(e_2)$ να έχουν μη τετριμμένο κοινό αρχικό (υπο-)μονοπάτι. Ονομάζουμε το μεγαλύτερο κοινό αυτό (υπο-)μονοπάτι p μέγιστο αρχικό κοινό τμήμα των μονοπατιών αυτών. Έστω $f(e_1) = pp_1$ και $f(e_2) = pp_2$.

- Υποθέτουμε ότι τα p_1, p_2 είναι μη τετριμμένα. Υποδιαιρούμε τις ακμές $e_1 = e'_1 e''_1$ και $e_2 = e'_2 e''_2$ σύμφωνα με τις υποδιαίρεσεις των μονοπατιών $f(e_1) = pp_1$ και $f(e_2) = pp_2$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στοιχειώδη δίπλωση στις ακμές e'_1, e'_2 .
- Υποθέτουμε τώρα ότι ένα από τα μονοπάτια p_1, p_2 είναι μη τετριμμένο και το άλλο, έστω το p_2 , είναι τετριμμένο. Εφαρμόζουμε υποδιαίρεση $e_1 = e'_1 e''_1$ σύμφωνα με την υποδιαίρεση του μονοπατιού $f(e_1) = pp_1$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στοιχειώδη δίπλωση στις ακμές e'_1, e_2 .
- Υποθέτουμε ότι τα μονοπάτια p_1, p_2 είναι τετριμμένα. Τότε εφαρμόζουμε στοιχειώδη δίπλωση στις ακμές e_1, e_2 .

Σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις προκύπτει ένα νέο γράφημα Γ_3 και απεικόνιση $f_3 : \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3$ η οποία λέμε ότι προκύπτει από την $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ με δίπλωση των e_1, e_2 .

1.4 Μαρκαρισμένα γραφήματα

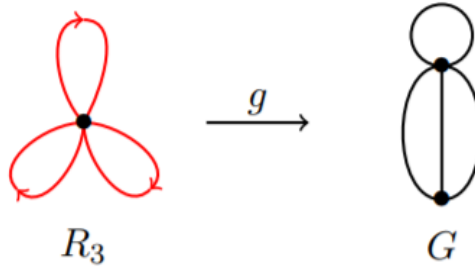
Υπενθυμίζουμε ορισμένες έννοιες αλγεβρικής τοπολογίας οι οποίες θα χρησιμοποιούνται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.4.1. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \rightarrow Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Μια ομοτοπία μεταξύ των f και g είναι μια συνεχής απεικόνιση $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ έτσι ώστε $H(x, 0) = f(x)$ και $H(x, 1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Οι απεικονίσεις $f, g : X \rightarrow Y$ θα λέγονται ομοτοπικές και θα συμβολίζονται $f \simeq g$, αν υπάρχει ομοτοπία H όπως προηγουμένως.

Ορισμός 1.4.2. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μια ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ του X και του Y είναι ένα ζεύγος συνεχών απεικονίσεων $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow X$ έτσι ώστε $g \circ f$ να είναι ομοτοπική με την Id_X και $f \circ g$ να είναι ομοτοπική με την Id_Y . Αν υπάρχει τέτοιο ζεύγος απεικονίσεων, οι χώροι X, Y θα λέγονται ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Ορισμός 1.4.3. Ένα μαρκάρισμα (*marking*) ενός γραφήματος Γ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία $f : \mathcal{R}_n \rightarrow \Gamma$. Το ζεύγος (Γ, f) ονομάζεται μαρκαρισμένο (*marked*) γράφημα.

Σχήμα 1.4: Ένα μαρκαρισμένο γράφημα (G, g)



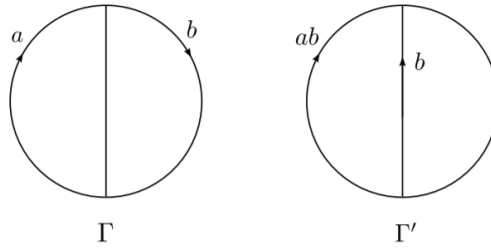
Αν ταυτίσουμε την $\pi_1(\mathcal{R}_n)$ με την F_n το μαρκάρισμα επάγει μια ταύτιση της $\pi_1(\Gamma)$ με την F_n .

Ορισμός 1.4.4. Δύο μαρκαρισμένα γραφήματα Γ, Γ' ονομάζονται ισοδύναμα αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ τέτοιος ώστε οι συναρτήσεις $\phi f, f'$ να είναι ομοτοπικές.

Η σχέση αυτή είναι προφανώς σχέση ισοδυναμίας.

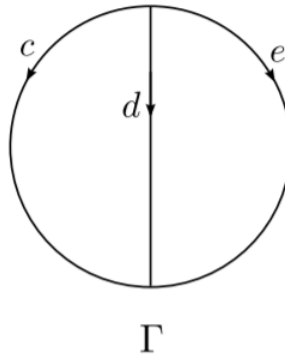
Παράδειγμα 1.4.5. Δείχνουμε ότι τα δύο μαρκαρισμένα γραφήματα στο παρακάτω σχήμα είναι ισοδύναμα. Οι ακμές χωρίς ετικέτες σχηματίζουν μεγιστικά δέντρα. Αρ-

Σχήμα 1.5: Δύο μαρκαρισμένα γραφήματα με τις ετικέτες τους



χικά μετονομάζουμε τις ακμές του Γ όπως στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 1.6: Το γράφημα Γ



Οι ακμές του Γ' μετονομάζονται c', d' και e' αντίστοιχα. Έστω u η κορυφή του $\mathcal{R}_2$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις:

- $f : \mathcal{R}_2 \rightarrow \Gamma$ με $a \mapsto \bar{c}d$, $b \mapsto \bar{d}e$.
- $f^{-1} : \Gamma \rightarrow \mathcal{R}_2$ με $c \mapsto \bar{a}$, $d \mapsto u$, $e \mapsto b$
- $f' : \mathcal{R}_2 \rightarrow \Gamma'$ με $a \mapsto \bar{c}'d'$, $b \mapsto \bar{d}'e'$
- $f'^{-1} : \Gamma' \rightarrow \mathcal{R}_2$ με $c' \mapsto \bar{b}a$, $d' \mapsto \bar{b}$, $e' \mapsto u$.

όπου υπενθυμίζουμε ότι με $\bar{e}$ συμβολίζουμε το μονοπάτι που αντιστοιχεί στην ακμή e με τον αντίθετο προσανατολισμό. Εύκολα ελέγχεται ότι $f^{-1} \circ f \simeq Id_{\mathcal{R}_2}$ και $f \circ f^{-1} \simeq Id_{\Gamma}$. Ομοίως για την f' . Θεωρούμε τον ομοιομορφισμό $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ με $d \mapsto d'$, $e \mapsto e'$, $c \mapsto c'$ με τον αντίστροφό του. Τότε έχουμε ότι $\phi \circ f \simeq f'$ και άρα τα δύο μαρκαρίσματα είναι πράγματι ισοδύναμα.

1.5 Μετρικά Γραφήματα

Τώρα δεν εξετάζουμε τα γραφήματα μόνο ως τοπολογικούς χώρους αλλά τα εφοδιάζουμε και με μετρική.

Ορισμός 1.5.1. *Μια μετρική σε ένα γράφημα Γ είναι μια απεικόνιση $l : E(\Gamma) \rightarrow (0, +\infty)$. Η εικόνα $l(e)$ ονομάζεται μήκος της ακμής $e \in E(\Gamma)$. Το άθροισμα των μηκών $l(e)$ για όλες τις ακμές $e \in E(\Gamma)$ ονομάζεται όγκος του Γ .*

Ένα γράφημα Γ εφοδιασμένο με μετρική όπως παραπάνω ονομάζεται μετρικό γράφημα.

Έτσι μπορούμε να δούμε ένα γράφημα Γ ως μετρικό χώρο θεωρώντας τις κλειστές ακμές του e ως εικόνες (απεικονίσεων) κλειστών διαστημάτων μήκους $l(e)$ (οι οποίες είναι ισομετρίες στο εσωτερικό των διαστημάτων). Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων ενός γραφήματος ορίζεται να είναι το infimum όλων των μηκών των ανηγμένων μονοπατιών από το ένα σημείο στο άλλο. Η τοπολογία που επάγεται από τη μετρική αυτή είναι η ίδια με την τοπολογία που έχει το γράφημα ως σύμπλεγμα κελιών (CW complex).

Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι όλα τα γραφήματα είναι **όγκου 1**.

Ορισμός 1.5.2. *Αν το a είναι ένας ανηγμένος βρόγχος, δηλαδή ανηγμένο κλειστό μονοπάτι, στο γράφημα Γ , τότε το μήκος του a σύμφωνα με τη μετρική l ορίζεται να είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών του Γ (από τις οποίες διέρχεται το a , μαζί με την πολλαπλότητα). Αν ο βρόγχος a δεν είναι ανηγμένος, τότε ως μήκος του a ορίζεται το μήκος του ανηγμένου βρόγχου που είναι ομοτοπικός με τον a (ή 0 αν ο a είναι συσταλτός (nullhomotopic)).*

Έτσι, μπορούμε να θεωρούμε το γράφημα Γ ως ένα γεωδαισιακό μετρικό χώρο όπου κάθε ακμή e έχει μήκος $l(e)$.

Δύο ισομετρίες $[0, \epsilon_1) \rightarrow \Gamma, [0, \epsilon_2) \rightarrow \Gamma$ δεικνύουν την ίδια κατεύθυνση αν υπάρχει $0 < \epsilon \leq \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ ώστε οι δύο ισομετρίες να ταυτίζονται στο $[0, \epsilon)$.

Ορισμός 1.5.3. *Μια κατεύθυνση στο $x \in \Gamma$ είναι μια οικογένεια ισομετρικών εμφυτεύσεων $d : [0, \epsilon) \rightarrow \Gamma$ με $d(0) = x$ που ανά δύο δεικνύουν την ίδια κατεύθυνση.*

Συμβολίζουμε με $T_x(\Gamma)$ το σύνολο των κατευθύνσεων του x και το πλήθος των κατευθύνσεων μιας κορυφής είναι ο βαθμός της.

Πρόταση 1.5.4. Αν $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ είναι μια απεικόνιση γραφημάτων και $\phi(x) = x'$, τότε η ϕ επάγει μια απεικόνιση ϕ_* από το σύνολο των κατευθύνσεων του x , $T_x(\Gamma)$, στο σύνολο των κατευθύνσεων του x' , $T_{x'}(\Gamma')$ (εκτός αν η ϕ απεικονίζει ακμή που περιέχει το x σε κορυφή).

Απόδειξη. Έστω w μια ισομετρία δεικνύουσα μια κατεύθυνση στο x . Τότε η $\phi \circ w$ είναι η σύνθεση μιας ισομετρίας με την ϕ και άρα μετά από κατάλληλη αναπαραμέτρηση λαμβάνουμε μια κατεύθυνση στο $\phi(x)$. ■

Ορισμός 1.5.5. Μια απεικόνιση $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μεταξύ δύο μετρικών γραφημάτων ονομάζεται κατά τμήματα γραμμική αν είναι συνεχής και για κάθε ακμή $e \in E(\Gamma)$, υπάρχει θετικός αριθμός $S_{f,e}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της f στην e να έχει σταθερή ταχύτητα $S_{f,e}$. Συγκεκριμένα, η f είναι κατά τμήματα γραμμική αν για κάθε $e \in E(\Gamma)$, το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό και οι κάθετες απεικονίσεις είναι τοπικές ισομετρίες.

$$\begin{array}{ccc} e \subset \Gamma & \xrightarrow{f|_e} & f(e) \subset \Gamma' \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathbb{R} \supset [0, l_\Gamma(e)] & \xrightarrow{t \mapsto S_{f,e}t} & [0, S_{f,e}l_\Gamma(e)] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

Ορισμός 1.5.6. Για δύο μετρικούς χώρους $(X, d_X), (Y, d_Y)$ και για μια Lipschitz συνεχή $f : X \rightarrow Y$ (δηλαδή $d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y)$, $x \in X, y \in Y$ για κάποιο $\lambda \geq 0$) ορίζουμε ως $\sigma(f)$ το μικρότερο πραγματικό αριθμό που ικανοποιεί τη σχέση

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \sigma(f) d_X(x, y), \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

1.6 Ο εξωτερικός χώρος μιας ελεύθερης ομάδας F_n

Το 1986 οι Culler και Vogtmann εισήγαγαν στο [28] τον εξωτερικό χώρο μιας ελεύθερης ομάδας F_n στον οποίο η ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών $\text{Out}(F_n)$ δρα με πεπερασμένες σταθεροποιούσες σημείων και απέδειξαν ότι είναι συσταλτός. Η βασική ιδέα για την κατασκευή του εξωτερικού χώρου είναι τα σημεία του να αντιστοιχούν σε μαρκαρισμένα (marked) γραφήματα με θεμελιώδη ομάδα F_n και η ομάδα $\text{Out}(F_n)$ να δρα αλλάζοντας τον ισομορφισμό (του μαρκαρίσματος). Σε αυτή την ενότητα δίνουμε τον

ορισμό του εξωτερικού χώρου μιας πεπερασμένα παραγόμενης ελεύθερης ομάδας F_n χρησιμοποιώντας την έννοια των μαρκαρισμένων μετρικών γραφημάτων.

Υπάρχει και ένας δεύτερος ισοδύναμος ορισμός του ίδιου χώρου ο οποίος χρησιμοποιεί F_n -δέντρα. Θα παρουσιάσουμε το δεύτερο ορισμό σε επόμενη ενότητα για τη γενικότερη περίπτωση του εξωτερικού χώρου ενός ελεύθερου γινομένου.

Το παρακάτω λήμμα ονομάζεται "λήμμα του Lebesgue".

Λήμμα 1.6.1. *Αν ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής και $\mathcal{U}$ είναι ένα ανοικτό του κάλυμμα, τότε υπάρχει θετικός αριθμός ϵ έτσι ώστε κάθε υποσύνολο του X με διάμετρο μικρότερη του ϵ να περιέχεται σε κάποιο στοιχείο της κάλυψης $U \in \mathcal{U}$.*

Πρόταση 1.6.2 ([8]). *Κάθε κλάση (ελεύθερης ομοτοπίας) ενός βρόγχου, στον οποίο δεν έχει επιλεγεί κάποιο σημείο αναφοράς, σε ένα γράφημα έχει μοναδικό ανηγμένο Lipschitz και συνεχή αντιπρόσωπο (ως προς αναπαραμέτρηση του S^1).*

Απόδειξη. Έστω Γ ένα γράφημα και $\omega : S^1 \rightarrow \Gamma$ ένας βρόγχος στο Γ . Ορίζουμε τη συνήθη μετρική στο Γ ώστε κάθε ακμή να έχει μήκος 1. Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του Γ που αποτελείται από τις ανοικτές ακμές και τα ανοικτά σύνολα

$$B_{\frac{1}{2}}(u) = \left\{ x \in \Gamma \mid d(x, u) < \frac{1}{2} \right\}$$

για όλες τις κορυφές $u \in V(\Gamma)$. Τότε οι αντίστροφες εικόνες $\omega^{-1}(U)$ για $U \in \mathcal{U}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του κύκλου S^1 . Από το παραπάνω λήμμα υπάρχει θετικός αριθμός ϵ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in S^1$, να υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $B_\epsilon(x) \subset U$. Από τη συμπαγεια του κύκλου υπάρχουν πεπερασμένα $t_1, \dots, t_k \in S^1$ τέτοια ώστε για κάθε $1 \leq i \leq k$, $\omega([t_i, t_{i+1}]) \subset U$ για κάποιο $U \in \mathcal{U}$, όπου με $[t_i, t_{i+1}]$ συμβολίζουμε το κλειστό τόξο των t_i, t_{i+1} . Αφού όλα τα σύνολα της $\mathcal{U}$ είναι συσταλτά, αναπαραμετρώντας καταλλήλως, ο βρόγχος ω είναι ομοτοπικός rel $t_1, \dots, t_k$ με βρόγχο ω' ο οποίος είναι γραμμικός πάνω στα τόξα $[t_i, t_{i+1}]$, για κάθε i .

Όμως τότε το $\bar{V} = \omega'^{-1}(V(\Gamma))$ είναι πεπερασμένο και κατά συνέπεια μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ω' είναι γραμμικός κατά τμήματα και η παραπάνω ομοτοπία σταθεροποιεί το $\bar{V}$. Με κατάλληλη αναπαραμέτρηση προκύπτει βρόγχος ω'' ομοτοπικός με τον ω και πεπερασμένα σημεία $s_1, \dots, s_{l+1}$ τέτοια ώστε κάθε $\omega''(s_i)$ να είναι κορυφή στο Γ και ο ω'' να απεικονίζει γραμμικά κάθε τόξο $[s_i, s_{i+1}]$ επί, ακριβώς μιας, κλειστής ακμής $e_i \in E(\Gamma)$.

Ο ω'' είναι ανηγμένος αν και μόνο αν για κάθε $1 \leq i < l$ έχουμε $e_i \neq e_{i+1}^{-1}$ και $e_1 \neq e_l^{-1}$. Ισοδύναμα αν και μόνο αν η λέξη $e_1 e_2 \dots e_l$ είναι κυκλικά ανηγμένη ως λέξη στο $E(\Gamma)^\pm$. Αφού ω'' ελεύθερος βρόγχος μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάποιο μέρος του, της μορφής

$$e_i = e_{i+1}^{-1}, \quad \text{ή} \quad e_1 = e_l^{-1},$$

με ένα σταθερό μονοπάτι χωρίς να αλλάξει η κλάση ομοτοπίας. Κάνοντας την παραπάνω λέξη κυκλικά ανηγμένη και αλλάζοντας ταυτόχρονα το ω'' κατάλληλα παίρνουμε έναν ανηγμένο αντιπρόσωπο του ω στο Γ . Αυτό επίσης γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε φορά ο βρόγχος που παίρνουμε να είναι κατά τμήματα γραμμικός και άρα Lipschitz συνεχής.

Δείχνουμε τώρα ότι αυτός ο αντιπρόσωπος είναι μοναδικός ως προς αναπαραμέτρηση του S^1 . Έστω q ένας ακόμα ανηγμένος αντιπρόσωπος του ω . Σταθεροποιώντας ένα μεγιστικό δέντρο T (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) στο Γ , μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους q, ω'' με ανηγμένες λέξεις στις ακμές του $\Gamma - T$ με το συνήθη τρόπο. Αφού ο q είναι ελεύθερα ομοτοπικός με τον ω'' , οι λέξεις που τους αναπαριστούν ως στοιχεία της $\pi_1(\Gamma)$ πρέπει να ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας. Όμως, αφού και οι δύο λέξεις είναι κυκλικά ανηγμένες, η q πρέπει να είναι μια κυκλική μετάθεση (shift) της ω'' . Άρα ο q μπορεί να προκύψει από τον ω'' με αναπαραμέτρηση της S^1 . ■

Ορισμός 1.6.3. Αν a είναι μια κλάση συζυγίας στην F_n , γράφουμε $a|_\Gamma : S^1 \rightarrow \Gamma$ (ή πολλές φορές απλά a) για το μοναδικό ανηγμένο και Lipschitz συνεχή αντιπρόσωπο της κλάσης ελεύθερης ομοτοπίας $f(a)$ (όπου f είναι το μαρκάρισμα).

Ορισμός 1.6.4. Το μήκος $l_\Gamma(a)$ μιας μη τετριμμένης κλάσης συζυγίας a στην F_n ορίζεται ως το μήκος του $a|_\Gamma$ στο Γ , το οποίο υπολογίζεται αθροίζοντας τα μήκη των ακμών από τις οποίες διέρχεται ο $a|_\Gamma$.

Ακολουθεί ο ορισμός του εξωτερικού χώρου για την περίπτωση μιας ελεύθερης ομάδας F_n τάξης n ο οποίος κάνει χρήση της έννοιας των μαρκαρισμένων μετρικών γραφημάτων.

Ορισμός 1.6.5 (Culler - Vogtmann). Ο εξωτερικός χώρος τάξεως n , συμβολίζεται με CV_n , ορίζεται να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας τριάδων (Γ, f, l) , όπου

- Το Γ είναι γράφημα πυρήνας.

- $H f : \mathcal{R}_n \rightarrow \Gamma$ είναι μαρκάρισμα (marking).
- $H l$ είναι μετρική στο Γ .

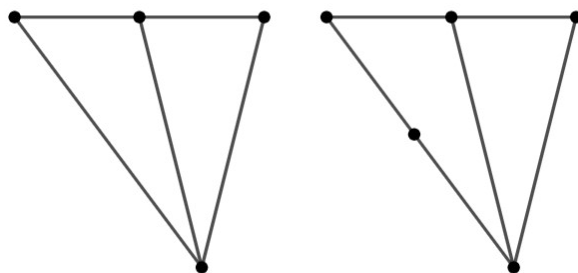
και κάθε δύο τέτοιες τριάδες (Γ, f, l) , (Γ', f', l') είναι ισοδύναμες αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ τέτοιος ώστε

- $\phi f \simeq f'$ (όπου εδώ $n \simeq$ συμβολίζει ομοτοπία), και
- για κάθε βρόγχο a στο Γ , $l(a) = l'(\phi(a))$.

Πρόταση 1.6.6. Κάθε τριάδα (Γ, f, l) για $(n \geq 2)$ είναι ισοδύναμη με μια (Γ', f', l') τέτοια ώστε το Γ' να μην έχει κορυφές με βαθμό ίσο με 2.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν υποδιαιρέσουμε ένα γράφημα τότε προκύπτει ένα άλλο ομοιομορφικό με το πρώτο. Έτσι μπορούμε, σε ένα γράφημα, να “απαλείψουμε” μια

Σχήμα 1.7: Ομοιομορφικά γραφήματα



κορυφή βαθμού 2, εκτελώντας την αντίστροφη διαδικασία της υποδιαίρεσης και να πάρουμε ένα ομοιομορφικό γράφημα. Επιπλέον στη νέα ακμή που προκύπτει θέτουμε μήκος το άθροισμα των μηκών των δύο ακμών από τις οποίες προήλθε. Τότε το νέο γράφημα είναι προφανώς ισοδύναμο (όχι μόνο ομοιομορφικό) με το αρχικό. Επίσης, η διαδικασία αυτή αφαιρεί μια κορυφή με βαθμό ίσο με 2 και αφού το Γ είναι πεπερασμένο γράφημα μπορούμε να αφαιρέσουμε όλες αυτές τις κορυφές. ■

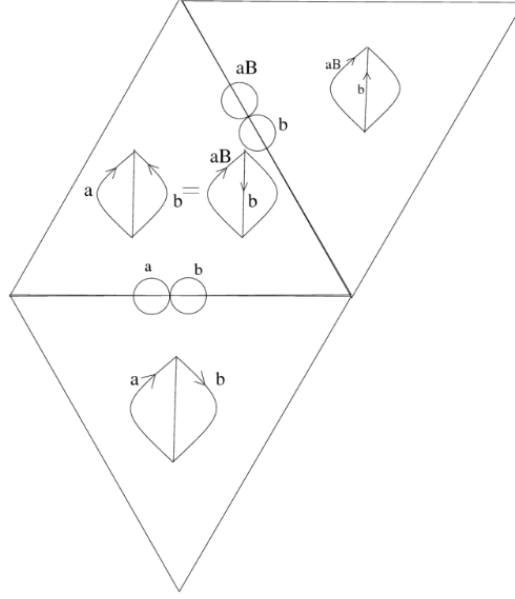
Παρατήρηση 1.6.7. Επίσης δεν είναι δύσκολο ναδειχθεί ότι κάθε τριάδα (Γ, f, l) είναι ισοδύναμη με μία τριάδα όγκου 1. Αυτός είναι ο λόγος που έχουμε θεωρήσει ότι τα μετρικά μας γραφήματα έχουν όγκο 1.

1.7 Τοπολογίες στον εξωτερικό χώρο

Υπάρχουν τρεις τοπολογίες με τις οποίες εφοδιάζουμε συνήθως τον εξωτερικό χώρο CV_n οι οποίες όμως είναι ισοδύναμες μεταξύ τους ([34],[60]). Συγκεκριμένα:

- Ο εξωτερικός χώρος CV_n μπορεί να αναλυθεί σε ανοικτά simplices κάθε ένα από τα οποία θα αντιστοιχεί σε ένα σταθερό μαρκάρισμα όπου θα μεταβάλλονται τα μήκη των ακμών του γραφήματος Γ .

Σχήμα 1.8: Τρία 2-simplices με τα αντίστοιχα μαρκαρισμένα γραφήματα



Δηλαδή ο CV_n μπορεί να θεωρηθεί ως σύμπλεγμα από simplices όπου λείπουν ενδεχομένως όψεις (faces). Έτσι μπορούμε να εφοδιάσουμε το CV_n με την ασθενή τοπολογία ως προς αυτή τη συλλογή των simplices. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ένα σταθερό μαρκάρισμα $f : \mathcal{R}_n \rightarrow \Gamma$ και μια αρίθμηση $e_1, \dots, e_k$ των ακμών του Γ , τότε υπάρχει μια φυσική απεικόνιση

$$j : \Delta_k \rightarrow CV_n$$

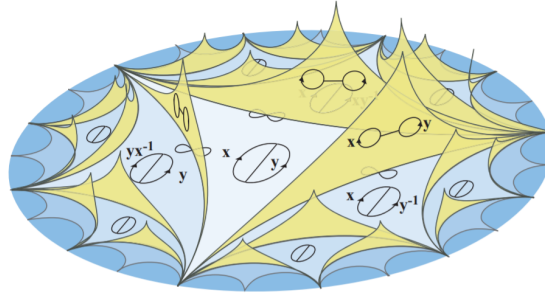
όπου

$$\Delta_k = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \sum x_i = 1, x_i > 0 \right\}$$

είναι το ανοικτό simplex $(k-1)$ -διάστασης στον $\mathbb{R}^k$. Για $(x_1, \dots, x_k) \in \Delta_k$ θέτουμε $j(x_1, \dots, x_k) = [(\Gamma, f, l)]$ όπου $l(e_i) = x_i$. Μπορεί να δειχθεί ότι η j είναι 1-1. Το simplex που αντιστοιχεί στο $[(\Gamma', f')]$ είναι όψη (face) του συμπλέγματος που

αντιστοιχεί στο $[(\Gamma, f)]$ αν το $[(\Gamma', f')]$ μπορεί να προκύψει από το $[(\Gamma, f)]$ μετά από σύμπτυξη (collapse) κάποιων ακμών σε σημεία. Η όψη του simplex προκύπτει θέτοντας μήκος ίσο με 0 σε αυτές τις ακμές. Τότε ο CV_n είναι ο χώρος πηλίκου που προέρχεται από την ξένη ένωση των ανοικτών simplices που αντιστοιχούν στα $[(\Gamma, f)]$ μετά από ταυτίσεις των αντιστοίχων όψεων (faces). Κάποιες όψεις στα simplices λείπουν αφού δε μπορούμε να κάνουμε collapse ένα βρόγχο χωρίς να αλλάξει η τάξη της θεμελιώδους ομάδας. Για μια αναλυτική περιγραφή της simplicial δομής του CV_n βλ. [26]

Σχήμα 1.9: Το CV_2



- Ο δεύτερος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να εφοδιάσουμε τον εξωτερικό χώρο με τοπολογία επιτυγχάνεται με την ύπαρξη εμφύτευσης $CV_n \hookrightarrow \mathbb{P}^S$ όπου S είναι το σύνολο των μη-τετραμμένων κλάσεων συζυγίας της F_n (έτσι ο εξωτερικός χώρος CV_n εφοδιάζεται με την τοπολογία του υποχώρου).

Ένα μαρκάρισμα $f : \mathcal{R}_n \rightarrow \Gamma$ καθορίζει μια απεικόνιση μήκους στην F_n . Δηλαδή, αν πάρουμε μια λέξη $w \in F_n$ και $f_* : \pi_1(\mathcal{R}_n) \rightarrow \pi_1(\Gamma)$ η επαγόμενη απεικόνιση, τότε το μήκος $l(w)$ της w είναι το μήκος του μικρότερου βρόγχου στο Γ που ανήκει στην κλάση ελεύθερης ομοτοπίας που ορίζει η $f_*(w)$. Αφού το μήκος μιας λέξης καθορίζεται από την κλάση ελεύθερης ομοτοπίας της έχουμε ότι

$$l(w) = l(x^{-1}wx), \quad \text{για κάθε } x, w \in F_n,$$

αυτό σημαίνει ότι η l είναι απεικόνιση μήκους στις κλάσεις συζυγίας της F_n . Είναι άμεσο ότι ισοδύναμα μαρκαρισμένα γραφήματα δίνουν την ίδια απεικόνιση μήκους στην F_n , κατά συνέπεια έχουμε την εμφύτευση

$$CV_n \hookrightarrow \mathbb{R}^S, \quad [(\Gamma, f)] \mapsto l : S \rightarrow \mathbb{R}.$$

(Μπορεί ναδειχθεί ότι η απεικόνιση μήκους που αντιστοιχεί σε ένα μαρκαρισμένο γράφημα είναι μοναδική και άρα έχουμε πράγματι εμφύτευση. πχ βλ [27]). Για $c \in S$ οι απεικονίσεις $[(\Gamma, f)] \rightarrow l(c)$ δίνουν τις συντεταγμένες της παραπάνω εμφύτευσης. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{0}$ δεν ανήκει στην εικόνα αυτής της απεικόνισης. Τώρα, αφού έχουμε εμφύτευση, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι κάθε γράφημα έχει όγκο ίσο με 1, έπεται ότι διαφορετικά στοιχεία του CV_n δεν δίνουν απεικονίσεις μήκους που να είναι η μία πολλαπλάσιο της άλλης. Έτσι, έχουμε εμφύτευση

$$CV_n \hookrightarrow \mathbb{P}^S,$$

όπου $\mathbb{P}^S$ είναι ο αντίστοιχος προβολικός χώρος.

- Τέλος ο τρίτος τρόπος είναι να ορίσουμε τοπολογία μέσω συγκλίσεως χρησιμοποιώντας ως σύστημα περιοχών ενός σημείου $[(\Gamma, f, l)] \equiv [\Gamma] \in CV_n$ την οικογένεια

$$B_\epsilon([\Gamma]) = \{[\Gamma'] \in CV_n \mid \text{υπάρχει } \phi : \Gamma \rightarrow \Gamma' \text{ με } \phi f \simeq f', \phi \text{ είναι } < (1+\epsilon) \text{ Lipschitz}\}.$$

1.8 Η δράση της $\text{Out}(F_n)$ στον εξωτερικό χώρο

Η ομάδα $\text{Out}(F_n)$ δρα στον CV_n από δεξιά ως εξής: έστω $\Phi \in \text{Out}(F_n)$. Αφού το γράφημα $\mathcal{R}_n$ έχει μία μόνο κορυφή, μπορούμε να θεωρήσουμε την Φ ως ομοτοπική ισοδυναμία $\Phi : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n$. Τότε ο Φ δρα στο $[(\Gamma, f, l)] \in CV_n$ ως εξής:

$$[(\Gamma, f, l)]\Phi = [(\Gamma, f\Phi, l)].$$

Πρόταση 1.8.1. *Η σταθεροποιούσα κάθε σημείου $[(\Gamma, f, l)]$ του CV_n είναι πεπερασμένη υπό τη δράση της $\text{Out}(F_n)$ και μάλιστα*

$$\text{Stab}[(\Gamma, f, l)]_{\text{Out}(F_n)} \cong \text{Isom}(\Gamma, l).$$

Απόδειξη. Έστω $\Phi \in \text{Stab}[(\Gamma, f, l)]$. Τότε $[(\Gamma, f, l)] \sim [(\Gamma, f\Phi, l)]$ οπότε υπάρχει ισομετρία $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ με $\phi f \simeq f\Phi \Rightarrow \Phi \simeq f^{-1}\phi f$. Έτσι η απεικόνιση

$$\text{Isom}(\Gamma, l) \rightarrow \text{Stab}(\Gamma, l, h), \phi \mapsto f^{-1}\phi f$$

είναι επί. Όμως ισχύει ότι: αν $i : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ισομετρία ενός μετρικού γραφήματος με $i \simeq Id$ τότε $i = Id$. Οπότε η παραπάνω απεικόνιση είναι και 1-1. ■

1.9 Η μετρική του Lipschitz στον εξωτερικό χώρο

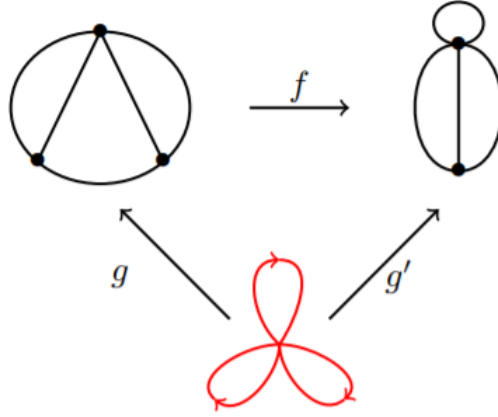
Στην ενότητα αυτή δίνουμε τον ορισμό της μετρικής του Lipschitz στον εξωτερικό χώρο CV_n . Οι ιδιότητες της μετρικής αυτής μελετήθηκαν από τους Francaviglia και Martino στο [58].

Ορισμός 1.9.1. Έστω $[(\Gamma, f, l)]$ και $[(\Gamma', f', l')]$ δύο σημεία του CV_n . Μία απεικόνιση $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ τέτοια ώστε

- $\phi f \simeq f'$ και
- $n \phi$ να είναι γραμμική στις ακμές

ονομάζεται διαφορά των μαρκαρισμάτων (*difference of markings*).

Σχήμα 1.10: Μια διαφορά μαρκαρισμάτων f



Θα συμβολίζουμε με $\sigma(\phi)$ τη μέγιστη κλίση της ϕ .

Ορισμός 1.9.2. Έστω $\Gamma \equiv [(\Gamma, f, l)]$ και $\Gamma' \equiv [(\Gamma', f', l')]$ δύο σημεία του εξωτερικού χώρου CV_n . Η μετρική του Lipschitz ορίζεται ως εξής

$$d(\Gamma, \Gamma') = \inf_{\phi} \log \sigma(\phi)$$

όπου το $\inf$ λαμβάνεται σε όλες τις διαφορές μαρκαρισμάτων $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$.

Πρόταση 1.9.3 ([8]). Έστω $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μια Lipschitz συνεχής απεικόνιση όπου $[(\Gamma, f, l)], [(\Gamma', f', l')] \in CV_n$. Αν $n \bar{\phi} : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ έχει σταθερή κλίση σε όλες τις ακμές του Γ και $\phi \simeq \bar{\phi} \text{ rel κορυφές}$, τότε $\sigma(\phi) \geq \sigma(\bar{\phi})$.

Απόδειξη. Έστω ότι η κλειστή $e \in E(\Gamma)$ έχει κλίση $\sigma(\bar{\phi})$ υπό την $\bar{\phi}$. Θεωρούμε τους περιορισμούς $\omega_1 = \bar{\phi}|_e$ και $\omega_2 = \phi|_e$ τους οποίους θεωρούμε ως μονοπάτια στο Γ' ανάμεσα στα σημεία x, y . Το πρώτο είναι γραμμικό ανηγμένο μονοπάτι και το δεύτερο είναι ομοτοπικό, rel τα τελικά σημεία, με το πρώτο και άρα θα πρέπει να διασχίσει τουλάχιστον το ίδιο μονοπάτι με το ω_1 (και πιθανώς κάτι παραπάνω). Εφόσον τα μονοπάτια είναι Lipschitz συνεχή έχουμε ότι

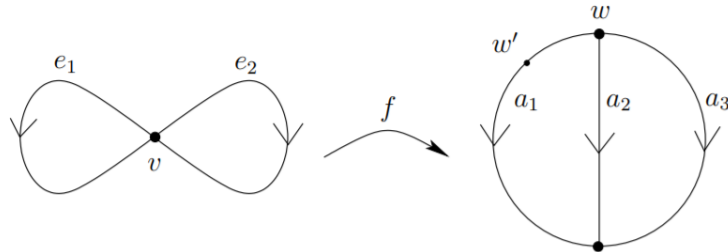
$$\sigma(\bar{\phi}) \cdot l(e) = |\omega_1| \leq |\omega_2| = \sigma(\phi)l(e).$$

■

Ορισμός 1.9.4. Μια απεικόνιση διαφοράς μαρκαρισμάτων (*difference of markings*) ϕ ονομάζεται βέλτιστη (*optimal*) αν επιτυγχάνει το *infimum* της Lipschitz απόστασης και έχει σταθερή κλίση στις ακμές.

Παράδειγμα 1.9.5. Δίνουμε ένα παράδειγμα μιας απεικόνισης f , μεταξύ δύο γραφημάτων με όγκο 1, που δεν είναι βέλτιστη. Στο γράφημα αριστερά οι δύο ακμές έχουν

Σχήμα 1.11: Παράδειγμα απεικόνισης που δεν είναι βέλτιστη



μήκος $\frac{1}{2}$ ενώ στο δεξί γράφημα κάθε ακμή έχει μήκος $\frac{1}{3}$. Υποθέτουμε ότι

$$e_1 \xrightarrow{f} a_2 \bar{a}_3, \quad e_2 \xrightarrow{f} a_1 \bar{a}_2 a_1 \bar{a}_3 a_2 \bar{a}_1.$$

Η κλίσης της f στην e_1 είναι $\frac{2/3}{1/2} = \frac{4}{3}$ ενώ στην e_2 είναι $\frac{6/3}{1/2} = 4$. Συνεπώς $\sigma(f) = 4$ και το tension γράφημα Δ_f της f (δηλαδή το γράφημα που αποτελείται από τις ακμές στις οποίες η f έχει τη μέγιστη κλίση) αποτελείται μόνο από την ακμή e_2 . Οι εικόνες των $e_2, \bar{e}_2$ ξεκινούν και οι δύο με a_1 οπότε το Δ_f περιέχει μόνο μια gate¹ στην w . Έστω σημείο w' ένα σημείο στην ακμή a_1 το οποίο απέχει ϵ από την w , όπου $8\epsilon < 4 - \frac{4}{3}$. Το w' χωρίζει την a_1 σε δύο ακμές b_1, b_2 . Θεωρούμε την απεικόνιση f_1 που δίνεται από

$$e_1 \mapsto \bar{b}_1 a_2 \bar{a}_3 b_1, \quad e_2 \mapsto b_2 \bar{a}_2 b_1 b_2 \bar{a}_3 a_2 \bar{b}_2$$

¹Βλέπε ορισμό 1.12.5

Η f_1 είναι ομοτοπική με την f . Η κλίση της f_1 στην e_1 είναι $\frac{2/3 + 2\epsilon}{1/2} = \frac{4}{3} + 4\epsilon$ και στην e_2 $\frac{2 - 2\epsilon}{1/2} = 4 - 4\epsilon$. Για ϵ αρκετά μικρό ($8\epsilon < 4 - \frac{4}{3}$) έχουμε $\sigma(f_1) = 4 - 4\epsilon < \sigma(f)$, άρα η f δεν είναι βέλτιστη.

1.10 Ύπαρξη βέλτιστων απεικονίσεων

Θα χρειαστούμε το παρακάτω καλά γνωστό θεώρημα της συναρτησιακής ανάλυσης.

Θεώρημα 1.10.1 (Arzela-Ascoli). Έστω X ένας συμπαγής Hausdorff χώρος, Y ένας πλήρης μετρικός χώρος και $C(X, Y)$ ο χώρος των συνεχών απεικονίσεων από τον X στον Y (με την τοπολογία που επάγεται από την ομοιόμορφη σύγκλιση). Ένα υποσύνολο $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ έχει συμπαγή κλειστότητα αν και μόνο αν το $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχές και το σύνολο $\{f(x) | f \in \mathcal{F}\}$ έχει συμπαγή κλειστότητα στον Y για κάθε $x \in X$.

Υπενθυμίζουμε ότι το $\mathcal{F}$ ονομάζεται ισοσυνεχές (equicontinuous) αν για κάθε $\epsilon > 0$ και $x_0 \in X$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ για κάθε } f \in \mathcal{F}, x \in X.$$

Η τοπολογία με την οποία έχουμε εφοδιάσει το σύνολο $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y | f \text{ συνεχής}\}$ επάγεται από την ακόλουθη μετρική

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)), \text{ για } f, g \in C(X, Y).$$

Γνωρίζουμε ότι ένας συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης. Επιπλέον αφού κάθε μετρικός χώρος είναι Hausdorff και η κλειστότητα ενός συνόλου σε έναν συμπαγή χώρο είναι συμπαγές σύνολο, έχουμε το εξής Πόρισμα:

Πόρισμα 1.10.2. Ένα υποσύνολο $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$, όπου X και Y είναι συμπαγείς μετρικοί χώροι, έχει συμπαγή κλειστότητα αν και μόνο αν είναι ισοσυνεχές.

Πρόταση 1.10.3 ([34],[8]). Το παρακάτω *infimum*

$$\inf_{\phi} \{\sigma(\phi) | \phi : \Gamma \rightarrow \Gamma' \text{ είναι διαφορά μαρκαρισμάτων}\}$$

επιτυγχάνεται.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε το παραπάνω infimum με $c = \inf_{\phi} \{\sigma(\phi)\}$ και θεωρούμε το σύνολο

$$F = \{\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma' \mid \phi \text{ είναι } 2c - \text{Lipschitz}, \phi f \simeq f'\} \subset C(\Gamma, \Gamma').$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό του ότι το F είναι ισοσυνεχές και άρα από το παραπάνω Πρόρισμα η κλειστότητά του $\overline{F}$ είναι συμπαγής. Επιλέγουμε ακολουθία διαφορών μαρκαρισμάτων $\phi_k \in F$ με $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma(\phi_k) = c$ και παίρνουμε μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim_{l \rightarrow +\infty} \phi_{k_l} = \phi \in \overline{F}$. Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι Lipschitz συνεχής.

Έστω $x, y \in \Gamma$ και ϵ ένας θετικός αριθμός. Επιλέγουμε $l_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sigma(\phi_{k_{l_0}}) \leq c + \epsilon$ και $d(\phi, \phi_{k_{l_0}}) \leq \epsilon d_{\Gamma}(x, y)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} d_{\Gamma'}(\phi(x), \phi(y)) &\leq d_{\Gamma'}(\phi(x), \phi_{k_{l_0}}(x)) + \\ &d_{\Gamma'}(\phi_{k_{l_0}}(x), \phi_{k_{l_0}}(y)) + d_{\Gamma'}(\phi_{k_{l_0}}(y), \phi(y)) \leq (c + 3\epsilon)d_{\Gamma}(x, y). \end{aligned}$$

Αφού το ϵ ήταν αυθαίρετο έχουμε $\sigma(\phi) \leq c$. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $\phi f \simeq f'$ (διότι αφού $\phi \in F$ θα έχουμε ότι $\sigma(\phi) = c$).

Επιλέγουμε μια απεικόνιση $\overline{\phi}$ στην αρχική ακολουθία τέτοια ώστε $d(\phi, \overline{\phi}) < \epsilon$ όπου το $\delta\epsilon$ είναι μικρότερο από το μήκος της μικρότερης ακμής στο Γ' . Θα δείξουμε ότι $\phi \simeq \phi'$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\phi f \simeq \overline{\phi} f \simeq f'$.

Ορίζουμε μια ομοτοπία H_1 από την ϕ στη ϕ_1 η οποία μετακινεί τις εικόνες όλων των κορυφών από τις εικόνες τους μέσω της ϕ στις εικόνες τους μέσω της $\overline{\phi}$.

Επιλέγουμε μονοπάτι ω_u μεταξύ των εικόνων $\overline{\phi}(u)$, $\phi(u)$ για κάθε κορυφή $u \in V(\Gamma)$ και εισάγουμε αντίτυπό του σε κάθε ακμή με αρχή την u έτσι ώστε το εισαγόμενο αντίτυπο να έχει αρκούντως μικρό μήκος. Αφού το μήκος κάθε τέτοιου μονοπατιού στο Γ' είναι μικρότερο από ϵ , μπορούμε, ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, να επιτύχουμε η απόσταση της ϕ από τη ϕ_1 να είναι μικρότερη από 3ϵ . Έτσι παίρνουμε $d(\overline{\phi}, \phi_1) < 4\epsilon = \bar{\epsilon}$ αφού

$$d(\overline{\phi}, \phi_1) \leq d(\overline{\phi}, \phi) + d(\phi, \phi_1) < \epsilon + 3\epsilon = 4\epsilon.$$

Από την επιλογή του ϵ το άνω φράγμα της απόστασής τους $\bar{\epsilon}$ είναι μικρότερο από το μισό του μήκους της μικρότερης ακμής του Γ' . Επιπλέον ισχύει $\phi_1(v) = \overline{\phi}(v)$ για κάθε $v \in V(\Gamma)$.

Άρα μπορούμε να λάβουμε υπόψην μόνο ακμές στο Γ , δηλαδή πρέπει να βρούμε μια ομοτοπία από την ϕ_1 στη $\overline{\phi}$ rel κορυφές. Αν e είναι μια ακμή του Γ , τότε μπορούμε να

δούμε τις δύο απεικονίσεις $\omega_1 = \bar{\phi}|_{\bar{\epsilon}}$ και $\omega_2 = \phi_1|_{\bar{\epsilon}}$ ως μονοπάτια στο Γ' με την ίδια αρχή και τέλος. Θεωρούμε το καθολικό κάλυμμα $p : \bar{\Gamma}' \rightarrow \Gamma'$ και ανυψώνουμε τα μονοπάτια στα $\bar{\omega}_1$ και $\bar{\omega}_2$ με κοινή αρχή. Αν δείξουμε ότι τα τελικά τους σημεία είναι ίδια, τότε θα είναι ομοτοπικά rel τα τελικά σημεία αφού το καθολικό κάλυμμα είναι δέντρο. Όμως τότε η προβολή αυτής της ομοτοπίας στο Γ' , δίνει ομοτοπία από την ϕ_1 στη $\bar{\phi}$.

Η μετρική του Γ' επάγει μετρική στο καθολικό κάλυμμα $\bar{\Gamma}'$ έτσι ώστε η προβολή να είναι ισομετρία και δείχνουμε ότι $d_{\bar{\Gamma}'}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) < \bar{\epsilon}$. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $t_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $d_{\bar{\Gamma}'}(\bar{\omega}_1(t_0), \bar{\omega}_2(t_0)) = \bar{\epsilon}$ αφού και τα δύο μονοπάτια ξεκινούν από το ίδιο σημείο. Έστω τώρα ω ένα μονοπάτι στο Γ' μεταξύ των $\omega_1(t_0)$ και $\omega_2(t_0)$ μήκους μικρότερου από $\bar{\epsilon}$. Τότε αυτό ανυψώνεται σε μονοπάτι $\bar{\omega}$ στο $\bar{\Gamma}'$ ίδιου μήκους το οποίο ξεκινά από το $\bar{\omega}_1(t_0)$ και καταλήγει σε ένα σημείο P το οποίο απεικονίζεται στο $\omega_2(t_0)$. Συγκεκριμένα, η απόσταση ανάμεσα στα P και $\bar{\omega}_1(t_0)$ είναι διαφορετική από αυτήν ανάμεσα στα $\bar{\omega}_2(t_0)$, $\bar{\omega}_1(t_0)$. Έτσι, $P \neq \bar{\omega}_2(t_0)$. Όμως ισχύει

$$d_{\bar{\Gamma}'}(P, \bar{\omega}_2(t_0)) \leq d_{\bar{\Gamma}'}(P, \bar{\omega}_1(t_0)) + d_{\bar{\Gamma}'}(\bar{\omega}_1(t_0), \bar{\omega}_2(t_0)) < \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} = 2\bar{\epsilon}.$$

Έτσι, παίρνουμε δύο διαφορετικά σημεία στο καθολικό κάλυμμα με απόσταση μικρότερη από το μήκος μιας ακμής, τα οποία απεικονίζονται στο $\omega_2(t_0)$ το οποίο είναι άτοπο.

Ειδικότερα, έχουμε $d_{\bar{\Gamma}'}(\bar{\omega}_1(1), \bar{\omega}_2(1)) < \bar{\epsilon}$. Αφού $p(\bar{\omega}_1(1)) = p(\bar{\omega}_2(1))$, από την επιλογή του $\bar{\epsilon}$, έπεται πως $\bar{\omega}_1(1) = \bar{\omega}_2(1)$. ■

Παρατήρηση 1.10.4. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει επίσης η ύπαρξη των βέλτιστων απεικονίσεων.

1.11 Ιδιότητες της μετρικής του Lipschitz

Η επόμενη πρόταση περιέχει τρεις βασικές ιδιότητες της μετρικής του Lipschitz που ορίστηκε προηγουμένως (βλ. [34],[58]). Ο όρος μετρική χρησιμοποιείται καταχρηστικά γιατί, όπως θα δούμε στην συνέχεια, η απεικόνιση αυτή αποτυγχάνει να είναι συμμετρική.

Πρόταση 1.11.1. • $d(\Gamma, \Gamma'') \leq d(\Gamma, \Gamma') + d(\Gamma', \Gamma'')$ για κάθε $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \in CV_n$.

- Η $\text{Out}(F_n)$ δρα με ισομετρίες στον CV_n , δηλαδή $d(\Gamma \cdot \Phi, \Gamma' \cdot \Phi) = d(\Gamma, \Gamma')$
- $d(\Gamma, \Gamma') \geq 0$ με ισότητα μόνο όταν $\Gamma = \Gamma'$.

Λήμμα 1.11.2. *Ομοτοπικές ισοδυναμίες μεταξύ πεπερασμένων συνεκτικών γραφημάτων χωρίς ακμές με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 1 είναι πάντα επί.*

Απόδειξη. Έστω $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μια ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ γραφημάτων όπως στην υπόθεση, η οποία υποθέτουμε ότι δεν είναι επί. Έστω ϕ^{-1} η ομοτοπική αντίστροφή της ϕ και p σημείο στο $\Gamma' - \phi(\Gamma)$. Το $\phi(\Gamma)$ είναι συμπαγές και άρα κλειστό στο Γ' , οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το p βρίσκεται στο εσωτερικό μιας ακμής e . Έστω $\Delta = \Gamma' - \{e, i(e), t(e)\} \subset \Gamma'$. Δείχνουμε ότι το $\Gamma' - p$ είναι συνεκτικό και αυτό συνεπάγεται ότι το Δ είναι επίσης συνεκτικό.

Υποθέτουμε το αντίθετο δηλαδή ότι υπάρχουν δύο ξένες συνεκτικές συνιστώσες Γ'_1, Γ'_2 του $\Gamma' - \{p\}$. Αφού το $\phi(\Gamma)$ είναι συνεκτικό περιέχεται σε μια από τις δύο συνιστώσες, έστω στη Γ'_1 . Αφού $\phi \circ \phi^{-1} \simeq id_{\Gamma'}$, για κάθε βρόγχο a στο Γ' έχουμε ότι ο βρόγχος $\phi \circ \phi^{-1} \circ a$ είναι αντιπρόσωπος της κλάσης ελεύθερης ομοτοπίας του a ο οποίος περιέχεται εξ ολοκλήρου στο Γ'_1 . Άρα το Γ'_2 είναι συσταλτό (άρα δέντρο) το οποίο είναι άτοπο, καθώς το Γ' δεν περιέχει ακμές βαθμού μικρότερου ή ίσου του 1.

Άρα το Δ είναι συνεκτικό και μπορούμε να επιλέξουμε μεγιστικό δέντρο T σε αυτό. Αφού ο βαθμός κάθε κορυφής στο Γ' είναι τουλάχιστον 2, το Δ περιέχει κάθε κορυφή του Γ' , άρα το T είναι μεγιστικό δέντρο και του Γ' . Η $\pi_1(\Gamma')$ είναι ελεύθερη επί των ακμών του $\Gamma' - T$. Έστω b ένας βρόγχος που αντιστοιχεί στην ακμή e που δεν ανήκει στο T . Ο βρόγχος $c = \phi \circ \phi^{-1} \circ b$ είναι ελεύθερα ομοτοπικός με τον b και άρα η λέξη w που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι στην κλάση συζυγίας της e . Όμως $p \notin im(\phi)$, ο c δε μπορεί να διασχίσει την e εντελώς και άρα το "γράμμα" $e^{\pm 1}$ δεν περιέχεται στην w . Αυτό είναι άτοπο αφού όλες οι κλάσεις συζυγίας της λέξης $e^{\pm 1}$ περιέχουν το "γράμμα" $e^{\pm 1}$ τουλάχιστον μια φορά. ■

Απόδειξη της Πρότασης 1.11.1. • Γενικά για Lipschitz συνεχείς απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ μεταξύ μετρικών χώρων ισχύει ότι

$$d_Z(gf(x), gf(y)) \leq \sigma(g)d_Y(f(x), f(y)) \leq \sigma(g)\sigma(x)d_X(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Άρα για δύο βέλτιστες απεικονίσεις $\phi_1 : \Gamma \rightarrow \Gamma', \phi_2 : \Gamma' \rightarrow \Gamma''$, η σύνθεση $\phi_2 \circ \phi_1 : \Gamma \rightarrow \Gamma''$ είναι διαφορά μαρκαρισμάτων και έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(\Gamma, \Gamma'') &= \inf_{\phi} \log \sigma(\phi) \leq \log \sigma(\phi_2 \phi_1) \leq \log \sigma(\phi_2) \sigma(\phi_1) \\ &= \log \sigma(\phi_2) + \log \sigma(\phi_1) = d(\Gamma', \Gamma'') + d(\Gamma, \Gamma') \end{aligned}$$

- Έστω f, f' μαρκαρίσματα των Γ, Γ' και βέλτιστη απεικόνιση $\delta : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\delta f \simeq f'$. Τότε $\delta f\Phi \simeq f'\Phi$ και άρα η δ είναι διαφορά μαρκαρισμάτων για τα $\Gamma\Phi, \Gamma'\Phi$. Συνεπώς έχουμε $d(\Gamma, \Gamma') = d(\Gamma\Phi\Phi^{-1}, \Gamma'\Phi\Phi^{-1}) \leq d(\Gamma\Phi, \Gamma'\Phi) \leq d(\Gamma, \Gamma')$, άρα οι ανισότητες είναι ισότητες και η δράση της $\text{Out}(F_n)$ διατηρεί τη d .
- Έστω $\Gamma, \Gamma' \in CV_n$ και $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μια διαφορά μαρκαρισμάτων με $\sigma(\phi) < 1$. Τότε

$$\text{Όγκος}(im(\phi)) \leq \sum_{e \in E(\Gamma)} |\phi(e)| < \sum_{e \in E(\Gamma)} |e| = \text{Όγκος}(\Gamma'),$$

άρα η ϕ δεν είναι επί. Επίσης η ομοτοπική ισοδυναμία ϕf από το $\mathcal{R}_n$ στο Γ' δεν είναι επί, άτοπο από το Λήμμα 1.11.2. Άρα $\sigma(\phi) \geq 1$ για κάθε διαφορά μαρκαρισμάτων ϕ . Έτσι έχουμε ότι $d(\Gamma, \Gamma') \geq \log 1 = 0$.

Έστω τώρα ότι $d(\Gamma, \Gamma') = 0$ και βέλτιστη απεικόνιση $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ με $\sigma(\phi) = 1$. Οι εικόνες δύο διαφορετικών κλειστών ακμών τέμνονται μόνο σε πεπερασμένα σημεία αλλιώς ο όγκος θα μειωνόταν. Από αυτό έπεται ότι κάθε κορυφή του Γ απεικονίζεται σε κορυφή του Γ' αφού ο ελάχιστος βαθμός στο Γ είναι 3. Η τομή των εικόνων δύο διαφορετικών ανοικτών ακμών δεν μπορεί να περιέχει σημείο κάποιας ανοικτής ακμής του Γ' διότι τότε θα είχε μη-μηδενικό όγκο. Ομοίως η ϕ περιορισμένη σε μια ακμή μπορεί να τέμνει το εσωτερικό κάποιας ακμής του Γ' το πολύ μια φορά. Κατά συνέπεια το Γ' προκύπτει από το Γ ταυτίζοντας πεπερασμένα σημεία μέσω της ϕ .

Έστω ότι η ϕ ταυτίζει ακριβώς δύο σημεία $a \neq b \in \Gamma$. Επιλέγουμε μεγιστικό δέντρο $T \subset \Gamma$ τέτοιο ώστε $a \in T$. Αν $b \notin T$ τότε το b δεν είναι κορυφή, η ακμή που περιέχει το b δεν ανήκει στο T και το $\phi(T)$ είναι συσταλτό². Η εικόνα του b μέσω της ϕ είναι κορυφή και η εικόνα της ακμής e που περιέχει το b , αποτελείται από τουλάχιστον δύο ακμές. Άρα η $\phi(e)$ περιέχει δύο ακμές του Γ' , οπότε $\Gamma' - \phi(T)$ περιέχει μια ακμή παραπάνω από το $\Gamma - T$. Όμως αφού το $\phi(T)$ περιέχει όλες τις κορυφές του Γ' , η ταύτιση, των a, b μέσω της ϕ , αύξησε το rank του γραφήματος, άτοπο.

Αν $b \in T$, τότε το μονοπάτι εντός του T από το a στο b προβάλλεται υπό τη ϕ σε βρόγχο. Αφού το $\phi(T)$ περιέχει όλες τις κορυφές του Γ' πρέπει να το μειώσουμε

²Αυτό διότι η $\phi|_T$ είναι 1-1, T συμπαγές, Γ' Hausdorff οπότε T ομοιομορφικό με το $\phi(T)$

τουλάχιστον κατά μια ακμή ώστε να πάρουμε μεγιστικό δέντρο στο Γ' , οπότε το rank και πάλι αυξάνεται, άτοπο.

Τελικά δεν υπάρχουν σημεία που να ταυτίζονται από τη ϕ , οπότε είναι ισομετρία άρα $\Gamma \equiv \Gamma' \in CV_n$ (δηλ. $[(\Gamma, f, l)] = [(\Gamma', f', l')]$).

■

1.12 Υπολογισμός της απόστασης δύο γραφημάτων

Πρόταση 1.12.1. *Αν a μια μη τετριμμένη κλάση συζυγίας στην F_n . Τότε*

$$\log \frac{l_{\Gamma'}(a)}{l_{\Gamma}(a)} \leq d(\Gamma, \Gamma'), \text{ για κάθε } \Gamma, \Gamma' \in CV_n.$$

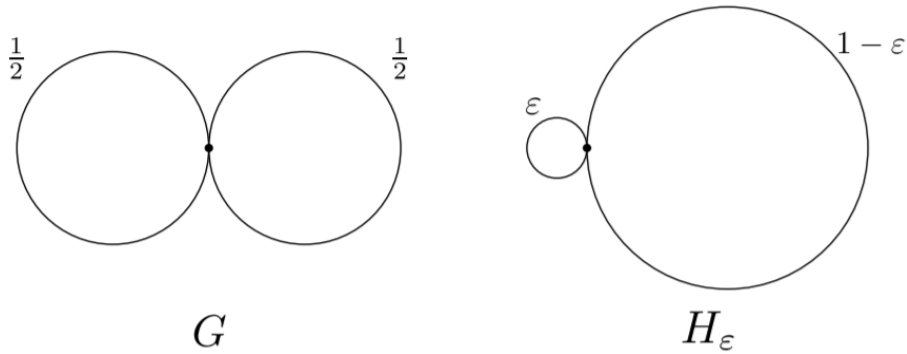
Απόδειξη. Έστω $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μια βέλτιστη απεικόνιση. Τότε το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με $l_{\Gamma'}(a) \leq \sigma(\phi)l_{\Gamma}(a)$. Ο βρόγχος $\phi \circ a|_{\Gamma}$ είναι ένας Lipschitz συνεχής αντιπρόσωπος του a στο Γ' . Όμως μπορεί να μην είναι ανηγμένος οπότε

$$l_{\Gamma'}(a) \leq |\phi(a_{\Gamma})| \leq \sigma(\phi)|a|_{\Gamma} = \sigma(\phi)l_{\Gamma}(a).$$

■

Παράδειγμα 1.12.2. Θέλουμε να συγκρίνουμε τις αποστάσεις $d(G, H_{\epsilon})$ και $d(H_{\epsilon}, G)$ όπου G, H_{ϵ} είναι τα γραφήματα του παρακάτω σχήματος.

Σχήμα 1.12: Τα γραφήματα G και H_{ϵ} για $0 < \epsilon < 1$



Θεωρούμε ότι έχουν ισοδύναμα μαρκαρίσματα, οπότε οι αριστερές ακμές του κάθε γραφήματος αντιστοιχούν στην ίδια κλάση συζυγίας της F_2 . Το ίδιο ισχύει και για τις δεξιές ακμές. Θεωρούμε την διαφορά μαρκαρισμάτων $\phi : G \rightarrow H_{\epsilon}$ που απεικονίζει την

αριστερή ακμή του G στην αριστερή ακμή του H_ϵ με σταθερή κλίση, και το ίδιο για τη δεξιά ακμή. Έτσι, έχουμε κλίση 2ϵ για την αριστερή ακμή και $2 - 2\epsilon$ για τη δεξιά. Συνεπώς

$$d(G, H_\epsilon) \leq \log \max\{2\epsilon, 2 - 2\epsilon\}.$$

Τώρα θεωρούμε την κλάση συζυγίας a_l στην F_2 η οποία αντιστοιχεί στον αριστερό βρόγχο στα G και H_ϵ . Από προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$d(G, H_\epsilon) \geq \log \frac{l_{H_\epsilon}(a_l)}{l_G(a_l)} = \log 2\epsilon.$$

Θεωρούμε την κλάση συζυγίας a_r στην F_2 που αντιστοιχεί στο δεξί βρόγχο και όμοια έχουμε

$$d(G, H_\epsilon) \geq \log(2 - 2\epsilon).$$

Τελικά,

$$d(G, H_\epsilon) = \log \max\{2\epsilon, 2 - 2\epsilon\} < \log 2, \text{ για κάθε } 0 < \epsilon < 1.$$

Για την απόσταση $d(H_\epsilon, G)$ θεωρούμε και πάλι την κλάση συζυγίας a_l και παίρνουμε

$$d(H_\epsilon, G) \geq \log \frac{l_G(a_l)}{l_{H_\epsilon}(a_l)} = \log \frac{1}{2\epsilon} \rightarrow +\infty \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0.$$

Όπως πριν, θεωρώντας και την κλάση συζυγίας a_r παίρνουμε ότι

$$d(H_\epsilon, G) = \log \max\left\{\frac{1}{2\epsilon}, \frac{1}{2 - 2\epsilon}\right\}.$$

Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι η μετρική του Lipschitz δεν είναι συμμετρική.³

Γενικά είναι δύσκολο να μαντέψουμε μια βέλτιστη απεικόνιση. Έτσι έχουμε το εξής χρήσιμο θεώρημα.

Θεώρημα 1.12.3. (*Tad White*) Έστω $\Gamma, \Gamma' \in CV_n$. Τότε υπάρχει κλάση συζυγίας a στην F_n με

$$\log \left(\frac{l_{\Gamma'}(a)}{l_\Gamma(a)} \right) = d(\Gamma, \Gamma').$$

Ορισμός 1.12.4. Μια κλάση συζυγίας a τέτοια ώστε

$$\log \left(\frac{l_{\Gamma'}(a)}{l_\Gamma(a)} \right) = d(\Gamma, \Gamma')$$

ονομάζεται *witness* για τα $\Gamma, \Gamma' \in CV_n$.

Θα δούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.12.3 στη συνέχεια.

³Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε τον όρο μετρική.

1.12.1 Δομή train track

Ορισμός 1.12.5 ([34],[59]). Μια δομή *train track* σε ένα γράφημα πυρήνα Γ ονομάζεται μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των κατευθύνσεων σε κάθε μια από τις κορυφές του Γ . Οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται *gates*. Στροφή σε μια κορυφή $u \in V(\Gamma)$ θα ονομάζεται ένα ζεύγος διαφορετικών κατευθύνσεων $\{d, d'\}$ στην $u \in V(\Gamma)$.

Έστω $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο μετρικών γραφημάτων με σταθερή κλίση $l(\phi(p))/l(p)$ για κάθε τμήμα p μιας ακμής e του Γ . Έχουμε δει ότι η ϕ επάγει μια απεικόνιση

$$\phi_* : T_u(\Gamma) \rightarrow T_{\phi(u)}(\Gamma').$$

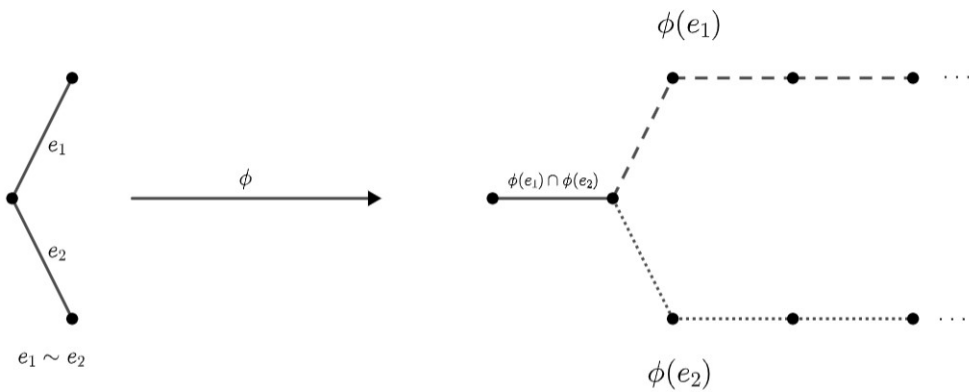
Ορίζεται, έτσι, μια σχέση ισοδυναμίας στο $T_u(\Gamma)$ θέτοντας

$$d_1 \sim d_2 \iff \phi_*(d_1) = \phi_*(d_2).$$

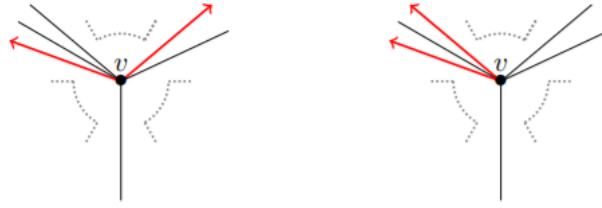
Έτσι η ϕ ορίζει μια *train track* δομή στο Γ .

Ορισμός 1.12.6. Λέμε ότι μια στροφή $\{d, d'\}$ είναι *επιτρεπτή* (*legal*) αν $\phi_*(d) \neq \phi_*(d')$ και *μη επιτρεπτή* (*illegal*) αλλιώς. Ένα μονοπάτι ή βρόγχος στο Γ ονομάζεται *επιτρεπτό* (*legal*) αν διέρχεται μόνο από επιτρεπτές στροφές.

Σχήμα 1.13: Θεωρώντας ότι μια ακμή ορίζει μια κατεύθυνση, δύο ακμές με την ίδια αρχή ορίζουν επιτρεπτή στροφή ως προς τη δομή *train track* που επάγεται από την ϕ αν και μόνο αν το μέγιστο κοινό τμήμα των εικόνων τους αποτελείται από μία μόνο κορυφή.



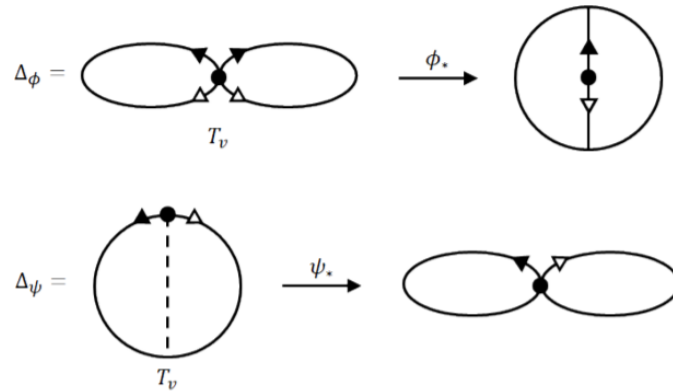
Σχήμα 1.14: Gates στην καρυφή v . Αριστερά απεικονίζεται μια επιτρεπτή στροφή (αφού οι διευθύνσεις δεν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας) και δεξιά απεικονίζεται μια μη επιτρεπτή στροφή.



Ορισμός 1.12.7 ([34]). Για μια βέλτιστη απεικόνιση $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ το *tension* γράφημα Δ_ϕ ορίζεται να είναι το υπογράφημα του Γ που περιέχει ακριβώς εκείνες τις ακμές στις οποίες η κλίση της ϕ είναι μέγιστη.

Αφού η ϕ έχει σταθερή κλίση σε κάθε υποτιμήμα μιας οποιαδήποτε ακμής του Δ_ϕ εφοδιάζεται με μια δομή train track όπως παραπάνω.

Σχήμα 1.15: Tension γραφήματα και η φυσική train track δομή τους.



Λήμμα 1.12.8. Έστω $\Gamma, \Gamma' \in CV_n$ με $d(\Gamma, \Gamma') = \log \lambda$ και βέλτιστη απεικόνιση $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$. Αν για κάποια μη τετριμμένη κλάση συζυγίας a της F_n ο ανηγμένος αντιπρόσωπός της ανήκει στο Δ_ϕ και είναι επιτρεπτός, τότε

$$\frac{l_{\Gamma'}(a)}{l_\Gamma(a)} = \lambda.$$

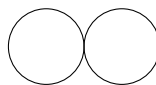
Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\phi \circ a$ είναι ανηγμένος στο Γ' . Αυτός ο βρόγχος $\phi \circ a = b$ είναι αντιπρόσωπος του a στο Γ' που είναι τοπικά 1 – 1 (locally injective). ■

Λήμμα 1.12.9 ([58]). Αν κάθε κορυφή ενός γραφήματος Γ με μια *train track* δομή έχει τουλάχιστον δύο *gates*, τότε το Γ περιέχει επιτρεπτό βρόγχο a με μια από τις παρακάτω μορφές:

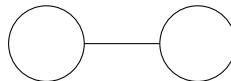
- Είναι ανηγμένος βρόγχος.



- Αποτελείται από δύο αντίτυπα του κύκλου S^1 τα οποία τέμνονται σε ένα μόνο σημείο και ο a τέμνει τα αντίτυπα μία φορά και δεν τέμνει καμία ακμή εκτός αυτών. (*figure eight*)

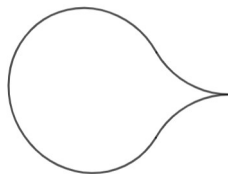


- Είναι μονοπάτι της μορφής $\gamma_1\gamma_3\gamma_2\overline{\gamma_3}$ όπου τα μονοπάτια γ_1 και γ_2 είναι απλά, κλειστά και ξένα μεταξύ τους και το γ_3 είναι ένα ανηγμένο μονοπάτι που τέμνει τα γ_1, γ_2 μόνο στο αρχικό τους σημείο (*barbell*).

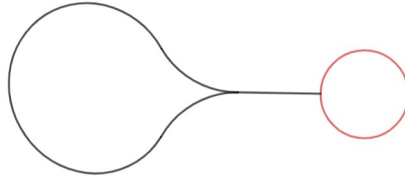


Απόδειξη. Κατασκευάζουμε ένα αυθαίρετα μεγάλο επιτρεπτό μονοπάτι ακολουθώντας τις *gates* έως ότου να τμήσει τον εαυτό του. Αυτό είναι δυνατό διότι κάθε κορυφή έχει τουλάχιστον δύο *gates*. Θεωρούμε το κυκλικό μέρος αυτού του μονοπατιού. Αν το μονοπάτι αυτό είναι επιτρεπτό τελειώσαμε, αφού καταφέραμε να βρούμε επιτρεπτό ανηγμένο βρόγχο γ στο γράφημα Γ .

Έστω ότι το παραπάνω κλειστό και ανηγμένο μονοπάτι δεν είναι επιτρεπτό.



Συνεχίζουμε να επεκτείνουμε το μονοπάτι μέχρι να τμήσει τον εαυτό του για δεύτερη φορά. Αν το μονοπάτι χρησιμοποιεί τρεις *gates* στη δεύτερη τομή, μπορούμε να βρούμε έναν επιτρεπτό εμφυτευμένο κύκλο.

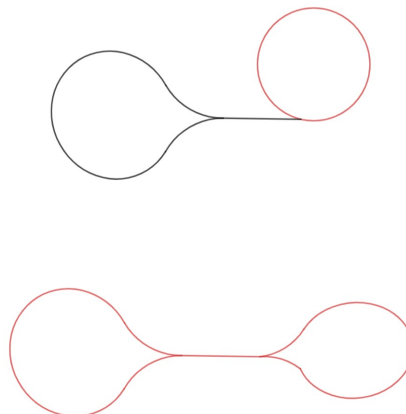


Αν στη δεύτερη τομή δεν υπάρχουν τρεις gates κατασκευάζουμε επιτρεπτό βρόγχο ως εξής. Διακρίνουμε αρχικά περιπτώσεις σχετικά με τη θέση της δεύτερης τομής ως προς τον ανηγμένο βρόγχο που δημιουργήθηκε η πρώτη τομή.

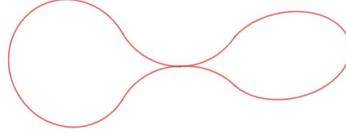
Αν η δεύτερη τομή δεν ταυτίζεται με την πρώτη και (η δεύτερη τομή) ανήκει στον ανηγμένο βρόγχο με τον οποίο ξεκινήσαμε, τότε τα δύο παρακάτω σχήματα υποδεικνύουν το επιτρεπτό μονοπάτι το οποίο σχηματίζεται και το οποίο είναι ένας ανηγμένος, επιτρεπτός βρόγχος.



Αν η δεύτερη τομή δεν ταυτίζεται με την πρώτη και (η δεύτερη τομή) δεν ανήκει στον ανηγμένο βρόγχο με τον οποίο ξεκινήσαμε, τότε τα δύο παρακάτω σχήματα υποδεικνύουν το επιτρεπτό μονοπάτι το οποίο σχηματίζεται και το οποίο είναι είτε ένας ανηγμένος, επιτρεπτός βρόγχος είτε barbell.



Αν η δεύτερη τομή ταυτίζεται με την πρώτη, τότε το παρακάτω σχήμα υποδεικνύει τον επιτρεπτό βρόγχο τον οποίο σχηματίζεται και ο οποίος είναι figure eight.

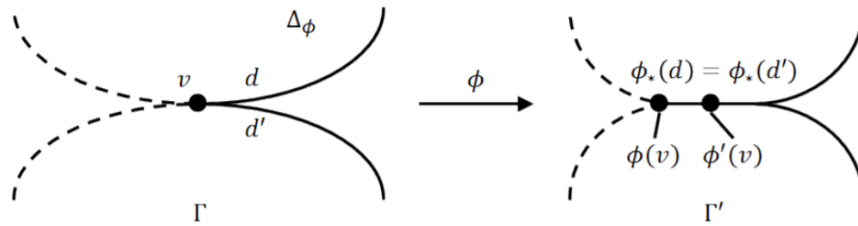


■

Ορισμός 1.12.10. Ένας βρόγχος α σε ένα γράφημα Γ ο οποίος έχει μία από τις τρεις μορφές που περιγράφονται στο Λήμμα 1.12.9 θα ονομάζεται υποψήφιος (candidate).

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.12.3. Από τα δύο παραπάνω λήμματα μένει να δείξουμε ότι υπάρχει βέλτιστη απεικόνιση το tension γράφημα της οποίας να έχει τουλάχιστον δύο gates σε κάθε κορυφή. Έστω ϕ μια βέλτιστη απεικόνιση με σταθερά Lipschitz λ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει $u \in \Delta_\phi$ με μόνο μια gate. Ορίζουμε ομοτοπία $H : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow \Gamma'$ από την ϕ σε μια άλλη διαφορά μαρκαρισμάτων $\bar{\phi}$. Αυτή η ομοτοπία είναι σταθερή σε όλες τις κορυφές εκτός από τη u στην οποία κινείται λίγο προς την $\phi_*(d_u)$ όπου $d_u \in T_u(\Delta_\phi)$ είναι αντιπρόσωπος της μοναδικής gate στην u .

Σχήμα 1.16: Η απαλοιφή κορυφών με μόνο μια gate από το Δ_ϕ



Επιλέγουμε την $H(-, t)$ να είναι γραμμική στις ακμές για κάθε $t \in [0, 1]$. Άρα η κλίση στις ακμές που δεν τέμνουν την u δεν αλλάξει. Αν μια ακμή τέμνει την u και περιέχεται στο tension γράφημα, η κλίση της ϕ σε αυτή την ακμή μειώνεται εξαιτίας της μετακίνησης του $\phi(u)$ οπότε είναι λίγο μικρότερη από λ . Από τις ακμές που τέμνουν την u και δεν περιέχονται στο Δ_ϕ μπορεί να υπάρχει κάποια στην οποία η κλίση της ϕ να αυξήθηκε, αλλά αφού αυτές μπορεί να είναι μόνο πεπερασμένες, μπορούμε να επιτύχουμε αυτή τη διαταραχή αρκετά μικρή ώστε η κλίση της $\bar{\phi}$ σε αυτές τις ακμές να είναι πάλι μικρότερη από λ .

Έτσι, έχουμε μια διαφορά μαρκαρισμάτων $\bar{\phi}$ η οποία έχει σταθερή κλίση στις ακμές και η μέγιστη κλίση είναι μικρότερη ή ίση του λ . Αφού το λ είναι η μικρότερη σταθερά

Lipschitz η $\bar{\phi}$ είναι βέλτιστη απεικόνιση. Επιπλέον $\Delta_{\bar{\phi}} \subsetneq \Delta_{\phi}$ αφού η u και οι ακμές που την τέμνουν δεν περιέχονται στο $\Delta_{\bar{\phi}}$.

Αφού το λ είναι η μικρότερη σταθερά Lipschitz για τις διαφορές μαρκαρισμάτων ανάμεσα στα Γ και Γ' δε μπορούμε να αφαιρέσουμε όλες τις κορυφές από το Δ_{ϕ} με αυτή τη διαδικασία, αλλά επειδή υπάρχουν μόνο πεπερασμένες κορυφές λαμβάνουμε τελικά μία βέλτιστη απεικόνιση της οποίας το tension γράφημα έχει τουλάχιστον δύο gates σε κάθε κορυφή. ■

Παρατήρηση 1.12.11. Από την παραπάνω απόδειξη έπεται ότι για $\Gamma, \Gamma' \in CV_n$ είναι

$$d(\Gamma, \Gamma') = \max_{a \text{ υποψήφιος}} \log \frac{l_{\Gamma'}(a)}{l_{\Gamma}(a)}$$

1.13 Εφαρμογές της μετρικής στον εξωτερικό χώρο

Αναφέρουμε τώρα μερικές άμεσες εφαρμογές της μετρικής.

Πρόταση 1.13.1. Αν $\Gamma \neq \Gamma' \in CV_n$ τότε υπάρχει κλάση συζυγίας α τέτοια ώστε

$$l_{\Gamma}(\alpha) < l_{\Gamma'}(\alpha)$$

και κλάση συζυγίας β τέτοια ώστε

$$l_{\Gamma}(\beta) > l_{\Gamma'}(\beta)$$

Ειδικότερα, η απεικόνιση

$$L : CV_n \rightarrow \mathbb{P}^S$$

*είναι 1 – 1, όπου S είναι το σύνολο των μη-τετριμμένων κλάσεων συζυγίας της F_n .*⁴

Απόδειξη. Αφού $\Gamma \neq \Gamma'$ έπεται ότι $d(\Gamma, \Gamma') > 0$ και άρα από την παρατήρηση 1.12.11 έπεται η ύπαρξη της κλάσεως συζυγίας α . Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και η ύπαρξη της κλάσεως συζυγίας β , αφού $d(\Gamma', \Gamma) > 0$. ■

Έχουμε δει ότι η $\text{Aut}(F_n)$ δρα στις κλάσεις συζυγίας της F_n και οι εσωτερικοί αυτομορφισμοί δρουν τετριμμένα. Υπάρχουν ομάδες G των οποίων η ομάδα αυτομορφισμών $\text{Aut}(G)$ δρα στις κλάσεις συζυγίας τους με την ιδιότητα να υπάρχουν αυτομορφισμοί που δρουν τετριμμένα αλλά δεν είναι εσωτερικοί (βλέπε για παράδειγμα στο [64]). Αυτό δε συμβαίνει στην περίπτωση της F_n .

⁴Είδαμε και παραπάνω ότι με αυτόν τον τρόπο το CV_n αποκτά την τοπολογία του υποχώρου.

Πρόταση 1.13.2. *Ισχύει ότι*

$$\text{Inn}(F_n) = \text{Conj}(F_n)$$

όπου

$$\text{Conj}(F_n) = \{\phi \in \text{Aut}(F_n) \mid \text{ο } \phi \text{ απεικονίζει κάθε στοιχείο σε συζυγές του}\}$$

Απόδειξη. Έστω $\phi \in \text{Conj}(F_n)$ και $\Phi = [\phi] \in \text{Out}(F_n)$ η αντίστοιχη κλάση στην ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\Phi = Id$ (δηλαδή $\phi \in \text{Inn}(F_n)$). Έστω R το σύννηθες μπουκέτο με n θηλιές μήκους $\frac{1}{n}$. Η υπόθεση δίνει ότι $d(R, R\Phi) = 0$ αφού όλοι οι witnesses σταθεροποιούνται. Επομένως $R\Phi = R$ και άρα ο Φ είναι μετάθεση. Όμως η ταυτοτική απεικόνιση είναι η μόνη μετάθεση που ανήκει στην $\text{Conj}(F_n)$. Οπότε είναι $\Phi = Id \in \text{Out}(F_n)$ δηλαδή $\phi \in \text{Inn}(F_n)$. ■

1.14 Τριχοτομία

Πρωτού περιγράψουμε την τριχοτομία που εμφανίζεται στην ομάδα $\text{Out}(F_n)$ θα αναφέρουμε συνοπτικά την αντίστοιχη τριχοτομία για mapping class ομάδες $\text{Mod}(S_{g,n})$ όπου $S_{g,n}$ είναι μια επιφάνεια γένους g με n τρύπες χωρίς σύνορο.

Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι για κάθε ισομετρία $\phi \in \text{Isom}(X)$ ενός μετρικού χώρου X μπορούμε να ορίσουμε το μήκος μετατόπισης $\tau(\phi) := \inf_{x \in X} \{d(x, \phi(x))\}$. Για κάθε ισομετρία $\phi \in \text{Isom}(X)$ υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

- Αν το $\tau(\phi)$ επιτυγχάνεται και $\tau(\phi) = 0$, τότε η ϕ ονομάζεται ελλειπτική ισομετρία.
- Αν το $\tau(\phi)$ δεν επιτυγχάνεται, τότε η ϕ ονομάζεται παραβολική ισομετρία.
- Αν το $\tau(\phi)$ επιτυγχάνεται και $\tau(\phi) > 0$, τότε η ϕ ονομάζεται υπερβολική ισομετρία.

Στην περίπτωση των επιφανειών έχουμε την ακόλουθη ταξινόμηση (Nielsen-Thurston), για περισσότερα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [3].

Θεώρημα 1.14.1. *Κάθε κλάση $f \in \text{Mod}(S_{g,n})$ είναι:*

1. είτε περιοδική (δηλαδή $f^m = Id$ για κάποιο $m > 0$),
2. είτε μη-ανάγωγη (δηλαδή αφήνει αναλλοίωτη μια πεπερασμένη συλλογή από ξένες ανά δύο απλές κλειστές καμπύλες στην S_g),

3. είτε pseudo-Anosov.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το γεγονός ότι κάθε ανάγωγη mapping class απείρου τάξης έχει pseudo-Anosov αντιπρόσωπο.

Η απόδειξη του Bers για το θεώρημα ταξινόμησης των Nielsen και Thurston χρησιμοποιεί τη δράση μιας mapping class $f \in \text{Mod}(S_{g,n})$ στον χώρο του Teichmuller $\text{Teich}(S)$ η οποία διατηρεί τη μετρική του Teichmuller.

Ειδικότερα, η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται στις τρεις ακόλουθες συνεπαγωγές για τις mapping classes $f \in \text{Mod}(S_{g,n})$:

1. Αν η f αναπαριστά ελλειπτική ισομετρία στην ομάδα $\text{Isom}(\text{Teich}(S))$, τότε η κλάση f είναι περιοδική στην $\text{Mod}(S_{g,n})$.
2. Αν η f αναπαριστά παραβολική ισομετρία στην ομάδα $\text{Isom}(\text{Teich}(S))$, τότε η f είναι μη-ανάγωγη κλάση στην ομάδα $\text{Mod}(S_{g,n})$.
3. Αν η f αναπαριστά υπερβολική ισομετρία στην ομάδα $\text{Isom}(\text{Teich}(S))$, τότε η κλάση f είναι pseudo-Anosov στην ομάδα $\text{Mod}(S_{g,n})$.

Στην περίπτωση της $\text{Out}(F_n)$ τα παραπάνω μεταφέρονται ως εξής. Σταθεροποιούμε έναν αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ και θεωρούμε την συνάρτηση μετατόπισης (displacement)

$$\overline{\Phi} : CV_n \rightarrow [0, +\infty), \text{ με } \overline{\Phi}(\Gamma) = d(\Gamma, \Gamma \cdot \Phi)$$

Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα για τον αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_n)$:

- Αν το $\inf \overline{\Phi}$ επιτυγχάνεται και $\inf \overline{\Phi} = 0$, τότε ο Φ ονομάζεται ελλειπτικός.
- Αν το $\inf \overline{\Phi}$ επιτυγχάνεται και $\inf \overline{\Phi} > 0$, τότε ο Φ ονομάζεται υπερβολικός.
- Αν το $\inf \overline{\Phi}$ δεν επιτυγχάνεται, τότε ο Φ ονομάζεται παραβολικός.

Εξετάζουμε την κάθε μία περίπτωση ξεχωριστά. Πριν, όμως εξετάζουμε προσεκτικότερα την έννοια του τοπολογικού αντιπροσώπου.

1.14.1 Τοπολογικοί αντιπρόσωποι

Ορισμός 1.14.2. Μια ομοτοπική ισοδυναμία $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ λέγεται εξωτερικά-αντίστροφη της ομοτοπικής ισοδυναμίας $g : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ αν για κάποιες κορυφές $v_1 \in V(\Gamma), v_2 \in V(\Gamma')$

οι απεικονίσεις $f \circ g, g \circ f$ επάγουν τον ταυτοτικό εξωτερικό αυτομορφισμό στις ομάδες $\pi_1(\Gamma, v_1), \pi_1(\Gamma', v_2)$.

Ορισμός 1.14.3. Δύο ομοτοπικές ισοδυναμίες $f : \Gamma \rightarrow \Gamma, g : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ λέγονται όμοιες αν υπάρχουν ομοτοπικές ισοδυναμίες $a : \Gamma \rightarrow \Gamma', b : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ εξωτερικά αντίστροφες έτσι ώστε οι απεικονίσεις f και $b \circ g \circ a$ να επάγουν τον ίδιο εξωτερικό αυτομορφισμό της $\pi_1(\Gamma, v)$.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \xrightarrow{g} & \Gamma' \\ a \uparrow & & \downarrow b \\ \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

Ορισμός 1.14.4. Έστω $\Phi \in \text{Out}(F_n)$. Μια ομοτοπική ισοδυναμία $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ονομάζεται τοπολογικός αντιπρόσωπος του Φ ως προς το μαρκάρισμα $\tau : \mathcal{R}_n \rightarrow \Gamma$, αν η f καθορίζει τον Φ (με την έννοια που δίνουμε παρακάτω) και η εικόνα $f(e)$ κάθε ακμής είναι ανηγμένο μονοπάτι θετικού μήκους.

Εξηγούμε την έννοια του καθορίζει:

Έστω Γ το γράφημα με το παραπάνω μαρκάρισμα τ και $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathcal{R}_n$ μια ομοτοπική ισοδυναμία εξωτερικά αντίστροφη της τ (είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι πάντα υπάρχει μια τέτοια). Τότε η ομοτοπική ισοδυναμία $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ επάγει τον εξωτερικό αυτομορφισμό

$$(\sigma \circ f \circ \tau)_* : \pi_1(\mathcal{R}_n, v) \rightarrow \pi_1(\mathcal{R}_n, v)$$

τον οποίο λέμε ότι καθορίζει. Αυτός ο εξωτερικός αυτομορφισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του σ .

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ \tau \uparrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{R}_n & \longrightarrow & \mathcal{R}_n \end{array}$$

Αν $f_1 : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία όμοια με την $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, τότε η f_1 καθορίζει τον ίδιο αυτομορφισμό της F_n αλλά ως προς το μαρκάρισμα $\tau_1 \circ \tau : \mathcal{R}_n \rightarrow \Gamma'$:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma' & \xrightarrow{f_1} & \Gamma' \\
\tau_1 \uparrow & & \downarrow \sigma_1 \\
\Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma \\
\tau \uparrow & & \downarrow \sigma \\
\mathcal{R}_n & \longrightarrow & \mathcal{R}_n
\end{array}$$

1.14.2 Ελλειπτικοί αυτομορφισμοί

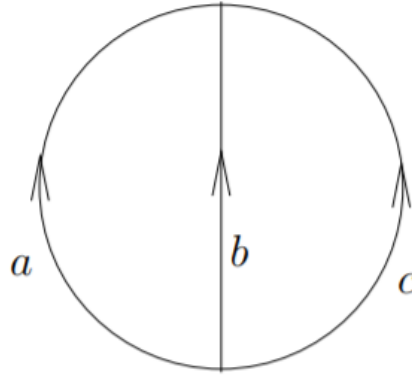
Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα ελλειπτικού αυτομορφισμού.

Παράδειγμα 1.14.5. Έστω $\Phi \in \text{Out}(F_2)$ με

$$a \mapsto \bar{b}, \quad b \mapsto \bar{c}, \quad c \mapsto \bar{a}, \quad \text{όπου με } \bar{e} \text{ συμβολίζουμε την αντίστροφη ακμή μιας ακμής } e$$

και $[(\Gamma, \sigma, l)] \in CV_2$, $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ τοπολογικός αντιπρόσωπος του Φ ως προς το μαρκάρισμα σ του Γ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υποθέτουμε ότι οι ακμές του Γ έχουν όλες μήκος $\frac{1}{3}$.

Σχήμα 1.17: Το γράφημα Γ



Έτσι, έχουμε:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{f} & \mathcal{R}_2 \\
\downarrow & & \uparrow \tau \\
\Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma [= \Gamma \cdot \Phi]
\end{array}$$

όπου ο f δίνεται από

$$a \mapsto \bar{b}, \quad b \mapsto \bar{c}, \quad c \mapsto \bar{a}$$

Θα δείξουμε ότι $d(\Gamma, \Gamma\Phi) = 0$.

Παρατήρηση 1.14.6. Το tension γράφημα του Φ είναι όλο το Γ .

Πράγματι, η κλίση του f στις ακμές του Γ είναι σταθερή και ίση με 1, αφού $l(a) = l(b) = l(c) = l(\bar{a}) = l(\bar{b}) = l(\bar{c}) = \frac{1}{3}$.

Παρατήρηση 1.14.7. Όλες οι μη τετριμμένες στροφές του Γ είναι επιτρεπτές.

Έτσι έχουμε ότι οι υπονήφιοι βρόγχοι είναι οι $\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{c}, \bar{b}\bar{c}$. Επιπλέον

$$\bar{a}\bar{b} \mapsto \bar{b}\bar{c}, \quad \bar{a}\bar{c} \mapsto \bar{b}\bar{a}, \quad \bar{b}\bar{c} \mapsto \bar{c}\bar{a}$$

και

$$\frac{l(\bar{b}\bar{c})}{l(\bar{a}\bar{b})} = \frac{l(\bar{b}\bar{a})}{l(\bar{a}\bar{c})} = \frac{l(\bar{c}\bar{a})}{l(\bar{b}\bar{c})} = 1.$$

Οπότε

$$d(\Gamma, \Gamma\Phi) = \max_{a \text{ υπονήφιος}} \log \frac{l(\Phi(a))}{l(a)} = 0.$$

Πρόταση 1.14.8. Αν ο $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ είναι ελλειπτικός (δηλαδή $\inf \bar{\Phi} = 0$ και επιτυγχάνεται), τότε ο Φ έχει πεπερασμένη τάξη.

Απόδειξη. Αφού $\inf \bar{\Phi} = 0$ υπάρχει $[\Gamma, f, l] \in CV_n$ τέτοιο ώστε $\Gamma \cdot \Phi = \Gamma$. Τότε έχουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ που διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή ϕ ισομετρία. Εφόσον η ϕ είναι ισομετρία του πεπερασμένου γραφήματος Γ , $n \geq 2$ έπεται ότι υπάρχει k με $\phi^k = id$. Τότε $f = \phi^k f \simeq f\Phi^k$ δηλαδή η Φ^k είναι ομοτοπική με την id δηλαδή η Φ έχει πεπερασμένη τάξη. ■

Ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 1.14.9 (Nielsen Realization). Ένας εξωτερικός αυτομορφισμός $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ είναι ελλειπτικός αν και μόνο αν έχει πεπερασμένη τάξη.

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε:

Θεώρημα 1.14.10 (Nielsen Realization). Αν $\Delta \leq \text{Out}(F_n)$ είναι μια πεπερασμένη υποομάδα τότε η Δ σταθεροποιεί σημείο του CV_n .

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό χρειαζόμαστε το εξής:

Θεώρημα 1.14.11 (Stallings). Αν $\overline{\Delta}$ είναι ομάδα που περιέχει την F_n ως υποομάδα πεπερασμένου δείκτη τότε η $\overline{\Delta}$ δρα με ισομετρίες σε ένα δέντρο με πεπερασμένες σταθεροποιούσες.

Απόδειξη του *Nielsen Realization*. Έχουμε την παρακάτω ακριβή ακολουθία⁵

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & F_n & \longrightarrow & \text{Aut}(F_n) & \longrightarrow & \text{Out}(F_n) \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow = & & \uparrow \subset & & \uparrow \subset \\ 1 & \longrightarrow & F_n & \longrightarrow & \overline{\Delta} & \longrightarrow & \Delta \longrightarrow 1 \end{array}$$

Από το θεώρημα του Stallings η $\overline{\Delta}$ δρα, με ισομετρίες, σε ένα δέντρο T με πεπερασμένες σταθεροποιούσες. Άρα και η F_n , ως υποομάδα, δρα στο T ελευθέρως και ισομετρικά. Οπότε το $\Gamma = T/F_n$ είναι γράφημα του CV_n .⁶ Τελικά έχουμε ότι η $\Delta = \overline{\Delta}/F_n$ δρα ισομετρικά στο $T/F_n = \Gamma$ και άρα $\Delta \subset \text{Isom}(\Gamma) = \text{Stab}(\Gamma)$. ■

1.14.3 Υπερβολικοί αυτομορφισμοί

Παράδειγμα 1.14.12. Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα όπου $\inf \overline{\Phi} > 0$ και επιτυγχάνεται σε ένα $\Gamma \in CV_2$. Θα δείξουμε ότι $\log \lambda = d(\Gamma, \Gamma\Phi) = \inf \overline{\Phi}$. Συγκεκριμένα θεωρούμε τον εξωτερικό αυτομορφισμό Φ της $\text{Out}(F_2)$ που επάγεται από την απεικόνιση

$$a \mapsto ab, \quad b \mapsto bab.$$

Επιλέγουμε $\Gamma = \mathcal{R}_2$ με το ταυτοτικό μαρκάρισμα. Θεωρούμε τοπολογικό αντιπρόσωπο $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ του Φ με

$$f : a \mapsto ab, \quad b \mapsto bab.$$

Επιλέγουμε μετρική l στο Γ με

$$l(a) + l(b) = 1, \quad \text{αφού θέλουμε ο όγκος του } \Gamma \text{ να είναι ίσος με } 1$$

και

$$\begin{aligned} l(\Phi(a)) &= \lambda l(a) = l(ab) = l(a) + l(b), \\ l(\Phi(b)) &= \lambda l(b) = l(bab) = 2l(b) + l(a). \end{aligned}$$

⁵Εδώ χρησιμοποιούμε την ταύτιση $\text{Inn}(F_n) \cong F_n$.

⁶Χρησιμοποιούμε τον ορισμό του εξωτερικού χώρου CV_n με F_n - δέντρα

(Εδώ επιλέξαμε η κλίση του Φ να είναι ίση με λ και στις δύο ακμές a, b . Δηλαδή, θεωρούμε μια μετρική l στο Γ έτσι ώστε ο f να έχει σταθερή κλίση ίση με λ σε κάθε ακμή.)

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι

$$\lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad l(a) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad l(b) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Εφόσον υποψήφιοι είναι μόνο οι βρόγχοι a, b και

$$\frac{l(\Phi(b))}{l(b)} = \frac{l(\Phi(a))}{l(a)} = \lambda,$$

έχουμε ότι το tension γράφημα είναι το Γ .

Για την μοναδική κορυφή x_0 η επαγόμενη από τον f train track δομή είναι

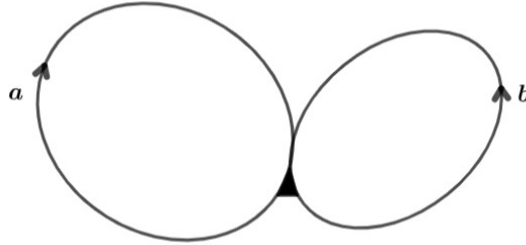
$$a \sim a, \quad \bar{a} \sim \bar{b}, \quad b \sim b, \quad \bar{b} \sim \bar{b}$$

οπότε οι gates στο x_0 είναι

$$\{a\}, \quad \{b\}, \quad \{\bar{a}, \bar{b}\}.$$

Έτσι, έχουμε ότι το Γ είναι όπως παρακάτω (η επιτρεπτή στροφή παριστάνεται με το τρίγωνο και η μη επιτρεπτή σχεδιάζοντας τις ακμές να εφάπτονται).

Σχήμα 1.18: Παράδειγμα υπερβολικού Φ



Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $\Gamma' \in CV_2$ με $D = d(\Gamma', \Gamma'\Phi) < \log \lambda$. Τότε υπάρχει διαφορά μαρκαρισμάτων $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'\Phi$ με κλίση μικρότερη από λ . Οπότε έχουμε

$$d(\Gamma, \Gamma\Phi^k) \leq d(\Gamma, \Gamma') + d(\Gamma', \Gamma'\Phi^k) + d(\Gamma'\Phi^k, \Gamma\Phi^k).$$

Επιπλέον, $d(\Gamma', \Gamma) = d(\Gamma'\Phi^k, \Gamma\Phi^k)$, $d(\Gamma', \Gamma'\Phi^k) \leq kD$. Τέλος από το παρακάτω Πόρισμα έχουμε $d(\Gamma, \Gamma\Phi^k) = k \log \lambda$. Άρα τελικά

$$k(\log \lambda - D) \leq d(\Gamma, \Gamma') + d(\Gamma', \Gamma).$$

Το οποίο οδηγεί σε άτοπο για αρκετά μεγάλο k αφού $\log \lambda - D > 0$.

Πρόταση 1.14.13 ([34]). Έστω ότι το $\inf \bar{\Phi} > 0$ επιτυγχάνεται σε ένα $\Gamma \in CV_n$, $\log \lambda = d(\Gamma, \Gamma\Phi) = \inf \bar{\Phi} > 0$ (άρα $\lambda > 1$). Έστω $\Delta \subset \Gamma$ το *tension* γράφημα ως προς μια βέλτιστη απεικόνιση μαζί με την επαγόμενη *train track* δομή. Μετά από μια αυθαίρετα μικρή διατάραξη (μικρή μεταβολή των μηκών των ακμών) του Γ η οποία διατηρεί τη σχέση $d(\Gamma, \Gamma\Phi) = \log \lambda$ υπάρχει βέλτιστη απεικόνιση $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma\Phi$ τέτοια ώστε:

- $\phi(\Delta) \subset \Delta$
- η ϕ απεικονίζει ακμές του Δ σε επιτρεπτά μονοπάτια και
- η ϕ_* απεικονίζει επιτρεπτές στροφές σε επιτρεπτές στροφές.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια βέλτιστη απεικόνιση $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma\Phi$. Ορίζουμε την πολυπλοκότητα του Δ να είναι το ζεύγος

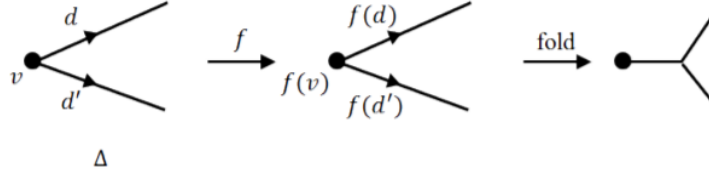
$$m(\Delta) = (\text{rank}(H_1(\Delta)), -\text{rank}(H_0(\Delta))).$$

Στις διαδικασίες που θα εφαρμόσουμε η πολυπλοκότητα δεν αυξάνεται ποτέ, ενώ κάποιες φορές μειώνεται. Παρατηρούμε ότι αν το Δ είναι γράφημα πυρήνας και $\Delta' \subset \Delta$ είναι ένα γνήσιο υπογράφημα πυρήνας τότε $m(\Delta') < m(\Delta)$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το Δ' έχει μια ακμή e λιγότερη από το Δ τότε αφού κάθε κορυφή έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2, μπορούμε να επιλέξουμε μεγιστικό υποδέντρο του Δ που να μην περιέχει την e . Έτσι, βλέπουμε ότι $\text{rank}(\pi_1(\Delta')_{ab}) < \text{rank}(\pi_1(\Delta)_{ab})$.

Υποθέτουμε ότι όλες οι κορυφές του Δ έχουν τουλάχιστον 2 gates (ειδικότερα το Δ είναι γράφημα πυρήνας) και ότι $\phi(\Delta) \not\subset \Delta$. Έστω ακμή $e \in \Delta$ τέτοια ώστε $\phi(e) \notin \Delta$. Αλλάζουμε τη μετρική στο Γ πολλαπλασιάζοντας με $\mu > 1$ τις ακμές του Δ και διαιρώντας με μ τις ακμές του $\Gamma - \Delta$. Επιλέγουμε το μ έτσι ώστε ο όγκος να παραμείνει 1. Επιπλέον επιλέγουμε το μ αρκετά κοντά στο 1 έτσι ώστε η κλίση σε κάθε ακμή να είναι πάλι μικρότερη ή ίση του λ και να είναι μικρότερη από λ στο $\Gamma - \Delta$. Συμβολίζουμε το Γ με τη νέα μετρική με Γ' . Το *tension* γράφημα Δ' για την $\phi' : \Gamma \rightarrow \Gamma\Phi$, όπου ϕ' είναι η προηγούμενη ϕ την οποία έχουμε κάνει γραμμική στις ακμές, περιέχεται στο Δ και δεν περιέχει την e . Παρατηρούμε ότι η κλίση σε κάποια ακμή πρέπει να είναι ίση με λ . Αν εμφανιστούν κορυφές με μία μόνο gate επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία του Θεωρήματος 1.12.3 ώστε να τις απαλείψουμε. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε έναν αντιπρόσωπο $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ με $\phi(\Delta) \subset \Delta$, όπου το Δ δεν έχει κορυφές με βαθμό 1.

Τώρα θα πετύχουμε, επιπλέον, ο ϕ να διατηρεί την train track δομή του Δ . Έστω ακμή $e \in E(\Delta)$ η οποία είναι τέτοια ώστε $\phi(e) \subset \Delta$ να μην είναι επιτρεπτή. Αλλάζουμε το Γ ταυτίζοντας μικρά διαστήματα ίσου μήκους στις κατευθύνσεις d, d' , όπως στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 1.19: Απόδειξη της Πρότασης 1.14.13



Έστω $\Gamma' = \Gamma / \sim$ το γράφημα πηλίκο και το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{p} & \Gamma' \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ \Gamma & \xrightarrow{p} & \Gamma' \end{array}$$

Τότε η ϕ' έχει κλίση λ στην εικόνα Δ' του Δ και μικρότερη από λ στις υπόλοιπες ακμές. Όμως η ϕ' επιδέχεται δίπλωση στην εικόνα της e , άρα μετά από ομοτοπία rel κορυφές σε μια απεικόνιση γραμμική στις ακμές μια ακμή φεύγει από το Δ και έτσι η πολυπλοκότητα του Δ μειώνεται.

Έστω τώρα ότι η ϕ_* απεικονίζει μια επιτρεπτή στροφή σε μια μη επιτρεπτή. Διπλώνουμε την μη επιτρεπτή στροφή. Με αυτόν τον τρόπο μετατρέπουμε την επιτρεπτή στροφή σε μη επιτρεπτή και είτε μειώνεται ο αριθμός

$$\sum_u \max \{0, G(u) - 2\}^7$$

είτε εισάγεται μια επιπλέον κορυφή η οποία να έχει μία μόνο gate. Στη δεύτερη περίπτωση μια μικρή μεταβολή της ϕ μειώνει την πολυπλοκότητα του Δ . Μετά από πεπερασμένα βήματα παίρνουμε την επιθυμητή βέλτιστη απεικόνιση. ■

Πόρισμα 1.14.14. Έστω ότι το Γ επιτυγχάνει το $\inf \bar{\Phi} = \log \lambda$. Τότε $d(\Gamma, \Gamma\Phi^k) = k \log \lambda$ για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$

⁷Εδώ $G(u)$ είναι το πλήθος των gates στην κορυφή u .

Απόδειξη. Ακολουθώντας τη διαδικασία της παραπάνω απόδειξης μπορούμε να επιτύχουμε η ϕ να απεικονίζει επιτρεπτούς βρόγχους α σε επιτρεπτούς βρόγχους $\phi(\alpha)$. Συνεπώς το μήκος του $\phi^k(\alpha)$ είναι $\lambda^k l(\alpha)$. Από συνέχεια αυτό ισχύει και πριν τη μικρή διαταραχή. ■

Πόρισμα 1.14.15. Αν Φ εξωτερικός αυτομορφισμός και η $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma\Phi$ είναι μια βέλτιστη απεικόνιση που ικανοποιεί τις υποθέσεις της παραπάνω πρότασης τότε η $\bar{\Phi}$ έχει ελάχιστο στο Γ .

Απόδειξη. Όπως στο παραπάνω Πόρισμα έχουμε $d(\Gamma, \Gamma\Phi^k) = kd(\Gamma, \Gamma\Phi)$, για κάθε $k > 0$. Αν $\Gamma' \in CV_n$ τότε

$$\begin{aligned} d(\Gamma, \Gamma\Phi^k) &\leq d(\Gamma, \Gamma') + d(\Gamma', \Gamma'\Phi^k) + d(\Gamma'\Phi^k, \Gamma\Phi^k) \\ &\leq d(\Gamma, \Gamma') + kd(\Gamma', \Gamma'\Phi) + d(\Gamma', \Gamma). \end{aligned}$$

Άρα

$$d(\Gamma, \Gamma\Phi) = \frac{k}{k} d(\Gamma, \Gamma\Phi^k) \leq d(\Gamma', \Gamma'\Phi) + \frac{d(\Gamma, \Gamma') + d(\Gamma', \Gamma)}{k}$$

Οπότε παίρνοντας όριο καθώς $k \rightarrow +\infty$ έχουμε ότι

$$d(\Gamma, \Gamma\Phi) \leq d(\Gamma', \Gamma'\Phi).$$

■

1.14.4 Παραβολικοί αυτομορφισμοί

Παράδειγμα 1.14.16. Ξεκινάμε και εδώ με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε τον εξωτερικό αυτομορφισμό Φ της $F_2 = F(\{a, b\})$ που επάγεται από την απεικόνιση

$$a \mapsto a, \quad b \mapsto ab.$$

Επιλέγουμε $\Gamma = \mathcal{R}_2$ με το ταυτοτικό μαρκάρισμα και τοπολογικό αντιπρόσωπο $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ με

$$f : a \mapsto a, \quad b \mapsto ab.$$

Επιλέγουμε μετρική l στο Γ με

$$l(a) = t, \quad l(b) = 1 - t$$

για κάποιο $t \in (0, 1)$. Τότε η κλίση του Φ είναι

$$\frac{l(\Phi(a))}{l(a)} = \frac{t}{t} = 1 \text{ και } \frac{l(\Phi(b))}{l(b)} = \frac{t + (1-t)}{1-t} = \frac{1}{1-t}.$$

Συνεπώς εξετάζοντας τους τρεις υποψήφιους βρόγχους έχουμε ότι

$$d(\Gamma, \Gamma \cdot \Phi) = \log \frac{1}{1-t} \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow 0$. Είναι άμεσο ότι το tension γράφημα του f είναι ο βρόγχος b .

Τώρα, για έναν παραβολικό αυτομορφισμό Φ , σταθεροποιούμε ακολουθία $(\Gamma_k) \subset CV_n$ με

$$d(\Gamma_k, \Gamma_k \cdot \Phi) \rightarrow D = \inf \bar{\Phi}$$

αλλά το D να μην επιτυγχάνεται. Ένας σημαντικός υπόχωρος του CV_n που θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο είναι ο $CV_{n \geq \epsilon}$.

Ορισμός 1.14.17 (Το ϵ -παχύ μέρος του CV_n). Έστω $\epsilon > 0$. Συμβολίζουμε με $CV_{n \geq \epsilon}$ τον υπόχωρο του CV_n που αποτελείται από όλα τα μετρικά γραφήματα Γ στα οποία κάθε μη τετριμμένος βρόγχος έχει μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του ϵ .

Ορισμός 1.14.18. Αν μια ομάδα G δρα σε έναν χώρο X λέμε ότι η δράση είναι συμπαγής αν ο χώρος πηλίκο X/G είναι συμπαγής (*compact*). Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής (*locally compact*) τότε αυτό είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει ένα συμπαγές $K \subset X$ τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{g \in G} gK$.

Λήμμα 1.14.19. Το $CV_{n \geq \epsilon}$ είναι $\text{Out}(F_n)$ -αναλλοίωτο κλειστό υποσύνολο στο οποίο η $\text{Out}(F_n)$ δρα συμπαγώς.

Παρατήρηση 1.14.20. Ο υπόχωρος $CV_{n \geq \epsilon}$ είναι τοπικά συμπαγής.

Πρόταση 1.14.21 ([34]). Αν Γ_k είναι ακολουθία όπως παραπάνω, τότε για κάθε θετικό αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένα $\Gamma_k \in CV_n$ με $\Gamma_k \in CV_{n \geq \epsilon}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο. Περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Gamma_k \in CV_{n \geq \epsilon}$ για κάθε k . Από τη συμπαγεια της δράσης, μπορούμε να θεωρήσουμε συγκλίνουσα υπακολουθία

$$\Gamma_k \cdot \Psi_k \rightarrow \Gamma_\infty.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} d(\Gamma_\infty \cdot \Psi_k^{-1}, \Gamma_\infty \cdot \Psi_k^{-1} \cdot \Phi) &\leq \\ d(\Gamma_\infty \cdot \Psi_k^{-1}, \Gamma_k) + d(\Gamma_k, \Gamma_k \Phi) + d(\Gamma_k \Phi, \Gamma_\infty \Psi_k^{-1} \Phi) &= \\ = d(\Gamma_\infty, \Gamma_k \Psi_k) + d(\Gamma_k, \Gamma_k \Phi) + d(\Gamma_k \Psi_k, \Gamma_\infty) \end{aligned}$$

και άρα

$$d(\Gamma_\infty \Psi_k^{-1}, \Gamma_\infty \Psi_k^{-1} \Phi) \rightarrow D$$

αφού $d(\Gamma_k \Psi_k, \Gamma_\infty) \rightarrow 0$ και $d(\Gamma_\infty, \Gamma_k \Psi_k) \rightarrow 0$. Συνεπώς,

$$d(\Gamma_\infty \Psi_k^{-1} \Phi^{-1} \Psi_k, \Gamma_\infty) \rightarrow D.$$

Από το Θεώρημα 1.10.1 (Arzela-Ascoli) το σύνολο των e^{D+1} -Lipschitz απεικονίσεων $f : \Gamma_\infty \rightarrow \Gamma_\infty$ είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου των συνεχών απεικονίσεων $\Gamma_\infty \rightarrow \Gamma_\infty$. Επίσης αν $f, f' : \Gamma_\infty \rightarrow \Gamma_\infty$ είναι τέτοιες ώστε να υπάρχει $g : \Gamma_\infty \rightarrow \Gamma_\infty$ $(1+\epsilon)$ -Lipschitz με $fg \simeq f'$, τότε οι f, f' είναι ομοτοπικές. Έτσι, το σύνολο των e^{D+1} -Lipschitz απεικονίσεων $f : \Gamma_\infty \rightarrow \Gamma_\infty$ περιέχει μόνο πεπερασμένους το πλήθος αντιπροσώπους από διαφορετικές κλάσεις ομοτοπίας. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι το πλήθος εξωτερικοί αυτομορφισμοί $\Psi \in \text{Out}(F_n)$ τέτοιοι ώστε

$$d(\Gamma_\infty \Psi, \Gamma_\infty) \leq D + 1.$$

Άρα περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(\Psi_k^{-1} \Phi^{-1} \Psi_k)_k$ είναι σταθερή και

$$d(\Gamma_\infty \cdot \Psi_k^{-1} \Phi^{-1} \Psi_k, \Gamma_\infty) = D$$

δηλαδή

$$d(\Gamma_\infty \Psi_k^{-1} \cdot \Phi, \Gamma_\infty \Psi_k^{-1}) = D$$

που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι το infimum της $\bar{\Phi}$ δεν επιτυγχάνεται. ■

Ορισμός 1.14.22 ([34]). Έστω ϵ ένας θετικός αριθμός. Την ένωση όλων των βρόγχων μήκους μικρότερου ή ίσου του ϵ την ονομάζουμε ϵ - μικρό υπόχωρο του Γ και τη συμβολίζουμε με Γ^ϵ .

Λήμμα 1.14.23. Έστω Γ ένα πεπερασμένο γράφημα με $\pi_1(\Gamma) = F_n$ και το οποίο δεν έχει κορυφές με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Τότε για το πλήθος των ακμών του ισχύει: $|E(\Gamma)| \leq 3n - 3$.

Απόδειξη. Έστω T ένα μεγιστικό υποδέντρο του Γ . Γνωρίζουμε ότι $n = |E(\Gamma)| - |E(T)|$. Επιπλέον

$$|E(\Gamma)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(\Gamma)} \deg(u) \geq \frac{3}{2} |V(\Gamma)|$$

και

$$|E(T)| = |V(\Gamma)| - 1.$$

Οπότε $|E(T)| \leq \frac{2}{3} |E(\Gamma)| - 1$ και

$$n = |E(\Gamma)| - |E(T)| \geq \frac{1}{3} |E(\Gamma)| + 1.$$

■

Παρατήρηση 1.14.24. Υποθέτουμε ότι το Γ δεν έχει κορυφές με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Τότε από το παραπάνω λήμμα και αφού ο όγκος του Γ είναι 1, έπεται ότι υπάρχει ακμή μήκους μεγαλύτερου ή ίσου του $\frac{1}{3n-3}$. Άρα επιλέγοντας $\epsilon_n < \frac{1}{3n-3}$ έχουμε ότι για κάθε $\Gamma \in CV_n$ ο υπόχωρος $\Gamma^{\epsilon_n} \subset \Gamma$ είναι γνήσιος.

Παρατήρηση 1.14.25 ([34]). Υπάρχει ένα φράγμα B_n στο μήκος των αλυσίδων

$$C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_k$$

γνήσιων υπογραφημάτων $C_i \subset \Gamma$ που είναι γραφήματα πυρήνες, για κάθε $\Gamma \in CV_n$.

Πρόταση 1.14.26 ([34]). Έστω k ένας φυσικός αριθμός αρκετά μεγάλος. Κάθε βέλτιστη απεικόνιση $\phi : \Gamma_k \rightarrow \Gamma_k \cdot \Phi$ αφήνει ένα μη κενό γνήσιο υπογράφημα πυρήνα αναλλοίωτο ως προς ομοτοπία. Κατά συνέπεια η ϕ είναι ομοτοπική με απεικόνιση που απεικονίζει αυτό το υπογράφημα πυρήνα στον εαυτό του.

Απόδειξη. Έστω $\theta = \frac{\epsilon_n}{(e^{D+1})^{B_n}}$, όπου τα ϵ_n, D, B_n είναι όπως παραπάνω. Τότε, από την Πρόταση 1.14.21, ισχύει $\Gamma_k \notin CV_{n \geq \theta}$, όπου τα Γ_k είναι και αυτά όπως πριν. Επιλέγουμε k αρκετά μεγάλο ώστε επιπλέον να ισχύει ότι

$$d(\Gamma_k, \Gamma_k \cdot \Phi) < D + 1.$$

Θέτουμε $\delta_i = \frac{\epsilon_n}{e^{(D+1)^i}}$ για $i = 0, 1, \dots, B_n$. Τότε έχουμε την αλυσίδα

$$\Gamma_k^{\delta_0} \supset \Gamma_k^{\delta_1} \supset \dots \supset \Gamma_k^{\delta_{B_n}}$$

η οποία είναι μια αλυσίδα από μη τετρωμένους ως προς ομοτοπία γνήσιους υπόχωρους με μήκος $B_n + 1$. Από την παραπάνω παρατήρηση υπάρχει i τέτοιο ώστε τα $\Gamma_k^{\delta_i}, \Gamma_k^{\delta_{i+1}}$

να έχουν το ίδιο υπογράφημα πυρήνα. Εξ ορισμού μια βέλτιστη απεικόνιση πρέπει να απεικονίζει το $\Gamma_k^{\delta_{i+1}}$ μέσα στο $\Gamma_k^{\delta_i}$. Άρα το κοινό υπογράφημα πυρήνας απεικονίζεται στον εαυτό του ως προς ομοτοπία. ■

Από την παραπάνω πρόταση έπεται άμεσα το εξής:

Πόρισμα 1.14.27 ([34]). Κάθε παραβολικός αυτομορφισμός είναι μη ανάγωγος (reducible).⁸

1.15 Train tracks και το βασικό αποτέλεσμα

Δίνουμε αρχικά μερικούς βασικούς ορισμούς.

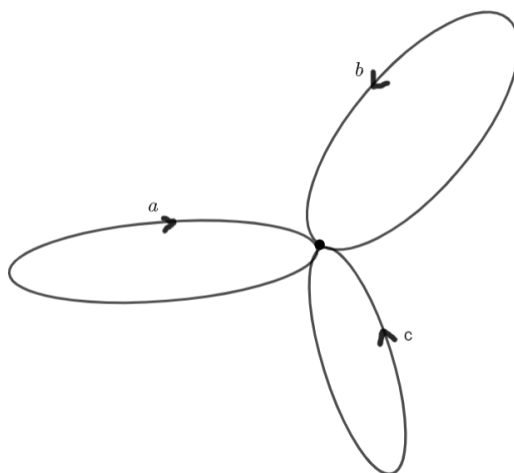
Ορισμός 1.15.1. Ο $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ονομάζεται μη ανάγωγος (reducible) αν έχει τοπολογικό αντιπρόσωπο $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ (όπου (Γ, f) μαρκαρισμένο γράφημα) ο οποίος έχει αναλλοίωτο γνήσιο υπογράφημα που είναι ομοτοπικά μη τετριμμένο (δηλαδή δεν είναι δάσος). Σε αντίθετη περίπτωση, ο Φ ονομάζεται ανάγωγος (irreducible).

Παρατήρηση 1.15.2. Ένας υπερβολικός αυτομορφισμός μπορεί να είναι μη ανάγωγος (reducible).

Πράγματι, θεωρούμε τον υπερβολικό αυτομορφισμό $\phi \in \text{Aut}(F_3)$ με

$$\phi : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto bab \\ c \mapsto c \end{cases}$$

Τότε στο Γ που δίνεται από το παρακάτω σχήμα



⁸Βλέπε στην επόμενη ενότητα για τον αντίστοιχο ορισμό [1.15.1](#)

επιτυγχάνεται, σύμφωνα με το Πρόγραμμα 1.14.15, το ελάχιστο της displacement απεικόνισης. Όμως, αυτός ο τοπολογικός αντιπρόσωπος έχει προφανώς ένα ομοτοπικά μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπογράφημα (αυτό που αποτελείται μόνο από τον βρόγχο c), δηλαδή είναι μη ανάγωγος (reducible).

Ορισμός 1.15.3. Έστω $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ανάγωγος εξωτερικός αυτομορφισμός. Ένας τοπολογικός αντιπρόσωπος $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ του Φ λέγεται *train track απεικόνιση* αν απεικονίζει κάθε ακμή σε ένα μη τετριμμένο ανηγμένο μονοπάτι και ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο ισοδύναμες συνθήκες.

- Υπάρχει μια *train track* δομή στο Γ έτσι ώστε ο ϕ να απεικονίζει ακμές σε επιτρεπτά μονοπάτια και αν $v \in V(\Gamma)$ τότε είτε
 - $\phi(v) = w \in V(\Gamma)$ και μη ισοδύναμες κατευθύνσεις στη v απεικονίζονται σε μη ισοδύναμες κατευθύνσεις στο w , είτε
 - $\phi(v) \notin V(\Gamma)$, η v έχει δύο *gates* και όλες οι κατευθύνσεις στη μία *gate* απεικονίζονται στη μία κατεύθυνση του $\phi(v)$, ενώ οι κατευθύνσεις της δεύτερης *gate* απεικονίζονται στην άλλη κατεύθυνση της $\phi(v)$.
- Υπάρχει βρόγχος α στο Γ τέτοιος ώστε οι βρόγχοι $\phi^k(\alpha)$ να είναι ανηγμένοι για κάθε $k = 1, 2, \dots$

Παρατήρηση 1.15.4. Ένας αυτομορφισμός $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ο οποίος είναι ανάγωγος και έχει *train track* αντιπρόσωπο $f : \Gamma \rightarrow \Gamma\Phi$, όπως έχουμε πει, δεν είναι παραβολικός.

Θεώρημα 1.15.5 ([34]). Κάθε ανάγωγος (irreducible) αυτομορφισμός Φ έχει τουλάχιστον έναν τοπολογικό αντιπρόσωπο $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ που είναι *train track απεικόνιση*.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στον ορισμό του ανάγωγου αυτομορφισμού και στην απόδειξη της Πρότασης 1.14.13. Για μια αναλυτική απόδειξη στη γενικότερη περίπτωση των χώρων μετασχηματισμών (deformation spaces) ανάγωγων G -δέντρων βλ. [56]. ■

Για ανάγωγους εξωτερικούς αυτομορφισμούς μπορούμε να πετύχουμε την ύπαρξη *train track* αντιπροσώπου ο οποίος να απεικονίζει κορυφές σε κορυφές, κάτι που θα ήταν αυτονόητο αν δουλεύαμε μόνο με απεικονίσεις γραφημάτων. Συγκεκριμένα, ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.15.6. Έστω $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ένας ανάγωγος εξωτερικός αυτομορφισμός. Τότε ο Φ έχει *train track* αντιπρόσωπο $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ο οποίος απεικονίζει κορυφές σε κορυφές.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη την ύπαρξη ενός *train track* αντιπροσώπου

$$f : \Gamma \rightarrow \Gamma$$

του Φ . Έστω $f_t : \Gamma \rightarrow \Gamma$ η ομοτοπία η οποία μετακινεί κάθε $f(v)$ (όπου $v \in V(\Gamma)$) που δεν είναι κορυφή σε μια κορυφή της αντίστοιχης ακμής. Επίσης απαιτούμε μέχρι το τέλος της διαδικασίας το πλήθος των $f_t(v)$ που βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη ακμή να είναι σταθερό, δηλαδή να μην υπάρξουν συγκολλήσεις ή αποκολλήσεις.

Η $f_t : \Gamma \rightarrow \Gamma$ συνεχίζει να απεικονίζει επιτρεπτά μονοπάτια σε επιτρεπτά μονοπάτια όμως μπορεί να κάνει collapse κάποιες ακμές. Ορίζουμε $\Gamma' = \Gamma / \sim$ όπου έχουμε κάνει collapse όλες τις ακμές που γίνονται collapse μέσω της f_1 . Τότε επάγεται $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ και η οποία απεικονίζει επιτρεπτά μονοπάτια σε επιτρεπτά μονοπάτια.

Συγκεκριμένα, το $f'^k(e)$ δεν έχει παλινδρομίες για κάθε ακμή e και κάθε $k = 1, 2, \dots$. Τέλος, το Γ' εφοδιάζεται με μετρική μέσω του θεωρήματος Perron-Frobenius. Αναλυτικότερα, σχηματίζουμε τον πίνακα μετάβασης της f' . Συμβολίζουμε με $e_1, \dots, e_m$ τις ακμές του Γ' και με $M(i, j)$ ⁹ το πλήθος των φορών που η $f'(e_j)$ διέρχεται από την e_i . Αφού ο Φ είναι ανάγωγος έπεται ότι και ο M είναι ανάγωγος¹⁰. Επιπλέον κάθε δύναμη του Φ είναι ανάγωγη¹¹ και άρα ο M^k είναι ανάγωγος για κάθε k . Έτσι, υπάρχει k για το οποίο ο M^k είναι θετικός. Από το θεώρημα Perron-Frobenius A.0.9 για τον πίνακα M , το μήκος των ακμών του Γ' επάγεται από το μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα του M . ■

Παράδειγμα 1.15.7. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον εξωτερικό αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_3)$ με

$$\Phi : \begin{cases} a \mapsto ca^{-1} \\ b \mapsto a \\ c \mapsto b \end{cases}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε μήκη $l(a), l(b), l(c)$ έτσι ώστε κάθε ακμή να μεγενθύνεται κατά

⁹Το στοιχείο του πίνακα M στη θέση (i, j)

¹⁰Για τον ορισμό του ανάγωγου πίνακα βλ. A.0.3

¹¹Ο Φ είναι ανάγωγος με ανάγωγες δυνάμεις, *IWIP* ή *fully irreducible*

παράγοντα λ . Οπότε θέλουμε

$$\begin{cases} l(a) + l(c) = \lambda l(a) \\ l(a) = \lambda l(b) \\ l(b) = \lambda l(c) \end{cases}$$

Ο πίνακας μετάβασης M του συγκεκριμένου αυτομορφισμού είναι

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

οπότε το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$(l(a) \ l(b) \ l(c))M = \lambda(l(a) \ l(b) \ l(c)).$$

Είναι πλέον προφανές ότι αναζητούμε ένα ιδιοδιάνυσμα του M . Αφού ο Φ είναι ανάγωγος το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα M οπότε από το θεώρημα Perron -Frobenius έχουμε μοναδικό θετικό (αριστερό) ιδιοδιάνυσμα. Αυτό το ιδιοδιάνυσμα μας δίνει τα επιθυμητά μήκη.

Κεφάλαιο 2

Η ασυμμετρία του εξωτερικού χώρου

2.1 Εισαγωγή

Ακολουθώντας το [66] θα μελετήσουμε προσεκτικότερα την ασυμμετρία που ήδη είδαμε ότι εμφανίζει η μετρική του Lipschitz στον εξωτερικό χώρο. Οι Algom-Kfir και Bestvina απέδειξαν ότι υπάρχει μια συνάρτηση η οποία φράσσει αυτή την ασυμμετρία. Με αυτόν τον τρόπο, έδωσαν νέες αποδείξεις δύο θεωρημάτων των Handel και Mosher σχετικά με τον περιορισμό της μετρικής στο ϵ -παχύ μέρος του εξωτερικού χώρου και σχετικά με τους ρυθμούς αύξησης των εξωτερικών αυτομορφισμών ϕ και ϕ^{-1} της F_n . Τα αποτελέσματα του [66] που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο γενικεύθηκαν στο [11] για την περίπτωση των ελευθέρων γινομένων.

2.2 Εξωτερικός χώρος και εφαπτόμενοι χώροι

Δίνουμε έναν ισχυρότερο ορισμό του μετρικού γραφήματος, καταλληλότερο για τους σκοπούς μας, τον οποίο θα χρησιμοποιούμε στο εξής.

Ορισμός 2.2.1 ([66]). Μια μετρική σε ένα γράφημα Γ είναι (πλέον) μια απεικόνιση $l : E(\Gamma) \rightarrow [0, 1]$ έτσι ώστε

- $vol(\Gamma) = \sum_{e \in E(\Gamma)} l(e) = 1$
- Το σύνολο των ακμών $\{e \in E(\Gamma) \mid l(e) = 0\}$ να είναι δάσος, δηλαδή να μην περιέχει κυκλώματα.

Όπως έχουμε δει ο χώρος Σ_Γ όλων των μετρικών l σε ένα γράφημα Γ (δηλαδή κρατάμε σταθερό το γράφημα και αλλάζουμε τα μήκη των ακμών του ώστε να παραμένει ο όγκος του 1 και να μην υπάρχει κύκλος μήκους 0) είναι simplex που του λείπουν ενδεχομένως κάποιες όψεις (faces).

Σταθεροποιούμε το Σ_Γ και δίνουμε τον ορισμό του εφαπτόμενου χώρου σε ένα $l \in \Sigma_\Gamma$.

Ορισμός 2.2.2. Για $l \in \Sigma_\Gamma$ ορίζεται ως εφαπτόμενος χώρος το ακόλουθο υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^N$, όπου N το πλήθος των ακμών του Γ ,

$$T_l(\Sigma_\Gamma) = \left\{ \tau : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{e \in E(\Gamma)} \tau(e) = 0 \right\}.$$

Παρατήρηση 2.2.3. Αν $l, l' \in \Sigma_\Gamma$, τότε, εφόσον ο εφαπτόμενος χώρος δεν εξαρτάται από τις μετρικές, υπάρχει μια φυσιολογική ταύτιση $T_l(\Sigma_\Gamma) \equiv T_{l'}(\Sigma_\Gamma)$. Έτσι, αν $T(\Sigma_\Gamma) = \{(l, \tau) : l \in \Sigma_\Gamma, \tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)\}$ είναι ο συνολικός εφαπτόμενος χώρος υπάρχει διάσπαση

$$T(\Sigma_\Gamma) \cong \Sigma_\Gamma \times \mathbb{R}^{N-1}$$

όπου N είναι το πλήθος των ακμών του Γ . Πράγματι για $\tau : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \in T(\Sigma_\Gamma)$ αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές του σε όλες τις ακμές εκτός από μία. Σε αυτή τη μία βάζουμε τη σωστή τιμή ώστε το συνολικό άθροισμα να είναι 0.

Ορισμός 2.2.4 ([66]). Ένα στοιχείο (διάνυσμα) $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ ονομάζεται ολοκληρώσιμο (integrable), αν για κάθε $e \in E(\Gamma)$:

$$\tau(e) < 0 \Rightarrow l(e) > 0.$$

Δηλαδή δεν υπάρχει ακμή e με $\tau(e) < 0$ και $l(e) = 0$.

Παρατήρηση 2.2.5. • Για $t \geq 0$ αρκετά μικρό και $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ ολοκληρώσιμο έχουμε ότι $l + t\tau \in \Sigma_\Gamma$.

- Αν το Γ' είναι γράφημα που προκύπτει από το Γ με συρρίκνωση (collapse) ενός δάσους (τότε τα Γ, Γ' συνεχίζουν να έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας) έχουμε τους εξής φυσικούς εγκλεισμούς

$$\Sigma_{\Gamma'} \subset \Sigma_\Gamma \text{ και } T(\Sigma_{\Gamma'}) \subset T(\Sigma_\Gamma)$$

θεωρώντας τις μετρικές που δίνουν στις ακμές του δάσους την τιμή 0.

Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τον ορισμό του εξωτερικού χώρου CV_n που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ως εξής:

Ορισμός 2.2.6 ([66]). *Ο χώρος CV_n προκύπτει από την ξένη ένωση*

$$\coprod_{(\Gamma, f)} \Sigma_\Gamma$$

ταυτίζοντας τις όψεις (faces) των simplices που προκύπτουν από τους εγκλεισμούς της παραπάνω παρατήρησης (συρρικνώσεις δέντρων), ενώ η ένωση λαμβάνεται στους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας των μαρκαρισμένων γραφημάτων (Γ, f) .

Υπενθυμίζουμε ότι αν a είναι μια ανηγμένη καμπύλη στο Γ ορίζεται το $l(a)$ να είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών από τις οποίες διέρχεται η a , με την πολλαπλότητά τους. Αν η a δεν είναι ανηγμένη τότε με στοιχειώδεις αναγωγές προκύπτει ανηγμένη καμπύλη για την οποία υπολογίζουμε το μήκος.¹

Ομοίως αν $\tau \in \Sigma_\Gamma$ και a είναι βρόγχος στο Γ τότε ορίζουμε το $\tau(a)$ να είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών από τις οποίες διέρχεται ο ανηγμένος βρόγχος που είναι ελεύθερα ομοτοπικά ισοδύναμος με τον a .

2.3 Η ασυμμετρία και το βασικό θεώρημα

Δίνουμε μερικά παραδείγματα τα οποία δείχνουν ότι η μετρική του Lipschitz που ορίστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια δεν είναι συμμετρική, δηλαδή $d(\Gamma, \Gamma') \neq d(\Gamma', \Gamma)$ για κάποια $\Gamma, \Gamma' \in CV_n$.

Παράδειγμα 2.3.1. Έστω $\Gamma_k \equiv [(\mathcal{R}_2, id, l_k)]$ όπου η l_k θέτει τα μήκη των δύο ακμών του μπουκέτου $\mathcal{R}_2$ ίσα με $\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}$. Τότε αν ονομάσουμε a, b τις ακμές του $\mathcal{R}_2$ οι υποψήφιοι (και στις δύο περιπτώσεις) είναι a, b, ab . Ελέγχουμε ότι

$$d(\Gamma_2, \Gamma_k) = \max_{a \text{ υποψήφιος}} \log \frac{l_{\Gamma_k}(a)}{l_{\Gamma_2}(a)} = \log \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{2}} = \log \frac{2}{k} < \log 2$$

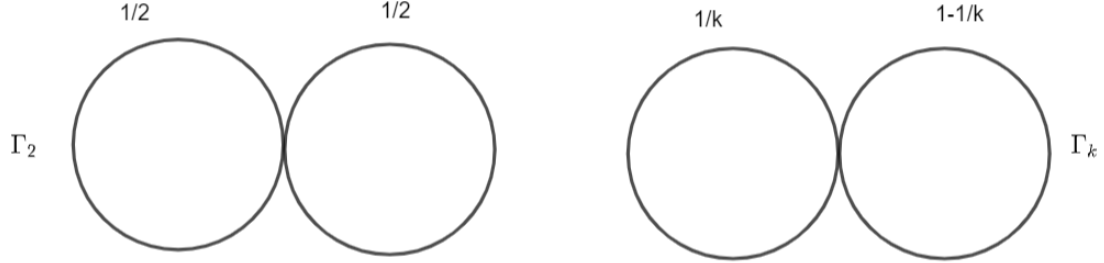
¹Ένα μονοπάτι (ή καμπύλη) ονομάζεται ανηγμένο (tight) αν η $[0, 1] \cong I \rightarrow \Gamma$ είναι εμφύτευση, δηλαδή η εικόνα δεν περιέχει υπομονοπάτι της μορφής $x\bar{x}$, όπου το x είναι τμήμα ακμής. Μια στοιχειώδης ομοτοπία διαγράφει ή εισάγει τέτοιες παλινδρομήσεις. Τότε είναι προφανές ότι κάθε μονοπάτι μπορεί να αναχθεί με την εφαρμογή κάποιων στοιχειωδών ομοτοπιών. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται αναγωγή (tightening).

και

$$d(\Gamma_k, \Gamma_2) = \max_{a \text{ υποψήφιος}} \log \frac{l_{\Gamma_2}(a)}{l_{\Gamma_k}(a)} = \log \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{k}} = \log \frac{k}{2} \rightarrow +\infty$$

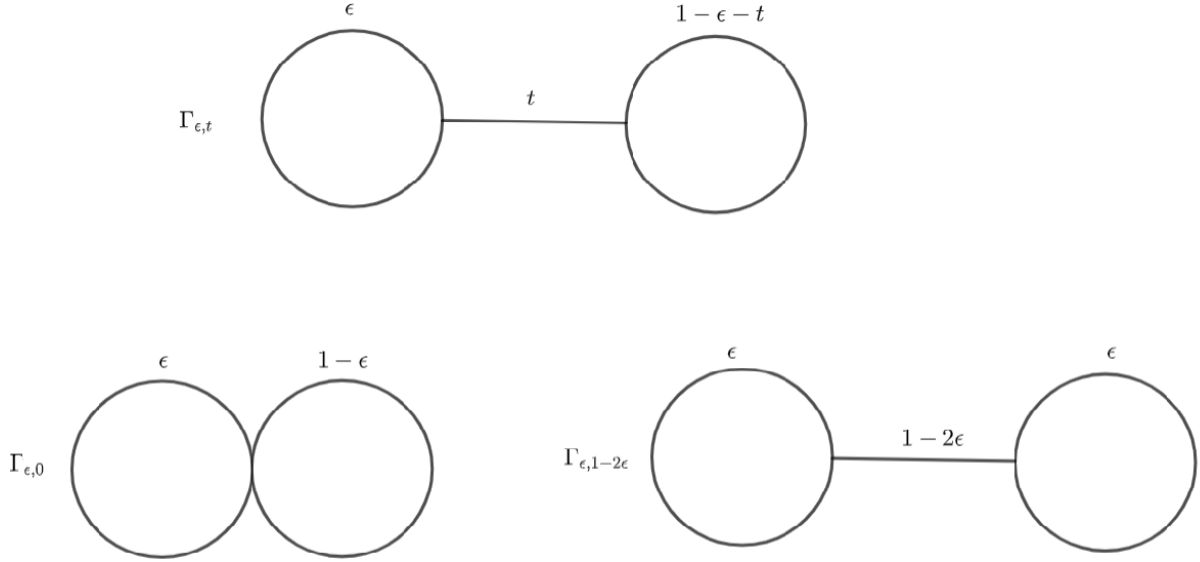
καθώς $k \rightarrow +\infty$. Άρα $d(\Gamma_2, \Gamma_k) \neq d(\Gamma_k, \Gamma_2)$.

Σχήμα 2.1: $d(\Gamma_2, \Gamma_k) \neq d(\Gamma_k, \Gamma_2)$



Παράδειγμα 2.3.2. Έστω τώρα $\Gamma_{\epsilon, t}$ το γράφημα που αποτελείται από δύο κύκλους μήκους ϵ και $1 - \epsilon - t$, που συνδέονται με τόξο μήκους t , όπου $0 < \epsilon < 0.1$ και $0 \leq t < 1 - \epsilon$. Θεωρούμε τα $\Gamma_{\epsilon, 0}$ και $\Gamma_{\epsilon, 1-2\epsilon}$ όπως στο σχήμα.

Σχήμα 2.2: $d(\Gamma_{\epsilon, 1-2\epsilon}, \Gamma_{\epsilon, 0}) \neq d(\Gamma_{\epsilon, 0}, \Gamma_{\epsilon, 1-2\epsilon})$



Τότε εξετάζοντας πάλι τους υποψήφιους βρόγχους είναι

$$d(\Gamma_{\epsilon, 0}, \Gamma_{\epsilon, 1-2\epsilon}) = \log \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} < \log 2$$

και

$$d(\Gamma_{\epsilon,1-2\epsilon}, \Gamma_{\epsilon,0}) = \log \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \rightarrow +\infty$$

καθώς $\epsilon \rightarrow 0$. Άρα $d(\Gamma_{\epsilon,1-2\epsilon}, \Gamma_{\epsilon,0}) \neq d(\Gamma_{\epsilon,0}, \Gamma_{\epsilon,1-2\epsilon})$.

Παράδειγμα 2.3.3. Σταθεροποιούμε $\epsilon \in (0, 0.1)$. Έστω Γ_t το γράφημα που αποτελείται από δύο βρόγχους μήκους ϵ και από δύο τόξα που τους συνδέουν με μήκη t και $1-t-2\epsilon$, όπου $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Τότε όπως πριν έχουμε ότι

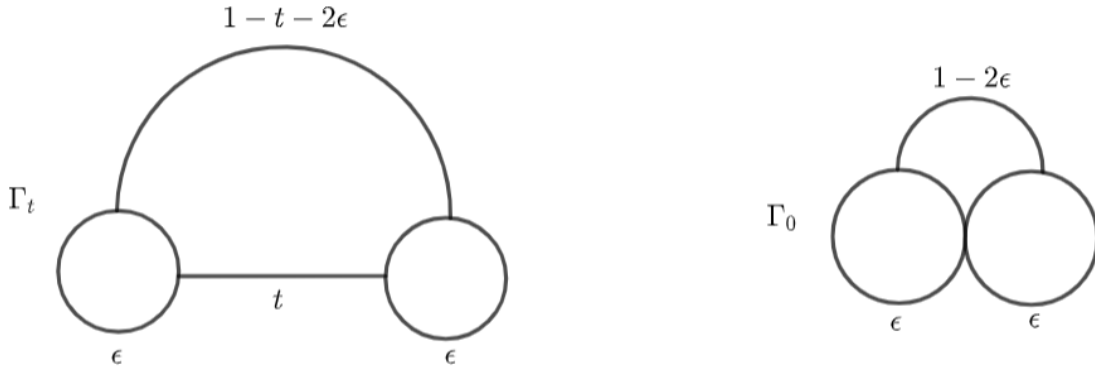
$$d(\Gamma_0, \Gamma_t) = \log \left(1 + \frac{t}{2\epsilon} \right)$$

και

$$d(\Gamma_t, \Gamma_0) = \log \left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon-t} \right)$$

Οπότε $d(\Gamma_0, \Gamma_t) \neq d(\Gamma_t, \Gamma_0)$.

Σχήμα 2.3: $d(\Gamma_0, \Gamma_t) \neq d(\Gamma_t, \Gamma_0)$



Ορισμός 2.3.4. Σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης ένας κλειστός κυρτός κώνος είναι ένα κλειστό υποσύνολο $C \subset V$ τέτοιο ώστε

$$v, w \in C \Rightarrow tv + sw \in C, \text{ για κάθε } t, s \in [0, +\infty).$$

Για παράδειγμα το σύνολο των ολοκληρωσίμων διανυσμάτων στον $T_l(\Sigma_\Gamma)$ είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος.

Πρόταση 2.3.5 ([66]). • Έστω $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ ένα ολοκληρώσιμο διάνυσμα. Τότε υπάρχει υπονήφιος βρόγχος a στο Γ έτσι ώστε

$$d(l, l + t\tau) = \log \frac{(l + t\tau)(a)}{l(a)}$$

για κάθε αρκετά μικρό $t \geq 0$. Δηλαδή ο ίδιος a επιτυγχάνει την απόσταση $d(l, l+t\tau)$ για κάθε αρκετά μικρό $t \geq 0$. Επιπλέον, ο a έχει την ιδιότητα ότι $\frac{\tau(b)}{l(b)} \leq \frac{\tau(a)}{l(a)}$ για κάθε άλλο βρόγχο b .

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(l, l+t\tau)}{t} = \frac{\tau(a)}{l(a)}$ για τον παραπάνω βρόγχο a .
- Το σύνολο των ολοκληρωσίμων διανυσμάτων στον $T_l(\Sigma_\Gamma)$ μπορεί να γραφεί σαν μια πεπερασμένη ένωση κλειστών κυρτών κώνων $B_1, \dots, B_N$ έτσι ώστε για κάθε B_i να υπάρχει ένας υποψήφιος βρόγχος a_i που επιτυγχάνει την απόσταση $d(l, l+t\tau)$ για κάθε $\tau \in B_i$ και κάθε αρκετά μικρό $t \geq 0$.

Απόδειξη. Έστω a υποψήφιος βρόγχος στο Γ ο οποίος επιτυγχάνει την απόσταση $d(l, l+t\tau)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{(l+t\tau)(a)}{l(a)} \geq \frac{(l+t\tau)(b)}{l(b)} \iff \frac{l(a)+t\tau(a)}{l(a)} \geq \frac{l(b)+t\tau(b)}{l(b)} \iff 1+t\frac{\tau(a)}{l(a)} \geq 1+t\frac{\tau(b)}{l(b)}$$

για κάθε άλλο βρόγχο b στο Γ . Η ανισότητα ισχύει για κάθε βρόγχο b αλλά αφού η απόσταση επιτυγχάνεται σε υποψήφιο βρόγχο μπορούμε να περιοριστούμε σε υποψήφιους βρόγχους. Επιπλέον αφού έχουμε πεπερασμένα γραφήματα οι υποψήφιοι βρόγχοι είναι πεπερασμένοι άρα έχουμε πεπερασμένες ανισότητες. Υποθέτουμε ότι οι υποψήφιοι βρόγχοι στο γράφημα Γ είναι οι a_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Έχουμε δει ότι οι παραπάνω ανισότητες για $t > 0$ απλοποιούνται στις

$$\frac{\tau(a)}{l(a)} \geq \frac{\tau(b)}{l(b)}.$$

Αυτό είναι ένα πεπερασμένο σύστημα γραμμικών ανισοτήτων που ορίζουν έναν κλειστό κυρτό κώνο B_i για κάθε υποψήφιο βρόγχο a_i , όπως στο τρίτο ζητούμενο. Συγκεκριμένα:

$$\tau \in B_i \iff \frac{\tau(a_i)}{l(a_i)} \geq \frac{\tau(a_j)}{l(a_j)} \text{ για κάθε } j = 1, 2, \dots, N.^2$$

Οι ανισότητες αυτές είναι ανεξάρτητες από το t και άρα έχουμε το πρώτο ζητούμενο, αφού μπορούμε να επιλέξουμε τον ίδιο υποψήφιο βρόγχο να επιτυγχάνει την απόσταση για όλα τα μικρά t .

Για το δεύτερο ζητούμενο έχουμε

$$d(l, l+t\tau) = \log \frac{(l+t\tau)(a)}{l(a)}$$

²Είναι προφανές ότι αν $\tau, p \in B_i$ και $r, s \geq 0$ τότε $r\tau + sp \in B_i$.

άρα

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\log \frac{(l + t\tau)(a)}{l(a)} \right) \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\log \left(1 + t \frac{\tau(a)}{l(a)} \right) \right) \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+t \frac{\tau(a)}{l(a)}} \cdot \frac{\tau(a)}{l(a)}}{1} = \frac{\tau(a)}{l(a)}.$$

■

2.4 Η μετρική Finsler

Σταθεροποιούμε ένα γράφημα $\Gamma \in CV_n$.

Ορισμός 2.4.1 ([66]). Για $l \in \Sigma_\Gamma$ και $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|(l, \tau)\|^L = \sup \left\{ \frac{\tau(a)}{l(a)} \mid a \text{ βρόγχος στο } \Gamma \right\}.$$

Πρόταση 2.4.2 ([66]). 1. Αν το $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ είναι ολοκληρώσιμο, τότε $\|(l, \tau)\|^L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(l, l + t\tau)}{t}$.

2. Το supremum στον ορισμό επιτυγχάνεται σε έναν υποψήφιο βρόγχο στο Γ .

3. Η νόρμα $\|(l, \tau)\|^L$ είναι συνεχής στο $T(\Sigma_\Gamma)$.

4. $\|(l, \tau)\|^L \geq 0$ με ισότητα αν και μόνο αν $\tau = 0$.

5. $\|(l, \tau_1 + \tau_2)\|^L \leq \|(l, \tau_1)\|^L + \|(l, \tau_2)\|^L$.

6. Αν $c > 0$, τότε $\|(l, c\tau)\|^L \leq c\|(l, \tau)\|^L$.

Απόδειξη. 1. Αν το τ είναι ένα ολοκληρώσιμο διάνυσμα, τότε από τον τρίτο ισχυρισμό της προηγούμενης πρότασης, υπάρχει i τέτοιο ώστε $\tau \in B_i$. Τότε, από τον δεύτερο ισχυρισμό της προηγούμενης πρότασης, υπάρχει υποψήφιος βρόγχος a_i με

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(l, l + t\tau)}{t} = \frac{\tau(a_i)}{l(a_i)}.$$

Συνεπώς από τον πρώτο ισχυρισμό της προηγούμενης πρότασης έπεται ότι

$$\frac{\tau(a_i)}{l(a_i)} \geq \frac{\tau(b)}{l(b)}$$

για κάθε άλλο βρόγχο b .

2. Αν το τ είναι ολοκληρώσιμο, τότε όπως είδαμε παραπάνω υπάρχει υποψήφιος βρόγχος a με

$$\|(l, \tau)\|^L = \frac{\tau(a)}{l(a)}$$

και άρα το supremum επιτυγχάνεται για κάποιο βρόγχο του Γ .

Αν το τ δεν είναι ολοκληρώσιμο, τότε υπάρχει ακμή e τέτοια ώστε $l(e) = 0$ και $\tau(e) < 0$. Όμως πάντα μπορούμε να βρούμε κάποια l' οσοδήποτε κοντά στην l (δηλαδή $l'(e) = \epsilon$ για κάποιο $\epsilon > 0$ μικρό) έτσι ώστε το τ να είναι ολοκληρώσιμο (ως προς την l'). Κατά συνέπεια αν η διαταραχή είναι αρκετά μικρή ο υποψήφιος βρόγχος που επιτυγχάνει το supremum των (τ, l) επιτυγχάνει και το supremum των (τ, l') .

3. Αυτό έπεται από το προηγούμενο αφού μπορούμε να αντικαταστήσουμε το supremum με maximum σε ένα πεπερασμένο σύνολο (το σύνολο των υποψήφιων βρόγχων για γραφήματα σε ένα simplex Σ_Γ).
4. Αν $\tau \neq 0$ πρέπει να βρούμε βρόγχο a έτσι ώστε $\tau(a) > 0$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε ανεξάρτητα από την l και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι (αλλάζοντας την l όπως παραπάνω) το τ είναι ολοκληρώσιμο. Κατά συνέπεια από το πρώτο της Πρότασης 2.3.5 και το πρώτο παραπάνω έχουμε ότι για αρκετά μικρό $t > 0$

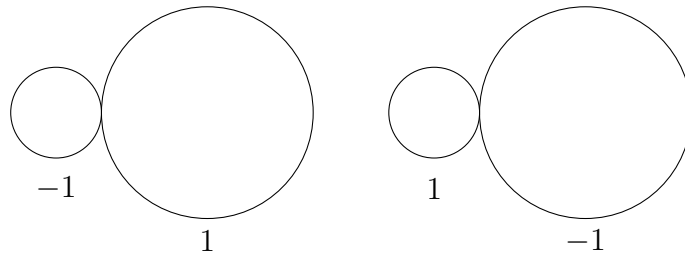
$$0 < d(l, l + t\tau) = \log(1 + t\|(l, \tau)\|^L)$$

από το οποίο έπεται ότι υπάρχει ο ζητούμενος a .

5. Οι δύο τελευταίοι ισχυρισμοί είναι άμεσοι. ■

Παράδειγμα 2.4.3. Για το γράφημα του παρακάτω σχήματος θεωρούμε δύο διανύσματα $\tau = (-1, 1)$ και $-\tau = (1, -1)$. Παρατηρούμε ότι, για κατάλληλο l , η νόρμα $\|(l, \tau)\|^L$ προσεγγίζει το 1, ενώ η νόρμα $\|(l, -\tau)\|^L$ προσεγγίζει το $+\infty$.

Σχήμα 2.4: Η νόρμα $\|\cdot\|^L$ που ορίστηκε δεν είναι "quasi-symmetric"



2.5 Διορθωμένη νόρμα

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό στο $\Sigma_\Gamma \times T_l(\Sigma_\Gamma)$ μιας νέας νόρμας η οποία θα είναι σχεδόν-συμμετρική (quasi-symmetric).

Ορισμός 2.5.1 ([66]). Έστω $a = [x] \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ μια μη τετριμμένη κλάση. Το $l(a)$ ορίζεται να είναι το *infimum* των $l(x)$ καθώς το x διατρέχει τους βρόγχους στην κλάση a .

Πρόταση 2.5.2 ([66]). Για κάθε $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ υπάρχουν πεπερασμένοι βρόγχοι $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ στην a έτσι ώστε το $l(a)$ να επιτυγχάνεται σε κάποιο α_{i_0} για όλες τις μετρικές $l \in \Sigma_\Gamma$. Επιπλέον, αν ένας βρόγχος α είναι αντίτυπο του κύκλου S^1 , τότε για κάθε $l \in \Sigma_\Gamma$, ο α είναι ο βρόγχος με το μικρότερο μήκος στην κλάση του $[\alpha]$.

Απόδειξη. Ισχυρισμός: Αν η κλάση $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ έχει αντιπρόσωπο βρόγχο α που επιτυγχάνει το $l(a)$ και ο α διέρχεται από μια ακμή e περισσότερες από μία φορές, τότε ο α διέρχεται από την e ακριβώς δύο φορές με αντίθετες κατευθύνσεις και η e διαχωρίζει την εικόνα του α .

Απόδειξη ισχυρισμού: Θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

- Έστω ότι ο α διέρχεται από την e δύο φορές με την ίδια κατεύθυνση. Τότε ως προς ελεύθερη ομοτοπία έχουμε $\alpha = eb_1eb_2$. Θεωρούμε τον $\alpha' = eb_1\bar{b}_2\bar{e}$ ο οποίος είναι ομοτοπικός με τον $b_1\bar{b}_2$ και $\mathbb{Z}_2$ -ομόλογος με τον α . Όμως ο α' έχει μικρότερο μήκος από τον α , άτοπο από τον ορισμό του $l(a)$ για $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$.
- Έστω ότι ο α διέρχεται από την e δύο φορές με αντίθετες κατευθύνσεις και ότι η e δε διαχωρίζει την εικόνα του α . Τότε ο α γράφεται $\alpha = eb_1\bar{e}b_2$ με $Imb_1 \cap Imb_2 \neq \emptyset$. Έστω $p \in Imb_1 \cap Imb_2$. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\alpha = c_1ec_2c_3\bar{e}c_4$ όπου $p = i(c_1) = t(c_2) = i(c_3) = t(c_4)$ ³. Επιπλέον έχουμε ότι $t(c_1) = i(c_4)$ και $i(c_2) = t(c_3)$. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τον $\alpha' = c_1\bar{e}\bar{c}_4c_3c_2$ ο οποίος είναι ομοτοπικός με τον $c_1c_4c_3c_2$. Οι α', α είναι $\mathbb{Z}_2$ -ομόλογοι όμως ο α' έχει μικρότερο μήκος, άτοπο.

Δείξαμε τον ισχυρισμό. Αν ο α είναι ο βρόγχος στην κλάση του $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ με το μικρότερο δυνατό μήκος τότε για κάθε ακμή e στην εικόνα του, ο α διέρχεται από την e μία μόνο φορά ή δύο φορές σε αντίθετες κατευθύνσεις και η e διαχωρίζει την εικόνα του α . Για κάθε $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι τέτοιοι βρόγχοι α και δεν εξαρτώνται από την l .

³Με $i(\cdot)$ συμβολίζουμε το αρχικό σημείο και με $t(\cdot)$ το τελικό.

Για το δεύτερο μέρος της πρότασης παρατηρούμε ότι αν ο α είναι εμφύτευση του S^1 και b είναι ένας άλλος βρόγχος $\mathbb{Z}_2$ -ομόλογος με τον α τότε ο b διέρχεται από όλες τις ακμές του α . Άρα ο α έχει το μικρότερο μήκος στην κλάση του $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ και κάθε άλλος βρόγχος στην ίδια κλάση ομολογίας με το ίδιο μήκος με τον α θα πρέπει να είναι αναπαραμέτρησή του. ■

Παρατήρηση 2.5.3. Το σύνολο των ανισοτήτων $l(\alpha_{i_0}) \leq l(\alpha_j)$ της Πρότασης 2.5.2 για το σύνολο των α_i διαιρεί το simplex Σ_Γ σε κλειστά κυρτά υποσύνολα $C_1, \dots, C_k$ έτσι ώστε για κάθε C_i να υπάρχει α_i με την ιδιότητα

$$l(\alpha_i) \leq l(\alpha_j) \text{ για κάθε } j = 1, \dots, k.$$

Μπορούμε δηλαδή να ορίσουμε τα C_i ως

$$l \in C_i \iff l(\alpha_i) \leq l(\alpha_j) \text{ για κάθε } j = 1, \dots, k.$$

Έτσι παίρνουμε τα εξής πορίσματα:

Πόρισμα 2.5.4 ([66]). Κάθε simplex Σ_Γ καλύπτεται από κυρτά κλειστά σύνολα $C_1, \dots, C_k$ έτσι ώστε για κάθε $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ να υπάρχει ένα j τέτοιο ώστε $l(a) = l(\alpha_j)$, για κάθε $l \in C_j$.

Πόρισμα 2.5.5 ([66]). Έστω $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$. Για κάθε ολοκληρώσιμο $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ υπάρχει j τέτοιο ώστε $l, l + t\tau \in C_j$ για κάθε $t > 0$ αρκετά μικρό. Επιπλέον η παράγωγος από δεξιά στο 0 της απεικόνισης

$$t \rightarrow (l + t\tau)(a)$$

είναι ίση με $\tau(\alpha_j)$. Συγκεκριμένα ισούται με

$$\min\{\tau(\alpha_i) \mid [\alpha_i] = a \text{ και ο } \alpha_i \text{ επιτυγχάνει την } l(a)\}.$$

Απόδειξη. Έστω $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ και χωρίς βλάβη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ είναι οι βρόγχοι στο Γ που ανήκουν στην κλάση του a και οι οποίοι επιτυγχάνουν την $l(a)$, δηλαδή

$$l(a) = l(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Υποθέτουμε ότι $\tau(\alpha_1) \leq \tau(\alpha_i)$ για $i = 1, \dots, m$. Τότε για αρκετά μικρό $t > 0$ και κάθε $i = 1, \dots, m$ έχουμε $l(\alpha_1) = l(\alpha_i)$ και $\tau(\alpha_1) \leq \tau(\alpha_i)$ άρα

$$(l + t\tau)(\alpha_1) = l(\alpha_1) + t\tau(\alpha_1) \leq l(\alpha_i) + t\tau(\alpha_i) = (l + t\tau)(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Κατά συνέπεια $n(l + t\tau)(\alpha_1)$ επιτυγχάνει την $(l + t\tau)(a)$. Άρα, από το προηγούμενο Πόρισμα, έχουμε $l, l + t\tau \in C_1$. Σε αυτή την περίπτωση είναι άμεσο ότι η παράγωγος είναι $\tau(\alpha_1)$, αφού $(l + t\tau)(a) = (l + t\tau)(\alpha_1)$ για κάθε αρκετά μικρό $t > 0$. ■

Τώρα θεωρούμε τα (μη τετριμμένα) διπλά καλύμματα (double covers) $\Gamma_i \rightarrow \Gamma$ ⁴. Αυτά είναι $2^n - 1$ το πλήθος αφού $\pi_1(\Gamma) = F_n$. Μπορούμε με φυσικό τρόπο να θεωρήσουμε ανυψώσεις των l και τ σε κάθε Γ_i τις οποίες θα συμβολίζουμε με l_i και τ_i , αντίστοιχα. Όμοια μπορούμε να θεωρήσουμε τους χώρους Σ_{Γ_i} και $T_{l_i}(\Sigma_{\Gamma_i})$.

Υπενθυμίζουμε ότι μία συνεχής και 1–1 απεικόνιση $S^1 \rightarrow \Gamma$ ονομάζεται εμφυτευμένος (embedded) βρόγχος του γραφήματος Γ .

Λήμμα 2.5.6 ([66]). *Αν ο α είναι ένας υποψήφιος βρόγχος στο Γ τότε υπάρχει 2-κάλυμμα (double cover) $\Gamma_i \rightarrow \Gamma$ και ανύψωση $\tilde{\alpha}$ του α έτσι ώστε αυτή να είναι ο μοναδικός βρόγχος με το ελάχιστο μήκος στην μη τετριμμένη κλάση ομολογίας του. Δηλαδή η ανύψωση $\tilde{\alpha}$ επιτυγχάνει το μήκος της $[\tilde{\alpha}]$.*

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.5.2 σε κατάλληλο Γ_i . Αφού ο α είναι υποψήφιος βρόγχος, από το Λήμμα 1.12.9, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε εμφυτευμένος βρόγχος, κάθε figure eight και κάθε barbell στο Γ ανυψώνεται σε έναν εμφυτευμένο βρόγχο σε κάποιο 2-κάλυμμα. Αν ο α είναι εμφυτευμένος τότε κάθε 2-κάλυμμα στο οποίο ο α ανυψώνεται δουλεύει. Αν ο α είναι figure eight ή barbell τότε μπορούμε να πάρουμε το 2-κάλυμμα που προκύπτει κόβοντας σε δύο σημεία, ένα για κάθε εμφυτευμένο βρόγχο του α . ■

Τώρα μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό της νέας νόρμας.

Ορισμός 2.5.7 ([66]). *Για $l \in \Sigma_\Gamma$ και $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ θέτουμε*

$$N(l, \tau) = - \sum_{\Gamma_i} \sum_{a \in H_1(\Gamma_i, \mathbb{Z}_2)} \frac{\min \tau_i(a)}{l_i(a)},$$

όπου το minimum είναι σε όλους τους βρόγχους α στην κλάση a που επιτυγχάνουν την $l_i(a)$ και Γ_i είναι όλα τα 2-καλύμματα (double covers) του Γ όπως πριν.

Έτσι, έχουμε τον εξής ορισμό.

⁴Δηλαδή τα Γ_i είναι καλύμματα (coverings) με διπλάσιο πλήθος κορυφών από το Γ .

Ορισμός 2.5.8 ([66]). Για $l \in \Sigma_\Gamma$ και $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ θέτουμε

$$\|(l, \tau)\|^N = \|(l, \tau)\|^L + \frac{1}{K+1} N(l, \tau)$$

όπου $K = (2^n - 1)(2^{2n-1})$ είναι το πλήθος των προσθετέων στον ορισμό 2.5.7.

Θα γράφουμε απλά $\|\tau\|$ αντί για $\|(l, \tau)\|$.

Λήμμα 2.5.9 ([66]). Ισχύει ότι

$$\frac{1}{K+1} \max\{\|\tau\|^L, \|\tau\|^L\} \leq \|\tau\|^N \leq 2\|\tau\|^L + \|\tau\|^L.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε αρχικά υποψήφιους βρόγχους α, β οι οποίοι να επιτυγχάνουν τις νόρμες $\|\tau\|^L, \|\tau\|^L$, αντίστοιχα. Τότε γνωρίζουμε ότι για κάθε άλλο βρόγχο γ στο Γ ισχύει $\frac{\tau(\gamma)}{l(\gamma)} \leq \frac{\tau(\alpha)}{l(\alpha)} = \|\tau\|^L$ και $\frac{-\tau(\gamma)}{l(\gamma)} \leq \frac{-\tau(\beta)}{l(\beta)} = \|\tau\|^L$. Αφού το minimum στην 2.5.7 είναι σε όλους τους βρόγχους γ στο Γ που επιτυγχάνουν την $l(a)$, τότε για κάθε βρόγχο γ στο άθροισμα είναι

$$\frac{\tau(\gamma)}{l(\gamma)} \leq \frac{\tau(\alpha)}{l(\alpha)} = \|\tau\|^L, \quad \frac{-\tau(\gamma)}{l(\gamma)} \leq \frac{-\tau(\beta)}{l(\beta)} = \|\tau\|^L.$$

Άρα έχουμε ότι οι θετικοί όροι του αθροίσματος 2.5.7 κυριαρχούνται από την $\|\tau\|^L$ και οι απόλυτες τιμές των αρνητικών όρων από την $\|\tau\|^L$. Έτσι το δεξί μέλος της ανισότητας έπεται.

Η ανισότητα $\frac{1}{K+1} \|\tau\|^L \leq \|\tau\|^N$ είναι ισοδύναμη με την

$$-N(l, \tau) \leq K\|\tau\|^L,$$

η οποία έπεται με τον ίδιο τρόπο αφού οι θετικοί προσθετέοι κυριαρχούνται από την $\|\tau\|^L$.

Έχουμε να δείξουμε την ανισότητα $\frac{1}{K+1} \|\tau\|^L \leq \|\tau\|^N$, η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\|\tau\|^L - N(l, \tau) \leq (K+1)\|\tau\|^L.$$

Έστω β υποψήφιος βρόγχος που επιτυγχάνει την $\|\tau\|^L$. Τότε υπάρχει όρος στο άθροισμα $-N(l, \tau)$ της μορφής $\frac{\tau(\beta)}{l(\beta)}$ που διαγράφεται με τον $\|\tau\|^L = \frac{-\tau(\beta)}{l(\beta)}$. Τέλος χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι θετικοί όροι του αθροίσματος $-N(l, \tau)$ κυριαρχούνται από την $\|\tau\|^L$. ■

Ως άμεσο πόρισμα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο εκφράζουμε λέγοντας ότι η νέα νόρμα είναι σχεδόν συμμετρική (quasi-symmetric).

Πόρισμα 2.5.10. Υπάρχει σταθερά $A = 3(K + 1)$ έτσι ώστε

$$\|\tau\|^N \leq A\|\tau\|^L.$$

Απόδειξη. Από το παραπάνω λήμμα έχουμε

$$\|\tau\|^N \leq 2\|\tau\|^L + \|\tau\|^L \leq 3 \max\{\|\tau\|^L, \|\tau\|^L\} \leq 3(K + 1)\|\tau\|^L.$$

■

Θεωρούμε την απεικόνιση $\Psi : \Sigma_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\Psi(l) = -\frac{1}{K+1} \sum_{\Gamma_i} \sum_{a \in H_1(\Gamma_i, \mathbb{Z}_2) - \{0\}} \log l_i(a)$$

όπου l_i είναι η ανύψωση της l στο Γ_i , όπως έχουμε δει. Παρατηρούμε ότι η Ψ είναι λεία (και αναλυτική) σε κάθε ένα από τα κλειστά κυρτά σύνολα του Πορίσματος 2.5.4.

Πρόταση 2.5.11 ([66]). Αν $l \in \Sigma_\Gamma$ και $\tau \in T_l(\Sigma_\Gamma)$ ολοκληρώσιμο διάνυσμα, τότε

$$\|\tau\|^N = \|\tau\|^L + d_\tau \Psi$$

όπου ο όρος $d_\tau \Psi$ είναι η παράγωγος της Ψ στη διεύθυνση τ , δηλαδή η παράγωγος από δεξιά της $t \rightarrow \Psi(l + t\tau)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $d_\tau \Psi = \frac{1}{K+1} N(l, \tau)$. Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2.5.5 για τα Γ_i, l_i, τ_i (όπου τ_i ανύψωση του τ στο Γ_i). Έτσι έχουμε

$$d_{\tau_i} l_i([\alpha]) = \tau_i(\alpha_i)$$

όπου α_i είναι καμπύλη που επιτυγχάνει την $l_i([\alpha])$ και στην οποία το τ_i είναι ελαχιστικό (minimal). Άρα, από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$d_{\tau_i} \log l_i([\alpha]) = \frac{\tau_i(\alpha_i)}{l_i(\alpha_i)}.$$

Παίρνοντας το παραπάνω διπλό άθροισμα έχουμε τη ζητούμενη ισότητα.

■

2.6 Μήκη μονοπατιών

Έστω $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow CV_n$ ένα κατά τμήματα γραμμικό μονοπάτι. Εφόσον, το $\mathbf{p}$ είναι κατά τμήματα γραμμικό, μπορούμε να το υποδιαιρέσουμε σε πεπερασμένα υπο-μονοπάτια έτσι ώστε κάθε ένα να περιέχεται σε κάποιο από τα κυρτά σύνολα του Πορίσματος 2.5.4 (στα οποία η Ψ είναι λεία (smooth)). Το μήκος του Lipschitz του μονοπατιού $\mathbf{p}$ ορίζεται να είναι

$$len_L(\mathbf{p}) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^p d(\mathbf{p}(t_{i-1}), \mathbf{p}(t_i)) \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = 1 \right\}.$$

Υποθέτουμε ότι το $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ είναι μικρό. Τότε, το $\mathbf{p}(t_i)$ ως σημείο του CV_n αντιστοιχεί σε κάποια μετρική l , το $\mathbf{p}'(t_i)$ είναι διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου και έχουμε

$$d(\mathbf{p}(t_{i-1}), \mathbf{p}(t_i)) = \frac{d(\mathbf{p}(t_{i-1}), \mathbf{p}(t_{i-1} + \Delta t_i)) \Delta t_i}{\Delta t_i} \sim \|\mathbf{p}(t_{i-1}), \mathbf{p}'(t_{i-1})\|^L \Delta t_i$$

οπότε

$$len_L(\mathbf{p}) = \int_0^1 \|(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}'(t))\|^L dt.$$

Ομοίως ορίζεται και το μήκος του $\mathbf{p}$ που αντιστοιχεί στη νέα νόρμα ως εξής:

$$len_N(\mathbf{p}) = \int_0^1 \|(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}'(t))\|^N dt.$$

Πρόταση 2.6.1 ([66]). Έστω $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow CV_n$ ένα μονοπάτι με $\mathbf{p}(0) = x, \mathbf{p}(1) = y \in CV_n$. Τότε

$$len_N(\mathbf{p}) = len_L(\mathbf{p}) + \Psi(y) - \Psi(x).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού στην $\Psi \circ \mathbf{p}$ αφού οι $\Psi, \mathbf{p}$ είναι κατά τμήματα διαφορίσιμες. Θα συμβολίζουμε για συντομία με $\|\mathbf{p}'(t)\|$ το $\|(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}'(t))\|$. Δηλαδή

$$len_N(\mathbf{p}) = \int_0^1 \|\mathbf{p}'(t)\|^N dt.$$

Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.5.11 και έχουμε

$$\int_0^1 \|\mathbf{p}'(t)\|^N dt = \int_0^1 [\|\mathbf{p}'(t)\|^L + d_{\mathbf{p}'(t)}\Psi] dt = len_L(\mathbf{p}) + \Psi(y) - \Psi(x).$$

■

Πρόταση 2.6.2 ([66]). Έστω $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow CV_n$ ένα μονοπάτι από το x στο y . Αν $-\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow CV_n$ είναι το αντίστροφο μονοπάτι ($-\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(1 - t)$), τότε

$$\text{len}_N(-\mathbf{p}) \leq A \cdot \text{len}_N(\mathbf{p})$$

όπου A η σταθερά του Πορίσματος 2.5.10.

Απόδειξη. Αφού το $\mathbf{p}$ είναι σχεδόν παντού C^1 (δηλαδή με εξαίρεση πεπερασμένων το πλήθος σημείων) έχουμε ότι εκτός από πεπερασμένα σημεία ισχύει $(-\mathbf{p})'(s) = -\mathbf{p}'(1-s)$, οπότε

$$\text{len}_N(-\mathbf{p}) = \int_0^1 \|(-\mathbf{p})'(s)\|^N ds = \int_1^0 \|-\mathbf{p}'(t)\|^N (-dt) = \int_0^1 \|-\mathbf{p}'(t)\|^N dt.$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.5.10 έχουμε

$$\int_0^1 \|-\mathbf{p}'(t)\|^N dt \leq \int_0^1 \|\mathbf{p}'(t)\|^N dt = A \cdot \text{len}_N(\mathbf{p}).$$

■

2.7 Εφαρμογές

Έστω A η σταθερά του Πορίσματος 2.5.10.

Πόρισμα 2.7.1 ([66]). Για κάθε εξωτερικό αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ και κάθε κατά τμήματα γραμμικό μονοπάτι $\mathbf{p}$ από το $x \in CV_n$ στο $x \cdot \Phi \in CV_n$ ισχύει

$$\text{len}_L(\mathbf{p}) = \text{len}_N(\mathbf{p})$$

και κατά συνέπεια

$$\text{len}_L(\mathbf{p}) \leq A \text{len}_L(\mathbf{p}).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.6.1 έχουμε ότι

$$\text{len}_N(\mathbf{p}) = \text{len}_L(\mathbf{p}) + \Psi(x \cdot \Phi) - \Psi(x).$$

Όμως $\Psi(x) = \Psi(x \cdot \Phi)$, αφού η Ψ είναι $\text{Out}(F_n)$ -αναλλοίωτη, άρα

$$\text{len}_N(\mathbf{p}) = \text{len}_L(\mathbf{p}).$$

■

Θεώρημα 2.7.2 ([66]). Για κάθε κατά τμήματα γραμμικό μονοπάτι p από το x στο $y \in CV_n$ ισχύει

$$\text{len}_L(p) \leq A \text{len}_L(-p) + (A+1)[\Psi(x) - \Psi(y)]$$

Απόδειξη. Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 2.6.1 και 2.6.2 έχουμε

$$\text{len}_L(p) + \Psi(y) - \Psi(x) = \text{len}_N(p) \leq A \text{len}_N(-p) = A \text{len}_L(-p) + A[\Psi(x) - \Psi(y)]$$

οπότε

$$\text{len}_L(p) \leq A \text{len}_L(-p) + (A+1)[\Psi(x) - \Psi(y)].$$

■

Θεώρημα 2.7.3 ([66]). Για κάθε $x, y \in CV_n$ ισχύει

$$d(x, y) \leq A \cdot d(y, x) + (A+1)[\Psi(x) - \Psi(y)].$$

Απόδειξη. Έστω $x, y \in CV_n$ και ένα κατά τμήματα γραμμικό γεωδαισιακό μονοπάτι από το y στο x το οποίο συμβολίζουμε με $-p$. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα για το p , που είναι μονοπάτι από το x στο y . ■

Παρατήρηση 2.7.4. Αφού η Ψ είναι $\text{Out}(F_n)$ -αναλλοίωτη, αν $x, y \in CV_n$ είναι στην ίδια τροχιά τότε $\Psi(x) = \Psi(y)$ και άρα $d(x, y) \leq Ad(y, x)$

Με την βοήθεια των προηγούμενων μπορεί να δοθεί μια διαφορετική απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος από το [32].

Θεώρημα 2.7.5. Για κάθε ανάγωγο εξωτερικό αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ έστω λ ο συντελεστής αύξησης του Φ και μ ο συντελεστής αύξησης του Φ^{-1} . Τότε $\mu \leq \lambda^A$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του συντελεστή αύξησης (βλ. [40]).

Ορισμός 2.7.6. Αν $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ είναι μια ανάγωγη *train track* απεικόνιση με *Perron-Frobenius* ιδιοτιμή λ , τότε υπάρχει μετρική στο Γ ως προς την οποία η f να "τεντώνει" κάθε ακμή κατά τον παράγοντα λ . Για κάθε ανάγωγο εξωτερικό αυτομορφισμό Φ γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανάγωγος *train track* αντιπρόσωπος $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Συντελεστής αύξησης του Φ ονομάζεται αυτό το λ .

Αποδεικνύεται ότι κάθε ανάγωγος *train track* αντιπρόσωπος του Φ έχει την ίδια *Perron-Frobenius* ιδιοτιμή άρα ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.7.5. Έστω $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ένας train track αντιπρόσωπος του Φ και $g : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ ένας train track αντιπρόσωπος του Φ^{-1} . Τότε $d(\Phi^k(\Gamma), \Gamma) = k \log \lambda$ και $d(\Phi^{-k}(\Gamma'), \Gamma') = k \log \mu$. Έστω D αρκετά μεγάλο ώστε $D \geq d(\Gamma, \Gamma'), d(\Gamma', \Gamma)$.

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$d(\Phi^k(\Gamma), \Gamma) \geq d(\Phi^k(\Gamma'), \Gamma') - d(\Phi^k(\Gamma'), \Phi^k(\Gamma)) - d(\Gamma, \Gamma') \geq k \log \mu - 2D.$$

Όμως από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι

$$d(\Phi^k(\Gamma), \Gamma) \leq A d(\Gamma, \Phi^k(\Gamma)) = A \cdot k \cdot \log \lambda.$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ανισότητες έχουμε ότι

$$A \cdot k \cdot \log \lambda \geq k \cdot \log \mu - 2D.$$

Συνεπώς ισχύει $\log \mu \leq A \log \lambda + \frac{2D}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας όριο καθώς $k \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$\frac{\log \mu}{\log \lambda} \geq A \text{ ή ισοδύναμα } \mu \leq \lambda^A.$$

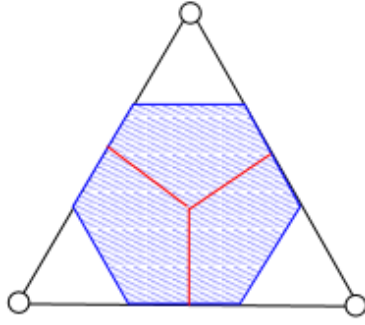
■

Υπενθυμίζουμε ότι με $CV_{n \geq \epsilon}$ συμβολίζουμε το σύνολο των μαρκαρισμένων μετρικών γραφημάτων του CV_n τα οποία δεν περιέχουν βρόγχους με μήκος μικρότερο από ϵ .

Λήμμα 2.7.7. *Η δράση της $\text{Out}(F_n)$ στο $CV_{n \geq \epsilon}$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Εφόσον η F_n έχει πεπερασμένη τάξη, υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος τοπολογικοί τύποι γραφημάτων πηλίκου T/F_n , καθώς το T μεταβάλλεται στον εξωτερικό χώρο. Συνεπώς υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος τροχιές simplicies υπό τη δράση της $\text{Out}(F_n)$. Είναι άμεσο από τους ορισμούς, ότι η κλειστότητα της τομής $\Sigma \cap CV_{n \geq \epsilon}$ είναι συμπαγής για κάθε simplex Σ . Συνεπώς, εφόσον έχουμε πεπερασμένες το πλήθος τροχιές πλεγμάτων, ο χώρος πηλίκου $CV_{n \geq \epsilon}/\text{Out}(F_n)$ είναι συμπαγής για κάθε $\epsilon > 0$. ■

Σχήμα 2.5: Το thick μέρος ενός simplex



Θεώρημα 2.7.8. Για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει σταθερά B έτσι ώστε για κάθε $x, y \in CV_{n \geq \epsilon}$ και κάθε κατά τμήματα γραμμικό μονοπάτι $\mathbf{p}$ από το x στο y :

$$\frac{1}{A} \text{len}(\mathbf{p}) - B \leq \text{len}(-\mathbf{p}) \leq A \text{len}(\mathbf{p}) + B.$$

Επιπλέον, υπάρχει σταθερά D τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in CV_{n \geq \epsilon}$

$$d(y, x) \leq D d(x, y).$$

Απόδειξη. Αφού η Ψ είναι συνεχής και το πηλίκο $CV_{n \geq \epsilon} / \text{Out}(F_n)$ είναι συμπαγές (από το προηγούμενο λήμμα), υπάρχει σταθερά $C = K \log \frac{1}{\epsilon}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in CV_{n \geq \epsilon}$

$$|\Psi(x)| \leq C.$$

Τότε, από τις Προτάσεις 2.6.1 και 2.6.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \text{len}_L(\mathbf{p}) - 2C &\leq \text{len}_L(\mathbf{p}) + \Psi(y) - \Psi(x) = \text{len}_N(\mathbf{p}) \leq \\ &\leq A \text{len}_N(-\mathbf{p}) = A(\text{len}_N(-\mathbf{p}) + \Psi(x) - \Psi(y)) \leq A \text{len}_L(-\mathbf{p}) + 2AC. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 2.7.3, για κάθε $x, y \in CV_{n \geq \epsilon}$ ισχύει ότι

$$d(y, x) \leq A d(x, y) + B.$$

(Πρέπει να απαλείψουμε την προσθετική σταθερά B). Αν $d(x, y) \geq \log 2$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$d(y, x) \leq A d(x, y) + B \leq (A + B / \log 2) d(x, y).$$

Έστω ότι $d(x, y) \leq \log 2$. Έστω p γεωδαισιακό μονοπάτι από το x στο y . Τότε το p πρέπει να παραμένει εντός του $CV_{n \geq \epsilon}$. Από τη συμπαγεια της δράσης, υπάρχει M τέτοιο ώστε

$$\| -\tau \|^L \leq M \|\tau\|^L$$

για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα τ με βάση κάποιο σημείο του $CV_{n \geq \epsilon}$. Έτσι

$$d(y, x) \leq \text{len}_L(-p) \leq M \text{len}_L(p) = M d(x, y).$$

■

Κεφάλαιο 3

Ο εξωτερικός χώρος ενός ελεύθερου γινομένου

3.1 Ελεύθερα γινόμενα

Για μια αναλυτικότερη εισαγωγή στα ελεύθερα γινόμενα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [23],[10]. Έστω G μια ομάδα και G_i , $i \in I$ μια οικογένεια ομάδων.

Ορισμός 3.1.1 (Καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων). *Η G είναι το ελεύθερο γινόμενο των G_i , συμβολίζουμε $G = \ast_{i \in I} G_i$, αν υπάρχουν ομομορφισμοί $j_i : G_i \rightarrow G$ έτσι ώστε για κάθε ομάδα H και για κάθε οικογένεια ομομορφισμών $\phi_i : G_i \rightarrow H$, να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : G \rightarrow H$, έτσι ώστε*

$$\phi j_i = \phi_i, \text{ για κάθε } i \in I.$$

Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{j_i} & G \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \phi \\ & & H \end{array}$$

Παρατήρηση 3.1.2. Αν οι G_i έχουν παραστάσεις $G_i = \langle X_i | R_i \rangle$ τότε η $G = \ast_{i \in I} G_i$ έχει παράσταση $G = \langle \sqcup X_i | \sqcup R_i \rangle$, δηλαδή οι γεννήτορες και οι σχέσεις στην G είναι οι ξένες ενώσεις των γεννητόρων και των σχέσεων των G_i , αντίστοιχα.

Έστω G_i και G ομάδες όπως παραπάνω. Μια ανηγμένη λέξη w στη G είναι μια λέξη $w = g_1 \dots g_n$ όπου $g_i \in G_j$, $g_i \neq 1$ και τα g_i, g_{i+1} δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα G_j .

Θεώρημα 3.1.3 (Κανονική μορφή στα ελεύθερα γινόμενα). Έστω G το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων G_i , $i \in I$. Τότε κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της G μπορεί να γραφεί μοναδικά ως ανηγμένη λέξη. Ειδικότερα, αν το μήκος της ανηγμένης λέξης $w \in G$ είναι διαφορετικό του 0 τότε $w \neq 1_G$.

Αναφέρουμε επίσης το σημαντικό θεώρημα υποομάδων του Kurosh.

Θεώρημα 3.1.4. Έστω $G = \ast_{i \in I} A_i$ ένα ελεύθερο γινόμενο και $H \leq G$ μια υποομάδα του. Τότε $H = \ast (H \cap g A_i g^{-1}) \ast F$, όπου το g διατρέχει ένα σύνολο αντιπροσώπων των διπλών συμπλόκων στην $A_i \setminus G/H$ για κάθε $i \in I$ και F είναι ελεύθερη ομάδα.

Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε ένα ελεύθερο γινόμενο χρησιμοποιώντας δράσεις ομάδων σε δέντρα. Ως συνήθως, λέμε ότι μια ομάδα G δρα με αυτομορφισμούς σε ένα δέντρο T αν δρα επί του συνόλου κορυφών και του συνόλου ακμών διατηρώντας τις απεικονίσεις αρχής, τέλους και αντιστροφής.

Θεώρημα 3.1.5. Μια ομάδα G είναι ένα μη τετριμμένο ελεύθερο γινόμενο ομάδων αν και μόνο αν η G δρα (με αυτομορφισμούς) μη τετριμμένα σε ένα δέντρο με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών.

Επιπλέον, κάθε παράγοντας G_i αντιστοιχεί σε μια σταθεροποιούσα κορυφή και αντίστροφα κάθε σταθεροποιούσα κορυφή είναι συζυγής με κάποιο G_i .

3.2 Γραφήματα ομάδων

Δίνουμε αρχικά μερικά εισαγωγικά στοιχεία για γραφήματα ομάδων (graph of groups). Για περισσότερα βλ. [22],[19],[63],[54].

Ορισμός 3.2.1. Ένα γράφημα ομάδων $\Gamma(\mathcal{G}, X)$ αποτελείται από

1. ένα συνεκτικό γράφημα X ,
2. μια απεικόνιση $\mathcal{G}$ η οποία κάθε κορυφή $v \in V(X)$ την απεικονίζει σε μια ομάδα G_v και κάθε ακμή $e \in E(X)$ σε μια ομάδα G_e έτσι ώστε $G_e = G_{\bar{e}}$.

3. Επιπλέον, για κάθε $e \in E(X)$ υπάρχει μονομορφισμός $\hat{t} : G_e \rightarrow G_{t(e)}$

Αφού $G_e = G_{\bar{e}}$ υπάρχει μονομορφισμός $\hat{i} : G_e \rightarrow G_{t(\bar{e})} = G_{i(e)}$.

Ορισμός 3.2.2. Έστω $\Gamma(\mathcal{G}, X)$ ένα γράφημα ομάδων και T ένα μεγιστικό υποδέντρο του X . Υποθέτουμε ότι οι ομάδες G_v έχουν παραστάσεις

$$G_v = \langle X_v | R_v \rangle, \quad v \in V(X)$$

Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Gamma(\mathcal{G}, X))$ του γραφήματος ομάδων Γ ως προς το μεγιστικό δέντρο T ορίζεται να είναι η ομάδα με τους εξής γεννήτορες και σχέσεις: Γεννήτορες

$$\bigcup_{v \in V(X)} X_v \cup \{t_e \mid e \in E(X)\}$$

Σχέσεις

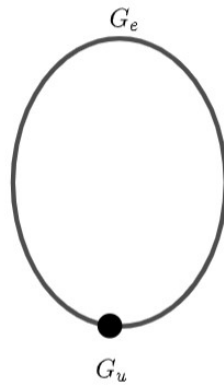
$$\bigcup_{v \in V(X)} R_v \cup \{t_e^{-1} \hat{t}(g) t_e = \hat{i}(g) \mid g \in G_e, e \in E(X)\} \cup \{t_{\bar{e}} = t_e^{-1} \mid e \in E(X)\} \cup \{t_e = 1 \mid e \in T\}.$$

Παράδειγμα 3.2.3. 1. Για το ακόλουθο γράφημα ομάδων $\Gamma = \Gamma(\mathcal{G}, X)$



έχουμε $\pi_1(\Gamma) = G_u *_{G_e} G_v$.

2. Αν το Γ είναι ως ακολούθως

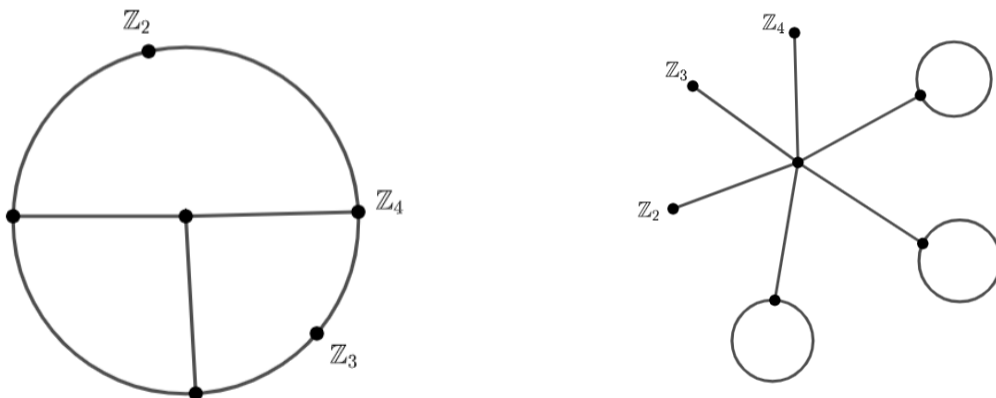


τότε $\pi_1(\Gamma) = G_v *_{G_e}$.

Το βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας, για του οποίου την απόδειξη παραπέμπουμε στις παραπάνω αναφορές, είναι το εξής:

Θεώρημα 3.2.4 ([22]). Έστω G μια ομάδα n οποία δρα χωρίς αντιστροφές επί ενός δέντρου X . Η δράση της G στο X επάγει τη δομή γραφήματος ομάδων $\mathcal{G}$ στο γράφημα πηλίκου X/G . Έστω v μια κορυφή του γραφήματος X/G . Τότε η G είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X, \mathcal{G}, v)$ και υπάρχει G -ισομορφισμός μεταξύ του δέντρου X και του Bass-Serre δέντρου $\widetilde{X/G}$ που αντιστοιχεί στο γράφημα ομάδων $(X/G, \mathcal{G})$. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $\sigma : G \rightarrow \pi_1(X, \mathcal{G}, v)$ και ισομορφισμός γραφημάτων $j : X \rightarrow \widetilde{X/G}$ έτσι ώστε για κάθε $g \in G$, για κάθε κορυφή x του X και για κάθε ακμή e του X να ισχύει $j(gx) = \sigma(g)j(x)$ και $j(ge) = \sigma(g)j(e)$.

Παράδειγμα 3.2.5. Δίνουμε τώρα δύο παραδείγματα γραφημάτων ομάδων με θεμελιώδη ομάδα $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4 * F_3$ (οι ομάδες ακμών είναι τετριμμένες).



3.3 G -δέντρα

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα θεωρούμε τα γραφήματα από τη μία ως συνδυαστικά αντικείμενα και από την άλλη ως μετρικούς χώρους. Συνδυαστικά, ένα δέντρο είναι ένα simplicial 1-complex χωρίς κυκλώματα. Στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε δέντρα θα εννοούμε simplicial. Από την άλλη, ένα μετρικό δέντρο είναι ένα δέντρο σε κάθε ακμή του οποίου αντιστοιχίζεται ένα θετικό μήκος.

Ορισμός 3.3.1. Έστω G μια ομάδα. Ένα μετρικό δέντρο T λέγεται G -δέντρο αν η G δρα στο T με ισομετρίες, χωρίς αντιστροφές και διατηρώντας τη simplicial δομή του T .

Παρατήρηση 3.3.2. Ένα μετρικό G -δέντρο καθορίζεται από το υποκείμενο δέντρο και ένα θετικό αριθμό για κάθε τροχιά ακμών.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}(G)$ το σύνολο των μετρικών G -δέντρων.

Ορισμός 3.3.3. Λέμε ότι δύο στοιχεία $T, T' \in \mathcal{T}(G)$ είναι ισοδύναμα, συμβολίζουμε $T \sim T'$, αν υπάρχει G -ισομετρία $f : T \rightarrow T'$.

Ορισμός 3.3.4. Σταθεροποιούμε ένα G -δέντρο T . Ένα στοιχείο $g \in G$ ονομάζεται υπερβολικό αν δε σταθεροποιεί κανένα σημείο του T .

Γνωρίζουμε ότι κάθε υπερβολικό στοιχείο $g \in G$ δρα με μεταφορές, μήκους $l_T(g) = \min_{x \in T} d_T(x, gx)$, σε ένα υποδέντρο $axis_T(g)$ του T ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}$ που ονομάζεται άξονας του g . Η δράση της G στο T (που έχουμε σταθεροποιήσει) ορίζει μια συνάρτηση μήκους

$$l_T : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \min_{x \in T} d_T(x, gx).$$

Παρατηρούμε ότι το $g \in G$ υπερβολικό αν και μόνο αν $l_T(g) > 0$.

Ορισμός 3.3.5. Αν το T είναι ένα G -δέντρο, τότε το στοιχείο $g \in G$ ονομάζεται ελλειπτικό αν σταθεροποιεί ένα σημείο του T .

Αναφέρουμε τώρα ως παρατηρήσεις μερικά γνωστά αποτελέσματα για ελλειπτικά στοιχεία. Για αποδείξεις παραπέμπουμε στο [22].

Παρατήρηση 3.3.6. Τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης μιας ομάδας G είναι πάντα ελλειπτικά.

Παρατήρηση 3.3.7. Μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G η οποία δρα σε ένα δέντρο (με simplicial αυτομορφισμούς και χωρίς αντιστροφές των ακμών) έχει ολικό σταθερό σημείο αν και μόνο αν κάθε στοιχείο της είναι ελλειπτικό.

Ορισμός 3.3.8. Ένα G -δέντρο λέγεται ελαχιστικό (*minimal*) αν δεν περιέχει γνήσιο G -αναλλοίωτο υποδέντρο.

Η Πρόταση 7.9 του [19] είναι σημαντική για τη μελέτη των G -δέντρων.

Πρόταση 3.3.9. Αν η G είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα η οποία δρα ελαχιστικά στο δέντρο T , τότε το γράφημα πηλίκου T/G είναι πεπερασμένο.

Παρατήρηση 3.3.10. Οι G -απεικονίσεις μεταξύ ελαχιστικών G -δέτρων είναι πάντα επί.

Πράγματι, αν $f : T \rightarrow T'$ είναι G -απεικόνιση μεταξύ των ελαχιστικών G -δέντρων T, T' και $\text{im}(f) \subsetneq T'$, τότε έχουμε άτοπο αφού το $\text{im}(f)$ είναι γνήσιο G -αναλλοίωτο υποδέντρο του T' .

3.4 Η διάσπαση Grushko μιας ομάδας

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το βασικό θεώρημα διάσπασης του Grushko.

Θεώρημα 3.4.1. Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Τότε η G διασπάται ως ελεύθερο γινόμενο

$$G = G_1 * G_2 * \dots * G_p * F_k$$

όπου κάθε παράγοντας G_i είναι μη τετριμμένη ομάδα, δεν είναι άπειρη κυκλική και δεν αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο κατά μη τετριμμένο τρόπο. Αν

$$G = H_1 * H_2 * \dots * H_q * F_l$$

είναι μια δεύτερη τέτοια διάσπαση της G , τότε $l = k$ και, μετά από αναδιάταξη, κάθε παράγοντας H_i είναι συζυγής με τον παράγοντα G_i .

Μια διάσπαση όπως στο προηγούμενο θεώρημα θα λέγεται διάσπαση του Grushko.

3.5 Αυτομορφισμοί ελευθέρων γινομένων

Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και

$$G = G_1 * \dots * G_p * F_k$$

μια διάσπαση Grushko της G . Εφόσον, κάθε παράγοντας G_i δεν αναλύεται, κατά μη τετριμμένο τρόπο, ως ελεύθερο γινόμενο, έπεται ότι για κάθε αυτομορφισμό ψ της G ισχύει ότι για κάθε $i \in I$ υπάρχει ένα j_i έτσι ώστε

$$\psi(G_i) = g_i G_{j_i} g_i^{-1}.$$

Θα περιγράψουμε τώρα ένα σύνολο γεννητόρων για την $\text{Out}(G)$ όπως αυτό προκύπτει από την υποενότητα 3.5.1. Έστω X μια βάση για την F_k . Η πρώτη κατηγορία γεννητόρων προέρχεται από μεταθέσεις ισόμορφων παραγόντων, δηλαδή αυτομορφισμούς

που απεικονίζουν κάθε G_i σε κάποιο ισόμορφο του παράγοντα G_j ή μεταθέτουν το σύνολο $X \cup X^{-1}$. Η δεύτερη κατηγορία γεννητόρων είναι εξωτερικές κλάσεις αυτομορφισμών των παραγόντων, δηλαδή τους αυτομορφισμούς του ελεύθερου γινομένου G που επάγονται από αυτομορφισμό κάποιου G_i . Τέλος, το σύνολο γεννητόρων ολοκληρώνεται με τους αυτομορφισμούς του Whitehead, που θα τους συμβολίζουμε με α_x , όπου το x είναι ένα μη τετριμμένο στοιχείο κάποιου G_i ή ένα στοιχείο του $X \cup X^{-1}$, και που ορίζονται ως εξής:

- Είτε για κάθε j έχουμε ότι $\alpha_x(g) = x^{-k_j} g x^{k_j}$ όπου k_j είναι 0 ή 1, για κάθε $g \in G_j$.
- Είτε για κάθε $s \in X$ έχουμε ότι $\alpha_x(s) \in \{s, sx, x^{-1}, x^{-1}sx\}$.

3.5.1 Η ομάδα $\text{Aut}(G)$

Θα εξετάσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια την ομάδα $\text{Aut}(G)$ όπου $G = G_1 * \dots * G_n$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο, της οποίας μια παράσταση δόθηκε από τον Φουχε-Rabinovitch [5],[6]. Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη ακολουθούμε το [21].

Παράδειγμα 3.5.1. Έστω $\phi \in \text{Aut}(G_1)$ ένας αυτομορφισμός της G_1 . Τότε ο

$$\phi * 1_{G_2} * \dots * 1_{G_n} : G_1 * \dots * G_n \rightarrow G_1 * \dots * G_n$$

είναι ένας αυτομορφισμός της G που ονομάζεται παραγοντικός αυτομορφισμός (factor automorphism). Ομοίως θα μπορούσαμε να πάρουμε έναν αυτομορφισμό για κάποιον άλλο $\phi \in \text{Aut}(G_i)$.

Παράδειγμα 3.5.2. Έστω $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ ένας ισομορφισμός και τ_{12} η απεικόνιση που μεταθέτει τους παράγοντες G_1 και G_2 , δηλαδή

$$\tau_{12} : G_1 * G_2 * \dots * G_n \rightarrow G_2 * G_1 * \dots * G_n.$$

Τότε συνθέτοντας τον τ_{12} με τον

$$\phi^{-1} * \phi * \dots * 1_{G_n} : G_2 * G_1 * \dots * G_n \rightarrow G_1 * G_2 * \dots * G_n$$

λαμβάνουμε έναν αυτομορφισμό της G . Έναν ανάλογο αυτομορφισμό παίρνουμε για κάθε ζεύγος $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Με άλλα λόγια, κάποιοι από τους παράγοντες G_i μπορεί να είναι ισόμορφοι μεταξύ τους. Αν συμβαίνει αυτό θεωρούμε ότι δίνεται ένας σταθερός ισομορφισμός για κάθε

ζεύγος $i \neq j$ και ότι η οικογένεια αυτών των ισομορφισμών είναι συμβατή. Δηλαδή αν X, Y, Z είναι ισόμορφοι παράγοντες της G με $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ οι σταθεροί ισομορφισμοί τότε ο ισομορφισμός $X \rightarrow Z$ είναι ο $h = g \circ f$.

Παράδειγμα 3.5.3. Έστω $i \neq j$ και ένα στοιχείο $h \in G_j$. Ορίζουμε τώρα έναν αυτομορφισμό της G ως εξής:

$$\alpha_i^h : g_k \mapsto \begin{cases} h^{-1}g_k h, & k = i, \quad g_k \in G_k \\ g_k, & k \neq i, \quad g_k \in G_k \end{cases}$$

Ο συγκεκριμένος αυτομορφισμός ονομάζεται μερική συζυγία (partial conjugation) στην G .

Παρατήρηση 3.5.4. Αν έχουμε $i = j$ στην παραπάνω σχέση τότε παίρνουμε έναν "παράγοντικό" αυτομορφισμό της G ο οποίος επάγεται από τον εσωτερικό αυτομορφισμό τ_h της G_i .

Παρατήρηση 3.5.5. Έστω FR η υποομάδα της $\text{Aut}(G)$ που παράγεται από τις μερικές συζυγίες. Τότε, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha_i^h \cdot \alpha_i^g = \alpha_i^{gh}, \quad \text{για κάθε } g, h \in G_j$$

$$\alpha_i^{e_j} = e, \quad \text{όπου } e_j \text{ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της } G_j.$$

$$\alpha_i^h \cdot \alpha_k^{h'} = \alpha_k^{h'} \cdot \alpha_i^h, \quad h \in G_j, \quad h' \in G_{j'}, \quad i \neq k, \quad j, j' \notin \{i, k\}.$$

Η τελευταία σχέση λέει ότι αν οι μερικές συζυγίες δρουν σε διαφορετικούς παράγοντες, τότε μετατίθενται.

Έχουμε επίσης την εξής σχέση:

$$\alpha_i^h \cdot \alpha_k^h \cdot \alpha_i^t = \alpha_i^t \cdot \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h$$

όπου $h \in G_j$, τα i, j, k είναι διαφορετικά και $t \in G_k$. Πράγματι, για το αριστερό μέλος έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h \cdot \alpha_i^t(g_i) &= \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h(g_i^t) = \alpha_i^h(g_i^{h^{-1}th}) = g_i^{th}, \\ \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h \cdot \alpha_i^t(g_k) &= \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h(g_k) = g_k^h, \\ \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h \cdot \alpha_i^t(g_l) &= g_l, \quad \text{για } l \neq i, k. \end{aligned}$$

Επίσης για το δεξί μέλος έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha_i^t \cdot \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h(g_i) &= \alpha_i^t \cdot \alpha_i^h(g_i) = \alpha_i^t(g_i^h) = g_i^{th}, \\ \alpha_i^t \cdot \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h(g_k) &= \alpha_i^t \cdot \alpha_i^h(g_k^h) = g_k^h, \\ \alpha_i^t \cdot \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h(g_l) &= g_l, \quad \text{για } l \neq i, k.\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει η ζητούμενη σχέση.

Πρόταση 3.5.6. ([5],[6]) *Οι σχέσεις*

$$\alpha_i^h \cdot \alpha_i^g = \alpha_i^{gh}, \quad \text{για κάθε } g, h \in G_j \quad (3.1)$$

$$\alpha_i^{e_j} = e, \quad \text{όπου } e_j \text{ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της } G_j. \quad (3.2)$$

$$\alpha_i^h \cdot \alpha_k^{h'} = \alpha_k^{h'} \cdot \alpha_i^h, \quad h \in G_j, \quad h' \in G_{j'}, \quad i \neq k, \quad j, j' \notin \{i, k\} \quad (3.3)$$

$$\alpha_i^h \cdot \alpha_k^h \cdot \alpha_i^t = \alpha_i^t \cdot \alpha_i^h \cdot \alpha_k^h \quad (3.4)$$

και οι γεννήτορες α_i^h δίνουν μια παράσταση της $FR(G)$.

Κάθε ομάδα αυτομορφισμών $\text{Aut}(G_i)$ δρα στο ελεύθερο γινόμενο G , μέσω παραγοντικών αυτομορφισμών. Αν $i \neq j$, τότε οι ομάδες αυτομορφισμών δρουν σε διαφορετικούς παράγοντες και άρα οι δράσεις μετατίθενται. Επομένως έχουμε την υποομάδα

$$\mathbf{Aut}(G) = \prod_{i=1}^n \text{Aut}(G_i) \leq \text{Aut}(G).$$

Έστω τώρα $h \in G_j$ και α_i^h ένας γεννήτορας που είναι μερική συζυγία. Έστω $\phi \in \text{Aut}(G_k)$. Αν $k \neq j$, τότε ο ϕ μετατίθεται με τον α_i^h . Έστω ότι $k = j$, τότε

$$\phi \alpha_i^h \phi^{-1} = \alpha_i^{\phi(h)}.$$

Επομένως, ως υποομάδα της $\text{Aut}(G)$, οι μερικές συζυγίες και οι παραγοντικοί αυτομορφισμοί παράγουν το ημεισθές γινόμενο

$$FR(G) \rtimes \mathbf{Aut}(G).$$

Η ομάδα των γνήσιως συμμετρικών αυτομορφισμών $\text{PAut}(G)$ της G^1 ορίζεται να είναι το παραπάνω ημεισθές γινόμενο, δηλαδή

$$\text{PAut}(G) := FR(G) \rtimes \mathbf{Aut}(G).$$

¹pure symmetric automorphism group της G

Θεωρούμε την υποομάδα

$$\mathbf{Inn}(G) := \prod_{i=1}^n \mathbf{Inn}(G_i) \leq \mathbf{Aut}(G)$$

η οποία αποτελείται από εκείνους τους αυτομορφισμούς της G οι οποίοι επάγονται από εσωτερικούς αυτομορφισμούς των παραγόντων. Η υποομάδα της $\mathbf{Aut}(G)$ που παράγεται από τις $\mathbf{Inn}(G)$ και $FR(G)$ ονομάζεται ομάδα Whitehead της G , συμβολίζεται με $WH(G)$, και ισχύει:

$$WH(G) = FR(G) \rtimes \mathbf{Inn}(G).$$

Θεωρούμε τώρα μια n -άδα ομάδων G_i και τη διαιρούμε στις κλάσεις ισομορφίας της. Για κάθε κλάση ισομορφίας $(G_i)_{i \in A}$ επιλέγουμε αντιπρόσωπο G_i και για κάθε $j \in A - \{i\}$ επιλέγουμε ισομορφισμό $\phi_j : G_i \rightarrow G_j$. Θεωρούμε επίσης την ταυτοτική απεικόνιση $\phi_i : G_i \rightarrow G_i$. Τώρα, κάθε ζεύγος ισόμορφων ομάδων G_j, G_k μπορεί να ταυτιστεί μοναδικά μέσω της σύνθεσης των παραπάνω ισομορφισμών

$$G_j \xrightarrow{\phi_j^{-1}} G_i \xrightarrow{\phi_k} G_k.$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ισομορφισμό στο δεύτερο παράδειγμα παραπάνω λαμβάνουμε έναν αυτομορφισμό της G . Όλοι οι αυτομορφισμοί που δημιουργούνται με αυτό τον τρόπο παράγουν μια υποομάδα

$$\mathcal{G}_G \cong \mathcal{G}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{G}_{n_k},$$

όπου n_i είναι το μέγεθος της κάθε κλάσης ισομορφίας. Παρατηρούμε ότι διαφορετική επιλογή αντιπροσώπου ϕ_i δίνει μια διαφορετική εμφύτευση της $\mathcal{G}_G$ στην $\mathbf{Aut}(G)$.

Έστω $\sigma \in \mathcal{G}_G$ και $h \in G_j$, α_i^h η αντίστοιχη μερική συζυγία. Τότε

$$\sigma \alpha_i^h \sigma^{-1} = \alpha_{\sigma(i)}^{\phi_{\sigma(j)} \phi_j^{-1}(h)}.$$

Για ευκολία θα χρησιμοποιούμε την ταύτιση $h \equiv \phi_{\sigma(j)} \phi_j^{-1}(h)$ (ταυτίζοντας τις ομάδες G_i και $G_{\sigma(i)}$ μέσω του $\phi_{\sigma(j)} \phi_j^{-1}$). Η ομάδα που παράγεται από τις $\mathcal{G}_G$ και $FR(G)$ είναι το ημιευθές γινόμενο

$$\Sigma FR(G) = FR(G) \rtimes \mathcal{G}_G$$

η οποία ονομάζεται συμμετρική Fousse-Rabinovitch ομάδα. Επιπλέον, η ομάδα $\mathcal{G}_G$ δρα με συζυγίες στις ομάδες $\mathbf{Inn}(G)$ και $\mathbf{Aut}(G)$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε τις υποομάδες

$$\Sigma WH(G) := WH(G) \rtimes \mathcal{G}_G$$

και

$$\Sigma \text{Aut}(G) := \text{PAut}(G) \rtimes \mathcal{G}_G$$

οι οποίες ονομάζονται: συμμετρική ομάδα Whitehead της G^2 και ομάδα των συμμετρικών αυτομορφισμών της G^3 , αντίστοιχα. Η επόμενη πρόταση έπεται από το θεώρημα υποομάδων του Kurosh.

Πρόταση 3.5.7. Έστω G_i μια n -άδα ομάδων τέτοια ώστε κάθε G_i να είναι ελεύθερος μη-αναλύσιμη (δεν αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο κατά μη τετριμμένο τρόπο) και μη ισόμορφη με την άπειρη κυκλική. Τότε

$$\Sigma \text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(G).$$

Συνοψίζοντας, έχουμε το εξής διάγραμμα υποομάδων της $\text{Aut}(G)$.

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma FR(G) & \longrightarrow & \Sigma WH(G) & \longrightarrow & \Sigma \text{Aut}(G) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ FR(G) & \longrightarrow & WH(G) & \longrightarrow & \text{PAut}(G) \end{array}$$

Κάθε βέλος είναι κανονική εμφύτευση και το ίδιο ισχύει για τις συνθέσεις τους. Παίρνοντας πηλίκο με την κανονική υποομάδα $FR(G)$ έχουμε το εξής διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_G & \longrightarrow & \mathbf{Inn}(G) \rtimes \mathcal{G}_g & \longrightarrow & \mathbf{Aut}(G) \rtimes \mathcal{G}_G \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ I & \longrightarrow & \mathbf{Inn}(G) & \longrightarrow & \mathbf{Aut}(G) \end{array}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\Sigma \text{Aut}(G) \cong FR(G) \rtimes \mathbf{Aut}(G) \rtimes \mathcal{G}_G$$

όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τα παραπάνω ημιευθέα γινόμενα με όποια σειρά θέλουμε.

Στην περίπτωση που ξέρουμε ποιοι από τους παράγοντες G_i είναι άπειροι κυκλικοί έχουμε την επόμενη πρόταση (βλ. Πρόταση 3.1 στο [45] ή στο [46]) που δίνει μια περιγραφή των ομάδων $\mathbf{Aut}(G)$, $\mathcal{G}_G$, $\langle \mathbf{Aut}(G), \mathcal{G}_G \rangle$.

Πρόταση 3.5.8. Έστω $G = G_1 * G_2 * \dots * G_k * F_r$ και υποθέτουμε, ίσως μετά από αναδιάταξη, ότι $G_1, \dots, G_d$ είναι αντιπρόσωποι όλων των κλάσεων ισομορφίας των G_i .

²symmetric Whitehead group της G

³symmetric automorphism group της G

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η κλάση ισομορφίας με αντιπρόσωπο G_i εμφανίζεται στην ανάλυση της G n_i φορές. Σταθεροποιούμε μια ανάλυση της F_r σε ελεύθερο γινόμενο άπειρων κυκλικών ομάδων. Τότε:

1. $\mathbf{Aut}(G) \cong \prod_{i=1}^d \mathbf{Aut}(G_i) \times C_2^r$
2. $\mathcal{G}_G \cong \prod_{i=1}^d S_{n_i} \times S_r$
3. $\langle \mathbf{Aut}(G), \mathcal{G}_G \rangle \cong \prod_{i=1}^d (\mathbf{Aut}(G_i) \wr S_{n_i}) \times (C_2 \wr S_r)$

όπου τα *wreath* γινόμενα είναι *permutation wreath* γινόμενα σε σύνολο n στοιχείων.

Παρατήρηση 3.5.9. Υπενθυμίζουμε ότι μια παράσταση για την ομάδα αυτομορφισμών ενός ελεύθερου γινομένου έχει ληφθεί από τα [5],[6] εδώ και αρκετό καιρό. Γενικά, αν μας δίνεται ένα ελεύθερο γινόμενο $G = G_1 * \dots * G_n$ και θέλουμε να βρούμε μια παράσταση της $\mathbf{Aut}(G)$ χρειάζεται να ξέρουμε τα παρακάτω:

1. την ομάδα αυτομορφισμών $\mathbf{Aut}(G_i)$ κάθε παράγοντα G_i ,
2. ποια ζεύγη παραγόντων G_i, G_j είναι ισόμορφα,
3. ποιοι παράγοντες G_i είναι άπειροι κυκλικοί,
4. ότι κάθε G_i είναι ελεύθερος μη αναλύσιμη ομάδα.

Αν γνωρίζουμε τα 1, 2, 3 αλλά όχι το 4 τότε η ομάδα που παίρνουμε δρα στην G όμως είναι γνήσια υποομάδα της $\mathbf{Aut}(G)$. Ομοίως θα παίρναμε γνήσια υποομάδα της $\mathbf{Aut}(G)$ αν γνωρίζαμε κάποια από τα 1, 2, 3 αλλά όχι όλα.

Στην παραπάνω ανάλυση, πριν την Πρόταση 3.5.8, γνωρίζαμε τα 1, 2 και η ομάδα που πήραμε ήταν η $\Sigma \mathbf{Aut}(G)$, των συμμετρικών αυτομορφισμών της G . Όπως είδαμε αν ισχύουν τα 1, 2, 4 αλλά δεν υπάρχουν άπειροι κυκλικοί παράγοντες, τότε ισχύει ότι $\Sigma \mathbf{Aut}(G) \cong \mathbf{Aut}(G)$.

Το βασικό βήμα στη μελέτη της $\mathbf{Aut}(G)$ είναι η κατανόηση της ομάδας $FR(G)$ η οποία ονομάζεται Fouxé-Rabinovitch ομάδα και είναι η ομάδα που μπορούμε να πάρουμε ακόμα και αν δεν ξέρουμε κανένα από τα 1, 2, 3, 4. Η παράσταση της $FR(G)$ περιέχει μόνο σχέσεις των παραγόντων G_i και μεταθέτες.

Για μια παράσταση της $\mathbf{Aut}(G)$ στη γενική περίπτωση που ισχύουν τα 1, 2, 3, 4 βλ. Θεώρημα 2.20 στο [45].

3.6 Ο εξωτερικός χώρος $\mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k)$

Έστω $G = G_1 * G_2 * \dots * G_p * F_k$ μια διάσπαση της ομάδας G σε ελεύθερο γινόμενο. Όπως ο εξωτερικός χώρος των Culler-Vogtmann που ορίστηκε στις προηγούμενες ενότητες, ο εξωτερικός χώρος ενός ελευθέρου γινομένου μπορεί να οριστεί ως χώρος G -δέντρων ή ως χώρος μαρκαρισμένων μετρικών γραφημάτων (ομάδων).

Θυμίζουμε ότι με $\mathcal{T}(G)$ συμβολίζουμε το σύνολο των μετρικών G -δέντρων.

Ορισμός 3.6.1 ([61]). Έστω $\mathcal{O} = \mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k)$ το υποσύνολο των κλάσεων $\mathcal{T}(G)/\sim$, ως προς G -ισομετρία, των μετρικών G -δέντρων T , έτσι ώστε

- Το T δεν έχει *redundant* κορυφές ⁴.
- Η δράση της G στο T είναι ελαχιστική (δηλαδή δεν υπάρχουν γνήσια αναλλοίωτα υποδέντρα) και με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών.
- Για κάθε $i = 1, \dots, p$ υπάρχει ακριβώς μια τροχιά κορυφών των οποίων οι σταθεροποιούσες είναι συζυγή του G_i .
- Οι σταθεροποιούσες όλων των υπόλοιπων κορυφών είναι τετριμμένες.

Παρατήρηση 3.6.2. Υπό τις παραπάνω υποθέσεις για κάθε $T \in \mathcal{O}$ το T/G είναι πεπερασμένο γράφημα.

Ορισμός 3.6.3. Έστω G ένα ελεύθερο γινόμενο της μορφής

$$G = G_1 * \dots * G_p * F_k.$$

Η ομάδα $\text{Aut}(G, \mathcal{O})$ (συμβολίζεται επίσης $\text{Aut}(G, ([G_1], \dots, [G_p]))$ ή $\text{Aut}(G, (G_i)_{i=1}^p)$) ορίζεται να είναι η υποομάδα της $\text{Aut}(G)$ που αποτελείται από εκείνους τους αυτομορφισμούς $\phi \in \text{Aut}(G)$ οι οποίοι απεικονίζουν κάθε παράγοντα G_i επί ενός συζυγούς κάποιου παράγοντα G_j , δηλαδή υπάρχει ένα στοιχείο $g_i \in G$ και ένα $j \in \{1, \dots, p\}$ έτσι ώστε $\phi(G_i) = g_i G_j g_i^{-1}$.

Η ομάδα $\text{Inn}(G)$ είναι κανονική υποομάδα της $\text{Aut}(G, \mathcal{O})$ και επομένως ορίζεται η ομάδα πηλίκου $\text{Out}(G, \mathcal{O}) = \text{Aut}(G, \mathcal{O})/\text{Inn}(G)$ (η οποία συμβολίζεται και με $\text{Out}(G, (G_i)_{i=1}^p)$ ή $\text{Out}(G, ([G_1], \dots, [G_p]))$).

⁴Μια κορυφή v του T λέγεται *redundant* αν έχει βαθμό 2 και κάθε $g \in G$ που σταθεροποιεί την v σταθεροποιεί και προκείμενες στην v ακμές.

Ο πολλαπλασιασμός των μηκών των ακμών με έναν θετικό πραγματικό αριθμό είναι ένας μετασχηματισμός $\mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k) \rightarrow \mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k)$. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο $P\mathcal{O} = P\mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k)$ ως τον προβολικό χώρο του $\mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k)$ υπό αυτό το μετασχηματισμό. Αυτός ο χώρος ονομάζεται εξωτερικός χώρος (**outer space**) της G ως προς $G_1, \dots, G_p$. Καταχρηστικά πολλές φορές θα συμβολίζουμε με $\mathcal{O}$ τον εξωτερικό χώρο. Όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια αναφερόμαστε στα σημεία του εξωτερικού χώρου $\mathcal{O}$ επιλέγοντας αντιπροσώπους T των κλάσεων και θα γράφουμε απλά $T \in \mathcal{O}$ εννοώντας $[T] \in \mathcal{O}$.

Παρατήρηση 3.6.4. Αν η G είναι ελεύθερη, τότε ο παραπάνω χώρος είναι ισόμορφος με τον εξωτερικό χώρο (outer space) των Culler-Vogtmann που έχουμε δει.

Παρατήρηση 3.6.5. Παρατηρούμε ότι η ομάδα $\text{Out}(G, \mathcal{O})$ δρα στον εξωτερικό χώρο $\mathcal{O}$ ως εξής. Αν η G δρα σε ένα δέντρο T του $\mathcal{O}$

$$G \times T \rightarrow T$$

και αν $\Phi \in \text{Out}(G, \mathcal{O})$, επιλέγουμε αντιπρόσωπο $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$ του Φ , και τότε η G δρα στο T ως εξής:

$$(g, x) \rightarrow \phi(g)x \in T.$$

Τώρα το νέο G -δέντρο (με τη νέα δράση δηλαδή) ανήκει στον εξωτερικό χώρο $\mathcal{O}$ αφού οι νέες σταθεροποιούσες κορυφών είναι οι εικόνες των συζυγών των G_i υπό τον ϕ^{-1} και άρα είναι συζυγή των G_i . Επίσης οι νέες σταθεροποιούσες ακμών είναι τετριμμένες αφού είναι τομές διαφορετικών συζυγών των G_i . Ακόμα, το νέο G -δέντρο T δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου ϕ αφού συνθέτοντας τη δράση από αριστερά με μια συζυγία στη G είναι σα να συνθέτουμε τη δράση από τα αριστερά με μια equivariant ισομετρία του T και άρα μένουμε στην ίδια κλάση ως προς G -ισομετρία.

Ορισμός 3.6.6. Έστω $T \in \mathcal{O}$ ένα G -δέντρο και $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$. Μία απεικόνιση $f : T \rightarrow T$ λέγεται αντιπρόσωπος του ϕ στο T αν για κάθε $g \in G$ και $t \in T$ ισχύει

$$f(gt) = \phi(g)f(t).$$

Αν επιπλέον η δράση στο T είναι ελαχιστική και η f συνεχής τότε η f είναι επί. Στα παρακάτω μας απασχολούν συνεχείς απεικονίσεις οι οποίες είναι επιπλέον Lipschitz.

Η ύπαρξη ενός αντιπροσώπου αποδεικνύεται στο παρακάτω Λήμμα [59],[33].

Λήμμα 3.6.7. Για κάθε $T \in \mathcal{O}$ και $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$ υπάρχει μια απεικόνιση $f : T \rightarrow T$ αντιπρόσωπος της ϕ στο T . Αν επιπλέον $f_1, f_2 : T \rightarrow T$ είναι δύο αντιπρόσωποι του ϕ στο T τότε συμπίπτουν στις μη-ελεύθερες κορυφές.

Απόδειξη. Έστω A, B δύο G -δέντρα στο χώρο $\mathcal{O}$. Έστω, επίσης, $v \in A$ μια κορυφή με μη τετρωμένη σταθεροποιούσα (δηλαδή είναι μη-ελεύθερη κορυφή)

$$\text{Stab}_G(v) = H \leq G.$$

Η σταθεροποιούσα H είναι συζυγής με κάποιον παράγοντα G_i και από τον ορισμό του $\mathcal{O}$ υπάρχει μοναδική κορυφή w του B η οποία να σταθεροποιείται από την H . Ορίζουμε $f(v) = w$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για όλες τις μη ελεύθερες κορυφές του A . Η απεικόνιση f που έχουμε ορίσει ως τώρα στις μη-ελεύθερες κορυφές είναι G -επικόνιση αφού η κορυφή $gv \in A$ σταθεροποιείται από την gHg^{-1} η οποία είναι η σταθεροποιούσα του $gw \in B$, δηλαδή

$$f(gv) = gw = gf(v).$$

Έτσι, έχουμε επιπλέον ότι αν $f_1, f_2 : T \rightarrow T$ είναι δύο αντιπρόσωποι του ϕ στο $T \in \mathcal{O}$, τότε συμπίπτουν στις μη-ελεύθερες κορυφές.

Επεκτείνουμε, στη συνέχεια, την G -απικόνιση f στις τροχιές των ελεύθερων κορυφών, χωρίς να απαιτούμε κάποια άλλη συνθήκη. Έτσι, έχουμε ορίσει μία G -απικόνιση σε όλες τις κορυφές του A . Μένει να ορίσουμε την f στις ακμές. Η δράση της G είναι ελεύθερη στο σύνολο των ακμών. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την f γραμμικά στις ακμές και θα είναι G -απικόνιση. Επίσης, η f είναι Lipschitz αφού τα G -δέντρα του $\mathcal{O}$ έχουν πεπερασμένες το πλήθος τροχιές ακμών και κορυφών. Τέλος, η f είναι επί, γιατί η εικόνα $\text{im} f$ είναι G -αναλλοίωτο υποδέντρο του B και άρα θα πρέπει να είναι ίση με B . ■

3.7 Χώροι μετασχηματισμών

Στη συνέχεια, η G θα είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και όλα τα G -δέντρα ελαχιστικά και μη τετρωμένα (η G δε σταθεροποιεί κορυφή). Αξίζει να σημειώσουμε ότι η έννοια του εξωτερικού χώρου γενικεύεται από την έννοια του χώρου μετασχηματισμών. Δίνουμε τώρα τον ορισμό των χώρων μετασχηματισμών (deformation spaces) [60].

Θεωρούμε δύο G -δέντρα T_1, T_2 . Θα λέμε ότι το T_1 κυριαρχεί στο T_2 αν υπάρχει μια G -απεικόνιση $T_1 \rightarrow T_2$. Ισοδύναμα, αν μια ομάδα είναι ελλειπτική στο T_1 τότε είναι και στο T_2 (ελλειπτική είναι μια ομάδα η οποία σταθεροποιεί ένα σημείο⁵).

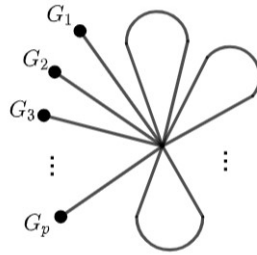
Ορισμός 3.7.1. Ο χώρος μετασχηματισμών (deformation space) $\mathcal{D}$ (ή αλλιώς $DF(T)$) που περιέχει ένα G -δέντρο T είναι το σύνολο των μετρικών G -δέντρων T' , ως προς G -ισομετρία, που είναι τέτοια ώστε τα T και T' να κυριαρχούν το ένα στο άλλο. Ισοδύναμα, είναι το σύνολο των G -δέντρων T' που έχουν τις ίδιες ελλειπτικές υποομάδες με το T ⁶.

Αν και ένα στοιχείο του $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση, συνήθως αναφερόμαστε σε έναν αντιπρόσωπο της κλάσης και όχι στην κλάση ολόκληρη.

Παράδειγμα 3.7.2. Για παράδειγμα αν η πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G επιδέχεται μια διάσπαση Grushko

$$G = G_1 * \dots * G_p * F_k$$

και αν δούμε τον $\mathcal{O} = \mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^p, F_k)$ ως χώρο G -δέντρων, τότε ο $\mathcal{O}$ είναι ο χώρος μετασχηματισμών (deformation space) του T_0 , όπου T_0 είναι το Bass-Serre δέντρο που αντιστοιχεί στο σύννηθες γράφημα ομάδων για το ελεύθερο γινόμενο G .



Παρατήρηση 3.7.3. Έστω T ένα G -δέντρο. Θα συμβολίζουμε με $Hyp(T)$ το σύνολο των $g \in G$ των οποίων η δράση στο T είναι υπερβολική. Αν $T \in \mathcal{O}$ και $g \notin Hyp(T)$ τότε το g σταθεροποιεί μια κορυφή του T και κατά συνέπεια υπάρχει $i \in \{1, \dots, p\}$ τέτοιο ώστε το g να ανήκει σε κάποιο συζυγές του G_i . Αντίστροφα, αν το g ανήκει σε κάποιο συζυγές του G_i για $i \in \{1, \dots, p\}$ τότε το g σταθεροποιεί κορυφή του T και άρα δεν είναι υπερβολικό. Έτσι, το $g \in G$ είναι υπερβολικό για το $T \in \mathcal{O}$ αν και μόνο αν είναι υπερβολικό για κάθε άλλο στοιχείο του $\mathcal{O}$. Το σύνολο των υπερβολικών στοιχείων της G για κάποιο (και άρα για όλα τα) T στο $\mathcal{O}$ συμβολίζεται με $Hyp(\mathcal{O})$.

⁵Μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα είναι ελλειπτική αν και μόνο αν κάθε στοιχείο της είναι ελλειπτικό.

⁶Θεώρημα 3.8 στο [60]

3.8 Simplicial δομή και τοπολογίες στον εξωτερικό χώρο

$\mathcal{O}$

Στην περίπτωση των ελεύθερων ομάδων έχουμε δει ότι υπάρχουν τρεις φυσικές τοπολογίες στον εξωτερικό χώρο CV_n οι οποίες συμπίπτουν. Αυτές οι τοπολογίες μπορούν να ορισθούν με φυσικό τρόπο και στη γενική περίπτωση αλλά δε θα ταυτίζονται απαραίτητα αφού τα δέντρα μπορεί να μην είναι τοπικά πεπερασμένα. Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε αυτές τις τοπολογίες για έναν χώρο μετασχηματισμών και θα ταυτίζονται μόνο αν ο χώρος μετασχηματισμών είναι τοπικά πεπερασμένος (βλ. [56], [60]). Όλα τα στοιχεία του (σχετικού) εξωτερικού χώρου $\mathcal{O}$ είναι τοπικά πεπερασμένα δέντρα αν και μόνο αν κάθε G_i είναι πεπερασμένη ομάδα.

Θα περιγράψουμε τώρα τις τρεις τοπολογίες στο σύνολο των μετρικών, ελαχιστικών, μη τετριμμένων G -δέντρων $\mathcal{T}(G)$ (ως προς G -ισομετρία) που επάγουν αντίστοιχες τοπολογίες στο εξωτερικό χώρο $\mathcal{O}$ αφού $\mathcal{O} = \mathcal{T}(G)/\sim$.

Η equivariant Gromov-Hausdorff τοπολογία στο σύνολο $\mathcal{T}(G)$ ορίζεται ως ακολούθως. Ένα θεμελιώδες σύστημα περιοχών ενός σημείου T στο $\mathcal{T}(G)$ δίνεται από τα σύνολα $V_T(X, A, \epsilon)$, όπου τα υποσύνολα $X \subset T$ και $A \subset G$ είναι πεπερασμένα και $\epsilon > 0$. Εξ ορισμού, το T' ανήκει στο $V_T(X, A, \epsilon)$ αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $X \rightarrow T'$, $x \mapsto \tilde{x}$ έτσι ώστε για κάθε $x, y \in X$ και $g \in A$ να ισχύει $|d(x, gy) - d(\tilde{x}, g\tilde{y})| < \epsilon$.

Θα περιγράψουμε τώρα την τοπολογία των αξόνων (axes-τοπολογία) στον εξωτερικό χώρο $\mathcal{O}$. Υπάρχει μια φυσική απεικόνιση από το $\mathcal{T}(G)$ στον $\mathbb{R}^G$ η οποία απεικονίζει κάθε G -δέντρο T στο $(l_T(g))_{g \in G}$ όπου με l_T συμβολίζουμε την απεικόνιση μετατόπισης. Αν υπάρχει μια G -ισομετρία μεταξύ δύο στοιχείων $T, S \in \mathcal{T}(G)$ τότε αυτά έχουν κοινή εικόνα μέσω της προηγούμενης απεικόνισης. Επομένως, η παραπάνω απεικόνιση παραγοντοποιείται μέσω του $\mathcal{O}$ και μάλιστα είναι 1-1 (βλ. [27]). Άρα το $\mathcal{O}$ μπορεί να θεωρηθεί με φυσιολογικό τρόπο ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^G$ (και άρα εφοδιάζεται με την τοπολογία του υποχώρου).

Τέλος, περιγράψουμε μια simplicial δομή για το $\mathcal{O}$ όπως ακριβώς και στην περίπτωση των ελευθέρων ομάδων. Η επαγόμενη τοπολογία από τη simplicial δομή ονομάζεται ασθενής τοπολογία.

Κάθε μαρκαρισμένο γράφημα ομάδων Γ θεωρείται ως ανοικτό simplex, αγνοώντας τη μετρική του Γ . Αυτό το simplex αποτελείται από τα μαρκαρισμένα μετρικά γραφήματα

ομάδων με υποκείμενο γράφημα το Γ , το ίδιο μαρκάρισμα, και μετρικές που διατρέχουν όλα τα δυνατά μήκη των (πεπερασμένων το πλήθος) ακμών, υπό τον περιορισμό ότι το συνολικό άθροισμα (volume) είναι ίσο με 1.

Ειδικότερα, έστω $e_1, \dots, e_k$ οι ακμές (με ετικέτες) του Γ . Τότε το σύνολο X όλων των μαρκαρισμένων μετρικών γραφημάτων τα οποία έχουν το ίδιο υποκείμενο γράφημα με το Γ και η μετρική μεταβάλλεται όπως είπαμε παραπάνω, μπορεί να εμφυτευθεί στο $\mathbb{R}^k$ μέσω της απεικόνισης

$$\Gamma \rightarrow (l_\Gamma(e_1), \dots, l_\Gamma(e_k)).$$

Στην πραγματικότητα, το Γ παράγει το ανοικτό $k - 1$ simplex του $\mathbb{R}^k$

$$\left\{ (x_1, \dots, x_k) \mid x_i > 0, \sum_{i=1}^k x_i = 1 \right\}.$$

Όπως στην περίπτωση των ελευθέρων ομάδων, με τον παραπάνω τρόπο έχουμε μια φυσική υποδιαίρεση του $\mathcal{O}$ σε ανοικτά simplices.

Στα [60],[61] αποδεικνύεται ότι ο εξωτερικός χώρος $\mathcal{O}$ είναι συμπτύξιμος (contractible) σε κάθε μία από τις παραπάνω τρεις τοπολογίες για πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα γινόμενα και τις αντίστοιχες Grushko αναλύσεις.

3.9 Train tracks σε μαρκαρισμένα γραφήματα και σε δέντρα

3.9.1 Ανάγωγοι αυτομορφισμοί

Υπενθυμίζουμε ότι ένας αυτομορφισμός μια ελεύθερης ομάδας F λέγεται ανάγωγος (irreducible) αν δε διατηρεί καμία κλάση συζυγίας κάποιου ελεύθερου παράγοντα. Επίσης λέγεται πλήρως ανάγωγος (fully irreducible) ή ανάγωγος με ανάγωγες δυνάμεις (irreducible with irreducible powers - IWIP) αν όλες οι θετικές δυνάμεις του είναι ανάγωγοι αυτομορφισμοί.

Αναφέρουμε τους ορισμούς για τους ανάγωγους αυτομορφισμούς ενός ελεύθερου γινομένου όπως παρουσιάζονται στο [59] και δείχνουμε την ισοδυναμία τους, όπως στο [52].

Για ένα στοιχείο $g \in G$ θα συμβολίζουμε με $[g]$ την κλάση συζυγίας του g στη G . Για μια υποομάδα $H \leq G$ θα συμβολίζουμε με $[H]$ την κλάση συζυγίας της H στη G .

Ορισμός 3.9.1. Για μια ομάδα $G = G_1 * \dots * G_p * F_k$ το σύνολο $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$ ονομάζεται *σύστημα ελευθέρων παραγόντων* (free factor system) για την G . Αν υπάρχει κάποιο άλλο σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{[G'_1], \dots, [G'_{p'}]\}$ για την G έτσι ώστε για κάθε $i \in \{1, \dots, p'\}$ υπάρχει κάποιο $j \in \{1, \dots, p\}$ με

$$G'_i \leq gG_jg^{-1}$$

για κάποιο $g \in G$, τότε θα γράφουμε

$$\{[G'_1], \dots, [G'_{p'}]\} \prec \{[G_1], \dots, [G_p]\}.$$

Πρόταση 3.9.2 ([52]). Η σχέση $\prec$ όπως ορίστηκε παραπάνω είναι σχέση μερικής διάταξης.

Απόδειξη. Αν έχουμε ότι

$$\{[G_1], \dots, [G_p]\} \prec \{[G'_1], \dots, [G'_{p'}]\}$$

και

$$\{[G'_1], \dots, [G'_{p'}]\} \prec \{[G_1], \dots, [G_p]\}$$

τότε για κάθε i υπάρχει κάποιο j και κάποια g, g' έτσι ώστε

$$g'G_jg'^{-1} \leq G'_i \leq gG_jg^{-1}$$

και άρα $[G_j] = [G'_i]$, δηλαδή, $\{[G_1], \dots, [G_p]\} = \{[G'_1], \dots, [G'_{p'}]\}$. Επίσης η ανακλαστικότητα και η μεταβατικότητα είναι εύκολο να αποδειχθούν. Επομένως, η $\prec$ είναι σχέση μερικής διάταξης. ■

Ορισμός 3.9.3 ([59]). Έστω ϕ ένας αυτομορφισμός μιας ομάδας G , $T \in \mathcal{O}$ και $f : T \rightarrow T$ ένας αντιπρόσωπος του $\phi \in \text{Aut}(G)$. Θα λέμε ότι ο f είναι *ανάγωγος* αν για κάθε γνήσιο υπογράφημα W του δέντρου T το οποίο είναι G -αναλλοίωτο και f -αναλλοίωτο, το γράφημα πηλίκου W/G είναι μια συλλογή ξένων υποδέντρων τα οποία έχουν το πολύ μία μη-ελεύθερη κορυφή. Θα λέμε ότι ο f είναι *πλήρως ανάγωγος* αν για κάθε θετικό ακέραιο i ο f^i είναι ανάγωγος.

Ορισμός 3.9.4. Θα λέμε ότι ο $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$ είναι $\mathcal{O}$ -ανάγωγος αν για κάθε $T \in \mathcal{O}$ κάθε αντιπρόσωπος $f : T \rightarrow T$ του ϕ είναι ανάγωγος. Αντίστοιχα, θα λέμε ότι ο ϕ είναι $\mathcal{O}$ -πλήρως ανάγωγος αν για κάθε $T \in \mathcal{O}$, κάθε αντιπρόσωπος $f : T \rightarrow T$ του ϕ είναι πλήρως ανάγωγος.

Ορισμός 3.9.5. Έστω μια ομάδα G με μια ανάλυσή της ως ελεύθερο γινόμενο

$$G = G_1 * \dots * G_p * F_k.$$

Ένας αυτομορφισμός $\phi \in \text{Aut}(G)$ θα λέγεται ανάγωγος ως προς το σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$, αν το σύνολο των κλάσεων συζυγίας $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$ είναι ένα μεγιστικό (ως προς τη διάταξη $\prec$) σύστημα ελευθέρων παραγόντων το οποίο είναι αναλλοίωτο από τον ϕ .

Λήμμα 3.9.6 ([52]). Έστω μια ομάδα G με μια ανάλυση ως ελεύθερο γινόμενο

$$G = G_1 * \dots * G_p * F_k$$

και ένας αυτομορφισμός $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- ϕ είναι $\mathcal{O}$ –ανάγωγος.
- ϕ είναι ανάγωγος ως προς το σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του λήμματος, αναφέρουμε αρχικά το παρακάτω καλά γνωστό λήμμα.

Λήμμα 3.9.7. Έστω G μια ομάδα με μια ανάλυση ως ελεύθερο γινόμενο $G = G_1 * \dots * G_p * F_k$ και δέντρο $T \in \mathcal{O}$. Αν το $g_1 \in G$ σταθεροποιεί την κορυφή v_1 και το $g_2 \in G$ σταθεροποιεί την κορυφή $v_2 \neq v_1$, τότε το $g_1 g_2$ είναι υπερβολικό στοιχείο της G ως προς αυτή την ανάλυση.

Απόδειξη του Λήμματος 3.9.6. Έστω ότι ο ϕ δεν είναι ανάγωγος ως προς το σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$. Τότε υπάρχει ένα ϕ –αναλλοίωτο σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{H_1, \dots, H_{p'}\}$ έτσι ώστε

$$\{[G_1], \dots, [G_p]\} \subseteq \{H_1, \dots, H_{p'}\}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G_1 \leq hH_1h^{-1}$ για κάποιο $h \in G$. Γράφουμε $H'_1 = hH_1h^{-1}$.

Ορίζουμε το W να είναι ένα ελαχιστικό H'_1 –αναλλοίωτο υπογράφημα του T και έστω $f : T \rightarrow T$ αντιπρόσωπος του ϕ με $f|_W : W \rightarrow W$ αντιπρόσωπος του $\phi|_{H'_1}$.

Από το προηγούμενο λήμμα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα υπερβολικό στοιχείο $g \notin H'_1$ ως προς το $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$ ⁷. Παρατηρούμε ότι το πηλίκο W/H'_1 είναι πεπερασμένο, αφού η H'_1 είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Έστω A_g ο άξονας του g . Τότε ο A_g δεν περιέχεται στο W , γιατί αλλιώς $H'_1 A_g \subset W$ και ο A_g απεικονίζεται στο πηλίκο σε ένα πεπερασμένο μονοπάτι. Άρα $g \in H'_1$ το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, το W είναι γνήσιο υπογράφημα του T .

Από το θεώρημα υποομάδων του Kurosh [1], η H_1 είτε περιέχει μια υποομάδα συζυγή με υποομάδα της G_i ($i > 1$) είτε περιέχει μια ελεύθερη ομάδα ως υποομάδα. Έτσι, το πηλίκο W/G δεν είναι ξένη ένωση δέντρων με το πολύ μία μη ελεύθερη κορυφή.

Έτσι, αποδείξαμε ότι ο ϕ δεν είναι $\mathcal{O}$ -ανάγωγος αν δεν είναι ανάγωγος ως προς το σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$.

Για να αποδείξουμε ότι το δεύτερο συνεπάγεται το πρώτο: υποθέτουμε ότι ο ϕ είναι ανάγωγος ως προς το σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$. Έστω ένα δέντρο $T \in \mathcal{O}$ και ένας αντιπρόσωπος $f : T \rightarrow T$ του $\phi \in \text{Aut}(G)$. Αν υπάρχει γνήσιο G -υποσύνολο W του T το οποίο είναι f -αναλλοίωτο, συμπτύσσοντας κάθε συνεκτική συνιστώσα του W σε ένα σημείο, έτσι ώστε να διατηρείται η G -δράση, παίρνουμε ένα νέο δέντρο $T' \in \mathcal{O}$ σε έναν διαφορετικό χώρο μετασχηματισμών από αυτόν του T . Στο γράφημα πηλίκο, αυτό το σημείο αντιστοιχεί σε έναν ελεύθερο παράγοντα της G . Αφού ο ϕ είναι ανάγωγος ως προς το σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\{[G_1], \dots, [G_p]\}$ συμπεραίνουμε ότι το πηλίκο είναι μια ξένη ένωση δέντρων κάθε ένα από τα οποία περιέχει το πολύ μία μη ελεύθερη κορυφή. ■

3.9.2 Train track απεικονίσεις

Για ένα γράφημα X θυμίζουμε ότι μια στροφή (turn) ονομάζουμε ένα ζεύγος ακμών (e_1, e_2) με $i(e_1) = i(e_2)$. Μια τετράμμενη στροφή είναι της μορφής (e, e) .

Μια δομή train track σε ένα G -δέντρο T είναι μια G -αναλλοίωτη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των κατευθύνσεων σε κάθε κορυφή του T , με τουλάχιστον δύο κλάσεις ισοδυναμίας στο σύνολο των κατευθύνσεων κάθε κορυφής. Μια κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται gate.

⁷Αν βρούμε ένα ελλειπτικό στοιχείο $g_2 \notin H'_1$, έστω $g_1 \in G_1$. Τότε αφού σταθεροποιούν διαφορετικές κορυφές το $g = g_1 g_2$ είναι ένα υπερβολικό στοιχείο που δεν ανήκει στην H'_1 .

Σε μια δομή train track μια στροφή λέγεται επιτρεπτή αν οι δύο ακμές ορίζουν κατευθύνσεις σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Ένα ανηγμένο (reduced) μονοπάτι θα λέγεται επιτρεπτό αν κάθε στροφή που ορίζεται από δύο διαδοχικές ακμές είναι επιτρεπτή.

Για να περιγράψουμε μια δομή train track αρκεί να προσδιορίσουμε τις επιτρεπτές (ή τις μη επιτρεπτές) στροφές.

Παράδειγμα 3.9.8. Το πλέον σημαντικό παράδειγμα δομής train track είναι το εξής. Έστω T και T' δύο G -δέντρα και $f : T \rightarrow T'$ μια G -απεικόνιση που είναι κατά τμήματα γραμμική (γραμμική και μη σταθερή στις ακμές). Η δομή train track στο T που επάγεται από την f ορίζεται ως εξής. Μια στροφή (e_1, e_2) θα είναι μη επιτρεπτή αν το μέγιστο κοινό τμήμα των $f(e_1)$ και $f(e_2)$ δεν είναι κορυφή του T' .

Συνεπώς, η εικόνα κάθε επιτρεπτής στροφής αποτελείται από ένα ζεύγος μονοπατιών του T' με κοινή αρχή, των οποίων το μέγιστο κοινό τμήμα είναι κορυφή. Αν $T = T'$, τότε ενδέχεται επιτρεπτές στροφές να απεικονίζονται σε μη επιτρεπτές στροφές. Σε μια τέτοια περίπτωση, η f^2 θα απεικόνιζε μια επιτρεπτή στροφή σε μια στροφή που ορίζει μία κατεύθυνση. Έτσι, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.9.9. Έστω $T \in \mathcal{O}$, $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$ και $f : T \rightarrow T$ μια κατά τμήματα γραμμική G -αναλλοίωτη απεικόνιση που είναι αντιπρόσωπος του ϕ . Η f λέγεται train track απεικόνιση αν, για την δομή train track που επάγει, έχουμε ότι

- η f απεικονίζει ακμές σε επιτρεπτά μονοπάτια και
- αν το $f(v)$ είναι κορυφή, τότε η f απεικονίζει επιτρεπτές στροφές στην v σε επιτρεπτές στροφές στην $f(v)$.

Έχουμε τώρα το βασικό Θεώρημα 8.18 από το [59],[33] το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη train track αντιπροσώπου για κάθε ανάγωγο αυτομορφισμό ενός ελεύθερου γινομένου.

Θεώρημα 3.9.10. Αν $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$ είναι ανάγωγος τότε υπάρχει $T \in \mathcal{O}$ και $f : T \rightarrow T$ αντιπρόσωπος του $\phi \in \text{Aut}(G)$, έτσι ώστε η f να είναι train track απεικόνιση.

Ανάλογο θεώρημα έχει αποδειχθεί και στο [7] για τοπολογικούς αντιπροσώπους αυτομορφισμών ελευθέρων γινομένων όπου οι χώροι με θεμελιώδη ομάδα το ελεύθερο γινόμενο δεν είναι γραφήματα.

3.10 Βέλτιστες απεικονίσεις

Θα δώσουμε μια περιγραφή της κλάσης των βέλτιστων απεικονίσεων μεταξύ στοιχείων του $\mathcal{O}$. Η συγκεκριμένη κλάση απεικονίσεων είναι σημαντική για τη μελέτη των train track απεικονίσεων. Ακολουθούμε το [59].

Ορισμός 3.10.1. Μια δομή *pre-train track* σε ένα G -δέντρο T είναι μια G -αναλλοίωτη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των κατευθύνσεων για κάθε κορυφή v του T .⁸

Ορισμός 3.10.2. Για $A, B \in \mathcal{O}$ και μια κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ θα συμβολίζουμε με $\Delta(f)$ (ή απλά Δ) το υπογράφημα του A που περιέχει τις ακμές e του A για τις οποίες ισχύει ότι $S_{f,e} = \text{Lip}(f)$ (βλ. και τον ορισμό 1.5.5).⁹ Με άλλα λόγια, το $\Delta(f)$ αποτελείται από τις ακμές του A στις οποίες η f επιτυγχάνει τη μέγιστη κλίση. Το $\Delta(f)$, όπως και στην περίπτωση των αυτομορφισμών ελευθέρων ομάδων, θα ονομάζεται *tension* γράφημα.

Παρατήρηση 3.10.3. Το $\Delta(f)$ είναι G -αναλλοίωτο αφού η G δρα με ισομετρίες.

Ορισμός 3.10.4. Έστω $A, B \in \mathcal{O}$ και $f : A \rightarrow B$ μια κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση. Η δομή *pre-train track* που επάγεται από την f στο A ορίζεται θέτοντας δύο κατευθύνσεις σε ένα σημείο x ως ισοδύναμες αν ορίζουν μέσω της f την ίδια κατεύθυνση στο $f(x)$.

Ο προηγούμενος ορισμός υπονοεί ότι αυθαιρέτως μικρά τμήματα με αρχή το x δεν απεικονίζονται επί του $f(x)$.

Δίνουμε τώρα τον ορισμό των βέλτιστων απεικονίσεων.

Ορισμός 3.10.5. Έστω $A, B \in \mathcal{O}$. Θα λέμε ότι μια κατά τμήματα γραμμική $f : A \rightarrow B$ δεν είναι βέλτιστη στην κορυφή v αν το $\Delta(f)$ έχει μόνο μία *gate* στην v για την δομή *pre-train track* που επάγεται από την f . Σε αντίθετη περίπτωση η f θα λέγεται βέλτιστη στην κορυφή v . Τέλος η απεικόνιση f θα λέγεται βέλτιστη αν είναι βέλτιστη σε κάθε κορυφή της.

⁸Με βάση αυτό τον ορισμό, μια δομή *train track* σε ένα G -δέντρο T είναι μια δομή *pre-train track* με τουλάχιστον δύο *gates* σε κάθε κορυφή.

⁹Για μια κατά τμήματα γραμμική $f : A \rightarrow B$ το $S_{f,e}$ είναι η σταθερή θετική κλίση της f στην e (η ταχύτητα της f στην e) και ονομάζεται *stretching factor* της f στην e .

Παρατήρηση 3.10.6. Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, μια κατά τμήματα γραμμική $f : A \rightarrow B$ είναι βέλτιστη αν και μόνο αν η δομή pre-train track που επάγεται από την f είναι δομή train track όταν περιοριστεί στο $\Delta(f)$. Συγκεκριμένα, αν η f είναι βέλτιστη απεικόνιση τότε σε κάθε κορυφή του $\Delta(f)$ υπάρχει μια επιτρεπτή στροφή στο $\Delta(f)$.

Λήμμα 3.10.7. Έστω $A, B \in \mathcal{O}$ και $f : A \rightarrow B$ μια κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση. Τότε η f είναι βέλτιστη στις μη ελεύθερες κορυφές. Δηλαδή, κάθε μη ελεύθερη κορυφή έχει τουλάχιστον δύο gates.¹⁰

Απόδειξη. Έστω v μια μη ελεύθερη κορυφή του A . Θα δείξουμε ότι η v έχει τουλάχιστον δύο gates. Έστω e μια ακμή που ξεκινά από την v . Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν η κατεύθυνση της e απεικονίζεται από την f στην κορυφή $f(v)$, τότε για κάθε $g \in \text{Stab}(v) \neq 1$ η ge που ξεκινά από την v απεικονίζεται επίσης στο $f(v)$. Εξ ορισμού οι κατευθύνσεις των e και ge δεν είναι ισοδύναμες στην δομή pre-train track που επάγεται από την f αφού έχουν τετριμμένη εικόνα υπό την f . Έτσι, η v έχει τουλάχιστον δύο κατευθύνσεις, δηλαδή τουλάχιστον δύο gates.
- Αν η κατεύθυνση της e δεν απεικονίζεται στο $f(v)$ τότε για $g \in \text{Stab}(v)$ έχουμε $f(ge) = gf(e)$ και αφού το $B \in \mathcal{O}$ έχει τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών (εξ ορισμού του $\mathcal{O}$) έχουμε ότι $gf(e) \neq f(e)$. Άρα $f(ge) \neq f(e)$ οπότε οι e, ge έχουν διαφορετικές μη τετριμμένες εικόνες υπό την f (αν η ge είχε τετριμμένη εικόνα τότε σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση και η $g^{-1}(ge) = e$ θα έπρεπε να έχει τετριμμένη εικόνα, άτοπο) και άρα είναι μη ισοδύναμες. Άρα η v έχει τουλάχιστον δύο gates.

Σε κάθε περίπτωση, η v έχει τουλάχιστον δύο gates. ■

Λήμμα 3.10.8. Έστω $A, B \in \mathcal{O}$ και $f : A \rightarrow B$ μια κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση. Αν η f δεν είναι βέλτιστη τότε υπάρχει κατά τμήματα γραμμική $h : A \rightarrow B$ τέτοια ώστε να ισχύει κάποιο από τα παρακάτω (ή και τα δύο):

- $\text{Lip}(h) \not\leq \text{Lip}(f)$
- $\Delta(h) \subsetneq \Delta(f)$

¹⁰Ελεύθερες είναι οι κορυφές με τετριμμένες σταθεροποιούσες κάτω από τη δράση της G .

Απόδειξη. Έστω v μια ελεύθερη κορυφή του $\Delta(f)$ στην οποία η f δεν είναι βέλτιστη. Από το προηγούμενο λήμμα μόνο ελεύθερες κορυφές υπάρχουν με αυτή την ιδιότητα. Έστω e ακμή του $\Delta(f)$ προσπίπτουσα στην v .

Για $t \in [0, l_A(e)]$ ορίζουμε p_t να είναι το σημείο της ακμής e το οποίο απέχει απόσταση t από το v . Έστω f_t η μοναδική κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση $A \rightarrow B$ η οποία ορίζεται στις ακμές του A ως εξής:

$$f_t(w) = \begin{cases} f(w), & \text{αν } w \neq gv, g \in G \\ gf(p_t), & \text{αν } w = gv, g \in G \end{cases}$$

Για αρκετά μικρά t , αν όλες οι ακμές του $\Delta(f)$ είναι προσπίπτουσες σε κορυφή της μορφής gv , $g \in G$, τότε έχουμε ότι $Lip(f_t) \leq Lip(f)$. Σε αντίθετη περίπτωση, το $\Delta(f_t)$ προκύπτει από το $\Delta(f)$ αφαιρώντας εκείνες τις ακμές που είναι προσπίπτουσες σε κάποια κορυφή της μορφής gv , $g \in G$. Αυτό συμβαίνει αφού σε κάθε ακμή που είναι προσπίπτουσα σε κορυφή της μορφής gv , $g \in G$, η f_t έχει μικρότερη κλίση από την f . Με άλλα λόγια, ισχύει $\Delta(f_t) \subsetneq \Delta(f)$ αφού υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή του $\Delta(f)$ προσπίπτουσα σε κορυφή της μορφής gv , η e .

Σε κάθε περίπτωση, αν πάρουμε $h = f_t$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Ορισμός 3.10.9. Έστω $A, B \in \mathcal{O}$. Μια απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ θα λέγεται $\mathcal{O}$ -απεικόνιση αν είναι G -απεικόνιση, *Lipschitz* συνεχής και επί.

Λήμμα 3.10.10. Έστω $A, B \in \mathcal{O}$. Για κάθε $\mathcal{O}$ -απείκονιση $f : A \rightarrow B$ ισχύει ότι

$$\sup_{g \in Hyp(\mathcal{O})} \frac{l_B(g)}{l_A(g)} \leq Lip(f).$$

Απόδειξη. Έστω $f : A \rightarrow B$ μια $\mathcal{O}$ -απείκονιση, $g \in G$ και $x \in A$. Αφού η f είναι συνεχής θα ισχύει ότι

$$[f(x), f(gx)]_B \subset f([x, gx]_A)^{\text{II}}$$

Οπότε έχουμε

$$l_B(g) \leq d_B(f(x), gf(x)) = d_B(f(x), f(gx)) \leq l_B\left(f([x, gx]_A)\right) \leq Lip(f)l_A([x, gx]_A)$$

δηλαδή

$$l_B(g) \leq Lip(f)l_A(g).$$

■

^{II}Εδώ χρησιμοποιούμε το συνήθη συμβολισμό $[x, y]_T$ για το γεωδαισιακό μονοπάτι από το x στο y στο δέντρο T .

Υπενθυμίζουμε τώρα την equivariant εκδοχή του θεωρήματος Arzela-Ascoli το οποίο είχαμε αναφέρει στο κεφάλαιο των χώρων μετασχηματισμών.

Θεώρημα 3.10.11 ([59]). Έστω $A, B \in \mathcal{O}$. Υπάρχει κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση $F : A \rightarrow B$ με

$$Lip(F) = \inf\{Lip(f) \mid f : A \rightarrow B \text{ είναι } \mathcal{O} - \text{απεικόνιση}\}$$

Για την απόδειξη βλ. το Θεώρημα 5.12 στο [59] ή το θεώρημα 20 στο [56] για τη γενικότερη περίπτωση των χώρων μετασχηματισμών από ανάγωγα G -δέντρα.

Παρουσιάζουμε τώρα την απόδειξη για την ύπαρξη βέλτιστων απεικονίσεων μεταξύ στοιχείων του $\mathcal{O}$.

Πόρισμα 3.10.12. Για κάθε $A, B \in \mathcal{O}$ υπάρχει βέλτιστη απεικόνιση $h : A \rightarrow B$. Επιπλέον, αν η κατά τμήματα γραμμική $f : A \rightarrow B$ δεν είναι βέλτιστη αλλά ελαχιστοποιεί τη σταθερά Lipschitz, τότε υπάρχει βέλτιστη απεικόνιση h με $\Delta(h) \subsetneq \Delta(f)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.10.10 έχουμε ότι

$$\Lambda_R(A, B) := \sup_{g \in Hyp(\mathcal{O})} \frac{l_B(g)}{l_A(g)} \leq \inf\{Lip(h) \mid h : A \rightarrow B \text{ είναι } \mathcal{O} - \text{απεικόνιση}\}$$

Από το Θεώρημα 3.10.11 γνωρίζουμε ότι υπάρχει κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση f με τη σταθερά $Lip(f)$ να επιτυγχάνει το παραπάνω infimum. Από αυτές τις απεικονίσεις που ελαχιστοποιούν τη σταθερά Lip επιλέγουμε f τέτοια ώστε το $\Delta(f)$ να είναι το ελάχιστο δυνατό. Από το Λήμμα 3.10.8 αυτή η f είναι βέλτιστη.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, υπενθυμίζουμε ότι από τον ορισμό του $\mathcal{O}$ υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος τροχιές ακμών. Συνεπώς, αν $\Delta(h) \subsetneq \Delta(f)$ και αφού τα tension γραφήματα είναι G -αναλλοίωτα, το πλήθος των τροχιών ακμών στο $\Delta(h)$ θα είναι γνήσια μικρότερο από το αντίστοιχο πλήθος στο $\Delta(f)$. Συνεπώς αν έχουμε μια κατά τμήματα γραμμική $f : A \rightarrow B$ η οποία να ελαχιστοποιεί τη σταθερά Lipschitz αλλά να μην είναι βέλτιστη, εφαρμόζοντας πεπερασμένες το πλήθος φορές το Λήμμα 3.10.8 παίρνουμε κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση f η οποία να ελαχιστοποιεί τη σταθερά Lipschitz και το tension γράφημα, δηλαδή να είναι βέλτιστη απεικόνιση. ■

Ορισμός 3.10.13. Έστω f απεικόνιση όπως στο Πόρισμα 3.10.12. Θα συμβολίζουμε με $Opt(f)$ την βέλτιστη απεικόνιση h που μας δίνει το Πόρισμα 3.10.12.

Ορισμός 3.10.14. Έστω $A, B \in \mathcal{O}$ και μια κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση $f : A \rightarrow B$. Ένα υποδέντρο $L \subset A$ θα λέγεται *ανηγμένο* (*tight*) αν $L \subset \Delta(f)$ και η $f|_L$ είναι ένα προς ένα.

Δίνουμε τώρα το αντίστοιχο του Θεωρήματος 1.12.3 στην περίπτωση του χώρου $\mathcal{O}$.

Θεώρημα 3.10.15. Για κάθε βέλτιστη απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ υπάρχει στοιχείο $g \in G$ του οποίου ο άξονας στο A είναι ανηγμένος (*tight*). Ειδικότερα ισχύει ότι

$$\frac{l_B(g)}{l_A(g)} = Lip(f) = \Lambda_R(A, B).$$

Απόδειξη. Έστω $f : A \rightarrow B$ βέλτιστη απεικόνιση. Έχουμε παρατηρήσει παραπάνω ότι κάθε κορυφή του $\Delta(f)$ έχει τουλάχιστον μία επιτρεπτή στροφή. Αφού οι δομές pre-train track είναι G -αναλλοίωτες μπορούμε να αντιστοιχίσουμε, διατηρώντας τη G -δράση, σε κάθε ακμή e του $\Delta(f)$ προσπίπτουσα στην κορυφή v , μια επιτρεπτή στροφή $\tau(e)$ στην v που να περιέχεται στο $\Delta(f)$ και να περιέχει την e . Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε ένα είδος διαδόχου της ακμής e στο $\Delta(f)$.

Ξεκινώντας από μια ακμή e_0 του $\Delta(f)$ σχηματίζουμε το μονοπάτι που προκύπτει από την παράθεση των διαδόχων της e_0 και το οποίο είναι μια εμφυτευμένη επιτρεπτή ημιευθεία η οποία τελικά γίνεται περιοδική modulo $g \in G$ (αφού το A περιέχει πεπερασμένο πλήθος τροχιών ακμών). Η "περίοδος" αυτή g έχει προφανώς τις ζητούμενες ιδιότητες. ■

3.11 Το λήμμα της φραγμένης διαγραφής

Για ένα δέντρο T και a ένα μονοπάτι στο T , θα συμβολίζουμε με $[a]$ το ανηγμένο (reduced) μονοπάτι που προκύπτει από το a .

Το λήμμα της φραγμένης διαγραφής είναι πολύ σημαντικό για τη μελέτη των αυτομορφισμών μιας ομάδας G . Έχει αποδειχθεί πρώτα για την περίπτωση των αυτομορφισμών ελευθέρων ομάδων [9] και έχει γενικευθεί για την περίπτωση αυτομορφισμών ελευθέρων γινομένων [51], ή άλλων γραφημάτων ομάδων [33]. Ακολουθούμε τη διατύπωση και την απόδειξη του [52].

Λήμμα 3.11.1 (Λήμμα φραγμένης διαγραφής για αυτομορφισμούς ελευθέρων γινομένων). Έστω $\phi \in \text{Aut}(G)$ ένας αυτομορφισμός της G , $T \in \mathcal{O}$ και $f : T \rightarrow T$ κατά τμήματα

γραμμικός αντιπρόσωπος του ϕ . Τότε υπάρχει σταθερά C_f , που εξαρτάται μόνο από τον f , έτσι ώστε για κάθε μονοπάτι $\rho \subset T$ το οποίο προκύπτει από την παράθεση (concatenation) δύο επιτρεπτών μονοπατιών α, β , χωρίς διαγραφές, να ισχύει

$$l_T([f(\rho)]) \geq l_T(f(\alpha)) + l_T(f(\beta)) - C_f.$$

Απόδειξη. Έστω f' ένας ομοτοπικός αντίστροφος της f , αντιπρόσωπος του ϕ^{-1} και έστω $g = f' \circ f : T \rightarrow T$. Προφανώς, η g είναι αντιπρόσωπος της ταυτοτικής απεικόνισης $Id \in \text{Aut}(G)$. Έστω ότι δύο κορυφές $v, u \in V(T)$ έχουν την ίδια εικόνα υπό την f , τότε $g(v) = g(u)$. Οπότε έχουμε μια ομοτοπία $H : [0, 1] \times T \rightarrow T$ έτσι ώστε $H_0 \equiv g$ και $H_1 \equiv Id$. Αφού η H μπορεί να επιλεγεί κατά τμήματα γραμμική (η H είναι ομοτοπία και μπορούμε να αλλάξουμε την κλίση της (rescale) σε κάθε ακμή ώστε να γίνει κατά τμήματα γραμμική), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η H είναι Lipschitz. Οπότε υπάρχει $D > 0$ έτσι ώστε

$$d(H(0, x), H(1, x)) \leq D, \text{ για κάθε } x$$

και άρα

$$d(v, u) \leq 2D.$$

Έστω $u_1 \in \alpha, u_2 \in \beta$ έτσι ώστε το υπο-μονοπάτι του ρ που συνδέει τα u_1, u_2 να είναι ακριβώς το ανηγμένο υπο-μονοπάτι μετά την εφαρμογή της f (δηλαδή το $f(u_1) = f(u_2)$ είναι το τελικό σημείο του $f(\alpha) \cap [f(\rho)]$ και το αρχικό σημείο του $f(\beta) \cap [f(\rho)]$). Τότε το $d(u_1, u_2)$ φράσσεται από $2D$ και άρα υπάρχει ένα ομοιόμορφο άνω φράγμα για το $d(f(u_1), f(u_2))$, το οποίο είναι το ζητούμενο C_f . ■

Λήμμα 3.11.2. Αν ο $f : T \rightarrow T$ είναι ένας *train track* αντιπρόσωπος του αναγώγου ϕ , τότε υπάρχει (μοναδική) σταθερά λ και κατάλληλη επιλογή μήκους των ακμών κάθε τροχιάς ακμών, έτσι ώστε για την προκύπτουσα μετρική να ισχύει:

$$l_T(f(e)) = \lambda l_T(e)$$

για κάθε ακμή $e \in E(T)$.

Μια τέτοια σταθερά λ ονομάζεται συντελεστής αύξησης (growth rate) του f .

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα M (με μη αρνητικά στοιχεία) του οποίου το (i, j) -στοιχείο, M_{ij} , είναι το πλήθος των φορών που η εικόνα $f(e_i)$ της ακμής e_i διέρχεται από την τροχιά της ακμής e_j (βλ. παράρτημα: Το θεώρημα Perron-Frobenius). Αυτός

ο πίνακας και ο ανάστροφός του είναι ανάγωγος (irreducible) αφού ο ϕ είναι ανάγωγος. Από το θεώρημα Perron-Frobenius υπάρχει μοναδική μέγιστη ιδιοτιμή λ του M^t , με $\lambda \geq 1$. Επιπλέον, ένα ιδιοδιάνυσμα για αυτή την ιδιοτιμή έχει θετικές συνιστώσες και είναι μοναδικό ως προς αριθμητικά πολλαπλάσια με πραγματικό αριθμό. Το πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλο αριθμό ώστε η μικρότερη συνιστώσα του να είναι ίση με 1 και το συμβολίζουμε με v_0 .

Θέτουμε, τώρα, το μήκος κάθε ακμής της τροχιάς της e_i να είναι η αντίστοιχη συνιστώσα l_i του v_0 , δηλαδή $l_T(ge_i) = l_i$, για κάθε $g \in G$. Τότε για κάθε διάνυσμα v ισχύει ότι

$$v_0^t(Mv) = (v_0^t M)v = (m^t v_0)^t v = \lambda v_0^t v.$$

Αν πάρουμε τώρα στη θέση του v τα $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ βλέπουμε ότι για κάθε ακμή e ισχύει

$$l_T(f(e)) = \lambda l_T(e).$$

■

Με την μετρική του παραπάνω λήμματος η train track απεικόνιση καθίσταται βέλτιστη.

Μια συνέπεια του Θεωρήματος 3.9.10, είναι ότι η ιδιοτιμή Perron-Frobenius λ στην προηγούμενη απόδειξη δεν εξαρτάται από την επιλογή του train-track αντιπροσώπου f του ϕ , αλλά είναι μονοσήμαντα καθορισμένη από τον αυτομορφισμό ϕ και για αυτό το λόγο συμβολίζεται επίσης με λ_ϕ . Επίσης, αφού οι εσωτερικοί αυτομορφισμοί αναπαρίστανται από ισομετρίες προκύπτει εύκολα ότι ο αριθμός λ_ϕ δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου στην κλάση $\Phi = [\phi] \in \text{Out}(G)$. Αυτός είναι ο λόγος που συμβολίζουμε επίσης με λ_Φ . Βλ. επίσης την Παρατήρηση 2.7.3 στο [57].

Για μια αναλυτική περιγραφή της παραπάνω ενότητας σε μια γενικότερη κατηγορία G -δέντρων βλ. ενότητα 4.2 στο [33].

Κεφάλαιο 4

Γραμμώσεις

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στις γραμμώσεις (laminations) για αυτομορφισμούς ελευθέρων γινομένων. Η συγκεκριμένη έννοια εισήχθη αρχικά από τους Bestvina, Feighn και Handel στο [41] για την περίπτωση των ελευθέρων ομάδων και γενικεύθηκε αργότερα για την περίπτωση των ελευθέρων γινομένων στο [13]. Στα παρακάτω ακολουθούμε το άρθρο [13].

4.1 Εισαγωγικά

Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Σταθεροποιούμε μια ανάλυση της G ως ελεύθερο γινόμενο και συμβολίζουμε με $\mathcal{O}$ τον αντίστοιχο σχετικό εξωτερικό χώρο. Υπενθυμίζουμε ότι, αν

$$G = G_1 * \cdots * G_q * F_r$$

είναι μια ανάλυση της G όπου F_r είναι ελεύθερη ομάδα τάξης r , ο σχετικός εξωτερικός χώρος $\mathcal{O} = \mathcal{O}(G, (G_i)_{i=1}^q, F_r)$ αποτελείται από τα μετρικά δέντρα T , ως προς G -ομοιοθεσία, τα οποία ικανοποιούν τα εξής:

- Η δράση της G στο T είναι ελαχιστική.
- Οι σταθεροποιούσες των ακμών είναι τετριμμένες.
- Υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος τροχιές κορυφών με μη-τετριμμένες σταθεροποιούσες. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε παράγοντα G_i υπάρχει ακριβώς μία τροχιά κορυφών Gu_i με σταθεροποιούσες συζυγή της G_i . Όλες οι κορυφές στις τροχιές των u_i θα ονομάζονται μη-ελεύθερες κορυφές.

- Οι υπόλοιπες κορυφές έχουν τετριμμένες σταθεροποιούσες (θα τις ονομάζουμε ελεύθερες κορυφές) και υποθέτουμε ότι έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3.

Έστω $\Phi \in \text{Out}(G, \mathcal{O})$ ένας ανάγωγος αυτομορφισμός με ανάγωγες δυνάμεις ως προς τον εξωτερικό χώρο $\mathcal{O}$ με $\lambda_\Phi > 1$. Έστω $f : A \rightarrow \Phi(A)$ όπου $A \in \mathcal{O}$, ένας βέλτιστος, train track αντιπρόσωπος του Φ . Για έναν τέτοιο αντιπρόσωπο και για κάθε ακμή e του A θα έχουμε ότι το μήκος του μονοπατιού $f(e)$ θα ισούται με $\lambda = \lambda_\Phi > 1$ φορές το μήκος της e . Αφού η f αυξάνει το μήκος κάθε ακμής $\lambda > 1$ φορές και το γράφημα A/G είναι πεπερασμένο, θα υπάρχει σημείο $x \in A$ στο εσωτερικό κάποιας ακμής e και κάποιος αρκετά μεγάλος $k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $f^k(x) = gx$, για κάποιο $g \in G$. Μπορούμε να αλλάξουμε ισομετρικά τη δράση της G στο $\Phi^k(A)$, συνθέτοντας με τον εσωτερικό αυτομορφισμό που επάγεται από το g , και να υποθέσουμε ότι $f^k(x) = x$. Η κατασκευή των γραμμώσεων θα γίνει μέσω του ορίου $f^k(e)$ καθώς $k \rightarrow +\infty$ και $e \in E(A)$, οπότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την f με κάποια δύναμη f^k χωρίς να αλλάξει η κατασκευή. Έτσι, στο εξής θα υποθέτουμε ότι $f(x) = x$.

Έστω $x \in A$ όπως παραπάνω. Θεωρούμε μια ϵ -περιοχή U του x , για κάποιο αρκετά μικρό ϵ έτσι ώστε η U να βρίσκεται στο εσωτερικό της ακμής e . Τότε για κάθε $N > 0$ θα έχουμε ότι $U \subset f^N(U)$, αφού $f(x) = x$ και η f αυξάνει τα μήκη. Παρατηρούμε ότι η U είναι f -επιτρεπτή (δεν διπλώνεται μέσω της f), αφού κάθε ακμή είναι f -επιτρεπτή, και άρα, από τις ιδιότητες των train track απεικονίσεων, κάθε $f^k(U)$ είναι f -επιτρεπτή.

Κάθε ισομετρία $l : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ με $l(0) = x$ επεκτείνεται σε μοναδική ισομετρία $l : \mathbb{R} \rightarrow A$ έτσι ώστε $l(\lambda^N t) = f^N(l(t))$ για κάθε $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η διπλά άπειρη γραμμή l προκύπτει από επαναλήψεις μιας περιοχής του x .

Ορισμός 4.1.1. 1. Δύο ισομετρικές εμφυτεύσεις $C : [a, b] \rightarrow A$ και $D : [c, d] \rightarrow A$, με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, θα λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχει ισομετρία $q : [a, b] \rightarrow [c, d]$ έτσι ώστε $Dq = C$. Αυτή η σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ισομετρικών εμφυτεύσεων από ένα πεπερασμένο διάστημα στο A .

2. Έστω P η κλάση ισοδυναμίας μιας ισομετρικής εμφύτευσης $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ και $f : A \rightarrow \Phi(A)$ ένας train track αντιπρόσωπος του αυτομορφισμού Φ , όπως παραπάνω. Ορίζουμε $f(P)$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας της $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow A$ (όπου στη γεωδαισιακή $[f(\gamma)]$ έχουμε αλλάξει τα μήκη των ακμών για να γίνει ισομετρική εμφύτευση).

3. Ένα τμήμα γραμμής μιας ισομετρικής εμφύτευσης $\mathbb{R} \rightarrow A$ είναι η κλάση ισοδυναμίας κάποιου περιορισμού της $\mathbb{R} \rightarrow A$ σε ένα πεπερασμένο διάστημα.

Σε κάθε ισομετρική εμφύτευση $l : \mathbb{R} \rightarrow A$ αντιστοιχίζουμε το σύνολο I_l των τμημάτων γραμμών της l . Στη συνέχεια ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ισομετρικών εμφυτεύσεων $\mathbb{R} \rightarrow A$.

Ορισμός 4.1.2. Έστω l, l' δύο ισομετρικές εμφυτεύσεις $\mathbb{R} \rightarrow A$. Οι l, l' θα λέγονται *ισοδύναμες* αν $I_l = GI_{l'}$. Με άλλα λόγια, οι l, l' θα λέγονται *ισοδύναμες* αν για κάθε τμήμα γραμμής P της l υπάρχει στοιχείο $g \in G$ και τμήμα γραμμής Q της l' έτσι ώστε $P = gQ$ και αντίστροφα. Δηλαδή κάθε τμήμα γραμμής της l απεικονίζεται μέσω κάποιου στοιχείου της G σε κάποιο τμήμα γραμμής της l' . *Ισοδύναμα*, οι l, l' λέγονται *ισοδύναμες* αν έχουν τις ίδιες τροχιές από τμήματα γραμμής.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει άμεσα ότι αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε να ισχύει $l(t) = gl'(t)$ για κάθε t , τότε οι l, l' είναι ισοδύναμες.

Το παρακάτω λήμμα δείχνει ότι αν κατασκευάσουμε ένα διπλά άπειρο μονοπάτι με επαναλήψεις μια περιοχής ενός άλλου περιοδικού σημείου ($f^m(y) = y$), τότε αυτή θα είναι ισοδύναμη με την αρχική l που κατασκευάσαμε χρησιμοποιώντας το περιοδικό σημείο x . Αντικαθιστώντας την f με τη δύναμη f^{km} μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) = x$ και $f(y) = y$.

Λήμμα 4.1.3. Αν $y \in A$ είναι κάποιο άλλο f -περιοδικό σημείο στο εσωτερικό κάποιας ακμής του A και η l' προκύπτει από επαναλήψεις μιας περιοχής του y , τότε οι l, l' είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι κάθε τμήμα γραμμής της l απεικονίζεται από κάποιο στοιχείο της G σε κάποιο τμήμα γραμμής της l' . Το αντίστροφο θα το έχουμε λόγω συμμετρίας.

Αφού η απεικόνιση f είναι αντιπρόσωπος ενός ανάγωγου αυτομορφισμού (και το ίδιο ισχύει για κάθε δύναμη του f), η l' περιέχει στοιχεία από όλες τις τροχιές ακμών, γιατί αλλιώς θα μπορούσαμε να βρούμε ένα f -αναλλοίωτο γνήσιο G -υποδέντρο του A , το οποίο περιέχει τον άξονα κάποιου υπερβολικού στοιχείου, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο Φ είναι ανάγωγος. Συγκεκριμένα, αν το x περιέχεται στο εσωτερικό μιας ακμής e , τότε υπάρχει κάποιο $g \in G$ έτσι ώστε $gx \in ge \subseteq l'$. Επίσης, υπάρχει μια ισομετρία $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (a - \epsilon, a + \epsilon)$ έτσι ώστε $l(t) = gl'(\Psi(t))$.

Έστω $N' \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $l'(\lambda^{N'}t) = f^{N'}(l'(t))$. Αν U είναι μια ϵ -περιοχή του x στην e (όπως στην αρχική κατασκευή), τότε για κάθε $t \in U$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} l(\lambda^{\nu NN'}t) &= f^{\nu NN'}(l(t)) = f^{\nu NN'}(gl'(\Psi(t))) = \\ \Phi^{\nu NN'}(g)f^{\nu NN'}(l'(\Psi(t))) &= \Phi^{\nu NN'}(g)l'(\lambda^{\nu NN'}\Psi(t)). \end{aligned}$$

Αφού κάθε διάστημα (a, b) περιέχεται σε κάποιο διάστημα της μορφής $\lambda^{\nu NN'}(-\epsilon, \epsilon)$ για αρκετά μεγάλο ν , έπεται ότι κάθε τμήμα γραμμής της l απεικονίζεται από κάποιο $\Phi^{\nu NN'}(g) \in G$ σε κάποιο τμήμα γραμμής της l' . ■

4.2 Ευσταθείς γραμμώσεις για train track σημεία πλήρως ανάγωγων αυτομορφισμών

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τον ορισμό της ευσταθούς γράμμωσης (stable lamination) σε A -συντεταγμένες, όπου το $A \in \mathcal{O}$ είναι ένα train track σημείο του πλήρως ανάγωγου (IWIP) αυτομορφισμού $\phi \in \text{Aut}(G, \mathcal{O})$, δηλαδή ο ϕ αναπαρίσταται από μία train track απεικόνιση $f : A \rightarrow A$.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $f : A \rightarrow A$ ένας train track αντιπρόσωπος του ϕ . Η ευσταθής γράμμωση (stable lamination) σε A -συντεταγμένες που αντιστοιχεί στον f , είναι η κλάση ισοδυναμίας των ισομετρικών εμφυτεύσεων $\mathbb{R} \rightarrow A$ που περιέχει κάποια (και άρα από το προηγούμενο λήμμα κάθε) εμφύτευση που προκύπτει, όπως είπαμε παραπάνω, με επαναλήψεις μιας περιοχής ενός περιοδικού σημείου. Συμβολίζουμε με $\Lambda = \Lambda_f^+(A)$. Οι εμφυτεύσεις που ανήκουν στην κλάση Λ ονομάζονται γραμμές (leaves) και τα τμήματα (leaf segments) κάποιας γραμμής (leaf) της Λ ονομάζονται τμήματα γραμμής της ευσταθούς γράμμωσης Λ .

Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή l της Λ περιέχει κάποιο στοιχείο της τροχιάς κάθε τμήματος οποιασδήποτε γραμμής l' της Λ . Επίσης, αφού ο f είναι train track αντιπρόσωπος, έχουμε ότι κάθε τμήμα μιας γραμμής της Λ είναι f -επιτρεπτό. Συγκεκριμένα, αν P είναι ένα τμήμα γραμμής της Λ , τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $f^k(P) = [f^k(P)]$ όπου ως συνήθως με $[p]$ συμβολίζουμε το ανηγμένο μονοπάτι που αντιστοιχεί στο μονοπάτι p του δέντρου A .

Η παρακάτω πρόταση περιέχει τις βασικές ιδιότητες της ευσταθούς γραμμώσεως Λ .

Πρόταση 4.2.2. 1. Κάθε ακμή e του A είναι τμήμα κάποιας γραμμής l της Λ .

2. Κάθε f -επανάληψη (iteration) ενός τμήματος γραμμής της Λ είναι τμήμα γραμμής.

3. Κάθε υποτμήμα ενός τμήματος γραμμής είναι επίσης τμήμα γραμμής.

4. Κάθε τμήμα γραμμής είναι υποτμήμα του $f^k(e)$ όπου n, e είναι κατάλληλη ακμή του A και $k \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο.

5. Για κάθε τμήμα γραμμής P της Λ , υπάρχει τμήμα γραμμής P' έτσι ώστε $f(P') = P$.

6. Αν το α είναι ένα τμήμα του δέντρου A , που αποτελεί θεμελιώδη περιοχή για τον άξονα A_g ενός υπερβολικού στοιχείου g (δηλαδή $A_g = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n \alpha$), το οποίο διέρχεται από k ακμές (προσμετρώντας και την πολλαπλότητα), τότε n (ανηγμένη) εικόνα κάθε f -επανάληψης του α μπορεί να γραφεί ως παράθεση το πολύ k τμημάτων γραμμής.

Απόδειξη. Έστω l η γραμμή της Λ η οποία προκύπτει από τις f -επαναλήψεις ενός περιοδικού σημείου x .

1. Είναι άμεσο από την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος. Πράγματι, αφού ο f είναι αντιπρόσωπος ενός πλήρως ανάγωγου αυτομορφισμού, έπεται ότι το l περιέχει στοιχεία της τροχιάς κάθε ακμής. Συγκεκριμένα, αν e είναι ακμή του A και το $g \in G$ είναι τέτοιο ώστε $ge \in l$, τότε $e \in g^{-1}l$. Όμως, η $g^{-1}l$ είναι ισοδύναμη με την l και άρα είναι γραμμή της Λ . Επομένως, η ακμή e είναι τμήμα γραμμής μιας γραμμής και άρα, εξ ορισμού, είναι τμήμα γραμμής της Λ .

2. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν το σημείο x είναι f -περιοδικό, τότε και το $f^m(x)$ είναι επίσης f -περιοδικό και έχει την ίδια περίοδο. Συμβολίζουμε με l' την ισομετρική εμφύτευση που προκύπτει από τις f -επαναλήψεις μιας περιοχής του $f(x)$. Αν το P είναι ένα τμήμα γραμμής της l , τότε το $f(P)$ είναι τμήμα γραμμής της l' . Αφού, από το προηγούμενο λήμμα, οι l και l' είναι ισοδύναμες, έχουμε ότι η l' είναι γραμμή της Λ και άρα το $f(P)$ είναι τμήμα γραμμής της Λ . Ομοίως μπορούμε να δούμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε f^k , $k \in \mathbb{N}$.

3. Άμεσο από τον ορισμό των τμημάτων γραμμής της Λ .

4. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι ο f αυξάνει το μήκος κάθε ακμής κατά λ και αφού κάθε τμήμα γραμμής P είναι f -επιτρεπτό (και άρα από τις ιδιότητες των train track απεικονίσεων κάθε $f^k(P)$ είναι f -επιτρεπτό), έπεται ότι το μήκος του P αυξάνεται από τον f^k κατά λ^k . Αν e είναι η μοναδική ακμή του A που περιέχει το f -περιοδικό σημείο x , τότε, από την κατασκευή της l , κάθε τμήμα γραμμής περιέχεται σε κάποια αρκετά μεγάλη f -επανάληψη $f^k(e)$. Επομένως, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο για την l και άρα, για τις ισοδύναμες γραμμές της Λ , έπεται από το γεγονός ότι κάθε άλλη γραμμή της Λ είναι ισοδύναμη με την l .
5. Έστω P ένα τμήμα γραμμής της Λ . Από το προηγούμενο, υπάρχει κάποια f -επανάληψη κάποιας ακμής η οποία να περιέχει το P . Από το 1, όλες οι ακμές είναι τμήματα γραμμής και άρα υπάρχει τμήμα γραμμής P'' έτσι ώστε το P να περιέχεται στο $f^m(P'')$ για κάποιο αρκετά μεγάλο $m \in \mathbb{N}$. Αφού οι f -επαναλήψεις και τα υπο-τμήματα ενός τμήματος γραμμής είναι τμήματα γραμμής, από τα 2 και 3, έχουμε ότι υπάρχει υποτμήμα P' του $f^{m-1}(P'')$ με την ιδιότητα $P = f(P')$.
6. Έπεται άμεσα από τα προηγούμενα, αφού οι ακμές είναι τμήματα γραμμής και οι f -επαναλήψεις των τμημάτων γραμμής είναι τμήματα γραμμής.

■

Από το 2 της παραπάνω πρότασης προκύπτει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το διπλά άπειρο μονοπάτι $f^k(l)$ είναι μια γραμμή της ευσταθούς γραμμωσής Λ .

Ορισμός 4.2.3. Μια ακολουθία α_i ισομετρικών εμφυτεύσεων $[0, 1]_i \rightarrow A$, όπου n μετρική στο $[0, 1]_i$ είναι πολλαπλάσιο της συνήθους μετρικής και εξαρτάται μόνο από το i , συγκλίνει ασθενώς στη Λ , αν για κάθε $L > 0$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{m(\{x \in [0, 1]_i \mid n \text{ } L\text{-περιοχή του } x \text{ είναι τμήμα γραμμής}\})}{m([0, 1]_i)} = 1$$

όπου m είναι κατάλληλο πολλαπλάσιο του μέτρου Lebesgue.

Ορισμός 4.2.4. 1. Αν $h : T \rightarrow T$ είναι μια $\mathcal{O}$ -απεικόνιση, θα λέμε ότι ένα σημείο $x \in T$ είναι h -περιοδικό (mod G) αν υπάρχει στοιχείο $g \in G$ και θετικός ακέραιος k έτσι ώστε $h^k(x) = gx$.

2. Έστω $h : T \rightarrow T$ ένας τοπολογικός αντιπρόσωπος ενός αυτομορφισμού $\Phi \in \text{Out}(G, \mathcal{O})$ και p ένα (ανηγμένο) μονοπάτι στο T . Λέμε ότι ένα μονοπάτι p του

T είναι N -περιοδικό αν αμφότερα τα άκρα του p είναι h -περιοδικά (με την ίδια περίοδο k) και οι προβολές των μονοπατιών $[h^k(p)], p$ στο γράφημα πηλίκο T/G ταυτίζονται.

Λήμμα 4.2.5. Έστω Φ ένας πλήρως ανάγωγος αυτομορφισμός και $f : A \rightarrow A$ ένας *train track* αντιπρόσωπος του Φ . Αν α είναι ένα τμήμα στο δέντρο A που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη περιοχή ενός υπερβολικού στοιχείου g , έτσι ώστε οι (ανηγμένες) εικόνες $[f^k(\alpha)]$ των $f^k(\alpha)$ να έχουν ομοιόμορφα φραγμένο μήκος για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε το α είναι N -περιοδικό.

Απόδειξη. Έστω ένα τμήμα α όπως στη διατύπωση του λήμματος. Αν υπάρχουν άπειρα $k_i \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε το $f^{k_i}(\alpha)$ να διέρχεται από πεπερασμένες το πλήθος τροχιές στροφών, τότε η G -τροχιά του α είναι f -περιοδική (δηλαδή η κλάση συζυγίας $[g]$ είναι Φ -περιοδική). Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος G -τροχιές στροφών επί μη ελεύθερων κορυφών από τις οποίες διέρχεται μια άπειρη υπακολουθία της $f^k(\alpha)$. Μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε τον Φ με μια δύναμη Φ^n , έτσι ώστε ο Φ^n να σταθεροποιεί τις κλάσεις συζυγίας των ελλειπτικών παραγόντων G_i της G ή ισοδύναμα ο *train track* αντιπρόσωπος να σταθεροποιεί την G -τροχιά όλων των μη-ελεύθερων κορυφών.

Αφού τα μήκη των $[f^k(\alpha)]$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα και υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος προβολές από βρόγχους στο πεπερασμένο πηλίκο $\Gamma = A/G$, έχουμε ότι το α είναι N -περιοδικό, ή με άλλα λόγια, υπάρχουν άπειρες το πλήθος θετικές δυνάμεις $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$ του f έτσι ώστε για κάθε i τα μονοπάτια $\gamma_i = [f^{m_i}(\alpha)]$ να ανήκουν στην ίδια τροχιά. Θα λέμε ότι η εικόνα της κορυφής w ενός μονοπατιού p επιβιώνει στην ανηγμένη f^k -εικόνα, αν το $f^k(w)$ περιέχεται στο $[f^k(p)]$. Αφού οι διακεκρωμένες μη-ελεύθερες κορυφές απεικονίζονται μέσω της f σε διακεκρωμένες μη-ελεύθερες κορυφές, έπεται ότι μια μη-ελεύθερη κορυφή v του p , επιβιώνει στο $[f^k(p)]$ εκτός αν έχει την ίδια f^k -εικόνα με κάποια ελεύθερη κορυφή του p ή εκτός αν η στροφή του p που περιέχει την w είναι μη επιτρεπτή. Υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος f -μη επιτρεπτές στροφές, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε (περνώντας σε υπακολουθία) ότι όλα τα γ_i διέρχονται από τις ίδιες τροχιές μη-ελεύθερων στροφών οι οποίες δεν επιβιώνουν σε κάποια f^k -επανάληψη.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει το πολύ μία μη-ελεύθερη κορυφή που επιβιώνει σε κάθε γ_i και ότι τις αντίστοιχες στροφές τις διατρέχουν άπειρες το πλήθος τροχιές στροφών,

τότε έχουμε ότι άπειρα το πλήθος από τα γ_i διαφέρουν κατά ένα ελλειπτικό στοιχείο, ή με άλλα λόγια, υπάρχουν $m \neq n$ με $\Phi^m([g]c) = \Phi^n([g])$ όπου $c \in G_v$ και το ζητούμενο έπεται.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο τέτοιες μη-ελεύθερες κορυφές v, w στο γ , τότε μπορούμε να δούμε ότι τα v, w έχουν συζυγείς ομάδες κορυφών, αλλιώς θα μπορούσαμε να βρούμε μία Φ -περιοδική κλάση συζυγίας ενός μη-ελλειπτικού, ελεύθερου παράγοντα το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο Φ^m είναι ανάγωγος για κάθε m . Στην πραγματικότητα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν m τέτοιες κορυφές και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το α μπορεί να γραφεί ως παράθεση βρόγχων β_i , $i = 1, \dots, m$ κάθε ένας από τους οποίους να είναι N -προ-περιοδικός (δηλαδή δύο Φ -επαναλήψεις των β_i να διαφέρουν με στοιχεία από τη G_v) και όπως παραπάνω έχουμε ότι κάθε ένα από αυτά τα μονοπάτια είναι N -περιοδικά. Έπεται ότι το α είναι N -περιοδικό. ■

Πρόταση 4.2.6. *Αν α είναι ένα τμήμα του δέντρου $A \in \mathcal{O}$ το οποίο αντιστοιχεί στη θεμελιώδη περιοχή ενός υπερβολικού στοιχείου g , το οποίο δεν είναι N -περιοδικό, τότε η ακολουθία $[f^i(\alpha)]$, των ανηγμένων εικόνων των $f^i(\alpha)$, συγκλίνει ασθενώς στη Λ .*

Απόδειξη. Το α είναι πεπερασμένο μονοπάτι, συνεπώς διέρχεται από πεπερασμένες το πλήθος μη επιτρεπτές στροφές και πεπερασμένες το πλήθος μη-ελεύθερες στροφές οι οποίες να μην είναι τμήματα γραμμής. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι το α μπορεί να γραφεί ως παράθεση k τμημάτων γραμμής, τότε το α θα περιέχει το πολύ $k - 1$ μη επιτρεπτές στροφές (τα άκρα δεν προσμετρώνται). Αφού η f είναι train track απεικόνιση, το πλήθος των μη επιτρεπτών στροφών στο $[f^i(\alpha)]$ δεν αυξάνεται, το οποίο σημαίνει ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το μονοπάτι $[f^m(\alpha)]$ περιέχει το πολύ $k - 1$ το πλήθος μη επιτρεπτές στροφές. Επομένως, αν τα μήκη των ανηγμένων f -επαναλήψεων του α είναι φραγμένα, τότε από το προηγούμενο λήμμα το α θα είναι N -περιοδικό, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας. Επομένως, υπάρχει κάποιο $[f^i(\alpha)]$ το οποίο να περιέχει αυθαίρετα μεγάλα επιτρεπτά τμήματα και αφού το μήκος του $[f^j(\alpha)]$ αυξάνεται για αρκετά μεγάλα j , έχουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένες L -περιοχές που να περιέχουν σημεία χωρίς τη ζητούμενη ιδιότητα (υπάρχουν το πολύ k τέτοιες περιοχές) και το συνολικό τους μέτρο είναι $2Lk$, το οποίο είναι ομοιόμορφο φράγμα. Επομένως το πηλίκο συγκλίνει στο 1. ■

Υπερβολικά στοιχεία όπως στο παραπάνω λήμμα υπάρχουν πάντα. Για παράδειγμα,

στοιχεία της ομάδας που προέρχονται από απλούς βρόγχους στο γράφημα πηλίκο δεν είναι ποτέ N -περιοδικά, εξ ορισμού του ανάγωγου αυτομορφισμού.

Ορισμός 4.2.7. Μία γραμμή l στο δέντρο A θα λέγεται *σχεδόν-περιοδική*, αν για κάθε $L > 0$ υπάρχει αρκούντως μεγάλο $L' > 0$ έτσι ώστε κάθε υποτμήμα της l μήκους L να εμφανίζεται ως υποτμήμα κάποιας τροχιάς κάθε υποτμήματος της l μήκους L' .

Πρόταση 4.2.8. Κάθε γραμμή της $\Lambda = \Lambda_f^+(A)$ είναι σχεδόν-περιοδική.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αρχικά το ζητούμενο για κάποια l η οποία προκύπτει από τις επαναλήψεις της περιοχής ενός περιοδικού σημείου.

Δείχνουμε αρχικά το ζητούμενο για τμήματα γραμμής Π που αποτελούνται από ακριβώς δύο ακμές. Αν επιλέξουμε $L_0 > \max_e \{\text{μήκος}(e)\}$, τότε κάθε τμήμα γραμμής P με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του L_0 , περιέχει ένα υποτμήμα γραμμής το οποίο είναι μια ακμή. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε N (το οποίο μπορούμε να το επιλέξουμε να είναι πολλαπλάσιο του k), έτσι ώστε, αν τ είναι μια στροφή που διατρέχεται από γραμμές της $\Lambda_f^+(A)$, τότε η εικόνα $f^N(e)$ οποιασδήποτε ακμής e , διέρχεται από κάποια στροφή που είναι στην ίδια G -τροχιά με την τ , αφού υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος κλάσεις ισοδυναμίας στροφών οι οποίες να είναι τμήματα γραμμής. Συγκεκριμένα, για το Π υπάρχει κάποια επανάληψη του μέσω f η οποία να διέρχεται από την τροχιά μιας στροφής Π' που ανήκει στην ίδια τροχιά με το Π , επομένως υπάρχει $g \in G$, έτσι ώστε $\Pi' \subseteq gf^N(P)$.

Αν το P' είναι κάποιο τμήμα γραμμής μήκους $\lambda^N L_0$, τότε $P' = f^N(P)$ για κάποιο τμήμα γραμμής P μήκους L_0 και έτσι $\Pi' \subseteq gP'$. Το ζητούμενο τώρα έπεται από το γεγονός ότι αν τα P, Q είναι επιτρεπτά και στην ίδια τροχιά, τότε οι γεωδαισιακές $f(P), f(Q)$ ανήκουν επίσης στην ίδια τροχιά.

Για τη γενική περίπτωση, για δοθέν $L > 0$, υπάρχει $M > 0$ (το επιλέγουμε να έχει την ιδιότητα $\lambda^{-M}L < 2 \min_e \{\text{μήκος}(e)\}$), έτσι ώστε κάθε τμήμα γραμμής με μήκος μικρότερο ή ίσο του $\lambda^{-M}L$ είναι υποτμήμα ενός τμήματος γραμμής με δύο ακμές, όπως παραπάνω, και θέτουμε $L' = \lambda^{M+N}L_0$.

Έστω P, P' τμήματα γραμμής με μήκη L και L' , αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $P = f^M(\Pi')$ όπου το Π' περιέχεται σε ένα τμήμα γραμμής όπως στην παραπάνω ειδική περίπτωση (από την επιλογή του M) και ομοίως $P' = f^M(\Pi_0)$ για κάποιο τμήμα γραμμής Π_0 μήκους $\lambda^N L_0$. Εφαρμόζοντας την ειδική περίπτωση έχουμε

ότι $\Pi' \subseteq g\Pi_0$ και άρα

$$P' = f^M(\Pi'') \subseteq \dots \subseteq \Phi^M(g)f^M(\Pi_0) = \Phi^M(g)P'$$

για κάποιο Π'' το οποίο είναι στην ίδια τροχιά με το Π' (και συνεπώς το ίδιο ισχύει για τα P και P'). Αφού το l είναι $\Phi^M(g)$ -αναλλοίωτο, έχουμε τη ζητούμενη ιδιότητα.

Είναι άμεσο, λοιπόν, ότι κάθε άλλη γραμμή της Λ είναι σχεδόν-περιοδική, αφού κάθε δύο γραμμές της γράμμωσης, μετά από κάποια μετατόπιση, μπορούν να επιλεγούν να έχουν ένα αυθαίρετα μεγάλο κοινό τμήμα. ■

Το επόμενο λήμμα αποδεικνύεται ακριβώς όπως και το παραπάνω.

Λήμμα 4.2.9. *Αν τα $P_1, \dots, P_k$ είναι τμήματα γραμμής l της Λ , τότε κάθε άλλη γραμμή l' της γράμμωσης Λ έχει την ακόλουθη ιδιότητα: υπάρχει κάποιο L' έτσι ώστε κάθε τμήμα γραμμής Q της l' μήκους L' , να περιέχει τμήματα $g_1P_1, \dots, g_kP_k$ για κατάλληλα $g_1, \dots, g_k \in G$.*

4.3 Επέκταση της ευσταθούς γράμμωσης σε αυθαίρετα σημεία

Έστω $f : A \rightarrow A$ ένας train track αντιπρόσωπος του Φ και $\Lambda_f^+(A)$ η αντίστοιχη ευσταθής γράμμωση (stable lamination), όπως είδαμε στις προηγούμενες ενότητες. Θα επεκτείνουμε τη γράμμωση σε αυθαίρετα σημεία $B \in \mathcal{O}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια βέλτιστη απεικόνιση $\tau : A \rightarrow B$. Για κάθε εμφύτευση $l : \mathbb{R} \rightarrow A$, συμβολίζουμε με $\tau(l) : \mathbb{R} \rightarrow B$ την ισομετρική εμφύτευση που αντιστοιχεί στη σύνθεση τl . Θεωρούμε την ανηγμένη εικόνα της τl στο B στην οποία αντιστοιχεί μια μοναδική ισομετρική εμφύτευση $\mathbb{R} \rightarrow B$, ως προς σύνθεση από αριστερά με ισομετρίες του $\mathbb{R}$.

Λήμμα 4.3.1. 1. *Αν τα $l, l' : \mathbb{R} \rightarrow A$ είναι ισοδύναμες γραμμές της Λ , τότε οι γραμμές $\tau(l), \tau(l')$ είναι επίσης ισοδύναμες.*

2. *Αν η l είναι σχεδόν-περιοδική, τότε η $\tau(l)$ είναι επίσης σχεδόν-περιοδική.*

Απόδειξη. Από το [59] γνωρίζουμε ότι κάθε βέλτιστη απεικόνιση μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως σύνθεση ενός ομοιομορφισμού και μιας πεπερασμένης ακολουθίας από

διπλώσεις. Επομένως, θα δείξουμε το λήμμα αρχικά για ομοιομορφισμούς και στη συνέχεια για διπλώσεις.

Έστω ότι ο τ είναι ομοιομορφισμός. Τότε $[\tau(l)] = \tau(l)$ και το ίδιο ισχύει για την l' .

Για κάθε τμήμα γραμμής P' της $\tau(l)$ υπάρχει κάποιο τμήμα γραμμής P της l έτσι ώστε $P' = \tau(P)$, και επομένως υπάρχει μετατόπιση gP του P , από κάποιο $g \in G$, η οποία να περιέχεται στην l' . Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τμήμα γραμμής $\tau(gP) = gP'$ περιέχεται στην $\tau(l')$. Ομοίως, το αντίστροφο έπεται λόγω συμμετρίας και έτσι οι $\tau(l), \tau(l')$ είναι ισοδύναμες, εξ ορισμού.

Έστω τώρα ότι η l είναι σχεδόν-περιοδική. Σταθεροποιούμε θετικό αριθμό L και παίρνουμε τμήμα γραμμής P' της $\tau(l)$ μήκους L . Τότε, υπάρχει τμήμα γραμμής P μήκους K (το οποίο εξαρτάται μόνο από τα τ, L και όχι από το P) έτσι ώστε $P' = \tau(P)$. Σε αυτή την περίπτωση, ορίζουμε $L'' = L' \text{ Lip}(\tau)$, όπου L' είναι η σταθερά που αντιστοιχεί λόγω σχεδόν-περιοδικότητας στο K . Αν επιλέξουμε ένα τμήμα γραμμής Q' της $\tau(l)$ μήκους L'' , τότε υπάρχουν τμήματα γραμμής Q'', Q της l έτσι ώστε το Q'' να ανήκει στην ίδια τροχιά με το Q' , το Q έχει μήκος τουλάχιστον L' και $\tau(Q) = Q'$. Εφόσον το Q περιέχει τμήματα γραμμής τα οποία είναι στην ίδια τροχιά με κάθε τμήμα γραμμής μήκους το πολύ K , έπεται ότι το Q περιέχει ένα μονοπάτι το οποίο ανήκει στην ίδια τροχιά με το P και άρα το Q' περιέχει κάποιο μονοπάτι το οποίο είναι στην ίδια τροχιά με το P' . Τελικά, έχουμε ότι η $\tau(l)$ είναι σχεδόν-περιοδική.

Υποθέτουμε τώρα ότι η τ είναι μια G -ισομετρική απλή δίπλωση κάποιων τμημάτων a, b με την ίδια τ -εικόνα που ξεκινούν από την ίδια κορυφή v . Έστω c η κοινή εικόνα των a, b μετά τη δίπλωση στο δέντρο B .

Το πρώτο ζητούμενο είναι άμεσο για κάποιο τμήμα γραμμής της $[\tau(l)]$ το οποίο δεν περιέχει στοιχείο της τροχιάς του c , αφού σε τέτοια σημεία η δίπλωση τ δρα ταυτοτικά. Επίσης, αν το P' είναι τμήμα γραμμής της $\tau(l)$ το οποίο περιέχει στοιχεία από την τροχιά του c , τότε υπάρχει κάποιο τμήμα γραμμής P το οποίο περιέχει το ίδιο πλήθος στοιχείων από την τροχιά της στροφής που διπλώνεται και $[\tau(P)] = P'$. Αφού οι l, l' είναι ισοδύναμες, μπορούμε να βρούμε $g \in G$ έτσι ώστε το gP να περιέχεται στην l' και έτσι το $[\tau(gP)]$ είναι τμήμα γραμμής της $[\tau(l')]$. Το $[\tau(gP)]$ είναι μετατόπιση, μέσω του $g \in G$, του P' και άρα οι $[\tau(l)], [\tau(l')]$ είναι ισοδύναμες.

Για την σχεδόν-περιοδικότητα της $[\tau(l)]$, σταθεροποιούμε θετικό αριθμό L . Συμβολίζουμε με M τον μέγιστο αριθμό στοιχείων της τροχιάς του v που περιέχονται σε

κάποιο τμήμα μήκους L . Συμβολίζουμε, επίσης, με L' τον αριθμό που αντιστοιχεί, από τη σχεδόν-περιοδικότητα, στον αριθμό $L'' = L + 2M \cdot \text{μήκος}(a)$. Όπως πριν, αν P' είναι τμήμα γραμμής μήκους L , τότε υπάρχει κάποιο τμήμα γραμμής P το οποίο περιέχει το ίδιο πλήθος στοιχείων από την τροχιά της στροφής που διπλώνεται και $[\tau(P)] = P'$. Ακόμα, από την κατασκευή, το P έχει μήκος το πολύ L'' και έτσι κάποιο τμήμα P'' στην ίδια τροχιά με το P περιέχεται σε κάθε τμήμα γραμμής της l μήκους L' . Αν πάρουμε κάποιο τμήμα γραμμής Q της $[\tau(l)]$ μήκους L' , τότε η προεικόνα του έχει μήκος τουλάχιστον L' , συνεπώς η προεικόνα έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Επομένως, το Q περιέχει ένα μονοπάτι που ανήκει στην ίδια τροχιά με το P' , οπότε όπως παραπάνω έχουμε τη σχεδόν-περιοδικότητα. ■

Ορισμός 4.3.2. Η ευσταθής γράμμωση του αντιπροσώπου f σε B —συντεταγμένες είναι η κλάση ισοδυναμίας $\Lambda_f^+(B)$ που περιέχει το $\tau(l)$ για κάποιο (και άρα από το προηγούμενο λήμμα κάθε) γραμμή l της $\Lambda_f^+(A)$.

Συνδυάζοντας το γεγονός ότι η βέλτιστη απεικόνιση τ παραγοντοποιείται ως σύνθεση ενός ομοιομορφισμού και μιας πεπερασμένης ακολουθίας απλών διπλώσεων μαζί με τις ιδιότητες της $\Lambda_f^+(A)$, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3.3. Αν το β είναι ένα τμήμα στο $B \in \mathcal{O}$ που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη περιοχή ενός υπερβολικού στοιχείου $g \in G$ και το οποίο δεν είναι N —περιοδικό, τότε η ακολουθία $\{\tau(f^i(\beta))\}$ συγκλίνει ασθενώς στη $\Lambda_f^+(B)$.

Λήμμα 4.3.4. Αν $h : B \rightarrow B$ είναι *train track* αντιπρόσωπος του Φ και f όπως πριν, τότε $\Lambda_f^+(B) = \Lambda_h^+(B)$.

Απόδειξη. Έστω a μια θεμελιώδης περιοχή ενός υπερβολικού στοιχείου που ικανοποιεί τις υποθέσεις των Προτάσεων 4.2.6 και 4.3.3 (υπάρχουν πάντα τέτοια υπερβολικά στοιχεία, για παράδειγμα αυτά που αντιστοιχούν σε απλούς βρόγχους). Από τις προτάσεις που μόλις αναφέρθηκαν οι ακολουθίες $\{\tau(f^i(a))\}$, $\{h^i(\tau(a))\}$ συγκλίνουν ασθενώς στα $\Lambda_h^+(B)$ και $\Lambda_f^+(B)$, αντίστοιχα. Αφού οι $\tau f^i, h^i \tau$ είναι $\mathcal{O}$ —απεικονίσεις από το A στο $\Phi(B)$, οι ανηγμένες εικόνες τους συμπίπτουν σε κάθε μονοπάτι, αν διαγράψουμε κάποια φραγμένα τμήματα κοντά στα άκρα. Συνεπώς, υπάρχουν γραμμές l, l' των $\Lambda_h^+(B)$ και $\Lambda_f^+(B)$, αντίστοιχα με αυθαίρετως μεγάλα κοινά τμήματα γραμμής. Εύκολα προκύπτει ότι οι l, l' είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα, έστω P ένα τμήμα γραμμής της l και $L = \text{μήκος}(P)$ το μήκος του. Από τις ιδιότητες των γραμμώσεων υπάρχει κάποιο L'

τέτοιο ώστε για κάθε τμήμα γραμμής P' μήκους L' , υπάρχει $g \in G$ με $P \subseteq gP'$. Μπορούμε να βρούμε ένα κοινό τμήμα Q των l, l' με μήκος τουλάχιστον L' , οπότε εφαρμόζοντας την ιδιότητα που μόλις αναφέραμε για το Q , βρίσκουμε $g \in G$ τέτοιο ώστε $P \subseteq gQ \subseteq l$. Όμως $Q \subseteq l'$ οπότε έχουμε $P \subseteq gQ \subseteq gl'$, το οποίο μας δίνει $g^{-1}P \subseteq l'$.

Έχουμε αποδείξει ότι κάθε τροχιά κάποιου τμήματος γραμμής της l περιέχεται στην l' . Λόγω συμμετρίας, το αντίστροφο ισχύει επίσης οπότε οι l, l' είναι ισοδύναμες. Τελικά $\Lambda_h^+(B) = \Lambda_f^+(B)$. ■

Από το λήμμα που προηγήθηκε προκύπτει, ότι ο επόμενος ορισμός δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο που θα επιλέξουμε αλλά μόνο από τον αυτομορφισμό Φ .

Ορισμός 4.3.5. Έστω $f : A \rightarrow A$ ένας *train track* αντιπρόσωπος του αυτομορφισμού Φ . Η ευσταθής γράμμωση Λ_Φ^+ που αντιστοιχεί στον $\Phi \in \text{Out}(G, \mathcal{O})$ είναι η συλλογή $\{\Lambda_f^+(B) \mid B \in \mathcal{O}\}$. Η ασταθής γράμμωση Λ_Φ^- του Φ είναι η ευσταθής γράμμωση του Φ^{-1} .

Συμβολίζουμε με $\mathcal{IL}$ το σύνολο των ευσταθών γραμμώσεων Λ_Φ^+ καθώς ο Φ διατρέχει όλους τους πλήρως ανάγωγους αυτομορφισμούς (ως προς το $\mathcal{O}$). Η ομάδα $\text{Out}(G, \mathcal{O})$ δρα στο σύνολο $\mathcal{IL}$ με

$$\Psi \Lambda_\Phi^+ = \Lambda_{\Psi\Phi\Psi^{-1}}^+.$$

Συγκεκριμένα, αν l είναι ένα γραμμή της Λ_Φ^+ σε S -συντεταγμένες και $h : S \rightarrow S$ είναι μία $\mathcal{O}$ -απεικόνιση που είναι αντιπρόσωπος του Ψ , τότε η $[h(l)]$ είναι αντιπρόσωπος κάποιας γραμμής της $\Lambda_{\Psi\Phi\Psi^{-1}}^+$. Ακόμα, για κάθε πλήρως ανάγωγο αυτομορφισμό Φ και κάθε $\Psi \in \text{Out}(G, \mathcal{O})$ ο αυτομορφισμός $\Psi\Phi\Psi^{-1}$ είναι επίσης πλήρως ανάγωγος (ως προς το $\mathcal{O}$), οπότε η δράση είναι καλά ορισμένη.

Η σταθεροποιούσα της ευσταθούς γράμμωσης $\Lambda = \Lambda_\Phi^+$ υπό την παραπάνω δράση θα συμβολίζεται με $\text{Stab}(\Lambda) = \text{Stab}(\Lambda_\Phi^+)$.

4.4 Υποομάδες που φέρουν τη γράμμωση

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε σταθεροποιήσει μια ομάδα G , μια πεπερασμένη μη τετριμμένη διάσπαση της G ως ελεύθερο γινόμενο, τον αντίστοιχο σχετικό εξωτερικό χώρο $\mathcal{O}$ και έναν πλήρως ανάγωγο αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(G, \mathcal{O})$. Συμβολίζουμε με $\Lambda = \Lambda_\Phi^+$ την αντίστοιχη ευσταθή γράμμωση.

Όπως έχουμε αναφέρει, κάθε $\mathcal{O}$ -ανάγωγος αυτομορφισμός επιδέχεται train-track αντιπρόσωπο. Ωστόσο, αυτό δεν είναι πάντα εφικτό για μη ανάγωγους αυτομορφισμούς. Από την άλλη, υπάρχει η πιο γενική έννοια των relative train-track αντιπροσώπων, η οποία εισήχθη για την περίπτωση των ελευθέρων ομάδων στο [40] και γενικεύθηκε για την περίπτωση των ελευθέρων γινομένων στο [33] (βλέπε επίσης [7] και [59]). Στο [33] αποδείχθηκε ότι κάθε αυτομορφισμός ενός ελευθέρου γινομένου επιδέχεται έναν relative train-track αντιπρόσωπο. Πιο συγκεκριμένα, έστω $f : T \rightarrow T$ μια $\mathcal{O}$ -απεικόνιση έτσι ώστε το δέντρο T επιδέχεται μια στρωματοποίηση:

$$T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots \subseteq T_k = T$$

όπου κάθε T_i είναι ένα f -αναλλοίωτο G -υπογράφημα. Το r -στρώμα της f το οποίο συμβολίζουμε με H_r είναι η κλειστότητα της διαφοράς $T_r - T_{r-1}$ στο T . Στην περίπτωση που ο αντιπρόσωπος f είναι απεικόνιση γραφημάτων, τότε όπως έχουμε δει ορίζεται ο πίνακας μετάβασης $M(f)$ του f : αν $e_1, \dots, e_k$ είναι αντιπρόσωποι των τροχιών των ακμών του T , τότε το (i, j) στοιχείο, $m_{i,j}$, του $M(f)$ είναι ο μη αρνητικός ακέραιος ο οποίος ισούται με το πλήθος των εμφανίσεων ακμών της τροχιάς της e_i (με κάθε κατεύθυνση) στο μονοπάτι $f(e_j)$. Έτσι, κάθε στρώμα H_r αντιστοιχεί σε έναν τετραγωνικό υποπίνακα M_r του $M(f)$. Το H_r λέγεται ανάγωγο (αντίστοιχα τετρωμένο) αν ο M_r είναι ανάγωγος (αντίστοιχα μηδενικός). Επιλεπτόνοντας τη στρωματοποίηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε στρώμα είναι ανάγωγο ή τετρωμένο. Συνεπώς για κάθε ανάγωγο υποπίνακα M_r υπάρχει Perron-Frobenius ιδιοτιμή $\lambda_r \geq 1$, η Perron-Frobenius ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο στρώμα H_r . Ένα μη μηδενικό στρώμα H_r λέγεται εκθετικό αν $\lambda_r > 1$ και πολυωνυμικό διαφορετικά.

Για τον ορισμό των relative train track αντιπροσώπων στην περίπτωση των ελευθέρων ομάδων βλ. Ορισμός 4.6.35, ενώ για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα [33],[53].

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ότι δεν είναι εφικτό ένα γνήσιο υποδέντρο να περιέχει όλες τις γραμμές της γράμμωσης. Επιπλέον, θα δούμε ότι κάθε relative train track αντιπρόσωπος h ενός αυτομορφισμού Ψ ο οποίος ανήκει στη σταθεροποιούσα της γράμμωσης, επάγει (μετά από ύψωση σε κατάλληλο εκθέτη) ισομετρία, αν περιοριστεί σε οποιοδήποτε γνήσιο h -αναλλοίωτο υποδέντρο.

Ο πίνακας μετάβασης $M(f)$ ενός τοπολογικού αντιπροσώπου f κάποιου αυτομορφισμού που είναι πλήρως ανάγωγος είναι ανάγωγος και επιπλέον για κάθε k , ο $M(f^k)$

είναι επίσης ανάγωγος.

Ορισμός 4.4.1. Έστω A μια υποομάδα της G πεπερασμένης Kurosh τάξης. Αν $T \in \mathcal{O}$, τότε θα συμβολίζουμε με T_A το ελαχιστικό A -αναλλοίωτο υποδέντρο του T . Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε κορυφή $v \in V(T_A)$ ισχύει $\text{Stab}_G(v) = \text{Stab}_A(v)$. Θα λέμε ότι η υποομάδα A φέρει τη γράμμωση Λ , αν υπάρχει κάποια γραμμή l της Λ η οποία να περιέχεται στο T_A .

Παρατήρηση 4.4.2. Αν η υποομάδα $A \leq G$ φέρει τη γράμμωση Λ , τότε για κάθε κορυφή $v \in V(T)$ υπάρχει $g \in G$ έτσι ώστε $gv \in T_A$ (ειδικότερα, το T_A περιέχει στοιχεία από την τροχιά κάθε μη-ελεύθερης κορυφής).

Παρατήρηση 4.4.3. Κάθε δύο γραμμές της γράμμωσης Λ προβάλλονται στο ίδιο διπλά άπειρο μονοπάτι στο πηλίκο $\Gamma = T/G$.

Πρόταση 4.4.4. Αν η υποομάδα $A \leq G$ φέρει τη γράμμωση $\Lambda = \Lambda_\Phi^+$, τότε η A έχει πεπερασμένο δείκτη στη G .

Απόδειξη. Έστω $f : T \rightarrow T$ ένας train track αντιπρόσωπος του Φ και $\Gamma = T/G$ το γράφημα πηλίκο. Αφού οι σταθεροποιούσες κάθε μη-ελεύθερης κορυφής στο T_A είναι ίδιες με τις σταθεροποιούσες υπό τη δράση της G , η φυσική απεικόνιση $T_A/A \rightarrow \Gamma$, $[x]_A \mapsto [x]_G$ είναι η ισομετρική εμφύτευση που αντιστοιχεί στην $A \leq G$. Η υπόθεση για το πεπερασμένο της Kurosh τάξης της A είναι ισοδύναμη με το να είναι το γράφημα πηλίκο A/T_A πεπερασμένο, το οποίο από την Παρατήρηση 4.4.2, περιέχει κάθε μη ελεύθερη κορυφή του Γ . Έτσι, με την ορολογία του [18] (στο οποίο παραπέμπουμε για περισσότερες λεπτομέρειες και πληροφορίες σχετικά με χώρους επικάλυψης γραφημάτων ομάδων), μπορούμε να συμπληρώσουμε την ισομετρική εμφύτευση γραφημάτων ομάδων $T_A/A \rightarrow T/G$, προσθέτοντας κορυφές και ακμές, σε ένα συνεκτικό πεπερασμένο (finite-sheeted) χώρο επικάλυψης $p : \Gamma' \rightarrow \Gamma$. Επομένως, έχουμε ότι $T = T'$ όπου T' είναι το Bass-Serre δέντρο που αντιστοιχεί στο Γ' .

Αν η υποομάδα $A \leq G$ έχει άπειρο δείκτη, τότε στην κατασκευή του Γ' προσθέτουμε πραγματικά νέες ακμές ή ισοδύναμα προσθέτουμε νέες τροχιές ακμών στο T . Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο Φ είναι ανάγωγος.

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε κάποια ακμή $e \in E(T)$ έτσι ώστε το μονοπάτι $f(e)$ να ξεκινά με e . Για κάθε φυσικό $n \in \mathbb{N}$, το μονοπάτι $f^n(e)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μονοπάτι του T_A . Όμως, αν επιλέξουμε κάποια άλλη ακμή e_1 η οποία είναι η ανύφωση κάποιας

ακμής στο $\Gamma' - A/T_a$, τότε δεν υπάρχουν $n \in \mathbb{Z}$ και $g \in G$ έτσι ώστε το $f^n(ge_1)$ να διέρχεται από την τροχιά του e_1 , αφού η e_1 δεν είναι στην ίδια τροχιά με καμία από τις ακμές του T_A . Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο πίνακας μετάβασης του f είναι ανάγωγος.

Κατά συνέπεια, η υποομάδα A έχει πεπερασμένο δείκτη στη G . ■

Παρατήρηση 4.4.5. Η προηγούμενη πρόταση έχει ως συνέπεια τον εξής περιορισμό στις γραμμές της γράμμωσης. Δεν υπάρχει καμία γραμμή l της γράμμωσης η οποία να είναι περιοδική με την έννοια ότι δεν υπάρχει τμήμα P τέτοιο ώστε το l να γράφεται ως $l = \cdots P_{-1}P_0P_1P_2\cdots$ και κάθε ένα από τα P_i να είναι στην ίδια τροχιά με το P .

Ως αποτέλεσμα έχουμε την ακόλουθη πρόταση η οποία μπορεί να αποδειχθεί ακριβώς όπως η Πρόταση 2.6 στο [41].

Πρόταση 4.4.6. Έστω αυτομορφισμός $\Psi \in \text{Stab}(\Lambda)$ και $h : S \rightarrow S$ ένας *relative train track* αντιπρόσωπος του Ψ . Αν S_0 είναι ένα h -αναλλοίωτο G -υπογράφημα (όχι αναγκαστικά συνεκτικό) του S χωρίς ελεύθερες κορυφές βαθμού 1, το οποίο είναι η ένωση των στρωμάτων (*strata*) που αντιστοιχούν στον h , τότε υπάρχει k έτσι ώστε ο περιορισμός του h^k στο S_0 να επάγει την ταυτοτική απεικόνιση στο S_0/G (δηλαδή να επάγει ισομετρία στο S_0).

4.5 Έλκουσες γραμμώσεις για ελεύθερα γινόμενα.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε μία εναλλακτική προσέγγιση των γραμμώσεων στην περίπτωση των ελευθέρων γινομένων, που είναι καταλληλότερη για την περίπτωση των ελευθέρων ομάδων, αφού η έννοια της έλκουσας γράμμωσης ταυτίζεται με την έννοια της ευσταθούς γράμμωσης (που παρουσιάσαμε προηγουμένως) για πλήρως ανάγωγους εξωτερικούς αυτομορφισμούς ελευθέρων ομάδων (βλ. [41]). Ακολουθούμε την ενότητα 4 του [53] η οποία γενικεύει την προσέγγιση των Bestvina, Feighn, Handel στο [42].

Έστω $G = G_1 * \cdots * G_q * F_r$ ένα ελεύθερο γινόμενο το οποίο αναπαρίσταται από ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ το οποίο έχει τετριμμένες ομάδες ακμών (στη συνέχεια όλα τα γραφήματα ομάδων θα έχουν τετριμμένες ομάδες ακμών). Οι ομάδες κορυφών του $\mathcal{G}$ είναι οι G_i και η θεμελιώδης ομάδα του υποκείμενου γραφήματος του $\mathcal{G}$ έχει θεμελιώδη ομάδα F_k . Συμβολίζουμε με T το δέντρο των Bass-Serre που αντιστοιχεί στο γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$.

Για μια γραμμή l μας ενδιαφέρει περισσότερο η εικόνα της στο T παρά η ίδια η απεικόνιση.

Ο χώρος των γραμμών στο T θα συμβολίζεται με $\tilde{\mathbf{B}}(T)$. Μπορούμε να εφοδιάσουμε το χώρο $\tilde{\mathbf{B}}(T)$ με την compact-open τοπολογία, ως εξής: αν $\tilde{\gamma}$ είναι ένα μονοπάτι στο T με άκρα κορυφές, τότε η περιοχή $N(\tilde{\gamma}) \subseteq \tilde{\mathbf{B}}(T)$ ορίζεται να είναι το σύνολο των γραμμών που περιέχουν το $\tilde{\gamma}$ ως υπομονοπάτι. Το σύνολο των $N(\tilde{\gamma})$ αποτελεί βάση για την τοπολογία στο $\tilde{\mathbf{B}}(T)$. Έστω $\pi : T \rightarrow \mathcal{G}$ η φυσική προβολή, του T στο υποκείμενο γράφημα του γραφήματος ομάδων $\mathcal{G}$. Για κάθε γραμμή $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow T$, θεωρώντας τις προεικόνες (ως προς σ) των κορυφών του T ως κορυφές μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathbb{R}$ ως γράφημα και τη σύνθεση $\pi \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ ως μορφισμό γραφημάτων ομάδων. Αυτή η σύνθεση θα είναι μια γραμμή στο $\mathcal{G}$. Ο χώρος των γραμμών στο $\mathcal{G}$ θα συμβολίζεται με $\mathbf{B}(\mathcal{G})$ και έχουμε την προβολή $\tilde{\mathbf{B}}(T) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{G})$. Εφοδιάζουμε το χώρο $\mathbf{B}(\mathcal{G})$ με την τοπολογία πηλίκου ως προς αυτή την προβολή. Πιο συγκεκριμένα, αν γ είναι ένα μονοπάτι στο $\mathcal{G}$, ορίζουμε το $N(\gamma)$ να είναι το σύνολο των γραμμών στο $\mathcal{G}$ που περιέχουν το γ ως υπομονοπάτι. Το σύνολο των $N(\gamma)$ αποτελεί βάση για την τοπολογία στο $\mathbf{B}(\mathcal{G})$.

Οι Bestvina, Feighn και Handel ορίζουν χώρους αφηρημένων γραμμών $\tilde{\mathbf{B}}$ και $\mathbf{B}$ χρησιμοποιώντας το σύνορο του Gromov της ελεύθερης ομάδας F_n . Στην περίπτωση των ελευθέρων γινομένων το σύνορο του Gromov του T δεν είναι πάντα συμπαγές. Συμβολίζουμε με ∂T το σύνορο του Gromov του T . Αν $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία (βλ. [54]) και $\tilde{f} : T \rightarrow T'$ είναι κάποια ανύψωση στα αντίστοιχα Bass-Serre δέντρα, τότε η $\tilde{f}$ επάγει ομοιομορφισμό $\partial f : \partial T \rightarrow \partial T'$. Μια γραμμή σ στο T καθορίζεται από τα άκρα της στο σύνορο, ένα μη διατεταγμένο ζεύγος διακεκριμένων σημείων $\{\alpha, \omega\}$ στο ∂T . Αντίστροφα, δοθέντος ενός διατεταγμένου ζεύγους διακεκριμένων σημείων $\{\alpha, \omega\}$ στο ∂T , υπάρχει μοναδική γραμμή σ στο T που να τα συνδέει, αφού το T είναι δέντρο. Έτσι, υπάρχει ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των $\tilde{\mathbf{B}}(T)$ και $\tilde{\mathbf{B}} = (\partial T \times \partial T - \Delta)/\mathbb{Z}_2$, όπου Δ είναι η διαγώνιος του $\partial T \times \partial T$ και η $\mathbb{Z}_2$ δρα εναλλάσσοντας τους παράγοντες. Ο ομοιομορφισμός αυτός είναι G -ομοιομορφισμός μεταφέροντας τη δράση της G στις γραμμές του T σε μια διαγώνια δράση της G στο $\partial T \times \partial T$, επάγοντας με αυτό τον τρόπο ομοιομορφισμό μεταξύ του πηλίκου $\tilde{\mathbf{B}}/G$ και του $\mathbf{B}(\mathcal{G})$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{B}$ το πηλίκου $\tilde{\mathbf{B}}/G$. Αν $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία, τότε ο ομοιομορφισμός $\partial f : \partial T \rightarrow \partial T'$ επάγει ομοιομορφισμούς $\tilde{f}_\# : \tilde{\mathbf{B}}(T) \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}(T')$ και $f_\# : \mathbf{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{G}')$. Αν η $\beta \in \mathbf{B}$ αντιστοιχεί στη $\gamma \in \mathbf{B}(\mathcal{G}')$, τότε θα λέμε ότι η γ υλοποιεί την β .

Ορισμός 4.5.1. Ένα στοιχείο $g \in G$ θα λέγεται περιφερειακό (*peripheral*) σε ένα μαρκαρισμένο γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ αν κάποιο συζυγές του περιέχεται σε κάποια ομάδα κορυφής.

Η κλάση συζυγίας ενός μη-περιφερειακού (*non-peripheral*) στοιχείου $g \in G$ καθορίζει (μέσω του άξονά του) μια περιοδική διπλά άπειρη γραμμή στο $\mathbf{B}(\mathcal{G})$.

Ορισμός 4.5.2. Αν το $\mathcal{G}$ είναι ένα μαρκαρισμένο γράφημα ομάδων και $K \subset \mathcal{G}$ είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα τέτοιο ώστε $[\pi_1(\mathcal{G}|_K)] = [\Gamma_i]$, τότε η γραμμή β φέρεται από την κλάση συζυγίας $[\Gamma_i]$ αν η υλοποίησή της β στο $\mathcal{G}$ περιέχεται στο K .

Παρατήρηση 4.5.3. Δηλαδή η γραμμή $\beta \in \mathbf{B}$ φέρεται από την κλάση συζυγίας $[\Gamma_i]$ ενός ελεύθερου παράγοντα Γ_i αν ανήκει στην κλειστότητα των περιοδικών γραμμών του $\mathbf{B}$ που καθορίζονται από τις κλάσεις συζυγίας των μη-περιφερειακών (*non-peripheral*) στοιχείων του Γ_i .

Έστω $\Phi \in \text{Out}(G)$ ένας εξωτερικός αυτομορφισμός ο οποίος έχει έναν αντιπρόσωπο στο γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$. Συμβολίζουμε με $\Phi_{\#}$ την επαγόμενη απεικόνιση στο χώρο των γραμμών.

Ορισμός 4.5.4. Η γραμμή $\beta' \in \mathbf{B}$ λέμε ότι ελκύεται ασθενώς (*weakly-attracted*) από την $\beta \in \mathbf{B}$ υπό τη δράση του Φ , αν $\Phi_{\#}^k(\beta') \rightarrow \beta$.

Ορισμός 4.5.5. Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbf{B}$ λέγεται έλκουσα (*attracting*) περιοχή της $\beta \in \mathbf{B}$ υπό τη δράση του Φ , αν $\Phi_{\#}(U) \subset U$ και το σύνολο $\{\Phi_{\#}^k(U) \mid k \geq 0\}$ αποτελεί βάση περιοχών της $\beta \in \mathbf{B}$.

Ορισμός 4.5.6. Μια γραμμή $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ στο $\mathcal{G}$ λέγεται διπλά επαναλαμβανόμενη (*birecurrent*) αν είναι διπλά άπειρη και κάθε υπομονοπάτι της σ εμφανίζεται άπειρες φορές ως υπομονοπάτι των άκρων της σ (δηλαδή των $Im(\sigma) - \sigma([0, M])$ και $Im(\sigma) - \sigma([-M, 0])$ για κάθε $M > 0$).

Λήμμα 4.5.7 ([42, Λήμμα 3.1.4]). Αν κάποια υλοποίηση της $\beta \in \mathbf{B}$ σε ένα μαρκαρισμένο γράφημα ομάδων είναι διπλά επαναλαμβανόμενη, τότε κάθε υλοποίηση της β σε κάποιο άλλο μαρκαρισμένο γράφημα ομάδων είναι επίσης διπλά επαναλαμβανόμενη. Αν η γραμμή β είναι διπλά επαναλαμβανόμενη, τότε η $\Phi_{\#}(\beta)$ είναι επίσης διπλά επαναλαμβανόμενη για κάθε $\Phi \in \text{Out}(G)$ που έχει αντιπρόσωπο στο $\mathcal{G}$.

Ορισμός 4.5.8. Ένα κλειστό υποσύνολο $\Lambda^+ \subset \mathbf{B}$ λέγεται έλκουσα γράμμωση (*attracting lamination*) για τον $\Phi \in \text{Out}(G)$, αν είναι η κλειστότητα μιας μόνο γραμμής β έτσι ώστε:

- Η γραμμή β είναι διπλά επαναλαμβανόμενη.
- Η γραμμή β έχει μια έλκουςα περιοχή υπό τη δράση του Φ^k για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.
- Η γραμμή β δεν φέρεται από ελεύθερο παράγοντα $G_i \cong \mathbb{Z}$ ή $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Η γραμμή β λέγεται *generic* για το Λ^+ . Το σύνολο των έλκουςών γραμμώσεων για τον Φ συμβολίζεται με $\mathcal{L}(\Phi)$ και αποδεικνύεται ότι είναι Φ -αναλλοίωτο και πεπερασμένο.

4.6 Εφαρμογές των γραμμώσεων και των train-tracks

4.6.1 Αναζήτηση ελευθέρων υποομάδων στην $\text{Out}(F_n)$

Έστω G μια ομάδα και $\text{Out}(G)$ η ομάδα των εξωτερικών αυτομορφισμών της G . Ένα βασικό ερώτημα το οποίο τίθεται κατά τη μελέτη της ομάδας $\text{Out}(G)$ είναι το υπό ποιες προϋποθέσεις δύο στοιχεία $f, g \in \text{Out}(G)$ έχουν δυνάμεις που να παράγουν ελεύθερη υποομάδα τάξης 2, $\langle f^n, g^m \rangle \cong F_2 \leq \text{Out}(G)$.

Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε ορισμένα αποτελέσματα που αφορούν το παραπάνω ερώτημα για την ειδική περίπτωση όπου $G = F_n$. Θα αναφέρουμε συνοπτικά ορισμένες έννοιες που αφορούν τις ευσταθείς γραμμώσεις για την περίπτωση των ελευθέρων ομάδων οι οποίες δεν αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες και παράλληλα θα σκιαγραφήσουμε τις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων.

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα προς την απάντηση του παραπάνω ερωτήματος αποτελεί το εξής λήμμα.

Λήμμα 4.6.1 (Λήμμα 3.4.2 στο [42]). Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ δύο στοιχεία με εκθετική αύξηση και $\Lambda_\Phi^\pm, \Lambda_\Psi^\pm$ ζεύγη έλκουςών γραμμώσεων. Αν ισχύουν τα παρακάτω:

- $\Psi(\Lambda_\Psi^+) \subseteq \Lambda_\Psi^+, \Psi^-(\Lambda_\Psi^-) \subseteq \Lambda_\Psi^-$,
- $\Phi(\Lambda_\Phi^+) \subseteq \Lambda_\Phi^+, \Phi(\Lambda_\Phi^-) \subseteq \Lambda_\Phi^-$,
- οι *generic* γραμμές της Λ_Φ^+ και της Λ_Φ^- ελκύονται ασθενώς από το Λ_Ψ^+ (αντίστοιχα Λ_Ψ^-) υπό τη δράση του Ψ (αντίστοιχα Ψ^-),
- οι *generic* γραμμές της Λ_Ψ^+ και της Λ_Ψ^- ελκύονται ασθενώς από το Λ_Φ^+ (αντίστοιχα Λ_Φ^-) υπό τη δράση του Φ (αντίστοιχα Φ^-).

τότε για όλους τους αρκετά μεγάλους ακεραίους N η υποομάδα της $\text{Out}(F_n)$ που παράγουν οι δυνάμεις Φ^N, Ψ^N είναι ελεύθερη τάξης 2.

Το παραπάνω λήμμα είναι ειδική περίπτωση (για $H = \text{Out}(F_n)$ και X ο χώρος των γραμμών) του παρακάτω γενικότερου λήμματος.

Λήμμα 4.6.2 (Λήμμα 3.4.2 στο [42]). Έστω ομάδα μια H η οποία δρα στο χώρο X . Αν υπάρχουν υποσύνολα $U^+, U^-, V^+, V^- \subset X$, σημείο $x \in X$ και στοιχεία $f, g \in H$, έτσι ώστε

- $x \notin U^+ \cup U^- \cup V^+ \cup V^-$
- $f(\{x\} \cup U^+ \cup V^+ \cup V^-) \subset U^+$
- $f^{-1}(\{x\} \cup U^- \cup V^+ \cup V^-) \subset U^-$
- $g(\{x\} \cup U^+ \cup U^- \cup V^+) \subset V^+$
- $g^{-1}(\{x\} \cup U^+ \cup U^- \cup V^-) \subset V^-$

τότε η υποομάδα $\langle f, g \rangle \leq H$ που παράγεται από τα στοιχεία f, g είναι ισόμορφη με ελεύθερη τάξης 2.

Το παραπάνω λήμμα είναι το βασικό επιχείρημα ping-pong που επιτρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη ελεύθερης υποομάδας τάξης 2 στην $\text{Out}(F_n)$.

Μια ισχυρότερη εκδοχή του Λήμματος 4.6.1 είναι το βασικό αποτέλεσμα του [49] που ακολουθεί. Τα στοιχεία $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ που εμφανίζονται στο παρακάτω θεώρημα έχουν την επιπλέον ιδιότητα να είναι ανεξάρτητα. Θα εξηγήσουμε στη συνέχεια τι σημαίνει αυτό.

Θεώρημα 4.6.3 (Θεώρημα 6.7 στο [49]). Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ τα οποία έχουν εκθετική αύξηση και είναι ανεξάρτητα στην $\text{Out}(F_n)$. Τότε υπάρχει $M \geq 0$ έτσι ώστε για κάθε $n, m \geq M$ η ομάδα $\langle \Psi^m, \Phi^n \rangle$ να είναι ελεύθερη τάξης 2. Επιπλέον, κάθε στοιχείο αυτής της υποομάδας το οποίο δεν είναι συζυγές με δύναμη κάποιου γεννήτορα είναι υπερβολικός και πλήρως ανάγωγος αυτομορφισμός.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του υπερβολικού αυτομορφισμού (για περισσότερα βλ. [48]).

Ορισμός 4.6.4. Ένας αυτομορφισμός $\phi : F_n \rightarrow F_n$ λέγεται υπερβολικός αν υπάρχουν αριθμοί $M > 0$ και $\lambda > 1$ τέτοιοι ώστε για κάθε $g \in F_n$ να ισχύει

$$\lambda|g| \leq \max\{|\phi^M(g)|, |\phi^{-M}(g)|\},$$

όπου με $|\cdot|$ συμβολίζουμε, ως συνήθως, το μήκος της λέξης ως προς μια, σταθεροποιημένη, βάση της F_n .

Μπορεί να αποδειχθεί (βλ. για παράδειγμα το Λήμμα 2.1 στο [48]) ότι η υπερβολικότητα είναι χαρακτηριστικό της κλάσης $[\phi] \in \text{Out}(F_n)$ του $\phi \in \text{Aut}(F_n)$. Στο [48] αποδεικνύεται ότι ένας (εξωτερικός) αυτομορφισμός είναι υπερβολικός αν και μόνο αν δεν έχει περιοδική (μη τετριμμένη) κλάση συζυγίας.

Θα παρουσιάσουμε αρχικά κάποιες έννοιες από τη θεωρία των γραμμώσεων για αυτομορφισμούς ελευθέρων ομάδων που δεν αναφέρθηκαν σε προηγούμενες ενότητες προκειμένου να δώσουμε στη συνέχεια τον ορισμό του ανεξάρτητου ζεύγους εξωτερικών αυτομορφισμών $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$.

Ορισμός 4.6.5. Έστω F_n η ελεύθερη ομάδα τάξης n . Σύστημα ελευθέρων παραγόντων της F_n ονομάζεται μια συλλογή $\mathcal{F}$ από κλάσεις συζυγίας ελευθέρων παραγόντων $\mathcal{F} = \{[H_1], \dots, [H_p]\}$ έτσι ώστε $F_n = H_1 * \dots * H_p * B$, για κάποια πιθανώς τετριμμένη υποομάδα B . Η κλάση συζυγίας $[c], c \in F_n$ φέρεται από το σύστημα ελευθέρων παραγόντων $\mathcal{F}$ αν υπάρχει κάποιο i έτσι ώστε $c \in H_i$. Αν δεν υπάρχει κανένας ελεύθερος παράγοντας της F_n που να περιέχει το c , τότε θα λέμε ότι η κλάση συζυγίας $[c]$ πληρώνει την F_n .

Ο φορέας των ελευθέρων παραγόντων (free factor support) $\mathcal{F}_{\text{supp}}(B)$ ενός υποσυνόλου B του χώρου των γραμμών $\mathbf{B}$ ορίζεται από το παρακάτω αποτέλεσμα του [42].

Ορισμός 4.6.6 (Πόρισμα 2.6.5 στο [42]). Για κάθε υποσύνολο B του χώρου των γραμμών $\mathbf{B}$ ο φορέας των ελευθέρων παραγόντων (free factor support) $\mathcal{F}_{\text{supp}}(B)$ είναι το μοναδικό σύστημα ελευθέρων παραγόντων που φέρει το B και είναι ελαχιστικό ως προς τη σχέση μερικής διάταξης στην κλάση των συστημάτων ελευθέρων παραγόντων.

Υπενθυμίζουμε την έννοια του δυϊκού ζεύγους γραμμώσεων.

Ορισμός 4.6.7. Η ασθενής κλειστότητα μιας *generic* γραμμής λ για μια γράμμωση Λ είναι ολόκληρη η γράμμωση Λ . Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο των γραμμών που φέρονται από έναν φορέα ελευθέρων παραγόντων είναι κλειστό. Κατά συνέπεια, $\mathcal{F}_{supp}(\lambda) = \mathcal{F}_{supp}(\Lambda)$. Έστω εξωτερικός αυτομορφισμός $\Phi \in \text{Out}(F_n)$, Λ_Φ^+ μια έλκουσα γράμμωση για τον Φ και Λ_Φ^- μια έλκουσα γράμμωση για τον Φ^{-1} . Ένα τέτοιο ζεύγος γραμμώσεων θα ονομάζεται *δυϊκό* αν επιπλέον ισχύει $\mathcal{F}_{supp}(\Lambda_\Phi^+) = \mathcal{F}_{supp}(\Lambda_\Phi^-)$.

Από το Λήμμα 3.2.4 στο [42] υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία $\mathcal{L}(\Phi) \longleftrightarrow \mathcal{L}(\Phi^{-1})$ η οποία επάγεται από την παραπάνω δυϊκότητα.

Θα χρειαστούμε την έννοια του μη-έλκοντος συστήματος υποομάδων $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_\Phi^+)$ (nonattracting subgroup system) που αντιστοιχεί στη γράμμωση Λ_Φ^+ . Ο πλήρης ορισμός της συγκεκριμένης έννοιας ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας, κατά συνέπεια θα δώσουμε έναν χαρακτηρισμό ο οποίος επαρκεί για την περιγραφή των αποδείξεων και των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

Πρόταση 4.6.8 (Πόρισμα 1.7 στο [31]). Για κάθε εξωτερικό αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ χωρίς περιστροφικότητα (rotationless)¹ και γράμμωση $\Lambda_\Phi^+ \in \mathcal{L}(\Phi)$, μια κλάση συζυγίας $[a]$ της F_n δεν ελκύεται ασθενώς από το Λ_Φ^+ αν και μόνο αν φέρεται από το σύστημα υποομάδων $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_\Phi^+)$.

Πρόταση 4.6.9 ([30]). Έστω $\Phi, \Phi^{-1} \in \text{Out}(F_n)$ εξωτερικοί αυτομορφισμοί χωρίς περιστροφικότητα και $\Lambda_\Phi^\pm$ δυϊκό ζεύγος γραμμώσεων. Τότε ισχύει ότι $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_\Phi^+) = \mathcal{A}_{na}(\Lambda_\Phi^-)$.

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να γράφουμε $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_\Phi^\pm)$. Στη συνέχεια αναφέρουμε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες δύο εξωτερικοί αυτομορφισμοί $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ λέγονται ανεξάρτητοι.

Ορισμός 4.6.10. Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ εξωτερικοί αυτομορφισμοί με εκθετική αύξηση που δεν είναι ο ένας συζυγής με κάποια δύναμη του άλλου και δεν έχουν κάποιον κοινό περιοδικό ελεύθερο παράγοντα. Έστω $\Lambda_\Phi^\pm, \Lambda_\Psi^\pm$ δυϊκά ζεύγη γραμμώσεων για τους Φ, Ψ . Οι εξωτερικοί αυτομορφισμοί Φ, Ψ θα ονομάζονται ανεξάρτητοι αν τα ζεύγη $(\Phi, \Lambda_\Phi^\pm), (\Psi, \Lambda_\Psi^\pm)$ ικανοποιούν τα παρακάτω:

$$1. \Phi(\Lambda_\Phi^+) \subseteq \Lambda_\Phi^+, \Phi^{-1}(\Lambda_\Phi^{-1}) \subseteq \Lambda_\Phi^{-1}, \Phi(\Lambda_\Psi^+) \subseteq \Lambda_\Psi^+, \Psi^{-1}(\Lambda_\Psi^{-1}) \subseteq \Lambda_\Psi^{-1}.$$

¹Μπορεί να αποδειχθεί (βλ. Λήμμα 4.42 στο [29]) ότι υπάρχει σταθερά $K = K(n)$ έτσι ώστε για κάθε $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ο Φ^K να μην έχει περιστροφικότητα.

2. Τα $\Lambda_{\Psi}^+, \Lambda_{\Psi}^-$ ελκύονται από το Λ_{Φ}^+ (αντίστοιχα Λ_{Φ}^-) υπό τη δράση του Φ (αντίστοιχα Φ^{-1}). Τα $\Lambda_{\Phi}^+, \Lambda_{\Phi}^-$ ελκύονται από το Λ_{Ψ}^+ (αντίστοιχα Λ_{Ψ}^-) υπό τη δράση του Ψ (αντίστοιχα Ψ^{-1}).
3. Το σύνολο των γραμμών $\{\Lambda_{\Phi}^{\pm}\} \cup \{\Lambda_{\Psi}^{\pm}\}$ πληρώνει την F_n .
4. Είτε και τα δύο ζεύγη γραμμώσεων $\Lambda_{\Phi}^{\pm}, \Lambda_{\Psi}^{\pm}$ είναι μη-γεωμετρικά είτε κάθε ζεύγος γραμμώσεων των στοιχείων της υποομάδας $\langle \Phi, \Psi \rangle$ είναι γεωμετρικό.²
5. Τα μη-έλκοντα συστήματα υποομάδων $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Phi}^{\pm}), \mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Psi}^{\pm})$ είναι *mutually malnormal*.³

Επιστρέφοντας στην απόδειξη του βασικού Θεωρήματος 4.6.3, οι υποθέσεις 1 και 2 για τους ανεξάρτητους $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ εξασφαλίζουν την ύπαρξη θετικού ακεραίου M τέτοιου ώστε η ομάδα $\langle \Phi^m, \Psi^n \rangle$ να είναι ελεύθερη τάξης 2 για κάθε $m, n \geq M$, σύμφωνα με το Λήμμα 4.6.1. Έτσι, η απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.3 ξεκινά με δεδομένη την ύπαρξη του παραπάνω ακεραίου M . Μένει να αποδειχθεί ότι κάθε στοιχείο της ομάδας $\langle \Phi^m, \Psi^n \rangle$, για το παραπάνω M ή για κάποιον μεγαλύτερο ακέραιο, είναι πλήρως ανάγωγος και υπερβολικός αυτομορφισμός. Θεωρούμε προς άτοπο ότι υπάρχει ανηγμένη λέξη $\xi = \xi_M \in \langle \Phi^m, \Psi^n \rangle$ η οποία είτε δεν είναι ανάγωγος αυτομορφισμός είτε είναι ανάγωγος αλλά δεν είναι υπερβολικός. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση 5 για τα $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Phi}^{\pm}), \mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Psi}^{\pm})$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ξ_M δεν είναι ανάγωγος και έτσι, αυξάνοντας το M , μπορούμε να βρούμε ακολουθία (ξ_M) μη ανάγωγων στοιχείων στην $\text{Out}(F_n)$. Ακολουθεί ένα ακόμα επιχείρημα ping-pong.

Πρόταση 4.6.11 (Πρόταση 5.4 στο [49]). Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ εξωτερικοί αυτομορφισμοί με εκθετική αύξηση που είναι επιπλέον ανεξάρτητοι. Τότε υπάρχει ακέραιος $M > 0$ και έλκουσες περιοχές $V_{\Phi}^{\pm}, V_{\Psi}^{\pm}$ των $\Lambda_{\Phi}^{\pm}$ και $\Lambda_{\Psi}^{\pm}$, αντίστοιχα, έτσι ώστε για κάθε

²Βλ. ορισμό 2.19 στο [31].

³Ένα σύστημα υποομάδων $\mathcal{A} = \{[H_1], \dots, [H_k]\}$, $H_i \leq F_n$ όπου οι H_i έχουν πεπερασμένη τάξη, θα λέγεται *malnormal* αν για κάθε δύο $[H_i], [H_j] \in \mathcal{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή $xH_i x^{-1} \cap H_j \neq 1 \Rightarrow i = j$ και $x \in H_i$. Δύο συστήματα υποομάδων $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$ θα λέγονται *mutually malnormal* αν $xH_i x^{-1} \cap H'_j = 1 = H_i \cap xH'_j x^{-1}$ για κάθε $[H_i] \in \mathcal{A}, [H'_j] \in \mathcal{A}', x \in F_n$. Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ με εκθετική αύξηση και αναλλοίωτα ζεύγη γραμμώσεων $\Lambda_{\Phi}^{\pm}, \Lambda_{\Psi}^{\pm}$. Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα σύστημα ελευθέρων παραγόντων, τότε τα $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Phi}^{\pm}), \mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Psi}^{\pm})$ είναι *mutually malnormal* ως προς το $\mathcal{F}$ αν: κάθε γραμμή (ή κλάση συζυγίας) φέρεται από τα $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Phi}^{\pm}), \mathcal{A}_{na}(\Lambda_{\Psi}^{\pm})$ αν και μόνο αν φέρεται από το $\mathcal{F}$.

ζεύγος πεπερασμένων ακολουθιών $n_1, \dots, n_k \geq M, m_1, \dots, m_k \geq M$ για τις οποίες κάθε κυκλικά ανηγμένη λέξη της μορφής

$$\xi = \Psi^{\epsilon_1 m_1} \Phi^{\epsilon'_1 n_1} \dots \Psi^{\epsilon_k m_k} \Phi^{\epsilon'_k n_k}$$

όπου $\epsilon_i, \epsilon'_i \in \{\pm 1\}, k \geq 1$, έχει εκθετική αύξηση και υπάρχει ένα ζεύγος γραμμώσεων $\Lambda_\xi^\pm$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν μια κλάση συζυγίας δε φέρεται από το σύστημα $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_\xi^\pm)$, τότε φέρεται από τα $\Lambda_\Phi^\pm$ και $\Lambda_\Psi^\pm$.
2. $\Psi^{m_i}(V_\Phi^\pm) \subset V_\Psi^\pm$ και $\Psi^{-m_i}(V_\Phi^\pm) \subset V_\Psi^\mp$
3. $\Phi^{n_j}(V_\Psi^\pm) \subset V_\Phi^\pm$ και $\Phi^{-n_j}(V_\Psi^\pm) \subset V_\Phi^\mp$
4. Η $V_\xi^+ := V_\Psi^{\epsilon_1}$ είναι έλκουσα περιοχή της Λ_ξ^+ .
5. Η $V_\xi^- := V_\Phi^{-\epsilon'_k}$ είναι έλκουσα περιοχή της Λ_ξ^- .
6. Αν η $U_\Psi^{\epsilon_1}$ είναι μια έλκουσα περιοχή της $\Lambda_\Psi^{\epsilon_1}$ και λ_ξ^+ είναι μια generic γραμμή της Λ_ξ^+ , τότε $\lambda_\xi^+ \in U_\Psi^{\epsilon_1}$ για κάποιο αρκετά μεγάλο M .
7. Αν η $U_\Phi^{\epsilon'_k}$ είναι μια έλκουσα περιοχή της $\Lambda_\Phi^{\epsilon'_k}$ και λ_ξ^- είναι μια generic γραμμή της Λ_ξ^- , τότε $\lambda_\xi^- \in U_\Phi^{\epsilon'_k}$ για κάποιο αρκετά μεγάλο M .

Η απόδειξη του 4.6.3 συνεχίζει εφαρμόζοντας την παραπάνω πρόταση για την ακολουθία ξ_M και κάνοντας χρήση καταλλήλου γραφήματος καταλήγει στο επιθυμητό άτοπο. Η υπόθεση 3 για τους ανεξάρτητους Φ, Ψ χρησιμοποιείται για να προκύψει η παραπάνω αντίφαση. Με χρήση της υπόθεσης 5 αποδεικνύεται ότι κάθε στοιχείο της $\langle \Phi^n, \Psi^m \rangle$ είναι υπερβολικός αυτομορφισμός, αφού δεν υπάρχει γραμμή που να φέρεται ταυτόχρονα από τα $\mathcal{A}_{na}(\Lambda_\Phi^\pm), \mathcal{A}_{na}(\Lambda_\Psi^\pm)$.

Ένα βασικό πόρισμα του Θεωρήματος 4.6.3 είναι το παρακάτω.

Πόρισμα 4.6.12 ([20]). Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ πλήρως ανάγωγοι αυτομορφισμοί που δεν είναι ο ένας συζυγής με κάποια δύναμη του άλλου. Τότε υπάρχει ακέραιος $M \geq 0$ έτσι ώστε για κάθε $m, n \geq M$ η ομάδα $G_M = \langle \Phi^n, \Psi^m \rangle$ να είναι ελεύθερη τάξης 2 και κάθε στοιχείο της να είναι πλήρως ανάγωγος αυτομορφισμός. Επιπλέον, ο M μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε:

1. Αν οι Φ, Ψ είναι υπερβολικοί αυτομορφισμοί, τότε κάθε στοιχείο της G_M είναι επίσης υπερβολικός αυτομορφισμός.
2. Αν ο Ψ είναι υπερβολικός και ο Φ γεωμετρικός, τότε κάθε στοιχείο της G_M που δεν είναι συζυγές με κάποια δύναμη του Φ είναι υπερβολικός αυτομορφισμός.
3. Αν οι Φ, Ψ είναι και οι δύο γεωμετρικοί αλλά δε σταθεροποιούν την ίδια κλάση συζυγίας, τότε κάθε στοιχείο της G_M που δεν είναι συζυγές με κάποια δύναμη των Φ, Ψ , είναι υπερβολικός αυτομορφισμός.

Κλείνοντας τη συγκεκριμένη ενότητα, θα ήταν λάθος να παραλείψουμε την πρώτη ιστορικά απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε εξ αρχής. Οι Bestvina, Feighn και Handel στο [41] ήταν οι πρώτοι που απέδειξαν ότι δυνάμεις πλήρως ανάγωγων και ανεξάρτητων εξωτερικών αυτομορφισμών παράγουν ελεύθερη υποομάδα τάξης 2 στην $\text{Out}(F_n)$.

Πρόταση 4.6.13 (Πρόταση 3.7 στο [41]). *Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ πλήρως ανάγωγοι εξωτερικοί αυτομορφισμοί που δεν έχουν κοινές δυνάμεις. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος M έτσι ώστε η υποομάδα $\langle \Phi^M, \Psi^M \rangle \leq \text{Out}(F_n)$ να είναι ελεύθερη τάξης 2.*

Θα δώσουμε μια σκιαγράφιση της απόδειξης για την παραπάνω πρόταση αλλά προηγουμένως χρειαζόμαστε την έννοια του ευσταθούς δέντρου T_Φ^+ για έναν εξωτερικό αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_n)$.

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{X}$ την κλειστότητα του εξωτερικού χώρου CV_n η οποία αποτελείται από όλες τις "πολύ μικρές", ελαχιστικές, ισομετρικές F_n -δράσεις σε $\mathbb{R}$ -δέντρα, θεωρούμενες ως προς F_n -ισομετρία. Συμβολίζουμε επίσης με $\hat{\mathcal{X}}$ τα $\mathbb{R}$ -δέντρα που είναι αντιπρόσωποι των στοιχείων του $\mathcal{X}$, δηλαδή όλα τα πολύ μικρά, ελαχιστικά $\mathbb{R}$ -δέντρα.

Λήμμα 4.6.14. 1. *Υπάρχει μια συνεχής τομή $\Sigma : \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$.*

2. *Έστω F_n -δέντρο $T_0 \in \hat{\mathcal{X}}$. Για κάθε $T \in \Sigma(X)$ υπάρχει μια F_n -απεικόνιση $f_{T_0, T} : T_0 \rightarrow T$ η οποία μεταβάλλεται συνεχώς ως προς το T και άρα οι σταθερές Lipschitz $\text{Lip}(f_{T_0, T})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες.*

Έστω Λ η ευσταθής γράμμιση ενός πλήρως ανάγωγου αυτομορφισμού.

Ορισμός 4.6.15. *Έστω H ένα μαρκαρισμένο $\mathbb{R}$ -γράφημα τάξης n . Θα λέμε ότι το μήκος της γράμμισης Λ στο δέντρο T είναι ίσο με 0, αν υπάρχει σταθερά $C = C(H, T)$ έτσι ώστε η εικόνα κάθε τμήματος γραμμής της Λ υπό την $f_{\hat{H}, T}$ να έχει διάμετρο μικρότερη*

ή ίση του C . Πιο συγκεκριμένα, το μήκος της γραμμώσης Λ στο δέντρο T είναι ίσο με 0, αν για κάθε γραμμή $l : \mathbb{R} \rightarrow H$ της Λ , ανύψωση $\tilde{l} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{H}$ και τμήμα $L \subset \mathbb{R}$ το μήκος της ανηγμένης εικόνας $[f_{\tilde{H},T}(L)]$ είναι μικρότερο ή ίσο του C .

Αν το δέντρο T είναι ελεύθερο F_n -δέντρο, τότε το μήκος της γραμμώσης Λ στο T δεν είναι ίσο με 0. Η δεξιά δράση της $\text{Out}(F_n)$ στον χώρο $\mathcal{X}$

$$l_{(T)\Phi}(\gamma) = l_T(\Phi(\gamma))$$

επάγει δράση της $\text{Out}(F_n)$ στον χώρο $\mathcal{X}$. Το ευσταθές δέντρο $T^+ = T_\Phi^+$ του Φ ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας $\{(\Gamma)\phi^i\}$ για κάποιον *train-track* αντιπρόσωπο $g : \Gamma \rightarrow \Gamma$ του Φ . Αν λ είναι ο ρυθμός αύξησης του g , τότε το T^+ είναι η κλάση του δέντρου $\hat{T}^+$ με

$$l_{\hat{T}^+}(\gamma) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{l_H(g^i(\gamma))}{\lambda^i}$$

και συγκεκριμένα

$$l_{\hat{T}^+}(g(\gamma)) = \lambda l_{\hat{T}^+}(\gamma).$$

Το ασταθές δέντρο $T^- = T_\Phi^-$ του Φ ορίζεται να είναι το ευσταθές δέντρο του Φ^{-1} .

Αποδεικνύεται ότι οι συγκεκριμένες έννοιες δεν εξαρτώνται από την επιλογή του *train-track* αντιπροσώπου.

Λήμμα 4.6.16 (Λήμμα 3.4 στο [41]). Αν το μήκος της Λ_Φ^+ στο $T \in \mathcal{X}$ δεν είναι 0, τότε το T συγκλίνει στο T_Φ^+ υπό τη δράση του Φ . Συγκεκριμένα, αυτό ισχύει για όλα τα ελεύθερα δέντρα. Επιπλέον, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα $K \subset \mathcal{X}$ στα οποία το Λ_Φ^+ έχει μη μηδενικό μήκος.

Λήμμα 4.6.17 (Λήμμα 3.5 στο [41]). Έστω $g : \Gamma \rightarrow \Gamma$ *train-track* αντιπρόσωπος του Φ και Λ μια ευσταθής γραμμώση (πιθανώς άσχετη με τον Φ).

1. Για ένα $T \in \mathcal{X}$, αν υπάρχει τμήμα γραμμής της Λ (σε Γ -συντεταγμένες) του οποίου η ανηγμένη εικόνα στο $\Sigma(T)$ υπό την $f_{\tilde{\Gamma},\Sigma(T)}$ έχει μήκος μεγαλύτερο από $2BCC(f_{\tilde{\Gamma},\Sigma(T)})$, τότε το Λ δεν έχει μήκος 0 στο T .
2. Το σύνολο των δέντρων $T \in \mathcal{X}$ για τα οποία ισχύει ότι $l_T(\Lambda) = 0$ είναι κλειστό.
3. Ισχύει ότι $l_{T_\Phi^+}(\Lambda_\Phi^-) = 0$ και ομοίως $l_{T_\Phi^-}(\Lambda_\Phi^+) = 0$.
4. Αν $\Lambda \neq \Lambda_\Phi^-$, τότε το Λ δεν έχει μήκος 0 στο T_Φ^+ .

Πόρισμα 4.6.18 (Πόρισμα 3.6 στο [41]). Η απεικόνιση $\tilde{\Phi} : \mathcal{IT} \rightarrow \mathcal{IL}$ από το σύνολο των ανάγωγων δέντρων στο σύνολο των ανάγωγων γραμμώσεων με $\tilde{\Phi}(T_{\Phi}^+) = \Lambda_{\Phi}^-$, όπου Λ_{Φ}^- είναι η μοναδική ανάγωγη γράμμωση που έχει μήκος 0 στο T_{Φ}^+ , είναι μια $\text{Out}(F_n)$ -απεικόνιση⁴, $1 - 1$ και επί. Ειδικότερα, $\text{Stab}(T) = \text{Stab}(\tilde{\Phi}(T))$.

Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη της Πρότασης 4.6.13 έχει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.6.19 (Πρόταση 2.16 στο [41]). Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ πλήρως ανάγωγοι αυτομορφισμοί. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. $\{\Lambda_{\Phi}^{\pm}\} = \{\Lambda_{\Psi}^{\pm}\}$
2. $\{\Lambda_{\Phi}^{\pm}\} \cap \{\Lambda_{\Psi}^{\pm}\} \neq \emptyset$
3. οι Φ, Ψ έχουν κοινές μη τετριμμένες δυνάμεις.

Απόδειξη της πρότασης 4.6.13. Έστω $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$ οι οποίοι δεν έχουν κάποια κοινή δύναμη. Τότε από την Πρόταση 4.6.19 και το Πόρισμα 4.6.18 έχουμε ότι τα τέσσερα δέντρα $T_{\Phi}^{\pm}, T_{\Psi}^{\pm}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τις γραμμώσεις $\Lambda_{\Phi}^{\pm}, \Lambda_{\Psi}^{\pm}$. Από το Λήμμα 4.6.17 (4) έχουμε ότι:

- η μοναδική γράμμωση από αυτές τις τέσσερις που έχει μήκος 0 στο T_{Φ}^+ είναι η Λ_{Φ}^- ,
- η μοναδική γράμμωση από αυτές τις τέσσερις που έχει μήκος 0 στο T_{Φ}^- είναι η Λ_{Φ}^+ ,
- η μοναδική γράμμωση από αυτές τις τέσσερις που έχει μήκος 0 στο T_{Ψ}^+ είναι η Λ_{Ψ}^- ,
- η μοναδική γράμμωση από αυτές τις τέσσερις που έχει μήκος 0 στο T_{Ψ}^- είναι η Λ_{Ψ}^+ .

Από το Λήμμα 4.6.17 (2) υπάρχουν ξένες ανά δύο συμπαγείς περιοχές $U_{\Phi}^{\pm}, U_{\Psi}^{\pm}$ των $T_{\Phi}^{\pm}, T_{\Psi}^{\pm}$, αντίστοιχα, έτσι ώστε:

- η Λ_{Φ}^+ έχει μη μηδενικό μήκος σε κάθε δέντρο των $U_{\Psi}^{\pm}$ και U_{Φ}^+ ,
- η Λ_{Φ}^- έχει μη μηδενικό μήκος σε κάθε δέντρο των $U_{\Psi}^{\pm}$ και U_{Φ}^- ,

⁴Δηλαδή $\Phi(Th) = h^{-1}\Phi(T)$

- η Λ_{Ψ}^{+} έχει μη μηδενικό μήκος σε κάθε δέντρο των $U_{\Phi}^{\pm}$ και U_{Ψ}^{+} ,
- η Λ_{Ψ}^{-} έχει μη μηδενικό μήκος σε κάθε δέντρο των $U_{\Phi}^{\pm}$ και U_{Ψ}^{-} .

Από το Λήμμα 4.6.16 έχουμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός N έτσι ώστε για κάθε $k \geq N$ να ισχύουν:

- $\Phi^k(U_{\Psi}^{\pm}) \subset U_{\Phi}^{+}$, $\Phi^k(U_{\Phi}^{+}) \subset U_{\Phi}^{+}$
- $\Psi^k(U_{\Phi}^{\pm}) \subset U_{\Psi}^{+}$, $\Psi^k(U_{\Psi}^{+}) \subset U_{\Psi}^{+}$

Από το ping-pong επιχείρημα του 4.6.2 έχουμε το ζητούμενο. ■

4.6.2 Μήκη μετατόπισης στην $\text{Out}(F_n)$ και το εναλλακτικό του Tits

Ορισμός 4.6.20. Θα λέμε ότι μια ομάδα G ικανοποιεί το εναλλακτικό του Tits αν κάθε υποομάδα της G είτε είναι σχεδόν επιλύσιμη είτε περιέχει ως υποομάδα ελεύθερη τάξης 2.

Οι Bestvina, Feighn και Handel απέδειξαν στα [42],[44],[43] την ακόλουθη ισχυρή μορφή του εναλλακτικού του Tits (Tits alternative) για την ομάδα $\text{Out}(F_n)$.

Θεώρημα 4.6.21. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα K του $\text{Out}(F_n)$ είναι είτε σχεδόν αβελιανή είτε περιέχει ελεύθερη ομάδα τάξης 2.

Αργότερα το προηγούμενο θεώρημα γενικεύτηκε για οποιαδήποτε υποομάδα (όχι αναγκαστικά πεπερασμένα παραγόμενη).

Το εναλλακτικό του Tits μελετήθηκε για ομάδες εξωτερικών αυτομορφισμών ελεύθερων γινομένων στο [4].

Σε αυτή την υποενότητα ακολουθούμε τα άρθρα [14],[42],[44],[43]. Αρχικά αναφέρουμε την έννοια του μήκους μετατόπισης και στη συνέχεια παρουσιάζουμε την απόδειξη του βασικού θεωρήματος στο [14] το οποίο αναφέρει ότι η ομάδα $\text{Out}(F_n)$ είναι translation discrete. Τέλος, παρουσιάζουμε συνοπτικά την απόδειξη του εναλλακτικού του Tits για την $\text{Out}(F_n)$. Για περισσότερα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [42],[44],[43].

Η έννοια του μήκους μετατόπισης σε έναν μετρικό χώρο προέρχεται από το γεγονός ότι για μια ισομετρία g του υπερβολικού χώρου $\mathbb{H}$ το infimum των μετατοπίσεων $\tau(g) = \inf\{d(gx, x) | x \in \mathbb{H}\}$ μπορεί να υπολογιστεί ως $\tau(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(g^n x_0, x_0)}{n}$ για οποιαδήποτε επιλογή σημείου αναφοράς x_0 . Στο [55] οι Gersten και Short απέδειξαν

σημαντικά αποτελέσματα για biautomatic ομάδες χρησιμοποιώντας μήκη μετατόπισης. Η έννοια του translation discreteness εισήχθη από τον Conner στο [17] για να μελετήσει μηδενοδύναμες και επιλύσιμες ομάδες που δρουν σε χώρους μη θετικής καμπυλότητας.

Ορισμός 4.6.22. Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων μιας ομάδας G . Τότε ορίζεται το μήκος μετατόπισης (translation length) του $g \in G$ να είναι

$$\tau_{X,G}(g) := \liminf_n \frac{\|g^n\|_{G,X}}{n}.$$

όπου με $\|g\|_{G,X}$ συμβολίζουμε το μήκος του g στη μετρική της λέξης στη G που επάγεται από το X . Θα γράφουμε $\|g\|$ αντί του $\|g\|_{G,X}$ όταν η ομάδα G και το σύνολο γεννητόρων X είναι σαφή από τα συμφραζόμενα.

Πρόταση 4.6.23. Έστω X ένα σύνολο γεννητόρων μιας ομάδας G . Τότε

- $0 \leq \tau_{X,G}(g) \leq \|g\|$ για κάθε $g \in G$.
- Για κάθε $x, y \in G$ ισχύει $\tau_{X,G}(y^{-1}xy) = \tau_{X,G}(x)$.
- $\tau_{X,G}(g^n) = n \cdot \tau_{X,G}(g)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g \in G$.
- $\tau_{X,G}(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|g^n\|}{n}$ για κάθε $g \in G$.
- Αν τα $x, y \in G$ μετατίθενται τότε $\tau_{X,G}(xy) \leq \tau_{X,G}(x) + \tau_{X,G}(y)$.

Απόδειξη βλ. [55]. • Από τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $\|g^n\| \leq n\|g\|$ κατά συνέπεια υπάρχει το $\tau_{X,G}(g)$ και είναι $0 \leq \tau_{X,G}(g) \leq \|g\|$.

- Είναι $\|xgx^{-1}\| \leq \|xg^n\| + \|x^{-1}\| \leq \|x\| + \|g^n\| + \|x^{-1}\| = 2\|x\| + \|g\|$ άρα

$$\frac{\|xgx^{-1}\|}{n} \leq 2\frac{\|x\|}{n} + \frac{\|g^n\|}{n}.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι

$$\tau_{X,G}(xgx^{-1}) \leq \tau_{X,G}(g).$$

Αντικαθιστώντας το g με το xgx^{-1} και το x με το x^{-1} παίρνουμε και την αντίστροφη ανισότητα.

- Αρχικά παρατηρούμε ότι $\tau_{X,G}(g^k) = \liminf_n k \frac{\|g^{kn}\|}{kn} \geq k\tau_{X,G}(g)$. Από τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|g^{kn}\| \leq k\|g^n\|$$

και άρα

$$\frac{\|g^{kn}\|}{kn} \leq \frac{\|g^n\|}{n}$$

οπότε

$$k \liminf_n \frac{\|g^{kn}\|}{kn} \leq k \liminf_n \frac{\|g^n\|}{n}$$

το οποίο γράφεται

$$\tau_{X,G}(g^k) \leq k\tau_{X,G}(g).$$

- Γνωρίζουμε γενικά ότι αν για μια ακολουθία $\phi(n)$ ισχύει ότι $\phi(n+m) \leq \phi(n) + \phi(m)$ όπου $n, m \geq 0$ και $\phi(n) \geq 0$ για κάθε n , τότε υπάρχει το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n)}{n}$ και είναι ίσο με $\inf_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n}$ (βλ. Πρόταση 3.2 στο [50]). Το ζητούμενο έπεται θεωρώντας $\phi(n) = \|g^n\|$. Αναλυτικότερα η απόδειξη έχει ως εξής: Έστω $l := \inf_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n}$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\left| \frac{\phi(k)}{k} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $L \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\frac{\phi(r)}{KL} < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $r < K$. Έστω $n \geq KL$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $q, r \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n = Kq + r$ όπου $r < K$. Επίσης έχουμε ότι $q \geq L$. Ακόμα,

$$\frac{\phi(n)}{n} \leq \frac{\phi(Kq)}{Kq+r} + \frac{\phi(r)}{Kq+r} \leq \frac{q\phi(K)}{Kq} + \frac{\phi(Kq)}{Kq} = \frac{\phi(K)}{K} + \frac{\phi(Kq)}{Kq} < l + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Επομένως, για κάθε $n \geq KL$ έχουμε

$$\left| \frac{\phi(n)}{n} - l \right| < \epsilon$$

$$\text{δηλαδή } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(n)}{n} = l = \inf_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n}.$$

- Αν τα $x, y \in G$ μετατίθενται τότε έχουμε

$$\|(xy)^n\| = \|x^n y^n\| \leq \|x^n\| + \|y^n\|$$

άρα

$$\frac{\|(xy)^n\|}{n} \leq \frac{\|x^n\|}{n} + \frac{\|y^n\|}{n}$$

οπότε παίρνοντας όρια καθώς $n \rightarrow \infty$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Στα παρακάτω παραλείπουμε την αναφορά στο σύνολο γεννητόρων όταν εννοείται εύκολα.

Ένα βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι το παρακάτω Θεώρημα του [14] το οποίο αναφέρει ότι η ομάδα $\text{Out}(F_n)$ είναι translation discrete και του οποίου την απόδειξη παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 4.6.24. *Μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G ονομάζεται translation discrete αν για κάποιο πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων X της G τα μήκη μετατόπισης των στοιχείων απείρου τάξης είναι ομοιόμορφα φραγμένα μακριά από το 0, δηλαδή υπάρχει θετική σταθερά M έτσι ώστε $\tau_{X,G}(g) \geq M$ για κάθε στοιχείο $g \in G$ απείρου τάξης.*

Η έννοια του translation discreteness είναι καλά ορισμένη αφού αν έχουμε μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G και δύο πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων X, Y τότε υπάρχει θετική σταθερά λ έτσι ώστε για κάθε $g \in G$ να ισχύει

$$\frac{1}{\lambda} \tau_{Y,G}(g) \leq \tau_{X,G}(g) \leq \lambda \tau_{Y,G}(g).$$

Έστω $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ένα σύνολο γεννητόρων της F_n και Y ένα σύνολο γεννητόρων της $\text{Aut}(F_n)$ που αποτελείται από τα τρία παρακάτω είδη αυτομορφισμών:

- μεταθέσεις: $x_k \mapsto \begin{cases} x_j, & \text{για } k = i \\ x_i, & \text{για } k = j \\ x_k, & \text{για } k \neq i, j \end{cases}$
- αντιστροφές: $x_k \mapsto \begin{cases} x_i^{-1}, & \text{για } k = i \\ x_k, & \text{για } k \neq i \end{cases}$
- στροφές του Dehn: $x_k \mapsto \begin{cases} x_i x_j, & \text{για } k = i, \\ x_k, & \text{για } k \neq i \end{cases}$

Ορισμός 4.6.25. Συμβολίζουμε με $\bar{Y}$ το σύνολο γεννητόρων της $\text{Out}(F_n)$ που αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων του Y .

Παρατήρηση 4.6.26. Ο στόχος είναι να αποδειχθεί ότι κάθε στοιχείο της $\text{Out}(F_n)$ άπειρης τάξης έχει θετικό μήκος μετατόπισης ομοιόμορφα φραγμένο μακριά από το 0. Αφού η $\text{Aut}(F_n)$ εμφυτεύεται στην $\text{Out}(F_{n+1})$ θα έχουμε ότι κάθε στοιχείο της $\text{Aut}(F_n)$ άπειρης τάξης έχει θετικό μήκος μετατόπισης.

Ορισμός 4.6.27. Ορίζεται η απεικόνιση $a : F_n \rightarrow \mathbb{N}$ με:

$$a(\omega) = \max\{|p| : \text{όπου } t^p \text{ είναι υπολέξη του } \omega\}$$

όπου θεωρούμε τα στοιχεία της F_n ως ανηγμένες λέξεις στο σύνολο γεννητόρων και των αντιστροφών τους. Επιπλέον, ορίζουμε την απεικόνιση: $\bar{a} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ από το σύνολο των κλάσεων συζυγίας στην F_n :

$$\bar{a}([\omega]) = \max\{a(u) : \text{όπου } u \text{ είναι κυκλικά ανηγμένη συζυγής λέξη με το } \omega\}$$

όπου $[\omega]$ είναι η κλάση συζυγίας του ω στην F_n .

Υπενθυμίζουμε άλλη μία φορά το σημαντικό λήμμα της φραγμένης διαγραφής (Bounded Cancellation Lemma) από το [9]) το οποίο είδαμε στο 3.11.1 στην περίπτωση των ελευθέρων γινομένων.

Λήμμα 4.6.28. Έστω f ένας αυτομορφισμός $f \in \text{Aut}(F_n)$. Τότε υπάρχει ακέραιος C_f έτσι ώστε αν ω_1, ω_2 είναι δύο ανηγμένες λέξεις της F_n με $|\omega_1\omega_2| = |\omega_1| + |\omega_2|$ τότε

$$|f(\omega_1\omega_2)| \geq |f(\omega_1)| + |f(\omega_2)| - C_f.$$

Στο παραπάνω λήμμα με $|\cdot|$ συμβολίζουμε το μήκος των λέξεων στο σύνολο γεννητόρων X της F_n που έχει αρχικώς επιλεγεί.

Λήμμα 4.6.29. Υπάρχει θετική σταθερά C τέτοια ώστε: για κάθε $\bar{g} \in \bar{Y}$ και κάθε κυκλικά ανηγμένη λέξη $\omega \in F_n$ να ισχύει

$$\bar{a}(\bar{g}[\omega]) \leq \bar{a}([\omega]) + C.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι αντιστροφές και οι μεταθέσεις δεν επηρεάζουν το $a(\omega)$ και άρα θα επιβεβαιώσουμε το ζητούμενο μόνο για την περίπτωση όπου το g είναι στροφή του Dehn.

Έστω $\omega \in F_n$ κυκλικά ανηγμένη λέξη μήκους k . Έστω επίσης $\omega = At^pB$ όπου $a(\omega) = |p|$ (δηλαδή η λέξη t επιτυγχάνει το $\max$ του ορισμού της a για το ω). Τώρα θεωρούμε τη γραφή του $g(\omega)$ ως

$$g(\omega) = [[g(A)]] [[g(t^p)]] [[g(B)]]$$

όπου με $[[x]]$ συμβολίζουμε την ανηγμένη λέξη που αντιστοιχεί στο x . Από το Λήμμα 4.6.28 έχουμε ότι υπάρχει σταθερά C_g τέτοια ώστε να εμφανίζονται το πολύ C_g διαγραφές μετά την παράθεση των λέξεων $[[g(A)]]$ και $[[g(t^p)]]$. Επιπλέον θα εμφανίζονται το πολύ C_g διαγραφές μετά την παράθεση των λέξεων

$$[[[[g(A)]] [[g(t^p)]]]] \text{ και } [[g(B)]]$$

Κατά συνέπεια, το p μπορεί να μειωθεί το πολύ κατά $2C_g$ (αφού οι διαγραφές μπορούν να προκύψουν μόνο στην αρχή και το τέλος της $[[g(t^p)]]$). Έστω

$$C_g = 2 \max\{C_g, C_{g^{-1}}\}.$$

Τότε έχουμε

$$a([[g(\omega)])] \geq a(\omega) - C_g$$

από την αμέσως προηγούμενη πρόταση. Επίσης

$$a(\omega) = a(g^{-1}(g(\omega))) \geq a([[g(\omega)])] - C_g$$

με εφαρμογή του προηγούμενου για g^{-1} στη θέση του g , η οποία γράφεται και

$$a([[g(\omega)])] \leq a(\omega) + C_g.$$

Αν θέσουμε $\overline{C} = \max\{C_g : \text{όπου } g \text{ είναι μια στροφή Dehn στο } Y\}$ τότε έχουμε δείξει το ζητούμενο για τα στοιχεία του συνόλου Y . Χρησιμοποιώντας ένα παρόμοιο επιχείρημα μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\overline{a}(\overline{g}([\omega])) \leq \overline{a}([\omega]) + C.$$

■

Παράδειγμα 4.6.30. Δίνουμε ένα παράδειγμα για το μήκος μετατόπισης μιας στροφής του Dehn. Έστω g η στροφή του Dehn που δίνεται από τον τύπο

$$x_k \mapsto \begin{cases} x_2x_1, & \text{για } k = 2, \\ x_k, & \text{για } k \neq 2 \end{cases}.$$

Τότε έχουμε ότι $a(g^n(x_2)) = a(x_2x_1^n) = n$. Αν γράψουμε $g^n = g_1 \cdot \dots \cdot g_m$ όπου $\|g^n\| = m$, τότε από το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι:

$$n = a(g^n(x_2)) = a(g_1 \cdot \dots \cdot g_m(x_2)) \leq a(g_2 \cdot \dots \cdot g_m(x_2)) + C \leq a(x_2) + mC = 1 + mC.$$

$$\text{Οπότε } \tau(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|g^n\|}{n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{nC} = \frac{1}{C} > 0.$$

Δίνουμε τώρα μερικούς ορισμούς που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. (βλ. [44]).

Όπως έχουμε αναφέρει κάθε στοιχείο $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ αναπαρίσταται από μια ομοτοπική ισοδυναμία $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, όπου Γ είναι ένα γράφημα του οποίου η θεμελιώδης ομάδα ταυτίζεται με την F_n .

Υπενθυμίζουμε ότι, αν το J είναι ένα διάστημα, τότε μια απεικόνιση $\sigma : J \rightarrow \Gamma$ θα ονομάζεται μονοπάτι αν είναι είτε τοπικά $1-1$, είτε σταθερή. Επιπλέον, απαιτούμε τα άκρα της σ να είναι κορυφές του Γ .

Κλειστό μονοπάτι στο Γ θα ονομάζουμε ένα μονοπάτι του οποίου τα άκρα ταυτίζονται.

Κύκλωμα στο Γ θα ονομάζουμε μία εμφύτευση $S^1 \rightarrow \Gamma$. Επιπλέον, θα ταυτίζουμε τα ομοτοπικά μεταξύ τους κυκλώματα. Κάθε ομοτοπικά μη-τετρωμένη απεικόνιση $\sigma : S^1 \rightarrow \Gamma$ είναι ομοτοπική με ένα μοναδικό κύκλωμα $[[\sigma]]$.

Λήμμα 4.6.31. Κάθε απεικόνιση $\sigma : J \rightarrow \Gamma$ είναι ομοτοπική (με σταθερά άκρα η ομοτοπία) με ένα μονοπάτι το οποίο συμβολίζουμε με $[[\sigma]]$.

Αν $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$ είναι μια ανάλυση του σ , το οποίο είναι είτε μονοπάτι είτε κύκλωμα, σε μη-τετρωμένα υπομονοπάτια, τότε λέμε ότι αυτή είναι μια k -διάσπαση (k -splitting) αν n

$$f^k(\sigma) = [[f^k(\sigma_1)]] \cdots [[f^k(\sigma_l)]]$$

είναι μια ανάλυση σε υπομονοπάτια. Θα λέμε, επίσης, ότι είναι διάσπαση (splitting) αν είναι ένα k -διάσπαση για κάθε $k > 0$.

Ένα μη-τετρωμένο μονοπάτι σ στο Γ θα λέγεται Nielsen μονοπάτι για την $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ αν

$$[[f(\sigma)]] = \sigma.$$

Ένα Nielsen μονοπάτι σ θα λέγεται αδιαίρετο (indivisible) αν δε μπορεί να γραφεί ως παράθεση μη-τετρωμένων Nielsen μονοπατιών.

Έστω $\emptyset = \Gamma_0 \subsetneq \Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_K = \Gamma$ μια στρωματοποίηση (filtration) του Γ από f -αναλλοίωτα υπογραφήματα. Έστω, επίσης, $H_i = \overline{\Gamma_i \setminus \Gamma_{i-1}}$ ⁵. Υποθέτουμε ότι το H_i αποτελείται από μία μόνο ακμή E_i (δηλαδή η στρωματοποίηση δημιουργείται προσθέτοντας κάθε φορά μία ακμή) που είναι τέτοια ώστε

$$f(E_i) = E_i u^l$$

για κάποιο κλειστό αδιαίρετο Nielsen μονοπάτι $u \subset \Gamma_{i-1}$ και κάποιο $l > 0$. Τότε εξαιρετικά μονοπάτια (exceptional paths) θα ονομάζονται τα μονοπάτια της μορφής

$$E_i u^k \overline{E_j} \text{ ή της μορφής } E_i \bar{u}^k \overline{E_j},$$

όπου $k \geq 0$, $j \leq i$ και $f(E_j) = E_j u^m$, $m > 0$.

Από την Παρατήρηση 1.8 του [40] γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ με άπειρη τάξη είτε έχει πολυωνυμική είτε εκθετική αύξηση (growth).

Ορισμός 4.6.32. Ένα εξωτερικός αυτομορφισμός $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ με πολυωνυμική αύξηση θα ονομάζεται *unipotent (UPG)* αν η δράση του στην αβελιανοποίηση $H_1(F_n, \mathbb{Z})$ είναι *unipotent*.

Κάθε εξωτερικός αυτομορφισμός $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ επάγει αυτομορφισμό στην αβελιανοποίηση $H_1(F_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$, της οποίας η ομάδα αυτομορφισμών είναι η $GL(n, \mathbb{Z})$. Ο Φ λέγεται unipotent αν για τον αντίστοιχο πίνακα $A_\Phi \in GL(n, \mathbb{Z})$ υπάρχει θετικός ακέραιος m τέτοιος ώστε $(A_\Phi - Id)^m = 0$.

Αναφέρουμε τώρα μερικά βασικά στοιχεία των relative train track απεικονίσεων.

Έστω ότι έχουμε μια στρωματοποίηση του γραφήματος Γ όπως παραπάνω. Μια στροφή (E_1, E_2) περιέχεται στο στοιχείο Γ_r της στρωματοποίησης (αντίστοιχα στο στρώμα H_r) αν οι E_1 και E_2 περιέχονται στο Γ_r (αντίστοιχα στο H_r).

Αν ο $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ είναι ένας τοπολογικός αντιπρόσωπος και E μια ακμή του Γ τότε ορίζεται $Tf(E)$ να είναι η πρώτη ακμή του $f(E)$. Επίσης για κάθε στροφή (E_1, E_2) ορίζεται $Tf(E_1, E_2) = (Tf(E_1), Tf(E_2))$.

Παρατήρηση 4.6.33. Εάν α είναι ένα μονοπάτι και η Tf -εικόνα κάθε στροφής (E_1, E_2) είναι μη-τετριμμένη τότε το $f(\alpha)$ είναι μονοπάτι.

⁵Το H_i ονομάζεται i -οστό στρώμα (stratum).

Υπενθυμίζουμε ότι μια στροφή λέγεται μη επιτρεπτή ως προς τον αντιπρόσωπο f αν μετά από κάποια εφαρμογή του Tf γίνεται τετριμμένη (εκφυλισμένη). Ένα μονοπάτι $\alpha \subset \Gamma$ θα λέγεται επιτρεπτό αν κάθε στροφή του είναι επιτρεπτή. Το α θα λέγεται r -επιτρεπτό αν περιέχεται στο Γ_r και κάθε επιτρεπτή στροφή του περιέχεται στο Γ_{r-1} .

Σε κάθε στρώμα H_r αντιστοιχούμε ένα τετραγωνικό πίνακα M_r ο οποίος ονομάζεται υποπίνακας μετάβασης του H_r . Το ij -οστό στοιχείο του M_r ισούται με το πλήθος των φορών που η f -εικόνα της j ακμής τέμνει την i ακμή (ανεξάρτητα από την κατεύθυνση).

Ένας μη αρνητικός M ονομάζεται ανάγωγος (irreducible) αν για κάθε i και j υπάρχει $n > 0$ έτσι ώστε το ij -οστό στοιχείο του M^n είναι θετικό.

Μπορούμε επιλεπτόνοντας τη στρωματοποίηση να υποθέσουμε ότι κάθε M_r είναι είτε ο μηδενικός πίνακας είτε είναι ανάγωγος.

Παρατήρηση 4.6.34. Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχουν τρία είδη στρωμάτων. Αν M_r είναι ο μηδενικός πίνακας τότε το H_r είναι ένα μηδενικό στρώμα. Αν ο M_r είναι ανάγωγος τότε έχει αντίστοιχη Perron-Frobenius ιδιοτιμή $\lambda_r \geq 1$ (βλ. [15]). Αν $\lambda_r > 1$ τότε λέμε ότι το H_r είναι εκθετικό στρώμα (exponentially-growing stratum). Αν $\lambda_r = 1$ τότε λέμε ότι το H_r είναι πολυωνυμικό στρώμα (non-exponentially-growing stratum).

Ορισμός 4.6.35. Ένας αντιπρόσωπος $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ του Φ θα λέμε ότι είναι μια *relative train track απεικόνιση* ως προς τη στρωματοποίηση

$$\emptyset = \Gamma_0 \subsetneq \Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_m = \Gamma$$

αν το Γ δεν έχει κορυφές με βαθμό ίσο με 1, αν κάθε M_r είναι ανάγωγος και κάθε εκθετικό στρώμα H_r ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες.

- Αν E είναι μια ακμή του H_r , τότε η $Tf(E)$ είναι επίσης ακμή του H_r .
- Αν $\beta \subset \Gamma_{r-1}$ είναι ένα μη τετριμμένο μονοπάτι με άκρα στο $H_r \cap \Gamma_{r-1}$ τότε το $f_\#(\beta)$ είναι μη τετριμμένο.⁶
- Αν $\sigma \subset H_r$ είναι ένα επιτρεπτό μονοπάτι τότε το $f(\sigma) \subset \Gamma_r$ είναι ένα r -επιτρεπτό μονοπάτι.

Το βασικό πλεονέκτημα των relative train track απεικονίσεων δίνεται από το παρακάτω λήμμα.

⁶Όπου με $f_\#(\beta)$ συμβολίζουμε το μοναδικό ανηγμένο (tight) μονοπάτι που είναι ομοτοπικό rel άκρα με το $f(\beta)$. Το $f_\#(\beta)$ το έχουμε συμβολίσει προηγουμένως και με $[[f(\beta)]]$.

Λήμμα 4.6.36. Έστω $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ μία *relative train track απεικόνιση*. Υποθέτουμε επιπλέον ότι το H_r είναι ένα εκθετικό στρώμα και ότι

$$\sigma = a_1 b_1 a_2 \cdots b_l$$

είναι μια ανάλυση ενός r -επιτρεπτού μονοπατιού σε υπομονοπάτια έτσι ώστε $a_i \subset H_r$ και $b_j \subset \Gamma_{r-1}$ για κάθε i και j (επιτρέπουμε την περίπτωση το a_1 ή το b_l να είναι τετριμμένα αλλά υποθέτουμε ότι τα υπόλοιπα υπομονοπάτια είναι μη τετριμμένα). Τότε

$$f_{\#}(\sigma) = f(a_1) f_{\#}(b_1) f(a_2) \cdots f_{\#}(b_l)$$

και το $f_{\#}(\sigma)$ είναι r -επιτρεπτό.

Επιστρέφουμε στη μελέτη των unipotent εξωτερικών αυτομορφισμών. Έχουμε το εξής θεώρημα (από το [42]).

Θεώρημα 4.6.37. Έστω $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ένας UPG εξωτερικός αυτομορφισμός. Τότε υπάρχει μια *relative train track απεικόνιση*, αντιπρόσωπος του Φ , και στρωματοποίηση

$$\emptyset = \Gamma_0 \subsetneq \Gamma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_k = \Gamma$$

με τις παρακάτω ιδιότητες.

- Κάθε στρώμα H_i είναι μία μόνο ακμή E_i τέτοια ώστε $f(E_i) = E_i \cdot u_i$ για κάποιο κλειστό μονοπάτι $u_i \subset \Gamma_{i-1}$.
- Κάθε κορυφή του Γ σταθεροποιείται από την f .
- Αν το σ είναι ένα μονοπάτι με άκρα κορυφές του Γ τότε υπάρχει $M = M(\sigma)$ τέτοιο ώστε για κάθε $m \geq M$ το $[[f^m(\sigma)]]$ αναλύεται σε υπομονοπάτια τα οποία είτε αποτελούνται από μία μόνο ακμή, είτε είναι εξαιρετικά (*exceptional*).
- Το $M(\sigma)$ φράσσεται από ένα πολλαπλάσιο του μήκους του σ .

Λήμμα 4.6.38. Έστω $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ένας UPG εξωτερικός αυτομορφισμός και $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ένας τοπολογικός αντιπρόσωπός του, όπως στο παραπάνω θεώρημα. Τότε για κάθε μονοπάτι γ στο Γ για το οποίο ισχύει $[[f(\gamma)]] \neq \gamma$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$a([[f^k(\gamma)]]) \geq k + a.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με επαγωγή στον ελάχιστο δείκτη m του στοιχείου Γ_m της στρωματοποίησης που περιέχει το μονοπάτι γ .

- Αν $\gamma \subset \Gamma_1$, τότε δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι καθώς το Γ_1 περιέχει μία μόνο ακμή E_1 η οποία σταθεροποιείται από την f .
- Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για μονοπάτια που περιέχονται στο Γ_{m-1} και ικανοποιούν την υπόθεση. Έστω μονοπάτι γ στο Γ_m τέτοιο ώστε $[[f(\gamma)]] \neq \gamma$.

Από το παραπάνω θεώρημα για κάθε $m \geq M(\gamma)$ το $[[f^m(\gamma)]]$ αναλύεται σε υπομονοπάτια τα οποία είτε αποτελούνται από μία μόνο ακμή, είτε είναι εξαιρετικά. Συμβολίζουμε

$$[[f^{M(\gamma)}]] \equiv \bar{\gamma}$$

το οποίο είναι

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_p$$

με γ_i να είναι είτε μία ακμή είτε εξαιρετικό μονοπάτι.

- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο εξαιρετικό μονοπάτι γ_t το οποίο δε σταθεροποιείται από την f . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$\gamma_t = E_i u^r \overline{E_j}$$

με $f(E_i) = E_i u^l$, ($l > 0$) και $f(E_j) = E_j u^s$, ($s > 0$) και $j \leq i$. Τώρα, έχουμε ότι

$$[[f^k(\gamma_t)]] = E_i u^{k(l-s)+r} \overline{E_j}$$

οπότε

$$a([[f^k(\gamma_t)]]) \geq \begin{cases} k(l-s) + r, & \text{αν } l > s \\ k(s-l) - r, & \text{αν } s > l \end{cases}$$

Αφού το γ_t δε σταθεροποιείται από την f τα s και l δε μπορεί να είναι ίσα. Επομένως

$$a(f^k(\bar{\gamma})) \geq k \pm r$$

οπότε

$$a([[f^k(\gamma)]]) = a([[f^{k-M(\gamma)}(\bar{\gamma})]]) \geq k - M(\gamma) \pm r.$$

– Αν όλα τα εξαιρετικά μονοπάτια στο $\bar{\gamma}$ σταθεροποιούνται από την f , τότε υπάρχει μια ακμή $\gamma_t = E_i$ η οποία δε σταθεροποιείται από την f (αφού $[[f(\gamma)]] \neq \gamma$). Γνωρίζουμε, από το θεώρημα, ότι $f(E_i) = E_i \cdot u_i$ όπου το u_i είναι ένα κλειστό μονοπάτι που περιέχεται στο Γ_{m-1} .

* Αν $[[f(u_i)]] = u_i$, τότε ο ισχυρισμός αποδείχθηκε αφού θα έχουμε

$$[[f^k(E_i)]] = E_i u_i^k$$

και άρα

$$a([[f^k(\bar{\gamma})]]) \geq k \Rightarrow a([[f^k(\gamma)]]) \geq k - M(\gamma).$$

* Αν $[[f(u_i)]] \neq u_i$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a([[f^k(u_i)]]) \geq k + a$. Τότε θα έχουμε

$$a([[f^k(\gamma)]]) = a([[f^{k-M(\gamma)}(\bar{\gamma})]]) \geq a([[f^{k-M(\gamma)}(u_i)]]) \geq k - M(\gamma) + a.$$

■

Λήμμα 4.6.39. Έστω Φ ένας UPG εξωτερικός αυτομορφισμός της F_n άπειρης τάξης. Τότε υπάρχει ένα κλειστό μονοπάτι σ στο Γ και ένα $b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\bar{a}(\Phi^k(\sigma)) \geq k + b.$$

Απόδειξη. Έστω ένα αντιπρόσωπος $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ του Φ όπως στο παραπάνω θεώρημα. Αφού ο Φ είναι άπειρης τάξης έχουμε ότι $\Phi \neq id$ και κατά συνέπεια υπάρχει ένα κλειστό μονοπάτι $\sigma \subset \Gamma$ το οποίο δε σταθεροποιείται από την f . Γνωρίζουμε, επίσης, ότι για κάθε $m \geq M(\sigma)$ το

$$[[f^m(\sigma)]] = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_p$$

αναλύεται σε υπομονοπάτια σ_i τα οποία είτε είναι εξαιρετικά μονοπάτια είτε αποτελούνται από μία μόνο ακμή. Συμβολίζουμε

$$[[f^{M(\sigma)}]] \equiv \bar{\sigma}$$

και άρα έχουμε ότι

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_p.$$

- Αν υπάρχει κάποιο εξαιρετικό μονοπάτι σ_t στην παραπάνω ανάλυση το οποίο δε σταθεροποιείται από την f , έχουμε

$$\bar{a}(\Phi^k(\bar{\sigma})) \geq k \pm r$$

για κάποιο $r \in \mathbb{R}$, όπως στο προηγούμενο λήμμα.

- Αν όλα τα εξαιρετικά μονοπάτια του $\bar{\sigma}$ σταθεροποιούνται από την f , τότε υπάρχει ακμή $\sigma_t = E_i$ τέτοια ώστε

$$f(E_i) = E_i \cdot u_i$$

με το u_i να είναι, όπως πριν, ένα κλειστό μονοπάτι που περιέχεται στο Γ_{i-1} . Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$a(f^k(E_i)) \geq k + a.$$

Κατά συνέπεια, σε κάθε περίπτωση υπάρχει $b \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\bar{a}(\Phi^k(\sigma)) \geq k + b.$$

■

Θεώρημα 4.6.40. Κάθε στοιχείο άπειρης τάξης $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ έχει θετικό μήκος μετατόπισης (translation length). Επιπλέον, υπάρχει θετική σταθερά ϵ_n τέτοια ώστε

$$\tau(\Phi) \geq \epsilon_n \text{ για κάθε στοιχείο άπειρης τάξης } \Phi \in \text{Out}(F_n).$$

Παρατήρηση 4.6.41. Από την Παρατήρηση 1.8 του [40] έπεται ότι για κάθε εξωτερικό αυτομορφισμό $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ με εκθετική αύξηση έχουμε ότι υπάρχει $\lambda > 1$ τέτοιο ώστε

$$l(\Phi^k([w])) \geq \lambda^k l([w])$$

για κάθε ανηγμένη λέξη w και $k \geq 1$. Επιπλέον, για το παραπάνω λ υπάρχει σταθερά $c = c(\Phi) > 1$ έτσι ώστε $\lambda \geq c$.

Απόδειξη του Θεωρήματος. Έχει αποδειχθεί στο [40] ότι ένα στοιχείο της $\text{Out}(F_n)$ έχει είτε πολυωνυμικό είτε εκθετικό ρυθμό αύξησης. Εξετάζουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις των εξωτερικών αυτομορφισμών άπειρης τάξης $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ εκθετικού και πολυωνυμικού ρυθμού αύξησης.

- Έστω Φ ένας εξωτερικός αυτομορφισμός της F_n με εκθετικό ρυθμό αύξησης. Τότε από την παρατήρηση υπάρχει ένας αριθμός $\lambda > 1$ και μια κυκλικά ανηγμένη λέξη ω έτσι ώστε

$$l(\Phi^k([w])) \geq \lambda^k l([w])$$

για κάθε $k \geq 1$. Υποθέτουμε ότι το Φ^k μπορεί να γραφεί ως

$$\Phi^k = \overline{g_1} \cdots \overline{g_m}$$

για κάποια $\overline{g_i} \in \overline{Y}$. Είναι προφανές από τον ορισμό του $\overline{Y}$ ότι για κάθε $\overline{g_i} \in \overline{Y}$ και κάθε κυκλικά ανηγμένη λέξη w έχουμε ότι

$$l(\overline{g}([w])) \leq 2l([w]).$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα και την παραπάνω γραφή του Φ έχουμε ότι

$$l(\Phi^k([w])) \leq 2^m l([w])$$

και άρα

$$\lambda^k l([w]) \leq l(\Phi^k([w])) \leq 2^m l([w]).$$

Κατά συνέπεια

$$m \geq \frac{\log \lambda^k}{\log 2} = k \frac{\log \lambda}{\log 2} \Rightarrow \frac{m}{k} \geq \frac{\log \lambda}{\log 2}$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\tau(\Phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\Phi^k\|}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m}{k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda}{\log 2} = \frac{\log \lambda}{\log 2}.$$

Πάλι από την παραπάνω παρατήρηση έπεται ότι υπάρχει $c > 1$ με $\lambda \geq c$ και άρα

$$\tau(\Phi) \geq \frac{\log \lambda}{\log 2} \geq \frac{\log c}{\log 2} > 0$$

δηλαδή το μήκος μετατόπισης $\tau(\Phi)$ φράσσεται μακριά από το 0.

- Έστω τώρα ότι ο Φ είναι ένα UPG εξωτερικός αυτομορφισμός της F_n . Όπως πριν μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο Φ^k γράφεται ως

$$\Phi^k = \overline{g_1} \cdots \overline{g_m}$$

για κάποια $\overline{g_i} \in \overline{Y}$. Από το Λήμμα 4.6.39 υπάρχει ένα κλειστό μονοπάτι $\sigma \subset \Gamma$ έτσι ώστε

$$\overline{a}(\Phi^k(\sigma)) \geq k + b, \text{ για κάποιο } b \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\overline{u_j} = \overline{g_j} \cdot \dots \cdot \overline{g_m}.$$

Από το Λήμμα 4.6.29 υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\overline{a}(u_i(\sigma)) \leq \overline{a}(u_{i+1}(\sigma)) + C.$$

Από αυτό έπεται ότι

$$\overline{a}(\Phi^k(\sigma)) \leq mC + \overline{a}(\sigma)$$

και άρα

$$k + b \leq \overline{a}(\Phi^k(\sigma)) \leq mC + \overline{a}(\sigma) \Rightarrow m \geq \frac{k + b - \overline{a}(\sigma)}{C}.$$

Τότε έχουμε

$$\tau(\Phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m}{k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k + b - \overline{a}(\sigma)}{kC} = \frac{1}{C}.$$

Τέλος, αν ο Φ είναι ένας εξωτερικός αυτομορφισμός με πολυωνυμικό ρυθμό αύξησης, τότε υπάρχει $s \geq 1$ (το οποίο φράσσεται άνω από κάποιο c') τέτοιο ώστε ο Φ^s να είναι UPG εξωτερικός αυτομορφισμός. Έτσι έχουμε

$$\tau(\Phi) = \frac{1}{s} \tau(\Phi^s) \geq \frac{1}{Cs} > 0.$$

Τέλος, έχουμε ότι $\tau(\Phi) \geq \frac{1}{Cs} > 0$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Μπορεί τώρα να δοθεί μια νέα απόδειξη της παρακάτω πρότασης η οποία αρχικά αποδείχθηκε στο [43]. Χρησιμοποιούμε την απόδειξη του Πορίσματος 4.4 στο [36].

Πρόταση 4.6.42. *Κάθε επιλύσιμη υποομάδα της $\text{Out}(F_n)$ είναι σχεδόν αβελιανή.*

Απόδειξη. Έστω H επιλύσιμη υποομάδα της $\text{Out}(F_n)$. Από το Πόρισμα 1.5.6 του [26] γνωρίζουμε ότι η $\text{Out}(F_n)$ είναι σχεδόν ελεύθερη στρέψεως και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η H είναι ελεύθερη στρέψεως, αντικαθιστώντας την αν χρειαστεί με κάποια υποομάδα πεπερασμένου δείκτη.

Εφαρμόζοντας επαγωγή στο μήκος της παραγώγου σειράς της επιλύσιμης ομάδας H μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ομάδα $[H, H]$ είναι σχεδόν αβελιανή και άρα είναι πεπερασμένα παραγόμενη, όπως αποδεικνύεται στο αμέσως επόμενο αποτέλεσμα.

Έστω $K \leq [H, H]$ αβελιανή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη που είναι χαρακτηριστική στην $[H, H]$. Η δράση με συζυγίες της H στην K είναι σχεδόν τετριμμένη, αφού

διατηρεί τα μήκη μετατόπισης επομένως και η δράση της H στην $[H, H]$ είναι σχεδόν τετριμμένη. Παίρνοντας, αν χρειαστεί, υποομάδα της H πεπερασμένου δείκτη μπορούμε να υποθέσουμε ότι η δράση της στην $[H, H]$ είναι τετριμμένη.

Ισχυρισμός: Η ομάδα $[H, H]$ είναι τετριμμένη και άρα η H είναι αβελιανή.

Πράγματι, έστω $x, y \in H$ και $z = [x, y]$ με $z \neq 1$. Από την κατασκευή, το z μετατίθεται με τα x, y και έχει άπειρη τάξη. Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $[x^n, y^n] = z^{n^2}$ και άρα το z έχει μήκος μετατόπισης ίσο με 0, άτοπο. ■

Παρουσιάζουμε τώρα την απόδειξη της πρότασης που χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη (βλ. Πρόρισμα 4.2 στο [36]).

Πρόταση 4.6.43. *Κάθε αβελιανή υποομάδα $A \leq \text{Out}(F_n)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

Απόδειξη. Αφού η $\text{Out}(F_n)$ είναι σχεδόν ελεύθερη στρέψεως μπορούμε, παίρνοντας υποομάδα πεπερασμένου δείκτη, να υποθέσουμε ότι η A είναι ελεύθερη στρέψεως. Από το Πρόρισμα 3 του [38] γνωρίζουμε ότι η $\text{Out}(F_n)$ έχει πεπερασμένη σχεδόν συνομολογιακή διάσταση (συγκεκριμένα $2n - 3$). Έτσι, έχουμε ότι η A είναι υποομάδα ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης $W = A \otimes \mathbb{Q}$. Αφού το μήκος μετατόπισης $\tau : A \rightarrow [0, +\infty)$ επεκτείνεται σε μια (μη συμμετρική) νόρμα στον W και οι τιμές της στο $A - \{0\}$ είναι φραγμένες μακριά από το 0 έπεται ότι η A είναι διακριτή στον W . ■

Έπεται λοιπόν ότι κάθε επιλύσιμη υποομάδα της $\text{Out}(F_n)$ είναι σχεδόν πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή.

Δίνουμε τώρα μια σκιαγράφηση της απόδειξης του εναλλακτικού θεωρήματος του Tits των Bestvina, Feighn, Handel όπως αυτή παρουσιάστηκε στα [42],[44],[43].

Όπως έχουμε αναφέρει, μια ομάδα ικανοποιεί το εναλλακτικό θεώρημα του Tits αν κάθε υποομάδα της είτε περιέχει ελεύθερη ομάδα τάξης 2 είτε είναι σχεδόν επιλύσιμη.

Στο [43] αποδεικνύεται επιπλέον το εξής:

Θεώρημα 4.6.44. *Μια επιλύσιμη υποομάδα της $\text{Out}(F_n)$ έχει ως υποομάδα μια πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή με δείκτη το πολύ 3^{5n^2} .*

Η απόδειξη του ακόλουθου βασικού θεωρήματος χωρίζεται σε δύο μέρη ανάλογα με το ρυθμό αύξησης των υπό μελέτη αυτομορφισμών.

Θεώρημα 4.6.45. *Η ομάδα $\text{Out}(F_n)$ ικανοποιεί το εναλλακτικό του Tits.*

Θυμίζουμε ότι ένα στοιχείο $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ έχει πολωνυμικό ρυθμό αύξησης αν για κάθε κλάση συζυγίας $[[\gamma]]$ στην F_n το μήκος της λέξης $\Phi^i([[\gamma]])$ ως προς κάποιο σταθερό σύνολο γεννητόρων της F_n αυξάνεται το πολύ πολωνυμικά ως προς i . Ανάλογα, ένα στοιχείο $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ έχει εκθετικό ρυθμό αύξησης αν για κάποια κλάση συζυγίας $[[\gamma]]$ στην F_n το $\Phi^i([[\gamma]])$ αυξάνεται τουλάχιστον εκθετικά ως προς i .

Όπως ήδη έχουμε πει ένα στοιχείο της $\text{Out}(F_n)$ έχει είτε πολωνυμικό είτε εκθετικό ρυθμό αύξησης (βλ. [40]).

Το σύνολο των εξωτερικών αυτομορφισμών της F_n με πολωνυμικό ρυθμό αύξησης συμβολίζεται με $PG(F_n)$. Μια υποομάδα $A \leq \text{Out}(F_n)$ θα λέγεται PG (αντίστοιχα UPG) αν κάθε στοιχείο της είναι στο $PG(F_n)$ (αντίστοιχα αν κάθε στοιχείο της είναι unipotent εξωτερικός αυτομορφισμός).

Στο [44] γίνεται μελέτη των UPG υποομάδων της $\text{Out}(F_n)$. Το βασικό αποτέλεσμα είναι το εξής.

Θεώρημα 4.6.46. *Μια UPG υποομάδα της $\text{Out}(F_n)$ η οποία δεν περιέχει ως υποομάδα ελεύθερη τάξης 2 είναι επιλύσιμη.*

Το κύριο αποτέλεσμα του [42] είναι το εξής:

Θεώρημα 4.6.47. *Έστω $H \leq \text{Out}(F_n)$ μια υποομάδα η οποία δεν περιέχει ως υποομάδα ελεύθερη τάξης 2. Τότε η H περιέχει υποομάδα H_0 πεπερασμένου δείκτη με την εξής ιδιότητα. Υπάρχει πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα A και απεικόνιση*

$$\Phi : H_0 \rightarrow A$$

με τον πυρήνα $\ker(\Phi)$ να είναι UPG ομάδα.

Τα δύο τελευταία θεωρήματα έχουν ως συνέπεια το Θεώρημα 4.6.45.

Πράγματι, το Θεώρημα 4.6.47 μας δίνει ότι αν η υποομάδα $\mathcal{H} \leq \text{Out}(F_n)$ δεν περιέχει μη αβελιανή ελεύθερη ομάδα, τότε έχει υποομάδα πεπερασμένου δείκτη $\mathcal{H}_0 \leq \mathcal{H}$ και υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0 \rightarrow A \rightarrow 1$$

όπου A πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή και $\mathcal{H}_1 \leq \text{Out}(F_n)$ unipotent υποομάδα. Αφού η $\mathcal{H}_1$ δεν περιέχει μη-αβελιανή ελεύθερη ομάδα (αφού η $\mathcal{H}_0$ δεν περιέχει)

από το Θεώρημα 4.6.46 η $\mathcal{H}_1$ είναι επιλύσιμη. Επομένως, από την παραπάνω ακριβή ακολουθία, η $\mathcal{H}_0$ είναι επιλύσιμη και άρα η $\mathcal{H}$ είναι σχεδόν επιλύσιμη.

Κλείνοντας, θα εξηγήσουμε συνοπτικά την απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.47.

Για να αποδειχθεί το εναλλακτικό θεώρημα του Tits για την ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών $\text{Out}(F_n)$ είναι απαραίτητη μία μέθοδος-τεχνική μέσω της οποίας θα αποδεικνύεται η ύπαρξη ελεύθερης, μη-αβελιανής, υποομάδας σε μια συγκεκριμένη υποομάδα $H \leq \text{Out}(F_n)$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η κλασσική μέθοδος για αυτό το σκοπό είναι κάποιο επιχείρημα ping-pong. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση της $\text{Out}(F_n)$ οι Bestvina, Feighn και Handel στο [42] χρησιμοποίησαν το χώρο των γραμμών $\mathbf{B}$ στον οποίο η $\text{Out}(F_n)$ δρα προκειμένου να "παίξουν" ping-pong. Έστω $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ ένας εξωτερικός αυτομορφισμός. Όπως έχουμε δει, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στον Φ ένα υποσύνολο $\mathcal{L}(\Phi) \subseteq \mathbf{B}$ το οποίο ονομάζεται σύνολο των ελκυστών γραμμώσεων του Φ . Κάθε γραμμώση $\Lambda^+ \in \mathcal{L}(\Phi)$ είναι η κλειστότητα μιας γραμμής $\lambda^+ \in \mathbf{B}$ η οποία είναι διπλά επαναλαμβανόμενη, έχει μια έλκουσα περιοχή U για τον Φ (δηλαδή το $U \subset \mathbf{B}$ είναι τέτοιο ώστε $\Phi(U) \subset U$ και τα υποσύνολο $\Phi^k(U)$ αποτελούν μια βάση περιοχών για το λ^+) και δεν φέρεται από κάποιον Φ -περιοδικό ελεύθερο παράγοντα τάξης 1 της F_n . Μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{L}(\Phi)$ είναι πεπερασμένο και μερικώς διατεταγμένο ως προς τη σχέση του περιέχεται. Τα μεγιστικά στοιχεία του συνόλου $\mathcal{L}(\Phi)$ ως προς αυτή τη διάταξη θα ονομάζονται ανώτατα (topmost).

Έστω τώρα μια υποομάδα $H \leq \text{Out}(F_n)$, ένας εξωτερικός αυτομορφισμός $\Phi \in H$ και μια ανώτατη γραμμώση Λ^+ του Φ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι στον Φ^{-1} αντιστοιχεί με φυσικό τρόπο μια ανώτατη γραμμώση Λ^- . Αν $h \in H$ και θεωρήσουμε το συζυγές $\Psi = h\Phi h^{-1}$ του Φ , τότε η $\Gamma^+ = h\Lambda^+$ είναι μια ανώτατη γραμμώση για τον Ψ και η $\Gamma^- = h\Lambda^-$ είναι μια ανώτατη γραμμώση για τον Ψ^- . Στην περίπτωση όπου οι γραμμώσεις $\Lambda^+, \Lambda^-, \Gamma^+, \Gamma^-$ είναι ξένες ανά δύο και $\Gamma^+, \Gamma^- \rightarrow \Lambda^+$ υπό τον Φ (δηλαδή generic γραμμές των Γ^+, Γ^- ελκύονται ασθενώς στο Λ^+ υπό τον Φ), $\Gamma^+, \Gamma^- \rightarrow \Lambda^-$ υπό τον Φ^- , $\Lambda^+, \Lambda^- \rightarrow \Gamma^+$ υπό τον Ψ , $\Lambda^+, \Lambda^- \rightarrow \Gamma^-$ υπό τον Ψ^- , τότε, όπως έχουμε δει στο Λήμμα 4.6.2, χρησιμοποιώντας έλκουσες περιοχές των γραμμώσεων $\Lambda^+, \Lambda^-, \Gamma^+, \Gamma^-$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το επιχείρημα του ping-pong για να αποδείξουμε ότι κάποιες δυνάμεις των Φ, Ψ παράγουν ελεύθερη υποομάδα μέσα στην H .

Ξεκινώντας με έναν εξωτερικό αυτομορφισμό $\Phi \in H$ επιλέγουμε έναν βελτιωμένο re-

relative train track αντιπρόσωπο⁷ $f : G \rightarrow G$ για τον Φ με ανώτατη έλκουςα γραμμώση Λ^+ . Αν δεν υπάρχει κάποιος εξωτερικός αυτομορφισμός $h \in H$ ο οποίος να δίνει γραμμώσεις Γ^+ και Γ^- κατάλληλες για το επιχείρημα του ping-pong που περιγράψαμε παραπάνω, τότε μπορούμε, περνώντας σε υποομάδα πεπερασμένου δείκτη, να υποθέσουμε ότι κάθε στοιχείο της H σταθεροποιεί το Λ^+ ή το Λ^- , έστω το Λ^+ . Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να κατασκευαστεί ομομορφισμός $H \rightarrow \mathbb{R}$ ο οποίος να μετρά πόσο τεντώνει το Λ^+ κάθε $h \in H$. Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού αποτελείται από αυτομορφισμούς με πολωνυμικό ρυθμό αύξησης. Υψώνοντας σε κατάλληλο εκθέτη μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε αυτομορφισμός που ανήκει στον πυρήνα του παραπάνω ομομορφισμού είναι UPG εξωτερικός αυτομορφισμός. Έτσι, το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στη μελέτη των UPG υποομάδων της $\text{Out}(F_n)$ και στο κατά πόσο αυτές ικανοποιούν το εναλλακτικό θεώρημα του Tits. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αντιμετωπίζεται στο [44].

⁷Οι βελτιωμένοι (improved) relative train track αντιπρόσωποι εισήχθησαν στο [42] αλλά η μελέτη τους ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας.

Παράρτημα Α΄

Το θεώρημα Perron-Frobenius

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε το θεώρημα Perron-Frobenius από τη θεωρία πινάκων ακολουθώντας τα [15],[62]. Για τα παρακάτω θεωρούμε $m, n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός Α΄.0.1. Ένας πίνακας με στοιχεία από ένα δακτύλιο θα ονομάζεται *πίνακας μετάθεσης* αν είναι τετραγωνικός και κάθε στοιχείο κάθε γραμμής και στήλης του είναι 0 εκτός από ένα που είναι 1. Δηλαδή είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία 0 εκτός από τις θέσεις $(\sigma(i), i)$, για κάποια μετάθεση $\sigma \in S_n$, όπου έχει 1.

Παρατήρηση Α΄.0.2. Η συζυγία PAP^{-1} ενός πίνακα $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ μέσω ενός πίνακα μετάθεσης $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ αντιστοιχεί σε μία αλλαγή βάσης.

Ορισμός Α΄.0.3. Ένας πίνακας $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ θα λέγεται *ανάγωγος* (irreducible) αν δεν υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ και $1 \leq r \leq n-1$ έτσι ώστε

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

όπου $A \in \mathbb{K}^{r \times r}$, $B \in \mathbb{K}^{r \times (n-r)}$, $C \in \mathbb{K}^{(n-r) \times (n-r)}$, $\mathbb{O} \in \mathbb{K}^{(n-r) \times r}$. Αν ένας τετραγωνικός πίνακας δεν είναι ανάγωγος τότε θα λέγεται *μη ανάγωγος* (reducible).

Παρατήρηση Α΄.0.4. Ο πίνακας $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ είναι ανάγωγος αν και μόνο αν ο ανάστροφος M^t είναι ανάγωγος.

Παρατήρηση Α΄.0.5. Όλοι οι 1×1 πίνακες είναι ανάγωγοι.

Ορισμός Α΄.0.6. Έστω $M = (\mu_{ij})$, $N = (\nu_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ δύο πραγματικοί τετραγωνικοί πίνακες. Θα λέμε ότι $M \leq N$ αν $\mu_{ij} \leq \nu_{ij}$ για κάθε i, j και $M < N$ αν $\mu_{ij} < \nu_{ij}$ για κάθε i, j . Ο πίνακας M θα λέγεται *μη αρνητικός* αν $M \geq \mathbb{O}_{m \times n}$ και *θετικός* αν $M > \mathbb{O}_{m \times n}$.

Παρατήρηση Α'.0.7. Αν $M \geq \mathbb{O}_{m \times n}$ τότε $M^k \geq \mathbb{O}_{m \times n}$ για κάθε $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και αν $M > 0$ τότε $M^K > \mathbb{O}_{m \times n}$ για κάθε $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Λήμμα Α'.0.8. Αν ο $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι μη αρνητικός, τότε ο M είναι ανάγωγος αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^m M^k > \mathbb{O}_{n \times n}$ για κάποιο $m \geq 0$. Αν ο M είναι μη μηδενικός και ανάγωγος τότε $\sum_{k=1}^m M^k > \mathbb{O}_{n \times n}$ για κάποιο $m \geq 1$.

Απόδειξη. Αν ο M είναι μη-ανάγωγος τότε, αντικαθιστώντας αν χρειαστεί τον M με κάποιον συζυγή του μέσω πίνακα μετάθεσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κάτω αριστερά μπλοκ στον M είναι $\mathbb{O}$ και άρα παραμένει $\mathbb{O}$ σε όλες τις δυνάμεις του M οπότε και σε όλα τα αθροίσματα αυτών. Αντίστροφα, έστω ότι ο M είναι ανάγωγος. Αν ο M είναι μηδενικός πίνακας τότε το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ο M είναι μη μηδενικός. Έστω $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$. Σταθεροποιούμε $i \in \mathcal{N}$ και έστω $\mathcal{J}$ το σύνολο των $j \in \mathcal{N}$ για τα οποία κάποια θετική δύναμη του M έχει μη μηδενική (i, j) θέση. Τότε $\mathcal{J} \neq \emptyset$ αφού η i γραμμή του M είναι μη μηδενική. Για $k \in \mathcal{N} - \mathcal{J}$ η (i, k) θέση είναι μηδέν σε κάθε θετική δύναμη του M . Άρα για κάθε $j \in \mathcal{J}$ η (j, k) θέση του M είναι μηδέν. Άρα αν $\mathcal{N} \neq \mathcal{J}$, τότε παίρνοντας κάποιο κατάλληλο συζυγές του M με ένα πίνακα μετάθεσης βλέπουμε ότι ο M είναι μη-ανάγωγος. Άρα $\mathcal{J} = \mathcal{N}$. Τελικά, $\sum_{n=1}^m M^n > 0$ για κάποιο $m \geq 1$. ■

Θεώρημα Α'.0.9 (Perron-Frobenius). Έστω M ένας μη μηδενικός, ανάγωγος, πραγματικός, τετραγωνικός πίνακας και έστω w ένα μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα στήλη και $\mu \in [0, +\infty)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Ο M έχει ένα πραγματικό θετικό δεξί ιδιοδιάνυσμα μοναδικό ως προς τον πολλαπλασιασμό με θετικούς πραγματικούς αριθμούς. Η αντίστοιχη ιδιοτιμή, $\text{PF}(M)$, είναι μη αρνητική.
2. $\text{PF}(M) = \text{PF}(M^t)$
3. Αν $Mw \leq w\text{PF}(M)$ τότε $Mw = w\text{PF}(M)$.
4. Αν $Mw \leq w\mu$ τότε $\text{PF}(M) \leq \mu$.

Απόδειξη. Η περίπτωση όπου ο M είναι ο μηδενικός ανάγωγος πίνακας είναι εύκολο να επαληθευτεί.

Από το παραπάνω λήμμα υπάρχει $m \geq 1$ τέτοιο ώστε $N = \sum_{i=1}^m M^i > 0$. Έστω ότι $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Θεωρούμε το $(n-1)$ -simplex

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \|x\|_1 = 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in \Delta$ τότε $Nx > 0$ και άρα $Mx \neq 0$.

Η εικόνα $N(\Delta)$ υπό τη συνήθη δράση του N είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η συνεχής απεικόνιση $\psi : N(\Delta) \rightarrow (0, +\infty)$ με

$$\psi(x) = \max \left\{ \frac{(Mx)_1}{x_1}, \dots, \frac{(Mx)_n}{x_n} \right\}$$

έχει συμπαγές πεδίο ορισμού και άρα επιτυγχάνει ελάχιστη τιμή λ σε κάποιο σημείο $x \in N(\Delta)$, όπου $x > 0$ και $\lambda = \psi(x) > 0$. Από τον ορισμό της ψ έχουμε $Mx \leq \lambda x$. Υποθέτουμε ότι η ανισότητα είναι γνήσια σε κάποια συντεταγμένη. Τότε

$$NMx < Nx\lambda$$

και άρα

$$MNx < Nx\lambda.$$

Συνεπώς, $MNx' < Nx'\lambda$ όπου $x' = \frac{x}{\|x\|_1} \in \Delta$. Άρα

$$Mx'' < \lambda x''$$

όπου $x'' = Nx' \in N(\Delta)$. Έπεται ότι $\psi(x'') < \lambda$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ορισμό του λ . Άρα $Mx = \lambda x$ όπως θέλαμε.

Λόγω συμμετρίας, υπάρχει ένα θετικό, πραγματικό διάνυσμα γραμμή v' και ένας θετικός πραγματικός αριθμός λ' με

$$v'M = \lambda'v'.$$

Τότε $\lambda'v'v = v'Mv = v'v\lambda$ και $v'v > 0$ οπότε $\lambda' = \lambda$. Αυτό αποδεικνύει τη μοναδικότητα της $\lambda = \text{PF}(M)$ και ότι $\text{PF}(M) = \text{PF}(M^t)$, επομένως αποδείχθηκε το 2.

Για τη μοναδικότητα του v ως προς τα θετικά πραγματικά πολλαπλάσιά του παρατηρούμε ότι αν ο $M - \lambda I$ μηδενίζεται σε ένα επίπεδο που περιέχει το v , τότε το επίπεδο περιέχει ένα σημείο στο εσωτερικό του Δ και άρα τέμνει το Δ σε ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο περιέχει ένα σημείο $x \in \partial\Delta$. Τότε το x είναι ιδιοδιάνυσμα του M και άρα και του N το οποίο είναι άτοπο αφού $Nx > 0$. Έτσι, αποδείχθηκε το 1.

Αν $Mw \leq w\mu$, τότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με v' παίρνουμε $\lambda v'w \leq v'w\mu$ με την ανισότητα να είναι γνήσια αν $Mw \neq w\mu$. Αφού $v'w > 0$ έχουμε το 3 και το 4. ■

Ορισμός Α'.0.10. Έστω M ένας μη αρνητικός, ανάγωγος, πραγματικός, τετραγωνικός πίνακας. Ο πραγματικός αριθμός $\text{PF}(M)$ του παραπάνω θεωρήματος ονομάζεται ι-διοτιμή Perron-Frobenius του M . Ένα θετικό διάνυσμα στήλη v με $Mv = v\text{PF}(M)$ ονομάζεται Perron-Frobenius δεξί ιδιοδιάνυσμα του M . Από την πρώτη πρόταση του προηγούμενου θεωρήματος υπάρχει ένα μοναδικό Perron-Frobenius δεξί ιδιοδιάνυσμα v του M με $|v|_1 = 1$. Αυτό το διάνυσμα ονομάζεται κανονικοποιημένο Perron-Frobenius δεξί ιδιοδιάνυσμα του M . Αντίστοιχη ορολογία έχουμε για αριστερά ιδιοδιανύσματα.

Ορισμός Α'.0.11. Έστω N, N' δύο πραγματικοί τετραγωνικοί πίνακες. Θα λέμε ότι ο N' κυριαρχείται από τον N αν υπάρχει υποπίνακας N'' του N τέτοιος ώστε $N' \leq N''$.

Πρόταση Α'.0.12. Έστω N ένας μη αρνητικός, πραγματικός, τετραγωνικός πίνακας, N' ένας ανάγωγος, μη αρνητικός, πραγματικός, τετραγωνικός πίνακας που κυριαρχείται από τον N . Έστω λ ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και v ένα θετικό, πραγματικό διάνυσμα γραμμή τέτοιο ώστε $vN \leq \lambda v$. Τότε:

1. $\text{PF}(N') \leq \lambda$.

2. Αν $\text{PF}(N') = \lambda$ τότε, ως προς συζυγία μέσω πίνακα μετάθεσης, ισχύει ότι

$$N = \begin{pmatrix} N' & N_{12} \\ \mathbb{O} & N_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{και } v = (v_1, v_2), \text{ όπου } v_1 N' = \lambda v_1.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$ με $N' \leq N_{11}$ και γράφουμε $v = (v_1, v_2)$. Τότε

$$(\lambda v_1, \lambda v_2) = \lambda v \geq vN = (v_1 N_{11} + v_2 N_{21}, v_1 N_{12} + v_2 N_{22})$$

οπότε

$$\lambda v_1 \geq v_1 N_{11} + v_2 N_{21} \geq v_1 N_{11} \geq v_1 N'.$$

Αφού $v_1 > 0$ προκύπτει, από το 4 του προηγούμενου θεωρήματος, ότι $\lambda \geq \text{PF}(N')$ και άρα έχουμε το 1.

Αν $\text{PF}(N') = \lambda$ τότε από το 3 του παραπάνω θεωρήματος έχουμε ότι $\lambda v_1 = v_1 N'$ οπότε

$$v_1(N_{11} - N') + v_2 N_{21} = \mathbb{O}$$

Αφού $v > \mathbb{O}$ είναι $N_{11} = N'$ και $N_{21} = \mathbb{O}$ οπότε έχουμε και το 2. ■

Πόρισμα Α'.0.13. Έστω N ένας ανάγωγος, μη αρνητικός, τετραγωνικός, πραγματικός πίνακας και N' ένας ανάγωγος, μη αρνητικός, τετραγωνικός, πραγματικός πίνακας που κυριαρχείται από τον N . Τότε:

1. $\text{PF}(N') \leq \text{PF}(N)$.
2. Αν $\text{PF}(N') = \text{PF}(N)$ τότε $N' = N$.

Απόδειξη. Στην προηγούμενη πρόταση παίρνουμε v να είναι ένα Perron-Frobenius αριστερό ιδιοδιάνυσμα του N και λ να είναι ο $\text{PF}(N)$. ■

Πρόταση Α'.0.14. Έστω K, L μη αρνητικοί, πραγματικοί πίνακες χωρίς μηδενικές γραμμές και στήλες, αντίστοιχα. Αν ο LK είναι ανάγωγος, τότε και ο KL είναι ανάγωγος και $\text{PF}(LK) = \text{PF}(KL)$.

Απόδειξη. Από το παραπάνω λήμμα υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=0}^m (LK)^i > 0$. Οπότε

$$0 < K \left(\sum_{i=0}^m (LK)^i \right) L = \sum_{i=0}^m (KL)^{i+1} \leq \sum_{i=0}^{m+1} (KL)^i.$$

Συνεπώς από το ίδιο λήμμα ο KL είναι ανάγωγος.

Έστω $\lambda = \text{PF}(LK)$ και v ένα Perron-Frobenius αριστερό ιδιοδιάνυσμα του LK . Θέτουμε $v' = vL$, που είναι θετικό διάνυσμα γραμμής. Τότε

$$v'KL = vLKL = \lambda vL = \lambda v'.$$

Οπότε $\text{PF}(LK) = \text{PF}(KL)$. ■

Πρόταση Α'.0.15. Έστω n ένας θετικός ακέραιος και M ένας μη μηδενικός, μη αρνητικός, ανάγωγος, $n \times n$ πίνακας $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Έστω $\lambda = \text{PF}(M)$. Τότε:

1. $\lambda \geq 1$
2. Αν $\lambda = 1$, τότε ο M είναι πίνακας μετάθεσης.
3. Για κάθε $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει ότι $m_{i,j} \leq \lambda^n$.

Απόδειξη. Έστω v ένα Perron-Frobenius δεξί ιδιοδιάνυσμα του M . Για κάθε $k \geq 0$ γράφουμε $M^k = (m_{i,j}^{(k)})$. Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος (i, j) . Από το παραπάνω λήμμα

υπάρχει $m \geq 1$ τέτοιο ώστε $\sum_{k=1}^m M^k > 0$. Οπότε $m_{i,j}^{(l)} > 0$ για κάποιο $l \geq 1$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cayley-Hamilton μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1 \leq l \leq n$ και αν $i \neq j$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1 \leq l \leq n-1$. Έτσι, μπορούμε να βρούμε ένα $l(i,j) \in \{1, \dots, n-1+\delta_{i,j}\}$, τέτοιο ώστε

$$m_{i,j}^{(l(i,j))} \neq 0 \text{ και άρα } m_{i,j}^{(l(i,j))} \geq 1.$$

Οπότε

$$v_j \leq m_{i,j}^{(l(i,j))} v_j \leq \sum_{k=1}^n m_{i,k}^{(l(i,j))} v_k = \lambda^{l(i,j)} v_i.$$

Για $i = j$ παίρνουμε $1 \leq \lambda$ οπότε έχουμε το 1.

Για $i \neq j$ έχουμε $v_i^{-1} v_j \leq \lambda^{n-1}$ και αφού $m_{i,j} v_j \leq \lambda v_i$ έχουμε ότι $m_{i,j} \leq \lambda v_i v_j^{-1} \leq \lambda^n$, οπότε έχουμε το 3.

Έστω ότι $\lambda = 1$. Για $i \neq j$ είναι $v_i^{-1} v_j \leq \lambda^{n-1} = 1$ και άρα όλα τα v_j είναι ίσα. Οπότε για κάθε i είναι $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$ άρα η i -γραμμή έχει ένα 1 και $n-1$ μηδενικά. Αφού δεν υπάρχουν μηδενικές στήλες έπεται ότι ο M είναι πίνακας μετάθεσης. Οπότε έχουμε και το 2.

■

Βιβλιογραφία

- [1] Alexander G. Kurosh. *Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen*. Mathematische Annalen, 1934.
- [2] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 2001.
- [3] Benson Farb and Dan Margalit. «A Primer on Mapping Class Groups». Στο: *Princeton Mathematical Series* 41 (2011).
- [4] Camille Horbez. *The Tits alternative for the automorphism group of a free product*. 2015.
- [5] D.I. Fousse-Rabinovitch. *Über die Automorphismengruppen der freien Produkte I*. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1940.
- [6] D.I. Fousse-Rabinovitch. *Über die Automorphismengruppen der freien Produkte II*. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1941.
- [7] D.J. Collins and E.C. Turner. «Efficient representatives for automorphisms of free products». Στο: *Michigan Math. J.* 41.3 (1994), σσ. 443–464.
- [8] Daniel Lutgehetmann. *The Lipschitz Distance on Outer Space*. Freie Universität Berlin, 2012.
- [9] Daryl Cooper. *Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point sets*. Journal of Algebra, Volume 111, Issue 2, 453–456, 1987.
- [10] Derek J. S. Robinson. «A Course in the Theory of Groups». Στο: *Graduate Texts in Mathematics* 80 (1996).
- [11] Dionysios Syrigos. «Asymmetry of outer space of a free product». Στο: *Communications in Algebra* 46.8 (2018), σσ. 3442–3460.
- [12] Dionysios Syrigos. *Deformation spaces and irreducible automorphisms of a free product*. University of Southampton, 2016.

- [13] Dionysios Syrigos. «Irreducible laminations for IWIP automorphisms of a free product and centralisers». **Στο:** *arXiv: Group Theory* (2014).
- [14] Emina Alibegovic. «Translation Lengths in $\text{Out}(F_n)$ ». **Στο:** *Geometriae Dedicata* 92 (2002), σσ. 87–93.
- [15] Eugene Seneta. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [16] George Domat. *Out(F_n) notes*. Course by Mladen Bestvina, 2019.
- [17] Gregory Conner. «Properties of translation numbers in nilpotent groups». **Στο:** *Communications in Algebra* 26.4 (1998), σσ. 1069–1080.
- [18] Henry Wilton. «Hall’s Theorem for limit groups». **Στο:** *Geom. Funct. Anal.* 18 (2008), σσ. 271–303.
- [19] Hyman Bass. *Covering theory for graphs of groups*. Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 89, Issues 1–2, 3–47, 1993.
- [20] Ilya Kapovich and Martin Lustig. *Ping-pong and Outer space*. J. Topol. Anal 2(2):173–201, 2010.
- [21] James T. Griffin. *Automorphisms of free products of groups*. University of Cambridge, 2011.
- [22] Jean -Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, 1980.
- [23] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer, 1999.
- [24] Karen Vogtmann. *On the geometry of outer space*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol. 52, No. 1, 27–46, 2014.
- [25] Karen Vogtmann. *The topology and geometry of automorphism groups of free groups*. 2016.
- [26] Lee Mosher. *The topology, geometry, and dynamics of free groups, Part I*. arXiv: Group Theory, 2020.
- [27] Marc Culler and John W. Morgan. *Group actions on $\mathbb{R}$ –trees*. Proceedings of the London Mathematical Society, s3-55: 571–604, 1986.
- [28] Marc Culler and Karen Vogtmann. *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*. Inventiones mathematicae 84, 91–119, 1986.

- [29] Mark Feighn and Michael Handel. «The Recognition Theorem for $\text{Out}(F_n)$ ». *Στο: Groups Geom. Dyn.* 5 (2011), σσ. 39–106.
- [30] Michael Handel and Lee Mosher. *Subgroup classification in $\text{Out}(F_n)$* . arXiv: Group Theory, 2009.
- [31] Michael Handel and Lee Mosher. *Subgroup decomposition in $\text{Out}(F_n)$. Part I: Geometric Models*. 2018.
- [32] Michael Handel and Lee Mosher. *The expansion factors of an outer automorphism and its inverse*. Transactions of the American Mathematical Society 359 (07), 2004.
- [33] Mihalis Sykiotis. *Stable representatives for symmetric automorphisms of groups and the general form of the Scott conjecture*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 356, No 6, 2405–2441, 2003.
- [34] Mladen Bestvina. *A Bers-like proof of the existence of train tracks for free group automorphisms*. Fundamenta Mathematicae 214 (1), 2011.
- [35] Mladen Bestvina. *Folding graphs and applications, d’apr’ès Stallings*. Class Notes, 2010.
- [36] Mladen Bestvina. *Non-positively curved aspects of Artin groups of finite type*. Geom. Topol. 3(1): 269–302, 1999.
- [37] Mladen Bestvina. *PCMI Lectures on the geometry of Outer space*. 2012.
- [38] Mladen Bestvina. *The topology of $\text{Out}(F_n)$* . ICM 2002. Vol. III, 2000.
- [39] Mladen Bestvina. *Topics in Geometric Group Theory*. 20170331 Haesong Seo, 2018.
- [40] Mladen Bestvina and Michael Handel. *Train Tracks and Automorphisms of Free Groups*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 135, No. 1, 1–51, 1992.
- [41] Mladen Bestvina, Mark Feighn and Michael Handel. «Laminations, Trees and irreducible automorphisms of free groups». *Στο: Geometric & Functional Analysis GAFA* 7 (1997), σσ. 215–244.
- [42] Mladen Bestvina, Mark Feighn and Michael Handel. *The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$, I: Dynamics of exponentially - growing automorphisms*. Annals of Mathematics 151, 517–623, 2000.
- [43] Mladen Bestvina, Mark Feighn, Michael Handel. *Solvable subgroups of $\text{Out}(F_n)$ are virtually Abelian*. Geom. Dedicata 104, 71–96, 2004.

- [44] Mladen Bestvina, Mark Feighn, Michael Handel. *The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$, II: A Kolchin Type Theorem*. Annals of Mathematics 161, 1–59, 2005.
- [45] N. D. Gilbert. *Presentations of the automorphism group of a free product*. Proc. London Math. Soc. (3), 54(1):115–140, 1987.
- [46] Naomi Andrew. *Serre’s Property (FA) for automorphism groups of free products*. Journal of Group Theory, vol. 24, no. 2, 385–414, 2021.
- [47] Oleg Bogopolski. *Introduction to Group Theory*. European Mathematical Society, 2008.
- [48] Peter Brinkmann. «Hyperbolic automorphisms of free groups». $\Sigma\tau\omicron$: *GAFa, Geom. funct. anal.* 10 (2000), $\sigma\sigma$. 1071–1089.
- [49] Pritam Ghosh. *Applications of Weak attraction theory in $\text{Out}(F_n)$* . PhD Thesis, 2014.
- [50] Ricardo Mane. *Ergodic theory and differentiable dynamics*. Springer-Verlag, 1987.
- [51] Richard Goldstein. «Bounded cancellation of automorphisms of free products». $\Sigma\tau\omicron$: *Topology and Combinatorial Group Theory. Lecture Notes in Mathematics* 1440 (2006).
- [52] Ruoyu Li. *Relative hyperbolicity of suspensions of free products*. Commutative Algebra, 2018.
- [53] Rylee Alanza Lyman. *Train track maps and CTs on graphs of groups*. 2021. arXiv: [2102.02848](https://arxiv.org/abs/2102.02848) (math.GR).
- [54] Rylee Lyman. *Train tracks on graph of groups and outer automorphisms of hyperbolic groups*. Tufts University, 2020.
- [55] S. M. Gersten and H. B. Short. *Rational subgroups of biautomatic groups*. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 134, No. 1, 125–158, 1991.
- [56] Sebastian Meinert. *The lipschitz metric on deformation spaces of G –trees*. Algebr. Geom. Topol. 15 (2) 987–1029, 2014.
- [57] Stefano Francaviglia , Armando Martino and Dionysios Syrigos. *On the action of relatively irreducible automorphisms on their train tracks*. arXiv:2108.01680, 2021.
- [58] Stefano Francaviglia and Armando Martino. *Metric properties of outer space*. Publications Matemàtiques Vol. 55, No. 2, 433–473, 2010.

- [59] Stefano Francaviglia and Armando Martino. *Stretching factors, metrics and train tracks for free products*. Illinois Journal of Mathematics Volume 59, Number 4, 859–899, 2015.
- [60] Vincent Guirardel and Gilbert Levitt. *Deformation spaces of trees*. Groups, Geometry, and Dynamics, European Mathematical Society, 135–181, 2007.
- [61] Vincent Guirardel and Gilbert Levitt. *The outer space of a free product*. Proceedings of the London Mathematical Society 94(3), 2005.
- [62] Warren Dicks and Enric Ventura. *The Group Fixed by a Family of Injective Endomorphisms of a free group*. Contemporary Mathematics 195, 1996.
- [63] Warren Dicks and M. J. Dunwoody. *Groups Acting on Graphs*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Series Number 17, 1989.
- [64] William Burnside. *Theory of Groups of Finite Order*. Cambridge University Press, 2012.
- [65] Yael Algom-Kfir. *The lipschitz metric on outer space*. The University of Utah, 2010.
- [66] Yael Algom-Kfir and Mladen Bestvina. *Asymmetry of Outer Space*. Geometriae Dedicata 156, 81–92, 2012.