Δράσεις Ομάδων σε Δένδρα και Εφαρμογές

Θανάσης Τασόπουλος

Τριμελής Επιτροπή:

Δημήτριος Βάρσος (Επιβλέπων)

Ιωάννης Εμμανουήλ

Μιχαήλ Συκιώτης

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

5 Οκτωβρίου 2022

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάζουμε το Θεμελιώδες θεώρημα της Θεωρίας των $Bass$ και $Serre$, ένα δομικό θεώρημα όπου αποδεικνύεται πως "αναλύονται" ομάδες, οι οποίες δρουν σε δένδρα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό δείχνουμε τρία κλασικά θεωρήματα της Θεωρίας Ομάδων, τα θεωρήματα υποομάδων του $Kurosh$ και των $Nielsen - Schreier$, όπως επίσης και το θεώρημα του $Grushko$.

In the current master thesis we present the Fundamental Theorem of $Bass-Serre$ *Theory, a structural theorem where is proven how the groups that acts on trees are "analysed". Using this theorem we show three classical theorems of Group Theory, the subgroup theorems of Kurosh and of Nielsen-Schreier, as well as the theorem of Grushko.*

Πρόλογος

.

Το κλειδί για την κατανόηση των ομάδων όπου δρουν σε δένδρα είναι η έννοια του γραφήματος ομάδων και της θεμελιώδους ομάδας ενός τέτοιου. Τα γραφήματα ομάδων μαζί με τις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες τους είναι ένας τρόπος κατασκευής ομάδων από κάποιες επιλεγμένες ομάδες. Είναι μια γενίκευση των βασικών κατασκευών του ελεύθερου γινομένου, του ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα και των HNN-επεκτάσεων. Το Θεμελιώδες θεώρημα που θα αποδείξουμε, συνδέει τις ομάδες όπου δρουν σε δένδρα με τα γραφήματα ομάδων και τις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες τους, με ένα προς ένα και επί αντιστοιχία. Αρχίζοντας από μια ομάδα η οποία δρά σε ένα δένδρο, αντιστοιχίζουμε ένα γράφημα ομάδων του οποίου η θεμελιώδης ομάδα είναι ισόμορφη με την αρχική ομάδα. Έτσι, ανακατασκευάζουμε την αρχική ομάδα μέσω του ισομορφισμού αυτού, με τρόπο που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε διάφορα αποτελέσματα για την αρχική ομάδα.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς και κάποια αποτελέσματα απο τη Θεωρία Γραφημάτων που θα χρειαστούμε παρακάτω. Δεν είναι κύριος σκοπός μας η Θεωρία Γραφημάτων στην παρούσα εργασία, ωστόσο λόγο πληρότητας παραθέτονται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων. Ένας ακόμα λόγος για την σχολαστικότητα του κεφαλαίου αυτού είναι γιατί ο ορισμός του γραφήματος στην θεωρία των $Bass$ και $Serre$ διαφέρει από τον συνήθη στη Θεωρία Γραφημάτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνονται οι ορισμοί και κάποιες βασικές κατασκευές που αφορούν τις δράσεις των ομάδων σε γραφήματα. Δίνεται επίσης το θεώρημα το οποίο χαρακτηρίζει τις ελεύθερες ομάδες. Οι ελεύθερες ομάδες είναι ακριβώς αυτές όπου δρουν ελεύθερα και χωρίς αντριστροφές σε δένδρα. Ως πόρισμα αυτού είναι το θεώρημα των $Nielsen - Schreier$, το οποίο βέβαια θα αποδειχθεί και στο τέταρτο κεφάλαιο με πιο κομψό τρόπο.

Στην συνέχεια δίνονται οι βασικοί ορισμοί και οι κατασκευές των γραφημάτων ομάδων και των αντίστοιχων θεμελιωδών ομάδων. Ακολουθεί το βασικό αποτέλεσμα το οποίο μας εξασφαλίζει ότι η θεμελιώδης ομάδα ενός γραφήματος ομάδων είναι ανεξάρτητη των επιλογών που γίνονται για την κατασκευή της. Δίνονται επίσης κάποια βασικά παραδείγματα και κάποια χρήσιμα λήμματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Θεμελιώδες θεώρημα. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο δίνονται οι εφαρμογές του Θεμελιώδους θεωρήματος.

Να επισημάνουμε ότι η κύρια πηγή είναι η παρουσίαση της θεωρίας των *Bass* και *Serre* από τον *Daniel E. Cohen* στο βιβλίο του *Combinatorial Group Theory*, [1].

Περιεχόμενα

1 Γραφήματα

Σε αυτό το προκαταρκτικό κεφάλαιο δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς και δείχνουμε κάποιες βασικές προτάσεις που θα μας χρειαστούν στην συνέχεια.

1.1 Ορισμοί και βασικά αποτελέσματα

Ένα **γράφημα** Γ αποτελείται απο δύο ξένα σύνολα, το σύνολο $V(\Gamma)$ των **κορυφών** του Γ και το σύνολο $E(\Gamma)$ των **ακμών** του Γ, μαζί με δύο συναρτήσεις $\sigma : E(\Gamma) \to V(\Gamma)$ και $^{-} : E(\Gamma) \to E(\Gamma)$, όπου για κάθε $e \in E(\Gamma)$ ισχύει πως $e \neq \overline{e}$ και $e = \overline{\overline{e}}$. Ορίζουμε μια ακόμη συνάρτηση $\tau : E(\Gamma) \to V(\Gamma)$, όπου $\tau(e) = \sigma(\overline{e})$. Καλούμε την κορυφή $\sigma(e)$ **αρχή** της ακμής e και την κορυφή $\tau(e)$ **τέλος** της ακμής e. Τέλος, καλούμε την ακμή $\overline{e}$ **αντίστροφη ακμή** της ακμής e.

Καλούμε **μονοπάτι μήκους** $n > 0$ μια πεπερασμένη ακολουθία $e_1, ..., e_n$ στο $E(\Gamma)$ τέτοια ώστε $\tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})$ για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$. Λέμε **κορυφές του μονοπατιού** τις κορυφές $\sigma(e_1), ..., \sigma(e_n), \tau(e_n)$ και τις κορυφές $\sigma(e_1), \tau(e_n)$ τις λέμε **αρχή** και **τέλος** του **μονοπατιού** αντίστοιχα. Λέμε επίσης πως οι κορυφές u, v **ενώνονται** άν υπάρχει μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ με $\sigma(e_1) = u$ και $\tau(e_n) = v$. Θεωρούμε επίσης μια κορυφή u ως τετριμμένο μονοπάτι μήκους 0 απο την κορυφή u στην κορυφή u. Παρατηρούμε όμως πως ο αρχικός ορισμός του γραφήματος επιτρέπει και μονοπάτια μήκους 1 με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή, ($e \in E(\Gamma)$ με $\sigma(e) = \tau(e)$). Καλούμε **κλειστό μονοπάτι** ένα μονοπάτι με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή. Εδώ παρατηρούμε ότι αν $e_1, ..., e_n$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι, τότε τα μονοπάτια $e_i, e_{i+1}, ..., e_n, e_1, e_2, ..., e_{i-1}$ για κάθε $i \in \{2, ..., n\}$ είναι και αυτά κλειστά μονοπάτια, και τα καλούμε **κυκλικές μεταθέσεις του κλειστού μονοπατιού** $e_1, ..., e_n$. Άν οι αρχές όλων των ακμών ενός μονοπατιού $e_1, ..., e_n$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αν δηλαδή οι κορυφές $\sigma(e_1), \sigma(e_2), ..., \sigma(e_n)$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, καλούμε το μονοπάτι **απλό**. Ένα απλό κλειστό μονοπάτι θετικού μήκους που δεν είναι της μορφής $e, \overline{e}$ το λέμε **κύκλωμα**. Παρατηρούμε πάλι πως οι κυκλικές μεταθέσεις ενός κυκλώματος είναι κύκλωμα.

Έστω $f = e_1, ..., e_n$ και $g = e_1^{'}, ..., e_m^{'}$ δύο μονοπάτια. Άν $\tau(e_n) = \sigma(e_1^{'})$, ορίζουμε **γινόμενο** $f.g$ των μονοπατιών f και g, το μονοπάτι $e_1, ..., e_n, e_1^{'}, ..., e_m^{'}$. Ορίζουμε επίσης **αντίστροφο μονοπάτι** $\overline{f}$, το μονοπάτι $\overline{f} = \overline{e_n}, ..., \overline{e_1}$.

Έστω ένα γράφημα Γ με αντίστοιχες συναρτήσεις σ και $^{-}$. Ένα γράφημα Γ' με αντίστοιχες συναρτήσεις σ' και $^{-'}$ λέγεται **υπογράφημα** του Γ αν $V(\Gamma') \subseteq V(\Gamma)$, $E(\Gamma') \subseteq E(\Gamma)$, $\sigma' = \sigma|_{E(\Gamma')}$ και $^{-'} =^{-} |_{E(\Gamma')}$. Έστω Γ ένα γράφημα με αντίστοιχες συναρτήσεις σ και $^{-}$ και Γ_i, $i \in I$, κάποια υπογραφήματα του. Τότε έχουμε το γράφημα με κορυφές $\bigcap_{i \in I} V(\Gamma_i)$, ακμές $\bigcap_{i \in I} E(\Gamma_i)$ και συναρτήσεις $\sigma' = \sigma|_{\bigcap_{i \in I} E(\Gamma_i)}$ και $^{-'} =^{-} |_{\bigcap_{i \in I} E(\Gamma_i)}$, το οποίο συμβολίζουμε $\bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ και αποκαλούμε **τομή των γραφημάτων** Γ_i, $i \in I$. Ομοίως έχουμε την **ένωση των γραφημάτων** Γ_i**,** $i \in I$**,** την οποία συμβολίζουμε $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i$, και την ορίζουμε όπως ακριβώς ορίσαμε την τομή εναλλάσοντας παντού το σύμβολο της τομής με το σύμβολο της ένωσης. Για ένα υποσύνολο $V^{'} \subseteq V(\Gamma)$, το **πλήρες υπογράφημα** του $V^{'}$ είναι το υπογράφημα με κορυφές το σύνολο $V^{'}$, ακμές $E^{'} = \{e \in E(G) | \sigma(e), \tau(e) \in V^{'}\}$ και συναρτήσεις τους αντίστοιχους περιορισμούς των συναρτήσεων του Γ.

Ένα γράφημα Γ λέγεται **συνεκτικό** άν κάθε δύο διαφορετικές κορυφές u, v του Γ ενώνονται. Έστω γράφημα Γ. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $V(\Gamma)$, $u \sim v$ αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι απο την κορυφή u στην κορυφή v. Χρησιμοποιώντας τα τετριμμένα μονοπάτια, το γινόμενο μονοπατιών και τα αντίστροφα μονοπάτια, εύκολα βλέπουμε πως η παραπάνω σχέση είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας. Τα πλήρη υπογραφήματα των κλάσεων ισοδυναμίας καλούνται **συνεκτικές συνιστώσες** του γραφήματος Γ. Παρατηρούμε πως οι συνεκτικές συνιστώσες είναι συνεκτικά υπογραφήματα και πως δύο κορυφές ενώνονται με μονοπάτι αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Στην συνέχεια παραθέτουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα-λήμματα.

Λήμμα 1.1. Έστω συνεκτικά υπογραφήματα Γ_i ,$i \in I$, ενός γραφήματος Γ, με $\bigcap_{i\in I} V(\Gamma_i) \neq \varnothing$. Τότε η ένωση $\bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ είναι συνεκτικό υπογράφημα.

Απόδειξη. Διαλέγουμε μια κορυφή στην τομή, $u_0 \in \bigcap_{i\in I} V(\Gamma_i)$. Έστω κορυφές $u \in V(\Gamma_j) \subseteq \bigcup_{i\in I} V(\Gamma_i)$ και $v \in V(\Gamma_w) \subseteq \bigcup_{i\in I} V(\Gamma_i)$. Αφού $u_0 \in \bigcap_{i\in I} V(\Gamma_i) \subseteq V(\Gamma_j), V(\Gamma_w)$ υπάρχει μονοπάτι στο γραφήμα Γ_j που ενώνει την κορυφή u με την κορυφή u_0 και μονοπάτι στο γράφημα Γ_w που ενώνει την κορυφή u_0 με την κορυφή v. Το γινόμενο των μονοπατιών αυτών δίνει μονοπάτι που ενώνει τις κορυφές u και v. $\square$

Λήμμα 1.2. Έστω ένα συνεκτικό γράφημα Γ και ένα μη κενό υποσύνολο $S \subseteq V(\Gamma)$ τέτοιο ώστε για κάθε ακμή e με $\sigma(e) \in S$, να ισχύει και πως $\tau(e) \in S$. Τότε $S = V(\Gamma)$.

Απόδειξη. Έστω μια κορυφή $v \in S$ (υπάρχει γιατί το S υποτέθηκε μη κενό) και μια ακόμη $w \in V(\Gamma)$. Αφού Γ συνεκτικό, υπάρχει μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ απο την κορυφή v στην κορυφή w. Αφού $\sigma(e_1) = v \in S$, η υπόθεση δίνει πως $\tau(e_1) \in S$. Κάνοντας το ίδιο για όλες τις ακμές του μονοπατιού, καταλήγουμε πως $\tau(e_n) = w \in S$, και αφού η κορυφή w ήταν τυχαία έπεται πως πράγματι $S = V(\Gamma)$. $\square$

Ένα μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ σε ένα γράφημα Γ λέγεται **ανηγμένο** αν ισχύει πως $e_{i+1} \neq \overline{e_i}$ για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$ και $e_n \neq \overline{e_1}$. Έστω ενα μη ανηγμένο μονοπάτι $e_1, ..., e_n$, όπου $n > 2$, με $e_{i+1} = \overline{e_i}$ για κάποιο $i \in \{1, ..., n-1\}$. Τότε το $e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n$ είναι επίσης μονοπάτι. Αν με τον ίδιο τρόπο αγνοήσουμε όλα τα κλειστά μονοπάτια της μορφής $e, \overline{e}$, θα καταλήξουμε σε ένα ανηγμένο μονοπάτι. Πιο συγκεκριμένα, αν δύο κορυφές ενώνονται με μονοπάτι, τότε ενώνονται και με ανηγμένο μονοπάτι.

Δάσος λέγεται ένα γράφημα το οποίο δεν έχει ανηγμένα κλειστά μονοπάτια θετικού μήκους. **δένδρο** λέγεται ένα συνεκτικό δάσος. Είναι προφανές απο τον παραπάνω ορισμό ότι ενα υπογράφημα ενός δάσους είναι δάσος και πως ένα γράφημα είναι δάσος αν και μόνο αν όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι δένδρα.

Λήμμα 1.3. Ένα γράφημα Γ είναι δάσος αν και μόνο αν δεν περιέχει κυκλώματα.

Απόδειξη. Ένα απλό μονοπάτι είναι προφανώς ανηγμένο. Ένα κύκλωμα είναι ένα απλό κλειστό μονοπάτι που δεν είναι της μορφής $e, \bar{e}$, άρα και ανηγμένο κλειστό μονοπάτι, και συνεπώς απευθείας απο τον ορισμό του δάσους έπεται πως ένα δάσος δεν μπορεί να περιέχει κυκλώματα. Για το αντίστροφο, θεωρούμε ενα γράφημα Γ το οποίο δεν περιέχει κυκλώματα και υποθέτουμε προς άτοπο πως δεν είναι δάσος. Τότε περιέχει ένα ανηγμένο κλειστό μονοπάτι θετικού μήκους $e_1, ..., e_n$. Επιλέγουμε r και s, $1 \leq r < s \leq n$, τέτοια ώστε $\sigma(e_r) = \tau(e_s)$ και η διαφορά $s - r$ να είναι ελάχιστη. Τέτοια r και s υπάρχουν, αφού $\sigma(e_1) = \tau(e_n)$. Τότε έχουμε το κλειστό μονοπάτι θετικού μήκους $e_r, e_{r+1}, ..., e_s$, το οποίο είναι ανηγμένο επειδή είναι ανηγμένο το αρχικό κλειστό μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ (και συνεπώς δεν είναι της μορφής $e, \bar{e}$), και απο την ελαχιστικότητα της επιλογής των r και s έπεται πως το κλειστό μονοπάτι είναι απλό, δηλαδή είναι κύκλωμα, το οποίο είναι άτοπο απο την υπόθεση μας. □

Λήμμα 1.4. Ένα γράφημα Γ είναι δάσος αν και μόνο αν για κάθε δύο κορυφές v, w υπάρχει το πολύ ένα ανηγμένο μονοπάτι απο την v στην w.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω πως το Γ είναι δάσος και έστω προς άτοπο πως υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά ανηγμένα μονοπάτια που ενώνουν τις ίδιες κορυφές. Από όλες τις δυάδες διαφορετικών ανηγμένων μονοπατιών που ενώνουν ίδιες κορυφές, διαλέγουμε μια δυάδα, έστω $f = (e_1, ..., e_n)$ και $g = (w_1, ..., w_m)$ με $m \leq n$, τέτοια ώστε το άθροισμα $n+m$

να είναι ελάχιστο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Έστω πως τα μονοπάτια f και g έχουν αρχή και τέλος την ίδια κορυφή. Απο την ελαχιστικότητα του $n+m$ και επειδή $m \leq n$, το μονοπάτι g πρέπει να είναι το τετριμμένο, δηλαδή $m=0$. Τότε το f πρέπει να είναι κλειστό μονοπάτι θετικού μήκους (γιατί $f \neq g$), ανηγμένο απο την υπόθεση, το οποίο είναι άτοπο αφού το Γ υποτέθηκε δάσος. Έστω πως η αρχή και το τέλος των μονοπατιών f και g είναι διαφορετικές κορυφές. Τότε $n, m \geq 1$ και αν $e_n = w_m$, τότε τα μονοπάτια $e_1, ..., e_{n-1}$ και $w_1, ..., w_{m-1}$ (ή το τετριμμένο μονοπάτι $\sigma(w_1)$ αν $m=1$) είναι διαφορετικά και ανηγμένα απο την κορυφή $\sigma(e_1) = \sigma(w_1)$ στην κορυφή $\tau(e_{n-1}) = \sigma(e_n) = \sigma(w_m) = \tau(w_{m-1})$, το οποίο αντιφάσκει με την ελαχιστικότητα της επιλογής του $n+m$. Άρα $e_n \neq w_m$ και συνεπώς το μονοπάτι $f.\overline{g}$ είναι ένα ανηγμένο κλειστό μονοπάτι, το οποίο είναι άτοπο αφου το Γ υποτέθηκε δάσος.

($\Leftarrow$) Έστω πως για κάθε δύο κορυφές v, w υπάρχει το πολύ ένα ανηγμένο μονοπάτι απο την v στην w και έστω προς άτοπο πως το Γ δεν είναι δάσος. Τότε απο το λήμμα 1.2 θα περιείχε ένα κύκλωμα $e_1, ..., e_n$. Τότε αν $n=1$, η τεττριμένο κλειστό μονοπάτι $\sigma(e_1)$ και το κλειστό μονοπάτι e_1 μήκους 1, είναι δύο διαφορετικά μονοπάτια απο την κορυφή $\sigma(e_1)$ στην κορυφή $\sigma(e_1)$, το οποίο είναι άτοπο. Αν $n > 1$, τότε τα μονοπάτια $e_1, ..., e_{n-1}$ και $\overline{e_n}$ είναι ανηγμένα απο την κορυφή $\sigma(e_1)$ στην κορυφή $\sigma(e_n)$, το οποίο είναι πάλι άτοπο. $\square$

Λήμμα 1.5. Σε ένα δένδρο T κάθε δύο κορυφές ενώνονται με μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι. Αντίστροφα, έστω T γράφημα το οποίο περιέχει μια κορυφή v_0 τέτοια ώστε για κάθε άλλη κορυφή v να υπάρχει μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι που ενώνει τις κορυφές v_0 και v. Τότε το T είναι δένδρο.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω T δένδρο. Ώς συνεκτικό γράφημα, κάθε δύο κορυφές ενώνονται με μονοπάτι, άρα και με ανηγμένο μονοπάτι όπως επισημάνθηκε μετά τον ορισμό του ανηγμένου μονοπατιού. Ώς δάσος, απο το λήμμα 1.4, δύο κορυφές δεν μπορούν να ενώνονται με παραπάνω απο ένα ανηγμένα μονοπάτια.

($\Leftarrow$) Έστω T γράφημα το οποίο περιέχει μια κορυφή v_0 τέτοια ώστε για κάθε άλλη κορυφή v να υπάρχει μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι που ενώνει τις κορυφές v_0 και v. Τότε το T είναι συνεκτικό αφού όλες οι κορυφές ανήκουν στην συνεκτική συνιστώσα που ανήκει η κορυφή v_0. Έστω προς άτοπο πως το T δεν είναι δένδρο. Τότε απο το λήμμα 1.3 περιέχει ένα κύκλωμα, $c = (e_1, ..., e_n)$. Από όλα τα ανηγμένα μονοπάτια που ενώνουν την κορυφή v_0 με κάποια κορυφή που ανήκει στο κύκλωμα c, διαλέγουμε ένα f ελάχιστου μήκους. Παίρνοντας μια κυκλική μετάθεση του κυκλώματος c αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε πως το τέλος του μονοπατιού f είναι η κορυφή $\sigma(e_1)$. Παρατηρούμε ότι η τελευταία ακμή του f δεν μπορεί να είναι η e_n, γιατί τότε αν την αφαιρούσαμε θα είχαμε μονοπάτι απο την κορυφή v_0 στην $\sigma(e_n)$, που είναι κορυφή του κυκλώματος c, μικρότερου μήκους απο αυτό του f, το οποίο αντιφάσκει στην ελαχιστικότητα της επιλογής του f. Ομοίως, η τελευταία ακμή του f δεν μπορεί να είναι η $\overline{e_1}$. Έτσι έχουμε τα μονοπάτια $f.(e_1, ..., e_{n-1})$ και $f.\overline{e_n}$, τα οποία είναι ανηγμένα απο την προηγούμενη παρατήρηση, διαφορετικά γιατί $(e_1, ..., e_{n-1}) \neq \overline{e_n}$ και ενώνουν τις κορυφές v_0 και $\sigma(e_n)$, το οποίο είναι άτοπο απο την υπόθεση μας. $\square$

Λήμμα 1.6. Έστω T ένα δένδρο, I ένα σύνολο δεικτών και T_i υποδένδρα του T για κάθε $i \in I$ τέτοια ώστε $\bigcap_{i\in I} V(T_i) \neq \varnothing$. Τότε τα γραφήματα $\bigcup_{i\in I} T_i$ και $\bigcap_{i\in I} T_i$ είναι δένδρα.

Απόδειξη. Τα γραφήματα $\bigcup_{i\in I} T_i$ και $\bigcap_{i\in I} T_i$ πρέπει να είναι δάση αφού είναι υπογραφήματα δένδρου. Αφού τα T_i είναι συνεκτικά ως δένδρα και $\bigcap_{i\in I} T_i \neq \varnothing$, χρησιμοποιώντας το λήμμα 1.1 έπεται πως το γράφημα $\bigcup_{i\in I} T_i$ είναι συνεκτικό . Άρα το γράφημα $\bigcup_{i\in I} T_i$ είναι πράγματι δένδρο. Μένει να δείξουμε πως το γράφημα $\bigcap_{i\in I} T_i$ είναι συνεκτικό. Έστω

v και w δύο κορυφές του $\bigcap_{i\in I} T_i$. Για κάθε $i \in I$, υπάρχει ανηγμένο μονοπάτι f_i στο T_i που ενώνει τις κορυφές v και w αφού T_i συνεκτικά. Αφού το T είναι δένδρο, υπάρχει μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι f στο T απο την κορυφή v στην w. Άρα για κάθε $i, j \in I$ πρέπει να ισχύει $f_i = f_j = f$, και συνεπώς το μονοπάτι f ανήκει στην τομή $\bigcap_{i\in I} T_i$, δηλαδή το γράφημα $\bigcap_{i\in I} T_i$ είναι πράγματι συνεκτικό. $\square$

Λήμμα 1.7. Έστω γράφημα Γ, I ένα σύνολο δεικτών και για κάθε $i \in I$ υποδένδρα T_i τέτοια ώστε $V(T_i) \cap V(T_j) = \{v\}$ για κάθε i, j διαφορετικά στο I, όπου v μια σταθερή κορυφή. Τότε το γράφημα $\bigcup_{i\in I} T_i$ είναι δένδρο.

Απόδειξη. Όπως και στο προηγούμενο λήμμα, το γράφημα $\bigcup_{i\in I} T_i$ είναι συνεκτικό. Έστω προς άτοπο πως δεν είναι δένδρο και έστω ένα κύκλωμα $c = (e_1, ..., e_n)$. Αφού c είναι απλό κλειστό μονοπάτι ως κύκλωμα, η κορυφή v μπορεί να είναι η αρχή το πολύ μίας απο τις ακμές $e_1, ..., e_n$. Παίρνοντας μια κυκλική μετάθεση του κυκλώματος αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε πως $\sigma(e_r) \neq v$ για κάθε $r = 2, ..., n$. Έστω $r \in \{1, ..., n-1\}$, $e_r \in T_i$, $e_{r+1} \in T_j$ για κάποια $i, j \in I$. Τότε πρέπει να ισχύει πως $i = j$, αφού αν $i \neq j$ θα είχαμε πως $\sigma(e_{r+1}) = \tau(e_r) \in T_i \cap T_j = \{v\}$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\sigma(e_r) \neq v$ για κάθε $r = 2, ..., n$. Συνεπώς το κύκλωμα c ανήκει ολόκληρο σε ένα T_i, το οποίο είναι άτοπο αφού T_i είναι δένδρο. $\square$

Καλούμε **μέγιστο δάσος** ενός γραφήματος Γ ένα υπογράφημα F του Γ το οποίο είναι δάσος και έχει την ιδιότητα πως αν F' είναι ένα άλλο υπογράφημα του Γ που περιέχει γνήσια το F ως υπογράφημα του, τότε το F' δεν είναι δάσος.

Πρόταση 1.1. Έστω Γ ένα γράφημα και F ένα υπογράφημα του το οποίο είναι δάσος. Τότε υπάρχει ενα μέγιστο δάσος του Γ που περιέχει το δάσος F.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το λήμμα του *Zorn*. Διατάσσουμε το σύνολο όλων των δασών που περιέχουν το δάσος F ως υπογράφημα με την σχέση του υπογραφήματος. Αν δηλαδή F_1 και F_2 δύο δάση που περιέχουν ως υπογράφημα το F, τότε $F_1 \leq F_2$ αν το F_1 είναι υπογράφημα του F_2. Έστω τώρα μια αλυσίδα F_i, $i \in I$ δασών που περιέχουν το δάσος F, δηλαδή για κάθε $i, j \in I$ είτε $F_i \subseteq F_j$ είτε $F_j \subseteq F_i$. Τότε η ένωση $\bigcup_{i \in I} F_i$ είναι δάσος. Έστω προς άτοπο πως δεν είναι δάσος, δηλαδή περιέχει ένα κύκλωμα c. Αφού το κύκλωμα έχει πεπερασμένα το πλήθος ακμές και κορυφές περιέχεται σε πεπερασμένα το πλήθος δάση, έστω στα $F_{i_1}, ..., F_{i_n}$, και αφού τα $F_i, i \in I$ είναι αλυσίδα, υπάρχει ένα $i \in \{i_1, ..., i_n\}$ τέτοιο ώστε $\bigcup_{j=1}^{n} F_{i_j} = F_i$. Άρα το κύκλωμα c ανήκει ολόκληρο στο δάσος F_i, το οποίο είναι άτοπο. Άρα πράγματι η ένωση $\bigcup_{i \in I} F_i$ είναι δάσος και προφανώς άνω φράγμα της αλυσίδας $F_i, i \in I$. Το λήμμα του $Zorn$ μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός μέγιστου δάσους του Γ που περιέχει το δάσος F. $\square$

Πόρισμα. Κάθε γράφημα Γ περιέχει ένα μέγιστο δάσος.

Απόδειξη. Έστω F το κενό υπογράφημα του Γ, δηλαδή με $V(F) = \varnothing$ και $E(F) = \varnothing$. Το F είναι προφανώς δάσος και χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 1.2. Έστω F ένα μέγιστο δάσος ενός γραφήματος Γ, και έστω Γ_1 μια συνεκτική συνιστώσα του Γ. Τότε $V(F) = V(\Gamma)$ και το γράφημα $F \cap \Gamma_1$ είναι ένα μέγιστο δένδρο (συνεκτικό μέγιστο δάσος) του Γ_1.

Απόδειξη. Αν υπήρχε μια κορυφή $v \in V(\Gamma) \setminus V(F)$, τότε το γράφημα με κορυφές $F \cup \{v\}$ και τις ίδιες ακμές με το F είναι προφανώς δάσος και περιέχει γνήσια το μέγιστο δάσος F, το οποίο είναι άτοπο. Οπότε πράγματι $V(F) = V(\Gamma)$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, το $F \cap \Gamma_1$ είναι δάσος του Γ_1 ως υπογράφημα δάσους. Αν δεν ήταν μέγιστο δάσος του Γ_1 θα περιεχόταν γνήσια σε ένα μέγιστο δάσος F_1 του Γ_1. Τότε όμως το γράφημα F_1 δεν θα περιεχόταν στο γράφημα F αφού αν $F_1 \subseteq F$, τότε $F_1 = F_1 \cap \Gamma_1 \subseteq F \cap \Gamma_1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το γράφημα $F \cup F_1$ θα περιείχε γνήσια το γράφημα F και θα ήταν δάσος αφού γράφεται ως ξένη ένωση δασών, $F \cup F_1 = F_1 \cup (F \setminus \Gamma_1)$, όπου $F \setminus \Gamma_1$ είναι το πλήρες υπογράφημα του F στις κορυφές $V(F) \setminus V(\Gamma_1)$ το οποίο είναι δάσος ώς υπογράφημα δάσους, το οποίο αντιβαίνει με την μεγιστικότητα του δάσους F στο γράφημα Γ. Άρα το γράφημα $F \cap \Gamma_1$ είναι μέγιστο δάσος του Γ_1 και μένει να δείξουμε πως είναι συνεκτικό.

Αρκεί να δείξουμε πως τα άκρα όλων των ακμών του Γ_1 είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του F. Πράγματι, αν ίσχυε αυτό τότε για δύο τυχαίες κορυφές $u, v \in V(F \cap \Gamma_1) = V(F) \cap V(\Gamma_1)$, θα υπήρχε μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ στο Γ_1 απο την u στην v (αφού Γ_1 συνεκτικό) και απο την παραπάνω υπόθεση, θα υπήρχαν μονοπάτια γ_i στο F που ενώνουν τα άκρα των e_i για κάθε $i = 1, ..., n$. Τα μονοπάτια γ_i θα βρίσκονταν και στο Γ_1, αφού το Γ_1 είναι συνεκτική συνιστώσα του Γ και τα γ_i ενώνουν κορυφές του Γ_1. Άρα το γινόμενο των n μονοπατιών, $\gamma_1 ... \gamma_n$, θα βρισκόταν στο $F \cap \Gamma_1$, δηλαδή το $F \cap \Gamma_1$ θα ήταν πράγματι συνεκτικό.

Έστω προς άτοπο πως υπάρχει μια ακμή $e \in E(\Gamma_1)$ τέτοια ώστε τα άκρα της, $\sigma(e)$ και $\tau(e)$, να ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του F. Θα δείξουμε ότι το υπογράφημα του Γ, F' με $V(F') = V(F) = V(\Gamma)$ και $E(F') = E(F) \cup \{e, \overline{e}\}$ είναι δάσος. Έστω προς άτοπο πως δεν είναι δάσος. Τότε θα περιείχε ένα κύκλωμα $e_1, ..., e_n$ και παίρνοντας μια κυκλική μετάθεση του αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε πως $e_i \neq e$ για κάθε $i = 2, ..., n$. Αν $e_1 \neq e, \overline{e}$, τότε το κύκλωμα θα άνηκε ολόκληρο στο δάσος F, το οποίο είναι άτοπο. Αν $e_1 = e$ ή $e_1 = \overline{e}$, τότε το μονοπάτι $e_2, ..., e_n$ θα άνηκε στο F και θα ένωνε τις κορυφές της ακμής e_1, δηλαδή τις κορυφές των ακμών $e, \overline{e}$, άρα οι κορυφές $\sigma(e)$ και $\tau(e)$ θα άνηκαν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του F, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση μας. Άρα το F' είναι πράγματι δάσος. Όμως και αυτό είναι άτοπο, αφού το F είναι μέγιστο δάσος και το F' το περιέχει γνήσια. Άρα τα άκρα όλων των ακμών του Γ_1 είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του F, και συνεπώς απο την προηγούμενη παράγραφο έπεται πως το $F \cap \Gamma_1$ είναι συνεκτικό. $\square$

Αξίζει να επισημάνουμε ότι απο την παραπάνω πρόταση, ένα μέγιστο δάσος ενός συνεκτικού γραφήματος είναι αναγκαστικά συνεκτικό, δηλαδή είναι μέγιστο δένδρο.

Λήμμα 1.8. Έστω Γ γράφημα και T υποδένδρο του Γ με $V(T) = V(\Gamma)$. Τότε το T είναι μέγιστο δένδρο.

Απόδειξη. Έστω F ένα υπογράφημα του F που περιέχει γνήσια το T ώς υπογράφημα. Αφού $V(T) = V(\Gamma)$, πρέπει να υπάρχει μία ακμή $e \in E(F) \setminus E(T)$. Τότε το F περιέχει δύο διαφορετικά ανηγμένα μονοπάτια απο την κορυφή $\sigma(e)$ στην κορυφή $\tau(e)$, το μονοπάτι-ακμή e και το μονοπάτι του δένδρου T. Άρα το F δεν είναι δένδρο. $\square$

Λήμμα 1.9. Έστω T ένα πεπερασμένο δένδρο με περισσότερες απο μία κορυφές. Τότε το T έχει τουλάχιστον δύο κορυφές όπου η κάθε μια είναι αρχή μίας ακριβώς ακμής και τέλος μίας ακριβώς ακμής. Τέτοιες κορυφές ονομάζονται **φύλλα**.

Απόδειξη. Αφού το T είναι πεπερασμένο, υπάρχει ένα άνω φράγμα στο μήκος των μονοπατιών που όλες οι κορυφές τους είναι διαφορετικές. Έστω $e_1, ..., e_n$ ένα τέτοιο ανηγμένο μονοπάτι με μέγιστο μήκος. Έστω πως υπάρχει ακμή e με $e \neq \overline{e_n}$ και $\sigma(e) = \tau(e_n)$. Αν $\tau(e) = \sigma(e_r)$ για κάποιο $r \in \{1, ..., n\}$, τότε θα είχαμε το ανηγμένο κλειστό μονοπάτι $e_r, e_{r+1}, ..., e_n, e$ το οποίο είναι άτοπο αφού το T είναι δένδρο. Όμως τότε το μονοπάτι $e_1, ..., e_n, e$ θα ήταν ανηγμένο με διαφορετικές κορυφές το οποίο αντιβαίνει στην μεγιστικότητα του μήκους του μονοπατιού $e_1, ..., e_n$. Άρα οι ακμές e_n και $\overline{e_n}$ είναι οι μόνες ακμές που έχουν την κορυφή $\tau(e_n)$ ως τέλος και αρχή αντίστοιχα. Ομοίως αποδεικνύεται το ίδιο για την κορυφή $\sigma(e_1)$. $\square$

Έστω τώρα Γ ένα γράφημα, Λ ένα σύνολο δεικτών, και T_λ υποδένδρα του Γ για κάθε

$\lambda \in \Lambda$, τέτοια ώστε $V(T_\lambda) \cap V(T_\mu) = \varnothing$ όταν $\lambda \neq \mu$. Υποθέτουμε επίσης πως κάθε κορυφή του Γ ανήκει σε κάποιο δένδρο T_λ (αν δεν ίσχυε, θα μπορούσαμε να προσθέσουμε κάποια δένδρα αποτελούμενα απο μία κορυφή το κάθε ένα ώστε να καλύψουμε όλες τις κορυφές). Φτιάχνουμε ένα γράφημα Δ ως εξής. Οι κορυφές του είναι το σύνολο Λ, δηλαδή $V(\Delta) = \Lambda$ και οι ακμές του είναι οι ακμές του Γ που δεν ανήκουν στο γράφημα $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$, δηλαδή $E(\Delta) = E(\Gamma) \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E(T_\lambda)$. Οι αντίστροφες ακμές είναι οι ίδιες με του Γ (αφού αν $e \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E(T_\lambda)$, τότε και $\overline{e} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E(T_\lambda)$). Για $e \in E(\Delta)$, ορίζουμε την αρχή της e (ως ακμή του Δ) το $\lambda \in \Lambda$ για το οποίο η αρχή του e ως ακμή του Γ ανήκει στο T_λ, δηλαδή αν $\sigma_\Gamma(e) \in T_\lambda$, τότε ορίζουμε $\sigma_\Delta(e) = \lambda$. Λέμε ότι το Δ **προκύπτει απο τη συστολή των δένδρων T_λ, $\lambda \in \Lambda$, του Γ.**

Η παραπάνω κατασκευή εμφανίζεται στην απόδειξη ενός θεωρήματος παρακάτω.

Λήμμα 1.10. Έστω το γράφημα Δ το οποίο προκύπτει απο τη συστολή των δένδρων T_λ, $\lambda \in \Lambda$, ενός γραφήματος Γ, όπως παραπάνω. Τότε το Δ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το Γ είναι συνεκτικό, και το Δ είναι δάσος αν και μόνο αν το Γ είναι δάσος.

Απόδειξη. Δείχνουμε πως μεταφέρονται τα μονοπάτια του Γ σε μονοπάτια του Δ. Έστω $e_1, ..., e_n$ ένα μονοπάτι στο Γ. Έστω πως για κάποια $1 \leq r < s \leq n$ έχουμε πως $e_r \notin E(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda)$ και πως $e_i \in E(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda)$ για $r < i < s$. Αν $e_i \in T_\lambda$ και $e_{i+1} \in T_\mu$, τότε $\tau(e_i) = \sigma(e_{i+1}) \in T_\lambda \cap T_\mu$ και συνεπώς απο τις υποθέσεις για τα υποδένδρα πρέπει να ισχύει πως $\lambda = \mu$. Άρα και τα άκρα των e_i για $r < i < s$ ανήκουν όλα σε ένα δένδρο T_λ και έτσι αμα τα συμπτύξουμε στην κορυφή λ του Δ, (δηλαδή αν αγνοήσουμε τα υπομονοπάτια που ανήκουν στην ένωση $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$), και αφήσουμε ίδιες τις ακμές e_j του Γ που ανήκουν και στο Δ, έχουμε μονοπάτι στο Δ το οποίο συμβολίζουμε χωρίς βλάβη πάλι $e_1, ..., e_n$.

Έστω πώς το μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ στο Γ με την ίδια υπόθεση για τα r, s όπως παραπάνω, είναι ανηγμένο. Δεν μπορεί να ισχύει πως $e_s = \overline{e_r}$ με $s = r + 1$ αφού το μονοπάτι είναι ανηγμένο στο Γ. Για $s > r + 1$ πάλι δεν μπορεί να ισχύει πως $e_s = \overline{e_r}$ αφού αν ίσχυε, το μονοπάτι $e_{r+1}, ..., e_{s-1}$ θα ήταν ένα ανηγμένο κλειστό μονοπάτι στο δένδρο T_λ γιατί $\sigma(e_{r+1}) = \tau(e_r) = \sigma(\overline{e_r}) = \sigma(e_s) = \tau(e_{s-1})$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς το αντίστοιχο μονοπάτι στο Δ πρέπει να είναι και αυτό ανηγμένο.

Έστω τώρα ένα ανηγμένο μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ στο Δ. Τότε για κάθε i υπάρχει ένα $\lambda_i \in \Lambda$ τέτοιο ώστε οι κορυφές $\tau(e_i)$ και $\sigma(e_{i+1})$, ως κορυφές του Γ, ανήκουν και οι δύο στο T_{λ_i}. Αφού το T_{λ_i} είναι δένδρο, υπάρχει ανηγμένο μονοπάτι p_i στο T_{λ_i} απο την κορυφή $\tau(e_i)$ στην $\sigma(e_{i+1})$. Συνεπώς το μονοπάτι $q = (e_1, p_1, e_2, p_2, ..., p_{n-1}, e_n)$ είναι ένα ανηγμένο μονοπάτι του Γ. Γενικότερα, έστω $\sigma(e_1) = \lambda$, $\tau(e_n) = \mu$ κορυφές του Δ και έστω $v \in V(T_\lambda)$, $w \in V(T_\mu)$ κορυφές του Γ. Υπάρχουν ανηγμένα μονοπάτια p_0 στο T_λ και p_n στο T_μ τέτοια ώστε το μονοπάτι p_0, q, p_n να είναι ανηγμένο στο Γ απο την κορυφή v στην κορυφή w.

Έστω τώρα πως το Γ είναι συνεκτικό και έστω λ, μ δύο κορυφές του Δ. Επιλέγουμε κορυφές $v \in V(T_\lambda)$ και $w \in V(T_\mu)$, και τότε ένα μονοπάτι στο Γ απο την v στην w επάγει, από την πρώτη παράγραφο, μονοπάτι στο Δ απο την κορυφή λ στην μ. Συνεπώς το Δ είναι συνεκτικό. Αντίστροφα, έστω πως το Δ είναι συνεκτικό και έστω v και w δύο κορυφές του Γ. Υπάρχουν $\lambda, \mu \in \Lambda$ τέτοια ώστε $v \in T_\lambda$ και $w \in T_\mu$. Υπάρχει μονοπάτι στο Δ απο την κορυφή λ στην μ το οποίο, όπως είδαμε στην τρίτη παράγραφο, επάγει μονοπάτι στο Γ απο την κορυφή v στην w.

Έστω πως το Δ είναι δάσος. Τότε αν προς άτοπο το Γ δεν ήταν δάσος, θα υπήρχε ένα κύκλωμα στο Γ. Απο την δεύτερη παράγραφο το κύκλωμα αυτό επάγει ένα ανηγμένο κλειστό μονοπάτι στο Δ το οποίο πρέπει να είναι αναγκαστικά θετικού μήκους αφού το κύκλωμα στο Γ δεν μπορεί να ανήκει ολόκληρο σε ένα δένδρο T_λ. Συνεπώς έχουμε αντίφαση αφού το

Δ υποτέθηκε δάσος, και άρα το Γ είναι δάσος. Αντίστροφα, έστω πως το Γ είναι δάσος και έστω πρός άτοπο πως το Δ δεν είναι δάσος. Άρα υπάρχουν κορυφές λ, μ του Δ οι οποίες ενώνονται με δύο διαφορετικά ανηγμένα μονοπάτια. Επιλέγουμε $v \in T_\lambda$ και $w \in T_\mu$ και απο την τρίτη παράγραφο, έχουμε δύο διαφορετικά ανηγμένα μονοπάτια στο Γ απο την κορυφή v στην w, το οποίο είναι άτοπο αφού το Γ υποτέθηκε δάσος. Άρα το Δ είναι πράγματι δάσος.
$\square$

Συνεχίζουμε με τους μορφισμούς γραφημάτων, και αποδεικνύουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά αυτών σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν παρακάτω.

1.2 Μορφισμοί γραφημάτων

Ένας **μορφισμός** φ απο ένα γράφημα Γ σε ένα γράφημα Δ αποτελείται απο δύο απεικονίσεις, τις οποίες χάριν συμβολισμού συμβολίζουμε και τις δύο με φ, μία από τις κορυφές $V(\Gamma)$ στις κορυφές $V(\Delta)$ και μία από τις ακμές $E(\Gamma)$ στις ακμές $E(\Delta)$, τέτοιες ώστε για κάθε $e \in E(\Gamma)$ να ισχύει πως $\varphi(\overline{e}) = \overline{\varphi(e)}$ και $\sigma(\varphi(e)) = \varphi(\sigma(e))$. Παρατηρούμε επίσης ότι από τις παραπάνω δύο συνθήκες του μορφισμού έπεται και η ταυτότητα $\tau(\varphi(e)) = \varphi(\tau(e))$. Δηλαδή ένας μορφισμός γραφημάτων διατηρεί τα άκρα και τις αντίστροφες ακμές των ακμών.

Έστω $p : \Gamma \to \Delta$ ένας μορφισμός μεταξύ δύο γραφημάτων Γ, Δ. Καλούμε τον μορφισμό p **τοπικά επιμορφισμό** αν για κάθε κορυφή $v \in V(\Gamma)$ και κάθε ακμή $w \in E(\Delta)$ με $\sigma(w) = p(v)$, υπάρχει ακμή $e \in E(\Gamma)$ τέτοια ώστε $\sigma(e) = v$ και $p(e) = w$. Καλούμε επίσης τον p **τοπικά μονομορφισμό** αν για κάθε δύο διαφορετικές ακμές $e_1, e_2 \in E(\Gamma)$ με $\sigma(e_1) = \sigma(e_2)$, οι ακμές $p(e_1), p(e_2) \in E(\Delta)$ να είναι διαφορετικές. Τέλος, καλούμε τον p **τοπικά ισομορφισμό** αν είναι και τοπικά επιμορφισμός και τοπικα μονομορφισμός.

Η τοπικότητα στους παραπάνω ορισμούς δικαιολογήται ως εξής. Για μία κορυφή $v \in V(\Gamma)$ ενός γραφήματος Γ, θεωρούμε το σύνολο $N_\Gamma(v) = \{e \in E(\Gamma) | \sigma(e) = v\}$, το οποίο παίζει τον ρόλο της περιοχής της κορυφής v. Αν $p : \Gamma \to \Delta$ είναι ένας μορφισμός γραφημάτων, τότε για κάθε $v \in V(\Gamma)$ έχουμε τις απεικονίσεις $p_v : N_\Gamma(v) \to N_\Delta(p(v))$, όπου p_v είναι απλά ο περιορισμός του p στις ακμές $N_\Gamma(v)$. Εύκολα βλέπουμε πως ο p είναι τοπικά επιμορφισμός αν και μόνο αν για κάθε $v \in V(\Gamma)$ η απεικόνιση p_v είναι επί. Ομοίως, ο p είναι τοπικά μονομορφισμός αν και μόνο αν για $v \in V(\Gamma)$ η απεικόνιση p_v είναι 1-1 και τοπικά ισομορφισμός αν και μόνο αν για $v \in V(\Gamma)$ η απεικόνιση p_v είναι 1-1 και επί.

Πρόταση 1.3. Έστω $p : \Gamma \to \Delta$ ένας τοπικά επιμορφισμός γραφημάτων. Έστω T ένα δένδρο και ένας μορφισμός $f : T \to \Delta$. Έστω ακόμα κορυφές $a \in V(T)$ και $v \in V(\Gamma)$ τέτοιες ώστε $p(v) = f(a)$. Τότε υπάρχει μορφισμός $\varphi : T \to \Gamma$ τέτοιος ώστε $p \circ \varphi = f$ και $\varphi(a) = v$.

Δηλαδή για κάθε τέτοια δυάδα κορυφών a, v υπάρχει ανύψωση του μορφισμού f στο Γ μέσω του μορφισμού φ που απεικονίζει την κορυφή a στην v.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του *Zorn*. Θεωρούμε το σύνολο όλων των δυάδων (T_1, φ_1) όπου T_1 υποδένδρο του T με $a \in V(T_1)$ και φ_1 να είναι μορφισμός από το T_1 στο Γ τέτοια ώστε $\varphi_1(a) = v$ και $p \circ \varphi_1 = f$. Υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια δυάδα, γιά T_1 να είναι απλώς η κορυφή $\{a\}$ χωρίς ακμές, και για φ_1 τον μορφισμό-απεικόνιση που στέλνει την κορυφή a στην v. Εφοδιάζουμε το σύνολο όλων αυτών των δυάδων με την εξής μερική διάταξη, $(T_1, \varphi_1) \leq (T_2, \varphi_2)$ αν το T_1 είναι υπογράφημα του T_2 και φ_1 ο περιορισμός του φ_2 στο T_1. Έστω μία αλυσίδα (T_i, φ_i), $i \in I$. Τότε το υπογράφημα του T, $\bigcup_{i \in I} T_i$ είναι δένδρο απο το λήμμα 1.7 αφού $a \in V(T_i)$ για κάθε $i \in I$. επίσης ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi_I : \bigcup_{i \in I} T_i \to \Gamma$, όπου $\varphi_I|_{T_i} = \varphi_i$ για κάθε $i \in I$. Εύκολα βλέπουμε πως είναι καλά ορισμένος μορφισμός και πως η δυάδα $(\bigcup_{i\in I} T_i, \varphi_I)$ είναι άνω φράγμα της αλυσίδας. Άρα από το λήμμα του $Zorn$, έχουμε μέγιστο στοιχείο (T_0, φ_0), και μένει να δείξουμε πως $T_0 = T$.

Από το λήμμα 1.8., αν $V(T_0) = V(T)$, το T είναι μέγιστο δένδρο του δένδρου T, δηλαδή $T_0 = T$. Έστω προς άτοπο πως υπάρχει κορυφή $v \in V(T) \setminus V(T_0)$. Τότε κοιτώντας ένα μονοπάτι του T που ενώνει μια κορυφή του T_0 με την κορυφή v, βλέπουμε πως πρέπει κάποια απο τις ακμές του μονοπατιού αυτού να ενώνει κορυφή του T_0 με κορυφή έξω απο το T_0. Δηλαδή υπάρχει ακμή $e \in E(T)$ με $\sigma(e) \in V(T_0)$ και $\tau(e) \notin V(T_0)$. Αφού ο p είναι τοπικός επιμορφισμός, πρέπει να υπάρχει μια ακμή $x \in E(\Gamma)$ με $\sigma(x) = \varphi_0(\sigma(e))$ και $p(x) = f(e)$. Τότε όμως μπορούμε να φτιάξουμε το δένδρο T_1 με $V(T_1) = V(T_0) \cup \{\tau(e)\}$ και $E(T_1) = E(T_0) \cup \{e, \overline{e}\}$, και τον μορφισμό φ_1 με $\varphi_1|_{T_0} = \varphi_0$, $\varphi_1(e) = x$, $\varphi_1(\overline{e}) = \overline{x}$ και $\varphi_1(\tau(e)) = \tau(x)$. Τότε $(T_0, \varphi_0) < (T_1, \varphi_1)$, το οποίο είναι άτοπο απο την μεγιστικότητα του T_0. $\square$

Πρόταση 1.4. Έστω $p : \Gamma \to \Delta$ ένας τοπικά μονομορφισμός γραφημάτων. Έστω φ και ψ μορφισμοί γραφημάτων απο ένα συνεκτικό γράφημα Z στο Γ τέτοιοι ώστε $p \circ \varphi = p \circ \psi$. Έστω επίσης πως υπάρχει μία κορυφή $z \in V(Z)$ τέτοια ώστε $\varphi(z) = \psi(z)$. Τότε ισχύει πως $\varphi = \psi$.

Απόδειξη. Αν το Z δεν έχει ακμές, επειδή είναι συνεκτικό, πρέπει $V(Z) = \{z\}$ και τότε η πρόταση ισχύει. Έστω πως το $V(Z)$ δεν είναι μονοσύνολο. Τότε θεωρούμε το σύνολο $S = \{v \in V(Z) | \varphi(v) = \psi(v)\}$, και μια ακμή $e \in E(Z)$ με $\sigma(e) \in S$, (υπάρχει τέτοια ακμή αφού για παράδειγμα η κορυφή z θα ενώνεται με μία άλλη κορυφή του συνεκτικού Z και $z \in S$). Τότε και οι δύο ακμές $\varphi(e), \psi(e)$ έχουν αρχή την κορυφή $\sigma(\varphi(e)) = \varphi(\sigma(e)) = \psi(\sigma(e)) = \sigma(\psi(e))$ και απο την υπόθεση έχουμε πως $p(\varphi(e)) = p(\psi(e))$. Αφού ο p είναι τοπικά μονομορφισμός πρέπει να ισχύει πως $\varphi(e) = \psi(e)$, άρα και $\varphi(\tau(e)) = \tau(\varphi(e)) = \tau(\psi(e)) = \psi(\tau(e))$, δηλαδή $\tau(e) \in S$. Αφού το Z είναι συνεκτικό και $S \neq \varnothing$, το λήμμα 1.2 μας δίνει πως $S = V(Z)$. Το παραπάνω επιχείρημα δείχνει ακόμα πως αν για μια ακμή e ισχύει πως $\sigma(e) \in S$, τότε $\varphi(e) = \psi(e)$. Αφού $S = V(Z)$, έπεται πως $\varphi = \psi$. $\square$

Πρόταση 1.5. Έστω $p : S \to \Gamma$ και $q : T \to \Gamma$ δύο τοπικά ισομορφισμοί γραφημάτων, με τα S και T να είναι δένδρα. Έστω επιπλέον δύο κορυφές v και w των S και T αντίστοιχα με $p(v) = q(w)$. Τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\varphi : S \to T$ τέτοιος ώστε $\varphi(v) = w$ και $q \circ \varphi = p$. Δηλαδή υπάρχει μοναδική ανύψωση του μορφισμού p στο T που απεικονίζει την κορυφή v στην w, και η ανύψωση αυτή είναι ισομορφισμός δένδρων.

Απόδειξη. Αφού το S είναι δένδρο και ο q τοπικά επιμορφισμός, η πρόταση 1.3 μας δίνει έναν μορφισμό $\varphi : S \to T$ όπου $\varphi(v) = w$ και $q \circ \varphi = p$. Αφού ο q είναι τοπικά μονομορφισμός, απο την πρόταση 1.4 ο φ είναι μοναδικός. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των S και T έχουμε ακόμα έναν μορφισμό $\psi : T \to S$ όπου $\psi(w) = v$ και $p \circ \psi = q$. Άρα έχουμε πως $\psi(\varphi(v)) = v = I_S(v)$ και $p \circ \psi \circ \varphi = p = I_S \circ p$, όπου I_S είναι ο ταυτοτικός μορφισμός του S. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.4 πάλι για τον τοπικά μονομορφισμό p τώρα, έχουμε πως $\psi \circ \varphi = I_S$. Αντίστοιχα για το T έχουμε πως $\varphi \circ \psi = I_T$ και συνεπώς ο φ είναι ισομορφισμός. $\square$

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με μια σύνοψη των παραπάνω αποτελεσμάτων για τους τοπικούς μορφισμούς σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν παρακάτω.

Πρόταση 1.6. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ ένας μορφισμός γραφημάτων. Τότε ισχύουν τα εξής:
(i) Αν ο f είναι τοπικά επιμορφισμός και το Δ είναι συνεκτικό, τότε ο f είναι επιμορφισμός.

(ii) Αν ο f είναι τοπικά μονομορφισμός, το Γ συνεκτικό και το Δ δένδρο, τότε ο f είναι μονομορφισμός.

(iii) Αν ο f είναι τοπικά ισομορφισμός και τα Γ και Δ δένδρα, τότε ο f είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. (i) Έστω μια ακμή $w \in E(\Delta)$ με $\sigma(w) \in f(V(\Gamma))$. Έστω μια κορυφή $v \in V(\Gamma)$ με $f(v) = \sigma(w)$. Αφού ο f είναι τοπικά επιμορφισμός, υπάρχει μια ακμή $e \in E(\Gamma)$ τέτοια ώστε $\sigma(e) = v$ και $f(e) = w$. Άρα $\tau(e) \in f(V(\Gamma))$ και συνεπώς απο το λήμμα 1.2 έπεται πως $f(V(\Gamma)) = \Delta$.

(ii) Παρατηρούμε πως επειδή ο f είναι τοπικός μονομορφισμός, θα είναι 1-1 στις ακμές αν είναι 1-1 στις κορυφές. Έστω προς άτοπο πως υπάρχουν κορυφές $v, w \in V(\Gamma)$ τέτοιες ώστε $f(v) = f(w)$. Αφού το Γ είναι συνεκτικό, υπάρχει ένα ανηγμένο μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ απο την v στην w. Τότε η εικόνα του μονοπατιού, $f(e_1), ..., f(e_n)$, θα είναι κλειστό μονοπάτι στο Δ. Αφού το Δ είναι δένδρο, υπάρχει ένα $i \in \{1, ..., n-1\}$ τέτοιο ώστε $f(e_{i+1}) = \overline{f(e_i)} = f(\overline{e_i})$. Τέλος, αφού ο f είναι τοπικός μονομορφισμός και $\sigma(e_{i+1}) = \tau(e_i) = \sigma(\overline{e_i})$, πρέπει να ισχύει πως $e_{i+1} = \overline{e_i}$, το οποίο είναι άτοπο αφού το μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ υποτέθηκε ανηγμένο.

(iii) Χρησιμοποιούμε την πρόταση 1.5 με $p = f$ και $q = I_\Delta$. $\square$

2 Δράσεις Ομάδων σε Γραφήματα και Γραφήματα Ομάδων

2.1 Βασικοί ορισμοί και η σχέση των ελεύθερων ομάδων με τα δένδρα

Δράση μίας ομάδας G **σε ένα γράφημα** Γ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων

$\varphi : G \to Aut(\Gamma)$, όπου $Aut(\Gamma)$ είναι η ομάδα των αυτομορφισμών του γραφήματος Γ με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων. Ένα γράφημα Γ μαζί με μία δράση σε αυτό από μία ομάδα G το λέμε και **G-γράφημα**. Ο ομομορφισμός φ στην ουσία είναι δύο ομομορφισμοί $\varphi_1 : G \to Sym(V(\Gamma))$ και $\varphi_2 : G \to Sym(E(\Gamma))$ με $\overline{\varphi_2(g)(e)} = \varphi_2(g)(\overline{e})$ και $\sigma(\varphi_2(g)e) = \varphi_1(g)(\sigma(e))$ για κάθε $g \in G$ και $e \in E(\Gamma)$. Χάριν συμβολισμού, γιά ένα $g \in G$ και μία κορυφή ή ακμή $x \in V(\Gamma) \cup E(\Gamma)$, γράφουμε gx αντί για $\varphi_i(g)(x)$, $i \in \{1, 2\}$.

Έστω πως μία ομάδα G δρά σε ένα γράφημα Γ. Λέμε πως η G **δρά με αντιστροφές** αν υπάρχουν $g \in G$ και $e \in E(\Gamma)$ τέτοια ώστε $ge = \overline{e}$. Στα παρακάτω θα μας απασχολήσουνε μόνο δράσεις χωρίς αντιστροφές. Αυτό όμως δεν είναι περιοριστικό για τον εξής λόγο.

Έστω ένα γράφημα Γ. Μπορούμε να κατασκευάσουμε την καλούμενη **βαρυκεντρική υποδιαίρεση** του Γ, η οποία είναι ένα γράφημα Γ' το οποίο ορίζεται ως εξής. Οι κορυφές του είναι το σύνολο $V(\Gamma') = V(\Gamma) \cup \{v_e | e \in E(\Gamma)\}$ όπου $\{v_e | e \in E(\Gamma)\} \cap V(\Gamma) = \varnothing$ και $v_e = v_w$ αν και μόνο αν $e \in \{w, \overline{w}\}$. Οι ακμές του είναι το σύνολο $E(\Gamma') = \{e_+, e_- | e \in E(\Gamma)\}$ όπου $e_+ \neq e_-$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$, όπως επίσης και για διαφορετικές ακμές $e, w \in E(\Gamma)$, τα σύνολα $\{e_+, e_-\}$ και $\{w+, w_-\}$ έχουν κενή τομή. Για $e \in E(\Gamma)$, ορίζουμε $\sigma(e_-) = \sigma(e)$ και $\sigma(e_+) = v_e$, τις αρχές των ακμών e_- και e_+ αντίστοιχα. Ορίζουμε επίσης $\overline{e_-} = \overline{e}_+$ και $\overline{e_+} = \overline{e}_-$, τις αντίστροφες των ακμών e_- και e_+ αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως $\tau(e_-) = \sigma(\overline{e_-}) = \sigma(\overline{e}_+) = v_{\overline{e}} = v_e$ και πως $\tau(e_+) = \sigma(\overline{e_+}) = \sigma(\overline{e}_-) = \sigma(\overline{e}) = \tau(e)$. Η διαισθητική εικόνα είναι ξεκάθαρη, απλώς κάθε μονοπάτι μήκους 1, δηλαδή κάθε ακμή, το κάναμε μονοπάτι μήκους 2.

Έχουμε μία φυσιολογική εμφύτευση της ομάδας των αυτομορφισμών του Γ, $Aut(\Gamma)$, στην ομάδα των αυτομορφισμών του Γ' ,$Aut(\Gamma')$. Έστω $\varphi \in Aut(\Gamma)$. Ορίζουμε τον αντίστοιχο αυτομορφισμό φ' ως εξής. Για κορυφές στο $V(\Gamma)$ ο φ' είναι ο ίδιος με τον φ. Για τις κορυφές

v_e, όπου $e \in E(\Gamma)$, ορίζουμε $\varphi'(v_e) = v_{\varphi(e)}$. Για $e \in E(\Gamma)$ ορίζουμε $\varphi'(e_-) = \varphi(e)_-$ και $\varphi'(e_+) = \varphi(e)_+$. Άμεσα βλέπουμε από τους ορισμούς τις σχέσεις πως $\sigma(\varphi'(e_-)) = \sigma(\varphi(e)_-) = \sigma(\varphi(e)) = \varphi(\sigma(e)) = \varphi'(\sigma(e_-))$ και πως $\overline{\varphi'(e_-)} = \overline{\varphi(e)_-} = \overline{\varphi(e)}_+ = \varphi(\overline{e})_+ = \varphi'(\overline{e}_+) = \varphi'(\overline{e_-})$, δηλαδή πως πράγματι ο φ' είναι μορφισμός. Το ότι είναι 1-1 και επί έπεται από το ότι ο φ είναι αυτομορφισμός. Είναι άμεσα επαληθεύσιμο ότι αν $\varphi' = 1_{Aut(\Gamma')} = I_{\Gamma'}$, τότε $\varphi = I_\Gamma$, δηλαδή η απεικόνιση $' : Aut(\Gamma) \to Aut(\Gamma')$ είναι πράγματι εμφύτευση (1-1) και πως είναι όντως ομομορφισμός ομάδων. Το σημαντικό εδώ είναι ότι οι αυτομορφισμοί $'(Aut(\Gamma)) \subseteq Aut(\Gamma')$ δρουνε στο Γ' χωρίς αντιστροφές. Πράγματι, για εναν $\varphi \in Aut(\Gamma)$ έχουμε $\sigma(\varphi'(e_-)) = \varphi'(\sigma(e_-)) = \varphi'(\sigma(e)) = \varphi(\sigma(e)) \in E(\Gamma)$ ενώ $\sigma(\overline{e_-}) = \tau(e_-) = v_e \notin V(\Gamma)$, δηλαδή $\varphi'(e_-) \neq \overline{e_-}$. Ομοίως, $\sigma(\varphi'(e_+)) = \varphi'(\sigma(e_+)) = \varphi'(v_e) = v_{\varphi(e)} \notin V(\Gamma)$ ενώ $\sigma(\overline{e_+}) = \tau(e_+) = \tau(e) \in V(\Gamma)$, δηλαδή $\varphi'(e_+) \neq \overline{e_+}$.

Συνθέτοντας τον ομομορφισμό της δράσης $G \to Aut(\Gamma)$ με την παραπάνω εμφύτευση $Aut(\Gamma) \hookrightarrow Aut(\Gamma')$ έχουμε έναν ομομορφισμό από την ομάδα G στην $Aut(\Gamma')$, δηλαδή μία δράση του G χωρίς αντιστροφές στο γράφημα Γ', ασχέτως αν η G δρούσε με ή χωρίς αντιστροφές στο Γ. Να τονίσουμε ότι σκοπός μας είναι η ανάλυση-περιγραφή των ομάδων όπου δρουνε σε δένδρα χωρίς αντιστροφές. Εύκολα βλέπει κανείς πως αν Γ είναι δένδρο, τότε και η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του Γ', είναι δένδρο. Από τα παραπάνω, αν μια ομάδα G δρά σε ένα δένδρο T με αντιστροφές, δρά και στο δένδρο T' χωρίς αντιστροφές, οπότε μπορούμε να πάρουμε την επιθυμητή πληροφορία που μας παρέχει το βασικό δομικό θεώρημα που θα δούμε παρακάτω. Για αυτόν τον λόγω από δω και στο εξής όταν λέμε δράση ομάδας σε γράφημα θα ενοούμε πως η ομάδα δρά χωρίς αντιστροφές.

Ο λόγος που θέλουμε οι ομάδες να δρουνε χωρίς αντιστροφές είναι γιατί η ανάλυση που θα κάνουμε γίνεται μέσω του γραφήματος πηλίκο της δράσης, το οποίο θα ορίσουμε τώρα.

Έστω μία ομάδα G η οποία δρά σε ένα γράφημα Γ. Το **γράφημα πηλίκο της δράσης της G στο** Γ συμβολίζεται $G\setminus\Gamma$ και ορίζεται ως εξής. Στο σύνολο $V(\Gamma)$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας, $v \sim w$ αν $w = gv$ για κάποιο $g \in G$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι τροχιές της δράσης της G στο σύνολο $V(\Gamma)$ και συμβολίζουμε $< v >= \{gv \mid g \in G\} = Gv$ την κλάση μίας κορυφής $v \in V(\Gamma)$. Ομοίως ορίζουμε στο σύνολο των ακμών $E(\Gamma)$, $e \sim x$ αν $x = ge$ για κάποιο $g \in G$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας των παραπάνω σχέσεων είναι οι τροχιές των δράσεων της G στο σύνολο $E(\Gamma)$ και συμβολίζουμε $< e >= \{ge \mid g \in G\} = Ge$ την κλάση μίας ακμής $e \in E(\Gamma)$. Ορίζουμε ως κορυφές του $G \setminus \Gamma$ τις παραπάνω κλάσεις των κορυφών, δηλαδή $V(G \setminus \Gamma) = \{< v >\mid v \in V(G)\}$, και ως ακμές του $G \setminus \Gamma$ τις τροχιές των ακμών, δηλαδή $E(G \setminus \Gamma) = \{< e >\mid e \in E(\Gamma)\}$. Ορίζουμε την αρχή μίας ακμής $< e >$ να είναι η κορυφή-τροχία $< \sigma(e) >$, δηλαδή $\sigma(< e >) =< \sigma(e) >$, και την αντίστροφη της ακμής $< e >$ να είναι η ακμή $< \bar{e} >$, δηλαδή $\overline{< e >} =< \bar{e} >$. Οι αρχές και οι αντίστροφες των ακμών είναι καλά ορισμένες, αφού αν $e = gx$ για $e, x \in E(\Gamma)$ και $g \in G$, έχουμε πως $\sigma(e) = \sigma(gx) = g.\sigma(x)$, δηλαδή $< \sigma(e) >=< \sigma(x) >$, και $\bar{e} = \overline{gx} = g\bar{x}$, δηλαδή $< \bar{e} >=< \bar{x} >$. Για να είναι γράφημα η παραπάνω κατασκευή μένει μόνο να ισχύει πως $< e >\neq \overline{< e >}$ και πως $< e >= \overline{\overline{< e >}}$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$. Το ότι $< e >= \overline{\overline{< e >}}$ είναι προφανές αφού $e = \bar{\bar{e}}$. Το να δρά η G χωρίς αντιστροφές στο Γ είναι ισοδύναμο με το ότι $< e >\neq \overline{< e >}$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$, δηλαδή ισοδύναμο με το να είναι γράφημα η παραπάνω κατασκευή, γιαυτό και χρειαζόμαστε πάντα οι ομάδες να δρουν χωρίς αντιστροφές.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την **προβολή** $p : \Gamma \to G \setminus \Gamma$, με $p(x) =< x >$ για $x \in V(\Gamma) \cup E(\Gamma)$, η οποία είναι τοπικός επιμορφισμός γραφημάτων. Το ότι είναι μορφισμός φένεται άμεσα απο τους ορισμούς των αρχών και των αντιστρόφων των ακμών του $G\setminus\Gamma$. Για το ότι είναι τοπικός επιμορφισμός, έστω $v \in V(\Gamma)$ και $< e >\in E(G\setminus\Gamma)$ με $\sigma(< e >) = p(v)$. Έχουμε $< \sigma(e) >= \sigma(< e >) = p(v) =< v >$, δηλαδή υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $\sigma(e) =$

gv και συνεπώς για $x = g^{-1}e \in E(\Gamma)$ έχουμε πως $\sigma(x) = \sigma(g^{-1}e) = g^{-1}\sigma(e) = g^{-1}gv = v$ και $p(x) = p(g^{-1}e) =< g^{-1}e >=< e >$.

Έστω τώρα πως το Γ είναι συνεκτικό. Τότε αφού η προβολή p είναι επιμορφισμός, πρέπει το πηλίκο $G \setminus \Gamma$ να είναι και αυτό συνεκτικό. Έστω τώρα ένα μέγιστο δένδρο T του πηλίκου $G \setminus \Gamma$. Χρησιμοποιούμε την πρόταση 1.3 με p την παραπάνω προβολή και $f = i$ την ένθεση του T στο $G \setminus \Gamma$, και έτσι έχουμε έναν μορφισμό $j : T \to \Gamma$ με $p \circ j = i$, δηλαδή έχουμε τον ισομορφισμό $p|_{j(T)} : j(T) \to T$. Άρα το γράφημα $j(T)$ είναι δένδρο, το οποίο καλούμε **αντιπροσωπευτικό δένδρο της δράσης της** G **στο γράφημα** Γ.

Καλούμε **προσανατολισμό** ενός γραφήματος Γ, ένα υποσύνολο των ακμών $A \subseteq E(\Gamma)$ τέτοιο ώστε για κάθε $e \in E(\Gamma)$ να ισχύει πως $| A \cap \{e, \overline{e}\} |= 1$, δηλαδή μια επιλογή ενός στοιχείου απο κάθε ζεύγος $\{e, \overline{e}\}$. Έστω μία ομάδα G να δρά σε ένα γράφημα Γ και έστω B ένας προσανατολισμός του $G \setminus \Gamma$. Τότε το σύνολο $A = p^{-1}(B)$ είναι προσανατολισμός του Γ και $G.A = A$. Πράγματι, έστω $B = \{< e_i >| \ i \in I\}$ ένας προσανατολισμός του $G \setminus \Gamma$. Τότε $A = p^{-1}(B) = \bigcup_{i \in I} Ge_i$ και αφού $G(Ge_i) = (G.G)e_i = Ge_i$ έχουμε πως $G.A = G(\bigcup_{i \in I} Ge_i) = \bigcup_{i \in I} GGe_i = \bigcup_{i \in I} Ge_i = A$. Το ότι είναι προσανατολισμός είναι άμεσο αφού για μία $e \in E(\Gamma)$, μόνο μία απο τις ακμές $< e >= p(e)$ και $\overline{< e >} =< \overline{e} >= p(\overline{e})$ ανήκει στον προσανατολισμό B και συνεπώς αφού $p(A) = p(p^{-1}(B)) = B$, μόνο μία απο τις ακμές e και $\overline{e}$ θα ανήκει στο A.

Συνεχίζουμε με ένα βασικό και γενικό παράδειγμα δράσης ομάδας σε γράφημα και αποδυκνείουμε εν συντομία ένα θεώρημα που αποτέλεσε έναυσμα για την μελέτη των δράσεων σε γραφήματα.

Έστω G ομάδα και S ένα υποσύνολο της G. Ορίζουμε το **γράφημα** $Cayley$ **της** G **σε σχέση με το** S ως εξής. Οι κορυφές του είναι τα στοιχεία του G. Οι ακμές του είναι το σύνολο $G \times S \times \{1, -1\}$ με αρχές $\sigma(g, s, 1) = g$ και $\sigma(g, s, -1) = gs$, και αντίστροφες $\overline{(g, s, \varepsilon)} = (g, s, -\varepsilon)$ για $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Η παραπάνω κατασκευή είναι προφανώς γράφημα και συμβολίζουμε το γράφημα αυτό $\Gamma(G, S)$. Η ομάδα G δρά σε αυτό με πολλαπλασιασμό απο αριστερά, δηλαδή για $g \in G$ και $x \in V(\Gamma(G, S)) = G$ η δράση του g στο x είναι $gx = g.x$, και για ακμή (x, s, ε), $g(x, s, \varepsilon) = (g.x, s, \varepsilon)$.

Λήμμα 2.1. Έστω G ομάδα, S ένα υποσύνολο της G και $\Gamma(G, S)$ το αντίστοιχο γράφημα *Cayley*. Τότε ισχύουν τα εξής. (1) Το $\Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το S παράγει την G.

(2) Το $\Gamma(G, S)$ είναι δένδρο αν και μόνο αν η ομάδα G είναι ελεύθερη με βάση το S.

(3) Η G δρά στο $\Gamma(G, S)$ χωρίς αντιστροφές.

(4) Για κάθε $g \in G \setminus \{1\}$ και $v \in \Gamma(G, S) = G$ ισχύει πως $gv \neq v$, δηλαδή η G **δρά ελεύθερα στο** $\Gamma(G, S)$ όπως λέμε.

Απόδειξη. Έστω $g, h \in G$ δύο στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο $A_{g,h} = \{(s_1^{\varepsilon_1}, ..., s_n^{\varepsilon_n}) \in G^n \mid s_i \in S, \varepsilon_i \in \{1, -1\}$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ τέτοια ώστε $s_1^{\varepsilon_1} ... s_n^{\varepsilon_n} = g^{-1}h\ \}$ και το σύνολο $B_{g,h}$ όλων των μονοπατιών του $\Gamma(G, S)$ από την κορυφή g στην κορυφή h. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi_{g,h} : A_{g,h} \to B_{g,h}$ που παίρνει μια n-άδα του $A_{g,h}$, $(s_1^{\varepsilon_1}, ..., s_n^{\varepsilon_n})$, και την απεικονίζει στο μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ όπου $e_i = (g_i, s_i, \varepsilon_i)$ με $g_i = gs_1^{\varepsilon_1} ... s_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}$ αν $\varepsilon_i = 1$ και $g_i = gs_1^{\varepsilon_1} ... s_i^{\varepsilon_i}$ αν $\varepsilon_i = -1$. Εύκολα επαληθεύεται πως η απεικόνιση $\varphi_{g,h}$ είναι καλά ορισμένη 1-1 και επί. Το (1) είναι ξεκάθαρο απο τις απεικονίσεις $\varphi_{1,h}$ για όλα τα $h \in G$. Για το (2), παρατηρούμε πώς οι ανηγμένες λέξεις της G στο S, δηλαδή στοιχεία $s_1^{\varepsilon_1} ... s_n^{\varepsilon_n}$ του $< S >$ με $s_i^{\varepsilon_i \cdot (-1)} \neq s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}$ για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$, είναι σε αντιστοιχία μέσω των $\varphi_{g,h}$ με τα ανηγμένα μονοπάτια του $\Gamma(G, S)$. Η G είναι ελεύθερη με βάση το S αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του έχει μοναδική ανηγμένη γραφή στο S το οποίο απο τα παραπάνω είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι στο $\Gamma(G,S)$ που ενώνει δύο κορυφές (για κάθε δύο κορυφές αφού $< S >= G$), το οποίο με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το να είναι δένδρο το γράφημα $\Gamma(G,S)$. Τα (3) και (4) είναι προφανή. $\square$

Συνεπώς αν G είναι μια ελεύθερη ομάδα στο σύνολο $S \subseteq G$, τότε το γράφημα $\Gamma(G,S)$ είναι δένδρο και η πολλαπλασιαστική δράση της G στο $\Gamma(G,S)$ είναι ελεύθερη και χωρίς αντιστροφές. Ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 2.1. Έστω μια ομάδα G η οποία δρά ελεύθερα σε ένα δένδρο X χωρίς α-ντιστροφές. Έστω ακόμα T ένα αντιπροσωπευτικό δένδρο της δράσης του G και A ένας προσανατολισμός του X τέτοιος ώστε $G.A = A$, (από την παρατήρηση μετά τον ορισμό του προσανατολισμού, αρκεί $A = p^{-1}(B)$ όπου B ένας προσανατολισμός του πηλίκου $G \setminus X$). Θεωρούμε το σύνολο $S = \{g \in G - \{1\} \mid \exists\ e \in A$ με $\sigma(e) \in T$ και $\tau(e) \in gT\}$. Τότε η ομάδα G είναι ελεύθερη με βάση το S.

Απόδειξη. Ισχύει πως $gV(T) \cap hV(T) = \varnothing$ για $g \neq h$. Έστω προς άτοπο πως υπάρχουν $g, h \in G$ με $g \neq h$ και κορυφές v, w του T τέτοιες ώστε $gv = hw$. Αφού το T είναι αντιπροσωπευτικό δένδρο της δράσης, η προβολή του στο πηλίκο $p(T)$ είναι ένα μέγιστο δένδρο του πηλίκου και η απεικόνιση $p|_T : T \to p(T)$ είναι ισομορφισμός, ιδιαιτέρως η προβολή δίνει αντιστοιχία απο το $V(T)$ στις κορυφές του μέγιστου δένδρου $p(T)$, δηλαδή στις κορυφές του πηλίκου $G \setminus X$. Συνεπώς το T περιέχει μια ακριβώς κορυφή από κάθε τροχιά Gt, για κάθε $t \in V(T)$. Άρα αφού $gv = hw \iff (h^{-1}g)v = w$ και $v, w \in V(T)$, πρέπει $v = w$. Αφού τώρα η G δρά ελεύθερα, πρέπει $h^{-1}g = 1 \iff g = h$, το οποίο είναι άτοπο. επίσης, αφού το $V(p(T)) = V(G \setminus X)$, κάθε κορυφή του X ανήκει σε ένα σύνολο $gV(T)$ γιά κάποιο $g \in G$.

Τα υπογραφήματα gT του X, δηλαδή οι εικόνες του δένδρου T μέσω των ισομορφισμών

$g : X \to X$ με $g(a) = ga$ για κάθε $a \in V(X) \cup E(T)$, είναι όλα δένδρα αφού το T είναι δένδρο, και συνεπώς από την προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να φτιάξουμε το γράφημα Y το οποίο προκύπτει απο τη συστολή των δένδρων gT, γιά κάθε $g \in G$ στο γράφημα X. Από το λήμμα 1.10 το γράφημα Y είναι δένδρο αφού το X είναι δένδρο. Θα δείξουμε πως το γράφημα $\Gamma(G,S)$ είναι ισόμορφο με το Y και τότε απο το λήμμα 2.1, θα έχουμε το επιθυμητό συμπέρασμα.

Τις κορυφές του Y μπορούμε να τις δούμε ώς τα δένδρα $gT, g \in G$ (αντί για το σύνολο δεικτών αυτών), οι οποίες είναι σε εμφανή αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις κορυφές του $\Gamma(G,S)$. Τυπικά, ορίζουμε $\varphi : V(\Gamma(G,S) = G \to V(Y) = \{gT \mid g \in G\}$ με $\varphi(g) = gT$.

Γιά ένα $s \in S$ υπάρχει μοναδική ακμή $e \in A \subseteq E(X)$ με $\sigma(e) \in T$ και $\tau(e) \in sT$. Πράγματι, το ότι υπάρχει τουλάχιστον μία έπεται απο τον ορισμό του S και αν υπήρχαν δύο τέτοιες τότε θα είχαμε δύο διαφορετικές ακμές του Y που έχουν άκρα τις κορυφές T και sT, δηλαδή θα είχαμε κύκλωμα στο Y, το οποίο είναι άτοπο αφού Y είναι δένδρο. Η ακμή του X, $ge \in G.A = A$ επάγει ακμή (την ίδια, ge) του Y με αρχή την κορυφή gT και τέλος gsT. Ορίζουμε $\varphi((g,s,1)) = ge$ και $\varphi((g,s,-1)) = \overline{ge}$.

Η φ είναι ξεκάθαρο πως είναι μορφισμός γραφημάτων και για να είναι ισομορφισμός μένει να δείξουμε πως είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία στις ακμές. Για $g, g' \in G$ και $s, s' \in S$ παρατηρούμε πως οι ακμές $(g,s,1)$ και $(g',s',-1)$ του $\Gamma(G,S)$ απεικονίζονται μέσω της φ σε διαφορετικές ακμές του Y αφού $\varphi(g,s,1) \in G.A = A$ ενώ $\varphi(g',s',-1) \in G.\overline{A} = \overline{A}$. Έστω τώρα δύο διαφορετικές ακμές του $\Gamma(G,S)$, $(g,s,1)$ και $(g',s',1)$. Αν $g \neq g'$, τότε $\sigma(\varphi(g,s,1)) = gT \neq g'T = \sigma(\varphi(g',s',1))$, δηλαδή $\varphi(g,s,1) \neq \varphi(g',s',1)$. Αν $g = g'$, τότε πρέπει $s \neq s' \iff gs \neq gs'$ και τότε $\tau(\varphi(g,s,1)) = gsT \neq gs'T = \tau(\varphi(g',s',1))$, δηλαδή

$\varphi(g, s, 1) \neq \varphi(g', s', 1)$. Συνεπώς η φ είναι 1-1 στις ακμές.

Για το επί, έστω μια ακμή e του Y. Από τον ορισμό του Y, η e είναι και ακμή του X, και θεωρούμενη ως τέτοια, έχει αρχή $\sigma(e) \in gT$ και τέλος $\tau(e) \in hT$ για κάποια $g, h \in G$ διαφορετικά μεταξύ τους. Αλλάζοντας την e με την αντίστροφη της $\overline{e}$ αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε πως $e \in A$. Τότε $g^{-1}e \in G.A = A$, και $g^{-1}h \in S$, αφού η ακμή $g^{-1}e$ αρχίζει στο T (γιατί η e αρχίζει στο gT) και τελειώνει στο $g^{-1}hT$ (γιατί η e τελειώνει στο hT). Συνεπώς έχουμε την ακμή $(g, g^{-1}h, 1)$ του $\Gamma(G, S)$ και από τα παραπάνω έχουμε πως $\varphi((g, g^{-1}h, 1)) = g.(g^{-1}e) = e$, οπότε πράγματι ο φ είναι ισομορφισμός γραφημάτων και όπως αναφέραμε πριν, το (2) του λήμματος 2.1 μας δίνει το συμπέρασμα. $\square$

Άμεσα έπεται το επώνυμο θεώρημα των $Nielsen$ και $Schreier$.

Πόρισμα ($Nielsen - Schreier$)**.** Έστω F η ελεύθερη ομάδα με βάση ένα σύνολο S και H μια υποομάδα της F. Τότε η H είναι και αυτή ελεύθερη.

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.1 το γράφημα $\Gamma(F, S)$ είναι δένδρο στο οποίο η ομάδα F δρά ελεύθερα και χωρίς αντιστροφές. Περιορίζοντας την παραπάνω δράση στην υποομάδα H της F, βλέπουμε πως η ομάδα H δρά και αυτή ελεύθερα και χωρίς αντιστροφές στο δένδρο $\Gamma(F, S)$. Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα 2.1 έπεται πως η ομάδα H είναι ελεύθερη. $\square$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τις ομάδες όπου δρουνε, όχι αναγκαστικά ελεύθερα, σε δένδρα και θα αποδείξουμε ένα θεώρημα αντίστοιχο με το παραπάνω, μια γενίκευση του στην ουσία, από το οποίο θα μπορέσουμε να συμπεράνουμε αρκετά θεωρήματα υποομάδων όπως αυτό των $Nielsen - Schreier$. Πρώτα όμως πρέπει να περάσουμε από την έννοια του γραφήματος ομάδων.

2.2 Γραφήματα Ομάδων και οι Θεμελιώδεις Ομάδες αυτών

Τα γραφήματα ομάδων είναι μία ενδιάμεση κατασκευή η οποία μας βοηθάει στο να κατανοήσουμε τις δράσεις των ομάδων σε δένδρα. Σε μία τέτοια δράση, αντιστοιχούμε ένα γράφημα ομάδων το οποίο κωδικοποιεί όλη την απαραίτητη πληροφορία που χρειαζόμαστε απο τη δράση για την επιθυμητή ανακατασκευή της ομάδας.

Ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ αποτελείτε από τα εξής :

(1) Ένα συνεκτικό γράφημα X,

(2) Γιά κάθε κορυφή $v \in V(X)$ μία ομάδα G_v, και γιά κάθε ακμή $e \in E(X)$ μία ομάδα G_e τέτοια ώστε $G_e = G_{\overline{e}}$ γιά κάθε $e \in E(X)$, και

(3) Για κάθε ακμή $e \in E(X)$ έναν μονομορφισμό απο την ομάδα G_e στην ομάδα $G_{\tau(e)}$.

Οι ομάδες G_v γιά $v \in V(X)$ καλούνται **ομάδες κορυφών** του $\mathcal{G}$, και αντίστοιχα γιά $e \in E(X)$ οι ομάδες G_e καλούνται **ομάδες ακμών** του $\mathcal{G}$. Παρατηρούμε ότι επειδή $G_e = G_{\overline{e}}$ και $\tau(\overline{e}) = \sigma(e)$, έχουμε μονομορφισμό απο την G_e στην $G_{\sigma(e)}$. Χάριν συμβολισμού, γιά κάθε $e \in E(X)$ χρησιμοποιούμε τα σύμβολα τ και σ για τους μονομορφισμούς απο την G_e στην $G_{\tau(e)}$ και στην $G_{\sigma(e)}$ αντίστοιχα.

Σε κάθε γράφημα ομάδων θα αντιστοιχήσουμε μία ομάδα, τη καλούμενη θεμελιώδη ομάδα του. Τα γραφήματα ομάδων μαζί με τις αντίστοιχες θεμελιώδες ομάδες τους όπως θα δούμε είναι μία γενίκευση του ελεύθερου γινομένου ομάδων, των HNN επεκτάσεων και των γινομένων με αμάλγαμα. Δηλαδή έχοντας κάποιες ομάδες, (τις ομάδες ακμών και κορυφών), και ένα γράφημα το οποίο υποδυκνύει κάποια σχέση μεταξύ των ομάδων αυτών, φτιάχνουμε μία καινούρια ομάδα, την θεμελιώδη ομάδα την οποία θα ορίσουμε τώρα.

Έστω ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με το αντίστοιχο συνεκτικό του γράφημα να είναι το X. Έστω E να είναι η ελεύθερη ομάδα με βάση το σύνολο των ακμών $E(X)$. Έστω $F(\mathcal{G})$ να είναι η ομάδα $(E *_{v\in V(X)} G_v)/N$, όπου $(E *_{v\in V(X)} G_v)$ είναι το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων E και G_v για κάθε $v \in V(X)$, και N είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από το σύνολο $\{e^{-1}\sigma(a)e\tau(a)^{-1} \mid e \in E(X), a \in G_e\} \cup \{e\overline{e} \mid e \in E(X)\}$, δηλαδή η ελάχιστη κανονική υποομάδα του παραπάνω ελεύθερου γινομένου που περιέχει το παραπάνω σύνολο. Συνεπώς η $F(\mathcal{G})$ είναι μία HNN επέκταση του ελεύθερου γινομένου των ομάδων κορυφών, $*_{v\in V(X)}G_v$, με ένα σταθερό γράμμα για κάθε ζεύγος ακμών $\{e, \overline{e}\}$. Να επισημάνουμε ότι ένα μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ του γραφήματος X μπορούμε να το θεωρήσουμε και ώς στοιχείο της ομάδας E, το $e_1...e_n \in E$, άρα και της ομάδας $F(\mathcal{G})$. Χάριν συμβολισμού, ένα στοιχείο-σύμπλοκο gN της ομάδας $F(\mathcal{G})$, θα το γράφουμε και ως g παραλείποντας το N. Θα αναφέρεται πότε θεωρούμε ενα τέτοιο στοιχείο ώς στοιχείο του πηλίκου $F(\mathcal{G}) = (E *_{v\in V(X)} G_v)/N$ και πότε ως στοιχείο της ομάδας $E *_{v\in V(X)} G_v$.

Με τα παραπάνω είμαστε σε θέση να ορίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα του $\mathcal{G}$. Η ομάδα αυτή έχει δύο όψεις, και ανάλογα την περίσταση κάποια είναι χρησιμότερη της άλλης.

Έστω T ένα μέγιστο δένδρο του X και M η κανονική υποομάδα της $F(\mathcal{G})$ που παράγεται από το σύνολο $\{eN \mid e \in E(T)\}$. Ορίζουμε την ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, T) = F(\mathcal{G})/M$. Δηλαδή στην ομάδα $(E *_{v\in V(X)} G_v)$, μαζί με τις σχέσεις $e^{-1}\sigma(a)e = \tau(a)$ και $e^{-1} = \overline{e}$ για κάθε $e \in E(X)$ και $a \in G_e$, προσθέτουμε και τις σχέσεις $e = 1$ για κάθε $e \in E(T)$.

Έστω μία κορυφή $v_0 \in V(X)$. Ορίζουμε $\pi(\mathcal{G}, X, v_0)$ το υποσύνολο του $F(\mathcal{G})$ που περιέχει όλα τα στοιχεία της μορφής $g_0e_1g_1e_2...e_ng_n$ όπου $e_1, ..., e_n$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι του X με $\sigma(e_1) = \tau(e_n) = v_0$, $g_0 \in G_{v_0}$ και $g_i \in G_{\tau(e_i)}$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Επίσης επιτρέπουμε και την περίπτωση $n = 0$, όπου στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα στοιχείο $g_0 \in G_{v_0}$. Είναι άμεσο πως το υποσύνολο αυτό είναι υποομάδα της $F(\mathcal{G})$.

Πρόταση 2.1. Έστω $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων με αντίστοιχο συνεκτικό γράφημα X. Έστω επίσης μια κορυφή $v_0 \in V(X)$ και T ένα μέγιστο δένδρο του X. Τότε η προβολή $p : F(\mathcal{G}) \to F(\mathcal{G})/M = \pi(\mathcal{G}, X, T)$ περιορισμένη στην υποομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, v_0)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Γιά κάθε $v \in V(X)$ θεωρούμε το (μοναδικό) ανηγμένο μονοπάτι p_v στο T από την κορυφή v_0 στην κορυφή v, και τα θεωρούμε ως στοιχεία της ομάδας E. Να παρατηρήσουμε ότι το p_{v_0} είναι το τετριμμένο μονοπάτι απο την κορυφή v_0 στην v_0, και ώς στοιχείο της ομάδας E, είναι η μονάδα.

Ορίζουμε τον ενδομορφισμό $\varphi : E *_{v\in V(x)} G_v \to E *_{v\in V(x)} G_v$, όπου γιά κάθε $v \in V(X)$ έχουμε $\varphi(g) = p_v g p_v^{-1}$ γιά κάθε $g \in G_v$ και γιά κάθε $e \in E(X)$ έχουμε $\varphi(e) = p_{\sigma(e)} e p_{\tau(e)}^{-1}$. Για κάθε $g \in \{e^{-1}\sigma(a)e\tau(a)^{-1} \mid e \in E(X), a \in G_e\} \cup \{e\overline{e} \mid e \in E(X)\}$ ισχύει πως $\varphi(g) \in N$. Πράγματι, γιά $e \in E(X)$ και $a \in G_e$ υπολογίζουμε, $\varphi(e^{-1}\sigma(a)e\tau(a)^{-1}) = \varphi(e)^{-1}\varphi(\sigma(a))\varphi(e)\varphi(\tau(a))^{-1} = (p_{\tau(e)}e^{-1}p_{\sigma(e)}^{-1})(p_{\sigma(e)}\sigma(a)p_{\sigma(e)}^{-1})(p_{\sigma(e)}ep_{\tau(e)}^{-1})(p_{\tau(e)}\tau(a)^{-1}p_{\tau(e)}^{-1}) = p_{\tau(e)}(e^{-1}\sigma(a)e\tau(a)^{-1})p_{\tau(e)}^{-1}$, το οποίο ανήκει στην N γιατί $e^{-1}\sigma(a)e\tau(a)^{-1} \in N$ και η N είναι κανονική υποομάδα. Ομοίως, για $e \in E(X)$ έχουμε $\varphi(e\overline{e}) = \varphi(e)\varphi(\overline{e}) = p_{\sigma(e)}ep_{\tau(e)}^{-1}p_{\sigma(\overline{e})}\overline{e}p_{\tau(\overline{e})}^{-1} = p_{\sigma(e)}ep_{\tau(e)}^{-1}p_{\tau(e)}\overline{e}p_{\sigma(e)}^{-1} = p_{\sigma(e)}(e\overline{e})p_{\sigma(e)}^{-1}$, το οποίο ανήκει στην N αφού $e\overline{e} \in N$. Δηλαδή $\varphi(N) \subseteq N$, και συνεπώς η φ επάγει ενδομορφισμό της $F(\mathcal{G})$ (θεώρημα $Von\ Dyck$), τον οποίο συμβολίζουμε πάλι με φ.

Άμεσα παρατηρούμε πως η εικόνα $\varphi(F(\mathcal{G}))$ είναι υποσύνολο του $\pi(\mathcal{G}, X, v_0)$. Έστω τώρα $e \in E(T)$. Τότε αφού T είναι δένδρο, είτε $p_{\tau(e)} = p_{\sigma(e)}e$ είτε $p_{\sigma(e)} = p_{\tau(e)}\overline{e}$ ως στοιχεία της E (και αντίστοιχα είτε $p_{\tau(e)} = (p_{\sigma(e)}, e)$ είτε $p_{\sigma(e)} = (p_{\tau(e)}, \overline{e})$ ώς μονοπάτια του T), και έτσι βλέπουμε πως $\varphi(e) = 1$. Δηλαδή $\varphi(M) = \{1\}$ και συνεπώς η φ επάγει ομομορφισμό

φ' από την ομάδα $F(\mathcal{G})/M = \pi(\mathcal{G}, X, T)$ στην ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, v_0)$.

Εύκολα βλέπουμε τώρα πως ο περιορισμός της προβολής $p : F(\mathcal{G}) \to F(\mathcal{G})/M = \pi(\mathcal{G}, X, T)$ στην $\pi(\mathcal{G}, X, v_0)$ είναι η αντίστροφη της φ'. Πράγματι, αν $p' = p|_{\pi(\mathcal{G},X,v_0)}$, για $v \in V(X)$ και $g \in G_v$ έχουμε $p' \circ \varphi'(g) = p'(p_v g p_v^{-1}) = p'(p_v)p'(g)p'(p_v)^{-1} = p'(g) = g$ γιατί $p'(p_v) = 1$ για κάθε $v \in V(X)$ αφού τα μονοπάτια p_v ανήκουν στο δένδρο T και ως στοιχεία του $F(\mathcal{G})$ ανήκουν στην υποομάδα M. Γιά το ότι $\varphi' \circ p' = Id$, έστω $g_0e_1g_1e_2...e_ng_n$ όπου $e_1, ..., e_n$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι του X με $\sigma(e_1) = \tau(e_n) = v_0$, $g_0 \in G_{v_0}$ και $g_i \in G_{\tau(e_i)}$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, ένα στοιχείο της $\pi(\mathcal{G}, X, v_0)$. Υπολογίζουμε,

$\varphi'(g_0e_1g_1e_2...e_ng_n) = \varphi'(g_0)\varphi'(e_1)\varphi'(g_1)\varphi'(e_2)...\varphi'(e_n)\varphi'(g_n) =$

$= (p_{v_0}g_0p_{v_0}^{-1})(p_{v_0}e_1p_{\tau(e_1)}^{-1})(p_{\tau(e_1)}g_1p_{\tau(e_2)}^{-1})...(p_{\tau(e_{n-1})}e_np_{\tau(e_n)}^{-1})(p_{\tau(e_n)}gp_{v_0}^{-1}) =$

$= p_{v_0}g_0e_1g_1e_2...e_ng_np_{v_0}^{-1} = g_0e_1g_1e_2...e_ng_n$ αφού $p_{v_0} = 1$. Συνεπώς πράγματι η p' είναι η αντίστροφη της φ', δηλαδή είναι ισομορφισμοί. $\square$

Πόρισμα. Έστω $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων με αντίστοιχο συνεκτικό γράφημα X. Έστω επίσης δύο κορυφές $v_1, v_2 \in V(X)$ και δύο μέγιστα δένδρα T_1, T_2 του X. Τότε $\pi(\mathcal{G}, X, T_1) \cong \pi(\mathcal{G}, X, T_2)$ και $\pi(\mathcal{G}, X, v_1) \cong \pi(\mathcal{G}, X, v_2)$, δηλαδή η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, T_1)$ είναι ανεξάρτητη του μέγιστου δένδρου T_1 και η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, v_1)$ είναι ανεξάρτητη της κορυφής v_1.

Απόδειξη. Από την πρόταση 2.1 οι ομάδες $\pi(\mathcal{G}, X, T_1)$ και $\pi(\mathcal{G}, X, T_2)$ είναι και οι δύο ισόμορφες με την ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, v_1)$, άρα και ισόμορφες μεταξύ τους. Ομοίως, οι ομάδες $\pi(\mathcal{G}, X, v_1)$ και $\pi(\mathcal{G}, X, v_2)$ από την πρόταση 2.1 είναι και οι δύο ισόμορφες με την ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, T_1)$, άρα και ισόμορφες μεταξύ τους. $\square$

Συνεπώς οι ομάδες $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ για κάθε μέγιστο δένδρο T του X και οι ομάδες $\pi(\mathcal{G}, X, v)$

για κάθε $v \in V(X)$ είναι όλες ισόμορφες μεταξύ τους. Έστω A η κλάση ισομορφισμού των παραπάνω ομάδων. Καλούμε **Θεμελιώδη ομάδα του** $\mathcal{G}$ οποιαδήποτε αντιπρόσωπο ομάδα της κλάσης A, συμβολίζοντας την $\pi(\mathcal{G})$.

Ένας **μορφισμός** μεταξύ δύο γραφημάτων ομάδων, $\mathcal{G}$ με γράφημα X και $\mathcal{H}$ με γράφημα Y, αποτελείται από έναν μορφισμό γραφημάτων $\varphi : X \to Y$, για κάθε $v \in V(X)$ έναν ομομορφισμό $\varphi_v : G_v \to H_{\varphi(v)}$ και για κάθε $e \in E(X)$ έναν ομομορφισμό $\varphi_e : G_e \to H_{\varphi(e)}$, τέτοιους ώστε $\varphi_e = \varphi_{\overline{e}}$ και η σύνθεση των ομομορφισμών $\varphi_{\tau(e)} \circ \tau_e : G_e \to G_{\tau(e)} \to H_{\varphi(\tau(e))}$ να είναι η ίδια με την σύνθεση $\tau_{\varphi(e)} \circ \varphi_e : G_e \to H_{\varphi(e)} \to H_{\tau(\varphi(e))}$. Αν στα παραπάνω ο μορφισμός των γραφημάτων και όλοι οι ομομορφισμοί είναι ισομορφισμοί, τότε έχουμε εναν **ισομορφισμό** μεταξύ των γραφημάτων ομάδων. Εύκολα βλέπουμε πως ένας ισομορφισμός δύο γραφημάτων ομάδων $\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ επάγει ισομορφισμό των θεμελιωδών ομάδων $\pi(\mathcal{G})$ και $\pi(\mathcal{H})$.

Παραδείγματα. (1) Έστω γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με X το αντίστοιχο γράφημα του, και έστω πως όλες οι ομάδες ακμών και κορυφών είναι τετριμμένες. Τότε βλέποντας την θεμελιώδη ομάδα $\pi(\mathcal{G})$ ως την $\pi(\mathcal{G}, X, v_0)$ γιά κάποιο $v_0 \in V(X)$, παρατηρούμε πως είναι το σύνολο των κλειστών μονοπατιών του γραφήματος X με βάση το v_0 και με πολλαπλασιασμό το γινόμενο μονοπατιών, δηλαδή πρόκειτε για την θεμελιώδη ομάδα του γραφήματος X με την τοπολογική έννοια, $\pi_1(X, v_0)$. επίσης αν δούμε την $\pi(\mathcal{G})$ ως την $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ για ένα μέγιστο δένδρο T του X, τότε βλέπουμε απευθείας απο τον ορισμό της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ πως η ομάδα αυτή είναι ελεύθερη με βάση το σύνολο $A - E(T)$, όπου A είναι ένας προσανατολισμός του X. Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε και το γεγονός πως οι θεμελιώδεις ομάδες γραφημάτων με την τοπολογική έννοια είναι πάντα ελεύθερες ομάδες με $rank$ το πλήθος των ακμών σε έναν προσανατολισμό του γραφήματος που δεν ανήκουν σε ένα μέγιστο δένδρο.

(2) Έστω πως έχουμε ομάδες G_i για i σε ένα σύνολο δεικτών I. Έστω ένα σύμβολο o που δεν ανήκει στο σύνολο I. Θεωρούμε το γράφημα X με κορυφές $V(X) = I \cup \{o\}$, ακμές $E(X) = \{\{e_i, \overline{e_i}\} \mid i \in I\}$ όπου $\{e_i, \overline{e_i}\} \bigcap \{e_j, \overline{e_j}\} = \varnothing$ γιά κάθε $i, j \in I$ διαφορετικά, με $\sigma(e_i) = o$ και $\sigma(\overline{e_i}) = \tau(e_i) = i$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή το X είναι το άστρο όπως λέμε με κέντρο το o και ακτίνες επαγόμενες απο το σύνολο I. Έστω τώρα το γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα το παραπάνω X τέτοιο ώστε όλες οι ομάδες ακμών του να είναι οι τετριμμένες και οι ομάδες κορυφών του να είναι οι αρχικές G_i γιά κάθε κορυφή $i \in I$ και η τετριμμένη $\{1\}$ γιά την κορυφή o. Αφού το X είναι δένδρο, ένα μέγιστο δένδρο του είναι το ίδιο το X, οπότε αν δούμε την θεμελιώδη ομάδα $\pi(\mathcal{G})$ ως την $\pi(\mathcal{G}, X, X)$ βλέπουμε πως είναι η ελεύθερη ομάδα που παράγουν οι ακμές και οι ομάδες κορυφών, $E *_{v \in V(X)} G_v$, μαζι με τις σχέσεις $e = 1$ για κάθε $e \in E(X)$, δηλαδή είναι το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων κορυφών, G_i για $i \in I$.

Γενικότερα, αν $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων με αντίστοιχο γράφημα X, ομάδες κορυφών G_v για κάθε $v \in V(X)$ και τετριμμένες ομάδες ακμών, τότε απευθείας απο τον ορισμό της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ για ένα μέγιστο δένδρο T του X, βλέπουμε πως η ομάδα $\pi(\mathcal{G}) = \pi(\mathcal{G}, X, T)$ είναι το ελεύθερο γινόμενο των $G_v, v \in V(X)$ και του συνόλου $A - E(T)$ όπου A ένας προσανατολισμός του X, και συνεπώς απο το παράδειγμα 1, πρόκειται για το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων $G_v, v \in V(X)$ και της $\pi_1(X)$.

(3) Έστω το γράφημα X με μία κορυφή v και μία ακμή e απο την v στην v, και έστω ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ στο προηγούμενο γράφημα X. Το μέγιστο δένδρο του X είναι η κορυφή v χωρίς ακμές (αφού η μόνη ακμή είναι κύκλωμα), και συνεπώς η θεμελιώδη ομάδα είναι η $\pi(\mathcal{G}) = \pi(\mathcal{G}, X, \{v\}) =< e, G_v \mid e^{-1}\sigma(a)e = \tau(a)$ για κάθε $a \in G_e >$, δηλαδή είναι η HNN-επέκταση της ομάδας G_v με σταθερό γράμμα e και συσχετιζόμενες υποομάδες τις $\sigma(G_e)$ και $\tau(G_e)$.

(4) Έστω το γράφημα X με δύο κορυφές v και w και μία ακμή e που τις ενώνει, δηλαδή ένα μονοπάτι μήκους 1, και έστω ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα το παραπάνω X. Το μέγιστο δένδρο του X είναι προφανώς το ίδιο το X και συνεπώς $\pi(\mathcal{G}) = \pi(\mathcal{G}, X, X) = $ $=< e, G_v, G_w \mid e = 1, e^{-1}\sigma(a)e = \tau(a)$ γιά κάθε $a \in G_e > \cong < G_v, G_w \mid \sigma(a) = \tau(a)$ γιά κάθε $a \in G_e >$, δηλαδή η θεμελιώδης ομάδα του $\mathcal{G}$ είναι το ελεύθερο γινόμενο των G_v και G_w με αμάλγαμα τις υποομάδες $\sigma(G_e)$ και $\tau(G_e)$.

Σειρά έχει τώρα να δείξουμε πως οι ομάδες κορυφών ενός γραφήματος ομάδων εμφυτεύονται με φυσιολογικό τρόπο στην θεμελιώδη ομάδα. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός πως η ομάδα $F(\mathcal{G})$ είναι μία HNN επέκταση του ελεύθερου γινομένου των ομάδων κορυφών, και τα αποτελέσματα των μαθηματικών *Higman*, *B.H. Neumann* και *Hanna Neumann*, (απο τους οποίους προήλθε και η ονομάσια HNN επέκταση), στην εργασία τους *Embedding Theorems for Groups* [6]. Συγκεκριμένα το θεώρημα 2 της εν λόγω εργασίας μας λέει το εξής.

Λήμμα 2.2. Έστω G μία ομάδα και ομάδες A_i γιά κάθε $i \in I$, όπου I ένα σύνολο δεικτών, μαζί με μονομορφισμούς $i_0 : A_i \to G$ και $i_1 : A_i \to G$ για κάθε $i \in I$. Έστω η ομάδα $H =< G, t_i \ (\forall i \in I) \mid t_i^{-1} i_0(a_i) t_i = i_1(a_i)$ γιά όλα τα $a_i \in A_i$ και γιά κάθε $i \in I >$, δηλαδή η HNN επέκταση της ομάδας G με σταθερά γράμματα t_i και συνδεόμενες ομάδες τις $i_0(A_i)$ και $i_1(A_i)$ για κάθε $i \in I$. Τότε η ταυτοτική προβολή της G στην H, $j : G \to H$ με $j(g) = g$, είναι μονομορφισμός. $\square$

Αποδείξεις για το παραπάνω θεώρημα, (το οποίο ονόμασα λήμμα γιατί θα χρησιμοποιηθεί εδώ ως τέτοιο), εκτός απο την πρωτότυπη στην παραπάνω εργασία που αναφέραμε, υπάρχουν σχεδόν σε όλα τα βιβλία συνδυαστικής θεωρίας ομάδων, όπως για παράδειγμα στο βιβλίο του *Daniel E. Cohen* (θεώρημα 1.31).

Πρόταση 2.2. Έστω γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα X, και έστω T ένα μέγιστο δένδρο του X. Τότε για κάθε $v \in V(X)$, η ταυτοτική προβολή $j_v : G_v \to \pi(\mathcal{G}, X, T)$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $v \in V(X)$. Αφού η $F(\mathcal{G})$ είναι μία HNN επέκταση της ομάδας $*_{v\in V(X)}G_v$, από το λήμμα 2.2 η ομάδα $*_{v\in V(X)}G_v$ εμφυτεύεται μέσω της ταυτοτικής προβολής στην ομάδα $F(\mathcal{G})$, και αφού η ομάδα G_v εμφυτεύεται και αυτή στο ελεύθερο γινόμενο $*_{v\in V(X)}G_v$, η σύνθεση των εμφυτεύσεων αυτών μας δίνει την ταυτοτική εμφύτευση της G_v στην $F(\mathcal{G})$. Παρατηρούμε ότι η εμφύτευση είναι μέσα στην υποομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, v)$ της $F(\mathcal{G})$, και από την πρόταση 2.1 έχουμε πως η ταυτοτική προβολή της $\pi(\mathcal{G}, X, v)$ στην $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ είναι ισομορφισμός. Συνεπώς η σύνθεση των προβολών, $j : G_v \to \pi(\mathcal{G}, X, v) \to \pi(\mathcal{G}, X, T)$ είναι εμφύτευση, δηλαδή μονομορφισμός. Τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $v \in V(X)$ αφού η πρόταση 2.1 ισχύει για κάθε $v \in V(X)$, συνεπώς έχουμε το επιθυμητό συμπέρασμα. $\square$

Πρίν μπούμε στα βασικά θεωρήματα, δείχνουμε ένα τελευταίο λήμμα που θα φανεί πολύ χρήσιμο παρακάτω.

Λήμμα 2.3. Έστω γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα X. Έστω ακόμα μια ομάδα H, ομομορφισμοί $\varphi_v : G_v \to H$ για κάθε $v \in V(X)$, στοιχεία $a_e \in H$ για κάθε $e \in E(X)$ τέτοια ώστε $a_{\overline{e}} = a_e^{-1}$ και $a_e^{-1}\varphi_{\sigma(e)}(\sigma(g))a_e = \varphi_{\tau(e)}(\tau(g))$ για κάθε $g \in G_e$. Τότε υπάρχει ομομορφισμός $f : \pi(\mathcal{G}) \to H$ τέτοιος ώστε για κάθε $v \in V(X)$ ο περιορισμός του στην ομάδα G_v είναι συζηγής του φ_v, δηλαδή υπάρχουν $a_v \in H$ με $f|_{G_v} = a_v\varphi_v a_v^{-1}$ για κάθε

$v \in V(X)$.

Απόδειξη. Βλέποντας την ομάδα $\pi(\mathcal{G})$ ως την $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ για ένα μέγιστο δένδρο του X, παρατηρούμε ότι αν $a_e = 1$ για κάθε $e \in E(T)$ ο ομομορφισμός που είναι ο φ_v στην G_v για κάθε $v \in V(X)$ και που στέλνει την ακμή e στο a_e για κάθε $e \in E(X)$, στέλνει όλες τις σχέσεις της παράστασης της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ στην μονάδα, οπότε και είναι ομομορφισμός με την επιθυμητή ιδιότητα, (θεώρημα $Von\ Dyck$).

Στην γενική περίπτωση, θα δείξουμε ότι υπάρχουν στοιχεία $\beta_e \in H$ για όλα τα $e \in E(X)$ με $\beta_e = 1$ για $e \in E(T)$, και ομομορφισμοί $\psi_v : G_v \to H$ συζυγείς με τους φ_v τέτοιοι ώστε $\beta_e^{-1}\psi_{\sigma(e)}(\sigma(g))\beta_e = \psi_{\tau(e)}(\tau(g))$ για κάθε $g \in G_e$ και $e \in E(X)$. Τότε όπως και στην πρώτη παράγραφο, θα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω $p = e_1, ..., e_n$ ένα μονοπάτι στο X. Ορίζουμε $a_p = a_{e_1} ... a_{e_n} \in H$. Διαλέγουμε μια κορυφή $v_0 \in V(X)$ και για κάθε $v \in V(X)$ θεωρούμε το μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι p_v στο δένδρο T από την κορυφή v_0 στην κορυφή v. Για $e \in E(X)$ θεωρούμε το στοιχείο $\beta_e = a_{p_{\sigma(e)}} a_e a_{p_{\tau(e)}}^{-1}$. Τότε $\beta_e = 1$ για κάθε $e \in E(T)$. Ορίζουμε $\psi_v : G_v \to H$ με $\psi_v(g) = a_{p_v}\varphi_v(g)a_{p_v}^{-1}$ για κάθε $g \in G_v$ και για κάθε $v \in V(X)$, και άμεσα επαληθεύουμε πως ικανοποιούνται οι σχέσεις της δεύτερης παραγράφου. □

3 Τα Δομικά Θεωρήματα

Συνδέουμε τα γραφήματα ομάδων με τις δράσεις ομάδων σε γραφήματα ως εξής. Έστω ομάδα G η οποία δρά (χωρίς αντιστροφές) σε ένα συνεκτικό γράφημα X. Έστω T ένα μέγιστο δένδρο του γραφήματος πηλίκο $G \setminus X$ και A ένας προσανατολισμός του $G \setminus X$. Χρησιμοποιώντας της πρόταση 1.3 με τοπικό επιμορφισμό την προβολή $p : X \to G \setminus X$, και την ταυτοτική εμφύτευση του μέγιστου δένδρου $i : T \to G \setminus X$, έχουμε έναν μορφισμό γραφημάτων $j : T \to X$ με $p \circ j = Id_T$, η ταυτοτική απεικόνιση του T. Όπως είχαμε αναφέρει και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο μορφισμός j είναι $1-1$ και το υποδένδρο $j(T)$ του X, το καλούμε αντιπρωσοπευτικό δένδρο της δράσης.

Θα επεκτείνουμε τον μονομορφισμό j σε όλο το $G \setminus X$ με τρόπο τέτοιον ώστε η απεικόνιση να παραμείνει $1-1$, να διατηρεί τις αρχικές κορυφές και τις αντίστροφες των ακμών του A και να ικανοποιεί την σχέση $p(j(e)) = e$ για τις ακμές $e \in A$. Δεν θα είναι όμως μορφισμός γραφημάτων και η εικόνα $j(G \setminus X)$ δεν θα είναι απαραίτητα υπογράφημα του X, θα είναι απλώς ενα βολικό σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών της δράσης. Αφού το T είναι μέγιστο δένδρο του $G \setminus X$, η j είναι ορισμένη σε όλες τις κορυφές του $G \setminus X$. Μένει να οριστεί στις ακμές $e \in E(G \setminus X) - T$. Έστω $e \in A - T$. Αφού η p είναι τοπικός επιμορφισμός, για την ακμή e και την κορυφή $j(\sigma(e))$ όπου $p(j(\sigma(e))) = \sigma(e)$, υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή $x \in E(X)$ τέτοια ώστε $p(x) = e$ και $\sigma(x) = j(\sigma(e))$. Ορίζουμε $j(e) = x$ και $j(\overline{e}) = \overline{j(e)}$.

Η σταθεροποιούσα $Stab(x)$ μιας ακμής ή κορυφής του X είναι η υποομάδα
$\{g \in G \mid g.x = x\}$.

Ορίζουμε γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ στο γράφημα πηλίκο $G \setminus X$ ως εξής. Για κάθε ακμή ή κορυφή x του X, ορίζουμε $G_x = Stab(j(x))$. Παρατηρούμε πως για κάθε ακμή $e \in E(X)$ ισχύει πως $G_e = G_{\overline{e}}$ απο την σχέση της δράσης $g.\overline{e} = \overline{g.e}$ και απο την τετριμμένη σχέση $e = w \iff \overline{e} = \overline{w}$ για δύο ακμές $e, w \in E(X)$. Μένει να ορίσουμε ομομορφισμούς απο την ομάδα G_e στις ομάδες $G_{\sigma(e)}$ και $G_{\tau(e)}$ για κάθε $e \in A$.

Έστω $e \in A$. Από τον ορισμό της συνάρτηση j έχουμε πως $\sigma(j(e)) = j(\sigma(e))$. Συνεπώς $Stab(j(e)) \subseteq Stab(j(\sigma(e)))$, αφού αν $g.j(e) = j(e)$ τότε $g.j(\sigma(e)) = g.\sigma(j(e)) =$

$\sigma(g.j(e)) = \sigma(j(e)) = j(\sigma(e))$. Δηλαδή $G_e \subseteq G_{\sigma(e)}$, και έτσι ορίζουμε ως μονομορφισμό του γραφήματος ομάδων την ταυτοτική ένθεση. Για τους ομομορφισμούς στις ομάδες τελικών κορυφών παρατηρούμε το εξής.

Για $e \in A$, επειδή ο p είναι μορφισμός και $p(j(e)) = e$, έχουμε πως $p(\tau(j(e))) = \tau(p(j(e))) = \tau(e) = p(j(\tau(e)))$, δηλαδή οι κορυφές $\tau(j(e))$ και $j(\tau(e))$ ανήκουν στην ίδια τροχιά, άρα υπάρχει ενα στοιχείο $g_e \in G$ τέτοιο ώστε $\tau(j(e)) = g_e.j(\tau(e))$. Να παρατηρήσουμε ότι αν $e \in A \cap T$, τότε επειδή η απεικόνιση j είναι μορφισμός στο T έχουμε πως $\tau(j(e)) = j(\tau(e))$ και έτσι στην περίπτωση αυτή έχουμε πως $g_e = 1$. Συνεπώς $Stab(\tau(j(e))) = g_e Stab(j(\tau(e)) g_e^{-1}$ και αφού $Stab(j(e)) \subseteq Stab(\tau(j(e))$ (γιατί $g(\tau(w)) = \tau(g(w))$ για κάθε $w \in E(X)$), βλέπουμε πως $G_e \subseteq g_e G_{\tau(e)} g_e^{-1}$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον μονομορφισμό απο την G_e στην $G_{\tau(e)}$ που στέλνει ένα $h \in G_e$ στο $g_e^{-1} h g_e$.

Το κύριο θεώρημα που θα αποδείξουμε παρακάτω μας λέει πως η θεμελιώδης ομάδα του παραπάνω γραφήματος ομάδων, $\pi(\mathcal{G})$, είναι ισόμορφη με την αρχική ομάδα G όταν το X είναι δένδρο.

Αντίστροφα, αρχίζοντας με ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ θα κατασκευάσουμε ένα δένδρο στο οποίο η θεμελιώδης ομάδα $\pi(\mathcal{G})$ δρά και το αντίστοιχο γράφημα ομάδων της δράσης αυτής θα είναι το αρχικό γράφημα ομάδων.

Έστω ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα X, T ένα μέγιστο δένδρο του X και A ένας προσανατολισμός του X. Έστω G να είναι η θεμελιώδης ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, T)$. Ορίζουμε το γράφημα $\widetilde{X}$ που αναφέραμε παραπάνω ως εξής. Έστω το σύνολο των δυάδων (g, v), όπου $g \in G$ και $v \in V(X)$. Θεωρούμε στο σύνολο αυτό την σχέση ισοδυναμίας, $(h, w) \sim (g, v) \iff w = v$ και $h \in gG_v$, (το ότι είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας είναι άμεσο). Ορίζουμε τις κορυφές του $\widetilde{X}$ να είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της παραπάνω σχέσης. Συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας μιας δυάδας (g,v) με $[g,v]$. Ομοίως, στο σύνολο $\{(g,y) \mid g \in G$ και $y \in A\}$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας, $(h,z) \sim (g,y) \iff z = y$ και $h \in g.\sigma(G_y)$, και στο σύνολο $\{(g,\overline{y}) \mid g \in G$ και $y \in A\}$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $(h,\overline{z}) \sim (g,\overline{y}) \iff (h,z) \sim (g,y)$. Ορίζουμε τις ακμές του $\widetilde{X}$ να είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας των παραπάνω δύο σχέσεων. Ομοίως με τις κορυφές, για $g \in G$ και $y \in A$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας της δυάδας (g,y) με $[g,y]$ και την κλάση της δυάδας $(g,\overline{y})$ με $[g,\overline{y}]$.

Για $y \in E(X)$ ορίζουμε $\overline{[g,y]} = [g,\overline{y}]$. Για $y \in A$ ορίζουμε $\sigma([g,y]) = [g,\sigma(y)]$ και $\sigma([g,\overline{y}]) = [gy,\tau(y)]$, δηλαδή $\tau([g,y]) = [gy,\tau(y)]$, (να τονίσουμε πως το y στην πρώτη συνεταγμένη είναι στοιχείο της θεμελιώδους ομάδας G ενώ στην δεύτερη είναι ακμή του X). Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι καλά ορισμένες. Πράγματι, έστω $[h,z] = [g,y]$ με $z,y \in A$, δηλαδή $z = y$ και $h \in g.\sigma(G_y)$. Οι σχέσεις $\overline{[h,z]} = \overline{[g,y]}$ και $\sigma([h,w]) = \sigma([g,y])$ είναι προφανείς. Η σχέση $\tau([h,y]) = \tau([g,y])$ είναι ισοδύναμη με την σχέση $hy \in gyG_{\tau(y)} \iff y^{-1}(g^{-1}h)y \in G_{\tau(y)}$, η οποία ισχύει αφού $g^{-1}h \in \sigma(G_y)$ και $y^{-1}\sigma(G_y)y = \tau(G_y) \leq G_{\tau(y)}$. Το γράφημα $\widetilde{X}$ που μόλις ορίσαμε καλείτε **καθολικό κάλυμμα του γραφήματος ομάδων** $\mathcal{G}$.

Η G δρά με φυσικό τρόπο στο γράφημα $\widetilde{X}$. Για $g,h \in G$ και $y \in V(X) \cup E(X)$ ορίζουμε $g.[h,y] = [gh,y]$. Άμεσα βλέπουμε πως η δράση είναι καλά ορισμένη και χωρίς αντιστροφές. Ορίζουμε επίσης τις απεικονίσεις $p : \widetilde{X} \to X$ με $p([g,x]) = x$ και $j : X \to \widetilde{X}$ με $j(x) = [1,x]$ για κάθε $x \in V(X) \cup E(X)$. Παρατηρούμε πως $[g,y] = g.[1,y] = g.j(y)$ και πως η απεικόνιση p είναι τοπικός επιμορφισμός γραφημάτων. Παρατηρούμε επίσης πως επειδή $y = 1$ στην $\pi(\mathcal{G},X,T)$ για $y \in T$ ο περιορισμός της απεικόνισης j στο δένδρο T είναι μορφισμός, αλλά γενικά η j σε όλο το X δεν είναι μορφισμός.

Είναι βολικό να έχουμε μια γενική μορφή των $\sigma([g, y])$ και $\tau([g, y])$ η οποία να είναι ανεξάρτητη με το αν $y \in A$. Έστω $g \in G$ και $y \in E(X)$. Αφού $\overline{y} = y^{-1}$ στην $\pi(\mathcal{G}, X, T)$, εύκολα βλέπουμε πως $\sigma([g, y]) = h[1, \sigma(y)]$ και $\tau([g, y]) = hy[1, \tau(y)]$, όπου $h = g$ αν $y \in A$ και $h = gy^{-1}$ αν $y \notin A$.

Τέλος, να παρατηρήσουμε πως το αντίστοιχο γράφημα ομάδων της παραπάνω δράσης στο καθολικό κάλυμμα είναι ισόμορφο με το αρχικό γράφημα ομάδων. Πράγματι, το γράφημα πηλίκο της δράσης της G στο $\widetilde{X}$ είναι το X και χρησιμοποιώντας την παραπάνω απεικόνιση $j : X \to \widetilde{X}$ για τις σταθεροποιούσες έχουμε πως για κάθε $v \in V(X)$, $g.j(v) = j(v) \iff g[1, v] = [1, v] \iff [g, v] = [1, v] \iff g \in G_v$, δηλαδή $Stab(j(v)) = G_v$ και ομοίως για $y \in E(X)$, $g.j(y) = j(y) \iff g \in \sigma(G_y)$. Αφού οι απεικονίσεις $\sigma : G_y \to G_{\sigma(y)}$ είναι μονομορφισμοί, εύκολα επαληθεύουμε απο τα παραπάνω πως το αντίστοιχο γράφημα ομάδων της δράσης της θεμελιώδους ομάδας στο καθολικό κάλυμμα του αρχικού γραφήματος ομάδων $\mathcal{G}$, είναι ισόμορφο με το αρχικό γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$.

Ακολουθεί το πρώτο βασικό θεώρημα, το οποίο μας λέει πως τα καθολικά καλύμματα γραφημάτων ομάδων είναι πάντα δένδρα.

Λήμμα 3.1. Έστω ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα X, T ένα μέγιστο δένδρο του X και A ένας προσανατολισμός του X. Το αντίστοιχο καθολικό κάλυμμα $\widetilde{X}$ του $\mathcal{G}$ είναι συνεκτικό γράφημα.

Απόδειξη.Έστω Z το υπογράφημα του $\widetilde{X}$ με ακμές $j(E(X)) = \{[1, e] \mid e \in E(X)\}$ και κορυφές $\{v \in V(\widetilde{X}) \mid v = \sigma(e)$ ή $v = \tau(e)$ για κάποιο $e \in E(Z)\}$. Τότε όπως παρατηρήσαμε και πρίν, για $e \in T$ έχουμε πως $\sigma([1, e]) = [1, \sigma(e)] = j(\sigma(e)) \in V(Z)$ και $\tau([1, e]) = [1, \tau(e)] \in V(Z)$ και συνεπώς, $j(T) \subseteq Z$ και ο j είναι μορφισμός στο T, δηλαδή το $j(T)$ είναι συνεκτικό υπογράφημα του Z. επίσης κάθε ακμή του Z έχει ένα τουλάχιστον άκρο στο $j(T)$. Αφού το T είναι μέγιστο δένδρο έχουμε πως $V(T) = V(X)$ και συνεπώς αν $e \in A$ έχουμε πως $\sigma([1,e]) = [1, \sigma(e)] = j(\sigma(e)) \in V(j(T))$ ενώ άν $e \notin A$ έχουμε πως $\tau([1,e]) = [1, \tau(e)] = j(\tau(e)) \in V(j(T))$. Συνεπώς για δύο κορυφές $v, w \in V(Z)$, απο τον ορισμό του $V(Z)$ υπάρχει ακμή $e_v \in E(Z)$ με άκρο την v και ακμή e_w με άκρο την w. Ενώνουμε τα άκρα των ακμών e_v και e_w που ανήκουν στο $j(T)$ με το μονοπάτι που επάγεται απο το δένδρο T και χρησιμοποιώντας τις ακμές e_v και e_w στην αρχή και στο τέλος του μονοπατιού αν χρειαστεί, ενώνουμε τις v και w στο Z. Δηλαδή το Z είναι συνεκτικό. επίσης άμεσα βλέπουμε πως $\widetilde{X} = GZ$.

Έστω τώρα $g \in G_v$ για κάποια $v \in V(X)$. Παρατηρούμε πως $g[1,v] = [1,v]$, άρα $Z \cap gZ \neq \varnothing$ αφού $[1,v] \in j(T) \subseteq Z$. επίσης, αν $e \in A$ έχουμε πως $\tau([1,e]) = [e, \tau(e)] = e[1, \tau(e)]$, δηλαδή $\tau([1,e]) \in Z \cap eZ \neq \varnothing$ και πολλαπλασιάζοντας απο τα αριστερά με e^{-1} έχουμε και $Z \cap e^{-1}Z \neq \varnothing$. Για $g \in \pi(\mathcal{G}, X, T)$, το γράφημα gZ είναι προφανώς συνεκτικό αφού το gZ είναι ισόμορφο γράφημα με το Z.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο n πως για κάθε $n-$άδα $s_1, ..., s_n \in \bigcup_{v \in V(X)} G_v \cup E(X)$, το υπογράφημα $Z \cup s_1 Z \cup s_1 s_2 Z \cup ... \cup s_1 ... s_n Z$ είναι συνεκτικό. Για $n = 1$, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, για $g \in \bigcup_{v \in V(X)} G_v \cup E(X)$ έχουμε πως $gZ \cap Z \neq \varnothing$ και συνεπώς από το λήμμα 1.1, το γράφημα $gZ \cup Z$ είναι συνεκτικό. Έστω τώρα πως ισχύει για ένα n ο ισχυρισμός και έστω $n+1$ στοιχεία $s_1, ..., s_n, s_{n+1} \in \bigcup_{v \in V(X)} G_v \cup E(X)$. Παρατηρούμε πως
$Z \cup s_1 Z \cup s_1 s_2 Z \cup ... \cup s_1 ... s_{n+1} Z = Z \bigcup s_1(Z \cup s_2 Z \cup ... \cup s_2 ... s_n Z)$. Από την επαγωγική υπόθεση, το γράφημα $Z \cup s_2 Z \cup ... \cup s_2 ... s_n Z$ είναι συνεκτικό και συνεπώς και το γράφημα $s_1(Z \cup s_2 Z \cup ... \cup s_2 ... s_n Z)$ είναι συνεκτικό, (αφού είναι ισόμορφα μέσω της δράσης του s_1). Αφού $Z \subseteq (Z \cup s_2 Z \cup ... \cup s_2 ... s_n Z)$, από την περίπτωση $n = 1$ έπεται πως $\varnothing \neq Z \cap s_1 Z \subseteq Z \cap s_1(Z \cup s_2 Z \cup ... \cup s_2 ... s_n Z)$, και συνεπώς χρησιμοποιώντας πάλι το λήμμα 1.1 έχουμε

πως το γράφημα $Z \bigcup s_1(Z \cup s_2Z \cup ... \cup s_2...s_nZ) = Z \cup s_1Z \cup s_1s_2Z \cup ... \cup s_1...s_{n+1}Z$ είναι συνεκτικό. Άρα ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε n και συνεπώς η ένωση όλων αυτών των γραφημάτων για κάθε n είναι και αυτό συνεκτικό όπως και η ένωση τέτοιων ενώσεων για τυχαίες ακολουθίες στοιχειών στο $\bigcup_{v\in V(X)} G_v \cup E(X)$ (όλα αυτά τα γραφήματα περιέχουν το Z). Αφού τώρα η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ παράγεται απο το σύνολο $\bigcup_{v\in V(X)} G_v \cup E(X)$, η ένωση $\bigcup_{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}} Z \cup s_1Z \cup ... \cup s_1...s_nZ$ για όλες τις ακολουθίες $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο σύνολο $\bigcup_{v\in V(X)} G_v \cup E(X)$ είναι το γράφημα $GZ = \widetilde{X}$.

Συνεχίζουμε με ένα λήμμα το οποίο είναι μια συγκεκριμένη περίπτωση του γενικού θεωρήματος.

Λήμμα 3.2. Έστω ένα γράφημα X και έστω $\mathcal{G}$ το γράφημα ομάδων στο γράφημα X με τετριμμένες ομάδες κορυφών και ακμών. Τότε το καθολικό κάλυμμα $\widetilde{X}$ του $\mathcal{G}$ είναι δένδρο. (Στην περίπτωση αυτή το $\widetilde{X}$ το λέμε και καθολικό κάλυμμα του γραφήματος X, μιάς και μόνο από αυτό εξαρτάται).

Απόδειξη. Το $\widetilde{X}$ απο το λήμμα 3.1 είναι συνεκτικό. Θα δείξουμε πως το $\widetilde{X}$ είναι δένδρο, δείχνοντας πως δεν υπάρχουν ανηγμένα κλειστά μονοπάτια. Έστω $[g_1, e_1], ..., [g_n, e_n]$ ένα κλειστό μονοπάτι του $\widetilde{X}$.

Έστω $h_i = g_i$ αν $e_i \in A$ και $h_i = g_ie_i^{-1}$ αν $e_i \notin A$. Τότε $\tau([g_i, e_i]) = h_ie_i[1, \tau(e_i)]$ και $\sigma([g_i, e_i] = h_i[1, \sigma(e_i)]$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$ έχουμε πως $[h_{i+1}, \sigma(e_i)] = h_{i+1}[1, \sigma(e_{i+1})] = \sigma([g_{i+1}, e_{i+1}]) = \tau([g_i, e_i]) = h_ie_i[1, \tau(e_i)] = [h_ie_i, \tau(e_i)]$, όπως επίσης και $[h_1, \sigma(e_1)] = [h_ne_n, \tau(e_n)]$. Αφού οι ομάδες κορυφών είναι τετριμμένες, έπεται πως $h_{i+1} = h_ie_i$ για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$, και πως $h_1 = h_ne_n$. Παρατηρούμε πως $e_1e_2...e_n = (h_1^{-1}h_2)(h_2^{-1}h_3)...(h_n^{-1}h_1) = 1$. Η θεμελιώδης ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ γιά ένα μέγιστο δένδρο T του X είναι η ελεύθερη με βάση το σύνολο των ακμών του προσανατολισμού A που δεν ανήκουν στο T. Οπότε υπάρχουν τρία ενδεχόμενα για την εξίσωση $e_1 e_2 ... e_n = 1$ στην $\pi(\mathcal{G}, X, T)$. Είτε υπάρχει ένα $r \in \{1, ..., n-1\}$ τέτοιο ώστε $e_{r+1} = e_r^{-1} = \overline{e_r}$, είτε υπάρχουν $r, s \in \{1, ..., n\}$ με $r+1 < s$ τέτοια ώστε $e_s = \overline{e_r}$ και $e_i \in E(T)$ για $r < i < s$, είτε $e_i \in E(T)$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Παρατηρούμε πως αν ίσχυε μία από τις τελευταίες δύο περιπτώσεις θα είχαμε ένα κλειστό μονοπάτι θετικού μήκους στο δένδρο T, και συνεπώς το κλειστό μονοπάτι αυτό δεν θα ήταν ανηγμένο, δηλαδή θα υπήρχε ένα $i \in \{1, ..., n\}$ τέτοιο ώστε $e_{i+1} = \overline{e_i}$. Συνεπώς και στις τρείς περιπτώσεις καταλήγουμε πως υπάρχει ένα $i \in \{1, ..., n\}$ τέτοιο ώστε $e_{i+1} = \overline{e_i}$. Τώρα για αυτό το i παρατηρούμε το εξής. Αν $e_i \in A$, τότε $e_{i+1} = \overline{e_i} \notin A$ και συνεπώς $[g_{i+1} e_i, \sigma(e_{i+1})] = [g_{i+1} e_{i+1}^{-1}, \sigma(e_{i+1})] = \sigma([g_{i+1}, e_{i+1}]) = \tau([g_i, e_i]) = [g_i e_i, \tau(e_i)]$ και αφού οι ομάδες κορυφών είναι τετριμμένες, έπεται πως $g_{i+1} e_i = g_i e_i$, δηλαδή $g_{i+1} = g_i$. Τελείως όμοια καταλήγουμε πάλι στο ότι $g_{i+1} = g_i$ αν $e_i \notin A$. Συνεπώς έχουμε πως $[g_{i+1}, e_{i+1}] = \overline{[g_i, e_i]}$, δηλαδή το κλειστό μονοπάτι $[g_1, e_1], ..., [g_n, e_n]$ πράγματι δεν είναι ανηγμένο. $\square$

Έστω ένα γράφημα X και έστω το καθολικό κάλυμμα του $\widetilde{X}$ όπως στο παραπάνω λήμμα. Η προβολή $p : \widetilde{X} \to X$, με $p([g, x]) = x$, είναι τοπικός μονομορφισμός. Πράγματι, έστω $[g_1, e_1]$ και $[g_2, e_2]$ δύο διαφορετικές ακμές του $\widetilde{X}$ με $\sigma([g_1, e_1]) = \sigma([g_2, e_2])$, και έστω προς άτοπο πως $e = e_1 = p([g_1, e_1]) = p([g_2, e_2]) = e_2$. Τότε αν $e \in A$ θα είχαμε πως $[g_1, \sigma(e_1)] = \sigma([g_1, e_1]) = \sigma([g_2, e_2]) = [g_2, \sigma(e_2)]$, και αφού το $\widetilde{X}$ είναι το καθολικό κάλυμμα του γραφήματος ομάδων στο γράφημα X με τετριμμένες ομάδες κορυφών, έπεται πως $g_1 = g_2$. Ομοίως αν $e \notin A$ θα είχαμε πως $g_1 e^{-1} = g_2 e^{-1}$, δηλαδή πάλι $g_1 = g_2$. Σε κάθε περίπτωση θα είχαμε πως $[g_1, e_1] = [g_2, e_2]$, το οποίο είναι άτοπο απο την αρχική υπόθεση.

Η προβολή είναι και τοπικός επιμορφισμός οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 1.5 ως εξής. Έστω α ένας αυτομορφισμός του γραφήματος X και έστω κορυφές $z, z' \in V(\widetilde{X})$ τέτοιες ώστε $p(z') = \alpha(p(z))$. Τότε από την πρόταση 1.5 για τους τοπικούς ισομορφισμούς p και $\alpha \circ p$, έχουμε μοναδικό αυτομορφισμό β του $\widetilde{X}$ τέτοιον ώστε $\beta(z) = z'$ και $p \circ \beta = \alpha \circ p$. Καλούμε αυτόν τον αυτομορφισμό β **επέκταση του** α.

Έστω $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων με καθολικό κάλυμμα $\widetilde{X}$. Από το λήμμα 3.2 μπορούμε να φτιάξουμε το καθολικό κάλυμμα $\widetilde{\widetilde{X}}$ του γραφήματος $\widetilde{X}$, το οποίο θα είναι δένδρο. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω επεκτάσεις θα εμφυτεύσουμε το γράφημα $\widetilde{X}$ στο καθολικό του κάλυμμα $\widetilde{\widetilde{X}}$, και έτσι το αρχικό καθολικό κάλυμμα $\widetilde{X}$, ως συνεκτικό υπογράφημα δένδρου θα πρέπει να είναι και αυτό δένδρο.

Θεώρημα 3.1. Έστω ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα X, T ένα μέγιστο δένδρο του X και A ένας προσανατολισμός του X. Το αντίστοιχο καθολικό κάλυμμα $\widetilde{X}$ του $\mathcal{G}$ είναι δένδρο.

Απόδειξη. Έστω W το καθολικό κάλυμμα του γραφήματος $\widetilde{X}$ και έστω $q : W \to \widetilde{X}$ η προβολή. Ορίσαμε παραπάνω την απεικόνιση $j : X \to \widetilde{X}$ με $j(x) = [1, x]$ για $x \in V(X) \cup E(X)$ η οποία οταν περιοριστεί στο δένδρο T είναι μονομορφισμός γραφημάτων, άρα το $j(T)$ είναι και αυτό δένδρο. Για την ταυτοτική ένθεση του $j(T)$ στο $\widetilde{X}$ και την προβολή q, χρησιμοποιούμε την πρόταση 1.3 και έτσι έχουμε έναν μορφισμό $m : j(T) \to W$ τέτοιον ώστε η σύνθεση $q \circ m$ να είναι η ταυτοτική ένθεση του $j(T)$ στο $\widetilde{X}$. Για $y \in A$ ορίζουμε $m(j(y))$ να είναι η μοναδική ακμή e του W με αρχή την κορυφή $m(j(\sigma(y)))$, (έχει οριστεί αφού $j(\sigma(y)) \in V(j(T))$), και με $q(e) = j(y)$, (η ύπαρξη έπεται άμεσα από το ότι η q είναι τοπικός επιμορφισμός και η μοναδικότητα από το ότι η q είναι τοπικός μονομορφισμός). Ορίζουμε επίσης $m(j(\overline{y})) = \overline{m(j(y))}$. Συμβολίζουμε $m \circ j = k$. Η k δεν είναι μορφισμός γραφημάτων αλλά από την κατασκευή έχουμε πως $\sigma(k(y)) = k(\sigma(y))$ για κάθε $y \in A$.

Έστω $v \in V(X)$ και $g \in G_v$. Από την δράση της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ στο $\widetilde{X}$, το στοιχείο g επάγει αυτομορφισμό του $\widetilde{X}$ ο οποίος σταθεροποιεί την κορυφή $j(v) = [1, v]$. Από την παρατήρηση πρίν απο το θεώρημα, βλέπουμε πως για $z = z' = k(v)$ και α τον αυτομορφισμό που επάγει το g, έχουμε πως $q(z) = q(m(j(v)) = j(v) = \alpha(q(z))$, όποτε ο αυτομορφισμός α του g επεκτείνεται σε μοναδικό αυτομορφισμό του W ο οποίος σταθεροποιεί την κορυφή $k(v)$. Συμβολίζουμε τον αυτομορφισμό αυτό με φ_g. Παρατηρούμε πως για ένα άλλο $h \in G_v$, οι αυτομορφισμοί $\varphi_g \circ \varphi_h$ και φ_{gh} σταθεροποιούν το $k(v)$ και επεκτείνουν τον αυτομορφισμό που επάγει η δράση του gh στο $\widetilde{X}$, (αφού $(gh).[z, v] = g.(h.[z, v])$), οπότε απο τη μοναδικότητα της επέκτασης έχουμε πως $\varphi_g \varphi_h = \varphi_{gh}$. Δηλαδή για κάθε $v \in V(X)$ έχουμε ομομορφισμό απο την G_v στην ομάδα $Aut(W)$.

Έστω τώρα μια ακμή $y \in A$. Το y ως στοιχείο της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ επάγει έναν αυτομορφισμό στο $\widetilde{X}$ ο οποίος στέλνει την κορυφή $j(\tau(y)) = [1, \tau(y)]$ στην κορυφή $y.[1, \tau(y)] = [y, \tau(y)] = \tau([1, y]) = \tau(j(y))$. Αυτός επεκτείνεται μοναδικά σε αυτομορφισμό φ_y του W ο οποίος στέλνει την $k(\tau(y))$ στην $\tau(k(y))$.

Έστω $y \in A$ και $g \in \sigma(G_y)$. Τότε $\sigma(\varphi_g(k(y))) = \varphi_g(\sigma(k(y))) = \varphi_g(k(\sigma(y))) = k(\sigma(y)) = \sigma(k(y))$ από τις ιδιότητες του αυτομορφισμού φ_g και της απεικόνισης k. Βλέπουμε επίσης πως $q(\varphi_g(k(y))) = g(j(y)) = j(y) = q(k(y))$, γιατί $q \circ m \circ j = j$ και $g \in \sigma(G_y)$. Συνεπώς οι ακμές $\varphi_g(k(y))$ και $k(y)$ έχουν ίδιες αρχικές κορυφές και ίδια εικόνα μέσω της προβολής q. Η προβολή q όμως είναι τοπικός μονομορφισμός, άρα έχουμε πως $\varphi_g(k(y)) = k(y)$, δηλαδή η φ_g σταθεροποιεί την ακμή $k(y)$.

Έστω $y \in A$ και $h \in G_y$. Τότε η επέκταση $\varphi_{\tau(h)}$ του αυτομορφισμού που επάγει η δράση του $\tau(h) \in \tau(G_y)$ στο $\widetilde{X}$ σταθεροποιεί το $k(\tau(y))$ αφού $\tau(h) \in G_{\tau(h)}$. Από την προηγούμενη παράγραφο, ο αυτομορφισμός $\varphi_{\sigma(h)}$ σταθεροποιεί την ακμή $k(y)$, και συνεπώς σταθεροποιεί και την κορυφή $\tau(k(y))$ (αφού $\varphi_{\sigma(h)}(\tau(k(y))) = \tau(\varphi_{\sigma(h)}(k(y))) = \tau(k(y))$). Άρα ο αυτομορφισμός $\varphi_y^{-1}\varphi_{\sigma(h)}\varphi_y$ σταθεροποιεί την κορυφή $k(\tau(y))$ και επιπλέον εύκολα βλέπουμε πως επεκτείνει τον αυτομορφισμό του στοιχείου $y^{-1}\sigma(h)y = \tau(h) \in \pi(\mathcal{G}, X, T)$. Από την μοναδικότητα των επεκτάσεων έπεται πως $\varphi_y^{-1}\varphi_{\sigma(h)}\varphi_y = \varphi_{\tau(h)}$. Τέλος, αν $y \in E(T)$ έχουμε πως $j(\tau(y)) = \tau(j(y))$ και $k(\tau(y)) = \tau(k(y))$, και συνεπώς ο φ_y σταθεροποιεί την $k(\tau(y))$. επίσης ο αυτομορφισμός που επάγει το y στο $\widetilde{X}$ είναι η μονάδα αφού $y = 1$ στην $\pi(\mathcal{G}, X, T)$, άρα συνδιάζοντας όλα αυτά μαζί με την μοναδικότητα της επέκτασης έχουμε πως $\varphi_y = 1 \in Aut(W)$.

Άρα για κάθε $v \in V(X)$ έχουμε ομομορφισμούς από την G_v στην $Aut(W)$ και για κάθε $e \in E(X)$ έχουμε στοιχεία $\varphi_e \in Aut(W)$. Τα συμπεράσματα των προηγούμενων παραγραφών ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.3 και συνεπώς έχουμε ομομορφισμό από την $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ στην $Aut(W)$, δηλαδή έχουμε μια δράση της ομάδας $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ στο γράφημα W, $(g.w = \varphi_g(w))$. Μια τυχαία κορυφή ή ακμή $[g, y] \in \widetilde{X}$ γράφεται ως $g.j(y)$. Από όλα τα παραπάνω συμπαιρένουμε πως η δράση $g.k(y) = \varphi_g(k(y))$ εξαρτάται μόνο απο το $j(y)$, ένα στοιχείο του $\widetilde{X}$ δηλαδή και όχι από το g (από την κατασκευή του $\widetilde{X}$ και απο τα στοιχεία του W που σταθεροποιούνται απο τα αντίστοιχα στοιχεία της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$). Έτσι έχουμε απεικόνιση $s : \widetilde{X} \to W$, με $s([g, x]) = g.(k(x))$, για την οποία εύκολα βλέπουμε από τα παραπάνω πως είναι μορφισμός και πως η σύνθεση $q \circ s$ είναι η ταυτότητα στο $\widetilde{X}$. Άρα το $\widetilde{X}$ εμφυτεύεται στο δένδρο W. Αφού το $\widetilde{X}$ είναι και συνεκτικό από το λήμμα 3.1, έπεται πως είναι δένδρο. □

Έτσι έχουμε δύο κατασκευές. Στην πρώτη αρχίσαμε με μία ομάδα να δρά σε ένα συνεκτικό γράφημα και φτιάξαμε ένα γράφημα ομάδων (αυτό με ομάδες κορυφών και ακμών τις σταθεροποιούσες), και στην δεύτερη αρχίσαμε με ένα γράφημα ομάδων και φτιάξαμε μια ομάδα (την θεμελιώδη ομάδα) και ένα δένδρο (το καθολικό κάλυμμα) στο οποίο η θεμελιώδης ομάδα δρά.

Όπως παρατηρήσαμε παραπάνω μετά τον ορισμό του καθολικού καλύμματος, αν αρχίσουμε με ένα γράφημα ομάδων, έχουμε την αντίστοιχη θεμελιώδη ομάδα του να δρά στο καθολικό του κάλυμμα, και το αντίστοιχο γράφημα ομάδων της δράσης αυτής είναι ισόμορφο με το αρχικό γράφημα ομάδων.

Αντίστροφα, έστω πως αρχίζουμε με μια ομάδα G η οποία δρά σε ένα συνεκτικό γράφημα X. Έστω $Y = G \setminus X$, το γράφημα πηλίκο της δράσης, και $p : X \to Y$ η προβολή. Έστω ακόμα T ένα μέγιστο δένδρο του Y, A ένας προσανατολισμός του Y και $j : Y \to X$ η απεικόνιση που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, η οποία μας προσδιορίζει τις επιθυμητές σταθεροποιούσες ομάδες της δράσης. Έστω $\mathcal{G}$ το αντίστοιχο γράφημα ομάδων στο γράφημα Y με τις παραπάνω επιλογές, T, A και j. Έχουμε τη θεμελιώδη ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$, την οποία θα συμβολίζουμε με π απο δώ και πέρα, και το καθολικό κάλυμμα $\widetilde{Y}$ του γραφήματος ομάδων $\mathcal{G}$. Το γράφημα $\widetilde{Y}$ είναι δένδρο και η ομάδα π δρά σε αυτό.

Αν το γράφημα X δεν είναι δένδρο, δεν μπορεί να είναι ισόμορφο με το γράφημα $\widetilde{Y}$ προφανώς. Το βασικό θεώρημα του κεφαλαίου που θα δείξουμε τώρα μας λέει πως αν το X είναι δένδρο, τότε το X είναι ισόμορφο με το γράφημα $\widetilde{Y}$, η ομάδα G είναι ισόμορφη με την ομάδα π και πως οι ισομορφισμοί αυτοί σέβονται τις δράσεις, δηλαδή πως η αρχική δράση της G στο X είναι ισόμορφη με τη δράση της π στο $\widetilde{Y}$. Η απόδειξη είναι μια σείρα απο παρατηρήσεις-λήμματα.

Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 2.3 για να φτιάξουμε έναν ομομορφισμό από την ομάδα π στην ομάδα G. Για κάθε $v \in V(X)$ η ομάδα G_v είναι υποομάδα της G, και έτσι χρησιμοποιούμε για φ_v τον ομομορφισμό της ταυτοτικής ένθεσης. Για κάθε $e \in A$ είχαμε αντιστοιχίσει ένα στοιχείο $g_e \in G$, όπου $g_e = 1$ αν $e \in A \cap T$. Για μια $e \in A$ ορίζουμε επίσης $g_{\overline{e}} = g_e^{-1}$.

Για $e \in A$ είχαμε ορίσει ομομορφισμούς $\sigma : G_e \to G_{\sigma(e)}$ και $\tau : G \to G_{\tau(e)}$, με $\sigma(g) = g$ και $\tau(g) = g_e^{-1} g g_e = g_e^{-1}\sigma(g) g_e$ για $g \in G_e$. Απο το λήμμα 2.3 έχουμε έναν ομομορφισμό $\varphi : \pi \to G$ του οποίου οι περιορισμοί στις ομάδες G_v για κάθε $v \in V(X)$ είναι οι ταυτοτικές ενθέσεις και ο οποίος στέλνει το e στο g_e για κάθε $e \in A$.

Θα ορίσουμε τώρα εναν μορφισμό γραφημάτων απο το καθολικό κάλυμμα $\widetilde{Y}$ στο X. Οι ακμές και οι κορυφές του $\widetilde{Y}$ είναι οι κλάσεις $[h, y]$, όπου $h \in \pi$ και $y \in V(Y) \cup E(Y)$. Για $y \in V(X) \cup A$ έχουμε πως $[h, y] = [k, z] \iff y = z$ και $k \in hG_y$, ενώ αν $y \in E(Y) - A$ έχουμε πως $[h, y][k, z] \iff [h, \overline{y}] = [k, \overline{z}]$. επίσης, για $y \in V(Y) \cup A$ ο περιορισμός της φ στην G_y είναι η ταυτοτική ένθεση. Συνεπώς, απο τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $\psi : \widetilde{Y} \to X$ με $\psi([h, y]) = \varphi(h).j(y)$.

Για $y \in A$ έχουμε πως $\sigma([h, y] = [h, \sigma(y)]$ και $\tau([h, y]) = [hy, \tau(y)]$. Ισχύει επίσης πως $\sigma(j(y)) = j(\sigma(y))$, $\tau(j(y)) = g_e j(\tau(e))$ και $\varphi(y) = g_e$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις πληροφορίες βλέπουμε πως η απεικόνιση ψ είναι μορφισμός γραφημάτων. Αφού τώρα $X = G.j(Y)$, (γιατί το $j(Y)$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών της δράσης της G στο X), παρατηρούμε πως η ψ είναι επί αν ισχύει πως η φ είναι επί. Θα δείξουμε παρακάτω πως η φ είναι πάντα επί.

Σειρά έχει τώρα να δείξουμε πως η ψ είναι τοπικός μονομορφισμός. Έστω $y, z \in A$ και $h, k \in \pi$. Αφού ο A είναι προσανατολισμός του Y, το σύνολο $p^{-1}(A) = B$, όπου p η προβολή, είναι προσανατολισμός του X και $G.B = B$, (αυτό είχε δειχθεί όταν ορίσαμε τον προσανατολισμό στη σελίδα 20). Αφού $p(j(z)) = z \in A$ και $p(j(y)) = y \in A$ έχουμε πως $j(z), j(y) \in B$. Άρα $j(\overline{z}) = \overline{j(z)} \notin B$, και συνεπώς $g.j(y) \neq j(\overline{z})$ για κάθε $g \in G$. Άρα ισχύει πως $\psi([h, y]) \neq \psi([k, \overline{z}]$. Έστω πως $\psi([h, y]) = \psi([k, z])$ και πως $\sigma([h, y]) = \sigma([k, z])$. Τότε απο την σχέση $\psi([h, y]) = \psi([k, z])$ έπεται πως $y = p(j(y)) = p(\varphi(h).j(y)) =$

$p(\psi([h,y])) = p(\psi([k,z])) = p(\varphi(k).j(z)) = z$ και πως $\varphi(h^{-1}k) \in Stab(j(y))$, ενώ απο την σχέση $\sigma([h,y]) = \sigma([k,z])$ έχουμε πως $h^{-1}k \in G_{\sigma(y)}$. Αφού η φ περιορισμένη στην $G_{\sigma(y)}$ είναι η ταυτότητα, απεικονίζει ισομορφικά την $G_{\sigma(y)}$ στην ομάδα $Stab(j(\sigma(y))$ και η υποομάδα G_y της $G_{\sigma(y)}$ απεικονίζεται μέσω της φ ταυτοτικά στην υποομάδα $Stab(j(y))$ της $Stab(j(\sigma(y))$. Άρα χρησιμοποιώντας την αντίστροφη του ισομορφισμού $\varphi\,|_{G_{\sigma(y)}}$ στην σχέση $\varphi(h^{-1}k) \in Stab(j(y))$, έπεται πως $h^{-1}k \in G_y = \sigma(G_y)$, δηλαδή $[h,y] = [k,z]$.

Ομοίως, έστω πως $\psi([h,\overline{y}]) = \psi([k,\overline{z}])$ και πως $\sigma([h,\overline{y}]) = \sigma([k,\overline{z}])$. Τότε $\psi([h,y]) = \psi([k,z])$ αφού $\overline{\psi([h,y])} = \psi(\overline{[h,y]}) = \psi([h,\overline{y}]) = \psi([k,\overline{z}]) = \psi(\overline{[k,z]}) = \overline{\psi([k,z])}$, και $\tau([h,y]) = \sigma(\overline{[h,y]}) = \sigma([h,\overline{y}]) = \sigma([k,\overline{z}]) = \sigma(\overline{[k,z]}) = \tau([k,z])$. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, απο την σχέση $\psi([h,y]) = \psi([k,z])$ έχουμε πως $y = z$ και πως $\varphi(h^{-1}k) \in Stab(j(y))$, και απο την σχέση $\tau([h,y]) = \tau([k,z])$ έχουμε πως $(hy)^{-1}(ky) \in G_{\tau(y)} \iff h^{-1}k \in yG_{\tau(y)}y^{-1}$. Η G_y είναι η ομάδα $Stab(j(y))$ και είναι υποομάδα της $G_{\sigma(y)}$, στην οποία η φ είναι η ταυτοτική ένθεση. Άρα $\varphi(h^{-1}k) \in \varphi(G_y)$. Αφού τώρα η φ είναι η ταυτοτική ένθεση στην $G_{\tau(y)}$, είναι $1-1$ στην ομάδα αυτήν και συνεπώς είναι $1-1$ και στην συζηγή της $yG_{\tau(y)}y^{-1}$. Η ομάδα αυτή περιέχει το $h^{-1}k$ και αφού $\tau(G_y) \subseteq G_{\tau(y)}$, περιέχει και την υποομάδα $y\tau(G_y)y^{-1}$ η οποία είναι η ομάδα $\sigma(G_y)$ (ως υποομάδα της π, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της π). Όμως $\sigma(G_y) = G_y$, δηλαδή $y\tau(G_y)y^{-1} = G_y$. Άρα χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό $\varphi\,|_{yG_{\tau(y)}y^{-1}}$ στην σχέση $\varphi(h^{-1}k) \in \varphi(G_y)$, έπεται πως $h^{-1}k \in G_y = G_{\overline{y}} = \sigma(G_{\overline{y}})$, και έτσι έχουμε πως $[h,\overline{y}] = [k,\overline{z}]$. Δηλαδή η ψ είναι πράγματι τοπικός μονομορφισμός.

Θα δείξουμε τώρα πως ο ομομορφισμός φ είναι επί. Θα χρειαστούμε ένα λήμμα για αυτό.

Λήμμα 3.3. Έστω G μια ομάδα η οποία δρά σε ένα συνεκτικό γράφημα X, και έστω H μια υποομάδα της G. Έστω X_1 και X_2 υπογραφήματα του X τέτοια ώστε $X_2 \subseteq X_1$, $G.X_1 = X$, $V(X_1) \subseteq H.V(X_2)$ και $g.V(X_2) \cap V(X_2) = \varnothing$ για κάθε $g \notin H$. Τότε $H = G$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα πως $H.X_1 = X$. Αφού το X είναι συνεκτικό, χρησιμοποιώντας το λήμμα 1.2, αρκεί να δείξουμε πως αν $e \in E(X)$ με $\sigma(e) \in V(H.X_1)$ τότε $e \in E(H.X_1)$, (τότε θα είχαμε προφανώς πως $\tau(e) \in V(H.X_1)$ και τότε απο το λήμμα 1.2 θα είχαμε πως $V(H.X_1) = V(X)$, και χρησιμοποιώντας πάλι την παραπάνω συνθήκη που είναι προς απόδειξη, έπεται και πως $E(H.X_1) = E(X)$). Έστω λοιπόν ακμή $e \in E(X)$ με $\sigma(e) \in V(H.X_1)$. Αφού $\sigma(e) \in V(H.X_1) = H.V(X_1)$, υπάρχει $\lambda \in H$ τέτοιο ώστε $\lambda\sigma(e) = \sigma(\lambda e) \in V(X_1)$. Αφού $G.X_1 = X$, υπάρχει $g \in G$ και $x \in E(X_1)$ τέτοια ώστε $gx = \lambda e$. επίσης, αφού $V(X_1) \subseteq H.V(X_2)$, υπάρχουν $h, k \in H$ τέτοια ώστε $h(\sigma(\lambda e)), k(\sigma(x)) \in V(X_2)$. Παρατηρούμε τώρα πως $hgk^{-1}(k(\sigma(x))) = hg(\sigma(x)) = h(\sigma(gx)) = h(\sigma(\lambda e)) \in hgk^{-1}V(X_2) \cap V(X_2)$ και συνεπώς απο την υπόθεση, $hgk^{-1} \in H$, δηλαδή $g \in H$ (αφού $h, k \in H$), άρα $(\lambda^{-1}g)x = e \in H.E(X_1) = E(H.X_1)$.

Ιδιαιτέρως, όπως παρατηρήσαμε και στην αρχή της απόδειξης, έχουμε πως $H.V(X_1) = V(X)$, και αφού $V(X_1) \subseteq H.V(X_2)$, έπεται και πως $H.V(X_2) = V(X)$.

Έστω τώρα ένα $g \in G$. Διαλέγουμε μια τυχαία κορυφή $v \in V(X_2)$. Τότε απο τα παραπάνω υπάρχει $h \in H$ και $w \in V(X_2)$ τέτοια ώστε $gv = hw$. Τότε $(h^{-1}g)v = w \in V(X_2) \cap (h^{-1}g)V(X_2)$, και συνεπώς απο υπόθεση έχουμε πως $h^{-1}g \in H$, δηλαδή $g \in H$.

$\square$

Πόρισμα. Με τους συμβολισμούς που είχαμε πριν απο το λήμμα, ο ομομορφισμός $\varphi : \pi \to G$ είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το παραπάνω λήμμα ως εξής. Έστω $H = \varphi(\pi)$, $X_2 = j(T)$ και X_1 να είναι το υπογράφημα με ακμές το σύνολο $j(E(Y))$ και με κορυφές όλα τα άκρα αυτών των ακμών. Αφού οι ακμές $j(E(Y))$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών των ακμών που επάγει η δράση της G στο X, έχουμε αμέσως πως $G.X_1 = X$. Αφού το T είναι μέγιστο δένδρο του Y, έχουμε πως $V(T) = V(Y)$ και συνεπώς $V(X_1) = V(X_2) \cup \{\tau(j(e)) \in e \in A\}$. Για $e \in A$ έχουμε πως $\tau(j(e)) = g_e j(\tau(e)) \in H.V(X_2)$, αφού $g_e \in H$. Τέλος, αν $gV(X_2) \cap V(X_2) \neq \varnothing$ τότε υπάρχουν κορυφές $y, z \in V(Y)$ τέτοιες ώστε $gj(y) = j(z)$. Το σύνολο $j(V(Y))$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών των κορυφών, και συνεπώς $y = z$. Τότε όμως $g \in Stab(j(y)) = G_y$, άρα και $g \in H = \varphi(\pi)$. Οι υποθέσεις του παραπάνω λήμματος ικανοποιούνται με τις επιλογές αυτές, άρα πράγματι $H = \varphi(\pi) = G$.
□

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα, το οποίο αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως Θεώρημα δομής ή ως Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των $Bass$ και $Serre$. Το διατυπώνουμε πάλι με τους παραπάνω συμβολισμούς.

Θεώρημα 3.2. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα : (i) Το γράφημα X είναι δένδρο.
(ii) Ο μορφισμός ψ είναι ισομορφισμός γραφημάτων.
(iii) Ο ομομορφισμός φ είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Από το παραπάνω πόρισμα ο ομομορφισμός φ είναι επί. Συνεπώς
$X = G.j(y) = \varphi(\pi).j(Y) \subseteq \psi(\widetilde{Y}) \subseteq X$, δηλαδή ο μορφισμός ψ είναι επί. Έχουμε δείξει επίσης πως ο ψ είναι τοπικός μονομορφισμός.

Χρησιμοποιώντας το (ii) της πρότασης 1.6 βλέπουμε πως αν το X είναι δένδρο, τότε ο μορφισμός ψ είναι είναι $1-1$ και συνεπώς αφού ειναι και επί, είναι ισομορφισμός. Αντίστροφα, απο το θεώρημα 3.1 το γράφημα $\widetilde{Y}$ είναι δένδρο, και συνεπώς αν ο ψ είναι ισομορφισμός τότε και το X είναι δένδρο. Άρα τα (i) και (ii) είναι πράγματι ισοδύναμα.

Έστω τώρα πως ο φ είναι ισομορφισμός. Άμεσα παρατηρούμε ότι επειδή ο ψ είναι τοπικά μονομορφισμός, αν είναι $1-1$ στις κορυφές $V(\widetilde{Y})$, τότε πρέπει να είναι και $1-1$ στις ακμές, και συνεπώς τότε θα ήταν ισομορφισμός (αφού είναι και επί). Οπότε αρκεί να δείξουμε πως ο ψ είναι $1-1$ στις κορυφές. Έστω λοιπόν δύο κορυφές $[h,v],[k,w] \in V(\widetilde{Y})$ με $\psi([h,v]) = \psi([k,w])$, δηλαδή $\varphi(h).j(v) = \varphi(k).j(w)$. Άρα $(\varphi(k)^{-1}\varphi(h)).j(v) = j(w)$, και αφού το σύνολο $j(V(Y))$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών των κορυφών που επάγει η δράση της G στο X, έπεται πως $v = w$. Από την τελευταία εξίσωση έχουμε επίσης πως $\varphi(k)^{-1}\varphi(h) = \varphi(k^{-1}h) \in Stab(j(v)) = G_v = \varphi(G_v)$, και αφού ο φ είναι ισομορφισμός, έπεται πως $h^{-1}k \in G_v$, άρα και πως $[h,v] = [k,w]$, δηλαδή ο μορφισμός ψ είναι πράγματι $1-1$ στις κορυφές.

Αντίστροφα, έστω πως ο ψ είναι ισομορφισμός γραφημάτων και έστω ένα $h \in ker\varphi$. Επιλέγουμε μια τυχαία κορυφή $v \in Y$. Τότε έχουμε πως $\psi([h,v]) = \varphi(h).j(v) = 1.j(v) = j(v) = \psi([1,v])$. Αφού ο ψ είναι ισομορφισμός, έχουμε πως $[h,v] = [1,v]$, δηλαδή πως $h \in G_v = Stab(j(v))$. Αφού τώρα $\varphi(h) = 1$ και η φ περιορισμένη στην ομάδα G_v είναι η ταυτοτική ένθεση, έπεται πως $h = 1$. Άρα ο φ είναι πράγματι $1-1$ και αφού είναι και επί απο το προηγούμενο πόρισμα, είναι ισομορφισμός. Συνεπώς τα (ii) και (iii) είναι πράγματι ισοδύναμα και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. □

4 Εφαρμογές του δομικού θεωρήματος

4.1 Θεωρήματα υποομάδων

Έστω $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων με αντίστοιχο γράφημα X. Τότε η θεμελιώδης ομάδα $\pi(\mathcal{G})$ δρά στο καθολικό κάλυμμα $\widetilde{X}$. Αν $H \leq \pi(\mathcal{G})$, τότε η H δρά και αυτή, με την ίδια δράση, στο δένδρο $\widetilde{X}$. Οπότε απο το θεώρημα 3.2, η H είναι και αυτή θεμελιώδης ομάδα ενός γραφήματος ομάδων. Το συμπέρασμα αυτό απο μόνο του δεν μας λέει πολλά, αφού έτσι και αλλιώς κάθε ομάδα είναι θεμελιώδης ομάδα ενος γράφηματος ομάδων (αυτό με αντίστοιχο γράφημα με μια κορυφή και καμία ακμή και με ομάδα κορυφής την δοσμένη ομάδα). Μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι πιο ουσιαστικό αν αναλύσουμε την ακριβή σχέση ανάμεσα στο αρχικό γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ και αυτό που επάγει η δράση της H στο δένδρο $\widetilde{X}$.

Θα χρειαστούμε την έννοια του διπλού συμπλόκου. Έστω μια ομάδα G και H, K δύο υποομάδες της. Για κάθε $g \in G$, το σύνολο $HgK = \{hgk \mid h \in H, k \in K\}$ καλείται (H,K)-**διπλό σύμπλοκο του** g. Εύκολα επαληθεύει κανείς πως δύο διπλά σύμπλοκα HxK και HyK είναι είτε ίσα είτε ξένα και πως η ένωση όλων των διπλών συμπλόκων είναι η ομάδα G, δηλαδή η σχέση στο σύνολο G, $x \sim y \iff$ υπάρχουν $h \in H$ και $k \in K$ τέτοια ώστε $y = hxk$, είναι σχέση ισοδυναμίας με τις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας να είναι τα (H,K)-διπλά σύμπλοκα.

Θεώρημα 4.1. Έστω $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων με αντίστοιχο γράφημα X, και έστω H μια υποομάδα της θεμελιώδους ομάδας $\pi(\mathcal{G})$. Τότε $H \cong \pi(\mathcal{H})$, όπου οι ομάδες κορυφών του $\mathcal{H}$ είναι οι $H \cap gG_vg^{-1}$ για κάθε $v \in V(X)$ και για κάθε g σε ένα σύνολο αντιπροσώπων των (H, G_v)-διπλών συμπλόκων στη G, και οι ομάδες ακμών του $\mathcal{H}$ είναι οι $H \cap gG_eg^{-1}$ για κάθε $e \in E(X)$ και για κάθε g σε ένα σύνολο αντιπροσώπων των (H, G_e)-διπλών συμπλόκων στη G.

Απόδειξη. Η ομάδα $\pi(\mathcal{G})$ δρά στο δένδρο $\widetilde{X}$. Οι κορυφές του $\widetilde{X}$ είναι οι $[g, v]$ με $g \in \pi(\mathcal{G})$ και $v \in V(X)$, με σταθεροποιούσες $Stab([g, v]) = gG_vg^{-1}$. επίσης για κάθε $g' \in gG_v$

έχουμε πως $[g, v] = [g', v]$ και πως $Stab([g, v]) = Stab([g', v])$. Η H-σταθεροποιούσα της κορυφής $[g, v]$, δηλαδή η σταθεροποιούσα ομάδα της κορυφής $[g, v]$ μέσω της δράσης της H στο $\widetilde{X}$ είναι η ομάδα $H \cap gG_vg^{-1}$, και δύο κορυφές του $\widetilde{X}$, $[g, v]$ και $[g', v]$, ανήκουν στην ίδια H-τροχία αν και μόνο αν υπάρχει $h \in H$ τέτοιο ώστε $h.[g, v] = [g', v] \iff [hg, v] = [g', v] \iff hg \in g'G_v \iff g \in h^{-1}g'G_v \iff$ τα στοιχεία g και g' ανήκουν στο ίδιο (H, G_v)-διπλό σύμπλοκο. Απο το θεώρημα 3.2 έχουμε πως $H \cong \pi(\mathcal{H})$, όπου $\mathcal{H}$ είναι το εξής γράφημα ομάδων. Το αντίστοιχο γράφημα του είναι το γράφημα πηλίκο $H \setminus \widetilde{X}$, το οποίο έχει κορυφές τις H-τροχιές των κορυφών, οι οποίες όπως δείξαμε πριν είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τα (H, G_v)-διπλά σύμπλοκα για κάθε $v \in V(X)$. Η ομάδα μιας κορυφής, δηλαδή μιας H-τροχίας $H.[g', v]$, είναι η H-σταθεροποιούσα του $[g, v]$, δηλαδή η $H \cap gG_vg^{-1}$, για κάποιον αντιπρόσωπο g στο διπλό σύμπλοκο $Hg'G_v$, (ο οποίος αντιπρόσωπος ορίζεται μέσω της απεικόνισης j του προηγούμενου κεφαλαίου). Τελείως όμοια έχουμε το αντίστοιχο συμπέρασμα για τις ακμές. $\square$

Απο το προηγούμενο θεώρημα έχουμε άμεσα τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 1. Έστω $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων με αντίστοιχο γράφημα X, και έστω H μια υποομάδα της $\pi(\mathcal{G})$ τέτοια ώστε $H \cap gG_vg^{-1} = \{1\}$ για κάθε $g \in \pi(\mathcal{G})$ και για κάθε $v \in V(X)$. Τότε η ομάδα H είναι ελεύθερη.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε αμέσως πως $H \cong \pi(\mathcal{H})$, όπου το γράφημα ομάδων $\mathcal{H}$ έχει τετριμμένες ομάδες κορυφών, δηλαδή είναι πράγματι ελεύθερη, (απευθείας απο τον ορισμό της θεμελιώδους ομάδας). $\square$

Πόρισμα 2. Έστω $\mathcal{G}$ ένα γράφημα ομάδων, μια ομάδα H και ένας ομομορφισμός $\varphi : \pi(\mathcal{G}) \to H$ ο οποίος είναι ένα προς ένα σε όλες τις ομάδες κορυφών. Τότε η πυρήνας

$Ker\varphi$ είναι ελεύθερη ομάδα.

Απόδειξη. Για κάθε ομάδα κορυφής G_v έχουμε απο την υπόθεση πως $ker\varphi \cap G_v = \{1\}$. Άρα και για ένα $g \in \pi(\mathcal{G})$ έχουμε πως $ker\varphi \cap gG_vg^{-1} = gker\varphi g^{-1} \cap gG_vg^{-1} =$
$= g(ker\varphi \cap G_v)g^{-1} = \{1\}$. Από το πόρισμα 1 έχουμε το συμπέρασμα. □

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει απευθείας το θεώρημα υποομάδων των $Nielsen$ και $Schreier$ που αποδείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, όπως και το θεώρημα υποομάδων του $Kurosh$.

Πόρισμα 3 ($Nielsen - Schreier$). Έστω F η ελεύθερη ομάδα με βάση ένα σύνολο S και H μια υποομάδα της F. Τότε η H είναι και αυτή ελεύθερη.

Απόδειξη. Θεωρούμε την F ως τη θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X)$ με την τοπολογική έννοια ενός γραφήματος X, (για παράδειγμα αν X είναι το γράφημα με μια κορυφή και ακμές με αρχή και τέλος την κορυφή αυτή σε πλήθος όσο και το πλήθος του συνόλου S). Αν θεωρήσουμε το γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα το X και με τετριμμένες ομάδες κορυφών και ακμών, τότε όπως είδαμε και στο παράδειγμα 1 του κεφαλαίου 2.2, έχουμε πως $\pi(\mathcal{G}) = \pi_1(X) = G$. Οι υποθέσεις του πορίσματος 1 ικανοποιούνται για κάθε υποομάδα της G, και συνεπώς από το πόρισμα 1 έπεται πως η H είναι ελεύθερη. □

Πόρισμα 4 ($Kurosh$). Έστω $G = *_{i\in I}G_i$ το ελεύθερο γινόμενο κάποιων ομάδων G_i με I ένα σύνολο δεικτών. Τότε υπάρχουν για κάθε $i \in I$ στοιχεία $g_{i,j} \in G$, $j \in J_i$, και ελεύθερη ομάδα F, τέτοια ώστε $H \cong (*_{i\in I}(*_{j\in J_i}H \cap g_{i,j}G_ig_{i,j}^{-1})) * F$.

Απόδειξη. Όπως είδαμε και στο παράδειγμα 2 του κεφαλαίου 2.2, αν θεωρήσουμε το γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με αντίστοιχο γράφημα X να είναι το άστρο με $|I|$ σε πλήθος ακτίνες, ομάδες κορυφών G_i για κάθε κορυφή $i \in I$ και $G_o = \{1\}$ για την κέντρική κορυφή o, και ομάδες ακμών να είναι οι τετριμμένες, τότε $\pi(\mathcal{G}) = *_{i\in I}G_i = G$. Για την υποομάδα H, από το θεώρημα 4.1 έχουμε πως $H \cong \pi(\mathcal{H})$, όπου το αντίστοιχο γράφημα του $\mathcal{H}$ είναι το $H \backslash \widetilde{X}$, οι ομάδες κορυφών του $\mathcal{H}$ είναι οι $H \cap g G_v g^{-1}$ για κάθε $v \in V(X)$ και για κάθε g σε ένα σύνολο αντιπροσώπων των (H, G_v)-διπλών συμπλόκων στη G, και οι ομάδες ακμών του $\mathcal{H}$ είναι τετριμμένες. Συνεπώς, όπως είχαμε δείξει και στην δεύτερη παράγραφο του παραδείγματος 2 του κεφαλαίου 2.2, έχουμε πως $H \cong (*_{v \in V(X)}(*_{j \in J_v} H \cap g_{v,j} G_v g_{v,j}^{-1})) * \pi_1(H \backslash \widetilde{X})$, όπου $\{g_{v,j} \mid j \in J_v\}$ είναι το σύνολο αντιπροσώπων των (H, G_v)-διπλών συμπλόκων που προκύπτει στο θεώρημα 4.1, για κάθε $v \in V(X)$. $\square$

Στην συνέχεια θα δείξουμε το Θεώρημα του *Grushko* απο το οποίο έπεται το πολύ φυσιολογικό κατα τη διαίσθηση αποτέλεσμα, ότι το *rank* ενός ελευθέρου γινομένου πεπερασμένου πλήθους ομάδων είναι το άθροισμα των *rank* των ομάδων αυτών.

4.2 Θεώρημα του *Grushko*

Θα χρειαστούμε κάποια γραφοθεωρητικά λήμματα. Πρώτα πρέπει να μεταφράσουμε την ιδιότητα του να είναι δένδρο ένα γράφημα σε αλγεβρική γλώσσα με έναν ομολογικής φύσεως τρόπο.

Έστω Γ ένα γράφημα. Έστω $C_0(\Gamma)$ να είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση τις κορυφές του Γ. Έστω F να είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση τις ακμές του Γ και F' να είναι η υποομάδα της που παράγεται απο τα στοιχεία $e + \overline{e}$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$. Έστω τώρα η ομάδα πηλίκο $C_1(\Gamma) = F/F'$, (θα μπορούσαμε να την ορίσουμε και ως την ελεύθερη αβελιανή με βάση έναν προσανατολισμό του Γ).

Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\varepsilon : C_0(\Gamma) \to \mathbb{Z}$ που ορίζεται απο τις σχέσεις $\varepsilon(v) = 1$ για κάθε $v \in V(\Gamma)$. Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση $d' : E(\Gamma) \to C_0(\Gamma)$ με $d'(e) = \tau(e) - \sigma(e)$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$. Αφού $\overline{e} = -e$ στην $C_1(\Gamma)$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$ και $d'(\overline{e}) = -d'(e)$

για κάθε $e \in E(\Gamma)$, μπορούμε να δούμε την d' σαν μια απεικόνιση απο την βάση της $C_1(\Gamma)$ στο $C_0(\Gamma)$. Την επεκτείνουμε σε ομομορφισμό $d : C_1(\Gamma) \to C_0(\Gamma)$ με την χαρακτηριστική ιδιότητα $d(e) = \tau(e) - \sigma(e)$ για κάθε $e \in E(\Gamma)$. Προφανώς ισχύει πως $\varepsilon \circ d = 0$ και συνεπώς $d(C_1(\Gamma)) \subseteq ker\varepsilon$.

Διατυπώνουμε το επόμενο λήμμα με τους παραπάνω συμβολισμούς.

Λήμμα 4.1. Ένα γράφημα Γ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν $d(C_1(\Gamma)) = ker\varepsilon$, και είναι δάσος αν και μόνο αν $kerd = \{0\}$.

Απόδειξη. Έστω πως το γράφημα Γ είναι συνεκτικό και έστω $v, w \in V(\Gamma)$ δύο κορυφές του. Έστω ενα μονοπάτι $e_1, ..., e_n$ από την v στην w. Τότε εύκολα βλέπουμε πως $d(e_1 + ... + e_n) = w - v$. Παρατηρούμε επίσης πως ο πυρήνας $ker\varepsilon$ παράγεται από τα στοιχεία $w - v$ για κάθε $w, v \in V(\Gamma)$ αφού αν $\varepsilon(v_1 + ... + v_m) = 0$ τότε το πλήθος των v_i με $\varepsilon(v_i) = 1$ είναι το ίδιο με το πλήθος των v_i με $\varepsilon(v_i) = -1$, και συνεπώς αφου η $C_0(\Gamma)$ είναι αβελιανή, το άθροισμα $v_1 + ... + v_m$ γράφεται ως άθροισμα διαφορών κορυφών. Αφού $w - v \in d(C_1(\Gamma))$ για κάθε $v, w \in V(\Gamma)$ έχουμε πως $ker\varepsilon \subseteq d(C_1(\Gamma))$, και αφού έτσι και αλλιώς $d(C_1(\Gamma)) \subseteq ker\varepsilon$, έχουμε πως πράγματι $d(C_1(\Gamma)) = ker\varepsilon$.

Για το αντίστροφο, έστω πως $d(C_1(\Gamma)) = ker\varepsilon$ και έστω προς άτοπο πως το Γ δεν είναι συνεκτικό. Έστω Δ μια συνεκτική συνιστώσα του. Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\varepsilon' : C_0(\Gamma) \to \mathbb{Z}$ με $\varepsilon'(v) = 1$ αν $v \in V(\Delta)$ και $\varepsilon'(v) = 0$ αν $v \in V(\Gamma) - V(\Delta)$. Εύκολα παρατηρούμε πως $\varepsilon' \circ d = 0$, αφου για μια ακμή $e \in E(\Gamma)$ τα άκρα της $\tau(e), \sigma(e)$ ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Έστω τώρα μια κορυφή $v \in V(\Delta)$ και μία ακόμα $w \in V(\Gamma) - V(\Delta)$. Τότε αν $w - v \in d(C_1(\Gamma))$ θα είχαμε πως $\varepsilon'(w - v) = 0$. Όμως από τον ορισμός του ομομορφισμού ε' έχουμε πως $\varepsilon'(w - v) = 1$. Άρα $w - v \in ker\varepsilon - d(C_1(\Gamma))$, το οποίο είναι άτοπο.

Για τον άλλον ισχυρισμό, έστω πως $kerd = \{0\}$ και έστω προς άτοπο πως το Γ δεν είναι δάσος. Τότε το Γ περιέχει ένα κύκλωμα $e_1, ..., e_n$. Από τον ορισμό του κυκλώματος, δεν μπορεί να ισχύει πως $e_i = \overline{e_j}$ για κάποια $i, j \in \{1, .., n\}$. Άρα το άθροισμα $e_1 + ... + e_n$ είναι μη μηδενικό στην $C_1(\Gamma)$ και παράλληλα $d(e_1 + ... + e_n) = 0$ από τον ορισμό του d, το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω πως το Γ είναι δάσος και έστω προς άτοπο πως υπάρχει ενα μη μηδενικό στοιχείο x της $C_1(\Gamma)$ με $d(x) = 0$. Θεωρούμε μια γραφή $x = m_1e_1 + ... + m_ne_n$ με $m_i \in \mathbb{Z}$ και $e_i \in E(\Gamma)$ για κάθε $i \in \{1, .., n\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε πως $e_i \neq e_j$ και $e_i \neq \overline{e_j} = -e_j$ για κάθε $i, j \in \{1, ..., n\}$ διαφορετικά και πως $m_i \neq 0$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, (αφού αν δεν ισχύει μπορούμε να το φέρουμε σε αυτή τη μορφή μέσω της μεταθετικότητας των στοιχείων της $C_1(\Gamma)$). Επίσης, εναλλάσοντας αν χρειαστεί κάποιο m_ie_i με $m_i < 0$ με το $(-m_i)\overline{e_i}$ (το οποίο είναι ίσο με το m_ie_i), μπορούμε να υποθέσουμε πως $m_i > 0$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$.

Έστω τώρα το πεπερασμένο υπογράφημα του Γ που έχει ως ακμές τις $e_i, \overline{e_i}$ και ως κορυφές, τις κορυφές των ακμών αυτών. Αφού $d(x) = 0$, από τις υποθέσεις της προηγούμενης παραγράφου, εύκολα βλέπουμε πως για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ πρέπει να υπάρχουν $j, k\{1, ..., n\}$ διαφορετικά με το i τέτοια ώστε $\sigma(e_i) = \tau(e_j) = \sigma(\overline{e_j})$ και $\tau(e_i) = \sigma(e_k) = \tau(\overline{e_k})$. Συνεπώς το υπογράφημα αυτό δεν μπορεί να περιέχει φύλλα, και από το λήμμα 1.9 έπεται πως το υπογράφημα αυτό δεν είναι δάσος και συνεπώς ούτε το Γ είναι δάσος, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ σε ένα σύνολο X μπορούμε να τη δούμε και ως ένα υποσύνολο του $X \times X$, το $A_\sim = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Διατάσσουμε το σύνολο όλων των σχέσεων ισοδυναμίας στο X με τη σχέση του υποσυνόλου στο $X \times X$, δηλαδή αν $\sim$ και $\sim'$ δύο σχέσεις ισοδυναμίας του X, τότε $\sim \leq \sim' \iff A_\sim \subseteq A_{\sim'}$.

Έστω τώρα X ένα G-γράφημα, (δηλαδή το X είναι γράφημα στο οποίο δρά η ομάδα G). Έστω $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο $E(\Gamma)$ για την οποία ισχύουν τα εξής. Αν $e \sim e'$, τότε $\overline{e'} \sim \overline{e}$ και $ge' \sim ge$ για κάθε $g \in G$. Επιπλέον θέλουμε να ισχύει πως $\overline{e} \nsim ge$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $e \in E(\Gamma)$. Μπορούμε με την παραπάνω σχέση να ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των κορυφών $V(\Gamma)$, την οποία θα συμβολίζουμε πάλι με $\sim$, ως την ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας, (με την διάταξη που περιγράψαμε παραπάνω), τέτοια ώστε $\tau(e') \sim \tau(e)$ όταν $e' \sim e$, (άρα και $\sigma(e') \sim \sigma(e)$ αφού θα ισχύει και πως $\overline{e'} \sim \overline{e}$). Η παραπάνω σχέση δημιουργεί το γράφημα πηλίκο $X/\sim$, το οποίο έχει ως κορυφές τις κλάσεις ισοδυναμίας των κορυφών, $[v] = \{w \mid w \sim v\}$ για κάθε $v \in V(X)$, και ομοίως ως ακμές τις κλάσεις ισοδυναμίας των ακμών, με αρχές και τέλη τις αντίστοιχες κλάσεις των αρχών και των τελών των αντιπροσώπων. Εύκολα βλέπουμε πως τα παραπάνω είναι καλά ορισμένα και έτσι το $X/\sim$ είναι πράγματι γράφημα στο οποίο δρά η G με την αντίστοιχη δράση που επάγει η δράση της στο αρχικό γράφημα X. Επίσης έχουμε την προβολή $p : X \to X/\sim$ με $p(x) = [x]$ για κάθε $x \in V(\Gamma) \cup E(\Gamma)$, η οποία εύκολα βλέπουμε πως είναι G-μορφισμός, δηλαδή είναι μορφισμός γραφημάτων με την επιπλέον ιδιότητα, $p(g.x) = [g.x] = g.[x] = g.p(x)$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $x \in V(\Gamma) \cup E(\Gamma)$. Θέλουμε να ισχύει πως $\overline{e} \nsim ge$ για να εξασφαλίσουμε πως η ομάδα G δρά στο γράφημα $X/\sim$ χωρίς αντιστροφές και επίσης για να ισχύει πως $\overline{[e]} = [\overline{e}] \neq [e]$, δηλαδή η συνάρτηση αντίστροφης ακμής να μην σταθεροποιεί καμία ακμή.

Έστω X ένα G-γράφημα. Ένα **δίπλωμα**, (*fold* στην αγγλική ορολογία), αποτελείται από δύο ακμές e_1 και e_2 του X τέτοιες ώστε $\sigma(e_1) = \sigma(e_2)$ και $e_2 \notin Ge_1 \cap G\overline{e_1}$. Αν επιπλέον Z ένα ακόμα G-γράφημα και $f : X \to Z$ ένας μορφισμός με την ιδιότητα $f(e_1) = f(e_2)$, λέμε ότι το δίπλωμα είναι **κατά μήκος του** f, (*fold along* f).

Έστω X ένα G-γράφημα και $\{e_1, e_2\}$ ένα δίπλωμα. Έστω $\sim$ η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ακμών $E(\Gamma)$ τέτοια ώστε $e_2 \sim e_1$ και αν $x \sim y$ τότε $\overline{x} \sim \overline{y}$ και $gx \sim gy$. Κατασκευάζουμε το γράφημα $(X/\sim) = Y$ όπως παραπάνω. Η σχέση $e_2 \notin G\overline{e_1}$ χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε πως η G δρά στο Y χωρίς αντιστροφές (και για να εξασφαλίσουμε πως η συνάρτηση αντίστροφης ακμής δεν σταθεροποιεί καμία ακμή). Επίσης, αν καμία ακμή του X δεν σταθεροποιείται απο κανένα μη μηδενικό στοιχείο της G, αν δηλαδή οι σταθεροποιούσες των ακμών του X είναι οι τετριμμένες, τότε η σχέση $e_2 \notin Ge_1$ μας εξασφαλίζει πως και οι σταθεροποιούσες των ακμών του Y μέσω της δράσης της G είναι και αυτές τετριμμένες. Εύκολα βλέπουμε πως αν έχουμε ένα δίπλωμα κατά μήκος ενός μορφισμού $f : X \to Z$, τότε έχουμε εναν μορφισμό $f' : Y \to Z$ τέτοιον ώστε $f = f' \circ p$. Λέμε ότι **το γράφημα** Υ **προκύπτει από το δίπλωμα** $\{e_1, e_2\}$ **στο γράφημα** X.

Λήμμα 4.2. Το γράφημα που προκύπτει από ένα δίπλωμα ακμών e_1, e_2 σε ένα G-δένδρο είναι και αυτό G-δένδρο.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 4.1. Έχουμε την ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση τις κορυφές, $C_0(X)$, και την $C_1(X)$ να είναι το πηλίκο της ελεύθερης αβελιανής ομάδας με βάση τις ακμές με την υποομάδα της που παράγεται από τα στοιχεία $e + \overline{e}$ για κάθε $e \in E(X)$. Έχουμε ακόμα τους ομομορφισμούς $\varepsilon_X : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ με $\varepsilon_X(v) = 1$ για κάθε $v \in V(X)$, και $d_X : C_1(X) \to C_0(X)$ με $d_x(e) = \tau(e) - \sigma(e)$ για κάθε $e \in E(X)$. Ομοίως έχουμε τις αντίστοιχες κατασκευές για το γράφημα $Y = X/\sim$.

Η δράση της G στο γράφημα X επάγει δράση στις ομάδες $C_0(X)$ και $C_1(X)$. Πράγματι για ένα $g \in G$ και ένα $m_1v_1 + ... + m_nv_n \in C_0(X)$ ορίζουμε και $g.(m_1v_1 + ... + m_nv_n) = m_1(g.v_1) + ... + m_n(g.v_n)$ και για ένα $m_1e_1 + ... + m_ne_n \in C_1(X)$ ορίζουμε $g.(m_1e_1 + ... + m_ne_n) = m_1(g.e_1) + ... + m_n(g.e_n)$ το οποίο είναι καλά ορισμένο αφού $g.(\overline{e}) = \overline{g.e} = -(g.e) = g.(-e)$. Παρατηρούμε επίσης πως ο ομομορφισμός d_X σέβεται την δράση, αφού

$d_X(g.e) = \tau(g.e) - \sigma(g.e) = g.\tau(e) - g.\sigma(e) = g.(\tau(e) - \sigma(e)) = g.d_X(e)$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $e \in E(X)$. Για την τετριμμένη δράση της G στο $\mathbb{Z}$, $g.n = n$, ο ομομορφισμός ε σέβεται και αυτός την δράση. Ομοίως έχουμε τις αντίστοιχες δράσεις της ομάδα G στις ομάδες $C_0(Y)$ και $C_1(Y)$ και οι ομομορφισμοί d_Y και ε_Y σέβονται την δράση της G.

Εύκολα επαληθεύουμε πως η ομάδα $C_1(Y)$ είναι το πηλίκο της ομάδας $C_1(X)$ με την υποομάδα της που παράγεται από την τροχία $G.(e_2 - e_1)$, και πως η ομάδα $C_0(Y)$ είναι το πηλίκο της ομάδας $C_0(X)$ με την υποομάδα της που παράγεται από την τροχία $G.(\tau(e_2 - \tau(e_1)) = G.(\tau(e_2 - \sigma(e_2) + \sigma(e_1) - \tau(e_1) = G.(d_X(e_2 - e_1) = d_X(G.(e_2 - e_1))$.
Ο ομομορφισμός $d_X : C_1(X) \to C_0(X)$ επάγει ομομορφισμό
$d'_X : C_1(X)/ < G.(e_2 - e_1) > \to C_0(X)/ < d_X(G.(e_2 - e_1)) >$ ο οποίος είναι ο ίδιος με τον ομομορφισμό $d_Y : C_1(Y) \to C_0(Y)$. Όμοια ο ομομορφισμός ε_Y επάγεται απο τον ομομορφισμό ε_X αν διαιρέσουμε το πεδίο ορισμού με την υποομάδα $G.(\tau(e_2 - \tau(e_1))$, (η οποία ανήκει στον πυρήνα $ker\varepsilon$).

Αφού τώρα το X είναι δένδρο, χρησιμοποιώντας το λήμμα 4.1 έχουμε πως $ker(d_X) = \{0\}$ και πως $ker(\varepsilon_X) = im(d_X)$. Από την προηγούμενη παράγραφο βλέπουμε πως $ker(d'_X) = ker(d_Y) = \{0\}$ και πως $ker(\varepsilon_Y) = im(d_Y)$, και έτσι χρησιμοποιώντας πάλι το λήμμα 4.1 έπεται πως το Y είναι και αυτό δένδρο. □

Καλούμε ένα G-γράφημα X **ελεύθερο στις ακμές** αν κάθε ακμή έχει τετριμμένη σταθεροποιούσα.

Λήμμα 4.3. Έστω $f : X \to Z$ ένας G-μορφισμός G-δένδρων με το γράφημα X να είναι ελεύθερο στις ακμές. Τότε υπάρχει μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο γράφημα X για την οποία ισχύουν τα εξής. (i) Έχουμε πως $f(x) = f(y)$ όταν $x \sim y$.
(ii) Το γράφημα $X/\sim$ είναι G-δένδρο το οποίο είναι ελεύθερο στις ακμές.

(iii) Το γράφημα $X/\sim$ δεν έχει κανένα δίπλωμα κατα μήκος του μορφισμού f', όπου $f' : X' \to Z$ είναι ο μορφισμός με $f = f' \circ p$.

Απόδειξη. Μπορούμε να δούμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο $E(X)$ ως ένα υποσύνολο R του συνόλου $E \times E$. Απλώς ορίζουμε $(a, b) \in R \iff a \sim b$. Έτσι μπορούμε να διατάξουμε το σύνολο των σχέσεων ισοδυναμίας με την σχέση του υποσυνόλου. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\sim$, μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $E(X) \mid$ (αν $x \sim y$ τότε $f(x) = f(y)$, $gx \sim gy$ και $\overline{x} \sim \overline{y}$) και ($\overline{x} \nsim gx$ για κάθε $x \in E(X)$ και $g \in G$) και (το γράφημα $X/\sim$ όπως περιγράφηκε μετά το λήμμα 4.1 είναι ένα ελεύθερο στις ακμές G-δένδρο)$\}$. Θεωρούμε το A ως μερικό διατεταγμένο σύνολο με την διάταξη των σχέσεων ισοδυναμίας που αναφέραμε στην αρχή. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του $Zorn$ για την ύπαρξη ενός μέγιστου στοιχείου στο A και θα δείξουμε πως μία μέγιστη σχέση του A ικανοποιεί τα $(i), (ii)$ και (iii) του λήμματος. Αρχικά το A είναι μή κενό αφού η τετριμμένη σχέση $x \sim y \iff x = y$ ανήκει στο A.

Δείχνουμε πρώτα πως ένα μέγιστο στοιχείο του συνόλου A ικανοποιεί τα $(i), (ii)$ και (iii). Έστω λοιπόν $\sim$ μια μέγιστη σχέση ισοδυναμίας του A. Τα (i) και (ii) ικανοποιούνται απευθείας από τον ορισμό του συνόλου A. Μένει να δείξουμε πως το γράφημα $X/\sim$ δεν έχει κανένα δίπλωμα κατά μήκος του μορφισμού f'. Έστω προς άτοπο πως το γράφημα $X/\sim$ έχει ένα δίπλωμα ακμών κατά μήκος του f' με αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας την $\sim'$, όπως κατασκευάστηκε πριν από το λήμμα 4.2. Μπορούμε να ανυψώσουμε την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας $\sim'$ του $E(X/\sim)$ σε μία σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ στο $E(X)$ η οποία θα περιέχει γνήσια την σχέση $\sim$. Πράγματι, αν ορίσουμε $x \equiv y \iff [x] \sim' [y]$, όπου $x, y \in E(X)$ και $[x], [y]$ οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας του γραφήματος $X/\sim$, εύκολα βλέπουμε πως το γράφημα $X/\equiv$ είναι ίδιο με το γράφημα $(X/\sim)/\sim'$, και συνεπώς εφαρμόζοντας το λήμμα 4.2 έχουμε πως το γράφημα $X/\equiv$ είναι δένδρο. Επίσης, επειδή είναι δίπλωμα κατά μήκος του μορφισμού f', πρέπει να ικανοποιεί όλες τις υπόλοιπες χαρακτηριστικές ιδιότητες των σχέσεων του συνόλου A. Άρα πράγματι ένα μέγιστο στοιχείο του συνόλου A ικανοποιεί τα $(i), (ii)$ και (iii) του λήμματος.

Έστω $\{R_i \mid i \in I\} \subseteq A$ μια αλυσίδα του A. Το ότι η ένωση $\bigcup_{i\in I} R_i$ είναι σχέση ισοδυναμίας και το ότι ικανοποιεί όλες τις συνθήκες για να ανήκει στο A εκτός από το ότι το γράφημα $X/(\{R_i \mid i \in I\})$ είναι δένδρο, είναι άμεσα επαληθεύσιμα από το γεγονός οτι το σύνολο $\{R_i \mid i \in I\}$ είναι αλυσίδα. Οπότε αρκεί να δείξουμε πως το γράφημα $X/(\bigcup_{i\in I} R_i)$ είναι δένδρο.

Χρησιμοποιώντας την προβολή $p : X \to X/(\bigcup_{i\in I} R_i)$, η οποία είναι επιμορφισμός, έχουμε πως επειδή το X είναι συνεκτικό, είναι συνεκτικό και το $X/(\bigcup_{i\in I} R_i)$. Έστω ένα κλειστό μονοπάτι στο $X/(\bigcup_{i\in I} R_i)$. Τότε έχουμε ακμές $e_1, ..., e_n, e_{n+1} = e_1$ στο X τέτοιες ώστε για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ να ισχύει πως $(\tau(e_i), \sigma(e_{i+1})) \in \bigcup_{i\in I} R_i$. Από αυτό έπεται πως για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ υπάρχουν ακμές e_{ij}, $j \in \{1, ..., m_i\}$ τέτοιες ώστε $\tau(e_{i1}) = \tau(e_i), \tau(e_{im_i}) = \sigma(e_{i+1})$ και $(\tau(e_{ij}), \tau(e_{i,j+1}) \in \bigcup_{i\in I} R_i)$. Άρα θα υπάρχουν $\alpha_{ij} \in I$ τέτοια ώστε $(\tau(e_{ij}), \tau(e_{i,j+1}) \in R_{\alpha_{ij}}$. Αφού τα $R_i, i \in I$ είναι αλυσίδα, υπάρχει ένα $\beta \in I$ τέτοιο ώστε $R_{\alpha_{ij}} \subseteq R_\beta$ για κάθε i και j. Τότε όμως οι ακμές $e_1, ...e_n$ πρέπει να είναι κλειστό μονοπάτι στο γράφημα X/R_β. Το γράφημα X/R_β είναι δένδρο και συνεπώς το κλειστό μονοπάτι αυτό δεν είναι ανηγμένο στο X/R_β και άρα και το αρχικό κλειστό μονοπάτι στο $X/(\bigcup_{i\in I} R_i)$ μέσω της προβολής από το X/R_β στο $X/(\bigcup_{i\in I} R_i)$ δεν μπορεί να είναι ανηγμένο ούτε αυτό. □

Λήμμα 4.4. Έστω $f : X \to Y$ ένας G-μορφισμός G-δένδρων με το X να είναι ελεύθερο στις ακμές και να μην υπάρχει δίπλωμα κατά μήκος του f. Τότε ισχύει ένα από τα δύο εξής. (i) ο επαγόμενος μορφισμός $f' : G\setminus X \to G\setminus Y$ με $f'(G.x) = G.f(x)$ είναι μονομορφισμός.

(ii) υπάρχει μια κορυφή $v \in V(X)$, μια ακμή $e \in E(Y)$ και κάποιο $g \in G$ τέτοια ώστε $\sigma(e) = f(v)$, $g.v = v$, $g.e = e$ και το g δεν σταθεροποιεί όλο το Y.

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο πως δεν ισχύει ούτε το (i) ούτε το (ii). Θα φτιάξουμε ένα δίπλωμα κατά μήκος του f.

Έστω πρώτα πως υπάρχουν κορυφές $v_1, v_2 \in V(X)$ τέτοιες ώστε $v_2 \notin G.v_1$ και $f(v_2) = g.f(v_1)$ για κάποιο $g \in G$. Αντικαθιστώντας το v_1 με το $g.v_1$ αν χρειαστεί, (αν $g \neq 1$ δηλαδή), μπορούμε να υποθέσουμε πως $f(v_1) = f(v_2)$, (η f ως μορφισμός G-γραφημάτων σέβεται την δράση της G). Διαλέγουμε v_1 και v_2 με $f(v_1) = f(v_2)$ και $v_2 \notin G.v_1$ όπως πριν, με την επιπλέον υπόθεση πως το ανηγμένο μονοπάτι p από την v_1 στην v_2, (το οποίο έχει θετικό μήκος αφού $v_2 \notin G.v_1$, και είναι μοναδικό αφού το X είναι δένδρο), έχει ελάχιστο μήκος, (ανάμεσα σε όλες αυτές τις επιλογές δυάδων κορυφών v_1, v_2). Τότε το μονοπάτι $f(p)$ είναι κλειστό μονοπάτι στο Y. Αφού το Y είναι δένδρο, έπεται πως το p γράφεται ως $p = (p_1, e_1, e_2, p_2)$, όπου τα e_1 και e_2 είναι ακμές τέτοιες ώστε $f(\overline{e_1}) = f(e_2)$.

Αν ίσχυε πως $e_2 \in Ge_1$, θα είχαμε πως $f(\overline{e_1}) \in G.f(e_1)$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει αφού η G δρά στο Y χωρίς αντιστροφές, (όπως έχουμε αναφέρει ξανά, όλες οι δράσεις που ασχολούμαστε είναι χωρίς αντιστροφές). Αφού έτσι και αλλιώς ισχύει πως $\sigma(e_2) = \sigma(\overline{e_1})$, αν ίσχυε επιπλέον πως $e_2 \notin G.\overline{e_1}$, τότε από τα παραπάνω έπεται πως οι ακμές $\overline{e_1}$ και e_2 δημιουργούν δίπλωμα κατά μήκος του f. Από την αρχική υπόθεση του λήμματος αυτό δεν μπορεί να συμβεί, οπότε $e_2 \in G.\overline{e_1}$, δηλαδή υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $\overline{e_1} = ge_2$. Άρα $g.f(e_2) = f(e_2)$ και $g.\sigma(e_2) = \sigma(e_2)$. Αφού υποθέσαμε ότι το (ii) δεν ισχύει, έπεται πως το g σταθεροποιεί όλο το Y, (θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το γεγονός ότι σταθεροποιεί την κορυφή $f(v_2)$). Αφού $\overline{e_1} = ge_2$, το μονοπάτι $g.p_2$ ξεκινάει από εκεί που τελειώνει το μονοπάτι p_1, και έτσι έχουμε το μονοπάτι $q = (p_1, g.p_2)$ με αρχή την κορυφή v_1 και τέλος την κορυφή $g.v_2$, οι οποίες κορυφές δεν είναι στην ίδια G-τροχιά. Παρατηρούμε επίσης πως $f(v_1) = f(v_2) = g.f(v_2) = f(g.v_2)$. Συνεπώς η δυάδα κορυφών $v_1, g.v_2$ αντιφάσκει με την επιλογή των κορυφών v_1, v_2 αφού το μονοπάτι q έχει μικρότερο μήκος από αυτό του μονοπατιού p, δηλαδή δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές v_1 και v_2.

Τώρα έστω πως υπάρχουν ακμές $e_1, e_2 \in E(X)$ τέτοιες ώστε $e_2 \in Ge_1$ και $f(e_2) \in G.f(e_1)$. Όπως και παραπάνω με τις κορυφές, μπορούμε να υποθέσουμε πως οι ακμές e_1, e_2 έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε $f(e_1) = f(e_2)$ και το ανηγμένο μονοπάτι από την κορυφή $\sigma(e_1)$ στην $\sigma(e_2)$ να έχει ελάχιστο μήκος. Τελείως όμοια με πρίν δημιουργείτε πάλι αντίφαση αν υποθέσουμε πως το μονοπάτι έχει θετικό μήκος. Αν το μονοπάτι αυτό έχει μηδενικό μήκος, δηλαδή αν $\sigma(e_1) = \sigma(e_2)$, τότε έχουμε δίπλωμα κατά μήκος του f αφού $f(e_1) = f(e_2)$, $e_2 \notin G.e_1$ και $e_2 \notin G.\overline{e_1}$, για τους ίδιους λόγους με την προηγούμενη περίπτωση, το οποίο είναι πάλι άτοπο. $\square$

Λήμμα 4.5. Έστω φ ένας μορφισμός από ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ με γράφημα X σε ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{H}$ με γράφημα Y. Έστω πως ο φ απεικονίζει ένα μέγιστο δένδρο T του X σε ένα μέγιστο δένδρο S του Y. Τότε ισχύουν τα εξής.

(i) Ο φ επάγει έναν ομομορφισμό από την ομάδα $\pi(\mathcal{G}, X, T)$ στην ομάδα $\pi(\mathcal{H}, Y, S)$ τέτοιον ώστε για κάθε $v \in V(X)$ ο περιορισμός του στην ομάδα G_v είναι ο ομομορφισμός
$\varphi_v : G_v \to H_{\varphi(v)}$ του αρχικού μορφισμού, (ξέρουμε από την πρόταση 2.2 πως οι ομάδες κορυφών εμφυτεύονται στη θεμελιώδη ομάδα μέσω της ταυτοτικής προβολής).

(ii) Έστω B ένας προσανατολισμός του Y και έστω $A = \varphi^{-1}(B)$ ο επαγόμενος προσανατολισμός του X. Τότε ο φ επάγει έναν μορφισμό από το καθολικό κάλυμμα $\widetilde{X}$ του $\mathcal{G}$ στο καθολικό κάλυμμα $\widetilde{Y}$ του $\mathcal{H}$, (φτιαγμένα με τους παραπάνω προσανατολισμούς), ο οποίος σέβεται την δράση της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$, δηλαδή να ισχύει πως $\varphi(g.x) = \varphi(g).\varphi(x)$ για κάθε $g \in \pi(\mathcal{G}, X, T)$ και για κάθε $x \in \widetilde{X}$.

Απόδειξη. Για το (i) χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.3. Για κάθε $v \in V(X)$ έχουμε τους ομομορφισμούς $\varphi_v : G_v \to H_{\varphi(v)}$ του μορφισμού φ. Από την πρόταση 2.2 έχουμε τους ομομορφισμούς $j_v \circ \varphi_v : G_v \to \pi(\mathcal{H}, Y, S)$ για κάθε $v \in V(X)$. Ορίζουμε $a_e = \varphi(e)$ για κάθε $e \in E(X)$ και αφού η φ απεικονίζει το μέγιστο δένδρο T του X στο μέγιστο δένδρο S του Y, έχουμε πως $\varphi(e) \in S$ για κάθε $e \in E(T)$, δηλαδή $a_e = \varphi(e) = 1$ για κάθε $e \in E(T)$ στην $\pi(\mathcal{H}, Y, S)$. Οι υποθέσεις του λήμματος 2.3 ικανοποιούνται και από την απόδειξη του λήμματος 2.3 βλέπουμε πως $a_v = 1$ για κάθε $v \in V(X)$, δηλαδή, έχουμε πράγματι ομομορφισμό, τον οποίο συμβολίζουμε πάλι με φ, $\varphi : \pi(\mathcal{G}, X, T) \to \pi(\mathcal{H}, Y, S)$ όπου ο περιορισμός του στην G_v είναι ο φ_v για κάθε $v \in V(X)$.

Για το (ii) έστω $\widetilde{X}$ και $\widetilde{Y}$ τα καθολικά καλύμματα των $\pi(\mathcal{G})$ και $\pi(\mathcal{H})$ κατασκευασμένα με το μέγιστο δένδρο T και τον προσανατολισμό A του X, και με το μέγιστο δένδρο S και τον προσανατολισμό B του Y, αντίστοιχα. Η ομάδα $\pi(\mathcal{H})$ δρά στο δένδρο $\widetilde{Y}$ και συνεπώς μέσω του ομομορφισμού $\varphi : \pi(\mathcal{G}, X, T) \to \pi(\mathcal{H}, Y, S)$ από το (i), έχουμε πως το $\widetilde{Y}$ είναι και $\pi(\mathcal{G}, X, T)$-δένδρο, μέσω της δράσης $g.y = \varphi(g).y$ για κάθε $g \in \pi(\mathcal{G}, X, T)$ και για κάθε $y \in \widetilde{Y}$. Τώρα εύκολα επαληθεύεται πως η απεικόνιση από το $\widetilde{X}$ στο $\widetilde{Y}$ που στέλνει ένα $[g, x]$, με $g \in \pi(\mathcal{G}, X, T)$ και $x \in V(X) \cup E(X)$, στο $[\varphi(g), \varphi(x)]$ είναι ένας καλά ορισμένος μορφισμός γραφημάτων ο οποίος σέβεται την δράση της $\pi(\mathcal{G}, X, T)$. $\square$

Με όλα τα παραπάνω τεχνικά λήμματα, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το σχετικό θεώρημα.

Θεώρημα 4.2. Έστω I ένα σύνολο δεικτών, και έστω G_i και H_i ομάδες και $\varphi_i : G_i \to H_i$ ένας ομομορφισμός, για κάθε $i \in I$. Έστω $\Phi : *_{i\in I} G_i \to *_{i\in I} H_i$ ο επαγόμενος ομομορφισμός των φ_i, και έστω A μια υποομάδα της $*_{i\in I} G_i$ τέτοια ώστε $\Phi(A) = *_{i\in I} H_i$. Τότε υπάρχουν υποομάδες $A_i \leq A$ για κάθε $i \in I$ τέτοιες ώστε $A = *_{i\in I} A_i$ και $\Phi(A_i) = H_i$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Έστω Y το γράφημα άστρο με κορυφές $V(Y) = I \cup \{o\}$ και ακμές $E(Y) = \{e_i, \overline{e_i} \mid i \in I\}$ με $\sigma(e_i) = o$ και $\tau(e_i) = i$ για κάθε $i \in I$, όπως στο παράδειγμα (2) του κεφαλαίου 2.2. Έστω $\mathcal{G}$ το γράφημα ομάδων στο γράφημα Y με τετριμμένες ομάδες ακμών και για κάθε κορυφή $i \in I$ η αντίστοιχη ομάδα κορυφής να είναι η G_i. Ομοίως ορίζουμε και το γράφημα ομάδων $\mathcal{H}$ με ομάδες κορυφών H_i και τετριμμένες ομάδες ακμών. Όπως είχαμε δεί και στο παράδειγμα (2), έχουμε πως $\pi(\mathcal{G}) = *_{i\in I} G_i$ και $\pi(\mathcal{H}) = *_{i\in I} H_i$. Οι υποθέσεις του θεωρήματος μας δίνουν έναν μορφισμό μεταξύ των γραφημάτων ομάδων $\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$. Αν X είναι το καθολικό κάλυμμα του $\mathcal{G}$ και $\widetilde{Y}$ το καθολικό κάλυμμα του $\mathcal{H}$, τότε εφαρμόζοντας το λήμμα 4.5, έχουμε έναν $\pi(\mathcal{G})$-μορφισμό μεταξύ των $\pi(\mathcal{G})$-γράφημάτων X και $\widetilde{Y}$. Περιορίζοντας την δράση στα καθολικά καλύμματα στην υποομάδα A της $\pi(\mathcal{G}) = *_{i\in I} G_i$, έχουμε τον A-μορφισμό $\widetilde{\Phi} : X \to \widetilde{Y}$ με $\widetilde{\Phi}([g, x]) = [\Phi(g), x]$ για κάθε $g \in \pi(\mathcal{G})$ και κάθε $x \in V(Y) \cup E(Y)$, ο οποίος είναι επί αφού ο ομομορφισμός Φ είναι επί από υπόθεση. Αφού από την υπόθεση έχουμε πως $\Phi(A) = *_{i\in I} H_i = \pi(\mathcal{H})$, έπεται για το γράφημα πηλίκο πως $A \setminus \widetilde{Y} = Y$. Επίσης, αφού η δράση της $*_{i\in I} H_i$ στο $\widetilde{Y}$ είναι ελεύθερη στις ακμές, ένα στοιχείο της A που σταθεροποιεί μια ακμή του $\widetilde{Y}$ πρέπει να σταθεροποιεί όλο το $\widetilde{Y}$.

Από το θεώρημα 3.1 του προηγούμενου κεφαλαίου, τα καθολικά καλύμματα X και $\widetilde{Y}$ είναι δένδρα, και αν τα δούμε ως A-δένδρα όπως στην προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιώντας το λήμμα 4.3 με $\widetilde{\Phi}$ τον αρχικό A-μορφισμό, έχουμε πως υπάρχει ένα ελεύθερο στις ακμές A-δένδρο Z και ένας A-μορφισμός $f : Z \to \widetilde{Y}$ για τον οποίο δεν υπάρχει κανένα δίπλωμα κατά μήκος του. Ο f είναι επί γιατί ο $\widetilde{\Phi}$ είναι επί και έχουμε πως $\widetilde{\Phi} = f \circ p$. Χρησιμοποιώντας τώρα το λήμμα 4.4 στον μορφισμό f, από τις παραπάνω παρατηρήσεις για την δράση της A στο $\widetilde{Y}$, έπεται από το λήμμα πως ο επαγόμενος μορφισμός $f' : A \setminus Z \to Y = A \setminus \widetilde{Y}$ με $f'(A.z) = A.f(z)$, πρέπει να είναι μονομορφισμός. Επίσης, ο f' πρέπει να είναι και επί αφού ο f είναι επί. Συνεπώς τα γραφήματα $A \setminus Z$ και Y είναι ισόμορφα και έτσι μπορούμε να τα ταυτίσουμε.

Έστω τώρα η απεικόνιση $j : A \setminus \widetilde{Y} = Y = A \setminus Z \to \widetilde{Y}$ με $j(y) = [1, y]$ όπως είχαμε ορίσει στον ορισμό του καθολικού καλύμματος. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε μια απεικόνιση $k : Y \to Z$ τέτοια ώστε $f \circ k = j$, τότε αφού το Z είναι δένδρο από το θεώρημα 3.2 έπεται πως $A = *_{i \in I} A_i$ όπου $A_i = Stab(k(i))$ για κάθε $i \in I$. Επίσης, $\Phi(A_i) \subseteq Stab(f(k(i))) = H_i$ για κάθε $i \in I$. Αφού $\Phi(A) = *_{i \in I} H_i$, πρέπει και $\Phi(A_i) = H_i$ για κάθε $i \in I$. Θα δείξουμε πως υπάρχει μια τέτοια k και η απόδειξη θα είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι πρέπει να υπάρχει μια κορυφή $v \in Z$ τέτοια ώστε $f(u) = [1, v]$, αφού $\widetilde{\Phi} = f \circ p$ και ο $\widetilde{\Phi}$ είναι επιμορφισμός. Επίσης, πρέπει να υπάρχει μια ακμή $z_i \in E(Z)$ με $\sigma(z_i) = v$ και $f(z_i) = [h, i]$ για κάποιο $h \in *_{i \in I} H_i$. Έχουμε πως $[1, v] = f(v) = f(\sigma(z_i)) = \sigma(f(z_i)) = \sigma([h, e_i) = [h, v]$. Αφού η ομάδα κορυφής στο γράφημα ομάδων $\mathcal{H}$ της κορυφής v είναι η τετριμμένη, έπεται πως $h = 1$. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε την k με $k(v) = u$, $k(e_i) = zi$, $k(\overline{e_i}) = \overline{z_i}$ και $k(i) = \tau(z_i)$ για κάθε $i \in I$. $\square$

Πόρισμα 1. (Το θεώρημα του *Ghrusko*) Έστω F μια ελεύθερη ομάδα, $*_{i \in I} H_i$ το ελεύθερο γινόμενο κάποιων H_i, $i \in I$, και ένας επιμορφισμός $\varphi : F \to *_{i \in I} H_i$. Τότε η F είναι το ελεύθερο γινόμενο κάποιων υποομάδων F_i με $\varphi(F_i) = H_i$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Έστω $G_i = \varphi^{-1}(H_i)$ και $\varphi_i = \varphi \mid_{G_i}$ για κάθε $i \in I$, και έστω $\Phi : *_{i \in I} G_i \to *_{i \in I} H_i$ ο επαγόμενος ομομορφισμός των φ_i. Αφού ο φ είναι επί, έχουμε πως $\varphi(G_i) = H_i$ για κάθε $i \in I$, και συνεπώς ο Φ είναι επί. Έστω $\theta : *_{i \in I} G_i \to F$ ο ομομορφισμός ο οποίος είναι η ταυτοτική προβολή στις G_i για κάθε $i \in I$, δηλαδή να ισχύει πως $\Phi = \varphi \circ \theta$. Αφού για κάθε $i \in I$ έχουμε πως $ker\varphi \subseteq G_i$, έπεται πως $ker\varphi \subseteq im\theta$.

Από τα παραπάνω έπεται πως ο θ είναι επί. Πράγματι, έστω ένα $x \in F$. Αφού ο Φ είναι επί, υπάρχει $y \in *_{i\in I}G_i$ τέτοιο ώστε $\varphi(\theta(y)) = \Phi(y) = \varphi(x)$. Άρα $\varphi(\theta(y))^{-1}\varphi(x) = 1 \iff \varphi(\theta(y)^{-1}x) = 1 \iff \theta(y)^{-1}x \in ker\varphi \iff x \in \theta(y)ker\varphi$, δηλαδή $x \in im\theta$ αφού $\theta(y) \in im\theta$ και $ker\varphi \subseteq im\theta$.

Έστω τώρα X μια βάση της ελεύθερης ομάδας F. Αφού η θ είναι επί, μπορούμε να επιλέξουμε στοιχεία $y_x \in *_{i\in I}G_i$ με $\theta(y_x) = x \iff y_x \in \theta^{-1}(x)$ για κάθε $x \in X$, (αξίωμα επιλογής). Αφού τώρα η F είναι ελεύθερη, μπορούμε να ορίσουμε έναν ομομορφισμό $\psi : F \to *_{i\in I}G_i$ με $\psi(x) = y_x$ για κάθε $x \in X$. Τότε βλέπουμε πως $\theta(\psi(x)) = \theta(y_x) = x$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $\theta \circ \psi = Id_F$ αφού το X είναι βάση της F. Συνεπώς η ψ είναι ένα προς ένα, και έτσι η F εμφυτεύεται στην ομάδα $*_{i\in I}G_i$. Έχουμε πως $\Phi(\psi(F)) = \varphi(\theta(\psi(F)) = \varphi(F) = *_{i\in I}H_i$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.2 στον ομομορφισμό Φ με την υποομάδα του $\psi(F)$, και έτσι έχουμε υποομάδες A_i της $\psi(F)$ τέτοιες ώστε $\psi(F) = *_{i\in I}A_i$ και $\Phi(A_i) = H_i$ για κάθε $i \in I$. Αφού ο $\psi : F \to \psi(F)$ είναι ισομορφισμός, έχουμε πως $F = *_{i\in I}F_i$, όπου $F_i = \psi^{-1}(A_i) \iff \psi(F_i) = A_i$ για κάθε $i \in I$. Τέλος, για κάθε $i \in I$ παρατηρούμε πως $H_i = \Phi(A_i) = \Phi(\psi(F_i)) = \varphi(\theta(\psi(F_i))) = \varphi(F_i)$ αφού $\Phi = \varphi\circ\theta$ και $\theta\circ\psi = Id_F$. □

Έστω μια ομάδα G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Έστω A το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων της G που παράγουν την G. Καλούμε $rank(G)$ τον φυσικό αριθμό n όπου υπάρχει $S \in A$ με $|S| = n$ και $|S| \leq |D|$ για κάθε $D \in A$, δηλαδή τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με τον οποίο η G μπορεί να παραχθεί με n στοιχεία. Ξέρουμε από τη στοιχειώδη θεωρία των ελευθέρων ομάδων πως αν G και H ελεύθερες ομάδες με πεπερασμένο $rank$, τότε $rank(G*H) = rank(G)+rank(H)$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται ως εξής.

Πόρισμα 2. Έστω A και B πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες με $rank(A) = m$ και $rank(B) = n$. Τότε $rank(A * B) = m + n$.

Απόδειξη. Προφανώς $rank(A * B) \leq m + n$, αφού η ομάδα $A * B$ παράγεται από την ένωση ενός συνόλου γεννητόρων της A και ενός συνόλου γεννητόρων της B. Έστω πως $rank(A*B) = r$. Τότε υπάρχει επιμορφισμός $\varphi : F \to A*B$, όπου F η ελεύθερη ομάδα με $rank(F) = r$. Εφαρμόζοντας το πόρισμα 1 στον επιμορφισμό φ, έχουμε υποομάδες F_1, F_2 της F τέτοιες ώστε $F = F_1 * F_2$ με $\varphi(F_1) = A$ και $\varphi(F_2) = B$. Άρα $rank(F_1) \geq m$ και $rank(F_2) \geq n$, αφού αν για παράδειγμα $rank(F_1) < m$, τότε μέσω του επιμορφισμού $\varphi|_{F_1}$ η ομάδα A θα παράγεται με $rank(F_1)$ στοιχεία τα οποία θα είναι λιγότερα απο $m = rank(A)$ στοιχεία, το οποίο είναι άτοπο. Από το θεώρημα *Schreier* οι ομάδες F_1 και F_2 είναι ελεύθερες ως υποομάδες ελεύθερης ομάδας, άρα έχουμε πως $r = rank(A*B) = rank(F) = rank(F_1 * F_2) = rank(F_1) + rank(F_2) \geq m + n$. □

Αναφορές

[1] *Daniel E. Cohen*, *Combinatorial Group Theory: a topological approach*, *Cambridge University Press*, 1989.

[2] *Jean-Pierre Serre*, *Trees*, *Springer Berlin*, *Heidelberg*, 1980.

[3] *Hyman Bass*, *Covering theory for graphs of groups*, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1993.

[4] *Gilbert Baumslag*, *Topics in Combinatorial Group Theory*, *Springer-Verlag*, 1993.

[5] *Joseph J. Rotman*, *An introduction to the Theory of Groups*, *Springer-Verlag*, 1995.

[6] *Graham Higman*, *B.H. Neumann Hanna Neumann*, *Embedding Theorems for Groups*, *Journal of the London Mathematical Society*, $Volume\ s1-24$, 1949.