

Ομοτοπικές Ιδιότητες Επίπεδων Προτύπων

Διπλωματική Εργασία
Χρήστος Ζωγλοπίτης

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Εμμανουήλ



Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σεπτέμβρης 2022

Τριμελής Επιτροπή

Ιωάννης Εμμανουήλ, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Μιχαήλ Μαλιάκας, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Μιχαήλ Συκιώτης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα πρώτα απ'όλα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Εμμανουήλ που ανέλαβε την επίβλεψη της διπλωματικής μου εργασίας, για τον προσωπικό χρόνο που αφιέρωσε και για την άριστη συνεργασία που είχαμε. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για όσα με έμαθε κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών, τα οποία καθόρισαν σε μεγάλο βαθμό τα μαθηματικά μου ενδιαφέροντα.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω του κυρίου Μιχαήλ Μαλιάκα και Μιχαήλ Συκιώτη για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Ιδιαίτέρως, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον κύριο Συκιώτη για τις πολύ βοηθητικές και ειλικρινείς συζητήσεις που είχαμε.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αμέριστη στήριξη που μου παρέχει σε ό,τι αφορά τις σπουδές μου και όχι μόνο.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Επίπεδα Πρότυπα και το Θεώρημα Govorov-Lazard	4
1.1 Επίπεδα Πρότυπα	4
1.2 Συνόρια Προτύπων	9
1.3 Το Θεώρημα Govorov-Lazard	25
2 Συμπλέγματα και σχετικές κατασκευές	31
2.1 Βασικοί ορισμοί	31
2.2 Συνόρια συμπλεγμάτων R -προτύπων	40
2.3 Κατασκευές συμπλεγμάτων R -προτύπων	42
3 Η κατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp$	50
3.1 Ισοδύναμες περιγραφές της κατηγορίας $K(R\text{-Proj})^\perp$	50
3.2 Η συμπεριφορά της $K(R\text{-Proj})^\perp$ ως προς τανυστικά γινόμενα	65

Εισαγωγή

Τα επίπεδα πρότυπα εισήχθησαν από τον J.P.Serre το 1956 στον κλάδο της Αλγεβρικής Γεωμετρίας ως τα κατάλληλα πρότυπα που διατηρούν την ομαλότητα των ινών ενός μορφισμού σχημάτων. Έκτοτε, έχουν μελετηθεί εκτενώς και όπως φαίνεται η σημασία τους δεν περιορίζεται στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Εξίσου σημαντική είναι η συμβολή τους στη θεωρία Δακτυλίων αλλά και στην Ομολογική Άλγεβρα. Εξάλλου, οι δύο επικρατέστεροι ορισμοί των επίπεδων προτύπων είναι ομολογικού χαρακτήρα: ως τα πρότυπα M για τα οποία ο συναρτητής $\square \otimes M$ είναι ακριβής και ως τα πρότυπα για τα οποία ο συναρτητής Tor μηδενίζεται για κάθε $n \geq 1$. Κάπως πιο απροσδόκητα, η έννοια η έννοια της επιπεδότητας βρίσκει χρήση στην Ανάλυση και πιο συγκεκριμένα στην Θεωρία των Αλγεβρών Banach, όπου συνδέεται με την έννοια των amenable αλγεβρών Banach [1].

Πίσω στην Άλγεβρα, ενδεικτικά αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα που φανερώνουν τη σχέση των επίπεδων προτύπων με άλλες γνωστές κλάσεις προτύπων. Τα επίπεδα πρότυπα γενικεύουν τα προβολικά και τα ελεύθερα πρότυπα, ενώ σχετίζονται με τα εμφυτευτικά πρότυπα μέσω του Θεωρήματος του Lambek σύμφωνα με το οποίο ένα R -πρότυπο M είναι επίπεδο αν και μόνο αν το δεξιό R -πρότυπο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι εμφυτευτικό. Επίσης, κάθε επίπεδο R -πρότυπο πάνω από μία ακέραια περιοχή R είναι ελεύθερο στρέψης, ενώ χαρακτηρισμοί των coherent και των Von Neumann κανονικών δακτυλίων μπορούν να δωθούν χρησιμοποιώντας την έννοια της επιπεδότητας. Ιδιαίτερη έμφαση έχει δοθεί στη σχέση μεταξύ των προβολικών/ελεύθερων και των επίπεδων προτύπων. Μεγάλης σημασίας είναι το θεώρημα των Gorenson-Lazard, οι οποίοι ανεξάρτητα έδειξαν [7], [8] ότι ένα πρότυπο είναι επίπεδο αν και μόνο αν είναι filtered συνόριο πεπερασμένα παραγόμενων και ελεύθερων προτύπων. Πιο γενικά, ο Bass έδειξε [2] ότι οι δακτύλιοι πάνω από τους οποίους οι έννοιες των προβολικών και των επίπεδων προτύπων ταυτίζονται είναι ακριβώς οι αριστερά τέλει δακτύλιοι. Είναι εύκολο να δούμε ότι για πεπερασμένα παριστώμενα R -πρότυπα οι δύο παραπάνω έννοιες ταυτίζονται για κάθε δακτύλιο R . Φυσιολογικά λοιπόν προκύπτει το ερώτημα αν αυτό εξακολουθεί να ισχύει για πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα. Η απάντηση είναι αρνητική: αν $R = \prod_{i \in \mathbb{N}} F_i$ ένα άπειρο καρτεσιανό γινόμενο σωμάτων και $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} F_i$, τότε το R -πρότυπο R/I είναι πεπερασμένα παραγόμενο και επίπεδο αλλά δεν είναι προβολικό. Στην περίπτωση ωστόσο που ο δακτύλιος R είναι της Noether, ή είναι ένας τοπικός δακτυλίου ή μία περιοχή κυρίων ιδεωδών, τότε ένα πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο είναι επίπεδο αν και μόνο αν είναι προβολικό.

Στην παρούσα εργασία, θα μελετήσουμε ομοτοπικές ιδιότητες των επίπεδων R -προτύπων πάνω από οποιοδήποτε δακτύλιο με μονάδα R . Πιο συγκεκριμένα, συμβολίζοντας με $K(R\text{-Proj}) \subseteq K(R\text{-Flat})$ τις ομοτοπικές κατηγορίες των συναλυσωτών συμπλεγμάτων των

προβολικών και των επίπεδων R -προτύπων αντίστοιχα, θα μελετήσουμε την υποκατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp$ που αποτελείται από τα συμπλέγματα επίπεδων R -προτύπων Y για τα οποία κάθε μορφισμός συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$ από κάποιο σύμπλεγμα προβολικών R -προτύπων είναι ομοτοπικός με το μηδενικό μορφισμό, δηλαδή $\text{Hom}_{K(R\text{-Flat})}(X, Y) = 0$. Μεταξύ των άλλων, η παραπάνω υποκατηγορία εμφανίζεται φυσιολογικά ως εξής: συμβολίζοντας με $i : K(R\text{-Proj}) \rightarrow K(R\text{-Flat})$ τον συναρτητή-εγκλεισμό, χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της Θεωρίας Τριγωνισμένων Κατηγοριών και της Αναπαραστασιμότητας Brown, προκύπτει ότι ο παραπάνω συναρτητής επιδέχεται κάποιο δεξιό προσαρτημένο συναρτητή $j : K(R\text{-Flat}) \rightarrow K(R\text{-Proj})$. Είναι τότε άμεσο ότι η υποκατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp$ είναι ο πυρήνας του j . Στόχος μας είναι να δείξουμε τους ακόλουθους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της παραπάνω υποκατηγορίας.

Έστω C ένα σύμπλεγμα επίπεδων R -προτύπων. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) $C \in K(R\text{-Proj})^\perp$.
- (ii) Το C γράφεται ως filtered συνόριο συστατών συμπλεγμάτων από πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά R -πρότυπα.
- (iii) Το C είναι άκυκλο και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η εικόνα $\partial^n(C^n)$ είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο.
- (iv) Για κάθε σύμπλεγμα δεξιών R -προτύπων X , το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $X \otimes_R C$ είναι άκυκλο.
- (v) Για κάθε δεξιό R -πρότυπο M , το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $M \otimes_R C$ είναι άκυκλο.
- (vi) Για κάθε πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο N , το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(N, C)$ είναι άκυκλο.

Το παραπάνω αποτέλεσμα βρίσκεται στην εργασία [9] του Neeman. Η βασική δυσκολία έγκειται στην απόδειξη του (i) $\implies$ (ii) η οποία κατά κάποιο τρόπο γενικεύει το Θεώρημα Gorenson-Lazard, όπως και στην απόδειξη της συνεπαγωγής (iii) $\implies$ (i).

Κάποια γρήγορα αλλά καθόλου τετριμμένης σημασίας πορίσματα είναι τα παρακάτω. Έστω C ένα άκυκλο συναλυσωτό σύμπλεγμα προβολικών προτύπων τέτοιο ώστε η εικόνα $B^n = \partial^n(C^n)$ να είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο για κάθε ακέραιο n . Η συνεπαγωγή (iii) $\implies$ (i) μας πληροφορεί ότι το σύμπλεγμα C είναι συστατό. Επίσης, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι τότε το B^n είναι ευθύς προσθετός του προβολικού R -πρότυπου C^n και άρα είναι και αυτό με τη σειρά του προβολικό. Συνεπώς, κάθε R -πρότυπο το οποίο εμφανίζεται σαν την εικόνα του διαφορικού κάποιου συμπλέγματος με αυτές τις ιδιότητες, είναι αναγκαστικά προβολικό.

Στη συνέχεια περιγράφουμε τη δομή της εργασίας. Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τα επίπεδα πρότυπα, θα μελετήσουμε τα συνόρια προτύπων και θα αποδείξουμε το θεώρημα Gorenson-Lazard. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μιλήσουμε για συμπλέγματα R -προτύπων και για κάποιες συγκεκριμένες κατασκευές συμπλεγμάτων. Τα παραπάνω κεφάλαια οργανώθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να περιέχουν τα απαραίτητα εργαλεία που θα χρειαστούμε στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας το

οποίο είναι αφιερωμένο στην απόδειξη των χαρακτηρισμών της υποκατηγορίας $K(R\text{-Proj})^\perp$ που αναφέραμε προηγουμένως. Η απόδειξη που θα ακολουθήσουμε βρίσκεται στην εργασία [9] του A. Neeman, με εξαίρεση την απόδειξη της κρίσιμης συνεπαγωγής (iii) $\implies$ (i), όπου κινηθήκαμε με βάση την απόδειξη του Θεωρήματος 3.6 που βρίσκεται στην εργασία [6] του I. Εμμανουήλ. Η συγκεκριμένη προσέγγιση προτιμήθηκε διότι αποφεύγει πλήρως τη θεωρία των Τριγωνίσμων Κατηγοριών που χρησιμοποιεί ο Neeman, ενώ χρησιμοποιεί πιο στοιχειώδη εργαλεία.

Σχετικά με τους συμβολισμούς που θα ακολουθήσουμε, καθ'όλη την πορεία της εργασίας, με R θα συμβολίζουμε έναν όχι απαραίτητα μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα. Μιλώντας για ένα R -πρότυπο, θα εννοούμε ένα αριστερό R -πρότυπο, ενώ όταν θα θέλουμε να αναφερθούμε σε κάποιο δεξιό R -πρότυπο, θα τονίζουμε τη λέξη "δεξιό". Τέλος, με $R\text{-Mod}$ θα συμβολίζουμε την κατηγορία των (αριστερών) R -προτύπων.

Κεφάλαιο 1

Επίπεδα Πρότυπα και το Θεώρημα Govorov-Lazard

1.1 Επίπεδα Πρότυπα

Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας τον ορισμό των επίπεδων R -προτύπων και μελετώντας τη σχέση των πεπερασμένα παριστώμενων και των επίπεδων R -προτύπων.

Ορισμός 1.1.1. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται *επίπεδο* αν ο συναρτητής $\square \otimes_R M : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ είναι ακριβής. Επειδή ο συναρτητής $\square \otimes_R M$ είναι δεξιά ακριβής για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , έπεται ότι το M είναι επίπεδο αν και μόνο αν για κάθε μονομορφισμό δεξιών R -προτύπων $f : N \rightarrow N'$, ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f \otimes 1_M : N \otimes_R M \rightarrow N' \otimes_R M$ είναι επίσης μονομορφισμός.

Αντίστοιχη είναι η έννοια των επίπεδων δεξιών R -προτύπων.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει κάποια πρώτα και άμεσα παραδείγματα επίπεδων R -προτύπων.

Πρόταση 1.1.2. Για έναν δακτύλιο R , ισχύουν τα ακόλουθα.

- (i) Το R είναι επίπεδο ως αριστερό R -πρότυπο.
- (ii) Το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{i \in I} M_i$ είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο αν και μόνο αν το M_i είναι επίπεδο για κάθε $i \in I$.
- (iii) Κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο είναι επίπεδο.

Απόδειξη. (i): Έστω $f : N \rightarrow N'$ ένας μονομορφισμός δεξιών R -προτύπων. Συμβολίζοντας με $\phi_N : N \otimes_R R \rightarrow N$ (αντίστοιχα για το N') τον φυσικό ισομορφισμό για τον οποίο $n \otimes r \mapsto nr$, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό τετράγωνο.

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R R & \xrightarrow{f \otimes 1_R} & N' \otimes_R R \\ \phi_N \downarrow & & \downarrow \phi_{N'} \\ N & \xrightarrow{f} & N' \end{array}$$

Έπεται λοιπόν ότι ο ομομορφισμός $f \otimes 1_R$ είναι 1-1 και έτσι το R είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο.

- (ii): Έστω $f : N \rightarrow N'$ ένας μονομορφισμός δεξιών R -προτύπων. Συμβολίζουμε με $\lambda_i : M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, $\mu_i : N \otimes_R M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} (N \otimes_R M_i)$ και $\mu'_i : N' \otimes_R M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} (N' \otimes_R M_i)$ τις κανονικές ενθέσεις. Επίσης θέτουμε

$$\theta_N : N \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (N \otimes_R M_i)$$

(αντίστοιχα για το N') τον φυσικό ισομορφισμό αβελιανών ομάδων για τον οποίο

$$n \otimes \left(\sum_{i \in I} \lambda_i(m_i) \right) \mapsto \sum_{i \in I} \mu_i(n \otimes m_i).$$

Η φυσικότητα του παραπάνω ισομορφισμού μας δίνει ότι το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) & \xrightarrow{f \otimes 1_{\bigoplus_{i \in I} M_i}} & N' \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \\ \theta_N \downarrow & & \downarrow \theta_{N'} \\ \bigoplus_{i \in I} (N \otimes_R M_i) & \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} (f \otimes 1_{M_i})} & \bigoplus_{i \in I} (N' \otimes_R M_i) \end{array}$$

όπου με

$$\bigoplus_{i \in I} (f \otimes 1_{M_i}) : \bigoplus_{i \in I} (N \otimes_R M_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (N' \otimes_R M_i)$$

συμβολίσαμε τον ομομορφισμό που επάγεται στα ευθέα αθροίσματα για τον οποίο

$$\sum_{i \in I} \mu_i(n \otimes m_i) \mapsto \sum_{i \in I} \mu'_i(f(n) \otimes m_i).$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος ομομορφισμός είναι 1-1 αν και μόνο αν κάθε παράγοντας $f \otimes 1_{M_i} : N \otimes_R M_i \rightarrow N' \otimes_R M_i$ είναι 1-1. Από τη μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος και το γεγονός ότι οι θ_N και $\theta_{N'}$ είναι ισομορφισμοί, έπεται το ζητούμενο.

- (iii): Κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο είναι ευθύς προσθετός του $R^{(I)}$ για κάποιο σύνολο I , οπότε από το (i) και το (ii) θα είναι επίπεδο. □

Σημειώνουμε ότι το αντίστοιχο αποτέλεσμα δεν ισχύει για το καρτεσιανό γινόμενο προτύπων. Μάλιστα, ο Chase έδειξε στο [5] ότι οι δακτύλιοι για τους οποίους τα καρτεσιανά γινόμενα επίπεδων δεξιών R -προτύπων είναι επίσης επίπεδα δεξιά R -πρότυπα, είναι ακριβώς οι left coherent δακτύλιοι (δηλαδή οι δακτύλιοι των οποίων τα πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά ιδεώδη είναι πεπερασμένα παριστώμενα).

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη σχέση των επίπεδων και των πεπερασμένα παριστώμενων R -προτύπων. Έχοντας αυτό το στόχο, παρουσιάζουμε τα ακόλουθα δύο λήμματα που μας βοηθούν να αναγνωρίζουμε τα πεπερασμένα παριστώμενα R -πρότυπα.

Λήμμα 1.1.3. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R -πρότυπο M είναι πεπερασμένα παριστώμενο.

Απόδειξη. Επειδή το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, υπάρχει κάποιο R -πρότυπο Q έτσι ώστε το $F = M \oplus Q$ να είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο. Το Q είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο ως ευθύς προσθετός του πεπερασμένα παραγόμενου R -πρότυπου M . Έπεται ότι $M \cong F/Q$ και άρα το M είναι πεπερασμένα παριστώμενο. $\square$

Λήμμα 1.1.4. (i) Έστω μία ακριβής ακολουθία R -προτύπων

$$M_1 \xrightarrow{a} M_2 \xrightarrow{b} M_3 \longrightarrow 0 ,$$

με το M_1 να είναι πεπερασμένα παραγόμενο και το M_2 να είναι πεπερασμένα παριστώμενο. Τότε το M_3 είναι ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο.

(ii) Έστω $f : M_1 \rightarrow M_2$ ένας ομομορφισμός R -προτύπων. Αν το M_1 είναι πεπερασμένα παραγόμενο και το M_2 είναι πεπερασμένα παριστώμενο, τότε ο συνπυρήνας $\operatorname{coker} f$ είναι ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο.

Απόδειξη. (i) Εφόσον το M_1 είναι πεπερασμένα παραγόμενο και το M_2 είναι πεπερασμένα παριστώμενο, βρίσκουμε ένα επιμορφισμό $f : R^k \rightarrow M_1$ και μία ακριβή ακολουθία της μορφής

$$R^m \xrightarrow{g} R^n \xrightarrow{h} M_2 \longrightarrow 0$$

για κάποια $k, m, n \in \mathbb{N}$. Για τις R -γραμμικές απεικονίσεις $a \circ f : R^k \rightarrow M_2$ και $h : R^n \rightarrow M_2$ είναι $\operatorname{im}(a \circ f) \subseteq M_2 = \operatorname{im} h$, οπότε υπάρχει κάποια R -γραμμική απεικόνιση $d : R^k \rightarrow R^n$ έτσι ώστε $h \circ d = a \circ f$. Θεωρούμε την R -γραμμική απεικόνιση $e : R^k \oplus R^m \rightarrow R^n$ που επεκτείνει τις d και g και σχηματίζουμε την ακολουθία

$$R^k \oplus R^m \xrightarrow{e} R^n \xrightarrow{b \circ h} M_3 \longrightarrow 0$$

που εύκολα προκύπτει ότι είναι ακριβής. Τελικά, το R -πρότυπο M_3 είναι πεπερασμένα παριστώμενο.

(ii) Σχηματίζουμε την ακριβή ακολουθία

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{p} \operatorname{coker} f \longrightarrow 0 ,$$

οπότε από το (i) έχουμε ότι ο συνπυρήνας $\operatorname{coker} f$ είναι ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο. $\square$

Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και I ένα (R, R) -διπρότυπο. Τότε η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_R(M, I)$ γίνεται ένα δεξιό R -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό

$$\begin{aligned} f \cdot r &: M \rightarrow I \\ m &\mapsto f(m)r \in I, \end{aligned}$$

για $f \in \text{Hom}_R(M, I)$ και $r \in R$. Έτσι, για κάθε αριστερό R -πρότυπο Z σχηματίζεται η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_R(M, I) \otimes_R Z$ και μπορούμε να ορίσουμε τον ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\phi : \text{Hom}_R(M, I) \otimes_R Z \rightarrow \text{Hom}_R(M, I \otimes_R Z),$$

όπου για $f \in \text{Hom}_R(M, I)$ και $z \in Z$, είναι

$$\begin{aligned} \phi(f \otimes z) &: M \rightarrow I \otimes_R Z \\ m &\mapsto f(m) \otimes z. \end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο ϕ είναι φυσικός και στις τρεις μεταβλητές M, I, Z και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό ϕ_M για να δείξουμε την εξάρτηση από το M , έχουμε την ακόλουθη πολύ χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 1.1.5. Έστω M ένα πεπερασμένα παριστώμενο αριστερό R -πρότυπο, I ένα (R, R) -διπρότυπο και Z ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο. Τότε ο

$$\phi_M : \text{Hom}_R(M, I) \otimes_R Z \rightarrow \text{Hom}_R(M, I \otimes_R Z)$$

είναι ένας ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι $M = R^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(R^n, I) \otimes_R Z & \xrightarrow{\phi_{R^n}} & \text{Hom}_R(R^n, I \otimes_R Z) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ I^n \otimes_R Z & \xrightarrow{\cong} & (I \otimes_R Z)^n \end{array}$$

συμπεραίνουμε ότι ο ϕ_{R^n} είναι ισομορφισμός.

Έστω τώρα ότι το M είναι ένα πεπερασμένα παριστώμενο αριστερό R -πρότυπο. Τότε υπάρχει κάποια ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων της μορφής

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0,$$

για κάποια m και $n \in \mathbb{N}$. Από την αριστερή ακρίβεια του συναρτητή $\text{Hom}_R(\square, I)$, η επαγόμενη ακολουθία δεξιών R -προτύπων

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, I) \rightarrow \text{Hom}_R(R^n, I) \rightarrow \text{Hom}_R(R^m, I)$$

είναι ακριβής. Επειδή το Z είναι επίπεδο, έπεται ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, I) \otimes_R Z \rightarrow \text{Hom}_R(R^n, I) \otimes_R Z \rightarrow \text{Hom}_R(R^m, I) \otimes_R Z$$

είναι επίσης ακριβής. Από τη φυσικότητα του ϕ στην πρώτη μεταβλητή, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M, I) \otimes_R Z & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^n, I) \otimes_R Z & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^m, I) \otimes_R Z \\
& & \downarrow \phi_M & & \downarrow \phi_{R^n} & & \downarrow \phi_{R^m} \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M, I \otimes_R Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^n, I \otimes_R Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^m, I \otimes_R Z).
\end{array}$$

Επειδή και οι δύο γραμμές είναι ακριβείς και οι ομομορφισμοί ϕ_{R^m}, ϕ_{R^n} είναι όπως είδαμε ισομορφισμοί, έπεται ότι και ο ομομορφισμός ϕ_M είναι με τη σειρά του ισομορφισμός. $\square$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση, οδηγούμαστε στο ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα που θα επικαλεστούμε πολλές φορές στη συνέχεια της εργασίας.

Πρόταση 1.1.6. Έστω M ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο, Z ένα επίπεδο R -πρότυπο και $f : M \rightarrow Z$ μία R -γραμμική απεικόνιση. Τότε υπάρχει κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο F και μία παραγοντοποίηση της f ως

$$M \xrightarrow{g} F \xrightarrow{h} Z,$$

για κάποιες R -γραμμικές απεικονίσεις g και h .

Απόδειξη. Για $I = R$ από την προηγούμενη πρόταση έχουμε τον ισομορφισμό $\phi_R : \text{Hom}_R(M, R) \otimes_R Z \rightarrow \text{Hom}_R(M, R \otimes_R Z)$ και έτσι συνθέτοντας με τον φυσικό ισομορφισμό $\text{Hom}_R(M, R \otimes_R Z) \cong \text{Hom}_R(M, Z)$, παίρνουμε τον ισομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\psi : \text{Hom}_R(M, R) \otimes_R Z \rightarrow \text{Hom}_R(M, Z)$$

για τον οποίο για κάθε $g \otimes z \in \text{Hom}_R(M, R) \otimes_R Z$, είναι

$$\begin{aligned}
\psi(g \otimes z) : M &\rightarrow Z \\
m &\mapsto g(m)z.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι το στοιχείο $f \in \text{Hom}_R(M, Z)$ ανήκει στην εικόνα του ψ και άρα υπάρχουν $g_1, \dots, g_n \in \text{Hom}_R(M, R)$ και $z_1, \dots, z_n \in Z$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$f = \psi \left(\sum_{i=1}^n (g_i \otimes z_i) \right).$$

Ορίζουμε λοιπόν $g : M \rightarrow R^n$ την R -γραμμική απεικόνιση που δίνεται από την σχέση $g(m) = (g_1(m), \dots, g_n(m))$ για κάθε $m \in M$ και $h : R^n \rightarrow Z$ την R -γραμμική απεικόνιση με $h(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i z_i$. Τότε για κάθε $m \in M$, είναι

$$\begin{aligned}
(h \circ g)(m) &= h(g_1(m), \dots, g_n(m)) \\
&= \sum_{i=1}^n g_i(m) z_i \\
&= f(m)
\end{aligned}$$

και άρα θέτοντας $F = R^n$ έχουμε την ζητούμενη παραγοντοποίηση της f . $\square$

Κλείνουμε την ενότητα με το ακόλουθο πόρισμα, σύμφωνα με το οποίο οι έννοιες των προβολικών και των επίπεδων R -προτύπων ταυτίζονται για τα πεπερασμένα παριστώμενα R -πρότυπα.

Πόρισμα 1.1.7. Έστω M ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο. Το M είναι προβολικό αν και μόνο αν είναι επίπεδο.

Απόδειξη. Αν το M είναι προβολικό, τότε είναι και επίπεδο από την πρόταση 1.1.2. Αντίστροφα, έστω ότι το M είναι επίπεδο. Από την πρόταση 1.1.6, υπάρχει μία παραγοντοποίηση του ταυτοτικού ομομορφισμού $1_M : M \rightarrow M$, ως

$$M \xrightarrow{g} F \xrightarrow{h} M$$

για κάποιο ελεύθερο R -πρότυπο F . Τότε ο g είναι ένας διασπώμενος μονομορφισμός και άρα $F \cong M \oplus \operatorname{coker} g$. Τελικά, το M είναι προβολικό ως ευθύς προσθετέος του ελεύθερου R -προτύπου F . $\square$

1.2 Συνόρια Προτύπων

Μία από τις πιο βασικές κατηγορικές κατασκευές είναι εκείνη των συνορίων συναρτητών. Διαισθητικά, σκεφτόμαστε το συνόριο ενός συναρτητή ως ένα τρόπο να κολλήσουμε τα αντικείμενα-εικόνες του συναρτητή "όπως ορίζει ο συναρτητής". Παραδείγματα συνορίων είναι τα συνγινόμενα (σε οποιαδήποτε κατηγορία) και οι συνεξισωτές (σε οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία) καθώς και το ελεύθερο γινόμενο ομάδων με αμάλγαμα. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε με αρκετή λεπτομέρεια τα συνόρια προτύπων και ιδιαιτέρως, τις ιδιότητες των filtered συνορίων.

Ορισμός 1.2.1. Έστω $\mathcal{I}$ και $\mathcal{C}$ δύο κατηγορίες, με την $\mathcal{I}$ να είναι small και $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ένας συναρτητής. Το *συνόριο* του F είναι ένα αντικείμενο $\operatorname{colim} F$ (ή αλλιώς $\operatorname{colim} F_i$) της $\mathcal{C}$ μαζί με μία οικογένεια μορφισμών $(\alpha_i : Fi \rightarrow \operatorname{colim} F)_{i \in \operatorname{ob} \mathcal{I}}$ της $\mathcal{C}$ έτσι ώστε:

- (i) Για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$, είναι $\alpha_j \circ F\phi = \alpha_i$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται.

$$\begin{array}{ccc} Fi & \xrightarrow{F\phi} & Fj \\ & \searrow \alpha_i & \swarrow \alpha_j \\ & \operatorname{colim} F & \end{array}$$

- (ii) Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ με μορφισμούς $(f_i : Fi \rightarrow X)_{i \in \operatorname{ob} \mathcal{I}}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $f_j \circ F\phi = f_i$ για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$. Τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\theta : \operatorname{colim} F \rightarrow X$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται για κάθε $i \in \operatorname{ob} \mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccc}
& F_i & \\
\alpha_i \swarrow & & \searrow f_i \\
\varinjlim F & \xrightarrow{\theta} & X
\end{array}$$

Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με F_i την εικόνα του αντικειμένου $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ κάτω από τον F (αντί για F_i). Όπως για κάθε αντικείμενο που ορίζεται μέσω μίας καθολικής ιδιότητας, έτσι και εδώ, αν το συνόριο υπάρχει, τότε είναι και μοναδικό ως προς ισομορφισμό. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.2.2. Έστω ότι το συνόριο $\varinjlim F$ υπάρχει. Έστω L ένα ακόμα αντικείμενο και $(\beta_i : F_i \rightarrow L)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ μία οικογένεια μορφισμών που ικανοποιούν τον ορισμό του συνόριου. Τότε ισχύει ότι $\varinjlim F \cong L$.

Πράγματι, έστω $\alpha_i : F_i \rightarrow \varinjlim F$ οι μορφισμοί του συνόριου. Από υπόθεση, για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$, είναι: $\beta_j \circ F\phi = \beta_i$, οπότε από τον ορισμό του συνόριου υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\Phi : \varinjlim F \rightarrow L$ τέτοιος ώστε

$$\Phi \circ \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in \text{ob } \mathcal{I}.$$

Και πάλι από υπόθεση, είναι: $\alpha_j \circ F\phi = \alpha_i$ και επειδή το L ικανοποιεί τον ορισμό του συνόριου, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\Psi : L \rightarrow \varinjlim F$ ώστε

$$\Psi \circ \beta_i = \alpha_i \quad \forall i \in \text{ob } \mathcal{I}.$$

Τότε για το μορφισμό $\Psi \circ \Phi : \varinjlim F \rightarrow \varinjlim F$, έχουμε ότι για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$

$$(\Psi \circ \Phi) \circ \alpha_i = \Psi \circ (\Phi \circ \alpha_i) = \Psi \circ \beta_i = \alpha_i = 1_{\varinjlim F} \circ \alpha_i,$$

οπότε από τη μοναδικότητα του μορφισμού με την ιδιότητα αυτή, συμπεραίνουμε ότι

$$\Psi \circ \Phi = 1_{\varinjlim F}.$$

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι $\Phi \circ \Psi = 1_L$, οπότε ο Φ είναι ισομορφισμός και έτσι $\varinjlim F \cong L$.

Παρότι σε μία γενική κατηγορία $\mathcal{C}$ η ύπαρξη του συνόριου ενός συναρτητή $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ δεν είναι εξασφαλισμένη, όταν ο F έχει τιμές στην κατηγορία των (αριστερών) R -προτύπων, τα πράγματα είναι πιο ευνοϊκά.

Πρόταση 1.2.3. Για κάθε small κατηγορία $\mathcal{I}$ και κάθε συναρτητή $M : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$, το συνόριο $\varinjlim M$ υπάρχει.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε ένα αριστερό R -πρότυπο με κατάλληλους ομομορφισμούς που να ικανοποιούν τον ορισμό του συνόριου.

Για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ έστω λ_i η ένθεση $M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i$ και

$$D = \left(\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i \right) / M',$$

όπου M' είναι το υποπρότυπο του $\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i$ που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $\lambda_j M\phi(m_i) - \lambda_i(m_i)$ για $m_i \in M_i$ και κάποιο μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$. Έστω επίσης οι ομομορφισμοί $\alpha_i : M_i \rightarrow D$ με

$$m_i \mapsto \lambda_i(m_i) + M',$$

δηλαδή $\alpha_i = \pi \circ \lambda_i$ όπου $\pi : \bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i \rightarrow D$ η απεικόνιση πηλίκο. Για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$ και $m_i \in M_i$ ελέγχουμε ότι

$$\alpha_j M\phi(m_i) = \lambda_j M\phi(m_i) + M' = \lambda_i(m_i) + M' = \alpha_i(m_i).$$

Έστω τώρα X ένα R -πρότυπο με ομομορφισμούς $(f_i : M_i \rightarrow X)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $f_j \circ M\phi = f_i$ για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$.

Για την επαγόμενη R -γραμμική απεικόνιση $\Phi : \bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i \rightarrow X$ με

$$\Phi\left(\sum_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} r_i \lambda_i(m_i)\right) = \sum_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} r_i f_i(m_i),$$

παρατηρούμε ότι για κάθε $m_i \in M_i$ και $\phi : i \rightarrow j$, είναι

$$\Phi(\lambda_j M\phi(m_i) - \lambda_i(m_i)) = f_j M\phi(m_i) - f_i(m_i) = 0.$$

Έτσι, επάγεται ομομορφισμός

$$\widehat{\Phi} : D = \left(\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i\right)/M' \rightarrow X$$

με

$$\widehat{\Phi}\left(\sum_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} r_i \lambda_i(m_i) + M'\right) = \Phi\left(\sum_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} r_i \lambda_i(m_i)\right) = \sum_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} r_i f_i(m_i).$$

Έτσι, για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $m_i \in M_i$, έχουμε ότι

$$\widehat{\Phi} \circ \alpha_i(m_i) = \widehat{\Phi}(\lambda_i(m_i) + M') = f_i(m_i) \implies \widehat{\Phi} \circ \alpha_i = f_i.$$

Μένει να ελέγξουμε την μοναδικότητα του $\widehat{\Phi}$.

Έστω $\Psi : D \rightarrow X$ ένας ακόμα ομομορφισμός με $\Psi \circ \alpha_i = f_i$ για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$. Τότε για κάθε $m_i \in M_i$ είναι

$$\Psi(\lambda_i(m_i) + M') = (\Psi \circ \alpha_i)(m_i) = f_i(m_i) = \widehat{\Phi}(\lambda_i(m_i) + M').$$

Επειδή τα στοιχεία $\lambda_i(m_i) + M'$ παράγουν το $D = \left(\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i\right)/M'$, έπεται ότι $\widehat{\Phi} = \Psi$ και άρα έχουμε ότι $D \cong \varinjlim M$. $\square$

Συνεχίζουμε ορίζοντας τις filtered κατηγορίες που θα μας επιτρέψουν να εστιάσουμε με συνόρια με πρόσθετες ιδιότητες.

Ορισμός 1.2.4. Έστω $\mathcal{I}$ μία μη κενή small κατηγορία. Η $\mathcal{I}$ καλείται *filtered* όταν

- (i) Για κάθε $x, y \in \text{ob } \mathcal{I}$, υπάρχει $z \in \text{ob } \mathcal{I}$ έτσι ώστε $\text{Hom}(x, z) \neq \emptyset$ και $\text{Hom}(y, z) \neq \emptyset$.
- (ii) Για κάθε ζεύγος μορφισμών $x \xrightarrow[g]{f} y$ υπάρχει $z \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμός $h : y \rightarrow z$, έτσι ώστε $h \circ f = h \circ g : x \longrightarrow z$.

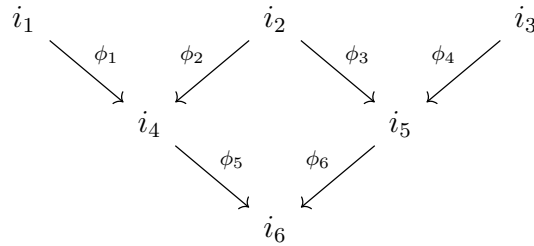
Παρατήρηση 1.2.5. Έστω $\mathcal{I}$ μία filtered κατηγορία. Τότε, για κάθε τρία αντικείμενα i, j, k και μορφισμούς $\phi_1 : i \rightarrow j$ και $\phi_2 : i \rightarrow k$ της $\mathcal{I}$, υπάρχει κάποιο αντικείμενο l και μορφισμοί $\psi_1 : j \rightarrow l$ και $\psi_2 : k \rightarrow l$ της $\mathcal{I}$ έτσι ώστε $\psi_1 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \phi_2$. Πράγματι, αρκεί να εφαρμόσουμε διαδοχικά τις συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού της filtered κατηγορίας.

Όταν η κατηγορία $\mathcal{I}$ είναι filtered, έχουμε μία ακόμα περιγραφή του συνόριου ενός συναρτητή $M : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$. Στην περίπτωση αυτή, το συνόριο καλείται *filtered συνόριο* και απολαμβάνει κάποιες πρόσθετες σημαντικές ιδιότητες. Η επόμενη πρόταση μας δίνει τη δεύτερη περιγραφή του συνόριου.

Πρόταση 1.2.6. Έστω $M : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$ ένας συναρτητής με την κατηγορία $\mathcal{I}$ να είναι filtered και έστω $\coprod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i$ η διακριτή ένωση των M_i . Για $i, j \in \text{ob } \mathcal{I}$, $m_i \in M_i$ και $m_j \in M_j$ ορίζουμε $m_i \sim m_j$ αν υπάρχει κάποιο $k \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμοί $\phi : i \rightarrow k$ και $\psi : j \rightarrow k$ της $\mathcal{I}$ με $M\phi(m_i) = M\psi(m_j) \in M_k$. Τότε:

- (i) Η $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο $\coprod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i$.
- (ii) Το $L = (\coprod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i) / \sim$ είναι ένα αριστερό R -πρότυπο.
- (iii) Ισχύει ότι $L \cong \text{colim } M$.

Απόδειξη. (i): Η $\sim$ είναι αυτοπαθής διότι $m_i = M1_i(m_i)$ και είναι προφανώς συμμετρική. Για την μεταβατικότητα, έστω $m_{i_1} \sim m_{i_2}$ και $m_{i_2} \sim m_{i_3}$, όπου $m_{i_j} \in M_{i_j}$ για $j = 1, 2, 3$. Τότε υπάρχουν $i_4, i_5 \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμοί $\phi_1 : i_1 \rightarrow i_4, \phi_2 : i_2 \rightarrow i_4, \phi_3 : i_2 \rightarrow i_5, \phi_4 : i_3 \rightarrow i_5$ της $\mathcal{I}$, έτσι ώστε $M\phi_1(m_{i_1}) = M\phi_2(m_{i_2})$ και $M\phi_3(m_{i_2}) = M\phi_4(m_{i_3})$. Επειδή η $\mathcal{I}$ είναι filtered, από την παρατήρηση 1.2.5, βρίσκουμε κάποιο $i_6 \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμούς $\phi_5 : i_4 \rightarrow i_6$ και $\phi_6 : i_5 \rightarrow i_6$ έτσι ώστε $\phi_5 \circ \phi_2 = \phi_6 \circ \phi_3$. Το διάγραμμα



συνοψίζει τα παραπάνω. Τώρα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
 M(\phi_5 \circ \phi_1)(m_{i_1}) &= M(\phi_5 \circ \phi_2)(m_{i_2}) \\
 &= M(\phi_6 \circ \phi_3)(m_{i_2}) \\
 &= M(\phi_6 \circ \phi_4)(m_{i_3}),
 \end{aligned}$$

οπότε $m_{i_1} \sim m_{i_3}$ και τελικά η $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

(ii): Ορίζουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} r[x] &= [rx] \\ [x] + [y] &= [M\phi_1(x) + M\phi_2(y)] \end{aligned}$$

για $x \in M_i, y \in M_j, r \in R$, με τους $\phi_1 : i \rightarrow k$ και $\phi_2 : j \rightarrow k$ να είναι μορφισμοί της $\mathcal{I}$ για κάποιο $k \in \mathcal{I}$. Δείχνουμε ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες.

Για τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό, έστω ότι $x \sim x'$ για $x \in M_i$ και $x' \in M_{i'}$. Τότε $\exists k \in \text{ob } \mathcal{I}, \phi_i : i \rightarrow k, \phi_{i'} : i' \rightarrow k : M\phi_i(x) = M\phi_{i'}(x') \implies rM\phi_i(x) = rM\phi_{i'}(x') \implies M\phi_i(rx) = M\phi_{i'}(rx') \implies rx \sim rx'$, οπότε ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος.

Για την πρόσθεση, έστω ότι $x \sim x'$ για $x \in M_i$ και $x' \in M_{i'}$. Τότε $\exists l \in \text{ob } \mathcal{I}, \psi_1 : i \rightarrow l, \psi_2 : i' \rightarrow l : M\psi_1(x) = M\psi_2(x') \in M_l$. Από την πρώτη συνθήκη του ορισμού της filtered κατηγορίας, βρίσκουμε $l' \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμούς $\zeta_1 : l \rightarrow l'$ και $\zeta_2 : j \rightarrow l'$. Στην συνέχεια, από την παρατήρηση 1.2.5, βρίσκουμε $p \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμούς $\eta_1 : k \rightarrow p$ και $\eta_2 : l' \rightarrow p$, έτσι ώστε $\eta_1 \circ \phi_1 = \eta_2 \circ \zeta_1$. Τέλος, έχοντας τους μορφισμούς $\eta_1 \circ \phi_1, \eta_2 \circ \zeta_1 \circ \psi_1 : i \rightarrow p$, χρησιμοποιώντας την δεύτερη συνθήκη του ορισμού της filtered κατηγορίας, βρίσκουμε $q \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμό $\theta : p \rightarrow q$ έτσι ώστε: $\theta \circ (\eta_1 \circ \phi_1) = \theta \circ (\eta_2 \circ \zeta_1 \circ \psi_1)$. Τελικά, έχουμε

$$\begin{aligned} M(\theta \circ \eta_1)(M\phi_1(x) + M\phi_2(y)) &= M(\theta \circ \eta_1 \circ \phi_1)(x) + M(\theta \circ \eta_1 \circ \phi_2)(y) \\ &= M(\theta \circ \eta_2 \circ \zeta_1 \circ \psi_1)(x) + M(\theta \circ \eta_2 \circ \zeta_2)(y) \\ &= M(\theta \circ \eta_2 \circ \zeta_1)M\psi_1(x) + M(\theta \circ \eta_2)M\zeta_2(y) \\ &= M(\theta \circ \eta_2 \circ \zeta_1)M\psi_2(x') + M(\theta \circ \eta_2)M\zeta_2(y) \\ &= M(\theta \circ \eta_2)(M(\zeta_1 \circ \psi_2)(x') + M\zeta_2(y)), \end{aligned}$$

οπότε

$$M\phi_1(x) + M\phi_2(y) \sim M(\zeta_1 \circ \psi_2)(x') + M\zeta_2(y)$$

και άρα

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [M\phi_1(x) + M\phi_2(y)] \\ &= [M(\zeta_1 \circ \psi_2)(x') + M\zeta_2(y)] \\ &= [x'] + [y], \end{aligned}$$

συνεπώς και η πρόσθεση είναι καλά ορισμένη. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι με τις παραπάνω πράξεις, το $L = (\coprod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i) / \sim$ λαμβάνει τη δομή ενός αριστερού R -προτύπου.

(iii): Ορίζουμε τους ομομορφισμούς $\alpha_i : M_i \rightarrow L$ με $\alpha_i(m_i) = [m_i]$ για τους οποίους για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$ είναι $\alpha_j \circ M\phi = \alpha_i$.

Έστω X ένα R -πρότυπο με ομομορφισμούς $(f_i : M_i \rightarrow X)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $f_j \circ M\phi = f_i$ για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$. Τότε επάγεται η μοναδική

απεικόνιση $f : \coprod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i \rightarrow X$ για την οποία $f(m_i) = f_i(m_i)$ για $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $m_i \in M_i$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\phi : i \rightarrow j$ και $m_i \in M_i$, είναι

$$f(M\phi(m_i)) = (f_j \circ M\phi)(m_i) = f_j(m_i) = f(m_i),$$

συνεπώς επάγεται μοναδική απεικόνιση

$$\widehat{f} : L = \left(\coprod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i / \sim \right) \rightarrow X$$

με

$$\widehat{f}([m_i]) = f(m_i) = f_i(m_i),$$

που με άλλα λόγια κάνει το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται.

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_i} & X \\ \downarrow & \nearrow f & \uparrow \widehat{f} \\ \coprod_{i \in I} M_i & \longrightarrow & L \end{array}$$

Άμεσα μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $\widehat{f}$ είναι R -γραμμική και παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $m_i \in M_i$ ισχύει ότι

$$(\widehat{f} \circ \alpha_i)(m_i) = \widehat{f}([m_i]) = f_i(m_i) \implies \widehat{f} \circ \alpha_i = f_i.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα της $\widehat{f}$. Έστω λοιπόν $g : L \rightarrow X$ μία ακόμα R -γραμμική απεικόνιση η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $g \circ \alpha_i = f_i$ για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$. Τότε για $m_i \in M_i$ είναι

$$g([m_i]) = (g \circ \alpha_i)(m_i) = f_i(m_i) = \widehat{f}([m_i]) \implies g = \widehat{f}.$$

Έτσι, πράγματι $L \cong \varinjlim M$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η επόμενη παρατήρηση συγκεντρώνει τις περιγραφές των filtered συνόριων R -προτύπων και φέρνει στην επιφάνεια δύο σημαντικές περιγραφές των εικόνων και των πυρήνων των ομομορφισμών $a_i : M_i \rightarrow \varinjlim F$ του συνόριου.

Παρατήρηση 1.2.7. Έστω $M : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$ ένας συναρτητής, με την κατηγορία $\mathcal{I}$ να είναι filtered. Ισχύουν τα εξής:

- Έχουμε δύο περιγραφές του συνόριου $\varinjlim M$. Πράγματι, είδαμε ότι

$$\left(\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i \right) / M' \cong \varinjlim M_i \cong \left(\coprod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i \right) / \sim$$

- Για κάθε $\xi \in \varinjlim M$ μπορούμε να γράψουμε $\xi = \alpha_i(\xi_i)$ για κάποια $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $\xi_i \in M_i$. Αυτό είναι εμφανές από την δεύτερη περιγραφή του συνόριου.
- Αν $\xi = \alpha_i(\xi_i) = 0 \in \varinjlim M_i$, τότε υπάρχει κάποιο $j \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμός $\phi : i \rightarrow j$ έτσι ώστε $M\phi(\xi_i) = 0 \in M_j$. Πράγματι και πάλι από την δεύτερη περιγραφή του συνόριου, έχουμε $\xi = [\xi_i] = 0_L = [0_{M_i}]$, οπότε υπάρχει $j \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμοί $\phi, \psi : i \rightarrow j$ έτσι ώστε $M\phi(\xi_i) = M\psi(0) = 0 \in M_j$.

Πρόταση 1.2.8. Έστω $A, B : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, δύο συναρτητές από μία small κατηγορία $\mathcal{I}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και $r : A \rightarrow B$ ένας φυσικός μετασχηματισμός. Τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός

$$\varinjlim r = \varinjlim r_i : \varinjlim A \rightarrow \varinjlim B$$

που κάνει το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{r_i} & B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim A & \xrightarrow{\varinjlim r} & \varinjlim B \end{array}$$

Απόδειξη. Έστω $(\alpha_i : A_i \rightarrow \varinjlim A)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ και $(\beta_i : B_i \rightarrow \varinjlim B)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ οι μορφισμοί των συνόριων $\varinjlim A$ και $\varinjlim B$ αντίστοιχα. Τότε επειδή ο $r : A \rightarrow B$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, έπεται ότι το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{r_i} & B_i & & \\ \downarrow A\phi & & \downarrow B\phi & \searrow \beta_i & \\ A_j & \xrightarrow{r_j} & B_j & \xrightarrow{\beta_j} & \varinjlim B \end{array}$$

Έτσι, από την καθολική ιδιότητα του $\varinjlim A$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός

$$\varinjlim r : \varinjlim A \rightarrow \varinjlim B$$

με $(\varinjlim r) \circ \alpha_i = \beta_i \circ r_i$ για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$. Η σχέση αυτή μας δίνει τη μεταθετικότητα του διαγράμματος της εκφώνησης. $\square$

Παρατήρηση 1.2.9. Για $\mathcal{C} = \mathbf{R}\text{-Mod}$, χρησιμοποιώντας τις περιγραφές των συνόριων $\varinjlim A = (\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} A_i)/A'$ και $B = (\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} B_i)/B'$ με $\lambda_i : A_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} A_i$ και $\mu_i : B_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} B_i$ τους αντίστοιχους εγχλειςμούς, ο ομομορφισμός $\varinjlim r$ έχει τη μορφή

$$\varinjlim r \left(\sum_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} \lambda_i(a_i) + A' \right) = \sum_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} \mu_i r_i(a_i) + B'.$$

Αν επιπλέον η κατηγορία $\mathcal{I}$ είναι filtered, τότε χρησιμοποιώντας τις περιγραφές των filtered συνόριων $\varinjlim A = (\prod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} A_i)/\sim$ και $\varinjlim B = (\prod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} B_i)/\sim$, ο ομομορφισμός $\varinjlim r$ έχει τη μορφή

$$\varinjlim r([a_i]) = [r_i(a_i)].$$

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η ακόλουθη ιδιότητα των filtered συνόριων R -προτύπων.

Πρόταση 1.2.10. Τα filtered συνόρια R -προτύπων διατηρούν τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες. Πιο συγκεκριμένα, έστω $\mathcal{I}$ μια filtered κατηγορία, $A, B, C : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$ τρεις συναρτητές και $r : A \rightarrow B, s : B \rightarrow C$ δύο φυσικοί μετασχηματισμοί. Αν για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ η ακολουθία R -προτύπων

$$0 \rightarrow A_i \xrightarrow{r_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \rightarrow 0$$

είναι ακριβής, τότε και η ακολουθία στα filtered συνόρια

$$0 \rightarrow \varinjlim A \xrightarrow{\varinjlim r} \varinjlim B \xrightarrow{\varinjlim s} \varinjlim C \rightarrow 0$$

είναι επίσης ακριβής.

Απόδειξη.

- $\varinjlim r$: 1-1.

Έστω $a = [a_i] \in \ker(\varinjlim r)$. Τότε $[r_i(a_i)] = \varinjlim r([a_i]) = 0 \in \varinjlim B_i \implies \exists j \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $\phi : i \rightarrow j$ έτσι ώστε $B\phi(r_i(a_i)) = 0 \implies r_j A\phi(a_i) = B\phi(r_i(a_i)) = 0 \in B_j$. Όμως η $r_j : A_j \rightarrow B_j$ είναι 1-1, οπότε $A\phi(a_i) = 0 \in A_j \implies a = [a_i] = [A\phi(a_i)] = 0$, που δείχνει ότι ο ομομορφισμός $\varinjlim r$ είναι 1-1.

- $\text{im}(\varinjlim r) \subseteq \ker(\varinjlim s)$.

Για $a = [a_i] \in \varinjlim A_i$, είναι:

$$(\varinjlim s \circ \varinjlim r)(a) = [s_i r_i(a_i)] = [0] = 0 \in \varinjlim C_i.$$

- $\ker(\varinjlim s) \subseteq \text{im}(\varinjlim r)$.

Έστω $b = [b_i] \in \ker(\varinjlim s)$. Τότε $[s_i(b_i)] = \varinjlim s(b) = 0 \in \varinjlim C_i$ και άρα υπάρχει $j \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $\phi : i \rightarrow j$ έτσι ώστε $C\phi(s_i(b_i)) = 0 \in C_j$. Υπολογίζουμε

$$s_j B\phi(b_i) = C\phi(s_i(b_i)) = 0 \in C_j \implies B\phi(b_i) \in \ker s_j = \text{im } r_j.$$

Επιλέγουμε λοιπόν κάποιο $a_j \in A_j$ με $r_j(a_j) = B\phi(b_i)$ και έχουμε

$$\varinjlim r([a_j]) = [r_j(a_j)] = [B\phi(b_i)] = [b_i] = b \implies b \in \text{im}(\varinjlim r).$$

- $\varinjlim s$: επί.

Έστω $c \in \varinjlim C_i$. Γράφουμε $c = [c_i]$ για κάποια $i \in \text{ob } \mathcal{I}, c_i \in C_i$ και επειδή η $s_i : B_i \rightarrow C_i$ είναι επί, επιλέγουμε $b_i \in B_i$ με $s_i(b_i) = c_i$. Έτσι, έχουμε:

$$c = [c_i] = [s_i(b_i)] = \varinjlim s([b_i])$$

που δείχνει ότι ο ομομορφισμός $\varinjlim s$ είναι επί και ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Έστω $\mathcal{I}$ μία small κατηγορία. Υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της κατηγορίας $\mathbf{R}\text{-Mod}^{\mathcal{I}}$. Τα αντικείμενα της $\mathbf{R}\text{-Mod}^{\mathcal{I}}$ είναι οι συναρτητές $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$ και οι μορφισμοί της $\mathbf{R}\text{-Mod}^{\mathcal{I}}$ είναι οι φυσικοί μετασχηματισμοί $r : F \rightarrow G$ για δύο συναρτητές $F, G : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$. Η κατηγορία $\mathbf{R}\text{-Mod}^{\mathcal{I}}$ κληρονομεί την αβελιανή δομή της $\mathbf{R}\text{-Mod}$ με τις αντίστοιχες έννοιες να μεταφέρονται "κατά συνιστώσες". Για παράδειγμα, αν $r : F \rightarrow G$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, τότε ορίζεται ο συναρτητής-πυρήνας $\ker r : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$ ως ο συναρτητής για τον οποίο

- Για ένα αντικείμενο $i \in \text{ob } \mathcal{I}$, είναι $(\ker r)_i = \ker(r_i)$.
- Για ένα μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$, έχουμε τον ομομορφισμό R -προτύπων

$$\ker r \phi : \ker(r_i) \rightarrow \ker(r_j)$$

με

$$\ker(r_i) \ni x \mapsto F\phi(x) \in \ker(r_j).$$

Ο ομομορφισμός $\ker r \phi$ είναι καλά ορισμένος, διότι από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{r_i} & G_i \\ F\phi \downarrow & & \downarrow G\phi \\ F_j & \xrightarrow{r_j} & G_j \end{array},$$

βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \ker(r_i) &\implies r_i(x) = 0 \\ &\implies G\phi r_i(x) = 0 \\ &\implies r_j F\phi(x) = 0 \\ &\implies F\phi(x) \in \ker(r_j). \end{aligned}$$

Τέλος, ο μονομορφισμός $\ker r \rightarrow F$ ορίζεται με τον προφανή τρόπο: η συνιστώσα $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ του παραπάνω φυσικού μετασχηματισμού είναι ο εγκλεισμός $\ker(r_i) \rightarrow F_i$.

Εντελώς ανάλογα ορίζεται η εικόνα $\text{im } r$ και ο συνπυρήνας $\text{coker } r$ του φυσικού μετασχηματισμού r .

Μπορούμε να δούμε ότι μία ακολουθία της $\mathbf{R}\text{-Mod}^{\mathcal{I}}$

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{r} G \xrightarrow{s} H \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής αν και μόνο αν η ακολουθία R -προτύπων

$$0 \longrightarrow F_i \xrightarrow{r_i} G_i \xrightarrow{s_i} H_i \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$.

Μετά τις παραπάνω υπενθυμίσεις, βλέπουμε ότι σύμφωνα με την πρόταση 1.2.8, το συνόριο R -προτύπων προκύπτει από τον συναρτητή

$$\underline{\text{colim}} : R\text{-Mod}^{\mathcal{I}} \rightarrow R\text{-Mod}$$

για τον οποίο:

$$F \mapsto \underline{\text{colim}} F$$

για ένα συναρτητή $F : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$ και

$$(r : F \rightarrow G) \mapsto (\underline{\text{colim}} r : \underline{\text{colim}} F \rightarrow \underline{\text{colim}} G)$$

για ένα φυσικό μετασχηματισμό r μεταξύ των συναρτητών $F, G : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$. Από την παρατήρηση 1.2.9, είναι άμεσο ότι ο συναρτητής $\underline{\text{colim}}$ είναι προσθετικός, δηλαδή ότι για φυσικούς μετασχηματισμούς $r, s : F \rightarrow G$, είναι $\underline{\text{colim}}(r + s) = \underline{\text{colim}} r + \underline{\text{colim}} s$.

Στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{I}$ είναι επιπλέον filtered, σύμφωνα με την πρόταση 1.2.10, το συνόριο είναι ένας ακριβής προσθετικός συναρτητής. Συνεπώς, τα filtered συνόρια R -προτύπων (όπως και κάθε ακριβής προσθετικός συναρτητής) διατηρούν τους πυρήνες, τις εικόνες και τους συνπυρήνες. Με άλλα λόγια, για ένα φυσικό μετασχηματισμό $r : F \rightarrow G$, μεταξύ των συναρτητών $F, G : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \underline{\text{colim}}(\ker r) &\cong \ker(\underline{\text{colim}} r) \\ \underline{\text{colim}}(\text{im } r) &\cong \text{im}(\underline{\text{colim}} r) \text{ και} \\ \underline{\text{colim}}(\text{coker } r) &\cong \text{coker}(\underline{\text{colim}} r). \end{aligned}$$

Η ακρίβεια των filtered συνόριων προτύπων θα μας φανεί χρήσιμη στη συνέχεια, καθώς ιδιότητες των επιμέρους προτύπων μεταφέρονται στο συνόριο. Για παράδειγμα, στο πόρισμα 1.2.15 θα δούμε ότι κάθε filtered συνόριο επίπεδων R -προτύπων είναι επίσης επίπεδο.

Προχωράμε με τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.2.11. Έστω $L : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ ένας συναρτητής μεταξύ κατηγοριών. Ο L ονομάζεται *cofinal* (εναλλακτικά η κατηγορία $\mathcal{J}$ καλείται *cofinal* στην $\mathcal{I}$) αν

- (i) Για κάθε y στην $\mathcal{I}$ υπάρχει x στην $\mathcal{J}$ και μορφισμός $y \rightarrow L(x)$ στην $\mathcal{I}$.
- (ii) Για κάθε y στην $\mathcal{I}$, x, x' στην $\mathcal{J}$ και μορφισμούς $y \rightarrow L(x)$ και $y \rightarrow L(x')$, υπάρχει μία ακολουθία μορφισμών

$$x = x_0 \leftarrow x_1 \rightarrow x_2 \leftarrow x_3 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{2n} = x'$$

της $\mathcal{J}$ και μορφισμοί $y \rightarrow L(x_i)$ στην $\mathcal{I}$ έτσι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα

$$\begin{array}{ccccc} & & y & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ L(x_{2k}) & \longleftarrow & L(x_{2k+1}) & \longrightarrow & L(x_{2k+2}) \end{array}$$

να είναι μεταθετικά για κάθε $k = 0, \dots, n - 1$.

Συνήθως, ο συναρτητής $L : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ εμφανίζεται ως ο συναρτητής-εγκλεισμός μίας υποκατηγορίας $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Μάλιστα, στην περίπτωση που η υποκατηγορία $\mathcal{J}$ είναι πλήρης και η $\mathcal{I}$ είναι filtered, έχουμε το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα.

Λήμμα 1.2.12. Έστω $\mathcal{J}$ μία πλήρης υποκατηγορία της filtered κατηγορίας $\mathcal{I}$. Υποθέτουμε επίσης ότι ο συναρτητής-εγκλεισμός $\mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{I}$ ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του cofinal συναρτητή, δηλαδή για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ υπάρχει κάποιο $j \in \text{ob } \mathcal{J}$ και μορφισμός $\psi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$. Τότε, η κατηγορία $\mathcal{J}$ είναι filtered και cofinal στην $\mathcal{I}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η κατηγορία $\mathcal{J}$ είναι filtered. Έστω j_1 και j_2 δύο αντικείμενα της $\mathcal{J}$. Επειδή η $\mathcal{I}$ είναι filtered, υπάρχει κάποιο αντικείμενο $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμοί $\phi_1 : j_1 \rightarrow i, \phi_2 : j_2 \rightarrow i$ της $\mathcal{I}$. Από υπόθεση, μπορούμε να βρούμε κάποιο $j \in \text{ob } \mathcal{J}$ και μορφισμό $\psi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$. Έχοντας ότι η υποκατηγορία $\mathcal{J}$ είναι πλήρης, συμπεραίνουμε ότι οι μορφισμοί $\psi \circ \phi_1$ και $\psi \circ \phi_2$ είναι στην $\mathcal{J}$, πράγμα που δείχνει ότι η $\mathcal{J}$ ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη της filtered κατηγορίας. Για τη δεύτερη συνθήκη, έστω $j_1, j_2 \in \text{ob } \mathcal{J}$ και μορφισμοί

$j_1 \xrightarrow[f]{g} j_2$. Επειδή η $\mathcal{I}$ είναι filtered και $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, έπεται ότι υπάρχει κάποιο $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και

μορφισμός $h : j_2 \rightarrow i$ έτσι ώστε $h \circ f = h \circ g$. Από υπόθεση, βρίσκουμε $j \in \text{ob } \mathcal{J}$ και μορφισμό $\psi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$. Τότε $(\psi \circ h) \circ f = (\psi \circ h) \circ g$ με τον μορφισμό $\psi \circ h$ να είναι στην πλήρη υποκατηγορία $\mathcal{J}$, γεγονός που δείχνει τη ζητούμενη δεύτερη συνθήκη και έτσι η $\mathcal{J}$ είναι πράγματι filtered.

Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{J}$ είναι cofinal στην $\mathcal{I}$, εφόσον η πρώτη συνθήκη του ορισμού ισχύει από υπόθεση, αρκεί να δείξουμε τη δεύτερη συνθήκη. Έστω λοιπόν $i \in \text{ob } \mathcal{I}, j_1, j_2 \in \text{ob } \mathcal{J}$ και μορφισμοί $\phi_1 : i \rightarrow j_1, \phi_2 : i \rightarrow j_2$ της $\mathcal{I}$. Από την παρατήρηση 1.2.5, επειδή η $\mathcal{I}$ είναι filtered, υπάρχει κάποιο $i' \in \text{ob } \mathcal{I}$ και μορφισμοί $\psi_1 : j_1 \rightarrow i', \psi_2 : j_2 \rightarrow i'$ της $\mathcal{J}$ έτσι ώστε $\psi_1 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \phi_2$. Από υπόθεση, βρίσκουμε $j_3 \in \text{ob } \mathcal{J}$ και μορφισμό $\phi_3 : i' \rightarrow j_3$ της $\mathcal{I}$. Εφόσον η υποκατηγορία $\mathcal{J}$ είναι πλήρης, έπεται ότι οι μορφισμοί $\phi_3 \circ \psi_1$ και $\phi_3 \circ \psi_2$ είναι στη $\mathcal{J}$ και το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα μας δίνει ότι η $\mathcal{J}$ είναι cofinal στην $\mathcal{I}$ και ολοκληρώνει την απόδειξη.

$$\begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & \swarrow \phi_1 & \downarrow & \searrow \phi_2 & \\ j_1 & \xleftarrow{\phi_3 \circ \psi_1} & j_3 & \xleftarrow{\phi_3 \circ \psi_2} & j_2 \end{array}$$

□

Ο λόγος για τον οποίο μας ενδιαφέρουν οι cofinal συναρτητές είναι ότι οι συναρτητές αυτοί διατηρούν τα συνόρια. Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να θεωρήσουμε συνόρια πάνω από μικρότερες και πιο βολικές κατηγορίες.

Πρόταση 1.2.13. Έστω $\mathcal{J}, \mathcal{I}, \mathcal{C}$ τρεις κατηγορίες με τις δύο πρώτες να είναι small και $L : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}, F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ δύο συναρτητές με τον L να είναι cofinal. Αν υπάρχει το $\text{colim}_{\rightarrow} F$, τότε υπάρχει και το $\text{colim}_{\rightarrow} (F \circ L)$ και ισχύει ότι $\text{colim}_{\rightarrow} F \cong \text{colim}_{\rightarrow} (F \circ L)$.

Απόδειξη. Έστω $(\alpha_i : F_i \rightarrow \varinjlim F)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ οι μορφισμοί του συνόριου $\varinjlim F$. Εφόσον ο συναρτητής L είναι cofinal, για κάθε i στην $\mathcal{I}$ υπάρχει $j = j(i)$ στην $\mathcal{J}$ και μορφισμός $\mu_i : i \rightarrow L(j)$ της $\mathcal{I}$. Ιδιαίτερος, για κάθε j στην $\mathcal{J}$ μπορούμε να επιλέξουμε το $j = j(L(j))$ και $\mu_{L(j)} = 1_{L(j)}$. Θα δείξουμε ότι το $\varinjlim F$ ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του $\varinjlim (F \circ L)$ οπότε και θα έχουμε το ζητούμενο.

Για κάθε j στο $\mathcal{J}$ ορίζουμε

$$\beta_j = \alpha_{L(j)} : FL(j) \rightarrow \varinjlim F.$$

Τότε για κάθε μορφισμό $\psi : j_1 \rightarrow j_2$ της $\mathcal{J}$ παρατηρούμε ότι

$$\beta_{j_2} \circ (F \circ L)(\psi) = \alpha_{L(j_2)} \circ F(L(\psi)) = \alpha_{L(j_1)} = \beta_{j_1}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν το X είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ με μορφισμούς $(f_j : FL(j) \rightarrow X)_{j \in \text{ob } \mathcal{J}}$, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $\psi : j_1 \rightarrow j_2$ της $\mathcal{J}$ να ισχύει ότι

$$f_{j_2} \circ (F \circ L)(\psi) = f_{j_1}, \quad (1.1)$$

τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\Phi : \varinjlim F \rightarrow X$ για τον οποίο $\Phi \circ \beta_j = f_j$ για κάθε j στην $\mathcal{J}$.

Έστω λοιπόν ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ με μορφισμούς f_j όπως στην 1.1. Για κάθε i στην $\mathcal{I}$ ορίζουμε ως g_i να είναι η σύνθεση

$$g_i = f_{j(i)} \circ F(\mu_i) : F_i \rightarrow X.$$

Ιδιαίτερος, για κάθε j στην $\mathcal{J}$ είναι $g_{L(j)} = f_j$. Θέλοντας να χρησιμοποιήσουμε την καθολική ιδιότητα του $\varinjlim F$, δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε μορφισμό $\phi : i_1 \rightarrow i_2$ της $\mathcal{I}$, είναι

$$g_{i_2} \circ F(\phi) = g_{i_1}. \quad (1.2)$$

Θέτουμε $j_1 = j(i_1)$ και $j_2 = j(i_2)$. Παρατηρούμε ότι έχουμε τους μορφισμούς $\mu_{i_1} : i_1 \rightarrow L(j_1)$ και $\mu_{i_2} \circ \phi : i_1 \rightarrow L(j_2)$. Επειδή ο συναρτητής L είναι cofinal, έπεται ότι υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και μορφισμοί της $\mathcal{J}$:

$$j_1 = x_0 \leftarrow x_1 \rightarrow x_2 \leftarrow x_3 \rightarrow \cdots \leftarrow x_{2n-1} \rightarrow x_{2n} = j_2$$

όπως και μορφισμοί της $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & i_1 & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ L(x_{2k}) & \longleftarrow & L(x_{2k+1}) & \longrightarrow & L(x_{2k+2}) \end{array}$$

με τα παραπάνω διαγράμματα να μετατίθενται για κάθε $k = 0, \dots, n-1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $n = 1$, οπότε έχουμε τους ακόλουθους μορφισμούς της $\mathcal{J}$

$$j_1 = x_0 \xleftarrow{\psi_{1,0}} x_1 \xrightarrow{\psi_{1,2}} x_2 \xleftarrow{\psi_{3,2}} x_3 \xrightarrow{\psi_{3,4}} x_4 = j_2$$

και το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα της $\mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \phi_0 = \mu_{i_1} & & \phi_1 & & \phi_3 & \phi_4 = \mu_{i_2} \circ \phi \\
& \swarrow & & \downarrow & & \searrow & \searrow \\
L(x_0) & \xleftarrow{L(\psi_{1,0})} & L(x_1) & \xrightarrow{L(\psi_{1,2})} & L(x_2) & \xleftarrow{L(\psi_{3,2})} & L(x_3) \xrightarrow{L(\psi_{3,4})} L(x_4)
\end{array}$$

Με βάση την 1.1, τον ορισμό των g_i και τα παραπάνω διαγράμματα, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
g_{i_1} &= f_{j_1} \circ F(\mu_{i_1}) = f_{j_1} \circ F(L(\psi_{1,0}) \circ \phi_1) = f_{x_0} \circ (F \circ L)(\psi_{1,0}) \circ F(\phi_1) \\
&= f_{x_1} \circ F(\phi_1) = f_{x_2} \circ (F \circ L)(\psi_{1,2}) \circ F(\phi_1) = f_{x_2} \circ F(L(\psi_{1,2}) \circ \phi_1) \\
&= f_{x_2} \circ F(\phi_2) = f_{x_2} \circ F(L(\psi_{3,2}) \circ \phi_3) = f_{x_2} \circ (F \circ L)(\psi_{3,2}) \circ F(\phi_3) \\
&= f_{x_3} \circ F(\phi_3) = f_{x_4} \circ (F \circ L)(\psi_{3,4}) \circ F(\phi_3) = f_{x_4} \circ F(L(\psi_{3,4}) \circ \phi_3) \\
&= f_{x_4} \circ F(\phi_4) = f_{j_2} \circ F(\mu_{i_2} \circ \phi) = f_{j_2} \circ F(\mu_{i_2}) \circ F(\phi) \\
&= g_{i_2} \circ F(\phi).
\end{aligned}$$

και άρα ισχύει η 1.2. Έτσι, από την καθολική ιδιότητα του $\underline{\text{colim}} F$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\Phi : \underline{\text{colim}} F \rightarrow X$ για τον οποίο

$$\Phi \circ \alpha_i = g_i \quad (1.3)$$

για κάθε i στην $\mathcal{I}$. Ιδιαίτερος, για κάθε j στην $\mathcal{J}$ είναι

$$\Phi \circ \beta_j = \Phi \circ \alpha_{L(j)} = g_{L(j)} = f_j,$$

όπως θέλαμε.

Για την μοναδικότητα της Φ , έστω $\Psi : \underline{\text{colim}} F \rightarrow X$ ένας μορφισμός της $\mathcal{C}$ για τον οποίο $\Psi \circ \beta_j = f_j$ για κάθε j στην $\mathcal{J}$. Θα δείξουμε ότι $\Psi = \Phi$. Πράγματι, για κάθε i στην $\mathcal{I}$, θέτοντας $j = j(i)$ είναι:

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \alpha_i &= \Psi \circ \alpha_{L(j)} \circ F(\mu_i) \\
&= \Psi \circ \beta_j \circ F(\mu_i) \\
&= f_j \circ F(\mu_i) \\
&= g_i
\end{aligned}$$

και άρα από την καθολική ιδιότητα του $\underline{\text{colim}} F$, έπεται ότι $\Psi = \Phi$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Το ακόλουθο βασικό θεώρημα συνήθως συνοψίζεται λέγοντας ότι το τανυστικό γινόμενο μετατίθεται με τα συνόρια. Η σημασία του είναι θεμελιώδης όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Θεώρημα 1.2.14. Έστω N ένα δεξιό R -πρότυπο, $\mathcal{I}$ μία small κατηγορία και $M : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$ ένας συναρτητής. Τότε ισχύουν τα εξής:

$$(i) \quad N \otimes_R \underline{\text{colim}} M_i \cong \underline{\text{colim}} (N \otimes_R M_i).$$

- (ii) Ο παραπάνω ισομορφισμός είναι φυσικός και στις δύο μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα, για $f : N \rightarrow N'$ ομομορφισμό δεξιών R -προτύπων, το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται.

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R \varinjlim M_i & \xrightarrow{f \otimes 1_{\varinjlim M_i}} & N' \otimes_R \varinjlim M_i \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \varinjlim (N \otimes_R M_i) & \xrightarrow{\varinjlim (f \otimes 1_{M_i})} & \varinjlim (N' \otimes_R M_i) \end{array}$$

Επίσης, αν $M : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$ είναι ένας ακόμα συναρτητής και $r : M \rightarrow M'$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, τότε το ακόλουθο διάγραμμα επίσης μετατίθεται.

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R \varinjlim M_i & \xrightarrow{1_N \otimes (\varinjlim r_i)} & N \otimes_R \varinjlim M'_i \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \varinjlim (N \otimes_R M_i) & \xrightarrow{\varinjlim (1_N \otimes r_i)} & \varinjlim (N \otimes_R M'_i) \end{array}$$

Απόδειξη. Για το (i), έστω $(\alpha_i : M_i \rightarrow \varinjlim M_i)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ οι ομομορφισμοί του συνόριου $\varinjlim M_i$ και $P = \varinjlim (N \otimes_R M_i)$ με ομομορφισμούς $(\beta_i : N \otimes_R M_i \rightarrow P)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ για τον συναρτητή $(N \otimes_R \square) \circ M : \mathcal{I} \rightarrow Ab$.

Για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R M_i & \xrightarrow{1_N \otimes \alpha_i} & N \otimes_R \varinjlim M_i \\ 1_N \otimes M\phi \downarrow & \nearrow 1_N \otimes \alpha_j & \\ N \otimes_R M_j & & \end{array}$$

οπότε επάγεται μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\Psi : P = \varinjlim (N \otimes_R M_i) \rightarrow N \otimes_R \varinjlim M_i$$

για την οποία

$$\Psi \circ \beta_i = 1_N \otimes \alpha_i$$

για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$.

Αντίστροφα, για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ έχουμε την R -διπροσθετική απεικόνιση

$$\begin{aligned} g_i : N \times M_i &\rightarrow N \otimes_R M_i \\ (n, m_i) &\mapsto n \otimes m_i \end{aligned}$$

και την σύνθεση

$$\hat{g}_i = \beta_i \circ g_i : N \times M_i \xrightarrow{g_i} N \otimes_R M_i \xrightarrow{\beta_i} P = \varinjlim (N \otimes_R M_i).$$

Από την άλλη, για τον συναρτητή $(N \times \square) \circ M : \mathcal{I} \rightarrow Ab$ που έχει συνόριο $N \times \varinjlim M_i$ με ομομορφισμούς $(1_N \times \alpha_i : N \times M_i \rightarrow N \times \varinjlim M_i)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$, παρατηρούμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται για κάθε μορφισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccccc}
N \times M_i & \xrightarrow{g_i} & N \otimes_R M_i & \xrightarrow{\beta_i} & P = \varinjlim (N \otimes_R M_i) \\
1_N \times M \phi \downarrow & & \downarrow 1_N \otimes M \phi & & \nearrow \\
N \times M_j & \xrightarrow{g_j} & N \otimes_R M_j & \xrightarrow{\beta_j} &
\end{array}$$

Έτσι, επάγεται μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\hat{\phi} : N \times \varinjlim M_i \rightarrow P$$

με

$$\hat{\phi} \circ (1_N \times \alpha_i) = \hat{g}_i = \beta_i \circ g_i$$

για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$.

Η $\hat{\phi}$ είναι R -διπροσθετική γιατί η β_i είναι προσθετική και η g_i είναι R -διπροσθετική, συνεπώς επάγεται μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\Phi : N \otimes_R \varinjlim M_i \rightarrow P \text{ με } \Phi(n \otimes m) = \hat{\phi}(n, m).$$

Για $n \otimes m_i \in N \otimes_R M_i$ υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ (1_N \otimes \alpha_i))(n \otimes m_i) &= \Phi(n \otimes \alpha_i(m_i)) \\
&= \hat{\phi}(n, \alpha_i(m_i)) \\
&= \hat{\phi} \circ (1_N \times \alpha_i)(n, m_i) \\
&= \hat{g}_i(n, m_i) \\
&= (\beta_i \circ g_i)(n, m_i) \\
&= \beta_i(n \otimes m_i),
\end{aligned}$$

οπότε $\Phi \circ (1_N \otimes \alpha_i) = \beta_i$. Συνοψίζοντας, το ακόλουθο διάγραμμα αβελιανών ομάδων είναι μεταθετικό για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$

$$\begin{array}{ccccccc}
N \times M_i & \xrightarrow{g_i} & N \otimes_R M_i & \xlongequal{\quad} & N \otimes_R M_i & \xrightarrow{\beta_i} & \\
1_N \times \alpha_i \downarrow & & \downarrow \beta_i & & 1_N \otimes \alpha_i \downarrow & & \\
N \times \varinjlim M_i & \xrightarrow{\hat{\phi}} & P & \xrightarrow{\Psi} & N \otimes_R \varinjlim M_i & \xrightarrow{\Phi} & P
\end{array}$$

Δείχνουμε ότι $\Psi \circ \Phi = 1_{N \otimes_R \varinjlim M_i}$.

Γράφουμε $M = (\bigoplus_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} M_i) / M'$ όπως στην Πρόταση 1.2.3. Για το $n \otimes (\lambda_i(m_i) + M') \in N \otimes_R \varinjlim M_i$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
(\Psi \circ \Phi)(n \otimes (\lambda_i(m_i) + M')) &= (\Psi \circ \Phi \circ (1_N \otimes \alpha_i))(n \otimes m_i) \\
&= (\Psi \circ \beta_i)(n \otimes m_i) \\
&= (1_N \otimes \alpha_i)(n \otimes m_i) = \\
&= n \otimes (\lambda_i(m_i) + M').
\end{aligned}$$

Επειδή τα στοιχεία $n \otimes (\lambda_i(m_i) + M')$ παράγουν το $N \otimes_R \varinjlim M_i$, έπεται ότι $\Psi \circ \Phi = 1_{N \otimes_R \varinjlim M_i}$.

Τέλος, δείχνουμε ότι $\Phi \circ \Psi = 1_P$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(\Phi \circ \Psi) \circ \beta_i = \beta_i$. Πράγματι,

$$(\Phi \circ \Psi) \circ \beta_i = \Phi \circ (\Psi \circ \beta_i) = \Phi \circ (1_N \otimes \alpha_i) = \beta_i.$$

Έτσι, ο Φ είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων και $N \otimes_R \varinjlim M_i \cong \varinjlim (N \otimes_R M_i)$, όπως θέλαμε.

Για το (ii), συμβολίζουμε με $(\beta_{i,N} : N \otimes_R M_i \rightarrow \varinjlim (N \otimes_R M_i))_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ και $(\beta_{i,N'} : N' \otimes_R M_i \rightarrow \varinjlim (N' \otimes_R M_i))_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ τους ομομορφισμούς των συνόριων και με $\Phi_N, \Phi_{N'}$ τους ισομορφισμούς από το ερώτημα (i).

Ο φυσικός μετασχηματισμός $\hat{f} : (N \otimes_R \square) \circ M \rightarrow (N' \otimes_R \square) \circ M$ με συνιστώσες

$$f \otimes 1_{M_i} : N \otimes_R M_i \rightarrow N' \otimes_R M_i$$

επάγει τον ομομορφισμό στα συνόρια

$$\varinjlim (f \otimes 1_{M_i}) : \varinjlim (N \otimes_R M_i) \rightarrow \varinjlim (N' \otimes_R M_i)$$

που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R M_i & \xrightarrow{f \otimes 1_{M_i}} & N' \otimes_R M_i \\ \beta_{i,N} \downarrow & & \downarrow \beta_{i,N'} \\ \varinjlim (N \otimes_R M_i) & \xrightarrow{\varinjlim (f \otimes 1_{M_i})} & \varinjlim (N' \otimes_R M_i) \end{array}$$

Τώρα, ελέγχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Phi_{N'} \circ (f \otimes 1_{\varinjlim M_i}) \circ (1_N \otimes \alpha_i) &= \Phi_{N'} \circ (1_{N'} \otimes \alpha_i) \circ (f \otimes 1_{M_i}) \\ &= \beta_{i,N'} \circ (f \otimes 1_{M_i}) \\ &= \varinjlim (f \otimes 1_{M_i}) \circ \beta_{i,N} \\ &= \varinjlim (f \otimes 1_{M_i}) \circ \Phi_N \circ (1_N \otimes \alpha_i), \end{aligned}$$

οπότε

$$\Phi_{N'} \circ (f \otimes 1_{\varinjlim M_i}) = \varinjlim (f \otimes 1_{M_i}) \circ \Phi_N,$$

δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται, όπως και θέλαμε.

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R \varinjlim M_i & \xrightarrow{f \otimes 1_{\varinjlim M_i}} & N' \otimes_R \varinjlim M_i \\ \Phi_N \downarrow & & \downarrow \Phi_{N'} \\ \varinjlim (N \otimes_R M_i) & \xrightarrow{\varinjlim (f \otimes 1_{M_i})} & \varinjlim (N' \otimes_R M_i) \end{array}$$

Η μεταθετικότητα του τελευταίου διαγράμματος της εκφώνησης αποδεικνύεται παρόμοια.

□

Σαν ένα πρώτο πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος, έχουμε το εξής.

Πόρισμα 1.2.15. Κάθε filtered συνόριο επίπεδων R -προτύπων είναι επίσης επίπεδο.

Απόδειξη. Έστω M ένα R -πρότυπο για το οποίο είναι $M = \varinjlim F$ για κάποιο συναρτητή $F : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod}$, με την κατηγορία $\mathcal{I}$ να είναι filtered και το F_i να είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$. Θα δείξουμε ότι το M είναι επίπεδο. Έστω $f : A \rightarrow B$ ένας μονομορφισμός δεξιών R -προτύπων. Ζητάμε ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$f \otimes 1_M : A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M$$

να είναι 1-1. Θεωρούμε τον φυσικό μετασχηματισμό

$$\hat{f} : (A \otimes_R \square) \circ F \rightarrow (B \otimes_R \square) \circ F$$

με συνιστώσες

$$\hat{f}_i = f \otimes 1_{F_i} : A \otimes_R F_i \rightarrow B \otimes_R F_i.$$

Επειδή για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ το F_i είναι επίπεδο, κάθε συνιστώσα είναι 1-1 και άρα από την πρόταση 1.2.10, ο επαγόμενος ομομορφισμός στα filtered συνόρια

$$\varinjlim (f \otimes 1_{F_i}) : \varinjlim (A \otimes_R F_i) \rightarrow \varinjlim (B \otimes_R F_i)$$

είναι 1-1. Από το θεώρημα 1.2.14, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A \otimes_R \varinjlim F_i & \xrightarrow{f \otimes 1_{\varinjlim F_i}} & B \otimes_R \varinjlim F_i \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \varinjlim (A \otimes_R F_i) & \xrightarrow{\varinjlim (f \otimes 1_{F_i})} & \varinjlim (B \otimes_R F_i). \end{array}$$

Εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι ακριβής, έπεται ότι και η πρώτη γραμμή είναι ακριβής και έτσι έχουμε το ζητούμενο. $\square$

1.3 Το Θεώρημα Govorov-Lazard

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου θα δείξουμε το θεώρημα Govorov-Lazard. Η απόδειξη που θα δώσουμε οφείλεται στον Govorov. Αξίζει να σημειώσουμε ότι πέρα από το αποτέλεσμα καθ'αυτό, εξίσου σημαντική είναι η τεχνική της απόδειξής του την οποία θα ακολουθήσουμε σε κρίσιμα σημεία του τελευταίου κεφαλαίου. Ξεκινάμε με την ακόλουθη γενική κατασκευή η οποία δείχνει την κατηγορική προσέγγιση της απόδειξης που θα ακολουθήσουμε.

Κατασκευή 1.3.1. Έστω M ένα R -πρότυπο. Ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{C}_M$ ως εξής:

- Τα αντικείμενα της $\mathcal{C}_M$ είναι της μορφής $f : P \rightarrow M$, όπου το P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό R -πρότυπο και f είναι ένας ομομορφισμός R -προτύπων.

- Για δύο αντικείμενα $f : P \rightarrow M$ και $f' : P' \rightarrow M$ της $\mathcal{C}_M$, ένας μορφισμός της $\mathcal{C}_M$ είναι ένα μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & P' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

για κάποιον ομομορφισμό R -προτύπων g .

Ορίζουμε επίσης τον συναρτητή $F = F_M : \mathcal{C}_M \rightarrow R\text{-Mod}$ για τον οποίο

$$(f : P \rightarrow M) \mapsto P$$

για κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C}_M$ και

$$\left(\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & P' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array} \right) \mapsto (g : P \rightarrow P'),$$

για κάθε μορφισμό της $\mathcal{C}_M$.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με (P, f) το αντικείμενο $f : P \rightarrow M$ της κατηγορίας $\mathcal{C}_M$. Επειδή κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο είναι ισόμορφο με ένα R -πρότυπο της μορφής R^n/N για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και κάποιο $N \subseteq R^n$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε αντικείμενο (P, f) της κατηγορίας $\mathcal{C}_M$, το P είναι όπως παραπάνω. Συνεπώς, η κατηγορία $\mathcal{C}_M$ μπορεί να υποτεθεί ότι είναι small και έτσι έχει νόημα να θεωρήσουμε συνόρια συναρτητών με πεδίο ορισμού την $\mathcal{C}_M$. Ανεξάρτητα από το αν το M είναι επίπεδο, έχουμε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.3.2. Κάθε R -πρότυπο M γράφεται ως συνόριο πεπερασμένα παραγόμενων και προβολικών R -προτύπων.

Απόδειξη. Ακολουθώντας τους συμβολισμούς της κατασκευής 1.3.1, γνωρίζουμε ότι υπάρχει το συνόριο $\underline{\text{colim}} F$ το οποίο θα δείξουμε ότι είναι ισόμορφο με το M . Γράφουμε λοιπόν

$$\underline{\text{colim}} F = \left(\bigoplus_{(P,f) \in \text{ob } \mathcal{C}_M} F(P, f) \right) / F' = \left(\bigoplus_{(P,f)} P \right) / F',$$

όπου συμβολίζουμε με

$$\lambda_{(P,f)} : P \rightarrow \bigoplus_{(P,f)} P$$

τους κανονικούς εγκλεισμούς και με F' το R -υποπρότυπο που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής

$$\lambda_{(P_1, f_1)}(x_1) - \lambda_{(P_2, f_2)}\phi(x_1)$$

για κάποιο μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\phi} & P_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

με τα R -πρότυπα P_1, P_2 να είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά και $x_1 \in P_1$.

Για κάθε $(P, f) \in \text{ob } \mathcal{C}_M$ έχουμε τον ομομορφισμό

$$\mu_{(P,f)} : F(P, f) = P \rightarrow M \text{ με } \mu_{(P,f)} = f.$$

Βλέπουμε ότι για κάθε μορφισμό $g : (T, f) \rightarrow (T', f')$ της $\mathcal{C}_M$, είναι

$$\mu_{(T',f')} \circ F(g) = f' \circ g = f = \mu_{(T,f)}$$

και άρα επάγεται μοναδικός ομομορφισμός στο συνόριο

$$\theta : \underline{\text{colim}} F \rightarrow M$$

με

$$\theta (\lambda_{(P,f)}(x) + F') = \mu_{(P,f)}(x) = f(x) \quad (1.4)$$

για $(P, f) \in \text{ob } \mathcal{C}_M$ και $x \in P$. Δείχνουμε ότι ο θ είναι ισομορφισμός.

Έστω $m \in M$. Βρίσκουμε ομομορφισμό $f : R \rightarrow M$ με $m \in \text{im } f$, οπότε από την 1.4 για $(P, f) = (R, f)$, έχουμε ότι $m \in \text{im } f \subseteq \text{im } \theta$ και έτσι ο θ είναι επί.

Έστω τώρα κάποιο $\xi \in \underline{\text{colim}} F$ με $\theta(\xi) = 0$. Μπορούμε να γράψουμε $\xi = \sum_{(P,f)} \lambda_{(P,f)}(x_p) + F'$ για κάποια $(P, f) \in \text{ob } \mathcal{C}_M$ και $x_p \in P$. Το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο: έστω για $(P, f) \in \Gamma \subseteq \text{ob } \mathcal{C}_M$ με $|\Gamma| < \infty$, οπότε θέτοντας

$$\hat{P} = \bigoplus_{(P,f) \in \Gamma} P$$

και $\hat{f} : \hat{P} \rightarrow M$ τον ομομορφισμό που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται για κάθε $(P, f) \in \Gamma$

$$\begin{array}{ccc} P & \hookrightarrow & \hat{P} \\ \downarrow f & & \downarrow \hat{f} \\ M & \xlongequal{\quad} & M, \end{array}$$

έχουμε ότι $(\hat{P}, \hat{f}) \in \text{ob } \mathcal{C}_M$, διότι το R -πρότυπο $\hat{P}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό. Για $(P, f) \in \Gamma$, θέτουμε $\lambda'_{(P,f)} : P \rightarrow \hat{P}$ τον κανονικό εγκλεισμό του P στο $\hat{P}$, οπότε

για $x = \sum_{(P,f) \in \Gamma} \lambda'_{(P,f)}(x_p) \in \hat{P}$, είναι

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{(P,f) \in \Gamma} \lambda_{(P,f)}(x_p) + F' \\ &= \sum_{(P,f) \in \Gamma} \lambda_{(\hat{P}, \hat{f})} \circ \lambda'_{(P,f)}(x_p) + F' \\ &= \lambda_{(\hat{P}, \hat{f})} \left(\sum_{(P,f) \in \Gamma} \lambda'_{(P,f)}(x_p) \right) + F' \\ &= \lambda_{(\hat{P}, \hat{f})}(x) + F' \end{aligned}$$

και έτσι από την 1.4 έπεται ότι

$$\hat{f}(x) = \theta \left(\lambda_{(\hat{P}, \hat{f})}(x) + F' \right) = \theta(\xi) = 0.$$

Τέλος, για τον ομομορφισμό $g : R \rightarrow \hat{P}$ που στέλνει το 1 στο x , παρατηρούμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & R & \xrightarrow{g} & \hat{P} \\ \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow \hat{f} \\ M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda_{(\hat{P}, \hat{f})}(x) + F' \\ &= \lambda_{(R,0)}(1) + F' \\ &= \lambda_{(0,0)}(0) + F' \\ &= F' \\ &= 0_{\underline{\text{colim}} F}, \end{aligned}$$

συνεπώς ο θ είναι 1-1 και τελικά $\underline{\text{colim}} F \cong M$. □

Έχουμε πλέον όλα τα κατάλληλα εργαλεία για να περάσουμε στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος του κεφαλαίου.

Θεώρημα 1.3.3 (Gonvion-Lazard). Ένα R -πρότυπο M είναι επίπεδο αν και μόνο αν είναι filtered συνόριο πεπερασμένα παραγόμενων και ελεύθερων R -προτύπων.

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι το M είναι filtered συνόριο πεπερασμένα παραγόμενων και ελεύθερων R -προτύπων. Επειδή κάθε ελεύθερο R -πρότυπο είναι επίπεδο, από το πόρισμα 1.2.15 έπεται το M είναι επίπεδο.

Αντίστροφα, έστω M ένα επίπεδο R -πρότυπο. Ακολουθώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης πρότασης, γράφουμε $M = \underline{\text{colim}} F$ για τον συναρτητή $F : \mathcal{C}_M \rightarrow R\text{-Mod}$. Δείχνουμε πρώτα ότι για M επίπεδο, η κατηγορία $\mathcal{C}_M$ είναι filtered.

Για την πρώτη συνθήκη της filtered κατηγορίας, έστω (P_1, f_1) και (P_2, f_2) δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}_M$. Σχηματίζουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
P_1 & \xhookrightarrow{i} & P_1 \oplus P_2 & \xleftarrow{j} & P_2 \\
f_1 \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f_2 \\
M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M,
\end{array}$$

με την R -γραμμική απεικόνιση g να είναι η μοναδική που επεκτείνει τις f_1 και f_2 στο ευθύ άθροισμα $P_1 \oplus P_2$. Επειδή το R -πρότυπο $P_1 \oplus P_2$ είναι πεπερασμένο παραγόμενο και προβολικό, το παραπάνω διάγραμμα δείχνει ότι η $\mathcal{C}_M$ ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη της filtered κατηγορίας. Μάλιστα, παρατηρούμε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε ότι το M είναι επίπεδο, οπότε η πρώτη συνθήκη της filtered κατηγορίας ισχύει αυτόματα για κάθε R -πρότυπο M . Η παρατήρηση αυτή θα μας φανεί χρήσιμη και στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας.

Για τη δεύτερη συνθήκη της filtered κατηγορίας, έστω

$$(P_1, f_1) \xrightarrow[a]{a} (P_2, f_2)$$

ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών της κατηγορίας $\mathcal{C}_M$. Θα βρούμε ένα μορφισμό $c : (P_2, f_2) \rightarrow (P_3, f_3)$ της $\mathcal{C}_M$, έτσι ώστε $coa = cob$. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{array}{ccccc}
P_1 & \xrightarrow[a]{a} & P_2 & \xrightarrow{c} & P_3 \\
f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M,
\end{array}$$

για κάποιο πεπερασμένο παραγόμενο και προβολικό R -πρότυπο P_3 και έναν ομομορφισμό R -προτύπων f_3 . Ξεκινάμε λοιπόν από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
P_1 & \xrightarrow[a]{a} & P_2 \\
f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\
M & \xlongequal{\quad} & M
\end{array}$$

που μας δίνει ότι $f_2 \circ (b - a) = f_1 - f_1 = 0$ και άρα υπάρχει ομομορφισμός $\overline{f_2} : \text{coker}(b - a) \rightarrow M$ με $\overline{f_2} \circ p = f_2$, όπου με $p : P_2 \rightarrow \text{coker}(b - a)$ συμβολίσαμε την απεικόνιση πηλίκο. Επειδή τα R -πρότυπα P_1 και P_2 είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά, σύμφωνα με τα λήμματα 1.1.3 και 1.1.4, ο συνπυρήνας $\text{coker}(b - a)$ είναι ένα πεπερασμένο παριστώμενο R -πρότυπο. Επίσης, επειδή το M είναι επίπεδο, από την πρόταση 1.1.6, υπάρχει κάποιο πεπερασμένο παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο P_3 και μία παραγοντοποίηση της $\overline{f_2}$ ως

$$\text{coker}(b - a) \xrightarrow{c} P_3 \xrightarrow{h} M,$$

για κάποιες R -γραμμικές απεικονίσεις c και h . Τα παραπάνω μας δίνουν το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 & \xrightarrow[b]{a} & P_2 & \xrightarrow{p} & \text{coker}(b-a) & \xrightarrow{c} & P_3 \\
f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow \overline{f_2} & & \downarrow h \\
M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M,
\end{array}$$

οπότε ισχύει και η δεύτερη συνθήκη της filtered κατηγορίας και τελικά η κατηγορία $\mathcal{C}_M$ είναι filtered.

Έστω τώρα $\mathcal{C}'_M$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}_M$ με αντικείμενα της μορφής $f : P \rightarrow M$, όπου το P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο. Θα δείξουμε ότι η παραπάνω υποκατηγορία είναι cofinal στην $\mathcal{C}_M$. Εφόσον η υποκατηγορία $\mathcal{C}'_M$ είναι πλήρης, από το λήμμα 1.2.12 αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής-εγκλεισμός $\mathcal{C}'_M \rightarrow \mathcal{C}_M$ ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του cofinal συναρτητή. Έστω λοιπόν $f : P \rightarrow M$ ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}_M$. Από την πρόταση 1.1.6 υπάρχει κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο F και μία παραγοντοποίηση της f ως $P \xrightarrow{g} F \xrightarrow{h} M$. Έτσι, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{g} & F \\
f \downarrow & & \downarrow h \\
M & \xlongequal{\quad} & M.
\end{array}$$

Εδώ, το αντικείμενο (F, h) ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{C}'_M$ και άρα έχουμε τη ζητούμενη συνθήκη.

Τώρα, σύμφωνα με την πρόταση 1.2.13, το M είναι filtered συνόριο του συναρτητή

$$\mathcal{C}'_M \hookrightarrow \mathcal{C}_M \xrightarrow{F} R\text{-Mod},$$

με την κατηγορία $\mathcal{C}'_M$ να είναι filtered, δηλαδή το M είναι filtered συνόριο πεπερασμένα παραγόμενων και ελεύθερων R -προτύπων, όπως ακριβώς θέλαμε. $\square$

Κεφάλαιο 2

Συμπλέγματα και σχετικές κατασκευές

2.1 Βασικοί ορισμοί

Η έννοια της ακρίβειας είναι θεμελιώδης για την ομολογική άλγεβρα και έτσι είναι φυσιολογικό και αναγκαίο να στρέψει κανείς την προσοχή του στη μελέτη των συμπλεγμάτων. Μέσω αυτών ορίζεται η (συν)ομολογία η οποία δίνει σημαντικά αποτελέσματα σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και όχι μόνο. Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου, θα κάνουμε μία παρουσίαση των στοιχειωδών εννοιών που σχετίζονται με τα συμπλέγματα R -προτύπων.

Ορισμός 2.1.1. Ένα αλυσωτό σύμπλεγμα R -προτύπων (X, ∂^X) είναι μία ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{\partial_n^X} X_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

όπου τα X^n είναι R -πρότυπα και οι ∂_n^X είναι R -γραμμικές απεικονίσεις, έτσι ώστε $\partial_n^X \circ \partial_{n+1}^X = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αντίστοιχα, ένα συναλυσωτό σύμπλεγμα R -προτύπων (X, ∂_X) είναι μία ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{\partial_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots ,$$

όπου τα X^n είναι R -πρότυπα και οι ∂_X^n είναι R -γραμμικές απεικονίσεις, έτσι ώστε $\partial_X^n \circ \partial_X^{n-1} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με συναλυσωτά συμπλέγματα τα οποία για χάρη συντομίας θα καλούμε συμπλέγματα. Επίσης, θα συμβολίζουμε το σύμπλεγμα (X, ∂_X) απλά με X παραλείποντας τις απεικονίσεις ∂_X που καλούνται διαφορεικά του συμπλέγματος.

Έστω X και Y δύο συμπλέγματα R -προτύπων. Ένας μορφισμός συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$, είναι μία ακολουθία μορφισμών $(f^n : X^n \rightarrow Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\
\cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{\partial_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{\partial_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Για μορφισμούς συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$, ορίζουμε τη σύνθεση $g \circ f : X \rightarrow Z$ από τη σχέση $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Είναι άμεσο ότι ο παραπάνω ορισμός δίνει ένα μορφισμό συμπλεγμάτων και ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \rightarrow X$ δίνεται από τη σχέση $(1_X)^n = 1_{X^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι τα συμπλέγματα R -προτύπων σχηματίζουν μία κατηγορία την οποία θα συμβολίζουμε με $C(R\text{-Mod})$. Αντίστοιχα ορίζονται οι πλήρεις υποκατηγορίες $C(R\text{-Proj}) \subseteq C(R\text{-Flat}) \subseteq C(R\text{-Mod})$ που έχουν ως αντικείμενα τα συμπλέγματα από προβολικά/επίπεδα R -πρότυπα αντίστοιχα.

Για ένα μορφισμό συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$, σημειώνουμε τα εξής:

- Ο f είναι 1-1 αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ είναι 1-1 σε κάθε βαθμό n .
- Ο f είναι επί αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ είναι επί σε κάθε βαθμό n .
- Ο f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ είναι ισομορφισμός σε κάθε βαθμό n .

Συνεχίζουμε με περισσότερους ορισμούς.

Ορισμός 2.1.2. Ένα σύμπλεγμα R -προτύπων X ονομάζεται *αριστερά φραγμένο* αν $X^n = 0$ για $n \ll 0$, ενώ ονομάζεται *δεξιά φραγμένο* αν $X^n = 0$ για $n \gg 0$. Τέλος, το X ονομάζεται *φραγμένο* αν είναι αριστερά και δεξιά φραγμένο.

Ένα σύμπλεγμα Y καλείται *υποσύμπλεγμα* του συμπλέγματος X όταν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το Y^n είναι ένα R -υποπρότυπο του X^n και $\partial_Y^n = (\partial_X^n)_{|Y^n}$. Τότε ο εγχλεισμός $i : Y \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{\partial_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{\partial_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

είναι ένας μορφισμός συμπλεγμάτων. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να σχηματίσουμε το σύμπλεγμα-πηλίκο $(X/Y, \bar{\partial})$ ως εξής: το X/Y δίνεται στο βαθμό n από τη σχέση $(X/Y)^n = X^n/Y^n$ και το διαφορικό $\bar{\partial}^n : X^n/Y^n \rightarrow X^{n+1}/Y^{n+1}$ είναι η μοναδική R -γραμμική απεικόνιση που κάνει το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & Y^n \\
\pi^n \downarrow & & \downarrow \pi^{n+1} \\
X^n/Y^n & \xrightarrow{\bar{\partial}^n} & X^{n+1}/Y^{n+1}
\end{array}$$

να μετατίθεται. Στην περίπτωση αυτή, τα παραπάνω μεταθετικά διαγράμματα δείχνουν ότι ορίζεται ο μορφισμός-πηλίκο $\pi : X \rightarrow X/Y$ που στο βαθμό n είναι η R -γραμμική απεικόνιση πηλίκο $\pi^n : X^n \rightarrow X^n/Y^n$.

Η κατηγορία $C(R\text{-Mod})$ κληρονομεί την αβελιανή δομή της κατηγορίας $R\text{-Mod}$ με τις αντίστοιχες έννοιες να μεταφέρονται "κατά βαθμό". Για παράδειγμα, έχοντας μία οικογένεια $(X_a)_{a \in A}$ συμπλεγμάτων R -προτύπων, ορίζουμε το σύμπλεγμα-ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{a \in A} X_a$ ως εξής: το $\bigoplus_{a \in A} X_a$ δίνεται στο βαθμό n από τη σχέση

$$\left(\bigoplus_{a \in A} X_a\right)^n = \bigoplus_{a \in A} X_a^n$$

και το διαφορικό $\partial^n : \bigoplus_{a \in A} X_a^n \rightarrow \bigoplus_{a \in A} X_a^{n+1}$ είναι η μοναδική R -γραμμική επεικόνιση που κάνει το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X_a^n & \xrightarrow{\partial_a^n} & X_a^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{a \in A} X_a^n & \xrightarrow{\partial^n} & \bigoplus_{a \in A} X_a^{n+1} \end{array}$$

να μετατίθεται για κάθε $a \in A$. Αντίστοιχα ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο συμπλεγμάτων, ο πυρήνας, η εικόνα και ο συνπυρήνας ενός μορφισμού συμπλεγμάτων.

Στη συνέχεια ορίζουμε τα πρότυπα συνομολογίας ενός συμπλέγματος R -προτύπων που συμπυκνώνουν μεγάλο τμήμα της πληροφορίας του συμπλέγματος.

Ορισμός 2.1.3. Έστω X ένα σύμπλεγμα R -προτύπων. Για κάθε ακέραιο n ορίζουμε τα R -πρότυπα:

- $Z^n(X) = \ker(\partial_X^n) \subseteq X^n$ και καλούμε τα στοιχεία του $Z^n(X)$ n -συν-κύκλους.
- $B^n(X) = \text{im}(\partial_X^{n-1}) \subseteq X^n$ και καλούμε τα στοιχεία του $B^n(X)$ n -συν-σύνορα.

Επειδή $\partial_X^n \circ \partial_X^{n-1} = 0$, έχουμε ότι $B^n(X) \subseteq Z^n(X)$ οπότε μπορούμε να ορίσουμε το R -πρότυπο

$$H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X),$$

το οποίο ονομάζεται n -οστό πρότυπο συνομολογίας του συμπλέγματος X .

Παρατηρούμε ότι η συνομολογία στο βαθμό n είναι ένα μέτρο του κατά πόσο το σύμπλεγμα X είναι ακριβές στο βαθμό n . Πιο συγκεκριμένα, είναι $H^n(X) = 0$ αν και μόνο αν το σύμπλεγμα είναι ακριβές στον βαθμό n . Ένα σύμπλεγμα που είναι ακριβές σε κάθε βαθμό ονομάζεται άκυκλο, δηλαδή το X είναι άκυκλο αν και μόνο αν $H^n(X) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 2.1.4. Για κάθε ακέραιο n , οι $Z^n, B^n, H^n : C(R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod}$ είναι προσθετικοί συναρτητές.

Απόδειξη. Έστω $g : X \rightarrow Y$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων R -προτύπων. Θα ορίσουμε R -γραμμικές απεικονίσεις $Z^n(f) : Z^n(X) \rightarrow Z^n(Y)$, $B^n(f) : B^n(X) \rightarrow B^n(Y)$ και $H^n(f) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$. Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ Y^n & \xrightarrow{\partial_Y^n} & Y^{n+1} \end{array}$$

είναι άμεσο ότι $f^n(Z^n(X)) \subseteq Z^n(Y)$ και $f^n(B^n(X)) \subseteq B^n(Y)$, επομένως μπορούμε να ορίσουμε τις R -γραμμικές απεικονίσεις

$$Z^n(f) : Z^n(X) \rightarrow Z^n(Y) \text{ με } Z^n(f) = f|_{Z^n(X)} : Z^n(X) \rightarrow Z^n(Y).$$

και

$$B^n(f) : B^n(X) \rightarrow B^n(Y) \text{ με } B^n(f) = f|_{B^n(X)} : B^n(X) \rightarrow B^n(Y).$$

Επίσης, από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^n(X) & \xrightarrow{i} & Z^n(X) & \xrightarrow{p} & H^n(X) \longrightarrow 0 \\ & & B^n(f) \downarrow & & Z^n(f) \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B^n(Y) & \xrightarrow{j} & Z^n(Y) & \xrightarrow{q} & H^n(Y) \longrightarrow 0, \end{array}$$

έπεται ότι $q \circ Z^n(f) \circ i = 0$ και άρα επάγεται μοναδική R -γραμμική απεικόνιση

$$H^n(f) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$$

που να κάνει το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} Z^n(X) & \longrightarrow & H^n(X) \\ Z^n(f) \downarrow & & \downarrow H^n(f) \\ Z^n(Y) & \longrightarrow & H^n(Y) \end{array}$$

μεταθετικό. Συνεπώς, η $H^n(f)$ έχει τύπο

$$H^n(f)(x + B^n(X)) = f^n(x) + B^n(Y),$$

για $x + B^n(X) \in H^n(X)$.

Είναι άμεσο ότι οι παραπάνω απεικονίσεις διατηρούν τους ταυτοτικούς μορφισμούς και τις συνθέσεις και άρα οι Z^n , B^n και H^n είναι πράγματι συναρτητές. Ενδεικτικά, δείχνουμε ότι η H^n διατηρεί τις συνθέσεις. Πράγματι, για μορφισμούς συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$, για κάθε $x + B^n(X) \in H^n(X)$, είναι

$$\begin{aligned} H^n(g \circ f)(x + B^n(X)) &= g_n f_n(x) + B^n(Z) \\ &= H^n(g)(f^n(x) + B^n(Y)) \\ &= H^n(g) \circ H^n(f)(x + B^n(X)), \end{aligned}$$

οπότε $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f)$.

Είναι επίσης άμεσο ότι οι παραπάνω συναρτητές είναι προσθετικοί. $\square$

Δίνουμε μία εναλλακτική περιγραφή των προτύπων συνομολογίας που θα μας φανεί χρήσιμη στη συνέχεια.

Παρατήρηση 2.1.5. Έστω X ένα σύμπλεγμα R -προτύπων και ένας ακέραιος n . Η σύνθεση

$$X^{n-1} \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{\partial_X^n} X^{n+1}$$

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, οπότε επάγεται μοναδική R -γραμμική απεικόνιση $\overline{\partial_X^n} : \text{coker}(\partial_X^{n-1}) \rightarrow X^{n+1}$ που να κάνει το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται

$$\begin{array}{ccccc} X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{p} & \text{coker}(\partial_X^{n-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow \partial_X^n & & \downarrow \overline{\partial_X^n} \\ & & & & X^{n+1} \end{array}$$

όπου με $p : X^n \rightarrow \text{coker}(\partial_X^{n-1})$ συμβολίσαμε την απεικόνιση πηλίκου. Τότε, είναι

$$H^n(X) = \ker \partial_X^n / \text{im } \partial_X^{n-1} = \ker(\overline{\partial_X^n}).$$

Παρουσιάζουμε τώρα την έννοια της ομοτοπίας μορφισμών συμπλεγμάτων.

Ορισμός 2.1.6. Έστω $f : X \rightarrow Y$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων. Μία ομοτοπία από το μορφισμό f στο g είναι μία ομογενής R -γραμμική απεικόνιση $\Sigma = (\Sigma^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ βαθμού -1 , δηλαδή μία ακολουθία R -γραμμικών απεικονίσεων $\Sigma^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$, έτσι ώστε

$$f^n - g^n = \partial_Y^{n-1} \circ \Sigma^n + \Sigma^{n+1} \circ \partial_X^n : X^n \rightarrow Y^n$$

για κάθε ακέραιο n . Για συντομία, η παραπάνω σχέση θα γράφεται ως $f - g = \partial_Y \Sigma + \Sigma \partial_X$. Σε αυτή την περίπτωση, οι μορφισμοί f και g θα ονομάζονται ομοτοπικοί και θα συμβολίζουμε $f \sim g$.

Παρατήρηση 2.1.7. Η ομοτοπία μορφισμών είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

Πράγματι, ελέγχουμε διαδοχικά ότι

- $f \sim f$: για $\Sigma = 0$, είναι $f - f = 0 = \partial_X \Sigma + \Sigma \partial_X$.
- $f \sim g \implies g \sim f$: αν Σ μία ομοτοπία από τον μορφισμό f στο g , τότε $f - g = \partial_Y \Sigma + \Sigma \partial_X$ και άρα για την ομογενή R -γραμμική απεικόνιση $-\Sigma$ βαθμού -1 είναι $g - f = -(f - g) = \partial_Y(-\Sigma) + (-\Sigma)\partial_X$.
- $f \sim g$ και $g \sim h \implies f \sim h$: αν Σ μία ομοτοπία από τον μορφισμό f στο g και S μία ομοτοπία από το g στο h , τότε $f - g = \partial_Y \Sigma + \Sigma \partial_X$ και $g - h = \partial_Y S + S \partial_X$, οπότε για την ομογενή R -γραμμική απεικόνιση $\Sigma + S$ βαθμού -1 , είναι $f - h = \partial_Y(\Sigma + S) + (\Sigma + S)\partial_X$.

Λήμμα 2.1.8. Έστω $f, g : X \rightarrow Y$ δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων με $f \sim g$. Αν $h : Y \rightarrow Z$ είναι ένας ακόμα μορφισμός συμπλεγμάτων, τότε $h \circ f \sim h \circ g$. Αντίστοιχα, αν $w : W \rightarrow X$ είναι ένας ακόμα μορφισμός συμπλεγμάτων, τότε $f \circ w \sim g \circ w$.

Απόδειξη. Δείχνουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό, αφού ο δεύτερος αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Έστω Σ μία ομοτοπία από το μορφισμό f στο g . Τότε για την ομογενή R -γραμμική απεικόνιση $\hat{\Sigma} = h \circ \Sigma$ βαθμού -1 με

$$\hat{\Sigma}^n = h^{n-1} \circ \Sigma^n : X^n \rightarrow Z^{n-1},$$

για κάθε ακέραιο n , υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} h^n \circ f^n - h^n \circ g^n &= h^n \circ (f^n - g^n) \\ &= h^n \circ (\partial_Y^{n-1} \circ \Sigma^n + \Sigma^{n+1} \circ \partial_X^n) \\ &= h^n \circ \partial_Y^{n-1} \circ \Sigma^n + h^n \circ \Sigma^{n+1} \circ \partial_X^n \\ &= \partial_Z^{n-1} \circ (h^{n-1} \circ \Sigma^n) + (h^n \circ \Sigma^{n+1}) \circ \partial_X^n \\ &= \partial_Z^{n-1} \circ \hat{\Sigma}^n + \hat{\Sigma}^{n+1} \circ \partial_X^n, \end{aligned}$$

οπότε η $\hat{\Sigma}$ είναι μία ομοτοπία από το μορφισμό $h \circ f$ στο $h \circ g$. □

Ορισμός 2.1.9. Έστω $f : X \rightarrow Y$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων. Ο f καλείται *ομοτοπική ισοδυναμία* αν υπάρχει κάποιος μορφισμός συμπλεγμάτων $g : Y \rightarrow X$ έτσι ώστε $g \circ f \sim 1_X$ και $f \circ g \sim 1_Y$. Δύο συμπλέγματα X, Y καλούνται *ομοτοπικά ισοδύναμα* αν υπάρχει κάποια ομοτοπική ισοδυναμία $f : X \rightarrow Y$ και θα συμβολίζουμε $X \simeq Y$.

Παρατήρηση 2.1.10. Η ομοτοπική ισοδυναμία συμπλεγμάτων είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι, η ομοτοπική ισοδυναμία είναι προφανώς μία αυτοπαθής και συμμετρική σχέση. Για τη μεταβατικότητα, έστω ότι $X \simeq Y$ και $Y \simeq Z$ για τρία συμπλέγματα X, Y και Z . Τότε υπάρχουν μορφισμοί συμπλεγμάτων $f_1 : X \rightarrow Y, g_1 : Y \rightarrow X, f_2 : Y \rightarrow Z$ και $g_2 : Z \rightarrow Y$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} g_1 \circ f_1 &\sim 1_X \\ f_1 \circ g_1 &\sim 1_Y \\ g_2 \circ f_2 &\sim 1_Y \text{ και} \\ f_2 \circ g_2 &\sim 1_Z. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (g_1 \circ g_2) \circ (f_2 \circ f_1) &= g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \\ &\sim g_1 \circ 1_Y \circ f_1 \\ &= g_1 \circ f_1 \\ &\sim 1_X. \end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα προκύπτει ότι

$$(f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) \sim 1_Z,$$

που δείχνει ότι $X \simeq Z$.

Πρόταση 2.1.11. Έστω δύο ομοτοπικοί μορφισμοί συμπλεγμάτων $f, g : X \rightarrow Y$. Τότε $H^n(f) = H^n(g) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$.

Απόδειξη. Από υπόθεση, υπάρχει ομοτοπία Σ από τον μορφισμό f στο g , έτσι ώστε $f - g = \partial_Y \Sigma + \Sigma \partial_X$. Για $x + B^n(X) \in Z^n(X)/B^n(X) = H^n(X)$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (H^n(f) - H^n(g))(x + B^n(X)) &= f^n(x) - g^n(x) + B^n(Y) \\ &= \partial_Y^{n-1} \Sigma^n(x) + \Sigma^{n+1} \partial_X^n(x) + B^n(Y) \\ &= 0 + B^n(Y) \\ &= 0_{H^n(Y)} \end{aligned}$$

και άρα $H^n(f) = H^n(g)$. □

Το ακόλουθο πόρισμα δείχνει ότι ομοτοπικά ισοδύναμα συμπλέγματα έχουν την ίδια συνολογία.

Πόρισμα 2.1.12. Έστω $f : X \rightarrow Y$ μία ομοτοπική ισοδυναμία. Τότε για κάθε ακέραιο n , η απεικόνιση $H^n(f) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός R -προτύπων.

Απόδειξη. Από υπόθεση, υπάρχει κάποιος μορφισμός συμπλεγμάτων $g : Y \rightarrow X$, έτσι ώστε $g \circ f \sim 1_X$ και $f \circ g \sim 1_Y$. Σταθεροποιούμε ένα ακέραιο n . Τότε χρησιμοποιώντας ότι ο $H^n : C(R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod}$ είναι ένας συναρτητής, καθώς και την πρόταση 2.1.11 έχουμε ότι

$$H^n(g) \circ H^n(f) = H^n(g \circ f) = H^n(1_X) = 1_{H^n(X)}$$

και αντίστοιχα

$$H^n(f) \circ H^n(g) = H^n(f \circ g) = H^n(1_Y) = 1_{H^n(Y)},$$

που δείχνει το ζητούμενο. □

Ορισμός 2.1.13. Ένα σύμπλεγμα R -προτύπων X ονομάζεται *συσταλτό* αν είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με το μηδενικό σύμπλεγμα. Είναι άμεσο ότι το X είναι συσταλτό αν και μόνο αν ο ταυτοτικός μορφισμός 1_X είναι ομοτοπικός με το μηδενικό μορφισμό.

Πόρισμα 2.1.14. Κάθε συσταλτό σύμπλεγμα R -προτύπων είναι άκυκλο.

Απόδειξη. Έστω X ένα συσταλτό σύμπλεγμα R -προτύπων. Τότε $X \simeq 0$ και από το πόρισμα 2.1.12, για κάθε ακέραιο n είναι $H^n(X) \cong H^n(0) = 0$, δηλαδή το σύμπλεγμα X είναι άκυκλο. □

Φυσιολογικό είναι να ρωτήσει κανείς αν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή αν κάθε άκυκλο σύμπλεγμα είναι συσταλτό. Η απάντηση είναι όχι, με το ακόλουθο σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων να αποτελεί αντιπαράδειγμα

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad (2.1)$$

Σε κάθε περίπτωση, παρατηρούμε ότι για ένα άκυκλο σύμπλεγμα R -προτύπων C , έχουμε για κάθε ακέραιο n τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Z^n \hookrightarrow C^n \xrightarrow{\bar{\partial}^n} Z^{n+1} \longrightarrow 0, \quad (2.2)$$

όπου η απεικόνιση $\bar{\partial}^n$ είναι το διαφορικό ∂^n με περιορισμένο το σύνολο τιμών. Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, οι παραπάνω βραχείες ακριβείς ακολουθίες χαρακτηρίζουν τα συσταλτά συμπλέγματα.

Πρόταση 2.1.15. Έστω C ένα άκυκλο σύμπλεγμα R -προτύπων. Το C είναι συσταλτό αν και μόνο αν η βραχεία ακριβής ακολουθία 2.2 διασπάται για κάθε ακέραιο n .

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι το σύμπλεγμα C είναι συσταλτό. Τότε υπάρχουν R -γραμμικές απεικονίσεις $h^n : C^n \rightarrow C^{n-1}$ τέτοιες ώστε $1_{C^n} = \partial^{n-1}h^n + h^{n+1}\partial^n$. Θέτουμε $s^n = h^{n+1}|_{Z^{n+1}} : Z^{n+1} \rightarrow C^n$ και έχουμε ότι $\bar{\partial}^n \circ s^n = \bar{\partial}^n \circ h^{n+1}|_{Z^{n+1}} = 1_{Z^{n+1}} - h^{n+2} \circ \partial^{n+1}|_{Z^{n+1}} = 1_{Z^{n+1}}$, οπότε η 2.2 διασπάται για κάθε ακέραιο n .

Αντίστροφα, έστω ότι η 2.2 διασπάται για κάθε n . Τότε μπορούμε για κάθε n να βρούμε μία R -γραμμική απεικόνιση $s^n : Z^{n+1} \rightarrow C^n$ τέτοια ώστε $\bar{\partial}^n \circ s^n = 1_{Z^{n+1}}$, δηλαδή $C^{n+1} = \ker \bar{\partial}^n \oplus \text{im } s^n = Z^n \oplus \text{im } s^n$. Ορίζουμε την $h^n : C^n \rightarrow C^{n-1}$ θέτοντας $h^n|_{Z^n} = s^{n-1}$ και $h^n|_{\text{im } s^n} = 0$. Για τυχόν $x \in C^n$ γράφουμε $x = z + s^n(y)$ για μοναδικά $z \in Z^n$ και $y \in Z^{n+1}$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (\partial^{n-1}h^n + h^{n+1}\partial^n)(x) &= (\partial^{n-1}h^n)(z + s^n(y)) + (h^{n+1}\partial^n)(z + s^n(y)) \\ &= \partial^{n-1}h^n(z) + h^{n+1}\partial^n(s^n(y)) \\ &= \partial^{n-1}s^{n-1}(z) + h^{n+1}(y) \\ &= z + s^n(y) \\ &= x, \end{aligned}$$

οπότε $\partial^{n-1}h^n + h^{n+1}\partial^n = 1_{C^n}$ για κάθε n και άρα το σύμπλεγμα C είναι συσταλτό. $\square$

Τώρα μπορούμε να δούμε άμεσα γιατί το σύμπλεγμα 2.1 αν και άκυκλο, δεν είναι συσταλτό. Πράγματι, διαφορετικά η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

θα ήταν διασπώμενη, πράγμα άτοπο. Συνεχίζουμε εισαγάγοντας την έννοια της ομοτοπικής κατηγορίας των συμπλεγμάτων R -προτύπων.

Η σχέση του ισομορφισμού συμπλεγμάτων είναι ιδιαίτερα ισχυρή και πολλές φορές είναι χρήσιμο να ταυτίζουμε τα ομοτοπικά ισοδύναμα συμπλέγματα. Με βάση το πόρισμα 2.1.12, μία τέτοια ταύτιση σέβεται τη συνομολογία. Με αυτόν ακριβώς τον σκοπό, ορίζεται η *ομοτοπική κατηγορία των συμπλεγμάτων R -προτύπων* την οποία ορίζουμε παρακάτω.

Ορισμός 2.1.16. Έστω $K(R\text{-Mod})$ η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα συμπλέγματα R -προτύπων και ως μορφισμούς τις κλάσεις ομοτοπίας μορφισμών συμπλεγμάτων. Με άλλα λόγια, έχουμε ότι

- $\text{ob}(K(R\text{-Mod})) = \text{ob}(C(R\text{-Mod}))$ και
- $\text{Hom}_{K(R\text{-Mod})}(X, Y) = \text{Hom}_{C(R\text{-Mod})}(X, Y) / \sim$ για κάθε $X, Y \in K(R\text{-Mod})$.

Η σύνθεση μορφισμών της $K(R\text{-Mod})$ δίνεται ως εξής: για μορφισμούς συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ ορίζουμε $[g] \circ [f] = [g \circ f]$. Από το λήμμα 2.1.8, η παραπάνω σύνθεση είναι καλά ορισμένη, αφού για $f_1 \sim f_2 : X \rightarrow Y$ και $g_1 \sim g_2 : Y \rightarrow Z$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [g_1] \circ [f_1] &= [g_1 \circ f_1] \\ &= [g_2 \circ f_2] \\ &= [g_2] \circ [f_2]. \end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η κατηγορία $K(R\text{-Mod})$ είναι προσθετική. Στην παραπάνω κατηγορία έχουμε εξασθενήσει την έννοια του ισομορφισμού συμπλεγμάτων. Για παράδειγμα, ένας μορφισμός συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$ είναι 0 στην $K(R\text{-Mod})$ όταν είναι ομοτοπικός με τον μηδενικό μορφισμό και είναι ισομορφισμός στην $K(R\text{-Mod})$ όταν είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Ιδιαίτερος, ένα σύμπλεγμα X είναι το μηδενικό σύμπλεγμα της $K(R\text{-Mod})$ όταν είναι συστατικό. Ενδεικτική είναι η ακόλουθη παρατήρηση σύμφωνα με την οποία μπορούμε στην κατηγορία $K(R\text{-Mod})$ να αντικαθιστούμε ένα σύμπλεγμα από προβολικά R -πρότυπα με ένα σύμπλεγμα από ελεύθερα R -πρότυπα.

Παρατήρηση 2.1.17. Έστω Z ένα σύμπλεγμα προβολικών R -προτύπων. Τότε το Z είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με κάποιο σύμπλεγμα ελεύθερων R -προτύπων $\bar{Z}$.

Απόδειξη. Έστω το σύμπλεγμα Z

$$\dots \longrightarrow Z^{n-1} \longrightarrow Z^n \longrightarrow Z^{n+1} \longrightarrow \dots$$

με τα R -πρότυπα Z^n να είναι προβολικά για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο R -πρότυπο Y^n έτσι ώστε το $Z^n \oplus Y^n$ να είναι ελεύθερο. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε το ελεύθερο R -πρότυπο

$$F(n) = \bigoplus_1^\infty (Z^n \oplus Y^n)$$

και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Z^n \oplus F(n) &= Z^n \oplus \bigoplus_1^\infty (Z^n \oplus Y^n) \\ &\cong Z^n \oplus \left(\bigoplus_1^\infty Z^n \right) \oplus \left(\bigoplus_1^\infty Y^n \right) \\ &\cong \left(\bigoplus_1^\infty Z^n \right) \oplus \left(\bigoplus_1^\infty Y^n \right) \\ &\cong F(n). \end{aligned}$$

Έτσι, το R -πρότυπο $Z^n \oplus F(n)$ είναι επίσης ελεύθερο. Έστω τώρα $C(n)$ το συστατικό σύμπλεγμα

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow F(n) \xrightarrow{1_{F(n)}} F(n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots ,$$

όπου το $F(n)$ εμφανίζεται στους βαθμούς $n - 1$ και n . Τέλος, για το σύμπλεγμα $\overline{Z}$ με

$$\overline{Z} = Z \oplus \left(\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} C(n) \right),$$

έχουμε ότι το $\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} C(n)$ είναι συσταλτό ως ευθύ άθροισμα συσταλών συμπλεγμάτων και έτσι το $\overline{Z}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με το Z . Παρατηρούμε επίσης ότι ο n -οστός όρος του $\overline{Z}$ είναι ίσος με $Z^n \oplus F(n) \oplus F(n+1)$, το οποίο είναι ένα ελεύθερο R -προτύπο και έτσι το $\overline{Z}$ μπορεί να επιλεγεί ως το ζητούμενο σύμπλεγμα ελεύθερων R -προτύπων. $\square$

Αντίστοιχα με την περίπτωση των κατηγοριών συμπλεγμάτων R -προτύπων, ορίζονται οι πλήρεις υποκατηγορίες $K(R\text{-Proj}) \subseteq K(R\text{-Flat}) \subseteq K(R\text{-Mod})$. Τέλος, ορίζουμε την πλήρη υποκατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp \subseteq K(R\text{-Flat})$, τα αντικείμενα της οποίας θα μελετήσουμε στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας.

Ορισμός 2.1.18. Έστω η πλήρης υποκατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp \subseteq K(R\text{-Flat})$ που αποτελείται από τα συμπλέγματα επίπεδων R -προτύπων C , για τα οποία για κάθε σύμπλεγμα προβολικών R -προτύπων X και για κάθε μορφισμό συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow C$, ισχύει ότι $f \sim 0$.

2.2 Συνόρια συμπλεγμάτων R -προτύπων

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε αναλυτικά την ύπαρξη των συνόριων συμπλεγμάτων R -προτύπων και θα δούμε ότι τα filtered συνόρια συμπλεγμάτων R -προτύπων διατηρούν τη συνομολογία.

Πρόταση 2.2.1. Έστω $\mathcal{I}$ μία small κατηγορία και $A : \mathcal{I} \rightarrow C(R\text{-Mod})$ ένας συναρτητής. Τότε το συνόριο $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} A_i$ του συναρτητή A υπάρχει.

Απόδειξη. Για κάθε ακέραιο n ορίζουμε το συναρτητή

$$\widehat{n} : C(R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod}$$

για τον οποίο

$$\begin{aligned} X &\mapsto X^n \text{ για κάθε σύμπλεγμα } X \text{ και} \\ (f : X \rightarrow Y) &\mapsto f^n : X^n \rightarrow Y^n \text{ για κάθε μορφισμό συμπλεγμάτων } f. \end{aligned}$$

Τότε για τον συναρτητή

$$A^n = \widehat{n} \circ A : \mathcal{I} \rightarrow R\text{-Mod},$$

γνωρίζουμε ότι υπάρχει το συνόριο $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} A_i^n$. Επίσης, για κάθε ακέραιο n ορίζουμε το φυσικό μετασχηματισμό

$$d^n : \widehat{n} \circ A \rightarrow (\widehat{n+1}) \circ A$$

που δίνεται στη συνιστώσα $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ από την R -γραμμική απεικόνιση

$$\partial_i^n : A_i^n \rightarrow A_i^{n+1}$$

και επομένως επάγεται η R -γραμμική απεικόνιση στα συνόρια

$$\partial^n = \varinjlim \partial_i^n : \varinjlim A_i^n \rightarrow \varinjlim A_i^{n+1}.$$

Ορίζουμε το σύμπλεγμα (L, ∂) το οποίο δίνεται στο βαθμό n από το R -πρότυπο $\varinjlim A_i^n$ και που έχει ως διαφορικό στο βαθμό n την R -γραμμική απεικόνιση που ορίστηκε παραπάνω. Θα δείξουμε ότι $L \cong \varinjlim A$.

Καταρχάς, το L είναι πράγματι σύμπλεγμα καθώς οι σχέσεις $\partial_i^n \circ \partial_i^{n-1} = 0$ για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $n \in \mathbb{Z}$, συνεπάγονται ότι $\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$. Στη συνέχεια, σταθεροποιούμε ένα ακέραιο n . Έχουμε τους ομομορφισμούς $(a_i^n : A_i^n \rightarrow \varinjlim A_i^n)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ των συνόρων και το μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} A_i^n & \xrightarrow{\partial_i^n} & A_i^{n+1} \\ a_i^n \downarrow & & a_i^{n+1} \downarrow \\ \varinjlim A_i^n & \xrightarrow{\partial^n} & \varinjlim A_i^{n+1} \end{array}$$

και άρα για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ ορίζεται ο μορφοισμός συμπλεγμάτων $a_i : A_i \rightarrow L$ που δίνεται στο βαθμό n από την R -γραμμική απεικόνιση a_i^n . Εφόσον ο $A : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{C}(R\text{-Mod})$ είναι συναρτητής, για κάθε μορφοισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$, έχουμε το μορφοισμό συμπλεγμάτων $A(\phi) : A_i \rightarrow A_j$. Όμως, για κάθε ακέραιο n , για τον ομομορφοισμό $A^n(\phi) : A_i^n \rightarrow A_j^n$ είναι $a_j^n \circ A^n(\phi) = a_i^n$ και άρα ισχύει ότι $a_j \circ A(\phi) = a_i$.

Έστω τώρα ένα σύμπλεγμα X και $(f_i : A_i \rightarrow X)_{i \in \text{ob } \mathcal{I}}$ μορφοισμοί συμπλεγμάτων που να ικανοποιούν τη συνθήκη $f_j \circ A(\phi) = f_i$ για κάθε μορφοισμό $\phi : i \rightarrow j$ της $\mathcal{I}$. Τότε για κάθε ακέραιο n , είναι $f_j^n \circ A^n(\phi) = f_i^n : A_i^n \rightarrow X^n$ και άρα από την καθολική ιδιότητα του συνόριου $\varinjlim A_i^n$ υπάρχει μοναδική R -γραμμική απεικόνιση $\Phi^n : \varinjlim A_i^n \rightarrow X^n$ με $\Phi^n \circ a_i^n = f_i^n$ για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$. Το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A_i^n & \xrightarrow{\partial_i^n} & A_i^{n+1} \\ \downarrow a_i^n & & \downarrow a_i^{n+1} \\ \varinjlim A_i^n & \xrightarrow{\partial^n} & \varinjlim A_i^{n+1} \\ \downarrow \Phi^n & & \downarrow \Phi^{n+1} \\ X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{c} f^n \curvearrowright \\ \\ \curvearrowright f^{n+1} \end{array}$$

δείχνει ότι ορίζεται ο μορφοισμός συμπλεγμάτων $\Phi : L \rightarrow X$ που δίνεται στο βαθμό n από την R -γραμμική απεικόνιση Φ^n . Ο Φ είναι ο μοναδικός μορφοισμός συμπλεγμάτων που ικανοποιεί τη συνθήκη $\Phi \circ a_i = f_i$ για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ από την μοναδικότητα των επιμέρους R -γραμμικών απεικονίσεων Φ^n .

Τελικά, δείξαμε ότι το σύμπλεγμα L ικανοποιεί τη καθολική ιδιότητα του συνόριου και έτσι $L \cong \varinjlim A$. □

Αν η κατηγορία $\mathcal{I}$ είναι filtered, επειδή το συνόριο R -προτύπων

$$\underline{\text{colim}} : R\text{-Mod}^{\mathcal{I}} \rightarrow R\text{-Mod}$$

είναι ένας ακριβής και προσθετικός συναρτητής, από την κατασκευή του, το συνόριο συμπλεγμάτων R -προτύπων

$$\underline{\text{colim}} : C(R\text{-Mod})^{\mathcal{I}} \rightarrow C(R\text{-Mod})$$

είναι επίσης ένας ακριβής και προσθετικός συναρτητής. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι τα filtered συνόρια, όπως και κάθε ακριβής και προσθετικός συναρτητής, διατηρούν τη συνομολογία.

Πρόταση 2.2.2. Έστω $A : \mathcal{I} \rightarrow C(R\text{-Mod})$ ένας συναρτητής από μία filtered κατηγορία $\mathcal{I}$. Τότε για κάθε ακέραιο n ισχύει ότι

$$H^n(\underline{\text{colim}} A_i) \cong \underline{\text{colim}}(H^n(A_i)).$$

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$, σύμφωνα με την παρατήρηση 2.1.5, έχουμε το ακριβές και μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} A_i^{n-1} & \xrightarrow{\partial_i^{n-1}} & A_i^n & \xrightarrow{p_i^n} & \text{coker}(\partial_i^{n-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow \partial_i^n & & \downarrow \overline{\partial_i^n} \\ & & & & A_i^{n+1} \end{array}$$

Επάγεται λοιπόν το μεταθετικό διάγραμμα στα συνόρια

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{colim}} A_i^{n-1} & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & \underline{\text{colim}} A_i^n & \xrightarrow{\underline{\text{colim}} p_i^n} & \underline{\text{colim}}(\text{coker}(\partial_i^{n-1})) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow \partial^n & & \downarrow \underline{\text{colim}} \overline{\partial_i^n} \\ & & & & \underline{\text{colim}} A_i^{n+1} \end{array}$$

με την ακρίβεια της οριζόντιας γραμμής να διατηρείται. Από την παρατήρηση 2.1.5 και το γεγονός ότι τα filtered συνόρια διατηρούν την ακρίβεια, έπεται ότι

$$\begin{aligned} H^n(\underline{\text{colim}} A_i) &= \ker(\underline{\text{colim}} \overline{\partial_i^n}) \\ &\cong \underline{\text{colim}}(\ker \overline{\partial_i^n}) \\ &= \underline{\text{colim}}(H^n(A_i)). \end{aligned}$$

□

2.3 Κατασκευές συμπλεγμάτων R -προτύπων

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές κατασκευές συμπλεγμάτων R -προτύπων που θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο της εργασίας.

Ορισμός 2.3.1. Έστω X και Y δύο συμπλέγματα R -προτύπων. Ορίζουμε το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(X, Y)$ για το οποίο

$$\text{Hom}_R(X, Y)^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} (\text{Hom}_R(X^k, Y^{k+n}))$$

με διαφορικό

$$\begin{aligned} \partial^n : \prod_{k \in \mathbb{Z}} (\text{Hom}_R(X^k, Y^{k+n})) &\rightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} (\text{Hom}_R(X^k, Y^{k+n+1})) \\ (f_k)_k &\mapsto (\partial_Y^{k+n} \circ f_k - (-1)^n f_{k+1} \circ \partial_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω ορισμός, πράγματι μας δίνει ένα σύμπλεγμα αφού για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\begin{aligned} \partial^{n+1} \partial^n ((f_k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= (\partial^{n+1} (\partial_Y^{k+n} f_k - (-1)^n f_{k+1} \partial_X^k))_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= (\partial_Y^{k+n+1} (\partial_Y^{k+n} f_k - (-1)^n f_{k+1} \partial_X^k) - (-1)^{n+1} (\partial_Y^{k+n+1} f_{k+1} - (-1)^n f_{k+2} \partial_X^{k+1}) \partial_X^k)_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= (-(-1)^n \partial_Y^{k+n+1} f_{k+1} \partial_X^k - (-1)^{n+1} \partial_Y^{k+n+1} f_{k+1} \partial_X^k)_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= (0)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Αν το Y είναι ένα σύμπλεγμα R -προτύπων, τότε ορίζεται ο ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\text{Hom}_R(\square, Y) : \mathcal{C}(\text{R-Mod}) \rightarrow \text{Ab}$$

ως εξής:

για κάθε σύμπλεγμα R -προτύπων X , θέτουμε

$$\text{Hom}_R(\square, Y)(X) = \text{Hom}_R(X, Y)$$

και για κάθε μορφισμό συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Z$, θέτουμε

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(\square, Y)(f) &= f^* : \text{Hom}_R(Z, Y) \rightarrow \text{Hom}_R(X, Y) \\ \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(Z^k, Y^{n+k}) &\ni (\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (\phi_k \circ f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(X^k, Y^{n+k}). \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ο ανταλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(\square, Y^k) : \text{R-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ είναι αριστερά ακριβής, έπεται ότι και ο παραπάνω συναρτητής είναι αριστερά ακριβής. Το παρακάτω λήμμα μας δίνει μία συνθήκη ώστε η επαγόμενη ακολουθία να είναι ακριβής.

Λήμμα 2.3.2. Έστω μία βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων R -προτύπων

$$0 \rightarrow X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'' \rightarrow 0$$

για την οποία για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οι επιμέρους βραχείες ακριβείς ακολουθίες R -προτύπων

$$0 \rightarrow X'^n \xrightarrow{i^n} X^n \xrightarrow{p^n} X''^n \rightarrow 0$$

είναι διασπώμενες. Τότε, για κάθε σύμπλεγμα αριστερών R -προτύπων Y , η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(X'', Y) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Hom}_R(X, Y) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}_R(X', Y) \rightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο μορφισμός συμπλεγμάτων $i^* : \operatorname{Hom}_R(X, Y) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(X', Y)$ είναι επί. Το κάνουμε αυτό δείχνοντας ότι είναι επί σε κάθε βαθμό n . Έστω λοιπόν ένα στοιχείο $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \prod_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_R(X'^k, Y^{n+k})$. Από υπόθεση, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει κάποια R -γραμμική απεικόνιση $j^k : X^k \rightarrow X'^k$ έτσι ώστε $j^k \circ i^k = 1_{X'^k}$. Θέτουμε λοιπόν

$$f_k = g_k \circ j^k \in \operatorname{Hom}_R(X^k, Y^{k+n}),$$

οπότε για την R -γραμμική απεικόνιση

$$(i^*)^n : \prod_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_R(X^k, Y^{n+k}) \rightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_R(X'^k, Y^{n+k}),$$

είναι

$$(i^*)^n (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (f_k \circ i^k)_{k \in \mathbb{Z}} = (g_k \circ j^k \circ i^k)_{k \in \mathbb{Z}} = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}},$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Στην περίπτωση που το X είναι ένα R -πρότυπο και το Y είναι ένα σύμπλεγμα R -προτύπων, ορίζουμε το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ για το οποίο

$$\operatorname{Hom}_R(X, Y)^n = \operatorname{Hom}_R(X, Y^n)$$

με διαφορικό

$$\begin{aligned} \partial^n : \operatorname{Hom}_R(X, Y^n) &\rightarrow \operatorname{Hom}_R(X, Y^{n+1}) \\ f &\mapsto \partial_Y^n \circ f. \end{aligned}$$

Σχηματίζοντας το σύμπλεγμα R -προτύπων $\widehat{X}$

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

όπου το X εμφανίζεται στο βαθμό n , μπορούμε να ταυτίσουμε τα συμπλέγματα αβελιανών ομάδων

$$\operatorname{Hom}_R(X, Y) \equiv \operatorname{Hom}_R(\widehat{X}, Y)$$

και άρα η κατασκευή $\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ είναι μία ειδική περίπτωση της αρχικής.

Μία ακόμα σημαντική κατασκευή είναι το τανυστικό γινόμενο συμπλεγμάτων R -προτύπων.

Ορισμός 2.3.3. Έστω X ένα σύμπλεγμα δεξιών R -προτύπων και Y ένα σύμπλεγμα αριστερών R -προτύπων. Ορίζουμε το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $X \otimes_R Y$ για το οποίο

$$(X \otimes_R Y)^n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^k \otimes_R Y^{n-k})$$

με διαφορικό

$$\partial^n : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^k \otimes_R Y^{n-k}) \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^k \otimes_R Y^{n+1-k})$$

που δίνεται ως ο επαγόμενος ομομορφισμός στο ευθύ άθροισμα

$$\partial^n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (\partial_X^k \otimes 1_{Y^{n-k}} + (-1)^k 1_{X^k} \otimes \partial_Y^{n+1-k})$$

Ο παραπάνω ορισμός πράγματι μας δίνει ένα σύμπλεγμα αφού για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $x^k \otimes y^{n-k} \in X^k \otimes_R Y^{n-k}$, είναι

$$\begin{aligned} \partial^{n+1} \partial^n (x^k \otimes y^{n-k}) &= \partial^{n+1} (\partial_X^k (x^k) \otimes y^{n-k} + (-1)^k x^k \otimes \partial_Y^{n-k} (y^{n-k})) \\ &= \partial_X^{k+1} \partial_X^k (x^k) \otimes y^{n-k} + (-1)^{k+1} \partial_X^k (x^k) \otimes \partial_Y^{n-k} (y^{n-k}) \\ &\quad + (-1)^k \partial_X^k (x^k) \otimes \partial_Y^{n-k} (y^{n-k}) + (-1)^k (-1)^k x^k \otimes \partial_Y^{n+1-k} \partial_Y^{n-k} (y^{n-k}) \\ &= (-1)^{k+1} \partial_X^k (x^k) \otimes \partial_Y^{n-k} (y^{n-k}) + (-1)^k \partial_X^k (x^k) \otimes \partial_Y^{n-k} (y^{n-k}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Έστω $f : A \rightarrow B$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων δεξιών R -προτύπων και $g : C \rightarrow D$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων αριστερών R -προτύπων. Τότε ορίζεται ο μορφισμός συμπλεγμάτων αβελιανών ομάδων

$$f \otimes g : A \otimes_R C \rightarrow B \otimes_R D$$

που στον βαθμό n δίνεται από τον ακόλουθο ομομορφισμό αβελιανών ομάδων.

$$\begin{aligned} (f \otimes g)^n : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (A^k \otimes_R C^{n-k}) &\rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (B^k \otimes_R D^{n-k}) \\ (f \otimes g)^n &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (f^k \otimes g^{n-k}) \end{aligned}$$

Αν λοιπόν το X είναι ένα σύμπλεγμα δεξιών R -προτύπων, υπάρχει ο συναρτητής

$$X \otimes_R \square : \mathbf{C}(R\text{-Mod}) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

που ορίζεται με τον προφανή τρόπο:
για κάθε σύμπλεγμα R -προτύπων Y , θέτουμε

$$Y \mapsto X \otimes_R Y$$

και για κάθε μορφισμό συμπλεγμάτων αριστερών R -προτύπων $f : Y \rightarrow Y'$, είναι

$$(f : Y \rightarrow Y') \mapsto (1_X \otimes f : X \otimes_R Y \rightarrow X \otimes_R Y').$$

Στο θεώρημα 1.2.14 είχαμε δει ότι τα τανυστικά γινόμενα R -προτύπων μετατίθενται με τα συνόρια R -προτύπων. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται και στην περίπτωση συμπλεγμάτων R -προτύπων.

Παρατήρηση 2.3.4. Τα τανυστικά γινόμενα συμπλεγμάτων μετατίθενται με τα συνόρια συμπλεγμάτων. Πιο συγκεκριμένα, έστω $F : \mathcal{I} \rightarrow C(R\text{-Mod})$ ένας συναρτητής από μία small κατηγορία $\mathcal{I}$ και X ένα σύμπλεγμα δεξιών R -προτύπων. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός συμπλεγμάτων αβελιανών ομάδων

$$X \otimes_R \varinjlim F_i \cong \varinjlim (X \otimes_R F_i).$$

Για να το δούμε αυτό, σταθεροποιούμε ένα ακέραιο n και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (X \otimes_R \varinjlim F_i)^n &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^k \otimes_R \varinjlim F_i^{n-k}) \\ &\cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varinjlim (X^k \otimes_R F_i^{n-k}) \\ &\cong \varinjlim \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^k \otimes_R F_i^{n-k}) \right) \\ &= \varinjlim (X \otimes_R F_i)^n \\ &= (\varinjlim (X \otimes_R F_i))^n. \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι τα συμπλέγματα $X \otimes_R \varinjlim F_i$ και $\varinjlim (X \otimes_R F_i)$ είναι ισόμορφα σε κάθε βαθμό n . Επειδή οι παραπάνω ισομορφισμοί R -προτύπων είναι φυσικοί, μετατίθενται με τα συνόρια των εμπλεκόμενων συμπλεγμάτων και τελικά έχουμε το ζητούμενο ισομορφισμό συμπλεγμάτων.

Σημαντικό είναι το επόμενο λήμμα σύμφωνα με το οποίο τα τανυστικά γινόμενα προτύπων σέβονται την ομοτοπία.

Λήμμα 2.3.5. Έστω $g_1, g_2 : C \rightarrow D$ δύο μορφισμοί αλυσωτών συμπλεγμάτων αριστερών R -προτύπων έτσι ώστε $g_1 \sim g_2$. Τότε για κάθε σύμπλεγμα δεξιών R -προτύπων A , ισχύει ότι $1_A \otimes g_1 \sim 1_A \otimes g_2$.

Απόδειξη. Έστω Σ μία ομοτοπία από το μορφισμό g_1 στο g_2 , δηλαδή R -γραμμικές απεικονίσεις $(\Sigma^n : C^n \rightarrow D^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z} : g_1^n - g_2^n = \partial_D^{n-1} \Sigma^n + \Sigma^{n+1} \partial_C^n$. Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\bar{\Sigma}^n : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (A^k \otimes_R C^{n-k}) \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (A^k \otimes_R D^{n-1-k})$$

με

$$\bar{\Sigma}^n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} ((-1)^k 1_{A_k} \otimes \Sigma^{n-k}).$$

Θα δείξουμε ότι τα $\bar{\Sigma}^n$ ορίζουν μία ομοτοπία $\bar{\Sigma}$ από το $1_A \otimes g_1$ στο $1_A \otimes g_2$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$1_A \otimes g_1 - 1_A \otimes g_2 = \partial_{A \otimes_R D}^{n-1} \bar{\Sigma}^n + \bar{\Sigma}^{n+1} \partial_{A \otimes_R C}^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για $a^k \otimes c^{n-k} \in A^k \otimes_R C^{n-k}$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\partial_{A \otimes_R D}^{n-1} \bar{\Sigma}^n(a^k \otimes c^{n-k}) &= \partial_{A \otimes_R D}^{n-1} ((-1)^k a^k \otimes \Sigma^{n-k}(c^{n-k})) \\ &= (-1)^k \partial_A^k(a^k) \otimes \Sigma^{n-k}(c^{n-k}) \\ &\quad + (-1)^k (-1)^k a^k \otimes \partial_D^{n-k-1} \Sigma^{n-k}(c^{n-k})\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}^{n+1} \partial_{A \otimes_R C}^n(a^k \otimes c^{n-k}) &= \bar{\Sigma}^{n+1} (\partial_A^k(a^k) \otimes c^{n-k} + (-1)^k a^k \otimes \partial_C^{n-k}(c^{n-k})) \\ &= (-1)^{k+1} \partial_A^k(a^k) \otimes \Sigma^{n-k}(c^{n-k}) \\ &\quad + (-1)^k (-1)^k a^k \otimes \Sigma^{n-k+1} \partial_C^{n-k}(c^{n-k}),\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}(\partial_{A \otimes_R D}^{n-1} \bar{\Sigma}^n + \bar{\Sigma}^{n+1} \partial_{A \otimes_R C}^n)(a^k \otimes c^{n-k}) &= a^k \otimes \partial_D^{n-k-1} \Sigma^{n-k}(c^{n-k}) + a^k \otimes \Sigma^{n-k+1} \partial_C^{n-k}(c^{n-k}) \\ &= a^k \otimes ((\partial_D^{n-k-1} \Sigma^{n-k} + \Sigma^{n-k+1} \partial_C^{n-k})(c^{n-k})) \\ &= a^k \otimes ((g_1^{n-k} - g_2^{n-k})(c^{n-k})) \\ &= 1_{A^k} \otimes g_1^{n-k}(a^k \otimes c^{n-k}) + 1_{A^k} \otimes g_2^{n-k}(a^k \otimes c^{n-k}) \\ &= (1_A \otimes g_1)^n(a^k \otimes c^{n-k}) - (1_A \otimes g_2)^n(a^k \otimes c^{n-k}).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\partial_{A \otimes_R D}^{n-1} \bar{\Sigma}^n + \bar{\Sigma}^{n+1} \partial_{A \otimes_R C}^n = 1_A \otimes g_1 - 1_A \otimes g_2$$

και τελικά $1_A \otimes g_1 \sim 1_A \otimes g_2$. □

Εφόσον τα συσταλτά συμπλέγματα ορίζονται με βάση την ομοτοπία, άμεσο είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.3.6. Έστω C ένα συσταλτό σύμπλεγμα αριστερών R -προτύπων. Τότε για κάθε σύμπλεγμα δεξιών R -προτύπων A , το σύμπλεγμα $A \otimes_R C$ είναι επίσης συσταλτό.

Απόδειξη. Εφόσον το σύμπλεγμα C είναι συσταλτό, έχουμε ότι $1_C \sim 0_C$. Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι $1_A \otimes 1_C \sim 1_A \otimes 0_C$ και άρα

$$1_{A \otimes_R C} = 1_A \otimes 1_C \sim 1_A \otimes 0_C = 0_{A \otimes_R C},$$

που δείχνει ότι το $A \otimes_R C$ είναι συσταλτό. □

Η τελευταία κατασκευή που θα δούμε είναι αυτή του κώνου του ταυτοτικού μορφισμού ενός συμπλέγματος R -προτύπων X . Στην πραγματικότητα, ορίζεται ο κώνος οποιουδήποτε μορφισμού συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow Y$, ωστόσο εμείς θα χρειαστούμε μόνο την την πρώτη περίπτωση στην οποία και θα αρχεστούμε.

Ορισμός 2.3.7. Έστω X ένα σύμπλεγμα R -προτύπων. Ορίζουμε το σύμπλεγμα R -προτύπων $\text{Cone}(1_X)$ που δίνεται στο βαθμό n από το R -πρότυπο $X^{n+1} \oplus X^n$ και έχει διαφορικό

$$\begin{aligned} \partial^n : X^{n+1} \oplus X^n &\rightarrow X^{n+2} \oplus X^{n+1} \\ (x^{n+1}, x^n) &\mapsto (-\partial_X^{n+1}(x^{n+1}), x^{n+1} + \partial_X^n(x^n)). \end{aligned}$$

Είναι άμεσο ότι το $\text{Cone}(1_X)$ είναι πράγματι ένα σύμπλεγμα. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα δούμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες του. Ξεκινάμε με την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 2.3.8. Για κάθε σύμπλεγμα R -προτύπων X , το σύμπλεγμα $\text{Cone}(1_X)$ είναι συστατικό. Για να το δούμε αυτό, για κάθε ακέραιο n ορίζουμε την R -γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \Sigma^n : X^{n+1} \oplus X^n &\rightarrow X^n \oplus X^{n-1} \\ (x^{n+1}, x^n) &\mapsto (x^n, 0). \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (\partial^{n-1}\Sigma^n + \Sigma^{n+1}\partial^n)(x^{n+1}, x^n) &= \partial^{n-1}(x^n, 0) + \Sigma^{n+1}(-\partial_X^{n+1}(x^{n+1}), x^{n+1} + \partial_X^n(x^n)) \\ &= (-\partial_X^n(x^n), x^n) + (x^{n+1} + \partial_X^n(x^n), 0) \\ &= (x^{n+1}, x^n) \\ &= 1_{X^{n+1} \oplus X^n}(x^{n+1}, x^n) \\ &= 1_{\text{Cone}(1_X)^n}, \end{aligned}$$

οπότε $\partial^{n-1}\Sigma^n + \Sigma^{n+1}\partial^n = 1_{\text{Cone}(1_X)^n}$ και έτσι το σύμπλεγμα $\text{Cone}(1_X)$ είναι πράγματι συστατικό.

Ακόμα πιο εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύμπλεγμα X εμφυτεύεται στο σύμπλεγμα $\text{Cone}(1_X)$ μέσω του μονομορφισμού συμπλεγμάτων $j : X \rightarrow \text{Cone}(1_X)$ που δίνεται στο βαθμό n από την R -γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} j^n : X^n &\rightarrow X^{n+1} \oplus X^n \\ x^n &\mapsto (0, x^n). \end{aligned}$$

Κλείνουμε το κεφάλαιο με την ακόλουθη σημαντική πρόταση.

Πρόταση 2.3.9. Έστω $f : X \rightarrow Y$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων R -προτύπων. Τότε ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός με το μηδενικό μορφισμό αν και μόνο αν υπάρχει μία παραγοντοποίηση του f ως

$$X \xrightarrow{j} \text{Cone}(1_X) \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

για κάποιο μορφισμό συμπλεγμάτων $\bar{f}$.

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι υπάρχει η παραγοντοποίηση της εκφώνησης. Σύμφωνα με την παρατήρηση 2.3.8 το σύμπλεγμα $\text{Cone}(f)$ είναι συσταλτό, οπότε $1_{\text{Cone}(f)} \sim 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$f = \bar{f} \circ j = \bar{f} \circ 1_{\text{Cone}(f)} \circ j \sim \bar{f} \circ 0 \circ j = 0.$$

Έστω τώρα ότι $f \sim 0$. Τότε υπάρχουν R -γραμμικές απεικονίσεις $\Sigma^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$ έτσι ώστε $f^n = \partial_Y^{n-1} \Sigma^n + \Sigma^{n+1} \partial_X^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τις R -γραμμικές απεικονίσεις

$$\begin{aligned} \bar{f}^n : X^{n+1} \oplus X^n &\rightarrow Y^n \\ (x^{n+1}, x^n) &\mapsto f^n(x^n) + \Sigma^{n+1}(x^{n+1}) \end{aligned}$$

και δείχνουμε ότι το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} X^{n+1} \oplus X^n & \xrightarrow{\partial^n} & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \\ \bar{f}^n \downarrow & & \downarrow \bar{f}^{n+1} \\ Y^n & \xrightarrow{\partial_Y^n} & Y^{n+1} \end{array}$$

μετατίθεται. Πράγματι, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \bar{f}^{n+1} \partial^n(x^{n+1}, x^n) &= \bar{f}^{n+1} (-\partial_X^{n+1}(x^{n+1}, x^{n+1} + \partial_X^n(x^n))) \\ &= f^{n+1}(x^{n+1}) + f^{n+1} \partial_X^n(x^n) - \Sigma^{n+2} \partial_X^{n+1}(x^{n+1}) \\ &= \partial_Y^n f^n(x^n) + (f^{n+1} + \Sigma^{n+2} \partial_X^{n+1})(x^{n+1}) \\ &= \partial_Y^n f^n(x^n) + \partial_Y^n \Sigma^{n+1}(x^{n+1}) \\ &= \partial_Y^n (f^n(x^n) + \Sigma^{n+1}(x^{n+1})) \\ &= \partial_Y^n \bar{f}^n(x^{n+1}, x^n) \end{aligned}$$

και άρα ορίζεται ο μορφισμός συμπλεγμάτων $\bar{f} : \text{Cone}(1_X) \rightarrow Y$ για τον οποίο για κάθε ακέραιο n και για $x^n \in X^n$, είναι $\bar{f} \circ j(x^n) = \bar{f}(0, x^n) = f^n(x^n) \implies \bar{f} \circ j = f$, όπως θέλαμε. $\square$

Κεφάλαιο 3

Η κατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp$

3.1 Ισοδύναμες περιγραφές της κατηγορίας $K(R\text{-Proj})^\perp$

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η απόδειξη των συνεπαγωγών (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) της σελίδας 2 της εισαγωγής, τις οποίες συγκεντρώνουμε στο θεώρημα 3.1.11. Για την απόδειξή τους, θα χρειαστούμε αρκετά λήμματα, τα περισσότερα από τα οποία χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων.

Λήμμα 3.1.1. Έστω M, N, F τρία R -πρότυπα, με το M να είναι πεπερασμένα παραγόμενο, το N να είναι πεπερασμένα παριστώμενο και το F να είναι επίπεδο. Έστω επίσης δύο R -γραμμικές απεικονίσεις $f : M \rightarrow N$ και $g : N \rightarrow F$ με $g \circ f = 0$. Τότε υπάρχει κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο P και μία παραγοντοποίηση της g ως

$$N \xrightarrow{g'} P \xrightarrow{g''} F,$$

για κάποιες R -γραμμικές απεικονίσεις g' και g'' έτσι ώστε $g' \circ f = 0$.

Απόδειξη. Εφόσον $g \circ f = 0$, η g παραγοντοποιείται ως

$$N \xrightarrow{p} \operatorname{coker} f \xrightarrow{\bar{g}} F,$$

για κάποια R -γραμμική απεικόνιση $\bar{g}$ και την απεικόνιση πηλίκο p . Από το λήμμα 1.1.4, ο συνπυρήνας $\operatorname{coker}(f)$ είναι ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο και άρα σύμφωνα με την πρόταση 1.1.6, υπάρχει κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο P και μία παραγοντοποίηση της $\bar{g}$ ως

$$\operatorname{coker} f \xrightarrow{a} P \xrightarrow{b} F,$$

για κάποιες R -γραμμικές απεικονίσεις a και b . Θέτοντας $g' = a \circ p : M \rightarrow P$ και $g'' = b : P \rightarrow F$, έχουμε ότι

$$g = \bar{g} \circ p = b \circ a \circ p = g'' \circ g'$$

και

$$g' \circ f = a \circ p \circ f = a \circ 0 = 0,$$

όπως θέλαμε. $\square$

Το επόμενο λήμμα είναι το ανάλογο της πρότασης 1.1.6 για συμπλέγματα R -προτύπων.

Λήμμα 3.1.2. Έστω T ένα αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα από πεπερασμένα παριστώμενα R -πρότυπα και $f : T \rightarrow C$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων με το C να είναι ένα σύμπλεγμα επίπεδων R -προτύπων. Τότε υπάρχει κάποιο αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα από πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα R -πρότυπα F και μία παραγοντοποίηση $T \xrightarrow{a} F \xrightarrow{b} C$ του f .

Απόδειξη. Έχουμε ότι $T^n = 0$ για $i \ll 0$, οπότε θέτουμε $F^n = 0$ για $n \ll 0$. Θα ορίσουμε το σύμπλεγμα F και την παραγοντοποίηση της f όπως στην εκφώνηση, χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n . Έστω λοιπόν ένας αχέραιος n και ότι έχουμε ορίσει τα F^k και την παραγοντοποίηση της f για κάθε βαθμό $k \leq n$. Έχουμε επομένως το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_T^{n-2}} & T^{n-1} & \xrightarrow{\partial_T^{n-1}} & T^n & \xrightarrow{\partial_T^n} & T^{n+1} \xrightarrow{\partial_T^{n+1}} \dots \\ & & \downarrow a^{n-1} & & \downarrow a^n & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial_F^{n-2}} & F^{n-1} & \xrightarrow{\partial_F^{n-1}} & F^n & & \\ & & \downarrow b^{n-1} & & \downarrow b^n & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial_C^{n-2}} & C^{n-1} & \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial_C^n} & C^{n+1} \xrightarrow{\partial_C^{n+1}} \dots \end{array}$$

Θεωρούμε τον συνπυρήνα $\overline{F^n} = \text{coker}(\partial_F^{n-1})$ και την απεικόνιση πηλίκου $p : F^n \rightarrow \overline{F^n}$. Εφόσον

$$\partial_C^n \circ b^n \circ \partial_F^{n-1} = \partial_C^n \circ \partial_C^{n-1} \circ b^{n-1} = 0 \circ b^{n-1} = 0,$$

επάγεται μοναδικός ομομορφισμός $\gamma : \overline{F^n} \rightarrow C^{n+1}$, με $\gamma \circ p = \partial_C^n \circ b^n$. Τότε,

$$\gamma \circ p \circ a^n = \partial_C^n \circ b^n \circ a^n = \partial_C^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \partial_T^n$$

και έτσι η σύνθεση

$$T^n \xrightarrow{(p \circ a^n, -\partial_T^n)} \overline{F^n} \oplus T^{n+1} \xrightarrow{[\gamma, f^{n+1}]} C^{n+1}$$

είναι ο μηδενικός μορφισμός. Τα R -πρότυπα T^n και $\overline{F^n} \oplus T^{n+1}$ είναι πεπερασμένα παριστώμενα, συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.1.1 για να επιλέξουμε κάποιο πεπερασμένο παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο F^{n+1} και ομομορφισμούς λ, a^{n+1} και b^{n+1} , έτσι ώστε η σύνθεση

$$\overline{F^n} \oplus T^{n+1} \xrightarrow{[\lambda, a^{n+1}]} F^{n+1} \xrightarrow{b^{n+1}} C^{n+1}$$

να ισούται με την απεικόνιση $[\gamma, f^{n+1}]$ και η σύνθεση

$$T^n \xrightarrow{(p \circ a^n, -\partial_T^n)} \overline{F^n} \oplus T^{n+1} \xrightarrow{[\lambda, a^{n+1}]} F^{n+1}$$

να είναι ο μηδενικός ομομορφισμός. Τότε, οι παραπάνω ισότητες απεικονίσεων μας δίνουν ότι

$$\begin{aligned} b^{n+1} \circ a^{n+1} &= f^{n+1}, \\ b^{n+1} \circ \lambda \circ p &= \gamma \circ p = \partial_C^n \circ b^n, \\ \lambda \circ p \circ a^n &= a^{n+1} \circ \partial_T^n && \text{και} \\ \lambda \circ p \circ \partial_F^{n-1} &= \lambda \circ 0 = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, επεκτείναμε κατά ένα βαθμό το προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα στο

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_T^{n-2}} & T^{n-1} & \xrightarrow{\partial_T^{n-1}} & T^n & \xrightarrow{\partial_T^n} & T^{n+1} \xrightarrow{\partial_T^{n+1}} \dots \\ & & \downarrow a^{n+1} & & \downarrow a^n & & \downarrow a^{n+1} \\ \dots & \xrightarrow{\partial_F^{n-2}} & F^{n-1} & \xrightarrow{\partial_F^{n-1}} & F^n & \xrightarrow{\lambda \circ p} & F^{n+1} \\ & & \downarrow b^{n+1} & & \downarrow b^n & & \downarrow b^{n+1} \\ \dots & \xrightarrow{\partial_C^{n-2}} & C^{n-1} & \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial_C^n} & C^{n+1} \xrightarrow{\partial_C^{n+1}} \dots, \end{array}$$

το οποίο σε συνδυασμό με τις προηγούμενες σχέσεις ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα της κατασκευής. $\square$

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι το θεώρημα Govorov-Lazard προέκυψε μέσω της κατασκευής 1.3.1. Θα χρησιμοποιήσουμε παρόμοιες τεχνικές για να δείξουμε την πρώτη συνεπαγωγή του θεωρήματος της ενότητας. Έτσι, οδηγούμαστε στην ακόλουθη κατασκευή που γενικεύει εκείνη του θεωρήματος Govorov-Lazard.

Κατασκευή 3.1.3. Έστω C ένα σύμπλεγμα από επίπεδα R -πρότυπα. Ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{L}_C$ ως εξής:

- Τα αντικείμενα της $\mathcal{L}_C$ είναι της μορφής $f : T \rightarrow C$, όπου το T είναι ένα αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R -πρότυπα και f είναι ένας μορφισμός συμπλεγμάτων.
- Για δύο αντικείμενα $f : T \rightarrow C$ και $f' : T' \rightarrow C$ της $\mathcal{L}_C$, ένας μορφισμός της $\mathcal{L}_C$ είναι ένα μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & T' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

για κάποιο μορφισμό συμπλεγμάτων g .

Ορίζουμε επίσης τον συναρτητή $F = F_C : \mathcal{L}_C \rightarrow \mathbf{C}(R\text{-Mod})$ για τον οποίο

$$(f : T \rightarrow C) \mapsto T$$

και

$$\left(\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & T' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array} \right) \mapsto (g : T \rightarrow T')$$

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με (T, f) το αντικείμενο $f : T \rightarrow C$ της $\mathcal{L}_C$. Θεωρώντας ότι για κάθε $(T, f) \in \text{ob } \mathcal{L}_C$, το σύμπλεγμα T δίνεται σε κάθε βαθμό από ένα (πεπερασμένα παριστώμενο) R -πρότυπο της μορφής R^n/N για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και κάποιο υποπρότυπο $N \subseteq R^n$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{L}_C$ είναι small. Συνεπώς, γνωρίζουμε ότι υπάρχει το συνόριο $\underline{\text{colim}} F$ το οποίο περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.4. Με τις παραπάνω υποθέσεις και συμβολισμούς, ισχύουν τα εξής:

(i) Η κατηγορία $\mathcal{L}_C$ είναι filtered.

(ii) $\underline{\text{colim}} F \cong C$.

Απόδειξη. Για το (i), έστω (T_1, f_1) και (T_2, f_2) δύο αντικείμενα της $\mathcal{L}_C$. Τότε το σύμπλεγμα $T = T_1 \oplus T_2$ είναι αριστερά φραγμένο και αποτελείται από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R -πρότυπα. Επίσης, για τον επαγόμενο ομομορφισμό στο ευθύ άθροισμα $f = (f_1, f_2) : T_1 \oplus T_2 \rightarrow C$, έχουμε ότι $(T, f) \in \text{ob } \mathcal{L}_C$ και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} T_1 & \hookrightarrow & T & \hookleftarrow & T_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_2 \\ C & \xlongequal{\quad} & C & \xlongequal{\quad} & Z \end{array}$$

δείχνει ότι $\text{Hom}_{\mathcal{L}_C}((T_1, f_1), (T, f)) \neq \emptyset$ και $\text{Hom}_{\mathcal{L}_C}((T_2, f_2), (T, f)) \neq \emptyset$ και άρα ισχύει η πρώτη συνθήκη της filtered κατηγορίας.

Έστω τώρα $a, b : (T_1, f_1) \rightarrow (T_2, f_2)$ δύο μορφισμοί της $\mathcal{L}_C$. Τότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightleftharpoons[b]{a} & T_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ C & \xlongequal{\quad} & C, \end{array}$$

απόπου συμπεραίνουμε ότι $(b - a) \circ f_2 = f_1 - f_1 = 0 \implies \text{im } f_2 \subseteq \ker(b - a)$ και άρα επάγεται μοναδικός μορφισμός συμπλεγμάτων $\hat{f}_2 : \text{coker}(b - a) \rightarrow C$ έτσι ώστε η σύνθεση

$$T_2 \xrightarrow{p} \text{coker}(b - a) \xrightarrow{\hat{f}_2} C$$

να ισούται με την απεικόνιση f_2 . Όμως το σύμπλεγμα $\text{coker}(a - b)$ είναι αριστερά φραγμένο και αποτελείται από πεπερασμένα παριστώμενα R -πρότυπα, οπότε από το λήμμα 3.1.2 υπάρχει κάποιο αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα από πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα R -πρότυπα P και μία παραγοντοποίηση της $\hat{f}_2$ ως

$$\operatorname{coker}(b - a) \xrightarrow{g} P \xrightarrow{h} C,$$

για κάποιους ομομορφισμούς συμπλεγμάτων g και h . Τώρα, ο μορφοισμός $h : P \rightarrow C$ είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{L}_C$ και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & \xrightleftharpoons[b]{a} & T_2 & \xrightarrow{p} & \operatorname{coker}(b - a) & \xrightarrow{g} & P \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow \hat{f}_2 & & \downarrow h \\ C & = & C & = & C & = & C \end{array}$$

είναι ένα διάγραμμα μορφοισμών της $\mathcal{L}_C$, που δείχνει ότι ισχύει και η δεύτερη συνθήκη της filtered κατηγορίας. Τελικά, η κατηγορία $\mathcal{L}_C$ είναι πράγματι filtered.

Για το (ii), συμβολίζουμε με $\lambda_{(T,f)} : T = F_{(T,f)} \rightarrow \underline{\operatorname{colim}} F$ τον ομομορφισμό του συνόριου. Για κάθε $(T, f) \in \operatorname{ob} \mathcal{L}_C$, έχουμε τον ομομορφισμό

$$\mu_{(T,f)} : F_{(T,f)} = T \rightarrow C,$$

με $\mu_{(T,f)} = f$. Βλέπουμε ότι για κάθε μορφοισμό $g : (T, f) \rightarrow (T', f')$ της $\mathcal{L}_C$, είναι

$$\mu_{(T',f')} \circ F(g) = f' \circ g = f = \mu_{(T,f)}$$

και άρα επάγεται μοναδικός μορφοισμός συμπλεγμάτων

$$\vartheta : \underline{\operatorname{colim}} F \rightarrow C,$$

τέτοιος ώστε η σύνθεση

$$T = F_{(T,f)} \xrightarrow{\lambda_{(T,f)}} \underline{\operatorname{colim}} F \xrightarrow{\vartheta} C$$

να είναι ίση με f για κάθε $(T, f) \in \operatorname{ob} \mathcal{L}_C$. Θα δείξουμε ότι ο ϑ είναι 1-1 και επί, οπότε και θα έχουμε ότι $\underline{\operatorname{colim}} F \cong C$.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο ϑ είναι επί σε κάθε βαθμό n . Έστω λοιπόν ένας ακέραιος n και κάποιο $c^n \in C^n$. Επιλέγουμε κάποιον ομομορφισμό $f^n : R \rightarrow C^n$ με $c^n \in \operatorname{im} f^n$ και σχηματίζουμε το σύμπλεγμα $\hat{R}$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{1_R} R \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

όπου το R βρίσκεται στις θέσεις n και $n + 1$ και τον μορφοισμό συμπλεγμάτων f που δίνεται από το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{1_R} & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow f^n & & \downarrow \partial_C^n \circ f^n & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C^{n-1} & \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial_C^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{\partial_C^{n+1}} & C^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Τότε $(\widehat{R}, f) \in \text{ob } \mathcal{L}_C$ και

$$\vartheta \circ \lambda_{(\widehat{R}, f)} = f \implies \vartheta^n \circ \lambda_{(\widehat{R}, f)}^n = f^n,$$

συνεπώς $c^n \in \text{im } \vartheta^n$, όπως θέλαμε.

Δείχνουμε τώρα ότι η ϑ είναι 1-1 σε κάθε βαθμό n . Έστω λοιπόν ένας ακέραιος n και κάποιο $\xi^n \in (\text{colim } F)^n$ με $\vartheta^n(\xi^n) = 0$. Επειδή η κατηγορία $\mathcal{L}_C$ είναι filtered, μπορούμε να γράψουμε $\xi^n = \lambda_{(T, f)}^n(t^n)$ για κάποιο $(T, f) \in \text{ob } \mathcal{L}_C$ και $t^n \in T^n$. Τότε, είναι

$$0 = \vartheta^n(\xi^n) = \vartheta^n \circ \lambda_{(T, f)}^n(t^n) = f^n(t^n).$$

Έστω και πάλι $\widehat{R}$ το σύμπλεγμα

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{1_R} R \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

όπου το R βρίσκεται στους βαθμούς n και $n+1$, $h^n : R \rightarrow T^n$ ο ομομορφισμός R -προτύπων με $h^n(1) = t^n$ και $h : \widehat{R} \rightarrow T$ ο μορφισμός συμπλεγμάτων που δίνεται από το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{1_R} & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow h^n & & \downarrow \partial_T^n \circ h^n & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & T^{n-1} & \xrightarrow{\partial_T^{n-1}} & T^n & \xrightarrow{\partial_T^n} & T^{n+1} & \xrightarrow{\partial_T^{n+1}} & T^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Τότε $(\widehat{R}, 0) \in \text{ob } \mathcal{L}_C$ και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & \widehat{R} & \xrightarrow{h} & T \\ \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow f \\ C & \longleftarrow & C & \longleftarrow & C \end{array}$$

είναι ένα διάγραμμα μορφισμών της $\mathcal{L}_C$ και άρα στο $(\text{colim } F)^n$ είναι

$$\begin{aligned} \xi^n &= \lambda_{(T, f)}^n(t^n) \\ &= \lambda_{(\widehat{R}, 0)}^n(1) \\ &= \lambda_{(0, 0)}^n(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

συνεπώς ο ϑ^n είναι πράγματι 1-1, που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, έχουμε την πρώτη συνεπαγωγή του θεωρήματος της ενότητας, την οποία παρουσιάζουμε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.5. Έστω C ένα σύμπλεγμα της κατηγορίας $\text{K}(\text{R-Proj})^\perp$. Τότε, το C γράφεται ως filtered συνόριο συσταλτών συμπλεγμάτων από πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά R -πρότυπα.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.1.4, γνωρίζουμε ότι είναι $C = \operatorname{colim} F$, με την κατηγορία $\mathcal{L}_C$ να είναι filtered. Συμβολίζοντας με $\mathcal{L}'_C$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{L}_C$ που αποτελείται από τα αντικείμενα (T, f) με το σύμπλεγμα T να είναι επιπλέον συσταλτό, θα δείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{L}'_C$ είναι cofinal στην $\mathcal{L}_C$. Τότε το C θα είναι filtered συνόριο του συναρτητή

$$\mathcal{L}'_C \hookrightarrow \mathcal{L}_C \xrightarrow{F} \mathbf{C}(\mathbf{R}\text{-Mod}),$$

δηλαδή θα είναι filtered συνόριο συσταλτών συμπλεγμάτων από πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά R -πρότυπα.

Από το λήμμα 1.2.12, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $(T, f) \in \operatorname{ob} \mathcal{L}_C$ υπάρχει μορφισμός $(T, f) \rightarrow (P, \bar{f})$ της $\mathcal{L}_C$ για κάποιο αντικείμενο $(P, \bar{f})$ της υποκατηγορίας $\mathcal{L}'_C$. Από υπόθεση, είναι $f \sim 0$ και άρα σύμφωνα με την πρόταση 2.3.9, επάγεται μορφισμός συμπλεγμάτων $\bar{f} : \operatorname{Cone}(1_T) \rightarrow C$ που να κάνει το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{j} & \operatorname{Cone}(1_T) \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

να μετατίθεται. Παρατηρούμε τώρα ότι το σύμπλεγμα $\operatorname{Cone}(1_T)$ είναι αριστερά φραγμένο και αποτελείται από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R -πρότυπα και από το πόρισμα 2.3.6 είναι συσταλτό. Συνεπώς, το αντικείμενο $(\operatorname{Cone}(1_T), \bar{f})$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{L}'_C$ και θέτοντας $(\operatorname{Cone}(1_T), \bar{f}) = (P, \bar{f})$, το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα μας δίνει τον ζητούμενο μορφισμό $(T, f) \rightarrow (P, \bar{f})$ της $\mathcal{L}_C$. Σύμφωνα με την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, το C γράφεται ως το ζητούμενο συνόριο. $\square$

Συνεχίζουμε για την επόμενη συνεπαγωγή του θεωρήματος με την απόδειξη αρκετών λημμάτων κάποια από τα οποία είναι ιδιαίτερα τεχνικά.

Λήμμα 3.1.6. Έστω P ένα δεξιά φραγμένο σύμπλεγμα προβολικών R -προτύπων και C ένα άκυκλο σύμπλεγμα R -προτύπων. Τότε για κάθε μορφισμό συμπλεγμάτων $f : P \rightarrow C$, είναι $f \sim 0$.

Απόδειξη. Θα ορίσουμε μία ομοτοπία H από τον ομομορφισμό f στον μηδενικό ομομορφισμό 0, δείχνοντας με φθίνουσα επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει μία R -γραμμική απεικόνιση $H^n : P^n \rightarrow C^{n-1}$ τέτοια ώστε $f^n = \partial_C^{n-1} \circ H^n + H^{n+1} \circ \partial_P^n$. Επειδή το σύμπλεγμα P είναι δεξιά φραγμένο, υπάρχει κάποιο $j \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $P^n = 0$ για κάθε $n \geq j$. Για τέτοιους λοιπόν δείκτες, θέτουμε $H^n = 0$. Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει την ομοτοπία H για κάθε βαθμό $n \geq k$, για κάποιο k . Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $n \geq k$ έχουμε ορίσει μία R -γραμμική απεικόνιση $H^n : P^n \rightarrow C^{n-1}$ έτσι ώστε

$$f^n = \partial_C^{n-1} \circ H^n + H^{n+1} \circ \partial_P^n$$

για κάθε $n \geq k$. Για το επαγωγικό βήμα, θα ορίσουμε μία R -γραμμική απεικόνιση $H^{k-1} : P^{k-1} \rightarrow C^{k-2}$ για την οποία $f^{k-1} = \partial_C^{k-2} \circ H^{k-1} + H^k \circ \partial_P^{k-1}$.

Θέτουμε

$$g = f^{k-1} - H^k \circ \partial_P^{k-1} : P^{k-1} \rightarrow C^{k-1}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\partial_C^{k-1} \circ g &= \partial_C^{k-1} \circ f^{k-1} - \partial_C^{k-1} \circ H^k \circ \partial_P^{k-1} \\
&= f^k \circ \partial_P^{k-1} - \partial_C^{k-1} \circ H^k \circ \partial_P^{k-1} \\
&= (f^k - \partial_C^{k-1} \circ H^k) \circ \partial_P^{k-1} \\
&= H^{k+1} \circ \partial_P^k \circ \partial_P^{k-1} \\
&= H^{k+1} \circ 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Έτσι, $\text{im}(g) \subseteq \ker(\partial_C^{k-1})$ και επειδή το C είναι άκυκλο, συμπεραίνουμε ότι $\text{im}(g) \subseteq \text{im}(\partial_C^{k-2})$. Το P^{k-1} είναι όμως προβολικό και άρα υπάρχει μία R -γραμμική απεικόνιση

$$H^{k-1} : P^{k-1} \rightarrow C^{k-2}$$

που να κάνει το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται

$$\begin{array}{ccc}
& & P^{k-1} \\
& \swarrow H^{k-1} & \downarrow g \\
C^{k-2} & \xrightarrow{\partial_C^{k-2}} & C^{k-1},
\end{array}$$

δηλαδή $\partial_C^{k-2} \circ H^{k-1} = g$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\partial_C^{k-2} \circ H^{k-1} = g &\implies \partial_C^{k-2} \circ H^{k-1} = f^{k-1} - H^k \circ \partial_P^{k-1} \\
&\implies f^{k-1} = \partial_C^{k-2} \circ H^{k-1} + H^k \circ \partial_P^{k-1},
\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα. □

Λήμμα 3.1.7. Έστω X ένα σύμπλεγμα από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R -πρότυπα, C ένα σύμπλεγμα από επίπεδα R -πρότυπα και $f : X \rightarrow C$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $j \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε $f^n = 0$ για κάθε $n < j$. Τότε, υπάρχει μία παραγοντοποίηση του f ως

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} C,$$

για κάποιο σύμπλεγμα πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών R -προτύπων Y , για το οποίο είναι $Y^n = 0$ για κάθε $n < j$ και για κάποιους ομομορφισμούς συμπλεγμάτων g και h .

Απόδειξη. Από υπόθεση, είναι $f^n = 0$ για κάθε $n < j$. Μπορούμε λοιπόν για $n < j$ να θέσουμε $Y^n = 0$ ώστε να έχουμε την τετριμμένη παραγοντοποίηση $X^n \xrightarrow{0} Y^n \xrightarrow{0} C^n$ του ομομορφισμού $f^n : X^n \rightarrow C^n$. Θα ορίσουμε το σύμπλεγμα Y και την παραγοντοποίηση του f όπως στην εκφώνηση, κάνοντας επαγωγή στο βαθμό n . Έστω λοιπόν ένας ακέραιος n και ότι έχουμε ορίσει τα Y^k και την παραγοντοποίηση του f για κάθε βαθμό $k \leq n$. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_X^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} \cdots \\
& & \downarrow g^{n-1} & & \downarrow g^n & & \downarrow f^{n+1} \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_Y^{n-2}} & Y^{n-1} & \xrightarrow{\partial_Y^{n-1}} & Y^n & & \\
& & \downarrow h^{n-1} & & \downarrow h^n & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_C^{n-2}} & C^{n-1} & \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial_C^n} & C^{n+1} \xrightarrow{\partial_C^{n+1}} \cdots
\end{array}$$

Με βάση αυτό, μπορούμε άμεσα να ελέγξουμε ότι η σύνθεση

$$Y^{n-1} \oplus X^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_Y^{n-1} & -g^n \\ 0 & \partial_X^n \end{pmatrix}} Y^n \oplus X^{n+1} \xrightarrow{(\partial_C^n \circ h^n, f^{n+1})} C^{n+1}$$

είναι η μηδενική απεικόνιση, με τα R -πρότυπα $Y^{n-1} \oplus X^n$ και $Y^n \oplus X^{n+1}$ να είναι πεπερασμένα παριστώμενα από την πρόταση 1.1.3 και το R -πρότυπο C^{n+1} να είναι επίπεδο. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.1.1, βρίσκουμε κάποιο πεπερασμένο παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο Y^{n+1} και R -γραμμικές απεικονίσεις $\partial_Y^n, g^{n+1}, h^{n+1}$ έτσι ώστε η απεικόνιση $(\partial_C^n \circ h^n, f^{n+1})$ να παραγοντοποιείται ως

$$Y^n \oplus X^{n+1} \xrightarrow{(\partial_Y^n, g^{n+1})} Y^{n+1} \xrightarrow{h^{n+1}} C^{n+1} \quad (3.1)$$

με τη σύνθεση

$$Y^{n-1} \oplus X^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_Y^{n-1} & -g^n \\ 0 & \partial_X^n \end{pmatrix}} Y^n \oplus X^{n+1} \xrightarrow{(\partial_Y^n, g^{n+1})} Y^{n+1} \quad (3.2)$$

να είναι η μηδενική απεικόνιση. Η 3.1 μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
h^{n+1} \circ \partial_Y^n &= \partial_C^n \circ h^n & \text{και} \\
h^{n+1} \circ g^{n+1} &= f^{n+1},
\end{aligned}$$

ενώ η 3.2 μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\partial_Y^n \circ \partial_Y^{n+1} &= 0 & \text{και} \\
\partial_Y^n \circ g^n &= g^{n+1} \circ \partial_X^n.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό,

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_X^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} \cdots \\
& & \downarrow g^{n-1} & & \downarrow g^n & & \downarrow g^{n+1} \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_Y^{n-2}} & Y^{n-1} & \xrightarrow{\partial_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{\partial_Y^n} & Y^{n+1} \\
& & \downarrow h^{n-1} & & \downarrow h^n & & \downarrow h^{n+1} \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_C^{n-2}} & C^{n-1} & \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial_C^n} & C^{n+1} \xrightarrow{\partial_C^{n+1}} \cdots
\end{array}$$

με $f^{n+1} = h^{n+1} \circ g^{n+1}$ και $\partial_Y^n \circ \partial_Y^{n+1} = 0$, που ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα της κατασκευής. $\square$

Λήμμα 3.1.8. Έστω C ένα άκυκλο σύμπλεγμα από επίπεδα R -πρότυπα έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η εικόνα $\partial_C^n(C^n)$ να είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο. Τότε για κάθε αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα X από πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά R -πρότυπα και για κάθε μορφισμό συμπλεγμάτων $f : X \rightarrow C$, είναι $f \sim 0$.

Απόδειξη. Ζητάμε την ύπαρξη ομομορφισμών $\Theta^n : X^n \rightarrow C^{n-1}$ με $f^n = \partial_C^{n-1}\Theta^n + \Theta^{n+1}\partial_X^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε το παραπάνω με επαγωγή στο n . Επειδή το X είναι αριστερά φραγμένο, μπορούμε να θέσουμε $\Theta^n = 0$ για $n \ll 0$. Υποθέτουμε ότι οι ομομορφισμοί Θ^n έχουν οριστεί για κάθε $n \leq k$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε $f^n = \partial_C^{n-1}\Theta^n + \Theta^{n+1}\partial_X^n$ για κάθε $n < k$. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τους ομομορφισμούς $(\Theta^n)_{n \leq k}$ σε ομοτοπία. Πιο συγκεκριμένα, αρκεί να ορίσουμε ομομορφισμούς $\Psi^n : X^n \rightarrow C^{n-1}$ για κάθε $n \leq k+1$, έτσι ώστε να ισχύουν τα

- (i) $\Psi^n = \Theta^n$ για κάθε $n \leq k-1$ και
- (ii) $f^n = \partial_C^{n-1}\Psi^n + \Psi^{n+1}\partial_X^n$ για κάθε $n < k+1$.

Για το επαγωγικό βήμα, αρχικά επεκτείνουμε τους ομομορφισμούς $(\Theta^n)_{n \leq k}$, θέτοντας $\Theta^n = 0$ για κάθε $n > k$ και έστω $\bar{f} : X \rightarrow C$ ο μορφισμός συμπλεγμάτων με

$$\bar{f}^n = f^n - \partial_C^{n-1}\Theta^n - \Theta^{n+1}\partial_X^n : X^n \rightarrow C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θέτοντας επίσης $\bar{\Psi}^n = \Psi^n - \Theta^n$, βλέπουμε ότι για να ισχύουν τα (i) και (ii), αρκεί να ορίσουμε τα $\bar{\Psi}^n : X^n \rightarrow C^{n-1}$ για $n \leq k+1$, έτσι ώστε να ισχύουν τα

- (i') $\bar{\Psi}^n = 0$ για κάθε $n \leq k-1$ και
- (ii') $\bar{f}^n = \partial_C^{n-1}\bar{\Psi}^n + \bar{\Psi}^{n+1}\partial_X^n$ για κάθε $n < k+1$.

Παρατηρούμε ότι για τον μορφισμό συμπλεγμάτων $\bar{f} : X \rightarrow C$ είναι $\bar{f}^n = 0$ για κάθε $n < k$ και άρα από το λήμμα 3.1.7 υπάρχει κάποιο σύμπλεγμα πεπερασμένα παραγόμενων και προβολικών R -προτύπων Y με $Y^n = 0$ για κάθε $n < k$ και ομομορφισμοί συμπλεγμάτων g και h έτσι ώστε ο $\bar{f}$ να παραγοντοποιείται ως

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} C.$$

Έστω προς στιγμή ότι έχουμε ορίσει ομομορφισμούς $\hat{\Psi}^n : Y^n \rightarrow C^{n-1}$ για $n \leq k+1$ έτσι ώστε να ισχύουν τα

- (i'') $\hat{\Psi}^n = 0$ για κάθε $n \leq k-1$ και
- (ii'') $h^n = \partial_C^{n-1}\hat{\Psi}^n + \hat{\Psi}^{n+1}\partial_Y^n$ για κάθε $n < k+1$.

Τότε, ορίζοντας $\bar{\Psi}^n = \hat{\Psi}^n g^n : X^n \rightarrow C^{n-1}$ για $n \leq k+1$, έχουμε ότι

$$\bar{\Psi}^n = \hat{\Psi}^n g^n = 0 g^n = 0$$

για κάθε $n \leq k-1$ και

$$\begin{aligned} \bar{f}^n &= h^n g^n \\ &= \partial_C^{n-1} \hat{\Psi}^n g^n + \hat{\Psi}^{n+1} \partial_Y^n g^n \\ &= \partial_C^{n-1} (\hat{\Psi}^n g^n) + (\hat{\Psi}^{n+1} g^{n+1}) \partial_X^n \\ &= \partial_C^{n-1} \bar{\Psi}^n + \bar{\Psi}^{n+1} \partial_X^n \end{aligned}$$

οπότε ισχύουν τα (i') και (ii') και άρα έχουμε το επαγωγικό βήμα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αρκεί να ορίσουμε τους ομομορφισμούς $\hat{\Psi}^n : Y^n \rightarrow C^{n-1}$ για $n \leq k+1$ που να ικανοποιούν τα (i'') και (ii''). Επειδή $Y^n = 0$ για κάθε $n < k$, συμπεραίνουμε ότι η (i'') ισχύει αυτόματα και ότι η (ii'') ισχύει για κάθε $n \leq k$. Συνεπώς, αρκεί να ορίσουμε ομομορφισμούς

$$\hat{\Psi}^k : Y^k \rightarrow C^{k-1} \text{ και } \hat{\Psi}^{k+1} : Y^{k+1} \rightarrow C^k$$

έτσι ώστε

$$h^k = \partial_C^{k-1} \hat{\Psi}^k + \hat{\Psi}^{k+1} \partial_Y^k.$$

Συμβολίζουμε με B^{k+1} την εικόνα του συνόρου $\partial_C^{k+1} : C^{k+1} \rightarrow C^{k+2}$, οπότε από το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Y^k & \xrightarrow{\partial_Y^k} & Y^{k+1} \\ h^k \downarrow & & \downarrow h^{k+1} \\ C^k & \xrightarrow{\partial_C^k} & C^{k+1} \longrightarrow B^{k+1} \subseteq C^{k+2} \end{array}$$

έπεται ότι η σύνθεση

$$Y^k \longrightarrow Y^{k+1} \longrightarrow B^{k+1}$$

είναι η μηδενική απεικόνιση. Επειδή τα R -πρότυπα Y^k, Y^{k+1} είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά και το R -πρότυπο B^{k+1} είναι επίπεδο, από το λήμμα 3.1.1, υπάρχει παραγοντοποίηση της απεικόνισης $Y^{k+1} \rightarrow B^{k+1}$ ως

$$Y^{k+1} \xrightarrow{\bar{g}} F \xrightarrow{\bar{h}} B^{k+1}$$

για κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο F και κάποιες R -γραμμικές απεικονίσεις $\bar{g}$ και $\bar{h}$, με την σύνθεση

$$Y^k \xrightarrow{\partial_Y^k} Y^{k+1} \xrightarrow{\bar{g}} F,$$

να είναι η μηδενική απεικόνιση. Προκύπτει λοιπόν το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
Y^k & \xrightarrow{\partial_Y^k} & Y^{k+1} & \xrightarrow{\bar{g}} & F \\
\downarrow h^k & & \downarrow h^{k+1} & & \downarrow \bar{h} \\
C^k & \xrightarrow{\partial_C^k} & C^{k+1} & \longrightarrow & B^{k+1},
\end{array}$$

το οποίο μπορούμε να επεκτείνουμε στον ακόλουθο μορφισμό συμπλεγμάτων

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y^k & \xrightarrow{\partial_Y^k} & Y^{k+1} & \xrightarrow{\bar{g}} & F & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow h^k & & \downarrow h^{k+1} & & \downarrow i\bar{h} & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & C^{k-1} & \xrightarrow{\partial_C^{k-1}} & C^k & \xrightarrow{\partial_C^k} & C^{k+1} & \xrightarrow{\partial_C^{k+1}} & C^{k+2} & \xrightarrow{\partial_C^{k+2}} & C^{k+3} & \xrightarrow{\partial_C^{k+3}} & \cdots,
\end{array}$$

όπου με i συμβολίσαμε την ένθεση $B^{k+1} \hookrightarrow C^{k+2}$. Τώρα, παρατηρούμε ότι το πρώτο σύμπλεγμα είναι δεξιά φραγμένο και αποτελείται από προβολικά R -πρότυπα, ενώ το δεύτερο είναι άκυκλο, οπότε από το λήμμα 3.1.6 έπεται ότι ο παραπάνω ομομορφισμός είναι ομοτοπικός με τον μηδενικό ομομορφισμό. Συμβολίζοντας με $\hat{\Psi}$ μία τέτοια ομοτοπία, εστιάζοντας στο βαθμό k , είναι $h^k = \partial_C^{k-1} \hat{\Psi}^k + \hat{\Psi}^{k+1} \partial_Y^k$ που σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Λήμμα 3.1.9. Έστω P ένα μη μηδενικό σύμπλεγμα από ελεύθερα R -πρότυπα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ σταθεροποιούμε ένα σύνολο I_n τέτοιο ώστε $P^n = R^{(I_n)}$. Τότε, υπάρχει ένα μη μηδενικό αριστερά φραγμένο υποσύμπλεγμα $P' \subseteq P$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το P'^n είναι ένα ελεύθερο και πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο της μορφής $P'^n = R^{(I'_n)}$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $I'_n \subseteq I_n$.

Απόδειξη. Εφόσον το P είναι μη μηδενικό, υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{Z}$ με $P^{n_0} \neq 0$ και άρα το σύνολο I_{n_0} περιέχει κάποιο στοιχείο i_{n_0} . Για $n < n_0$, θέτουμε $I'_n = \emptyset$ και $P'^n = 0$, ενώ θέτουμε $I'_{n_0} = \{i_{n_0}\}$ και $P'^{n_0} = R^{(\{i_{n_0}\})} \cong R$. Θα κατασκευάσουμε τους όρους του υποσυμπλέγματος P' με επαγωγή στο n . Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι για κάθε $k \leq n$, έχουμε ορίσει το $P'^k = R^{(I'_k)}$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $I'_k \subseteq I_k$, έτσι ώστε $\partial_P^k(P'^k) \subseteq P'^{k+1}$ για κάθε $k \leq n-1$. Τώρα, ορίζουμε το I'_{n+1} ως εξής: για κάθε $i'_n \in I'_n$, το $\partial_P^n(i'_n) \in P^{n+1} = R^{(I_{n+1})}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του I_{n+1} . Θέτουμε λοιπόν I'_{n+1} το υποσύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του I_{n+1} που εμφανίζονται με μη μηδενικό συντελεστή στη γραφή κάποιου $\partial_P^n(i'_n)$, καθώς το i'_n διατρέχει το I'_n . Από επαγωγική υπόθεση το I'_n είναι πεπερασμένο, οπότε και το I'_{n+1} είναι πεπερασμένο. Τότε για το $P'^{n+1} = R^{(I'_{n+1})}$, παρατηρούμε ότι $\partial_P^n(P'^n) = \partial_P^n(R^{(I'_n)}) \subseteq R^{(I'_{n+1})} = P'^{n+1}$ και άρα από επαγωγή τα παραπάνω P'^n ορίζουν το ζητούμενο αριστερά φραγμένο υποσύμπλεγμα $P' \subseteq P$. $\square$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω τεχνικά λήμματα, έχουμε την συνεπαγωγή iii) $\implies$ i) που παρουσιάζεται στην επόμενη πρόταση. Εδώ, ξεφεύγουμε από την απόδειξη του άρθρου του Neeman και παρουσιάζουμε την απόδειξη του άρθρου [6] του Εμμανουήλ.

Πρόταση 3.1.10. Έστω C ένα άκυκλο σύμπλεγμα από επίπεδα R -πρότυπα έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η εικόνα $\partial_C^n(C^n)$ να είναι επίσης ένα επίπεδο R -πρότυπο. Τότε $C \in \mathbf{K}(\mathbf{R}\text{-Proj})^\perp$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε σύμπλεγμα P από προβολικά R -πρότυπα και για κάθε μορφισμό συμπλεγμάτων $f : P \rightarrow C$, είναι $f \sim 0$. Από την παρατήρηση 2.1.17, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P είναι ένα σύμπλεγμα από ελεύθερα R -πρότυπα και έτσι μπορούμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ να γράψουμε $P^n = R^{(I_n)}$ για κάποιο σύνολο I_n .

Έστω $\mathcal{X}$ το σύνολο που αποτελείται από τριάδες

$$(P', I', \Sigma'),$$

όπου

- (a) το P' να είναι ένα υποσύμπλεγμα του P έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$: $P'^n = R^{(I'_n)}$ για κάποιο $I'_n \subseteq I_n$.
- (b) $I' = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} I'_n$, για τα I'_n του (a).
- (c) Η Σ' είναι μία ομοτοπία από τον περιορισμό $f|_{P'}$ στον μηδενικό μορφισμό.

Το σύνολο $\mathcal{X}$ είναι μη κενό διότι $(0, \emptyset, 0) \in \mathcal{X}$ και ορίζοντας

$$(P', I', \Sigma') \leq (P'', I'', \Sigma'') \iff P' \subseteq P'', I' \subseteq I'', \Sigma' = \Sigma''|_{P'},$$

το $\mathcal{X}$ γίνεται ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Παρατηρούμε ότι κάθε αλυσίδα στο $\mathcal{X}$ έχει άνω φράγμα (την ένωση) και έτσι από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό στοιχείο (P', I', Σ') του $\mathcal{X}$. Θα δείξουμε ότι $P = P'$ και έτσι για την ομοτοπία Σ' θα είναι $\Sigma'|_{P'} = \Sigma'|_P = \Sigma$: μία ομοτοπία από τον ομομορφισμό $f|_{P'} = f|_P = f$ στον μηδενικό μορφισμό και άρα θα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω προς άτοπο ότι $P' \subsetneq P$. Τότε το σύμπλεγμα πηλίκο P/P' είναι μη μηδενικό και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$: $(P/P')^n = P^n/P'^n = R^{(I_n \setminus I'_n)}$. Από το λήμμα 3.1.9 υπάρχει κάποιο υποσύμπλεγμα $P'' \subseteq P$ με $P' \subseteq P''$ τέτοιο ώστε το σύμπλεγμα πηλίκο P''/P' να είναι μη μηδενικό και αριστερά φραγμένο και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$: $P''^n/P'^n = R^{(J_n)}$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $J_n \subseteq I_n \setminus I'_n$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$: $P''^n = R^{(I''_n)}$, όπου $I''_n = I'_n \cup J_n$. Σχηματίζεται λοιπόν η βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων

$$0 \longrightarrow P' \xrightarrow{\iota} P'' \xrightarrow{p} P''/P' \longrightarrow 0,$$

με τις αντίστοιχες βραχείες ακολουθίες ελεύθερων R -προτύπων

$$0 \longrightarrow P'^n \xrightarrow{\iota} P''^n \xrightarrow{p} P''^n/P'^n \longrightarrow 0,$$

να είναι διασπώμενες σε κάθε βαθμό n και έτσι, σύμφωνα με το λήμμα 2.3.2, η ακολουθία συμπλεγμάτων αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P''/P', C) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Hom}_R(P'', C) \xrightarrow{\iota^*} \operatorname{Hom}_R(P', C) \longrightarrow 0$$

είναι επίσης ακριβής. Τώρα, η ομοτοπία $\Sigma' : P' \rightarrow C$ ορίζει ένα στοιχείο $(\Sigma'^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ της αβελιανής ομάδας $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_R(P'^n, C^{n-1})$. Επειδή ο μορφισμός συμπλεγμάτων

$$\iota^* : \operatorname{Hom}_R(P'', C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P', C)$$

είναι επί, ο αντίστοιχος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων στον βαθμό -1 είναι επίσης επί, οπότε υπάρχει κάποιο στοιχείο

$$(\Sigma''^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(P''^n, C^{n-1})$$

έτσι ώστε

$$(\iota^n)^* \left((\Sigma''^n)_{n \in \mathbb{Z}} \right) = (\Sigma'^n)_{n \in \mathbb{Z}} \implies \Sigma''^n \circ \iota^n = \Sigma'^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Συμβολίζοντας με $\Sigma'' : P'' \rightarrow C$ την αντίστοιχη ομογενή R -γραμμική απεικόνιση βαθμού -1 , είναι $\Sigma'' \circ \iota = \Sigma' \implies \Sigma' = \Sigma''_{|P'}$. Τότε, για τον μορφισμό συμπλεγμάτων

$$g = f_{|P''} - (\partial_C \Sigma'' + \Sigma'' \partial_{P''}) : P'' \rightarrow C,$$

είναι $g_{|P'} = 0$, διότι $f_{|P'} = \partial_Z \Sigma' + \Sigma' \partial_{P'}$. Επομένως, ο g επάγει στο σύμπλεγμα πηλίκου P''/P' μοναδικό μορφισμό συμπλεγμάτων $h : P''/P' \rightarrow C$ με $g = h \circ p$, όπου $p : P'' \rightarrow P''/P'$ είναι η απεικόνιση πηλίκου. Όμως το P''/P' είναι ένα αριστερά φραγμένο σύμπλεγμα από πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα R -πρότυπα και άρα από το λήμμα 3.1.8, είναι $h \sim 0$. Επιλέγουμε λοιπόν μία ομοτοπία $S : P''/P' \rightarrow C$ από το h στον μηδενικό μορφισμό για την οποία $h = \partial_C S + S \bar{\partial}$. Εδώ, με $\bar{\partial}$ συμβολίσαμε το διαφορικό του συμπλέγματος πηλίκου P''/P' .

Τώρα, για την ομογενή R -γραμμική απεικόνιση $\Sigma'' + Sp : P'' \rightarrow C$ βαθμού -1 , υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \partial_C(\Sigma'' + Sp) + (\Sigma'' + Sp)\partial_{P''} &= \partial_C \Sigma'' + \partial_C Sp + \Sigma'' \partial_{P''} + Sp \partial_{P''} \\ &= \partial_C \Sigma'' + \Sigma'' \partial_{P''} + \partial_C Sp + Sp \partial_{P''} \\ &= \partial_C \Sigma'' + \Sigma'' \partial_{P''} + \partial_C Sp + S \bar{\partial} p \\ &= \partial_C \Sigma'' + \Sigma'' \partial_{P''} + (\partial_C S + S \bar{\partial}) p \\ &= \partial_C \Sigma'' + \Sigma'' \partial_{P''} + h p \\ &= \partial_C \Sigma'' + \Sigma'' \partial_{P''} + g \\ &= f_{|P''}, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η $\Sigma'' + Sp$ είναι μία ομοτοπία από τον περιορισμό $f_{|P''}$ στον μηδενικό ομομορφισμό. Συνεπώς, για το $I'' = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} I''_n$, έχουμε ότι $(P'', I'', \Sigma'' + Sp) \in \mathcal{X}$ και περιορίζοντας την ομοτοπία $\Sigma'' + Sp$ στο υποσύμπλεγμα $P' \subseteq P''$, είναι:

$$(\Sigma'' + Sp)_{|P'} = \Sigma''_{|P'} + Sp_{|P'} = \Sigma''_{|P'} + S0 = \Sigma''_{|P'} = \Sigma'$$

και άρα $(P', I', \Sigma') \leq (P'', I'', \Sigma'' + Sp)$. Επίσης το σύμπλεγμα P''/P' είναι μη μηδενικό, οπότε $(P', I', \Sigma') \neq (P'', I'', \Sigma'' + Sp)$ πράγμα άτοπο, διότι το (P', I', Σ') έχει υποτεθεί μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{X}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $P = P'$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Είμαστε πλέον σε θέση να δούμε συγκεντρωμένο το πρώτο βασικό θεώρημα της εργασίας.

Θεώρημα 3.1.11. Έστω C ένα σύμπλεγμα από επίπεδα R -πρότυπα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- (i) $C \in K(R\text{-Proj})^\perp$.
- (ii) Το C γράφεται ως filtered συνόριο συσταλτών συμπλεγμάτων από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R -πρότυπα.
- (iii) Το C είναι άκυκλο και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η εικόνα $\partial_C^n(C^n)$ είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (i) $\implies$ (ii) είναι η πρόταση 3.1.5. Για τη συνεπαγωγή (ii) $\implies$ (iii), έστω ότι το C γράφεται ως $C = \text{colim}_{\mathcal{I}} F$ για κάποιο συναρτητή $F : \mathcal{I} \rightarrow C(R\text{-Mod})$, με την κατηγορία $\mathcal{I}$ να είναι filtered και το σύμπλεγμα F_i να είναι συσταλτό για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$. Τότε, κάθε σύμπλεγμα F_i είναι άκυκλο και επειδή τα filtered συνόρια διατηρούν τη συνομολογία, έπεται ότι και το C είναι άκυκλο. Σταθεροποιούμε έναν ακέραιο n και παρατηρούμε ότι $\text{im } \partial_C^n = \text{im}(\text{colim}_{\mathcal{I}} \partial_{F_i}^n) \cong \text{colim}_{\mathcal{I}}(\text{im } \partial_{F_i}^n)$. Για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$, εφόσον το σύμπλεγμα F_i είναι συσταλτό, από την πρόταση 2.1.15 για κάθε ακέραιο n , η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{im } \partial_{F_i}^{n-1} \rightarrow F_i^n \rightarrow \text{im } \partial_{F_i}^n \rightarrow 0$$

διασπάται και έτσι η εικόνα $\text{im } \partial_{F_i}^n$ είναι ένα προβολικό R -πρότυπο, ως ευθύς προσθετέος του προβολικού R -προτύπου F_i^n . Ιδιαίτέρως, το $\text{im } \partial_{F_i}^n$ είναι επίπεδο και έτσι για κάθε ακέραιο n , το $\text{im } \partial_C^n$ είναι επίπεδο ως filtered συνόριο επίπεδων προτύπων. Τέλος, η συνεπαγωγή (iii) $\implies$ (i) είναι η πρόταση 3.1.10. $\square$

Παρατήρηση 3.1.12. Εν γένει δεν είναι σωστό ότι κάθε άκυκλο σύμπλεγμα προβολικών R -προτύπων είναι συσταλτό. Πράγματι, το σύμπλεγμα προβολικών $\mathbb{Z}_4$ -προτύπων

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

αν και είναι άκυκλο, σύμφωνα με την πρόταση 2.1.15 δεν είναι συσταλτό, αφού η ακολουθία $\mathbb{Z}_4$ -προτύπων

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

δεν διασπάται καθώς τότε θα είχαμε ότι $\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ως $\mathbb{Z}_4$ πρότυπα, πράγμα άτοπο. Αν υποθέσουμε ακόμα ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερά hereditary, δηλαδή ότι κάθε υποπρότυπο ενός προβολικού R -προτύπου είναι επίσης προβολικό, τότε η πρόταση 2.1.15 δείχνει ότι κάθε άκυκλο σύμπλεγμα προβολικών R -πρότυπο είναι και συσταλτό. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η συνεπαγωγή (iii) $\implies$ (i) μας λέει ότι για κάθε δακτύλιο R , ένα άκυκλο σύμπλεγμα C από προβολικά R -πρότυπα για το οποίο όλοι οι συν-κύκλοι $B^n = \partial^n(Z^n)$ είναι επίπεδα R -πρότυπα, είναι συσταλτό. Ακόμα περισσότερο, οι συν-κύκλοι θα είναι επίσης προβολικά R -πρότυπα. Τα παραπάνω εξασφαλίζονται και πάλι από την πρόταση 2.1.15. Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση αυτή, έχουμε το επόμενο πόρισμα που εμφανίζεται στην εργασία [3] των Benson και Goodearl.

Πόρισμα 3.1.13. Έστω μία βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

με το M να είναι επίπεδο και το P να είναι προβολικό. Τότε και το M είναι προβολικό.

Απόδειξη. Σχηματίζουμε το άκυκλο σύμπλεγμα προβολικών R -προτύπων

$$\cdots \longrightarrow P \xrightarrow{\partial} P \xrightarrow{\partial} P \longrightarrow \cdots,$$

όπου $\partial = \iota \circ \pi$. Από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται η εικόνα $\partial(P)$ είναι ένα προβολικό R -πρότυπο. Όμως $\partial(P) = \iota(\pi(P)) = \iota(M) \cong M$, που δείχνει το ζητούμενο. $\square$

3.2 Η συμπεριφορά της $K(R\text{-Proj})^\perp$ ως προς τανυστικά γινόμενα

Συνεχίζουμε τη μελέτη της κατηγορίας $K(R\text{-Proj})^\perp$ παρουσιάζοντας τις υπόλοιπες ισοδύναμες περιγραφές της που δίνονται μέσω τανυστικών γινομένων συμπλεγμάτων. Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων αλλά και το θεώρημα της προηγούμενης ενότητας.

Πρόταση 3.2.1. Έστω C ένα σύμπλεγμα από επίπεδα R -πρότυπα που ανήκει στην κατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp$ και X ένα σύμπλεγμα από δεξιά R -πρότυπα. Τότε το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $X \otimes_R C$ είναι άκυκλο.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.1.11 μπορούμε να γράψουμε το C ως filtered συνόριο συσταλτών συμπλεγμάτων. Έστω λοιπόν $F : \mathcal{I} \rightarrow C(R\text{-Mod})$ ένας συναρτητής από μία filtered κατηγορία $\mathcal{I}$, έτσι το σύμπλεγμα F_i να είναι συσταλτό για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$ και $C = \varinjlim F$. Τότε, $X \otimes_R C = X \otimes_R \varinjlim F_i \cong \varinjlim (X \otimes_R F_i)$. Όμως, για κάθε $i \in \text{ob } \mathcal{I}$, το F_i είναι συσταλτό και άρα από το πόρισμα 2.3.6, το $X \otimes_R F_i$ είναι επίσης συσταλτό, οπότε και άκυκλο. Τέλος, επειδή τα filtered συνόρια διατηρούν τη συνομολογία, συμπεραίνουμε ότι το σύμπλεγμα $X \otimes_R C$ είναι και αυτό με τη σειρά του άκυκλο. $\square$

Πρόταση 3.2.2. Έστω C ένα σύμπλεγμα από προβολικά R -πρότυπα που ανήκει στην κατηγορία $K(R\text{-Proj})^\perp$ και X ένα σύμπλεγμα από (R, R) -διπρότυπα. Τότε για κάθε πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο M , το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(M, X \otimes_R C)$ είναι άκυκλο.

Απόδειξη. Εφόσον για κάθε $i, j \in \mathbb{Z}$ το M είναι ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο, το X^i είναι ένα (R, R) -διπρότυπο και το C^j είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο, από την πρόταση 1.1.5, ο φυσικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\phi : \text{Hom}_R(M, X^i) \otimes_R C^j \rightarrow \text{Hom}_R(M, X^i \otimes_R C^j)$$

είναι ισομορφισμός. Επίσης, επειδή το M είναι πεπερασμένα παριστώμενο, έχουμε τον φυσικό ισομορφισμό

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(M, C^j) \cong \text{Hom}_R(M, \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C^j).$$

Έτσι, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, είναι

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hom}_R(M, X) \otimes_R C)^m &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} ((\mathrm{Hom}_R(M, X))^n \otimes_R C^{m-n}) \\
&= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathrm{Hom}_R(M, X^n) \otimes_R C^{m-n}) \\
&\cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathrm{Hom}_R(M, X^n \otimes_R C^{m-n})) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R \left(M, \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (X^n \otimes_R C^{m-n}) \right) \\
&= \mathrm{Hom}_R(M, (X \otimes_R C)^m) \\
&= (\mathrm{Hom}_R(M, X \otimes_R C))^m.
\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι τα συμπλέγματα $\mathrm{Hom}_R(M, X) \otimes_R C$ και $\mathrm{Hom}_R(M, X \otimes_R C)$ είναι ισομορφα σε κάθε βαθμό m . Επειδή οι παραπάνω ισομορφισμοί είναι φυσικοί (ως σύνθεση τέτοιων), μετατίθενται με τα σύνορα των εμπλεκόμενων συμπλεγμάτων και άρα μας δίνουν τον ισομορφισμό συμπλεγμάτων

$$\mathrm{Hom}_R(M, X) \otimes_R C \cong \mathrm{Hom}_R(M, X \otimes_R C).$$

Τώρα, από την πρόταση 3.2.1 έπεται ότι το σύμπλεγμα $\mathrm{Hom}_R(M, X) \otimes_R C$ είναι άκυκλο, οπότε και το σύμπλεγμα $\mathrm{Hom}_R(M, X \otimes_R C)$ είναι άκυκλο. $\square$

Πρόταση 3.2.3. Έστω C ένα σύμπλεγμα επίπεδων R -προτύπων. Υποθέτουμε ότι για κάθε πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο M , το σύμπλεγμα $\mathrm{Hom}_R(M, C)$ είναι άκυκλο. Τότε, $C \in \mathrm{K}(\mathrm{R-Proj})^\perp$.

Απόδειξη. Καταρχάς, θέτοντας $M = R$, από υπόθεση έχουμε ότι το σύμπλεγμα $\mathrm{Hom}_R(R, C)$ είναι άκυκλο. Από τον ισομορφισμό συμπλεγμάτων $C \cong \mathrm{Hom}_R(R, C)$, συμπεραίνουμε ότι το C είναι άκυκλο. Έτσι, με βάση το θεώρημα 3.1.11, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η εικόνα $\partial_C^n(C^n)$ είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο.

Σταθεροποιούμε λοιπόν έναν αθέριο n και θέτουμε $B^n = \partial_C^n(C^n)$. Θα δείξουμε ότι το B^n γράφεται ως filtered συνόριο προβολικών R -προτύπων και άρα είναι επίπεδο. Σύμφωνα με την πρόταση 1.3.2, έχουμε ότι το B^n γράφεται ως συνόριο του συναρτητή $F = F_{B^n} : \mathcal{C}_{B^n} \rightarrow \mathrm{R-Mod}$, με τα R -πρότυπα $F_{(P,f)} = P$ να είναι πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά για κάθε αντικείμενο (P, f) της κατηγορίας $\mathcal{C}_{B^n}$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}_{B^n}$ είναι filtered.

Η πρώτη συνθήκη της filtered κατηγορίας ισχύει αυτόματα, όπως είχαμε παρατηρήσει στην απόδειξη του θεωρήματος Govorov-Lazard. Για τη δεύτερη συνθήκη της filtered κατηγορίας, έστω

$$(P_1, f_1) \xrightarrow[b]{a} (P_2, f_2)$$

ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών της κατηγορίας $\mathcal{C}_{B^n}$. Θα βρούμε ένα μορφισμό $c : (P_2, f_2) \rightarrow (P_3, f_3)$ της $\mathcal{C}_{B^n}$, έτσι ώστε $c \circ a = c \circ b$. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightleftharpoons[b]{a} & P_2 & \xrightarrow{c} & P_3 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ B^n & \xlongequal{\quad} & B^n & \xlongequal{\quad} & B^n, \end{array}$$

για κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό R -πρότυπο P_3 και έναν μορφισμό συμπλεγμάτων f_3 . Ξεκινάμε λοιπόν από το μεταθετικό διάγραμμα συμπλεγμάτων

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightleftharpoons[b]{a} & P_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ B^n & \xlongequal{\quad} & B^n, \end{array} \quad (3.3)$$

που μας δίνει ότι $f_2 \circ (b - a) = f_1 - f_1 = 0$. Συμβολίζουμε με N τον συνπυρήνα $\text{coker}(b - a)$ και άρα επάγεται μορφισμός συμπλεγμάτων $\overline{f_2} : N \rightarrow B^n$, έτσι ώστε $\overline{f_2} \circ p = f_2$, όπου με $p : P_2 \rightarrow N$ συμβολίσαμε την απεικόνιση πηλίκο. Συνεπώς, επεκτείνουμε το μεταθετικό διάγραμμα 3.3 στο επίσης μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightleftharpoons[b]{a} & P_2 & \xrightarrow{p} & N \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow \overline{f_2} \\ B^n & \xlongequal{\quad} & B^n & \xlongequal{\quad} & B^n. \end{array} \quad (3.4)$$

Στην συνέχεια, συμβολίζουμε με $j : B^n \hookrightarrow C^{n+1}$ την ένθεση και με $\overline{\partial_C^n} : C^n \rightarrow B^n$, τον μοναδικό ομομορφισμό R -προτύπων που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} C^n & \xrightarrow{\overline{\partial_C^n}} & B^n \\ & \searrow \partial_C^n & \downarrow j \\ & & C^{n+1}. \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι για τη σύνθεση $\widehat{f_2} = j \circ \overline{f_2} : N \rightarrow C^{n+1}$, είναι

$$\partial_C^{n+1} \circ \widehat{f_2} = \partial_C^{n+1} \circ j \circ \overline{f_2} = 0 \circ \overline{f_2} = 0,$$

οπότε η απεικόνιση $\widehat{f_2}$ ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού $(\partial_C^{n+1})_*$ του συμπλέγματος $\text{Hom}_R(N, C)$:

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(N, C^n) \xrightarrow{(\partial_C^n)_*} \text{Hom}_R(N, C^{n+1}) \xrightarrow{(\partial_C^{n+1})_*} \text{Hom}_R(N, C^{n+2}) \longrightarrow \dots$$

Από το λήμμα 1.1.4, το R -πρότυπο N είναι πεπερασμένα παριστώμενο, οπότε από υπόθεση, το σύμπλεγμα $\text{Hom}_R(N, C)$ είναι άκυκλο. Συμπεραίνουμε ότι $\widehat{f}_2 \in \text{im}(\partial_C^n)_*$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\widehat{f}_2 = \partial_C^n \circ g$ για κάποια R -γραμμική απεικόνιση $g : N \rightarrow C^n$. Επομένως,

$$\widehat{f}_2 = \partial_C^n \circ g \implies j \circ \overline{f}_2 = \partial_C^n \circ g = j \circ \overline{\partial_C^n} \circ g \implies \overline{f}_2 = \overline{\partial_C^n} \circ g$$

και έτσι έχουμε την παραγοντοποίηση της $\overline{f}_2$ ως

$$N \xrightarrow{g} C^n \xrightarrow{\overline{\partial_C^n}} B^n .$$

Τώρα, επειδή το N είναι ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο, ενώ το C^n είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο, σύμφωνα με την πρόταση 1.1.6, υπάρχει κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο R -πρότυπο F και μία παραγοντοποίηση της g ως

$$N \xrightarrow{h_1} F \xrightarrow{h_2} C^n ,$$

για κάποιους ομομορφισμούς R -προτύπων h_1 και h_2 . Άρα, έχουμε την παραγοντοποίηση της $\overline{f}_2$ ως

$$N \xrightarrow{h_1} F \xrightarrow{\overline{\partial_C^n} \circ h_2} B^n .$$

Τελικά, επεκτείνουμε το μεταθετικό διάγραμμα 3.4 στο επίσης μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightleftharpoons[b]{a} & P_2 & \xrightarrow{p} & N & \xrightarrow{h_1} & F \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow \overline{f}_2 & & \downarrow \overline{\partial_C^n} \circ h_2 \\ B^n & \equiv & B^n & \equiv & B^n & \equiv & B^n, \end{array}$$

που δείχνει το ζητούμενο. □

Κλείνουμε με το δεύτερο βασικό θεώρημα της εργασίας.

Θεώρημα 3.2.4. Έστω C ένα σύμπλεγμα από επίπεδα R -πρότυπα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το C ανήκει στην κατηγορία $\text{K}(\text{R-Proj})^\perp$.
- (ii) Για κάθε σύμπλεγμα δεξιών R -προτύπων X , το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $X \otimes_R C$ είναι άκυκλο.
- (iii) Για κάθε δεξιό R -πρότυπο M , το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $M \otimes_R C$ είναι άκυκλο.
- (iv) Για κάθε πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο N , το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(N, C)$ είναι άκυκλο.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (i) $\implies$ (ii) είναι η πρόταση 3.2.1. Η συνεπαγωγή (ii) $\implies$ (iii) είναι προφανής. Για την συνεπαγωγή (iii) $\implies$ (iv), έστω N ένα πεπερασμένα παριστώμενο R -πρότυπο. Σύμφωνα με την απόδειξη της πρότασης 3.2.2, υπάρχει ένας ισομορφισμός συμπλεγμάτων

$$\mathrm{Hom}_R(N, R) \otimes_R C \cong \mathrm{Hom}_R(N, R \otimes_R C).$$

Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\mathrm{Hom}_R(N, R \otimes_R C^n) \cong \mathrm{Hom}_R(N, C^n)$$

που επάγει τον ισομορφισμό συμπλεγμάτων

$$\mathrm{Hom}_R(N, R \otimes_R C) \cong \mathrm{Hom}_R(N, C).$$

Τελικά, τα συμπλέγματα $\mathrm{Hom}_R(N, R) \otimes_R C$ και $\mathrm{Hom}_R(N, C)$ είναι ισόμορφα. Από υπόθεση, το σύμπλεγμα $\mathrm{Hom}_R(N, R) \otimes_R C$ είναι άκυκλο, οπότε και το σύμπλεγμα $\mathrm{Hom}_R(N, C)$ είναι επίσης άκυκλο. Τέλος, η συνεπαγωγή (iv) $\implies$ (i) είναι η πρόταση 3.2.3. $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] Helemeskii A.Ya. «Flat Banach modules and amenable algebras». In: *Tr. Mosk. Mat. Obs.* 47 (1984), pp. 179–128.
- [2] H. Bass. «Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings». In: *Trans.Amer.Math.Soc.* 95 (1960), pp. 466–488.
- [3] D.J. Benson and K.R. Goodearl. «Periodic flat modules, and flat modules for finite groups». In: *Pacific Journal of Mathematics* 196 (2000), pp. 45–67. DOI: 10.2140/pjm.2000.196.45.
- [4] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1982. ISBN: 9780387906881.
- [5] S. U. Chase. «Direct products of modules». In: *Transactions of the American Mathematical Society* 97 (1960), pp. 457–473. DOI: 10.2307/1993382.
- [6] Ioannis Emmanouil. «On pure acyclic complexes.» In: *Journal of Algebra* 465 (2017), pp. 190–213. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.07.009.
- [7] V. E. Govorov. «On flat modules.» In: *Sibirsk. Mat. Zh.* 6.2 (1965), pp. 300–304.
- [8] Daniel Lazard. «Autour de la platitude». In: *Bull.Soc.Math.France.* 97 (1969), pp. 81–128. DOI: 10.24033/bsmf.1675.
- [9] A. Neeman. «The homotopy category of flat modules, and Grothendieck duality.» In: *Invent. math.* 174.255 (2008), pp. 255–308. DOI: 10.1007/s00222-008-0131-0.
- [10] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer New York, NY, 2009. ISBN: 9780387245270.
- [11] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994. ISBN: 9781139644136.