Μαρίνα Μπρόκου
Α.Μ.: 20140204

Η εξίσωση Pell στα Ελληνικά και Ινδικά Μαθηματικά και η σχέση με το Βιβλίο Χ των *Στοιχείων* του Ευκλείδη

Διδακτορική Διατριβή

Σχολή Θετικών Επιστημών - Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2022

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Επιβλέπουσα:

Βασιλική Φαρμάκη,
Καθηγήτρια Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Μέλη:

Στυλιανός Νεγρεπόντης,
Ομότιμος Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Διονύσιος Λάππας,
Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Επιπλέον των μελών της τριμελούς επιτροπής:

Απόστολος Γιαννόπουλος,
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Δέσποινα Πόταρη,
Καθηγήτρια Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Ιωάννης Χριστιανίδης,
Καθηγητής Τμήματος Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης ΕΚΠΑ

Δήμητρα Χριστοπούλου,
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Σύνοψη

Η επανερμηνεία της φιλοσοφίας του Πλάτωνα με όρους περιοδικής (για τον *Πολιτικό* παλινδρομικά περιοδικής) ανθυφαίρεσης και η ανάγνωση του Βιβλίου Χ των *Στοιχείων* Ευκλείδη υπό το νέο φως, αποκαλύπτουν ισχυρές μαθηματικές συνεισφορές από τον Θεαίτητο, συμπεριλαμβανομένης μιας απόδειξης της γενικής εξίσωσης Pell. Σημειώνονται συναρπαστικές ομοιότητες των ανακατασκευασμένων αποδείξεων του Θεαίτητου με την λύση του προβλήματος του Pell όπως δίδεται από τους Ινδούς.

Λέξεις κλειδιά: Πλάτων, Θεαίτητος, Βιβλίο Χ *Στοιχείων* Ευκλείδη, παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση, εξίσωση Pell, *cakravala*

Abstract

The re-interpretation of Plato's philosophy in terms of periodic anthyphairesis, in fact of palindromically periodic anthyphairesis in the *Politicus*, and the reading of Book X of Euclid's *Elements* under the new light, reveal deep mathematical contributions by Theaetetus, including a proof of the general Pell equation. Fascinating similarities of Theaeteus' reconstructed proofs with the Hindus' solution of the problem of Pell are noted.

Keywords: Plato, Theaetetus, Book X of Euclid's *Elements*, palindromically periodic anthyphairesis, Pell equation, cakravala

Ευχαριστίες

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά και από καρδιάς τον Ομότιμο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ κύριο Στέλιο Νεγρεπόντη και την Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ κυρία Βάσω Φαρμάκη για το ειλικρινές ενδιαφέρον τους, την συνεχή επιστημονική καθοδήγησή τους και την αμείωτη υποστήριξή τους στην πορεία αυτών των ετών. Η ενθάρρυνσή τους ήταν το ισχυρότερο κίνητρό μου ώστε να αντιμετωπίσω τις δυσκολίες που αναπόφευκτα θα εμφανίζονταν είτε σε πρακτικό είτε σε ψυχολογικό επίπεδο.

Ευχαριστώ επίσης την οικογένεια και τους φίλους, που ήταν δίπλα μου με κατανόηση και καρτερικότητα.

Δεν θα μπορούσα τέλος να μην ευχαριστήσω τους Καθηγητές και τις Καθηγήτριες ΕΚΠΑ: Δ. Λάππα, Α. Γιαννόπουλο, Δ. Πόταρη, Ι. Χριστιανίδη και Δ. Χριστοπούλου για την συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή της διδακτορικής διατριβής. Η παρουσία τους με τιμά ιδιαιτέρως.

Στους μελετητές που θα έρθουν

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή[1]

Η παρούσα εργασία βασίζεται στην εις βάθος, πολυετή και συνεχιζόμενη μελέτη της πλατωνικής φιλοσοφίας από τον Ομότιμο Καθηγητή Στέλιο Νεγρεπόντη. Το βασικό, καινοτόμο, σπουδαίο αποτέλεσμα που η μελέτη αυτή έχει προσφέρει, δηλαδή η μαθηματική ανθυφαιρετική ερμηνεία της πλατωνικής φιλοσοφικής μεθόδου, αποτελεί τη μήτρα πολυπληθών, ενδιαφέροντων συμπερασμάτων για τους ερευνητικούς τομείς της Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία θα ακολουθήσουμε όλη τη διαδρομή που οδηγεί συνδυαστικά στα συμπεράσματα εκείνα που σχετίζονται με την επίλυση της εξίσωσης Pell στα Ελληνικά και Ινδικά μαθηματικά.

Η μελέτη στην οποία βασίζεται η παρούσα εργασία, έχει δείξει ότι η βασική οντότητα στο πλατωνικό φιλοσοφικό σύστημα, το νοητό Ον, είναι μια φιλοσοφική μίμηση μιας δυάδος σε περιοδική ανθυφαίρεση (τα απλά μαθηματικά της ανθυφαίρεσης αναλύονται στην Ενότητα 1). Αυτό γίνεται φανερό, μεταξύ άλλων, στο Ἓν της δεύτερης υπόθεσης του *Παρμενίδη* και στις Διαιρέσεις του Ασπαλιευτή και του Σοφιστή στον *Σοφιστή* (Ενότητα 2).

Επομένως, δεν θα πρέπει να αποτελέσει μεγάλη έκπληξη η διαπίστωση πως οι φιλοσοφικές θεωρίες του Πλάτωνα κρύβουν και ίσως μας αποκαλύψουν βαθιά μαθηματικά μυστικά. Πόσο δε μάλλον, αν αναλογιστεί κανείς πως σύμφωνα με παραδοχή του ίδιου του Πλάτωνα, το ύστερο έργο του είχε επηρεαστεί ιδιαιτέρως από τις μαθηματικές ανακαλύψεις του Θεαίτητου, όπως αναφέρεται στον *Θεαίτητο* 147c-148d. Η μίμηση για την οποία μιλάει ο Πλάτων («*πειρῶ μιμούμενος*», 148d4-5), εντοπίζεται στα χωρία 16c,23a-25e στον *Φίληβο*, σύμφωνα με τα οποία ένα νοητό Ον είναι η μείξη ενός ανθυφαιρετικού απείρου/ασυμμετρίας και ενός ανθυφαιρετικού πέρατος/συμμετρίας και στο χωρίο 283a-287b στον *Πολιτικό* σύμφωνα με το οποίο τα νοητά Όντα δημιουργούνται ως προϊόντα μιας διπλής μέτρησης: πρώτον, της οντότητας έναντι του αντιθέτου της, η οποία είναι μια πεπερασμένη μέτρηση (καθώς αποκλείεται η *ἡδονὴ*), και δεύτερον σε σχέση με τον γεωμετρικό μέσο αυτών των δύο αντιθέτων, μιας άπειρης γένεσης. Αναγνωρίζουμε πως το περιεχόμενο των προαναφερθέντων χωρίων τόσο στον *Πολιτικό* όσο και στον *Φίληβο*, είναι φιλοσοφικές δηλώσεις που μιμούνται στενά το Θεώρημα Περιοδικότητας του Θεαίτητου, δηλωμένο σε ημι-φιλοσοφική γλώσσα στον *Θεαίτητο* 147c-148d: «εάν a, b είναι ευθείες δυνάμει-μόνο σύμμετρες, συγκεκριμένα εάν $a^2=Nb^2$ για κάποιον μη-τετράγωνο αριθμό N, τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι *περιοδική*» (Ενότητα 3).
Ακόμη πιο εντυπωσιακό είναι το γεγονός πως, ο σύνθετος ορισμός του Πολιτικού, που καταλαμβάνει ολόκληρο τον *Πολιτικό*, είναι μια μίμηση όχι μόνο της περιοδικής ανθυφαίρεσης, όπως ήταν η περίπτωση των Διαιρέσεων στον *Σοφιστή* (που μελετήθηκαν στην Ενότητα 2), αλλά μιας *παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης*. Η μίμηση αυτή αποκαλύπτει πως ο Θεαίτητος γνώριζε και είχε αποδείξει το Θεώρημα: «εάν $a^2=Nb^2$, N μη-τετράγωνος, τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι παλινδρομικά περιοδική», ένα σημαντικό αποτέλεσμα που στη σύγχρονη εποχή ανακαλύφθηκε σταδιακά από το έργο των Fermat, Brouncker (17ος αιώνας), Lagrange και Euler, (18ος αιώνας) (Ενότητα 5).

[1] Οι όροι που αναφέρονται στην εισαγωγή θα οριστούν στο κυρίως κείμενο στη συνέχεια.

Οπλισμένοι με τις αποκαλύψεις του Πλάτωνα προσπαθούμε να ανακατασκευάσουμε τη απόδειξη του Θεαίτητου. Βρίσκουμε το σύνολο των απαραίτητων εργαλείων στο Βιβλίο X των *Στοιχείων*, ένα έργο που ως γνωστόν αποδίδεται στον Θεαίτητο. Ήταν το 1572 που ο Bombelli συνειδητοποίησε πως το Βιβλίο X είναι αφιερωμένο στην *συζυγία* (Προτάσεις X.112-114 των *Στοιχείων*) μεταξύ *αποτομών* (που ορίζονται στην X.73 και μελετώνται στις Προτάσεις X.73-107) και *διωνυμικών* (binomial) ευθειών (που ορίζονται στην X.36 και μελετώνται στις Προτάσεις X.36-72). Ο Bombelli επηρεασμένος από τα παραπάνω εισήγαγε τους σύνθετους αριθμούς με το όνομα *binomio*. Το Βιβλίο X λοιπόν, με την περιεχόμενη συζυγία, είναι το ιδανικό εργαλείο για την απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης. Μόλις αντιληφθούμε, χάρη στον Πλάτωνα, ότι ο Θεαίτητος είχε πράγματι αποδείξει το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας και ότι τα εργαλεία προς αυτήν την κατεύθυνση βρίσκονται στο Βιβλίο X, η ανακατασκευή της απόδειξης αποτελεί ουσιαστικά μονόδρομο: βασίζεται στη συνειδητοποίηση ότι τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα γ_n της ανθυφαίρεσης του a προς b, για $a^2=Nb^2$, N μη-τετράγωνο, είναι απλές αποτομές ευθείες της μορφής $\gamma_n=(-1)^n(q_nb-p_na)$, και ότι οι ανθυφαιρετικέες σχέσεις μεταξύ των υπολοίπων ($\gamma_{n-1}=I_n\gamma_n+\gamma_{n+1}$) μπορούν να μετατραπούν σε σχέσεις συζυγίας $\varphi_n(I_nb+\varphi_{n+1})=b^2$, με την απαραίτητη εισαγωγή των αναχθέντων υπολοίπων φ_n που ορίζονται από τη σχέση $\gamma_n\varphi_{n+1}= \gamma_{n+1}b$.

Το ένα βασικό επιχείρημα που ακόμα απαιτείται για την απόδειξη αλλά απουσιάζει από το Βιβλίο X, η *αρχή του περιστερεώνα*, παρέχεται περίτεχνα ξανά από τον Πλάτωνα ακριβώς στο σημείο που χρειάζεται, δηλαδή όταν το πρώτο μισό της περιόδου της ανθυφαιρετικής διαίρεσης περνάει στο δεύτερο παλινδρομικό μισό ή, με όρους Πλάτωνα, τη στιγμή της μετάβασης από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία (*Πολιτικός* 272d-e). Επισημαίνουμε ότι η ανθυφαιρετική ερμηνεία της φιλοσοφίας του Πλάτωνα είναι κάτι που διέφυγε από τον μαθηματικό André Weil, παρά την εμβάθυνσή του στην Ελληνική Φιλοσοφία και τα Ελληνικά Μαθηματικά, μη καταφέρνοντας έτσι να συνειδητοποιήσει τον πραγματικό ρόλο της συζυγίας αποτομών και διωνυμικών ευθειών στο Θεαιτήτειο Βιβλίο X των *Στοιχείων*.
(Ενότητες 4 και 6)

Ο Θεαίτητος είχε ισχυρό κίνητρο να ασχοληθεί με το πρόβλημα Pell, καθώς η περίπτωση για N=2 ήταν μια σεβαστή ανακάλυψη των Πυθαγορείων που δεν πέρασε απαρατήρητη από τον Πλάτωνα (*Πολιτεία* 546c), και που είναι στενά συνδεδεμένη με την ανακάλυψή τους σχετικά με την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης $a^2=2b^2$ (Ενότητα 7). Με το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας στην κατοχή του Θεαίτητου, η απόδειξη της ιδιότητας Pell φαντάζει λογικό επακόλουθο: η ανακατασκευασμένη απόδειξη περιοδικότητας εμπεριέχει την ιδιότητα Pell, από τη στιγμή που ο αριθμός λ_{n+1} που χρησιμοποιείται στον ορισμό των m_{n+1} και φ_{n+1} είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού Pell του υπολοίπου γ_n. Η ενασχόληση του Θεαίτητου με το πρόβλημα Pell μπορεί πράγματι να ανιχνευθεί στο Βιβλίο X καθώς η ταξινόμηση των αποτομών ευθειών σε έξι τάξεις στους Ορισμούς X.84/85 έχει νόημα μόνο σε σχέση με την ιδιότητα Pell. Αναλυτικότερα: (i) η πρώτη και η τέταρτη αποτομή, στην ταξινόμηση X.84/85 των αποτομών ευθειών στα *Στοιχεία*, είναι αποτομές με *θετικό αριθμό Pell* (αντιστοιχώντας στα *ζυγά υπόλοιπα* της ανθυφαίρεσης του a προς b για $a^2=Nb^2$, N μη-τετράγωνος, και b η προτεθείσα «ποδιαία» ευθεία), η δεύτερη και η πέμπτη με *αρνητικό αριθμό Pell* (αντιστοιχώντας στα *περιττά υπόλοιπα*) και (ii) πιο εντυπωσιακό και σχετικό είναι το γεγονός πως η πρώτη και η δεύτερη αποτομή, στην ταξινόμηση X.84/85 των αποτομών ευθειών στα *Στοιχεία*, είναι εκείνες με *τετράγωνο* *αριθμό Pell*, η τέταρτη και πέμπτη με *μη-τετράγωνο αριθμό Pell*. Η ταξινόμηση των αποτομών στους Ορισμούς X.84/85 σε συνδυασμό με την Πρόταση X.97 η οποία παράγει μια αποτομή με τετράγωνο αριθμό Pell από οποιαδήποτε αποτομή ευθεία, αποτελούν τα επιπρόσθετα απαιτούμενα εργαλεία για την απόδειξη της ιδιότητας Pell (Ενότητα 8).

Συμπερασματικά, με βάση τα επιχειρήματά μας:
(α) ότι σε όλο το έργο του του Πλάτωνα, τα νοητά Όντα είναι μιμήσεις δυάδων σε περιοδική ανθυφαίρεση,
(β) ότι τα νοητά Όντα του Πλάτωνα στον *Θεαίτητο*, τον *Πολιτικό* και τον *Φίληβο* είναι μιμήσεις του θεωρήματος του Θεαίτητου για την παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση ευθειών μήκει ασύμμετρων και δυνάμει σύμμετρων.
(γ) ότι η απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου εφαρμόζει την συζυγία τετραγωνικών ευθειών, αποτομών και εκ δύο ονομάτων, στο Θεαιτήτειο Βιβλίο X των Στοιχείων, και
(δ) ότι υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι το Βιβλίο X ασχολείται με την απόδειξη της γενικής ιδιότητας Pell,
συμπεραίνουμε ότι ο Θεαίτητος είχε απόδειξη όχι μόνο του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας, αλλά και της γενικής ιδιότητας Pell, μιας απλής συνέπειας του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας.

Ταυτόχρονα, το δυσνόητο και μυστηριώδες για τους μελετητές Βιβλίο X αποκτά έναν συναρπαστικό, πολυδιάστατο αλλά σαφή στόχο που μέχρι τώρα δεν είχε διαφανεί: να προσφέρει τα εργαλεία για την δήλωση και την απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων και της στενά συσχετιζόμενης λύσης του γενικού προβλήματος Pell και επιπρόσθετα (όπως θα δούμε εν συντομία στην Ενότητα 8.4 καθώς μια τέτοια ανάλυση ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας εργασίας) να προσπαθήσει να επεκτείνει την ανθυφαιρετική περιοδικότητα στον χώρο και στα κανονικά στερεά.

Στην τελευταία Ενότητα 9 σχετικά με τη συνεισφορά των Ινδών στην επίλυση του προβλήματος Pell, συμπεριλαμβάνουμε τις ενδιαφέρουσες και συναρπαστικές ενδείξεις ομοιότητας μεταξύ εκείνων των στοιχείων της ανακατασκευασμένης απόδειξης της παλινδρομικής περιοδικότητας της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης του Θεαίτητου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε σχέση με την ιδιότητα Pell, και των μεθόδων που ανέπτυξαν οι Ινδοί. Ας επισημάνουμε πως δεν υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε με βεβαιότητα εάν η προέλευση των μεθόδων που ανέπτυξαν οι Ινδοί μαθηματικοί σχετίζονται ως προς την προέλευσή τους με τις ανακατασκευασμένες αποδείξεις του Θεαίτητου.

Η μέθοδος των Ινδών για την επίλυση του προβλήματος Pell ήρθε σε δύο στάδια.
Πρώτα ο Brahmagupta, τον 7^{o} αι μ.Χ., εισήγαγε την μέθοδο *bhavana*, δηλαδή τον κανόνα σύνθεσης δυάδων, δεδομένου ενός μη-τετράγωνου φυσικού αριθμού N:
$(q, p)*(q', p') = (qq'+Npp', qp'+q'p)$,
ο οποίος χρησιμοποιείται κυρίως ως «τετραγωνισμός» ($q=q'$, $p=p'$). Ο τελεστής *bhavana* * είναι πολλαπλασιαστικός επί της απόλυτης τιμής του αριθμού Pell q^2-Np^2 των δυάδων (q, p).
Ο κανόνας σύνθεσης Brahmagupta φαίνεται να μοιάζει με μια αριθμητικοποιημένη εκδοχή του γεωμετρικού κανόνα «πολλαπλασιασμού» απλών αποτομών ή διωνυμικών ευθειών, όπου $a^2=Nb^2$:

$(qb-pa)(q'b-p'a) = ((qq'+Npp')b-(qp'+q'p)a)b$,
και ο οποίος, στην περίπτωση του «τετραγωνισμού», συνδέεται στενά με την Πρόταση X.97 των *Στοιχείων*.

Ο τετραγωνικός κανόνας *bhavana* εφαρμόστηκε από τον Brahmagupta για την επίλυση του προβλήματος Pell για εκείνους τους μη-τετράγωνους N για τους οποίους μπορεί να βρεθεί μια δυάδα (q, p) με αριθμό Pell ίσο με -4 ή +4, ή -2 ή +2, ή -1. Πρόκειται για γενικές συντομεύσεις, που είναι εύκολο να επαληθευθούν υπολογιστικά, αλλά τα Μαθηματικά τους είναι βέβαιο πως, βασίζονται στην παλινδρομική φύση της περιοδικότητας της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης, καθώς από ένα τμήμα της περιόδου μπορεί να βρεθεί το όλο, και κατά συνέπεια να λυθεί το πρόβλημα Pell. Η πιο ενδιαφέρουσα συντόμευση Brahmagupta είναι εκείνη όπου ο αριθμός Pell είναι -4, επειδή φαίνεται να βασίζεται όχι μόνο στην παλινδρομικότητα αλλά και σε ένα επιχείρημα «τετραγωνικής ρίζας» που σχετίζεται με την αρκετά ενδιαφέρουσα Πρόταση X.91 των *Στοιχείων*.

Η δεύτερη μέθοδος, η *cakravala*/κυκλική μέθοδος, προωθήθηκε κυρίως από τον Bhaskara II τον 12^{ο} αιώνα μ.Χ., αν και προϋπήρχε τουλάχιστον έναν αιώνα πριν. Για έναν μη-τετράγωνο αριθμό N, το βασικό βήμα της cakravala δίδεται από την σύνθεση τύπου Brahmagupta:
$(q, p)*(m/\lambda, 1/\lambda)=((mq+Np)/\lambda, (q+mp)/\lambda)$,
όπου λ είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού Pell της δυάδος (q, p), και m είναι ένας φυσικός αριθμός που προσδιορίζεται από την παρεμβαλλόμενη μέθοδο *kuttaka* και μια εξωτερική συνθήκη.

Ο Weil παρουσίασε την μέθοδο *cakravala*, απογυμνωμένη από την μαθηματικά αχρείαστη μέθοδο kuttaka, και απαλλαγμένη από τις ευφυείς συντομεύσεις. Σε αυτήν την «καθαρή» μορφή της, η μέθοδος *cakravala* εμφανίζεται ως η αριθμητικοποιημένη εκδοχή της ανακατασκευασμένης μεθόδου συζυγίας του Θεαίτητου που παρουσιάζεται στην Ενότητα 4. Πράγματι, για έναν μη-τετράγωνο αριθμό N, η *cakravala*:
(α) Ξεκινά ανεξαιρέτως με την δυάδα ($q_1=m_1$, $p_1=1$), ή αλλιώς, αν ο N είναι πιο κοντά στο $(m_1+1)^2$, ξεκινά με την δυάδα ($q_2=m_1+1$, $p_2=1$). Αυτές οι δυάδες εμφανίζονται ως αριθμητικοποιημένη εκδοχή του αρχικού ανθυφαιρετικού υπολοίπου $\gamma_1=a-m_1b$, ή για την εναλλακτική περίπτωση $\gamma_2=(m_1+1)b-a$, της ανθυφαίρεσης του a προς b, με $a^2=Nb^2$.
(β) Προχωρά επαγωγικά από τη δεδομένη δυάδα (q_n, p_n), της οποίας ο αριθμός Pell $q_n^2-Np_n^2$ έχει απόλυτη τιμή ίση με λ_{n+1}, στην επόμενη δυάδα (q_{n+1}, p_{n+1}), με μια σύνθεση τύπου Brahmagupta της δεδομένης δυάδος με την δυάδα (m_{n+1}/λ_{n+1}, $1/\lambda_{n+1}$):
$(q_n, p_n)*(m_{n+1}/\lambda_{n+1}, 1/\lambda_{n+1}) = (q_{n+1}, p_{n+1})$, όπου m_{n+1} είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που ικανοποιεί τον κανόνα m_n+m_{n+1}=πολλαπλάσιο του λ_{n+1} και $m_{n+1} \leq m_1$.
Αυτή η διαδικασία προσομοιάζει την αριθμητικοποιημένη εκδοχή του γεωμετρικού κανόνα $\gamma_n\varphi_{n+1}=\gamma_{n+1}b$, δηλαδή την $(-1)^n(q_nb-p_na)\varphi_{n+1} = (-1)^{n+1}(q_{n+1}b-p_{n+1}a)b$, όπου το φ_{n+1} έχει προσδιοριστεί μέσω της σχέσης συζυγίας $\varphi_n(I_nb+\varphi_{n+1})=b^2$ (στην οποία έχει μετατραπεί η ανθυφαιρετική σχέση $\gamma_{n-1}=I_n\gamma_n+\gamma_{n+1}$) ως $\varphi_{n+1}=(a-m_{n+1}b)/\lambda_{n+1}$, όπου το m_{n+1} καθορίζεται από τον κανόνα $m_n+m_{n+1}=I_n\lambda_{n+1}$, σύμφωνα με την μέθοδο συζυγίας του Θεαίτητου, όπως έχει ανακατασκευαστεί στην Ενότητα 4.
(γ) Τέλος, επιστρατεύει τον όρο «*cakravala*» (κυκλική διαδικασία), που δίχως άλλο υποδεικνύει περιοδικότητα (και όχι απλώς επανάληψη). Ο όρος αυτός φαίνεται να

αναφέρεται στην περιοδικότητα της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης του a προς b, για μη-τετράγωνο αριθμό N, σύμφωνα με το Θεώρημα Περιοδικότητας του Θεαίτητου.

Ενότητα 1. Γεωμετρική ανθυφαίρεση

1.1. Ορισμοί

Ας ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας τη *γεωμετρική έννοια της ανθυφαίρεσης* μιας δυάδος αντιπαραβαλλόμενων μεγεθών, ενός μεγαλύτερου a και ενός μικρότερου b (a>b):

$a = I_0 b+\gamma_1$, με $\gamma_1<b$,
$b = I_1\gamma_1+\gamma_2$, με $\gamma_2<\gamma_1$,
…
$\gamma_{n-1}= I_n\gamma_n+\gamma_{n+1}$, με $\gamma_{n+1}< \gamma_n$,
$\gamma_n = I_{n+1}\gamma_{n+1}+\gamma_{n+2}$, με $\gamma_{n+2}< \gamma_{n+1}$
(…)

Εδώ, ως:

$I_0, I_1, I_2, I_3,\ldots, I_n, I_{n+1}(, \ldots)$,

συμβολίζεται η ακολουθία των διαδοχικών πηλίκων (φυσικοί αριθμοί), και ως:

$\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n > \gamma_{n+1} (> \ldots)$

η ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων (μεγέθη) της ανθυφαίρεσης του a προς b.

Εάν η ανθυφαίρεση του a προς b είναι *πεπερασμένη*, το τελευταίο υπόλοιπο αναγκαστικά διαιρεί το αμέσως προηγούμενο υπόλοιπο και αποτελεί τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των a και b (Προτάσεις VII.1, VII.2 των *Στοιχείων* Ευκλείδη για φυσικούς αριθμούς, Πρόταση X.3 για μεγέθη).
Στην περίπτωση που ένα υπόλοιπο δεν διαιρεί ποτέ το αμέσως προηγούμενο υπόλοιπο, η ανθυφαίρεση είναι *άπειρη*. Εάν η ανθυφαίρεση του a προς b είναι άπειρη, τότε τα a και b είναι *ασύμμετρα* (Πρόταση X.2 των *Στοιχείων* Ευκλείδη).

1.2. Το Κριτήριο Λόγου για την περιοδική ανθυφαίρεση

1.2.1. Η Θεαιτήτεια θεωρία λόγων μεγεθών

Από το ιδιαίτερης σημασίας για την Ιστορία και την ανακατασκευή των Αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, χωρίο 158b24-159a2 των *Τοπικών* του Αριστοτέλη, πληροφορούμαστε πως πριν από τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου, η οποία επικράτησε στην Ευκλείδεια γεωμετρία και παρουσιάζεται μεγαλόπρεπα στο Βιβλίο V των *Στοιχείων*, υπήρχε μια προηγούμενη θεωρία βασιζόμενη στον ακόλουθο ανθυφαιρετικό ορισμό ισότητας λόγων μεγεθών (ή αναλογίας):

Ορισμός. Εάν a, b είναι ομογενή μεγέθη και c, d ομογενή μεγέθη τότε
$a/b = c/d$ αν και μόνο αν Ανθ(a, b) = Ανθ(c, d),
όπου με Ανθ(a, b) δηλώνεται η ακολουθία διαδοχικών πηλίκων της ανθυφαίρεσης του a προς b.

Μια θεωρία λόγων βασισμένη σε αυτόν τον προ-Ευδόξειο ορισμό, για να είναι τόσο γενική όσο η θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου, θα χρειαζόταν τη συνθήκη του Ευδόξου (Ορισμός 4 στο Βιβλίο V των *Στοιχείων*), κάτι που θα αποτελούσε ιστορικό αναχρονισμό. Ο Knorr (Knorr 1975) ανακατασκευάζει μια τέτοια προ-Ευδόξεια θεωρία, αρκετά επαρκή για τις ανάγκες των τετραγωνικών ασυμμετριών, και για την οποία, όπως μπορεί να αποδειχθεί, η συνθήκη του Ευδόξου δεν είναι αναγκαία. Παρενθετικά, αξίζει να αναφερθεί ότι, όπως προσεκτικά επισημαίνει ο Knorr, το καίριο Θεώρημα 6, σ. 338, το ανάλογο της θεμελιώδους Ευδόξειας Πρότασης V.8 των *Στοιχείων*, κάνει ουσιαστική χρήση της συνθήκης του Ευδόξου (Ορισμός 4, Βιβλίο V). Υπάρχουν ενδείξεις ότι η εν λόγω προ-Ευδόξεια θεωρία είχε εφαρμογή μόνο σε μια περιορισμένη κλάση ζευγών μεγεθών, κυρίως των ευθειών που είναι ρητές ως προς μια προτεθείσα ευθεία, με την έννοια του Ορισμού 3 του Βιβλίου X των *Στοιχείων* – εξ ου και ο όρος «ἄλογος» για εκείνους τους λόγους των οποίων το τετράγωνο δεν είναι σύμμετρο. Ένα ανώνυμο σχόλιο στα *Σχόλια εις Ευκλείδην* V.22 (*Scholia in Euclidem*, eds: Heiberg and Stamatis 1977) υπαινίσσεται μια περιορισμένη, στην ουσία τετραγωνική, προ-Ευδόξεια θεωρία μεγεθών, και ένα άλλο, *Σχόλια εις Ευκλείδην* X.2 (*Scholia in Euclidem*, eds: Heiberg and Stamatis 1977), επικρίνει καθαρά από Πλατωνική σκοπιά την γενική Ευδόξεια θεωρία, και τάσσεται υπέρ της παλαιότερης, περιορισμένης, τετραγωνικής θεωρίας λόγων μεγεθών.
Είναι γενικώς αποδεκτό πως η θεωρία λόγων που βασίζεται στην ανθυφαίρεση αποδίδεται στον Θεαίτητο.

1.2.2. Το Κριτήριο Λόγου για την περιοδική ανθυφαίρεση

Μια φυσική συνέπεια του Θεαιτήτειου ορισμού της ισότητας λόγων μεγεθών είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση *(Κριτήριο Λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης).*
Έστω a, b δύο ευθύγραμμα τμήματα, με $a>b$, και ανθυφαίρεση που δίδεται ακολούθως:

$$
\begin{array}{ll}
a = I_0 b+\gamma_1, & b>\gamma_1, \\
b = I_1\gamma_1+\gamma_2, & \gamma_1>\gamma_2, \\
\ldots & \ldots \\
\gamma_{n-1} = I_n\gamma_n+\gamma_{n+1}, & \gamma_n >\gamma_{n+1}, \\
\boxed{\gamma_n = I_{n+1}\gamma_{n+1}+\gamma_{n+2},} & \gamma_{n+1}>\gamma_{n+2}, \\
\ldots & \ldots \\
\gamma_{m-1} = I_m\gamma_m+\gamma_{m+1}, & \gamma_m >\gamma_{m+1}, \\
\boxed{\gamma_m = I_{m+1}\gamma_{m+1}+\gamma_{m+2},} & \gamma_{m+1}>\gamma_{m+2}, \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

και ας υποτεθεί πως υπάρχουν δείκτες n<m τέτοιοι ώστε

$\boxed{\gamma_n/\gamma_{n+1} = \gamma_m/\gamma_{m+1}}$ («Κριτήριο Λόγου»).

Τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι τελικά περιοδική, στην πραγματικότητα
Ανθ(a, b) = $[I_0, I_1, \ldots, I_n$, περίοδος $(I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_m)]$.

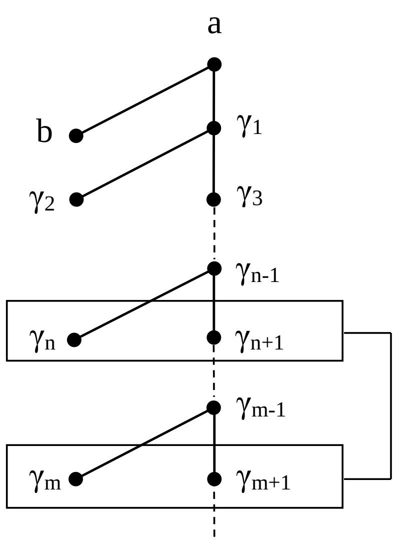
Απόδειξη. Από τον Θεαιτήτειο ορισμό της αναλογίας, Ανθ(γ_n, γ_{n+1}) = Ανθ(γ_m, γ_{m+1}).
Συνεπώς Ανθ(a, b) =
$[I_0, I_1, \ldots, I_n$, Ανθ$(\gamma_n, \gamma_{n+1})]$ =
$[I_0, I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_m$, Ανθ$(\gamma_m, \gamma_{m+1})]$ =
$[I_0, I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_m$, Ανθ$(\gamma_n, \gamma_{n+1})]$ =
$[I_0, I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_m, I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_m$, Ανθ$(\gamma_m, \gamma_{m+1})]$ =
… =
Ανθ(a, b) = $[I_0, I_1, \ldots, I_n$, περίοδος $(I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_m)]$.

Πρόταση. Εάν a, b, c, d είναι ευθείες, τέτοιες ώστε ad = bc, τότε
Ανθ(a, b) = Ανθ(c, d).

Απόδειξη. Έστω $a = I_0b+\gamma_1$, $\gamma_1<b$.
Επομένως $ad = I_0bd+\gamma_1d$. Εξ υποθέσεως, $bc = I_0bd+\gamma_1d$.
Από την Πρόταση I.44-45 των *Στοιχείων*, υπάρχει ευθεία δ_1, τέτοια ώστε $\gamma_1d = \delta_1b$.
Τότε $bc = I_0bd+\delta_1b$ και επομένως $c = I_0d+\delta_1$. Επισημαίνεται πως $\delta_1<d$, καθότι $\gamma_1<b$.
Τότε η σχέση $c = I_0d+\delta_1$, $\delta_1<d$ είναι μια ανθυφαιρετική σχέση.
Επομένως Ανθ(c, d) = $[I_0$, Ανθ$(d, \delta_1)]$, Ανθ(a, b) = $[I_0$, Ανθ$(b, \gamma_1)]$ ΚΑΙ $\gamma_1d=\delta_1b$, όπως στο πρώτο βήμα. Η απόδειξη ολοκληρώνεται τώρα με Επαγωγή.

1.2.3. Μια συντομευμένη αναπαράσταση του Κριτηρίου Λόγου

Επισημαίνεται ότι το Κριτήριο Λόγου χρησιμοποιεί αποκλειστικά τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα, χωρίς καμία αναφορά στα πηλίκα κατά τη δήλωσή του. Συνεπώς, η ακόλουθη συντομευμένη σχηματική αναπαράσταση, σε μορφή διχοτομίας κατά Ζήνωνα, το περιγράφει επαρκώς:



1.2.4. Παράδειγμα. Η ανθυφαίρεση του a προς b με $a^2=19b^2$

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μεταξύ των ασυμμετριών που ο Θεόδωρος δεν απέδειξε στο μάθημά του προς τον Θεαίτητο και τον σύντροφό του νεαρό Σωκράτη, στο απόσπασμα *Θεαίτητος* 147c-d, προκειμένου να παρουσιάσουμε το Κριτήριο Λόγου. Η ασυμμετρία αυτή αντιστοιχεί στο N=19.

(i) *Η ανθυφαίρεση του a προς b*

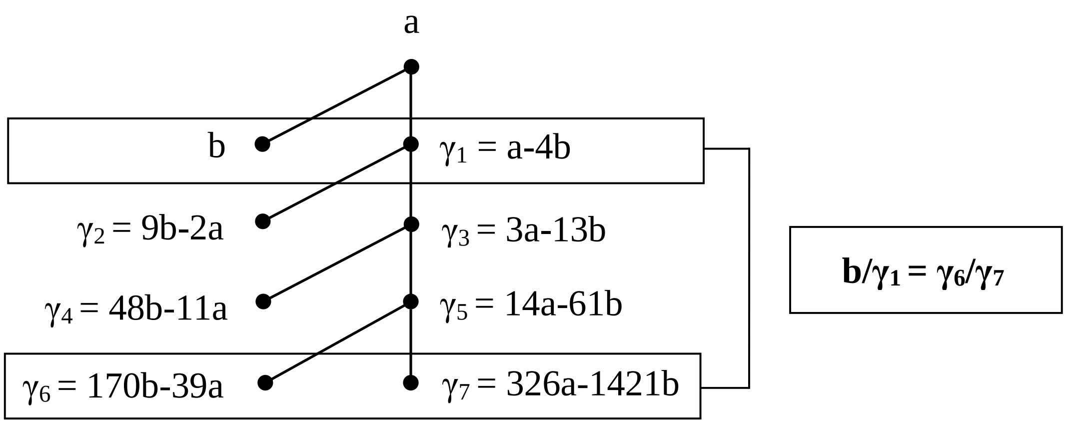
$a = \mathbf{4}b+\gamma_1$, $\gamma_1<b$ (οπότε $\gamma_1 = a-4b$),
[και $b = \mathbf{2}\gamma_1+\gamma_2$, $\gamma_2<\gamma_1$ (οπότε $\gamma_2 = 9b-2a$)],
$\gamma_1 = \mathbf{1}\gamma_2+\gamma_3$, $\gamma_3<\gamma_2$ (οπότε $\gamma_3= 3a-13b$),
[και $\gamma_2 = \mathbf{3}\gamma_3+\gamma_4$, $\gamma_4<\gamma_3$ (οπότε $\gamma_4 = 48b-11a$)],
$\gamma_3 = \mathbf{1}\gamma_4+\gamma_5$, $\gamma_5<\gamma_4$ (οπότε $\gamma_5 = 14a-61b$),
[και $\gamma_4 = \mathbf{2}\gamma_5+\gamma_6$, $\gamma_6<\gamma_5$ (οπότε $\gamma_6 = 170b-39a$)],
$\gamma_5 = \mathbf{8}\gamma_6+\gamma_7$, $\gamma_7<\gamma_6$ (οπότε $\gamma_7 = 326a-1421b$).

(ii) *Επαλήθευση του Κριτηρίου Λόγου $b/\gamma_1=\gamma_6/\gamma_7$*

Πράγματι, $b\gamma_7 = b(326a-1421b) = \gamma_1\gamma_6 = (a-4b)(170b-39a)$.

Το Κριτήριο Λόγου καταλήγει στην πλήρη γνώση του λόγου a/b:
Ανθ(a, b) = [4, περίοδος (2, 1, 3, 1, 2, 8)].
Από την Πρόταση X.2, φυσικά προκύπτει πως τα a, b είναι ασύμμετρα.

(iii) *Συντομευμένη, κατά Ζήνωνα , αναπαράσταση του Κριτηρίου Λόγου*


a
b
γ_1 = a-4b
γ_2 = 9b-2a
γ_3 = 3a-13b
γ_4 = 48b-11a
γ_5 = 14a-61b
γ_6 = 170b-39a
γ_7 = 326a-1421b
b/γ_1 = γ_6/γ_7

Ενότητα 2. Η ανθυφαιρετική βάση της πλατωνικής φιλοσοφίας: ένα νοητό, αληθές Ον είναι το φιλοσοφικό ανάλογο μιας δυάδος σε περιοδική ανθυφαίρεση (*Παρμενίδης, Σοφιστής*)

Σύμφωνα με την ερμηνεία του Καθηγητή Στέλιου Νεγρεπόντη, ένα *νοητό (πλατωνικά αληθές) Ον* αποτελείται από μια δυάδα μερών, φιλοσοφικά ανάλογης *μιας δυάδος σε περιοδική ανθυφαίρεση*.[2] Το ιδεατό, αληθές Ον είναι το ῞Εν της δεύτερης υπόθεσης στον *Παρμενίδη*, αποτελούμενο από την δυάδα <῞Εν, ῎Ον> (που μελετήθηκε στο Negrepontis TA), ή την δυάδα <῎Ον, Μη-῎Ον>, όπως το <Δίκαιον, ῎Αδικον>, στον *Σοφιστή* και τον *Πολιτικό* (που μελετήθηκε στα Negrepontis 2012, 2018), σε ένα φιλοσοφικό ανάλογο της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης, για το οποίο ισχύει το ακριβές ανάλογο του Κριτηρίου Λόγου για την περιοδικότητα. Η διαλεκτική ερμηνεία του Λόγου είναι το Κριτήριο Λόγου, το αίτιο της περιοδικής ανθυφαίρεσης.

2.1. Το ῞Εν της δεύτερης υπόθεσης του* Παρμενίδη *αποτελείται από την δυάδα ῞Εν και ῎Ον η διαίρεση της οποίας είναι το φιλοσοφικό ανάλογο περιοδικής ανθυφαίρεσης

Το ιδεατό, αληθές Ον είναι το ῞Εν της δεύτερης υπόθεσης στο απόσπασμα *Παρμενίδης* 142b1-155e3, το οποίο αποτελείται από την δυάδα <῞Εν, ῎Ον> (ή την δυάδα <῎Ον, Μη-῎Ον> στον *Σοφιστή*) που βρίσκεται σε διαίρεση φιλοσοφικά ανάλογη της περιοδικής ανθυφαίρεσης. Η ανθυφαιρετική ερμηνεία ενός πλατωνικού νοητού, αληθούς Όντος έχει επιτευχθεί από τον καθηγητή Στέλιο Νεγρεπόντη μέσω της ανάλυσης της δυάδος <῞Εν, ῎Ον> στην δεύτερη υπόθεση του *Παρμενίδη* και του αποσπάσματος 15a-17a στον *Φίληβο* (Negrepontis TA).

2.1.1. Η άπειρη ανθυφαίρεση της δυάδος ῞Εν και ῎Ον

Στο πρώτο μέρος του αποσπάσματος του *Παρμενίδη* και συγκεκριμένα στο 142d9-143a3, φαίνεται πως η δυάδα <῞Εν, ῎Ον> βρίσκεται σε άπειρη ανθυφαιρετική διαίρεση:

῞Εν = ῎Ον + ῞Εν$_1$,   ῎Ον>῞Εν$_1$,
῎Ον = ῞Εν$_1$ + ῎Ον$_1$,   ῞Εν$_1$>῎Ον$_1$,
…
῞Εν$_n$ = ῎Ον$_n$ + ῞Εν$_{n+1}$,   ῎Ον$_n$>῞Εν$_{n+1}$,
῎Ον$_n$ = ῞Εν$_{n+1}$ + ῎Ον$_{n+1}$,   ῞Εν$_{n+1}$>῎Ον$_{n+1}$,
… .

---

[2] Λεπτομέρειες σχετικά με την ανθυφαιρετική ερμηνεία της δεύτερης υπόθεσης του *Παρμενίδη* εμφανίζονται στο Negrepontis NA, σχετικά με τις Διαιρέσεις στον *Σοφιστή* και τον *Πολιτικό* στο Negrepontis 2019, και για τον *Φίληβο* στο Negrepontis 2005. Στο παρόν έργο, συμπεριλαμβάνονται σε αναβαθμισμένη μορφή, τα σημεία εκείνα που χρειάζονται ώστε τα επιχειρήματα που παρουσιάζονται να είναι αυτοτελή.

Συνεπώς υπάρχει τότε ένα άπειρο πλήθος υπολοίπων-μερών της ανθυφαιρετικής διαίρεσης:

$Ἓν > Ὄν > Ἓν_1 > Ὄν_1 > \ldots > Ἓν_n > Ὄν_n > \ldots$.

2.1.2. Το Κριτήριο Λόγου και η ανθυφαιρετική περιοδικότητα της δυάδος <Ἓν, Ὄν>, του **Παρμενίδη**

Παρακάτω σκιαγραφείται το επιχείρημα που δείχνει ότι η δυάδα <Ἓν, Ὄν> δεν βρίσκεται μόνο σε άπειρη ανθυφαίρεση, αλλά στην πραγματικότητα σε περιοδική ανθυφαίρεση.
Η συνέχεια του αποσπάσματος του *Παρμενίδη*, και συγκεκριμένα το χωρίο 144c2-d4, ασχολείται με την παρουσία του Ἑνός στο Ὄν, θέτοντας το δίλημμα του κατά πόσον το μέρος Ἓν είναι παρόν ως μέρος ή ως όλον σε κάθε μέρος του Ὄντος.
Όπως επισημαίνεται από προηγούμενους μελετητές, το χωρίο έχει ομοιότητες με το χωρίο 130e4-131e7 στην Εισαγωγή του *Παρμενίδη*, όπου τίθεται το δίλημμα του κατά πόσον το Ἓν είναι παρόν ως μέρος ή ως όλον σε κάθε ένα από τα αισθητά που συμμετέχουν στο Ἓν (το «δίλημμα της συμμετοχής»).
Ωστόσο, το σκέλος του διλήμματος που αφορά το «όλον» απορρίπτεται τόσο στο χωρίο 144c-d όσο και στο 130e-131e, αλλά το σκέλος που αφορά το «μέρος» απορρίπτεται *μόνο* στο 130e-131e, ενώ εμφανίζεται πλήρως αποδεκτό στο 144c2-d4. Εξαιτίας αυτής της κρίσιμης διαφοράς, οδηγούμαστε στο να συμπεράνουμε πως η αποδοχή του σκέλους του διλήμματος που αφορά το «μέρος» πρέπει να έγινε σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο του διαλόγου. Και πράγματι, το σημείο όπου το σκέλος «μέρος» γίνεται αποδεκτό προκύπτει πως είναι το χωρίο 138a3-7, όπου διατυπώνεται ότι η παρουσία του Ἑνός στα μέρη του Ὄντος πραγματοποιείται μέσω ενός **κύκλου** από «επαφές» («ἅψεις»). Μια «επαφή», όπως εξηγείται στο χωρίο 148d5-149d7, προκύπτει μεταξύ διαδοχικών, με βάση τη σειρά δημιουργίας τους, μερών της δυάδος <Ἓν, Ὄν> και οι επαφές παράγουν αριθμούς σύμφωνα με τον τύπο

αριθμός μερών-μονάδων = επαφές + 1,

η προέλευση του οποίου είναι ξεκάθαρα μουσική με τα μέρη-μονάδες να αντιστοιχούν σε όρους-συγχορδίες και οι «επαφές» σε μουσικά διαστήματα. Καθώς τα μουσικά διαστήματα αποτελούν λόγους διαδοχικών όρων, η παραπάνω αντιστοιχία υποδηλώνει την ερμηνεία πως μια «επαφή» του χωρίου 138a3-7 αναπαριστά έναν **λόγο** διαδοχικών μερών της ανθυφαίρεσης της δυάδος Ἓν και Ὄν.

Λαμβάνοντας υπόψιν το ότι η διαίρεση του Ἑνός προς το Ὄν είναι ανθυφαιρετική, ο κύκλος «επαφών» ισοδυναμεί με τη δήλωση ότι η ανθυφαίρεση του Ἑνός προς το Ὄν ικανοποιεί το **Κριτήριο Λόγου**: υπάρχει δηλαδή ένας δείκτης k τέτοιος ώστε

$Ἓν/Ὄν = Ἓν_k/Ὄν_k$,

και επομένως τελικά η δυάδα <Ἓν, Ὄν> ικανοποιεί ένα φιλοσοφικό ανάλογο **περιοδικής ανθυφαίρεσης**.

Αυτή η ερμηνεία ενισχύεται από την συνειδητοποίηση

- ότι το απόσπασμα *Φίληβος* 15a1-c3 θέτει ένα δίλημμα μέρους-όλου, ακριβώς όπως συμβαίνει στο απόσπασμα *Παρμενίδης* 144c2-d4, και
- ότι αυτό ακολουθείται από το απόσπασμα *Φίληβος* 15d4-5, ένα πραγματικό αντίγραφο του 138a3-7, όπου αντί των «ἅψεων», κύκλους δημιουργούν οι λόγοι.

2.1.3. Εξίσωση των μερών, σαν συνέπεια της περιοδικότητας

Η εξίσωση του Ἓνός με το Ὄν εξελίσσεται τώρα ομαλά, στο απόσπασμα 144d4-e3, όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

Ο *αριθμός* των μερών του Ἓνός =
οι λόγοι μεταξύ διαδοχικών μερών (από το Ἓν και μετά) + 1.

Ο αριθμός των μερών του Ἓνός είναι *πεπερασμένος*, καθώς οι λόγοι που σχηματίζουν τα διαδοχικά μέρη επαναλαμβάνονται με το ίδιο μοτίβο σε κάθε κύκλο/περίοδο λόγων, χωρίς να εισάγονται νέοι. Η περιοδικότητα επομένως υποδηλώνει πως:

ο αριθμός των μερών του Ἓνός = ο αριθμός των μερών του Ὄντος.

Η εξίσωση («ἐξισοῦσθον») Ἓνός και Ὄντος βασίζεται στην παραπάνω ισότητα.

2.1.4. Η ιδιότητα της αυτοομοιότητας του «Ἓν και Πολλά»

Τα δύο βασικά χαρακτηριστικά του Ἓνός της δεύτερης υπόθεσης στον *Παρμενίδη* συνοψίζονται στην δήλωση ότι το Ἓν της δεύτερης υπόθεσης είναι ταυτόχρονα Ἓν και Πολλά, υπό την έννοια ότι:
- το Ἓν διαιρείται ανθυφαιρετικά σε Πολλά, στην πραγματικότητα σε άπειρο πλήθος μερών, και
- κάθε μέρος των Πολλών εξισώνεται με τα υπόλοιπα από την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης, και επομένως το Ἓν της δεύτερης υπόθεσης είναι πράγματι ένα Ἓν με την έννοια της αυτοομοιότητας, δηλαδή ότι κάθε μέρος είναι το ίδιο με το όλον (144e8-145a2).

2.1.5. Το Ἓν της δεύτερης υπόθεσης στον **Παρμενίδη** *είναι το ιδεατό, αληθές, νοητό Ον*

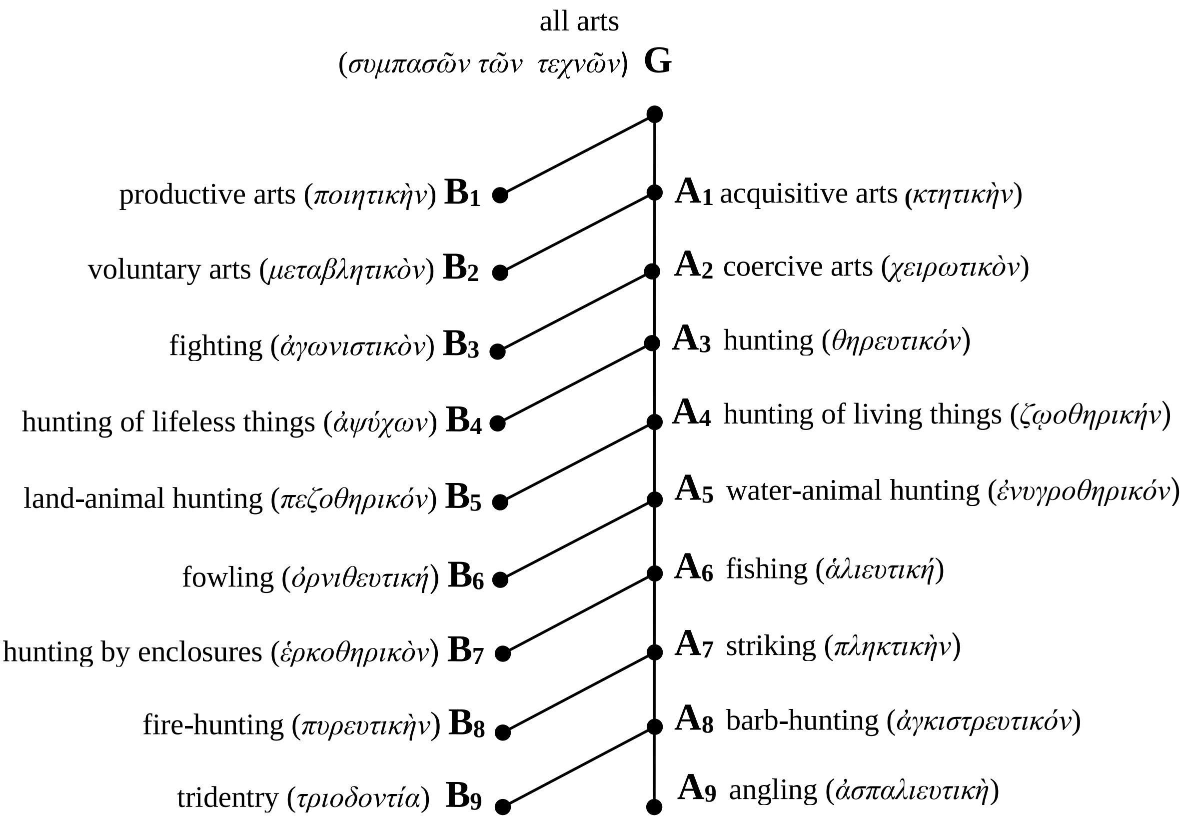
Το Ἓν της δεύτερης υπόθεσης δηλώνεται, στο 155d3-6, ως ένα αληθές, νοητό Ον, ως μια Πλατωνική Ιδέα.
Το Ἓν της δεύτερης υπόθεσης, παρότι άπειρο, είναι πλήρως γνωστό, έχει «ἐπιστήμη» (155d6), με την πλήρη γνώση του να επιτυγχάνεται σε πεπερασμένο επίπεδο, συγκεκριμένα με την ολοκλήρωση μιας πλήρους περιόδου λόγων.

2.2. *Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας «Ασπαλιευτής» στον* **Σοφιστή** *218b-221c*

2.2.1. Η Διαίρεση του Ασπαλιευτή

Η μέθοδος της Διαίρεσης και Συναγωγής, επίσης επονομαζόμενη ως «Όνομα και Λόγος» (πρβλ. *Θεαίτητος* 201e2-202b5, *Σοφιστής* 218c1-5, 221a7-b2, 268c5-d5), παρουσιάζεται παραδειγματικά στο χωρίο *Σοφιστής* 218b-221c με τον ορισμό του Όντος «Ασπαλιευτής». Στο παρακάτω σχήμα, αναπαράγεται η δυϊκή διαδικασία διαίρεσης που οδηγεί στον Ασπαλιευτή.

Η Διαίρεση του Ασπαλιευτή (*Σοφιστής* 218b-221c)



2.2.2. Το Κριτήριο Λόγου του Ασπαλιευτή

Η περιγραφή του Κριτηρίου Λόγου του Ασπαλιευτή περιέχεται στο χωρίο *Σοφιστής* 220e2-221c3 (το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω σε μετάφραση, διαιρεμένο σε δύο μέρη [Α] και [Β] χάριν ευκολίας):

[A] «STRANGER: Then of striking which belongs to barb-hunting [**A8**], that part which proceeds ***downward from above***[3] *(“ἄνωθεν εἰς τὸ κάτω”)*, is called, because tridents are chiefly used in it, tridentry [**B9**], I suppose
[…]
STRANGER: The kind that is characterized by the opposite sort of blow, which is practised with a hook and strikes, […] and proceeds ***from below upwards*** *(“κάτωθεν εἰς τοὐναντίον ἄνω”)*, being pulled up by twigs and rods. By what name, Theaetetus, shall we say this ought to be called?
THEAETETUS: I think our search is now ended and we have found the very thing we set before us a while ago as necessary to find.
STRANGER: Now, then, you and I are only agreed about the name of angling, [**A9**]»
(*Σοφιστής* 220e2-221b1)

[B] «but ***we have acquired also a satisfactory “Logos”*** of the thing itself.
For *(“γὰρ”)*
of art as a whole, half was acquisitive,
and of the acquisitive, half was coercive,
and of the coercive, half was hunting,
and of hunting, half was animal hunting,
and of animal hunting, half was water hunting,
and of water hunting [**A5**]
the whole part from below *(“τὸ κάτωθεν τμῆμα ὅλον”)* was fishing, [**A6**]
and of fishing, half was striking,
and of striking, half was barb-hunting, [**A8**]
and of this [**A8**]
the part in which the blow is pulled
from below upwards *(“τὸ περὶ τὴν κάτωθεν ἄνω”)* was angling. [**A9**]»
(*Σοφιστής* 221b1-c3).

(Plato, *Sophistes*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

Στο [A], η αντιθετική σχέση Τριοδοντίας και Ασπαλιευτικής εξηγείται προσεκτικά.
Η Αγκιστρευτική (δηλ. αλιεία με αγκίστρι) διαιρείται σε:

- Τριοδοντία (δηλ. αλιεία με τρίαινα), που περιγράφεται ως αλιεία με αγκίστρι με τεχνική που εξελίσσεται **από πάνω προς τα κάτω**, και
- Ασπαλιευτική (δηλ. αλιεία με καλάμι), που περιγράφεται ως αλιεία με αγκίστρι με τεχνική που εξελίσσεται **από κάτω προς τα πάνω**.

Έχουμε πραγματοποιήσει τη Διαίρεση μέχρι την Ασπαλιευτική. Επομένως, έχουμε σίγουρα βρει «το Όνομα» της Ασπαλιευτικής.

Όμως τώρα, στο [B], παρουσιάζεται ο ισχυρισμός ότι «ο Λόγος» της Ασπαλιευτικής έχει επίσης βρεθεί. Η δικαιολόγηση - η απόδειξη - ότι έχουμε πράγματι βρει και τον Λόγο, περιέχεται στο υπόλοιπο τμήμα του [B], καθώς αυτό ξεκινάει με τη λέξη «γὰρ» και αποτελείται από:
(i) μια ακριβή καταμέτρηση όλων των βημάτων της διαίρεσης, σε συντομευμένη μορφή υπό την έννοια ότι από τα δύο είδη στα οποία διαιρείται κάθε Γένος, μόνο εκείνο που περιέχει τον Ασπαλιευτή αναφέρεται, ενώ το αντίθετο είδος παραλείπεται,
(ii) μια υπενθύμιση ότι το τελευταίο είδος, η Ασπαλιευτική, χαρακτηρίζεται ως εκείνο το μέρος του γένους του που έχει φορά «από κάτω προς τα πάνω» και,
(iii) την **μοναδική νέα** πληροφορία (δεδομένου ότι το περιεχόμενο των (i) και (ii) το συναντήσαμε ξανά στην αναλυτική Διαίρεση και στο [A] αντίστοιχα), πως το είδος

[3] Η έμφαση και η πλάγια γραφή στο παρόν απόσπασμα είναι πρόσθετες παρεμβάσεις στο πρωτότυπο κείμενο.

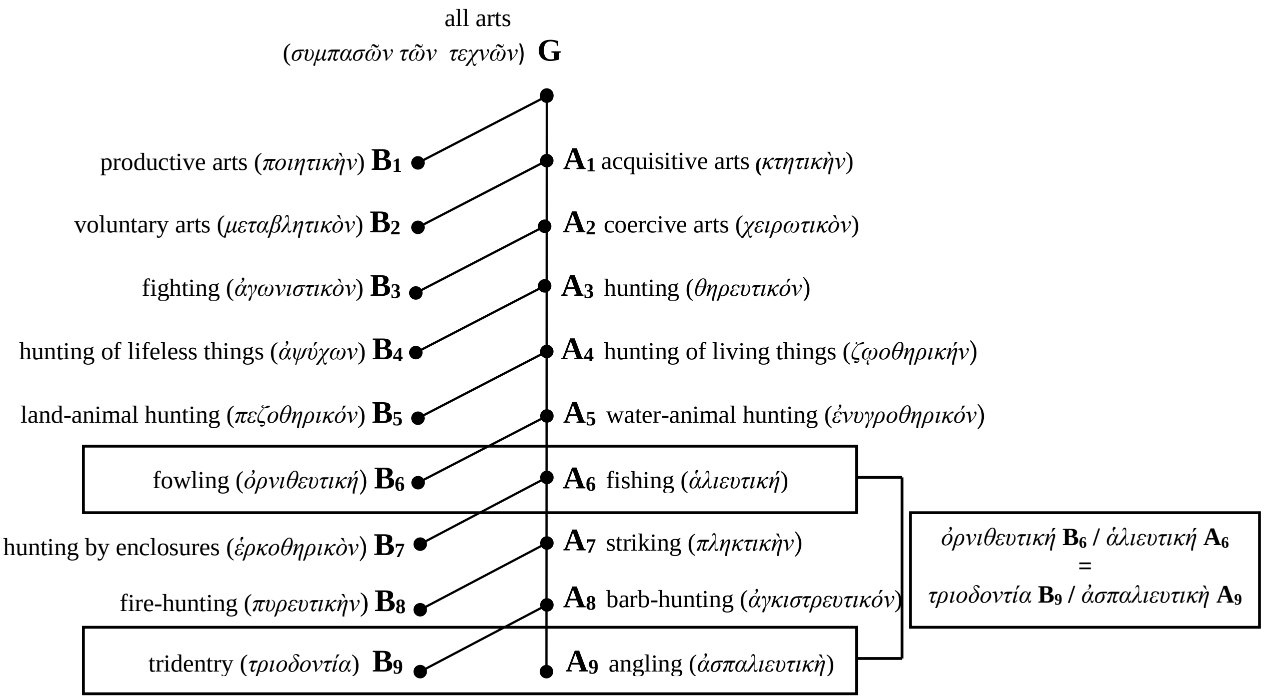
της Αλιευτικής, τρία βήματα πριν την Ασπαλιευτική, είναι «όλο το κάτω μέρος» (*τὸ κάτωθεν τμῆμα ὅλον*) του γένους του.
Καθώς αυτή είναι μια συντομευμένη μορφή της διαίρεσης, δεν υπάρχει σαφής περιγραφή του αντίθετου είδους της «Αλιευτικής», δηλαδή της «Ορνιθευτικής», όμως επειδή η «Αλιευτική» δεν περιγράφηκε απλώς σαν «το κάτω μέρος» του γένους της, αλλά κατηγορηματικά ως «όλο το κάτω μέρος», προκύπτει πως το αντίθετο είδος - η «Ορνιθευτική» - πρέπει να χαρακτηριστεί ως «*όλο* το πάνω μέρος» του ίδιου γένους. Στην πραγματικότητα, με σκοπό να στηριχθεί ο ισχυρισμός ότι έχει βρεθεί ο «Λόγος», δεν μπορεί να υπάρχει άλλη δικαιολόγηση της παρουσίας του όρου «ὅλον» στην περιγραφή της «Αλιευτικής» εκτός του να υποδείξει και να υπονοήσει την αντίστοιχη περιγραφή για το αντίθετό της είδος, την «Ορνιθευτική».
Ας θυμηθούμε πως το τμήμα του [Β] από τη λέξη «γὰρ» και μετά, είναι μια σαφής δικαιολόγηση του ισχυρισμού ότι η εύρεση του «Λόγου» του Ασπαλιευτή έχει επιτευχθεί. Είναι εύλογο τότε να αναρωτηθούμε: **ποιος** είναι ο «Λόγος» του Ασπαλιευτή που προκύπτει λογικά από μια τέτοια δικαιολόγηση; Μπορεί να υπάρξει μόνο μια απάντηση: ο «Λόγος» που αναζητούμε είναι η ισότητα του «φιλοσοφικού λόγου» της Τριοδοντίας προς την Ασπαλιευτική (δηλαδή η ισότητα του λόγου «του *από πάνω προς τα κάτω* προς το *από κάτω προς τα πάνω*») με τον λόγο «της Ορνιθευτικής προς την Αλιευτική».
Συνεπώς:

όλο το κάτω μέρος / όλο το πάνω μέρος =
Ορνιθευτική $\mathbf{B_6}$ / Αλιευτική $\mathbf{A_6}$ =
από πάνω προς τα κάτω / από κάτω προς τα πάνω =
Τριοδοντία $\mathbf{B_9}$ / Ασπαλιευτική $\mathbf{A_9}$.

Από τη στιγμή που στο Διαιρετικό Σχήμα για τον Ασπαλιευτή τα είδη Τριοδοντία και Ασπαλιευτική αποτελούν ένα ζεύγος αντιθέτων ειδών και τα είδη Ορνιθευτική και Αλιεία αποτελούν ένα άλλο τέτοιο ζεύγος, ο προκύπτων «Λόγος» παρουσιάζει μια εκπληκτική ομοιότητα με το Κριτήριο Λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης των γεωμετρικών μεγεθών, και πιο συγκεκριμένα των γεωμετρικών δυνάμεων.

2.2.3. Η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή

Η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή παίρνει επομένως την ακόλουθη μορφή:



Συνεπώς, η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή αποτελείται από τη Διαίρεση, και τον Λόγο, ο οποίος περιγράφηκε στην Ενότητα 2.2.2, και που είναι ανάλογος με το Κριτήριο Λόγου για την περιοδικότητα της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.

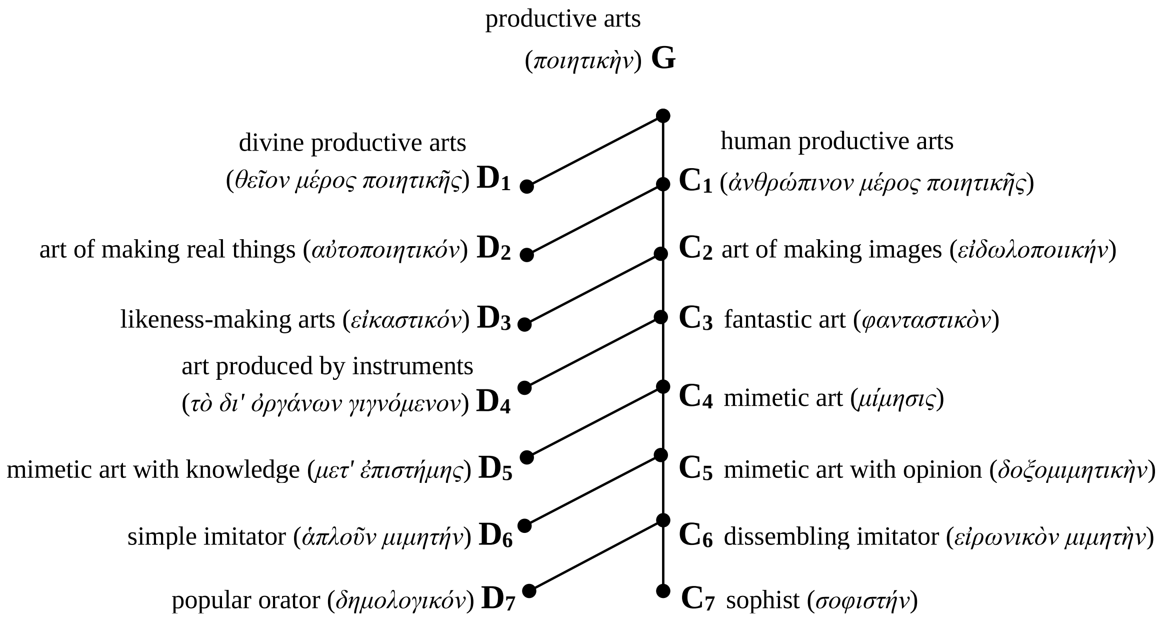
2.3. Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας «Σοφιστής» στα χωρία **Σοφιστής** *234e-236d & 264b-268d*

Είναι τώρα εμφανές πως η Διαίρεση και Συναγωγή μιας Πλατωνικής Ιδέας (με τον Ασπαλιευτή να αποτελεί ένα ταπεινό παράδειγμα) έχει μεγάλη ομοιότητα με την ανθυφαιρετική Διαίρεση και το Κριτήριο Λόγου μιας γεωμετρικής «δύναμης». Όταν ο Σωκράτης εξέφρασε την προτροπή του για μίμηση της γεωμετρικής κατάστασης στον διάλογο *Θεαίτητος* (145c7-148e5), φαίνεται πως εννοούσε μια πολύ πιο στενή μίμηση από ό,τι είχε κανείς φανταστεί μέχρι τώρα! Όμως πριν προχωρήσουμε σε γενικευμένα συμπεράσματα, θα ήταν συνετό να ελέγξουμε πρώτα αν η Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή, στο χωρίο *Σοφιστής* 264b-268d, έχει *και* αυτή, την ίδια δομή και ειδικότερα, αν εμφανίζεται «Λόγος» ίδιας μορφής. Ας εξετάσουμε λοιπόν, τη Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας «Σοφιστής».

2.3.1. Η Διαίρεση του Σοφιστή

Η Διαίρεση για τον Σοφιστή ακολουθεί το ίδιο μοτίβο με τη Διαίρεση του Ασπαλιευτή, αρχίζοντας με ένα Γένος (στην περίπτωσή μας «όλες τις ποιητικές τέχνες»), προχωρώντας με δυϊκή διαίρεση του κάθε Γένους σε δύο είδη από τα οποία το επόμενο Γένος στη Διαίρεση είναι το είδος του προηγούμενου βήματος που περιέχει την οντότητα που θέλουμε να προσδιοριστεί (δηλαδή τον Σοφιστή) και καταλήγοντας στο διαιρετικό βήμα που την παράγει ως είδος. Το πλήρες σχήμα της διαίρεσης παρουσιάζεται παρακάτω.

Διαίρεση του Σοφιστή (*Σοφιστής* 264b-268d)



2.3.2. Ο θεμελιώδης λόγος της Τετμημένης Γραμμής στην **Πολιτεία** *509d-510b και το Κριτήριο Λόγου-Συναγωγή του* **Σοφιστή**

Στην περίπτωση του Σοφιστή, ο Λόγος προκύπτει από στοιχειώδη χρήση του θεμελιώδους λόγου της Τετμημένης Γραμμής του χωρίου 509d-510b της *Πολιτείας*:

> *«ὡς τὸ δοξαστὸν πρὸς τὸ γνωστόν, οὕτω τὸ ὁμοιωθὲν πρὸς τὸ ᾧ ὡμοιώθη»*
> (opinion / knowledge = images of real things / real things).

Το Κριτήριο Λόγου για τον Σοφιστή είναι πλέον άμεσα αναγνωρίσιμο:

> art of making real things (*αὐτοποιητικόν*) **D_2** / art of making images (*εἰδωλοποιικήν*) **C_2** =
> mimetic art with knowledge (*μετ' ἐπιστήμης*) **D_5** / mimetic art with opinion (*δοξομιμητικὴν*) **C_5**.

2.3.3. Οι επόμενοι δύο Λόγοι στην Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή είναι ανάλογοι γεωμετρικών λόγων περιοδικής ανθυφαίρεσης

Ο ορισμός του Σοφιστή παρουσιάζει ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που τον φέρνει ακόμα πιο κοντά στο μαθηματικό ανθυφαιρετικό μοντέλο: μετά τον πρώτο Λόγο

$\mathbf{D_2/C_2}$ του Κριτηρίου Λόγου που αναγνωρίσαμε παραπάνω, υπάρχουν ακόμα δύο Λόγοι. Αν το μαθηματικό μοντέλο πράγματι ακολουθείται, θα περίμενε κανείς να υπάρχουν ακόμα δύο ισότητες Λόγων: δηλαδή ο Λόγος του τρίτου βήματος $\mathbf{D_3/C_3}$ θα έπρεπε να είναι ίσος με τον Λόγο του έκτου διαιρετικού βήματος $\mathbf{D_6/C_6}$, και ο Λόγος του τέταρτου διαιρετικού βήματος $\mathbf{D_4/C_4}$ να είναι ίσος με τον Λόγο του έβδομου και τελευταίου διαιρετικού βήματος $\mathbf{D_7/C_7}$.

(1) Η ισότητα τρίτου και έκτου Λόγου της Διαίρεσης του Σοφιστή.

Στο τρίτο διαιρετικό βήμα, το Γένος «*εἰδωλοποιική*» (image-making art) διαιρείται σε δύο είδη, την «*εἰκαστικὴν*» (likeness-making art) και την «*φανταστικὴν*» (art which produces appearance, but not likeness):

> «STRANGER: I see the ***likeness-making art*** *("εἰκαστικὴν")* as one part of [the ***image-making art***]. This is met with, as a rule, whenever anyone produces the imitation by following the proportions of the original in length, breadth, and depth, and giving, besides, the appropriate colors to each part.»
> (*Σοφιστής* 235d6-e2)
>
> «STRANGER: Now then, what shall we call that which appears, because it is seen from an unfavorable position, to be like the beautiful, but which would not even be likely to resemble that which it claims to be like, if a person were able to see such large works adequately? Shall we not call it, since it appears, but is not like, an appearance?
> THEAETETUS: Certainly.»
> (*Σοφιστής* 236b)
>
> «STRANGER: And to the art which produces appearance, but **not likeness** ("φάντασμα ἀλλ' οὐκ εἰκόνα"), the most correct name we could give would be ***"fantastic art"*** *("φανταστικὴν")*, would it not?
> THEAETETUS: By all means.
> STRANGER: These, then, are the two forms of the ***image-making art*** *("εἰδωλοποιικῆς")* that I meant, the ***likeness-making*** *("εἰκαστικὴν")* and the ***fantastic*** *("φανταστικήν")*.»
> (*Σοφιστής* 236c3-7)
>
> «STRANGER: We must remember that there were to be two parts of the ***image-making class*** *("εἰδωλουργικῆς")*, the **likeness-making** *("εἰκαστικόν")* and the ***fantastic*** *("φανταστικὸν")*.»
> (*Σοφιστής* 266d8-9)

(Plato, *Sophistes*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

Στο έκτο διαιρετικό βήμα, που περιγράφεται στο 267e7-268a11, το Γένος «*δοξομιμητής*» (opinion-imitator) διαιρείται σε δύο είδη, τον «*ἁπλοῦν*» μιμητή (simple imitator) και τον «*εἰρωνικὸν*» μιμητή (dissembling imitator),

- με τον πρώτο (*ἁπλοῦν)* να πιστεύει πως γνωρίζει πραγματικά, εκείνα για τα οποία στην πραγματικότητα μόνο *δοξάζει* (για τα οποία δηλαδή έχει μια πεποίθηση αλλά όχι τεκμηριωμένη)
- και τον δεύτερο (*εἰρωνικὸν)* να είναι εκείνος που υποψιάζεται έντονα και φοβάται πως δεν γνωρίζει πραγματικά όσα υποκρίνεται μπροστά σε κοινό πως γνωρίζει.

> «STRANGER. […] For some of these imitators are simple-minded and ***think they know that about which they have only opinion*** *("δοξάζει")*, but the other kind because of their experience in the rough and tumble of arguments, ***strongly suspect and fear that they are ignorant of the things which they pretend before the public to know***.
> THEAETETUS. Certainly the two classes you mention both exist.

STRANGER. Then shall we call one the ***simple imitator*** *("ἁπλοῦν")* and the other the ***dissembling imitator*** *("εἰρωνικὸν")*?
THEAETETUS. That is reasonable, at any rate.»
(*Σοφιστής* 268a1-8)

(Plato, *Sophistes*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

Συνεπώς, οι *ἁπλοῖ* μιμητές διαστρεβλώνουν την άποψή τους, εκφράζοντας κάτι όμοιο με την άποψή τους ενώ οι *εἰρωνικοῖ* μιμητές διαστρεβλώνουν και αποκρύπτουν την γνώμη τους πίσω από μια ψεύτικη εικόνα. Επομένως:

> ***Πρόταση (1).*** Στην Διαίρεση του Σοφιστή, ο Λόγος του τρίτου βήματος ισούται με τον Λόγο του έκτου βήματος, δηλαδή:
> likeness-making arts (*εἰκαστικόν*) $\mathbf{D_3}$ / fantastic arts (*φανταστικὸν*) $\mathbf{C_3}$ =
> simple imitator (*ἁπλοῦν μιμητήν*) $\mathbf{D_6}$ / dissembling imitator (*εἰρωνικὸν μιμητὴν*) $\mathbf{C_6}$.

(2) *Η ισότητα τέταρτου και έβδομου Λόγου.*
Στο τέταρτο διαιρετικό βήμα, που περιγράφεται στο 267a1-b3, το Γένος «*φανταστικὸν*» (fantastic art) διαιρείται σε δύο είδη, ως ακολούθως:

«STRANGER: Let us, then, again bisect the ***fantastic art***.
THEAETETUS: How?
STRANGER: ***One kind is that produced by instruments, the other that in which the producer of the appearance offers himself as the instrument.***
THEAETETUS: What do you mean?
STRANGER: When anyone, by ***employing his own person as his instrument***, makes his own figure or voice seem similar to yours, that kind of fantastic art is called ***mimetic***.»
(*Σοφιστής* 267a1-11)

(Plato, *Sophistes*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

Συνεπώς, στην μιμητική τέχνη (mimetic art) το όργανο της μίμησης ταυτίζεται με τον μιμητή, ενώ στο αντίθετο είδος τέχνης που δεν κατονομάζεται στον διάλογο, το όργανο της μίμησης είναι διαφορετικό από τον μιμητή.

Στο έβδομο διαιρετικό βήμα, που περιγράφεται στο χωρίο 268a9-c4, το Γένος «*εἰρωνικὸς μιμητὴς*» (dissembling imitator) διαιρείται σε δύο είδη, τον «*δημολογικόν*» (popular orator) και τον «*σοφιστήν*»,

- με τον πρώτο (*δημολογικόν)* να είναι κάποιος που μπορεί να υποκριθεί βγάζοντας μεγάλους λόγους δημόσια μπροστά σε πολυπληθές κοινό
- και τον δεύτερο, τον σοφιστή, να είναι κάποιος που υποκρίνεται βγάζοντας σύντομους λόγους, ιδιωτικά, εξαναγκάζοντας τον συνομιλητή του σε αντιφάσεις.

Συνεπώς, εάν ο *εἰρωνικὸς μιμητῆς* είναι *δημολογικός,* αυτός που τον ακούει οδηγείται σε αντίφαση όχι από τον ίδιο του τον εαυτό αλλά από κάποιο άλλο όργανο εξαπάτησης (ήτοι τον *δημολογικόν*), ενώ εάν ο *εἰρωνικὸς μιμητῆς* είναι *σοφιστής* ο ακροατής εξαναγκάζεται από τον σοφιστή να γίνει ο ίδιος το όργανο εξαπάτησης. Επομένως:

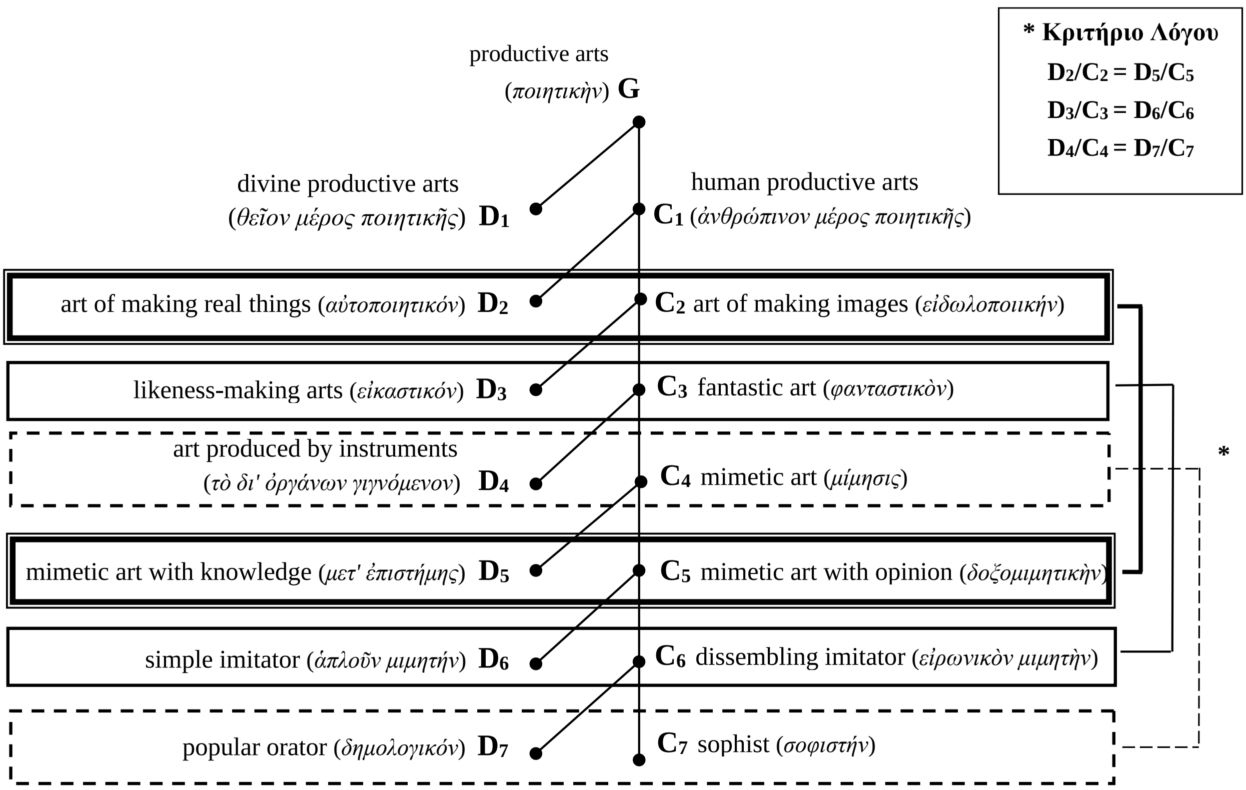
> ***Πρόταση (2).*** Στην Διαίρεση του Σοφιστή, ο Λόγος του τέταρτου βήματος ισούται με τον Λόγο του έβδομου βήματος, δηλαδή:

ο λόγος του μιμητή που χρησιμοποιεί άλλα όργανα μίμησης (**D**4) **προς** τον μιμητή που είναι ο ίδιος το όργανο της μίμησης (**C**4) **ισούται με τον λόγο** του *δημολογικοῦ* του οποίου ο ακροατής οδηγείται σε αντίφαση και εξαπατάται όχι από τον ίδιο του τον εαυτό αλλά από κάποιο άλλο όργανο (**D**7) **προς** τον σοφιστή, του οποίου ο ακροατής οδηγείται σε αντίφαση και εξαπατάται από τον ίδιο του τον εαυτό (**C**7).

Οι Προτάσεις (1) και (2) των παραπάνω παραγράφων παρέχουν ισχυρές επιπλέον ενδείξεις υπέρ της ανθυφαιρετικής ερμηνείας της Διαίρεσης και Συναγωγής.

2.3.4. Η Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή

Η πλήρης Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή (*Σοφιστής* 264b-268d) μπορεί συνεπώς να παρουσιαστεί συνοπτικά στο παρακάτω σχήμα:



Επομένως, επιβεβαιώνεται πλήρως η ανθυφαιρετική ερμηνεία του Λόγου που προτάθηκε στην Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή. Αυτή τη φορά, ο Λόγος δεν έχει την απλοϊκή, προφανή μορφή με την οποία εμφανίστηκε στον ορισμό του Ασπαλιευτή (από πάνω προς τα κάτω / από κάτω προς τα πάνω). Η μορφή του είναι περισσότερο εκλεπτυσμένη, φιλοσοφικού είδους, και κατέχει κεντρικό ρόλο στη διαλεκτική της *Πολιτείας*.[4]

[4] Ο συσχετισμός του λόγου της τετμημένης γραμμή της *Πολιτείας* με την Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή στον *Σοφιστή* υπονοείται από τον Πρόκλο στο χωρίο *εις Πλάτωνος Πολιτείαν* 1,290,7-10.

2.4. Η κυκλική-περιοδική φύση της «Συναγωγής εἰς Ἕν»

Στους Πλατωνικούς διαλόγους, υπάρχουν διάφορες περιγραφές της μεθόδου Διαίρεσης και Συναγωγής, ιδιαίτερα στον *Σοφιστή*, τον *Πολιτικό*, τον *Φαίδρο* και τον *Φίληβο*. Σε κάθε μία από αυτές τις περιγραφές, η Συναγωγή περιγράφεται από μία έκφραση που μαρτυρά την *κυκλική-περιοδική φύση* της. Στην παρακάτω λίστα περιγραφών της μεθόδου, υποδεικνύεται για κάθε μία από αυτές, ο όρος που υποδηλώνει κυκλική φύση-περιοδικότητα.

[1]

> «STRANGER. Look sharp, then; it is now our business not to let the beast get away again (Ἄγε δή, νῦν ἡμέτερον ἔργον ἤδη τὸν θῆρα μηκέτ' ἀνεῖναι), for we have almost ***comprehended*** (***περιειλήφαμεν***) him into a kind of ***encircling net of the devices*** (***ἐν ἀμφιβληστρικῷ τινι***) we employ *"logoi"* about such subjects (τῶν *ἐν τοῖς λόγοις* περὶ τὰ τοιαῦτα ὀργάνων).»
> (*Σοφιστής* 235a10-b2)

Ο Σοφιστής (the beast / *ὁ θήρ*) πρέπει να οριστεί πιάνοντας, περιλαμβάνοντας και κυκλώνοντάς τον μέσα σε ένα δίχτυ από «λόγους». Η κυκλικότητα υποδεικνύεται σαφώς από τους όρους «*περιειλήφαμεν*» και «*ἐν ἀμφιβληστρικῷ τινι*». Ο όρος «*περιειλήφαμεν*» είναι ο ίδιος με τον όρο που χρησιμοποιείται στο Βιβλίο XIII των *Στοιχείων* Ευκλείδη για να περιγράψει το πώς περιλαμβάνεται κάθε ένα εκ των πέντε κανονικών στερεών σε μια σφαίρα (π.χ. Πρόταση XIII.15: Κύβον συστήσασθαι καὶ *σφαίρᾳ περιλαβεῖν*).

[2]

> «STANGER. The *division of species in genera* (Τὸ *κατὰ γένη διαιρεῖσθαι*) […] and of *many kinds* differing from one another (καὶ *πολλὰς* ἑτέρας ἀλλήλων) but ***circularly contained*** *in one greater form* (*ὑπὸ μιᾶς ἔξωθεν* ***περιεχομένας***) and again of one idea (καὶ μίαν αὖ) through many wholes (δι' ὅλων πολλῶν) into one (ἐν ἑνὶ).»
> (*Σοφιστής* 253d1-e3)

Η φύση της Διαίρεσης και Συναγωγής είναι πρώτα Διαίρεση και μετά κυκλική Συναγωγή σε Ένα, με την κυκλικότητα να υποδεικνύεται κάπως ασαφώς με τον όρο «*περιεχομένας*».

[3]

> «STRANGER. Then let us try again (Πάλιν τοίνυν ἐπιχειρῶμεν); let us *divide in two* (*σχίζοντες διχῇ*) the class we have taken up for discussion and proceed always by way of the right-hand part of the thing divided (πορεύεσθαι κατὰ τοὐπὶ δεξιὰ ἀεὶ μέρος τοῦ τμηθέντος), clinging close to the company to which the sophist belongs (ἐχόμενοι τῆς τοῦ σοφιστοῦ κοινωνίας), until, having ***circularly stripped*** (***περιελόντες***) him of all common properties, and left him only his own peculiar nature (τὴν οἰκείαν λιπόντες φύσιν ἐπιδείξωμεν μάλιστα μὲν ἡμῖν αὐτοῖς).»
> (*Σοφιστής* 264d10-265a1)

Το χωρίο αυτό περιγράφει με ακρίβεια την Διαίρεση, όπως παρουσιάζεται στην περίπτωση του Ασπαλιευτή και του Σοφιστή (πρβλ. Ενότητες 2.2, 2.3 παραπάνω), και υποδεικνύει την κυκλικότητα με τον όρο «*περιελόντες*».

[4]

«STRANGER. Why did ***we go around in circle*** (***περιήλθομεν ἐν κύκλῳ***) making a great many *divisions* in vain? (πάμπολλα *διοριζόμενοι* μάτην)
YOUNGER SOCRATES. For my part, I thought nothing that was said was in vain (μάτην οὐδὲν τῶν ῥηθέντων ἔδοξε ῥηθῆναι).»
(*Πολιτικός* 283b1-c2)

Σαφής δήλωση ότι η Διαίρεση είναι κυκλική και περιοδική: «*περιήλθομεν ἐν κύκλῳ*», φαινομενικά μάταιη, αλλά στην πραγματικότητα όχι και τόσο.

[5]

«STRANGER. […] the *dissimilarities* of all sorts (τὰς δὲ αὖ παντοδαπὰς *ἀνομοιότητας*), when seen in multitudes (ὅταν ἐν πλήθεσιν ὀφθῶσιν), he must find it impossible to be discouraged or to stop (μὴ δυνατὸν εἶναι δυσωπούμενον παύεσθαι) until (πρὶν ἂν) one ***circularly confines*** (***περιβάληται***) all the things which are related to each (σύμπαντα τὰ οἰκεῖα) ***into one circle of similarity*** (***ἐντὸς μιᾶς ὁμοιότητος***), ***circularly enclosing*** (***ἕρξας***) them, on the basis of their essential nature (οὐσίᾳ) of some genus.»
(*Πολιτικός* 285a4-b6)

Η κυκλικότητα της Διαίρεσης και Συναγωγής υποδεικνύεται εδώ έντονα με τη χρήση των όρων «*περιβάληται*», «*ἐντὸς μιᾶς ὁμοιότητος*», «*ἕρξας*».

[6]

«STRANGER. By far our first and most important object should be to exalt the method itself of ability to *divide in kinds* (*κατ' εἴδη... διαιρεῖν*), and therefore, if a *"logos"* (*λόγον*), even though it be very long, makes the hearer better able to discover the truth, we should accept it eagerly and should not be offended by its length, or if it is short, we should judge it in the same way. And, moreover, anyone who finds fault with ***the length of "logoi"*** (***λόγων μήκη***) *in our divisions* and ***of the circular periods*** (*καὶ* ***τὰς ἐν κύκλῳ περιόδους***) must not merely find fault with the speeches for their length and then pass them quickly and hastily by …»
(*Πολιτικός* 286d6-287a6)

Η περιοδικότητα περιγράφεται από τους όρους «*λόγων μήκη*», «*τὰς ἐν κύκλῳ περιόδους*».

[7]

«SOCRATES. We say that *One and Many* (*ἓν καὶ πολλὰ*) are identified always, both now and in the past, by *"logoi"* (*ὑπὸ λόγων*) ***running circularly around*** (***περιτρέχειν***) everywhere *in every intelligible being* (*καθ' ἕκαστον τῶν λεγομένων ἀεί*).»
(*Φίληβος* 15d4-8)

Σε κάθε νοητό Ον, τα Πολλά, που γεννώνται από ανθυφαιρετική Διαίρεση, γίνονται Ένα μέσω της κυκλικότητας, της περιοδικότητας (*περιτρέχειν*) των «λόγων», καταλήγοντας στην εξομοίωση και Συναγωγή των Πολλών σε Ένα.

[8]

«SOCRATES. […] and one way, *dividing* the left-hand part (ὁ μὲν τὸ ἐπ' ἀριστερὰ *τεμνόμενος* μέρος), *continued to divide* (*πάλιν τοῦτο τέμνων*), ***did not return to the previous parts*** (***οὐκ ἐπανῆκεν πρὶν ἐν αὐτοῖς***) discovered a sort of left-handed love (ἐφευρὼν ὀνομαζόμενον σκαιόν τινα ἔρωτα), which it very justly reviled (ἐλοιδόρησεν μάλ' ἐν δίκῃ), but the other way, leading us to the right-hand part of madness, discovered a love having the same name as the first, but divine, which it held up to view and praised as the author of our greatest blessings.»
(*Φαίδρος* 266a3-b1)

Η Διαίρεση και Συναγωγή του δεξιού Έρωτα είναι περιοδική σε αντίθεση με την ρητή μη-περιοδικότητα του αριστερού-κακού Έρωτα. Ο σωστός, καλός Έρωτας, είναι αυτός που αντίθετα με τον αριστερό, δεν είναι κακός, όπου η έννοια «κακός» προσδιορίζεται από την απουσία περιοδικής διαίρεσης. Η μη-περιοδικότητα υποδεικνύεται από τη φράση: «*οὐκ ἐπανῆκεν πρὶν ἐν αὐτοῖς*».

[9]

> «SOCRATES. […] is able to divide beings in kinds (κατ' εἴδη τε διαιρεῖσθαι τὰ ὄντα) and to ***circularly comprehend*** (***περιλαμβάνειν***) each of them under one idea (μιᾷ ἰδέᾳ δυνατὸς).» (*Φαίδρος* 273d8-e4)

Η κυκλικότητα υποδεικνύεται, όπως στο **[1]** από τον όρο «*περιλαμβάνειν*».

Ενότητα 3. Η αποκάλυψη της μαθηματικής δήλωσης του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου, μέσω της φιλοσοφικής δήλωσης του Θεωρήματος στο χωρίο Θεαίτητος *147d-148b και των μιμήσεών του από τον Πλάτωνα στον* Πολιτικό *283a-287b και τον* Φίληβο *16c, 23a-25e*

Στις αρχικές παραγράφους του διαλόγου *Θεαίτητος* (145d6, e9), που γράφτηκε εις μνήμην του πεσόντος στην μάχη Θεαίτητου, διατυπώνεται από τον Σωκράτη το ερώτημα «σε τι συνίσταται η γνώση ενός νοητού Όντος;». Στη συνέχεια του διαλόγου (147d3-148b2) περιγράφεται μια μαθηματική ανακάλυψη του Θεαίτητου (και του φίλου του νεαρού Σωκράτη) και καθίσταται σαφές ότι αυτή η ανακάλυψη είναι υψίστης σημασίας για το προαναφερθέν ερώτημα, συνεπώς άξια μίμησης στην πλατωνική φιλοσοφία. Εξ ου και η ανάλογη προτροπή προς τον Θεαίτητο, δια στόματος Σωκράτη, να μιμηθεί αυτήν την μαθηματική του ανακάλυψη (*πειρῶ μιμούμενος*, 148d4-5) στην προσπάθεια ορισμού της γνώσης.
Το κύριο μέλημά μας στην παρούσα Ενότητα, όπως και στην Ενότητα 5 που θα ακολουθήσει, είναι να διαπιστωθεί ποια είναι η ακριβής φύση της μαθηματικής ανακάλυψης του Θεαίτητου. Οι δηλώσεις του Πλάτωνα σχετικά με την μαθηματική ανακάλυψη και συνεισφορά του Θεαίτητου διατυπώνονται σε φιλοσοφική γλώσσα, χωρίς ξεκάθαρη μαθηματική δήλωση, και χωρίς δυστυχώς να υπάρχουν άλλες αρχαίες πηγές για το ζήτημα. Είναι σαφές πως για την επιτυχία αυτού του εγχειρήματος απαιτείται μια βαθιά κατανόηση της πλατωνικής φιλοσοφίας καθώς και του τρόπου με τον οποίο ο Πλάτων εφάρμοσε την μίμηση, με την ελπίδα ότι η κατανόηση της φιλοσοφικής μίμησης θα ρίξει φως στο μαθηματικό πρωτότυπο. Κάτι τέτοιο δεν θα είναι απλό, καθώς η «μίμηση» αποδεικνύεται ότι εκτείνεται σε όλη την τριλογία *Θεαίτητος-Σοφιστής-Πολιτικός*, που είναι αφιερωμένη στην γνώση των νοητών, και ακόμη πιο πέρα, στα τελευταία έργα του Πλάτωνα συμπεριλαμβανομένου κυρίως του *Φίληβου*.

Στόχος λοιπόν στην Ενότητα αυτή, είναι να κατανοήσουμε την ανακάλυψη του Θεαίτητου και να δείξουμε πως η διατύπωση της ανακάλυψης αυτής με μαθηματικούς όρους, είναι η ακόλουθη:

> ***Ασθενές Θεώρημα Περιοδικότητας του Θεαίτητου***: εάν a, b ευθείες, τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$ για N μη-τετράγωνο αριθμό (ή γενικότερα, ευθείες σύμμετρες μόνο στο τετράγωνο), τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι περιοδική.

Δεν θα περιοριστούμε αποκλειστικά στη μελέτη του χωρίου *Θεαίτητος* 147d-148b, αλλά θα ασχοληθούμε επίσης με (μερικές από) τις μιμήσεις που αναφέρονται στο 148d5.

Για το σκοπό αυτό, στην παρούσα Ενότητα 3 θα εξεταστούν τρία καίρια αποσπάσματα:
Το *πρώτο* (*Θεαίτητος* 147d3-148b2), εξετάζεται στις Ενότητες 3.1-3.4 και πρόκειται για την περιγραφή σε ημι-φιλοσοφική γλώσσα από τον Πλάτωνα, της μαθηματικής ανακάλυψης του Θεαίτητου που συνέβη μετά από ένα μάθημα τετραγωνικών ασυμμετριών από τον Θεόδωρο. Σύμφωνα με την ανακάλυψη αυτή:

> κάθε δύναμη είναι άπειρη/ασύμμετρη και συνάγεται σε Ένα.

Το *δεύτερο* απόσπασμα (πρόκειται για τα χωρία *Φίληβος* 16c, 23a-25e), εξετάζεται στην Ενότητα 3.5 και αποτελεί την βασική φιλοσοφική δήλωση πως:

> κάθε νοητό Ον είναι μια μείξη των δύο Φιλήβειων αρχών του **Άπειρου και του Πέρατος**, που ερμηνεύονται ως **Ανθυφαιρετικό Άπειρο/Ασυμμετρία** και **Ανθυφαιρετικό Πέρας/Συμμετρία**, αντίστοιχα.

Το *τρίτο* απόσπασμα που εξετάζεται στην Ενότητα 3.6 είναι το δύσκολο αλλά διαφωτιστικό χωρίο 283a-287b στον *Πολιτικό*, σύμφωνα με το οποίο:

> κάθε νοητό Ον είναι το προϊόν δύο μετρήσεων, η πρώτη μέτρηση (από την οποία η *ἡδονὴ* εξαιρείται) πραγματοποιείται σε σχέση με το αντίθετό του, και η δεύτερη σε σχέση με τον μέσο του ζεύγους των αντιθέτων.

Μια σύγκριση των παραπάνω καίριων αποσπασμάτων επιβεβαιώνει πως η τελευταία περίοδος της φιλοσοφίας του Πλάτωνα είχε επηρεαστεί βαθιά από το μαθηματικό έργο του Θεαίτητου και οδηγεί στην ακόλουθη *ασθενή μορφή* του Θεωρήματος του Θεαίτητου για τετραγωνικές ασυμμετρίες.

> ***Ασθενής περιοδική μορφή του Θεωρήματος του Θεαίτητου.*** Εάν N είναι ένας μη-τετράγωνος φυσικός αριθμός και a, b είναι ευθείες τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$, τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι περιοδική.

Στην Ενότητα 4 που ακολουθεί, θα ανακατασκευάσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος Περιοδικότητας, εφαρμόζοντας εργαλεία αποκλειστικά από το Θεαιτήτειο Βιβλίο Χ των *Στοιχείων*,
στην Ενότητα 5 θα μελετήσουμε λεπτομερώς την μίμηση της ισχυρής μορφής του Θεαιτήτειου Θεωρήματος για την Παλινδρομική Περιοδικότητα, από τον Πλάτωνα στον *Πολιτικό*, και
στην Ενότητα 6, θα ανακατασκευάσουμε το Ισχυρό Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά τα ίδια εργαλεία από το Βιβλίο Χ.

3.1. **Θεαίτητος** *147d3-148b2*

Η «διανεμητική» ερμηνεία του πληθυντικού «*αἱ δυνάμεις*» στο 147d7-8 ανοίγει το δρόμο για μια ουσιαστική κατανόηση αυτού του καίριου χωρίου. Όμως γιατί ο Πλάτων ενδιαφέρθηκε για την μαθηματική ανακάλυψη του Θεαίτητου; Δεν ήταν μόνο για να εγκωμιάσει τον Θεαίτητο· είχε κάτι πιο σημαντικό κατά νου.

3.1.1. Ο Σωκράτης ρωτά τον Θεαίτητο ποια είναι η φύση της γνώσης ενός νοητού Όντος 145d6, e9

Ο Σωκράτης, με έναν χαρακτηριστικό ειρωνικό ευφημισμό ως προς την σημασία του (*μικρὸν δέ τι ἀπορῶ*, 145d6) θέτει το βασικό ερώτημα της τριλογίας *Θεαίτητος*-

Σοφιστής-*Πολιτικός*: Σε τι συνίσταται η γνώση (*ἐπιστήμη*) ενός νοητού Όντος (*ἐπιστήμη ὅτι ποτὲ τυγχάνει ὄν*, 145e9);

3.1.2. Ο Θεαίτητος συνειδητοποιεί ότι το ερώτημα του Σωκράτη είναι παρόμοιο με μια μαθηματική ανακάλυψη που είχε κάνει πρόσφατα 147c7-d1

Μετά από κάποιες αποτυχημένες προσπάθειες, ο Θεαίτητος συνειδητοποιεί ότι το ερώτημα του Σωκράτη περί της απόκτησης γνώσης των νοητών Όντων (*ἐπιστήμη*) είναι παρόμοιο, σχετικό, με την αντιμετώπιση από τον ίδιο (και τον σύντροφό του) ενός μαθηματικού προβλήματος που συνέλαβαν κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος του Θεόδωρου για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες.

> «THEAETETUS. It seems easy just now, Socrates, as you put it; but you are probably asking the kind of thing that came up among us recently (*οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἔναγχος εἰσῆλθε*) when your namesake, Socrates here, and I were talking together.»
> (*Θεαίτητος* 147c7-d1)

3.1.3. Ο ορισμός του Θεαίτητου για τις «δυνάμεις» 148a6-b1

> «THEAETETUS. Those lines (*γραμμαὶ*) which square (*τετραγωνίζουσι*) the square (*ἰσόπλευρον*) number we called length (*μῆκος*), and those which square the non-square (*ἑτερομήκη*) number we called powers (*δυνάμεις*).»
> (*Θεαίτητος* 148a6-b1)

3.1.4. Το μάθημα του Θεόδωρου 147d3-6

> «THEAETETUS. Theodorus here was drawing some figures (*ἔγραφε*) for us about powers/"dunameis", about the three square feet and five square feet showing [ἀποφαίνων] these "dunameis" are not commensurable in length (μήκει οὐ σύμμετροι) with the one foot line, and so, selecting (*προαιρούμενος*) each one in its turn up to the seventeen square feet "dunamis" and at that he somehow stopped (*πως ἐνέσχετο*).»
> (*Θεαίτητος* 147d3-6)

3.1.5. Η μαθηματική ανακάλυψη του Θεαίτητου 147d7-e1

> «THEAETETUS. […] Now we had the idea (*ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον*), since the "dunameis" were shown (*ἐφαίνοντο*) to be infinite in multitude (*ἄπειροι τὸ πλῆθος*), to try (*πειραθῆναι*) *to collect them into one (συλλαβεῖν εἰς ἕν)*, by which we could henceforth call all the "dunameis".»
> (*Θεαίτητος* 147d7-e1)

3.1.6. Περαιτέρω εξήγηση της μαθηματικής ανακάλυψης του Θεαίτητου 148b1-2, d5-6

> «THEAETETUS. […] because (*ὡς*) [the dunameis] are not commensurable in length (*μήκει μὲν οὐ συμμέτρους*) with the others [namely, the lengths], but [are commensurable] only in the areas of the planes which they have the power (*δύνανται*) to form.»
> (*Θεαίτητος* 148b1-2)

«SOCRATES. […] you *comprehended (περιέλαβες)* them [the "dunameis"], though they were many (πολλὰς οὖσας), *in one kind (ἑνὶ εἴδει)*.»
(*Θεαίτητος* 148d5-6)

(Plato, *Theaetetus*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

3.2. Η μαθηματική ερμηνεία του χωρίου 147d3-148b2 στον **Θεαίτητο,** *όπου περιγράφεται το Ασθενές Θεώρημα Περιοδικότητας του Θεαίτητου με ημι-φιλοσοφικούς όρους*

3.2.1. Η ανάγνωση της λέξης «δυνάμεις» ως διανεμητικός πληθυντικός στο 147d7-8: κάθε «δύναμις» ξεχωριστά, όχι όλες οι «δυνάμεις» μαζί, διαιρείται επ' άπειρον και συνάγεται σε Ένα

Θα ξεκινήσουμε προσπαθώντας να αποδώσουμε κάποιο νόημα στο πώς το μάθημα του Θεόδωρου οδήγησε στο συμπέρασμα πως:

«*αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο ἄπειροι τὸ πλῆθος*»
(*Θεαίτητος* 147d7-8, βλ. 3.1.5 παραπάνω).

3.2.2. Η παραδοσιακή ανάγνωση του 147d7-8 και η απόρριψή της

Ας δούμε σχετικά την αντιμετώπιση του Burnyeat (Burnyeat 1978):

«The key sentence is 147d 7-e 1, which I render as follows:
Since the dunameis were turning out to be unlimited in number, it occurred to us to attempt to collect them up into a single way of speaking [i.e., a formula or definition] of all these dunameis together.
Theaetetus is recounting the thoughts suggested to himself and his companion *by and during Theodorus' lesson*, and the idea that there is an endless series of whole number squares (or sides of such squares) ***would hardly need to be prompted by a process as protracted as Theodorus' lesson***.
That there are an indefinite, perhaps infinite, number of squares with incommensurable sides, on the other hand, is precisely the hypothesis that would suggest itself as Theodorus proceeded from case to case proving more and yet more examples of incommensurability, perhaps by a method which could be endlessly reapplied.
Therefore, it is likely that, in context, "all these dunameis" refers to squares with incommensurable sides rather than to squares generally.»

Επομένως ο Burnyeat ορθά απορρίπτει την ερμηνεία ότι η έκφραση «*ἄπειροι τὸ πλῆθος δυνάμεις*» στο 147d7-8 σημαίνει «άπειροι το πλήθος μη-τετράγωνοι αριθμοί» καθώς αυτή η απειρία θα ήταν ήδη γνωστή, επουσιώδης ούτως ή άλλως, και όχι μια παρατήρηση για την οποία το μάθημα του Θεόδωρου θα μπορούσε να αποτελέσει έναυσμα.

Η αντιπρόταση του Burnyeat ότι η έκφραση «*ἄπειροι τὸ πλῆθος δυνάμεις*» στο 147d7-8 θα πρέπει να σημαίνει «άπειρες το πλήθος ασύμμετρες πλευρές», έρχεται όμως και αυτή αντιμέτωπη με την ίδια ένσταση (*would hardly need to be prompted by a* *process as protracted as Theodorus' lesson*), καθώς η ασυμμετρία της δύναμης για N=2, γνωστή στους Πυθαγορείους πολύ καιρό πριν και συνεπώς δικαιολογημένα απούσα από το μάθημα του Θεόδωρου, φαίνεται να υπονοεί την *ασυμμετρία άπειρα πολλών δυνάμεων*, δηλαδή για κάθε N της μορφής $N=2 \cdot n^2$, με n=1, 2,… .

Συνεπώς η ερμηνεία του Burnyeat θα πρέπει επίσης να απορριφθεί.

3.2.3. Η ερμηνεία της λέξης «δυνάμεις» στο 147d7-8 με χρήση διανεμητικού πληθυντικού

Μετά την απόρριψη των δύο παραπάνω ερμηνειών, η εύρεση κάποιας άλλης ερμηνείας για το άπειρο σύνολο «δυνάμεων» που ο Θεαίτητος και ο φίλος του νεαρός Σωκράτης διέκριναν στο μάθημα του Θεόδωρου, είναι δύσκολη.
Όπως επιχειρηματολογείται στο Negrepontis 2018, η μοναδική λογική ερμηνεία της εν λόγω πρότασης επιτυγχάνεται με την εφαρμογή *διανεμητικού πληθυντικού*. Τότε το χωρίο *Θεαίτητος* 147d7-e1 θα πρέπει να διαβαστεί ως εξής:

> Επειδή, σαν αποτέλεσμα του μαθήματος του Θεόδωρου, αποδείχθηκε πως *κάθε δύναμη* διαιρείτο σε ένα άπειρο πλήθος μερών («*ἄπειροι τὸ πλῆθος*») (147d7-8), ο Θεαίτητος και ο σύντροφός του είχαν την ιδέα, και στην πραγματικότητα κατάφεραν, *να συλλέξουν* [τα απείρως πολλά μέρη από] *κάθε δύναμη* σε Ένα («*συλλαβεῖν εἰς ἕν*»).

3.2.3.1. Ο διανεμητικός πληθυντικός της λέξης «δυνάμεις» πριν και μετά το χωρίο 147d7-8 σε όλο το απόσπασμα 147d3-148b2

Μια αρχική υποστήριξη αυτής της διανεμητικής ερμηνείας βρίσκουμε στην παρατήρηση ότι στην πραγματικότητα ο πληθυντικός αριθμός που χρησιμοποιείται σχετικά με τις δυνάμεις είναι διανεμητικός *σε όλη την έκταση του αποσπάσματος 147d3-148b2*.

Αυτό συμβαίνει στην εμφάνιση της λέξης «δυνάμεις» στο 147d4-5 (βλ. 3.1.4 παραπάνω), *ακριβώς πριν το χωρίο 147d7-8*:

> [Theodorus] showing (*ἀποφαίνων*) these “dunameis” are not commensurable in length (*μήκει οὐ σύμμετροι*) with the one foot line

καθώς εδώ σημαίνει φυσικά πως η κάθε «δύναμις» ξεχωριστά δεν είναι μήκει σύμμετρη με την ποδιαία και όχι όλες οι «δυνάμεις» μαζί και,

στην εμφάνιση της λέξης «δυνάμεις» στο 148b1-2 (βλ. 3.1.6 παραπάνω), *ακριβώς μετά το χωρίο 147d7-8*:

> [the dunameis] are not commensurable in length (*μήκει μὲν οὐ συμμέτρους*) with the others [namely, the lengths], but [are commensurable] only in the areas of the planes which they have the power (*δύνανται*) to form,

καθώς εδώ σημαίνει φυσικά πως κάθε «δύναμις» ξεχωριστά είναι ασύμμετρη ή σύμμετρη, και όχι όλες οι «δυνάμεις» μαζί.

Προκύπτει συνεπώς με φυσικό τρόπο πως ο πληθυντικός αριθμός στη λέξη «δυνάμεις» είναι διανεμητικός και για την κρίσιμη εμφάνιση της λέξης στο ενδιάμεσο χωρίο 147d7-8 (βλ. 3.1.5 παραπάνω).

Σχηματικά:

[Theodorus] showing (*ἀποφαίνων*) these *"dunameis"* are not commensurable in length (μήκει οὐ σύμμετροι) with the one foot line (147d4-5)	Διανεμητικός πληθυντικός της λέξης «δυνάμεις» **πριν** το 147d7-8.
the *"dunameis"* were shown (*ἐφαίνοντο*) to be infinite in multitude (*ἄπειροι τὸ πλῆθος*) (147d7-8)	Τι είδους είναι ο πληθυντικός της λέξης «δυνάμεις» στο 147d7-8;
[the *"dunameis"*] are not commensurable in length (*μήκει μὲν οὐ συμμέτρους*) with the others [namely, the lengths], but [the *"dunameis"* are commensurable] only in the areas of the planes which they have the power (*δύνανται*) to form (148b1-2)	Διανεμητικός πληθυντικός της λέξης «δυνάμεις» **μετά** το 147d7-8.

3.2.3.2. Ενίσχυση της διανεμητικής ανάγνωσης της λέξης «δυνάμεις» στο 147d7-8 από τα Ανώνυμα Σχόλια εις Πλάτωνα

Ο Πλάτων, στο χωρίο 162e4-163a1 στον *Θεαίτητο* υπενθυμίζει δια στόματος Σωκράτη την βαρύνουσα σημασία της **απόδειξης** στην γεωμετρία, σε αντίθεση με την **πιθανολογία**. Στο χωρίο γίνεται αναφορά στον Θεόδωρο και τους υπόλοιπους γεωμέτρες:

> «*ᾧ εἰ ἐθέλοι* ***Θεόδωρος*** *ἢ ἄλλος τις τῶν γεωμετρῶν χρώμενος γεωμετρεῖν, ἄξιος οὐδ' ἑνὸς μόνου ἂν εἴη*»
> (*Θεαίτητος* 162e6-7)

Οι παραπάνω στίχοι 162e6-7, σχολιάζονται στο ανώνυμο έργο *Ανώνυμα Σχόλια εις Πλάτωνα, ως ακολούθως:*

> Εάν δεχθούμε την κρίση των πολλών σαν την κυρίαρχη μέθοδο στη γεωμετρία,
> θα ήμασταν **γελοίοι** να ισχυριστούμε
> (*καὶ γὰρ εἰ τὴν τῶν πολλῶν κρίσιν λάβοιμεν ἐπὶ γεωμετρίας κυρίαν, γελοῖοι ἂν ὦμεν*),
> ότι ***τα μεγέθη*** είναι μεταξύ τους ***ασύμμετρα***
> (*ἀσύμμετρα λέγοντες ἀλλήλοις μεγέθη*),
> και ότι ***η πεπερασμένη ευθεία είναι διαιρετή επ' άπειρον***
> (*καὶ τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν διαιρετὴν εἶναι εἰς ἄπειρον*),
> και τα συναφή (*καὶ τὰ τοιαῦτα*).

Το σχόλιο αποτελεί τον συνδετικό κρίκο μεταξύ των χωρίων 162e4-163a1**,** (σχετικά με τη σημασία της απόδειξης στην γεωμετρία) και 147d3-e1 (σχετικά με την απόδειξη του Θεόδωρου για τις ασυμμετρίες και την συνεπακόλουθη ιδέα του Θεαίτητου και του φίλου του για την απειρία των δυνάμεων).

Συνδυάζοντας τις πληροφορίες που παίρνουμε από τα δύο προαναφερθέντα χωρία του διαλόγου, προτείνεται η παρακάτω ανάγνωση του σχολίου στα *Ανώνυμα Σχόλια εις Πλάτωνα*:
Ο Θεόδωρος, κατά τη διάρκεια της απόδειξης που δηλώνεται στο χωρίο 147d3-6, ότι δηλαδή κάθε μία από τις «δυνάμεις» (των 3, 5, …, 17 ποδιών) είναι **ασύμμετρη** με την ποδιαία (όπου «δυνάμεις» και ποδιαία είναι τα **μεγέθη**), **δεν πιθανολογεί** όπως θα έκαναν οι πολλοί (κάτι που σύμφωνα με το χωρίο 162e4-163a1 θα ήταν ευτελές και θα τον έκανε να φαίνεται **γελοίος**), αλλά χρησιμοποιεί τέλειες **αποδείξεις** («*ἀπόδειξιν δὲ καὶ ἀνάγκην*», 162e4-5) εμπλέκοντας την **επ' άπειρον διαίρεση για <u>καθεμία</u> από αυτές τις πεπερασμένες ευθείες**, έτσι ώστε, όπως δηλώνεται στο 147d7-8, κάθε μία εξ αυτών, κάθε δύναμη, να είναι *άπειρη το πλήθος*.

Αυτή η ανάγνωση οδηγεί σε μια διανεμητική ερμηνεία της αναφοράς «*αἱ δυνάμεις*» στο 147d7-8.

3.2.3.3. Ενίσχυση της διανεμητικής ανάγνωσης της λέξης «δυνάμεις» στο 147d7-8 από τα Ανώνυμα σχόλια **Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum**

Τα Ανώνυμα σχόλια *Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum* (*ACIPT*), πιθανώς έργο του Εύδωρου, 1ος αιώνας π.Χ.[5], ισχυροποιούν σημαντικά την διανεμητική ερμηνεία. Οι παρακάτω δηλώσεις αφορούν τον σχολιασμό της **απειρίας** που προκύπτει από τις «άπειρες το πλήθος» δυνάμεις, και της **συναγωγής** (συλλογής) τους σε Ένα από τον Θεαίτητο και τον σύντροφό του στο χωρίο *Θεαίτητος* 147d-148b:

[1] μια **απειρία** (*τὸ* ***ἄπειρον***) πρέπει γενικά να **συνάγεται** (***περιḷαμβάνειν*** *καὶ* ***ὁ[ρίζ]ειν***), if possible (καθ' ὅσοṿ ἐνδ[έ]χεται)
(*ACIPT* 37,3-12)

[2] μια ευθεία δέχεται την **απειρία** είτε μέσω (άπειρης) αύξησης είτε μέσω (άπειρης) **διαίρεσης** (*αἱ γραμμαὶ ἐπιδέχοṇται τὸ* ***ἀόριστον****, εἴ τις αὐτὰς ἢ αὔξοι ἢ* ***διαιροῖ***)
(*ACIPT* 36,45-48)

[3] η **συναγωγή**[6] μιας απειρίας σε μια ευθεία μπορεί να επιτευχθεί περνώντας στους αριθμούς (**ὁρίζονται** δ' ὑπὸ τῷν ἀριθμῶν)
(*ACIPT* 36,48-37,3)
(μετέβησαν οὖν καὶ ἐπὶ τούτων ἐπὶ τοὺς ἀριθμούς, ἵνα **περιορίσωσι** καθολικῶι τινι)
(*ACIPT* 42,30-33)

[4] μια ευθεία **άπειρη** μέσω αύξησης δεν μπορεί να **συναχθεί** από αριθμούς *(Ὁ ἀριθμὸς* ***ἄπειρọ́ς*** *ἐστιν κατὰ τὸ αὔξεσθαι· οὐ ḍύναται οὖν τις τὸ ἐπ' ἄ̣πειρον προϊὸν* ***περιλαβεῖν***)
(*ACIPT* 37,39-44)

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, συναγωγή (collection) για μια ευθεία μπορεί να επιτευχθεί μόνο όταν αυτή **διαιρείται** σε άπειρα μέρη.

---

[5] πρβλ. Tarrant (Tarrant 1985)
[6] Οι λέξεις που αποδίδονται ως «collection (συναγωγή)» είναι οι: «*περιλαμβάνειν*» (*Θεαίτητος* 148d6) (26,11, 37,5, 37,10, 37,29, 37,43, 37,46, 45,48, 46,39), «*περιορίζειν*» (42,32) και «*ορίζειν*» (37,1, 37,11).

[5] η **συναγωγή** μιας **απειρίας** σε μια ευθεία μπορεί να επιτευχθεί περνώντας στους αριθμούς, επειδή οι αριθμοί είναι μεταξύ τους σύμμετροι
(*ἦλ]θ[ον] ọῦν ἐπὶ ṭὸ[ν ἀριθμ]ὸν διὰ τὸ [.]κ[......]ρν τῶι ṗάṇṭạ[ς] τοὺς ἀρι[θμ]ο[ὺ]ς ṣυμμ[έτ]ρους [εἶ]ṇα[ι] πρ[ὸς] ἀλλή[λους]*)
(*ACIPT* 26,13-18)

[6] η **συναγωγή** μιας **απειρίας** σε μια ευθεία επιτυγχάνεται περνώντας από τα ασαφέστερα μεγέθη στους σαφέστερους αριθμούς.
(ὥσπερ δὲ οἱ περὶ Θεαίτηṭον μετέβησαν ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς ὡς σαφεστέρους)
(*ACIPT* 32,1-4)
(πρῶτον μὲν οὖν ἀπὸ τῶν ἀσαφεṣṭέρωṿ ẹ̣π̣ὶ τὰ σαφẹ́ṣτερα δẹῖ μεταβαίνειν ὡς ἀπὸ τῶν μεγεθῶν μετέβησαν ἐπὶ τοὺς ἀριθμούς)
(*ACIPT* 44,50-45,3) [7]
namely from incommensurables to commensurables, that is to "as number to number"
(ἔχει γὰρ λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν)
(*ACIPT* 41,40-42,18) [8]

Στη συνέχεια ακολουθεί η ερμηνεία του συνόλου των παραπάνω δηλώσεων:

Από την δήλωση **[2]** προκύπτει ότι

> ο πληθυντικός στην έκφραση «*ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις*», όπως ήδη υποψιαζόμασταν, είναι διανεμητικός και αυτό που εννοείται είναι ότι «κάθε δύναμη είναι άπειρη το πλήθος».

Από την δήλωση **[4]** και το γεγονός ότι ο Θεαίτητος και ο σύντροφός του πέτυχαν τη συναγωγή των απείρων το πλήθος «δυνάμεων», συμπεραίνουμε ότι

> κάθε «*δύναμις*» είναι άπειρη σε δύναμη μέσω *επ' άπειρον διαίρεσης*.

Από τις δηλώσεις **[3]**, **[5]** και **[6]** συμπεραίνουμε ότι

> η απειρία κάθε «*δυνάμεως*» οφείλεται στην ασυμμετρία,

Από τις δηλώσεις **[3]**, **[5]** και **[6]** συμπεραίνουμε ότι

> η «συναγωγή σε Ένα» («*συλλαβεῖν εἰς ἕν*», *Θεαίτητος* 147d8) αφορά το άπειρο πλήθος μερών μιας «*δυνάμεως*» (μια απειρία γνωστή από τις αποδείξεις ασυμμετρίας του Θεόδωρου), και είναι εφικτή επειδή μια «*δύναμις*» δεν είναι μια οποιαδήποτε ευθεία ασύμμετρη ως προς το μήκος, αλλά μια ευθεία η οποία επιπλέον είναι σύμμετρη ως προς το τετράγωνο, ήτοι μία Θεαιτήτεια μείξη συμμετρίας και ασυμμετρίας.

3.2.3.4. Ενίσχυση της διανεμητικής ανάγνωσης της λέξης «δυνάμεις» στο 147d7-8 από τον ορισμό της Πλατωνικής Ιδέας ως «δυνάμεως» στο χωρίο **Σοφιστής** *247d-248d*

---

[7] Ακριβώς το ίδιο επιχείρημα εμφανίζεται στο Σχόλιο X.39 από τα *Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη*.

[8] Σε αναλογία με την περιγραφή για τους κύβους: «ἦλθον ἐπὶ τὰ κ̣ụβ̣ịκ̣ὰ», καθώς «τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεὸν σύμμετρον· ἔχει γὰρ λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· τὰς δὲ πλευρὰς ἀσυμμέτρο[υς,]».

Στο χωρίο *Σοφιστής* 247d-248d ο Πλάτων ορίζει την Πλατωνική Ιδέα ως «δύναμιν». Η ερμηνεία αυτού του ορισμού θα επεξηγηθεί συνοπτικά: η θεμελιώδης ιδιότητα μιας Πλατωνικής Ιδέας είναι ότι, αλληλεπιδρώντας ενεργητικά ή παθητικά με ένα διαφορετικό στοιχείο αντίθετης φύσης, με το οποίο δημιουργεί μια αόριστη δυάδα, έχει τη «δύναμη», τη «δύναμη της επικοινωνίας» με το άλλο στοιχείο (252d3, 253a8, 253e1, 254b8, 254c5), στην ουσία «τη δύναμη της μεταξύ τους εξομοίωσης» (257b).

Ανεξάρτητα από την ακριβή ερμηνεία του ορισμού, ο Πλάτων μιμείται εδώ τον όρο που χρησιμοποιείται στο χωρίο *Θεαίτητος* 147d-148d για την μαθηματική «δύναμιν». Στον *Σοφιστή*, η Διαίρεση και Συναγωγή είναι μια μέθοδος για την απόκτηση της γνώσης μιας Πλατωνικής Ιδέας, συνεπώς μιας «δυνάμεως». Δίχως αμφιβολία κάθε «δύναμις» συνάγεται σε Ένα ανεξάρτητα. Αυτό υποδηλώνει ξανά πως στον *Θεαίτητο* η συναγωγή των «δυνάμεων» (που συνάχθηκαν σε Ένα επειδή εμφανίζονταν να είναι άπειρες το πλήθος) θα πρέπει να ερμηνεύεται με διανεμητικό τρόπο, δηλαδή για κάθε δύναμη ξεχωριστά.

3.3. Η μαθηματική δήλωση του Θεωρήματος του Θεαίτητου που αναφέρεται με ημι-φιλοσοφικούς όρους από τον Πλάτωνα στο χωρίο Θεαίτητος *147e2-148b3*

Είμαστε τώρα σε θέση να ερμηνεύσουμε το απόσπασμα 147e2-148b3 που περιγράφει με ημι-φιλοσοφικούς όρους την μαθηματική συμβολή του Θεαίτητου.
Τα δύο κύρια προβλήματα στην κατασκευή μιας μαθηματικής δήλωσης ικανής να διασαφηνίσει την μαθηματική ανακάλυψη και συνεισφορά του Θεαίτητου και να οδηγήσει στην κατανόηση του μαθηματικού του Θεωρήματος, είναι τα παρακάτω:
(i) το είδος της απειρίας των δυνάμεων («*αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο ἄπειροι τὸ πλῆθος*», *Θεαίτητος* 147d7-8) και
(ii) η μαθηματική ερμηνεία της συναγωγής των δυνάμεων σε Ένα («*συλλαβεῖν εἰς ἕν*», *Θεαίτητος* 147d8 και «*ἑνὶ εἴδει περιέλαβες*», *Θεαίτητος* 148d6).
Βάσει της ανάλυσης της Ενότητας 3.2.3 που προηγήθηκε, είναι πλέον σαφές πως οι αποδείξεις του Θεόδωρου έδειχναν πως **κάθε δύναμη** (δηλαδή κάθε ευθεία a τέτοια ώστε $a^2=Nb^2$ για κάποιο μη-τετράγωνο αριθμό N), είναι **άπειρη το πλήθος** υπό την έννοια ότι διαιρείται σε άπειρο αριθμό μερών. Ο Θεαίτητος (και ο νεαρός Σωκράτης) προσπάθησαν **να συναγάγουν** το άπειρο πλήθος αυτών των μερών **σε Ένα**, δηλαδή, σύμφωνα με την ερμηνεία της Συναγωγής που δόθηκε στην Ενότητα 2, **να εξισώσουν** όλα τα μέρη, κάτι που επιτυγχάνεται με την **ανθυφαιρετική περιοδικότητα.**
Συνεπώς, η μαθηματική δήλωση του θεωρήματος του Θεαίτητου δεν μπορεί παρά να είναι η εξής:

> ***Ασθενές Θεώρημα Περιοδικότητας του Θεαίτητου.*** Εαν N είναι ένας μη-τετράγωνος αριθμός, b η ποδιαία, και $a^2=Nb^2$, τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι περιοδική.

3.4. «πειρῶ μιμούμενος», **Θεαίτητος** *148d4-5: η πρόθεση μίμησης του Θεαιτήτειου Θεωρήματος Περιοδικότητας στην πλατωνική φιλοσοφία*

Ο Πλάτων, χρησιμοποιώντας την έκφραση «*πειρῶ μιμούμενος*» στο χωρίο *Θεαίτητος* 148d4-5 αναφέρεται στην πρόθεση μίμησης του μαθηματικού Θεωρήματος που απέδειξε ο Θεαίτητος, στην δική του φιλοσοφία, με σκοπό να αποτελέσει μοντέλο για την απάντηση καίριων φιλοσοφικών ερωτημάτων όπως το σε τι συνίσταται η γνώση ενός νοητού Όντος.
Με σκοπό να προσδιορίσουμε με βεβαιότητα το μαθηματικό Θεώρημα που αποδείχθηκε από τον Θεαίτητο, δεν θα αρκεστούμε στην ερμηνεία του χωρίου 147d3-148b2 που το περιγράφει όπως κάναμε μέχρι τώρα, αλλά θα ερευνήσουμε και τις φιλοσοφικές μιμήσεις αυτού του Θεωρήματος που ο Πλάτων εφάρμοσε. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τις δύο εντυπωσιακές μιμήσεις, που εμφανίζονται στα χωρία *Φίληβος* 16c, 23b-25e (Ενότητα 3.5) και *Πολιτικός* 283a-287b (Ενότητα 3.6).

3.5. Φιλοσοφική μίμηση του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου στα χωρία **Φίληβος** *16c, 23b-25e: κάθε νοητό Ον είναι η μείξη του ανθυφαιρετικού απείρου και του ανθυφαιρετικού πέρατος*

Η πιο εντυπωσιακή φιλοσοφική μίμηση του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου εμφανίζεται ως κεντρικό θέμα στα χωρία *Φίληβος* 16c, 23b-25e:
κάθε νοητό Ον είναι η μείξη των δύο Φιλήβειων αρχών, Απείρου και Πέρατος.

Μια δυάδα ευθειών που είναι ασύμμετρες αλλά έχουν σύμμετρα τετράγωνα είναι μια δυάδα ευθειών με άπειρη ανθυφαίρεση που τα τετράγωνά τους έχουν πεπερασμένη ανθυφαίρεση. Η δυάδα αυτή αποτελεί συνεπώς μια μείξη του ανθυφαιρετικού απείρου και του ανθυφαιρετικού πέρατος. Επιπλέον, μια τέτοια δυάδα έχει, σύμφωνα με το Ασθενές Θεώρημα Περιοδικότητας του Θεαίτητου, περιοδική ανθυφαίρεση, και είναι συνεπώς μια γεωμετρική οντότητα της οποίας το φιλοσοφικό ανάλογο, όπως είδαμε στην Ενότητα 2, είναι ένα νοητό Ον.
Επομένως, για να στηρίξουμε τον ισχυρισμό ότι το κεντρικό θέμα στον *Φίληβο* είναι πράγματι μια φιλοσοφική μίμηση του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου, απλώς πρέπει να αποδείξουμε ότι το Φιλήβειο Άπειρο είναι το ανθυφαιρετικό Άπειρο και το Φιλήβειο Πέρας είναι το ανθυφαιρετικό Πέρας. Αυτό θα πραγματοποιηθεί στην Ενότητα 3.5.1, παρακάτω.

*3.5.1. Το Φιλήβειο Άπειρο είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της άπειρης ανθυφαίρεσης και της ασυμμετρίας, και το Φιλήβειο Πέρας είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της πεπερασμένης ανθυφαίρεσης και της συμμετρίας (***Φίληβος** *23b-25e)*

Ας εξετάσουμε πρώτα την περιγραφή της *Φιλήβειας αρχής του Πέρατος* από τον Πλάτωνα:

«And the things which do not admit of more and less and the like, but do admit of all that is opposed to them (*τούτων δὲ τὰ ἐναντία πάντα δεχόμενα*) —first *equality* and the equal (*τὸ ἴσον καὶ ἰσότητα*), then the *double* (*τὸ διπλάσιον*), and *anything which is a ratio of number to number* (*πᾶν ὅτιπερ ἂν πρὸς ἀριθμὸν ἀριθμὸς*) or measure to measure, all these might properly be assigned to the class of *the finite* (*τὸ πέρας*).»
(*Φίληβος* 25a6-b2)

«The class of the *equal* (*ἴσου*) and *double* (*διπλασίου*), and everything which puts an end (*παύει*) to the differences between opposites and makes (*ἀπεργάζεται*) them *commensurable* (*σύμμετρα*) and harmonious (*σύμφωνα*) by the introduction (*ἐνθεῖσα*) of number (*ἀριθμὸν*).»
(*Φίληβος* 25d11-e2)

(Plato, *Philebus*, trans: Fowler 1925, με τροποποιήσεις).

Μια σύγκριση αυτών των αποσπασμάτων με τις Προτάσεις 1-8 του Βιβλίου X των *Στοιχείων*, αποκαλύπτει αμέσως πως η *Φιλήβεια αρχή του Πέρατος* είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της *πεπερασμένης ανθυφαίρεσης* και άρα, μέσω της Πρότασης X.2 των Στοιχείων, της *συμμετρίας*.

Ο Πρόκλος, στα *Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη* 7,1-5 (Morrow 1970) επιβεβαιώνει πλήρως την ταύτιση του Φιλήβειου Πέρατος με την συμμετρία:

«And if the Finite were absent (*τοῦ δὲ πέρατος ἀναιρεθέντος*), there would be no (*οὐκ ἄν ποτε*) commensurability (*συμμετρία*) or equality of ratios (*κοινωνία λόγων*), no identity of kinds (*ταυτότης εἰδῶν*) and equality (*ἰσότης*) in mathematics (*ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐφαίνετο)*, nor anything else that belongs in the column of the better (*ὅσα τῆς ἀμείνονός ἐστι συστοιχίας*), nor any knowledge of such matters (*οὐδ' ἂν ἐπιστῆμαι τῶν τοιούτων ἦσαν*), nor any fixed and precise concepts (*οὐδὲ καταλήψεις μόνιμοι καὶ ἀκριβεῖς*).»
(*Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη* 7,1-5)

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περιγραφή της *Φιλήβειας αρχής του Απείρου* από τον Πλάτωνα:

«For wherever they are present, they do not allow *each (of the dyad) to be a quantity* (*ποσὸν ἕκαστον*) to exist; they always (*ἀεὶ*) introduce in every instance an opposition — *(the dyad) more emphatic than that which is quieter, or vice versa* (*σφοδρότερον ἡσυχαιτέρου καὶ τοὐναντίον*) — and thus they create *the (dyad) more and less* (*τὸ πλέον καὶ τὸ ἔλαττον*), thereby doing away with *fixed quantity* (*ποσὸν*).»
(*Φίληβος* 24c2-6)

«For, as I said just now, if they did not abolish *quantity* (*ποσὸν*), but allowed it and *measure* (*τὸ μέτριον*) to make their appearance in the abode *of the (dyad) more and less* (*μᾶλλον καὶ ἧττον*), *the (dyad) emphatically and gently* (*σφόδρα καὶ ἠρέμα*), those latter would be banished from their own proper place. When once they had accepted *quantity* (*τὸ ποσόν*), they would no longer be *(the dyad) hotter or colder*; for *(the dyad) hotter and colder* (*θερμότερον…ψυχρότερον*) are always (*ἀεὶ*) progressing and never stationary; but *quantity* (*ποσὸν*) is at rest and does not progress. By this reasoning *(the dyad) hotter and its opposite* are shown to be *infinite* (*ἄπειρον*).»
(*Φίληβος* 24c6-d7)

«we ought to collect all things that are *scattered* (*διέσπασται*) and *split up* (*διέσχισται*) to be put in the class of *the infinite* (*τὸ τοῦ ἀπείρου γένος*).»
(*Φίληβος* 25a1-3)

(Plato, *Philebus*, trans: Fowler 1925, με τροποποιήσεις).

Ένα Άπειρο είναι μια δυάδα της γενικής μορφής *Περισσότερο και Λιγότερο* («*μᾶλλόν τε καὶ ἧττον*», *Φίληβος* 25c5-d2), όπως είναι για παράδειγμα η δυάδα *Θερμότερο και Ψυχρότερο* («*θερμοτέρου καὶ ψυχροτέρου*», *Φίληβος* 24a7-8), ή η δυάδα *Εμφατικά και Ήρεμα* («*τὸ σφόδρα καὶ ἠρέμα*», *Φίληβος* 24c1-2). Παρατηρούμε λοιπόν πως *το Φιλήβειο Άπειρο αποτελεί* κατ' αρχάς *μια δυάδα αντιθέτων*.

Εάν η δυάδα *Περισσότερο και Λιγότερο* ανανεώνεται σε κάθε στάδιο, *επ' αόριστον* (*ἀεὶ*), έτσι ώστε να διαιρείται σε άπειρα το πλήθος μέρη, τότε ανήκει στην κλάση του Απείρου. Εάν όμως αυτή η διαδικασία σταματήσει, τότε κάθε μέρος της δυάδος μετατρέπεται σε ποσότητα[9]/αριθμό, και αποτελεί πλέον στοιχείο της κλάσης του Πέρατος. Όμως έχουμε ήδη δει πως τα στοιχεία του Πέρατος σύμμετρες δυάδες, σε πεπερασμένη ανθυφαίρεση. Είναι πλέον σαφές ότι το *Φιλήβειο Άπειρο* είναι μια δυάδα σε *άπειρη ανθυφαίρεση*, και συνεπώς, από την Πρόταση X.2 των Στοιχείων, *ασύμμετρη*.

Ο Πρόκλος, στα *Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη* 6,19-22 (Morrow 1970), επιβεβαιώνει πλήρως την ταύτιση του Φιλήβειου Απείρου με την ασυμμετρία:

> «If there were no Infinite (*τῆς μὲν ἀπειρίας οὐκ οὔσης*),
> all magnitudes would be commensurable (*τά τε μεγέθη πάντα σύμμετρα ἂν ἦν*) and
> there would be nothing irrational or ratioless (*οὐδὲν ἄρρητον οὐδὲ ἄλογον*),
> features that are thought to distinguish geometry from arithmetic (οἷς δὴ δοκεῖ διαφέρειν τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τῶν ἐν ἀριθμητικῇ).»
> (*Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη 6,19-22*)

*3.5.2. Κάθε νοητό Ον είναι η μείξη Απείρου και Πέρατος (***Φίληβος** *16c, 23c-d, 25b)*

Με βάση τον διάλογο *Φίληβος*, κάθε Πλατωνική Ιδέα είναι μια *μείξη* του Φιλήβειου *Απείρου* και του Φιλήβειου *Πέρατος*.[10]

> «***Socrates.*** One which is easy to point out, but very difficult to follow for through it *all the inventions of art* have been brought to light. See this is the road I mean.
> ***Protarchus***. Go on what is it?
> ***Socrates***. A gift of gods to men, as I believe, was tossed down from some divine source through the agency of a Prometheus[11] together with a gleaming fire; and the ancients, who

[9] Ακολουθούν κάποια αποσπάσματα, από Πυθαγορείους και νέο-Πυθαγορείους, στα οποία οι λέξεις *ποσὸν* (ποσότητα) και *αριθμός* χρησιμοποιούνται ως ισοδύναμες μεταξύ τους: Ξενοκράτης, *Απόσπασμα* 87, Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις Πλάτωνος Ανάγνωσιν* 19,15-18, Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή* (1,2, 1,7,1,1-2, 2,22, 2,23,1,1-6), *Αρμονικόν Εγχειρίδιον* (4,1,37-38, 6,1,1-6), και *Θεολογούμενα Αριθμητικής* (20,1-21,2), Ασκληπιός Τραλλιανός, *Σχόλια εις το Πρώτον Βιβλίον της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής* 1,49,1-3, Ιάμβλιχος, *Περί Κοινής Μαθηματικής Επιστήμης* 7,33-61, Πρόκλος, *εις Ευκλείδην* 35,21-36,3, *Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη* V.9, V.10, X.39.

[10] Κάποιοι μελετητές, π.χ. ο Cherniss (Cherniss 1945) και ο Ryle (Ryle 1966), δεν πιστεύουν ότι η φράση «*τὰ ἀεὶ λεγόμενα εἶναι*» (*Φίληβος* 16c9) αναφέρεται στα νοητά Όντα. Αυτή τους η θέση συνδέεται με την γενικότερη αντιμετώπισή τους ως προς τη μέθοδο της Διαίρεσης και Συναγωγής, την οποία θεωρούν χαμηλής αξίας παρά τους επαναλαμβανόμενες διθυραμβικές περιγραφές της από τον ίδιο τον Πλάτωνα.

were better than we and lived nearer the gods, handed down the tradition that *all the things which are ever said to exist* (***τῶν ἀεὶ λεγομένων εἶναι***) *consist of one and many and have inherent in them the finite and the infinite* (***πέρας δὲ καὶ ἀπειρίαν ἐν αὑτοῖς σύμφυτον ἐχόντων***).»
(*Φίληβος* 16c)

«***Socrates.*** We said that God revealed in the universe two elements, *the infinite and the finite*, did we not?
Protarchus. Certainly.
Socrates. Let us, then, assume these as two of our classes, and a third, made *One by combining (**ἕν τι συμμισγόμενον**) these two*.»
(*Φίληβος* 23c-d)

«***Socrates.*** Well, what shall we say is the nature of *the third class, made by combining (**τὸ μεικτὸν**) these two?*»
(*Φίληβος* 25b)

(Plato, *Philebus*, trans: Fowler 1925, με τροποποιήσεις).

Συνεπώς, θα είμαστε σε θέση να ανακαλύψουμε τη φύση των Πλατωνικών Ιδεών και Όντων, αν κατανοήσουμε τη σημασία των όρων «Φιλήβειο Πέρας», «Φιλήβειο Άπειρο» και «Φιλήβεια μείξη» Απείρου και Πέρατος.

3.6. Φιλοσοφική μίμηση του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου στο χωρίο **Πολιτικός** *283a-287b*

Με βάση τον διάλογο *Πολιτικός*, κάθε νοητό Ον είναι προϊόν μιας διπλής μέτρησης:
- πρώτον σε σχέση με το αντίθετό του και
- δεύτερον σε σχέση με τον γεωμετρικό μέσο αυτών των δύο αντιθέτων.

Η πρώτη μέτρηση, η μέτρηση δηλαδή σε σχέση με το αντίθετο, αποτελεί όπως θα αναλυθεί παρακάτω ένα Φιλήβειο Πέρας. Σημαντικό ρόλο για να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα αυτό θα παίξει ο αποκλεισμός της *ἡδονὴς* (η οποία όπως θα δούμε αποτελεί ένα Φιλήβειο Άπειρο) από τα ζεύγη αντιθέτων που είναι ικανά να συμμετέχουν στη διπλή μέτρηση.
Η δεύτερη μέτρηση, η μέτρηση δηλαδή σε σχέση με τον γεωμετρικό μέσο των δύο αντιθέτων, αναφέρεται επαναλαμβανόμενα στον διάλογο ως «γένεση», η οποία όπως θα δούμε παραπέμπει στην άπειρη ανθυφαιρετική διαίρεση. Η δεύτερη μέτρηση αποτελεί ένα Φιλήβειο Άπειρο.

Στις παρακάτω υποενότητες θα παρουσιαστεί η ανάλυση που οδηγεί στον συσχετισμό της διπλής μέτρησης στον *Πολιτικό* (δηλαδή τον συνδυασμό Φιλήβειου Πέρατος και Απείρου) με την συνθήκη για μήκει-μόνο ασύμμετρα μεγέθη του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου.

3.6.1. Η «διπλή μέτρηση» στο χωρίο **Πολιτικός** *284e2-8*

[11] Το πιθανότερο είναι πως πρόκειται για μια αναφορά στον Πυθαγόρα, η φιλοσοφία του οποίου βασίζεται στις αρχές του Απείρου και του Πέρατος (Φιλολαος, *Αποσπάσματα* 1, 2, 6 και Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά* 987a13-28). Βλ. επίσης την Ενότητα 3.7, παρακάτω.

Σύμφωνα με το χωρίο *Πολιτικός* 284e2-8, οι αριθμοί, τα μεγέθη, οι ιδιότητες υπόκεινται σε *διπλή μέτρηση* όπως περιγράφεται στη συνέχεια.

Πρώτον, ένας αριθμός, ένα μέγεθος ή μια ιδιότητα, έστω x, μετράται πρώτα σε σχέση με το αντίθετο, έστω y:

> «***Eleatic Stranger.*** We should evidently divide the art of measurement (***μετρητικήν***) into two parts in accordance with what has been said. *One part* is all the arts which measure (***μετροῦσιν***) number, length, depth, breadth, and thickness against their opposites (***πρὸς τοὐναντίον***);»
> (*Πολιτικός* 284e2-5)

(Plato, *Statesman*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

Η μέτρηση σε σχέση με το αντίθετο ενός μεγέθους ή αριθμού ή ιδιότητας αφορά δυάδες όπως για παράδειγμα *μήκος και βραχύτητα* (283c11), *υπεροχή και έλλειψη* (283c11-d1), *μέγεθος και μικρότητα* (283d7-8), *μείζον και ελάσσον* (283d11-283e1), *μεγάλο και μικρό* (283e8-9).

Δεύτερον, το x μετράται σε σχέση με τον *μέσο* των x και y:

> «*the other* is those which measure them in relation to the moderate (***τὸ μέτριον***), the fitting (***τὸ πρέπον***), the opportune (***τὸν καιρὸν***), the needful (***τὸ δέον***), and all the other standards that are situated *in the mean* (***τὸ μέσον***) between the extremes (***τῶν ἐσχάτων***).»
> (*Πολιτικός* 284e5-8)

(Plato, *Statesman*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

3.6.2. Η πρώτη μέτρηση δεν πρέπει να είναι ἡδονὴ (Πολιτικός *286c8-d6)*

Δεν είναι όλες οι δυάδες αντιθέτων (x, y) άξιες διπλής μέτρησης. Συγκεκριμένα εάν η δυάδα αντιθέτων (x, y) είναι *ἡδονὴ* (*και λύπη*), τότε ένα τέτοιο ζεύγος δεν είναι άξιο δεύτερης μέτρησης.

> «***Eleatic Stranger.*** What I have to say, then, is that you and I, remembering what has just been said, must praise or blame the brevity or length of our several discussions, not [only] by comparing their various lengths with one another (***μὴ πρὸς ἄλληλα τὰ μήκη κρίνοντες***), but with reference to that part of the art of measurement (***κατὰ τὸ τῆς μετρητικῆς μέρος***), which we said before must be borne in mind; I mean the standard of fitness (***πρὸς τὸ πρέπον***).
> ***Younger Socrates.*** Quite right.
> ***Eleatic Stranger.*** But we must not measure all lengths by fitness (***πρὸς τὸ πρέπον***), either.
> For we shall *not in the least want to measure by fitness* (***οὐδὲν προσδεησόμεθα***) a length (***μήκους***) whose first measurement **has produced** (***ἁρμόττοντος***) ***pleasure*** (***πρὸς τὴν ἡδονὴν***), except, perhaps, as a secondary consideration (*πάρεργόν τι*).»
> (*Πολιτικός* 286c8-d6)

(Plato, *Statesman*, trans: Fowler 1921, με τροποποιήσεις).

3.6.3. Κάθε ἡδονὴ είναι ένα Φιλήβειο Ἄπειρο (Φίληβος *27e,31a,41d), άρα η πρώτη μέτρηση είναι ένα Φιλήβειο Πέρας*

Εύλογα θα αναρωτηθεί κανείς γιατί ο Πλάτων αποκλείει από τη δεύτερη μέτρηση την δυάδα αντιθέτων που συμπεριλαμβάνει την *ἡδονὴ*. Ο λόγος θα αρχίσει να διαφαίνεται όταν συνειδητοποιήσουμε ότι η *ἡδονὴ* είναι ένας φιλοσοφικός όρος για το Φιλήβειο ανθυφαιρετικό Άπειρο: κάθε *ἡδονὴ*, ή ακριβέστερα, κάθε δυάδα *ἡδονὴ καί λύπη* είναι ένα Άπειρο.

> «***Socrates.*** Is *pleasure and pain* a *finite* (***ἡδονὴ καὶ λύπη πέρας ἔχετον***), or are they among the things which *admit of more and less* (***τῶν τὸ μᾶλλόν τε καὶ ἧττον δεχομένων***)?
> ***Philebus.*** Yes, they are among those which *admit of the more* (***τῶν τὸ μᾶλλον***), Socrates; for *pleasure* (***ἡδονὴ***) would not be absolute good if it were not *infinite in multitude and in the more* (***ἄπειρον καὶ πλήθει καὶ τῷ μᾶλλον***).»
> (*Φιληβος* 27e)
>
> «***Socrates.*** Let us, then, remember […] that *pleasure* (***ἡδονὴ***) was itself *infinite* (***ἄπειρός***) and belonged to the class which, in and by itself, has not and never will have either beginning or middle or end.»
> (*Φιληβος* 31a)
>
> «***Socrates.*** And have we not also said and agreed and settled something further?
> ***Protarchus.*** What?
> ***Socrates.*** That both *pleasure and pain* (***λύπη τε καὶ ἡδονή***) admit of *the more and less* (***τὸ μᾶλλόν τε καὶ ἧττον***) and are of the class of *the infinite* (***τῶν ἀπείρων***).
> ***Protarchus.*** Yes, we have said that, certainly.»
> (*Φιληβος* 41d)

(Plato, *Philebus*, trans: Fowler 1925, με τροποποιήσεις).

Το ότι «η δυάδα x, y παράγει *ἡδονὴ*» ισοδυναμεί με το ότι «η δυάδα x, y είναι ένα *Άπειρο*», όπως ξεκάθαρα δηλώνεται στα παραπάνω χωρία 27e, 31a, 41d του Πλατωνικού διαλόγου περί ηδονών *Φίληβος*. Συνεπώς, από τη στιγμή που η *ἡδονὴ* αποκλείεται από τη διπλή μέτρηση προκύπτει πως **η συνθήκη για την πρώτη μέτρηση είναι η δυάδα x, y *να μην είναι ένα Φιλήβειο Άπειρο*, άρα είναι αναγκαστικά ένα *Φιλήβειο Πέρας***.

3.6.4. Η δεύτερη μέτρηση είναι το x σε σχέση με τον γεωμετρικό μέσο της δυάδος (x, y)

Ερμηνεύουμε τον «μέσο των x και y» στην περιγραφή της δεύτερης μέτρησης στην Ενότητα 3.6.1, ως το φιλοσοφικό ανάλογο του *γεωμετρικού μέσου* των x και y.
Η επιλογή αυτή στηρίζεται έντονα στα *Στοιχεία*, και ειδικότερα στο Θεαιτήτειο Βιβλίο X των *Στοιχείων*. Είναι αξιοσημείωτο πως στα *Στοιχεία* υπάρχουν 738 εμφανίσεις το όρου «*μέσον*» (και παραλλαγών του), και αυτές αναφέρονται αποκλειστικά και χωρίς εξαίρεση τον «γεωμετρικό μέσο» (δύο αριθμών ή δύο μεγεθών), ενώ ΚΑΜΙΑ εξ αυτών δεν αναφέρεται σε αριθμητικό ή άλλον μέσο, ή οποιαδήποτε άλλη έννοια. Εξ αυτών, η συντριπτική πλειοψηφία (624), εμφανίζονται στο Θεαιτήτειο Βιβλίο X[12]. Ο εναλλακτικός όρος «*μέτριον*» που χρησιμοποιείται (*Πολιτικός* 283e, 284a,c,d,e), έχει κατά κανόνα μια έννοια ισοδύναμη με το «*μέσον*».

[12] Η συγκεκριμένη παρατήρηση αποδίδεται στην Α. Μπασιάκου (Bassiakou 2004).

3.6.5. Η δεύτερη μέτρηση είναι μια γένεση για τα νοητά, ένα Φιλήβειο Άπειρο

Στο χωρίο Παρμενίδης 142c-143a, η άπειρη ανθυφαιρετική Διαίρεση της δυάδος <Ἓν, Ὄν> του νοητού Όντος, που σκιαγραφήθηκε στην Ενότητα 2, περιγράφεται με μία εμμένουσα επαναλαμβανόμενη χρήση λέξεων που αναφέρονται στην γένεση, όπως «*γίγνεσθαι*» (142d5), «*γί[γ]νεται*» (142e4), «*γίνηται*» (142e6), «*γιγνόμενον*» (143a1). Ο Πρόκλος στο χωρίο 3,91,9-24 της *Πλατωνικής Θεολογίας*, σχολιάζει σχετικά με αυτή τη συχνή εμφάνιση των λέξεων περί γένεσης, πως συμβαίνει ως αναφορά στην «πρόοδο/διαίρεση του νοητού πλήθους» (*περὶ τῆς προόδου τοῦ νοητοῦ πλήθους*).
Μια παρόμοια περιγραφή της Άπειρης ανθυφαιρετικής Διαίρεσης των νοητών σαν γένεση, εντοπίζεται στον *Φίληβο*: «*γένεσιν εἰς οὐσίαν*», (26d-8), «*γεγενημένην οὐσίαν*», (27b7-9).
Στον *Πολιτικό*, η ίδια επίμονη χρήση λέξεων σχετικά με τη γένεση, όπως «*ὄντως γιγνόμενον*» (283e3-7), «*κατὰ τὴν τῆς γενέσεως ἀναγκαίαν οὐσίαν*» (283d7-9), «*πρὸς τὴν τοῦ μετρίου γένεσιν*» (284b9-c1, d5-6), συμβαίνει ως αναφορά στην άπειρη ανθυφαιρετική διαίρεση των δεύτερων μετρήσεων για τα νοητά, δηλαδή των μετρήσεων σε σχέση με τον μέσο. **Συνεπώς η συνθήκη της δεύτερης μέτρησης είναι η εξής: η δυάδα *x, μέσος (x, y)* είναι ένα *Φιλήβειο Άπειρο*.**

3.6.6. Αποκρυπτογραφώντας το νόημα της διπλής μέτρησης: η φιλοσοφική διπλή μέτρηση στο χωρίο **Πολιτικός** *283a-287b αποτελεί φιλοσοφική μίμηση της Θεαιτήτειας συνθήκης μιας δυάδος ευθειών μήκει-μόνο ασύμμετρων*

Με σκοπό να κατανοήσουμε την έννοια αυτών των δύο μετρήσεων, ας υποθέσουμε πως τα x και y είναι ευθείες, και m=μέσος(x, y) είναι ο γεωμετρικός μέσος των x και y, αυτός περιγράφεται στην Πρόταση VI.13 των *Στοιχείων*, δηλαδή m είναι μια ευθεία τέτοια ώστε x/m=m/y.

Έστω r κάποια δοθείσα, «*προτεθείσα*» ευθεία, όπως στον Ορισμό X.3 των *Στοιχείων*.
Από την Πρόταση II.14 των *Στοιχείων*, υπάρχουν ευθείες a, b, τέτοιες ώστε $xr=a^2$, $yr=b^2$.
Από την Πρόταση VI.1 των *Στοιχείων*, προκύπτει πως $\mathbf{x/y=a^2/b^2}$.

Επιπλέον, mr είναι ο γεωμετρικός μέσος των τετραγώνων a^2, b^2, καθώς με χρήση της Πρότασης VI.1, $a^2/mr=xr/mr=x/m=m/y=mr/yr=mr/b^2$.
Όμως ο γεωμετρικός μέσος των a^2, b^2 είναι προφανώς ab.
Επομένως ab=mr.
Από το συμπέρασμα αυτό σε συνδυασμό με την Πρόταση VI.1, προκύπτει πως $x/m=xr/mr=a^2/ab=a/b$.
Συνεπώς, **x/m=a/b**.

Επομένως αποκαλύπτεται πως η φιλοσοφική διπλή μέτρηση στον *Πολιτικό*, δηλαδή το ότι ***το x σε σχέση με το y είναι Πέρας, και το x σε σχέση με το m είναι Άπειρο***, αποτελεί ακριβή μίμηση, φιλοσοφικό ανάλογο, της συνθήκης του Ασθενούς Θεαιτήτειου Θεωρήματος η οποία είναι η εξής: ***το a^2 και το b^2 είναι μεγέθη σύμμετρα με το a και το b να είναι μεγέθη ασύμμετρα (δηλ. a και b μήκει-μόνο***

ασύμμετρα).

*3.6.7. Η διπλή μέτρηση είναι η αιτία κάθε Διαίρεσης και Συναγωγής ενός νοητού Όντος (***Πολιτικός** *283a-287b)*

Ο Ασπαλιευτής, ο Σοφιστής, ο Πολιτικός, η Υφαντική, όλα τα παραπάνω αποτελούν νοητά Όντα. Ένα νοητό Ον γίνεται γνωστό στους ανθρώπους ως μια Τέχνη, η οποία είναι μια οντότητα με κατώτερο οντολογικό status από ό,τι το ίδιο το νοητό Ον, καθώς σε αυτήν οι διαιρέσεις είναι ευρύτερες και η Ενότητα και Συναγωγή είναι λιγότερο έκδηλη από ό,τι συμβαίνει στο νοητό Ον. Η γνώση όλων των Τεχνών, και κατά συνέπεια όλων των νοητών Όντων, από την ανθρώπινη ψυχή, επιτυγχάνεται μέσω της μεθόδου της *Διαίρεσης και Συναγωγής* (*Πολιτικός* 284e-285c), η οποία εμφανίζεται ισοδύναμα ως *Διαίρεση κατά Είδη* (*Πολιτικός* 286d-287a) ή ως *Όνομα και Λόγος* (*Πολιτικός* 285c-286b). Η μέθοδος της Διαίρεσης και Συναγωγής είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης.
Η αιτία που προκαλεί την Διαίρεση και Συναγωγή κάθε νοητού Όντος, και τελικά τη γνώση του, είναι η θεμελιώδης συνθήκη της διπλής μέτρησης (284a5-7, 284b7-c1, 286b9-10), δηλαδή η μείξη Πέρατος και Απείρου.

3.7. Η ισοδυναμία των τριών αποσπασμάτων αποκαλύπτει τη δήλωση του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου

Παρακάτω παρουσιάζονται με τη μορφή πίνακα, τα τρία πλατωνικά αποσπάσματα που μελετήθηκαν στην παρούσα Ενότητα 3:

Θεαίτητος **147d-148b**	***Φίληβος*** **16c, 23b-25e**	***Πολιτικός*** **283a-287b**
Εάν a, b είναι ευθείες, τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$ για μη-τετράγωνο αριθμό N (ή γενικότερα ευθείες **δυνάμει-μόνο σύμμετρες**),	Η μείξη του Φιλήβειου **Πέρατος**, του **Σύμμετρου** και του Φιλήβειου **Απείρου**, του **Ασύμμετρου**	Η διπλή μέτρηση, η πρώτη σε σχέση με το αντίθετο (της *ἡδονῆς* εξαιρουμένης) - δηλαδή ένα **Πέρας**, και η δεύτερη σε σχέση με τον μέσο του ζεύγους των αντιθέτων (στην ουσία μια γένεση) - δηλαδή ένα **Άπειρο**
τότε **τα άπειρα πολλά μέρη συνάγονται σε Ένα**.	παράγει κάθε **νοητό Ον**, δηλαδή κάθε φιλοσοφικό ανάλογο μιας δυάδος σε περιοδική ανθυφαίρεση, και την **Συναγωγή των Πολλών σε Ένα**.	παράγει κάθε **νοητό Ον**, ή κάθε **Διαίρεση και Συναγωγή**.

Δεδομένου ότι, όπως περιεγράφηκε στην Ενότητα 2, ένα νοητό Ον, είναι το φιλοσοφικό ανάλογο μιας δυάδος σε περιοδική ανθυφαίρεση και του οποίου τα μέρη, ακριβώς λόγω της ανθυφαιρετικής περιοδικότητας, εξισώνονται και συνάγονται σε Ένα, αναγνωρίζουμε ότι:

> κάθε ένα από τα χωρία *Φίληβος* 16c, 23b-25e και *Πολιτικός* 283a-287b είναι ένα φιλοσοφικό ανάλογο, μια φιλοσοφική μίμηση,

του ακόλουθου

> ***Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου*:** εάν a, b είναι ευθείες, τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$ για μη-τετράγωνο αριθμό N (ή γενικότερα, ευθείες δυνάμει-μόνο σύμμετρες), τότε η ανθυφαίρεση του a προς το b είναι περιοδική.

Ο καθορισμός του Αθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας ως την πρωτότυπη μαθηματική δήλωση του Θεαίτητου, την οποία ο Πλάτων θεώρησε άξια να μιμηθεί στην φιλοσοφία του, θεμελιώνεται με βεβαιότητα και ακρίβεια μέσω της ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε στις προηγούμενες υποενότητες.

3.8. Το Φιλήβειο Πέρας συγκρινόμενο με το Πυθαγόρειο Πέρας

Όπως συμβαίνει στην Πλατωνική φιλοσοφία, έτσι και για τους Πυθαγορείους, οι αρχές που διέπουν τα Όντα είναι το Άπειρο και το Πέρας (βλ. Φιλόλαος, *Αποσπάσματα* 1, 2, 6, και Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά* 987a13-28). Αν και η ανθυφαιρετική φύση του Απείρου είναι κοινή τόσο για τον Πλάτωνα όσο και για τους Πυθαγορείους, δεν συμβαίνει το ίδιο με την έννοια του Πέρατος το οποίο για τους Πυθαγορείους είναι ο Γνώμων . Συγκρίνοντας το (πιθανώς μη αυθεντικό) *Απόσπασμα* 11 του Φιλόλαου (όπου η γνώση επιτυγχάνεται με τον Γνώμωνα) με το χωρίο 546b-c της *Πολιτείας* (όπου ουσιαστικά ο Γνώμων αντικαθίσταται από την έννοια του Λόγου) προκύπτει πως η Πλατωνική έννοια του Λόγου είναι το αντίστοιχο του Γνώμωνα των Πυθαγορείων. Στον *Φίληβο* όμως, ο Πλάτων δεν εμφανίζεται ικανοποιημένος με αυτήν την αντιστοιχία και υποστηρίζει την ανθυφαιρετική φύση του Πέρατος. Ο λόγος που ο Πλάτων έχει τη δυνατότητα να τροποποιήσει στη φιλοσοφία του τη φύση του Πέρατος και να απομακρυνθεί από το αρχικό Πυθαγόρειο σχήμα, δεν είναι άλλος από το γεγονός ότι πλέον έχει στα χέρια του το Θεώρημα Περιοδικότητας του Θεαίτητου.

Ενότητα 4. Η ανακατασκευή της απόδειξης του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου, επιστρατεύοντας αποκλειστικά εργαλεία από το Βιβλίο Χ των Στοιχείων Ευκλείδη (τις αποτομές (Προτάσεις Χ.73-107), τις διωνυμικές ευθείες (Προτάσεις Χ.36-72) και την συζυγία τους (Προτάσεις Χ.112-114) και ένα επιχείρημα περιστερεώνα

Έχοντας πλέον προσδιορίσει τη δήλωση του Θεωρήματος του Θεαίτητου (στην ασθενή μορφή του), το επόμενο βήμα, που επιχειρείται στην παρούσα Ενότητα 4, είναι να ανακαλύψουμε το πώς ο Θεαίτητος κατάφερε να το αποδείξει. Γνωρίζουμε πως το Βιβλίο Χ των *Στοιχείων* γενικά αποδίδεται στον Θεαίτητο, και είναι φυσικό επακόλουθο να προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε στο Βιβλίο αυτό τα πιθανά εργαλεία για μια ανακατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος του Θεαίτητου.

Η ανακατασκευή της απόδειξης του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου βασίζεται στις αποτομές ευθείες (που εξετάζονται στην 4.1), τη συζυγία των αποτομών με τις διωνυμικές ευθείες (που εξετάζονται στην 4.2), την επαγωγική μετατροπή των ανθυφαιρετικών σχέσεων της τετραγωνικής εξίσωσης $a^2=Nb^2$ για N μη-τετράγωνο σε σχέσεις συζυγίας (στην 4.5) και σε ένα επιχείρημα περιστερεώνα.

4.1. Αποτομές ευθείες

Η πρώτη έννοια στο Βιβλίο Χ που θα αποδειχθεί σχετική με την αναζήτηση των απαραίτητων εργαλείων για την απόδειξη του Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου είναι η έννοια μιας *αποτομής* ευθείας.

4.1.1. Ο ορισμός της αποτομής ευθείας

Ορισμός. *Αποτομή ευθεία* (Πρόταση Χ.73 των *Στοιχείων*)
Έστω r μια προτεθείσα ευθεία.
Και έστω ασύμμετρες ευθείες ζ και η, με ζ>η, για τις οποίες ισχύει πως $ζ^2$, $η^2$ σύμμετρα με το τετράγωνο r^2 της προτεθείσας ευθείας r.
Τότε, η διαφορά γ=ζ-η καλείται **αποτομή ευθεία**.

Η μελέτη των αποτομών ευθειών καταλαμβάνει ένα μέρος του Βιβλίου Χ με μεγάλη σημασία, τις Προτάσεις Χ.73-107, τριανταπέντε στο σύνολο, με την παρεμβολή των Ορισμών Χ.84/85, ως κάτωθι:
Χ.73-78: ορίζονται έξι τάξεις αφαιρετικών *άλογων γραμμών*, (μία εκ των οποίων (Χ.73) είναι η *αποτομή*) και παρουσιάζεται η «αλογία», δηλαδή η τετραγωνική ασυμμετρία, κάθε μίας εξ αυτών των ευθειών. Οι άλογες γραμμές θα συσχετιστούν με τις αποτομές στην εξάδα Χ.91-96 παρακάτω.
Χ.79-84: παρουσιάζεται η μοναδικότητα της αναπαράστασης κάθε μίας εκ των ευθειών που ορίστηκαν στις Χ.73-78.
Χ.84/85: ορίζονται οι έξι τάξεις των αποτομών ευθειών.
Χ.85-90: κατασκευάζεται κάθε μία εκ των αποτομών ευθειών που ορίστηκαν

παραπάνω.
X.91-96: κατασκευάζεται η «τετραγωνική ρίζα» κάθε μίας από τις αποτομές ευθείες των Ορισμών X.84/85 και σχετίζεται με μια από τις ευθείες που ορίστηκαν στις X.73-78.
X.97-102: κατασκευάζεται το «τετράγωνο» κάθε μίας εκ των ευθειών που ορίστηκαν στις X.73-78, και γίνεται ο συσχετισμός του με μια από τις αποτομές των Ορισμών X.84/85.
X.103-107: μια λειψή εξάδα, όπου παρουσιάζεται το αναλλοίωτο ως προς τη συμμετρία κάθε μίας εκ των έξι αφαιρετικών άλογων γραμμών που ορίστηκαν στις X.73-78.

Για αναλυτικότερη επεξήγηση των παραπάνω, βλ. Κλεφτάκη 2004.

4.1.2. Απλές αποτομές ευθείες

Το μόνο σημείο στο Βιβλίο X όπου οι αποτομές ευθείες ρητά *κατασκευάζονται* είναι η εξάδα των Προτάσεων X.85-90. Παρατηρούμε ότι οι αποτομές ευθείες που κατασκευάζονται εκεί είναι τρόπον τινά λιγότερο γενικές από ό,τι θα περίμενε κάποιος με βάση τον ορισμό της αποτομής ευθείας. Προκειμένου να εξηγήσουμε αυτή τη διαφορά, εισαγάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. Μια αποτομή ευθεία γ είναι ***απλή αποτομή*** εάν για κάποιον μη-τετράγωνο N υπάρχουν ευθείες a και b τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$, και φυσικοί αριθμοί p, q, λ, τέτοιοι ώστε είτε $λγ=pa-qb$ είτε $λγ=qb-pa$.
Μια απλή αποτομή είναι ***ακέραια*** αν $λ=1$, ***κλασματική*** αν $λ>1$.

Η τυπική επιλογή για την προτεθείσα ευθεία μιας απλής αποτομής είναι η ευθεία b, η οποία αντιστοιχεί στην *ποδιαία* του χωρίου *Θεαίτητος* 147d5, ή η ευθεία a, ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία r δυνάμει σύμμετρη με την a, δηλαδή τέτοια ώστε a^2, r^2 σύμμετρες επιφάνειες.

Σημείωση: Στα *Στοιχεία δεν* δίνεται ρητά ο ορισμός της απλής αποτομής, αλλά είναι ξεκάθαρο πως το Βιβλίο X ασχολείται με απλές αποτομές, καθώς και τα έξι είδη αποτομών ευθειών που κατασκευάζονται στις Προτάσεις X.85-90, τις μοναδικές κατασκευές αποτομών ευθειών στο Βιβλίο X, είναι απλές αποτομές ευθείες.

Πράγματι, στις Προτάσεις X.85-87, για την κατασκευή της ευθείας θεωρούμε έναν μη-τετράγωνο αριθμό N, τέτοιον ώστε $N=q^2-p^2$ (μια μέθοδος για την εύρεση τέτοιων αριθμών περιγράφεται στο Λήμμα 1 - X.28/29) και ευθείες a, b τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$. Κατασκευάζεται η αποτομή ευθεία qb-a (με προτεθείσα ευθεία την b στην X.85, την a στην X.86, και μια r ασύμμετρη τόσο στην a όσο και στην b στην X.87).
Στις Προτάσεις X.88-90, για την κατασκευή της ευθείας θεωρούμε έναν μη-τετράγωνο αριθμό N, τέτοιον ώστε $N=q^2+p^2$ (μια μέθοδος για την εύρεση τέτοιων αριθμών περιγράφεται στο Λήμμα 2 - X.28/29) και ευθείες a, b τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$. Κατασκευάζεται η αποτομή ευθεία a-qb (με προτεθείσα ευθεία την a στην X.88, την b στην X.89, και μια r ασύμμετρη τόσο στην a όσο και στη b στην X.90).
Στην Ενότητα 8 θα επιστρέψουμε με μερικές πιο λεπτομερείς παρατηρήσεις σχετικά με τις αποτομές ευθείες των Προτάσεων X.85-90.

Πρέπει να τονιστεί ότι ο γενικός ορισμός μιας αποτομής ευθείας (στην X.73) επιτρέπει και ευθείες της μορφής ζ-η, όπου $ζ^2=Nb^2$, $η^2=Mb^2$, για δύο (διαφορετικούς) μη-τετράγωνους αριθμούς N, M. Μια τέτοια αποτομή ευθεία πράγματι εμφανίζεται στην Πρόταση XIII.17 των *Στοιχείων*: η πλευρά s της έδρας του κανονικού 12έδρου είναι η ευθεία 1/3(a-a′), όπου $a^2=15d^2$, $a'^2=3d^2$, d η διάμετρος της σφαίρας στην οποία περιέχεται το 12εδρο.

Συνεπώς, ευθείες όπως αυτή που προκύπτει στη μελέτη του 12έδρου θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στον ορισμό των αποτομών ευθειών του Βιβλίου X. Αυτός φαίνεται να είναι και ο μοναδικός λόγος για τον οποίο υιοθετείται ο γενικός ορισμός των αποτομών, ενώ το κεντρικό μέλημα του Θεαίτητου, όπως επιβεβαιώνεται από όλες τις κατασκευές στο Βιβλίο X, φαίνεται να είναι οι απλές αποτομές ευθείες που προκύπτουν από τις ευθείες a, b, με $a^2=Nb^2$, για κάποιον μη-τετράγωνο αριθμό N.

4.1.3. Όλα τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα της ανθυφαίρεσης του a προς b με $a^2=Nb^2$, για κάποιον μη-τετράγωνο αριθμό N, είναι απλές αποτομές ευθείες

Η ακόλουθη Πρόταση συνδέει την έννοια μιας αποτομής ευθείας με την μελέτη της ανθυφαίρεσης του a προς b όταν $a^2=Nb^2$, και είναι η πρώτη σοβαρή ένδειξη ότι η έννοια εισάγεται στο Βιβλίο X ακριβώς με σκοπό να μελετηθεί η τετραγωνική ανθυφαίρεση.

Πρόταση. Εάν N είναι ένας μη-τετράγωνος αριθμός και a, b ευθείες τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$, τότε κάθε ανθυφαιρετικό υπόλοιπο της ανθυφαίρεσης του a προς b είναι μια απλή αποτομή.

Συμβολισμός: Για δύο *ασύμμετρα* (ομογενή) μεγέθη a, b, με a>b, συμβολίζουμε την άπειρη *ανθυφαίρεση* του a προς b με:

$a = I_0 b + γ_1$, με $b>γ_1$,
$b = I_1 γ_1 + γ_2$, με $γ_1>γ_2$,
$γ_1 = I_2 γ_2 + γ_3$, με $γ_2>γ_3$,
…
$γ_n = I_{n+1} γ_{n+1} + γ_{n+2}$, με $γ_{n+1}>γ_{n+2}$,
…,
την άπειρη ακολουθία διαδοχικών *πηλίκων* της ανθυφαίρεσης του a προς το b με:
$I_0, I_1, I_2, I_3,…, I_{2n}, I_{2n+1},…$,
και την άπειρη ακολουθία διαδοχικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσης του a προς b με:
$(a > b >) γ_1 > γ_2 > … > γ_{2n} > γ_{2n+1} >…$.

Ορισμός. *Οι γενικευμένοι πλευρικοί-διαμετρικοί αριθμοί p_n, q_n*

$p_1 = 1$, $q_1 = I_0$,
$p_2 = I_1$, $q_2 = I_1 I_0 +1$,
... ...
$p_{2n-1} = I_{2n-2} p_{2n-2} + p_{2n-3}$, $q_{2n-1} = I_{2n-2} q_{2n-2} + q_{2n-3}$,
$p_{2n} = I_{2n-1} p_{2n-1} + p_{2n-2}$, $q_{2n} = I_{2n-1} q_{2n-1} + q_{2n-2}$,
… …

Σημείωση: Οι (κλασσικοί) πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί ταυτίζονται με τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς της ανθυφαίρεσης της διαγωνίου (διαμέτρου) προς πλευρά ενός τετραγώνου.

Πράγματι η ανθυφαίρεση διαμέτρου προς πλευρά ενός τετραγώνου είναι $I_0=1$, $I_1=I_2=I_3=\ldots=2$.
Τότε $p_1=1$, $q_1=1$, και από την αναδρομική σχέση των γενικευμένων πλευρικών-διαμετρικών αριθμών:
$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$,
$q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$.
Υποθέτουμε για τον όρο *n* (επαγωγική υπόθεση), πως
$p_{n+1} = p_n + q_n$,
$q_{n+1} = 2p_n + q_n$.
Τότε από τις αναδρομικές σχέσεις των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών:
$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n = p_{n+1} + p_{n+1} + p_n = p_{n+1} + (p_n+q_n) + p_n = p_{n+1} + (p_n+q_n+p_n) =$
$= p_{n+1} + (2p_n+q_n) = p_{n+1} + q_{n+1}$, και
$q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n = q_{n+1} + q_{n+1} + q_n = q_{n+1} + 2p_n + q_n + q_n = q_{n+1} + 2(p_n+q_n) = q_{n+1} + 2p_{n+1}$.
Επομένως, για τον επόμενο όρο n+1, έχουμε
$p_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1}$,
$q_{n+2}= 2p_{n+1}+ q_{n+1}$.

Σημείωση: Μια σημαντική διαφορά μεταξύ των κλασσικών πλευρικών και διαμετρικών αριθμών και των γενικευμένων σε αυτό το στάδιο, είναι ότι ο αναδρομικός κανόνας που ορίζει τους γενικευμένους πλευρικούς κι διαμετρικούς αριθμούς είναι πολύ κατώτερος του κλασσικού κανόνα, ως προς το ότι στο βήμα n ορίζονται σε σχέση με τα δύο προηγούμενα βήματα, n-1 and n-2, και όχι μόνο σε σχέση με το ακριβώς προηγούμενο n-1. Οι αναδρομικές σχέσεις για τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς σε σχέση μόνο με το προηγούμενο βήμα, θα προκύψουν στην Ενότητα 4.6, παρακάτω.

Θα χρησιμοποιήσουμε τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς για να εκφράσουμε τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα σε σχέση με τα αρχικά μεγέθη a και b.

Λήμμα *(ανθυφαιρετικά υπόλοιπα σε σχέση με τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς).*
Για κάθε n=1,2,…
$\gamma_{2n-1} = p_{2n-1}\, a - q_{2n-1}\, b$
$\gamma_{2n} = -p_{2n}\, a + q_{2n}\, b$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

Για n=1
Από την ανθυφαιρετική σχέση $a=I_0b+\gamma_1$, προκύπτει $\gamma_1=a- I_0b$, άρα
$\gamma_1=p_1a-q_1b$, με $p_1=1$, $q_1=I_0$.
Από την ανθυφαιρετική σχέση $b=I_1\gamma_1+\gamma_2$, προκύπτει
$\gamma_2 = b-I_1\gamma_1$
$= b-I_1(a-I_0b)$
$= - I_1a +(1+I_0I_1)b$, άρα
$\gamma_2= - p_2a + q_2b$, με $p_2 = I_1$, $q_2 = 1+I_0I_1$.

Επαγωγικό βήμα
Εάν n>1, υποθέτοντας ότι
$\gamma_{2n-3} = p_{2n-3}\, a - q_{2n-3}\, b$,
$\gamma_{2n-2} = - p_{2n-2}\, a + q_{2n-2}\, b$,
θέλουμε να δούμε τις ίδιες σχέσεις να επαληθεύονται για γ_{2n-1} και γ_{2n}.

Από την ανθυφαιρετική σχέση $\gamma_{2n-3} = I_{2n-2}\, \gamma_{2n-2} + \gamma_{2n-1}$ προκύπτει
$\gamma_{2n-1} = \gamma_{2n-3} - I_{2n-2}\, \gamma_{2n-2}$
$= (p_{2n-3}\, a - q_{2n-3}\, b) - I_{2n-2}\, (- p_{2n-2}\, a + q_{2n-2}\, b)$
$= (I_{2n-2}\, p_{2n-2} + p_{2n-3})\, a - (I_{2n-2}\, q_{2n-2} + q_{2n-3})\, b$,
συνεπώς, θέτοντας
$p_{2n-1} = I_{2n-2}\, p_{2n-2} + p_{2n-3}$ και $q_{2n-1} = I_{2n-2}\, q_{2n-2} + q_{2n-3}$,
έχουμε ότι
$\boldsymbol{\gamma_{2n-1} = p_{2n-1} a - q_{2n-1} b}$.

Από την ανθυφαιρετική σχέση $\gamma_{2n-2}= I_{2n-1}\, \gamma_{2n-1} + \gamma_{2n}$, προκύπτει
$\gamma_{2n}= \gamma_{2n-2} - I_{2n-1}\, \gamma_{2n-1}$
$= (- p_{2n-2}\, a + q_{2n-2} b) - I_{2n-1}\, (p_{2n-1}\, a - q_{2n-1}\, b)$
$= - (I_{2n-1}\, p_{2n-1} + p_{2n-2})\, a + (I_{2n-1}\, q_{2n-1} + q_{2n-2})\, b$,
συνεπώς, θέτοντας
$p_{2n} = I_{2n-1}\, p_{2n-1} + p_{2n-2}$ και $q_{2n} = I_{2n-1}\, q_{2n-1} + q_{2n-2}$,
έχουμε ότι
$\boldsymbol{\gamma_{2n} = - p_{2n}\, a + q_{2n}\, b}$.

Τέλος, η *μοναδικότητα* των γενικευμένων πλευρικών και διαμετρικών αριθμών είναι μια άμεση συνέπεια της ασυμμετρίας των a, b.
Για παράδειγμα, αν $\gamma_{2n-1} = p_{2n-1}a – q_{2n-1}b = pa-qb$,
τότε $(p_{2n-1}-p)\, a = (q_{2n-1}-q)\, b$,
και αν $p_{2n-1}-p > 0$
τότε ($q_{2n-1}-q >0$, άρα) $a/b = (q_{2n-1}-q)/(p_{2n-1}- p)$,
σε αυτήν την περίπτωση τα a,b θα ήταν σύμμετρα μεγέθη (από Πρόταση X.5).

4.2. Οι διωνυμικές ευθείες και η συζυγία τους με τις αποτομές ευθείες

4.2.1. Ο ορισμός των διωνυμικών ευθειών

Ορισμός. *Διωνυμική ευθεία* (Πρόταση X.36 των *Στοιχείων*)
Έστω r μια προτεθείσα ευθεία.
Και έστω ασύμμετρες ευθείες ζ και η, με ζ>η, για τις οποίες ισχύει πως ζ^2, η^2 σύμμετρα με το τετράγωνο r^2 της προτεθείσας ευθείας r.
ζ, η ευθείες με ζ>η, ασύμμετρες, και τέτοιες ώστε ζ^2, η^2 να είναι ασύμμετρα με το r^2.
Τότε η ευθεία ζ+η καλείται «ἐκ δύο ὀνομάτων», ή **διωνυμική**.

Οι Προτάσεις X.36-72 αφορούν αποκλειστικά διωνυμικές ευθείες, και αποτελούν περίπου το ένα τρίτο του Βιβλίου X των Στοιχείων. Η αντιστοίχισή τους (κατά κύριο λόγο ανά εξάδες) με τις Προτάσεις που αφορούν τις αποτομές, φαίνεται παρακάτω:
<u>X.36-41</u>: αντιστοιχούν στην εξάδα X.73-78 των αποτομών,

X.42-47: αντιστοιχούν στην εξάδα X.79-84 των αποτομών,
X.47/48: αντιστοιχούν στους Ορισμούς X.84/85 για τις αποτομές,
X.48-53: αντιστοιχούν στην εξάδα X.85-90 των αποτομών,
X.54-59: αντιστοιχούν στην εξάδα X.91-96 των αποτομών,
X.60-65: αντιστοιχούν στην εξάδα X.97-102 των αποτομών,
X.66-72: αντιστοιχούν στη λειψή εξάδα X.103-107 των αποτομών.

Για αναλυτικότερη επεξήγηση των παραπάνω, βλ. Κλεφτάκη 2004.

4.2.2. Απλές διωνυμικές ευθείες

Ο ορισμός μιας απλής διωνυμικής ευθείεας είναι εξολοκλήρου ανάλογος του ορισμού μιας απλής αποτομής ευθείας, και δεν θα δοθεί λεπτομερώς. Οι κατασκευές των διωνυμικών ευθειών στο Βιβλίο X, X.48-53 είναι εντελώς ανάλογες με εκείνες για τις αποτομές στις X.85-90, και παράγουν απλές διωνυμικές ευθείες.

4.2.3. Ερώτημα

Συνεπώς οι διωνυμικές ευθείες είναι ακριβώς το ίδιο σημαντικές για το Βιβλίο X όπως οι αποτομές. Στην Ενότητα 4.1.3 έχουμε βρει μια σχέση μεταξύ των αποτομών και των υπολοίπων της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης a προς b, για N μη-τετράγωνο αριθμό. Το ερώτημα λοιπόν είναι: Ποιος είναι ο ρόλος των διωνυμικών στο Βιβλίο X;

4.2.4. Ο ρόλος των διωνυμικών ευθειών στο Βιβλίο X ως συζυγείς των αποτομών ευθειών

Η απάντηση στο ερώτημα για τον ρόλο των διωνυμικών ευθειών δίνεται προς το τέλος του Βιβλίου X, από την εμφάνιση των τριών θεμελιωδών και πραγματικά αξιοσημείωτων Προτάσεων X.112-114 περί της συζυγίας μεταξύ των διωνυμικών και των αποτομών ευθειών.

Πρόταση X.112.
Εάν r είναι μια ρητή ευθεία, ζ μια διωνυμική ευθεία, με όρους $\zeta_1>\zeta_2$, και η μια ευθεία τέτοια ώστε $\zeta\cdot\eta = r^2$, τότε η η είναι μια αποτομή με όρους $\eta_1>\eta_2$ σύμμετρους με τους όρους $\zeta_1>\zeta_2$ αντίστοιχα, και $\zeta_1/\eta_1=\zeta_2/\eta_2$. Επιπλέον, η προκύπτουσα αποτομή η είναι της ίδιας τάξης με την διωνυμική ευθεία ζ.

Πρόταση X.113.
Εάν r είναι μια ρητή ευθεία, ζ μια αποτομή, με όρους $\zeta_1>\zeta_2$, και η μια ευθεία τέτοια ώστε $\zeta\cdot\eta=r^2$, τότε η η είναι μια διωνυμική ευθεία με όρους $\eta_1>\eta_2$ σύμμετρους με τους όρους $\zeta_1>\zeta_2$ αντίστοιχα, και $\zeta_1/\eta_1=\zeta_2/\eta_2$. Επιπλέον, η προκύπτουσα διωνυμική ευθεία η είναι της ίδιας τάξης με την διωνυμική ευθεία ζ.

***Πρόταση X.113** (Κατασκευή συζυγούς μιας αποτομής).*
Έστω BD [ζ]=BC-CD [ζ_1-ζ_2] μια *αποτομή* με προτεθείσα ευθεία A [r], και
KH [η] μια ευθεία με ορθογώνιο BD·KH [$(\zeta_1-\zeta_2)\cdot\eta=r^2$] ίσο με A^2.
Τότε η KH είναι μια *διωνυμική* ευθεία KH=KF+FH [$\eta=\eta_1+\eta_2$], τέτοια ώστε
οι όροι της KH είναι συμμετροι με τους ορους της BD και
έχοντας τον ίδιο λόγο (δηλαδή BC/KF=CD/FH [$\zeta_1/\eta_1=\zeta_2/\eta_2=\mu/\nu$] σύμμετροι), και η

KH είναι της ίδιας τάξης με την BD.

(δηλαδή, αν BD είναι μια αποτομή ευθεία (τάξης 1,2,3, 4,5,6 σε σχέση με την A,
τότε KH είναι μια διωνυμική ευθεία τάξης 1,2,3, 4,5,6 αντίστοιχα, σε σχέση με την A· και,
η πλευρά ενός τετραγώνου που ισούται με BC^2-CD^2 είναι σύμμετρη με την BC
ανν η πλευρά ενός τετραγώνου που ισούται με KF^2-FH^2 είναι σύμμετρη με την KF.
Η ευθεία KH είναι η συζυγής της αποτομής ευθείας BD.).

Πρόταση X.114.
Εάν ζ είναι μια διωνυμική ευθεία, με όρους $\zeta_1>\zeta_2$, η είναι μια αποτομή με όρους $\eta_1>\eta_2$ σύμμετρους με τους όρους $\zeta_1>\zeta_2$ αντίστοιχα, $\zeta_1/\eta_1=\zeta_2/\eta_2$ και $\eta\cdot\zeta=r^2$, τότε η r είναι μια ρητή ευθεία.

Ας σημειωθεί ότι:
Εάν γ=qb-pa είναι μια απλή αποτομή σε σχέση με την προτεθείσα b, όπου N είναι ένας μη-τετράγωνος αριθμός και $a^2=Nb^2$, και θέσουμε δ=qb+pa, παρατηρούμε ότι $\gamma\cdot\delta=q^2b^2-p^2a^2=(q^2-Np^2)b^2=\lambda b^2$.
Έστω $\lambda\gamma^{-1}$= qb+pa.
Τότε $\gamma\cdot\gamma^{-1}=b^2$, δηλαδή η ευθεία γ^{-1} είναι το «αντίστροφο» της αποτομής ευθείας γ. Άτυπα θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί πως $\gamma/b\cdot\gamma^{-1}/b=1/1$, δηλαδή ο λόγος (στην ουσία, ο σύγχρονος πραγματικός αριθμός) γ^{-1}/b είναι το αντίστροφο του γ/b.

4.3. Η συνειδητοποίηση της σημασίας των Προτάσεων συζυγίας του Βιβλίου X στην σύγχρονη εποχή

4.3.1. Η εύστοχη σύνδεση της διωνυμικής ευθείας με τον μιγαδικό αριθμό από τον Bombelli

Ακόμη και πριν από οποιαδήποτε προσεκτική εξέταση του Βιβλίου X, το βασικό του περιεχόμενο σίγουρα μας εκπλήσσει. Ο Bombelli το 1572 εντυπωσιάστηκε εξίσου, και ο A. Weil σχετικά περιγράφει:

«The first concept, motivated by the work of the Italian algebraists of the sixteenth century on equations of degree 3 and 4, had been introduced by *Bombelli* in Book I of his Algebra of 1572, in close imitation of Euclid's theory of irrationals of the form a + √b in his Book X ('*binomial*' in the terminology of Campanus' Latin translation of Euclid; accordingly, *binomio* is Bombelli's word for a complex number a + √−b). Further developments belong to the history of algebra and analysis rather than to number theory; suffice it to say that Euler, played a decisive role in extending to complex numbers the main operations of analysis.»
(Weil 1984, σελ. 202)

Αυτό που εντυπωσίασε τον Bombelli το 1572 (Bombelli 1572) ήταν οι βασικές έννοιες του Βιβλίου X, η αποτομή (που εισάγεται στην X.73) και η διωνυμική ευθεία (που εισάγεται στην X.36), και η συζυγία τους στις Προτάσεις X.112-114, μια συζυγία που έχει μεγάλη ομοιότητα με την σχέση μεταξύ ενός μιγαδικού αριθμού και του συζυγούς του.

4.3.2. Ο Euler, για την θεωρία του πάνω στα συνεχή κλάσματα τετραγωνικών αρρήτων, χρησιμοποίησε τη συζυγία παραστάσεων με τετραγωνικούς αρρήτους η οποία είναι παρόμοια με την συζυγία του Θεαίτητου στο Βιβλίο X

Για την εξέταση του αναπτύγματος του συνεχούς κλάσματος των τετραγωνικών ριζών μη-τετράγωνων φυσικών αριθμών, ο Euler (στα μέσα του 18ου αιώνα) χρησιμοποίησε αποτελεσματικά την συζυγία παραστάσεων με τετραγωνικό άρρητο, η οποία παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με την συζυγία αποτομών και διωνυμικών ευθειών.
Ο Euler, για τον υπολογισμό του συνεχούς κλάσματος τετραγωνικού αρρήτου, έστω του $\sqrt{54}$, σχηματίζει το υπόλοιπο/«αποτομή» $\sqrt{54}-7$, όπου $7=m_1=$το ακέραιο μέρος του $\sqrt{54}$. Για να προχωρήσει στο επόμενο βήμα, σχηματίζει την συζυγή «διωνυμική» $\sqrt{54}+7$, και εφαρμόζει το ισοδύναμο της X.113, για να καταλήξει ότι $(\sqrt{54}-7)\cdot(\sqrt{54}+7)=5$. Συνεπώς το αντίστροφο του $\sqrt{54}+7$ είναι το $(\sqrt{54}+7)/5$. Το μεγάλο πλεονέκτημα της συζυγίας είναι ότι επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό τόσο του επόμενου πηλίκου I_1, που είναι το ακέραιο μέρος του $(\sqrt{54}+7)/5$, $I_1=2$, όσο και του επόμενου υπολοίπου/«αποτομής» $(\sqrt{54}+7)/5 - I_1 = (\sqrt{54}+7)/5 -2 = (\sqrt{54}-3)/5$.
Όμως δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι ο Euler γνώριζε με οποιονδήποτε τρόπο τη συζυγία του Θεαίτητου.

4.3.3. Η αποτυχία του Heiberg να συνειδητοποιήσει τη σημασία των Προτάσεων συζυγίας

Ίσως δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι η σημασία των Προτάσεων συζυγίας του Βιβλίου X δεν έγινε αντιληπτή από τον πολυμαθή φιλόλογο και ιστορικό αλλά όχι μαθηματικό Heiberg:

> «Heiberg considers that this proposition and the succeeding ones are interpolated, though the interpolation must have taken place before Theon's time. His argument is that X.112-115 are nowhere used […]»
> (Heath 1926, σελ. 246).

4.3.4. Η αδυναμία του Weil να συνειδητοποιήσει το κίνητρο του Θεαίτητου για την εισαγωγή των Προτάσεων συζυγίας του Βιβλίου X

Ο Γάλλος μαθηματικός André Weil συνειδητοποιεί μεν τη σημασία της παρουσίας της συζυγίας στο Βιβλίο X, όμως τελικά απορρίπτει την πιθανότητα αυτές οι συζυγίες να χρησιμοποιήθηκαν στο ίδιο πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε η συζυγία από τον Bombelli στη θεωρία των συνεχών κλασμάτων:

> «Not only is Euclid himself well aware of the relation
> $(\sqrt{r} + \sqrt{s})(\sqrt{r} - \sqrt{s}) = r - s$
> but even the identity
> $1/(\sqrt{s} + \sqrt{r}) = \sqrt{r}/(r - s) - \sqrt{s}/(r - s)$
> may be regarded as the essential content of prop. 112 of that book. ***Unfortunately***, Euclid's motivation in Book X seems to have been the wish to construct a general framework for the theory of regular polygons and polyhedra, and ***not***, as modern mathematicians would have it, an algebraic theory of quadratic fields. So we are left to speculate idly whether, in antiquity

> or later, identities involving square roots may not have been used, at least heuristically, in arithmetical work.»
> (Weil 1984, σελ. 15, με τροποποιήσεις/παρεμβάσεις)

Ο Knorr παρέχει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την άποψη του Weil. Αφού και ο ίδιος πρώτα απορρίψει την περίπτωση οι Προτάσεις Χ.112-114 να είχαν κάποιο ρόλο στα προβλήματα τετραγωνικών αρρήτων,

> «Certain potentials of the subject matter are entirely missed, for instance, insight into how products of the form $(a \pm b\sqrt{N})$ $(c \pm d\sqrt{N})$ bear on the finding of solutions to integral relations of the form $x^2 - Ny^2 = \pm m$»
> (Knorr 1983, σελ. 60)

στη συνέχεια επιβεβαιώνει την άποψη του Weil σε υποσημείωση:

> «At the time of his course of lectures on the history of the Pell equation (Institute for Advanced Study, 1978-79), Professor A. Weil expressed to me his disappointment over Euclid's *utter failure* to perceive this potentially fruitful development of the theory of Book X.»
> (Knorr 1983, σελ. 68, Σημείωση 53)

Η στενή σχέση της πλατωνικής φιλοσοφίας με την περιοδική ανθυφαίρεση και συγκεκριμένα με τα θεωρήματα που αποδείχθηκαν από τον Θεαίτητο, παρουσιάστηκε κατά ένα μέρος στις Ενότητες 2 και 3. Όπως θα δούμε στην επόμενη Ενότητα 5, η *παλινδρομική περιοδικότητα της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης* που θεμελιώθηκε από τον Θεαίτητο εντυπωσίασε τον Πλάτωνα σε τέτοιο βαθμό ώστε στον διάλογό του *Πολιτικός* το κυρίαρχο θέμα είναι η παλινδρομική περιοδικότητα.

Μας είναι ξεκάθαρο πως η αδυναμία του Weil να συνειδητοποιήσει τον πραγματικό ρόλο της συζυγίας αποτομών και διωνυμικών ευθειών στο Θεαιτήτειο Βιβλίο Χ των *Στοιχείων* ήταν το αποτέλεσμα έλλειψης βαθύτερης κατανόησης εκ μέρους του της στενής σχέσης της φιλοσοφίας του Πλάτωνα με την περιοδική ανθυφαίρεση και της βαθιάς επιρροής που ο Θεαίτητος άσκησε στην ύστερη φιλοσοφία του Πλάτωνα (ειδικά στην τριλογία *Θεαίτητος*-*Σοφιστής*-*Πολιτικός* και στον *Φίληβο*). Η παράβλεψη αυτή είναι ιδιαίτερα απογοητευτική αν αναλογιστεί κανείς την βαθιά ενασχόληση του Weil με τα Ελληνικά Μαθηματικά και την Πλατωνική φιλοσοφία.

4.4. Ο ρόλος της προτεθείσας (ή «ἐκκειμένης») ευθείας των αποτομών και των διωνυμικών ευθειών

Πριν προχωρήσουμε στην ανακατασκευή της απόδειξης του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου θα κάνουμε μια απλή παρατήρηση σχετικά με τον ρόλο της *προτεθείσας ευθείας*.
Στους Ορισμούς Χ.84/85 συμπεριλαμβάνεται η ταξινόμηση των αποτομών ευθειών με βάση τη σχέση των όρων τους με την προτεθείσα ευθεία. Η ταξινόμηση αυτή, διακρίνει για μια αποτομή ευθεία (έστω γ=pa-qb ή γ=qb-pa) τρεις πιθανές περιπτώσεις: η προτεθείσα ευθεία να είναι είτε (σύμμετρη με την) a, ή (σύμμετρη με την) b, ή να είναι κάποια άλλη ευθεία r ασύμμετρη με την a και τη b αλλά (εξ ορισμού της αποτομής δυνάμει σύμμετρη με αυτές, και επομένως) ρητή.

Είναι σαφές πως η *εσωτερική* δομή μιας αποτομής ευθείας δεν επηρεάζεται καθόλου από την επιλογή της προτεθείσας ευθείας. Γιατί τότε υπάρχει η ανάγκη της προτεθείσας ευθείας; Ο ρόλος της δεν μπορεί παρά να είναι *εξωτερικός*, δηλαδή σε σχέση με τη συμβατότητα της αποτομής ευθείας με άλλες αποτομές ή διωνυμικές γραμμές, με σκοπό την εκτέλεση απλών αλγεβρικών ή γεωμετρικών πράξεων. Συνεπώς συνθέτουμε μια ευθεία με τη συζυγή της, ή τετραγωνίζουμε μια ευθεία, ή παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα μιας ευθείας, ή παίρνουμε μια σύμμετρη «παραλλαγή» της ευθείας, μόνο αν οι ευθείες με τις οποίες θέλουμε να δουλέψουμε έχουν την ίδια προτεθείσα ευθεία. Στην πραγματικότητα, οι προαναφερθείσες πράξεις είναι όλες εφαρμογές των Προτάσεων Ι.44-45 και η προτεθείσα ευθεία έχει τον ρόλο της «τέταρτης» αναλόγου.
Θα εξετάσουμε περαιτέρω τον ρόλο της προτεθείσας ευθείας στην Ενότητα 8.

4.5. Η μετατροπή των ανθυφαιρετικών σχέσεων της ανθυφαίρεσης του a προς b με $a^2=Nb^2$ για κάποιον μη-τετράγωνο αριθμό N, σε σχέσεις συζυγίας

Η ανάλυση που προηγήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους οδηγεί στις ακόλουθες διαπιστώσεις:

(α) ότι ο Πλάτων δηλώνει ξεκάθαρα πως ο Θεαίτητος έχει αποδείξει το Θεώρημα Περιοδικότητας για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες (και επιπλέον ότι, όπως θα δούμε στην Ενότητα 5, μιμείται στον *Πολιτικό* και το ισχυρότερο παλινδρομικό Θεώρημα), και

(β) ότι η θεωρία των αποτομών και διωνυμικών ευθειών και της συζυγίας τους, τα ιδανικά δηλαδή εργαλεία για την απόδειξη του Θεωρήματος (Παλινδρομικής) Περιοδικότητας για τετραγωνικές ασυμμετρίες, αναπτύσσονται πλήρως στο Βιβλίο X.

Ο δρόμος για την ανακατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος Περιοδικότητας για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες δεν μπορεί συνεπώς παρά να περνά υποχρεωτικά από την «φυσική» μετατροπή των ανθυφαιρετικών σχέσεων σε σχέσεις συζυγίας. Αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του επόμενου Θεωρήματος.

***Θεώρημα** (Θεαίτητος)**.** (Η μετατροπή των ανθυφαιρετικών σχέσεων της ανθυφαίρεσης του a προς b με $a^2=Nb^2$ για κάποιον μη-τετράγωνο αριθμό N, σε σχέσεις συζυγίας).*

Έστω N ένας μη-τετράγωνος αριθμός, a, b ευθείες με $a^2=Nb^2$, και έστω ο ακόλουθος συμβολισμός για την ανθυφαίρεση του a προς b :

$a = I_0 b + \gamma_1$, με $\gamma_1<b$,
$b = I_1 \gamma_1 + \gamma_2$, με $\gamma_2<\gamma_1$,
$\gamma_1 = I_2 \gamma_2 + \gamma_3$, με $\gamma_3<\gamma_2$,
…
$\gamma_n = I_{n+1} \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2}$, με $\gamma_{n+2}<\gamma_{n+1}$,
… .

Τότε αν ορίσουμε τις ευθείες $\boldsymbol{\varphi_n}$ θέτοντας $\varphi_1=\gamma_1$ και $\gamma_n\varphi_{n+1}=\gamma_{n+1}b$ για n=1,2, …, προκύπτουν οι σχέσεις συζυγίας $\mathbf{b^2=\varphi_n(I_nb+\varphi_{n+1})}$,
και υπάρχουν φυσικοί αριθμοί:
$\mathbf{m_n}$ με m_1 να είναι ο μοναδικός αριθμός τέτοιος ώστε $m_1^2<N<(m_1+1)^2$ (δηλαδή $m_1 = I_0$) και
$\boldsymbol{\lambda_n}$, με $\lambda_1=1$,
τέτοιοι ώστε:
$\mathbf{\boldsymbol{\varphi_n}=(a-m_nb)/\boldsymbol{\lambda_n}}$**,**
$\mathbf{N-m_n^2=\boldsymbol{\lambda_n\lambda_{n+1}}}$**,**
$\mathbf{m_{n+1}=\boldsymbol{\lambda_{n+1}}I_n-m_n}$**.**

Απόδειξη.

Βήμα 1 (*Η μετατροπή της δεύτερης ανθυφαιρετικής σχέσης σε σχέση συζυγίας*).
Η *πρώτη ανθυφαιρετική σχέση* είναι $a=m_1b+\gamma_1$, με $\gamma_1<b$.
Όπως δείξαμε στην 4.1.3, όλα τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα είναι αποτομές, συνεπώς η $\gamma_1=a-m_1b$ είναι μια αποτομή και έστω $\varphi_1=\gamma_1$. Έστω $\lambda_2= N-m_1^2$.
(α) Κατασκευάζοντας την φ_2 από την $\gamma_2b=\gamma_1\varphi_2$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{b^2=\boldsymbol{\varphi_1}(I_1b+\boldsymbol{\varphi_2})}$, και $\lambda_2I_1>m_1$.
(β) Θέτοντας $\mathbf{m_2=\boldsymbol{\lambda_2}I_1-m_1}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{\boldsymbol{\varphi_2}=(a-m_2b)/\boldsymbol{\lambda_2}}$.
(γ) Θέτοντας $\mathbf{\boldsymbol{\lambda_3}=1+I_1(m_1-m_2)}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{N-m_2^2=\boldsymbol{\lambda_2\lambda_3}}$.

Απόδειξη του Βήματος 1:
(α) Η δεύτερη ανθυφαιρετική σχέση είναι $b=I_1\gamma_1+\gamma_2$, με $\gamma_2<\gamma_1$.
Θέλουμε να την μετατρέψουμε σε σχέση συζυγίας.
Προκύπτει λοιπόν κατ' αρχάς πως $b^2=\gamma_1I_1b+\gamma_2b$.
Προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε το δεύτερο μέλος, από τον ορισμό των φ_n χρησιμοποιούμε την ισότητα $\gamma_1=\varphi_1$ και εφαρμόζοντας τις Προτάσεις Ι.44-45 κατασκευάζουμε μια ευθεία φ_2, τέτοια ώστε $\gamma_2b=\gamma_1\varphi_2$.
Πράγματι, τότε έχουμε $\mathbf{b^2}=\gamma_1I_1b+\gamma_1\varphi_2=\varphi_1I_1b+ \varphi_1\varphi_2=\mathbf{\boldsymbol{\varphi_1}(I_1b+\boldsymbol{\varphi_2})}$ και $b>\varphi_2$.
Αυτή η μετασχηματισμένη ανθυφαιρετική σχέση είναι τώρα μια σχέση συζυγίας, που επιτρέπει τη χρήση της X.113.
Καθώς $\varphi_1=a-m_1b$ είναι μια αποτομή, η ευθεία $a+m_1b$ είναι μια διωνυμική ευθεία, μια N-διωνυμική, και $\varphi_1(a+m_1b)=a^2-m_1^2b^2=Nb^2-m_1^2b^2$.
Θέτουμε $\mathbf{N-m_1^2=\boldsymbol{\lambda_2}}$. Επομένως $I_1b+\varphi_2=(a+m_1b)/\lambda_2$, άρα $\lambda_2\varphi_2+\lambda_2I_1b=a+m_1b=S_2$.
Ας σημειωθεί ότι $a>m_1b$ και $\lambda_2I_1b>\lambda_2\varphi_2$ (η τελευταία επειδή $\gamma_2b=\gamma_1\varphi_2$ και $\gamma_1>\gamma_2$, άρα $b>\varphi_2$).
Συνεπώς $\lambda_2I_1b>S_2/2>m_1b$, άρα $\lambda_2I_1>m_1$.
(β) Θέτουμε $\mathbf{m_2=\boldsymbol{\lambda_2}I_1-m_1}$.
Άμεσα προκύπτει πως $\mathbf{\boldsymbol{\varphi_2}=(a-m_2b)/\boldsymbol{\lambda_2}}$, η είναι μια κλασματική N-αποτομή.
(γ) Παρατηρούμε ότι $N-m_2^2=(N-m_1^2)+(m_1^2-m_2^2)=\lambda_2+(m_1-m_2)\cdot(m_1+m_2)=$
$=\lambda_2+(m_1-m_2)\cdot\lambda_2I_1=\lambda_2(1+I_1(m_1-m_2))$.
Θέτοντας $\mathbf{\boldsymbol{\lambda_3}=1+I_1(m_1-m_2)}$, προκύπτει πως $\mathbf{N-m_2^2= \boldsymbol{\lambda_2\lambda_3}}$.

Βήμα 2 (*Η μετατροπή της τρίτης ανθυφαιρετικής σχέσης σε σχέση συζυγίας*).
(α) Κατασκευάζοντας την φ_3 από την $\gamma_3b=\gamma_2\varphi_3$, βρίσκουμε ότι $b>\varphi_3$, $\mathbf{b^2=\boldsymbol{\varphi_2}(I_2b+\boldsymbol{\varphi_3})}$, και $\mathbf{\boldsymbol{\lambda_3}I_2>m_2}$.
(β) Θέτοντας $\mathbf{m_3=\boldsymbol{\lambda_3}I_2-m_2}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{\boldsymbol{\varphi_3}=(a-m_3b)/\boldsymbol{\lambda_3}}$.
(γ) Θέτοντας $\mathbf{\boldsymbol{\lambda_4}=\boldsymbol{\lambda_2}+I_2(m_2-m_3)}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{N-m_3^2=\boldsymbol{\lambda_3\lambda_4}}$.

Απόδειξη του Βήματος 2:

(α) Μετασχηματίζουμε την τρίτη ανθυφαιρετική σχέση $\gamma_1=I_2\gamma_2+\gamma_3$ σε μια σχέση συζυγίας.
Προκύπτει λοιπόν κατ' αρχάς πως $\gamma_1 b=I_2\gamma_2 b+\gamma_3 b$.
Προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε το δεύτερο μέλος, εφαρμόζουμε τις Προτάσεις I.44-45 για να κατασκευάσουμε μια ευθεία φ_3, τέτοια ώστε $\gamma_3 b=\gamma_2\varphi_3$.
Τότε έχουμε $b>\varphi_3$ και $\gamma_1 b=I_2\gamma_2 b+\gamma_2\varphi_3=\gamma_2(I_2 b+\varphi_3)$.
Από αυτήν παίρνουμε $\gamma_1 b^2=\gamma_2 b(I_2 b+\varphi_3)$.
Από την $\gamma_2 b=\gamma_1\varphi_2$ που κατασκευάστηκε παραπάνω, έχουμε
$\gamma_1 b^2=\gamma_2 b(I_2 b+\varphi_3)=\gamma_1\varphi_2(I_2 b+\varphi_3)$, συνεπώς $\mathbf{b^2=\varphi_2(I_2b+\varphi_3)}$.
Αυτή η μετασχηματισμένη ανθυφαιρετική σχέση είναι τώρα μια σχέση συζυγίας, που επιτρέπει τη χρήση της X.113.
Καθώς $\varphi_2=(a-m_2b)/\lambda_2$, έχουμε:
$\varphi_2(a+m_2b)=(a^2-m_2^2b^2)/\lambda_2=(Nb^2-m_2^2b^2)/\lambda_2=(N-m_2^2)b^2/\lambda_2=\lambda_2\lambda_3b^2/\lambda_2=\lambda_3b^2$.
Συνεπώς $I_2b+\varphi_3=(a+m_2b)/\lambda_3$, άρα $\lambda_3\varphi_3+\lambda_3I_2b=a+m_2b=S_3$.
Ας σημειωθεί ότι $a>m_2b$ και $\lambda_3I_2b>\lambda_3\varphi_3$, επειδή $\gamma_3b=\gamma_2\varphi_3$ και $\gamma_2>\gamma_3$, προκύπτει $b>\varphi_3$· συνεπώς $\lambda_3I_2b>S_3/2>m_2b$, άρα $\lambda_3I_2>m_2$.
(β) Θέτουμε $\mathbf{m_3=\lambda_3I_2-m_2}$.
Άμεσα προκύπτει πως $\mathbf{\varphi_3=(a-m_3b)/\lambda_3}$, η οποία είναι μια κλασματική N-αποτομή.
(γ) Παρατηρούμε ότι $N-m_3^2=(N-m_2^2)+(m_2^2-m_3^2)=\lambda_2\lambda_3+(m_2-m_3)\cdot(m_2+m_3)=$
$=\lambda_2\lambda_3+(m_2-m_3)\cdot\lambda_3I_2=\lambda_3(\lambda_2+I_2(m_2-m_3))$.
Θέτοντας $\mathbf{\lambda_4=\lambda_2+I_2(m_2-m_3)}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{N-m_3^2=\lambda_3\lambda_4}$.

Γενικό Βήμα (*Η μετατροπή της γενικής ανθυφαιρετικής σχέσης σε μια σχέση συζυγίας*).
Υποθέτουμε πως για κάποιον φυσικό αριθμό n, η ευθεία φ_n, και οι φυσικοί αριθμοί m_n, λ_n, λ_{n+1} έχουν οριστεί, έτσι ώστε $\varphi_n=(a-m_nb)/\lambda_n$, $N-m_n^2=\lambda_n\lambda_{n+1}$. Τότε:
(α) κατασκευάζοντας την ευθεία φ_{n+1} από την $\gamma_{n+1}b=\gamma_n\varphi_{n+1}$, βρίσκουμε ότι $b>\varphi_{n+1}$, $\mathbf{b^2=\varphi_n(I_nb+\varphi_{n+1})}$ και $\lambda_{n+1}I_n>m_n$
(β) θέτοντας $\mathbf{m_{n+1}=\lambda_{n+1}I_n-m_n}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{\varphi_{n+1}=(a-m_{n+1}b)/\lambda_{n+1}}$ και,
(γ) θέτοντας $\mathbf{\lambda_{n+2}=\lambda_n+I_n(m_n-m_{n+1})}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{N-m_{n+1}^2=\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}}$.

Η *Απόδειξη* είναι εξολοκλήρου ανάλογη με την απόδειξη του Βήματος 2, που παρουσιάζεται ακριβώς παραπάνω. Οι λεπτομέρειες παραλείπονται.

Σημείωση: Η μετατροπή των ανθυφαιρετικών σχέσεων σε σχέσεις συζυγίας πραγματοποιείται με την εισαγωγή των «αναχθέντων υπολοίπων» φ_n.
Όπως έχει αναφερθεί ήδη, η εισαγωγή αυτών των αναχθέντων υπολοίπων παρέχει μια μονόδρομη, ουσιαστικά υποχρεωτική, μετάβαση από τις ανθυφαιρετικές σχέσεις στις σχέσεις συζυγίας, προκειμένου να μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία συζυγίας του Θεαίτητου.
Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ορισμός των φ_{n+1}, μέσω της ισότητας $\gamma_{n+1}b=\gamma_n\varphi_{n+1}$, μια βασική εφαρμογή της Πρότασης I.44 των *Στοιχείων*, δεν εμφανίζεται ρητά στο Βιβλίο X. Θα πρέπει όμως να τονιστεί πως τα αναχθέντα υπόλοιπα παίζουν βασικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας, που παρουσιάζεται στην Ενότητα 6 και στην απόδειξη της γενικής ιδιότητας Pell στην Ενότητα 8, παρακάτω. Αξιοσημείωτο είναι δε το γεγονός πως, όπως θα δούμε στην Ενότητα 9, τα αναχθέντα υπόλοιπα επανεμφανίζονται ξεκάθαρα κατά τη μέθοδο *cakravala* που χρησιμοποιεί ο Ινδός μαθηματικός Bhaskara II, για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα Pell.

4.6. Ο αναδρομικός ορισμός των γενικευμένων πλευρικών και διαμετρικών αριθμών

Όπως έχουμε ήδη δει στην Ενότητα 4.1.3, τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα της ανθυφαίρεσης του a προς b, με $a^2=Nb^2$ και N μη-τετράγωνο αριθμό, μπορούν να αναγραφούν με τη βοήθεια των γενικευμένων πλευρικών και διαμετρικών αριθμών p_n, q_n ως εξής: $\gamma_n= (-1)^n (q_n b-p_n a)$.

Πρόταση.

$(-1)^n (q_n b-p_n a) ((a-m_{n+1}b)/\lambda_{n+1}) = (-1)^{n+1}(q_{n+1}b-p_{n+1}a)b$,

$\boldsymbol{\lambda_{n+1}q_{n+1} = m_{n+1}q_n + Np_n}$,

$\boldsymbol{\lambda_{n+1}p_{n+1} = q_n + m_{n+1}p_n}$.

Απόδειξη.

Η Πρόταση αποδεικνύεται με ευθύ τρόπο από τη σχέση $\gamma_n\varphi_{n+1}=\gamma_{n+1}b$ με την οποία ορίσαμε τα αναχθέντα υπόλοιπα φ_n και χρήση της σχέσης $\varphi_n=(a-m_n b)/\lambda_n$ που προέκυψε από το Θεώρημα της Ενότητας 4.5. Οι τελικοί αναδρομικοί τύποι:

$\boldsymbol{\lambda_{n+1}q_{n+1} = m_{n+1}q_n + Np_n}$

$\boldsymbol{\lambda_{n+1}p_{n+1} = q_n + m_{n+1}p_n}$,

προκύπτουν λόγω της μοναδικότητας μιας αποτομής.

Η παραπάνω Πρόταση, με την χρήση των «νεοεισαχθέντων» αναχθέντων υπολοίπων φ_n αναβαθμίζει τους αναδρομικούς τύπους των γενικευμένων πλευρικών και διαμετρικών αριθμών υπό την έννοια ότι η αναδρομή δεν προέρχεται πλέον από τα δύο προηγούμενα βήματα, όπως είχαμε δει στην Ενότητα 4.1.3 αλλά μόνο από το ακριβώς προηγούμενο. Οι αναβαθμισμένοι αυτοί αναδρομικοί τύποι είναι πραγματικά ανάλογοι αυτών των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών για N=2.

4.7. Η απόδειξη του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου: η ανθυφαίρεση του a προς b με $a^2=Nb^2$ για μη-τετράγωνο αριθμό N είναι περιοδική

Από το Θεώρημα που αποδείχθηκε παραπάνω στην Ενότητα 4.5 και από το γεγονός ότι η συλλογή ζευγών (λ, m) φυσικών αριθμών (με τον λ να είναι άνω φραγμένος από το N και τον m από το m_1) είναι πεπερασμένη, προκύπτει από εφαρμογή *της αρχής του περιστερεώνα*, ότι υπάρχουν δείκτες k και s, με k<s, τέτοιοι ώστε $\varphi_k=\varphi_s$. Η ισότητα $\varphi_k=\varphi_s$ ξεκάθαρα συνεπάγεται την ισότητα $\gamma_k/\gamma_{k+1}=\gamma_s/\gamma_{s+1}$, και αυτό είναι ακριβώς το Κριτήριο Λόγου για τελική περιοδικότητα στην ανθυφαίρεση.

Σημείωση: Εάν και θα ήταν πολύ επιθυμητό, δεν υπάρχει εντούτοις κάποιο ίχνος παρουσίας του συνδυαστικού επιχειρήματος του περιστερεώνα στο Βιβλίο X. Πάραυτα, όπως θα δούμε παρακάτω στην Ενότητα 5, η αρχή του περιστερεώνα εντοπίζεται σε ένα απόσπασμα στον *Πολιτικό* του Πλάτωνα το οποίο συνδέεται, όπως θα δούμε στην Ενότητα 6, με ένα ισχυρότερο Θεώρημα του Θεαίτητου σχετικά με την Παλινδρομική Περιοδικότητα.

Ενότητα 5. Ο ορισμός του νοητού Όντος «Πολιτικός» στον **Πολιτικό** *είναι μια φιλοσοφική μίμηση του Ισχυρού Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου*

Ο τρίτος διάλογος στην τριλογία του Πλάτωνα πάνω στην θεωρία της γνώσης, είναι ο *Πολιτικός*. Ο ειδικός σκοπός του διαλόγου είναι ο ορισμός της τέχνης του Πολιτικού μέσω της μεθόδου «Όνομα και Λόγος» (ή ισοδύναμα «Διαίρεση και Συναγωγή»), μιας μεθόδου που εξελίσσεται με βήματα δυϊκής διαίρεσης και περιλαμβάνει το Κριτήριο Λόγου, όπως συμβαίνει και στον διάλογο *Σοφιστής*. Είδαμε στην Ενότητα 2 ότι στον *Σοφιστή* η πλήρης γνώση ενός νοητού Όντος, όπως ο Ασπαλιευτής ή ο Σοφιστής, είναι εφικτή μέσω του ορισμού μιας Τέχνης, της τέχνης της Ασπαλιευτικής ή της Τέχνης της Σοφιστικής αντίστοιχα, κάτι που πραγματοποιείται μέσω της μεθόδου της «Διαίρεσης και Συναγωγής» (ή «Όνομα και Λόγος»), την οποία ερμηνεύσαμε ως το φιλοσοφικό ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης.

5.1. Τα πρώτα δέκα βήματα της Διαίρεσης και Συναγωγής (258b-267c)

Ο σκοπός του διαλόγου *Πολιτικός* είναι η απόκτηση γνώσης («*ἐπιστήμη*») του νοητού Όντος Πολιτικός, μέσω της μεθόδου της Διαίρεσης και Συναγωγής, της μεθόδου που εφαρμόστηκε στον διάλογο *Σοφιστής*. Στο πρώτο μέρος του διαλόγου, 258b-267c, πραγματοποιούνται τα πρώτα δέκα βήματα της Διαίρεσης. Το αρχικό Γένος G όλων των τεχνών διαιρείται διαδοχικά με τον δυϊκό τρόπο που μας είναι οικείος από τον διάλογο *Σοφιστής*. Είναι ξεκάθαρο πως και εδώ ισχύει η ίδια ερμηνεία της διαίρεσης ως φιλοσοφικό ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης.

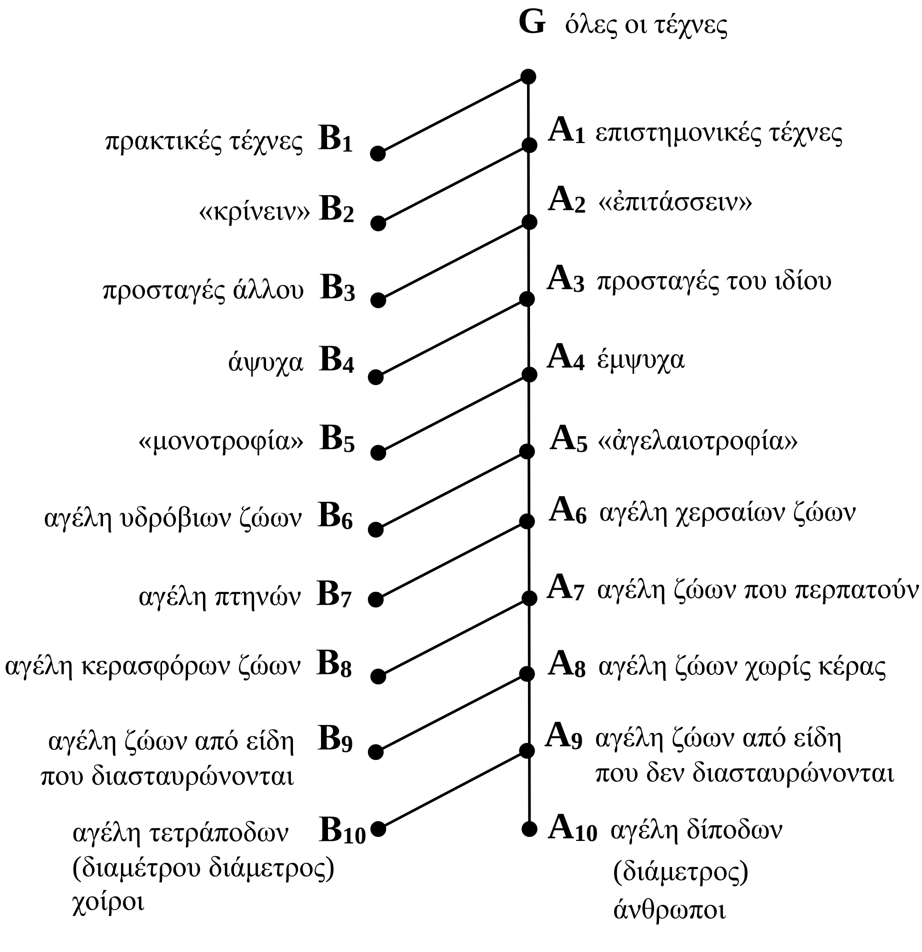
Η διαίρεση περιγράφεται συνοπτικά ως ακολούθως:

- το Γένος G όλων των τεχνών διαιρείται σε **πρακτικές τέχνες** [$\mathbf{B_1}$] και **επιστημονικές τέχνες** («*γνωστικὴ*») [$\mathbf{A_1}$], (258b-259d)
- οι επιστημονικές τέχνες [A_1] διαιρούνται σε εκείνες που σχετίζονται με το **«κρίνειν»** [$\mathbf{B_2}$] και σε εκείνες που σχετίζονται με το **«ἐπιτάσσειν»** (δηλαδή το να δίνω προσταγές), [$\mathbf{A_2}$], (259d-260c)
- το «ἐπιτάσσειν» [A_2] διαιρείται σε **προσταγές άλλου** [$\mathbf{B_3}$], και **προσταγές του ιδίου** [$\mathbf{A_3}$], (260c-261b)
- οι προσταγές του ιδίου [A_3] διαιρούνται σε **άψυχα** [$\mathbf{B_4}$] και **έμψυχα** (δηλαδή ζώα) [$\mathbf{A_4}$] αναλόγως με το πού απευθύνονται, (261b-d)
- τα έμψυχα [A_4] διαιρούνται σε μεμονωμένα ζώα (**«μονοτροφία»**) [$\mathbf{B_5}$] και αγέλες ζώων (**«ἀγελαιοτροφία»**) [$\mathbf{A_5}$], (261d-e)
- η «ἀγελαιοτροφία» [A_5] διαιρείται σε **αγέλη υδρόβιων ζώων** [$\mathbf{B_6}$] και **αγέλη χερσαίων ζώων** [$\mathbf{A_6}$], (264b-d)
- η αγέλη χερσαίων ζώων [A_6] διαιρείται σε **αγέλη πτηνών** [$\mathbf{B_7}$] και **αγέλη ζώων που περπατούν** [$\mathbf{A_7}$], (264e-265b)
- η αγέλη ζώων που περπατούν [A_7] διαιρείται σε **αγέλη κερασφόρων ζώων** [$\mathbf{B_8}$] και **αγέλη ζώων χωρίς κέρας** [$\mathbf{A_8}$], (265b-d)
- η αγέλη ζώων χωρίς κέρας [A_8] διαιρείται σε **αγέλη ζώων από είδη που διασταυρώνονται** [$\mathbf{B_9}$], και **αγέλη ζώων από είδη που δεν διασταυρώνονται** [$\mathbf{A_9}$],

(265d-e)

- η αγέλη ζώων από είδη που δεν διασταυρώνονται [A_9] διαιρείται σε **αγέλη τετράποδων (διάμετρος διαμέτρου) - χοίρους** [**B_{10}**] και **αγέλη δίποδων (διάμετρος) - ανθρώπους** [**A_{10}**], (265e-266d).

Το παρακάτω σχήμα συνοψίζει αυτά τα αρχικά δέκα βήματα της Διαίρεσης.



Ας σημειωθεί πως μετά το **A_4** ασχολούμαστε με τις τέχνες εκτροφής μιας αγέλης ζώων («***ἀγελαιοτροφικὴ***», 261b-d) με αυτό που διαιρείται να είναι ουσιαστικά η φύση της αγέλης. Μέσω διαδοχικών βημάτων δυϊκής διαίρεσης και αποκλεισμού η φύση της αγέλης συνεχώς περιορίζεται, μέχρι να οδηγηθούμε στις τέχνες διοίκησης μιας ανθρώπινης αγέλης (**A_{10}**, 265e-266d).

5.2. Η ανάγκη να συνεχιστεί η Διαίρεση (267c-268d και 274e-277c)

Τα βήματα της διαίρεσης που περιεγράφηκαν παραπάνω στην Ενότητα 5.1 δεν αποτελούν επ’ ουδενί το τέλος στην αναζήτηση του ορισμού του Πολιτικού, όπως θα μπορούσε να θεωρηθεί. Ο λόγος είναι ότι το **A_{10}** αντιπροσωπεύει το σύνολο των τεχνών διοίκησης μιας ανθρώπινης αγέλης ενώ αυτό που μας ενδιαφέρει να οριστεί είναι συγκεκριμένα η τέχνη του Πολιτικού, δηλαδή η βέλτιστη τέχνη διοίκησης μιας

ανθρώπινης αγέλης.
Αυτό σημαίνει πως θα επακολουθήσει μια δεύτερη διαδικασία διαδοχικών διαιρέσεων, για το σύνολο των οποίων η αγέλη καθορίζεται ως ανθρώπινη αγέλη, και αυτό που διαδοχικά περιορίζεται, με δυϊκή διαίρεση και αποκλεισμό, είναι η φύση της διοίκησης μιας ανθρώπινης αγέλης («***ἀγελαιοκομικὴ***», 275e), μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη μορφή διοίκησης.

5.3. Ο μύθος της παλινδρομικής περιοδικότητας: η εποχή του Κρόνου και η εποχή του Δία (268d-274e)

Σύμφωνα με αυτόν τον μύθο που παρουσιάζεται στο χωρίο 268d-274e, υπάρχουν δύο εποχές στον κόσμο, η εποχή του Κρόνου και η εποχή του Δία.
Ο κόσμος, θεωρούμενος ως σφαιρική ολότητα, περιστρέφεται προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση κατά την εποχή του Κρόνου. Μετά από πολύ καιρό, όταν όλα τα στάδια της εποχής του Κρόνου έχουν παρέλθει («*τὸ γήινον ἤδη πᾶν ἀνήλωτο γένος, πάσας […] τὰς γενέσεις ἀποδεδωκυίας*»), είναι απαραίτητο η κατεύθυνση να αναστραφεί («*πάλιν ἀνέστρεφεν*») και να μεταβούμε από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία (272d6-e6).
Όταν η εποχή του Δία κινδυνεύει να βγει από τον σωστό δρόμο και ο Θεός αντιλαμβάνεται πως είναι πιθανό να καταρρεύσει στη θύελλα της σύγχυσης και να βυθιστεί στον άπειρο πόντο της ανομοιότητας («*κηδόμενος ἵνα μὴ χειμασθεὶς ὑπὸ ταραχῆς διαλυθεὶς εἰς τὸν τῆς ἀνομοιότητος ἄπειρον ὄντα πόντον*»)», φροντίζει να … αντιστρέψει («*στρέψας*») οτιδήποτε διαταραγμένο και ασταθές της προηγούμενης περιόδου κατά την οποία ο κόσμος αφέθηκε στη μοίρα του, να τον επαναφέρει σε τάξη και να τον κάνει αθάνατο («*ἀθάνατον*») και αγέραστο («*ἀγήρων*») (273c4-e4).
Με αυτόν τον τρόπο, επιστρέφουμε στην εποχή του Κρόνου και συμπληρώνεται έτσι μια πλήρης περίοδος. Η μετάβαση από την εποχή του Δία στην εποχή του Κρόνου ώστε να αποφευχθεί το κακό, μη περιοδικό άπειρο, επιτυγχάνεται μέσω του Κριτηρίου Λόγου.
Ο κόσμος κινείται ατέρμονα επαναλαμβάνοντας αυτήν την περίοδο, με εναλλαγή της εποχής του Κρόνου και της εποχής του Δία.
Η σχέση των δύο εποχών είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα. Περιγράφεται σχηματικά ως εξής: Κατά την εποχή του Δία (την οποία επί του παρόντος διανύουμε) οι άνδρες μεταβαίνουν από την ανυπαρξία (α) στην ύπαρξη (β), στη συνέχεια μεγαλώνουν (γ), αποκτούν γενειάδα (δ), στη συνέχεια η γενειάδα τους ασπρίζει (ε), μετά γερνούν και οδεύουν προς τον θάνατο (στ). Εάν εκείνη τη στιγμή ο κόσμος τύχει να αλλάξει και να μεταβεί στην εποχή του Κρόνου, τότε οι άνθρωποι θα περάσουν από το στάδιο (στ) στο (ε), μετά στο (δ), στο (γ), στο (β) και τελικά θα μεταβούν στην ανυπαρξία (α) (270d-271a).
Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τον μύθο ο κόσμος είναι περιοδικός, και η περίοδος αποτελείται από δύο ημιπεριόδους, την εποχή του Κρόνου ακολουθούμενη από την εποχή του Δία, με άλλα λόγια είναι παλινδρομικά περιοδικός.

5.4. Η Διαίρεση για τον Πολιτικό πρέπει να συνεχιστεί σύμφωνα με τον μύθο της παλινδρομικής περιοδικότητας (276a1-7)

Η Διαίρεση για τον ορισμό του Πολιτικού, τα δέκα πρώτα βήματα της οποίας αντιστοιχούν στην εποχή του Κρόνου, πρέπει να ολοκληρωθεί με τα τελευταία δέκα διαιρετικά βήματα, της εποχής του Δία, με **παλινδρομικό** προς την εποχή του Κρόνου τρόπο και με τον **Λόγο** να περιλαμβάνει **κυκλικά** και τις δύο εποχές (276a). Συνεπώς κάθε Διαίρεση και Συναγωγή έχει παλινδρομικά περιοδική (και επομένως άπειρη) μορφή.

Το απόσπασμα 276a1-7 που φαίνεται παρακάτω είναι κρίσιμο για την ερμηνεία που αποδίδουμε στον *Πολιτικό*, επειδή σε αυτό ο Πλάτων ξεκαθαρίζει απόλυτα πως *η παλινδρομική περιοδικότητα του μύθου πρέπει να εφαρμοστεί στην Διαίρεση και Συναγωγή του Πολιτικού*. Το απόσπασμα 276a1-7 είναι το ακόλουθο:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Νεώτερος Σωκράτης:
…όμως πώς (τίνα τρόπον) θα γινόταν η επόμενη διαίρεση (ἡ μετὰ τοῦτο διαίρεσις);
Ξένος:
Με τον ίδιο τρόπο (κατὰ ταὐτὰ)</td></tr>
<tr><td colspan="2">όπως ακριβώς (καθ' ἅπερ)
διαιρέσαμε (διῃρούμεθα) προηγουμένως
(ἔμπροσθεν)
την τέχνη της εκτροφής κοπαδιών σε</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>εκείνα που περπατούν
[A$_7$]</td><td></td></tr>
<tr><td>και σε πτηνά,
[B$_7$]</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>και
μη διασταυρούμενα είδη
[A$_9$]</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>και χωρίς κέρας,
[A$_8$]</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>έτσι πρέπει να διαιρέσουμε και
την τέχνη της φροντίδας κοπαδιών
σε τέχνες όμοιες με (τοῖς αὐτοῖς)</td></tr>
<tr><td colspan="2">εκείνες (τούτοις),</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">συμπεριλαμβάνοντας (περιειληφότες) στον λόγο (ἐν τῷ λόγῳ)
εξίσου (ὁμοίως)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>την παρούσα εποχή [του Δία]
(τὴν ἀγελαιοκομικὴν τήν τε νῦν)</td></tr>
<tr><td colspan="2">και την εποχή του Κρόνου
(καὶ τὴν ἐπὶ Κρόνου βασιλείαν).</td><td></td></tr>
</table>

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο ο μύθος των δύο εποχών εφαρμόζεται για να προσδώσει την ιδιότητα της παλινδρομικότητας στον ορισμό του Πολιτικού, ο οποίος αποτελεί μια συμβολική, φιλοσοφική μίμηση της παλινδρομικά περιοδικής τετραγωνικής ανθυφαίρεσης του Θεαίτητου.

<table>
<tr><td></td><td>Το δεύτερο μισό της διαίρεσης
(ἀγελαιοκομικὴ,
όπου η διοικούμενη αγέλη είναι η ανθρώπινη αγέλη ως σταθερά, και
η φύση του έχοντος το γενικό πρόσταγμα της αγέλης είναι η μεταβλητή)</td></tr>
</table>

	αντιστοιχεί στην εποχή του **Δία**,
ενώ το πρώτο μισό (***ἀγελαιοτροφικὴ***, όπου **η φύση της διοικούμενης αγέλης** είναι η μεταβλητή) αντιστοιχεί στην εποχή του **Κρόνου**,	
στον μύθο των δύο εποχών (Ενότητα 5.3). Συνεπώς, το χωρίο 276a είναι ακριβώς το σημείο στον *Πολιτικό*, όπου η μέθοδος της διαίρεσης και συναγωγής, δηλαδή η μέθοδος της φιλοσοφικής περιοδικής ανθυφαίρεσης, συνδέεται σαφώς με την ***παλινδρομικότητα***, καθώς	
η εποχή του Κρόνου	
	και η εποχή του Δία
βρίσκονται σε *παλινδρομική* σχέση στον μύθο της αντιστροφής της κατεύθυνσης κίνησης (*ἀνείλιξιν*) του κόσμου.	
Στο χωρίο αυτό, το πρώτο μισό της διαδικασίας με τα δέκα πρώτα διαιρετικά βήματα, όπου το G διαιρείται σε B_1, A_1, το A_1 διαιρείται σε B_2, A_2, …, και το A_9 διαιρείται σε B_{10}, A_{10}, συνδέεται ρητά με την εποχή του Κρόνου,	
	και, επίσης ρητά, δηλώνεται ότι ο ορισμός του Πολιτικού πρέπει να ολοκληρωθεί όπως στον μύθο των δύο εποχών, με το δεύτερο μισό της διαδικασίας, με δέκα τελευταία διαιρετικά βήματα, έστω A'_{11} διαιρούμενο σε B'_{10}, A'_{10}, A'_{10} διαιρούμενο σε B'_9, A'_9, …, A'_2 διαιρούμενο σε B'_1, A'_1, αντιστοιχώντας στην εποχή του Δία, η οποία είναι παλινδρομική με
την εποχή του Κρόνου,	
αποτελώντας και οι δύο μαζί μια *πλήρη περίοδο, κύκλο,* που επιτυγχάνεται μέσω του *Κριτηρίου Λόγου* $B''_1/A''_1=B_1/A_1$ (όπου τα B''_1 και A''_1 προκύπτουν από τη διαίρεση του A'_1).	

Σημείωση: Υπάρχουν επίσης τα πολυάριθμα βήματα A_{11}, A_{12}, ..., ..., A'_{12}, A'_{11} τα οποία δεν εξετάζονται με λεπτομέρεια, αλλά δίνονται συλλογικά σε ομάδες, με τη μορφή «*συναιτίων*» (287b-289a). Δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το τμήμα της διαίρεσης του ορισμού του Πολιτικού, καθώς δεν παίζει κάποιον ρόλο στην ανακατασκευή μας.

Στο σημείο αυτό είναι η κατάλληλη στιγμή να θυμηθούμε πως *όλες οι περιγραφές* της μεθόδου της (Διαίρεσης και) Συναγωγής στους Πλατωνικούς διαλόγους επιδεικνύουν *την κυκλική, περιοδική φύση* της μεθόδου (όπως σημειώνεται στην Ενότητα 2, παραπάνω). Συγκεκριμένα, η Πλατωνική Διαίρεση και Συναγωγή δεν είναι μια πεπερασμένη διαίρεση όπως σαφώς είναι η Αριστοτέλεια διαίρεση σε γένος και διαφορά (genus and differentia), αλλά, έχοντας περιοδική μορφή είναι μια άπειρη διαίρεση. Σύμφωνα με τις εμφανίσεις της Διαίρεσης και Συναγωγής στον *Σοφιστή*, αυτός ο κύκλος πραγματοποιείται μέσω του *Κριτηρίου Λόγου*. Αυτό, στον *Πολιτικό* παίρνει την ακόλουθη μορφή:

> Το τελευταίο γένος της εποχής του Δία, που συμβολίζεται με A'_1, θα διαιρεθεί στην τέχνη της Στρατηγείας B''_1 και στην τέχνη του Πολιτικού A''_1, για τις οποίες το *Κριτήριο Λόγου* πράγματι ισχύει: $B''_1/A''_1=B_1/A_1$.

Το νέο στοιχείο στη Διαίρεση και Συναγωγή του διαλόγου *Πολιτικός* σε σχέση με τον *Σοφιστή*, το οποίο παρουσιάστηκε στις Ενότητες 5.3 και 5.4, είναι επιπροσθέτως της περιοδικότητας και η παρουσία *παλινδρομικότητας μέσα στην περίοδο*. Με άλλα λόγια αναμένουμε ότι η ανθυφαίρεση θα έχει περίοδο, αλλά παρουσιάζοντας συμμετρία σε σχέση με το μέσο της περιόδου. Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα του μύθου της Ενότητας 5.3, τα διαιρετικά βήματα μέσα στην περίοδο θα χωριστούν σε δύο μέρη, με το πρώτο μισό να αντιστοιχεί στην εποχή του Κρόνου, και το δεύτερο μισό στην εποχή του Δία. Αναμένουμε λοιπόν ότι η διαίρεση του ορισμού του Πολιτικού θα πρέπει να εμφανίζει την παλινδρομικότητα αυτών των δύο εποχών. Δείχνουμε στις Ενότητες 5.5. και 5.6 παρακάτω, ότι αυτό ακριβώς είναι το σχέδιο που προτείνεται και υλοποιείται από τον Πλάτωνα για να ορίσει το νοητό Ον «Πολιτικός».

5.5. Τα τελευταία δέκα Διαιρετικά βήματα και το Κριτήριο Λόγου για τον Πολιτικό (267c-268d και 274e-277c, 289e-305e)

Τα τελευταία δέκα βήματα A'_{10}, …, A'_1 στην εποχή του Δία και το Κριτήριο Λόγου στον ορισμό του Πολιτικού, περιγράφονται στο 289e-305e.

5.5.1. Το παιχνίδι (277e)

Ο Πλάτων δεν έχει την πρόθεση να παρουσιάσει τα βήματα που αντιστοιχούν στην εποχή του Δία με σαφήνεια και διαδοχικά. Συνεπώς, τα βήματα αυτά δεν δίνονται στη σειρά με την οποία θα έπρεπε να εμφανίζονται στη διαίρεση για τον ορισμό του Πολιτικού, αλλά με τη μορφή *παιχνιδιού*, θυμίζοντας παιδικό παιχνίδι γραμματικής, όπως συγκεκριμένα αναφέρεται στο 277e. Ο στόχος μας είναι η εύρεση της σωστής σειράς και του Κριτηρίου Λόγου και κατά συνέπεια η ολοκλήρωση του ορισμού του Πολιτικού.

5.5.2. Οι κανόνες του παιχνιδιού

Ο Πλάτων θέτει παρ’ όλα αυτά συγκεκριμένους κανόνες που μας επιτρέπουν να ολοκληρώσουμε αυτόν τον ορισμό.

Κανόνας 1. Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των ήδη ορισμένων ειδών B_j και των παλινδρομικά ανάλογων με αυτά ειδών B'_j που πρόκειται να οριστούν για $j=1,2,...,10$ (276a, 277e-279a)

Για κάθε διαιρετικό βήμα (B_j, A_j) της εποχής του Κρόνου, δηλαδή της «*άγελαιοτροφικὴς*» όπου κάποιο είδος αγέλης B_j που κυβερνάται και διοικείται, *απορρίπτεται*, υπάρχει ένα μοναδικό διαιρετικό βήμα (B'_j, A'_j) της εποχής του Δία,

δηλαδή της «*ἀγελαιοκομικὴς*», όπου κάποιου «παρόμοιου» είδους διακυβέρνηση και ηγεσία B'_j της ανθρώπινης αγέλης απορρίπτεται, για j=1,..,10.
Τα «θετικά» γένη A'_j *δεν δίδονται,* όμως από τη μέθοδο της Διαίρεσης και Συναγωγής συνεπάγεται πως γενικά κάθε A'_j είναι μοναδικώς ορισμένο, σαν σχετικό συμπλήρωμα του B'_j για το γένος A'_{j+1}.

Κανόνας 2. Η διάταξη των συστημάτων διακυβέρνησης (291c-303b)

Υπάρχουν έξι τύποι συμβατικής διακυβέρνησης, οι οποίοι είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των κριτηρίων:
(I) διακυβέρνηση από έναν, ή από λίγους, ή από πολλούς, και
(II) διακυβέρνηση με νόμους, ή χωρίς νόμους.

Με βάση τα παραπάνω:
η Τυραννία είναι διακυβέρνηση από έναν, χωρίς νόμους,
η Ολιγαρχία από λίγους χωρίς νόμους,
η Αναρχία από πολλούς χωρίς νόμους,
η Δημοκρατία από πολλούς με νόμους,
η Αριστοκρατία από λίγους με νόμους, και
η Μοναρχία από έναν με νόμους.
(Ο Πλάτων δεν χρησιμοποιεί τον όρο Αναρχία για την διακυβέρνηση από πολλούς χωρίς νόμους στον διάλογο *Πολιτικός*, όμως χρησιμοποιεί αυτόν τον όρο αλλού, όπως για παράδειγμα στο χωρίο *Νόμοι* 942a-d).

Υπάρχει μια μακρά συζήτηση σχετικά με αυτούς τους τύπους διακυβέρνησης στο χωρίο *Πολιτικός* 291c-303b με τα ακόλουθα συμπεράσματα:
(2α) Υπάρχει μια διάταξη αυτών των έξι τύπων διακυβέρνησης ως ακολούθως:
Και οι έξι γνωστοί τύποι διακυβέρνησης, όλοι τους χωρίς αληθή γνώση, τελικώς θα απορριφθούν. Από αυτούς ο χειρότερος τύπος διακυβέρνησης είναι η Τυραννία (διακυβέρνηση από έναν, χωρίς νόμους), μετά η Ολιγαρχία (διακυβέρνηση από λίγους, χωρίς νόμους), μετά η Αναρχία (Δημοκρατία χωρίς νόμους), και στη συνέχεια, με αντίστροφη/παλινδρομική σειρά, η διακυβέρνηση με νόμους: πρώτα η Δημοκρατία, μετά η Αριστοκρατία, μετά η Μοναρχία.
Αυτή η διάταξη προκύπτει επειδή:
(i) απουσία κάποιου τύπου διακυβέρνησης για τον οποίο να υπάρχει αληθής γνώση, είναι προτιμότερο να υπάρχει διακυβέρνηση με νόμους, από διακυβέρνηση χωρίς νόμους, και
(ii) χωρίς νόμους οι πολλοί κυβερνούν καλύτερα από ό,τι οι λίγοι και οι λίγοι καλύτερα από ό,τι ένας, ενώ με την παρουσία νόμων η κατάσταση είναι ακριβώς η αντίστροφη.
(2β) Όλοι αυτοί οι συμβατικοί τύποι διακυβέρνησης θα απορριφθούν, δεν βασίζονται σε αληθή γνώση. Συνεπώς κάθε ένας από αυτούς (πιθανώς παραπάνω από ένας τη φορά) θα απορριφθούν ως κάποιο B′j.
(2γ) Όλοι οι τύποι διακυβέρνησης με νόμους θα απορριφθούν επειδή οι νόμοι, και στην ουσία οτιδήποτε γραπτό, είναι κάτι το *άψυχο,* σε αντίθεση με την αληθή γνώση, που έχει ζωή και ψυχή. Το παραπάνω υποστηρίζεται ισχυρά στο τελευταίο μέρος του χωρίου *Φαίδρος* 274c5-277a5, όπου αντίστοιχα ο Πλάτων απορρίπτει γενικώς τον γραπτό λόγο ως εικόνα, ως κάτι μη πραγματικά έμψυχο.

Κανόνας 3. Η διάταξη των προς απόρριψη ειδών B'_j (303d-e)

Στην εποχή του Δία, ένας σχετικά καλύτερος τύπος διακυβέρνησης *θα απορριφθεί αργότερα,* δηλαδή θα εμφανιστεί σαν B'_j, με μικρότερο δείκτη j ενώ ένας σχετικά χειρότερος τύπος διακυβέρνησης, θα εμφανιστεί σαν B'_k με μεγαλύτερο δείκτη k.

Κανόνας 4. Οι τρεις τελευταίες τέχνες που θα απορριφθούν (303e-305e)

Οι τέχνες της Δικαστικής, της Ρητορικής και της Στρατηγείας είναι οι σχετικά καλύτερες τέχνες διακυβέρνησης, και συνεπώς είναι οι τρεις τελευταίες που θα απορριφθούν. Θα αποτελούν λοιπόν τα γένη $\mathbf{B'_2}$, $\mathbf{B'_1}$, $\mathbf{B''_1}$, αντιστοίχως.

5.5.3. Η αναζήτηση των δέκα παλινδρομικών αντιστοιχιών

Εφαρμόζουμε τώρα τους Κανόνες που τέθηκαν από τον Πλάτωνα με σκοπό να βρούμε την παλινδρομική φύση της Διαίρεσης για τον Πολιτικό.

[*Διαιρετικό βήμα απόρριψης του* $\mathbf{B'_4}$ *που είναι παλινδρομικό ως προς το* $\mathbf{B_4}$]

Αυτή είναι σίγουρα η πιο ενδιαφέρουσα παλινδρομική αντιστοιχία. Σε ένα φημισμένο χωρίο στον *Φαίδρο*, το 274c-277a, ο Πλάτων επιχειρηματολογεί κατά του γραπτού λόγου, ως κάτι το άψυχο. Προφανώς αυτός είναι ο λόγος που ο Πλάτων εισάγει το απολύτως κατασκευασμένο Βήμα Διαίρεσης σε αγέλες έμψυχων [$\mathbf{A_4}$] και άψυχων [$\mathbf{B_4}$], απορρίπτοντας στη συνέχεια το σκέλος $\mathbf{B_4}$ των άψυχων. Συνειδητοποιούμε ότι αυτό συμβαίνει ακριβώς με σκοπό να απορριφθούν ως παλινδρομικά ανάλογες όλες οι διακυβερνήσεις που δεν βασίζονται σε αληθινή γνώση των νοητών, αλλά σε γραπτούς νόμους.

	Στο $\mathbf{B'_4}$ *κάθε διακυβέρνηση με γραπτούς νόμους* (συμπεριλαμβανομένης της Δημοκρατίας, της Αριστοκρατίας και της Μοναρχίας) πρέπει να απορριφθεί σύμφωνα με το 274c5-277a5 στον *Φαίδρο*, ως *άψυχη* διακυβέρνηση, με *παλινδρομικό* τρόπο ως προς
την απόρριψη του $\mathbf{B_4}$, τις *αγέλες άψυχων*.	

[*Διαιρετικό βήμα απόρριψης των* $\mathbf{B'_7}$, $\mathbf{B'_6}$, $\mathbf{B'_3}$, *παλινδρομικών ως προς τα* $\mathbf{B_7}$, $\mathbf{B_6}$, $\mathbf{B_3}$, αντιστοίχως]

Είναι ξεκάθαρο από τον Κανόνα 1 πως:

	στο $\mathbf{B'_7}$ *οι κήρυκες*, των οποίων ο προστάτης θεός Ερμής, ο αγγελιαφόρος των Θεών, έχει την ικανότητα να πετάει, θα απορριφθούν ως κυβερνήτες (290a-c) με *παλινδρομικό* τρόπο ως προς
την απόρριψη του $\mathbf{B_7}$, τις *αγέλες πτηνών*.	

	Στο $\mathbf{B'_6}$ *οι έμποροι και πλοίαρχοι* θα απορριφθούν ως κυβερνήτες (289e-290a), με *παλινδρομικό* τρόπο ως προς
την απόρριψη του $\mathbf{B_6}$,	

τις *αγέλες υδρόβιων ζώων*, και	

	στο **Β′3** *οι ιερείς και οι μάντεις* θα απορριφθούν ως κυβερνήτες (290c-291a) με *παλινδρομικό* τρόπο ως προς
την απόρριψη του **Β3**, όπου απορρίπτονται οι τέχνες που περιλαμβάνουν *προσταγές που προέρχονται από άλλον*.	

[*Διαιρετικό βήμα απόρριψης του* **Β′10**, *παλινδρομικού ως προς το* **Β10**]

Όσον αφορά την απόρριψη των σοφιστών ως κυβερνητών στο 291b-c, και πάλι στο 303b-c (όπου αυτή τη δεύτερη φορά απορρίπτονται οι ***σοφιστές σοφιστών***), η παλινδρομική συσχέτιση με την απόρριψη της αγέλης χοίρων στο **Β10** (265e-266c), δεν είναι προφανής και χρειάζεται να εισαχθεί κάποιο επιχείρημα για την αιτιολόγηση αυτής της σχέσης.
Κατ’ αρχάς, η διάκριση του χοίρου [**Β10**] από τον άνθρωπο [**Α10**] έγκειται στο ότι ο χοίρος είναι τετράποδος, γεγονός που περιγράφεται από τον Πλάτωνα με παιγνιώδη διάθεση σε γεωμετρική γλώσσα, σαν «**διάμετρος διαμέτρου**». Παρατηρούμε ότι γλωσσικά η αλλόκοτη έκφραση *«διάμετρος διαμέτρου»* έχει κάποια ομοιότητα στη μορφή με την εξίσου αλλόκοτη έκφραση «**σοφιστές σοφιστών**».
Δεν είναι εύκολο να βρούμε κάποια άλλη αξιόλογη συσχέτιση, εκτός αν παρατηρήσουμε την εξής διάκριση που διαφαίνεται μέσω των διαλόγων *Πολιτεία* και *Μένων*: ενώ ένας πραγματικός διαλεκτικός ασχολείται, σύμφωνα με το χωρίο 510d5-511a1 στην *Πολιτεία*, με «την ίδια τη διάμετρο», δηλαδή το χωρίς μέρη αληθές Ον, οι *σοφιστές* αντίθετα, σύμφωνα με το χωρίο *Μένων* 85b4, ονομάζουν «διάμετρο» την ευθεία γραμμή που ενώνει την μία γωνία ενός τετραγώνου με την απέναντι γωνία, ένα μέγεθος διαιρετό. Η ερμηνεία αυτής της διάκρισης είναι πιθανώς η ακόλουθη: οι σοφιστές ασχολούνται με μεγέθη και γενικότερα με αισθητά, ενώ ο διαλεκτικός ασχολείται με την ιδέα της διαμέτρου, δηλαδή πιθανώς τον λόγο της διαμέτρου προς την πλευρά ενός τετραγώνου. Σε κάθε περίπτωση, στον διάλογο *Μένων* υποδεικνύεται η ύπαρξη σύνδεσης μεταξύ της διαμέτρου και των σοφιστών. Συνεπώς, υπάρχει επίσης πράγματι μια σύνδεση μεταξύ της *«διαμέτρου της διαμέτρου»*, δηλαδή τον τετράποδο χοίρο και τους *«σοφιστές των σοφιστών»*, υπονοώντας φυσικά την ομοιότητα των χειρότερων σοφιστών με χοίρους.
Είμαστε στο σημείο αυτό σαφώς έτοιμοι, δεδομένης μια παιγνιώδους διάθεσης, να δεχτούμε ότι, από τον Κανόνα 1:

	οι σοφιστές σοφιστών, που απορρίφθηκαν σαν κυβερνήτες στο **Β′10**, *σχετίζονται παλινδρομικά* με
την *αγέλη χοίρων* που περιγράφεται με παιγνιώδη διάθεση ως «*διάμετρος διαμέτρου*», και που απορρίφθηκε στο **Β10**.	

[*Διαιρετικό βήμα απόρριψης των* **Β′9**, **Β′8**, *παλινδρομικών ως προς τα* **Β9**, **Β8** αντιστοίχως]

Προκύπτει υποχρεωτικά, από τους Κανόνες 2 και 3, πως οι δύο τύποι συμβατικής διακυβέρνησης χωρίς νόμους, δηλαδή η χαμηλότερη όλων Τυραννία και η αμέσως επόμενη Ολιγαρχία θα πρέπει να σχετίζονται με τις δύο χαμηλότερες εναπομείνασες ελεύθερες θέσεις στην εποχή του Δία, δηλαδή τις $\mathbf{B'_9}$, $\mathbf{B'_8}$, αντίστοιχα. Γίνεται αμέσως αντιληπτό το γιατί ο Πλάτων παρομοιάζει δύο φορές (στα χωρία 291a-b και 303c-d) τις χειρότερες κατηγορίες συμβατικών πολιτικών με Κενταύρους, πλάσματα ημίαιμα, και Σατύρους, κερασφόρα πλάσματα! Συνεπώς:

	στο $\mathbf{B'_9}$ οι *Τύραννοι*, που προσομοιάζονται με Κενταύρους, πλάσματα ημίαιμα, πρέπει να απορριφθούν, καθώς *σχετίζονται παλινδρομικά* με
αγέλες ημίαιμων ζώων (ζώων από είδη που διασταυρώνονται) που ήδη απορρίφθηκαν στο $\mathbf{B_9}$, και	
	στο $\mathbf{B'_8}$ οι *Ολιγάρχες*, που προσομοιάζονται με Σατύρους, πλάσματα με κέρατα, πρέπει να απορριφθούν, καθώς *σχετίζονται παλινδρομικά* με
αγέλες κερασφόρων ζώων που ήδη απορρίφθηκαν στο $\mathbf{B_8}$.	

[*Διαιρετικό βήμα απόρριψης του* $\mathbf{B'_5}$*, παλινδρομικού ως προς το* $\mathbf{B_5}$]

Δεν είναι άμεσα προφανής από τον *Πολιτικό* ο λόγος για τον οποίο η Δημοκρατία χωρίς νόμους, η Αναρχία, είναι παλινδρομικά σχετιζόμενη με την απορριφθείσα «μονοτροφία» στο $\mathbf{B_5}$, και συνεπώς ο λόγος για τον οποίο θα πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση του απορριφθέντος μέρους στο $\mathbf{B'_5}$. Η εξήγηση δίνεται παρ' όλα αυτά στους *Νόμους*:

	η Δημοκρατία χωρίς νόμους, δηλαδή η *Αναρχία*, που απορρίπτεται στο $\mathbf{B'_5}$ περιγράφεται στο χωρίο *Νόμοι* 942a5-d2 ως «κατὰ μόνας δρᾶν», δηλαδή σαν μια διακυβέρνηση στην οποία κάθε άτομο δρα ατομικά, και συνεπώς είναι *παλινδρομικά συσχετιζόμενη* με
την απορριφθείσα «*μονοτροφία*», την εκτροφή ενός μόνο ζώου, στο $\mathbf{B_5}$.	

[*Διαιρετικό βήμα απόρριψης των* $\mathbf{B'_2}$, $\mathbf{B'_1}$ *παλινδρομικών ως προς τα* $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_1}$, αντίστοιχα]

Απομένουν οι τέχνες της Δικαστικής, Ρητορικής και Στρατηγείας, για τις οποίες ο Πλάτων θέτει τον Κανόνα 4, πως δηλαδή θα απορριφθούν τελευταίες (303e-305e). Από αυτές:

	στο $\mathbf{B'_2}$ *οι Δικαστές* απορρίπτονται ως κυβερνήτες (305b-c)

	με *παλινδρομικό* τρόπο ως προς
την απόρριψη στο **B_2**, της *τέχνης του* «κρίνειν» (260a-c) και	

	στο **B'_1** *οι Ρήτορες* απορρίπτονται ως κυβερνήτες (304c-e) με *παλινδρομικό* τρόπο ως προς
την απόρριψη στο **B_1**, των *πρακτικών τεχνών*	

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η αναζήτηση παλινδρομικών αντιστοιχιών μεταξύ των δέκα πρώτων βημάτων της εποχής του Κρόνου με τα δέκα τελευταία βήματα της εποχής του Δια. Η τέχνη της Στρατηγείας ακόμα δεν έχει απορριφθεί. Αυτό θα συμβεί στο τελευταίο βήμα όπου το Κριτήριο Λόγου κάνει επίσης την εμφάνισή του ούτως ώστε να συμπληρωθεί η περίοδος, να κλείσει ο κύκλος.

5.6. Ο Λόγος στην Διαίρεση και Συναγωγή του Πολιτικού

Η τελευταία διαίρεση είναι η διαίρεση του **A'_1** στην πρακτική τέχνη της Στρατηγείας **B''_1** και στην γνωστική τέχνη του Πολιτικού **A''_1** (304e-305a).
Το Κριτήριο Λόγου αποτελείται από την *εξίσωση του αρχικού λόγου* των πρακτικών τεχνών [**B_1**] προς τις επιστημονικές τέχνες [**A_1**] *με τον τελικό λόγο* της πρακτικής τέχνης της Στρατηγείας [**B''_1**] προς την επιστημονική τέχνη του Πολιτικού [**A''_1**]:

πρακτικές τέχνες **B_1**/ επιστημονικές τέχνες **A_1** =
πρακτική τέχνη της Στρατηγείας **B''_1**/επιστημονική τέχνη του Πολιτικού **A''_1**.

Συνεπώς $B_1/A_1=B''_1/A''_1$, διασφαλίζοντας την περιοδικότητα.

5.7. Ο ορισμός του Πολιτικού σαν φιλοσοφική παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση (Πολιτικός 258c-267c, 289e-305e)

Είμαστε πλέον σε θέση να συγκεντρώσουμε όλα τα κομμάτια της Διαίρεσης και Συναγωγής για τον ορισμό του Πολιτικού. Το επόμενο σχήμα της Διαίρεσης του Πολιτικού ενσωματώνει όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για τον ορισμό του Πολιτικού σαν φιλοσοφική παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση στον διάλογο *Πολιτικός*.

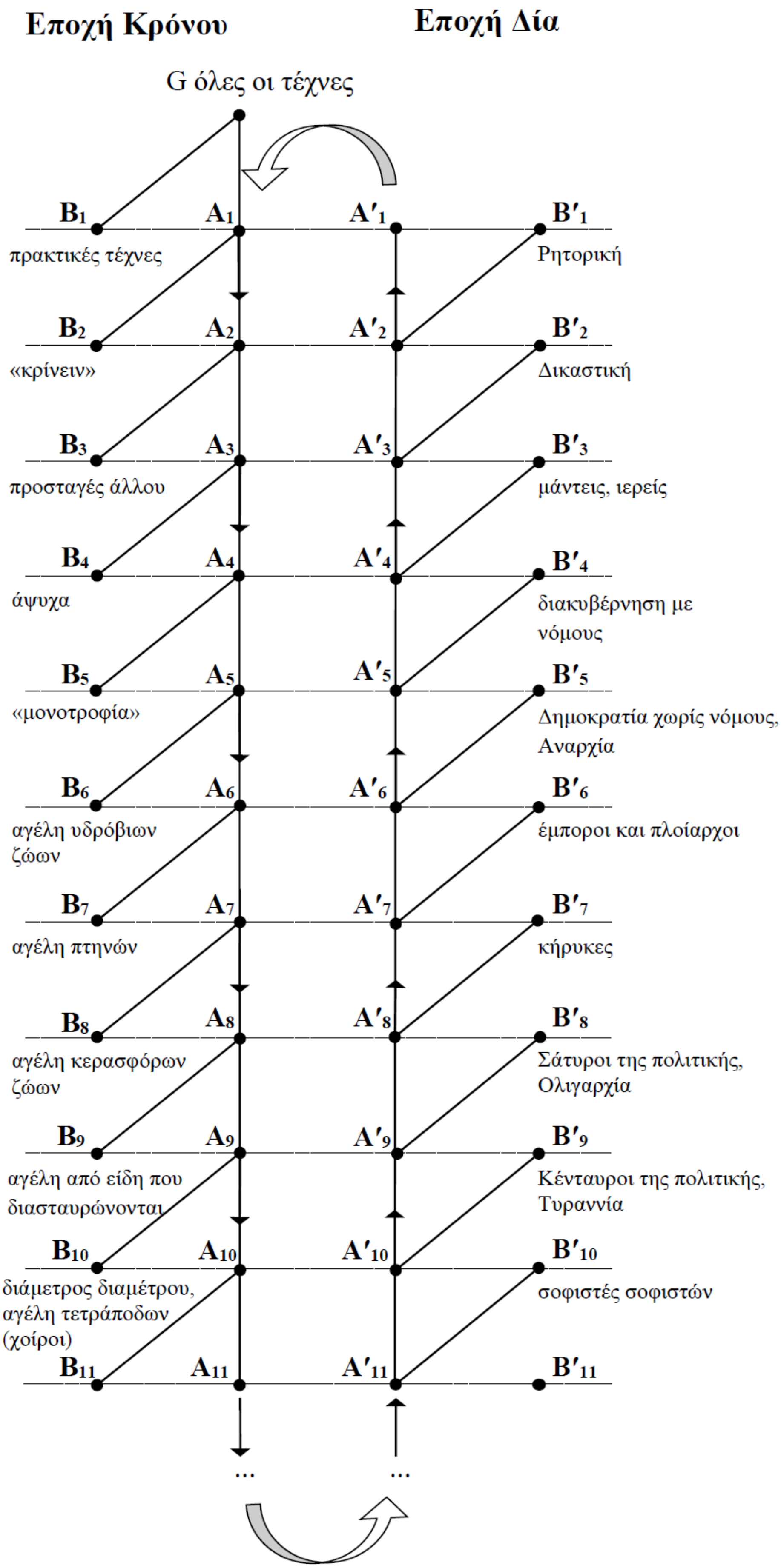
Το σχήμα θα πρέπει να διαβαστεί ακολουθώντας κυκλική αριστερόστροφη φορά, ως εξής:

Η διαίρεση *αρχίζει* από την αριστερή στήλη.
Ξεκινώντας από το G και προχωρώντας προς τα κάτω μέχρι το A_{10} , είναι πρώτα δέκα δυϊκά διαιρετικά βήματα της *εποχής του Κρόνου* όπου:
το αρχικό Γένος G διαιρείται σε B_1 και A_1,

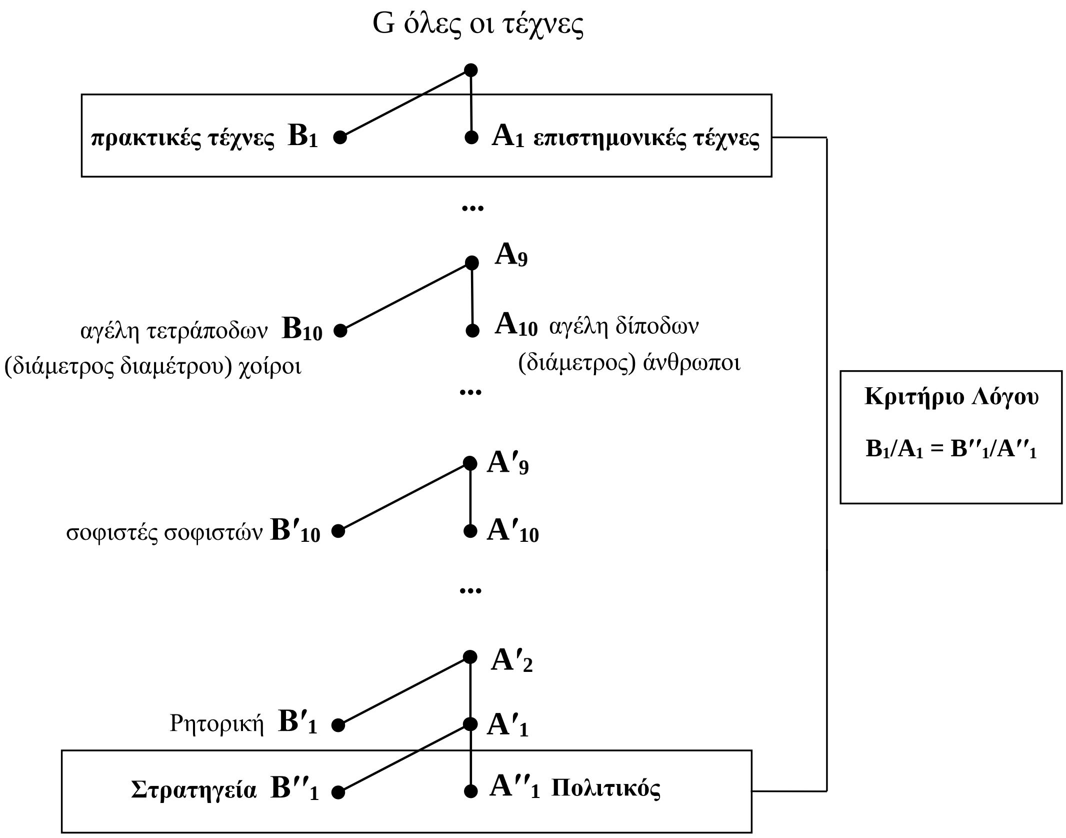
το A_1 διαιρείται σε B_2 και A_2,
...,
το A_9 διαιρείται σε B_{10} και A_{10}.

Η διαίρεση *συνεχίζεται* με τα λεγόμενα «συναίτια» A_{10} προς A_{11} προς … προς A'_{11}, τα οποία δεν παρουσιάζονται αναλυτικά στο σχήμα καθώς δεν ενέχουν καθοριστική σημασία στην ανακατασκευή μας.

Η διαίρεση *ολοκληρώνεται* με την δεξιά στήλη.
Ξεκινώντας από το A'_{11} και προχωρώντας προς τα πάνω μέχρι το A'_1, είναι τα τελευταία δέκα δυϊκά διαιρετικά βήματα της *εποχής του Δία* όπου:
το A'_{11} διαιρείται σε B'_{10} και A'_{10},
το A'_{10} διαιρείται σε B'_9 και A'_9,
... ,
το A'_2 διαιρείται σε B'_1 και A'_1, και
το A'_1 διαιρείται σε B''_1 και A''_1.


Εποχή Κρόνου
Εποχή Δία
G όλες οι τέχνες
B1
A1
A′1
B′1
πρακτικές τέχνες
Ρητορική
B2
A2
A′2
B′2
«κρίνειν»
Δικαστική
B3
A3
A′3
B′3
προσταγές άλλου
μάντεις, ιερείς
B4
A4
A′4
B′4
άψυχα
διακυβέρνηση με νόμους
B5
A5
A′5
B′5
«μονοτροφία»
Δημοκρατία χωρίς νόμους, Αναρχία
B6
A6
A′6
B′6
αγέλη υδρόβιων ζώων
έμποροι και πλοίαρχοι
B7
A7
A′7
B′7
αγέλη πτηνών
κήρυκες
B8
A8
A′8
B′8
αγέλη κερασφόρων ζώων
Σάτυροι της πολιτικής, Ολιγαρχία
B9
A9
A′9
B′9
αγέλη από είδη που διασταυρώνονται
Κένταυροι της πολιτικής, Τυραννία
B10
A10
A′10
B′10
διάμετρος διαμέτρου, αγέλη τετράποδων (χοίροι)
σοφιστές σοφιστών
B11
A11
A′11
B′11
…
…

Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται επίσης γραφικά το *Κριτήριο Λόγου* $B_1/A_1=B''_1/A''_1$ το οποίο σημαίνει την ολοκλήρωση της περιόδου στο φιλοσοφικό ανάλογο της ***παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης*** που ακολουθεί ο Πλάτων για τον ορισμό του Πολιτικού.



Κλείνοντας την Ενότητα αυτή, καθίσταται πλέον σαφές πως ο σκοπός του *Πολιτικού* είναι να δείξει πως ο τέλειος ορισμός ενός νοητού Όντος επιτυγχάνεται μέσω ενός φιλοσοφικού αναλόγου μιας παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης. Δεν υπάρχει αμφιβολία πως το σύνολο του *Πολιτικού* είναι μια φιλοσοφική μίμηση του Ισχυρού Θεωρήματος του Θεαίτητου σχετικά με την παλινδρομική περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης της τετραγωνικής ασυμμετρίας $a^2=Nb^2$ για μη-τετράγωνο αριθμό N. Με την ανακατασκευή του Θεωρήματος αυτού θα ασχοληθούμε στην ακόλουθη Ενότητα 6.

Ενότητα 6. Ανακατασκευή της απόδειξης του Ισχυρού Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου, επιστρατεύοντας εργαλεία από το Θεαιτήτειο Βιβλίο X των **Στοιχείων** *και το υπαινισσόμενο επιχείρημα του περιστερεώνα στον* **Πολιτικό** *του Πλάτωνα*

6.1. Το Ισχυρό Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου

Η Διαίρεση και Συναγωγή για τον Πολιτικό στον ομώνυμο διάλογο είναι ξεκάθαρα μια συνέχιση των παραδειγμάτων της Διαίρεσης και Συναγωγής που δόθηκαν στον *Σοφιστή,* κυρίως για τον Ασπαλιευτή και τον Σοφιστή, τα οποία αποδείχθηκε (στην Ενότητα 2) πως είναι φιλοσοφικές μιμήσεις μιας δυάδος σε περιοδική ανθυφαίρεση.
Επιπλέον:
- στην Ενότητα 3 αποδείχθηκε πως το θεώρημα που ο Πλάτων (α) ανέφερε στο χωρίο *Θεαίτητος* 147c-148d, πως ο Θεαίτητος είχε αποδείξει και (β) μιμήθηκε φιλοσοφικά στα χωρία *Πολιτικός* 283a-287b και *Φίληβος* 16c, 23a-25e, είναι το ακόλουθο Ασθενές Θεώρημα Περιοδικότητας:
«εάν $a^2=Nb^2$ για μη-τετράγωνο αριθμό N, ή γενικότερα εάν a, b δυνάμει-μόνο σύμμετρες ευθείες (δηλαδή δυνάμει σύμμετρα a^2 προς b^2 και μήκει ασύμμετρα a προς b), τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι περιοδική», και
- στην Ενότητα 4, πως μια ανακατασκευή της απόδειξης μπορεί να προκύψει με τη χρήση εργαλείων αποκλειστικά από το Θεαιτήτειο Βιβλίο X των *Στοιχείων* <u>συν</u> ένα επιχείρημα περιστερεώνα.

Όμως τώρα, ωθούμενοι από την εξαιρετικά περίπλοκη φιλοσοφική μίμηση του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας στον *Πολιτικό*, που περιεγράφηκε στην Ενότητα 5, δεν μπορούμε παρά να παραδεχτούμε ότι στην πραγματικότητα ο Πλάτων δηλώνει κατηγορηματικά πως ο Θεαίτητος είχε στην ουσία αποδείξει το ακόλουθο

> ***Ισχυρό Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας (****Θεαίτητου****).*** Εάν a και b δύο ευθείες, τέτοιες ώστε $a^2=Nb^2$ για μη-τετράγωνο αριθμό N, ή γενικότερα μήκει-μόνο ασύμμετρες, τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι ***παλινδρομικά περιοδική***.

Αυτό βέβαια είναι στην ουσία το σημαντικό

> ***Θεώρημα (Fermat, Brouncker, Wallis,, Euler, [13], Lagrange[14]).***
> Εάν N είναι μη-τετράγωνος φυσικός αριθμός, τότε το συνεχές κλάσμα του $\sqrt{N}$ είναι περιοδικό, και μάλιστα παλινδρομικά περιοδικό. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν αριθμοί n και m, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, (k_n)$, τέτοιοι ώστε η ακολουθία διαδοχικών πηλίκων του συνεχούς κλάσματος του $\sqrt{N}$ έχει τη μορφή $[m, \text{περίοδος } (k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}, k_{n-1}, (k_n), k_{n-1}, k_{n-2}, \ldots, k_2, k_1, 2m)]$,

[13] Euler 1767
[14] Lagrange 1769a, 1769b, 1770

το οποίο διαμορφώθηκε σταδιακά κατά τη διάρκεια του 17ου και 18ου αιώνα, με συνεισφορές από τους Fermat, Brouncker, Wallis, Euler (που συγκέντρωσαν σημαντικές πειραματικές ενδείξεις για την περιοδικότητα των συνεχών κλασμάτων συγκεκριμένων τετραγωνικών αρρήτων), και Lagrange (που απέδειξε την περιοδικότητα). Σύγχρονες αποδείξεις αυτού του αποτελέσματος μπορούν να βρεθούν στους Hardy and Wright 1938, Weil 1984, Kahane 1985, Fowler 1986.
Η ανακατασκευή της απόδειξης του Ισχυρού Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου με τα ίδια εργαλεία που βρήκαμε στο Βιβλίο X των *Στοιχείων* και τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη του Ασθενούς Θεωρήματος Περιοδικότητας, στην Ενότητα 4, δεν επιφυλάσσει δυσκολίες. Αυτή η ανακατασκευή παρουσιάζεται στην Ενότητα 6.2, παρακάτω.
Θα πρέπει να τονιστεί πως η ανακατασκευή μας βασίζεται αποκλειστικά σε εργαλεία από το Βιβλίο X των *Στοιχείων*, όμως αποκτά ιστορική συνάφεια μόνο χάριν του αδιάσειστου επιχειρήματος της φιλοσοφικής μίμησης του θεωρήματος από τον Πλάτωνα με την οποία κατασκευάζει το σύνολο του *Πολιτικού*. Είναι αδιανόητο ο Πλάτων να είχε βασίσει την ύστερη φιλοσοφία του σε ένα μαθηματικό αποτέλεσμα που να μην έχει απολύτως σταθερά θεμέλια[15]. Η αδιαμφισβήτητη και αναγκαία συνέπεια της ανάλυσής μας είναι ότι, παρά την απουσία ρητής εμφάνισής του στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου βρισκόταν στην κατοχή της Ακαδημίας.

Για την ανακατασκευή της απόδειξης του Ισχυρού Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας, η χρήση της αρχής του περιστερεώνα είναι απαραίτητη. Όμως, όπως έχουμε επισημάνει στην Ενότητα 4, κανένα ίχνος αυτής της αρχής δεν υπάρχει στο Βιβλίο X των *Στοιχείων*, και στην ουσία σε καμία αρχαία μαθηματική πηγή.
Παρ' όλα αυτά, είναι αξιοσημείωτο ότι ο Πλάτων κάνει σαφή αναφορά στην αρχή του περιστερεώνα, και μάλιστα ακριβώς στο σημείο που χρειάζεται: στο χωρίο *Πολιτικός* 272d6-e6 , δηλαδή στο σημείο που θέλει να εξηγήσει το γιατί ο κόσμος μεταβαίνει από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία, ή αλλιώς από το πρώτο μισό της περιόδου στην ανθυφαιρετική διαίρεση στο δεύτερο παλινδρομικό μισό της, ο Πλάτων εξηγεί αυτήν την μετάβαση μέσω ενός επιχειρήματος που αποτελεί ξεκάθαρα το επιχείρημα του περιστερεώνα: ο κόσμος εξαναγκάζεται να μεταβεί στην εποχή του Δία, στην δεύτερη παλινδρομική ημι-περίοδο, επειδή «ο χρόνος που είχε οριστεί συμπληρώθηκε», «οι γενεές του Κρόνου εξαντλήθηκαν όλες», «η ψυχή εκπλήρωσε όλες τις γεννήσεις της», «έπεσαν στη γη τόσοι σπόροι όσοι είχε καθοριστεί» - στην ουσία πολλοί τρόποι για να πει κανείς πως «οι φωλιές του περιστερεώνα γέμισαν όλες» (Ενότητα 6.3).

6.2. Η ανακατασκευή του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου

[15] Ας θυμηθούμε το χωρίο του Πλάτωνα σχετικά με την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης στην γεωμετρία (που εξετάστηκε στην Ενότητα 3.2.3.2):
ἀπόδειξιν δὲ καὶ ἀνάγκην οὐδ' ἡντινοῦν λέγετε ἀλλὰ τῷ εἰκότι χρῆσθε,
ᾧ εἰ ἐθέλοι Θεόδωρος ἢ ἄλλος τις τῶν γεωμετρῶν χρώμενος γεωμετρεῖν,
ἄξιος οὐδ' ἑνὸς μόνου ἂν εἴη. (*Θεαίτητος* 162e4-7)

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του πλήρους Θεωρήματος για την Παλινδρομική Περιοδικότητα, το οποίο όπως είδαμε περιγράφει ο Πλάτων στον *Πολιτικό* μέσω φιλοσοφικής μίμησης.

Ας συμβολίσουμε με φ_n* την συζυγή της αποτομής φ_n που ορίστηκε ως αναχθέν υπόλοιπο στην Ενότητα 4, δηλαδή έστω $\varphi_n^*=(a+m_n b)/\lambda_n$.

Ορισμός *(Αντίστροφο της συζυγούς φ_n*)*. Ως αντίστροφο της συζυγούς φ_n*, ορίζεται η ευθεία ω_n που προκύπτει από την ισότητα $\varphi_n^* \cdot \omega_n = b^2$.

Επειδή η φ_n* είναι μία διωνυμική ευθεία, προκύπτει από την συζυγία του Βιβλίου Χ (*Πρόταση Χ.112*) πως η ω_n είναι μία αποτομή. Όπως θα φανεί από την ακόλουθη Πρόταση, μπορούμε να αντλήσουμε ακόμα περισσότερες πληροφορίες για την ω_n:

Πρόταση (Ιδιότητες της ω_n)**.**
(i) Η ευθεία ω_n είναι μία αποτομή, και μάλιστα $\lambda_{n+1}\omega_n=a-m_n b$,
(ii) $\omega_n < b$,
(iii) $\omega_1(\varphi_1+2m_1 b)=b^2$ και
(iv) $\omega_{n+1}(I_n b+\omega_n)=b^2$.

Απόδειξη. Όλες οι παραπάνω δηλώσεις προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό του ω_n και το Θεώρημα Περιοδικότητας, που αποδείχθηκε στην Ενότητα 4. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην ανακατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας:

Διατάσσουμε τα στοιχεία των δύο ακολουθιών (φ_n) και (ω_n) σε μία ακολουθία όπως φαίνεται παρακάτω: $\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_n, \omega_n,\ldots$.
Από την *αρχή του περιστερεώνα*, χρησιμοποιώντας το Ασθενές Θεώρημα Περιοδικότητας και την παραπάνω Πρόταση, υπάρχει *ένα πρώτο στοιχείο* στην ως άνω διατεταγμένη ακολουθία, τέτοιο ώστε όλα τα προηγούμενα στοιχεία της ακολουθίας είναι διακριτά ανά δύο, και το εν λόγω στοιχείο συμπίπτει με ένα από τα προηγούμενα.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις προς εξέταση:
<u>Περίπτωση I</u>: Τα στοιχεία $\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_{k-1}, \omega_{k-1}$ είναι διακριτά ανά δύο και το στοιχείο φ_k συμπίπτει με κάποιο από τα προηγούμενα στοιχεία. Τότε ισχυριζόμαστε πως $\omega_{k-1}=\varphi_k$.
<u>Περίπτωση II</u>: Τα στοιχεία $\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_{k-1}, \omega_{k-1}, \varphi_k$ είναι διακριτά ανά δύο και το στοιχείο ω_k συμπίπτει με κάποιο από τα προηγούμενα στοιχεία. Τότε ισχυριζόμαστε πως $\varphi_k=\omega_k$.

<u>Απόδειξη της Περίπτωσης I</u>. Υπάρχουν τρεις υποπεριπτώσεις:

(α) εάν η αποτομή ευθεία φ_k συμπίπτει με την αποτομή ευθεία φ_1, τότε έχουμε αντίφαση [Απόδειξη όμοια με το (β) παρακάτω]

(β) εάν η αποτομή ευθεία φ_k συμπίπτει με την αποτομή ευθεία φ_j για κάποιο j με $1<j<k$, τότε έχουμε αντίφαση.

[Πράγματι, εάν $\varphi_k=\varphi_j$, τότε οι δύο συζυγείς διωνυμικές ευθείες είναι επίσης ίσες, δηλαδή $\varphi_k^*=\varphi_j^*$, και επειδή $\varphi_k^*\cdot\omega_k=\varphi_j^*\cdot\omega_j=b^2$ (εξ ορισμού του φ_k^*), προκύπτει ότι $\omega_k=\omega_j$. Όμως έχουμε $\omega_k(I_{k-1}b+\omega_{k-1})=b^2$ και $\omega_j(I_{j-1}b+\omega_{j-1})=b^2$ (και τα δύο από την Πρόταση 6.2 (iv)). Συνεπώς $I_{k-1}b+\omega_{k-1}=I_{j-1}b+\omega_{j-1}$. Επειδή (εξαιτίας της Πρότασης 6.2 (ii)) και τα δύο μέρη της εξίσωσης αναπαριστούν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας όλης ευθείας σε σχέση με την ίδια ευθεία b προκύπτει ότι τα υπόλοιπα είναι ίσα, δηλαδή $\omega_{k-1}=\omega_{j-1}$, που αποτελεί αντίφαση καθώς τα στοιχεία
$\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_{k-1}, \omega_{k-1}$
έχει υποτεθεί πως είναι διακριτά ανά δύο. Συνεπώς η φ_k δεν ισούται με την φ_j για κάποιο j με 1<j<k.]

(γ) εάν η αποτομή ευθεία φ_k συμπίπτει με την αποτομή ευθεία ω_j, για κάποιο j με 1<j<k, τότε έχουμε αντίφαση [Απόδειξη όμοια με το (β) παραπάνω]

Συνεπώς, επειδή η φ_k ισούται με κάποιο από τα στοιχεία $\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_{k-1}, \omega_{k-1}$, η μοναδική δυνατότητα που απομένει, από τις υποπεριπτώσεις (α), (β) και (γ) είναι να έχουμε $\omega_{k-1}=\varphi_k$.

Η *Περίπτωση ΙΙ* αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο και προκύπτει $\varphi_k=\omega_k$.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αποδεικνύοντας τώρα την **παλινδρομικότητα** για την Περίπτωση Ι:

Από το γεγονός ότι $\omega_{k-1}=\varphi_k$, το οποίο έχει ήδη αποδειχθεί, και τις σχέσεις $\varphi_k(I_kb+\varphi_{k+1})=b^2$ (Θεώρημα 4.5) και $\omega_{k-1}(I_{k-2}b+\omega_{k-2})=b^2$ (Πρόταση 6.2. (iv)), συμπεραίνουμε ότι $I_kb+\varphi_{k+1}=I_{k-2}b+\omega_{k-2}$.
Καθώς (εξαιτίας του Θεωρήματος 4.5 και της Πρότασης 6.2) και τα δύο μέρη αυτής της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας όλης ευθείας σε σχέση με την ίδια ευθεία b, προκύπτει ότι τα δύο υπόλοιπα και τα δύο πηλίκα είναι ίσα, δηλαδή $I_k=I_{k-2}$ και $\varphi_{k+1}=\omega_{k-2}$.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $I_{k+1}=I_{k-3}$ and $\varphi_{k+2}=\omega_{k-3}$.
Συνεχίζοντας κι άλλο με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει ότι $I_1=I_{2k-3}$ και $\varphi_{2k-2}=\omega_1$.
Όμως έχουμε ότι $\varphi_{2k-2}(I_{2k-2}b+\varphi_{2k-1})=b^2$ (Ενότητα 4) και $\omega_1(2m_1b+\varphi_1)=b^2$ (Πρόταση 6.2. (iv)). Συνεπώς $I_{2k-2}b+\varphi_{2k-1}=2m_1b+\varphi_1$.
Επειδή (εξαιτίας του Θεωρήματος 4.5) και τα δύο μέρη αυτής της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας όλης ευθείας σε σχέση με την ίδια ευθεία b, προκύπτει ότι τα δύο υπόλοιπα και τα δύο πηλίκα είναι ίσα, δηλαδή $I_{2k-2}=2m_1$ and $\varphi_{2k-1}=\varphi_1$.

Από την ισότητα $\varphi_{2k-1}=\varphi_1$ (Κριτήριο Λόγου (Θεώρημα 4.6)), συνεπάγεται η *περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης* και από τις ισότητες
$I_{2k-2}=2m_1$, και $I_1=I_{2k-3}$, $I_2=I_{2k-4},\ldots, I_k=I_{k-2}$, και $I_{k+1}=I_{k-3}$,
συνεπάγεται η *παλινδρομικότητα στην περίοδο της ανθυφαίρεσης*, δηλαδή
Ανθ(a, b)=[m_1, περίοδος ($I_1, I_2,\ldots, I_{k-2}, I_{k-1}, I_{k-2},\ldots, I_2, I_1, 2m_1$)], όπως ήταν το ζητούμενο.

Η *Περίπτωση ΙΙ* αντιμετωπίζεται παρομοίως.

Η γενική περίπτωση για δυνάμει-μόνο συμμετρία απαιτεί μόνο μικρές διαφοροποιήσεις που αφήνονται στον αναγνώστη. Η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Ας σημειωθεί πως η παλαιότερη εμφάνιση της προαναφερθείσας ανακατασκευής του

Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου γίνεται στο Negrepontis 2003 σε χειρόγραφες σημειώσεις της Β. Κλεφτάκη.

*6.3. Το επιχείρημα του Πλάτωνα για την μετάβαση από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία (*Πολιτικός *272d6-e6) φαίνεται να είναι μια φιλοσοφική εκδοχή του επιχειρήματος του περιστερεώνα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη*

Επειδή όταν **ο χρόνος που είχε οριστεί για όλα αυτά** [στην εποχή του Κρόνου] **συμπληρώθηκε** (*ἐτελεώθη*)	
	και η μεταβολή [στην εποχή του Δία] ήταν αναγκαίο να συμβεί (*μεταβολὴν ἔδει γίγνεσθαι*)
και **όλα τα γήινα γένη** [στην εποχή του Κρόνου] **εξαντλήθηκαν** (*ἀνήλωτο*), καθώς **κάθε ψυχή** (*ἑκάστης τῆς ψυχῆς*) **εκπλήρωσε** (*ἀποδεδωκυίας*) **όλες τις γεννήσεις της** (*πάσας τὰς γενέσεις*), κι έπεσαν στη γη (*εἰς γῆν πεσούσης*) **τόσοι σπόροι** (*τοσαῦτα σπέρματα*) **όσοι είχε καθοριστεί** για αυτήν (*ὅσα ἦν ἑκάστη προσταχθὲν*), τότε	
	ο κυβερνήτης (*κυβερνήτης*) του σύμπαντος έριξε το πηδάλιο και αποσύρθηκε *(ἀπέστη)* στο παρατηρητήριό του, και το πεπρωμένο (*εἱμαρμένη*) και η έμφυτη επιθυμία (*σύμφυτος ἐπιθυμία*) έκαναν τον κόσμο (*κόσμον*) να παλινδρομήσει (*πάλιν ἀνέστρεφεν*). (272d6-e6)

Συνεπώς η αλλαγή από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία καθίσταται αναγκαία όταν ο (σαφώς πεπερασμένος) αριθμός γενεών της ψυχής στην εποχή του Κρόνου και οι σπόροι που είχαν προβλεφθεί για την ψυχή σε αυτήν την εποχή έχουν όλοι τελειώσει. Αυτό ακριβώς είναι το επιχείρημα του περιστερεώνα.
Στον *Πολιτικό* 272d6-e6 ο Πλάτων δεν περιγράφει απλώς με φιλοσοφικούς-μυθολογικούς όρους μια *αρχή περιστερεώνα*, αλλά το κάνει την στιγμή του περάσματος από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία, με άλλα λόγια στο σημείο μετάβασης από την πρώτη ημιπερίοδο στην δεύτερη και παλινδρομικά συμμετρική της πρώτης. Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτό είναι ακριβώς το σημείο, στην ανακατασκευασμένη απόδειξή του Ισχυρού Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας του Θεαίτητου που παρουσιάσαμε παραπάνω, όπου εφαρμόζεται η μαθηματική αρχή του περιστερεώνα.

Ενότητες 7, 8, 9. Η αρχαία ιστορία του προβλήματος Pell

Τώρα έχουμε όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε από τον Πλάτωνα και από το Βιβλίο X των *Στοιχείων* για να ασχοληθούμε με την Πυθαγόρεια απόδειξη της ιδιότητας Pell για N=2 (Ενότητα 7), με την ανακατασκευασμένη απόδειξη της ιδιότητας Pell για κάθε μη-τετράγωνο αριθμό N από τον Θεαίτητο (Ενότητα 8), και τη λύση του προβλήματος Pell από τους Ινδούς μαθηματικούς (Ενότητα 9).

Ενότητα 7. Η εξίσωση Pell για N=2 από τους Πυθαγορείους

Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν την ασυμμετρία διαμέτρου προς πλευρά ενός τετραγώνου, αποδεικνύοντας ότι η ανθυφαίρεση της διαμέτρου προς την πλευρά είναι άπειρη (και μάλιστα με ακολουθία πηλίκων την άπειρη ακολουθία [1,2,2,2,…]) και εφαρμόζοντας την Πρόταση X.2 των *Στοιχείων*. Στη συνέχεια επινόησαν την διπλή ακολουθία των *πλευρικών* p_n *και διαμετρικών* q_n *αριθμών* (ή αλλιώς *ρητές διαμέτρους*) που ορίζονται *αναδρομικά* ως εξής:

$$p_1 = q_1 = 1,$$
$$p_{n+1} = p_n + q_n, \qquad q_{n+1} = 2p_n + q_n, \qquad \text{για } n = 1, 2, \ldots ,$$

και για τους οποίους η ανθυφαίρεση κάθε n-οστού ζεύγους έχει σαν ακολουθία πηλίκων ένα πεπερασμένο αρχικό τμήμα της άπειρης ανθυφαίρεσης της διαμέτρου προς την πλευρά ενός τετραγώνου. Σύμφωνα με τους αρχαίους συγγραφείς που μιλούν για τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, τον Θέωνα Σμυρνέα (Theon Smyrnaeus, ed: Hiller 1878) *εις Πλάτωνα* 44,18-45,8, τον Ιάμβλιχο, *εις Νικόμαχον* (Iamblichus, ed: Pistelli 1894) 92,23-93,6, και κυρίως τον Πρόκλο, *εις Πλάτωνος Πολιτείαν* (Procli Diadochi, ed: Kroll 1899–1901) 2,24,16-2,25,13 και 2,27,1-2,29,4, οι Πυθαγόρειοι επαλήθευσαν και στη συνέχεια απέδειξαν πως αυτοί οι αριθμοί ικανοποιούν την Διοφαντική εξίσωση Pell:

$$q_n^2 = 2p_n^2 + (-1)^n,$$

ή με άλλα λόγια ικανοποιούν την προσεγγιστική **ιδιότητα Pell**.

Ορισμένοι μελετητές (όπως ο Freudenthal 1953) υποστηρίζουν ότι οι Πυθαγόρειοι είχαν όντως επιτύχει μια πραγματική απόδειξη της ιδιότητας Pell, είτε με επαγωγή είτε με οποιονδήποτε άλλο τρόπο. Υπάρχουν και άλλοι μελετητές βέβαια (όπως πιο πρόσφατα οι Unguru 1991, Acerbi 2000) που αμφισβητούν αυτή τη θέση και υποστηρίζουν πως οι Πυθαγόρειοι**}** απλώς επαλήθευσαν την ιδιότητα για τα πρώτα ζευγάρια των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών.
Στην εργασία των Νεγρεπόντη & Φαρμάκη (Negrepontis and Farmaki 2019, Κεφάλαιο 8), από μια σχολαστική μελέτη των πηγών προκύπτουν μερικά νέα επιχειρήματα που δείχνουν ότι οι Πυθαγόρειοι διέθεταν πράγματι μια επαγωγική απόδειξη, αν και ασθενέστερη από την σύγχρονη επαγωγική μέθοδο, καθώς δεν έκαναν χρήση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής.

Οι Πυθαγόρειοι παρατήρησαν πως κάθε ρητή διάμετρος (δηλαδή κάθε διαμετρικός αριθμός) δεν είναι από μόνη της μια τέλεια, αληθής διάμετρος, από τη στιγμή που το τετράγωνό της δεν ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς (κάτι αδύνατο να συμβαίνει για αριθμούς, από την ασυμμετρία της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου, όπως σημειώνεται από τον Πρόκλο *εις Πολιτείαν* 2,27,1-4). Όμως ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς μείον 1 ή συν 1. Στην προσπάθεια προσέγγισης της τέλειας, αληθούς διαμέτρου, οι Πυθαγόρειοι θεώρησαν ενθαρρυντικό το γεγονός ότι το τετράγωνο της ρητής διαμέτρου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς μείον 1 ή συν 1 **εναλλάξ** (*ἐναλλάξ,* Θέων *εις Πλάτωνα* 44,14, Ιάμβλιχος *εις Νικόμαχον* 92,23). Κατά συνέπεια, με σκοπό να διασφαλίσουν μια τέλεια σχέση ισότητας μεταξύ διαμέτρων και πλευρών (ἀπίσωσις, 92,27*;* ἰσότης, 93,1; ἀπισώσει, 93,3 στον Ιάμβλιχο; ἰσότητα, 45,5 στον Θέωνα) οδηγήθηκαν στον σχηματισμό του αθροίσματος του τετραγώνου μιας ρητής διαμέτρου με (*μετὰ*) το τετράγωνο της επόμενης διαμέτρου. Αυτό το άθροισμα είναι τώρα ακριβώς ίσο με το διπλάσιο (Πρόκλος *εις Πολιτείαν* 2,25,11) του αθροίσματος του τετραγώνου της πλευράς και («*καὶ*»: άλλος ένας σύνδεσμος διαφορετικός του «*μετά*») του τετραγώνου της επόμενης πλευράς:
$q_n^2 + q_{n+1}^2 = 2(p_{n+1}^2 + p_n^2)$.

Ο Πρόκλος περιγράφει αυτήν την βασική *ευρετική* ιδέα των Πυθαγορείων, ως ακολούθως:

> *ἐὰν δὲ λάβωμεν ἁπάσας τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων,*
> *ἔσονται διπλάσιαι ὄντως,*
> ***ὧν** ἑκάστη μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου·*
> *οἷον ἡ ἐννέα **μετὰ** τοῦ μθ' τῆς τοῦ κε' **καὶ** δ'.* (2,25,9-12)
>
> εάν πάρουμε μαζί, αθροιστικά, τις διαμέτρους,
> θα είναι πράγματι διπλάσιες [εννοώντας τα τετράγωνά τους],
> *μιλώντας για τις διαμέτρους εκείνες των οποίων (**ὧν**)* τα τετράγωνα είναι το καθένα μεγαλύτερο ή μικρότερο του διπλασίου [του τετραγώνου της πλευράς] κατά μία μονάδα·
> όπως, για παράδειγμα, το τετράγωνο 9 της διαμέτρου 3 *μαζί με* (***μετὰ***) το τετράγωνο 49 της διαμέτρου 7, [είναι πράγματι διπλάσια] του τετραγώνου 25 της πλευράς 5 *και* (***καὶ***) του τετραγώνου 4 της πλευράς 2.

Όπως συμβαίνει με όλες τις καλές ευρετικές ιδέες, έτσι και η συγκεκριμένη αποτελεί ένα βήμα *ανάλυσης*, ένα βήμα δηλαδή αντίθετα στην πορεία της αλυσίδας της συνεπαγωγής. Προκειμένου λοιπόν να αποδειχθεί το ζητούμενο, δηλαδή εδώ η ιδιότητα Pell των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών, αρκεί να αποδειχθεί ότι

> το τετράγωνο της διαμέτρου *μαζί με (μετὰ)* το τετράγωνο της επόμενης διαμέτρου είναι πράγματι το διπλάσιο του αθροίσματος του τετραγώνου της πλευράς *και (καὶ)* του τετραγώνου της επόμενης πλευράς.

Μαθαίνουμε από τον Πρόκλο ότι οι Πυθαγόρειοι ενθαρρύνθηκαν από αυτή τη μέθοδο:

> *διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐθάρρησαν τῇ μεθόδῳ.*
> (Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,25,12-13).

Έτσι λοιπόν, οι Πυθαγόρειοι συνειδητοποίησαν με βάση των ορισμό των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών, πως αρκούσε να αποδειχθεί ότι για οποιουσδήποτε *φυσικούς αριθμούς* a, b, το τετράγωνο του a+2b *μαζί με **(μετὰ)*** το τετράγωνο του a ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος του τετραγώνου του a+b *και **(καὶ)*** του τετραγώνου του b.

Όμως στην πραγματικότητα οι Πυθαγόρειοι προχώρησαν την ανάλυση ένα βήμα παρακάτω, πηγαίνοντας ακόμα ένα βήμα προς τα πίσω στην αλυσίδα της συνεπαγωγής. Όπως και οι Προτάσεις II.4-8 είναι γεωμετρικές, σχετικά με ευθείες, έτσι οι Πυθαγόρειοι διαπίστωσαν πως θα ήταν αρκετό να αποδειχθεί σε γεωμετρικό επίπεδο ότι

για οποιεσδήποτε *ευθείες* a, b, το τετράγωνο της a+2b *μαζί με **(μετὰ)*** το τετράγωνο της a ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος του τετραγώνου της a+b *και **(καὶ)*** του τετραγώνου της b.

Συνεπώς η αρχική ευρετική ιδέα των Πυθαγορείων, τους οδήγησε στην ανακάλυψη, μέσω ανάλυσης, της γεωμετρικής Πρότασης II.10 των *Στοιχείων*:
για ευθείες a, b ισχύει πως $(a+2b)^2+a^2=2((a+b)^2+b^2)$.

Τώρα είναι η σειρά της σύνθεσης/απόδειξης.
Ξεκινώντας από την Πρόταση II.10 και αντιστρέφοντας τα αναλυτικά βήματα, θα οδηγηθούμε στην ζητούμενη δήλωση για τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, δηλαδή την ιδιότητα Pell.
Οι Πυθαγόρειοι, προτού εμπλέξουν τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, επιθυμώντας να αποδείξουν ότι η II.10 είναι στην ουσία μια γεωμετρική πρόταση, όχι ισοδύναμη, αλλά ισχυρότερη από την αντίστοιχη αριθμητική, παρενέβαλαν (*προετίθεσαν*, Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,27,11) το *γλαφυρό θεώρημα* (*θεώρημα γλαφυρὸν*, Πρόκλος 2,27,12).

Η διατύπωση του γλαφυρού θεωρήματος:

*ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, **γίνεται πλευρά**,*
*ἡ δὲ πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς **γίνεται διάμετρος***
(Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,27,13-16).

η διάμετρος, έχοντας λάβει (*προσλαβοῦσα*) την πλευρά, της οποίας είναι διάμετρος, **γίνεται πλευρά**,
και η πλευρά, έχοντας συντεθεί με τον εαυτό της (*ἑαυτῇ συντεθεῖσα*) και έχοντας λάβει (*προσλαβοῦσα*) τη διάμετρο της πλευράς **γίνεται διάμετρος**.

[Δηλαδή, εάν η a είναι διάμετρος και η b πλευρά, τότε η a+2b γίνεται διάμετρος και η a+b πλευρά.]

Το γλαφυρό θεώρημα το απέδειξαν γεωμετρικά (*γραμμικῶς*, Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,27,17), χρησιμοποιώντας την II.10 ως το (γεωμετρικό) **επαγωγικό βήμα της απόδειξης**:

διὰ τὸ θεώρημα [Πρόταση II.10] *ἔσται*
*τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ **μετὰ** τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ διπλάσιον*
*τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ **καὶ** ἀπὸ τῆς ΒΔ.*
ὧν
τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ˙
*καὶ λο[ιπὸν] **ἄρα** τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ διπλάσιον*
(Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,27,24-2,28,3)

από το θεώρημα [Πρόταση ΙΙ.10] έχουμε ότι
το τετράγωνο της ΑΔ [a+2b] μαζί με (***μετὰ)*** το τετράγωνο της ΔΓ [a] είναι διπλάσιο
του τετραγώνου της ΑΒ [b] και ***(καὶ)*** του τετραγώνου της ΒΔ [a+b],
εκ των οποίων (***ὧν)***
το τετράγωνο της ΔΓ [a] είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΑΒ [b],
άρα ***(ἄρα)*** το τετράγωνο της ΑΔ [a+2b] είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΒΔ [a+b].

[Δηλαδή, εάν $a=2b^2$, τότε από την Πρόταση ΙΙ.10 προκύπτει $(a+2b)^2=2(a+b)^2$.]

Η παραπάνω διατύπωση είναι πραγματικά αξιοσημείωτη, καθώς διατηρεί ακέραια την γλωσσική ιδιαιτερότητα με την οποία έγινε η σύλληψη της Πυθαγόρειας ευρετικής ιδέας (***«μετὰ», «καὶ», «ὧν»***), επιβεβαιώνοντας έτσι πλήρως την αναλυτική φύση του επιχειρήματος, και αποκαλύπτοντας ταυτόχρονα ότι η ευρετική μέθοδος των Πυθαγορείων είχε σκοπό την παραγωγή ενός επαγωγικού επιχειρήματος.

Στο τελευταίο βήμα της πορείας σύνθεσης προς την απόδειξη της ιδιότητας Pell των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών, η Πρόταση ΙΙ.10 χρησιμοποιείται σε αριθμητική μορφή, άμεσα επαγόμενη από την γεωμετρική, προκειμένου να αποδειχθεί το κάθε επαγωγικό βήμα. Το γλαφυρό θεώρημα λειτουργεί γλωσσικά ως πρότυπο, καθώς η διατύπωση των επαγωγικών βημάτων γίνεται με πανομοιότυπο τρόπο με εκείνον που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση του γλαφυρού θεωρήματος.

Το πρώτο επαγωγικό βήμα για την απόδειξη της ιδιότητας Pell είναι το ακόλουθο:

λαβέτω οὖν ἡ διαμετρικὴ μονὰς πλευράν, ὅ ἐστι μονάδα (καὶ γὰρ αὕτη διάμετρος ἦν), ***γίνεται*** *δυὰς καὶ* ***πλευρὰ*** *τετράδος·*
ἡ δὲ πλευρικὴ μονὰς ἑαυτῇ συντεθεῖσα λαβέτω διάμετρον ἄλλην μονάδα (ἦν γὰρ καὶ ἡ διαμετρική), ***γίνεται*** *τριὰς [καὶ* ***διάμετρος****]*
καὶ ποιεῖ τὸν ἐννέα, μονάδι μείζονα τοῦ ἀπὸ δυάδος
(Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,28,17-21)

Η μοναδιαία διάμετρος λαμβάνοντας πλευρά … **γίνεται πλευρά**, και
η μοναδιαία πλευρά συντεθείσα με τον εαυτό της και λαμβάνοντας διάμετρο …**γίνεται** [**διάμετρος**].

[Δηλαδή, έχοντας ορίσει το αρχικό ζεύγος μοναδιαίας ρητής πλευράς p_1 και μοναδιαίας ρητής διαμέτρου $q_1=1$, ο αριθμός $p_2=p_1+q_1$ γίνεται ρητή πλευρά και ο αριθμός $q_2=2p_1+q_1$ γίνεται ρητή διάμετρος, οι οποίοι επαληθεύουν τη σχέση $q_2^2= 2p_2^2+1$]

Το δεύτερο επαγωγικό βήμα το συναντάμε στο χωρίο 2,28,22-24 και το τρίτο επαγωγικό βήμα στο χωρίο 2,28,27-2,29,1.

Συνεπώς οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν την ακόλουθη

Πρόταση P(n). Έστω n ένας δοθέν φυσικός αριθμός. Ο n-οστός πλευρικός αριθμός p_n και ο n-οστός διαμετρικός αριθμός q_n ικανοποιούν την Διοφαντική εξίσωση Pell $q_n^2 = 2p_n^2 + (-1)^n$.

Η Πυθαγόρεια απόδειξη της ιδιότητας Pell, ανακατασκευασμένη σύμφωνα με τα προαναφερθέντα επιχειρήματα, τώρα προκύπτει αβίαστα ως ακολούθως:

Η Πρόταση P(1) προφανώς ισχύει.

Αποδεικνύουμε την Πρόταση P(2), *εφαρμόζοντας την αριθμητική εκδοχή της Πρότασης ΙΙ.10* με $a = p_1$, $b = q_1$, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό ορισμό, και το γεγονός ότι η Πρόταση P(1) ισχύει.
Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την Πρόταση P(3) *εφαρμόζοντας την αριθμητική εκδοχή της Πρότασης ΙΙ.10* με $a = p_2$, $b = q_2$, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό ορισμό, και το γεγονός ότι η Πρόταση P(2) ισχύει. Είναι σαφές πως προχωρώντας με αυτόν τον τρόπο θα καταλήξουμε στην Απόδειξη (n) για την Πρόταση P(n).
Ο αριθμός των επαγωγικών βημάτων, καθένα από τα οποία αποτελεί διακριτή απόδειξη, τείνει στο άπειρο καθώς το n τείνει στο άπειρο (και συνεπώς *ad infinitum*, «*καὶ ἀεὶ οὕτως*», Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,29,4).

Επομένως οι αρχαίοι είχαν μια απόδειξη για κάθε n για την Πρόταση P(n), όμως δεν είχαν απόδειξη για όλα τα n ταυτόχρονα, δεν είχαν δηλαδή απόδειξη για την Πρόταση (∀n)P(n), επειδή αυτή η απόδειξη θα απαιτούσε έναν άπειρο αριθμό βημάτων.

Εικάζουμε ότι η Πυθαγόρεια απόδειξη της ιδιότητας Pell για N=2 σηματοδότησε τη *Γέννηση της Επαγωγής* στην αρχαία μορφή της, η οποία είναι ασθενέστερη συγκριτικά με τη σύγχρονη αρχή της μαθηματικής επαγωγής, έχοντας μη πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα όσα παρουσιάστηκαν στην Ενότητα αυτή, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Κεφάλαιο 8 της Ιστορίας Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών (Εκδόσεις Εκκρεμές, 2019) των Νεγρεπόντη-Φαρμάκη.

Ενότητα 8. Μια ανακατασκευή της Θεαιτήτειας απόδειξης της γενικής περίπτωσης της ιδιότητας Pell

Ο Θεαίτητος λόγω της Πυθαγόρειας ανακάλυψης της ιδιότητας Pell για N=2 (Ενότητα 7), είχε ισχυρό κίνητρο να μελετήσει την ιδιότητα Pell για κάθε μη-τετράγωνο αριθμό. Έχοντας αποδείξει το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας (Ενότητα 6), η απόδειξη της γενικής περίπτωσης της ιδιότητας Pell, δηλαδή για κάθε μη-τετράγωνο φυσικό αριθμό, προκύπτει ομαλά.

8.1. Τα εργαλεία για την απόδειξη της ιδιότητας Pell στο Βιβλίο X των **Στοιχείων**

Υπάρχουν ισχυρές εσωτερικές ενδείξεις πως το πρόβλημα Pell είναι κεντρικής σημασίας στο Βιβλίο X.
Μια τέτοια ένδειξη είναι η ταξινόμηση των αποτομών ευθειών σε έξι τάξεις στους Ορισμούς X.84/85. Η ταξινόμηση αυτή για τις απλές αποτομές ευθείες συνδέεται στενά με το αν ο αριθμός Pell τους είναι τετράγωνος ή όχι.
Η δεύτερη ένδειξη είναι η Πρόταση X.97, όπου δηλώνεται ότι το τετράγωνο κάθε αποτομής ευθείας μπορεί να γίνει ίσο με ένα ορθογώνιο του οποίου η μία πλευρά είναι ρητή ευθεία και η άλλη αποτομή με τετράγωνο αριθμό Pell.
Μια φυσική επέκταση της X.97 που δεν αναφέρεται ρητά στα *Στοιχεία*, ότι δηλαδή το γινόμενο δύο (απλών) αποτομών ευθειών ισούται με μια ρητή ευθεία επί μια (απλή) αποτομή με αριθμό Pell το γινόμενο των αριθμών Pell των δύο αρχικών ευθειών, είναι ό,τι επιπλέον χρειάζεται πέραν του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας, για την πλήρη απόδειξη της εξίσωσης Pell στη γενική της μορφή.

8.1.1. Η συσχετιζόμενη με το πρόβλημα Pell ταξινόμηση των αποτομών ευθειών σε έξι τάξεις στους Ορισμούς X.84/85

Η ταξινόμηση όλων των αποτομών ευθειών σε έξι είδη στους Ορισμούς X.84/85, η οποία δεν έπαιξε κανένα ρόλο στην απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας, γίνεται σύμφωνα με δύο κριτήρια.
Το πρώτο κριτήριο είναι *εξωτερικό* και αφορά την συμμετρία ή ασυμμετρία της προτεθείσας ευθείας σε σχέση την όλη ευθεία (whole line) ή την προσαρμόζουσα ευθεία (annex line) της αποτομής. Το κριτήριο αυτό δεν έχει να κάνει με την εσωτερική δομή της αποτομής, καθώς *η ίδια αποτομή ευθεία* θα μπορούσε να έχει προτεθείσα ευθεία σύμμετρη με την όλη ευθεία (whole line), την προσαρμόζουσα ευθεία (annex line) ή με καμία από τις δύο. Αυτό το κριτήριο εισήχθη για να κάνει τις αποτομές συμβατές μεταξύ τους, έχοντας την ίδια προτεθείσα ευθεία ή σύμμετρες προτεθείσες.
Το δεύτερο κριτήριο είναι *εσωτερικό*, έχει να κάνει με τη δομή της αποτομής ευθείας, και μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως: Εάν g-h είναι μια αποτομή ευθεία τότε σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα g και μια κάθετη πλευρα h, και ορίζουμε π να είναι η δεύτερη κάθετη πλευρά: $\pi^2=g^2-h^2$. Το κριτήριο για την ταξινόμηση είναι το κατά πόσον οι ευθείες π και «η όλη» g είναι σύμμετρες ή όχι. Σε

τυπικό επίπεδο πρόκειται για ένα μη προφανές ως προς την ερμηνεία του κριτήριο, όμως αμέσως ξεκαθαρίζει εάν εφαρμοστεί σε απλές αποτομές ευθείες, οι οποίες, όπως είδαμε με τις κατασκευές στις Προτάσεις X.85-90 και την απόδειξη του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας (Ενότητες 4 και 6), είναι το κύριο αντικείμενο ενδιαφέροντος στο Βιβλίο X. Μια απλή αποτομή ευθεία γ έχει είτε τη μορφή γ=(qb-pa)/λ ή γ=(pa-qb)/λ, όπου p, q, λ είναι φυσικοί αριθμοί, με $a^2=Nb^2$, όπου N ένας μη-τετράγωνος αριθμός.

Εισάγουμε τον ακόλουθο σημαντικό Ορισμό:
Ορισμός. Ο ***αριθμός Pell*** μιας απλής αποτομής ευθείας γ, που συμβολίζεται με Pell(γ), είναι ο αριθμός $(q^2-Np^2)/\lambda^2$.
Για γ=(qb-pa)/λ, ο Pell(γ) είναι θετικός ρητός αριθμός, για γ=(pa-qb)/λ αρνητικός.

Καθίσταται προφανές ότι το δεύτερο, το εσωτερικό κριτήριο για την ταξινόμηση των απλών αποτομών ευθειών σχετίζεται στενά με το πρόβλημα Pell, στην πραγματικότητα μπορεί τώρα να δηλωθεί αποκλειστικά *σε σχέση με τον αριθμό Pell της αποτομής* και στην ουσία με το αν *ο αριθμός Pell της αποτομής ευθείας είναι τετράγωνος ή όχι*.

Αν γ=(qb-pa)/λ, τότε $\pi^2=(q^2b^2-p^2a^2)/\lambda^2=((q^2-p^2N)/\lambda^2)b^2=\text{Pell}(\gamma)b^2$, επομένως:

qb και π είναι σύμμετρα αν και μόνο αν ο Pell(γ) είναι τετράγωνος αριθμός.

Αν γ=(pa-qb)/λ, τότε $\pi^2=(p^2a^2-q^2b^2)/\lambda^2=((p^2N-q^2)/\lambda^2)b^2=-\text{Pell}(\gamma)b^2=-\text{Pell}(\gamma)a^2/N=$ $(-\text{Pell}(\gamma)\cdot N/N^2)a^2$ επομένως:

pa και π είναι σύμμετρα αν και μόνο αν -Pell(γ)·N είναι τετράγωνος αριθμός.

Η ισοδυναμία μεταξύ της ταξινόμησης των (απλών) αποτομών των Ορισμών X.84/85 και της συνθήκης που ισχύει σε κάθε τάξη και εμπλέκει τον αριθμό Pell, εμφανίζεται στον παρακάτω πίνακα:

Τάξη αποτομής	**Μορφή απλής αποτομής**	**Συνθήκη που εμπλέκει τον αριθμό Pell**
γ πρώτη αποτομή	είτε γ=(qb-pa)/λ	Pell(γ) τετράγωνος και b προτεθείσα ευθεία [X.85]
	είτε γ=(pa-qb)/λ	-Pell(γ)·N τετράγωνος και a προτεθείσα ευθεία
γ δεύτερη αποτομή	είτε γ=(qb-pa)/λ	Pell(γ) τετράγωνος και a προτεθείσα ευθεία [X.86]
	είτε γ=(pa-qb)/λ	-Pell(γ)·N τετράγωνος και b προτεθείσα ευθεία
γ τρίτη αποτομή	είτε γ=(qb-pa)/λ	Pell(γ) τετράγωνος και προτεθείσα ευθεία μη-σύμμετρη με τη b ή την a [X.87]
	είτε γ=(pa-qb)/λ	-Pell(γ)·N τετράγωνος και προτεθείσα ευθεία

		μη-σύμμετρη με τη b ή την a
γ τέταρτη αποτομή	είτε γ=(qb-pa)/λ	Pell(γ) θετικός μη-τετράγωνος και b προτεθείσα ευθεία
	είτε γ=(pa-qb)/λ	-Pell(γ)·N μη-τετράγωνος και a προτεθείσα ευθεία [X.88]
γ πέμπτη αποτομή	είτε γ=(qb-pa)/λ	Pell(γ) θετικός μη-τετράγωνος και a προτεθείσα ευθεία
	είτε γ=(pa-qb)/λ	-Pell(γ)·N μη-τετράγωνος και b προτεθείσα ευθεία [X.89]
γ έκτη αποτομή	είτε γ=(qb-pa)/λ	Pell(γ) θετικός μη-τετράγωνος και προτεθείσα ευθεία μη-σύμμετρη με την b ή την a
	είτε γ=(pa-qb)/λ	-Pell(γ)·N μη-τετράγωνος και προτεθείσα ευθεία μη-σύμμετρη με την b, ή την a [X.90]

Ο πίνακας δείχνει ότι η ταξινόμηση των (απλών) αποτομών ευθειών γ είναι πολύ στενά συνδεδεμένη με τον αριθμό Pell, Pell(γ), και στην ουσία με το κατά πόσον ο Pell(γ), ή η τροποποιημένη έκφραση -Pell(γ)·N, είναι τετράγωνος ή μη-τετράγωνος αριθμός, στην περίπτωση που η γ είναι της μορφής qb-pa, ή της μορφής pa-qb, αντιστοίχως.

Επισημαίνεται ότι ένα άρτιο υπόλοιπο $\gamma_{2n}=q_{2n}b-p_{2n}a$ της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης a προς b, με $a^2=Nb^2$, N μη-τετράγωνο, είναι:

- πρώτη αποτομή αν ο αντίστοιχος αριθμός Pell, q^2-Np^2, είναι τετράγωνος αριθμός,
- τέταρτη αποτομή διαφορετικά.

8.1.2. Η συσχετιζόμενη με το πρόβλημα Pell Πρόταση Χ.97 των **Στοιχείων**

Η Πρόταση Χ.97, που δηλώνει ότι το τετράγωνο κάθε αποτομής ευθείας είναι πρώτη αποτομή, είναι καίριο για την απόδειξης της ιδιότητας Pell.

> ***Πρόταση Χ. 97***.
> Το τετράγωνο μιας αποτομής εφαρμοζόμενο σε μια ρητή ευθεία γραμμή παράγει ως πλάτος μια πρώτη αποτομή.
> [Εάν γ είναι μια αποτομή σε σχέση με την προτεθείσα ευθεία b και $\gamma^2=\chi\cdot b$, τότε η χ είναι πρώτη αποτομή]

Η Πρόταση Χ.97 αποκαλύπτει το πραγματικό περιεχόμενό της όταν εφαρμοστεί σε απλές αποτομές ευθείες σχετιζόμενες με την τετραγωνική ασυμμετρία $a^2=Nb^2$, με N

μη-τετράγωνο, δηλαδή σε αποτομές της μορφής $\gamma=(pa-qb)/\lambda$ ή $\gamma=(qb-pa)/\lambda$, για τις οποίες η προτεθείσα ευθεία είναι η ευθεία b. Η απόδειξη της Πρότασης X.97 δείχνει πως για αυτές τις ευθείες γ, $Pell(\chi) = (Pell(\gamma))^2$.
Η στενή σχέση της Πρότασης X.97 με την ιδιότητα Pell είναι προφανής.

8.2. Το καίριο βήμα για μια ανακατασκευή της Θεαιτήτειας απόδειξης της γενικής ιδιότητας Pell, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας και την Πρόταση X.97

Η βασική εφαρμογή της Πρότασης X.97 σχετίζεται με τα αναχθέντα υπόλοιπα
$\varphi_n = (a-m_nb)/\lambda_n$.

Πρόταση. Εάν φ_n είναι ένα αναχθέν υπόλοιπο στην αρχική ημι-περίοδο της ανθυφαίρεσης a προς b, και ω_n είναι η αντίστοιχη ευθεία που αποτελεί το αντίστροφο του συζυγούς στην τελική ημι-περίοδο, τότε $Pell(\varphi_n) = -\lambda_{n+1}/\lambda_n$, $Pell(\omega_n) = -\lambda_n/\lambda_{n+1}$ και $Pell(\varphi_n \cdot \omega_n/b) = 1$.

Απόδειξη. Με απευθείας υπολογισμό:
$\varphi_n = (a-m_nb)/\lambda_n$,
άρα $Pell(\varphi_n) = -(N-m_n^2)/\lambda_n^2 = -\lambda_n\lambda_{n+1}/\lambda_n^2 = -\lambda_{n+1}/\lambda_n$, και
$\omega_n = (a-m_nb)/\lambda_{n+1}$,
άρα $Pell(\omega_n) = -(N-m_n^2)/\lambda_{n+1}^2 = -\lambda_n\lambda_{n+1}/\lambda_{n+1}^2 = -\lambda_n/\lambda_{n+1}$.
Επομένως από την Πρόταση X.97:
$Pell(\varphi_n \cdot \omega_n/b) = Pell(\varphi_n) \cdot Pell(\omega_n) = (-\lambda_{n+1}/\lambda_n)(-\lambda_n/\lambda_{n+1}) = 1$.

Όμως θα πρέπει να σημειωθεί πως το $\varphi_n \cdot \omega_n/b$ *δεν* αποτελεί ακόμα, μια λύση για το πρόβλημα Pell, επειδή είναι μια κλασματική N-αποτομή και όχι μια ακέραια.

8.3. Η ανακατασκευή της Θεαιτήτειας απόδειξης της γενικής περίπτωσης της ιδιότητας Pell

Πρόταση. $Pell(\gamma_{n+1}) = Pell(\gamma_n)\ Pell(\varphi_{n+1})$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό των αναχθέντων υπολοίπων που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 4.5, έχουμε $\gamma_n\varphi_{n+1}=\gamma_{n+1}b$. Δεδομένου ότι οι ευθείες γ_n και φ_n για n=1,2, ... είναι αποτομές και αν υποθέσουμε πως η προτεθείσα ευθεία είναι η b, τότε από την φυσική επέκταση της Πρότασης X.97 (η οποία επέκταση δεν αναφέρεται ρητά στο Βιβλίο X) προκύπτει πως $Pell(\gamma_{n+1}) = Pell(\gamma_n)\ Pell(\varphi_{n+1})$.

Πρόταση. $Pell(\gamma_n) = Pell(\varphi_1)\ Pell(\varphi_2) \ldots\ Pell(\varphi_n)$.

Αν $a^2=Nb^2$, τότε Ανθ(a, b) = $[m_1$, περίοδος $(I_1, I_2, \ldots, I_n, (I_{n+1}), I_n, \ldots, I_2, I_1, 2m_1)]$.
Τότε, με παρόντα «μεσαίο όρο» γ_{n-1} στην ακολουθία των υπολοίπων της

ανθυφαίρεσης που αντιστοιχούν στην πρώτη περίοδο, έχουμε[16]:

$a = m_1 b+\gamma_1$ $\qquad \varphi_1 = \gamma_1$
$b = I_1 \gamma_1+\gamma_2$ $\qquad \varphi_2\gamma_1 = \gamma_2 b$
$\gamma_1 = I_2 \gamma_2+\gamma_3$ $\qquad \varphi_3\gamma_2 = \gamma_3 b$
…
$\gamma_{n-2} = I_{n-1} \gamma_{n-1}+\gamma_n$ $\qquad \varphi_n\gamma_{n-1} = \gamma_n b$
$\boldsymbol{\gamma_{n-1} = I_n \gamma_n+\gamma_{n+1}}$ $\qquad \boldsymbol{\varphi_{n+1}\gamma_n = \gamma_{n+1} b}$
$\gamma_n = I_n \gamma_{n+1}+\gamma_{n+2}$ $\qquad \omega_n\gamma_{n+1} = \gamma_{n+2} b$
…
$\gamma_{2n-3} = I_3 \gamma_{2n-2}+\gamma_{2n-1}$ $\qquad \omega_3\gamma_{2n-2} = \gamma_{2n-1} b$
$\gamma_{2n-2} = I_2 \gamma_{2n-1}+\gamma_{2n}$ $\qquad \omega_2\gamma_{2n-1} = \gamma_{2n} b$
$\gamma_{2n-1} = I_1 \gamma_{2n}+\gamma_{2n+1}$ $\qquad \omega_1\gamma_{2n} = \gamma_{2n+1} b$
$\gamma_{2n} = 2m_1 \gamma_{2n+1}+\gamma_{2n+2}$

Τότε, ο αριθμός Pell της ακέραιας N-αποτομής $\gamma_{2n+1}=p_{2n+1}a-q_{2n+1}b$, που ισούται εξ ορισμού με τον αριθμό $q_{2n+1}^2 - Np_{2n+1}^2$, είναι ίσος με -1, καθώς:
$\text{Pell}(\gamma_{2n+1}) =$
$\text{Pell}(\omega_1\cdot\gamma_{2n} /b) = \text{Pell}(\omega_1)\, \text{Pell}(\gamma_{2n}) =$
$\text{Pell}(\omega_1)\, \text{Pell}(\omega_2\cdot\gamma_{2n-1} /b) = \text{Pell}(\omega_1)\, \text{Pell}(\omega_2)\, \text{Pell}(\gamma_{2n-1}) =$
$\text{Pell}(\omega_1)\, \text{Pell}(\omega_2)\, \text{Pell}(\omega_3\cdot\gamma_{2n-2} /b) = \text{Pell}(\omega_1)\, \text{Pell}(\omega_2)\, \text{Pell}(\omega_3)\, \text{Pell}(\gamma_{2n-2}) = \ldots=$
$\text{Pell}(\omega_1)\, \text{Pell}(\omega_2)\, \text{Pell}(\omega_3) \ldots \text{Pell}(\omega_n)\, \text{Pell}(\varphi_{n+1})\, \text{Pell}(\varphi_n) \ldots \text{Pell}(\varphi_3)\, \text{Pell}(\varphi_2)\, \text{Pell}(\varphi_1) =$
$(\text{Pell}(\omega_1)\text{Pell}(\varphi_1))\, (\text{Pell}(\omega_2)\text{Pell}(\varphi_2))\, (\text{Pell}(\omega_3)\text{Pell}(\varphi_3)) \ldots(\text{Pell}(\omega_n)\text{Pell}(\varphi_n))\, \text{Pell}(\varphi_{n+1})$
$= 1\cdot1\cdot1\cdot \ldots \cdot1\cdot \text{Pell}(\varphi_{n+1})$.

Ισχύει πως $\text{Pell}(\varphi_{n+1}) = (m_{n+1}^2-N)/\lambda_{n+1}^2 = -\lambda_{n+2}/\lambda_{n+1}$. Όμως αναγκαστικά $\lambda_{n+2}=\lambda_{n+1}$ καθώς το λ_{n+2} που τυπικά θα αντιστοιχούσε σε μια αποτομή $\varphi_{n+2}=(a-m_{n+2}b)/\lambda_{n+2}$, στην ουσία αντιστοιχεί στην αποτομή $\omega_n=(a-m_n b)/\lambda_{n+1}$ την αποτομή που συναντάμε στο πρώτο βήμα της δεύτερης ημι-περιόδου της Ανθ(a, b), στο σημείο δηλαδή που ξεκινά η παλινδρόμηση. Συνεπώς $\text{Pell}(\varphi_{n+1}) = -1$ και επομένως $\text{Pell}(\gamma_{2n+1}) = 1\cdot1\cdot1\cdot \ldots \cdot1\cdot (-1) = -1$. Συνεχίζοντας για ακόμα μία περίοδο, ο αριθμός Pell του τελευταίου υπολοίπου της δεύτερης περιόδου θα είναι σαφώς +1.
Εάν ο «μεσαίος όρος» γ_{n-1} δεν είναι παρών, τότε ο παράγοντας -1 στο γινόμενο για τον αριθμό Pell του τελευταίου υπολοίπου της πρώτης περιόδου θα λείπει καθώς το αναχθέν υπόλοιπο φ_{n+1} θα απουσιάζει. Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση το τελευταίο υπόλοιπο της περιόδου θα έχει αριθμό Pell +1 ήδη από την πρώτη περίοδο.

Στο σημείο αυτό, έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε πως όταν ένας μη-τετράγωνος αριθμός N μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο τετραγώνων (όπως π.χ. για $N=61=6^2+5^2$ ή $N=97=4^2+9^2$) τότε εμφανίζεται «μεσαίος όρος» στην ακολουθία υπολοίπων. Στο Βιβλίο X, το Λήμμα 2 - X.28/29 και οι Προτάσεις X.33-35 σχετίζονται με το εν λόγω συμπέρασμα.

Σημείωση: Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε πως οι Tannery (Tannery 1882) και van der Waerden (van der Waerden 1976) είχαν ορθή διαίσθηση στο ότι οι Έλληνες γεωμέτρες είχαν με κάποιο τρόπο αποδείξει την γενική ιδιότητα Pell, δεν κατείχαν όμως τα απαιτούμενα επιχειρήματα για να την στηρίξουν, τα οποία είναι:
- τα κρυμμένα μαθηματικά μυστικά στην πλατωνική φιλοσοφία, και
- η σχέση της ταξινόμησης των αποτομών ευθειών και κάποιων Προτάσεων-κλειδιά στο Βιβλίο X, με το πρόβλημα Pell.

[16] Εύλογες τροποποιήσεις πρέπει να γίνουν όταν δεν υπάρχει ο «μεσαίος όρος» γ_{n-1}.

8.4. Ο τρίτος σκοπός του Βιβλίου Χ των Στοιχείων είναι η επέκταση της περιοδικότητας της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης στα κανονικά στερεά μέσω παραβολής χωρίων, σε μια προσπάθεια να αντισταθμιστεί η επιτυχία της μη-ανθυφαιρετικής προσέγγισης από τον Αρχύτα και τον Εύδοξο

Επιχειρηματολογήσαμε πως οι βασικοί δύο σκοποί του Θεαίτητου στο Βιβλίο Χ είναι η απόδειξη του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας και η απόδειξη του προβλήματος Pell.

8.4.1. Το ερώτημα σχετικά με τον ρόλο της Πυθαγόρειας παραβολής χωρίων στο Βιβλίο Χ

Υπάρχουν ακόμα αρκετές Προτάσεις στο Βιβλίο Χ που δεν χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία για την απόδειξη αυτών των δύο αποτελεσμάτων. Αυτή είναι ουσιαστικά η εξάδα των Προτάσεων Χ.91-96 και οι συζυγείς Χ.54-59, που διακρίνονται από το γεγονός ότι χρησιμοποιούν την *Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων, πάντα κατ' έλλειψιν,* μαζί με διάφορες Προτάσεις Χ.17-21, 33-36 που είναι προπαρασκευαστικές αυτών των δύο εξάδων.
Το ερώτημα είναι: ποιος είναι ο σκοπός της εισαγωγής της Πυθαγόρειας παραβολής χωρίων στο Βιβλίο Χ; Θα σκιαγραφήσουμε απλώς την ερμηνεία μας καθώς δεν είναι αυτό το κύριο αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

8.4.2. Προκειμένου να απαντήσουμε στο ερώτημα της 8.4.1 επικεντρωνόμαστε στην μοναδική χρήση της παραβολής χωρίων του Βιβλίου Χ στα Στοιχεία*, η οποία είναι η μελέτη, μέσω της Πρότασης Χ.94, του κανονικού 20έδρου στο Βιβλίο XIII και ειδικά στις Προτάσεις XIII.11 & 16*

Φαίνεται λογικό να προσπαθήσουμε να βρούμε την απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην 8.4.1 αναλύοντας την μοναδική χρήση της ομάδας των Προτάσεων του Βιβλίου Χ που χρησιμοποιούν παραβολή χωρίων. Μόνο η Πρόταση Χ.94 επιστρατεύεται για την απόδειξη της Πρότασης XIII.16 για το κανονικό στερεό 20εδρο, με χρήση της XIII.11.

Ορισμός (Πρόταση Χ.76). Μια ευθεία Ω είναι μια *ελάσσων* ευθεία εάν υπάρχουν δύο ευθείες Φ, Ψ, τέτοιες ώστε:
$\Phi>\Psi$, $\Omega=\Phi-\Psi$,
$\Phi^2+\Psi^2$ *ρητό* εμβαδόν (δηλαδή σύμμετρο στο b^2), και
ΦΨ *μέσο* εμβαδόν (δηλαδή ίσο με ένα ορθογώνιο με πλευρές δυνάμει σύμμετρες).

Πρόταση XIII.16. Η πλευρά, ακμή του 20έδρου είναι *ελάσσων* σε σχέση με τη διάμετρο της σφαίρας στην οποία το 20εδρο εγγράφεται.

Η Πρόταση XIII.16 είναι μια απλή συνέπεια των Προτάσεων XIII.11 και Χ.94.

Πρόταση XIII.11. Έστω Ω η πλευρά ενός κανονικού 5γώνου, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας b, και έστω γ η απλή αποτομή $γ=(5b-a)/4$, με $a^2=5b^2$.
Τότε $Ω^2=γ\cdot 2b$.

Πρόταση X.94.
Εάν η ευθεία γ είναι μια *τέταρτη (απλή) αποτομή* και r μια ρητή ευθεία, τέτοια ώστε $Ω^2=γ\cdot r$, τότε η Ω είναι μια *ελάσσων* ευθεία.

Παρακάτω *σκιαγραφείται η απόδειξη* της Πρότασης X.94.
Εφαρμόζουμε την ειδική Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν, μια ειδική μορφή της παραβολής χωρίων, ως ακολούθως.
[1] Έστω γ μια *(απλή) αποτομή*, $γ = qb-pa$, όπου q, p ρητοί αριθμοί, και a, b ευθείες δυνάμει σύμμετρες, δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί M, N, τέτοιοι ώστε $a^2/b^2=M/N$.
[2] Εφαρμόζουμε την *Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν με δεδομένα qb και pa/2*.
Καθώς $qb>pa$, προκύπτει ότι $qb/2>pa/2$, και συνεπώς μια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν με αυτά τα δεδομένα είναι δυνατή.
[3] Σχηματίζουμε *τον κύκλο* με διάμετρο qb, παίρνουμε το ύψος pa/2, και
σχηματίζουμε *το ορθογώνιο τρίγωνο*, με υποτείνουσα τη διάμετρο qb,
και τρίτο σημείο το σημείο όπου το ύψος pa/2 συναντά την περιφέρεια.
[4] Θέτουμε Φ μια από τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, έτσι ώστε $Φ^2=(qb-x)qb$, και
Ψ την άλλη πλευρά, έτσι ώστε $Ψ^2=qbx$.
Τότε επαληθεύουμε όλες τις απαιτούμενες συνθήκες,
$(Φ-Ψ)^2=γ\cdot qb$,
$Φ^2+Ψ^2=(qb)^2$, ρητό εμβαδόν,
$ΦΨ=qb\cdot pa/2$, μέσο εμβαδόν.

Απόδειξη της XIII.11.
Επαληθεύουμε ότι η γ είναι τέταρτη αποτομή, και εφαρμόζουμε τη θεμελιώδη Πρόταση X.94 στην γ.

8.4.3. Η ειδική παραβολή χωρίων που εισήχθη από τον Θεαίτητο στο Βιβλίο X, με δεδομένα qb και pa/2, με τον συμβολισμό της 8.4.2, είναι τέτοια ώστε η ανθυφαίρεση της λύσης x προς b είναι τελικά περιοδική

Η ακόλουθη Πρόταση ξεκαθαρίζει τον ρόλο που διαδραματίζει η *ειδική* Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων που εμφανίζεται στην Πρόταση X.94, δηλαδή μια Πυθαγόρεια εφαρμογή χωρίων κατ' έλλειψιν με δεδομένα δύο ευθείες qb και pa/2 που δεν έχουν αυθαίρετη σχέση, όπως συμβαίνει στη γενική παραβολή χωρίων, αλλά είναι *δυνάμει σύμμετρες*.
Το αποτέλεσμα αυτής της συνθήκης είναι η παραγωγή μιας εξίσωσης της μορφής
$Ax^2+Cb^2= Bxb$, με συντελεστές A, B, C, φυσικούς αριθμούς.
Τελικά μια τέτοια παραβολή χωρίων παράγει μια ανθυφαίρεση του x προς b που είναι τελικά περιοδική.

Πρόταση. Εάν γ είναι μια *τέταρτη (απλή) αποτομή*, $γ=qb-pa$, όπου q, p ρητοί αριθμοί, και a, b ευθείες δυνάμει σύμμετρες, δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί M, N, τέτοιοι

ώστε $a^2/b^2=M/N$, τότε η *Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν* με δεδομένα qb και pa/2:
(α) οδηγεί στην κατασκευή μιας ευθείας x, τέτοιας ώστε:
$x(qb-x)=p^2a^2/4=(p^2M/4N)b^2$, δηλαδή $x^2=qxb-(Mp^2/4N)b^2$,
(β) η *διακρίνουσα* Δ αυτής της παραβολής χωρίων ισούται με $\Delta=(q^2-M/4Np^2)b^2$, και
(γ) η ανθυφαίρεση του x προς b είναι *τελικά περιοδική.*

Σημειώνουμε πως εξαιτίας της τετραγωνικής συμμετρίας των a, b, η παραβολή χωρίων έχει *φυσικούς αριθμούς* σαν συντελεστές (θέτοντας ω=x/b, αυτή η παραβολή χωρίων αντιστοιχεί σε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού $\omega^2-q\omega+Mp^2/4N=0$ με ακέραιους συντελεστές).
Η *απόδειξη της Πρότασης* είναι άμεση συνέπεια της *μη μεταβολης της διακρίνουσας υπό ανθυφαιρετική αντικατάσταση* (καμία χρήση της θεωρίας συζυγίας δεν γίνεται) με ένα επιχείρημα περιστερεώνα. Οι λεπτομέρειες παραλείπονται.

8.4.4. Η ερμηνεία των **Ανώνυμων Σχολίων** *X.135, 185 στα* **Στοιχεία**

Η τελευταία Πρόταση, η οποία δείχνει την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης που προκύπτει από αυτήν την ειδική παραβολή χωρίων, παρέχει μια ικανοποιητική ερμηνεία των έως τώρα μυστηριωδών, φιλοσοφικά διατυπωμένων *Σχολίων* X.135, 185 στα *Στοιχεία*.

> It is worthy of admiration (Θαυμάζειν ἄξιον), that
> *the ruling, controlling power (κρατητικὴ δύναμις)* of the triad (τῆς τριάδος)
> *finitises (ἀφορίζει)* the alogos power (ἄλογον δύναμιν) and
> reaches (διήκει) till the extremes (μέχρι τῶν ἐσχάτων),
> because each kind of alogia (ἀλογίας) is *finitised (ἀφορίζεται)* by some mean (μεσότητος), one by the geometric (γεωμετρικῆς) mean, the other by the arithmetical (ἀριθμητικῆς) mean, the other by the harmonic/musical (μουσικῆς) mean;
> and it seems that the substance of the soul sittting upon (ἐπιβατεύουσα) the substance of the magnitudes according to the "logoi" of the soul (κατὰ τοὺς ἐν αὑτῇ λόγους)
> finitises (ὁρίζειν) everything indefinite (ἀόριστον) and the infinite of the alogia (τὴν τῆς ἀλογίας ἀπειρίαν)
> by means of these three bonds (δεσμοῖς).
> *(Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη,* Σχόλιο X.135, 1-9)
>
> holding together (συνέχουσα) its scattered and divided quality (τὸ σκεδαστὸν αὑτῆς)
> *(Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη,* Σχόλιο X.185 *)*

Σύμφωνα με αυτά τα *Σχόλια*, διατυπωμένα σε γλώσσα πλατωνικής φιλοσοφίας, κάποια δύναμη ελέγχει και «*αφορίζει*» (finitises) την ανθυφαιρετική απειρία που είναι παρούσα σε καθεμία από τις 13 *άλογες ευθείες*, μέσω τριών δεσμών (της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του γεωμετρικού μέσου). Ο «*αφορισμός*» (finitisation) μπορεί μόνο να αναφέρεται σε κάποιου είδους *ανθυφαιρετική περιοδικότητα*.
Η μόνη ανθυφαιρετική περιοδικότητα που είναι παρούσα στην άλογη ευθεία ελάσσων, είναι η ανθυφαιρετική περιοδικότητα της παραπάνω Πρότασης, που προκύπτει από την ειδική Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν της X.94.

8.4.5. Η απάντηση στο ερώτημα της 8.4.1: ο σκοπός της εισαγωγής της παραβολής χωρίων στο Βιβλίο Χ είναι η επέκταση της τετραγωνικής ανθυφαιρετικής περιοδικότητας στα κανονικά στερεά

Καθώς, σύμφωνα με την Πρόταση XIII.16, η πλευρά, ακμή του 20έδρου είναι μια ελάσσων αναφορικά με την διάμετρο της σφαίρας στην οποία το 20εδρο εγγράφεται, προκύπτει ότι η «*αφοριστική*» (finitising) δύναμη της περιοδικής ανθυφαίρεσης είναι παρούσα και κυριαρχεί στα κανονικά στερεά. Αυτή ακριβώς είναι η ερμηνεία μας για τον σκοπό της εισαγωγής της παραβολής χωρίων στο Βιβλίο Χ.

8.4.6. Η απάντηση που δόθηκε στην 8.4.5 θα πρέπει να ερμηνευθεί στο πλαίσιο των επιτυχιών της μη-ανθυφαιρετικής προσέγγισης σε πολλά βασικά ερωτήματα, από τον Αρχύτα και τον Εύδοξο

Ο Θεαίτητος δεν κατάφερε να επεκτείνει την τετραγωνική περιοδική ανθυφαίρεση επιφανειών, σε κυβική στην στερεομετρία, παρά τον ισχυρισμό για το αντίθετο στο χωρίο *Θεαίτητος* 148b2 («*καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον*»), καθώς στην πραγματικότητα αυτή η επέκταση δεν ισχύει. Η ανθυφαιρετική μέθοδος απόδειξης του Θεαίτητου για τετραγωνικές ασυμμετρίες δεν επεκτείνεται σε κυβικές ασυμμετρίες.

Πολύ σύντομα, μια εναλλακτική, ανταγωνιστική *μη-ανθυφαιρετική προσέγγιση για τις ασυμμετρίες* εμφανίστηκε, σαν πρόταση του *Αρχύτα* και του μαθητή του, του Ευδόξου.
Ο Αρχύτας κατάφερε να πετύχει αριθμητικές, μη-ανθυφαιρετικές αποδείξεις, όχι μόνο για τετραγωνικές ασυμμετρίες, που είχαν πρωτοπαρουσιαστεί με όρους περιοδικής ανθυφαίρεσης από τον Θεαίτητο, αλλά επίσης για κυβικές ασυμμετρίες, κάτι που ο Θεαίτητος δεν είχε καταφέρει. Οι αποδείξεις βασίζονταν στην Πρόταση VII.27 (εάν a, b είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί, τότε a^n, b^n είναι επίσης σχετικώς πρώτοι για κάθε αριθμό n), και την παράγωγη Πρόταση VIII.14.
Οι αποδείξεις ασυμμετρίας του Αρχύτα επικρίθηκαν από τον Πλάτωνα στο χωρίο *Φίληβος* 16c5-17a5 ως «εριστικές», «μη-διαλεκτικές» αποδείξεις.
Πολύ σύντομα, ο *Εύδοξος*, μαθητής του Αρχύτα, ανέπτυξε μια *μη-ανθυφαιρετική προσέγγιση της θεωρίας λόγων μεγεθών* που παρουσιάζεται στο Βιβλίο V των *Στοιχείων*, αντικαθιστώντας την περιορισμένη ανθυφαιρετική θεωρία του Θεαίτητου και προοιωνίζοντας τις τομές Dedekind. Η θεωρία του Ευδόξου επικρίθηκε έντονα στο *Ανώνυμο Σχόλιο* X.2 στα στοιχεία από κύκλους φιλικά προσκείμενους στον Πλάτωνα.

Η νέα θεωρία λόγων του Ευδόξου κατέστησε δυνατή την ευρηματική *μη-ανθυφαιρετική προσέγγιση* του *Αρχύτα για τον διπλασιασμό του κύβου* μέσω κατασκευής δύο μέσων αναλόγων (όπως είχε αρχικά συλλάβει ο Ιπποκράτης).
Ο διπλασιασμός του κύβου του Αρχύτα επικρίθηκε ξεκάθαρα από τον Πλάτωνα στα χωρία *Πολιτεία* 527d -528d και από τον Πλούταρχο, στα *Συμποσιακά* 718 B8-F4.
(Περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να βρει στο Negrepontis 2019, σελ. 83-86).

Όλες αυτές οι επιτυχίες από τον Αρχύτα και τον Εύδοξο έβαλαν τον Θεαίτητο και τον

Πλάτωνα σε θέση άμυνας, έχοντας την ανάγκη κάποιας επιτυχίας της ανθυφαιρετικής προσέγγισης στη στερεά γεωμετρία. Οι Προτάσεις X.94 και XIII.16, όπως ερμηνεύτηκαν στις παραγράφους 8.4.4-5, είναι αποτελέσματα αυτής της ανάγκης.

8.4.7. Το χωρίο Μένων 86e-87b δείχνει το ισχυρό ενδιαφέρον του Πλάτωνα για την ειδική παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν του Θεαίτητου στο Βιβλίο X

Οι Σ. Νεγρεπόντης και Β. Φαρμάκη έδειξαν πως στο χωρίο *Μένων* 86e-87b, που εν γένει θεωρείται μυστηριώδες, πραγματοποιείται μετάβαση από μια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν με δεδομένα a και m, με a/2>m, σε έναν κύκλο διαμέτρου a και ένα εγγεγραμμένο *(ορθογώνιο) τρίγωνο* με υποτείνουσα a και ύψος m/2 (και όχι ισοσκελές), γεγονός που καταδεικνύει μια στενή σχέση του χωρίου στον *Μένωνα* με τις Προτάσεις X.18 και X.33, προπαρασκευαστικές για την Πρόταση X.94. Ο Πλάτων φυσικά ενδιαφέρεται για την εισαγωγή της παραβολής χωρίων του Θεαίτητου, καθώς μέσω αυτών επιτυγχάνεται «*αφορισμός*» (finitization) μέσω περιοδικής ανθυφαίρεσης.

8.4.8. Επανεκτίμηση της παλαιάς διαμάχης σχετικά με την Γεωμετρική Άλγεβρα: η προ-Ευκλείδεια παραβολή χωρίων έχει κυρίως να κάνει με την περιοδική ανθυφαίρεση και μόνο δευτερευόντως με Γεωμετρική Άλγεβρα

Η ερμηνεία που υποστηρίζουμε σχετικά με τον σκοπό ύπαρξης της παραβολής χωρίων στο Βιβλίο X μας υποχρεώνει σε μια μάλλον δραστική επανεκτίμηση της διαμάχης σχετικά με την Γεωμετρική Άλγεβρα. Η παραβολή χωρίων του Βιβλίου X είναι η βασική προ-Ευκλείδεια παραβολή χωρίων, και ενώ χωρίς αμφιβολία ο Θεαίτητος εφαρμόζει κάποια Γεωμετρική Άλγεβρα, το κύριο ενδιαφέρον του είναι εντούτοις η περιοδική ανθυφαίρεση της παραβολής χωρίων. Για να μιλήσουμε για καθαρή μορφή Γεωμετρικής Άλγεβρας στην παραβολή χωρίων, θα πρέπει ίσως να περιμένουμε μέχρι το ενδιαφέρον για την περιοδική ανθυφαίρεση να αρχίσει να εκλείπει, π.χ. στον Απολλώνιο.

8.4.9. Οι σκοποί του Βιβλίου X των Στοιχείων

Αποκαλύπτεται λοιπόν πως το Βιβλίο X έχει έναν συναρπαστικό πολυδιάστατο στόχο: να προσφέρει τα εργαλεία για την δήλωση και την απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων και της στενά συσχετιζόμενης λύσης του προβλήματος Pell, και επιπρόσθετα να προσπαθήσει να επεκτείνει την ανθυφαιρετική περιοδικότητα στον χώρο και στα κανονικά στερεά. Αυτοί οι σκοποί μέχρι τώρα δεν είχαν διαφανεί, όπως φαίνεται από τις γνώμες που εκφέρουν συγγραφείς που έχουν μελετήσει το Βιβλίο X, όπως:

ο van der Waerden (van der Waerden 1950, σελ. 172), που γράφει:

> Book X does not make easy reading…The author succeeded admirably in hiding his line of thought.

ο Mueller (Mueller 1981, σσ. 270-271), που γράφει:

> One would, of course, prefer an explanation that invoked a clear mathematical goal intelligible to us in terms of our own notions of mathematics and which, under analysis, would lead univocally to the reasoning in book X. Unfortunately, book X has never been explicated successfully in this way nor does it appear amenable to explication of this sort. Rather, book X appears to be expedient for dealing with a particular problem and at the same time a mathematical blind alley·

ο Taisbak (Taisbak 1982, σελ. 58), στον οποίο οφείλουμε να αποδώσουμε τα εύσημα για την αποσαφήνιση της μαθηματικής δομής του Βιβλίου X, που γράφει:

> We are prepared to face the possibility that there was no other point than to entertain us with good logic·

ο Knorr (Knorr 1983, σελ. 60), που γράφει:

> The true merit of Book X, and I believe it is no small one, lies in its being a unique specimen of a fully elaborated deductive system of the sort that ancient philosophies consistently prized·

Οι παραπάνω δηλώσεις και άλλες παρόμοιες πρέπει να απορριφθούν όπως πλεόν αποδεικνύουν οι πρώτοι δύο σκοποί που διεφάνηκαν για το Βιβλίο X (παλινδρομική περιοδικότητα, Pell).

Από την άλλη, έχουμε και την άποψη του Weil ο οποίος πιστεύει πως το Βιβλίο X έχει μοναδικό σκοπό να εξυπηρετήσει τις ανάγκες του Βιβλίου XIII. Όμως η θέση του Weil δεν υπολογίζει την μίμηση από τον Πλάτωνα του Θεαιτήτειου Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας στον *Πολιτικό,* και της ανακατασκευασμένης μας απόδειξης. Η θέση του Weil επίσης απορρίπτεται από τα *Ανώνυμα Σχόλια X.135, 185* στα *Στοιχεία*, που είδαμε παραπάνω.

Οι σκοποί του Βιβλίου X είναι λοιπόν οι εξής:

(α) η απόδειξη του Ισχυρού Θεαιτήτειου Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας
[τα εργαλεία που χρειάζονται περιλαμβάνουν τις αποτομές X.73-78, τις διωνυμικές ευθείες X.36-41, τις συζυγίες X.112-114, την μοναδικότητα X.79-84, την υπό συμμετρία μη μεταβολή X.103]

(β) η επίλυση του προβλήματος Pell για κάθε μη-τετράγωνο N
[τα εργαλεία που χρειάζονται περιλαμβάνουν την ταξινόμηση των αποτομών X.84/85, τις κατασκευές X.85-90, την X.97 για το τετράγωνο μιας αποτομής, και πιθανόν την X.91]

(γ) η απόδειξη ότι κάποιες βασικές τρισδιάστατες κατασκευές στον χώρο, όπως οι κατασκευές των κανονικών πολυέδρων στο Βιβλίο XIII, έχουν κάποια σχέση με την περιοδικότητα, και μπορούν να θεωρηθούν «*αφορισμένες*» (finitised), όπως:

- **(i)** η πλευρά του 20έδρου είναι «ελάσσων ευθεία» σε σχέση με τη διάμετρο της σφαίρας στην οποία το 20εδρο εγγράφεται (η ελάσσων ορίζεται στην X.76, και κατασκευάζεται στην Πρόταση X.94), και
- **(ii)** η πλευρά του 12έδρου είναι μια «διπλή» αποτομή (εξ ου και η ανάγκη γενικότερου ορισμού για την αποτομή πέραν αυτού της απλής αποτομής).

Ενότητα 9. Το πρόβλημα Pell στα Ινδικά Μαθηματικά

Σε αυτήν την τελευταία Ενότητα θα εξετάσουμε τη φύση της συνεισφοράς των Ινδών στην λύση του προβλήματος Pell. Η συνεισφορά αυτή φαίνεται να έχει έρθει σε δύο στάδια, πρώτα από τον Brahmagupta τον 7^{o} αιώνα μ.Χ. που ανέπτυξε την *bhavana*, μια τεχνική σύνθεσης ή τετραγωνισμού, και δεύτερον από τον Bhaskara II τον 12^{o} το όνομα του οποίου συνδέθηκε με την μέθοδο *cakravala*, που πραγματοποιείται με την βοηθητική τεχνική της *kuttaka*. Παρ' όλα αυτά, σύμφωνα με τον Weil (Weil 1984), η *kuttaka* είναι εξολοκλήρου μη αναγκαία, ενώ διάφορες γενικές και τοπικές συντομεύσεις, αν και ευρηματικές, αποκρύπτουν την βασική περιοδική φύση της μεθόδου *cakravala*. Η καθαρή μορφή της *cakravala* εμφανίζει ισχυρές ομοιότητες με την ανακατασκευασμένη απόδειξη της περιοδικότητας της τετραγωνικής ανθυφαίρεσης του Θεαίτητου. Πρέπει να τονιστεί ότι δεν υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε εάν η προέλευση των μεθόδων που αναπτύχθηκαν από τους Ινδούς μαθηματικούς συνδέεται με οποιονδήποτε τρόπο με τις ανακατασκευασμένες αποδείξεις του Θεαίτητου.

9.1. Ο αντίκτυπος της λύσης των Ινδών για το πρόβλημα Pell στην Ευρώπη

Μπορεί κανείς να φανταστεί την έκπληξη των Ευρωπαίων μαθηματικών με την κυκλοφορία του βιβλίου του Colebrooke το 1817. Ο Pierre de Fermat το 1657 είχε λύσει το πρόβλημα Pell ειδικά για N=61 και, με μία επιστολή στον Frénicle τον είχε προκαλέσει να λύσει κι εκείνος τις περιπτώσεις για N=61 και N=109 , ισχυριζόμενος «παραπλανητικά, ή καλύτερα κοροϊδευτικά» πως διάλεξε μικρούς αριθμούς «pour ne vous donner pas trop de peine» (για να μην σας δυσκολέψω πολύ) (Weil 1984, σελ. 97). Τώρα προκύπτει πως αυτή η συγκεκριμένη περίπτωση του N=61 ήταν γνωστή στον Bhaskara II περίπου το 1150 (Colebrooke 1817, σσ. 176-178)!

Ο Hankel, μαθηματικός και ιστορικός των Μαθηματικών, (Hankel 1874) θα χαιρετίσει τις *bhavana* και *cakravala* ως «την κορύφωση όλης της Ινδικής επιστήμης», μιλώντας για μέθοδο που «είναι πέρα από κάθε εγκώμιο˙ [και] είναι σίγουρα το καλύτερο επίτευγμα στην Θεωρία Αριθμών πριν τον Lagrange»:

> "der Glanzpunkt ihrer gesammten Wissenschaft . . . Diese Methode ist über alles Lob erhaben; sie ist sicherlich das Feinste, was in der Zahlentheorie vor Lagrange geleistet worden ist." (Hankel 1874, σσ. 200–202)

Παρ' όλα αυτά, λίγο αργότερα, ο Tannery (Tannery 1882, σελ. 325) υπέθεσε ότι η Ινδική μελέτη απροσδιόριστων εξισώσεων είχε Ελληνική προέλευση, και πως με τη βοήθεια των Ελληνικών κανόνων για την προσέγγιση τετραγωνικών αρρήτων … κάποιος θα μπορούσε μέσω «απλών βημάτων» να μεταβεί στην Ινδική μέθοδο. Ο Weil γράφει (Weil 1984, σελ. 19):

> Tannery seems to have... entertained the hope that the solution would some day re-appear with the lost books of Diophantus; so far no evidence for this has been forthcoming.
> Equations of the type $x^2 – Ny^2= 1$ do occur in Diophantus (e.g. in *Dioph*.V.9 and 1l), but it is

a rational solution that is asked for, even when accidentally a solution in integers is obtained (e.g. in *Dioph*.V.9, where N is of the form $m^2 + 1$, giving $y = 2m$, $x = 2m^2 + 1$).

Ο van der Waerden (van der Waerden 1976), επιχειρηματολογεί υπέρ της Ελληνικής προέλευσης της αστρονομίας του Brahmagupta:

> The main subject of Brahmagupta's treatise is astronomy. His astronomical system is based upon the epicycle hypothesis, which is a Greek invention. As one of his tools, Brahmagupta uses a table of sines. The Greeks had tables of chords, which can easily be transformed into tables of sines.
> Some eighty years before Brahmagupta, Varaha Mihira (see Selenius 1975, p 173) presented excerpts from five Siddhantas, one of which, the "Romaka-Siddhanta" was based on the solar and lunar theory of Hipparchos, while another Siddhanta is ascribed to "Paulisa the Greek" (Shukla 1954, p 10). Hence the astronomy and the mathematical tools of the Hindus in the time of Brahmagupta and before were largely derived from Greek sources.
> This makes it even more probable that the Hindu methods of solving Pell's equation also go back to Greek sources.

Τα επιχειρήματα των Tannery και van der Waerden δεν θεωρήθηκαν πειστικά.

Είδαμε στην Ενότητα 4 ότι ο Weil δεν πίστευε πως οι Προτάσεις συζυγίας X.112-114 του βιβλίου X των *Στοιχείων* χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη της περιοδικότητας των συνεχών κλασμάτων (ανθυφαίρεσης) τετραγωνικών αρρήτων, και πως συνεπώς η συνεισφορά των Ινδών θα έπρεπε να θεωρηθεί πρωτότυπη. Ο Weil σχολίασε επιπλέον την, όπως νόμιζε, «πειραματική», και χωρίς την παρουσία αποδείξεων φύση της μεθόδου των Ινδών, θεωρώντας τες «όχι μικρό κατόρθωμα»:

> *Firstly,* the facts for which we have just given proofs may have been known to the Indians only experimentally; there is nothing to indicate whether they had proofs for them, or even for part of them.
>
> For the Indians, of course, the effectiveness of the *cakravala* could be no more than an experimental fact, based on their treatment of a great many specific cases, some of them of considerable complexity and involving (to their delight, no doubt) quite large numbers.
> As we shall see, Fermat was the first to perceive the need for a general proof, and Lagrange the first to publish one.
> Nevertheless, to have developed the *cakravala* and to have applied it successfully to such difficult numerical cases as N = 61 or N = 67 had been no mean achievement.
> (Weil 1984, σελ. 24)

9.2. Η bhavana/σύνθεση του Brahmagupta

9.2.1. Η bhavana/σύνθεση του Brahmagupta στον Colebrooke 1817

Ο Brahmagupta εισάγει το θέμα της επίλυσης της *varga-prakṛti*[17] παρουσιάζοντας έναν ενδιαφέροντα κανόνα (*bhavana* στα Σανσκριτικά), σύμφωνα με τον οποίο δύο

[17] ο όρος *varga-prakṛti* αποδίδεται ως «affected square» από τον Colebrooke 1817, ή «square-nature» από τον Weil 1984 σελ. 21, και αναφέρεται στην γενική Διοφαντική εξίσωση $q^2=Np^2+\lambda$, όπου N: μη-τετράγωνος ακέραιος >1, λ ακέραιος και (q, p) ένα ζεύγος επιθυμητών ακέραιων λύσεων – πρβλ. Raghavan 1997, σελ. 1008.

ζεύγη ήδη γνωστών λύσεων όχι απαραίτητα του ίδιου σταθερού όρου λ, συντίθενται και σαν αποτέλεσμα ένα νέο ζεύγος λύσεων παράγεται, έχοντας σαν σταθερό όρο το λλ'.

> RULE §39 – 40:
> A root [is set down] two-fold: and [another, deduced] from the assumed square multiplied by the **multiplier**, and increased or diminished by a quantity assumed.
> The product of the first [pair], taken into the multiplier, with the product of the last [pair] added, is a **“last” root**.
> The sum of the products of oblique multiplication is a **“first” root**.
> The additive is the product of the like **additive or subtractive** quantities.
> The roots [so found], divided by the [original] additive or subtractive quantity, are [roots answering] for additive unity.
> (Colebrooke 1817, σελ. 363)

Η αντιστοιχία μεταξύ της ορολογίας του Colebrooke που μεταφράζει τον Brahmagupta και εκείνης που πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε παρουσιάζεται παρακάτω:
N: «multiplier» (*gunaka* στο Σανσκριτικό κείμενο)
q: «last root»
p: «first root»
λ: «additive or subtractive» (*ksepa*, *praksepa* ή *praksepaka* για τον Brahmagupta)

9.2.2. Η bhavana/σύνθεση του Brahmagupta με σύγχρονο συμβολισμό

Ορισμός. Εάν N ένας μη-τετράγωνος αριθμός και (q, p) μια δυάδα φυσικών αριθμών, ο *αριθμός Pell* της (q, p) σε σχέση με τον N είναι $\lambda = q^2-Np^2$

Ας σημειώσουμε πως ο αριθμός Pell μιας δυάδος είναι είτε θετικός είτε αρνητικός.
Ο αριθμός Pell της δυάδος (q, p) συμπίπτει με τον αριθμό Pell, Pell(γ), της απλής αποτομής qb-pa (εάν qb>pa) ή pa-qb (εάν pa>qb).

Ορισμός του γενικού κανόνα bhavana/σύνθεσης του Brahmagupta * για μη-τετράγωνο N. Εάν (q, p) μια δυάδα με αριθμό N-Pell $\lambda = q^2-Np^2$ και (q', p') μια δυάδα με αριθμό N-Pell $\lambda' = q'^2-Np'^2$, τότε η δυάδα (q''=qq'+Npp', p''=qp'+pq') έχει αριθμό N-Pell λ''=λλ'. Γράφουμε (q, p)*(q', p')= (qq'+Npp', qp'+pq').

Ορισμός του τετραγωνικού κανόνα bhavana/σύνθεσης του Brahmagupta * για μη-τετράγωνο N. Για την ειδική περίπτωση όπου q'=q, p'=p και λ'=λ, η δυάδα που προκύπτει από τον κανόνα παίρνει τη μορφή $q''=q^2+Np^2$, p''=2pq, με αριθμό N-Pell $\lambda''=\lambda^2$. Γράφουμε $(q, p)*(q, p) = (q^2+Np^2, 2pq)$.

9.2.3. Η στενή σχέση του γενικού και του τετραγωνικού κανόνα bhavana/σύνθεσης του Brahmagupta με την σύνθεση και τον τετραγωνισμό απλών αποτομών ευθειών στο Βιβλίο Χ και ειδικά με την Πρόταση Χ.97 των **Στοιχείων**

Το πώς ο Brahmagupta κατέληξε στον ορισμό (q, p)*(q', p') = (qq'+Npp', qp'+pq') για την *bhavana* δεν είναι κάτι το αυτονόητο.

Όμως ο ορισμός προκύπτει αβίαστα εάν τον θεωρήσουμε ως την αριθμητική εκδοχή της γεωμετρικής Πρότασης X.97 των *Στοιχείων* όταν αυτή εφαρμόζεται για N μη-τετράγωνο και απλές αποτομές ευθείες:

$$(qb-pa)(q'b-p'a) = ((qq'+Npp')b-(qp'+pq')a)b.$$

Ο κανόνας *bhavana*/σύνθεσης παίζει βασικό ρόλο στην μέθοδο *cakravala* που χρησιμοποιεί ο Bhaskara, όπως θα δούμε πιο κάτω.

9.2.4. Κάποια παραδείγματα που επιλύθηκαν από τον Brahmagupta

[1] Το πρόβλημα Pell για N=83: να βρεθούν φυσικοί αριθμοί q, p, τέτοιοι ώστε $q^2 - 83p^2 = 1$.
Ο Brahmagupta ξεκινάει με την δυάδα (9, 1).
Έπειτα συνθέτει την δυάδα (9, 1) με τον εαυτό της σύμφωνα με τον κανόνα τετραγωνισμού *bhavana* (Ενότητα 9.2.2), και βρίσκει (9, 1)*(9, 1) = (164, 18), της οποίας ο αριθμός Pell είναι $164^2 - 83\cdot18^2 = 4$.
Μετά, διαιρώντας με 2^2, η δυάδα (82, 9), έχει αριθμό Pell $82^2 - 83\cdot9^2=1$, αποτελώντας λύση για την εξίσωση $q^2=83p^2+1$. Συνεπώς, θέτοντας q= 82, p=9, παίρνει $q^2 - 83p^2 = 1$.

[2] Το πρόβλημα Pell για N=92: να βρεθούν φυσικοί αριθμοί q, p, τέτοιοι ώστε $q^2 - 92p^2 = 1$.
Κανονικά το αρχικό βήμα θα ήταν η δυάδα (9, 1), καθώς ο 9 είναι ο μεγαλύτερος φυσικός του οποίου το τετράγωνο 81 είναι μικρότερο από τον N=92, όμως, χάρη σε μία συντόμευση (που εξηγείται στην 9.2.5 παρακάτω), επειδή $10^2 - 92 = 8 < 11 = 92 - 9^2$, ο Brahmagupta μεταβαίνει στην δυάδα (10, 1), της οποίας ο αριθμός Pell είναι $10^2 - 92\cdot1^2 = 8$.
Ο Brahmagupta συνθέτει την δυάδα (10, 1) με τον εαυτό της σύμφωνα με τον τετραγωνισμό *bhavana* (9.2.2), και βρίσκει
(10, 1)*(10, 1) = (192, 20), με αριθμό Pell $192^2 - 92\cdot20^2 = 8^2 = 64$.
Διαιρώντας με 8^2 παίρνουμε $24^2 - 92\cdot(5/2)^2 = 1$.
Έχουμε φτάσει σε μια δυάδα με αριθμό Pell 1, όμως η συγκεκριμένη δυάδα (24, 5/2) που έχει αριθμό Pell 1 δεν είναι ακέραια αλλά κλασματική.
Ο Brahmagupta συνθέτει πάλι την δυάδα (24, 5/2) με τον εαυτό της σύμφωνα με τον τετραγωνισμό *bhavana* (9.2.2), και βρίσκει:
(24, 5/2)*(24, 5/2) = $(24^2 + 92\cdot(5/2)^2, 2\cdot(5/2)\cdot24)$ = (576 + 575, 120) = (1151, 120).
Συνεπώς, θέτοντας q= 1151, p=120, παίρνει $q^2 - 92p^2 = 1$.

9.2.5. Μερικές συντομεύσεις για την bhavana/σύνθεση από τον Brahmagupta

Εάν, για κάποιον μη-τετράγωνο αριθμό N, μπορεί να βρεθεί μια δυάδα με αριθμό Pell -4, ή +4, ή -2, ή +2, ή -1, τότε από επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του Brahmagupta, είναι δυνατόν να βρεθεί μια δυάδα με αριθμό Pell +1, συνεπώς να επιλυθεί το πρόβλημα Pell.

Θα επαληθεύσουμε τους κανόνες συντόμευσης του Brahmagupta, εφαρμόζοντας την Πρόταση X.97.

[1] *Συντόμευση από Pell(d)= - 4 σε Pell(e)= 4, εφαρμόζοντας την Πρόταση X.97.*

Έστω d=pa-qb μια ακέραια απλή αποτομή, με $a^2=Nb^2$, N μη-τετράγωνο, και με προτεθείσα ευθεία b, έτσι ώστε Pell(d) = q^2- p^2N = - 4.
Σημειώνουμε ότι η ευθεία d είναι μια πέμπτη αποτομή (με βάση τους Ορισμούς X.84/85 των *Στοιχείων*).
Έστω f η ευθεία για την οποία ισχύει $d^2=fb$.
Επειδή $p^2N+q^2=2q^2+4=2(q^2+2)$, από την Πρόταση X.97 των *Στοιχείων* έχουμε ότι
d^2 = (pa-qb)(pa-qb) = $((p^2N+q^2)b-2pqa)b$ = $(2(q^2+2)b-2pqa)b$, συνεπώς
f = $2(q^2+2)b-2pqa$, και
Pell(f) = $(\text{Pell}(d))^2 = (p^2N+q^2)^2-4p^2q^2N = (p^2N-q^2)^2 = 16$.
Έστω e = f/2.
Τότε η e είναι μια ακέραια απλή πρώτη αποτομή, με with Pell(e)= 4.

[2] *Συντόμευση από Pell(d)= - 2, σε Pell(e)= 1, εφαρμόζοντας την Πρόταση X.97.*

Έστω d=pa-qb μια ακέραια απλή αποτομή, με $a^2=Nb^2$, N μη-τετράγωνο, και με προτεθείσα ευθεία b, έτσι ώστε Pell(d) = q^2- p^2N = - 2.
Ας σημειωθεί ότι η ευθεία d είναι μια πέμπτη αποτομή (με βάση τους Ορισμούς X/84.85. των *Στοιχείων*).
Έστω f η ευθεία για την οποία ισχύει $d^2=fb$.
Επειδή $p^2N+q^2=2q^2+2=2(q^2+1)$, από την Πρόταση X.97 των *Στοιχείων* έχουμε ότι
d^2 = (pa-qb)(pa-qb) = $((p^2N+q^2)b-2pqa)b$ = $(2(q^2+1)b-2pqa)b$, συνεπώς
f = $2(q^2+1)b-2pqa$, και
Pell(f) = $(\text{Pell}(d))^2=(p^2N+q^2)^2-4p^2q^2N=(p^2N-q^2)^2=4$.
Έστω e=f/2.
Τότε e είναι μια ακέραια απλή πρώτη αποτομή, με Pell(e)= 1.

[3] *Συντόμευση από Pell(d)=4 σε Pell(e)=1, εφαρμόζοντας την Πρόταση X.97 και την γενίκευσή της για διαφορετικές αποτομές.*

Έστω d=qb-pa μια ακέραια απλή αποτομή, με $a^2=Nb^2$ και με προτεθείσα ευθεία b έτσι ώστε Pell(d)=q^2-p^2N=4.
Ας σημειωθεί ότι η ευθεία d είναι μια πρώτη αποτομή (με βάση τους Ορισμούς X.84/85 των *Στοιχείων*).
Έστω g εκείνη η ευθεία ώστε $d^2=gb$.
Επειδή $p^2N+q^2=2q^2-4=2(q^2-2)$, από την Πρόταση X.97 των *Στοιχείων* έχουμε ότι
d^2 = (qb-pa)(qb-pa) = $((q^2+p^2N)b-2pqa)b$ = $(2(q^2-2)b-2pqa)b$, συνεπώς
g =$2(q^2-2)b-2pqa$, και
Pell(g)=$(\text{Pell}(d))^2=(q^2+p^2N)^2-4p^2q^2N=(p^2N-q^2)^2=16$.
Έστω h=g/2.
Τότε h είναι μια ακέραια απλή πρώτη αποτομή, με Pell(h)=4.
Εφαρμόζοντας την γενίκευση της Πρότασης X.97 για τις αποτομές d και h, έχουμε
dh = $(qb-pa)((q^2-2)b-pqa)=((q(q^2-2)+Np\cdot pq)b-(q\cdot pq+p(q^2-2))a)b=$
$=((q(q^2-2)+(q^2-4)q))b-(q^2p+p(q^2-2))a)b=(q(2q^2-6)b-p(2q^2-2)a)b=$
$=(4q(q^2-3)^2b-4p(q^2-1)a)b$.
Pell(dh/b)=$q^2(2q^2-6)^2-Np^2(2q^2-2)^2= q^2(2(q^2-3))^2-(q^2-4)(2(q^2-1))^2= \ldots=16$.

Έστω $e=q(q^2-3)^2b-p(q^2-1)a$.
Τότε η e είναι μια απλή πρώτη αποτομή, με Pell(e)=1.

Οι υπόλοιποι κανόνες *bhavana* αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

9.2.6. Οι κανόνες συντόμευσης του Brahmagupta και η Παλινδρομικότητα

Αν και οι κανόνες συντόμευσης του Brahmagupta προκύπτουν ουσιαστικά από την Πρόταση X.97, δεν είναι ωστόσο εύκολο να εξηγηθεί η μαθηματική αιτία που κάνει αυτούς τους κανόνες να λειτουργούν.
Οι κανόνες για τις δυάδες με αριθμούς Pell +4, ή -2, ή 2, ή -1 φαίνεται να βασίζονται στην *παλινδρομική* περιοδικότητα, καθώς η πρώτη ημιπερίοδος καθορίζει απόλυτα ολόκληρη την περίοδο, ακριβώς λόγω της παλινδρομικότητας.
Ο κανόνας από μια δυάδα με αριθμό Pell -4, σε μια δυάδα με αριθμό Pell 4 είναι ενδιαφέρων επειδή ένας αριθμός Pell -4 μπορεί να προκύψει νωρίς στην ανθυφαίρεση του $a^2=Nb^2$ (π.χ. όπως θα δούμε παρακάτω το τρίτο βήμα της ανθυφαίρεσης για N=61 έχει αριθμό Pell -4, ενώ το μήκος όλης της περιόδου είναι 11). Το επιχείρημα της περίπτωσης [1] στην 9.2.5, μαζί με τον κανόνα από αριθμό Pell 4 σε αριθμό Pell 1, δείχνει ότι όλη η τετραγωνική ανθυφαίρεση καθορίζεται από τη στιγμή που βρίσκουμε μια δυάδα με αριθμό Pell -4.
Συνεπώς, οι κανόνες συντόμευσης του Brahmagupta, για έναν μη-τετράγωνο αριθμό N, βασίζονται στην παλινδρομική περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης του a προς το b, με $a^2=Nb^2$.

9.3. *Η άγνωστη προέλευση της* cakravala

Η μεγαλύτερη γνωστή συνεισφορά στην μεθόδο *cakravala* οφείλεται στον Bhaskara II, ένα Ινδό μαθηματικό του 12^ου^ αιώνα μ.Χ. Όμως δεν είναι αυτός ο πατέρας της μεθόδου.

Ο Bhaskara II στα έργα του *Lilavati* και *Bija-ganita* (1150 μ.Χ.) αποδίδει την επίλυση της *varga-prakrti* σε προγενέστερους συγγραφείς (Selenius 1975, σελ. 168).
Πράγματι, η «αρχή της σύνθεσης» ή *bhavana* εντοπίζεται στο έργο *Brahmasphuta-siddhanta* (628 μ.Χ.) του Brahmagupta (Colebrooke 1817, σελ. 363). Όσο για τη μέθοδο *cakravala*, η πρώτη γνωστή εμφάνισή της είναι στο έργο του *Acarya Jayadeva*, ο οποίος, σύμφωνα με τον Selenius (Selenius 1975, σελ. 168):

> lived about 1000 or earlier, at least 100 years before *Bhaskara II*. His work is quoted and explained with illustrations in the Sundari [Shukla 1954, p.1-4], written in 1073 by Srimad Udayadivakara as a commentary on the *Laghu-Bhaskariya* of Bhaskara I (629).

Εντούτοις, ο Bhaskara II δεν αναφέρει ρητά τον Jayadeva (Dutta 2010, σελ. 156), ο οποίος ήταν ούτως ή άλλως ένας «κατά τα άλλα άγνωστος συγγραφέας», όπως υποδεικνύει ο Weil (Weil 1984, σελ. 22). Συνεπώς, μια τέτοια μνημειώδης μαθηματική ανακάλυψη, όπως είναι η μέθοδος *cakravala*, (αρκετά ισχυρή ώστε να επιλύει το γενικό πρόβλημα Pell), θεωρείται ακόμα αγνώστου πατρός:

> With this, one is still far short of the general solution; since Colebrooke it has been known that such a one is to be found in the work of Bhaskara (twelfth century; Col. pp.170-184; cf. Datta and Singh, 1oc.cit. pp. 161-172), but an
> almost identical presentation has now been found, attributed to an otherwise unknown author Jayadeva, in a commentary of the eleventh century (cf. K. S. Shukla, Ganita 5 (1954), pp. 1-20). Both authors describe the method as "the cyclic process" (cakravala, from cakra, a wheel). Its true *originator remains unknown*.
> (Weil 1984, σελ. 22)

Ο Dutta (Dutta 2010), συμφωνώντας με τον Weil ότι η προέλευση της *cakravala* δεν είναι γνωστή, γράφει επί του θέματος:

> The discovery [of cakravala] took place sometime during the 7th-11 th century... However, the true originator is not known. (σελ. 148)
>
> The *Bijaganita* of Bhäskara II contains - apart from basic results of algebra - a lucid exposition of the *kuttaka, bhavana* and the *cakravala,* and mentions several other indeterminate equations. Bhäskara II attributes the *cakravala* to ancient authors without specifying any name. At the end of his treatise, Bhäskara II makes a general acknowledgement of the prolific algebra works of Brahmagupta, Sridhara and Padmanabha as his chief sources. There is therefore a strong possibility that the lost treatises of Sridhara and/or Padmanabha too contain an account of the *cakravala* algorithm. The history of cakravala became more mysterious with the discovery (in 1954) of a work dated 1073 CE which quotes verses from a preceding algebraist Jayadeva describing the cakravala algorithm (along with the bhavana). Curiously, Jayadeva is not mentioned by Bhäskara. (σελ. 156)
>
> In 1954, K.S. Shukla discovered the text *Sundari* (1073 CE) of Udaydivakara, a commentary on the *Laghu-Bhaskariya* of Bhaskara and found that it contains quotations from a hitherto unknown mathematician called Jayadeva on the *bhavana* and the *cakravala.* He published the verses in [Shul]. (σελ. 159)

9.4. Μια απλή Πρόταση-κλειδί, που προκύπτει από την ανακατασκευασμένη απόδειξη του Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου, αποκαλύπτει την σχέση της απόδειξης με την **cakravala**

Πριν μελετήσουμε την μέθοδο *cakravala* θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε μια απλή Πρόταση που προκύπτει από την ανακατασκευασμένη ανθυφαιρετική απόδειξη του Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου (η οποία παρουσιάστηκε στην Ενότητα 4). Η Πρόταση αυτή θα αποτελέσει το κλειδί που θα αποκαλύψει τη σύνδεση μεταξύ την ανακατασκευασμένης απόδειξης του Θεαίτητου και της προσέγγισης του Bhaskara II.

Πρόταση. Έστω N ένας μη-τετράγωνος αριθμός, $a^2=Nb^2$, και γ_n, I_n, λ_n, m_n όπως στην Ενότητα 4. Τότε:
[1] $\mathbf{\lambda_n+m_n>m_1}$, άρα $\mathbf{(\lambda_n+m_n)^2>N}$
[2] εάν $(m_n+\lambda_n)^2-N < N-m_n^2$, τότε $\mathbf{I_n=1}$, και άρα $\mathbf{m_{n+1}=\lambda_{n+1}-m_n}$.

Απόδειξη. [1] Επειδή $m_1 \geq m_{n+1}$, έχουμε $m_n+m_1 \geq m_n+m_{n+1}=I_n\lambda_{n+1}\geq\lambda_{n+1}$
[χρησιμοποιώντας τη *συζυγία του Θεαίτητου* (Ενότητα 4) ή την ασθενέστερη δήλωση ότι $m_n+m_{n+1}=$ ένα πολλαπλάσιο του λ_{n+1}],
έχουμε $\lambda_n\lambda_{n+1}>\lambda_n\lambda_{n+1}-\lambda_2=(N-m_n^2)-(N-m_1^2)=m_1^2-m_n^2=(m_1-m_n)(m_1+m_n)\geq(m_1-m_n)\lambda_{n+1}$,

άρα $\lambda_n > m_1 - m_n$ και $\mathbf{\lambda_n + m_n > m_1}$.
Συνεπώς, $\mathbf{(\lambda_n+m_n)^2} > m_1^2 \mathbf{> N}$ [επειδή $m_1^2 < N < (m_1+1)^2$ εξ ορισμού των m_n].

[2]
Από την [1] και το γεγονός ότι $m_{n+1} \leq m_1$ προκύπτει $m_{n+1}+m_n \leq m_1+m_n < m_n+\lambda_n+m_n$.
Επίσης $(\lambda_n+m_n)+m_n < 2\lambda_{n+1}$.
[Προκύπτει από βασικό υπολογισμό με χρήση της $N-m_n^2=\lambda_n\lambda_{n+1}$:
Από την αριθμητική μορφή της Πρότασης ΙΙ.4 των *Στοιχείων*, προκύπτει εξ υποθέσεως ότι
$(m_n+\lambda_n)^2-N = m_n^2+ \lambda_n^2+2m_n\lambda_n-N<N- m_n^2$, άρα
$\lambda_n^2+2m_n\lambda_n =\lambda_n(\lambda_n+2m_n) <2(N-m_n^2)=2\lambda_n\lambda_{n+1}$, άρα
$\lambda_n+2m_n<2\lambda_{n+1}$, άρα $(\lambda_n+m_n)+m_n<2\lambda_{n+1}$.]
Συνεπώς $m_{n+1}+m_n<2\lambda_{n+1}$.
Από την *Θεαιτήτεια συζυγία* έχουμε $m_{n+1}+m_n=I_n\lambda_{n+1}$.
Προκύπτει τώρα ότι $\mathbf{I_n=1}$, και άρα $\mathbf{m_{n+1}=\lambda_{n+1}-m_n}$.

Πόρισμα 1. Εάν $(m_1+1)^2-N < N-m_1^2$,
τότε $I_1=1$, $\gamma_2=b-\gamma_1=b-(a-m_1b)=(m_1+1)b-a$ και $m_2=\lambda_2-m_1$.

Πόρισμα 2. (*χαρακτηρισμός του m_{n+1}*). Το m_{n+1} είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός m, τέτοιος ώστε $m \leq m_1$ με τον m να είναι της μορφής $-m_n+k\cdot\lambda_{n+1}$ για κάποιον φυσικό αριθμό k.

9.5. Το αρχικό βήμα της μεθόδου **cakravala**

Η μέθοδος *cakravala* για Ν μη-τετράγωνο έχει πάντα ως εκκίνηση μια δυάδα (q, 1) τέτοια ώστε το q^2 να είναι το πλησιέστερο τετράγωνο στο Ν άνωθεν ή κάτωθεν (Weil 1984, σσ. 23-24). Όπως θα δούμε στη συνέχεια, στην ουσία η *cakravala* ξεκινά με το πρώτο ή το δεύτερο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο της ανθυφαίρεσης του a προς b, με $a^2=Nb^2$.

Είναι πολύ σημαντικό να διασφαλιστεί ότι το πραγματικό αρχικό βήμα της μεθόδου *cakravala* για έναν μη-τετράγωνο αριθμό Ν αντιστοιχεί πάντα στο πρώτο υπόλοιπο της ανθυφαίρεσης του a προς b, με $a^2=Nb^2$.

9.5.1. Weil: το αρχικό βήμα της **cakravala** *είναι απαρέγκλιτα ανθυφαιρετικό*

> This calls for several observations. […] Secondly, in order to carry out the *cakravala* [for the non-square number N], one must have a starting point; *invariably* they [the Hindus] choose as such the triple [(q, $p_1=1$; λ_2)] for which [q^2] is the closest square to N, above or below.
> it is easy to see that [λ_2] is then < 2 √N.
> (Weil 1984, σελ. 23 – οι αγκύλες περιέχουν προσθήκες στο πρωτότυπο κείμενο)

9.5.2. Η δυάδα εκκίνησης της μεθόδου **cakravala**

Θέτουμε $a^2=Nb^2$ με Ν μη-τετράγωνο και δηλώνουμε με γ_n το n-οστό ανθυφαιρετικό υπόλοιπο της ανθυφαίρεσης του a προς το b.
Προκειμένου να επιλυθεί η εξίσωση Pell μέσω της μεθόδου *cakravala*, για

συγκεκριμένο μη-τετράγωνο N, επιλέγεται ως σημείο εκκίνησης το ζεύγος (q, 1) για το οποίο το q^2 είναι πλησιέστερα στο N άνωθεν ή κάτωθεν.
Αν q^2 είναι το κοντινότερο τετράγωνο στο N *κάτωθεν*, το ζεύγος εκκίνησης (q, 1) είναι σαφώς ανθυφαιρετικό καθώς $a\text{-}qb=\gamma_1$ (π.χ. N=67 με αρχικό ζεύγος (8, 1) το οποίο αντιστοιχεί στο πρώτο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο $a\text{-}8b=\gamma_1$).
Όμως στην περίπτωση που q^2 είναι το κοντινότερο τετράγωνο στο N *άνωθεν*, τότε η δυάδα (q, 1) που χρησιμοποιείται από τον Bhaskara II για την εκκίνηση της μεθόδου, εκ πρώτης όψεως φαίνεται να παραβιάζει την κλασσική ανθυφαιρετική διαδικασία[18].
Στο παράδειγμα για N=61, από τη στιγμή που το 61 είναι πιο κοντά στο 8^2 από ό,τι στο 7^2 (8^2-61=3<12=61-7^2), ο Bhaskara ως αρχικό ζεύγος για την cakravala επιλέγει το (**8**, 1) που έχει θετικό αριθμό Pell $8^2\text{-}61\cdot1^2=3$, ενώ ανθυφαιρετικά θα έπρεπε να επιλεγεί το ζεύγος (7, 1) με αριθμό Pell $7^2\text{-}61\cdot1^2= \text{-}12$ καθώς $a\text{-}\mathbf{7}b=\gamma_1$.
Είναι αξιοσημείωτο πως στην πραγματικότητα, η επιλογή αυτού του αρχικού ζεύγους (q, 1) στις περιπτώσεις που το πλησιέστερο τετράγωνο στον N βρίσκεται άνωθεν, δεν αποτελεί παραβίαση της κλασσικής ανθυφαίρεσης, αλλά απλώς χρήση μιας συντόμευσης που επιτρέπει την παράκαμψη του πρώτου ανθυφαιρετικού βήματος και την απευθείας μετάβαση στο επόμενο βήμα ($qb\text{-}a=\gamma_2$, δεύτερο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο). Συνεπώς, η αρχική δυάδα (q,1) του Bhaskara II είναι στην πραγματικότητα ανθυφαιρετική, σε κάθε περίπτωση.
Η διατύπωση και απόδειξη της συντόμευσης που χρησιμοποιείται από τους Ινδούς για το αρχικό βήμα της *cakravala* έγινε στο Πόρισμα 1 της Ενότητας 9.4 παραπάνω, χρησιμοποιώντας την γλώσσα της ανακατασκευασμένης απόδειξης του Θεωρήματος Περιοδικότητας του Θεαίτητου.

Συνοψίζοντας, στην Ινδική μέθοδο cakravala:
- Εάν ο N είναι πλησιέστερα στον τετράγωνο αριθμό *κάτωθεν,* σαν εκκίνηση της μεθόδου χρησιμοποιείται το πρώτο βήμα της ανθυφαίρεσης.
Στον Bhaskara II παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση του N=67 με (8, 1) την αρχική δυάδα, -3 τον αριθμό Pell και $a^2=67b^2$, $\gamma_1=8a\text{-}b$.
- Εάν ο N είναι πλησιέστερα στον τετράγωνο αριθμό *άνωθεν,* σαν εκκίνηση της μεθόδου χρησιμοποιείται το δεύτερο βήμα της ανθυφαίρεσης.
Στον Bhaskara II παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση του N=61, με (8, 1) την αρχική δυάδα, 3 τον αριθμό Pell και $a^2=61b^2$, $\gamma_1=7a\text{-}b$, $\gamma_2=8b\text{-}a$.
Σε κάθε περίπτωση η δυάδα εκκίνησης της μεθόδου, αντιστοιχεί σε ένα ανθυφαιρετικό ζεύγος.

9.6. Το τρίτο βήμα της μεθόδου **cakravala** *για N=61 στον Bhaskara II και η σχέση του με την ανακατασκευασμένη μέθοδο του Θεαίτητου*

Πριν εξετάσουμε το γενικό βήμα της μεθόδου *cakravala,* η μελέτη του τρίτου βήματος της μεθόδου από τον Bhaskara II για την περίπτωση του N=61 θα μας βοηθήσει πολύ στο να παρατηρήσουμε τη σύνδεση της Ινδικής μεθόδου με την ανακατασκευασμένη μέθοδο του Θεαίτητου.

[18] Υπενθυμίζεται πως το αρχικό πηλίκο I_0 της ανθυφαιρετικής διαδικασίας είναι πάντα το ακέραιο μέρος του √N, κάτι που σημαίνει πως πάντα $I_0^2 < N$.

9.6.1. Το τρίτο βήμα της μεθόδου **cakravala** *του Bhaskara II για N=61*

Σύμφωνα με τη μέθοδο *cakravala* στον Bhaskara II, για να μεταβούμε στο τρίτο βήμα (q_3, p_3) συνθέτουμε, μέσω της διαδικασίας *bhavana* του Brahmagupta, την δυάδα (8, 1) έχουσα αριθμό Pell $\lambda=8^2-61\cdot 1^2=3$, με την δυάδα $(\mathbf{m_3}/3, 1/3)$, δηλαδή
$(q_3, p_3)=(8,1)*(\mathbf{m_3}/3, 1/3)=((61+8\mathbf{m_3})/3, (\mathbf{m_3}+8)/3)$.
Το $\mathbf{m_3}$ θα προσδιοριστεί από την μέθοδο *kuttaka*.

Χρησιμοποιώντας την δυάδα (8, 1) και τον Pell 3 ως συντελεστές, σχηματίζουμε την βοηθητική Διοφαντική εξίσωση 3P=1M+8 για την εύρεση «της μικρότερης ρίζας».
Προκειμένου να βρεθεί τουλάχιστον μία ακέραια λύση, ο Bhaskara II χρησιμοποιεί την μέθοδο *kuttaka* (αλλιώς Bachet-Bezout (Bachet (1612)), που βασίζεται στον Ευκλείδειο αλγόριθμο Προτάσεις VII.1&2 των *Στοιχείων*, μια εφαρμογή που δεν εμφανίζεται ρητά στα Ελληνικά Μαθηματικά. Η μέθοδος *kuttaka* αναλύεται παρακάτω στην Ενότητα 9.7.2. Μια εποπτική λύση της βοηθητικής Διοφαντικής εξίσωσης, παραλείποντας την *kuttaka*, είναι η $M_0=1$, $P_0=3$.
Τότε κάθε ακέραια λύση της θα έχει τη μορφή:
M=3k+1,
[P=k+3],
για k=0, ±1, ±2,….
Το $\mathbf{m_3}$ είναι εκείνη η λύση m της M=3k+1 που κάνει τη σχέση $N\text{-}m^2$ να έχει την ελάχιστη τιμή, με m τέτοιο ώστε $N>m^2$ και m μέγιστο. Είναι σαφές ότι η ζητούμενη λύση είναι k=2, $\mathbf{m_3=7}$.
Βρίσκουμε $p_3=k+3=2+3=5$, και $q_3=39$. Τότε Pell(39,5)=-4 και έτσι ολοκληρώνεται το τρίτο βήμα της *cakravala*.

Στη συνέχεια ο Bhaskara II ακολουθεί τους παλιούς κανόνες συντόμευσης για την *bhavana* από τον Brahmagupta, περνώντας από την δυάδα με αριθμό Pel -4 σε μια δυάδα με αριθμό Pell -1, συνεχίζοντας με τετραγωνισμό και την εύρεση ρητής λύσης και ολοκληρώνοντας με ακόμα μία σύνθεση για την εύρεση του ακέραιου ζεύγους (q=1 766 319 049, p=226 153 980) με αριθμό Pell +1.

Από την *bhavana*/σύνθεση αυτού του ζεύγους με τον εαυτό του *ad infinitum*, παίρνουμε ένα άπειρο πλήθος ζευγών με αριθμό Pell 1.

9.6.2. Τα πρώτα τρία βήματα της ανακατασκευασμένης μεθόδου του Θεαίτητου (η οποία παρουσιάστηκε στην Ενότητα 4) για $a^2=61b^2$

Υπολογισμός του γ_1: $m_1=I_0=7$, $\gamma_1=a-7b=\varphi_1$
$\mathrm{Pell}(\gamma_1)= q^2-Np^2= -12= -\lambda_2$ καθώς $\lambda_2= (N- m_1^2)/\lambda_1= 12$

Υπολογισμός του φ_2 μέσω της σχέσης συζυγίας $\varphi_1(I_1b+\varphi_2)=b^2$ που προέκυψε από την αντίστοιχη ανθυφαιρετική σχέση.
Βρίσκουμε ότι $\varphi_1(a+7b)=a^2-7^2b^2=61b^2-49b^2=12b^2$, άρα
$I_1b+\varphi_2= (a+7b)/12= b+(a-5b)/12$.
Συνεπώς $\varphi_2 = (a-5b)/12$.
$\mathrm{Pell}(\varphi_2)= -36/12\cdot 12= -1/4= -\lambda_3/\lambda_2$.

Υπολογισμός του γ_2 μέσω του τύπου $\gamma_1\ \varphi_2 = \gamma_2 b$

γ_1 φ_2 = (a-7b) (a-5b)/12 = (a^2+35b^2-(12ab))/12=((96b-12a)/12)b=(8b-a)b.
Συνεπώς γ_2=8b-a.
Pell(γ_2)=λ_3=3.

Υπολογισμός του φ_3 μέσω του τύπου συζυγίας της ανθυφαίρεσης.
φ_2(I_2b+ φ_3)=b^2.
Βρίσκουμε ότι φ_2(a+5b)=(61b^2-25b^2)/12=3b^2, άρα
I_2b+ φ_3= (a+5b)/3=4b+(a-7b)/3.
Συνεπώς φ_3 = (a-7b)/3
Pell(φ_3)=-4/3

Υπολογισμός του γ_3 μέσω του τύπου γ_2 φ_3 = γ_3b:
γ_2 φ_3 = (8b-a) (a-7b)/3 = (15ab-(a^2+56b^2))/3=((15a-117b)/3)b=(5a-39b)b
Συνεπώς γ_3=5a-39b.
Pell(γ_3) =-4.

Η στενή σύνδεση των δύο προσεγγίσεων είναι προφανής.

9.7. Το γενικό βήμα της **cakravala** *στον Bhaskara II*

9.7.1. *Περιγραφή της διαδικασίας* cakravala *από τον Bhaskara II/Colebrooke*

Ο Colebrooke (Colebrooke 1817, σελ. 175) στο παρακάτω απόσπασμα παραθέτει τα λόγια του Bhaskara II σχετικά με την περιγραφή της μεθόδου *cakravala*:

> §83-86 Rule for the cyclic method:
> Making the “least” and “greatest” roots and additive, a dividend, additive and divisor,
> let the multiplier be thence found.
> The square of that multiplier being subtracted from the given coefficient, or this coefficient being subtracted from that square, (so as the remainder be small;)
> the remainder, divided by the original additive, is a new additive;
> which is reversed if the subtraction be [of the square] from the coefficient.
> The quotient corresponding to the multiplier [and found with it] will be the least root:
> whence the “greatest” root may be deduced.
> With these, the operation is repeated, setting aside the former roots and additive.
> This method mathematicians call that of *the circle* (Colebrooke 1817, σελ. 175)

9.7.2. Η γενική μέθοδος **cakravala** *με χρήση της* **kuttaka** *στον Bhaskara II και η σχέση της με την ανακατασκευασμένη μέθοδο του Θεαίτητου*

Ο «αλγόριθμος» για κάθε βήμα της μεθόδου cakravala ξεκινά από μια Ν-δυάδα (q, p), με αριθμό Pell q^2-Np^2, την απόλυτη τιμή του οποίου συμβολίζουμε με λ. Όπως έχουμε δει, η επιλογή της Ν-δυάδος του πρώτου βήματος δεν είναι τυχαία αλλά ανθυφαιρετική, καθώς αντιστοιχεί στο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο γ_1 ή γ_2 της ανθυφαίρεσης του a προς b, με a^2=Nb^2. Θα αποδείξουμε ότι η Ν-δυάδα κάθε επόμενου βήματος της *cakravala* είναι εκείνη που αντιστοιχεί στο επόμενο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο. Συνεπώς υποθέτουμε ότι q=q_n, p=p_n, όπου γ_n=$(-1)^n$(q_nb-p_na). Με τα δεδομένα αυτά, λ= λ_{n+1}, η απόλυτη τιμή του q_n^2-Np_n^2.

Η βασική ενέργεια της μεθόδου *cakravala* στον Bhaskara II είναι μια σύνθεση τύπου Brahmagupta της τρέχουσας δυάδος με την δυάδα $(m/\lambda_{n+1}, 1/\lambda_{n+1})$, ως ακολούθως:

$(q_n, p_n)*(m/\lambda_{n+1}, 1/\lambda_{n+1}) = ((mq_n + Np_n)/\lambda_{n+1}, (q_n+mp_n)/\lambda_{n+1})$,
όπου m είναι ένας φυσικός αριθμός *προς προσδιορισμό*.

Ο αριθμός m προσδιορίζεται με επίλυση της Διοφαντικής εξίσωσης $\lambda_{n+1}P = p_nM+q_n$, για τη «μικρότερη ρίζα».
Ο Bhaskara II εφαρμόζει τη μέθοδο *kuttaka*, με σκοπό να βρεθεί τουλάχιστον μία ακέραια λύση της παραπάνω εξίσωσης, έστω P_0, M_0, έτσι ώστε να έχουμε $\lambda_{n+1}P_0 = p_n\cdot M_0+q_n$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μέθοδος *kuttaka* βασίζεται στον Ευκλείδειο αλγόριθμο (Προτάσεις VII.1&2 των *Στοιχείων*) αποτελώντας μια ευφυή εφαρμογή που δεν εμφανίζεται ρητά στα Ελληνικά Μαθηματικά και η οποία αντιστοιχεί στην μέθοδο Bachet-Bezout.
Τότε $\lambda_{n+1}(P-P_0) = p_n(M-M_0)$ και εφαρμόζοντας την Πρόταση VII.19 των *Στοιχείων* Ευκλείδη παίρνουμε $(P-P_0)/(M-M_0) = p_n/\lambda_{n+1}$.
Καθώς, οι γενικευμένοι πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί p_n, q_n είναι σχετικώς πρώτοι, αμέσως προκύπτει ότι οι αριθμοί p_n, λ_{n+1} είναι σχετικώς πρώτοι, και συνεπώς προκύπτει, από την θεμελιώδη Πρόταση VII.22 των *Στοιχείων* Ευκλείδη, ότι:
$P-P_0 = kp_n$,
$M-M_0 = k\lambda_{n+1}$,
για k οποιονδήποτε ακέραιο.
Συνεπώς η γενική λύση της Διοφαντικής εξίσωσης είναι:
$P = P_0+kp_n$,
$M = M_0+k\lambda_{n+1}$
για $k=0, \pm1, \pm2,\dots$.

Έστω τώρα m η ***μεγαλύτερη*** εκ των λύσεων M της Διοφαντικής εξίσωσης ($\lambda_{n+1}p = p_nm+q_n$) που ικανοποιεί τη συνθήκη $N-m^2>0$ (για λόγους απλότητας αποφεύγουμε τις απόλυτες τιμές, που εφαρμόζεται από τον Bhaskara II ως «τοπική» συντόμευση, όπως επισημαίνει ο Weil[19]).
Αυτό σημαίνει πως ο αμέσως μεγαλύτερος φυσικός αριθμός εκ των λύσεων της M που ικανοποιεί την $\lambda_{n+1}P=p_nM+q_n$, δηλαδή ο αριθμός $m+\lambda_{n+1}$, δεν ικανοποιεί την $N-(m+\lambda_{n+1})^2>0$.

Ας θυμηθούμε τώρα όμως, πως από την Πρόταση που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 9.4 προκύπτει ότι για αριθμούς m_n, λ_n όπως ορίστηκαν κατά την ανακατασκευασμένη απόδειξη του Θεαίτητου στην Ενότητα 4, δεν είναι δυνατόν να ισχύει $(m_n+\lambda_n)^2>0$. Κατ' επέκτασιν, δεν είναι δυνατόν να ισχύει $(m_{n+1}+\lambda_{n+1})^2>0$.

Αυτό αποδεικνύει ότι ο **αριθμός *cakravala*** m αντιστοιχεί στον **ανθυφαιρετικό αριθμό** m_{n+1}, και συνεπώς η ζητούμενη N-δυάδα που παράγεται από την *cakravala* είναι ακριβώς η δυάδα (p_{n+1}, q_{n+1}), που αντιστοιχεί στο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο γ_{n+1}.

---

[19]«Thirdly, the Indian prescription for choosing $\mathbf{x}$ within its congruence class modulo m is not quite what we have indicated above, since the rule is to make $N - \mathbf{x^2}$ "small" (i.e., in actual practice, as small as possible), but, as the context shows, *in absolute value*; in other words,
one should substitute $\mathbf{x_1} = \mathbf{x} + |\boldsymbol{m}|$ for x if $x_1^2 - N$ happens to be less than $N - x^2$. It can be shown that this *has merely the effect of abbreviating the procedure somewhat* when that is the case.»
(Weil 1984, σελ. 24)

9.7.3. *Η* kuttaka *δεν είναι αναγκαία για την διαδικασία* cakravala

Ο Weil δείχνει ότι η μέθοδος *kuttaka* δεν αποτελεί απαραίτητο εργαλείο της μεθόδου *cakravala,* και η χρήση της μπορεί να αποφευχθεί.[20]

Σύμφωνα με τον Weil, η γνώση των κανόνων $\mathbf{m_{n+1}+m_n}$**=πολλαπλάσιο του** $\boldsymbol{\lambda_{n+1}}$ και $\mathbf{m_{n+1}\leq m_1<m_{n+1}+\lambda_{n+1}}$, κάνει την *kuttaka* μη αναγκαία:

> That being so, the *kuttaka* is of course *not needed* at the first step, since $q_0 = 1$; but it is also *not needed* in any further operation, since, if notations are as above, we have p' - q'x = - qm' [δηλαδή με δικό μας συμβολισμό $\lambda_n q_n=m_n q_{n-1}+Np_{n-1}$], so that at the next step one has to take x' = -x (mod m') [δηλαδή με δικό μας συμβολισμό $m_{n+1}+m_n$ = πολλαπλάσιο του λ_{n+1}]. Strangely enough, this does not seem to have been noticed by any of our Indian authors (nor even by their later commentators, down to the sixteenth century); they make no mention of it, and invariably refer to the *kuttaka* for the choice of x [δηλαδή με δικό μας συμβολισμό m], even though their abundant numerical evidence could easily have convinced them that *this was unnecessary*.
> (Weil 1984, σσ. 23-24, με τροποποιήσεις/παρεμβάσεις)

Οι κανόνες αυτοί χρησιμοποιούνται ούτως ή άλλως στο πλαίσιο εφαρμογής της ίδιας της *kuttaka* την οποία χρησιμοποιεί ο Bhaskara II ενσωματωμένη στην μέθοδο *cakravala* για την επίλυση της εξίσωσης Pell.

Παρακάτω παρατίθενται οι λεπτομέρειες της απλής απόδειξης του Weil για τη μη αναγκαιότητα της *kuttaka* στον προσδιορισμό του καίριου αριθμού m_{n+1}. Τόσο η μέθοδος *kuttaka* όσο και το επιχείρημα του Weil βασίζονται στους τύπους:
(1) $m_n+m_{n-1} = T_n\lambda_n$, ένα πολλαπλάσιο του λ_n, και
(2) $m_n\leq m_1<m_n+\lambda_n$,
οι οποίοι προέκυψαν στην Ενότητα 4 και την Ενότητα 9.4 αντίστοιχα.

Έστω N ένας μη-τετράγωνος αριθμός.
Όπως έχουμε δει, η μέθοδος *cakravala* ξεκινά απαρέγκλιτα με:

- $\lambda_1 = 1$,
- m_1 τέτοιο ώστε $m_1^2<N<(m_1+1)^2$, και
- $q_1 = m_1$, $p_1 =1$.

[Λαμβάνοντας υπόψιν τις παρατηρήσεις που έγιναν σε προηγούμενες παραγράφους, σχετικά με την φαινομενικά διαφορετική πρώτη επιλογή π.χ. για N=61]

Επαγωγικά υποθέτουμε πως για 1,2,…,n, οι λ_n, m_n, q_n p_n είναι φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:
(1) $m_n+m_{n-1} = T_n\lambda_n$, ένα πολλαπλάσιο του λ_n,
(2) $m_n\leq m_1<m_n+\lambda_n$,
(3) $\lambda_n q_n = m_n q_{n-1}+Np_{n-1}$ και $\lambda_n p_n = q_{n-1}+m_n p_{n-1}$,
(4) $\lambda_n\leq 2m_1$.

Ορισμός του $\boldsymbol{\lambda_{n+1}}$**.** λ_{n+1} είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού Pell $q_n^2-Np_n^2$ της δυάδος (q_n, p_n).

Ισχυρισμός 1. $N-m_n^2=\lambda_n\lambda_{n+1}$.

[20] Στην πραγματικότητα αυτό είχε δειχθεί νωρίτερα από τον Krishnaswamy Ayyangar (Krishnaswamy Ayyangar 1929-30).

[***Απόδειξη.*** $(q_{n-1}, p_{n-1})*(m_n/\lambda_n, 1/\lambda_n)=(q_n, p_n)$. Από την πολλαπλασιαστική ιδιότητα των αριθμών Pell έχουμε $\lambda_n(N-m_n^2)/\lambda_n^2 = \lambda_{n+1}$, συνεπώς $N-m_n^2 = \lambda_n\lambda_{n+1}$].

Ορισμός του $\mathbf{m_{n+1}}$**.** Ορίζουμε m_{n+1} να είναι ο *μοναδικός αριθμός* τέτοιος ώστε $m_{n+1}+m_n=T_{n+1}\lambda_{n+1}$, και $m_{n+1}\leq m_1<m_{n+1}+\lambda_{n+1}$.
[Με αυτόν τον ορισμό του m_{n+1}, η *kuttaka* αποφεύγεται, και σύμφωνα με την Πρόταση της 9.4 αυτός ο ορισμός συμπίπτει με την δυάδα q_{n+1}, p_{n+1} στην ανακατασκευή μας για την απόδειξη περιοδικότητας του Θεαίτητου (Ενότητα 4)]

Ορισμός των $\mathbf{q_{n+1}, p_{n+1}}$**.** Ορίζουμε τα q_{n+1}, p_{n+1} από την

$\lambda_{n+1}q_{n+1} = m_{n+1}q_n + Np_n$, και την

$\lambda_{n+1}p_{n+1} = \quad q_n + m_{n+1}p_n$.

[Είναι σαφές πως αυτός ο ορισμός, από τη μία συμπίπτει με την *bhavana* του Brahmagupta καθώς $(q_n, p_n)*(m_{n+1}/\lambda_{n+1}, 1/\lambda_{n+1}) = (q_{n+1}, p_{n+1})$, και από την άλλη με την ανακατασκευασμένη απόδειξη περιοδικότητας του Θεαίτητου (Ενότητα 4):

$\gamma_n\varphi_{n+1}=(q_nb-p_na)((a-m_{n+1}b)/\lambda_{n+1}) =$

$((q_n+m_{n+1}p_n)a-(m_{n+1}q_n+Np_n)b)/\lambda_{n+1})b = ((p_{n+1}a-q_{n+1}b)/\lambda_{n+1})b=\gamma_{n+1}b$.

Ισχυρισμός 2. Οι q_{n+1}, p_{n+1} είναι φυσικοί αριθμοί.

[***Απόδειξη.*** $\lambda_{n+1}p_{n+1} = q_n + m_{n+1}p_n$

$= (m_nq_{n-1}+Np_{n-1})/\lambda_n + m_{n+1}(q_{n-1}+m_np_{n-1})/\lambda_n$

$= (m_n+m_{n+1})q_{n-1}/\lambda_n + (N+m_{n+1}m_n)p_{n-1}/\lambda_n$

$= T_{n+1}\lambda_{n+1}\cdot q_{n-1}/\lambda_n + (N-m_n^2+m_n^2+ m_{n+1}m_n)p_{n-1}/\lambda_n$

$= T_{n+1}\lambda_{n+1}\cdot q_{n-1}/\lambda_n + ((\lambda_n\lambda_{n+1}+m_n(T_{n+1}\lambda_{n+1}))p_{n-1}/\lambda_n$

$= \lambda_{n+1}(T_{n+1}q_{n-1}/\lambda_n+(\lambda_n+m_nT_{n+1})p_{n-1}/\lambda_n)$.

Συνεπώς, $p_{n+1} = T_{n+1}q_{n-1}/\lambda_n + (\lambda_n+m_nT_{n+1})p_{n-1}/\lambda_n$ που είναι ένας φυσικός αριθμός.
Παρομοίως για τον q_{n+1}.]

Ισχυρισμός 3. $\lambda_2 \leq 2m_1$.

[***Απόδειξη.*** $N<(m_1+1)^2=m_1^2+2m_1+1$,

άρα $\lambda_2=N- m_1^2<2m_1+1$,

άρα $\lambda_2 \leq 2m_1$.]

Ισχυρισμός 4. $N-m_n^2 \leq 2\lambda_nm_1$.

[***Απόδειξη.*** $N-m_n^2< (m_1 +1)^2 - m_n^2 = m_1^2- m_n^2+2m_1+1$,

άρα

$N-m_n^2\leq (m_1 +1)^2 - m_n^2-1 = m_1^2- m_n^2+2m_1$.

Από την (2) $m_1<m_n+\lambda_n$, άρα $m_1- m_n<\lambda_n$, συνεπώς $m_1- m_n \leq \lambda_n-1$.

Επομένως, από τον Ισχυρισμό 3,

$N-m_n^2 \leq m_1^2- m_n^2+2m_1= (m_1- m_n).(m_1+ m_n) +2m_1 \leq$

$\leq (\lambda_n-1) 2m_1+2m_1=2\lambda_nm_1$].

Ισχυρισμός 5. $\lambda_{n+1} \leq 2m_1$.

[***Απόδειξη.*** Από τους Ισχυρισμούς 1 και 4

$\lambda_n\lambda_{n+1} = N-m_n^2 \leq 2\lambda_nm_1$,

άρα $\lambda_n\lambda_{n+1} \leq 2\lambda_{n+1}m_1$, άρα $\lambda_{n+1} \leq 2m_1$].

9.8. Σχετικά με την κυκλική ερμηνεία του όρου **cakravala**

Η *cakravala* των Jayadeva και Bhaskara II είναι μια γενική μέθοδος επίλυσης της *varga-prakrti*, του προβλήματος Pell. Γιατί άραγε καλείται με αυτό το όνομα, έναν όρο που υπονοεί *κυκλικότητα, περιοδικότητα*; Ούτε ο Jayadeva ούτε ο Bhaskara II αιτιολογούν αυτή την ορολογία. Σύγχρονοι μελετητές έχουν προτείνει πως η μέθοδος καλείται *cakravala* εξαιτίας του *επαναλαμβανόμενου* χαρακτήρα των βημάτων της:

> *Bhāskara II* provided *chakravāla* or *cyclic* process for the solution. *Chakravāla* means '*circle*'. It is observed that the same set of operations being applied again and again in a *continuous round* so the method is called *chakravāla*.
> (Datta and Singh 1938, σελ. 162).

Όμως αυτή η δικαιολόγηση δεν μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητική. Για παράδειγμα, μια άπειρη ανθυφαίρεση ναι μεν έχει ένα επαναλαμβανόμενο χαρακτήρα, όμως κυκλική θα μπορούσε να ονομαστεί μόνο εάν είναι περιοδική, μια συνθήκη πολύ ισχυρότερη από την απειρία. Με τον ίδιο τρόπο, η προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου, έστω από εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα των οποίων ο αριθμός των κορυφών διπλασιάζεται σε κάθε στάδιο, είναι ξεκάθαρα μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία επ' άπειρον, που ποτέ όμως δεν θα χαρακτηριζόταν κυκλική.
Ο Weil προτείνει πως οι συντομεύσεις που χρησιμοποιήθηκαν από τους Ινδούς όπως αυτές που σχετίζονται την μέθοδο *bhavana*/σύνθεση του Brahmagupta (ή, θα μπορούσαμε να προσθέσουμε, εκείνοι που ελαχιστοποιούν την απόλυτη τιμή της απόστασης του m^2 από το Ν), αν και είναι χωρίς αμφιβολία ευφυείς, κρύβουν τον περιοδικό χαρακτήρα της μεθόδου και πως η περιοδικότητα στην οποία αναφέρεται η *cakravala* είναι η ανθυφαιρετική περιοδικότητα (δηλαδή η περιοδικότητα συνεχούς κλάσματος):

> Finally, we are told to iterate the process only till we find an "additive"
> m with one of the values ± 1, ± 2, ± 4, and then to make use of the *bhavana*,
> i.e., of *Brahmagupta*'s procedure for that case.
> Actually this is no more than a shortcut,
> since it can be shown that the *cakravala*, applied in a straightforward manner,
> would inevitably lead to a triple ***(p, q; 1)*** as desired;
> while this shortcut is quite effective from the point of view of the numerical solution,
> it destroys the *"cyclic"* character of the method, which otherwise would appear from the fact that the "additives" ***m**, **m', m'',*** . . . would repeat themselves *periodically*,
> corresponding to the *periodicity* of the continued fraction of √N**.**
> **(**Weil 1984, σ. 24)

9.9. Η μέθοδος **cakravala** *φαίνεται να έχει ομοιότητες με την ανακατασκευασμένη μέθοδο συζυγίας του Θεαίτητου*

Ο Weil πέτυχε να παρουσιάσει την μέθοδο *cakravala* σε καθαρή μορφή, απογυμνωμένη από την μαθηματικά μη αναγκαία *kuttaka* (9.7.3), και ελεύθερη από ευφυείς συντομεύσεις (που είναι στην πραγματικότητα συνέπειες της ανακατασκευασμένης μεθόδου συζυγίας του Θεαίτητου) οι οποίες ωστόσο αποκρύπτουν την περιοδική φύση της *cakravala*.
Η μέθοδος *cakravala* στην καθαρή της μορφή παρουσιάζει στενές ομοιότητες με την ανακατασκευασμένη μέθοδο συζυγίας του Θεαίτητου που παρουσιάστηκε στην

Ενότητα 4. Πράγματι, για έναν μη-τετράγωνο αριθμό N, η διαδικασία *cakravala*:

(α) πάντα ξεκινά με μια αριθμητικοποιημένη εκδοχή ($q_1=m_1$, $p_1=1$), [ή ($q_2=m_1+1$, $p_2=1$) εάν ο N είναι πλησιέστερα στο $(m_1+1)^2$], του αρχικού ανθυφαιρετικού υπολοίπου $\gamma_1=a-m_1b$ [ή $\gamma_2=(m_1+1)b-a$, αντίστοιχα], της ανθυφαίρεσης του a προς b, για $a^2=Nb^2$ (9.5),

(β) προχωρά επαγωγικά από την δεδομένη δυάδα (q_n, p_n), της οποίας ο αριθμός Pell $q_n^2-Np_n^2$ έχει απόλυτη τιμή ίση με λ_{n+1}, στην επόμενη δυάδα (q_{n+1}, p_{n+1}), με μια σύνθεση τύπου Brahmagupta της δεδομένης δυάδος με την δυάδα (m_{n+1}/λ_{n+1}, $1/\lambda_{n+1}$) [$(q_n, p_n)*(m_{n+1}/\lambda_{n+1}, 1/\lambda_{n+1}) = (q_{n+1}, p_{n+1})$], όπου m_{n+1} είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που ικανοποιεί τους κανόνες m_n+m_{n+1}=πολλαπλάσιο του λ_{n+1} και $m_{n+1} \leq m_1$.
Αυτή η διαδικασία παρουσιάζει ομοιότητες με την αριθμητικοποιημένη εκδοχή του γεωμετρικού κανόνα $\gamma_n\varphi_{n+1}=\gamma_{n+1}b$, δηλαδή την
$(-1)^n(q_nb-p_na)\varphi_{n+1} = (-1)^{n+1}(q_{n+1}b-p_{n+1}a)b$,
όπου το φ_{n+1} καθορίστηκε από τη σχέση συζυγίας $\varphi_n(I_nb+\varphi_{n+1})=b^2$, η οποία προέκυψε από μετατροπή της ανθυφαιρετικής σχέσης $\gamma_{n-1}=I_n\gamma_n+\gamma_{n+1}$. Δείχθηκε λοιπόν μέσω συζυγίας πως το φ_{n+1} έχει τη μορφή $\varphi_{n+1}=(a-m_{n+1}b)/\lambda_{n+1}$, στην οποία το m_{n+1} καθορίστηκε από τον κανόνα $m_n+m_{n+1}=I_n\lambda_{n+1}$, σύμφωνα με τη μέθοδο συζυγίας του Θεαίτητου, όπως ανακατασκευάστηκε στην Ενότητα 4 (πρβλ. 9.6, 9.7), και

(γ) επιστρατεύει τον όρο «*cakravala*» (δηλαδή «*κυκλική διαδικασία*»), που ολοφάνερα υποδεικνύει περιοδικότητα (και όχι απλά επανάληψη). Η χρήση του όρου αυτού αποκτά νόημα μόνο σαν αναφορά στην περιοδικότητα της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης του a προς b, για $a^2=Nb^2$, και μη-τετράγωνο αριθμό N (9.8).

Βιβλιογραφία

[1] Acerbi F (2000) Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction?. Archives for History of Exact Sciences 55: 57-76

[2] AVGI (2000) A mathematician throws new light on Plato-Professor Stelios Negrepontis reads Plato anew, 30 July, 6 and 13 August 2000

[3] Αναπολιτάνος Δ (1985) Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, 5η έκδοση (2005). ΝΕΦΕΛΗ, Αθήνα

[4] Bachet de Méziriac CG (1612) Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres, avec leur demonstration, 2nd ed (1624). Pierre Rigaud, Lyon

[5] Bassiakou A (2004) Plato's Statesman and the Palindromic Periodicity of the Anthyphairesis of Quadratic Irrationals. MSc Thesis, University of Athens [στα Ελληνικά]

[6] Bhanu Murthy IS (1992) A modern introduction to Ancient Indian Mathematics. Wiley Eastern, New Delhi

[7] Bhattacharyya RK (2009) Brahmagupta: The Ancient Indian Mathematician In: Yadav BS, Mohan M (eds) Ancient Indian Leaps into Mathematics. Birkhäuser, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4695-0_12

[8] Bombelli R (1572) L'Algebra, Opera di Rafael Bombelli da Bologna, divisa in tre libri. Giovanni Rossi, Bologna

[9] Brokou M (2014) Pell's equation in Greek and Hindu Mathematics. MSc Thesis, University of Athens [στα Ελληνικά]

[10] Burnyeat MF (1978) The Philosophical Sense in Theaetetus' Mathematics. Isis 69:489-513

[11] Burnyeat MF (1990) The Theaetetus of Plato; with a translation of Plato's Theaetetus by M.J. Levett, revised by M. Burnyeat. Hackett Publishing Company, Indianapolis

[12] Colebrooke, HT translated (1817), Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara, John Murray, Albemarle Street, London

[13] Datta B, Singh AN (1938) History of Hindu Mathematics, A Source Book, Part II, Algebra. Motilal Banarsidass, Lahore

[14] Dutta AK (2010) Kuṭṭaka, Bhāvanā and Cakravāla In: Seshadri CS (ed) Studies in the History of Indian Mathematics. Culture and History of Mathematics, vol 5. Hindustan Book Agency (India), New Delhi, pp 145-199

[15] Emch GG, Srinivas MD, Sridharan R (eds) (2005) Contributions to the History of Indian Mathematics. Culture and History of Mathematics, vol 3. Hindustan Book Agency (India), New Delhi

[16] Euler L (1767) De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanæ 11:28-66

[17] Fermat P de (1679) Varia Opera Mathematica D.Petri de Fermat Senatoris Tolosani. Apud Joannem Pech, juxta Collegium PP. Societatis Jesu, Tolosae

[18] Fowler D (1987) The Mathematics of Plato’s Academy, a new reconstruction, 2nd edn (1999). Clarendon Press, Oxford

[19] Fowler D (1994) Could the Greeks Have Used Mathematical Induction? Did They Use It?. Physis 31:253‑265

[20] Freudenthal H (1953) Zur Geschichte der Vollstandingen Induction. Archives Internationals d’ Histoire des Sciences 6:17-37

[21] Hankel H (1874) Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Teubner, Leipzig

[22] Hardy GH, Wright EM (1938) Introduction to the Theory of Numbers. Clarendon Press, Oxford

[23] Heath TL (1908) The Thirteen Books of Euclid’s Elements, Three volumes, 2nd edn (1926). Cambridge University Press, Cambridge

[24] Heiberg IL, Stamatis ES (eds) (1977) Euclidis elementa Vol. V Pars 2: Scholia in libros VI-XIII cum appendicibus, 2nd edn. Vieweg+Teubner Verlag [in German]

[25] Iamblichus. In Nichomachi arithmeticam introductionem liber. Pistelli H (ed) (1894). Teubner BG, Leipzig

[26] Kahane JP (1985) La Théorie de Théodore des corps quadratiques réels. L’Enseignement Mathématique 31:85-92

[27] Knorr WR (1975) The Evolution of Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry. Reidel, Dordrecht

[28] Knorr WR (1983) “La Croix des Mathématiciens”: The Euclidean theory of irrational lines. Bulletin of the American Mathematical Society 9:41-69

[29] Krishnaswamy Ayyangar AA (1929-30) New Light on Bhaskara's Chakravala or Cyclic Method of solving Indeterminate Equations of the Second Degree in two Variables. J. Indian Math. Soc.18:225-248

[30] Κλεφτάκη Β (2004) Ανάλυση του 10ου Βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη και τεκμηρίωση της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων. Διπλωματική Εργασία Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

[31] Lagrange JL (1769a) Solution d’un problème d’arithmétique, Miscellanea Taurinensia, vol 4. Reprinted in : Serret JA (ed) (1867) Oeuvres de Lagrange, vol 1. Gauthier-Villars, Paris, pp 671-731

[32] Lagrange JL (1769b) Sur la solution des problèmes indeterminés du second degré, Mem. Acad. Roy. Berlin 23. Reprinted in: Serret JA (ed) (1869) Oeuvres de Lagrange, vol 2. Gauthier-Villars, Paris, pp 377-535

[33] Lagrange JL (1770) Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques. Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 14:581-652

[34] Λαμπρινίδης Δ (2015) Η ανθυφαιρετική φύση των μαθημάτων στον Πλάτωνα. Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

[35] Morrow GR (1970) Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, Translated, Introduction, Notes. Princeton University Press, Princeton

[36] Mueller I (1981) Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's "Elements". MIT Press, Cambridge, Massachusetts

[37] Negrepontis S (1999) Plato's dialectic under the anthyphairetic scrutiny. In Lectures, academic year 1996-97, pp 15-58, edited by Syros V, Kouris A, Kalokairinou E. Philosophy Group of the University of Cyprus, Nicosia

[38] Negrepontis S (Notes by Kleftaki V) (2003) A Reconstruction of the Proof of the Palindromic Periodicity of the Anthyphairesis of Commensurable in Power Only Lines, Employing Only Tools from Book X. of Euclid's Elements. Manuscript (22 pages)

[39] Negrepontis S (2005) The Anthyphairetic Nature of the Platonic Principles of Infinite and Finite. In: Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, 28-30 January 2005, Palermo, Italy, pp 3-27

[40] Negrepontis S (2012) Plato's theory of knowledge of Forms by Division and Collection in the Sophistes is a philosophic analogue of periodic anthyphairesis (and modern continued fractions), arXiv:1207.2950, 12 Jul 2012

[41] Negrepontis S (2018) The Anthyphairetic Revolutions of the Platonic Ideas In: Sialaros M (ed) Revolutions and Continuity in Greek Mathematics. Science, Technology, and Medicine in Ancient Cultures, vol 8. Walter De Gruyter, Berlin/Boston, pp 335-381

[42] Negrepontis S (2019) Plato on Geometry and the geometers. In: Dani SG, Papadopoulos A (eds) Geometry in History. Springer Nature, Cham, Switzerland, pp 1-88

[43] Negrepontis S (TA) From Musical Intervals to Hapseis and Logoi: the Periodic Anthyphairetic Nature of the One of the Second Hypothesis in Plato's Parmenides and Consequences (Indivisible Line, TMA, Zeno Anthyphairetic). In: Hascher X, Papadopoulos A (eds) Proceedings of the Conference Mathématiques et musique: des Grecs à Euler, Strasbourg, 10-11 September 2015. Hermann, Paris, to appear (manuscript 179 pages)

[44] Negrepontis S, Farmaki V (2019) The History of Ancient Greek Mathematics, vol 1. Ekkremes, Athens [στα Ελληνικά]

[45] Negrepontis S, Farmaki V (2021) The Paradoxical Nature of Mathematics. In: Papadopoulos A (ed) Topology and Geometry: A Collection of Papers Dedicated to Vladimir G. Turaev. European Mathematical Society Publishing House, Berlin

[46] Negrepontis S, Farmaki V, Brokou M (2021 – υπό έκδοση) The Pell equation in the Pythagoreans, Theaetetus and Hindu Mathematics In: Papadopoulos A (ed) Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice. Springer Nature, Cham, Switzerland

[47] Negrepontis S, Farmaki V, Brokou M (2022 - υπό έκδοση) The Central Role of Incommensurability in Pre-Euclidean Greek Mathematics and Philosophy. Ganita Bharati

[48] Negrepontis S, Kalisperi D (2021) The Mystery of Plato's Receptacle in the Timaeus Resolved. In: Sriraman B (ed) Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice. Springer Nature, Cham, Switzerland, pp 1-75

[49] Plato. Platonis Opera. Burnet J (ed) (1900-1907), Oxford University Press

[50] Plato. Theaetetus, Sophistes, Statesman, In: Plato in Twelve Volumes, vol 12 (trans: Fowler HN) (1921). Cambridge, MA, Harvard University Press; London, William Heinemann Ltd.

[51] Plato. Parmenides, Phaedrus, Philebus. In: Plato in Twelve Volumes, vol 9 (trans: Fowler HN) (1925). Cambridge, MA, Harvard University Press; London, William Heinemann Ltd.

[52] Plato. Nomoi. In: Plato in Twelve Volumes, vols 10, 11 (trans: Bury RG) (1967 & 1968). Cambridge, MA, Harvard University Press; London, William Heinemann Ltd.

[53] Plato. Politeia. In: Plato in Twelve Volumes, vols 5, 6 (trans: Shorey P) (1969). Cambridge, MA, Harvard University Press; London, William Heinemann Ltd.

[54] Procli Diadochi. In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii. Friedlein G (ed) (1873), Teubner BG, Leipzig

[55] Procli Diadochi. In Platonis rem publicam commentarii. In: Kroll W (ed) (1899–1901) Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, 2 vols. Teubner BG, Leipzig

[56] Raghavan S (1997) Cakravala method. In: Selin H (ed) Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures. Springer, Berlin-New York, pp 1007-1010

[57] Selenius CO (1975) Rationale of the Chakravāla Process of Jayadeva and Bhāskara II. Historia Mathematica 2(2):167-184

[58] Shukla KS (1954) Acarya Jayadeva, the mathematician. Ganita 5:1-20

[59] Singh P (1983) Varga-prakṛti – the cakravāla method of its solution and the regular continued fractions. Indian Journal of History of Science 19(1):1-17

[60] Srinivasiengar CN (1988) The History of Ancient Indian Mathematics. The World Press Private Ltd., Calcutta

[61] Taisbak CM (1982) Coloured Quadrangles. A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements. Museum Tusculanum Press, Copenhagen

[62] Tannery P (1882) Sur la mesure du cercle d'Archimède. Mém. Soc. Sci. Phys. Nat. Bordeaux 4:313-337

[63] Tarrant H (1985) Scepticism Or Platonism?: The Philosophy of the Fourth Academy. Cambridge University Press, Cambridge

[64] Theon Smyrnaeus. Expositio rerum ad legendum Platonem utilium. Hiller E (ed) (1878). Teubner BG, Leipzig

[65] Τασσόπουλος Γ (2016) Η σχέση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με την τελικά περιοδική ανθυφαίρεση στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

[66] Unguru S (1991) Greek Mathematics and Mathematical Induction. Physis 28:273-289

[67] van der Waerden BL (1950) Ontwakende Wetenschap. Noordhoff, Groningen. English edition: van der Waerden BL (1954) Science Awakening (trans: Dresden A). Noordhoff, Groningen

[68] van der Waerden BL (1976) Уравнение Пелля в математике греков и индийцев. Uspeki Math. Nauk 31(5):57-70. English edition: van der Waerden BL (1976) Pell's Equation in Greek and Hindu Mathematics. Russian Math Surveys 31:210-225

[69] van der Waerden BL (1983) Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Springer, Berlin-Heidelberg

[70] Wedberg A (1955) Plato's Philosophy of Mathematics. Almqvist & Wiksell, Stockholm

[71] Weil A (1984) Number Theory, An Approach Through History from Hammurapi to Legendre. Birkhäuser, Boston

[72] Ευκλείδη «Στοιχεία», Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό (Τόμοι I-II-III). Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.). Αθήνα 2001

[73] **TLG** Thesaurus Linguae Graecae

[74] **PERSEUS DIGITAL LIBRARY.** Crane GR (editor-in-chief). Tufts University. http://www.perseus.tufts.edu/hopper/

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A. Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT)

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) 26,11-18

26,11 περ̣[ιλα]βεῖ̣[ν], ὥσ[τε ἑ-]
26,12 νὶ [ὀνό]μα[τ]ι ὑποτ̣ά-
26,13 ξα[ι. ἦλ]θ̣[ον] ο̣ὖ̣ν ἐπ̣ὶ̣
26,14 τ̣ὸ[ν ἀριθμ]ὸν διὰ τὸ
26,15 [.]κ[......]ο̣ν τῶι
26,16 π̣ά̣ν̣τ̣α̣[ς] τοὺς ἀρι-
26,17 [θμ]ο[ὺ]ς σ̣υ̣μ̣μ[έτ]ρους
26,18 [εἶ]ν̣α̣[ι] πρ̣[ὸς] ἀ̣λλή[λους]

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) 32,1-4

32,1 ὥσπερ δὲ οἱ περὶ Θεαί-
32,2 τητ̣ο̣ν μετέβησαν ἐ-
32,3 πὶ τοὺς ἀριθμοὺς ὡς
32,4 σαφεστέρους, οὕτως

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) 36,45-37,12

36,45 μεις. Ἐπεὶ αἱ γραμ-
36,46 μαὶ ἐπιδέχ̣ο̣ν̣ται
36,47 τὸ ἀόριστον, εἴ τις αὐ-
36,48 τὰς ἢ αὔξοι ἢ διαιροῖ,
37,1 ὁρίζονται δ' ὑπὸ τῶ̣ν
37,2 ἀριθμῶν, μετέ̣β[η-]
37,3 σαν ἐπ' αὐτούς. ὑπο̣-
37,4 γράφει δέ, ὅτι ἐπε̣ὶ τὸ
37,5 ἄπειρον ἀπερίλη-
37,6 πτόν ἐστ̣ι̣ν, καὶ ἀ[όρι-]
37,7 στ[ος] ἐ̣ν τῶ̣ι τοιούτωι
37,8 ἡ διάνο[ι]α, δεῖ καθ' ὅ-
37,9 σον̣ ἐνδ[έ]χεται κα-
37,10 θολ̣ικῶ[ι] τινι περι-
37,11 λ̣α̣μ̣βάνειν καὶ ὁ-
37,11 [ρίζ]ειν α[ὐ]τ̣ό, ὡς ἀ-

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) 37,29

37,29 π[ερι]λ̣α̣[β]εῖν πάσας.

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) 37,39-46

37,39 πομε[ν]. Ὁ ἀριθμ̣ὸς
37,40 ἄπειρ̣ό̣ς̣ ἐστιν κατὰ
37,41 τὸ αὔξεσθαι· οὐ δ̣ύ̣να-
37,42 ται οὖν τις τὸ ἐπ' ἄ̣πει-
37,43 ρον προϊὸν περιλα-
37,44 βεῖν. πῶς οὖν ε[ἶ]πεν̣

37,45 τὸν ἀριθμὸν πάν-
37,46 τα; τοῦτο γὰρ ἤδη πε-

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) **41,40-42,18**

41,40 [ὡς τ]οίνυν τῶν τε-
41,41 τρ̣[αγώ]νων σχημά-
41,42 τ̣ων̣ ἃ μὲν ἦν σύμ-
41,43 μετ̣[ρ]α τῆι ποδιείαι
41,44 δυνάμει καὶ μήκει
41,45 καὶ [πλ]άτει, καὶ ταῦτα
41,46 μή[κη] ὠ̣νόμασαν,
41,47 ἃ δὲ πλάτει μὲν οὐ-
41,48 κέτι δ̣ὲ κ̣α̣ὶ̣ [τ]ῆ̣ πλευ-
41,49 ρᾶι, καὶ̣ ταῦ[τα] δυνά-
41,50 μεις [ἐ]κάλεσαν τῶι
41,51 κοινῶ̣ι̣ προσχρησά-
42,1 μενοι ὀνόματι, οὕτως
42,2 καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν
42,3 ἦλθον ἐπὶ τὰ κυβ̣ι̣κ̣ὰ
42,4 σχήματα καὶ ἐτίθε-
42,5 σαν κύβον, οὗ αἱ τρεῖς
42,6 πλευραὶ ἑκάστη πο-
42,7 δός, καὶ γενόμεναι ἐ-
42,8 π' ἀλλήλας ποιοῦσι ἕνα̣
42,9 στερεὸν πόδα. καὶ προ̣-
42,10 αιροῦντες κύβον δύο
42,11 ποδῶν καὶ ἄλλον τρι-
42,12 ῶν εἶτα τεσσάρων εὕ-
42,13 ρισκον αὐτὸ μὲν τὸ
42,14 στερεὸν πρὸς τὸ στερε-
42,15 ὸν σύμμετρον· ἔχει
42,16 γὰρ λόγον, ὃν ἀριθμὸς
42,17 πρὸς ἀριθμόν· τὰς δὲ
42,18 πλευρὰς ἀσυμμέτρο[υς,]

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) **42,30-33**

42,30 μετέβησαν οὖν καὶ ἐ-
42,31 πὶ τούτων ἐπὶ τοὺς ἀ-
42,32 ριθμούς, ἵνα περιορί-
42,33 σωσι καθολικῶι τινι,

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) **44,50-45,3**

44,50 ον. πρῶ̣τον μὲν οὖν
44,51 ἀπὸ τῶν ἀσαφεσ̣τ̣έ-
44,52 ρων̣ ἐ̣π̣ὶ̣ τὰ σαφέσ̣τε-
44,53 ρα δεῖ̣ μ̣εταβαίνειν
45,1 ὡς ἀπὸ τῶν μεγεθῶν
45,2 μετέβησαν ἐπὶ τοὺς
45,3 ἀριθμούς· δ̣ε[ύτ]ερον

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) **45,48**

45,48 πε[ρ]ιλαβόντες τὰ

Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum (ACIPT) 46,39

46,39 δει περιέλαβες, οὔ-

Β. Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη

Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη, Σχόλιο V.22

Τοῦτό φησιν, ἵνα περὶ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν διαλάβῃ· ὁ πρῶτος γὰρ τοῦ λόγου ὁρισμὸς περὶ τῶν συμμέτρων διελάμβανεν· ἐπεὶ δὲ εὑρίσκονται καὶ ἀσύμμετρα μεγέθη, καθότι τὸ μέγεθος ἐπ' ἄπειρόν ἐστι διαιρετόν, ὡς ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ ἀσύμμετρός ἐστι, φησίν, ὅτι καὶ ταῦτα τὰ ἀσύμμετρα λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, εἰ καὶ ἄρρητον, διότι αἱ δυνάμεις αὐτῶν λόγον ἔχουσι ῥητόν. οὗτος δὲ ὁ ὁρισμὸς συλληπτικός ἐστι καὶ τῶν συμμέτρων καὶ τῶν ἀσυμμέτρων.

Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη, Σχόλιο X.2

Τὰ μὲν μαθήματα φανταστικῶς νοοῦμεν, τοὺς δὲ ἀριθμοὺς δοξαστικῶς· διὸ καὶ τὰ μὲν εἰς ἄπειρον διαιρεῖται, οἱ δὲ μεριζόμενοι λήγουσιν εἰς πέρας ὡρισμένον τὴν μονάδα· πεπέρασται γὰρ μᾶλλον ἡ δόξα καί ἐστι πρὸς τῷ ἑνί, ἡ δὲ φαντασία πλῆθος ἄπειρον ἔχει· διὸ τὰ φανταστὰ ἄπειρα. καὶ τὰ μεγέθη οὖν ὡς φανταστὰ ἄπειρα καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν. Εἰ πάντα τὰ μεγέθη τὰ πεπερασμένα δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν (τοῦτο δὲ ἦν τὸ λόγον ἔχειν, ὡς ἐν τῷ πέμπτῳ μεμαθήκαμεν), τίς μηχανὴ τὴν τῶν ἀλόγων ἐπεισφέρειν διαφοράν; ἢ ὅτι τὸ μέτρον ἐν μὲν τοῖς ἀριθμοῖς ἡ φύσις ὑπέστησεν, θέσει δὲ ἐν τοῖς μεγέθεσι διὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον τομήν; πρὸς γὰρ πῆχυν ἢ σπιθαμὴν ἤ τι τοιοῦτον γνώριμον μέτρον τὸ ῥητὸν καὶ τὸ ἄρρητον γνωρίζομεν. καὶ μὴν τὸ λόγον ἔχειν ἄλλως μὲν ἐπὶ τῶν μεγεθῶν λέγεται τῶν πεπερασμένων καὶ ὁμογενῶν, ἄλλως ἐπὶ τῶν συμμέτρων, ἄλλως ἐπὶ τῶν ῥητῶν προσαγορευομένων. ὅπου μὲν γὰρ ὁ λόγος μόνον καὶ ἡ σχέσις θεωρεῖται τῶν πεπερασμένων μεγεθῶν κατὰ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον, ὅπου δὲ κατά τινα τῶν ἐν ἀριθμοῖς σχέσεων· διὸ καὶ τὰ σύμμετρα μεγέθη λόγον ἔχειν λέγεται, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ὅπου δὲ πρὸς τὸ ἐγκείμενον μέτρον τὴν τῶν ῥητῶν ἡμῖν πρὸς τὰ ἄλογα διαφορὰν παρέσχετο.

Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη, Σχόλιο X.39

Αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, τουτέστι τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἐν λόγῳ εἰσίν, οὐ μόνον ὡς ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀλλὰ καὶ ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. λόγον δέ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἔχειν λέγονται, ὅταν τὸ ἔλασσον μέγεθος τοῦ μείζονος μέρος ᾖ ἢ μέρη. τοῦτο δὲ ταὐτόν ἐστι τῷ, ὅταν ἡ τοῦ μείζονος ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ἔλασσον ἐγνωσμένη ᾖ ἤτοι ῥητὴ ἤτοι καὶ κατὰ πηλικότητα καὶ κατὰ ποσότητα. ἔστι γάρ τινα μεγέθη, ὧν μόνη γινώσκεται ἡ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχή, οἷον ὅτι ὑπερέχει τόδε τὸ μέγεθος τοῦδε τοῦ μεγέθους, ἡ δὲ ποσότης τῆς ὑπεροχῆς ἀγνοεῖται, ὡς ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ κ πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ζ. ὅτι μὲν γὰρ ὑπερέχει, ἴσμεν, ἄγνωστος δὲ ἡ ποσότης τῆς ὑπεροχῆς. καὶ ἐπὶ μὲν τῶν πλευρῶν τοῦ κ καὶ ζ οὕτως· ἐπ' αὐτοῦ δὲ τοῦ κ καὶ ζ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ κ πρὸς τὸν ζ οὐκ ἄδηλος, καὶ διὰ τοῦτο ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν ὡς μὲν ἐν ῥητοῖς ἄλογός ἐστι, ὡς δ' ἐν ὑπεροχῇ λόγον ἔχει· ἔστι γὰρ μείζων. ἡ μὲν οὖν δεκάπους πρὸς τὴν ἑπτάποδα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἔστι γὰρ ἡ ὑπεροχὴ τῆς μείζονος ποδῶν τριῶν· καὶ σύμμετρος μήκει ἡ ἑπτάπους τῇ δεκάποδι· κοινὸν γὰρ αὐτῶν μέτρον ἡ ποδιαία. εἰ δὲ μήκει, καὶ δυνάμει· τὰ γὰρ μήκει σύμμετρα καὶ δυνάμει, οὐ μὴν καὶ ἔμπαλιν. καὶ ἡ μὲν δεκάπους καὶ ἑπτάπους σύμμετροι μήκει καὶ λόγον ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἤτοι ῥητὴν τὴν ὑπεροχήν. αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν ἀσύμμετροι· οὐ γάρ ἐστιν ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐγνωσμένη κατὰ ποσότητα, πόση τίς ἐστι. δεῖ οὖν εἰδέναι, ὅτι ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα, οἷον διπλάσιον, τριπλάσιον, ἡμιόλιον, διπλασιεπίτριτον, ἐπίπεμπτον ἤ τινα ἄλλον τοιοῦτον λόγον. ὥστε τὰ μεγέθη τὰ πρὸς ἄλληλά τινα τοιοῦτον ἔχοντα λόγον ῥηθήσεται λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. τούτῳ δὲ ἐξ ἀνάγκης ἕπεται τὸ τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος ἢ μέρος ἢ μέρη εἶναι, τὰ δὲ μέρη ὁτὲ μὲν μονάδες εἰσίν, οἷον ὁ ζ τοῦ ι ἑπτὰ δέκατα, ὁτὲ δὲ ἀριθμοί, οἷον ὁ κ τοῦ λ δύο δέκατα. πᾶσαι οὖν αἱ σύμμετροι εὐθεῖαι εἴτε μήκει εἴτε καὶ μήκει καὶ δυνάμει πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ὁ τυχὼν πρὸς τὸν τυχόντα. αἱ δὲ μήκει σύμμετροι οὐ μόνον τοῦτο, ἀλλὰ καὶ ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. μὴ ἔχειν δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ λέγονται, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον, ὅταν μηδεὶς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, οἷον ὁ δέκα πρὸς τὸν δ οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον, οὐδὲ ὁ ζ πρὸς τὸν αὐτὸν δ· ὁ δέ γε θ καὶ ὁ ιϛ πρὸς τὸν δ λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον· μέσος γὰρ τοῦ μὲν δ καὶ θ ἐμπίπτει ὁ ϛ ἀνάλογον ὡς ὁ θ πρὸς τὸν ϛ, οὗτος πρὸς τὸν δ, τοῦ δὲ δ καὶ ιϛ ὁ η. ὡς γὰρ ὁ ιϛ πρὸς τὸν η, ὁ η πρὸς τὸν δ. καὶ αἱ μὲν μήκει σύμμετροι ἐξ ἀνάγκης καὶ ῥηταί, ὅτι καὶ δυνάμει σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι ῥηταὶ μὲν διὰ τὸ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα εἶναι, οὐ μὴν καὶ μήκει σύμμετροι. καὶ καθόλου αἱ πᾶσαι σύμμετροι εὐθεῖαι, εἴτε δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν εἴτε καὶ μήκει καὶ δυνάμει, ῥηταὶ ἐκαλοῦντο πρὸς τῶν παλαιῶν. ἐκ δὲ τούτου δῆλον, ὅτι τὰ μεγέθη τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ ῥητά ἐστιν, οὐ μὴν τὰ ῥητὰ καὶ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. τῆς γὰρ ὀκτάποδος καὶ ἑξάποδος αἱ πλευραὶ ῥηταὶ μέν εἰσιν ὡς δυνάμει σύμμετροι, λόγον δὲ οὐκ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἔστι δὲ τῆς μὲν ὀκτάποδος ἡ πλευρὰ δύο μθ μβ, τῆς δὲ ἑξάποδος β κϚ νη.

Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη, Σχόλιο X.135

Θαυμάζειν ἄξιον, ὅπως ἡ τῆς τριάδος κρατητικὴ δύναμις καὶ τὴν ἄλογον ἀφορίζει δύναμιν καὶ διήκει μέχρι τῶν ἐσχάτων, ἔπειθ' ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν τῆς ἀλογίας εἰδῶν ὑπὸ δή τινος μεσότητος πάντως ἀφορίζεται, τὸ μὲν ὑπὸ τῆς γεωμετρικῆς, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ἀριθμητικῆς, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς μουσικῆς. καὶ ἔοικεν ἡ τῆς ψυχῆς οὐσία προσεχῶς ἐπιβατεύουσα τῇ τῶν μεγεθῶν κατὰ τοὺς ἐν αὑτῇ λόγους καὶ πᾶν τὸ ἐν τοῖς μεγέθεσιν ὁρίζειν ἀόριστον καὶ τὴν τῆς ἀλογίας ἀπειρίαν τοῖς τριττοῖς τούτοις πιέσαι δεσμοῖς. Ἐπισημαντέον, ὅτι τὸ κοινὸν ὄνομα τῆς μέσης ἐπὶ μερικωτέρας ἔθετο φύσεως, ἐπεὶ καὶ τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων δυναμένη μέση πάντως ἐστὶ τῶν ῥητῶν ἐκείνων καὶ ἡ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον χωρίον, ἀλλ' οὐδετέραν τούτων προσαγορεύει μέσην, ἀλλὰ τὴν τὸ προειρημένον χωρίον δυναμένην· καὶ ὅτι τὰς δυνάμεις πανταχοῦ παρωνύμως ἀπὸ τῶν δυναμένων καλεῖ· ῥητὸν μὲν γὰρ τὸ ἀπὸ ῥητῆς, μέσον δὲ τὸ ἀπὸ μέσης. καὶ ὅτι τὴν περὶ τὰς μέσας θεωρίαν ἐξομοιοῖ ταῖς ῥηταῖς· καὶ γὰρ ταύτας ἢ μήκει συμμέτρους εἶναι ἢ δυνάμει μόνον ὥσπερ ἐκείνας φησὶν καὶ τὸ μὲν ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων περιεχόμενον μέσον εἶναι καθάπερ ἐκεῖ τὸ ὑπὸ ῥητῶν ῥητόν, τὸ δὲ αὖ ὑπὸ μέσων δυνάμει συμμέτρων τότε μὲν γίνεται ῥητόν, τότε δὲ μέσον. ὥστε τριχῶς μὲν τὸ μέσον, διχῶς δὲ τὸ ῥητόν· καὶ ἔοικεν ἡ μὲν τῶν μήκει συμμέτρων μέσων ἀνάλογον μεταξὺ ληφθεῖσα καὶ ἡ τῶν δυνάμει συμμέτρων ῥητῶν ἐκ παντὸς εἶναι μέση, ἡ δὲ τῶν ῥητῶν μήκει συμμέτρων τότε μὲν ῥητή, τότε δὲ μέση. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ἀσύμμετρος δύναμις τότε μὲν ῥητή, τότε δὲ μέση. δύο γὰρ εἶναι μέσας δυνάμει συμμέτρους δυνατόν, ὥσπερ καὶ δύο ῥηταὶ δυνάμει σύμμετροί ποτε γένοιντο ἄν. αἰτιατέον οὖν τὴν ἀναλογίαν τῆς τῶν περιεχομένων χωρίων διαφορᾶς τὴν μεταξὺ τῶν ἄκρων ἢ δύο ῥητῶν μέσην ἢ δύο μέσων ῥητὴν καὶ ὅλου τότε μὲν ἐξομοιοῦσαν τὸν δεσμὸν τοῖς ἄκροις, τότε δὲ ἀνόμοιον αὐτοῖς παρεμβάλλουσαν.

Ανώνυμα Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη, Σχόλιο X.185

Ἰστέον, ὅτι τὸ μὲν ῥητὸν δὶς εὑρεῖν ἔστιν, τριχῶς δὲ τὸ ἄλογον· τὸ γὰρ ὑπὸ δύο ῥητῶν εὐθειῶν μήκει συμμέτρων περιεχόμενον ῥητόν ἐστι, καὶ τὸ ὑπὸ δύο μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων ἔστι μέν ποτε ἄλογον, ἔστι δὲ καὶ ῥητόν· ἰδοὺ δὶς τὸ ῥητόν. τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, καὶ τὸ ὑπὸ δύο μέσων μήκει συμμέτρων περιεχόμενον ἄλογον, καί, ὡς εἴρηται, τὸ ὑπὸ δύο μέσων συμμέτρων δυνάμει μόνον συμμέτρων ἔστι μέν ποτε ῥητόν, ἔστι δὲ καὶ ἄλογον. καὶ ἰδοὺ τὸ ἄλογον τριχῶς εὑρίσκεται, καὶ διήκει οὕτως ἡ τῆς τριάδος κρατητικὴ δύναμις καὶ ἐπ' αὐτῆς τῆς ἀορίστου καὶ ἀλόγου φύσεως συνέχουσα τὸ σκεδαστὸν αὐτῆς καὶ εἰς ὅρον πως τιθεῖσα.

Γ. Αριστοτέλης

Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά* 987a13-28

οἱ δὲ δύο ποιοῦσι, τὴν ὅθεν ἡ κίνησις· οἱ δὲ Πυθαγόρειοι δύο μὲν τὰς ἀρχὰς κατὰ τὸν αὐτὸν εἰρήκασι τρόπον, τοσοῦτον δὲ προσεπέθεσαν ὃ καὶ ἴδιόν ἐστιν αὐτῶν, ὅτι τὸ πεπερασμένον καὶ τὸ ἄπειρον [καὶ τὸ ἓν] οὐχ ἑτέρας τινὰς ᾠήθησαν εἶναι φύσεις, οἷον πῦρ ἢ γῆν ἤ τι τοιοῦτον ἕτερον, ἀλλ' αὐτὸ τὸ ἄπειρον καὶ αὐτὸ τὸ ἓν οὐσίαν εἶναι τούτων ὧν κατηγοροῦνται, διὸ καὶ ἀριθμὸν εἶναι τὴν οὐσίαν πάντων. περί τε τούτων οὖν τοῦτον ἀπεφήναντο τὸν τρόπον, καὶ περὶ τοῦ τί ἐστιν ἤρξαντο μὲν λέγειν καὶ ὁρίζεσθαι, λίαν δ' ἁπλῶς ἐπραγματεύθησαν. ὡρίζοντό τε γὰρ ἐπιπολαίως, καὶ ᾧ πρώτῳ ὑπάρξειεν ὁ λεχθεὶς ὅρος, τοῦτ' εἶναι τὴν οὐσίαν τοῦ πράγματος ἐνόμιζον, ὥσπερ εἴ τις οἴοιτο ταὐτὸν εἶναι διπλάσιον καὶ τὴν δυάδα διότι πρῶτον ὑπάρχει τοῖς δυσὶ τὸ διπλάσιον. ἀλλ' οὐ ταὐτὸν ἴσως ἐστὶ τὸ εἶναι διπλασίῳ καὶ δυάδι· εἰ δὲ μή, πολλὰ τὸ ἓν ἔσται, ὃ κἀκείνοις συνέβαινεν. παρὰ μὲν οὖν τῶν πρότερον καὶ τῶν ἄλλων τοσαῦτα ἔστι λαβεῖν.

Αριστοτέλης, *Τοπικά* 158b24-159a2

Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι καὶ ἐπιχειρεῖν, οἷον πότερον ἓν ἑνὶ ἐναντίον ἢ πλείω· ὁρισθέντων δὲ τῶν ἐναντίων κατὰ τρόπον ῥᾴδιον συμβιβάσαι πότερον ἐνδέχεται πλείω τῷ αὐτῷ εἶναι ἐναντία ἢ οὔ. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁρισμοῦ δεομένων. ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος. ἁπλῶς δὲ τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων τιθεμένων μὲν τῶν ὁρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος, ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴν οὐ πολλά γε πρὸς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπιχειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ τὰ ἀνὰ μέσον εἶναι)· ἂν δὲ μὴ τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁρισμοί, χαλεπόν, τάχα δ' ὅλως ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ τούτοις καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τοὺς λόγους ἔχει.

Δ. Ευκλείδης

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, Βιβλίο Ι (Heath TL, 1926)

Πρόταση I.44
To a given straight line to apply, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given triangle.

Πρόταση I.45
To construct, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given rectilineal figure.

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, Βιβλίο II (Heath TL, 1926)

Πρόταση II.4
If a straight line be cut at random, the square on the whole is equal to the squares on the segments and twice the rectangle contained by the segments..

Πρόταση II.5
If a straight line be cut into equal and unequal segments, the rectangle contained by the unequal segments of the whole together with the square on the straight line between the points of section is equal to the square on the half.

Πρόταση II.6
If a straight line be bisected and a straight line be added to it in a straight line, the rectangle contained by the whole with the added straight line and the added straight line together with the square on the half is equal to the square on the straight line made up of the half and the added straight line.

Πρόταση II.7
If a straight line be cut at random, the square on the whole and that on one of the segments both together are equal to twice the rectangle contained by the whole and the said segment and the square on the remaining segment.

Πρόταση II.8
If a straight line be cut at random, four times the rectangle contained by the whole and one of the segments together with the square on the remaining segment is equal to the square described on the whole and the aforesaid segment as on one straight line.

Πρόταση II.10
If a straight line be bisected, and a straight line be added to it in a straight line, the square on the whole with the added straight line and the square on the added straight line both together are double of the square on the half and of the square described on the straight line made up of the half and the added straight line as on one straight line.

Πρόταση II.14
To construct a square equal to a given rectilineal figure.

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, ΒιβλίοV (Heath TL, 1926)

Ορισμός 4
Magnitudes are said to **have a ratio** to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another.

Πρόταση V.8
Of unequal magnitudes, the greater has to the same a greater ratio than the less has; and the same has to the less a greater ratio than it has to the greater.

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, ΒιβλίοVI (Heath TL, 1926)

Πρόταση VI.1
Triangles and parallelograms which are under the same height are to one another as their bases.

Πρόταση VI.13
To two given straight lines to find a mean proportional.

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, ΒιβλίοVII (Heath TL, 1926)

Πρόταση VII.1
Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measures the one before it until an unit is left, the original numbers will be prime to one another.

Πρόταση VII.2
Given two numbers not prime to one another, to find their greatest common measure.

Πρόταση VII.19
If four numbers be proportional, the number produced from the first and fourth will be equal to the number produced from the second and third; and, if the number produced from the first and fourth be equal to that produced from the second and third, the four numbers will be proportional.

Πρόταση VII.22
The least numbers of those which have the same ratio with them are prime to one another.

Πρόταση VII.27
If two numbers be prime to one another, and each by multiplying itself make a certain number, the products will be prime to one another; and, if the original numbers by multiplying the products make certain numbers, the latter will also be prime to one another [and this is always the case with the extremes].

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, ΒιβλίοVIII (Heath TL, 1926)

Πρόταση VIII.14
If a square measure a square, the side will also measure the side; and, if the side measure the side, the square will also measure the square.

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, Βιβλίο X (Heath TL, 1926)

Ορισμός X.3
With these hypotheses, it is proved that there exist straight lines infinite in multitude which are commensurable and incommensurable respectively, some in length only, and others in square also, with an assigned straight line. Let then the assigned straight line be called rational, and those straight lines which are commensurable with it, whether in length and in square or in square only, rational, but those which are incommensurable with it irrational.

Πρόταση X.1
Two unequal magnitudes being set out, if from the greater there be subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater than its half, and if this process be repeated continually, there will be left some magnitude which will be less than the lesser magnitude set out.

Πρόταση X.2
If, when the less of two unequal magnitudes is continually subtracted in turn from the greater, that which is left never measures the one before it, the magnitudes will be incommensurable.

Πρόταση X.3
Given two commensurable magnitudes, to find their greatest common measure.

Πρόταση X.4
Given three commensurable magnitudes, to find their greatest common measure.

Πρόταση X.5
Commensurable magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number.

Πρόταση X.6
If two magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number, the magnitudes will be commensurable.

Πρόταση X.7
Incommensurable magnitudes have not to one another the ratio which a number has to a number.

Πρόταση X.8
If two magnitudes have not to one another the ratio which a number has to a number, the magnitudes will be incommensurable.

Πρόταση X.17
If there be two unequal straight lines, and to the greater there be applied a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, and if it divide it into parts which are commensurable in length, then the square on the greater will be greater than the square on the less by the square on a straight line commensurable with the greater.
And, if the square on the greater be greater than the square on the less by the square on a straight line commensurable with the greater, and if there be applied to the greater a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, it will divide it into parts which are commensurable in length.

Πρόταση X.18
If there be two unequal straight lines, and to the greater there be applied a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, and if it divide it into parts which are incommensurable, the square on the greater will be greater than the square on the less by the square on a straight line incommensurable with the greater.
And, if the square on the greater be greater than the square on the less by the square on a straight line incommensurable with the greater, and if there be applied to the greater a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, it divides it into parts which are incommensurable.

Πρόταση X.19
The rectangle contained by rational straight lines commensurable in length is rational.

Πρόταση X.20
If a rational area be applied to a rational straight line, it produces as breadth a straight line rational and commensurable in length with the straight line to which it is applied.

Πρόταση X.21
The rectangle contained by rational straight lines commensurable in square only is irrational, and the side of the square equal to it is irrational. Let the latter be called **medial.**

Λήμμα 1 - X.28/29
To find two square numbers such that their sum is also square.

Λήμμα 2 - X.28/29
To find two square numbers such that their sum is not square.

Πρόταση X.33
To find two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them rational but the rectangle contained by them medial.

Πρόταση X.34
To find two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial but the rectangle contained by them rational.

Πρόταση X.35
To find two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial and the rectangle contained by them medial and moreover incommensurable with the sum of the squares on them.

Πρόταση X.36
If two rational straight lines commensurable in square only be added together, the whole is irrational; and let it be called **binomial**.

Πρόταση X.37
If two medial straight lines commensurable in square only and containing a rational rectangle be added together, the whole is irrational; and let it be called a **first bimedial** straight line.

Πρόταση X.38
If two medial straight lines commensurable in square only and containing a medial rectangle be added together, the whole is irrational; and let it be called a **second bimedial** straight line.

Πρόταση X.39
If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them rational, but the rectangle contained by them medial, be added together, the whole straight line is irrational : and let it be called **major**.

Πρόταση X.40
If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial, but the rectangle contained by them rational, be added together, the straight line is irrational; and let it be called the **side of a rational plus a medial area.**

Πρόταση X.41
If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial, and the rectangle contained by them medial and also incommensurable with the sum of the squares on them, be added together, the whole straight line is irrational; and let it be called the **side of the sum of two medial areas.**

Πρόταση X.42
A binomial straight line is divided into its terms at one point only.

Πρόταση X.43
A first bimedial straight line is divided at one point only.

Πρόταση X.44
A second bimedial straight line is divided at one point only.

Πρόταση X.45
A major straight line is divided at one and the same point only.

Πρόταση X.46
The side of a rational plus a medial area is divided at one point only.

Πρόταση X.47
The side of the sum of two medial areas is divided at one point only.

Ορισμοί X. 47/48
1. Given a rational straight line and a binomial, divided into its terms, such that the square on the greater term is greater than the square on the lesser by the square on a straight line commensurable in length with the greater, then, if the greater term be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a **first binomial** straight line;
2. but if the lesser term be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a **second binomial**;
3. and if neither of the terms be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a **third binomial**.
4. Again, if the square on the greater term be greater than the square on the lesser by the square on a straight line incommensurable in length with the greater, then, if the greater term be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a fourth binomial;
5. if the lesser, a **fifth binomial**;
6. and if neither, a **sixth binomial**.

Πρόταση X.48
To find the first binomial straight line.

Πρόταση X.49
To find the second binomial straight line.

Πρόταση X.50
To find the third binomial straight line.

Πρόταση X.51
To find the fourth binomial straight line.

Πρόταση X.52
To find the fifth binomial straight line.

Πρόταση X.53
To find the sixth binomial straight line.

Πρόταση X.54
If an area be contained by a rational straight line and the first binomial, the "side" of the area is the irrational straight line which is called binomial.

Πρόταση X.55
If an area be contained by a rational straight line and the second binomial, the "side" of the area is the irrational straight line which is called a first bimedial.

Πρόταση X.56
If an area be contained by a rational straight line and the third binomial, the "side" of the area is the irrational straight line called a second bimedial.

Πρόταση X.57
If an area be contained by a rational straight line and the fourth binomial, the "side" of the area is the irrational straight line called major.

Πρόταση X.58
If an area be contained by a rational straight line and the fifth binomial, the "side" of the area is the irrational straight line called the side of a rational plus a medial area.

Πρόταση X.59
If an area be contained by a rational straight line and the sixth binomial, the "side" of the area is the irrational straight line called the side of the sum of two medial areas.

Πρόταση X.60
The square on the binomial straight line applied to a rational straight line produces as breadth the first binomial.

Πρόταση X.61
The square on the first bimedial straight line applied to a rational straight line produces as breadth the second binomial.

Πρόταση X.62
The square on the second bimedial straight line applied to a rational straight line produces as breadth the third binomial.

Πρόταση X.63
The square on the major straight line applied to a rational straight line produces as breadth the fourth binomial.

Πρόταση X.64
The square on the side of a rational plus a medial area applied to a rational straight line produces as breadth the fifth binomial.

Πρόταση X.65
The square on the side of the sum of two medial areas applied to a rational straight line produces as breadth the sixth binomial.

Πρόταση X.66
A straight line commensurable in length with a binomial straight line is itself also binomial and the same in order.

Πρόταση X.67
A straight line commensurable in length with a bimedial straight line is itself also bimedial and the same in order.

Πρόταση X.68
A straight line commensurable with a major straight line is itself also major.

Πρόταση X.69
A straight line commensurable with the side of a rational plus a medial area is itself also the side of a rational plus a medial area.

Πρόταση X.70
A straight line commensurable with the side of the sum of two medial areas is the side of the sum of two medial areas.

Πρόταση X.71
If a rational and a medial area be added together, four irrational straight lines arise, namely a binomial or a first bimedial or a major or a side of a rational plus a medial area.

Πρόταση X.72
If two medial areas incommensurable with one another be added together, the remaining two irrational straight lines arise, namely either a second bimedial or a side of the sum of two medial areas.

Πρόταση X.73
If from a rational straight line there be subtracted a rational straight line commensurable with the whole in square only, the remainder is irrational; and let it be called an apotome.

Πρόταση X.74
If from a medial straight line there be subtracted a medial straight line which is commensurable with the whole in square only, and which contains with the whole a rational

rectangle, the remainder is irrational. And let it be called a **first apotome of a medial** straight line.

Πρόταση X.75
If from a medial straight line there be subtracted a medial straight line which is commensurable with the whole in square only, and which contains with the whole a medial rectangle, the remainder is irrational; and let it be called a second apotome of a medial straight line.

Πρόταση X.76
If from a straight line there be subtracted a straight line which is incommensurable in square with the whole and which with the whole makes the squares on them added together rational, but the rectangle contained by them medial, the remainder is irrational; and let it be called minor.

Πρόταση X.77
If from a straight line there be subtracted a straight line which is incommensurable in square with the whole, and which with the whole makes the sum of the squares on them medial, but twice the rectangle contained by them rational, the remainder is irrational: and let it be called that which produces with a rational area a medial whole.

Πρόταση X.78
If from a straight line there be subtracted a straight line which is incommensurable in square with the whole and which with the whole makes the sum of the squares on them medial, twice the rectangle contained by them medial, and further the squares on them incommensurable with twice the rectangle contained by them, the remainder is irrational; and let it be called that which produces with a medial area a medial whole.

Πρόταση X.79
To an apotome only one rational straight line can be annexed which is commensurable with the whole in square only.

Πρόταση X.80
To a first apotome of a medial straight line only one medial straight line can be annexed which is commensurable with the whole in square only and which contains with the whole a rational rectangle.

Πρόταση X.81
To a second apotome of a medial straight line only one medial straight line can be annexed which is commensurable with the whole in square only and which contains with the whole a medial rectangle.

Πρόταση X.82
To a minor straight line only one straight line can be annexed which is incommensurable in square with the whole and which makes, with the whole, the sum of the squares on them rational but twice the rectangle contained by them medial.

Πρόταση X.83
To a straight line which produces with a rational area a medial whole only one straight line can be annexed which is incommensurable in square with the whole straight line and which

with the whole straight line makes the sum of the squares on them medial, but twice the rectangle contained by them rational.

Πρόταση X.84
To a straight line which produces with a medial area a medial whole only one straight line can be annexed which is incommensurable in square with the whole straight line and which with the whole straight line makes the sum of the squares on them medial and twice the rectangle contained by them both medial and also incommensurable with the sum of the squares on them.

Ορισμοί X. 84/85
1. Given a rational straight line and an apotome, if the square on the whole be greater than the square on the annex by the square on a straight line commensurable in length with the whole, and the whole be commensurable in length with the rational straight line set out, let the apotome be called a **first apotome.**
2. But if the annex be commensurable in length with the rational straight line set out, and the square on the whole be greater than that on the annex by the square on a straight line commensurable with the whole, let the apotome be called a **second apotome.**
3. But if neither be commensurable in length with the rational straight line set out, and the square on the whole be greater than the square on the annex by the square on a straight line commensurable with the whole, let the apotome be called a **third apotome.**
4. Again, if the square on the whole be greater than the square on the annex by the square on a straight line incommensurable with the whole, then, if the whole be commensurable in length with the rational straight line set out, let the apotome be called a **fourth apotome**;
5. if the annex be so commensurable, a **fifth**;
6. and, if neither, a **sixth**.

Πρόταση X.85
To find the first apotome.

Πρόταση X.86
To find the second apotome.

Πρόταση X.87
To find the third apotome.

Πρόταση X.88
To find the fourth apotome.

Πρόταση X.89
To find the fifth apotome.

Πρόταση X.90
To find the sixth apotome.

Πρόταση X.91
If an area be contained by a rational straight line and a first apotome, the “side” of the area is an apotome.

Πρόταση X.92

If an area be contained by a rational straight line and a second apotome, the “side” of the area is a first apotome of a medial straight line.

Πρόταση X.93
If an area be contained by a rational straight line and a third apotome, the “side” of the area is a second apotome of a medial straight line.

Πρόταση X.94
If an area be contained by a rational straight line and a fourth apotome, the “side” of the area is minor.

Πρόταση X.95
If an area be contained by a rational straight line and a fifth apotome, the “side” of the area is a straight line which produces with a rational area a medial whole.

Πρόταση X.96
If an area be contained by a rational straight line and a sixth apotome, the “side” of the area is a straight line which produces with a medial area a medial whole.

Πρόταση X.97
The square on an apotome applied to a rational straight line produces as breadth a first apotome.

Πρόταση X.98
The square on a first apotome of a medial straight line applied to a rational straight line produces as breadth a second apotome.

Πρόταση X.99
The square on a second apotome of a medial straight line applied to a rational straight line produces as breadth a third apotome.

Πρόταση X.100
The square on a minor straight line applied to a rational straight line produces as breadth a fourth apotome.

Πρόταση X.101
The square on the straight line which produces with a rational area a medial whole, if applied to a rational straight line, produces as breadth a fifth apotome.

Πρόταση X.102
The square on the straight line which produces with a medial area a medial whole, if applied to a rational straight line, produces as breadth a sixth apotome.

Πρόταση X.103
A straight line commensurable in length with an apotome is an apotome and the same in order.

Πρόταση X.104
A straight line commensurable with an apotome of a medial straight line is an apotome of a medial straight line and the same in order.

Πρόταση X.105
A straight line commensurable with a minor straight line is minor.

Πρόταση X.106
A straight line commensurable with that which produces with a rational area a medial whole is a straight line which produces with a rational area a medial whole.

Πρόταση X.107
A straight line commensurable with that which produces with a medial area a medial whole is itself also a straight line which produces with a medial area a medial whole.

Πρόταση X.112
The square on a rational straight line applied to the binomial straight line produces as breadth an apotome the terms of which are commensurable with the terms of the binomial and moreover in the same ratio; and further the apotome so arising will have the same order as the binomial straight line.

Πρόταση X.113
The square on a rational straight line, if applied to an apotome, produces as, breadth the binomial straight line the terms of which are commensurable with the terms of the apotome and in the same ratio; and further the binomial so arising has the same order as the apotome.

Πρόταση X.114
If an area be contained by an apotome and the binomial straight line the terms of which are commensurable with the terms of the apotome and in the same ratio, the "side" of the area is rational.

Πρόταση X.115
From a medial straight line there arise irrational straight lines infinite in number, and none of them is the same as any of the preceding.

Ευκλείδης, *Στοιχεία*, Βιβλίο XIII (Heath TL, 1926)

Πρόταση XIII.11
If in a circle which has its diameter rational an equilateral pentagon be inscribed, the side of the pentagon is the irrational straight line called minor.

Πρόταση XIII.15
To construct a cube and comprehend it in a sphere, like the pyramid; and to prove that the square on the diameter of the sphere is triple of the square on the side of the cube.

Πρόταση XIII.16
To construct an icosahedron and comprehend it in a sphere, like the aforesaid figures; and to prove that the side of the icosahedron is the irrational straight line called minor.

Πρόταση XIII.17
To construct a dodecahedron and comprehend it in a sphere, like the aforesaid figures, and to prove that the side of the dodecahedron is the irrational straight line called apotome.

Ε. Θέων Σμυρναίος

Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις Πλάτωνος Ανάγνωσιν* 44,14

44,14 ἐναλλάξ· ποτὲ μὲν μονάδι ἔλαττον, ποτὲ δὲ μονάδι πλέον

Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις Πλάτωνος Ανάγνωσιν* 44,18-45,8

44,18 αἱ δὲ διάμετροι τῶν πλευρῶν ἐναλλὰξ παρὰ μίαν ποτὲ
45,1 μὲν μονάδι μείζους ἢ διπλάσιαι δυνάμει, ποτὲ δὲ μονάδι
45,2 ἐλάττους ἢ διπλάσιαι ὁμαλῶς· πᾶσαι οὖν αἱ διάμετροι
45,3 πασῶν τῶν πλευρῶν γενήσονται δυνάμει διπλάσιαι, τοῦ
45,4 ἐναλλὰξ πλείονος καὶ ἐλάττονος τῇ αὐτῇ μονάδι ἐν
45,5 πάσαις ὁμαλῶς τιθεμένη ἰσότητα ποιοῦντος εἰς τὸ μήτε
45,6 ἐλλείπειν μήτε ὑπερβάλλειν ἐν ἁπάσαις τὸ διπλάσιον·
45,7 τὸ γὰρ τῇ προτέρᾳ διαμέτρῳ λεῖπον δυνάμει τῇ ἐφεξῆς
45,8 ὑπερβάλλει.

ΣΤ. Ιάμβλιχος

Ιάμβλιχος, *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής* 92,23-93,6

92,23 ραί τε καὶ διάμετροι. ἀλλ' οὖν ἐπειδὴ ἐναλλὰξ ποτὲ
92,24 μὲν δυνάμει μείζους εἰσὶν ἢ διάμετροι διπλάσιαι
92,25 πλευρῶν, ποτὲ δὲ μονάδι ἐλάττους ἢ διπλάσιαι, ἔσον-
92,26 ται κατ' ἐπίνοιαν πᾶσαι ὁμοῦ αἱ διάμετροι πασῶν
92,27 ὁμοῦ τῶν πλευρῶν δυνάμει διπλάσιαι· ἀπίσωσις γὰρ
93,1 γίνεται τοῦ μείζονος τῷ ἐλάττονι ἀναμιγέντος, διότι
93,2 στάσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς ὑπερεχόμενον ἡ ἰσότης
93,3 ἐστί, διόπερ κἀνταῦθα τὸ μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον
93,4 προστεθὲν τῷ μονάδι ἐλάττονι ἢ διπλασίῳ ἀπισώσει
93,5 τὸ πᾶν, ὥστε ἀεὶ τὴν διάμετρον δυνάμει διπλασίαν
93,6 εἶναι τῆς πλευρᾶς, καθάπερ καὶ ἐπὶ τῶν γραμμικῶν

Ζ. Πλάτων

Θεαίτητος

Πλάτων, *Θεαίτητος* 145c7-148e5

145c7 ΣΩ. Λέγε δή μοι· μανθάνεις που παρὰ Θεοδώρου
145c8 γεωμετρίας ἄττα;
145c9 ΘΕΑΙ. Ἔγωγε.
145d1 ΣΩ. Καὶ τῶν περὶ ἀστρονομίαν τε καὶ ἁρμονίας καὶ
145d2 λογισμούς;
145d3 ΘΕΑΙ. Προθυμοῦμαί γε δή.
145d4 ΣΩ. Καὶ γὰρ ἐγώ, ὦ παῖ, παρά τε τούτου καὶ παρ'
145d5 ἄλλων οὓς ἂν οἴωμαί τι τούτων ἐπαΐειν. ἀλλ' ὅμως τὰ
145d6 μὲν ἄλλα ἔχω περὶ αὐτὰ μετρίως, μικρὸν δέ τι ἀπορῶ ὃ
145d7 μετὰ σοῦ τε καὶ τῶνδε σκεπτέον. καί μοι λέγε· ἆρ' οὐ τὸ

145d8 μανθάνειν ἐστὶν τὸ σοφώτερον γίγνεσθαι περὶ ὃ μανθάνει
145d9 τις;
145d10 ΘΕΑΙ. Πῶς γὰρ οὔ;
145d11 ΣΩ. Σοφίᾳ δέ γ' οἶμαι σοφοὶ οἱ σοφοί.
145d12 ΘΕΑΙ. Ναί.
145e1 ΣΩ. Τοῦτο δὲ μῶν διαφέρει τι ἐπιστήμης;
145e2 ΘΕΑΙ. Τὸ ποῖον;
145e3 ΣΩ. Ἡ σοφία. ἢ οὐχ ἅπερ ἐπιστήμονες ταῦτα καὶ
145e4 σοφοί;
145e5 ΘΕΑΙ. Τί μήν;
145e6 ΣΩ. Ταὐτὸν ἄρα ἐπιστήμη καὶ σοφία;
145e7 ΘΕΑΙ. Ναί.
145e8 ΣΩ. Τοῦτ' αὐτὸ τοίνυν ἐστὶν ὃ ἀπορῶ καὶ οὐ δύναμαι
145e9 λαβεῖν ἱκανῶς παρ' ἐμαυτῷ, ἐπιστήμη ὅτι ποτὲ τυγχάνει ὄν.
146a1 ἆρ' οὖν δὴ ἔχομεν λέγειν αὐτό; τί φατέ; τίς ἂν ἡμῶν
146a2 πρῶτος εἴποι; ὁ δὲ ἁμαρτών, καὶ ὃς ἂν ἀεὶ ἁμαρτάνῃ,
146a3 καθεδεῖται, ὥσπερ φασὶν οἱ παῖδες οἱ σφαιρίζοντες, ὄνος· ὃς
146a4 δ' ἂν περιγένηται ἀναμάρτητος, βασιλεύσει ἡμῶν καὶ ἐπιτάξει
146a5 ὅτι ἂν βούληται ἀποκρίνεσθαι. τί σιγᾶτε; οὔ τί που, ὦ
146a6 Θεόδωρε, ἐγὼ ὑπὸ φιλολογίας ἀγροικίζομαι, προθυμούμενος
146a7 ἡμᾶς ποιῆσαι διαλέγεσθαι καὶ φίλους τε καὶ προσηγόρους
146a8 ἀλλήλοις γίγνεσθαι;
146b1 ΘΕΟ. Ἥκιστα μέν, ὦ Σώκρατες, τὸ τοιοῦτον ἂν εἴη
146b2 ἄγροικον, ἀλλὰ τῶν μειρακίων τι κέλευέ σοι ἀποκρίνεσθαι·
146b3 ἐγὼ μὲν γὰρ ἀήθης τῆς τοιαύτης διαλέκτου, καὶ οὐδ' αὖ
146b4 συνεθίζεσθαι ἡλικίαν ἔχω. τοῖσδε δὲ πρέποι τε ἂν τοῦτο
146b5 καὶ πολὺ πλέον ἐπιδιδοῖεν· τῷ γὰρ ὄντι ἡ νεότης εἰς πᾶν
146b6 ἐπίδοσιν ἔχει. ἀλλ', ὥσπερ ἤρξω, μὴ ἀφίεσο τοῦ Θεαιτήτου
146b7 ἀλλ' ἐρώτα.
146b8 ΣΩ. Ἀκούεις δή, ὦ Θεαίτητε, ἃ λέγει Θεόδωρος, ᾧ
146c1 ἀπειθεῖν, ὡς ἐγὼ οἶμαι, οὔτε σὺ ἐθελήσεις, οὔτε θέμις περὶ
146c2 τὰ τοιαῦτα ἀνδρὶ σοφῷ ἐπιτάττοντι νεώτερον ἀπειθεῖν.
146c3 ἀλλ' εὖ καὶ γενναίως εἰπέ· τί σοι δοκεῖ εἶναι ἐπιστήμη;
146c4 ΘΕΑΙ. Ἀλλὰ χρή, ὦ Σώκρατες, ἐπειδήπερ ὑμεῖς κελεύετε.
146c5 πάντως γάρ, ἄν τι καὶ ἁμάρτω, ἐπανορθώσετε.
146c6 ΣΩ. Πάνυ μὲν οὖν, ἄνπερ γε οἷοί τε ὦμεν.
146c7 ΘΕΑΙ. Δοκεῖ τοίνυν μοι καὶ ἃ παρὰ Θεοδώρου ἄν τις
146c8 μάθοι ἐπιστῆμαι εἶναι, γεωμετρία τε καὶ ἃς νυνδὴ σὺ διῆλθες,
146d1 καὶ αὖ σκυτοτομική τε καὶ αἱ τῶν ἄλλων δημιουργῶν τέχναι,
146d2 πᾶσαί τε καὶ ἑκάστη τούτων, οὐκ ἄλλο τι ἢ ἐπιστήμη εἶναι.
146d3 ΣΩ. Γενναίως γε καὶ φιλοδώρως, ὦ φίλε, ἓν αἰτηθεὶς
146d4 πολλὰ δίδως καὶ ποικίλα ἀντὶ ἁπλοῦ.
146d5 ΘΕΑΙ. Πῶς τί τοῦτο λέγεις, ὦ Σώκρατες;
146d6 ΣΩ. Ἴσως μὲν οὐδέν· ὃ μέντοι οἶμαι, φράσω. ὅταν
146d7 λέγῃς σκυτικήν, μή τι ἄλλο φράζεις ἢ ἐπιστήμην ὑποδημάτων
146d8 ἐργασίας;
146d9 ΘΕΑΙ. Οὐδέν.
146e1 ΣΩ. Τί δ' ὅταν τεκτονικήν; μή τι ἄλλο ἢ ἐπιστήμην τῆς
146e2 τῶν ξυλίνων σκευῶν ἐργασίας;
146e3 ΘΕΑΙ. Οὐδὲ τοῦτο.
146e4 ΣΩ. Οὐκοῦν ἐν ἀμφοῖν, οὗ ἑκατέρα ἐπιστήμη, τοῦτο

146e5 ὁρίζεις;
146e6 ΘΕΑΙ. Ναί.
146e7 ΣΩ. Τὸ δέ γ' ἐρωτηθέν, ὦ Θεαίτητε, οὐ τοῦτο ἦν, τίνων
146e8 ἡ ἐπιστήμη, οὐδὲ ὁπόσαι τινές· οὐ γὰρ ἀριθμῆσαι αὐτὰς
146e9 βουλόμενοι ἠρόμεθα ἀλλὰ γνῶναι ἐπιστήμην αὐτὸ ὅτι ποτ'
146e10 ἐστίν. ἢ οὐδὲν λέγω;
146e11 ΘΕΑΙ. Πάνυ μὲν οὖν ὀρθῶς.
147a1 ΣΩ. Σκέψαι δὴ καὶ τόδε. εἴ τις ἡμᾶς τῶν φαύλων τι
147a2 καὶ προχείρων ἔροιτο, οἷον περὶ πηλοῦ ὅτι ποτ' ἐστίν, εἰ
147a3 ἀποκριναίμεθα αὐτῷ πηλὸς ὁ τῶν χυτρέων καὶ πηλὸς ὁ τῶν
147a4 ἰπνοπλαθῶν καὶ πηλὸς ὁ τῶν πλινθουργῶν, οὐκ ἂν γελοῖοι
147a5 εἶμεν;
147a6 ΘΕΑΙ. Ἴσως.
147a7 ΣΩ. Πρῶτον μέν γέ που οἰόμενοι συνιέναι ἐκ τῆς ἡμετέρας
147a8 ἀποκρίσεως τὸν ἐρωτῶντα, ὅταν εἴπωμεν πηλός, εἴτε ὁ τῶν
147b1 κοροπλαθῶν προσθέντες εἴτε ἄλλων ὡντινωνοῦν δημιουργῶν.
147b2 ἢ οἴει τίς τι συνίησίν τινος ὄνομα, ὃ μὴ οἶδεν τί ἐστιν;
147b3 ΘΕΑΙ. Οὐδαμῶς.
147b4 ΣΩ. Οὐδ' ἄρα ἐπιστήμην ὑποδημάτων συνίησιν ὁ ἐπι-
147b5 στήμην μὴ εἰδώς.
147b6 ΘΕΑΙ. Οὐ γάρ.
147b7 ΣΩ. Σκυτικὴν ἄρα οὐ συνίησιν ὃς ἂν ἐπιστήμην ἀγνοῇ,
147b8 οὐδέ τινα ἄλλην τέχνην.
147b9 ΘΕΑΙ. Ἔστιν οὕτως.
147b10 ΣΩ. Γελοία ἄρα ἡ ἀπόκρισις τῷ ἐρωτηθέντι ἐπιστήμη τί
147b11 ἐστιν, ὅταν ἀποκρίνηται τέχνης τινὸς ὄνομα. τινὸς γὰρ
147c1 ἐπιστήμην ἀποκρίνεται οὐ τοῦτ' ἐρωτηθείς.
147c2 ΘΕΑΙ. Ἔοικεν.
147c3 ΣΩ. Ἔπειτά γέ που ἐξὸν φαύλως καὶ βραχέως ἀποκρί-
147c4 νασθαι περιέρχεται ἀπέραντον ὁδόν. οἷον καὶ ἐν τῇ τοῦ
147c5 πηλοῦ ἐρωτήσει φαῦλόν που καὶ ἁπλοῦν εἰπεῖν ὅτι γῆ ὑγρῷ
147c6 φυραθεῖσα πηλὸς ἂν εἴη, τὸ δ' ὅτου ἐᾶν χαίρειν.
147c7 ΘΕΑΙ. Ῥᾴδιον, ὦ Σώκρατες, νῦν γε οὕτω φαίνεται· ἀτὰρ
147c8 κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἔναγχος εἰσῆλθε
147d1 διαλεγομένοις, ἐμοί τε καὶ τῷ σῷ ὁμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει.
147d2 ΣΩ. Τὸ ποῖον δή, ὦ Θεαίτητε;
147d3 ΘΕΑΙ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς
147d4 τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ
147d5 σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρού-
147d6 μενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.
147d7 ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ
147d8 δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας
147e1 ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.
147e2 ΣΩ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;
147e3 ΘΕΑΙ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.
147e4 ΣΩ. Λέγε.
147e5 ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν
147e6 δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα
147e7 ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.
147e8 ΣΩ. Καὶ εὖ γε.
147e9 ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ

148a1 τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ
148a2 πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων
148a3 δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει
148a4 αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.
148a5 ΣΩ. Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;
148a6 ΘΕΑΙ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον
148a7 ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερο-
148b1 μήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ'
148b2 ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.
148b3 ΣΩ. Ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες· ὥστε μοι δοκεῖ ὁ
148b4 Θεόδωρος οὐκ ἔνοχος τοῖς ψευδομαρτυρίοις ἔσεσθαι.
148b5 ΘΕΑΙ. Καὶ μήν, ὦ Σώκρατες, ὅ γε ἐρωτᾷς περὶ ἐπι-
148b6 στήμης οὐκ ἂν δυναίμην ἀποκρίνασθαι ὥσπερ περὶ τοῦ
148b7 μήκους τε καὶ τῆς δυνάμεως. καίτοι σύ γέ μοι δοκεῖς τοιοῦτόν
148b8 τι ζητεῖν· ὥστε πάλιν αὖ φαίνεται ψευδὴς ὁ Θεόδωρος.
148c1 ΣΩ. Τί δέ; εἴ σε πρὸς δρόμον ἐπαινῶν μηδενὶ οὕτω
148c2 δρομικῷ ἔφη τῶν νέων ἐντετυχηκέναι, εἶτα διαθέων τοῦ
148c3 ἀκμάζοντος καὶ ταχίστου ἡττήθης, ἧττόν τι ἂν οἴει ἀληθῆ
148c4 τόνδ' ἐπαινέσαι;
148c5 ΘΕΑΙ. Οὐκ ἔγωγε.
148c6 ΣΩ. Ἀλλὰ τὴν ἐπιστήμην, ὥσπερ νυνδὴ ἐγὼ ἔλεγον,
148c7 σμικρόν τι οἴει εἶναι ἐξευρεῖν καὶ οὐ τῶν πάντη ἄκρων;
148c8 ΘΕΑΙ. Νὴ τὸν Δί' ἔγωγε καὶ μάλα γε τῶν ἀκροτάτων.
148c9 ΣΩ. Θάρρει τοίνυν περὶ σαυτῷ καὶ τὶ οἴου Θεόδωρον
148d1 λέγειν, προθυμήθητι δὲ παντὶ τρόπῳ τῶν τε ἄλλων πέρι καὶ
148d2 ἐπιστήμης λαβεῖν λόγον τί ποτε τυγχάνει ὄν.
148d3 ΘΕΑΙ. Προθυμίας μὲν ἕνεκα, ὦ Σώκρατες, φανεῖται.
148d4 ΣΩ. Ἴθι δή—καλῶς γὰρ ἄρτι ὑφηγήσω—πειρῶ μιμού-
148d5 μενος τὴν περὶ τῶν δυνάμεων ἀπόκρισιν, ὥσπερ ταύτας
148d6 πολλὰς οὔσας ἑνὶ εἴδει περιέλαβες, οὕτω καὶ τὰς πολλὰς
148d7 ἐπιστήμας ἑνὶ λόγῳ προσειπεῖν.
148e1 ΘΕΑΙ. Ἀλλ' εὖ ἴσθι, ὦ Σώκρατες, πολλάκις δὴ αὐτὸ
148e2 ἐπεχείρησα σκέψασθαι, ἀκούων τὰς παρὰ σοῦ ἀποφερομένας
148e3 ἐρωτήσεις. ἀλλὰ γὰρ οὔτ' αὐτὸς δύναμαι πεῖσαι ἐμαυτὸν ὡς
148e4 ἱκανῶς τι λέγω οὔτ' ἄλλου ἀκοῦσαι λέγοντος οὕτως ὡς σὺ δια-
148e5 κελεύῃ, οὐ μὲν δὴ αὖ οὐδ' ἀπαλλαγῆναι τοῦ μέλειν.

Πλάτων, *Θεαίτητος* 162e4-163a1

162e4 ἕκαστος τῶν ἀνθρώπων βοσκήματος ὁτουοῦν· ἀπόδειξιν δὲ
162e5 καὶ ἀνάγκην οὐδ' ἡντινοῦν λέγετε ἀλλὰ τῷ εἰκότι χρῆσθε,
162e6 ᾧ εἰ ἐθέλοι Θεόδωρος ἢ ἄλλος τις τῶν γεωμετρῶν χρώμενος
162e7 γεωμετρεῖν, ἄξιος οὐδ' ἑνὸς μόνου ἂν εἴη. σκοπεῖτε οὖν σύ
162e8 τε καὶ Θεόδωρος εἰ ἀποδέξεσθε πιθανολογίᾳ τε καὶ εἰκόσι
163a1 περὶ τηλικούτων λεγομένους λόγους."

Πλάτων, *Θεαίτητος* 201e2-202b5

201e2 ἡμεῖς τε συγκείμεθα καὶ τἆλλα, λόγον οὐκ ἔχοι. αὐτὸ γὰρ
201e3 καθ' αὑτὸ ἕκαστον ὀνομάσαι μόνον εἴη, προσειπεῖν δὲ οὐδὲν
201e4 ἄλλο δυνατόν, οὔθ' ὡς ἔστιν, οὔθ' ὡς οὐκ ἔστιν· ἤδη γὰρ
202a1 ἂν οὐσίαν ἢ μὴ οὐσίαν αὐτῷ προστίθεσθαι, δεῖν δὲ οὐδὲν
202a2 προσφέρειν, εἴπερ αὐτὸ ἐκεῖνο μόνον τις ἐρεῖ. ἐπεὶ οὐδὲ

202a3 τὸ “αὐτὸ” οὐδὲ τὸ “ἐκεῖνο” οὐδὲ τὸ “ἕκαστον” οὐδὲ τὸ
202a4 “μόνον” οὐδὲ “τοῦτο” προσοιστέον οὐδ' ἄλλα πολλὰ
202a5 τοιαῦτα· ταῦτα μὲν γὰρ περιτρέχοντα πᾶσι προσφέρεσθαι,
202a6 ἕτερα ὄντα ἐκείνων οἷς προστίθεται, δεῖν δέ, εἴπερ ἦν
202a7 δυνατὸν αὐτὸ λέγεσθαι καὶ εἶχεν οἰκεῖον αὑτοῦ λόγον, ἄνευ
202a8 τῶν ἄλλων ἁπάντων λέγεσθαι. νῦν δὲ ἀδύνατον εἶναι
202b1 ὁτιοῦν τῶν πρώτων ῥηθῆναι λόγῳ· οὐ γὰρ εἶναι αὐτῷ ἀλλ'
202b2 ἢ ὀνομάζεσθαι μόνον—ὄνομα γὰρ μόνον ἔχειν—τὰ δὲ ἐκ
202b3 τούτων ἤδη συγκείμενα, ὥσπερ αὐτὰ πέπλεκται, οὕτω καὶ
202b4 τὰ ὀνόματα αὐτῶν συμπλακέντα λόγον γεγονέναι· ὀνομάτων
202b5 γὰρ συμπλοκὴν εἶναι λόγου οὐσίαν. οὕτω δὴ τὰ μὲν

Μένων

Πλάτων, *Μένων* 85b4

85b4 Καλοῦσιν δέ γε ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί· ὥστ' εἰ ταύτῃ

Πλάτων, *Μένων* 86e-87b

86e1 εἶναι ποῖόν τί ἐστιν ὃ μήπω ἴσμεν ὅτι ἐστίν. εἰ μή τι οὖν
86e2 ἀλλὰ σμικρόν γέ μοι τῆς ἀρχῆς χάλασον, καὶ συγχώρησον
86e3 ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι, εἴτε διδακτόν ἐστιν εἴτε
86e4 ὁπωσοῦν. λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέ-
86e5 τραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον
86e6 περὶ χωρίου, εἰ οἷόν τε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον
87a1 τρίγωνον ἐνταθῆναι, εἴποι ἄν τις ὅτι “Οὔπω οἶδα εἰ ἔστιν
87a2 τοῦτο τοιοῦτον, ἀλλ' ὥσπερ μέν τινα ὑπόθεσιν προὔργου
87a3 οἶμαι ἔχειν πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε· εἰ μέν ἐστιν τοῦτο τὸ
87a4 χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν
87a5 παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ
87a6 παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καὶ ἄλλο
87a7 αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστιν ταῦτα παθεῖν. ὑποθέμενος οὖν ἐθέλω
87b1 εἰπεῖν σοι τὸ συμβαῖνον περὶ τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ εἰς τὸν
87b2 κύκλον, εἴτε ἀδύνατον εἴτε μή.” οὕτω δὴ καὶ περὶ ἀρετῆς
87b3 ἡμεῖς, ἐπειδὴ οὐκ ἴσμεν οὔθ' ὅτι ἐστὶν οὔθ' ὁποῖόν τι, ὑπο-
87b4 θέμενοι αὐτὸ σκοπῶμεν εἴτε διδακτὸν εἴτε οὐ διδακτόν ἐστιν,
87b5 ὧδε λέγοντες· Εἰ ποῖόν τί ἐστιν τῶν περὶ τὴν ψυχὴν ὄντων
87b6 ἀρετή, διδακτὸν ἂν εἴη ἢ οὐ διδακτόν; πρῶτον μὲν δὴ εἰ
87b7 ἔστιν ἀλλοῖον ἢ οἷον ἐπιστήμη, ἆρα διδακτὸν ἢ οὔ, ἢ ὃ
87b8 νυνδὴ ἐλέγομεν, ἀναμνηστόν—διαφερέτω δὲ μηδὲν ἡμῖν

Νόμοι

Πλάτων, *Νόμοι* 942a-d

942a1 ἀποτίνειν αὐτὸν ἡ κρίσις γιγνέσθω· τὸν δὲ ἀστὸν καὶ
942a2 τεθραμμένον ὡς ἔσται τεθραμμένος, ἂν πατρίδα συλῶν ἢ
942a3 βιαζόμενος ἁλίσκηται, ἐάντ' ἐπ' αὐτοφώρῳ ἐάντε μή, σχεδὸν
942a4 ὡς ἀνίατον ὄντα θανάτῳ ζημιοῦν.
942a5 Στρατιῶν δὲ ἕνεκα πολλὴ μὲν συμβουλή, πολλοὶ δὲ
942a6 νόμοι γίγνονται κατὰ τρόπον, μέγιστον δὲ τὸ μηδέποτε

942a7 ἄναρχον μηδένα εἶναι, μήτ' ἄρρενα μήτε θήλειαν, μηδέ τινος
942a8 ἔθει ψυχὴν εἰθίσθαι μήτε σπουδάζοντος μήτ' ἐν παιδιαῖς
942b1 αὐτὸν ἐφ' αὑτοῦ τι κατὰ μόνας δρᾶν, ἀλλ' ἔν τε πολέμῳ
942b2 παντὶ καὶ ἐν εἰρήνῃ πάσῃ πρὸς τὸν ἄρχοντα ἀεὶ βλέποντα
942b3 καὶ συνεπόμενον ζῆν, καὶ τὰ βραχύταθ' ὑπ' ἐκείνου κυβερνώ-
942b4 μενον, οἷον ἑστάναι θ' ὅταν ἐπιτάττῃ τις καὶ πορεύεσθαι
942b5 καὶ γυμνάζεσθαι καὶ λοῦσθαι καὶ σιτεῖσθαι καὶ ἐγείρεσθαι
942b6 νύκτωρ εἴς τε φυλακὰς καὶ παραγγέλσεις, καὶ ἐν αὐτοῖς τοῖς
942b7 κινδύνοις μήτε τινὰ διώκειν μήθ' ὑποχωρεῖν ἄλλῳ ἄνευ τῆς
942c1 τῶν ἀρχόντων δηλώσεως, ἑνί τε λόγῳ τὸ χωρίς τι τῶν ἄλλων
942c2 πράττειν διδάξαι τὴν ψυχὴν ἔθεσι μήτε γιγνώσκειν μήτ'
942c3 ἐπίστασθαι τὸ παράπαν, ἀλλ' ἀθρόον ἀεὶ καὶ ἅμα καὶ κοινὸν
942c4 τὸν βίον ὅτι μάλιστα πᾶσι πάντων γίγνεσθαι—τούτου γὰρ
942c5 οὔτ' ἔστιν οὔτε ποτὲ μὴ γένηται κρεῖττον οὔτε ἄμεινον οὔτε
942c6 τεχνικώτερον εἰς σωτηρίαν τὴν κατὰ πόλεμον καὶ νίκην—
942c7 τοῦτο ἐν εἰρήνῃ μελετητέον εὐθὺς ἐκ τῶν παίδων, ἄρχειν τε
942c8 ἄλλων ἄρχεσθαί θ' ὑφ' ἑτέρων· τὴν δ' ἀναρχίαν ἐξαιρετέον
942d1 ἐκ παντὸς τοῦ βίου ἁπάντων τῶν ἀνθρώπων τε καὶ τῶν
942d2 ὑπ' ἀνθρώπους θηρίων. καὶ δὴ καὶ χορείας πάσας εἰς τὰς
942d3 ἀριστείας τὰς κατὰ πόλεμον βλεπούσας χορεύειν, καὶ ὅλην
942d4 εὐκολίαν τε καὶ εὐχέρειαν ἐπιτηδεύειν τῶν αὐτῶν εἵνεκα,
942d5 καρτερήσεις τε αὖ σίτων καὶ ποτῶν καὶ χειμώνων καὶ τῶν
942d6 ἐναντίων καὶ κοίτης σκληρᾶς, καὶ τὸ μέγιστον, τὴν τῆς
942d7 κεφαλῆς καὶ ποδῶν δύναμιν μὴ διαφθείρειν τῇ τῶν ἀλλο-
942d8 τρίων σκεπασμάτων περικαλυφῇ, τὴν τῶν οἰκείων ἀπολ-

Παρμενίδης

Πλάτων, *Παρμενίδης* 130e-131e

130e1 Νέος γὰρ εἶ ἔτι, φάναι τὸν Παρμενίδην, ὦ Σώκρατες,
130e2 καὶ οὔπω σου ἀντείληπται φιλοσοφία ὡς ἔτι ἀντιλήψεται
130e3 κατ' ἐμὴν δόξαν, ὅτε οὐδὲν αὐτῶν ἀτιμάσεις· νῦν δὲ ἔτι
130e4 πρὸς ἀνθρώπων ἀποβλέπεις δόξας διὰ τὴν ἡλικίαν. τόδε
130e5 δ' οὖν μοι εἰπέ. δοκεῖ σοι, ὡς φῄς, εἶναι εἴδη ἄττα, ὧν τάδε
130e6 τὰ ἄλλα μεταλαμβάνοντα τὰς ἐπωνυμίας αὐτῶν ἴσχειν, οἷον
131a1 ὁμοιότητος μὲν μεταλαβόντα ὅμοια, μεγέθους δὲ μεγάλα,
131a2 κάλλους δὲ καὶ δικαιοσύνης δίκαιά τε καὶ καλὰ γίγνεσθαι;
131a3 Πάνυ γε, φάναι τὸν Σωκράτη.
131a4 Οὐκοῦν ἤτοι ὅλου τοῦ εἴδους ἢ μέρους ἕκαστον τὸ μετα-
131a5 λαμβάνον μεταλαμβάνει; ἢ ἄλλη τις ἂν μετάληψις χωρὶς
131a6 τούτων γένοιτο;
131a7 Καὶ πῶς ἄν; εἶπεν.
131a8 Πότερον οὖν δοκεῖ σοι ὅλον τὸ εἶδος ἐν ἑκάστῳ εἶναι
131a9 τῶν πολλῶν ἓν ὄν, ἢ πῶς;
131a10 Τί γὰρ κωλύει, φάναι τὸν Σωκράτη, ὦ Παρμενίδη, [ἓν
131a11 εἶναι];
131b1 Ἓν ἄρα ὂν καὶ ταὐτὸν ἐν πολλοῖς καὶ χωρὶς οὖσιν ὅλον
131b2 ἅμα ἐνέσται, καὶ οὕτως αὐτὸ αὑτοῦ χωρὶς ἂν εἴη.
131b3 Οὐκ ἄν, εἴ γε, φάναι, οἷον [εἰ] ἡμέρα [εἴη] μία καὶ ἡ
131b4 αὐτὴ οὖσα πολλαχοῦ ἅμα ἐστὶ καὶ οὐδέν τι μᾶλλον αὐτὴ

131b5 αὐτῆς χωρίς ἐστιν, εἰ οὕτω καὶ ἕκαστον τῶν εἰδῶν ἓν ἐν
131b6 πᾶσιν ἅμα ταὐτὸν εἴη.
131b7 Ἡδέως γε, φάναι, ὦ Σώκρατες, ἓν ταὐτὸν ἅμα πολλαχοῦ
131b8 ποιεῖς, οἷον εἰ ἱστίῳ καταπετάσας πολλοὺς ἀνθρώπους φαίης
131b9 ἓν ἐπὶ πολλοῖς εἶναι ὅλον· ἢ οὐ τὸ τοιοῦτον ἡγῇ λέγειν;
131c1 Ἴσως, φάναι.
131c2 Ἦ οὖν ὅλον ἐφ' ἑκάστῳ τὸ ἱστίον εἴη ἄν, ἢ μέρος αὐτοῦ
131c3 ἄλλο ἐπ' ἄλλῳ;
131c4 Μέρος.
131c5 Μεριστὰ ἄρα, φάναι, ὦ Σώκρατες, ἔστιν αὐτὰ τὰ εἴδη,
131c6 καὶ τὰ μετέχοντα αὐτῶν μέρους ἂν μετέχοι, καὶ οὐκέτι ἐν
131c7 ἑκάστῳ ὅλον, ἀλλὰ μέρος ἑκάστου ἂν εἴη.
131c8 Φαίνεται οὕτω γε.
131c9 Ἦ οὖν ἐθελήσεις, ὦ Σώκρατες, φάναι τὸ ἓν εἶδος ἡμῖν
131c10 τῇ ἀληθείᾳ μερίζεσθαι, καὶ ἔτι ἓν ἔσται;
131c11 Οὐδαμῶς, εἰπεῖν.
131c12 Ὅρα γάρ, φάναι· εἰ αὐτὸ τὸ μέγεθος μεριεῖς καὶ ἕκαστον
131d1 τῶν πολλῶν μεγάλων μεγέθους μέρει σμικροτέρῳ αὐτοῦ τοῦ
131d2 μεγέθους μέγα ἔσται, ἆρα οὐκ ἄλογον φανεῖται;
131d3 Πάνυ γ', ἔφη.
131d4 Τί δέ; τοῦ ἴσου μέρος ἕκαστον σμικρὸν ἀπολαβόν τι
131d5 ἕξει ᾧ ἐλάττονι ὄντι αὐτοῦ τοῦ ἴσου τὸ ἔχον ἴσον τῳ ἔσται;
131d6 Ἀδύνατον.
131d7 Ἀλλὰ τοῦ σμικροῦ μέρος τις ἡμῶν ἕξει, τούτου δὲ αὐτοῦ
131d8 τὸ σμικρὸν μεῖζον ἔσται ἅτε μέρους ἑαυτοῦ ὄντος, καὶ οὕτω
131d9 δὴ αὐτὸ τὸ σμικρὸν μεῖζον ἔσται· ᾧ δ' ἂν προστεθῇ τὸ
131e1 ἀφαιρεθέν, τοῦτο σμικρότερον ἔσται ἀλλ' οὐ μεῖζον ἢ πρίν.
131e2 Οὐκ ἂν γένοιτο, φάναι, τοῦτό γε.
131e3 Τίνα οὖν τρόπον, εἰπεῖν, ὦ Σώκρατες, τῶν εἰδῶν σοι
131e4 τὰ ἄλλα μεταλήψεται, μήτε κατὰ μέρη μήτε κατὰ ὅλα
131e5 μεταλαμβάνειν δυνάμενα;
131e6 Οὐ μὰ τὸν Δία, φάναι, οὔ μοι δοκεῖ εὔκολον εἶναι τὸ
131e7 τοιοῦτον οὐδαμῶς διορίσασθαι.
131e8 Τί δὲ δή; πρὸς τόδε πῶς ἔχεις;
131e9 Τὸ ποῖον;

Πλάτων, *Παρμενίδης* 138a3-7

138a3 ἄλλῳ οὔτε ἐν ἑαυτῷ εἴη. — Πῶς δή; — Ἐν ἄλλῳ μὲν ὂν
138a4 κύκλῳ που ἂν περιέχοιτο ὑπ' ἐκείνου ἐν ᾧ ἐνείη, καὶ
138a5 πολλαχοῦ ἂν αὐτοῦ ἅπτοιτο πολλοῖς· τοῦ δὲ ἑνός τε καὶ
138a6 ἀμεροῦς καὶ κύκλου μὴ μετέχοντος ἀδύνατον πολλαχῇ κύκλῳ
138a7 ἅπτεσθαι. — Ἀδύνατον. — Ἀλλὰ μὴν αὐτό γε ἐν ἑαυτῷ ὂν

Πλάτων, *Παρμενίδης* 142b1-155e3

Πολιτεία

Πλάτων, *Πολιτεία* 509d-510b

509d1 Νόησον τοίνυν, ἦν δ' ἐγώ, ὥσπερ λέγομεν, δύο αὐτὼ εἶναι,
509d2 καὶ βασιλεύειν τὸ μὲν νοητοῦ γένους τε καὶ τόπου, τὸ δ' αὖ

509d3 ὁρατοῦ, ἵνα μὴ οὐρανοῦ εἰπὼν δόξω σοι σοφίζεσθαι περὶ τὸ
509d4 ὄνομα. ἀλλ' οὖν ἔχεις ταῦτα διττὰ εἴδη, ὁρατόν, νοητόν;
509d5 Ἔχω.
509d6 Ὥσπερ τοίνυν γραμμὴν δίχα τετμημένην λαβὼν ἄνισα
509d7 τμήματα, πάλιν τέμνε ἑκάτερον τὸ τμῆμα ἀνὰ τὸν αὐτὸν λό-
509d8 γον, τό τε τοῦ ὁρωμένου γένους καὶ τὸ τοῦ νοουμένου, καί σοι
509d9 ἔσται σαφηνείᾳ καὶ ἀσαφείᾳ πρὸς ἄλληλα ἐν μὲν τῷ ὁρωμένῳ
509e1 τὸ μὲν ἕτερον τμῆμα εἰκόνες—λέγω δὲ τὰς εἰκόνας πρῶτον
510a1 μὲν τὰς σκιάς, ἔπειτα τὰ ἐν τοῖς ὕδασι φαντάσματα καὶ ἐν
510a2 τοῖς ὅσα πυκνά τε καὶ λεῖα καὶ φανὰ συνέστηκεν, καὶ πᾶν τὸ
510a3 τοιοῦτον, εἰ κατανοεῖς.
510a4 Ἀλλὰ κατανοῶ.
510a5 Τὸ τοίνυν ἕτερον τίθει ᾧ τοῦτο ἔοικεν, τά τε περὶ ἡμᾶς ζῷς
510a6 καὶ πᾶν τὸ φυτευτὸν καὶ τὸ σκευαστὸν ὅλον γένος.
510a7 Τίθημι, ἔφη.
510a8 Ἦ καὶ ἐθέλοις ἂν αὐτὸ φάναι, ἦν δ' ἐγώ, διῃρῆσθαι
510a9 ἀληθείᾳ τε καὶ μή, ὡς τὸ δοξαστὸν πρὸς τὸ γνωστόν, οὕτω
510a10 τὸ ὁμοιωθὲν πρὸς τὸ ᾧ ὡμοιώθη;
510b1 Ἔγωγ', ἔφη, καὶ μάλα.
510b2 Σκόπει δὴ αὖ καὶ τὴν τοῦ νοητοῦ τομὴν ᾗ τμητέον.
510b3 Πῇ;
510b4 Ἧι τὸ μὲν αὐτοῦ τοῖς τότε μιμηθεῖσιν ὡς εἰκόσιν χρωμένη
510b5 ψυχὴ ζητεῖν ἀναγκάζεται ἐξ ὑποθέσεων, οὐκ ἐπ' ἀρχὴν
510b6 πορευομένη ἀλλ' ἐπὶ τελευτήν, τὸ δ' αὖ ἕτερον—τὸ ἐπ'
510b7 ἀρχὴν ἀνυπόθετον—ἐξ ὑποθέσεως ἰοῦσα καὶ ἄνευ τῶν περὶ
510b8 ἐκεῖνο εἰκόνων, αὐτοῖς εἴδεσι δι' αὐτῶν τὴν μέθοδον ποιου-
510b9 μένη.
510b10 Ταῦτ', ἔφη, ἃ λέγεις, οὐχ ἱκανῶς ἔμαθον.

Πλάτων, *Πολιτεία* 510d5-511a1

510d5 Οὐκοῦν καὶ ὅτι τοῖς ὁρωμένοις εἴδεσι προσχρῶνται καὶ τοὺς
510d6 λόγους περὶ αὐτῶν ποιοῦνται, οὐ περὶ τούτων διανοούμενοι,
510d7 ἀλλ' ἐκείνων πέρι οἷς ταῦτα ἔοικε, τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ
510d8 ἕνεκα τοὺς λόγους ποιούμενοι καὶ διαμέτρου αὐτῆς, ἀλλ' οὐ
510e1 ταύτης ἣν γράφουσιν, καὶ τἆλλα οὕτως, αὐτὰ μὲν ταῦτα ἃ
510e2 πλάττουσίν τε καὶ γράφουσιν, ὧν καὶ σκιαὶ καὶ ἐν ὕδασιν
510e3 εἰκόνες εἰσίν, τούτοις μὲν ὡς εἰκόσιν αὖ χρώμενοι, ζητοῦντες
511a1 δὲ αὐτὰ ἐκεῖνα ἰδεῖν ἃ οὐκ ἂν ἄλλως ἴδοι τις ἢ τῇ διανοίᾳ.

Πλάτων, *Πολιτεία* 546b-c

546b1 οὓς ἡγεμόνας πόλεως ἐπαιδεύσασθε, οὐδὲν μᾶλλον λογισμῷ
546b2 μετ' αἰσθήσεως τεύξονται, ἀλλὰ πάρεισιν αὐτοὺς καὶ γεν-
546b3 νήσουσι παῖδάς ποτε οὐ δέον. ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ
546b4 περίοδος ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος, ἀνθρωπείῳ δὲ
546b5 ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς
546b6 ἀποστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ
546b7 ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήγορα
546c1 καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν· ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν
546c2 πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς,
546c3 τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη
546c4 μὲν τῇ, προμήκη δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων

546c5 ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν,
546c6 ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος. σύμπας δὲ οὗτος ἀριθμὸς γεω-
546c7 μετρικός, τοιούτου κύριος, ἀμεινόνων τε καὶ χειρόνων γε-

Πολιτικός

Πλάτων, *Πολιτικός* 258b-261e

258b1 ΞΕ. Οὐ τὰ σὰ κωλύειν φαίνεται, δεῖ δὲ ἴσως ἔτι ἧττον
258b2 τἀμὰ διακωλύειν. ἀλλὰ δὴ μετὰ τὸν σοφιστὴν ἀναγκαῖον, ὡς
258b3 ἐμοὶ φαίνεται, πολιτικὸν [τὸν ἄνδρα] διαζητεῖν νῷν· καί μοι λέγε
258b4 πότερον τῶν ἐπιστημόνων τιν' ἡμῖν καὶ τοῦτον θετέον, ἢ πῶς;
258b5 ΝΕ. ΣΩ. Οὕτως.
258b6 ΞΕ. Τὰς ἐπιστήμας ἄρα διαληπτέον, ὥσπερ ἡνίκα τὸν
258b7 πρότερον ἐσκοποῦμεν;
258b8 ΝΕ. ΣΩ. Τάχ' ἄν.
258b9 ΞΕ. Οὐ μὲν δὴ κατὰ ταὐτόν γε, ὦ Σώκρατες, φαίνεταί
258b10 μοι τμῆμα.
258b11 ΝΕ. ΣΩ. Τί μήν;
258c1 ΞΕ. Κατ' ἄλλο.
258c2 ΝΕ. ΣΩ. Ἔοικέν γε.
258c3 ΞΕ. Τὴν οὖν πολιτικὴν ἀτραπὸν πῇ τις ἀνευρήσει;
258c4 δεῖ γὰρ αὐτὴν ἀνευρεῖν, καὶ χωρὶς ἀφελόντας ἀπὸ τῶν
258c5 ἄλλων ἰδέαν αὐτῇ μίαν ἐπισφραγίσασθαι, καὶ ταῖς ἄλλαις
258c6 ἐκτροπαῖς ἓν ἄλλο εἶδος ἐπισημηναμένους πάσας τὰς
258c7 ἐπιστήμας ὡς οὔσας δύο εἴδη διανοηθῆναι τὴν ψυχὴν ἡμῶν
258c8 ποιῆσαι.
258c9 ΝΕ. ΣΩ. Τοῦτ' ἤδη σὸν οἶμαι τὸ ἔργον, ὦ ξένε, ἀλλ'
258c10 οὐκ ἐμὸν γίγνεται.
258d1 ΞΕ. Δεῖ γε μήν, ὦ Σώκρατες, αὐτὸ εἶναι καὶ σόν, ὅταν
258d2 ἐμφανὲς ἡμῖν γένηται.
258d3 ΝΕ. ΣΩ. Καλῶς εἶπες.
258d4 ΞΕ. Ἆρ' οὖν οὐκ ἀριθμητικὴ μὲν καί τινες ἕτεραι ταύτῃ
258d5 συγγενεῖς τέχναι ψιλαὶ τῶν πράξεών εἰσι, τὸ δὲ γνῶναι
258d6 παρέσχοντο μόνον;
258d7 ΝΕ. ΣΩ. Ἔστιν οὕτως.
258d8 ΞΕ. Αἱ δέ γε περὶ τεκτονικὴν αὖ καὶ σύμπασαν χει-
258d9 ρουργίαν ὥσπερ ἐν ταῖς πράξεσιν ἐνοῦσαν σύμφυτον τὴν
258e1 ἐπιστήμην κέκτηνται, καὶ συναποτελοῦσι τὰ γιγνόμενα ὑπ'
258e2 αὐτῶν σώματα πρότερον οὐκ ὄντα.
258e3 ΝΕ. ΣΩ. Τί μήν;
258e4 ΞΕ. Ταύτῃ τοίνυν συμπάσας ἐπιστήμας διαίρει, τὴν μὲν
258e5 πρακτικὴν προσειπών, τὴν δὲ μόνον γνωστικήν.
258e6 ΝΕ. ΣΩ. Ἔστω σοι ταῦθ' ὡς μιᾶς ἐπιστήμης τῆς ὅλης
258e7 εἴδη δύο.
258e8 ΞΕ. Πότερον οὖν τὸν πολιτικὸν καὶ βασιλέα καὶ
258e9 δεσπότην καὶ ἔτ' οἰκονόμον θήσομεν ὡς ἓν πάντα ταῦτα
258e10 προσαγορεύοντες, ἢ τοσαύτας τέχνας αὐτὰς εἶναι φῶμεν
258e11 ὅσαπερ ὀνόματα ἐρρήθη; μᾶλλον δέ μοι δεῦρο ἕπου.
258e12 ΝΕ. ΣΩ. Πῇ;
259a1 ΞΕ. Τῇδε. εἴ τῳ τις τῶν δημοσιευόντων ἰατρῶν ἱκανὸς

259a2 συμβουλεύειν ἰδιωτεύων αὐτός, ἆρ' οὐκ ἀναγκαῖον αὐτῷ
259a3 προσαγορεύεσθαι τοὔνομα τῆς τέχνης ταὐτὸν ὅπερ ᾧ συμ-
259a4 βουλεύει;
259a5 ΝΕ. ΣΩ. Ναί.
259a6 ΞΕ. Τί δ'; ὅστις βασιλεύοντι χώρας ἀνδρὶ παραινεῖν
259a7 δεινὸς ἰδιώτης ὢν αὐτός, ἆρ' οὐ φήσομεν ἔχειν αὐτὸν τὴν
259a8 ἐπιστήμην ἣν ἔδει τὸν ἄρχοντα αὐτὸν κεκτῆσθαι;
259a9 ΝΕ. ΣΩ. Φήσομεν.
259b1 ΞΕ. Ἀλλὰ μὴν ἥ γε ἀληθινοῦ βασιλέως βασιλική;
259b2 ΝΕ. ΣΩ. Ναί.
259b3 ΞΕ. Ταύτην δὲ ὁ κεκτημένος οὐκ, ἄντε ἄρχων ἄντε
259b4 ἰδιώτης ὢν τυγχάνῃ, πάντως κατά γε τὴν τέχνην αὐτὴν
259b5 βασιλικὸς ὀρθῶς προσρηθήσεται;
259b6 ΝΕ. ΣΩ. Δίκαιον γοῦν.
259b7 ΞΕ. Καὶ μὴν οἰκονόμος γε καὶ δεσπότης ταὐτόν.
259b8 ΝΕ. ΣΩ. Τί μήν;
259b9 ΞΕ. Τί δέ; μεγάλης σχῆμα οἰκήσεως ἢ σμικρᾶς αὖ
259b10 πόλεως ὄγκος μῶν τι πρὸς ἀρχὴν διοίσετον;
259b11 ΝΕ. ΣΩ. Οὐδέν.
259c1 ΞΕ. Οὐκοῦν, ὃ νυνδὴ διεσκοπούμεθα, φανερὸν ὡς ἐπι-
259c2 στήμη μία περὶ πάντ' ἐστὶ ταῦτα· ταύτην δὲ εἴτε βασιλικὴν
259c3 εἴτε πολιτικὴν εἴτε οἰκονομικήν τις ὀνομάζει, μηδὲν αὐτῷ
259c4 διαφερώμεθα.
259c5 ΝΕ. ΣΩ. Τί γάρ;
259c6 ΞΕ. Ἀλλὰ μὴν τόδε γε δῆλον, ὡς βασιλεὺς ἅπας χερσὶ
259c7 καὶ σύμπαντι τῷ σώματι σμίκρ' ἄττα εἰς τὸ κατέχειν τὴν
259c8 ἀρχὴν δύναται πρὸς τὴν τῆς ψυχῆς σύνεσιν καὶ ῥώμην.
259c9 ΝΕ. ΣΩ. Δῆλον.
259c10 ΞΕ. Τῆς δὴ γνωστικῆς μᾶλλον ἢ τῆς χειροτεχνικῆς καὶ
259d1 ὅλως πρακτικῆς βούλει τὸν βασιλέα φῶμεν οἰκειότερον εἶναι;
259d2 ΝΕ. ΣΩ. Τί μήν;
259d3 ΞΕ. Τὴν ἄρα πολιτικὴν καὶ πολιτικὸν καὶ βασιλικὴν καὶ
259d4 βασιλικὸν εἰς ταὐτὸν ὡς ἓν πάντα ταῦτα συνθήσομεν;
259d5 ΝΕ. ΣΩ. Δῆλον.
259d6 ΞΕ. Οὐκοῦν πορευοίμεθ' ἂν ἑξῆς, εἰ μετὰ ταῦτα τὴν
259d7 γνωστικὴν διοριζοίμεθα;
259d8 ΝΕ. ΣΩ. Πάνυ γε.
259d9 ΞΕ. Πρόσεχε δὴ τὸν νοῦν ἂν ἄρα ἐν αὐτῇ τινα διαφυὴν
259d10 κατανοήσωμεν.
259d11 ΝΕ. ΣΩ. Φράζε ποίαν.
259e1 ΞΕ. Τοιάνδε. λογιστική πού τις ἡμῖν ἦν τέχνη.
259e2 ΝΕ. ΣΩ. Ναί.
259e3 ΞΕ. Τῶν γνωστικῶν γε οἶμαι παντάπασι τεχνῶν.
259e4 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ' οὔ;
259e5 ΞΕ. Γνούσῃ δὴ λογιστικῇ τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς διαφορὰν
259e6 μῶν τι πλέον ἔργον δώσομεν ἢ τὰ γνωσθέντα κρῖναι;
259e7 ΝΕ. ΣΩ. Τί μήν;
259e8 ΞΕ. Καὶ γὰρ ἀρχιτέκτων γε πᾶς οὐκ αὐτὸς ἐργατικὸς
259e9 ἀλλ' ἐργατῶν ἄρχων.
259e10 ΝΕ. ΣΩ. Ναί.
259e11 ΞΕ. Παρεχόμενός γέ που γνῶσιν ἀλλ' οὐ χειρουργίαν.

259e12 ΝΕ. ΣΩ. Οὕτως.
260a1 ΞΕ. Δικαίως δὴ μετέχειν ἂν λέγοιτο τῆς γνωστικῆς
260a2 ἐπιστήμης.
260a3 ΝΕ. ΣΩ. Πάνυ γε.
260a4 ΞΕ. Τούτῳ δέ γε οἶμαι προσήκει κρίναντι μὴ τέλος
260a5 ἔχειν μηδ' ἀπηλλάχθαι, καθάπερ ὁ λογιστὴς ἀπήλλακτο,
260a6 προστάττειν δὲ ἑκάστοις τῶν ἐργατῶν τό γε πρόσφορον ἕως
260a7 ἂν ἀπεργάσωνται τὸ προσταχθέν.
260a8 ΝΕ. ΣΩ. Ὀρθῶς.
260a9 ΞΕ. Οὐκοῦν γνωστικαὶ μὲν αἵ τε τοιαῦται σύμπασαι καὶ
260a10 ὁπόσαι συνέπονται τῇ λογιστικῇ, κρίσει δὲ καὶ ἐπιτάξει
260b1 διαφέρετον ἀλλήλοιν τούτω τὼ γένη;
260b2 ΝΕ. ΣΩ. Φαίνεσθον.
260b3 ΞΕ. Ἆρ' οὖν συμπάσης τῆς γνωστικῆς εἰ τὸ μὲν ἐπι-
260b4 τακτικὸν μέρος, τὸ δὲ κριτικὸν διαιρούμενοι προσείποιμεν,
260b5 ἐμμελῶς ἂν φαῖμεν διῃρῆσθαι;
260b6 ΝΕ. ΣΩ. Κατά γε τὴν ἐμὴν δόξαν.
260b7 ΞΕ. Ἀλλὰ μὴν τοῖς γε κοινῇ τι πράττουσιν ἀγαπητὸν
260b8 ὁμονοεῖν.
260b9 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ' οὔ;
260b10 ΞΕ. Τούτου τοίνυν μέχριπερ ἂν αὐτοὶ κοινωνῶμεν, ἐατέον
260b11 τά γε τῶν ἄλλων δοξάσματα χαίρειν.
260b12 ΝΕ. ΣΩ. Τί μήν;
260c1 ΞΕ. Φέρε δή, τούτοιν τοῖν τέχναιν ἡμῖν τὸν βασιλικὸν
260c2 ἐν ποτέρᾳ θετέον; ἆρ' ἐν τῇ κριτικῇ, καθάπερ τινὰ θεατήν,
260c3 ἢ μᾶλλον τῆς ἐπιτακτικῆς ὡς ὄντα αὐτὸν τέχνης θήσομεν,
260c4 δεσπόζοντά γε;
260c5 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς γὰρ οὐ μᾶλλον;
260c6 ΞΕ. Τὴν ἐπιτακτικὴν δὴ τέχνην πάλιν ἂν εἴη θεατέον
260c7 εἴ πῃ διέστηκεν. καί μοι δοκεῖ τῇδέ πῃ, καθάπερ ἡ τῶν
260c8 καπήλων τέχνη τῆς τῶν αὐτοπωλῶν διώρισται τέχνης, καὶ
260d1 τὸ βασιλικὸν γένος ἔοικεν ἀπὸ τοῦ τῶν κηρύκων γένους
260d2 ἀφωρίσθαι.
260d3 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς;
260d4 ΞΕ. Πωληθέντα που πρότερον ἔργα ἀλλότρια παρα-
260d5 δεχόμενοι δεύτερον πωλοῦσι πάλιν οἱ κάπηλοι.
260d6 ΝΕ. ΣΩ. Πάνυ μὲν οὖν.
260d7 ΞΕ. Οὐκοῦν καὶ τὸ κηρυκικὸν φῦλον ἐπιταχθέντ' ἀλλό-
260d8 τρια νοήματα παραδεχόμενον αὐτὸ δεύτερον ἐπιτάττει πάλιν
260d9 ἑτέροις.
260d10 ΝΕ. ΣΩ. Ἀληθέστατα.
260d11 ΞΕ. Τί οὖν; εἰς ταὐτὸν μείξομεν βασιλικὴν ἑρμηνευτικῇ,
260e1 κελευστικῇ, μαντικῇ, κηρυκικῇ, καὶ πολλαῖς ἑτέραις τούτων
260e2 τέχναις συγγενέσιν, αἳ σύμπασαι τό γ' ἐπιτάττειν ἔχουσιν;
260e3 ἢ βούλει, καθάπερ ᾐκάζομεν νυνδή, καὶ τοὔνομα παρεικάσω-
260e4 μεν, ἐπειδὴ καὶ σχεδὸν ἀνώνυμον ὂν τυγχάνει τὸ τῶν αὐτ-
260e5 επιτακτῶν γένος, καὶ ταύτῃ ταῦτα διελώμεθα, τὸ μὲν τῶν
260e6 βασιλέων γένος εἰς τὴν αὐτεπιτακτικὴν θέντες, τοῦ δὲ ἄλλου
260e7 παντὸς ἀμελήσαντες, ὄνομα ἕτερον αὐτοῖς παραχωρήσαντες
260e8 θέσθαι τινά; τοῦ γὰρ ἄρχοντος ἕνεκα ἡμῖν ἡ μέθοδος ἦν
261a1 ἀλλ' οὐχὶ τοῦ ἐναντίου.

261a2 ΝΕ. ΣΩ. Πάνυ μὲν οὖν.
261a3 ΞΕ. Οὐκοῦν ἐπειδὴ τοῦτο μετρίως ἀφέστηκεν ἀπ' ἐκείνων,
261a4 ἀλλοτριότητι διορισθὲν πρὸς οἰκειότητα, τοῦτο αὐτὸ πάλιν αὖ
261a5 διαιρεῖν ἀναγκαῖον, εἴ τινα τομὴν ἔτι ἔχομεν ὑπείκουσαν ἐν
261a6 τούτῳ;
261a7 ΝΕ. ΣΩ. Πάνυ γε.
261a8 ΞΕ. Καὶ μὴν φαινόμεθα ἔχειν· ἀλλ' ἐπακολουθῶν σύν-
261a9 τεμνε.
261a10 ΝΕ. ΣΩ. Πῇ;
261a11 ΞΕ. Πάντας ὁπόσους ἂν ἄρχοντας διανοηθῶμεν ἐπιτάξει
261b1 προσχρωμένους ἆρ' οὐχ εὑρήσομεν γενέσεώς τινος ἕνεκα
261b2 προστάττοντας;
261b3 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ' οὔ;
261b4 ΞΕ. Καὶ μὴν τά γε γιγνόμενα πάντα δίχα διαλαβεῖν οὐ
261b5 παντάπασι χαλεπόν.
261b6 ΝΕ. ΣΩ. Πῇ;
261b7 ΞΕ. Τὰ μὲν ἄψυχα αὐτῶν ἐστί που συμπάντων, τὰ δ'
261b8 ἔμψυχα.
261b9 ΝΕ. ΣΩ. Ναί.
261b10 ΞΕ. Τούτοις δέ γε αὐτοῖς τὸ τοῦ γνωστικοῦ μέρος
261b11 ἐπιτακτικὸν ὄν, εἴπερ βουλόμεθα τέμνειν, τεμοῦμεν.
261b12 ΝΕ. ΣΩ. Κατὰ τί;
261b13 ΞΕ. Τὸ μὲν ἐπὶ ταῖς τῶν ἀψύχων γενέσεσιν αὐτοῦ τάτ-
261c1 τοντες, τὸ δ' ἐπὶ <ταῖς> τῶν ἐμψύχων· καὶ πᾶν οὕτως ἤδη
261c2 διαιρήσεται δίχα.
261c3 ΝΕ. ΣΩ. Παντάπασί γε.
261c4 ΞΕ. Τὸ μὲν τοίνυν αὐτῶν παραλίπωμεν, τὸ δ' ἀναλάβω-
261c5 μεν, ἀναλαβόντες δὲ μερισώμεθα εἰς δύο τὸ σύμπαν.
261c6 ΝΕ. ΣΩ. Λέγεις δ' αὐτοῖν ἀναληπτέον εἶναι πότερον;
261c7 ΞΕ. Πάντως που τὸ περὶ τὰ ζῷα ἐπιτακτικόν. οὐ γὰρ
261c8 δὴ τό γε τῆς βασιλικῆς ἐπιστήμης ἐστί ποτε τῶν ἀψύχων
261c9 ἐπιστατοῦν, οἷον ἀρχιτεκτονικόν, ἀλλὰ γενναιότερον, ἐν τοῖς
261d1 ζῴοις καὶ περὶ αὐτὰ ταῦτα τὴν δύναμιν ἀεὶ κεκτημένον.
261d2 ΝΕ. ΣΩ. Ὀρθῶς.
261d3 ΞΕ. Τήν γε μὴν τῶν ζῴων γένεσιν καὶ τροφὴν τὴν μέν
261d4 τις ἂν ἴδοι μονοτροφίαν οὖσαν, τὴν δὲ κοινὴν τῶν ἐν ταῖς
261d5 ἀγέλαις θρεμμάτων ἐπιμέλειαν.
261d6 ΝΕ. ΣΩ. Ὀρθῶς.
261d7 ΞΕ. Ἀλλ' οὐ μὴν τόν γε πολιτικὸν εὑρήσομεν ἰδιοτρόφον,
261d8 ὥσπερ βοηλάτην ἤ τινα ἱπποκόμον, ἀλλ' ἱπποφορβῷ τε καὶ
261d9 βουφορβῷ μᾶλλον προσεοικότα.
261d10 ΝΕ. ΣΩ. Φαίνεταί γε δὴ ῥηθὲν νῦν.
261e1 ΞΕ. Πότερον οὖν τῆς ζῳοτροφίας τὴν τῶν συμπόλλων
261e2 κοινὴν τροφὴν ἀγελαιοτροφίαν ἢ κοινοτροφικήν τινα ὀνο-
261e3 μάζομεν;
261e4 ΝΕ. ΣΩ. Ὁπότερον ἂν ἐν τῷ λόγῳ συμβαίνῃ.
261e5 ΞΕ. Καλῶς γε, ὦ Σώκρατες· κἂν διαφυλάξῃς τὸ μὴ
261e6 σπουδάζειν ἐπὶ τοῖς ὀνόμασιν, πλουσιώτερος εἰς τὸ γῆρας
261e7 ἀναφανήσῃ φρονήσεως. νῦν δὲ τοῦτο μέν, καθάπερ δια-
261e8 κελεύῃ, ποιητέον· τὴν δὲ ἀγελαιοτροφικὴν ἆρ' ἐννοεῖς πῇ

Πλάτων, *Πολιτικός* 264b-266d

264b1 πρὸς τῇ πολιτικῇ. πεποίηκε γὰρ ἡμᾶς καὶ νῦν παθεῖν τὸ
264b2 κατὰ τὴν παροιμίαν πάθος.
264b3 ΝΕ. ΣΩ. Ποῖον;
264b4 ΞΕ. Οὐχ ἡσύχους εὖ διαιροῦντας ἠνυκέναι βραδύτερον.
264b5 ΝΕ. ΣΩ. Καὶ καλῶς γε, ὦ ξένε, πεποίηκε.
264b6 ΞΕ. Ταῦτ' ἔστω. πάλιν δ' οὖν ἐξ ἀρχῆς τὴν κοινο-
264b7 τροφικὴν πειρώμεθα διαιρεῖν· ἴσως γὰρ καὶ τοῦτο ὃ σὺ
264b8 προθυμῇ διαπεραινόμενος ὁ λόγος αὐτός σοι κάλλιον μηνύσει.
264b9 καί μοι φράζε.
264b10 ΝΕ. ΣΩ. Ποῖον δή;
264b11 ΞΕ. Τόδε, εἴ τινων πολλάκις ἄρα διακήκοας· οὐ γὰρ δὴ
264c1 προστυχής γε αὐτὸς οἶδ' ὅτι γέγονας ταῖς ἐν τῷ Νείλῳ
264c2 τιθασείαις τῶν ἰχθύων καὶ τῶν ἐν ταῖς βασιλικαῖς λίμναις.
264c3 ἐν μὲν γὰρ κρήναις τάχ' ἂν ἴσως εἴης ᾐσθημένος.
264c4 ΝΕ. ΣΩ. Πάνυ μὲν οὖν καὶ ταῦτα τεθέαμαι κἀκεῖνα
264c5 πολλῶν ἀκήκοα.
264c6 ΞΕ. Καὶ μὴν χηνοβωτίας γε καὶ γερανοβωτίας, εἰ καὶ
264c7 μὴ πεπλάνησαι περὶ τὰ Θετταλικὰ πεδία, πέπυσαι γοῦν
264c8 καὶ πιστεύεις εἶναι.
264c9 ΝΕ. ΣΩ. Τί μήν;
264d1 ΞΕ. Τοῦδ' ἕνεκά τοι πάντα ἠρώτησα ταῦτα, διότι
264d2 τῆς τῶν ἀγελαίων τροφῆς ἔστι μὲν ἔνυδρον, ἔστι δὲ καὶ
264d3 ξηροβατικόν.
264d4 ΝΕ. ΣΩ. Ἔστι γὰρ οὖν.
264d5 ΞΕ. Ἆρ' οὖν καὶ σοὶ συνδοκεῖ ταύτῃ δεῖν διχάζειν τὴν
264d6 κοινοτροφικὴν ἐπιστήμην, ἐφ' ἑκατέρῳ τούτων τὸ μέρος
264d7 αὐτῆς ἐπινέμοντας ἑκάτερον, τὸ μὲν ἕτερον ὑγροτροφικὸν
264d8 ὀνομάζοντας, τὸ δ' ἕτερον ξηροτροφικόν;
264d9 ΝΕ. ΣΩ. Ἔμοιγε.
264d10 ΞΕ. Καὶ μὴν καὶ τὸ βασιλικὸν οὕτως οὐ ζητήσομεν
264e1 ὁποτέρας ἐστὶ τῆς τέχνης· δῆλον [δὴ] γὰρ παντί.
264e2 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ' οὔ;
264e3 ΞΕ. Πᾶς μὲν δὴ τό γε ξηροτροφικὸν τῆς ἀγελαιοτροφίας
264e4 διέλοιτ' ἂν φῦλον.
264e5 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς;
264e6 ΞΕ. Τῷ πτηνῷ τε καὶ πεζῷ διορισάμενος.
264e7 ΝΕ. ΣΩ. Ἀληθέστατα.
264e8 ΞΕ. Τί δέ; τὸ πολιτικὸν ἢ περὶ τὸ πεζὸν ζητητέον; ἢ
264e9 οὐκ οἴει καὶ τὸν ἀφρονέστατον ὡς ἔπος εἰπεῖν δοξάζειν
264e10 οὕτως;
264e11 ΝΕ. ΣΩ. Ἔγωγε.
264e12 ΞΕ. Τὴν δὲ πεζονομικήν, καθάπερ ἄρτι τὸν ἀριθμόν, δεῖ
264e13 τεμνομένην δίχα ἀποφαίνειν.
264e14 ΝΕ. ΣΩ. Δῆλον.
265a1 ΞΕ. Καὶ μὴν ἐφ' ὅ γε μέρος ὥρμηκεν ἡμῖν ὁ λόγος, ἐπ'
265a2 ἐκεῖνο δύο τινὲ καθορᾶν ὁδὼ τεταμένα φαίνεται, τὴν μὲν
265a3 θάττω, πρὸς μέγα μέρος σμικρὸν διαιρουμένην, τὴν δέ, ὅπερ
265a4 ἐν τῷ πρόσθεν ἐλέγομεν ὅτι δεῖ μεσοτομεῖν ὡς μάλιστα, τοῦτ'
265a5 ἔχουσαν μᾶλλον, μακροτέραν γε μήν. ἔξεστιν οὖν ὁποτέραν
265a6 ἂν βουληθῶμεν, ταύτην πορευθῆναι.

265a7 ΝΕ. ΣΩ. Τί δέ; ἀμφοτέρας ἀδύνατον;
265a8 ΞΕ. Ἅμα γ', ὦ θαυμαστέ· ἐν μέρει γε μὴν δῆλον ὅτι
265a9 δυνατόν.
265b1 ΝΕ. ΣΩ. Ἐν μέρει τοίνυν ἔγωγε ἀμφοτέρας αἱροῦμαι.
265b2 ΞΕ. Ῥᾴδιον, ἐπειδὴ τὸ λοιπὸν βραχύ· κατ' ἀρχὰς μὴν
265b3 καὶ μεσοῦσιν ἅμα τῆς πορείας χαλεπὸν ἂν ἦν ἡμῖν τὸ πρόσ-
265b4 ταγμα. νῦν δ', ἐπειδὴ δοκεῖ ταύτῃ, τὴν μακροτέραν πρότερον
265b5 ἴωμεν· νεαλέστεροι γὰρ ὄντες ῥᾷον αὐτὴν πορευσόμεθα. τὴν
265b6 δὲ δὴ διαίρεσιν ὅρα.
265b7 ΝΕ. ΣΩ. Λέγε.
265b8 ΞΕ. Τὰ πεζὰ ἡμῖν τῶν ἡμέρων, ὅσαπερ ἀγελαῖα, διῃρημένα
265b9 ἐστὶ φύσει δίχα.
265b10 ΝΕ. ΣΩ. Τίνι;
265b11 ΞΕ. Τῷ τῶν μὲν τὴν γένεσιν ἄκερων εἶναι, τῶν δὲ
265b12 κερασφόρον.
265c1 ΝΕ. ΣΩ. Φαίνεται.
265c2 ΞΕ. Τὴν δὴ πεζονομικὴν διελὼν ἀπόδος ἑκατέρῳ τῷ μέρει
265c3 λόγῳ χρώμενος. ἂν γὰρ ὀνομάζειν αὐτὰ βουληθῇς, ἔσται σοι
265c4 περιπεπλεγμένον μᾶλλον τοῦ δέοντος.
265c5 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς οὖν χρὴ λέγειν;
265c6 ΞΕ. Ὧδε· τῆς πεζονομικῆς ἐπιστήμης δίχα διαιρεθείσης
265c7 τὸ μόριον θάτερον ἐπὶ τῷ κερασφόρῳ μέρει τῷ τῆς ἀγέλης
265c8 ἐπιτετάχθαι, τὸ δὲ ἕτερον ἐπὶ τῷ τῆς ἀκεράτου.
265d1 ΝΕ. ΣΩ. Ταῦτ' ἔστω ταύτῃ λεχθέντα· πάντως γὰρ ἱκανῶς
265d2 δεδήλωται.
265d3 ΞΕ. Καὶ μὴν ὅ γε βασιλεὺς ἡμῖν αὖ καταφανὴς ὅτι
265d4 κολοβὸν ἀγέλην τινὰ κεράτων νομεύει.
265d5 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς γὰρ οὐ δῆλος;
265d6 ΞΕ. Ταύτην τοίνυν καταθραύσαντες τὸ γιγνόμενον αὐτῷ
265d7 πειρώμεθα ἀποδοῦναι.
265d8 ΝΕ. ΣΩ. Πάνυ γε.
265d9 ΞΕ. Πότερον οὖν βούλει τῷ σχιστῷ τε καὶ τῷ καλουμένῳ
265d10 μώνυχι διαιρεῖν αὐτὴν ἢ τῇ κοινογονίᾳ τε καὶ ἰδιογονίᾳ;
265d11 μανθάνεις γάρ που.
265d12 ΝΕ. ΣΩ. Τὸ ποῖον;
265e1 ΞΕ. Ὅτι τὸ μὲν τῶν ἵππων καὶ ὄνων πέφυκεν ἐξ ἀλλήλων
265e2 γεννᾶν.
265e3 ΝΕ. ΣΩ. Ναί.
265e4 ΞΕ. Τὸ δέ γε λοιπὸν ἔτι τῆς λείας ἀγέλης τῶν ἡμέρων
265e5 ἀμιγὲς γένει πρὸς ἄλληλα.
265e6 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ' οὔ;
265e7 ΞΕ. Τί δ'; ὁ πολιτικὸς ἄρ' ἐπιμέλειαν ἔχειν φαίνεται
265e8 πότερα κοινογενοῦς φύσεως ἤ τινος ἰδιογενοῦς;
265e9 ΝΕ. ΣΩ. Δῆλον ὅτι τῆς ἀμείκτου.
265e10 ΞΕ. Ταύτην δὴ δεῖ καθάπερ τὰ ἔμπροσθεν, ὡς ἔοικεν,
265e11 ἡμᾶς δίχα διαστέλλειν.
265e12 ΝΕ. ΣΩ. Δεῖ γὰρ οὖν.
266a1 ΞΕ. Καὶ μὴν τό γε ζῷον, ὅσον ἥμερον καὶ ἀγελαῖον,
266a2 σχεδὸν πλὴν γενοῖν δυοῖν πᾶν ἤδη κατακεκερμάτισται. τὸ
266a3 γὰρ τῶν κυνῶν οὐκ ἐπάξιον καταριθμεῖν γένος ὡς ἐν ἀγελαίοις
266a4 θρέμμασιν.

266a5 ΝΕ. ΣΩ. Οὐ γὰρ οὖν. ἀλλὰ τίνι δὴ τὼ δύο διαιροῦμεν;
266a6 ΞΕ. Ὧιπερ καὶ δίκαιόν γε Θεαίτητόν τε καὶ σὲ διανέμειν,
266a7 ἐπειδὴ καὶ γεωμετρίας ἅπτεσθον.
266a8 ΝΕ. ΣΩ. Τῷ;
266a9 ΞΕ. Τῇ διαμέτρῳ δήπου καὶ πάλιν τῇ τῆς διαμέτρου
266a10 διαμέτρῳ.
266a11 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς εἶπες;
266b1 ΞΕ. Ἡ φύσις, ἣν τὸ γένος ἡμῶν τῶν ἀνθρώπων κέκτη-
266b2 ται, μῶν ἄλλως πως εἰς τὴν πορείαν πέφυκεν ἢ καθάπερ ἡ
266b3 διάμετρος ἡ δυνάμει δίπους;
266b4 ΝΕ. ΣΩ. Οὐκ ἄλλως.
266b5 ΞΕ. Καὶ μὴν ἥ γε τοῦ λοιποῦ γένους πάλιν ἐστὶ κατὰ
266b6 δύναμιν αὖ τῆς ἡμετέρας δυνάμεως διάμετρος, εἴπερ δυοῖν γέ
266b7 ἐστι ποδοῖν δὶς πεφυκυῖα.
266b8 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ' οὐκ ἔστι; καὶ δὴ καὶ σχεδὸν ὃ βούλει
266b9 δηλοῦν μανθάνω.
266b10 ΞΕ. Πρὸς δὴ τούτοις ἕτερον αὖ τι τῶν πρὸς γέλωτα
266c1 εὐδοκιμησάντων ἄν, ὦ Σώκρατες, ἆρα καθορῶμεν ἡμῖν γεγονὸς
266c2 ἐν τοῖς διῃρημένοις;
266c3 ΝΕ. ΣΩ. Τὸ ποῖον;
266c4 ΞΕ. Τἀνθρώπινον ἡμῶν ἅμα γένος συνειληχὸς καὶ
266c5 συνδεδραμηκὸς γένει τῷ τῶν ὄντων γενναιοτάτῳ καὶ ἅμα
266c6 εὐχερεστάτῳ.
266c7 ΝΕ. ΣΩ. Καθορῶ καὶ μάλ' ἀτόπως συμβαῖνον.
266c8 ΞΕ. Τί δ'; οὐκ εἰκὸς ὕστατα ἀφικνεῖσθαι τὰ βραδύτατα;
266c9 ΝΕ. ΣΩ. Ναί, τοῦτό γε.
266c10 ΞΕ. Τόδε δὲ οὐκ ἐννοοῦμεν, ὡς ἔτι γελοιότερος ὁ βασι-
266c11 λεὺς φαίνεται μετὰ τῆς ἀγέλης συνδιαθέων καὶ σύνδρομα
266d1 πεπορευμένος τῷ τῶν ἀνδρῶν αὖ πρὸς τὸν εὐχερῆ βίον ἄριστα
266d2 γεγυμνασμένῳ;
266d3 ΝΕ. ΣΩ. Παντάπασι μὲν οὖν.
266d4 ΞΕ. Νῦν γάρ, ὦ Σώκρατες, ἐκεῖνό ἐστι καταφανὲς μᾶλλον
266d5 τὸ ῥηθὲν τότ' ἐν τῇ περὶ τὸν σοφιστὴν ζητήσει.
266d6 ΝΕ. ΣΩ. Τὸ ποῖον;
266d7 ΞΕ. Ὅτι τῇ τοιᾷδε μεθόδῳ τῶν λόγων οὔτε σεμνοτέρου
266d8 μᾶλλον ἐμέλησεν ἢ μή, τόν τε σμικρότερον οὐδὲν ἠτίμακε
266d9 πρὸ τοῦ μείζονος, ἀεὶ δὲ καθ' αὑτὴν περαίνει τἀληθέστατον.
266d10 ΝΕ. ΣΩ. Ἔοικεν.
266d11 ΞΕ. Οὐκοῦν μετὰ τοῦτο, ἵνα μή με φθῇς ἐρωτήσας τὴν

Πλάτων, *Πολιτικός* 270d-271a

270d1 γένος ὀλίγον τι περιλείπεται· περὶ δὲ τούτους ἄλλα τε
270d2 παθήματα πολλὰ καὶ θαυμαστὰ καὶ καινὰ συμπίπτει, μέγισ-
270d3 τον δὲ τόδε καὶ συνεπόμενον τῇ τοῦ παντὸς ἀνειλίξει τότε,
270d4 ὅταν ἡ τῆς νῦν καθεστηκυίας ἐναντία γίγνηται τροπή.
270d5 ΝΕ. ΣΩ. Τὸ ποῖον;
270d6 ΞΕ. Ἣν ἡλικίαν ἕκαστον εἶχε τῶν ζῴων, αὕτη πρῶτον
270d7 μὲν ἔστη πάντων, καὶ ἐπαύσατο πᾶν ὅσον ἦν θνητὸν ἐπὶ τὸ
270d8 γεραίτερον ἰδεῖν πορευόμενον, μεταβάλλον δὲ πάλιν ἐπὶ
270e1 τοὐναντίον οἷον νεώτερον καὶ ἁπαλώτερον ἐφύετο· καὶ τῶν
270e2 μὲν πρεσβυτέρων αἱ λευκαὶ τρίχες ἐμελαίνοντο, τῶν δ' αὖ

270e3 γενειώντων αἱ παρειαὶ λεαινόμεναι πάλιν ἐπὶ τὴν παρελ-
270e4 θοῦσαν ὥραν ἕκαστον καθίστασαν, τῶν δὲ ἡβώντων τὰ
270e5 σώματα λεαινόμενα καὶ σμικρότερα καθ' ἡμέραν καὶ νύκτα
270e7 ἑκάστην γιγνόμενα πάλιν εἰς τὴν τοῦ νεογενοῦς παιδὸς φύσιν
270e8 ἀπῄει, κατά τε τὴν ψυχὴν καὶ κατὰ τὸ σῶμα ἀφομοιούμενα·
270e9 τὸ δ' ἐντεῦθεν ἤδη μαραινόμενα κομιδῇ τὸ πάμπαν ἐξηφα-
270e10 νίζετο. τῶν δ' αὖ βιαίως τελευτώντων ἐν τῷ τότε χρόνῳ
271a1 τὸ τοῦ νεκροῦ σῶμα τὰ αὐτὰ ταῦτα πάσχον παθήματα διὰ
271a2 τάχους ἄδηλον ἐν ὀλίγαις ἡμέραις διεφθείρετο.
271a3 ΝΕ. ΣΩ. Γένεσις δὲ δὴ τίς τότ' ἦν, ὦ ξένε, ζῴων; καὶ
271a4 τίνα τρόπον ἐξ ἀλλήλων ἐγεννῶντο;
271a5 ΞΕ. Δῆλον, ὦ Σώκρατες, ὅτι τὸ μὲν ἐξ ἀλλήλων οὐκ ἦν
271a6 ἐν τῇ τότε φύσει γεννώμενον, τὸ δὲ γηγενὲς εἶναί ποτε
271a7 γένος λεχθὲν τοῦτ' ἦν τὸ κατ' ἐκεῖνον τὸν χρόνον ἐκ γῆς
271a8 πάλιν ἀναστρεφόμενον, ἀπεμνημονεύετο δὲ ὑπὸ τῶν ἡμετέ-
271a9 ρων προγόνων τῶν πρώτων, οἳ τελευτώσῃ μὲν τῇ προτέρᾳ

Πλάτων, *Πολιτικός* 272d6-e6

272d6 μετὰ τοῦτο εἰς τὸ πρόσθεν περαίνωμεν. ἐπειδὴ γὰρ πάντων
272d7 τούτων χρόνος ἐτελεώθη καὶ μεταβολὴν ἔδει γίγνεσθαι καὶ
272e1 δὴ καὶ τὸ γήινον ἤδη πᾶν ἀνήλωτο γένος, πάσας ἑκάστης
272e2 τῆς ψυχῆς τὰς γενέσεις ἀποδεδωκυίας, ὅσα ἦν ἑκάστῃ προσ-
272e3 ταχθὲν τοσαῦτα εἰς γῆν σπέρματα πεσούσης, τότε δὴ τοῦ
272e4 παντὸς ὁ μὲν κυβερνήτης, οἷον πηδαλίων οἴακος ἀφέμενος,
272e5 εἰς τὴν αὑτοῦ περιωπὴν ἀπέστη, τὸν δὲ δὴ κόσμον πάλιν
272e6 ἀνέστρεφεν εἱμαρμένη τε καὶ σύμφυτος ἐπιθυμία. πάντες

Πλάτων, *Πολιτικός* 276a1-7

276a1 ΝΕ. ΣΩ. Ὀρθῶς. ἀλλ' ἡ μετὰ τοῦτο διαίρεσις αὖ τίνα
276a2 τρόπον ἐγίγνετ' ἄν;
276a3 ΞΕ. Κατὰ ταὐτὰ καθ' ἅπερ ἔμπροσθεν διῃρούμεθα τὴν
276a4 ἀγελαιοτροφικὴν πεζοῖς τε καὶ ἀπτῆσι, καὶ ἀμείκτοις τε καὶ
276a5 ἀκεράτοις, τοῖς αὐτοῖς ἄν που τούτοις διαιρούμενοι καὶ τὴν
276a6 ἀγελαιοκομικὴν τήν τε νῦν καὶ τὴν ἐπὶ Κρόνου βασιλείαν
276a7 περιειληφότες ἂν ἦμεν ὁμοίως ἐν τῷ λόγῳ.

Πλάτων, *Πολιτικός* 277e

277e1 ΝΕ. ΣΩ. Τί οὖν; λέγε μηδὲν ἐμοῦ γε ἕνεκα ἀποκνῶν.
277e2 ΞΕ. Λεκτέον ἐπειδὴ καὶ σύ γε ἕτοιμος ἀκολουθεῖν.
277e3 τοὺς γάρ που παῖδας ἴσμεν, ὅταν ἄρτι γραμμάτων ἔμπειροι
277e4 γίγνωνται—
277e5 ΝΕ. ΣΩ. Τὸ ποῖον;
277e6 ΞΕ. Ὅτι τῶν στοιχείων ἕκαστον ἐν ταῖς βραχυτάταις
277e7 καὶ ῥᾴσταις τῶν συλλαβῶν ἱκανῶς διαισθάνονται, καὶ τἀληθῆ
277e8 φράζειν περὶ ἐκεῖνα δυνατοὶ γίγνονται.

***Πλάτων, Πολιτικός* 283b1-c2**

283b1 ΞΕ. Εἶεν· τί δή ποτε οὖν οὐκ εὐθὺς ἀπεκρινάμεθα πλεκ-
283b2 τικὴν εἶναι κρόκης καὶ στήμονος ὑφαντικήν, ἀλλὰ περιήλθομεν
283b3 ἐν κύκλῳ πάμπολλα διοριζόμενοι μάτην;
283b4 ΝΕ. ΣΩ. Οὔκουν ἔμοιγε, ὦ ξένε, μάτην οὐδὲν τῶν

283b5 ῥηθέντων ἔδοξε ῥηθῆναι.
283b6 ΞΕ. Καὶ θαυμαστόν γε οὐδέν· ἀλλὰ τάχ' ἄν, ὦ μακάριε,
283b7 δόξειε. πρὸς δὴ τὸ νόσημα τὸ τοιοῦτον, ἂν ἄρα πολλάκις
283b8 ὕστερον ἐπίῃ—θαυμαστὸν γὰρ οὐδέν—λόγον ἄκουσόν τινα
283c1 προσήκοντα περὶ πάντων τῶν τοιούτων ῥηθῆναι.
283c2 ΝΕ. ΣΩ. Λέγε μόνον.

Πλάτων, *Πολιτικός* 283c11-d1
283c11 ΞΕ. Μήκους τε πέρι καὶ βραχύτητος καὶ πάσης ὑπεροχῆς
283d1 τε καὶ ἐλλείψεως· ἡ γάρ που μετρητικὴ περὶ πάντ' ἐστὶ

Πλάτων, *Πολιτικός* 283d7-9
283d7 ΞΕ. Τῇδε· τὸ μὲν κατὰ τὴν πρὸς ἄλληλα μεγέθους καὶ
283d8 σμικρότητος κοινωνίαν, τὸ δὲ [τὸ] κατὰ τὴν τῆς γενέσεως
283d9 ἀναγκαίαν οὐσίαν.

Πλάτων, *Πολιτικός* 283d11-e1
283d11 ΝΕ. ΣΩ. Πῶς λέγεις;
283d12 ΞΕ. Ἆρ' οὐ κατὰ φύσιν δοκεῖ σοι τὸ μεῖζον μηδενὸς
283e1 ἑτέρου δεῖν μεῖζον λέγειν ἢ τοῦ ἐλάττονος, καὶ τοὔλαττον αὖ

Πλάτων, *Πολιτικός* 283e3-9
283e3 ΞΕ. Τί δέ; τὸ τὴν τοῦ μετρίου φύσιν ὑπερβάλλον καὶ
283e4 ὑπερβαλλόμενον ὑπ' αὐτῆς ἐν λόγοις εἴτε καὶ ἐν ἔργοις ἆρ'
283e5 οὐκ αὖ λέξομεν ὡς ὄντως γιγνόμενον, ἐν ᾧ καὶ διαφέρουσι
283e6 μάλιστα ἡμῶν οἵ τε κακοὶ καὶ [οἱ] ἀγαθοί;
283e7 ΝΕ. ΣΩ. Φαίνεται.
283e8 ΞΕ. Διττὰς ἄρα ταύτας οὐσίας καὶ κρίσεις τοῦ μεγάλου
283e9 καὶ τοῦ σμικροῦ θετέον, ἀλλ' οὐχ ὡς ἔφαμεν ἄρτι πρὸς

Πλάτων, *Πολιτικός* 284e2-8
284e2 ΞΕ. Δῆλον ὅτι διαιροῖμεν ἂν τὴν μετρητικήν, καθάπερ
284e3 ἐρρήθη, ταύτῃ δίχα τέμνοντες, ἓν μὲν τιθέντες αὐτῆς μόριον
284e4 συμπάσας τέχνας ὁπόσαι τὸν ἀριθμὸν καὶ μήκη καὶ βάθη
284e5 καὶ πλάτη καὶ ταχυτῆτας πρὸς τοὐναντίον μετροῦσιν, τὸ δὲ
284e6 ἕτερον, ὁπόσαι πρὸς τὸ μέτριον καὶ τὸ πρέπον καὶ τὸν καιρὸν
284e7 καὶ τὸ δέον καὶ πάνθ' ὁπόσα εἰς τὸ μέσον ἀπῳκίσθη τῶν
284e8 ἐσχάτων.

Πλάτων, *Πολιτικός* 285a4-b6
285a4 ἔντεχνα μετείληφεν· διὰ δὲ τὸ μὴ κατ' εἴδη συνειθίσθαι
285a5 σκοπεῖν διαιρουμένους ταῦτά τε τοσοῦτον διαφέροντα συμ-
285a6 βάλλουσιν εὐθὺς εἰς ταὐτὸν ὅμοια νομίσαντες, καὶ τοὐναντίον
285a7 αὖ τούτου δρῶσιν ἕτερα οὐ κατὰ μέρη διαιροῦντες, δέον, ὅταν
285b1 μὲν τὴν τῶν πολλῶν τις πρότερον αἴσθηται κοινωνίαν, μὴ
285b2 προαφίστασθαι πρὶν ἂν ἐν αὐτῇ τὰς διαφορὰς ἴδῃ πάσας
285b3 ὁπόσαιπερ ἐν εἴδεσι κεῖνται, τὰς δὲ αὖ παντοδαπὰς ἀνομοιό-
285b4 τητας, ὅταν ἐν πλήθεσιν ὀφθῶσιν, μὴ δυνατὸν εἶναι δυσωπού-
285b5 μενον παύεσθαι πρὶν ἂν σύμπαντα τὰ οἰκεῖα ἐντὸς μιᾶς
285b6 ὁμοιότητος ἕρξας γένους τινὸς οὐσίᾳ περιβάληται. ταῦτα

Πλάτων, *Πολιτικός* 286c8-287a6

286c8 λέγωμεν, μὴ πρὸς ἄλληλα τὰ μήκη κρίνοντες ἀλλὰ κατὰ τὸ
286d1 τῆς μετρητικῆς μέρος ὃ τότε ἔφαμεν δεῖν μεμνῆσθαι, πρὸς
286d2 τὸ πρέπον.
286d3 ΝΕ. ΣΩ. Ὀρθῶς.
286d4 ΞΕ. Οὐ τοίνυν οὐδὲ πρὸς τοῦτο πάντα. οὔτε γὰρ πρὸς
286d5 τὴν ἡδονὴν μήκους ἁρμόττοντος οὐδὲν προσδεησόμεθα, πλὴν
286d6 εἰ πάρεργόν τι· τό τε αὖ πρὸς τὴν τοῦ προβληθέντος ζήτησιν,
286d7 ὡς ἂν ῥᾷστα καὶ τάχιστα εὕροιμεν, δεύτερον ἀλλ' οὐ πρῶτον
286d8 ὁ λόγος ἀγαπᾶν παραγγέλλει, πολὺ δὲ μάλιστα καὶ πρῶτον
286d9 τὴν μέθοδον αὐτὴν τιμᾶν τοῦ κατ' εἴδη δυνατὸν εἶναι διαιρεῖν,
286e1 καὶ δὴ καὶ λόγον, ἄντε παμμήκης λεχθεὶς τὸν ἀκούσαντα
286e2 εὑρετικώτερον ἀπεργάζηται, τοῦτον σπουδάζειν καὶ τῷ μήκει
286e3 μηδὲν ἀγανακτεῖν, ἄντ' αὖ βραχύτερος, ὡσαύτως· ἔτι δ' αὖ
286e4 πρὸς τούτοις τὸν περὶ τὰς τοιάσδε συνουσίας ψέγοντα λόγων
286e5 μήκη καὶ τὰς ἐν κύκλῳ περιόδους οὐκ ἀποδεχόμενον, ὅτι χρὴ
286e6 τὸν τοιοῦτον μὴ [πάνυ] ταχὺ μηδ' εὐθὺς οὕτω μεθιέναι ψέξαντα
287a1 μόνον ὡς μακρὰ τὰ λεχθέντα, ἀλλὰ καὶ προσαποφαίνειν
287a2 οἴεσθαι δεῖν ὡς βραχύτερα ἂν γενόμενα τοὺς συνόντας
287a3 ἀπηργάζετο διαλεκτικωτέρους καὶ τῆς τῶν ὄντων λόγῳ δηλώ-
287a4 σεως εὑρετικωτέρους, τῶν δὲ ἄλλων καὶ πρὸς ἄλλ' ἄττα
287a5 ψόγων καὶ ἐπαίνων μηδὲν φροντίζειν μηδὲ τὸ παράπαν
287a6 ἀκούειν δοκεῖν τῶν τοιούτων λόγων. καὶ τούτων μὲν ἅλις,

Σοφιστής

Πλάτων, *Σοφιστής* 220e2-221c3

220e2 ΞΕ. Τοῦ τοίνυν ἀγκιστρευτικοῦ τῆς πληκτικῆς τὸ μὲν
220e3 ἄνωθεν εἰς τὸ κάτω γιγνόμενον διὰ τὸ τοῖς τριόδουσιν οὕτω
220e4 μάλιστα χρῆσθαι τριοδοντία τις οἶμαι κέκληται.
220e5 ΘΕΑΙ. Φασὶ γοῦν τινές.
220e6 ΞΕ. Τὸ δέ γε λοιπόν ἐστιν ἓν ἔτι μόνον ὡς εἰπεῖν εἶδος.
220e7 ΘΕΑΙ. Τὸ ποῖον;
220e8 ΞΕ. Τὸ τῆς ἐναντίας ταύτῃ πληγῆς, ἀγκίστρῳ τε γιγνό-
220e9 μενον καὶ τῶν ἰχθύων οὐχ ᾗ τις ἂν τύχῃ τοῦ σώματος, ὥσπερ
221a1 τοῖς τριόδουσιν, ἀλλὰ περὶ τὴν κεφαλὴν καὶ τὸ στόμα τοῦ
221a2 θηρευθέντος ἑκάστοτε, καὶ κάτωθεν εἰς τοὐναντίον ἄνω
221a3 ῥάβδοις καὶ καλάμοις ἀνασπώμενον· οὗ τί φήσομεν, ὦ
221a4 Θεαίτητε, δεῖν τοὔνομα λέγεσθαι;
221a5 ΘΕΑΙ. Δοκῶ μέν, ὅπερ ἄρτι προυθέμεθα δεῖν ἐξευρεῖν,
221a6 τοῦτ' αὐτὸ νῦν ἀποτετελέσθαι.
221a7 ΞΕ. Νῦν ἄρα τῆς ἀσπαλιευτικῆς πέρι σύ τε κἀγὼ
221b1 συνωμολογήκαμεν οὐ μόνον τοὔνομα, ἀλλὰ καὶ τὸν λόγον
221b2 περὶ αὐτὸ τοὖργον εἰλήφαμεν ἱκανῶς. συμπάσης γὰρ τέχνης
221b3 τὸ μὲν ἥμισυ μέρος κτητικὸν ἦν, κτητικοῦ δὲ χειρωτικόν,
221b4 χειρωτικοῦ δὲ θηρευτικόν, τοῦ δὲ θηρευτικοῦ ζῳοθηρικόν,
221b5 ζῳοθηρικοῦ δὲ ἐνυγροθηρικόν, ἐνυγροθηρικοῦ δὲ τὸ κάτωθεν
221b6 τμῆμα ὅλον ἁλιευτικόν, ἁλιευτικῆς δὲ πληκτικόν, πληκ-
221b7 τικῆς δὲ ἀγκιστρευτικόν· τούτου δὲ τὸ περὶ τὴν κάτωθεν
221c1 ἄνω πληγὴν ἀνασπωμένην, ἀπ' αὐτῆς τῆς πράξεως ἀφο-

221c2 μοιωθὲν τοὔνομα, ἡ νῦν ἀσπαλιευτικὴ ζητηθεῖσα ἐπίκλην
221c3 γέγονεν.

Πλάτων, *Σοφιστής* 235a10-b2
235a10 ΞΕ. Ἄγε δή, νῦν ἡμέτερον ἔργον ἤδη τὸν θῆρα μηκέτ'
235b1 ἀνεῖναι· σχεδὸν γὰρ αὐτὸν περιειλήφαμεν ἐν ἀμφιβληστρικῷ
235b2 τινι τῶν ἐν τοῖς λόγοις περὶ τὰ τοιαῦτα ὀργάνων, ὥστε

Πλάτων, *Σοφιστής* 235d6-e2
235d6 ΞΕ. Μίαν μὲν τὴν εἰκαστικὴν ὁρῶν ἐν αὐτῇ τέχνην.
235d7 ἔστι δ' αὕτη μάλιστα ὁπόταν κατὰ τὰς τοῦ παραδείγματος
235d8 συμμετρίας τις ἐν μήκει καὶ πλάτει καὶ βάθει, καὶ πρὸς
235e1 τούτοις ἔτι χρώματα ἀποδιδοὺς τὰ προσήκοντα ἑκάστοις, τὴν
235e2 τοῦ μιμήματος γένεσιν ἀπεργάζηται.

Πλάτων, *Σοφιστής* 236b
236b1 ΞΕ. Καὶ τῆς γε μιμητικῆς τὸ ἐπὶ τούτῳ μέρος κλητέον
236b2 ὅπερ εἴπομεν ἐν τῷ πρόσθεν, εἰκαστικήν;
236b3 ΘΕΑΙ. Κλητέον.
236b4 ΞΕ. Τί δέ; τὸ φαινόμενον μὲν διὰ τὴν οὐκ ἐκ καλοῦ
236b5 θέαν ἐοικέναι τῷ καλῷ, δύναμιν δὲ εἴ τις λάβοι τὰ τηλικαῦτα
236b6 ἱκανῶς ὁρᾶν, μηδ' εἰκὸς ᾧ φησιν ἐοικέναι, τί καλοῦμεν; ἆρ'
236b7 οὐκ, ἐπείπερ φαίνεται μέν, ἔοικε δὲ οὔ, φάντασμα;
236b8 ΘΕΑΙ. Τί μήν;
236b9 ΞΕ. Οὐκοῦν πάμπολυ καὶ κατὰ τὴν ζωγραφίαν τοῦτο τὸ

Πλάτων, *Σοφιστής* 236c3-7
236c3 ΞΕ. Τὴν δὴ φάντασμα ἀλλ' οὐκ εἰκόνα ἀπεργαζομένην
236c4 τέχνην ἆρ' οὐ φανταστικὴν ὀρθότατ' ἂν προσαγορεύοιμεν;
236c5 ΘΕΑΙ. Πολύ γε.
236c6 ΞΕ. Τούτω τοίνυν τὼ δύο ἔλεγον εἴδη τῆς εἰδωλοποιικῆς,
236c7 εἰκαστικὴν καὶ φανταστικήν.

Πλάτων, *Σοφιστής* 253d1-e3
253d1 ΞΕ. Τὸ κατὰ γένη διαιρεῖσθαι καὶ μήτε ταὐτὸν εἶδος
253d2 ἕτερον ἡγήσασθαι μήτε ἕτερον ὂν ταὐτὸν μῶν οὐ τῆς διαλεκ-
253d3 τικῆς φήσομεν ἐπιστήμης εἶναι;
253d4 ΘΕΑΙ. Ναί, φήσομεν.
253d5 ΞΕ. Οὐκοῦν ὅ γε τοῦτο δυνατὸς δρᾶν μίαν ἰδέαν διὰ
253d6 πολλῶν, ἑνὸς ἑκάστου κειμένου χωρίς, πάντῃ διατεταμένην
253d7 ἱκανῶς διαισθάνεται, καὶ πολλὰς ἑτέρας ἀλλήλων ὑπὸ μιᾶς
253d8 ἔξωθεν περιεχομένας, καὶ μίαν αὖ δι' ὅλων πολλῶν ἐν ἑνὶ
253d9 συνημμένην, καὶ πολλὰς χωρὶς πάντῃ διωρισμένας· τοῦτο δ'
253e1 ἔστιν, ᾗ τε κοινωνεῖν ἕκαστα δύναται καὶ ὅπῃ μή, διακρίνειν
253e2 κατὰ γένος ἐπίστασθαι.
253e3 ΘΕΑΙ. Παντάπασι μὲν οὖν.

Πλάτων, *Σοφιστής* 264d10-265a1
264d10 ΞΕ. Πάλιν τοίνυν ἐπιχειρῶμεν, σχίζοντες διχῇ τὸ
264e1 προτεθὲν γένος, πορεύεσθαι κατὰ τοὐπὶ δεξιὰ ἀεὶ μέρος τοῦ
264e2 τμηθέντος, ἐχόμενοι τῆς τοῦ σοφιστοῦ κοινωνίας, ἕως ἂν

264e3 αὐτοῦ τὰ κοινὰ πάντα περιελόντες, τὴν οἰκείαν λιπόντες
265a1 φύσιν ἐπιδείξωμεν μάλιστα μὲν ἡμῖν αὐτοῖς, ἔπειτα καὶ

Πλάτων, *Σοφιστής* 266d8-9

266d8 ΞΕ. Τῆς τοίνυν εἰδωλουργικῆς ἀναμνησθῶμεν ὅτι τὸ μὲν
266d9 εἰκαστικόν, τὸ δὲ φανταστικὸν ἔμελλεν εἶναι γένος, εἰ τὸ

Πλάτων, *Σοφιστής* 267a1-11

267a1 ΞΕ. Τὸ τοίνυν φανταστικὸν αὖθις διορίζωμεν δίχα.
267a2 ΘΕΑΙ. Πῇ;
267a3 ΞΕ. Τὸ μὲν δι' ὀργάνων γιγνόμενον, τὸ δὲ αὐτοῦ
267a4 παρέχοντος ἑαυτὸν ὄργανον τοῦ ποιοῦντος τὸ φάντασμα.
267a5 ΘΕΑΙ. Πῶς φῄς;
267a6 ΞΕ. Ὅταν οἶμαι τὸ σὸν σχῆμά τις τῷ ἑαυτοῦ χρώμενος
267a7 σώματι προσόμοιον ἢ φωνὴν φωνῇ φαίνεσθαι ποιῇ, μίμησις
267a8 τοῦτο τῆς φανταστικῆς μάλιστα κέκληταί που.
267a9 ΘΕΑΙ. Ναί.
267a10 ΞΕ. Μιμητικὸν δὴ τοῦτο αὐτῆς προσειπόντες ἀπονειμώ-
267a11 μεθα· τὸ δ' ἄλλο πᾶν ἀφῶμεν μαλακισθέντες καὶ παρέντες

Πλάτων, *Σοφιστής* 268a1-8

268a1 αὐτῶν ἐστιν, οἰόμενος εἰδέναι ταῦτα ἃ δοξάζει· τὸ δὲ
268a2 θατέρου σχῆμα διὰ τὴν ἐν τοῖς λόγοις κυλίνδησιν ἔχει
268a3 πολλὴν ὑποψίαν καὶ φόβον ὡς ἀγνοεῖ ταῦτα ἃ πρὸς τοὺς
268a4 ἄλλους ὡς εἰδὼς ἐσχημάτισται.
268a5 ΘΕΑΙ. Πάνυ μὲν οὖν ἔστιν ἑκατέρου γένος ὧν εἴρηκας.
268a6 ΞΕ. Οὐκοῦν τὸν μὲν ἁπλοῦν μιμητήν τινα, τὸν δὲ
268a7 εἰρωνικὸν μιμητὴν θήσομεν;
268a8 ΘΕΑΙ. Εἰκὸς γοῦν.

Φαίδρος

Πλάτων, *Φαίδρος* 266a3-b1

266a3 πεφυκὸς εἶδος ἡγησαμένω τὼ λόγω, ὁ μὲν τὸ ἐπ' ἀριστερὰ
266a4 τεμνόμενος μέρος, πάλιν τοῦτο τέμνων οὐκ ἐπανῆκεν πρὶν ἐν
266a5 αὐτοῖς ἐφευρὼν ὀνομαζόμενον σκαιόν τινα ἔρωτα ἐλοιδόρησεν
266a6 μάλ' ἐν δίκῃ, ὁ δ' εἰς τὰ ἐν δεξιᾷ τῆς μανίας ἀγαγὼν ἡμᾶς,
266a7 ὁμώνυμον μὲν ἐκείνῳ, θεῖον δ' αὖ τινα ἔρωτα ἐφευρὼν καὶ
266b1 προτεινάμενος ἐπῄνεσεν ὡς μεγίστων αἴτιον ἡμῖν ἀγαθῶν.

Πλάτων, *Φαίδρος* 273d8-e4

273d8 νυνδὴ διήλθομεν πεισόμεθα, ὡς ἐὰν μή τις τῶν τε ἀκουσο-
273e1 μένων τὰς φύσεις διαριθμήσηται, καὶ κατ' εἴδη τε διαιρεῖσθαι
273e2 τὰ ὄντα καὶ μιᾷ ἰδέᾳ δυνατὸς ᾖ καθ' ἓν ἕκαστον περιλαμ-
273e3 βάνειν, οὔ ποτ' ἔσται τεχνικὸς λόγων πέρι καθ' ὅσον
273e4 δυνατὸν ἀνθρώπῳ. ταῦτα δὲ οὐ μή ποτε κτήσηται ἄνευ

Φίληβος

Πλάτων, *Φίληβος* 15d4-8

15d4 ΣΩ. Φαμέν που ταὐτὸν ἓν καὶ πολλὰ ὑπὸ λόγων γιγνό-
15d5 μενα περιτρέχειν πάντῃ καθ' ἕκαστον τῶν λεγομένων ἀεί,
15d6 καὶ πάλαι καὶ νῦν. καὶ τοῦτο οὔτε μὴ παύσηταί ποτε οὔτε
15d7 ἤρξατο νῦν, ἀλλ' ἔστι τὸ τοιοῦτον, ὡς ἐμοὶ φαίνεται, τῶν
15d8 λόγων αὐτῶν ἀθάνατόν τι καὶ ἀγήρων πάθος ἐν ἡμῖν· ὁ δὲ

Πλάτων, *Φίληβος* 16c

16c1 ΣΩ. Ἣν δηλῶσαι μὲν οὐ πάνυ χαλεπόν, χρῆσθαι δὲ
16c2 παγχάλεπον· πάντα γὰρ ὅσα τέχνης ἐχόμενα ἀνηυρέθη
16c3 πώποτε διὰ ταύτης φανερὰ γέγονε. σκόπει δὲ ἣν λέγω.
16c4 ΠΡΩ. Λέγε μόνον.
16c5 ΣΩ. Θεῶν μὲν εἰς ἀνθρώπους δόσις, ὥς γε καταφαίνεται
16c6 ἐμοί, ποθὲν ἐκ θεῶν ἐρρίφη διά τινος Προμηθέως ἅμα
16c7 φανοτάτῳ τινὶ πυρί· καὶ οἱ μὲν παλαιοί, κρείττονες ἡμῶν
16c8 καὶ ἐγγυτέρω θεῶν οἰκοῦντες, ταύτην φήμην παρέδοσαν,
16c9 ὡς ἐξ ἑνὸς μὲν καὶ πολλῶν ὄντων τῶν ἀεὶ λεγομένων εἶναι,
16c10 πέρας δὲ καὶ ἀπειρίαν ἐν αὑτοῖς σύμφυτον ἐχόντων. δεῖν

Πλάτων, *Φίληβος* 23c-d

23c1 ΣΩ. Τὴν δέ γε ἀρχὴν αὐτοῦ διευλαβεῖσθαι πειρώμεθα
23c2 τιθέμενοι.
23c3 ΠΡΩ. Ποίαν δὴ λέγεις;
23c4 ΣΩ. Πάντα τὰ νῦν ὄντα ἐν τῷ παντὶ διχῇ διαλάβωμεν,
23c5 μᾶλλον δ', εἰ βούλει, τριχῇ.
23c6 ΠΡΩ. Καθ' ὅτι, φράζοις ἄν;
23c7 ΣΩ. Λάβωμεν ἄττα τῶν νυνδὴ λόγων.
23c8 ΠΡΩ. Ποῖα;
23c9 ΣΩ. Τὸν θεὸν ἐλέγομέν που τὸ μὲν ἄπειρον δεῖξαι τῶν
23c10 ὄντων, τὸ δὲ πέρας;
23c11 ΠΡΩ. Πάνυ μὲν οὖν.
23c12 ΣΩ. Τούτω δὴ τῶν εἰδῶν τὰ δύο τιθώμεθα, τὸ δὲ τρίτον
23d1 ἐξ ἀμφοῖν τούτοιν ἕν τι συμμισγόμενον. εἰμὶ δ', ὡς ἔοικεν,
23d2 ἐγὼ γελοῖός τις ἄνθρωπος κατ' εἴδη διιστὰς καὶ συναριθμού-
23d3 μενος.
23d4 ΠΡΩ. Τί φῄς, ὠγαθέ;
23d5 ΣΩ. Τετάρτου μοι γένους αὖ προσδεῖν φαίνεται.
23d6 ΠΡΩ. Λέγε τίνος.
23d7 ΣΩ. Τῆς συμμείξεως τούτων πρὸς ἄλληλα τὴν αἰτίαν ὅρα,
23d8 καὶ τίθει μοι πρὸς τρισὶν ἐκείνοις τέταρτον τοῦτο.
23d9 ΠΡΩ. Μῶν οὖν σοι καὶ πέμπτου προσδεήσει διάκρισίν
23d10 τινος δυναμένου;
23d11 ΣΩ. Τάχ' ἄν· οὐ μὴν οἶμαί γε ἐν τῷ νῦν· ἂν δέ τι δέῃ,

Πλάτων, *Φίληβος* 24c2-d7

24c2 καὶ τό γε ἠρέμα τὴν αὐτὴν δύναμιν ἔχετον τῷ μᾶλλόν τε καὶ
24c3 ἧττον· ὅπου γὰρ ἂν ἐνῆτον, οὐκ ἐᾶτον εἶναι ποσὸν ἕκαστον,
24c4 ἀλλ' ἀεὶ σφοδρότερον ἡσυχαιτέρου καὶ τοὐναντίον ἑκάσταις
24c5 πράξεσιν ἐμποιοῦντε τὸ πλέον καὶ τὸ ἔλαττον ἀπεργάζεσθον,
24c6 τὸ δὲ ποσὸν ἀφανίζετον. ὃ γὰρ ἐλέχθη νυνδή, μὴ ἀφανί-
24c7 σαντε τὸ ποσόν, ἀλλ' ἐάσαντε αὐτό τε καὶ τὸ μέτριον ἐν τῇ

24d1 τοῦ μᾶλλον καὶ ἧττον καὶ σφόδρα καὶ ἠρέμα ἕδρᾳ ἐγγενέσθαι,
24d2 αὐτὰ ἔρρει ταῦτα ἐκ τῆς αὑτῶν χώρας ἐν ᾗ ἐνῆν. οὐ γὰρ
24d3 ἔτι θερμότερον οὐδὲ ψυχρότερον εἴτην ἂν λαβόντε τὸ ποσόν·
24d4 προχωρεῖ γὰρ καὶ οὐ μένει τό τε θερμότερον ἀεὶ καὶ τὸ
24d5 ψυχρότερον ὡσαύτως, τὸ δὲ ποσὸν ἔστη καὶ προϊὸν ἐπαύσατο.
24d6 κατὰ δὴ τοῦτον τὸν λόγον ἄπειρον γίγνοιτ' ἂν τὸ θερμότερον
24d7 καὶ τοὐναντίον ἅμα.

Πλάτων, *Φίληβος* 25a1-3

25a1 τοιαῦτα πάντα, εἰς τὸ τοῦ ἀπείρου γένος ὡς εἰς ἓν δεῖ πάντα
25a2 ταῦτα τιθέναι, κατὰ τὸν ἔμπροσθεν λόγον ὃν ἔφαμεν ὅσα
25a3 διέσπασται καὶ διέσχισται συναγαγόντας χρῆναι κατὰ δύναμιν

Πλάτων, *Φίληβος* 25a6-b12

25a6 ΣΩ. Οὐκοῦν τὰ μὴ δεχόμενα ταῦτα, τούτων δὲ τὰ ἐναντία
25a7 πάντα δεχόμενα, πρῶτον μὲν τὸ ἴσον καὶ ἰσότητα, μετὰ δὲ τὸ
25a8 ἴσον τὸ διπλάσιον καὶ πᾶν ὅτιπερ ἂν πρὸς ἀριθμὸν ἀριθμὸς
25b1 ἢ μέτρον ᾖ πρὸς μέτρον, ταῦτα σύμπαντα εἰς τὸ πέρας
25b2 ἀπολογιζόμενοι καλῶς ἂν δοκοῖμεν δρᾶν τοῦτο. ἢ πῶς σὺ
25b3 φῄς;
25b4 ΠΡΩ. Κάλλιστά γε, ὦ Σώκρατες.
25b5 ΣΩ. Εἶεν· τὸ δὲ τρίτον τὸ μεικτὸν ἐκ τούτοιν ἀμφοῖν
25b6 τίνα ἰδέαν φήσομεν ἔχειν;
25b7 ΠΡΩ. Σὺ καὶ ἐμοὶ φράσεις, ὡς οἶμαι.
25b8 ΣΩ. Θεὸς μὲν οὖν, ἄνπερ γε ἐμαῖς εὐχαῖς ἐπήκοος
25b9 γίγνηταί τις θεῶν.
25b10 ΠΡΩ. Εὔχου δὴ καὶ σκόπει.
25b11 ΣΩ. Σκοπῶ· καί μοι δοκεῖ τις, ὦ Πρώταρχε, αὐτῶν φίλος
25b12 ἡμῖν νυνδὴ γεγονέναι.

Πλάτων, *Φίληβος* 25d11-e2

25d11 ΣΩ. Τὴν τοῦ ἴσου καὶ διπλασίου, καὶ ὁπόση παύει πρὸς
25e1 ἄλληλα τἀναντία διαφόρως ἔχοντα, σύμμετρα δὲ καὶ σύμφωνα
25e2 ἐνθεῖσα ἀριθμὸν ἀπεργάζεται.

Πλάτων, *Φίληβος* 27e

27e1 ΣΩ. Εἶεν· τί δὲ ὁ σός, ὦ Φίληβε, ἡδὺς καὶ ἄμεικτος
27e2 ὤν; ἐν τίνι γένει τῶν εἰρημένων λεγόμενος ὀρθῶς ἄν ποτε
27e3 λέγοιτο; ὧδε δ' ἀπόκριναί μοι πρὶν ἀποφήνασθαι.
27e4 ΦΙ. Λέγε μόνον.
27e5 ΣΩ. Ἡδονὴ καὶ λύπη πέρας ἔχετον, ἢ τῶν τὸ μᾶλλόν
27e6 τε καὶ ἧττον δεχομένων ἐστόν;
27e7 ΦΙ. Ναί, τῶν τὸ μᾶλλον, ὦ Σώκρατες· οὐ γὰρ ἂν ἡδονὴ
27e8 πᾶν ἀγαθὸν ἦν, εἰ μὴ ἄπειρον ἐτύγχανε πεφυκὸς καὶ πλήθει
27e9 καὶ τῷ μᾶλλον.

Πλάτων, *Φίληβος* 41d

41d1 ΣΩ. Γίγνεται τοίνυν, ὁπόταν ᾖ ταῦτα, ἅμα παρακεῖσθαι
41d2 λύπας τε καὶ ἡδονάς, καὶ τούτων αἰσθήσεις ἅμα παρ'
41d3 ἀλλήλας ἐναντίων οὐσῶν γίγνεσθαι, ὃ καὶ νυνδὴ ἐφάνη.
41d4 ΠΡΩ. Φαίνεται γοῦν.

41d5 ΣΩ. Οὐκοῦν καὶ τόδε εἴρηται καὶ συνωμολογημένον ἡμῖν
41d6 ἔμπροσθε κεῖται;
41d7 ΠΡΩ. Τὸ ποῖον;
41d8 ΣΩ. Ὡς τὸ μᾶλλόν τε καὶ ἧττον ἄμφω τούτω δέχεσθον,
41d9 λύπη τε καὶ ἡδονή, καὶ ὅτι τῶν ἀπείρων εἴτην.
41d10 ΠΡΩ. Εἴρηται. τί μήν;
41d11 ΣΩ. Τίς οὖν μηχανὴ ταῦτ' ὀρθῶς κρίνεσθαι;

Η. Πλούταρχος

Πλούταρχος, *Συμποσιακά* 718 B8-F4

B8 Πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν
B9 Ἐκ δὲ τούτου γενομένης σιωπῆς, πάλιν ὁ Διογε-
B10 νιανὸς ἀρξάμενος 'βούλεσθ'' εἶπεν, 'ἐπεὶ λόγοι περὶ
C1 θεῶν γεγόνασιν, ἐν τοῖς Πλάτωνος γενεθλίοις αὐτὸν Πλά-
C2 τωνα κοινωνὸν παραλάβωμεν, ἐπισκεψάμενοι τίνα λαβὼν
C3 γνώμην ἀπεφήνατ' <ἀεὶ> γεωμετρεῖν τὸν θεόν; εἴ γε δὴ
C4 θετέον εἶναι τὴν ἀπόφασιν ταύτην Πλάτωνος.' ἐμοῦ δὲ
C5 ταῦτ' εἰπόντος ὡς γέγραπται μὲν ἐν οὐδενὶ σαφῶς τῶν
C6 ἐκείνου βυβλίων, ἔχει δὲ πίστιν ἱκανὴν καὶ τοῦ Πλατωνι-
C7 κοῦ χαρακτῆρός ἐστιν, εὐθὺς ὑπολαβὼν ὁ Τυνδάρης
C8 'οἴει γάρ' εἶπεν, 'ὦ Διογενιανέ, τῶν περιττῶν τι καὶ δυσ-
C9 θεωρήτων αἰνίττεσθαι τὸν λόγον, οὐχ ὅπερ αὐτὸς εἴρηκε
C10 καὶ γέγραφεν πολλάκις, ὑμνῶν γεωμετρίαν ὡς ἀποσπῶ-
D1 σαν ἡμᾶς προσισχομένους τῇ αἰσθήσει καὶ ἀποστρέφουσαν
D2 ἐπὶ τὴν νοητὴν καὶ ἀίδιον φύσιν, ἧς θέα τέλος ἐστὶ φιλο-
D3 σοφίας οἷον ἐποπτεία τελετῆς; ὁ γὰρ ἡδονῆς καὶ ἀλγη-
D4 δόνος ἧλος, ᾧ πρὸς τὸ σῶμα τὴν ψυχὴν προσηλοῖ (Plat.
D5 Phaed. 83d), μέγιστον κακὸν ἔχειν ἔοικεν τὸ τὰ αἰσθητὰ
D6 ποιεῖν ἐναργέστερα τῶν νοητῶν καὶ καταβιάζεσθαι [καὶ]
D7 πάθει μᾶλλον ἢ λόγῳ κρίνειν τὴν διάνοιαν· ἐθιζομένη γὰρ
D8 ὑπὸ τοῦ σφόδρα πονεῖν καὶ ἥδεσθαι τῷ περὶ τὰ σώματα
D9 πλανητῷ καὶ μεταβλητῷ προσέχειν ὡς ὄντι τοῦ ἀληθῶς
D10 ὄντος τυφλοῦται καὶ τὸ 'μυρίων' ἀντάξιον 'ὀμμάτων'
D11 (Plat. Rep. 527e) ὄργανον ψυχῆς καὶ φέγγος ἀπόλλυσιν,
E1 ᾧ μόνῳ θεατόν ἐστι τὸ θεῖον. πᾶσι μὲν οὖν τοῖς καλου-
E2 μένοις μαθήμασιν, ὥσπερ ἀστραβέσι καὶ λείοις κατόπ-
E3 τροις, ἐμφαίνεται τῆς τῶν νοητῶν ἀληθείας ἴχνη καὶ
E4 εἴδωλα· μάλιστα δὲ γεωμετρία κατὰ τὸν Φιλόλαον (Vor-
E5 sokr. 44 A 7a) ἀρχὴ καὶ μητρόπολις οὖσα τῶν ἄλλων ἐπ-
E6 ανάγει καὶ στρέφει τὴν διάνοιαν, οἷον ἐκκαθαιρομένην καὶ
E7 ἀπολυομένην ἀτρέμα τῆς αἰσθήσεως. διὸ καὶ Πλάτων
E8 αὐτὸς ἐμέμψατο τοὺς περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν καὶ
E9 Μέναιχμον εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς
E10 τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας,
E11 ὥσπερ πειρωμένους δίχα λόγου δύο μέσας ἀνὰ λόγον,
E12 ᾗ παρείκοι, λαβεῖν· ἀπόλλυσθαι γὰρ οὕτω καὶ δια-
F1 φθείρεσθαι τὸ γεωμετρίας ἀγαθὸν αὖθις ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ
F2 παλινδρομούσης καὶ μὴ φερομένης ἄνω μηδ' ἀντιλαμβανο-
F3 μένης τῶν ἀιδίων καὶ ἀσωμάτων εἰκόνων, πρὸς αἷσπερ

F4 ὢν ὁ θεὸς ἀεὶ θεός ἐστιν' (Plat. Phaedr. 249c).

Θ. Πρόκλος

Πρόκλος, *εις Πλάτωνος Πολιτείαν* 1,290,7-10

7 ἔχοντα τὴν ἑαυτῶν σύστασιν. ἐκ δὴ τούτων συλλογιστέον
8 ἡμῖν, καὶ ὅτι κατὰ Πλάτωνα αἱ ἐμφάσεις ὑποστάσεις εἰσὶν
9 εἰδώλων τινῶν δαιμονίᾳ μηχανῇ δημιουργούμεναι, καθάπερ
10 αὐτὸς ἐν τῷ Σοφιστῇ [p. 266b] διδάσκει. καὶ γὰρ αἱ

Πρόκλος, *εις Πλάτωνος Πολιτείαν* 2,24,16-2,25,13

24,16 ΚΓ. Ὅτι αἱ ταῖς ἀρρήτοις διαμέτροις παρακείμεναι ῥη-
24,17 ταὶ μονάδι μείζους εἰσὶν ἢ ἐλάττους διπλασίου, διὰ τῶν
24,18 ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι δεικνύουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ μο-
24,19 νὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρά
24,20 ἐστιν καὶ διάμετρος. ἔστων οὖν δύο μονάδες, ἣ μὲν ὡς
24,21 πλευρὰ [ἣ δ]ὲ ὡς διάμετρος, καὶ προσκείσθω τῇ μὲν ὡς
24,22 πλευρᾷ μία διάμετρος, τῇ δὲ ὡς διαμέτρῳ πλευραὶ δύο,
24,23 ἐπείπερ ἡ ὡς διάμετρος μονάδι ἐλάσσων ἢ διπλασία τῆς ὡς
24,24 πλευρᾶς. ἔσται οὖν οὕτως ἣ μὲν δυεῖν μονάδων, ἣ δὲ
24,25 τριῶν· καὶ τὰ μὲν ἀπὸ τούτων τῆς μὲν τεσσάρων, τῆς
25,1 δὲ ἐννέα, ὅπερ ἐστὶν μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον. πάλιν
25,2 προσκείσθω τῇ μὲν δυεῖν μία διάμετρος ἡ τριῶν, τῇ δὲ
25,3 τριῶν διαμέτρῳ δὶς ἡ πλευρὰ ταῖν δυεῖν. ἔσται οὖν ἡ μὲν
25,4 πλευρὰ πέντε τινῶν, ἡ δὲ διάμετρος ἑπτά τινων, καὶ τὰ
25,5 ἀπ' αὐτῶν τῆς μὲν κε', τῆς δὲ μθ', μονάδι ἐλάσσονα ἢ
25,6 διπλάσιον. ᾗ καὶ ὁ Πλάτων εἶπεν τὸν ὀκτὼ καὶ τετταρά-
25,7 κοντα ἀριθμὸν εἶναι ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν μὲν πεμπάδος
25,8 δεομένων ἑνός, ἀρρήτων δὲ δεομένων δυεῖν, ἐπειδὴ διπλά-
25,9 σιον ἡ διάμετρος δύναται τῆς πλευρᾶς. ἐὰν δὲ λάβωμεν
25,10 ἁπάσας τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων, ἔσονται διπλάσιαι
25,11 ὄντως, ὧν ἑκάστη μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου·
25,12 οἷον ἡ ἐννέα μετὰ τοῦ μθ' τῆς τοῦ κε' καὶ δ'. διὸ καὶ οἱ
25,13 Πυθαγόρειοι ἐθάρρησαν τῇ μεθόδῳ.

Πρόκλος, *εις Πλάτωνος Πολιτείαν* 2,27,1-2,29,4

27,1 ΚΖ. Ὅτι ἐπειδὴ ἀδύνατον ῥητὴν εἶναι τὴν διάμετρον
27,2 τῆς πλευρᾶς οὔσης ῥητῆς (οὐ γάρ ἐστιν τετράγωνος ἀριθμὸς
27,3 τετραγώνου διπλάσιος· ᾧ καὶ δῆλον ὅτι ἀσύμμετρά ἐστιν
27,4 μεγέθη, καὶ ὅτι Ἐπίκουρος ψευδῶς ποιῶν μέτρον τὴν ἄτο-
27,5 μον πάντων σωμάτων καὶ ὁ Ξενοκράτης τὴν ἄτομον γραμ-
27,6 μὴν τῶν γραμμῶν), ἐπενόησαν οὕτω λέγειν οἱ Πυθαγόρειοι
27,7 καὶ Πλάτων, τῆς πλευρᾶς οὔσης ῥητῆς τὴν διάμετρον ῥη-
27,8 τὴν οὐχ ἁπλῶς, ἀλλ' ἐν οἷς δύνανται τετραγώνοις, τοῦ
27,9 διπλασίου λόγου, ὃν δεῖ τὴν διάμετρον ποιεῖν, ἢ μονάδι
27,10 [δέ]ουσαν ἢ μονάδι πλεονάζουσαν· πλεονάζουσαν μὲν ὡς
27,11 τοῦ Δ τὸν Θ, δέουσαν δὲ ὡς τοῦ ΚΕ τὸν ΜΘ. Προετί-
27,12 θεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν
27,13 περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος

27,14 προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται
27,15 πλευρά, ἡ δὲ πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα
27,16 τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος. καὶ τοῦτο
27,17 δείκνυται διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ στοιχείων γραμμικῶς
27,18 ἀπ' ἐκείνου. ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ εὐ-
27,19 θεῖαν, τὸ ἀπὸ τῆς [ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ] καὶ τὸ ἀπὸ
27,20 [ταύ]της [μόνης τετράγωνα δι]πλάσια τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμι-
27,21 σεί[ας καὶ τοῦ ἀπὸ] τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμ[ισείας καὶ
27,22 τῆς] προσληφθείσης. ἔστω γὰρ πλ[ευρὰ ἡ ΑΒ καὶ ἴση]
27,23 αὐτῇ ἡ [ΒΓ] καὶ διάμετρος τῆς [ΑΒ ἡ ΓΔ διπλά]σιον αὐ-
27,24 τῆς δυναμένη, διὰ τὸ θεώρημα ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ μετὰ
28,1 τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ἀπὸ τῆς
28,2 ΒΔ. ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· καὶ λο[ιπὸν] ἄρα
28,3 τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ διπλάσιον·
28,4 ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφα[ιρεθὲν] πρὸς
28,5 ἀφαιρεθέν, ἔσται καὶ τὸ λοιπὸν [πρὸς τὸ λοι]πὸν ὡς ὅλον
28,6 πρὸς ὅλον. [ἡ] ἄρα ΓΔ διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν ΒΓ
28,7 πλευράν ἐστι πλευρά· ἡ δὲ ΑΒ ἑαυτὴν προσλαβοῦσα τὴν
28,8 ΒΓ καὶ τὴν διάμετρον ἑαυτῆς τὴν ΓΔ ἐστὶ διάμετρος·
28,9 δύν[αται] γὰρ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς ΔΒ. Ταῦτα μὲν
28,10 οὖν ταύτῃ· δεικνύσθω δὲ ἐπὶ τῶν ῥητῶν διαμέτρων ἀριθμη-
28,11 τικῶς, ἃς εἴπομεν μονάδι μείζους εἶναι ἢ ἐλάσσους. ἔστω
28,12 μονάς, περὶ δὲ αὐτὴν ἔστω μονάς, <ἣ> καὶ πλευρά ἐστιν
28,13 ἑαυτῆς, διότι ἅπαξ τὸ ἓν γίνεται ἕν, καὶ διάμετρος ῥητή,
28,14 μονάδι ποιοῦσα ἔλασσον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς, τοῦτ' ἔστιν
28,15 τοῦ ἀφ' ἑαυτῆς· ἂν γὰρ προσλάβῃ μονάδα τὸ ἀπ' αὐτῆς,
28,16 ὅ ἐστι τὸ ἕν, γίνεται τοῦ ἀπὸ αὐτῆς ὡς πλευρᾶς διπλάσιον.
28,17 λαβέτω οὖν ἡ διαμετρικὴ μονὰς πλευράν, ὅ ἐστι μονάδα
28,18 (καὶ γὰρ αὕτη διάμετρος ἦν), γίνεται δυὰς καὶ πλευρὰ τε-
28,19 τράδος· ἡ δὲ πλευρικὴ μονὰς ἑαυτῇ συντεθεῖσα λαβέτω διά-
28,20 μετρον ἄλλην μονάδα (ἦν γὰρ καὶ ἡ διαμετρική), γίνεται
28,21 τριὰς καὶ ποιεῖ τὸν ἐννέα, μονάδι μείζονα τοῦ ἀπὸ δυάδος·
28,22 καὶ ἑξῆς ἡ δυὰς προσλαβέτω πλευρὰ οὖσα τὴν τριάδα
28,23 [δι]άμ[ετρ]ον οὖσαν, γίν[εται πεμπ]άς· καὶ ἡ [τρι]ὰς προσ-
28,24 [λαβοῦσα] δὶς τὴν δυάδα γίνεται ἑπ[τάς]. καὶ ἔστι τὸ μὲν
28,25 ἀπὸ τῆς πεντάδος εἴκοσι πέντε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἑ[πτά]δος
28,26 τεσσαράκοντα θ, [ὅς ἐστι μο]νάδι ἐλάσ[σων τοῦ] ἀπὸ τῆς
28,27 πεμ[πά]δος. πάλιν ἡ πεμπὰς προσλαβέτω τὴν ἑπτάδα καὶ
29,1 ἡ ἑπτὰς δὶς τὴν πεμπάδα· γίνεται ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ δώδεκα
29,2 ἑκατὸν τεσσαράκοντα τέσσαρα, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑπτακαίδεκα
29,3 διακόσια ὀγδοήκοντα ἐννέα, ὅς ἐστι μονάδι μείζων ἢ διπλά-
29,3 σιος τοῦ ἑκατὸν τεσσαράκοντα τέσσαρα· καὶ ἀεὶ οὕτως.

Πρόκλος, *Πλατωνική Θεολογία* 3,91,9-24

9 Πρῶτον μὲν τοίνυν, ὡς ἔφην, τὴν τῆς τριάδος ταύτης
10 ὑπόστασιν τῶν πρὸ αὐτῆς ἠρτημένην διὰ τούτων ἀπο-
11 δεικτέον. Ἔπειθ' ὅτι καὶ πρωτογενὴς ἡ τριὰς αὕτη
12 κατὰ τὸν Παρμενίδην· πρώτη γὰρ αὐτῇ τοῦ γίνεσθαι
13 μεταδίδωσι καὶ τὸ πλῆθος τὸ ἐν αὐτῇ γιγνόμενον ἀπο-
14 καλεῖ. Λέγει γὰρ οὖν οὕτως· Καὶ γίνεται τὸ ἐλά-

χιστον ἐκ δυοῖν αὖ μορίοιν τὸ μόριον· καὶ πάλιν Ὅτιπερ ἂν γίνηται μόριον, τούτω τὼ μορίω ἀεὶ ἴσχει· καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς· Ὥστε ἀνάγκη δύο ἀεὶ γιγνόμενον μηδέποτε ἓν εἶναι. Τὸ τοίνυν συχνῷ τῷ τῆς γενέσεως ὀνόματι χρῆσθαι περὶ τῆς προόδου τοῦ νοητοῦ πλήθους ἀναδιδάσκοντα, πῶς οὐ κηρύττοντός ἐστιν ὅτι τὰ μὲν πρὸ ταύτης τῆς τάξεως ἥνωται μᾶλλον ἀλλήλοις, αὕτη δὲ πρόεισιν ἐπὶ πλέον καὶ ἐκφαίνει τὸ κρύφιον τῶν πρὸ αὐτῆς, καὶ ἔστι πρωτογενής, ἐν ἑαυτῇ τὴν γόνιμον ἐκφαίνουσα δύναμιν;

Πρόκλος, *Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη* 6,19-22

γειαν πεπέρασται τὰ μόρια τοῦ ὅλου. καὶ τῆς μὲν ἀπειρίας οὐκ οὔσης τά τε μεγέθη πάντα σύμμετρα ἂν ἦν καὶ οὐδὲν ἄρρητον οὐδὲ ἄλογον, οἷς δὴ δοκεῖ διαφέρειν τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τῶν ἐν ἀριθμητικῇ, καὶ οί

Πρόκλος, *Σχόλια εις Στοιχεία Ευκλείδη* 7,1-5

ἐξεταζόμενος. τοῦ δὲ πέρατος ἀναιρεθέντος συμμετρία τε καὶ κοινωνία λόγων καὶ ταυτότης εἰδῶν καὶ ἰσότης καὶ ὅσα τῆς ἀμείνονός ἐστι συστοιχίας οὐκ ἄν ποτε ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐφαίνετο, οὐδ' ἂν ἐπιστῆμαι τῶν τοιούτων ἦσαν οὐδὲ καταλήψεις μόνιμοι καὶ ἀκριβεῖς.

I. Φιλόλαος

Φιλόλαος, *Απόσπασμα* 1

DIOG. VIII 85 [A 1 I 398, 20] Περὶ φύσεως ὧν ἀρχὴ ἥδε· ʻά φύσις δ' ἐν τῶι κόσμωι ἁρμόχθη ἐξ ἀπείρων τε καὶ περαινόντων, καὶ ὅλος <ὁ> κόσμος καὶ τὰ ἐν αὐτῶι πάντα'.

Φιλόλαος, *Απόσπασμα* 2

STOB. Ecl. I 21, 7 a [p. 187, 14 Wachsm.] ᾿Εκ τοῦ Φιλολάου περὶ κόσμου. ἀνάγκα τὰ ἐόντα εἶμεν πάντα ἢ περαίνοντα ἢ ἄπειρα ἢ περαίνοντά τε καὶ ἄπειρα· ἄπειρα δὲ μόνον <ἢ περαίνοντα μόνον> οὔ κα εἴη. ἐπεὶ τοίνυν φαίνεται οὔτ' ἐκ περαινόντων πάντων ἐόντα οὔτ' ἐξ ἀπείρων πάντων, δῆλον τἆρα ὅτι ἐκ περαινόντων τε καὶ ἀπείρων ὅ τε κόσμος καὶ τὰ ἐν αὐτῶι συναρμόχθη. δηλοῖ δὲ καὶ τὰ ἐν τοῖς ἔργοις. τὰ μὲν γὰρ αὐτῶν ἐκ περαινόντων περαίνοντι, τὰ δ' ἐκ περαινόντων τε καὶ ἀπείρων περαίνοντί τε καὶ οὐ περαίνοντι, τὰ δ' ἐξ ἀπείρων ἄπειρα φανέονται. (Vgl. DAMASC. I 101, 3 Ru. τὸ ὂν ἐκ πέρατος καὶ ἀπείρου, ὡς ἔν τε Φιλήβωι [p. 23 C] λέγει ὁ Πλάτων καὶ Φ. ἐν τοῖς Περὶ φύσεως).

Φιλόλαος, *Απόσπασμα* 6

— —7d [p. 188, 14,]

περὶ δὲ φύσιος καὶ ἁρμονίας ὧδε ἔχει· ἁ μὲν ἐστὼ τῶν πραγμάτων ἀίδιος ἔσσα καὶ αὐτὰ μὲν ἁ φύσις θείαν γα καὶ οὐκ ἀνθρωπίνην ἐνδέχεται γνῶσιν πλέον γα ἢ ὅτι οὐχ οἷόν τ' ἦν οὐθὲν τῶν ἐόντων καὶ γιγνωσκόμενον ὑφ' ἁμῶν γα γενέσθαι μὴ ὑπαρχούσας τᾶς ἐστοῦς τῶν πραγμάτων, ἐξ ὧν συνέστα ὁ κόσμος, καὶ τῶν περαινόντων καὶ τῶν ἀπείρων. ἐπεὶ δὲ ταὶ ἀρχαὶ ὑπᾶρχον οὐχ ὁμοῖαι οὐδ' ὁμόφυλοι ἔσσαι, ἤδη ἀδύνατον ἦς κα αὐταῖς κοσμηθῆναι, εἰ μὴ ἁρμονία ἐπεγένετο ὡιτινιῶν ἅδε τρόπωι ἐγένετο. τὰ μὲν ὦν ὁμοῖα καὶ ὁμόφυλα ἁρμονίας οὐδὲν ἐπεδέοντο, τὰ δὲ ἀνόμοια μηδὲ ὁμόφυλα μηδὲ ἰσοταγῆ ἀνάγκα τᾶι τοιαύται ἁρμονίαι συγκεκλεῖσθαι, οἵαι μέλλοντι ἐν κόσμωι κατέχεσθαι. —

ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας ἐπὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐπὶ νεάταν δι' ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβά, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὀξειᾶν· τὸ δ' ἐν μέσωι μέσσας καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον. οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσιες, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δὲ δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις.

Vgl. BOETHIUS Inst. mus. III 8 p. 278, 11 Friedl. Philolaus igitur haec atque his minora spatia talibus definitionibus includit: dies inquit, est spatium quo maior est sesquitertia proportio duobus tonis. comma vero est spatium, quo maior est sesquioctava proportio duabas diesibus, id est duobus semitoniis minoribus. schisma est dimidium commatis, diaschisma vero dimidium dieseos, id est semitonii minoris.

Φιλόλαος, *Ἀπόσπασμα* 11

THEO Smyrn. 106, 10 περὶ ἧς καὶ ᾿Αρχύτας ἐν τῶι Περὶ τῆς δεκάδος καὶ Φ. ἐν τῶι Περὶ φύσιος πολλὰ διεξίασιν. STOB. Ecl. I prooem. cor. 3 [p. 16, 20 W]. Φιλολάου.

θεωρεῖν δεῖ τὰ ἔργα καὶ τὴν οὐσίαν τῶ ἀριθμῶ καττὰν δύναμιν ἅτις ἐστὶν ἐν τᾶι δεκάδι· μεγάλα γὰρ καὶ παντελὴς καὶ παντοεργὸς καὶ θείω καὶ οὐρανίω βίω καὶ ἀνθρωπίνω ἀρχὰ καὶ ἁγεμὼν κοινωνοῦσα *** δύναμις καὶ τᾶς δεκάδος. ἄνευ δὲ τούτας πάντ' ἄπειρα καὶ ἄδηλα καὶ ἀφανῆ.

γνωμικὰ γὰρ ἁ φύσις ἁ τῶ ἀριθμῶ καὶ ἡγεμονικὰ καὶ διδασκαλικὰ τῶ ἀπορουμένω παντὸς καὶ ἀγνοουμένω παντί. οὐ γὰρ ἦς δῆλον οὐδενὶ οὐδὲν τῶν πραγμάτων οὔτε αὐτῶν ποθ' αὑτὰ οὔτε ἄλλω πρὸς ἄλλο, εἰ μὴ ἦς ἀριθμὸς καὶ ἁ τούτω οὐσία. νῦν δὲ οὗτος καττὰν ψυχὰν ἁρμόζων αἰσθήσει πάντα γνωστὰ καὶ ποτάγορα ἀλλάλοις κατὰ γνώμονος φύσιν ἀπεργάζεται σωματῶν καὶ σχίζων τοὺς λόγους χωρὶς ἑκάστους τῶν πραγμάτων τῶν τε ἀπείρων καὶ τῶν περαινόντων.

ἴδοις δέ κα οὐ μόνον ἐν τοῖς δαιμονίοις καὶ θείοις πράγμασι τὰν τῶ ἀριθμῶ φύσιν καὶ τὰν δύναμιν ἰσχύουσαν, ἀλλὰ καὶ ἐν τοῖς ἀνθρωπικοῖς ἔργοις καὶ λόγοις πᾶσι παντᾶ καὶ κατὰ τὰς δημιουργίας τὰς τεχνικὰς πάσας καὶ κατὰ τὰν μουσικάν.

ψεῦδος δὲ οὐδὲν δέχεται ἁ τῶ ἀριθμῶ φύσις οὐδὲ ἁρμονία· οὐ γὰρ οἰκεῖον αὐτοῖς ἐστι. τᾶς τῶ ἀπείρω καὶ ἀνοήτω καὶ ἀλόγω φύσιος τὸ ψεῦδος καὶ ὁ φθόνος ἐστί.

ψεῦδος δὲ οὐδαμῶς ἐς ἀριθμὸν ἐπιπνεῖ· πολέμιον γὰρ καὶ ἐχθρὸν τᾶι φύσει τὸ ψεῦδος, ἁ δ' ἀλήθεια οἰκεῖον καὶ σύμφυτον τᾶι τῶ ἀριθμῶ γενεᾶι.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΑΡΧΑΙΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΙΩΝ