



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

## Τμήμα Μαθηματικών

Διπλωματική Εργασία

**Το μέτρο Brown για μη κανονικούς τελεστές και η  
οριακή θεωρία τυχαίων πινάκων**

Ηλέκτρα Πηλιχού

ΑΜ 190125

*Επιβλέπων καθηγητής:*

Δημήτρης Χελιώτης

Αθήνα, Ιανουάριος 2023



## Περίληψη

Μελετάμε το μέτρο Brown ορισμένων μη Ερμιτιανών τελεστών που προκύπτουν από τη θεωρία ελεύθερης πιθανότητας του Voiculescu. Συνήθως αυτοί οι τελεστές εμφανίζονται ως το όριο των  $\ast$ -ροπών ορισμένων συνόλων μη ερμιτιανών τυχαίων πινάκων και το Brown μέτρο δίνει τότε έναν κανονικό υποψήφιο για την οριακή κατανομή ιδιοτιμών των τυχαίων πινάκων. Μια σημαντική κλάση τελεστών που θα μας απασχολήσει είναι τα πολυώνυμα σε  $\ast$ -ελεύθερες μεταβλητές. Άλλα παραδείγματα αποτελούν τα R-διαγώνια στοιχεία και τα ελλειπτικά στοιχεία, για τα οποία ήταν ήδη γνωστό το μέτρο Brown, καθώς και μια νέα κατηγορία τριγωνικών - ελλειπτικών στοιχείων. Η μέθοδός μας για τον υπολογισμό του μέτρου Brown συνδυάζει τη μέθοδο της ερμιτιανής αναγωγής, όπως εξετάζεται στη φυσική βιβλιογραφία, με το τέχνασμα της γραμμικοποίησης και της μείωσης της τάξης, και επιτρέπει λεπτομερείς υπολογισμούς.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.	Βασικές μαθηματικές έννοιες . . . . .	1
1..1	Μέτρα . . . . .	1
1..2	Τελεστές . . . . .	1
1..3	Άλγεβρες . . . . .	2
1..4	Η ασθενής- $\star$ ( $w^*$ ) τοπολογία . . . . .	3
1..5	Η ελεύθερη ανεξαρτησία . . . . .	3
1..6	Μη-διασταυρούμενες διαμερίσεις και ελεύθεροι συσσωρευτές	4
1..7	Τανυστική Δύναμη . . . . .	5
1..8	Haar μοναδιαίοι πίνακες . . . . .	6
2.	Περιγραφή του μαθηματικού προβλήματος . . . . .	6
2..1	Οι ιδιοτιμές τυχαίων μη Ερμιτιανών πινάκων . . . . .	6
2..2	Η σύγκλιση των $\star$ -ροπών. Η θεωρία της ελεύθερης πιθανότητας.	6
2..3	Μέτρο Brown . . . . .	7
3.	Τα κύρια εργαλεία . . . . .	7
3..1	Η μέθοδος της ερμιτιανής αναγωγής . . . . .	7
3..2	Η μέθοδος της γραμμικοποίησης . . . . .	8
4.	Επισκόπηση της εργασίας και διατύπωση των αποτελεσμάτων . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Το μέτρο Brown</b>	<b>11</b>
1.	Το μέτρο Brown για πίνακες . . . . .	12

2.	Ορίζουσα Fuglede-Kadison σε πεπερασμένες von Neumann άλγεβρες	15
3.	Οι υφαρμονικές συναρτήσεις και τα Riesz μέτρα τους	17
4.	Ορισμός του μέτρου Brown	17
<b>3</b>	<b>Το μέτρο Brown: Ισοδύναμος ορισμός</b>	<b>20</b>
1.	Μετασχηματισμός Cauchy και μέτρο Brown	20
1.1	Μετασχηματισμός Cauchy	20
1.2	Φασματικό μέτρο αυτοσυζυγών τελεστών	21
1.3	Φασματικό μέτρο πινάκων	22
1.4	Εμπειρική κατανομή ιδιοτιμών	22
1.5	Μέτρο Brown	22
1.6	Ο κανονικοποιημένος μετασχηματισμός Cauchy και το κανονικοποιημένο μέτρο Brown	23
2.	Μέθοδος ερμιτιανής αναγωγής	25
<b>4</b>	<b>Το μέτρο Brown των πολωνύμων σε ελεύθερες μεταβλητές</b>	<b>28</b>
1.	Η $\star$ -κατανομή του $x$ από τον $G_{X \otimes 1_n}$	28
2.	Γραμμικοποίηση	28
3.	Προσδιορισμός του μέτρου Brown	35
4.	Το μέτρο Brown του αθροίσματος δύο $\star$ -ελεύθερων μεταβλητών	37
4.1	Το ζήτημα των αριστερών και δεξιών αναλλοίωτων προβολών	38
<b>5</b>	<b>Το μέτρο Brown των R-διαγώνιων στοιχείων</b>	<b>46</b>
1.	Το μέτρο Brown των R-διαγώνιων στοιχείων	46
2.	Ο κυκλικός Νόμος	53
<b>6</b>	<b>Το μέτρο Brown των ελλειπτικών-τριγωνικών τελεστών</b>	<b>54</b>
1.	Ελλειπτικά και τριγωνικά-ελλειπτικά σύνολα	54
2.	Ελλειπτικοί Τριγωνικοί Τελεστές	55
2.1	Προαπαιτούμενα	55
2.2	Υπολογισμός του κανονικοποιημένου μετασχηματισμού Cauchy	56

2..3	Υπαρξη και συνέχεια του μετασχηματισμού Cauchy . . . . .	57
2..4	Υπολογισμός του μη κανονικοποιημένου μετασχηματισμού Cauchy	58
3.	Μέτρο Brown των ελλειπτικών τελεστών . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Τελευταίες παρατηρήσεις: Ασυνέχεια του φασματικού μέτρου Brown</b>	<b>61</b>





# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1. Βασικές μαθηματικές έννοιες

#### 1.1 Μέτρα

Μέτρο πιθανότητας  $P$  σε ένα σύνολο  $\Omega$  λέμε οποιαδήποτε συνολοσυνάρτηση από μία  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  στο  $\mathbb{R}$  με τις ιδιότητες:

1.  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2.  $P(\Omega) = 1$
3. Αν  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  με  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , τότε  $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ .

Το στήριγμα μέτρου πιθανότητας στο  $\mathbb{R}^d$  ορίζεται ως

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mu(B(x, r)) > 0, \forall r > 0\},$$

όπου  $B(x, r)$  είναι η κλειστή μπάλα κέντρου  $x$  και ακτίνας  $r$ .

Αριθμητικό μέτρο ενός συνόλου  $A$  ορίζεται το  $\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \alpha \nu \quad |A| < \infty \\ +\infty, & \alpha \lambda \lambda \acute{\omega} \varsigma. \end{cases}$

#### 1.2 Τελεστές

Έστω  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  χώροι με νόρμα. Μία γραμμική απεικόνιση  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  λέγεται φραγμένος τελεστής αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

Αν  $H_1, H_2$  είναι δύο χώροι Hilbert και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  είναι ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός φραγμένος τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^*x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, Tx_1 \rangle_{H_2}$$

για κάθε  $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$ . Ο  $T^*$  ονομάζεται συζυγής του  $T$ . Είναι φραγμένος τελεστής και  $\|T^*\| = \|T\|$ .

Ενας τελεστής  $L : V \rightarrow V$  λέγεται ερμιτιανός ή αυτοσυζυγής, αν  $\forall u, v \in V$ ,

$$\langle L(u), v \rangle = \langle u, L(v) \rangle.$$

Δηλαδή, ένας τελεστής  $T$  λέγεται αυτοσυζυγής αν  $T = T^*$ .

Ακόμη, ένας τελεστής  $T$  λέγεται κανονικός αν  $T^*T = TT^*$  και μοναδιαίος αν:  $T^*T = 1_{H_1}, TT^* = 1_{H_2}$ , όπου  $T \in B(H_1, H_2)$ . (Αντίστοιχα, ένας  $n \times n$  πίνακας  $A$  λέγεται κανονικός αν  $AA^* = A^*A$  και ερμιτιανός αν  $A^* = A$ , όπου  $A = [a_{ij}], A^* = [\bar{a}_{ji}]$ .)

Η απεικόνιση  $T \rightarrow T^* : B(H_1, H_2) \rightarrow B(H_2, H_1)$  έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι αντιγραμμική, δηλαδή  $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda}S^*$ .
2.  $T^{**} = T$ .
3.  $\|T^*\| = \|T\|$ .
4. Αν  $S : H_1 \rightarrow H_2, T : H_2 \rightarrow H_3$  φραγμένοι τελεστές, τότε  $(TS)^* = S^*T^*$ .
5.  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ .

Ειδικότερα, (αν  $H = H_1 = H_2$ ), η  $T \rightarrow T^* : B(H) \rightarrow B(H)$  είναι μία ενέλιξη (δηλαδή μια συνάρτηση που είναι η ίδια η αντίστροφη συνάρτηση του εαυτού της) που ικανοποιεί την ιδιότητα 5 πιο πάνω, τη λεγόμενη  $C^*$ .

### 1.3 Άλγεβρες

Μία άλγεβρα  $\mathfrak{A}$  λέγεται  $C^*$  άλγεβρα αν είναι μία άλγεβρα Banach (δηλαδή μία προσεταιριστική άλγεβρα που είναι ταυτόχρονα ένας χώρος Banach) εφοδιασμένη με μία ενέλιξη :  $a \rightarrow a^*$ , όπου  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  (ιδιότητα  $C^*$ ).

Αναπαράσταση  $(\pi, H)$  μιας  $C^*$  άλγεβρας  $\mathfrak{A}$  λέγεται μία απεικόνιση  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow B(H)$  που είναι μορφισμός αλγεβρών, δηλαδή

1.  $\pi(a + \lambda b) = \pi(a) + \lambda\pi(b)$ ,
2.  $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ ,
3.  $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$ ,

για κάθε  $a, b \in \mathfrak{A}, \lambda \in \mathbb{C}$ .

Η αναπαράσταση  $\pi$  λέγεται πιστή αν είναι 1-1 και λέγεται μη εκφυλισμένη αν  $\text{span}(\pi(\mathfrak{A})(H)) = H$ .

Εστω  $\mathfrak{A}$  άλγεβρα Banach με μονάδα και  $x \in \mathfrak{A}$ . Φάσμα του  $x$  είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathfrak{A})\},$$

όπου  $\text{Inn}(\mathfrak{A})$  είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία της  $\mathfrak{A}$ .

Το φάσμα είναι μη κενό, κλειστό και φραγμένο σύνολο.

Για παράδειγμα, το φάσμα κάθε  $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του, δηλαδή των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα  $a$ .

Αν  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ , το  $r_\lambda(x) := (\lambda I - x)^{-1}$  λέγεται επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση του  $x$ .

Μία von Neumann άλγεβρα είναι μία  $\star$ -άλγεβρα φραγμένων τελεστών σε χώρο Hilbert, η οποία είναι κλειστή ως προς την ασθενή τοπολογία τελεστών και περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Είναι μία ειδική περίπτωση  $C^*$ -άλγεβρας.

#### 1.4 Η ασθενής- $\star$ ( $w^*$ ) τοπολογία

Έστω  $(X, T)$  τοπολογικός χώρος και  $x \in X$ . Ένα  $U \subset X$  καλείται περιοχή του  $x$  αν  $x \in U$ . Το σύνολο των περιοχών του  $x$  καλείται σύστημα περιοχών του  $x$  και συμβολίζεται με  $\mathfrak{N}_x$ .

Το  $(\Lambda, \leq)$  λέγεται κατευθυνόμενο σύνολο αν  $\leq$  είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο σύνολο  $\Lambda$  και για κάθε  $a, b \in \Lambda$  υπάρχει  $c \in \Lambda$  ώστε  $a \leq c$  και  $b \leq c$ .

Έστω  $X$  σύνολο. Δίκτυο στο  $X$  είναι οποιαδήποτε συνάρτηση  $p : \Lambda \rightarrow X$ , όπου  $(\Lambda, \leq)$  είναι κατευθυνόμενο μη κενό σύνολο. Γράφουμε  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ή  $(p_\lambda)$ .

Έστω  $(X, T)$  τοπολογικός χώρος,  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  δίκτυο στο  $X$  και  $x \in X$ . Το δίκτυο  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  συγκλίνει στο  $x$ , αν για κάθε  $U \in \mathfrak{N}_x$  υπάρχει  $\lambda_0 = \lambda_0(U) \in \Lambda$  ώστε  $p_\lambda \in U$  για κάθε  $\lambda \geq \lambda_0$ . Γράφουμε  $p_\lambda \rightarrow x$  ή  $\lim_\lambda p_\lambda = x$ .

Έστω  $X$  χώρος Banach. Η ασθενής- $\star$  ( $w^*$ ) τοπολογία του τοπολογικού δυικού  $X^*$  είναι η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία του  $X$ : Αν  $(\omega_i)$  είναι δίκτυο στον  $X^*$ :

$$\omega_i \rightarrow \omega \quad (\text{κατά } w^*) \Leftrightarrow \omega_i(x) \rightarrow \omega(x) \quad \forall x \in X.$$

Η  $w^*$  είναι δηλαδή ο περιορισμός της τοπολογίας γινόμενο του  $\mathbb{C}^X$  στον  $X^*$ .

#### 1.5 Η ελεύθερη ανεξαρτησία

Έστω ότι  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  είναι μία μοναδιαία άλγεβρα με ένα μοναδιαίο γραμμικό συναρτησοειδές  $\varphi$ . Έστω ότι  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  είναι μοναδιαίες υποάλγεβρες. Λέμε ότι οι  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  είναι ελεύθερα ανεξάρτητες (ή απλά ελεύθερες) ως προς  $\varphi$  αν όποτε έχουμε  $r \geq 2$  και  $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{A}$  τέτοια ώστε:

1.  $\varphi(a_i) = 0$ , για  $i = 1, \dots, r$

2.  $a_i \in \mathcal{A}_{j_i}$ , με  $1 \leq \mathcal{A}_{j_i} \leq s$ , για  $i = 1, \dots, r$

3.  $j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3, \dots, j_{r-1} \neq j_r$ ,

τότε έχουμε και ότι  $\varphi(a_1 \cdots a_r) = 0$ .

Συνοπτικά, το εναλλασσόμενο γινόμενο κεντραρισμένων στοιχείων είναι κεντραρισμένο.

Βασικές ιδιότητες της ελεύθερης ανεξαρτησίας:

Γενικά αναφερόμαστε σε ένα ζεύγος  $(\mathfrak{A}, \varphi)$ , που αποτελείται από μια μοναδιαία άλγεβρα  $\mathfrak{A}$  και ένα μοναδιαίο γραμμικό συναρτησοειδές  $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\varphi(1) = 1$ , ως μη αντιμεταθετικό χώρο πιθανότητας. Αν η  $\mathfrak{A}$  είναι  $\star$ -άλγεβρα και  $\varphi$  είναι μία κατάσταση, δηλαδή εκτός από  $\varphi(1) = 1$  η  $\varphi$  είναι επίσης θετική (το οποίο σημαίνει ότι  $\varphi(a^*a) \geq 0$  για κάθε  $a \in \mathfrak{A}$ ). Τότε ονομάζουμε τον  $(\mathfrak{A}, \varphi)$   $\star$ -χώρο πιθανότητας. Αν  $\mathfrak{A}$  είναι μία  $\mathbb{C}^*$ -άλγεβρα και  $\varphi$  είναι μία κατάσταση, τότε ο  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  είναι  $\mathbb{C}^*$ -χώρος πιθανότητας. Τα στοιχεία της  $\mathfrak{A}$  ονομάζονται μη-αντιμεταθετικές τυχαίες μεταβλητές ή απλά τυχαίες μεταβλητές.

Αν  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  είναι ένας  $\star$ -χώρος πιθανότητας και  $\varphi(x^*x) = 0$  μόνο για  $x = 0$ , τότε η  $\varphi$  ονομάζεται πιστή. Αν  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  είναι ένας μη αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας, λέμε ότι η  $\varphi$  είναι μη εκφυλισμένη αν έχουμε ότι  $\varphi(yx) = 0$  για κάθε  $y \in \mathfrak{A}$  συνεπάγεται ότι  $x = 0$ , και  $\varphi(xy) = 0$  για κάθε  $y \in \mathfrak{A}$  συνεπάγεται ότι  $x = 0$ . Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz [[38] Παρατήρηση 1.2] για μια κατάσταση σε  $\star$ -χώρο πιθανότητας, το «μη εκφυλισμένη» και το «πιστή» είναι ισοδύναμα. Αν  $\mathfrak{A}$  είναι μία άλγεβρα von Neumann και η  $\varphi$  είναι μια πιστή κανονική κατάσταση, δηλαδή συνεχής ως προς την  $\star$ -ασθενή τοπολογία, ο  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  ονομάζεται  $W^*$ -χώρος πιθανότητας. Αν η  $\varphi$  είναι επίσης ίχνος, δηλαδή  $\varphi(ab) = \varphi(ba)$  για κάθε  $a, b \in \mathfrak{A}$ , τότε είναι ένας  $W^*$ -χώρος πιθανότητας ίχνους.

Έστω  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  ένας μη αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας. Τα στοιχεία  $a_1, \dots, a_s$  λέμε ότι είναι ελεύθερα εάν οι παραγόμενες μοναδιαίες υποάλγεβρες  $\mathcal{A}_i = \text{alg}(1, a_i)$  ( $i = 1, \dots, s$ ) είναι ελεύθερες στην  $\mathfrak{A}$  ως προς την  $\varphi$ . Αν  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  είναι ένας  $\star$ -χώρος πιθανότητας, τότε λέμε ότι τα  $a_1, \dots, a_s \in \mathfrak{A}$  είναι  $\star$ -ελεύθερα εάν οι παραγόμενες μοναδιαίες  $\star$ -υποάλγεβρες  $\mathcal{B}_i = \text{alg}(1, a_i, a_i^*)$  ( $i = 1, \dots, s$ ) είναι ελεύθερες στην  $\mathfrak{A}$  ως προς την  $\varphi$ . Με τον ίδιο τρόπο, η  $(\star)$ -ελευθερία μεταξύ συνόλων μεταβλητών ορίζεται από την ελευθερία των παραγόμενων μοναδιαίων  $(\star)$ -υποαλγεβρών.

## 1.6 Μη-διασταυρούμενες διαμερίσεις και ελεύθεροι συσσωρευτές

Για έναν θετικό ακέραιο αριθμό  $n$ , συμβολίζουμε με  $[n] = \{1, \dots, n\}$  και με  $P(n)$  όλες τις διαμερίσεις του συνόλου  $[n]$ . Δηλαδή,  $\pi = \{V_1, \dots, V_k\} \in P(n)$  σημαίνει ότι  $\{V_1, \dots, V_k\} \subset [n]$ ,  $V_i \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, k$ ,  $V_1 \cup \dots \cup V_k = [n]$  και  $V_i \cap V_j = \emptyset$  για  $i \neq j$ . Τα  $V_1, \dots, V_k$  ονομάζονται μπλόκα της  $[\pi]$ .

Μία διαμέριση  $\pi \in P(n)$  καλείται μη διασταυρούμενη αν δεν υπάρχουν  $i < j < k < l$  στοιχεία του  $[n]$  ώστε:

- Οι  $i$  και  $k$  να είναι στο ίδιο μπλόκο της  $\pi$ ,
- οι  $j$  και  $l$  να είναι στο ίδιο μπλόκο της  $\pi$ ,
- αλλά οι  $i$  και  $j$  να μην είναι στο ίδιο μπλόκο της  $\pi$ .

Η συλλογή όλων των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  συμβολίζεται με

$NC(n)$ .

Εστω ότι ο  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  είναι ένας μη αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας. Οι αντίστοιχοι ελεύθεροι συσσωρευτές  $\kappa_n : \mathfrak{A}^n \rightarrow \mathbb{C} (n \geq 1)$  ορίζονται αναδρομικά με τη βοήθεια των ροπών από τη φόρμουλα ροπης-συσσωρευτή

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_{\pi}(a_1, \dots, a_n),$$

όπου, εξ ορισμού, αν  $\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$ , τότε

$$\kappa_{\pi}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{V \in \pi, V=(i_1, \dots, i_l)} \kappa_l(a_{i_1}, \dots, a_{i_l}).$$

Τα ακόλουθα τρία παραδείγματα υποδεικνύουν την αναδρομική διαδικασία υπολογισμού του  $\kappa_n$ . Παρατηρούμε ότι τα  $\kappa_n$  είναι  $n$ -γραμμικές συναρτήσεις.

**Παράδειγμα 1** (1) Για  $n = 1$ , έχουμε  $\varphi(a_1) = \kappa_1(a_1)$ , και συνεπώς  $\kappa_1(a_1) = \varphi(a_1)$ .  
(2) Για  $n = 2$ , έχουμε

$$\varphi(a_1 a_2) = \kappa_{\{(1,2)\}}(a_1, a_2) + \kappa_{\{(1),(2)\}}(a_1, a_2) = \kappa_2(a_1, a_2) + \kappa_1(a_1)\kappa_1(a_2).$$

Εφόσον ξέρουμε από τον υπολογισμό για  $n = 1$  ότι  $\kappa_1(a_1) = \varphi(a_1)$ , προκύπτει ότι

$$\kappa_2(a_1, a_2) = \varphi(a_1 a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2).$$

(3) Για  $n = 3$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 a_2 a_3) &= \kappa_{\{(1,2,3)\}}(a_1, a_2, a_3) + \kappa_{\{(1,2),(3)\}}(a_1, a_2, a_3) + \kappa_{\{(1),(2,3)\}}(a_1, a_2, a_3) \\ &\quad + \kappa_{\{(1,3),(2)\}}(a_1, a_2, a_3) + \kappa_{\{(1),(2),(3)\}}(a_1, a_2, a_3) \\ &= \kappa_3(a_1, a_2, a_3) + \kappa_2(a_1, a_2)\kappa_1(a_3) + \kappa_2(a_2, a_3)\kappa_1(a_1) \\ &\quad + \kappa_2(a_1, a_3)\kappa_1(a_2) + \kappa_1(a_1)\kappa_1(a_2)\kappa_1(a_3). \end{aligned}$$

Συνεπώς, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \kappa_3(a_1, a_2, a_3) &= \varphi(a_1 a_2 a_3) - \varphi(a_1)\varphi(a_2 a_3) \\ &\quad - \varphi(a_2)\varphi(a_1 a_3) - \varphi(a_3)\varphi(a_1 a_2) + 2\varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(a_3). \end{aligned}$$

## 1.7 Τανυστική Δύναμη

Για θετικό ακέραιο  $k$  ορίζουμε την τανυστική δύναμη του Ευκλείδειου χώρου  $V$  με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  ως εξής:  $V^{\otimes k} = V \otimes \dots \otimes V$ ,  $k$ -φορές.

Για κάθε  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in V$  ορίζεται το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_k, y_1 \otimes \dots \otimes y_k \rangle = \prod_{i=1}^k \langle x_i, y_i \rangle$$

Ως  $Sym(V^{\otimes k})$  ορίζεται το συμμετρικό μέρος του  $V^{\otimes k}$ , όπου είναι ο παραγόμενος υπό-χώρος των τανυστών  $x^{\otimes k}$ ,  $k$ -φορές, για  $x \in V$ .

Ακόμα, υπολογίζεται  $\dim Sym(V^{\otimes k}) = \binom{\dim V + k - 1}{k}$

Τώρα, μπορεί να οριστεί το ευθύ άθροισμα  $W = \mathbb{R} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes k}$ , το οποίο αποτελεί Ευκλείδειο χώρο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Για  $a(t)$  πολυώνυμο στους πραγματικούς αριθμούς και για διάνυσμα  $x \in V$ , ορίζεται:

$$\alpha^{\otimes}(x) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x \oplus \dots \oplus \alpha_k x^{\otimes k}, \text{ όπου } \alpha(t) = \sum_{m=0}^k \alpha_m t^m. \quad (3)$$

$$\text{Άρα, } \langle \alpha^{\otimes}(x), \beta^{\otimes}(y) \rangle = c(\langle x, y \rangle), \text{ όπου } c(t) = \sum_{m=0}^k \alpha_m \beta_m t^m.$$

## 1.8 Haar μοναδιαίοι πίνακες

Συμβολίζουμε με  $\mathcal{U}(N)$  την ομάδα των μοναδιαίων  $N \times N$  πινάκων, δηλαδή των πινάκων στο  $\mathbb{C}$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $U^*U = UU^* = 1_N$ . Αφού η  $\mathcal{U}(N)$  είναι μία συμπαγής ομάδα, μπορούμε να θεωρήσουμε  $dU$  το μέτρο Haar στην  $\mathcal{U}(N)$ , κανονικοποιημένο ώστε

$$\int_{\mathcal{U}(N)} dU = 1,$$

το οποίο δίνει ένα μέτρο πιθανότητας στη  $\mathcal{U}(N)$ . Ένας τυχαίος μοναδιαίος πίνακας Haar είναι ένας πίνακας  $U(N)$  επιλεγμένος τυχαία από την  $\mathcal{U}(N)$  ως προς το μέτρο (βλέπε [23]).

Ένας χρήσιμος θεωρητικός και πρακτικός τρόπος ώστε να φτιάχνουμε Haar μοναδιαίους πίνακες είναι ο εξής: παίρνουμε έναν  $N \times N$  τυχαίο πίνακα τα στοιχεία του οποίου είναι ανεξάρτητες μιγαδικές τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές και εφαρμόζουμε τη μέθοδο διαγωνοποίησης Gram-Schmidt. Το αποτέλεσμα θα είναι ένας Haar μοναδιαίος πίνακας.

## 2. Περιγραφή του μαθηματικού προβλήματος

### 2.1 Οι ιδιοτιμές τυχαίων μη Ερμιτιανών πινάκων

Η μελέτη της κατανομής ιδιοτιμών των μη ερμιτιανών τυχαίων πινάκων είναι σημαντικό και ενδιαφέρον πρόβλημα, ειδικά στη μαθηματική βιβλιογραφία της φυσικής. Δυστυχώς, οι περισσότερες από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των τυχαίων ερμιτιανών πινάκων αποτυγχάνουν στη μη ερμιτιανή περίπτωση, γεγονός που καθιστά την τελευταία πολύ δύσκολη.

### 2.2 Η σύγκλιση των $\star$ -ροπών. Η θεωρία της ελεύθερης πιθανότητας.

Συνήθως μας ενδιαφέρει η οριακή συμπεριφορά των ιδιοτιμών του τυχαίου πίνακα καθώς το μέγεθος του πίνακα τείνει στο άπειρο. Είναι λοιπόν φυσικό να αναρωτηθούμε: Μια δεδομένη ακολουθία τυχαίων πινάκων συγκλίνει με τη μια ή την άλλη έννοια σε κάποιο (απειροδιάστατο) αντικείμενο, καθώς το μέγεθος του πίνακα

τείνει στο άπειρο; Θα ήταν πολύ δελεαστικό να μελετήσουμε αυτό το όριο αντί για την ίδια την ακολουθία των τυχαίων πινάκων.

Για να πραγματοποιήσουμε αυτό το πρόγραμμα, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του  $W^*$ -χώρου πιθανότητας (που είναι μια άλγεβρα von Neumann  $\mathfrak{A}$  εφοδιασμένη με ένα πιστό, κανονικό, θετικό και γραμμικό συναρτησιοειδές ίχνους  $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Η άλγεβρα  $\mathfrak{A}_N = \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, M_N)$  των  $N \times N$  τυχαίων πινάκων με όλες τις ροπές τους πεπερασμένες, εφοδιασμένες με ένα συναρτησιοειδές ίχνους  $\varphi_N(x) = \frac{1}{N} \mathbb{E} \operatorname{tr} x$  για  $x \in \mathfrak{A}_N$  ταιριάζει καλά σε αυτό το πλαίσιο (για να είμαστε πολύ ακριβείς: ο ορισμός μιας άλγεβρας von Neumann απαιτεί οι τελεστές που ανήκουν σε αυτή να είναι φραγμένοι, κάτι που δεν ισχύει για τα πιο ενδιαφέροντα παραδείγματα των τυχαίων πινάκων, αλλά αυτή η μικρή κατάχρηση ορολογίας δεν θα προκαλέσει προβλήματα στη συνέχεια).

Λέμε ότι μια ακολουθία τυχαίων πινάκων  $\{A_N \in \mathfrak{A}_N\}$  συγκλίνει κατά  $\star$ -ροπές σε κάποιο στοιχείο  $x \in \mathfrak{A}$  αν για κάθε επιλογή από  $s_1, \dots, s_n \in \{1, \star\}$  έχουμε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(A_N^{s_1} \cdots A_N^{s_n}) = \varphi(x^{s_1} \cdots x^{s_n}).$$

Αποδεικνύεται ότι πολλές κατηγορίες τυχαίων πινάκων έχουν ένα όριο με την έννοια των  $\star$ -ροπών και ο οριακός τελεστής μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια της θεωρίας ελεύθερης πιθανότητας.

### 2.3 Μέτρο Brown

Το μέτρο Brown είναι μια αναλογία της πυκνότητας των ιδιοτιμών για στοιχεία των χώρων  $W^*$ -πιθανότητας. Μεγάλο του πλεονέκτημα θεωρείται ότι είναι καλά ορισμένο και για μη κανονικούς τελεστές και επιπλέον ότι για τυχαίους πίνακες συμπίπτει με τη μέση εμπειρική κατανομή ιδιοτιμών. Υπενθυμίζουμε τον ακριβή ορισμό στο Κεφάλαιο 2.

## 3. Τα κύρια εργαλεία

### 3.1 Η μέθοδος της ερμιτιανής αναγωγής

Σε αυτή την εργασία μελετάμε αυστηρά την ιδέα των Janik, Nowak, Papp και Zahed που χρησιμοποιήθηκε αργότερα στις εργασίες [17], [18], [19] με την ονομασία μέθοδος ερμιτιανής αναγωγής. Όπως θα δούμε στα επόμενα Κεφάλαια, το μέτρο Brown  $\mu_x$  ενός στοιχείου  $x$  είναι στενά συνδεδεμένο με τον μετασχηματισμό Cauchy

$$G_x(\lambda) := ((x - \lambda)^{-1})$$

του  $x$ . Ασυμπτωτικά, μπορούμε να προσεγγίσουμε τον  $G_x(\lambda)$  στο άπειρο με την ακολουθία των ροπών του  $x$  και για το λόγο αυτό μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά με τη βοήθεια της θεωρίας της ελεύθερης πιθανότητας για πολλούς τελεστές  $x$ . Ωστόσο,

για μια δοσμένη ακολουθία ροπών  $\{m_n = \int t^n d\mu_x(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , συνήθως υπάρχουν πολλά μέτρα πιθανότητας με στήριγμα στο  $\mathbb{C}$  που έχουν την  $\{m_n\}_n$  ως ακολουθία ροπών τους. Συγκεκριμένα, αν ο  $x$  δεν είναι ερμιτιανός, τότε η σειρά  $G_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x^n) \lambda^{-n-1}$  δεν καθορίζει από μόνη της το μέτρο Brown του  $x$ .

Η ιδέα είναι να τοποθετήσουμε τον τελεστή  $x$  και τον ερμιτιανό συζυγή του  $x^*$  σε ένα  $2 \times 2$  πίνακα και να θεωρήσουμε έναν μετασχηματισμό Cauchy με τιμές πίνακες

$$G_\varepsilon(\lambda) := \varphi \left( \begin{bmatrix} i\varepsilon & \lambda - x \\ \bar{\lambda} - x^* & i\varepsilon \end{bmatrix}^{-1} \right) \in M_2(\mathbb{C}),$$

που εξαρτάται από μια πρόσθετη παράμετρο  $\varepsilon > 0$ . Η παραπάνω συνάρτηση ορίζεται για κάθε  $\varepsilon > 0$ , ενώ παράλληλα θα θεωρηθεί ως περιορισμός μιας αναλυτικής συνάρτησης που ορίζεται στο άνω ημιεπίπεδο πινάκων  $\mathbb{H}^+(M_n(\mathbb{C}))$  ( $\mathbb{H}^+(M_n(\mathbb{C})) := \{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid \exists \varepsilon > 0 : Im(B) \geq \varepsilon 1\}$ , όπου  $Im(B) := (B - B^*)/2i$ ). Όπως θα δούμε, το όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$  μας δίνει πρόσβαση στον αρχικό μετασχηματισμό Cauchy  $G_x(\lambda)$  και επομένως, όπως θα δούμε στη σχέση (2) του Κεφαλαίου 3 της εργασίας, στο μέτρο Brown του  $x$ .

Αυτή η μέθοδος φαίνεται να είναι εξαιρετικά απλή και μάλιστα οι εφαρμογές της στη βιβλιογραφία της φυσικής περιελάμβανε πολύ σύντομους και απλούς υπολογισμούς. Ωστόσο, από μαθηματική άποψη, συχνά απέχει πολύ από το να είναι αυστηρή. Στη συνέχεια της εργασίας θα θεμελιώσουμε τη μέθοδο ερμιτιανής αναγωγής.

Το κύριο συστατικό στην προσέγγισή μας είναι μια πρόσφατη πρόοδος στο [7] στην αναλυτική περιγραφή των ελεύθερων συνελίξεων τελεστών, βασιζόμενη στην ιδέα της μείωσης τάξης (subordination). Με λίγα λόγια, η μείωση τάξης συνήθως αποδίδει μια αναλυτική περιγραφή των σχετικών εξισώσεων (ας πούμε, για τους μετασχηματισμούς Cauchy με τελεστές) που δεν ισχύουν μόνο σε κάποια γειτονιά του απείρου, αλλά παντού στο μιγαδικό άνω ημιεπίπεδο των τελεστών ( $\mathbb{H}^+(B) := \{b \in B : Im(b) > 0\}$ ). Εφόσον η ανάκτηση της επιθυμητής κατανομής βασίζεται στη γνώση του μετασχηματισμού Cauchy κοντά στον πραγματικό άξονα, η αναλυτική περιγραφή παντού στο σύνθετο άνω ημιεπίπεδο είναι ζωτικής σημασίας για μια αυστηρή μέθοδο. Ως παραδείγματα για τέτοιους σαφείς υπολογισμούς, θα παρουσιάσουμε μια λεπτομερή ανάλυση δύο ενδιαφέρουσων κλάσεων μη ερμιτιανών τυχαίων πινάκων και των αντίστοιχων μη ερμιτιανών τελεστών (δηλαδή, των λεγόμενων R-διαγώνιων και ελλειπτικών-τριγωνικών τελεστών).

### 3..2 Η μέθοδος της γραμμικοποίησης

Φαίνεται ότι μιμούμενοι τις μεθόδους που παρουσιάζονται σε αυτή την εργασία, η οποία στηρίζεται στην μελέτη των Belinschi, Śniady και Speicher, θα πρέπει να είμαστε ικανοί να υπολογίσουμε το μέτρο Brown σχεδόν οποιουδήποτε τελεστή που περιγράφεται σε όρους ελεύθερης πιθανότητας. Ως πολύ γενική κατηγορία τέτοιων τελεστών, θα εξετάσουμε ειδικότερα το πρόβλημα των τυχαίων (γενικά, όχι αυτοσυζυγών) πολυωνύμων σε ελεύθερες μεταβλητές. Στην εργασία [7] το αντίστοιχο πρόβλημα για αυτοσυζυγή πολυώνυμα σε αυτοσυζυγείς ελεύθερες μετα-



βλητές επιλύθηκε με χρήση της τεχνικής της γραμμικοποίησης, που μας επιτρέπει να ανάγουμε το πολυωνυμικό πρόβλημα σε ένα γραμμικό πρόβλημα με τελεστές. Η ίδια αναγωγή λειτουργεί και στη μη αυτοσυζυγή περίπτωση και θα δείξουμε πώς ο συνδυασμός των μεθόδων ερμιτιανοποίησης και γραμμικοποίησης θα οδηγήσει σε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του μέτρου Brown ενός πολυωνύμου  $\star$ -ελεύθερων μεταβλητών μέσω των  $\star$ -κατανομών των μεταβλητών του. Ιδιαίτερως, εάν οι μεταβλητές είναι κανονικές, τότε αυτό μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού του μέτρου Brown του πολυωνύμου από τα μέτρα Brown των μεταβλητών του. Στη συνέχεια θα ξεκινήσουμε επίσης μια έρευνα για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του απλούστερου πολυωνύμου, δηλαδή το άθροισμα δύο  $\star$ -ελεύθερων τελεστών. Θα απευθύνουμε συγκεκριμένα το ερώτημα πώς οι ιδιοτιμές στο άθροισμα μπορούν να προκύψουν από αθροίσματα ιδιοτιμών. Αυτό σχετίζεται (αλλά δεν είναι ισοδύναμο) με το ζήτημα των ατόμων στα αντίστοιχα μέτρα Brown.

#### 4. Επισκόπηση της εργασίας και διατύπωση των αποτελεσμάτων

- ▶ Στο Κεφάλαιο 2 ορίζουμε πλήρως το μέτρο Brown και αναλύουμε τις θεμελιώδεις έννοιες που το πλαισιώνουν.
- ▶ Στο Κεφάλαιο 3 υπενθυμίζουμε τους ορισμούς του μέτρου Brown και του μετασχηματισμού Cauchy καθώς και τις κανονικοποιημένες εκδοχές τους και τη σύνδεσή τους με τη μέθοδο της ερμιτιανής αναγωγής. Παραθέτουμε επίσης μερικά βασικά εργαλεία της θεωρίας της ελεύθερης πιθανότητας του Voiculescu.
- ▶ Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε το τέχνασμα της γραμμικοποίησης και δείχνουμε πώς συνδυάζεται με τη μέθοδο ερμιτιανής αναγωγής για την απόδοση ενός αλγόριθμου για τον υπολογισμό του μέτρου Brown για πολυώνυμα σε ελεύθερες μεταβλητές. Ύστερα, εξετάζουμε με περισσότερες λεπτομέρειες πολυώνυμα σε ελεύθερες μεταβλητές. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε αναλυτικές ιδιότητες του μέτρου Brown για το άθροισμα δύο  $\star$ -ελεύθερων μεταβλητών.

Στη συνέχεια, στις δύο επόμενες ενότητες, θα ασχοληθούμε με σημαντικές ειδικές κλάσεις μη κανονικών τελεστών και θα (ξανα)εξάγουμε αυστηρές εκφράσεις για τα Brown μέτρα τους.

- ▶ Στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε την κατηγορία των R-διαγώνιων τελεστών που είναι όρια δι-μοναδιαίων αναλλοίωτων τυχαίων πινάκων. Υπολογίζουμε με τις μεθόδους μας το μέτρο Brown των R-διαγώνιων τελεστών και δίνουμε μία εναλλακτική απόδειξη σε αποτελέσματα των Haagerup και Larsen ([26]). Ότι αυτό το μέτρο Brown είναι στην πραγματικότητα το όριο των κατανομών ιδιοτιμής των αντίστοιχων μοντέλων τυχαίων πινάκων αποδείχθηκε πρόσφατα από τους Guionnet, Krishnapur και Zeitouni ([24]).

- ▶ Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε ορισμένους τυχαίους μη ερμιτιανούς Γκαουσιανούς πίνακες με στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο, τα οποία, ανεπίσημα μιλώντας, έχουν διαφορετική συνδιακύμανση από εκείνα κάτω από τη διαγώνιο. Περιγράφουμε τους τελεστές που προκύπτουν ως όρια τέτοιων τυχαίων πινάκων, και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ερμιτιανής αναγωγής για να υπολογίσουμε τα Brown μέτρα τους. Από αποτέλεσμα του Śniady ([42]), γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει στην περίπτωση με την οριακή κατανομή των ιδιοτιμών αυτών των τυχαίων πινάκων.
- ▶ Στην Κεφάλαιο 7 συζητάμε εν συντομία το πρόβλημα της ασυνέχειας του μέτρου Brown. Σε γενικές γραμμές, οι ιδιοτιμές των μη ερμιτιανών πινάκων δεν εξαρτώνται από τις  $\ast$ -ροπές του πίνακα με συνεχή τρόπο και επομένως το μέτρο Brown κάποιου τελεστή μπορεί να μην σχετίζεται με τις ιδιοτιμές των πινάκων που συγκλίνουν κατά  $\ast$ -ροπές σε αυτόν τον τελεστή. Ωστόσο, περιμένει κανείς ότι για φυσικές επιλογές τυχαίων πινάκων αυτή η σύγκλιση πρέπει να διατηρηθεί.

## Κεφάλαιο 2

# Το μέτρο Brown

Έστω  $(\mathcal{M}, \varphi)$  ένας  $W^*$ -χώρος πιθανότητας και ένας τελεστής  $a \in \mathcal{M}$ . Οι σχετικές πληροφορίες για τον  $a$  περιέχονται στην  $\star$ -κατανομή του, που είναι εξ ορισμού η συλλογή όλων των  $\star$ -ροπών του  $a$  ως προς  $\varphi$ . Στην περίπτωση αυτοσυζυγούς ή κανονικού  $a$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτή την κατανομή με ένα αναλυτικό αντικείμενο, ένα μέτρο πιθανότητας  $\mu_a$  στο φάσμα του  $a$ . Ας θυμηθούμε πρώτα αυτή τη σύνδεση.

Αν ο  $a$  είναι αυτοσυζυγής, τότε υπάρχει ένα μοναδικά καθορισμένο μέτρο πιθανότητας  $\mu_a$  στο  $\mathbb{R}$  έτσι ώστε για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(a^n) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu_a(t)$$

και το στήριγμα του  $\mu_a$  είναι το φάσμα του  $a$ .

Γενικότερα, αν ο  $a \in \mathcal{M}$  είναι κανονικός (δηλαδή,  $aa^* = a^*a$ ), τότε το φασματικό θεώρημα μας παρέχει ένα φασματικό μέτρο,  $E_a$ , με τιμές προβολές, και το μέτρο Brown είναι απλά το φασματικό μέτρο  $\mu_a = \varphi \circ E_a$ . Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση κανονικού τελεστή  $a$  το  $\mu_a$  μπορεί να μην καθορίζεται από τις ροπές του  $a$ . Πράγματι, αν ο  $a = u$  είναι ένας μοναδιαίος Haar τελεστής, τότε οι ροπές του  $u$  είναι ίδιες με τις ροπές του μηδενικού τελεστή. Φυσικά, οι  $\star$ -ροπές τους είναι διαφορετικές. Για έναν κανονικό τελεστή  $a$  το φασματικό μέτρο  $\mu_a$  προσδιορίζεται μοναδικά από την

$$\varphi(a^n a^{*m}) = \int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m d\mu_a(z),$$

για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$ . Το στήριγμα του μετρου  $\mu_a$  είναι πάλι το φάσμα του τελεστή  $a$ . Τώρα θα προσπαθήσουμε να αντιστοιχίσουμε σε οποιονδήποτε τελεστή  $a \in \mathcal{M}$  ένα μέτρο πιθανότητας  $\mu_a$  στο φάσμα του, το οποίο περιέχει σχετικές πληροφορίες για την  $\star$ -κατανομή του  $a$ . Αυτό το  $\mu_a$  θα ονομαστεί το Brown μέτρο του  $a$ . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για μη κανονικούς τελεστές υπάρχουν πολύ περισσότερες  $\star$ -ροπές του  $a$  από αυτές που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση. Εκεί δεν υπάρχει δυνατότητα να κωδικοποιήσουμε όλες τις  $\star$ -ροπές του  $a$  από τις  $\star$ -ροπές ενός μέτρου πιθανότητας. Ως εκ τούτου, θα χάσουμε αναγκαστικά κάποιες πληροφορίες σχετικά

με την  $\star$ -κατανομή του  $a$  όταν περνάμε στο μέτρο Brown του  $a$ . Θα αποδειχθεί επίσης ότι χρειαζόμαστε η κατάσταση μας  $\varphi$  να είναι ένα ίχνος για να ορίσουμε το  $\mu_a$ . Ως εκ τούτου, στα παρακάτω θα δουλέψουμε μόνο σε  $W^*$ -χώρους πιθανότητας  $(\mathcal{M}, \varphi)$  ίχνους. Υπενθυμίζουμε ότι αυτό σημαίνει ότι το  $\varphi$  είναι ένα πιστό και κανονικό ίχνος. Άλγεβρες Von Neumann που δέχονται τέτοια πιστά και κανονικά ίχνη αντιμετωπίζονται συνήθως ως πεπερασμένες von Neumann άλγεβρες. Αν ο  $\mathcal{M}$  είναι πεπερασμένος παράγοντας, τότε μια κατάσταση-ίχνος  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι μοναδική στον  $\mathcal{M}$  και είναι αυτόματα κανονική και πιστή. [[33], ορισμός 6.3.1 και θεώρημα 8.2.8].

## 1. Το μέτρο Brown για πίνακες

Στην περίπτωση πεπερασμένων διαστάσεων  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , το μέτρο Brown  $\mu_T$  για έναν κανονικό πίνακα  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , που προσδιορίζεται από τη σχέση (2) είναι στην πραγματικότητα η κατανομή ιδιοτιμών του πίνακα. Είναι σαφές ότι στην περίπτωση των πινάκων μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόν τον ορισμό στη γενική, μη κανονική περίπτωση. Για έναν τυχαίο πίνακα  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , το φάσμα  $\sigma(T)$  δίνεται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - T) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

όπου  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  είναι οι ρίζες που επαναλαμβάνονται σύμφωνα με την αλγεβρική πολλαπλότητα. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ως εμπειρική κατανομή ιδιοτιμών (και επομένως ως μέτρο Brown) το μέτρο

$$\mu_T = \frac{1}{n}(\delta_{\lambda_1} + \cdots + \delta_{\lambda_n}).$$

Θέλουμε τώρα να επεκτείνουμε αυτόν τον ορισμό του  $\mu_T$  σε μια κατάσταση απεριορίστων διαστάσεων. Εφόσον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο δεν έχει νόημα σε μια τέτοια κατάσταση πρέπει να βρούμε έναν αναλυτικό τρόπο προσδιορισμού των ριζών του  $P(\lambda)$  ο οποίος επίσης επιβιώνει στις άπειρες διαστάσεις. Θεωρούμε

$$\log |P(\lambda)| = \log |\det(\lambda I - T)| = \sum_{i=1}^n \log |\lambda - \lambda_i|.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η συνάρτηση  $\lambda \rightarrow \log |\lambda|$  είναι αρμονική στο  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  και ότι γενικά έχει λαπλασιανή

$$\nabla^2 \log |\lambda| = 2\pi \delta_0$$

με την έννοια των κατανομών. Εδώ η λαπλασιανή δίνεται από τον τύπο

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2},$$

όπου  $\lambda_r$  και  $\lambda_i$  είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα του  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Πράγματι, για  $\lambda \neq 0$  γράφουμε τη  $\nabla^2$  σε πολικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

και έχουμε

$$\nabla^2 \log |\lambda| = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε την ιδιομορφία στο 0 και να γράψουμε τυπικά

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} \nabla^2 \log |\lambda| d\lambda_r d\lambda_i &= \int_{B(0,r)} \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\log |\lambda|)) d\lambda_r d\lambda_i \\ &= \int_{\partial B(0,r)} \operatorname{grad}(\log |\lambda|) n dA \\ &= \int_{\partial B(0,1)} \frac{n}{r} n dA \\ &= \frac{1}{r} \cdot 2\pi r \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Οπότε είναι

$$\int_{B(0,r)} \nabla^2 \log |\lambda| d\lambda_r d\lambda_i = 2\pi,$$

ανεξάρτητα από το  $r > 0$ . Συνεπώς, το  $\nabla^2 \log |\lambda|$  πρέπει να είναι ίσο με  $2\pi \delta_0$ . Τώρα δείχνουμε αυστηρά, μέσω της ολοκλήρωσης μιας δοκιμαστικής συνάρτησης, ότι  $\nabla^2 \log |\lambda| = 2\pi \delta_0$  ως κατανομές. Δείχνουμε, δηλαδή, ότι ενώ  $\nabla^2 \log |z| = 0$  ως συνάρτηση, ενώ  $\nabla^2 \log |z| = 2\pi \delta_0$  ως κατανομή, όπου  $\delta_0$  είναι η κατανομή που εκτιμά μια δοκιμαστική συνάρτηση στο  $(0, 0)$ . Με άλλα λόγια, η  $G(z, w) = \frac{1}{2\pi} \log |z - w|$  είναι η συνάρτηση Green της Λαπλασιανής στο  $\mathbb{R}$ . Για να δούμε τι σημαίνει αυτό, πρώτα σημειώνουμε ότι αν θέσουμε  $\log |z| dx dy = r \log r dr d\theta$ , όπου  $(r, \theta)$  είναι πολικές συντεταγμένες, βλέπουμε ότι  $\log |z|$  είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}^2$ . Έτσι, ορίζεται (βλ. Rudin [40], Κεφ. 6]) μια κατανομή

$$f \mapsto \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

όπου η  $f$  είναι μια δοκιμαστική συνάρτηση, δηλαδή μια  $C^\infty$ -συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Εξορισμού, η Λαπλασιανή αυτής της κατανομής, δηλαδή η ποσότητα  $\nabla^2 \log |z|$ , είναι η κατανομή

$$f \mapsto \int \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Συνεπώς, ισχυριζόμαστε ότι

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2\pi f(0, 0).$$

Συμβολίζουμε το ανάδελτα της  $f$  με  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  και την απόκλιση ενός διανυσματικού χώρου  $F$  με  $\nabla \cdot F$ . Έστω  $D_r = \{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$  και  $D_{r,R} = \{(x, y) | r <$

$\sqrt{x^2 + y^2} < R$ . Συνεχίζουμε σε 3 βήματα:

(1): Έστω ότι  $f, g$  είναι  $C^2$ -συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}^2$ , τότε

$$\nabla \cdot f \nabla g = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g,$$

ώστε

$$f \nabla^2 g - g \nabla^2 f = \nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f).$$

(2): Έστω  $g(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $f$  μία δοκιμαστική συνάρτηση. Επιλέγουμε  $R$  αρκετά μεγάλο ώστε  $\text{supp}(f) \subset D_R$ . Δείχνουμε ότι για κάθε  $0 < r < R$

$$\int \int_{D_{r,R}} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\partial D_r} \left( \frac{1}{r} f - \log r \frac{\partial f}{\partial r} \right) ds.$$

Έστω  $D$  μια ανοιχτή συνεκτική περιοχή στο  $\mathbb{R}^2$  και  $\partial D$  το σύνορό της. Ας υποθέσουμε ότι το  $\partial D$  είναι η ένωση ενός πεπερασμένου αριθμού καμπυλών Jordan που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Το θεώρημα του Green βεβαιώνει ότι για ένα διανυσματικό πεδίο  $F$

$$\int \int_D \nabla \cdot F(x, y) dx dy = \int_{\partial D} F \cdot n ds,$$

όπου  $n$  είναι το κανονικό μοναδιαίο διάνυσμα με φορά προς τα έξω του συνόρου  $\partial D$ . Οπότε ειδικότερα, αν θεωρήσουμε  $F = \nabla f$ , έχουμε

$$\int \int_D \nabla^2 f(x, y) dx dy = \int_{\partial D} \nabla f \cdot n ds.$$

Από υπόθεση, και η  $f$  και το  $\nabla f$  μηδενίζονται στο  $\partial D$  και, από την προηγούμενή μας παρατήρηση ότι η συνάρτηση  $\log |z|$  είναι αρμονική, έπεται ότι  $\nabla^2 g = 0$  στον  $D_{r,R}$ . Συνεπώς

$$\begin{aligned} \int \int_{D_{r,R}} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= - \int \int_{D_{r,R}} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy \\ &= - \int \int_{D_{r,R}} \nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) dx dy \\ &= \int_{\partial D_r} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n ds - \int_{\partial D_R} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n ds \\ &= \int_{\partial D_r} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n ds. \end{aligned}$$

Τώρα,  $\nabla g = (x, y)/(x^2 + y^2)$  και στο  $\partial D_r$  έχουμε  $n = (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$ , οπότε  $\nabla g \cdot n = 1/r$ . Επίσης,  $g = \log r$  στο  $\partial D_r$  και  $\nabla f \cdot n = \frac{\partial f}{\partial r}$  στο  $D_r$ , από τον κανόνα της αλυσίδας. Συνεπώς,

$$\int \int_{D_{r,R}} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{r} \int_{\partial D_r} f ds - \log r \int_{\partial D_r} \frac{\partial f}{\partial r} ds.$$

(3): Τελικά, δείχνουμε ότι για μία δοκιμαστική συνάρτηση  $f$

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2\pi f(0, 0).$$

Για να υπολογίσουμε τα παραπάνω ολοκληρώματα, μπορούμε να παραμετριοποιήσουμε το  $\partial D_r$  με  $x(\theta) = r \cos \theta$  και  $y(\theta) = r \sin \theta$ . Έτσι,  $ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = r d\theta$ . Οπότε

$$\frac{1}{r} \int_{\partial D_r} f ds = \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta,$$

το οποίο συγκλίνει στο  $2\pi f(0, 0)$  καθώς  $r \rightarrow 0$ . Επίσης,

$$\log r \int_{\partial D_r} \frac{\partial f}{\partial r} ds = r \log r \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

Τώρα, καθώς  $r \rightarrow 0$ , το  $\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$  συγκλίνει στο  $2\pi \frac{\partial f}{\partial r}(0, 0)$  και το  $r \log r$  συγκλίνει στο μηδέν. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int \int_{D_R} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int \int_{D_{r,R}} \nabla^2 f(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= 2\pi f(0, 0), \end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός απεδείχθη.

Μπορούμε, λοιπόν, τώρα να γράψουμε την κατανομή ιδιοτιμών  $\mu_T$  στη μορφή

$$\mu_T = \frac{1}{n} (\delta_{\lambda_1} + \dots + \delta_{\lambda_n}) = \frac{1}{2\pi n} \nabla^2 \sum_{i=1}^n \log |\lambda - \lambda_i| = \frac{1}{2\pi n} \nabla^2 \log |\det(T - \lambda I)|.$$

Καθώς υπάρχει μια εκδοχή της ορίζουσας σε πλαίσιο άπειρων διαστάσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον τύπο για να γενικεύσουμε τον ορισμό του  $\mu_T$ .

## 2. Ορίζουσα Fuglede-Kadison σε πεπερασμένες von Neumann άλγεβρες

Για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σχέση σε άπειρες διαστάσεις, χρειαζόμαστε μια γενίκευση της ορίζουσας. Μια τέτοια γενίκευση δόθηκε από τους Fuglede και Kadison [21] το 1952 για τελεστές σε μία πεπερασμένη άλγεβρα  $\mathcal{M}$ . Η περίπτωση μιας γενικής πεπερασμένης von Neumann άλγεβρας (δηλαδή, μία άλγεβρα von Neumann, όπου  $x^*x = 1 \Rightarrow xx^* = 1$ ) είναι μια απλή επέκταση.

**Ορισμός 1** Έστω  $(\mathcal{M}, \varphi)$  ένας  $W^*$ -χώρος πιθανότητας ίχνους και έστω  $a \in \mathcal{M}$ . Η Fuglede-Kadison ορίζουσα του  $\Delta(a)$  ορίζεται ως ακολούθως. Αν  $a$  είναι αντιστρέψιμο, τότε ορίζουμε

$$\Delta(a) = \exp[\varphi(\log(|a|))] \in (0, \infty),$$

όπου  $|a| = (a^*a)^{1/2}$ . Γενικότερα, ορίζουμε

$$\Delta(a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp[\varphi(\log\{(a^*a + \varepsilon)^{1/2}\})] \in [0, \infty).$$

Από τον συναρτησιακό λογισμό και το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης, το όριο πάντα υπάρχει.

Αυτή η ορίζουσα  $\Delta$  έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- ▶  $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$  για όλα τα  $a, b \in \mathcal{M}$ .
- ▶  $\Delta(a) = \Delta(a^*) = \Delta(|a|)$  για όλα τα  $a \in \mathcal{M}$ .
- ▶  $\Delta(u) = 1$  όταν το  $u$  είναι μοναδιαίο.
- ▶  $\Delta(\lambda a) = |\lambda|\Delta(a)$  για όλα τα  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $a \in \mathcal{M}$ .

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την ορίζουσα Fuglede-Kadison στην περίπτωση των πινάκων,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\varphi = \text{tr}$ .

Αν ο  $T$  είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε να γράψουμε

$$|T| = U \begin{bmatrix} t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t_n \end{bmatrix} U^*,$$

με  $t_i > 0$ . Οπότε έχουμε

$$\log |T| = U \begin{bmatrix} \log t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \log t_n \end{bmatrix} U^*$$

και

$$\Delta(T) = \exp\left(\frac{1}{n}(\log t_1 + \cdots + \log t_n)\right) = \sqrt[n]{t_1 \cdots t_n} = \sqrt[n]{\det |T|} = \sqrt[n]{|\det T|}.$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση  $\sqrt[n]{\det |T|} = \sqrt[n]{|\det T|}$  ισχύει, καθώς, αν αναλύσουμε τον  $T$  σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε  $T = V|T|$ , όπου ο  $V$  είναι μοναδιαίος, οπότε έχει  $\det |V| = 1$ .

Συνεπώς, σε πεπερασμένες διαστάσεις ισχύει ότι

$$\mu_T = \frac{1}{2\pi n} \nabla^2 \log |\det(T - \lambda I)| = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 \log |\Delta(T - \lambda I)|.$$

Γίνεται, λοιπόν, αντιληπτό ότι βρισκόμαστε αντιμέτωποι με το ερώτημα αν είναι δυνατό να αξιοποιήσουμε το

$$\frac{1}{2\pi} \nabla^2 \log(\Delta(a - \lambda)),$$

όπου  $a$  τελεστής σε άπειρη γενικευμένη von Neumann άλγεβρα. Εδώ, το  $a - \lambda$  αντι-στοιχίζεται στο  $a - \lambda 1$ .)



### 3. Οι υφαρμονικές συναρτήσεις και τα Riesz μέτρα τους

**Ορισμός 2** Μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [-\infty, \infty)$  ονομάζεται υφαρμονική αν

1) η  $f$  είναι άνω ημισυνεχής, δηλαδή

$$\{f < a\} \text{ είναι ανοιχτό για κάθε } a \in \mathbb{R}.$$

2) η  $f$  ικανοποιεί την ανισότητα του υπο-μέσου, δηλαδή για κάθε κύκλο η τιμή της  $f$  στο κέντρο του είναι μικρότερη ή ίση με τη μέση τιμή της  $f$  πάνω στον κύκλο, δηλαδή

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta,$$

3) η  $f$  δεν είναι παντού ίση με  $-\infty$ .

Αν η  $f$  είναι υφαρμονική, τότε η  $f$  είναι Borel μετρήσιμη,  $f(z) > -\infty$  σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue και  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$  (βλέπε [3]). Οπότε μπορούμε να διατυπώσουμε και να εφαρμόσουμε το εξής κλασικό Θεώρημα για υφαρμονικές συναρτήσεις (βλέπε [3])

**Πρόταση 1** Αν η  $f$  είναι υφαρμονική στο  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ , τότε η  $\nabla^2 f$  υπάρχει υπό την έννοια της κατανομής και είναι ένα θετικό μέτρο  $\nu_f$ , δηλαδή το  $\nu_f$  ορίζεται μοναδικά από την

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda) \nabla^2 \varphi(\lambda) d\lambda_r d\lambda_i = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) d\nu_f(z) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (2.1)$$

Αν το  $\nu_f$  έχει συμπαγές στήριγμα, τότε

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |\lambda - z| d\nu_f(z) + h(\lambda), \quad (2.2)$$

όπου η  $h$  είναι μια αρμονική συνάρτηση στο  $\mathbb{C}$ .

**Ορισμός 3** Το μέτρο  $\nu_f = \nabla^2 f$  λέγεται μέτρο Riesz της υφαρμονικής συνάρτησης  $f$ .

### 4. Ορισμός του μέτρου Brown

**Πρόταση 2** Έστω  $(\mathcal{M}, \varphi)$  ένας  $W^*$ -χώρος πιθανότητας και  $a \in \mathcal{M}$ . Τότε:

1) Η συνάντηση  $\lambda \mapsto \log \Delta(a - \lambda)$  είναι υφαρμονική.

2) Το αντίστοιχο μέτρο Riesz

$$\mu_a := \frac{1}{2\pi} \nabla^2 \log \Delta(a - \lambda) \quad (2.3)$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο  $\mathbb{C}$  και το στήριγμα του περιέχεται στο φάσμα του  $a$ .

3)

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \int_{\mathbb{C}} \log |\lambda - z| d\mu_a(z) = \log \Delta(a - \lambda) \quad (2.4)$$

και αυτό χαρακτηρίζει το  $\mu_a$  ανάμεσα σε όλα τα μέτρα πιθανότητας στο  $\mathbb{C}$ .

**Ορισμός 4** Το μέτρο  $\mu_a$  της παραπάνω πρότασης καλείται μέτρο Brown του  $a$ .

Την πλήρη απόδειξη για την Πρόταση 2, αλλά και περισσότερες λεπτομέρειες για το θέμα, μπορούμε να βρούμε στα [4] και [26]. Εδώ, εστιάζουμε στην απόδειξη του πρώτου αποτελέσματος της πρότασης αυτής.

**Απόδειξη 1** :Απόδειξη Πρότασης 2. 1). Έστω  $a \in \mathcal{M}$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι η  $f(\lambda) := \Delta(a - \lambda)$  είναι υφαρμονική. Έχουμε

$$\Delta(a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp[\varphi(\log(a^*a + \varepsilon)^{1/2})]$$

Συνεπώς,

$$\log \Delta(a) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi(\log(a^*a + \varepsilon))$$

ως μειούμενο όριο καθώς  $\varepsilon \downarrow 0$ . Οπότε, για

$$a_\lambda := a - \lambda, \quad f_\varepsilon(\lambda) := \frac{1}{2} \varphi(a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon),$$

έχουμε

$$f(\lambda) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(\lambda).$$

Για  $\varepsilon > 0$ , η συνάρτηση  $f_\varepsilon$  είναι μία  $C^2$ -συνάρτηση και συνεπώς ισχύει ότι η  $f_\varepsilon$  είναι υφαρμονική αν και μόνο αν  $\nabla^2 f_\varepsilon \geq 0$  ως συνάρτηση. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε ακριβώς την  $\nabla^2 f_\varepsilon$ :

Επειδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \varphi(ba), \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\log(a(u))) &= \varphi\left(a(u)^{-1} \frac{\partial a}{\partial u}\right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi(a(u)b(u)) &= \varphi(a'(u)b(u) + a(u)b'(u)), \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi(a^{-1}(u)) &= -\varphi\left(a^{-1}(u) \frac{\partial a(u)}{\partial u} a^{-1}(u)\right) \end{aligned}$$

και επειδή, αν πολλαπλασιάσω την

$$a(a^*a + \varepsilon) = aa^*a + a\varepsilon = aa^*a + \varepsilon a = (aa^* + \varepsilon)a$$

από αριστερά με  $(aa^* + \varepsilon)^{-1}$  και από δεξιά με  $(a^*a + \varepsilon)^{-1}$  (σημειώνουμε ότι τα  $aa^* + \varepsilon, a^*a + \varepsilon$  είναι αντιστρέψιμα επειδή είναι αυστηρά θετικά), προκύπτει

$$(aa^* + \varepsilon)^{-1}a = a(a^*a + \varepsilon)^{-1},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f_\varepsilon(\lambda) &= \nabla^2 \frac{1}{2} \varphi(\log(a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{2} \varphi(\log(a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(\log(a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)) = -2 \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(a_\lambda^* (a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)) \\
&= -2 \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(\log(a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon) a_\lambda^*) \\
&= -2[(a_\lambda^* a_\lambda - \varepsilon)^{-1} \cdot (-1) - (a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)^{-1} (-a_\lambda) (a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)^{-1} a_\lambda^*] \\
&= 2[(a_\lambda^* a_\lambda - \varepsilon)^{-1} - (a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)^{-1} a_\lambda (a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)^{-1} a_\lambda^*] \\
&= 2[(a_\lambda^* a_\lambda - \varepsilon)^{-1} - (a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)^{-1} (a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon)^{-1} a_\lambda^*] \\
&= 2[(a_\lambda^* a_\lambda - \varepsilon)^{-1} [1 - (a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon)^{-1} a_\lambda^*]] \\
&= 2[(a_\lambda^* a_\lambda - \varepsilon)^{-1} [(a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon)^{-1} (a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon) - (a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon)^{-1} a_\lambda^*]] \\
&= 2[(a_\lambda^* a_\lambda - \varepsilon)^{-1} (a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon)^{-1} [a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon - a_\lambda a_\lambda^*]] \\
&= 2\varepsilon \varphi((a_\lambda^* a_\lambda + \varepsilon)^{-1} (a_\lambda a_\lambda^* + \varepsilon)^{-1})
\end{aligned}$$

Εφόσον, λοιπόν, γενικά για θετικούς τελεστές  $x, y$  έχουμε ότι

$$\varphi(xy) = \varphi(x^{1/2} y^{1/2} y^{1/2} x^{1/2}) = \varphi((x^{1/2} y^{1/2})(x^{1/2} y^{1/2})^*) > 0,$$

(εδώ χρησιμοποιούμε το ότι η  $\varphi$  είναι πιστή) βλέπουμε ότι η  $\nabla^2 f_\varepsilon(\lambda) > 0$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ , και άρα η  $f_\varepsilon$  είναι υφαρμονική.

Το γεγονός ότι  $f_\varepsilon \downarrow f$  συνεπάγεται ότι η  $f$  είναι άνω ημισυνεχής και ικανοποιεί την ανισότητα του υπο-μέσου. Επιπροσθέτως, αν  $\lambda \notin \sigma(a)$ , τότε το  $a - \lambda$  είναι αντιστρέψιμο, άρα  $\Delta(a - \lambda) > 0$ , οπότε  $f(\lambda) \neq -\infty$ . Τελικά, προκύπτει ότι η  $f$  είναι υφαρμονική.  $\square$

Στην περίπτωση ενός κανονικού τελεστή το μέτρο Brown είναι απλώς το φασματικό μέτρο  $\varphi \circ E_a$ , όπου  $E_a$  είναι το φασματικό μέτρο προβολών σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα. Σε αυτή την περίπτωση το  $\mu_a$  καθορίζεται από την ισότητα των  $\star$ -ροπών του  $\mu_a$  και του  $a$ , δηλαδή από το

$$\int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m d\mu_a(z) = \varphi(a^n a^{\star m}), \quad (2.5)$$

για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$ , για  $a$  κανονικό τελεστή.

Αν, όμως, ο  $a$  δεν είναι κανονικός τελεστής, αυτή η ισότητα δεν ισχύει. Η μόνη ισότητα που διατηρείται και στις δύο περιπτώσεις, είναι αυτή των ροπών, δηλαδή για κάθε  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{C}} z^n d\mu_a(z) = \varphi(a^n) \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{C}} \bar{z}^n d\mu_a(z) = \varphi(a^{\star n}). \quad (2.6)$$

## Κεφάλαιο 3

# Το μέτρο Brown: Ισοδύναμος ορισμός

Για την κατανόηση των αποτελεσμάτων της εργασίας, καλό θα ήταν να περιγραφεί το μέτρο Brown με έναν ισοδύναμο ορισμό.

### 1. Μετασχηματισμός Cauchy και μέτρο Brown

#### 1.1 Μετασχηματισμός Cauchy

Έστω  $\mu$  ένα μέτρο πιθανότητας στο μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}$ . Ορίζουμε ως μετασχηματισμό Cauchy του την αναλυτική συνάρτηση

$$G_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu(z) \quad (1)$$

για  $\lambda \notin \text{supp } \mu$ . Το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο και στοιχείο του  $\mathbb{C}$  παντού έξω από ένα σύνολο  $\mathbb{R}^2$ -Lebesgue μέτρου μηδέν. Αυτό γιατί (συμβολίζοντας με  $m_2$  το μέτρο Lebesgue στο  $\mathbb{R}^2$ ) για κάθε  $r > 0$  έχουμε

$$\int_{B(0,r)} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\lambda - z|} d\mu(z) dm_2(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \int_{B(z,r)} \frac{1}{|w|} dm_2(w) d\mu(z) < \infty.$$

Έτσι, το  $G_\mu$  θα θεωρείται από εδώ και πέρα ως συνάρτηση σε όλο το  $\mathbb{C}$ , του οποίου η αναλυτικότητα θα είναι ωστόσο εγγυημένη μόνο εκτός του στηρίγματος του  $\mu$ . Το μέτρο  $\mu$ , όπως θα δείξουμε στην επόμενη πρόταση, μπορεί να εξαχθεί από τον μετασχηματισμό Cauchy.

**Πρόταση 3** *Ισχύει*

$$d\mu(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} G_\mu(\lambda) \quad (2)$$

με την έννοια των κατανομών.

Ως συνήθως,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial(\Re \lambda)} - i \frac{\partial}{\partial(\Im \lambda)} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial(\Re \lambda)} + i \frac{\partial}{\partial(\Im \lambda)} \right)$$

**Απόδειξη 2** Προκειμένου να ισχύει η σχέση (2), αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  το ολοκλήρωμα της  $\varphi$  ως προς  $\mu$  ισούται με

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda) \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} G_\mu(\lambda) dA(\lambda),$$

όπου, εδώ,  $\lambda = x + yi$  και  $dA(\lambda) = dx dy$ . Από τον ορισμό της παραγώγου μιας κατανομής, το προηγούμενο ολοκλήρωμα ορίζεται ως

$$- \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi} G_\mu(\lambda) \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(\lambda) dA(\lambda).$$

Αυτό ισούται με

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\lambda - z} d\mu(z) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(\lambda) dA(\lambda) = - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\lambda - z} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(\lambda) dA(\lambda) \right) d\mu(z) \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda) \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{1}{\lambda - z} dA(\lambda) d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(z) d\mu(z) \end{aligned}$$

Στη δεύτερη γραμμή, στην πρώτη ισότητα εφαρμόσαμε ολοκλήρωση κατά μέραη, ενώ η δεύτερη ισότητα έπεται από τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{1}{\lambda - z} = \pi \delta_z$$

(βλέπε [20] σελ.62-63). □

## 1.2 Φασματικό μέτρο αυτοσυζυγών τελεστών

Έστω  $\mathfrak{A}$  μια von Neumann άλγεβρα εφοδιασμένη με μια κανονική πιστή συνάρτηση ίχνους  $\varphi$ . Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής  $x \in \mathfrak{A}$  μπορεί να γραφτεί ως φασματικό ολοκλήρωμα

$$x = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda),$$

όπου  $E$  είναι το φασματικό μέτρο του  $x$  με τελεστές. Είναι φυσικό να θεωρήσουμε ένα μέτρο πιθανότητας  $\mu_x$  στο  $\mathbb{C}$  με τιμές προβολές, που δίνεται από τον τύπο

$$\mu_x(Z) = \varphi(E(Z)) \tag{3}$$

για κάθε Borel σύνολο  $Z \subseteq \mathbb{C}$ . Σε πλήρη αναλογία με τη σχέση (1), θεωρούμε τον μετασχηματισμό Cauchy του  $x$ ,

$$G_x(\lambda) = \varphi((\lambda - x)^{-1}). \tag{4}$$

Τότε το φασματικό μέτρο  $\mu_x$ , όπως ορίζεται από τη σχέση (3), μπορεί να επανευρεθεί από τη σχέση (4) μέσω της σχέσης (2).

### 1.3 Φασματικό μέτρο πινάκων

Έστω  $\mathfrak{A} = \mathcal{M}_N$  η άλγεβρα πινάκων εφοδιασμένη με τη συνάρτηση ίχνους  $\varphi = \text{tr}$ , όπου  $\text{tr} x = \frac{1}{N} \text{Tr} x$  είναι ένα κανονικοποιημένο ίχνος. Έστω  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$  οι ιδιοτιμές (μετρούμενες με πολλαπλότητες) ενός δεδομένου πίνακα  $x \in \mathcal{M}_N$ . Ορίζουμε το  $\mu_x$  ως το (κανονικοποιημένο) αριθμητικό μέτρο του συνόλου των ιδιοτιμών

$$\mu_x = \frac{\delta_{\lambda_1} + \dots + \delta_{\lambda_N}}{N}. \quad (5)$$

Ο μετασχηματισμός Cauchy του  $x$  που ορίζεται από τη σχέση (4) είναι καλά ορισμένος στο σύνολο  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  και πάλι ικανοποιεί τη σχέση (2).

### 1.4 Εμπειρική κατανομή ιδιοτιμών

Έστω  $\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_N)$  η άλγεβρα των τυχαίων πινάκων που έχουν όλες τις ροπές πεπερασμένες. Την εφοδιάζουμε με μία συνάρτηση  $\varphi(x) = \mathbb{E} \text{tr} x$ . Για  $x \in \mathfrak{A}$  θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή  $\omega \in \Omega$ ,  $\omega \rightarrow \mu_{x(\omega)}$ , που ονομάζεται εμπειρική κατανομή ιδιοτιμών, οι τιμές της οποίας είναι μέτρα πιθανότητας στο  $\mathbb{C}$  (όπου το  $\mu_{x(\omega)}$  πρέπει να γίνει κατανοητό όπως στο Κεφάλαιο 4). Ορίζουμε τη μέση κατανομή ιδιοτιμών  $\mu_x$  ως

$$\mu_x = \mathbb{E} \mu_{\omega(x)}. \quad (6)$$

### 1.5 Μέτρο Brown

Έστω  $\mathfrak{A}$  μια von Neumann άλγεβρα εφοδιασμένη με μια κανονική πιστή συνάρτηση ίχνους  $\varphi$ . Εμπνεόμενοι από τα παραπάνω παραδείγματα, θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Cauchy του  $x \in \mathfrak{A}$  με τον τύπο (4) και στη συνέχεια να ορίσουμε το φασματικό του μέτρο  $\mu_x$  με τη σχέση (2). Ωστόσο, σε γενικές γραμμές αυτό δεν είναι δυνατό γιατί ο τύπος (4) απαιτεί το  $\lambda$  να βρίσκεται εκτός του φάσματος του  $x$ . Στη μη ερμιτιανή περίπτωση, το φάσμα μπορεί να είναι ένα μεγάλο σύνολο. Στην πραγματικότητα, μπορεί να είναι ένα τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ . Για τέτοια τυχαία υποσύνολα του  $\mathbb{C}$ , το ζήτημα της ροπής δεν είναι δεν είναι καλά ορισμένο. Έτσι, η γνώση του μετασχηματισμού Cauchy στο επιλύσιμο σύνολο του  $x$  μπορεί εύκολα να μην είναι επαρκής. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε έναν πιο αναλυτικό ορισμό του φασματικού μέτρου.

Υιοθετούμε, τώρα, την ορίζουσα Fuglede–Kadison  $\Delta(x)$  του  $x \in \mathfrak{A}$  που δόθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Το μέτρο Brown του  $x \in \mathfrak{A}$  ορίζεται στο [14] ως

$$\mu_x = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial(\Re \lambda)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\Im \lambda)^2} \right) \log \Delta(x - \lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \log \Delta(x - \lambda). \quad (7)$$

Το μέτρο Brown  $\mu_x$  όπως ορίζεται στη σχέση (7) θα μπορούσε να είναι a priori μια κατανομή Schwartz αλλά μπορεί κανείς να δείξει ότι η συνάρτηση  $\lambda \mapsto \log \Delta(x -$

$\lambda$ ) είναι υΦαρμονική και επομένως το  $\mu_x$  είναι θετικό μέτρο στο  $\mathbb{C}$ . Στην πραγματικότητα το  $\mu_x$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας με στήριγμα ένα υποσύνολο του φάσματος του  $x$ . Μπορεί κανείς να δείξει ότι για τα παραδείγματα από τις Ενότητες 3.1.2–3.1.4 ο παραπάνω ορισμός δίνει τις σωστές τιμές για τα (3), (5) και (6). Ακολουθώντας τη σχέση (1) ορίζουμε τον μετασχηματισμό Cauchy του  $x$  ως

$$G_x(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu_x(z). \quad (8)$$

### 1.6 Ο κανονικοποιημένος μετασχηματισμός Cauchy και το κανονικοποιημένο μέτρο Brown

Για κάθε  $\varepsilon > 0$  ο κανονικοποιημένος μετασχηματισμός Cauchy

$$G_{\varepsilon,x}(\lambda) = \varphi \left( (\lambda - x)^* ((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1} \right) \quad (9)$$

είναι καλά ορισμένος για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ , αλλά δεν είναι αναλυτική συνάρτηση. Μάλιστα αποδείχθη από τον Larsen [35] (βλ. επίσης [2], Λήμμα 4.2) και μπορεί να επαληθευτεί μέσω άμεσης αριθμητικής (εδώ είναι απαραίτητο να θυμόμαστε ότι η  $\varphi$  είναι συνάρτηση ίχνους), ότι

$$G_{\varepsilon,x}(\lambda) = 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \Delta_{\varepsilon}(x - \lambda).$$

Η συνάρτηση  $\lambda \mapsto \log \Delta(x - \lambda)$  είναι υΦαρμονική, εξού και το κανονικοποιημένο μέτρο Brown ορίζεται ως

$$\mu_{\varepsilon,x} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} G_{\varepsilon,x}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \Delta_{\varepsilon}(x - \lambda) \quad (10)$$

είναι ένα θετικό μέτρο στο μιγαδικό επίπεδο. Η ολοκλήρωση κατά μέρη δείχνει ότι για  $\varepsilon > 0$  το κανονικοποιημένο μέτρο Brown  $\mu_{\varepsilon,x}$  συγκλίνει (στην ασθενή τοπολογία των μέτρων πιθανότητας) στο μέτρο  $\mu_x$  όπως ορίζεται από τη σχέση (7). Η σύγκριση των (10) και (2) είναι ένα ευρετικό επιχείρημα ότι ο ορισμός του μέτρου Brown είναι μια λογική επέκταση των περιπτώσεων από τις Ενότητες 2.1.2–2.1.4.

Σειρά έχει να δείξουμε στον αναγνώστη ότι το μέτρο  $\mu_{\varepsilon,x}$  έχει στήριγμα που περιέρ-

χεται στο φάσμα του  $x$ . Πράγματι, αν  $\lambda = u + iv$ , τότε,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \log \Delta_\varepsilon(x - \lambda) &= 4 \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{1}{2} \varphi(\log((x - \lambda)(x - \lambda)^* + \varepsilon^2)) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(\log((x - \lambda)(x - \lambda)^* + \varepsilon^2)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(\log((x - \lambda)(x - \lambda)^* + \varepsilon^2)) + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(\log((x - \lambda)(x - \lambda)^* + \varepsilon^2)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(\log((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)) + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(\log((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(-(\lambda - x)[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1}) + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(-(\lambda - x)^*[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1}) \\
&= \varphi\left([\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2\right]^{-1} \\
&\quad - (\lambda - x)[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1}(\lambda - x)^*[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1} + [(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1} \\
&\quad - (\lambda - x)^*[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1}(\lambda - x)[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1} \\
&= \varphi\left(\left[2 - (\lambda - x)[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1}(\lambda - x)^* - (\lambda - x)^*[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1}(\lambda - x)\right]\right. \\
&\quad \left. \times [(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Για  $\varepsilon > 0$  και  $\lambda$  εκτός του φάσματος του  $x$ , προκύπτει ευθέως ότι ο δεύτερος όρος στη δεύτερη παραπάνω σειρά (δεύτερη σειρά στην έκφραση στα δεξιά του  $=$ ) ισούται με ένα. Η ομαδοποίηση της πρώτης σειράς με την τελευταία και η εφαρμογή της ιδιότητας του ίχνους της  $\varphi$  μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι τελικά το παραπάνω άθροισμα ισούται με το 0 για  $\lambda - x$  αντιστρέψιμο. Αλλά καθίσταται εξίσου σαφές ότι, αφού γενικά

$$\begin{aligned}
x^*(xx^* + \varepsilon^2)^{-1}x - 1 &= x^*x(x^*x + 2)^{-1} - 1 \\
&= x^*x(x^*x + 2)^{-1} - (x^*x + 2)(x^*x + 2)^{-1} \\
&= -\varepsilon^2(x^*x + 2)^{-1} \leq 0,
\end{aligned}$$

χωρίς ισότητα για  $\varepsilon \neq 0$ , το παραπάνω είναι πάντα θετικό όταν  $\varepsilon > 0$  (έχουμε χρησιμοποιήσει και εδώ την πιστότητα του ίχνους).

Η εξίσωση (10) σημαίνει ότι

$$G_{\varepsilon,x}(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu_{\varepsilon,x}(z), \quad (11)$$

με την ισότητα να ορίζεται a priori μόνο στον χώρο  $\mathbb{R}^2$ -Lebesgue σχεδόν παντού, επεκτείνεται, όμως λόγω της συνέχειας σε όλα τα  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Αφού για  $\varepsilon \rightarrow 0$  τα μέτρα  $\mu_{\varepsilon,x}$  συγκλίνουν ασθενώς στο  $\mu_x$ , οι σχέσεις (8) και (11) μας δίνουν ότι οι κανονικοποιημένοι μετασχηματισμοί Cauchy  $G_{\varepsilon,x}$  συγκλίνουν στο  $G_x$  στις τοπικές  $\mathcal{L}_1$  νόρμες. Συγκεκριμένα,  $G_{\varepsilon,x}(\lambda) \rightarrow G_x(\lambda)$  για όλα σχεδόν τα  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Θα πρέπει να αναφερθεί ότι στην πραγματικότητα το όριο

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{\varepsilon,x}(\lambda) = G_x(\lambda) \in \mathbb{C} \quad (12)$$



υπάρχει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  για το οποίο

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi \left( ((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1} \right) < \infty$$

(αυτό το όριο υπάρχει πάντα και είναι αυστηρά θετικό, εκτός αν ο  $x$  είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, αλλά μπορεί κάλλιστα να είναι άπειρο). Δυστυχώς, το πεπερασμένο του ορίου μπορεί συνήθως να είναι εγγυημένο μόνο για  $\lambda$  εκτός του φάσματος του  $x$ . Πράγματι, εφόσον

$$G_{\varepsilon, x}(\lambda) = \varphi \left( (\lambda - x)^* ((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1} \right),$$

θεωρούμε την ανάλυση του  $(\lambda - x)^*$  σε τέσσερις θετικούς τελεστές. Για κάθε τελεστή  $v \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1/2} v ((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1/2} \\ &\leq \|v\| ((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει αν εφαρμοσουμε τη  $\varphi$  στις παραπάνω ανισότητες και από τη μονοτονία της αντιστοιχίας  $\varepsilon \mapsto ((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1}$ .

## 2. Μέθοδος ερμιτιανής αναγωγής

Ακολουθώντας την ιδέα των Janik, Nowak, Papp, Zahed [32], για σταθερό  $x \in \mathfrak{A}$ , ορίζουμε

$$X = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathfrak{A}). \quad (13)$$

Αυτό τετριμμένα είναι ένα αυτοσυζυγές στοιχείο στην  $\mathcal{M}_2(\mathfrak{A})$ . Εφοδιάζουμε την άλγεβρα  $\mathcal{M}_2(\mathfrak{A})$  με μία θετική δεσμευμένη μέση τιμή  $\mathbb{E} : \mathcal{M}_2(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{12}) \\ \varphi(a_{21}) & \varphi(a_{22}) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Με βάση το [49], μπορούμε να ορίσουμε έναν πλήρη Cauchy-Stieltjes μετασχηματισμό  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  πινάκων:

για κάθε  $b \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  που ικανοποιεί τη συνθήκη  $\Im b := (b - b^*)/2i > 0$ , η συνάρτηση

$$G_X(b) = \mathbb{E}[(b - X)^{-1}] \quad (15)$$

είναι καλά ορισμένη και αναλυτική στο σύνολο των στοιχείων  $b$  για τα οποία  $\Im b > 0$ . Πιο συγκεκριμένα, για  $\varepsilon > 0$  το στοιχείο

$$\Lambda_\varepsilon = \begin{bmatrix} i\varepsilon & \lambda \\ \bar{\lambda} & i\varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

ανήκει στο πεδίο ορισμού του  $G_X$ , και

$$G_\varepsilon(\lambda) = G_X(\Lambda_\varepsilon) = \begin{bmatrix} g_{\varepsilon,\lambda,11} & g_{\varepsilon,\lambda,12} \\ g_{\varepsilon,\lambda,21} & g_{\varepsilon,\lambda,22} \end{bmatrix} = \mathbb{E}((\Lambda_\varepsilon - X)^{-1}). \quad (16)$$

$\Lambda_0 - X$  είναι αυτοσυζυγές, και για αυτό το λόγο  $J\Lambda_\varepsilon = \varepsilon 1$ , αν γίνεται το στοιχείο  $\Lambda_\varepsilon - X$  αντιστρέψιμο για  $\varepsilon \neq 0$ , αυτό εγγυάται ότι η σχέση (16) έχει νόημα. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned} & (\Lambda_\varepsilon - X)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -ie((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1} & (\lambda - x)((\lambda - x)^*(\lambda - x) + \varepsilon^2)^{-1} \\ (\lambda - x)^*((\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2)^{-1} & -ie((\lambda - x)^*(\lambda - x) + \varepsilon^2)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Οι εξισώσεις (9) και (17) δείχνουν ότι δύο από τις εγγραφές του  $G_\varepsilon(\lambda)$  φέρουν σημαντικές πληροφορίες, δηλαδή συμπίπτουν με τον κανονικοποιημένο μετασχηματισμό Cauchy, και τον συζυγή του, αντίστοιχα:

$$g_{\varepsilon,21}(\lambda) = \overline{g_{\varepsilon,12}(\lambda)} = G_{\varepsilon,x}(\lambda).$$

Ως εκ τούτου, είναι πολύ δελεαστικό να ρωτήσουμε τι είδους πληροφορίες μεταφέρονται από τα άλλα δύο στοιχεία  $g_{\varepsilon,11}(\lambda) = g_{\varepsilon,22}(\lambda)$ . Απεδείχθη από τον Janík et al. [31] ότι αν ο  $x$  είναι ένας τυχαίος πίνακας τότε για το όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$  αυτά τα δύο στοιχεία παρέχουν πληροφορίες για την αλληλεπίδραση μεταξύ των βάσεων αριστερών και του δεξιών ιδιοδιανυσμάτων.

Γενικότερα, καταγράφουμε για μελλοντική χρήση ότι

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a & b - x \\ c - x^* & d \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -d[(b - x)(c - x^*) - ad]^{-1} & (b - x)[(c - x^*)(b - x) - ad]^{-1} \\ (c - x^*)[(b - x)(c - x^*) - ad]^{-1} & -a[(c - x^*)(b - x) - ad]^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ο αναγνώστης θα βρει πιθανώς μια μεγάλη ασυνδετότητα μεταξύ των παραπάνω και της διαδικασίας γραμμικοποίησης που περιγράφεται παρακάτω. Πράγματι, η αντιστοιχία που περιγράφεται παραπάνω  $(\lambda, \varepsilon) \mapsto G_X(\Lambda_\varepsilon)$  έχει το σημαντικό μειονέκτημα ότι είναι προφανώς μη αναλυτική. Παρακάτω εμείς θα λειτουργήσουμε μόνο με αναλυτικές συναρτήσεις, επομένως το όρισμά μας δεν θα είναι ποτέ  $\Lambda_\varepsilon$ . Ωστόσο, αφού είμαστε ελεύθεροι να υπολογίσουμε την αναλυτική συνάρτηση  $f(z, w) = zw$  για τις τιμές  $(z, \bar{z})$ , θα μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε το προνόμιο του υπολογισμού ορισμένων αναλυτικών συναρτήσεων (όπως η  $G_X$ ) στον πίνακα  $\Lambda_\varepsilon$ , χωρίς να τη βλέπουμε σαν όρισμα δύο μεταβλητών. Ωστόσο, για  $b = \lambda, c = \lambda$  σταθεροποιημένα, μπορούμε να θεωρήσουμε την αναλυτική συνάρτηση

$$(z, w) \mapsto G_X \left( \begin{bmatrix} z & \lambda \\ \bar{\lambda} & w \end{bmatrix} \right).$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι ο πίνακας  $\mathfrak{J} \begin{bmatrix} z & \lambda \\ \bar{\lambda} & w \end{bmatrix}$  είναι αυστηρά θετικός αν

και μόνο αν  $\Im z > 0$  και  $\Im z \Im w > \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{4} = 0$ , δηλαδή αν και μόνο αν οι  $z$  και  $w$  βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο  $\mathbb{C}^+$  του  $\mathbb{C}$ . Εφόσον ο  $G_X$  αντιστοιχίζει το άνω ημιεπίπεδο πινάκων στο κάτω ημιεπίπεδο, ο  $F_X(b) := G_X(b)^{-1}$  είναι καλά ορισμένος και  $F_X(b) \geq b$ . Στην περίπτωση που ο  $x$  δεν είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού, αυτή η ανισότητα είναι στην πραγματικότητα αυστηρή. Μπορεί κανείς να δείξει [ [7], Πρόταση 2.15] ότι η αυστηρή ανισότητα  $F_X(b) > b$  μπορεί να αποτύχει μόνο όταν υπάρχει μη μηδενική προβολή  $p \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  ώστε  $pX = p\mathbb{E}[X]$ . Δεδομένου ότι οι μη τετριμμένες προβολές στο  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  είναι απαραίτητα της μορφής

$$\begin{bmatrix} a & j\sqrt{a(1-a)} \\ j\sqrt{a(1-a)} & 1-a \end{bmatrix},$$

αυτό θα απαιτούσε και  $ax = a\varphi(x)$  και  $(1-a)x^* = (1-a)$ , που, ως ισότητα τελεστών, ισχύουν. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο  $x$  δεν είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού.

## Κεφάλαιο 4

# Το μέτρο Brown των πολυωνύμων σε ελεύθερες μεταβλητές

### 1. Η $\star$ -κατανομή του $x$ από τον $G_{X \otimes 1_n}$

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι ο  $G_X$  περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες σχετικά με το μέτρο Brown του  $x$ . Αλλά θα μας ενδιέφερε να μάθουμε το μέτρο Brown οποιουδήποτε πολυωνύμου  $P(x_1, \dots, x_k)$  με  $\star$ -ελεύθερες τυχαίες μεταβλητές  $x_1, \dots, x_k$  ως προς τα μέτρα Brown (ίσως λιγότερα από τις πλήρεις  $\star$ -κατανομές) των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Για να μπορέσουμε να ενσωματώσουμε όλες αυτές τις πληροφορίες και να τις χειριστούμε αποτελεσματικά, θα χρησιμοποιήσουμε αυτό που ονομάζεται πλήρης επέκταση πίνακα [49] για τον  $G_X$ :

$$G_{X \otimes 1_n}(b) = (\mathbb{E} \otimes Id_{\mathcal{M}_n})[(b - X \otimes 1_n)^{-1}],$$

όπου  $b \in \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$  τέτοιος ώστε ο  $b - X \otimes 1_n$  είναι αντιστρέψιμος (συγκεκριμένα, αυτό ισχύει εάν  $\Im b > 0$ ). Είναι γνωστό [49] ότι ο  $G_{X \otimes 1_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  κωδικοποιεί όλες τις  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ -ροπές του  $X$  και, συνεπώς, όλες τις  $\star$ -ροπές του  $x$ .

### 2. Γραμμικοποίηση

Η δημοσίευση [7] εισάγει μια επαναληπτική μέθοδο για τον υπολογισμό των φασμάτων των αυτοσυζυγών πολυωνύμων σε ελεύθερες μεταβλητές. Αυτό βασίζεται σε ένα τέχνασμα γραμμικοποίησης που εισήχθη στην εργασία [1]. (Οι εκδοχές αυτού του τεχνάσματος της γραμμικοποίησης έχουν μακρά ιστορία, βλέπε [12]) Σε αυτή την υποενότητα θα δείξουμε πώς συνδυάζεται η μέθοδος της ερμιτιανής αναγωγής με το τέχνασμα γραμμικοποίησης για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε το μέτρο Brown οποιουδήποτε πολυωνύμου με ελεύθερες τυχαίες μεταβλητές. Αρχικά, ας γραμμικοποιήσουμε ένα αυθαίρετο μονώνυμο: ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε το μέτρο Brown του  $x_1 x_2 \cdots x_k$ . Θα υποθέσουμε ότι δύο



καταλαμβάνονται από μηδενικά. Έστω

$$b_1 = b \otimes e_{1,1} = \begin{bmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

όπου ο πίνακας  $e_{1,1}$  είναι ίσης διάστασης με τον  $\mathbb{X}$ . Τότε ο πίνακας

$$b_1 - \mathbb{X} := \begin{bmatrix} b & & & & & & & & Y_1 \\ & & & & & & & & Y_2 & -1_2 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & X_k & -1_2 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & Y_2^* & -1_2 \\ Y_1^* & -1_2 & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, και

$$(b_1 - \mathbb{X})^{-1} = \begin{bmatrix} (b - Y_1 Y_2 \dots Y_{k-1} X_k Y_{k-1}^* \dots Y_2^* Y_1^*)^{-1} & * & \dots & * \\ & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & * & \dots & * \end{bmatrix},$$

όπου το \* αντιπροσωπεύει κάποια αδιευκρίνιστα στοιχεία. Για

$$b = \begin{bmatrix} i\varepsilon & \lambda \\ \bar{\lambda} & i\varepsilon \end{bmatrix}$$

ο  $2 \times 2$  πάνω αριστερά υποπίνακας του  $(b_1 - \mathbb{X})^{-1}$  είναι η ποσότητα (19), την οποία επιθυμούμε. Σημειώνουμε ότι αν  $P = \sum_j q_j x_{i_1,j} x_{i_2,j} \dots x_{i_{k(j)},j}$ , τότε

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} 0 & x_{i_1,j} x_{i_2,j} \dots (q_j x_{i_{k(j)},j}) \\ (x_{i_1,j} x_{i_2,j} \dots (q_j x_{i_{k(j)},j}))^* & 0 \end{bmatrix}$$

Με στόχο να αποφεύγουμε να αντιμετωπίζουμε τα βαθμωτά μεγέθη όταν γράφουμε τον πίνακα της γραμμικοποίησης, θα τα «συμπιέσουμε» ως  $x_{i_{k(j)},j}$ , έτσι ώστε τώρα

$$X_{k(j)} = \begin{bmatrix} 0 & q_j x_{i_{k(j)},j} \\ \bar{q}_j x_{i_{k(j)},j}^* & 0 \end{bmatrix}. \text{ Οπως και φαίνεται στην απόδειξη του [ [7], Πρόταση}$$

3.4], η γραμμικοποίηση του  $\begin{bmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{bmatrix}$  θα πραγματοποιηθεί, λοιπόν, απλώς αν «στοιβάσουμε» τις αντίστοιχες γραμμικοποιήσεις των μονωνύμων των  $2 \times 2$  πινάκων: θα

συμβολίσουμε  $u_j = (0, \dots, 0, Y_{i_1, j})$  και  $\mathbb{Y}_j$  ο πίνακας

$$\mathbb{Y}_j = \begin{bmatrix} & & & & Y_{i_2, j} & -1_2 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & X_{i_k(j), j} & -1_2 & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ Y_{i_2, j}^* & -1_2 & & & & \\ -1_2 & & & & & \end{bmatrix},$$

έτσι ώστε ο πίνακας  $\mathbb{X}_j$  να παράγεται από τον  $\mathbb{Y}_j$  με την προσθήκη μιας πρώτης σειράς  $u_j$  και μιας πρώτης στήλης  $u_j^*$ :

$$\mathbb{X}_j = \begin{bmatrix} 0 & u_j \\ u_j^* & \mathbb{Y}_j \end{bmatrix}.$$

(Ο αναγνώστης προειδοποιείται να θυμάται ότι το  $u_j$  δεν αναφέρεται σε μια σειρά, αλλά σε δύο: είναι ένας πίνακας  $2 \times (4k(j) - 4)$  και το 0 στην επάνω δεξιά γωνία του  $\mathbb{X}_j$  είναι ο μηδενικός πίνακας  $2 \times 2$ .) Στη συνέχεια το [ [7], Πρόταση 3.4] μας πληροφορεί ότι η γραμμικοποίηση του  $\begin{bmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{bmatrix}$  είναι ο πίνακας

$$\mathbb{L}_P = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ u_1^* & \mathbb{Y}_1 & & & \\ u_2^* & & \mathbb{Y}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_k^* & & & & \mathbb{Y}_k \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Συμπερασματικά,

$$(b_1 - \mathbb{L}_P)^{-1} = \begin{bmatrix} \left( b - \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Εδώ θα πρέπει πάλι να θυμόμαστε ότι η μόνη προϋπόθεση που απαιτείται είναι ότι ο πίνακας  $b - \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{bmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος, άρα, αφού ο  $\begin{bmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{bmatrix}$  είναι αυτοσυζυγής, η απαίτηση  $\Im b > 0$  μας καλύπτει. Για να εφαρμόσουμε την επαναληπτική διαδικασία από το [7], πλέον χρειάζεται μόνο να χωρίσουμε τον πίνακα  $\mathbb{L}_P$  σε ένα άθροισμα στο

οποίο τα στοιχεία που προέρχονται από μια άλγεβρα ομαδοποιούνται σε έναν πίνακα. Αφού η ιδιότητα της αυτοσυζυγίας διατηρείται με αυτή τη διαδικασία, ισχύει το αποτέλεσμα της μείωσης της τάξης του [7].

Για να υπολογίσουμε λοιπόν το μέτρο Brown κάποιου πολυωνύμου  $P$  σε αυτοσυζυγείς ελεύθερες μεταβλητές θα πρέπει πρώτα να ερμητιανοποιήσουμε το πρόβλημα θεωρώντας αυτοσυζυγείς  $2 \times 2$  πίνακες πάνω από τον υποκείμενο χώρο μας. Έπειτα, θα πρέπει να γραμμικοποιήσουμε το πρόβλημα σε αυτό το επίπεδο και, τέλος, να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μείωσης της τάξης για να περιγράψουμε την ελεύθερη συνέλιξη μας με τιμές τελεστών, ώστε να αντιμετωπίσουμε αυτό το γραμμικό πρόβλημα. Μπορεί να μην είναι τόσο ξεκάθαρο εάν η ερμητιανοποίηση και η γραμμικοποίηση λειτουργούν καλά μαζί, όμως πραγματικά συμβαίνει. Ουσιαστικά, εδώ κάνουμε μια γραμμικοποίηση ενός μοντέλου με τιμή τελεστή αντί για ένα μοντέλο με βαθμωτές τιμές: πρέπει να γραμμικοποιήσουμε ένα πολυώνυμο σε πίνακες. Αλλά ο αλγόριθμος γραμμικοποίησης λειτουργεί επίσης σε αυτήν τη περίπτωση. Ας το δείξουμε αυτό με ένα παράδειγμα:

**Παράδειγμα 2** Θεωρούμε το πολυώνυμο  $a = xy$  στις ελεύθερες αυτοσυζυγείς μεταβλητές  $x = x^*$  και  $y = y^*$ . Για το μέτρο Brown αυτού του  $a$  πρέπει να υπολογίσουμε τον Cauchy μετασχηματισμό για τελεστές του

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xy \\ yx & 0 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να τον γραμμικοποιήσουμε πρέπει πρώτα να τον γράψουμε σαν ένα πολυώνυμο πινάκων του  $x$  και πινάκων του  $y$ . Άρα:

$$\begin{bmatrix} 0 & xy \\ yx & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = XYX,$$

το οποίο είναι ένα αυτοσυζυγές πολυώνυμο σε αυτοσυζυγείς μεταβλητές

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αυτοσυζυγές αυτό πολυώνυμο  $XYX$  έχει μια αυτοσυζυγή γραμμικοποίηση

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & Y & -1 \\ X & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Τώρα, το έχουμε γράψει ως το άθροισμα δύο  $M_6(\mathbb{C})$ -ελεύθερων πινάκων, που είναι και οι δύο αυτοσυζυγείς. Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Cauchy αυτού του άθροισματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο μείωσης της τάξης για ελεύθερη συνέλιξη τελεστών από την Πρόταση 3, που αναφέρεται ακολούθως. Συνδυάζοντας όλα τα βήματα μαζί δίνεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του μέτρου Brown του  $a = xy$ .

**Πρόταση 4** *Ας υποθέσουμε ότι ο  $(M, E, \mathcal{B})$  είναι ένας  $C^*$ -χώρος πιθανότητας με τιμές τελεστών και οι  $x, y \in M$  είναι δύο αυτοσυζυγείς τυχαίες μεταβλητές με τιμές τελεστών που είναι ελεύθερες πάνω από τον  $\mathcal{B}$ . Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος από αναλυτικούς χάρτες Fréchet (και επομένως και Gateaux)  $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{H}^+(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{H}^+(\mathcal{B})$ , ώστε:*

- 1)  $Im(\omega_j(b)) \geq Im(b)$ , για κάθε  $b \in \mathbb{H}^+(\mathcal{B})$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ,
  - 2)  $F_x(\omega_1(b)) + b = F_y(\omega_2(b)) + b = \omega_1(b) + \omega_2(b)$ , για κάθε  $b \in \mathbb{H}^+(\mathcal{B})$ ,
  - 3)  $G_x(\omega_1(b)) = G_y(\omega_2(b)) = G_{x+y}(b)$ , για κάθε  $b \in \mathbb{H}^+(\mathcal{B})$ ,
- όπου  $\mathbb{H}^+(\mathcal{B}) = \{b \in \mathcal{B} : Im(b) > 0, F_x(b) = E[(b - X)^{-1}]^{-1} = G_x(b)^{-1}\}$ .

Δίνουμε ένα δεύτερο αριθμητικό παράδειγμα.

**Παράδειγμα 3** *Θεωρούμε το πολυώνυμο  $p = P(x, y) = xy + yx + x^2$  σε ελεύθερες μεταβλητές  $x, y$ . Αυτό έχει μια γραμμικοποίηση της μορφής*

$$p' = \begin{bmatrix} 0 & x & y + \frac{x}{2} \\ x & 0 & -1 \\ y + \frac{x}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Cauchy του  $p$  μπορεί να αναπαραχθεί από τον μετασχηματισμό Cauchy με τιμές τελεστές του  $p'$ , δηλαδή έχουμε

$$G_{p'}(b) = (id \otimes \varphi)((b - p')^{-1}) = \begin{bmatrix} \varphi((z - p)^{-1}) & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \text{για } b = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

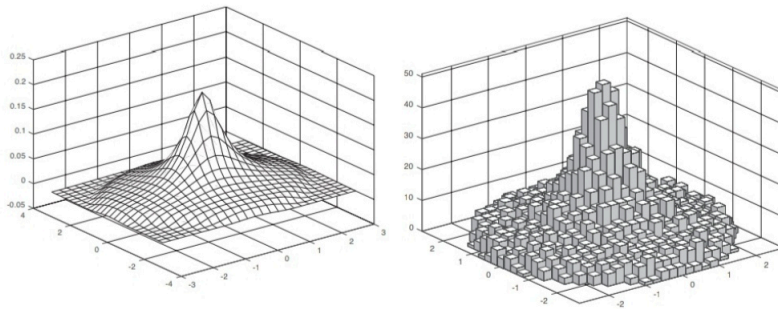
Όμως το  $p'$  μπορεί να γράφει ως

$$p' = \begin{bmatrix} 0 & x & \frac{x}{2} \\ x & 0 & -1 \\ \frac{x}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} = X' + Y',$$

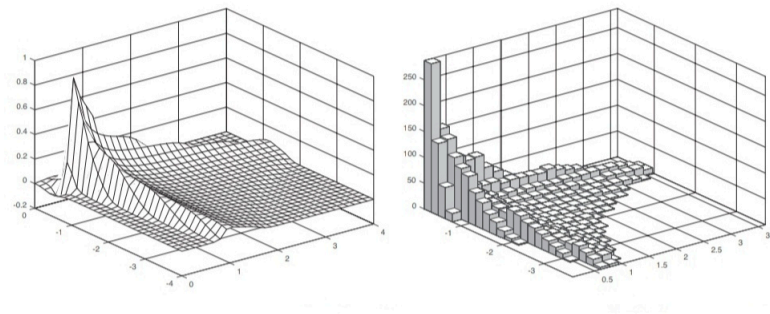
και συνεπώς είναι το άθροισμα δύο αυτοσζυγών μεταβλητών  $X'$  και  $Y'$ , οι οποίες είναι ελεύθερες στην  $M_3(\mathbb{C})$ . Οπότε, τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα μείωσης τάξης που μας δίνει η Πρόταση 3, ώστε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Cauchy  $G_p$  του  $p$ :

$$\begin{bmatrix} G_p(z) & * \\ * & * \end{bmatrix} = G_{p'}(b) = G_{X'+Y'}(b) = G_{X'}(\omega_1(b)).$$

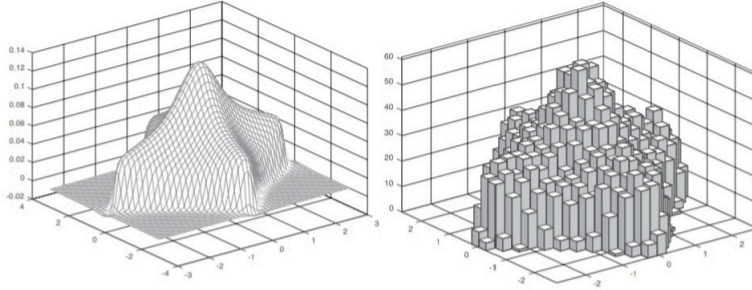
Στα σχήματα 1,2 και 3, δίνουμε για μερικά πολυώνυμα το μέτρο Brown τους, το οποίο υπολογίζεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράφεται παραπάνω και το συγκρίνουμε επίσης με ιστογράμματα των μιγαδικών ιδιοτιμών των αντίστοιχων πολυωνύμων σε ανεξάρτητους τυχαίους πίνακες.



**Σχήμα 1:** Το μέτρο Brown (αριστερά) του  $p(x, y, z) = xyz - 2yzx + zxy$  με  $x, y, z$  ελεύθερα ημικύκλια, σε σύγκριση με το ιστόγραμμα (δεξιά) των μιγαδικών ιδιοτιμών του  $p(X, Y, Z)$  για ανεξάρτητους πίνακες Wigner, για  $N = 5000$ .



**Σχήμα 2:** Το μέτρο Brown (αριστερά) του  $p(x, y) = x + iy$  με  $x, y$  ελεύθερες μεταβλητές Poisson βαθμού 1, σε σύγκριση με το ιστόγραμμα (δεξιά) των μιγαδικών ιδιοτιμών του  $p(X, Y)$  για ανεξάρτητους πίνακες Wishart  $X$  και  $Y$ , για  $N = 5000$ .



**Σχήμα 3:** Το μέτρο Brown (αριστερά) του  $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$  με  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ελεύθερα ημικύκλια, σε σύγκριση με το ιστόγραμμα (δεξιά) των μιγαδικών ιδιοτιμών του  $p(X_1, X_2, X_3, X_4)$  για ανεξάρτητους πίνακες Wigner  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , για  $N = 5000$ .

### 3. Προσδιορισμός του μέτρου Brown

Η διαδικασία γραμμικοποίησης που περιγράφεται παραπάνω εγγυάται ότι το μέτρο Brown ενός πολυωνύμου  $P$  σε ελεύθερες μεταβλητές μπορεί να εκφραστεί συγκεκριμένα ως προς τις  $\star$ -κατανομές των μεταβλητών του. Ωστόσο, θα θέλαμε να τονίσουμε ότι χρειάζεται η γνώση ενός σημαντικού μέρους των  $\star$ -κατανομών των εν λόγω μεταβλητών: δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι γενικά θα υπολογίζουμε το μέτρο Brown του  $P$  από τα μέτρα Brown των μεταβλητών του. Ωστόσο, η γνώση αυτών των  $\star$ -κατανομών είναι εγγυημένη, όπως σημειώνεται στην Ενότητα 3.1, αν γνωρίζουμε τους  $G_{X^{\otimes 1n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι δεν είναι απαραίτητο για να γνωρίζουμε τους  $G_{X^{\otimes 1n}}$  για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ , αλλά μόνο μέχρι ένα ορισμένο  $n_0$  ανάλογα με το βαθμό του πολυωνύμου  $P$ .

Μια σημαντική ειδική περίπτωση είναι φυσικά όταν όλες οι μεταβλητές  $x_i$  είναι κανονικές (για παράδειγμα, αυτοσυζυγείς ή μοναδιαίες): στην περίπτωση αυτή η  $\star$ -κατανομή του  $x_i$  καθορίζεται με συνθήκες του μέτρου Brown του (που τώρα δεν είναι παρά το ίχνος που εφαρμόζεται στη φασματική κατανομή σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα). Έτσι η διαδικασία γραμμικοποίησης μας δίνει, πιο συγκεκριμένα, έναν τρόπο για τον υπολογισμό του μέτρου Brown οποιουδήποτε πολυωνύμου σε ελεύθερες αυτοσυζυγείς μεταβλητές που εξάγεται από την κατανομή των μεταβλητών. Αφού έχουμε παράσχει τον γενικό μηχανισμό για την αντιμετώπιση των μέτρων Brown, υπάρχουν τώρα διάφορα προφανή ερωτήματα που μπορούμε

να απευθύνουμε:

- ▶ Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις όπου μπορούμε να αντλήσουμε αυστηρές λύσεις;
- ▶ Πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμό μας για να υπολογίσουμε αριθμητικά μέτρα Brown για τυχαία πολυώνυμα; Μπορούμε να ελέγξουμε την ταχύτητα ή την ακρίβεια αυτών των υπολογισμών;
- ▶ Μπορούμε να αντλήσουμε ποιοτικά αναλυτικά χαρακτηριστικά των μέτρων Brown;

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα, όπως είδαμε ότι συμβαίνει στην αυτοσυζυγή υπόθεση, στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν πολλές μη τετριμμένες περιπτώσεις οι οποίες επιτρέπουν μια αυστηρή περιγραφή των μέτρων Brown. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου κάποιος έχει πράγματι, έναν σαφή και αναλυτικό τύπο είναι η περίπτωση των R-διαγώνιων στοιχείων. Το μέτρο Brown για αυτά υπολογίστηκε από τους Haagerup και Larsen στο [26]. Θα δείξουμε στην επόμενη ενότητα με ποιον τρόπο ο τύπος τους μπορεί να αναπαραχθεί στο δικό μας πλαίσιο. Στην Ενότητα 6, θα προσεγγίσουμε άλλη μία κατάσταση όπου είναι δυνατός ένας αυστηρός υπολογισμός. Εκεί θα εξετάσουμε ελλειπτικούς τριγωνικούς τελεστές, οι οποίοι περιγράφουν το όριο ειδικών τυχαίων μοντέλων πινάκων Gauss. Μόνο κάποιες ειδικές περιπτώσεις αυτών ήταν γνωστές μέχρι στιγμής.

Απαντήσεις για το δεύτερο ερώτημα, σχετικά με την αριθμητική εφαρμογή, περιέχονται στο [38], για ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα. Σε αυτή την εργασία, θα ακολουθήσουμε τους Belinschi, Śniady και Speicher, οπότε θέλουμε να επικεντρωθούμε σε περισσότερο αναλυτικές ερωτήσεις και να δείξουμε πώς μπορούμε πράγματι να παράξουμε μερικούς αρκετά μη τετριμμένους ισχυρισμούς εκτός από τη γενική μας μέθοδο.

Τέλος, σε αυτή την ενότητα, θα δώσουμε κάποιες απαντήσεις στο τρίτο κατά σειρά ερώτημα. Θα ξεκινήσουμε την αναλυτική διερεύνηση του απλούστερου πολυωνύμου, δηλαδή του αθροίσματος δύο μεταβλητών. Θέλουμε λοιπόν να απαντήσουμε στο ερώτημα: τι μπορούμε να πούμε για το μέτρο Brown του  $x + y$ , όπου  $x$  και  $y$  είναι  $\star$ -ελεύθερα, δεδομένης της  $\star$ -κατανομής του  $x$  και της  $\star$ -κατανομής του  $y$ .

Η περίπτωση που τα  $x$  και  $y$  είναι αυτοσυζυγή αποτελεί ένα από τα πρώτα θεμελιώδη ερωτήματα που έχει αντιμετωπιστεί αρκετά εξαντλητικά στη θεωρία ελεύθερης πιθανότητας, με μια μακρά λίστα από συνεισφορές (βλ. για παράδειγμα το [11]). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που  $x = a$  και  $y = ib$ , με  $a$  και  $b$  αυτοσυζυγή (συνεπώς ζητάμε το μέτρο Brown του  $a + ib$ , όπου το πραγματικό μέρος  $a$  και το φανταστικό μέρος  $b$  είναι ελεύθερα) δεν υπήρξαν μέχρι τώρα γενικά αποτελέσματα για το μέτρο Brown.

#### 4. Το μέτρο Brown του αθροίσματος δύο $\star$ -ελεύθερων μεταβλητών

Η μέθοδος ερμιτιανοποίησης και γραμμικοποίησης από την προηγούμενη ενότητα δείχνει ότι η αντιμετώπιση ενός τυχαίου πολυωνύμου σε δύο ελεύθερες μεταβλητές απαιτεί την ανάλυση του πίνακα  $\mathbb{L}_P$  της σχέσης (20), χωρισμένο στο άθροισμα των δύο όρων που αντιστοιχούν στις δύο  $\star$ -ελεύθερες μεταβλητές.

Αυτή τη στιγμή δεν είμαστε σε θέση να αναλύσουμε τα αναλυτικά χαρακτηριστικά αυτού του γενικού πλαισίου εργασίας. Αυτό που μπορούμε και θα κάνουμε εδώ είναι να αντιμετωπίσουμε με κάποια λεπτομέρεια την περίπτωση όπου  $k = 1$ , δηλαδή την περίπτωση ενός γραμμικού πολυωνύμου, που αντιστοιχεί στο μέτρο Brown του αθροίσματος των δύο  $\star$ -ελεύθερων τυχαίων μεταβλητών  $x$  και  $y$ . Σημειώνουμε ότι σε αυτήν την κατάσταση δεν υπάρχει ανάγκη γραμμικοποίησης και πρέπει απλώς να κατανοήσουμε την κατανομή με τιμές στο  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  του

$$\begin{bmatrix} 0 & x+y \\ (x+y)^\star & 0 \end{bmatrix} = X + Y = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x^\star & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y \\ y^\star & 0 \end{bmatrix}$$

για τις κατανομές με τιμές στο  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  του  $X$  και του  $Y$ . Σημειώνουμε ότι τα  $X$  και  $Y$  είναι ελεύθερα πάνω από από το  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Ας υπενθυμίσουμε πρώτα στον αναγνώστη το αποτέλεσμα από το [49] που σχετίζεται με τη μείωση της τάξης: εκεί υπάρχουν δύο αναλυτικοί αυτομορφισμοί του άνω ημιεπιπέδου του  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , που ονομάζονται  $\omega_1, \omega_2$  έτσι ώστε

$$(\omega_1(b) + \omega_2(b) - b)^{-1} = G_X(\omega_1(b)) = G_Y(\omega_2(b)) = G_{X+Y}(b), \quad (21)$$

για κάθε  $b \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  με  $\Im b > 0$ . Θα ασχοληθούμε με μία ειδική περίπτωση του  $b$ , αυτή

όπου  $b = \begin{bmatrix} z & \lambda \\ \bar{\lambda} & w \end{bmatrix}$ . Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ενώ οι αντιστοιχίες στα  $z$  και  $w$

είναι αναλυτικές, η αντιστοιχία στο  $\lambda$  δεν είναι, επομένως θα τη δούμε ως παράμετρο, για την οποία, όμως, υπάρχει συνεχής αντιστοιχία όταν τα  $z$  και  $w$  στο άνω ημιεπίπεδο του  $\mathbb{C}$  είναι σταθερά. Συμβολίζουμε, λοιπόν, παρακάτω τα  $\omega_j(b), G(b), F(b)$  με  $\omega_j(z, w), G(z, w), F(z, w)$  και μερικές φορές προσθέτουμε την παράμετρο  $\lambda$ , όταν γίνεται σημαντική για την ανάλυσή μας (συνήθως θα είναι σταθερή).

Για ένα σταθερό  $\lambda \in \mathbb{C}$ , μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του  $G_{X+Y}(z, w)$  κοντά στο  $z = w = 0$ . Για τους σκοπούς αυτό, είναι αρκετό να εξετάσουμε την περίπτωση  $z = w$  και να προβάλλουμε τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις ως ολόμορφες συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Για προφανείς πρακτικούς σκοπούς, θα θέλαμε να υποστηρίξουμε ότι το  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{X+Y}(i\varepsilon, i\varepsilon)$  υπάρχει για όλα τα  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Δυστυχώς, αυτό είναι αρκετά τετριμμένα, αναληθές. Θα αναλύσουμε αυτό το πρόβλημα σε πολλά βήματα, λαμβάνοντας στη πορεία παράπλευρα αποτελέσματα που πιστεύουμε ότι είναι ενδιαφέροντα από μόνα τους.

#### 4.1 Το ζήτημα των αριστερών και δεξιών αναλλοίωτων προβολών

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ορισμένες γενικές ιδιότητες στοιχείων σε πεπερασμένες von Neumann άλγεβρες (δηλαδή, όταν έχουμε ένα πιστό κανονικό ίχνος) (βλ. [44]).

- ▶ Εάν  $a \in \mathfrak{A}$  είναι ένα τυχαίο, μη ερμητιανό στοιχείο και  $p = p^* = p^2 \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}$  είναι μία προβολή έτσι ώστε  $ap = \lambda p$ , τότε  $p \leq \ker((a - \lambda)^*(a - \lambda))$  (συμβολίζουμε εδώ με  $\ker(b)$  τόσο τον (κλειστό) χώρο στον οποίο η  $b$  είναι μηδέν όσο και την ορθογώνια προβολή πανω σε αυτόν τον χώρο). Πράγματι, με τη υπενθύμιση ότι το  $\varphi$  είναι ένα πιστό ίχνος και ότι  $p(a - \lambda)^*(a - \lambda)p \geq 0$ ,

$$0 = \varphi((a - \lambda)^*(a - \lambda)p) = \varphi(p(a - \lambda)^*(a - \lambda)p),$$

συνεπάγεται ότι  $\ker((a - \lambda)^*(a - \lambda)) \geq p$ . Ομοίως, αν  $p \leq \ker((a - \lambda)^*(a - \lambda))$ , τότε από την παραπάνω ισότητα  $(a - \lambda)p = 0$ .

- ▶ Αν  $a = v(a^*a)^{\frac{1}{2}} = v|a|$  είναι η ανάλυση του  $a$  σε πολικές συντεταγμένες, τότε η μερική ισομετρία  $v$  γίνεται πλήρης με έναν μοναδιαίο τελεστή στην von Neumann άλγεβρα που παράγεται από το  $a$ .
- ▶ Αν  $p = \ker(a - \lambda)$ , τότε υπάρχει  $q = q^* = q^2 \in \mathfrak{A}$ , τέτοιο ώστε  $\varphi(p) = \varphi(q)$  και  $qa = \lambda q$ . Πράγματι, αντικαθιστώντας το  $a$  με  $a - \lambda$ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\lambda = 0$ . Υποθέτουμε ότι η μερική ισομετρία στην ανάλυση σε πολικές συντεταγμένες του  $a$  είναι (γίνεται πλήρης σε) ένας μοναδιαίος τελεστής. Τότε

$$ap = 0 \Rightarrow |a|p = 0 \quad \text{και} \quad p|a| = 0.$$

Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε  $q = vpv^*$ , τότε  $qa = vpv^*v|a| = vp|a| = 0$ . Εφόσον  $q^2 = vpv^*vpv^* = vp^2v^* = vpv^* = q$ , και  $\varphi(q) = \varphi(vpv^*) = \varphi(v^*vp) = \varphi(p)$ , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η  $q$  είναι ισοδύναμη προβολή της  $p$ .

- ▶ Συνεπώς, αν  $p = \ker(a - \lambda)$ ,  $a = v|a|$ ,  $q = vpv^*$ , τότε

$$ap = \lambda p, \quad qa = \lambda q, \quad pa^* = \bar{\lambda}p, \quad a^*q = \bar{\lambda}q. \quad (22)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να μεταφέρουμε σχεδόν αυτολεξεί την ανάλυση από το [11]. Θα συμβολίζουμε τον  $G_{X+Y}(i\varepsilon, i\varepsilon)$  απλά με  $G_{X+Y}(i\varepsilon)$ , και ομοίως για τις άλλες εμπλεκόμενες συναρτήσεις.

Έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} G_{X+Y}(i\varepsilon) = \begin{bmatrix} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_{X+Y,11}(i\varepsilon) & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_{X+Y,12}(i\varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_{X+Y,21}(i\varepsilon) & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_{X+Y,22}(i\varepsilon) \end{bmatrix},$$

όπου υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι:

$$\begin{aligned} g_{X+Y,11}(i\varepsilon) &= -i\varepsilon \varphi \left( ((\lambda - x - y)(\lambda - x - y)^* + \varepsilon^2)^{-1} \right) \\ g_{X+Y,12}(i\varepsilon) &= \varphi \left( (\lambda - x - y)((\lambda - x - y)^*(\lambda - x - y) + \varepsilon^2)^{-1} \right) \\ g_{X+Y,21}(i\varepsilon) &= \varphi \left( ((\lambda - x - y)^*(\lambda - x - y)(\lambda - x - y)^* + \varepsilon^2)^{-1} \right) \\ g_{X+Y,22}(i\varepsilon) &= -i\varepsilon \varphi \left( ((\lambda - x - y)^*(\lambda - x - y) + \varepsilon^2)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Εφόσον η  $\varphi$  είναι ένα ίχνος,  $g_{X+Y,11}(i\varepsilon) = g_{X+Y,22}(i\varepsilon \in -i(0, +\infty)$  και  $g_{X+Y,12}(i\varepsilon) = \overline{g_{X+Y,21}(i\varepsilon)}$ . Προφανώς, το ίδιο ισχύει αν το  $X + Y$  αντικατασταθεί από  $X$  ή  $Y$ . Υποθέτουμε ότι  $0 < p = \ker(\lambda - x - y) < 1$ , όπου τα  $x, y \in \mathfrak{A} \setminus \mathbb{C}$  είναι  $\star$ -ελεύθερα. Θυμόμαστε ότι η τελευταία υπόθεση κάνει τις  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}x, x^*)$  και  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}y, y^*)$  ελεύθερες πάνω από την  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Για ευκολία, θα συμβολίσουμε προσωρινά  $a = \lambda - x - y$ , έτσι ώστε  $ap = a^*ap = 0$  και

$$\begin{aligned} g_{X+Y,11}(i\varepsilon) &= -i\varepsilon \varphi((aa^* + \varepsilon^2)^{-1}), & g_{X+Y,12}(i\varepsilon) &= \varphi(a(a^*a + \varepsilon^2)^{-1}), \\ g_{X+Y,22}(i\varepsilon) &= -i\varepsilon \varphi((a^*a + \varepsilon^2)^{-1}), & g_{X+Y,21}(i\varepsilon) &= \varphi(a^*(a^*a + \varepsilon^2)^{-1}). \end{aligned}$$

Τα ασθενή όρια

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-i\varepsilon(a^*a + \varepsilon^2)^{-1}) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2(a^*a + \varepsilon^2)^{-1} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} a^*a + \varepsilon^2 - a^*a)(a^*a + \varepsilon^2)^{-1} \\ &= 1 - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} a^*a(a^*a + \varepsilon^2)^{-1} \\ &= \ker(a^*a) \\ &= p \end{aligned}$$

και

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon(-i\varepsilon(aa^* + \varepsilon^2)^{-1}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2(aa^* + \varepsilon^2)^{-1} = \ker(aa^*) = q$$

ισχύουν, έτσι ώστε, πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon g_{X+Y,11}(i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon g_{X+Y,22}(i\varepsilon) = \varphi(p) = \varphi(q).$$

**Σημείωση 1**  $1 - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} a^*a(a^*a + \varepsilon^2)^{-1} = \ker(a^*a)$ , καθώς

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \downarrow 0} a^*a(a^*a + \varepsilon^2)^{-1} + \ker(a^*a) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [a^*a + \ker(a^*a)(a^*a + \varepsilon^2)][a^*a + \varepsilon^2]^{-1} = 1, \end{aligned}$$

επειδή  $\ker(a^*a)a^*a = 0$ .

**Σημείωση 2**  $a^*ap = 0 \Rightarrow pa^*a = 0$ , καθώς: για  $b = a^*a$ , έχουμε  $b = v(b^*b)^{\frac{1}{2}} = v|b|$  και  $bp = 0 \Rightarrow |b|p = 0$  και  $p|b| = 0$ , άρα  $pb = pv|b| = p|b|v = 0 \cdot v = 0$ .

Για τα στοιχεία (1,2) και (2,1), η κατάσταση είναι ελαφρώς πιο λεπτεπίλεπτη: για την ανάλυση σε πολικές συντεταγμένες  $a = v(a^*a)^{\frac{1}{2}}$  με τη χρήση της γενικευμένης ανισότητας Schwarz  $|\varphi(x^*y)|^2 \leq \varphi(x^*x)\varphi(y^*y)$  για  $x = v$  και  $y = (a^*a)^{\frac{1}{2}}(a^*a + \varepsilon^2)^{-1}$ , γράφουμε

$$|\varphi(a(a^*a + \varepsilon^2)^{-1})| \leq [\varphi(1)]^{\frac{1}{2}} [\varphi(a^*a(a^*a + \varepsilon^2)^{-2})]^{\frac{1}{2}}.$$

Αφού  $2\varepsilon^2 t(t + \varepsilon^2)^{-2} < 1$  για κάθε  $t \geq 0$ , παίρνουμε, εφαρμόζοντας τον λογισμό των συνεχών συναρτήσεων για το  $\varepsilon^2 a^* a(a^* a + \varepsilon^2)^{-2}$  και απο τη θετικότητα της  $\varphi$  ότι

$$|\varepsilon \varphi(a(a^* a + \varepsilon^2)^{-1})| \leq [\varphi(1)]^{\frac{1}{2}} [\varphi(\varepsilon^2 a^* a(a^* a + \varepsilon^2)^{-2})]^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Από την άλλη, παρατηρούμε ότι  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 t(t + \varepsilon^2)^{-2} = 0$  κατά σημείο για  $t \in [0, +\infty)$ , ώστε, αν  $\theta$  συμβολίζει την κατανομή του  $a^* a$  ως προς τη  $\varphi$ , τότε από το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi(\varepsilon^2 a^* a(a^* a + \varepsilon^2)^{-2}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{[0, +\infty)} \varepsilon^2 t(t + \varepsilon^2)^{-2} d\theta(t) = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι, όπως περιμέναμε,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon g_{X+Y,21}(i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon g_{X+Y,12}(i\varepsilon) = 0.$$

Ανακαλούμε από τη σχέση (21) ότι

$$\omega_1(i\varepsilon) + \omega_2(i\varepsilon) = \begin{bmatrix} i\varepsilon & \lambda \\ \bar{\lambda} & i\varepsilon \end{bmatrix} + F_{X+Y}(i\varepsilon). \quad (23)$$

Η συνάρτηση  $F_{X+Y}$  υπολογίζεται εύκολα αν αντιστρέψουμε την  $G_{X+Y}$ :

$$F_{X+Y} = \frac{1}{g_{X+Y,11}g_{X+Y,22} - g_{X+Y,12}g_{X+Y,21}} \begin{bmatrix} g_{X+Y,22} & -g_{X+Y,12} \\ -g_{X+Y,21} & g_{X+Y,11} \end{bmatrix}.$$

Προκύπτει, συνεπώς, από την ιδιότητα της αντιστοιχίας του μετασχηματισμού Cauchy για πίνακες  $G$  ότι  $f_{X+Y,11}(i\varepsilon) = f_{X+Y,22}(i\varepsilon) \in i(0, +\infty)$ , και  $f_{X+Y,12}(i\varepsilon) = \overline{f_{X+Y,21}(i\varepsilon)}$ , το οποίο ισχύει και αν αντικαταστήσουμε τον  $X + Y$  με το  $X$  ή το  $Y$ . Θεωρούμε τα ορια  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_{X+Y}(i\varepsilon)/i\varepsilon$  σε κάθε είσοδο του παραπάνω τελεστή (ανεξάρτητα). Χρησιμοποιούμε τους υπολογισμούς που προέκυψαν προηγουμένως:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f_{X+Y,11}(i\varepsilon)}{i\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{[i\varepsilon g_{X+Y,22}(i\varepsilon)]}{[i\varepsilon g_{X+Y,11}(i\varepsilon)][i\varepsilon g_{X+Y,22}(i\varepsilon)] - [i\varepsilon g_{X+Y,12}(i\varepsilon)][i\varepsilon g_{X+Y,21}(i\varepsilon)]} \\ &= \frac{\varphi(p)}{\varphi(q)\varphi(p) - 0 \cdot 0} = \frac{1}{\varphi(q)}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f_{X+Y,12}(i\varepsilon)}{i\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{-[i\varepsilon g_{X+Y,12}(i\varepsilon)]}{i\varepsilon g_{X+Y,11}(i\varepsilon)[i\varepsilon g_{X+Y,22}(i\varepsilon)] - [i\varepsilon g_{X+Y,12}(i\varepsilon)][i\varepsilon g_{X+Y,21}(i\varepsilon)]} \\ &= \frac{-0}{\varphi(q)\varphi(p) - 0 \cdot 0} = 0. \end{aligned}$$



Πανομοιότυποι υπολογισμοί εξασφαλίζουν ότι:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_{X+Y,11}(i\varepsilon)/i\varepsilon = 1/\varphi(p) = 1/\varphi(q) \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_{X+Y,21}(i\varepsilon)/i\varepsilon = 0.$$

Στην  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ -νόρμα ισχύουν όλες οι σχέσεις:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_{X+Y}(i\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{i\varepsilon} F_{X+Y}(i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{J}F_{X+Y}(i\varepsilon) = \varphi(p)^{-1} 1_2.$$

Ανακαλούμε ότι οι  $\omega_1, \omega_2$  αντιστοιχίζουν το άνω ημιεπίπεδο της  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  στον εαυτό του, αυξάνουν το φανταστικό μέρος (που σημαίνει ότι  $\mathfrak{J}\omega_k(b) \geq \mathfrak{J}b$ , για  $b \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{J}b > 0$ ), και  $\mathfrak{J}\omega_k(b) \leq \mathfrak{J}F_{X+Y}(b)$  αν  $\mathfrak{J}b > 0$ ,  $k = 1, 2$  (βλ. [49], [7], [9]). Αυτό, σε συνδυασμό με τη συμπεριφορά του  $F_{X+Y}$  κοντά στο μηδέν, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{J}\omega_1(i\varepsilon), \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathfrak{J}\omega_2(i\varepsilon) \in \left[ 1_2, \frac{1}{\varphi(p)} 1_2 \right], \quad (24)$$

και η γενίκευση τελεστή του Ky Fan του Θεωρήματος Julia–Carathéodory από το [7] μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι τα  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \omega_j(i\varepsilon)$ ,  $j = 1, 2$  υπάρχουν και είναι αυτοσυζυγείς πίνακες  $2 \times 2$ . Υπενθυμίζουμε ότι τόσο ο  $F_X$  όσο και ο  $F_Y$  διατηρούν

το σύνολο των πινάκων της μορφής  $\begin{bmatrix} i\varepsilon & \lambda \\ \bar{\lambda} & i\varepsilon \end{bmatrix}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Τότε, σύμφωνα με το [7],

Θεώρημα 2.7], το ίδιο κάνουμε και με τους  $\omega_1$  και  $\omega_2$ . Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \omega_1(i\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & u_1 \\ \bar{u}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \omega_2(i\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & u_2 \\ \bar{u}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

όπου  $u_1 + u_2 = \lambda$ , και

$$w_k := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathfrak{J}\omega_k(i\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{i\varepsilon} \left( \omega_k(i\varepsilon) - \begin{bmatrix} 0 & u_k \\ \bar{u}_k & 0 \end{bmatrix} \right) \in \left[ 1_2, \frac{1}{\varphi(p)} 1_2 \right], \quad (26)$$

για  $k \in 1, 2$ , όλα είναι όρια νόρμας. Αν αφαιρέσουμε τον πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \bar{\lambda} & 0 \end{bmatrix}$  και από τις δύο πλευρές της σχέσης (23), διαιρέσουμε με  $i\varepsilon$  και θεωρήσουμε το  $\varepsilon$  να τείνει στο μηδέν, τότε προκύπτει ότι

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(\omega_1(i\varepsilon) + \omega_2(i\varepsilon))_{12} - \lambda}{i\varepsilon} = 0, \quad (27)$$

με παρόμοιο αποτέλεσμα για το (2,1) στοιχείο, με τη διαφορά ότι το  $\lambda$  αντικαθίσταται από το  $\bar{\lambda}$ .

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ιδιότητα που αποδείχθηκε από τον Voiculescu στο [49]: είναι γνωστό ότι όποτε οι  $X, Y$  είναι ελεύθεροι επί του  $B$ , κάποιος έχει  $\mathbb{E}_{BX} [(b - X - Y)^{-1}] = (\omega_1(b) - X)^{-1}$ . Εφαρμόζουμε αυτή τη σχέση στους  $2 \times 2$  πίνακες μας  $X, Y$  και για  $B = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\langle X \rangle} \left[ \left( \begin{bmatrix} i\varepsilon & \lambda \\ \bar{\lambda} & i\varepsilon \end{bmatrix} - X - Y \right)^{-1} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} ((\omega_1(i\varepsilon))_{11} & (\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x \\ (\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^* & (\omega_1(i\varepsilon))_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Οι τύποι για τα (1,1) και (1,2) στοιχεία του κάτω πίνακα είναι

$$(\omega_1(i\varepsilon))_{22} [(\omega_1(i\varepsilon))_{11} (\omega_1(i\varepsilon))_{22} - ((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*)]^{-1}$$

και

$$[(\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*) - (\omega_1(i\varepsilon))_{11} (\omega_1(i\varepsilon))_{22}]^{-1} ((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x).$$

Η υπόθεση  $\ker(x + y - \lambda) = p$  σημαίνει ότι

$$\left( X + Y - \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \bar{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \left( X + Y - \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \bar{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Συνεπώς, το ασθενές όριο

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \begin{bmatrix} i\varepsilon & 0 \\ 0 & i\varepsilon \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} i\varepsilon & \lambda \\ \bar{\lambda} & i\varepsilon \end{bmatrix} - X - Y \right)^{-1} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

ισχύει. Χάρη στην ασθενή συνέχεια της οριακής μέσης τιμής (ως προς την  $\varphi$ ) πάνω από μία von Neumann συν-άλγεβρα του  $\mathfrak{A}$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \begin{bmatrix} i\varepsilon & 0 \\ 0 & i\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\omega_1(i\varepsilon))_{11} & (\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x \\ (\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^* & (\omega_1(i\varepsilon))_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[q] & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[p] \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

Μία παρόμοια σχέση συνάγεται για τα  $\omega_2$  και  $y$ . Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα με βάση την προαναφερθείσα φόρμουλα και βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[q] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon (\omega_1(i\varepsilon))_{22} \\ & \times [(\omega_1(i\varepsilon))_{11} (\omega_1(i\varepsilon))_{22} - ((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*)]^{-1} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{i\varepsilon}{(\omega_1(i\varepsilon))_{11}} \cdot (\omega_1(i\varepsilon))_{22} (\omega_1(i\varepsilon))_{11} \\ & \times [(\omega_1(i\varepsilon))_{11} (\omega_1(i\varepsilon))_{22} - (\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)(\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*]^{-1} \\ &= (\omega_1)_{11}^{-1} \cdot \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\omega_1(i\varepsilon))_{22} (\omega_1(i\varepsilon))_{11} \\ & \times [(\omega_1(i\varepsilon))_{11} (\omega_1(i\varepsilon))_{22} - ((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*)]^{-1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (\omega_1)_{11} \mathbb{E}_{\mathbb{C}, x^*}[q] &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ (\omega_1(i\varepsilon))_{11} (\omega_1(i\varepsilon))_{22} \right. \\ &\quad \left. \times [((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*) - (\omega_1(i\varepsilon))_{11} (\omega_1(i\varepsilon))_{22}]^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Ο τελεστής  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}, x^*}[q]$  είναι μη μηδενικός, μη αρνητικός και φράσσεται από πάνω από 1. Όμοια, θεωρώντας το (1,2) στοιχείο, παίρνουμε το ασθενές όριο

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon [((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*) - (\omega_1(i))_{11} (\omega_1(i))_{22}]^{-1} \\ \times ((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x) = 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} & \|((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{21} - x^*) - (u_1 - x)(u_1 - x)^*\| \\ &= \|((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x)((\omega_1(i\varepsilon))_{12} - x^*) - (u_1 - x)(u_1 - x)^*\| \\ &= \| |\omega_1(i\varepsilon)_{12} - x|^2 - |u_1 - x|^2 \| \\ &= |(|\omega_1(i\varepsilon)_{12} - x| + |u_1 - x|)(|\omega_1(i\varepsilon)_{12} - x| - |u_1 - x|)| \\ &\leq (\omega_1(i\varepsilon)_{12} + |x| + |u_1| + |x|)(|\omega_1(i\varepsilon)_{12} - x - (u_1 - x)|) \\ &\leq (\omega_1(i\varepsilon)_{12} + |u_1| + 2|x|)(|\omega_1(i\varepsilon)_{12} - x - u_1 + x|) \\ &= ((\omega_1(i\varepsilon))_{12} + |u_1| + 2|x|)|(\omega_1(i\varepsilon))_{12} - u_1|. \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (24) και (26) εγγυώνται ότι  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} |(\omega_1(i\varepsilon))_{12} - u_1|/\varepsilon < 1/\varphi(p)$ .

Καθώς το  $(\omega_1(i\varepsilon))_{12}$  συγκλίνει στο  $u_1$  και το  $x$  είναι σταθερό, τα παραπάνω μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}, x^*}[q](u_1 - x) = 0$ . Ένας παρόμοιος υπολογισμός, στον οποίο χρησιμοποιούμε τα στοιχεία (2, 2) και (2, 1) των αντίστοιχων πινάκων, δίνει ότι  $(u_1 - x)\mathbb{E}_{\mathbb{C}, x^*}[p] = 0$ . Θεωρώντας την προβολή  $q_1$  του στηρίγματος της  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}, x^*}[q]$  και την  $p_1$  της  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}, x^*}[p]$ , βρίσκουμε ότι ο  $x - u_1$  έχει μη μηδενικές αριστερές και δεξιές αναλλοίωτες προβολές (με το  $p_1$  να είναι η δεξιά αναλλοίωτη προβολή). Ένα παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι ο  $y - u_2$  έχει αριστερές και δεξιές αναλλοίωτες προβολές, με  $p_2$  να είναι η δεξιά αναλλοίωτη προβολή. Το (άθροισμα του) μήκους αυτών των προβολών προκύπτει ως εξής: είναι σαφές ότι  $p \geq p_1 \wedge p_2$ . Ανακαλώντας τη σχέση της μείωσης της τάξης και τη σχέση (28), παίρνουμε ότι

$$\varphi(p)^{-1} = (\omega_1)_{11} + (\omega_2)_{11} - 1$$

Δηλαδή, επειδή

$$(\omega_1)_{11}^{-1} = \frac{i\varepsilon}{(\omega_1(i\varepsilon))_{11}}, \quad (\omega_2)_{11}^{-1} = \frac{i\varepsilon}{(\omega_2(i\varepsilon))_{11}}$$

και

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F_{X+Y, 11}(i\varepsilon)}{i\varepsilon} = \frac{1}{\varphi(p)} = \frac{1}{\varphi(q)},$$

από τη σχέση (23) παίρνουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(\omega_1(i\varepsilon))_{11} + (\omega_2(i\varepsilon))_{11} - i\varepsilon}{i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F_{X+Y, 11}(i\varepsilon)}{i\varepsilon} = \frac{1}{\varphi(p)}$$

$$\Rightarrow (w_1)_{11} + (w_2)_{11} - 1 = \varphi(p)^{-1}$$

(υπενθυμίζουμε ότι ο  $\omega_k(i\varepsilon)$  έχει ίσα στοιχεία στη διαγώνιο, οπότε επιλέγοντας  $p$  και  $(1, 1)$  ή  $q$  και  $(2, 2)$  δεν έχει διαφορά). Από την άλλη πλευρά, υπενθυμίζουμε ότι (εξορισμού), η  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}$  διατηρεί το ίχνος:  $\varphi(p) = \varphi(\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[p])$ . Εφόσον  $0 \leq \mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[p] \leq 1$ , προκύπτει αμέσως από τον στοιχειώδη συναρτησιακό λογισμό ότι το ίχνος του στηρίγματος του  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[p]$  δεν μπορεί να είναι μικρότερο από  $\varphi(\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[p])$ , άρα  $\varphi(p_1), \varphi(p_2) \geq \varphi(p)$ . Επίσης, αν εφαρμόσουμε τη  $\varphi$  στη σχέση (29) προκύπτει ότι

$$\varphi(p)(\omega'_1(0))_{11} = \varphi(\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[p])(w_1)_{11} \leq \varphi(p_1).$$

Προφανώς, μία παρόμοια σχέση ισχύει για τους  $p_2, y$  και  $(w_2)_{11}$ . Συνεπώς,

$$\frac{1}{\varphi(p)} = (w_1)_{11} + (w_2)_{11} - 1 \leq \frac{\varphi(p_1) + \varphi(p_2)}{\varphi(p)} - 1,$$

το οποίο ισοδυναμεί με

$$\varphi(p_1) + \varphi(p_2) \geq \varphi(p) + 1.$$

Αυτό, μαζί με τη σχέση  $p \geq p_1 \wedge p_2$ , συνεπάγεται ότι  $\varphi(p_1) + \varphi(p_2) = \varphi(p) + 1$ . Συνεπώς, αποδείξαμε το επόμενο αποτέλεσμα, ανάλογο του [ [11], Θεώρημα 7.4].

**Θεώρημα 1** Αν  $x, y \in \mathfrak{A} \setminus \mathbb{C}$  είναι  $\star$ -ελεύθεροι ως προς τη  $\varphi$  και υπάρχει μία προβολή  $p \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}, \in \mathbb{C}$ , ώστε  $(x + y)p = \lambda p$ , τότε

(1)  $p = \ker((x + y - \lambda)^*(x + y - \lambda))$ .

(2) Υπάρχουν  $p_1, p_2$  προβολές στην  $\mathfrak{A}$  και  $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$  έτσι ώστε

- ▶  $x p_1 = u_1 p_1$  και  $y p_2 = u_2 p_2$ .
- ▶  $u_1 + u_2 = \lambda$ .
- ▶  $\varphi(p_1) + \varphi(p_2) = \varphi(p) + 1$ .

Αντίστροφα, αν ισχύουν οι τρεις συνθήκες του (2), τότε η  $p := p_1 \wedge p_2$  ικανοποιεί την  $(x + y)p = (u_1 + u_2)p$ .

**Παρατήρηση 1** Στο [11] φαίνεται ότι κάτω από τις ίδιες υποθέσεις, αν  $x = x^*$  και  $y = y^*$ , τότε  $\omega'_1(\lambda)\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x \rangle}[p]$  είναι μια προβολή. Θα ήταν ενδιαφέρον να προσδιοριστεί εάν οι  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[q]$  και  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle}[p]$  είναι οι ίδιες πολλαπλάσια προβολών.

**Παρατήρηση 2** Ας σημειώσουμε ότι, δυστυχώς, τα όρια  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} G_{X+Y}(i\varepsilon)$  γενικά δε δίνουν την τιμή του μετασχηματισμού Cauchy–Stieltjes στο  $\lambda$ . Πράγματι, υποθέτουμε ότι  $x = x^*$  και  $y = y^*$ , κανένας από τους οποίους δεν είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού. Τότε είναι γνωστό ότι, όχι αυστηρά μιλώντας, ο  $G_{x+y}$  εκτείνεται συνεχώς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και ο  $G_{x+y}(r) \in \mathbb{C}^-$  (το κάτω ημιεπίπεδο του  $\mathbb{C}$ ) έχει αναλυτική επέκταση γύρω από το  $r$  για τα περισσότερα σημεία του φάσματος του  $x + y$ . Ωστόσο, επειδή το

$$\lambda = r$$

είναι ένα από εκείνα τα σημεία στο φάσμα του  $x + y$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G_{X+Y, 21}(i\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi \left( (r - x - x)((r - x - y)^2 + \varepsilon^2)^{-1} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{r - t}{(r - t)^2 + \varepsilon^2} d\mu_{x+y}(t), \end{aligned}$$

που είναι απλώς ο μετασχηματισμός Hilbert του  $\mu_{x+y}$  που υπολογίζεται στο  $r$ , όπου  $r$  πραγματικός αριθμός. Το όριο υπάρχει για όλα τα  $r \in \mathbb{R}$ , με εξαίρεση εκείνα τα σημεία  $r$ , όπου ο  $G_{x+y}$  είναι άπειρος (και είναι γνωστό ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος τέτοια σημεία). Επίσης, το στοιχείο  $(1,1)$  παρέχει μέσω του ίδιου ορίσματος το φανταστικό μέρος του  $G_{x+y}(r)$ . Είναι φυσικό να συμβαίνει αυτό γιατί αλλιώς θα είχαμε  $\frac{\partial}{\partial \lambda} G_{x+y}(r) = 0$  για τα περισσότερα σημεία  $r$  στο φάσμα των  $x + y$ . Αυτό το απλό παράδειγμα μας δείχνει ότι το  $\lambda \rightarrow G_{X+Y}(0)$  έχει λίγες πιθανότητες να είναι γενικά συνεχές, και, συγκεκριμένα, ότι [ [5], Θεώρημα 3.3 (3)] δεν ισχύει στο πλαίσιο των τελεστών.

Ωστόσο, οι Belinschi, Śniady και Speicher κάνουν την εξής εικασία:

**Εικασία 1** Αν  $x, y \in \mathfrak{A}$  είναι  $\star$ -ελεύθεροι ως προς τη συνάρτηση ίχνους  $\varphi$  και το φάσμα του καθενός περιέχει περισσότερα από ένα σημεία, τότε η συνάρτηση  $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto G_{X+Y}(0)$  είναι συνεχής όταν περιορίζεται σε κάθε συνιστώσα του φάσματος  $x + y$ . Τα σημεία ασυνέχειας των  $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto G_{X+Y}$  ανήκουν στην κλειστότητα της επιλύουσας συνάρτησης των  $x + y$ .

## Κεφάλαιο 5

# Το μέτρο Brown των R-διαγώνιων στοιχείων

### 1. Το μέτρο Brown των R-διαγώνιων στοιχείων

Οι R-διαγώνιοι τελεστές εισήχθησαν από τους Nica και Speicher [37]. Αποτελούν μια κατηγορία, γενικά μη κανονικών, τελεστών και είναι συνήθως προσβάσιμοι σε ακριβείς υπολογισμούς. Συγκεκριμένα, μπορεί κανείς να δώσει αρκετά καλή περιγραφή του μέτρου Brown τους.

Οι R-διαγώνιοι τελεστές μπορούν να θεωρηθούν σε τυχαίους χώρους  $\star$ -πιθανότητας, αλλά εδώ θα περιοριστούμε στην περίπτωση  $W^*$ -χώρου πιθανότητας ίχνους, καθώς μόνο εκεί η έννοια του μέτρου Brown έχει νόημα.

**Ορισμός 5** Ένας τελεστής  $x$  σε έναν  $W^*$ -χώρο πιθανότητας  $(\mathcal{M}, \tau)$  ονομάζεται R-διαγώνιος εάν οι μόνοι μη μηδενικοί  $\star$ -συσσωρευτές (δηλαδή συσσωρευτές όπου κάθε τους όρισμα είναι είτε  $x$  είτε  $x^*$ ) εναλλάσσονται, δηλαδή είναι της μορφής

$$\kappa_{2n}(x, x^*, \dots, x, x^*) = \kappa_{2n}(x^*, x, \dots, x^*, x),$$

για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ .

Κύρια παραδείγματα για R-διαγώνιους τελεστές είναι οι μοναδιαίοι τελεστές Haar και ο κυκλικός τελεστής του Voiculescu. Με εξαίρεση τα πολλαπλάσια των μοναδιαίων Haar, οι διαγώνιοι R-τελεστές δεν είναι κανονικοί. Ένας κύριος χαρακτηρισμός [37] των R-διαγώνιων τελεστών είναι ο παρακάτω: ο  $x$  είναι R-διαγώνιος αν και μόνο αν ο  $x$  έχει την ίδια  $\star$ -κατανομή με τον  $up$ , όπου ο  $u$  είναι ένας μοναδιαίος Haar τελεστής,  $p \geq 0$ , και οι  $u$  και  $p$  είναι  $\star$ -ελεύθεροι. Αν έχουμε  $\ker(x) = 0$ , τότε οι R-διαγώνιοι τελεστές είναι ακριβώς αυτοί που αναλύονται σε πολικές συντεταγμένες της μορφής  $x = u|x|$ , όπου ο  $u$  είναι Haar μοναδιαίος και ο  $x$  είναι  $\star$ -ελεύθερος από τον  $u$ .

Το μέτρο Brown των R-διαγώνιων τελεστών υπολογίστηκε από τους Haagerup και

Larsen [26]. Το παρακάτω θεώρημα περιέχει τα κύρια αποτελέσματά τους σχετικά με αυτό.

**Πρόταση 5** Έστω  $(\mathcal{M}, \tau)$  ένας  $W^*$ -χώρος πιθανότητας και  $x \in \mathcal{M}$  είναι ένας  $R$ -διαγώνιος τελεστής. Ας υποθέσουμε ότι  $\ker(x) = 0$  και ότι ο  $x^*x$  δεν είναι μηδενικός τελεστής. Τότε έχουμε:

1) Το στήριγμα του μέτρου Brown  $\mu_x$  του  $x$  δίνεται από τη σχέση

$$\text{supp}(\mu_x) = \{z \in \mathbb{C} : \|x^{-1}\|_2^{-1} \leq |z| \leq \|x\|_2\},$$

όπου θεωρούμε  $\|x^{-1}\|_2^{-1} = 0$ , για  $x^{-1} \notin L^2(\mathcal{M}, \tau)$ .

2) Το  $\mu_x$  είναι αναλλοίωτο στις περιστροφές γύρω από το  $0 \in \mathbb{C}$ .

3) Για  $0 < t < 1$ , ισχύει

$$\mu_x(B(0, r)) = t \quad \text{για} \quad r = \frac{1}{\sqrt{S_{x^*x}(t-1)}},$$

όπου  $S_{x^*x}$  είναι ο  $S$ -μετασχηματισμός του τελεστή  $x^*x$  και ο  $B(0, r)$  είναι ο ανοιχτός δίσκος ακτίνας  $r$ .

4) Οι συνθήκες 1,2 και 3 καθορίζουν μοναδικά το  $\mu_x$

5) Το φάσμα ενός  $R$ -διαγώνιου τελεστή  $x$  συμπίπτει με το  $\text{supp}(\mu_x)$ , εκτός από την περίπτωση όπου  $x^{-1} \in L^2(\mathcal{M}, \tau)$ , οπότε το  $\text{supp}(\mu_x)$  είναι ο δακτύλιος στο 1, ενώ το φάσμα του  $x$  είναι ο κλειστός δίσκος με ακτίνα  $\|x\|_2$ .

Σε αυτήν την ενότητα, λοιπόν, θα δείξουμε ότι οι  $R$ -διαγώνιοι τελεστές ταιριάζουν πολύ καλά στο κάδρο της ερμιτιανοποίησης και της μείωσης της τάξης και ότι μπορεί κανείς να ανακτήσει από αυτή την άποψη σε αρκετά συστηματικό τρόπο το αποτέλεσμα των Haagerup και Larsen στο μέτρο Brown των  $R$ -διαγώνιων τελεστών. Ας θυμηθούμε πρώτα, για μετέπειτα χρήση, τον ορισμό του  $S$ -μετασχηματισμού. Θυμηθείτε ότι για μία τυχαία μεταβλητή  $y$  με  $\varphi(y) \neq 0$  ορίζουμε [50]

$$\psi_y(\lambda) := \varphi((1 - \lambda y)^{-1}) - 1.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο

$$S_y(\lambda) := \frac{\lambda + 1}{\lambda} \psi_y^{\langle -1 \rangle}(\lambda)$$

είναι καλά ορισμένος σε κάποια γειτονιά του 0 και ονομάζεται  $S$ -μετασχηματισμός του  $y$  του Voiculescu. Αποδείχθηκε στο [26], [35] ότι αν ο  $y$  είναι θετικός τελεστής τότε ο  $S$ -μετασχηματισμός του έχει μία αναλυτική συνέχιση (επέκταση) σε ένα διάστημα  $(\mu_y\{0\} - 1, 0]$ , έχει μια αυστηρά αρνητική παράγωγο σε αυτό το διάστημα και

$$S_y(\mu_y\{0\} - 1) = \varphi(y^{-2}), \quad S_y(0) = \frac{1}{\varphi(y^2)}.$$

Έστω τώρα  $x = ua \in (\mathfrak{A}, \varphi)$  είναι  $R$ -διαγώνιος [36]. Θυμόμαστε ότι αυτό σημαίνει ότι οι  $u$  και  $a$  είναι  $\star$ -ελεύθεροι ως προς  $\varphi$ , και ότι ο  $u$  είναι ένας Haar μοναδιαίος και

$a \geq 0$ . Σημειώνουμε ότι οι R-διαγώνιοι τελεστές είναι, κατά  $\star$ -ροπές, τα όρια μιας σημαντικής κλάσης τυχαίων πινάκων, δηλαδή των δι-μοναδιαίων αναλλοίωτων τυχαίων πινάκων.

Θα συμβολίσουμε με  $\mathcal{D}$  τη μεταθετική  $C^*$ -άλγεβρα των διαγώνιων πινάκων στη  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , όπου θεωρούμε τον ίδιο εγκλεισμό της  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  στη  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  όπως και στις προηγούμενες ενότητες. Μπορούμε να επικαλεστούμε από το [38] ότι ένα στοιχείο  $x$  σε έναν ιχνογραφικό  $W^*$ -μη μεταθετικό χώρο πιθανότητας είναι R-διαγώνιο εάν και μόνο εάν ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{bmatrix}$  είναι ελεύθερος πάνω από τη  $\mathcal{D}$  της  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  ως προς τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}_{\mathcal{D}} : \mathcal{M}_2(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathcal{D}, \quad \mathbb{E}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(a_{11}) & 0 \\ 0 & \varphi(a_{22}) \end{bmatrix}.$$

Σταθεροποιούμε τώρα ένα  $\lambda$  στο άνω ημιεπίπεδο του  $\mathbb{C}$ . Αν συμβολίσουμε με  $\mathcal{D}\langle X \rangle$  τη  $\star$ -άλγεβρα που παράγεται από την  $\mathcal{D}$  και τον  $X$ , τότε είναι προφανές ότι

$$\mathcal{D}\left\langle \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \bar{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

(Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να το επαληθεύσει αυτό, για παράδειγμα, κατασκευάζοντας όλους τους μοναδιαίους πίνακες από τις δύο μη τετριμμένες προβολές του  $\mathcal{D}$  και του στοιχείου  $\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \bar{\lambda} & 0 \end{bmatrix}$ .) Το θεμελιώδες αποτέλεσμα [ [49], θεώρημα 3.8] του Voiculescu γράφεται σε αυτό το πλαίσιο ως:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \begin{bmatrix} z & \lambda \\ \bar{\lambda} & w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} \omega_1(z, w) & \lambda \\ \bar{\lambda} & \omega_2(z, w) \end{bmatrix}^{-1}, \quad (30)$$

όπου

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\mathcal{D}\left\langle \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \bar{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle} = \mathbb{E}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$$

συμβολίζει, όπως παραπάνω, τη μοναδική οριακή μέση τιμή στην  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  που διατηρεί το ίχνος, και το οποίο δίνεται με υπολογισμό του  $\varphi$  στα στοιχεία του πίνακα. Όπως και πριν, το στοιχείο (2,1) είναι το αντικείμενο ενδιαφέροντος για τον  $G_{\mu_x}$ , που καθορίζεται από τις συναρτήσεις  $\omega_1, \omega_2$  μέσω μίας ευθείας αλγεβρικής σχέσης. (Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις  $\omega_1$  και  $\omega_2$  εξαρτώνται επίσης από το  $\lambda$ , και αυτή η εξάρτηση είναι σχετική για εμάς. Αν και μπορεί να είναι άδικο για τον αναγνώστη, θα ακολουθήσουμε την παράδοση και θα καταστείλουμε αυτή την εξάρτηση στις σημειώσεις.)

Από την άλλη, η συνάρτηση μείωσης της τάξης  $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}$  που λαμβάνεται με εφαρμογή της  $\mathbb{E}_{\mathcal{D}}$  στη σχέση (30), προσδιορίζεται από το [ [7], Θεώρημα 2.2] μέσω



της επαναληπτικής διαδικασίας, εάν είναι επιθυμητή, ή μέσω απλού, άμεσου υπολογισμού ως προς (συναρτήσεις που προέρχονται από) τον μετασχηματισμό Cauchy-Stieltjes του  $a^2$ . Έστω  $w = z$ . Η εκτέλεση της αντιστροφής στη δεξιά πλευρά της σχέσης (30) δίνει

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \omega_1(z, z) & \lambda \\ \bar{\lambda} & \omega_2(z, z) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_2(z, z)(\omega_1\omega_2(z, z) - |\lambda|^2)^{-1} & \lambda(|\lambda|^2 - \omega_1\omega_2(z, z))^{-1} \\ \bar{\lambda}(|\lambda|^2 - \omega_1\omega_2(z, z))^{-1} & \omega_1(z, z)(\omega_1\omega_2(z, z) - |\lambda|^2)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Με αντιστροφή της ποσότητας στη μέση τιμή της αριστερής πλευράς της σχέσης (30) και στη συνέχεια με εφαρμογή της μέσης τιμής, προκύπτει ο

$$\begin{bmatrix} z \varphi ([z^2 - (\lambda - x)(\lambda - x)^*]^{-1}) & \varphi ((\lambda - x)[(\lambda - x)^*(\lambda - x) - z^2]^{-1}) \\ \varphi ((\lambda - x)^*[(\lambda - x)(\lambda - x)^* - z^2]^{-1}) & z \varphi ([z^2 - (\lambda - x)^*(\lambda - x)]^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Η ιδιότητα του ίχνους της  $\varphi$  συνεπάγεται εύκολα ότι τα στοιχεία (1,1) και (2,2) του παραπάνω πίνακα είναι ίσα, διασφαλίζοντας έτσι ότι  $\omega_1(z, z) = \omega_2(z, z) = \omega(z)$ . Δεδομένου ότι ο παραπάνω πίνακας πρέπει να είναι ίσος με αυτόν στη σχέση (31), η επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης σε συνδυασμό με τη γνώση ότι οι ασύμπτωτες στο άπειρο του  $\omega(z)$  είναι τάξης  $z$  μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\omega(z) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4z^2|\lambda|^2 \varphi ([z^2 - (\lambda - x)^*(\lambda - x)]^{-1})^2}}{2z \varphi ([z^2 - (\lambda - x)^*(\lambda - x)]^{-1})}.$$

Ο κανονικός μετασχηματισμός Cauchy-Stieltjes  $G_{\mu_x, \varepsilon}$  του  $x$ , δηλαδή το στοιχείο (2,1)  $\varphi ((\lambda - x)^*[(\lambda - x)(\lambda - x)^* + \varepsilon^2]^{-1})$ , δίνεται τότε από τη σχέση

$$\begin{aligned} G_{\mu_x, \varepsilon}(\lambda) &= \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2 - \omega(i\varepsilon)^2} \\ &= \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2 - \frac{(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2|\lambda|^2 \varphi ([\varepsilon^2 + (\lambda - x)^*(\lambda - x)]^{-1})^2})^2}{2\varepsilon^2 \varphi ([\varepsilon^2 + (\lambda - x)^*(\lambda - x)]^{-1})^2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Κάπως τετριμμένα, αν  $\lambda$  δεν ανήκει στο φάσμα του  $x$  και για  $\varepsilon$  που τείνει στο 0, τότε  $G_{\mu_x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ . Πιο συγκεκριμένα, αυτό ισχύει για  $|\lambda| > \|x\|$ .

Τώρα, ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν εφαρμοστεί η εξίσωση σταθερού σημείου για τον καθορισμό των συναρτήσεων της μείωσης τάξης, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \omega_1(z, w) &= \frac{|\lambda^2|}{\omega_2(z, w)} + \frac{1}{\varphi \left( \frac{w - \frac{|\lambda^2|}{\omega_1(z, w)}}{\left( z - \frac{|\lambda^2|}{\omega_2(z, w)} \right) \left( w - \frac{|\lambda^2|}{\omega_1(z, w)} \right) - xx^*} \right)} \\ \omega_2(z, w) &= \frac{|\lambda^2|}{\omega_1(z, w)} + \frac{1}{\varphi \left( \frac{z - \frac{|\lambda^2|}{\omega_2(z, w)}}{\left( z - \frac{|\lambda^2|}{\omega_2(z, w)} \right) \left( w - \frac{|\lambda^2|}{\omega_1(z, w)} \right) - xx^*} \right)} \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για  $z = w$  έχουμε δει ότι  $\omega_1(z, z) = \omega_2(z, z) = \omega(z)$ , και

$$\omega(z) = \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)} + \frac{1}{\varphi\left(\frac{z - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}}{\left(z - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}\right)^2 - xx^*}\right)} = \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)} + \frac{1}{\varphi\left(\frac{z - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}}{\left(z - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}\right)^2 - a^2}\right)} \quad (33)$$

Από αυτή την έκφραση και τη σχέση (31) αναγνωρίζουμε το (γνωστό) γεγονός ότι η κατανομή του R-διαγώνιου τελεστή  $x$  εξαρτάται μόνο από το θετικό μέρος του. Αυτή η λειτουργική εξίσωση εγγυάται ταυτόχρονα ότι η εξάρτηση του  $\omega(z)$  από το όρισμα του  $\lambda$  είναι σταθερή, το οποίο μας εξασφαλίζει (μέσω της σχέσης (32)) ότι η κατανομή του  $x$  έχει ακτινική συμμετρία. Τώρα θα περιγράψουμε την ακριβή εξάρτηση αυτής της κατανομής από την απόσταση από το μηδέν: με απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς, η σχέση (33) γίνεται

$$\varphi\left(\frac{a^2}{\left(z - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}\right)^2 - a^2}\right) = \frac{z - \omega(z)}{\omega(z) - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}} \quad (34)$$

Υπό το πρίσμα του αναλυτικού μετασχηματισμού  $\psi$  μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (34) στη μορφή

$$\psi_{\mu_{a^2}}\left(\left(z - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}\right)^{-2}\right) = \frac{z - \omega(z)}{\omega(z) - \frac{|\lambda^2|}{\omega(z)}}. \quad (35)$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $\omega(i\varepsilon) \in i\mathbb{R}_+$ , και στην πραγματικότητα  $\Im\omega(i\varepsilon) > \varepsilon$ . Ορίζουμε

$$A_\varepsilon(\lambda) = \Im \frac{1}{i\varepsilon - \frac{|\lambda^2|}{\omega(i\varepsilon)}} = \frac{1}{\varepsilon + \frac{|\lambda^2|}{\Im\omega(i\varepsilon)}}, \varepsilon > 0$$

Έτσι, η σχέση (35) μετασχηματίζεται σε

$$\psi_{\mu_a^2}(-A_\varepsilon(\lambda)^2) = \frac{\varepsilon A_\varepsilon(\lambda) - (\varepsilon^2 + |\lambda^2|)A_\varepsilon(\lambda)^2}{(\varepsilon^2 + |\lambda^2|)A_\varepsilon(\lambda)^2 - 2\varepsilon A_\varepsilon(\lambda) + 1} \quad (36)$$

Υπενθυμίζουμε από τον τύπο του  $\omega(z)$  ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \Im\omega(i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2 |\lambda^2| \varphi([\varepsilon^2 + (\lambda - x)^*(\lambda - x)]^{-1})^2}}{2 \varphi([\varepsilon^2 + (\lambda - x)^*(\lambda - x)]^{-1})}.$$

Αυτή η ποσότητα (ενώ εξαρτάται από το  $\lambda$ ) είναι αναγκαστικά θετική και πεπερασμένη, μηδενική σχεδόν παντού στο φάσμα του  $x$ . Για όλα αυτά τα  $\lambda$ , παίρνουμε το όριο καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$  στη σχέση (36) για να πάρουμε

$$\psi_{\mu_{a^2}}(-A_0(\lambda)^2) = \frac{|\lambda^2|(-A_0(\lambda)^2)}{1 - |\lambda^2|(-A_0(\lambda)^2)}.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτή η συναρτησιακή εξίσωση είναι αρκετά τετριμμένα επιλύσιμη στο  $(-\infty, 0)$ . Πράγματι, με τους προφανείς συμβολισμούς,  $\psi_{\mu_{a^2}}(f(r)) + 1 = \frac{1}{1 - r^2 f(r)}$  είναι ισοδύναμο με το  $r^2 = \frac{\eta_{\mu_{a^2}}(f(r))}{f(r)}$  (θυμόμαστε ότι  $\eta = \frac{\psi}{1+\psi}$ ), και

$g : v \mapsto \frac{\eta_{a^2}(v)}{v} = \frac{1}{v} - F_{\mu_{a^2}}\left(\frac{1}{v}\right)$  είναι γνωστό [6] ότι είναι αμφιμονοσήμαντη, στην πραγματικότητα αυξάνεται αυστηρά όποτε  $a \notin \mathbb{C} \cdot 1$ , στο  $(-\infty, 0)$  με  $0^- \mapsto \varphi(a^2)$ . Αυτός μπορεί να είναι ένας πιο βολικός τρόπος για να εκφράσουμε τον  $\omega$ : θα είχαμε

$$G_{\mu_{x,\varepsilon}}(\lambda) = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2 \left(1 + \frac{|\lambda|^2 A_\varepsilon(\lambda)^2}{1 + \varepsilon A_\varepsilon(\lambda)}\right)},$$

και όταν  $\varepsilon A_\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$  καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$G_{\mu_x}(\lambda) = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2 (1 + |\lambda|^2 A_0(\lambda)^2)}$$

Εφόσον

$$A_0(\lambda) = \sqrt{-g^{(-1)}(|\lambda|^2)},$$

γράφουμε

$$G_{\mu_x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(1 - |\lambda|^2 g^{(-1)}(|\lambda|^2))}. \quad (37)$$

Το φράγμα  $|\lambda|^2 = \varphi(a^2)$  προκύπτει από την παραπάνω παρατήρηση στη συμπεριφορά κοντά στο μηδέν της  $g$ . Ωστόσο, εξίσου εύκολα ως προς τον μετασχηματισμό  $S$ , έχουμε

$$S_{\mu_{a^2}}^{(-1)}(|\lambda|^{-2}) = \frac{|\lambda|^2 (-A_0(\lambda)^2)}{1 - |\lambda|^2 (-A_0(\lambda)^2)} = \frac{\omega(0)^2}{|\lambda|^2 - \omega(0)^2}.$$

Τότε

$$G_{\mu_x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (1 + S_{\mu_{a^2}}^{(-1)}(|\lambda|^{-2})), \quad (38)$$

με ακριβώς τους ίδιους περιορισμούς για το  $\lambda$  όπως παραπάνω. Έτσι, τελικά έχουμε

$$G_{\mu_x}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{για } |\lambda| \geq \varphi(a^2), \\ \frac{1 + S_{\mu_{a^2}}^{(-1)}(|\lambda|^{-2})}{\lambda} & \text{για } |\lambda|^2 \leq \varphi(a^2), \end{cases}$$

που μας επιτρέπει να ανακτήσουμε το ακόλουθο θεώρημα των Haagerup και Larsen [26].

**Θεώρημα 2** Το μέτρο Brown  $\mu_x$  του  $R$ -διαγώνιου τελεστή  $x = ua$  είναι το μοναδικό περιστροφικά αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε

$$\mu_x\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq z\} = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{\varphi((xx^*)^{-1})}}, \\ 1 + S_{xx^*}^{(-1)}(z^{-2}) & \text{αν } \frac{1}{\sqrt{\varphi((xx^*)^{-1})}} \leq z \leq \sqrt{\varphi(xx^*)}, \\ 1 & \text{αν } z \geq \sqrt{\varphi(xx^*)}. \end{cases}$$

Ας θυμηθούμε ότι οι Guionnet, Krishnapur και Zeitouni έδειξαν στο [24] ότι αυτό το μέτρο Brown περιγράφει πράγματι την ασυμπτωτική κατανομή ιδιοτιμών των αντίστοιχων δι-μοναδιαίων αναλλοίωτων τυχαίων πινάκων.

**Απόδειξη 3** Υπόδειξη πώς από τον μετασχηματισμό Cauchy προκύπτει το μέτρο Brown του Θεωρήματος 2:

Αν  $G(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ , τότε

$$\mu = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} G_{\mu}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Αυτό αποδεικνύεται αν γράψουμε  $\lambda = x + yi$  και κάνουμε τις αντίστοιχες παραγωγίσεις.

Αν  $G(\lambda) = 1 + S^{(-1)}(|\lambda|^{-2})$ , τότε συμβολίζοντας με  $f(\lambda) = 1 + S^{(-1)}(|\lambda|^{-2})$ , έχουμε  $G(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f(\lambda)$ , οπότε παραγωγίζοντας ως προς  $\bar{\lambda}$  παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} G(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \cdot f(\lambda) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda).$$

Συνεπώς,

$$\mu(B(0, z)) = \frac{1}{\pi} \int_{B(0, z)} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda) dx dy.$$

Γράφουμε  $\lambda = r e^{it}$ , οπότε

$$\mu(B(0, z)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{1}{r e^{it}} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda) r dr dt = \frac{-2\pi}{\pi} \int_0^z r \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda) dr = -2 \int_0^z \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda) r dr.$$

Κρατήσαμε το  $\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda)$  στις δύο τελευταίες ισότητες καταχρηστικά, οπότε πρέπει να το υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(\lambda) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) S^{(-1)} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( S'^{(-1)} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} + i S'^{(-1)} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= -\lambda S'^{(-1)} \left( \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \frac{1}{|\lambda|^4} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mu(B(0, z)) = -2 \int_0^z S'^{(-1)} \left( \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{r^4} r dr.$$

Τέλος, θέτουμε  $t = r^{-2}$  και προκύπτει ότι

$$\mu(B(0, z)) = -2 \int_{\infty}^{z^{-2}} S'^{(-1)}(t) \frac{-1}{2} dt = S^{(-1)}(z^{-2}) - \lim_{t \rightarrow \infty} S^{(-1)}(t) = S^{(-1)}(z^{-2}) + 1.$$

□

#### Παράδειγμα 4 Ο κυκλικός τελεστής.

Ας εξετάσουμε, ως συγκεκριμένο παράδειγμα, τον κυκλικό τελεστή  $c = (s_1 + is_2)/\sqrt{2}$ , όπου τα  $s_1$  και  $s_2$  είναι ελεύθερα τυπικά ημικυκλικά στοιχεία.

Η κατανομή του  $c^*c$  είναι ελεύθερη Poisson βαθμού 1, που δίνεται από την πυκνότητα  $\sqrt{4-t}/2\pi t$  στο  $[0, 4]$ , και συνεπώς η κατανομή  $\mu_{|c|}$  της απόλυτης τιμής  $\mu_{|c|}$  είναι η τεταρτο-κυκλική κατανομή με πυκνότητα  $\sqrt{4-t^2}/\pi$  στο  $[0, 2]$ . Έχουμε  $\|c\|_2 = 1$  και  $\|c^{-1}\|_2 = \infty$ , και συνεπώς το στήριγμα του μέτρου Brown του  $c$  είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος,  $\text{supp}(\mu_c) = B(0, 1)$ , που συμπίπτει με το φάσμα του  $c$ .

Για να εφαρμόσουμε την Πρόταση 4, πρέπει να υπολογίσουμε τον  $S$ -μετασχηματισμό του  $c^*c$ . Έχουμε  $R_{c^*c}(z) = 1/(1-z)$ , και επομένως  $S_{c^*c}(z) = 1/(1+z)$  (γιατί ο  $z \mapsto zR(z)$  και ο  $w \mapsto wS(w)$  είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. Βλέπε [ [38], Παρατήρηση 16.18] και επίσης τη συζήτηση γύρω από το [ [38], Εξ. (16.8)]). Άρα, για  $0 < t < 1$ , έχουμε  $S_{c^*c}(t-1) = 1/t$ . Έτσι,  $\mu_c(B(0, \sqrt{t})) = t$ , ή, για  $0 < r < 1$ ,  $\mu_c(B(0, r)) = r^2$ . Αυτό, μαζί με την ιδιότητα της αναλλοίωτης περιστροφής δείχνουν ότι το  $\mu_c$  είναι το ομοιόμορφο μέτρο στον μοναδιαίο δίσκο  $B(0, 1)$ .

## 2. Ο κυκλικός Νόμος

Ο κυκλικός νόμος είναι η μη αυτοσυζυγής εκδοχή του ημικυκλικού νόμου του Wigner (βλέπε [36]). Θεωρούμε έναν πίνακα  $N \times N$  όπου όλα τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα και ισόνομα. Εάν η κατανομή των στοιχείων είναι Gaussian, τότε αυτό το σύνολο ονομάζεται επίσης σύνολο Ginibre. Είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε ότι οι  $\star$ -ροπές των Ginibre τυχαίων πινάκων συγκλίνουν στις αντίστοιχες  $\star$ -ροπές του κυκλικού τελεστή. Έτσι είναι αρκετά εύλογο να αναμένουμε ότι το μέτρο Brown (δηλαδή, η κατανομή ιδιοτιμής) των τυχαίων πινάκων Ginibre συγκλίνει στο μέτρο Brown του κυκλικού τελεστή, δηλαδή στην ομοιόμορφη κατανομή στο δίσκο. Αυτός ο ισχυρισμός είναι γνωστός ως κυκλικός νόμος. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω δεν αποτελούν απόδειξη του κυκλικού νόμου, διότι το μέτρο Brown δεν είναι συνεχές ως προς την αντίληψή μας για σύγκλιση σε  $\star$ -κατανομή. Μπορεί κανείς να κατασκευάσει εύκολα παραδείγματα όπου αυτό αποτυγχάνει.

## Κεφάλαιο 6

# Το μέτρο Brown των ελλειπτικών-τριγωνικών τελεστών

### 1. Ελλειπτικά και τριγωνικά-ελλειπτικά σύνολα

Θεωρούμε έναν τυχαίο πίνακα  $A_N = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  ώστε η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών  $(\Re a_{ij}, \Im a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  να έχει Γκαουσιανό κέντρο, με τη συνδιακύμανση να δίνεται από τον τύπο

$$\mathbb{E} a_{ij} \overline{a_{kl}} = \begin{cases} \frac{\alpha}{N} \delta_{ik} \delta_{jl} & \alpha \nu \quad i < j, \\ \frac{\alpha + \beta}{2N} \delta_{ik} \delta_{jl} & \alpha \nu \quad i = j, \\ \frac{\beta}{N} \delta_{ik} \delta_{jl} & \alpha \nu \quad i > j, \end{cases}$$
$$\mathbb{E} a_{ij} a_{kl} = \frac{\gamma}{N} \delta_{il} \delta_{jk},$$

όπου  $\alpha, \beta \geq 0$  και  $\gamma \in \mathbb{C}$  ώστε  $|\gamma| \leq \sqrt{\alpha\beta}$ . Ανεπίσημα μιλώντας: υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των  $a_{ij}$  και  $a_{ji}$  και οι τυχαίες μεταβλητές  $(\Re a_{ij}, \Im a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  είναι όσο ανεξάρτητες γίνεται ώστε να εκπληρωθεί αυτή η απαίτηση. Επιπλέον, τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο έχουν την ίδια διακύμανση. Επίσης τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο έχουν την ίδια διακύμανση (αλλά αυτές οι δύο διακυμάνσεις δεν χρειάζεται να συμπίπτουν).

Ονομάζουμε τον  $A_N$  τριγωνικό-ελλειπτικό τυχαίο πίνακα. Είναι μια φυσική γενίκευση ορισμένων σημαντικών συνόλων τυχαίων πινάκων: για  $\alpha = \beta$  συμπίπτει με το ελλειπτικό σύνολο και πιο συγκεκριμένα για  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0$  συμπίπτει με τον πίνακα Wigner (δηλαδή  $(\Re a_{ij}, \Im a_{ij})$  είναι μια οικογένεια ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών Gauss) και για  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  είναι ένας τυχαίος Ερμιτιανός πίνακας που συμπίπτει με το σύνολο των μοναδιαίων Γκαουσιανών. Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = \gamma = 0$  η ακολουθία  $(A_N)$  συγκλίνει κατά  $\ast$ -ροπές σε έναν πολύ ενδιαφέρον τοπολογικά μηδενικό τελεστή  $T$  (βλ., π.χ., [15]) και για  $\alpha = \sqrt{1+t^2}, \beta = t, \gamma = 0$  η ακολουθία  $(A_N)$  συγ-

κλίνει κατά  $\star$ -ροπές στον  $T + tY$ , όπου  $Y$  είναι το κυκλικό στοιχείο κατά Voiculescu έτσι ώστε οι  $T$  και  $Y$  είναι ελεύθεροι. Το μέτρο Brown του τελευταίου τελεστή υπολογίστηκε από τους Aagaard και Haagerup [2].

Κάποιος μπορεί να δείξει [15] ότι η ακολουθία των τυχαίων πινάκων  $A_N$  συγκλίνει κατά  $\star$ -ροπές σε ένα ορισμένο γενικευμένο κυκλικό στοιχείο  $x$  που θα περιγραφεί ακριβώς παρακάτω στην Ενότητα 6.2.

## 2. Ελλειπτικοί Τριγωνικοί Τελεστές

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες της ελεύθερης πιθανότητας για τελεστές. Οι απαραίτητες έννοιες μπορούν να βρεθούν στο [45],[48].

### 2.1 Προαπαιτούμενα

Έστω  $a, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{C}$  έτσι ώστε  $|\gamma| \leq \sqrt{a\beta}$  είναι σταθερό. Έστω  $\mathfrak{B} = \mathcal{L}^\infty(0, 1)$ , έστω  $(\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}, \tilde{\mathbb{E}} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$  είναι ένας χώρος πιθανότητας για τελεστές και έστω  $x \in \mathfrak{A}$  ένα γενικευμένο κυκλικό στοιχείο, του οποίου οι μόνοι μη μηδενικοί ελεύθεροι αθροιστικοί δείκτες δίνονται από τους τύπους

$$k(x, fx)(t) = \gamma \int_0^1 f(s) ds, \quad (39)$$

$$k(x^*, fx^*)(t) = \bar{\gamma} \int_0^1 f(s) ds, \quad (40)$$

$$k(x, fx^*)(t) = a \int_t^1 f(s) ds + \beta \int_0^t f(s) ds, \quad (41)$$

$$k(x^*, fx)(t) = a \int_0^t f(s) ds + \beta \int_t^1 f(s) ds \quad (42)$$

για κάθε  $f \in \mathfrak{B}$ . Ο αναγνώστης μπορεί να βρει τις λεπτομέρειες αυτής της κατασκευής στην περίπτωση  $a = 1, \beta = \gamma = 0$  στο [43]. Για να μπορέσουμε ορίσουμε το μέτρο Brown του  $x$  πρέπει να ορίσουμε μία συνάρτηση ίχνους  $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ . Αυτό το κάνουμε θεωρώντας

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(s) ds$$

για  $f \in \mathfrak{B}$  και στη γενική περίπτωση  $\varphi(y) = \varphi(\tilde{\mathbb{E}}(y))$ . Μπορεί κανείς να δείξει [15] ότι η ακολουθία των τυχαίων πινάκων  $(A_N)$  που εξετάζεται στην Ενότητα 6.1 συγκλίνει κατά  $\star$ -ροπές στον  $x$  και επομένως η  $\varphi$  είναι πράγματι μια συνάρτηση ίχνους.

## 2..2 Υπολογισμός του κανονικοποιημένου μετασχηματισμού Cauchy

Εφόσον ασχολούμαστε με μια περίπτωση τελεστών, είναι χρήσιμο να ορίσουμε  $\mathbb{E} : \mathcal{M}_2(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathfrak{B})$  ως

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{E}}(a_{11}) & \tilde{\mathbb{E}}(a_{12}) \\ \tilde{\mathbb{E}}(a_{21}) & \tilde{\mathbb{E}}(a_{22}) \end{bmatrix}$$

αντί για τον ορισμό της σχέσης (14).

Η σχέση μεταξύ των ελεύθερων αθροιστικών δεικτών του  $x$  και των ελεύθερων αθροιστικών δεικτών του  $X$ , όπως ορίζεται στη σχέση (13), υποδηλώνει ότι το  $X$  είναι ένα ημικυκλικό στοιχείο με τιμή τελεστή του οποίου ο μετασχηματισμός  $R$  είναι δίνεται αυστηρά από τη σχέση

$$R_X \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(x, a_{22}x^*) & k(x, a_{21}x) \\ k(x^*, a_{12}x^*) & k(x^*, a_{11}x) \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, η γενική εξίσωση  $G(\Lambda) = (\Lambda - R(G(\Lambda)))^{-1}$  για ένα στοιχείο του ημικυκλίου με τιμή τελεστή, δίνει στην περίπτωση μας

$$G_\varepsilon(\lambda) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} i\varepsilon - k(x^*, g_{11}x) & -\lambda + k(x, g_{21}x) \\ -\bar{\lambda} + k(x^*, g_{12}x^*) & i\varepsilon - k(x, g_{22}x^*) \end{bmatrix}, \quad (43)$$

όπου

$$\begin{aligned} d &= \det \begin{bmatrix} i\varepsilon - k(x, g_{22}x^*) & \lambda - k(x, g_{21}x) \\ \bar{\lambda} - k(x^*, g_{12}x^*) & i\varepsilon - k(x^*, g_{11}x) \end{bmatrix} \\ &= (i\varepsilon - k(x^*, g_{11}x))(i\varepsilon - k(x, g_{22}x^*)) - (\lambda - k(x, g_{21}x))(\bar{\lambda} - k(x^*, g_{12}x^*)). \end{aligned} \quad (44)$$

Για απλούστευση, παραβλέψαμε την εξάρτηση από τα  $\varepsilon$  και  $\lambda$  των  $g_{ij} = g_{\varepsilon, \lambda, ij} \in \mathfrak{B}$  και  $d = d_{\varepsilon, \lambda} \in \mathfrak{B}$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερά  $\varepsilon$  και  $\lambda$  από τις σχέσεις (39)-(42) το δεύτερο άθροισμα στη δεξιά μεριά της σχέσης (44) είναι μία σταθερή συνάρτηση στη  $\mathfrak{B}$  και

$$\begin{aligned} d' &= (i\varepsilon - k(x^*, g_{11}x))' (i\varepsilon - k(x, g_{22}x^*)) \\ &\quad + (i\varepsilon - k(x^*, g_{11}x)) (i\varepsilon - k(x, g_{22}x^*))' \\ &= -(a - \beta)g_{11} (i\varepsilon - k(x, g_{22}x^*)) \\ &\quad - (i\varepsilon - k(x^*, g_{11}x))(\beta - a)g_{22} = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη σύγκριση των στοιχείων του πίνακα στη σχέση (43). Προκύπτει, λοιπόν, ότι η  $d \in \mathfrak{B}$  είναι στην πραγματικότητα σταθερή συνάρτηση. Συγκρίνοντας τα στοιχεία των πινάκων στη σχέση (43) βλέπουμε επίσης οι  $g_{12}, g_{21} \in \mathfrak{B}$  είναι σταθεροί. Η εξίσωση (17) συνεπάγεται ότι  $d \in R$ .

Η σύγκριση των άνω-αριστερών γωνιών της σχέσης (43) μας δίνει μια απλή ολοκληρωτική εξίσωση για τη συνάρτηση  $g_{11}$ , που έχει μια μοναδική λύση

$$g_{11}(t) = \begin{cases} \frac{i\varepsilon(a-\beta)}{(a-\beta e^{\frac{\beta-a}{d}t})d} e^{\frac{\beta-a}{d}t} & \gamma i \alpha \quad a \neq \beta, \\ \frac{i\varepsilon}{d+a} & \gamma i \alpha \quad a = \beta. \end{cases} \quad (46)$$



Στην πραγματικότητα, η περίπτωση  $a = \beta$  μπορεί να προσεγγιστεί ως μια ειδική περίπτωση της  $a \neq \beta$ , παίρνοντας το όριο  $a \rightarrow \beta$ . Όμοια, βρίσκουμε ότι

$$g_{22}(t) = \begin{cases} \frac{i\varepsilon(a-\beta)}{(a-\beta e^{\frac{\beta-a}{d}})^d} e^{\frac{\beta-a}{d}(1-t)} & \text{για } a \neq \beta, \\ \frac{i\varepsilon}{d+a} & \text{για } a = \beta. \end{cases} \quad (47)$$

Επίσης, υπολογίζουμε ότι

$$g_{12} = \frac{-\gamma\bar{\lambda} - \lambda d}{d^2 - |\gamma|^2}, \quad g_{21} = \frac{-\bar{\gamma}\lambda - \bar{\lambda}d}{d^2 - |\gamma|^2}. \quad (48)$$

Ως εκ τούτου,

$$\frac{1}{d} = \det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = -\frac{\varepsilon^2(a-\beta)^2 e^{\frac{\beta-a}{d}}}{(a-\beta e^{\frac{\beta-a}{d}})^2 d^2} - \frac{|\gamma\bar{\lambda} + \lambda d|^2}{d^2 - |\gamma|^2}, \quad (49)$$

για  $a \neq \beta$  και

$$\frac{1}{d} = \det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = -\frac{\varepsilon^2}{(d+a)^2} - \frac{|\gamma\bar{\lambda} + \lambda d|^2}{(d^2 - |\gamma|^2)^2}, \quad (50)$$

αν  $a = \beta$ .

A priori, όλοι οι παραπάνω ισχυρισμοί ισχύουν μόνο για  $\varepsilon$  σε κάποια γειτονιά του απείρου, αλλά είναι εύκολο να ελεγχθεί από τον ορισμό ότι η  $g_{\varepsilon,\lambda,ij}(s)$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση του  $\varepsilon$  (στην περιοχή  $\Re \neq 0$ ) για σταθερές τιμές του  $0 \leq s \leq 1$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ομοίως, η  $d = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})^{-1}$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση του  $\varepsilon$ . Συνεπώς, οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν για όλα τα  $\varepsilon > 0$ .

### 2.3 Ύπαρξη και συνέχεια του μετασχηματισμού Cauchy

Εφόσον η συνάρτηση  $x \mapsto e^x$  είναι κυρτή, ισχύει ότι

$$\frac{a\beta}{\log a - \log \beta} = \frac{1}{\log a - \log \beta} \int_{\log \beta}^{\log a} e^x dx \geq e^{\frac{1}{\log a - \log \beta} \int_{\log \beta}^{\log a} x dx} = \sqrt{a\beta}.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε από τη σχέση (17) ότι για σταθερό  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $\varepsilon \rightarrow \infty$  έχουμε  $d \rightarrow -\infty$ . Στην περίπτωση  $a \neq \beta$  η εξίσωση (46) συνεπάγεται ότι  $d \neq \frac{\beta-a}{\log a - \log \beta}$  για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Από την ιδιότητα του Darboux προκύπτει ότι  $d < \frac{\beta-a}{\log a - \log \beta} \leq -|\gamma|$  για  $\varepsilon > 0$ . Όμοια, αν  $a = \beta$  μπορούμε να δείξουμε ότι  $d < -a \leq -|\gamma|$ .

Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $d \in \mathbb{R}$  υπάρχει το πολύ ένα  $\varepsilon > 0$  για το οποίο ισχύει η σχέση (49), επομένως η συνεχής συνάρτηση  $\varepsilon \mapsto d_{\lambda,\varepsilon}$  πρέπει να είναι μονότονη. Εφόσον  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} d_{\varepsilon,\lambda} = -\infty$ , τότε η  $\varepsilon \mapsto d_{\lambda,\varepsilon}$  πρέπει να είναι φθίνουσα και το όριο  $d_{0,\lambda} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{\varepsilon,\lambda}$  υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Επιπλέον, εκτός από την τετριμμένη περίπτωση  $a = \beta = \gamma = 0$ , έχουμε  $d_{0,\lambda} < 0$ . Η εξίσωση (49) συνεπάγεται ότι η  $d = d_{0,\lambda}$  είναι μία λύση της εξίσωσης

$$(a - \beta e^{\frac{\beta-a}{d}})^2 \left[ \frac{(d^2 - |\gamma|^2)^2}{d} + |\gamma\bar{\lambda} + \lambda d|^2 \right] = -\frac{\varepsilon^2(a-\beta)^2 e^{\frac{\beta-a}{d}} (d^2 - |\gamma|^2)^2}{d^2} \quad (51)$$

με  $\varepsilon = 0$ .

Είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $\varepsilon = 0$  υπάρχουν μόνο πεπερασμένα πολλές (το πολύ 5) λύσεις  $d \in \mathbb{R}$  της παραπάνω εξίσωσης, επομένως για κάθε  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  και  $\delta_0 > 0$  μπορούμε να βρούμε  $0 < \delta < \delta_0$  έτσι ώστε οι τριάδες  $\lambda_0, \varepsilon = 0, d = d_{0,0} \pm \delta$  να μην είναι οι λύσεις. Από αυτό προκύπτει ότι υπάρχει  $\varepsilon_0 > 0$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  και  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$  οι τριάδες  $\lambda, \varepsilon, d_{0,\lambda_0} \pm \delta$  δεν είναι οι λύσεις. Η συνάρτηση  $(\varepsilon, \lambda) \rightarrow d_{\varepsilon,\lambda}$  είναι συνεχής για  $\varepsilon > 0$  επομένως από την ιδιότητα του Darboux προκύπτει ότι για  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$  και  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  έχουμε  $|d_{\varepsilon,\lambda} - d_{0,\lambda_0}| < \delta$  άρα  $|d_{0,\lambda} - d_{0,\lambda_0}| \leq \delta$ . Από αυτό προκύπτει ότι η συνάρτηση  $\lambda \mapsto d_{0,\lambda}$  είναι συνεχής. Η εξίσωση (48) συνεπάγεται επίσης ότι ο μετασχηματισμός Cauchy  $\lambda \mapsto G_x(\lambda)$  είναι συνεχής —πιθανώς εκτός από την περίπτωση  $a = \beta = |\gamma| = -d_{0,\lambda}$ .

## 2.4 Υπολογισμός του μη κανονικοποιημένου μετασχηματισμού Cauchy

Η εξίσωση (46) συνεπάγεται ότι στο όριο καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ , είτε  $g_{11}$  τείνει ομοιόμορφα στο 0 είτε  $a - \beta e^{\frac{\beta-a}{d\varepsilon,\lambda}} \rightarrow 0$  για  $a \neq \beta$  ή  $d \rightarrow -a$  για  $a = \beta$ . Υποθέτουμε ότι  $g_{11} \rightarrow 0$ . Τότε επίσης  $g_{22} \rightarrow 0$  και η σύγκριση των κάτω αριστερών γωνιών της σχέσης (43) με τη (44) μας δίνει

$$\gamma(G_x(\lambda))^2 - \lambda G_x(\lambda) + 1 = 0, \quad (52)$$

συνεπώς

$$G_x(\lambda) = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\gamma}}{-2\gamma} = \frac{2}{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\gamma}}, \quad (53)$$

για  $\gamma \neq 0$  και  $G_x(\lambda) = \lambda^{-1}$  για  $\gamma = 0$ . Παρατηρούμε ότι η σχέση (53) εξακολουθεί να ισχύει στην τελευταία περίπτωση.

Υποθέτουμε τώρα ότι  $a - \beta e^{\frac{\beta-a}{d\varepsilon,\lambda}} \rightarrow 0$  αν  $a \neq \beta$  ή  $d \rightarrow -a$  για  $a = \beta$ . Τότε έχουμε

$$G_x(\lambda) = \frac{-\bar{\lambda}d + \bar{\gamma}\lambda}{d^2 - |\gamma|^2}, \quad (54)$$

όπου  $d$  δίνεται από τον τύπο

$$d = d_{0,\lambda} = \begin{cases} \frac{\beta-a}{\log a - \log \beta} & \text{για } a \neq \beta, \\ -a & \text{για } a = \beta. \end{cases}$$

Ας συνοψίσουμε την παραπάνω συζήτηση: δείξαμε ότι η  $\lambda \rightarrow G_x(\lambda)$  είναι μία συνεχής συνάρτηση που δίνεται για κάθε  $\lambda$  είτε από τη σχέση (53) είτε από τη σχέση (54). Αυτές οι δύο λύσεις συμπίπτουν στην έλλειψη που δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (52), (54). Επομένως σε κάθε μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος της έλλειψης ο μετασχηματισμός Cauchy δίνεται είτε από τη σχέση (53) είτε από την (54).

Στο άπειρο, ο μετασχηματισμός Cauchy ικανοποιεί την  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} G_x(\lambda) = 0$  επομένως η σχέση (53) είναι η σωστή επιλογή στο εξωτερικό της έλλειψης.

Από την άλλη πλευρά, για  $\lambda = 0$  ο παράγοντας (εκτός, ενδεχομένως, από την περίπτωση  $a = \beta = |\gamma|$ )

$$\frac{(d^2 - |\gamma|^2)^2}{d} + |\gamma\bar{\gamma} + \lambda d|^2$$

είναι μη μηδενικός και συνεπώς η εξίσωση (51) συνεπάγεται ότι η σχέση (54) είναι η σωστή επιλογή για τη λύση στο εσωτερικό της έλλειψης.

Εφόσον έχουμε υπολογίσει τον μετασχηματισμό Cauchy, είναι εύκολο να υπολογίσουμε το μέτρο Brown.

**Θεώρημα 3** *Το μέτρο Brown του τελεστή  $x$  είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο εσωτερικό μέρος της έλλειψης που δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (53), (54).*

Ένας προσεκτικός αναγνώστης μπορεί να αντιταχθεί ότι για την περίπτωση  $a = \beta = e^{2i\tau}\gamma$  με  $\tau \in \mathbb{R}$  η απόδειξή μας έχει ένα κενό αφού δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι ο μετασχηματισμός Cauchy  $G_x(\lambda)$  είναι συνεχής. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή ο τελεστής  $e^{-i\tau}x$  είναι αυτοσυζυγής και συμπίπτει με τον ημικυκλικό τελεστή του Voiculescu, και ο υπολογισμός του φασματικού του μέτρου είναι τετριμμένος. Από την άλλη πλευρά μπορεί κανείς εύκολα να ελέγξει ότι στην περίπτωση  $a = \beta = |\gamma|$  η έλλειψη μας εκφυλίζεται σε ένα διάστημα και το ομοιόμορφο μέτρο σε μια τέτοια εκφυλισμένη έλλειψη συμπίπτει με το μέτρο του ημικυκλίου. Επομένως, το αποτέλεσμα μας ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση. Ότι το μέτρο Brown του τελεστή  $x$  είναι, τουλάχιστον για το  $\beta \neq 0$ , πράγματι και η ασυμπτωτική κατανομή ιδιοτιμής των ελλειπτικών-τριγωνικών τυχαίων πινάκων  $A_N$  προκύπτει από το αποτέλεσμα του Śniady [42] ότι μια μικρή Gaussian παραμόρφωση ενός συνόλου τυχαίων πινάκων δεν αλλάζει το μέτρο Brown στο όριο, αλλά κάνει τη σύγκλιση του μέτρου Brown συνεχή. Στην περίπτωσή μας, μια μικρή Gaussian παραμόρφωση δεν αλλάζει τη φύση του συνόλου που θεωρήσαμε.

### 3. Μέτρο Brown των ελλειπτικών τελεστών

**Ορισμός 6** *Ένας ελλειπτικός τελεστής είναι της μορφής  $a = as_1 + ibs_2$ , όπου  $a, b > 0$  και  $s_1$  και  $s_2$  είναι ελεύθεροι τυπικοί ημικυκλικοί τελεστές. Ένας ελλειπτικός τελεστής δεν είναι  $R$ -διαγώνιος, εκτός αν  $a = b$  (οπότε είναι κυκλικός τελεστής).*

Το παρακάτω θεώρημα αποδείχθηκε από τον Larsen [35] και από τους Biane και Lehner [49]

**Πρόταση 6** *Θεωρούμε τον ελλειπτικό τελεστή*

$$x = (\cos \theta)s_1 + i \sin(\theta)s_2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Θέτουμε  $\gamma = \cos(2\theta)$  και  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ . Τότε το φάσμα του  $x$  είναι η έλλειψη

$$\sigma(x) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\lambda_r^2}{(1+\gamma)^2} + \frac{\lambda_i^2}{(1-\gamma)^2} \leq 1 \right\}$$

και το μέτρο Brown  $\mu_x$  είναι το μέτρο με σταθερή πυκνότητα στο  $\sigma(x)$ :

$$d\mu_x(\lambda) = \frac{1}{\pi(1-\gamma)^2} 1_{\sigma(x)}(\lambda) d\lambda_r d\lambda_i.$$

## Κεφάλαιο 7

# Τελευταίες παρατηρήσεις: Ασυνέχεια του φασματικού μέτρου Brown

Ακολουθώντας το πρόγραμμα από την Ενότητα 1.2, θα θέλαμε να βρούμε τη σύνδεση μεταξύ της πυκνότητας ιδιοτιμών των τυχαίων πινάκων  $A_N$  και του μέτρου Brown  $\mu_x$  του ορίου τους. Ειδικότερα, θα ήλπιζε κανείς ότι το φασματικό μέτρο Brown είναι συνεχές ως προς την τοπολογία της σύγκλισης κατά  $\star$ -ροπές και ως εκ τούτου οι εμπειρικές κατανομές ιδιοτιμής  $\mu_{A_N}$  συγκλίνουν στο  $\mu_x$ . Δυστυχώς, γενικά αυτό δεν είναι αλήθεια. Ένα πολύ απλό αντιπαράδειγμα παρουσιάζεται στο [25]. Ο λόγος για αυτό το φαινόμενο είναι ότι ο ορισμός της ορίζουσας Fuglede-Kadison χρησιμοποιεί τον λογάριθμο, μια συνάρτηση μη φραγμένη από κάτω σε οποιαδήποτε γειτονιά του μηδενός.

Ας εξετάσουμε μία ακολουθία  $(A_N)$  τυχαίων πινάκων που συγκλίνει κατά  $\star$ -ροπές σε κάποιον  $x$ . Παρόλο που υπάρχουν τέτοιες ακολουθίες με την ιδιότητα οι πυκνότητες ιδιοτιμής  $\mu_{A_N}$  να μη συγκλίνουν στο  $\mu_x$ , υπάρχουν αυξανόμενες ενδείξεις ότι τέτοια παραδείγματα είναι πολύ σπάνια. Συγκεκριμένα, έδειξε ο Haagerup [25] και αργότερα ο Śniady [42] ότι κάθε τέτοια ακολουθία μπορεί να διαταραχθεί από μια συγκεκριμένη μικρή τυχαία διόρθωση με τέτοιο τρόπο ώστε η νέα ακολουθία  $(A'_N)$  να εξακολουθεί να συγκλίνει στον  $x$  και επιπλέον τα μέτρα Brown να συγκλίνουν:  $\mu_{A'_N} \rightarrow \mu_x$ . Γενικά, η προσθήκη μιας μικρής διαταραχής αλλάζει τη φύση του θεωρημένου μοντέλου τυχαίου πίνακα, επομένως αυτά τα αποτελέσματα δεν ισχύουν απευθείας στο αρχικό σύνολο. (Εξαιρέση από αυτό είναι η περίπτωση των ελλειπτικών-τριγωνικών τυχαίων πινάκων που εξετάζεται στην Ενότητα 6.)

Υπήρξε πολλή έρευνα σε αυτό το πλαίσιο τα τελευταία δέκα χρόνια. Πιο συγκεκριμένα, ο έλεγχος της ασυνέχειας του μέτρου Brown και συνεπώς, να δειχθεί έτσι ότι η ασυμπτωτική κατανομή ιδιοτιμών των τυχαίων πινάκων δίνεται πράγματι από το μέτρο Brown του οριακού τελεστή επιτεύχθηκε σε σημαντική γενίκευση στον κυκλικό νόμο για Wigner πίνακες και στη συνέχεια, γενικότερα, επίσης για R-διαγώνιους τελεστές και δι-μοναδιαίους τυχαίους πίνακες στο [24]. Προς το πα-

ρόν δεν είναι σαφές εάν οι ιδέες από αυτές τις έρευνες ισχύουν επίσης για καταστάσεις όπως τα πολυώνυμα σε Gaussian (ή ακόμα και σε Wigner) πίνακες. Ωστόσο, οι Belinschi, Śniady και Speicher πιστεύουν ότι η παρακάτω εικασία είναι αληθινή.

**Εικασία 2** Έστω  $p$  ένα (όχι απαραίτητα αυτοσυζυγές) πολυώνυμο σε  $m$  μη αντιμεταθετικές μεταβλητές. Θεωρούμε  $m$  ανεξάρτητους αυτοσυζυγείς Gaussian (ή, γενικότερα, Wigner) τυχαίους πίνακες  $X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(m)}$ . Γνωρίζουμε ότι συγκλίνουν κατά  $\star$ -ροπές σε μία ελεύθερη ημικυκλική οικογένεια  $s_1, \dots, s_m$ . Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο  $p$  που ορίζεται στους τυχαίους πίνακες και στην ημικυκλική οικογένεια, αντίστοιχα. δηλαδή,

$$A_N := p(X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(m)}) \quad \text{και} \quad x = p(s_1, \dots, s_m).$$

Η σύγκλιση κατά  $\star$ -ροπές των  $X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(m)}$  στα  $s_1, \dots, s_m$  συνεπάγεται ότι επίσης οι (γενικά, μη κανονικοί)  $A_N$  συγκλίνουν κατά  $\star$ -ροπές στον τελεστή  $x$ . Εικάζουμε επίσης ότι οι κατανομές ιδιοτιμών  $\mu_{A_N}$  των τυχαίων πινάκων  $A_N$  συγκλίνουν στο μέτρο Brown  $\mu_x$  του οριακού τελεστή  $x$ .

Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε αν οι μέθοδοι από το [41], όπου μελετάται η ειδική περίπτωση ενός γινομένου ανεξάρτητων ελλειπτικών τυχαίων, μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερο τυχαία πολυώνυμα.

# Βιβλιογραφία

- [1] G.W. Anderson, Convergence of the largest singular value of a polynomial in independent Wigner matrices, *Ann. Probab.* 41 (2013) 2103–2181.
- [2] L. Aagaard, U. Haagerup, Moment formulas for the quasi-nilpotent DT-operator, *Int. J. Math.* 15 (2004) 581–628.
- [3] David H. Armitage and Stephen J. Gardiner. *Classical potential theory*. London: Springer, 2001
- [4] Lawrence G. Brown. Lidskiř’s theorem in the type II case. In *Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983)*, volume 123 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 1–35. Longman Sci. Tech., Harlow, 1986.
- [5] S.T. Belinschi, The Lebesgue decomposition of the free additive convolution of two probability distributions, *Probab. Theory Related Fields* 142 (2008) 125–150.
- [6] S.T. Belinschi, H. Bercovici, Partially defined semigroups relative to multiplicative free convolution, *Int. Math. Res. Not.* (2005) 65–101.
- [7] S.T. Belinschi, T. Mai, R. Speicher, Analytic subordination theory of operator-valued free additive convolution and the solution of a general random matrix problem, Preprint, arXiv:1303.3196v3, *CRELLE J. Reine Angew. Math*(2013), <http://dx.doi.org/10.1515/crelle-2014-0138>, in press.
- [8] S.T. Belinschi, M. Nowak, R. Speicher, W. Tarnowski, Squared eigenvalue condition numbers and eigenvector correlations from the single ring theorem, *J. Phys. A* 50 (2017).
- [9] S.T. Belinschi, M. Popa, V. Vinnikov, Infinite divisibility and a non-commutative Boolean-to-free Bercovici–Pata bijection, *J. Funct. Anal.* 262 (1) (2012) 94–123.
- [10] Belinschi, S. T., Śniady, P., and Speicher, R. (2018). Eigenvalues of non-Hermitian random matrices and Brown measure of non-normal operators: Hermitian reduction and linearization method. *Linear Algebra and its Applications*, 537, 48-83.

- [11] H. Bercovici, D. Voiculescu, Regularity questions for free convolution, in: *Nonselfadjoint Operator Algebras, Operator Theory, and Related Topics*, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 37–47.
- [12] J. Berstel, C. Reutenauer, *Rational Series and Their Languages*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer, 1984.
- [13] Philippe Biane and Franz Lehner. Computation of some examples of Brown’s spectral measure in free probability. *Colloq. Math.*, 90(2):181–211, 2001
- [14] L. Brown, Lidskiĭ’s theorem in the type II case, in: *Geometric Methods in Operator Algebras*, Kyoto, 1983, in: *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, vol. 123, 1986, pp. 1–35.
- [15] K. Dykema, U. Haagerup, Invariant subspaces of the quasinilpotent DT-operator, *J. Funct. Anal.* 209 (2004) 332–366.
- [16] K. Fan, The angular derivative of an operator-valued analytic function, *Pacific J. Math.* 121 (1986) 67–72.
- [17] J. Feinberg, A. Zee, Non-Hermitian random matrix theory: method of Hermitian reduction, *Nuclear Phys. B* 504 (1997) 579–608.
- [18] J. Feinberg, R. Scalettar, A. Zee, “Single ring theorem” and the disk-annulus phase transition, *J. Math. Phys.* 42 (2001) 5718–5740.
- [19] J. Feinberg, A. Zee, Non-Gaussian non-Hermitian random matrix theory: phase transition and addition formalism, *Nuclear Phys. B* 501 (1997) 643–669.
- [20] Friedlander, F. G., Joshi, M. S., Joshi, M., and Joshi, M. C. (1998). *Introduction to the Theory of Distributions*. Cambridge University Press.
- [21] B. Fuglede, R.V. Kadison, Determinant theory in finite factors, *Ann. of Math.* (2) 55 (1952) 520–530.
- [22] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, vol. 96, Academic Press, 1981.
- [23] J. Gleason, existence and uniqueness of Haar measure.
- [24] A. Guionnet, M. Krishnapur, O. Zeitouni, The single ring theorem, *Ann. of Math.* 174 (2011) 1189–1217.
- [25] U. Haagerup, Spectral decomposition of all operators in a II<sub>1</sub>-factor, which is embeddable in  $R\omega$ , preprint MSRI 2001.
- [26] U. Haagerup, F. Larsen, Brown’s spectral distribution measure for  $R$ -diagonal elements in finite von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.* 176 (2000) 331–367.
- [27] U. Haagerup, S. Thorbjørnsen, A new application of random matrices:  $\text{Ext}(C\overline{\text{red}}(F_2))$  is not a group, *Ann. of Math.* 162 (2005) 711–775.



- [28] J.W. Helton, S.A. McCullough, V. Vinnikov, Noncommutative convexity arises from linear matrix inequalities, *J. Funct. Anal.* 240 (2006) 105–191.
- [29] J.W. Helton, T. Mai, R. Speicher, Applications of realizations (aka linearizations) to free probability, Preprint, arXiv:1511.05330, 2015.
- [30] F. Hiai, D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, American Mathematical Society, 2000.
- [31] R. Janik, W. Nörenberg, M.A. Nowak, G. Papp, I. Zahed, Correlations of eigenvectors for non-Hermitian random-matrix models, *Phys. Rev. E* 60 (1999) 2699–2705.
- [32] R. Janik, M. Nowak, G. Papp, I. Zahed, Non-Hermitian random matrix models, *Nuclear Phys. B* 501 (1997) 603–642.
- [33] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, volume 16 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [34] Flemming Larsen. *Brown measures and R-diagonal elements in finite von Neumann algebras*. PhD thesis, University of Southern Denmark, 1999.
- [35] F. Larsen, *Brown Measures and R-Diagonal Elements in Finite von Neumann Algebras*, PhD thesis, University of Southern Denmark, 1999.
- [36] J. Mingo, R. Speicher, *Free Probability and Random Matrices*, Fields Institute Monographs, vol. 35, Springer, 2017.
- [37] Alexandru Nica and Roland Speicher. R-diagonal pairs—a common approach to Haar unitaries and circular elements. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12 of *Fields Inst. Commun.*, pages 149–188. Amer. Math.Soc., Providence, RI, 1997.
- [38] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*, Cambridge University Press, 2006
- [39] A. Nica, D. Shlyakhtenko, R. Speicher, R-diagonal elements and freeness with amalgamation, *Canad. J. Math.* 53 (2001) 355–381.
- [40] Walter Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991
- [41] S. O’Rourke, D. Renfrew, A. Soshnikov, V. Vu, Products of independent elliptic random matrices, *J. Stat. Phys.* 160 (2015) 89–119.
- [42] P. Śniady, Random regularization of Brown spectral measure, *J. Funct. Anal.* 193 (2002) 291–313.
- [43] P. Śniady, Inequality for Voiculescu’s free entropy in terms of Brown measure, *Int. Math. Res. Not.* (2003) 51–64.

- [44] S. Stratila, L. Zsido, Lectures on von Neumann Algebras, Abacus, Tunbridge Wells, 1979.
- [45] R. Speicher, Combinatorial Theory of the Free Product with Amalgamation and Operator-Valued Free Probability Theory, vol. 627, American Mathematical Soc., 1998.
- [46] R. Speicher, Polynomials in asymptotically free random matrices, Preprint, arXiv:1505.04337, 2015.
- [47] D. Voiculescu, Limit laws for random matrices and free products, Invent. Math. 104 (1991) 201–220.
- [48] D. Voiculescu, Operations on certain non-commutative operator-valued random variables, Astérisque (232) (1995) 243–275, Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992).
- [49] D. Voiculescu, The coalgebra of the free difference quotient and free probability, Int. Math. Res. Not. (2000) 79–106.
- [50] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica, Free Random Variables, CRM Monograph Series, vol. 1, AMS, 1992.
- [51] Walter K. Hayman and Patrick B. Kennedy. Subharmonic functions. Vol. I. London Mathematical Society Monographs. No. 9. Academic Press, LondonNew York, 1976.