Φασματικές ακολουθίες και εφαρμογές στην (συν-)ομολογία των αλγεβρών Lie

Νικόλαος Ποιμενίδης

Τριμελής Επιτροπή:

Αριστείδης Κοντογεώργης

Ιωάννης Ντόκας

Ιωάννης Εμμανουήλ(Επιβλέπων)

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

10 Οκτωβρίου 2023

Περιεχόμενα

1 Προαπαιτούμενα

2 Φασματικές Ακολουθίες

3 Ομολογία και Συνομολογία Lie Αλγεβρών

Abstract

In homological algebra and in algebraic topology spectral sequences are an important tool for the computation of homology and cohomology groups. Jean Leray working on problems in algebraic topology defined the notion of a sheaf and in order to calculate the cohomology of sheafs created a computational tool now known as the Leray spectral sequence. The mathematical community soon realized that this techinque was part of a much broader phenomenon. This realization led to the development of the theory of spectral sequences. In this dissertation we will introduce some of the basic notions and results of the theory of spectral sequences. In the final chapter we will see some applications of spectral sequences namely we will use the Hochschild-Serre spectral sequence to compute the homology and cohomology groups of some Lie algebras.

Περίληψη

Στην ομολογική άλγεβρα καθώς και στην αλγεβρική τοπολογία ένα εργαλείο για τον υπολογισμό ομολογίας και συνομολογίας είναι οι φασματικές ακολουθίες. Ο Jean Leray δουλεύοντας πάνω σε προβλήματα αλγεβρικής τοπολογίας εισήγαγε την έννοια του δράγματος(sheaf) και προκειμένου να υπολογίσει την συνομολογία ενός δράγματος δημιούργησε μία υπολογιστική τεχνική που τώρα ονομάζεται η φασματική ακολουθία του Leray. Η μαθηματική κοινότητα σύντομα συνειδητοποίησε ότι αυτή η τεχνική ήταν μία έκφανση ενός πολύ γενικότερου φαινομένου πράγμα που οδήγησε στην περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας των φασματικών ακολουθιών. Σε αυτή την εργασία θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας των φασματικών καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα δούμε κάποιες εφαρμογές των φασματικών ακολουθιών για τον υπολογισμό ομολογίας και συνομολογίας αλγεβρών Lie με κύριο εργαλείο την φασματική ακολουθία των Hochschild-Serre.

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

Στο παρόν κεφάλαιο θα εισαχθούν κάποιες βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια για την ανάπτυξη της βασικής θεωρίας των φασματικών ακολουθιών.

1.1 Αβελιανές Κατηγορίες

Ορισμός 1.1.1: Μία κατηγορία $\mathcal{A}$ λέγεται **Ab** αν για κάθε δύο αντικείμενα της A, B το σύνολο $Hom(A, B)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει η ¨επιμεριστική ιδιότητα¨, δηλαδή αν A, B, C, D αντικείμενα της $\mathcal{A}$, $f \in Hom(A, B)$, $g, g' \in Hom(B, C)$ και $h \in Hom(C, D)$ τότε

$$h \circ (g + g') \circ f = h \circ g \circ f + h \circ g' \circ f$$

στην αβελιανή ομάδα $Hom(A, D)$.

Μια Ab κατηγορία λέγεται **αθροιστική** αν έχει μηδενικό αντικείμενο 0 και για κάθε δύο αντικέιμενα A, B υπάρχει το γινόμενο $A \times B$.

Ορισμός 1.1.2:Μια αθροιστική κατηγορία που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:
1.Κάθε μορφισμός έχει πυρήνα.
2.Κάθε μονομορφισμός είναι ο πυρήνας του συμπυρήνα του.
3.Κάθε επιμορφισμός είναι ο συμπυρήνας του πυρήνα του.

λέγεται **αβελιανή** κατηγορία.

Το αρχετυπικό παράδειγμα μίας αβελιανής κατηγορίας είναι η κατηγορία των προτύπων πάνω από οποιοδήποτε δακτύλιο όπου οι έννοιες μονομορφισμός, επιμορφισμός, πυρήνας κ.ο.κ έχουν την συνήθη σημασία και σε αυτή την εργασία θα δουλέυουμε τις περισσότερες φορές σαν κάθε αβελιανή κατηγορία να είναι αυτής της μορφής για την απλοποίηση των αποδείξεων μας, πράγμα το οποίο δεν είναι τόσο περιοριστικό χάρην σε αποτελέσματα όπως το θεώρημα εμβύθισης των Freyd-Mitchell ([1] σελ.25).

1.2 Προβολικά αντικείμενα και προβολικές επιλύσεις

Ορισμός 1.2.1: Έστω μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Ένα αντικείμενο P της $\mathcal{A}$ λέγεται **προβολικό** αν για κάθε δύο αντικείμενα B, C, επιμορφισμό $g : B \to C$ και μορφισμό $\gamma : P \to C$ υπάρχει μορφισμός $\beta : P \to B$ ώστε $\gamma = g \circ \beta$.

Επειδή σε αυτή την εργασία αντιμετωπίζουμε μια αβελιανή κατηγορία σαν να είναι κάποια κατηγορία προτύπων πάνω από έναν δακτύλιο, αναφέρουμε ότι στην κατηγορία $R - mod$ ένα προβολικό αντικείμενο είναι ακριβώς ένα προβολικό $R-$πρότυπο([1] σελ.33).
Λέμε ότι μια κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει **αρκετά προβολικά αντικείμενα**, αν για κάθε αντικείμενο A υπάρχει προβολικό αντικέιμενο P και επιμορφισμός $P \to A$.

Ορισμός 1.2.2: Έστω M ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Μια **αριστερή ε-**

πίλυση του M είναι ένα αλυσωτό σύμπλεγμα P_* με $P_i = 0$ για $i < 0$ μαζί με έναν μορφισμό $\epsilon : P_0 \to M$ ώστε το σύμπλεγμα

$$... \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

να είναι ακριβές. Λέγεται **προβολική επίλυση** αν κάθε P_i είναι προβολικό αντικείμενο.

Πρόταση 1.2.3: Κάθε αντικείμενο μια αβελιανής κατηγορίας με αρκετά προβολικά αντικείμενα έχει προβολική επίλυση.

Απόδειξη: Έστω M αντικείμενο. Επιλέγουμε P_0 προβολικό αντικείμενο και $\epsilon_0 : P_0 \to M$ επιμορφισμό. Θέτουμε $M_0 = ker\epsilon_0$. Επαγωγικά, δοσμένου ενός προτύπου M_{n-1} επιλέγουμε προβολικό αντικείμενο P_n και επιμορφισμό $\epsilon_n : P_n \to M_{n-1}$. Θέτουμε $M_n = ker\epsilon_n$ και d_n να είναι η σύνθεση

$$P_n \to M_{n-1} \to P_{n-1}.$$

Έχουμε ότι $d_n(P_n) = M_{n-1} = ker(d_{n-1})$ άρα το σύμπλεγμα P_* αποτελεί προβολική επίλυση του M $\square$

1.3 Εμφυτευτικά αντικείμενα και εμφυτευτικές επιλύσεις

Ορισμός 1.3.1: Έστω μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Ένα αντικείμενο I της $\mathcal{A}$ λέγεται **εμφυτευτικό** αν για κάθε δύο αντικείμενα A, B, μονομορφισμό $g : A \to B$ και μορφισμό $\alpha : A \to I$ υπάρχει μορφισμός $\beta : B \to I$ ώστε $\alpha = \beta \circ f$.

Στην κατηγορία $R - mod$ ένα εμφυτευτικό αντικείμενο είναι ακριβώς ένα εμφυτευτικό $R-$πρότυπο([1] σελ.38).
Λέμε ότι μια κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει **αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα**, αν για κάθε αντικείμενο A υπάρχει εμφυτευτικό αντικέιμενο I και μονομορφισμός $A \to I$.

Ορισμός 1.3.2: Έστω M ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Μια **δεξιά επίλυση** του M είναι ένα συναλυσωτό σύμπλεγμα I^* με $I^i = 0$ για $i < 0$ μαζί με έναν μορφισμό $M \to I^0$ ώστε το σύμπλεγμα

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to ...$$

να είναι ακριβές. Λέγεται **εμφυτευτική επίλυση** αν κάθε I^i είναι εμφυτευτικό αντικείμενο.

Ισχύει ένα παρόμοιο αποτέλεσμα με τα προβολικά αντικείμενα, συγκεκριμένα ότι σε μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα κάθε αντικείμενο έχει εμφυτευτική επίλυση.

1.4 Ακριβείς συναρτητές και οι σχέσεις τους με εμφυτευτικά και προβολικά αντικείμενα

Ορισμός 1.4.1: Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ λέγεται **αθροιστικός** αν για κάθε δύο αντικείμενα B, B' της $\mathcal{B}$ όλες οι απεικονίσεις

$$Hom_{\mathcal{B}}(B', B) \to Hom_{\mathcal{A}}(F(B'), F(B))$$

είναι ομομορφισμοί ομάδων.

Ορισμός 1.4.2: Έστω $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας αθροιστικός συναρτητής μεταξύ αβελιανών κατηγοριών. Λέμε ότι ο F είναι **αριστερά ακριβής** αν για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

στην $\mathcal{A}$ η

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{B}$.

Ανάλογα ορίζεται και η έννοια του δεξιά ακριβή συναρτητή. Λέμε ότι ο F είναι **ακριβής** αν είναι αριστερά και δεξιά ακριβής.

Θεώρημα 1.4.3: Έστω ότι ο αθροιστικός συναρτητής $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ είναι δεξιά προσαρτημένος του ακριβή συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και I ένα εμφυτευτικό αντικείμενο της $\mathcal{B}$. Τότε το $G(I)$ είναι εμφυτευτικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Δηλαδή ο G διατηρεί εμφυτευτικά αντικείμενα.

<u>Απόδειξη:</u> Θα αποδείξουμε την περίπτωση στην οποία η $\mathcal{A}$ είναι η $R-mod$ για κάποιο δακτύλιο R και η $\mathcal{B}$ είναι η $S-mod$ για κάποιο δακτύλιο S. Έστω I εμφυτευτικό αντικείμενο της $S-mod$, N, M αντικείμενα της $R-mod$, $\phi : M \to N$ μονομορφισμός και $\alpha : N \to G(I)$ μορφισμός. Λόγω της συζυγίας των συναρτητών F, G υπάρχει ο αντίστοιχος μορφισμός $\alpha' : F(N) \to I$. Είναι εμφανές ότι εφόσον ο F είναι ακριβής, διατηρεί μονομορφισμούς , άρα ο $F(\phi) : F(N) \to F(M)$ είναι μονομορφισμός. Έχουμε λοιπόν έναν μονομορφισμό $F(\phi) : F(N) \to F(M)$ και έναν μορφισμό $\alpha' : F(N) \to I$. Εφόσον το I είναι εμφυτευτικό, υπάρχει μορφισμός $\beta : F(M) \to I$ ώστε $\alpha' = \beta \circ F(\phi)$. Τώρα, ξανά λόγω της συζυγίας των F, G υπάρχει ο αντίστοιχος μορφισμός $\beta' : M \to G(I)$ ώστε $\alpha = \beta' \circ \phi$ που αποδεικνύει ότι το $G(I)$ είναι εμφυτευτικό $\square$

Ομοίως αποδεικνύεται το παρακάτω

Θεώρημα 1.4.4: Έστω ότι ο αθροιστικός συναρτητής $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ε-ίναι αριστερά προσαρτημένος του ακριβή συναρτητή $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ και P ένα προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Τότε το $F(P)$ είναι προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{B}$. Δηλαδή ο F διατηρεί προβολικά αντικείμενα.

1.5 Διπλά Συμπλέγματα

Ορισμός 1.5.1: Ένα **αλυσωτό σύμπλεγμα** $R-$προτύπων είναι μια οικογένεια $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $R-$προτύπων μαζί με μορφισμούς $R-$προτύπων $d_n : C_n \to C_{n-1}$ τέτοιους ώστε $d_{n-1} \circ d_n = 0$ για κάθε n.

Οι d_n ονομάζονται τα **διαφορικά** του συμπλέγματος C, ο πυρήνας $kerd_n$ ονομάζεται το πρότυπο των $n-$**κύκλων** του C και συμβολίζεται με $Z_n(C)$ και η εικόνα imd_{n+1} ονομάζεται το πρότυπο των $n-$**συνόρων** του C και συμβολίζεται με $B_n(C)$.
Προφανώς ισχύει ότι $0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$ έτσι μπορούμε να ορίσουμε το πρότυπο $H_n(C) = Z_n/B_n$ το οποίο και ονομάζουμε το πρότυπο της $n-$**οστής ομολογίας** του C.
Υπάρχει η κατηγορία **Ch(R-mod)** των αλυσωτών συμπλεγμάτων αριστερών $R-$προτύπων όπου ένας **μορφισμός αλυσωτών συμπλεγμάτων αριστερών** $R-$**προτύπων** $u : C \to D$ είναι μια οικογένεια μορφισμών $R-$προτύπων $u_n : C_n \to D_n$ τέτοιων ώστε να μετατίθενται με τα διαφορικά των συμπλεγμάτων, δηλαδή

$$u_{n-1} \circ d_n^C = d_n^D \circ u_n$$

για κάθε n.
Αν θέσουμε $C^n = C_{-n}$ για κάθε n έχουμε κατασκευάσει την δυική έννοια του **συναλυσωτού συμπλέγματος** και όλοι οι ορισμοί των αντίστοιχων εννοιών όπως των **συνκύκλων**,**συνσυνόρων**, **προτύπων συνομολογίας** είναι δυικοί.
Ένα αλυσωτό σύμπλεγμα C λέγεται **φραγμένο** αν υπάρχουν a, b τέτοια ώστε $C_n = 0$ όταν $n < a$ ή $n > b$.
Αν $C_n = 0$ όταν $n > b$ το C λέγεται **άνω φραγμένο** ενώ αν $C_n = 0$ όταν $n < a$ το C λέγεται **κάτω φραγμένο**.

Ισχύουν οι αντίστοιχοι ορισμοί για τα συναλυσωτά συμπλέγματα. Αποδεικνύεται ότι η κατηγορία των (συν)συμπλεγμάτων $R-$προτύπων είναι αβελιανή.

Ορισμός 1.5.2: Ένα **διπλό αλυσωτό σύμπλεγμα** αριστερών $R-$προτύπων είναι μια οικογένεια $\{C_{p,q}\}$ αριστερών $R-$προτύπων μαζί με μορφισμούς $R-$προτύπων

$$d^h_{p,q} : C_{p,q} \to C_{p-1,q}$$

και $d^v_{p,q} : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$ ώστε

$$d^h_{p-1,q} \circ d^h_{p,q} = 0$$
$$d^v_{p,q-1} \circ d^v_{p,q} = 0$$
$$d^h_{p,q} \circ d^v_{p,q+1} + d^v_{p-1,q+1} \circ d^h_{p,q+1} = 0$$

για κάθε p, q.

Ορισμός 1.5.3: Έστω C ένα διπλό αλυσωτό σύμπλεγμα. Ορίζουμε τα **ολικά συμπλέγματα** του C ναι είναι τα

$$Tot^{\Pi}(C)_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q}$$

και

$$Tot^{\oplus}(C)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}.$$

Ο τύπος $d = d^h + d^v$ ορίζει απεικονίσεις $d : Tot^{\Pi}(C)_n \to Tot^{\Pi}(C)_{n-1}$ και $d : Tot^{\oplus}(C)_n \to Tot^{\oplus}(C)_{n-1}$ τέτοιες ώστε $d \circ d = 0$ καθιστώντας τα $Tot^{\Pi}(C)$ και $Tot^{\oplus}(C)$ αλυσωτά συμπλέγματα.

Ορισμός 1.5.4: Ένας **μορφισμός αλυσωτών συμπλεγμάτων** $f : C \to D$ είναι μια οικογένεια μορφισμών $f_{p,q} : C_{p,q} \to D_{p,q}$ τέτοιων ώστε όλα τα δυνατά τετράγωνα να μετατίθενται.

1.6 Το 5-λήμμα

Λήμμα 1.6.1: Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία, $A, B, C, D, E, A', B', C', D'$, E' αντικείμενά της, b, d ισομορφισμοί, a επιμορφισμός, e μονομορφισμός και $f, g, h, i, r, s, t, u, c$ μορφισμοί όπως στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\
A' \arrow[r, "r"] & B' \arrow[r, "s"] & C' \arrow[r, "t"] & D' \arrow[r, "u"] & E'
\end{tikzcd}$$

Τότε ο c είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη: Προχωρούμε στην απόδειξη δουλεύοντας σαν να βρισκόμαστε στην κατηγορία των προτύπων πάνω από κάποιον δακτύλιο όπως έχουμε αναφέρει. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο c είναι επιμορφισμός. Έστω x' ένα στοιχείο του C'. Εφόσον ο d είναι επιμορφισμός έπεται ότι υπάρχει $y \in D$ έτσι ώστε $d(y) = t(x')$. Απο μεταθετικότητα του διαγράμματος έπεται ότι $u(d(y)) = e(i(y))$. Εφόσον $imt = keru$ έπεται ότι $e(i(y)) = u(d(y)) = u(t(x')) = 0$. Εφόσον e μονομορφισμός, έπεται ότι $i(y) = 0$ άρα $y \in keri = imh$. Συνεπώς υπάρχει $x \in C$ τέτοιο ώστε $h(c) = y$. Άρα, $t(c(x)) = d(h(c)) = d(y) = t(x')$ οπότε $t(x' - c(x)) = 0$ άρα $x' - c(x) \in kert = ims$ συνεπώς υπάρχει $z' \in B'$ ώστε $x' - c(x) = s(z')$. Εφόσον b επιμορφισμός έπεται ότι υπάρχει $z \in B$ ώστε $z' = b(z)$. Έχουμε,

$$c(g(z)) = s(b(z)) = s(z') = x' - c(x)$$

άρα $x' = c(x + g(z))$ δηλαδή ο c είναι επιμορφισμός. Τώρα θα δείξουμε ότι είναι μονομορφισμός. Έστω ότι $c(x) = 0$. Τότε $t(c(x)) = 0$ άρα $d(h(x)) = 0$. Εφόσον d μονομορφισμός έπεται ότι $h(x) = 0 \implies x \in kerh = img$ άρα υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $g(y) = x$. Έχουμε

$$s(b(y)) = c(g(y)) = c(x) = 0 \implies b(y) \in kers = imr$$

άρα υπάρχει $z' \in A'$ ώστε $r(z') = b(y)$. Ο a είναι επιμορφισμός άρα υπάρχει $z \in A$ ώστε $a(z) = z'$ οπότε

$$b(f(z)) = r(a(z)) = r(z') = b(y)$$

αλλά b μονομορφισμός άρα

$$y = f(z) \implies g(y) = g(f(z)) \implies x = 0.$$

Άρα ο c είναι μονομορφισμός $\square$

Κεφάλαιο 2

Φασματικές Ακολουθίες

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε την βασική θεωρία των φασματικών ακολουθιών. Συγκεκριμένα θα ορίσουμε την έννοια της φασματικής ακολουθίας και θα μιλήσουμε για την κατασκευή μιας φασματικής ακολουθίας που αντιστοιχεί σε ένα φιλτράρισμα ενός αντικειμένου. Στη συνέχεια με βάση αυτό θα κατασκευάσουμε δύο φασματικές που αντιστοιχούν σε ένα διπλό σύμπλεγμα και θα αποδείξουμε ότι στην περίπτωση που το διπλό σύμπλεγμα είναι φραγμένο τότε οι δύο αυτές φασματικές ακολουθίες συγκλίνουν στην ομολογία του αντίστοιχου ολικού συμπλέγματος. Τέλος θα παρουσιάσουμε ένα πολύ δυνατό εργαλείο που είναι η φασματική ακολουθία του Grothendieck. Η φασματική ακολουθία του Grothendieck έχει πολλές εφαρμογές όπως για παράδειγμα στην αλγεβρική γεωμετρία όπου πολλές φασματικές ακολουθίες αποτελούν ειδική περίπτωση της. Στη συγκεκριμένη εργασία θα χρησιμοποιήσουμε την φασματική ακολουθία του Grothendieck για να αποδείξουμε το θεώρημα το οποίο θα μας επιτρέψει να κάνουμε υπολογισμούς της ομολογίας και της συνομολογίας κάποιων αλγεβρών Lie.

2.1 Ορολογία

Ορισμός 2.1.1: Μία **ομολογική φασματική ακολουθία** σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ αποτελείται από τα παρακάτω:

1. Μια οικογένεια αντικειμένων $\{E^r_{pq}\}$ όπου p, q και $r \geq a$ ακέραιοι.

2. Απεικονίσεις $d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ τέτοιες ώστε

$$d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{pq} = 0.$$

3. Ισομορφισμούς $E^{r+1}_{pq} \cong ker(d^r_{pq})/image(d^r_{p+r,q-r+1})$

Το 2. μας λέει ότι αν φανταστούμε τα αντικείμενά μας διατεταγμένα σε ένα πλέγμα με το αντικείμενο E^r_{pq} στη θέση (p,q) τότε οι ευθείες με κλίσεις $-\frac{r-1}{r}$ αποτελούν αλυσωτά συμπλέγματα.

Ο **ολικός βαθμός** του όρου E^r_{pq} ορίζεται να είναι $n = p + q$.

Ορισμός 2.1.2: Έστω E', E δύο ομολογικές φασματικές ακολουθίες πάνω από την αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Ένας **μορφισμός ομολογικών φασματικών ακολουθιών** μεταξύ των E', E είναι μία οικογένεια μορφισμών $f^r_{pq} : E'^r_{pq} \to E^r_{pq}$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$ (για r αρκετά μεγάλο) τέτοιων ώστε

$$d^r f^r = f^r d'^r$$

και επιπλέον κάθε f^{r+1}_{pq} να είναι ο επαγόμενος μορφισμός του f^r_{pq} στην ομολογία.

Υπάρχει η κατηγορία των ομολογικών φασματικών ακολουθιών με αντικείμενα τις ομολογικές φασματικές ακολουθίες και μορφισμούς μεταξύ αντικειμένων τους μορφισμούς ομολογικών φασματικών ακολουθιών όπως ορίστηκαν παραπάνω. Μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο δυϊκό ορισμό.

Ορισμός 2.1.3: Μία **συνομολογική φασματική ακολουθία** σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι μία οικογένεια $\{E^{pq}_r\}$ αντικειμένων $(r \geq a)$ καθώς και μορφισμών $d^{pq}_r : E^{pq}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r$ τέτοιων ώστε

1. $d^{p+r,q-r+1}_r \circ d^{pq}_r = 0$

2. $E^{pq}_{r+1} \cong ker(d^{pq}_r)/image(d^{p-r,q+r-1}_r)$

Παρατηρούμε ότι μια συνομολογική φασματική ακολουθία είναι μία ομολογική φασματική ακολουθία μέσω της αλλαγής δεικτών $E_r^{pq} = E^r_{-p,-q}$.
Όπως και στην περίπτωση των ομολογικών φασματικών ακολουθιών υπάρχει η αντίστοιχη κατηγορία των συνομολογικών φασματικών ακολουθιών.

Ένας **μορφισμός συνομολογικών φασματικών ακολουθιών** $f : E' \to E$ είναι μια οικογένεια μορφισμών $f_r^{pq} : E_r'^{pq} \to E_r^{pq}$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$ με $d_r f_r = f_r d'_r$, τέτοιων ώστε κάθε f_{r+1}^{pq} ναι είναι ο επαγόμενος μορφισμός του f_r^{pq} στην συνομολογία.

Ορισμός 2.1.4: Μία ομολογική φασματική ακολουθία ονομάζεται **φραγμένη** αν για κάθε n υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι το πλήθος μη μηδενικοί όροι ολικού βαθμού n στο E^a_{**}.

Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε p και q υπάρχει r_0 τέτοιο ώστε $E^r_{pq} = E^{r+1}_{pq}$ για κάθε $r \geq r_0$. Γράφουμε E^{∞}_{pq} για αυτή τη σταθερή τιμή του E^r_{pq}.

Λέμε ότι μία φραγμένη ομολογική φασματική ακολουθία **συγκλίνει** στο H_* αν έχουμε μία οικογένεια αντικειμένων H_n της $\mathcal{A}$ καθένα από τα οποία έχει ένα πεπερασμένο φιλτράρισμα

$$0 = F_s H_n \subseteq ... \subseteq F_{p-1} H_n \subseteq F_p H_n \subseteq ... \subseteq F_t H_n = H_n$$

και ισομορφισμούς $E^{\infty}_{pq} \cong F_p H_{p+q} / F_{p-1} H_{p+q}$. Συνήθως γράφουμε

$$E^a_{pq} \Rightarrow H_{p+q}.$$

Ομοίως, μια συνομολογική φασματική ακολουθία καλείται **φραγμένη** αν υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι το πλήθος μη μηδενικοί όροι στο E_a^{**}. Σε μία φραγμένη συνομολογική φασματική ακολουθία γράφουμε E_{∞}^{pq} για την σταθερή τιμή των όρων E_r^{pq} και λέμε ότι η φραγμένη συνομολογική φασματική ακολουθία **συγκλίνει** στο H^* αν υπάρχει πεπερασμένο φιλτράρισμα

$$0 = F^t H^n \subseteq ... \subseteq F^{p+1} H^n \subseteq F^p H^n \subseteq ... \subseteq F^s H^n = H^n$$

και ισομορφισμοί $E_\infty^{pq} \cong F^p H^{p+q} / F^{p+1} H_{p+q}$.
Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $E_a^{pq} \Rightarrow H^{p+q}$.

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό για να δούμε ένα παράδειγμα σύγκλισης.

Ορισμός 2.1.5: Μία ομολογική φασματική ακολουθία λέγεται **πρώτου τεταρτημορίου** (ομοίως δεύτερου, τρίτου, τέταρτου) αν $E_{pq}^a = 0$ όταν $p < 0$ ή $q < 0$.

Φυσικά σε αυτή την περίπτωση $E_{pq}^r = 0$, όταν $p < 0$ ή $q < 0$, για κάθε $r \geq a$.

Έχουμε, όπως πάντα, τους δυϊκούς ορισμούς για τη συνομολογική περίπτωση. Έστω τώρα ότι μια ομολογική φασματική ακολουθία πρώτου τεταρτημορίου E συγκλίνει στο H_*. Τότε κάθε H_n έχει ένα πεπερασμένο φιλτράρισμα μήκους $n + 1$:

$$0 = F_{-1} H_n \subseteq F_0 H_n \subseteq ... F_{n-1} H_n \subseteq F_n H_n = H_n.$$

Το αντικείμενο $F_0 H_n = E_{0n}^\infty$ βρίσκεται στον άξονα x ενώ το $E_{n0}^\infty \cong H_n / F_{n-1} H_n$ βρίσκεται στον άξονα y. Επειδή κάθε βέλος που φεύγει από τον άξονα y είναι 0 και κάθε βέλος που προσγειώνεται στον άξονα x είναι 0, κάθε E_{0n}^∞ είναι πηλίκο του E_{0n}^a και κάθε E_{n0}^∞ είναι υποαντικείμενο του E_{n0}^a. Οι προκύπτουσες απεικονίσεις $E_{0n}^a \twoheadrightarrow E_{0n}^\infty \subseteq H_n$ και $H_n \to E_{n0}^\infty \subseteq E_{n0}^a$ ονομάζονται **ακριανοί ομομορφισμοί** της φασματικής ακολουθίας.

Ομοίως, στην περίπτωση συνομολογικής φασματικής ακολουθίας πρώτου τεταρτημορίου που συγκλίνει στο H^*, κάθε H^n έχει πεπερασμένο φιλτράρισμα:

$$0 = F^{n+1} H^n \subseteq F^n H^n \subseteq ... \subseteq F^1 H^n \subseteq F^0 H^n = H^n.$$

Το αντικείμενο $E_\infty^{n0} \cong F^n H^n$ βρίσκεται στον άξονα x και το $E_\infty^{0n} \cong H^n / F^1 H^n$ βρίσκεται στον άξονα y. Οι ακριανοί ομομορφισμοί είναι οι απεικονίσεις $E_a^{n0} \twoheadrightarrow$

$E_\infty^{n0} \subseteq H^n$ και $H^n \to E_\infty^{0n} \subseteq E_a^{0n}$.

Ορισμός 2.1.6: Μία (ομολογική) φασματική ακολουθία **καταρρέει στο** E^r (για $r \geq 2$) αν υπάρχει ακριβώς μία μη μηδενική γραμμή ή στήλη στο πλέγμα $\{E_{pq}^r\}$.

Άν μία καταρρέουσα φασματική ακολουθία συγκλίνει στο H_* τότε το H_n είναι το μοναδικό μη μηδενικό E_{pq}^r ολικού βαθμού n.

Δοσμένης μίας ομολογικής φασματικής ακολουθίας, βλέπουμε ότι κάθε E_{pq}^{r+1} είναι υποπηλίκο του όρου E_{pq}^r. Με χρήση επαγωγής στο r βλέπουμε ότι υπάρχει μία οικογένεια υποαντικειμένων του E_{pq}^a:

$$0 = B_{pq}^a \subseteq ... \subseteq B_{pq}^r \subseteq B_{pq}^{r+1} \subseteq ... \subseteq Z_{pq}^{r+1} \subseteq Z_{pq}^r \subseteq ... \subseteq Z_{pq}^a = E_{pq}^a$$

τέτοιων ώστε $E_{pq}^r \cong Z_{pq}^r / B_{pq}^r$ για κάθε $r \geq a$. Εισάγουμε τα ενδιάμεσα αντικείμενα

$$B_{pq}^\infty = \bigcup_{r=a}^{\infty} B_{pq}^r \text{ και } Z_{pq}^\infty = \bigcap_{r=a}^{\infty} Z_{pq}^r$$

και ορίζουμε $E_{pq}^\infty \cong Z_{pq}^\infty / B_{pq}^\infty$. Αν η φασματική ακολουθία είναι φραγμένη η παραπάνω ένωση και η παραπάνω τομή έχουν πεπερασμένους όρους, οπότε $B_{pq}^\infty = B_{pq}^r$ και $Z_{pq}^\infty = Z_{pq}^r$ για αρκετά μεγάλο r, οπότε αυτός ο ορισμός του E_{pq}^∞ συμφωνεί με τον ορισμό που είχαμε δώσει προηγουμένως.

Ορισμός 2.1.7: Μία ομολογική φασματική ακολουθία λέγεται **κάτω φραγμένη** αν για κάθε n υπάρχει ακέραιος $s = s(n)$ τέτοιος ώστε οι όροι E_{pq}^a ολικού βαθμού n να είναι 0 για κάθε $p < s$.

Βλέπουμε ότι μία φραγμένη ομολογική φασματική ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. Δυϊκά, μια συνομολογική φασματική ακολουθία λέγεται **άνω φραγμένη** αν για κάθε n οι όροι ολικού βαθμού n μηδενίζονται για αρκούντως μεγάλο p.

Ορισμός 2.1.8: Λέμε ότι μια φασματική ακολουθία είναι **κανονική** αν για κάθε p και q τα διαφορικά d^r_{pq}(ή d^{pq}_r) που ξεκινούν από το E^r_{pq}(ή E^{pq}_r) είναι 0 για όλα τα αρκούντως μεγάλα r.

Παρατηρούμε ότι μια φασματική ακολουθία είναι κανονική ανν για κάθε p και q έχουμε: $Z^\infty_{pq} = Z^r_{pq}$ για όλα τα αρκούντως μεγάλα r.

Ορισμός 2.1.9: Λέμε ότι μία φασματική ακολουθία E **συγκλίνει ασθενώς** στο H_* αν για κάθε n έχουμε φιλτράρισμα

$$... \subseteq F_{p-1}H_n \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq ...H_n$$

και ισομορφισμούς $\beta_{pq} : E^\infty_{pq} \cong F_pH_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q}$ για κάθε p, q.

Λέμε ότι η φασματική ακολουθία $\{E^r_{pq}\}$ **προσεγγίζει** το H_* αν συγκλίνει ασθενώς στο H_*, $H_n = \bigcup\limits_p F_pH_n$ και $\bigcap\limits_p F_pH_n = 0$ για κάθε n.
Λέμε ότι η φασματική ακολουθία **συγκλίνει** στο H_* αν το προσεγγίζει, είναι κανονική και $H_n = \varprojlim(H_n/F_pH_n)$ για κάθε n.

Αν οι φασματικές ακολουθίες $\{E^r_{pq}\}$ και $\{E'^r_{pq}\}$ συγκλίνουν ασθενώς στα H_* και H'_* αντίστοιχα, λέμε ότι η απεικόνιση $h : H_* \to H'_*$ είναι **συμβατή** με έναν μορφισμό $f : E \to E'$ αν η h απεικονίζει κάθε F_pH_n στο $F_pH'_n$ και οι επαγόμενες απεικονίσεις $F_pH_n/F_{p-1}H_n \to F_pH'_n/F_{p-1}H'_n$ αντιστοιχούν μέσω των β και β' στις $f^\infty_{pq} : E^\infty_{pq} \to E'^\infty_{pq}$ $(q = n - p)$.
Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι η έννοια σύγκλισης που έχουμε ορίσει συμπεριφέρεται καλά.

Θεώρημα 2.1.10: Έστω $\{E^r_{pq}\}$ και $\{E'^r_{pq}\}$ φασματικές ακολουθίες που συγκλίνουν στα H_* και H'_* αντίστοιχα. Έστω επίσης μία απεικόνιση $h : H_* \to H'_*$ συμβατή με έναν μορφισμό $f : E \to E'$. Αν οι $f^r_{pq} : E^r_{pq} \to E'^r_{pq}$ είναι ισομορφισμοί για όλα τα p, q και κάποιο r, τότε ο h είναι ισομορφισμός.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Λήμμα 2.1.11: Έστω $f : \{E^r_{pq}\} \to \{E'^r_{pq}\}$ ένας μορφισμός ομολογικών φασματικών ακολουθιών, τέτοιος ώστε για κάποιο r ο f^r_{pq} να είναι ισομορφισμός για κάθε p, q. Τότε ο f^s_{pq} είναι επίσης ισομορφισμός για κάθε $s \geq r$ και p, q.

<u>Απόδειξη:</u> Θα προχωρήσουμε σε απόδειξη με επαγωγή. Η βάση της επαγωγής μας είναι το γεγονός ότι υπάρχει ένα r ώστε οι f^r_{pq} να είναι ισομορφισμοί για κάθε p, q. Η επαγωγική μας υπόθεση είναι ότι για κάποιο $s \geq r$ οι f^s_{pq} είναι ισομορφισμοί για κάθε p, q. Θα δείξουμε ότι οι f^{s+1}_{pq} είναι ισομορφισμοί για κάθε p, q. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο f^{s+1}_{pq} είναι μονομορφισμός. Έστω $[x], [y] \in E^{s+1}_{pq}$ με $f^{s+1}_{pq}([x]) = f^{s+1}_{pq}([y])$. Θα δείξουμε ότι $x - y \in image(d^s_{p-s,q+s-1})$. Έχουμε

$$\begin{gathered}
f^{s+1}_{pq}([x]) = f^{s+1}_{pq}([y]) \implies \\
[f^s_{pq}(x)] = [f^s_{pq}(y)] \implies \\
f^s_{pq}(x) - f^s_{pq}(y) \in image(d'^s_{p-s,q+s-1}) \implies \\
f^s_{pq}(x) - f^s_{pq}(y) = d'^s_{p-s,q+s-1}(z)
\end{gathered}$$

για κάποιο $z \in E'^s_{p-s,q+s-1}$. Συνεπώς $f^s_{pq}(x - y) = d'^s_{p-s,q+s-1}(z)$. Όμως ο $f^s_{p-s,q+s-1}$ είναι ισομορφισμός άρα υπάρχει $w \in E^s_{p-s,q+s-1}$ ώστε $z = f^s_{p-s,q+s-1}(w)$ άρα

$$f^s_{pq}(x - y) = d'^s_{p-s,q+s-1}(f^s_{p-s,q+s-1}(w)) = f^s_{pq}(d^s_{p-s,q+s-1}(w))$$

οπότε $x - y = d^s_{p-s,q+s-1}(w)$ αφού f^s_{pq} ισομορφισμός, συνεπώς

$$x - y \in image(d^s_{p-s,q+s-1})$$

που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Η απόδειξη ότι ο f^{s+1}_{pq} είναι επιμορφισμός είναι εντελώς ανάλογη και παραλείπεται □

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.10.

<u>Απόδειξη Θεωρήματος 2.1.10:</u> Εφόσον οι φασματικές ακολουθίες $\{E^r_{pq}\}$ και $\{E'^r_{pq}\}$ φασματικές ακολουθίες συγκλίνουν στα H_* και H'_* αντίστοιχα, άρα συγκλίνουν και ασθενώς, έχουμε τις παρακάτω ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{p-1}H_n/F_sH_n \arrow[r] \arrow[d] & F_pH_n/F_sH_n \arrow[r] \arrow[d] & E^{\infty}_{p,n-p} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{p-1}H'_n/F_sH'_n \arrow[r] & F_pH'_n/F_sH'_n \arrow[r] & E'^{\infty}_{p,n-p} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου ο ισομορφισμός προκύπτει από το Λήμμα 2.1.11. Σταθεροποιώντας το s και χρησιμοποιώντας επαγωγή στο p, βλέπουμε ότι (από το 5-λήμμα),

$$F_pH_n/F_sH_n \cong F_pH'_n/F_sH'_n$$

για κάθε p. Εφ'όσον $H_n = \bigcup_p F_pH_n$, προκύπτει ότι $H_n/F_sH_n \cong H'_n/F_sH'_n$ για κάθε s. Παίρνοντας αντίστροφα όρια συμπεραίνουμε ότι $H_n \cong H'_n$. $\square$

2.2 Η φασματική ακολουθία ενός φιλτραρίσματος

Ένα **φιλτράρισμα** F ενός αλυσωτού συμπλέγματος C είναι μια διατεταγμένη οικογένεια υποσυμπλεγμάτων

$$... \subseteq F_{p-1}C \subseteq F_pC \subseteq ...$$

του C. Λέμε ότι ένα φιλτράρισμα είναι **εξαντλητικό** αν $C = \bigcup_p F_pC$.

Ορισμός 2.2.1: Ένα φιλτράρισμα ενός αλυσωτού συμπλέγματος C λέγεται **φραγμένο** αν για κάθε n υπάρχουν ακέραιοι $s < t$ τέτοιοι ώστε $F_sC_n = 0$ και $F_tC_n = 0$. Το φιλτράρισμα λέγεται **κάτω φραγμένο** αν για κάθε n υπάρχει ακέραιος s τέτοιος ώστε $F_sC_n = 0$. Λέγεται **άνω φραγμένο** αν για κάθε n υπάρχει ακέραιος t τέτοιος ώστε $F_tC_n = 0$.

Προφανώς ένα φιλτράρισμα είναι φραγμένο ανν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Ορισμός 2.2.2: Ένα φιλτράρισμα ενός αλυσωτού συμπλέγματος C λέγεται **Hausdorff** αν $\bigcap_p F_pC = 0$. Το φιλτράρισμα καλείται **πλήρες** αν $C = \varprojlim(C/F_pC)$.

Παρατήρηση 2.2.3: Ένα πλήρες φιλτράρισμα είναι Hausdorff . Πράγματι, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση φιλτραρισμένων συμπλεγμάτων $f : C \to \hat{C}$, όπου $\hat{C} = \varprojlim(C/F_pC)$, με $f(c) = (c + F_pC)_p$, τότε αυτή έχει πυρήνα ακριβώς το $\bigcap_p F_pC$, οπότε πρέπει $\bigcap_p F_pC = 0$.

Παρατήρηση 2.2.4 : Τα κάτω φραγμένα φιλτραρίσματα είναι προφανώς πλήρη, συνεπώς και Hausdorff.

Τώρα θα προχωρήσουμε στην κατασκευή μίας φασματικής ακολουθίας ενός δοσμένου φιλτραρίσματος ενός αλυσωτού συμπλέγματος. Έστω, λοιπόν, ένα αλυσωτό σύμπλεγμα C το οποίο έχει το φιλτράρισμα

$$... \subseteq F_{p-1}C \subseteq F_pC \subseteq ...$$

.

Για ευκολία δεν γράφουμε τον δείκτη q και γράφουμε η_p για τον φυσικό επιμορφισμό $F_pC \to F_pC/F_{p-1}C$. Επίσης ορίζουμε τα σύνολα

$$A_p^r = \{c \in F_pC : d(c) \in F_{p-r}C\}$$
$$Z_p^r = \eta_p(A_p^r) B_{p-r}^{r+1} = \eta_{p-r}(d(A_p^r)).$$

Θέτουμε $E_p^0 = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$. Βλέπουμε ότι με τον τρόπο που έχουμε ορίσει τα αντικείμενά μας έχουμε ότι το Z_p^r είναι υποαντικείμενο του E_p^0 και το $B_p^r = \eta_p(d(A_{p+r-1}^{r-1}))$ είναι επίσης υποαντικείμενο του E_p^0. Τώρα, θέτοντας

$$Z_p^\infty = \bigcap_r Z_p^r$$

και

$$B_p^\infty = \bigcup_r B_p^r$$

έχουμε δημιουργήσει μία ακολουθία υποαντικειμένων του E_p^0:

$$0 = B_p^0 \subseteq B_p^1 \subseteq ... \subseteq B_p^r \subseteq ... \subseteq B_p^\infty \subseteq Z_p^\infty \subseteq ... \subseteq Z_p^r \subseteq ... \subseteq Z_p^1 \subseteq Z_p^0 = E_p^0.$$

Παρατηρούμε ότι $A_p^r \cap F_{p-1}C = A_{p-1}^{r-1}$, οπότε $Z_p^r \cong A_p^r/A_{p-1}^{r-1}$. Τώρα, θέτουμε $E_p^r = Z_p^r/B_p^r$ και υπολογίζουμε ότι

$$E_p^r = \frac{\frac{A_p^r + F_{p-1}C}{F_{p-1}C}}{\frac{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + F_{p-1}C}{F_{p-1}C}} \cong \frac{A_p^r + F_{p-1}C}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + F_{p-1}C} = \frac{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_p^r + F_{p-1}C}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + F_{p-1}C} \cong \frac{A_p^r}{(d(A_{p+r-1}^{r-1}) + F_{p-1}C) \cap A_p^r} = \frac{A_p^r}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}}.$$

Τώρα, θέτουμε $d_p^r : E_p^r \to E_{p-r}^r$ την απεικόνιση που επάγεται από το διαφορικό d του αλυσωτού συμπλέγματος C.
Έχουμε το παρακάτω:

Λήμμα 2.2.5: Η απεικόνιση d ορίζει ισομορφισμούς

$$Z_p^r/Z_p^{r+1} \cong B_{p-r}^{r+1}/B_{p-r}^r.$$

<u>Απόδειξη:</u> Πρώτα παρατηρούμε ότι $d(A_p^r) \cap F_{p-r-1}C = d(A_p^{r+1})$, οπότε, $B_{p-r}^{r+1} \cong \frac{d(A_p^r)}{d(A_p^{r+1})}$. Ομοίως, έχουμε $B_{p-r}^r \cong \frac{d(A_{p-1}^{r-1})}{d(A_{p-1}^r)}$. Τώρα, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$\phi : d(A_p^{r+1} + A_{p-1}^{r-1}) \to \frac{d(A_{p-1}^{r-1})}{d(A_{p-1}^r)}$$

με $\phi(d(c + c')) = dc' + d(A_{p-1}^r)$ είναι καλά ορισμένη, επί και έχει πυρήνα το $d(A_p^{r+1})$, οπότε έχουμε ότι

$$\frac{d(A_{p-1}^{r-1})}{d(A_{p-1}^r)} \cong \frac{d(A_p^{r+1} + A_{p-1}^{r-1})}{d(A_{p-1}^r)},$$

συνεπώς

$$B_{p-r}^{r+1}/B_{p-r}^{r} \cong \frac{\frac{d(A_p^r)}{d(A_p^{r+1})}}{\frac{d(A_p^{r+1}+A_{p-1}^{r-1})}{d(A_p^{r+1})}} \cong \frac{d(A_p^r)}{d(A_p^{r+1}+A_{p-1}^{r-1})}.$$

Τώρα, έχουμε ότι $A_p^{r+1} \cap A_{p-1}^{r-1} = A_{p-1}^{r}$, συνεπώς $\frac{A_p^{r+1}+A_{p-1}^{r-1}}{A_{p-1}^{r-1}} \cong \frac{A_p^{r+1}}{A_{p-1}^{r}}$, άρα υπολογίζουμε ότι

$$Z_p^r/Z_p^{r+1} = \frac{\eta_p(A_p^r)}{\eta_p(A_p^{r+1})} = \frac{\frac{A_p^r+F_{p-1}C}{F_{p-1}C}}{\frac{A_p^{r+1}+F_{p-1}C}{F_{p-1}C}} \cong \frac{\frac{A_p^r}{A_{p-1}^{r-1}}}{\frac{A_p^{r+1}}{A_{p-1}^{r}}} \cong \frac{\frac{A_p^r}{A_{p-1}^{r-1}}}{\frac{A_p^{r+1}+A_{p-1}^{r-1}}{A_{p-1}^{r-1}}} \cong \frac{A_p^r}{A_p^{r+1}+A_{p-1}^{r-1}}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πυρήνας της $d : A_p^r \to F_{p-r}C$ περιέχεται στο A_{p+1}^r, άρα $\frac{A_p^r}{A_p^{r+1}+A_{p-1}^{r-1}} \cong \frac{d(A_p^r)}{d(A_p^{r+1}+A_{p-1}^{r-1})}$, οπότε $Z_p^r/Z_p^{r+1} \cong B_{p-r}^{r+1}/B_{p-r}^{r}$ $\square$

Συνεχίζοντας την κατασκευή της φασματικής ακολουθίας, είδαμε ότι

$$E_p^r \cong \frac{A_p^r}{d(A_{p+r-1}^{r-1})+A_{p-1}^{r-1}}$$

οπότε και
$E_{p-r}^r \cong \frac{A_{p-r}^r}{d(A_{p-1}^{r-1})+A_{p-r-1}^{r-1}}$, συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$d_p^r : \frac{A_p^r}{d(A_{p+r-1}^{r-1})+A_{p-1}^{r-1}} \to \frac{A_{p-r}^r}{d(A_{p-1}^{r-1})+A_{p-r-1}^{r-1}}$$

, που έχει πυρήνα

$$\frac{\{z\in A_p^r : dz \in d(A_{p-1}^{r-1})+A_{p-r-1}^{r-1}\}}{d(A_{p+r-1}^{r-1})+A_{p-1}^{r-1}} = \frac{A_{p-1}^{r-1}+A_p^{r+1}}{d(A_{p+r-1}^{r-1})+A_{p-1}^{r-1}} \cong \frac{Z_p^{r+1}}{B_p^r}.$$

Από το λήμμα , έχουμε ότι η απεικόνιση d_p^r παραγοντοποιείται ως

$$E_p^r = \frac{Z_p^r}{B_p^r} \to \frac{Z_p^r}{Z_p^{r+1}} \xrightarrow{\cong} \frac{B_{p-r}^{r+1}}{B_{p-r}^r} \hookrightarrow \frac{Z_{p-r}^r}{B_{p-r}^r} = E_{p-r}^r.$$

Από αυτό βλέπουμε ότι η εικόνα της d_p^r είναι $\frac{B_{p-r}^{r+1}}{B_{p-r}^r}$. Αντικαθιστώντας το p με $p+r$ βλέπουμε ότι η εικόνα του d_{p+r}^r είναι $\frac{B_p^{r+1}}{B_p^r}$. Οπότε, έχουμε τον ισομορφισμό

$$E_p^{r+1} = \frac{Z_p^{r+1}}{B_p^{r+1}} \cong \frac{\frac{Z_p^{r+1}}{B_p^r}}{\frac{B_p^{r+1}}{B_p^r}} \cong \frac{ker(d_p^r)}{im(d_{p+r}^r)}$$

που ολοκληρώνει την κατασκευή της φασματικής ακολουθίας. Με άλλα λόγια, αποδείξαμε το ακόλουθο

Θεώρημα 2.2.6: Ένα φιλτράρισμα F ενός αλυσωτού συμπλέγματος C ορίζει με φυσιολογικό τρόπο μία φασματική ακολουθία που ξεκινάει με

$$E^0_{pq} = \tfrac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}}$$

και $E^1_{pq} = H_{p+q}(E^0_{p*})$.

2.3 Σύγκλιση

Στην παρούσα ενότητα αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση που το φιλτράρισμα είναι φραγμένο η φασματική ακολουθία που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη ενότητα συγκλίνει.

Ένα φιλτράρισμα F ενός αλυσωτού συμπλέγματος C επάγει ένα φιλτράρισμα στην ομολογία του C: Το $F_p H_n(C)$ θα είναι η εικόνα της απεικόνισης $H_n(F_p C) \to H_n(C)$. Αν το φιλτράρισμα του C είναι εξαντλητικό, τότε και το φιλτράρισμα του H_n θα είναι εξανλητικό επειδή κάθε στοιχείο του $H_n(C)$ αναπαρίσταται από ένα στοιχείο c κάποιου $F_p C_n$ τέτοιο ώστε $dc = 0$. Αν το φιλτράρισμα του C είναι κάτω φραγμένο τότε και το επαγόμενο φιλτράρισμα σε κάθε H_n θα είναι κάτω φραγμένο, αφού το $F_p C = 0$ συνεπάγεται ότι $F_p H_n(C) = 0$. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.3.1:
1. Έστω ότι το φιλτράρισμα του C είναι φραγμένο. Τότε η αντίστοιχη φασματική ακολουθία είναι φραγμένη και συγκλίνει στο $H_*(C)$:

$$E^1_{pq} = H_{p+q}(F_p C / F_{p-1} C) \Rightarrow H_{p+q}(C).$$

2. Έστω ότι το φιλτράρισμα του C είναι κάτω φραγμένο και εξαντλητικό. Τότε η αντίστοιχη φασματική ακολουθία είναι επίσης κάτω φραγμένη και συγκλίνει στο $H_*(C)$. Επιπλέον, η σύγκλιση είναι φυσική, με την έννοια ότι αν $f : C \to C'$ είναι μία απεικόνιση φιλτραρισμένων αλυσωτών συμπλεγμάτων τότε η επαγόμενη απεικόνιση $f_* : H_*(C) \to H_*(C')$ είναι συμβατή με την απεικόνιση των αντίστοιχων φασματικών ακολουθιών.

Απόδειξη: Έστω ότι το φιλτράρισμα του C είναι εξαντλητικό και κάτω φραγμένο(αντίστοιχα φραγμένο). Τότε το επαγόμενο φιλτράρισμα στο $H_*(C)$ είναι εξαντλητικό και κάτω φραγμένο(αντίστοιχα φραγμένο) και η αντίστοιχη φασματική ακολουθία E είναι κάτω φραγμένη(αντίστοιχα φραγμένη). Από τον ορισμό ,η φασματική ακολουθία θα συγκλίνει στο H_* αν και μόνο αν συγκλίνει ασθενώς. Τώρα, θα δείξουμε ότι η φασματική ακολουθία συγκλίνει ασθενώς. Εφ'όσον το φιλτράρισμα είναι κάτω φραγμένο, για σταθερά n και p, τα A_p^r σταθεροποιούνται για μεγάλα r. Γράφουμε A_p^∞ για αυτή τη σταθερή τιμή και παρατηρούμε ότι, εφ'όσον $Z_p^r = \eta_p(A_p^r)$, έχουμε $Z_p^\infty = \eta_p(A_p^\infty)$. Το A_p^∞ είναι ο πυρήνας της $d : F_pC_n \to F_pC_{n-1}$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι, $(dC) \cap F_pC = \bigcup_r d(A_{p+r}^r)$ και ότι το A_{p-1}^∞ είναι ο πυρήνας της $\eta_p : A_p^\infty \to E_{pq}^0$. Συνεπώς, έχουμε $F_pH_n(C) = im(H_n(F_pC) \to H_n(C))$ και

$$H_n(F_pC) = \frac{ker(d{:}F_pC_n \to F_pC_{n-1})}{im(d{:}F_pC_{n+1} \to F_pC_n)} = \frac{A_p^\infty}{d(F_pC_{n+1})} = \frac{A_p^\infty}{d(C_{n+1}) \cap F_pC_n} = \frac{A_p^\infty}{\bigcup_r d(A_{p+r}^r)}$$

. Άρα, έχουμε ότι,

$$\frac{F_pH_n(C)}{F_{p-1}H_n(C)} \cong \frac{A_p^\infty}{A_{p-1}^\infty + \bigcup_r d(A_{p+r}^r)} \cong \frac{\eta_p(A_p^\infty)}{\eta_p(\bigcup_r d(A_{p+r}^r))} = \frac{Z_p^\infty}{B_p^\infty} = E_p^\infty \quad \square$$

2.4 Οι φασματικές ακολουθίες ενός διπλού συμπλέγματος

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε οτι για ένα διπλό αλυσωτό σύμπλεγμα υπάρχουν δύο φασματικές ακολουθίες ανάλογα με το αν φιλτράρουμε το αντίστοιχο ολικό σύμπλεγμα ως προς γραμμές η ως προς στήλες. Επιπλέον αν το διπλό σύμπλεγμα είναι φραγμένο τότε αυτές οι φασματικές ακολουθίες συγκλίνουν στην ομολογία του αντίστοιχου ολικού αλυσωτού συμπλέγματος δίνοντας μας έτσι ένα εργαλείο υπολογισμού ομολογίας.

Ορισμός 2.4.1: Αν $C = C_{**}$ είναι ένα διπλό αλυσωτό σύμπλεγμα μπορούμε να φιλτράρουμε το ολικό σύμπλεγμα του C, $Tot(C)$ ως προς τις στήλες του C με τον εξής τρόπο. Θεωρούμε το διπλό υποσύμπλεγμα του C:

$$({}^I\tau_{\leq n}C)_{pq} = \begin{cases} C_{pq} & \text{αν } p \leq n \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τώρα, θέτουμε ${}^IF_nTot(C)$ να είναι το ολικό σύμπλεγμα του $({}^I\tau_{\leq n}C)_{pq}$. Έχουμε λοιπόν ένα φιλτράρισμα του $Tot(C)$. Από την προηγούμενη ενότητα έχουμε την αντίστοιχη φασματική ακολουθία αυτού του φιλτραρίσματος την οποία συμβολίζουμε με $\{{}^IE^r_{pq}\}$ και η οποία ξεκινάει με τα αντικείμενα $\{{}^IE^0_{pq}\} = C_{pq}$. Οι απεικονίσεις d^0 είναι απλά τα κατακόρυφα διαφορικά d^v του C, οπότε ${}^IE^1_{pq} = H^v_q(C_{p*})$. Οι απεικονίσεις $d^1 : H^v_q(C_{p*}) \to H^v_q(C_{p-1,*})$ επάγονται από τα οριζόντια διαφορικά d^h του C στην ομολογία, οπότε έχουμε ${}^IE^2_{pq} = H^h_pH^v_q(C)$. Άν το C είναι διπλό σύμπλεγμα πρώτου τεταρτημορίου, τότε το φιλτράρισμα είναι φραγμένο, οπότε απότο θεώρημα(ενότητα 2.3) έχουμε ότι ${}^IE^2_{pq} = H^h_pH^v_q(C) \Rightarrow H_{p+q}(Tot(C))$.

Ορισμός 2.4.2: Αν $C = C_{**}$ είναι ένα διπλό αλυσωτό σύμπλεγμα μπορούμε να φιλτράρουμε το ολικό σύμπλεγμα του C, $Tot(C)$ ως προς τις γραμμές του

C ως εξής. Θεωρούμε το διπλό υποσύμπλεγμα του C:

$$({}^{II}\tau_{\leq n}C)_{pq} = \begin{cases} C_{pq} & \text{αν } q \leq n \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τώρα, θέτουμε ${}^{II}F_n Tot(C)$ να είναι το ολικό σύμπλεγμα του $({}^{II}\tau_{\leq n}C)_{pq}$. Έχουμε την αντίστοιχη φασματική ακολουθία αυτού του φιλτραρίσματος την οποία συμβολίζουμε με $\{{}^{II}E^r_{pq}\}$ και η οποία ξεκινάει με τα αντικείμενα

$$\{{}^{II}E^0_{pq}\} = C_{qp}$$

και $\{{}^{II}E^1_{pq}\} = H^h_q(C_{*p})$. Οι απεικονίσεις d^1 επάγονται από τα κατακόρυφα διαφορικά d^h του C στην ομολογία, οπότε ${}^{II}E^2_{pq} = H^v_p H^h_q(C)$. Παρατηρούμε ότι αν ανταλλάξουμε τα p, q το φιλτράρισμα ως προς γραμμές γίνεται το φιλτράρισμα ως προς στήλες και επίσης οι φασματικές ακολουθίες ανταλλάσονται. Όπως πριν, αν το C είναι διπλό σύμπλεγμα πρώτου τεταρτημορίου, τότε το φιλτράρισμα είναι φραγμένο, οπότε από το θεώρημα(ενότητα 2.3) έχουμε ότι ${}^{II}E^2_{pq} = H^v_p H^h_q(C) \Rightarrow H_{p+q}(Tot(C))$.

2.5 Η φασματική ακολουθία του Grothendieck

Για να παρουσιάσουμε την φασματική ακολουθία του Grothendieck πρώτα δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.5.1: Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ένας αριστερά ακριβής συναρτητής. Ένα αντικείμενο B της $\mathcal{B}$ καλείται $F-$**ακυκλικό** αν οι δεξιοί παραγόμενοι συναρτητές του F μηδενίζονται στο B, δηλαδή αν $R^iF(B) = 0$ για κάθε $i \neq 0$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε την φασματική ακολουθία του Grothendieck στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.2: Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ αβελιανές κατηγορίες, τέτοιες ώστε οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ να έχουν αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα. Έστω επίσης $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ αριστερά ακριβείς συναρτητές και επιπλέον ότι ο G στέλνει εμφυτευτικά αντικείμενα σε $F-$ακυκλικά αντικείμενα. Τότε για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{A}$ υπάρχει μια συνομολογική φασματική ακολουθία πρώτου τεταρτημορίου E τέτοια ώστε

$$E_2^{pq} = (R^pF)(R^qG)(A) \implies R^{p+q}(FG)(A)$$

Απόδειξη : [1, Σελ.151] □

Παρακάτω παραθέτουμε και την δυική ομολογική περίπτωση. Συγκεκριμένα διατυπώνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.3: Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ αβελιανές κατηγορίες, τέτοιες ώστε οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ να έχουν αρκετά προβολικά αντικείμενα. Έστω επίσης $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ δεξιά ακριβείς συναρτητές και επιπλέον ότι ο G στέλνει προβολικά αντικείμενα σε $F-$ακυκλικά αντικείμενα. Τότε για κάθε αντικείμενο A της

$\mathcal{A}$ υπάρχει μια συνομολογική φασματική ακολουθία πρώτου τεταρτημορίου D τέτοια ώστε

$$D^2_{pq} = (L_pF)(L_qG)(A) \implies L_{p+q}(FG)(A)$$

<u>Απόδειξη :</u> [1, Σελ.152] $\square$

Κεφάλαιο 3

Ομολογία και Συνομολογία Lie Αλγεβρών

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας των αλγεβρών Lie, αναπτύσουμε την θεωρία της ομολογίας και της συνομολογίας τους, αποδεικνύουμε την φασματική ακολουθία των Hochschild-Serre και με βάση αυτή παραθέτουμε κάποια παραδείγματα υπολογισμού συνομολογίας αλγεβρών Lie.

3.1 Άλγεβρες Lie

Έστω k ένας μεταθετικός δακτύλιος. Μία **nonassociative άλγεβρα** A είναι ένα $k-$πρότυπο εφοδιασμένο με μία διγραμμική απεικόνιση $A \otimes_k A \to A$. Μία **άλγεβρα Lie** $\mathfrak{g}$ είναι μία nonassociative άλγεβρα της οποίας η αντίστοιχη διγραμμική απεικόνιση, την οποία γράφουμε και ως $[x, y]$ και καλούμε **αγκύλη Lie**, ικανοποιεί για $x, y, z \in \mathfrak{g}$ τα ακόλουθα:

Αντισυμμετρικότητα: $[x, x] = 0$ άρα και $[x, y] = -[y, x]$
Ταυτότητα Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Ένα **ιδεώδες** της $\mathfrak{g}$ είναι ένα $k-$υποπρότυπο $\mathfrak{h}$ τέτοιο ώστε $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Ένα ιδεώδες είναι και αυτό άλγεβρα Lie και το πηλίκο $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ κληρονομεί την δομή άλγεβρας Lie . Υπάρχει η αντίστοιχη κατηγορία αλγεβρών Lie με μορφισμούς $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ που είναι ομομορφισμοί $k-$προτύπων που διατηρούν την αγκύλη

Lie. Επομένως για κάθε ιδεώδες $\mathfrak{h}$ της $\mathfrak{g}$ έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία αλγεβρών Lie :

$$0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to 0.$$

Παρακάτω παραθέτουμε κάποια παραδείγματα των εννοιών που ορίσαμε σε αυτή την ενότητα.

Παράδειγμα 3.1.1: Έστω k ένας μεταθετικός δακτύλιος και A μία $k-$άλγεβρα. Τότε και το σύνολο των $m \times m$ πινάκων με στοιχεία από την A αποκτά δομή $k-$άλγεβρας με τον προφανή τρόπο. Αυτή την άλγεβρα την συμβολίζουμε με $M_m(A)$. Αν τώρα ορίσουμε για δύο πίνακες X, Y την πράξη $[X, Y] = XY - YX$ προκύπτει εύκολα ότι αυτή η πράξη καθιστά το υποκείμενο $k-$πρότυπο $M_m(A)$ μία άλγεβρα Lie την οποία συμβολίζουμε με $\mathfrak{gl}_m(A)$. Αν το υποσύνολο των πινάκων που έχουν ίχνος 0 τότε το γεγονός ότι το ίχνος του XY είναι ίσο με το ίχνος του YX για κάθε δύο πίνακες $X, Y \in \mathfrak{gl}_m(A)$ μας λέει ότι έχουμε κατασκευάσει ένα ιδεώδες της $\mathfrak{gl}_m(A)$ το οποίο το συμβολίζουμε με $\mathfrak{sl}_m(A)$. Έχουμε λοιπόν την βραχεία ακριβή ακολουθία Lie αλγεβρών:

$$0 \to \mathfrak{sl}_m(A) \to \mathfrak{gl}_m(A) \to \frac{\mathfrak{gl}_m(A)}{\mathfrak{sl}_m(A)} \to 0.$$

Παράδειγμα 3.1.2: Δουλεύοντας με τους συμβολισμούς του παραδείγματος 1 μπορούμε να θεωρήσουμε το υποσύνολο του $M_m(A)$ που αποτελείται από τους αυστηρά άνω τριγωνικούς πίνακες, δηλαδή όλους τους πίνακες $X = (x_{ij})$ με $x_{ij} = 0$ για $i \geq j$. Έτσι κατασκευάζουμε ένα ιδεώδες της $\mathfrak{gl}_m(A)$ που συμβολίζεται με $\mathfrak{n}_m(A)$. Επίσης έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία Lie αλγεβρών:

$$0 \to \mathfrak{n}_m(A) \to \mathfrak{gl}_m(A) \to \frac{\mathfrak{gl}_m(A)}{\mathfrak{n}_m(A)} \to 0.$$

3.2 $\mathfrak{g}-$Πρότυπα

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie επί του δακτυλίου k. Ένα (αριστερό) $\mathfrak{g}-$**πρότυπο** M είναι ένα $k-$πρότυπο εφοδιασμένο με μία $k-$διγραμμική απεικόνιση

$$\mathfrak{g} \otimes_k M \to M$$

(γράφουμε $x \otimes m \mapsto xm$) τέτοια ώστε

$$[x, y]m = x(ym) - y(xm) \text{ για κάθε } x, y \in \mathfrak{g}, m \in M.$$

Ένας **ομομορφισμός** $\mathfrak{g}-$**προτύπων** $f : M \to N$ είναι ένας ομομορφισμός $k-$προτύπων, τέτοιος ώστε, $f(xm) = xf(m)$ για κάθε $x \in \mathfrak{g}, m \in M$. Γράφουμε $Hom_{\mathfrak{g}}(M, N)$ για το σύνολο των ομομορφισμών $\mathfrak{g}-$**προτύπων** από το M στο N. Αν $a \in k$ τότε η af είναι επίσης ομομορφισμός $\mathfrak{g}-$**προτύπων**, άρα το $Hom_{\mathfrak{g}}(M, N)$ είναι $k-$υποπρότυπο του $Hom_k(M, N)$. Τα αριστερά $\mathfrak{g}-$πρότυπα μαζί με τους ομομορφισμούς $\mathfrak{g}-$πρότυπων αποτελούν μία αβελιανή κατηγορία την οποία συμβολίζουμε με $\mathfrak{g} - mod$. Θεωρούμε τους ακόλουθους δύο συναρτητές από την $\mathfrak{g} - mod$ στην $k - mod$:

1. Το **αναλλοίωτο υποπρότυπο** $M^{\mathfrak{g}}$ ενός $\mathfrak{g}-$προτύπου M.

$$M^{\mathfrak{g}} = \{m \in M : xm = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Θεωρώντας το k ως τετριμμένο $\mathfrak{g}-$προτύπο, έχουμε ότι $M^{\mathfrak{g}} \cong Hom_{\mathfrak{g}}(k, M)$.
2. Τα **coinvariants** $M_{\mathfrak{g}}$ ενός $\mathfrak{g}-$προτύπου M, $M_{\mathfrak{g}} = M/\mathfrak{g}M$.

Έστω M ένα $\mathfrak{g}-$πρότυπο. Παρατηρούμε ότι το $M^{\mathfrak{g}}$ είναι το μέγιστο τετριμμένο $\mathfrak{g}-$υποπρότυπο του M. Συνεπώς, ο συναρτητής $-^{\mathfrak{g}}$ είναι δεξιά προσαρτημένος του συναρτητή του τετριμμένου $\mathfrak{g}-$προτύπου το οποίο σημαίνει ότι ο $-^{\mathfrak{g}}$ είναι αριστερά ακριβής. Επίσης, παρατηρούμε ότι το $M_{\mathfrak{g}}$ είναι το μέγιστο υποπρότυπο πηλίκο του M που είναι τετριμμένο. Συνεπώς, ο συναρτητής $-_{\mathfrak{g}}$ είναι αριστερά προσαρτημένος του συναρτητή του τετριμμένου $\mathfrak{g}-$προτύπου το οποίο σημαίνει ότι ο $-_{\mathfrak{g}}$ είναι δεξιά ακριβής.

Ορισμός 3.2.1:Έστω M ένα $\mathfrak{g}-$πρότυπο. Γράφουμε $H_*(\mathfrak{g}, M)$ ή $H_*^{Lie}(\mathfrak{g}, M)$

για τους αριστερά παραγώμενους συναρτητές $L_*(-_{\mathfrak{g}})(M)$ του $-_{\mathfrak{g}}$ και τους καλούμε τις **ομάδες ομολογίας της $\mathfrak{g}$ με συντελεστές από το** M. Εξόρισμού $H_0(\mathfrak{g}, M) = M_{\mathfrak{g}}$. Ομοίως, γράφουμε $H^*(\mathfrak{g}, M)$ ή $H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ για τους δεξιά παραγώμενους συναρτητές $R^*(-^{\mathfrak{g}})(M)$ του $-^{\mathfrak{g}}$ και τους καλούμε τις **ομάδες συνομολογίας της $\mathfrak{g}$ με συντελεστές από το** M. Εξόρισμού $H^0(\mathfrak{g}, M) = M^{\mathfrak{g}}$.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα των εννοιών που ορίστηκαν σε αυτή την ενότητα.

Παράδειγμα 3.2.2: Έστω $\mathfrak{g} = 0$. Τότε για κάθε $\mathfrak{g}-$προτύπο M έχουμε προφανώς ότι $M^{\mathfrak{g}} = M_{\mathfrak{g}} = M$ συνεπώς οι συναρτητές $-^{\mathfrak{g}}$ και $-^{\mathfrak{g}}$ είναι ακριβείς άρα όλοι οι ανώτεροι παραγόμενοι τους συναρτητές μηδενίζονται οπότε έχουμε $H_*(0, M) = H^*(0, M) = 0$ για κάθε $* > 0$.

3.3 Η φασματική ακολουθία των Hochschild-Serre

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie και $\mathfrak{h}$ ενα ιδεώδες της. Τότε το $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ κληρονομεί δομή άλγεβρας Lie με φυσικό τρόπο και επίσης υπάρχει μία βραχεία ακριβής ακολουθία ομομορφισμών αλγεβρών Lie

$$0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to g/\mathfrak{h} \to 0.$$

Λήμμα 3.3.1:Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie , $\mathfrak{h}$ ενα ιδεώδες της και M ένα $\mathfrak{g}-$πρότυπο. Τότε, τα $M_{\mathfrak{h}}$ και $M^{\mathfrak{h}}$ είναι $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-πρότυπα. Επιπλέον, ο forgetful συναρτητής από την $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} - mod$ στην $\mathfrak{g} - mod$ έχει τον $-_{\mathfrak{h}}$ ως αριστερά προσαρτημένο και τον $-^{\mathfrak{h}}$ ως δεξιά προσαρτημένο.

Απόδειξη: Θεωρούμε την αριστερή δράση της $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ στο $M^{\mathfrak{h}}$ ως $[x]m = xm$, όπου $x \in \mathfrak{g}, m \in M^{\mathfrak{h}}$ και $[x]$ είναι η κλάση του x στην $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Το μόνο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι αυτή η δράση είναι καλά ορισμένη. Έστω λοιπόν $x, y \in \mathfrak{g}$ με $[x] = [y]$ και $m \in M^{\mathfrak{h}}$. Εφόσον $[x] = [y]$ έχουμε ότι $x - y \in \mathfrak{h}$ συνεπώς

$$(x - y)m = 0 \implies xm - ym = 0 \implies xm = ym$$

άρα η δράση είναι καλά ορισμένη. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το $M_{\mathfrak{h}}$ είναι $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-πρότυπο. Τώρα, έστω $\rho : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} - mod \to \mathfrak{g} - mod$ ο forgetful συναρτητής, $A \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} - mod$ και $B \in \mathfrak{g} - mod$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί

$$Hom_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod}(-_h(B), A) \cong Hom_{\mathfrak{g}-mod}(B, \rho A)$$

και

$$Hom_{\mathfrak{g}-mod}(\rho A, B) \cong Hom_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod}(A, -^h(B)).$$

Έστω $f \in Hom_{\mathfrak{g}-mod}(B, \rho A)$. Ορίζουμε $\bar{f} : B_h \to A$ με $\bar{f}([b]) = f(b)$ για $b \in B$. Πρώτα θα δείξουμε ότι αυτή είναι μία καλά ορισμένη απεικόνιση. Έστω, $b, b' \in B$ με $[b] = [b']$. Τότε,

$$b - b' \in \mathfrak{h}B \implies \exists x \in \mathfrak{h}, b_0$$

τέτοια ώστε

$$b - b' = xb_0 \implies f(b - b') = f(xb_0) = xf(b_0)$$

αφού η $\mathfrak{h}$ δρα τετριμμένα στο A. Συνεπώς, $f(b) = f(b')$ άρα η $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη. Προφανώς η $\bar{f}$ είναι $k-$γραμμική. Τώρα, αν $x \in \mathfrak{g}, b \in B$ έχουμε ότι

$$\bar{f}([x][b]) = \bar{f}([xb]) = f(xb) = xf(b) = x\bar{f}([b]) = [x]\bar{f}([b]).$$

Οπότε, $\bar{f} \in Hom_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod}(-_h(B), A)$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$F : Hom_{\mathfrak{g}-mod}(B, \rho A) \to Hom_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod}(-_h(B), A)$$

με $F(f) = \bar{f}$. Παρατηρούμε ότι αν $f, g \in Hom_{\mathfrak{g}-mod}(B, \rho A)$ με $F(f) = F(g)$ τότε

$$\bar{f} = \bar{g} \implies \bar{f}([b]) = \bar{g}([b])$$

για κάθε $b \in B$ άρα $f(b) = g(b)$ για κάθε $b \in B$ συνεπώς $f = g$. Οπότε, η F είναι 1-1. Έστω τώρα $f \in Hom_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod}(-_h(B), A)$. Ορίζουμε $h : B \to A$ με $h(b) = f([b])$ για κάθε $b \in B$. Προφανώς η h είναι $k-$γραμμική. Επίσης για κάθε $x \in \mathfrak{g}, b \in B$ έχουμε

$$h(xb) = f([xb]) = f([x][b]) = [x]f([b]) = xf([b]) = xh(b)$$

άρα $h \in Hom_{\mathfrak{g}-mod}(B, \rho A)$. Βλέπουμε άμεσα από τον ορισμό ότι $\bar{h} = f$ οπότε $F(h) = f$ συνεπώς η F είναι επί. Άρα, λοιπόν, έχουμε ότι

$$Hom_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod}(-_h(B), A) \cong Hom_{\mathfrak{g}-mod}(B, \rho A).$$

Επιπλέον, ο ισομορφισμός είναι φυσικός διότι δεν εξαρτιόταν από τα αντικείμενα A, B. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $Hom_{\mathfrak{g}-mod}(\rho A, B) \cong Hom_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod}(A, -^h(B))$ □

Θεώρημα 3.3.2: Για κάθε ιδεώδες $\mathfrak{h}$ μίας άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$, υπάρχουν δύο συγκλίνουσες φασματικές ακολουθίες πρώτου τεταρτημορίου:

$$\mathrm{E}^2_{pq} = H_p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H_q(\mathfrak{h}, M)) \Rightarrow H_{p+q}(\mathfrak{g}, M)$$
$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^q(\mathfrak{h}, M)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{g}, M)$$

<u>Απόδειξη:</u> Ισχυριζόμαστε ότι οι συναρτητές $-_{\mathfrak{g}}$ και $-^{\mathfrak{g}}$ παραγοντοποιούνται ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}-mod \arrow[rr, "-_{\mathfrak{h}}"] \arrow[dr, "-_{\mathfrak{g}}"'] & & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod \arrow[dl, "-_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}"] \\
& k-mod &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}-mod \arrow[rr, "-^{\mathfrak{h}}"] \arrow[dr, "-^{\mathfrak{g}}"'] & & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}-mod \arrow[dl, "-^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}"] \\
& k-mod &
\end{tikzcd}$$

Πράγματι, έστω M ένα $\mathfrak{g}-$πρότυπο. Είδαμε στο προηγούμενο λήμμα ότι τα $M_{\mathfrak{h}}$ και $M^{\mathfrak{h}}$ είναι $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-$πρότυπα. Το $k-$πρότυπο $(M_{\mathfrak{h}})_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ προκύπτει από το M πρώτα επιβάλλοντας τις σχέσεις $xm = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{h}, m \in M$ και έπειτα τις σχέσεις $[x]m = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{g}, m \in M$. Όμως $[x]m = xm$ άρα οι σχέσεις που επιβάλλαμε είναι οι $xm = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{g}, m \in M$, οπότε $(M_{\mathfrak{h}})_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = M_{\mathfrak{g}}$. Ομοίως, το $k-$πρότυπο $(M^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ προκύπτει από το M αν περιοριστούμε στο υποσύνολο όλων των m για τα οποία $xm = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{h}$ και έπειτα αν περιοριστούμε επιπλέον στο υποσύνολο όλων των m για τα οποία $[x]m = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{g}$. Όμως, $[x]m = xm$, άρα στην πραγματικότητα περιοριζόμαστε στο υποσύνολο όλων των m για τα οποία $xm = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{g}$, συνεπώς $(M^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = M^{\mathfrak{g}}$. Τώρα, από το προηγούμενο λήμμα, ο $-_{\mathfrak{h}}$ είναι αριστερά προσαρτημένος του forgetful συναρτητή, ο οποίος είναι ακριβής, άρα από το θεώρημα 1.4.4 διατηρεί προβολικά αντικείμενα. Ομοίως, ο $-^{\mathfrak{h}}$ είναι δεξιά προσαρτημένος του forgetful συναρτητή, άρα διατηρεί εμφυτευτικά αντικείμενα. Τώρα, θεωρόντας την φασματική ακολουθία του Grothendieck προκύπτει άμεσα το αποτέλεσμα $\square$

3.4 Παραδείγματα υπολογισμού ομολογίας και συνομολογίας αλγεβρών Lie

Θα ολοκληρώσουμε την μελέτη μας παρουσιάζοντας μερικά παραδείγματα υπολογισμού ομολογίας και συνομολογίας κάποιων αλγεβρών Lie. Το κύριο εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η φασματική ακολουθία των Hochschild-Serre από την προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα 3.4.1: Η $\mathfrak{sl}_2(k)$ όπως έχουμε δει αποτελεί ιδεώδες της $\mathfrak{gl}_2(k)$ οπότε έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{gl}_2(k) \to \mathfrak{gl}_2(k)/\mathfrak{sl}_2(k) \to 0.$$

Είναι σαφές ότι $\mathfrak{gl}_2(k)/\mathfrak{sl}_2(k) \cong k$ που είναι **αβελιανή** άλγεβρα Lie (δηλαδή $[X,Y] = 0$ για κάθε X, Y) άρα (βλέπε [2]) $H^n(\mathfrak{gl}_2(k)/\mathfrak{sl}_2(k), k) = k$ για $k = 0, 1$ και 0 για $n \geq 2$. Τώρα, η $\mathfrak{sl}_2(k)$ είναι **απλή** (δηλαδή δεν έχει μη τετριμμένα ιδεώδη), άρα (βλέπε [3] σελ.113) $H^0(\mathfrak{sl}_2(k), k) = k$ και $H^1(\mathfrak{sl}_2(k), k) = H^2(\mathfrak{sl}_2(k), k) = 0$ επομένως στην δεύτερη σελίδα της φασματικής ακολουθίας των Hochschild-Serre θα έχουμε $E_2^{00} = E_2^{10} = k$ και η υπόλοιπη μηδενική γραμμή έχει παντού μηδενικά. Άρα από τον τρόπο που πάνε τα διαφορικά έχουμε ότι $E_\infty^{00} = E_\infty^{10} = k$ και $E_\infty^{n0} = 0$ για $n \geq 2$. Συνεπώς, $H^0(\mathfrak{gl}_2(k), k) = H^0(\mathfrak{gl}_2(k), k) = k$ και $H^n(\mathfrak{gl}_2(k), k) = 0$ για $n \geq 2$.

Παράδειγμα 3.4.2: Συμβολίζουμε με $\mathfrak{n}_3$ την άλγεβρα Lie των $3 * 3$ αυστηρά άνω τριγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα k και αγκύλη Lie$[X,Y] = XY - YX$. Συμβολίζουμε επίσης με e_{ij} το στοιχείο της $\mathfrak{n}_3$ που έχει 1 στη θέση (i,j) και 0 παντού αλλού. Είναι σαφές ότι $\mathfrak{n}_3 = ke_{12} \oplus ke_{13} \oplus ke_{23}$, ότι το $\mathfrak{n}_3 = ke_{12} \oplus ke_{23}$ είναι ιδεώδες της $\mathfrak{n}_3$ και ότι $ke_{13} \cong \mathfrak{n}_3/ke_{12} \oplus ke_{23}$ άρα έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to ke_{13} \to \mathfrak{n}_3 \to ke_{12} \oplus ke_{23} \to 0$$

και μπορούμε νε εφαρμόσουμε την φασματική ακολουθία των Hochschild-Serre. Πρώτα απ'όλα έχουμε $ke_{12} \cong ke_{13} \cong ke_{23} \cong k$ οπότε όπως έχουμε αναφέρει, $H^n(ke_{12}, k) = H^n(ke_{13}, k) = H^n(ke_{23}, k) = H^n(k, k) = k$ για $n = 0, 1$ και 0 για $n \geq 2$. Άρα, από τον τύπο του Kunneth (βλέπε [1] σελίδα 87) έχουμε ότι $H^n(ke_{12} \oplus ke_{23}, k) = k$ για $n = 0, 1$ και 0 για $n \geq 2$. Αυτό μας λέει ότι η δεύτερη σελίδα της φασματικής ακολουθίας των Hochschild-Serre θα έχει $E_2^{00} = E_2^{01} = E_2^{10} = E_2^{11} = k$ και όλα τα άλλα αντικείμενα θα είναι 0. Από τον τρόπο που πάνε τα διαφορικά λοιπόν έχουμε ότι $E_\infty^{00} = E_\infty^{01} = E_\infty^{10} = E_\infty^{11} = k$ άρα $H^n(\mathfrak{n}_3, k) = k$ για $n = 0, 1, 2$ και 0 για $n \geq 3$.

Παράδειγμα 3.4.3: Θεωρούμε τώρα την άλγεβρα Lie $\mathfrak{g} = ke_{11} \oplus ke_{12} \oplus ke_{13} \oplus ke_{23} = ke_{11} \oplus \mathfrak{n}_3$. Έχουμε συνεπώς την βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to \mathfrak{n}_3 \to \mathfrak{g} \to k \to 0$. Υπολογίζουμε λοιπόν εύκολα όπως πριν ότι $H^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_3, k) = k$ αν $n = 0, 1$ και 0 διαφορετικά. Επίσης, $H^n(\mathfrak{n}_3, k) = k$ αν $n = 0, 1, 2$ και 0 διαφορετικά, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Συνεπώς η δεύτερη σελίδα της φασματικής ακολουθίας των Hochschild-Serre θα έχει $E_2^{00} = E_2^{01} = E_2^{02} = E_2^{10} = E_2^{11} = E_2^{12} = k$ και 0 παντού αλλού. Από τον τρόπο που πάνε τα διαφορικά έχουμε ότι $E_\infty^{00} = E_\infty^{01} = E_\infty^{01} = E_\infty^{11} = E_\infty^{12} = k$ άρα $H^n(\mathfrak{g}, k) = k$ για $k = 0, 1, 2, 3$ και 0 διαφορετικά.

Βιβλιογραφία

[1] Weibel, Charles A. (1994). An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Vol. 38. Cambridge University Press

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lie-algebra-cohomology

[3] Chevalley Claude and Eilenberg Samuel. Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. Trans. Am. Math. Soc. 63 (1948), pp. 8b-124