



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος και δημιουργικότητα στη
Γεωμετρία: Ποια η φύση της σχέσεως τους;*

Σάπκας Ιωάννης
Δ202023

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Γαγάτσης Αθανάσιος

Ομότιμος καθηγητής Π.Κ

Αθήνα
Οκτώβριος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την 31/10/2023 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Γαγάτσης Αθανάσιος	Ομότιμος καθηγητής Π.Κ
▪ Πόταρη Δέσποινα	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪ Σπύρου Παναγιώτης	Τέως αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της
Συμβουλευτικής Επιτροπής αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Γαγάτσης Αθανάσιος	Ομότιμος καθηγητής Π.Κ
▪ Πόταρη Δέσποινα	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪ Σπύρου Παναγιώτης	Τέως αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αυτή η εργασία έρχεται ως το αποτέλεσμα δύο υπέροχων ετών στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών, αλλά και ενός ακόμα πολύ δύσκολου που έπρεπε να συνδυάσω πολύ και σκληρή δουλειά, με υψηλό ακαδημαϊκό έργο τόσο σε σχέση με την εργασία αυτήν καθαυτή, αλλά και με τα τελευταία μαθήματα που μου είχαν απομείνει. Για την υλοποίησή της, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τα άτομα που συνέβαλαν τα μέγιστα τα τελευταία τρία χρόνια. Συγκεκριμένα:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γαγάτση Αθανάσιο για όλα όσα έμαθα από αυτόν για την επιστήμη της διδακτικής των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος, για τη διαρκή υποστήριξη του, για την αρίστη συνεργασία και τις πολύτιμες συμβουλές του αλλά και για τις ευχάριστες συζητήσεις που είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Θεωρώ μεγάλη μου τιμή το ότι δέχθηκε να είναι ο επιβλέπων της εργασίας μου.
- Την κα Πόταρη Δέσποινα και τον κ. Σπύρου Παναγιώτη, τόσο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική και εξεταστική επιτροπή όσο και για όλα όσα έμαθα από αυτούς κατά τη διάρκεια τόσο του μεταπτυχιακού, αλλά και του προπτυχιακού προγράμματος.
- Τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» για την εποικοδομητική συνεργασία και τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσαν.
- Την κα Μπακογιάννη Διονυσία, αλλά και τον κ. Χειλάκο Νικόλα που πάντα, με ευγένεια και μεγάλη προθυμία, φρόντιζαν έγκαιρα για τη διεκπεραίωση των γραφειοκρατικών θεμάτων και βρίσκονταν πάντα στο πλευρό των φοιτητών από όποιο πόστο κι αν τους είχε ανατεθεί.
- Τους συμφοιτητές και καλούς φίλους που απέκτησα κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών για τη στήριξη, τη συνεργασία και τις πολύ όμορφες στιγμές που περάσαμε μαζί σε αυτό το υπέροχο ταξίδι γνώσεων.
- Τους συναδέλφους, καθώς και τους μαθητές και τις μαθήτριες τους, που παρά τις δυσκολίες, συμμετείχαν με μεγάλη θέρμη στη διεξαγωγή της έρευνας, χωρίς την οποία δεν θα είχε ολοκληρωθεί αυτή η εργασία.
- Την οικογένειά μου και τους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου σε όλες τις δύσκολες στιγμές, δίνοντας μου δύναμη και κουράγιο να συνεχίσω.

Σε όλους αυτούς που πίστεψαν σε εμένα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Γεωμετρία και συγκεκριμένα η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος αποτελεί από τα πρώτα μαθητικά χρόνια ενός ατόμου, ένα από τα πιο γοητευτικά και σημαντικά μέρη της μαθηματικής του εκπαίδευσης. Οι σκέψεις που κάνουν οι μαθητές σε σχέση με το γεωμετρικό σχήμα και οι συνηθισμένες παρανοήσεις που το συντροφεύουν, αποτελούν κλασσικά ζητήματα στη σύγχρονη έρευνα της διδακτικής της γεωμετρίας. Στην παρούσα εργασία, θα παρατηρήσουμε και θα προσπαθήσουμε να χαρακτηρίσουμε της σχέση της κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος με τη δημιουργικότητα στη γεωμετρία. Ειδικότερα, παρατηρούμε και μελετάμε τη φύση της μεταξύ τους σχέσης, δηλαδή το αν είναι μία ασθενής σχέση ή μία ισχυρή σχέση. Για να υλοποιηθεί αυτός ο σκοπός, δόθηκαν δύο διαφορετικά φύλλα εργασίας σε ενενήντα πέντε μαθητές σχολείων ηλικίας 15-16 ετών με τρία προβλήματα που σχετίζονται με την κατανόηση του Γεωμετρικού σχήματος αλλά και δύο προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Οι απαντήσεις των μαθητών αναλύθηκαν ποσοτικά, μέσω συνεπαγωγικής στατιστικής, για την εξυπηρέτηση του ερευνητικού ερωτήματος, αλλά έγινε και μία μικρή ποιοτική ανάλυση ορισμένων μη αναμενόμενων λύσεων. Τα αποτελέσματα ενισχύουν την παρούσα έρευνα, καθώς δείχνουν ότι υπάρχει μία ισχυρή σχέση μεταξύ της κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος και της δημιουργικότητας στη Γεωμετρία, ενώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και συγκεκριμένες λύσεις μαθητών καθώς και η προσέγγισή τους, ανάλογα με την ηλικία και την τάξη τους.

Λέξεις Κλειδιά: Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος, δημιουργικότητα στη γεωμετρία, ασκήσεις πολλαπλών λύσεων

ABSTRACT

Geometry and specifically the understanding of geometric shape is from the first school years of a person, one of the most charming and important parts of his mathematical education. The thoughts that students make in relation to the geometric shape and the common misconceptions that accompany it, are classic issues in modern research of geometry teaching. In this thesis, we will observe and try to characterize the relationship between geometrical figure apprehension and creativity in geometry. In particular, we observe and study the nature of the relationship between them, i.e. whether it is a weak relationship or a strong relationship. To achieve this goal, ninety-five school students aged 15-16 were given two different essays with three problems related to the understanding of geometric shape and two multiple solution problems. The students' answers were analyzed quantitatively, through inferential statistics, to serve the research question, but also a small qualitative analysis of some answers that are of particular interest. The results reinforce the present research, as they show that there is a strong relationship between the understanding of geometric shape and creativity in Geometry, while specific solutions of students and their approach, depending on their age and their class, are of particular interest.

Key words: Geometrical figure apprehension, creativity in geometry, multi solutions task

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.....	8
2	Θεωρητικό πλαίσιο.....	9
	2.1 Αναπαραστάσεις.....	9
	2.1.1 Διάκριση αναπαραστάσεων	10
	2.1.2 Νοητική και σημειωτική αναπαράσταση.....	12
	2.1.3 Λεκτικό και οπτικό σύστημα αναπαράστασης.....	14
	2.1.4 Οπτική αντίληψη – Οπτική απεικόνιση - Όραση – Οπτικοποίηση..	17
	2.2 Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος.....	19
	2.3 Δημιουργικότητα.....	25
	2.3.1 Πτυχές της δημιουργικότητας.....	26
	2.3.2 Μαθηματική δημιουργικότητα.....	28
	2.3.3 Μαθηματική δημιουργικότητα και προβλήματα πολλαπλών λύσεων (MSTs).....	30
	2.4 Εμβαδά.....	33
3	Σχετικές έρευνες.....	36
4	Μεθοδολογία.....	39
	4.1 Δείγμα της έρευνας.....	40
	4.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων.....	40
5	Αποτελέσματα.....	42
	5.1 Παρουσίαση και σχολιασμός των λύσεων των μαθητών.....	42
	5.1.1 Το πρόβλημα του τραπεζίου	42
	5.1.1.1 Το πρόβλημα του τραπεζίου (Γ Γυμνασίου).....	42
	5.1.1.2 Το πρόβλημα του τραπεζίου (Α Λυκείου).....	48
	5.1.2 Το πρόβλημα της διαμέσου	51
	5.1.2.1 Το πρόβλημα της διαμέσου (Γ Γυμνασίου).....	52
	5.1.2.2 Το πρόβλημα της διαμέσου (Α Λυκείου).....	56
	5.1.3 Τα άλλα τρία προβλήματα	59
	5.1.3.1 Τα άλλα τρία προβλήματα (Γ Γυμνασίου).....	61
	5.1.3.2 Τα άλλα τρία προβλήματα (Α Λυκείου).....	66
	5.2 Ποσοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων.....	71
	5.3 Συνεπαγωγική ανάλυση των αποτελεσμάτων.....	73
6	Συμπεράσματα.....	79
7	Βιβλιογραφία.....	82
8	Παράρτημα.....	96

1. Εισαγωγή

Η ομορφιά της γεωμετρίας σχετίζεται άμεσα με την απλότητά της. Γεωμετρία μπορεί κανείς να κάνει παντού. Ανέκαθεν η Γεωμετρία αποτελούσε και αποτελεί έναν από τους πιο γοητευτικούς τομείς των μαθηματικών.

Η διδασκαλία και η εκμάθηση της γεωμετρίας αποτελούν ένα πολύ σημαντικό πεδίο έρευνας μεταξύ των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης και της ψυχολογίας. Η σημασία της γεωμετρίας στην καθημερινή ζωή ενός ατόμου αλλά και σε διάφορους επαγγελματικούς τομείς έχει επίσης επισημανθεί τόσο στην προηγούμενη όσο και στην τρέχουσα βιβλιογραφία και η ανάγκη για αποτελεσματικότερη διδασκαλία της γεωμετρίας έχει συζητηθεί από πολλούς ερευνητές. Υπάρχει επίσης μια αυξανόμενη συναίνεση ότι η γεωμετρία είναι ένας τομέας που δημιουργεί πολλά προβλήματα για τους μαθητές ανεξάρτητα από την ηλικία και την κουλτούρα τους. Επιπλέον, οι Bergstrom και Zhang ισχυρίζονται ότι «η διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι ένα σημαντικό αλλά πολυσυζητημένο θέμα στην τρέχουσα εκπαιδευτική έρευνα και πρακτική» (Bergstrom & Zhang, 2016, σελ. 134). Ένας από τους λόγους που δικαιολογούν τις δυσκολίες των μαθητών είναι η ποικιλία των συστημάτων που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία και στη μάθηση της γεωμετρίας: Η φυσική γλώσσα, το σύστημα της συμβολικής γλώσσας και το σχήμα. Ένα σχήμα αποτελεί την εξωτερική και εικονική αναπαράσταση μιας έννοιας ή μιας κατάστασης στη γεωμετρία. Ανήκει σε ένα συγκεκριμένο σημειωτικό σύστημα που συνδέεται με το αντιληπτικό οπτικό σύστημα, ακολουθώντας εσωτερικούς νόμους. Ένα γεωμετρικό σχήμα έχει διπλή ιδιότητα, καθώς είναι ταυτόχρονα έννοια και χωρική αναπαράσταση. Η αλληλεπίδραση μεταξύ μιας έννοιας και μιας εικόνας στη γεωμετρική συλλογιστική, προκαλεί συχνά δυσκολίες στους μαθητές κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Mesquita, 1998). Έτσι, έχουν προταθεί διάφορες θεωρίες από πολλούς ερευνητές όπως η θεωρία της κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων του Raymond Duval, με την οποία σχετίζεται η παρούσα έρευνα (Duval 1995; 1998; 2005). Επιπλέον, έχουν δημοσιευθεί διάφορες ερευνητικές μελέτες σχετικά με τα εμπόδια των μαθητών στην εκμάθηση της γεωμετρίας. Οι μελέτες αυτές ασχολήθηκαν τη μάθηση της γεωμετρίας που αφορούσε μικρά παιδιά (Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Gagatsis, 2018) ή μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Gagatsis, 2012; 2015; Πανάουρα, & Γαγάτσης, 2008; 2010).

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Αναπαραστάσεις

Υπάρχει μία έντονη πεποίθηση στην κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης ότι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες βιώνοντας πολλαπλές μαθηματικές αναπαραστάσεις (e.g. Gagatsis & Shiakalli, 2004; Gagatsis, Monoyiou, Deliyianni, & Philippou, 2010; Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011; Gagatsis, Panaoura, Nicolaou, Elia, Deliyianni, & Stamatakis, 2022). Είναι γεγονός ότι οι περισσότερες μαθηματικές έννοιες είναι έννοιες αφηρημένες, με αποτέλεσμα η κατανόησή τους από τους μαθητές να είναι πολλές φορές ελλιπής. Άμεσο επακόλουθο αυτού είναι οι μαθητές να τις χρησιμοποιούν με λάθος τρόπο κατά τη λύση των ασκήσεων. Η δυνατότητα αναπαράστασης αυτών των εννοιών με τρόπο ώστε να γίνουν κατανοητές μέσω των αισθήσεων, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να τις κατανοήσουν καλύτερα και καθ' επέκταση να τις χρησιμοποιούν ορθά.

Ο όρος «αναπαράσταση» είναι ασαφής και ως τέτοιος επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin, & Karut, 1996). Επικρατέστερος θεωρείται ο ορισμός που δίνεται από τον Karut (1987), σύμφωνα με τον οποίο η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες:

- α. την ολότητα που αναπαρίσταται,
- β. την ολότητα που αναπαριστά,
- γ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται,
- δ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση και
- ε. την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες.

Βάσει αυτού του ορισμού η αναπαράσταση θεωρείται ως ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια (signified and referenced concept), το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο (signifier and referent material sign) (Γαγάτσης και Ηλία 2004). Κατά τον Anderson (1995) λέγοντας αναπαράσταση εννοούμε αυτό που συνειδητά προσλαμβάνουμε μέσω της αντίληψης. Είναι μια σύνθεση χαρακτήρων, εικόνων και συγκεκριμένων αντικειμένων που συμβολίζουν ή αναπαριστούν κάτι άλλο (Karut, 1985; Goldin, 1998; DeWindt-King & Goldin, 2003). Και αυτό το «άλλο» μπορεί να είναι οι πεποιθήσεις, οι ερμηνείες ή οι παρερμηνείες ενός ανθρώπου στις οποίες κάποιος αποκτά πρόσβαση μέσω λεκτικών ή σχηματικών παραγωγών του ατόμου (Piaget, 1972). Όμως οι αναπαραστάσεις, λέει ο Duval, μπορεί να είναι επίσης σύμβολα και οι σύνθετες διασυνδέσεις τους, οι οποίες παράγονται σύμφωνα με κανόνες και επιτρέπουν την περιγραφή ενός συστήματος μιας διαδικασίας, μιας σειράς φαινομένων (Duval, 2006).

Οι Confrey και Smith (1991) ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις ως τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών όπως πίνακες, γραφικές παραστάσεις, σχήματα και εξισώσεις.

2.1.1 Διάκριση αναπαραστάσεων

Ο Schnotz (2002) θεωρεί ότι τα κείμενα και οι οπτικές αναπαραστάσεις ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα τις χωρίζει σε περιγραφικές (descriptive) και απεικονιστικές (depictive), αντίστοιχα. Οι περιγραφικές αναπαραστάσεις αποτελούνται από σύμβολα που έχουν αυθαίρετη δομή και συνδέονται με το περιεχόμενο που αντιπροσωπεύουν απλώς μέσω μιας σύμβασης. Οι λέξεις της φυσικής γλώσσας είναι παραδείγματα τέτοιων συμβόλων.

Οι απεικονιστικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν εικονικά σύμβολα που σχετίζονται με το περιεχόμενο που αντιπροσωπεύουν μέσω κοινών δομικών στοιχείων σε συγκεκριμένο ή πιο αφηρημένο επίπεδο. Τα σχήματα δεν έχουν απόλυτη ομοιότητα με αυτό που αντιπροσωπεύουν. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι είναι σύμβολα και όχι εικόνες, παρόλα αυτά έχουν πιο πολλά κοινά με τις εικόνες παρά με τα σύμβολα.

Μια άλλη διάκριση που μπορούμε να κάνουμε στις αναπαραστάσεις είναι αυτή μεταξύ των κύριων και των βοηθητικών. Μέσα από τις κύριες αναπαραστάσεις εκφράζεται οποιαδήποτε πληροφορία σε σχέση με το έργο που καλούμαστε να επιλύσουμε και είναι απαραίτητες για τη διαδικασία επίλυσης. Η λεκτική περιγραφή θεωρείται κύρια αναπαράσταση. Οι βοηθητικές από την άλλη, δεν είναι απαραίτητες αλλά μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά.

Όσον αφορά την εικονική αναπαράσταση ακολουθεί και αυτή την παραπάνω διάκριση. Οι Γαγάτσης και Ηλία (2004) αλλά και οι Gagatsis και Theodoulou (2003) ταξινόμησαν τις εικόνες σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με τη λειτουργία τους κατά την επίλυση ενός έργου. Συγκεκριμένα στις: α) διακοσμητικές, β) βοηθητικές-αναπαραστατικές, γ) βοηθητικές-οργανωτικές και δ) πληροφοριακές. Οι τελευταίες είναι κύριες αναπαραστάσεις που παρέχουν πληροφορίες απαραίτητες για την επίλυση του έργου. Δηλαδή, το έργο στηρίζεται στην εικόνα.

Ο ρόλος της πληροφοριακής εικόνας είναι μάλλον πολύπλοκος συγκριτικά με άλλους τύπους αναπαράστασης. Πιθανόν, απαιτείται επιπλέον και πιο πολύπλοκη νοητική διεργασία σε σχέση με τους άλλους τύπους, μιας και εμπλέκει όχι μόνο εικονικές αλλά και λεκτικές πληροφορίες (Pyke, 2003). Σε διάφορες έρευνες που έγιναν, είναι φανερό αυτή η αντίφαση στην επίδραση που ασκούν τέτοιου είδους εικόνες στην κατανόηση των μαθητών πάνω στα στοιχεία ενός έργου και κατά συνέπεια στη δυνατότητα εύρεσης λύσης του. Σε έρευνες των Δεληγιάννη, Γαγάτση και Κουκκούφη (2003), Τσακίρη, Ρούσου-Μιχαηλίδου, Γαγάτση και Ηλία (2004) και σε άρθρο των Gagatsis, Deliyianni (2004) στο οποίο συγκρίνανε μελέτες για την προσφορά της εικόνας σε προβλήματα, παρατέθηκαν στοιχεία που εμφανίζουν την αρνητική επίδραση της

πληροφοριακής εικόνας στην επίδοση των μαθητών. Σε άλλες έρευνες, όπως των Theodoulou, Gagatsis και Theodoulou (2004), τα ευρήματα έδειξαν ότι οι πληροφοριακές εικόνες δεν είχαν κάποια σημαντική επίδραση στην απόδοση των μαθητών ενώ αντίθετα σε έρευνα των Elia και Philiprou (2004) τα ευρήματα έδειξαν το αντίθετο. Αυτά τα αντικρουόμενα αποτελέσματα δείχνουν ότι η επίδραση της πληροφοριακής εικόνας δεν είναι πάντα ίδια αλλά εξαρτάται από το ίδιο το έργο, δηλαδή από τις σχέσεις μεταξύ της εικόνας και του έργου αλλά και από την πρότερη γνώση και ικανότητες των μαθητών. Οι μαθηματικές έννοιες συνδέονται στενά με τη μαθηματική εμπειρία του μαθητή και παντελώς με τον τρόπο που αυτές γίνονται αντικείμενα μέσω της μεταφοράς τους σε καθημερινή γλώσσα (D'Amore & Fandino-Pinilla, 2008). Οι αναπαραστάσεις περιέχουν πληροφορίες που καθορίζονται από συγκεκριμένους κανόνες και συμβάσεις, οπότε οι μαθητές που δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτούς τους κανόνες δεν μπορούν να έχουν πρόσβαση και να κατανοούν τις αναπαραστάσεις (Dreyfous, 1995).

Η πληροφοριακή εικόνα μπορεί να λειτουργήσει σωστά ως κύρια αναπαράσταση μόνο αν συνοδεύεται από τα αναγκαία λεκτικά στοιχεία ώστε να γίνει δυνατή η μετάβαση από την εκφώνηση προς τους συμβολικούς κώδικες (Γαγάτσης, 2011). Η γλώσσα είναι απαραίτητος παράγοντας της αναπαράστασης γιατί κάθε αναπαράσταση οφείλει να περιέχει κάποια λεκτικά στοιχεία. Κάθε αναπαράσταση εξαρτάται από τη γλώσσα (Μονογιού, Spagnolo, Elia & Gagatsis, 2007).

Μια άλλη βασική διάκριση που επισημαίνεται στην περιοχή των αναπαραστάσεων είναι μεταξύ των εσωτερικών/νοητικών και των εξωτερικών/σημειωτικών αναπαραστάσεων (De Windt-King & Goldin, 2003; Goldin & Kaput, 1996; Seeger, 1998; Dufour – Janvier et al., 1987).

Ως εσωτερικές, θεωρούνται αυτές που αναφέρονται σε πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς ή εικόνες που κατασκευάζουμε για να αναπαραστήσουμε την εξωτερική πραγματικότητα. Στην εσωτερική αναπαράσταση, "εικόνα στο μυαλό" (Clemments, 1982) οι περισσότεροι ορισμοί αναφέρονται στην απουσία του αντικειμένου από τις αισθήσεις και την ορίζουν παρόμοια με τον Hebb ως "νοητική δραστηριότητα που αντιστοιχεί στη αντίληψη που έχουμε για το αντικείμενο" (Suwarsono, 1982). Τα νοητικά μοντέλα, είτε κατασκευάζονται με τη κατανόηση της εικόνας, είτε με τη κατανόηση του κειμένου, είναι εσωτερικές απεικονίσεις καθώς έχουν εγγενή δομικά χαρακτηριστικά κοινά με το απεικονιζόμενο αντικείμενο. Δηλαδή, αντιπροσωπεύουν το αντικείμενο με βάση δομική ή λειτουργική αναλογία. (Johnson-Laird & Byrne, 1991).

Οι εξωτερικές -σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα- αντιπροσωπεύουν τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς, οι οποίοι αποσκοπούν στην αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης πραγματικότητας, για παράδειγμα τα μαθηματικά (Dufour-Janvier et al., 1987).

Οι Goldin και Kaput (1996) θεωρούν ότι υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ των δύο παραπάνω ειδών αναπαράστασης. Από αυτές οι οπτικές

αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται εκτενώς στα μαθηματικά σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας επίλυσης ενός έργου (Larkin & Simon, 1987).

Η Mesquita (1998) δίνοντας τον δικό της διαχωρισμό για τις αναπαραστάσεις τις διακρίνει στις εξωτερικές (external) στις οποίες ανήκει ό,τι μπορεί να περιέχεται σε χαρτί ή άλλο υποστηρικτικό μέσο και στις εικονικές-σχηματικές (iconical-figurative) οι οποίες βασίζονται σε οπτική εικόνα. Στη γεωμετρία τα αντικείμενα παριστάνονται με σχήματα. Αυτά ανήκουν σε σημειωτικά συστήματα που χρησιμοποιούνται για να παρουσιάσουν πληροφορίες ή να αντικειμενοποιήσουν μια αναπαράσταση. Τρία συστήματα αναπαράστασης εμπλέκονται εδώ: η φυσική γλώσσα, το σύστημα συμβόλων και το σχήμα. Το σχήμα συνδέεται με το αντιληπτικό οπτικό σύστημα το οποίο έχει τους δικούς του εσωτερικούς οργανωτικούς νόμους. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις από μόνες τους δεν οδηγούν σε λύση αλλά βοηθούν στον ορισμό και την κατανόηση της δομής του προβλήματος. Οι αναπαραστάσεις των γεωμετρικών αντικειμένων μπορούν να στηρίζουν τη γεωμετρική διαίσθηση που σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να είναι πολύ ισχυρή γιατί βοηθά να κατανοήσουμε τις σχέσεις μεταξύ αυτών των αντικειμένων. Όμως, παρά το γεγονός ότι κινητοποιούν τις πολλαπλές σχέσεις δεν επιτρέπουν σε κάποιον να διακρίνει το τι δίνεται και το τι ζητείται. Η κινητοποίηση αυτή μπορεί να δώσει οπτική υποστήριξη στη διαίσθηση όμως σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η υποστήριξη μπορεί να είναι πολύ ισχυρή. Οι γεωμετρικές σχέσεις μπορεί να εμφανιστούν ως προφανείς στους μαθητές εμποδίζοντας την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών (Mesquita, 1998).

2.2.2 Νοητική και σημειωτική αναπαράσταση

Μια εικόνα είναι αδύναμη και μεταβατική, υπόκειται σε αλλαγές για να προσαρμοστεί σε πιο περίπλοκες και πλούσιες μαθηματικές καταστάσεις που ορίζονται από τον διδακτικό μηχανισμό για να φτάσει ο μαθητής στη κατανόηση μιας έννοιας. Η παρανόηση δεν είναι έλλειψη γνώσης, είναι μια εικόνα που λειτουργούσε καλά αλλά κατέστη ακατάλληλη σε μια νέα κατάσταση και πρέπει να διερευνηθεί για περεταίρω χρήση της έννοιας. Από αυτή την καθαρά ψυχολογική άποψη η κατασκευή της έννοιας είναι ανεξάρτητη της σημειωτικής δραστηριότητας που χρησιμεύει μόνο για χρήση και επικοινωνία της έννοιας, η οποία έχει ήδη αποκτηθεί με άλλους τρόπους. Μπορεί να οδηγηθούμε μάλιστα στη ψευδαίσθηση ότι οι νοητικές αναπαραστάσεις είναι δυνατό να υπάρξουν χωρίς καθόλου σημειωτικές. Ο Duval (1995), θεωρεί ότι αυτό θα μπορούσε να συμβεί γιατί δεν λαμβάνεται υπόψη ένας θεμελιώδης παράγοντας, ότι δηλαδή η εξέλιξη των νοητικών αναπαραστάσεων απαιτεί την απόκτηση σημειωτικών αναπαραστάσεων και κυρίως της γλώσσας. Διαφοροποιεί έτσι τη διάκριση μεταξύ των αναπαραστάσεων. Θεωρεί ότι ο βασικός διαχωρισμός δεν είναι αυτός μεταξύ της νοητικής και της εξωτερικής αναπαράστασης, που χρησιμοποιείται συχνά στις γνωστικές επιστήμες σαν να ήταν προφανής και πρωταρχικός, αλλά ο άλλος μεταξύ των σημειωτικών αναπαραστάσεων, που παράγονται μέσω προτάσεων, διαγραμμάτων, σχεδίων, γραφημάτων κ.α., και

των φυσικών / οργανικών αναπαραστάσεων, που δημιουργούνται από τις αισθήσεις ή από κάποια συσκευή (αντικατοπτρισμοί, όνειρα, φωτογραφίες...) (Duval, 1995).

Η μαθηματική δραστηριότητα απαιτεί όχι μόνο τις κοινές γνωστικές διαδικασίες αλλά πράγματι, ορισμένες πολύ συγκεκριμένες γνωστικές κατασκευές των οποίων η ανάπτυξη πρέπει να ληφθεί υπόψη στη διδασκαλία. Αυτό το ζήτημα στην εκμάθηση των μαθηματικών έχει μεγάλη σημασία αν θέλουμε να συμβάλλουμε στη γενική ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών για συλλογιστική, ανάλυση και οπτικοποίηση. Από αυτή την άποψη, καθίσταται απαραίτητο να εξετάζονται οι σημειωτικές αναπαραστάσεις ως νοητικές κατασκευές και όχι μόνο ως επιστημολογικά αναγκαίες για πρόσβαση σε αντικείμενα γνώσης (Duval, 1995a). Έτσι φαίνεται ότι η αντίθεση νοητικών και σημειωτικών αναπαραστάσεων δεν είναι πλέον σημαντική (Duval, 2000).

Μία από τις δυσκολίες της οπτικοποίησης που έχουν εντοπιστεί τα τελευταία χρόνια είναι η έλλειψη διάκρισης μεταξύ μιας γεωμετρικής φιγούρας και του σχήματος που την αναπαριστά (Laborde, 1988). Η δυσκολία σύνδεσης γεωμετρικών αντικειμένων και των αναπαραστάσεών τους, κατά τον Poincare (1902) οφείλεται στους δύο διαφορετικούς χώρους που θεωρεί ότι ανήκουν στην αναπαράσταση. Στον γεωμετρικό (geometrical) και τον αναπαραστατικό (representative) χώρο. Οι αναπαραστάσεις είναι απλώς προϊόντα των αισθήσεών μας. Και οι δύο χώροι είναι συνεχείς και άπειροι αλλά, ενώ ο γεωμετρικός είναι τρισδιάστατος, ομογενής (δηλαδή όλα του τα σημεία είναι ίσης σημασίας) και ισοτροπικός (δηλαδή οι ιδιότητες των αναπαραστάσεων δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση), ο αναπαραστατικός χώρος, ως πλαίσιο των αναπαραστάσεών μας, είναι δυσδιάστατος, μη-ομογενής και ανισοτροπικός (δηλαδή υπάρχουν σημεία και κατευθύνσεις με διαφορετική δύναμη). Οι διαφορές μεταξύ των δύο χώρων είναι αυτές που δημιουργούν τις δυσκολίες στις αναπαραστάσεις. Μαθητές και μαθηματικοί χρησιμοποιούν τον χώρο αλλιώς. Οι μαθηματικοί δουλεύουν στον γεωμετρικό χώρο και ταυτόχρονα ελέγχουν, ή διορθώνουν, τις πληροφορίες που έρχονται από τον αναπαραστατικό. Γνωρίζοντας τους περιορισμούς του αναπαραστατικού χώρου χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις ως είδος κωδικοποιημένου σχήματος όπου αναφέρονται κάποιες, όχι όλες, ιδιότητες του γεωμετρικού χώρου. Οι μαθητές όμως συγχέουν τους δύο χώρους εργασίας και συχνά δουλεύουν στον αναπαραστατικό (Mesquita, 1998).

Ο Duval (1993) κάνει λόγο για γνωστικό παράδοξο κατά την πρόσβαση στη γνώση των μαθηματικών αντικειμένων. Υπογραμμίζει ότι υπάρχει σύγκρουση μεταξύ δύο αντίθετων απαιτήσεων. Οι μαθητές πρέπει να ξεχωρίσουν το αντικείμενο που αντιπροσωπεύεται από τη σημειωτική του αναπαράσταση αλλά από την άλλη δεν μπορούν να έχουν πρόσβαση στο αντικείμενο χωρίς τη σημειωτική του αναπαράσταση. Δηλαδή χρειάζεται μια εννοιολογική κατάκτηση του ίδιου του αντικειμένου για να κατανοήσουν τη σημειωτική δραστηριότητα και από την άλλη μπορούν να έχουν πρόσβαση στο αντικείμενο μόνο μέσω αυτής της σημειωτικής αναπαράστασης. Μπερδεύουν έτσι το αντικείμενο με την αναπαράστασή του. Επομένως, απαιτείται ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων και ικανότητα επιλογής ή συνδυασμού τους

ανάλογα με το έργο που καλούμαστε να επιλύσουμε. Για να διακρίνει ο μαθητής τι είναι σχετικό και τι όχι, να αναγνωρίσει και να διακρίνει τα απαραίτητα σε κάθε σημειωτική αναπαράσταση θα πρέπει να έχει καταφέρει να κατασκευάσει συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης (registers κατά τον Duval) και να έχει αναπτύξει ικανότητα μετατροπής αναπαραστάσεων που αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο. Η μετατροπή αυτή, απαιτεί γνωστικό διαχωρισμό του αναπαριστώμενου αντικειμένου και του περιεχομένου της συγκεκριμένης σημειωτικής αναπαράστασης μέσω της οποίας εισήχθη αρχικά και χρησιμοποιήθηκε.

Από την άλλη υπάρχει μια γνωστική αδυναμία διαχωρισμού οποιουδήποτε περιεχομένου σημειωτικής αναπαράστασης και του αρχικά αναπαριστώμενου αντικειμένου όταν δεν υπάρχει άλλη δυνατή πρόσβαση στο μαθηματικό αντικείμενο παρά μόνο σημειωτικά. Αυτή η σύγκρουση οδηγεί στον διαχωρισμό των δύο αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου σαν να ήταν δύο διαφορετικά αντικείμενα. Συνεπώς τα συστήματα αναπαράστασης παραμένουν διαχωρισμένα (compartmentalized) και υπάρχει μόνο κατακερματισμένη κατανόηση. Δεν υπάρχει επιλογή μεταξύ καλής ή καλύτερης αναπαράστασης αλλά αυτό που χρειάζεται είναι συντονισμός μεταξύ διαφορετικών συστημάτων απεικόνισης, ικανότητα που παρέχει κάτι σαν επέκταση της νοητικής ικανότητας. Η πρόσβαση στο αντικείμενο και η εννοιοποίησή του (conceptualization) είναι δυνατή μόνο μέσα από σημειωτική διαδικασία και πρέπει να σφυρηλατείται από μία πολύπλευρη διαλεκτική αλληλεπίδραση διάφορων σημειωτικών τρόπων μεταξύ άλλων της γλώσσας και των συμβόλων. Από αυτή την οπτική, πράγματι, είναι παραπλανητική η αντίθεση που θέλει τη κατανόηση να είναι εννοιολογική ή καθαρά νοητική και τις σημειωτικές αναπαραστάσεις να είναι εξωτερικές. Στη πραγματικότητα οι νοητικές αναπαραστάσεις που είναι χρήσιμες και συναφείς στα μαθηματικά είναι πάντα κατά τον Duval, εσωτερικοποιημένες σημειωτικές.

Ο ρόλος των σημειωτικών αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδης αφού είναι ο μόνος τρόπος πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα, μιας και αυτά τα αντικείμενα δεν ανήκουν στην εμπειρία μας και έτσι κάθε μαθηματική έννοια απαιτεί τη χρήση και κάποιας σημειωτικής αναπαράστασης. Η γνωστική διαδικασία που βρίσκεται πίσω από μαθηματικές πρακτικές, συνδέεται αυστηρά με μια πολύπλοκη σημειωτική δραστηριότητα που προϋποθέτει τον συντονισμό τουλάχιστον δύο συστημάτων αναπαράστασης, το πρώτο αφορά τη λεκτική έκφραση ιδιοτήτων ή αριθμητικών εκφράσεων μεγεθών και το δεύτερο είναι η οπτικοποίηση (Duval, 2006).

2.2.3 Λεκτικό και Οπτικό σύστημα αναπαράστασης

Η εκτόπιση του "γραφτού" από τον "οπτικό" λόγο είναι ένα γεγονός τόσο σοβαρό και με τόσο βαθιές συνέπειες όσο και η μετάβαση από τον "προφορικό" στον "γραφτό λόγο" (Kilrane, 1992). Πολλοί θεωρούν ότι οι περισσότεροι από μας έχουμε πιο έντονα εδραιωμένα σχήματα παρά λέξεις για να αναπαραστήσουμε την ίδια πληροφορία. Αυτό συμβαίνει επειδή το γνωστικό

φορτίο που σχετίζεται με τα σχήματα μπορεί να επιβαρύνει λιγότερο τη μνήμη εργασίας (Larkin & Simon, 1987; Koedinger & Anderson 1990).

Η γλώσσα όμως παραμένει πολύ σημαντική για τον γνωστικό έλεγχο και την κατανόηση κάθε μαθηματικής δραστηριότητας. Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις, τα γραφήματα και άλλα συστήματα αναπαράστασης δεν χρησιμεύουν ούτε για διαισθητικό έλεγχο ούτε για να οργανώσουν και να ερμηνεύσουν δεδομένα σε άλλους τομείς. Το καθένα έχει τη δική του οργάνωση και κανόνες λειτουργίας και δεν επιτυγχάνεται μάθηση χωρίς την κατανόηση αυτών (French National Assessment, 1992, 1996).

Το πώς η οπτική πληροφορία αναπαριστάνεται στο μυαλό μας συζητήθηκε από πολλές θεωρίες, όλες όμως συμφωνούν ότι υπάρχει μια εσωτερική οπτική αναπαράσταση (image) και ότι είναι θεμελιωδώς διαφορετική από τη λεκτική (Gal & Linchevski, 2010). Έχουμε ένα πλήθος θεωριών από τους ψυχολόγους, και μάλιστα αντικρουόμενες, για το αν οι νοητικές αναπαραστάσεις είναι λεκτικές ή εικονικές. Η αναπαράσταση ως «εικόνα στο μυαλό», υποστηρίχθηκε από αρκετούς όπως ο Pylyshyn, σύμφωνα με τον οποίο οι πληροφορίες δεν μπορούν να αποθηκευτούν με τη μορφή μη επεξεργασμένων νοητικών "φωτογραφιών" γιατί θα υπήρχαν πάρα πολλές τέτοιες και η πρόσβαση σε αυτές θα ήταν αδύνατη. Γι' αυτό οι ανακαλούμενες εικόνες θα πρέπει να είναι εννοιολογικής φύσης και πρέπει να αντλούνται από πληροφορίες αποθηκευμένες σε πιο αφηρημένη μορφή. Επομένως, οι σχηματιζόμενες εικόνες δεν είναι οι ίδιες οι αναπαραστάσεις, αλλά υποπροϊόντα εσωτερικών αφηρημένων αναπαραστάσεων. Παρά ταύτα δεν μπορούμε να μιλάμε για συνείδηση χωρίς ταυτόχρονα να εμπλέκουμε την ύπαρξη εικόνων (Pylyshyn, 1973).

Λεκτικές και οπτικές πληροφορίες δεν επεξεργάζονται καν στο ίδιο μέρος του εγκεφάλου (Roland & Friberg, 1985), έτσι η θεωρία διπλού κώδικα (dual-code theory) του Paivio (1986, 2007), για παράδειγμα, προτείνει δύο ανεξάρτητα αλλά συνδεδεμένα λειτουργικά συστήματα τα οποία επεξεργάζονται οπτικές και λεκτικές πληροφορίες. Ο Paivio (1977, 1978) υποστηρίζει ότι οι εικόνες είναι πλούσια αναπαραστατικές (αν όχι πιστά αντίγραφα της πραγματικότητας). Μιας και η μνήμη είναι διπλή παρέχει τον τρόπο να σκεφτόμαστε σε εικόνες χωρίς καμία γλωσσική υποστήριξη. Τα δύο συστήματα, οπτικό και λεκτικό, είναι ανεξάρτητα αφού το ένα λειτουργεί χωρίς το άλλο. Μια οπτική πληροφορία οργανώνει συγχρόνως διαφορετικά συστατικά ενός πολύπλοκου αντικειμένου που είναι διαθέσιμο (αν και όχι απαραίτητα προσβάσιμο) άμεσα στη μνήμη. Η λεκτική πληροφορία, αντίθετα, οργανώνεται σειριακά σε δομές υψηλότερης τάξης αντικατοπτρίζοντας τα προσωρινά χαρακτηριστικά συστημάτων συμπεριλαμβανομένων των ακουστικών και της ομιλίας (Paivio & Desrochers, 1980). Ταυτόχρονα όμως είναι και συνδεδεμένα γιατί οι μη λεκτικές πληροφορίες μπορούν νοητικά να μεταφραστούν σε λεκτικές και αντίστροφα. Άλλη εκδοχή της «εικόνας στο μυαλό» βρίσκουμε από τον Kosslyn [1978; Kosslyn & Pomerantz, 1977] ο οποίος σε αντίθεση με τον Paivio θεωρεί ότι οι εικόνες δεν έχουν μακροπρόθεσμη ικανότητα μνήμης. Οι μακροπρόθεσμες

πληροφορίες αποθηκεύονται ως αφηρημένες αναπαραστάσεις και οι εικόνες παράγονται από αυτές.

Όλες οι παραπάνω θεωρίες δεν εξηγούσαν όμως πώς οι λεκτικές πληροφορίες μεταφέρονταν στο μυαλό σε μη λεκτικές και αντίστροφα, έτσι αναπτύχθηκαν οι θεωρίες λεκτικής ή συμβολικής αναπαράστασης (propositional or symbolic representation theory of imagery) οι οποίες βασίστηκαν στην ιδέα ότι οι γνώσεις ενός ατόμου θα μπορούσαν να αναπαριστούνται στη μνήμη με ομάδες προτάσεων και η κοινή μορφή αυτών των προτάσεων θα μπορούσε να κάνει ικανή την παραγωγή τόσο λεκτικών πληροφοριών όσο και νοητικών εικόνων.

Τελικά, παρόλο που η σπουδαιότητα της απεικόνισης στη σκέψη και τη μάθηση ήταν αδιαμφισβήτητη, οι διαφορετικές απόψεις για τον ορισμό του τι είναι λεκτική και τι εικονική απεικόνιση αποδείχθηκαν απογοητευτικές για τους ερευνητές και ψυχολόγους στη δεκαετία του '70 και τους οδήγησε σε απροθυμία να χρησιμοποιούν τον όρο απεικόνιση μέχρι να ξεκαθαρίσει το θέμα του ορισμού της. Όπως σωστά επισημαίνει όμως ο Clements (1981), δεν είναι απαραίτητο να ορίσουμε πλήρως μια έννοια για να μελετήσουμε την επίδρασή της.

Μερικές οπτικές πληροφορίες όπως το σχήμα των γεωμετρικών αντικειμένων, αποθηκεύονται σύμφωνα με τη χωρική τους θέση ενώ οι λέξεις αποθηκεύονται σε γραμμική σειρά (Santa, 1977). Ακόμη, η μνήμη για εικονικό υλικό είναι ανώτερη από τη μνήμη για λεκτικό υλικό (Paivio, 1986). Κάποιες δυσκολίες μπορούν να αποδοθούν στις διαφορετικές αναπαραστάσεις μας για εικονικές και λεκτικές πληροφορίες. Η σύγκρουση μεταξύ αυτών των δύο μορφών πληροφορίας μπορεί να παραγάγει δυσκολίες στο γράψιμο δεδομένων, στην ανάγνωση δεδομένων και στην επικοινωνία μεταξύ μαθητή και δασκάλου.

Οι Monoyiou et al (2007) αναφέρουν ότι μια αναπαράσταση δεν είναι εικονική έννοια, εννοώντας ότι δεν είναι πιστή αντιγραφή του αντικειμένου που αναπαριστά. Βέβαια κάθε αναπαράσταση οφείλει να παρουσιάζει κάποια ομοιότητα με το αναπαριστώμενο αντικείμενο αλλά αυτή εξαρτάται από το πλαίσιο. Αφού η αναπαράσταση δεν είναι εικόνα (icon) και εφόσον έχουμε μόνο δύο είδη αναπαράστασης, την εικονική και τη λεκτική, τότε είναι λεκτική ιδιότητα και εξαρτάται από τη γλώσσα. Αυτή η κατεύθυνση έχει δύο πλεονεκτήματα: α) μπορούμε να περιγράψουμε μια εικόνα χρησιμοποιώντας πλούσια γλώσσα, β) δεν αναπαριστούνται όλες οι λεκτικές εκφράσεις μέσω εικόνας. Η γλώσσα είναι απαραίτητος παράγοντας αναπαράστασης γιατί κάθε αναπαράσταση οφείλει να περιέχει μερικά λεκτικά στοιχεία. Κάθε αναπαράσταση εξαρτάται από τη γλώσσα.

Στο ίδιο μήκος κύματος κινείται και ο Duval που θεωρεί ότι η εξέλιξη των νοητικών αναπαραστάσεων δεσμεύεται από την απόκτηση και την εσωτερικοποίηση σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης αρχίζοντας με τη γλώσσα (Duval, 1999).

Ο Krutetskii (1976) διαπίστωσε σε έρευνες που έκανε στη Σοβιετική Ένωση ότι η λεκτική-λογική συνιστώσα είναι αυτή που καθορίζει το επίπεδο της

μαθηματικής ικανότητας ενός μαθητή, ενώ η οπτικο-χωρική καθορίζει τον τύπο αυτής της ικανότητας.

Κάποιοι υποστηρίζουν ότι πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά με την οποία θα παρουσιάζονται οι λεκτικές και οι εικονικές πληροφορίες για το ίδιο έργο ώστε να έχουν θετική επίδραση στη μάθηση. Θεωρούν ότι δεν θα πρέπει να παρουσιάζονται ταυτόχρονα, αλλά να δίνεται πρώτα η εικόνα και μετά το κείμενο. Αυτό γιατί όταν γίνεται η επεξεργασία του κειμένου στον εγκέφαλο απαιτείται μεγαλύτερο μέρος της μνήμης εργασίας, αφήνοντας έτσι λίγη χωρητικότητα για επεξεργασία της εικόνας που έρχεται μετά (Verdi & Kulhavy, 2002). Ο Schnotz συμφωνεί και αναφέρει ότι κάτι τέτοιο θα ήταν πιθανών καλύτερο γιατί ένα κείμενο δεν περιγράφει ποτέ ένα θέμα με μεγάλη λεπτομέρεια για να επιτρέψει μόνο ένα είδος νοητικής αναπαράστασης. Άρα ένα νοητικό μοντέλο οπτικής εικόνας που χτίζεται μόνο από το κείμενο είναι πιθανό να διαφέρει από την εικόνα που παρουσιάζεται στη συνέχεια και επομένως να παρεμβάλλεται στην εικόνα. Αυτή η παρεμβολή μπορεί να αποφευχθεί αν παρουσιάζεται πρώτα η εικόνα (Schnotz, 2002).

2.2.4 Οπτική αντίληψη – Οπτική απεικόνιση - Όραση - Οπτικοποίηση

Ο όρος οπτική αντίληψη (Visual perception) είναι κατά τον Hoffer (1977), η ικανότητα "να βλέπω και να ερμηνεύω" και παρέχει άμεση πρόσβαση στο αντικείμενο. Η όραση (vision), είναι η κυριότερη πηγή πληροφοριών για τον κόσμο (Adams and Victor, 1993).

Λέγοντας visual imagery - οπτική απεικόνιση - θα κρατήσουμε τον ορισμό του Pylyshyn (1973) που τη θέτει ως την εικόνα στο "μάτι του μυαλού", δηλαδή τη νοητική δραστηριότητα που ανταποκρίνεται στην αντίληψη ενός αντικειμένου όταν αυτό δεν είναι μπροστά μας αλλά παραμένει στο μυαλό (Lean & Clements, 1981), (Hebb's definition of imagery: Στο Suwarsono, 1982, p. 270). Ένα νοητικό σχήμα που απεικονίζει οπτικές χωρικές ιδιότητες κατά τη Presmeg (1986).

Ο Duval (1999) αναφέρεται στην οπτική αντίληψη-όραση αλλά κατ' επέκταση και στην οπτική απεικόνιση. Αναφέρει ότι η όραση ως αίσθηση, έχει δύο σημαντικές γνωστικές λειτουργίες την επιστημολογική και τη συνοπτική. Η πρώτη συνίσταται στην παραχώρηση άμεσης πρόσβασης σε κάθε αντικείμενο. Γι' αυτό και η οπτική αντίληψη θεωρείται μοντέλο για την επιστημολογική έννοια της διαίσθησης. Τίποτα δεν είναι πιο πειστικό από αυτό που βλέπουμε και υπό αυτή την έννοια η όραση είναι το αντίθετο της αναπαράστασης ακόμη και των νοητικών εικόνων, γιατί η αναπαράσταση είναι κάτι που στέκεται στη θέση κάτι άλλου (Peirce, 1906). Η συνοπτική λειτουργία συνίσταται στην ταυτόχρονη σύλληψη διάφορων αντικειμένων ή ολόκληρου του πεδίου. Υπό αυτή την έννοια η όραση είναι αντίθετη του λόγου ή της αφαίρεσης, που απαιτεί μια ακολουθία από εστιασμένες πράξεις πάνω σε μια σειρά δηλώσεων.

Ακολούθως, η οπτικοποίηση (visualization) αναφέρεται γενικά στην "ικανότητα των ατόμων να αντιπροσωπεύουν, μετασχηματίζουν, γενικεύουν, επικοινωνούν, τεκμηριώνουν και να αντιδρούν σε οπτικές πληροφορίες" (Hershkowitz, Ben Haim, Holes, Lappan, Mitchelmore, & Vinner, 1990). Είναι, κατά την Presmeg (1997), η διαδικασία που εμπλέκεται στη κατασκευή και μετασχηματισμό οπτικών νοητικών εικόνων.

Η οπτικοποίηση χρησιμοποιείται και ως ουσιαστικό (δηλαδή το προϊόν, η οπτική εικόνα) και ως ρήμα (η διαδικασία, η δραστηριότητα) (Bishop, 1989). Προσφέρει μια μέθοδο να δούμε τα "αφανέρωτα" (McCormick et al, 1987). Υπερβαίνει την αδιαμφισβήτητη (φυσιολογική) αίσθηση της όρασης (Jackson, 2002). Ως βιολογικά και κοινωνικοπολιτικά όντα ενθαρρυνόμαστε και φιλοδοξούμε να βλέπουμε όχι μόνο ότι γίνεται αντιληπτό με το "μάτι" αλλά και αυτό που δεν είμαστε ικανοί να δούμε. Η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, της ερμηνείας, της χρήσης και του προβληματισμού πάνω σε εικόνες και διαγράμματα στο μυαλό μας, στο χαρτί και σε άλλα τεχνολογικά μέσα, με σκοπό την αποτύπωση και την επικοινωνία πληροφοριών, τη σκέψη και την ανάπτυξη προηγούμενων άγνωστων ιδεών και την προχωρημένη κατανόηση τους, καλείται οπτικοποίηση (Arcavi, 2003). Μπορεί να συνοδεύσει μια εξέλιξη συμβόλων μιας και η οπτικοποίηση λόγω του συγκεκριμένου χαρακτήρα της μπορεί να είναι "βασικός παράγοντας δημιουργίας του αισθήματος της αυταπόδειξης και της αμεσότητας" (Fischbein, 1987). Η οπτικοποίηση είναι πολύτιμη στην υποστήριξη της διαίσθησης και στο σχηματισμό εννοιών. Ο Fischbein (1987) αναφέρει ότι μια χαρακτηριστική ιδιότητα της διαισθητικής νόησης είναι η αμεσότητα, και η οπτικοποίηση πολύ συχνά παίρνει μέρος σε αυτή.

Η οπτικοποίηση σύμφωνα με τον Duval (1999) εμφανίζει μόνο τη συνοπτική λειτουργία, δεν είναι διαίσθηση, αλλά αναπαράσταση και υπάρχουν πολλά γεωμετρικά συστήματα αναπαράστασης γι' αυτή. Είναι διαφορετική από την αντιληπτική ικανότητα που δίνει άμεση πρόσβαση στο αντικείμενο και βασίζεται στην παραγωγή μιας σημειωτικής αναπαράστασης. Δεν παρουσιάζει τρισδιάστατα τα αντικείμενα όπως είναι πραγματικά αλλά απλώς οργανώνει σχέσεις μεταξύ αναπαριστώμενων μονάδων. Στον βαθμό που η κατανόηση του κειμένου ή του συλλογισμού περιλαμβάνει τη σύλληψη όλης της δομής δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς οπτικοποίηση και γι' αυτό η οπτικοποίηση κάνει ορατό ό,τι δεν είναι προσβάσιμο με την όραση. Είναι γνωστική δραστηριότητα, εγγενώς σημειωτική, ενώ δεν είναι ούτε νοητική ούτε φυσική. Οι όροι *mental image*, *mental representation*, *mental physical* είναι ισοδύναμοι και αποτελούν επέκταση της οπτικής αντίληψης ή απλώς, οπτικοποίηση. Η οπτικοποίηση απαιτεί έτσι ειδική εκπαίδευση για κάθε σύστημα αναπαράστασης. Οι γεωμετρικές φιγούρες δεν είναι ευθέως διαθέσιμες, όπως οι εικόνες και δεν πρέπει να περιοριζόμαστε στην κατασκευή τους γιατί αυτή επικεντρώνεται γραμμικά σε κάποιες μονάδες και ιδιότητες, ενώ η οπτικοποίηση συνίσταται στην άμεση σύλληψη όλης της διαμόρφωσης των σχέσεων και στη διάκριση του τι είναι σχετικό και τι όχι. Η οπτικοποίηση έχει έναν ισχυρό συμπληρωματικό ρόλο σε διάφορες πτυχές της μάθησης. Μία από αυτές είναι να λειτουργήσει ως

τρόπος επίλυσης της σύγκρουσης μεταξύ (ορθών) συμβολικών σχέσεων και (εσφαλμένων) διαισθητικών (Arcavi, 2003).

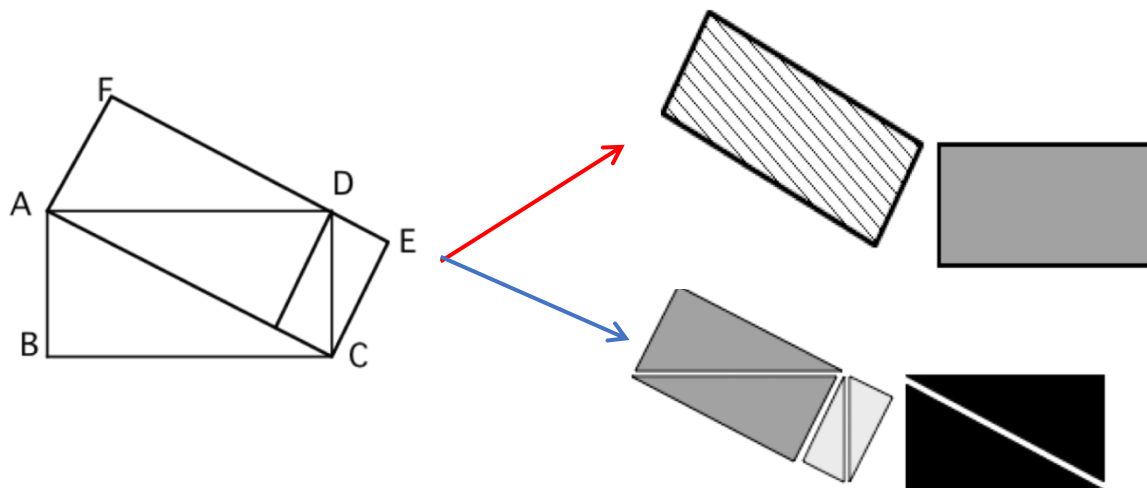
2.2. Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος

Δύο βασικά στοιχεία εμπλέκονται στη γεωμετρία: το σχήμα το οποίο μπορούμε να παρατηρήσουμε και η γλώσσα με την οποία μπορούμε να εξηγήσουμε (Duval, 2006). Τα σχήματα στη γεωμετρία, ακόμη και αν είναι κατασκευασμένα με ακρίβεια, είναι απλώς αναπαραστάσεις συγκεκριμένων αντικειμένων που δεν σχετίζονται πάντα με την πραγματικότητα και δεν μπορούν να ληφθούν ως αποδείξεις (Duval, 1999). Κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της ίδιας έννοιας χωρίς να μπορεί να την περιγράψει πλήρως. Η επιτυχία σε μια αναπαράσταση δεν εγγυάται την επιτυχία σε έναν άλλο τύπο αναπαράστασης της ίδιας έννοιας ή του ίδιου προβλήματος. (Γαγάτσης & Σιακαλλή, 2004). Δεν είναι βέβαιο ότι οι μαθητές, ενώ «μεταφράζουν» σωστά δεδομένα από μια πληροφοριακή εικόνα για παράδειγμα, συνειδητοποιούν ταυτόχρονα τη συμβολική σχέση μεταξύ της αναπαράστασης και της οντότητας στην οποία αντιστοιχεί.

Μια ιδιαίτερη αναπαράσταση στη γεωμετρία είναι το γεωμετρικό σχήμα. Ο Duval (1995; 1998; 2005) και η Mesquita (στο Harada et al., 2000) διακρίνουν τους ακόλουθους τέσσερις τύπους γνωστικής κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος:

- 1) Αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension): σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του.
- 2) Ακολουθιακή κατανόηση (sequential apprehension): απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νόμους της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες.
- 3) Λεκτική κατανόηση (discursive apprehension): συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική κατανόηση, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του.
- 4) Λειτουργική κατανόηση (operative apprehension): μας εξασφαλίζει πρόσβαση στη λύση του προβλήματος.

Ειδικότερα, η αντιληπτική κατανόηση αναφέρεται στην αναγνώριση ενός σχήματος σε επίπεδο ή βάθος. Η αντίληψη κάποιου για το τι δείχνει το σχήμα καθορίζεται από τους νόμους της εικονικής οργάνωσης και τις εικονικές ενδείξεις. Η ικανότητα να βρίσκουμε σχήματα και να αναγνωρίζουμε αρκετά υποσχήματα χαρακτηρίζει την αντιληπτική κατανόηση. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να δούμε το σχήμα ABCEDF παρακάτω με δύο διαφορετικούς τρόπους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα(1).



Σχήμα 1

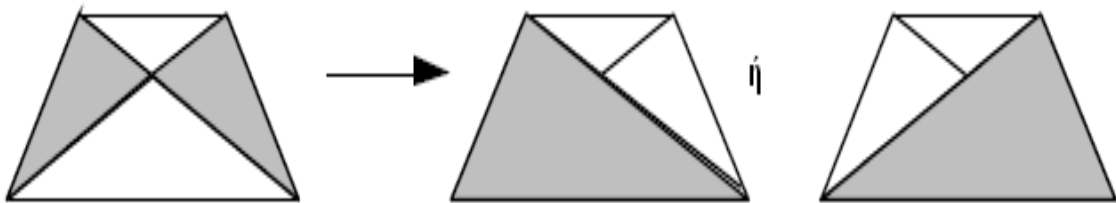
Η ακολουθιακή κατανόηση είναι απαραίτητη κάθε φορά που κάποιος πρέπει να κατασκευάσει ένα σχήμα ή να περιγράψει την κατασκευή του. Η οργάνωση των επιμέρους βασικών σχημάτων που παίρνουν μέρος στην κατασκευή δεν εξαρτάται από αντιληπτικούς νόμους και ενδείξεις, αλλά από τεχνικούς περιορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, όταν σε μια μαθηματική εργασία πρέπει να κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο ενός τμήματος, το σχήμα αλλάζει σε κάθε βήμα της κατασκευής. Με άλλα λόγια, δεν έχουμε ένα μόνο σχήμα, αλλά μερικά διαδοχικά γεωμετρικά σχήματα.

Η λεκτική κατανόηση σχετίζεται με το γεγονός ότι οι μαθηματικές ιδιότητες δεν καθορίζονται μέσω αντιληπτικής κατανόησης. Σε οποιαδήποτε γεωμετρική αναπαράσταση, η αντιληπτική αναγνώριση γεωμετρικών ιδιοτήτων πρέπει να παραμένει υπό τον έλεγχο δηλώσεων (π.χ. ονομασία, ορισμός, θεώρημα). Στην πραγματικότητα, η αντίληψη του λόγου σχετίζεται με τις εξηγήσεις του μαθητή και τις αποδείξεις που σχετίζονται με μια γεωμετρική εργασία.

Η λειτουργική κατανόηση μας δίνει μια εικόνα της λύσης ενός προβλήματος όταν εξετάζουμε ένα σχήμα.

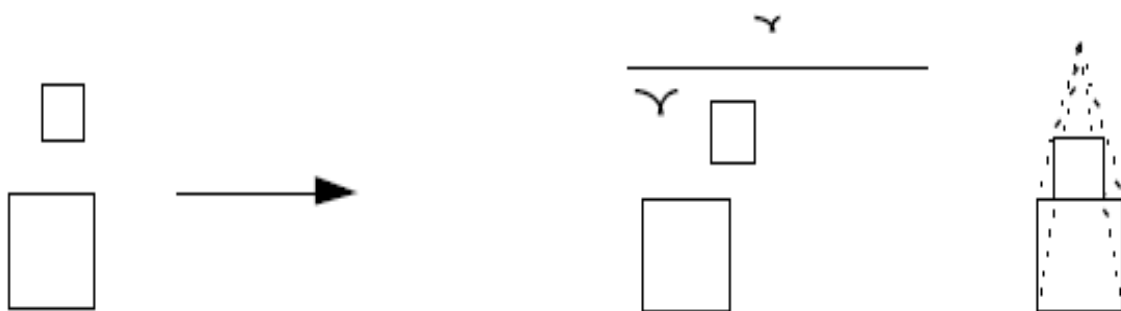
Στην παρούσα εργασία και συγκεκριμένα για την παρουσίαση λύσεων των μαθητών στα προβλήματα των φύλλων εργασίας, μας ενδιαφέρει η περεταίρω ανάλυση της λειτουργικής κατανόησης και ιδιαίτερα ο μερολογικός τρόπος μετασχηματισμού ενός σχήματος που παραπέμπει σε μια αναδιαμόρφωση: να χωριστεί ένα σχήμα σε μέρη και να ενωθούν σε ένα νέο ή να αλλάξει η θέση ενός υποσχήματος έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα νέο σχήμα. Οι δύο πιο πάνω ερευνητές -Mesquita, Duval- βασίζουν τη λειτουργική κατανόηση στους διάφορους τρόπους τροποποίησης που δύναται να εκτελεστούν σε ένα σχήμα. Συγκεκριμένα, η Mesquita (στο Harada et al., 2000) διακρίνει τέσσερις τροποποιήσεις : τη μερολογική, τη συνολική, την οπτική και τη θεσιακή, ενώ υπάρχει και η διάκριση του Duval (1995, 1999). Βάσει της διάκρισης του Duval, έχουμε τρεις τροποποιήσεις που είναι οι εξής:

1. **Μερολογικές (merologic):** αφορούν τη διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στον συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων. Συνεπώς, προκύπτει μια αλλαγή του τρόπου με τον οποίο το σχήμα παρουσιάζεται με την πρώτη ματιά. Την πιο τυπική λειτουργία σε αυτό το είδος τροποποίησης αποτελεί η αναδιαμόρφωση του σχήματος (reconfiguration).



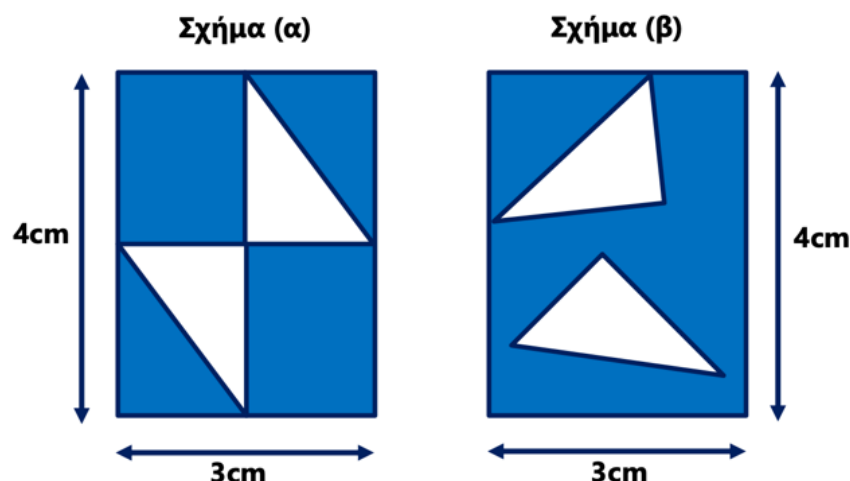
Σχήμα 2: Διάσπαση του ίδιου σχήματος σε διαφορετικά

2. **Οπτικές (optic):** επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με τον τρόπο αυτό, τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή. Επίπεδα σχήματα δύναται να θεωρηθούν ως τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο. Επιπλέον, μια τυπική λειτουργία είναι να παρουσιάσεις δύο όμοια σχήματα επικαλυμμένα, στο βάθος, ώστε το μικρότερο σχήμα να φαίνεται σαν να ήταν το μεγαλύτερο από απόσταση.



Σχήμα 3: Οπτικές τροποποιήσεις

3. **Αλλαγή θέσης (place way):** αλλάζει ο προσανατολισμός του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας. Αποτελεί τον ασθενέστερο μετασχηματισμό. Επηρεάζει κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, οι οποίες οπτικώς σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές.



Σχήμα 4: Έργο που δόθηκε στους μαθητές για την παρούσα εργασία με αλλαγή θέσης

Οι διάφορες αυτές λειτουργίες μπορούν να εκτελεστούν είτε νοερά, είτε φυσικά. Συνθέτουν μια συγκεκριμένη επεξεργασία του σχήματος, η οποία του προσδίδει μια χειριστική λειτουργία. Όπως ο Polya (1945) αναφέρει, στο βιβλίο του “How to solve it”, οι λειτουργίες αυτές μπορούν να φανερώσουν την «ιδέα», η οποία θα μας οδηγήσει στη λύση του προβλήματος.

Θα μπορούσαμε, συνεπώς, να πούμε πως η λειτουργική κατανόηση αποτελεί ένα είδος ευφυούς οργάνωσης του σχήματος, αφού κατά τον Piaget, η νοητική αντίληψη ενός αντικειμένου εμπεριέχει ευφυΐα. Με τη χρήση της ευφυΐας το άτομο καθίσταται ικανό να εντοπίζει ομοιότητες, διαφορές και χωρικές σχέσεις του αντικειμένου (Κολέζα 2003).

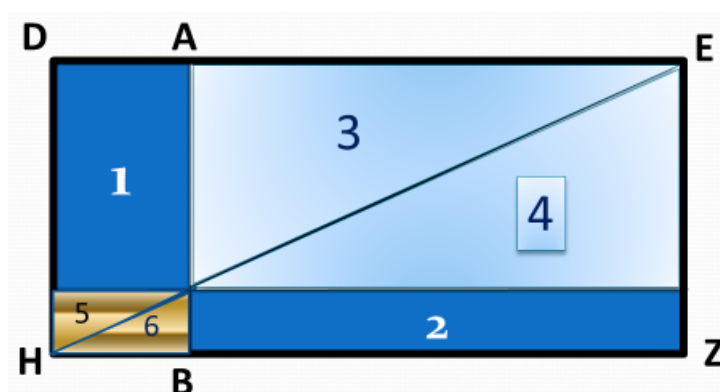
Συνεχίζοντας την αναφορά του για τη λειτουργική κατανόηση, ο Duval (1999), επιχειρεί να κάνει σαφέστερη τη διαφορετικότητά της από την αντιληπτική κατανόηση. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι η αντιληπτική κατανόηση σταθεροποιεί με την πρώτη ματιά την όψη κάποιων σχημάτων, κάνοντας τα στατικά. Η λειτουργική κατανόηση εμπερικλείει νοητική αναδιοργάνωση του σχήματος, έτσι ώστε να προκύψουν σχέσεις μη προφανείς από την αντιληπτική κατανόηση. Αποτελεί, δηλαδή, μια ευρετική επεξεργασία του σχήματος, κατά την οποία οι ιδιότητες του σχήματος δεν αλλοιώνονται (von Sommers, 1984 στο Κολέζα, 2003).

Για την επίλυση όμως, απαιτείται η κατανόηση της οργάνωσης του σχήματος. Στη λειτουργική κατανόηση το δοσμένο σχήμα αποτελεί σημείο αναφοράς για τη διερεύνηση άλλων σχηματοποιήσεων, μέσω των τροποποιήσεων που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Συνεπώς, δημιουργούνται πολλαπλές αλυσίδες σχημάτων, μια εκ των οποίων ανοίγει το δρόμο προς τη λύση του προβλήματος. Η ικανότητα σκέψης ή σχεδίασης επιπλέον μονάδων σε δοσμένο σχήμα υποδηλώνει την ύπαρξη λειτουργικής κατανόησης (Duval, 1999).

Ένα κλασικό παράδειγμα που σχετίζεται με τη λειτουργική κατανόηση ενός γεωμετρικού σχήματος είναι το ακόλουθο πρόβλημα του Ευκλείδη:

Στο παρακάτω ορθογώνιο φέρουμε από ένα σημείο της διαγώνιου ΕΗ δύο κάθετα τμήματα στις πλευρές του ορθογώνιου. Το πρόβλημα ζητάει να δείξουμε ότι το ορθογώνιο 1 είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο 2, ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου στη διαγώνιο ΕΗ.

Το πρόβλημα επιλύεται αφαιρώντας τα ίσα μέρη 3 και 4 και επίσης τα ίσα μέρη 5 και 6 από τα τρίγωνα DEH και EHZ.



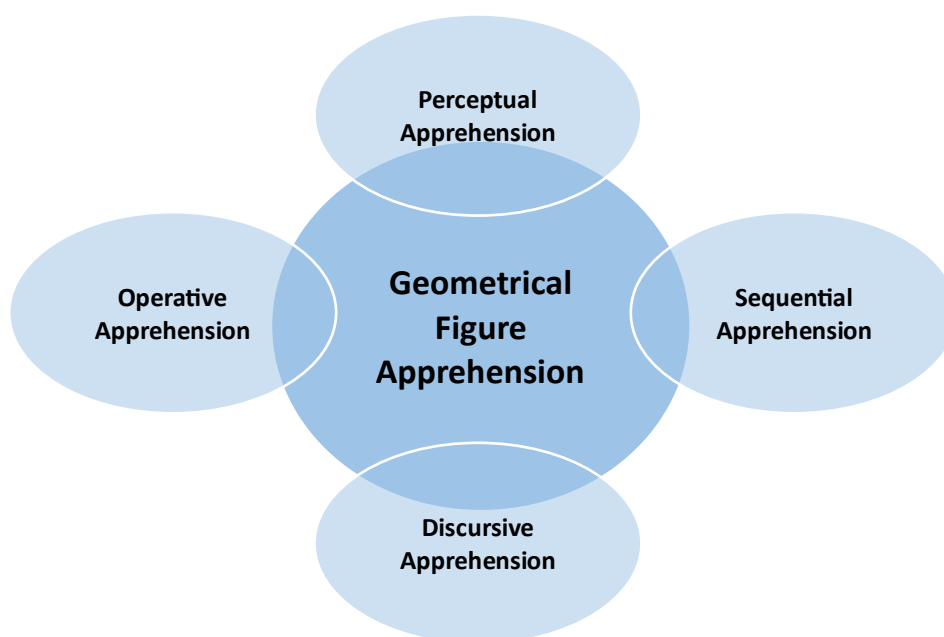
Σχήμα 5: Το πρόβλημα του Ευκλείδη

Είναι προφανές ότι η μερολογική κατανόηση, που είδαμε στο σχήμα 1, είναι απαραίτητη για την επίλυση του παραπάνω γεωμετρικού έργου. Ωστόσο, είναι επίσης προφανές ότι η αντιληπτική κατανόηση του αριθμού είναι το πρώτο σημαντικό βήμα για την επίλυση του προβλήματος. Τέλος, οι μαθητές πρέπει να εξηγήσουν το σκεπτικό τους σχετικά με την εύρεση λύσης για το συγκεκριμένο πρόβλημα και ως εκ τούτου και η λειτουργική κατανόηση του σχήματος είναι επίσης αναγκαία.

Σε πολλά προβλήματα γεωμετρίας, όπως στο παραπάνω, και οι τέσσερις τύποι γεωμετρικής κατανόησης-αντίληψης σχημάτων είναι απαραίτητοι για να οδηγηθούμε στη λύση των προβλημάτων. Παίρνοντας ως παράδειγμα το παραπάνω γνωστό πρόβλημα του Ευκλείδη, και σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια και τα τρία είδη κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος είναι παρόντα: κατά πρώτο λόγο η αντιληπτική κατανόηση είναι απαραίτητη για την αναγνώριση του προβλήματος. Ο μαθητής πρέπει να διακρίνει τα διαφορετικά υποσχήματα, που δημιουργούνται από τις δύο κάθετες γραμμές. Επιπλέον, ο μαθητής μερολογικά αντιλαμβάνεται το σχήμα και με αυτόν τον τρόπο είναι σε θέση οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος. Τέλος, ο μαθητής δικαιολογεί τα ευρήματα με βάση ορισμούς, θεωρήματα και ιδιότητες και έτσι και η λεκτική κατανόηση είναι απαραίτητη.

Οι παραπάνω σκέψεις σχετικά με τις ισχυρές σχέσεις μεταξύ των τριών γεωμετρικών ειδών κατανόησης στο πρόβλημα του Ευκλείδη, είχαν ως

αποτέλεσμα της κατασκευής του δομικού μοντέλου της γεωμετρικής κατανόησης σχημάτων, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα(6). Σε πολλές από τις προηγούμενες μελέτες έχει αποδειχθεί ότι οι διαφορετικοί τύποι κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων είναι στενά συνδεδεμένοι (Gagatsis, 2015; Γαγάτσης κ.ά., 2015). Στην πραγματικότητα, έχει επαληθευτεί ένα δομικό μοντέλο για μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (13-17 ετών), το οποίο περιλαμβάνει και τους τέσσερις τύπους γεωμετρικής αντίληψης σχημάτων (αντιληπτική, ακολουθιακή, λεκτική και λειτουργική).

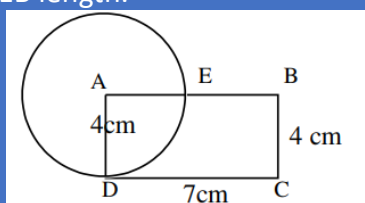


Σχήμα 6: Μοντέλο γεωμετρικής κατανόησης

Με άλλα λόγια, ο όρος "δομικό μοντέλο" δεν είναι μια θεωρητική κατασκευή, αλλά χρησιμοποιείται με βάση τη στατιστική ανάλυση γνωστή ως SEM (Structural Equation Modelling). Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο αυτό έχει την ίδια δομή για δύο διαφορετικούς πειραματικούς πληθυσμούς, δηλαδή για μαθητές γυμνασίου (13-15 ετών) και μαθητές λυκείου (16-17 ετών). Ένα παρόμοιο δομικό μοντέλο έχει επαληθευτεί και για μαθητές δημοτικού σχολείου (10-12 ετών), το οποίο περιλαμβάνει τρεις τύπους γεωμετρικής κατανόησης σχημάτων (αντιληπτική, λεκτική και λειτουργική). Αυτό το αποτέλεσμα είναι σημαντικό γιατί παρά τις διαφορές στις γνώσεις και τις δεξιότητες των μαθητών των τριών διαφορετικών πληθυσμών και τις διαφορές μεταξύ των ασκήσεων γεωμετρίας που προτείνονται στους μαθητές των τριών πληθυσμών, το δομικό μοντέλο που προκύπτει από τη στατιστική ανάλυση SEM που σχετίζεται με τους τρεις παραπάνω πληθυσμούς των μαθητών έχει την ίδια δομή (Gagatsis, 2010; 2015; Γαγάτσης κ.ά., 2015).

Είναι προφανές ότι μια λανθασμένη αντίληψη ενός συγκεκριμένου αριθμού συνεπάγεται μια λανθασμένη λύση σε ένα γεωμετρικό έργο. Το παρακάτω έργο έχει προταθεί σε διάφορους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Κύπρο στο πλαίσιο ερευνητικού έργου που αφορά τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας (Πανάουρα, & Γαγάτσης, 2008; 2010). Παρόλο που πολλοί μαθητές αναγνώρισαν τα σχήματα του κύκλου και την ιδιότητα των πλευρών του ορθογωνίου ($AB=DC=7\text{ cm}$), απέτυχαν να αναγνωρίσουν ότι AD και AE είναι ακτίνες του κύκλου και θεώρησαν ότι το E είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB (Σχήμα 7). Ως εκ τούτου, οι μαθητές δεν προσδιόρισαν τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών σωστά. Επηρεάστηκαν από την εικόνα, χρησιμοποιώντας το σημείο E ως το μέσο του τμήματος AB .

The figure sketched freehand below presents the rectangle $ABCD$ and a circle with center A , passing through D . The actual length of sides is shown in the figure. Find the segment EB length.



(Panaoura, & Gagatsis, 2008; 2010).

Σχήμα 7: Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές

2.3. Δημιουργικότητα

Η δημιουργικότητα στις μέρες μας έχει αυξήσει ραγδαία τη σημασία της όσον αφορά την κοινωνία και συνάμα την εκπαίδευση. Η δημιουργικότητα είναι ένας όρος που επινοήθηκε πρόσφατα, εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία το 1950, αλλά εξακολουθούσε να λείπει από πολλά δημοφιλή περιοδικά μέχρι το 1960 (Piirto, 2004). Ωστόσο, μέχρι το τέλος του 20ου αιώνα, μια δίτομη εγκυκλοπαίδεια δημιουργικότητας από τους Runco & Pritzker (1999), είχε δημοσιευθεί με συνεισφορά από δεκάδες επιστήμονες από διάφορους τομείς. Παρόλα αυτά, η σημασία της δημιουργικότητας είναι δύσκολο να εκτιμηθεί. Αυτό το αυξανόμενο ενδιαφέρον αντιστοιχεί σε μια αυξημένη οικονομική ανάγκη για δημιουργικότητα. Σε έναν κόσμο που αλλάζει σε μεγάλο βαθμό και στον οποίο οι τεχνολογικές και επιστημονικές εξελίξεις αλλάζουν τα κοινωνικά δίκτυα και τη ζωή των ατόμων, η δημιουργικότητα είναι απαραίτητη τόσο για την προσαρμογή σε αυτόν τον μεταβαλλόμενο κόσμο όσο και για τη συνέχιση αυτών των εξελίξεων.

Στο βιβλίο του, *A Whole New Mind*, ο Pink (2005) κάνει μια ισχυρή υπόθεση ότι η δημιουργικότητα παίζει έναν όλο και πιο σημαντικό ρόλο στην οικονομία. Υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα, που κάποτε θεωρήθηκε λιγότερο σημαντική από τις μαθηματικές και λογικές ικανότητες στην εκπαίδευση, είναι απαραίτητη στην εποχή του διαδικτύου και της εξωτερικής ανάθεσης εργασίας σε τρίτους. Σύμφωνα με τον Pink, δεν αρκεί να είναι απλά κάποιος δικηγόρος ή μηχανικός. Πολλές συνήθειες νομικές λειτουργίες, όπως η σύνταξη εγγράφων διαζυγίου ή ο σχεδιασμός μιας βασικής κατασκευής, μπορούν να γίνουν μέσω διαδικτύου με πολύ μικρότερο κόστος είτε να ανατεθούν σε χώρες με λιγότερο δαπανηρές αγορές εργασίας. Κάποιος πρέπει να είναι όχι μόνο κατάλληλος αλλά και δημιουργικός για να είναι απαραίτητος στην αγορά. Ο δικηγόρος πρέπει να είναι σε θέση να ανταποκρίνεται σε καταστάσεις που δεν είναι συνηθισμένες, ενώ ένας μηχανικός πρέπει να μπορεί να δημιουργεί μοναδικές καινοτόμες κατασκευές. Το εκπαιδευτικό μας σύστημα θα πρέπει να αντικατοπτρίζει αυτή την τάση, αλλά φαίνεται να μην το κάνει, εμποδίζοντας τη δημιουργικότητα.

Ο Robinson (2006) υπαινίσσεται ότι το χειρότερο πράγμα που κάνουν τα σχολεία για τη δημιουργικότητα είναι ότι δημιουργούν μια αίσθηση φόβου στα παιδιά να μην κάνουν λάθος, με αποτέλεσμα αυτά να αποφεύγουν πρωτότυπες λύσεις, αλλά να προτιμούν σίγουρες και συμβατικές απαντήσεις. Το σημερινό κλίμα που επικεντρώνεται στην εκμάθηση ρόλων με ερωτήσεις κλειστού τύπου που επιδέχονται μια απάντηση, αντί για πιο ανοιχτές ερωτήσεις ή επίλυση προβλημάτων με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους, πιθανώς επιδεινώνει τον φόβο των μαθητών σε σχέση με το να κάνουν λάθος. Ο Piirto (2004) χαρακτηριστικά αναφέρει “try to be the teacher that the creative child will remember as encouraging, not as discouraging” (p. 84), δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προσπαθούν να γίνουν οι δάσκαλοι που το δημιουργικό παιδί μελλοντικά θα θυμάται ενθαρρυντικά και όχι αποθαρρυντικά. Πράγματι, αυτό μπορεί να είναι προφανές, αλλά επιδεικνύει τον σημαντικό ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν οι εκπαιδευτικοί στην ενθάρρυνση της ανάπτυξης δημιουργικών ταλέντων.

2.3.1 Πτυχές της δημιουργικότητας

Δεν υπάρχει ενιαία, επίσημη άποψη ή ορισμός της δημιουργικότητας (Mann, 2006). Υπάρχει μια ποικιλία απόψεων για τη δημιουργικότητα, οι οποίες συνεχίζουν να αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Με βάση τη βιβλιογραφία, ο Mann (2006) υποστηρίζει ότι υπάρχουν περισσότεροι από 100 σύγχρονοι ορισμοί της δημιουργικότητας. Ο Guilford (1967) διέκρινε τη συγκλίνουσα και την αποκλίνουσα σκέψη. Η συγκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει την επιδίωξη μιας ενιαίας και σωστής λύσης σε ένα πρόβλημα, ενώ η αποκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει τη δημιουργική παραγωγή πολλαπλών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα και περιγράφεται πιο συχνά ως ευέλικτη σκέψη. Ο Runco (1993) περιέγραψε τη δημιουργικότητα ως ένα πολύπλευρο κατασκευάσμα που περιλάμβανε "αποκλίνουσες και συγκλίνουσες σκέψεις, εύρεση προβλημάτων και επίλυση προβλημάτων, αυτο - έκφραση, εσωτερικά κίνητρα, στάση

αμφισβήτησης και αυτοπεποίθηση". Ο Haylock (1987) συνόψισε πολλές από τις προσπάθειες καθορισμού της δημιουργικότητας. Μια άποψη "περιλαμβάνει την ικανότητα να βλέπει κανείς νέες σχέσεις μεταξύ τεχνικών και εφαρμογών και να κάνει συσχετίσεις μεταξύ πιθανώς άσχετων ιδεών". Οι Bolden, Harries and Newton, (2010), ορίζουν τη δημιουργικότητα κυρίως ως μια ατομική δραστηριοποίηση που στοχεύει στο να παράξει κάτι νέο ως «πολυδιάστατη ικανότητα ή δεξιότητα του ανθρώπου να σκεφτεί κάτι καινούριο».

Αδιαμφισβήτητα, η δημιουργικότητα είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο που είναι δύσκολο να οριστεί (Standler, 1998: Yushau, Mji & Wessels, 2003). Για να ορίσουν οι διάφοροι επιστήμονες τη δημιουργικότητα επέλεξαν την περιγραφική προσέγγιση παρά την επεξηγηματική (Yushau et al., 2003). Συγκεκριμένα, ο Simonton (2000) περιγράφει τη δημιουργικότητα ως έναν από τους τρόπους μέσω των οποίων ο άνθρωπος επιδεικνύει αποτελεσματικά τη λειτουργικότητα του. Ο Quigley (1998) δηλώνει απλά ότι η δημιουργικότητα είναι η ικανότητα του ατόμου να παράγει κάτι αποτελεσματικό και καινούριο. Παρόμοια, το National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE), ορίζει τη δημιουργικότητα ως την επινοητική δραστηριότητα που διαμορφώνεται για να παράγει πρωτότυπα και σημαντικά αποτελέσματα. Σε αντίθεση με τους προηγούμενους, ο Standler (1998) επιχειρεί να ορίσει τη δημιουργικότητα μέσω της διαφοράς της από την ευφυΐα. Η ευφυΐα, σύμφωνα με τον Standler (1998), είναι η ικανότητα να μαθαίνεις και να σκέφτεσαι, ενώ ένα δημιουργικό άτομο κάνει πράγματα τα οποία δεν έχει κάνει προηγουμένως. Άρα, τα περισσότερα δημιουργικά άτομα είναι ευφυείς, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει.

Οι Guilford (1959) και Torrance (1966), αναλύσαν τη δημιουργικότητα σε τέσσερις παράγοντες: την ευχέρεια (fluency), την ευελιξία (flexibility), την πρωτοτυπία (originality) και την επεξήγηση (elaboration). Η ευχέρεια αναφέρεται στη ροή των ιδεών, τον αριθμό των ορθών λύσεων, και στη χρήση βασικών γνώσεων. Η ευελιξία συνδέεται με την εναλλαγή των ιδεών, την προσέγγιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς ποιοτικούς τρόπους και από διαφορετικές προοπτικές. Η πρωτοτυπία, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει το πρόβλημα με καινούριο, μοναδικό τρόπο και να βρίσκει αντισυμβατική και μη αναμενόμενη λύση. Η επεξήγηση, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να σκέφτεται με σύνθετο τρόπο, να εξελίσσει τη δοσμένη ιδέα συνδυάζοντάς την με άλλες, να προχωρά σε γενικεύσεις, να καταλήγει σε σύνθετες απαντήσεις.

Σύμφωνα με τον Cangelosi (1996) «η δημιουργικότητα των μαθηματικών επιδεικνύεται από τους μαθητές που έχουν αποκλίνουσα σκέψη». Συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί παράγουν τις ιδέες, τις υποθέσεις, τους αλγορίθμους ή τις λύσεις του προβλήματος. Η αποκλίνουσα σκέψη περιγράφεται ως ο άτυπος συλλογισμός που είναι διαφορετικός από τον τυπικό τρόπο σκέψης και εμφανίζεται στις καταστάσεις όπου «απρόβλεπτες και ασυνήθιστες» απαντήσεις αναμένονται και γίνονται αποδεκτές (Cangelosi, 1996). Η δημιουργικότητα αναπτύσσεται σε ένα περιβάλλον στο οποίο οι ιδέες εκτιμώνται ανάλογα με την αξία τους, παρά βάσει του πώς παρήχθησαν ή ποιοι τις παρήγαγαν. Αυτό

επιδεικνύει πώς το σχετικό κίνητρο, η δέσμευση, η φαντασία, η σχετική ελευθερία, η ανεξαρτησία της σκέψης, η σχετική πρωτοτυπία και η εύκαμπτη σκέψη ενθαρρύνουν τη δημιουργική σκέψη (Cangelosi, 1996: Meissner, 2000).

Πολλοί είναι αυτοί που υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα συνδέεται με την ιδιοφυΐα, και είναι χαρακτηριστικό ατόμων που έχουν δημιουργήσει κάτι καινοτόμο (Lilly & Bramwell-Rejskind, 2004). Η Τριαρχική Θεωρία της Νοημοσύνης (Sternberg, 1997; Sternberg & Lubart, 2000) ορίζει τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα κάποιου να παράγει απροσδόκητο, πρωτότυπο έργο χρήσιμο και προσαρμοστικό και υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα είναι ένα από τα κεντρικά συστατικά της έξυπνης ανθρώπινης συμπεριφοράς. Αυτή η συμπεριφορά προκύπτει από την ισορροπία μεταξύ αναλυτικών, δημιουργικών και πρακτικών ικανοτήτων που λειτουργούν συλλογικά για να επιτρέψουν στα άτομα να επιτύχουν μέσα σε συγκεκριμένα κοινωνικοπολιτιστικά πλαίσια (Sternberg, 1997).

Ωστόσο, άλλες έρευνες υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα σχετίζεται στενά με βαθιά ευέλικτη γνώση στα γνωστικά πεδία, με μεγάλο διάστημα εργασίας και όχι με μια στιγμιαία έμπνευση (Ericsson, 1999). Επίσης, επηρεάζεται από τη διδασκαλία, την καθοδήγηση και τις εμπειρίες του ατόμου (Silver, 1997). Συνεπώς, η διδασκαλία που καλλιεργεί και ενισχύει τη δημιουργικότητα μπορεί να είναι κατάλληλη για ένα μεγάλο εύρος μαθητών, και όχι μόνο για μερικές εξαιρέσεις. Τέλος, μέσα στη σχολική τάξη, η δημιουργικότητα θεωρείται ότι μπορεί να βελτιώσει τη συμπεριφορά, τις κοινωνικές δεξιότητες, την αυτοεκτίμηση, τα κίνητρα και τις επιδόσεις (Bolden et al., 2010).

2.3.2 Μαθηματική δημιουργικότητα

Η μαθηματική δημιουργικότητα, σύμφωνα με τον Krutetskii (1976), εμφανίζεται στους μαθητές μέσα από την ανεξάρτητη διατύπωση των απλών μαθηματικών προβλημάτων, βρίσκοντας τρόπους και μέσα για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, βρίσκοντας τα κατάλληλα θεωρήματα και πρωτότυπες μεθόδους επίλυσης μη κατανοητών προβλημάτων. Η εύρεση διαφορετικών τρόπων επίλυσης της προβλήματος αποτελεί ένα χαρακτηριστικό της μαθηματικής δημιουργικότητας. (Krutetskii, 1969). Κατ' επέκταση, μια δημιουργική λύση ή μια ιδέα είναι η απάντηση σε μια δημιουργική ερώτηση και όχι σε ένα υψηλού επιπέδου πρόβλημα ή ερώτηση (Smilansky & Naftali, 1986).

Το National Council of Teachers of Mathematics (2000), τονίζει το πόσο σημαντική είναι η σημασία ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών, να σκέφτονται δημιουργικά, ευέλικτα και καινοτόμα όταν αντιμετωπίζουν κάποιο μαθηματικό πρόβλημα. Όπως συμβαίνει με τη δημιουργικότητα γενικά, έτσι και για τη μαθηματική δημιουργικότητα ειδικότερα, υπάρχουν πολλοί ορισμοί που προέρχονται από τις διάφορες προσεγγίσεις της δημιουργικότητας (Haylock, 1987; Leikin, 2009). Ορισμένοι ορισμοί αφορούν τα στάδια των δημιουργικών διαδικασιών (Ervinck, 1991), ενώ άλλοι αφορούν τις ιδιότητες των δημιουργικών πράξεων και του προϊόντος που παράγεται (Silver, 1997). Ο

Ervynck (1991) συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την προηγμένη μαθηματική σκέψη και θεωρούσε ότι είναι η ικανότητα κάποιου να διατυπώνει μαθηματικούς στόχους και να βρίσκει ενυπάρχουσες σχέσεις μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον ίδιο, η μαθηματική κατανόηση, η διαίσθηση και η διορατικότητα αποτελούν τη βάση της μαθηματικής δημιουργίας, με αποτελέσματα τα δημιουργικά προϊόντα να βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και να αποκαλύπτουν κρυφές σχέσεις. Η Leikin (2009) διακρίνει τη γενική (general) και τη συγκεκριμένη (specific) μαθηματική δημιουργικότητα. Η γενική δημιουργικότητα συνδέεται με τη χρήση προτύπων επίλυσης προβλημάτων από ένα πεδίο των μαθηματικών σε άλλα πεδία των μαθηματικών. Η συγκεκριμένη δημιουργικότητα, συνδέεται με τη δημιουργικότητα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο.

Ο Sriraman (2005) παρουσίασε ένα μοντέλο μαθηματικής δημιουργικότητας και χαρισματικότητας που περιλαμβάνει επτά επίπεδα μαθηματικών ικανοτήτων. Τα επίπεδα έξι και επτά είναι εκείνα των εξαιρετικά δημιουργικών μαθηματικών που εκτελούν έρευνα και προετοιμάζουν το έδαφος για άλλους μαθηματικούς. Ο ίδιος ερευνητής, κάνει μια διάκριση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας που αφορά το σχολικό περιβάλλον και της δημιουργικότητας των επαγγελματιών μαθηματικών. Ενώ ένας επαγγελματίας μαθηματικός διακατέχεται συχνά από αβεβαιότητα, τα έργα που δίνουμε στους μαθητές δεν εμπεριέχουν αυτό το στοιχείο. Κοντά σε αυτή την άποψη, η Leikin (2009) και Leikin & Lev (2013) επισημαίνουν ότι η δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά διαφέρει από εκείνη των επαγγελματιών μαθηματικών. Η μαθηματική δημιουργικότητα στο περιβάλλον του σχολείου αξιολογείται με αναφορά στις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών και στις επιδόσεις άλλων μαθητών που έχουν παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό. Η Leikin (2009), προτείνει ότι η προσωπική δημιουργικότητα ως δυναμικό χαρακτηριστικό (τόσο ως προσωπική όσο και ως κοινωνική) απαιτεί μια διάκριση μεταξύ σχετικής (relative) και απόλυτης (absolute) δημιουργικότητας. Η απόλυτη δημιουργικότητα συνδέεται με τις ανακαλύψεις που προωθούν τα μαθηματικά ως επιστήμη. Η σχετική δημιουργικότητα αναφέρεται σε ανακαλύψεις από ένα συγκεκριμένο άτομο μέσα σε μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς. Έτσι, οι μαθητές μπορούν να προσφέρουν ιδέες που είναι καινοτόμες σε σχέση με τα μαθηματικά που έχουν μάθει και τα προβλήματα που έχουν λύσει.

Η μαθηματική δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά συνδέεται συνήθως με την επίλυση προβλημάτων (problem solving) ή τη δημιουργία προβλημάτων (problem posing) (Silver, 1997). Ο ίδιος προτείνει, ότι η δημιουργικότητα μπορεί να αναπτυχθεί μέσω της επίλυσης προβλημάτων, με τα άτομα να αναπτύσσουν τις ικανότητες ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Δημιουργώντας πολλαπλές ιδέες, πολλαπλές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα (όταν υπάρχουν) και διερευνώντας καταστάσεις, τα άτομα αναπτύσσουν ευχέρεια. Η δημιουργία νέων λύσεων όταν τουλάχιστον μία έχει ήδη παραχθεί αναπτύσσει την ευελιξία, ενώ η εξερεύνηση πολλών λύσεων σε ένα πρόβλημα και η δημιουργία ενός νέου προωθεί την πρωτοτυπία. "Τόσο η διαδικασία όσο και το αποτέλεσμα της επίλυσης προβλημάτων μπορούν να αξιολογηθούν για να

καθορίζεται ο βαθμός στον οποίο είναι εμφανής η δημιουργικότητα" (Silver, 1997: σελ. 76).

Ο Sriraman (2005), υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα στο σχολικό επίπεδο μπορεί να ορισθεί ως μια διαδικασία που οδηγεί σε πρωτότυπες (διορατικές) λύσεις σε ένα δεδομένο πρόβλημα ή / και προσεγγίσεις σε ένα παλιό πρόβλημα από μια νέα προοπτική. Οι Kwon, Park και Park (2006), προτείνουν δύο σημαντικούς ορισμούς της μαθηματικής δημιουργικότητας: πρώτον, τη δημιουργία νέων γνώσεων και δεύτερον την ικανότητα ευελιξίας στην αντιμετώπιση προβλημάτων. Οι ερευνητές, ανέπτυξαν ένα πρόγραμμα για να βοηθήσουν στην καλλιέργεια αποκλίνουσας σκέψης στα μαθηματικά με βάση την επίλυση προβλημάτων ανοιχτού τύπου, τα οποία αποδείχθηκαν χρήσιμα για την ενίσχυση των δεξιοτήτων δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Ο Chiu (2009), συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα ρουτίνας (routine) και μη συμβατικά προβλήματα (non-routine). Σύμφωνα με τους Posamentier, Smith & Steperleman, (2010), η επίλυση προβλημάτων αφορά στη δημιουργία κάποιου καινούργιου αποτελέσματος και γι' αυτόν τον λόγο τα προβλήματα που δίνουμε στους μαθητές πρέπει να εμπεριέχουν το στοιχείο της πρόκλησης και της ανακάλυψης.

2.3.3 Μαθηματική δημιουργικότητα και προβλήματα πολλαπλών λύσεων (MSTs)

Ένας από τους αναγνωρισμένους τρόπους ανάπτυξης των συνδέσεων των μαθηματικών γνώσεων είναι η επίλυση προβλημάτων με διάφορους τρόπους (Leikin & Levav-Waynberg 2009, NCTM, 2000, Polya, 1981, Silver, 1997). Επιπλέον, οι Stigler και Hiebert (1999), υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη της επίγνωσης των μαθητών ότι τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να έχουν πολλαπλές λύσεις και η ενθάρρυνση των μαθητών να επιλύσουν ένα πρόβλημα με πολλούς τρόπους, αυξάνουν την ποιότητα του μαθήματος των μαθηματικών (στο Leikin, 2012). Κατά τον Polya (1981), όταν οι μαθητές επιλύουν τα προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους μοιράζοντας και συζητώντας τις ιδέες τους στην τάξη, προωθούν τη μαθηματική τους γνώση με μετατοπίσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, κάνουν συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και συνδέουν διαφορετικές έννοιες και ιδέες.

Οι Leikin et al. (2006) όρισαν τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων (MSTs) ως εργασίες που απαιτούν ρητά περισσότερες από μία λύσεις σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό πρόβλημα. Οι διαφορές μεταξύ των λύσεων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με τα ακόλουθα κριτήρια:

(α) διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας,

(β) διαφορετικές ιδιότητες (ορισμοί ή θεωρήματα) μαθηματικών εννοιών από ένα μαθηματικό θέμα,

(γ) διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών» (Leikin, 2009).

Κατά την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος πολλαπλών λύσεων (MST), οι διαφορετικές βοηθητικές κατασκευές περιλαμβάνονται στην κατηγορία (β) (Leikin, 2009). Σύμφωνα με τους Leikin και Elgrabli (2015) το επίπεδο πολυπλοκότητας της βοηθητικής κατασκευής καθορίζεται από δύο παράγοντες: 1) τη θέση της βοηθητικής κατασκευής, δηλαδή αν βρίσκεται εντός ή εκτός του συγκεκριμένου σχήματος και 2) τον αριθμό των κατασκευών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό μιας συγκεκριμένης ιδιότητας. Ο σημαντικότερος παράγοντας για τον προσδιορισμό της δημιουργικότητας φαίνεται να είναι η πρωτοτυπία (Leikin et al., 2009).

Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (όπως, Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009, Ervynck, 1991, Kwon, Park, & Park, 2006, Leikin, 2006) η επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους αναπτύσσει τη διανοητική τους ευελιξία και δημιουργικότητα. Οι Levav-Waynberg και Leikin (2012, 2013), τονίζουν ότι τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων (MSTs) είναι αποτελεσματικά τόσο ως διδακτικό όσο και ως ερευνητικό εργαλείο και είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση της γνώσης και της δημιουργικότητας των μαθητών. Η χρήση των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων ως ερευνητικού εργαλείου επιτρέπει την εξερεύνηση της δυναμικής απόδοσης των μαθητών, η οποία συνήθως δεν μπορεί να παρατηρηθεί όταν οι μαθητές είναι ικανοποιημένοι με μια στρατηγική όταν φθάσουν σε μια λύση.

Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων μπορούν να εφαρμοστούν αποτελεσματικά κατά τη μάθηση και τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Η ουσία των μαθηματικών είναι να κάνουν αφηρημένα επιχειρήματα σχετικά με τα γενικά αντικείμενα και να επαληθεύσουν αυτά τα επιχειρήματα με αποδείξεις (Herbst & Brach, 2006). Το γεγονός ότι η απόδειξη είναι μια σημαντική συνιστώσα της γεωμετρίας κάνει την εργασία σε αυτό το πεδίο παρόμοια με αυτή των μαθηματικών. Η γεωμετρία συνδυάζει την αναγκαιότητα των οπτικών δεξιοτήτων (Clements & Battista, 1992) με την απαίτηση για αφηρημένους και λογικούς συλλογισμούς. Παρέχει ευκαιρίες για διερεύνηση και απόδειξη δραστηριοτήτων που μοιάζουν με το έργο των ερευνητικών μαθηματικών (Herbst, 2002). Ένα περιβάλλον το οποίο προάγει την έρευνα, βοηθάει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτονομία στη σκέψη τους καταλήγοντας σε γενικεύσεις (Christou, Mousoulidis, Pittalis & Pitta Pantazi, 2004).

Ένας ακόμα λόγος που το πλαίσιο της γεωμετρίας μας επιτρέπει την εφαρμογή προβλημάτων πολλαπλών λύσεων είναι ότι σχεδόν κάθε πρόβλημα γεωμετρίας που βρίσκεται σε ένα τυπικό σχολικό εγχειρίδιο μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα πολλαπλών λύσεων (Levan-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2013, 2017). Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία επιτρέπουν την επίτευξη ποικίλων λύσεων χρησιμοποιώντας έννοιες και ιδιότητες μέσα από το σχολικό πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας χωρίς να απαιτούν εξωσχολικές γνώσεις από μαθητές και καθηγητές (Levan-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2017). Επιπλέον, οι λύσεις των προβλημάτων γεωμετρίας δεν βασίζονται ποτέ πλήρως σε αλγοριθμικές διαδικασίες και περιλαμβάνουν ευρετικές διαδικασίες (Polya, 1981), ενώ τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία απαιτούν ακόμη

πιο εκτεταμένη χρήση αυτών των ευρετικών. Για τον λόγο αυτό και η έρευνα μας περιλαμβάνει ασκήσεις που βρίσκονται στο σχολικό εγχειρίδιο ή είναι συναφείς αυτών.

Υπάρχουν έρευνες σχετικά με τις γεωμετρικές γνώσεις και την ικανότητα απόδειξης με πολλούς τρόπους στα σχολικά μαθήματα γεωμετρίας (όπως, Guberman & Leikin, 2013, Gurevich & Meddnikov, 2006, Leikin, 2007, 2008, Leikin & Levav-Waynberg, 2008, Levav-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2013, 2017).

Σε ερευνά τους, υπό την προσέγγιση της συγκεκριμένης μαθηματικής δημιουργικότητας, οι Levav-Waynberg και Leikin (2012), εξετάζουν τις μεταβολές στις γεωμετρικές γνώσεις και τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών καθώς αυτοί εμπλέκονται με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία. Στην έρευνα συμμετείχαν 303 μαθητές από 14 τάξεις. Από αυτούς οι 229 μαθητές παρακολουθούσαν μαθήματα γεωμετρίας επί έναν χρόνο κάνοντας χρήση έργων πολλαπλών λύσεων ενώ οι υπόλοιποι 74 δεν είχαν κάποια διαφοροποίηση στη διδασκαλία τους. Οι επιδόσεις τους μετρήθηκαν στην αρχή και στο τέλος του σχολικού έτους με 4 ασκήσεις πολλαπλών λύσεων (2 στην αρχή και δύο στο τέλος), στις οποίες το σχήμα δινόταν. Αυτή η μελέτη συγκρίνει την εξέλιξη της γνώσης και της δημιουργικότητας μεταξύ των πειραματικών ομάδων και των ομάδων ελέγχου όπως αντικατοπτρίζεται στις γραπτές εξετάσεις των μαθητών. Η γνώση της γεωμετρίας μετρήθηκε με την ορθότητα (correctness) και τη συνάφεια (connectedness) των λύσεων που παρουσιάστηκαν, ενώ τα κριτήρια δημιουργικότητας ήταν: ευχέρεια (fluency), ευελιξία (flexibility) και πρωτοτυπία (originality). Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η συνάφεια των μαθητών καθώς και η ευχέρεια και ευελιξία των λύσεων επωφελήθηκαν με την εφαρμογή των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. Η μελέτη υποστηρίζει την ιδέα ότι η πρωτοτυπία είναι ένα πιο εσωτερικό χαρακτηριστικό από την ευχέρεια και την ευελιξία και ως εκ τούτου σχετίζεται περισσότερο με τη δημιουργικότητα και είναι λιγότερο δυναμική. Η cluster analysis της πειραματικής ομάδας προσδιόρισε τρεις ομάδες που αντιστοιχούν σε τρία επίπεδα μαθησιακών επιδόσεων, σύμφωνα με τα πέντε μετρούμενα κριτήρια στα προ-τεστ και μετά-τεστ και έδειξαν ότι, με εξαίρεση την πρωτοτυπία, οι επιδόσεις και στις τρεις ομάδες βελτιώθηκαν γενικά με βάση τα διάφορα κριτήρια.

Σε άρθρο τους, υπό την προσέγγιση της γενικής μαθηματικής δημιουργικότητας, οι Stupel & Ben-Chaim (2013), με τον χαρακτηριστικό τίτλο “One problem, multiple solution: How multiple proofs can connect several areas of mathematics”, παρουσιάζουν ένα συγκεκριμένο και ενδιαφέρον πρόβλημα γεωμετρίας και 9 διαφορετικές αποδείξεις από διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών, όπως Ευκλείδεια γεωμετρία, τριγωνομετρία, αναλυτική γεωμετρία κ.α. Τονίζουν ότι η ενθάρρυνση των μαθητών των τελευταίων τάξεων του λυκείου, να επιλύσουν προβλήματα με διάφορους τρόπους, θα ενισχύσει την εκτίμησή τους για τα μαθηματικά και θα τους δώσει το έναυσμα να αντλήσουν ακόμα πιο κομψές λύσεις από μόνοι τους. Μετά τη διεξαγωγή μιας μελέτης περιπτώσεων που περιλάμβανε ένα μάθημα για το θέμα αυτό ως μέρος ενός

προγράμματος εκπαίδευσης εκπαιδευτικών μαθηματικών πριν από τον διορισμό τους (συμπεριλαμβανομένης της ανατροφοδότησης των μαθητών μέσω ερωτηματολογίου και συνεντεύξεων), συνήχθη το συμπέρασμα ότι οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών πρέπει να ενθαρρύνονται να εισαγάγουν πολλούς διαφορετικούς τρόπους αποδείξεων κατά τη διδασκαλία τους. Η άποψη αυτή, συμφωνεί με τα ευρήματα από αρκετές έρευνες των Leikin και Lavan-Waynberg (2008, 2009, 2013), που υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει συνεχώς να ενθαρρύνονται ώστε να προωθούν συστηματικά τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στο μάθημά τους, καθώς δημιουργώντας ευκαιρίες για τους μαθητές να λύσουν προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, οι εκπαιδευτικοί επέκτειναν και οι ίδιοι τους δικούς τους χώρους προσωπικών λύσεων. Συντελείτε έτσι μια συνεχής αύξηση της ποιότητας του μαθήματος αλλά και μια προσωπική ανάπτυξη γνώσεων, μαθηματικών συνδέσεων και δημιουργικών ικανοτήτων τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών.

2.4 Εμβαδά

Οι μαθητές όλων των επιπέδων δυσκολεύονται στην έννοια του εμβαδού. Οι δυσκολίες αυτές γίνονται αντιληπτές ήδη κατά τη διάρκεια των πρώτων μαθητικών ετών στο δημοτικό, ενώ συνεχίζονται και στα επόμενα. Οι Hirstein, Lamb και Osborne (1978) διερεύνησαν τις παρανοήσεις που παρουσιάζουν μαθητές δημοτικού και τις ταξινόμησαν σε πέντε βασικές κατηγορίες: τάση των μαθητών να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ελέγχοντας το μήκος μιας από τις πλευρές του, υπολογισμός εμβαδού με βάση άτυπες παρατηρήσεις κατά το διαχωρισμό και ανασύνθεση σχημάτων, μέτρημα των σημαδιών παρά του μήκους, μέτρηση των μερών ενός σχήματος ανεξαρτήτως της γεωμετρικής μορφής και διπλό μέτρημα των μονάδων στις γωνιές ενός ορθογωνίου. Οι παρανοήσεις αυτές οφείλονται στην ελλιπή κατανόηση των μαθητών σχετικά με την αναγκαιότητα χρήσης σταθερών ισομεγεθών μονάδων για τη μέτρηση αντικειμένων και στη μη αξιοποίηση της δομής της διάταξης.

Μια άλλη παρανόηση που εμφανίζεται σε μαθητές δημοτικού είναι η σύγχυση μεταξύ της έννοιας της περιμέτρου και της έννοιας του εμβαδού (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998). Η Kidman (1999) διενήργησε συνεντεύξεις σε μαθητές, ηλικίας 4, 6, 8 ετών με στόχο να διερευνήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν στην εύρεση του εμβαδού και παρατήρησε ότι αρκετοί μαθητές, ανεξαρτήτου ηλικίας, αντιλαμβάνονταν το εμβαδόν μιας επιφάνειας ως το άθροισμα των διαστάσεών της. Επίσης, οι μαθητές τείνουν να εφαρμόζουν τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού χωρίς να τον κατανοούν, γενικεύοντάς τον και σε περιπτώσεις που δεν εφαρμόζεται (De Corte, Verschaffel & Van Coillie, 1988). Αυτό οφείλεται στο ότι η εισαγωγή των μαθητών σε αυτό το θέμα ξεκινά από πολύ νωρίς (Clements & Stephan, 2004) και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην εφαρμογή του τύπου παρά στην ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης.

Η δομή της διάταξης ενός ορθογωνίου σχήματος κρίνεται απαραίτητη στην κατανόηση της κάλυψης επιφάνειας και κατ' επέκταση στην κατανόηση της

έννοιας του εμβαδού (Clements & Stephan, 2004), καθώς βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το δισδιάστατο χαρακτήρα της επιφάνειας (Mulligan et al, 2005). Παρόλο που η δομή της διάταξης θεωρείται ότι ενυπάρχει σε ορθογώνιες διατάξεις και αποτελείται από σειρές και στήλες, οι οποίες διαχωρίζονται σε όμοια τετράγωνα, εντούτοις δεν είναι διαισθητικά προφανής και ούτε γίνεται εύκολα αντιληπτή από όλους τους μαθητές (Battista et al, 1998). Ενώ οι μαθητές είναι σε θέση να αντιγράφουν ένα ορθογώνιο με συγκεκριμένες διαστάσεις ή να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός ορθογώνιου σχήματος με την εφαρμογή του τύπου, εντούτοις δυσκολεύονται να σχεδιάσουν τις τετραγωνικές μονάδες (Outhred, 1993).

Τα σχέδια των μαθητών αποκαλύπτουν τις νοερές τους αναπαραστάσεις και τις παρανοήσεις τους σχετικά με τη δομή της ορθογώνιας διάταξης. Σύμφωνα με τον Lehrer και τους συνεργάτες του (1998), οι δυσκολίες των μαθητών κατά την αναπαράσταση της ορθογώνιας διάταξης οφείλονται στις περιορισμένες αντιλήψεις τους για τη δομή της διάταξης, παρά σε ανεπαρκείς ικανότητες σχεδιασμού. Για αυτό το λόγο, θα πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν ότι η ορθογώνια διάταξη αποτελείται από στήλες και γραμμές που είναι παράλληλα τοποθετημένες προς τις πλευρές του ορθογώνιου και ισαπέχουν μεταξύ τους (Outhred & Mitchelmore, 2004). Μόνο σταδιακά μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν ότι ο αριθμός των μονάδων σε κάθε σειρά (ή στήλη) είναι ο ίδιος και ότι ο συνολικός αριθμός των τετραγωνικών μονάδων ισοδυναμεί με ένα επαναλαμβανόμενο προσθετικό μοντέλο (Outhred & Mitchelmore, 2004). Πολύ αργότερα οι μαθητές θα συνδέσουν το μοντέλο της ορθογώνιας διάταξης με τον πολλαπλασιασμό (Battista et al, 1998).

Εκτενής έρευνα γύρω από τη δομή της διάταξης έχει διεξαχθεί από την ομάδα των Clements και Battista (1992) αλλά και από την ομάδα των Curry, Outhred και Mitchelmore (2006). Οι δύο αυτές ερευνητικές ομάδες έχουν καταλήξει στα ακόλουθα αναπτυξιακά επίπεδα γύρω από τα οποία οι μαθητές αναπτύσσουν την ικανότητα οργάνωσης διάταξης ως μέσο για την κάλυψη και τον υπολογισμό επιφάνειας:

1. Ελάχιστη ή μηδαμινή ικανότητα οργάνωσης, συντονισμού και δόμησης δισδιάστατου χώρου. Οι μονάδες σχεδιάζονται χωρίς οργάνωση, εμφανίζοντας κενά ή επικαλύψεις κατά την κάλυψη επιφάνειας.
2. Επιτυχής και ολοκληρωτική κάλυψη επιφάνειας, αλλά με λανθασμένη μέτρηση των μονάδων λόγω μη συστηματικής μέτρησης ή επαναλαμβανόμενης μέτρησης.
3. Ολοκληρωτική κάλυψη και ορθή μέτρηση των τετραγωνικών μονάδων, χωρίς όμως να γίνεται δόμηση γύρω από σειρές και στήλες. Πιο συγκεκριμένα, οι μονάδες ευθυγραμμίζονται οριζόντια και κάθετα, έχουν περίπου το ίδιο μέγεθος και τον ίδιο αριθμό σε κάθε σειρά και στήλη, αλλά σχεδιάζονται ανεξάρτητα.
4. Τοπική, ημιτελής χρήση σειρών ή στηλών. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αποτυγχάνουν να αντιληφθούν τη σειρά ως επαναλαμβανόμενη μονάδα ενώ αντιλαμβάνονται ότι οι μονάδες στις σειρές (ή στις στήλες) μπορούν να συνδεθούν.

5. Δόμηση της επιφάνειας ως σύνολο σειρών, για αυτό και οι μαθητές καταλήγουν σε μια διάταξη που σχεδιάζεται ως σύνολα δύο παράλληλων γραμμών.
6. Επανάληψη σειρών σε σχέση με τον αριθμό των τετραγώνων σε κάθε στήλη.
7. Κατανόηση ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου δίνουν τον αριθμό των τετραγώνων σε κάθε σειρά και κάθε στήλη και κατά συνέπεια μπορεί να γίνει εννοιολογικός υπολογισμός του εμβαδού μόνο και μόνο από τις διαστάσεις (Battista et al. 1998: Outhred & Mitchelmore, 2000).

3. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη σχέση της κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος και της δημιουργικότητας στη Γεωμετρία καθιστώντας το ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα στη διδακτική της Γεωμετρίας.

Οι Gridos, Avgerinos, Mammon-Downs και Vlachou (2021) έδειξαν ότι ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το γεωμετρικό σχήμα και η ικανότητά τους να το επεξεργάζονται είναι σημαντικός παράγοντας για την πρόβλεψη της μαθηματικής τους δημιουργικότητας. Επιπλέον, έγινε φανερό ότι μόνο η αντιληπτική κατανόηση γεωμετρικού σχήματος, δεν αποτελεί αξιόπιστο παράγοντα πρόβλεψης των μεταβλητών της δημιουργικότητας, σε αντίθεση με τη λειτουργική κατανόηση γεωμετρικού σχήματος η οποία προβλέπει θετικά τα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας: την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία

Τα αποτελέσματα των Gridos, Avgerinos, Deliyianni, Elia, Gagatsis και Geitona (2021) αποκάλυψαν ότι η χωρική οπτικοποίηση προέβλεπε την ευελιξία και την πρωτοτυπία, ενώ η εσωτερική ευελιξία προέβλεπε όλες τις συνιστώσες της δημιουργικότητας. Η χωρική οπτικοποίηση αποδείχθηκε ότι έχει θετική επίδραση στην ευελιξία και πρωτοτυπία, ενώ η εσωτερική ευελιξία είχε θετική επίδραση σε όλα τα στοιχεία της δημιουργικότητας. Με άλλα λόγια, οι μαθητές με υψηλή ικανότητα στο να διπλώνουν ή να συναρμολογούν νοερά τα μέρη ενός αντικειμένου και να φαντάζονται το τελικό αποτέλεσμα και οι μαθητές με την ικανότητα να αναγνωρίζουν και να ποσοτικοποιούν τις αλλαγές προσανατολισμού σε ένα ή περισσότερα σχήματα είχαν υψηλό επίπεδο ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Επιπλέον, οι μαθητές με υψηλή ικανότητα αποσυναρμολόγησης είχαν υψηλό επίπεδο ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Τέλος, συνήχθη το συμπέρασμα ότι οι βοηθητικές κατασκευές έπαιζαν ουσιαστικό ρόλο στη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων.

Οι Γαγάτσης, Ηλία, Γείτονα, Δεληγιάννη και Γρίδος (2022) ανέφεραν ότι όταν δίνεται το σχετικό σχήμα, αν και η ευχέρεια και η ευελιξία είναι υψηλότερες, η πρωτοτυπία δεν επηρεάζεται ούτε θετικά ούτε αρνητικά. Σε εργασίες, που παρουσιάζονται μόνο προφορικά, επομένως οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν το γεωμετρικό σχήμα για να τις λύσουν, η πρωτοτυπία είναι υψηλότερη. Στην πραγματικότητα, η παρουσία του σχήματος στα MST φαίνεται να λειτουργεί αρνητικά όσον αφορά την εξεύρεση πρωτότυπων λύσεων. Επιπροσθέτως, η συνολική δημιουργικότητα των μαθητών είναι υψηλότερη σε εργασίες στις οποίες δεν δίνεται το σχετικό σχήμα. Ως εκ τούτου, οι Gagatsis et al. (2022) προτείνουν ότι η συμπερίληψη των κατασκευών των σχημάτων στη διδασκαλία και τη μάθηση θα ενισχύσει σημαντικά την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών και την ικανότητα επίλυσης MST. Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της μελέτης ήταν ότι, σε σύγκριση με τη χωρική ικανότητα, η ικανότητα ενός μαθητή να παράγει πολλαπλές λύσεις είναι ένας πιο ισχυρός προγνωστικός παράγοντας για την ικανότητα ενός μαθητή να λύσει παρόμοια προβλήματα με πολλούς τρόπους.

Οι Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, και Christou (2012), διερευνήσαν εάν υπάρχει σχέση μεταξύ μαθηματικής ικανότητας και μαθηματικής δημιουργικότητας και εξέτασαν τη δομή αυτής της σχέσης. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν με τη χορήγηση δύο δοκιμίων, ενός δοκιμίου μαθηματικής ικανότητας και ενός μαθηματικού τεστ δημιουργικότητας, σε 359 μαθητές δημοτικού. Η μαθηματική ικανότητα θεωρήθηκε ως ένα πολυδιάστατο κατασκεύασμα, συμπεριλαμβανομένης της ποσοτικής ικανότητας (αίσθηση των αριθμών και προ-αλγεβρική λογική), της αιτιώδους ικανότητας (εξέταση των σχέσεων αιτίου-αποτελέσματος), της χωρικής ικανότητας (αναδίπλωση χαρτιού, δυνατοτήτων περιστροφής αντικειμένων στο χώρο), της ποιοτικής ικανότητας (των σχέσεων ομοιότητας και διαφοράς) καθώς και επαγωγικών και παραγωγικών ικανοτήτων. Η μαθηματική δημιουργικότητα ορίστηκε ως χαρακτηριστικό γνώρισμα του τομέα, επιτρέποντας στα άτομα να χαρακτηρίζονται από ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία στον τομέα των μαθηματικών. Μετά από ανάλυση των δεδομένων φάνηκε ότι υπάρχει μια θετική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της μαθηματικής ικανότητας, με την μαθηματική δημιουργικότητα να αποτελεί υποστατικό της μαθηματικής ικανότητας.

Σε άλλη έρευνα τους οι Πίττα – Πανταζή & Χρίστου (2011), που σκοπό είχε να μελετήσουν τις γνωστικές διαδικασίες που απαιτούνται για τη δημιουργική δραστηριότητα, εξέτασαν τη σχέση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας 96 υποψηφίων εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης με τα γνωστικά τους στυλ (οπτικό-χωρικό, οπτικό-εικονικό και λεκτικό). Η ανάλυση των δεδομένων τους έδειξε ότι το οπτικό-χωρικό γνωστικό στυλ και το οπτικό-εικονικό γνωστικό στυλ αποτελούν στατιστικά σημαντικούς δείκτες πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικότητας, αλλά με διαφορετικούς και αντίθετους συντελεστές. Ακόμη, βρήκαν το οπτικό-χωρικό γνωστικό στυλ να είναι στατιστικά σημαντικός δείκτης πρόβλεψης και των τριών χαρακτηριστικών της δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία). Το οπτικό-εικονικό γνωστικό στυλ βρέθηκε να προβλέπει μόνο την πρωτοτυπία στα μαθηματικά έργα και το λεκτικό γνωστικό στυλ μόνο την ευελιξία.

Η Einav Aizikovitsh-Udi (2014), διερεύνησε τη μαθηματική δημιουργικότητα μεταξύ 57 ταλαντούχων μαθητών στο Μαθηματικά, εξετάζοντας τους συλλογισμούς που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, το βαθμό της μαθηματικής δημιουργικότητας και αισθητικής που επιδεικνύουν κατά την επίλυση ενός μη συνηθισμένου μαθηματικού προβλήματος καθώς και αν η μαθηματική σκέψη των μαθητών εξαρτάται αποκλειστικά από τις προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η πλειονότητα των μαθητών βασίστηκε σε τεχνικό αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος. Αν και οι ταλαντούχοι μαθητές αντιμετώπιζαν καλά τα προκλητικά προβλήματα που χρειάζονταν σκέψη, οι περισσότεροι λειτουργούσαν στο βασικό επίπεδο δημιουργικότητας.

Σε άλλη έρευνα, οι Klavir και Gorodetsky (2009), μέτρησαν και σύγκριναν τις μεταβλητές της δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία

ανάμεσα σε χαρισματικούς και μη χαρισματικούς μαθητές στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους έδειξαν την ύπαρξη σημαντικής διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών, όσον αφορά την ικανότητά τους να εμπλακούν στη δημιουργική διαδικασία, την ικανότητα τους να σκέφτονται εναλλακτικές μαθηματικές ιδέες σχετικές με το ερέθισμα, τον βαθμό επεξεργασίας των ιδεών καθώς και την πρωτοτυπία των λύσεων τους.

Οι Sophocleous, Kalogirou και Gagatsis (2009) διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ του τύπου των κριτηρίων που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αναγνωρίσουν τις γεωμετρικές μορφές και τις δημιουργικές τους ικανότητες να συμπληρώνουν σχήματα χρησιμοποιώντας διάφορα είδη γεωμετρικών σχημάτων. Ένα σύνολο μαθητών πέμπτης και έκτης τάξης ($N = 201$) ολοκλήρωσε ένα τεστ τριών μερών. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους δείχνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν διαφορετικό τύπο κριτηρίων για την αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων, διέφεραν ως προς τις λύσεις των εργασιών δημιουργικότητας. Ειδικότερα, η μέση απόδοση στις εργασίες δημιουργικότητας των μαθητών που έδωσαν απαντήσεις βασισμένες στα κρίσιμα χαρακτηριστικά των σχημάτων ήταν πολύ καλύτερη από την απόδοση των μαθητών που έδωσαν απαντήσεις βάσει των οπτικών ιδιοτήτων των σχημάτων.

Οι Gridos, Gagatsis, Elia και Deliyianni (2019) διερεύνησαν τις συνιστώσες της δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) των μαθητών που χρησιμοποιούν MSTs στη γεωμετρία, λαμβάνοντας υπόψιν και τον ρόλο του γεωμετρικού σχήματος. Η μελέτη οδήγησε σε τρία διαφορετικά επίπεδα δημιουργικότητας των μαθητών στη γεωμετρία: φτωχή, μέτρια και υψηλή. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι ασκήσεις πολλαπλών λύσεων έχουν τη δυνατότητα να συμβάλουν στη διδασκαλία της γεωμετρίας για την προώθηση της ευχέρειας και της ευελιξίας των μαθητών. Η πρωτοτυπία θεωρείται ότι έχει το στοιχείο του «εσωτερικού χαρακτηριστικού» και ως εκ τούτου δεν επηρεάζεται τόσο από τη διδασκαλία όσο η ευχέρεια και η ευελιξία.

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η επίλυση προβλημάτων με πολλούς τρόπους είναι κάτι πρωτόγνωρο στην ελληνική εκπαίδευση, καθώς η επιτυχία κατά την επίλυση μίας άσκησης σχετίζεται με την ορθότητα αυτής. Παρόλα αυτά, όπως αναφέραμε η ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων με πολλούς τρόπους σχετίζεται και δρα ως δείκτης δημιουργικότητας. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας και για να βρούμε κάποιες πιθανές σχέσεις μεταξύ της κατανόησης των γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές και της ικανότητάς τους να παράγουν πολλαπλές λύσεις σε γεωμετρικά προβλήματα, χρησιμοποιήσαμε ένα τεστ που περιέχει πέντε προβλήματα: T1, T2, T3, Pa, Pb, χωρισμένο σε δύο ξεχωριστά φύλλα εργασίας, όπως φαίνεται στο παράρτημα. Τα τρία προβλήματα T1, T2 και T3 σχετίζονται με την κατανόηση γεωμετρικού σχήματος: Η δοκιμασία 1 (T1) σχετίζεται με την αντιληπτική κατανόηση του σχήματος, η δοκιμασία 2 (T2) με την αντιληπτική καθώς και τη λειτουργική κατανόηση του σχήματος και η δοκιμασία 3 (T3) με την αντιληπτική και τη λειτουργική-μερολογική κατανόηση του σχήματος. Επιπλέον, υπάρχουν δύο προβλήματα τα οποία ζητήθηκαν από τους μαθητές να λυθούν με πολλαπλές λύσεις. Το ένα πρόβλημα, (Pa) σχετίζεται με την αντιληπτική, τη λειτουργική και τη λεκτική. Επιπλέον, υπάρχουν δύο προβλήματα τα οποία ζητήθηκαν από τους μαθητές να λυθούν με πολλούς τρόπους. Το ένα πρόβλημα, (Pa) σχετίζεται με την αντιληπτική, τη λειτουργική και τη λεκτική κατανόηση του σχήματος. Τις συσχετίσεις και τα είδη κατανόησης αναδεικνύει ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος από τους μαθητές. Στην πραγματικότητα, δύο είναι οι συνήθεις λύσεις που υιοθετούν οι μαθητές: η πρώτη βασίζεται σε αλγοριθμικές διαδικασίες για τον υπολογισμό του εμβαδού του τραπεζίου και στη λύση μιας απλής εξίσωσης, ενώ η δεύτερη βασίζεται στη λειτουργική κατανόηση του τραπεζίου, «σπάζοντας» το τραπεζίο σε τρία κομμάτια και μετατοπίζοντας το ένα ορθογώνιο τρίγωνο πάνω στο άλλο για να δημιουργηθεί ισοδύναμο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το αρχικό, δίνοντας άμεση λύση στο πρόβλημα. Το άλλο πρόβλημα, (Pb) σχετίζεται με τα τέσσερα είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος και εξαρτάται από τις λύσεις που υιοθετούν οι μαθητές. Αυτό το πρόβλημα σχετίζεται επίσης με το μετασχηματισμό του αρχικού σχήματος με τη χρήση βοηθητικών γραμμών, ή και σχημάτων πχ δημιουργία περιγεγραμμένου κύκλου κλπ.

Ο κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει τη λειτουργία της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος σε ασκήσεις πολλαπλών λύσεων, ώστε να γίνει μία σύνδεση με τη δημιουργικότητα για μελέτη και κατανόηση της μεταξύ τους σχέσης. Με άλλα λόγια, προσπαθούμε να βρούμε σχέσεις μεταξύ των εργασιών T1, T2, T3 που είναι απλές εργασίες που σχετίζονται με την κατανόηση γεωμετρικού σχήματος με τα προβλήματα Pa και Pb που πρέπει να επιλυθούν από τους μαθητές με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Επιπλέον, οι εργασίες T2 και T3 και το πρόβλημα Pa αφορούν το εμβαδόν ενός γεωμετρικού σχήματος και τη λειτουργική κατανόηση, άρα υπάρχει και αυτή η σύνδεση μεταξύ τους.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν είναι τα ακόλουθα:

1. Πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου και της Α' λυκείου σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων Γεωμετρίας;

2. Ποια είναι η επίδραση των ειδών της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος στην επίλυση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις;

4.1 Δείγμα της έρευνας

Τα προαναφερθέντα φύλλα εργασίας, που περιλάμβαναν τις πέντε δοκιμασίες που αναφέραμε, δόθηκαν σε ενενήντα πέντε (95) μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Αθήνα. Σαράντα τέσσερις (44) μαθητές φοιτούσαν στην τρίτη τάξη του Γυμνασίου, Γ Γυμνασίου, και πενήντα ένας (51) μαθητές φοιτούσαν στην πρώτη Λυκείου, Α Λυκείου. Για λόγους προσωπικών δεδομένων δεν θα δοθούν περισσότερες λεπτομέρειες. Όλοι οι παραπάνω μαθητές, είχαν την απαραίτητη γνώση για να ανταπεξέλθουν στα φύλλα εργασίας.

Και τα δύο φύλλα εργασίας δόθηκαν στους μαθητές εντός τάξης, ενώ ο χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους ήταν από 45 λεπτά έως μία ώρα. Δεν είχε γίνει κάποια υπενθύμιση και δεν υπήρχε προειδοποίηση από τους διδάσκοντες.

Το φύλο των μαθητών ως μεταβλητή δεν θα εξεταστεί στην παρούσα έρευνα και ως εκ τούτου δεν λήφθηκε υπόψη στην έρευνα.

4.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε ποικιλοτρόπως. Αρχικά τα φύλλα εργασίας διορθώθηκαν και όσες λύσεις παρουσίαζαν ενδιαφέρον σημειώθηκαν ώστε να γίνει όσο δύναται μία ποιοτική παρουσίαση και ανάλυση των λύσεων. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από την γραπτή δοκιμασία κατηγοριοποιήθηκαν σε πίνακα excel και βαθμολογήθηκαν με 1 για κάθε σωστή απάντηση και 0 για κάθε λάθος. Κάθε απάντηση που δεν απαντήθηκε βαθμολογήθηκε επίσης με 0.

Επίσης, για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε αρχικά περιγραφική στατιστική από την οποία προέκυψαν τα περιγραφικά στοιχεία, όπως, τα επιμέρους ποσοστά επιτυχίας για κάθε υποερώτημα των έργων, για κάθε τάξη χωριστά με στόχο κυρίως να φανούν τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών ανάλογα με την τάξη, δηλαδή την ηλικιακή ομάδα, σε συνδυασμό και με το είδος της άσκησης για την απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος.

Τέλος, για να ελέγξουμε αν υπάρχει σύνδεση μεταξύ των απαντήσεων που δίνουν οι μαθητές σε διαφορετικά έργα, αν δηλαδή η επιτυχία (ή η αποτυχία) σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία (ή αποτυχία) σε κάποιο άλλο, αλλά και για να απαντήσουμε στο ερευνητικό ερώτημα - ποια είναι η επίδραση των ειδών της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος στην επίλυση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις; - χρησιμοποιήθηκε η στατιστική συνεπαγωγική μέθοδος ανάλυσης του R. Gras και η ανάλυση ομοιότητας του Lerman (1981) με το λογισμικό

πρόγραμμα C.H.I.C (Classification, Hiérarchique, Implicative ET Cohésitive) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000), από τις οποίες προέκυψαν συνεπαγωγικά διαγράμματα και διαγράμματα ομοιότητας αντίστοιχα. Τα διαγράμματα ομοιότητας παρουσιάζουν τις μεταβλητές ανάλογα με την ομοιότητα που παρουσιάζουν. Σε ένα διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο.

Η αναγκαιότητα της χρήσης της μεθόδου R. Gras έγκειται στο γεγονός ότι αποτελεί «έναν ακριβή, μηχανισμό συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων κατάλληλων να ενισχύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, να εξαγάγουν συμπεράσματα» (Gras, 1995, σ. 97). Η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση της γένεσης μιας ικανότητας σύμφωνα με τα στάδια της γενετικής ψυχολογίας και επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στη σκέψη των υποκειμένων. Οι σχέσεις στις οποίες καταλήγουμε δεν είναι σχέσεις αιτιότητας. Αντίθετα, πρόκειται για έναν δείκτη ποιότητας που επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται. Με ανάλογο τρόπο η αποτυχία σε κάποιο έργο συνεπάγεται την αποτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται.

Η συνεπαγωγική μέθοδος δίνει τα εξής διαγράμματα: συνεπαγωγικό διάγραμμα, δένδροδιάγραμμα ομοιότητας και δένδροδιάγραμμα ιεράρχησης. Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές είναι δυνατόν να ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (χοντρό βέλος) ή 95% (λεπτό βέλος). Σε περίπτωση που εμφανίζεται η συνεπαγωγή: (Έργο 1 Έργο 2) αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο έργο 1 συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο 2 και η αποτυχία στο έργο 2 συνεπάγεται την αποτυχία στο έργο 1. Με άλλα λόγια, αν το υποκείμενο επιτύχει στο έργο 1 θα επιτύχει και στο έργο 2, ενώ αν το υποκείμενο αποτύχει στο έργο 2 θα αποτύχει και στο έργο 1. Στο διάγραμμα ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Οι οριζόντιες συνδέσεις με κόκκινο χρώμα υποδηλώνουν την ύπαρξη ομοιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. Τέλος, το δένδροδιάγραμμα ιεράρχησης παρουσιάζει τις συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα σε όλες τις μεταβλητές κατά σειρά προτεραιότητας. Οι συνεπαγωγές με έντονο μαύρο χρώμα ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (Γαγάτση & Σιακαλλή, 2000).

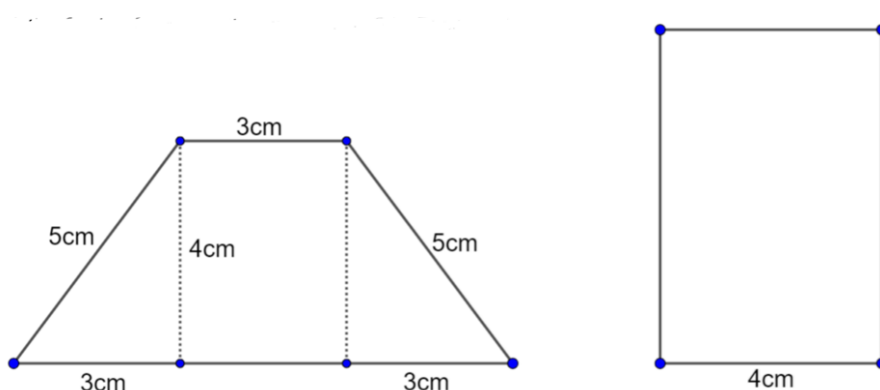
5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 Παρουσίαση και σχολιασμός λύσεων των μαθητών

Παρατηρώντας τις λύσεις των μαθητών, ερχόμαστε αντιμέτωποι με ορισμένες ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες και μη αναμενόμενες λύσεις. Ιδιαίτερη εντύπωση μας κάνει πως ειδικά οι μαθητές του Γυμνασίου, οι οποίοι έχουν περιορισμένα γνωστικά εργαλεία σε σχέση με αυτούς του Λυκείου, για τη λύση των ασκήσεων συχνά καταφεύγουν σε πολύ έξυπνες και ιδιαίτερα δημιουργικές λύσεις.

5.1.1 Το πρόβλημα του τραπεζίου

Το πρώτο πρόβλημα που τέθηκε στους μαθητές ήταν ένα πρόβλημα το οποίο τους ζητούσε να βρουν με δύο διαφορετικούς τρόπους τη μία διάσταση του ορθογωνίου, δεδομένου ότι γνωρίζουν την άλλη διάστασή του καθώς και το ότι έχει ίσο εμβαδό με το ισοσκελές τραπέζιο που δίνεται.



Σχήμα 8: Το πρόβλημα του τραπεζίου

5.1.1.1 Το πρόβλημα του τραπεζίου (Γ Γυμνασίου)

Παρατηρώντας τις επιμέρους ομάδες της έρευνας, δηλαδή τους μαθητές αναλόγως της τάξης φοίτησης τους, και ξεκινώντας από τους μαθητές του Γυμνασίου, παρατηρούμε πως υπάρχει μία πολύ καλή αντιμετώπιση από τους μαθητές στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Επειδή, τα ποσοτικά αποτελέσματα και τα ποσοστά επίλυσης θα τα δούμε αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο της παρούσης εργασίας, ακολουθούν ενδεικτικά, ορισμένες λύσεις μαθητών Γυμνασίου, που αναδεικνύουν συνηθισμένες παρανοήσεις των μαθητών καθώς και πολύ ενδιαφέροντες τεχνικές, οι οποίες αναδεικνύουν την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

α' ΤΡΟΠΟΣ

$$E_{\text{τραπέζιου}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$E = \frac{(9+x) \cdot 4}{2}$$

$$E = \frac{(9+x) \cdot 4}{2}$$

$$E = \frac{(9+x) \cdot 4}{2}$$

$$E = (9+x) \cdot 2$$

$$E = 18 + 2x$$

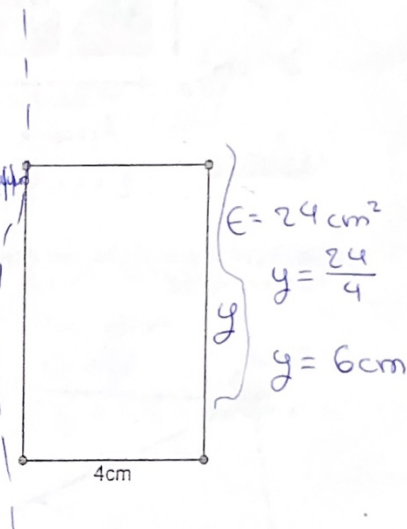
ΑΣΚΗΣΗ 2

$$E = 18 + 6$$
$$E = 24 \text{ cm}^2$$

β' ΤΡΟΠΟΣ

$$x = 3 \text{ ως}$$

η απέναντι πλευρά
σε παραλληλόγραφο



Λύση του Μαθητή 1

Όπως παρατηρούμε σε αυτήν τη λύση ο μαθητής 1 προσπαθεί να λύσει με δύο τρόπους και μάλιστα θεωρεί πως έχει λύσει την άσκηση με δύο τρόπους, όμως στην πραγματικότητα έχει λύσει την άσκηση με μόνο έναν αλγοριθμικό τρόπο, δηλαδή με μία τυπική αλγεβρική προσέγγιση. Ιδιαίτερη εντύπωση μας κάνει πως έχει διαχωρίσει τους τρόπους σε α τρόπο και β τρόπο, ενώ στην ουσία δεν υπάρχει καμία ολοκληρωμένη λύση στον κάθε τρόπο που θεωρεί ξεχωριστά, αλλά αντ'αυτού όλη η προσπάθειά του αποτελεί μία ολοκληρωμένη αλγοριθμική λύση.

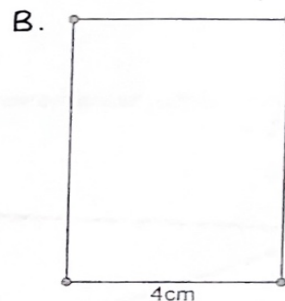
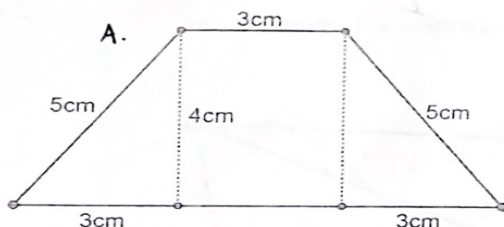
ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

A. $E = 12 + 6 + 6$

$$E = 24$$

B. $A \Delta = \frac{24}{4}$
 $A \Delta = 6 \text{ cm}$



Λύση του Μαθητή 2

Περνώντας στη λύση του μαθητή 2, παρατηρούμε ξεκάθαρα ένα μερολογικό τρόπο εργασίας, καθώς ο μαθητής για να βρει το εμβαδό του

πρώτου σχήματος χωρίζει το σχήμα σε τρία υποσχήματα, των οποίων το εμβαδό προσθέτει και έτσι καταλήγει να βρει με αυτόν τον τρόπο το εμβαδό ολόκληρου του τραπεζίου. Εν συνεχεία βρίσκει με μία πράξη τη διάσταση του ορθογωνίου, ενώ και εδώ όπως και στον μαθητή 1 μας κάνει ιδιαίτερη εντύπωση πως ο μαθητής θεωρεί τα δύο διαφορετικά στάδια κατά τη διάρκεια της επίλυσής του σαν δύο διαφορετικούς τρόπους, όπως ακριβώς και ο προηγούμενος μαθητής.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

(1) $E = 12 + 12 = 24$

(2) $\text{AD} = \frac{24}{4}$
 $\text{AD} = 6$

2ος τρόπος $= \frac{(3+6) \cdot 4}{2}$
 $= \frac{12 \cdot 4}{2} = \frac{24}{1} = 24$
 $\text{AD} = 6 \text{ cm}$

Λύση του Μαθητή 3

Στον μαθητή 3, παρατηρούμε δύο διαφορετικούς τρόπους με στόχο την εύρεση του εμβαδού του τραπεζίου. Ο πρώτος τρόπος είναι ουσιαστικά δημιουργώντας δύο ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και προσθέτοντας τα εμβαδά τους για να βρεθεί το συνολικό εμβαδό του τραπεζίου-λειτουργική σκέψη και μερολογική σκέψη- ενώ ο δεύτερος είναι ένας καθαρά αλγοριθμικός τρόπος, όπως είδαμε και προηγουμένως. Παρόλα αυτά, στον αλγοριθμικό τρόπο σκέψης εντύπωση μας κάνει πως στο τέλος αντί να σταματήσει τις πράξεις στο σημείο που βρήκε το εμβαδόν και μετά να πάει να κάνει την τελική πράξη για να βρει την πλευρά, εκείνος συνεχίζει με το σύμβολο της ισότητας, το οποίο αναδεικνύει άλλη μία βασική παρανόηση που συμβαίνει σε μαθητές μέχρι και την τρίτη γυμνασίου, τη μη σωστή χρήση του συμβόλου της ισότητας και τον τρόπο γραφής όπως στο κομπιουτεράκι.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

A' τρόπος

$$E = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$E = \frac{(9+3) \cdot 4}{2}$$

$$E = 12 \cdot 2$$

$$E = 24 \text{ cm}^2$$

Εμβαδόν ορθογωνίου = Εμβαδόν τριγώνου

$$\frac{4x}{4} = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$

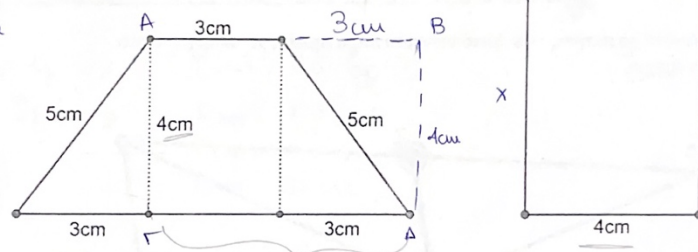
B' τρόπος

μεταφέρουμε το ένα τρίγωνο που σχηματίζεται και προκύπτουν δύο παραλληλόγραμμα

$$E_{ABGD} = (3+3) \cdot 4$$

$$E_{ABGD} = 6 \cdot 4$$

$$E_{ABGD} = 24 \text{ cm}^2$$

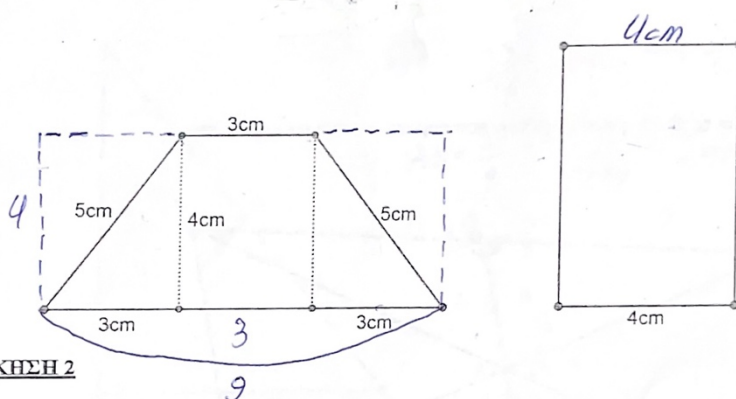


Λύση του Μαθητή 4

Συνεχίζοντας με τον μαθητή 4 ο οποίος λύνει με δύο αντίστοιχους με τους παραπάνω τρόπους αλλά εκφρασμένους ολόσωστα. Αυτό είναι κάτι μη αναμενόμενο, αν αναλογιστούμε πως μιλάμε για μαθητές τρίτης Γυμνασίου, στους οποίους δεν είχε γίνει καμία προετοιμασία.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.



ΑΣΚΗΣΗ 2

Λύση του Μαθητή 5

Στον μαθητή 5, παρατηρούμε πως ενώ κάνει μία ιδιαίτερα όμορφη σκέψη και ουσιαστικά συμπληρώνει το ισοσκελές τραπέζιο με τέτοιον τρόπο ώστε να γίνει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο-λειτουργικός τρόπος σκέψης-εν συνεχεία

δεν σκέφτεται πως αφού πλέον έχει συμπληρώσει το σχήμα, ουσιαστικά το εμβαδόν έχει γίνει μεγαλύτερο και δεν είναι πλέον ίσο με το αρχικό, με αποτέλεσμα να μην οδηγηθεί στο σωστό αποτέλεσμα.

ΑΣΚΗΣΗ 1
 Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

α) $\frac{4 \cdot (3+9)}{2} = \frac{4 \cdot 12}{2} = 24 \text{ cm}^2$
 $24 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm} \cdot A\Delta$
 $\frac{24}{4} = A\Delta$
 $A\Delta = 6 \text{ cm}$

β) $(EZH\Theta) = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2$
 $(EM\Theta) = \frac{1}{2} \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$

$B\Gamma = \frac{(EZH\Theta) - (EM\Theta) \cdot 2}{4}$
 $B\Gamma = \frac{36 - 2 \cdot 6}{4} = \frac{36 - 12}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}$

Λύση του Μαθητή 6

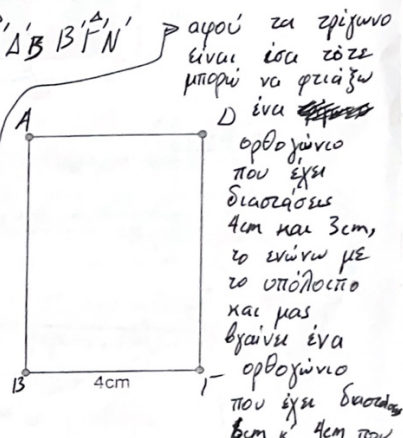
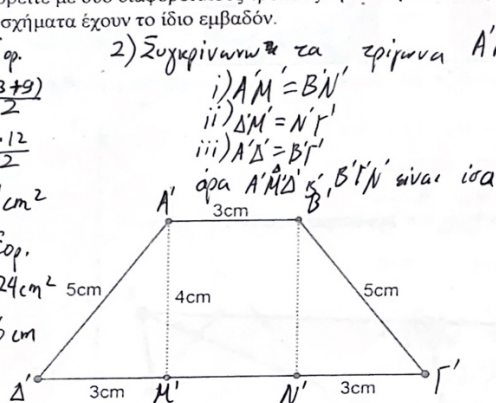
Άλλη μία μη αναμενόμενη προσπάθεια, αφού ουσιαστικά έχει σαν πρώτο τρόπο σκέψης τον αλγοριθμικό, ενώ σαν δεύτερο τον ακριβώς από πάνω, με τη συμπλήρωση δηλαδή του ισοσκελούς τραπεζίου σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αλλά εδώ ο μαθητής 6 σε αντίθεση με τον προηγούμενο, στο τέλος αφαιρεί το εμβαδό των δύο τριγώνων και έτσι οδηγείται σε μία σωστή λύση.

Αντίστοιχη είναι και η παρακάτω λύση, του μαθητή 7, ο οποίος δεν στέκεται μόνο στην παρατήρηση ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, αλλά και με σύγκριση τριγώνων αποδεικνύει την ισότητα τους. Εν συνεχεία βλέπουμε λειτουργικό και μερολογικό τρόπο σκέψης, καθώς μεταφέρει το ένα τρίγωνο πάνω στο άλλο για να δημιουργήσει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ίσο με το αρχικό. Επίσης ο μαθητής(7) έχει και έναν ολόσωστο αλγοριθμικό τρόπο σκέψης και ο μαθητής οδηγείτε σε δύο λύσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογώνιου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

1) $E_{\text{tr}} = E_{\text{op}}$
 $E_{\text{op}} = \frac{4(3+9)}{2}$
 $E_{\text{op}} = \frac{4 \cdot 12}{2}$
 $E_{\text{op}} = 24 \text{ cm}^2$
 $AB \cdot 4 = E_{\text{op}}$
 $4AB = 24 \text{ cm}^2$
 $AB = 6 \text{ cm}$



ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο ίσα τρίγωνα είναι τοποθετημένα στο εσωτερικό ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 3 cm επί 4 cm όπως φαίνεται στο σχήμα (α).

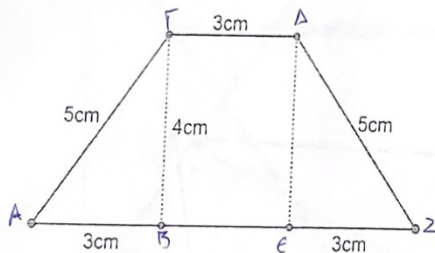
Λύση του Μαθητή 7

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των λύσεων των μαθητών της Γ Γυμνασίου παρατηρούμε αυτήν τη λύση, η οποία δείχνει μία βασική παρανόηση των μαθητών, καθώς, όπως βλέπουμε, ο μαθητής 8 προσπαθεί χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος να καταλήξει στο ζητούμενο αποτέλεσμα, το οποίο θεωρεί πως έχει βρει από τον πρώτο τρόπο, μη ελέγχοντας την ορθότητα των μαθηματικών που χρησιμοποιεί.

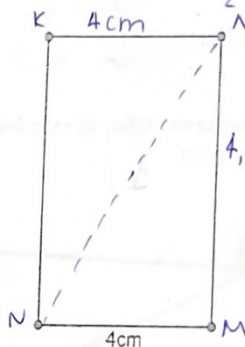
ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογώνιου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

① $(AB\Gamma) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2 = (\Delta \epsilon \zeta)$
 $(\Gamma \Delta \epsilon \beta) = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$
 $\text{Άρα } (K\Lambda M N) = 18 \text{ cm}^2$
 $(K\Lambda M N) = K\Lambda \cdot \Lambda M = 4 \cdot \Lambda M$
 $18 = 4 \cdot \Lambda M$
 $\Lambda M = 18/4$
 $\Lambda M = 4,5$



② $(\Lambda M N) = \frac{4 \cdot 4,5}{2} = 9 \text{ cm}$
 $(K \Lambda N) = \frac{4 \cdot 4,5}{2} = 9 \text{ cm}$
 $(K\Lambda M N) = (\Lambda M N) + (K \Lambda N) = 9 \text{ cm}$



Λύση του Μαθητή 8

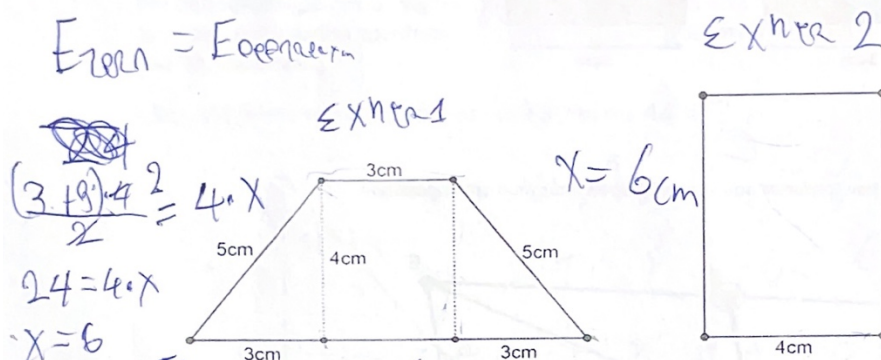
5.1.1.2 Το πρόβλημα του τραπεζίου (Α Λυκείου)

Ακολουθεί μία αντίστοιχη παρουσίαση, για τους μαθητές του Λυκείου. Παρακάτω, παραθέτουμε ορισμένες από τις προσπάθειες των μαθητών της Α Λυκείου για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Η πρώτη λύση που παραθέτουμε, του μαθητή 1 για την Α Λυκείου, τοποθετείτε γιατί έχει ενδιαφέρον ο πρώτος τρόπος, στον οποίο ο μαθητής δημιουργεί μία εξίσωση για τα δύο εμβαδά και θέτοντας x το μήκος της άγνωστης διάστασης του ορθογωνίου, λύνει την εξίσωση και βρίσκει το ορθό αποτέλεσμα. Για τον δεύτερο τρόπο, ο μαθητής «σπάει» το σχήμα σε υποσχήματα, μερολογική τροποποίηση, αλλά δυστυχώς κάτι δεν πηγαίνει σωστά, με αποτέλεσμα να μην οδηγηθεί σε ορθή λύση.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

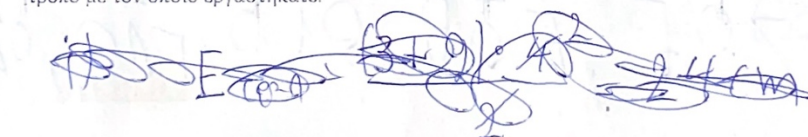


ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο ίσα τρίγωνα είναι τοποθετημένα στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 3cm επί 4cm όπως φαίνεται στο σχήμα (α).

(i) Να υπολογίσετε το χρωματισμένο εμβαδόν στο σχήμα (α).

(ii) Στο σχήμα (β) τα τρίγωνα άλλαξαν θέση. Να βρείτε ποιο κλάσμα του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτουν τα τρίγωνα. Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



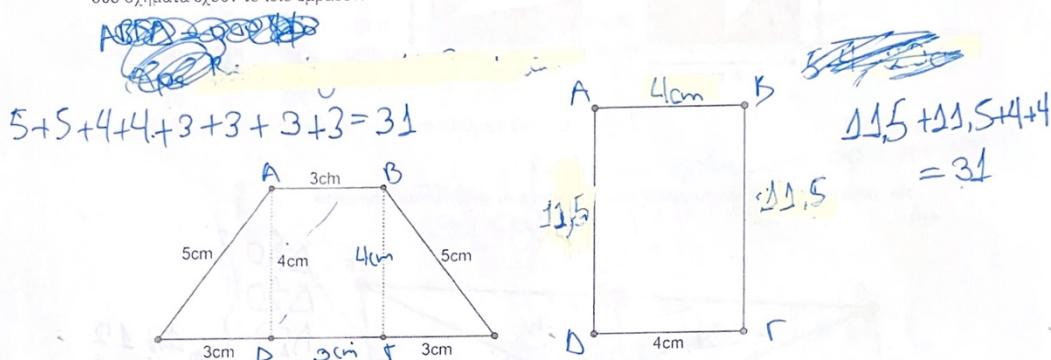
$$E_{\text{ολοκλ}} = E_{\text{ολοκλ}_2} + E_{\text{τρι}_1} + E_{\text{ολοκλ}_2} + E_{\text{τρι}_2}$$

$$E_{\text{ολοκλ}} = 6 + 3 + 6 + 3 = 18 \text{ cm}^2$$

Λύση του Μαθητή 1 (Λύκειο)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.



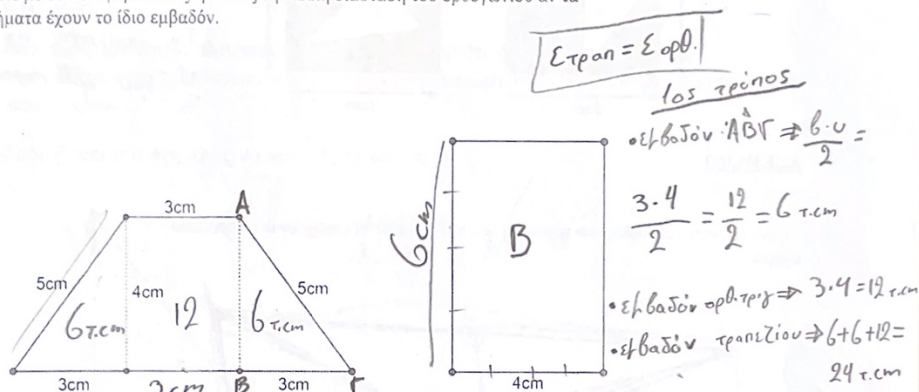
Λύση του Μαθητή 2 (Λύκειο)

Η παραπάνω λύση, του μαθητή 2 για το Λύκειο, δείχνει μία από τις βασικές παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με το εμβαδόν, όπως είδαμε και στο θεωρητικό πλαίσιο, η σύγχυση μεταξύ της έννοιας της περιμέτρου και της έννοιας του εμβαδού (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998). Όπως φαίνεται η παραπάνω παρανόηση όχι μόνο υπάρχει στους μαθητές δημοτικού, αλλά συνεχίζει και σε μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας.

Ακολουθως, η λύση του μαθητή 3 για την Α Λυκείου, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε σχέση με το δεύτερο τρόπο επίλυσης. Παρατηρούμε ότι ο μαθητής έχοντας βρει το σωστό αποτέλεσμα με τον πρώτο τρόπο, καταλήγει σε ολόσωστο συμπέρασμα με ένα δεύτερο, διαφορετικό τρόπο, αλλά δεν είναι προφανές το πως έχει οδηγηθεί εκεί. Μία συνέντευξη

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.



ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο ίσα τρίγωνα είναι τοποθετημένα στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 3cm επί 4cm όπως φαίνεται στο σχήμα (α).

- Να υπολογίσετε το χρωματισμένο εμβαδόν στο σχήμα (α).
- Στο σχήμα (β) τα τρίγωνα άλλαξαν θέση. Να βρείτε ποιο κλάσμα του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτουν τα τρίγωνα. Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Εμβαδόν = Ε ορθ.
1ος τρόπος
Εμβαδόν ΑΒΓ = $\frac{b \cdot u}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ τ. cm}$
Εμβαδόν ορθ. τριγ. = $3 \cdot 4 = 12 \text{ τ. cm}$
Εμβαδόν τραπέζιου = $6 + 6 + 12 = 24 \text{ τ. cm}$
Εμβαδόν
Αρα $24 : 6 = 4 \text{ cm}$
Η άλλη πλευρά διάστασης είναι 6 cm.
2ος τρόπος
Περ. τραπ. = $3 + 3 + 3 + 3 = 12$
 $12 : 2 = 6$ και
 $11 - 5 = 6$ (ΑΡ) άρα η άλλη διάσταση είναι 6.

Λύση του Μαθητή 3 (Λύκειο)

με τον συγκεκριμένο μαθητή, ίσως να μπορούσε να μας δια φωτίσει για το αν ο μαθητής έχει κάποια εξαιρετική ιδέα ή αν ικανοποιείται κάποια μορφή διδακτικού συμβολαίου.

Οι επόμενες λύσεις, μαθητών 4,5,6,7 για την Α Λυκείου, είναι ορισμένες σκέψεις, ιδιαίτερα δημιουργικές, οι οποίες σχετίζονται με όλα τα είδη κατανόησης γεωμετρικού σχήματος.

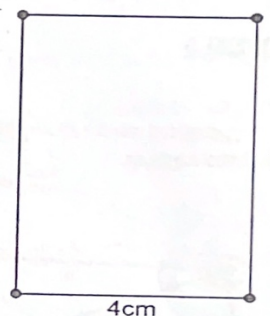
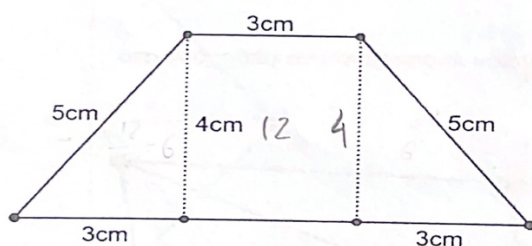
ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

1^{ος} τρόπος: $\frac{(3+8) \cdot 4}{2} = \frac{(1+3) \cdot 4}{2} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24 \text{ cm}^2$

2^{ος} τρόπος: $3 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 12 + 6 + 6 = 24 \text{ cm}^2$

Εμβατ = Εορθ.
 $24 = x \cdot 4$
 $x = 6 \text{ cm}$



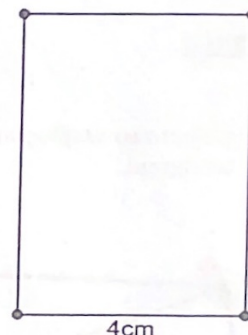
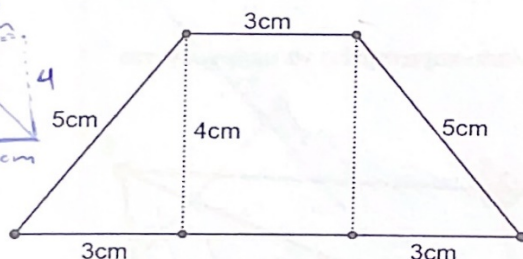
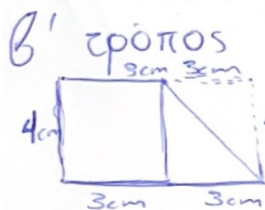
Λύση του Μαθητή 4 (Λύκειο)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

1^{ος} τρόπος
 $\text{Εμβατ} = \frac{B+b \cdot h}{2} = \frac{3+8 \cdot 4}{2} = \frac{12 \cdot 4}{2} = \frac{48}{2} = 24$

Εορθ. = α · β $\Rightarrow 24 = \alpha \cdot 4 \Rightarrow \alpha = 6$



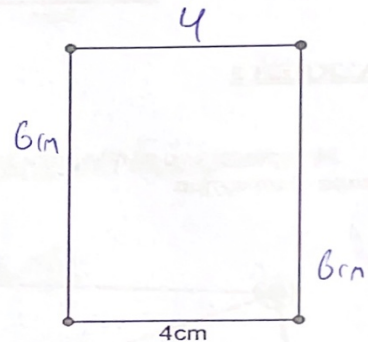
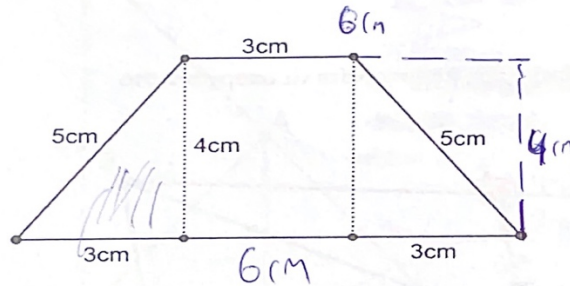
Λύση του Μαθητή 5 (Λύκειο)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

$$\epsilon_{\text{trap}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{9+3 \cdot 4}{2} = \frac{12 \cdot 4}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$\epsilon_{\text{rect}} = a \cdot b = 4 \cdot 6 = 24$$



Λύση του Μαθητή 6 (Λύκειο)

ΑΣΚΗΣΗ 1

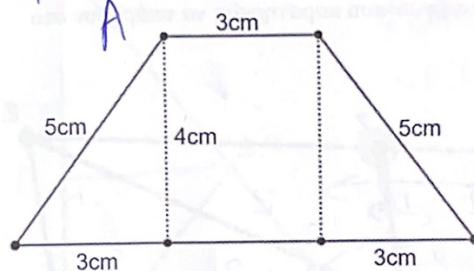
Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

$$\alpha) \epsilon_{\text{trapezoid}} = \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 + 12 + 6 = 24$$

$$\epsilon_{\text{rect}} = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \\ 4 \cdot \text{πλάτος} = 24 \text{ cm}^2 \\ \text{πλάτος} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}$$

$$\beta) \epsilon_{\text{trapezoid}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(3+9) \cdot 4}{2} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

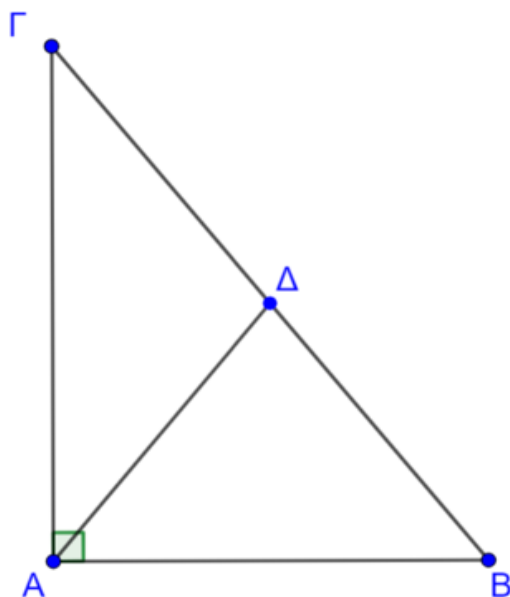
$$\epsilon_{\text{rect}} = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \\ = \text{μήκος} \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2 \\ \text{μήκος} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}$$



Λύση του Μαθητή 7 (Λύκειο)

5.1.2 Το πρόβλημα της διαμέσου

Το δεύτερο πρόβλημα που τέθηκε στους μαθητές ήταν ένα συνηθισμένο σε έρευνες που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα πρόβλημα (Α. Γαγάτσης, Ι. Ηλία, Π. Μιχαήλ-Χρυσάνθου, Ε. Δεληγιάννη, Ευγ. Αυγερινός, Π. Γρίδος, 2020). Συγκεκριμένα ζητάει να αποδείξουν οι μαθητές με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους πως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της.



Σχήμα 9: Το πρόβλημα της διαμέσου

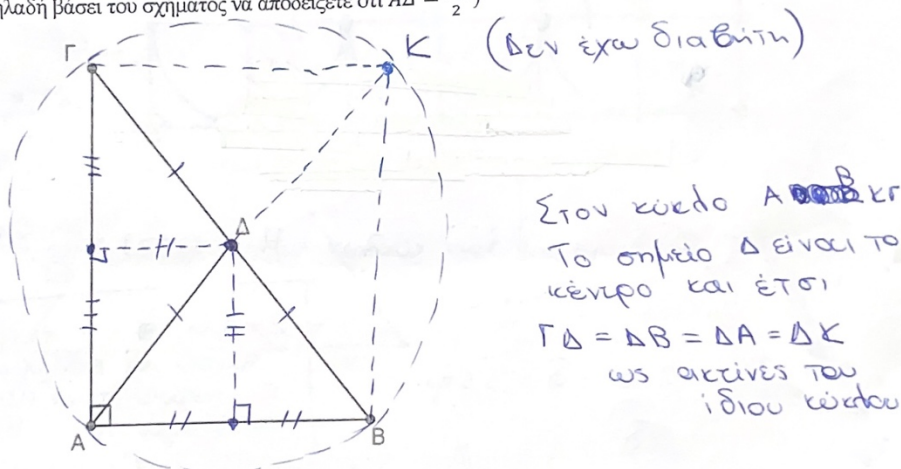
5.1.2.1 Το πρόβλημα της διαμέσου (Γ Γυμνασίου)

Παρατηρώντας, όμοια με πριν, τις επιμέρους ομάδες της έρευνας και ξεκινώντας από τους μαθητές του Γυμνασίου, παρατηρούμε πως υπάρχει και σε αυτό το πρόβλημα μία μη αναμενόμενη αντιμετώπιση από τους μαθητές στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Μπορεί να μην υπήρξαν πολλοί μαθητές που να κατάφεραν να επιλύσουν με δύο ή περισσότερους τρόπους το πρόβλημα, αλλά δεδομένης της δυσκολίας του προβλήματος αν αναλογιστούμε ότι μιλάμε για μαθητές Γυμνασίου, η ποιότητα των λύσεων των έχει μεγάλο ενδιαφέρον.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)



Λύση του Μαθητή 1

Όπως παρατηρούμε στη λύση του μαθητή(1), έχει δημιουργηθεί ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο, αλλά και ένα ορθογώνιο, με διπλασιασμό της διαμέσου. Παρόλο που ο μαθητής, βάσει της κατασκευής του, θα μπορούσε να το έχει λύσει με δύο ξεχωριστούς τρόπους, αν χρησιμοποιούσε και το ορθογώνιο που έχει σχηματίσει, εντούτοις, προέβη στην καταγραφή μόνο της πρώτης λύσης. Στην παραπάνω λύση, προφανώς όλα τα είδη κατανόησης γεωμετρικού σχήματος είναι παρόντα, ενώ σε σχέση με τη λειτουργική κατανόηση, έχουμε αναδιαμόρφωση του σχήματος και συνεπώς παρουσία μερολογικής τροποποίησης. Πιθανώς η θέση του προβλήματος στα φύλλα εργασίας, αλλά και ο χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές, ίσως να μην επέτρεψε στον μαθητή την καταγραφή κάποιον επιπλέον τρόπων επίλυσης (αναλυτική κριτική θα γίνει στα συμπεράσματα). Άλλη μία λύση άξια αναφοράς είναι του μαθητή 2. Σε αυτήν την περίπτωση, ο μαθητής ουσιαστικά κάνει την πρώτη λύση καθ' εικόνα της απόδειξης του σχολικού βιβλίου, αλλά βλέπουμε πως έχει φέρει από το μέσο Δ, παράλληλο τμήμα ΔΜ στη βάση ΑΒ, το οποίο δεν έχει χρησιμοποιήσει πουθενά και ενισχύει την πεποίθησή μας πως και αυτός ο μαθητής ξεκίνησε την προσπάθεια επίλυσης με δεύτερο τρόπο, η οποία όμως δεν ολοκληρώθηκε.

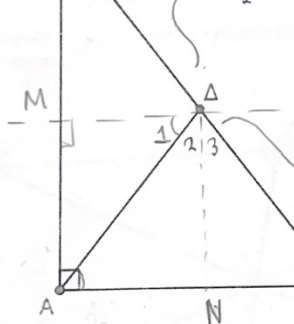
ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)

$$E_{\Delta GM} = \frac{GM \cdot MA}{2}$$

$$E_{\Delta MA} = \frac{MA \cdot MA}{2}$$



$\Delta A \Delta = \Delta N \Delta$ γιατί έχουν ορθογώνια $\Delta \Delta$ κοινά
 $\Delta_1 = \Delta_2$ ως εντός εναλλαξ
 στο τρίγωνο $\Delta B \Delta$ φέρουμε υψος
 οπότε $\Delta \Delta N = \Delta \Delta B$ γιατί έχουν ορθογώνια ΔN κοινά
 $\Delta_1 = \Delta_2$ γιατί αν εμβαπτίσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε $\Delta B =$ διαγώνιο άρα και διχοτόμο ως γωνία,
 οπότε $AD = DB$

η $DB = AD$ είναι διάμεσος οπότε

$$AD = \frac{BG}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

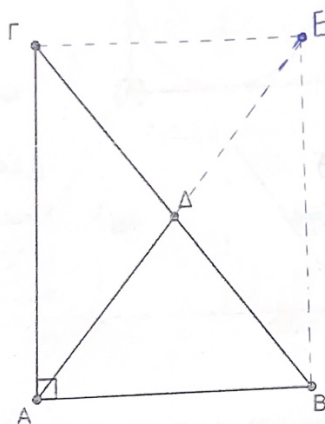
Λύση του Μαθητή 2

Ακολουθώντας, βλέπουμε τη λύση του μαθητή 3, η οποία θα μπορούσε να είναι αντίστοιχη με τη 2^η λύση του μαθητή 1 εφόσον είχε συνεχίσει την προσπάθειά του με το διπλασιασμό της διαμέσου και τη δημιουργία ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)



Οι διαγωνισμοί διχοτομούνται οπότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο και οι διαγωνισμοί είναι ίσοι.

$$AE = 2AD = BG$$

$$BG = 2AD$$

$$\frac{BG}{2} = AD$$

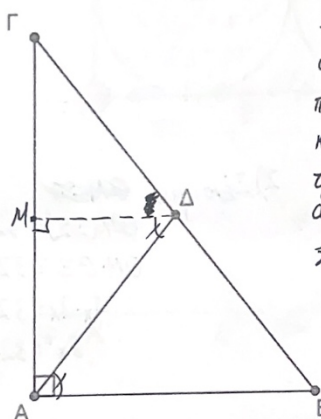
Λύση του Μαθητή 3

Συνεχίζοντας, παρατηρούμε τη λύση του μαθητή 4, η οποία θα μπορούσε να είναι αντίστοιχη με τη 2^η λύση του μαθητή 2 εφόσον είχε συνεχίσει την προσπάθειά του με χρήση του θεωρήματος για το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από το μέσο πλευράς τριγώνου παράλληλα σε μία άλλη πλευρά του.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)



Ξέρουμε πως αν σε ένα τρίγωνο υπάρχει μία ευθύγραμμο τμήμα που περνά από το μέσο της μία πλευρά και είναι παράλληλη με την βάση τότε περνά και το μέσο της άλλη πλευρά, άρα: $GM = AM$, $DM \parallel AB$
Συγκρίνω τα τρίγωνα: $\hat{GMD} = \hat{AMD}$

$$1) \hat{GMD} = \hat{AMD} = 90^\circ$$

$$2) MD \parallel \text{κοινή πλευρά}$$

$$3) GM = AM$$

Άρα $\hat{GMD} = \hat{AMD}$ είναι ίσα άρα

$$GD = AD \text{ όπου } GD = \frac{BG}{2} \text{ τότε } AD = \frac{BG}{2}$$

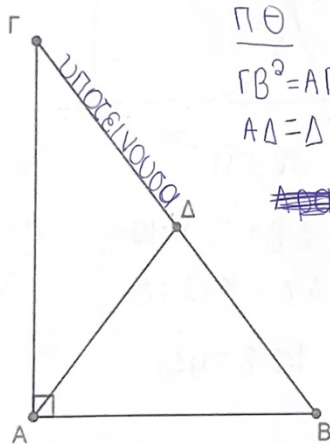
Λύση του Μαθητή 4

Πέραν όμως από τις παραπάνω ορθές λύσεις, παρατηρήσαμε και πολλές προσπάθειες που έδειξαν βασικές παρανοήσεις που ενισχύουν την παρούσα έρευνα. Σε πολλές λύσεις παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές, πιθανόν λόγω σχηματικής πλάνης, έπαιρναν σαν δεδομένο πως το ένα εκ των δύο τριγώνων ήταν ισόπλευρο, όπως η λύση του μαθητή 5, ενώ σε άλλες, όπως η λύση του μαθητή 6, βλέπαμε χρήση του ζητούμενου ως δεδομένου.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)



Π.Θ
 $GB^2 = AG^2 + AB^2$
 $AD = DB = AB$ στο ισοπλευρό τριγ.
~~ΑΔ~~ ΟΠΩΣΤΕ
 $AD = DB$
 $DB = DG$
 $BG = GD + DB$
 $AD = \frac{BG}{2}$

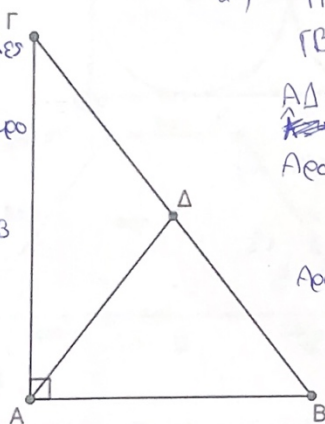
Λύση του Μαθητή 5

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)

ΓΔΑ είναι ισοσκελές
 $GA = DA$
 $\hat{A} \hat{D} B$ είναι ισοπλευρό
 $\hat{A} = \hat{D} = \hat{B}$
 Άρα $GA = DA$ και
 $DA = DB$ οπότε $GA = DB$
 Άρα $AD = \frac{BG}{2}$



Π.Θ
 $GB^2 = AG^2 + AB^2$
 $AD = DB = AB$ και $\hat{A} \hat{D} B$ είναι ισοπλευρό τρίγωνο
~~ΑΔ~~
 Άρα $AD = DB$
 $DB = DG$
 $BG = GD + DB$
 Άρα $AD = \frac{BG}{2}$

Λύση του Μαθητή 6

5.1.2.2 Το πρόβλημα της διαμέσου (Α Λυκείου)

Οδηγούμενοι προς τις λύσεις των μαθητών της Α Λυκείου, για το παραπάνω πρόβλημα, θα πρέπει να αναφέρουμε τις ακόλουθες σημαντικές παρατηρήσεις. Αρχικά, οι περισσότεροι μαθητές κάνανε την τυπική απόδειξη όπως βρίσκεται στο σχολικό εγχειρίδιο, μιας και ήταν στη φετινή τους ύλη. Επίσης, όπως και με τους μαθητές της τρίτης Γυμνασίου, πολλοί μαθητές δεν κατάφεραν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα με παραπάνω από έναν τρόπο. Βέβαια, συναντήσαμε ορισμένες λύσεις άξιες αναφοράς, αλλά το εντυπωσιακότερο είναι ότι είδαμε επαναλαμβανόμενα το ίδιο λάθος. Αρκετοί μαθητές υπέθεσαν ότι η μία γωνία είναι τριάντα μοιρών, πιθανόν για να χρησιμοποιήσουν το γνωστό πόρισμα, το οποίο είναι από τα πιο σημαντικά κομμάτια της ύλης των μαθητών, ή ίσως επειδή έχει γίνει μία εσφαλμένη σύνδεση λόγω της εξάντλησης θεμάτων και της υπερβολικής τριβής με το συγκεκριμένο πόρισμα. Ίσως εδώ να υπάρχει κάτι το οποίο θα μπορούσε να αναλυθεί καλύτερα μέσω ατομικών συνεντεύξεων και μίας ποιοτικής έρευνας, κάτι το οποίο δεν ήταν δυνατό να γίνει στα πλαίσια της παρούσης εργασίας. Επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλεί το ότι σχεδόν κανένας μαθητής δεν σχεδίασε πέραν των ορίων των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή να προβεί σε λύσεις με διπλασιασμό της διαμέσου και δημιουργία ορθογωνίου (είχαμε μόνο μία λύση της μορφής αυτής) ή με το εγγεγραμμένο σε κύκλο τρίγωνο (καμία τέτοια λύση δεν παρατηρήθηκε). Τέλος, επειδή και οι μαθητές της Α Λυκείου είχαν στις λύσεις τους ορισμένους από τους τρόπους που είδαμε στη γ Γυμνασίου, για οικονομία χώρου δεν θα παρουσιάσουμε αυτές που έχουν ταύτιση για να μην γίνεται επανάληψη.

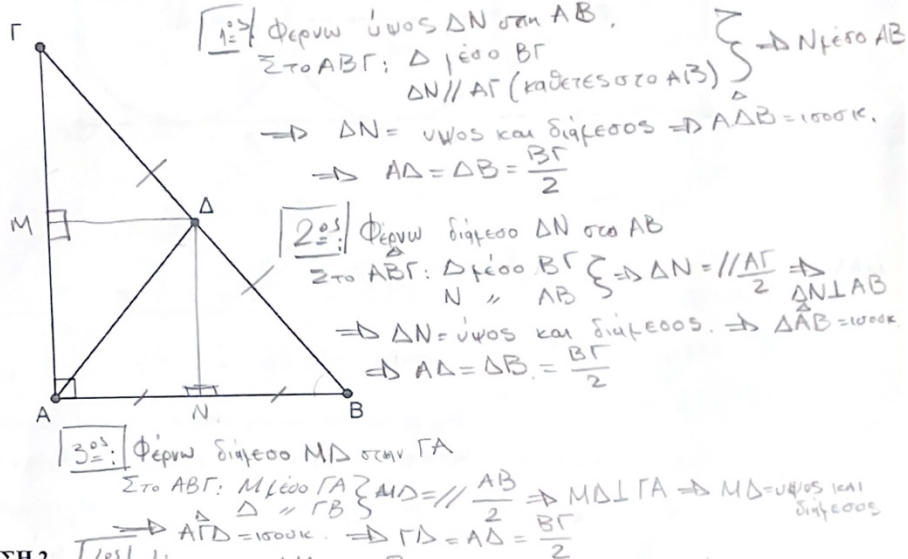
Η πρώτη λύση που θα δούμε, του μαθητή 1 για το Λύκειο, είναι μία προσπάθεια κατά την οποία ο μαθητής έγραψε τέσσερις διαφορετικούς τρόπους λύσης. Βέβαια, παρόλο που το πλήθος των τρόπων λύσεων είναι μεγάλο, οι λύσεις αυτές καθαυτές θα μπορούσαμε να πούμε ότι μοιάζουν πάρα πολύ μεταξύ τους. Εν συνεχεία θα πάμε στον μαθητή 2, ο οποίος έκανε την απόδειξη του σχολικού βιβλίου, κάτι το οποίο είδαμε σε πολλά δοκίμια, ενώ ολοκληρώνοντας θα δούμε δύο προσπάθειες, των μαθητών 3 και 4, οι οποίες έχουν το πιο συνηθισμένο λάθος, δηλαδή την υπόθεση ότι η μία οξεία γωνία είναι μέτρου τριάντα μοιρών.

Ακολουθούν οι προαναφερθέντες λύσεις και με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται η παρουσίαση των λύσεων στα προβλήματα πολλαπλών λύσεων.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)



ΑΣΚΗΣΗ 2

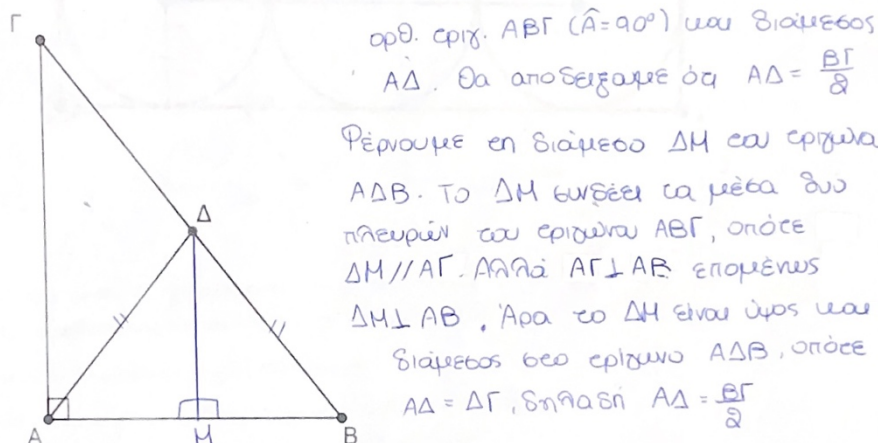
Στο παρακάτω σχήμα οι έξι ίσοι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και αντίστοιχα τα

Λύση του Μαθητή 1 (Λύκειο)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)

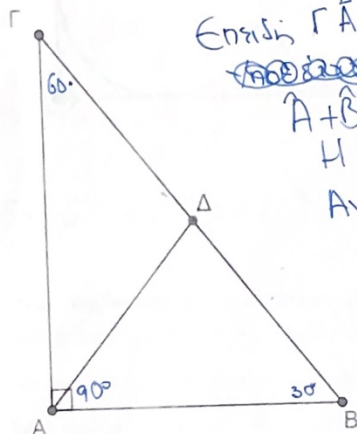


Λύση του Μαθητή 2 (Λύκειο)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)



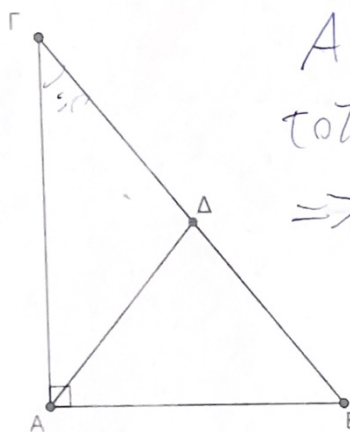
Επειδή $\triangle GAB$ είναι ορθογώνιο άρα $A = 90^\circ$
~~Από το~~ - Έστω $B = 30^\circ$
 $\hat{A} + \hat{B} = 120^\circ$
 $\text{Η } \hat{G} = 60^\circ$
 $\text{Αν } \hat{A} + \hat{B} = 120^\circ - \hat{G} = 60^\circ$
 $\frac{120}{2} = 60 = \hat{G} = \hat{A} - \hat{B}$
 $\text{Άρα } AD = \hat{A} + \hat{B} - \hat{G} = 60^\circ$
 $\text{Άρα } AD = \frac{BG}{2}$

Λύση του Μαθητή 3 (Λύκειο)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)

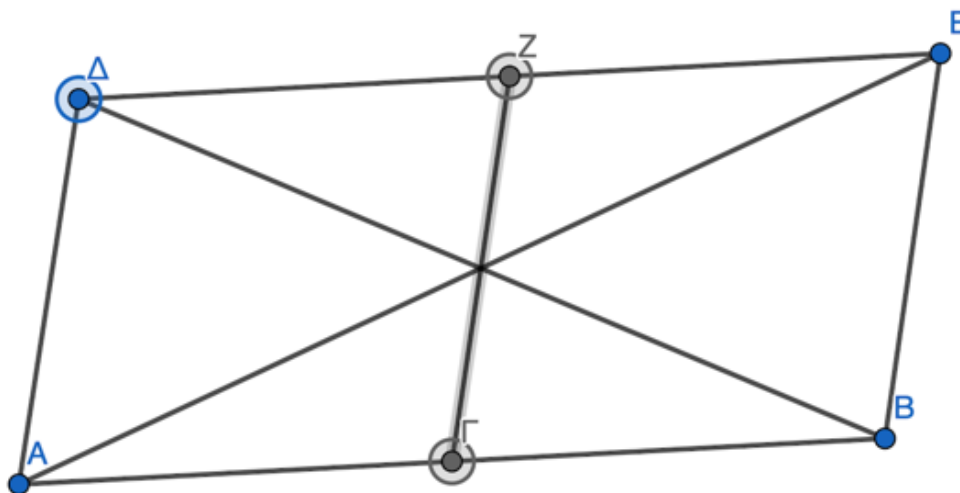


$\text{Αν } \hat{G} = 30^\circ$
 τότε μέσα θεωρημα 30°
 $\Rightarrow AD = BD = \frac{BG}{2}$
 $\wedge$
 $\text{Αν } \hat{B} = 30^\circ$
 τότε μέσα θεωρημα 30°
 $\Rightarrow AD = BD = \frac{BG}{2}$

Λύση του Μαθητή 4 (Λύκειο)

5.1.3 Τα άλλα τρία προβλήματα

Πέραν των προβλημάτων που είδαμε πριν και ζητούσαν όχι απλώς την επίλυση κάποιας άσκησης, αλλά την επίλυση με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, τα φύλλα εργασίας είχαν και τρία προβλήματα, τα οποία σχετίζονταν με την κατανόηση γεωμετρικού σχήματος. Το πρώτο και απλούστερο πρόβλημα, ζητούσε από τους μαθητές, απλά να απαριθμήσουν το πλήθος των τριγώνων που βρίσκονταν στο σχήμα που δινόταν. Ήταν ένα πρόβλημα που κυρίως εξέταζε την αντιληπτική κατανόηση.



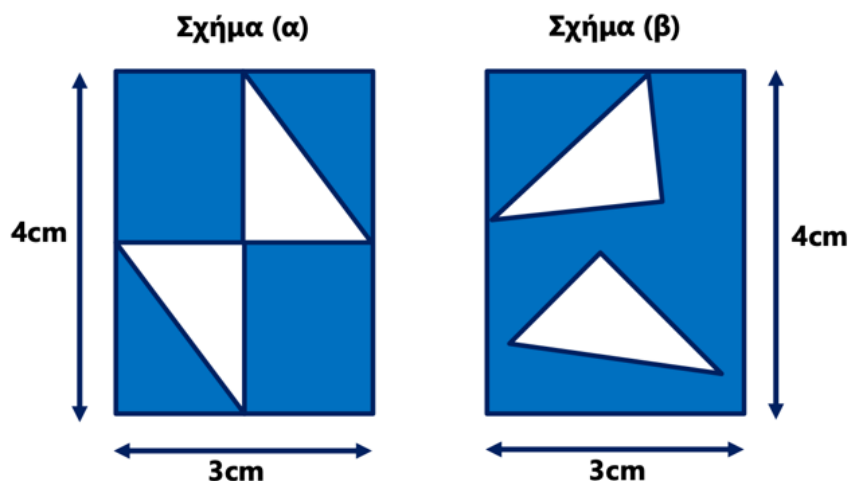
Σχήμα 10: Το πρώτο πρόβλημα(T1)

Το δεύτερο σχετιζόταν άμεσα με τη λειτουργική κατανόηση καθώς εξέταζε την αντιμετώπιση των μαθητών μετά από μία αλλαγή θέσης δύο ορθογώνιων τριγώνων που βρίσκονται ενός ορθογωνίου.

Πρόβλημα 2(T2): Δύο ίσα τρίγωνα είναι τοποθετημένα στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 3cm επί 4cm όπως φαίνεται στο σχήμα (α).

(i) Να υπολογίσετε το χρωματισμένο εμβαδόν στο σχήμα (α).

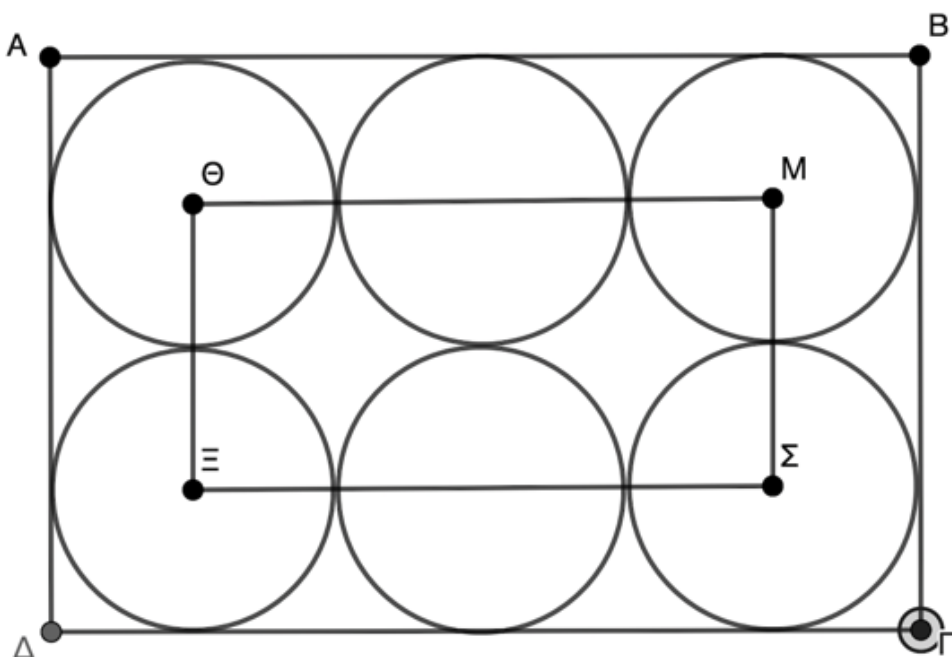
(ii) Στο σχήμα (β) τα τρίγωνα άλλαξαν θέση. Να βρείτε ποιο κλάσμα του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτουν τα τρίγωνα. Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



Σχήμα 11: Το δεύτερο πρόβλημα(T2)

Το τρίτο και τελευταίο πρόβλημα, σχετιζόταν και με τα τρία είδη κατανόησης γεωμετρικού σχήματος και ήταν το πιο απαιτητικό

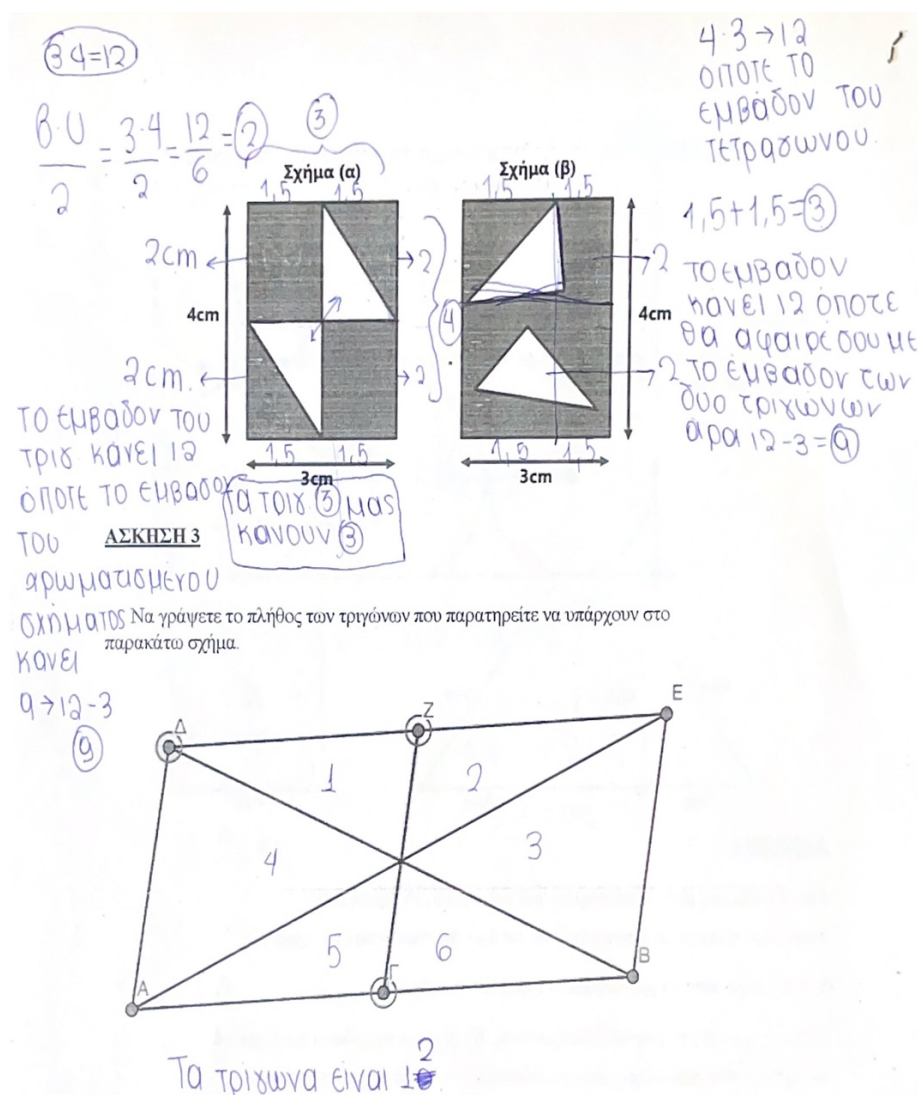
Πρόβλημα 3(T3): Στο παρακάτω σχήμα οι έξι ίσοι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $ΒΓ$, $ΓΔ$ και $ΔΑ$ εφάπτονται στους κύκλους ορίζοντας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Αν τα κέντρα των κύκλων δημιουργούν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΘΜΣΞ$ με εμβαδόν 32 τ.μ να βρείτε εξηγώντας τον τρόπο σκέψης σας το εμβαδόν του $ΑΒΓΔ$.



Σχήμα 12: Το τρίτο πρόβλημα(T3)

5.1.3.1 Τα άλλα τρία προβλήματα (Γ Γυμνασίου)

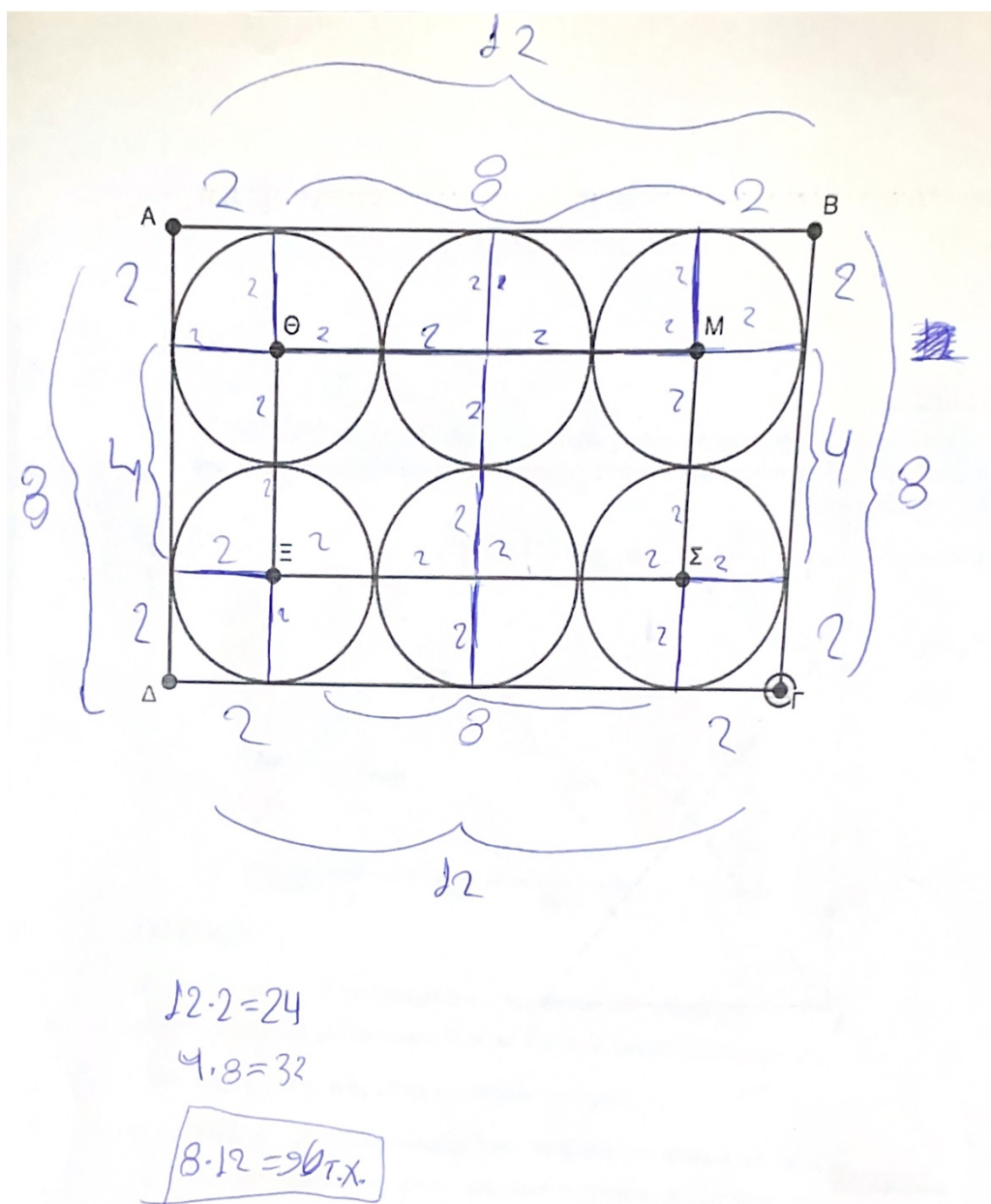
Σε αυτό το σημείο θα παραθέσουμε μερικές λύσεις των μαθητών του Γυμνασίου πάνω σε αυτά τα τρία προβλήματα. Όπως και στα προηγούμενα είδαμε ορισμένες προσπάθειες, οι οποίες, συνυπολογίζοντας την τάξη και τις γνώσεις των μαθητών, δείχνει υψηλό γνωστικό επίπεδο.



Λύση του Μαθητή 1

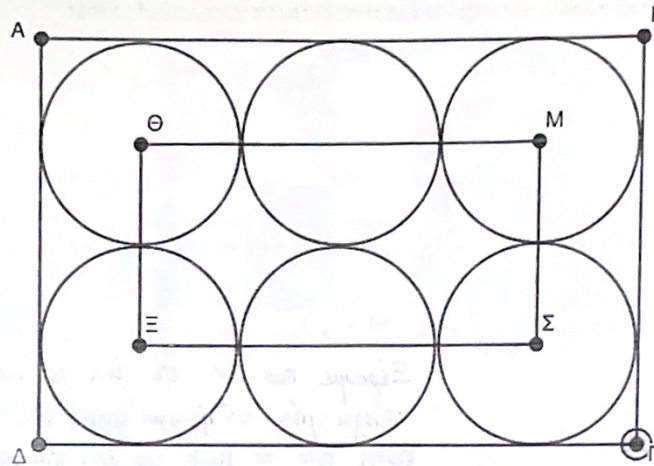
Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε τη λύση του μαθητή 1, για τα προβλήματα 1 και 2. Αρχικά, για το πρόβλημα 2 βλέπουμε ότι αντιλαμβάνεται ο μαθητής, ότι με την αλλαγή θέσης δεν επηρεάζεται το εμβαδόν, ενώ στο επόμενο πρόβλημα έχει καταμετρήσει σωστά όλα τα τρίγωνα που δημιουργούνται. Ακολούθως, βλέπουμε την προσπάθεια του μαθητή 2 στο πρόβλημα 3, όπου υπάρχει

σαφέστατα μερολογική τροποποίηση και καταμερισμός του τμήματος για να οδηγηθεί στο ζητούμενο



Λύση του Μαθητή 2

Συνεχίζοντας με το πρόβλημα 3, αλλά πηγαίνοντας τώρα στο μαθητή 3 για να δούμε μία αλγεβρική, αλγοριθμική ορθή λύση. Τέλος, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, παραθέτουμε τη λύση του μαθητή 4, η οποία και εκείνη είναι αντίστοιχη της προηγούμενης, με μερολογική τροποποίηση, αλλά πιο σύνθετη, καθώς και πιο αναλυτική, μιας και γίνεται διάκριση και αναφορά στα σχήματα που δημιουργούνται, αλλά και αναφορά στο είδος τους.

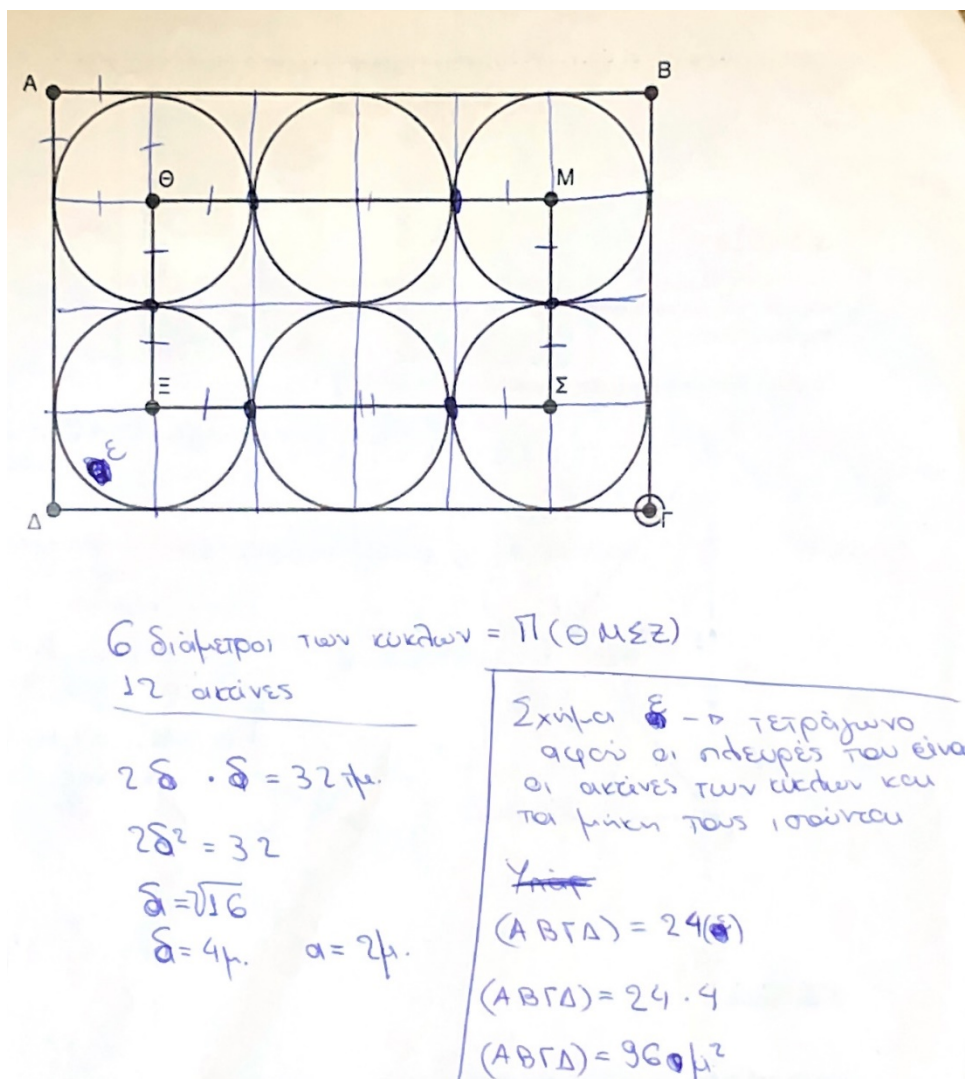


Έστω x η ακτίνα των κύκλων 2) Ξέρουμε ~~$OM = 4x$~~
 1) άρα $OM = \cancel{4x} = 2x = 4x$ $(OM \cdot \Sigma) = 32m^2$
 $\Theta \Sigma = M \Sigma = 2x$ $OM \cdot \Theta \Sigma = 32m^2$
 $4x \cdot 2x = 32m^2$
 $8x^2 = 32m^2$

3) $AB = \Delta \Gamma = 6x$ 4) $(AB\Gamma\Delta) = \cancel{AB} \cdot A\Delta = 6x \cdot 4x = 24x^2$
 $A\Delta = B\Gamma = 4x$

5) $24x^2 = 3 \cdot 8x^2 \leftarrow \begin{matrix} \text{αντικαθιστώ το} \\ 8x^2 \text{ με το } 32m^2 \end{matrix}$
 $\rightarrow 24x^2 = 3 \cdot 32m^2$
 αντικαθιστώ
 με το
 $(AB\Gamma\Delta)$
 $(AB\Gamma\Delta) = 3 \cdot 32m^2 \Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = 96m^2$

Λύση του Μαθητή 3



Λύση του Μαθητή 4

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα 2, θα δούμε τη λύση του μαθητή 5, ο οποίος ολοκληρώνει και τα ερωτήματα πλήρως, απαντώντας και στον λόγο των εμβαδών. Εν συνεχεία ο μαθητής 6 δουλεύει σωστά στο μεγαλύτερο μέρος της προσπάθειάς του, αλλά στο τέλος ξεχνάει να υπολογίσει τον λόγο των εμβαδών, ενώ τέλος, ο μαθητής 7 μπερδεύεται, θεωρώντας πως αν ενώσουμε τα δύο τρίγωνα θα έχουμε ένα τετράγωνο και έτσι δεν καταφέρνει να οδηγηθεί σε σωστή λύση.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο ίσα τρίγωνα είναι τοποθετημένα στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 3cm επί 4cm όπως φαίνεται στο σχήμα (α).

είναι ίσο με το $ABΓΔ$
τότε $AB=6cm$

(i) Να υπολογίσετε το χρωματισμένο εμβαδόν στο σχήμα (α).

(ii) Στο σχήμα (β) τα τρίγωνα άλλαξαν θέση. Να βρείτε ποιο κλάσμα του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτουν τα τρίγωνα. Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

$$i) \Delta Γ = MN = MO + NO, MO = NO \text{ άρα}$$

$$MO + NO = 3cm \Leftrightarrow 2MO = 3cm \Leftrightarrow MO = 1,5cm$$

$$ZO = EO, AD = ZO + EO = 2ZO, AD = 4cm$$

$$2ZO = 4cm$$

$$ZO = 2cm$$

$$MEO = ZNO = \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 1,5cm^2$$

$$4 \cdot 3 - MEO - ZNO = 12 - 1,5 - 1,5 = 9cm^2$$

$$ii) \frac{1}{4}, \text{ άφου τα εμβαδά του}$$

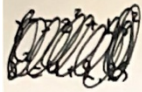
τριγώνων είναι ίσα ($3cm^2$)

$$\text{τότε } \frac{3cm^2}{12cm^2} = \frac{1}{4}$$

Λύση του Μαθητή 5

$$\text{Επίφα (α)} : E = 4 \cdot 3$$

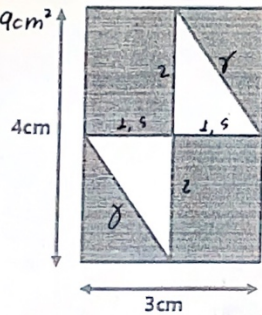
$$E = 12cm^2$$



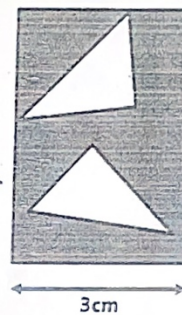
$$2 \cdot \frac{1,5}{2} = 1,5 \Rightarrow 1,5 + 1,5 = 3$$

Σχήμα (α)

$$\text{Ε. χρωμ.} = 12 - 3 = 9cm^2$$



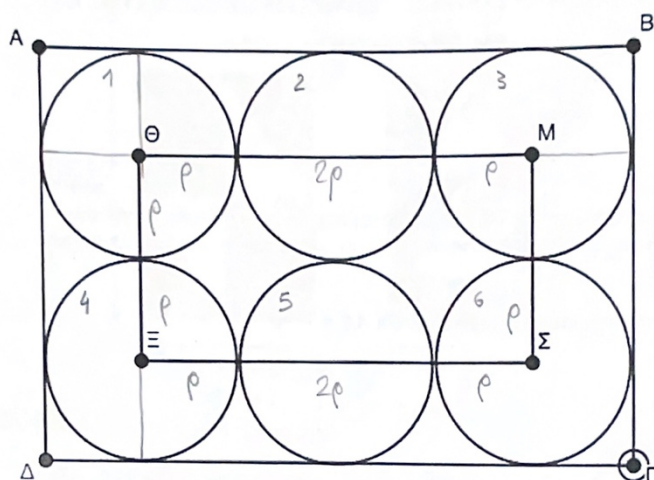
Σχήμα (β)



~~Επίφα (α)~~

Σχήμα (β): Τα δύο τρίγωνα συνεχίζουν και έχουν ίδιο εμβαδόν γιατί παρόλο που άλλαξαν θέση δεν άλλαξαν μέγεθος.

Λύση του Μαθητή 6



$$2\rho \cdot 4\rho = 32 \Rightarrow 8\rho^2 \Rightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2 \text{ ή } \rho = -2$$

Απορ

$$4\rho \cdot 6\rho = 24 \cdot 2^2 = 24 \cdot 2 \cdot 2 = 48 \cdot 2 = \underline{96\pi}.$$

$$\text{Το } \Theta M = \rho + \text{διαμέτρο} + \rho \Rightarrow \Theta M = 2\rho + 2\rho = 4\rho$$

$$\text{Το } \Theta \Xi = \rho + \rho = 2\rho$$

$$\text{Αρα το Εμβαδόν του } \Theta M \Xi \Xi = \Theta M \cdot \Theta \Xi = 4\rho \cdot 2\rho = 8\rho^2 \text{ και αφού το}$$

$$E = 32\pi \Rightarrow 8\rho^2 = 32 \Rightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2 \text{ ή } \rho = -2$$

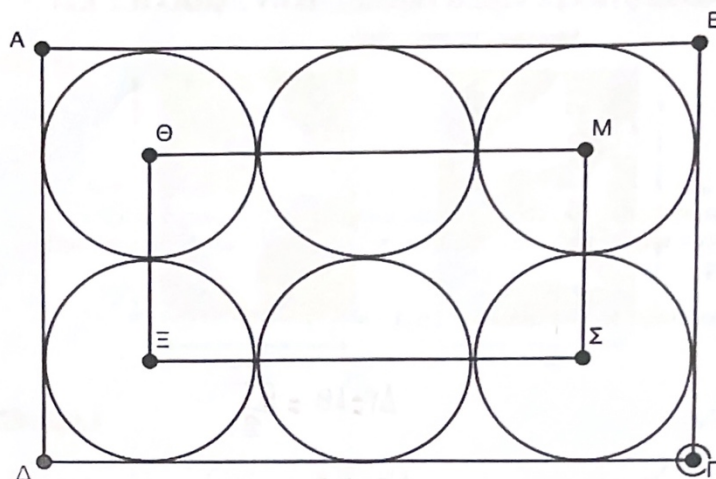
Απορρίπτεται

$$\text{Το } AB = 3 \text{ διαμέτρους} = 3 \cdot 2\rho = 6 \cdot 2 = 12$$

$$\text{Το } AD = 2 \text{ διαμέτρους} = 2 \cdot 2\rho = 4 \cdot 2 = 8$$

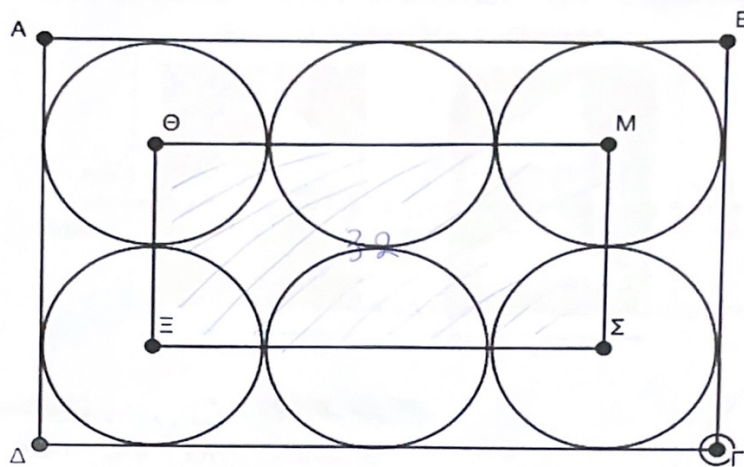
$$\text{Αρα το Εμβαδόν του } AB\Gamma\Delta = AB \cdot AD = 12 \cdot 8 = \underline{96\pi}.$$

Λύση του Μαθητή 1 (Λύκειο)



$\Theta\text{Μ} = \Xi\Sigma = 32 \text{ cm}$ 2 κύκλοι $2x = 32 \cdot 6$
 $AB\Gamma\Delta = x$ 6 κύκλοι $x = \frac{32 \cdot 6^3}{8} = 96 \text{ cm}$

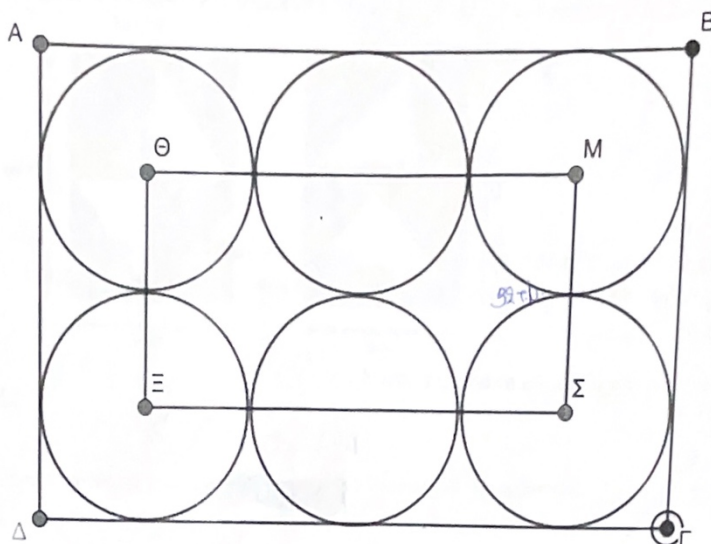
Λύση του Μαθητή 2 (Λύκειο)



$\Theta\text{Μ} = \Xi\Sigma = 2 \text{ διαμέτροι κύκλου}$
 $\Theta\Xi = \text{Μ}\Sigma = 1 \text{ διάμετρος κύκλου}$
 $AB = \Delta\Gamma = 3 \text{ διαμέτροι κύκλου}$
 $AD = B\Gamma = 2 \text{ διαμέτροι κύκλου}$
 $AD = 2 \Theta\Xi$
 $AB = 1,5 \Theta\text{Μ}$
 $AD \cdot AB = 2 \Theta\Xi \cdot 1,5 \Theta\text{Μ} = 3 \Theta\Xi \cdot \Theta\text{Μ} = 3 \cdot 32 = 96$

Λύση του Μαθητή 3 (Λύκειο)

Στην παρακάτω λύση, συναντάμε μία παρανόηση που εμφανίστηκε πολλές φορές στο συγκεκριμένο πρόβλημα και δείχνει τη δυσκολία των μαθητών σε σχέση με τον εντοπισμό αναλογιών. Ο μαθητής 4, επειδή τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται στη μέση, θεωρεί ότι το μικρό ορθογώνιο θα έχει το μισό εμβαδόν σε σχέση με το μεγάλο, άρα 64 τ.μ.



Αφού τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται αβρεως στη μέση και φαίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΘΜΞΣ με εμβαδόν 32 τ.μ. τότε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θα έχει το διπλάσιο εμβαδόν δηλαδή 64 τ.μ.

Λύση του Μαθητή 4 (Λύκειο)

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των ατομικών προσπαθειών, παραθέτουμε τις λύσεις του μαθητή 5 για τα προβλήματα 2 και 1. Συγκεκριμένα, στο πρόβλημα 2 έχουμε πάλι λειτουργική κατανόηση με μερολογική τροποποίηση και αλλαγή θέσης, μιας και ενώνει τα δύο τρίγωνα για να φτιάξει ένα ορθογώνιο. Για το πρόβλημα 1 δεν χρειάζεται να αναφέρουμε κάτι.

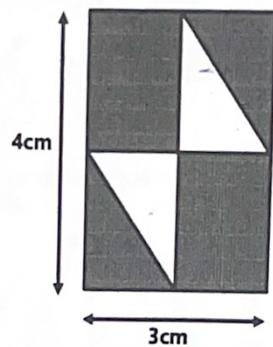
$$3) E_{\text{ρθ}} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$E_{\text{τεριγ}} = 2 \cdot 1,5 = 3$$

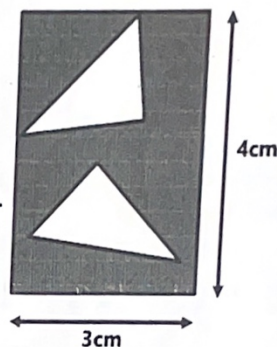
$$E_{\text{μωρ}} = 12 - 3 = 9$$

β) Καλύπτει το $\frac{3}{4}$ διότι το ορθογώνιο παραλ. χωρίζεται στα τέσσερα και τα δύο τρίγωνα μαζί καλύπτουν το 1 από τα 4 κομμάτια

Σχήμα (α)

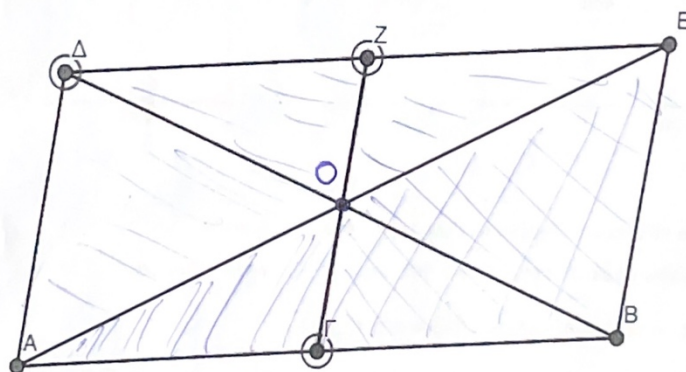


Σχήμα (β)



ΑΣΚΗΣΗ 3

Να γράψετε το πλήθος των τριγώνων που παρατηρείτε να υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα.



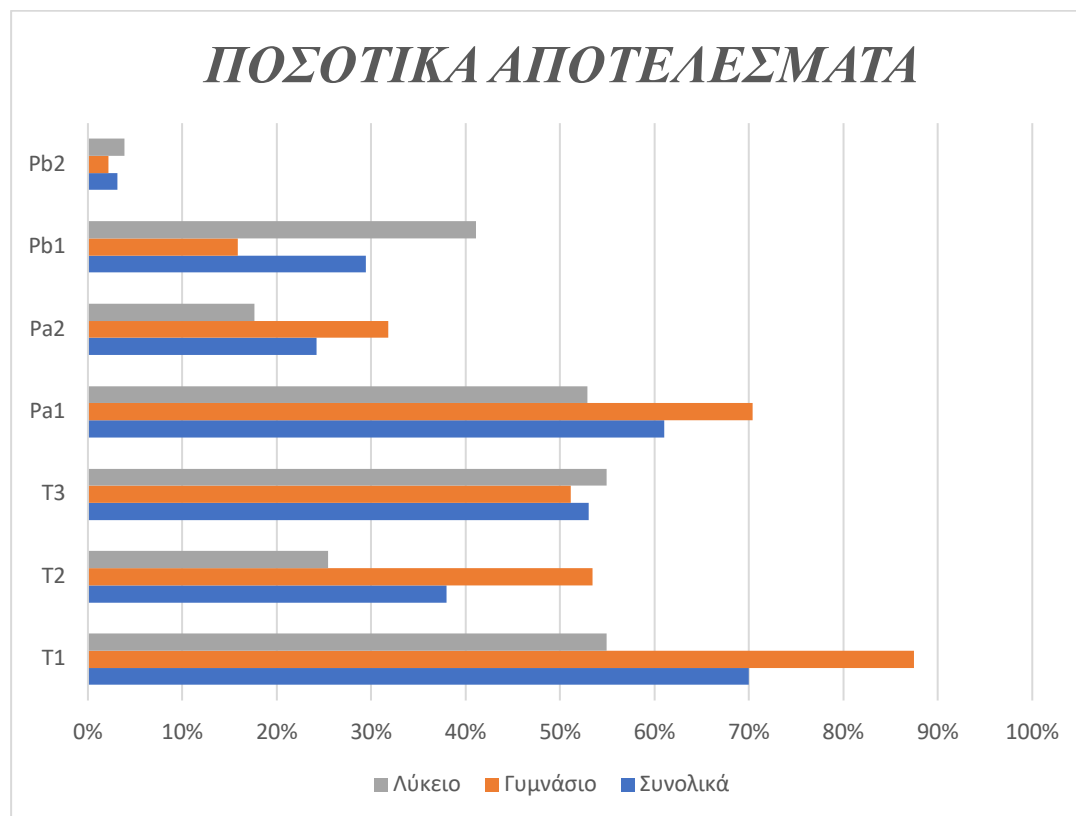
$\triangle AOG$, $\triangle GOB$, $\triangle BOE$, $\triangle OZE$, $\triangle OZ$, $\triangle AO$
 $\triangle AEB$, $\triangle BE$, $\triangle ED$, $\triangle AB$, $\triangle OE$, $\triangle OB$
 Είναι 12

Λύση του Μαθητή 5 (Λύκειο)

5.2 Ποσοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων

Πέραν της παρουσίας κάποιων επιμέρους προσπαθειών που αναδεικνύουν συνηθισμένες παρανοήσεις που κυριαρχούν στη σύγχρονη έρευνα, αλλά και μη αναμενόμενων προσεγγίσεων, κρίνεται σημαντικό και το να δούμε μία ποσοτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων μετά τη διόρθωση των ερωτηματολογίων. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφέρουμε κάποιες παραπάνω πληροφορίες για το δείγμα. Οι μαθητές του Γυμνασίου(44) είναι σχεδόν όλοι από το ίδιο δημόσιο σχολείο περιοχής των νοτίων προαστίων της Αθήνας, ενώ αντιστοίχως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της Α Λυκείου(51) είναι από δημόσιο Λύκειο των δυτικών προαστίων της Αθήνας. Παρόλα αυτά, και στις δύο ομάδες υπάρχουν και μαθητές από δημόσια και ιδιωτικά σχολεία των Αθηνών. Τα φύλλα εργασίας δόθηκαν προς το τέλος της σχολικής χρονιάς και για αυτόν τον λόγο, στο Λύκειο, υπήρχαν απόντες που ετοιμάζονταν για τις εξετάσεις με αποτέλεσμα να έχουμε ελαφρώς λιγότερο αριθμό μαθητών από όσους αρχικά αναμέναμε. Ταυτόχρονα, ορισμένοι μαθητές ήταν παρόντες, γιατί δεν είχαν άλλο περιθώριο απουσιών. Αυτές οι παρατηρήσεις ίσως να δικαιολογούν τη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ των ομάδων του Γυμνασίου και του Λυκείου και να δείχνουν μία πιο λογική συμπεριφορά στου δείγμα των μαθητών του Γυμνασίου.

Αρχικά, όπως φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα, με εξαίρεση το πρόβλημα της διαμέσου και το πρόβλημα T3 με τους κύκλους, οι μαθητές του Γυμνασίου είχαν καλύτερα ποσοστά επίλυσης από αυτούς του Λυκείου.



Συγκεκριμένα, στον παρακάτω πίνακα, παραθέτουμε τα ποσοστά επίλυσης, ανά πρόβλημα και ανά ομάδα.

	ΓΥΜΝΑΣΙΟ	ΛΥΚΕΙΟ	ΣΥΝΟΛΟ
T1	87,5%	54,9%	61%
T2	53,4%	25,4%	38%
T3	51,1%	54,9%	53%
Pa1	70,4%	52,9%	61%
Pa2	31,8%	17,6%	24,2%
Pb1	15,9%	41,1%	29,4%
Pb2	2,2%	3,9%	3,1%

Σχήμα 13: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα και εξετάζοντας τα πρωτίστως σε σχέση με τη δυσκολία των μαθητών ανά ερώτημα, παρατηρούμε ότι σε όλες τις ομάδες, με μεγάλη διαφορά το δυσκολότερο ήταν η εύρεση πολλαπλών λύσεων στο πρόβλημα της διαμέσου(Pb2). Επίσης, Ενώ συνολικά φάνηκε και το δεύτερο πρόβλημα πολλαπλών λύσεων να ήταν το δεύτερο σε δυσκολία (Pa2), οι μαθητές του Γυμνασίου δυσκολεύτηκαν περισσότερο στην εύρεση μίας λύσης στο πρόβλημα της διαμέσου. Η εξήγηση πίσω από αυτό είναι φυσικά το ότι για τους μαθητές του Λυκείου, το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι εντός της εξεταζόμενης ύλης και μάλιστα, ως μία από τις αποδείξεις που οι καθηγητές θεωρούν πολύ σημαντικές και επιμένουν ξανά και ξανά. Για αυτό βλέπουμε ότι για τους μαθητές του Λυκείου, όχι απλά δεν ήταν το δυσκολότερο, αλλά μάλιστα υπήρχε ένα πολύ υψηλό ποσοστό επίλυσης (41%).

Παρατηρώντας τώρα τα συνολικά αποτελέσματα για τους μαθητές του Γυμνασίου, βλέπουμε μία εικόνα εντυπωσιακή μεν, αναμενόμενη δε. Πράγματι, έχουν λύσει στη πλειοψηφία τους το T1, έχουν δυσκολευτεί στο T2 και ακόμα περισσότερο στο T3, αλλά με υψηλά ποσοστά και στα δύο προβλήματα. Σε

σχέση με τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων, περίπου οι μισοί που έλυναν το πρώτο πρόβλημα με έναν τρόπο (Pa1) το έλυναν και με έναν δεύτερο (Pa2). Φυσικά, το πολύ δύσκολο για αυτό το ηλικιακό γκρουπ πρόβλημα της διαμέσου είχε μικρό ποσοστό επίλυσης (Pb1) και φυσικά πολύ μικρότερο με δύο ή περισσότερες λύσεις (Pb2).

Σε αντίθεση με την ομαλότητα στα αποτελέσματα του Γυμνασίου, για τους μαθητές του Λυκείου δεν βλέπουμε την ίδια τάση. Είναι σχεδόν βέβαιο, ότι το αποτέλεσμα αυτό και η παρέκκλιση σε σχέση με το T2 και το T3 είναι συνέπεια του χρονικού σημείου που δόθηκαν τα δοκίμια. Το T2, είναι ένα πρόβλημα με πιο αυστηρό πλαίσιο και χρειάζεται αναγκαστικά χρήση τύπων για την επίλυσή του. Αντιθέτως, το T3 μπορεί να λυθεί και με καθαρά γεωμετρικούς τρόπους, χωρίς χρήση τύπων. Αυτό πιθανόν να βοήθησε τους μαθητές που ήταν παρόντες, οι οποίοι δεν θυμόντουσαν τους βασικούς τύπους υπολογισμού για το εμβαδόν του τριγώνου. Τέλος, το φοβερό ποσοστό επίλυσης του προβλήματος της διαμέσου, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, είναι βέβαιο πως συνέβη λόγω της εξεταστέας ύλης, αλλά και του ότι ήταν κάτι πολύ πρόσφατο για τους συγκεκριμένους μαθητές, μιας και τα ερωτηματολόγια δόθηκαν κοντά στις ενδοσχολικές εξετάσεις, λίγο πριν το πέρας των μαθημάτων για την κανονική διάρκεια.

Σε σχέση τώρα με τα πολύ μειωμένα ποσοστά για τις πολλαπλές λύσεις στο πρόβλημα της διαμέσου, πιθανόν-μιας και παρουσιάστηκε και στις δύο τάξεις-είναι να οφείλεται στο χρονικό περιθώριο που είχαν οι μαθητές. Για την επίλυση και των δύο φύλλων εργασίας, οι μαθητές είχαν μία διδακτική ώρα και συνυπολογίζοντας τους εξωγενείς παράγοντες, όπως πχ η μη υποχρεωτικότητα συμπλήρωσης του δοκιμίου ή το ότι ακολουθούσε διάλειμμα κλπ, μπορεί να μην έδωσαν την απαραίτητη προσοχή, αλλά και να μην είχαν επαρκή χρόνο για την εύρεση ακόμα μίας λύσης.

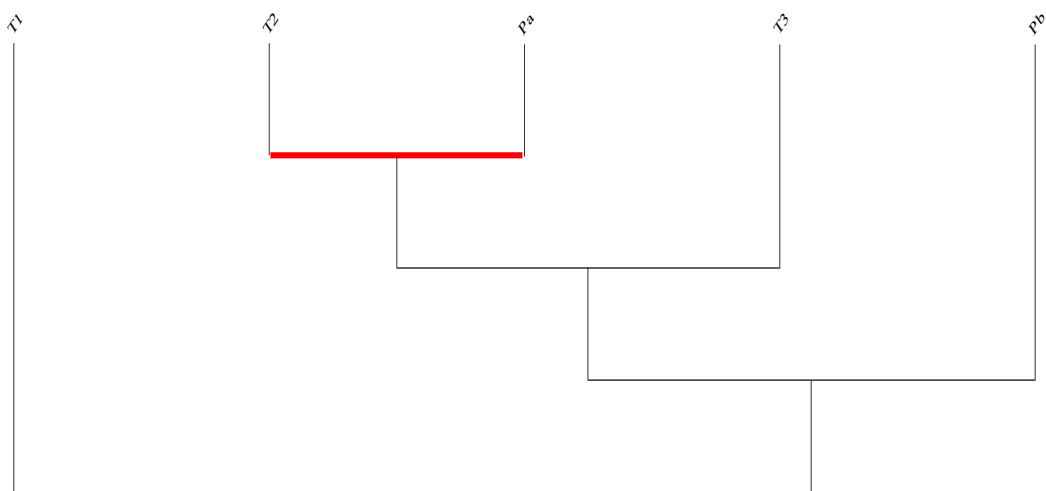
5.3 Συνεπαγωγική ανάλυση αποτελεσμάτων

Έχοντας ήδη δει τα ποσοτικά αποτελέσματα, θα δούμε τις συνδέσεις μεταξύ των έργων.

Σύμφωνα με τους ακόλουθους πίνακες, αλλά και όπως είδαμε ήδη, η εργασία T1, η οποία σχετίζεται κυρίως με την αντιληπτική κατανόηση, είναι η ευκολότερη και παρουσιάζει τη μικρότερη συσχέτιση με το πρόβλημα Pb. Το τελευταίο σύμφωνα με τα αποτελέσματα είναι το πιο δύσκολο έργο. Είναι αλήθεια ότι οι συνήθειες λύσεις αυτού του προβλήματος βασίζονται στον μετασχηματισμό του αρχικού σχήματος, για παράδειγμα με τη χρήση βοηθητικών γραμμών. Στην πραγματικότητα, λαμβάνοντας υπόψιν μας τις συχνότητες και όχι τις σχετικές συχνότητες, μόνο πέντε μαθητές έφτασαν να δώσουν δύο σωστές λύσεις σε αυτό το πρόβλημα στο σύνολο των μαθητών,. Αντίθετα, είκοσι μαθητές έχουν λύσει με δύο λύσεις το πρόβλημα Pa.

Από το ακόλουθο δέντρο ομοιότητας, είναι προφανές ότι ο πιο σημαντικός κόμβος βρίσκεται στο επίπεδο 1. Στην πραγματικότητα, η μεγαλύτερη

ομοιότητα παρατηρείται μεταξύ των εργασιών T2 και Pa. Η επίλυση αυτών των εργασιών αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο από τους μαθητές, καθώς και οι δύο εργασίες σχετίζονται με την έννοια του εμβαδού. Επιπλέον, η λειτουργική κατανόηση του σχήματος είναι απαραίτητη για τη λύση και των δύο εργασιών. Το ίδιο ισχύει και για την εργασία T3, η οποία επίσης παρουσιάζει πολύ υψηλό επίπεδο ομοιότητας μεταξύ των δύο εργασιών. Έτσι, η ομάδα των μεταβλητών ((T2 Pa) T3) θα μπορούσε να θεωρηθεί ως η ομάδα των ασκήσεων εμβαδού στις οποίες η λειτουργική κατανόηση παίζει πρωταρχικό ρόλο. Το πρόβλημα Pb σχετίζεται με την παραπάνω ομάδα εργασιών εμβαδού και η νέα ομάδα είναι (((T2 Pa) T3) Pb). Η μεταβλητή T1, δηλαδή το έργο στο οποίο παρεμβαίνει η αντιληπτική σύλληψη σχετίζεται με τα άλλα 4 έργα και έτσι η τελική ομάδα είναι (T1 (((T2 Pa) T3) Pb)). Από τον πίνακα 4 προκύπτει η ταξινόμηση σε επίπεδα και οι σχετικές ομοιότητες που σχετίζονται με τις τέσσερις ομάδες μεταβλητών.



Σχήμα 14: Το διάγραμμα ομοιότητας

	Occurrence	Average	Standard Deviations
T1	67.00	0.71	0.46

T2	48.00	0.51	0.49
T3	35.50	0.37	0.48
Pa	39.50	0.42	0.38
Pb	16.50	0.17	0.29
Cl1s	44.00	0.46	0.50
Cl2s	51.00	0.54	0.50

Table 1-Value of the variables

	T1	T2	T3	Pa	Pb
T1		0.43	0.31	0.28	0.15
T2			0.41	0.62	0.44
T3				0.54	0.31
Pa					0.42
Pb					

Table 2-Correlation indexes

	T1	T2	T3	Pa	Pb
T1	1.00	0.94	0.90	0.81	0.71
T2	0.94	1.00	0.99	0.99	0.98
T3	0.90	0.99	1.00	0.99	0.95
Pa	0.81	0.99	0.99	1.00	0.95
Pb	0.71	0.98	0.95	0.95	1.00

Table 3-Similarity indexes

Level

1	(T2 Pa) similarity : 0.993276
2	((T2 Pa) T3) similarity : 0.986533
3	((((T2 Pa) T3) Pb) similarity : 0.940378
4	(T1 (((T2 Pa) T3) Pb)) similarity : 0.787564

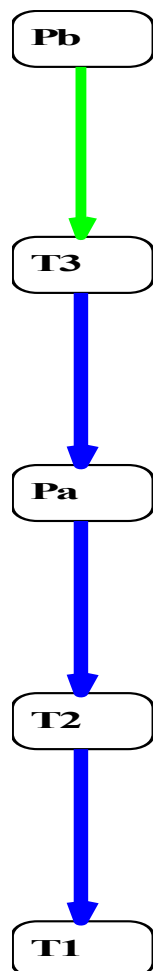
Table 4-Classification at levels

Contribution to the class: T2, Pa (1)	The variable C11 contributes to this class with the probability: 0.451 The variable C12 contributes to this class with the probability: 0.385 The most contributive variable to this class is C12 with the probability: 0.385
Contribution to the class: T2, Pa, T3 (1,2)	The variable C11 contributes to this class with the probability:0.196 The variable C12 contributes to this class with the probability:0.645 The most contributive variable to this class is C11 with the probability: 0.196
Contribution to the class: T2, Pa, T3, Pb (1, 2, 3)	The variable C11 contributes to this class with the probability: 0.201 The variable C12 contributes to this class with the probability: 0.654 The most contributive variable to this class is C11 with the probability:0.201
Contribution to the class: T1, T2, Pa, T3, Pb (1,2,3,4)	The variable C11 contributes to this class with the probability: 0.201 The variable C12 contributes to this class with the probability: 0.654 The most contributive variable to this class is C11 with the probability:0.201

Table 5- Computation of contribution of the supplementary variables

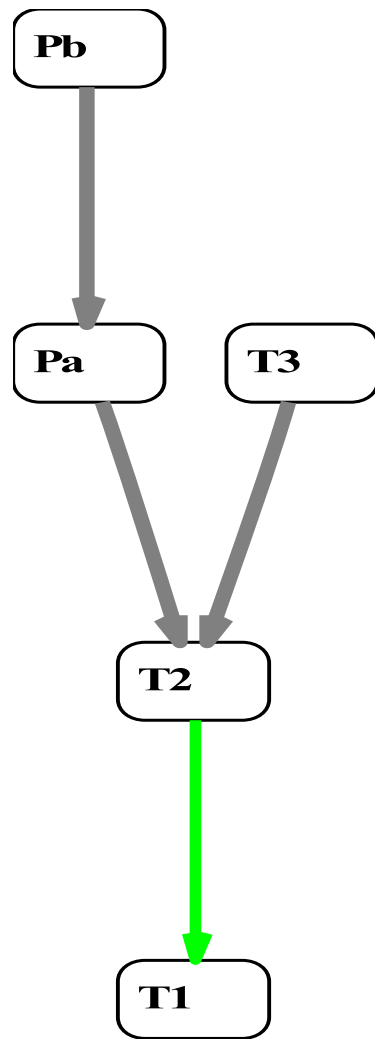
Όσον αφορά τη συμβολή των συμπληρωματικών μεταβλητών, αν και οι παραπάνω πιθανότητες δεν είναι σημαντικές, φαίνεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η μεταβλητή με τη μεγαλύτερη συμβολή είναι η C11, δηλαδή η τάξη

των μαθητών(C11-Γ Γυμνασίου, C12-A Λυκείου). Με άλλα λόγια, φαίνεται ότι οι μικρότεροι μαθητές συμβάλλουν περισσότερο στη διαμόρφωση των διαφόρων ομάδων.



Σχήμα 15: Συνεπαγωγικό διάγραμμα(κλασική θεωρία)

Παρόλο που ο αριθμός των μαθητών είναι μικρός, αναλύσαμε επίσης τα δεδομένα σε σχέση με την εντροπία. Από το γράφημα συνεπαγωγής σε σχέση με την κλασική θεωρία, προκύπτει μια γραμμική αλυσίδα συνεπαγωγής από την πιο δύσκολη εργασία Pb στην ευκολότερη εργασία T1. Το συνεπαγωγικό γράφημα σε σχέση με την εντροπία παρουσιάζει κάποιες μικρές διαφορές στις παρατηρούμενες συνεπαγωγές και επίσης στο επίπεδο σημαντικότητας των συνεπαγωγών. Η συνεπαγωγική αλυσίδα T2-T1 υπάρχει και στα δύο συνεπαγωγικά γραφήματα. Συνεπώς, η επιτυχία στην εργασία 1 είναι σημαντική για την επιτυχία στις άλλες εργασίες.



Σχήμα 16: Συνεπαγωγικό διάγραμμα (εντροπία)

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

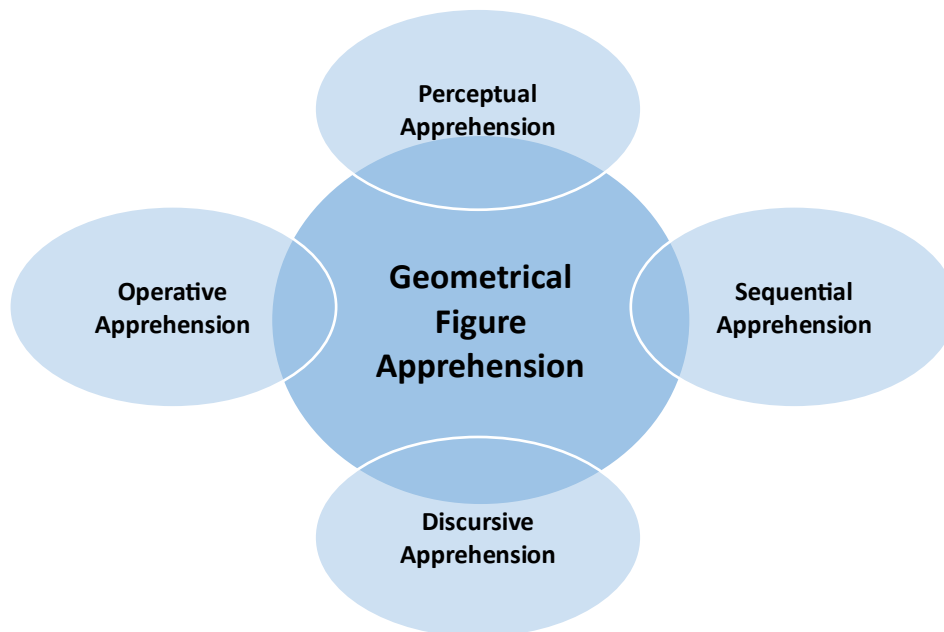
Η σημασία των αναπαραστάσεων στην κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών έχει γίνει αντικείμενο πολλών ερευνών. Η σχέση ανάμεσα στα διάφορα συστήματα αναπαράστασης-το αλγεβρικό, το γραφικό-εικονικό και το λεκτικό στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος είναι πολυδιάστατη και πολύπλοκη όπως γίνεται φανερό και από την βιβλιογραφική ανασκόπηση των εργασιών του Α. Γαγάτση και των συνεργατών του αλλά και εκατοντάδων ερευνητών σε όλο τον κόσμο, που παρουσιάστηκε πολύ σύντομα στην παρούσα εργασία. Είναι πολύπλοκη γιατί η γνωστή ρήση «Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις» δεν ισχύει πάντοτε, με την έννοια ότι μια εικόνα διευκολύνει πάντοτε την κατανόηση μια μαθηματικής έννοιας ή την επίλυση ενός προβλήματος. Μια εικόνα ή μια γραφική παράσταση μπορεί να αποτελέσουν εμπόδιο στην κατανόηση μια έννοιας ή στην επίλυση ενός προβλήματος. Αυτό μπορεί να οφείλεται όχι μόνο στην πολυπλοκότητα μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης αλλά και στο γνωστικό στυλ ενός μαθητή: εικονικό στυλ-λεκτικό στυλ, τοπικό στυλ-ολικό στυλ, κ.ά. Είναι επίσης πολύπλοκη γιατί η αποτελεσματική χρήση των αναπαραστάσεων συνδέεται με αυτό που οι ερευνητές ονομάζουν «αναπαραστατική ευελιξία» που εκφράζεται με τρεις διαστάσεις: αναγνώριση, επεξεργασία, μετάφραση.

Στη Γεωμετρία παρεμβαίνουν τα παραπάνω τρία συστήματα αναπαράστασης με τις εξής μορφές:

- Η αλγεβρική αναπαράσταση, όπως μαθηματικά σύμβολα, αλγεβρικοί τύποι που είναι απαραίτητα στοιχεία για μαθηματικούς τύπους, για υπολογισμό περιμέτρων, εμβαδών, γωνιών, κ.ά.
- Η λεκτική αναπαράσταση- έκφραση η οποία είναι απαραίτητη στην εκφώνηση των ασκήσεων, στη διατύπωση γεωμετρικών προτάσεων, αποδείξεων κ.ά.
- Το γεωμετρικό σχήμα, που είναι ένα ιδιαίτερο είδος γραφικής αναπαράστασης που ο ρόλος του είναι κομβικός στην κατανόηση των γεωμετρικών αποδείξεων.

Για το λόγο αυτό έχει δοθεί διεθνώς μεγάλη έμφαση στη λειτουργία του γεωμετρικού σχήματος στη γεωμετρική απόδειξη και έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες για το ρόλο του όπως των Duval, Fischbein, Van Hiele, e.t.c.

Στην παρούσα εργασία ενδιαφερθήκαμε κυρίως για την «κατανόηση(σύλληψη) του γεωμετρικού σχήματος» του Raymond Duval, και πιο συγκεκριμένα για την αντιληπτική, την ακολουθιακή, τη λειτουργική και τη λεκτική ή λογική κατανόηση. Τα τέσσερα αυτά είδη κατανόησης συνδέονται στενά μεταξύ τους όπως εξηγεί θεωρητικά ο Raymond Duval αλλά και όπως έδειξαν οι έρευνες του Α. Γαγάτση και των συνεργατών του. Το παρακάτω σχήμα εκφράζει ένα δομικό μοντέλο ως αποτέλεσμα διαφόρων ερευνών με εκατοντάδες μαθητών σε μια ποικιλία γεωμετρικών έργων.



Σχήμα 17: Κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος

Στην παρούσα ερευνητική μελέτη, προσπαθήσαμε μέσω της Στατιστικής Συνεπαγωγικής Ανάλυσης, να βρούμε μια σχέση μεταξύ της επίλυσης γεωμετρικών έργων που σχετίζονται με την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και των προβλημάτων που μπορούν να λυθούν με διαφορετικούς τρόπους, που δέχονται δηλαδή πολλαπλές λύσεις και ως εκ τούτου αποτελούν, όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ένας δείκτης δημιουργικότητας. Τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι δεν μπορούμε να εξετάσουμε τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά μονοδιάστατα, δηλαδή μόνο μέσα από εργασίες πολλαπλών λύσεων. Αντίθετα, η δημιουργικότητα και τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων θα πρέπει να εξετάζονται σε σχέση με άλλες διαστάσεις, όπως η κατανόηση γεωμετρικών σχημάτων. Αυτό συμφωνεί με την πρόταση των Gagatsis και Geitona (2021), οι οποίοι προτείνουν μια πολυδιάστατη προσέγγιση της δημιουργικότητας των μαθητών στη γεωμετρία, η οποία θα λαμβάνει υπόψη τη χωρική ικανότητα, την κατανόηση γεωμετρικών σχημάτων και τις πολλαπλές λύσεις. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρημα της Στατιστικής Συνεπαγωγικής Ανάλυσης μας, ότι οι μαθητές που αποτυγχάνουν να λύσουν το έργο που απαιτεί μόνο αντιληπτική ικανότητα αποτυγχάνουν να λύσουν και άλλα έργα. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τη θέση του Duval (1995) ότι για να λειτουργήσει ένα σχέδιο ως γεωμετρικό σχήμα πρέπει πρωτίστως να προκαλεί την αντιληπτική κατανόηση και εν συνεχεία, τουλάχιστον ένα από τα άλλα τρία είδη κατανόησης. Επιπλέον, τα αποτελέσματα δείχνουν επίσης την ισχυρή επιρροή που έχει η κοινή υποκείμενη έννοια, στην προκειμένη περίπτωση του εμβαδού, σε 3 από τις εργασίες, κατά τη διαδικασία που ακολουθούν οι μαθητές για την επίλυσή τους.

Σε σχέση τώρα με την αυτοκριτική-κριτική που θα μπορούσαμε να κάνουμε και τον αναστοχασμό, αξίζει να αναφέρουμε-τονίσουμε μερικές αδυναμίες της έρευνας:

- Αρχικά, η χρονική στιγμή που δόθηκαν τα ερωτηματολόγια ίσως δεν ήταν η καταλληλότερη, καθώς το ένα από τα γεωμετρικά έργα ήταν πολύ οικείο στους μαθητές της Α Λυκείου.
- Η δεύτερη αδυναμία αφορά στους απόντες μαθητές στις τάξεις, οι οποίοι μάλιστα ήταν άτομα του ίδιου προφίλ, δηλαδή μαθητές που ετοιμάζονταν για τις εξετάσεις, άρα ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών ενός τμήματος.
- Η τρίτη αδυναμία αφορά στο δείγμα, καθώς ίσως μία επιλογή σχολείου του ίδιου κοινωνικού προφίλ να ήταν καλύτερη. Βάσει αυτής της παρατήρησης, θα μπορούσε να διατυπωθεί και ένα ερώτημα για μελλοντική εργασία σε σχέση με την κατανόηση και τη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών, σε σχέση με την περιοχή του σχολείου φοίτησης. Θεωρώ πως μία τέτοια έρευνα θα είχε πολλά να αναδείξει, τα οποία θα αποτελούσαν τροφή για σκέψη για όλη την ελληνική εκπαίδευση, καθώς και την ελληνική κοινωνία.
- Η τέταρτη αδυναμία αφορά στην ανάγκη για περισσότερη και βαθύτερη πληροφορία σε σχέση με τον τρόπο επίλυσης ορισμένων μαθητών το οποίο προέκυψε κατά τη διάρκεια διόρθωσης των ερωτηματολογίων. Μία ποιοτική έρευνα στα αντίστοιχα φύλλα εργασίας, με τη διεξαγωγή συνεντεύξεων, θεωρούμε ότι θα συμπλήρωνε αρμονικά την παρούσα έρευνα και θα φώτιζε ορισμένα σημεία ειδικά σε σχέση με τον τρόπο σκέψης των μαθητών κατά τη διάρκεια σύλληψης και υλοποίησης κάποιων λύσεων.
- Μια πρόταση για επέκταση της παρούσας έρευνας, θα βασίζονταν σε μία αντίστοιχη διαδικασία, όμως με την υλοποίηση των φύλλων εργασίας που θα περιλάμβαναν περισσότερα έργα και φυσικά σε περισσότερο χρόνο καθώς πιθανόν να έπαιξε αρνητικό ρόλο και ο σχετικά μικρός χρόνος εργασίας των μαθητών στην παρούσα έρευνα. Επίσης η επανάληψη της έρευνας σε ένα μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και από πολλά διαφορετικά μέρη και σχολεία της Ελλάδας θα μπορούσαν να συμβάλουν σε πιο στέρεα αποτελέσματα για τις σχέσεις μεταξύ της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος και της επίλυσης γεωμετρικών έργων με πολλαπλές λύσεις.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adams, R.D., & Victor, M., (1993). Principles of Neurology, Fifth edition, *McGraw-Hill, New York, NY*. Στον: Arcavi, A., (2003).

Aizikovitsh-Udi, E. (2014). The Extent of Mathematical Creativity and Aesthetics in Solving Problem among Students Attending the Mathematically Talented Youth Program. *Creative Education*, 5, 228-241.

Anderson, J. R., (1995). Cognitive psychology and its implications (4th ed.). New York: Freeman.

Arcavi, A., (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics *Educational Studies in Mathematics*, 52, pp.215–241.

Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 503-532.

Bergstrom, C., & Zhang, D. (2016). Geometry interventions for K-12 students with and without disabilities: A research synthesis. *International Journal of Educational Research*, 80, 134-154.

Bishop, A. J., (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), pp.7-16.

Bolden, D.S., Harries, A.V. & Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teacher's conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (2), 143-157.

Cangelosi, J. S. (1996) *Teaching Mathematics in Secondary and Middle School: An Interactive Approach*. (2nd edition). New Jersey: Prentice Hall.

Chiu, M.-S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 55–79.

Christou, C., Mousoulidis, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2, 339–352.

Clements, D. H., & Battista, M. T., (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 420–464. New York: Macmillan. Στους: Gal, H. & Linchevski L., (2010).

Clements, M.A., (1982). Visual Imagery and School Mathematics. Part II. *For the Learning of Mathematics*, 2(3), pp.33-38

Clements M. A., (Ken), (1981). Visual imagery and school mathematics for the learning of mathematics, 2(2), pp.2-9. Published by: FLM Publishing Association

Clements, D. & Stephan M. (2004). Measurement in PreK-2 Mathematics. In D.H. Clements & J. Samara (Eds.), *Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education* (pp. 199-317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Curry, M., Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2006). Development of Children's Understanding of Length, Area, and Volume Measurement Principles. In Novotna, J., Maraova, H., Kratka, M., & Stehilkova, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 377-384. Prague: PME.

D'Amore, B., & Fandino Pinilla, M. I., (2008). The phenomenon of change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis, *Conference of Five Cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno "Research in Mathematics Education"*, pp.13 -22.

De Corte, E., Verschaffel, L. & Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 197-216.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational Flexibility and Problem-Solving Ability in Fraction and Decimal Number Addition: A Structural Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 397-417.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 33 (4), 427-442.

Deliyianni, E. & Gagatsis, A. (2009). La comprensione dell'addizione di frazioni nella scuola primaria: Il ruolo delle rappresentazioni multiple. *La Matematica e la sua Didattica*, 23(3), 299-318.

DeWindt-King, A.M., & Goldin, G.A., (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 2(1), pp.1-42.

Dreyfus, T., (1995). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *On leave from the Center for Technological Education*, American Mathematical Society Israel Mathematical Union Joint Meeting, Israel.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M., (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp.109-122. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp.103–131, Springer

Duval, R., (2006). Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, pp.558-619. Στους: Santi, G., Sbaragli, S., (2008).

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–53

Duval, R., (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of PME*, 1, Nishiki Print Co. Ltd., pp.55–69, Hiroshima.

Duval, R., (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning, 25p. In: *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R., (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, pp. 37–52. Dordrecht: Kluwer.

Duval, R., (1995). Geometrical pictures : Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education*, pp.142-157. Berlin:Springer.

Duval, R., (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5, pp.37-65. Στους: Santi, G., Sbaragli, S., (2008).

Δελγιάννη, Ε., Γαγάτσης, Α., & Κουκκούφης, Α., (2003). Η επίδραση των εικόνων στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού στη Γ' τάξη δημοτικού σχολείου. Στους Α. Γαγάτσης & . Ηλία (Εκδ.). *Οι αναπαραστάσεις και τα γεωμετρικά μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών*, Τόμος , σσ.87-10. Λευκωσία: Intercollege.

DeWindt-King, A. M., & Goldin, G. A. (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 2(1), 1-42.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Gagatsis, A., (2018). Geometry Learning in the Early Years: Developing Understanding of Shapes and Space with a Focus on Visualization, *Forging connections in early mathematics teaching and learning*

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41, 605–618.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of limit and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(4), 765-790.

Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 8(1), 49-69.

Elia, I., & Philippou, G., (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp.327-334. Bergen, Norway: Bergen University College.

Ericsson, K., A., (1999). Creative Expertise as Superior Reproducible Performance: Innovative and Flexible Aspects of Expert Performance. *Psychological Inquiry Vol. 10, No. 4, 1999*, pp. 329-333.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Fischbein, E., (1987), *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Reidel, Dordrecht, The Netherlands. Στοι: Arcavi, A., (2003).

French National Assessment, (1992, 1996). Στοι: Duval, R., (1999).

Gagatsis, A. & Alexandrou M. (2022). A review of the research in teaching and learning the negative numbers: an “action research” concerning the application of the geometrical model of the number line. *DdM, Didattica della Matematica: Dalla ricerca alle pratiche d’aula*. N.11, 9-32.

Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z. Deliyianni, E. & Gridos, P. (2022). How could the Presentation of a Geometrical Task Influence Student Creativity? *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*. 5(1), 93-116. <https://doi.org/10.31756/jrsmte.514>

Gagatsis, A., Panaoura, A., Nicolaou, S., Elia, I., Deliyianni, E., & Stamatakis, S. (2022). The Role of Representations in the Understanding of Mathematical Concepts in Higher Education: The case of Function for Economics Students. *Journal of Research in Science Mathematics and Technology Education*, 5(1), 69-92

Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., Nicolaou, S., & Elia, I. (2020). Are representations useful in Economic Mathematics? Students' beliefs and self-efficacy beliefs in the case of exponential and logarithmic functions. *La matematica e la sua didattica*, Anno 28, n. 1, 63-85.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2017). Representational flexibility in fractions and decimals: A synthesis of research studies. *Communication and Cognition*, 50(3-4), 93-120.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Panaoura, A., & Michael-Chrysanthou, P. (2016). Fostering Representational Flexibility in the Mathematical Working Space of Rational Numbers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30 (54), 287-307.

Gagatsis, A., Michael – Chrysanthou, P., Deliyianni, E., Panaoura, A., & Papagiannis, C. (2015). An insight to students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought. *Communication & Cognition*, 48 (3-4), 89-128

Gagatsis, A., & Deliyianni, E. (2015). Mathematical Working Space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Reline*. 17 (4-II), 249-267.

Gagatsis, A., Christodoulou, T. & Elia, I. (2013). How young students deal with recognition and conversion tasks of graphs. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 13, 1-16.

Gagatsis, A., & Monoyiou, A. (2013). Les stratégies des futurs instituteurs dans la résolution de tâches sur les fonctions. Approche ponctuelle ou approche coordonnée ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 18, 115 – 138.

Gagatsis, A. (2012). The Structure of Primary and Secondary School Students' Geometrical Figure Apprehension. In E. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Research on Mathematical Education and Mathematics Applications* (pp. 11-20). Rhodes: University of the Aegean.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité: le cas du domaine numérique. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 16, pp. 21-38).

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Delilyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, 10, 35–50.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., & Philippou, A. (2010). Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 10, 51-67.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2010). Tracing primary and secondary school students' representational flexibility profiles in decimals. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 211-222.

Gagatsis, A., & Deliyianni, E., (2004). Pictures, number line and solution of problems of the four number facts: A comparative study. In A. Gagatsis, A. Evangelidou, I. Elia & P. Spyrou (Eds.), *Representations and learning in mathematics: Problem solving, models and functions*, 1, pp.133-165. Lefkosia: Inercollege Press.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M., (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving, *Educational Psychology*, 24(5), pp.645-657.

Γαγάτσης, Α., (2011). Μια εικόνα αξίζει πράγματι χίλιες λέξεις; Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών, σσ.115-128. *Ερευνητικά θέματα Μαθηματικής Παιδείας*, Α. Γαγάτσης & Χ. Γ. Χαραλάμπους (Eds) Αντιπρυτανεία Ακαδημαϊκών υποθέσεων Πανεπιστημίου Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Σιακαλλή, Μ. (2000). CHIC: Ένα στατιστικό πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων σε σχέση με την διδακτική των Μαθηματικών – εφαρμογή στις συναρτήσεις.

Γαγάτσης, Α., & Ηλία, Ι., (2004). Η εικόνα στην επίλυση προβλήματος: Αρωγός ή εμπόδιο; *Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Ίδρυμα Προώθησης έρευνας*.

Gal, H., & Linchevski, L., (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception *Educational Studies in Mathematics*, 74, pp.163–183 Springer Science & Business Media.

Goldin, G.A., (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), pp.137 - 165.

Goldin, G.A., & Kaput, J. J., (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah (Eds.), *Theories of Mathematical Learning*, pp.397 - 430. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J. & Vlachou, R. (2022). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(3), pp. 619-636. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4>

Gridos, P., Avgerinos, E., Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021). Unpacking The Relation Between Spatial Abilities and Creativity in Geometry. *The European Educational Researcher*, 4(3), 307- 328. <https://doi.org/10.31757/euer.433>

Gridos, P., Gagatsis, A., Elia, I. & Deliyianni, E. (2019). Mathematical creativity and geometry: the influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions. *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for*

- Research in Mathematics Education: Working Group 4* (pp. 789-796). Utrecht, Netherlands.
- Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 33–56. Doi: 10.1007/s10857-012-9210-7.
- Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. McGraw-Hill: New York.
- Guilford, J. P. (1959). Traits of creativity. In H. H. Anderson (Ed.), *Creativity and Its Cultivation*. Harper, New York.
- Harada, K. et al. (2000). The Role of Figures in Geometrical Proof-Problem Solving (Types of Students' Apprehensions of Figures in France and Japan). In *Proof and Proving in Mathematics Education*. ICME9 TSG 12. Tokyo/ Makuhari, Japan.
- Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Education Studies in Mathematics*, 18(1), 59–74.
- Herbst, P. & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, 24, 73–122.
- Hershkowitz, R., Ben Haim, D., Holes, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S., (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 70–95. Cambridge: Cambridge University Press. Στους: Gal, H. & Linchevski L., (2010).
- Hirstein, J., Lamb, C., & Osborne, A. (1978). Students' misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.
- Hoffer, A., (1977). Mathematics resource project: Geometry and visualization. Palo Alto: Creative Publication. Στους Gal, H. & Linchevski L., (2010).
- Jackson, A., (2002). The world of blind mathematicians, *Notices of the AMS*, 49(10), pp.1246– 1251. Στον: Arcavi, A., (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics *Educational Studies in Mathematics*, 52, pp.215–241.
- Johnson-Laird, P. N., and Byrne, R. M. J., (1991). *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale Στο: Schnotz, W., (2002). Towards an Integrated View of Learning From Text and *Visual Displays Educational Psychology Review*, 14(1), pp. 101-120. Published by: Springer.
- Kalogirou, P. & Gagatsis, A. (2012). The relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (1-2), 133-146.

Kalogirou, P. & Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 11, 25–38.

Kaput, J. J., (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp.19-26. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J., (1985). Representation and problem solving: methodological issues related to modelling. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, pp.381-398. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM Mathematics Education*, 45, 167-181.

Kidman, G.C. (1999). Grade 2, 6 and 8 students' strategies in area measurement. In J.M. Truran & K.M. Trunan (Eds.), *Making the Difference (Proceedings of the 22nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 298-305). Adelaide: MERGA.

Kirrane, D.E., (1992). Visual learning. *Training and Development*, 46(9), pp.58–63.

Klavr, R., & Gorodetsky, M. (2009). On Excellence and Creativity: A study of Gifted and Expert Students. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 221-242). Rotterdam: Sense Publishers.

Koedinger, K., & Anderson, J. R., (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science*, 14, pp.511—550.

Kosslyn, S. M., (1978). Imagery and cognitive development: A teleological approach. In R. S. Siegler (ed.), *Children's Thinking: What Develops?* New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates. Στον: Clements M. A., (Ken), (1981).

Kosslyn , S. M., & Sc Pomeratz, J.R., (1977). Imagery, propositions, and the form of internal representations. *Cognitive Psychology* , 9, pp.52-76

Krutetskii V. A. (1969). The Structure of Mathematical Abilities. *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. University of Chicago Press, Chicago.

Kuzniak, A., Richard, P. & Gagatsis, A. (2012). CERME7 Working Group 4: Geometry teaching and learning. *Research in Mathematics Education*, 14 (2), 191-192.

Krutetskii, V. A., (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Jeremy Kilpatrick & Izaak Wirszup (Eds) Chicago: University of Chicago Press.

Kwon, O.N., Park, J.S. & Park, J.H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pasific Education Review*, 7 (1), 51-61.

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. Ανακοινώσεις του 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Εθνικό Και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου με Θέμα "Τα Μαθηματικά Στο Γυμνάσιο", Αθήνα. 11 - 13 Απριλίου, 2003,.

Laborde, C., (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 9(3), 337-364. Στον: Dreyfus, T., (1995)

Larkin, J. H., & Simon, H. A., (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, pp.65-99.

Lean, G., & Clements, M. A. (Ken)., (1981). Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), pp.267-299. Published by: Springer

Leikin, R., & Elgrabli, H. (2015). Creativity and expertise: The chicken or the egg? Discovering properties of geometry figures in DGE. In K. Krainer, & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1024–1031). Prague, Czech Republic: ERME.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling, Volume 55*, 2013 (4), 385-400.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A., (2008). Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 8:3, 233-251.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I, & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 28, 1-12.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp. 137- 167, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lilly, F. & Bramwell-Rejskind, G. (2004). The dynamics of creative teaching. *The Journal of Creative Behavior*, 38 (2), 102-124.

McCormick, B. H., DeFantim T. A. & Brown, M. D., (1987). Visualization in scientific computing: Definition, domain, and recommendations. *Computer Graphics*, 21, pp.3–13. Στον: Arcavi, A., (2003).

Mesquita, A. L., (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), pp.183-195.

Mesquita, A. L., (1991). La construction algorithmique: niveaux ou phases? *Proceedings of the 15th PME Conference*, 3, pp.1-8. Assisi, Italy. Στην: Mesquita, A. L., (1998).

Mesquita, A. L., (1989a). L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: Eléments pour une typologie. *Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur*, Strasbourg. Στην: Mesquita, A. L., (1998).

Michael - Chrysanthou, P., & Gagatsis, A., (2015a). The influence of the nature of geometrical figures on geometric proofs and the role of geometrical figure apprehension. In J. C. Régnier, Y. Slimani, R. Gras, I. B. Tarbout & A. Dhioubi (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference Implicative Statistic Analysis*, pp.356-368. Radès–Tunisie: A.S.I.

Michael – Chrysanthou, P., & Gagatsis, A., (2015). Ambiguity in the way of looking at geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*, 17 (4-I), pp.165-180.

Michael, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E. & Kuzniak, A. (2011). Middle and High school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 11, 45 –55.

Michael, P., Elia, I., Gagatsis, A. & Kalogirou, P. (2010). Primary school students' operative apprehension of geometrical figures. *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica*, N.20, Supplemento 1, 225-243.

Monoyiou, A., Spagnolo, F., Elia, I., & Gagatsis A., (2007). Visual representations in mathematics education. In *Current Trends in Mathematics Education*, pp.127-138. Rhodes: University of the Aegean.

NACCCE (1999). *All Our Futures: Creativity, Culture and Education*.Sudbury, National Advisory Committee on Creative and Cultural Education: DfEE and DCMS.

Outhred, L. (1993). *The Development in Young Children of Concepts of Rectangular Area Measurement*. PhD dissertation, Macquarie University, Australia.

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2004). Students' structuring of rectangular arrays. In *the Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3, 465-472.

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 144-167.

Paivio, A., (2007). Mind and its evolution. A dual coding theoretical approach. Mahwah: *Lawrence Erlbaum Associates, Publishers*. Στους: Gal, H. & Linchevski L., (2010).

Paivio, A., (1986). Mental representations: A dual coding approach. *Oxford University Press*. Oxford. Στους: Gal, H. & Linchevski L., (2010).

Paivio, A., (1978). A dual coding approach to perception and cognition. In Pick, H. L., & Saltzman, E., (eds.). *Modes of Perceiving and Processing Information*, *Lawrence Erlbaum Associates*, New Jersey. Στους: Lean, G., & Clements, M. A. (Ken), (1981).

Paivio, A., (1977). Images, propositions and knowledge. In. Nicholas, J.M., (Ed.), *Images, perception and knowledge. Western Ontario series in the Philosophy of Science*. Dordrecht: Reidel. Στοι: Clements M. A., (Ken), (1981).

Paivio, A., & Desrochers, A., (1979). Effects of an imagery mnemonic on second-language recall and comprehension. *Canadian Journal Psychology*, 33, 17-28.

Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & Giatilis, G.P. (2006). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 681-706.

Panaoura, G., & Gagatsis, A. (2006). Confronto di risultati nel problem solving geometrico nel caso di studenti di scuola primaria e di scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, 20(3), 425-441.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 39-60.

Peirce, C. S., (1906). *Prolegomena to an apology for pragmatism*. *Monist*. Στοι Duval, R., (1999).

Piaget, J., (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris :P.U.F. Στοι: Duval, R. (1999).

Piirto, J. (2004). *Understanding creativity*. Scottsdale, AZ: Great Potential Press.

Pink, D. (2005). *A whole new mind*. New York, NY: Penguin.

Poincare, Henri. (1902/1968). *La science et l'hypothese Flammarion*, Paris. Στην: Mesquita, A. L., (1998).

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Posamentier, A. S., Smith, B. S. & Steelman, J. (2010). *Teaching secondary mathematics: techniques and enrichment units*. (8th Ed.). Columbus, Ohio: Merrill Prentice Hall

Presmeg, N. C., (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. English (Ed.), *Mathematical reasoning—analogies, metaphors and images*, pp.299–313. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Στους: Gal, H. & Linchevski L., (2010).

Presmeg, N. C., (1986). Visualisation in High School. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), pp.42-46. Published by: FLM Publishing Association.

Pyke, L., (2003). The use of symbols, words and diagrams as indicators of mathematical cognition: A causal model. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(5), pp.406-432.

Pylyshyn, Z. W., (1973). What the mind's eye tells the mind's brain: A critique of visual imagery, *Psychological Bulletin*, 80, pp.1-24.

Παναούρα, Γ., & Γαγάτσης, Α. (2008). Investigating the structures of students' geometrical performance. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 131-144). Nicosia: University of Cyprus.

Παναούρα, Γ., & Γαγάτσης, Α. (2010). The geometrical reasoning of primary and secondary school students. *The 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 5, Geometrical Thinking* (pp.746-755), Lyon, France: ERME, <http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/>

Quigley, P. (1998). *Creativity and Computers*. Retrieved December 5, 2008, from <http://arts.anu.edu.au/philosophy/confweb/Quigley.htm>

Roland, P. E., & Friberg, L., (1985). Localization of cortical areas activated by thinking. *Journal of Neurophysiology*, 53, pp.1219–1243.

Runco, M. & Pritzker, S. (1999). *Encyclopedia of Creativity*. Academic press.

Runco, M. A. (1993). *Creativity as an educational objective for disadvantaged students* (RBDM 9306). Storrs: University of Connecticut. The National Research Center on the Gifted and Talented.

Santa, J. L. (1977). Spatial transformations of words and pictures. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 3, 418–427.

Schnotz, W., (2002). Towards an Integrated View of Learning From Text and Visual Displays. *Educational Psychology Review*, 14(1), pp.101-120. Published by: Springer.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematical classroom: Reflections and constructions. In von F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.). *The culture of the mathematics classroom*, pp.308-343. *Cambridge: Cambridge UP*.

Simonton, D. K. (2000) Creativity: Cognitive, Personal, Developmental, and Social aspects. *American Psychologist*, 55(1), 151-158

Smilansky J., & Naftali, H. (1986) Inventors versus problem solvers: An empirical investigation. *Journal of Creative Behavior*, 20 (3), 183–201.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, 3, 75–80.

Sophocleous, P., Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2009). Creative ability and criteria in recognising geometric figures. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 153 - 160). Thessaloniki, Greece: PME.

Sriraman, B. (2005). Are Giftedness and Creativity Synonyms in Mathematics? *The Journal of secondary Gifted Education*, XVII(1), 20-36.

Standler, R. B. (1998) *Creativity in science and engineering*. Retrieved December 5, 2008, from <http://www.rbs0.com/create.htm>

Sternberg, R. J. (1997). A triarchic view of giftedness: Theory and practice. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (2nd ed., pp. 43–53). Boston: Allyn and Bacon.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93–115). New York: Cambridge University Press.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematics Education (FJME)*, 11(2), 129–161.

Stupel, M. & Ben-Chaim, D. (2017): Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning*.

Suwarsono, S., (1982). Visual imagery in the mathematical thinking of seventh grade students. Unpublished Ph.D. dissertation, Monash University, Melbourne. Στην: Presmeg, N. C., (1986).

Theodoulou, R., Gagatsis, A., & Theodoulou, A., (2004). Un' imagine vale piu di mille parole...Ma che tipo di imagine risulta piu efficace nell attivita di problem solving matematico degli studenti?, *La matematica e la sua didattica*, 2, pp.4-32. Στους: Monoyiou, A., Spagnolo, F., Elia, I., & Gagatsis A., (2007).

Theodoulou, R., Gagatsis, A., & Theodoulou, A. (2003). Are pictures always helpful in mathematics problem solving? In A. Gagatsis & I. Elia (Eds.), *Representations and Geometrical models in the Learning of Mathematics*, I, pp.87-104. Nicosia: Intercollege Press, (in Greek).

Torrance, E. P. (1966). *Torrance test on creative thinking: Norms-technical manual* (Research ed.). Lexington, MA: Personal Press.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Torrance, E.P. (1994). *Creativity: Just wanting to know*. Pretoria, South Africa: Benedic books.

Τσακίρη, Μ., Ρούσου-Μιχαηλίδου, Π., Ηλία, ., & Γαγάτσης, Α., (2004). Η επίδραση των εικόνων και της βοηθητικής γραμμής στην επίλυση προβλημάτων προσθετικής δομής σύνθεσης μέτρων από μαθητές Α΄ και Γ΄ δημοτικού. Στους Γαγάτση, Α., Φιλίππου, Α., Πίττα, Δ., & Σπύρου, Π. (Εκδ.), *Πρακτικά Στ΄ Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Επιστήμης και Παιδείας*, σσ.225-238. Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Verdi & Kulhavy (same issue with Schnotz, W. (2002)) Στον: Schnotz, W. (2002).

Yushau, B., Mji, A., & Wessels, D.C.J. (2003) *Creativity and Computer in the Teaching and Learning of Mathematics*. Technical Report Series. Department of Mathematical Sciences. King Fahd University of Petroleum & Minerals.

8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (1)

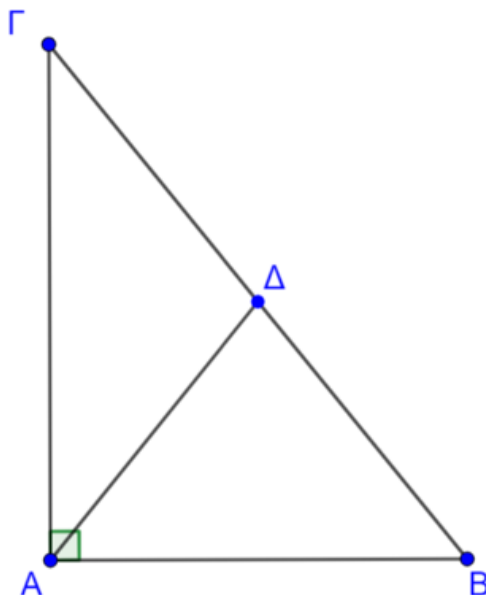
Τα φύλλα εργασίας, όπως ακριβώς δόθηκαν στους μαθητές:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (1) ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

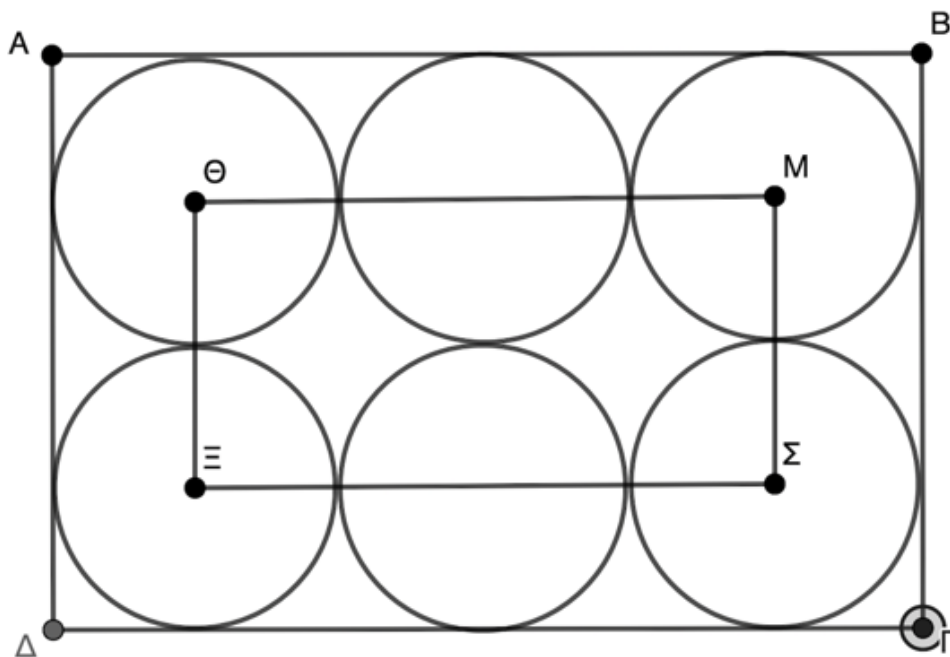
Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BG}{2}$)



ΑΣΚΗΣΗ 2

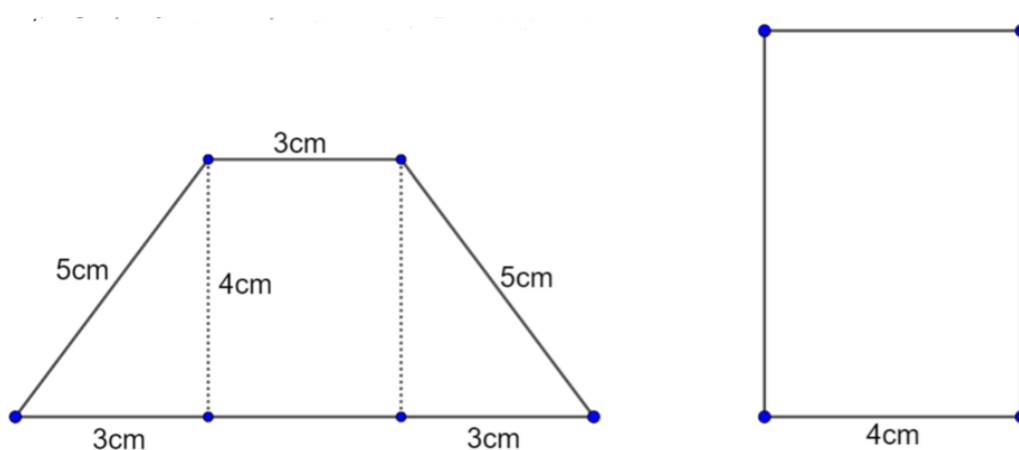
Στο παρακάτω σχήμα οι έξι ίσοι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BG, ΓΔ και ΔΑ εφάπτονται στους κύκλους ορίζοντας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Αν τα κέντρα των κύκλων δημιουργούν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΘΜΣΞ με εμβαδόν 32 τ.μ να βρείτε εξηγώντας τον τρόπο σκέψης σας το εμβαδόν του ABΓΔ.



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2) ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογωνίου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

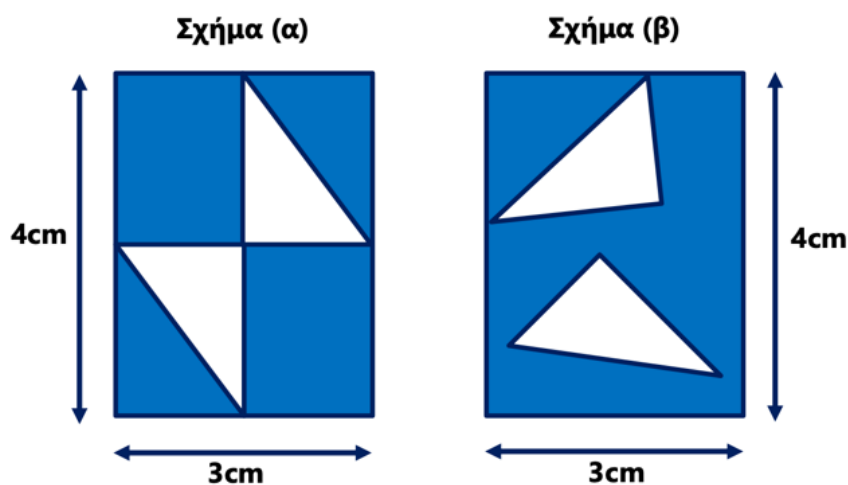


ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο ίσα τρίγωνα είναι τοποθετημένα στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 3cm επί 4cm όπως φαίνεται στο σχήμα (α).

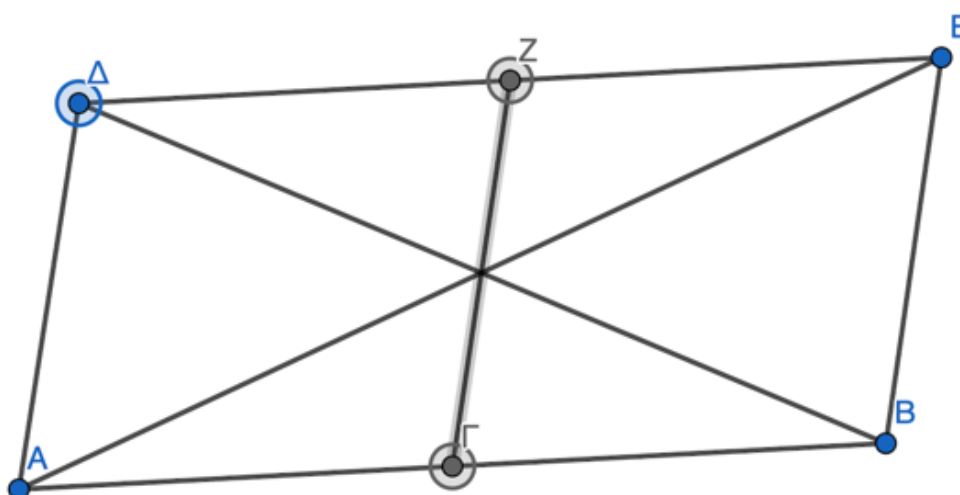
(i) Να υπολογίσετε το χρωματισμένο εμβαδόν στο σχήμα (α).

(ii) Στο σχήμα (β) τα τρίγωνα άλλαξαν θέση. Να βρείτε ποιο κλάσμα του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτουν τα τρίγωνα. Να **εξηγήσετε** τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



ΑΣΚΗΣΗ 3

Να γράψετε το πλήθος των τριγώνων που παρατηρείτε να υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα.

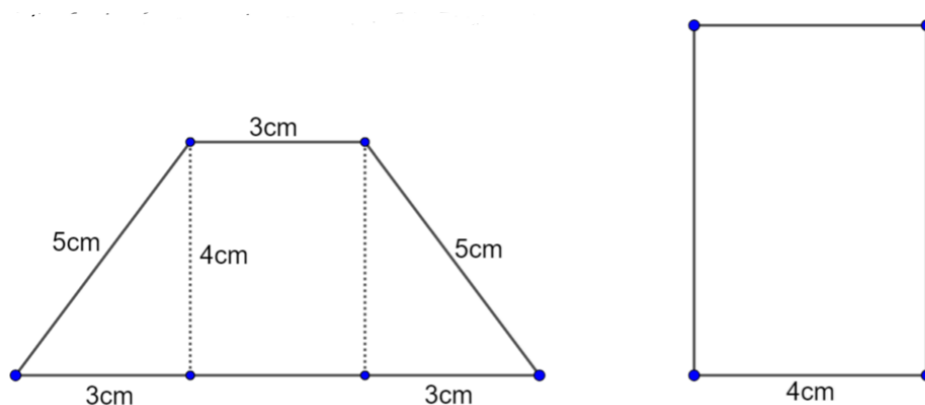


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (2)

Τα φύλλα εργασίας, με τις ακριβείς ονομασίες που χρησιμοποιήθηκαν για την στατιστική αλλά και για τη συνεπαγωγική ανάλυση στα αγγλικά:

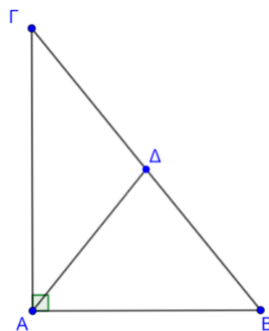
Pa

Find in two different ways the other dimension of the rectangle if the two shapes have the same area.



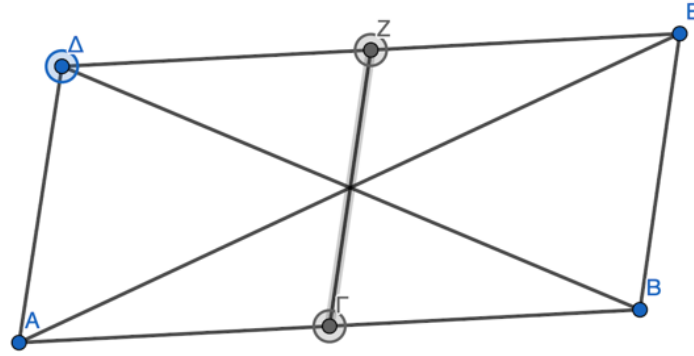
Pb

Prove in as many ways as you can that the median from the vertex of a right triangle corresponding to the hypotenuse is equal to half the hypotenuse. That is, based on the figure, prove that $AD = \frac{BG}{2}$



T1

Write down the number of triangles you see in the figure below.

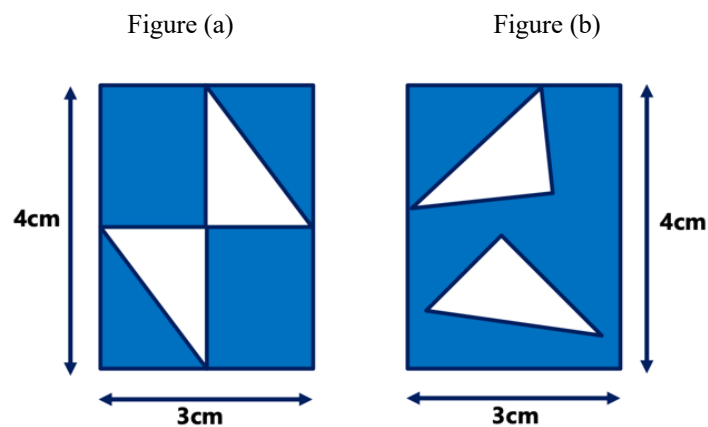


T2

Two equal triangles are placed inside a rectangular parallelogram with dimensions 3cm by 4cm as shown in figure (a).

(i) Calculate the shaded area in figure (a).

(ii) In figure (b) the triangles have changed position. Find what fraction of the area of the rectangular parallelogram the triangles cover. Explain how you worked.



T3

In the figure below, the six equal circles are tangent to each other and respectively the line segments AB, BF, $\Gamma\Delta$ and ΔA are tangent to the circles defining a rectangular parallelogram AB $\Gamma\Delta$. If the centers of the circles create the rectangular parallelogram $\Theta M \Sigma \Xi$ with an area of 32 sq.m, find the area of AB $\Gamma\Delta$ by explaining your way of thinking.

