ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

ΠΡΟΚΟΠΙΟΥ ΨΑΛΤΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΜ:994701

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2012

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής και τα μέλη της τριμελούς και επταμελούς επιτροπής

Παπάζογλου Παναγιώτης Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Βάρσος Δημήτριος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ταλέλλη Ολυμπία Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Αθηνών

Αθανασιάδης Χρήστος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Εμμανουήλ Ιωάννης Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ράπτης Ευάγγελος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Συκιώτης Μιχαήλ Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το διδακτικό προσωπικό του τμήματος Μαθηματικών του παν. Αθηνών για τις σπουδές και τις αξίες που μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και την οικογενειά μου για την υπομονή της.

Ιδιαιτέρως ευχαριστώ τον καθηγητή Παναγιώτη Παπάζογλου ο οποίος μου πρόσθεσε ακόμα μία διάσταση και νέα οπτική γωνία για να παρατηρώ τα μαθηματικά. Τον ευχαριστώ για τις ιδέες του που μοιράστηκε μαζί μου καθώς και για την ακούραστη στήριξη που μου παρείχε.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθ. Εμμανουήλ Ιωάννη για την ουσιώδη και άμεση βοήθεια που μου έδωσε επάνω σε συγκεκριμένο πρόβλημα που συνάντησα στις αδιάσπαστες ομάδες.

Στην οικογενειά μου!

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ασχοληθούμε με δύο προβλήματα της Γεωμετρικής Θεωρίας Ομάδων τα οποία θα αναπτύξουμε σε δύο ανεξάρτητα κεφάλαια.

Μία ομάδα G ονομάζεται αδιάσπαστη αν δεν είναι ένα μη τετριμμένο αμάλγαμα και $Hom(G, \mathbb{Z}) = 0$.

Θεωρούμε ένα δέντρο X με αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και συμβολίζουμε με G την ομάδα αυτομορφισμών του. Στο πρώτο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι οι σταθεροποιητές κορυφών του είναι αδιάσπαστες ομάδες.

Οι Bass και Lubotzky απέδειξαν ([3]) ότι για τοπικά πεπερασμένα δέντρα X, η ομάδα αυτομορφισμών τους καθορίζει το δέντρο X (δηλαδή, γνωρίζοντας την ομάδα αυτομορφισμών μπορούμε να 'κατασκευάσουμε' το δέντρο X).

Εμείς γενικεύουμε αυτό το Θεώρημα των Bass και Lubotzky. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι το θεώρημα τών Bass και Lubotzky ισχύει ακόμα και όταν τα δέντρα δεν είναι τοπικά πεπερασμένα όπως και όταν ο βαθμός τους είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2.
Επίσης, θα αποδείξουμε ότι η ομάδα μεταθέσεων για ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο είναι αδιάσπαστη και το άπειρο (ή πεπερασμένο) καρτεσιανό γινόμενο αδιάσπαστων ομάδων είναι επίσης μία αδιάσπαστη ομάδα. Τα αποτελέσματά μας πάνω σάυτό το πρόβλημα έχουν οδηγήσει σε μία δημοσίευση ([27]). Σημειώνουμε επίσης ότι πρόσφατα ο Maciej Malicki έδωσε μία νέα απόδειξη μερικών αποτελεσμάτων μας [29].

Είναι γνωστό ότι αν το ισοπεριμετρικό προφίλ πεπερασμένου γένους μη συμπαγών επιφανειών μεγαλώνει γρηγορότερα από $\sqrt{t}$, τότε μεγαλώνει τουλάχιστον σαν γραμμική συνάρτηση. Με άλλα λόγια υπάρχουν 'κενά' στο ισοπεριμετρικό προφίλ επιφανειών πεπερασμένου γένους.
Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχουν 'κενά' για επιφάνειες απείρου γένους. Το αποτέλεσμά μας αυτό έχει δημοσιευτεί στο [28].

ABSTRACT

We shall deal with two problems of Geometrical Group Theory which will be developed into individual chapters.

A group G is called unsplittable if $Hom(G, \mathbb{Z}) = 0$ and this group is not a non-trivial amalgam. Let X be a tree with a countable number of edges incident at each vertex and G be its automorphism group. In this paper we prove that the vertex stabilizers are unsplittable groups.

Bass and Lubotzky proved (see [3]) that for certain locally finite trees X, the automorphism group determines the tree X (that is, knowing the automorphism group we can "construct" the tree X). We generalize this Theorem of Bass and Lubotzky, using the above result. In particular we show that the Theorem holds even for trees which are not locally finite.

Moreover, we prove that the permutation group of an infinite countable set is unsplittable and the infinite (or finite) cartesian product of unsplittable groups is an unsplittable group as well. Our results on this problem have led to a publication ([27]). It should also be noted that recently Maciej Malicki provided some of our results with a new proof [29].

It is known that if the isoperimetric profile of a finite genus non-compact surface grows faster than $\sqrt{t}$, then it grows at least as a linear function. In other words there are 'gaps' in the isoperimetric profile of surfaces with finite genus.

In this paper we show that no gap exists for surfaces of infinite genus. This result of ours has been publicised on [28].

Κεφάλαιο 1

ΑΚΑΜΨΙΑ ΑΥΤΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ ΔΕΝΤΡΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την ακαμψία της ομάδας αυτομορφισμών των δέντρων.

Δηλαδή, αν X είναι ένα δέντρο και $G = Aut(X)$ η ομάδα αυτομορφισμών του, θα μελετήσουμε συνθήκες κάτω από τις οποίες η ομάδα G καθορίζει το δέντρο X. Πιό γενικά, αν X_1, X_2 είναι δύο δέντρα με $G_1 = Aut(X_1)$ και $G_2 = Aut(X_2)$, θα μελετήσουμε πότε ένας ισομορφισμός $G_1 \to G_2$ επάγεται από έναν ισομορφισμό $X_1 \to X_2$.

Τέτοια ερωτήματα, για συμμετρικούς χώρους, έχουν μελετηθεί στην θεωρία του E.Cartan ([7]), για ομοιομορφισμούς ομάδων τοπολογικών χώρων στο [9], και για δέντρα με ρίζα στο [10].

Έστω X ένα δέντρο, $G = Aut(X)$ και έστω e μία ακμή η οποία ξεκινάει από μία κορυφή $x = \partial_0(e)$ του X. Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό: $G_x = \{g \in G : gx = x\}$, $G_e = \{g \in G : ge = e\}$ και $i_G(e) := [G_{\partial_0(e)} : G_e]$. Οι Bass και Lubotzky απάντησαν στο παραπάνω ερώτημα θετικά στην περίπτωση των τοπικά πεπερασμένων δέντρων X για τα οποία $i_G(e) \geq 3$ για κάθε $e \in EX$. Όπως οι Bass και Lubotzky παρατήρησαν, η προυπόθεση των τοπικά πεπερασμένων δέντρων είναι αρκετά περιοριστική (για παράδειγμα, αμαλγάματα ομάδων μπορούν να δράσουν σε δέντρα τα οποία δεν είναι τοπικά πεπερασμένα [11]) αλλά απαραίτητη στις αποδείξεις τους. ([3]).

Σε αυτή την εργασία θα δουλέψουμε με δέντρα τα οποία δεν είναι κατ΄ ανάγκη τοπικά πεπερασμένα. Επίσης θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου για κάθε $e \in EX$ ισχύει $i_G(e) \geq 2$. Θα περιοριστούμε σε δέντρα στα οποία υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή. Αυτή η υπόθεση θα ισχύει για όλη την εργασία ακόμα και όταν δεν αναφέρεται.

Η μεθοδός μας περιγράφεται ώς εξής: Έστω X ένα δέντρο και έστω $G = Aut(X)$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε το δέντρο X από την ομάδα G. Συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε ένα δέντρο Y το οποίο είναι ισομετρικό με το δέντρο X, με σύνολο κορυφών $VY = \{G_x : x \in VX\}$ και σύνολο ακμών $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $X\}$.

(I) Καθορίζουμε συνθήκες υπό τις οποίες το σύνολο των σταθεροποιητών των κορυφών $\{G_x : x \in VX\}$ καθορίζει το δέντρο X (δηλαδή, το Y θα είναι ένα δέντρο ισομετρικό με το δέντρο X).

(II) Καθορίζουμε συνθήκες υπό τις οποίες η ομάδα G καθορίζει αλγεβρικά το σύνολο $\{G_x : x \in VX\}$. Αυτές οι συνθήκες αποτελούν ένα σύνολο αλγεβρικών ιδιοτήτων οι οποίες ικανοποιούνται μόνο από τις ομάδες G_x (και όχι από κάποια άλλη υποομάδα της G). Συνεπώς, σε συνδυασμό με την (1) μπορούμε να κατασκευάσουμε το δέντρο Y.

Η λύση στο (I) είναι η συνθήκη $i_G(e) \geq 2$ για κάθε $e \in EX$. Όσο για το (II), η πιό σημαντική αλγεβρική ιδιότητα η οποία χαρακτηρίζει το σύνολο $\{G_x : x \in VX\}$, είναι το ότι οι ομάδες G_x είναι αδιάσπαστες (unsplittable). (Μία ομάδα ονομάζεται αδιάσπαστη αν δεν είναι ένα μη τετριμμένο αμάλγαμα ομάδων και ισχύει $Hom(H, \mathbb{Z}) = 0$ (παράγραφος 3)).

Τα παραπάνω βήματα είναι και τα κύρια βήματα που ακολούθησαν και οι Bass-Lubotzky στο [3]. Η κύρια διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων τους και ενός αποτελέσματος αυτής της εργασίας, είναι ότι εμείς αποδεικνύουμε ότι οι σταθεροποιητές των κορυφών (ομάδες κορυφών) είναι αδιάσπαστες, ακόμα και στην περίπτωση όπου το δέντρο δεν είναι τοπικά πεπερασμένο. Πιό συγκεκριμένα:

Θεώρημα 1.6.4. *Έστω X ένα δέντρο με αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και έστω $G = Aut(X)$. Τότε για κάθε κορυφή v του X η ομάδα G_v είναι αδιάσπαστη.*

Στο θεώρημα Ακαμψίας των Bass και Lubotzky η συνθήκη σύμφωνα με την οποία η ομάδα $G = Aut(X)$ δεν έχει αναστροφές θα πρέπει να διαγραφεί. Αυτό είναι προφανές στα πορίσματα (2.7) και (2.9) στο [3], τα οποία χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Θεωρήματος Ακαμψίας στο [3]. Αυτό είναι αρκετά περιοριστικό διότι γνωρίζοντας την ομάδα G δεν σημαίνει ότι η υποομάδα της G^0 μπορεί να καθοριστεί (η G^0 σύμφωνα με το [3] είναι η υποομάδα της G με εκθέτη ≤ 2 η οποία δεν περιέχει αναστροφές, αλλά περιέχει όλες τις ομάδες κορυφών G_x, $x \in VX$).

Σε αυτή την εργασία δίνουμε λύση σε αυτό το πρόβλημα διαλέγοντας ένα άλλο σύνολο αλγεβρικών ιδιοτήτων από εκείνο που διάλεξαν οι Bass και Lubotzky οι οποίες αλγεβρικά καθορίζουν το σύνολο $\{G_x : x \in VX\}$ είτε η ομάδα G έχει αναστροφές είτε όχι. Έτσι, ορίζουμε $A(G)$ να είναι το σύνολο των υποομάδων $H \leq G$ οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) η H είναι μέγιστη μεταξύ των αδιάσπαστων υποομάδων της G

(ii) η H έχει αριθμήσιμο πλήθος συζυγών υποομάδων στην G και

(iii) ισχύει $[H : H \cap K] \neq 2$ για κάθε άλλη τέτοια υποομάδα K.

Θα αποδείξουμε ότι $A(G) = \{G_x : x \in VX\}$.

Για να ανακτήσουμε το EY, ορίζουμε $E(G)$ να είναι το σύνολο των στοιχείων $(K_1, K_2) \in A(G) \times A(G)$ τέτοια ώστε:

(i) $K_1 \neq K_2$ και

(ii) η ομάδα $K_1 \cap K_2$ είναι μέγιστη μεταξύ των υποομάδων του τύπου $L_1 \cap L_2$, με $(L_1, L_2) \in A(G) \times A(G)$ και $L_1 \neq L_2$.

Τότε αποδεικνύουμε ότι $EY = E(G)$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $ad : G \to Aut(G)$ με $ad(g)(h) = ghg^{-1}$ όταν $g, h \in G$.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, το κύριο αποτέλεσμα μας είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.7.7. (Θεώρημα Ακαμψίας).

I) *Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και $i_G(e) \geq 3$ για κάθε ακμή e. Τότε, αν Y είναι ένα δέντρο με $VY = \{G_x : x \in VX\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $X\}$, έχουμε:*

(α) $A(G) = VY$

(β) $E(G) = EY$

(γ) *Η απεικόνιση $\sigma : X \to Y$ με $\sigma(x) = G_x$ είναι ένας ισομορφισμός G-δέντρων (Δηλαδή, η ομάδα G καθορίζει το δέντρο X)*

(δ) *Η απεικόνιση $ad : G \to Aut(G)$ είναι ένας ισομορφισμός.*

II) *Έστω X_1, X_2 δέντρα με $G_1 = Aut(X_1)$, $G_2 = Aut(X_2)$ τέτοια ώστε $i_{G_1}(e) \geq 3$ για κάθε $e \in EX_1$ και $i_{G_2}(w) \geq 3$ για κάθε $w \in EX_2$. Τότε αν $a : G_1 \to G_2$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων, υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός δέντρων $\sigma : X_1 \to X_2$ τέτοιος ώστε $a = ad(\sigma)$.*

Για παράδειγμα, θεωρούμε το δέντρο $X = X_{n,m}$ (biregular bipartite) με $n, m \geq 2$ και $G_{n,m} = Aut(X)$. Μία συνέπεια του Θεωρήματος Ακαμψίας αν $n, m, n^{'}, m^{'} \geq 3$ είναι ότι:
$G_{n,m} \simeq G_{n^{'},m^{'}} \Leftrightarrow \{n, m\} = \{n^{'}, m^{'}\}$.

Για $n = m$, $X_n := X_{n,n}$ είναι το n-κανονικό δέντρο (ομογενές), και το παραπάνω αποτέλεσμα έρχεται από τον Znoiko [13].

Τα φράγματα $n, m \geq 3$ ήταν απαραίτητα μέχρι τώρα (εισαγωγή του [3]). Πράγματι, για τα $X_{n,2}$ και X_n, έχουμε $G_{n,2} \simeq G_{n,n}$, εφόσον το $X_{n,2}$ είναι η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του X_n. Όμως, τα $X_{n,2}$, X_n δεν διαφέρουν γεωμετρικά (δηλαδή, έχουν ομοιομορφικούς γεωμετρικούς πραγματοποιητές (realizations)).

Στην παράγραφο 8, επεκτείνουμε το Θεώρημα Ακαμψίας στην περίπτωση όπου $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e του X. Δηλαδή, κατασκευάζουμε ένα δέντρο από την ομάδα G με γεωμετρικό πραγματοποιητή ομοιομορφικό με εκείνον του X. Συγκεκριμένα, το νέο δέντρο το παίρνουμε από υποδιαιρέσεις κάποιων ακμών του δέντρου X.
Πρίν διατυπώσουμε το τοπολογικό Θεώρημα Ακαμψίας (1.8.4) δίνουμε έναν ορισμό: Αν X είναι ένα δέντρο με $G = Aut(X)$, ορίζουμε $\overline{X}$ να είναι το δέντρο που παίρνουμε από το X υποδιαιρώντας εκείνες τις ακμές e X για τις οποίες υπάρχει κάποιο $g \in G$ τέτοιο ώστε $ge = \overline{e}$. Στην παράγραφο 7 ορίζουμε τα $\overline{A}(G)$, $\overline{E}(G)$ με ανάλογο τρόπο όπως στο (1.7.7) και αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.8.4 (Τοπολογικό Θεώρημα Ακαμψίας).

I) Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το δέντρο X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και ότι $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e. Τότε, αν Y είναι ένα δέντρο με $VY = \{G_x : x \in V\overline{X}\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $\overline{X}\}$, ισχύει ότι:

- *(α) $\overline{A}(G) = VY$*
- *(β) $\overline{E}(G) = EY$*
- *(γ) Η απεικόνιση $\sigma : \overline{X} \rightarrow Y$ με $\sigma(x) = G_x$ είναι ένας ισομορφισμός G-δέντρων (Δηλαδή, η ομάδα G καθορίζει το δέντρο $\overline{X}$)*
- *(δ) Η απεικόνιση $ad : G \rightarrow Aut(G)$ είναι ένας ισομορφισμός.*

II) Έστω X_1, X_2 δέντρα με $G_1 = Aut(X_1)$, $G_2 = Aut(X_2)$ τέτοια ώστε $i_{G_1}(e) \geq 2$ για κάθε $e \in EX_1$ και $i_{G_2}(w) \geq 2$ για κάθε $w \in EX_2$. Τότε αν $a : G_1 \rightarrow G_2$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων, υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός δέντρων $\sigma : \overline{X}_1 \rightarrow \overline{X}_2$ τέτοιος ώστε $a = ad(\sigma)$.

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε $G_n \simeq G_{n,2}$ και $\overline{X}_n \approx \overline{X}_{n,2}$ ($\overline{X}_{n,2} = X_{n,2}$).

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός $i_G(e) \geq 2$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Πράγματι, κάποιος μπορεί εύκολα να κατασκευάσει διαφορετικά πεπερασμένα δέντρα, τα οποία έχουν τετριμμένη ομάδα αυτομορφισμού.

Αυτή η εργασία περιέχει επίσης αποτελέσματα για τις αδιάσπαστες ομάδες:

Αποδεικνύουμε στο Πόρισμα (1.6.2) ότι το άπειρο (ή πεπερασμένο) καρτεσιανό γινόμενο αδιάσπαστων ομάδων είναι αδιάσπαστη ομάδα. Στο Πόρισμα (1.6.5) αποδεικνύουμε ότι η ομάδα αυτομορφισμών των δέντρων με ρίζα (rooted tree) με αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή, είναι αδιάσπαστη ομάδα.

Σαν συνέπεια έχουμε, ότι η ομάδα μεταθέσεων S_k ενός συνόλου Ω με $card\,\Omega = k$ για $1 \leq k \leq \infty$ είναι αδιάσπαστη ομάδα. Συγκεκριμένα, το στεφανιαίο γινόμενο (wreath product) $S_{k_0} \wr S_{k_1} \wr ...$, όπου $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_i \leq \infty$ είναι αδιάσπαστη ομάδα (όπου το μήκος του γινομένου μπορεί να είναι άπειρο είτε πεπερασμένο).

Πρόσφατα, ο Max Forester [6] ασχολήθηκε με το Θεώρημα Ακαμψίας των Bass και Lubotzky. Έχει πετύχει μία γενίκευση αυτού του Θεωήματος αλλά απο μία διαφορετική οπτική γωνία. Επίσης ο Maciej Malicki έδωσε μία νέα απόδειξη μερικών αποτελεσμάτων μας [29].

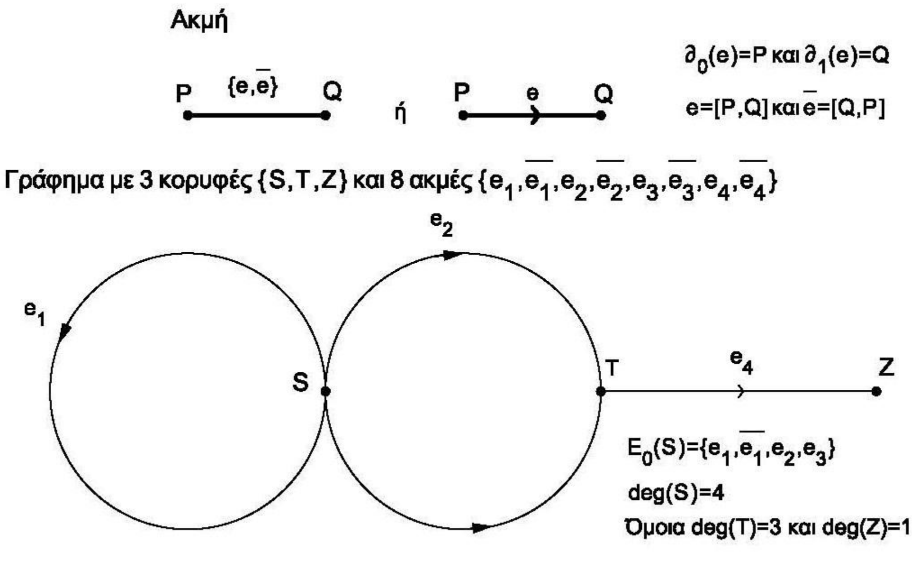
1.2 Αυτομορφισμοί δέντρων

Ορισμοί-Συμβολισμοί.
Άν G είναι μία ομάδα και X ένα μη κενό σύνολο, τότε μία (αριστερή) δράση της ομάδας G στο σύνολο X είναι μία απεικόνιση $G \times X \to X$ με $(g, x) \mapsto g \cdot x$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

- $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ $\forall g, h \in G$ και $x \in X$
- $e \cdot x = x$ $\forall x \in X$ (e=ουδέτερο της G).

Ένα σύνολο X με μία G-δράση ονομάζεται **G-σύνολο**. Συμβολίζουμε με G_x το σύνολο $\{g \in G : gx = x\}$ (δηλαδή, $G_x = stab_G(x) \leq G$) και με $i_G(x) = [G : G_x] = card(G \cdot x)$.

Ένα **γράφημα** X αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών $V = V(X)$ και ένα σύνολο προσανατολισμένων ακμών $E = E(X)$. Μία ακμή e έχει άκρα $\partial_0(e)$, $\partial_1(e) \in V$, και προσανατολισμένη ανάστροφη ακμή $\overline{e} \in E$, με $\overline{e} \neq e$, $\overline{\overline{e}} = e$ και $\partial_i(\overline{e}) = \partial_{1-i}(e)$, $i = 0, 1$. Για $x \in V$, θέτουμε $E_0(x) = \{e \in E : \partial_0(e) = x\}$ (οι ακμές που ξεκινούν από το x) και $deg(x) = card(E_0(x))$. Ένα γράφημα το αναπαριστούμε με ένα διάγραμμα (σχήμα 1), στο οποίο τα σημεία αντιστοιχούν στις κορυφές του γραφήματος και τα ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν σε ακμές του τύπου $\{e, \bar{e}\}$ (γεωμετρικές ακμές).



Σχήμα 1

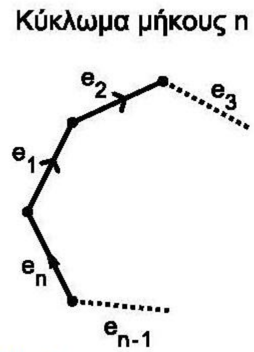
Ένα **μονοπάτι** μήκους n είναι μία ακολουθία ακμών $c = (e_1, e_2, ..., e_n)$ για την οποία ισχύει $\partial_1(e_i) = \partial_0(e_{i+1})$ $\forall i \in 1, 2, ..., n-1$ (σχήμα 2). Θα λέμε ότι το μονοπάτι έχει άκρα τις κορυφές $\partial_0(e_1)$και $\partial_1(e_n)$ ή ότι είναι ένα μονοπάτι από το $\partial_0(e_1)$ στο $\partial_1(e_n)$. Συμβολίζουμε τις κορυφές του μονοπατιού με $P_i = \partial_0(e_i)$ $\forall i \in 1, 2, ..., n$ και $P_{n+1} = \partial_1(e_n)$.

Σχήμα 2

Μία **αναστροφή** θα είναι ενα ζεύγος της μορφής (e_i, e_{i+1}) με $e_{i+1} = \bar{e}_i$.

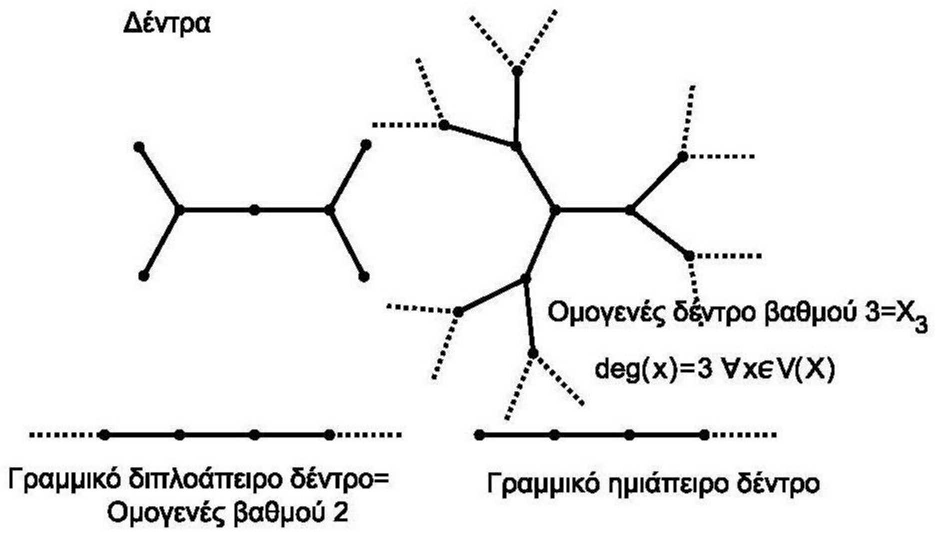
Θα λέμε ότι το μονοπάτι c είναι ένα **κύκλωμα** μήκους n (σχήμα 3) άν $P_1 = P_{n+1}$ και οι κορυφές $P_1, P_2, ..., P_n$ είναι ανα δύο ξένες.

Ένα γράφημα θα είναι **συνεκτικό** αν δύο οποιεσδήποτε κορυφές του είναι άκρα ενός τουλάχιστον μονοπατιού.



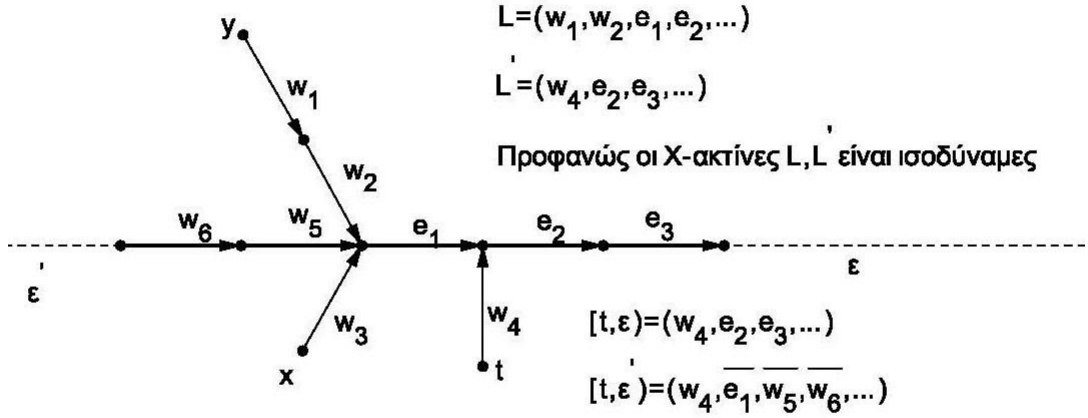
Σχήμα 3

Ένα **δέντρο** X είναι ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κυκλώματα (σχήμα 4). Είναι εύκολο να δείξει κάποιος ότι δύο κορυφές P, Q ενός δέντρου ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι χωρίς αναστροφές. Ορίζουμε ως απόσταση $d(P, Q)$ των δυο αυτών κορυφών το μήκος του παραπάνω μοναδικού μονοπατιού.



Σχήμα 4

Έστω X δέντρο. Μία X-**ακτίνα** είναι ένα ημιάπειρο γραμμικό υποδέντρο, δηλαδή μία ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, ...)$ για την οποία ισχύει $\partial_1(e_i) = \partial_0(e_{i+1})$ $\forall i \in 1, 2, ...$, και οι κορυφές της είναι ξένες ανα δύο. Δύο X-ακτίνες L, L' είναι ισοδύναμες αν η $L \cap L'$ είναι μία X-ακτίνα (σχήμα 5). Οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται **πέρατα** του X. Αν ε είναι ένα πέρας και $x \in V$, τότε υπάρχει μία μοναδική X-ακτίνα που αντιπροσωπεύει το ε και ξεκινάει από το x, την οποία την συμβολίζουμε με $[x, \varepsilon)$ (σχήμα 5). Άν $\varepsilon' \neq \varepsilon$ είναι ένα άλλο πέρας, τότε το σύνολο των κορυφών $x \in V$ τέτοια ώστε $[x, \varepsilon) \cap [x, \varepsilon') = \{x\}$ ορίζουν τις κορυφές ενός διπλοάπειρου (bi-infinite) γραμμικού υποδέντρου,το οποίο το συμβολίζουμε με $(\varepsilon, \varepsilon')$.



Σχήμα 5

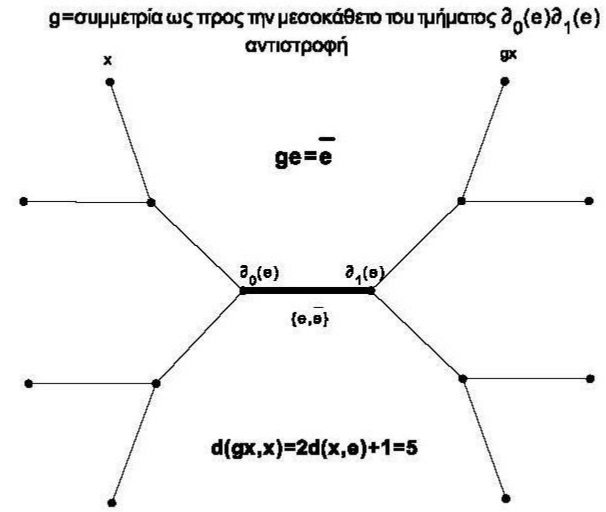
Υπερβολικό μήκος για αυτομορφισμούς δέντρων. Ένας μορφισμός δύο δέντρων X_1, X_2 είναι μία απεικόνιση

$$f = f_V \times f_E : (V(X_1) \times E(X_1)) \to (V(X_2) \times E(X_2))$$

τέτοια ώστε $f_V(\partial_0(e)) = \partial_0(f_E(e))$, $f_V(\partial_1(e)) = \partial_1(f_E(e))$ και $f_{\bar{E}}(e) = f_E(\bar{e})$ $\forall e \in V(X_1)$. Άν επιπλέον οι απεικονίσεις f_V και f_E είναι 1-1 και επί τότε η f λέγεται ισομορφισμός.

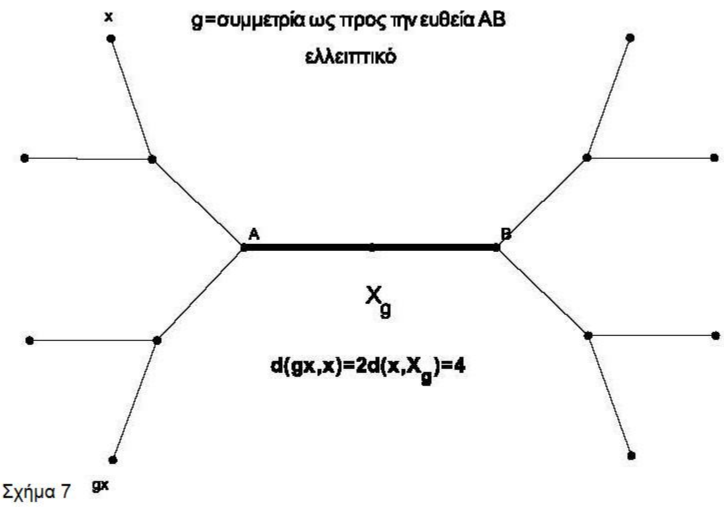
Έστω X ένα δέντρο, με ομάδα αυτομορφισμών $G = Aut(X)$. Είναι προφανές ότι η ομάδα G δρά στο δέντρο X από αριστερά. Άν $g \in G$, ο Tits έχει δείξει ([12] ή [11]) ότι υπάρχουν τρείς πιθανές περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η (αντιστροφές): Υπάρχει μία (αναγκαστικά μοναδική) γεωμετρική ακμή $\{e, \overline{e}\}$ η οποία αναστρέφεται απο το $g : ge = \overline{e}$. Τότε για όλες τις κορυφές του X, ο αριθμός $d(gx, x) = 2d(x, e) + 1$ είναι περιττός. Όταν το $g \in G$ είναι μία αντιστροφή, θέτουμε $l(g) = 0$ και $X_g = \emptyset$ (σχήμα 6).
Όταν το $g \in G$ δέν είναι μία αντιστροφή, ορίζουμε $l(g) = min_{x \in V} d(gx, x)$ και $VX_g = \{x \in V : d(gx, x) = l(g)\}$ (VX_g είναι οι κορυφές ενός υποδέντρου X_g του X).



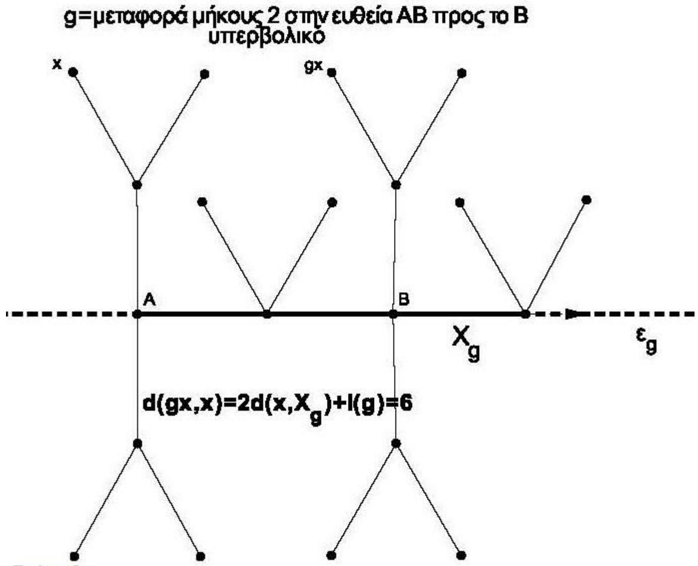
Σχήμα 6

Περίπτωση 2η (ελλειπτικά στοιχεία): Ελλειπτικό είναι ένα στοιχείο g το οποίο δεν είναι αντιστροφή και για το οποίο ισχύει $l(g) = 0$ (σχήμα 7). Τότε το X_g είναι το δέντρο των σταθερών σημείων από το g. Οποιοδήποτε $< g >$-αμετάβλητο υποδέντρο του X τέμνει το X_g.



Σχήμα 7

Περιπτωση 3η (Υπερβολικά στοιχεία): Είναι ένα στοιχείο g για το οποίο ισχύει $l(g) > 0$. Σε αυτή την περίπτωση το X_g είναι ένα διπλοάπειρο γραμμικό υποδέντρο το οποίο το ονομάζουμε g-**άξονα** κατά μήκος του οποίου το g επάγει μία μεταφορά μήκους $l(g)$ με κατεύθυνση πρός το ένα από τα δύο πέρατα του X_g, το οποίο το συμβολίζουμε με ε_g (σχήμα 8). Οποιοδήποτε $< g >$-αμετάβλητο υποδέντρο του X περιέχει το X_g.



Σχήμα 8

Αν $g, h \in G$ τότε $l(ghg^{-1}) = l(h)$, και $X_{ghg^{-1}} = gX_h$. Αν το h δεν είναι μία αντιστροφή, τότε για όλα τα $x \in V$ έχουμε $d(gx, x) = l(g) + 2d(x, X_g)$.

H-γράφημα. Έστω H μία ομάδα. Ένα H-γράφημα είναι ένα γράφημα X με μία H-δράση, η οποία δίνεται από έναν ομοιομορφισμό $p : H \to G = Aut(X)$.

Για $x \in VX$ έχουμε $i_H(x) = [H : H_x] = Card(Hx)$. Ακόμα η H_x δρά στο $E_0(x)$ και, σύμφωνα με τα παραπάνω, θέτουμε $i_H(e) = i_{H_x}(e) = [H_x : H_e] = Card(H_x e)$, όπου $e \in E_0(x)$.

Το H-δέντρο X λέμε ότι είναι χωρίς αναστροφές αν $\overline{e} \notin He$, για όλα τα $e \in EX$. Ακόμα έχουμε την συνάρτηση υπερβολικού μήκους $l = l_X : H \to \mathbb{Z}$ η οποία ορίζεται με $l(g) = l(p(g))$. Επίσης θέτουμε $X_g = X_{p(g)}$ για $g \in H$. Τελικά, θέτουμε $X^H = \{x \in X : hx = x \ \forall h \in H\}$.

Πρόταση 1.2.1. *[[12] (3.4) ή [1] (7.5)] Έστω X ένα H-δέντρο με $l(H) = \{0\}$ ($l = l_X$). Τότε ακριβώς ένα από τα ακόλουθα ισχύει.*

(1) Η ομάδα H σταθεροποιεί κάποια κορυφή του X.

(2) Η ομάδα H περιέχει μία αντιστροφή: $g \in H, e \in EX$ και $ge = \overline{e}$. Τότε $He = \{e, \overline{e}\}$ και η $\{e, \overline{e}\}$ είναι η μοναδική H-αμετάβλητη γεωμετρική ακμή του X.

(3) Υπάρχει ένα μοναδικό πέρας ε του X το οποίο σταθεροποιείται από την H. Αν $x \in VX$ και $x_0 = x, x_1, x_2, ...,$ είναι οι κορυφές της ακτίνας $[x, \varepsilon)$ τότε $H_{x_n} \leq H_{x_{n+1}}$, όπου η γνήσια ανισότητα ισχύει απείρως συχνά, και $H = \bigcup_{n \geq 0} H_{x_n}$.

Ορισμός. *Έστω X ένα δέντρο και ε είναι ένα πέρας του X. Θέτουμε*

$$H_\varepsilon = \{g \in H : g\varepsilon = \varepsilon\}$$

τον σταθεροποιητή του πέρατος ε.

1.3 Αδιάσπαστες ομάδες

Πρόταση 1.3.1. *[[2] (3.9)]Έστω H μία ομάδα. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(1) Γιά κάθε H-δέντρο X ισχύει $l_X(H) = \{0\}$

(2) Για κάθε H-δέντρο X χωρίς αναστροφές, ισχύει ότι κάθε στοιχείο της H σταθεροποιεί κάποια κορυφή του X.

(3) (a) $Hom(H, \mathbb{Z}) = 0$ και

(β) η H δεν είναι ένα μη τετριμμένο αμάλγαμα, δηλαδή, αν $H \cong A *_C B$ τότε $C = A$ ή $C = B$.

Ορισμός. *Μία ομάδα η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης (2.1) λέγεται αδιάσπαστη.*

Πρόταση 1.3.2. *[[11] Πρότ. 27, κεφ.6] Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα η οποία δρά χωρίς αναστροφές σε ένα δέντρο X. Τότε οι επόμενες δύο περιπτώσεις είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες και θα ισχύει μία τουλάχιστον από τις δύο:*

(a) Η G έχει σταθερά σημεία.

(β) Υπάρχει μία X-ακτίνα η οποία σταθεροποιείται από την G, στην οποία η G δρά με μεταφορές, δηλαδή μεσω ένος μη τετριμμένου ομοιομορφισμού $G \to \mathbb{Z}$.

Πόρισμα 1.3.3. *Αν οι A_i είναι αδιάσπαστες ομάδες και*

$$G = \times_i A_i = \{(g_1, g_2, ..., g_n, 1, 1, ...) : g_i \in A_i, n \in \mathbb{N}\},$$

τότε η G είναι αδιάσπαστη.

Απόδειξη. Έστω ότι η G δρά σε ένα δέντρο X χωρίς αναστροφές. Τότε και η A_i θα δρά στο X χωρίς αναστροφές. Έστω $g = g_1 g_2 ... g_n = (g_1, g_2, ... g_n, 1, 1, ...) \in G$ όπου το στοιχείο $g_i \in A_i$ ταυτίζεται με το στοιχείο $g_i = (1, ..., 1, g_i, 1, ...) \in G$ (όπου το g_i είναι στην i θέση). Εφόσον οι $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι αδιάσπαστες τότε τα $g_1, ..., g_n$ είναι ελλειπτικά. Τότε, εφαρμόζοντας την (2.3) στην ομάδα $< g_1 > \times ... \times < g_n >$ έχουμε ότι υπάρχει $v \in VX$ τέτοιο ώστε $g_i v = v$, $i = 1, 2, ..., n$ και έτσι $gv = v$, δηλαδή, η G είναι μία αδιάσπαστη ομάδα. □

1.4 Γνήσια δράση

Ορισμός. *Έστω X ένα H-σύνολο. Θα λέμε ότι είναι ένα γνήσιο H-σύνολο αν ισχύει μία τουλάχιστον από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες:*

(α) $X^{H_x} = \{x\}$ *για κάθε* $x \in X$, *όπου* X^{H_x} *είναι το σύνολο των σταθερών σημείων από την* H_x.

(β) Αν $x, y \in X$ *τέτοια ώστε* $H_x \leq H_y$ *τότε* $x = y$.

Ορισμός. *Ένα H-γράφημα X ονομάζεται γνήσιο αν:*

(α) Το VX *είναι ένα γνήσιο* H*-σύνολο, και*

(β) Για κάθε $x \in VX$, *το* $E_0(x)$ *είναι ένα γνήσιο* H_x*-σύνολο.*

Λήμμα 1.4.1. *[[3]] Έστω X ένα H-δέντρο.*

(α) Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(1) Το VX *είαvι ένα γνήσιο* H*-σύνολο.*

(2) $i_H(e) > 1$, *γιά κάθε* $e \in EX$.

(3) Για κάθε $x \in VX$, *η* H_x *δεν σταθεροποιεί ακμές του* X.

(β) Αν η $x \in VX$ *μία μη τελική κορυφή, δηλαδή, αν* $deg(x) \neq 1$ *και αν* $E_0(x)$ *είναι ένα γνήσιο* H_x*-σύνολο, τότε* $i_H(e) \geq 3$ *για κάθε* $e \in E_0(x)$.

(γ) Αν το X *δεν έχει τελικές κορυφές τότε η συνθήκη '*VX *είναι ένα γνήσιο* H*-σύνολο' έπεται από την συνθήκη 'για κάθε* $x \in VX$, *το* $E_0(x)$ *είναι ένα γνησίως* H_x*-σύνολο'.*

Η ακόλουθη Πρόταση είναι μία ειδική περίπτωση της Πρότασης (3.7)[3].

Πρόταση 1.4.2. *Αν* X *είναι ένα δέντρο και* $G = AutX$ *με* $i_G(e) \geq 3$, *τότε το* X *είναι ένα γνήσιο* G*-δέντρο.*

1.5 Γεωμετρικός καθορισμός δέντρων

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{G_x : x \in VX\}$ καθορίζει το δέντρο X υπό την προυπόθεση ότι ισχύει $i_G(e) \geq 2$.

Ορολογία Έστω X ένα δέντρο και $G = Aut(X)$ με $i_G(e) \geq 2$ για κάθε $e \in EX$. Ορίζουμε ένα G-γράφημα Y με σύνολο κορυφών $VY = \{G_x : x \in VX\}$ και σύνολο ακμών $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του X $\}$.

Πρόταση 1.5.1. *Σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζουμε μία απεικόνιση* $f : X \to Y$, *με* $f(x) = G_x$ *και* $f(e) = (G_{\partial_0(e)}, G_{\partial_1(e)})$ *για κάθε* $x \in VX, e \in EX$. *Τότε, η* f *είναι ένας ισομορφισμός δέντρων, όπου το* Y *το θεωρούμε ώς* G*-γράφημα μέσω συζυγίας.*

Απόδειξη. Εφόσον το VX είναι γνήσιο G σύνολο (από το 1.4.1), είναι εύκολο να δείξουμε ότι το Y είναι ένα G-δέντρο και η f είναι ένας μορφισμός G-γραφημάτων. Από την γνησιότητα VX σαν G-σύνολο, έπεται ότι η f είναι ένα πρός ένα στις κορυφές. Τώρα, αν $f(e) = f(w)$ με $e, w \in EX$, έπεται ότι $(G_{\partial_0(e)}, G_{\partial_1(e)}) = (G_{\partial_0(w)}, G_{\partial_1(w)})$. Συνεπώς, $\partial_0(e) = \partial_0(w)$ και $\partial_1(e) = \partial_1(w)$. Εφόσον το X είναι δέντρο έχουμε ότι $e = w$, δηλαδή, η f είναι ένα πρός ένα και στις ακμές. Είναι προφανές ότι η f είναι επί στις ακμές και στις κορυφές. Τελικά, η δράση που ορίζεται πιο πάνω είναι εκείνη που επάγεται στο Ψ από την f, έτσι η f είναι ένας ισομορφισμός G-δέντρων. □

1.6 Σταθεροποιητές κορυφών

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τους σταθεροποιητές των κορυφών δέντρων τα οποία έχουν αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και θα αποδείξουμε είναι αδιάσπαστες ομάδες.

Λήμμα 1.6.1. *Έστω* $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *μία οικογένεια ομάδων και έστω*

$$G = \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i = \{(g_1, g_2, ...)/g_i \in G_i, i = 1, 2, ..\}.$$

Υποθέτουμε ότι G *δρά σε ένα δέντρο* T *χωρίς αναστροφές. Αν υπάρχουν στοιχεία* $g_i \in G_i$ *τα οποία είναι ελλειπτικά για κάθε* $i \in \mathbb{N}$, *τότε το στοιχείο* $g = (g_1, g_2, g_3, ...)$ *θα είναι και αυτό ελειπτικό (εδώ το στοιχείο* $g_i \in G_i$ *ταυτίζεται με το στοιχείο* $g_i = (1, ..., 1, g_i, 1, ...) \in G$, *όπου το* g_i *είναι στήν* i *θέση).*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός τότε $2^{n_p} \equiv 1\, mod\, p$ για κάποιον $n_p \in \mathbb{N}$ (ι.ε. $n_p = p-1$). Προφανώς, άν $k \in \mathbb{N}$ τότε $2^{kn_p} \equiv 1\, mod\, p$. Άν οι $\{p_1, p_2, ...\}$ είναι περιττοί πρώτοι θεωρούμε την ακολουθία $n_i = n_{p_1} n_{p_2} ... n_{p_i}$, $i \in \mathbb{N}$. Τότε, έχουμε $2^{n_i} \equiv 1 mod\, p_k$ γιά κάθε $k \leq i$.

Θεωρούμε τώρα το στοιχείο $h = (g_1^{2^{n_1}}, ..., g_i^{2^{n_i}}, ...)$ και θα αποδείξουμε ότι είναι ελλειπτικό: Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή, ότι το h είναι υπερβολικό. Άν ταυτίσουμε το στοιχείο $g_i^{2^{n_i}} \in G_i$ με το στοιχείο $(1, ..., 1, g_i^{2^{n_i}}, 1, ...)$ (όπου το $g_i^{2^{n_i}}$ είναι στήν i θέση), τότε $h = g_1^{2^{n_1}} g_2^{2^{n_2}} ... g_{k-1}^{2^{n_{k-1}}} h_k$ όπου $h_k = (1, 1, .., 1, g_k^{2^{n_k}}, g_{k+1}^{2^{n_{k+1}}}, ...)$ γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έτσι, από την (2.3), το h_k είναι υπερβολικό στοιχείο με μήκος μεταφοράς σαν του h (συνεπώς μπορούμε να 'ξεχάσουμε' τούς πρώτους όρους). Αλλά το h_k είναι 2^{n_k}-η δύναμη έτσι το μήκος μεταφοράς του είναι πολλαπλάσιο του 2^{n_k}. Έτσι το 2^{n_k} διαιρεί το μήκος μεταφοράς του h γιά κάθε k, το οποίο είναι αδύνατο. Τώρα υποθέτουμε ότι το g είναι υπερβολικό, έτσι από την 1.3.2 το hg^{-1} είναι και αυτό υπερβολικό. Εφόσον $hg^{-1} = (g_1^{2^{n_1}-1}, ..., g_i^{2^{n_i}-1}, ...)$ και το p_i διαιρεί το $2^{n_i} - 1$, όπως πρίν έχουμε ότι το p_i διαιρεί το μήκος μεταφοράς του hg^{-1} για κάθε i, το οποίο είναι αδύνατο. Ετσι το g είναι ελλειπτικό. □

Πόρισμα 1.6.2. *Άν οι ομάδες G_i είναι αδιάπαστες γιά κάθε $i \in \mathbb{N}$ τότε η ομάδα $G = \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i = \{(g_1, g_2, ...)/g_i \in G_i, i = 1, 2, ..\}$ είναι και αυτή αδιάσπαστη.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η G δρά σε ένα δέντρο T χωρίς αναστροφές. Έστω $g = (g_1, g_2, ...) \in G$. Θα αποδείξουμε ότι το στοιχείο g είναι ελλειπτικό. Εφόσον η G_i είναι αδιάσπαστη, το g_i είναι ελλειπτικό γιά κάθε $i \in \mathbb{N}$. Συνεπώς από το 1.6.1 το στοιχείο g είναι και αυτό ελλειπτικό. □

Λήμμα 1.6.3. *Έστω X ένα δέντρο, $G = Aut(X)$ και v μία κορυφή του X. Υποθέτουμε ότι έχουμε ζεύγη (X_i, v_i), όπου το X_i είναι υποδέντρο του X και v_i είναι μία κορυφή του X_i (ρίζα του X_i), γιά κάθε $i \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $VX_i \cap VX_j = \{v_i\} \cap \{v_j\}$ γιά κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ (σχήμα 9). Άν η G_v δρά χωρίς αναστροφές σε ένα δέντρο T, τότε δεν υπάρχει ακολουθία στοιχείων $g_i \in G_v \cap G_{v_i}$ γιά κάθε $i \in \mathbb{N}$, όπου $g_i(x) = x$ γιά κάθε $x \notin VX_i$ (δηλαδή, κάθε g_i δρά μη τετριμμένα μόνο στο X_i) και το g_i είναι υπερβολικό για κάθε $i \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Άς υποθέσουμε το αντίθετο. Έστω $l(g_k) := l_k > 0$. Έφόσον τα g_i μετατίθονται, από το Λήμμα 1.3.2 θα έχουν τον ίδιο άξονα L. Αντικαθιστώντας κάποια g_i από τα ${g_i}^{-1}$ αν είναι απαραίτητο μπορούμε να πούμε ότι όλα τα g_i δρούν στο L με μεταφορές στήν ίδια κατεύθυνση. Θέτουμε $n_{k+1} = k(l_1 + l_2 + ... + l_k + 1)n_k$ γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$ (π.χ. $n_1 = 2$) και

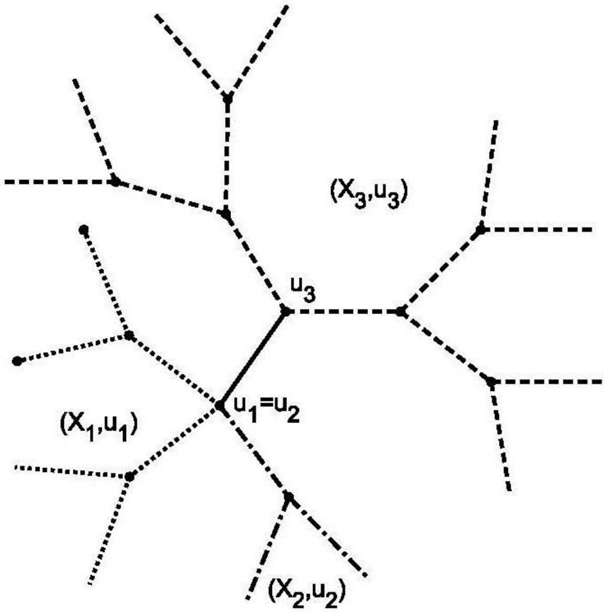
$$h(x) = \begin{cases} g_k^{n_k}(x), & \text{αν } \exists\, k \in \mathbb{N} :\ x \in VX_k \\ x, & \text{αν } x \in VX - \cup_{i\in\mathbb{N}} VX_i \end{cases} \tag{1}$$

$$h_k(x) = \begin{cases} g_r^{n_r}(x), & \text{αν } \exists\, r \geq k :\ x \in VX_r \\ x, & \text{αν } x \in VX - \cup_{i\geq k} VX_i \end{cases} \tag{2}$$

Έστω $l(h) = k_0 \geq 0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι

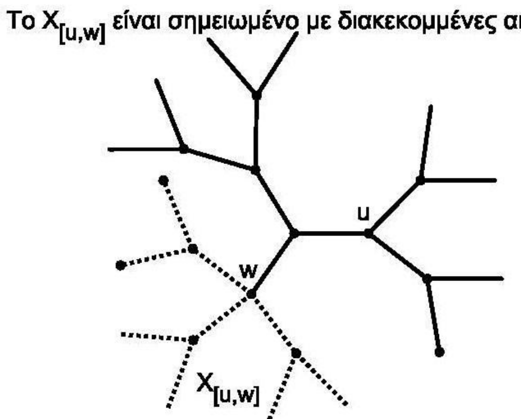
$$h = g_1^{n_1} g_2^{n_2} ... g_{k_0}^{n_{k_0}} h_{k_0+1} \tag{3}$$

και ότι τα στοιχεία $g_i^{n_i}$ και h_{k_0+1} μετατίθονται για κάθε $i \leq k_0$. Εφόσον τα $g_i, i = 1, 2, ..., k_0$, δρούν στο L με μεταφορές στήν ίδια κατεύθυνση, έχουμε ότι $l(g_1^{n_1} g_2^{n_2} ... g_{k_0}^{n_{k_0}}) = n_1 l_1 + ... + n_{k_0} l_{k_0} > k_0$. Από την (3) και το Λήμμα 1.3.2 έχουμε ότι h_{k_0+1} είναι υπερβολικό και μεταφέρει τον L στήν αντίθετη κατεύθυνση από ότι το $g_i^{n_i}$. Αλλά το h_{k_0+1} είναι δύναμη του n_{k_0+1} (εφόσον n_i/n_{i+1}) και έτσι το $l(h_{k_0+1})$ είναι πολλαπλάσιο του n_{k_0+1}. Ακόμα, $n_{k_0+1} = k_0(l_1 + ... + l_{k_0} + 1)n_{k_0} > l(g_1^{n_1}...g_{k_0}^{n_{k_0}}) + l(h)$ έτσι από την (3) έχουμε ότι $l(h_{k_0+1}) - l(g_1^{n_1}...g_{k_0}^{n_{k_0}}) = k_0$ το οποίο είναι άτοπο. □



Σχήμα 9

Ορολογία. Έστω X ένα δέντρο και $v, w \in VX$. Ορίζουμε $X_{[v,w]}$ να είναι το μέγιστο υποδέντρο του X το οποίο περιέχει την κορυφή w και δέν περιέχει καμία άλλη κορυφή του μονοπατιού $[v, w]$ (σχήμα 10).



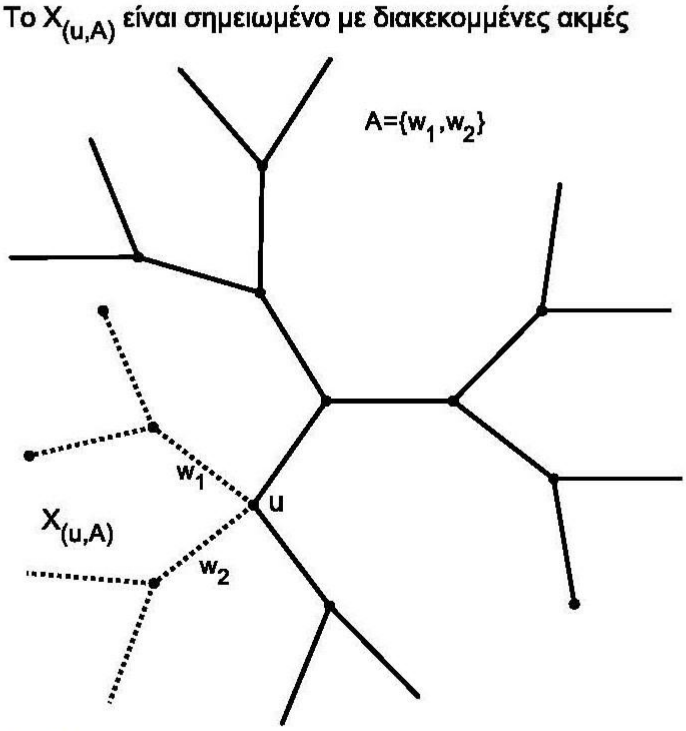
Σχήμα 10

Άν $A \subseteq E_0(v)$, ορίζουμε $X_{(v,A)}$ να είναι το υποδέντρο του X το οποίο περιέχει την κορυφή v και κάθε κορυφή w έτσι ώστε η πρώτη ακμή του μονοπατιού

$[v,w]$ που ξεκινάει από το v να ανήκει στο A (σχήμα 11). Συμβολίζουμε με $O_1^v, O_2^v, ...$ τις τροχιές του $E_0(v)$ υπό τη δράση της G_v. Άν $g \in G_v$ ορίζουμε $g_i \in G_v$ με

$$g_i(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } x \in VX_{(v,O_i^v)} \\ x, & \text{αν } x \notin VX_{(v,O_i^v)} \end{cases} \tag{4}$$

Τελικά, θέτουμε $G_{v,i}$=$Aut(X_{(v,O_i^v)})_v$.



Σχήμα 11

Ορισμός. *Έστω l ένα άπειρο μονοπάτι ενός δέντρου X (ημιευθεία) το οποίο ξενινάει από μία κορυφή w και έχει για ακολουθία κορυφών την ακολουθία $w_0 = w, w_1, w_2, ...$ Άν συμβολίσουμε με e_i την ακμή $[w_i, w_{i+1}]$ τότε λέμε ότι η ακμή e_i έχει την ιδιότητα P άν υπάρχει $g \in Aut(X_{[w,w_i]})_{(w_i)}$ τέτοιος ώστε $ge_i \neq e_i$ ($ge_i \notin l$).*

Παρατήρηση 1. Έστω e_i μία ακμή του μονοπατιού l (όπως πρίν). Άν στο δέντρο $X_{[w,w_i]}$ υπάρχουν $card(I_i)$ τροχιές των ακμών ($I_i \subseteq \mathbb{N}$) που αρχίζουν από την κορυφή w_i, υπό την δράση της ομάδας $Aut(X_{[w,w_i]})_{(w_i)}$ τότε, συμβολίζουμε αυτές τις τροχιές με $O_j^{[w,w_i]}, j \in I_i$. Στην περίπτωση όπου η ακμή e_i δεν έχει την ιδιότητα P, υπάρχει μοναδικό $j_0 \in I_i$ τέτοιο ώστε $O_{j_0}^{[w,w_i]} = \{e_i\}$.

Επίσης, συμβολίζουμε με $X^j_{[w_0,w_i]}$ το δέντρο $X_{(w_i,O_j^{[w_0,w_i]})}$ και με $G_{w_0,w_i,j}$ την ομάδα κορυφών $(AutX^j_{[w_0,w_i]})_{(w_i)}$.

Θεώρημα 1.6.4. *Έστω X ένα δέντρο με αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και έστω $G = Aut(X)$. Τότε για κάθε κορυφή v του X η ομάδα G_v είναι αδιάσπαστη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ομάδα G_v δρά χωρίς αναστροφές σε ένα δέντρο T και έστω $g \in G_v$ ένα υπερβολικό στοιχείο.

Ισχυρισμός 1: Υπάρχει ένα υπερβολικό στοιχείο της G_v το οποίο δρά μη τετριμμένα μόνο σε κάποιο $X_{(v,O_i^v)}$.

Απόδειξη του ισχυρισμού 1: Είναι προφανές ότι $G_v = \prod_{i\in\mathbb{N}} G_{v,i}$. Άν g_i είναι ο περιορισμός του g στο δέντρο $X_{(v,O_i^v)}$ όπως στην (4), τότε $g = (g_1, g_2, ...)$. Από το Λήμμα 1.6.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποιο από τα g_i είναι υπερβολικό. Έστω ότι το g_1 είναι υπερβολικό (δρά μόνο στο $X_{(v,O_1^v)}$).

Θα αποδείξουμε ότι $card(O_1^v) \neq \aleph_0$. Υποθέτουμε ότι $card(O_1^v) = \aleph_0$.

Ισχυρισμός 2: Υπάρχει ένα υπερβολικό στοιχείο της G_v το οποίο δρά μη τετριμμένα μόνο σε κάποιο υποδέντρο $X_{(v,A)}$ όπου $A \subseteq O_1^v$ και το σύνολο $O_1^v - A$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη του ισχυρισμού 2: Ο περιορισμός του g_1 στο O_1^v είναι μία μετάθεση του συνόλου O_1^v δηλαδή, ένα στοιχείο της ομάδας $S_\infty = symm(O_1^v)$. Άν ο περιορισμός του g_1 στο O_1^v είναι μία πεπερασμένη μετάθεση, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N} : g_1^k = 1$ στο O_1^v. Άν $v_0, v_1, v_2, ...$ είναι οι γειτονικές κορυφές του v, τέτοιες ώστε $[v, v_i] \in O_1^v$, τότε $g_1^k \in \prod_{i\in\mathbb{N}} Aut(X_{[v,v_i]})_{(v_i)}$. Σύμφωνα με το 1.6.1 υπάρχει ένα υπερβολικό στοιχείο $h \in Aut(X_{[v,v_{i_0}]})_{(v_{i_0})}$ γιά κάποιο $i_0 \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $A = \{[v, v_{i_0}]\}$ και το h είναι το ζητούμενο υπερβολικό στοιχείο.
Άν ο περιορισμός του g_1 στο O_1^v είναι μία μετάθεση με άπειρο support, τότε είτε ο περιορισμός του g_1 είτε ο περιορισμός του g_1^2 στο O_1^v θα είναι γινόμενο δύο ξένων μεταθέσεων $a, b \in symm(O_1^v)$ με άπειρο support.
Πράγματι, ο περιορισμός του g_1 στο O_1^v γράφεται σαν γινόμενο ξένων κύκλων στην $symm(O_1^v)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για αυτούς τους κύκλους.

Περίπτωση 1η: Αν μεταξύ αυτών των κύκλων υπάρχει ένας τουλάχιστον κύκλος με άπειρο support.

Σε αυτή την περίπτωση, εφόσον το τετράγωνο ενός κύκλου με άπειρο support είναι ένα γινόμενο ξένων κύκλων με άπειρο support, ο περιορισμός του g_1^2 στο O_1^v γράφεται σαν γινόμενο δύο ξένων μεταθέσεων $a, b \in symm(O_1^v)$ με άπειρο support.

Περίπτωση 2η: Άν μεταξύ αυτών των κύκλων δέν υπάρχουν κύκλοι μέ άπειρο support.

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν $\aleph_0$ τέτοιοι κύκλοι. Τότε κάθε μία από τις μεταθέσεις a, b μπορεί να γραφτεί σαν ένα άπειρο γινόμενο τέτοιων κύκλων. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, ο περιορισμός του g_1 ή ο περιορισμός του g_1^2 στο O_1^v θα είναι ένα γινόμενο δύο ξένων μεταθέσεων $a, b \in symm(O_1^v)$ με άπειρο support. Θέτουμε $A_1 = support(a)$ (τα στοιχεία του O_1^v τα οποία μετακινούνται από την a), $A_2 = support(b)$. Τότε το στοιχείο g_1 ή το g_1^2 μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο δύο στοιχείων $h, f \in G_v$ όπου το h δρά μη τετριμμένα μόνο στο $X_{(v,A_1)}$ και η f δρά μη τετριμμένα στο $X_{(v,A_2)}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.2, τουλάχιστον ένα από τα f, h είναι υπερβολικό και έτσι η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Έστω ότι h είναι το υπερβολικό στοιχείο που πήραμε. Εφόσον $card(O_1^v - A) = \aleph_0$, μπορούμε να γράψουμε το σύνολο $O_1^v - A$ σάν ξένη ένωση των συνόλων $\Omega_1, \Omega_2, ...$, όπου αυτά τα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό με το σύνολο A. Εφόσον το O_1^v αποτελείται από μία τροχιά ακμών, έχουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει κάποιος $t_i \in G_v$ τέτοιος ώστε το h^{t_i} ($h^{t_i} = t_i^{-1} h t_i$) να δρά μη τετριμμένα μόνο στο $X_{(v,\Omega_i)}$. Αν εφαρμόσουμε τώρα το Λήμμα 1.6.3 στα ζεύγη $(X_{(v,\Omega_i)}, v)$ προκύπτει ότι, υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το h^{t_i} να είναι ελλειπτικό στοιχείο. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι το h είναι υπερβολικό.

Άς υποθέσουμε τώρα ότι $card(O_1^v) = k < \infty$ και ότι $v_1, ..., v_k$ είναι οι τελικές κορυφές των ακμών του συνόλου O_1^v (οι οποίες αρχίζουν από το v). Προφανώς υπάρχει κάποιο $r \leq k$ τέτοιο ώστε $g_1^r = 1$ στο O_1^v και έτσι $g_1^r = h_1 h_2 ... h_k$, όπου

$$h_i(x) = \begin{cases} g_1^r(x), & \text{αν } x \in X_{[v,v_i]} \\ x, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{5}$$

(h_i είναι ο περιορισμός του g_1^r στο $X_{[v,v_i]}$). Τα στοιχεία h_i μετατίθονται μεταξύ τους και συνεπώς από το Λήμμα 1.3.2 έχουμε ότι ένα τουλάχιστον από αυτά θα είναι υπερβολικό. Έστω ότι το h_1 είναι υπερβολικό. Τότε, όπως στον ισχυρισμό 1, για το δέντρο $X_{[v,v_1]}$, υπάρχει ένα υπερβολικό στοιχείο της $Aut(X_{[v,v_1]})_{(v_1)} \leq G_v$ το οποίο δρά σε ένα δέντρο της μορφής $Y_{(v_1,R)}$, όπου $Y = X_{[v,v_1]}$ και R είναι μία τροχιά τών ακμών του συνόλου $E_0(v_1)$ στο Y, υπό την δράση της ομάδας $Aut(X_{[v,v_1]})_{(v_1)}$. Όπως πρίν, το R πρέπει να είναι πεπερασμένο. Άν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο, φτιάχνουμε ένα μονοπάτι l με κορυφές $w_0 = v, w_1 = v_1, w_2, ...$ και μία ακολουθία υπερβολικών στοιχείων f_i της G_v όπου κάθε f_i δρά μη τετριμμένα μόνο στο δέντρο $X_{[w_0,w_i]}$ ($i = 1, 2, ...$). Συμβολίζουμε με e_i την ακμή $[w_i, w_{i+1}]$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Υπάρχει μία υπακολουθία $(e_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, της οποίας όλοι οι όροι έχουν την ιδιότητα P. Συνεπώς για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία ακμή

$r_{n_k} \in E_0(w_{n_k}) - l$, τέτοια ώστε οι e_{n_k}, r_{n_k} να ανήκουν στην ίδια τροχιά υπό την δράση της ομάδας $Aut(X_{[w_0,w_{n_k}]})_{(w_{n_k})}$.

Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει $t_k \in Aut(X_{[w_0,w_{n_k}]})_{(w_{n_k})}$ τέτοιος ώστε, το υπερβολικό στοιχείο $f^{t_k}_{n_k+1}$ να δρά μη τετριμμένα μόνο στο δέντρο $X_{[w_0,\partial_1(r_{n_k})]}$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.6.3, στα ζεύγη $(X_{[w_0,\partial_1(r_{n_k})]}, \partial_1(r_{n_k}))$ έχουμε ότι ένα τουλάχιστον από τα στοιχεία $f^{t_k}_{n_k+1}$ πρέπει να είναι υπερβολικό. Αλλά αυτό είναι άτοπο.

Περίπτωση 2η: Δέν υπάρχουν υπακολουθίες της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, των οποίων όλοι οι όροι να έχουν την ιδιότητα P. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i \geq i_0$ ισχύει $ge_i = e_i$ για κάθε $g \in Aut(X_{[w_0,w_i]})_{(w_i)}$. Δηλαδή, στο μονοπάτι με ακολουθία κορυφών $w_{i_0}, w_{i_0+1}, w_{i_0+2}, ...$, οι ακμές e_i για $i \geq i_0$ δέν έχουν την ιδιότητα P. Συνεπώς $f_{i_0+1} \in \prod_{j\in I_{i_0+1}-\{j_0\}} G_{w_{i_0},w_{i_0+1},j}$ (όπου j_0 όπως στην Παρατήρηση 1). Εφόσον το f_{i_0+1} είναι υπερβολικό, από το Λήμμα (1.6.1) υπάρχει $j_1 \in I_{i_0+1} - \{j_0\}$ και ένα υπερβολικό στοιχείο $f_{(i_0+1,j_1)} \in G_{w_{i_0},w_{i_0+1},j_1}$ με $e_{i_0+1} \notin O^{[w_0,w_{i_0+1}]}_{j_1}$.

Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο, κατασκευάζουμε μία ακολουθία υπερβολικών στοιχείων $(f_{(i_0+k,j_k)})_{k\geq 1}$ όπου κάθε $f_{(i_0+k,j_k)}$ δρά μη τετριμμένα μόνο στο δέντρο $X^{j_k}_{[w_{i_0},w_{i_0+k}]}$. Πάλι έχουμε άτοπο, σύμφωνα με το 1.6.3. □

Πρίν την κύρια εφαρμογή του Θεωρήματος (1.6.4), δηλαδή, το Θεώρημα (1.7.7), κάνουμε μία απλή εφαρμογή στα δέντρα με ρίζα (rooted trees).

Δέντρα με ρίζα. Ένα δέντρο με ρίζα (T, v_0) είναι ένα δέντρο με μία σταθερή κορυφή v_0 την οποία ονομάζουμε ρίζα του δέντρου. Ένας αυτομορφισμός f ενός δέντρου με ρίζα (T, v_0) είναι ένας αυτομορφισμός του δέντρου T τέτοιος ώστε $f(v_0) = v_0$. Συμβολίζουμε την ομάδα αυτομορφισμών του δέντρου με ρίζα (T, v_0), με $Aut(T, v_0)$. Ισχύει ότι, $Aut(T, v_0) = Aut(T)_{(v_0)}$. Θέτουμε $V_n = \{v \in V(T) : d(v_0, v) = n\}$. Άν $v \in V_n$ ονομάζουμε 'παιδιά' του v της κορυφές του V_{n+1} οι οποίες είναι γειτονικές στην v. Συμβολίζουμε με $c(v)$ τον αριθμό των παιδιών της κορυφής v. Ένα δέντρο με ρίζα (T, v_0) του τύπου $(k_0, k_1, k_2, ...)$ (όπου $k_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_i \leq \infty$) είναι ένα δέντρο με ρίζα για το οποίο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $c(v) = k_n$ για κάθε $v \in V_n$.

Πόρισμα 1.6.5.

(1) Άν (T, v_0) είναι ένα δέντρο με ρίζα το οποίο έχει αριθμήσιμο πλήθος παιδιών σε κάθε κορυφή, τότε η $Aut(T, v_0)$ είναι αδιάσπαστη ομάδα.

(2) Η ομάδα S_∞ είναι αδιάσπαστη

(3) *Το στεφανιαίο γινόμενο* $S_{k_0} \wr S_{k_1} \wr ...$, *όπου* $k_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_i \leq \infty$ *είναι μία αδιάσπαστη ομάδα (το μήκος του γινομένου μπορεί να είναι άπειρο ή πεπερασμένο).*

Απόδειξη. (1). Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 1.6.4, εφόσον $Aut(T, v_0) = Aut(T)_{(v_0)}$.
(2). Έπεται από το (1) αν πάρουμε (T, v_0) να είναι δέντρο με ρίζα του τύπου $(k_0, k_1, ...)$, όπου $k_0 = \infty$ και $k_i = 0$ $\forall i \geq 1$. Τότε $S_\infty = Aut(T, v_0)$.
(3). Ομοίως, $S_{k_0} \wr S_{k_1} \wr ... = Aut(T, v_0)$, όπου (T, v_0) είναι του τύπου$(k_0, k_1, ...)$ □

1.7 Θεώρημα Ακαμψίας

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι η ομάδα $G = Aut(X)$ καθορίζει το σύνολο $\{G_x : x \in VX\}$ και συνεπώς και το δέντρο X, όπου X είναι ένα δέντρο τέτοιο ώστε $i_G(e) \geq 3$ για κάθε ακμή e.

Ορολογία Έστω X ένα δέντρο και $x_0 \in VX$. Στο δέντρο με ρίζα (X, x_0) αριθμούμε τα παιδιά κάθε κορυφής και έτσι ταυτίζουμε τις κορυφές με πεπερασμένες ακολουθίες ώς εξής: αν $x \in V_r$ (όπως στην προηγούμενη παράγραφο) και $i_1, ..., i_r$ είναι τα κλαδιά (branches) πηγαίνοντας από το x_0 στο x, τότε θέτουμε $x = (i_1, ..., i_r)$.

Πρόταση 1.7.1. *Άν* X_3 *είναι το ομογενές δέντρο βαθμού* 3 *(σε κάθε κορυφή), και* ε_0 *είναι ένα πέρας, τότε το σύνολο* $\{G_{g\varepsilon_0} : g \in G\} = \{G_\varepsilon : \varepsilon$ *είναι ένα πέρας του* $X_3\}$ *είναι μη αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Εφόσον το δέντρο είναι ομογενές, είανι προφανές ότι $\{G_{g\varepsilon_0} : g \in G\} = \{G_\varepsilon : \varepsilon$ είναι ένα πέρας του $X_3\}$. Άν $x_0 \in VX_3$, και αριθμήσουμε τα κλαδιά όπως πρίν τότε η X-ακτίνα $[x_0, \varepsilon)$ αντιστοιχεί σε ακολουθία του τύπου $(i_1, i_2, ...)$ με $i_k \in \{1, 2\}$, για $k \geq 2$. Συνεπώς, υπάρχουν μη αριθμήσιμου πλήθους τέτοιες ακτίνες.

Οι παραπάνω X-ακτίνες παριστούν διακεκριμένα πέρατα, και έτσι το X_3 έχει μη αριθμήσιμο πλήθος περάτων. Για δύο τέτοια πέρατα ε_1, ε_2 είναι προφανές ότι ισχύει $G_{\varepsilon_1} \neq G_{\varepsilon_2}$. Παρατηρούμε ότι οι G_{ε_1}, G_{ε_2} είναι συζυγείς. Συνεπώς, το σύνολο $\{G_\varepsilon : \varepsilon$ είναι ένα πέρας $X_3\}$ είναι μη αριθμήσιμο. □

Πόρισμα 1.7.2. *Έστω* X *ένα δέντρο με* $i_G(e) \geq 3$ *για κάθε* $e \in EX$, *και έστω* ε *ένα πέρας. Τότε η ομάδα* G_ε *έχει μη αριθμήσιμο πλήθος συζυγών υποομάδων.*

Πόρισμα 1.7.3. *Έστω* X *ένα δέντρο με αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και έστω* $G = Aut(X)$ *με* $i_G(e) \geq 3$ *για κάθε ακμή* e. *Τότε, αν* $x \in VX$, *η ομάδα* G_x *έχει αριθμήσιμο πλήθος συζυγών υποομάδων.*

Απόδειξη. Ορίζουμε μία απεικόνιση $f : \{gG_xg^{-1} : g \in G\} = \{G_{gx} : g \in G\} \to VX$ με $f(G_{gx}) = gx$. Σύμφωνα με την Πρόταση (3.4) το δέντρο X είναι γνήσιο G-δέντρο. Συνεπώς, η f είναι καλά ορισμένη και προφανώς ένα πρός ένα, έτσι το σύνολο $\{gG_xg^{-1} : g \in G\}$ είναι αριθμήσιμο. □

Λήμμα 1.7.4. *Έστω X ένα δέντρο με αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και έστω $G = Aut(X)$ με $i_G(e) \geq 3$ για κάθε ακμή e. Άν K είναι μία αδιάσπαστη υποομάδα της G η οποία περιέχει αναστροφές, τότε η K σταθεροποιεί κάποια γεωμετρική ακμή $\{e, \bar{e}\}$. Άν επιπλέον η K είναι μέγιστη αδιάσπαστη υποομάδα, τότε $K = G_{\{e,\bar{e}\}}$ (η K είναι ο σταθεροποιητής μιάς γεωμετρικής ακμής).*

Απόδειξη. Η υποομάδα K δρά μόνο στην βαρυκεντρική υποδιαίρεση X' του X. Από την 1.2.1 και το γεγονός ότι η K περιέχει αναστροφές του δέντρου X, έχουμε ότι η K σταθεροποιεί μία κορυφή $v \in VX' - VX$. Συνεπώς, $K \subseteq G_{\{e,\bar{e}\}}$, για την αντίστοιχη γεωμετρική ακμή. Από το Θεώρημα 1.6.4 έχουμε ότι η G'_v είναι αδιάσπαστη ($G' = Aut(X')$) και άρα θα είναι αδιάσπαστη και η $G_{\{e,\bar{e}\}}$. Έτσι, αν η K είναι μέγιστη αδιάσπαστη τότε $K = G_{\{e,\bar{e}\}}$. □

Ορισμός. *Έστω G μιά ομάδα. Ορίζουμε*

(α) με $A(G)$ το σύνολο των υποομάδων $H \leq G$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

  (i) η H είναι μέγιστη μεταξύ των αδιάσπαστων υποομάδων της G

  (ii) η H έχει αριθμήσιμο πλήθος συζυγών ομάδων και

  (iii) ισχύει $[H : H \cap K] \neq 2$ για κάθε άλλη τέτοια υποομάδα.

(β) με $E(G)$ το σύνολο των στοιχείων $(K_1, K_2) \in A(G) \times A(G)$ τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες:

  (i) $K_1 \neq K_2$ και

  (ii) η ομάδα $K_1 \cap K_2$ είναι μέγιστη μεταξύ των υποομάδων του τύπου $L_1 \cap L_2$, με $(L_1, L_2) \in A(G) \times A(G)$ και $L_1 \neq L_2$.

Πρόταση 1.7.5. *(Διαχωρισμός κορυφών) Έστω X ένα δέντρο και έστω $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και ότι $i_G(e) \geq 3$ για κάθε e. Τότε, αν Y είναι ένα δέντρο με $VY = \{G_x : x \in VX\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $X\}$, έχουμε ότι $A(G) = VY$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in VX$. Τότε, από το 1.6.4 η G_x είναι αδιάσπαστη. Η ομάδα G_x είναι επίσης μέγιστη με αυτή την ιδιότητα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $G_x \leq K$, όπου K μία αδιάσπαστη υοομάδα της G, θα αποδείξουμε ότι $G_x = K$. Εφόσον η K είναι αδιάσπαστη σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.1 θα ισχύει ένα τουλάχιστον από τα επόμενα:

Στην πρώτη περίπτωση η K θα σταθεροποιεί κάποια κορυφή y, έτσι $G_x \leq K \leq G_y$ και εφόσον το VX είναι γνήσιο G-σύνολο ($i_G(e) \geq 3$), έπεται ότι $x = y$ και άρα $G_x = K$.

Στην δεύτερη περίπτωση η K σταθεροποιεί ένα μοναδικό πέρας ε του X, και έτσι $K = \bigcup_y K_y$ με το y να είναι κατά μήκος του $[x, \varepsilon)$ προσεγγίζοντας το ε. Γιά ένα τέτοιο y, έχουμε $G_x \leq K_x \leq K_y \leq G_y$ και από την γνησιότητα έχουμε $x = y$. Συνεπώς, $K_y = G_x$ για όλα αυτά τα y, άρα $K = G_x$.

Στην τρίτη περίπτωση η K περιέχει μία αντιστροφή και τότε $K \subseteq G_{\{e,\bar{e}\}}$ για κάποια γεωμετρική ακμή (από το Λήμμα 1.7.4). Αλλά τότε $G_x \leq G_{\{e,\bar{e}\}}$, το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την γνησιότητα. Επίσης για κάθε $x, y \in VX$, έχουμε ότι $[G_x : G_x \cap G_y] \geq 3$ αν $x \neq y$ και τελικά από το Πόρισμα 1.7.3, έχουμε ότι $VY \subset A(G)$.

Άν τώρα $H \in A(G)$ από την 1.2.1 έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $H \leq G_x$, και εφόσον η G_x είναι αδιάσπαστη, έχουμε ότι $H = G_x$

(β) $H \leq G_\varepsilon$ (για μοναδικό πέρας) και τότε $H^g \leq G_{g\varepsilon}$ $\forall g \in G$. Όμως το σύνολο $\{G_{g\varepsilon} : g \in G\}$ είναι μή αριθμήσιμο και έτσι υπάρχει $g \in G$-G_ε, με $H^g = H$. Άρα $H \leq G_{g\varepsilon} \cap G_\varepsilon$, με $g\varepsilon \neq \varepsilon$. Δηλαδή, η H σταθεροποιεί δύο διαφορετικά πέρατα το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την 1.2.1.

(γ) Άν η H έχει αναστροφές, τότε από το Λήμμα 1.7.4, έχουμε ότι $H = G_{\{e,\bar{e}\}}$. Αλλά τότε για $x = \partial_0(e), K = G_x$ έχουμε $[H : H \cap K] = 2$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι $VY = A(G)$.

□

Πρόταση 1.7.6. *(Διαχωρισμός ακμών)Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και ότι $i_G(e) \geq 3$ για κάθε e. Τότε, αν Y είναι ένα δέντρο με $VY = \{G_x : x \in VX\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $X\}$, έχουμε ότι $E(G) = EY$.*

Απόδειξη. Έστω $(G_x, G_y) \in EY$, δηλαδή, x, y είναι τα άκρα μίας ακμής e (από την γνησιότητα έχουμε ότι $G_x \neq G_y$). Άν $x' \neq y'$ είναι κορυφές και $G_x \cap G_y \leq G_{x'} \cap G_{y'}$, τότε $G_e = G_x \cap G_y =: G_{x,y} \leq G_{x'}$. Θα δείξουμε ότι το x' είναι άκρο της e.

Άν το x' δέν είναι άκρο της e, τότε $y \in [x, x']$ ή $x \in [y, x']$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η δεύτερη περίπτωση, τότε υπάρχει μία ακμή $w \neq e$ ιν $[x, x']$, η οποία έχει το x για άκρο. Δηλαδη, $w, e \in E_0(x)$. Εφόσον $G_e \leq G_{x'}$, έχουμε ότι $G_e \leq G_w$ και από την γνησιότητα του $E_0(x)$ (από 1.4.2), έχουμε $e = w$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, το x' είναι ένα άκρο της e και ομοίως και το y', δηλαδή, $\{x, y\} = \{x', y'\}$. Συνεπώς, $EY \subseteq E(G)$.

Άν τώρα $(G_x, G_y) \in E(G)$ (για $x \neq y$), θα δείξουμε ότι οι x, y είναι γειτονικές. Άν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε για κάθε ακμή $e \in [x, y]$, έχουμε ότι $G_x \cap G_y \leq G_{x'} \cap G_{y'}$, όπου το x' και το y' είναι τα άκρα της e. Όμως εμείς υποθέσαμε ότι $(G_x, G_y) \in E(G)$ και άρα $G_{x,y} = G_{x',y'}$. Συνεπώς $G_e \leq G_x$ και $G_e \leq G_y$, άρα $\{x, y\} = \{x', y'\}$, δηλαδή, $e = [x, y]$. Συνεπώς οι x, y είναι γειτονικές και συνεπώς $E(G) \subseteq EY$. □

Θεώρημα 1.7.7. *(Θεώρημα Ακαμψίας)*

I) Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και $i_G(e) \geq 3$ για κάθε ακμή e. Τότε, αν Y είναι ένα δέντρο με $VY = \{G_x : x \in VX\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $X\}$, έχουμε:

(α) $A(G) = VY$

(β) $E(G) = EY$

(γ) Η απεικόνιση $\sigma : X \to Y$ με $\sigma(x) = G_x$ είναι ένας ισομορφισμός G-δέντρων (Δηλαδή, η ομάδα G καθορίζει το δέντρο X)

(δ) Η απεικόνιση $ad : G \to Aut(G)$ είναι ένας ισομορφισμός.

II) Έστω X_1, X_2 δέντρα με $G_1 = Aut(X_1)$, $G_2 = Aut(X_2)$ τέτοια ώστε $i_{G_1}(e) \geq 3$ για κάθε $e \in EX_1$ και $i_{G_2}(w) \geq 3$ για κάθε $w \in EX_2$. Τότε αν $a : G_1 \to G_2$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων, υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός δέντρων $\sigma : X_1 \to X_2$ τέτοιος ώστε $a = ad(\sigma)$.

Απόδειξη. I) Τα (α),(β) και (γ) προκύπτουν άμεσα σύμφωνα με τα 1.5.1,1.7.5 και 1.7.6. Για το (δ) αρκεί να δείξουμε ότι η ad είναι ένα πρός ένα και επί.

Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι επί: Άν $a \in AutG$ είναι προφανές ότι $K \in A(G)$ αν και μόνο αν $a(K) \in A(G)$ και $(K, L) \in E(G)$ αν και μόνο αν $(a(K), a(L)) \in E(G)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in VX$ υπάρχει μοναδικό $x' \in VX$ τέτοιο ώστε $a(G_x) = G_{x'}$ (από την γνησιότητα), έτσι μπορούμε να θέσουμε $a'(x) = x'$. Δηλαδή, η απεικόνιση $a' : VX \to VX$ είναι καλά ορισμένη και διατηρεί την γειτνίαση των κορυφών. Συνεπώς, η απεικόνιση a' επεκτείνεται σε αυτομορφισμό του X.

Παρατηρούμε ότι ισχύει $a(G_{gx}) = G_{a(g)a'(x)}$, έτσι $a'(gx) = a(g)a'(x)$ για κάθε $g \in G$, $x \in VX$. (1)

Τώρα θα δείξουμε ότι $ad(a') = a$: Άν $g \in G$, $x \in VX$, από την (1) έχουμε ότι $(ad(a')(g))(a'(x)) = a'(gx) = a(g)a'(x)$. Συνεπώς, $ad(a')(g) = a(g)$ και έτσι $ad(a') = a$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η απεικόνιση ad είναι ένα πρός ένα: Δηλαδή, αν $a, b \in Aut(G)$, με $a = b$, θα δείξουμε ότι $a' = b'$. Πράγματι, αν $x \in VX$, τότε $a(G_x) = b(G_x)$, συνεπώς $G_{a'(x)} = G_{b'(x)}$. Τελικά, $a'(x) = b'(x)$ και έτσι $a' = b'$.

II) Άν $a : G_1 \to G_2$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων, είναι προφανές ότι $K \in A(G_1)$ αν και μόνο αν $a(K) \in A(G_2)$ και $(K, L) \in E(G_1)$ αν και μόνο αν $(a(K), a(L)) \in E(G_2)$. Έτσι για κάθε $x \in VX_1$ υπάρχει μοναδικό $x' \in VX_2$ τέτοιο ώστε $a(G_{1x}) = G_{2x'}$ (από την γνησιότητα) και έτσι μπορούμε να θέσουμε $a'(x) = x'$. Δηλαδή, η απεικόνιση $a' : VX_1 \to VX_2$ είναι καλά ορισμένη και διατηρεί την γειτνίαση των κορυφών. Συνεπώς, η απεικόνιση $a^{'}$ επεκτείνεται σε ισομορφισμό δέντρων $a' : X_1 \to X_2$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει $a(G_{1gx}) = G_{2a(g)a'(x)}$, έτσι $a'(gx) = a(g)a'(x)$ για κάθε $g \in G, x \in VX$. (2)

Τώρα θα δείξουμε ότι $ad(a') = a$: Άν $g \in G_1$, $x \in VX_1$ από την (2) έχουμε $(ad(a')(g))(a'(x)) = a'(gx) = a(g)a'(x)$. Συνεπώς, $ad(a')(g) = a(g)$ και έτσι $ad(a') = a$.

Μοναδικότητα : Άν $a, b : G_1 \to G_2$ είναι ισομορφισμοί με $a = b$, θα δείξουμε ότι $a' = b'$. Πράγματι, αν $x \in VX_1$, τότε $a(G_{1x}) = b(G_{1x})$, συνεπώς $G_{2a'(x)} = G_{2b'(x)}$. Τελικά, $a'(x) = b'(x)$ και έτσι $a' = b'$. $\square$

1.8 Τοπολογικό Θεώρημα Ακαμψίας

Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$, το οποίο έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή.

Σε αυτή την παράγραφο, θα επεκτείνουμε το Θεώρημα Ακαμψίας 1.7.7 ακόμα και στην περίπτωση όπου $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e του X.

Στην περίπτωση όπου υπάρχει $e \in EX$ τέτοια ώστε $i_G(e) = 1$, μπορούμε να κατασκευάσουμε εύκολα πεπερασμένα δέντρα τα οποία να είναι τελείως διαφορετικά αλλά να έχουν τετριμμένη ομάδα αυτομορφισμών.

Άν $i_G(e) \geq 2$ για κάθε $e \in VX$, τότε το Θεώρημα Ακαμψίας δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, παίρνουμε ένα δέντρο X με $G = Aut(X)$ και $i_G(e) \geq 2$ για κάθε $e \in VX$. Άν $\overline{X}$ είναι το δέντρο που παίρνουμε από το X υποδιαιρώντας εκείνες τις ακμές e για τις οποίες υπάρχει κάποιο $g \in G$ τέτοιο ώστε $ge = \overline{e}$, τότε $Aut(X) = Aut(\overline{X})$, αλλά $X \not\cong \overline{X}$ (εφόσον το X έχει αναστροφές).

Δηλαδή, αν X_1, X_2 είναι δύο δέντρα με $G_1 = Aut(X_1)$, $G_2 = Aut(X_2)$ όπου $G_1 \approx G_2$ και $i_{G_1}(e) \geq 2$ για κάθε $e \in EX_1$, $i_{G_2}(w) \geq 2$ για κάθε $w \in EX_2$, τότε το X_1 δεν είναι πάντα ισομορφικό στο X_2.

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι $\overline{X}_1 \simeq \overline{X}_2$.

Ορολογία. Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και ότι $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e. Ορίζουμε $\overline{X}$ το δέντρο που παίρνουμε από το X υποδιαιρώντας εκείνες τις ακμές e του X για τις οποίες υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $ge = \overline{e}$ (είναι προφανές ότι $Aut(\overline{X}) = G$).

Ορίζουμε Y το δέντρο με

$VY = \{G_x : x \in V\overline{X}\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $\overline{X}\}$.

Προφανώς η 1.5.1 ισχύει και για το δέντρο $\overline{X}$.

Ορισμός. *Άν G είναι μία ομάδα, ορίζουμε:*

(α) με $\overline{A}(G)$ το σύνολο των υποομάδων $H \leq G$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

(i) η H είναι μέγιστη μεταξύ των αδιάσπαστων υποομάδων της G και

(ii) για κάθε οικογένεια $\{H_i\}_{i\in I}, |I| \geq 2$ η οποία αποτελείται από διακεκριμένες μέγιστες υποομάδες της G με $H \neq H_i$ για κάθε $i \in I$ ισχύει $H \subsetneq \cup_{i\in I} H_i$.

(β) με $\overline{E}(G)$ το σύνολο τω στοιχείων $(K, K') \in \overline{A}(G) \times \overline{A}(G)$ τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες:

(i) $K \neq K'$

(ii) η ομάδα $K \cap K'$ είναι μέγιστη μεταξύ των υποομάδων του τύπου $L \cap L'$, όπου $(L, L') \in \overline{A}(G) \times \overline{A}(G)$ και $L \neq L'$ και

(iii) $< K, K' > = < K, \cup_{L \in \overline{A}(G)} L : K \cap L = K \cap K' >$.

Πρόταση 1.8.1. *Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e. Τότε, αν Y το είναι δέντρο με $VY = \{G_x : x \in V\overline{X}\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $\overline{X}\}$, έχουμε $\overline{A}(G) = VY$.*

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι δεν υπάρχουν αναστροφές στο δέντρο $\overline{X}$ και δουλεύοντας όπως στην Πρόταση 1.7.5 μπορούμε να δείξουμε ότι οι ομάδες G_x, $x \in V\overline{X}$ είναι μέγιστες αδιάσπαστες υποομάδες της G. Άς υποθέσουμε ότι για κάποιο $x \in V\overline{X}$, υπάρχει μία οικογένεια $\{H_i\}_{i\in I}, |I| \geq 2$ η οποία αποτελείται από διακεκριμένες μέγιστες υποομάδες της G με $G_x \neq H_i$ για κάθε $i \in I$ τέτοια ώστε $G_x \subseteq \cup_{i\in I} H_i$. Εφόσον οι ομάδες H_i είναι αδιάσπαστες, τότε από την Πρόταση 1.2.1, κάθε H_i σταθεροποιεί κάποια κορυφή ή κάποιο πέρας του $\overline{X}$. Αυτό είναι άτοπο, εφόσον η ομάδα G_x περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο το οποίο μετακινεί όλες τις ακμές του συνόλου $E_0(x)$ ($i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e). Συνεπώς $VY \subseteq \overline{A}(G)$.

Άν τώρα $H \in \overline{A}(G)$, από την Πρόταση 1.2.1 και το Θεώρημα 1.6.4 έχουμε $H = G_x$ για κάποιο x, ή διαφορετικά η H σταθεροποιεί ένα μοναδικό πέρας ε. Από την Πρόταση 1.2.1(3) και το γεγονός ότι $VY \subseteq \overline{A}(G)$, ισχύει ότι $H = G_x$ για καποιο x. Συνεπώς $\overline{A}(G) = VY$. □

Λήμμα 1.8.2. *Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$ το οποίο έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e. Έστω $x, y \in V\overline{X}$ με $x \neq y$, τέτοια ώστε η ομάδα $G_{x,y} := G_x \cap G_y$ είναι μέγιστη μεταξύ των υποομάδων της μορφής $G_{a,b}$, όπου $a, b \in V\overline{X}$ με $a \neq b$. Τότε ακριβώς ένα από τα επόμενα ισχύει:*

(I) Τα x, y είναι κορυφές ενός άξονα L με ακολουθία κορυφών $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ και ακμών $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ όπου $e_i = [v_i, v_{i+1}]$, τέτοια ώστε $orb_{G_{v_i}}(e_i) = \{e_i, \overline{e}_{i-1}\}$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ (έτσι $i_G(e_i) = i_G(\overline{e}_i) = 2$).

(II) Τα x, y είναι κορυφές ενός τμήματος T με τρείς κορυφές v_1, v_2, v_3 και ακμές $e_1 = [v_1, v_2]$, $e_2 = [v_2, v_3]$, όπου $orb_{G_{v_2}}(e_2) = \{e_2, \overline{e}_1\}$, $i_G(e_1) \geq 3$ και $i_G(\overline{e}_2) \geq 3$.

(III) Τα x, y είναι γειτονικές κορυφές.

Απόδειξη. Έστω $x = v_1, v_2, ..., v_n = y$ είναι η ακολουθία κορυφών του μονοπατιού $[x, y]$ και $e_i = [v_i, v_{i+1}]$, $i = 1, ..., n-1$.
Προφανώς ισχύει $G_{x,y} \leq G_{x,v_i}$ για κάθε $i = 2, ..., n-1$ και έτσι $G_{x,y} = G_{x,v_i}$ για κάθε $i = 2, ..., n-1$ και συνεπώς $orb_{G_{v_i}}(e_i) = \{e_i, \overline{e}_{i-1}\}$ για κάθε $i = 2, ..., n-1$, $orb_{G_{v_{i+1}}}(\overline{e}_i) = \{e_{i+1}, \overline{e}_i\}$, για κάθε $i = 1, ..., n-2$. Άν $n \geq 4$, τότε ισχύει αναγκαστικά η (I). Άν $n \leq 3$, τότε μπορεί να ιχύουν οι περιπτώσεις (I),(II) ή (III). □

Παρατήρηση 2. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζουμε $G_L =< G_{v_i} : i \in \mathbb{Z} >$ την ομάδα η οποία παράγεται από τις ομάδες κορυφών των κορυφών του άξονα L και $G_T =< G_{v_1}, G_{v_2}, G_{v_3} >$ την ομάδα η οποία παράγεται από τις ομάδες κορυφών των κορυφών του τμήματος T.

Τώρα, θα εργαστούμε στην περίπτωση του άξονα L. Θα αποδείξουμε ότι $< G_{v_0}, G_{v_1} >= G_L$. Πράγματι, έχουμε $G_{v_2} = G_{v_0}^a$ για κατάλληλο $a \in G_{v_1}$. Τότε κάθε $g \in G_{v_2}$ γράφεται $g = a^{-1}ha$ για κατάλληλο $h \in G_{v_0}$. Συνεπώς $G_{v_2} \subseteq < G_{v_0}, G_{v_1} >$.

Τώρα, ομοίως $G_{v_3} \subseteq < G_{v_1}, G_{v_2} > \subseteq < G_{v_0}, G_{v_1} >$. Συνεπώς, επαγωγικά $G_{v_i} \subseteq < G_{v_0}, G_{v_1} >$ για κάθε $i \geq 0$. Η απόδειξη είναι όμοια στην περίπτωση όπου $i \leq -1$ και έτσι $< G_{v_0}, G_{v_1} >= G_L$. Προφανώς, $G_{v_k} \nsubseteq < G_{v_i}, G_{v_j} >$ για $i < k < j$ και άρα $< G_{v_i}, G_{v_j} >= G_L$ αν και μόνο αν $j = i+1$, δηλαδή μόνο οι ομάδες των γειτονικών κορυφών μπορούν να παράγουν την ομάδα G_L. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για το τμήμα T, δηλαδή $< G_{v_1}, G_{v_2} >=< G_{v_2}, G_{v_3} >= G_T$ και $< G_{v_1}, G_{v_3} >\neq G_T$.

Πρόταση 1.8.3. *Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e. Τότε, αν Y είναι το δέντρο με $VY = \{G_x : x \in V\overline{X}\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $\overline{X}\}$, έχουμε $\overline{E}(G) = EY$.*

Απόδειξη. Έστω $(G_x, G_y) \in E(Y)$. Εφόσον ισχύει $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e, έχουμε ότι $G_x \neq G_y$. Η ομάδα $G_{x,y}$ είναι μέγιστη μεταξύ των υποομάδων του τύπου $G_{a,b}$ με $a, b \in V\overline{X}$ και $a \neq b$. Πράγματι, έστω a, $b \in V\overline{X}$ με $a \neq b$ και έστω $G_{x,y} \leq G_{a,b}$. Άν $\{x, y\} = \{a, b\}$, τότε προφανώς ισχύει ότι $G_{x,y} = G_{a,b}$. Άν υπάρχουν μόνο τρείς διακεκριμένες κορυφές μεταξύ των x, y, a, b, για παράδειγμα $x = a$, τότε οι κορυφές x, y, b είναι κορυφές ενός τμήματος T ή ενός άξονα L όπως στο Λήμμα 1.8.2.

Άν οι κορυφές x, y, a, b είναι διακεκριμένες, τότε αυτές οι κορυφές είναι κορυφές ενός άξονα L όπως στο Λήμμα 1.8.2(*I*). Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τμήματος T ή του άξονα L μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι $G_{x,y} = G_{a,b}$. Έστω $z \in V\overline{X}$ με $G_{x,y} = G_{x,z}$. Τότε οι κορυφές x, y, z ανήκουν στον άξονα L ή στο τμήμα T όπως στο Λήμμα 1.8.2. Έστω z μία κορυφή του L ή του T, διαφορετική από τις x, y, τότε $G_{x,y} = G_{x,z}$ και έτσι από την Παρατήρηση 2 έχουμε $< G_x, G_y >=< G_x, \cup_{z \in V\overline{X}} G_z : G_{x,y} = G_{x,z} >$. Συνεπώς $E(Y) \subseteq \overline{E}(G)$.

Τελικά, από το Λήμμα 1.8.2 και την Παρατήρηση 2 έχουμε $\overline{E}(G) \subseteq E(Y)$. □

Τώρα, αν εργαστούμε όπως στο Θεώρημα 1.7.7 για τα δέντρα $\overline{X}, \overline{X}_1, \overline{X}_2$ στη θέση των X, X_1, X_2 αντίστοιχα, τότε προκύπτει άμεσα το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 1.8.4. *(Τοπολογικό Θεώρημα Ακαμψίας)*

I) Έστω X ένα δέντρο με $G = Aut(X)$. Υποθέτουμε ότι το δέντρο X έχει αριθμήσιμο πλήθος ακμών σε κάθε κορυφή και ότι $i_G(e) \geq 2$ για κάθε ακμή e. Τότε, αν Y είναι ένα δέντρο με $VY = \{G_x : x \in V\overline{X}\}$ και $EY = \{(G_x, G_y) : x, y$ γειτονικές κορυφές του $\overline{X}\}$, ισχύει ότι:

(α) $\overline{A}(G) = VY$

(β) $\overline{E}(G) = EY$

(γ) Η απεικόνιση $\sigma : \overline{X} \to Y$ με $\sigma(x) = G_x$ είναι ένας ισομορφισμός G-δέντρων (Δηλαδή, η ομάδα G καθορίζει το δέντρο $\overline{X}$)

(δ) Η απεικόνιση $ad : G \to Aut(G)$ *είναι ένας ισομορφισμός.*

$II)$ *Έστω* X_1, X_2 *δέντρα με* $G_1 = Aut(X_1)$, $G_2 = Aut(X_2)$ *τέτοια ώστε* $i_{G_1}(e) \geq 2$ *για κάθε* $e \in EX_1$ *και* $i_{G_2}(w) \geq 2$ *για κάθε* $w \in EX_2$. *Τότε αν* $a : G_1 \to G_2$ *είναι ένας ισομορφισμός ομάδων, υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός δέντρων* $\sigma : \overline{X}_1 \to \overline{X}_2$ *τέτοιος ώστε* $a = ad(\sigma)$.

Κεφάλαιο 2

ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΦΙΛ

2.1 Εισαγωγή:Ορολογία

Έστω (M^n, g) μία πολλαπλότητα Riemann διάστασης n. Η ισοπεριμετρική συνάρτηση (isoperimetric profile function) της πολλαπλότητας M^n είναι μία συνάρτηση $I_M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$:

$$I_M(t) = inf_\Omega\{vol_{n-1}\partial\Omega : \Omega \subset M^n, vol_n(\Omega) = t\}$$

όπου το Ω διατρέχει τις περιοχές της M^n με λείο σύνορο (smooth boundary) $\partial\Omega$.

Με όμοιο τρόπο ορίζεται η ισοπεριμετρική συνάρτηση $I_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ για simplicial πολλαπλότητες M^n. Συμβολίζουμε με vol_2 το εμβαδόν (area) και με vol_1 το μήκος.

Άν M είναι μία simplicial 2-πολλαπλότητα ή μία 2-πολλαπλότητα με μία Riemannian μετρική συμβολίζουμε με $A(M)$ το εμβαδόν της M. Ομοίως αν p είναι ένα (simplicial ή Riemannian) μονοπάτι συμβολίζουμε με $l(p)$ το μήκος του p.

Ο Παπάζογλου ([14] πόρ.3.6) γενικεύοντας ένα αποτέλεσμα του Gromov ([15]) έδειξε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω S μία μη συμπαγής επιφάνεια πεπερασμένου γένους εφοδιασμένη είτε με μία Riemannian μετρική είτε με μία simplicial complex δομή. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $K > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $t \in [K, 100K]$, $I_S(t) \geq 10^2\sqrt{t}$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $\delta > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $t > K$, $I_S(t) \geq \delta t$.*

Δηλαδή, υπάρχουν 'κενά' στο ισοπεριμετρικό προφίλ επιφανειών πεπερασμένου γένους.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν υπάρχει κενό αν δεν φράξουμε το γένος. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 4.2. *Έστω $\mu,\nu \in \mathbb{N}$ με $\frac{\mu}{\nu} \in [\frac{1}{2}, 1)$. Υπάρχουν $m, m_1, m_2 > 0$, μία επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ άπειρου γένους, εφοδιασμένη με μία simplicial complex δομή (είτε με μία Riemannian μετρική) και μία ακολουθία από subcomplex (ή περιοχές με λείο σύνορο) $(\widehat{S'}_i)$ της $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ τέτοια ώστε:*

1. $I_{\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}}(t) \geq m t^{\frac{\mu}{\nu}}$ *για κάθε* t
2. $m_1 A(\widehat{S'_i})^{\frac{\mu}{\nu}} \leq l(\partial \widehat{S'_i}) \leq m_2 A(\widehat{S'_i})^{\frac{\mu}{\nu}}$ *για κάθε* $i \in \mathbb{N}$
3. $A(\widehat{S'_{i+1}}) \geq A(\widehat{S'_i}) + 1$ *για κάθε* $i \in \mathbb{N}$.

Έτσι, αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχουν κενά για το ισοπεριμετρικό προφίλ επιφανειών απείρου γένους.

Για την κατασκευή της επιφάνειας $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$, θεωρούμε μία κατάλληλη οικογένεια expander γραφημάτων. Συμβολίζουμε με $\{S'_i\}$ την οικογένεια γραφημάτων την οποία παίρνουμε από την προηγούμενη οικογένεια με πρόσθεση κάποιων κατάλληλων τελικών ακμών (2η ενότητα). Κατασκευάζουμε μία οικογένεια από επιφάνειες $\{\widehat{S'_i}\}$, όπου κάθε $\widehat{S'_i}$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις ακμές του S'_i με κατάλληλους κυλίνδρους (3η ενότητα).

Τελικά, παίρνουμε την επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ από το υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$: Ανοίγουμε κατάλληλες ʽτρύπες ʼ στην $\mathbb{H}^2$ στις οποίες ʽκολλάμεʼ τις επιφάνειες $\widehat{S'_i}$ με $i \in \mathbb{N}$ (4η ενότητα).

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση στην οποία η επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ είναι εφοδιασμένη με μία simplicial complex δομή, αλλά θα είναι φανερό (θα επισημάνουμε τις διαφορές) ότι οι συλλογισμοί και τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ισχύουν και στην περίπτωση όπου η επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ είναι εφοδιασμένη με κατάλληλη Riemannian μετρική.

Σημειώνουμε ότι το ισοπεριμετρικό πρόβλημα επιφανειών έχει μελετηθεί ιδιαιτέρως (όπως [16],[17], [18], [19], [20] και [21]).

2.2 Expander γραφήματα

Θεωρούμε ένα γράφημα $G(V,E)$ με πιθανούς βρόγχους και πολλαπλές ακμές (ακμές με ίδια άκρα).

Το μέγεθος του G, συμβολίζεται με $|G|$, και είναι $|G| = |V|$.

Για $S,T \subseteq V$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ακμών μεταξύ του S και του T με

$$E(S,T) = \{(u,v)/u \in S, v \in T, (u,v) \in E\}.$$

Το συμπλήρωμα του S, συμβολίζεται με S^c, και είναι $S^c = V - S$.

Ορισμός. *Το σύνορο ακμών ενός συνόλου $S \subseteq V$, συμβολίζεται με $\partial_G S$ ή απλά με ∂S και είναι $\partial S = E(S, S^c)$.*

Άν X είναι ένα υπογράφημα του G, συμβολίζουμε με ∂X το σύνορο ακμών του συνόλου κορυφών $V(X)$ του X. Αυτό ουσιάστικά είναι το σύνολο των ακμών οι οποίες βγαίνουν από το X.

Η σταθερά Cheeger του G, συμβολίζεται με $h(G)$ και είναι:

$$h(G) = \min_{S \subseteq V} \frac{|\partial S|}{min(|S|, |S^c|)}$$

Ορισμός. *Μία οικογένεια από διακεκριμένα k-κανονικά γραφήματα $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ ονομάζεται οικογένεια (ϵ, k) expander γραφημάτων αν υπάρχει μία σταθερά $\epsilon > 0$ τέτοια ώστε $h(G_i) > \epsilon$ για κάθε i.*

Η πρώτη τέτοια οικογένεια κατασκευάστηκε από τον Margulis το 1973 ([22]), ο οποίος κατασκεύασε μία οικογένεια expander συνεκτικών γραφημάτων $\{G_m\}$ με $|G_m| = m^2$.

Έστω $\mu/\nu \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{2}, 1)$. Σύμφωνα με τον Margulis υπάρχει μία οικογένεια $\{\Gamma_i\}$ (ϵ, k)-expander συνεκτικών γραφημάτων με $\epsilon > 0$, $k \geq 3$ και $|\Gamma_i| = m_i^{\nu}$ όπου $m_i \in \mathbb{N}, m_i \geq 100$ και $m_i < m_{i+1}$ για κάθε i. Την σταθερά ϵ την σταθεροποιούμε και θα την χρησιμοποιούμε στην συνέχεια. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι το ϵ είναι αρκετά μικρό ώστε οι ακόλουθες ανισότητες να ισχύουν.

Συμβολίζουμε με $\Gamma_i^{'}$ το γράφημα που παίρνουμε από το γράφημα Γ_i αν προσθέσουμε m_i^{μ} τελικές κορυφές $v_1^i, ...v_{m_i^{\mu}}^i$. Δηλαδή, προσθέτουμε m_i^{μ} ακμές $e_1^i, ...e_{m_i^{\mu}}^i$ με άκρα $\tau(e_j^i) = v_j^i$ και $o(e_j^i) \in V(\Gamma_i)$, $o(e_j^i) \neq o(e_r^i)$ για κάθε j, r με $j \neq r$.

Τότε, $|\partial_{\Gamma_i^{'}} \Gamma_i| = m_i^{\mu}$ και $|\Gamma_i| = m_i^{\nu}$. Έτσι, $|\partial_{\Gamma_i^{'}} \Gamma_i| = |\Gamma_i|^{\frac{\mu}{\nu}}$.

Πρόταση 2.2.1. *Υπάρχει μία ακολουθία γραφημάτων $S_i^{'}$ και μία ακολουθία υπογραφημάτων $S_i \subseteq S_i^{'}$ τέτοια ώστε:*

(i) $\frac{m_i^{\nu}}{2} < |S_i| \leq m_i^{\nu}$

(ii) Τα γραφήματα S_i, $S_i^{'}$ είναι συνεκτικά

(iii) Το σύνολο $V(S_i^{'}) - V(S_i)$ αποτελείται από τελικές κορυφές του S_i

(iv) $|\partial S_i| = [|S_i|^{\frac{\mu}{\nu}}]$

(v) Από κάθε κορυφή του $S_i^{'}$ αρχίζει τουλάχιστον μία ακμή και το πολύ $k + 2$ ακμές

(vi) Για κάθε υπογράφημα Φ, *οποιουδήποτε* S_i, *ισχύει:*

$$\begin{cases} |\partial\Phi| \geq \epsilon|\Phi|, & \alpha\nu \quad |\Phi| \leq \frac{m_i^\nu}{2} \\ |\partial\Phi| \geq \epsilon|\Phi|^{\frac{\mu}{\nu}}, & \alpha\nu \quad |\Phi| > \frac{m_i^\nu}{2} \end{cases}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε υπογράφημα Φ του Γ_i με $|\Phi| > \frac{m_i^\nu}{2}$ ισχύει $|\partial_{\Gamma_i'}\Phi| \geq \epsilon|\Phi|^{\frac{\mu}{\nu}}$. Τότε το θεώρημα ισχύει για $S_i = \Gamma_i$ και $\Gamma_i' = S_i'$.

Στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ και ένα υπογράφημα S_i του Γ_i με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(*I*) $|S_i| > \frac{m_i^\nu}{2}$

(*II*) $|\partial_{\Gamma_i'} S_i| < \epsilon|S_i|^{\frac{\mu}{\nu}}$

(*III*) το $|S_i|$ είναι ελάχιστο με τις παραπάνω ιδιότητες.

Είναι προφανές ότι το S_i είναι συνεκτικό και ότι $|\partial_{\Gamma_i'}\Phi| \geq \epsilon|\Phi|^{\frac{\mu}{\nu}}$ για κάθε γνήσιο υπογράφημα Φ του S_i με $|\Phi| > \frac{m_i^\nu}{2}$.
Αν προσθέσουμε, όπως παραπάνω, τελικές κορυφές στο S_i μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα συνεκτικό γράφημα Γ_i'' με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) το Γ_i' είναι υπογράφημα του Γ_i''

(β) $|\partial_{\Gamma_i''} S_i| = [|S_i|^{\frac{\mu}{\nu}}]$

(γ) $|\partial_{\Gamma_i''}\Phi| \geq |\partial_{\Gamma_i'}\Phi| \geq \epsilon|\Phi|^{\frac{\mu}{\nu}}$ για κάθε υπογράφημα Φ του S_i με $|\Phi| > \frac{m_i^\nu}{2}$

(δ) $\frac{m_i^\nu}{2} < |S_i| \leq m_i^\nu$

Το Θεώρημα ισχύει αν πάρουμε για S_i' την ένωση του S_i με όλες τις ακμές του Γ_i'' των οποίων τουλάχιστον ένα άκρο ανήκει στο S_i (απλά προσθέτουμε στο S_i όλες τις γειτονικές ακμές του). □

2.3 Expander Επιφάνειες

Διατηρώντας την παραπάνω ορολογία, θεωρούμε για κάθε ακμή w_j^i του S_i' έναν κύλινδρο E_j^i τον οποίο παίρνουμε από ένα Ευκλείδιο παραλληλόγραμο το οποίο είναι εφοδιασμένο με μία κατάλληλη simplicial complex δομή (όπως στο σχήμα 1), με σταθερό μήκος d (π.χ $d = 10$) και μήκος βάσης ίσο με 4. Άν συμβολίσουμε με $(E_j^i)^\tau$, $(E_j^i)^o$ τις συνιστώσες του συνόρου του E_j^i, έχουμε

$l((E^i_j)^\tau) = l((E^i_j)^o) = 4$ και $A(E^i_j) = 8d$ (στην Riemannian περίπτωση το παραπάνω παραλληλόγραμμο είναι εφοδιασμένο με την στάνταρ μετρική και έτσι $A(E^i_j) = 4d$).

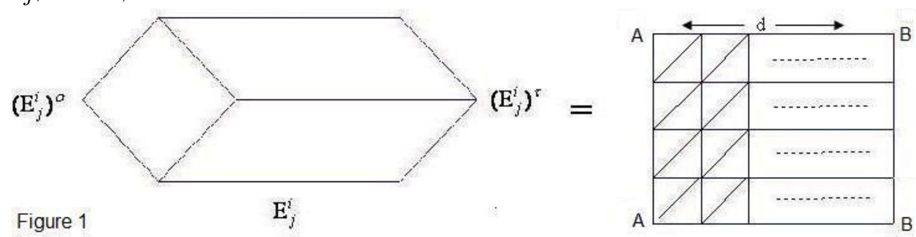


Figure 1

Τώρα, για κάθε i θεωρούμε επιφάνειες $\widehat{S}_i$, $\widehat{S}'_i$ τις οποίες παίρνουμε από τα γραφήματα S_i, S'_i αντίστοιχα αν αντικαταστήσουμε τις ακμές w^i_j με του αντίστοιχους κύλινδρους E^i_j. Συγκεκριμένα, αν P είναι μία κορυφή του S_i και $w^i_0, w^i_1, ..., w^i_r$ $(r > 0)$ είναι οι ακμές του S'_i οι οποίες αρχίζουν από το P (δηλαδή $o(w^i_j) = P$ για $j = 0, 1, ..., r$). Χωρίζουμε κάθε $(E^i_j)^o$ σε δύο τόξα ίδιου μήκους τα οποία τέμνονται μόνο στα άκρα τους. Τότε `κολλάμε΄ το ένα από τα δύο τόξα του $(E^i_j)^o$ με ένα τόξο του $(E^i_{(j+1)mod(r+1)})^o$ και το άλλο τόξο του $(E^i_j)^o$ με ένα τόξο του $(E^i_{(j-1)mod(r+1)})^o$ (όπως στο σχήμα 2).

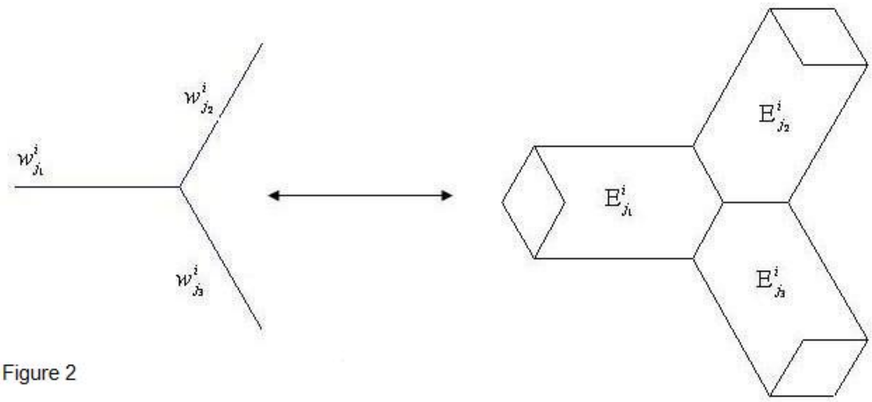


Figure 2

Σημείωση:

1. Στο S'_i ορίζουμε $E(S'_i) - E(S_i) = \{e^i_1, ..., e^i_{|\partial S_i|}\}$, $V(S'_i) - V(S_i) = \{\tau(e^i_1), ..., \tau(e^i_{|\partial S_i|})\}$, E^i_j τον κύλινδρο ο οποίος αντιστοιχεί στην ακμή e^i_j και $(E^i_j)^\tau$, $(E^i_j)^o$ τις συνιστώσες του συνόρου του E^i_j που αντιστοιχούν στις $\tau(e^i_j)$, $o(e^i_j)$ αντίστοιχα.

2. Άν Φ είναι ένα υπογράφημα του S_i συμβολίζουμε με Φ' το υπογράφημα του S'_i το οποίο προκύπτει από το υπογράφημα Φ αν προσθέσουμε στο Φ το μέρος του συνόρου του Φ το οποίο δεν ανήκει στο S_i. Τελικά θέτουμε με $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Phi}'$ τις υποεπιφάνειες της $\widehat{S}_i$, $\widehat{S}'_i$, οι οποίες αντιστοιχούν στα γραφήματα Φ, Φ' αντίστοιχα.

Διατηρώντας την παραπάνω ορολογία θα αποδείξουμε:

Πόρισμα 2.3.1. *Υπάρχουν σταθερές* c_1, c_2, ϵ_1, ϵ_2 *με* $0 < c_1, c_2, \epsilon_1, \epsilon_2 < 1$ *και* $\epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon$ *τέτοιες ώστε:*

$$c_2 A(\widehat{S_i'})^{\frac{\mu}{\nu}} \leq |\partial S_i| \leq c_1 A(\widehat{S_i'})^{\frac{\mu}{\nu}}$$

και αν Φ *είναι ένα υπογράφημα του* S_i*, τότε:*

$$\begin{cases} |\partial\Phi| \geq \epsilon_1 A(\widehat{\Phi}'), & \text{αν } |\Phi| \leq \frac{m_i^\nu}{2} \\ |\partial\Phi| \geq \epsilon_2 A(\widehat{\Phi}')^{\frac{\mu}{\nu}}, & \text{αν } |\Phi| > \frac{m_i^\nu}{2} \end{cases}$$

Απόδειξη. Εφόσον $|\partial S_i| = [|S_i|^{\frac{\mu}{\nu}}]$ έχουμε ότι: $\frac{|S_i|^{\frac{\mu}{\nu}}}{2} \leq |\partial S_i| \leq |S_i|^{\frac{\mu}{\nu}}$. Είναι προφανές (πρόταση 2.2.1) ότι από κάθε κορυφή του S_i αρχίζει τουλάχιστον μία ακμή και το πολύ $k+2$ ακμές του S_i. Έτσι, αν συμβολίσουμε με $E(S_i)$ το σύνολο των ακμών του S_i τότε $\frac{|S_i|}{2} \leq |E(S_i)| \leq (k+2)|S_i|$.

Εφόσον το εμβαδόν σε κάθε ένα από τους κυλίνδρους της $\widehat{S_i'}$ είναι ίσο με $8d$, έχουμε ότι: $A(\widehat{S_i}) = 8d|E(S_i)|$. Τελικά $A(\widehat{S_i}) \leq A(\widehat{S_i'}) \leq 2A(\widehat{S_i})$. Τώρα, για $c_1 = \frac{1}{2^{\frac{\mu}{\nu}}(k+2)^{\frac{\mu}{\nu}}2(8d)^{\frac{\mu}{\nu}}}$ και $c_2 = \frac{2^{\frac{\mu}{\nu}}}{(8d)^{\frac{\mu}{\nu}}}$, η ανισότητα $c_2 A(\widehat{S_i'})^{\frac{\mu}{\nu}} \leq |\partial S_i| \leq c_1 A(\widehat{S_i'})^{\frac{\mu}{\nu}}$ προκύπτει από τις παραπάνω ανισότητες.

Έστω Φ ένα υπογράφημα του S_i. Άν $|\Phi| \leq \frac{m_i^\nu}{2}$ τότε από τις ανισότητες $|\partial\Phi| \geq \epsilon|\Phi|$, $|E(\Phi)| \leq (k+2)|\Phi|$, $A(\widehat{\Phi}) = 8d|E(\Phi)|$ και $A(\widehat{\Phi}') \leq 2A(\widehat{\Phi})$ έχουμε $|\partial\Phi| \geq \epsilon_1 A(\widehat{\Phi}')$ όπου $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(k+2)8d}$ και έτσι $\epsilon_1 < \epsilon < 1$.

Άν $|\Phi| > \frac{m_i^\nu}{2}$ τότε από τις ανισότητες $|\partial\Phi| \geq \epsilon|\Phi|^{\frac{\mu}{\nu}}$, $|E(\Phi)| \leq (k+2)|\Phi|$, $A(\widehat{\Phi}) = 8d|E(\Phi)|$ και $A(\widehat{\Phi}') \leq 2A(\widehat{\Phi})$ έχουμε $|\partial\Phi| \geq \epsilon_2 A(\widehat{\Phi}')^{\frac{\mu}{\nu}}$ όπου $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2^{\frac{\mu}{\nu}}(k+2)^{\frac{\mu}{\nu}}(8d)^{\frac{\mu}{\nu}}}$ και έτσι $\epsilon_2 < \epsilon < 1$.

Οι αποδείξεις παραμένουν οι ίδιες και στην Riemannian περίπτωση, αλλά με διαφορετικές σταθερές. □

2.4 Η Επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$

Κατασκευάζουμε την επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ από το υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$ αν ανοίξουμε κατάλληλες τρύπες στο $\mathbb{H}^2$ και σε αυτές 'κολλήσουμε' τις επιφάνειες $\widehat{S_i'}$ ($i \in \mathbb{N}$). Στην simplicial περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία tessellation H του υπερβολικού επιπέδου $\mathbb{H}^2$ (για παράδειγμα όπως στο σχήμα 3). Θεωρούμε στο H τα υποκόμπλεξ $\Omega_1^i, ..., \Omega_{|\partial S_i|}^i$ με $A(\Omega_j^i) = 2$, $l(\partial\Omega_j^i) = 4$ και $\partial\Omega_j^i := p_j^i$, όπου οι p_j^i είναι απλές κλειστές καμπύλες.

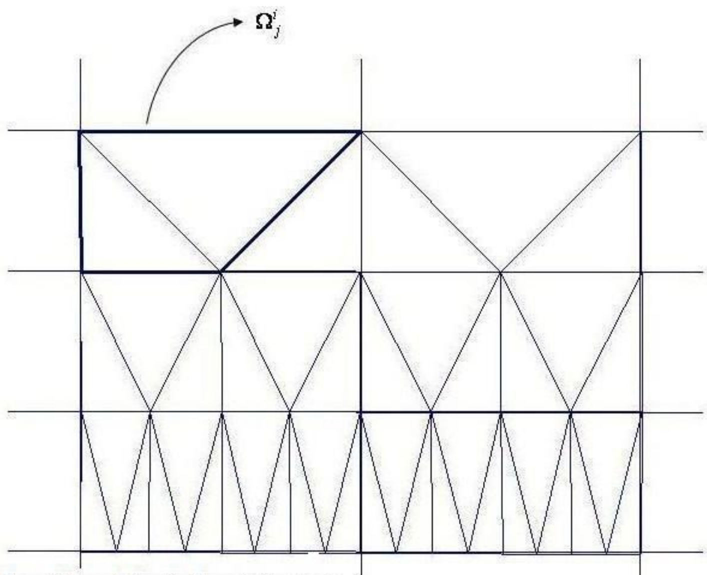


Figure 3 (tessellation H of hyperbolic plane)

Αν συμβολίσουμε με $d(\Omega^i_j, \Omega^k_t)$ την απόσταση μεταξύ των Ω^i_j και Ω^k_t, τότε είναι εύκολο να βρούμε υποκόμπλεξ Ω^i_j τέτοια ώστε $d(\Omega^i_j, \Omega^i_t) \geq 10^4 A(\widehat{S'_i})$ για $j \neq t$ και $d(\Omega^i_j, \Omega^k_t) \geq 10^4 max\{A(\widehat{S'_i}), A(\widehat{S'_k})\}$ για $i \neq k$.

Θέτουμε $\widehat{H} = H - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\bigcup_{j=1}^{|\partial S_i|} (\Omega^i_j)^o)$ (υπερβολικό επίπεδο με τρύπες). Στο $\widehat{H}$ 'κολλάμε' τις επιφάνειες S'_i ταυτίζοντας κάθε καμπύλη p^i_j με τον κύκλο $(E^i_j)^\tau$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ την επιφάνεια που προκύπτει και από το πόρισμα 2.3.1 έχουμε ότι: $\frac{c_2}{4} A(\widehat{S'_i})^{\frac{\mu}{\nu}} \leq l(\partial \widehat{S'_i}) \leq \frac{c_1}{4} A(\widehat{S'_i})^{\frac{\mu}{\nu}}$.

Ομοίως ορίζουμε την επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ στην Riemannian περίπτωση.

Λήμμα 2.4.1. *Υπάρχει $c > 0$ με τις ακόλουθες ιδιότητες: Άν X είναι ένα υποκόμπλεξ της επιφάνειας $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$, τέτοιο ώστε, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα υπογράφημα Φ_i του S_i με $X \cap \widehat{S'_i} = \widehat{\Phi'_i}$ (αν $X \cap \widehat{S'_i} \neq \emptyset$).Τότε,*

$$l(\partial X) \geq c A(X)^{\frac{\mu}{\nu}} \qquad (1)$$

Απόδειξη. Εφόσον $\frac{\mu}{\nu} < 1$, από τον τρόπο κατασκευής της επιφάνειας $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$, αρκεί να αποδείξουμε την (1) στην περίπτωση όπου το X είναι ένα συνεκτικό υποκόμπλεξ της $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ και τέμνει το πολύ ένα από τα υποκόμπλεξ $\widehat{S'_i}$. Υποθέτουμε λοιπόν τα παραπάνω. Δηλαδή, ότι υπάρχει κάποιος $i \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $X \cap \widehat{S'_i} \neq \emptyset$ και $X \cap \widehat{S'_j} = \emptyset$ για κάθε $j \neq i$.

Θέτουμε $X_1 = X \cap \widehat{H}$, $X_2 = X \cap \widehat{S'_i} = \widehat{\Phi'_i}$, $p_1 = \partial X \cap \widehat{H}$ και $p_2 = \partial X \cap \{\widehat{S'_i} - \bigcup_{j=1}^{|\partial S_i|} (E^i_j)^\tau\}$. Έτσι, $p_1 \cup p_2 = \partial X$ και $p_2 \cap H = \emptyset$. Άν n είναι το πλήθος των κυλίνδρων E^i_j, $j = 1, ..., |\partial S_i|$ που περιέχονται στο X και αντιστοιχούν στο σύνορο του S_i (σύμφωνα με την παράγραφο 3), $l_1 = l(p_1)$ και $l_2 = l(p_2)$ τότε, από το πόρισμα 2.3.1 έχουμε:

$$\begin{cases} l_2 + 4n \geq l(\partial X_2) \geq \epsilon_1 A(X_2), & \text{αν } |\Phi_i| \leq \frac{m_i^\nu}{2} \\ l_2 + 4n \geq l(\partial X_2) \geq \epsilon_2 A(X_2)^{\frac{\mu}{\nu}}, & \text{αν } |\Phi_i| > \frac{m_i^\nu}{2} \end{cases}.$$

Εφόσον, για κάθε υποκόμπλεξ T του H, ισχύει ότι $l(\partial T) \geq \epsilon A(T)$ ([23], [26]) έχουμε:

$$l_1 \geq \epsilon(A(X_1) + nA(\Omega_j^i)) = \epsilon A(X_1) + 2n\epsilon$$

Έτσι, $2l_1 + 2l_2 \geq 2l_1 + \epsilon l_2 \geq 2cA(X)^{\frac{\mu}{\nu}}$ για $2c \leq min\{\epsilon\epsilon_2, 2\epsilon, \epsilon\epsilon_1\}$.

Η απόδειξη παραμένει ίδια στην Riemannian περίπτωση. □

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\frac{\mu}{\nu} \in [\frac{1}{2}, 1)$. Υπάρχουν $m, m_1, m_2 > 0$, μία επιφάνεια $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ άπειρου γένους, εφοδιασμένη με μία simplicial complex δομή (είτε με μία Riemannian μετρική) και μία ακολουθία από subcomplex (ή περιοχές με λείο σύνορο) $(\widehat{S'}_i)$ της $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ τέτοια ώστε:*

1. $I_{\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}}(t) \geq mt^{\frac{\mu}{\nu}}$ *για κάθε* t
2. $m_1 A(\widehat{S_i'})^{\frac{\mu}{\nu}} \leq l(\partial \widehat{S_i'}) \leq m_2 A(\widehat{S_i'})^{\frac{\mu}{\nu}}$ *για κάθε* $i \in \mathbb{N}$
3. $A(\widehat{S_{i+1}'}) \geq A(\widehat{S_i'}) + 1$ *για κάθε* $i \in \mathbb{N}$.

Δηλαδή, δέν υπάρχουν 'κενά' για το ισοπεριμετρικό προφίλ επιφανειών με άπειρο γένος.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την παραπάνω ορολογία και σημειώσεις, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι υπάρχει m με $0 < m < 1$ τέτοιος ώστε

$$l(\partial X) \geq mA(X)^{\frac{\mu}{\nu}} \qquad (2)$$

για κάθε υποκόμπλεξ X της επιφάνειας $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$.

Εφόσον $\frac{\mu}{\nu} < 1$ και από τον τρόπο κατασκευής της επιφάνειας $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$, είναι αρκετό να αποδείξουμε την (2) στην περίπτωση όπου το X είναι ένα συνεκτικό υποκόμπλεξ της $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ και τέμνει το πολύ ένα από τα υποκόμπλεξ $\widehat{S_i'}$.

Έτσι, υποθέτουμε ότι το X είναι συνεκτικό υποκόμπλεξ της $\mathcal{E}_{(\mu,\nu)}$ και ότι υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $X \cap \widehat{S_i'} \neq \emptyset$ και $X \cap \widehat{S_j'} = \emptyset$ για κάθε $j \neq i$.

Έστω E_j^i είναι ένας κύλινδρος της $\widehat{S_i'}$ ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) $X \cap \{E_j^i - ((E_j^i)^o) \cup (E_j^i)^\tau)\} \neq \emptyset$, $E_j^i \nsubseteq X$

(ii) $\{(E_j^i)^o \subseteq X$ ορ $(E_j^i)^\tau \subseteq X\}$ ή $\{(E_j^i)^o \nsubseteq X$, $(E_j^i)^\tau \nsubseteq X$ ανδ $l_j \geq 8\}$

όπου $l_j = l(\partial(X \cap \{E_j^i - ((E_j^i)^o \cup (E_j^i)^\tau)\}))$.

Έστω I το σύνολο των δεικτών j τέτοιων ώστε $j \in I$ αν και μόνο αν ο E_j^i ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες. Άν θέσουμε $X' = X \cup_{j \in I} E_j^i$ τότε $l(\partial X') \leq l(\partial X)$ και $A(X') \geq A(X)$.

Τώρα, αν E_j^i είναι ένας κύλινδρος της $\widehat{S_i'}$ με $X' \cap \{E_j^i - ((E_j^i)^o \cup (E_j^i)^\tau)\} \neq \emptyset$ και $E_j^i \nsubseteq X'$ τότε, $0 < l_j < 7$. Θέτουμε X'' το υποκόμπλεξ του X' το οποίο προκύπτει από το X', αν εξαιρέσουμε όλους αυτούς τους κυλίνδρους. Συγκεκριμένα αν συμβολίσουμε με J το σύνολο των δεικτών j τέτοιων ώστε $j \in J$ αν και μόνο αν $X' \cap \{E_j^i - ((E_j^i)^o \cup (E_j^i)^\tau)\} \neq \emptyset$ και $E_j^i \nsubseteq X'$, τότε $X'' = X' - \bigcup_{j \in J}\{E_j^i - ((E_j^i)^o \cup (E_j^i)^\tau)\}$. Τώρα, αν $X'' \neq \emptyset$, από το Λήμμα 2.4.1 έχουμε ότι $l(\partial X'') \geq cA(X'')^{\frac{\mu}{\nu}}$. Άν θέσουμε $t = |J|$, $D_j = X' \cap E_j^i$ και $c_j = l(X' \cap ((E_j^i)^o \cup (E_j^i)^\tau))$ $\forall j \in J$ τότε, το D_j είναι ισομορφικό με δίσκο και $l_j \geq c_j$ $\forall j \in J$.

Επίσης

$$3l(\partial X') \geq l(\partial X') + 2\sum_{j=1}^{t} l_j \geq l(\partial X') + 2\sum_{j=1}^{t} c_j \Rightarrow$$

$$3l(\partial X') \geq l(\partial X'') + \sum_{j=1}^{t} l_j - \sum_{j=1}^{t} c_j + 2\sum_{j=1}^{t} c_j \Rightarrow$$

$$3l(\partial X') \geq l(\partial X'') + \sum_{j=1}^{t} l_j + \sum_{j=1}^{t} c_j \geq l(\partial X'') + \sum_{j=1}^{t} l(\partial D_j).$$

Εφόσον $l(\partial D_j) \geq 1$ και $A(D_j) \leq 8d$ ισχύει ότι $l(\partial D_j) \geq \frac{1}{8d}A(D_j)$.

Έτσι,

$$3l(\partial X) \geq 3l(\partial X') \geq l(\partial X'') + \sum_{j=1}^{t} l(\partial D_j) \Rightarrow$$

$$3l(\partial X) \geq m(A(X'') + \sum_{j=1}^{t} A(D_j))^{\frac{\mu}{\nu}} \geq 3mA(X')^{\frac{\mu}{\nu}} \geq 3mA(X)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

για κάποιο $m > 0$.

Άν $X'' = \emptyset$, τότε η X' είναι συνεκτική, $E_j^i \nsubseteq X'$ για κάθε ϑ, $X' \subseteq \widehat{S_j^i}$ και αν

$E_j^i \cap X' \neq \emptyset$ τότε $0 < l_j < 8$.
Έτσι,

$$2l(\partial X') \geq \sum_{j=1}^{t} l_j + \sum_{j=1}^{t} c_j \geq \sum_{j=1}^{t} l(\partial D_j) \geq \frac{1}{8d} \sum_{j=1}^{t} A(D_j) \Rightarrow$$

$$2l(\partial X') \geq mA(X)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

για κάποιο $m > 0$.

Στην Riemannian περίπτωση οι συλλογισμοί είναι οι ίδιοι για όλη την απόδειξη. Η μόνη διαφορά είναι ότι σε αυτή την περίπτωση η ανισότητα $l(\partial D_j) \geq 1$ δέν ισχύει.

Για κάθε περιοχή T του Ευκλείδειου επιπέδου, με λείο σύνορο ισχύει ότι $l(\partial T) \geq \epsilon\sqrt{A(T)}$ ([23], [26]). Εφόσον το D_j είναι ισομορφικό με Ευκλείδειο δίσκο ισχύει ότι

$$l(\partial D_j) \geq \epsilon\sqrt{A(D_j)} \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{A(D_j)}} A(D_j) \Rightarrow l(\partial D_j) \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{4d}} A(D_j).$$

Τώρα, η υπόλοιπη απόδειξη παραμένει η ίδια. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] R.Alperin and H.Bass, *Length functions of group actions on Λ trees, in Combinatorial Group Theory and Topology*, Annals of Math. Studies, 111, Princetwon Univ.Press (1987) 265–378.

[2] H.Bass, *Some remarks on group actions on trees,* Comm. in Algebra 4 (1976) 1091–1126.

[3] Hyman Bass, Alexander Lubotzky, *Rigidity of Group Actions on Locally Finite Trees*, Proc. London Math. Soc 69 (1994) 541–575.

[4] Peter J.Cameron, *Permutation Groups*, London Mathematical Society, Student Texts 45.

[5] Edward A. Bertram, *On a Theorem of Schreier and Ulam for Countable Permutations*, Journal of Algebra 24, 316–322(1973)

[6] M.Forester, *Deformation and Rigidity of simplicial group actions on trees*, Geom.Topo.6, 2002 p.219–267.

[7] S.Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press (1978).

[8] Oystein Ore, *Some remarks on commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. 2(1951) 307–314. MR 12,6712

[9] M.Rubin, *On the reconstruction of topological spaces from their group of homeomorphisms*, Trans AMS 312 (1989) 487–538.

[10] M.Rubin, *The reconstruction of trees from their automorphism groups*, Ben Gurion University, Beer Sheva, Isreal (1991).

[11] J.-P.Serre, *Trees*, Springer- Verlag (1980).

[12] J.Tits, *Sur le groupe des automorphisms d'un arbre*, Essays on topology and related topics: Memoires dedié á George de Rham (eds A. Haefliger and R.Narasimhan), Springer - Verlag (1970) 188–211.

[13] D.V.Znoiko, *The automorphism groups of regular trees*, Math.Sbornik 103 (1977), Math USSR Sbornik 32 (1977) 109–115.

[14] P. Papasoglu, *Cheeger constants of surfaces and isoperimetric inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc.361 (2009), 5139-5162.

[15] M. Gromov, *Hyperbolic groups, Essays in group theory (S. M. Gersten, ed.)*, MSRI Publ. 8, Springer-Verlag, 1987 pp. 75-263.

[16] I. Benjamini, J. Cao, *A new isoperimetrc theorem for surfaces of variable curvature*, Duke Math. J.85, p.359-396 (1996).

[17] R. Grimaldi, P. Pansu, *Remplissage et surfaces de revolution*, J. Math. Pures Appl. (9) 82 (2003), no. 8, 1005-1046.

[18] F. Morgan, M. Hutchings, H. Howards, *The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 11, 4889-4909.

[19] M. Ritoré, *The isoperimetric problem in complete surfaces of nonnegative curvature*, J. Geom. Anal. 11 (2001), no. 3, 509-517.

[20] M. Ritore, *Constant geodesic curvature curves and isoperimetric domains in rotationally symmetric surfaces*, Comm. Anal. Geom. 9 (2001), no. 5, 1093-1138.

[21] P. Topping, *Mean curvature flow and geometric inequalities*, J. Reine Angew. Math. 503 (1998), 47-61.

[22] G.A. Margulis, *Explicit constructions of expanders*, Problemy Perdači Informacii, 9(4): 71-80, 1973.

[23] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities: Differential geometic and analytic persepectives*, Cambridge university press, Cambridge, UK(2001), ISBN 0-521-80267-9.

[24] P. Papasoglu, *Isodiametric and isoperimetric inequalities for complexes and groups*, J.London Math. Soc.(2)62(2000), no. 1,97-106.

[25] P. Papasoglu, *An algorithm detecting hyperbolicity Geometric and computational perspectives on infinite groups*, p.193-200, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 25 AMS, Providence, RI, 1996.

[26] J. Burillo, J. Taback, *Equivalence of Geometric and Combinatorial Dehn Functions*, New York J. Math. 8 (2002) 169-179, ISSN 1076-9803.

[27] P.Psaltis, *A Rigidity Theorem for automorphism groups of trees*, Israel journal of mathematics 163 (2008), 345-367 DOI:10.1007/s11856-008-0015-4

[28] P.Psaltis, *The isoperimetric profile of infinite genus surfaces*, Geometricae dedicata 2 February 2010, ISSN 0046-5755(Print) 1572-9168(online), DOI 10.1007/s10711-010-9468-9

[29] M.Malicki, *Trees, Unsplittability, Property (FA) and the Likes*, arXiv:1105.1224v1 [math.GR] 6 May 2011 (preprint)