Γεωμετρική Μελέτη Λύσεων Ελλειπτικών Συστημάτων Μεταβολικής Δομής με Δυναμικά Αλλαγής Φάσεων και Σχετικά Προβλήματα Ελαχιστικών Επιφανειών

Α. Φαλιάγκας

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Α. ΦΑΛΙΑΓΚΑΣ

E-mail address: apostol.faliagas@gmail.com

Η Επταμελής Επιτροπή

(1) Ν. Αλικάκος
(2) G. Fusco
(3) Γ. Καραλή
(4) Ι. Στρατής
(5) Γ. Μπαρμπάτης
(6) Β. Παπανικολάου
(7) Α. Τερτίκας

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή 1
1.1. Η φυσική βάση της αλλαγής φάσεων 1
1.2. Μοντέλα διάχυτης διεπιφάνειας 2
1.3. Μοντέλα οξείας διεπιφάνειας 4
1.4. Υπαρξη και ομαλότητα 6
1.5. Αντικείμενο και περίγραμμα της εργασίας αυτής 7

Κεφάλαιο 2. Πολυφασικά προβλήματα διαμέρισης με περιορισμούς όγκου και διφασική επαφή 11
2.1. Προκαταρκτικά 11
2.2. Πολυφασικά προβλήματα διαμέρισης 15
2.3. Φασματική ανάλυση της διγραμμικής μορφής της 2ης μεταβολής του εμβαδού 22
2.4. Ορισμένες εφαρμογές σε προβλήματα διαμέρισης στον $\mathbb{R}^N$ 30
2.5. Εφαρμογή σε διδιάστατα προβλήματα διαμέρισης 33

Κεφάλαιο 3. Το πρόβλημα της συνεκτικότητας ευσταθών διαμερίσεων τριπλών συνδέσμων 43
3.1. Ανασκόπιση του προβλήματος 43
3.2. Συμβολισμός και προκαταρκτικά 46
3.3. Πρώτη μεταβολή-Η ταυτότητα του Young 51
3.4. Οι τύποι της δεύτερης μεταβολής 57
3.5. Εφαρμογές σε μη-συνεκτικές διαμερίσεις τριπλών συνδέσμων στον $\mathbb{R}^3$ 72
3.6. Φασματική ανάλυση της διγραμμικής μορφής της δεύτερης μεταβολής του εμβαδού 74
3.7. Εφαρμογή σε διδιάστατα μη-συνεκτικά προβλήματα διαμέρισης 83

Κεφάλαιο 4. Μέθοδοι τανυστών τάσης για ημιγραμμικά συστήματα μεταβολικής δομής 99
4.1. Εσωτερικές μεταβολές 99
4.2. Τανυστές τάσης και εξίσωση Noether 101
4.3. Ταυτότητα Pohozaev για συστήματα 101

Κεφάλαιο 5. Ισοδυναμία των Εξισώσεων Euler-Lagrange και Noether για Βαθμωτά Πεδία 113
5.1. Εισαγωγή 113
5.2. Οι Εξισώσεις Noether 114
5.3. Μη-γραμμική Εξίσωση Poisson 119
5.4. Γενικές Λαγκρανζιανές 122
5.5. Εφαρμογή: Ισοδυναμία αποδεκτών και εσωτερικών μεταβολών 125

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Πολλαπλότητες - Συστήματα συντεταγμένων - Τανυστές 127
Α.1. Πολλαπλότητες και συστήματα συντεταγμένων 127
Α.2. Διανύσματα - Τανυστές - Διαφορικές φόρμες 136
Α.3. Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες 142

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Διαφορικοί τελεστές σε πολλαπλότητες 151
Β.1. Κατευθυντήρια παράγωγος 151
Β.2. Συμμεταβλητή παράγωγος 152
Β.3. Η βαθμίδα 153
Β.4. Απόκλιση 154

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. Ορισμένες Λεπτομέρειες της Απόδειξης του Θεωρήματος 3.30 157
Γ.1. Πρόβλημα Ιδιοτιμών-Περίπτωση Ι 157
Γ.2. Πρόβλημα Ιδιοτιμών-Περίπτωση ΙΙ 161

Βιβλιογραφία 167

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1. Η φυσική βάση της αλλαγής φάσεων

Η διαμέριση ενός συνόλου σε έναν αριθμό υποσυνόλων (τις «φάσεις») έτσι ώστε η διαχωριστική επιφάνεια (η «διεπιφάνεια») να έχει ελάχιστο εμβαδό, είναι ένα πρόβλημα της Γεωμετρικής Ανάλυσης και του Λογισμού των Μεταβολών, το οποίο είναι μεγάλης σημασίας για τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία. Με τον όρο *φάση* στις φυσικές επιστήμες εννοούμε μια περιοχή στον χώρο, στην οποία όλες οι φυσικές ιδιότητες ενός υλικού (όπως πυκνότητα, δείκτης διάθλασης, μαγνήτιση και χημική σύσταση) είναι ομοιόμορφες ([**1**], [**2**] σ. 86).

Μια προσέγγιση για την μελέτη των υλικών είναι οι μέθοδοι των συναρτησιακών πυκνότητας [**3, 4**] της στατιστικής μηχανικής. Αυτές οι μέθοδοι είναι ενδιάμεσες μεταξύ μακροσκοπικής θερμοδυναμικής και αυστηρά μικροσκοπικών μοριακών θεωριών ενσωματώνοντας λεπτομέρειες μοριακού επιπέδου, αλλά είναι αρκετά απλές έτσι ώστε να διατηρείται η διαχειρισιμότητά τους με μαθηματικές μεθόδους ακόμη και σε πολύπλοκα συστήματα. Η *θεωρία συναρτησιακών πυκνότητας* (DFT) είναι εφαρμόσιμη σε προβλήματα ισορροπίας (συνύπαρξη φάσεων, δομή διεπιφανειών, επίδραση τοιχωμάτων και εξωτερικών πεδίων) και δυναμικά προβλήματα (ρυθμός πυρηνογέννεσης και ανάπτυξης νέων φάσεων). Τα μοντέλα ισορροπίας χρησιμεύουν και ως βάση για αντίστοιχα δυναμικά μοντέλα.

Το πεδίο εφαρμογών της DFT είναι τεράστιο. Εχει εφαρμοστεί, εκτός από τα ρευστά μικρών μορίων και τα στερεά, σε πολύπλοκα συστήματα, όπως ύαλοι [**5, 6, 7, 8**], κολλοειδή και διπλές στοιβάδες [**9, 10, 11, 12, 13**], μοντελοποίηση του DNA [**14**], μοντελοποίηση κολλοειδών σωματιδίων σε αλληλεπίδραση με πολυμερή μέσω μιάς επέκτασης της θεωρίας θεμελιώδους μέτρου (fundamental measure theory) [**15, 16**], υγροί κρύσταλλοι [**17, 18, 19, 20, 21**] (βλ. επίσης [**22, 23**] για περαιτέρω εξελίξεις), πολυμερή [**24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31**], κρυστάλλωση πολυμερικών τηγμάτων [**32**], διάταξη δισυσταδικών

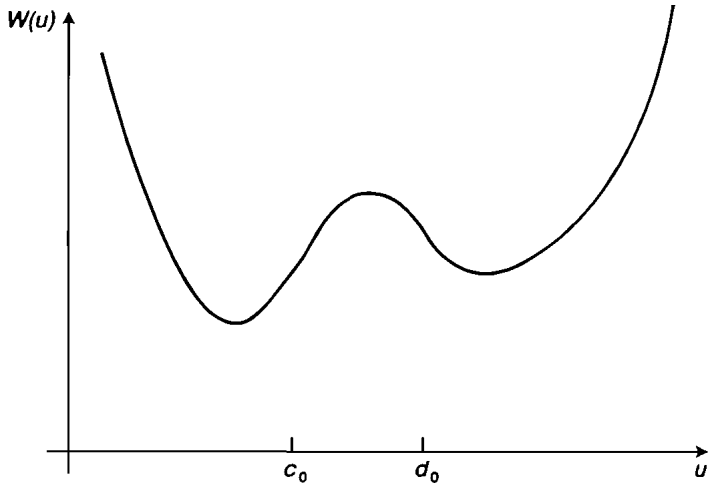
συμπολυμερών [**33, 34, 35, 36**], μικύλια και μεμβράνες [**37, 38, 39, 40, 41, 42**].

Η επιλογή κατάλληλων *παραμέτρων τάξης* (order parameters) παίζει κυρίαρχο ρόλο [**43**] στην μοντελοποίηση των αλλαγών φάσεων. Παραδείγματα περιλαμβάνουν την πυκνότητα, την τοπική μαγνήτιση, την τοπική περιοδική τάξη σε έναν κρύσταλλο, και τον τοπικό μέσο κατευθυντή που ορίζει την τάξη προσανατολισμού σε έναν υγρό κρύσταλλο. Από μακροσκοπική άποψη, αυτές οι ποσότητες μεταβάλλονται ασυνεχώς από τη μία φάση στην άλλη. Σε πολλές περιπτώσεις είναι επαρκής η επιλογή μίας μοναδικής παραμέτρου τάξης, η οποία χαρακτηρίζει την αλλαγή φάσης. Η ελεύθερη ενέργεια ([**2**], σ. 77) μπορει να εκφραστεί ως συναρτησιακό αυτής της παραμέτρου, η οποία ειναι βαθμωτή συνάρτηση. Στην διανυσματική περίπτωση περισσότερες από μία παράμετροι τάξης απαιτούνται για τον χαρακτηρισμό ενός διαγράμματος φάσεων. Παράμετροι τάξης θέσης και κατεύθυνσης είναι δυνατόν να ορίζουν τις πιθανές φάσεις μοριακών συστημάτων όπως οι πλαστικοί κρύσταλλοι [**44**], υγροί κρύσταλλοι [**45**] και μοριακοί κρύσταλλοι.

Σύμφωνα με την βασική υπόθεση της DFT, η ελεύθερη ενέργεια ενός ανομοιογενούς ρευστού μπορεί να εκφραστεί ως συναρτησιακό της (βαθμωτής ή διανυσματικής) συνάρτησης παραμέτρου τάξης (η οποία είναι συνήθως η πυκνότητα για την βαθμωτή περίπτωση), και συνεπώς μπορεί να γίνει αντικείμενο μελέτης με τις μεθόδους του *Λογισμού των Μεταβολών* [**46, 47**]. Η θεμελιώδης μεταβολική αρχή της DFT λέει ότι *σε συνθήκες ισορροπίας η μεταβολή* (*γνωστή στην βιβλιογραφία και ως συναρτησιακή παράγωγος*) *της ελεύθερης ενέργειας ως προς την πυκνότητα είναι μηδέν* [**3**]. Αυτό οδηγεί σε μια μη-γραμμική ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την πυκνότητα. Διεπιφανειακές δομές μεταξύ συνυπαρχόντων φάσεων προσδιορίζονται από την εξίσωση αυτή. Κεντρικό πρόβλημα στη φυσική είναι η κατασκευή ενός φυσικά αποδεκτού και ακριβούς συναρτησιακού της πυκνότητας.

1.2. Μοντέλα διάχυτης διεπιφάνειας

Με βάση τις υποθέσεις ότι (i) η τοπική ελεύθερη ενέργεια ανα μόριο εξαρτάται από την τοπική σύσταση και τη σύσταση του άμεσου περιβάλλοντος και (ii) η βαθμίδα της σύστασης είναι μικρή σε σύγκριση με το αντίστροφο της διαμοριακής απόστασης, ανάπτυξη σε σειρά Taylor γύρω από την ελεύθερη ενέργεια ανα μόριο διαλύματος



Σχημα 1.2.1. Το διευσταθές δυναμικό διπλού φρέατος $W(u)$ και το ασταθές διάστημα $c_0 \leqslant u \leqslant d_0$.

ομοιόμορφης σύστασης κρατώντας όρους χαμηλότερης τάξης, δίνει την εξής προσέγγιση τετραγωνικής βαθμίδας (βλ. [**48**] σ. 178, [**49**] σ. 480, [**50**]):

$$J(u) = \int \left[\tfrac{1}{2}\varepsilon|\nabla u(x)|^2 + W(u(x))\right] dx \tag{1.2.1}$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως *συναρτησιακό ελεύθερης ενέργειας* van der Waals [**51**] ή Landau-Ginzburg. Η συνάρτηση W έχει τη μορφή «δυναμικού διπλού φρέατος» (βλ. Σχ. 1.2.1). Οι συντελεστές είναι εμπειρικές παράμετροι οι οποίες δεν προκύπτουν από βασικές αρχές (στατιστική μηχανική). Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού αυτού δίνει ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) ως προς τις παραμέτρους τάξης u. Υπάρχουν πολλές εναλλακτικές στα φαινομενολογικά συναρτησιακά ελεύθερης ενέργειας τετραγωνικής βαθμίδας. Βλ. [**3**] και [**4**] για ανασκόπιση.

Οι Penrose και Fife [**54, 55**] έδωσαν ένα γενικό πλαίσιο για τη φαινομενολογική κινητική των αλλαγών φάσης στις οποίες μεταβάλλονται χρονικά και χωρικά όχι μόνο η παράμετρος τάξης αλλά και η θερμοκρασία. Αντί για το συναρτησιακό ελεύθερης ενέργειας Ginzburg-Landau χρησιμοποίησαν ένα εντροπικό συναρτησιακό. Για ανασκόπιση της μεθόδου πεδίου φάσης (phase field method) βλ. [**56**]. Η δυναμική της διαμέρισης φάσεων χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση μη γραμμικών φαινομένων όπως η πυρηνογέννεση [**59**], η ανάπτυξη κρυστάλλων [**60**], η δυναμική διαστρωματοποιημένων

διεπιφανειών [**61**], ανισότροπων διεπιφανειών [**62**], κίνηση Mullins-Sekerka μικρών σταγονιδίων [**63**] και κίνηση φυσαλλίδων [**64, 65**].

Ο Szekely [**66**] συζήτησε προβλήματα αλλαγής φάσεων τρέχοντος ενδιαφέροντος στη μηχανική όπως τήξη και στερεοποίηση. Αναφέρθηκε στους συμβιβασμούς μεταξύ πιστής αναπαράστασης της φυσικής πραγματικότητας και μαθηματικής ακρίβειας, καθώς επίσης και στον προβληματισμό ότι η μάλλον πραγματιστική προσέγγιση, η οποία είναι απαραίτητη για την επίτευξη τεχνικών απαντήσεων σε πρακτικά προβλήματα, μπορεί να είναι σε αντίθεση με ορισμένες κομψές μαθηματικές διατυπώσεις. Παρόλα αυτά, αυτή είναι δυνατόν να ανοίξει προοπτικές και να αναδείξει μια σειρά προβλημάτων τα οποία θα ωφεληθούν από αυστηρές μαθηματικές διατυπώσεις.

1.3. Μοντέλα οξείας διεπιφάνειας

Για μια εξαιρετική ιστορική ανασκόπιση των μοντέλων οξείας (μέθοδος Laplace) και διάχυτης διεπιφάνειας (μέθοδος van der Waals) βλ. [**67**].

1.3.1. Συναρτησιακά που ελαχιστοποιούν το εμβαδό. Ο Fife [**68**], οι Carr-Gurtin-Slemrod [**69**], και οι Alikakos-Shaing [**70**] έδειξαν ότι σε μία διάσταση, υπό την συνθήκη σταθερού όγκου των φάσεων, κάθε ακολουθία καθολικών ελαχιστοποιητών του συναρτησιακού (1.2.1) καθώς $\varepsilon \to 0$ συγκλίνει σε μια λύση του αντίστοιχου προβλήματος ελαχιστοποίησης με $\varepsilon = 0$, δηλ. σε μια λύση της $W'(u) = 0$ (για κατάλληλα τροποποιημένο W έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη ο περιορισμός). Κατά συνέπεια, στο όριο $\varepsilon \to 0$ η ελεύθερη ενέργεια είναι συγκεντρωμένη στη διεπιφάνεια που διαχωρίζει τις δύο φάσεις. Αυτό είναι το μοντέλο αλλαγής φάσης *οξείας διεπιφάνειας*, το οποίο ειναι μια φυσική προσέγγιση για πολλές εφαρμογές [**70**]. Ο Modica [**71**], και ο Sternberg [**72**] απέδειξαν το όριο οξείας διεπιφάνειας για την ισορροπία φάσεων δύο ρευστών σε n διαστάσεις με τη χρήση μεθόδων Γ-σύγκλισης [**73, 74**]. Ο Sternberg [**72**], και ο Baldo [**75**] επέκτειναν αυτά τα αποτελέσματα για n μη αλληλεπιδρώντα ρευστά σε ισορροπία, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο. Στις έρευνες αυτές η κατάσταση του μίγματος δίνεται από την διανυσματική συνάρτηση πυκνότητας (παραμέτρους τάξης) $u = (u_1, \cdots, u_n)$, και χρησιμοποιούνται n περιορισμοί όγκου.

Στο όριο οξείας διεπιφάνειας, το ολοκλήρωμα στη σχέση (1.2.1) ανάγεται σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα και το πρόβλημα επαναδιατυπώνεται ως εξής: να ελαχιστοποιηθεί το συναρτησιακό

$$J(M) = \int_M \gamma dS \tag{1.3.1}$$

ως προς όλες τις διεπιφάνειες M που διαιρούν το σύνολο Ω σε δύο υποσύνολα, τις φάσεις, έτσι ώστε ο όγκος τους να είναι δύο προκαθωρισμένες σταθερές. Σε πολλές εφαρμογές το γ θεωρείται σταθερό και το ολοκλήρωμα ανάγεται στο «εμβαδό» της διεπιφάνειας M.

1.3.2. Ροή μέσης καμπυλότητας. Οι δυναμικές εξισώσεις των φαινομένων αλλαγής φάσης που περιγράφονται από τη σχέση (1.2.1) ανάγονται σε προβλήματα *ροής μέσης καμπυλότητας* [**76, 77, 78**] στο όριο οξείας διεπιφάνειας $\varepsilon \to 0$. Ο Gärtner [**79**] απέδειξε ότι καθώς $\varepsilon \to 0$, η επίδραση του όρου της διάχυσης σε δεύτερης τάξης ημιγραμμικά παραβολικά προβλήματα αντίδρασης-διάχυσης με συνθήκες συνοριακές και Cauchy, γίνεται αμελητάία σε μικρά χρονικά διαστήματα, και ανάλογα με την επικρατούσα δυναμική της αντίδρασης κατά τη διάρκεια ενός τέτοιου χρονικού διαστήματος οι λύσεις τείνουν γρήγορα σε μία από τις δύο σταθερές καταστάσεις του W. Τα αποτελέσματα αυτά αποδείχθηκαν με εφαρμογή πιθανοτικών μεθόδων συναρτησιακής ολοκλήρωσης [**80**].

Οι Bronsard και Kohn [**81**] έδειξαν ότι, στο όριο οξείας διεπιφάνειας, οι εξισώσεις της δυναμικής Landau-Ginsburg ανάγονται σε ροή μέσης καμπυλότητας. Οι Rubinstein και Sternberg [**82**] παρουσίασαν μια μη-τοπική (nonlocal) εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης και την ανέλυσαν με τη χρήση συναρμοσμένων (matched) ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων και πολλαπλών χρονικών κλιμάκων. Το προβλημα αυτό μοντελοποιούσε ένα δυαδικό μίγμα το οποίο υφίστατο διαχωρισμό φάσεων. Οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η κίνηση των μετώπων τα οποία διαχώριζαν τις φάσεις γινόταν μέσω μέσης καμπυλότητας. Οι Bronsard και Stoth [**83**] θεώρησαν την μη-τοπική εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης των Rubinstein και Sternberg και μελέτησαν της ασυμπτωτική συμπεριφορά της. Απέδειξαν ότι, στο όριο οξείας διεπιφάνειας, οι διεπιφάνειες κινούνται με ροή μέσης καμπυλότητας, η οποία διατηρεί την μάζα (όγκο). Η μη-τοπικότητα προέρχεται από τον περιορισμό σταθερότητας όγκου. Για μία ανασκόπιση βλ. Fife [**84**]. Βλ. επίσης [**85**].

1.4. Υπαρξη και ομαλότητα

Για τα μοντέλα διάχυτης διεπιφάνειας εφαρμόζεται η θεωρία των ΜΔΕ. Επομένως στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με μοντέλα οξείας διεπιφάνειας, και πιο συγκεκριμένα με μοντέλα ισορροπίας.

1.4.1. Υπαρξη. Ο Reifenberg [**86**] απέδειξε την ύπαρξη ελαχιστοποιητών εμβαδού σε όλες τις διαστάσεις για το προσανατολισμένο πρόβλημα Plateau [**87, 88**] και ορισμένες μη-προσανατολισμένες περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας ομολογία Čech και συμπαγείς ομάδες. Ο Reifenberg μπόρεσε να εξάγει και ορισμένα αποτελέσματα ομαλότητας για τις λύσεις. Αργότερα ο Almgren [**89, 90**] πρότεινε μια άλλη απόδειξη ύπαρξης, η οποία βασίζονταν σε *ακέραιες μεταβολαπλότητες* (varifolds). Μια άλλη μέθοδος για την επίτευξη ύπαρξης είναι τα *ακέραια ρεύματα* (currents) [**91, 87, 92**], τα οποία βασίζονται στην έννοια του ρεύματος κατά de Rham [**93**], η οποία είναι μια γενίκευση της επιφάνειας. Για ανασκόπιση αποτελεσμάτων ύπαρξης βλ. [**94**].

Η ύπαρξη σχηματισμών (configurations) ισορροπίας μη-αναμίξιμων ρευστών με τη χρήση των αλυσίδων ύφεσης (flat chains) του Fleming [**95**], με συντελεστές από μία ομάδα, αποδείχθηκε από τον White [**96**], ο οποίος συζήτησε εν συντομία και ομαλότητα. Ο White παρουσίασε μια απλούστερη απόδειξη ύπαρξης από τον Almgren ([**89**], VI.2) χρησιμοποιώντας μία ασθενέστερη υπόθεση για τους συντελεστές επιφανειακής τάσης.

1.4.2. Ομαλότητα.

1.4.2.1. *Εσωτερική ομαλότητα.* Ο Reifenberg [**97, 98**] απέδειξε ορισμένα αποτελέσματα ομαλότητας και μάλιστα αναλυτικότητας, τα οποία γενικεύθηκαν αργότερα από τον David και τους συνεργάτες του [**99**]. Το 1962 ο Fleming [**100**] απέδειξε ότι διδιάστατα ευθυγραμμίσιμα ρεύματα στον $\mathbb{R}^3$ που ελαχιστοποιούν το εμβαδό, είναι λείες, ενσωματωμένες (embedded) πολλαπλότητες στο εσωτερικό. Τα αποτελέσματα ομαλότητας του Fleming γενικεύτηκαν με πολλούς τρόπους και από πολλούς ερευνητές. Το 1969 οι Bombieri, De Giorgi, Giusti [**101**] (§§8.1, 10.7) έδωσαν ένα παράδειγμα ενός 7-διάστατου ευθυγραμμίσιμου ρεύματος στον $\mathbb{R}^8$, το οποίο ελαχιστοποιεί το εμβαδό, με μία απομονωμένη εσωτερική ιδιορρυθμία (singularity).

Ο Almgren [**90**] απέδειξε ότι ένα k-διάστατο ευθυγραμμίσιμο ρεύμα στον $\mathbb{R}^n$ που ελαχιστοποιεί το εμβαδό, είναι μία λεία ενσωματωμένη πολλαπλότητα στο εσωτερικό, εκτός από ένα σύνολο ιδιόρρυθμων σημείων διάστασης Hausdorff το πολύ $k-2$. Για παράδειγμα, ένα διδιάστατο ευθυγραμμίσιμο ρεύμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ελαχιστοποιεί το εμβαδό, έχει στη χειρότερη περίπτωση σύνολο ιδιόρρυθμων σημείων στο εσωτερικό του διάστασης 0. Η δομή του συνόλου ιδιόρρυθμων σημείων μελετήθηκε από την Taylor [**102, 103**]. Για ανασκόπιση των αποτελεσμάτων ομαλότητας βλ. [**87, 94, 104, 105**].

1.4.2.2. *Συνοριακή ομαλότητα.* Δεν υπάρχουν πολλά αποτελέσματα ομαλότητας που φτάνουν μέχρι το σύνορο [**94**]. Το 1979 οι Hardt και Simon [**106**] απέδειξαν ένα θεώρημα συνοριακής ομαλότητας για υπερεπιφάνειες που ελαχιστοποιούν το εμβαδό, το οποίο λέει ότι ένα $(n-1)$-διάστατο ευθυγραμμίσιμο ρεύμα στον $\mathbb{R}^n$, που ελαχιστοποιεί το εμβαδό και περιορίζεται από μία C^2 προσανατολισμένη υποπολλαπλότητα (με πληθικότητα 1) είναι τοπικά σε κάθε συνοριακό σημείο μία C^1 ενσωματωμένη πολλαπλότητα με σύνορο. Ο White [**107**] γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα ομαλότητας για λεία σύνορα με πληθικότητες (multiplicities). Σε υψηλότερες συνδιαστάσεις είναι δυνατόν να εμφανιστούν συνοριακές ιδιορρυθμίες.

Ο White επέκτεινε και απλοποίησε τα αποτελέσματα ομαλότητας της Taylor [**108**]. Ειδικότερα συζήτησε μη-αναμίξιμα ρευστά και άλλα προβλήματα τύπου Plateau.

1.4.2.3. *Περιορισμοί όγκου.* Τα αποτελέσματα ομαλότητας ισχύουν και για υπερεπιφάνειες που ελαχιστοποιούν το εμβαδό οι οποίες υπόκεινται σε περιορισμούς όγκου, διότι ο εφαπτόμενος κώνος ελαχιστοποιεί το εμβαδό χωρίς τον περιορισμό όγκου ([**87**], κεφ. 8). Ειδικά για μη-αναμίξιμα ρευστά η ύπαρξη και η ομαλότητα μελετήθηκαν από τον White [**96, 108**].

1.5. Αντικείμενο και περίγραμμα της εργασίας αυτής

Οι μέθοδοι οξείας διεπιφάνειας της ενότητας 1.3 δεν είναι κατασκευαστικές. Επομένως δεν είναι κατάλληλες για την μελέτη των ποιοτικών ιδιοτήτων των λύσεων προβλημάτων διαμέρισης φάσεων. Ενα παράδειγμα είναι το ερώτημα σχετικά με την *συνεκτικότητα* των φάσεων. Το θέμα αυτό μελετήθηκε για το πρόβλημα της διφασικής διαμέρισης από τους Sternberg και Zumbrun με μεθόδους οξείας

[**109**] και διάχυτης διεπιφάνειας [**110**]. Δεν είναι γνωστά αποτελέσματα για το πρόβλημα της συνεκτικότητας για περισσότερες από 2 φάσεις. Στην εργασία αυτή διατυπώνουμε και μελετάμε το πρόβλημα συνεκτικότητας *ευσταθών διαμερίσεων φάσεων* (stable phase partitions) για περισσότερες από δύο φάσεις, με μεθόδους οξείας διεπιφάνειας. Ενα σύστημα φάσεων σε ισορροπία είναι ευσταθές εαν η διεπιφάνεια είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού του εμβαδού (η πιο γενικά της ελεύθερης ενέργειας) (1.3.1) και επιπλέον η *δεύτερη μεταβολή* του συναρτησιακού αυτού είναι θετική για μη-τετριμμένες μεταβολές.

Οταν τρεις συνυπάρχουσες φάσεις συναντώνται κατά μήκος μιας καμπύλης, τότε μιλάμε για έναν *τριπλό σύνδεσμο*. Διαμερίσεις φάσεων χωρίς τον σχηματισμό τριπλών συνδέσμων είναι δυνατές, για παράδειγμα όταν οι τρείς φάσεις βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη. Δεν είναι γνωστό αν οι απόλυτοι ελαχιστοποιητές προβλημάτων διαμέρισης φάσεων είναι τριπλοί σύνδεσμοι ή όχι. Στην εργασία αυτή θεωρούμε και τριπλούς συνδέσμους και σχηματισμούς που περιλαμβάνουν μόνο διφασικές επαφές.

Η ύπαρξη σχηματισμών τριπλών συνδέσμων ως τοπικών ελαχιστοποιητών προβλημάτων διαμερίσεων τριών φάσεων μελετήθηκε από τους Sternberg και Zeimer [**111**]. Η ομαλότητα ερευνήθηκε από την Taylor [**103**], τον Nitsche [**112**], και τον White [**108**]. Οι Kinderlehrer, Nirenberg, Spruck [**113**] (§5) μελέτησαν την ομαλότητα σχηματισμών τριπλών συνδέσμων θεωρώντας τους τοπικά ως ελλειπτικά προβλήματα με ελεύθερο σύνορο. Χρησιμοποίησαν μεθόδους μερικών οδογράφων και μετασχηματισμών Legendre για να μπορέσουν να εφαρμόσουν την συνήθη θεωρία της ελλειπτικής ομαλότητας. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι διεπιφάνειες ενός σχηματισμού τριπλών συνδέσμων είναι αναλυτικές μέχρι και το σύνορο ([**113**], θεώρημα 5.1).

Στο Κεφάλαιο 2 μελετάμε την ευστάθεια διαμερίσεων που περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερες φάσεις σε κυρτά χωρία κάτω από την υπόθεση το πολύ διφασικής επαφής. Αυτό αποκλείει τους τριπλούς συνδέσμους. Παράγουμε ορισμένα κριτήρια ευστάθειας και ειδικότερα ανακτάμε το αποτέλεσμα των Sternberg-Zumbrun για την αστάθεια των μη-συνεκτικών διαμερίσεων στο γενικότερο πλαίσιο των πολυφασικών συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε την ευστάθεια διαμερίσεων σε κυρτά χωρία οι οποίες περιλαμβάνουν τρεις συνυπάρχουσες φάσεις σε επαφή και ειδικότερα τριπλούς συνδέσμους. Παρουσιάζουμε έναν νέο τύπο για

την *δεύτερη μεταβολή του εμβαδού* ελαχιστικών διαμερίσεων. Από αυτόν τον τύπο εξάγουμε ορισμένα κριτήρια ευστάθειας και αποδεικνύουμε την ύπαρξη ευσταθών διαμερίσεων τριπλών συνδέσμων.

Στο Κεφάλαιο 4 χρησιμοποιούμε τανυστές τάσης-ενέργειας, οι οποίοι δίνουν την δυνατότητα διατύπωσης ελεύθερης απόκλισης (divergence-free formulation), για την απόδειξη ταυτοτήτων Pohozaev και μονοτονίας για ορισμένες κατηγορίες ημιγραμμικών συστημάτων μεταβολικής δομής.

Στο Κεφάλαιο 5 αποδεικνύουμε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange και Noether είναι ισοδύναμες για μια γενική κατηγορία μεταβολικών προβλημάτων, με την προυπόθεση ότι θεωρούμε μη-τετριμμένες λύσεις. Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται η μη-γραμμική εξίσωση Poisson, Λαγκρανζιανές ανεξάρτητες θέσης, και Λαγκρανζιανές τύπου p-Laplacian. Ως εφαρμογές αποδεικνύουμε ορισμένες προτάσεις σχετικές με την μη-γραμμική εξίσωση Poisson και τις γενικεύσεις της.

Τα Παραρτήματα Α και Β περιέχουν συμπληρωματικό υλικό το οποίο είναι απαραίτητο για την ανάγνωση των Κεφαλαίων 2 και 3. Στο Παράρτημα Α συνοψίζουμε μερικά βασικά δεδομένα από την θεωρία των πολλαπλοτήτων και διάφορων σχετικών θεμάτων, όπως τανυστές, πολλαπλότητες με σύνορο και ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες, για να εισάγουμε ορισμούς και συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή. Βασικά δεδομένα που σχετίζονται με διαφορικούς τελεστές σε πολλαπλότητες εισάγονται στο Παράρτημα Β. Τέλος στο Παράρτημα Γ δίνονται οι λεπτομέρειες της απόδειξης του Θεωρήματος 3.30.

Κεφάλαιο 2

Πολυφασικά προβλήματα διαμέρισης με περιορισμούς όγκου και διφασική επαφή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την ευστάθεια διαμερίσεων που περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερες φάσεις σε κυρτά χωρία κάτω από την υπόθεση το πολύ διφασικής επαφής, εξαιρώντας έτσι τριπλούς συνδέσμους. Παρουσιάζουμε μια λεπτομερή παραγωγή του τύπου της δεύτερης μεταβολής επικεντρώνοντας στους συνοριακούς όρους, και στη συνέχεια μελετάμε το πρόσημο της κύριας (principal) ιδιοτιμής του τελεστή Jacobi. Με τον τρόπο αυτό εξάγουμε ορισμένα κριτήρια ευστάθειας και παρενθετικά επανακτούμε το αποτέλεσμα των Sternberg-Zumbrun για την αστάθεια των μη-συνεκτικών φάσεων στο γενικότερο πλαίσιο των πολλών φάσεων.

2.1. Προκαταρκτικά

Στις πρώτες μελέτες του μαθηματικού προβλήματος της διαμέρισης συμπεριλαμβάνεται το άρθρο του Nitsche [**114, 115**], στην αρχή του οποίου δίνεται ένας τυπικός (formal) ορισμός του προβλήματος της διφασικής διαμέρισης. Ο Nitsche παρουσίασε ένα πρόγραμμα εννέα σημείων προσδιορίζοντας το πεδίο δράσης για τα προβλήματα που σχετίζονται με τη διαμέριση φάσεων, την τέταρτη θέση του οποίου καταλάμβανε η *ευστάθεια των λύσεων*. Το θέμα αυτό αναπόφευκτα εμπλέκει μια συζήτηση της *δεύτερης μεταβολής του εμβαδού* κάτω από δεδομένους περιορισμούς όγκου και συνοριακών συνθηκών. Το γενικό προβλημα των ελαχιστικών ή αλλιώς στάσιμων διαμερίσεων ενός χωρίου στον $\mathbb{R}^N$ (ή και όλο τον $\mathbb{R}^N$) σε δεδομένο αριθμό κελιών προκαθορισμένου όγκου, οδηγεί σε συμπλέγματα επιφανειών και σε παλαιά προβλήματα των επιστημών που υπάρχουν εδώ και αιώνες [**114**]· βλ. για παράδειγμα [**116, 117, 89**].

Οι Sternberg, Zumbrun (S-Z) [**109**], διαπραγματεύτηκαν το διφασικό πρόβλημα ισορροπίας και απέδειξαν ότι *μη-συνεκτικές διφασικές διαμερίσεις* (*αυστηρά*) *κυρτών συνόλων είναι ασταθείς*. Οι τύποι

των S-Z με μικρές διαφορές στο συμβολισμό, δίνονται στο επόμενο θεώρημα. Για ευκολία του αναγνώστη παρατίθενται μερικές λεπτομέρειες έτσι ώστε η παρουσίαση να είναι αυτάρκης. Σε όλο αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι το $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ είναι ένα φραγμένο χωρίο με λείο σύνορο $\Sigma = \partial\Omega$.

Επειδή στο μεγαλύτερο μέρος αυτής της διατριβής χρησιμοποιούμε μεταβολές, είναι απαραίτητο να ορίσουμε με ακρίβεια τι εννοούμε με την λέξη μεταβολή, και ειδικότερα σε σχέση με ένα πρόβλημα διαμέρισης φάσεων. Με βάση το [**46**] έχουμε τον ακόλουθο ορισμό της μεταβολής μιας πολλαπλότητας:

Ορισμος 2.1. Εστω M μια n-διάστατη C^1 υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ με σύνορο (βλ. Παραρτήματα Α και Β για σύνοψη του απαιτούμενου υπόβαθρου για τις πολλαπλότητες) και V ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $V \cap M \neq \emptyset$. Μια *μεταβολή* του M είναι μια συλλογή διαφορομορφισμών $(\xi^t)_{t\in I}$, $I =]-\delta, \delta[$, $\delta > 0$, $\xi^t : V \to V$ τέτοια ώστε

(i) Η συνάρτηση $\xi(t,x) = \xi^t(x)$ είναι C^2

(ii) $\xi^0 = id_V$

(iii) $\xi^t|_{V\setminus K} = id_{V\setminus K}$ για κάποιο συμπαγές σύνολο $K \subset V$. □

Στη θέση των ξ^t συχνά θεωρούμε τις επεκτάσεις με ταυτοτική απεικόνιση σε όλο το $\mathbb{R}^N$. Με κάθε μεταβολή συνδέουμε τα *πεδία πρώτης και δεύτερης μεταβολής*

$$w(x) = \xi_t(0,x), \quad a(x) = \xi_{tt}(0,x)$$

γνωστά και ως [**91**] *πεδία ταχύτητας* και *επιτάχυνσης*, όπου ξ_t, ξ_{tt} συμβολίζουν την πρώτη και δεύτερη μερική παράγωγο ως προς t.

Επειδή $M \subset \Omega$, $\partial M \subset \Sigma$, οι αποδεκτές (admissible) μεταβολές του M οφείλουν να τηρούν την μη-παραμορφωσιμότητα του συνόρου του Ω. Σε σχέση με αυτό οι S-Z πρότειναν οι αποδεκτές μεταβολές του M να λαμβάνονται με λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ)

$$\frac{d\xi}{dt} = w(\xi), \quad \xi(0) = x \tag{2.1.1}$$

για οποιοδήποτε δεδομένο διανυσματικό πεδίο πρώτης μεταβολής w, θέτοντας στη συνέχεια $\xi^t(x) = \xi_x(t)$, όπου ξ_x είναι η λύση της (2.1.1) με την αρχική συνθήκη $\xi_x(0) = x$. Η απαίτηση μη-παραμορφώσιμων τοιχωμάτων του περιέκτη ικανοποιείται με επιλογή του w

έτσι ώστε $w(p) \in T_p\Sigma$ για κάθε $p \in \Sigma$, όπου T_pX είναι ως συνήθως η εφαπτόμενος χώρος του X στο p. Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε αποκλειστικά *κάθετες* (*ορθές*) *μεταβολές*, δηλ. αυτές που ικανοποιούν τη σχέση $w(p) \in N_pM$ για όλα τα $p \in M$. N_pM είναι ο κάθετος χώρος της M στο p.

Με τον όρο *διαμέριση* του Ω εννοούμε μια συλλογή $M = (M_i)_{i=1}^m$ από C^2 υπερεπιφάνειες με σύνορο (επίσης C^2), οι οποίες δεν αλληλοτέμνονται και τα σύνορά τους κείνται στο $\Sigma = \partial\Omega$. Με τον όρο *ελαχιστική διαμέριση* M εννοούμε επιπρόσθετα ένα κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού του εμβαδού A κάτω από τους περιορισμούς όγκου, δηλ.

$$\delta A(M) := \frac{d}{dt}A(M^t)\bigg|_{t=0} = 0$$

για όλες τις μεταβολές που διατηρούν το Σ και τον όγκο των φάσεων. Στη σχέση αυτή είναι $M^t = \xi^t(M)$, όπου ξ^t είναι μία μεταβολή, και $A(M)$ είναι το εμβαδό της M.

Θεωρημα 2.2 (Sternberg-Zumbrun). *Εστω $M = (M_i)_{i=1}^r$ μια ελαχιστική διφασική διαμέριση στο Ω. Τότε για κάθε ορθή μεταβολή της M, η οποία διατηρεί το Σ και τον όγκο των φάσεων, δηλ.*

$$\int_M f = 0,$$

η δεύτερη μεταβολή του εμβαδού της M δίνεται από τον τύπο

$$\delta^2 A(M) = \frac{d^2}{dt^2}A(M^t)\bigg|_{t=0} = \int_M \left(|\mathrm{grad}_M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) - \int_{M\cap\Sigma} \sigma f^2$$

όπου f είναι η προβολή του πεδίου πρώτης μεταβολής w στο μοναδιαίο κάθετο πεδίο N της M, $|B_M|^2$ είναι η νόρμα της δεύτερης θεμελιώδους μορφής B_M της M και $\sigma = II_\Sigma(N,N)$ είναι η βαθμωτή δεύτερη θεμελιώδης μορφή του Σ.

Το μοναδιαίο κάθετο πεδίο N της M είναι κάθετο σε κάθε πολλαπλότητα M_i. Ο προσανατολισμός της M επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει $\sigma \geqslant 0$ στο Σ για κυρτό Ω.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτό με $r = 2$ οι S-Z απέδειξαν ότι για κυρτό Ω, όταν $\sigma \neq 0$ στο Σ, κάθε μη-συνεκτική διφασική διαμέριση είναι αναγκαία ασταθής. Υπενθυμίζεται ότι εξ ορισμού μια ελαχιστική διαμέριση είναι *ευσταθής* όταν $\delta^2 A(M) > 0$ για όλες τις μεταβολές $w \neq 0$ που διατηρούν το Σ και τον όγκο των φάσεων.

Στην επόμενη ενότητα, δίνουμε μια επέκταση του τύπου των S-Z για προβλήματα m φάσεων στην Πρόταση 2.4. Η αστάθεια των μη-συνεκτικών πολυφασικών διαμερίσεων έπεται ως εφαρμογή αυτού του θεωρήματος. Στην Ενότητα 2.3 αναπτύσουμε την φασματική θεωρία της διγραμμικής μορφής που εκφράζει την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού, η οποία είναι το κύριο εργαλείο για την απόδειξη των αποτελεσμάτων ευστάθειας/αστάθειας της παρούσας εργασίας. Η κύρια διατύπωση της ενότητας αυτής είναι η Πρόταση 2.17, σύμφωνα με την οποία, για κανονικοποιημένες μεταβολές, το ελάχιστο της δεύτερης μεταβολής του εμβαδού δίνεται από την κύρια ιδιοτιμή. Οι δυσκολίες στην εξαγωγή του αποτελέσματος αυτού είναι (i) ότι το συνοριακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial M} f^2$ δεν μπορεί να φραχθεί άνω από το $\int_M f^2$, και (ii) ότι οι αποδεκτές μεταβολές δεν ικανοποιούν κατ΄ ανάγκη την συνοριακή συνθήκη (2.3.5) του σχετικού προβλήματος ιδιοτιμών. Για τον χειρισμό των δυσκολιών αυτών αναπτύχθηκε μια εκτίμηση παρεμβολής για το συνοριακό ολοκλήρωμα στο Λήμμα 2.15. Γενίκευση της Πρότασης 2.17 για m-φασικά προβλήματα διαμέρισης είναι άμεση. Η Πρόταση 2.18 δίνει έναν χαρακτηρισμό όλων των συνεκτικών m-φασικών διαμερίσεων με αναγωγή στη διφασική περίπτωση.

Οι τελευταίες δύο ενότητες είναι αφιερωμένες σε εφαρμογές. Στην Ενότητα 2.4 αποδεικνύουμε την ύπαρξη ασταθών διαμερίσεων στον $\mathbb{R}^N$ όταν το Ω ικανοποιεί την υπόθεση (H) (βλ. Ενότητα 2.4) και ότι σφαιρικές διαμερίσεις είναι σταθερές όταν δεν εφάπτονται στο σύνορο του Ω. Ως παράπλευρο προιόν αποδεικνύουμε ότι σφαιρικές διαμερίσεις σε φραγμένα σύνολα δεν μπορούν να είναι απόλυτοι ελαχιστοποιητές του συναρτησιακού του εμβαδού υπό τον περιορισμό όγκου. Εφαρμογές σε διδιάστατα προβλήματα συμπεριλαμβάνονται στην Ενότητα 2.5. Τα κύρια αποτελέσματα εδώ είναι κριτήρια αστάθειας (Προτάσεις 2.22 και 2.25). Η Πρόταση 2.26 δείχνει ότι επαρκώς μικρές διαμερίσεις είναι ευσταθείς. Για έργο σχετιζόμενο με το παρόν βλ. [**118, 119, 120**].

2.2. Πολυφασικά προβλήματα διαμέρισης

Για περισσότερες από δύο φάσεις θεωρούμε το συναρτησιακό

$$A(M) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i A(M_i). \tag{2.2.1}$$

Οι συντελεστές $\gamma_i > 0$ έχουν τη φυσική σημασία της *πυκνότητας επιφανειακής ενέργειας*. Η άθροιση στην (2.2.1) εκτείνεται σε όλες τις διεπιφάνειες που απαρτίζουν το πρόβλημα διαμέρισης. Η συλλογή $M = (M_i)_{i=1}^{r}$ θεωρείται προσανατολισμένη, και ο προσανατολισμός της προσδιορίζεται από τους προσανατολισμούς των M_i. Υπάρχουν 2^r δυνατοί προσανατολισμοί για την M. Οι περισσότεροι από τους ακόλουθους τύπους εξαρτώνται από τον προσανατολισμό της M.

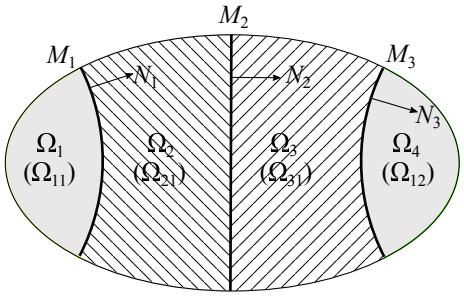
Αποδεκτές μεταβολές για το συναρτησιακό (2.2.1) είναι αυτές που διατηρούν τον όγκο των φάσεων. Αυτές μπορούν να ληφθούν απευθείας από γενικές μεταβολές μετατρέποντάς τις σε μεταβολές που διατηρούν το όγκο (βλ. [**109**]). Επειδή αυτή είναι μια πολύπλοκη διαδικασία για πολυφασικά συστήματα, χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών $\mathrm{Lagrange}$, η οποία είναι πιό βολική. Επομένως, θεωρούμε το εξής τροποποιημένο («ζυγισμένο») συναρτησιακό:

$$A^{\star}(M) = A(M) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{P_j} \left|\Omega_{jk}\right| - V_j \right) \tag{2.2.2}$$

Στον τύπο αυτό το $|\cdot|$ συμβολίζει όγκο, m είναι ο αριθμός των φάσεων, P_j είναι ο αριθμός των διαφορετικών συνόλων στα οποία διασπάται η φάση j (δεικτοδοτούμενα από το k), V_j είναι ο όγκος της φάσης j και λ_j είναι ο πολλαπλασιατής $\mathrm{Lagrange}$ που αντιστοιχεί στον περιορισμό όγκου για την φάση j. Επειδή $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{P_j} \left|\Omega_{jk}\right| = |\Omega|$, υπάρχουν μόνο $m-1$ γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί και θα μπορούσαμε να έχουμε μόνο $m-1$ πολλαπλασιαστές $\mathrm{Lagrange}$. Για λόγους ευκολίας και καθώς τα τελικά αποτελέσματα είναι ταυτόσημα, χρησιμοποιούμε m πολλαπλασιαστές.

Παραδειγμα 2.3. Για την περίπτωση μιας μη-συνεκτικής τριφασικής διαμέρισης, το ζυγισμένο συναρτησιακό εμβαδού δίνεται από τη σχέση (βλ. Σχ. 2.2.1)

$$A^{\star}(M) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i A(M_i) - \lambda_1 \left(|\Omega_{11}| + |\Omega_{12}|\right) - \lambda_2 |\Omega_2| - \lambda_3 |\Omega_3| \tag{2.2.3}$$



Σχημα 2.2.1. Μη-συνεκτική τριφασική διαμέριση. Περιοχές με διαφορετική γραμμοσκίαση αντιστοιχούν σε διαφορετική φάση. Οι φάσεις είναι από αριστερά προς τα δεξιά 1, 2, 3 και 1. N_i είναι το μοναδιαίο κάθετο πεδίο της διεπιφάνειας M_i (με τον ενδεικνυόμενο προσανατολισμό).

Οι σταθερές των όγκων V_j παρελείφθησαν καθώς δεν παίζουν κανένα ρόλο στη μεταβολική διαδικασία.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 2.2 για περισσοτερες από δύο φάσεις.

Θεωρημα 2.4. *Εστω $M = (M_i)_{i=1}^r$ μια ελαχιστική πολυφασική διαμέριση με περιορισμούς σταθερότητας όγκου για τις φάσεις. Περαιτέρω έστω N_i το μοναδιαίο κάθετο πεδίο της M_i. Τότε*

(i) *Η βαθμωτή μέση καμπυλότητα $\kappa_i = H_i \cdot N_i$ κάθε διεπιφάνειας M_i είναι σταθερή.*

(ii) *Οι βαθμωτές μέσες καμπυλότητες ικανοποιούν τη σχέση*

$$\sum_{j=1}^{r} \gamma_j \kappa_j = 0 \tag{2.2.4}$$

(iii) *Κάθε M_i είναι κάθετο στο Σ, δηλ. σε κάθε $M_i \cap \Sigma$ έχουμε $N_i \cdot N_\Sigma = 0$ ή $N_i(p) \in T_p\Sigma$ για κάθε $p \in \partial M_i$. N_Σ είναι το μοναδιαίο κάθετο πεδίο του Σ.*

(iv) *Για οποιαδήποτε αποδεκτή μεταβολή του M, δηλ. που διατηρεί το Σ και τον όγκο των φάσεων, η δεύτερη μεταβολή εμβαδού του M*

δίνεται από τη σχέση

$$\delta^2 A(M) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \int_{M_i} \left(|\mathrm{grad}_{M_i} f_i|^2 - |B_{M_i}|^2 f_i^2 \right) - \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \int_{\partial M_i} \sigma_i f_i^2$$

όπου $\sigma_i = II_\Sigma(N_i, N_i)$.

Αποδειξη. Για λόγους συγκεκριμενοποίησης θεωρούμε την μη-συνεκτική τριφασική διαμέριση του Σχ. 2.2.1 με τον προσανατολισμό που δείχνεται. Εστω w μια μεταβολή του M. Από τη σχέση (2.2.3), τον τύπο της πρώτης μεταβολής του εμβαδού πολλαπλότητας [**91**] $\delta A(M_i) = \int_{M_i} \mathrm{div}_{M_i} w$ και την σχέση

$$\delta \left| \Omega_{jk} \right| = \int_{\partial \Omega_{jk}} w \cdot N_{\partial \Omega_{jk}},$$

όπου $N_{\partial \Omega_{jk}}$ είναι το μοναδιαίο *προς τα έξω* κάθετο πεδίο του $\partial \Omega_{jk}$, η οποία αποδεικνύεται εύκολα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \delta A^\star(M) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_{M_i} \mathrm{div}_{M_i} w &- \lambda_1 \left(\int_{M_1} w \cdot N_1 - \int_{M_3} w \cdot N_3 \right) \\ &- \lambda_2 \left(\int_{M_2} w \cdot N_2 - \int_{M_1} w \cdot N_1 \right) \\ &- \lambda_3 \left(\int_{M_3} w \cdot N_3 - \int_{M_2} w \cdot N_2 \right). \end{aligned}$$

Εστω H_i το διανυσματικό πεδίο της μέσης καμπυλότητας της M_i, ν_i το μοναδιαίο εφαπτόμενο πεδίο της M_i το οποίο είναι κάθετο στο ∂M_i και $f_i = w \cdot N_i$ η κάθετη συνιστώσα του πεδίου μεταβολής στην M_i (εφαπτομενικές συνιστώσες δεν παίζουν κανένα ρόλο και παραλείπονται από την αρχή). Ο συμβολισμός $(\cdot)^\top$ σημαίνει προβολή στον εφαπτόμενο χώρο μιας πολλαπλότητας. Εφαρμογή της ταυτότητας (βλ. [**91**])

$$\mathrm{div}_M w = \mathrm{div}_M w^\top - H \cdot w^\perp, \tag{2.2.5}$$

του θεωρήματος απόκλισης για πολλαπλότητες [**91**], $\int_{M_i} \mathrm{div}_M w^\top = \int_{\partial M_i} w \cdot \nu_i$, και ανακατάταξη όρων δίνουν τη σχέση:

$$\begin{aligned}\delta A^\star(M) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_{\partial M_i} w \cdot \nu_i - \int_{M_1} (\gamma_1 \kappa_1 + \lambda_1 - \lambda_2) f_1 \\ - \int_{M_2} (\gamma_2 \kappa_2 + \lambda_2 - \lambda_3) f_2 \\ - \int_{M_3} (\gamma_3 \kappa_3 + \lambda_3 - \lambda_1) f_3.\end{aligned}$$

Συνήθη επιχειρήματα δίνουν

$$\gamma_1 \kappa_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \gamma_2 \kappa_2 = \lambda_3 - \lambda_2, \quad \gamma_3 \kappa_3 = \lambda_1 - \lambda_3 \tag{2.2.6}$$

οι οποίες αποδεικνύουν τα (i) και (ii), και $w \cdot \nu_i = 0$, η οποία αποδεικνύει το (iii). Από μεταβολή των πολλαπλασιαστών Lagrange ανακτούμε τους περιορισμούς σταθερότητας όγκου:

$$\int_{M_1} f_1 = \int_{M_2} f_2 = \int_{M_3} f_3$$

Για την απόδειξη του (iv) ξεκινάμε από τον γενικό τύπο του Simon για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού [**91**]

$$\begin{aligned}\delta^2 A(M_i) = \int_{M_i} \Big[\mathrm{div}_{M_i} a + (\mathrm{div}_{M_i} w)^2 + g^{rs} \left\langle (D_{E_r} w)^\perp, (D_{E_s} w)^\perp \right\rangle \\ - g^{rk} g^{sl} \left\langle D_{E_r} w, E_s \right\rangle \left\langle D_{E_l} w, E_k \right\rangle \Big]\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Στον τύπο αυτό w, a είναι τα πεδία πρώτης και δεύτερης μεταβολής, $(\cdot)^\top$ υποδηλώνει προβολή στον εφαπτόμενο χώρο της M_i, $(\cdot)^\perp$ υποδηλώνει προβολή στον κάθετο χώρο της M_i, $E_1, \cdots, E_{N-1}$ είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία ενός χάρτη, $g_{rs} = E_r \cdot E_s$ είναι οι συμμεταβλητές συνιστώσες του μετρικού τανυστή της M_i και g^{kl} οι αντιμεταβλητές συνιστώσες του. Η σύμβαση άθροισης ισχύει παντού στην παρούσα διατριβή (βλ. και Συμβολισμό A.21, Παράρτημα A). Ο συμβολισμός $\langle \cdot, \cdot \rangle$ χρησιμοποιείται εναλλακτικά για το βαθμωτό γινόμενο σε πολύπλοκες εκφράσεις. Ανακαλώντας ότι το w είναι κάθετο στην M_i, δηλ. $w^\perp = w = f_i N_i$, έχουμε

$$g^{rs} \left\langle (D_{E_r} w)^\perp, (D_{E_s} w)^\perp \right\rangle = g^{rs} (D_{E_r} f_i)(D_{E_s} f_i) = |\mathrm{grad}_{M_i} f_i|^2$$

και

$$\begin{aligned} g^{rk}g^{sl}\left\langle D_{E_r}w, E_s\right\rangle\left\langle D_{E_l}w, E_k\right\rangle &= g^{rk}g^{sl}\left\langle f_i D_{E_r}N_i, E_s\right\rangle\left\langle f_i D_{E_l}N_i, E_k\right\rangle \\ &= f_i^2 g^{ik}g^{jl}\left\langle D_{E_r}N_i, E_s\right\rangle\left\langle D_{E_l}N_i, E_k\right\rangle \\ &= f_i^2 g^{ik}g^{jl}\left\langle N_i, D_{E_r}E_s\right\rangle\left\langle N_i, D_{E_l}E_k)\right\rangle \\ &= f_i^2 B^k_r B^r_k = f_i^2|B_{M_i}|^2 \end{aligned}$$

Στην εξίσωση αυτή $B_{rk} = \langle N, D_{E_r}E_k\rangle$ είναι οι συμμεταβλητές συνιστώσες του τανυστή δεύτερης θεμελιώδους μορφής $II(u,v) = \langle N, D_u v\rangle$ (τα u, v είναι εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία) και $B^s_r = g^{sk}B_{rk}$. Από την (2.2.5) καθώς $w^\top = 0$ παίρνουμε

$$\mathrm{div}_{M_i} w = -\kappa_i f_i. \tag{2.2.8}$$

Συνδυασμός της (2.2.5) με την ισότητα $a = D_w w$, η οποία προκύπτει παίρνοντας την χρονική παράγωγο της (2.1.1), δίνει για την $\mathrm{div}_{M_i} a$:

$$\mathrm{div}_{M_i} a = \mathrm{div}_{M_i} a^\top - \kappa_i N_i \cdot D_w w$$

Από το Λήμμα 2.9 έχουμε για την δεύτερη μεταβολή του $|\Omega_{jk}|$:

$$\delta^2|\Omega_{11}| = \int_{M_1} f_1 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w, \quad \delta^2|\Omega_{12}| = -\int_{M_3} f_3 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w$$

$$\delta^2|\Omega_2| = \int_{M_2} f_2 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w - \int_{M_1} f_1 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w$$

$$\delta^2|\Omega_3| = \int_{M_3} f_3 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w - \int_{M_2} f_2 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w$$

Από την (2.2.3) έχουμε

$$\delta^2 A^\star(M) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \delta^2 A(M_i) - \lambda_1(\delta^2|\Omega_{11}| + \delta^2|\Omega_{12}|) - \lambda_2\delta^2|\Omega_2| - \lambda_3\delta^2|\Omega_3|$$

Αντικατάσταση των $\delta^2 A(M_i)$, $\delta^2|\Omega_{jk}|$ από τις πιο πάνω ισότητες και ανακατάταξη όρων δίνουν την επόμενη έκφραση για την $\delta^2 A^\star(M)$:

$$\begin{aligned} \delta^2 A^\star(M) = &\sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_{M_i} (|\mathrm{grad}_{M_i} f_i|^2 - |B_{M_i}|^2 f_i^2) \\ &+ \int_{M_1} \left[\gamma_1 \mathrm{div}_{M_1} a^\top - \gamma_1\kappa_1 N_1 \cdot D_w w + \gamma_1\kappa_1^2 f_1^2 - (\lambda_1 - \lambda_2) f_1 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w\right] \\ &+ \int_{M_2} \left[\gamma_2 \mathrm{div}_{M_2} a^\top - \gamma_2\kappa_2 N_2 \cdot D_w w + \gamma_2\kappa_2^2 f_2^2 - (\lambda_2 - \lambda_3) f_2 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w\right] \\ &+ \int_{M_3} \left[\gamma_3 \mathrm{div}_{M_3} a^\top - \gamma_3\kappa_3 N_3 \cdot D_w w + \gamma_3\kappa_3^2 f_3^2 - (\lambda_3 - \lambda_1) f_3 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w\right] \end{aligned}$$

Από την (2.2.6) το ολοκλήρωμα στην δεύτερη γραμμή παίρνει την μορφή

$$\int_{M_1}\left[\gamma_1 \mathrm{div}_{M_1} a^\top - \gamma_1\kappa_1 N_1\cdot D_w w + \gamma_1\kappa_1^2 f_1^2 + \gamma_1\kappa_1 f_1 \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w\right] =$$

$$\int_{M_1}\left[\gamma_1 \mathrm{div}_{M_1} a^\top - \gamma_1\kappa_1 f_1(N_1\cdot D_{N_1} w - \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} w) + \gamma_1\kappa_1^2 f_1^2\right] =$$

$$\int_{M_1}\left[\gamma_1 \mathrm{div}_{M_1} a^\top + \gamma_1\kappa_1 f_1 \mathrm{div}_{M_1} w + \gamma_1\kappa_1^2 f_1^2\right] =$$

$$\int_{M_1}\left[\gamma_1 \mathrm{div}_{M_1} a^\top - \gamma_1\kappa_1^2 f_1^2 + \gamma_1\kappa_1^2 f_1^2\right] = \int_{M_1}\gamma_1 \mathrm{div}_{M_1} a^\top$$

Στην δεύτερη και τρίτη ισότητα έγινε χρήση της ταυτότητας [**91**]

$$\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} X = \mathrm{div}_M X + N\cdot D_N X,$$

και της σχέσης (2.2.8)· το X είναι ένα διαφορίσιμο πεδίο στην M. Εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης δίνει

$$\int_{M_1}\gamma_1 \mathrm{div}_{M_1} a^\top = \gamma_1\int_{\partial M_1} a\cdot\nu = \gamma_1\int_{\partial M_1}\nu\cdot D_w w =$$

$$\gamma_1\int_{\partial M_1} f_1^2\nu\cdot D_{N_1}N_1 = -\gamma_1\int_{\partial M_1} f_1^2 II_\Sigma(N_1,N_1)$$

Με όμοιο τρόπο μετασχηματίζουμε τις δύο τελευταίες γραμμές στην έκφραση του $\delta^2 A^\star(M)$ και με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη του (iv). □

Παρατηρηση 2.5. Η σύμβαση για την δεύτερη θεμελιώδη μορφή του $\Sigma = \partial\Omega$ είναι $N_\Sigma = -\nu$ έτσι ώστε το $II_\Sigma(N_i, N_i)$ να είναι πάντα μη-αρνητικό για κυρτά Ω. N_i είναι το κάθετο πεδίο της M_i, το οποίο είναι εφαπτόμενο του Σ.

Παρατηρηση 2.6. Η σχέση του μέρους (ii) του θεωρήματος εξαρτάται από την επιλογή του προσανατολισμού. Στην περίπτωση μη-συνεκτικών διφασικών διαμερίσεων έχουμε $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{12}$, την διεπιφανειακή πυκνότητα ενέργειας των φάσεων 1 και 2, και το (ii) ανάγεται στην ισότητα $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, η οποία στην διδιάστατη περίπτωση σημαίνει ότι οι διεπιφάνειες είναι κυκλικά τόξα *ίσων* ακτίνων. Αυτό περιορίζει σημαντικά τον αριθμό των δυνατών διαμορφώσεων που μπορεί να λάβει μια ελαχιστική μη-συνεκτική πολυφασική διαμέριση.

Παραδειγμα 2.7. Εστω Ω μια έλλειψη με κέντρο το 0 και μείζονα και ελάσσονα ημιάξονα a, b αντίστοιχα. Για $a > x_0 > 0$ οι εφαπτόμενες

στα $(x_0, \pm y_0)$ έχουν εξίσωση

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0, \quad \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{y_0}{b^2}(y + y_0) = 0.$$

αντίστοιχα. Οι γραμμές αυτές τέμνονται στο $x = x_0 + \frac{a^2 y_0^2}{b^2 x_0} = \frac{a^2}{x_0}$. Επομένως η ακτίνα του κυκλικού τόξου το οποίο τέμνει την έλλειψη σε ορθές γωνίες δίνεται από την σχέση

$$R^2 = \left(\frac{a^2}{x_0} - x_0\right)^2 + y_0^2 = \left(\frac{a^4}{b^4}\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1\right) y_0^2$$

Αυτή είναι μια μονότονα αύξουσα συνάρτηση του x_0 και από αυτό έπεται με απλά γεωμετρικά επιχειρήματα ότι όλες οι δυνατές ελαχιστικές μη-συνεκτικές διφασικές διαμερίσεις μιας έλλειψης είναι ζεύγη κυκλικών τόξων συμμετρικών ως προς τον άξονα x ή y. □

Ως εφαρμογή του Θεωρήματος 2.4 θα αποδείξουμε την αστάθεια των μη-συνεκτικών τριφασικών διαμερίσεων σε ένα κυρτό σύνολο. Με δεδομένη μια τέτοια διαμέριση, επιλέγουμε μια μεταβολή η οποία είναι σταθερή σε κάθε διεπιφάνεια. Οι περιορισμοί όγκου ικανοποιούνται αν επιλέξουμε

$$f_i = \frac{1}{A(M_i)}, \ i = 1, 2, 3.$$

Από το (iv) του Θεωρήματος 2.4 παίρνουμε

$$\delta^2 A(M) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\gamma_i}{A(M_i)^2} \int_{M_i} |B_{M_i}|^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{\gamma_i}{A(M_i)^2} \int_{\partial M_i} \sigma_i$$

το οποίο είναι αρνητικό όταν $\sigma_i \neq 0$. Γενίκευση σε αυθαίρετο αριθμό φάσεων και υποδιαιρέσεων των φάσεων είναι άμεση:

Θεωρημα 2.8. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό, φραγμένο και κυρτό σύνολο με σύνορο $C^{2,\alpha}$. Εστω $M = (M_i)_{i=1}^r$ μια ευσταθής m-φασική διαμέριση του Ω. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το Ω είναι αυστηρά κυρτό, ειδικότερα $II_{\partial\Omega}(N_i, N_i) > 0$ σε όλα τα σημεία του $\partial M_i \cap \Sigma$, $i = 1, \cdots, r$. Τότε η M είναι αναγκαία συνεκτική.*

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με την απόδειξη του Λήμματος που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του μέρους (iv) του Θεωρήματος 2.4.

Λημμα 2.9. *Στο πλαίσιο του Θεωρήματος 2.4, η δεύτερη μεταβολή του όγκου μιας διακριτής φάσης Ω_j δίνεται από την σχέση*

$$\delta^2|\Omega_j| = \int_{M_j} (\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} w) w \cdot N_{\partial\Omega_j} \tag{2.2.9}$$

Στην σχέση αυτή $N_{\partial\Omega_j}$ είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο πεδίο του $\partial\Omega_j$ και το M_j είναι συλλογικά το διεπιφανειακό μέρος του $\partial\Omega_j$, δηλ. $M_j = \partial\Omega_j \backslash \partial\Omega$.

Αποδειξη. Εστω $(\xi^t)_{t\in I}$ μια μεταβολή του $\mathbb{R}^N$ και $\Omega_j^t = \xi^t(\Omega_j)$. Τότε

$$|\Omega_j^t| = \int_{\xi^t(\Omega_j)} dx = \int_{\Omega_j} J\xi^t(y) dy$$

όπου $J\xi^t$ είναι η Ιακωβιανή του ξ^t. Για τη δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού αυτού έχουμε

$$\delta^2|\Omega| = \frac{d^2}{dt^2}|\Omega^t|\bigg|_{t=0} = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} J\xi^t(y)\bigg|_{t=0} dy.$$

Εφαρμογή του κανόνα παραγώγισης οριζουσών και εμφανείς πράξεις δίνουν

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} J\xi^t(y)\bigg|_{t=0} = \mathrm{div}_{\mathbb{R}^N} a + \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial w^\beta}{\partial x^\beta} - \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial w^\beta}{\partial x^\alpha}.$$

Χρησιμοποιούμε ελληνικούς δείκτες για διανυσματικές συνιστώσες και συντεταγμένες στον περιβάλλοντα χώρο $\mathbb{R}^N$, και λατινικούς για υποπολλαπλότητες. Η σύμβαση άθροισης εφαρμόζει και σε ελληνικούς δείκτες. Ο τύπος (2.2.9) έπεται από την ισότητα αυτή, την ταυτότητα

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial w^\beta}{\partial x^\beta} - \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial w^\beta}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(w^\alpha \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\beta} - w^\beta \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\\ &= \mathrm{div}_{\mathbb{R}^n}\left((\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} w) w - D_w w\right),\end{aligned}$$

το θεώρημα του Gauss στον $\mathbb{R}^N$ και $a = D_w w$. Επειδή η μεταβολή διατηρεί το $\partial\Omega$, το ολοκλήρωμα επί του $\partial\Omega_j \backslash M_j$ μηδενίζεται. □

2.3. Φασματική ανάλυση της διγραμμικής μορφής της 2ης μεταβολής του εμβαδού

Για να διατηρήσουμε το μέγεθος των τύπων στο ελάχιστο και να επικεντρωθούμε στην ουσία του επιχειρήματος, παρουσιάζουμε τις

λεπτομέρειες για το πρόβλημα διφασικής διαμέρισης και στη συνέχεια δείχνουμε πως τα αποτελέσματα γενικεύονται σε περισσότερες φάσεις.

2.3.1. Διφασικό πρόβλημα διαμέρισης. Εστω M η διεπιφάνεια ενός διφασικού προβλήματος διαμέρισης στο Ω, η οποία υποτίθεται ελαχιστική, δηλ. $\delta A(M) = 0$. Για γραμμικοποιημένη ευστάθεια από πάγια τακτική μελετάμε την ελάχιστη ιδιοτιμή της διγραμμικής μορφής

$$J(f) = \int_M \left(|\mathrm{grad}_M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) - \int_{\partial M} \sigma f^2 \tag{2.3.1}$$

Για συντομία θα γράφουμε $\nabla^M f$ αντί για $\mathrm{grad}_M f$. Παρόλο που τα J και $\delta^2 A^\star(M)$ είναι ταυτόσημες εκφράσεις, τις θεωρούμε από διαφορετική άποψη: για τους σκοπούς της φασματικής ανάλυσης το M είναι *σταθερό* και το J είναι ένα μη-γραμμικό συναρτησιακό σε έναν κατάλληλα ορισμένο συναρτησιακό χώρο επί του M, ο οποίος περιέχει τις αποδεκτές μεταβολές του M, δηλ. τα στοιχεία του χώρου f ικανοποιούν τις συνθήκες σταθερότητας όγκου

$$\int_M f = 0 \tag{2.3.2}$$

και την συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int_M f^2 = 1. \tag{2.3.3}$$

Για λόγους ευκολίας, εισάγουμε πολλαπλασιαστές Lagrange και το αντίστοιχο τροποποιημένο συναρτησιακό

$$J^\star(f;\lambda,\mu) = \int_M \left(|\nabla^M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) - \int_{\partial M} \sigma f^2 - \lambda \int_M f - \mu \int_M f^2$$

και ενδιαφερόμαστε για τα κρίσιμα σημεία του $J^\star$ ή του J με τις συνθήκες (2.3.2) και (2.3.3).

Πρόταση 2.10. *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια C^2 συνάρτηση f επί του M κρίσιμο σημείο του $J^\star$, ή ισοδύναμα του J με τις συνθήκες (2.3.2) και (2.3.3), είναι να ικανοποιεί την ακόλουθη ΜΔΕ με συνοριακή συνθήκη* Neumann*:*

$$\Delta_M f + (\mu + |B_M|^2) f = -\frac{\lambda}{2} \tag{2.3.4}$$

$$D_\nu f = \sigma f \quad \text{ον } \partial M \tag{2.3.5}$$

Παρατηρηση 2.11. Στην σχέση (2.3.4) Δ_M είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami στο M που ορίζεται από την σχέση

$$\Delta_M f = \mathrm{div}_M(\nabla^M f) = g^{-1/2}(g^{1/2} g^{ij} f_{,j})_{,i}$$

σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $q^1, \cdots, q^{N-1}$, όπου $g = \det(g_{ij})$, g_{ij} είναι ο μετρικός τανυστής (Παράρτημα Α) και ο τελεστής κόμματος υποδηλώνει μερική παράγωγο ως προς την αντίστοιχη συντεταγμένη, δηλ. $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial q^i} = D_{E_i} f$. Υπενθυμίζεται ότι η σύμβαση άθροισης ισχύει σε όλη την παρούσα διατριβή. Επειδή το M είναι σταθερό, τα g_{ij} είναι δεδομένες συναρτήσεις και η (2.3.4) είναι μια γραμμική εξίσωση.

Παρατηρηση 2.12. Η συνθήκη C^2 στην f μπορει να χαλαρώσει αν θεωρήσουμε την ασθενή μορφή των (2.3.4), (2.3.5).

Αποδειξη. Η πρώτη μεταβολή του $J^\star$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\delta J^\star(f)\phi &= \frac{d}{dt} J^\star(f + t\phi)\Big|_{t=0} \\ &= 2\int_M \left(\nabla^M f \cdot \nabla^M \phi - |B_M|^2 f\phi\right) \\ &\quad - 2\int_{\partial M} \sigma f \phi - 2\mu \int_M f\phi - \lambda \int_M \phi\end{aligned}$$

Από τον τύπο του Green για πολλαπλότητες παίρνουμε

$$\delta J^\star(f) = -2\int_M \left(\Delta_M f + |B_M|^2 f + \mu f + \tfrac{1}{2}\lambda\right)\phi + 2\int_{\partial M} (\nabla^M f \cdot \nu - \sigma f)\phi.$$

Οταν το ϕ είναι μια C^∞ συνάρτηση με συμπαγή φορέα στο εσωτερικό του M, το δεύτερο ολοκλήρωμα στην δεξιά πλευρά φεύγει και από το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών παίρνουμε την (2.3.4). Οταν ο φορέας της ϕ τέμνει το σύνορο του M, $\delta J^\star(f)\phi = 2\int_{\partial M}(\nabla^M f \cdot \nu - \sigma f)\phi$ και πάλι με την ίδια επιχειρηματολογία παίρνουμε την (2.3.5), έχοντας υπόψη την ταυτότητα $D_\nu f = \nabla^M f \cdot \nu$. Το αντίστροφο ειναι τετριμμένο. □

Υπάρχουν δύο σχετικά προβλήματα: (α) δεδομένης μιας διαμέρισης, να δειχθεί ότι είναι ασταθής, δηλ. να βρεθεί *μια ειδική* αποδεκτή μεταβολή f έτσι ώστε $J(f) < 0$, και (β) να δειχθεί ότι η διαμέριση M είναι ευσταθής, δηλ. *για κάθε* αποδεκτή μεταβολή $f \neq 0$ να έχουμε $J(f) > 0$. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι για προβλήματα της

πρώτης κατηγορίας αρκεί να βρούμε μια αρνητική ιδιοτιμή $\mu < 0$ του προβλήματος (2.3.4).

Πρόταση 2.13. *Εστω M μια ελαχιστική διφασική δαμέριση και f μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος (2.3.4), (2.3.5) με αντίστοιχη ιδιοτιμή μ. Τότε*

$$J(f) = \mu. \tag{2.3.6}$$

Ειδικά εαν $\mu < 0$, η M είναι ασταθής.

Παρατήρηση 2.14. Η Πρόταση 2.13 σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να είναι γνωστό κάποιο κάτω φράγμα για το συναρτησιακό J, για να συμπεράνουμε ότι μια ελαχιστική διαμέριση είναι ασταθής, όταν έχουμε μια αρνητική ιδιοτιμή. Αυτό ειναι σε αντίθεση με προβλήματα της κατηγορίας (β).

Απόδειξη. Πολλαπλασιασμός της (2.3.4) με f και ολοκλήρωση στο M δίνει, έχοντας υπόψη τις (2.3.2) και (2.3.3):

$$\int_M f\Delta_M f + \mu + \int_M |B_M|^2 f^2 = 0$$

Εφαρμογή του τύπου του Green στο πρώτο ολοκλήρωμα δίνει

$$-\int_M |\nabla^M f|^2 + \int_{\partial M} f\nu \cdot \nabla^M f + \mu + \int_M |B_M|^2 f^2 = 0.$$

Από τις (2.3.1) και (2.3.5) παίρνουμε $J(f) = \mu$. Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται τετριμμένα από αυτό. □

Στην κατηγορία (β) πρέπει να ξέρουμε προκαταβολικά ότι το συναρτησιακό J έχει ελάχιστο κάτω από τις συνθήκες (2.3.2) και (2.3.3). Η δυσκολία είναι ότι το συνοριακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial M} f^2$ δεν μπορεί να φραχτεί άνω από το $\int_M f^2$. Ομως εαν $f \in W^{1,2}(M) \equiv H^1(M)$, από το θεώρημα εισαγωγής του συνοριακού ίχνους (boundary trace embedding) ([**121**] •• 5.34-5.37 σσ. 163-166, [**122**] • 8 σσ. 120-132) έχουμε

$$\int_{\partial M} f^2 \leqslant c_{BT}^2 \left(\int_M |\nabla^M f|^2 + \int_M f^2 \right) \tag{2.3.7}$$

όπου c_{BT} είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το M. Τώτα χρησιμοποιώντας την εκτίμηση αυτή για το συνοριακό ολοκλήρωμα και

τις εκτιμήσεις $|B_M|^2 \leqslant b_0^2$, $\sigma \leqslant \sigma_0$, όπου b_0 και σ_0 είναι σταθερές που εξαρτώνται από τα M και Σ, παίρνουμε

$$\begin{aligned} J(f) &\geqslant \int_M |\nabla^M f|^2 - b_0^2 \int_M f^2 - \sigma_0 c_{BT}^2 \left(\int_M |\nabla^M f|^2 + \int_M f^2 \right) \\ &= (1 - \sigma_0 c_{BT}^2) \int_M |\nabla^M f|^2 - (b_0^2 + \sigma_0 c_{BT}^2) \int_M f^2 \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

από την οποία μπορούμε να συμπεράνουμε την καταναγκαστικότητα (coercivity) του J εάν $\sigma_0 < 1/c_{BT}^2$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να αποδειξουμε (βλ. [**123**], Θεώρημα 1.2, σ. 4) ότι για επαρκώς μικρές κύριες καμπυλότητες του Σ *σε μια περιοχή του* ∂M, το J έχει ελάχιστο, το οποίο είναι αναγκαστικά κρίσιμο σημείο του $J^\star$, και επομένως μια ιδιοσυνάρτηση της (2.3.4) με ΣΣ (2.3.5). Συνεπώς, από την (2.3.6), εάν το $J^\star$ δεν έχει μη-θετικές ιδιοτιμές, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η M είναι ευσταθής.

Μπορούμε να εγκαταλείψουμε την υπόθεση επαρκώς μικρών κύριων καμπυλοτήτων του Σ σε μία περιοχή του ∂M αντικαθιστώντας την (2.3.7) από μια εκτίμηση παρεμβολής. Χρησιμοποιούμε τον συνήθη συμβολισμό για χώρους Sobolev: $|u|_{L^2(M)} = (\int_M u^2)^{1/2}$, $|u|_{H^1(M)} = (|u|^2_{L^2(M)} + |\nabla^M u|^2_{L^2(M)})^{1/2}$, $|u|_{L^2(\partial M)} = (\int_{\partial M} u^2)^{1/2}$ είναι οι συνήθεις νόρμες των χώρων $L^2(M)$, $H^1(M)$ και $L^2(\partial M)$.

Λημμα 2.15. *Εστω M μία φραγμένη $C^{2,\alpha}$ υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ με σύνορο. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σταθερά c_ϵ τέτοια ώστε για κάθε $u \in H^1(M)$*

$$|u|_{L^2(\partial M)} \leqslant \epsilon |u|_{H^1(M)} + c_\epsilon |u|_{L^2(M)} \tag{2.3.9}$$

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε την εκτίμηση με απαγωγή σε άτοπο. Εστω ότι υπάρχει ένα $\epsilon_0 > 0$ για το οποίο η (2.3.9) δεν ισχύει. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u_n \in H^1(M)$ τέτοιο ώστε $|u_n|_{H^1(M)} = 1$ και

$$|u_n|_{L^2(\partial M)} > \epsilon_0 + n|u_n|_{L^2(M)} \tag{2.3.10}$$

Από τις (2.3.10) και (2.3.7) παίρνουμε

$$|u_n|_{L^2(M)} < \frac{c_{BT} - \epsilon_0}{n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Επειδή η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη στον $H^1(M)$, έχουμε, πιθανώς περνώντας σε μία υπακολουθία, $u_n \xrightarrow{H^1} u$. Από την $u_n \to 0$ στον $L^2(M)$ εύκολα συμπεραίνουμε ότι $u = 0$. Από την συμπάγεια της εισαγωγής $H^1(M) \hookrightarrow L^2(\partial M)$ (βλ. Adams [**121**] •• 5.34-5.37, σσ.

163-166 για την επίπεδη περίπτωση) έπεται ότι $u_n \to 0$ στον $L^2(\partial M)$, το οποίο αντιφάσκει με την (2.3.10). □

Ως παράδειγμα αποδεικνύουμε την (2.3.9) απευθείας για φραγμένες υπερεπιφάνειες M του $\mathbb{R}^N$ με σύνορο.

Παραδειγμα 2.16. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $x_0 \cdot \nu(p) > 0$ για κάθε $p \in \partial M$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θέτουμε $x_0 = 0$. Για $u \in C^\infty(M)$, όπου x είναι το διάνυσμα θέσης στον $\mathbb{R}^N$, από την (2.2.5)

$$\int_M \mathrm{div}_M(xu^2) = -\int_M H \cdot xu^2 + \int_{\partial M} (x \cdot \nu)u^2$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} (x \cdot \nu)u^2 &= \int_M H \cdot xu^2 + \int_M (u^2 \mathrm{div}_M x + 2ux \cdot \nabla^M u) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_M (H \cdot x)^2 u^2 + \frac{1}{2}\int_M u^2 + \int_M u^2 \mathrm{div}_M x \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2}\int_M |x|^2 u^2 + \epsilon^2 \int_M |\nabla^M u|^2\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Από την συμπάγεια των ∂M και $\overline{M}$ υπάρχουν θετικές σταθερές c_0, c_1, c_2 τέτοιες ώστε $x \cdot \nu \geqslant c_0$, $|x|^2 \leqslant c_1$ και $|H| \leqslant c_2$. Υπολογίζουμε το $\mathrm{div}_M x$ εφαρμόζοντας τον ορισμό του τελεστή div_M (Simon [**91**]) σε έναν χάρτη με διανυσματικά πεδία βάσης $E_1, \cdots, E_{N-1}$:

$$\mathrm{div}_M x = g^{ij}\left\langle D_{E_i} x, E_j\right\rangle = g^{ij}\left\langle E_i, E_j\right\rangle = g^{ij} g_{ij} = N - 1$$

Από την (2.3.11) παίρνουμε

$$c_0 |u|^2_{L^2(\partial M)} \leqslant \epsilon^2 |u|^2_{H^1(M)} + \left(N - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_1 c_2^2 + \frac{1}{\epsilon^2}\right)|u|^2_{L^2(M)}.$$

Με ένα επιχείρημα πυκνότητας επεκτείνουμε τη σχέση αυτή σε $u \in H^1(M)$. □

Η εκτίμηση (2.3.9) μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ένα $\epsilon > 0$ τόσο μικρό ώστε ο συντελεστής του $\int_M |\nabla^M f|^2$ στην (2.3.8) να είναι θετικός. Η επόμενη ανισότητα αντικαθιστά την (2.3.8):

$$J(f) \geqslant (1 - 2\sigma_0 \epsilon^2)|u|^2_{H^1(M)} - (b_0^2 + 1 + 2\sigma_0 c_\epsilon^2)|u|^2_{L^2(M)}. \tag{2.3.12}$$

Τώρα μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα για προβλήματα της κατηγορίας (β):

Πρόταση 2.17. *Εστω M μια ελαχιστική διφασική διαμέριση στο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Τότε για κάθε $f \in H^1(M)$ που ικανοποιεί τις (2.3.2), (2.3.3) έχουμε*

$$J(f) \geqslant \mu_1 \tag{2.3.13}$$

όπου μ_1 είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του προβλήματος (2.3.4), (2.3.5). Ειδικά εάν $\mu_1 > 0$, τότε η M είναι ευσταθής.

Απόδειξη. Εστω $X = \{u \in H^1(M) : |u|_{L^2(M)} \leqslant 1, \int_M u = 0\}$. Από την συνέχεια της $L^2(M)$-νόρμας και της $u \mapsto \int_M u$ ως απεικονίσεις $H^1(M) \to \mathbb{R}$, έπεται ότι το X είναι κλειστό υποσύνολο του $H^1(M)$. Η κυρτότητα του X είναι εμφανής. Επομένως το X είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του $H^1(M)$. Από την (2.3.12) έπεται άμεσα ότι το J είναι καταναγκαστικό στον X. Η ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνέχεια (sequential weakly lower semicontinuity) του J έπεται από την ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνέχεια της νόρμας του $H^1(M)$ και την συμπάγεια της εισαγωγής $H^1(M) \hookrightarrow L^2(M)$: η $u_n \overset{H^1}{\rightharpoonup} u$ συνεπάγεται $u_n \overset{L^2}{\to} u$. Οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.2 του [**123**] ικανοποιούνται και από αυτό συμπεραίνουμε ότι το J λαμβάνει το ελάχιστό του στο X. Η θέση του ελαχίστου είναι κρίσιμο σημείο του $J^\star$ το οποίο, όπως απεδείχθη στην Πρόταση 2.13, είναι λύση της εξίσωσης (2.3.4) με ΣΣ (2.3.5). Η ανισότητα (2.3.13) έπεται τετριμμένα από αυτό. □

2.3.2. Περισσότερες από δύο φάσεις. Εφόσον μη-συνεκτικές διαμερίσεις σε αυστηρά κυρτά σύνολα είναι πάντα ασταθείς σύμφωνα με το Θεώρημα 2.8, μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο συνεκτικές διαμερίσεις. Το συναρτησιακό J για το $(m+1)$-φασικό πρόβλημα διαμέρισης παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} J(f_1, \dots, f_m) = &\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \int_{M_i} \left(|\mathrm{grad}_{M_i} f_i|^2 - |B_{M_i}|^2 f_i^2 \right) \\ &- \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \int_{\partial M_i} \sigma_i f_i^2 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Οι περιορισμοί όγκου είναι

$$\int_{M_i} f_i = 0, \ i = 1, \cdots, m \tag{2.3.15}$$

η συνθήκη κανονικοποίησης είναι

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{M_i} f_i^2 = 1 \tag{2.3.16}$$

και το αντίστοιχο τροποποιημένο συναρτησιακό είναι

$$\begin{aligned} J^\star(f_1, \cdots, f_m; \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu) = \\ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \left[\int_{M_i} \left(|\nabla^{M_i} f_i|^2 - |B_{M_i}|^2 f_i^2 \right) - \int_{\partial M_i} \sigma_i f_i^2 \right] \\ - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{M_i} f_i - \mu \sum_{i=1}^{m} \int_{M_i} f_i^2 \end{aligned}$$

Η Πρόταση 2.10 επεκτείνεται χωρίς δυσκολία σε συνεκτικά πολυφασικά προβλήματα, με την (2.3.4) να ισχύει σε κάθε διεπιφάνεια στην ακόλουθη μορφή:

$$\gamma_i \Delta_{M_i} f_i + (\mu + \gamma_i |B_{M_i}|^2) f_i = -\frac{\lambda_i}{2} \tag{2.3.17}$$

Οι συνοριακές συνθήκες διατηρούν την μορφή (2.3.5) για κάθε i. Οι Προτάσεις 2.13, 2.17 ισχύουν ως έχουν. Στην απόδειξη της Πρότασης 2.17 ο θεωρούμενος χώρος είναι

$$X = \left\{ (u_1, \cdots, u_m) \in H^1(M) : |u|_{L^2(M)} \leqslant 1, \int_{M_i} u_i = 0, \, i = 1, \cdots, m \right\}$$

Εδώ έχουμε τους επόμενους ορισμούς: $H^1(M) = H^1(M_1) \times \cdots \times H^1(M_m)$, $L^2(M) = L^2(M_1) \times \cdots \times L^2(M_m)$ και $|u|^2_{L^2(M)} = \sum_{i=1}^{m} |u|^2_{L^2(M_i)}$ ως συνήθως.

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει όλες τις συνεκτικές m-φασικές διαμερίσεις εκφράζοντας ότι κάθε m-φασικό πρόβλημα διαμέρισης ανάγεται σε $m-1$ ανεξάρτητα διφασικά προβλήματα.

Θεωρημα 2.18. *Εστω Ω ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ με σύνορο C^2 και $M = (M_i)_{i=1}^{m-1}$ μια συνεκτική ελαχιστική m-φασική διαμέριση του Ω με περιορισμούς όγκου. Τότε η M είναι ευσταθής εάν και μόνο εάν κάθε M_i ($i = 1, \cdots, m-1$) είναι ευσταθές. Η M είναι ασταθής εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα τουλάχιστον ασταθές M_i ($i = 1, \cdots, m-1$).*

Η απόδειξη είναι άμεση και έπεται από το γεγονός ότι τα M_i εμφανίζονται ανεξάρτητα στο J και τους περιορισμούς.

Παραδείγματα ευσταθών και ασταθών πολυφασικών διαμερίσεων κατασκευάζονται εύκολα από διφασικές διαμερίσεις με βάση το Θεώρημα 2.18. Κατά συνέπεια οι εφαρμογές μας εστιάζουν σε διφασικές διαμερίσεις.

2.4. Ορισμένες εφαρμογές σε προβλήματα διαμέρισης στον $\mathbb{R}^N$

Ως εφαρμογές της φασματικής ανάλυσης της 2ης μεταβολής του εμβαδού, εξάγουμε στην ενότητα αυτή μερικά γενικά συμπεράσματα που αφορούν διαμερίσεις στον $\mathbb{R}^N$.

2.4.1. Ευστάθεια N-διάστατων σφαιρικών διαμερίσεων. Η ευστάθεια διαμερίσεων στις οποίες μια φάση έχει το σχήμα σφαίρας, $M = \mathbb{S}^{N-1}$, έχει άμεση φυσική σημασία. Είναι η βάση για τη μοντελοποίηση της ευστάθειας γαλακτωμάτων (emulsions), δηλ. αιωρημάτων μικρών σταγονιδίων υγρών ή παραμορφώσιμων στερεών σωματιδίων σε ένα περιβάλλον ρευστό. Επειδή $\partial M = \emptyset$, όλα τα επιφανειακά ολοκληρώματα είναι απόντα, και ειδικά η συνοριακή συνθήκη (2.3.5). Σε 3 διαστάσεις μπορούμε να προχωρήσουμε απευθείας στη λύση της (2.3.4) σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας περιοδικές συνθήκες αντί για την (2.3.5). Η φασματική θεωρία του τελεστή Δ_M είναι καλά γνωστή (βλ. για παράδειγμα [**124**] κεφ. V §8 σ. 314, κεφ. VII §5 σσ. 510-512, και [**125**] §IV.2). Οι ιδιοτιμές του δίνονται από την σχέση $\lambda_l = -l(l+1)$, $l = 0, 1, \cdots$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι σφαιρικές αρμονικές Y_l^m, $m = 0, \pm 1, \cdots \pm l$, οι πρώτες από τις οποίες είναι

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},\ Y_1^0(\theta,\phi) = \frac{3}{2\sqrt{6\pi}}\cos\theta,\ Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi) = \pm\frac{3}{2\sqrt{6\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα του J πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη σταθερότητας του όγκου (2.3.2), η πρώτη από αυτές δεν είναι αποδεκτή. Ολοκλήρωση της (2.3.4) έχοντας υπόψη την (2.3.2) δίνει $\lambda = 0$. Επομένως η ελάχιστη ιδιοτιμή του J, όπως λαμβάνεται από την τιμή $l = 1$, είναι $\mu_1 = l(l+1) - (N-1) = 0$, η οποία θα σήμαινε ουδέτερη σταθερότητα. Πιο προσεκτική εξέταση των ιδιοδιανυσμάτων αυτών αναδεικνύει ότι αυτά δεν είναι πραγματικές μεταβολές, αλλά μετατοπίσεις κατά μήκος των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων. Απορρίπτοντάς τα και προχωρώντας στην αμέσως επόμενη διαθέσιμη ιδιοτιμή $l = 2$, έχουμε

$$\mu_1 = l(l+1) - (N-1) = 4 > 0$$

το οποίο συνεπάγεται ευστάθεια. Για $N > 3$ (βλ. [**125**]) $\lambda_l = -l(l + N - 2)$, $l = 0, 1, \cdots$ και πάλι $\mu_1 = 0$. Η απόρριψη μετατοπίσεων οδηγεί ξανά στην ευστάθεια. Στην επόμενη ενότητα αποδεικνύουμε ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για την διδιάστατη περίπτωση. Για την επόμενη πρόταση ουδεμία συνθήκη ομαλότητας και κυρτότητας είναι απαραίτητη για το Ω.

Πρόταση 2.19. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\Omega_1 = B(x_0, R)$ μια μπάλα τέτοια ώστε $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Η διφασική διαμέριση του Ω που ορίζεται από την $M = \partial\Omega_1$ είναι ευσταθής.*

Σημειώνουμε ότι οι μπάλες δεν είναι *ποτέ* απόλυτοι ελαχιστοποιητές προβλημάτων διαμερίσεων σε φραγμένα σύνολα. Ο πιο εύκολος τρόπος για νο το διαπιστώσουμε αυτό είναι να μετακινήσουμε την μπάλα μέχρις ότου έλθει σε επαφή με το σύνορο, δηλ. $M \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Τότε γίνεται φανερό ότι η μετατοπισμένη μπάλα δεν είναι καν ελαχιστική, διότι στο σημείο επαφής η κάθετος στην M δεν είναι εφαπτόμενη στο $\partial\Omega$. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη μιας μεταβολής η οποία μειώνει το εμβαδό της μπάλας και αυτό αποδεικνύει ότι η αρχική μπάλα δεν είναι απόλυτος ελαχιστοποιητής.

2.4.2. Υπαρξη ασταθών διφασικών διαμερίσεων. Η ύπαρξη ευσταθών διαμερίσεων εγγυάται από την ύπαρξη απόλυτων ελαχιστοποιητών (βλ. [**96**] και [**123**] Θεώρ. 1.4, σ. 6). Εδώ δίνουμε μια απόδειξη ύπαρξης ασταθών διαμερίσεων στον $\mathbb{R}^N$ κάτω από ορισμένες συνθήκες για το Ω. Εστω M μια ελαχιστική διφασική διαμέριση του Ω. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι κυρτό και έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε επαρκώς μεγάλο σ υπάρχει κυρτό σύνολο Ω_σ το οποίο περιλαμβάνει την M και ικανοποιεί την συνθήκη

(Η) Το Ω_σ εφάπτεται στο $\Sigma = \partial\Omega$ κατά μήκος του ∂M, δηλ. $T_p\partial\Omega_\sigma = T_p\Sigma$ σε όλα τα $p \in \partial M$, και

$$II_{\partial\Omega_\sigma, p}(N_p, N_p) \geqslant \sigma, \ p \in \partial M$$

(N_p είναι το μοναδιαίο κάθετο πεδίο της M στο p.)

Παραδειγμα 2.20. (i) Εστω $\Omega = B(0, \frac{1}{\sigma_0}) \subset \mathbb{R}^2$, και D ένας κύκλος που τέμνει τον κύκλο $\partial\Omega$ σε ορθές γωνίες. Επιπλέον έστω M το κυκλικό τόξο που προκύπτει από την τομή του Ω με τον κύκλο D, και $M \cap \partial\Omega = \{p_1, p_2\}$. Εαν C_1, C_2 είναι οι κύκλοι ακτίνας $\frac{1}{\sigma}$ στο εσωτερικό του Ω που εφάπτονται στο $\Sigma = \partial\Omega$ στα σημεία p_1, p_2 αντίστοιχα, τότε το κυρτό περίβλημα του $M \cup C_1 \cup C_2 = \Omega_\sigma$ ικανοποιεί την (Η).

(ii) Θεωρούμε έναν ρόμβο και ένα κυκλικό τόξο το κέντρο του οποίου βρίσκεται πάνω σε μία από τις κορυφές του. Εστω Ω το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή του ρόμβου γύρω από τον άξονα του ρόμβου που περνάει από το κέντρο του κυκλικού τόξου. Εστω M η επιφάνεια που προκύπτει από την περιστροφή του τόξου. Με απλά γεωμετρικά επιχειρήματα όμοια με το (i) καταλήγουμε εύκολα στο ότι για όλα τα επαρκώς μεγάλα σ υπάρχει ένα κυρτό σύνολο Ω_σ που περιέχει το M και ικανοποιεί την συνθήκη (H).

Πρόταση 2.21. *Εστω M μια ελαχιστική διαμέριση του Ω στον $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι το Ω ικανοποιεί την συνθήκη (H). Τότε υπάρχει κυρτό σύνολο $\Omega^\star$ για το οποίο το M είναι μια ασταθής διαμέριση.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το M είναι ευσταθής ή ουδέτερα ευσταθής διαμέριση, διότι διαφορετικά δεν υπάρχει τίποτα να αποδειξουμε. Εστω

$$\mu_1 = \inf_{\int_M f=0,\, |f|_{L^2(M)}=1} J(f) \quad \geqslant 0$$

Εστω $\epsilon > 0$ μικρό και f μεταβολή του M που ικανοποιεί τις (2.3.3), (2.3.2) και τέτοια ώστε $J(f) < \mu_1 + \epsilon$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f δεν μηδενίζεται ταυτοτικά στο ∂M, διότι αν $f = 0$ στο ∂M, τότε επιλέγουμε ένα $f_0 \in \mathbb{R}$, $f_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$-\int_M |B_M|^2 - \int_{\partial M} II(N,N) < \frac{2}{f_0}\int_M |B_M|^2 f$$

και τότε έχουμε $f + f_0 = f_0 \neq 0$ στο ∂M και

$$\begin{aligned} J(f+f_0) &= J(f) - f_0^2 \int_M |B_M|^2 - 2f_0 \int_M |B_M|^2 f - f_0^2 \int_{\partial M} II(N,N) \\ &< J(f). \end{aligned}$$

Επειδή τα Ω, M έχουν υποτεθεί ότι ικανοποιούν την (H) υπάρχει ένα $\sigma > 0$ και $\Omega_\sigma =: \Omega^\star$ τέτοια ώστε

$$\sigma > \frac{k}{|f|^2_{L^2(\partial M)}} + \sup_{p\in\partial M} II_{\partial\Omega,p}(N_p, N_p)$$

και

$$II_{\partial\Omega^\star}(N,N) \geqslant \sigma$$

στο ∂M. Το k είναι ένας θετικός αριθμός που θα προσδιοριστεί αργότερα. Εχουμε

$$\begin{aligned} J_{\Omega^\star}(f) &= \int_M \left(|\nabla^M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) - \int_{\partial M} II_{\partial\Omega^\star}(N,N)\, f^2 \\ &\leqslant \int_M \left(|\nabla^M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) - \sigma \int_{\partial M} f^2 \\ &\leqslant \int_M \left(|\nabla^M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) - \int_{\partial M} II_{\partial\Omega}(N,N)\, f^2 - k \\ &= J(f) - k \leqslant \mu_1 + \epsilon - k \end{aligned}$$

Η επιλογή $k > \mu_1 + \epsilon$ ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.5. Εφαρμογή σε διδιάστατα προβλήματα διαμέρισης

Οι διδιάστατες διαμερίσεις είναι ιδιαίτερα απλές διότι σε αυτή την περίπτωση

$$\Delta_M f = \frac{d^2 f}{ds^2}$$

όπου s είναι το μήκος τόξου της M και τα ολοκληρώματα στο ∂M ανάγονται σε αριθμούς. Η συνοριακή συνθήκη (2.3.5) ανάγεται στην

$$\pm\frac{df}{ds} = \sigma f, \;\; s = 0, L \tag{2.5.1}$$

όπου $L = |M|$ είναι το μήκος του M. Το θετικό πρόσημο εφαρμόζει στο $s = L$ και το αρνητικό στο $s = 0$. Χρησιμοποιούμε τις τιμές $\sigma = \sigma_1$ στο $s = 0$ και $\sigma = \sigma_2$ στο $s = L$. Από το μέρος (i) του Θεωρήματος 2.4 η καμπυλότητα κ είναι σταθερή, και επομένως οι μόνες δυνατότητες για το M είναι ευθύγραμμα τμήματα και κυκλικά τόξα. Ο προσανατολισμός του M επιλέγεται έτσι ώστε $\kappa \geqslant 0$. Επίσης έχουμε $|B_M| = \kappa = 1/R$, όπου R είναι η ακτίνα του τόξου ή ∞ για ευθύγραμμα τμήματα.

Για την εξίσωση (2.3.4) έχουμε του ακόλουθους τύπους λύσεων ανάλογα με το πρόσημο του $\mu + |B_M|^2$:

$$(I) \quad f(s) = -\frac{\lambda}{2k^2} + C\sin(ks) + D\cos(ks), \qquad k^2 = \mu + \kappa^2 \Leftrightarrow \mu > -\kappa^2$$

$$(II) \quad f(s) = \frac{\lambda}{2k^2} + Ce^{ks} + De^{-ks}, \qquad k^2 = -(\mu + \kappa^2) \Leftrightarrow \mu < -\kappa^2$$

$$(III) \quad f(s) = -\frac{\lambda}{4}s^2 + Cs + D \qquad \mu = -\kappa^2$$

Οι σταθερές λ, C, D σε κάθε μία περίπτωση προσδιορίζονται από τις δύο συνθήκες της (2.5.1) και μια από την (2.3.2), οι οποίες σχηματίζουν ένα ομογενές σύστημα τριών εξισώσεων για αυτές τις τρεις μεταβλητές. Η συνθήκη ύπαρξης λύσεων του συστήματος αυτού προκύπτει εξισώνοντας την ορίζουσά του με το 0, το οποίο δίνει μια μη-γραμμική εξίσωση για το k. Εχοντας μια λύση για το k, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ιδιοτιμή μ από την τελευταία στήλη του πιο πάνω πίνακα δυνατών λύσεων για το f και τα ιδιοδιανύσματα (λ, C, D) το καθένα από τα οποία προσδιορίζει μια ιδιοσυνάρτηση f του προβλήματος (2.3.4). Δεν είναι απαραίτητο να εξετάζονται και οι τρεις περιπτώσεις (I)-(III), ανάλογα με το μελετώμενο πρόβλημα.

2.5.1. Περίπτωση I: $-\kappa^2 < \mu < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{k}{\kappa} < 1$**.** Από την (2.5.1) $s = 0, L$ και την (2.3.2) παίρνουμε το σύστημα

(2.5.2)
$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda}{2k^2} + \frac{k}{\sigma_1}C + D = 0\\
&-\frac{\lambda}{2k^2} + \left[\sin(kL) - \frac{k}{\sigma_2}\cos(kL)\right]C + \left[\cos(kL) + \frac{k}{\sigma_2}\sin(kL)\right]D = 0\\
&-\frac{\lambda L}{2k} + [1 - \cos(kL)]\,C + \sin(kL)\,D = 0
\end{aligned}$$

Η περίπτωση ευσταθών και ουδέτερα ευσταθών ιδιοτιμών $\mu \geqslant 0$ περιλαμβάνεται εδώ.

2.5.2. Περίπτωση II: $\mu < -\kappa^2$, $k > 0$**.** Από την (2.5.1) $s = 0, L$ και την (2.3.2) παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{2k^2} + \left(1 + \frac{k}{\sigma_1}\right)C + \left(1 - \frac{k}{\sigma_1}\right)D = 0\\
&\frac{\lambda}{2k^2} + \left(1 - \frac{k}{\sigma_2}\right)e^{kL}C + \left(1 + \frac{k}{\sigma_2}\right)e^{-kL}D = 0\\
&\frac{\lambda L}{2k} + \left(e^{kL} - 1\right)C - \left(e^{-kL} - 1\right)D = 0
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

2.5.3. Περίπτωση III: $\mu = -\kappa^2$**.** Οπως προηγουμένως παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
&C + \sigma_1 D = 0\\
&\tfrac{1}{4}L\,(2 - \sigma_2 L)\,\lambda + (\sigma_2 L - 1)\,C + \sigma_2 D = 0\\
&-\tfrac{1}{6}L^2\lambda + LC + 2D = 0
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Από την πρώτη των εξισώσεων (2.5.4), $C = -\sigma_1 D$, και οι υπόλοιπες δύο εξισώσεις δίνουν ένα σύστημα, η επιλυσιμότητα του οποίου είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sigma_1\sigma_2 L^2 - 4(\sigma_1 + \sigma_2)L + 12 = 0. \tag{2.5.5}$$

Συνεπώς, όταν συμβαίνει το μήκος της διεπιφάνειας να έχει μια από τις επόμενες τιμές

$$L = 2\frac{\sigma_1 + \sigma_2 \pm \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1\sigma_2}$$

η διαμέριση είναι ασταθής. Θα αποδείξουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα στην Πρόταση 2.22.

2.5.4. Κριτήρια ευστάθειας και αστάθειας. Η επόμενη πρόταση γενικεύει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.22. *Εστω Ω ένα φραγμένο, κυρτό, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και M μια ελαχιστική διφασική διαμέριση του Ω με μήκος L. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια περιοχή των σημείων του ∂M στο $\Sigma = \partial\Omega$ η οποία είναι C^2 καμπύλη και οι καμπυλότητες του Σ στα σημεία αυτά είναι σ_1, σ_2. Εαν το L ικανοποιεί την συνθήκη*

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1\sigma_2} \leqslant \frac{L}{2} \leqslant \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1\sigma_2} \tag{2.5.6}$$

τότε η M είναι ασταθής.

Αποδειξη. Εχουμε να δείξουμε μόνο τις ανισότητες. Θέτοντας $B = \frac{\lambda}{2k^2}$, $x = Lk$, $a = \sigma_1 L$ και $b = \sigma_2 L$, η συνθήκη επιλυσιμότητας του συστήματος (2.5.3) της περίπτωσης (II) (στις μεταβλητές B, C, D) είναι

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 + \frac{x}{a} & 1 - \frac{x}{a} \\ 1 & \left(1 - \frac{x}{b}\right)e^x & \left(1 + \frac{x}{b}\right)e^{-x} \\ x & e^x - 1 & 1 - e^{-x} \end{vmatrix} = 0$$

Εκτέλεση πράξεων δίνει

$$D(x) = 4\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x^2\right]\cosh x - 2\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{x^2}{ab}\right)x\sinh x - 4.$$

Για $x \to +\infty$ εύκολα παίρνουμε $D(x) \to -\infty$. Στο $x = 0$ έχουμε $D(0) = 0$, επομένως αναπτύσσουμε το D σε δυναμοσειρά του x γύρω από το 0. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = p(x)\cosh x + q(x)\sinh x$$

και αποδεικνύουμε με επαγωγή στο n ότι

$$f^{(n)}(x) = \cosh x \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{(i)}_{\rho_{n-i}} + \sinh x \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^{(i)}_{\rho_{n-i}} \tag{2.5.7}$$

όπου $\rho_m = m \mod 2$ και $p_0 = p$, $q_0 = q$, $p_1 = q$, $q_1 = p$. Με την υπόθεση ότι η (2.5.7) ισχύει για n θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Είναι εμφανές ότι όλα τα $f^{(i)}$ έχουν την ίδια μορφή με την f. Ο συντελεστής του $\cosh x$ στην $f^{(n+1)}$ είναι το άθροισμα αριθμητικών πολλαπλάσιων των παραγώγων $p^{(n+1)}, \cdots, p^{(0)} = p$ και $q^{(n+1)}, \cdots, q^{(0)} = q$ και προκύπτει με παραγώγιση της $f^{(n)}$ στην (2.5.7). Εχουμε

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{(i+1)}_{\rho_{n-i}} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^{(i)}_{\rho_{n-i}} =$$

$$p_0^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} p^{(i+1)}_{\rho_{n-i}} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} q^{(i)}_{\rho_{n-i}} + q^{(0)}_{\rho_n} =$$

$$p_0^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} p^{(i+1)}_{\rho_{n-i}} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} p^{(j+1)}_{\rho_{n-j}} + p^{(0)}_{\rho_{n+1}} =$$

$$p_0^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right] p^{(i+1)}_{\rho_{n-i}} + p^{(0)}_{\rho_{n+1}}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή δεικτη άθροισης $j = i - 1$ και την ταυτότητα $q^{(j+1)}_{\rho_{n-j-1}} = p^{(j+1)}_{\rho_{n-j}}$. Εφαρμογή του διωνυμικού θεωρήματος και δεύτερος επανακαθορισμός του δείκτη άθροισης με την $j = i + 1$, αποδεικνύουν τον ισχυρισμό.

Από την (2.5.7) με $p(x) = 4\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x^2\right]$, $q(x) = -2\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{x^2}{ab}\right)x$ παίρνουμε $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ και

$$f^{(4)}(0) = -\frac{4}{ab}(ab - 4a - 4b + 12).$$

Το ανάπτυγμα του D είναι

$$D(x) = -\frac{1}{6ab}(ab - 4a - 4b + 12)x^4 + O(x^5).$$

Επομένως το $D(x) > 0$ σε μια περιοχή $]0, \delta[$, $\delta > 0$, όταν $ab - 4a - 4b + 12 < 0$. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των a, b στην ανισότητα αυτή παίρνουμε

$$\sigma_1\sigma_2 L^2 - 4(\sigma_1 + \sigma_2)L + 12 < 0$$

η λύση της οποίας είναι η (2.5.6). Από την συνέχεια της συνάρτησης D και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής του απειροστικού λογισμού συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας θετικής λύσης για την εξίσωση $D(x) = 0$, και με αυτό η απόδειξη είναι πλήρης. □

Για $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, από την (2.5.6) έχουμε αστάθεια όταν $\frac{2}{\sigma} \leqslant L \leqslant \frac{6}{\sigma}$ και $L \to \infty$ καθώς $\sigma \to 0$, το οποίο υποδηλώνει ότι για επίπεδα σύνορα όλες οι ελαχιστικές διαμερίσεις είναι ευσταθείς. Αυτό αποδεικνύεται ευκολα λύνοντας τα συστήματα (2.5.2), (2.5.3) και (2.5.4):

Πρόταση 2.23. *Εστω Ω και M τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες της Πρότασης 2.22 και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Τότε η M είναι ευσταθής.*

Απόδειξη. Για $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, από την (2.5.5) είναι φανερό ότι η (2.5.4) δεν έχει λύση και εύκολα ελέγχεται ότι η (2.5.3) έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Το σύστημα (2.5.2) ανάγεται στο

$$\lambda = C = 0, \ \sin(kL)\, D = 0$$

το οποίο έχει μη-τετριμμένες λύσεις μόνο όταν $\sin(kL) = 0$, δηλ. $kL = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Από τον περιορισμό $0 < \frac{k}{\kappa} < 1$ για την περίπτωση (I) έπεται ότι $\kappa L > n\pi$. Επειδή $\omega = \kappa L$ είναι η γωνία του κυκλικού τομέα που ορίζεται από το M και τις εφαπτόμενες στο $\partial\Omega$ στα άκρα του M, από την κυρτότητα του Ω έχουμε $\omega < \pi$. Η περίπτωση $k = \kappa$ που αντιστοιχεί στο $\mu = 0$ επίσης δεν δίνει ιδιοτιμές. Επομένως έχουμε μόνο θετικές ιδιοτιμές από την περίπτωση (I), οι οποίες δίνονται από την σχέση $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ή

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} - \kappa^2 > 0$$

και αυτό σύμφωνα με την Πρόταση 2.17 σημαίνει ευστάθεια. □

Ως επόμενη εφαρμογή των σχέσεων (2.5.2)-(2.5.4) δίνουμε μία απόδειξη της ευστάθειας των κύκλων. Αυτή είναι ουσιαστικά μια μεταβολική απόδειξη του γνωστού θεωρήματος ότι μεταξύ όλων των διδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων ίσου εμβαδού, ο κύκλος έχει την μικρότερη περίμετρο.

Πρόταση 2.24. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\Omega_1 = B(x_0, R)$ τέτοιο ώστε $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Τότε η $M = \partial\Omega_1$ είναι μια ευσταθής διφασική διαμέριση του Ω.*

Απόδειξη. Ολοκλήρωση της σχέσης (2.3.4) έχοντας υπόψη την (2.3.2) δίνει $\lambda = 0$. Από τα συστήματα (2.5.2)-(2.5.4) παραμένει μόνο η τρίτη εξίσωση. Επιπλέον έχουμε την περιοδική συνθήκη $f(0) = f(\frac{2\pi}{\kappa})$. Εύκολα ελέγχεται ότι στις περιπτώσεις (II) και (III) έχουμε μόνο τετριμμένες λύσεις, ενώ για την (I) έχουμε

$$C \sin \frac{2\pi k}{\kappa} + D\left(\cos \frac{2\pi k}{\kappa} - 1\right) = 0$$
$$\left(1 - \cos \frac{2\pi k}{\kappa}\right) C + D \sin \frac{2\pi k}{\kappa} = 0$$

η οποία έχει μη-τετριμμένες λύσεις εάν και μόνον εάν $\cos \frac{2\pi k}{\kappa} = 1$, δηλ. $k = \kappa$, το οποίο αντιστοιχεί σε ουδέτερη σταθερότητα καθώς στην περίπτωση αυτή $\mu = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα είναι

$$f(s) = C \sin(\kappa s) + D \cos(\kappa s)$$

δηλ. γραμμικοί συνδυασμοί των $f_1(s) = \sin(\kappa s)$ και $f_2(s) = \cos(\kappa s)$, τα οποία εκφράζουν μετατοπίσεις κατά μήκος των αξόνων y και x αντίστοιχα. Επειδή ουσιαστικά δεν είναι αληθινές μεταβολές του M, μπορούμε να τις απορρίψουμε και επομένως υπάρχουν μόνο θετικές ιδιοτιμές, το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Διαμερίσεις με μεγάλες διεπιφάνειες είναι ασταθείς. Πιο συγκεκριμένα:

Πρόταση 2.25. *Εστω Ω και M τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες της Πρότασης 2.22. Εάν το L ικανοποιεί την συνθήκη*

$$L > 2\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1\sigma_2} \tag{2.5.8}$$

τότε η M είναι ασταθής.

Απόδειξη. Ολοκλήρωση της (2.3.4), λαμβάνοντας υπόψη τις (2.3.5) και (2.3.2), δίνει

$$\int_{\partial M} \sigma f + \int_M |B_M|^2 f = -\tfrac{1}{2}\lambda |M|,$$

η οποία σε δύο διαστάσεις απλοποιείται στην εξίσωση

$$\sigma_1 f(0) + \sigma_2 f(L) = -\tfrac{1}{2}\lambda L \tag{2.5.9}$$

Παρατηρώντας ότι εαν η f είναι ιδιοσυνάρτηση της (2.3.4) τότε και η $f^\star$ που ορίζεται από την $f^\star(s) = f(L-s)$ είναι ιδιοσυνάρτηση για την ίδια ιδιοτιμή, παίρνουμε την εξίσωση

$$\sigma_2 f(0) + \sigma_1 f(L) = -\tfrac{1}{2}\lambda L \tag{2.5.10}$$

Η λύση του συστήματος (2.5.9), (2.5.10) είναι

$$f(0) = f(L) = -\frac{\lambda L}{2(\sigma_1+\sigma_2)}$$

Από την (II) έχουμε $f(0) = \frac{\lambda}{2k^2} + C + D$ και $f(L) = \frac{\lambda}{2k^2} + Ce^{kL} + De^{-kL}$, από τις οποίες έπεται ότι

$$C = -\frac{\lambda}{2}\frac{1-e^{-kL}}{e^{kL}-e^{-kL}}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{L}{\sigma_1+\sigma_2}\right),\ D = -\frac{\lambda}{2}\frac{e^{kL}-1}{e^{kL}-e^{-kL}}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{L}{\sigma_1+\sigma_2}\right).$$

Από την σχέση διατήρησης όγκου όπως αυτή εκφράζεται από την τρίτη των (2.5.3) παίρνουμε

$$\frac{kL}{2}\coth\frac{kL}{2} = 1 + \frac{(kL)^2}{(\sigma_1+\sigma_2)L} \tag{2.5.11}$$

Θεωρώντας την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} - 1 - \frac{x^2}{c}$$

όπου $x = kL$ και $c = (\sigma_1+\sigma_2)L$, με ανάπτυγμα $\mathrm{Taylor}\, f(x) = \left(\frac{1}{12}-\frac{1}{c}\right)x^2 + O(x^4)$ γύρω από το 0, και παρατηρώντας ότι $f(x) > 0$ σε μια περιοχή $]0,\delta[$ εαν $c > 12$, ενώ η $f(x)$ γίνεται αρνητική για x επαρκώς μεγάλο, συμπεραίνουμε την ύπαρξη θετικής ρίζας της $f(x) = 0$. Οταν το L ικανοποιεί την συνθήκη (2.5.8), από την $\sigma_1\sigma_2 \leqslant \frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)^2$ παίρνουμε $(\sigma_1+\sigma_2)L > 12$, και με αυτό η απόδειξη είναι πλήρης. □

Κλείνουμε με την απόδειξη της πρότασης ότι επαρκώς μικρές διαμερίσεις είναι ευσταθείς.

Πρόταση 2.26. *Εστω Ω και M όπως στην Πρόταση 2.22. Εάν $L = |M|$ είναι επαρκώς μικρό, τότε η M είναι ευσταθής.*

Αποδειξη. Εάν $L < L_0$, όπου $L_0 = 2\frac{\sigma_1+\sigma_2-\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1\sigma_2}$, η περίπτωση (III) δεν έχει λύση. Γράφουμε την εξίσωση (2.5.11) για την περιπτωση (II) στη μορφή

$$\frac{x}{2}\left(e^x+1\right) = \left(1+\frac{x^2}{c}\right)\left(e^x-1\right)$$

όπου $x = kL$ και $c = (\sigma_1+\sigma_2)L$. Ο k-στός όρος στο ανάπτυγμα σειράς Taylor του αριστερού και δεξιού μέλους είναι

$$\frac{1}{2(k-1)!},\ \frac{1}{k!}+\frac{1}{c(k-2)!}$$

για $k \geqslant 2$. Θα δείξουμε ότι $c \leqslant 4$. Πράγματι, εάν $t = \sigma_1/\sigma_2$, τότε

$$\left(\sigma_1+\sigma_2\right)L_0 = 2(t+1)\frac{t+1-\sqrt{t^2+1-t}}{t},$$

η οποία παίρνει το ελάχιστό της $\left(\sigma_1+\sigma_2\right)L_0 = 4$ στο $t = 1$. Ετσι $c < 4$ και ελέγχεται άμεσα ότι

$$\frac{1}{2(k-1)!} < \frac{1}{k!}+\frac{1}{c(k-2)!}$$

για $k \geqslant 3$. Ομοιες ανισότητες ικανοποιούνται από όρους χαμηλότερης τάξης. Συνεπώς η περίπτωση (II) δεν έχει λύση, και επομένως δεν υπάρχουν ιδιοτιμές στην περιοχή $\mu \leqslant -\kappa^2$.

Ελέγχουμε για ιδιοτιμές στην περιοχή $-\kappa^2 < \mu \leqslant 0$ ή ισοδύναμα $0 < k \leqslant \kappa$. Η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος (2.5.2) στις μεταβλητές $B = -\frac{\lambda}{2k^2}$, C, D δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} D(x) &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{\sigma_1} & 1 \\ 1 & \sin x - \frac{k}{\sigma_2}\cos x & \cos x + \frac{k}{\sigma_2}\sin x \\ x & 1-\cos x & \sin x \end{vmatrix} \\ &= 2(1-\cos x) - \left(1+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{k}\right)x\sin x \\ &\quad + \frac{\sigma_1+\sigma_2}{k}x^2\cos x + \frac{\sigma_1\sigma_2}{k^2}x^3\sin x \end{aligned}$$

όπου $x = kL$. Αναπτύσσουμε τα $\sin x$, $\cos x$ σε σειρά Taylor γύρω από το 0:

$$D(x) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}k^2x^2 - \frac{1}{3}k\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)x^3 + \frac{1}{12}\left(1-2\frac{k^2}{\sigma_1\sigma_2}\right)x^4 + O(x^5).$$

Εστω ότι το k είναι ρίζα της εξίσωσης $D(kL) = 0$ στο διάστημα $]0, \kappa]$ για κάθε $L \leqslant L_0$, δηλ.

$$0 = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}k^2 - \frac{1}{3}k\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}\right)x + \frac{1}{12}\left(1 - 2\frac{k^2}{\sigma_1\sigma_2}\right)x^2 + O(x^3). \tag{2.5.12}$$

Επειδή το k είναι φραγμένο, στο όριο $L \to 0$ έχουμε $x \to 0$ και για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $k_n \to k$

$$0 = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}k^2$$

και $k = 0$. Επομένως στο όριο $L \to 0$ έχουμε $x \to 0$ και $k \to 0$. Αντικατάσταση $x = kL$ στην (2.5.12) δίνει

$$0 = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}\right)L + \frac{1}{12}\left(1 - 2\frac{k^2}{\sigma_1\sigma_2}\right)L^2 + O(L^3). \tag{2.5.13}$$

Παίρνοντας το όριο $L \to 0$ έχουμε

$$0 = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, πιθανώς για μικρότερη τιμή του L_0, η εξίσωση $D(kL) = 0$ δεν έχει ρίζες στο διάστημα $]0, \kappa]$ για κάθε $L < L_0$. □

Κεφάλαιο 3

Το πρόβλημα της συνεκτικότητας ευσταθών διαμερίσεων τριπλών συνδέσμων

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την ευστάθεια διαμερίσεων σε κυρτά χωρία, οι οποίες περιλαμβάνουν τρεις συνυπάρχουσες φάσεις σε επαφή, και ιδίως τριπλούς συνδέσμους (triple junctions). Παρουσιάζουμε την λεπτομερή παραγωγή ενός νέου τύπου για την *δεύτερη μεταβολή του εμβαδού*, με ιδιαίτερη έμφαση σε συνοριακούς όρους και όρους που προκύπτουν στην ράχη (spine) του τριπλού συνδέσμου, και στη συνέχεια μελετάμε το πρόσημο της κύριας ιδιοτιμής του τελεστή Jacobi. Με τον τρόπο αυτό εξάγουμε κάποια κριτήρια ευστάθειας και αποδεικνύουμε, αντίθετα με το γνωστό αποτέλεσμα των Sternberg-Zumbrun για την αστάθεια μη-συνεκτικών διφασικών διαμερίσεων, την ύπαρξη ευσταθών μη-συνεκτικών διαμερίσεων τριπλών συνδέσμων.

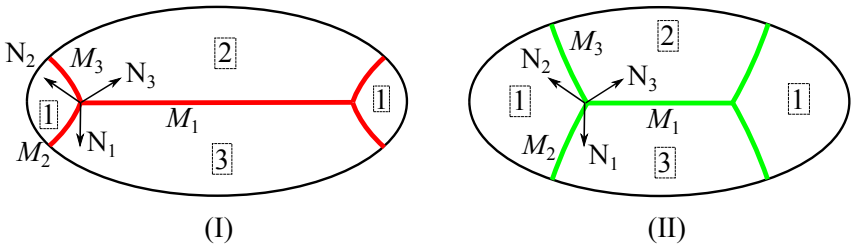
3.1. Ανασκόπιση του προβλήματος

Στην γεωμετρική ανάλυση το πρόβλημα της διαμέρισης σε φάσεις περιλαμβάνει την διαίρεση ενός χωρίου $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ σε προδιαγεγραμμένο αριθμό υποσυνόλων, τις φάσεις, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες σταθερότητας όγκου των φάσεων, και ελαχίστου του εμβαδού της *διεπιφάνειας*, η οποία είναι το σύνολο των υπερεπιφανειών που δημιουργούνται από την διαμέριση. Οταν το Ω διαμερίζεται σε τρία υποσύνολα από τρεις επιφάνειες που συναντώνται κατά μήκος μιας καμπύλης (βλ. Σχ. 3.2.1), τότε μιλάμε για έναν *τριπλό σύνδεσμο*. Παραδείγματα επιστημονικών και τεχνολογικών εφαρμογών στις οποίες οι τριπλοί σύνδεσμοι είναι σημαντικοί, περιλαμβάνουν την ισορροπία φάσεων και την διαβροχή (wetting). Η διαβροχή είναι ένα παράδειγμα ενός πολύ απλού τριπλού συνδέσμου, διότι ασχολείται με τις τρεις φάσεις ενός υλικού, αέριο, υγρό και στερεό. Εχει συγκεντρώσει το επιστημονικό ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες λόγω του ρόλου της στην νανοτεχνολογία και την νανοεπιστήμη και του αυξημένου ενδιαφέροντος για νανουλικά. Η έρευνα αυτών των

φαινομένων άρχισε τον 19ο αιώνα όταν ο Plateau [**126**] παρατήρησε ότι υμένια σαπωνοδιαλύματος και συμπλέγματα φυσαλλίδων αποτελούνταν από (α) λείες επιφάνειες, (β) ιδιόρρυθμα σύνολα (singular sets) στα οποία τριάδες επιφανειών τέμνονταν υπό ίσες γωνίες κατά μήκος γραμμών και (γ) απομονωμένα σημεία στα οποία 4 τριπλοί σύνδεσμοι συναντιόνταν υπό ίσες γωνίες.

Η Taylor [**103, 127**] απέδειξε ότι ορισμένες επιφάνειες που ελαχιστοποιούν τοπικά το εμβαδό, τα $(M, 0, \delta)$-ελαχιστικά σύνολα, έχουν τους τύπους ιδιορρυθμιών που παρατήρησε ο Plateau. Συνεισφορές στο αντικείμενο έχουν γίνει από τον Fife και άλλους [**128, 129, 130, 131**], τους Morgan και Lawlor [**132, 133, 134**], Brakke [**135**], Alikakos κ.ά. [**136, 137, 138**], Ikota-Yanagida [**139, 140**], και Garcke κ.ά. [**141, 142**]. Οι Sternberg, Zeimer [**111**] απέδειξαν την ύπαρξη απομονωμένων τοπικών ελαχιστοποιητών για το πρόβλημα της διαμέρισης ορισμένων διδιάστατων χωρίων σε τρία υποσύνολα με ελάχιστο εμβαδό διεπιφάνειας, με την ιδιότητα ότι τα τρία σύνορα της ελαχιστοποιούσας διαμέρισης συναντώνται σε ένα κοινό σημείο τριπλού συνδέσμου. Αυτή η λίστα εργασιών δεν είναι πλήρης και ο αναγνώστης παραπέμπεται στις ανασκοπίσεις της J. E. Taylor για περισσότερες πληροφορίες και αναφορές [**143, 144, 145**].

Το προβλημα της συνεκτικότητας των φάσεων μελετήθηκε από τους Sternberg-Zumbrun [**109, 110**] (SZ) για διφασικά προβλήματα και από τον Αλικάκο και τον συγγραφέα [**146**] για πολυφασικά προβλήματα διαμέρισης με συνεπαφή το πολύ δύο φάσεων, το οποίο εξαιρούσε τους τριπλούς συνδέσμους. Οι SZ απέδειξαν ότι *ευσταθείς διφασικές διαμερίσεις κυρτών συνόλων είναι απαραίτητα συνεκτικές*. Στο [**146**] αποδείξαμε την ύπαρξη ασταθών συνεκτικών διαμερίσεων. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε το πρόβλημα της τριφασικής διαμέρισης ενός χωρίου (ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ με σύνορο $\Sigma = \partial\Omega$, στην οποία έχουμε συνύπαρξη τριών φάσεων με σχηματισμό τριπλών συνδέσμων. Το σύνορο Σ υποτίθεται ότι είναι μια συνεχής υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, η οποία σε κάποια περιοχή της τομής της διεπιφάνειας με το Σ είναι C^r. Περιπτωσιακά παρουσιάζουμε ορισμούς, τύπους και προτάσεις γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$, αλλά τα κύρια αποτελέσματά μας αφορούν τον $\mathbb{R}^3$. Επίσης το συναρτησιακό επιφανειακής ενέργειας εξετάζεται αντί για το συναρτησιακό του εμβαδού ως γενίκευση.



Σχημα 3.1.1. Ασταθής (I) και ευσταθής (II) μη-συνεκτικές διαμορφώσεις τριπλών συνδέσμων στον δι-διάστατο χώρο. Αριθμοί σε τετράγωνα δείχνουν φάσεις. Η φάση 1 είναι μη-συνεκτική, ενώ οι φάσεις 2, 3 είναι συνεκτικές και στις δύο περιπτώσεις. M_1, M_2, M_3 είναι οι διεπιφάνειες που σχετίζονται με τον αριστερό τριπλό σύνδεσμο. N_1, N_2, N_3 είναι τα μοναδιαία κάθετα πεδία των αντίστοιχων διεπιφανειών. Στον προσανατολισμό που δείχνεται η διαμόρφωση (I) έχει $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}(\kappa_2 - \kappa_3) > 0$, ενώ η διαμόρφωση (II) έχει $\alpha < 0$. κ_2, κ_3 είναι οι προσημασμένες καμπυλότητες των αντίστοιχων διεπιφανειών, οι οποίες ορίζονται από την $\kappa_i = \left\langle \frac{dT_i}{ds}, N_i \right\rangle$ για κάθε διεπιφάνεια, T_i είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο πεδίο της M_i, η οποία θεωρείται παραμετρημένη ως προς μήκος τόξου s.

Το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι το Θεώρημα 3.30, το οποίο αποδεικνύει την *ύπαρξη ευσταθών μη-συνεκτικών διαμερίσεων* σε κυρτές περιοχές του $\mathbb{R}^2$ από ζεύγη τριπλών συνδέσμων (βλ. Σχ. 3.7.1), κάτω από την υπόθεση σταθερότητας του ογκου των φάσεων. Ασταθείς διαμορφώσεις τριπλών συνδέσμων με την ίδια τοπολογία υπάρχουν, όπως αποδεικνύεται στην Ενότητα 3.5. Το Σχ. 3.1.1 δείχνει τα χαρακτηριστικά των ευσταθών και των ασταθών διαμορφώσεων. Η ποσότητα α εμφανίζεται στον τύπο της δεύτερης μεταβολής του εμβαδού του συστήματος τριπλών συνδέσμων (βλ. σχέσεις 3.4.48). Μίξη αμφότερων των τύπων τριπλών συνδέσμων (I) και (II) δεν είναι δυνατή διότι παραβιάζει την συνθήκη ελαχιστικότητας.

Το κύριο αποτέλεσμα που αναφέρθηκε προηγουμένως εδραιώθηκε αποδεικνύοντας ότι η δεύτερη μεταβολή του εμβαδού του συστήματος δύο τριπλών συνδέσμων (το οποίο είναι εξ ορισμού ελαχιστικό, δηλ. κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού του εμβαδού) είναι θετική για όλες τις μη-τετριμμένες αποδεκτές μεταβολές. Για το σκοπό

αυτό εφαρμόστηκαν μέθοδοι φασματικής ανάλυσης. Οι αρχές αυτών των μεθόδων και η θεμελίωσή τους παρουσιάζονται εν συντομία στην Ενότητα 3.6 (βλ. και [**146**]). Η βάση της φασματικής μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος είναι το Θεώρημα 3.24 και η Πρόταση 3.20. Το Θεώρημα 3.24 λέει ότι η δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού του εμβαδού έχει ελάχιστο στο σύνολο των κανονικοποιημένων αποδεκτών μεταβολών, το οποίο δίνεται (Πρόταση 3.20) από την μικρότερη ιδιοτιμή ενός γραμμικού ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών με συνοριακές συνθήκες Neumann (βλ. εξισώσεις (3.6.6) και (3.6.7)-(3.6.9)). Η απόδειξη της ευστάθειας στο Θεώρημα 3.30 έπεται από την απόδειξη ότι η κύρια ιδιοτιμή είναι θετική.

Η βάση για όλες τις παραγωγές είναι ένας νέος τύπος για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού για πολλαπλότητες σταθερής μέσης καμπυλότητας, η οποία περιλαμβάνει και *εφαπτομενικές μεταβολές* και είναι κατάλληλη για τον χειρισμό *ιδιορρυθμιών* όπως οι τριπλοί σύνδεσμοι. Το κύριο αποτέλεσμα για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού ενός προβλήματος ελαχιστικής διαμέρισης τριπλών συνδέσμων διατυπώνεται στο Θεώρημα 3.11. Ως εφαρμογή του θεωρήματος αυτού αποδεικνύουμε στην Ενότητα 3.5 την ευστάθεια της κλάσης διαμερίσεων τριπλών συνδέσμων που αναφέρθηκε προηγουμένως. Η ακριβής διατύπωση των μεταβολικών προβλημάτων που θεωρούνται στο κεφάλαιο αυτό μαζί με τον χρησιμοποιούμενο συμβολισμό και γνωστά αποτελέσματα, δίνονται στην Ενότητα 3.2. Για ευκολία του αναγνώστη στην Ενότητα 3.3 έχουμε συνοπτικά διατυπώσει αποτελέσματα που σχετίζονται με την πρώτη μεταβολή σε μορφή κατάλληλη για διαμερίσεις τριπλών συνδέσμων. Το προαπαιτούμενο υπόβαθρο για τις πολλαπλότητες παρέχεται στα Παραρτήματα Α και Β.

3.2. Συμβολισμός και προκαταρκτικά

Σε όλο το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιούμε πολλαπλότητες με σύνορο (βλ. Παράρτημα Α, Ενότητα Α.3.2 ή την αναφορά [**147**] σ. 478 για ορισμό). Η ομαλότητα του συνόρου μιας πολλαπλότητας είναι η ίδια με την ομαλότητα της αντίστοιχης πολλαπλότητας. Για παράδειγμα το σύνορο μιας C^2 πολλαπλότητας με σύνορο είναι κι αυτό μια C^2 πολλαπλότητα.

Ορισμος 3.1. Εστω Ω ένα χωρίο του $\mathbb{R}^3$. Με τον όρο C^r *τριπλός σύνδεσμος* στο Ω (βλ. Σχ. 3.2.1) εννοούμε μια συλλογή τριών διδιάστατων C^r υποπολλαπλοτήτων του $\mathbb{R}^3$, $(M_i)_{i=1}^3$, οι οποίες έχουν το ιδιο σύνορο στο Ω

$$\partial M_1 = \partial M_2 = \partial M_3 = S$$

το οποίο λέγεται *η ράχη* του τριπλού συνδέσμου. Θα αναφερόμαστε στις πολλαπλότητες M_i με τον όρο *τα φύλλα* του τριπλού συνδέσμου.

Υπενθυμίζεται ο Ορισμός 2.1 της μεταβολής μιας πολλαπλότητας από την Ενότητα 2.1. Με τον όρο *φορέας μιας μεταβολής* εννοούμε τον φορέα του πεδίου της πρώτης μεταβολής w. Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται άμεσα σε τριπλούς συνδέσμους. Εστω $T = (M_i)_{i=1}^3$ ένας τριπλός σύνδεσμος και $(\xi^t)_{t\in I}$ μια μεταβολή. Οι τριπλοί σύνδεσμοι

$$T^t = (\xi^t(M_i))_{i=1}^3,\ t \in I$$

είναι μια μεταβολή του T. Οι μονοδιάστατες υποπολλαπλότητες

$$S^t = \xi^t(S),\ t \in I$$

είναι μια μεταβολή της ράχης του T.

Εστω M μια υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^m$. Για ένα διανυσματικό πεδίο X του $\mathbb{R}^m$ που ορίζεται σε ένα χωρίο V του $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε το εφαπτόμενο και το κάθετο μέρος του $X^\top(p) \in T_pM$ και $X^\perp(p) \in N_pM$, $p \in M \cap V$. Τα TM και NM είναι η εφαπτόμενη και κάθετη δέσμη της M αντίστοιχα. Ο συμβολισμός $X \in TM$ είναι μια συντόμευση για την σχέση $X(p) \in T_pM$ με p σε ένα ανοιχτό υποσύνολο της M. Δεδομένων δύο διανυσματικών πεδίων X, Y στο V, D_YX είναι η κατευθυντήρια παράγωγος του X στην διεύθυνση Y στον $\mathbb{R}^m$. Για $u, v \in TM$,

$$\nabla_v u = (D_v u)^\top \in TM$$

είναι η *συμμεταβλητή παράγωγος του πεδίου u στην κατεύθυνση v*. Η *συμμεταβλητή παράγωγος* ∇u του u είναι ένα $(1,1)$-τανυστικό πεδίο (τανυστής) οριζόμενο από την σχέση

$$\nabla u(\omega, v) = \omega(\nabla_v u), \quad v \in TM,\ \omega \in T^\star M,$$

όπου $T_p^\star M$ είναι ο δυικός χώρος του T_pM. Οι *συνιστώσες της συμμεταβλητής παραγώγου* ∇u δίνονται εξ ορισμού από την σχέση

$$u^i_{|j} = \nabla u(E^i, E_j) = dq^i\left(\nabla_{E_j} u\right).$$

$E_i(p)$ είναι μια βάση του T_pM και $E^j(p) \equiv dq^j(p)$ είναι η αντίστοιχη δυική βάση του $T_p^\star M$.

Το κάθετο μέρος της κατευθυντήριας παραγώγου $B(u,v) = (D_v u)^\perp \in NM$ ορίζει τον τανυστή της *δεύτερης θεμελιώδους μορφής*. Το *διάνυσμα της μέσης καμπυλότητας* δίνεται από το ίχνος αυτού του τανυστή

$$H(p) = \sum_i B_p(E_i, E_i) \tag{3.2.1}$$

σε μια *ορθοκανονική βάση* (E_i) του T_pM. Εαν η M είναι υπερεπιφάνεια, η *βαθμωτή μέση καμπυλότητα* ορίζεται από την σχέση

$$\kappa = H \cdot N \tag{3.2.2}$$

όπου N είναι ένα μοναδιαίο κάθετο πεδίο της M. Ομοίως, εάν η M είναι υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^m$, ορίζουμε την *βαθμωτή δεύτερη θεμελιώδη μορφή*:

$$II_M(u,v) = B(u,v) \cdot N \tag{3.2.3}$$

Η *απεικόνιση* Weingarten μιας υπερεπιφάνειας M του $\mathbb{R}^{n+1}$ ορίζεται κατά ίνες από την σχέση

$$W(p) : T_pM \to T_pM,\ u \mapsto D_u N \quad (p \in M)$$

Οταν χρησιμοποιείται συμβολισμός με δείκτες, *άθροιση ως προς ζεύγη ίδιων δεικτών* (οι οποίοι για τανυστικές εκφράσεις πρέπει να είναι ζεύγη αντιμεταβλητών-συμμεταβλητών δεικτών) υποτίθεται παντού.

Η *βαθμίδα* μιας συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$ που ορίζεται σε μια ανοιχτή περιοχή U της M, δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{grad}_M f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q^j} E_i$$

σε ένα σύστημα συντεταγμένων $q^1, \cdots, q^n$. Στον ορισμό αυτό g^{ij} είναι οι αντιμεταβλητές συνιστώσες του μετρικού τανυστή $g_{ij} = E_i \cdot E_j$. Η *απόκλιση* ενός εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου v της M που ορίζεται στο U είναι το ίχνος της συμμεταβλητής παραγώγου του, δηλ.

$$\mathrm{div} v = \mathrm{tr} \nabla u = \nabla u(E_i, E^i) = u^i_{|i}$$

Για ένα γενικό διανυσματικό πεδίο w το οποίο δεν είναι εφαπτόμενο στην M η απόκλιση ορίζεται από την σχέση

$$\mathrm{div}_M w = \left\langle D_{E_i} w, E^i \right\rangle = g^{ij} \left\langle D_{E_i} w, E_j \right\rangle$$

Ο συμβολισμός $\langle \cdot, \cdot \rangle$ χρησιμοποιείται εναλλακτικά για το βαθμωτό γινόμενο σε πιο πολύπλοκες εκφράσεις.

Για την πρώτη μεταβολή του εμβαδού μιας πολλαπλότητας με σύνορο ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2. *Εστω M μια n-διάστατη C^1-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^m$ με σύνορο, και ξ^t μια μεταβολή όπως στον Ορισμό 2.1, με συμπαγή φορέα στην M. Υποθέτουμε ο φορέας της ξ^t περιέχεται σε έναν χάρτη της M. Τότε η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού του εμβαδού A δίνεται από τον τύπο*

$$\delta A(M) = \frac{d}{dt}A(M^t)\Big|_{t=0} = \int_M \mathrm{div}_M w dS \tag{3.2.4}$$

Εαν M είναι επιπλέον μια C^2-υπερεπιφάνεια με σύνορο,

$$\delta A(M) = -\int_M H \cdot w dS + \int_{\partial M} w \cdot \nu ds \tag{3.2.5}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο του ∂M το οποίο είναι εφαπτόμενο στην M και H είναι το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας.

Για την απόδειξη βλ. Simon [**91**]. Η σχέση (3.2.5) προκύπτει από την (3.2.4) με εφαρμογή του τύπου του Stokes [**91**]. Για συντομία θα παραλείπουμε τα σύμβολα ολοκλήρωσης dS, ds.

Οι τύποι αυτής της εργασίας για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού παράγονται από το επόμενο γενικό αποτέλεσμα [**91**].

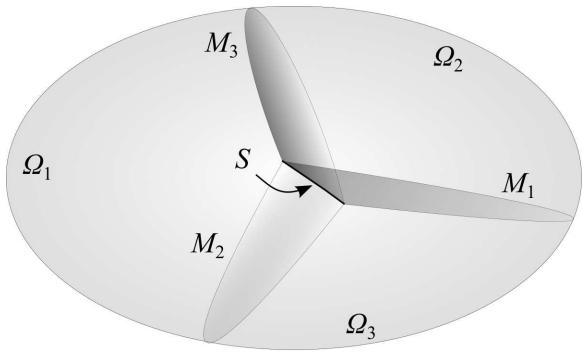
Πρόταση 3.3. *Εστω M μια n-διάστατη C^2-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^m$ με σύνορο και ξ^t μια μεταβολή της M με συμπαγή φορέα στην M και ο φορέας της ξ^t περιέχεται σε έναν χάρτη της M. Τότε η δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού του εμβαδού δίνεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned}\delta^2 A(M) &= \frac{d^2}{dt^2}A(M^t)\Big|_{t=0} \\ &= \int_M \Big(\mathrm{div}_M a + (\mathrm{div}_M w)^2 + g^{ij}\left\langle (D_{E_i}w)^\perp, (D_{E_j}w)^\perp\right\rangle \\ &\quad - g^{ik}g^{jl}\left\langle (D_{E_i}w)^\top, E_j\right\rangle \left\langle (D_{E_l}w)^\top, E_k\right\rangle\Big).\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$(E_i)_{i=1}^n$ είναι τα διανυσματικά πεδία βάσης σε έναν χάρτη που περιέχει τον φορέα της μεταβολής.

Για την απόδειξη βλ. [**91**].

Στο τριφασικό πρόβλημα διαμέρισης με περιορισμούς όγκου (βλ. Σχ. 3.2.1) αναζητούμε μια διαίρεση ενός δεδομένου χωρίου $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ σε



Σχημα 3.2.1. Διαμέριση ενός τριπλού συνδέσμου με περιορισμό όγκου. Ω_i είναι ο χώρος που καταλαμβάνεται από την φάση i και M_i είναι η διεπιφάνεια μεταξύ των φάσεων k, l με $k \neq i$ και $l \neq i$. S είναι η ράχη του τριπλού συνδέσμου.

τρία υποσύνολα (τις φάσεις) Ω_1, Ω_2, Ω_3, κάθε ένα από τα οποία έχει προδιαγεγραμμένη τιμή για τον όγκο του $|\Omega_i| = V_i$, και των οποίων τα σύνορα $M_i = \partial\Omega_i$ στο Ω σχηματίζουν έναν τριπλό σύνδεσμο $T = (M_i)_{i=1}^3$, ο οποίος ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό του εμβαδού. Με τον όρο *ελαχιστική διαμέριση* ή *ελαχιστικός τριπλός σύνδεσμος* πάντα εννοούμε ένα κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού του εμβαδού. Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, τα σύνορα των φάσεων σχηματίζουν περισσότερους από έναν τριπλούς συνδέσμους, όπως στην περίπτωση των μη-συνεκτικών διαμερίσεων. Το κάπως γενικότερο συναρτησιακό *επιφανειακής ενέργειας* χρησιμοποιείται,

$$A(T) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i A(M_i) \tag{3.2.7}$$

όπου $\gamma_i > 0$. Οι πιο πάνω τύποι για την πρώτη μεταβολή του εμβαδού επεκτείνονται εύκολα σε τριπλούς συνδέσμους:

$$\delta A(T) = \frac{d}{dt} A(T^t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_{M_i} \mathrm{div}_{M_i} w \tag{3.2.8}$$

$$\delta A(T) = -\sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_{M_i} H \cdot w + \int_S w \cdot \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \nu_i + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_{\partial M_i \cap \Sigma} w \cdot \nu_i \tag{3.2.9}$$

Η επέκταση του τύπου (3.2.6) για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού σε τριπλούς συνδέσμους δεν είναι άμεση. Αναλαμβάνουμε

την διεκπεραίωση της εργασίας αυτής στην Ενότητα 3.4 μετά από κατάλληλες τροποποιήσεις της (3.2.6).

Με τον όρο *ευσταθής διαμέριση* ή *ευσταθής τριπλός σύνδεσμος* εννοούμε μια ελαχιστική διαμέριση με $\delta^2 A(T) > 0$ για κάθε αποδεκτή μεταβολή $w \neq 0$ με συμπαγή φορέα K στο $\overline{\Omega}$ έτσι ώστε $K \cap T \neq \emptyset$.

3.3. Πρώτη μεταβολή-Η ταυτότητα του Young

Χειριζόμαστε τους περιορισμούς των διαμερίσεων τριπλών συνδέσμων με τη χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange. Στην απλή περίπτωση μιας συνεκτικής διαμέρισης στην οποία εμφανίζεται ένας τριπλός σύνδεσμος, θεωρούμε το επόμενο τροποποιημένο συναρτησιακό

$$A^\star(T) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i A(M_i) - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j (|\Omega_j| - V_j) \tag{3.3.1}$$

όπου $|\Omega_j|$ είναι το μέτρο Lebesque του Ω_j και V_j είναι η προκαθορισμένη τιμή του όγκου του Ω_j. Η εισαγωγή πολλαπλασιαστών Lagrange είναι θέμα βολικότητας και κάποιος θα μπορούσε να προχωρήσει χωρίς αυτούς με κατάλληλο περιορισμό των αποδεκτών μεταβολών σε αυτές που διατηρούν τον όγκο των Ω_j (βλ. [**109, 146**]). Στην διαδικασία της μεταβολής της (3.3.1) μπορούμε να παραλείψουμε τελείως τις σταθερές V_i.

Τα φύλλα ενός ελαχιστικού τριπλού συνδέσμου με περιορισμούς όγκου σχηματίζουν στερεές γωνίες ϑ_i σύμφωνα με τον νόμο του Young. Διατυπώνουμε το γεγονός αυτό στην απλή περίπτωση ενός τριπλού συνδέσμου και στη συνέχεια το επεκτείνουμε σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Πρόταση 3.4. *Εστω $T = (M_i)_{i=1}^3$ μια C^2 διαμέριση ενός τριπλού συνδέσμου του $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ σε υποχωρία Ω_j ($j = 1, 2, 3$). Εαν η T είναι ελαχιστική, τότε η ταυτότητα του* Young

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\gamma_1} = \frac{\sin \vartheta_2}{\gamma_2} = \frac{\sin \vartheta_3}{\gamma_3} \tag{3.3.2}$$

ισχύει στη ράχη S της T. Επιπλέον, τα φύλλα έχουν σταθερή (βαθμωτή) μέση καμπυλότητα που ικανοποιεί την σχέση

$$\gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2 + \gamma_3 \kappa_3 = 0 \tag{3.3.3}$$

όπου $\kappa_i = H_i \cdot N_i$ είναι η μέση καμπυλότητα του M_i.

Αποδειξη. Εστω $(\xi^t)_{t\in I}$ μεταβολή με πεδίο πρώτης μεταβολής w. Από την (3.3.1) παίρνουμε

$$\delta A^\star(T) = \delta A(T) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \left.\frac{d}{dt}|\Omega_i^t|\right|_{t=0}$$

όπου $\Omega_i^t = \xi^t(\Omega_i)$. Με χρήση της (3.2.9) και της

$$\left.\frac{d}{dt}|\Omega_i^t|\right|_{t=0} = \int_{\partial\Omega_i} w \cdot N_{\partial\Omega_i} \tag{3.3.4}$$

όπου $N_{\partial\Omega_i}$ είναι το μοναδιαίο *προς τα έξω* κάθετο πεδίο του $\partial\Omega_i$, παίρνουμε

$$\delta A^\star(T) = \int_S w\cdot\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\nu_i - \sum_{i=1}^{3}\gamma_i\int_{M_i} H\cdot w - \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\sum_{j\neq i}\int_{M_j} N_{\partial\Omega_i}\cdot w \tag{3.3.5}$$

Αναπτύσσουμε τους τελευταίους δύο όρους στο δεξιό μέλος και συλλέγουμε ολοκληρώματα στην ίδια πολλαπλότητα, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{M_1}(\gamma_1 H_1 - \lambda_2 N_1)\cdot w + \int_{M_2}(\gamma_2 H_2 + \lambda_1 N_2)\cdot w \\ + \int_{M_3}(\gamma_3 H_3 - \lambda_1 N_3 + \lambda_2 N_3)\cdot w\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Θεωρώντας διαδοχικά μεταβολές συγκεντρωμένες στο εσωτερικό των M_1, M_2, M_3 παίρνουμε

$$\kappa_1\gamma_1 - \lambda_2 = 0, \quad \kappa_2\gamma_2 + \lambda_1 = 0, \quad \kappa_3\gamma_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

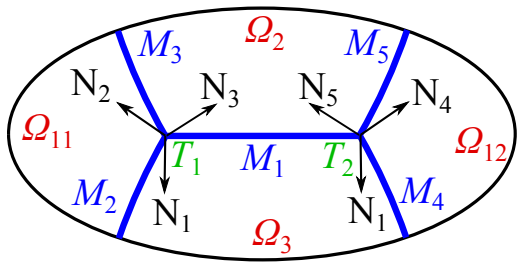
Πρόσθεση αυτών των τριών ισοτήτων δίνει την (3.3.3). Επιπλέον όλα τα ολοκληρώματα στην (3.3.6) αλληλοαναιρούνται και η (3.3.5) ανάγεται στην

$$\delta A^\star(T)\cdot w = \int_S w\cdot\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\nu_i = 0$$

από την οποία

$$\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\nu_i = 0$$

Ανακαλώντας από τη μνήμη ότι $\nu_i(p) \in T_pM_i$ και παρατηρώντας ότι τα διανύσματα $\gamma_i\nu_i$ $(i = 1, 2, 3)$ σχηματίζουν τρίγωνο, από τον κανόνα του ημιτόνου της Ευκλείδιας γεωμετρίας παίρνουμε την (3.3.2). □



Σχημα 3.3.1. Μη-συνεκτική διαμέριση τριπλού συνδέσμου για το Παράδειγμα 3.5 και την Προταση 3.6.

Η παρουσία πολλών τριπλών συνδέσμων σε ένα πρόβλημα διαμέρισης απαιτεί τη θεώρηση του τροποιημένου συναρτησιακού:

$$A^\star(M) = A(M) - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{P_j} \left|\Omega_{jk}\right| - V_j \right) \tag{3.3.7}$$

Στην σχέση αυτή P_j είναι ο αριθμός των διαφορετικών συνόλων στα οποία διαιρείται η φάση j (δεικτοδοτούμενων από το k), V_j είναι ο όγκος της φάσης j και λ_j είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange που αντιστοιχεί στον περιορισμό όγκου για την φάση j. Επειδή $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{P_j} \left|\Omega_{jk}\right| = |\Omega|$, υπάρχουν μόνο δύο γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί.

Παραδειγμα 3.5. Για την μη-συνεκτική τριφασική διαμέριση του Ω (βλ. Σχ. 3.3.1) από ένα σύστημα δύο τριπλών συνδέσμων, το τροποποιημένο συναρτησιακό δίνεται από την σχέση

$$A^\star(M) = A(T) - \lambda_2 |\Omega_2| - \lambda_3 |\Omega_3| \tag{3.3.8}$$

Στην σχέση αυτή είναι

$$A(T) = \sum_{i=1}^{5} \gamma_i A(M_i),$$

$\gamma_1 = \epsilon_{23}$, $\gamma_2 = \gamma_4 = \epsilon_{13}$, $\gamma_3 = \gamma_5 = \epsilon_{12}$, και $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ είναι η πυκνότητα διεπιφανειακής ενέργειας (επιφανειακή τάση) των διεπιφανειών που διαχωρίζουν τις φάσεις i, j. Οι σταθερές όγκου V_j παρελείφθησαν καθώς δεν παίζουν κανένα ρόλο στη μεταβολική διαδικασία. Με τη χρήση των περιορισμών όγκου των φάσεων 1 και 2, το τροποποιημένο συναρτησιακό του εμβαδού παίρνει τη μορφή

$$A^\star(M) = A(T) - \lambda_1 \left(|\Omega_{11}| + |\Omega_{12}|\right) - \lambda_2 |\Omega_2| \tag{3.3.9}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τους τρεις περιορισμούς, το οποίο δεν αλλάζει τους τελικούς τύπους και αποτελέσματα. Περιπτωσιακά θα χρησιμοποιούμε έναν συμβολισμό που δείχνει τον τριπλό σύνδεσμο στον οποίο ανήκει μια διεπιφάνεια. Με αυτόν τον συμβολισμό το συναρτησιακό του εμβαδού γράφεται στη μορφή

$$A(T) = \sum_{p=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \gamma_{pj} A(M_{pj})$$

Οι δείκτες p και j παριστάνουν «φάση» και «σύνδεσμο», M_{pj} είναι η διεπιφάνεια απέναντι στην φάση p που ανήκει στον σύνδεσμο j (για παράδειγμα, στο Σχ. 3.3.1 η M_{22} δείχνεται ως M_4) και η γ_{pj} είναι η αντίστοιχη επιφανειακή τάση. Επειδή υπάρχει μόνο μια διεπιφάνεια μεταξύ των φάσεων 2 και 3, $M_{11} \equiv M_{12} \equiv M_1$, και ο όρος αυτός εμφανίζεται μόνο μια φορά στο άθροισμα. Η σχέση μεταξύ των δύο συμβολισμών είναι

$$\begin{array}{ccccccc} M_{11} & \gamma_{11} & \leftrightarrow & M_1 & \gamma_1 & \leftrightarrow & \epsilon_{23} \\ M_{21} & \gamma_{21} & \leftrightarrow & M_2 & \gamma_2 & \leftrightarrow & \epsilon_{13} \\ M_{31} & \gamma_{31} & \leftrightarrow & M_3 & \gamma_3 & \leftrightarrow & \epsilon_{12} \\ M_{22} & \gamma_{22} & \leftrightarrow & M_4 & \gamma_4 & \leftrightarrow & \epsilon_{13} \\ M_{32} & \gamma_{32} & \leftrightarrow & M_5 & \gamma_5 & \leftrightarrow & \epsilon_{12} \end{array} \tag{3.3.10}$$

Οι δύο πρώτες στήλες αναφέρονται στον δεύτερο συμβολισμό, οι επόμενες δύο στον πρώτο συμβολισμό και η τελευταία στήλη σε διεπιφανειακές ενέργειες (επιφανεακές τάσεις) δεικτοδοτούμενες από τις αντίστοιχες φάσεις. □

Το επόμενο θεώρημα γενικεύει την Πρόταση 3.4 σε γενικές διαμερίσεις τριπλών συνδέσμων.

Θεωρημα 3.6. *Εστω $T = (T_j)_{j=1}^{r} = (M_{pj})_{p=1,\cdots,3;j=1,\cdots,r}$ μια τριφασική διαμέριση του $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ από ένα σύστημα r C^2-τριπλών συνδέσμων σε χωρία Ω_{pj} ($j = 1, \cdots, r; p = 1, 2, 3$). Περαιτέρω έστω N_{pj} το μοναδιαίο κάθετο πεδίο της M_{pj} και N_Σ το μοναδιαίο κάθετο πεδίο του Σ. Εαν η T είναι ελαχιστική, τότε*

(i) *Η ταυτότητα του* Young *(3.3.2) ισχύει για κάθε τριπλό σύνδεσμο στο σύστημα. Ισοδύναμα, οι ισότητες*

$$\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \nu_{pj} = 0 \tag{3.3.11}$$

ισχύουν για όλους τους τριπλούς συνδέσμους j του συστήματος.

(ii) *Η βαθμωτή μέση καμπυλότητα* $\kappa_{pj} = H_{pj} \cdot N_{pj}$ *κάθε διεπιφάνειας* M_{pj} *είναι σταθερή και*

$$\kappa_{p1} = \cdots = \kappa_{pr} \equiv \kappa_p \tag{3.3.12}$$

για κάθε $p = 1, 2, 3$.

(iii) *Οι βαθμωτές μέσες καμπυλότητες* κ_p *ικανοποιούν την σχέση*

$$\sum_{p=1}^{3} \gamma_p \kappa_p = 0 \tag{3.3.13}$$

σε κάθε τριπλό σύνδεσμο.

(iv) *Κάθε* M_{pj} *είναι κάθετο στο* Σ*, δηλ. σε κάθε* $M_{pj} \cap \Sigma$ *έχουμε* $N_{pj} \cdot N_\Sigma = 0$ *ή* $N_{pj} \in T\Sigma$.

Παρατηρηση 3.7. Η ταυτότητα (3.3.13) ισχύει σε κάθε τριπλό σύνδεσμο, δηλ.

$$\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \kappa_{pj} = 0$$

Ομως, λαμβάνοντας υπόψη την (3.3.12) και το γεγονός ότι $\gamma_{pj} = \gamma_p$ για όλα τα j (βλ. πίνακα αντιστοίχισης συμβολισμών (3.3.10)), όλες αυτές οι ισότητες ανάγονται στην μοναδική ισότητα (3.3.13).

Αποδειξη. Για συγκεκριμενοποίηση θεωρούμε την μη-συνεκτική τριφασική διαμέριση του Σχ. 3.3.1 με τον ενδεικνυόμενο προσανατολισμό. Για οποιαδήποτε μεταβολή w της T, από την (3.3.8) εν όψει των (3.2.5) και (3.3.4) έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta A^\star(T) &= \sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \delta A(M_{pj}) - \lambda_2 \delta |\Omega_2| - \lambda_3 \delta |\Omega_3| \\
&= -\sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \int_{M_{pj}} H_{pj} \cdot w \\
&+ \sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \int_S \nu_{pj} \cdot w + \sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \int_{\partial M_{pj} \cap \Sigma} \nu_{pj} \cdot w \\
&- \lambda_2 \int_{M_1} N_1 \cdot w - \lambda_2 \int_{M_{31}} (-N_{31}) \cdot w - \lambda_2 \int_{M_{32}} (-N_{32}) \cdot w \\
&- \lambda_3 \int_{M_1} (-N_1) \cdot w - \lambda_3 \int_{M_{21}} N_{21} \cdot w - \lambda_3 \int_{M_{22}} N_{22} \cdot w
\end{aligned}$$

Ανακατάταξη όρων δίνει
(3.3.14)

$$\begin{aligned}\delta A^\star(T) = &\int_{M_1} \left[(\lambda_3 - \lambda_2) N_1 - \gamma_1 H_1\right] \cdot w \\ &+ \int_{M_{21}} (-\lambda_3 N_{21} - \gamma_{21} H_{21}) \cdot w + \int_{M_{31}} (\lambda_2 N_{31} - \gamma_{31} H_{31}) \cdot w \\ &+ \int_{M_{22}} (-\lambda_3 N_{22} - \gamma_{22} H_{22}) \cdot w + \int_{M_{32}} (\lambda_2 N_{32} - \gamma_{32} H_{32}) \cdot w \\ &+ \int_S \left(\sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \nu_{pj} \right) \cdot w + \sum_{j=1}^{2} \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \int_{\partial M_{pj} \cap \Sigma} \nu_{pj} \cdot w\end{aligned}$$

Χρήση μεταβολών συγκεντρωμένων σε κάθε φύλλο χωριστά δίνει

$$\begin{aligned} -\gamma_1 H_1 \cdot N_1 + \lambda_3 - \lambda_2 &= 0 \\ -\gamma_{21} H_{21} \cdot N_{21} - \lambda_3 &= 0 \\ -\gamma_{31} H_{31} \cdot N_{31} + \lambda_2 &= 0 \\ -\gamma_{22} H_{22} \cdot N_{22} - \lambda_3 &= 0 \\ -\gamma_{32} H_{32} \cdot N_{32} + \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Από την (3.3.14), χρησιμοποιώντας μεταβολές συγκεντρωμένες σε κάθε ράχη χωριστά, παίρνουμε

$$\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \nu_{pj} = 0, \quad j = 1, 2 \tag{3.3.16}$$

Μεταβολές συγκεντρωμένες σε κάθε $\partial M_{pj} \cap \Sigma$ δίνουν

$$\nu_{pj} \cdot w = 0 \tag{3.3.17}$$

για p, j τέτοια ώστε $\partial M_{pj} \cap \Sigma \neq \emptyset$. Από τις σχέσεις αυτές έπεται χωρίς δυσκολία ότι $\nu_{pj} \in N\Sigma$ και αυτό αποδεικνύει το (iv).

Το (i) έπεται από τις ισότητες (3.3.16) με την ίδια επιχειρηματολογία που χρησιμοποιήθηκε και στην απόδειξη της Πρότασης 3.4. Από την δεύτερη και τέταρτη των (3.3.15), λαμβάνοντας υπόψη την $\gamma_{21} = \gamma_{22}$ παίρνουμε

$$\kappa_{21} = \kappa_{22}$$

και ομοίως από την τρίτη και πέμπτη των (3.3.15)

$$\kappa_{31} = \kappa_{32}$$

Η ισότητα $\kappa_{11} = \kappa_{12}$ είναι τετριμμένη, και αυτό αποδεικνύει το (ii). Η σταθερότητα των κ έπεται άμεσα από την (3.3.15). Πρόσθεση των

τριών πρώτων ισοτήτων της (3.3.15) δίνει $\sum_{p=1}^{3} \gamma_{p1}\kappa_{p1} = 0$ και πρόσθεση της πρώτης, τέταρτης και πέμπτης δίνει $\sum_{p=1}^{3} \gamma_{p2}\kappa_{p2} = 0$. Από την Παρατήρηση 3.7 αυτές είναι ταυτόσημες και αυτό αποδεικνύει το (iii). □

3.4. Οι τύποι της δεύτερης μεταβολής

Ο τύπος (3.2.6) για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού είναι πολύ γενικός αλλά όχι άμεσα εφαρμόσιμος. Εδώ εξάγουμε μια πιό εύχρηστη έκφραση για υπερεπιφάνειες σταθερής μέσης καμπυλότητας η οποία σε ένα δεύτερο στάδιο εφαρμόζεται σε πολυφασικές διαμερίσεις. Για να ικανοποιήσουμε την συνθήκη σταθερών τοιχωμάτων του περιέκτη, ακολουθώντας την αναφορά [**109**], ορίζουμε τις αποδεκτές μεταβολές από τις λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d\xi}{dt} = w(\xi), \quad \xi(0) = x \tag{3.4.1}$$

Ονομάζοντας ξ_x την λύση της (3.4.1) για την αρχική συνθήκη $\xi_x(0) = x$, θέτουμε $\xi(x,t) = \xi_x(t)$ για την αντίστοιχη μεταβολή. Για στερεά μη-παραμορφώσιμα τοιχώματα επιλέγουμε το w έτσι ώστε $w(p) \in T_p\Sigma$ για κάθε $p \in \Sigma = \partial\Omega$.

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της (3.4.1) οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση για το πεδίο της δεύτερης μεταβολής:

$$a = D_w w \tag{3.4.2}$$

Πρόταση 3.8. *Εστω M μια C^2-υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο. Υποθέτουμε ότι η M έχει σταθερή μέση καμπυλότητα κ και έστω w μια μεταβολή με συμπαγή φορέα ο οποίος περιέχεται σε έναν χάρτη της M. Περαιτέρω έστω N το μοναδιαίο κάθετο πεδίο της M σε έναν χάρτη που περιέχει τον φορέα του w, ν το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο πεδίο του ∂M το οποίο είναι εφαπτόμενο στην M, $u = w^{\top}$, $v = w^{\perp}$, και $f = w \cdot N$. Τότε η δεύτερη μεταβολή του εμβαδού της M δίνεται από την σχέση*

$$\begin{aligned} \delta^2 A(M) = & \int_M \left(|\mathrm{grad}_M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) + \\ & \int_M \kappa\left[II_M(u,u) - 2f\mathrm{div}_M u + \kappa f^2 - a\cdot N\right] + \\ & \int_{\partial M} \left[(u\cdot\nu)\mathrm{div}_M u - \langle \nabla_u u, \nu\rangle + 2f II_M(u,\nu) + a\cdot\nu\right] \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

και για μεταβολές που ικανοποιούν την (3.4.1)

$$\begin{aligned}\delta^2 A(M) = &\int_M \left(|\mathrm{grad}_M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right) + \\ &\int_M \kappa\left[II_M(u,u) - 2f\mathrm{div}_M u + \kappa f^2 - a\cdot N\right] + \\ &\int_{\partial M} \left[(u\cdot\nu)\mathrm{div}_M u + f II_M(u,\nu) + f\left\langle D_N w, \nu\right\rangle\right]\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

όπου

$$|B_M|^2 = g^{ik}g^{jl}B_{ij}B_{kl} = B^i_j B^j_i, \quad B_{ij} = II_M(E_i, E_j),$$

και $(E_i(p))_{i=1}^{n-1}$ *είναι η τοπική βάση του* T_pM.

Αποδειξη. Για να κάνουμε τους υπολογισμούς μεθοδικά θέτουμε

$$I := g^{ij}\left\langle (D_{E_i}w)^\perp, (D_{E_j}w)^\perp\right\rangle$$

$$J := g^{ik}g^{jl}\left\langle (D_{E_i}w)^\top, E_j\right\rangle\left\langle (D_{E_l}w)^\top, E_k\right\rangle$$

$$K := \mathrm{div}_M a, \quad L := (\mathrm{div}_M w)^2.$$

Στη συνέχεια, παρατηρώντας ότι όλοι αυτοί οι όροι είναι διγραμμικοί στο w (για τον K θα φανεί σε λίγο), ονομάζουμε του όρους που προκύπτουν από την διάσπαση του w σε εφαπτόμενο και κάθετο μέρος, με προσθήκη των δεικτών n και t οι οποίοι παριστάνουν κάθετο και εφαπτόμενο μέρος αντίστοιχα. Για παράδειγμα, για το I έχουμε $I = I_{tt} + I_{tn} + I_{nt} + I_{tt}$, όπου $I_{tt} = g^{ij}\left\langle (D_{E_i}u)^\perp, (D_{E_j}u)^\perp\right\rangle$, $I_{tn} = g^{ij}\left\langle (D_{E_i}u)^\perp, (D_{E_j}v)^\perp\right\rangle$ κλπ.

Με τη χρήση αυτού του συμβολισμού ο γενικός τύπος (3.2.6) για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού γράφεται στην μορφή

$$\begin{aligned}\delta^2 A(M) &= \int_M (K + L + I_{tt} + 2I_{tn} + I_{nn} - J_{tt} - 2J_{tn} - J_{nn}) \\ &= \int_M \left[(I_{nn} - J_{nn}) + 2(I_{tn} - J_{tn}) + (L + I_{tt} - J_{tt}) + K\right].\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Επειδή οι υπολογισμοί γίνονται συχνά ευκολότερα σε συμβολισμό συντεταγμένων, ενώ τα τελικά αποτελέσματα δίνονται πιο συνοπτικά ελεύθερα συντεταγμένων, δίνουμε όλους τους όρους και στους δύο συμβολισμούς. Υπενθυμίζεται ότι χρησιμοποιούμε παντού την σύμβαση άθροισης. Από την σχέση

$$D_{E_i}v = D_{E_i}(fN) = fD_{E_i}N + (D_{E_i}f)N \tag{3.4.6}$$

δεδομένου ότι $D_{E_i}N \in TM$ έχουμε

$$(D_{E_i}v)^\perp = (D_{E_i}f)N = \frac{\partial f}{\partial q^i}N \tag{3.4.7}$$

όπου $q^1, q^2, \cdots, q^{n-1}$ είναι ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων της M. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για την συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ και την $f \circ \mathbf{x}$, όπου $\mathbf{x}$ είναι μια παραμέτρηση (αντίστροφη απεικόνιση χάρτη) της M. Από την (3.4.7)

$$I_{nn} := g^{ij}\left\langle (D_{E_i}v)^\perp, (D_{E_j}v)^\perp \right\rangle = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial q^j} = \left|\mathrm{grad}_M f\right|^2 \tag{3.4.8}$$

Επειδή $u \cdot N = 0$ και $\dim N_pM = 1$ $(p \in M)$,

$$\begin{aligned} I_{tt} &= g^{ij}\left\langle (D_{E_i}u)^\perp, (D_{E_j}u)^\perp \right\rangle = g^{ij}\left\langle (D_{E_i}u)^\perp, N\right\rangle \left\langle (D_{E_j}u)^\perp, N\right\rangle \\ &= g^{ij}\left\langle D_{E_i}u, N\right\rangle \left\langle D_{E_j}u, N\right\rangle = g^{ij}\left\langle u, D_{E_i}N\right\rangle \left\langle u, D_{E_j}N\right\rangle \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten,

$$I_{tt} = |Wu|^2 = B_{ki}B^k_{\ j}u^iu^j. \tag{3.4.9}$$

Εδώ $u^1, \cdots, u^{n-1}$ είναι οι συντεταγμένες του u στο σύστημα συντεταγμένων $q^1, \cdots, q^{n-1}$, $B_{ij} = II_M(E_i, E_j)$ είναι οι συνιστώσες της 2ης θεμελιώδους μορφής και $B^i_{\ j} = g^{ik}B_{kj}$ είναι οι αντίστοιχες μικτές αντιμεταβλητές-συμμεταβλητές συνιστώσες. Στην παραγωγή της (3.4.9) χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη ταυτότητα

$$D_{E_i}N = WE_i = -B^k_{\ i}E_k. \tag{3.4.10}$$

Από την (3.4.7) και τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_{tn} &= g^{ij}\left\langle (D_{E_i}u)^\perp, (D_{E_j}v)^\perp \right\rangle = g^{ij}\left\langle D_{E_i}u, (D_{E_j}v)^\perp \right\rangle \\ &= g^{ij}\frac{\partial f}{\partial q^j}\left\langle D_{E_i}u, N\right\rangle = -g^{ij}\frac{\partial f}{\partial q^j}\left\langle u, D_{E_i}N\right\rangle \\ &= -\left\langle u, D_{\mathrm{grad}_M f}N\right\rangle = -\left\langle u, W\mathrm{grad}_M f\right\rangle \end{aligned}$$

Από την αυτοσυζυγία (self-adjointness) της απεικόνισης Weingarten και την (3.4.10) παίρνουμε τις ακόλουθες εναλλακτικές εκφράσεις για το I_{tn}:

$$I_{tn} = -\left\langle Wu, \mathrm{grad}_M f\right\rangle = II_M(u, \mathrm{grad}_M f) = B^j_{\ i}u^i\frac{\partial f}{\partial q^j}. \tag{3.4.11}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι $I_{tn} = I_{nt}$.

Προχωράμε στον υπολογισμό των όρων J. Από τον ορισμό της συμμεταβλητής παραγώγου από την Ενότητα 3.2 και τον συμβολισμό της με συνιστώσες $\nabla_Y X = X^i_{|k} Y^k E_i$, $X, Y \in TM$, έχουμε

$$J_{tt} = g^{ik} g^{jl} \left\langle (D_{E_i} u)^\top, E_j \right\rangle \langle (D_{E_l} u)^\top, E_k \rangle = u^k_{|i} u^i_{|k}$$

Χρησιμοποιώντας τον επόμενο συμβολισμό για την διπλή συστολή (contraction) δύο τανυστών S, T

$$S : T = S^i_j T^j_i$$

παίρνουμε

$$J_{tt} = u^k_{|i} u^i_{|k} = \nabla u : \nabla u \tag{3.4.12}$$

Από την (3.4.6)

$$\begin{aligned} J_{tn} &= g^{ik} g^{jl} \left\langle (D_{E_i} u)^\top, E_j \right\rangle \langle (D_{E_l} v)^\top, E_k \rangle \\ &= g^{ik} g^{jl} \left\langle \nabla_{E_i} u, E_j \right\rangle \langle f D_{E_l} N, E_k \rangle \\ &= -f g^{ik} g^{jl} \left\langle u^r_{|i} E_r, E_j \right\rangle II_M(E_l, E_k) \\ &= -f g^{ik} u^l_{|i} B_{lk} = -f u^l_{|i} B^i_l \end{aligned}$$

άρα

$$J_{tn} = -f u^l_{|i} B^i_l = -f II_M : \nabla u \tag{3.4.13}$$

Η συμμετρία $J_{tn} = J_{nt}$ έπεται άμεσα από την εναλλαγή των δεικτών $i \leftrightarrow l$, $j \leftrightarrow k$. Και πάλι από την (3.4.6)

$$\begin{aligned} J_{nn} &= g^{ik} g^{jl} \left\langle (D_{E_i} v)^\top, E_j \right\rangle \langle (D_{E_l} v)^\top, E_k \rangle \\ &= f^2 g^{ik} g^{jl} \left\langle D_{E_i} N, E_j \right\rangle \langle D_{E_l} N, E_k \rangle \\ &= f^2 g^{ik} g^{jl} \left\langle N, D_{E_i} E_j \right\rangle \langle N, D_{E_l} E_k \rangle = f^2 B^k_i B^i_k \end{aligned}$$

οπότε

$$J_{nn} = f^2 B^k_i B^i_k = f^2 |B_M|^2. \tag{3.4.14}$$

Από την (βλ. [**91**])

$$\mathrm{div}_M w = \mathrm{div}_M u - H \cdot v \tag{3.4.15}$$

επειδή η M υποτέθηκε ότι έχει σταθερή μέση καμπυλότητα $\kappa = H \cdot N$, παίρνουμε $\mathrm{div}_M w = \mathrm{div}_M u - \kappa f$ και από αυτό

$$(\mathrm{div}_M w)^2 = (\mathrm{div}_M u)^2 - 2\kappa f \mathrm{div}_M u + \kappa^2 f^2 \tag{3.4.16}$$

Μετά από αυτή την προπαρασκευή είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε το δεξιό μέλος της (3.4.5). Από τις (3.4.11), (3.4.13) και τις ιδιότητες της συμμεταβλητής παραγώγου παίρνουμε

$$I_{tn} - J_{tn} = B^j_i u^i \frac{\partial f}{\partial q^j} + f u^i_{|j} B^j_i = B^j_i (f u^i)_{|j}$$

$$= (f B^j_i u^i)_{|j} - f u^i B^j_{i|j} \tag{3.4.17}$$

Θα αποδείξουμε ότι για μια υπερεπιφάνεια σταθερής μέσης καμπυλότητας ισχύει

$$B^j_{i|j} = 0. \tag{3.4.18}$$

Από τις εξισώσεις Mainardi-Codazzi σε μορφή συνιστωσών

$$B_{jk|i} = B_{ik|j}$$

και το λήμμα του Ricci έχουμε

$$B^k_{j|i} = B^k_{i|j}$$

και από αυτή με συστολή ως προς τους δείκτες i, k

$$B^i_{j|i} = B^i_{i|j}. \tag{3.4.19}$$

Οι εξισώσεις Mainardi-Codazzi σε συμβολισμό συνιστωσών ελήφθησαν από την ελεύθερη συνιστωσών μορφή τους ([**148**], σ. 10),

$$(\nabla_X II)(Y, Z) = (\nabla_Y II)(X, Z)$$

θέτοντας $X = E_i$, $Y = E_j$, $Z = E_k$ και ενθυμούμενοι ότι

$$(\nabla_{E_i} II)(E_j, E_k) = B_{jk|i}.$$

Από τον ορισμό της μέσης καμπυλότητας (3.2.2) και τις σχέσεις (3.2.1) και (3.2.3) είναι

$$\kappa = B^i_i. \tag{3.4.20}$$

Επειδή το κ είναι σταθερό εξ υποθέσεως, εφαρμογή της (3.4.19) δίνει την (3.4.18), και με αυτό η (3.4.17) ανάγεται στην

$$I_{tn} - J_{tn} = (f B^j_i u^i)_{|j} = -\mathrm{div}_M (f W u) \tag{3.4.21}$$

Υπολογίζουμε τον τρίτο όρο κάτω από το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (3.4.5). Από τις (3.4.16) και (3.4.12) έχουμε

$$L - J_{tt} = (u^i_i u^j - u^i u^j_{|i})_{|j} + u^i (u^j_{|ij} - u^j_{ji}) - 2\kappa f \mathrm{div}_M u + \kappa^2 f^2 \tag{3.4.22}$$

$$
\begin{aligned}
L - J_{tt} &= u^i_{|i} u^j_{|j} - u^i_{|j} u^j_{|i} - 2\kappa f u^i_{|i} + \kappa^2 f^2 \\
&= (u^i_{|i} u^j - u^i u^j_{|i})_{|j} - u^j u^i_{|ij} + u^i u^j_{|ij} - 2\kappa f u^i_{|i} + \kappa^2 f^2 \\
&= (u^i_{|i} u^j - u^i u^j_{|i})_{|j} + u^i (u^j_{|ij} - u^j_{|ji}) - 2\kappa f u^i_{|i} + \kappa^2 f^2
\end{aligned} \tag{3.4.23}
$$

Από την ταυτότητα του Ricci (βλ. [**149**], σ. 224),

$$u^r_{|ij} - u^r_{|ji} = R^r_{kji} u^k$$

με συστολή ως προς r, i

$$u^i_{|ij} - u^i_{|ji} = R^i_{kji} u^k = R_{kj} u^k$$

και μετονομασία των δεικτών παίρνουμε

$$u^j_{|ij} - u^j_{|ji} = -R_{ki} u^k \tag{3.4.24}$$

Στις ισότητες αυτές

$$R_{jk} = R^i_{jki} = g^{ri} R_{rjki}$$

είναι οι συνιστώσες του τανυστή του Ricci και

$$R_{ijkl} = \left\langle R(E_k, E_l)E_j, E_i \right\rangle$$

είναι οι συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας ([**149**], σσ. 190, 239). Από το Theorema Egregium του Gauss ([**148**], σ. 5, Θεώρημα 6) έχουμε

$$\left\langle R(E_k, E_l)E_j, E_i \right\rangle = B_{ik} B_{jl} - B_{il} B_{jk}$$

οπότε

$$R_{jk} = g^{il} B_{ik} B_{jl} - B^i_i B_{jk}. \tag{3.4.25}$$

Επειδή η M έχει σταθερή μέση καμπυλότητα, από την (3.4.20) έπεται ότι

$$R_{jk} = g^{rs} B_{rj} B_{sk} - \kappa B_{jk} \tag{3.4.26}$$

Χρήση αυτής της ισότητας στην (3.4.24) δίνει

$$u^i (u^j_{|ij} - u^j_{|ji}) = -g^{rs} B_{ri} B_{sk} u^i u^k + \kappa B_{ik} u^i u^k \tag{3.4.27}$$

Συνδυασμός των (3.4.23), (3.4.27) και (3.4.9) δίνει

$$
\begin{aligned}
L + I_{tt} - J_{tt} = {} & \operatorname{div}_M (u \operatorname{div}_M u - \nabla_u u) \\
& + \kappa II_M(u, u) - 2\kappa f \operatorname{div}_M u + \kappa^2 f^2
\end{aligned} \tag{3.4.28}
$$

Χρησμοποιώντας τις (3.4.28), (3.4.21), (3.4.8) και (3.4.14) στην (3.4.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\delta^2 A(M) = &\int_M \left(|\mathrm{grad}_M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right)\\ &- 2\int_M \mathrm{div}_M(fWu) + \int_M \mathrm{div}_M\left(u\mathrm{div}_M u - \nabla_u u\right)\\ &+ \int_M \kappa\left[II_M(u,u) - 2f\mathrm{div}_M u + \kappa f^2\right] + \int_M \left(\mathrm{div}_M a^\top - H\cdot a^\perp\right)\end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης δίνει

$$\begin{aligned}\delta^2 A(M) = &\int_M \left(|\mathrm{grad}_M f|^2 - |B_M|^2 f^2\right)\\ &+ \int_M \kappa\left[II_M(u,u) - 2f\mathrm{div}_M u + \kappa f^2 - a\cdot N\right]\\ &- 2\int_{\partial M} f\left\langle Wu,\nu\right\rangle + \int_{\partial M}\left[(u\cdot\nu)\mathrm{div}_M u - \left\langle\nabla_u u,\nu\right\rangle\right] + \int_{\partial M} a\cdot\nu\end{aligned}$$

Από την σχέση αυτή η ισότητα (3.4.3) έπεται άμεσα από την

$$\left\langle Wu,\nu\right\rangle = -II_M(u,\nu). \tag{3.4.29}$$

Ο τύπος (3.4.4) έπεται από το Λήμμα 3.9 πιο κάτω. □

Λημμα 3.9. *Για μια μεταβολή της μορφής (3.4.1) το πεδίο της δεύτερης μεταβολής a ικανοποιεί την ακόλουθη ισότητα*

$$\int_M \mathrm{div}_M a^\top = \int_{\partial M}\left(f\left\langle D_N w,\nu\right\rangle - fII_M(u,\nu) + \left\langle\nabla_u u,\nu\right\rangle\right) \tag{3.4.30}$$

Αποδειξη. Εφαρμογή του θεωρήματος της απόλισης στην σχέση (3.4.1) δίνει

$$\int_M \mathrm{div}_M a^\top = \int_{\partial M}\left\langle D_w w,\nu\right\rangle = \int_{\partial M} f\left\langle D_N w,\nu\right\rangle + \int_{\partial M}\left\langle D_u w,\nu\right\rangle. \tag{3.4.31}$$

Από την διάσπαση $w = u + v$ και

$$\left\langle D_u v,\nu\right\rangle = -\left\langle v, D_u\nu\right\rangle = -fII_M(u,\nu) \tag{3.4.32}$$

παίρνουμε την (3.4.30). □

Λημμα 3.10. *Εστω $T = (T_j)_{j=1}^r$, $T_j = (M_{pj})_{p=1}^3$, μια τριφασική διαμέριση ενός χωρίου $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ από ένα σύστημα r C^2-τριπλών συνδέσμων σε χωρία Ω_{pj} $(p = 1,\cdots,3; j = 1,\cdots,r)$. Εστω $\tilde\Omega = \Omega_{pj}$ κάποιο από αυτά τα χωρία. Τότε, για μεταβολές w της μορφής (3.4.1) οι οποίες*

διατηρούν το Σ, η δεύτερη μεταβολή του όγκου του $\tilde{\Omega}$ δίνεται από την σχέση

$$\delta^2|\tilde{\Omega}| = \int_{\partial\tilde{\Omega}\setminus\Sigma} (w \cdot N_{\partial\tilde{\Omega}}) \mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} w \tag{3.4.33}$$

όπου $N_{\partial\tilde{\Omega}}$ είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο του $\tilde{\Omega}$.

Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του Λήμματος 2.9.

Στη βάση των πιο πάνω αποτελεσμάτων, αναπτύσσουμε στο επόμενο θεώρημα έναν τύπο για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού για ελαχιστικές διαμερίσεις τριπλών συνδέσμων με περιορισμούς όγκου.

Θεωρημα 3.11. *Εστω Ω ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^3$, $T = (T_j)_{j=1}^r$, $T_j = (M_{pj})_{p=1}^3$, μια ελαχιστική τριφασική διαμέριση του Ω από ένα σύνολο r C^2 τριπλών συνδέσμων με περιορισμούς όγκου και w μια αποδεκτή μεταβολή που ικανοποιεί την (3.4.1) και τους περιορισμούς όγκου. Σε κάθε φύλλο M_{pj} έχουμε την διάσπαση $w = u_{pj} + v_{pj}$, $u_{pj} \in TM_{pj}$, $v_{pj} \in NM_{pj}$ και θέτουμε $f_{pj} = w \cdot N_{pj} = v_{pj} \cdot N_{pj}$, όπου N_{pj} είναι το μοναδιαίο κάθετο πεδίο της M_{pj}. Τότε ο επόμενος τύπος ισχύει για την δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού του εμβαδού*

$$\begin{aligned}\delta^2 A^\star(T) = &\sum_{p,j} \gamma_{pj} \int_{M_{pj}} \left(|\mathrm{grad}_{M_{pj}} f_{pj}|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}^2\right) \\ &- \sum_{j=1}^r \sum_{p=1}^3 \gamma_{pj} \int_{\partial M_{pj}\cap\Sigma} f_{pj}^2 II_\Sigma(N_{pj}, N_{pj}) \\ &+ \sum_{j=1}^r \sum_{p=1}^3 \gamma_{pj} \int_{S_j} f_{pj} h_{pj} II_{M_{pj}}(\nu_{pj}, \nu_{pj})\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

όπου S_j είναι η ράχη του T_j και $\nu_{pj} \in TM_{pj}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο πεδίο της $\partial M_{pj} \cap S_j$.

Αποδειξη. Η δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού του εμβαδού με πολλαπλασιαστές Lagrange (βλ. σχέση (3.3.7)) δίνεται από την

$$\delta^2 A^\star(M) = \delta^2 A(M) - \sum_{j=2}^3 \lambda_j \sum_{k=1}^{P_j} \delta^2 \left|\Omega_{jk}\right|$$

Πάλι για το συγκεκριμένο της απόδειξης και για να διατηρήσουμε το μέγεθος των τύπων σε ένα ελάχιστο, θεωρούμε την μη-συνεκτική

τριφασική διαμέριση του Σχ. 3.3.1 με τον προσανατολισμό που δείχνεται. Για αυτή την διαμόρφωση, το συναρτησιακό του εμβαδού δίνεται από την (3.3.7). Χρήση της (3.4.33) δίνει

$$\begin{aligned}
\delta^2 A^\star(M) &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj}\delta^2 A(M_{pj}) - \lambda_2 \delta^2 |\Omega_2| - \lambda_3 \delta^2 |\Omega_3| \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj}\delta^2 A(M_{pj}) - (\lambda_2 - \lambda_3) \int_{M_1} w \cdot N_1 \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w \\
&- \lambda_2 \int_{M_{31}} w \cdot (-N_{31}) \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w - \lambda_2 \int_{M_{32}} w \cdot (-N_{32}) \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w \\
&- \lambda_3 \int_{M_{21}} w \cdot N_{21} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w - \lambda_3 \int_{M_{22}} w \cdot N_{22} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w
\end{aligned}$$

Από τις ισότητες (3.3.15) και την $\kappa_{pj} = H_{pj} \cdot N_{pj}$ (βλ. Θεώρημα 3.6(ii)) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\delta^2 A^\star(M) &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj}\delta^2 A(M_{pj}) + \gamma_1 \kappa_1 \int_{M_1} w \cdot N_1 \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w \\
&+ \gamma_{31}\kappa_{31} \int_{M_{31}} w \cdot N_{31} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w + \gamma_{32}\kappa_{32} \int_{M_{32}} w \cdot N_{32} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w \\
&+ \gamma_{21}\kappa_{21} \int_{M_{21}} w \cdot N_{21} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w + \gamma_{22}\kappa_{22} \int_{M_{22}} w \cdot N_{22} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w
\end{aligned}$$

Κάθε όρος του διπλού αθροίσματος του δεξιού μέλους αντιστοιχεί σε ένα ολοκλήρωμα, και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το $\delta^2 A^\star(M)$ ως εξής:

$$\delta^2 A^\star(M) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \left[\delta^2 A(M_{pj}) + \kappa_{pj} \int_{M_{pj}} w \cdot N_{pj} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w \right]$$

Θέτουμε

$$\delta^2 A^\star(M_{pj}) = \delta^2 A(M_{pj}) + \kappa_{pj} \int_{M_{pj}} w \cdot N_{pj} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} w$$

έτσι ώστε

$$\delta^2 A^\star(M) = \sum_{j} \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} \delta^2 A^\star(M_{pj}).$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.4.3) της Πρότασης 3.8 παίρνουμε για το $\delta^2 A^\star(M_{pj})$

$$\begin{aligned}\delta^2 A^\star(M_{pj}) = &\int_{M_{pj}} \left(|\mathrm{grad}_{M_{pj}} f|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f^2\right)\\ &+ \int_{M_{pj}} \kappa_{pj}\left[II_{M_{pj}}(u,u) - 2f\mathrm{div}_{M_{pj}} u + \kappa_{pj} f^2 - a\cdot N_{pj}\right]\\ &+ \int_{\partial M_{pj}} \left[(u\cdot\nu)\mathrm{div}_{M_{pj}} u - \langle \nabla_u u, \nu\rangle + 2f II_{M_{pj}}(u,\nu) + a\cdot\nu\right]\\ &+ \kappa_{pj}\int_{M_{pj}} w\cdot N_{pj}\,\mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} w\end{aligned}$$

και ανακατατάσσοντας όρους,

$$\begin{aligned}\delta^2 A^\star(M_{pj}) = &\int_{M_{pj}} \left(|\mathrm{grad}_{M_{pj}} f|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f^2\right)\\ &+ \int_{M_{pj}} \kappa_{pj}\left[II_{M_{pj}}(u,u) - 2f\mathrm{div}_{M_{pj}} u + \kappa_{pj} f^2\right]\\ &+ \int_{\partial M_{pj}} \left[(u\cdot\nu)\mathrm{div}_{M_{pj}} u - \langle \nabla_u u, \nu\rangle + 2f II_{M_{pj}}(u,\nu)\right.\\ &\qquad\left. + a\cdot\nu\right]\\ &+ \int_{M_{pj}} \kappa_{pj}\left[-\left\langle D_w w, N_{pj}\right\rangle + \left(w\cdot N_{pj}\right)\mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} w\right]\end{aligned} \tag{3.4.35}$$

Επεξεργαζόμαστε τους τελευταίους δύο όρους κάτω από το ολοκλήρωμα στην τελευταία γραμμή. Για συντομία παραλείπουμε τους δείκτες p, j από τα N_{pj} και M_{pj}. Αντικατάσταση $w = u + v$, $v = fN$ και εκτέλεση πράξεων δίνει

$$\begin{aligned}\langle D_w w - (\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} w) w, N\rangle &= \langle D_u u, N\rangle + \langle D_u v, N\rangle + \langle D_v u, N\rangle\\ &\quad + \langle D_v v, N\rangle - f\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} w\\ &= II_M(u,u) + \left\langle f D_u N + (D_u f) N, N\right\rangle\\ &\quad + f\left\langle D_N u, N\right\rangle + f\left\langle D_N v, N\right\rangle\\ &\quad - f\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} v - f\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} u\end{aligned}$$

Από την ταυτότητα

$$\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} X = \mathrm{div}_M X + \langle D_N X, N\rangle$$

και διαγράφοντας αλληλοαναιρούμενους όρους παίρνουμε

$$\langle D_w w - (\mathrm{div}_{\mathbb{R}^n} w) w, N\rangle = II_M(u,u) + \left\langle u, \mathrm{grad}_M f\right\rangle - f\mathrm{div} u + \kappa f^2 \tag{3.4.36}$$

Συνδυασμός των (3.4.35) και (3.4.36) δίνει

$$\delta^2 A^\star(M_{pj}) = \int_{M_{pj}} \left(|\mathrm{grad}_{M_{pj}} f|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f^2\right) + \int_{\partial M_{pj}} \left\langle u \mathrm{div} u - \nabla_u u - 2fWu - \kappa_{pj} f u + a, \nu \right\rangle$$

Χρήση της ισότητας (3.4.30) και απλοποίηση δίνει

$$\delta^2 A^\star(M_{pj}) = \int_{M_{pj}} \left(|\mathrm{grad}_{M_{pj}} f|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f^2\right) + \int_{\partial M_{pj}} \left\langle u \mathrm{div} u - fWu - \kappa_{pj} f u + f D_{N_{pj}} w, \nu \right\rangle$$

Διασπάμε τα ολοκληρώματα επί του ∂M (πάλι για συντομία παραλείπουμε τους δείκτες σε φύλλα και σχετικές ποσότητες) σε ολοκληρώματα επί των $\partial M \cap \Sigma$ και $\partial M \cap \Omega = S$, όπου S είναι η ράχη του τριπλού συνδέσμου στον οποίο ανήκει το M. Λόγω ελαχιστικότητας είναι $u \cdot \nu = 0$ (βλ. ισότητα (3.3.17)) και

$$\begin{aligned} &\int_{\partial M} \left[f II_M(u,\nu) + (\mathrm{div} u - \kappa f) \langle u, \nu\rangle + f \langle D_N w, \nu\rangle\right] = \\ &\int_S \left[f II_M(u,\nu) + (\mathrm{div} u - \kappa f) \langle u, \nu\rangle + f \langle D_N w, \nu\rangle\right] \\ &\qquad + \int_{\partial M \cap \Sigma} f \left[II_M(u,\nu) + \langle D_N w, \nu\rangle\right] \end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Εστω τ το μοναδιαίο εφαπτόμενο πεδίο της $\partial M \cap \Sigma$. Η τριάδα ν, τ, N αποτελεί ένα ορθοκανονικό πλαίσιο (frame) κατά μήκος της $\partial M \cap \Sigma$. Επειδή $u \cdot \nu = u \cdot N = 0$ στο $\partial M \cap \Sigma$ υπάρχει C^1 συνάρτηση $g : \partial M \cap \Sigma \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $u = g\tau$ στο $\partial M \cap \Sigma$, και ως συνέπεια αυτού και των $w \cdot \nu = u \cdot \nu = 0$, έχουμε $w = fN + g\tau$ στο $\partial M \cap \Sigma$. Συνεπώς για το συνοριακό μέρος του πιο πάνω ολοκληρώματος είναι

$$\begin{aligned} &\int_{\partial M \cap \Sigma} f \left[II_M(u,\nu) + \langle D_N w, \nu\rangle\right] = \\ &\int_{\partial M \cap \Sigma} f II_M(u,\nu) - \int_{\partial M \cap \Sigma} f \langle w, D_N \nu\rangle = \\ &\int_{\partial M \cap \Sigma} fg II_M(\tau,\nu) - \int_{\partial M \cap \Sigma} f^2 \langle N, D_N \nu\rangle - \int_{\partial M \cap \Sigma} fg \langle \tau, D_N \nu\rangle \end{aligned} \tag{3.4.38}$$

Εστω N_Σ το *προς τα μέσα* μοναδιαίο κάθετο πεδίο του Σ. Από την

$$II_M(\tau,\nu) = \langle D_\tau \nu, N\rangle = -\langle \nu, D_\tau N\rangle = \langle N_\Sigma, D_\tau N\rangle = II_\Sigma(\tau, N),$$

επειδή $\tau, N \in T\Sigma$, και

$$\langle \tau, D_N \nu \rangle = -\langle \tau, D_N N_\Sigma \rangle = \langle D_N \tau, N_\Sigma \rangle = II_\Sigma(\tau, N),$$

ο πρώτος και ο τελευταίος όρος της τελευταίας γραμμής της (3.4.38) αλληλοαναιρούνται, και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\partial M \cap \Sigma} f\left[II_M(u,\nu) + \langle D_N w, \nu \rangle\right] &= \int_{\partial M \cap \Sigma} f^2 \langle D_N N, \nu \rangle \\ &= -\int_{\partial M \cap \Sigma} f^2 II_\Sigma(N,N).\end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός με γ_{pj} και άθροιση ως προς τις δυνατές τιμές των p, j (δηλ. ως προς τα φύλλα που τέμνουν το σύνορο του Ω) δίνει τον πρώτο όρο της δεύτερης γραμμής της (3.4.34).

Τελικά επεξεργαζόμαστε το ολοκλήρωμα στην ράχη S της (3.4.37). Υπενθυμίζεται ότι παραλείπουμε δείκτες φύλλων και $\mathrm{div} u - \kappa f = \mathrm{div}_M w$. Οπως προηγουμένως θεωρούμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο πεδίο τ της S, έτσι ώστε η τριάδα ν, τ, N να σχηματίζει ένα ορθοκανονικό πλαίσιο κατά μήκος της S. Πάλι υπάρχουν C^1 συναρτήσεις $h, g : S \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $u = h\nu + g\tau$ στην S, και συνεπώς $w = fN + h\nu + g\tau$ στην S. Από τις ταυτότητες

$$\mathrm{div}_M w = \mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} w - \langle D_N w, N \rangle$$

$$\mathrm{div}_S w = \mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} w - \langle D_N w, N \rangle - \langle D_\nu w, \nu \rangle$$

παίρνουμε

$$\mathrm{div}_M w = \mathrm{div}_S w + \langle D_\nu w, \nu \rangle .$$

Με χρήση της ισότητας αυτής η ποσότητα κάτω από το ολοκλήρωμα επί της S στην δεύτερη σειρά της (3.4.37) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}&(u \cdot \nu)\mathrm{div}_M w + f II_M(u,\nu) + f \langle D_N w, \nu \rangle = \\ &(w \cdot \nu)\mathrm{div}_S w + \langle D_\nu w, \nu \rangle h + f II_M(u,\nu) + \langle D_v w, \nu \rangle = \\ &(w \cdot \nu)\mathrm{div}_S w + \langle D_w w, \nu \rangle - g \langle D_\tau w, \nu \rangle + f II_M(u,\nu) = \\ &(w \cdot \nu)\mathrm{div}_S w + \langle D_w w, \nu \rangle - g \langle D_\tau w, \nu \rangle + f h II_M(\nu,\nu) + f g II_M(\tau,\nu)\end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός με γ_{pj} και άθροιση ως προς τα φύλλα του T_j, λαμβάνοντας υπόψη την (3.3.11), δίνει

$$\sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} f_{pj} h_{pj} II_{M_{pj}}(\nu_{pj}, \nu_{pj}) + g_j \sum_{p=1}^{3} \gamma_{pj} f_{pj} II_{M_{pj}}(\tau_j, \nu_{pj}) \tag{3.4.39}$$

Θα δείξουμε ότι ο δεύτερος όρος μηδενίζεται. Σε κάθε φύλλο του συνδέσμου (παραλείποντας δείκτες) έχουμε

$$\begin{aligned} fII_M(\tau,\nu) &= -f\langle D_\tau N,\nu\rangle = -\langle D_\tau v,\nu\rangle \\ &= -\langle D_\tau w,\nu\rangle + \langle D_\tau(h\nu+g\tau),\nu\rangle \\ &= -\langle D_\tau w,\nu\rangle + g\langle D_\tau\tau,\nu\rangle + D_\tau h. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός με γ_{pj} και άθροιση ως προς όλα τα φύλλα του T_j, εν όψει της (3.3.11) και της

$$\sum_{p=1}^{3}\gamma_{pj}h_{pj} = \sum_{p=1}^{3}\gamma_{pj}w\cdot\nu_{pj} = 0$$

δίνει

$$\sum_{p=1}^{3}\gamma_{pj}f_{pj}II_{M_{pj}}(\tau_j,\nu_{pj}) = 0.$$

Αθροιση του εναπομείνατος όρου $\sum_{p=1}^{3}\gamma_{pj}f_{pj}h_{pj}II_{M_{pj}}(\nu_{pj},\nu_{pj})$ της (3.4.39) ως προς όλους τους τριπλούς συνδέσμους του συστήματος δίνει τον δεύτερο όρο στην δεύτερη γραμμή της σχέσης (3.4.34), και με αυτό η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατηρηση 3.12. Το κάθετο πεδίο του Σ, N_Σ, επιλέχτηκε έτσι ώστε η συνιστώσα $II_\Sigma(N_{pj},N_{pj})$ της δεύτερης θεμελιώδους μορφής να είναι μη-αρνητική για κυρτά Ω.

Παρατηρηση 3.13. Για διφασικές διαμερίσεις και κάθετες μεταβολές η σχέση (3.4.34) απλοποιείται στον τύπο της δεύτερης μεταβολής των Sternberg-Zumbrun [**109**].

Για μετέπειτα αναφορά συνοψίζουμε τις συνθήκες συναρμογής στη ράχη ελαχιστικών τριπλών συνδέσμων. Εστω $T = (M_i)_{i=1}^3$ ένας τέτοιος τριπλός σύνδεσμος με ράχη $S = \partial M_1 = \partial M_2 = \partial M_3$. Για απλότητα υποθέτουμε $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$. Από την πρώτη μεταβολή, Θεώρημα 3.6, έχουμε (βλ. Σχ. 3.4.1)

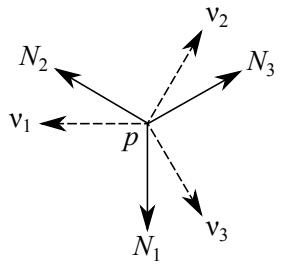
$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \tag{3.4.40}$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0 \tag{3.4.41}$$

στην S. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $X \in T_p\mathbb{R}^3$, $p \in S$, οι προβολές του $X_i = X\cdot\nu_i$ στα ν_i ικανοποιούν την σχέση

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \tag{3.4.42}$$

Μια όμοια ισότητα ικανοποιείται και από τις προβολές του X στα N_i.



Σχημα 3.4.1. Τα μοναδιαία διανυσματικά πεδία N_i, ν_i $(i = 1, 2, 3)$ στο $p \in S$. S είναι η ράχη του τριπλού συνδέσμου. Το N_i είναι κάθετο στην M_i και το $\nu_i \in TM_i$ είναι κάθετο στο T_pS (σύγκρινε με Σχ. 3.1.1, αριστερός τριπλός σύνδεσμος). Το επίπεδο του χαρτιού είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\tau(p) \in T_pS$ (δεν φαίνεται).

Για το πεδίο της πρώτης μεταβολής w χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\left.\begin{aligned} f_i &= v_i \cdot N_i = w \cdot N_i \\ h_i &= u_i \cdot \nu_i = w \cdot \nu_i \\ g_i &= u_i \cdot \tau_i = w \cdot \tau_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.4.43}$$

όπου τ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο πεδίο στην ράχη, τέτοιο ώστε σε κάθε σημείο $p \in S$ η τριάδα (τ, ν_i, N_i) να είναι θετικά προσανατολισμένη για όλα τα $i = 1, 2, 3$. Από την (3.4.42) έχουμε

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + f_3 &= 0 \\ h_1 + h_2 + h_3 &= 0 \\ g_1 = g_2 = g_3 &= g \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

Από το Σχ. 3.4.1 παίρνουμε τις επόμενες στοιχειώδεις γεωμετρικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} N_2 &= -\tfrac{1}{2}N_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\nu_1 \\ \nu_2 &= +\tfrac{\sqrt{3}}{2}N_1 - \tfrac{1}{2}\nu_1 \\ N_3 &= -\tfrac{1}{2}N_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\nu_1 \\ \nu_3 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}N_1 - \tfrac{1}{2}\nu_1 \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

Από αυτές τις σχέσεις και την (3.4.43) παίρνουμε

$$\begin{aligned} f_2 &= -\tfrac{1}{2}f_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}h_1 \\ h_2 &= +\tfrac{\sqrt{3}}{2}f_1 - \tfrac{1}{2}h_1 \\ f_3 &= -\tfrac{1}{2}f_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}h_1 \\ h_3 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}f_1 - \tfrac{1}{2}h_1 \end{aligned} \tag{3.4.46}$$

Οι σχέσεις (3.4.45), (3.4.46) εκφράζουν τις *συνθήκες συναρμογής στην ράχη*. Οταν $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_1$ έχουμε πάλι γραμμικές εξαρτήσεις όμοιες με τις (3.4.45), (3.4.46), με συντελεστές εξαρτώμενους από τα $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Πορισμα 3.14. *Στο πλαίσιο του Θεωρήματος 3.11 και υποθέτοντας ότι $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$, η σχέση για την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού (3.4.34) ανάγεται στην*

$$\begin{aligned} \delta^2 A^\star(T) = &\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} \left(|\mathrm{grad}_{M_{pj}} f_{pj}|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}^2 \right) \\ &- \sum_{j=1}^{r} \sum_{p=1}^{3} \int_{\partial M_{pj} \cap \Sigma} f_{pj}^2 II_\Sigma(N_{pj}, N_{pj}) \\ &+ \sum_{j=1}^{r} \int_{S_j} \left[\alpha_j \left(f_{1j}^2 - h_{1j}^2 \right) + 2\beta_j f_{1j} h_{1j} \right] \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Τα α_j, β_j δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha_j = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[II_{M_{2j}}(\nu, \nu) - II_{M_{3j}}(\nu, \nu) \right], \quad \beta_j = \frac{3}{4} II_{M_{1j}}(\nu, \nu) \tag{3.4.48}$$

Τα πεδία ν αντιστοιχούν στην διεπιφάνεια της ενδεικνυόμενης δεύτερης θεμελιώδους μορφής.

Παρατηρηση 3.15. Η σχέση (3.4.47) είναι δυνατόν να βασίζεται στις φάσεις 2 ή 3 αντί για την φάση 1. Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις (3.4.48) πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα. Η χρησιμότητα αυτής της έκφρασης βρίσκεται στην ανεξαρτησία των εμπλεκόμενων συνιστωσών της μεταβολής.

Αποδειξη. Για συντομία γράφουμε II_{pj} αντί για $II_{M_{pj}}(\nu_{pj}, \nu_{pj})$. Θεωρώντας έναν συγκεκριμένο τριπλό σύνδεσμο T_j και παραλείποντας τον αντίστοιχο δείκτη, δηλ. γράφουμε II_p αντί για II_{pj} και f_p αντί για f_{pj}, υπολογίζουμε τα αθροίσματα $\sum_p f_{pj} h_{pj} II_{M_{pj}}(\nu, \nu)$ στην τρίτη γραμμή της (3.4.34). Από τις συνθήκες συναρμογής (3.4.46) στην ράχη

έχουμε

$$\sum_{i=1}^{3} f_i h_i II_i = II_1 f_1 + II_2 \left(-\tfrac{1}{2} f_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} h_1\right)\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} f_1 - \tfrac{1}{2} h_1\right)$$
$$+ II_3 \left(-\tfrac{1}{2} f_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2} h_1\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} f_1 - \tfrac{1}{2} h_1\right)$$

και μετά από εκτέλεση πράξεων

$$\sum_{i=1}^{3} f_i h_i II_i = \tfrac{\sqrt{3}}{4}(II_2 - II_3)(f_1^2 - h_1^2) + \left(II_1 - \tfrac{1}{2} II_2 - \tfrac{1}{2} II_3\right) f_1 h_1$$

Θέτουμε $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}(II_2 - II_3)$, $\beta = \frac{1}{4}(2II_1 - II_2 - II_3)$ και αθροίζουμε ως προς όλους τους τριπλούς συνδέσμους στο σύστημα, το οποίο δίνει την (3.4.47). Μένει να δειχθεί η δεύτερη των (3.4.48).

Από τον ορισμό του διανύσματος της μέσης καμπυλότητας (3.2.1) έχουμε σε κάθε φύλλο

$$H \cdot N = \langle D_\nu \nu, N\rangle + \langle D_\tau \tau, N\rangle$$

Από ελαχιστικότητα $H \cdot N = \kappa$ =σταθ., επομένως

$$II(\nu,\nu) = \langle D_\nu \nu, N\rangle = \kappa - \langle D_\tau \tau, N\rangle .$$

Αθροιση ως προς τα φύλλα του τριπλού συνδέσμου, εν όψει των (3.3.13) και (3.4.41), δίνει

$$II_1 + II_2 + II_3 = 0. \tag{3.4.49}$$

Χρήση αυτής της ισότητας στην $\beta = \frac{1}{4}(2II_1 - II_2 - II_3)$ αποδεικνύει την δεύτερη των (3.4.48), και με αυτό η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.5. Εφαρμογές σε μη-συνεκτικές διαμερίσεις τριπλών συνδέσμων στον $\mathbb{R}^3$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της δεύτερης μεταβολής του εμβαδού για να αποδείξουμε την αστάθεια ορισμένων μη-συνεκτικών τριφασικών διαμερίσεων με τριπλούς συνδέσμους και δείχνουμε ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την μελέτη της μη-συνεκτικότητας διφασικών διαμερίσεων έχει περιορισμένο πεδίο εφαρμογής σε προβλήματα διαμερίσεων με τριπλούς συνδέσμους.

Ακολουθώντας την μέθοδο της διφασικής διαμέρισης [**109, 146**], θεωρούμε μεταβολές με σταθερή κάθετη συνιστώσα σε κάθε φύλλο.

Μεταβολές κάθετες σε όλα τα φύλλα ενός τριπλού συνδέσμου, διαφορετικές από την τετριμμένη, δεν είναι δυνατές, διότι στην περίπτωση αυτή το πεδίο μεταβολής w θα ήταν κάθετο σε τρια γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δηλ. το τ (το εφαπτόμενο διάνυσμα της ράχης) και τα δύο εφαπτόμενα πεδία των φύλλων ν_1, ν_2 τα οποία είναι κάθετα στη ράχη. Κατά συνέπεια, μη-τετριμμένες εφαπτομενικές μεταβολές u είναι αναπόφευκτες, τουλάχιστον σε μια περιοχή της ράχης. Για απλότητα παίρνουμε $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$. Παραλείπουμε τον δεύτερο δείκτη στα γ καθώς δεν εξαρτώνται από την ράχη (βλ. (3.3.10)). Επειδή η μεταβολή πρέπει να διατηρεί τον όγκο των φάσεων, για το σύστημα τριπλών συνδέσμων του Σχ. 3.3.1 έχουμε από την (3.3.4) με $w \cdot N = v \cdot N = f$ σε κάθε φύλλο,

$$+f_1 A_1 - f_{31} A_{31} - f_{32} A_{32} = 0 \tag{3.5.1}$$

$$-f_1 A_1 + f_{21} A_{21} + f_{22} A_{22} = 0 \tag{3.5.2}$$

όπου $A_{pj} = |M_{pj}| > 0$. Από την (3.4.46) παίρνουμε

$$A_{21}\tilde{h}_1 + A_{22}\tilde{h}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2A_1 + A_{21} + A_{22}\right)\tilde{f} \tag{3.5.3}$$

$$A_{31}\tilde{h}_1 + A_{32}\tilde{h}_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2A_1 + A_{31} + A_{32}\right)\tilde{f}. \tag{3.5.4}$$

όπου $\tilde{h}_j = h_{1j}$ και $\tilde{f} = f_1$. Ετσι ο τελευταίος όρος της (3.4.47), θέτοντας $\tilde{f} = 1$ γίνεται

$$\left(1 - \tilde{h}_1^2\right)\int_{S_1} \alpha + 2\tilde{h}_1 \int_{S_1} \beta + \left(1 - \tilde{h}_2^2\right)\int_{S_2} \alpha + 2\tilde{h}_2 \int_{S_2} \beta$$

Για ευσταθείς διαμερίσεις, $\delta^2 A^\star(T) > 0$ για μη-τετριμμένες μεταβολές. Για σταθερές μεταβολές η συνθήκη αυτή είναι

$$\left(1 - \tilde{h}_1^2\right)\int_{S_1} \alpha + 2\tilde{h}_1 \int_{S_1} \beta + \left(1 - \tilde{h}_2^2\right)\int_{S_2} \alpha + 2\tilde{h}_2 \int_{S_2} \beta >$$
$$\sum_{p,j} f_{pj}^2 \int_{M_{pj}} |B_{M_{pj}}|^2 + \sum_{p,j} f_{pj}^2 \int_{\partial M_{pj} \cap \Sigma} II_\Sigma(N_{pj}, N_{pj})$$

Για κυρτό Ω η παράσταση του δεξιού μέλους είναι μη-αρνητική, και εαν αποδείξουμε ότι η παράσταση του αριστερού μέλους είναι μη-θετική, δηλ.

$$\left(1 - \tilde{h}_1^2\right)\int_{S_1} \alpha + 2\tilde{h}_1 \int_{S_1} \beta + \left(1 - \tilde{h}_2^2\right)\int_{S_2} \alpha + 2\tilde{h}_2 \int_{S_2} \beta \leqslant 0$$

παίρνουμε μια αντίφαση, και αυτό θα αποδείκνυε ότι η διαμέριση δεν είναι ευσταθής. Από αυτά που αποδεικνύουμε στη συνέχεια

(βλ. Ενότητα 3.7) προκύπτει ότι η συνθήκη αυτή δεν ισχύει εν γένει, και έτσι οι μέθοδοι των διφασικών διαμερίσεων δεν είναι εν γένει εφαρμόσιμες σε προβλήματα διαμέρισης τριπλών συνδέσμων.

Εν τούτοις, η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε αστάθεια σε ορισμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα στην μη-συνεκτική διαμέριση του Σχ. 3.3.1, υποθέτοντας ότι η M_1 είναι επίπεδη, δηλ. $II_1 = 0$, έχουμε $\beta = 0$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $A_{21} = A_{22}$, $A_{31} = A_{32}$ και $II_2 \geqslant 0$ και στις δύο ράχες. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (3.5.3)-(3.5.4) δεν έχει λύση, εκτός εάν $f_1 = 0$, $\tilde{h}_2 = -\tilde{h}_1$, και τότε η πιο πάνω συνθήκη απλοποιείται στην

$$-\tilde{h}_1^2 \int_{S_1} \alpha - \tilde{h}_2^2 \int_{S_2} \alpha \leqslant 0$$

η οποία ισχύει σύμφωνα με την υπόθεση $II_2 \geqslant 0$. Εχουμε αποδείξει την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 3.16. *Εστω Ω ένα κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^3$ και $T = (T_j)_{j=1}^2$, $T_j = (M_{pj})_{p=1}^3$, μια ελαχιστική μη-συνεκτική τριφασική διαμέριση του Ω από ένα σύστημα δύο C^2 τριπλών συνδέσμων όπως στο Σχ. 3.3.1, με περιορισμούς όγκου. Υποθέτουμε ότι η $\Sigma = \partial\Omega$ είναι C^2 σε μια περιοχή της $\Sigma \cap \overline{T}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η M_1 είναι επίπεδη, τα εμβαδά των φύλλων $A_{pj} = |M_{pj}|$ ικανοποιούν την συνθήκη*

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = 0$$

και $II_{2j}(\nu, \nu) \geqslant 0$ για τις δύο ράχες $j = 1, 2$. Τότε η μη-συνεκτική διαμέριση τριπλών συνδέσμων T είναι ασταθής.

3.6. Φασματική ανάλυση της διγραμμικής μορφής της δεύτερης μεταβολής του εμβαδού

Για να διατηρήσουμε το μέγεθος των τύπων στο ελάχιστο και να εστιάσουμε στην ουσία του επιχειρήματος, παρουσιάζουμε τις λεπτομέρειες για την διαμόρφωση του Σχ. 3.3.1 και υιοθετούμε την υπόθεση $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ από αυτό το σημείο και κάτω.

Εστω T ένα σύστημα τριπλών συνδέσμων ενός προβλήματος διαμέρισης στο Ω, το οποίο υποτίθεται ελαχιστικό, δηλ. $\delta A(T) = 0$. Οταν η T είναι ευσταθής, είναι τοπικός ελαχιστοποιητής του συναρτησιακού του εμβαδού, και έτσι ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις

συνθήκες κάτω από τις οποίες η T είναι ευσταθής. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο φασματικής ανάλυσης για την διγραμμική μορφή που εκφράζει την δεύτερη μεταβολή του εμβαδού της T,

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{f}) = \sum_{p,j} \int_{M_{pj}} \left(|\nabla^{M_{pj}} f_{pj}|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}^2 \right) - \sum_{p,j} \int_{\partial M_{pj} \cap \Sigma} \sigma_{pj} f_{pj}^2 \\
+ \sum_j \int_{S_j} \left[\alpha_j \left(f_{1j}^2 - h_{1j}^2 \right) + 2\beta_j f_{1j} h_{1j} \right]
\end{aligned}
\tag{3.6.1}
$$

όπου $\sigma_{pj} = II_\Sigma(N_{pj}, N_{pj})$ και $\mathbf{f} = (f_1, f_{21}, f_{31}, f_{22}, f_{32})$. Καθώς $f_{11} \equiv f_{12}$ γράφουμε απλά f_1. Για συντομία θα γράφουμε $\nabla^M f$ αντί για $\mathrm{grad}_M f$. Παρόλο που τα J και $\delta^2 A^\star(T)$ είναι ταυτόσημες εκφράσεις, η σημασία τους είναι διαφορετική: στο πλαίσιο της φασματικής ανάλυσης η T είναι ένα *σταθερό* σύστημα (δηλ. δεν είναι υποκείμενο σε μεταβολές) πολλαπλοτήτων με σύνορο, και το J είναι ένα μηγραμμικό συναρτησιακό σε έναν κατάλληλα οριζόμενο συναρτησιακό χώρο επί της T, ο οποίος περιέχει τις αποδεκτές μεταβολές της T. Συνεπώς οι συναρτήσεις του χώρου αυτού ικανοποιούν τις συνθήκες σταθερότητας όγκου

$$
\begin{cases}
-\int_{M_1} f_1 + \int_{M_{21}} f_{21} + \int_{M_{22}} f_{22} = 0 \\
-\int_{M_1} f_1 + \int_{M_{31}} f_{31} + \int_{M_{32}} f_{32} = 0
\end{cases}
\tag{3.6.2}
$$

και την συνθήκη κανονικοποίησης

$$
\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} f_{pj}^2 = \int_{M_1} f_1^2 + \int_{M_{21}} f_{21}^2 + \int_{M_{31}} f_{31}^2 + \int_{M_{22}} f_{22}^2 + \int_{M_{32}} f_{32}^2 = 1
\tag{3.6.3}
$$

επί πλέον των συνθηκών συναρμογής στις ράχες των συνδέσμων (βλ. πρώτη των (3.4.44)),

$$
\begin{cases}
f_1 + f_{21} + f_{31} = 0 & \textit{στο } S_1 \\
f_1 + f_{22} + f_{32} = 0 & \textit{στο } S_2
\end{cases}
\tag{3.6.4}
$$

Μεταβολές εκτελούνται εντός του χώρου αυτού και όχι στις πολλαπλότητες της διαμέρισης όπως προηγουμένως. Για ευκολία εισάγουμε πολλαπλασιαστές Lagrange λ_2, λ_3, και το αντίστοιχο συναρτησιακό

$$
\begin{aligned}
J^\star(\mathbf{f}; \mu, \lambda_2, \lambda_3) = J(\mathbf{f}) - \mu \left(\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} f_{pj}^2 - 1 \right) \\
-\lambda_2 \left(- \int_{M_1} f_1 + \int_{M_{21}} f_{21} + \int_{M_{22}} f_{22} \right) \\
-\lambda_3 \left(- \int_{M_1} f_1 + \int_{M_{31}} f_{31} + \int_{M_{32}} f_{32} \right)
\end{aligned} \tag{3.6.5}
$$

και ενδιαφερόμαστε για τα κρίσιμα σημεία του $J^\star$.

Πρόταση 3.17. *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για μια C^2 συνάρτηση $\mathbf{f} = (f_1, f_{21}, f_{31}, f_{22}, f_{32})$ στην T, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις συναρμογής (3.6.4) στις ράχες, να είναι κρίσιμο σημείο του $J^\star$, ή ισοδύναμα του J με τις συνθήκες (3.6.2) και (3.6.3), είναι να ικανοποιεί το επόμενο σύστημα γραμμικών μη-ομογενών ΜΔΕ*

$$\Delta_{M_{pj}} f_{pj} + \left(\mu + |B_{M_{pj}}|^2 \right) f_{pj} = -\tfrac{1}{2} \lambda_{pj} \tag{3.6.6}$$

με συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann*:*

$$D_{\nu_{pj}} f_{pj} = \sigma_{pj} f_{pj} \quad \text{ον } \partial M_{pj} \cap \Sigma \tag{3.6.7}$$

$$\alpha_j f_{1j} + \beta_j h_{1j} = -D_{\nu_{1j}} f_{1j} + \tfrac{1}{2} \left(D_{\nu_{2j}} f_{2j} + D_{\nu_{3j}} f_{3j} \right) \tag{3.6.8}$$

$$\beta_j f_{1j} - \alpha_j h_{1j} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \left(D_{\nu_{2j}} f_{2j} - D_{\nu_{3j}} f_{3j} \right) \tag{3.6.9}$$

Παρατήρηση 3.18. Στην (3.6.6) Δ_M είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami στην M που ορίζεται από την σχέση

$$\Delta_M f = \operatorname{div}_M(\nabla^M f) = g^{-1/2} (g^{1/2} g^{ij} f_{,j})_{,i}$$

σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $q^1, \cdots, q^{n-1}$, όπου $g = \det \left[g_{ij} \right]$, g_{ij} είναι ο μετρικός τανυστής και ο τελεστής κόμματος υποδηλώνει μερική παράγωγο ως προς την αντίστοιχη συντεταγμένη, δηλ. $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial q^i} = D_{E_i} f$. Επιδή η M είναι δεδομένη, τα g_{ij} είναι δεδομένες συναρτήσεις και η (3.6.6) είναι γραμμική εξίσωση.

Παρατήρηση 3.19. Οι ΜΔΕ (3.6.6) και οι συνοριακές συνθήκες (3.6.7) είναι ανεξάρτητες από την ιδιαιτερότητα του προβλήματος, με την

προυπόθεση ότι τα λ έχουν ορισθεί κατάλληλα. Οι συνοριακές συνθήκες (3.6.8) και (3.6.9), καθώς επίσης και ο ορισμός των λ εξαρτώνται από το πρόβλημα. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα η ιδιαίτερη μορφή των ΜΔΕ είναι

$$\begin{cases} \Delta_{M_{21}} f_{21} + \left(\mu + |B_{M_{21}}|^2\right) f_{21} = -\frac{1}{2}\lambda_2 \\ \Delta_{M_{21}} f_{21} + \left(\mu + |B_{M_{21}}|^2\right) f_{21} = -\frac{1}{2}\lambda_2 \\ \Delta_{M_{22}} f_{22} + \left(\mu + |B_{M_{22}}|^2\right) f_{22} = -\frac{1}{2}\lambda_3 \\ \Delta_{M_{22}} f_{22} + \left(\mu + |B_{M_{22}}|^2\right) f_{22} = -\frac{1}{2}\lambda_3 \\ \Delta_{M_1} f_1 + \left(\mu + |B_{M_1}|^2\right) f_1 = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) \end{cases} \tag{3.6.10}$$

Αποδειξη. Η πρώτη μεταβολή του $J^\star$ δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \delta J^\star(\mathbf{f})\boldsymbol{\phi} = & \left.\frac{d}{dt} J^\star(\mathbf{f} + t\boldsymbol{\phi})\right|_{t=0} \\ & = 2\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} \left(\nabla^{M_{pj}} f_{pj} \cdot \nabla^{M_{pj}} \phi_{pj} - |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}\phi_{pj}\right) \\ & - 2\sum_{p,j} \int_{\partial M_{pj}} \sigma_{pj} f_{pj}\phi_{pj} - 2\mu \sum_{p,j} \int_{M_{pj}} f_{pj}\phi_{pj} \\ & + 2\sum_{j} \int_{S_j} \left[\alpha_j \left(f_{1j}\phi_{1j} - h_{1j}\psi_{1j}\right) + \beta_j \left(\phi_{1j} h_{1j} + f_{1j}\psi_{1j}\right)\right] \\ & - \lambda_2 \left(-\int_{M_1} \phi_1 + \int_{M_{21}} \phi_{21} + \int_{M_{22}} \phi_{22}\right) \\ & - \lambda_3 \left(-\int_{M_1} \phi_1 + \int_{M_{31}} \phi_{31} + \int_{M_{32}} \phi_{32}\right) \end{aligned}$$

με

$$\psi_{1j} = \delta h_{1j} = \delta\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(f_{1j} + 2f_{2j}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1j} + 2\phi_{2j}\right)$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη των (3.4.46). Από τον τύπο του Green για πολλαπλότητες, ο όρος στην δεύτερη γραμμή γράφεται στην μορφή

$$-2\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} \phi_{pj} \left(\Delta_{M_{pj}} f_{pj} + |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}\right) + 2\sum_{p,j} \int_{\partial M_{pj}} \phi_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj}$$

και διαχωρίζοντας τα ολοκληρώματα στο ∂M_{pj} σε συνοριακό και ραχιαίο μέρος

$$\int_{\partial M_{pj}} \phi_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj} = \int_{\partial M_{pj} \cap \Sigma} \phi_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj} + \int_{S_j} \phi_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj}$$

παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\delta J^{\star}(\mathbf{f}) = &-2\sum_{p,j}\int_{M_{pj}} \phi_{pj}\left[\Delta_{M_{pj}} f_{pj} + \left(\mu + |B_{M_{pj}}|^2\right) f_{pj}\right] \\
&+ 2\sum_{p,j}\int_{\partial M_{pj}\cap\Sigma} \phi_{pj}\left(D_{\nu_{pj}} f_{pj} - \sigma_{pj} f_{pj}\right) \\
&+ 2\sum_{p,j}\int_{S_j} \phi_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj} \\
&+ 2\sum_{j}\int_{S_j} \left[\alpha_j\left(f_{1j}\phi_{1j} - h_{1j}\psi_{1j}\right) + \beta_j\left(\phi_{1j}h_{1j} + f_{1j}\psi_{1j}\right)\right] \\
&- \sum_{p,j}\lambda_{pj}\int_{M_{pj}} \phi_{pj}
\end{aligned}
$$

Εχουμε θέσει $\lambda_{11} = -(\lambda_2 + \lambda_3)$, $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_2$ και $\lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_3$. Χρησιμοποιώντας μεταβολές με συμπαγή φορέα που μηδενίζονται σε όλα τα $\partial M_{pj} \cap \Sigma$ και S_j παίρνουμε την (3.6.6). Μεταβολές ϕ συγκεντρωμένες στα $\partial M_{pj} \cap \Sigma$ δίνουν την (3.6.7). Οι υπόλοιποι όροι είναι ολοκληρώματα επάνω σε ράχες:

$$
\begin{aligned}
\delta J^{\star}(\mathbf{f}) = &\ 2\sum_{p,j}\int_{S_j} \phi_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj} \\
&+ 2\sum_{j}\int_{S_j} \left[\alpha_j\left(f_{1j}\phi_{1j} - h_{1j}\psi_{1j}\right) + \beta_j\left(\phi_{1j}h_{1j} + f_{1j}\psi_{1j}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (3.4.44) για να εκφράσουμε το ϕ_{3j} συναρτήσει ανεξάρτητων ποσοτήτων,

$$
\phi_{3j} = \delta f_{3j} = -\delta f_{1j} - \delta f_{2j} = -\phi_{1j} - \phi_{2j},
$$

αναπτύσσοντας και συλλέγοντας όμοιους όρους,

$$\begin{aligned}
\delta J^\star(\mathbf{f}) &= 2\sum_j \int_{S_j} \phi_{1j} D_{\nu_{1j}} f_{1j} + \phi_{2j} D_{\nu_{2j}} f_{2j} + \phi_{3j} D_{\nu_{3j}} f_{3j} \\
&\quad + 2\sum_j \int_{S_j} \left[\alpha_j \left(f_{1j}\phi_{1j} - h_{1j}\psi_{1j}\right) + \beta_j \left(\phi_{1j} h_{1j} + f_{1j}\psi_{1j}\right)\right] \\
&= 2\sum_j \int_{S_j} \phi_{1j} \left(D_{\nu_{1j}} f_{1j} - D_{\nu_{3j}} f_{3j}\right) + \phi_{2j} \left(D_{\nu_{2j}} f_{2j} - D_{\nu_{3j}} f_{3j}\right) \\
&\quad + 2\sum_j \int_{S_j} \phi_{1j} \left(\alpha_j f_{1j} + \beta_j h_{1j}\right) + 2\sum_j \int_{S_j} \psi_{1j} \left(\beta_j f_{1j} - \alpha_j h_{1j}\right)
\end{aligned}$$

Αντικατάσταση του ϕ_{2j} από την σχέση $\phi_{2j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_{1j} - \frac{1}{2}\phi_{1j}$ και εκτέλεση πράξεων δίνει

$$\begin{aligned}
\delta J^\star(\mathbf{f}) &= 2\sum_j \int_{S_j} \phi_{1j} \left[D_{\nu_{1j}} f_{1j} - \tfrac{1}{2} D_{\nu_{2j}} f_{2j} - \tfrac{1}{2} D_{\nu_{3j}} f_{3j} + \alpha_j f_{1j} + \beta_j h_{1j}\right] \\
&\quad + 2\sum_j \int_{S_j} \psi_{1j} \left(\tfrac{2}{\sqrt{3}} D_{\nu_{2j}} f_{2j} - \tfrac{2}{\sqrt{3}} D_{\nu_{3j}} f_{3j} + \beta_j f_{1j} - \alpha_j h_{1j}\right)
\end{aligned}$$

Με χρήση μεταβολών που είναι συγκεντρωμένες σε κάθε ράχη χωριστά παίρνουμε τις (3.6.8) και (3.6.9). Το αντίστροφο είναι άμεσο. □

Στα επόμενα παρουσιάζουμε δύο προτάσεις οι οποίες είναι απαραίτητες για την μελέτη της ευστάθειας διαμερίσεων τριπλών συνδέσμων. Η επόμενη πρόταση εκφράζει ότι μία διαμέριση είναι ασταθής αν υπάρχει ιδιοτιμή $\mu < 0$ του συστήματος (3.6.6)-(3.6.9).

Πρόταση 3.20. *Εστω T ένα σύστημα C^2 τριπλών συνδέσμων μιας τριφασικής ελαχιστικής διαμέρισης στο Ω, και $\mathbf{f}$ μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος (3.6.6)-(3.6.9) με αντίστοιχη ιδιοτιμή μ. Τότε*

$$J(\mathbf{f}) = \mu. \tag{3.6.11}$$

Ειδικά εάν $\mu < 0$, η T είναι ασταθής.

Παρατηρηση 3.21. Η Πρόταση 3.20 μας λέει ότι με δεδομένη μια αρνητική ιδιοτιμή, δεν χρειάζεται κανένα κάτω φράγμα να είναι γνωστό προκαταβολικά για το συναρτησιακό J, για να μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια ελαχιστική διαμέριση είναι ασταθής.

Αποδειξη. Πολλαπλασιασμός της (3.6.6) με f_{pj}, ολοκλήρωση στην M_{pj} και άθροιση σε όλα τα φύλλα όλων των τριπλών συνδέσμων, λαμβάνοντας υπόψη τις (3.6.2) και (3.6.3) δίνει

$$\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} \left(f_{pj} \Delta_{M_{pj}} f_{pj} + |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}^2 \right) + \mu = 0$$

Εφαρμογή του τύπου του Green δίνει

$$\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} \left(|\nabla^{M_{pj}} f_{pj}|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}^2 \right) - \sum_{p,j} \int_{\partial M_{pj}} f_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj} = \mu$$

Διαχωρίζοντας τα ολοκληρώματα στα ∂M_{pj} σε συνοριακό και ραχιαίο μέρος και χρησιμοποώντας την συνοριακή συνθήκη (3.6.7) παίρνουμε

$$\sum_{p,j} \int_{M_{pj}} \left(|\nabla^{M_{pj}} f_{pj}|^2 - |B_{M_{pj}}|^2 f_{pj}^2 \right) - \sum_{p,j} \int_{\partial M_{pj} \cap \Sigma} \sigma_{pj} f_{pj}^2$$
$$- \sum_{p,j} \int_{S_j} f_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj} = \mu$$

Επιπλέον σε κάθε ράχη έχουμε

$$\alpha_j \left(f_{1j}^2 - h_{1j}^2 \right) + 2\beta_j f_{1j} h_{1j} = f_{1j}(\alpha_j f_{1j} + \beta_j h_{1j}) + h_{1j}(\beta_j f_{1j} - \alpha_j h_{1j}) =$$
$$f_{1j} \left[-D_{\nu_{1j}} f_{1j} + \tfrac{1}{2} \left(D_{\nu_{2j}} f_{2j} + D_{\nu_{3j}} f_{3j} \right) \right] - \tfrac{\sqrt{3}}{2} h_{1j} \left(D_{\nu_{2j}} f_{2j} - D_{\nu_{3j}} f_{3j} \right) =$$
$$\sum_p f_{pj} D_{\nu_{pj}} f_{pj}$$

μετά από χρήση της (3.4.46) και εκτέλεση προφανών πράξεων. Από τον ορισμό του J (3.6.1) παίρνουμε $J(\mathbf{f}) = \mu$. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από αυτό. □

Η Πρόταση 3.20 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη αστάθειας. Η μέθοδος που ακολουθούμε για την εδραίωση της ευστάθειας ενός συγκεκριμένου προβλήματος διαμέρισης, είναι να αποδείξουμε ότι η ελάχιστη ιδιοτιμή του J, ή ισοδύναμα του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.6.6)-(3.6.9), είναι θετική. Δίνουμε την δικαιολόγηση της μεθόδου αυτής. Η δυσκολία είναι ότι το συνοριακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial M} f^2$ δεν μπορει να φραχτεί άνω από το $\int_M f^2$. Ομως εαν $f \in W^{1,2}(M) \equiv H^1(M)$, το θεώρημα εισαγωγής του συνοριακού ίχνους (boundary trace embedding theorem) ([**121**] §§5.34-5.37 σσ. 163-166, [**122**] §8 σσ. 120-132) και μια κατάλληλη εκτίμηση παρεμβολής (βλ. Λήμμα 3.23 πιο κάτω) αποφέρουν την καταναγκαστικότητα (coercivity) του J. Από αυτό και ένα γνωστό θεώρημα (βλ. απόδ.

Θεωρήματος 3.24) παίρνουμε την ύπαρξη της ελάχιστης ιδιοτιμής για το J.

Ο καθιερωμένος συμβολισμός για χώρους Sobolev χρησιμοποιείται: $|u|_{L^2(M)} = (\int_M u^2)^{1/2}$, $|u|_{H^1(M)} = (|u|^2_{L^2(M)} + |\nabla^M u|^2_{L^2(M)})^{1/2}$, $|u|_{L^2(\partial M)} = (\int_{\partial M} u^2)^{1/2}$ είναι οι συνήθεις νόρμες των χώρων $L^2(M)$, $H^1(M)$ και $L^2(\partial M)$. Εστω T μια διαμέριση του Ω από ένα σύστημα τριπλών συνδέσμων. Οι χώροι Sobolev της T ορίζονται ως εξής:

$$H^1(T) = \prod_{j=1}^{r} \prod_{p=1}^{3} H^1(M_{pj})$$

Εννοείται ότι κάθε διακριτό M_{pj} συμμετέχει στο γινόμενο μια φορά. Η L^2-νόρμα είναι

$$|\mathbf{f}|_{L^2(T)} = \left(\sum_{p,j} |f_{pj}|^2_{L^2(M_{pj})} \right)^{1/2}$$

και η $H^1(T)$-νόρμα ορίζεται ανάλογα. Επίσης ορίζουμε τα συναρτησιακά

$$\varphi_p(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{q \neq p} \varepsilon_{pqj} \int_{M_{qj}} f_{qj} \quad (p, q = 1, 2, 3)$$

όπου

$$\varepsilon_{pqj} = \begin{cases} +1, & N_{qj} \text{ προς τα εξω του } \Omega_{pj} \\ -1, & N_{qj} \text{ προς τα μεσα του } \Omega_{pj} \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι $\sum_p \varphi_p(\mathbf{f}) = 0$ και οι περιορισμοί όγκου μπορούν να εκφραστούν μέσω αυτών των συναρτησιακών.

Παραδειγμα 3.22. Για το σύστημα των τριπλών συνδέσμων του Σχ. 3.3.1 τα φ-συναρτησιακά είναι

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\mathbf{f}) &= \int_{M_{21}} f_{21} + \int_{M_{22}} f_{22} - \int_{M_{31}} f_{31} - \int_{M_{32}} f_{32} \\
\varphi_2(\mathbf{f}) &= -\int_{M_1} f_1 + \int_{M_{31}} f_{31} + \int_{M_{32}} f_{32} \\
\varphi_3(\mathbf{f}) &= -\int_{M_1} f_1 + \int_{M_{21}} f_{21} + \int_{M_{22}} f_{22}
\end{aligned}$$

Οι περιορισμοί όγκου δίνονται από τις σχέσεις $\varphi_2(\mathbf{f}) = 0$, $\varphi_3(\mathbf{f}) = 0$.

Η επόμενη εκτίμηση εδραιώνεται εύκολα για $\mathbf{f} \in L^2(T)$:

$$|\varphi_p(\mathbf{f})| \leqslant c_0|\mathbf{f}|_{L^2(T)}, \quad p = 1, 2, 3. \tag{3.6.12}$$

Λημμα 3.23. *Εστω M μια φραγμένη C^2 υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σταθερά c_ϵ τέτοια ώστε για κάθε $u \in H^1(M)$*

$$|u|_{L^2(\partial M)} \leqslant \epsilon|u|_{H^1(M)} + c_\epsilon|u|_{L^2(M)} \tag{3.6.13}$$

Για την απόδειξη βλ. [**146**].

Προχωράμε στην απόδειξη του κύριου αποτελέσματος αυτής της ενότητας, το οποίο ειναι η βάση της μεθόδου μας για την εδραίωση της ευστάθειας.

Θεωρημα 3.24. *Εστω T μια ελαχιστική τριφασική διαμέριση του $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ με ένα σύστημα τριπλών συνδέσμων. Τότε για κάθε $\mathbf{f} = (f_{pj}) \in H^1(T)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες συναρμογής στις ράχες και τις (3.6.2), (3.6.3), έχουμε*

$$J(\mathbf{f}) \geqslant \mu_1 \tag{3.6.14}$$

όπου μ_1 είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του προβλήματος (3.6.6)-(3.6.9). Ειδικά, εάν $\mu_1 > 0$, τότε η T είναι ασταθής.

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2 στο [**123**] ικανοποιούνται. Εστω

$$X = \{u \in H^1(T) : |u|_{L^2(T)} \leqslant 1, \sum_p u_{pj} = 0 \, \sigma\tau o \, S_j, \, \varphi_2(u) = \varphi_3(u) = 0\}.$$

Από την συνέχεια της $L^2(T)$-νόρμας, των συναρτησιακών $\varphi_p : H^1(T) \to \mathbb{R}$ και των απεικονίσεων $u \mapsto \sum_p u_{pj}\big|_{S_j}$, έπεται ότι το X είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $H^1(T)$. Η κυρτότητα του X είναι σαφής. Επομένως το X είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του $H^1(T)$. Αποδεικνύουμε την καταναγκαστικότητα του J στο X. Λόγω συνέχειας υπάρχουν μη-αρνητικές σταθερές σ_0, b_0, α_0 τέτοιες ώστε

$$\sigma_{pj} \leqslant \sigma_0, \; |B_{M_{pj}}|^2 \leqslant b_0, \; |\alpha_j| \leqslant \tfrac{1}{2}\alpha_0, \; |\beta_j| \leqslant \tfrac{1}{2}\alpha_0$$

για όλα τα p, j. Από τις ανισότητες

$$\alpha_j\left(f_{1j}^2 - h_{1j}^2\right) \geqslant -\tfrac{1}{2}\alpha_0\left(f_{1j}^2 + h_{1j}^2\right), \quad 2\beta_j f_{1j}h_{1j} \geqslant -\alpha_0|f_{1j}h_{1j}|$$

οι οποίες αποδεικνύονται εύκολα παίρνουμε

$$\alpha_j\left(f_{1j}^2 - h_{1j}^2\right) + 2\beta_j f_{1j}h_{1j} \geqslant -\alpha_0\left(f_{1j}^2 + h_{1j}^2\right)$$

και χρησιμοποιώντας την πρώτη από τις (3.4.46),

$$\alpha_j\left(f_{1j}^2 - h_{1j}^2\right) + 2\beta_j f_{1j} h_{1j} \geqslant -2\alpha_0\left(f_{1j}^2 + f_{2j}^2\right)$$

Επομένως από την (3.6.1), με πιθανώς επανακαθορισμένες τιμές των σταθρών b_0, σ_0, παίρνουμε την εκτίμηση

$$J(\mathbf{f}) \geqslant \sum_{p,j} |f_{pj}|^2_{H^1(M_{pj})} - b_0 \sum_{p,j} |f_{pj}|^2_{L^2(M_{pj})} - \sigma_0 \sum_{p,j} \int |f_{pj}|^2_{L^2(\partial M_{pj})}$$

Από την ανισότητα παρεμβολής (3.6.13) είναι

$$J(\mathbf{f}) \geqslant (1 - \epsilon\sigma_0) \sum_{p,j} |f_{pj}|^2_{H^1(M_{pj})} - (b_0 + c_\epsilon \sigma_0) \sum_{p,j} |f_{pj}|^2_{L^2(M_{pj})}$$

η οποία για επαρκώς μικρές τιμές του $\epsilon > 0$ αποδεικνύει την καταναγκαστικότητα του J. Η ακολουθιακή ασθενώς κάτω ημισυνέχεια του J έπεται από την ακολουθιακή ασθενώς κάτω ημισυνέχεια της νόρμας του $H^1(T)$ και την συμπάγεια της εισαγωγής $H^1(M) \hookrightarrow L^2(M)$, δηλ. από την $u_n \overset{H^1}{\rightharpoonup} u$ έπεται $u_n \overset{L^2}{\to} u$. Επομένως οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2 του [**123**] ικανοποιούνται και από αυτό συμπεραίνουμε ότι το J λαμβάνει το ελάχιστό του στο X. Η θέση του ελαχίστου είναι ένα κρίσιμο σημείο του $J^\star$ και, όπως απεδείχθη στην Πρόταση 3.20, είναι λύση της εξίσωσης (3.6.6) με συνοριακές συνθήκες (3.6.7). Η σχέση (3.6.14) έπεται άμεσα από αυτό. □

3.7. Εφαρμογή σε διδιάστατα μη-συνεκτικά προβλήματα διαμέρισης

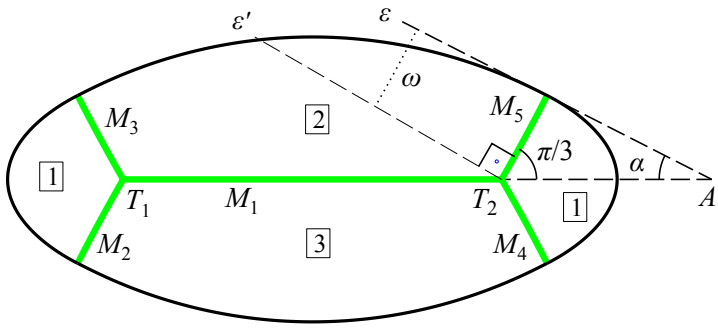
Αποδεικνύουμε την ύπαρξη ευσταθών μη-συνεκτικών διαμερίσεων σε 2 διαστάσεις μέσω παραδείγματος (σε αντιδιαστολή με την Πρόταση 3.16).

Για διδιάστατες διαμερίσεις ο τελεστής Laplace-Beltrami απλοποιείται στον

$$\Delta_M f = \frac{d^2 f}{ds^2}$$

όπου s είναι το μήκος τόξου της M, M είναι ένα οποιοδήποτε φύλλο τριπλού συνδέσμου και τα ολοκληρώματα στο ∂M ανάγονται σε αριθμούς. Η συνοριακή συνθήκη (3.6.7) απλοποιείται στην

$$\frac{df}{ds} = 0, \ \textit{στο}\ \partial M \cap \Sigma \tag{3.7.1}$$



Σχημα 3.7.1. Μη-συνεκτική τριφασική διαμέριση από σύστημα δύο τριπλών συνδέσμων. Αριθμοί σε ορθογώνια δείχνουν φάση. T_1 και T_2 είναι οι τριπλοί σύνδεσμοι οι ράχες των οποίων ανάγονται σε σημεία σε δύο διαστάσεις. Τα φύλλα των τριπλών συνδέσμων $M_2, \cdots, M_5$ είναι κυκλικά τόξα της ίδιας καμπυλότητας κ (απόλυτη τιμή) ενώ το M_1 είναι επίπεδο. Από ελαχιστικότητα η εφαπτόμενη του M_5 στο T_2 σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με την γραμμή T_1A. $A\varepsilon$ είναι η εφαπρόμενη στο $\Sigma = \partial\Omega$ στο σημείο $M_5 \cap \Sigma$ και $T_2\varepsilon'$ η κάθετη στην εφαπτόμενη του M_5 στο T_2. Η τομή C (δεν φαίνεται στο σχήμα) των $A\varepsilon$ και $T_2\varepsilon'$ είναι το κέντρο του κύκλου με ακτίνα $R = 1/\kappa$ που περιέχει το κυκλικό τοξο M_5. Επειδή $\omega = \widehat{ACT_2}$, από την επίπεδη γεωμετρία, $\omega = \frac{\pi}{6} - \alpha$. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για τα άλλα φύλλα. Το σχήμα αυτό δημιουργήθηκε από ένα πρόγραμμα Octave (MATLAB). Το σύνορο Σ σχεδιάστηκε με συναρμογή τεσσάρων σπλινών με καμπυλότητα 0 στα άκρα τους $M_i \cap \Sigma$, $i = 2, \cdots, 5$. Το σύνορο είναι συμμετρικό γύρω από τους άξονες x και y, αλλά ένα μη-συμμετρικό σύνολο μπορει να θεωρηθεί για την ίδια διάταξη τριπλών συνδέσμων.

Επειδή ενδιαφερόμαστε να αποδείξουμε ύπαρξη *ευσταθών μη-συνεκτικών διαμερίσεων*, επιλέξαμε $\sigma = 0$ στο $\partial M \cap \Sigma$. Από το μέρος (ii) του Θεωρήματος 3.6 η καμπυλότητα κάθε φύλλου είναι σταθερή, επομένως οι μοναδικές δυνατότητες για τα M είναι ευθύγραμμα τμήματα ή κυκλικά τόξα. Επίσης, $|B_M| = \kappa = 1/R$, όπου R είναι η ακτίνα του τόξου ή ∞ για ευθύγραμμα τμήματα. Θεωρούμε μη-συνεκτικές διαμερίσεις που έχουν την τοπολογία του Σχ. 3.7.1. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό διαδοχικής αρίθμησης του Παραδείγματος 3.5 στο οποίο $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_5)$, $T = (M_1, \cdots, M_5)$.

Για την εξίσωση (3.6.6) έχουμε τους επόμενους τρεις τύπους λύσεων, ανάλογα με το πρόσημο του $\mu + |B_M|^2$:

$$(I) \quad f(s) = -\frac{\lambda}{2k^2} + C\sin(ks) + D\cos(ks), \qquad k^2 = \mu + \kappa^2 \Leftrightarrow \mu > -\kappa^2$$

$$(II) \quad f(s) = \frac{\lambda}{2k^2} + Ce^{ks} + De^{-ks}, \qquad k^2 = -(\mu + \kappa^2) \Leftrightarrow \mu < -\kappa^2$$

$$(III) \quad f(s) = -\frac{\lambda}{4}s^2 + Cs + D, \qquad \mu = -\kappa^2$$

και

$$\lambda_2 = \lambda_{21},\ \lambda_3 = \lambda_{31},\ \lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3),\ \lambda_4 = \lambda_2,\ \lambda_5 = \lambda_3$$

Αυτές οι παραμετρήσεις (με την εξαίρεση της M_1 η οποία δεν συναντά το Σ) είναι έτσι ώστε το σημείο $M_i \cap \Sigma$ να λαμβάνεται στο $s = l_i$, όπου $l_i = |M_i|$, το μήκος της M_i. Από την ΣΣ (3.7.1) παίρνουμε για τις τρεις περιπτώσεις ($i \neq 1$)

$$(I)\ D_i = C_i \cot(k_i l_i), \quad (II)\ D_i = C_i e^{2k_i l_i}, \quad (III)\ C_i = -\tfrac{1}{2}\lambda_i l_i$$

και

$$(I) \quad f_i(s) = -\frac{\lambda_i}{2k_i^2} + \frac{C_i}{\sin(k_i l_i)}\cos k_i(s - l_i),$$

$$(II) \quad f_i(s) = \frac{\lambda_i}{2k_i^2} + C_i e^{2k_i l_i}\cosh k_i(s - l_i),$$

$$(III) \quad f(s) = -\frac{\lambda_i}{4}(s - l_i)^2 + \frac{\lambda_i l_i^2}{4} + D_i,$$

Επειδή το f_1 περιέχει 2 σταθερές ενώ όλα τα άλλα f μόνο μία, έχουμε συνολικά 6 άγνωστες σταθερές, οι οποίες με τα λ_2 και λ_3 κάνουν συνολικά 8 αγνώστους. Από την άλλη μεριά, οι δύο περιορισμοί όγκου, οι ΣΣ (3.6.8), (3.6.9), και η συνθήκη $\sum_{p=1}^{3} f_{pj} = 0$ στις δύο ράχες είναι 8 εξισώσεις συνολικά, και έτσι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 8 εξισώσεων σε 8 αγνώστους. Η συνθήκη ύπαρξης λύσεων αυτού του συστήματος λαμβάνεται εξισώνοντας την ορίζουσά του με το 0, το οποίο δίνει μια μη-γραμμική εξίσωση για το k. Δεδομένης μιας λύσης για το k, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ιδιοτιμή μ από την τελευταία στήλη του πιο πάνω πίνακα για τις δυνατές λύσεις για την f, και κάθε ιδιοδιάνυσμα προσδιορίζει μια ιδιοσυνάρτηση f του προβλήματος (3.6.6)-(3.6.9).

Εξειδικεύουμε αυτές τις σχέσεις θεωρώντας την περίπτωση του Σχ. 3.7.1 στην οποία τα φύλλα M_{21}, M_{22}, M_{31} και M_{32} έχουν την ίδια

ακτίνα $R = 1/\kappa$ και το ιδιο μήκος l ενώ το M_1 είναι επίπεδο και έχει μήκος L. Στην περίπτωση αυτή

$$II_{M_{21}}(\nu,\nu) = II_{M_{22}}(\nu,\nu) = -\frac{1}{R} = -\kappa$$
$$II_{M_{31}}(\nu,\nu) = II_{M_{32}}(\nu,\nu) = \kappa,\ II_{M_1}(\nu,\nu) = -(II_{M_{21}} + II_{M_{31}}) = 0$$

και

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}\kappa < 0, \quad \beta = 0$$

για αμφότερες τις ράχες.

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις για το μ:

3.7.1. Περίπτωση I: $-\kappa^2 < \mu < 0,\ k^2 = \mu + \kappa^2\,(0 < \frac{k}{\kappa} < 1)$**.** Για $i \neq 1$ έχουμε $\mu + |B_{M_i}|^2 = \mu + \kappa^2 > 0$ και $\mu + |B_{M_i}|^2 = \mu < 0$, επομένως έχουμε λύση τύπου (I) στα $M_2 \equiv M_{21}, M_3 \equiv M_{31}, M_4 \equiv M_{22}, M_5 \equiv M_{32}$ και τύπου (II) στο M_1. Δηλ.

$$\begin{aligned} f_1(s) &= -\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2(\kappa^2-k^2)} + C_1 e^{\sqrt{\kappa^2-k^2}s} + D_1 e^{-\sqrt{\kappa^2-k^2}s} \\ f_i(s) &= -\frac{\lambda_i}{2k^2} + \frac{C_i}{\sin(kl)}\cos\left[k(s-l)\right], \quad i = 2,\cdots,5 \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

και οι παράγωγοι δίνονται από τις

$$\begin{aligned} f_1'(s) &= \sqrt{\kappa^2-k^2}\left(C_1 e^{\sqrt{\kappa^2-k^2}s} - D_1 e^{-\sqrt{\kappa^2-k^2}s}\right) \\ f_i'(s) &= -\frac{kC_i}{\sin(kl)}\sin\left[k(s-l)\right], \quad i = 2,\cdots,5 \end{aligned}$$

Στην δεύτερη των (3.7.2) είναι $\sin(kl) \neq 0$, διότι διαφορετικά $k = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{Z}$, και από την $0 < k < \kappa$ έπεται ότι $0 < n < \frac{\kappa l}{\pi}$. Ομως από απλά γεωμετρικά επιχειρήματα, $\kappa l = \frac{l}{R} \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Στη ράχη 1 έχουμε

$$\begin{aligned} D_{\nu_1} f_1(0) &= -f_1'(0) = -\sqrt{\kappa^2-k^2}\,(C_1 - D_1) \\ D_{\nu_2} f_2(0) &= -f_2'(0) = -kC_2 \\ D_{\nu_3} f_3(0) &= -f_3'(0) = -kC_3 \end{aligned}$$

και ομοίως στη ράχη 2,

$$\begin{aligned} D_{\nu_1} f_1(L) &= +f_1'(L) = \sqrt{\kappa^2-k^2}\left(C_1 e^{\sqrt{\kappa^2-k^2}L} - D_1 e^{-\sqrt{\kappa^2-k^2}L}\right) \\ D_{\nu_4} f_4(0) &= -f_4'(0) = -kC_4 \\ D_{\nu_5} f_5(0) &= -f_5'(0) = -kC_5 \end{aligned}$$

Από τις συνθήκες (3.6.8) και (3.6.9) για τη ράχη 1 παίρνουμε

$$\lambda_2 - \lambda_3 - 2k^2\left[\cot(kl) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}\right](C_2 - C_3) = 0 \tag{3.7.3}$$

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2(\kappa^2 - k^2)} - (a+1)\,C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{k}{\kappa}(C_2 + C_3) + (a-1)\,D_1 = 0 \tag{3.7.4}$$

και το a ορίζεται πιο κάτω. Από την σχέση $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ στην ράχη 1 παίρνουμε

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa^2 - k^2} + \frac{1}{k^2}\right)(\lambda_2 + \lambda_3) + C_1 + (C_2 + C_3)\cot(kl) + D_1 = 0 \tag{3.7.5}$$

Από τις συνθήκες (3.6.8) και (3.6.9) για την ράχη 2 παίρνουμε

$$\lambda_2 - \lambda_3 - 2k^2\left[\cot(kl) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}\right](C_4 - C_5) = 0 \tag{3.7.6}$$

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2(\kappa^2 - k^2)} + (a-1)\,zC_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{k}{\kappa}(C_4 + C_5) - (a+1)\,\frac{1}{z}D_1 = 0 \tag{3.7.7}$$

Βλ. πιο κάτω για τον ορισμό του z. Η ισότητα $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ στην ράχη 2 δίνει

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa^2 - k^2} + \frac{1}{k^2}\right)(\lambda_2 + \lambda_3) + zC_1 + (C_4 + C_5)\cot(kl) + \frac{1}{z}D_1 = 0 \tag{3.7.8}$$

Τέλος οι εξισώσεις διατήρησης όγκου (3.4.37) δίνουν τις εξισώσεις

$$b\frac{\lambda_2}{2} - \frac{L}{\kappa^2 - k^2}\frac{\lambda_3}{2} + \frac{z-1}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}\left(C_1 + \frac{1}{z}D_1\right) - \frac{1}{k}(C_2 + C_4) = 0 \tag{3.7.9}$$

$$-\frac{L}{\kappa^2 - k^2}\frac{\lambda_2}{2} + b\frac{\lambda_3}{2} + \frac{z-1}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}\left(C_1 + \frac{1}{z}D_1\right) - \frac{1}{k}(C_3 + C_5) = 0 \tag{3.7.10}$$

Τα a, b, z ορίζονται από τις σχέσεις

$$\textit{Περίπτωση}\ \mathrm{I}\colon\quad a = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2},\ z = e^{L\sqrt{\kappa^2 - k^2}},\ b = \frac{2l}{k^2} - \frac{L}{\kappa^2 - k^2}$$

Το επόμενο λήμμα επιτρέπει την αναγωγή του συστήματος αυτού σε ένα απλούστερο.

Λημμα 3.25. *Υποθέτουμε ότι* $\left[\tan(\kappa l) + \sqrt{3}\right]\kappa L < 4$. *Τότε το* 8×8 *γραμμικό σύστημα των εξισώσεων* (*3.7.3*)-(*3.7.10*) *είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο γραμμικό σύστημα* 3×3

$$(S_1)\ \begin{cases} \frac{1}{\kappa^2-k^2}\lambda_2 + [(a-1)z - a - 1]\, C_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{k}{\kappa}C_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{\kappa^2-k^2} + \frac{1}{k^2}\right)\lambda_2 - (z+1)C_1 - 2C_2\cot(kl) = 0 \\ \left(\frac{l}{k^2} - \frac{L}{\kappa^2-k^2}\right)\lambda_2 + 2\frac{z-1}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}C_1 - \frac{2}{k}C_2 = 0 \end{cases}$$

και τις εξισώσεις $C_2 = C_3 = C_4 = C_5$, $D_1 = zC_1$ *και* $\lambda_2 = \lambda_3$.

Παρατηρηση 3.26. Η συνθήκη ικανοποιείται εάν $\kappa L < \sqrt{3}$, διότι από απλά γεωμετρικά επιχειρήματα (βλ. Σχ. 3.7.1) $\kappa l = \omega < \frac{\pi}{6}$ και $\tan(\kappa l) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Αποδειξη. Τα ζεύγη των εξισώσεων (3.7.9), (3.7.10) και (3.7.3), (3.7.6) δίνουν

$$C_2 - C_3 + C_4 - C_5 = \frac{l}{k}(\lambda_2 - \lambda_3) \tag{3.7.11}$$

και

$$\left[\cot(kl) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}\right](C_2 - C_3 - C_4 + C_5) = 0$$

Επειδή $\cot(kl) \neq \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}$, η οποία έπεται από τις $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}\tan(kl) < \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\omega < \frac{1}{2}$ και $\omega < \frac{\pi}{6}$ (βλ. Σχ. 3.7.1), παίρνουμε

$$C_2 - C_3 - C_4 + C_5 = 0 \tag{3.7.12}$$

Από τις εξισώσεις (3.7.5), (3.7.8) παίρνουμε

$$C_2 + C_3 - C_4 - C_5 = (C_1 - \frac{1}{z}D_1)(z-1)\tan(kl) \tag{3.7.13}$$

και από τις (3.7.4), (3.7.7)

$$C_2 + C_3 - C_4 - C_5 = \sqrt{3}(C_1 - \frac{1}{z}D_1)\frac{\kappa}{k}\,[(a-1)z + a + 1] \tag{3.7.14}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις δίνουν

$$D_1 = zC_1 \tag{3.7.15}$$

και

$$\frac{k}{\kappa}\tan(kl) + \sqrt{3}\left(1 - a\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$$

η οποία θέτοντας $x = \frac{k}{\kappa}$, $l^\star = \kappa l$, $L^\star = \kappa L$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του a, παίρνει την μορφή

$$x\tan(l^\star x) = 2\sqrt{1-x^2}\frac{z+1}{z-1} - \sqrt{3}. \tag{3.7.16}$$

Η συνάρτηση στο δεξιό μέλος είναι φθίνουσα και έτσι λαμβάνει το ελάχιστό της στο $x = 1$, επομένως είναι μεγαλύτερη από $\frac{4}{L^\star} - \sqrt{3}$. Από την $x\tan(l^\star x) < \tan(l^\star) = \tan(\kappa l)$ και την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση (3.7.16) δεν έχει λύση.

Από τις (3.7.14), (3.7.15) και (3.7.11), (3.7.12) παίρνουμε

$$C_2 + C_3 - C_4 - C_5 = 0 \tag{3.7.17}$$

$$C_2 - C_3 = C_4 - C_5 = \frac{l}{2k}(\lambda_2 - \lambda_3) \tag{3.7.18}$$

Από την (3.7.3) και την (3.7.18) έπεται ότι

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\left[kl\left(\cot(kl) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}\right) - 1\right] = 0$$

και από αυτήν και την $\cot(kl) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa} < 0$, έπεται η $\lambda_2 = \lambda_3$. Χρήση των εξισώσεων (3.7.17), (3.7.18) και των εναπομενουσών εξισώσεων του συστήματος (3.7.3)-(3.7.10), δηλ. (3.7.4), (3.7.5) και (3.7.9) ολοκληρώνει την απόδειξη. □

3.7.2. Περίπτωση II: $\mu < -\kappa^2$, $k > 0$**.** Εδώ το k ορίζεται από την σχέση $k^2 = -(\mu + \kappa^2)$, οπότε η έγκυρη περιοχή του k είναι $k > 0$. Στην περίπτωση αυτή είναι $k_i = k$ για $i = 2, \cdots, 5$ και $k_1 = -(\mu + \kappa_1^2) = -\mu > 0$. Επομένως έχουμε λύση τύπου (II) για όλα τα f_i,

$$\begin{aligned} f_1(s) &= -\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2(k^2+\kappa^2)} + C_1 e^{\sqrt{k^2+\kappa^2}s} + D_1 e^{-\sqrt{k^2+\kappa^2}s} \\ f_i(s) &= \frac{\lambda_i}{2k^2} + 2C_i e^{kl}\cosh k(s-l), \quad i = 2, \cdots, 5 \end{aligned} \tag{3.7.19}$$

και οι παράγωγοί τους δίνονται από τις

$$\begin{aligned} f_1'(s) &= \sqrt{k^2+\kappa^2}\left(C_1 e^{\sqrt{k^2+\kappa^2}s} - D_1 e^{-\sqrt{k^2+\kappa^2}s}\right) \\ f_i'(s) &= 2kC_i e^{kl}\sinh k(s-l), \quad i = 2, \cdots, 5 \end{aligned}$$

Προχωρώντας όπως και την περίπτωση I καταλήγουμε στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2k^2} + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa} + 1\right)e^{2kl} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa} - 1\right)\right](C_2 - C_3) = 0 \tag{3.7.20}$$

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2(k^2+\kappa^2)}-(a+1)C_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{k}{\kappa}(e^{2kl}-1)(C_2+C_3)+(a-1)D_1=0 \tag{3.7.21}$$

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+\kappa^2}\right)+C_1+(e^{2kl}+1)(C_2+C_3)+D_1=0 \tag{3.7.22}$$

$$\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2k^2}+\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}+1\right)e^{2kl}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{\kappa}-1\right)\right](C_4-C_5)=0 \tag{3.7.23}$$

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2(k^2+\kappa^2)}+(a-1)zC_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{k}{\kappa}(e^{2kl}-1)(C_4+C_5)-(a+1)\frac{1}{z}D_1=0 \tag{3.7.24}$$

$$\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+\kappa^2}\right)+zC_1+(e^{2kl}+1)(C_4+C_5)+\frac{1}{z}D_1=0 \tag{3.7.25}$$

$$b\frac{\lambda_2}{2}+\frac{L}{k^2+\kappa^2}\frac{\lambda_3}{2}-\frac{z-1}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}\left(C_1+\frac{1}{z}D_1\right)+\frac{e^{2kl}-1}{k}(C_2+C_4)=0 \tag{3.7.26}$$

$$\frac{L}{k^2+\kappa^2}\frac{\lambda_2}{2}+b\frac{\lambda_3}{2}-\frac{z-1}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}\left(C_1+\frac{1}{z}D_1\right)+\frac{e^{2kl}-1}{k}(C_3+C_5)=0 \tag{3.7.27}$$

όπου τα a, b, z τώρα ορίζονται ως εξής

$$\text{Περίπτωση II:}\quad a=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\left(\frac{k}{\kappa}\right)^2},\ z=e^{L\sqrt{k^2+\kappa^2}},\ b=\frac{2l}{k^2}+\frac{L}{k^2+\kappa^2}$$

Οπως προηγουμένως απλοποιούμε σε ένα μικρότερο σύστημα:

Λημμα 3.27. *Το 8×8 γραμμικό σύστημα εξισώσεων (3.7.20)-(3.7.27) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο 3×3 γραμμικό σύστημα*

$$(S_2)\quad\begin{cases}\frac{1}{k^2+\kappa^2}\lambda_2-[z+1-a(z-1)]\,C_1-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{k}{\kappa}\left(e^{2kl}-1\right)C_2=0\\ \left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+\kappa^2}\right)\lambda_2+(z+1)C_1+2C_2\left(e^{2kl}+1\right)=0\\ \left(\frac{l}{k^2}+\frac{L}{k^2+\kappa^2}\right)\lambda_2-2\frac{z-1}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}C_1+\frac{2}{k}\left(e^{2kl}-1\right)C_2=0\end{cases}$$

και τις εξισώσεις $C_2=C_3=C_4=C_5$, $D_1=zC_1$ και $\lambda_2=\lambda_3$.

Η απόδειξη του Λήμματος 3.27 είναι ανάλογη με την απόδειξη του Λήμματος 3.25.

3.7.3. Περίπτωση III: $\mu = -\kappa^2$**.** Στην περίπτωση αυτή $k_1^2 = -(\mu + \kappa_1^2) = -\mu = \kappa^2$ και $k_i = \mu + \kappa_i^2 = \mu + \kappa^2 = 0$ $(i = 2, \cdots, 5)$, και έτσι έχουμε λύση τύπου (II) για το f_1 και τύπου (III) για όλα τα άλλα f_i:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= -\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\kappa^2} + C_1 e^{\kappa s} + D_1 e^{-\kappa s} \\ f_i(s) &= -\frac{\lambda_i}{4}(s - l)^2 + C_i, \quad i = 2, \cdots, 5 \end{aligned} \tag{3.7.28}$$

Οι παράγωγοί τους είναι

$$\begin{aligned} f_1'(s) &= \kappa\,(C_1 e^{\kappa s} - D_1 e^{-\kappa s}) \\ f_i'(s) &= -\frac{\lambda_i}{2}(s - l), \quad i = 2, \cdots, 5 \end{aligned}$$

Οπως πριν παίρνουμε το σύστημα

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\kappa} + l\right)\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{4} - \kappa\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)C_1 + \kappa\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)D_1 = 0 \tag{3.7.29}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\kappa} + l\right) l\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{4} + C_2 - C_3 = 0 \tag{3.7.30}$$

$$-\left(\frac{2}{\kappa^2} + l^2\right)\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{4} + C_1 + C_2 + C_3 + D_1 = 0 \tag{3.7.31}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\kappa} + l\right)\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\kappa e^{\kappa L} C_1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\kappa e^{-\kappa L} D_1 = 0 \tag{3.7.32}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\kappa} + l\right) l\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{4} + C_4 - C_5 = 0 \tag{3.7.33}$$

$$-\left(\frac{2}{\kappa^2} + l^2\right)\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{4} + e^{\kappa L} C_1 + C_4 + C_5 + e^{-\kappa L} D_1 = 0 \tag{3.7.34}$$

$$\left(\frac{L}{\kappa^2} - \frac{l^3}{3}\right)\frac{\lambda_2}{2} + \frac{L}{\kappa^2}\frac{\lambda_3}{2} - \frac{e^{\kappa L} - 1}{\kappa}(C_1 + e^{-\kappa L} D_1) + l(C_2 + C_4) = 0 \tag{3.7.35}$$

$$\frac{L}{\kappa^2}\frac{\lambda_2}{2} + \left(\frac{L}{\kappa^2} - \frac{l^3}{3}\right)\frac{\lambda_3}{2} - \frac{e^{\kappa L} - 1}{\kappa}(C_1 + e^{-\kappa L} D_1) + l(C_3 + C_5) = 0 \tag{3.7.36}$$

Λημμα 3.28. *Το* 8×8 *γραμμικό σύστημα εξισώσεων* (*3.7.29*)-(*3.7.36*) *είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο* 3×3 *γραμμικό σύστημα*

$$(S_3)\ \begin{cases} \left(\sqrt{3}+\kappa l\right)\lambda_2^\star + \left[z-1-\frac{\sqrt{3}}{2}(z+1)\right]C_1 = 0 \\ -\left(\kappa^2 l^2+2\right)\lambda_2^\star + (z+1)C_1 + 2C_2 = 0 \\ \left(\kappa L - \frac{1}{6}\kappa^3 l^3\right)\lambda_2^\star - (z-1)C_1 + \kappa l C_2 = 0 \end{cases}$$

και τις εξισώσεις $C_2 = C_3 = C_4 = C_5$, $D_1 = zC_1$ *και* $\lambda_2 = \lambda_3$. *Στο* (S_3) *είναι* $\lambda_2^\star = \frac{\lambda_2}{2\kappa^2}$ *και* $z = e^{\kappa L}$.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Λήμματος 3.25.

3.7.4. Περίπτωση IV: $\mu = 0$**.** Αυτή είναι η περίπτωση ουδέτερης ευστάθειας. Επειδή $k_1^2 = -(\mu + \kappa_1^2) = 0$ και $k_i = \mu + \kappa_i^2 = \kappa^2 > 0$ $(i = 2, \cdots, 5)$, έχουμε λύση τύπου (III) για την f_1 και τύπου (I) για όλα τα άλλα f_i:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{\lambda_2+\lambda_3}{4}s^2 + C_1 s + D_1 \\ f_i(s) &= -\frac{\lambda_i}{2\kappa^2} + \frac{C_i}{\sin(\kappa l)}\cos\kappa(s-l), \quad i = 2, \cdots, 5 \end{aligned} \tag{3.7.37}$$

Προχωρώντας όπως στην περίπτωση I παίρνουμε το επόμενο γραμμικό σύστημα:

$$\frac{2}{\kappa}C_1 - C_2 - C_3 + \sqrt{3}D_1 = 0 \tag{3.7.38}$$

$$-\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2\kappa^2} + (C_2 - C_3)\left(\cot\kappa l - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \tag{3.7.39}$$

$$-\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2\kappa^2} + (C_2 + C_3)\cot\kappa l + D_1 = 0 \tag{3.7.40}$$

$$\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\kappa L - 1\right)L\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2\kappa} + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\kappa L - 1\right)\frac{C_1}{\kappa} - \tfrac{1}{2}(C_4+C_5) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}D_1 = 0 \tag{3.7.41}$$

$$-\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2\kappa^2} + (C_4 - C_5)\left(\cot\kappa l - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \tag{3.7.42}$$

$$\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2\kappa^2}\left(\kappa^2 L^2 - 1\right) + LC_1 + (C_4 + C_5)\cot\kappa l + D_1 = 0 \tag{3.7.43}$$

$$\left(\frac{\kappa^3 L^3}{12} + \kappa l\right)\frac{\lambda_2}{\kappa^2} + \frac{\kappa^3 L^3}{12}\frac{\lambda_3}{\kappa^2} + \frac{\kappa L^2}{2}C_1 - (C_2 + C_4) + \kappa L D_1 = 0 \tag{3.7.44}$$

$$\frac{\kappa^3 L^3}{12}\frac{\lambda_2}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa^3 L^3}{12} + \kappa l\right)\frac{\lambda_3}{\kappa^2} + \frac{\kappa L^2}{2}C_1 - (C_3 + C_5) + \kappa L D_1 = 0 \tag{3.7.45}$$

Λημμα 3.29. *Το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (3.7.38)-(3.7.45) έχει μη-τετριμμένη λύση εάν και μόνο εάν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:*

$$\begin{aligned}&\left[\phi\left(\tfrac{1}{6}L^{\star 3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}L^{\star 2} + L^\star + l\right) - \left(\sqrt{3} - L^\star\right)\right]\left(\phi L^\star - 4\cot l^\star\right) + \\ &\tfrac{1}{2}\left(4 - \phi L^\star\right)\left(\sqrt{3} - L^\star\right)L^\star\left(\phi L^\star - 2\cot l^\star\right) = 0\end{aligned} \tag{3.7.46}$$

Στην (3.7.46) είναι $L^\star = \kappa L$, $l^\star = \kappa l$ και $\phi = \sqrt{3}\cot l^\star + 1$.

Αποδειξη. Οι εξισώσεις (3.7.44), (3.7.45), (3.7.39) και (3.7.42) είναι ισοδύναμες με το ακόλουθο σύστημα τεσσάρων εξισώσεων:

$$\lambda_2 = \lambda_3, \quad C_2 = C_3, \quad C_4 = C_5$$

και

$$\left(\tfrac{1}{6}L^{\star 3} + l^\star\right)\lambda_2^\star + \tfrac{1}{2}L^{\star 2}C_1^\star - (C_2 + C_4) + L^\star D_1 = 0 \tag{3.7.47}$$

Εχουμε περάσει στις αδιάστατες ποσότητες $L^\star$, $l^\star$, $\lambda_2^\star = \frac{\lambda_2}{\kappa^2}$ και $C_2^\star = \frac{C_2}{\kappa}$. Ομοίως, οι εξισώσεις (3.7.38), (3.7.41), (3.7.40) και (3.7.43) είναι ισοδύναμες με τις

$$C_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}D_1 = C_1^\star, \quad 2C_2\cot l^\star + D_1 = \lambda_2^\star \tag{3.7.48}$$

και

$$C_2 - C_4 = -L^\star\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}L^\star - 1\right)\lambda_2^\star - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}L^\star - 2\right)C_1^\star \tag{3.7.49}$$

$$\left[\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}L^\star - 1\right)\cot l^\star + \frac{L^\star}{2}\right]L^\star\lambda_2^\star = \left[\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}L^\star - 2\right)\cot l^\star + \frac{L^\star}{2}\right]C_1^\star \tag{3.7.50}$$

Από την (3.7.48), λύνοντας ως προς C_2 και D_1 συναρτήσει των $C_1^\star$, $\lambda_2^\star$, και στη συνέχεια λύνοντας την (3.7.47) ως προς C_4 πάλι συναρτήσει των $C_1^\star$, $\lambda_2^\star$, και αντικαθιστώντας στην (3.7.49) δίνει μια γραμμική ομογενή εξίσωση στα $C_1^\star$ και $\lambda_2^\star$. Η συνθήκη συμβιβαστότητας του συστήματος που αποτελείται από την εξίσωση αυτή και την (3.7.50) δίνει την σχέση (3.7.46). □

3.7.5. Υπαρξη ευσταθών μη-συνεκτικών διαμερίσεων. Στό επόμενο θεώρημα διατυπώνουμε το παράδειγμα που αναγγείλαμε στην αρχή της ενότητας, το οποίο αποδεικνύει την ύπαρξη ευσταθών μη-συνεκτικών τριφασικών διαμερίσεων με συστήματα τριπλών συνδέσμων.

Θεωρημα 3.30. *Εστω Ω ένα κυρτό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $T = (M_1, \cdots, M_5)$ μια ελαχιστική μη-συνεκτική τριφασική διαμέριση του Ω από ένα σύστημα δύο C^2 τριπλών συνδέσμων όπως στο Σχ. 3.7.1, με περιορισμούς όγκου. Επιπλέον για το Ω και το σύστημα διαμέρισης T κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:*

(H1) *Το σύνορο $\Sigma = \partial\Omega$ είναι C^2 σε μια περιοχή του $\Sigma \cap \overline{T}$ και είναι επίπεδο στο $\overline{T} \cap \Sigma$. Ειδικότερα αυτό σημαίνει ότι $\sigma = 0$ σε όλα τα σημεία της τομής $\overline{T} \cap \Sigma$.*

(H2) *Το M_1 είναι επίπεδο, δηλ. $\kappa_1 = 0$, και το μήκος του M_1 είναι L.*

(H3) *Ολα τα άλλα φύλλα έχουν την ίδια καμπυλότητα $\kappa \neq 0$ και το ίδιο μήκος $|M_i| = l$, $i = 2, \cdots, 5$.*

(H4) *Ισχύει $\alpha < 0$ για τον προσανατολισμό του Σχ. 3.7.1.*

Τότε, για κάθε l υπάρχει ένα $L_0 > 0$, το οποίο πιθανώς εξαρτάται από τα l και κ, τέτοιο ώστε για κάθε $L \leqslant L_0$ η μη-συνεκτική διαμέριση τριπλών συνδέσμων T είναι ευσταθής.

Αποδειξη. Θα δείξουμε ότι όλες οι περιπτώσεις (I)-(IV) δεν δίνουν ιδιοτιμή μ, και έτσι η ελάχιστη ιδιοτιμή του προβλήματος είναι αναγκαστικά θετική, το οποίο από το Θεώρημα 3.24 αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Υποθέτουμε ότι $\left(\tan l^\star + \sqrt{3}\right) L_0^\star < 4$. Οι δυνατές ιδιοτιμές στην περιοχή $-\kappa^2 < \mu < 0$ (περίπτωση I) δίνονται από την λύση της εξίσωσης $D_1(x) = 0$ στο $0 < x < 1$, όπου D_1 είναι η ορίζουσα του (S_1) (βλ. Λήμμα 3.25) πολλαπλασιασμένη με $\kappa k(k + \kappa)$,

$$D_1(x) = \frac{1}{x^2(1-x)} \begin{vmatrix} x^2 & -(z+1) + a(z-1) & \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 \\ 1 & -(z+1) & -2x\cot(l^\star x) \\ l^\star(1-x^2) - L^\star x^2 & 2\frac{z-1}{\sqrt{1-x^2}} & -2 \end{vmatrix},$$

$k^2 = \mu + \kappa^2$, $x = \frac{k}{\kappa}$, $0 < x < 1$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}$ και $z = e^{L^\star\sqrt{1-x^2}}$. Η D_1 είναι πραγματική αναλυτική ως προς $L^\star$ και

$$D_1(x) = 4\frac{x+1}{x^2}\left[\frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 + l^\star x\cot(l^\star x) - 1\right] + O(L^\star)$$

Θα αποδείξουμε ότι ο όρος μέσα στις αγκύλες είναι $\geq C_0$ (όπου $C_0 > 0$ είναι μια σταθερά) στο διάστημα $0 \leqslant x \leqslant 1$. Θεωρώντας την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2\sin(l^\star x) + l^\star x\cos(l^\star x) - \sin(l^\star x)$$

με παράγωγο

$$f'(x) = l^\star x\sin(l^\star x)\left[\tfrac{2}{\sqrt{3}} - l^\star + \tfrac{1}{\sqrt{3}}l^\star x\cot(l^\star x)\right] > 0,\ x > 0$$

παίρνουμε $f(x) > 0$ για $x > 0$ και

$$\frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 + l^\star x\cot(l^\star x) - 1 > 0$$

Τα όρια καθώς $x \to 0+, 1-$ του όρου μηδενικής τάξης στο ανάπτυγμα του D_1 είναι θετικά στην έγκυρη περιοχή του $l^\star$, $]0, \frac{\pi}{6}[$. Επιπλέον, η συνάρτηση $\frac{\partial D_1}{\partial L^\star}$ είναι φραγμένη και συνεχής στο $[0,1]$. Εφαρμογή του τύπου του Taylor με υπόλοιπο δίνει ένα $L_1^\star > 0$ τέτοιο ώστε $L_1^\star \leqslant L_0^\star$ και $D_1(x) \neq 0$ στο $]0,1[$ για κάθε $0 < L^\star < L_1^\star$.

Οι δυνατές ιδιοτιμές στην περιοχή $\mu < -\kappa^2$ δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $D_2(x) = 0$ στο $]0,\infty[$, όπου D_2 είναι η ορίζουσα του (S_2) (βλ. Λήμμα 3.27) πολλαπλασιαμένη με $\kappa k(k+\kappa)$,

$$D_2(x) = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} x^2 & a(z-1)-(z+1) & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right) \\ 1 & z+1 & 2\left(e^{2xl^\star}+1\right) \\ L^\star x^2 + l^\star(x^2+1) & -2\frac{z-1}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star}-1\right) \end{vmatrix},$$

$k^2 = -(\mu+\kappa^2)$, $x = \frac{k}{\kappa}$, $x > 0$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}$, και $z = e^{L^\star\sqrt{1+x^2}}$. Εχουμε

$$D_2(x) = ze^{2xl^\star}x\left[2\sqrt{3}(L^\star + l^\star) + O(\frac{1}{x})\right]$$

καθώς $x \to +\infty$. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $x_0 > 0$ (το οποίο είναι ανεξάρτητο του $L^\star$) τέτοιο ώστε $D_2(x) \neq 0$ για $x \geqslant x_0$.

Για να αποδείξουμε ότι το D_2 δεν έχει ρίζες στο $]0, x_0[$ θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor ως προς $L^\star$,

$$D_2(x) = 4\frac{x^2+1}{x^3}\left[\left(\tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x + 1\right)e^{2l^\star x} - \tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x - 1\right] + O(L^\star)$$

Θα δείξουμε ότι ο μηδενικός όρος είναι θετικός στο $[0, x_0]$. Για τον λόγο αυτό γράφουμε τον όρο μέσα σε αγκύλες στη μορφή

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}l^\star x^2 - l^\star x + 1\right)\left(e^{2l^\star x} - 1\right) - 2l^\star x$$

και εφαρμόζουμε την ανισότητα $e^t - 1 \geqslant t + \frac{1}{2}t^2$ με $t = 2l^\star x$. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$\left(\tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x + 1\right)e^{2l^\star x} - \tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x - 1 > \tfrac{1}{\sqrt{3}}l^\star x^2\left(l^\star x - \sqrt{3}l^\star + 1\right).$$

Επειδή $l^\star \leqslant \frac{\pi}{6}$ έχουμε $l^\star x - \sqrt{3}l^\star + 1 \geqslant 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} > 0$. Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη ενός $C_0 > 0$ τέτοιου ώστε

$$4\frac{x^2+1}{x^3}\left[\left(\tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x + 1\right)e^{2l^\star x} - \tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x - 1\right] \geqslant C_0,\ x > 0.$$

Η μερική παράγωγος του D_2 ως προς $L^\star$ είναι φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $[0, x_0]$. Από τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $L_2^\star \leqslant L_1^\star$ τόσο μικρό ώστε $|O(L^\star)| < \frac{C_0}{2}$ για $L^\star \leqslant L_2^\star$. Επομένως $D_2(x) > \frac{C_0}{2}$ στο $]0, x_0[$ και με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη ότι το D_2 δεν έχει ρίζες στο $]0, +\infty[$ για $L^\star \leqslant L_2^\star$.

Προχωράμε στην περίπτωση (III) για την ιδιοτιμή $\mu = -\kappa^2$. Λύση των τελευταίων δύο εξισώσεων του (S_3) ως προς C_1, C_2 συναρτήσει του $\lambda_2^\star$ και αντικατάσταση στην πρώτη των (S_3) δίνει την ακόλουθη ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το (S_3) μη-τετριμμένες λύσεις:

(3.7.51)
$$\left(\sqrt{3} + 2l^\star + \tfrac{1}{3}l^{\star 3} + L^\star\right)(z-1) + \tfrac{1}{2}\left(l^{\star 2} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}l^{\star 3} - \sqrt{3}L^\star\right)(z+1) = 0$$

Στο όριο $L \to 0$ αυτή ανάγεται στην $l^\star = \sqrt{3} > \frac{\pi}{6}$, η οποία δεν ισχύει. Επομένως υπάρχει ένα $L_3^\star > 0$ τέτοιο ώστε $L_3^\star \leqslant L_2^\star$ και η εξίσωση (3.7.51) δεν ικανοποιείται για $L^\star \leqslant L_3^\star$.

Τέλος, διαπραγμετευόμαστε την περίπτωση ουδέτερης ευστάθειας (IV), $\mu = 0$. Από το Λήμμα 3.29 η ιδιοτιμή 0 είναι δυνατή μόνον για ζεύγη $L^\star$, $l^\star$ τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση (3.7.46). Καθώς $L^\star \to 0$ αυτή ανάγεται στην

$$-4\cot l^\star\left[l^\star\left(\sqrt{3}\cot l^\star + 1\right) - \sqrt{3}\right] = 0$$

η οποία δεν έχει λύση, όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη ενός $L_4^\star > 0$ τέτοιου ώστε $L_4^\star \leqslant L_3^\star$ και δεν υπάρχει $l^\star$ που ικανοποιεί την εξίσωση (3.7.46) για όλα τα $L^\star \leqslant L_4^\star$. Επανακαθορισμός της τιμής του $L_0^\star$ ως $L_4^\star$ αποδεικνύει το θεώρημα. □

Περισσότερες λεπτομέρειες για την απόδειξη αυτή δίνονται στο Παράρτημα Γ.

Κεφάλαιο 4

Μέθοδοι τανυστών τάσης για ημιγραμμικά συστήματα μεταβολικής δομής

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιούμε τανυστές τάσης-ενέργειας, οι οποίοι δίνουν την δυνατότητα διατύπωσης ελεύθερης απόκλισης (divergence-free formulation), για την απόδειξη ταυτοτήτων Pohozaev και μονοτονίας για ορισμένες κατηγορίες ημιγραμμικών συστημάτων μεταβολικής δομής. Μέθοδοι για την κατασκευή τανυστών τάσης-ενέργειας, οι ιδιότητές τους και η φυσική τους σημασία έχουν συζητηθεί αλλού[**150**].

4.1. Εσωτερικές μεταβολές

Οι *εσωτερικές μεταβολές* είναι μεταβολές πεδίων που επάγονται από μεταβολές του πεδίου ορισμού των (βλ. Ορισμό 2.1). Στο κεφάλαιο αυτό Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο (ανοιχτό συνεκτικό υποσύνολο) του $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, και

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N\cdot M} \to \mathbb{R},$$

μια συνεχώς διαφορίσιμη Λαγκρανζιανή $L(x, u, z)$, $L \in \mathrm{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N\cdot M})$. Θεωρούμε μεταβολές στον $\mathbb{R}^N$ με συμπαγή φορέα στο Ω (οι οποίες θα αναφέρονται ως εσωτερικές μεταβολές του Ω), και μεταβολικά συναρτησιακά $J : \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^M \to \mathbb{R}$,

$$\text{(VF)} \qquad J(u) := \int_\Omega L(x, u(x), u'(x))dx, \quad u \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^M$$

Εστω $u \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^M$. Θεωρούμε την μεταβολή του u που ορίζεται από την συλλογή

$$u^t(x) := u(\xi_w^t(x)), \quad t \in \mathrm{I} =]-\delta, \delta[$$

όπου $(\xi_w^t)_{t\in\mathrm{I}}$ είναι μια εσωτερική μεταβολή του Ω με πεδίο πρώτης μεταβολής $w \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, και $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$. Εαν το u είναι κρίσιμο σημείο του J,

$$\frac{d}{dt}J(u^t(x))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}J(u \circ \xi_w^t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

Κατ΄ αναλογία με τις συνήθεις μεταβολές του u έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμος 4.1. Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την (VF), $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ και $w \in \mathcal{D}(\Omega)^N$. Οι συναρτήσεις

$$u \circ \xi_w^t, \quad t \in I$$

αποτελούν την *εσωτερική μεταβολή του u στην κατεύθυνση w*. Η παράγωγος

$$\mathfrak{d}J(u)w := \frac{d}{dt} J(u \circ \xi_w^t)\Big|_{t=0},$$

είναι η *εσωτερική μεταβολή του συναρτησιακού J στο u στην κατεύθυνση w*. □

Προφανώς, κάθε εσωτερική μεταβολή είναι μια συνήθης μεταβολή. Το πεδίο πρώτης μεταβολής του u για την εσωτερική μεταβολή w είναι

$$\delta u(x) := \frac{d}{dt}\left(u^t(x)\right)\Big|_{t=0} = \nabla u \cdot w$$

και το $\mathfrak{d}J(u)w$ συμπίπτει με το $\delta J(u)w$. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathfrak{d}J$ για να δείξουμε τον περιορισμό του δJ στον υπόχωρο των εσωτερικών μεταβολών.

Προταση 4.2. *Εστω $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ και J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την* (VF). *Η εσωτερική μεταβολή του J δίνεται από την σχέση*

$$\mathfrak{d}J(u) = \int_\Omega \left(u_{k,i} \frac{\partial L}{\partial z_{kj}} w_{i,j} - L \operatorname{div} w - \frac{\partial L}{\partial x_i} w_i \right) dx, \quad w \in \mathcal{D}(\Omega)^N, \tag{4.1.1}$$

Οι ποσότητες L, $L_{x_i} := \dfrac{\partial L}{\partial x_i}$, $L_{z_{kj}} := \dfrac{\partial L}{\partial z_{kj}}$ στο δεξιό μέλος λαμβάνονται στο σημείο $(x, u(x), \nabla u(x))$, δηλ. $L = L(x, u(x), \nabla u(x))$, $L_{x_i} = L_{x_i}(x, u(x), \nabla u(x))$ κλπ.

Για την απόδειξη βλ. [**150**].

Πορισμα 4.3. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την* (VF). *Υποθέτουμε ότι $L \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{NM})$, και $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$. Η επόμενη σχέση ισχύει για την εσωτερική μεταβολή του J:*

$$\mathfrak{d}J(u) = -\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_k} \right] u_{k,j} w_j dx. \tag{4.1.2}$$

4.2. Τανυστές τάσης και εξίσωση Noether

Ο τανυστής της τάσης ορίζεται από την ποσότητα σε αγκύλες στο δεξιό μέλος της (4.1.2).

Ορισμος 4.4 (Τανυστής τάσης). Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την (VF). Ο *τανυστής της τάσης* του J ορίζεται από την σχέση

$$T_{ij}(x,y,z) = z_{ki}L_{z_{kj}}(x,y,z) - \delta_{ij}L(x,y,z) \tag{4.2.1}$$

Παρατηρηση 4.5. Η (4.2.1) εκφράζεται συναρτήσει γενικών μεταβλητών $(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{NM}$. Για ένα δεδομένο πεδίο $u \in C^1(\Omega)^M$ το τανυστικό πεδίο της τάσης δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} T_{ij}(x) &= T_{ij}(x,u(x),\nabla u(x)) \\ &= u_{k,i}L_{z_{kj}}(x,u(x),\nabla u(x)) - \delta_{ij}L(x,u(x),\nabla u(x)) \end{aligned}$$

Μια συνάρτηση $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ είναι *εσωτερικό κρίσιμο σημείο του* J, εάν η πρώτη μεταβολή του J μηδενίζεται για όλες τις εσωτερικές μεταβολές του u, δηλ. $\mathfrak{d}J(u) \equiv 0$.

Προταση 4.6. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την (VF), και $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$. Τότε η u είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J εάν και μόνον εάν ικανοποιεί το σύστημα ΜΔΕ*

$$\mathrm{div}T(x,u,\nabla u) + L_x(x,u,\nabla u) = 0 \tag{4.2.2}$$

Παρατηρηση 4.7. Ο τελεστής div στην (4.2.2) εφαρμόζεται σε ολόκληρο το $T(x,u,\nabla u)$, δηλ. $[\mathrm{div}T(x,u,\nabla u)]_i = \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ik}(x,u(x),\nabla u(x))]$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.6 βλ. [**150**].

Η (4.2.2) λέγεται εξίσωση *ελεύθερου-απόκλισης του τανυστή της τάσης* ή *εξίσωση της Noether*.

4.3. Ταυτότητα Pohozaev για συστήματα

Αποδεικνύουμε ταυτότητες Pohozaev για συστήματα, με τη χρήση τανυστών τάσης, για τις εξής κατηγορίες Λαγκρανζιανών

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad L(u,p) = \tfrac{1}{2}b_{klrs}(u)p_{kl}p_{rs} + W(u) \\ &\text{(II)} \quad L(u,p) = \tfrac{1}{2}\varphi(|p|^2) + W(u) \end{aligned}$$

(η σύμβαση άθροισης εφαρμόζει όπου έχει νόημα) με αντίστοιχους τανυστές

$$T_{ij} = b_{kjrs}(u)u_{k,i}u_{r,s} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}b_{klrs}(u)u_{k,l}u_{r,s} + W(u)\right) \tag{4.3.1}$$

και

$$T_{ij} = \varphi'(|\nabla u|^2)u_{,i}\cdot u_{,j} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + W(u)\right). \tag{4.3.2}$$

Και στις δύο περιπτώσεις από τις εξισώσεις Euler-Lagrange παίρνουμε

$$T_{ij,j} = 0, \tag{4.3.3}$$

όπου $u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

4.3.1. Κατηγορία I. *Υποθέσεις*:

(H1) Συμμετρία: $b_{klrs} = b_{rskl}$.

(H2) Ελλειπτικότητα: $b_{klrs}(u)p_{kl}p_{rs} \geqslant c|p|^2$ $\forall p \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\forall u \in \mathbb{R}^m$ όπου $c > 0$ είναι μία σταθερά,

$$|p|^2 = p_{ij}p_{ij}. \tag{4.3.4}$$

και τα $b_{klrs} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ είναι C^1-συναρτήσεις για $k, r = 1, \cdots, m$ και $l, s = 1, \cdots, n$.

Οταν $m = n$ για $p_{ij} = \xi_i\xi_j$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, παίρνουμε από την (H2)

$$b_{klrs}(u)\xi_k\xi_l\xi_r\xi_s \geqslant c|\xi|^4. \tag{4.3.5}$$

Πρόταση 4.8. *Εστω Ω ανοιχτό, ομαλό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, και $u \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ μια λύση του συστήματος, $i = 1, \cdots, n$,*

$$\begin{aligned} (b_{ijkl}(u)u_{k,l})_{,j} - \frac{1}{2}b_{klrs,i}(u)u_{k,l}u_{r,s} - W_{,i}(u) = 0, \quad & u : \Omega \to \mathbb{R}^m \\ u = a, \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

όπου W είναι ένα C^2 δυναμικό, $W(a) = 0$ και $x_0 \in \Omega$. Τότε η επόμενη ταυτότητα ισχύει

$$0 = \frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|_u^2 dx + n\int_\Omega W(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x - x_0)\cdot\nu|\nabla u|_a^2 dS, \tag{4.3.7}$$

όπου

$$|p|_u^2 = b_{klrs}(u)p_{kl}p_{rs}$$

και ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διάνυσμα του $\partial\Omega$.

Αποδειξη. Ακολουθώντας την [**151**], ολοκληρώνουμε την σχέση $(x_iT_{ij})_{,j} = T_{ii}$ στο Ω και εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης για να πάρουμε

$$\int_\Omega T_{ii}dx = \int_{\partial\Omega} x_iT_{ij}\nu_j dS. \tag{4.3.8}$$

Από την (4.3.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} T_{ii} &= -\frac{n-2}{2}b_{klrs}(u)u_{k,l}u_{r,s} - nW(u) \\ &= -\frac{n-2}{2}|\nabla u|_u^2 - nW(u). \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Στη συνέχεια χειριζόμαστε την ολοκληρωταία ποσότητα στο δεξιό μέλος της (4.3.8). Για $x \in \partial\Omega$ είναι

$$x = (x\cdot\nu)\nu + (x\cdot h)h,$$

όπου $h \in T_x\partial\Omega$, $|h| = 1$, είναι ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο (επομένως $h\cdot\nu = 0$). Εχουμε:

$$x_iT_{ij}\nu_j = ((x\cdot\nu)\nu_i + (x\cdot h)h_i)b_{kjrs}(a)u_{r,s}u_{k,i}\nu_j - (x\cdot\nu)(L_0 + W(a))$$

όπου

$$L_0(\nabla u) = \frac{1}{2}b_{klrs}(a)u_{k,l}u_{r,s}.$$

Για $x \in \partial\Omega$ έχουμε $W(a) = 0$ και $\dfrac{\partial u_k}{\partial h} = u_{k,i}h_i = 0$. Αρα

$$x_iT_{ij}\nu_j = (x\cdot\nu)(u_{k,i}\nu_i\nu_j b_{kjrs}(a)u_{r,s} - L_0). \tag{4.3.10}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι για $x \in \partial\Omega$

$$u_{i,j}(x) = \nu_j(x)u_{i,k}(x)\nu_k(x),\ i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,n. \tag{4.3.11}$$

Πράγματι, θέτοντας $z := \dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ στο $\partial\Omega$, δηλ. $z_i = u_{i,j}\nu_j$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}(z_i\nu_j - u_{i,j})^2 &= (z_i\nu_j - u_{i,j})(z_i\nu_j - u_{i,j}) \\ &= z_iz_i\nu_j\nu_j - z_i\nu_ju_{i,j} - u_{i,j}z_i\nu_j + u_{i,j}u_{i,j} \\ &= z_iz_i - z_iz_i - z_iz_i + u_{i,j}u_{i,j} \\ &= |\nabla u|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 = 0. \end{aligned}$$

Με χρήση της (4.3.11) στην (4.3.10) παίρνουμε

$$x_iT_{ij}\nu_j = \frac{1}{2}(x\cdot\nu)|\nabla u|_a^2,\ x \in \partial\Omega. \tag{4.3.12}$$

Η (4.3.7) έπεται από την (4.3.8) μέσω των (4.3.9) και (4.3.12). □

4.3.2. Κατηγορία II: «p-Laplacian», Εξίσωση ελαχιστικών επιφανειών. Εδώ θεωρούμε το σύστημα (βλ. [**152**] για την βαθμωτή περίπτωση)

$$\operatorname{div}(\varphi'(|\nabla u|^2)\nabla u) - W_u(u) = 0, \tag{4.3.13}$$

όπου $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ τέτοιο ώστε $\varphi(0) = 0$ και $\varphi'(s) \geqslant 0$ $\forall s \geqslant 0$.

Πρόταση 4.9. *Εστω Ω ανοιχτό, λείο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $u \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ λύση του συστήματος*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi'(|\nabla u|^2)\nabla u) - W_u(u) = 0, \quad & u : \Omega \to \mathbb{R}^m \\ u = a, \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

όπου W είναι C^2 δυναμικό, $W(a) = 0$ και $x_0 \in \Omega$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα

(4.3.15)

$$0 = \frac{n}{2}\int_\Omega \psi(|\nabla u|^2)dx + n\int_\Omega W(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x - x_0)\cdot \nu\widetilde{\psi}(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2)dS,$$

όπου

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \varphi(s) - \frac{2}{n}s\varphi'(s) \\ \widetilde{\psi}(s) &= 2s\varphi'(s) - \varphi(s). \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Αποδειξη. Προχωράμε όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 4.8. Ολοκλήρωση της σχέσης $(x_iT_{ij})_{,j} = T_{ii}$ στο Ω και εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης δίνουν

$$\int_\Omega T_{ii}dx = \int_{\partial\Omega} x_iT_{ij}\nu_j dS. \tag{4.3.17}$$

Από την (4.3.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \varphi'(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 - n\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + W(u)\right) \\ &= -\frac{n}{2}\psi(|\nabla u|^2) - nW(u). \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Για $x \in \partial\Omega$ έχουμε

$$x = (x\cdot\nu)\nu + (x\cdot h)h,\ h \in T_x\partial\Omega,\ |h| = 1\ (h\cdot\nu = 0)$$

και

$$
\begin{aligned}
x_i T_{ij} \nu_j &= (x \cdot \nu) \nu_i T_{ij} \nu_j + (x \cdot h) h_i T_{ij} \nu_j \\
&= (x \cdot \nu) \varphi'(|\nabla u|^2) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 - (x \cdot \nu) L \\
&\quad + (x \cdot h) \varphi'(|\nabla u|^2) u_{k,i} h_i u_{k,j} \nu_j - (x \cdot h)(h \cdot \nu) L.
\end{aligned} \tag{4.3.19}
$$

Επειδή $u_{,i} h_i = 0$ στο $\partial\Omega$

$$
x_i T_{ij} \nu_j = (x \cdot \nu) \left(\varphi'(|\nabla u|^2) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 - \frac{1}{2} \varphi(|\nabla u|^2) - W(a) \right). \tag{4.3.20}
$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις

$$
W(a) = 0, \ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| = |\nabla u| \text{ ον } \partial\Omega
$$

από την (4.3.20) παίρνουμε

$$
x_i T_{ij} \nu_j = (x \cdot \nu) \frac{1}{2} \widetilde{\psi}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \right), \ x \in \partial\Omega. \tag{4.3.21}
$$

Συνδυασμός των (4.3.17), (4.3.18) και (4.3.21) δίνει την (4.3.15). □

4.3.3. Παρατηρήσεις. 1. Παρατηρούμε ότι για ορισμένες επιλογές της φ οι συναρτήσεις ψ, $\widetilde{\psi}$ είναι μη-αρνητικές. Για παράδειγμα, για την επιλογή των ελαχιστικών επιφανειών

$$
\varphi(s) = 2(\sqrt{1+s} - 1)
$$

έχουμε

$$
\psi(s) = 2\left(\sqrt{1+s} - 1 - \frac{1}{n} \frac{s}{\sqrt{1+s}}\right) \geqslant 0
$$

και

$$
\widetilde{\psi}(s) = \frac{2s}{\sqrt{1+s}} - 2(\sqrt{1+s} - 1) = 2 \frac{\sqrt{1+s} - 1}{\sqrt{1+s}} \geqslant 0.
$$

2. Ανακαλώντας ότι $u|_{\partial\Omega} = a$, από την (4.3.14), παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $u - a$ και ολοκληρώνοντας στο Ω, από το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$
- \int_\Omega \varphi'(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega W_u(u) \cdot (u - a) dx,
$$

και ισοδύναμα

$$-\int_\Omega \widetilde{\varphi}(|\nabla u|^2)dx = \int_\Omega W_u(u)\cdot(u-a)dx, \tag{4.3.22}$$

όπου

$$\widetilde{\varphi}(s) = s\varphi'(s). \tag{4.3.23}$$

Από την ταυτότητα Pohozaev (4.3.15), για $\Omega = \mathbb{R}^n$ και $\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$ επαρκώς γρήγορα, παίρνουμε

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|\nabla u|^2)dx = \int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx. \tag{4.3.24}$$

Στο σημείο αυτό εισάγουμε την πρόσθετη υπόθεση

(H3) Υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ τέτοιες ώστε $a < \frac{n}{2}$, $\beta < \frac{n}{2}$ και

$$\alpha \leqslant \frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)} \leqslant \beta \ \forall s > 0.$$

Παραδείγματα που ικανοποιούν την (H3). (i) Για $\varphi(s) = s$ η (H3) ικανοποιείται τετριμμένα για $\alpha = \beta = 1$ και $n > 2$.

(ii) Για $\varphi(s) = 2(\sqrt{1+s} - 1)$ έχουμε $\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}$ και επομένως

$$\frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+s}}\right),$$

από την οποία παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)} \leqslant 1$$

και η (H3) ικανοποιείται με $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ και $n > 2$.

(iii) Για την επιλογή της "p-Laplacian" $\varphi(s) = s^r$, $0 < r < \frac{n}{2}$, η (H3) ικανοποιείται με $\alpha = \beta = r$. □

Ξεκινώντας από την (H3) έχουμε από την (4.3.23)

$$\alpha\varphi(s) \leqslant \widetilde{\varphi}(s) \leqslant \beta\varphi(s)$$

και από την πρώτη των (4.3.16)

$$\alpha\psi(s) + \frac{2\alpha}{n}\widetilde{\varphi}(s) \leqslant \widetilde{\varphi}(s) \leqslant \beta\psi(s) + \frac{2\beta}{n}\widetilde{\varphi}(s),$$

οπότε

$$\alpha\psi(s) \leqslant (1 - \frac{2\alpha}{n})\widetilde{\varphi}(s),\ (1 - \frac{2\beta}{n})\widetilde{\varphi}(s) \leqslant \beta\psi(s).$$

Θέτοντας

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2\alpha},\ \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2\beta} \tag{4.3.25}$$

(δηλ. $\alpha_1, \beta_1 > 0$), παίρνουμε

$$\frac{\alpha_1}{2}\psi(s) \leqslant \widetilde{\varphi}(s) \leqslant \frac{\beta_1}{2}\psi(s).$$

Επομένως, θέτοντας $s = |\nabla u|^2$ στην σχέση αυτή και ολοκληρώνοντας στο $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\alpha_1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|\nabla u|^2)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(|\nabla u|^2)dx \leqslant \frac{\beta_1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|\nabla u|^2)dx$$

και χρησιμοποιώντας τις (4.3.22) και (4.3.24)

$$-\alpha_1 \int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx \leqslant -\int_{\mathbb{R}^n} (u-a)\cdot W_u(u)dx \leqslant -\beta_1 \int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx, \tag{4.3.26}$$

οπότε

$$\beta_1 \int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (u-a)\cdot W_u(u)dx \leqslant \alpha_1 \int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx. \tag{4.3.27}$$

Στην περίπτωση των παραδειγμάτων (i), (ii) πιο πάνω, έχουμε ισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u-a)\cdot W_u(u)dx = r_1 \int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx, \tag{4.3.28}$$

με

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2r}.$$

Γενικά όμως με την (H3), έχουμε μόνο την εκτίμηση

$$\alpha_1 \leqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (u-a)\cdot W_u(u)dx}{\int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx} \leqslant \beta_1. \tag{4.3.29}$$

Τελικά, παρατηρούμε ότι στα πιο πάνω έχουμε $\alpha \leqslant \beta$, οπότε από την (4.3.25), $\alpha_1 \leqslant \beta_1$ και από την (4.3.22),

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u-a)\cdot W_u(u)dx \leqslant 0.$$

Από την (4.3.26)

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(u)dx \leqslant 0.$$

Αυτό έπεται και από τις (4.3.24) και (4.3.16):

$$\psi = \varphi - \frac{2}{n}\widetilde{\varphi} = (1 - \frac{2}{n}\frac{\widetilde{\varphi}}{\varphi})\varphi \geqslant (1 - \frac{2\beta}{n})\varphi,$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από την (H3).

4.3.4. Η ταυτότητα Pohozaev για γενικές συνοριακές συνθήκες. Θεωρούμε το σύστημα

$$\epsilon^2 \Delta u = W_u(u). \tag{4.3.30}$$

Για το δυναμικό W υποθέτουμε ότι $W(u) \geqslant 0$. Ο τανυστής της τάσης δίνεται από την σχέση

$$T_{ij} = \epsilon^2 u_{,i}\cdot u_{,j} - \delta_{ij}\left(\frac{\epsilon^2}{2}|\nabla u|^2 + W(u)\right) \tag{4.3.31}$$

και ικανοποιεί την ισότητα $\operatorname{div} T = 0$.

Πρόταση 4.10. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο με σύνορο C^2, και $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ μια C^1 λύση της (4.3.30). Η επόμενη ισότητα ισχύει στο Ω:*

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \int_{\partial\Omega}\left[x^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 - \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2\right) + x^t\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right] - \int_{\partial\Omega} x^n W(u) + \\ (\tfrac{N}{2}-1)\epsilon^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2 + N\int_{\Omega} W(u) = 0 \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

όπου n είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διάνυσμα του $\partial\Omega$, x^n είναι η προβολή του x στο n, και x^t είναι η προβολή του x στο εφαπτόμενο επίπεδο του $\partial\Omega$ έτσι ώστε

$$x = x^n n + x^t t, \quad t \in \partial\Omega.$$

Αποδειξη. Ολοκλήρωση της $\left(x_i T_{ij}\right)_{,j} = T_{ii}$ στο Ω και εφαρμογή του θεωρήματος Stokes δίνουν

$$\int_{\partial\Omega} x_i T_{ij} n_j = \int_{\Omega} T_{ii}$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} x_i T_{ij} n_j &= x^n \left(n_i T_{ij} n_j\right) + x^t \left(t_i T_{ij} n_j\right) \\ &= x^n \left(\epsilon^2 \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 - \frac{\epsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - W(u)\right) + x^t \left(\epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

και

$$T_{ii} = \epsilon^2 |\nabla u|^2 - N\left(\frac{\epsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + W(u)\right) = -(\tfrac{N}{2} - 1)\epsilon^2 |\nabla u|^2 - NW(u)$$

Συνδυασμός των ισοτήτων αυτών δίνει την (4.3.32). □

4.3.5. Εφαρμογές στη μονοτονία και θεωρία μη-ύπαρξης. Το εδάφιο αυτό ασχολείται με τη μονοτονία της συνάρτησης

$$R \mapsto \frac{1}{R^\alpha} \int_{\mathrm{B}_R} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

όπου $\alpha \geqslant 0$, B_R είναι η ανοιχτή μπάλα του $\mathbb{R}^N$ με κέντρο x_0 και ακτίνα R, L μια Λαγκρανζιανή και u μια ακέραια συνάρτηση. Θεωρούμε τις Λαγκρανζιανές I και II, και επιπροσθέτως την συνθήκη (H3) για την p-Laplacian και την

(H4) $b_{kjrs}(u) = b_{kr}(u)\delta_{js}$.

για τις Λαγκρανζιανές τύπου I. Θέτουμε

$$E(R) = \begin{cases} \int_{\mathrm{B}_R} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right) dx & \text{(I)} \\ \int_{\mathrm{B}_R} \left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + W(u)\right) dx & \text{(II)} \end{cases}$$

Εχουμε την επόμενη πρόταση.

Προταση 4.11. *Εστω $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ μια ακέραια C^2 λύση του συστήματος Noether για τα συναρτησιακά (I) ή (II) που ικανοποιούν τις (H1)-(H4). Ισχύει η ακόλουθη σχέση μονοτονίας*

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-(N-2\beta)} E(R)\right) \geqslant 0, \tag{4.3.33}$$

όπου το β είναι όπως στην (H3), και $\beta = 1$ για συστήματα τύπου (I).

Αποδειξη. Για συστήματα τύπου I, από την

$$\begin{aligned} T_{ii} &= |\nabla u|_u^2 - N\left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right) \\ &\leqslant -(N-2)\left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right) \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\int_{\mathrm{B}_R} T_{ii}(x)dx \leqslant -(N-2)E(R). \tag{4.3.34}$$

Ολοκλήρωση της

$$\begin{aligned} \nu_i T_{ij}\nu_j &= \nu_i u_{k,i} b_{kjrs}(u) u_{r,s}\nu_j - \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right) \\ &= \nu_i u_{k,i} b_{kr}(u) u_{r,j}\nu_j - \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right) \\ &\geqslant c\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right) \\ &\geqslant -\left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right), \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

στο $\partial \mathrm{B}_R$ δίνει

$$\int_{\partial \mathrm{B}_R} \nu_i T_{ij}\nu_j \geqslant -\int_{\partial \mathrm{B}_R}\left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + W(u)\right) = -\frac{dE}{dR}. \tag{4.3.36}$$

Συνδυασμός των

$$\int_{\mathrm{B}_R} T_{ii}(x)dx = R\int_{\partial \mathrm{B}_R} \nu_i T_{ij}\nu_j,$$

(4.3.34), και (4.3.36) δίνει

$$-R\frac{dE}{dR} \leqslant (N-2)E(R)$$

Από την σχέση αυτή παίρνουμε την (4.3.33).

Η απόδειξη για την περίπτωση II είναι όμοια. □

Εχουμε δύο ενδιαφέρουσες συνέπειες της πρότασης αυτής.

Προταση 4.12 (Derrick). *Δεν υπάρχει μη-τετριμμένη ακέραια λύση* $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^N)^M$ *του συστήματος Noether για τα συναρτησιακά (I), (II) (ή των αντίστοιχων εξισώσεων Euler-Lagrange) τέτοια ώστε η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή να είναι ολοκληρώσιμη σε ολόκληρο τον* $\mathbb{R}^N$.

Αποδειξη. Από την Πρόταση (4.11) έχουμε

$$E(R) \geqslant \frac{R^\gamma}{R_0^\gamma} E(R_0) \to \infty, \quad R \to \infty$$

όπου $\gamma > 0$, $R_0 > 0$ είναι σταθερές και $R \geqslant R_0$, εκτός εάν $u = u_0$ =σταθερά και $W(u_0) = 0$. □

Προταση 4.13. *Εστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^N$ με σύνορο C^1. Υποθέτουμε ότι $W \geqslant 0$ και a είναι τέτοιο ώστε $W(a) = 0$. Δεν υπάρχει μη-τετριμμένη λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^N)^M$ των εξισώσεων Euler-Lagrange για τα συναρτησιακά (I), (II) με την συνοριακή συνθήκη Dirichlet $u = a$.*

Η απόδειξη έπεται άμεσα από την ταυτότητα Pohozaev.

Κεφάλαιο 5

Ισοδυναμία των Εξισώσεων Euler-Lagrange και Noether για Βαθμωτά Πεδία

Αποδεικνύουμε ότι, με την υπόθεση μη-τετριμμένων λύσεων, οι εξισώσεις Euler-Lagrange και Noether είναι ισοδύναμες για μια γενική κατηγορία μεταβολικών προβλημάτων, στην οποία συμπεριλαμβάνονται η μη-γραμμική εξίσωση Poisson, Λαγκρανζιανές ανεξάρτητες θέσης, και Λαγκρανζιανές τύπου p-Laplacian. Ως εφαρμογές αποδεικνύουμε ορισμένες προτάσεις σχετικές με την μη-γραμμική εξίσωση Poisson και τις γενικεύσεις της, και την ισοδυναμία αποδεκτών και εσωτερικών μεταβολών για τα θεωρούμενα συστήματα.

5.1. Εισαγωγή

Ο Αλικάκος[**153**] παρουσίασε μια μέθοδο για την παραγωγή σχέσεων μονοτονίας και ταυτοτήτων Derrick-Pohozaev[**154**] μη-γραμμικών μεταβολικών προβλημάτων, με τη χρήση τανυστών ενέργειας-ορμής (τάσης). Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε μη-γραμμικά συστήματα Poisson και επεκτάθηκε με συστηματικό τρόπο σε μια μεγαλύτερη κατηγορία Λαγκρανζιανών [**155, 150**]. Η μέθοδος αυτή είναι γενικότερη από προηγούμενες, καθώς το σημείο εκκίνησής της είναι οι εξισώσεις Noether[**156**], ενώ οι προηγούμενες μέθοδοι ξεκινούν από τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Ασφαλώς, οι εξισώσεις Noether είναι ασθενέστερη υπόθεση από τις εξισώσεις Euler-Lagrange για συναρτήσεις C^2. Μια απλή απόδειξη του γεγονότος αυτού δίνεται στο Παράδειγμα 5.6 πιο κάτω (βλ. επίσης [**46**], Κεφάλαιο 3), το οποίο βασίζεται σε τετριμμένες λύσεις των εξισώσεων Noether.

Ομως για μια μεγάλη κατηγορία Λαγκρανζιανών, και για την κλάση των κλασσικών (C^2) *μη-τετριμμένων* συναρτήσεων, προκύπτει ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange και Noether είναι ισοδύναμες. Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι ο στόχος του κεφαλαίου αυτού. Πιο αναλυτικά, το Θεώρημα 5.7 αποδεικνύει ότι, για την Λαγκρανζιανή της μη-γραμμικής εξίσωσης Poisson, κάθε μη-τετριμμένη κλασσική λύση

του συστήματος Noether είναι αναγκαστικά και λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange. Το Θεώρημα 5.14 παρέχει μια επέκταση του θεωρήματος αυτού σε πιο γενικές Λαγκρανζιανές. Στο εδάφιο 5.2 δίνεται μια σύντομη περιγραφή των εσωτερικών μεταβολών, των τανυστών ορμής-ενέργειας (τάσης) και άλλων προαπαιτούμενων εννοιών, τα οποία χρησιμεύουν κυρίως για την εισαγωγή του χρησιμοποιούμενου συμβολισμού. Περισσότερες λεπτομέρειες στα θέματα αυτά υπάρχουν στις αναφορές [**46, 150**].

Εκτός από το καθαρά μαθηματικό ενδιαφέρον, τα αποτελέσματα αυτά είναι σημαντικά για την θεωρητική φυσική, διότι παρέχουν έναν σύνδεσμο μεταξύ των Lagrangian και Noetherian διατυπώσεων της φυσικής ([**157**], §52-3 και [**158**], §11.4, σελ. 17). Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με τα καθαρά τεχνικά μαθηματικά-αναλυτικά θέματα του αντικειμένου, αφήνοντας τις εφαρμογές στην φυσική για επόμενη εργασία.

5.2. Οι Εξισώσεις Noether

Στην ενότητα αυτή συνοψίζουμε θέματα, τα οποία είναι απαραίτητα για την διατύπωση και απόδειξη των κύριων αποτελεσμάτων του κεφαλαίου αυτού, και εξυπηρετεί ως μέσο για την εισαγωγή του χρησιμοποιούμενου συμβολισμού[**46**].

5.2.1. Γενικός συμβολισμός. Σε όλο το κεφάλαιο Ω είναι ένα χωρίο (ανοιχτό, συνεκτικό υποσύνολο) του $\mathbb{R}^N$, εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά. Η επόμενη συντόμευση

$$u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

χρησιμοποιείται για μερικές παραγώγους. Η σύμβαση άθροισης του Einstein εφαρμόζει παντού, εκτός αν αναφέρεται ρητά το αντίθετο.

Ακολουθώντας τον καθιερωμένο συμβολισμό, $C^r(\Omega)$ είναι το σύνολο των r φορές συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο Ω και $C^r(\overline{\Omega})$ είναι το σύνολο των περιορισμών στο Ω των r φορές συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^N$. Το σύνολο των r φορές συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο Ω, με τιμές στο $\mathbb{R}^M$ (ή $\mathbb{C}^M$) συμβολίζεται $C^r(\Omega)^M$ και το αντίστοιχο σύνολο περιορισμών στον $\mathbb{R}^N$, $C^r(\overline{\Omega})^M$. $\mathcal{D}(\Omega)$ είναι το σύνολο των πραγματικών (ή μιγαδικών) C^∞ συναρτήσεων στο Ω με συμπαγή φορέα στο Ω και $\mathcal{D}(\Omega)^M$ είναι το αντίστοιχο σύνολο συναρτήσεων με τιμές στον $\mathbb{R}^M$ (ή $\mathbb{C}^M$).

5.2.2. Μεταβολικά συναρτησιακά. Θεωρούμε (μη γραμμικά) συναρτησιακά $J : C^1(\overline{\Omega})^M \to \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{N}$, της μορφής

$$J(u) := \int_\Omega L(x, u(x), Du(x))dx, \tag{VF}$$

όπου Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$, $L(x, y, z)$ μια Λαγκρανζιανή

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N\cdot M} \to \mathbb{R},$$

$L \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N\cdot M})$ και $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$.

Μια συνάρτηση $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)^M$ είναι *κρίσιμο σημείο* του J εάν

$$\delta J(u)v := \tfrac{d}{dt} J(u + tv)\Big|_{t=0} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)^N.$$

Η παράγωγος $\delta J(u)v$ είναι η *μεταβολή του J στο u στην κατεύθυνση v*.

Οταν $u \in C^2(\Omega)^M$, ένας εύκολος υπολογισμός δίνει

$$\delta J(u)v = \int_\Omega \delta L(u) \cdot v dx$$

όπου $\delta L(u) = (\delta L(u)_i)_{i=1,\cdots,M}$ είναι το διανυσματικό πεδίο με συνιστώσες

$$\delta L(u)_i = \left(L_{y_i} - \tfrac{\partial}{\partial x_j} L_{z_{ij}}\right)\Big|_{(x,u(x),Du(x))}. \tag{5.2.1}$$

Θα αναφερόμαστε στο δL με τον όρο *παράγωγος Euler-Lagrange*. Κάθε κρίσιμο σημείο $u \in C^2(\Omega)^M$ του J ικανοποιεί τις *εξισώσεις Euler-Lagrange*

$$\delta L(u) = 0.$$

5.2.3. Εσωτερικές μεταβολές. Οι εσωτερικές μεταβολές είναι μεταβολές ειδικής μορφής. Εστω $I =]-\delta, \delta[$, $\delta > 0$. Σταθεροποιούμε ένα $u \in C^1(\Omega)^M$ και ένα σύνολο διαφορομορφισμών $(\xi^t)_{t\in \mathrm{I}}$, $\xi^t : \Omega \to \Omega$. Οι συναρτήσεις

$$\widetilde{u}(x, t) := u(\xi^t(x)), \quad t \in I$$

ορίζουν μια εσωτερική μεταβολή του u. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμος 5.1. Α) Εστω $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, $\delta > 0$ και $I =]-\delta, \delta[$. Ενα σύνολο διαφορομορφισμών $(\xi^t)_{t\in I}$ του Ω που έχει τις ιδιότητες (i) - (iii) πιο κάτω, και τέτοιο ώστε η συνάρτηση $\xi : \Omega \times I \to \Omega$, $\xi(x,t) = \xi^t(x)$ να είναι C^∞-παραγωγίσιμη, λέγεται *εσωτερική μεταβολή του Ω στην κατεύθυνση h* ή *που ορίζεται από το h*:

(i) $\xi^0 = id_\Omega$, δηλ. $\xi^0(x) = x$ στο Ω.

(ii) $D_t\xi(x,0) = h(x),\ x \in \Omega$.

(iii) $\xi^t|\partial\Omega = id_{\partial\Omega}$, δηλ. $\xi^t(x) = x,\ x \in \partial\Omega$.

Β) Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την (VF), $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$, $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ και $(\xi^t_h)_{t\in I}$ μια εσωτερική μεταβολή του Ω που ορίζεται από το h. Το σύνολο των συναρτήσεων

$$u \circ \xi^t_h, \quad t \in I$$

λέγεται *εσωτερική μεταβολή του u στην κατεύθυνση h*. Η παράγωγος

$$\mathfrak{d}J(u)h := \tfrac{d}{dt}J(u \circ \xi^t_h)\Big|_{t=0}, \tag{5.2.2}$$

λέγεται η *εσωτερική μεταβολή του συναρτησιακού J στη θέση u στην κατεύθυνση h*. □

Για τον υπολογισμό των εσωτερικών μεταβολών χρησιμοποιείται η ακόλουθη πρόταση.

Προταση 5.2. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την (VF) και $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$. Η εσωτερική μεταβολή του J στη θέση u δίνεται από την σχέση*

$$\mathfrak{d}J(u)h = \int_\Omega \Big(u_{k,i}L_{z_{kj}}h_{i,j} - L\mathrm{div}h - L_{x_i}h_i\Big)\,dx, \quad h \in \mathcal{D}(\Omega)^N, \tag{5.2.3}$$

όπου τα L, $L_{x_i} := \frac{\partial L}{\partial x_i}$, $L_{z_{kj}} := \frac{\partial L}{\partial z_{kj}}$ λαμβάνονται στο σημείο $(x, u(x), Du(x))$, δηλ. $L = L(x, u(x), Du(x))$, $L_{x_i} = L_{x_i}(x, u(x), Du(x))$ κλπ.

Για την απόδειξη θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(t) := J(u \circ \xi^t)$, εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης $x = \eta^t(y)$, όπου η^t είναι η αντίστροφη συνάρτηση της ξ^t, παραγωγίζουμε ως προς t και εναλλάσσουμε τα σύμβολα παραγώγισης και ολοκλήρωσης. Για τις λεπτομέρειες βλ. αναφορά [**150**].

5.2.4. Τανυστής ενέργειας-ορμής. Με τη χρήση του συμβολισμού

$$\mathfrak{d}L(u)h := u_{k,i}L_{z_{kj}}(\cdot, u, Du)h_{i,j} - L(\cdot, u, Du)h_{i,i} - L_{x_i}(\cdot, u, Du)h_i \tag{5.2.4}$$

η σχέση για την εσωτερική μεταβολή του J ανάγεται στην

$$\mathfrak{d}J(u)h = \int_\Omega \mathfrak{d}L(u)h dx, \quad h \in \mathcal{D}(\Omega)^N. \tag{5.2.5}$$

Οταν $L_x = 0$, ο τύπος (5.2.4) απλοποιείται περαιτέρω στον

$$\mathfrak{d}L(u)h := u_{k,i}L_{z_{kj}}h_{i,j} - L\delta_{ij}h_{i,j} = (u_{k,i}L_{z_{kj}} - L\delta_{ij})h_{i,j}.$$

Αυτή η σχέση είναι το έναυσμα για τον επόμενο ορισμό του τανυστή ενέργειας-ορμής.

Ορισμος 5.3. Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την (VF). Ο *τανυστής ενέργειας-ορμής* (*τάσης*) του μεταβολικού προβλήματος που καθορίζεται από το J, ορίζεται από την σχέση

$$T_{ij}(x, y, z) = z_{ki}L_{z_{kj}}(x, y, z) - \delta_{ij}L(x, y, z) \tag{5.2.6}$$

όπου $x = (x_i)_{i=1,\cdots,N} \in \Omega$, $y = (y_k)_{k=1,\cdots,M} \in \mathbb{R}^M$, $z = (z_{ki})_{k=1,\cdots,M;i=1,\cdots,N} \in \mathbb{R}^{NM}$.

Παρατηρηση 5.4. Ο ορισμός αυτός ισχύει για γενικές μεταβλητές $(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{NM}$. Με δεδομένο ένα διανυσματικό πεδίο $u \in C^1(\Omega)^M$ έχουμε το τανυστικό πεδίο

$$T_{ij}(x) = T_{ij}(x, u(x), Du(x)) = u_{k,i}L_{z_{kj}}(x, u(x), Du(x)) - \delta_{ij}L(x, u(x), Du(x)), \tag{5.2.7}$$

για το οποίο χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο. Ακόμη, στην σχέση αυτή δεν είναι απαραίτητο το u να είναι λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange.

5.2.5. Οι εξισώσεις Noether. Εστω $u \in C^2(\Omega)$, η οποία δεν είναι απαραίτητα λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange και $T_{ij}(x) = T_{ij}(x, u(x), Du(x))$. Από τον ορισμό του τανυστή ενέργειας-ορμής

$$\begin{aligned} T_{ij,j} &= \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{k,i}L_{z_{kj}} - \delta_{ij}L\right) \\ &= u_{k,ij}L_{z_{kj}} + u_{k,i}\tfrac{\partial}{\partial x_j}L_{z_{kj}} - L_{x_i} - L_{y_k}u_{k,i} - L_{z_{kj}}u_{k,ij} \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x_j}L_{z_{kj}} - L_{y_k}\right)u_{k,i} - L_{x_i} \end{aligned}$$

όπου $L = L(x, u(x), Du(x))$, $L_{y_k} = L_{y_k}(x, u(x), Du(x))$ και $L_{z_{kj}} = L_{z_{kj}}(x, u(x), Du(x))$. Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$T_{ij,j} + L_{x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} L_{z_{kj}} - L_{y_k}\right) u_{k,i} \tag{5.2.8}$$

η οποία δίνει το έναυσμα για τον επόμενο ορισμό.

Ορισμος 5.5. Το σύστημα των ΜΔΕ δεύτερης τάξης

$$T_{ij,j}(x, u(x), Du(x)) + L_{x_i}(x, u(x), Du(x)) = 0$$

ή σε συμβολισμό ελεύθερου δεικτών

$$\mathrm{div} T(x, u(x), Du(x)) + L_x(x, u(x), Du(x)) = 0 \tag{5.2.9}$$

λέγεται *σύστημα* ή *εξισώσεις Noether*.

Αν ορίσουμε τα *εσωτερικά κρίσιμα σημεία* του J από την σχέση $\mathfrak{d}J(u) = 0$, δηλ. $\mathfrak{d}J(u)h = 0$ $\forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις Noether σχετίζονται με τα εσωτερικά κρίσιμα σημεία με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που σχετίζονται τα κρίσιμα σημεία με τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Από την (5.2.8) κάθε λύση $u \in C^2(\Omega)$ των εξισώσεων Euler-Lagrange είναι και λύση των εξισώσεων Noether. Το αντίστροφο της πρότασης αυτής δεν αληθεύει γενικά. Οι Giaquinta και Hildebrandt[**46**] παρουσίασαν το εξής απλό παράδειγμα για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού.

Παραδειγμα 5.6. Εστω $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F \neq$ σταθ. και

$$J(u) := \int_\Omega F(u(x))dx, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής υπολογίζεται από την (5.2.6)

$$T = -F(u)I,$$

και οι εξισώσεις Noether (5.2.9) ανάγονται στις

$$F'(u)Du = 0.$$

Είναι προφανές ότι κάθε σταθερή συνάρτηση $u = c_0$ είναι λύση του συστήματος αυτού, αλλά όχι των εξισώσεων Euler-Lagrange, οι οποίες για το συναρτησιακό αυτό παίρνουν τη μορφή

$$F'(u) = 0.$$

Θα δείξουμε στις επόμενες δύο ενότητες ότι μόνο τετριμμένα παραδείγματα της μορφής αυτής είναι δυνατά για μια μεγάλη κατηγορία Λαγκρανζιανών.

5.3. Μη-γραμμική Εξίσωση Poisson

Η μη-γραμμική εξίσωση Poisson, βλ. εξίσωση (5.3.3) πιο κάτω, σε ένα φραγμένο χωρίο Ω είναι η εξίσωση Euler-Lagrange ενός μεταβολικού συναρτησιακού J (βλ. (VF) στην Ενότητα 5.2.2) με Λαγκρανζιανή

$$L(u,z) = \tfrac{1}{2}|z|^2 + F(u), \tag{5.3.1}$$

όπου το z αντιστοιχεί στο Du όταν η u είναι μια συνάρτηση C^1 και $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Οταν $F \in C^1(\mathbb{R})$, το J σαφώς ικανοποιεί τις απαιτήσεις (VF).

Θεωρημα 5.7. *Εστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, L μια Λαγκρανζιανή της μορφής (5.3.1) και $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ μια μη-τετριμμένη κλασσική λύση των εξισώσεων Noether*

$$\operatorname{div} T(u, Du) = 0. \tag{5.3.2}$$

όπου T είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής που αντιστοιχεί στην Λαγκρανζιανή L, με συνιστώσες $T_{ij} = u_{,i}u_{,j} - \delta_{ij}L$. Τότε η u είναι λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange

$$\Delta u = F'(u) \tag{5.3.3}$$

στο Ω.

Παρατηρηση 5.8. Από την (5.2.8), η εξίσωση (5.3.2) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(\Delta u - F'(u))Du = 0. \tag{5.3.4}$$

Η συνθήκη του μη-τετριμμένου $Du \neq 0$ σημαίνει ότι το Du δεν είναι ταυτοτικά 0, δηλ. υπάρχει ένα $x_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε $Du(x_0) \neq 0$.

Αποδειξη. Εστω u λύση της (5.3.2) και

$$A_0 := \{x \in \Omega : \ Du(x) = 0\}$$

και

$$A_1 := \{x \in \Omega : \ Du(x) \neq 0\}.$$

Προφανώς το A_0 είναι κλειστό σχετικά με το Ω, το A_1 είναι ανοιχτό και $A_0 \cup A_1 = \Omega$. Είναι σαφές ότι η (5.3.3) ικανοποιείται στο A_1. Εχουμε να δείξουμε ότι η (5.3.3) ικανοποιείται και στο A_0.

Βήμα 1. Εστω D το υποσύνολο του Ω στο οποίο η εξίσωση Euler-Lagrange (5.3.3) ικανοποιείται, δηλ.

$$D := \{x \in \Omega : \ \Delta u(x) = f(u(x))\},$$

όπου $f := F'$. Το D είναι προφανώς κλειστό σχετικά με το Ω και έχουμε ήδη αποδείξει ότι

$$A_1 \subset D.$$

Από αυτό, έχοντας στο μυαλό μας ότι κλειστά περιβλήματα και σύνορα λαμβάνονται σχετικά με Ω, έπεται άμεσα ότι $\overline{A}_1 \subset D$, επομένως και

$$\partial A_1 \subset D.$$

Σκοπεύουμε να δείξουμε ότι

$$\partial A_0 \subset D. \tag{5.3.5}$$

Για τον σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι $\partial A_0 = \partial A_1$, από το οποίο η (5.3.5) έπεται άμεσα. Πράγματι, από την $\partial A_0 = A_0 \backslash \mathring{A}_0$ και την

$$\partial A_1 = \overline{A}_1 \backslash \mathring{A}_1 = (\Omega \backslash \mathring{A}_0) \backslash (\Omega \backslash A_0) = (\Omega \backslash \mathring{A}_0) \cap A_0 = A_0 \backslash \mathring{A}_0$$

παίρνουμε $\partial A_0 = \partial A_1$ και με αυτό την εγκυρότητα της (5.3.5).

Εαν $\mathring{A}_0 = \emptyset$ έχουμε τελειώσει, διότι $A_0 = \partial A_0 \subset D$. Εστω $\mathring{A}_0 \neq \emptyset$. Από την υπόθεση, για κάθε $x \in \mathring{A}_0$ έχουμε $Du(x) = 0$, επομένως $u(x) =$ σταθ. στις συνεκτικές συνιστώσες του A_0.

Βήμα 2. Σταθεροποιούμε ένα $x_0 \in \mathring{A}_0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $x_1 \in \partial A_0$ και μια συνεχής καμπύλη $\gamma : \bar{I} \to A_0$, $I =]0,1[$, τέτοια ώστε $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ και $\gamma([0,1[) \subset \mathring{A}_0$, δηλ. η καμπύλη βρίσκεται μέσα στο εσωτερικό του A_0, με εξαίρεση το x_1. Εστω $y \in A_1 \neq \emptyset$ εξ υποθέσεως και $\alpha : \bar{I} \to \Omega$ μια συνεχής καμπύλη που συνδέει τα $x_0 = \alpha(0)$ και $y = \alpha(1)$. Το σύνολο

$$\Gamma := \{\alpha(t) : \ t \in \bar{I}, \ \alpha(t) \in \partial A_0\}$$

δεν είναι κενό ([**159**], (3.19.9) και επόμενη Παρατήρηση, σελ. 70). Επειδή το $\{t \in \bar{I} : \ \alpha(t) \in \partial A_0\} = \alpha^{-1}(\partial A_0)$ είναι κλειστό, $\tau := \inf\{t \in \bar{I} : \alpha(t) \in \partial A_0\} \in \alpha^{-1}(\partial A_0)$, άρα το $x_1 := \alpha(\tau) \in \partial A_0$ και είναι σαφές ότι $\alpha([0,\tau[) \subset \mathring{A}_0$. Διότι εάν υπήρχε ένα $\tau_1 < \tau$ τέτοιο ώστε $y' = \alpha(\tau_1) \notin \mathring{A}_0$, τότε θα ήταν $y' \notin A_0$ και εφαρμογή της ίδιας διαδικασίας για τα x_0, $y' \in A_1$ θα έδινε την ύπαρξη ενός $x_1' = \alpha(\tau') \in \partial A_0$ με $\tau' < \tau$, το οποίο αντιφάσκει με τον ορισμό του τ. Αναπαραμέτρηση της καμπύλης $\alpha|[0,\tau]$ δίνει το γ.

Βήμα 3. Τώρα έστω $u(x_0) =: c_0$. Επειδή τα x_0 και x_1 ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του A_0, έχουμε $u(x_1) = c_0$ και $f(u(x_0)) = f(u(x_1)) = f(c_0) =: d_0$. Επειδή από την (5.3.5) είναι $x_1 \in D$, έχουμε

$$\Delta u(x_1) = f(u(x_1)) = d_0. \tag{5.3.6}$$

Αλλά

$$\Delta u(x_1) = \Delta u(\lim_{t\to 1-} \gamma(t)) = \lim_{t\to 1-} \Delta u(\gamma(t)) = 0 \tag{5.3.7}$$

διότι $\gamma(t) \in \overset{\circ}{A}_0$ για κάθε $t \in [0,1[$. Συνδυασμός των (5.3.6) και (5.3.7) δίνει $d_0 = 0$, επομένως

$$f(u(x_0)) = 0. \tag{5.3.8}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\Delta u(x_0) - f(u(x_0)) = 0$$

και με αυτό έχουμε αποδείξει ότι $\overset{\circ}{A}_0 \subset D$, άρα από την (5.3.5) $A_0 \subset D$. □

Από την απόδειξη του θεωρήματος αυτού συνάγουμε χωρίς δυσκολία το επόμενο πόρισμα.

Πορισμα 5.9. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.7, εάν το σύνολο* $A_0 := \{x \in \Omega : \ Du(x) = 0\}$ *έχει ένα εσωτερικό σημείο, τότε* $f(u) = 0$ *σε όλο το* $\overset{\circ}{A}_0$.

Αποδειξη. Εξ υποθέσεως $A_1 \neq \emptyset$. Εστω $x_0 \in \overset{\circ}{A}_0$. Τώρα τα Βήματα 2 και 3 της απόδειξης του Θεωρήματος 5.7 ισχύουν και από την (5.3.8) έπεται ότι $f(u(x_0)) = 0$. Επειδή το x_0 ήταν αυθαίρετο, ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. □

Ως εφαρμογή διατυπώνουμε το εξής αποτέλεσμα για μη-γραμμικές εξισώσεις Poisson.

Πορισμα 5.10. *Εστω* Ω *ένα φραγμένο χωρίο του* $\mathbb{R}^N$ *και* $f \in C(\mathbb{R})$ *τέτοια ώστε* $f(t) \neq 0$ *για όλα τα* $t \in \mathbb{R}$. *Τότε για οποιαδήποτε λύση* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *της μη-γραμμικής εξίσωσης Poisson*

$$\Delta u = f(u) \tag{5.3.9}$$

το σύνολο $A_0 := \{x \in \Omega : \ Du(x) = 0\}$ *δεν έχει εσωτερικό σημείο.*

Αποδειξη. Η εξίσωση (5.3.9) είναι η εξίσωση Euler-Lagrange του συναρτησιακού (5.3.1) με $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, για το οποίο έχουμε $F \in C^1(\mathbb{R})$. Εαν $\mathring{A}_0 \neq \emptyset$, από το Πόρισμα 5.9 θα είχαμε $f(u) = 0$ στο $\mathring{A}_0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Πορισμα 5.11. *Εστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $g \in C(\partial\Omega)$ μια μη σταθερή συνάρτηση και $\mathcal{H} := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : u|\partial\Omega = g\}$. Τότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange και Noether για την Λαγκρανζιανή (5.3.1) είναι ισοδύναμες στο $\mathcal{H}$.*

Αποδειξη. Επεται άμεσα από το Θεώρημα 5.7, εφόσον κάθε $u \in \mathcal{H}$ είναι μη-τετριμμένο. □

Παρατηρηση 5.12. Η πιο πάνω συζήτηση περιορίστηκε σε φραγμένα χωρία, μόνο για ευκολία. Πράγματι, η υπόθεση αυτή εξυπηρετεί την εξασφάλιση της ολοκληρωσιμότητας στην (VF) και εγγυάται την εγκυρότητα της εναλλαγής διαφόρισης και ολοκλήρωσης. Τον ίδιο σκοπό επίσης εξυπηρετεί η υπόθεση $u \in C^1(\overline{\Omega})$, με εξαίρεση το Πόρισμα 5.11. Επομένως τα πιο πάνω αποτελέσματα, με κατάλληλες τροποποιήσεις, εφαρμόζουν και σε μη-φραγμένα χωρία.

5.4. Γενικές Λαγκρανζιανές

Προχωράμε στην γενίκευση των αποτελεσμάτων της προηγούμενης ενότητας θεωρώντας Λαγκρανζιανές της μορφής $L(x, u, z)$, οι οποίες, μαζί με την (VF), ικανοποιούν την συνθήκη (H) πιο κάτω. Οπως πριν, η u είναι βαθμωτή συνάρτηση και το όρισμα z αντιστοιχεί στο ∇u.

$$\text{(H)} \quad \begin{array}{l} L_{x_i z_i}(x, u, 0) = 0 \text{ για κάθε } x, u. \\ L_{x_i u}(x, u, 0) = 0 \text{ για κάθε } x, u \text{ και } i = 1, \cdots, N. \end{array}$$

Παραδειγμα 5.13. (i) Ολες οι Λαγκρανζιανές που είναι ανεξάρτητες του x ικανοποιούν την (H). Ειδικά οι Λαγκρανζιανές των κατηγοριών I και II στην [**155**] ικανοποιούν την (H).

(ii) Οι Λαγκρανζιανές της μορφής

$$L(x, u, z) = \tfrac{1}{2}\varphi(x, u)|z|^2 + F(u),$$

όπου $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ικανοποιούν την (H). □

Υπενθυμίζεται ο ορισμός της παραγώγου Euler-Lagrange, σχέση (5.2.1).

Θεωρημα 5.14. *Εστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$, $L \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ μια Λαγκρανζιανή που ικανοποιεί την (H) και $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ μια μη-τετριμμένη κλασσική λύση των εξισώσεων Noether,*

$$\operatorname{div} T(x, u, Du) + L_x(x, u, Du) = 0. \tag{5.4.1}$$

Τότε η u είναι λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange

$$\tfrac{\partial}{\partial x_j} L_{u_{,j}} - L_u = 0 \tag{5.4.2}$$

στο Ω.

Παρατηρηση 5.15. Από την (5.2.8), η εξίσωση (5.4.1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x_j} L_{u_{,j}} - L_u\right) u_{,i} = 0$$

ή με συμβολισμό ελεύθερο δεικτών

$$\delta L(u) \cdot Du = 0. \tag{5.4.3}$$

Σημειώνεται ότι η (5.4.1) είναι σύστημα ΜΔΕ δεύτερης τάξης ως προς u, ενώ η (5.4.2) είναι μια ΜΔΕ επίσης δεύτερης τάξης ως προς u.

Αποδειξη. Η απόδειξη αρχίζει ακριβώς όπως και η απόδειξη του Θεωρήματος 5.7 μέχρι το Βήμα 3 όπου η απόδειξη της ύπαρξης της καμπύλης γ έχει ολοκληρωθεί, με την προφανή τροποποίηση

$$D := \{x \in \Omega : \ \delta L(u)(x) = 0\}.$$

Για σταθεροποιημένο $x_0 \in \mathring{A}_0$ έστω $u(x_0) =: c_0$. Επίσης έστω $f := L_u$. Επειδή τα x_0 και x_1 ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του A_0, έχουμε $u(x_1) = c_0$ και από την (H)

$$f(x_0, u(x_0), 0) = f(x_1, u(x_0), 0) = f(x_0, c_0, 0) =: d_0. \tag{5.4.4}$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x_i} L_{z_i}(x, u, Du)\Big|_{x_0} &= L_{x_i z_i}(x_0, c_0, 0) + L_{u z_i}(x_0, c_0, 0) u_{,i}(x_0) + \\ &\quad L_{z_i z_j}(x_0, c_0, 0) u_{,ij}(x_0) \\ &= L_{x_i z_i}(x_0, c_0, 0) = 0 \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

από την (H). Επειδή από την (5.3.5) είναι $x_1 \in D$, έχουμε με όμοιο τρόπο

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x_i} L_{z_i}(x, u, Du)\Big|_{x_1} &= L_{x_i z_i}(x_1, c_0, 0) + L_{u z_i}(x_1, c_0, 0) u_{,i}(x_1) + \\ &\quad L_{z_i z_j}(x_1, c_0, 0) u_{,ij}(x_1) \\ &= L_{x_i z_i}(x_1, c_0, 0) = f(x_1, c_0, 0) = d_0 \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

όπου η δεύτερη ισότητα από το τέλος έπεται από την εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i} L_{z_i}(x,u,Du)\Big|_{x_1} = L_u(x_1,u(x_1),Du(x_1)) = f(x_1,c_0,0).$$

Εχουμε παραλείψει ένα βήμα που περιλαμβάνει ένα επιχείρημα συνέχειας κατά μήκος της γ καθώς $t \to 1-$ (βλ. απόδειξη της ισότητας που ακολουθεί). Από την πρώτη των (Η) και $\gamma(t) \in \overset{\circ}{A}_0$ για όλα τα $t \in [0,1[$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} L_{x_i z_i}(x_1,c_0,0) &= L_{x_i z_i}(\lim_{t\to 1-}\gamma(t), u(\lim_{t\to 1-}\gamma(t)), Du(\lim_{t\to 1-}\gamma(t))) \\ &= \lim_{t\to 1-} L_{x_i z_i}(\gamma(t),u(\gamma(t)),Du(\gamma(t))) \\ &= \lim_{t\to 1-} L_{x_i z_i}(\gamma(t),c_0,0) = 0. \end{aligned}$$

Συνδυασμός της σχέσης αυτής με την (5.4.6) δίνει $d_0 = 0$, από όπου με την βοήθεια της (5.4.4)

$$f(x_0,c_0,0) = 0.$$

Αυτό σημαίνει

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x_i} L_{z_i}(x,u,Du)\Big|_{x_0} &- f(x_0,u(x_0),Du(x_0)) \\ &= L_{x_i z_i}(x_0,c_0,0) - f(x_0,c_0,0) = 0. \end{aligned}$$

και με αυτό έχουμε αποδείξει $\overset{\circ}{A}_0 \subset D$, οπότε από την (5.3.5) έπεται ότι $A_0 \subset D$. □

Τα Πορίσματα 5.9 και 5.10 μεταφέρονται στις γενικές Λαγκρανζιανές που είναι σύμφωνες με την (Η), με τις προφανείς τροποποιήσεις:

Πορισμα 5.16. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.7, εάν το σύνολο* $A_0 := \{x \in \Omega : \ Du(x) = 0\}$ *έχει ένα εσωτερικό σημείο, τότε* $L_u = 0$ *σε όλο το* $\overset{\circ}{A}_0$.

Πορισμα 5.17. *Εστω* Ω *ένα φραγμένο χωρίο του* $\mathbb{R}^N$ *και* $L_u(x,u,z) \neq 0$ *στο* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. *Τότε για οποιαδήποτε λύση* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *της ΜΔΕ ως προς* u

$$\tfrac{\partial}{\partial x_j} L_{u_{,j}} - L_u = 0$$

το σύνολο $A_0 := \{x \in \Omega : \ Du(x) = 0\}$ *δεν έχει εσωτερικό σημείο.*

Η Παρατήρηση 5.12 και το Πόρισμα 5.11 ισχύουν ως έχουν.

Παραδειγμα 5.18. Θεωρούμε την Λαγκρανζιανή τύπου p-Laplacian[**152**]

$$L(u,z) = \frac{1}{2}\varphi(|z|^2) + F(u)$$

όπου $F \in C(\mathbb{R})$ και $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$ και $\varphi'(s) \geqslant 0$ $\forall s \geqslant 0$, η οποία ικανοποιεί την (H). Ο τανυστής ενέργειας-ορμής για αυτή την Λαγκρανζιανή είναι

$$T_{ij} = \varphi'(|Du|^2)u_{,i}u_{,j} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varphi(|Du|^2) + F(u)\right).$$

Από το Πόρισμα 5.11 η ΜΔΕ

$$\operatorname{div}(\varphi'(|Du|^2)Du \otimes Du) - D\left(\frac{1}{2}\varphi(|Du|^2) + F(u)\right) = 0$$

και η

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi'(|Du|^2)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = F'(u)$$

με την συνοριακή συνθήκη $u|\partial\Omega = g$, όπου $g \in C(\partial\Omega)$ είναι μη-σταθερή συνάρτηση, είναι ισοδύναμες.

5.5. Εφαρμογή: Ισοδυναμία αποδεκτών και εσωτερικών μεταβολών

Οι C^2 λύσεις των εξισώσεων Euler-Lagrange (αντίστοιχα Noether) είναι κρίσιμα (αντίστοιχα εσωτερικά κρίσιμα) σημεία των αντίστοιχων μεταβολικών συναρτησιακών. Επειδή κάθε εσωτερική μεταβολή h οδηγεί σε μια αποδεκτή μεταβολή[**150**]

$$w = Du \cdot h,$$

προκύπτει το ερώτημα αν αυτοί οι δύο τύποι μεταβολών είναι ισοδύναμοι. Σημειώνεται ότι το σύνολο των εσωτερικών μεταβολών είναι μικρότερο από αυτό των αποδεκτών μεταβολών. Το επόμενο ερώτημα δίνει μια απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Θεωρημα 5.19. *Εστω J ένα μεταβολικό συναρτησιακό με Λαγκρανζιανή $L \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ που ικανοποιεί την (H) και $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ μια μη-τετριμμένη συνάρτηση. Τότε το μεταβολικό πρόβλημα*

$$\delta J(u)v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{5.5.1}$$

είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα

$$\delta J(u)w = 0 \quad \forall w \in \mathcal{I}(\Omega) \tag{5.5.2}$$

όπου $\mathcal{I}(\Omega) := \{Du \cdot h : h$ εσωτερική μεταβολή του $u\}$. *Με απλά λόγια κάποιος μπορεί να θεωρήσει μόνο εσωτερικές μεταβολές του* u *στο πρόβλημα* (*5.5.1*).

Αποδειξη. Η εξίσωση (5.5.2) έπεται άμεσα από την (5.5.1) όταν το u είναι C^∞. Διαφορετικά έχουμε $w \in C_c^1(\Omega)$ ενώ η (5.5.1) απαιτεί $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Στην περίπτωση αυτή η απόδειξη έπεται από ένα απλό επιχείρημα πυκνότητας. Για το αντίστροφο, εάν ισχύει η (5.5.2), τότε $\delta J(u)Du \cdot h = 0$ για όλα τα $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$. Από το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών έχουμε $\delta J(u)Du = 0$, επομένως η u είναι λύση των εξισώσεων Noether, και από το Θεώρημα 5.14 θα είναι και λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange. Επειδή η u είναι C^2, η u είναι κρίσιμο σημείο του J, δηλ. ισχύει η (5.5.1). □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Πολλαπλότητες - Συστήματα συντεταγμένων - Τανυστές

Στο παράρτημα αυτό συνοψίζουμε μερικά βασικά δεδομένα από την θεωρία των πολλαπλοτήτων και σχετικών θεμάτων με σκοπό την εισαγωγή ορισμός και συμβολισμών που χρησιμοποιούνται σε αυτή την διατριβή.

Α.1. Πολλαπλότητες και συστήματα συντεταγμένων

Α.1.1. Βασικοί ορισμοί. Η έννοια της πολλαπλότητας είναι γενίκευση της έννοιας της επιφάνειας στον τριδιάστατο χώρο.

Ορισμος Α.1 (Πολλαπλότητα, παραμέτρηση, χάρτης, σύστημα συντεταγμένων). Εστω $k \leqslant N$, $U \subset \mathbb{R}^N$ και Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Μια απεικόνιση $\varphi : \Omega \to U$, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη (bijective), $r \geqslant 1$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο Ω ($\varphi \in C^r(\Omega)$) και

$$\text{rank} J_\varphi(q) = k \ \forall q \in \Omega, \tag{A.1.1}$$

όπου J_φ είναι η Jacobian της φ, λέγεται *C^r-παραμέτρηση* του U και το U λέγεται *τμήμα k-διάστατης υποπολλαπλότητας του* $\mathbb{R}^N$. Η αντίστροφη απεικόνιση $\psi := \varphi^{-1} : U \to \Omega$ λέγεται *σύστημα συντεταγμένων* η *χάρτης* του U. Θα λέμε και ότι το $\varphi(\Omega) = U$ είναι ένας *k-διάστατος χάρτης* ή ένας *k-χάρτης*.

Ενα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^N$ λέγεται *k-διάστατη υποπολλαπλότητα του* $\mathbb{R}^N$ εάν έχει ένα κάλυμμα από k-χάρτες, δηλ. υπάρχει $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ τέτοια ώστε το U_λ είναι k-χάρτης $\forall \lambda \in \Lambda$ και $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M$. □

Παρατηρηση Α.2. (i) Εαν Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης η φ^{-1} είναι επίσης C^r. Εάν $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ και $k < N$ αυτός είναι ο ορισμός ότι $\varphi^{-1} \in C^r(U)$. Πιο γενικά, μια συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ είναι C^r εάν $\forall p \in M$ υπάρχει παραμέτρηση φ μιας ανοιχτής περιοχής U του p τέτοια ώστε $f \circ \varphi \in C^r$. Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται σε απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων: εάν

M, N είναι πολλαπλότητες, μια συνάρτηση $F : M \to N$ είναι C^r εάν $\forall p \in M$ υπάρχουν παραμετρήσεις φ, ψ ανοιχτών περιοχών U, V των p και $F(p)$ αντίστοιχα, έτσι ώστε η *τοπική παράσταση της* F, $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi \in C^r$. Ελέγχεται άμεσα ότι εάν η συνθήκη αυτή ισχύει για ένα ιδιαίτερο ζευγάρι παραμετρήσεων φ, ψ, τότε ισχύει για κάθε τέτοιο ζευγάρι.

(ii) Η συνθήκη (Α.1.1) εξασφαλίζει ότι τα διανύσματα

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^1}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial q^k},$$

είναι *γραμμικά ανεξάρτητα*.

(iii) Μπορούμε να έχουμε περισσότερες από μια παραμετρήσεις ενός τμήματος πολλαπλότητας U, όπως για παράδειγμα $\varphi : \Omega \to U$ και $\varphi' : \Omega' \to U$. Εστω ότι οι συντεταγμένες στα Ω, Ω' είναι $q = (q^1, \cdots, q^k)$, $q' = (q'^1, \cdots, q'^k)$ αντίστοιχα. Τότε οι *απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων* είναι $\varphi'^{-1} \circ \varphi : \Omega \to \Omega'$ για την μετάβαση από το $q^1, \cdots, q^N$ στο $q'^1, \cdots, q'^N$ και $\varphi^{-1} \circ \varphi' : \Omega' \to \Omega$ για την αντίστροφη μετάβαση.

Παραδειγμα Α.3. (i) Το σύνολο $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \& \ z > 0\}$ είναι ένα τμήμα υποπολλαπλότητας του $\mathbb{R}^3$ μέσω της παραμέτρησης

$$\mathbf{x} : B(0,1) \to M, \mathbf{x}(q^1, q^2) = (q^1, q^2, \sqrt{1 - (q^1)^2 - (q^2)^2})$$

όπου $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το 0. Γράφουμε σε μορφή συνιστωσών

$$x^1(q^1, q^2) = q^1, \quad x^2(q^1, q^2) = q^2, \quad x^3(q) = \sqrt{1 - (q^1)^2 - (q^2)^2}$$

(ii) Η σφαίρα $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ είναι υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$ μέσω των εξής έξι παραμετρήσεων

$$\varphi_\pm : B(0,1) \to \mathbb{S}^2, \varphi(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1, \xi^2, \pm\sqrt{1 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2})$$

$$\chi_\pm : B(0,1) \to \mathbb{S}^2, \varphi(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1, \pm\sqrt{1 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2}, \xi^2)$$

$$\psi_\pm : B(0,1) \to \mathbb{S}^2, \varphi(\xi^1, \xi^2) = (\pm\sqrt{1 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2}, \xi^1, \xi^2)$$

και το $B(0,1)$ είναι όπως στο (i).

(iii) Το σύνολο $M = B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα τριδιάστατο τμήμα πολλαπλότητας του $\mathbb{R}^3$ μέσω της παραμέτρησης της ταυτοτικής απεικόνισης id_M. Αυτό ισχύει για κάθε ανοιχτό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^N$. Η παραμέτρηση σε μορφή συντεταγμένων εδώ είναι απλά

$$x^1(q^1, q^2, q^3) = q^1, \quad x^2(q^1, q^2, q^3) = q^2, \quad x^3(q^1, q^2, q^3) = q^3$$

Συμβολισμός. Εστω $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^k$ και $M \subset \mathbb{R}^N$. Για τις συνιστώσες ενός χάρτη

$$\psi := \varphi^{-1} : M \to \Omega, p \mapsto \psi(p) = (\psi_1(p), \cdots, \psi_k(p))$$

χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$q^1(p), \cdots, q^k(p).$$

Οι συνιστώσες μιας συνάρτησης αλλαγής συντεταγμένων

$$\varphi'^{-1} \circ \varphi : \Omega \to \Omega'$$

συμβολίζονται

$$q'^1(q^1, \cdots, q^k), \cdots, q'^k(q^1, \cdots, q^k).$$

Ομοίως, για τις συνιστώσες της συνάρτησης της αντίστροφης αλλαγής συντεταγμένων

$$\varphi^{-1} \circ \varphi' : \Omega' \to \Omega$$

γράφουμε

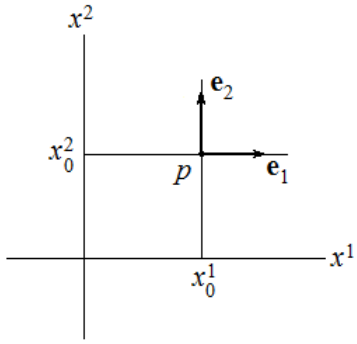
$$q^1(q'^1, \cdots, q'^k), \cdots, q^k(q'^1, \cdots, q'^k).$$

Ετσι, q^i είναι δυνατόν να σημαίνει την i-στή συντεταγμένη ενός σημείου p, την i-στή συνιστώσα μιας απεικόνισης χάρτη, ή την i-στή συνιστώσα μιας συνάρτησης αλλαγής συντεταγμένων. Το ποιό ακριβώς εννοείται από αυτά, πρέπει να συμπεραίνεται από τα συμφραζόμενα.

Επίσης θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$x^1(\mathbf{q}), \cdots, x^N(\mathbf{q})$$

για τις συνιστώσες μιας παραμέτρησης $\mathbf{x} : \Omega \to U, \mathbf{q} \mapsto \varphi(\mathbf{q})$, όπου $\mathbf{q} = (q^1, \cdots, q^k)$.



Σχημα Α.1.1. Καρτεσιανό (Cartesian) σύστημα συντεταγμένων (ΣΣ) (προβολή στο επίπεδο x^1x^2). Οι γραμμές που περνούν από το σημείο p είναι το *τοπικό καρτεσιανό* ΣΣ του p. Οι ίδιες γραμμές είναι οι *συντεταγμένες καμπύλες* του καρτεσιανού ΣΣ. Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ είναι η *τοπική βάση* του p.

Α.1.2. Τοπική βάση συστήματος συντεταγμένων. Αντίθετα με τα καρτεσιανά (Cartesian) συστήματα συντεταγμένων, τα καμπυλόγραμμα δεν έχουν την ίδια βάση σε όλα τα σημεία. Ετσι το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι ο προσδιορισμός των *διανυσμάτων βάσης*, ως προς τα οποία να μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίζουμε συνιστώσες διανυσμάτων.

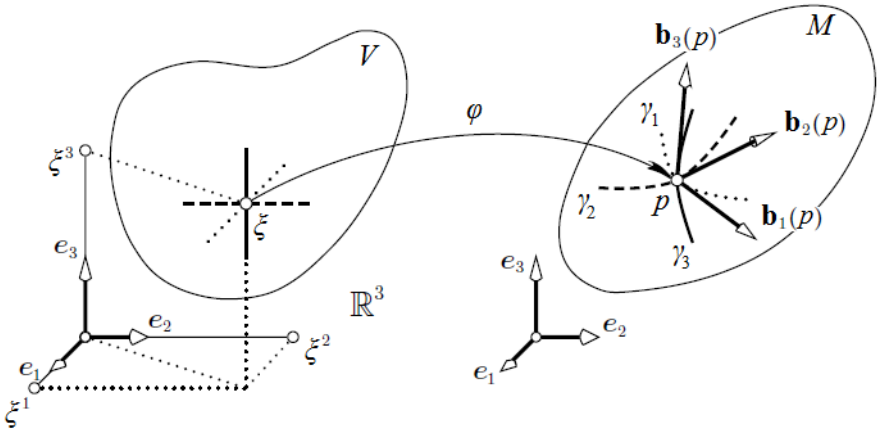
Για να προσδιορίσουμε τα διανύσματα βάσης σε ένα σημείο p με συντεταγμένες $x_0^1, \cdots, x_0^N$ σε ένα καρτεσιανό ΣΣ (βλ. Σχ. Α.1.1 για $N = 2$) σκεφτόμαστε ως εξής: φέρουμε την παράλληλη γ_1 στον άξονα x^1 που περνάει από το p, η οποία μπορεί να παραμετρηθεί από την $\gamma_1(t) = (x_0^1 + t, x_0^2, \cdots, x_0^N)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο p είναι

$$\mathbf{e}_1(p) = \gamma_1'(0) = (1, 0, \cdots, 0) = \mathbf{e}_1.$$

Γενικά $\gamma_i(t) = (x_0^1, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^N)$ και το εφαπτόμενο διάνυσμα στο p είναι

$$\mathbf{e}_i(p) = \gamma_i'(0) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = \mathbf{e}_i.$$

Σε ένα γενικό ΣΣ με την παραμέτρηση $\varphi = (x^1, \cdots, x^N)$ (βλ. Σχ. Α.1.2), καθοδηγούμενοι από το παράδειγμα του καρτεσιανού συστήματος,



Σχημα Α.1.2. *Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, συντεταγμένες καμπύλες και τοπικές βάσεις σε τμήμα πολλαπλότητας.* $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ είναι οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του $p = \varphi(\xi) \in M$. Τα διανύσματα $b_i = \partial_i \varphi(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και εφαπτόμενα στις συντεταγμένες καμπύλες γ_i. Αποτελούν μια τοπική βάση στο p.

θεωρούμε τις *συντεταγμένες καμπύλες* που περνούν από το p,

$$\begin{aligned}\gamma_i(t) &= \varphi(q_0^1, \cdots, q_0^i + t, \cdots, q_0^k)\\ &= (x^1(q_0^1, \cdots, q_0^i + t, \cdots, q_0^k), \cdots, x^N(q_0^1, \cdots, q_0^i + t, \cdots, q_0^k)),\end{aligned}$$

όπου $i = 1, \cdots, k$ και $\mathbf{q}_0 = (q_0^1, \cdots, q_0^k)$ είναι οι συντεταγμένες του p σε αυτό το ΣΣ (αυτό σημαίνει $\mathbf{q}_0 = \varphi^{-1}(p)$). Οπως προηγουμένως τα διανύσματα βάσης δίνονται από την σχέση

$$\mathbf{b}_i(p) = \gamma_i'(0) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial q^i}\right|_{\mathbf{q}_0} = \left.\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^i}, \cdots, \frac{\partial x^N}{\partial q^i}\right)\right|_{\mathbf{q}_0}, \quad i = 1, \cdots, k.$$

Η ακριβής διατύπωση αυτών των ευριστικών παρατηρήσεων δίνεται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμος Α.4. Εστω M μια k-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ και $p \in M$. Ενα διάνυσμα v λέγεται *εφαπτόμενο διάνυσμα* της M στο p εάν υπάρχει μια συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη

$$\alpha :]-1, 1[\to M \subset \mathbb{R}^N$$

τέτοια ώστε

$$\alpha(0) = p \quad \& \quad \alpha'(0) = v.$$

Το σύνολο T_pM των εφαπτόμενων διανυσμάτων της M στο p είναι ένας k-διάστατος διανυσματικός χώρος, ο οποίος λέγεται *εφαπτόμενος χώρος της M στο p*. Η ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων της M (η οποία δεν είναι απαραίτητα διανυσματικός χώρος) λέγεται *εφαπτόμενη δέσμη της M* και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM.$$

Παραδειγμα Α.5. Εστω M ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ με την παραμέτρηση της ταυτοτικής απεικόνισης id_M. Ο εφαπτόμενος χώρος σε κάθε σημείο $p \in M$ είναι ο $\mathbb{R}^N$, δηλ. $T_pM = \mathbb{R}^N$. Η εφαπτόμενη δέσμη είναι

$$TM = M \times \mathbb{R}^N.$$

Παρατηρηση Α.6. Ο ορισμός Α.4 του εφαπτόμενου διανύσματος δεν είναι ένας *εσωτερικός ορισμός*, με την έννοια ότι στηρίζεται στον περιβάλλοντα χώρο $\mathbb{R}^N$. Παίρνουμε έναν εσωτερικό ορισμό θεωρώντας την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των καμπυλών $\alpha :]-1,1[\to M$ που περνούν από το p

$$\alpha \sim \beta \;\Leftrightarrow (\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0) \tag{A.1.2}$$

για ένα σύστημα συντεταγμένων ψ. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνθήκη αυτή ικανοποιείται σε κάθε άλλο αποδεκτό σύστημα συντεταγμένων. Το εφαπτόμενο διάνυσμα ορίζεται ως μια κλάση ισοδυναμίας αυτής της σχέσης.

Θεωρημα Α.7 (Διανύσματα βάσης συστήματος συντεταγμένων). *Εστω M μια k-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ και $p \in M$. Τότε:*

(i) *Ο T_pM είναι k-διάστατος διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^N$.*

(ii) *Εαν $\varphi : \Omega \to U$ είναι μια παραμέτρηση της M και $\mathbf{q} = (q^1, \cdots, q^k) \in \Omega$ είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου p σε αυτό το ΣΣ, δηλ. $\mathbf{q} = \varphi^{-1}(p)$, τότε τα διανύσματα*

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\right|_{\mathbf{q}}, \cdots, \left.\frac{\partial\varphi}{\partial q^k}\right|_{\mathbf{q}}$$

αποτελούν βάση του T_pM.

Αποδειξη. Εστω $\mathbf{E}_i = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\right|_{\mathbf{q}}$ $(i = 1, \cdots, k)$ και $F = \mathrm{span}\{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_k\}$ ο διανυσματικός χώρος που ορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{E}_i$. Θα

δείξουμε ότι $F = T_pM$. Εστω $v = c^1\mathbf{E}_1 + \cdots + c^k\mathbf{E}_k \in F$ και $\alpha(t) = \varphi(q^1 + c^1t, \cdots, q^k + c^kt)$ μια καμπύλη που περνάει από το p ($\alpha(0) = \varphi(\mathbf{q}) = p$). Από τον ορισμό του $v \in T_pM$

$$\alpha'(0) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\right|_{\mathbf{q}} c^1 + \cdots + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial q^k}\right|_{\mathbf{q}} c^k = v.$$

Αντίστροφα, αν $v \in T_pM$, υπάρχει καμπύλη α με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = v$. Για την καμπύλη $\gamma(t) := \varphi^{-1}(\alpha(t))$ έχουμε $\alpha(t) = \varphi(\gamma(t))$ και

$$v = \alpha'(0) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\right|_{\mathbf{q}} \gamma_1'(0) + \cdots + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial q^k}\right|_{\mathbf{q}} \gamma_k'(0) \in F.$$

Η γραμμική ανεξαρτησία των $\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_k$ έπεται από την σχέση

$$\operatorname{rank} J_\varphi(\mathbf{q}) = k,$$

βλ. Ορισμό Α.1, από τον οποίο έπεται ότι οι στήλες της Ιακωβιανής $\partial_1\varphi(\mathbf{q}), \cdots, \partial_k\varphi(\mathbf{q})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. □

Α.1.3. Δυική βάση συστήματος συντεταγμένων. Επειδή τα διανύσματα βάσης $\mathbf{E}_i$ ενός συστήματος συντεταγμένων δεν είναι συνήθως κάθετα μεταξύ τους, η χρήση της *δυικής βάσης* σε υπολογισμούς είναι αναπόφευκτη. Υπενθυμίζεται ότι ο δυικός χώρος ενός γραμμικού χώρου (στην περίπτωσή μας $T_pM \cong \mathbb{R}^k$) είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτησιακών του χώρου. Ο επόμενος ορισμός είναι μια εξειδίκευση αυτού του ορισμού του δυικού χώρου για τον T_pM:

Ορισμος Α.8. Εστω M μια k-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ και $p \in M$. Ο δυικός χώρος $T_p^\star M$ του T_pM λέγεται *συνεφαπτομενικός χώρος* της M στο p. Τα στοιχεία του $T_p^\star M$ λέγονται *συνεφαπτομενικά διανύσματα* της M στο $p \in M$.

Η ένωση όλων των συνεφαπτομενικών χώρων της M (η οποία εν γένει δεν είναι γραμμικός χώρος) λέγεται *συνεφαπτομενική δέσμη της* M και γράφουμε

$$T^\star M = \bigcup_{p\in M} T_p^\star M.$$

Κατ΄ αναλογία με το Θεώρημα Α.7 έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Α.9 (Δυική βάση συστήματος συντεταγμένων). *Εστω M μια k-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$, $p \in M$, $\varphi : \Omega \to U$ μια παραμέτρηση της M και $\mathbf{q} = (q^1, \cdots, q^k) \in \Omega$ οι συντεταγμένες στο Ω. Για κάθε $i = 1, \cdots, k$ ορίζουμε τις απεικονίσεις*

$$\omega_i : T_pM \to \mathbb{R}, v \mapsto (q^i \circ \alpha)'(0),$$

όπου $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ τέτοια ώστε $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = v$. $q^i = (\varphi^{-1})^i$ είναι η i-στή συνιστώσα της φ^{-1}. Τότε $\omega_i \in T_p^\star M$ και τα διανύσματα

$$dq^1(p), \cdots, dq^k(p)$$

όπου $dq^i(p) = \omega_i$, αποτελούν βάση του $T_p^\star M$, η οποία είναι η δυική βάση της

$$\mathbf{E}_1 = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial q^1}\right|_{\varphi^{-1}(p)}, \cdots, \mathbf{E}_k = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial q^k}\right|_{\varphi^{-1}(p)}. \tag{A.1.3}$$

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι οι απεικονίσεις ω_i είναι καλά ορισμένες, δηλ. δεν εξαρτώνται από την επιλογή του α. Εστω β μια άλλη καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες, $\beta(0) = p$ και $\beta'(0) = v$ και έστω $\rho = \varphi^{-1} \circ \alpha$, $\sigma = \varphi^{-1} \circ \beta$, οπότε $\alpha = \varphi \circ \rho$ και $\beta = \varphi \circ \sigma$. Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε για $\mathbf{q}_0 := \varphi^{-1}(p)$,

$$\alpha'(0) = J_\varphi \cdot \rho'(\mathbf{q}_0) \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta'(0) = J_\varphi \cdot \sigma'(\mathbf{q}_0)$$

και επειδή $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$,

$$\sum_{i=1}^k \left.\frac{\partial \varphi}{\partial q^i}\right|_{\mathbf{q}_0} ((q^i \circ \alpha)'(0) - (q^i \circ \beta)'(0)) = 0.$$

Από την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων (Α.1.3) έπεται ότι

$$(q^i \circ \alpha)'(0) = (q^i \circ \beta)'(0) \tag{A.1.4}$$

για κάθε $i = 1, \cdots, k$.

Τα υπόλοιπα έπονται από την

$$\omega_i(\left.\frac{\partial \varphi}{\partial q^j}\right|_{\mathbf{q}_0}) = (q^i \circ \gamma_j)'(0) = (q_0^i + \delta_{ij}t)'(0) = \delta_{ij},$$

όπου $\gamma_j(t) = \varphi(q_0^1, \cdots, q_0^j + t, \cdots, q_0^k)$. □

Θα γράφουμε και $\mathbf{E}_k^\star \equiv \mathbf{E}^k$ για το dq^k. Με τον συμβολισμό αυτό $(\mathbf{E}_1^\star, \cdots, \mathbf{E}_k^\star)$ είναι η δυική βάση της $(\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_k)$. Εχουμε την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\mathbf{E}_i^\star(\mathbf{E}_j) = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, \cdots, k.$$

Σε γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης, τα γραμμικά συναρτησιακά μπορούν να ταυτιστούν με διανύσματα του χώρου. Ετσι μπορούμε να γράψουμε την σχέση αυτή στη μορφή βαθμωτού γινομένου

$$\mathbf{E}_i^\star \cdot \mathbf{E}_j = \left\langle \mathbf{E}_i^\star, \mathbf{E}_j \right\rangle = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, \cdots, k, \tag{Α.1.5}$$

όπου $\mathbf{E}_j^\star$ είναι τώρα το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό $\mathbf{E}_j^\star$.

Πορισμα Α.10. *Με τον συμβολισμό της Πρότασης Α.9 έστω $v \in T_pM$ και α, β δύο αντιπρόσωπες καμπύλες, δηλ. $\alpha(0) = \beta(0) = p$ και $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$. Για κάθε συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε μια περιοχή του p*

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Αποδειξη. Για έναν χάρτη φ του p από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}
(f \circ \alpha)'(0) &= (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) \\
&= (f \circ \varphi^{-1})' \cdot (\varphi \circ \alpha)'(0) \\
&= (f \circ \varphi^{-1})' \cdot (\varphi \circ \beta)'(0) \\
&= (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \beta)'(0) \\
&= (f \circ \beta)'(0)
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα έγινε χρήση της (Α.1.4). □

Παρατηρηση Α.11. Μπορούμε να υπολογίσουμε την δυική βάση με την χρήση της (Α.1.5). Για σταθερό i, εάν $\mathbf{E}_i^\star = (x_1, \cdots, x_k)$ και $\mathbf{E}_j = (b_{j1}, \cdots, b_{jk})$, από την (Α.1.5),

$$\sum_{l=1}^{k} b_{jl} x_l = \delta_{ij},$$

η οποία λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_k$ έχει πάντα μοναδική λύση για το $(x_1, \cdots, x_k)$.

Α.1.4. Αλλαγές συστημάτων συντεταγμένων. Διάφορα συστήματα συντεταγμένων μπορούν να θεωρηθούν σε ένα τμήμα υποπολλαπλότητας. Η ακόλουθη πρόταση μας λέει πως μετασχηματίζονται οι τοπικές βάσεις όταν αλλάζει το σύστημα συντεταγμένων.

Πρόταση Α.12. *Εστω M μια k-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ και $\varphi : \Omega \to U$, $\varphi' : \Omega' \to U$ δύο παραμετρήσεις. Υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση*

$$L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,\ L = [L^i{}_j]_{i,j=1,\cdots,k}$$

η οποία απεικονίζει την τοπική βάση της φ στην αντίστοιχη της φ'

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial q'^j} = L^i{}_j \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}, \qquad L^i{}_j = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j}$$

όπου $\mathbf{q}$ και $\mathbf{q}'$ είναι οι συντεταγμένες στα Ω και Ω' αντίστοιχα.

Απόδειξη. Από τον κανόνα της αλυσίδας για την συνάρτηση $\varphi' = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi')$ παίρνουμε

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial q'^j} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \frac{\partial (\varphi^{-1} \circ \varphi')^i}{\partial q'^j}.$$

Σύμφωνα με τον Συμβολισμό Α.1.1 έχουμε $(\varphi^{-1} \circ \varphi')^i = q^i$ και από αυτό ο ισχυρισμός έπεται άμεσα. □

Α.2. Διανύσματα - Τανυστές - Διαφορικές φόρμες

Α.2.1. Τανυστές.

Ορισμος Α.13. Το *τανυστικό γινόμενο $E \otimes F$ δύο γραμμικών χώρων* (πεπερασμένης διάστασης) E, F είναι ο γραμμικός χώρος των διγραμμικών μορφών στον $E^\star \times F^\star$,

$$E \otimes F = \{u : E^\star \times F^\star \to \mathbb{R} \ :\ u\ \textit{διγραμμική}\}$$

όπου $E^\star, F^\star$ είναι οι αντίστοιχοι δυικοί χώροι.

Τα στοιχεία του $E \otimes F$ λέγονται *αντιμεταβλητοί τανυστές 2ης τάξης*.

Παρατηρηση Α.14. (i) Κατ΄ αναλογία το τανυστικό γινόμενο των $E^\star, F^\star$ είναι ο γραμμικός χώρος όλων των διγραμμικών συναρτησιακών στον $E \times F$, δηλ.

$$E^\star \otimes F^\star = \{u : E \times F \to \mathbb{R} \ :\ u\ \textit{διγραμμική}\}.$$

Τα στοιχεία του $E^\star \otimes F^\star$ λέγονται *συμμεταβλητοί τανυστές 2ης τάξης*.

(ii) Στον Ορισμό Α.13 είναι δυνατόν να έχουμε $F = E$, δηλ. $E \otimes E$ είναι ο χώρος των διγραμμικών συναρτησιακών $u : E^\star \times E^\star \to \mathbb{R}$.

(iii) Ο Ορισμός Α.13 μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε r χώρους $E_1, \cdots, E_r$. Εδώ

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_r$$

είναι ο χώρος των *r-γραμμικών συναρτησιακών* $u : E_1^\star \times \cdots \times E_r^\star \to \mathbb{R}$. Τα στοιχεία αυτών των χώρων λέγονται *τανυστές r-στής τάξης* (αντιμεταβλητοί, συμμεταβλητοί ή μικτοί ανάλογα με το αν οι όροι του γινομένου είναι οι χώροι, οι δυικοί τους ή και τα δύο). □

Ορισμος Α.15. Εστω E, F γραμμικοί χώροι (πεπερασμένης διάστασης). Το *τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων* $x \in E$, $y \in F$, συμβολιζόμενο $x \otimes y \in E \otimes F$, ορίζεται από την σχέση

$$x \otimes y(u^\star, v^\star) = u^\star(x)v^\star(y).$$

Παρατηρηση Α.16. (i) Το τανυστικό γινόμενο $x^\star \otimes y^\star \in E^\star \otimes F^\star$ των $x^\star \in E^\star$, $y^\star \in F^\star$ ορίζεται από την σχέση

$$x^\star \otimes y^\star(u, v) = x^\star(u)y^\star(v).$$

(ii) Ο ορισμό αυτός επεκτείνεται σε περισσότερα από δύο διανύσματα:

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r(u_1^\star, \cdots, u_r^\star) = u_1^\star(x_1) \cdots u_r^\star(x_r).$$

(iii) Γενικά $x \otimes y \neq y \otimes x$. □

Προταση Α.17. *Εστω E διανυσματικός χώρος, $(b_1, \cdots, b_n)$ μια βάση του και $(b_1^\star, \cdots, b_n^\star)$ η δυική της βάση. Τα διανύσματα*

$$(b_i \otimes b_j)_{i,j=1}^n, \quad (b_i^\star \otimes b_j^\star)_{i,j=1}^n$$

είναι βάσεις των $E \otimes E$ και $E^\star \otimes E^\star$ αντίστοιχα.

Αποδειξη. Εστω $T : E^\star \times E^\star \to \mathbb{R}$ μια διγραμμική απεικόνιση $T \in E \otimes E$. Για $u^\star, v^\star \in E^\star$ έχουμε

$$T(u^\star, v^\star) = T(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^\star, \sum_{j=1}^n \mu_j b_j^\star) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j T(b_i^\star, b_j^\star).$$

Από την

$$(b_k \otimes b_l)(u^\star, v^\star) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j (b_k \otimes b_l)(b_i^\star, b_j^\star) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j b_k(b_i^\star) b_l(b_j^\star) = \lambda_k \mu_l$$

παίρνουμε

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} T(b_i^\star, b_j^\star) b_i \otimes b_j. \tag{A.2.1}$$

Η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $b_i \otimes b_j$ προκύπτει με όμοιο τρόπο. □

Πορισμα Α.18. *Εαν* $\dim E = n$ *τότε* $\dim(E \otimes E) = n^2$ *και γενικά για* r *όρους* $\dim(E \otimes \cdots \otimes E) = n^r$.

Α.2.2. Τανυστικά πεδία.

Ορισμος Α.19. Εστω M ένα τμήμα k-διάστατης υποπολλαπλότητας του $\mathbb{R}^N$ και $p \in M$. Τα στοιχεία του χώρου

$$\underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{r\ \text{όροι}} \otimes \underbrace{T_p^\star M \otimes \cdots \otimes T_p^\star M}_{s\ \text{όροι}} =: \mathbf{T}_p^{r,s}M$$

λέγονται *r-αντιμεταβλητοί s-συμμεταβλητοί τανυστές*, ή *τανυστές τύπου* (r,s) ή και (r,s)-*τανυστές*.

Ορίζουμε την (r,s)-*τανυστική δέσμη της* M

$$\mathbf{T}^{r,s}M = \bigcup_{p \in M} \mathbf{T}_p^{r,s}M.$$

Μια διαφορίσιμη συνάρτηση

$$A : M \to \mathbf{T}^{r,s}M, p \mapsto A(p) \in \mathbf{T}_p^{r,s}M,$$

λέγεται (r,s)-*τανυστικό πεδίο* ή *διατομή της δέσμης* $\mathbf{T}^{r,s}M$. □

Παρατηρηση Α.20. (i) Τα στοιχεία του $\mathbf{T}_p^{1,0}M$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα της M στο p. Τα εφαπτόμενα διανύσματα της M στο p είναι *αντιμεταβλητοί τανυστές 1ης τάξης*. Ενα πεδίο $v : M \to \mathbf{T}^{1,0}M \equiv TM$ τέτοιο ώστε $v(p) \in \mathbf{T}_p^{1,0}M$ λέγεται *διανυσματικό πεδίο της* M. Με κατάχρηση συμβολισμού θα γράφουμε για συντομία $v \in TM$.

(ii) Τα στοιχεία του $\mathbf{T}_p^{0,1}M$ είναι συνεφαπτόμενα διανύσματα της M στο p. Τα συνεφαπτόμενα διανύσματα της M στο p είναι *συμμεταβλητοί τανυστές 1ης τάξης*. Ενα πεδίο $\omega : M \to \mathbf{T}^{0,1}M \equiv T^\star M$ τέτοιο ώστε $\omega(p) \in \mathbf{T}_p^{0,1}M$ λέγεται *διαφορική φόρμα 1ης τάξης* ή *1-φόρμα* ή *Πφάφφια φόρμα της* M. Με κατάχρηση συμβολισμού θα γράφουμε για συντομία $\omega \in T^\star M$.

(iii) Ενα τανυστικό πεδίο λέγεται για συντομία απλά τανυστής.

(iv) Από σύμβαση η μηδενικής τάξης δέσμη $\mathbf{T}^{0,0}M$ της M είναι το σύνολο των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων της M. Συνεπώς μια μηδενικής τάξης διατομή ή ένας (0,0)-τανυστής της M είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση της M. □

Α.2.3. Συνιστώσες τανυστών. Εστω M μια k-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$, $\varphi : \Omega \to U$ μια παραμέτρηση της M, $q^1, \cdots, q^k$ οι συντεταγμένες στο Ω και $p \in M$. Επίσης έστω $(\mathbf{E}_i(p))_{i=1}^k$ η βάση του T_pM σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων (βλ. Θεώρημα Α.7(ii)) και $(\mathbf{E}^i(p))_{i=1}^k$ η δυική της βάση (βλ. §Α.1.3). Εχουμε $\mathbf{E}_i(p) = \partial_i\varphi(p)$ και $\mathbf{E}^i(p) = dq^i(p)$. Από την Πρόταση Α.17 οι τανυστές

$$\underbrace{\partial_{i_1}\varphi \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r}\varphi}_{r \text{ items}} \otimes \underbrace{dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_s}}_{s \text{ items}} = \mathbf{E}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_{i_r} \otimes \mathbf{E}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}^{j_s}$$
$$=: \mathbf{E}_{\mathrm{i}} \otimes \mathbf{E}^{\mathrm{j}}$$

αποτελούν βάση του $\mathbf{T}_p^{r,s}M$. Εχουμε θέσει

$$\mathbf{E}_{\mathrm{i}} := \mathbf{E}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_{i_r},\ \mathbf{E}^{\mathrm{j}} := \mathbf{E}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}^{j_s},$$

και $\mathrm{i} = (i_1, \cdots, i_r)$, $\mathrm{j} = (j_1, \cdots, j_s)$. Με τον συμβολισμό αυτό η βάση του $\mathbf{T}_p^{r,s}M$ είναι

$$\mathbf{E}_{\mathrm{i}} \otimes \mathbf{E}^{\mathrm{j}}.$$

Οι *συνιστώσες ενός τανυστή* $A \in \mathbf{T}_p^{r,s}M$ στο σύστημα συντεταγμένων $\mathbf{q} = \varphi^{-1}$ ορίζονται κατ΄ αναλογία με την σχέση Α.2.1,

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = A^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} = A(\mathbf{E}_{\mathrm{i}} \otimes \mathbf{E}^{\mathrm{j}}),$$

από την οποία

$$A = \sum_{\mathrm{i},\mathrm{j}} A^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} \mathbf{E}_{\mathrm{i}} \otimes \mathbf{E}^{\mathrm{j}}. \tag{Α.2.2}$$

Δείκτες που αντιστοιχούν σε αντιμεταβλητές (αντίστοιχα συμμεταβλητές) συντεταγμένες γράφονται σαν υπερδείκτες (αντίστοιχα υποδείκτες). Εαν A είναι ένα τανυστικό πεδίο, οι συνιστώσες του είναι συναρτήσεις του $p \in M$, δηλ. $A^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}(p)$.

Α.2.4. Ανέβασμα και κατέβασμα δεικτών. Εξειδικεύουμε την σχέση (Α.2.2) για αντιμεταβλητούς και συμμεταβλητούς τανυστές πρώτης τάξης.

Συμβολισμος Α.21 (*Σύμβαση άθροισης του Einstein*). Οταν σε μία παράσταση ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές, ως συμμεταβλητός και ως αντιμεταβλητός δείκτης, υποννοείται άθροιση ως προς αυτόν τον δείκτη και το σύμβολο της άθροισης παραλείπεται.

Εστω $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^N$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^N$ με την συνήθη έννοια. Υπάρχει μια C^1 καμπύλη $\alpha :]-1,1[\to M$ τέτοια ώστε $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = \mathbf{A}$, δηλ. το $\mathbf{A}$ μπορεί να ταυτιστεί με ένα διάνυσμα του T_pM. Παίρνουμε τις αντιμεταβλητές συνιστώσες του $\mathbf{A}$ στην βάση του T_pM, δηλ. γράφουμε το $\mathbf{A}$ ως έναν γραμμικό συνδυασμό

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{E}_i \tag{Α.2.3}$$

Εαν τα $\mathbf{E}_i$ δεν είναι ορθοκανονικό σύστημα, οι συνιστώσες A^i δεν είναι οι ορθές προβολές του $\mathbf{A}$ στα $\mathbf{E}_i$.

Επειδή $T_pM \cong \mathbb{R}^k \cong T_p^\star M$, μπορούμε επίσης να πάρουμε τις συνιστώσες του $\mathbf{A}$ στην βάση του $T_p^\star M$:

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{E}^i. \tag{Α.2.4}$$

Αυτές είναι οι συμμεταβλητές συνιστώσες του $\mathbf{A}$.

Από τις (Α.2.3) και (Α.2.4) παίρνουμε μια σχέση μεταξύ συμμεταβλητών και αντιμεταβλητών συνιστωσών ενός τανυστή 1ης τάξης. Εστω $[g^{ij}]$, $[g_{ij}]$ οι πίνακες

$$\mathbf{E}^i = g^{ij}\mathbf{E}_j, \quad \mathbf{E}_i = g_{ij}\mathbf{E}^j. \tag{Α.2.5}$$

και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το βαθμωτό γινόμενο του $\mathbb{R}^N$. Από την (Α.2.5) παίρνουμε

$$\left\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \right\rangle = \left\langle g_{il}\mathbf{E}^l, \mathbf{E}_j \right\rangle = g_{il} \left\langle \mathbf{E}^l, \mathbf{E}_j \right\rangle = g_{ij} \tag{Α.2.6}$$

$$\left\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{E}^j \right\rangle = \left\langle g^{il}\mathbf{E}_l, \mathbf{E}^j \right\rangle = g^{il} \left\langle \mathbf{E}_l, \mathbf{E}^j \right\rangle = g^{ij} \tag{Α.2.7}$$

Από τις (Α.2.3), (Α.2.4) και (Α.2.5) παίρνουμε

$$A^i = \left\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{A} \right\rangle = \left\langle \mathbf{E}^i, A_l\mathbf{E}^l \right\rangle = A_l \left\langle \mathbf{E}^l, \mathbf{E}^i \right\rangle = g^{il}A_l \tag{Α.2.8}$$

$$A_i = \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{A} \rangle = \left\langle \mathbf{E}_i, A^l\mathbf{E}_l \right\rangle = A^l \langle \mathbf{E}_l, \mathbf{E}_i \rangle = g_{il}A^l \tag{Α.2.9}$$

Οι σχέσεις αυτές επεκτείνονται εύκολα σε (r,s)-τανυστές. Για παράδειγμα:

$$T_{ij} = g_{ip}g_{jq}T^{pq}.$$

Παρατηρηση Α.22. Οι σχέσεις (Α.2.6), (Α.2.7), (Α.2.8) και (Α.2.9) βασίζονται στην ύπαρξη ενός βαθμωτού γινομένου στον περιβάλλοντα χώρο και εξαρτώνται από αυτό.

Α.2.5. Μετρικός τανυστής.

Ορισμος Α.23. Ο τανυστής

$$g = g_{ij}\mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^j$$

λέγεται *μετρικός τανυστής*.

Προταση Α.24. *Ο μετρικός τανυστής είναι καλά ορισμένος* (*δηλ. είναι πράγματι τανυστής*) *και είναι συμμετρικός. Οι πίνακες* $[g^{ij}]$, $[g_{ij}]$ *είναι αντίστροφοι.*

Αποδειξη. Ο τελευταίος ισχυρισμός έπεται από την $\mathbf{E}_i = g_{ij}\mathbf{E}^j = g_{ij}g^{jl}\mathbf{E}_l$ και την αντίστοιχη σχέση για το $\mathbf{E}^i$. □

Α.2.6. Συμπεριφορά των συνιστωσών τανυστών κάτω από αλλαγές συντεταγμένων. Εστω A ένας αντιμεταβλητός τανυστής και φ, φ' δύο συστήματα συντεταγμένων. Παίρνουμε τις συνιστώσες του A στο φ:

$$A = A^i \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}.$$

Από την

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^i} = \frac{\partial \varphi' \circ (\varphi'^{-1} \circ \varphi)}{\partial q^i} = \frac{\partial \varphi'}{\partial q'^j}\frac{\partial q'^j}{\partial q^i} \tag{Α.2.10}$$

παίρνουμε

$$A = A^i \frac{\partial q'^j}{\partial q^i}\frac{\partial \varphi'}{\partial q'^j}.$$

Συνεπώς

$$A'^j = A^i \frac{\partial q'^j}{\partial q^i}. \tag{Α.2.11}$$

Για τις συμμεταβλητές συνιστώσες έχουμε

$$dq'^i(v) = dq'^i(v'^j \frac{\partial \varphi'}{\partial q'^j}) = v'^i = v^j \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} = dq^j(v) \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} dq^j(v),$$

έτσι

$$dq'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} dq^j.$$

και

$$\omega'_j = \omega_i \frac{\partial q^i}{\partial q'^j}. \tag{A.2.12}$$

Οι ισότητες (A.2.11), (A.2.12) επεκτείνονται εύκολα σε τανυστές τύπου (r, s).

A.3. Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες

A.3.1. Το εμβαδό (area) πολλαπλότητας. Προχωράμε ευριστικά για να φθάσουμε σε έναν φυσικό ορισμό του εμβαδού (ή όγκου) μιας πολλαπλότητας.

Ας υπολογίσουμε το k-διάστατο εμβαδό ενός παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, \cdots, v_k$ του $\mathbb{R}^N$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο γραμμικός χώρος S που ορίζεται από τα $\{v_1, \cdots, v_k\}$ είναι ο $\mathbb{R}^k \times \{0_{N-k}\}$, $0_{N-k} = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{N-k})$. Διότι διαφορετικά μπορούμε να θεωρήσουμε μια ορθοκανονική βάση $\{b_1, \cdots, b_N\}$ και την ορθογώνια (γραμμική) απεικόνιση

$$O : b_i \mapsto e_i, \quad i = 1, \cdots, N$$

όπου e_i είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^N$. Εχουμε

$$O\,S = \mathbb{R}^k \times \{0_{N-k}\}$$

Καθώς η O διατηρεί μήκη και γωνίες, μπορούμε να υποθέσουμε (αυτό εννοούσαμε προηγουμένως με τον όρο «φυσικός ορισμός») ότι

$$\mathrm{vol}_k\,(v_1, \cdots, v_k) = \mathrm{vol}_k\,(Ov_1, \cdots, Ov_k)$$

Αντικαθιστώντας τον χώρο S από τον $O\,S$ και τα v_i από τα Ov_i παίρνουμε $v_i \in \mathbb{R}^k \times \{0_{N-k}\}$.

Εαν

$$P = \left\{\lambda^i v_i : \ \lambda^i \in [0, 1]\right\}$$

είναι το παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα $\{v_1, \cdots, v_k\}$ και A η γραμμική απεικόνιση

$$e_i \mapsto v_i = A_i^j e_j$$

τότε $A = [v_1, \cdots, v_k]$, δηλ. ο πίνακας με i-στή στήλη v_i, και διαπιστώνεται εύκολα ότι ο A απεικονίζει τον μοναδιαίο κύβο $\mathbb{I}^k = [0,1]^k$ επί του P,

$$P = A\mathbb{I}^k.$$

Ο όγκος του P δίνεται από

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_k(P) &= \int_P dx^1 \cdots dx^k = \int_{A\mathbb{I}^k} dx^1 \cdots dx^k \\ &= \int_{\mathbb{I}^k} |\det A| dx^1 \cdots dx^k = |\det A| \\ &= |\det[v_1, \cdots, v_k]|\end{aligned}$$

Μια πιο βολική έκφραση λαμβάνεται με χρήση του πίνακα με στοιχεία

$$a_{ij} = \left\langle v_i, v_j \right\rangle = \left\langle A_i^s e_s, A_j^l e_l \right\rangle = \sum_{s=1}^{k} A_i^s A_j^s$$

Από την ορθογωνιότητα του A

$$\det[a_{ij}] = \det\left(A^t A\right) = (\det A)^2 \;\Rightarrow\; |\det A| = \sqrt{a},$$

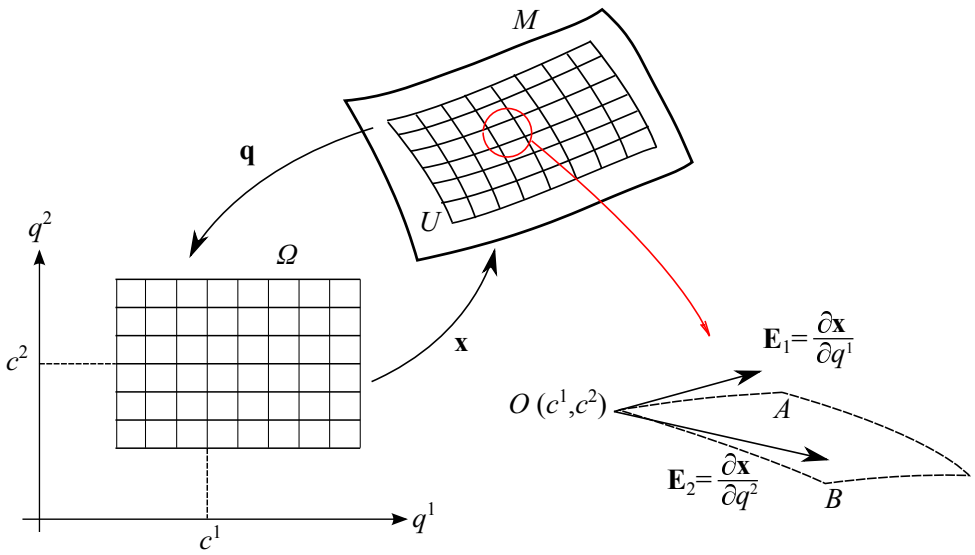
όπου $g = \det[g_{ij}]$. Συνοψίζοντας, έχουμε καταλήξει στις σχέσεις

$$\mathrm{vol}_k(v_1, \cdots, v_k) = \sqrt{a} = \sqrt{\det\left[\left\langle v_i, v_j \right\rangle\right]}$$

Τώρα περνάμε σε μια k-διάστατη υποπολλαπλότητα M του $\mathbb{R}^N$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του $U \subset M$, το οποίο είναι το πεδίο ορισμού ενός χάρτη $\mathbf{q}$ (βλ. Σχ. Α.3.1). Υποθέτουμε ότι το U διαιρείται σε k-κελιά από τις υπερεπιφάνειες $q^i = c^i$ =σταθ. Υποθέτοντας μικρές διαστάσεις, κάθε k-κελί είναι προσεγγιστικά ένα παραλληλεπίπεδο $\left(\mathbf{E}_1 h^1, \cdots, \mathbf{E}_k h^k\right)$, όπου h^i είναι η διαφορά μεταξύ διαδοχικών τιμών του c^i. Επομένως

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_k\left(\mathbf{E}_1 h^1, \cdots, \mathbf{E}_k h^k\right) &= h^1 \cdots h^k \mathrm{vol}_k(\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_k) \\ &= h^1 \cdots h^k \sqrt{\det\left[\left\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \right\rangle\right]}\end{aligned}$$

Από τον Ορισμό Α.23, $\left\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \right\rangle$ είναι οι συμμεταβλητές συνιστώσες του μετρικού τανυστή g_{ij}. Με άθροιση ως προς όλα τα κελιά και



Σχημα Α.3.1. Υπολογισμός του εμβαδού του πεδίου ορισμού ενός χάρτη $U = \mathbf{x}(\Omega)$.

αφήνοντας το $\max_i\{h^i\} \to 0$ παίρνουμε το ολοκλήρωμα Riemann

$$\mathrm{vol}_k\,(U) = \int_{\mathbf{q}(U)} \sqrt{g}\Big|_{\mathbf{x}(q^1,\cdots,q^k)}\, dq^1 \cdots dq^k.$$

Υπενθυμίζεται ότι (Ορισμός Α.23) $g_{ij}(p) = \left\langle E_i, E_j \right\rangle\Big|_p = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} \right\rangle\Big|_{\mathbf{q}(p)}$. Καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό:

Ορισμος Α.25. Εστω M μια k-διάστατη C^1-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$, $U = \mathbf{x}(\Omega)$ το πεδίο ορισμού ενός χάρτη και $f : U \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα της f στο U ορίζεται από την σχέση

$$\int_U f = \int_\Omega f(\mathbf{x}(q^1, \cdots, q^k))\ \sqrt{g}\Big|_{\mathbf{x}(q^1,\cdots,q^k)}\, dq^1 \cdots dq^k \tag{Α.3.1}$$

Εδικά ο όγκος (ή k-διάστατο εμβαδό) του U δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{vol}_k\,(U) = \int_U 1 = \int_\Omega \sqrt{g}\Big|_{\mathbf{x}(q^1,\cdots,q^k)}\, dq^1 \cdots dq^k.$$

Παρατηρηση Α.26. (i) Για γενικότερα υποσύνολα $U \subset M$ οι πιο πάνω τύποι εφαρμόζονται μέσω διαμέρισης της μονάδας.

(ii) Παρόλο που υποθέσαμε συνεχείς συναρτήσεις στον πιο πάνω ορισμό, αυτός ισχύει γενικότερα για συναρτήσεις f τέτοιες ώστε η $f \circ \mathbf{x}$ να είναι ολοκληρώσιμη. □

Πρόταση Α.27. *Ο πιο πάνω ορισμός για το ολοκλήρωμα σε μια πολλαπλότητα είναι ανεξάρτητος από το σύστημα συντεταγμένων.*

Απόδειξη. Σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\bar{q}^1, \cdots, \bar{q}^k$ έχουμε

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial q^r}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^j} g_{rs}$$

από όπου παίρνουμε

$$\det\left[\bar{g}_{ij}\right] = \det\left[\frac{\partial q^r}{\partial \bar{q}^i}\right] \det\left[\frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^j}\right] \det\left[g_{ij}\right] \;\Rightarrow\; \bar{g}(\bar{\mathbf{q}}) = J_{\mathbf{q}}^2 g\big|_{\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}})}$$

όπου $J_{\mathbf{q}}$ είναι η Jacobian του μετασχηματισμού $q^i = q^i(\bar{q}^1, \cdots, \bar{q}^k)$ (υπενθυμίζεται ότι συναρτήσει παραμετρήσεων, αυτή είναι η απεικόνιση $\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x}$). Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των πολλαπλών ολοκληρωμάτων στον $\mathbb{R}^k$, την πιο πάνω ταυτότητα, την $J_{\mathbf{q}} = J_{\bar{\mathbf{q}}}^{-1}$ και γράφοντας q αντί για $(q^1, \cdots, q^k)$, dq αντί για $dq^1 \cdots dq^k$, κλπ, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Omega}} f(\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{q}}))\ \sqrt{\bar{g}}\big|_{\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{q}})}\, d\bar{q} &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}(\mathbf{q}))\ \sqrt{\bar{g}}\big|_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}\, J_{\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) dq \\ &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}(\mathbf{q}))\ \sqrt{g}\big|_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}\, dq\end{aligned}$$

η οποία αποδεικνύει την ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από το σύστημα συντεταγμένων. □

Α.3.2. Πολλαπλότητες με σύνορο.

Εστω $\mathbb{R}^k_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^k : x^k \geqslant 0\right\}$.

Ορισμος Α.28. Εστω U, V σχετικά ανοιχτά υποσύνολα των $\mathbb{R}^k_+$, $\mathbb{R}^m_+$ αντίστοιχα. Μια απεικόνιση $f : U \to V$ λέγεται C^r-*λεία* εάν για κάθε $x \in U$ υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U_1, V_1 των x, $f(x)$ αντίστοιχα και μια C^r-λεία συνάρτηση (με την συνήθη έννοια) $f_1 : U_1 \to V_1$ τέτοια ώστε $f|U \cap U_1 = f_1|U \cap U_1$. Ορίζουμε

$$f'(x) = f_1'(x),\ \cdots, f^{(r)}(x) = f_1^{(r)}(x).$$

Μια συνάρτηση $f : U \to V$ είναι C^r-*διαφορομορφισμός* εάν είναι αμφιμονοσήμαντη (bijective), C^r-λεία και η αντίστροφή της είναι επίσης C^r-λεία. □

Για ένα σχετικά ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^k_+$ γράφουμε $\mathrm{Int}U$ για το εσωτερικό του U στον $\mathbb{R}^k$ και $\mathrm{Fr}U$ για το *τοπολογικό* σύνορο του U στον $\mathbb{R}^k$.

Εστω U ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^k_+$. Γράφουμε $\partial U = \mathrm{Fr}U \cap \mathrm{Fr}\mathbb{R}^k_+$ για το σύνορο του U σχετικά με $\mathbb{R}^k_+$. $\mathrm{Fr}U$ είναι το σύνηθες σύνορο του U σχετικά με $\mathbb{R}^k$.

Εστω Ω ένα σχετικά ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k_+$, $k \leqslant N$ και $f : \Omega \to f(\Omega) \subset \mathbb{R}^N$ μια αμφιμονοσήμαντη C^r-λεία απεικόνιση. Το σύνολο $f(\mathrm{Int}\Omega)$ είναι μια C^r-λεία υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ και η $f|\mathrm{Int}\Omega$ είναι μια παραμέτρηση αυτού (και ένας C^r-διαφορομορφισμός με την έννοια των πολλαπλοτήτων) και έχουμε

$$\mathrm{rank}\, f'(q) = k, \ \forall q \in \mathrm{Int}\Omega.$$

Επειδή από το αμφιμονοσήμαντο της f κανένα σημείο του $\partial\Omega$ δεν απεικονίζεται στο $\mathrm{Int}\Omega$, θέτοντας $U = f(\Omega)$ ορίζουμε

$$\mathrm{Int}U = f(\mathrm{Int}\Omega), \ \textit{και}\, \partial U = f(\partial\Omega)$$

Θα δούμε πως η f απεικονίζει το σύνορο $\partial\Omega$ του Ω. Εστω ένα σταθερό $q_0 \in \partial\Omega$. Εξ ορισμού η f επεκτείνεται σε μια C^r-λεία απεικόνιση $f_1 : \Omega_1 \to U_1$ με $f_1|\Omega_1 \cap \Omega = f|\Omega_1 \cap \Omega$, όπου Ω_1 είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Εστω $\mathrm{rank}\, f_1'(q_0) = k$. Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης, και πιθανώς περιορίζοντας σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του Ω_1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f_1 : \Omega_1 \to f_1(\Omega_1)$ είναι C^r-διαφορομορφισμός. Συνεπώς η $f_1|\partial\Omega$ έχει rank $k-1$,

$$\mathrm{rank}\, f_1'(q) = k-1, \ q \in \partial\Omega$$

και το $\partial\Omega$ είναι μια $(k-1)$-διάστατη C^r-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$. Ο επόμενος ορισμός επεκτείνει τον ορισμό του rank στο σύνορο:

Ορισμος Α.29. Εστω Ω ένα σχετικά ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n_+$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ μια C^r συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f έχει rank k στο $q \in \partial\Omega$ εάν υπάρχει επέκταση f_1 της f ορισμένη σε μια ανοιχτή περιοχή του q τέτοια ώστε

$$\mathrm{rank} f_1'(q) = k, \ q \in \mathrm{Int}\Omega$$

και

$$\mathrm{rank}\, f_1'(q) = k-1, \ q \in \partial\Omega$$

και η f δεν έχει επέκταση στο q που να ικανοποιεί τις σχέσεις αυτές με ένα μεγαλύτερο k. Ορίζουμε το rank της f στο q από την σχέση

$$\mathrm{rank} f'(q) = \mathrm{rank} f_1'(q)$$

Στην προηγούμενη συζήτηση αποδείξαμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση Α.30. *Εστω Ω ένα σχετικά ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k_+$ και $f : \Omega \to U \subset \mathbb{R}^N$ μια αμφιμονοσήμαντη C^r συνάρτηση. Τότε η f διασπάται από περιορισμό στους διαφορομορφισμούς*

$$\mathrm{Int}f : \mathrm{Int}\Omega \to \mathrm{Int}U, \quad \partial f : \partial\Omega \to \partial U$$

Ο επόμενος ορισμός πολλαπλοτήτων με σύνορο είναι εύλογος:

Ορισμος Α.31. Εστω M υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $k \leqslant N$. Επίσης έστω Ω σχετικά ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k_+$ και $U \subset M$. Μια C^r-απεικόνιση $(r \geqslant 1)$ $\varphi : \Omega \to U$, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη και

$$\mathrm{rank}\varphi'(q) = k \ \forall q \in \Omega, \tag{A.3.2}$$

λέγεται *C^r-παραμέτρηση* του U και U λέγεται *τμήμα k-διάστατης υποπολλαπλότητας με σύνορο του $\mathbb{R}^N$*. Η αντίστροφη απεικόνιση $\psi := \varphi^{-1} : U \to \Omega$ λέγεται *χάρτης* ή *σύστημα συντεταγμένων με σύνορο* στην M. Η M λέγεται *k-διάστατη υποπολλαπλότητα με σύνορο του $\mathbb{R}^N$* εάν έχει ένα κάλυμμα από k-χάρτες με σύνορο. Επίσης ορίζουμε το *εσωτερικό* μιας πολλαπλότητας με σύνορο από την σχέση

$$\mathrm{Int}M = \bigcup_{\psi\in\mathcal{A}} \psi^{-1}\left(\mathrm{Int}\psi(U)\right)$$

και το σύνορο της M από

$$\partial M = \bigcup_{\psi\in\mathcal{A}} \psi^{-1}\left(\partial\psi(U)\right)$$

Σε αυτές τις ισότητες $\mathcal{A}$ είναι ένας άτλας της M και U είναι το πεδίο ορισμού του ψ. □

Από την συζήτηση πριν τον Ορισμό Α.29 παίρνουμε αμέσως την

Πρόταση Α.32. *Εστω M μια k-διάστατη C^r-πολλαπλότητα με σύνορο. Τότε τα $\mathrm{Int}M$ και ∂M είναι αντίστοιχα k και $(k-1)$-διάστατες C^r-πολλαπλότητες χωρίς σύνορο.*

Για την επέκταση του ολοκληρώματος σε πολλαπλότητες οι επόμενες παρατηρήσεις είναι απαραίτητες. Εστω M μια k-διάστατη C^r-πολλαπλότητα με σύνορο.

Παρατηρηση Α.33. (i) Μια λεία συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ με *συμπαγή φορέα* δεν μηδενίζεται απαραίτητα στο ∂M, ενώ μηδενίζεται στο $\mathrm{Fr}M\backslash\partial M$.

(ii) Στην τοπολογία της M τα σύνολα U τα οποία είναι πεδία ορισμού χαρτών, είναι *ανοιχτά* ακόμη και όταν τέμνουν το σύνορο.

(iii) Μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν *διαμερίσεις της μονάδας* $(U_i, \psi_i, g_i)_{i\in I}$ της M που υποτάσσονται σε έναν άτλαντα $\mathcal{A}$, τέτοιες ώστε $\sum_{i\in I} g_i = 1$ στην M και το άθροισμα είναι πεπερασμένο για κάθε $p \in M$.

(iv) **Εφαπτόμενοι χώροι στο σύνορο.** Για να ορίσουμε εφαπτόμενα διανύσματα σε σημεία $p \in \partial M$ έτσι ώστε ο λαμβανόμενος εφαπτόμενος χώρος να είναι διανυσματικός χώρος και όχι ημι-χώρος, επιτρέπουμε καμπύλες $\gamma : [0,1[\to M$ τέτοιες ώστε $\gamma(0) = p$ και

$$\gamma'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} = v$$

αλλά και καμπύλες $\gamma :]0,1] \to M$ τέτοιες ώστε $\gamma(1) = p$ και

$$\gamma'_-(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{\gamma(1) - \gamma(1-h)}{h} = v$$

Οπότε εάν $v = \gamma'_+(0) \in T_pM$, τότε για $\alpha(t) = \gamma(1-t)$, $\alpha'_-(1) = -\gamma'_+(0) = -v$, και $-v \in T_pM$. Χωρίς αυτή την τροποποίηση ο T_pM θα ήταν ισόμορφος με έναν ημι-χώρο.

(v) **Προσανατολισμός του συνόρου.** Εαν η M είναι προσανατολισμένη πολλαπλότητα με σύνορο, τότε ο προσανατολισμός της M επάγει έναν προσανατολισμό στο σύνορο ∂M. Επειδή αυτό γίνεται μέσω απεικονίσεων χαρτών, ο ορισμός του προσανατολισμού το ∂M ανάγεται στον ορισμό του προσανατολισμού του συνόρου $\partial\psi(U)$ για κάθε χάρτη ψ της M. Βλ. επόμενο ορισμό. □

Ορισμος Α.34. Εστω Ω σχετικά ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k_+$ και $q \in \partial\Omega$. Μια βάση $(v_1, \cdots, v_{k-1})$ του $T_q\partial\Omega$ λέγεται *θετικά προσανατολισμένη* εάν το $(\nu, v_1, \cdots, v_{k-1})$ είναι θετικός προσανατολισμός του $\mathbb{R}^k$, όπου το ν είναι το μοναδιαίο *προς τα έξω κάθετο πεδίο* του Ω στο q.

Α.3.3. Το θεώρημα του Stokes. Το επόμενο θεώρημα χρησιμοποιείται συχνά στην εργασία αυτή.

Θεωρημα Α.35. *Εστω M μια προσανατολισμένη $(N-1)$-διάστατη C^1-πολλαπλότητα με σύνορο (δηλ. μια υπερεπιφάνεια με σύνορο του $\mathbb{R}^N$) και* **v** *ένα C^1 εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της M με συμπαγή*

φορέα. Επίσης έστω ν το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο πεδίο του ∂M. Τότε

$$\int_M \mathrm{div}\mathbf{v} = \int_{\partial M} \mathbf{v} \cdot \nu$$

Για την απόδειξη βλ. [**148**], [**149**].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Διαφορικοί τελεστές σε πολλαπλότητες

Στα επόμενα M είναι μια k-διάστατη C^1-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$, $U \subset M$ είναι ένας χάρτης της M και $\mathbf{x} : \Omega \to U$ είναι μια παραμέτρηση του U. Η τοπική βάση που ορίζεται από τον χάρτη $\mathbf{x}$ είναι $(\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_k)$. Οι συντεταγμένες στο Ω είναι $q^1, \cdots, q^k$.

Β.1. Κατευθυντήρια παράγωγος

Εστω $U \subset M$ ανοιχτό υποσύνολο της M και $X : U \to TM$, $p \mapsto X(p) \in T_p\mathbb{R}^N$ διανυσματικό πεδίο (όχι απαραίτητα εφαπτόμενο στην M). Επίσης έστω $p \in U$ και $\gamma : I \to M$ μια C^1 καμπύλη από το p, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = Y$. Προφανώς $Y \in T_pM$.

Ορισμος Β.1. Η *κατευθυντήρια παράγωγος* του X στην κατεύθυνση Y ορίζεται από την σχέση

$$D_Y X = \frac{d}{dt} X(\gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

Η κατευθυντήρια παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου $f : U \to \mathbb{R}$, και γενικότερα ενός τανυστικού πεδίου $A \in \mathbf{T}^{r,s}M$, ορίζεται όμοια:

$$D_Y A = \frac{d}{dt} A(\gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την αντιπρόσωπη καμπύλη του Y.

Λημμα Β.2. *Για ένα διανυσματικό πεδίο v που ορίζεται στην M έχουμε*

$$D_{E_i} v = \frac{\partial v}{\partial q^i},\ i = 1, \cdots, n.$$

Παρατηρηση Β.3. Ο συμβολισμός

$$\frac{\partial v}{\partial q^i} = \frac{\partial\,(v \circ \mathbf{x})}{\partial q^i}$$

υπονοείται στο δεξιό μέλος της ισότητας αυτής.

Αποδειξη. Εστω $p = \mathbf{x}(q_0^1, \cdots, q_0^n)$ και $\gamma(t) = \mathbf{x}(q_0^1, \cdots, q_0^i + t, \cdots, q_0^n)$. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} v(\gamma(t))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} v\left(\mathbf{x}(q_0^1, \cdots, q_0^i + t, \cdots, q_0^n)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(v \circ \mathbf{x})(q_0^1, \cdots, q_0^i + t, \cdots, q_0^n))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial(v \circ \mathbf{x})}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

Επειδή $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \mathbf{E}_i$ έχουμε $\frac{d}{dt} v(\gamma(t))\Big|_{t=0} = D_{\mathbf{E}_i} v$. □

Β.2. Συμμεταβλητή παράγωγος

Εστω v, w *εφαπτόμενα* διανυσματικά πεδία που ορίζονται στο U. Οι συνιστώσες των v, w στο σύστημα συντεταγμένων $\mathbf{q} = \left(q^1, \cdots, q^k\right)$ είναι $v^1, \cdots, v^k$ και $w^1, \cdots, w^k$ αντίστοιχα. Τις θεωρούμε συναρτήσεις του $\mathbf{q}$ και χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα και για τις συναρτήσεις $v^i \circ \mathbf{x}^{-1}$, $w^i \circ \mathbf{x}^{-1}$ οι οποίες ορίζονται στο U. Εστω $\mathbf{E}_i(p)$ η τοπική βάση του T_pM και α μια αντιπρόσωπη καμπύλη του w στο p. Από τον ορισμό της κατευθυντήριας παραγώγου

$$\begin{aligned}
D_w v(p) &= \frac{d}{dt}\left(v^i \mathbf{E}_i\right)(\alpha(t))\Big|_{t=0} \\
&= \left(D_w v^i\right)\mathbf{E}_i + v^i D_w \mathbf{E}_i\Big|_p \\
&= w^j \left(D_{\mathbf{E}_j} v^i\right)\mathbf{E}_i + w^j v^i D_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_i\Big|_p \\
&= w^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^j}\mathbf{E}_i + v^l D_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_l\right)\Big|_p
\end{aligned}$$

Με διάσπαση του όρου $D_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_l = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^j \partial q^i}$ σε εφαπτόμενο και κάθετο μέρος,

$$D_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_l = \Gamma_{lj}^i \mathbf{E}_i + \mathbf{N}_{jl}$$

όπου $\mathbf{N}_{jl}(p) \in N_pM$, παίρνουμε

$$D_w v = w^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^j} + v^l \Gamma_{lj}^i\right)\mathbf{E}_i + w^j v^l \mathbf{N}_{jl}$$

ή

$$(D_w v)^\top = w^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^j} + v^l \Gamma^i_{lj} \right) \mathbf{E}_i \tag{B.2.1}$$

Ονομάζουμε αυτό το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο την συμμεταβλητή παράγωγο του v στην κατεύθυνση w. Γενικότερα ορίζουμε την συμμεταβλητή παράγωγο ενός τανυστικού πεδίου από

Ορισμος Β.4. Εστω $A = A^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} \mathbf{E}_{\mathrm{i}} \otimes \mathbf{E}^{\mathrm{j}}$ ένα (r,s)-τανυστικό πεδίο ορισμένο σε ένα ανοιχτό υποσύνολο μιας πολλαπλότητας M. Η *συμμεταβλητή παράγωγος* του A στην κατεύθυνση w στο $p \in M$ είναι η προβολή της κατευθυντήριας παραγώγου του A στην κατεύθυνση w στον $\mathbf{T}^{r,s}_p M$, και θα γράφουμε

$$\nabla_w A = (D_w A)^\top$$

Η συμμεταβλητή παράγωγος ενός τανυστικού πεδίου v (χωρίς αναφορά σε κατεύθυνση) ορίζεται ως το (1,1)-τανυστικό πεδίο

$$\nabla v(\omega, w) = \omega(\nabla_w v) = \langle \nabla_w v, \omega \rangle, \quad \omega \in T^\star M, w \in TM \tag{B.2.2}$$

Για τη συνιστώσα i, j χρησιμοποιούμε το σύμβολο $v^i_{|j}$,

$$v^i_{|j} = \nabla v(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}_j),$$

οπότε $\nabla v(\omega, w) = \omega_i w^j v^i_{|j}$ και από την (Β.2.1)

$$v^i_{|j} = \frac{\partial v^i}{\partial q^j} + \Gamma^i_{lj} v^l \tag{B.2.3}$$

Β.3. Η βαθμίδα

Ορισμος Β.5. Η *βαθμίδα* ως προς (στην) M μιας C^1 συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την σχέση

$$\mathrm{grad}_M f = g^{ij} \left(D_{\mathbf{E}_i} f \right) \mathbf{E}_j \tag{B.3.1}$$

Από τον ορισμό αυτό έπεται άμεσα ότι οι συνιστώσες της βαθμίδας $\mathrm{grad}_M f$ στο σύστημα συντεταγμένων $q^1, \cdot, q^k$ είναι

$$g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q^j} = g^{ij} f_{,j} = f^{,i}$$

Πρόταση Β.6. *Έστω $f : V \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Η βαθμίδα της f ως προς M στο p δίνεται από την προβολή της βαθμίδας της f ως προς $\mathbb{R}^N$ επί του T_pM, δηλ.*

$$\operatorname{grad}_M f = \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^N} f\right)^\top \tag{B.3.2}$$

Απόδειξη. Έστω $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=1}^N$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^N$. Από την σχέση

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^N} f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\mathbf{e}_\alpha$$

την ισότητα

$$\mathbf{e}_\alpha^\top = \left\langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{E}^i \right\rangle \mathbf{E}_i = \left\langle \mathbf{e}_\alpha, g^{ij}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} \right\rangle \mathbf{E}_i = g^{ij}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q^j}\mathbf{E}_i$$

και τον ορισμό της βαθμίδας (Β.3.1), ο ισχυρισμός έπεται άμεσα. □

Παρατήρηση Β.7. Οταν η f είναι ορισμένη σε μια περιοχή της M, η (Β.3.2) ισχύει για μια επέκταση της f σε μια περιοχή του $\mathbb{R}^N$ στο δεξιό μέλος.

Β.4. Απόκλιση

Ορισμος Β.8. Εστω $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^N$. Η *απόκλιση του X ως προς* (*στην*) M ορίζεται από την σχέση

$$\operatorname{div}_M X = g^{ij}\left\langle D_{\mathbf{E}_i}X, \mathbf{E}_j \right\rangle = \left\langle D_{\mathbf{E}_i}X, \mathbf{E}^i \right\rangle \tag{B.4.1}$$

Παρατήρηση Β.9. (i) Αμεσα ελέγχεται ότι ο Ορισμός (Β.4.1) είναι ανεξάρτητος από το σύστημα συντεταγμένων.

(ii) Οταν η f είναι ορισμένη σε μια περιοχή της M, ο ορισμός αυτός ισχύει για μια οποιαδήποτε επέκταση του X σε μια περιοχή του $\mathbb{R}^N$ στο δεξιό μέλος.

Πρόταση Β.10. *Εστω M μια υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^N$. Η απόκλιση του X στην M δίνεται από την σχέση*

$$\operatorname{div}_M X = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^N} X - \langle D_N X, N\rangle$$

Αποδειξη. Από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M X &= \left\langle D_{\mathbf{E}_i} X, \mathbf{E}^i \right\rangle = \left\langle \left(D_{\mathbf{E}_i} X^\alpha\right) \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{E}^i \right\rangle = D_{\langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{E}^i \rangle \mathbf{E}_i} X^\alpha \\ &= D_{\mathbf{e}_\alpha^\top} X^\alpha = D_{\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha^\perp} X^\alpha = D_{\mathbf{e}_\alpha} X^\alpha - D_{\mathbf{e}_\alpha^\perp} X^\alpha \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} - D_{N_\alpha N} X^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} - N_\alpha D_N X^\alpha \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} - \langle N, D_N X \rangle\end{aligned}$$

□

Προταση Β.11. *Η ακόλουθη ταυτότητα ισχύει για ένα διανυσματικό πεδίο X:*

$$\mathrm{div}_M X = \mathrm{div}_M X^\top - \langle H, X \rangle$$

H είναι το διανυσματικό πεδίο της μέσης καμπυλότητας, το οποίο ορίζεται από το ίχνος της 2ης θεμελιώδους μορφής $H = g^{ij} B(E_i, E_j)$, $B(u, v) = (D_u v)^\perp$ για $u, v \in TM$.

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M X &= \mathrm{div}_M X^\top + \mathrm{div}_M X^\perp = \mathrm{div}_M X^\top + g^{ij} \left\langle D_{\mathbf{E}_i} X^\perp, \mathbf{E}_j \right\rangle \\ &= \mathrm{div}_M X^\top - g^{ij} \left\langle X^\perp, D_{\mathbf{E}_i} \mathbf{E}_j \right\rangle \\ &= \mathrm{div}_M X^\top - g^{ij} \left\langle X, \left(D_{\mathbf{E}_i} \mathbf{E}_j\right)^\perp \right\rangle \\ &= \mathrm{div}_M X^\top - \langle X, H \rangle\end{aligned}$$

□

Για $X \in TM$ από τις (Β.4.1), (Β.2.2) έχουμε

$$\left\langle D_{\mathbf{E}_i} X, \mathbf{E}^i \right\rangle = \left\langle \left(D_{\mathbf{E}_i} X\right)^\top, \mathbf{E}^i \right\rangle = \left\langle \nabla_{\mathbf{E}_i} X, \mathbf{E}^i \right\rangle = \nabla X(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}_i)$$

άρα $\mathrm{div}_M X = \mathrm{tr} \nabla X$ και

$$\mathrm{div}_M X = X^i_{|i}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Ορισμένες Λεπτομέρειες της Απόδειξης του Θεωρήματος 3.30

Αναφερόμαστε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.30.

Γ.1. Πρόβλημα Ιδιοτιμών-Περίπτωση Ι

Η ορίζουσα του συστήματος (S_1) είναι

$$\frac{1}{\kappa^3 x^3(1-x^2)}\begin{vmatrix} x^2 & -(z+1)+a(z-1) & \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 \\ 1 & -(z+1) & -2x\cot(l^\star x) \\ l^\star(1-x^2)-L^\star x^2 & 2\frac{z-1}{\sqrt{1-x^2}} & -2 \end{vmatrix}$$

Με

$$D_1(x)=\frac{1}{x^2(1-x)}\begin{vmatrix} x^2 & a(z-1)-(z+1) & \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 \\ 1 & -(z+1) & -2x\cot(l^\star x) \\ l^\star-(L^\star+l^\star)x^2 & 2\frac{z-1}{\sqrt{1-x^2}} & -2 \end{vmatrix},$$

η ορίζουσα του (S_1) είναι $\frac{1}{\kappa^3 x(1+x)}D_1(x)=\frac{1}{\kappa k(k+\kappa)}D_1(x)$, και έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$D_1(x)=0,\ x\in]0,1[$$

Αναπτύσσουμε την D_1 σε σειρά Taylor του $L^\star$:

$$D_1(x)=4\frac{x+1}{x^2}\left[\frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2+l^\star x\cot(l^\star x)-1\right]+O(L^\star)$$

Γ.1.1. Βήμα 1. Αποδεικνύουμε ότι ο όρος 0-κης τάξης είναι $\geq C_0$, όπου το $C_0>0$ είναι μία σταθερά.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2\sin(l^\star x)+l^\star x\cos(l^\star x)-\sin(l^\star x)$$

με παράγωγο

$$f'(x) = l^\star x \sin(l^\star x)\left[\tfrac{2}{\sqrt{3}} - l^\star + \tfrac{1}{\sqrt{3}} l^\star x \cot(l^\star x)\right] > 0,\ x \geqslant 0.$$

Από τη σχέση αυτή και την $f(0) = 0$ παίρνουμε $f(x) > 0$ στο $]0,1[$, και έτσι ο όρος μηδενικής τάξης στο ανάπτυγμα της D_1 είναι θετικός στο $]0,1[$. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to 0+} 4\frac{x+1}{x^2}\left[\frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 + l^\star x \cot(l^\star x) - 1\right] = \tfrac{4}{3}\left(\sqrt{3} - l^\star\right) l^\star > 0$$

και

$$\lim_{x\to 1-} 4\frac{x+1}{x^2}\left[\frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 + l^\star x \cot(l^\star x) - 1\right] = 8\left[\frac{l^\star}{\sqrt{3}} + l^\star \cot(l^\star) - 1\right] > 0$$

Η τελευταία ανισότητα έπεται αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση στο αριστερό μέλος της ανισότητας είναι αύξουσα στην περιοχή του $l^\star$, $0 < l^\star <$ αρςςοτ$(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$. Από αυτό συμπεραίνουμε την ύπαρξη ενός $C_0 > 0$ τέτοιου ώστε

$$4\frac{x+1}{x^2}\left[\frac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 + l^\star x \cot(l^\star x) - 1\right] > C_0$$

Γ.1.2. Βήμα 2. Αποδεικνύουμε ότι η $\frac{\partial D_1}{\partial L^\star}$ είναι φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$.

Είναι σαφές ότι αυτό ισχύει σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $]0,1[$. Επομένως έχουμε να δείξουμε τον ισχυρισμό σε περιοχές των 0 και 1.

Εστω

$$D_0(L^\star) = \begin{vmatrix} x^2 & -(z+1) + a(z-1) & \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 \\ 1 & -(z+1) & -2x\cot(l^\star x) \\ l^\star(1-x^2) - L^\star x^2 & 2\frac{z-1}{\sqrt{1-x^2}} & -2 \end{vmatrix}$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε με αυτή την συνάρτηση, αλλά η εργασία με την παράγωγό της είναι απλούστερη. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_0}{\partial L^\star} &= \begin{vmatrix} 0 & -(z+1)+a(z-1) & \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 \\ 0 & -(z+1) & -2x\cot(l^\star x) \\ -x^2 & 2\frac{z-1}{\sqrt{1-x^2}} & -2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x^2 & a-1 & \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 \\ 1 & -1 & -2x\cot(l^\star x) \\ l^\star(1-x^2)-L^\star x^2 & \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & -2 \end{vmatrix} z\sqrt{1-x^2} \\ &\equiv F_1 + F_2 z\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος δίνει την εξής συνεισφορά στην μερική παράγωγο του D_1

$$\frac{1}{x^2(1-x)}F_1 = -\frac{1}{1-x}\begin{vmatrix} -(z+1)+a(z-1) & \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 \\ -(z+1) & -2x\cot(l^\star x) \end{vmatrix}$$

η οποία, μαζί με όλες τις μερικές παραγώγους της ως προς $L^\star$, είναι φραγμένη συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[0,\delta]$. Για τον δεύτερο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{F_2 z\sqrt{1-x^2}}{x^2(1-x)} &= \begin{vmatrix} -1 & -2x\cot(l^\star x) \\ 2 & -2\sqrt{1-x^2} \end{vmatrix}\cdot\frac{z}{1-x} \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ l^\star(1-x^2)-L^\star x^2 & \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix}\cdot\frac{z}{1-x} \\ &- \frac{a-1}{x^2(1-x)}\begin{vmatrix} 1 & -2x\cot(l^\star x) \\ l^\star(1-x^2)-L^\star x^2 & -2 \end{vmatrix} z\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Οι πρώτοι δύο όροι (και όλες οι παράγωγές τους) είναι σαφώς φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[0,\delta]$. Η ορίζουσα στην 3η γραμμή είναι

$$\begin{aligned}&-2+2x\cot(l^\star x)\left[l^\star(1-x^2)-L^\star x^2\right] = \\ &-2+2l^\star x\cot(l^\star x)-2x^3(L^\star+l^\star)\cot(l^\star x)\end{aligned}$$

Με αυτό, ο όρος της 3ης γραμμής παίρνει τη μορφή

$$2\frac{a-1}{1-x}x(L^\star+l^\star)\cot(l^\star x)z\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{1-x}\frac{1-l^\star x\cot(l^\star x)}{x^2}z\sqrt{1-x^2}$$

Η παράσταση αυτή είναι επίσης μια φραγμένη συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[0,\delta]$.

Τώρα πραγματευόμαστε την περίπτωση $x \to 1-$. Εργαζόμαστε με την παράγωγο της D_0, το οποίο είναι σημαντικά απλούστερο, καθώς απαλείφει τον παράγοντα $\sqrt{1-x^2}$ από τον παρονομαστή. Θέτοντας $h = 1 - x$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_0}{\partial L} = \ & \sqrt{2h-h^2}\Big(-2h^3cLz + 6h^2cLz - 6hcLz + 2cLz - \tfrac{2}{\sqrt{3}}h^4Lz \\ & + \tfrac{8}{\sqrt{3}}h^3Lz - 4\sqrt{3}h^2Lz + \tfrac{8}{\sqrt{3}}hLz - \tfrac{2}{\sqrt{3}}Lz - 2h^3scz + 6h^2scz - 4hscz \\ & + \tfrac{4}{\sqrt{3}}h^3cz - 4\sqrt{3}h^2cz + 4\sqrt{3}hcz - \tfrac{4}{\sqrt{3}}cz - \tfrac{2}{\sqrt{3}}h^4sz + \tfrac{8}{\sqrt{3}}h^3sz - \tfrac{10}{\sqrt{3}}h^2sz \\ & + \tfrac{4}{\sqrt{3}}hsz + 2h^2z - 4hz - \tfrac{4}{\sqrt{3}}h^3c + 4\sqrt{3}h^2c - 4\sqrt{3}hc + \tfrac{4}{\sqrt{3}}c\Big) \\ & - \tfrac{4}{\sqrt{3}}h^5cLz + 4\sqrt{3}h^4cLz + \tfrac{8}{\sqrt{3}}h^4cLz - 12\sqrt{3}h^3cLz + 8\sqrt{3}h^2cLz \\ & + \tfrac{4}{\sqrt{3}}h^2cLz - \tfrac{8}{\sqrt{3}}hcLz - \tfrac{4}{\sqrt{3}}h^5scz + 4\sqrt{3}h^4scz + \tfrac{8}{\sqrt{3}}h^4scz - 8\sqrt{3}h^3scz \\ & - \tfrac{8}{\sqrt{3}}h^3scz + \tfrac{16}{\sqrt{3}}h^2scz + 2h^3cz - 6h^2cz + 6hcz - 2cz - \tfrac{2}{\sqrt{3}}h^4z + \tfrac{8}{\sqrt{3}}h^3z \\ & - 4\sqrt{3}h^2z + \tfrac{8}{\sqrt{3}}hz + \tfrac{2}{\sqrt{3}}z - 2h^3c + 6h^2c - 6hc + 2c - \tfrac{2}{\sqrt{3}}h^4 + \tfrac{8}{\sqrt{3}}h^3 \\ & - 4\sqrt{3}h^2 + \tfrac{8}{\sqrt{3}}h - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

όπου $c = \cot(hs - s)$, $z = e^{\sqrt{2h-h^2}L^\star}$, $L = L^\star$ και $s = l^\star$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_0}{\partial L} = \ & \sqrt{2h-h^2}\Big(2Lzc - \tfrac{2}{\sqrt{3}}Lz - \tfrac{4}{\sqrt{3}}cz + \tfrac{4}{\sqrt{3}}c\Big) - 2\Big(c - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)(z-1) \\ & + O(h)\end{aligned}$$

Με τη χρήση του αναπτύγματος

$$z - 1 = \sqrt{2h-h^2}L + O(h)$$

(οι όροι του $O(h)$ είναι μονώνυμα του $\sqrt{2h-h^2}L$) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_0}{\partial L} &= \sqrt{2h-h^2}\Big(2Lzc - \tfrac{2}{\sqrt{3}}Lz - \tfrac{4}{\sqrt{3}}cz + \tfrac{4}{\sqrt{3}}c - 2cL + \tfrac{2}{\sqrt{3}}L\Big) + O(h) \\ &= \sqrt{2h-h^2}\Big(2Lc - \tfrac{2}{\sqrt{3}}L - \tfrac{4}{\sqrt{3}}c\Big)(z-1) + O(h) \\ &= (2h-h^2)\Big(2Lc - \tfrac{2}{\sqrt{3}}L - \tfrac{4}{\sqrt{3}}c\Big) + O(h)\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\partial D_0}{\partial L} = \frac{4}{x^2}\Big(Lc - \tfrac{1}{\sqrt{3}}L - \tfrac{2}{\sqrt{3}}c\Big) + O(1)$$

και η συνάρτηση $O(1)$ και όλες οι L-παράγωγές της είναι φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[1-\delta, 1]$.

Γ.1.3. Βήμα 3. Από τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $L_0^\star$ τόσο μικρό ώστε $|O(L^\star)| < \frac{C_0}{2}$. Τότε είναι $D_1(x) > \frac{C_0}{2}$ στο $]0,1[$ και αυτό αποδεικνύει ότι η D_1 δεν έχει ρίζες στο $]0,1[$ για $L^\star \leqslant L_0^\star$.

Γ.2. Πρόβλημα Ιδιοτιμών-Περίπτωση ΙΙ

Η ορίζουσα του συστήματος (S_2) δίνεται από την

$$\frac{1}{\kappa^3 x^2(x^2+1)}\begin{vmatrix} x^2 & -(z+1)+a(z-1) & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right) \\ 1 & z+1 & 2\left(e^{2xl^\star}+1\right) \\ L^\star x^2 + l^\star(x^2+1) & -2\frac{z-1}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star}-1\right) \end{vmatrix}$$

Με

$$D_2(x) = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} x^2 & -(z+1)+a(z-1) & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right) \\ 1 & z+1 & 2\left(e^{2xl^\star}+1\right) \\ L^\star x^2 + l^\star(x^2+1) & -2\frac{z-1}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star}-1\right) \end{vmatrix},$$

η ορίζουσα του (S_2) είναι $\frac{1}{\kappa^3(x^2+1)}D_2(x) = \frac{1}{\kappa(k^2+\kappa^2)}D_2(x)$, και έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$D_2(x) = 0,\ x \in]0,\infty[$$

Γ.2.1. Βήμα 1. Αποδεικνύουμε ότι $D_2(x) \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$.

Γράφουμε την πιο πάνω έκφραση του D_2 στη μορφή

$$D_2(x) = zq\begin{vmatrix} 1 & a-1-\frac{a+1}{z} & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(1-\frac{1}{q}\right) \\ \frac{1}{x^2} & 1+\frac{1}{z} & 2\left(1+\frac{1}{q}\right) \\ L^\star + l^\star + \frac{l^\star}{x^2} & -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(1-\frac{1}{z}\right) & \frac{2}{x}\left(1-\frac{1}{q}\right) \end{vmatrix}$$

όπου $q = e^{2xl^\star}$. Με τη χρήση του αναπτύγματος $a = \frac{2}{\sqrt{3}}x + O(\frac{1}{x})$,

$$\begin{aligned}
D_2(x) &= zqx \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{2}{\sqrt{3}} + O(\frac{1}{x}) & -\frac{2}{\sqrt{3}} + O(\frac{1}{x^2}) \\ \frac{1}{x^2} & 1 + O(\frac{1}{x^2}) & 2 + O(\frac{1}{x^2}) \\ L^\star + l^\star + \frac{l^\star}{x^2} & -\frac{2}{x} + O(\frac{1}{x^2}) & \frac{2}{x} + O(\frac{1}{x^2}) \end{vmatrix} \\
&= zqx \left\{ \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 2 \\ L^\star + l^\star & 0 & 0 \end{vmatrix} + O(\frac{1}{x}) \right\} \\
&= zqx \left[2\sqrt{3}(L^\star + l^\star) + O(\frac{1}{x}) \right]
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να πάρουμε το αποτέλεσμα αυτό με απευθείας υπολογισμό του D_2 (για απλότητα έχουμε παραλείψει τον υπερδείκτη άστρο από τα L, l),

$$\begin{aligned}
D_2(x) = zq\Bigg(&-\frac{4\sqrt{x^2+1}LH}{\sqrt{3}} - \frac{2xLH}{\sqrt{3}} - 2LH - \frac{4l\sqrt{x^2+1}H}{\sqrt{3}} \\
&-\frac{4\sqrt{x^2+1}H}{\sqrt{3}x^3} - \frac{4l\sqrt{x^2+1}H}{\sqrt{3}x^2} - \frac{4H}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{4H}{\sqrt{3}x\sqrt{x^2+1}} - \frac{2lxH}{\sqrt{3}} \\
&-2lH - \frac{2lH}{\sqrt{3}x} - \frac{2H}{x} - \frac{2H}{x^3} - \frac{2lH}{x^2} - \frac{4\sqrt{x^2+1}Lh}{\sqrt{3}} + \frac{2xLh}{\sqrt{3}} - 2Lh \\
&-\frac{4l\sqrt{x^2+1}h}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{x^2+1}h}{\sqrt{3}x^3} - \frac{4l\sqrt{x^2+1}h}{\sqrt{3}x^2} - \frac{4h}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{4h}{\sqrt{3}x\sqrt{x^2+1}} \\
&+\frac{2lxh}{\sqrt{3}} - 2lh + \frac{2lh}{x\sqrt{3}} + \frac{2xh}{x^2} + \frac{2h}{x^3} - \frac{2lh}{x^2} + \frac{4\sqrt{x^2+1}kL}{\sqrt{3}} - \frac{2xkL}{\sqrt{3}} - 2kL \\
&+\frac{4\sqrt{x^2+1}L}{\sqrt{3}} + \frac{2xL}{\sqrt{3}} - 2L + \frac{4l\sqrt{x^2+1}k}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{x^2+1}k}{\sqrt{3}x^3} + \frac{4l\sqrt{x^2+1}k}{\sqrt{3}x^2} \\
&+\frac{4k}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{4k}{\sqrt{3}x\sqrt{x^2+1}} - \frac{2lxk}{\sqrt{3}} - 2lk - \frac{2lk}{\sqrt{3}x} - \frac{2k}{x} - \frac{2k}{x^3} - \frac{2lk}{x^2} \\
&+\frac{4l\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3}x^3} + \frac{4l\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3}x^2} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{4}{\sqrt{3}x\sqrt{x^2+1}} \\
&+\frac{2lx}{\sqrt{3}} - 2l + \frac{2l}{\sqrt{3}x} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{2l}{x^2}\Bigg)
\end{aligned}$$

όπου $H = e^{-L^\star\sqrt{1+x^2}-2xl^\star}$, $h = e^{-L^\star\sqrt{1+x^2}}$, $k = e^{-2xl^\star}$. Από αυτό παίρνουμε

$$D_2(x) = zqx\left[2\sqrt{3}(L^\star + l^\star) + O(\frac{1}{x})\right],\ x \to +\infty$$

Από την μορφή αυτή του D_2 ο ισχυρισμός έπεται άμεσα. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $x_0 > 0$ (το οποίο είναι *ανεξάρτητο* του $L^\star$, καθώς $L^\star \leqslant L_0^\star$), έτσι ώστε το D_2 δεν έχει ρίζα στο $[x_0, +\infty]$.

Γ.2.2. Βήμα 2. Αναπτύσσουμε το D_2 σε σειρά Taylor του $L^\star$:

$$D_2(x) = 4\frac{x^2+1}{x^3}\left[\left(\tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x + 1\right)e^{2l^\star x} - \tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x - 1\right] + O(L^\star)$$

Θα δείξουμε ότι ο όρος μηδενικής τάξης είναι θετικός στο $[0, x_0]$. Για τον σκοπό αυτό γράφουμε τον όρο μέσα στις αγκύλες στη μορφή

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}l^\star x^2 - l^\star x + 1\right)\left(e^{2l^\star x} - 1\right) - 2l^\star x$$

και εφαρμόζουμε την ανισότητα $e^t - 1 \geqslant t + \frac{1}{2}t^2$ με $t = 2l^\star x$. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$\left(\tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x + 1\right)e^{2l^\star x} - \tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x - 1 > \tfrac{2}{\sqrt{3}}l^{\star 2}x^3\left(l^\star x - \sqrt{3}l^\star + 1\right).$$

Επειδή $l^\star \leqslant \frac{\pi}{6}$ έχουμε $l^\star x - \sqrt{3}l^\star + 1 \geqslant 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} > 0$. Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη ενός $C_0 > 0$ τέτοιου ώστε

$$4\frac{x^2+1}{x^3}\left[\left(\tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x + 1\right)e^{2l^\star x} - \tfrac{l^\star}{\sqrt{3}}x^2 - l^\star x - 1\right] \geqslant C_0,\ x > 0.$$

Γ.2.3. Βήμα 3. Αποδεικνύουμε ότι η μερική παράγωγος του D_2 ως προς $L^\star$ είναι φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $[0, x_0]$. Εστω

$$D_0(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -(z+1) + a(z-1) & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star} - 1\right) \\ 1 & z+1 & 2\left(e^{2xl^\star} + 1\right) \\ L^\star x^2 + l^\star(x^2+1) & -2\frac{z-1}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star} - 1\right) \end{vmatrix}$$

Εχουμε

$$\frac{\partial D_0}{\partial L^\star} = \begin{vmatrix} 0 & -(z+1) + a(z-1) & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star} - 1\right) \\ 0 & z+1 & 2\left(e^{2xl^\star} + 1\right) \\ x^2 & -2\frac{z-1}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star} - 1\right) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x^2 & a-1 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star} - 1\right) \\ 1 & 1 & 2\left(e^{2xl^\star} + 1\right) \\ (L^\star + l^\star)x^2 + l^\star & -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star} - 1\right) \end{vmatrix} z\sqrt{1+x^2}$$

Ο πρώτος όρος δίνει την εξής συνεισφορά στην μερική παράγωγο του D_2 ως προς $L^\star$:

$$\begin{vmatrix} -(z+1)+a(z-1) & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right) \\ z+1 & 2\left(e^{2xl^\star}+1\right) \end{vmatrix}$$

η οποία είναι φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $[0, x_0]$ (αυτό ισχύει και όλες τις μερικές παραγώγους της ως προς $L^\star$). Από τον δεύτερο όρο έχουμε την συνεισφορά

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\left(e^{2xl^\star}+1\right) \\ -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star}-1\right) \end{vmatrix} z\sqrt{1+x^2}$$
$$+\begin{vmatrix} a-1 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right) \\ 1 & 2\left(e^{2xl^\star}+1\right) \end{vmatrix} (L^\star+l^\star)z\sqrt{1+x^2}$$
$$+\begin{vmatrix} a-1 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right) \\ 1 & 2\left(e^{2xl^\star}+1\right) \end{vmatrix} l^\star\frac{1}{x^2}z\sqrt{1+x^2}$$
$$-\begin{vmatrix} a-1 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right) \\ -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{2}{x}\left(e^{2xl^\star}-1\right) \end{vmatrix} \frac{1}{x^2}z\sqrt{1+x^2}$$

Οι πρώτοι δύο όροι είναι φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, x_0]$. Οι επόμενοι δύο γράφονται στη μορφή

$$\left[2(a-1)\left(e^{2xl^\star}+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}x\left(e^{2xl^\star}-1\right)\right]l^\star\frac{z}{x^2}\sqrt{1+x^2}$$
$$-\frac{z}{x^2}\sqrt{1+x^2}\left[\frac{2}{x}(a-1)\left(e^{2xl^\star}-1\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(e^{2xl^\star}-1\right)\right]=$$
$$\left[2(a-1)\left(e^{2xl^\star}+1\right)l^\star+\frac{2}{\sqrt{3}}l^\star x^2\frac{e^{2xl^\star}-1}{x}-\frac{2}{x}(a-1)\left(e^{2xl^\star}-1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\frac{e^{2xl^\star}-1}{x}\right]\frac{z}{x^2}\sqrt{1+x^2}$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος μέσα στις αγκύλες δίνουν

$$2(a-1)\left[2l^\star+2xl^{\star 2}+2x^2l^{\star 3}+\cdots-\left(2l^\star+2xl^{\star 2}+\tfrac{4}{3}x^2l^{\star 3}+\cdots\right)\right]=$$
$$2(a-1)\left(\tfrac{10}{3}x^2l^{\star 3}+\cdots\right)$$

Αυτό δίνει την συνεισφορά

$$2(a-1)\left(\tfrac{10}{3}l^{\star 3}+\cdots\right)z\sqrt{1+x^2}$$

η οποία είναι επίσης φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $[0, x_0]$. Με όμοιο τρόπο, ο 2ος και 4ος όρος δίνουν φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, x_0]$.

Γ.2.4. Βήμα 4. Από τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο μπορούμε να επιλέξουμε ένα $L_0^\star$ τόσο μικρό ώστε $|\mathcal{O}(L^\star)| < \frac{C_0}{2}$ για $L^\star \leqslant L_0^\star$. Τότε θα είναι $D_2(x) > \frac{C_0}{2}$ στο $]0, x_0[$, και αυτό αποδεικνύει ότι η D_2 δεν έχει ρίζες στο $]0, +\infty[$ για $L^\star \leqslant L_0^\star$.

Βιβλιογραφία

[1] Gibbs, J.W. On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, Trans. Conn. Acad. Arts Sci. III, 108-248 & 343-520 (1874-1878).
[2] Fermi, E. Thermodynamics. Dover 1956.
[3] Evans R. Density functionals in the theory of nonuniform liquids. In Fundamentals of Inhomogeneous Fluids, edited by Henderson D. Dekker 1992; pp. 85-175.
[4] Oxtoby, D. W. Density functional methods in the statistical mechanics of materials. Annual Review of Materials Research 32, no. 1 (2002), 39-52.
[5] Dasgupta C, Valls OT. Phys. Rev. E 58 (1998) 801-4.
[6] Dasgupta C, Valls OT. Phys. Rev. E 59 (1999) 3123-34.
[7] Dasgupta C, Valls OT. Phys. Rev. E 62 (2000) 3648-58.
[8] Ramakrishnan TV, Yussouff M. Phys. Rev. B 19 (1979) 2775-2794.
[9] Mier-y-Teran L, Suh SH, White HS, Davis HT. J. Chem. Phys. 92 (1990) 5087-5098.
[10] Patra CN, Ghosh SK. J. Chem. Phys. 100 (1994) 5219-5229.
[11] Patra CN. J. Chem. Phys. 111 (1999) 9832-9838.
[12] Henderson D, Bryk P, Sokolowski S, Wasan DT. Phys. Rev. E 61 (2000) 3896-38903.
[13] Boda D, Henderson D, Patrykiejew A, Sokolowski S. J. Chem. Phys. 113 (2000) 802-806.
[14] Patra CN, Yethiraj A. J. Phys. Chem. 103 (1999) 6080-6087.
[15] Schmidt M. Phys. Rev. E 62 (2000) 3799-3802.
[16] Schmidt M, Lowen H, Brader JM, Evans R. Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 1934-1937.
[17] Lipkin MD, Oxtoby DW. J. Chem. Phys. 79 (1983) 1939-1941.
[18] McMillan WL. Phys. Rev. A 4 (1971) 1238-1246.
[19] Marko JF. Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 325-328.
[20] Mahato MC, Lakshmi MR, Pandit R, Krishnamurthy HR. Phys. Rev. A 38 (1988) 1049-1064.
[21] Somoza AM, Tarazona P. J. Chem. Phys. 91 (1989) 517-527.
[22] Holyst R, Poniewierski A. Phys. Rev. A 39 (1989) 2742-2744.
[23] Velasco E, Mederos L, Sullivan DE. Phys. Rev. E 62 (2000) 3708-3718.
[24] Woodward CE. J. Chem. Phys. 94 (1991) 3183-3191.
[25] Kierlik E, Rosinberg ML. J. Chem. Phys. 100 (1994) 1716-1730.
[26] Sen S, McCoy JD, Nath SK, Donley JP, Curro JG. J. Chem. Phys. 102 (1995) 3431-3439.
[27] Hooper JB, McCoy JF, Curro JG. J. Chem. Phys. 112 (2000) 3090-3093.
[28] Hooper JB, Pileggi MT, McCoy JD. J. Chem. Phys. 112 (2000) 3094-30103.

[29] Hooper JB, McCoy JD, Curro JG, Van Swol F. J. Chem. Phys. 113 (2000) 2021-2024.
[30] Yethiraj A. J. Chem. Phys. 109 (1998) 3269-3275.
[31] Patra CN, Yethiraj A. J. Chem. Phys. 112 (2000) 1579-1584.
[32] McCoy JD, Honnell KG, Schweizer KS, Curro JG. J. Chem. Phys. 95 (1991) 9348-9366.
[33] Melenkevitz J, Muthukumar M. Macromolecules 24 (1991) 4199-4205.
[34] Nath SK, McCoy JD, Curro JG, Saunders RS. J. Chem. Phys. 106 (1997) 1950-1960.
[35] McCoy JD, Nath SK, Curro JG, Saunders RS. J. Chem. Phys. 108 (1998) 3023-3027.
[36] Nath SK, Nealey PF, de Pablo JJ. J. Chem. Phys. 110 (1999) 7483-7490.
[37] Stillinger FH. J. Chem. Phys. 78 (1983) 4654-4661.
[38] Somoza AM, Chacon E, Mederos L, Tarazona P. J. Phys. Condens. Matter 7 (1995) 5753-5776.
[39] Chacon E, Somoza AM, Tarazona P. J. Chem. Phys. 109 (1998) 2371-2379.
[40] Talanquer V, Oxtoby DW. Faraday Discuss. 112 (1999) 91-101.
[41] Talanquer V, Oxtoby DW. J. Chem. Phys. 113 (2000) 7013-7021.
[42] Napari I, Laaksonen A, Strey R. J. Chem. Phys. 113 (2000) 4476-4479.
[43] Stanley H. E. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Oxford Univ. Press, 1971.
[44] Sherwood J.N. The Plastically Crystalline State. Wiley 1979.
[45] DeGennes P.G. The Physics of Liquid Crystals. Clarendon 1974.
[46] Giaquinta, M.; Hildebrandt, S. Calculus of variations. I. The Lagrangian formalism. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 310. Springer-Verlag, 1996.
[47] Evans, L. C. Partial differential equations. 2nd edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. AMS, 2010.
[48] Landau L.D., Lifshitz E.M. Statistical Physics Part 2. Course of Theoretical Physics Volume 9. Pergamon 1981.
[49] Landau L.D., Lifshitz E.M. Statistical Physics Part 1. Course of Theoretical Physics Volume 5. Edition 3. Pergamon 1980.
[50] Cahn J.W., Hilliard J.E. Free Energy of a Nonuniform System I. Interfacial Free Energy. J. Chem. Phys. 28 (1958) 258.
[51] van der Waals, J. D. The thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density. Journal of Statistical Physics 20 (1979), 200-244.
[52] Freeman A.J. Wimmer E. Annu. Rev. Mat. Sci. 25 (1995) 7-36.
[53] Oxtoby D.W. In Hansen J.P., Levesque D., Zinn-Justin J. Liquids, Freezing, and Glass Transition. Elsevier 1991; pp. 145–91.
[54] Penrose O., Fife P.C. Thermodynamically consistent models of phase field type for the kinetics of phase transitions. Physica D 43 (1990) 44-62.
[55] Penrose O., Fife P.C. On the relation between the standard phase-field model and a ((thermodynamically consistent)) phase-field model. Physica D 69 (1993) 107-113.
[56] Qin R. S., Bhadeshia H. K. Phase field method. Mater. Sci. Tech. 26 (7) (2010) 803-811.

[57] Mullins, W. W. Two-dimensional motion of idealized grain boundaries. J. Appl. Phys., 27 (8), (1956) 900–904.
[58] Ei, S.-I.; Ikota, R.; Mimura, M. Segregating partition problem in competition-diffusion systems. Interface Free Bound., 1 (1), (1999) 57–80.
[59] Bates, P.W. and Fife, P.C. The dynamics of nucleation for the Cahn-Hilliard equation, SIAM J. Appl. Math. 53, (1993) 990-1008.
[60] Bates, P.W. and Fife, P.C. Spectral comparison principles for the Cahn-Hilliard and phase-field equations, and time scales for coarsening. Physica D 43 (2-3), (1990) 335-348 .
[61] Caginalp, G. and Fife, P.C. Dynamics of layered interfaces arising from phase boundaries. SIAM J. Appl. Math., 48 (3), (1988) 506-518.
[62] Alikakos, N.D.; Bates, P.W.; Cahn, J.W.; Fife, P.C.; Fusco G.; Tanoglu G.B. Analysis of a corner layer problem in anisotropic interfaces. Discrete Cont. Dyn.-B 6 (2), (2006) 237- 255.
[63] Alikakos, N. D.; Bates, P. W.; Chen, X.; Fusco, G. Mullins-Sekerka motion of small droplets on a fixed boundary. J. Geom. Anal. 10 (4), (2000) 575-596.
[64] Alikakos, N.D.; Fusco, G. Slow dynamics for the Cahn-Hilliard equation in higher space dimensions: the motion of bubbles. Arch. Ration. Mech. An. 141 (1), (1998) 1-61.
[65] Alikakos, N.D.; Fusco, G. Slow dynamics for the Cahn-Hilliard equation in higher space dimensions. I. Spectral estimates. Comm. PDE 19 (9-10), (1994) 1397-1447.
[66] Szekely J. Some mathematical physical and engineering aspects of melting and solidification problems. In Free boundary problems: theory and applications. Vol. I. Proceedings of the Symposium held in Montecatini, June 17–26, 1981. Edited by Antonio Fasano and Mario Primicerio. Research Notes in Mathematics 78. Pitman 1983, pp. 283-292.
[67] Rowlinson J. S. Development of theories of inhomogeneous fluids. In Fundamentals of Inhomogeneous Fluids, edited by Henderson D. Dekker 1992; pp. 1-22.
[68] Fife, P. C. Transition layers in singular perturbation problems. J. Differ. Equations 15 (1974), 77-105.
[69] Carr, J.; Gurtin, M. E.; Slemrod, M. Structured phase transitions on a finite interval. Arch. Ration. Mech. An. 86 (1984), 317-351.
[70] Alikakos, N. D.; Shaing, K. C. On the singular limit for a class of problems modelling phase transitions. SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), 1453-1462.
[71] Modica, L. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. Arch. Ration. Mech. An. 98 (1987), 123-142.
[72] Sternberg, P. The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems. Arch. Ration. Mech. An. 101 (1988), 209-260.
[73] Attouch, H. Variational convergence for functions and operators. Applicable Mathematics Series. Pitman 1984.
[74] Braides, A. Local minimization, variational evolution and Γ-convergence. Lecture Notes in Mathematics, 2094. Springer, Cham, 2014.
[75] Baldo, S. Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 7 (1990), 67-90.

[76] Brakke, K. A. The motion of a surface by its mean curvature. Mathematical Notes, 20. Princeton University Press, 1978.

[77] Huisken, G. The volume preserving mean curvature flow. J. Reine Angew. Math. 382 (1987), 35-48.

[78] Ecker, K. Regularity theory for mean curvature flow. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 57. Birkhäuser, 2004.

[79] Gärtner, Jürgen. Bistable reaction-diffusion equations and excitable media. Math. Nachr. 112 (1983), 125-152.

[80] Freidlin, M. Functional integration and partial differential equations. Annals of Mathematics Studies, 109. Princeton University Press, 1985.

[81] Bronsard, L.; Kohn, R. V. Motion by mean curvature as the singular limit of Ginzburg-Landau dynamics. J. Differ. Equations 90 (1991), 211-237.

[82] Rubinstein, J.; Sternberg, P. Nonlocal reaction-diffusion equations and nucleation. IMA J. Appl. Math. 48 (1992), 249-264.

[83] Bronsard, L.; Stoth, B. Volume-preserving mean curvature flow as a limit of a nonlocal Ginzburg-Landau equation. SIAM J. Math. Anal. 28 (1997), 769-807.

[84] Fife, P. C. Models for phase separation and their mathematics. Electron. J. Differ. Equations 2000, No. 48.

[85] Fife, P.C. Dynamics of internal layers and diffusive interfaces. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 53. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1988.

[86] Reifenberg, E. R. Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 312-313.

[87] Morgan, F. Geometric measure theory. A beginner's guide. Fourth edition. Elsevier/Academic Press, 2009.

[88] Fomenko, A. T. The Plateau problem. Part I. Historical survey. Studies in the Development of Modern Mathematics, 1. Gordon and Breach, 1990.

[89] Almgren, F. J., Jr. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1976), no. 165, viii-199.

[90] Almgren, F. J., Jr. Q valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area minimizing rectifiable currents up to codimension two. Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1983), no. 2, 327-328.

[91] Simon, L. Lectures on geometric measure theory. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 3. Australian National University, 1983.

[92] De Pauw, T. Size minimizing surfaces. Ann. Sci. Ecole Norm. S. (4) 42 (2009), no. 1, 37-101.

[93] de Rham, G. Differentiable manifolds. Forms, currents, harmonic forms. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 266. Springer-Verlag, 1984.

[94] David, G. Should we solve Plateau'As problem again?. In Advances in Analysis: The Legacy of Elias M. Stein. Edited by C. Fefferman, A. D. Ionescu, D. H. Phong, and S. Wainger, Princeton Mathematical Series 50 (2012), 108-145.

[95] Fleming, W. H. Flat chains over a finite coefficient group. T. Am. Math. Soc. 121 (1966) 160-186.

[96] White, Brian. Existence of least-energy configurations of immiscible fluids. J. Geom. Anal. 6 (1996), no. 1, 151-161.

[97] Reifenberg, E. R. An epiperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces. Ann. of Math. (2) 80 (1964), 1-14.

[98] Reifenberg, E. R. On the analyticity of minimal surfaces. Ann. of Math. (2) 80 (1964) 15-21.

[99] David G.; De Pauw T.; Toro T. A generalization of Reifenberg'As theorem in $\mathbb{R}^3$. Geometric And Functional Analysis 18 (2008), 1168-1235.

[100] Fleming, W. H. On the oriented Plateau problem. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 11, (1962), 1-22.

[101] Bombieri, E., De Giorgi, E., and Giusti, E. Minimal cones and the Bernstein problem. Invent. Math. 7 (1969), 243-268.

[102] Taylor J. Regularity of the singular sets of two-dimensional area-minimizing flat chains modulo 3 in $\mathbb{R}^3$. Invent. Math. 22 (1973), 119-159.

[103] Taylor J. The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. Ann. Math. (2) 103 (1976), no. 3, 489-539.

[104] David G. and Semmes S. Analysis of and on uniformly rectifiable sets. A.M.S. series of Mathematical surveys and monographs, Volume 38, 1993.

[105] David G. and Semmes S. Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension. Memoirs of the A.M.S. Number 687, Volume 144, 2000.

[106] Hardt, R.; Simon, L. Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem. Ann. Math. 110 (1979), 439–486.

[107] White, B. Regularity of area-minimizing hypersurfaces at boundaries with multiplicity. In "Seminar on Minimal Submanifolds" edited by E. Bombieri. Princeton University Press, 1983, pp. 293–301.

[108] White, B. Regularity of the singular sets in immiscible fluid interfaces and solutions to other Plateau-type problems. Miniconference on geometry and partial differential equations (Canberra, 1985), 244-249, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 10, Austral. Nat. Univ., 1986.

[109] Sternberg, P.; Zumbrun, K. A Poincaré inequality with applications to volume-constrained area-minimizing surfaces. J. Reine Angew. Math. 503 (1998), 63-85.

[110] Sternberg, P.; Zumbrun, K. Connectivity of phase boundaries in strictly convex domains. Arch. Ration. Mech. An. 141 (1998), no. 4, 375-400.

[111] Sternberg, P.; Zeimer, W. P. Local minimisers of a three-phase partition problem with triple junctions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 124 (1994), no. 6, 1059-1073.

[112] Nitsche, Johannes C. C. The higher regularity of liquid edges in aggregates of minimal surfaces. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1978, no. 2, 31-51.

[113] Kinderlehrer, D.; Nirenberg, L.; Spruck, J. Regularity in elliptic free boundary problems. J. Anal. Math. 34 (1978), 86-119.

[114] Nitsche, J.C.C. Stationary partitioning of convex bodies. Arch. Ration. Mech. An. 89 (1), 1-19 (1985).

[115] Nitsche, J.C.C. Corrigendum to: Stationary partitioning of convex bodies. Arch. Ration. Mech. An. 95 (4), 389 (1986).

[116] Boys, C.V. Soap bubbles: Their colours and the forces which mold them. Dover, 1959.

[117] Thomson, W. On the division of space with minimum partitional area. Reprint of Philos. Mag. 24 (151), (1887), 503-514. Forma 11 (3), (1996), 183-194.

[118] Ikota, R.; Yanagida, E. A stability criterion for stationary curves to the curvature-driven motion with a triple junction. Differential Integral Equations 16 (6), 707-726 (2003).

[119] Depner, D.; Garcke, H. Linearized stability analysis of surface diffusion for hypersurfaces with triple lines. Hokkaido Math. J. 42 (1), 11-52 (2013).

[120] Garcke, H.; Ito, K.; Kohsaka, Y. Linearized stability analysis of stationary solutions for surface diffusion with boundary conditions. SIAM J. Math. Anal., 36 (4), 1031-1056 (2005).

[121] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F. Sobolev spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam 2006.

[122] Wloka, J. Partial differential equations. Cambridge University Press, Cambridge 1992.

[123] Struwe, M. Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Fourth Edition. Springer 2008.

[124] Courant, R.; Hilbert, D. Methods of mathematical physics. Vol. I. Interscience Publishers. New York 1953.

[125] Stein, E.; Weiss, G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton University Press. Princeton 1971.

[126] Plateau, J. A. F. Statique Expérimentale Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaire. Gauthier-Villars, Paris, 1863.

[127] Taylor, J. E. The structure of singularities in area-related variational problems with constraints. Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 1093-1095.

[128] Bates, P. W. and Fife, P. C. The dynamics of nucleation for the Cahn-Hilliard equation, SIAM J. Appl. Math. 53, 990-1008 (1993).

[129] Bates, P. W. and Fife, P. C. Spectral comparison principles for the Cahn-Hilliard and phase-field equations, and time scales for coarsening. Physica D 43 (2-3), 335-348 (1990).

[130] Caginalp, G. and Fife, P.C. Dynamics of layered interfaces arising from phase boundaries. SIAM J. Appl. Math., 48 (3), 506–518 (1988).

[131] Alikakos, N.D.; Bates, P.W.; Cahn, J.W.; Fife, P.C.; Fusco G.; Tanoglu G.B. Analysis of a corner layer problem in anisotropic interfaces. Discrete Cont. Dyn.-B 6 (2), 237- 255 (2006).

[132] Morgan, F. Strict calibrations, constant mean curvature and triple junctions. IX School of Differential Geometry (Vitoria, 1994). Mat. Contemp. 9 139-152 (1995).

[133] Lawlor, G.; Morgan, F. Curvy slicing proves that triple junctions locally minimize area. J. Differential Geom. 44 (3), 514-528 (1996).

[134] Lawlor, G., and Morgan, F. Paired calibrations applied to soap films, immiscible fluids, and surfaces or networks minimizing other norms. Pacific J. Math. 166, 55-83 (1994).

[135] Brakke, K. Soap films and covering spaces. J. Geom. Anal. 5 (4), 445-514 (1995).

[136] Alikakos, N.D.; Bates, P.W.; Chen, X.; Fusco, G. Mullins-Sekerka motion of small droplets on a fixed boundary. J. Geom. Anal. 10 (4), 575-596 (2000).

[137] Alikakos, N.D.; Fusco, G. Slow dynamics for the Cahn-Hilliard equation in higher space dimensions: the motion of bubbles. Arch. Ration. Mech. An. 141 (1), 1-61 (1998).

[138] Alikakos, N.D.; Fusco, G. Slow dynamics for the Cahn-Hilliard equation in higher space dimensions. I. Spectral estimates. Comm. PDE 19 (9-10), 1397-1447 (1994).

[139] Ikota, R.; Yanagida, E. Stability of stationary interfaces of binary-tree type. Calc. Var. PDE 22 (4), 375-389 (2005).

[140] Ikota, R.; Yanagida, E. A stability criterion for stationary curves to the curvature-driven motion with a triple junction. Differential Integral Equations 16 (6), 707-726 (2003).

[141] Depner, D.; Garcke, H. Linearized stability analysis of surface diffusion for hypersurfaces with triple lines. Hokkaido Math. J. 42 (1), 11-52 (2013).

[142] Garcke, H.; Ito, K.; Kohsaka, Y. Linearized stability analysis of stationary solutions for surface diffusion with boundary conditions. SIAM J. Math. Anal., 36 (4), 1031-1056 (2005).

[143] J.E. Taylor, J.W. Cahn, Handwerker C.A. Overview No. 98 I - Geometric models of crystal growth. Acta Metall. Mater. Volume 40(7), 1443-1474 (1992).

[144] J.E. Taylor. Overview no. 98 II - Mean curvature and weighted mean curvature. Acta Metall. Mater. 40(7), 1475-1485 (1992).

[145] J.E. Taylor. Mathematical Models of Triple Junctions. Interface Sci. 7, 243–249 (1999).

[146] Alikakos, N.D.; Faliagas, A.C. Stability criteria for multiphase partitioning problems with volume constraints. Submitted for publication.

[147] Abraham, R.; Marsden, J. E.; Ratiu, T. Manifolds, tensor analysis, and applications. Second edition. Applied Mathematical Sciences, 75. Springer 1988.

[148] Spivak, M. A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III. Second edition. Publish or Perish, 1979.

[149] Spivak, M. A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II. Second edition. Publish or Perish, 1979.

[150] A. Faliagas, Construction of energy-momentum tensors in calculus of variations and applications to partial differential equations. Master's thesis. University of Athens (2012). dl.dropbox.com/u/56524894/masters-thesis.pdf.

[151] R. Schoen, Lecture notes on general relativity, Stanford University 2009.

[152] L. Caffarelli; N. Garofalo; F. Segala, A gradient bound for entire solutions of quasi-linear equations and its consequences. Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), no. 11, 1457-1473.

[153] N. Alikakos, Some basic facts on the system $\Delta u - W_u(u) = 0$. Proc. Amer. Math. Soc. 139, 153-162 (2011).

[154] G. H. Derrick, Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles. J. Math. Phys. 5, 1252 (1964).

[155] N. Alikakos, A. Faliagas, The stress-energy tensor and Pohozaev's identity for systems. Acta Math. Sci. 32, 433-439 (2012).

[156] E. Noether, Invariant variation problems. English translation (2005). arxiv.org/pdf/physics/0503066v1.
[157] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, The Feynman lectures on physics Vol. 1. Mainly mechanics, radiation, and heat. Addison-Wesley (1963).
[158] J. D. Bjorken, S. D. Drell, Relativistic quantum fields. McGraw-Hill (1964).
[159] J.-A. Dieudonné, Treatise on Analysis. Volume I. Foundations of modern analysis. Enlarged and corrected printing. Academic (1969).