Γεωμετρία των L_q-κεντροειδών σωμάτων

Διδακτορική Διατριβή

Πανтελής Σταυρακάκης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2014

Εισηγητής:

Απόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον δάσκαλό μου καθηγητή κύριο Απόστολο Γιαννόπουλο για όλα όσα μου έμαθε και συνεχίζει να μου μαθαίνει τόσο γενναιόδωρα και για την καθοδήγησή του σε όλη την πορεία της έρευνάς μου, καθώς επίσης και τον φίλο μου και συνάδελφο Πέτρο Βαλέττα για την ηθική του υποστήριξη και τις ατελείωτες μαθηματικές και όχι μόνο αναζητήσεις μας.

Κεφάλαιο 1

Αποτελέσματα της διατριβής

1.1 Μια αναγωγή της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς

Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο 1, κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων, και ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα: υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε θ στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Αποδεικνύεται ότι η αφινική κλάση κάθε κυρτού σώματος K περιέχει ένα, ουσιαστικά μοναδικό, ισοτροπικό κυρτό σώμα $\tilde{K}$. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι η ισοτροπική θέση του K. Η ισοτροπική θέση παίζει κεντρικό ρόλο στην μελέτη της κατανομής του όγκου των κυρτών σωμάτων. Ένα σημαντικό παράδειγμα δίνει η εικασία του υπερεπιπέδου, ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας, το οποίο ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\max_{\theta\in S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}| \geqslant c$ για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το 0. Το ερώτημα αυτό τέθηκε από τον Bourgain [7], ο οποίος ενδιαφερόταν για L_p-φράγματα για τον μεγιστικό τελεστή που ορίζεται με βάση τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι η εικασία του υπερεπιπέδου είναι ισοδύναμη με την παρακάτω εικασία:

Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Η εικασία αυτή έγινε ευρέως γνωστή από το άρθρο [46] των V. Milman και Pajor. Περίπου την ίδια εποχή, ο Ball έδειξε στο [2] ότι η έννοια της ισοτροπικής σταθεράς και η εικασία μπορούν να διατυπωθούν στην γλώσσα των λογαριθμικά κοίλων μέτρων. Ένα πεπερασμένο μέτρο Borel μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν, για κάθε $\lambda \in (0,1)$ και για κάθε ζεύγος συμπαγών υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^n$, ισχύει

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^{\lambda}\mu(B)^{1-\lambda}.$$

Ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν το κέντρο βάρους του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και ο πίνακας αδρανείας του είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Σε αυτήν την περίπτωση, η ισοτροπική σταθερά του μέτρου ορίζεται να είναι ίση με

$$L_{\mu} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(f_{\mu}(x)\big)^{1/n}, \tag{1.1.1}$$

όπου f_{μ} είναι η πυκνότητα του μ ως προς το μέτρο Lebesgue.

Άμεση συνέπεια της κλασικής ανισότητας Brunn-Minkowski είναι το γεγονός ότι η δείκτρια συνάρτηση ενός κυρτού σώματος είναι η πυκνότητα (ως προς το μέτρο Lebesgue) ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου με συμπαγή φορέα. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, ο ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς για τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα συμφωνεί με τον ορισμό που δώσαμε για την ισοτροπική σταθερά ενός κυρτού σώματος. Προφανώς, δεν είναι σωστό ότι όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα έχουν συμπαγή φορέα, άρα τα ισοτροπικά κυρτά σώματα σχηματίζουν μια γνήσια υποκλάση των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων. Αποδεικνύεται όμως ότι, η γενίκευση της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς στην μεγαλύτερη κλάση των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων οδηγεί σε ένα ισοδύναμο ουσιαστικά πρόβλημα - ο λόγος είναι ότι έχει αναπτυχθεί κατάλληλη θεωρία που επιτρέπει την «μετάφραση» και μεταφορά επιχειρημάτων και αποτελεσμάτων από την κλάση των σωμάτων σε εκείνη των μέτρων και αντίστροφα. Γύρω στο 1990, ο Bourgain [8] απέδειξε ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$ και, το 2006, η εκτίμηση αυτή βελτιώθηκε από τον Klartag [29] ο οποίος έδειξε ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$.

Κεντρικό ρόλο στη μελέτη του προβλήματος, αλλά και στη μελέτη άλλων προβλημάτων σχετικά με την κατανομή του όγκου στα κυρτά σώματα μεγάλων διαστάσεων, παίζει η οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων. Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 ή για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε τα L_q-κεντροειδή σώματα $Z_q(K)$ ή $Z_q(\mu)$, $q \in (0,+\infty)$, μέσω της συνάρτησης στήριξής τους $h_{Z_q(K)}$ ή $h_{Z_q(\mu)}$, η οποία ορίζεται ως εξής: για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$h_{Z_q(K)}(y) := \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_q(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}, \tag{1.1.2}$$

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_q(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Τα σώματα αυτά εμπεριέχουν πληροφορία για την κατανομή των γραμμικών συναρτησοειδών ως προς το ομοιόμορφο μέτρο στο K ή ως προς το μέτρο πιθανότητας μ. Τα L_q-κεντροειδή σώματα εισήχθησαν, με διαφορετική κανονικοποίηση, από τους Lutwak και Zhang στο [39], αλλά στο [51] για πρώτη φορά, και στο [52] αργότερα, ο Παούρης χρησιμοποίησε γεωμετρικές ιδιότητές τους για να πάρει ακριβείς πληροφορίες για την κατανομή της Ευκλείδειας νόρμας ως προς το ομοιόμορφο μέτρο σε ισοτροπικά κυρτά σώματα. Μια ασυμπτωτική θεωρία των L_q-κεντροειδών σωμάτων άρχισε να αναπτύσσεται από τότε και μοιάζει να συμβαδίζει με όλες τις σύγχρονες εξελίξεις σε αυτήν την περιοχή.

Αφετηρία αυτής της διατριβής είναι μια αναγωγή της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς από τους Βριτσίου, Γιαννόπουλο και Παούρη στο [24], οι οποίοι έδειξαν ότι το ερώτημα αν η L_n είναι φραγμένη από μια σταθερά ανεξάρτητη από την διάσταση n σχετίζεται άμεσα με τη μελέτη της παραμέτρου

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) = \int_K \|\langle \cdot, x\rangle\|_{L_q(K)} dx \tag{1.1.3}$$

για τα ισοτροπικά κυρτά σώματα K. Γενικά, αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $q \in (-n, \infty)$, $q \neq 0$, ορίζουμε

$$I_q(K, C) := \left(\int_K \|x\|_C^q dx\right)^{1/q}. \tag{1.1.4}$$

Ο συμβολισμός $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ δικαιολογείται λοιπόν από το γεγονός ότι η $\|\langle \cdot, x\rangle\|_{L_q(K)}$ είναι η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το πολικό σώμα $Z_q^\circ(K)$ του L_q-κεντροειδούς σώματος του K (στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε εν συντομία την βασική ορολογία από την θεωρία των κυρτών σωμάτων και στο Κεφάλαιο 3 τις βασικές ιδιότητες των L_q-κεντροειδών σωμάτων).

Η αναγωγή που δίνεται στο [24] κινείται στην ίδια γραμμή με την προσέγγιση του Bourgain για το πρόβλημα στο [8]: ο Bourgain απέδειξε το φράγμα $L_n = O(\sqrt[4]{n}\log n)$ ξεκινώντας από την ανισότητα

$$nL_K^2 \leqslant I_1\big(K, (T(K))^\circ\big), \tag{1.1.5}$$

και φράσσοντας την ποσότητα $I_1\big(K,(T(K))^\circ\big)$, όπου ο $T\in SL(n)$ είναι ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας με την ιδιότητα το μέσο πλάτος του $T(K)$ να ικανοποιεί την $w(T(K))\leqslant c\sqrt{n}\log n$ (η ύπαρξη μιας τέτοιας γραμμικής εικόνας του K εξασφαλίζεται από την εκτίμηση του Pisier για τη νόρμα της προβολής Rademacher, βλέπε [54]). Το αποτέλεσμα του [24] είναι το εξής:

Θεώρημα 1.1.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\rho\in(0,1)$ με την εξής ιδιότητα: αν $\kappa,\tau\geqslant 1$, για κάθε $n\geqslant n_0(\tau)$ και για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\log N(K,tB_2^n)\leqslant \frac{\kappa n^2\log^2 n}{t^2}\quad \textit{για κάθε } t\geqslant \tau\sqrt{n\log n}, \tag{1.1.6}$$

έχουμε ότι, αν ο $q\geqslant 2$ ικανοποιεί τις

$$2\leqslant q\leqslant \rho^2 n \ \textit{και}\ I_1(K,Z_q^\circ(K))\leqslant \rho n L_K^2, \tag{1.1.7}$$

τότε

$$L_K^2\leqslant C\kappa\sqrt{\frac{n}{q}}\log^2 n\,\max\left\{1,\frac{I_1(K,Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}L_K^2}\right\}. \tag{1.1.8}$$

Το Θεώρημα 1.1.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσουμε άνω φράγμα για την L_n, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν (κ,τ)-*κανονικά* ισοτροπικά κυρτά σώματα K στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή σώματα που ικανοποιούν την (1.1.6) για ένα ζεύγος σταθερών κ,τ, και ταυτόχρονα έχουν «μέγιστη» ισοτροπική σταθερά, δηλαδή $L_K\simeq L_n$. Η ύπαρξη τέτοιων σωμάτων έχει αποδειχθεί από τους Δαφνή και Παούρη στο [14, Θεώρημα 5.7] (μια πλήρης απόδειξη δίνεται και στο [24]).

Θεώρημα 1.1.2. *Υπάρχουν θετικές σταθερές κ,τ και $\delta>0$ τέτοιες ώστε: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) $L_K\geqslant \delta L_n$.

(ii) $\log N(K,tB_2^n)\leqslant \frac{\kappa n^2\log^2 n}{t^2}$ *για κάθε* $t\geqslant \tau\sqrt{n\log n}$.

Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, οι δύο συνθήκες της (1.1.7) ικανοποιούνται για $q=2$, διότι $I_1(K,Z_2^\circ(K))\leqslant\sqrt{n}L_K^2$. Συνεπώς, το Θεώρημα 1.1.1 μας δίνει

$$L_K^2\leqslant C_1\sqrt{n}\log^2 n \tag{1.1.9}$$

για κάθε ισοτροπικό σώμα το οποίο είναι επιπλέον κανονικό. Δεδομένου ότι, για κάποιες απόλυτες σταθερές κ,τ και $\delta>0$, υπάρχουν (κ,τ)-κανονικά ισοτροπικά κυρτά σώματα

K στον $\mathbb{R}^n$ με $L_K \geqslant \delta L_n$, από την (1.1.9) έχουμε άμεσα ένα άνω φράγμα ουσιαστικά ισοδύναμο με αυτό του Bourgain: $L_n \leqslant C_2 \sqrt[4]{n} \log n$.

Αυτό όμως που παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι ότι η γνώση της συμπεριφοράς της παραμέτρου $I_1(K, Z_q^{\circ}(K))$ θα μπορούσε να μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε πολύ μεγαλύτερες τιμές του q. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα δύο θεωρήματα έχουμε το εξής: για δοσμένα $q \geqslant 2$ και $\frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1$, ένα άνω φράγμα της μορφής $I_1(K, Z_q^{\circ}(K)) \leqslant C_1 q^s \sqrt{n} L_K^2$ για *όλα τα ισοτροπικά κυρτά σώματα* K στον $\mathbb{R}^n$ οδηγεί στην εκτίμηση

$$L_n \leqslant \frac{C_2 \sqrt[4]{n} \log n}{q^{\frac{1-s}{2}}}. \tag{1.1.10}$$

Κάποια απλά άνω και κάτω φράγματα, που ισχύουν για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι τα εξής:

(i) Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,

$$c_1 \max\left\{\sqrt{n} L_K^2, \sqrt{qn}, R(Z_q(K)) L_K\right\} \leqslant I_1(K, Z_q^{\circ}(K)) \leqslant c_2 q \sqrt{n} L_K^2. \tag{1.1.11}$$

(ii) Αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, τότε

$$c_1 \max\left\{\sqrt{n} L_K^2, \sqrt{qn} L_K\right\} \leqslant I_1(K, Z_q^{\circ}(K)) \leqslant c_2 q \sqrt{n} L_K^2. \tag{1.1.12}$$

Όπως είδαμε, οποιαδήποτε βελτίωση του εκθέτη του q στο άνω φράγμα $I_1(K, Z_q^{\circ}(K)) \leqslant cq\sqrt{n} L_K^2$ θα οδηγούσε στο άνω φράγμα $L_n \leqslant Cn^{\alpha}$ για κάποιον $\alpha < \frac{1}{4}$. Μια εικασία είναι ότι, στην πραγματικότητα, ισχύει $I_1(K, Z_q^{\circ}(K)) \leqslant c\sqrt{qn} L_K^2$, τουλάχιστον όταν το q είναι «μικρό», για παράδειγμα αν $2 \leqslant q \ll \sqrt{n}$.

Το ερώτημα αυτό είναι η αφετηρία για τα αποτελέσματα που περιγράφουμε στην επόμενη Παράγραφο. Κάποιες βασικές πληροφορίες για την γεωμετρία του $Z_q(K)$, όταν $q \leqslant \sqrt{n}$, είναι ήδη γνωστές (βλέπε Κεφάλαιο 3): η ακτίνα όγκου και το μέσο πλάτος του $Z_q(K)$ είναι και οι δύο της ίδιας τάξης $\sqrt{q} L_K$. Η γνώση όμως αυτών των παραμέτρων δεν είναι αρκετή για να βελτιώσουμε τα ύπάρχοντα άνω φράγματα για την ποσότητα $I_1(K, Z_q^{\circ}(K))$. Βασικά ερωτήματα σχετικά με το ακριβές ασυμπτωτικό σχήμα των σωμάτων $Z_q(K)$, την τοπική τους δομή και την συμπεριφορά των αριθμών κάλυψης $N(Z_q(K), t\sqrt{q} L_K B_2^n)$ και $N(\sqrt{q} L_K B_2^n, t Z_q(K))$ καθώς το $t \geqslant 1$ αυξάνει, θα αποτελέσουν το αντικείμενο της μελέτης μας στη συνέχεια. Η μελέτη αυτή θα γίνει στο γενικότερο πλαίσιο των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

1.2 Αποτελέσματα της διατριβής

Το **Κεφάλαιο 2** υπενθυμίζει βασικούς ορισμούς και κλασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας τα οποία χρησιμοποιούνται συχνά σε αυτήν την διατριβή.

Στο **Κεφάλαιο 3** εισάγουμε αρχικά την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα και τις ιδιότητες συγκέντρωσης των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την ανισότητα Brunn-Minkowski, τις οποίες εκφράζουμε στην μορφή αντίστροφων ανισοτήτων Hölder για ημινόρμες. Κατόπιν, ορίζουμε την οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$ και περιγράφουμε συνοπτικά τις βασικές ιδιότητες της οικογένειας $\{L_q(\mu) : q \geqslant 2\}$. Αξίζει τον κόπο να αναφέρουμε κι εδώ δύο από αυτές, που παίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στα επόμενα:

(i) Αν f_μ είναι η πυκνότητα του μ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε $f_\mu(0)^{1/n}|Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq 1$.

(ii) Για κάθε $1 \leqslant k < n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ και $q \geqslant 1$, έχουμε
$$P_F(Z_q(\mu)) = Z_q(\pi_F(\mu)),$$
όπου $\pi_F(\mu)$ είναι η περιθώρια κατανομή του μ ως προς τον F, που ορίζεται από την σχέση $\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A))$ για κάθε Borel υποσύνολο του F.

Η πρώτη σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των L_q-κεντροειδών σωμάτων είναι η ανισότητα του Παούρη [51]: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει
$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{n}\right)$$
για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η ανισότητα είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του εξής αποτελέσματος: υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε, αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε
$$I_q(\mu) \leqslant c_2 I_2(\mu)$$
για κάθε $q \leqslant c_1\sqrt{n}$, όπου η ποσότητα $I_q(\mu)$ ορίζεται, για κάθε $0 \neq q > -n$, ως εξής:
$$I_q(\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Περιγράφουμε επίσης την απόδειξη ενός δεύτερου αποτελέσματος του Παούρη [52], το οποίο επεκτείνει το προηγούμενο. Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει

$$I_{-q}(\mu) \simeq I_q(\mu).$$

Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει $I_q(\mu) \leqslant cI_2(\mu)$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την ανισότητα $I_{-q}(\mu) \leq cI_2(\mu)$, με $q \simeq \sqrt{n}$, προκύπτει ότι αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ τότε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c_4\sqrt{n}},$$

όπου $\varepsilon_0, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου δίνουν μια εκτίμηση για την συγκέντρωση του μέτρου σε έναν «όχι και τόσο λεπτό» δακτύλιο γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}$: έχουμε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : c\sqrt{n} \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\sqrt{n}\}) > 1 - o_n(1),$$

όπου $0 < c < 1 < C$ είναι απόλυτες σταθερές. Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για την συγκέντρωση ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου σε έναν λεπτό δακτύλιο οφείλεται στους Guédon και E. Milman. Ισχύει

$$\mu\left(\big|\,\|x\|_2 - \sqrt{n}\big| \geqslant t\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t)) \tag{1.2.1}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $C, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Τα αποτελέσματα της διατριβής αποδεικνύονται στα επόμενα τρία Κεφάλαια. Δίνουμε εδώ μια σύντομη περιγραφή τους και κάποια σχόλια.

Στο **Κεφάλαιο 4** δίνουμε νέες πληροφορίες για την τοπική δομή των σωμάτων $Z_q(\mu)$ και έναν αριθμό από εφαρμογές τους. Το πρώτο μας βασικό αποτέλεσμα αφορά τις προβολές, διάστασης ανάλογης του n, των κεντροειδών σωμάτων.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $1 \leqslant \alpha < 2$. Για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ και για κάθε $q \leqslant \sqrt{\varepsilon n}$ υπάρχουν $k \geqslant (1-\varepsilon)n$ και $F \in G_{n,k}$ ώστε*

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big) \supseteq c(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}}\sqrt{q}\,B_F, \tag{1.2.2}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (ανεξάρτητη από το α, το ε, το μέτρο μ, το q και το n). Επιπλέον, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \varepsilon n$ υπάρχουν $k \geqslant (1-\varepsilon)n$ και $F \in G_{n,k}$ ώστε

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big) \supseteq \frac{c_1(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}}}{L_{\varepsilon n}}\sqrt{q}\,B_F \supseteq \frac{c_2(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{4}+\frac{2}{\alpha}}}{\sqrt[4]{n}}\sqrt{q}\,B_F, \tag{1.2.3}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1 δίνεται στην Παράγραφο 4.3. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Pisier για την ύπαρξη α-κανονικών ελλειψοειδών για συμμετρικά κυρτά σώματα. Συνδυάζουμε αυτό το αποτέλεσμα με τις γνωστές ιδιότητες των L_q-κεντροειδών σωμάτων και με αποτελέσματα από το [19] για την περιγεγραμμένη ακτίνα των τομών των α-κανονικών σωμάτων. Σημειώνουμε ότι το δυϊκό αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της M^*-ανισότητας, διότι είναι γνωστό ότι το μέσο πλάτος του $Z_q(\mu)$ είναι της τάξης της $\sqrt{q}$: αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ και αν $\varepsilon \in (0,1)$ και $k = (1-\varepsilon)n$, τότε ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την

$$P_F(Z_q^\circ(\mu)) \supseteq \frac{c_1\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{q}} B_F \tag{1.2.4}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2\varepsilon n)$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην Παράγραφο 4.4 συζητάμε φράγματα για τους αριθμούς κάλυψης της Ευκλείδειας μπάλας από το $Z_q(\mu)$. Στα [22] και [23] αποδείχθηκε ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και για κάθε $t \geqslant 1$,

$$\log N\big(Z_q(\mu), c_1 t\sqrt{q} B_2^n\big) \leqslant c_2\frac{n}{t^2} + c_3\frac{\sqrt{qn}}{t}, \tag{1.2.5}$$

όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.1 και ένα αποτέλεσμα από το [38] εξασφαλίζουμε «κανονικές» εκτιμήσεις για τους δυϊκούς αριθμούς κάλυψης.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $1 \leqslant \alpha < 2$. Τότε, για κάθε $q \leqslant \sqrt{n}$ και για κάθε*

$$1 \leqslant t \leqslant \min\big\{\sqrt{q},\ c_1(2-\alpha)^{-1}(n/q^2)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}\big\} \tag{1.2.6}$$

έχουμε

$$\log N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big) \leqslant c(\alpha)\frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}}\max\left\{\log\frac{\sqrt{2q}}{t},\ \log\frac{1}{(2-\alpha)t}\right\}, \tag{1.2.7}$$

όπου $c(\alpha) \leqslant C(2-\alpha)^{-2/3}$ και c_1, C είναι απόλυτες σταθερές. Επιπλέον, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ και για κάθε

$$1 \leqslant t \leqslant \min\left\{\sqrt{q},\ c_2(2-\alpha)^{-1}L_n\left(\frac{n}{q}\right)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}\right\} \tag{1.2.8}$$

έχουμε

$$\log N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big) \leqslant c(\alpha)L_n^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}\ \frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}}\ \max\left\{\log\frac{2q}{t^2},\ \log\frac{L_n}{(2-\alpha)t}\right\}, \tag{1.2.9}$$

όπου η $c(\alpha)$ είναι όπως παραπάνω και c_2 είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι, αφού $Z_q(\mu) \supseteq B_2^n$, ενδιαφερόμαστε να φράξουμε αυτούς τους αριθμούς κάλυψης όταν το t βρίσκεται στο διάστημα $[1, \sqrt{q}]$. Αναλύοντας τους περιορισμούς στο Θεώρημα 1.2.2 βλέπουμε ότι, για κάθε $q \leqslant n^{3/7}$, η (1.2.7) ισχύει για κάθε t στο διάστημα που μας ενδιαφέρει, και το ίδιο ισχύει για την (1.2.9) εφόσον $q \leqslant \sqrt{L_n} n^{3/4}$. Παρόλο που αυτές οι εκτιμήσεις δεν μοιάζουν να είναι βέλτιστες, μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτές ότι το $Z_q(\mu)$, όταν $q \leqslant n^{3/7}$, είναι β-κανονικό κυρτό σώμα υπό την έννοια του θεωρήματος του Pisier (για κάποια συγκεκριμένη τιμή του β). Συνέπεια αυτού είναι ένα άνω φράγμα για την παράμετρο

$$M\big(Z_q(\mu)\big) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_{Z_q(\mu)} \, d\sigma(x).$$

Θυμηθείτε ότι η δυϊκή ανισότητα Sudakov των Pajor και Tomczak-Jaegermann (βλέπε π.χ. [54]) δίνει 2-κανονικές εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης $N(B_2^n, tC)$ συναρτήσει της $M(C)$, ακριβέστερα μας εξασφαλίζει ότι

$$\log N(B_2^n, tC) \leqslant cn \left(\frac{M(C)}{t}\right)^2$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Στην Παράγραφο 4.5 χρησιμοποιούμε αντίστροφα τις εκτιμήσεις αριθμών κάλυψης της Παραγράφου 4.4 για να δώσουμε άνω φράγματα για το $M(Z_q(\mu))$.

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n^{3/7}$,*

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C \frac{(\log q)^{5/6}}{\sqrt[6]{q}}. \tag{1.2.10}$$

Επιπλέον, για κάθε q με $L_n^2 \log^2 q \leqslant q \leqslant \sqrt{L_n}\, n^{3/4}$,

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C \frac{\sqrt[3]{L_n}(\log q)^{5/6}}{\sqrt[6]{q}}. \tag{1.2.11}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι, αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με ισοτροπική σταθερά L_K, τότε το μέτρο μ_K με πυκνότητα $f_{\mu_K}(x) := L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}(x)$ είναι ισοτροπικό και, για κάθε $q > 0$, ισχύει $Z_q(K) = L_K Z_q(\mu_K)$. Χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός ότι $M(K) \leqslant M(Z_q(K))$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K και για κάθε $q > 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα φράγματα για το $M(Z_q(\mu_K))$ και να δώσουμε άνω φράγμα για το $M(K)$ στην ισοτροπική περίπτωση.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω K ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M(K) \leqslant C\frac{\sqrt[4]{L_n}(\log n)^{5/6}}{L_K\sqrt[8]{n}}.$$

Αυτό είναι ένα ερώτημα που μέχρι πρόσφατα δεν είχε προσελκύσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ο Π. Βαλέττας, χρησιμοποιώντας μια κάπως διαφορετική προσέγγιση [58], έχει δείξει ότι

$$M(K) \leqslant \frac{C(\log n)^{1/3}}{\sqrt[12]{n}L_K}$$

για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Σημειώνουμε ότι, από την άλλη πλευρά, υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις για το αντίστοιχο ερώτημα σχετικά με το μέσο πλάτος, οι οποίες οδηγούν στο άνω φράγμα

$$w(K) \leqslant Cn^{3/4}L_K$$

για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Όμως, το πρόβλημα αυτό παραμένει επίσης ανοικτό (βλέπε [23] και τις αναφορές εκεί).

Κλείνουμε αυτό το Κεφάλαιο με κάποιες πρόσθετες παρατηρήσεις για την γεωμετρία των κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$ και των πολικών τους. Δίνουμε κάτω φράγματα για την περιγεγραμμένη ακτίνα των τομών τους – αυτά μάλιστα ιαχύουν για κάθε $1 \leqslant k < n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$. Λόγω δυϊσμού, αυτές οι εκτιμήσεις προσδιορίζουν την εγγεγραμμένη ακτίνα των τυχαίων προβολών τους. Δίνουμε επίσης άνω φράγματα για τις παραμέτρους $M_{-k}(Z_q(\mu))$ και $I_{-k}(\overline{Z_q}(\mu))$.

Αφετηρία για το **Κεφάλαιο 5** είναι μια πολύ γνωστή αρχή της ασυμπτωτικής θεωρίας κυρτών σωμάτων που ισχυρίζεται ότι αποτελέσματα τοπικού χαρακτήρα, που περιγράφουν την δομή των τομών και προβολών ενός συμμετρικού κυρτού σώματος C στον $\mathbb{R}^n$ μπορούν να «μεταφραστούν» σε παράλληλα αποτελέσματα που περιγράφουν την σχέση του C με τις ορθογώνιες εικόνες του, $U(C)$. Αρκετά αποτελέσματα, όπως π.χ. η global εκδοχή του θεωρήματος του Dvoretzky που αποδείχθηκε από τους V. Milman και Schechtman στο [48], υποστηρίζουν αυτήν την αρχή. Το «θεώρημα του λόγου όγκων» μας δίνει ένα άλλο κλασικό παράδειγμα. Οι Szarek και Tomczak-Jaegermann [57], γενικεύοντας προηγούμενη δουλειά του Kashin [28] για τη μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n, απέδειξαν ότι αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $B_2^n \subseteq C$ και $|C| = \alpha^n|B_2^n|$ για κάποιον $\alpha > 1$ τότε, για κάθε $1 \leq k \leq n$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ την

$$B_2^n \cap F \subseteq C \cap F \subseteq (c\alpha)^{\frac{n}{n-k}} B_2^n \cap F, \tag{1.2.12}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το global ανάλογο αυτού του ισχυρισμού είναι ότι, με τις ίδιες υποθέσεις, υπάρχει $U \in O(n)$ με την ιδιότητα

$$B_2^n \subset C \cap U(C) \subset c\alpha^2 B_2^n, \tag{1.2.13}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Με λίγα λόγια, το γεγονός ότι οι περισσότερες $n/2$-διάστατες τομές του C είναι α^2-ισοδύναμες με την Ευκλείδεια μπάλα μεταφράζεται στο γεγονός ότι η τομή του C με την τυχαία στροφή του, $U(C)$, είναι ένα κυρτό σώμα α^2-ισοδύναμο με την B_2^n.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θεωρούμε την τομή του C με το $U(C)$, όπου $U \in O(n)$ είναι ένας τυχαίος ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$, και ενδιαφερόμαστε κυρίως για την μέση τιμή του όγκου και την περιγεγραμμένη ακτίνα $R(C \cap U(C)) := \max\{\|x\|_2 : x \in C \cap U(C)\}$ του $C \cap U(C)$. Αρχίζοντας από τον όγκο, είναι φανερό ότι $|C \cap U(C)| \leqslant 1$ για κάθε U, και το παράδειγμα της Ευκλείδειας μπάλας $\overline{B_2^n}$ όγκου 1 δείχνει ότι, σε πλήρη γενικότητα, δεν μπορούμε να περιμένουμε κάτι καλύτερο από αυτό το τετριμμένο άνω φράγμα. Παρόλα αυτά, θα δούμε ότι, υπό κάποιες φυσιολογικές προϋποθέσεις για το C, μπορούμε να δώσουμε υποεκθετικά άνω φράγματα για την μέση τιμή

$$\mathbb{E}_U|C \cap U(C)| = \int_{O(n)} |C \cap U(C)|\, d\nu(U)$$

όπου ν είναι το μέτρο Haar στην $O(n)$. Αφετηρία μας είναι μια απλή ολοκληρωτική αναπαράσταση αυτής της μέσης τιμής: έχουμε

$$\int_{O(n)} |C \cap U(C)|\, d\nu(U) = \int_C \sigma\Big(S^{n-1} \cap \frac{1}{\|x\|_2} C\Big)\, dx, \tag{1.2.14}$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο πιθανότητας στην μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Συνεπώς, το πρόβλημα είναι να κατανοήσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης $\sigma(S^{n-1} \cap tC)$ για μικρές τιμές του t ή, ισοδύναμα, την συμπεριφορά της συνάρτησης $\gamma_n(\alpha C)$ για $\alpha \simeq 1$. Μία παράμετρος που παίζει βασικό ρόλο σε εκτιμήσεις αυτού του τύπου εισήχθη από τους Klartag και Vershynin στο [33]: όρισαν την παράμετρο $d(C)$ ως εξής:

$$d(C) := \min\left\{ -\log\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} : \|x\|_C \leqslant \frac{M(C)}{2}\right\}\right), n\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας το B-θεώρημα των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey [13], στην Παράγραφο 5.4 αποδεικνύουμε το εξής φράγμα.

Θεώρημα 1.2.5. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $B_0 > 0$ ώστε αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $\sqrt{n}M(C) \geqslant B_0$ τότε*

$$\int_{O(n)} |C \cap U(C)|\, d\nu(U) \leqslant e^{-cd(C)}, \tag{1.2.15}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η συνθήκη $\sqrt{n}M(C) \geqslant B_0$ στο Θεώρημα 1.2.5 είναι μάλλον φυσιολογική: παρατηρήστε ότι αν εκφράσουμε τον όγκο του C σαν ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Hölder τότε παίρνουμε

$$\mathrm{vrad}(C)M(C) \geqslant 1 \tag{1.2.16}$$

με ισότητα αν το C είναι Ευκλείδεια μπάλα. Αν $|C| = 1$ τότε $\mathrm{vrad}(C) := (|C|/|B_2^n|)^{1/n} \simeq \sqrt{n}$, το οποίο σημαίνει ότι τα σώματα για τα οποία ισχύει $\mathrm{vrad}(C)M(C) \leqslant B_0$ σχηματίζουν μια μάλλον περιορισμένη κλάση σωμάτων.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.5 δίνεται στην Παράγραφο 5.2. Το γενικό άνω φράγμα της (1.2.15) εξαρτάται από την τάξη μεγέθους της $d(C)$. Δίνουμε κάποιες εφαρμογές στην περίπτωση που το C είναι (κανονικοποιημένη) ℓ_p^n-μπάλα. Συζητάμε επίσης κάποιες κλασσικές θέσεις του σώματος C από αυτήν την οπτική γωνία. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή όπου το σώμα βρίσκεται στην ισοτροπική θέση. Σε αυτήν την περίπτωση, κάνοντας χρήση της ανισότητας του λεπτού δακτυλίου (βλέπε π.χ. [27]) παίρνουμε ένα ακόμα άνω φράγμα.

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, είτε $L_K \leqslant 1$ ή*

$$\int_{O(n)} |K \cap U(K)|\, d\nu(U) \leqslant c_1 e^{-c_2\sqrt{n}}, \tag{1.2.17}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη δείχνει μάλιστα ότι μπορεί κανείς να επιτύχει την ίδια υποεκθετική εκτίμηση στο Θεώρημα 1.2.6 με την υπόθεση ότι $L_K \geqslant t$, για οποιονδήποτε $t > \sqrt{2/\pi}$. Η επιλογή του t έχει επίπτωση μόνο στην σταθερά c_2 (δείτε την Πρόταση 5.2.8 για την ακριβή διατύπωση). Παρατηρήστε ότι η συνθήκη του Θεωρήματος 1.2.6 είναι διαφορετική: ζητάμε η ισοτροπική σταθερά L_K του K να είναι αρκετά μεγάλη: $L_K \geqslant 1$. Η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$ ώστε $L_K \leqslant c_0$ για ολα τα ισοτροπικά κυρτά σώματα σε οποιαδήποτε διάσταση – αν αυτό είναι σωστό, και ειδικότερα αν ισχύει για κάποια σταθερά $c_0 < 1$, τότε προφανώς ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 1.2.6 δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Για να δώσουμε κάτω φράγματα για τον $|C \cap U(C)|$ χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις ανισότητες για αριθμούς κάλυψης. Μάλιστα, τα φράγματά μας ισχύουν για κάθε $U \in O(n)$. Στην Παράγραφο 5.1 δείχνουμε ότι, για κάθε $\varrho > 0$ και για κάθε $U \in O(n)$ ισχύει

$$|C \cap U(C)| \geqslant \big[\min\{(4\varrho)^{n/2} N(C, \varrho\overline{B_2^n}), (4/\varrho)^{n/2} N(\varrho\overline{B_2^n}, C)\}\big]^{-2}, \tag{1.2.18}$$

όπου $N(A, B)$ είναι ο αριθμός κάλυψης του A από το B, δηλαδή ο μικρότερος αριθμός μεταφορών του B που απαιτούνται για να καλύψουμε το A. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα για αριθμούς κάλυψης παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $U \in O(n)$ έχουμε*

$$|C \cap U(C)| \geqslant e^{-cn\min\{w^2(C)/n, nM^2(C)\}}, \tag{1.2.19}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και για κάθε $U \in O(n)$ έχουμε

$$|\overline{B_p^n} \cap U(\overline{B_p^n})| \geqslant e^{-cn}, \tag{1.2.20}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $\overline{B_p^n}$ είναι η «κανονικοποιημένη» ℓ_p^n-μπάλα.

Η εξάρτηση από τα $M(C)$ και $w(C)$ στο Θεώρημα 1.2.7 υποδεικνύει ότι για να πάρουμε κάποια μη-τετριμμένη πληροφορία θα πρέπει να θεωρήσουμε κάποια «καλή θέση» του σώματος C. Δίνουμε κάποια αποτελέσματα αυτού του τύπου: Αν το C είναι σε M-θέση με σταθερά β τότε, για κάθε $U \in O(n)$ έχουμε $|C \cap U(C)| \geqslant e^{-2(\beta+1)n}$. Όμοια, αν το K είναι ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|K \cap U(K)| \geqslant (cL_K)^{-n} \tag{1.2.21}$$

για κάθε $U \in O(n)$, όπου $c \geqslant 4$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην Παράγραφο 5.3 υπενθυμίζουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα από την τοπική θεωρία των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, τα οποία οδηγούν σε άνω φράγματα για την περιγεγραμμένη ακτίνα του $C \cap U(C)$. Είναι γενικά γνωστό ότι αν διαθέτουμε άνω φράγμα για την περιγεγραμμένη ακτίνα της τυχαίας k-διάστατης τομής $C \cap F$ του C όπου $k \geqslant (1 - c_0)n$ (για κάποια μικρή απόλυτη σταθερά $c_0 \in (0, 1)$) τότε το ίδιο ισχύει για την περιγεγραμμένη ακτίνα της τυχαίας τομής $C \cap U(C)$. Υπάρχουν διάφορες εκδοχές αυτού του αποτελέσματος. Θυμίζουμε τις ισχυρότερες και πιο πρόσφατες (βλέπε [21], [59], [37]). Ειδικότερα, συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα με την M^*-ανισότητα, παίρνουμε το εξής πολύ γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2.8. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$R(C \cap U(C)) \leqslant cw(C)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην τελευταία παράγραφο αυτού του Κεφαλαίου εφαρμόζουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στα L_q-κεντροειδή σώματα $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$. Η μελέτη των τυχαίων στροφών του $Z_q(\mu)$ αποδείχθηκε χρήσιμη σε πρόσφατες εργασίες σχετικά με την εικασία του λεπτού δακτυλίου. Η πρόταση που ακολουθεί παίζει βασικό ρόλο σε μια πρόσφατη εργασία των Klartag και E. Milman [32] η οποία βελτιώνει κάποιες από τις εκτιμήσεις του [27]: *αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ τότε ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$Z_q(\mu) + U(Z_q(\mu)) \supseteq c\sqrt{q}\, B_2^n$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-cn}$. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Παραγράφου 5.3 και τις εκτιμήσεις του προηγούμενου Κεφαλαίου για την εγγεγραμμένη ακτίνα των τυχαίων προβολών, διάστασης ανάλογης του n, του $Z_q(\mu)$, δίνουμε μια διαφορετική απόδειξη αυτής της πρότασης. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε αντίστοιχο αποτέλεσμα για το πολικό σώμα $Z_q^\circ(\mu)$ – αυτό είναι μάλιστα απλούστερο. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \leqslant \sqrt{n}$, ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί τις*

$$\overline{Z_q^\circ}(\mu) \cap U(\overline{Z_q^\circ}(\mu)) \subseteq c\sqrt{n}B_2^n \quad \text{και} \quad \overline{Z_q}(\mu) \cap U(\overline{Z_q}(\mu)) \subseteq c\sqrt{n}B_2^n$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$.

Στην περίπτωση του $Z_q(\mu)$, το Θεώρημα 1.2.5 οδηγεί στην ακόλουθη εκτίμηση: Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$. Αν $\sqrt{q}M(Z_q(\mu)) \geqslant B_1$ τότε

$$\int_{O(n)} |\overline{Z_q}(\mu) \cap U(\overline{Z_q}(\mu))|\, d\nu(U) \leqslant e^{-c_1 n/q}, \tag{1.2.22}$$

όπου $B_1, c_1 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Το ερώτημα να δοθεί άνω φράγμα για το $M(Z_q(\mu))$ σχετίζεται φυσιολογικά με την αναγκαία συνθήκη για την (1.2.22). Αυτό ήταν ένα από τα βασικά ερωτήματα που μελετήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Στο **Κεφάλαιο 6** συγκεντρώνουμε κάποιες παρατηρήσεις που συνδέονται άμεσα με την αναγωγή του [24] για την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. Μελετάμε μια παραλλαγή της παραμέτρου $I_1(K, Z_q^\circ)$ η οποία μπορεί να οριστεί για κάθε ζεύγος ισοτροπικών κυρτών σωμάτων: αν K και M είναι συμπαγή σύνολα μέτρου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q \geqslant 1$, ορίζουμε την ποσότητα

$$Y_q(K,M) := \left(\int_K \int_M |\langle x, y\rangle|^q dy\, dx \right)^{1/q}. \tag{1.2.23}$$

Ορίζουμε επίσης $Y_q(K) := Y_q(K,K)$. Οι Lutwak, Yang και Zhang [41, Πόρισμα 6.3] απέδειξαν ότι η ποσότητα $Y_q(K,M)$ ελαχιστοποιείται, αν αγνοήσουμε σύνολα μέτρου 0, ακριβώς όταν το $K = E$ είναι ελλειψοειδές με κέντρο το 0 και το $M = \overline{E^\circ}$ είναι το πολλαπλάσιο με όγκο 1 του πολικού του σώματος. Δεδομένου ότι $Y_q(K,M) = Y_q(T(K), T^{-*}(M))$ για κάθε $T \in SL(n)$, έπεται ότι: *Αν K και M είναι συμπαγή σύνολα μέτρου 1 στον $\mathbb{R}^n$, τότε $Y_q(K,M) \geqslant Y_q(\overline{B_2^n})$, όπου $\overline{B_2^n}$ είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.* Απλός υπολογισμός δείχνει ότι $Y_q(\overline{B_2^n}) \simeq \sqrt{qn}$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και $Y_q(\overline{B_2^n}) \simeq n$ για κάθε $q \geqslant n$.

Ζητάμε μια αντίστροφη ανισότητα στην περίπτωση που τα K και M είναι ισοτροπικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια, ενδιαφερόμαστε για την τάξη μεγέθους των ποσοτήτων

$$Y_{q,n} := \max_K Y_q(K) \quad \text{και} \quad Y_{q,n}^* := \max_{K,M} Y_q(K,M) \tag{1.2.24}$$

συναρτήσει των $q \geqslant 1$ και n. Παρατηρήστε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $Y_2(K) = \sqrt{n}L_K^2$. Οι εκτιμήσεις που αποδεικνύονται στην Παράγραφο 6.1 συνοψίζονται στο εξής:

Θεώρημα 1.2.10. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$c_1 \max\left\{\sqrt{qn}, \sqrt{n}L_K^2, R^2(Z_q(K))\right\} \leqslant Y_q(K) \leqslant c_2 \max\{q\sqrt{n}, q^2\} L_K^2 \tag{1.2.25}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$. Επιπλέον, αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, έχουμε

$$Y_q(K) \geqslant c_3 \max\{\sqrt{n}L_K^2, \sqrt{qn}L_K, R^2(Z_q(K))\} \tag{1.2.26}$$

Γράφουμε $\overline{B}_1^n$ για την κανονικοποιημένη ℓ_1^n-μπάλα. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,

$$Y_q(K) \geqslant c \max\{\sqrt{qn}, q^2\}. \tag{1.2.27}$$

Στην Παράγραφο 6.2 περιγράφουμε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι η ίδια συμπεριφορά μπορεί να εμφανιστεί ακόμα κι αν περιοριστούμε στην κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων που είναι ομοιόμορφα (ως προς την διάσταση) κοντά στην μπάλα (η ίδια κατασκευή είχε χρησιμοποιηθεί από τον Παούρη στο [50]).

Θεώρημα 1.2.11. *Για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα εκ περιστροφής K στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $d_G(K, B_2^n) \leqslant C$ και για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K) \simeq \min\left\{n, \max\{\sqrt{qn}, q^2\}\right\}, \tag{1.2.28}$$

όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην Παράγραφο 6.3 δίνουμε δύο επιχειρήματα που οδηγούν σε άνω φράγματα για την $Y_q(K)$ στην unconditional περίπτωση. Για το πρώτο, εισάγουμε μία παράμετρο $\mathcal{Y}_q(K)$, για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, ως εξής: Για κάθε $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε έναν τελεστή $T_y : \ell_2^n \to \ell_2^n$ του οποίου ο πίνακας είναι διαγώνιος και έχει συντεταγμένες $y_1, \ldots, y_n$. Αν $y_i \neq 0$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$, γράφουμε $\overline{T}_y := (\det(T_y))^{-\frac{1}{n}} T_y$. Κατόπιν, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ ορίζουμε

$$\mathcal{Y}_q(K) := \left(\int_K (\det(T_y))^{q/n} I_q^q(\overline{T}_y(K))\, dy\right)^{1/q}. \tag{1.2.29}$$

Μπορούμε τότε να δείξουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ έχουμε

$$\mathcal{Y}_q(K) \leqslant c_1 \left(I_q(K) + R(Z_q(K)) \max\{R(Z_q(K)), R(Z_{\log n}(K))\}\right), \tag{1.2.30}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ έχουμε

$$\mathcal{Y}_q(K) \leqslant c_1 \max\left\{\sqrt{n} L_K, q \max\{q, \log n\}) L_K^2\right\}, \tag{1.2.31}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην περίπτωση που το K είναι unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να συγκρίνουμε τις $Y_q(K)$ και $\mathcal{Y}_q(K)$. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,

$$Y_q(K) \leqslant c_2 \sqrt{q}\, \mathcal{Y}_q(K). \tag{1.2.32}$$

Έτσι, προκύπτει το εξής:

Θεώρημα 1.2.12. *Έστω K ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt[4]{n}$,*

$$Y_q(K) \leqslant c\sqrt{qn}. \tag{1.2.33}$$

Η δεύτερη μέθοδος χρησιμοποιεί ισχυρά ένα αποτέλεσμα του Latała από το [34].

Θεώρημα 1.2.13. *Έστω K και M ισοτροπικά unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K,M) := \left(\int_K \int_M |\langle x, y\rangle|^q dy\, dx\right)^{1/q} \leqslant c_1(\log n)\sqrt{qn} + c_2 q^2. \tag{1.2.34}$$

Στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου 6 συνδέουμε το πρόβλημα της εκτίμησης της ποσότητας $I_1(K, Z_q^{\circ}(K))$ με τους αριθμούς κάλυψης $N(Z_q(K), t\sqrt{q}L_K B_2^n)$. Μια ενδιαφέρουσα παρατηρηση είναι ότι τα κεντροειδή σώματα ενός ισοτροπικού unconditional κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$, την πολύ ισχυρή ανισότητα

$$\log N(Z_q(K), ct\sqrt{q}B_2^n) \leqslant \frac{Cq\log n}{t^2}, \tag{1.2.35}$$

για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{q}$, όπου $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Είναι άγνωστο αν αντίστοιχες εκτιμήσεις ισχύουν σε γενικότερο πλαίσιο. Κάνοντας όμως την υπόθεση ότι, για κάποιον $2 \leqslant q \leqslant n$, ισχύει

$$\log N(Z_q(K), c_1 t\sqrt{q}L_K B_2^n) \leqslant \frac{q}{t^2} \tag{1.2.36}$$

για κάθε $1 \leqslant t \leqslant R(Z_q)/(c_1\sqrt{q}L_K)$, μπορεί κανείς να δείξει το εξής:

Θεώρημα 1.2.14. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η (1.2.36) ισχύει για κάποιον $2 \leqslant q \leqslant n$. Τότε:*

(i) *Αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ έχουμε*

$$I_1(K, Z_q^{\circ}(K)) := \int_K h_{Z_q(K)}(x)dx \leqslant C\sqrt{qn}L_K^2, \tag{1.2.37}$$

και

(ii) *Αν $\sqrt{n} \leqslant q \leqslant n$ έχουμε*

$$I_1(K, Z_q^{\circ}(K)) := \int_K h_{Z_q(K)}(x)dx \leqslant Cq\sqrt[4]{n}L_K^2, \tag{1.2.38}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n και σ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Για κάθε $k\leqslant n$ και $F\in G_{n,k}$ συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον F. Επίσης, ορίζουμε $B_F=B_2^n\cap F$ και $S_F=S^{n-1}\cap F$. Το n-διάστατο μέτρο του Gauss γ_n είναι το Borel μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$.

Τα γράμματα c,c',c_1,c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, οι οποίες μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Οποτεδήποτε γράφουμε $a\simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$ έτσι ώστε $c_1a\leqslant b\leqslant c_2a$. Επίσης, αν $K,D\subseteq\mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K\simeq D$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$ έτσι ώστε $c_1K\subseteq D\subseteq c_2K$.

2.1 Κυρτά σώματα

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το C είναι συμμετρικό αν «$x\in C$ αν και μόνον αν $-x\in C$». Λέμε ότι το C έχει *κέντρο βάρους* το 0 (ή την αρχή των αξόνων) αν

$$\int_C\langle x,\theta\rangle\,dx=0 \tag{2.1.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_C : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ του κυρτού σώματος C με $0 \in \mathrm{int}(C)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_C(x) = \max\{t > 0 : tx \in C\}. \tag{2.1.2}$$

Η *συνάρτηση στήριξης* του C ορίζεται για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$h_C(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in C\}. \tag{2.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_C(\theta) \leqslant h_C(\theta)$. Το *μέσο πλάτος* του C είναι η ποσότητα

$$w(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(\theta)\, d\sigma(\theta). \tag{2.1.4}$$

Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* του C είναι η

$$R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}. \tag{2.1.5}$$

Αν το 0 είναι εσωτερικό σημείο του C, γράφουμε $r(C)$ για την εγγεγραμμένη ακτίνα του C (τον μεγαλύτερο $r > 0$ για τον οποίο $rB_2^n \subseteq C$). Η *ακτίνα όγκου* του C είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vrad}(C) = \left(\frac{|C|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}.$$

Το *πολικό σώμα* C° του C ορίζεται να είναι το

$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } y \in C\}. \tag{2.1.6}$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

(i) $0 \in C^\circ$.

(ii) Αν $0 \in \mathrm{int}(C)$, τότε $(C^\circ)^\circ = C$.

(iii) Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{C^\circ}(\theta) = 1/h_C(\theta)$.

(iv) Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

Γράφουμε $\overline{C}$ για το πολλαπλάσιο όγκου 1 του κυρτού σώματος $C \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\overline{C} := \frac{C}{|C|^{1/n}}$.

2.1.1 Βασικές ανισότητες

Κάποιες βασικές ανισότητες για όγκους κυρτών σωμάτων οι οποίες θα φανούν χρήσιμες είναι οι ακόλουθες:

(α) Η ανισότητα του Urysohn. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(C) \geqslant \left(\frac{|C|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}. \tag{2.1.7}$$

(β) Η ανισότητα Blaschke–Santaló. Αν C είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα αν το C έχει κέντρο βάρους το C, τότε

$$|C|\,|C^\circ| \leqslant |B_2^n|^2. \tag{2.1.8}$$

(γ) Η ανισότητα των Bourgain–Milman. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(C)$ ισχύει

$$|C|\,|C^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|. \tag{2.1.9}$$

Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως αντίστροφη ανισότητα Santaló.

(δ) Η ανισότητα των Rogers–Shephard. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|C - C| \leqslant \binom{2n}{n}|C|. \tag{2.1.10}$$

2.1.2 Αριθμοί κάλυψης

Έστω A και B δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο *αριθμός κάλυψης του* A *από το* B είναι ο μικρότερος φυσικός N για τον οποίο υπάρχουν N μεταφορές του B των οποίων η ένωση καλύπτει το A:

$$N(A,B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} :\ \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B)\Big\}. \tag{2.1.11}$$

Μια παραλλαγή του παραπάνω αριθμού κάλυψης ορίζεται ως εξής:

$$\overline{N}(A,B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} :\ \exists x_1, \ldots, x_N \in A \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B)\Big\}. \tag{2.1.12}$$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι $N(A,B) \leqslant \overline{N}(A,B)$. Μπορούμε επίσης εύκολα να ελέγξουμε ότι $\overline{N}(A, B-B) \leqslant N(A,B)$. Ειδικότερα, αν το B είναι συμμετρικό και κυρτό, τότε $\overline{N}(A, 2B) \leqslant N(A,B)$. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αριθμών κάλυψης: αν A, B, C είναι κυρτά σώματα, τότε:

(i) $N(A,B) \leqslant N(A,C)\cdot N(C,B)$.

(ii) $\overline{N}(A,C) \leqslant \overline{N}(A,B)\cdot \overline{N}(B,C)$.

(iii) $\overline{N}(A-A,B-B) \leqslant \overline{N}(A,B)^2$.

(iv) $\overline{N}(A+B,B+C) \leqslant \overline{N}(A,B)\cdot \overline{N}(B,C)$.

(v) $2^{-n}\frac{|A+B|}{|B|} \leqslant \overline{N}(A,B)$. Αν το B είναι συμμετρικό, τότε $\overline{N}(A,2B) \leqslant \frac{|A+B|}{|B|}$.

(vi) $\frac{|A|}{|A\cap B|} \leqslant \overline{N}(A,B)$.

Έστω A,B κυρτά σώματα με το B συμμετρικό. Για κάθε $t>0$ ορίζουμε

$$S_t(A,B) = \max\{m\in\mathbb{N} :\ \exists x_1,\dots,x_m \in A \text{ ώστε } \|x_i-x_j\|_B > t \text{ για } i\neq j\}. \tag{2.1.13}$$

Από τον ορισμό ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(A,tB) \leqslant S_t(A,B) \leqslant \overline{N}(A,\tfrac{t}{2}B). \tag{2.1.14}$$

Τέλος, θα χρειαστούμε δύο βασικά θεωρήματα για αριθμούς κάλυψης. Το πρώτο είναι η ανισότητα του Sudakov:

Θεώρημα 2.1.1 (Sudakov)**.** *Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$N(K,tB_2^n) \leqslant 2\exp\Big(cn\,(w(C)/t)^2\Big), \tag{2.1.15}$$

όπου $c>0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Το επόμενο θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς κάλυψης αποδείχθηκε από τους Artstein, Milman και Szarek [1].

Θεώρημα 2.1.2. *Υπάρχουν απόλυτες θετικές σταθερές α και β τέτοιες ώστε για κάθε $n\geqslant 1$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$*

$$N(B_2^n,\alpha^{-1}C^\circ)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant N(C,B_2^n) \leqslant N(B_2^n,\alpha C^\circ)^{\beta} \tag{2.1.16}$$

Ο Milman (βλέπε π.χ. [44]) απέδειξε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta>0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει γραμμική εικόνα $\tilde{C}$ τέτοια ώστε $|\tilde{C}| = |B_2^n|$ και

$$\max\big\{N(\tilde{C},B_2^n), N(B_2^n,\tilde{C}), N(\tilde{C}^\circ,B_2^n), N(B_2^n,\tilde{C}^\circ)\big\} \leqslant \exp(\beta n). \tag{2.1.17}$$

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα C που ικανοποιεί αυτή την εκτίμηση είναι σε M-θέση με σταθερά β.

Αργότερα, ο Pisier [53] έδωσε μια διαφορετική προσσέγγιση σε αυτό το αποτέλεσμα, που δίνει περισσότερες πληροφορίες για την συμπεριφορά των αντίστοιχων αριθμών κάλυψης. Η ακριβής διατύπωση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 2.1.3 (Pisier). *Για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{C}$ του C τέτοια ώστε*

$$\max\big\{N(\tilde{C}, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{C}), N(\tilde{C}^\circ, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{C}^\circ)\big\} \leqslant \exp\left(\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}\right)$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου η σταθερά $c(\alpha)$ εξαρτάται μόνο από το α, και $c(\alpha) = O\big((2-\alpha)^{-\alpha/2}\big)$ καθώς το $\alpha \to 2$.

2.2 Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα

Έστω C συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$\|x\|_C = \inf\{t > 0 : x \in tC\} \tag{2.2.1}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ συμβολίζεται με X_C. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του X είναι συμμετρικό κυρτό σώμα.

Ορίζουμε

$$M(C) := \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_C d\sigma(\theta).$$

Παρατηρώντας ότι $\|x\|_C = h_{C^\circ}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι $M(C) = w(C^\circ)$ και ότι

$$M(C)^{-1} \leqslant \mathrm{vrad}(C) \leqslant w(C) = M(C^\circ).$$

Η ανισότητα στο αριστερό μέλος ελέγχεται εύκολα αν εκφράσουμε τον όγκο του C σαν ολοκλήρωμα με πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες Hölder και Jensen, ενώ η ανισότητα στο δεξιό μέλος προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Urysohn.

Η δυϊκή ανισότητα Sudakov των Pajor και Tomczak-Jaegermann [49] δίνει άνω φράγμα για τους αριθμούς κάλυψης $N(B_2^n, tC)$ συναρτήσει της παραμέτρου $M(C)$.

Θεώρημα 2.2.1 (Pajor-Tomczak). *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,*

$$\log N(B_2^n, tC) \leqslant cn\,(M(C)/t)^2,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την M^*-ανισότητα:

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$R(C \cap F) \leqslant c_1 \sqrt{\frac{n}{n-k}}\, w(C)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2(n-k))$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η πρώτη απόδειξη της (2.2.2), με ασθενέστερη εξάρτηση από τον λόγο $\frac{n}{n-k}$, δόθηκε από τον Milman στο [42], και μια δεύτερη απόδειξη δόθηκε στο [43], με γραμμική εξάρτηση από το $\frac{n}{n-k}$. Το Θεώρημα 2.2.2 αποδείχτηκε, σε αυτήν την βέλτιστη μορφή, από τους Pajor και Tomczak-Jaegermann στο [49]. Τέλος, ο Gordon [26] απέδειξε μία ακόμα πιο ακριβή μορφή της ανισότητας, εξασφαλίζοντας ότι η τιμή της σταθεράς c_1 μπορεί να υποτεθεί (ασυμπτωτικά) ίση με 1.

Έστω X, Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Η *απόσταση Banach–Mazur* του X από τον Y ορίζεται ως εξής:

$$d(X,T) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\}. \tag{2.2.2}$$

Σε γεωμετρική γλώσσα η απόσταση Banach–Mazur περιγράφεται ως εξής: αν $X = X_K$ και $Y = X_C$ (δηλαδή οι μοναδιαίες μπάλες των X, Y είναι τα κυρτά σώματα K, C αντίστοιχα) τότε ο $d(X,Y)$ είναι ο μικρότερος $d > 0$ ώστε

$$C \subseteq T(K) \subseteq dC \tag{2.2.3}$$

για κάποιον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$. Είναι προφανές ότι $d(X,Y) \geqslant 1$ για κάθε δύο n-διάστατους χώρους, με ισότητα αν και μόνον αν οι χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Έτσι, η απόσταση Banach–Mazur μετράει πόσο διαφέρουν δύο χώροι από το να είναι ισομετρικοί.

Εκτός από την απόσταση Banach-Mazur θα χρησιμοποιήσουμε και την γεωμετρική απόσταση $d_G(K,C)$ δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και C στον $\mathbb{R}^n$. Είναι ο μικρότερος $d > 0$ για τον οποίο υπάρχουν $a, b > 0$ με $ab \leqslant d$ ώστε

$$\frac{1}{a} C \subseteq K \subseteq bC. \tag{2.2.4}$$

Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ είναι unconditional αν η $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι 1-unconditional βάση για την νόρμα $\|\cdot\|_C$ που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το C: αυτό σημαίνει ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\dots,t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j=\pm 1$ έχουμε $\big\|\varepsilon_1t_1e_1+\cdots+\varepsilon_nt_ne_n\big\|_C=\big\|t_1e_1+\cdots+t_ne_n\big\|_C$. Θα λέμε ότι το C είναι 1-συμμετρικό αν για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\dots,t_n$, και για κάθε μετάθεση σ του $\{1,\dots,n\}$ και κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j=\pm 1$ έχουμε $\big\|\varepsilon_1t_{\sigma(1)}e_1+\cdots+\varepsilon_nt_{\sigma(n)}e_n\big\|_C=\big\|t_1e_1+\cdots+t_ne_n\big\|_C$.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [16] και [55] για τα βασικά στοιχεία της θεωρίας Brunn–Minkowski και στα βιβλία [47] και [54] για την τοπική θεωρία των χώρων με νόρμα.

Κεφάλαιο 3

Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Σε αυτό το Κεφάλαιο παρουσιάζουμε συνοπτικά τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στα οποία χρησιμοποιούνται ουσιαστικά τα κεντροειδή σώματα. Για περισσότερες πληροφορίες και λεπτομερείς αποδείξεις παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [12].

3.1 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Λέμε ότι το μ έχει βαρύκεντρο το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle \, d\mu(x) = \langle x_0, \theta \rangle$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν $x_0 = \mathbb{E}_\mu(x)$. Η υποκλάση $\mathcal{CP}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα *κεντραρισμένα* $\mu \in \mathcal{P}_n$. Αυτά είναι τα μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$ που έχουν βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in \mathcal{CP}_n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle d\mu(x) = 0$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Η υποκλάση $\mathcal{SP}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα άρτια (συμμετρικά) μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$: το μ λέγεται άρτιο αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε σύνολο Borel A στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Όπως στην περίπτωση των μέτρων, το βαρύκεντρο της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}.$$

Ειδικότερα, η f έχει βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους) την αρχή των αξόνων αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x)\, dx = 0$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε λέμε και ότι η f είναι *κεντραρισμένη*.

Ορισμός 3.1.1. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος μη κενών συμπαγών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^{\lambda}.$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$ (τότε λέμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη *πυκνότητα*). Από την ανισότητα Prékopa-Leindler έπεται ότι το μέτρο μ που έχει πυκνότητα την f είναι λογαριθμικά κοίλο. Ένα θεώρημα του Borell δείχνει ότι, αντίστροφα, αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H, τότε το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\, dx$.

Παραδείγματα 3.1.2. (α) Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \mathbf{1}_K(x) dx$$

για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Από την κυρτότητα του K έπεται ότι η $\mathbf{1}_K$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα το μ_K είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

(β) Για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $f_c(x) = \exp(-c\|x\|_2^2)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι, για κάθε $c > 0$, το μέτρο

$$\gamma_{n,c}(A) = \frac{1}{I(c)} \int_A \exp(-c\|x\|_2^2) dx$$

όπου $I(c) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-c\|x\|_2^2) dx$, είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Ειδικότερα αυτό ισχύει για το τυπικό μέτρο του Gauss γ_n.

3.2 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορίζουμε αρχικά την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος K και την ισοτροπική σταθερά L_K σαν μιά αναλλοίωτη της αφινικής κλάσης του K. Στην συνέχεια, δίνουμε έναν πιο γενικό ορισμό στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

3.2.1 Ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος

Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $|K| = 1$, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων), και υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2 \tag{3.2.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι αν το K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (3.2.1) τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int \langle x, e_i\rangle^2 dx = n\alpha^2,$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το $U(K)$ είναι επίσης ισοτροπικό για κάθε $U \in O(n)$.

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η *ισοτροπική συνθήκη* (3.2.1) είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij}, \tag{3.2.2}$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2(\mathrm{tr}T). \tag{3.2.3}$$

Κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια *θέση* $\tilde{K}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του K. Αποδεικνύεται ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης. Αν ορίσουμε

$$B(K) = \inf\left\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx : T \in SL(n)\right\} \tag{3.2.4}$$

τότε μια θέση K_1 του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = B(K). \tag{3.2.5}$$

Αν K_1 και K_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $K_2 = U(K_1)$.

Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{ \frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \;\Big|\; T \in GL(n)\right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από την γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K_1 είναι ισοτροπική θέση του K τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_{K_1} \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται **ισοτροπική σταθερά** του K.

3.2.2 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Γενικεύοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος λέμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι *ισοτροπικό* αν έχει βαρύκεντρο το 0 και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 \, d\mu(x) = 1 \tag{3.2.6}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle \, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T),$$

ή ισοδύναμα, $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Παρατηρήστε επίσης ότι αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \, d\mu(x) = n.$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κάθε μη εκφυλισμένο κεντραρισμένο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει μια ισοτροπική εικόνα $\nu = \mu \circ S$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Τελείως ανάλογα, αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 τότε η f λέγεται *ισοτροπική* αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 f(x) \, dx = 1$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο δεν φέρεται από υπερεπίπεδο είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η πυκνότητά του f_μ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Παρατήρηση 3.2.1. Συγκρίνοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος με εκείνον του ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου βλέπουμε ότι ένα κυρτό σώμα K με όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η συνάρτηση $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Ορισμός 3.2.2 (Γενικός ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς)**.** Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τον *πίνακα συνδιακυμάνσεων* $\mathrm{Cov}(f)$ της f ως τον πίνακα με συντεταγμένες

$$[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx}.$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι ισοτροπική τότε ο $\mathrm{Cov}(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα, η *ισοτροπική σταθερά* της ορίζεται από την:

$$L_f := \left(\frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}. \tag{3.2.7}$$

Επίσης, αν μ είναι ένα μη εκφυλισμένο πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε ορίζουμε την ισοτροπική του σταθερά θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδή

$$L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x) dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{3.2.8}$$

όπου

$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$

και $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η ισοτροπική σταθερά L_μ είναι αφινικά αναλλοίωτη: έχουμε $L_\mu = L_{a\mu\circ A}$ και $L_f = L_{af\circ A}$ για κάθε αντιστρέψιμο αφινικό μετασχηματισμό A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε θετικό αριθμό a. Παρατηρούμε επίσης ότι:

(i) Ο Ορισμός 3.2.2 συμφωνεί με τον ορισμό που είχαμε δώσει για την ισοτροπική σταθερά ενός κυρτού σώματος, με την έννοια ότι $L_{\mathbf{1}_K} = L_K$. Ένας απλός τρόπος για να το δούμε είναι να υποθέσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική θέση και μετά να παρατηρήσουμε ότι $\|\mathbf{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbf{1}_K(x)\,dx = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_K) = L_K^2\, I$.

(ii) Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\int f_\mu = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mu) = I$, απ΄ όπου έπεται ότι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Επιπλέον, αφού το μ έχει εξ ορισμού βαρύκεντρο το 0, μια ανισότητα του Fradelizi [15] εξασφαλίζει ότι

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0),$$

συνεπώς $L_\mu \simeq (f_\mu(0))^{1/n}$.

Είναι σχετικά απλό να δεί κανείς ότι οι ισοτροπικές σταθερές όλων των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι ομοιόμορφα φραγμένες από κάτω, από μια σταθερά $c > 0$ που είναι ανεξάρτητη από την διάσταση: αν $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$L_f = \|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.2.3 ψ_α–εκτιμήσεις

Ορισμός 3.2.3. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\alpha \geqslant 1$ ορίζουμε την ψ_α νόρμα της f ως εξής:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} := \inf\left\{ t > 0 : \int_\Omega \exp\left(\frac{|f(\omega)|}{t}\right)^\alpha d\mu(\omega) \leqslant 2 \right\}, \tag{3.2.9}$$

αν φυσικά υπάρχουν $t > 0$ για τους οποίους $\int_\Omega \exp\left(\frac{|f(\omega)|}{t}\right)^\alpha d\mu(\omega) \leqslant 2$.

Οι ψ_α-νόρμες είναι μια υποκλάση της οικογένειας των νορμών Orlicz. Κάθε τέτοια νόρμα ορίζεται από μιά άρτια κυρτή συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ που ικανοποιεί τις $\Phi(0) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$. Για κάθε τέτοια συνάρτηση, η μοναδιαία μπάλα του αντίστοιχου χώρου Orlicz αποτελείται από όλες τις $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις f για τις οποίες $\int_\Omega \Phi(f(\omega))d\omega \leqslant 1$, η δε νόρμα οποιασδήποτε $\mathcal{A}$-μετρήσιμης συνάρτησης f για την οποία το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, είναι ακριβώς ο μικρότερος θετικός αριθμός κ για τον οποίον η f/κ ανήκει στη μοναδιαία μπάλα του χώρου. Οι ψ_α-νόρμες, οι οποίες μας ενδιαφέρουν εδώ, είναι ακριβώς εκείνες οι νόρμες Orlicz που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $t \in \mathbb{R} \to e^{|t|^\alpha} - 1$.

Το επόμενο Λήμμα δίνει μια ισοδύναμη έκφραση για την ψ_α νόρμα μέσω των L_q-νορμών.

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}},$$

όπου οι σταθερές της ισοδυναμίας είναι απόλυτες σταθερές.

Ορισμός 3.2.5. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_α *εκτίμηση στην διεύθυνση του* θ *με σταθερά* $b_\alpha = b_\alpha(\theta)$ αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2. \tag{3.2.10}$$

Λέμε ότι το μ είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά $B_\alpha > 0$ αν

$$\sup_{\theta\in S^{n-1}} \frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha}}{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2} \leqslant B_\alpha. \tag{3.2.11}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.4 βλέπουμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_α εκτίμηση στην διεύθυνση του $\theta \in S^{n-1}$ με σταθερά b_α αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant c b_\alpha q^{1/\alpha} \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2 \tag{3.2.12}$$

για κάθε $q \geqslant \alpha$.

Το επόμενο Λήμμα δίνει άλλη μία περιγραφή της ψ_α-νόρμας.

Λήμμα 3.2.6. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ και έστω $\alpha \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$.*

(i) *Αν το μ ικανοποιεί ψ_α-εκτίμηση με σταθερά b στην διεύθυνση του θ τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε $\mu(\{x : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^\alpha/b^\alpha}$.*

(ii) *Αν* $\mu(\{x : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^a/b^\alpha}$ *για κάποιον* $b > 0$ *και για κάθε* $t > 0$ *τότε το* μ *ικανοποιεί* ψ_α*-εκτίμηση με σταθερά* $\leqslant cb$ *στην διεύθυνση του* θ*, όπου* $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το επόμενο βασικό λήμμα του Borell ισχύει στο γενικό πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Λήμμα 3.2.7. *Εστω* μ *ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στην κλάση* $\mathcal{P}_n$*. Για κάθε συμμετρικό κλειστό κυρτό υποσύνολο* A *του* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mu(A) = \alpha \in (0,1)$ *και για κάθε* $t > 1$ *έχουμε*

$$1 - \mu(tA) \leqslant \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{3.2.13}$$

Συνέπεια του λήμματος του Borell είναι το γεγονός ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ψ_1-μέτρο (σε κάθε διεύθυνση) με μια απόλυτη σταθερά.

Θεώρημα 3.2.8. *Εστω* $\mu \in \mathcal{P}_n$ *λογαριθμικά κοίλο. Αν η* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *είναι ημινόρμα τότε για κάθε* $q > p \geqslant 1$ *έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Παρατηρήσεις 3.2.9. (α) Οι συναρτήσεις $x \mapsto |\langle x,\theta\rangle|$, $\theta \in S^{n-1}$, ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.8. Συνεπώς,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant cq\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \tag{3.2.14}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \tag{3.2.15}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Το γεγονός αυτό παίζει πολύ βασικό ρόλο στα επόμενα.

3.3 Η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, το πρώτο βασικό ανοικτό πρόβλημα για την γεωμετρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι αν υπάρχει ομοιόμορφο άνω φράγμα, ανεξάρτητο από την διάσταση, για τις ισοτροπικές σταθερές τους.

Εικασία 3.3.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε*

$$L_K \leqslant C$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \leqslant C^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Γενικότερα, υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$L_\mu \leqslant C$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$f(0)^{1/n} \leqslant C,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Αφετηρία της Εικασίας 3.3.1 είναι η λεγόμενη *εικασία του υπερεπιπέδου*, η οποία ρωτάει αν κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 έχει τουλάχιστον μία τομή με $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο η οποία να έχει όγκο μεγαλύτερο από μια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Η σύνδεση γίνεται φανερή από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant |K \cap \theta^\perp| \leqslant \frac{c_2}{L_K},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Από το Θεώρημα 3.3.2 γίνεται φανερή η σχέση της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς με την ακόλουθη:

Εικασία 3.3.3 (εικασία του υπερεπιπέδου)**.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ ώστε*

$$|K \cap \theta^\perp| \geqslant c. \tag{3.3.1}$$

Υποθέτουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου ισχύει. Αν το K είναι ισοτροπικό, το Θεώρημα 3.3.2 δείχνει ότι *όλες* οι τομές $K \cap \theta^{\perp}$ έχουν όγκο φραγμένο από c_2/L_K. Αφού η (3.3.1) πρέπει να ισχύει για τουλάχιστον ένα $\theta \in S^{n-1}$, συμπεραίνουμε ότι $L_K \leqslant c_2/c$. Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει απόλυτο άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά τότε ισχύει η εικασία του υπερεπιπέδου.

Έτσι, η εικασία του υπερεπιπέδου ρωτάει, ισοδύναμα, αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C \tag{3.3.2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Ο Bourgain απέδειξε στο [8] ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$, και ο Klartag [29] έδωσε το φράγμα $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$. Μια δεύτερη απόδειξη του φράγματος του Klartag δίνεται στο [31].

3.4 L_q-κεντροειδή σώματα

Ορισμός 3.4.1. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του K να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(K)}(y) = \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L^q(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

Από την ανισότητα Hölder είναι φανερό ότι αν $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ τότε $Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq Z_\infty(K) := \mathrm{conv}(K \cup (-K))$. Παρατηρήστε ότι $Z_q(T(K)) = T(Z_q(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Επίσης, ένα κυρτό σώμα K που έχει όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 είναι ισοτροπικό αν το $Z_2(K)$ είναι πολλαπλάσιο της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας.

Ο ορισμός επεκτείνεται φυσιολογικά στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int f = 1$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(f)$ της f να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(f)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q f(x)\, dx\right)^{1/q}.$$

Αντίστοιχα, αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q\, d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι αν το μ έχει πυκνότητα f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue τότε $Z_q(\mu) = Z_q(f_\mu)$.

Όπως και στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων, το $Z_q(\mu)$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα και έχουμε $Z_q(T\circ\mu) = T(Z_q(\mu))$ για κάθε $T \in SL(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f είναι ισοτροπική αν $Z_2(f) = B_2^n$.

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, από το Θεώρημα 3.2.8, για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε

$$Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq \frac{c_1 q}{p} Z_p(K),$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν το K έχει βαρύκεντρο στο 0, τότε

$$Z_q(K) \supseteq c_2 Z_\infty(K)$$

για κάθε $q \geqslant n$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx \geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\},$$

η οποία ισχύει για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Από αυτήν βλέπουμε ότι αν $q \geqslant n$ τότε

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \simeq \max\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\},$$

δηλαδή $Z_q(K) \supseteq cZ_\infty(K)$.

Εντελώς ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για λογαριθμικά κοίλα μέτρα: αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f τότε για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε

$$Z_p(f) \subseteq Z_q(f) \subseteq \frac{cq}{p} Z_p(f),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ο ασυμπτωτικός τύπος της επόμενης Πρότασης (βλέπε [52]) είναι πολύ χρήσιμος.

Πρόταση 3.4.2. *Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{c_1}{f(0)^{1/n}} \leqslant |Z_n(f)|^{1/n} \leqslant \frac{c_2}{f(0)^{1/n}}, \tag{3.4.1}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

3.4.1 Περιθώριες κατανομές και προβολές

Ορισμός 3.4.3. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω ακέραιος $1 \leqslant k < n$ και έστω $F \in G_{n,k}$. Η *περιθώρια συνάρτηση* $\pi_F(f) : F \to [0, \infty)$ της f ως προς F ορίζεται ως εξής:

$$\pi_F(f)(x) := \int_{x+F^\perp} f(y)dy. \tag{3.4.2}$$

Γενικότερα, για κάθε $\mu \in \mathcal{P}_n$ ορίζουμε την περιθώρια κατανομή του μ ως προς τον k-διάστατο υπόχωρο F θέτοντας

$$\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A))$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του F. Αν το μ έχει (λογαριθμικά κοίλη) πυκνότητα f_μ τότε οι δύο ορισμοί συμφωνούν. Μπορούμε να δούμε ότι

$$f_{\pi_F(\mu)} = \pi_F(f_\mu)$$

σχεδόν παντού. Πράγματι, για κάθε Borel υποσύνολο A του F, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_F(\mu)(A) = \mu(P_F^{-1}(A)) &= \int f_\mu(x)\mathbf{1}_A(P_F x)\,dx \\ &= \int_F \int_{F^\perp} f_\mu(x+y)\mathbf{1}_A(x)\,dy\,dx, \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

από το θεώρημα Fubini. Με μια αλλαγή μεταβλητής βλέπουμε ότι

$$\pi_F(\mu)(A) = \int_A \left(\int_{x+F^\perp} f_\mu(y)\,dy \right) dx = \int_A \pi_F(f_\mu)(x)\,dx.$$

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες των περιθώριων κατανομών.

Πρόταση 3.4.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $F \in G_{n,k}$.*

(i) *Αν η f είναι άρτια, τότε και η $\pi_F(f)$ είναι άρτια.*

(ii) *Έχουμε*

$$\int_F \pi_F(f)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

(iii) *Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : F \to \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(P_F x)f(x)\,dx = \int_F g(x)\pi_F(f)(x)\,dx.$$

(iv) *Για κάθε* $\theta \in S_F$,

$$\int_F \langle x,\theta\rangle \pi_F(f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle f(x)dx. \tag{3.4.4}$$

Ειδικότερα, αν η f *είναι κεντραρισμένη τότε, για κάθε* $F \in G_{n,k}$ *η* $\pi_F(f)$ *είναι κεντραρισμένη.*

(v) *Για κάθε* $p > 0$ *και για κάθε* $\theta \in S_F$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p f(x)dx = \int_F |\langle x,\theta\rangle|^p \pi_F(f)(x)dx.$$

Ειδικότερα, αν η f *είναι ισοτροπική, τότε και η* $\pi_F(f)$ *είναι ισοτροπική.*

(vi) *Αν η* f *είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε και η* $\pi_F(f)$ *είναι λογαριθμικά κοίλη.*

Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε για οποιοδήποτε μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$.

3.4.2 Προβολές του $Z_q(f)$

Μια βασική παρατήρηση του Παούρη στο [51] είναι ότι κάθε προβολή του L_q-κεντροειδούς σώματος μιας πυκνότητας f συμπίπτει με το L_q-κεντροειδές σώμα της αντίστοιχης περιθώριας πυκνότητας της f. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Fubini.

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *πυκνότητα στον* $\mathbb{R}^n$. *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και για κάθε* $F \in G_{n,k}$ *και* $q \geqslant 1$, *έχουμε*

$$P_F(Z_q(f)) = Z_q(\pi_F(f)). \tag{3.4.5}$$

Απόδειξη. Για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $\theta \in S_F$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^q f(x)dx = \int_F |\langle x,\theta\rangle|^q \pi_F(f)(x)dx,$$

διότι $\langle x,\theta\rangle = \langle P_F(x),\theta\rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα,

$$h_{Z_q(f)}(\theta) = h_{Z_q(\pi_F f)}(\theta),$$

για κάθε $\theta \in S_F$, και το συμπέρασμα προκύπτει από την παρατήρηση ότι $h_{P_F(Z_q(f))}(\theta) = h_{Z_q(f)}(\theta)$ για κάθε $\theta \in S_F$. $\square$

Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $F \in G_{n,k}$, η συνάρτηση $\pi_F(f)$ είναι μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον F. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.4.2 για την $\pi_F(f)$. Έπεται ότι

$$\frac{c_1}{\pi_F(f)(0)^{1/k}} \leqslant |Z_k(\pi_F(f))|^{1/k} \leqslant \frac{c_2}{\pi_F(f)(0)^{1/k}}.$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (3.4.5) έχουμε αποδείξει το εξής.

Θεώρημα 3.4.6. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με $\mathrm{bar}(f) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k < n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$, έχουμε*

$$c_1 \leqslant [\pi_F(f)(0)]^{\frac{1}{k}} |P_F(Z_k(f))|^{\frac{1}{k}} \leqslant c_2, \tag{3.4.6}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

3.5 Εκτιμήσεις μεγάλων αποκλίσεων για την Ευκλείδεια νόρμα

Η ακόλουθη ανισότητα συγκέντρωσης αποδείχθηκε από τον Παούρη στο [51].

Θεώρημα 3.5.1 (Παούρης). *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{n}\right) \tag{3.5.1}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1 συνδέεται με την συμπεριφορά των ροπών της συνάρτησης $x \mapsto \|x\|_2$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε

$$I_q(\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Όπως είδαμε, από το λήμμα του Borell έπονται οι παρακάτω ανισότητες τύπου Khintchine.

Λήμμα 3.5.2. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $p, q \geqslant 1$ έχουμε*

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{pq} \leqslant c_1 q \|\langle \cdot, y\rangle\|_p,$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επίσης, αφού η $\|x\|_2$ είναι νόρμα, για κάθε $p, q \geqslant 1$ έχουμε

$$I_{pq}(K) \leqslant c_1 q I_p(K).$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$I_q(\mu) \leqslant c_1 q I_2(\mu) \tag{3.5.2}$$

για κάθε $q \geqslant 2$. Ο Παούρης απέδειξε την εξής ανισότητα.

Θεώρημα 3.5.3 (Παούρης). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_3, c_4 > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$I_q(\mu) \leqslant c_4 I_2(\mu) \tag{3.5.3}$$

για κάθε $q \leqslant c_3\sqrt{n}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1. Υποθέτοντας ότι έχουμε δείξει το Θεώρημα 3.5.3, θεωρούμε ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $q \geqslant 2$ έχουμε

$$\mu(\{\|x\|_2 \geqslant e^3 I_q(\mu)\}) \leqslant e^{-3q}.$$

Τότε, από το Λήμμα του Borell παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{\|x\|_2 \geqslant e^3 I_q(\mu)s\}) &\leqslant (1-e^{-3q})\left(\frac{e^{-3q}}{1-e^{-3q}}\right)^{(s+1)/2}\\ &\leqslant e^{-qs}\end{aligned}$$

για κάθε $s \geqslant 1$. Επιλέγοντας $q = c_3\sqrt{n}$, και χρησιμοποιώντας την (3.5.3), βλέπουμε ότι

$$\mu(\{\|x\|_2 \geqslant c_4 e^3 I_2(\mu)s\}) \leqslant \exp(-c_3\sqrt{n}s)$$

για κάθε $s \geqslant 1$. Αφού το μ είναι ισοτροπικό, έχουμε $I_2(\mu) = \sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Πρόγονος του Θεωρήματος 3.5.3 είναι ένα θεώρημα του Alesker το οποίο περιγράφουμε στην επόμενη ενότητα.

3.5.1 ψ_2-εκτίμηση για την Ευκλείδεια νόρμα

Το θεώρημα του Alesker ισχυρίζεται ότι η Ευκλείδεια νόρμα, σαν συνάρτηση ορισμένη σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα, ικανοποιεί ψ_2-εκτίμηση.

Θεώρημα 3.5.4. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f(x) = \|x\|_2$, τότε*

$$\|f\|_{L^{\psi_2}(K)} \leqslant c\sqrt{n}L_K,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 3.5.5. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο στο 0. Για κάθε $q \geqslant 1$,*

$$\left(\int_{S^{n-1}}\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx d\sigma(\theta)\right)^{1/q} \simeq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n+q}}\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ελέγχουμε ότι

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta)\right)^{1/q} \simeq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n+q}}\|x\|_2. \tag{3.5.4}$$

Απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Fubini ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.4. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $q > 1$ ισχύει

$$\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_1\sqrt{q}\sqrt{n}L_K$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx \leqslant c_2^q q^q L_K^q.$$

Ολοκληρώνοντας στην σφαίρα παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}}\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx d\sigma(\theta) \leqslant c_2^q q^q L_K^q.$$

Χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 3.5.5 βλέπουμε ότι

$$\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_3 q\sqrt{\frac{n+q}{q}}L_K \leqslant c_4\sqrt{q}\sqrt{n}L_K,$$

αν υποθέσουμε ότι $q \leqslant n$. Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση που $q > n$, χρησιμοποιώντας το σχετικά απλό φράγμα $R(K) \leqslant (n+1)L_K$ για την περιγεγραμμένη ακτίνα του K, παίρνουμε

$$\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_5 n L_K \leqslant c_5\sqrt{q}\sqrt{n}L_K.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το ζητούμενο. □

Με εφαρμογή της ανισότητας Markov βλέπουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|\{x \in K : \|x\|_2 \geqslant c\sqrt{n}L_K s\}| \leqslant 2\exp(-s^2)$$

για κάθε $s > 0$.

3.5.2 Η ανισότητα του Παούρη

Για την απόδειξη θα χρειαστεί πρώτα να εισάγουμε κάποιες παραμέτρους οι οποίες μας επιτρέπουν να μελετήσουμε σε βάθος την οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων του μ.

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $k_*(C)$ τον μεγαλύτερο φυσικό $k \leqslant n$ για τον οποίον

$$\mu_{n,k}\left(\left\{F \in G_{n,k} : \frac{w(C)}{2}\|x\|_2 \leqslant h_C(x) \leqslant 2w(C)\|x\|_2,\ x \in F\right\}\right) \geqslant \frac{n}{n+k}.$$

Η διάσταση $k_*(C)$ προσδιορίζεται πλήρως από τις παραμέτρους $w(C)$ και $R(C)$.

Θεώρημα 3.5.6 (Milman–Schechtman). *Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε*

$$c_1 n\frac{w(C)^2}{R(C)^2} \leqslant k_*(C) \leqslant c_2 n\frac{w(C)^2}{R(C)^2}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$.

Για κάθε $p \neq 0$ ορίζουμε

$$w_p(C) = \left(\int_{S^{n-1}} h_C^p(\theta)\sigma(d\theta)\right)^{1/p}.$$

Παρατηρήστε ότι το $w_1(C) = w(C)$ είναι το μέσο πλάτος του C. Οι παράμετροι w_p μελετήθηκαν από τους Litvak, Milman και Schechtman στην εργασία [36].

Θεώρημα 3.5.7. *Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ ώστε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $1 \leqslant q \leqslant k_*(C)$ τότε $w(C) \leqslant w_q(C) \leqslant c_1 w(C)$.*

(ii) *Αν $k_*(C) \leqslant q \leqslant n$ τότε $c_2\sqrt{q/n}\,R(C) \leqslant w_q(C) \leqslant c_3\sqrt{q/n}\,R(C)$.*

Επίσης, από τον ορισμό της παραμέτρου $k_*(C)$ παίρνουμε:

Θεώρημα 3.5.8. *Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε: αν $1 \leqslant k \leqslant k_*(C)$ τότε ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$c_1 w(C) B_F \subseteq P_F(C) \subseteq c_2 w(C) B_F$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1/2$.

Οι q-ροπές της Ευκλείδειας νόρμας ως προς το μ συνδέονται με τα L_q-κεντροειδή σώματα του μ μέσω του επόμενου Λήμματος, το οποίο είναι απλή επαναδιατύπωση του Λήμματος 3.5.5.

Λήμμα 3.5.9. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ έχουμε*

$$w_q(Z_q(\mu)) = a_{n,q} \sqrt{\frac{q}{q+n}} I_q(\mu)$$

όπου $a_{n,q} \simeq 1$.

Κεντρικό ρόλο στην δουλειά του Παούρη παίζει η επόμενη παράμετρος.

Ορισμός 3.5.10. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$q_*(\mu) = \max\{q \geqslant 2 : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q\}.$$

Θα χρειαστούμε ένα κάτω φράγμα για το $q_*(\mu)$. Το φράγμα που θα δώσουμε εξαρτάται από την ψ_1-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών ως προς το μ. Θυμηθείτε ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$Z_q(\mu) \subseteq Cq\, Z_2(\mu)$$

για κάθε $q \geqslant 2$. Ειδικότερα, αν το μ είναι ισοτροπικό, παίρνουμε

$$R(Z_q(\mu)) \leqslant Cq\, R(Z_2(\mu)) = Cq \tag{3.5.5}$$

για κάθε $q \geqslant 2$.

Λήμμα 3.5.11. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $n \geqslant q \geqslant q_*(\mu)$,*

$$c_1 R(Z_q(\mu)) \leqslant I_q(\mu) \leqslant c_2 R(Z_q(\mu)).$$

Απόδειξη. Έστω $n \geqslant q \geqslant q_*(\mu)$. Από τον ορισμό του $q_*(\mu)$ έχουμε $q \geqslant k_*(Z_q(\mu))$, και από το Λήμμα 3.5.7 (ii) παίρνουμε

$$c_3\sqrt{\frac{q}{n}}R(Z_q(\mu)) \leqslant w_q(Z_q(\mu)) \leqslant c_4\sqrt{\frac{q}{n}}R(Z_q(\mu)).$$

Τώρα, από το Λήμμα 3.5.9 έχουμε

$$w_q(Z_q(\mu)) = a_{n,q}\sqrt{\frac{q}{q+n}}I_q(\mu).$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό. Για τον δεύτερο, χρησιμοποιούμε την (3.5.5) και το γεγονός ότι $R(Z_2(\mu)) = 1$ αν το μ είναι ισοτροπικό. □

Πρόταση 3.5.12. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $q_* := q_*(\mu)$. Από το Λήμμα 3.5.7 (i), το Λήμμα 3.5.9, την ανισότητα Hölder και την παρατήρηση ότι $I_2(\mu) = w_2(Z_2(\mu))$ (η οποία ελέγχεται εύκολα) παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(Z_{q_*}(\mu)) &\geqslant c_1 w_{q_*}(Z_{q_*}(\mu)) = c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}}I_{q_*}(\mu) \geqslant c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}}I_2(\mu) \\ &= c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}}\,\sqrt{n}w_2(Z_2(\mu)). \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Με άλλα λόγια,

$$w(Z_{q_*}(\mu)) \geqslant c_2\sqrt{q_*}w(Z_2(\mu)). \tag{3.5.7}$$

Αφού $R(Z_{q_*}(\mu)) \leqslant Cq_*\, R(Z_2(\mu))$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του q_* και το Θεώρημα 3.5.6 γράφουμε

$$\begin{aligned} q_* + 1 &\geqslant k_*(Z_{q_*}(\mu)) \geqslant c_3 n\left(\frac{w(Z_{q_*}(\mu))}{R(Z_{q_*}(\mu))}\right)^2 \\ &\geqslant c_3 n\frac{c_2^2 q_*}{C^2 q_*^2}\frac{w^2(Z_2(\mu))}{R^2(Z_2(\mu))} = c_5\frac{k_*(Z_2(\mu))}{q_*}. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Έτσι, καταλήγουμε στην $q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}$ για κάποια (απόλυτη) σταθερά $c > 0$. □

Παρατηρήστε ότι αν το μ είναι ισοτροπικό τότε $k_*(Z_2(\mu)) = n$. Έτσι, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 3.5.13. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$,*

$$q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{n}.$$

Ορισμός 3.5.14. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Επεκτείνουμε τον ορισμό του $I_q(\mu)$, επιτρέποντας αρνητικές τιμές του q, με τον προφανή τρόπο: για κάθε $q \in (-n, \infty)$, $q \neq 0$, ορίζουμε

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x) \right)^{1/q}.$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι ένα δεύτερο θεώρημα του Παούρη [52] το οποίο ταυτόχρονα αποδεικνύει το Θεώρημα 3.5.3, άρα και το Θεώρημα 3.5.1.

Θεώρημα 3.5.15. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k \leqslant q_*(\mu)$ έχουμε*

$$I_{-k}(\mu) \simeq I_k(\mu).$$

Ειδικότερα, το Θεώρημα αυτό δείχνει ότι για κάθε $k \leqslant q_*(\mu)$ έχουμε $I_k(\mu) \leqslant CI_2(\mu)$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτός ακριβώς ήταν ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 3.5.3.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.15 θα χρειαστούμε το B-θεώρημα των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey [13].

Θεώρημα 3.5.16. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση*

$$t \mapsto \gamma_n(e^t K)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Θα χρειαστεί επίσης να ορίσουμε μία ακόμα παράμετρο, που θα παίξει τον ρόλο της $k_*(C)$ σε σχέση με τις αρνητικές ροπές.

Ορισμός 3.5.17. Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$d_*(C) = \min\left\{ -\log \sigma \left(\left\{ x \in S^{n-1} : h_C(x) \leqslant \frac{w(C)}{2} \right\} \right), n \right\}.$$

Η παράμετρος d_* ορίστηκε στο [33], όπου επίσης αποδείχτηκε ότι η $d_*(C)$ είναι πάντα μεγαλύτερη από $k_*(C)$: αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$d_*(C) \geqslant ck_*(C),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παρατηρούμε ότι, από την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα,

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |h_C(x) - w(C)| > tw(C)\}) \leqslant \exp(-ct^2 k_*(C))$$

για κάθε $t > 0$. Επιλέγοντας $t = 1/2$ έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 3.5.18. *Για κάθε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ έχουμε*

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : h_C(x) < \varepsilon w(C)\}) < (c_1\varepsilon)^{c_2 d_*(C)} \leqslant (c_1\varepsilon)^{c_3 k_*(C)},$$

όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το Θεώρημα 3.5.18 έχει σαν συνέπεια τις ακόλουθες αντίστροφες ανισότητες Hölder.

Πόρισμα 3.5.19. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < q < c_1 d_*(C)$,*

$$c_2 w(C) \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_C^q(x)} d\sigma(x)\right)^{-1/q} \leqslant c_3 w(C).$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $0 < q < c_1 d_*(C)$ ισχύει

$$w_{-q}(C) \simeq w(C).$$

Απόδειξη. Η δεξιά ανισότητα προκύπτει εύκολα από την ανισότητα Hölder. Για την αριστερή ανισότητα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις του προηγούμενου θεωρήματος. □

Ειδικότερα, αφού $d_*(C) \geqslant ck_*(C)$, έχουμε πάντα το εξής.

Θεώρημα 3.5.20. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $w_q(C) \simeq w_{-q}(C)$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant k_*(C)$.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα των Litvak, Milman και Schechtman έχουμε $w_q(C) \simeq w(C)$ για κάθε $q \leqslant k_*(C)$. Από το Θεώρημα 3.5.19 παίρνουμε $w_{-q}(C) \simeq w(C)$ για κάθε $q < k_*(C)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το συμπέρασμα. □

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.15, η οποία βασίζεται σε δύο ταυτότητες:

Πρόταση 3.5.21. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant k < n$ ένας θετικός ακέραιος. Τότε,*

$$I_{-k}(f) = c_{n,k}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0) d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}, \tag{3.5.9}$$

όπου

$$c_{n,k} = \left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\right)^{1/k} \simeq \sqrt{n}.$$

Απόδειξη. Έστω $1 \leqslant k < n$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0)\, d\nu_{n,k}(F)\\
&= \int_{G_{n,n-k}} \pi_{E^\perp}(f)(0)\, d\nu_{n,n-k}(E)\\
&= \int_{G_{n,n-k}} \int_E f(y)\, dy\, d\nu_{n,n-k}(E)\\
&= \int_{G_{n,n-k}} (n-k)\omega_{n-k} \int_{S_E} \int_0^\infty r^{n-k-1} f(r\theta)\, dr\, d\sigma_E(\theta)\, d\nu_{n,n-k}(E)\\
&= \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-k-1} f(r\theta)\, dr\, d\sigma(\theta)\\
&= \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^{-k} f(x)\, dx = \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} I_{-k}^{-k}(f).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I_{-k}(f) = \left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\right)^{1/k} \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0)\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}.$$

Ελέγχοντας ότι $c_{n,k} = \left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\right)^{1/k} \simeq \sqrt{n}$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Πρόταση 3.5.22. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant k < n$ ένας θετικός ακέραιος. Τότε,*

$$w_{-k}(C) \simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}} |P_F C|^{-1} d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{k}}. \tag{3.5.10}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Blaschke-Santaló και την αντίστροφη ανισότητα Santaló, γράφουμε

$$
\begin{aligned}
w_{-k}^{-1}(C) &= \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_C^k(\theta)} d\sigma(\theta)\right)^{1/k} \\
&= \left(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}} \omega_k \int_{S_F} \frac{1}{\|\theta\|_{(P_F C)^\circ}^k} d\sigma(\theta) d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \\
&= \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|(P_F(C))^\circ|}{|B_2^k|} d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \\
&\simeq \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|B_2^k|}{|P_F(C)|} d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k},
\end{aligned} \tag{3.5.11}
$$

απ΄ όπου έπεται το συμπέρασμα. □

Έστω τώρα f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε έναν ακέραιο $1 \leqslant k < n$ και κάποιον $F \in G_{n,k}$. Από το Θεώρημα 3.4.6, έχουμε

$$\frac{1}{|P_F(Z_k(f))|^{1/k}} \simeq \pi_F(f)(0)^{1/k}.$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο Προτάσεις παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 3.5.23. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k < n$ έχουμε*

$$w_{-k}(Z_k(f)) \simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0) d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

και

$$I_{-k}(f) \simeq \sqrt{\frac{n}{k}} w_{-k}(Z_k(f)). \tag{3.5.12}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.15. Θυμηθείτε ότι, για κάθε $1 \leqslant k < n$,

$$w_k(Z_k(\mu)) \simeq \sqrt{k/n}\, I_k(\mu). \tag{3.5.13}$$

Από την άλλη πλευρά, από την (3.5.12) βλέπουμε ότι

$$w_{-k}(Z_k(\mu)) \simeq \sqrt{k/n}\, I_{-k}(\mu).$$

Θέτουμε $k_0 = \lfloor q_* \rfloor$, όπου $q_* = q_*(\mu)$. Τότε,

$$k_*(Z_{k_0}(\mu)) \simeq k_*(Z_{q_*}(\mu)) \geqslant c_1 q_* \geqslant c_1 k_0. \tag{3.5.14}$$

Από το Θεώρημα 3.5.20 έχουμε

$$w_{-k}(Z_{k_0}(\mu)) \simeq w_k(Z_{k_0}(\mu)) \tag{3.5.15}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant c_2 k_*(Z_{k_0}(\mu))$, και η (3.5.14) δείχνει ότι η (3.5.15) ισχύει για κάθε $k \leqslant c_3 q_*(\mu)$. Θέτοντας $k_1 = \lfloor c_3 q_*(\mu) \rfloor \simeq k_0$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $Z_{k_0}(\mu) \simeq Z_{k_1}(\mu)$, παίρνουμε

$$w_{-k_1}(Z_{k_1}(\mu)) \simeq w_{k_1}(Z_{k_1}(\mu)). \tag{3.5.16}$$

Είναι τώρα φανερό ότι $I_{-k_1}(\mu) \simeq I_{k_1}(\mu)$ και αφού $k_1 \simeq q_*(\mu)$ βλέπουμε ότι η $q \mapsto I_q(\mu)$ είναι «σταθερή» για τα $1 \leqslant |q| \leqslant c q_*(\mu)$. □

Από το Θεώρημα 3.5.15 προκύπτει μια εκτίμηση για το μέτρο μικρής μπάλας, αν χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Markov και το γεγονός ότι $q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{n}$ για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ.

Θεώρημα 3.5.24. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ έχουμε*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c\sqrt{n}},$$

όπου $\varepsilon_0, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $1 \leqslant k \leqslant q_*(\mu)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon I_2(\mu)\}) &\leqslant \mu(\{x : \|x\|_2 < c_1 \varepsilon I_{-k}(\mu)\}) \\ &\leqslant (c_1\varepsilon)^k \leqslant \varepsilon^{k/2},\end{aligned}$$

για κάθε $0 < \varepsilon < c_1^{-2}$ και $k \leqslant q_*(\mu)$. Αφού $q_*(\mu) \geqslant c_2\sqrt{n}$, έπεται το συμπέρασμα με $\varepsilon_0 = c_1^{-2}$ και $c = c_2/2$. □

3.6 Η εικασία του λεπτού δακτυλίου

Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Από τα αποτελέσματα του Παούρη, με $q \simeq \sqrt{n}$, προκύπτει μια εκτίμηση του μέτρου σε έναν «όχι και τόσο λεπτό» δακτύλιο γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}$: έχουμε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : c\sqrt{n} \leqslant \|x\|_2 < C\sqrt{n}\}) > 1 - o_n(1),$$

όπου $0 < c < 1 < C$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η *εικασία του λεπτού δακτυλίου* είναι το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sigma_\mu^2 := \mathbb{E}_\mu(\|x\|_2 - \sqrt{n})^2 \leqslant C^2.$$

Από μια τέτοια ανισότητα θα προέκυπτε πολύ ισχυρότερη εκτίμηση του μέτρου σε έναν «λεπτό» δακτύλιο γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}$. Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα οφείλεται στους Guédon και E. Milman. Πολλές από τις ιδέες της απόδειξης βασίζονται σε προηγούμενες δουλειές του Klartag (που ήταν ο πρώτος που έδωσε ασθενέστερη αλλά γενική εκτίμηση) και του Fleury.

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mu\left(\{x : \big|\, \|x\|_2 - \sqrt{n}\big| \geqslant t\sqrt{n}\}\right) \leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t)) \tag{3.6.1}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $C, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$\sqrt{\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2)} \leqslant Cn^{1/3}. \tag{3.6.2}$$

Από το Θεώρημα 3.6.1 προκύπτει μια εκτίμηση μεγάλων αποκλίσεων η οποία συμπληρώνει την ανισότητα του Παούρη.

Θεώρημα 3.6.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mu\left(\{x : \|x\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\}\right) \leqslant \exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t)) \tag{3.6.3}$$

για κάθε $t \geqslant 0$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Από το Θεώρημα 3.6.1 προκύπτει επίσης μια εκτίμηση για το μέτρο σε μικρές μπάλες.

Θεώρημα 3.6.3. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mu\left(\{x : \|x\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\}\right) \leqslant \exp\left(-c_1\sqrt{n}\min\left(t^3, \log\frac{c_2}{1-t}\right)\right) \tag{3.6.4}$$

για κάθε $t \in (0,1)$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Όλα τα παραπάνω θεωρήματα είναι συνέπειες του εξής θεωρήματος το οποίο αφορά την συμπεριφορά της συνάρτησης $q \mapsto I_q(\mu)$ και είναι στο ίδιο πνεύμα με τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου.

Θεώρημα 3.6.4. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1 \leqslant |q-2| \leqslant c_1 n^{1/6}$ τότε*

$$1 - C\frac{|q-2|}{n^{1/3}} \leqslant \frac{I_q(\mu)}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + C\frac{|q-2|}{n^{1/3}}, \tag{3.6.5}$$

και αν $c_1 n^{1/6} \leqslant |q-2| \leqslant c_2\sqrt{n}$ τότε

$$1 - C\frac{\sqrt{|q-2|}}{n^{1/4}} \leqslant \frac{I_q(\mu)}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + C\frac{\sqrt{|q-2|}}{n^{1/4}}. \tag{3.6.6}$$

3.7 Όγκος των κεντροειδών σωμάτων και ισοτροπική σταθερά

Η περιγραφή που δώσαμε για την συμπεριφορά των αρνητικών ροπών της Ευκλείδειας νόρμας ως προς ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ δείχνει ότι

$$I_{-q}(\mu) \simeq I_2(\mu) = \sqrt{n} \quad \text{για κάθε } 0 < q \leqslant q_*(\mu). \tag{3.7.1}$$

Όμως, σε αντίθεση με τις θετικές ροπές $I_q(\mu)$ οι οποίες, όπως είδαμε, δεν παραμένουν συγκρίσιμες με την $I_2(\mu)$ όταν το q γίνει μεγαλύτερο από $q_*(\mu)$, η συμπεριφορά των αντίστοιχων αρνητικών ροπών δεν είναι γνωστή, και μάλιστα, η (3.7.1) μπορεί να ισχύει για κάθε θετικό q μεχρι το $n-1$. Το ερώτημα αυτό, στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμο με την εικασία του υπερεπιπέδου, όπως απέδειξαν οι Δαφνής και Παούρης στο [14] εισάγοντας μια άλλη παράμετρο, που για κάθε $\delta \geqslant 1$ δίνεται από την

$$q_{-c}(\mu,\delta) := \max\bigl\{1 \leqslant q \leqslant n-1 : I_{-q}(\mu) \geqslant \delta^{-1} I_2(\mu) = \delta^{-1}\sqrt{n}\bigr\}, \tag{3.7.2}$$

και μετράει πόσο μεγάλο είναι το εύρος της (3.7.1) αν επιτρέψουμε εξάρτηση των σταθερών από το δ. Οι Δαφνής και Παούρης απέδειξαν ότι

$$L_n \leqslant C\delta \sup_{\mu} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}(\mu,\delta)}}\ \log\Bigl(\frac{en}{q_{-c}(\mu,\delta)}\Bigr) \tag{3.7.3}$$

για κάθε $\delta \geqslant 1$. Έδειξαν επίσης ότι, αν ισχύει η εικασία του υπερεπίπέδου. δηλαδή αν ισχύει η (3.3.2), τότε θα έχουμε

$$q_{-c}(\mu,\delta_0) = n-1 \tag{3.7.4}$$

για κάποιο $\delta_0 \simeq 1$ και για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι, από την (3.7.1), γνωρίζουμε ήδη ότι

$$q_{-c}(\mu, \delta_1) \geqslant q_*(\mu) \geqslant c_1\sqrt{n}, \tag{3.7.5}$$

όπου οι $\delta_1 \geqslant 1$ και $c_1 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην συνέχεια συζητάμε κάτω φράγματα για την ακτίνα όγκου των L_q-κεντροειδών σωμάτων. Από το [40] γνωρίζουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,

$$|Z_q(\mu)|^{1/n} \geqslant c_2\sqrt{q/n}\, L_\mu^{-1} \tag{3.7.6}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$. Στο [31] οι Klartag και E. Milman ορίζουν μια κληρονομική παραλλαγή της παραμέτρου $q_*(\mu)$ ως εξής:

$$q_*^H(\mu) := n \inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{q_*(\pi_E\mu)}{k}, \tag{3.7.7}$$

όπου $\pi_E\mu$ είναι το περιθώριο μέτρο του μ ως προς τον E, και για κάθε $q \leqslant q_*^H(\mu)$ δίνουν ένα κάτω φράγμα για τον όγκο των σωμάτων $Z_q(\mu)$:

$$\big|Z_q(\mu)\big|^{1/n} \geqslant c_3\sqrt{q/n} \tag{3.7.8}$$

όπου $c_3 > 0$ απόλυτη σταθερά. Υπενθυμίζουμε ότι, αν το μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο τότε το ίδιο ισχύει για όλα τα περιθώρια μέτρα του. Έτσι, για κάθε υπόχωρο $E \in G_{n,k}$, έχουμε ότι $q_*(\pi_E\mu) \geqslant c_1\sqrt{k}$. Από αυτό έπεται ότι, για όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα μ ισχύει $q_*^H(\mu) \geqslant c_1\sqrt{n}$. Σημειώστε επίσης ότι, για εκείνα τα μέτρα για τα οποία έχουμε $q_*(\mu) \simeq \sqrt{n}$, η παράμετρος $q_*^H(\mu)$ επίσης δεν ξεπερνά ένα σταθερό πολλαπλάσιο της $\sqrt{n}$. Όμως, το φράγμα (3.7.8) μπορεί να ισχύει και για μεγαλύτερες τιμές του $q \in [1, n]$, όπως αποδείχθηκε από την Βριτσίου στο [60]. Όρισε μια παραλλαγή του $q_{-c}(\mu, \delta)$ ως εξής:

$$q_{-c}^H(\mu, \delta) := n \inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{q_{-c}(\pi_E\mu, \delta)}{k}$$

για κάθε $\delta \geqslant 1$, και έδειξε ότι

$$\big|Z_q(\mu)\big|^{1/n} \geqslant c_4\delta^{-1}\sqrt{q/n} \tag{3.7.9}$$

για κάθε $q \leqslant q_{-c}^H(\mu, \delta)$. Φυσικά, εξακολουθούμε να έχουμε

$$q_{-c}^H(\mu, \delta_1) \geqslant c_1\sqrt{n} \tag{3.7.10}$$

για κάποιο $\delta_1 \simeq 1$ από την (3.7.5) και τον ορισμό του $q_{-c}^H(\mu,\delta_1)$. Προς το παρόν, στις αποδείξεις όπου χρησιμοποιούμε κάτω φράγματα για τον όγκο των L_q-κεντροειδών σωματων, η μόνη συγκεκριμένη εκτίμηση που έχουμε μεχρις στιγμής για τις παραμέτρους $q_*^H(\mu)$ ή $q_{-c}^H(\mu,\delta)$, άρα αυτό που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στις εκτιμήσεις μας, είναι ότι όλες τους έχουν τάξη τουλάχιστον $\sqrt{n}$ όταν το μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.

Κεφάλαιο 4

Γεωμετρία των L_q-κεντροειδών σωμάτων

4.1 Εισαγωγή

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να δώσουμε νέες πληροφορίες για την τοπική δομή των κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$. Τα αποτελέσματα περιγράφτηκαν στο Κεφάλαιο 1. Αναφέρουμε συνοπτικά τα βασικότερα από αυτά:

(i) Το πρώτο αποτέλεσμα αφορά τις προβολές, διάστασης ανάλογης του n, των κεντροειδών σωμάτων. Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $1 \leqslant \alpha < 2$. Για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ και για κάθε $q \leqslant \sqrt{\varepsilon n}$ υπάρχουν $k \geqslant (1-\varepsilon)n$ και $F \in G_{n,k}$ ώστε

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big) \supseteq c(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}}\sqrt{q}\, B_F,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (ανεξάρτητη από το α, το ε, το μέτρο μ, το q και το n). Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος δίνεται στην Παράγραφο 4.3, όπου παρουσιάζουμε και κάποιες παραλλαγές του.

(ii) Στην Παράγραφο 4.4 συζητάμε φράγματα για τους (δυϊκούς) αριθμούς κάλυψης της Ευκλείδειας μπάλας από το $Z_q(\mu)$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα και ένα θεώρημα από το [38] εξασφαλίζουμε «κανονικές» εκτιμήσεις για τους δυϊκούς αριθμούς κάλυψης: Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $1\leqslant \alpha<2$. Τότε, για κάθε $q\leqslant \sqrt{n}$ και για κάθε

$$1\leqslant t\leqslant \min\big\{\sqrt{q},\ c_1(2-\alpha)^{-1}(n/q^2)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}\big\}$$

έχουμε

$$\log N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big)\leqslant c(\alpha)\frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}}\max\left\{\log\frac{\sqrt{2q}}{t},\ \log\frac{1}{(2-\alpha)t}\right\},$$

όπου $c(\alpha)\leqslant C(2-\alpha)^{-2/3}$ και c_1, C είναι απόλυτες σταθερές. Παρόλο που η εκτίμησή μας δεν μοιάζει να είναι βέλτιστη, μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτήν ότι το $Z_q(\mu)$, όταν $q\leqslant n^{3/7}$, είναι β-κανονικό κυρτό σώμα υπό την έννοια του θεωρήματος του Pisier (για κάποια συγκεκριμένη τιμή του β).

(iii) Συνέπεια αυτών των εκτιμήσεων είναι ένα άνω φράγμα για την παράμετρο

$$M\big(Z_q(\mu)\big)=\int_{S^{n-1}}\|x\|_{Z_q(\mu)}\,d\sigma(x).$$

Στην Παράγραφο 4.5, μεταξύ άλλων, παίρνουμε το εξής άνω φράγμα. Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant q\leqslant n^{3/7}$,

$$M\big(Z_q(\mu)\big)\leqslant C\frac{(\log q)^{5/6}}{\sqrt[6]{q}}.$$

(iv) Αν K είναι ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιώντας τα φράγματα για το $M(Z_q(\mu_K))$ μπορούμε να δώσουμε άνω φράγμα για το $M(K)$: για παράδειγμα, αποδεικνύουμε ότι

$$M(K)\leqslant C\frac{\sqrt[4]{L_n}(\log n)^{5/6}}{L_K\sqrt[8]{n}}.$$

Κλείνουμε αυτό το Κεφάλαιο με κάποιες πρόσθετες παρατηρήσεις για την γεωμετρία των κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$ και των πολικών τους. Δίνουμε κάτω φράγματα για την περιγεγραμμένη ακτίνα των τομών τους – αυτά μάλιστα ισχύουν για κάθε $1\leqslant k<n$ και για κάθε $F\in G_{n,k}$. Λόγω δυϊσμού, αυτές οι εκτιμήσεις προσδιορίζουν την εγγεγραμμένη ακτίνα των τυχαίων προβολών τους. Δίνουμε επίσης άνω φράγματα για τις παραμέτρους $M_{-k}(Z_q(\mu))$ και $I_{-k}(\overline{Z_q}(\mu))$.

4.2 Διάμετρος των τομών α-κανονικών σωμάτων

Αφετηρία μας είναι το Θεώρημα 2.1.3 του Pisier: *Για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\max\{N(\tilde{K}, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{K}), N(\tilde{K}^\circ, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{K}^\circ)\} \leqslant \exp\left(\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}\right)$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου η σταθερά $c(\alpha)$ εξαρτάται μόνο από το α, και $c(\alpha) = O\big((2-\alpha)^{-\alpha/2}\big)$ καθώς το $\alpha \to 2$. Ένα σώμα $\tilde{K}$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.1.3 λέγεται *α-κανονικό σώμα*. Για τα α-κανονικά σώματα ισχύει μια ισχυρή μορφή της αντίστροφης ανισότητας Brunn-Minkowski. Μάλιστα, για την απόδειξή της χρειαζόμαστε μόνο την κανονικότητα των αριθμών κάλυψης $N(K, tB_2^n)$.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $\gamma \geqslant 1$, $\alpha > 0$ και έστω $K_1, \ldots, K_m$ συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία ικανοποιούν την*

$$N(K_j, tB_2^n) \leqslant \exp\left(\frac{\gamma n}{t^\alpha}\right)$$

για κάθε $1 \leqslant j \leqslant m$ και για κάθε $t \geqslant 1$. Τότε,

$$|K_1 + \cdots + K_m|^{1/n} \leqslant C\gamma^{\frac{1}{\alpha}} m^{1+\frac{1}{\alpha}} |B_2^n|^{1/n}. \tag{4.2.1}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} N(K_1 + \cdots + K_m, tmB_2^n) &= N(K_1 + \cdots + K_m, tB_2^n + \cdots + tB_2^n) \\ &\leqslant \prod_{j=1}^m N(K_j, tB_2^n) \leqslant \exp(\gamma nm/t^\alpha) \end{aligned}$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Έπεται ότι

$$|K_1 + \cdots + K_m|^{1/n} \leqslant tm\, \exp(\gamma m/t^\alpha) |B_2^n|^{1/n}.$$

Επιλέγοντας $t = (\gamma m)^{1/\alpha}$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Θα χρειαστούμε επίσης την ακριβή μορφή της M^*-ανισότητας (βλέπε [26] και [45]): *Αν A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $\varepsilon, \delta \in (0,1)$, τότε έχουμε*

$$R(A \cap F) \leq \frac{w(A)}{(1-\delta)\sqrt{\varepsilon}}$$

για όλους τους F σε ένα υποσύνολο $L_{n,k}$ της $G_{n,k}$ που έχει μέτρο $\nu_{n,k}(L_{n,k}) \geqslant 1 - c_1\exp(-c_2\delta^2\varepsilon n)$, όπου $k = \lfloor(1-\varepsilon)n\rfloor$ και $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Μια πολύ γνωστή εφαρμογή της M^*-ανισότητας (βλέπε π.χ. [18, Θεώρημα 2.1]) ισχυρίζεται ότι αν $r > 0$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$\frac{w(A \cap rB_2^n)}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}, \tag{4.2.2}$$

τότε η τυπική $\lfloor(1-\varepsilon)n\rfloor$-διάστατη κεντρική τομή του A έχει περιγεγραμμένη ακτίνα μικρότερη από r (με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c\varepsilon n)$).

Η βασική παρατήρηση αυτής της Παραγράφου, η οποία ουσιαστικά εμφανίζεται στο [19], είναι η εξής: αν A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ του οποίου οι αριθμοί κάλυψης $N(A, tB_2^n)$ είναι α-κανονικοί για κάποιον $\alpha > 0$, τότε μπορούμε να πάρουμε άνω φράγμα για την διάμετρο των τυχαίων τομών του A διάστασης ανάλογης του n.

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω $\gamma \geqslant 1$, $\alpha > 0$ και έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την*

$$N(A, tB_2^n) \leqslant \exp\left(\frac{\gamma n}{t^\alpha}\right)$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Τότε, για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,\lfloor(1-\varepsilon)n\rfloor}$ ικανοποιεί την

$$R(A \cap F) \leqslant C\gamma^{\frac{1}{\alpha}}/\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}},$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - c_1\exp(-c_2\varepsilon n)$, όπου $c_1, c_2, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon \in (0,1)$ και έστω $k = \lfloor(1-\varepsilon)n\rfloor$. Ορίζουμε $r > 0$ μέσω της εξίσωσης

$$w(A \cap rB_2^n) = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\, r.$$

Από την ακριβή πιθανοθεωρητική μορφή της M^*-ανισότητας (βλέπε παραπάνω), γνωρίζουμε ότι υπάρχει υποσύνολο $L_{n,k}$ της $G_{n,k}$ που έχει μέτρο $\nu_{n,k}(L_{n,k}) \geqslant 1 - c_1\exp(-c_2\varepsilon n)$, ώστε

$$w(A \cap F) \leqslant R(A \cap F) \leqslant r$$

για κάθε $F \in L_{n,k}$. Χρησιμοποιούμε το εξής αποτέλεσμα από το [10]: *Αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, με μοναδιαία μπάλα W, και αν $M = \int_{S^{n-1}}\|x\|\,d\sigma(x)$ και b είναι η μικρότερη θετική σταθερά για την οποία ισχύει $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,* *τότε υπάρχουν φυσικός* $s \leqslant C(b/M)^2$ *και* s *ορθογώνιοι μετασχηματισμοί* $U_1, \ldots, U_s \in O(n)$ *ώστε*

$$\frac{M}{2}\, B_2^n \subseteq \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} U_i(W^\circ) \subseteq 2M\, B_2^n.$$

Εφαρμόζουμε αυτό το αποτέλεσμα για το σώμα $W := (A\cap rB_2^n)^\circ$. Παρατηρήστε ότι $b = r$ και $M(W) = w(A\cap rB_2^n) = \sqrt{\varepsilon}r/2$, άρα μπορούμε να βρούμε $s \leqslant \frac{c_3}{\varepsilon}$ και ορθογώνιους μετασχηματισμούς $U_1, \ldots, U_s$, ώστε

$$\frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon}\, rB_2^n \subseteq \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} U_i(A\cap rB_2^n) \subseteq \sqrt{\varepsilon}\, rB_2^n. \tag{4.2.3}$$

Ορίζουμε $A_1 = \frac{1}{s}\sum U_i(A\cap rB_2^n)$. Μπορούμε τώρα να δώσουμε άνω φράγμα για το r χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.1. Προφανώς, τα σώματα $U_i(A\cap rB_2^n)$ ικανοποιούν την

$$N\big(U_i(A\cap rB_2^n), tB_2^n\big) \leqslant N(A, tB_2^n) \leqslant \exp\left(\frac{\gamma n}{t^\alpha}\right)$$

για κάθε $t \geqslant 1$, άρα

$$\frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon}\, r \leqslant \left(\frac{|A_1|}{|B_2^n|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant c_4\gamma^{\frac{1}{\alpha}} s^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$R(A\cap F) \leqslant r \leqslant c_5\gamma^{\frac{1}{\alpha}}/\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - c_1\exp(-c_2\varepsilon n)$. □

4.3 Προβολές των L_q-κεντροειδών σωμάτων

Σκοπός μας είναι να δώσουμε κάτω φράγματα για την εγγεγραμμένη ακτίνα των προβολών, διάστασης ανάλογης του n, των $Z_q(\mu)$ και $Z_q^\circ(\mu)$. Θεωρούμε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και τυχαίο υπόχωρο $F \in G_{n,k}$. Ένα άνω φράγμα για την περιγεγραμμένη ακτίνα του $Z_q(\mu)\cap F$, άρα και ένα κάτω φράγμα για την εγγεγραμμένη ακτίνα του $P_F(Z_q^\circ(\mu))$, προκύπτει από την M^*-ανισότητα και το γεγονός ότι $w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q}$ όταν $2 \leqslant q \leqslant q_*(\mu)$.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω* μ *ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον* $\mathbb{R}^n$. *Αν* $2 \leqslant q \leqslant q_*(\mu)$ *και αν* $\varepsilon \in (0,1)$ *και* $k = \lfloor (1-\varepsilon)n\rfloor$, *τότε ο τυχαίος υπόχωρος* $F \in G_{n,k}$ *ικανοποιεί την*

$$R\big(Z_q(\mu)\cap F\big) \leqslant \frac{c_1\sqrt{q}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \textit{ή ισοδύναμα} \quad P_F\big(Z_q^\circ(\mu)\big) \supseteq \frac{c_2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{q}}\, B_F \tag{4.3.1}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - c_3\exp(-c_4\varepsilon n)$, *όπου* c_i *είναι απόλυτες σταθερές.* □

Αποδεικνύουμε ανάλογα άνω φράγματα για την $R(Z_q^\circ(\mu)\cap F)$, $F\in G_{n,k}$. Η ιδέα της απόδειξης προέρχεται από το [30] (δείτε τις τελικές παρατηρήσεις αυτής της παραγράφου). Ξεκινάμε με την ακόλουθη άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.2.

Πόρισμα 4.3.2. *Έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$. Υποθέτουμε ότι $\gamma\geqslant 1$, $\alpha>0$, και E είναι ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^m$ με την ιδιότητα*

$$N(A,tE)\leqslant \exp\left(\frac{\gamma m}{t^\alpha}\right)$$

για κάθε $t\geqslant 1$. Τότε, για κάθε $\varepsilon\in(0,1)$ υπάρχει $F\in G_{m,\lfloor(1-\varepsilon)m\rfloor}$ ώστε

$$A\cap F\subseteq c\gamma^{\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha})}\,E\cap F,$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Πρόταση 4.3.3 («μικρές» τιμές του q)**.** *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $1\leqslant\alpha<2$. Για κάθε $0<\varepsilon<1$ και για κάθε $q\leqslant\sqrt{\varepsilon n}$ υπάρχουν $k\geqslant(1-\varepsilon)n$ και $F\in G_{n,k}$ ώστε*

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big)\supseteq c(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}}\sqrt{q}\,B_F.$$

Απόδειξη. Θυμηθείτε από την (3.4.5) ότι για κάθε $1\leqslant m\leqslant n$ και για κάθε $H\in G_{n,m}$ έχουμε

$$P_H(Z_q(\mu))=Z_q(\pi_H(\mu)).$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι, αν ν είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^m$, τότε

$$|Z_q(\nu)|^{1/m}\geqslant c\sqrt{q/m}$$

για κάθε $q\leqslant\sqrt{m}$. Έπεται ότι

$$|P_H(Z_q(\mu))|^{1/m}\geqslant c_1\sqrt{q/m} \tag{4.3.2}$$

για κάθε $H\in G_{n,m}$ και για κάθε $q\leqslant\sqrt{m}$. Σταθεροποιούμε $1\leqslant\alpha<2$ και θεωρούμε ένα α-κανονικό M-ελλειψοειδές E του $Z_q(\mu)$, δηλαδή ένα ελλειψοειδές με την ιδιότητα

$$\max\Big\{N\big(Z_q(\mu),tE\big),N\big(E,tZ_q(\mu)\big)\Big\}\leqslant e^{c(\alpha)n/t^\alpha}$$

για κάθε $t\geqslant 1$, όπου $c(\alpha)\leqslant C(2-\alpha)^{-\alpha/2}$.

Έστω $0<\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ τα μήκη των αξόνων του E, και έστω $\{u_1,\dots,u_n\}$ μια ορθοκανονική βάση που αντιστοιχεί στα λ_j. Για κάθε $1\leqslant m,s\leqslant n$ ορίζουμε

$$H_m:=\mathrm{span}\{u_1,\dots,u_m\}\quad\text{και}\quad F_s=\mathrm{span}\{u_{s+1},\dots,u_n\}.$$

Αφού $E \cap H_m = P_{H_m}(E)$, έχουμε

$$N\Big(P_{H_m}\big(Z_q(\mu)\big), t(E \cap H_m)\Big) \leqslant N\big(Z_q(\mu), tE\big) \leqslant e^{c(\alpha)n/t^\alpha},$$

άρα

$$|P_{H_m}(Z_q(\mu))|^{1/m} \leqslant e^{c(\alpha)n/(t^\alpha m)} |B_{H_m}|^{1/m}(t\lambda_m). \tag{4.3.3}$$

Επιλέγουμε $t = (c(\alpha)n/m)^{1/\alpha}$. Υποθέτοντας ότι $q \leqslant \sqrt{m}$, από τις (4.3.2) και (4.3.3) παίρνουμε

$$\lambda_m \geqslant \left(\frac{m}{c(\alpha)n}\right)^{1/\alpha} \sqrt{q}. \tag{4.3.4}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε $0 < \varepsilon < 1$ και θέτουμε $s = \lfloor \frac{\varepsilon n}{2} \rfloor$. Έχουμε

$$N\Big(E \cap F_s, tP_{F_s}\big(Z_q(\mu)\big)\Big) \leqslant N\big(E, tZ_q(\mu)\big) \leqslant e^{c(\alpha)n/t^\alpha} \leqslant e^{2c(\alpha)(n-s)/t^\alpha},$$

για κάθε $t \geqslant 1$.

Τώρα, χρησιμοποιούμε το θεώρημα δυϊσμού των Artstein-Avidan, Milman και Szarek [1]: Υπάρχουν απόλυτες σταθερές a και $b > 0$ ώστε για κάθε διάσταση n και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύει

$$N(B_2^n, a^{-1}A^\circ)^{1/b} \leqslant N(A, B_2^n) \leqslant N(B_2^n, aA^\circ)^b.$$

Έπεται ότι

$$N(Z_q^\circ(\mu) \cap F_s, tE^\circ \cap F_s) \leqslant N\Big(E \cap F_s, atP_{F_s}\big(Z_q(\mu)\big)\Big)^b \leqslant e^{c_1(\alpha)(n-s)/t^\alpha}.$$

Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 4.3.2 για το σώμα $Z_q^\circ(\mu) \cap F_s$ (με $\gamma = c_1(\alpha)$) και βρίσκουμε έναν υπόχωρο F του F_s, διάστασης $k \geqslant (1-\varepsilon/2)(n-s) \geqslant (1-\varepsilon)n$, ώστε

$$Z_q^\circ(\mu) \cap F \subseteq \frac{C}{\sqrt{2-\alpha}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}}\, E^\circ \cap F,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big) \supseteq c\sqrt{2-\alpha}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}} P_F(E). \tag{4.3.5}$$

Από την (4.3.4) έχουμε

$$E \cap F_s \supseteq \lambda_{s+1} B_{F_s} \supseteq c\sqrt{2-\alpha}\,\varepsilon^{1/\alpha}\sqrt{q}\, B_{F_s},$$

με την προϋπόθεση ότι $q \leqslant \sqrt{\varepsilon n}$. Τότε,

$$\begin{aligned} P_F(E) &= P_F\big(P_{F_s}(E)\big) = P_F(E \cap F_s) \supseteq c\sqrt{2-\alpha}\,\varepsilon^{1/\alpha}\sqrt{q}P_F(B_{F_s}) \\ &= c\sqrt{2-\alpha}\,\varepsilon^{1/\alpha}\sqrt{q}B_F. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τον τελευταίο εγκλεισμό με την (4.3.5) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. $\square$

Πρόταση 4.3.4 («μεγάλες» τιμές του q). *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $1 \leqslant \alpha < 2$. Για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ και για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \varepsilon n$ υπάρχουν $k \geqslant (1-\varepsilon)n$ και $F \in G_{n,k}$ ώστε*

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big) \supseteq \frac{c_1(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}}}{L_{\varepsilon n}}\sqrt{q}\,B_F \supseteq \frac{c_2(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{4}+\frac{2}{\alpha}}}{\sqrt[4]{n}}\sqrt{q}\,B_F.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το ίδιο περίπου επιχείρημα, μόνο που αντί για τα κάτω φράγματα (5.4.7), (3.7.9) για την ακτίνα όγκου των L_q-κεντροειδών σωμάτων χρησιμοποιούμε την (3.7.6). Έτσι, παίρνουμε

$$|P_H(Z_q(\mu))|^{1/m} \geqslant \frac{c_1}{L_m}\sqrt{q/m} \tag{4.3.6}$$

για κάθε $H \in G_{n,m}$ και για κάθε $q \leqslant m$. Ορίζουμε τους υποχώρους H_m, F_s όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.3.3 και θεωρούμε ένα α-κανονικό M-ελλειψοειδές E του $Z_q(\mu)$. Αυτήν την φορά, υποθέτοντας ότι $q \leqslant m$, από τις (4.3.6) και (4.3.3) παίρνουμε

$$\lambda_m \geqslant \frac{1}{L_m}\left(\frac{m}{c(\alpha)n}\right)^{1/\alpha}\sqrt{q}.$$

Στη συνέχεια, σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$, θέτουμε $s = \lfloor\frac{\varepsilon n}{2}\rfloor$ και θεωρούμε τυχόν $q \leqslant \varepsilon n/2$. Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε έναν υπόχωρο F του F_s, διάστασης $k \geqslant (1-\varepsilon/2)(n-s) \geqslant (1-\varepsilon)n$, ώστε

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big) \supseteq c\sqrt{2-\alpha}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}P_F(E)$$

και

$$P_F(E) = P_F\big(P_{F_s}(E)\big) \supseteq P_F(\lambda_{s+1}B_{F_s}) \supseteq \frac{c\sqrt{2-\alpha}}{L_s}\varepsilon^{1/\alpha}\sqrt{q}\,B_F.$$

Αφού $s \simeq \varepsilon n$ και $L_{\varepsilon n} \leqslant C\sqrt[4]{\varepsilon n}$, έπεται το συμπέρασμα. $\square$

Γνωρίζουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$P_F(K) \supseteq P_F\big(Z_q(K)\big)$$

για κάθε $q > 0$. Θυμηθείτε επίσης ότι το μέτρο μ_K με πυκνότητα $L_K^n\mathbf{1}_{K/L_K}$ είναι ισοτροπικό και $Z_q(K) = L_K Z_q(\mu_K)$. Επιλέγοντας $q = \varepsilon n$ και εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.3.4 με $\mu = \mu_K$ παίρνουμε:

Πόρισμα 4.3.5. *Έστω K ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχουν $k \geqslant (1-\varepsilon)n$ και $F \in G_{n,k}$ ώστε*

$$P_F(K) \supseteq L_K P_F\big(Z_q(\mu_K)\big) \supseteq c(2-\alpha)\,\varepsilon^{\frac{3}{4}+\frac{2}{\alpha}}\,\sqrt[4]{n}L_K\,B_F.$$

Παρατήρηση 4.3.6. Κάποιες παραλλαγές του Πορίσματος 4.3.5 έχουν ήδη εμφανιστεί στην βιβλιογραφία. Στο [58] αποδεικνύεται μια ισχυρότερη εκτίμηση με διαφορετική μέθοδο: αν K είναι ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < 1$, υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F \geqslant (1-\varepsilon)n$ ώστε

$$P_F(K) \supseteq c\varepsilon^{3/2}\frac{\sqrt[4]{n}}{\log n}L_K B_F,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παρόμοιο αποτέλεσμα, με κυβική εξάρτηση από το ε, εμφανίζεται στο [4]. Το επιχείρημά μας σχετίζεται με εκείνο στο [30] όπου, με την πρόσθετη υπόθεση ότι $L_n \leqslant C$ για κάθε $n \geqslant 1$, η ύπαρξη κάποιου $F \in G_{n,\lfloor(1-\varepsilon)n\rfloor}$ με

$$P_F(K) \supseteq c\varepsilon^3\sqrt{n}B_F$$

εξασφαλίζεται για όλα τα ισοτροπικά κυρτά σώματα K στον $\mathbb{R}^n$ και όλα τα $0 < \varepsilon < 1$. Με αυτήν την υπόθεση, το επιχείρημά μας θα οδηγούσε στην $P_F(K) \supseteq c(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}\sqrt{n}B_F$ για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$.

Παρατήρηση 4.3.7. Η Πρόταση 4.3.3 και η Πρόταση 4.3.4 εξασφαλίζουν την ύπαρξη *μιας* $\lfloor(1-\varepsilon)n\rfloor$-διάστατης προβολής του $Z_q(\mu)$ με μεγάλη εγγεγραμμένη ακτίνα. Όμως, αποδεικνύεται στο [21] ότι, για κάθε $\mu \in (0,1)$ και για κάθε $0 < s < 1/(2-\mu)$, η μέγιστη εγγεγραμμένη ακτίνα των $\lfloor\mu n\rfloor$-διάστατων προβολών και η τυχαία εγγεγραμμένη ακτίνα των $\lfloor s\mu n\rfloor$-διάστατων προβολών ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ διαφέρουν το πολύ κατά μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα μ και s. Πιο συγκεκριμένα, αν $a(\lambda, K)$ είναι η μέγιστη (και αν $b(\lambda, K)$ είναι η «τυχαία») εγγεγραμμένη ακτίνα μιας $\lfloor\lambda n\rfloor$-διάστατης προβολής του K τότε

$$\left(\frac{c\mu\big(1-s(2-\mu)\big)}{1-s\mu}\sqrt{1-\mu}\right)a(\mu,K) \leqslant b(s\mu,K)$$

για κάθε $n \geqslant n_0(\mu,s)$. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός μπορούμε να δείξουμε εκδοχές των αποτελεσμάτων αυτής της παραγράφου για τις τυχαίες προβολές του $Z_q(\mu)$. Επειδή η εκτίμηση της μέγιστης εγγεγραμμένης ακτίνας μας αρκεί για τα αποτελέσματα των επομένων παραγράφων, δεν παρουσιάζουμε τις ακριβείς διατυπώσεις.

4.4 Αριθμοί κάλυψης

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.3, για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να δείξουμε κάποιες εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης $N(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu))$. Αυτές θα προκύψουν από ένα θεώρημα επέκτασης που αποδείχθηκε στο [38]:

Λήμμα 4.4.1. *Έστω K, L συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και ας υποθέσουμε ότι $L \subseteq RK$. Έστω F ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = n - m$ και έστω $0 < r < t < R$. Τότε, έχουμε*

$$N(L, tK) \leqslant 2^m \left(\frac{2R+t}{t-r}\right)^m N\left(P_F(L), \frac{r}{2}P_F(K)\right). \tag{4.4.1}$$

Για την απόδειξη του Λήμματος 4.4.1 χρειαζόμαστε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.4.2. *Έστω L, L_1, L_2 υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Έστω E ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια προβολή με $\ker P = E$. Τότε,*

$$N(L, L_1 + L_2) \leqslant \overline{N}(P(L), P(L_1))\; N((L - L - L_1) \cap E, L_2).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $N_1 := \overline{N}(P(L), P(L_1))$. Τότε, από τον ορισμό, υπάρχουν $z_1, \ldots, z_{N_1} \in P(L)$ τέτοια ώστε

$$P(L) \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} (z_i + P(L_1))\,.$$

Για κάθε $x \in L$ επιλέγουμε $i(x) \leqslant N_1$ και $y_x \in P(L_1)$ τέτοια ώστε

$$P(x) = z_{i(x)} + y_x.$$

Κατόπιν, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N_1$ επιλέγουμε $\overline{z}_i \in L$ τέτοιο ώστε $P(\overline{z}_i) = z_i$ και για κάθε $y \in P(L_1)$ επιλέγουμε $\overline{y} \in L_1$ τέτοιο ώστε $P(\overline{y}) = y$. Τώρα, για κάθε $x \in L$ ορίζουμε

$$v(x) = \overline{z}_{i(x)} + \overline{y}_x \in \overline{z}_{i(x)} + L_1 \quad \text{και} \quad w(x) = x - v(x).$$

Θέτουμε $T_i := L - L_1 - \overline{z}_i$. Τότε, $w(x) \in T_{i(x)}$ για κάθε $x \in L$ και

$$P(w(x)) = P(x) - P(v(x)) = P(x) - z_{i(x)} - y_x = 0.$$

Συνεπώς, $w(x) \in E$ για κάθε $x \in L$. Άρα, $w(x) \in T_{i(x)} \cap E$ και για κάθε $x \in L$

$$x = w(x) + v(x) \in T_{i(x)} \cap E + \overline{z}_{i(x)} + L_1.$$

Έπεται ότι

$$L \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} \left(T_i \cap E + \overline{z}_{i(x)} + L_1\right).$$

Αφού

$$N(T_i \cap E, L_2) \leqslant \max_{z \in L} N\left((L - L_1 - z) \cap E, L_2\right) \leqslant N((L - L - L_1) \cap E, L_2),$$

έχουμε το συμπέρασμα. □

Απόδειξη του Λήμματος 4.4.1. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.4.2 με $L_1 = rK,\ L_2 = (t-r)K$, και παίρνοντας υπ΄ όψιν την συμμετρία των K και L, παίρνουμε

$$N(L, tK) \leqslant \overline{N}(P(L), rP(K))\ N((2L + rK) \cap E, (t-r)K).$$

Για τον πρώτο όρι χρησιμοποιούμε το γνωστό φράγμα $\overline{N}(A,B) \leqslant N(A, (1/2)B)$. Για τον δεύτερο όρο, χρησιμοποιώντας πρώτα την υπόθεση ότι $L \subset RK$ γράφουμε

$$N((2L + rK) \cap E, (t-r)K) \leqslant N((2R + r)K \cap E, (t-r)K).$$

Είναι τότε άμεσο ότι

$$N((2R+r)K \cap E, (t-r)K) \leqslant \left(1 + \frac{2(2R+r)}{t-r}\right)^m \leqslant 2^m \left(\frac{2R+t}{t-r}\right)^m, \tag{4.4.2}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 4.4.3. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα των Vershynin και Rudelson (βλέπε [59, Λήμμα 5.2]): Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $K \supseteq \delta B_2^n$ και αν $P_F(K) \supseteq B_F$ για κάποιον $F \in G_{n,k}$, $k \geqslant (1-\varepsilon)n$, τότε

$$N(B_2^n, 4K) \leqslant (C/\delta)^{2\varepsilon n}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει ότι εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στην θέση του Λήμματος 4.4.1 θα παίρναμε το ίδιο φράγμα με αυτό που δίνει η Πρόταση 4.4.4 που ακολουθεί.

Πρόταση 4.4.4. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $q \leqslant \sqrt{n}$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και για κάθε*

$$1 \leqslant t \leqslant \min\left\{\sqrt{q},\ c_2(2-\alpha)^{-1}(n/q^2)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}\right\} \tag{4.4.3}$$

έχουμε

$$\max\Big\{\log N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big), \log N\big(\sqrt{q}Z_q^\circ(\mu), tB_2^n\big)\Big\}$$

$$\leqslant c(\alpha)\frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}}\max\left\{\log\frac{\sqrt{2q}}{t},\ \log\frac{1}{(2-\alpha)t}\right\}, \tag{4.4.4}$$

όπου $c(\alpha)\leqslant C(2-\alpha)^{-2/3}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, αφού $B_2^n\subseteq Z_q(\mu)$, οι τιμές του t που μας ενδιαφέρουν φτάνουν μέχρι την $\sqrt{q}$. Σταθεροποιούμε $\varepsilon\in(0,1)$, θέτουμε $k=(1-\varepsilon)n$ και θεωρούμε τυχόντα $F\in G_{n,k}$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.4.1 για τα σώματα $\sqrt{q}B_2^n$ και $Z_q(\mu)$ με $R=\sqrt{q}$ και $r=t/2$ βλέπουμε ότι, για κάθε $1\leqslant t<\sqrt{q}$,

$$N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big)\leqslant\left(\frac{c_1\sqrt{q}}{t}\right)^{\varepsilon n}N\left(\sqrt{q}B_F, \frac{t}{4}P_F\big(Z_q(\mu)\big)\right). \tag{4.4.5}$$

Αν $q^2\leqslant\varepsilon n$ τότε η Πρόταση 4.3.3 δείχνει ότι, για κάθε $1\leqslant\alpha<2$, υπάρχει $F\in G_{n,k}$, $k=(1-\varepsilon)n$, ώστε $P_F(Z_q(\mu))\supseteq c_2(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}}\sqrt{q}B_F$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big)\leqslant\left(\frac{c_3\sqrt{q}}{t}\right)^{\varepsilon n}N\left(B_F, c_4t(2-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}}B_F\right). \tag{4.4.6}$$

Στο τέλος επιλέγουμε $\varepsilon\simeq[(2-\alpha)t]^{-\frac{2\alpha}{\alpha+4}}$ (ο περιορισμός $[(2-\alpha)t]^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}\leqslant cn/q^2$ χρειάζεται σε αυτό το σημείο—παρατηρήστε ότι, αν π.χ. $q\leqslant n^{3/7}$, αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε οποιαδήποτε τιμή του t μέχρι την $\sqrt{q}$). Με αυτήν την επιλογή του ε, από την (4.4.6) παίρνουμε

$$\log N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big)\leqslant c(\alpha)\frac{n\log(2q/t^2)}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}}. \tag{4.4.7}$$

Αυτό αποδεικνύει το άνω φράγμα για τον πρώτο αριθμό κάλυψης στην (4.4.4) υπό τον περιορισμό $t\geqslant c_1(2-\alpha)^{-1}$ (διότι ο $(2-\alpha)t\simeq\varepsilon^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}$ πρέπει να είναι μικρότερος από 1).

Στο διάστημα $1\leq t\leq c(2-\alpha)^{-1}$ χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big)\leqslant N\big(\sqrt{q}B_2^n, c_1(2-\alpha)^{-1}Z_q(\mu)\big)\,N\big(Z_q(\mu), c_1^{-1}(2-\alpha)tZ_q(\mu)\big). \tag{4.4.8}$$

Παρατηρώντας ότι ο τελευταίος αριθμός κάλυψης φράσσεται από $\big(1+c(2-\alpha)^{-1}t^{-1}\big)^n$ και κάνοντας στοιχειώδεις υπολογισμούς ολοκληρώνουμε την απόδειξη για τον πρώτο αριθμό κάλυψης στην (4.4.4).

Το φράγμα για τον δεύτερο αριθμό κάλυψης στην (4.4.4) έπεται άμεσα από το θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς κάλυψης. □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.4 αντί για την Πρόταση 4.3.3 παίρνουμε την εξής:

Πρόταση 4.4.5. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $2 \leqslant q \leqslant n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και για κάθε*

$$1 \leqslant t \leqslant \min\left\{\sqrt{q},\ c_2(2-\alpha)^{-1}L_n\left(\frac{n}{q}\right)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}\right\} \tag{4.4.9}$$

έχουμε

$$\max\Big\{\log N\big(\sqrt{q}B_2^n,\ tZ_q(\mu)\big),\ \log N\big(\sqrt{q}Z_q^\circ(\mu),\ tB_2^n\big)\Big\}$$
$$\leqslant c(\alpha)L_n^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}\,\frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}}\,\max\left\{\log\frac{\sqrt{2q}}{t},\ \log\frac{L_n}{(2-\alpha)t}\right\}, \tag{4.4.10}$$

όπου $c(\alpha) \leqslant C(2-\alpha)^{-2/3}$ και $c_1, c_2, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της προηγούμενης απόδειξης, και η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα παίρνουμε υπόψιν το γεγονός ότι, για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, έχουμε $L_{\varepsilon n} \leqslant cL_n$ για κάποια απόλυτη σταθερά c. Παρατηρήστε ότι σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε t μέχρι την $\sqrt{q}$ αν περιοριστούμε σε εκείνα τα q τα οποία δεν ξεπερνούν την $\sqrt{L_n}n^{3/4}$. □

Παρατήρηση 4.4.6. Αν δεν χρησιμοποιήσουμε την μονοτονία της L_n αλλά προτιμήσουμε το φράγμα $L_{\varepsilon n} \leqslant \sqrt[4]{\varepsilon n}$, καταλήγουμε σε ένα άνω φράγμα της μορφής

$$\frac{C}{(2-\alpha)^{\frac{4\alpha}{\alpha+8}}}\,\frac{n^{\frac{2\alpha+8}{\alpha+8}}\log q}{t^{\frac{4\alpha}{\alpha+8}}} \tag{4.4.11}$$

για το $\max\{\log N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big), \log N\big(\sqrt{q}Z_q^\circ(\mu), tB_2^n\big)\}$. Έχουμε έτσι καλύτερο εκθέτη του t για κάθε α, όμως οι περιορισμοί της απόδειξης μας αναγκάζουν να κοιτάξουμε μόνο τα t στο διάστημα

$$c(2-\alpha)^{-1}\sqrt[4]{n} \leqslant t \leqslant c(2-\alpha)^{-1}\frac{n^{\frac{2\alpha+8}{4\alpha}}}{q^{\frac{\alpha+8}{4\alpha}}} \tag{4.4.12}$$

(πάλι το t μπορεί να φτάσει μέχρι την $\sqrt{q}$ αν, για παράδειγμα, $q \leqslant n^{6/7}$). Σε αυτό το διάστημα, το τελευταίο άνω φράγμα για τους αριθμούς κάλυψης είναι καλύτερο μόνο αν η L_n συμπεριφέρεται «άσχημα» ως προς το n.

4.5 Άνω φράγμα για το $M(Z_q(\mu))$

Για να χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήσεις αριθμών κάλυψης που αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο ώστε να δώσουμε άνω φράγμα για το $M(Z_q(\mu))$, χρησιμοποιούμε την διάσπαση Dudley–Fernique (βλέπε π.χ. [17, §2.5.2]). Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σώμα

$K := \sqrt{q}Z_q^\circ(\mu)$ και, για κάθε $1 \leqslant j \leqslant \log q$, θεωρούμε τον αριθμό κάλυψης $N(K, 2^{-j}RB_2^n)$, όπου $R = R(K) \leqslant \sqrt{q}$. Υπάρχει $N_j \subseteq K$ με $|N_j| = N(K, 2^{-j}RB_2^n)$ ώστε, για κάθε $x \in K$ να μπορούμε να βρούμε $v \in N_j$ με $\|x - v\|_2 \leqslant 2^{-j}R$. Θέτουμε $N_0 = \{0\}$ και $Z_j = N_j - N_{j-1}$. Τότε, έχουμε:

Λήμμα 4.5.1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in K$ υπάρχουν $z_1, \dots, z_m, w_m$ με $z_j \in Z_j \cap \frac{3R}{2^j} B_2^n$ και $w_m \in \frac{R}{2^m} B_2^n$ ώστε*

$$x = z_1 + \cdots + z_m + w_m, \tag{4.5.1}$$

όπου $R = R(K)$ είναι η περιγεγραμμένη ακτίνα του K.

Απόδειξη. Έστω $x \in K$. Από τον ορισμό του N_j, μπορούμε να βρούμε $y_j \in N_j$, $j = 1, \dots, m$, τέτοια ώστε

$$\|x - y_j\|_2 \leqslant \frac{R}{2^j}.$$

Γράφουμε

$$x = (y_1 - 0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_m - y_{m-1}) + (x - y_m).$$

Θέτουμε $y_0 = 0$ και $w_m = x - y_m$, $z_j = y_j - y_{j-1}$ για $j = 1, \dots, m$. Τότε, $\|w_m\|_2 = \|x - y_m\|_2 \leqslant R/2^m$, και $z_j \in N_j - N_{j-1} = Z_j$. Επίσης,

$$\|z_j\|_2 \leqslant \|x - y_j\|_2 + \|x - y_{j-1}\|_2 \leqslant \frac{R}{2^j} + \frac{R}{2^{j-1}} = \frac{3R}{2^j}.$$

Τέλος, $x = z_1 + \cdots + z_m + w_m$, όπως θέλαμε. □

Θεώρημα 4.5.2 («μικρές» τιμές του q)**.** *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και για κάθε*

$$1 \leqslant q \leqslant c(2-\alpha)^{-2/7} n^{\frac{\alpha+4}{3\alpha+8}}, \tag{4.5.2}$$

έχουμε

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C(2-\alpha)^{-1/3} \frac{\sqrt{\max\big\{\log q,\ \log(2-\alpha)^{-1}\big\}}}{q^{\frac{\alpha}{2\alpha+8}}}, \tag{4.5.3}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n^{3/7}$,

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C \frac{(\log q)^{5/6}}{\sqrt[6]{q}}. \tag{4.5.4}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $K=\sqrt{q}Z_q^{\circ}(\mu)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.5.1, για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in K$ μπορούμε να βρούμε $(z_j)_{j\leqslant m}\subset Z_j\cap \frac{3R}{2^j}B_2^n$ και $w_m\in\frac{R}{2^m}B_2^n$ ώστε $x=z_1+\cdots+z_m+w_m$. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε

$$|\langle x,\theta\rangle|\leqslant\sum_{j=1}^m|\langle z_j,\theta\rangle|+|\langle w_m,\theta\rangle|. \tag{4.5.5}$$

Γράφουμε $\overline{z}=z/\|z\|_2$ για κάθε $z\neq 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} w(K) &= \int_{S^{n-1}}\max_{x\in K}|\langle x,\theta\rangle|\,d\sigma(\theta) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^m\int_{S^{n-1}}\max_{z\in Z_j}|\langle\theta,z\rangle|\,d\sigma(\theta)+\int_{S^{n-1}}\max_{w\in 2^{-m}R\,B_2^n}|\langle w,\theta\rangle|\,d\sigma(\theta) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^m\frac{3R}{2^j}\int_{S^{n-1}}\max_{z\in Z_j}|\langle\theta,\overline{z}\rangle|\,d\sigma(\theta)+\frac{R}{2^m} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^m\frac{c_3R}{2^j}\frac{\sqrt{\log|Z_j|}}{\sqrt{n}}+\frac{R}{2^m}, \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το εξής:

Λήμμα. Για κάθε $u_1,\ldots,u_N\in S^{n-1}$ ισχύει

$$\int_{S^{n-1}}\max_{j\leqslant N}|\langle\theta,u_j\rangle|\,d\sigma(\theta)\leqslant c_3\frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{n}}. \tag{4.5.7}$$

Από τον ορισμό των Z_j και από την Πρόταση 4.4.4 παίρνουμε

$$\log|Z_j|\leqslant\log|N_j|+\log|N_{j-1}|\leqslant c(\alpha)n\left(\frac{2^j}{R}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}\max\bigl\{\log q,\ \log(2-\alpha)^{-1}\bigr\}, \tag{4.5.8}$$

όπου υποθέσαμε ότι $R/2^m\geqslant 1$ και $c(\alpha)\leqslant C(2-\alpha)^{-\frac{2\alpha}{\alpha+4}}$. Εισάγοντας αυτήν την ανισότητα στην (4.5.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} w(K) &\leqslant \frac{c_5}{(2-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+4}}}\,R^{\frac{4}{\alpha+4}}\sqrt{\max\Bigl\{\log q,\ \log\frac{1}{2-\alpha}\Bigr\}}\,\sum_{j\leqslant m}\frac{1}{2^{\frac{4j}{\alpha+4}}}+\frac{R}{2^m} \\ &\leqslant \frac{C}{(2-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+4}}}\,q^{\frac{2}{\alpha+4}}\sqrt{\max\Bigl\{\log q,\ \log\frac{1}{2-\alpha}\Bigr\}}, \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

αν το m είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $R/2^m\simeq 1$. Απομένει να παρατηρήσουμε ότι

$$w(K)=\sqrt{q}w\bigl(Z_q^{\circ}(\mu)\bigr)=\sqrt{q}M\bigl(Z_q(\mu)\bigr),$$

άρα

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant \frac{C}{(2-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+4}}} \frac{\sqrt{\max\{\log q,\ \log(2-\alpha)^{-1}\}}}{q^{\frac{\alpha}{2\alpha+8}}}.$$

Τέλος, για να πάρουμε την (4.5.4), θέτουμε $\alpha = 2 - \frac{1}{\log q}$. □

Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.5.2 για το ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ_K, το οποίο έχει πυκνότητα $L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}$, με $q = n^{3/7}$ (αυτή είναι η βέλτιστη επιλογή για τον σκοπό αυτό) και παίρνουμε:

Θεώρημα 4.5.3. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ισοτροπικό και συμμετρικό. Τότε,*

$$M(K) \leqslant C \frac{(\log n)^{5/6}}{L_K \sqrt[14]{n}}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.4.5 αντί για την Πρόταση 4.4.4, παίρνουμε επίσης το εξής:

Θεώρημα 4.5.4. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και για κάθε*

$$1 \leqslant q \leqslant c_1 (2-\alpha)^{-1/3} L_n^{\frac{2\alpha}{2\alpha+4}} n^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}, \tag{4.5.10}$$

έχουμε

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C (2-\alpha)^{-1/3} L_n^{\frac{\alpha}{\alpha+4}} \frac{\sqrt{\max\{\log q,\ \log L_n (2-\alpha)^{-1}\}}}{q^{\frac{\alpha}{2\alpha+8}}}, \tag{4.5.11}$$

όπου c_1, $C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα, για κάθε q το οποίο ικανοποιεί την $L_n \log q \leqslant q \leqslant \sqrt{L_n}\, n^{3/4}$,

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C \frac{\sqrt[3]{L_n} (\log q)^{5/6}}{\sqrt[6]{q}} \tag{4.5.12}$$

και, για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$M(K) \leqslant C \frac{\sqrt[4]{L_n} (\log n)^{5/6}}{L_K \sqrt[8]{n}}.$$

Παρατήρηση 4.5.5. Όμοια, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 4.4.6 αντί για την Πρόταση 4.4.4, βλέπουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$, για κάθε

$$c_1 (2-\alpha)^{-2} \sqrt{n} \leqslant q \leqslant c_2 (2-\alpha)^{-1/3} n^{\frac{2\alpha+8}{3\alpha+8}}, \tag{4.5.13}$$

έχουμε

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C(2-\alpha)^{-2/5}\, \sqrt[4]{n}^{\frac{2\alpha}{\alpha+8}}\, \frac{\sqrt{\log q}}{q^{\frac{\alpha}{\alpha+8}}}, \tag{4.5.14}$$

όπου c_1, c_2 και $C>0$ είναι απόλυτες σταθερές, και, για κάθε $\sqrt{n}\log n \leqslant q \leqslant n^{6/7}$,

$$M\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant C\frac{\sqrt[10]{n}(\log n)^{9/10}}{\sqrt[5]{q}}. \tag{4.5.15}$$

Συνεπώς, για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$M(K) \leqslant C\frac{(\log n)^{9/10}}{L_K\, \sqrt[14]{n}}.$$

4.6 Άλλες παρατηρήσεις

Σε αυτήν την τελευταία παράγραφο συγκεντρώνουμε ορισμένες πρόσθετες παρατηρήσεις για την γεωμετρία των κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$.

1. Εγγεγραμμένη ακτίνα των προβολών. Πρώτα δίνουμε κάτω φράγματα για τις ποσότητες $R(Z_q(\mu)\cap F)$ και $R(Z_q^\circ(\mu)\cap F)$. Στην πραγματικότητα ισχύουν για κάθε $1\leqslant k<n$ και κάθε $F\in G_{n,k}$. Λόγω δυϊσμού, αυτές οι εκτιμήσεις (συνδυαζόμενες με την Πρόταση 4.3.3) προσδιορίζουν την εγγεγραμμένη ακτίνα των $P_F(Z_q^\circ(\mu))$ και $P_F(Z_q(\mu))$. Το σημείο εκκίνησης είναι η ακόλουθη πρόταση από το [19].

Πρόταση 4.6.1. *Έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\gamma\geqslant 1$ τέτοιος ώστε*

$$N(B_2^n, tA) \leqslant \exp\left(\frac{\gamma n}{t^p}\right)$$

για κάθε $t\geqslant 1$. Για κάθε $\delta\in(0,1)$ και κάθε $F\in G_{n,\lfloor\delta n\rfloor}$ έχουμε

$$w(A\cap F) \geqslant \frac{c\delta^{1/p}}{\gamma^{1/p}}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $k=\lfloor\delta n\rfloor$ και θεωρούμε τυχόντα $F\in G_{n,k}$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση και το θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς κάλυψης βλέπουμε ότι η προβολή $P_F(A^\circ)$ του A° στον F ικανοποιεί την

$$N\big(P_F(A^\circ), tB_F\big) \leqslant N(A^\circ, tB_2^n) \leqslant \exp\left(\frac{\gamma k}{\delta t^p}\right),$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.2.2 με $W = P_F(A^\circ)$, $n = k$ και $\varepsilon = 1/2$. Υπάρχει $H \in G_{k,\lfloor k/2 \rfloor}(F)$ για τον οποίο

$$P_F(A^\circ) \cap H \subseteq \frac{c\gamma^{1/p}}{\delta^{1/p}} B_H.$$

Παίρνοντας πολικά στον H βλέπουμε ότι $P_H(A \cap F) \supseteq \frac{c\delta^{1/p}}{\gamma^{1/p}} B_H$.

Υπενθυμίζουμε τώρα ότι, αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$ και αν L είναι ένας s-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, τότε $M(C \cap L) \lesssim \sqrt{m/s}\, M(C)$ (βλέπε [20, Παράγραφος 4.2]). Επομένως, θέτοντας $C = (A \cap F)^\circ$ και $L = H$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(A \cap F) = M\big((A \cap F)^\circ\big) &\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} M\big((A \cap F)^\circ \cap H\big) = \frac{c}{\sqrt{2}} w\big(P_H(A \cap F)\big) \\ &\geqslant \frac{c'\delta^{1/p}}{\gamma^{1/p}}, \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.6.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $q \leqslant \sqrt{n}$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$, $0 < \delta < 1$ και για κάθε $F \in G_{n,\lfloor \delta n \rfloor}$ έχουμε*

$$R\big(Z_q(\mu) \cap F\big) \geqslant w\big(Z_q(\mu) \cap F\big) \geqslant c \frac{(2-\alpha)\delta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}}{\left(\log \frac{1}{2-\alpha}\right)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha}}} \sqrt{q}.$$

Απόδειξη. Από την πρόταση 4.4.4 γνωρίζουμε ότι

$$\log N\big(\sqrt{q}B_2^n, tZ_q(\mu)\big) \leqslant c(\alpha) \frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha+4}}} \max\left\{\log \frac{\sqrt{2q}}{t},\ \log \frac{1}{(2-\alpha)t}\right\},$$

όπου $c(\alpha) \leqslant C(2-\alpha)^{-2/3}$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.6.1 με

$$\gamma = c(\alpha) \frac{\max\{\log q, \log \frac{1}{2-\alpha}\}}{\sqrt{q}^p} \tag{4.6.1}$$

και $p = \frac{2\alpha}{\alpha+4}$. □

Ένα παρόμοιο επιχείρημα εφαρμόζεται και για το $Z_q^\circ(\mu)$. Αφού $M(Z_q^\circ(\mu)) = w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q}$ για κάθε $q \leqslant \sqrt{n}$, από την δυϊκή ανισότητα Sudakov έχουμε

$$\log N\left(B_2^n, t\sqrt{q}Z_q^\circ(\mu)\right) \leqslant \frac{cn}{t^2}$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.6.1 με $\gamma = cq$ και $p = 2$ παίρνουμε:

Θεώρημα 4.6.3. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $q \leqslant \sqrt{n}$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$, $0 < \delta < 1$ και για κάθε $F \in G_{n,\lfloor \delta n \rfloor}$ έχουμε*

$$R\big(Z_q^\circ(\mu) \cap F\big) \geqslant w\big(Z_q^\circ(\mu) \cap F\big) \geqslant \frac{c\sqrt{\delta}}{\sqrt{q}}.$$

2. Άνω φράγμα για το $M_{-k}(Z_q(\mu))$. Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p \neq 0$, ορίζουμε

$$M_p(C) := \left(\int_{S^{n-1}} \|\theta\|_C^p d\sigma(\theta)\right)^{1/p}. \tag{4.6.2}$$

Οι Litvak, Milman και Schechtman απέδειξαν στο [36] ότι αν b είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία ισχύει η $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\max\left\{M(C), c_1\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leqslant M_p(C) \leqslant \max\left\{2M(C), c_2\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $p \in [1,n]$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$M_p(C) \simeq M(C) \tag{4.6.3}$$

όταν $p \leqslant k(C) := k_*(C^\circ)$. Οι Klartag και Vershynin όρισαν στο [33] την παράμετρο

$$d(C) = \min\left\{-\log\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} : \|x\| \leqslant \frac{M(C)}{2}\right\}\right), n\right\}$$

και παρατήρησαν ότι το $d(C)$ είναι πάντα μεγαλύτερο του $k(C)$. Το βασικό τους αποτελέσμα συμπληρώνει την (4.6.3) δίνοντας πληροφορίες για τις αρνητικές τιμές του p: Έχουμε ότι

$$M_{-p}(C) \simeq M(C) \tag{4.6.4}$$

για κάθε $0 < p \leqslant d(C)$.

Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Αφού το $M_{-p}(Z_q(\mu))$ είναι προφανώς μικρότερο από το $M(Z_q(\mu))$, στόχος μας είναι να δώσουμε άνω φράγματα για αυτές τις ποσότητες και να τα συγκρίνουμε με αυτά της Παραγράφου 4.5. Θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο Λήμμα από το [52], το οποίο είναι αναδιατύπωση της Πρότασης 3.5.22.

Λήμμα 4.6.4. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k < n$,*

$$M_{-k}(C) \simeq \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}\big(P_F(C^\circ)\big)^{-k} d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}. \tag{4.6.5}$$

Πρόταση 4.6.5. *Εστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ και $k \geqslant q^2 \log^2 q$ έχουμε*

$$M_{-k}\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant \frac{c \log^3 q}{\sqrt{q}} \left(\frac{n}{k}\right)^{3/2}. \tag{4.6.6}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\alpha = 2 - \frac{1}{\log q}$. Από την απόδειξη της Πρότασης 4.4.4 βλέπουμε ότι αν $t \leq \sqrt{q}$ και

$$\frac{q^2}{(\log q)^{2/3}} t^{2/3} \leqslant n$$

τότε

$$N\big(\sqrt{q} Z_q^\circ(\mu),\ tB_2^n\big) \leqslant \exp\left(c_1 \frac{n(\log q)^{2/3}}{t^{2/3}} \log \frac{2q}{t^2}\right).$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επομένως, για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k < n$ και κάθε $F \in G_{n,k}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{q}\,|P_F(Z_q^\circ(\mu))|^{1/k} &\leqslant t|B_2^k|^{1/k}\, N\Big(\sqrt{q} P_F\big(Z_q^\circ(\mu)\big), tB_F\Big)^{1/k} \\ &\leqslant t|B_2^k|^{1/k} \exp\left(c_1 \frac{n(\log q)^{2/3}}{kt^{2/3}} \log \frac{2q}{t^2}\right).\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t \simeq (n/k)^{3/2} \log^3 q$ συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\frac{|P_F(Z_q^\circ(\mu))|}{|B_2^k|}\right)^{1/k} \leqslant \frac{c \log^3 q}{\sqrt{q}} \left(\frac{n}{k}\right)^{3/2},$$

και το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 4.6.4. □

Σημείωση. Αφού $Z_q(\mu) \supseteq B_2^n$, έχουμε το προφανές άνω φράγμα $M_{-k}(Z_q(\mu)) \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant k < n$. Άρα, η εκτίμηση της Πρότασης 4.6.5 είναι μη τετριμμένη για $k \geqslant n \log^2 q / q^{1/3}$.

Παρατήρηση 4.6.6. Όμοια, ξεκινώντας από την Πρόταση 4.4.5 και μιμούμενοι την απόδειξη της Πρότασης 4.6.5 παίρνουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 4.6.7. *Εστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ και για κάθε $k \geqslant L_n^{2/3} q$ έχουμε*

$$M_{-k}\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant \frac{cL_n}{\sqrt{q}} \left(\frac{n}{k}\right)^{3/2}. \tag{4.6.7}$$

Υπό το πρίσμα της (4.6.4) ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι να δώσουμε κάτω φράγματα για το $d(Z_q(\mu))$. Αυτό γιατί, αν το $d(Z_q(\mu))$ είναι αρκετά μεγάλο ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.6.5 ή την Πρόταση 4.6.7, τότε θα μπορούσαμε να έχουμε ενδεχομένως καλύτερη πληροφορία και για το $M(Z_q(\mu))$. Αυτό που γνωρίζουμε είναι ένα κάτω φράγμα για το $k(Z_q(\mu))$ και το $k(Z_q^\circ(\mu))$ στο διάστημα $2 \leqslant q \leqslant q_*(\mu)$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant q_*(\mu)$ έχουμε

$$\min\Big\{k\big(Z_q(\mu)\big), k\big(Z_q^\circ(\mu)\big)\Big\} \geqslant \frac{c_1 n}{q}, \tag{4.6.8}$$

όπου c_1 είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για να το δούμε αυτό, υπενθυμίζουμε ότι $B_2^n \subseteq Z_q(\mu) \subseteq c_2 q B_2^n$, άρα

$$R\big(Z_q(\mu)\big) \leqslant c_2 q \quad \text{και} \quad R\big(Z_q^\circ(\mu)\big) \leqslant 1.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την $w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q}$ παίρνουμε

$$k_*\big(Z_q(\mu)\big) \geqslant c_3 n \frac{w^2\big(Z_q(\mu)\big)}{R^2\big(Z_q(\mu)\big)} \geqslant c_4 n \frac{q}{q^2} = \frac{c_4 n}{q}.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $w(C^\circ)w(C) \geqslant 1$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C, και λαμβάνοντας υπόψιν μας την $w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q}$, βλέπουμε ότι $w(Z_q^\circ(\mu)) \geqslant c/\sqrt{q}$ για κάθε $2 \leqslant q \leqslant q_*(\mu)$, άρα

$$k_*\big(Z_q^\circ(\mu)\big) \geqslant c_5 n \frac{w^2\big(Z_q^\circ(\mu)\big)}{R^2\big(Z_q^\circ(\mu)\big)} \geqslant \frac{c_6 n}{q}.$$

3. Εκτιμήσεις για μικρές μπάλες. Σε αυτήν την τελευταία υποενότητα περιγράφουμε μια προσέγγιση που οδηγεί σε εκτιμήσεις για τον όγκο της τομής των κεντροειδών σωμάτων με «μικρές μπάλες». Είναι βολικό να κανονικοποιήσουμε τον όγκο, και να θεωρήσουμε το $\overline{Z_q}(\mu)$ αντί του $Z_q(\mu)$. Υπενθυμίζουμε ότι αν $q \leqslant \sqrt{n}$ τότε $|Z_q(\mu)|^{1/n} \simeq \sqrt{q/n}$, επομένως

$$\overline{Z_q}(\mu) \simeq \sqrt{n/q}\, Z_q(\mu).$$

Τότε, $w(\overline{Z_q}(\mu)) \simeq \sqrt{n/q} w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{n}$, που μας δίνει

$$\log N\big(\overline{Z_q}(\mu), sB_2^n\big) \leqslant c_1 n \left(\frac{w\big(\overline{Z_q}(\mu)\big)}{s}\right)^2 \leqslant \frac{c_2 n^2}{s^2}.$$

Χρησιμοποιούμε το ακόλουθο ([14], Λήμμα 5.6).

Λήμμα 4.6.8. *Έστω C ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $s > 0$,*

$$r_s := \log N(K, sB_2^n) < n. \tag{4.6.9}$$

Τότε,

$$I_{-r_s}(K) \leqslant cs.$$

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $|K \cap (-z_0 + sB_2^n)| \geqslant |K \cap (z + sB_2^n)|$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Ιτ φολλοως τηατ

$$|(K + z_0) \cap sB_2^n| \cdot N(K, sB_2^n) \geqslant |K| = 1. \tag{4.6.10}$$

Θέτουμε $q = r_s$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov, τον ορισμό του $I_{-q}(K + z_0)$ και την (4.6.9), παίρνουμε

$$|(K + z_0) \cap 3^{-1} I_{-q}(K + z_0) B_2^n| \leqslant 3^{-q} < e^{-q} = e^{-r_s} \leqslant \frac{1}{N(K, sB_2^n)}.$$

Από την (4.6.10) έπεται ότι

$$|(K + z_0) \cap 3^{-1} I_{-q}(K + z_0) B_2^n| < |(K + z_0) \cap sB_2^n|,$$

και αυτό δείχνει ότι

$$3^{-1} I_{-q}(K + z_0) \leqslant s.$$

Αφού το K έχει βαρύκεντρο το 0, η ανισότητα του Fradelizi δείχνει ότι $I_{-k}(K + z) \geqslant \frac{1}{e} I_{-k}(K)$ για κάθε $1 \leqslant k < n$ και για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Για να το δούμε αυτό, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.5.21 γράφουμε

$$\begin{aligned} I_{-k}(K + z) &= c_{n,k} \left(\int_{G_{n,k}} |(K + z) \cap F^{\perp}| \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/k} \\ &\geqslant \frac{c_{n,k}}{e} \left(\int_{G_{n,k}} |K \cap F^{\perp}| \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/k} = \frac{1}{e} I_{-k}(K). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Χρησιμοποιούμε τώρα το Λήμμα 4.6.8 για το $\overline{Z_q}(\mu)$ και παίρνουμε:

Πρόταση 4.6.9. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ τότε*

$$I_{-r}\big(\overline{Z_q}(\mu)\big) \leqslant \frac{c_3 n}{\sqrt{r}}$$

για κάθε $1 \leqslant r \leqslant cn$.

Από την ανισότητα Markov έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση για μικρές μπάλες:

$$\left|\left\{x \in \overline{Z_q}(\mu) : \|x\|_2 \leqslant \varepsilon I_{-r}\big(\overline{Z_q}(\mu)\big)\right\}\right| \leqslant \varepsilon^r .$$

Κεφάλαιο 5

Τυχαίες στροφές

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $\|\cdot\|_C$ για τη νόρμα που επάγεται από το C στον $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με $M := M(C)$ και με $w(C)$ την μέση τιμή αυτής της νόρμας στην μοναδιαία σφαίρα και το μέσο πλάτος του C αντίστοιχα. Σε αυτό το Κεφάλαιο θεωρούμε την τομή του C με το $U(C)$, όπου $U \in O(n)$ είναι ένας τυχαίος ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$, και ενδιαφερόμαστε κυρίως για την μέση τιμή του όγκου και την περιγεγραμμένη ακτίνα $R(C \cap U(C)) := \max\{\|x\|_2 : x \in C \cap U(C)\}$ του $C \cap U(C)$.

5.1 Κάτω φράγματα για τον όγκο

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για να δώσουμε κάτω φράγμα για τον όγκο του $C \cap U(C)$ χρησιμοποιούμε ένα απλό επιχείρημα που βασίζεται σε εκτιμήσεις για αριθμούς κάλυψης. Θυμηθείτε ότι ο αριθμός κάλυψης $N(A, B)$ ενός σώματος A από ένα άλλο σώμα B είναι ο μικρότερος φυσικός N για τον οποίον υπάρχουν N μεταφορές του B η ένωση των οποίων καλύπτει το A. Χρειαζόμαστε κάποιες στοιχειώδεις ανισότητες για αριθμούς κάλυψης, οι οποίες μπορούν, για παράδειγμα, να βρεθούν στο [54, Κεφάλαιο 7].

Πρόταση 5.1.1. (α) Αν C είναι ένα κυρτό σώμα και L είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$2^{-n}\frac{|C+L|}{|L|} \leqslant N(C, L) \leqslant 2^n\frac{|C+L|}{|L|}. \tag{5.1.1}$$

(β) Αν τα C και L είναι και τα δύο συμμετρικά, τότε

$$|C| \leqslant N(C,L)|C\cap L|. \tag{5.1.2}$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία μπορούμε να δώσουμε κάτω φράγμα για τον $|C \cap U(C)|$ το οποίο μάλιστα ισχύει για κάθε $U \in O(n)$. Από την (5.1.2) προκύπτει ότι

$$1 = |C| \leqslant N(C,U(C))\,|C\cap U(C)|. \tag{5.1.3}$$

Για να εκτιμήσουμε τον $N(C,U(C))$, για κάθε $\varrho > 0$ γράφουμε

$$N(C,U(C)) \leqslant N(C,\varrho\overline{B_2^n})\,N(\varrho\overline{B_2^n},U(C)) = N(C,\varrho\overline{B_2^n})\,N(\varrho\overline{B_2^n},C). \tag{5.1.4}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$N(\varrho\overline{B_2^n},C) \leqslant 2^n|\varrho\overline{B_2^n}+C| \leqslant (4\varrho)^n N(C,\varrho\overline{B_2^n}), \tag{5.1.5}$$

αν χρησιμοποιήσουμε την (5.1.1) και το γεγονός ότι $|C| = |\overline{B_2^n}| = 1$. Έπεται ότι

$$N(C,U(C)) \leqslant (4\varrho)^n\big[N(C,\varrho\overline{B_2^n})\big]^2, \tag{5.1.6}$$

και με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$N(C,U(C)) \leqslant (4/\varrho)^n\big[N(\varrho\overline{B_2^n},C)\big]^2, \tag{5.1.7}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες, παίρνουμε:

Λήμμα 5.1.2. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\varrho > 0$ και για κάθε $U \in O(n)$ ισχύει*

$$|C\cap U(C)| \geqslant \big[\min\{(4\varrho)^{n/2}N(C,\varrho\overline{B_2^n}),(4/\varrho)^{n/2}N(\varrho\overline{B_2^n},C)\}\big]^{-2}. \tag{5.1.8}$$

Μπορούμε να φράξουμε τους αριθμούς κάλυψης $N(C,\varrho\overline{B_2^n})$ και $N(\varrho\overline{B_2^n},C)$ μέσω της ανισότητας του Sudakov και της δυϊκής της (βλέπε π.χ. [54]). Θυμηθείτε ότι $\overline{B_2^n} \simeq \sqrt{n}B_2^n$, άρα

$$N(C,\varrho\overline{B_2^n}) \leqslant \exp(c_1w^2(C)/\varrho^2) \qquad \text{και} \qquad N(\varrho\overline{B_2^n},C) \leqslant \exp(c_1\varrho^2n^2M^2(C)),$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιλέγοντας $\varrho = 1$ και παίρνοντας υπόψιν μας το γεγονός ότι $\min\{w(C)/\sqrt{n},\sqrt{n}M(C)\} \geqslant c_2$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$4^n \leqslant \exp(c_3n\min\{w^2(C)/n, nM^2(C)\}),$$

συμπεραίνουμε το εξής.

Πρόταση 5.1.3. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $U \in O(n)$ έχουμε*

$$|C \cap U(C)| \geqslant e^{-cn \min\{w^2(C)/n, nM^2(C)\}}, \tag{5.1.9}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.1.3 στις κανονικοποιημένες μπάλες $\overline{B_p^n}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Οι γνωστές εκτιμήσεις για τον όγκο $|B_p^n|$ της B_p^n δείχνουν ότι αν $1 \leqslant p \leqslant 2$ τότε $\overline{B_p^n} \simeq n^{1/p} B_p^n$. Από την άλλη πλευρά, $\|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|x\|_2$, απ΄ όπου παίρνουμε $M(B_p^n) \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. Συνεπώς,

$$M(\overline{B_p^n}) \leqslant cn^{-\frac{1}{p}} M(B_p^n) \leqslant c/\sqrt{n}.$$

Επιπλέον, αν $2 \leqslant p \leqslant \infty$ και αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τότε $\overline{B_p^n} \simeq n^{1/p} B_p^n$, άρα

$$w(\overline{B_p^n}) \leqslant cn^{\frac{1}{p}} w(B_p^n) = cn^{\frac{1}{p}} M(B_q^n) \leqslant cn^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} = c\sqrt{n}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\min\{w^2(\overline{B_p^n})/n, nM^2(\overline{B_p^n})\} \leqslant c$$

για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τώρα, η Πρόταση 5.1.3 μας δίνει:

Πρόταση 5.1.4. *Για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και για κάθε $U \in O(n)$ έχουμε*

$$|\overline{B_p^n} \cap U(\overline{B_p^n})| \geqslant e^{-cn}, \tag{5.1.10}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Μια δεύτερη εφαρμογή του Λήμματος 5.1.2 προκύπτει στην περίπτωση που το C είναι σε M-θέση. Ο Milman (βλέπε π.χ. [44]) απέδειξε ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ ώστε κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ να έχει μια γραμμική εικόνα $\tilde{C}$ όγκου 1 η οποία ικανοποιεί τις

$$\max\big\{N(\tilde{C}, \overline{B_2^n}), N(\overline{B_2^n}, \tilde{C})\big\} \leqslant \exp(\beta n). \tag{5.1.11}$$

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα C που ικανοποιεί αυτήν την ανισότητα βρίσκεται σε M-θέση με σταθερά β. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.2 παίρνουμε:

Πρόταση 5.1.5. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν το C είναι σε M-θέση με σταθερά β τότε, για κάθε $U \in O(n)$ έχουμε*

$$|C \cap U(C)| \geqslant e^{-2(\beta+1)n}. \tag{5.1.12}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση. Χρησιμοποιούμε το εξής λήμμα (βλέπε [12, Παράγραφος 3.2]): Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $t > 0$,

$$N(K, t\overline{B_2^n}) \leqslant \exp\left(\frac{cnL_K}{t}\right), \tag{5.1.13}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$N(K, L_K\,\overline{B}_2^n) \leqslant e^{cn}. \tag{5.1.14}$$

Όμως τότε, από την (5.1.6) έχουμε

$$N(K, U(K)) \leqslant (4L_K e^{2c})^n \tag{5.1.15}$$

και από το Λήμμα 5.1.2 παίρνουμε το εξής:

Πρόταση 5.1.6. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K \cap U(K)| \geqslant (c_1 L_K)^{-n} \tag{5.1.16}$$

για κάθε $U \in O(n)$, όπου $c_1 \geqslant 4$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

5.2 Άνω φράγματα για τον όγκο

Τα άνω φράγματα που θα δώσουμε για την $\mathbb{E}_U|C \cap U(C)|$ θα βασιστούν στο Λήμμα 5.2.2 το οποίο είναι συνέπεια του θεωρήματος Fubini και του ακόλουθου λήμματος (βλέπε π.χ. [33]). Για την ακρίβεια, τα επόμενα δύο αποτελέσματα ισχύουν για κάθε αστρόμορφο σώμα.

Λήμμα 5.2.1. *Αν A είναι ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma\big(S^{n-1} \cap \tfrac{1}{2}A\big) \leqslant \gamma_n(\sqrt{n}A) \leqslant \sigma(S^{n-1} \cap 2A) + e^{-cn}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε σ_r για το αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο πιθανότητας στην rS^{n-1}. Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι, αφού το A είναι αστρόμορφο,

$$\begin{aligned} \gamma_n(\sqrt{n}A) &\geqslant \gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n \cap \sqrt{n}A) \\ &\geqslant \gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n)\sigma_{2\sqrt{n}}(2\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}A) \\ &= \gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n)\sigma\left(S^{n-1} \cap \tfrac{1}{2}A\right). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$\gamma_n(\{x : \|x\|_2 \geqslant 2\sqrt{n}\}) \leqslant \frac{1}{4n}\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 d\gamma_n(x) = \frac{1}{4},$$

άρα

$$\gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n) = 1 - \gamma_n(\{x : \|x\|_2 \geqslant 2\sqrt{n}\}) \geqslant \frac{3}{4}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\sigma\left(S^{n-1} \cap \tfrac{1}{2}A\right) \leqslant 2\gamma_n(\sqrt{n}A).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\sqrt{n}A \subseteq \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}B_2^n\right) \cup C\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}A\right)$$

όπου, για κάθε $\Theta \subseteq \frac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1}$, συμβολίζουμε με $C(\Theta)$ τον θετικό κώνο που παράγεται από το Θ. Έπεται ότι

$$\gamma_n(\sqrt{n}A) \leqslant \gamma_n\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}B_2^n\right) + \sigma_{\frac{\sqrt{n}}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}A\right).$$

Τώρα,

$$\sigma_{\frac{\sqrt{n}}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}A\right) = \sigma(S^{n-1} \cap 2A),$$

και απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\gamma_n\left(\rho\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant \left(\frac{\rho\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n |B_2^n|,$$

για κάθε $0 < \rho \leqslant 1$. Έπεται ότι

$$\gamma_n\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant e^{-cn},$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

Λήμμα 5.2.2. *Έστω C ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{O(n)} |C \cap U(C)|\, d\nu(U) \leqslant 2\int_C \gamma_n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}C\right) dx. \tag{5.2.2}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες του μέτρου Haar ν στην $O(n)$ μπορούμε να εκφράσουμε την μέση τιμή του $|C\cap U(C)|$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_{O(n)}|C\cap U(C)|\,d\nu(U)&=\int_{O(n)}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_C(x)\chi_C(Ux)\,dx\,d\nu(U)\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_C(x)\int_{O(n)}\chi_C(Ux)\,d\nu(U)\,dx\\&=\int_C\nu(\{U\in O(n):Ux\in C\})\,dx\\&=\int_C\nu(\{U\in O(n):\|x\|_2U(x/\|x\|_2)\in C\})\,dx\\&=\int_C\sigma\left(\left\{\theta\in S^{n-1}:\theta\in\frac{1}{\|x\|_2}C\right\}\right)dx\\&=\int_C\sigma\left(S^{n-1}\cap\frac{1}{\|x\|_2}C\right)dx.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.2.1 παίρνουμε

$$\sigma\Big(S^{n-1}\cap\tfrac{1}{\|x\|_2}C\Big)\leqslant 2\gamma_n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}C\right)\tag{5.2.3}$$

και έχουμε το συμπέρασμα. □

Απλή συνέπεια του Λήμματος 5.2.2 είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.2.3. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha_0>0$ με την εξής ιδιότητα: αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\int_{O(n)}|C\cap U(C)|\,d\nu(U)\leqslant\gamma_n(\alpha_0C)+e^{-n}.\tag{5.2.4}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\rho_n=e^{-1}\omega_n^{-1/n}$. Τότε, έχουμε

$$\int_{C\cap\rho_nB_2^n}\gamma_n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}C\right)dx\leqslant|C\cap\rho_nB_2^n|\leqslant|\rho_nB_2^n|=e^{-n}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x\in C\setminus\rho_nB_2^n$ τότε

$$\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}\leqslant\frac{2\sqrt{n}}{\rho_n}=2e\sqrt{n}\omega_n^{1/n}.$$

Συνεπώς,

$$\int_{C\setminus\rho_nB_2^n}\gamma_n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}C\right)dx\leqslant\gamma_n(\alpha_0C),$$

όπου $\alpha_0 = \sup_n 2e\sqrt{n}\omega_n^{1/n} \sim 2e\sqrt{2\pi e}$. □

Λόγω της Πρότασης 5.2.3, αυτό που χρειάζεται είναι να εκτιμήσουμε το $\gamma_n(tC)$. Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο $d_r(C)$. Για κάθε $r > 1$ θέτουμε

$$d_r(C) = \min\left\{-\log\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} : \|x\|_C \leqslant \frac{M(C)}{r}\right\}\right), n\right\}.$$

Ένα από τα βασικά αποτελέσματα στο [33] είναι η εξής ανισότητα.

Θεώρημα 5.2.4. *Για κάθε $r > 1$ και για $\varepsilon = \frac{1}{32r^2}$ έχουμε*

$$\gamma_n(\varepsilon\sqrt{n}M(C)C) \leqslant (c_1\varepsilon)^{c_2(r)d_r(C)} \leqslant (c_1\varepsilon)^{c_3(r)k(C)}, \tag{5.2.5}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $c_2(r), c_3(r) \simeq \frac{1}{\log(8r)}$.

Για λόγους πληρότητας θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.4. Το βασικό εργαλείο είναι το B-θεώρημα των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey [13]: αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε η συνάρτηση

$$t \mapsto \gamma_n(e^tC)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στο $\mathbb{R}$. Άμεση συνέπεια είναι η ανισότητα

$$\gamma_n(a^\lambda b^{1-\lambda}C) \geqslant \gamma_n(aC)^\lambda\gamma_n(bC)^{1-\lambda}$$

για κάθε $a, b > 0$ και $\lambda \in (0,1)$. Χρησιμοποιούμε αυτό το γεγονός με τον εξής τρόπο. Γράφουμε $m = \mathrm{med}(\|\cdot\|_C)$ για τον μέσο Lévy της $\|\cdot\|_C$ στην S^{n-1}. Από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$\frac{m}{2} \leqslant \int_{\{\theta:\|\theta\|_C\geqslant m\}} \|\theta\|_C\, d\sigma(\theta) \leqslant M(C).$$

Είναι επίσης γνωστό ότι, αντίστροφα, $M(C) \leqslant c_0m$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$. Η παρατήρηση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στο τέλος της απόδειξης.

Ορίζουμε $D = m\sqrt{n}C$. Από το Λήμμα 5.2.1 και τον ορισμό του μέσου Lévy έχουμε

$$\gamma_n(2D) \geqslant \frac{1}{2}\sigma(S^{n-1} \cap mC) \geqslant \frac{1}{4}. \tag{5.2.6}$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας πάλι το Λήμμα 5.2.1, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma_n(\tfrac{1}{4r}D) &\leqslant \sigma\Big(S^{n-1}\cap \frac{m}{2r}C\Big)+e^{-cn} \\ &= \sigma\Big(\{\theta\in S^{n-1}:\|\theta\|_C\leqslant \frac{m}{2r}\}\Big)+e^{-cn} \\ &\leqslant \sigma\left(\{\theta\in S^{n-1}:\|\theta\|_C\leqslant \frac{M(C)}{r}\}\right)+e^{-cn} \\ &\leqslant 2e^{-c_1 d_r(C)},\end{aligned}\tag{5.2.7}$$

όπου $c_1>0$ είναι κατάλληλη απόλυτη σταθερά. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<\varepsilon<\frac{1}{32r^2}$ και κατόπιν εφαρμόζουμε το B-θεώρημα για το σώμα D, με $a=\varepsilon$, $b=2$ και $\lambda=\log(8r)/\log\frac{2}{\varepsilon}$. Έτσι παίρνουμε

$$\gamma_n(\varepsilon D)^{\frac{\log(8r)}{\log(2/\varepsilon)}}\gamma_n(2D)^{1-\frac{\log(8r)}{\log(2/\varepsilon)}}\leqslant \gamma_n(\tfrac{1}{4r}D).\tag{5.2.8}$$

Παρατηρήστε ότι $\frac{\log(8r)}{\log(2/\varepsilon)}<\frac{1}{2}$, άρα $\gamma_n(2D)^{1-\frac{\log(8r)}{\log(2/\varepsilon)}}\geqslant\frac{1}{4}$. Συνδυάζοντας τις (5.2.6), (5.2.7) και (5.2.8) βλέπουμε ότι

$$\gamma_n(\varepsilon D)\leqslant\Big(8e^{-c_1 d_r(C)}\Big)^{\frac{\log(2/\varepsilon)}{\log(8r)}}\leqslant (c_2\varepsilon)^{c_3(r)d_r(C)},\tag{5.2.9}$$

όπου $c_3(r)=\frac{c_3}{\log(8r)}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3>0$. Αυτό αποδεικνύει την (5.2.5). □

Συνδυάζουμε την Πρόταση 5.2.3 με το Θεώρημα 5.2.4.

Πρόταση 5.2.5. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $B_0>0$ με την εξής ιδιότητα: αν $r>1$ και C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $\sqrt{n}M(C)\geqslant B_0r^2$ τότε, για κάθε $r>1$,*

$$\int_{O(n)}|C\cap U(C)|\,d\nu(U)\leqslant e^{-\frac{c}{\log(8r)}d_r(C)}\tag{5.2.10}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.2.4 γνωρίζουμε ότι αν $0<\varepsilon<\frac{1}{c_2r^2}$ τότε

$$\gamma_n(\varepsilon M(C)\sqrt{n}C)\leqslant (c_1\varepsilon)^{c_2(r)d_r(C)}.$$

Θέτουμε $\varepsilon=\frac{\alpha_0}{\sqrt{n}M(C)}$. Αν $\sqrt{n}M(C)\geqslant\max\{c_1e,c_2r^2\}\alpha_0$ τότε παίρνουμε

$$\gamma_n(\alpha_0C)\leqslant e^{-\frac{c_3}{\log(8r)}d_r(C)}.$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει από την Πρόταση 5.2.3. □

Παρατήρηση 5.2.6. Μπορούμε να δώσουμε μια εναλλακτική εκτίμηση συναρτήσει της εγγεγραμμένης ακτίνας

$$r(C)=\sup\{r>0 : rB_2^n\subseteq C\} \tag{5.2.11}$$

του σώματος C. Αυτήν την φορά βασιζόμαστε σε μια ανισότητα των Latała και Oleszkiewicz [35] (η απόδειξη της οποίας χρησιμοποιεί και πάλι το B-θεώρημα): *Έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με εγγεγραμμένη ακτίνα $r=r(A)$ και $\gamma_n(A)\leqslant 1/2$. Για κάθε $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$ έχουμε*

$$\gamma_n(\varepsilon A)\leqslant (2\varepsilon)^{r(A)^2/4}\gamma_n(A). \tag{5.2.12}$$

Χρησιμοποιούμε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής: έστω ότι C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $\sqrt{n}M(C)\geqslant B_0$ και $d(C)\geqslant B_0$. Ελέγχουμε ότι το $A=\frac{m\sqrt{n}}{8}C$ έχει μέτρο $\gamma_n(A)\leqslant\frac{1}{2}$, άρα, για κάθε $0<\varepsilon<\frac{1}{2e}$ παίρνουμε $\gamma_n(\varepsilon A)\leqslant 2e^{-r^2(A)/4}$. Παρατηρήστε ότι $\frac{\varepsilon m\sqrt{n}}{8}=\alpha_0$ αν επιλέξουμε $\varepsilon=\frac{8\alpha_0}{\sqrt{n}m}$. Αν $\sqrt{n}m\geqslant 16e\alpha_0$ τότε παίρνουμε

$$\gamma_n(\alpha_0 C)\leqslant 2e^{-r^2(A)/4}=2e^{-nm^2r^2(C)}.$$

Από την Πρόταση 5.2.3 παίρνουμε τελικά $\mathbb{E}_U|C\cap U(C)|\leqslant\exp(-cnm^2(C)r^2(C))$. Παρατηρήστε όμως ότι $nm^2(C)r^2(C)\leqslant 4nM^2(C)r^2(C)\simeq k(C)\leqslant c'd(C)$.

Παρατήρηση 5.2.7. Θυμηθείτε ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\sqrt{n}M(C)\geqslant\sqrt{n}\left(\frac{|B_2^n|}{|C|}\right)^{1/n}=\sqrt{n}\omega_n^{1/n}\sim\sqrt{2\pi e}.$$

Συνεπώς, η συνθήκη $\sqrt{n}M(C)\geqslant B_0$ δεν ικανοποιείται από εκείνα τα σώματα για τα οποία

$$M(C)\mathrm{vrad}(C)\simeq 1.$$

Ένα παράδειγμα μας δίνει η Ευκλείδεια μπάλα $\overline{B_2^n}$ όγκου 1. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $|\overline{B_2^n}\cap U(\overline{B_2^n})|=1$ για κάθε $U\in O(n)$. Με άλλα λόγια, αν επιθυμούμε ένα μη τετριμμένο (εκθετικά μικρό) άνω φράγμα για την μέση τιμή του $|C\cap U(C)|$ τότε είναι απαραίτητο να επιβάλουμε κάποια συνθήκη στο C. Έτσι, η συνθήκη $\sqrt{n}M(C)\geqslant B_0$ μοιάζει πολύ φυσιολογική.

Στο παράδειγμα του κύβου $Q_n=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ έχουμε $\sqrt{n}M(Q_n)\simeq\sqrt{\log n}$, άρα η Πρόταση 5.2.5 εφαρμόζεται. Είναι όμως ευκολότερο να υπολογίσουμε το $\gamma_n(\alpha_0 Q_n)$ απευθείας και μετά να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.2.3. Γράφοντας $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2}ds$ για την συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής τυχαίας μεταβλητής, έχουμε

$$\gamma_n(\alpha_0 Q_n) = (2\Phi(\alpha_0/2) - 1)^n = e^{-\delta_0 n},$$

όπου το $\delta_0(\alpha_0) > 0$ ορίζεται μέσω της εξίσωσης $2\Phi(\alpha_0/2) - 1 = e^{-\delta_0}$. Στο [33] αποδεικνύεται ότι $c_1 n^{1-c_1 r^{-2}} \leqslant d_r(Q_n) \leqslant c_2 n^{1-c_2 r^{-2}}$ για κάθε $r > 1$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.2.5 με $r \simeq \sqrt[4]{\log n}$, θα παίρναμε την εκτίμηση

$$\mathbb{E}_U\, |Q_n \cap U(Q_n)| \leqslant e^{-cn^{1-\delta}} \tag{5.2.13}$$

για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $n \geqslant n_0(\delta)$. Ανάλογη κατάσταση εμφανίζεται για κάθε $2 < q < \infty$. Έχουμε $d_{c_q}(B_q^n) \geqslant C_q n$ για κάποιες σταθερές $c_q, C_q > 0$ που εξαρτώνται μόνο από το q. Έτσι, παίρνουμε ένα άνω φράγμα για την $\mathbb{E}_U|\overline{B_q^n} \cap U(\overline{B_q^n})|$ της μορφής $\exp(-n^{1-\delta})$ για κάθε $0 < \delta < 1$, όταν τουλάχιστον τα q και n είναι αρκετά μεγάλα. Καλό είναι να συγκρίνει κανείς αυτά τα άνω φράγματα με το κάτω φράγμα που δίνει η Πρόταση 5.1.4.

Στην επόμενη παράγραφο εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.2.5 για τα κεντροειδή σώματα $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$.

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει ένα εναλλακτικό επιχείρημα για να φράξουμε την $\mathbb{E}_U|K \cap U(K)|$ στην περίπτωση που το K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 5.2.8. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $L_K = (1+\delta)\sqrt{2/\pi}$ για κάποιον $\delta > 0$. Τότε,*

$$\int_{O(n)} |K \cap U(K)|\, d\nu(U) \leqslant c_1 e^{-c_2(\delta)\sqrt{n}}, \tag{5.2.14}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $c_2(\delta) \simeq \min\{1, \delta^3\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $L_K > \sqrt{2/\pi}$, και γράφουμε $L_K = (1+\delta)\sqrt{2/\pi}$ για κάποιον $\delta > 0$. Θεωρούμε $\varepsilon \in (0,1)$ το οποίο θα επιλέξουμε να εξαρτάται κατάλληλα από το δ. Από την ανισότητα λεπτού δακτυλίου γνωρίζουμε ότι αν

$$A := \left\{ x \in K : \big|\, \|x\|_2 - \sqrt{n}L_K \,\big| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}L_K \right\}, \tag{5.2.15}$$

τότε

$$|A| \geqslant 1 - C_1 \exp(-c_2\varepsilon^3\sqrt{n}), \tag{5.2.16}$$

αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Θέτουμε $\rho = \varepsilon\sqrt{n}L_K$. Αν $K_\rho = K \cap \rho B_2^n$, από την (5.2.16) γνωρίζουμε ότι $|K_\rho| \leqslant C_1 \exp(-c_2\varepsilon^3\sqrt{n})$. Τότε,

$$\int_{K_\rho} \gamma_n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}K\right) dx \leqslant |K_\rho| \leqslant C_1 \exp(-c_2\varepsilon^3\sqrt{n}). \tag{5.2.17}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\int_{K\setminus K_\rho} \gamma_n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}K\right) dx \leqslant |K\setminus K_\rho|\,\gamma_n\left(\frac{2}{(1-\varepsilon)L_K}K\right), \tag{5.2.18}$$

και

$$\gamma_n(aK) \leqslant \left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\right)^n |K| \tag{5.2.19}$$

για κάθε $a > 0$, άρα

$$\begin{aligned}\int_{K\setminus K_\rho} \gamma_n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\|x\|_2}K\right) dx &\leqslant \left(\frac{2}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi}L_K}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)(1+\delta)}\right)^n \leqslant C_2 e^{-c_3\min\{1,\delta\}n},\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

αν επιλέξουμε $\varepsilon < \min\{1,\delta\}/3$. Έπεται ότι

$$\int_{O(n)} |K \cap U(K)|\, d\nu(U) \leqslant c_1 e^{-c_4(\delta)\sqrt{n}} \tag{5.2.21}$$

με $c_4(\delta) \simeq [\min\{1,\delta\}]^3$. □

5.3 Άνω φράγματα για την περιγεγραμμένη ακτίνα

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτήν την παράγραφο υπενθυμίζουμε εν συντομία γνωστά επιχειρήματα τα οποία οδηγούν σε άνω φράγματα για την περιγεγραμμένη ακτίνα $R(C \cap U(C))$ της τομής του C με τις τυχαίες στροφές του, $U(C)$.

Πρόταση 5.3.1. *Αν $R(C \cap E) \leqslant r$ για κάθε E σε ένα υποσύνολο της $G_{n,n/2}$ με μέτρο μεγαλύτερο από $1/2$ τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $R(C \cap U(C)) \leqslant \sqrt{2}r$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ένα κλασσικό επιχείρημα που οφείλεται στον Krivine (βλέπε [54] ή [45]). Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει $E \in G_{n,n/2}$ ώστε

$$\|y\|_C \geqslant \frac{1}{r}\|y\|_2 \tag{5.3.1}$$

για κάθε $y \in E$ και για κάθε $y \in E^\perp$. Γράφουμε $P_1 = P_E$ και $P_2 = P_{E^\perp}$. Τότε, έχουμε $I = P_1 + P_2$ και ορίζουμε $U = P_1 - P_2 \in O(n)$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και γράφουμε $x = x_1 + x_2$, όπου $x_1 = P_1(x)$ και $x_2 = P_2(x)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2\|_C + \|x_1 - x_2\|_C &\geqslant 2\max\{\|x_1\|_C, \|x_2\|_C\} \geqslant \frac{2}{r}\max\{\|x_1\|_2, \|x_2\|_2\} \\ &\geqslant \frac{\sqrt{2}}{r}\sqrt{\|x_1\|_2^2 + \|x_2\|_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{r}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\|x\|_C + \|x\|_{U^{-1}(C)} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{r}\|x\|_2, \tag{5.3.2}$$

ή ισοδύναμα,

$$2\mathrm{conv}(C^\circ \cup U(C^\circ)) \supseteq C^\circ + U(C^\circ) \supseteq \frac{\sqrt{2}}{r}B_2^n. \tag{5.3.3}$$

Περνώντας στα πολικά σώματα ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι η ύπαρξη μιας π.χ. $3n/4$-διάστατης τομής με φραγμένη περιγεγραμμένη ακτίνα συνεπάγεται ότι οι τυχαίες $n/2$-διάστατες τομές έχουν την ίδια ιδιότητα. Τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.3.1 και να βρούμε $U \in O(n)$ με $R(C \cap U(C)) \leqslant c_3 r$.

Πρόταση 5.3.2. *Αν $R(C\cap F) \leqslant r$ για κάποιον $F \in G_{n,3n/4}$ τότε ένας τυχαίος υπόχωρος $E \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί την*

$$R(C \cap E) \leqslant c_1 r$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-c_2 n}$.

Απόδειξη. Το γεγονός αυτό παρατηρήθηκε στα [21], [59] και αμέσως μετά, σε ακριβέστερη μορφή, στο [37]: εκεί αποδείχθηκε ότι αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και αν $1 \leqslant k < m < n$ και $\mu = \frac{n-k}{n-m}$, τότε υποθέτοντας ότι $R(C \cap F) \leqslant r$ για κάποιον $F \in G_{n,m}$ έχουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $E \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την

$$R(C \cap E) \leqslant r\left(c_2\sqrt{\tfrac{n}{n-m}}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2e^{-(n-k)/2}$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Υποθέτουμε ότι $R(C \cap F) \leqslant r$ για κάποιον $F \in G_{n,m}$, όπου $m = 3n/4$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $k = n/2$ (και $\mu = 2$) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε το ανάλογο της Πρότασης 5.3.1 για τον τυχαίο $U \in O(n)$ αν χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα των Vershynin και Rudelson [59, Θεώρημα 1.1]: *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_0, c_1 > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν C και D είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με τομές διάστασης τουλάχιστον k και $n - c_0 k$ αντίστοιχα, των οποίων η περιγεγραμμένη ακτίνα φράσσεται από 1, τότε ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την $R(C \cap U(D)) \leqslant c_1^{n/k}$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$.* Θέτοντας $D = C$ και $k = n/2$ παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 5.3.3. *Αν*

$$r_C := \min\{R(C \cap F) : \dim(F) = \lceil (1 - c_0/2)n \rceil\}$$

τότε $R(C \cap U(C)) \leqslant c_2 r_C$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ ως προς $U \in O(n)$.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.3 είναι μια εκτίμηση για την $R(C \cap U(C))$ συναρτήσει του μέσου πλάτους $w(C)$. Από την M^*-ανισότητα (2.2.2) γνωρίζουμε ότι $r_C \leqslant c_3 w(C)$. Έτσι, έχουμε:

Πρόταση 5.3.4. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$R(C \cap U(C)) \leqslant c w(C)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

5.4 Εφαρμογές στα κεντροειδή σώματα των λογαριθμικά κοίλων μέτρων

Υπενθυμίζουμε ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$, $q \geqslant 1$, του μ είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y \rangle|^q d\mu(x) \right)^{1/q}. \tag{5.4.1}$$

Παρατηρήστε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων και $Z_2(\mu) = B_2^n$. Από την ανισότητα Hölder προκύπτει ότι $Z_1(\mu) \subseteq Z_p(\mu) \subseteq Z_q(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Αντίστροφα, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Borell (βλέπε [47, Παράρτημα III]), ελέγχουμε ότι

$$Z_q(\mu) \subseteq c\frac{q}{p} Z_p(\mu) \tag{5.4.2}$$

για κάθε $1 \leqslant p < q$. Ειδικότερα, αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε $R(Z_q(\mu)) \leqslant cq$. Από τα [51] και [52] γνωρίζουμε ότι οι ροπές

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q dx \right)^{1/q}, \quad q \in (-n, +\infty) \setminus \{0\}, \tag{5.4.3}$$

της Ευκλείδειας νόρμας ως προς ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες με την $I_2(\mu) = \sqrt{n}$ για όλα τα $2 \leqslant |q| \leqslant q_*(\mu)$, όπου

$$q_*(\mu) := \max\big\{q \leqslant n : k_*\big(Z_q(\mu)\big) \geqslant q\big\}. \tag{5.4.4}$$

Αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε $q_*(\mu) \geqslant c_1\sqrt{n}$. Για κάθε $q \in [2, q_*(\mu)]$ γνωρίζουμε ότι

$$w\big(Z_q(\mu)\big) \simeq \sqrt{q} \quad \text{και} \quad |Z_q(\mu)|^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{q/n}. \tag{5.4.5}$$

Από την άλλη πλευρά, στο [31] οι Klartag και E. Milman ορίζουν μια «κληρονομική» παραλλαγή

$$q_*^H(\mu) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{q_*(\pi_E \mu)}{k}, \tag{5.4.6}$$

της παραμέτρου $q_*(\mu)$ και αποδεικνύουν ότι

$$\big|Z_q(\mu)\big|^{1/n} \geqslant c_3\sqrt{q/n} \tag{5.4.7}$$

για κάθε $q \leqslant q_*^H(\mu)$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αφού $q_*(\pi_E\mu) \geqslant c_1\sqrt{k}$ για κάθε $E \in G_{n,k}$, έχουμε $q_*^H(\mu) \geqslant c_4\sqrt{n}$. Έτσι, έχουμε προσδιορίσει την ακτίνα όγκου του $Z_q(\mu)$ για κάθε $q \leqslant \sqrt{n}$.

5.4.1 Τομή τυχαίων στροφών – εκτίμηση για τον όγκο

Αρχικά εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου (Πρόταση 5.2.5) στα κεντροειδή σώματα $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$. Φυσιολογικά, χρειαζόμαστε ένα κάτω φράγμα για την $d(Z_q(\mu))$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$d(Z_q(\mu)) \geqslant c_1 k(Z_q(\mu)) = c_1 k_*(Z_q^\circ(\mu)).$$

Υποθέτοντας ότι $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ έχουμε

$$w(Z_q^\circ(\mu)) = M(Z_q(\mu)) \geqslant \left(\frac{|B_2^n|}{|Z_q(\mu)|}\right)^{1/n} \geqslant \frac{c_2}{\sqrt{q}}, \tag{5.4.8}$$

ενώ από τον εγκλεισμό $B_2^n = Z_2(\mu) \subseteq Z_q(\mu)$ συμπεραίνουμε ότι $R\big(Z_q^\circ(\mu)\big) \leqslant 1$. Έπεται ότι

$$d(Z_q(\mu)) \geqslant c_1 k_*\big(Z_q^\circ(\mu)\big) \geqslant c_4 n \frac{w^2\big(Z_q^\circ(\mu)\big)}{R^2\big(Z_q^\circ(\mu)\big)} \geqslant \frac{c_5 n}{q}. \tag{5.4.9}$$

Είναι βολικό να κανονικοποιήσουμε τον όγκο, και να θεωρήσουμε το $\overline{Z_q}(\mu)$ στην θέση του $Z_q(\mu)$. Θυμηθείτε ότι αν $q \leqslant \sqrt{n}$ τότε $|Z_q(\mu)|^{1/n} \simeq \sqrt{q/n}$, άρα

$$\overline{Z_q}(\mu) \simeq \sqrt{n/q}\, Z_q(\mu).$$

Τότε,

$$M(\overline{Z_q}(\mu)) \simeq \sqrt{q/n} M(Z_q(\mu)). \tag{5.4.10}$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.2.5.

Πρόταση 5.4.1. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$. Αν $\sqrt{q} M(Z_q(\mu)) \geqslant B_1$ τότε*

$$\int_{O(n)} |\overline{Z_q}(\mu) \cap U(\overline{Z_q}(\mu))| \leqslant e^{-c_1 n/q}, \tag{5.4.11}$$

όπου $B_1, c_1 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. □

Από την άλλη πλευρά, η (5.4.5) δείχνει ότι $w(\overline{Z_q}(\mu)) \simeq \sqrt{n/q} w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{n}$. Συνεπώς, η Πρόταση 5.1.3 μας δίνει το εξής:

Πρόταση 5.4.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$. Για κάθε $U \in O(n)$ έχουμε*

$$|\overline{Z_q}(\mu) \cap U(\overline{Z_q}(\mu))|\, d\nu(U) \geqslant e^{-c_2 n}, \tag{5.4.12}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

5.4.2 Τομή τυχαίων στροφών – εγγεγραμμένη και περιγεγραμμένη ακτίνα

Περνάμε τώρα στην περιγεγραμμένη ακτίνα του $\overline{Z_q}(\mu)\cap U(\overline{Z_q}(\mu))$. Το βασικό μας εργαλείο είναι μια (απλούστερη εκδοχή) του αποτελέσματος από το Κεφάλαιο 4 για τις προβολές, διάστασης ανάλογης του n, των κεντροειδών σωμάτων.

Λήμμα 5.4.3. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $0<\varepsilon<1$ και για κάθε $q\leqslant\sqrt{\varepsilon n}$ υπάρχουν $k\geqslant(1-\varepsilon)n$ και $F\in G_{n,k}$ ώστε*

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big)\supseteq c_1\varepsilon^2\sqrt{q}\,B_F, \tag{5.4.13}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.3.3 για να δώσουμε άνω φράγμα για την ακτίνα του $Z_q(\mu)\cap U(Z_q(\mu))$ και του $Z_q^\circ(\mu)\cap U(Z_q^\circ(\mu))$ για τον τυχαίο $U\in O(n)$. Αφού το μέσο πλάτος του $Z_q(\mu)$, $2\leqslant q\leqslant\sqrt{n}$, είναι της τάξης της $\sqrt{q}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την M^*-ανισότητα: αν $\varepsilon\in(0,1)$ και $k=(1-\varepsilon)n$, τότε ο τυχαίος υπόχωρος $F\in G_{n,k}$ ικανοποιεί την

$$R(Z_q(\mu)\cap F)\leqslant\frac{c_2\sqrt{q}}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.4.14}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_2\varepsilon n)$, όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Επιλέγοντας $k=n/2$ βλέπουμε ότι τα σώματα $C=D=\frac{c_3}{\sqrt{q}}Z_q(\mu)$ έχουν τομές διαστάσεων τουλάχιστον $n/2$ και $(1-c_0/2)n$ αντίστοιχα, η ακτίνα των οποίων φράσσεται από 1 (για τον σκοπό αυτό αρκεί να επιλέξουμε την σταθερά $c_3>0$ αρκετά μικρή). Τότε, από το Θεώρημα 5.3.3 παίρνουμε $R(Z_q(\mu)\cap U(Z_q(\mu)))\leqslant c_4\sqrt{q}$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$.

Όμοια, από το Λήμμα 5.4.3 γνωρίζουμε ότι

$$R(Z_q^\circ(\mu)\cap F)\leqslant\frac{c_2}{\varepsilon^2\sqrt{q}} \tag{5.4.15}$$

για τον τυχαίο $F\in G_{n,(1-\varepsilon)n}$. Εφαρμόζοντας αυτήν την παρατήρηση με $k=n/2$ βλέπουμε ότι τα σώματα $C=D=c_3\sqrt{q}Z_q^\circ(\mu)$ έχουν τομές διαστάσεων τουλάχιστον $n/2$ και $(1-c_0/2)n$ αντίστοιχα, η ακτίνα των οποίων φράσσεται από 1 (για τον σκοπό αυτό αρκεί πάλι να επιλέξουμε την σταθερά $c_3>0$ αρκετά μικρή). Τότε, από το Θεώρημα 5.3.3 παίρνουμε $R(Z_q^\circ(\mu)\cap U(Z_q^\circ(\mu)))\leqslant c_4/\sqrt{q}$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί τις*

$$Z_q(\mu) + U(Z_q(\mu)) \supseteq c_1\sqrt{q}B_2^n \quad \textit{και} \quad Z_q^\circ(\mu) + U(Z_q^\circ(\mu)) \supseteq \frac{c_1}{\sqrt{q}}B_2^n, \tag{5.4.16}$$

ή ισοδύναμα,

$$\overline{Z_q^\circ}(\mu) \cap U(\overline{Z_q^\circ}(\mu)) \subseteq c_2\sqrt{n}B_2^n \quad \textit{και} \quad \overline{Z_q}(\mu) \cap U(\overline{Z_q}(\mu)) \subseteq c_2\sqrt{n}B_2^n \tag{5.4.17}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2e^{-n}$.

Κεφάλαιο 6

Η παράμετρος $Y_q(K,M)$

Σε αυτό το Κεφάλαιο συγκεντρώνουμε κάποιες παρατηρήσεις που συνδέονται άμεσα με την αναγωγή του [24] για την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. Μελετάμε μια παραλλαγή της παραμέτρου $I_1(K,Z_q^\circ)$ η οποία μπορεί να οριστεί για κάθε ζεύγος ισοτροπικών κυρτών σωμάτων.

6.1 Η παράμετρος $Y_q(K,M)$

Αν K και M είναι συμπαγή σύνολα μέτρου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q \geqslant 1$, ορίζουμε την ποσότητα

$$Y_q(K,M) := \left(\int_K \int_M |\langle x,y\rangle|^q dy\, dx\right)^{1/q}. \tag{6.1.1}$$

Στην περίπτωση $K=M$ θέτουμε για απλότητα $Y_q(K) := Y_q(K,K)$. Αφετηρία του ερωτήματος που μελετάμε είναι ένα αποτέλεσμα των Lutwak, Yang και Zhang [41, Πόρισμα 6.3]: η ποσότητα $Y_q(K,M)$ ελαχιστοποιείται, αν αγνοήσουμε σύνολα μέτρου 0, ακριβώς όταν το $K=E$ είναι ελλειψοειδές με κέντρο το 0 και το $M=\overline{E^\circ}$ είναι το πολλαπλάσιο με όγκο 1 του πολικού του σώματος. Δεδομένου ότι $Y_q(K,M)=Y_q(T(K),T^{-*}(M))$ για κάθε $T\in SL(n)$, το αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί στην ακόλουθη μορφή:

> *Αν K και M είναι συμπαγή σύνολα μέτρου 1 στον $\mathbb{R}^n$, τότε $Y_q(K,M) \geqslant Y_q(\overline{B_2^n})$, όπου $\overline{B_2^n}$ είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.*

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι $Y_q(\overline{B_2^n}) \simeq \sqrt{qn}$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και $Y_q(\overline{B_2^n}) \simeq n$ για κάθε $q \geqslant n$.

Ζητάμε μια αντίστροφη ανισότητα στην περίπτωση που τα K και M είναι ισοτροπικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Αν γράψουμε $\mathcal{IK}_{[n]}$ για την κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$, το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί η τάξη μεγέθους των ποσοτήτων

$$Y_{q,n} := \max_{K\in\mathcal{IK}_{[n]}} Y_q(K) \quad \text{και} \quad Y^*_{q,n} := \max_{K,M\in\mathcal{IK}_{[n]}} Y_q(K,M) \tag{6.1.2}$$

συναρτήσει των $q \geqslant 1$ και n. Παρατηρήστε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $Y_2(K) = \sqrt{n}L_K^2$.

Ξεκινάμε με κάποια άνω φράγματα. Από τον ορισμό του $Z_q(K)$ είναι φανερό ότι

$$Y_q(K) = \left(\int_K\int_K |\langle x,y\rangle|^q dy\, dx\right)^{1/q} = \left(\int_K h^q_{Z_q(K)}(x)\, dx\right)^{1/q}. \tag{6.1.3}$$

Αφού $h_{Z_q(K)}(x) \leqslant R(Z_q(K))\|x\|_2$, παίρνουμε

$$Y_q(K) \leqslant R(Z_q(K))\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} = R(Z_q(K))I_q(K). \tag{6.1.4}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το επόμενο λήμμα, το οποίο είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με το βασικό αποτέλεσμα του [51] (βλέπε Θεώρημα 3.5.3 και Λήμμα 3.5.11).

Λήμμα 6.1.1. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,*

$$I_q(K) \simeq \max\{I_2(K), R(Z_q(K))\}. \tag{6.1.5}$$

Πρόταση 6.1.2. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$Y_q(K) \leqslant cR(Z_q(K))\max\{I_2(K), R(Z_q(K))\} \tag{6.1.6}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$. Ειδικότερα, αν το K είναι ισοτροπικό, τότε

$$Y_q(K) \leqslant c\max\{q\sqrt{n}, q^2\}L_K^2 \tag{6.1.7}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Η γενική εκτίμηση (6.1.6) είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 6.1.1 και της (6.1.4). Στην ισοτροπική περίπτωση γνωρίζουμε ότι $I_2(K) = \sqrt{n}L_K$ και ότι $R(Z_q(K)) \leqslant cqL_K$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι η μέση τιμή της ποσότητας $Y_q(K, U(K))$ ικανοποιεί ένα άνω φράγμα το οποίο είναι μάλιστα καλύτερο από το άνω φράγμα που ζητάμε για την $Y_q(K)$.

Λήμμα 6.1.3. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2\leqslant q\leqslant n$,*

$$\left(\int_{O(n)} Y_q^q(K,U(K))\,d\nu(U)\right)^{1/q}\leqslant C\sqrt{q/n}\,I_q^2(K), \tag{6.1.8}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{O(n)} Y_q^q(K,U(K))\,d\nu(U) &= \int_{O(n)}\int_K\int_{U(K)}|\langle x,y\rangle|^q dy\,dx\,d\nu(U)\\ &= \int_K\int_K\int_{O(n)}|\langle x,Uy\rangle|^q d\nu(U)\,dy\,dx\\ &= \int_K\int_K\|y\|_2^q\int_{O(n)}|\langle x,U(y/\|y\|_2)\rangle|^q d\nu(U)\,dy\,dx\\ &= \int_K\int_K\|y\|_2^q\int_{S^{n-1}}|\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta)\,dy\,dx\\ &= c_{n,q}^q\int_K\int_K\|y\|_2^q\|x\|_2^q dy\,dx\\ &= c_{n,q}^q I_q^{2q}(K),\end{aligned}$$

όπου $c_{n,q}\simeq\sqrt{q/n}$. Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Στην ισοτροπική περίπτωση, το Λήμμα 6.1.3 οδηγεί στην εξής γενική εκτίμηση.

Πρόταση 6.1.4. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2\leqslant q\leqslant n$,*

$$\left(\int_{O(n)} Y_q^q(K,U(K))\,d\nu(U)\right)^{1/q}\leqslant C\max\{\sqrt{qn},q^2\sqrt{q/n}\}\,L_K^2, \tag{6.1.9}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Πόρισμα 6.1.5. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant q\leqslant\sqrt{n}$ υπάρχει $A_q\subseteq O(n)$ με $\nu(A_q)\geqslant 1-e^{-q}$ τέτοιο ώστε*

$$Y_q(K,U(K))\leqslant C\sqrt{qn}\,L_K^2 \tag{6.1.10}$$

για κάθε $U\in A_q$.

Περνάμε τώρα σε κάτω φράγματα. Από το αποτέλεσμα των Lutwak, Yang και Zhang γνωρίζουμε ότι η $Y_q(K)$ ελαχιστοποιείται όταν το K είναι μπάλα. Παίρνουμε έτσι το εξής κάτω φράγμα: για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $2\leqslant q\leqslant n$,

$$Y_q(K)\geqslant c\sqrt{qn}. \tag{6.1.11}$$

Στην ισοτροπική περίπτωση ενδιαφερόμαστε για κάτω φράγματα στα οποία να εμφανίζεται και η ισοτροπική σταθερά του σώματος. Συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 6.1.6. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2\leqslant q\leqslant n$,*

$$Y_q(K)\geqslant c\max\left\{I_q(K)L_K, R^2(Z_q(K)\right\}. \tag{6.1.12}$$

Αν $2\leqslant q\leqslant\sqrt{n}$, τότε

$$Y_q(K)\geqslant c\max\{\sqrt{n}L_K^2,\sqrt{qn}L_K,R^2(Z_q(K))\}. \tag{6.1.13}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τρία απλά επιχειρήματα. Για το πρώτο δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}Y_q(K)&=\left(\int_K h^q_{Z_q(K)}(x)\,dx\right)^{1/q}=\left(\int_K\max_{z\in Z_q(K)}|\langle x,z\rangle|^q dx\right)^{1/q}\\&\geqslant\max_{z\in Z_q(K)}\left(\int_K|\langle x,z\rangle|^q dx\right)^{1/q}=\max_{z\in Z_q(K)}h_{Z_q(K)}(z)\\&=\left(R(Z_q(K))\right)^2.\end{aligned}$$

Μια δεύτερη προσέγγιση είναι η εξής: από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$Y_q(K)\geqslant\int_K h_{Z_q(K)}(x)\,dx\geqslant\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{|Z_q^\circ(K)|^{1/n}}, \tag{6.1.14}$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι από το [46, Πόρισμα 2.2(α)]. Κατόπιν, από την ανισότητα Blaschke-Santaló παίρνουμε

$$Y_q(K)\geqslant c_1n|Z_q(K)|^{1/n}\geqslant c_2\sqrt{qn}L_K \tag{6.1.15}$$

για κάθε $2\leqslant q\leqslant\sqrt{n}$, διότι $|Z_q(K)|^{1/n}\geqslant c\sqrt{qn}\,L_K$ σε αυτό το διάστημα τιμών του q, όπως έχουν δείξει οι Klartag και E. Milman στο [31]. Το τρίτο επιχείρημα χρησιμοποιεί την ανισότητα του Hölder: γράφουμε

$$Y_q(K) = \left(\int_K h^q_{Z_q(K)}(x)\,dx\right)^{1/q} \geqslant \left(\int_K h^q_{Z_2(K)}(x)\,dx\right)^{1/q}$$
$$= \left(\int_K \|x\|_2^q L_K^q\,dx\right)^{1/q} = I_q(K)L_K.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατηρώντας ότι το πρώτο επιχείρημα στην απόδειξη της Πρότασης 6.1.6 δεν εξαρτάται από την θέση του σώματος, μπορούμε να συνδυάσουμε την ανισότητα $Y_q(K) \geqslant cR^2(Z_q(K))$ με την Πρόταση 6.1.2 και να καταλήξουμε σε έναν ασυμπτωτικό τύπο για την $Y_q(K)$ στο διάστημα $q^* \leqslant q \leqslant n$.

Πόρισμα 6.1.7. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $q_*(K) \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K) \simeq \left(R(Z_q(K))\right)^2. \tag{6.1.16}$$

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου στο εξής:

Θεώρημα 6.1.8. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$c_1 \max\left\{\sqrt{qn}, \sqrt{n}L_K^2, R^2(Z_q(K)\right\} \leqslant Y_q(K) \leqslant c_2 \max\{q\sqrt{n}, q^2\}L_K^2 \tag{6.1.17}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$. Επιπλέον, αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, έχουμε

$$Y_q(K) \geqslant c_3 \max\{\sqrt{n}L_K^2, \sqrt{qn}L_K, R^2(Z_q(K))\} \tag{6.1.18}$$

6.2 Ένα παράδειγμα

Γράφουμε $\overline{B}_1^n$ για την κανονικοποιημένη ℓ_1^n-μπάλα. Είναι γνωστό ότι $L_{\overline{B}_1^n} \simeq 1$ και $\|\langle \cdot, e_i\rangle\|_q \simeq q$, απ΄ όπου έπεται ότι $R(Z_q(\overline{B}_1^n)) \simeq q$. Τότε, η Πρόταση 6.1.6 δείχνει ότι το καλύτερο γενικό άνω φράγμα που μπορούμε να περιμένουμε για την $Y_q(K)$ είναι $\max\{\sqrt{qn}, q^2\}L_K^2$:

Πρόταση 6.2.1. *Έστω $K = \overline{B}_1^n$. Τότε, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K) \geqslant c\max\{\sqrt{qn}, q^2\}. \tag{6.2.1}$$

Θα περιγράψουμε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι η ίδια συμπεριφορά μπορεί να εμφανιστεί ακόμα κι αν περιοριστούμε στην κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων που είναι ομοιόμορφα (ως προς την διάσταση) κοντά στην μπάλα.

Θεώρημα 6.2.2. *Για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα εκ περιστροφής K στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $d_G(K, B_2^n) \leqslant C$ και για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K) \simeq \min\left\{n, \max\{\sqrt{qn}, q^2\}\right\}, \tag{6.2.2}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αποδεικνύεται στο [50] ότι υπάρχουν $a_n, R_n \simeq \sqrt{n}$ και $b_n \simeq 1/\sqrt{n}$ ώστε το κυρτό σώμα εκ περιστροφής

$$K = \{y = (x, u) : |u| \leqslant R_n, \|x\|_2 \leqslant a_n - b_n|u|\} \tag{6.2.3}$$

να είναι ισοτροπικό. Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι $c_1\sqrt{n}B_2^n \subseteq K \subseteq c_2\sqrt{n}B_2^n$ (με άλλα λόγια, $d_G(K, B_2^n) \leqslant c_2/c_1$) και $\|\langle \cdot, e_n\rangle\|_{\psi_2} \geqslant c_3\sqrt[4]{n}$, όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Θα εκτιμήσουμε την $Y_q(K)$ για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$.

Στο [50, Λήμμα 3.2] αποδεικνύεται ότι αν $0 < s \leqslant c_4\sqrt{n}$, τότε

$$\mathbb{P}\left(\{(x, u) : |u| \geqslant s\}\right) \geqslant c_5 \exp(-c_6 s), \tag{6.2.4}$$

όπου $c_4, c_5, c_6 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Έστω $q \leqslant c_4\sqrt{n}$. Επιλέγοντας $s = q$ στην (6.2.4) βλέπουμε ότι

$$R^q(Z_q(K)) \geqslant \|\langle \cdot, e_n\rangle\|_q^q \geqslant q^q \mathbb{P}\left(\{(x, u) : |u| \geqslant s\}\right) \geqslant c_5 e^{-c_6 q} q^q, \tag{6.2.5}$$

άρα, $R(Z_q(K)) \geqslant c_7 q$. Έπεται ότι $R(Z_q(K)) \simeq q$. Παίρνοντας υπόψιν μας και το γεγονός ότι $R(K) \leqslant c_7\sqrt{n}$, συμπεραίνουμε ότι

$$w(Z_q(K)) \simeq \sqrt{q} \quad , \quad R(Z_q(K)) \simeq \min\{q, \sqrt{n}\}. \tag{6.2.6}$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα των Litvak, Milman και Schechtman [36] στο $Z_q(K)$ έχουμε

$$w_r(Z_q(K)) \simeq \max\{w(Z_q(K)), \sqrt{r/n}R(Z_q(K))\} \simeq \max\{\sqrt{q}, q\sqrt{r/n}\} \tag{6.2.7}$$

για κάθε $1 \leqslant r \leqslant n$. Έπεται ότι $w_{n/q}(Z_q(K)) \simeq \sqrt{q}$. Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα της απόδειξης του [36, Πρόταση 3.1] παίρνουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant t \leqslant c_8 R(Z_q(K))/\sqrt{q} \simeq \sqrt{q}$,

$$\sigma\left(\{\theta \in S^{n-1} : h_{Z_q(K)}(\theta) \geqslant c_9 t\sqrt{q}\}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{c_{10} n q t^2}{R^2(Z_q(K))}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{c_{11} n t^2}{q}\right). \tag{6.2.8}$$

Από την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα,

(6.2.9)
$$\sigma\left(\{\theta \in S^{n-1} : h_{Z_q(K)}(\theta) \geqslant c_9 t\sqrt{q}\}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{c_{12} n q t^2}{R^2(Z_q(K))}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{c_{13} n t^2}{q}\right).$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g := h_{Z_q(K)}(\theta)$ για θ στην μοναδιαία σφαίρα του $\mathrm{span}\{e_i, e_n\}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Παρατηρούμε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο e_i, κατόπιν είναι αύξουσα μέχρι να πάρει την μέγιστη τιμή της στο e_n κλπ. Αφού το K είναι σώμα εκ περιστροφής, αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο $\mathcal{C}_{t,q} := \{\theta \in S^{n-1} : h_{Z_q(K)}(\theta) \geqslant c_9 t\sqrt{q}\}$ έχει απλή περιγραφή: είναι ένα «διπλό καπάκι» στην S^{n-1}. Άρα, υπάρχει $s := s(q,t)$ ώστε

$$\mathcal{C}_{t,q} := \{\theta \in S^{n-1} : |\langle \theta, e_n\rangle| \geqslant s\}. \tag{6.2.10}$$

Από την γνωστή εκτίμηση $\exp(-ns^2)$ για το μέτρο του $C(e_n, s) = \{\theta \in S^{n-1} : |\langle \theta, e_n\rangle| \geqslant s\}$, και κάνοντας χρήση των (6.2.8) και (6.2.9). βλέπουμε ότι $s \simeq t/\sqrt{q}$. Συνεπώς, για κάθε $1 \leqslant t \leqslant c_{14}\sqrt{q}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{C}_{t,q} \simeq \{\theta \in S^{n-1} : |\langle \theta, e_n\rangle| \geqslant t/\sqrt{q}\}. \tag{6.2.11}$$

Με άλλα λόγια, αν $|\langle \theta, e_n\rangle| \geqslant t/\sqrt{q}$ τότε $h_{Z_q(K)}(\theta) \geqslant c_{15} t\sqrt{q}$. Στην συνέχεια, ορίζουμε

$$A_{t,q} := \{(x,u) \in K : |u| \geqslant c_{16} t\sqrt{n/q}\} \quad \text{και} \quad B := \{z \in K : \|z\|_2 \geqslant c_0\sqrt{n}\}, \tag{6.2.12}$$

όπου η $c_0 \simeq 1$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$|B| = 1 - \exp(-n). \tag{6.2.13}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.2.4) και το γεγονός ότι $\|\langle \cdot, e_n\rangle\|_{\psi_1} \simeq 1$, βλέπουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant t \leqslant c_{17}\sqrt{q}$,

$$\exp\left(-c_{17}\sqrt{n/q}t\right) \leqslant |A_{t,q}| \leqslant \exp\left(-c_{18}\sqrt{n/q}t\right). \tag{6.2.14}$$

Έστω $z \in A_{t,q} \cap B$. Αφού $\|z\|_2 \leqslant c_2\sqrt{n}$, βλέπουμε ότι το $\theta_z := z/\|z\|_2$ ικανοποιεί την $|\langle \theta_z, e_n\rangle| \geqslant c_{20} t/\sqrt{q}$, άρα, $h_{Z_q(K)}(\theta_z) \geqslant c_{21} t\sqrt{q}$. Αφού το z ανήκει και στην B, παίρνουμε

$$h_{Z_q(K)}(z) = \|z\|_2 h_{Z_q(K)}(\theta_z) \geqslant c_0 c_{21} t\sqrt{qn}. \tag{6.2.15}$$

Επίσης, οι (6.2.13) και (6.2.14) δείχνουν ότι, για $1 \leqslant t \leqslant c_{22}\sqrt{q}$,

$$\exp\left(-c_{23}\sqrt{n/q}t\right) \leqslant |A_{t,q} \cap B| \leqslant \exp\left(-c_{24}\sqrt{n/q}t\right). \tag{6.2.16}$$

Μπορούμε να γράψουμε $Y_q(K) \simeq D_1 + D_2$, όπου

$$D_1 = \left(\int_{K\setminus A_{t,q}} h^q_{Z_q(K)}(x)dx\right)^{1/q} \text{ και } D_2 = \left(\int_{A_{t,q}} h^q_{Z_q(K)}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.2.17}$$

Δίνουμε πρώτα το άνω φράγμα για την $Y_q(K)$. Λόγω της (6.2.11), μπορούμε να αντιστρέψουμε το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για την (6.2.15). Έτσι, βλέπουμε ότι αν $z \in K \setminus A_{t,q}$ τότε $h_{Z_q(K)}(z) \leqslant c_{25} t\sqrt{q}\|z\|_2$. Αυτό δείχνει ότι

$$D_1 \leqslant c_{25} t\sqrt{q}\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_{26} t\sqrt{qn}. \tag{6.2.18}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\frac{t\sqrt{n}}{q\sqrt{q}} \geqslant C_1$ τότε, εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} D_2 &\leqslant |A_{t,q}|^{\frac{1}{2q}} \left(\int_{A_{t,q}} h^{2q}_{Z_q(K)}(z)dz\right)^{1/q} \leqslant e^{-c_{27}\frac{t\sqrt{n}}{q\sqrt{q}}} \left(\int_K h^{2q}_{Z_q(K)}(x)dx\right)^{\frac{1}{2q}} \\ &\leqslant c_{28} e^{-c_{27}C_1} Y_q(K) \leqslant \frac{1}{2} Y_q(K) \end{aligned}$$

αρκεί να επιλέξουμε την απόλυτη σταθερά $C_1 > 0$ αρκετά μεγάλη. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $\max\{C_1 q^{3/2}/\sqrt{n}, 1\} \leqslant t \leqslant c_{29}\sqrt{q}$, τότε

$$Y_q(K) \leqslant c_{30} t\sqrt{qn}. \tag{6.2.19}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$,

$$Y_q(K) \leqslant c_{31} \max\{\sqrt{qn}, q^2\}. \tag{6.2.20}$$

Περνάμε τώρα στο κάτω φράγμα για την $Y_q(K)$. Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ έχουμε $h_{Z_q(K)}(x) \geqslant c_{32}\sqrt{q}\|x\|_2$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$Y_q(K) \geqslant D_1 \geqslant c_{32}\sqrt{q}\left(\int_{K\setminus A_{t,q}} \|z\|_2^q dz\right)^{1/q}. \tag{6.2.21}$$

Υποθέτουμε ότι $q \leqslant n^{\frac{1}{3}}$ και επιλέγουμε $t \simeq 1$, αρκετά μεγάλο. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} &\leqslant \left(\int_K \|z\|_2^q dz\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_{K\setminus A_{t,q}} \|z\|_2^q dz\right)^{1/q} + \left(\int_{A_{t,q}} \|z\|_2^q dz\right)^{1/q}\\
&\leqslant \left(\int_{K\setminus A_{t,q}} \|z\|_2^q dz\right)^{1/q} + e^{-c_{27}\frac{t\sqrt{n}}{q\sqrt{q}}}\left(\int_K \|z\|_2^{2q} dz\right)^{1/q}\\
&\leqslant \left(\int_{K\setminus A_{t,q}} \|z\|_2^q dz\right)^{1/q} + \frac{\sqrt{n}}{2}.
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην (6.2.18) βλέπουμε ότι

$$Y_q(K) \geqslant c_{32}\sqrt{q}\left(\int_{K\setminus A_{t,q}} \|z\|_2^q dz\right)^{1/q} \geqslant \frac{c_{32}}{2}\sqrt{qn}. \tag{6.2.22}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι $q \geqslant n^{\frac{1}{3}}$ και επιλέγουμε $t \simeq \frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{n}}$. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε το D_2 σαν κάτω φράγμα: χρησιμοποιώντας τις (6.2.15) και (6.2.16), γράφουμε

$$\begin{aligned}
Y_q(K) \geqslant D_2 \geqslant \left(\int_{A_{t,q}\cap B} h^q_{Z_q(K)}(z)dz\right)^{1/q} &\geqslant |A_{t,q}\cap B|^{\frac{1}{q}} c_0 c_{21} t\sqrt{qn}\\
&\geqslant c_0 c_{21} t\sqrt{q}\sqrt{n} e^{-c_{23}\frac{t\sqrt{n}}{q\sqrt{q}}} \geqslant c_{33} q^2.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα δύο κάτω φράγματα, βλέπουμε ότι για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$,

$$Y_q(K) \geqslant c_{34}\max\{\sqrt{qn}, q^2\}. \tag{6.2.23}$$

Αφού $Y_q(K) \simeq n$ για κάθε $q \geqslant \sqrt{n}$, η απόδειξη είναι πλήρης. □

6.3 Η unconditional περίπτωση

Ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται unconditional αν (μετά από έναν γραμμικό μετασχηματισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι) η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι 1-unconditional βάση για την $\|\cdot\|_K$: για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \dots, t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$,

$$\big\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\big\|_K = \big\|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\big\|_K. \tag{6.3.1}$$

Τότε, εύκολα ελέγχουμε ότι μπορούμε να φέρουμε το K στην ισοτροπική θέση με έναν διαγώνιο τελεστή. Είναι επίσης σχετικά εύκολο να δείξουμε ότι η ισοτροπική σταθερά του K ικανοποιεί την $L_K \simeq 1$. Το άνω φράγμα προκύπτει π.χ. από την ανισότητα Loomis-Whitney (βλέπε επίσης το [5], όπου αποδεικνύεται ότι $L_K^2 \leqslant 1/2$).

Για κάθε ισοτροπικό σώμα K εισάγουμε μία παράμετρο $\mathcal{Y}_q(K)$ την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να δώσουμε άνω φράγμα για την $Y_q(K)$ στην unconditional περίπτωση.

Η παράμετρος $\mathcal{Y}_q(K)$. Για κάθε $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ θεωρούμε έναν τελεστή $T_y:\ell_2^n\to\ell_2^n$ του οποίου ο πίνακας είναι διαγώνιος και έχει συντεταγμένες $y_1,\dots,y_n$. Παρατηρήστε ότι $\|T_y\|_{\mathrm{HS}}=\|y\|_2$ και $\|T_y\|_{\mathrm{op}}=\|y\|_\infty$. Παρατηρήστε επίσης ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|T_y(x)\|_2^2=\sum_{i=1}^n x_i^2y_i^2. \tag{6.3.2}$$

Επιπλέον, αν $y_i\neq 0$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant n$, γράφουμε $\overline{T}_y:=(\det(T_y))^{-\frac{1}{n}}\,T_y$.

Ορισμός 6.3.1. Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant q\leqslant n$ ορίζουμε

$$\mathcal{Y}_q(K):=\left(\int_K(\det(T_y))^{q/n}\,I_q^q(\overline{T}_y(K))\,dy\right)^{1/q}. \tag{6.3.3}$$

Θα αποδείξουμε ένα γενικό άνω φράγμα για την $\mathcal{Y}_q(K)$.

Πρόταση 6.3.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1\leqslant q\leqslant n$ έχουμε*

$$\mathcal{Y}_q(K)\leqslant c_1\left(I_q(K)+R(Z_q(K))\max\{R(Z_q(K)),R(Z_{\log n}(K))\}\right), \tag{6.3.4}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ με $y_i\neq 0$, $1\leqslant i\leqslant n$,

$$R(Z_q(T_y(K)))\leqslant\|y\|_\infty R(Z_q(K)). \tag{6.3.5}$$

Χρησιμοποιώντας την $I_q(K) \simeq \max\{I_2(K), R(Z_q(K))\}$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_q(K) &= \left(\int_K (\det(T_y))^{q/n}\, I_q^q(\overline{T}_y(K))dy\right)^{1/q}\\
&\leqslant c\left(\int_K (\det(T_y))^{q/n} \max\{I_2^q(\overline{T}_y(K)), R(Z_q(\overline{T}_y(K)))^q\}\, dy\right)^{1/q}\\
&\leqslant c\left(\int_K (\det(T_y))^{q/n} \left(I_2^q(\overline{T}_y(K)) + R(Z_q(\overline{T}_y(K)))^q\right)\, dy\right)^{1/q}\\
&\leqslant c\left(\int_K (\det(T_y))^{q/n} \left(\|\overline{T}_y\|_{\rm HS}^q + \|\overline{T}_y\|_{\rm op}^q R(Z_q(K))^q\right)\, dy\right)^{1/q}\\
&= c\left(\int_K \left(\|T_y\|_{\rm HS}^q + \|T_y\|_{\rm op}^q R(Z_q(K))^q\right)\, dy\right)^{1/q}\\
&= c\left(\int_K \|y\|_2^q dy + R(Z_q(K))^q \int_K \|y\|_\infty^q dy\right)^{1/q}\\
&\leqslant c\left[I_q(K) + R(Z_q(K))\left(\int_K \|y\|_\infty^q dy\right)^{1/q}\right].
\end{aligned}$$

Το λήμμα που ακολουθεί ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 6.3.3. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$\left(\int_K \|y\|_\infty^q dy\right)^{1/q} \leqslant c\max\{R(Z_q(K)), R(Z_{\log n}(K))\}, \tag{6.3.6}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $q \geqslant \log n$. Αφού

$$\|y\|_\infty^q \leqslant \sum_{i=1}^n |\langle y, e_i\rangle|^q, \tag{6.3.7}$$

έχουμε

$$\int_K \|y\|_\infty^q \leqslant \sum_{i=1}^n h_{Z_q(K)}^q(e_i) \leqslant n \max_{1\leqslant i\leqslant n} h_{Z_q(K)}^q(e_i). \tag{6.3.8}$$

Αφού $n^{1/q} \leqslant e$, παίρνουμε

$$\left(\int_K \|y\|_\infty^q dx\right)^{1/q} \leqslant e \max_{1\leqslant q\leqslant n} h_{Z_q(K)}(e_i) \leqslant eR(Z_q(K)). \tag{6.3.9}$$

Κατόπιν, υποθέτουμε ότι $1 \leqslant q \leqslant \log n$. Από την ανισότητα του Hölder,

$$\left(\int_K \|x\|_\infty^q dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_K \|x\|_\infty^{\log n} dx\right)^{1/\log n} eR(Z_{\log n}(K)), \tag{6.3.10}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την (6.3.9) με $q = \log n$. □

Πόρισμα 6.3.4. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$\mathcal{Y}_q(K) \leqslant c_1 \max\left\{\sqrt{n}L_K, q\max\{q, \log n\})L_K^2\right\}, \tag{6.3.11}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $I_q(K) \simeq \max\{I_2(K), R(Z_q(K))\} \leqslant I_2(K) + R(Z_q(K)) \leqslant \sqrt{n}L_K + R(Z_q(K))$. Το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 6.3.2 αν θυμηθούμε το γεγονός ότι $R(Z_q(K)) \leqslant cqL_K$. □

6.3.1 Πρώτο άνω φράγμα

Στην περίπτωση που το K είναι unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να συγκρίνουμε τις $Y_q(K)$ και $\mathcal{Y}_q(K)$.

Λήμμα 6.3.5. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K) \leqslant c_2\sqrt{q}\,\mathcal{Y}_q(K). \tag{6.3.12}$$

Απόδειξη. Αφού το K είναι unconditional, εφαρμόζοντας την ανισότητα του Khintchine βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} Y_q(K) &= \left(\int_{\{-1,1\}^n}\int_K\int_K \left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i y_i\right|^q dy\,dx\,d\varepsilon\right)^{1/q} \\ &\leqslant c\sqrt{q}\left(\int_K\int_K \left|\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2\right|^{q/2} dy\,dx\right)^{1/q} \\ &= c\sqrt{q}\left(\int_K\int_K \|T_y(x)\|_2^q dx\,dy\right)^{1/q}, \end{aligned}$$

κάνοντας χρήση και της (6.3.2). Παρατηρήστε ότι $|\{y \in K : \det(T_y) = 0\}| = 0$, άρα, για όλα τα άλλα $y \in K$ μπορούμε να γράψουμε

$$\left(\int_K \|T_y(x)\|_2^q dx\right)^{1/q} = (\det(T_y))^{\frac{1}{n}} I_q(\overline{T}_y(K)). \tag{6.3.13}$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα, από τον ορισμό της $\mathcal{Y}_q(K)$. □

Πρόταση 6.3.6. *Έστω K ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K) \leqslant c_3\sqrt{q}\left(I_q(K) + R(Z_q(K)) \max\{R(Z_q(K)), R(Z_{\log n}(K))\}\right). \tag{6.3.14}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.3.2 και του Λήμματος 6.3.5. □

Πόρισμα 6.3.7. *Έστω K ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt[4]{n}$,*

$$Y_q(K) \leqslant c\sqrt{qn}. \tag{6.3.15}$$

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι αν $1 \leqslant q \leqslant \sqrt[4]{n}$ τότε $I_q(K) \leqslant CI_2(K) \leqslant C_1\sqrt{n}$ και

$$\max\{R(Z_q(K)), R(Z_{\log n}(K))\} \leqslant C_2 \max\{q, \log n\} \leqslant C_3\sqrt[4]{n}. \tag{6.3.16}$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε την Πρόταση 6.3.6. □

6.3.2 Δεύτερο άνω φράγμα

Έστω K και M δύο unconditional ισοτροπικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Δίνουμε ένα δεύτερο άνω φράγμα για την $Y_q(K, M)$, χρησιμοποιώντας το εξής αποτέλεσμα του Latała από το [34]. Στην επόμενη Πρόταση, μ είναι το εκθετικό μέτρο γινόμενο, με πυκνότητα

$$d\mu(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \exp(-\sqrt{2}\|x\|_1)\, dx. \tag{6.3.17}$$

Θεώρημα 6.3.8 (Latała)**.** *Έστω K ένα ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $q \geqslant 1$,*

$$\left(\int_K h_C^q(x) dx\right)^{1/q} \leqslant c_1 \int_{\mathbb{R}^n} h_C(x) d\mu(x) + c_2 \sup_{y \in C}\left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}, \tag{6.3.18}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. □

Επιλέγουμε $C = Z_q(M)$. Είναι γνωστό (από το [6]) ότι αν $y \in \mathbb{R}^n$ και $f_y(x) = \langle x, y\rangle$, τότε για κάθε $q \geqslant 2$,

$$\|f_y\|_{L^q(M)} \leqslant c\sqrt{qn}\|y\|_\infty, \tag{6.3.19}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Με άλλα λόγια,

$$h_{Z_q(M)}(y) \leqslant c\sqrt{qn}\|y\|_\infty. \tag{6.3.20}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_{Z_q(M)}(x)d\mu(x) \leqslant c\sqrt{qn}\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty d\mu(x). \tag{6.3.21}$$

Για κάθε $i \leqslant n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x_i| d\mu(x) = \sqrt{2}\int_0^\infty te^{-\sqrt{2}t}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6.3.22}$$

Αφού $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ και το μ είναι λογαριθμικά κοίλο, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty d\mu(x) \leqslant c_3 \log n. \tag{6.3.23}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\sup_{y\in Z_q(M)}\left(\int_K |\langle x,y\rangle|^q dx\right)^{1/q} &\leqslant R(Z_q(K)) \sup_{y\in Z_q(M)}\|y\|_2\\ &= R(Z_q(K))R(Z_q(M)) \leqslant c_4 q^2.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Latała παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα 6.3.9. *Έστω K και M ισοτροπικά unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$Y_q(K,M) := \left(\int_K\int_M |\langle x,y\rangle|^q dy\, dx\right)^{1/q} \leqslant c_1(\log n)\sqrt{qn} + c_2 q^2. \tag{6.3.24}$$

6.3.3 Η παράμετρος $I_1(K, Z_q(K))$

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $I_1(K, Z_q(K))$.

Πρόταση 6.3.10. *Έστω K ένα ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_K \|x\|_{Z_q(K)} dx \leqslant c\sqrt{n/q} \tag{6.3.25}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n/\log^2 n$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής.

Λήμμα 6.3.11. *Έστω K ένα ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει,*

$$Z_q(K) \supseteq cZ_q(Q_n) \tag{6.3.26}$$

για κάθε $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες ± 1 τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με κατανομή $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το K είναι unconditional, την ανισότητα Jensen και την αρχή της συστολής, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(K)} &= \left(\int_K \left|\sum_{i=1}^n \theta_i x_i\right|^q dx\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega \int_K \left|\sum_{i=1}^n \theta_i \varepsilon_i |x_i|\right|^q dx\, d\mathbb{P}(\varepsilon)\right)^{1/q} \\
&\geqslant \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n \theta_i \varepsilon_i \int_K |x_i|\, dx\right|^q d\mathbb{P}(\varepsilon)\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n t_i \theta_i \varepsilon_i\right|^q d\mathbb{P}(\varepsilon)\right)^{1/q} \\
&\geqslant \left(\int_{Q_n} \left|\sum_{i=1}^n t_i \theta_i y_i\right|^q dy\right)^{1/q} = \|\langle \cdot, (t\theta)\rangle\|_{L^q(Q_n)},
\end{aligned}$$

όπου $t_i = \int_K |x_i|\, dx \simeq L_K \simeq 1$ και $t\theta = (t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n)$. Θυμηθείτε ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(Q_n)} \simeq \sum_{j \leqslant q} \theta_j^* + \sqrt{q} \left(\sum_{q < j \leqslant n} (\theta_j^*)^2\right)^{1/2} \tag{6.3.27}$$

(βλέπε [3]). Αφού $t_i \simeq 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, παίρνουμε

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(K)} \geqslant \|\langle \cdot, (t\theta)\rangle\|_{L^q(Q_n)} \geqslant c\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(Q_n)}, \tag{6.3.28}$$

και αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Παρατήρηση 6.3.12. Είναι γνωστό ότι

$$Z_q(Q_n) \simeq \sqrt{q}B_2^n \cap B_\infty^n. \tag{6.3.29}$$

Συνεπώς,

$$\|x\|_{Z_q(Q_n)} \simeq \max\left\{\frac{\|x\|_2}{\sqrt{q}}, \|x\|_\infty\right\}. \tag{6.3.30}$$

Άμεση συνέπεια είναι η

$$\int_K \|x\|_{Z_q(K)}dx \lesssim \frac{1}{\sqrt{q}}\int_K \|x\|_2 dx + \int_K \|x\|_\infty dx \leqslant c_1\sqrt{n/q} + c_2\log n. \tag{6.3.31}$$

Τότε, υποθέτοντας ότι $q \leqslant n/\log^2 n$ παίρνουμε την Πρόταση 6.3.10.

6.4 Αριθμοί κάλυψης του $Z_q(K)$

Σε αυτήν την τελευταία παράγραφο δείχνουμε την σχέση των εκτιμήσεων για τους αριθμούς κάλυψης $N(Z_q(K), t\sqrt{q}L_K B_2^n)$ με το αρχικό πρόβλημα της διατριβής που ζητούσε άνω φράγματα για την ποσότητα $I_1(K, Z_q^\circ(K))$. Ξεκινάμε με την unconditional περίπτωση.

Πρόταση 6.4.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,*

$$\log N(Z_q(K), ct\sqrt{q}B_2^n) \leqslant \frac{Cq\log n}{t^2}, \tag{6.4.1}$$

για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{q}$, όπου $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Οι Bobkov και Nazarov έχουν αποδείξει στο [6] ότι

$$h_{Z_q}(x) \leqslant \max\{\sqrt{q}, qh_{B_1^n}(x)\} \tag{6.4.2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια,

$$Z_q(K) \subseteq c_1\mathrm{conv}(\sqrt{q}B_2^n, qB_1^n). \tag{6.4.3}$$

Έπεται ότι

$$N(Z_q(K), 2c_1t\sqrt{q}B_2^n) \leqslant N\left(B_1^n, \frac{t}{\sqrt{q}}B_2^n\right) \tag{6.4.4}$$

για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{q}$. Θα εκτιμήσουμε αυτούς τους αριθμούς κάλυψης χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα του Schütt [56].

Λήμμα 6.4.2. *Αν $\log n \leqslant k \leqslant n$ τότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_{2^k} \in \mathbb{R}^n$ ώστε*

$$B_1^n \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} (x_j + r_{n,k} B_2^n), (\tag{6.4.5}$$

όπου

$$r_{n,k} \simeq \sqrt{\frac{\log(n/k+1)}{k}}. \tag{6.4.6}$$

Με βάση το Λήμμα, αν

$$\sqrt{\frac{\log(n/k+1)}{k}} \leqslant \frac{t}{\sqrt{q}}, \tag{6.4.7}$$

τότε η (6.4.4) μας δίνει ότι $\log N(Z_q(K), ct\sqrt{q}B_2^n) \leqslant Ck$. Κατόπιν, εύκολα ελέγχουμε ότι ο $k_0 = \frac{q \log n}{t^2}$ ικανοποιεί την (6.4.7) για κάθε n, q και t. □

Σημείωση. Αν $t \geqslant \sqrt{q}$ τότε $N(Z_q(K), ct\sqrt{q}B_2^n) = 1$ διότι $R(Z_q(K)) \leqslant q$.

Για την γενική περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η εξής

Υπόθεση. *Σταθεροποιούμε $2 \leqslant q \leqslant n$ και υποθέτουμε ότι*

$$\log N(Z_q(K), c_1 t\sqrt{q} L_K B_2^n) \leqslant \frac{q}{t^2} \tag{6.4.8}$$

για κάθε $1 \leqslant t \leqslant R(Z_q)/(c_1\sqrt{q}L_K)$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Πρόταση 6.4.3. *Με αυτήν την υπόθεση έχουμε:*

(i) *Αν $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ τότε*

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) := \int_K h_{Z_q(K)}(x)dx \leqslant C\sqrt{qn}L_K^2, \tag{6.4.9}$$

και

(ii) *Αν $\sqrt{n} \leqslant q \leqslant n$ τότε*

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) := \int_K h_{Z_q(K)}(x)dx \leqslant Cq\sqrt[4]{n}L_K^2, \tag{6.4.10}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γράφουμε R για την περιγεγραμμένη ακτίνα του $Z_q(K)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $R > 2c_1\sqrt{q}L_K$. Αλλιώς, έχουμε $Z_q(K) \subseteq 2c_1\sqrt{q}L_K B_2^n$, άρα

$$\int_K h_{Z_q(K)}(x)dx \leqslant 2c_1\sqrt{q}L_K \int_K \|x\|_2 dx \leqslant 2c_1\sqrt{qn}L_K^2. \tag{6.4.11}$$

Έστω j_0 ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός για τον οποίο $2^{j_0} \leqslant \frac{R}{c_1\sqrt{q}L_K}$. Για κάθε $1 \leqslant j \leqslant j_0$ έχουμε

$$n_j := \log N(Z_q(K),(R/2^j)B_2^n) \leqslant \frac{c_1^2 2^{2j} q^2 L_K^2}{R^2}. \tag{6.4.12}$$

Μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο N_j του $Z_q(K)$ ώστε $|N_j| = n_j$ και

$$Z_q(K) \subseteq \bigcup_{y\in N_j} (y + (R/2^j)B_2^n). \tag{6.4.13}$$

Ορίζουμε $N_0 = \{0\}$ και, για κάθε $1 \leqslant j \leqslant j_0$,

$$W_j = N_j - N_{j-1} = \{y - y' \mid y \in N_j, y' \in N_{j-1}\}. \tag{6.4.14}$$

Τέλος, θέτουμε $Z_j = W_j \cap (2R/2^j)B_2^n$. Παρατηρούμε ότι

$$\log |Z_j| \leqslant n_j + n_{j-1} \leqslant \frac{c_2 2^{2j} q^2 L_K^2}{R^2}. \tag{6.4.15}$$

Χρειαζόμαστε την εξής παραλλαγή του Λήμματος 4.5.1.

Λήμμα 6.4.4. *Για κάθε $x \in Z_q(K)$ και για κάθε $1 \leqslant m \leqslant j_0$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in Z_j$, $j = 1,\dots,m$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$ ώστε*

$$x = z_1 + \cdots + z_m + w_m. \tag{6.4.16}$$

Τώρα, για κάθε $x \in K$ και για κάθε $1 \leqslant m \leqslant j_0$, γράφουμε

$$\begin{aligned} h_{Z_q(K)}(x) = \max_{y\in Z_q(K)} |\langle y,x\rangle| &\leqslant \sum_{j=1}^m \max_{z\in Z_j} |\langle z,x\rangle| + \max_{w\in (R/2^m)B_2^n} |\langle w,x\rangle| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \max_{z\in Z_j} |\langle \overline{z},x\rangle| + \frac{R}{2^m}\|x\|_2, \end{aligned}$$

όπου $\overline{z}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του z. Παρατηρώντας ότι $\int_K \|x\|_2 dx \leqslant \sqrt{n}L_K$ και χρησιμοποιώντας το παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(K)) &\leqslant \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j}\int_K \max_{z\in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| dx + \frac{R}{2^m}\int_K \|x\|_2 dx \\ &\leqslant \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j}\int_K \max_{z\in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| dx + \frac{R}{2^m}\sqrt{n}L_K. \end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 6.4.5. *Αν $\theta_1, \ldots, \theta_N \in S^{n-1}$, τότε*

$$\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, \theta_i\rangle|\, dx \leqslant c_3 L_K \log N, \tag{6.4.17}$$

όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\|\langle\cdot, \theta_i\rangle\|_{\psi_1} \leqslant bL_K$ για κάθε $i = 1, \ldots, N$, όπου $b > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από τον ορισμό της ψ_1-νόρμας και την ανισότητα του Markov, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, \theta_i\rangle| \geqslant t\right) &\leqslant \sum_{i=1}^N \mathrm{Prob}\left(x\in K : |\langle x, \theta_i\rangle| \geqslant t\right) \\ &\leqslant 2N\exp\left(-t/(bL_K)\right). \end{aligned}$$

Τότε, για οποιοδήποτε $A > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, \theta_i\rangle| dx &= \int_0^\infty \mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, \theta_i\rangle| \geqslant t\right) dt \\ &\leqslant A + \int_A^\infty \mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, \theta_i\rangle| \geqslant t\right) dt \\ &\leqslant A + 2N\int_A^\infty \exp\left(-t/(bL_K)\right) dt. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $A = 4bL_K(\log N)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \exp\left(-t/(bL_K)\right) dt &= 4bL_K(\log N)\int_1^\infty \exp(-4s\log N) ds \\ &\leqslant 4bL_K(\log N)\int_1^\infty \exp(-4s\log N) ds \\ &\leqslant 4bL_K(\log N)\exp(-2\log N)\int_1^\infty e^{-s} ds \\ &\leqslant 4bL_K(\log N)N^{-2}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ανισότητα

$$\exp(-4s\log N) \leqslant \exp(-2\log N)\cdot e^{-s}$$

ισχύει για κάθε $s \geqslant 1$. Έπεται ότι

$$\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x,\theta_i\rangle| dx \leqslant CL_K(\log N)$$

με $C = 8b$. □

Συνδυάζοντας το Λήμμα 6.4.5 με την (6.4.15) παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(K)) &\leqslant c_4 L_K \sum_{j=1}^m \frac{R}{2^j}\frac{2^{2j}q^2L_K^2}{R^2} + \frac{R}{2^m}\sqrt{n}L_K \\ &= c_4 L_K \sum_{j=1}^m \frac{2^j q^2 L_K^2}{R} + \frac{R}{2^m}\sqrt{n}L_K \\ &\leqslant c_5 L_K \left(\frac{2^m q^2 L_K^2}{R} + \frac{R}{2^m}\sqrt{n}\right). \end{aligned}$$

Το άθροισμα ελαχιστοποιείται αν επιλέξουμε $B := R/2^m$ έτσι ώστε

$$\frac{q^2L_K^2}{B} = B\sqrt{n}, \tag{6.4.18}$$

δηλαδή,

$$B = \frac{qL_K}{\sqrt[4]{n}}. \tag{6.4.19}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση: Υποθέτουμε ότι $B \geqslant c_1\sqrt{q}L_K$. Αυτό ισχύει αν

$$q \geqslant c_1^2\sqrt{n}. \tag{6.4.20}$$

Τότε, μπορούμε να επιλέξουμε m έτσι ώστε $R/2^m \simeq B$, άρα

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant c_6 L_K B\sqrt{n} \leqslant Cq\sqrt[4]{n}L_K^2. \tag{6.4.21}$$

Δεύτερη περίπτωση: Υποθέτουμε ότι $B \leqslant c_1\sqrt{q}L_K$. Αυτό ισχύει αν

$$q \leqslant c_1^2\sqrt{n}. \tag{6.4.22}$$

Τότε, επιλέγουμε τον μεγαλύτερο δυνατό m. Έχουμε $R/2^m \simeq \sqrt{q}L_K$ και αυτό οδηγεί στο φράγμα

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant c_6 L_K \left(q^{3/2}L_K + \sqrt{qn}L_K\right) \leqslant C\sqrt{qn}L_K^2, \tag{6.4.23}$$

διότι $q^{3/2} = q\sqrt{q} \leqslant c_7\sqrt{qn}$. □

Βιβλιογραφία

[1] S. Artstein, V. D. Milman and S. J. Szarek, *Duality of metric entropy*, Annals of Math. **159** (2004), 1313–1328.

[2] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **88** (1988), 69–84.

[3] F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson and A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the* ℓ_p^n*-ball*, Ann. Prob. **33** (2005), 480–513.

[4] J. Bastero, *Upper bounds for the volume and diameter of* m*-dimensional sections of convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1851–1859.

[5] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53–69.

[6] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. 56, Birkhauser, Basel, 2003, 3–13.

[7] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467–1476.

[8] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 127–137.

[9] J. Bourgain and V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in* $\mathbb{R}^n$, Invent. Math. **88** (1987), 319–340.

[10] J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V. D. Milman, *Minkowski sums and symmetrizations*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1317** (1988), 44–74.

[11] S. Brazitikos and P. Stavrakakis, *On the intersection of random rotations of a symmetric convex body*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (to appear).

[12] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs **196** (2014).

[13] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, *The* (B)*-conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, J. Funct. Anal. **214** (2004), 410–427.

[14] N. Dafnis and G. Paouris, *Small ball probability estimates, ψ_2-behavior and the hyperplane conjecture*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 1933–1964.

[15] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515–522.

[16] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[17] A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Warsaw University Notes (2003).

[18] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *On the diameter of proportional sections of a symmetric convex body*, International Mathematics Research Notices (1997) No. 1, 5–19.

[19] A. A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Mean width and diameter of proportional sections of a symmetric convex body*, J. Reine Angew. Math. **497** (1998), 113–139.

[20] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Euclidean structure in finite-dimensional normed spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces (Johnson-Lindenstrauss eds.), Vol. 1 (2001), 707–779.

[21] A. Giannopoulos, V. D. Milman and A. Tsolomitis, *Asymptotic formulas for the diameter of sections of symmetric convex bodies*, Journal of Functional Analysis **223** (2005), 86–108.

[22] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the existence of subgaussian directions for log-concave measures*, Contemporary Mathematics **545** (2011), 103–122.

[23] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the distribution of the ψ_2-norm of linear functionals on isotropic convex bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **2050** (2012), 227–253.

[24] A. Giannopoulos, G. Paouris and B-H. Vritsiou, *A remark on the slicing problem*, Journal of Functional Analysis 262 (2012), 1062–1086.

[25] A. Giannopoulos, P. Stavrakakis, A. Tsolomitis and B-H. Vritsiou, *Geometry of the L_q-centroid bodies of an isotropic log-concave measure*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[26] Y. Gordon, *On Milman's inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 84–106.

[27] O. Guédon and E. Milman, *Interpolating thin-shell and sharp large-deviation estimates for isotropic log-concave measures*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), 1043–1068.

[28] B. S. Kashin, *Sections of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 334–351.

[29] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274–1290.

[30] B. Klartag and V. D. Milman, *Rapid Steiner symmetrization of most of a convex body and the slicing problem*, Combin. Probab. Comput. **14**, no. 5–6 (2005) 829–843.

[31] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform – A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10–34.

[32] B. Klartag and E. Milman, *Inner regularization of log-concave measures and small-ball estimates*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis (Klartag-Mendelson-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **2050** (2012), 267–278.

[33] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky theorem*, Israel J. Math. **157** (2007), 193–207.

[34] R. Latala, *Weak and strong moments of random vectors*, Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publ. **95** (2011), 115–121.

[35] R. Latala and K. Oleszkiewicz, *Small ball probability estimates in terms of widths*, Studia Math. **169** (2005), 305–314.

[36] A. Litvak, V. D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[37] A. E. Litvak, A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Diameters of Sections and Coverings of Convex Bodies*, J. Funct. Anal. **231** (2006), 438–457.

[38] A. Litvak, V. D. Milman, A. Pajor and N. Tomczak-Jeagermann, *Entropy extension*, Funct. Anal. Appl. **40** (2006), 298–303.

[39] E. Lutwak and G. Zhang, *Blaschke-Santaló inequalities*, J. Differential Geom. **47** (1997), 1–16.

[40] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *L^p affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111–132.

[41] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, *Moment-entropy inequalities*, Annals of Prob. **32** (2004), 757–774.

[42] V. D. Milman, *Geometrical inequalities and mixed volumes in the Local Theory of Banach spaces*, Astérisque **131** (1985), 373–400.

[43] V. D. Milman, *Random subspaces of proportional dimension of finite dimensional normed spaces: approach through the isoperimetric inequality*, Lecture Notes in Mathematics **1166** (1985), 106–115.

[44] V. D. Milman, *Isomorphic symmetrization and geometric inequalities*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 107–131.

[45] V. D. Milman, *Some applications of duality relations*, Lecture Notes in Mathematics **1469** (1991), 13–40.

[46] V. D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1376** (1989), 64–104.

[47] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[48] V. D. Milman and G. SchechtmanSchechtman, G., *Global versus Local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces*, Duke Math. Journal **90** (1997), 73–93.

[49] A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Subspaces of small codimension of finite dimensional Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 637–642.

[50] G. Paouris, *On the ψ_2-behavior of linear functionals on isotropic convex bodies*, Studia Math. **168** (2005), 285–299.

[51] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geometric and Functional Analysis **16** (2006), 1021–1049.

[52] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287–308.

[53] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*, J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 115–131.

[54] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[55] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[56] C. Schütt, *Entropy numbers of diagonal operators between symmetric Banach spaces*, J. Approximation Theory **40** (1984), 121–128.

[57] S. J. Szarek and N. Tomczak-Jaegermann, *On nearly Euclidean decompositions of some classes of Banach spaces*, Compositio Math. **40** (1980), 367–385.

[58] P. Valettas, *Upper bound for the ℓ-norm in the isotropic position*, Private communication.

[59] R. Vershynin, *Isoperimetry of waists and local versus global asymptotic convex geometries* (with an appendix by M. Rudelson and R. Vershynin), Duke Mathematical Journal **131** (2006), 1–16.

[60] B-H. Vritsiou, *Further unifying two approaches to the hyperplane conjecture*, Int. Math. Res. Not. (2012), `DOI: 10.1093/imrn/rns263`.