Γεωμετρία τῶν ἰσοτροπικῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων

Διδακτορικὴ Διατριβή

Βεατρίκη-Ἑλένη Βριτσίου

Τμῆμα Μαθηματικῶν ΕΚΠΑ

Ἀθήνα 2013

Εἰσηγητής: Ἀπόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Εὐχαριστίες

Εὐχαριστῶ πολὺ τὸν ἐπιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ἀπόστολο Γιαννόπουλο γιὰ τὴν ἀδιάκοπη βοήθειά του σὲ ὅλα τὰ στάδια τοῦ διδακτορικοῦ, καὶ κυρίως γιὰ τὴν καθοδήγησί του στὶς πρῶτες μου ἐρευνητικὲς προσπάθειες στὸν κλάδο τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας. Τὸν εὐχαριστῶ ἐπειδὴ μοῦ δίδαξε πόσο ἐνδιαφέρουσα, πλούσια ἀλλὰ καὶ δύσκολη μπορεῖ νὰ εἶναι ἡ ἔρευνα σὲ αὐτὸν τὸν κλάδο καὶ γενικότερα στὰ Μαθηματικά.

Εὐχαριστῶ ἐπίσης ὅλους τοὺς καθηγητές μου στὸ Τμῆμα Μαθηματικῶν γιὰ ὅλα ὅσα μοῦ ἔμαθαν.

Τέλος, θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω τοὺς γονεῖς μου καὶ τὴν ἀδερφή μου ποὺ μὲ στήριξαν σὲ εὔκολες καὶ δύσκολες στιγμὲς κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ διδακτορικοῦ καὶ νὰ τοὺς ἀφιερώσω αὐτὴν τὴν διατριβή.

Ἀποτελέσματα τῆς διατριβῆς

Τὰ ἀποτελέσματα ποὺ παρουσιάζονται σὲ αὐτὴν τὴν διατριβὴ ἀνήκουν στὴν θεωρία τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων ἤ, πιὸ γενικά, τῶν ἰσοτροπικῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων. Κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ θὰ λέμε ἕνα ὑποσύνολο K τοῦ $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο εἶναι κυρτό, συμπαγὲς καὶ μὲ μή κενὸ ἐσωτερικό. Ἕνα κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ λέμε ὅτι εἶναι ἰσοτροπικὸ ἂν ἔχει ὄγκο 1, ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, δηλαδὴ ἰσχύει $\int_K \langle x,y\rangle dx = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, καὶ ἂν ὑπάρχει μία θετικὴ σταθερὰ L_K τέτοια ὥστε

$$\int_K \langle x,y\rangle^2 dx = L_K^2 \|y\|_2^2$$

γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Ἡ σταθερὰ L_K ὀνομάζεται ἰσοτροπικὴ σταθερὰ τοῦ σώματος K. Ἀντίστοιχα, ἕνα Borel μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικὰ-κοῖλο ἄν, γιὰ κάθε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα A, B τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $\lambda \in (0,1)$, ἰσχύει

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}.$$

Ἕνα πεπερασμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ εἶναι ἀπολύτως συνεχὲς ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue καὶ ἔχει μία λογαριθμικὰ-κοίλη πυκνότητα $f_\mu : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$, δηλαδὴ μία πυκνότητα γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύει

$$f_\mu(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant (f_\mu(x))^\lambda (f_\mu(y))^{1-\lambda}$$

γιὰ κάθε δύο σημεῖα $x, y \in \mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $\lambda \in (0,1)$. Λέμε ἕνα πεπερασμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ ἰσοτροπικό, καὶ γράφουμε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, ἂν τὸ μ εἶναι μέτρο πιθανότητος, δηλαδὴ $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$, ἂν ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, δηλαδὴ ἰσχύει $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle d\mu(x) = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, καὶ ἂν ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle^2 \, d\mu(x) = \|y\|_2^2$$

γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Στὴν περίπτωσι τῶν ἰσοτροπικῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων, ὁρίζουμε τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_μ τοῦ μέτρου μ στὸν $\mathbb{R}^n$ θέτοντας

$$L_\mu := \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\right)^{1/n},$$

ὅπου f_μ ἡ λογαριθμικὰ-κοίλη πυκνότητα τοῦ μ ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue.

Ἕνα ἀπὸ τὰ γνωστότερα προβλήματα τῆς θεωρίας τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων ἢ λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων εἶναι ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου ἢ τὸ πρόβλημα τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς, δηλαδὴ τὸ ἐρώτημα τοῦ ἂν ὑπάρχει μία σταθερὰ $C > 0$ ὥστε γιὰ κάθε $n \geqslant 1$ νὰ ἰσχύει

$$L_n := \sup\{L_\mu : \mu \text{ ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν K εἶναι ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$, τότε, ἐξαιτίας τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski, τὸ μέτρο μ_K μὲ πυκνότητα $x \mapsto L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}(x)$, ὅπου $\mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις τοῦ κυρτοῦ σώματος $\frac{1}{L_K}K$, εἶναι ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ $L_{\mu_K} = L_K$· ἀπὸ αὐτὸ προκύπτει ὅτι

$$\sup\{L_K : K \text{ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\} \leqslant L_n.$$

Εἶναι ὅμως γνωστὸ (βλέπε [2]) ὅτι ὑπάρχει καὶ μία ἀπόλυτη σταθερὰ C_1 ὥστε γιὰ κάθε $n \geqslant 1$ νὰ ἔχουμε

$$L_n \leqslant C_1 \sup\{L_K : K \text{ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\}.$$

Ὁ Bourgain [9] ἔχει δείξει ὅτι $L_n \leqslant C\sqrt[4]{n}\log n$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ C, καὶ ὁ Klartag [27] ὅτι $L_n \leqslant C\sqrt[4]{n}$ (βλέπε ἐπίσης [29]).

Κύριος σκοπὸς τοῦ Κεφαλαίου 2 εἶναι νὰ παρουσιάσουμε μία ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου στὴν μελέτη μίας παραμέτρου ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 ἢ γιὰ κάθε λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος· ἡ ἀναγωγὴ αὐτὴ εἶναι κοινὴ δουλειὰ μὲ τοὺς Γιαννόπουλο καὶ Παούρη [21]. Γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὴν βασικὴ παράμετρο, ὑπενθυμίζουμε πρῶτα τὸν ὁρισμὸ τῶν L_q-κεντροειδῶν σωμάτων ἑνὸς κυρτοῦ σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$ ὄγκου 1 ἢ ἑνὸς λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$: γιὰ κάθε $q \geqslant 1$, τὸ L_q-κεντροειδὲς σῶμα $Z_q(K)$ τοῦ K ὁρίζεται ὡς τὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχει συνάρτησι στηρίξεως

$$h_{Z_q(K)}(y) := \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}, \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

ἐνῷ ἀντίστοιχα τὸ L_q-κεντροειδὲς σῶμα $Z_q(\mu)$ τοῦ μ ὁρίζεται ὡς τὸ κυρτὸ σῶμα μὲ συνάρτησι στηρίξεως

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}, \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Ὑπενθυμίζουμε ἐπίσης τὸν ἑξῆς συμβολισμό: ἂν C εἶναι ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ $p \in (-n, +\infty)$, $p \neq 0$, γράφουμε

$$I_p(K, C) := \left(\int_K \|x\|_C^p dx\right)^{1/p} \quad \text{καὶ} \quad I_p(\mu, C) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_C^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Ἡ παράμετρος ποὺ μελετοῦμε στὸ Κεφάλαιο 2 τῆς παρούσας διατριβῆς εἶναι ἕνα ὁλοκλήρωμα τῆς παραπάνω μορφῆς: γιὰ κάθε $q \geqslant 1$ καὶ γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 θέτουμε

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) := \int_K h_{Z_q(K)}(x) dx,$$

ὅπου ὁ συμβολισμὸς δικαιολογεῖται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ συνάρτησις στηρίξεως τοῦ $Z_q(K)$ ταυτίζεται μὲ τὴν νόρμα ποὺ ἐπάγεται ἀπὸ τὸ πολικὸ τοῦ $Z_q(K)$. Περιγράφουμε τώρα τὰ κύρια ἀποτελέσματα τοῦ Κεφαλαίου 2.

Ὁρισμὸς A. Ἔστω παράμετροι $\kappa, \tau > 0$. Θὰ λέμε ὅτι ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι (κ,τ)-κανονικὸ ἂν

$$\log N(K, tD_n) \leqslant \frac{\kappa n \log^4 n}{t^2} \text{ γιὰ κάθε } t \geqslant \tau \log^{3/2} n,$$

ὅπου D_n εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα στὸν $\mathbb{R}^n$ ὄγκου 1.

Στὸ [14] οἱ Δαφνὴς καὶ Παούρης ἔχουν δείξει ὅτι, γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $\kappa, \tau, \delta > 0$ καὶ γιὰ κάθε $n \geqslant 1$, ὑπάρχουν (κ,τ)-κανονικὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὴν πρόσθετη ἰδιότητα ὅτι $L_K \geqslant \delta L_n$. Ἡ ἀναγωγὴ στὸ Κεφάλαιο 2 στηρίζεται στὴν ὕπαρξι αὐτῶν τῶν σωμάτων.

Θεώρημα A. *Ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $\rho \in (0,1)$ μὲ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα: γιὰ κάθε $\kappa, \tau \geqslant 1$, γιὰ κάθε (κ,τ)-κανονικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $q \in [2, \rho^2 n]$ μὲ τὴν ἰδιότητα*

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant \rho n L_K^2,$$

ἔχουμε ὅτι

$$L_K \leqslant C \max\{\sqrt{\kappa}, \tau\} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2 n \max\left\{1, \sqrt{\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn} L_K^2}}\right\},$$

ὅπου C εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἐφ' ὅσον ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχουν (κ,τ)-κανονικὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $L_K \geqslant \delta L_n$, τὸ παραπάνω θεώρημα δίνει ἕνα ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τὴν σταθερὰ L_n τὸ ὁποῖο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πῶς συμπεριφέρεται ὁ λόγος $I_1(K, Z_q^\circ(K))/\sqrt{qn}L_K^2$. Γιὰ παράδειγμα, ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα A γιὰ ἕνα τέτοιο ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K καὶ γιὰ $q = 2$, καὶ δεδομένου ὅτι $I_1(K, Z_2^\circ(K)) \leqslant \sqrt{n} L_K^2$ ἀπὸ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη γιὰ τὸ K, λαμβάνουμε ὅτι $L_n \leqslant \delta^{-1} L_K \leqslant C' \sqrt[4]{n} \log^2 n$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ C'. Ἡ συμπεριφορὰ ὅμως τοῦ $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ θὰ μποροῦσε ἴσως νὰ μᾶς ἐπιτρέψει νὰ χρησιμοποιήσουμε καὶ μεγαλύτερα q. Παρακάτω ἀναφέρουμε κάποιες πρῶτες ἐκτιμήσεις γιὰ τὸ $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ἢ γενικότερα τὸ $I_1(K, Z_q^\circ(M))$ ὅπου $M \subset \mathbb{R}^n$ ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 ἐπίσης.

Θεώρημα B. *Ἔστω K, M ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2, c_3 > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,*

$$c_1 \max\left\{\sqrt{n} L_K L_M, \sqrt{qn}, R(Z_q(M)) L_K\right\} \leqslant I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leqslant c_2 q \sqrt{n} L_K L_M$$

(ὅπου $R(C) := \max\{\|x\|_2 : x \in C\}$ εἶναι ἡ ἀκτίνα ἑνὸς σώματος C), καὶ ταυτόχρονα, γιὰ κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$,

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geqslant c_3 \max\left\{\sqrt{n} L_K L_M, \sqrt{qn} L_M\right\}.$$

Ἐπιπλέον, ὅταν M εἶναι μία ὀρθογώνια εἰκόνα τοῦ K, ἔχουμε ὅτι

$$\left(\int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K)))\, d\nu(U)\right)^{1/q} \leqslant c_4 \max\{\sqrt{qn}, q^{5/2}/\sqrt{n}\} L_K^2$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ c_4, ὅπου $O(n)$ εἶναι ἡ ὁμάδα τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν καὶ ν τὸ μέτρο πιθανότητος Haar σὲ αὐτήν, ἐπομένως $I_1(K, Z_q^\circ(U(K))) \leqslant c_4' \sqrt{qn} L_K^2$ γιὰ κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ μὲ πιθανότητα $\geqslant 1 - e^{-q}$.

Τέλος, ἂν τὰ K, M εἶναι unconditional σώματα, τότε, γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς c_5, c_6 καὶ γιὰ κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,

$$c_5 \sqrt{qn} \leqslant I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leqslant c_6 \sqrt{qn} \log n.$$

Στὸ Κεφάλαιο 3 παραλλάσσουμε μία μέθοδο τῶν Klartag καὶ E. Milman ἀπὸ τὸ [29], τὴν ὁποία χρησιμοποίησαν γιὰ νὰ δώσουν κάτω φράγματα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν L_q-κεντροειδῶν σωμάτων $Z_q(\mu)$ ἑνὸς λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου πιθανότητος μ μὲ κέντρο βάρους τὸ 0, καί, συνδυάζοντάς την μὲ ἀποτελέσματα ἀπὸ τὸ [53] καθῶς καὶ τὴν κύρια παράμετρο τῆς ἀναγωγῆς τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη στὸ [14], δείχνουμε πῶς μπορεῖ κάποιος νὰ ἐπεκτείνει τὸ διάστημα τῶν q γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει τὸ ἐπιθυμητὸ κάτω φράγμα καὶ ταυτόχρονα, ὑπὸ προϋποθέσεις, νὰ βελτιώσει κατὰ ἕναν λογαριθμικὸ ὅρο τὸ ἄνω φράγμα γιὰ τὴν L_n ποὺ δίνει ἡ ἀναγωγὴ τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη. Ὑπενθυμίζουμε πρῶτα σύντομα τὸ τί δίνουν οἱ μέθοδοι τῶν Klartag καὶ E. Milman στὸ [29] καὶ τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη στὸ [14]. Πρὸς τοῦτο, χρειάζεται νὰ θυμηθοῦμε τὶς παραμέτρους $q_*(\mu)$ καὶ $q_{-c}(\mu, \delta)$, $\delta \geqslant 1$, ποὺ μπορεῖ κάποιος νὰ ἀντιστοιχίσει μὲ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, δηλαδὴ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$: ἡ πρώτη ὁρίζεται ἀπὸ τὸν Παούρη (βλέπε π.χ. [52]) ὡς

$$q_*(\mu) := \sup\{1 \leqslant q \leqslant n : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q\}$$

ὅπου $k_*(Z_q(\mu))$ εἶναι ἡ δυϊκὴ διάστασις Dvoretzky τοῦ συμμετρικοῦ κυρτοῦ σώματος $Z_q(\mu)$ (βλέπε ἀναλυτικοὺς ὁρισμοὺς στὸ Κεφάλαιο 1), ἐνῷ ἡ δεύτερη εἰσάγεται ἀπὸ τοὺς Δαφνὴ καὶ Παούρη στὸ [14] ὡς

$$q_{-c}(\mu, \delta) := \max\{1 \leqslant q \leqslant n-1 : I_{-q}(\mu, B_2^n) \geqslant \delta^{-1} I_2(\mu, B_2^n) = \delta^{-1}\sqrt{n}\}.$$

Ἕνα ἀπὸ τὰ κύρια ἀποτελέσματα στὸ [14] εἶναι ὅτι, γιὰ κάθε $\delta \geqslant 1$,

$$L_n \leqslant C\delta \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}(\mu, \delta)}}\ \log^2\Big(\frac{en}{q_{-c}(\mu, \delta)}\Big).$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, οἱ Klartag καὶ E. Milman ὁρίζουν μία κληρονομικὴ παραλλαγὴ τῆς παραμέτρου $q_*(\mu)$ ὡς ἑξῆς:

$$q_*^H(\mu) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{q_*(\pi_E \mu)}{k},$$

ὅπου $\pi_E\mu$ εἶναι τὸ περιθώριο μέτρο τοῦ μ ὡς πρὸς τὸν k-διάστατο ὑπόχωρο E τοῦ $\mathbb{R}^n$, καὶ ἀποδεικνύουν ὅτι ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $c>0$ ὥστε νὰ ἰσχύει

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geqslant c\sqrt{\frac{p}{n}}$$

γιὰ κάθε $p \leqslant q_*^H(\mu)$ καὶ γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$. Ἕπεται ὕστερα, λόγῳ καὶ ἑνὸς ἀποτελέσματος τοῦ Παούρη στὸ [53], ὅτι

$$L_\mu \simeq \frac{1}{|Z_n(\mu)|^{1/n}} \leqslant \frac{1}{|Z_{q_*^H(\mu)}(\mu)|^{1/n}} \leqslant C\sqrt{\frac{n}{q_*^H(\mu)}}$$

γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, ἀπὸ ὅπου προκύπτει ἕνα ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τὴν L_n. Θυμόμαστε ἐπίσης τὰ ἀκόλουθα.

Παρατήρησις A. (α) Ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Παούρη στὰ [52] καὶ [53], γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $\delta \geqslant \delta_0$, ὅπου $\delta_0 \geqslant 1$ μία ἀπόλυτη σταθερά, ἰσχύει

$$c_1\sqrt{n} \leqslant q_*^H(\mu) \leqslant q_*(\mu) \leqslant c_2 q_{-c}(\mu,\delta),$$

ὅπου $c_1, c_2 > 0$ ἀπόλυτες σταθερές.
(β) Ὑπάρχουν ἰσοτροπικὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα μ στὸν $\mathbb{R}^n$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $q_*(\mu) \simeq q_*^H(\mu) \simeq \sqrt{n}$, ἐνῷ, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη στὸ [14], ἀκόμη καὶ γιὰ αὐτὰ τὰ μέτρα θὰ μποροῦσε τὸ $q_{-c}(\mu,\delta_1)$, γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $\delta_1 \geqslant 1$, νὰ εἶναι ἀνάλογο τοῦ n.

Στὸ Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε δύο νέες κληρονομικὲς παραμέτρους ἀπὸ τὸ [67]. Ἡ πρώτη παράμετρος προκύπτει, κατὰ τὸν τρόπο τῶν Klartag καὶ Milman, ὡς μία «κληρονομικὴ» παραλλαγὴ τῆς παραμέτρου $q_{-c}(\mu,\delta)$ ποὺ ὅρισαν οἱ Δαφνὴς καὶ Παούρης: θέτουμε

$$q_{-c}^H(\mu,\delta) := n\inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{\lfloor q_{-c}(\pi_E\mu,\delta)\rfloor}{k}$$

Γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὴν δεύτερη κληρονομικὴ παράμετρο, ὁρίζουμε πρῶτα τὴν ἑξῆς παράμετρο

$$r_\sharp(\mu,A) := \max\{1 \leqslant k \leqslant n-1 : \exists E \in G_{n,k} \text{ τέτοιος ὥστε } L_{\pi_E\mu} \leqslant A\}$$

γιὰ κάθε λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε σταθερὰ $A \geqslant 1$. Στὴν συνέχεια θέτουμε

$$r_\sharp^H(\mu,A) := n\inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{r_\sharp(\pi_E\mu,A)}{k}$$

(ὅπου συμφωνοῦμε ὅτι $r_\sharp(\pi_{\mathbb{R}\theta}\mu,A) = q_{-c}(\pi_{\mathbb{R}\theta}\mu,A) = 1$ γιὰ ὅλα τὰ μονοδιάστατα περιθώρια μέτρα). Τὸ ἀκόλουθο θεώρημα ἀπὸ τὸ [67] ἰσχύει γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα Γ. *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $C_1, C_2 > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$ καὶ κάθε $A \geqslant 1$, νὰ ἰσχύει*

$$r_\sharp^H(\mu,A) \leqslant q_{-c}^H(\mu,C_1A) \leqslant r_\sharp^H(\mu,C_2A).$$

Ἐπιπροσθέτως, γιὰ κάθε $p \leqslant r_\sharp^H(\mu, A)$ ἔχουμε ὅτι

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geqslant \frac{c}{A}\sqrt{\frac{p}{n}},$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Πόρισμα Α. *Ὅπως καὶ πρίν, γιὰ κάθε $A \geqslant 1$ μποροῦμε νὰ γράψουμε*

$$L_n = \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} L_\mu \leqslant CA \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{r_\sharp^H(\mu, A)}} \leqslant CA \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}^H\left(\mu, \frac{C_1}{C_2}A\right)}}.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ Θεώρημα Γ ὁδηγεῖ σὲ μία δεύτερη ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου στὴν μελέτη τῶν παραμέτρων $r_\sharp^H(\mu, A)$ καὶ $q_{-c}^H(\mu, A)$, καὶ ἄρα καὶ τῶν ἀρχικῶν παραμέτρων $r_\sharp(\mu, A)$ καὶ $q_{-c}(\mu, A)$, ἡ ὁποία λειτουργεῖ συμπληρωματικὰ πρὸς τὴν ἀναγωγὴ τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη [14] στὴν μελέτη τῆς παραμέτρου $q_{-c}(\mu, A)$. Πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνσι, ἕνα «κακὸ» ἄνω φράγμα γιὰ τὶς παραμέτρους $r_\sharp(\mu, A)$ καὶ $q_{-c}(\mu, A)$ δίδεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθη πρότασι.

Πρότασις Α. *Ὑπάρχουν ἰσοτροπικὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα μ στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $L_\mu \simeq L_n$ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα, γιὰ κάθε $\lambda \in (0,1)$ καὶ γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο $k = \lambda n$, νὰ ἰσχύει*

$$L_{\pi_E \mu} \geqslant C^{-\frac{1}{\lambda}} L_\mu$$

γιὰ ὁποιονδήποτε ὑπόχωρο $E \in G_{n,k}$, ὅπου $C \geqslant 1$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Τέλος, στὸ Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μία καθαρὰ γεωμετρικὴ ἀπόδειξι τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ δουλειὰ μὲ τοὺς Γιαννόπουλο καὶ Παούρη [22]. Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι ἡ ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló, ἢ ἀνισότητα Bourgain-Milman [12], λέει ὅτι ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του, νὰ ἰσχύει

$$s(K) := |K| \cdot |K^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|^2.$$

Εἶναι γνωστὸ ὅτι ἀρκεῖ νὰ δείξουμε τὴν παραπάνω ἀνισότητα γιὰ κυρτὰ σώματα K μὲ κέντρο βάρους τὸ 0, καὶ εἶναι ἐπίσης γνωστὸ ὅτι τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K) = |K| \cdot |K^\circ|$ δὲν μεταβάλλεται ἂν ἐφαρμόσουμε ἕναν ἀντιστρέψιμο γραμμικὸ μετασχηματισμὸ στὸ K. Ἑπομένως, γιὰ τὴν ἀπόδειξι ποὺ παρουσιάζουμε στὸ Κεφάλαιο 4 ὑποθέτουμε ἀρχικῶς ὅτι τὸ K εἶναι σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι. Ἐπικαλούμενοι ἕνα λῆμμα τῆς Χαρτζουλάκη [25] τὸ ὁποῖο μᾶς δίνει ἄνω φράγματα γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως $N(K, tB_2^n)$, $t > 0$, ὅταν τὸ K εἶναι ἰσοτροπικό, δείχνουμε τὸ ἑξῆς ἀποτέλεσμα.

Θεώρημα Δ. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Τότε, γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$, ἔχουμε ὅτι*

$$2n(s(K))^{1/n} \geqslant n(s(K-K))^{1/n} \geqslant \frac{c_1}{L_K},$$

ὅπου L_K εἶναι ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ὁποιασδήποτε ἰσοτροπικῆς εἰκόνας τοῦ K (εἶναι γνωστὸ ὅτι ὅλες αὐτὲς οἱ ἰσοτροπικὲς σταθερὲς ταυτίζονται). Ἡ πρώτη ἀνισότητα προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Rogers-Shephard [59].

Ἔπειτα, χρησιμοποιῶντας τὴν μέθοδο τῶν κυρτῶν διαταραχῶν μέσῳ τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace ἑνὸς μέτρου μ, τὴν ὁποία εἰσήγαγε ὁ Klartag στὸ [27], δείχνουμε τὸ ἀκόλουθο

Θεώρημα Ε. *Ἔστω K ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Ὑπάρχει ἕνα κυρτὸ σῶμα Q στὸν $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε (α) $c_2K \subseteq Q - Q \subseteq c_3K$ καὶ (β) $L_Q \leqslant c_4/\sqrt{n(s(K))^{1/n}}$, ὅπου $c_2, c_3, c_4 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.*

Δεδομένου ὅτι τὰ K καὶ $Q - Q$ ἔχουν ἀπολύτως φραγμένη γεωμετρικὴ ἀπόστασι, προκύπτει ὅτι $(s(K))^{1/n} \simeq (s(Q-Q))^{1/n}$. Μποροῦμε ἔπειτα νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Θεώρημα Δ γιὰ νὰ συμπεράνουμε ὅτι $L_Q \geqslant c_1'/(n(s(K))^{1/n})$. Συνδυάζοντάς το αὐτὸ μὲ τὸ (β) τοῦ Θεωρήματος Ε, λαμβάνουμε τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló γιὰ τὰ συμμετρικὰ κυρτὰ σώματα K, καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Rogers-Shephard καὶ γιὰ ὅλα τὰ σώματα K.

Συμπληρώνουμε αὐτὴν τὴν παρουσίασι δείχνοντας στὴν Παράγραφο 4.5 πῶς, ἀπὸ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló ὅπως αὐτὴ ἀποδεικνύεται στὴν Παράγραφο 4.4, τὴν κλασσικὴ ἀνισότητα Blaschke-Santaló, καὶ βασικὲς ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν καλύψεως, μποροῦμε νὰ δείξουμε τὴν ὕπαρξι M-ἐλλειψοειδῶν καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski τοῦ V. Milman. Ἡ ἀντίστροφη πορεία εἶναι γνωστὴ στὸν κλάδο: ἡ ὕπαρξις M-ἐλλειψοειδῶν μαζὶ μὲ βασικὲς ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν καλύψεως συνεπάγονται τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló καὶ μία ἀντίστοιχη ἀσυμπτωτικὴ ἐκδοχὴ τῆς ἀνισότητος Blaschke-Santaló.

Τὸ εἰσαγωγικὸ Κεφάλαιο 1 δὲν περιέχει καινούρια ἀποτελέσματα. Γιὰ τὶς ἀποδείξεις αὐτῶν τῶν ἀποτελεσμάτων, ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νὰ ἀνατρέξει στὰ βιβλία [47], [56], [62] καὶ [13]. Ἐπίσης, ἡ Παράγραφος 2.3 περιέχει τὴν ἀπόδειξι τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη γιὰ τὸ [14, Θεώρημα 5.7] μεταφρασμένη στὴν γλῶσσα τῶν κυρτῶν σωμάτων, καὶ στὴν Παράγραφο 2.4 περιγράφουμε ἐπιγραμματικὰ τὴν μέθοδό τους στὸ [14].

Κεφαλαιο 1

Εἰσαγωγὴ καὶ βασικὲς ἔννοιες

Ἐργαζόμαστε στὸν $\mathbb{R}^n$, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐφοδιασμένος μὲ μία Εὐκλείδεια δομή, $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε μὲ $\|\cdot\|_2$ τὴν ἀντίστοιχη Εὐκλείδεια νόρμα, μὲ B_2^n τὴν Εὐκλείδεια μοναδιαία μπάλα καὶ μὲ S^{n-1} τὴν μοναδιαία σφαίρα. Γράφουμε $GL(n)$ γιὰ τὴν ὁμάδα τῶν ἀντιστρεψίμων γραμμικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ $\mathbb{R}^n$, καὶ (καταχρηστικὰ) $SL(n)$ γιὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς ἐκείνους ποὺ ἔχουν ὁρίζουσα ± 1, δηλαδὴ $SL(n) = \{T \in GL(n) : |\det T| = 1\}$. Ἐπίσης μὲ $O(n)$ συμβολίζουμε τὴν ὁμάδα τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν τοῦ $\mathbb{R}^n$, δηλαδὴ τῶν ἀντιστρεψίμων ἐκείνων μετασχηματισμῶν ποὺ ὁ συζυγής τους καὶ ὁ ἀντίστροφός τους ταυτίζονται. Τὸ ἀναλλοίωτο ὡς πρὸς ὀρθογωνίους μετασχηματισμοὺς μέτρο πιθανότητος στὴν S^{n-1} συμβολίζεται μὲ σ, ἐνῷ ἡ πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ τῶν k-διαστάτων ὑποχώρων τοῦ $\mathbb{R}^n$ εἶναι ἐφοδιασμένη μὲ τὸ μέτρο πιθανότητος Haar $\nu_{n,k}$. Ἔστω $k \leqslant n$ καὶ $F \in G_{n,k}$: συμβολίζουμε μὲ Proj_F τὴν ὀρθογώνια προβολὴ ἀπὸ τὸν $\mathbb{R}^n$ στὸν F· ἐπίσης, θέτουμε $B_F := B_2^n \cap F$ καὶ $S_F := S^{n-1} \cap F$.

Ὁ ὄγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται μὲ $|\cdot|$. Τὶς περισσότερες φορές, ὅταν γράφουμε $|A \cap F|$ ἢ $|\mathrm{Proj}_F(A)|$ γιὰ κάποιο ὑποσύνολο A τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ κάποιον k-διάστατο ὑπόχωρό του F, θὰ ἐννοοῦμε τὸν ὄγκο ποὺ ἔχουν τὰ $A \cap F$ καὶ $\mathrm{Proj}_F(A)$ μέσα στὸν ὑπόχωρο F καὶ ὄχι ὡς ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$· ὁρισμένες φορές, γιὰ νὰ μὴν ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, θὰ γράφουμε καὶ $|A\cap F|_k$ ἢ $|\mathrm{Proj}_F(A)|_k$. Ἂν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μὲ θετικὸ πεπερασμένο ὄγκο, γράφουμε $\overline{A}$ γιὰ τὴν ὁμοιοθετικὴ εἰκόνα ὄγκου 1 τοῦ A, δηλαδὴ τὸ σύνολο $\frac{A}{|A|^{1/n}}$. Ἐπίσης, γράφουμε ω_n γιὰ τὸν ὄγκο τῆς B_2^n καὶ θυμόμαστε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες (δηλαδὴ ἀνεξάρτητες τῆς διαστάσεως) θετικὲς σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ ἔτσι ὥστε $c_1\sqrt{n} \leqslant \omega_n^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{n}$. Ἑπομένως ἡ Εὐκλείδεια μπάλα ὄγκου 1, τὴν ὁποία ἐκτὸς ἀπὸ $\overline{B}_2^n$ θὰ συμβολίζουμε καὶ μὲ D_n, ἔχει ἀκτίνα περίπου ἴση μὲ $\sqrt{n}$.

Μὲ τὰ γράμματα c, c', c_1, c_2, κλπ., θὰ συμβολίζουμε ἀπόλυτες θετικὲς σταθερές, τῶν ὁποίων οἱ τιμὲς μπορεῖ νὰ ἀλλάζουν ἀπὸ γραμμὴ σὲ γραμμή. Ὁποτεδήποτε γράφουμε $a \simeq b$ γιὰ κάποιες ποσότητες a καὶ b ποὺ σχετίζονται μὲ κυρτὰ σώματα ἢ μέτρα στὸν $\mathbb{R}^n$, ἐννοοῦμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$, ἀνεξάρτητες τῆς διαστάσεως ἢ ὁποιασδήποτε ἄλλης παραμέτρου, τέτοιες ὥστε $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$· θὰ χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τοὺς συμβολισμοὺς $a \lesssim b$ καὶ $a \gtrsim b$ ἐννοῶντας $a \leqslant c_1 b$ καὶ $b \leqslant c_2 a$ ἀντιστοίχως. Παρομοίως, ἂν $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$, θὰ γράφουμε $K \simeq L$ ἂν ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ ἔτσι ὥστε $c_1 K \subseteq L \subseteq c_2 K$.

Κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ θὰ λέμε ἕνα ὑποσύνολο K τοῦ $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο εἶναι κυρτό, συμπαγὲς καὶ μὲ μή κενὸ ἐσωτερικό. Λέμε ὅτι τὸ K εἶναι συμμετρικὸ ἂν γιὰ κάθε $x \in K$ ἔχουμε καὶ ὅτι $-x \in K$. Λέμε ὅτι ἕνα κυρτὸ σῶμα K ἔχει *κέντρο βάρους* τὸ 0, δηλαδὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, ἂν ἰσχύει $\int_K \langle x, y\rangle dx = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσι λέμε ἐπίσης ὅτι τὸ K ἔχει *βαρύκεντρο* τὸ 0 ἢ ὅτι εἶναι *κενταρισμένο*. Γενικά, τὸ κέντρο βάρους ἑνὸς κυρτοῦ σώματος K μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ ὡς τὸ διάνυσμα

$$\mathrm{bar}(K) := \frac{1}{|K|}\int_K x dx = \left(\frac{1}{|K|}\int_K \langle x, e_1\rangle dx, \dots, \frac{1}{|K|}\int_K \langle x, e_n\rangle dx\right),$$

ὅπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ εἶναι ἡ συνήθης ὀρθοκανονικὴ βάσις στὸν $\mathbb{R}^n$.

Κύριο ἀντικείμενο σχεδὸν ὅλων τῶν προβλημάτων καὶ ἀποτελεσμάτων ποὺ θὰ ἐξετάσουμε σὲ αὐτὴν τὴν διατριβὴ εἶναι μία εἰδικὴ κατηγορία κυρτῶν σωμάτων, τὰ *ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα*. Ἕνα κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ λέμε ὅτι εἶναι ἰσοτροπικό, ἢ ὅτι βρίσκεται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι, ἂν ἔχει ὄγκο 1, ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0 καὶ ὑπάρχει μία θετικὴ σταθερὰ L_K τέτοια ὥστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = L_K^2 \|y\|_2^2 \tag{1.0.1}$$

γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Εἶναι γνωστὸ ὅτι γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ ὑπάρχει μία μεταφορὰ κατὰ ἕνα σημεῖο $x \in \mathbb{R}^n$ καὶ ἕνας μετασχηματισμὸς $T \in GL(n)$ ὥστε τὸ $\tilde{K} = T(K + x)$ νὰ εἶναι ἰσοτροπικό. Μάλιστα κάθε ἄλλη ἰσοτροπικὴ εἰκόνα τοῦ K εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος μετασχηματισμὸς τοῦ $\tilde{K}$, ἐνῷ ἀπὸ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη (1.0.1) βλέπουμε ὅτι, ἂν ἐφαρμόσουμε στὸ ἰσοτροπικὸ σῶμα $\tilde{K}$ ἕναν ὀρθογώνιο μετασχηματισμὸ U, ἡ εἰκόνα $U(\tilde{K})$ ποὺ προκύπτει εἶναι ἐπίσης ἰσοτροπικὸ σῶμα καὶ μάλιστα ἔχει τὴν ἴδια ἰσοτροπικὴ σταθερὰ μὲ τὸ $\tilde{K}$. Ἑπομένως, θὰ μπορούσαμε χωρὶς κίνδυνο συγχύσεως νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἑνὸς ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος σὲ ὅλη του τὴν ἀφινικὴ κλάση, καὶ γι᾽ αὐτὸ συχνὰ θὰ ἀναφερόμαστε στὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἑνὸς κυρτοῦ σώματος χωρὶς νὰ ὑποθέτουμε ὅτι αὐτὸ τὸ σῶμα βρίσκεται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι (οὔτε κάν ὅτι ἔχει ὄγκο 1 ἢ βαρύκεντρο τὸ 0). Στὴν συνέχεια θὰ δοῦμε καὶ ἕναν ἄλλον τρόπο ὁρισμοῦ τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς, ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει, δοθέντος ἑνὸς κυρτοῦ σώματος, νὰ ὑπολογίσουμε τὴν ἰσοτροπική του σταθερὰ χωρὶς νὰ τὸ φέρουμε σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι, ἐνῷ ταυτόχρονα, καὶ εἶναι αὐτὸ ἴσως ποὺ ἔχει μεγαλύτερη σημασία, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γενικεύσουμε κατὰ ἕνα φυσιολογικὸ τρόπο τὴν ἔννοια τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς καὶ στὸν χῶρο τῶν μέτρων.

Ἕνα ἀκόμη ἐνδιαφέρον χαρακτηριστικὸ ποὺ ἔχουν τὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθη παρατήρησι: ἂν K εἶναι ἕνα κενταρισμένο κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$, τότε γιὰ κάθε μοναδιαία διεύθυνσι $\theta \in S^{n-1}$ ἰσχύει ὅτι

$$\left(\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx\right)^{1/2} \simeq \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|}, \tag{1.0.2}$$

ὅπου μὲ $\theta^\perp$ συμβολίζουμε τὸν ὑπόχωρο ποὺ εἶναι κάθετος στὸ διάνυσμα θ καί, ὅπως ἐξηγήσαμε καὶ πρίν, μὲ τὸ $|K \cap \theta^\perp|$ ἐννοοῦμε τὸν ὄγκο σὲ $n-1$ διαστάσεις. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι, ἂν τὸ K βρίσκεται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι, τότε ὅλες του οἱ τομὲς μὲ ὑπερεπίπεδα ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ 0 (δηλαδὴ ἀπὸ τὸ κέντρο βάρους του) ἔχουν περίπου τὸν ἴδιο ὄγκο, καὶ αὐτὸ τὸ «περίπου», δηλαδὴ τὸ πόσο κοντὰ στὸ 1 εἶναι ὁ λόγος $|K\cap\theta_1^{\perp}|/|K\cap\theta_2^{\perp}|$ γιὰ δύο $\theta_1,\theta_2\in S^{n-1}$, δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ K οὔτε ἀπὸ τὴν διάστασι τοῦ χώρου. Ἕνα ἀπὸ τὰ σημαντικότερα προβλήματα τῆς θεωρίας τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων, καὶ γενικότερα τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας, εἶναι ἡ *εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου*, ἡ ὁποία διετυπώθη ἀπὸ τὸν Bourgain τὸ 1986 [8] σὲ ἕνα ἄρθρο ἁρμονικῆς ἀναλύσεως· στὸ ἄρθρο αὐτὸ ὁ Bourgain μελετοῦσε τὴν maximal συνάρτησι σὲ περιπτώσεις ποὺ αὐτὴ ὁρίζεται ὡς πρὸς αὐθαίρετα κυρτὰ σώματα καὶ ὄχι μόνον ὡς πρὸς τὰ κλασσικὰ σώματα, ὅπως ἡ Εὐκλείδεια μπάλα ἢ ὁ n-διάστατος κύβος $[-1,1]^n$, καὶ χρειάστηκε τὸ γεγονὸς ὅτι κάθε σῶμα μποροῦμε νὰ τὸ φέρουμε σὲ μία θέσι ὅπου ὅλες οἱ τομές του μὲ ὑπερεπίπεδα ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ 0 ἔχουν περίπου τὸν ἴδιο $(n-1)$-διάστατο ὄγκο. Τὸ πρόβλημα τοῦ ἂν αὐτὸς ὁ ὄγκος φράσσεται ἀπὸ κάτω ἀπὸ σταθερὰ ἀνεξάρτητη τῆς διαστάσεως ἔγινε ἰδιαιτέρως γνωστὸ ἐξαιτίας ἑνὸς ἄρθρου τῶν V. Milman καὶ Pajor [44], στὸ ὁποῖο μελετοῦν τὴν ἰσοτροπικὴ θέσι καὶ δίνουν καὶ ἀρκετὲς ἰσοδύναμες διατυπώσεις τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου, μὲ τὴν πιὸ γνωστὴ νὰ προκύπτει ἀπὸ τὴν σχέσι (1.0.2): δεδομένου ὅτι, ὅταν τὸ σῶμα K εἶναι σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι, τὸ ἀριστερὸ μέρος τῆς (1.0.2) εἶναι πάντα ἴσο μὲ L_K, τὸ νὰ βροῦμε ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν $(n-1)$-διαστάτων κεντρικῶν τομῶν τοῦ K εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ νὰ φράξουμε τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἀπὸ πάνω.

Εἰκασία. Ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $C>0$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε $n\geqslant 1$ καὶ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, νὰ ἰσχύει $L_K\leqslant C$.

Στὰ Κεφάλαια 2 καὶ 3 τῆς παρούσας διατριβῆς θὰ ἀναφερθοῦμε καὶ σὲ ἀναγωγὲς τοῦ προβλήματος τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς, δηλαδὴ τῆς παραπάνω εἰκασίας, στὴν μελέτη κάποιων παραμέτρων οἱ ὁποῖες μποροῦν νὰ μᾶς δώσουν καὶ ἄλλου εἴδους πληροφορίες γιὰ τὴν γεωμετρία τῶν κυρτῶν σωμάτων. Στὴν Παράγραφο 2.1 θὰ ἀναφέρουμε καὶ κάποιες πρόσθετες πληροφορίες γιὰ τὴν ἱστορία τοῦ προβλήματος.

1.1 Κυρτὰ σώματα καὶ χῶροι πεπερασμένης διαστάσεως μὲ νόρμα

Ὑπενθυμίζουμε πρῶτα κάποιες βασικὲς παραμέτρους ἢ συναρτήσεις ποὺ σχετίζονται μὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα. Ἔστω K κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Τὸ *συναρτησοειδὲς Minkowski* $p_K:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ ποὺ ἐπάγεται ἀπὸ τὸ K στὸν $\mathbb{R}^n$ ὁρίζεται ὡς

$$x\in\mathbb{R}^n\mapsto p_K(x):=\inf\{t>0:x\in tK\},$$

ἐνῷ ἡ *ἀκτινικὴ συνάρτησις* $\rho_K:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to[0,+\infty)$ τοῦ K ὁρίζεται ὡς

$$x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\mapsto\rho_K(x):=\max\{t>0:tx\in K\}.$$

Προφανῶς, γιὰ κάθε $x \neq 0$ ἔχουμε ὅτι $p_K(x) = 1/\rho_K(x)$, ἐνῷ, ἂν τὸ K εἶναι συμμετρικό, τότε τὸ p_K εἶναι νόρμα στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ θὰ τὸ συμβολίζουμε καὶ ὡς $\|\cdot\|_K$. Ἡ *συνάρτησις στηρίξεως* $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τοῦ K ὁρίζεται ὡς

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto h_K(x) := \max\{\langle z, x\rangle : z \in K\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε διεύθυνσι $\theta \in S^{n-1}$ ἰσχύει $\rho_K(\theta) \leqslant h_K(\theta)$, ἐνῷ, ἂν τὸ K εἶναι συμμετρικό, τότε καὶ ἡ h_K εἶναι νόρμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Συχνὰ μᾶς ἐνδιαφέρει νὰ μελετήσουμε ὁλοκληρώματα νορμῶν ὡς πρὸς κάποιο ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα ἢ ὡς πρὸς τὸ μέτρο πιθανότητος σ στὴν S^{n-1}. Γιὰ παράδειγμα, μία ἀπὸ τὶς σημαντικότερες παραμέτρους ἑνὸς κυρτοῦ σώματος K εἶναι τὸ *μέσο πλάτος* του, δηλαδὴ ἡ ποσότητα

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(\theta) d\sigma(\theta),$$

ἐνῷ ἀντίστοιχα, γιὰ κυρτὰ σώματα K ποὺ περιέχουν τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό τους, ὁρίζεται καὶ ἡ ποσότητα

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} p_K(\theta) d\sigma(\theta).$$

Παρομοίως, γιὰ κάθε $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ τὸ *p-μέσο πλάτος* τοῦ K

$$w_p(K) := \left(\int_{S^{n-1}} h_K^p(\theta) d\sigma(\theta)\right)^{1/p},$$

καθῶς καὶ ἡ ποσότητα

$$M_p(K) := \left(\int_{S^{n-1}} p_K^p(\theta) d\sigma(\theta)\right)^{1/p}.$$

Ἐπιπλέον, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $p > -n$, $p \neq 0$, ὁρίζουμε τὴν *p-ῥοπὴ τῆς Εὐκλείδειας νόρμας πάνω στὸ σῶμα K* ὡς ἑξῆς:

$$I_p(K) := \left(\int_K \|x\|_2^p dx\right)^{1/p}.$$

Πιὸ γενικά, ἂν $C \subset \mathbb{R}^n$ εἶναι ὁποιοδήποτε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα, θέτουμε

$$I_p(K, C) := \left(\int_K \|x\|_C^p dx\right)^{1/p}.$$

Στὸ Κεφάλαιο 2, κύριο ἀντικείμενο μελέτης μας θὰ εἶναι παράμετροι τῆς μορφῆς $I_1(K, C)$ γιὰ κάποια συμμετρικὰ σώματα C τὰ ὁποῖα συνδέονται ἄμεσα μὲ τὴν γεωμετρία τοῦ ἰδίου τοῦ σώματος K.

Ἡ *περιγεγραμμένη ἀκτίνα* ἑνὸς κυρτοῦ σώματος K στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι ἡ ἐλάχιστη ἀκτίνα μίας Εὐκλείδειας μπάλας μὲ κέντρο τὸ 0 ποὺ περιέχει ὁλόκληρο τὸ σῶμα K, καὶ μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ ὡς

$$R(K) = \max\{\|x\|_2 : x \in K\} = \max\{h_K(\theta) : \theta \in S^{n-1}\}.$$

Στὴν περίπτωσι ποὺ $0 \in K$, θὰ λέμε συχνὰ τὴν παραπάνω ποσότητα καὶ διάμετρο τοῦ σώματος· αὐτὸ ἐπειδή, ὅπως εὔκολα μπορεῖ νὰ ἐλέγξει κάποιος,

$$R(K) \leqslant \mathrm{diam}(K) \leqslant 2R(K),$$

ὅπου $\mathrm{diam}(K) = \sup\{\|x-y\|_2 : x, y \in K\}$ εἶναι ἡ συνήθης διάμετρος τοῦ K. Ἡ *ἀκτίνα ὄγκων* v.rad.(K) τοῦ κυρτοῦ σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$ ὁρίζεται ὡς ἡ ἀκτίνα ποὺ πρέπει νὰ ἔχει μία Εὐκλείδεια μπάλα μὲ κέντρο τὸ 0 ὥστε νὰ ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ τὸ K, δηλαδὴ

$$\mathrm{v.rad.}(K) := \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}.$$

Προφανῶς v.rad.$(K) \leqslant R(K)$. Ἂν $0 \in \mathrm{int}(K)$, τὸ πολικὸ σῶμα K° τοῦ K ὁρίζεται νὰ εἶναι τὸ κυρτὸ σύνολο

$$K^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in K\}.$$

Βασικὲς ἰδιότητες τοῦ πολικοῦ σώματος εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

- $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$.
- Τὸ K° εἶναι κυρτὸ σῶμα καὶ $(K^\circ)^\circ = K$.
- Γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ἰσχύει $\rho_{K^\circ}(\theta) = 1/h_K(\theta)$. Ἰσοδύναμα τὸ συναρτησοειδὲς Minkowski τοῦ K° ταυτίζεται μὲ τὴν συνάρτησι στηρίξεως τοῦ K. Ἔτσι $M(K^\circ) = w(K)$.
- Γιὰ κάθε $T \in GL(n)$ ἰσχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$, ὅπου $(T^{-1})^*$ εἶναι ὁ συζυγὴς μετασχηματισμὸς τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ T.

Μερικὲς ἀπὸ τὶς πιὸ βασικὲς γεωμετρικὲς ἰδιότητες τῶν κυρτῶν σωμάτων ἕπονται σχεδὸν ἀμέσως ἀπὸ τήν, θεμελιώδη γιὰ τὴν Κυρτὴ Γεωμετρικὴ Ἀνάλυσι, *ἀνισότητα Brunn-Minkowski*. Αὐτὴ μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ μὲ δύο τρόπους. Ὡς *ἀρχὴ τοῦ Brunn* μᾶς δίνει πληροφορίες γιὰ τὸ πῶς συμπεριφέρονται οἱ συναρτήσεις $x \in F^\perp \mapsto |K \cap (x+F)|$, ὅπου F ὑπόχωρος τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ $F^\perp$ ὁ κάθετος σὲ αὐτὸν ὑπόχωρος.

Θεώρημα 1.1.1 (Ἀρχὴ τοῦ Brunn)**.** *Ἔστω κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ ἔστω F ἕνας k-διάστατος ὑπόχωρος τοῦ $\mathbb{R}^n$. Ἡ συνάρτησις $f : F^\perp \to [0, +\infty)$ ποὺ ὁρίζεται ὡς*

$$x \in F^\perp \mapsto f(x) := |K \cap (x+F)|^{1/k},$$

περιορισμένη στὸν φορέα της $\mathrm{Proj}_{F^\perp}(K)$, εἶναι κοίλη συνάρτησις.

Ἰσοδύναμα μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ ὡς ἀνισότητα ποὺ συνδέει τὸν ὄγκο τοῦ ἀθροίσματος Minkowski $K + L := \{x + y : x \in K, y \in L\}$ δύο κυρτῶν σωμάτων K, L στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὸν ὄγκο τῶν ἰδίων τῶν σωμάτων. Μάλιστα μὲ αὐτὴν τὴν μορφὴ ἰσχύει πιὸ γενικά.

Θεώρημα 1.1.2 (Ἀνισότητα Brunn-Minkowski)**.** *Ἔστω K, L μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K+L|^{1/n} \geqslant |K|^{1/n} + |L|^{1/n}, \tag{1.1.1}$$

ὅπου ἐδῶ ὁ ὄγκος ὅλων τῶν συνόλων ἐννοεῖται στὸν $\mathbb{R}^n$.

Ἐναλλακτικά, μποροῦμε νὰ γράψουμε τὴν (1.1.1) ὡς ἑξῆς: γιὰ κάθε $\lambda \in (0,1)$ ἔχουμε ὅτι

$$|\lambda K + (1-\lambda)L|^{1/n} \geqslant \lambda|K|^{1/n} + (1-\lambda)|L|^{1/n} \geqslant |K|^{\lambda/n} \cdot |L|^{(1-\lambda)/n}.$$

Κρατῶντας τὸ πρῶτο καὶ τὸ τρίτο μέρος τῆς τελευταίας σχέσεως, παίρνουμε μία μορφὴ τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski ἡ ὁποία εἶναι ἀνεξάρτητη τῆς διαστάσεως:

$$|\lambda K + (1-\lambda)L| \geqslant |K|^{\lambda} \cdot |L|^{1-\lambda} \tag{1.1.2}$$

γιὰ κάθε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα K, L τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Μία πρώτη συνέπεια τῆς ἀρχῆς τοῦ Brunn εἶναι ἡ (1.0.2). Στὰ ἑπόμενα κεφάλαια θὰ ἀναφέρουμε καὶ θὰ χρησιμοποιήσουμε καὶ ἄλλες βασικὲς συνέπειες τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski.

Στρεφόμαστε τώρα στὴν σύνδεσι κυρτῶν σωμάτων καὶ χώρων πεπερασμένης διαστάσεως μὲ νόρμα. Ὅπως ἀναφέραμε πρίν, ὅταν K εἶναι ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$, ἡ ἀπεικόνισις $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ μὲ

$$\|x\|_K := \inf\{t > 0 : x \in tK\}$$

εἶναι νόρμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Θὰ συμβολίζουμε τὸν χῶρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ μὲ X_K. Ἀντιστρόφως, παρατηροῦμε ὅτι, ἂν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ εἶναι ἕνας χῶρος πεπερασμένης διαστάσεως μὲ νόρμα, τότε ἡ μοναδιαία μπάλα $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ τοῦ X εἶναι συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἔτσι, ὑπάρχει μία φυσικὴ ἀντιστοιχία μεταξὺ κυρτῶν σωμάτων καὶ χώρων πεπερασμένης διαστάσεως μὲ νόρμα. Ἂς σημειώσουμε ἐπίσης ὅτι ὁ δυϊκὸς χῶρος τοῦ $X_K = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ ἔχει νόρμα τὴν συνάρτησι στηρίξεως h_K τοῦ K καὶ μοναδιαία μπάλα τὸ πολικὸ σῶμα K° τοῦ K.

Ἔστω X, Y δύο n-διάστατοι χῶροι μὲ νόρμα. Ἡ *ἀπόστασις Banach-Mazur* τοῦ X ἀπὸ τὸν Y ὁρίζεται ὡς

$$d_{BM}(X,Y) := \inf\{\|T\|_{X\to Y} \cdot \|T^{-1}\|_{Y\to X} \mid T : X \to Y \text{ γραμμικὸς ἰσομορφισμός}\},$$

ὅπου $\|T\|_{X\to Y}$ καὶ $\|T^{-1}\|_{Y\to X}$ εἶναι οἱ συνήθεις νόρμες τῶν τελεστῶν T καὶ T^{-1} ἀντιστοίχως. Στὴν γλώσσα τῶν κυρτῶν σωμάτων ἡ ἀπόστασις Banach-Mazur μπορεῖ νὰ περιγραφεῖ ὡς ἑξῆς: ἔστω ὅτι $X = X_K$ καὶ $Y = Y_L$ (δηλαδὴ οἱ μοναδιαῖες μπάλες τῶν X, Y εἶναι τὰ κυρτὰ σώματα K, L ἀντιστοίχως), τότε ὁ ἀριθμὸς $d_{BM}(X,Y)$ εἶναι ὁ μικρότερος $d > 0$ ὥστε

$$L \subseteq T(K) \subseteq dL \tag{1.1.3}$$

γιὰ κάποιον ἀντιστρέψιμο γραμμικὸ μετασχηματισμὸ T. Εἶναι προφανὲς ὅτι $d_{BM}(X,Y) \geqslant 1$ γιὰ κάθε δύο n-διάστατους χώρους, μὲ ἰσότητα ἂν καὶ μόνον ἂν οἱ χῶροι εἶναι ἰσομετρικὰ ἰσόμορφοι. Ἄρα ἡ ἀπόστασις Banach-Mazur μετράει πόσο ἀπέχουν δύο χῶροι ἀπὸ τὸ νὰ εἶναι ἰσομετρικοί. Στὴν συνέχεια θὰ μιλᾶμε καὶ ἀπευθείας γιὰ ἀπόστασι Banach-Mazur δύο συμμετρικῶν, ἢ ἀκόμη καὶ κεντραρισμένων, κυρτῶν σωμάτων $K, L \subset \mathbb{R}^n$, ἐννοῶντας καὶ πάλι τὸν μικρότερο $d > 0$ μὲ τὸν ὁποῖο ἱκανοποιεῖται ἡ (1.1.3) γιὰ κάποιον $T \in GL(n)$. Θὰ ἀναφερόμαστε ἐπίσης στὴν *γεωμετρικὴ ἀπόστασι* μεταξὺ δύο κυρτῶν σωμάτων K, L στὸν $\mathbb{R}^n$ (ὄχι ἀναγκαστικὰ συμμετρικῶν ἢ κεντραρισμένων ἐδῶ), ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς

$$d_G(K,L) := \min\left\{ab : \frac{1}{a}K \subseteq L \subseteq bK\right\},$$

ἐφ' ὅσον τὸ παραπάνω σύνολο εἶναι μὴ κενό. Προφανῶς $d_G(K,L) \geqslant 1$ πάντοτε, μὲ ἰσότητα ἂν καὶ μόνον ἂν τὰ δύο σώματα ταυτίζονται.

1.2 Βασικὰ ἀποτελέσματα καὶ ἐργαλεῖα τῆς θεωρίας τῶν κυρτῶν σωμάτων

Κάποιες βασικὲς ἀνισότητες γιὰ ὄγκους κυρτῶν σωμάτων, οἱ ὁποῖες θὰ φανοῦν χρήσιμες στὴν συνέχεια, εἶναι οἱ παρακάτω:

- *Ἡ ἀνισότητα Blaschke-Santaló* [3], [61]: ἂν K εἶναι συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ ἤ, γενικότερα, ἂν τὸ K ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε
$$|K| \cdot |K^\circ| \leqslant |B_2^n|^2.$$
- *Ἡ ἀνισότητα τῶν Bourgain καὶ V. Milman* [12]: ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $c \in (0,1)$ ὥστε, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ καὶ γιὰ ὁποιοδήποτε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $0 \in \mathrm{int}(K)$, νὰ ἰσχύει
$$|K| \cdot |K^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|^2.$$
Ἡ ἀνισότητα αὐτή, δικαιολογημένα, εἶναι γνωστὴ καὶ ὡς *ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló*. Τὸ Κεφάλαιο 4 εἶναι κατὰ βάσι ἀφιερωμένο στὴν παρουσίασι μίας ὅσο τὸ δυνατὸν αὐτοτελοῦς καὶ στοιχειώδους ἀποδείξεώς της, κοινῆς δουλειᾶς μὲ τοὺς Γιαννόπουλο καὶ Παούρη, ἡ ὁποία στηρίζεται σὲ συνέπειες τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski καὶ ἰδιότητες τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων οἱ ὁποῖες εἶναι ἀρκετὰ ἁπλές. Μεταξὺ τῶν ἐργαλείων ποὺ θὰ μᾶς χρειαστοῦν θὰ εἶναι καὶ ἡ ἀνισότητα (1.2.3) ποὺ εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς ἀκόλουθης ἀνισότητος τῶν Rogers καὶ Shephard καὶ συχνὰ φέρει καὶ τὸ ἴδιο ὄνομα.
- *Ἀνισότητα τῶν Rogers καὶ Shephard* [59]: γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ (ὅπου $1 \leqslant k < n$) καὶ κάθε $x \in F^\perp$, ἔχουμε ὅτι
$$|K \cap (x+F)|_k \cdot |Proj_{F^\perp}(K)|_{n-k} \leqslant \binom{n}{k} |K|_n. \tag{1.2.1}$$
Ἔχοντας τώρα δύο κυρτὰ σώματα K, L στὸν $\mathbb{R}^n$, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὸ κυρτὸ σῶμα $C = K \times L \subset \mathbb{R}^{2n}$ καὶ νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν ἀνισότητα (1.2.1) γιὰ τὸ C καὶ τὸν n-διάστατο ὑπόχωρο $F = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$τοῦ $\mathbb{R}^{2n}$: συμπεραίνουμε ὅτι
$$|K \cap L| \cdot |K - L| \leqslant \binom{2n}{n} |K| \cdot |L|, \tag{1.2.2}$$

ὅπου ἐδῶ ὁ ὄγκος ὅλων τῶν συνόλων ἐννοεῖται στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἂν μάλιστα ἔχουμε καὶ $K = L$, τότε λαμβάνουμε ὅτι γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ ἰσχύει

$$|K - K| \leqslant \binom{2n}{n}|K|, \tag{1.2.3}$$

ὅπου $K-K$ εἶναι τὸ *σῶμα διαφορῶν* τοῦ K, $K-K := \{z \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in K$ ὥστε $z = x-y\}$. Ἀντίστοιχη ἀνισότητα μὲ τὴν (1.2.2) εἶναι καὶ

- *Μία ἀνισότητα τῶν V. Milman καὶ Pajor* [46]: ἂν K, L εἶναι κυρτὰ σώματα στὸν $\mathbb{R}^n$ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο βάρους, τότε

$$|K| \cdot |L| \leqslant |K - L| \cdot |K \cap L| \tag{1.2.4}$$

(ὅταν καὶ τὰ δύο σώματα εἶναι συμμετρικά, ἡ ἀνισότητα εἶχε ἤδη ἀποδειχθεῖ ἀπὸ τοὺς Rogers καὶ Shephard). Ἔχοντας ἕνα κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν παραπάνω ἀνισότητα γιὰ $L = -K$ καὶ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$|K \cap (-K)| \geqslant 2^{-n}|K|. \tag{1.2.5}$$

Ἐξαιτίας τῶν (1.2.1) καὶ (1.2.5), βλέπουμε ὅτι κάθε κυρτὸ σῶμα μὲ κέντρο βάρους τὸ 0 περιέχει καὶ περιέχεται σὲ συμμετρικὰ κυρτὰ σώματα ποὺ ἔχουν περίπου τὴν ἴδια ἀκτίνα ὄγκων. Ἔχουμε τέλος, πρὸς τὴν ἀντίθετη κατεύθυνσι ἀπὸ αὐτὴν τῆς (1.2.1), τὴν ἀκόλουθη

- *Ἀνισότητα τοῦ Spingarn* [63]: ἔστω K κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ ἔστω $x_0 = bar(K)$ τὸ κέντρο βάρους του, τότε γιὰ κάθε $1 \leqslant k < n$ καὶ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ ἰσχύει

$$|K|_n \leqslant |K \cap (x_0 + F)|_k \cdot |Proj_{F^\perp}(K)|_{n-k}. \tag{1.2.6}$$

Ἔστω $A, B \neq \emptyset$ δύο ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}^n$. Ὁ *ἀριθμὸς καλύψεως* τοῦ A ἀπὸ τὸ B ὁρίζεται νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς

$$N(A,B) := \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ὥστε } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + B)\right\}.$$

(ἐφ' ὅσον βεβαίως ὑπάρχει τέτοια κάλυψις τοῦ συνόλου A ἀπὸ μεταφορὲς τοῦ B). Μία παραλλαγὴ τοῦ παραπάνω ἀριθμοῦ καλύψεως εἶναι ὁ ἀκόλουθος ἀριθμός:

$$\overline{N}(A,B) := \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1, \ldots, x_N \in A \text{ ὥστε } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + B)\right\}$$

Εἶναι ἄμεσο ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς ὅτι $N(A,B) \leqslant \overline{N}(A,B)$. Ἐπίσης μποροῦμε εὔκολα νὰ ἐλέγξουμε ὅτι $\overline{N}(A, B-B) \leqslant N(A,B)$. Ἑπομένως, ἂν τὸ B εἶναι συμμετρικὸ καὶ κυρτὸ σύνολο, τότε $\overline{N}(A, 2B) \leqslant N(A,B)$. Θὰ χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικὲς ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν καλύψεως: γιὰ κάθε τρία κυρτὰ σώματα A, B, C στὸν $\mathbb{R}^n$ ἔχουμε ὅτι

- $N(A,B) \leqslant N(A,C)$ ἂν $B \supseteq C$, ἐνῷ $N(A,C) \leqslant N(B,C)$ ἂν $A \subseteq B$.
- Γιὰ κάθε $T \in GL(n)$, $N(T(A),T(B)) = N(A,B)$ καὶ $\overline{N}(T(A),T(B)) = \overline{N}(A,B)$.
- $N(A,C) \leqslant N(A,B) \cdot N(B,C)$.
- $N(A-A,B-B) \leqslant N(A,B)^2$ καὶ $\overline{N}(A-A,B-B) \leqslant \overline{N}(A,B)^2$.
- $N(A+C,B+C) \leqslant N(A,B)$ καὶ $\overline{N}(A+C,B+C) \leqslant \overline{N}(A,B)$.
- $2^{-n}\dfrac{|A+B|}{|B|} \leqslant N(A,B) \leqslant \overline{N}(A,B)$, ἐνῷ, ἂν τὸ B εἶναι καὶ συμμετρικό, τότε ἐπιπλέον
$$\overline{N}(A,B) \leqslant \frac{|A+B/2|}{|B/2|} \leqslant 2^n\frac{|A+B|}{|B|}.$$
Ἂν τὸ B δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκη συμμετρικό, τότε $N(A,B) \leqslant 4^n\dfrac{|A+B|}{|B|}$.
- Γιὰ κάθε $r \geqslant 1$, $N(rA,A) \leqslant 4^n\dfrac{|rA+A|}{|A|} = (2(2r+1))^n$.
- $\dfrac{|A|}{|A\cap B|} \leqslant N(A,B)$.

Σχεδὸν ὅλες αὐτὲς οἱ ἰδιότητες προκύπτουν κατευθείαν ἀπὸ τοὺς ὁρισμούς. Γιὰ λόγους πληρότητος, στὸ Κεφάλαιο 4 θὰ ἐξηγήσουμε πῶς μπορεῖ κάποιος νὰ δείξει τὸ ἕκτο σημεῖο. Ἀναφέρουμε καὶ δύο βασικὰ θεωρήματα γιὰ ἀριθμοὺς καλύψεως. Τὸ πρῶτο εἶναι ἡ ἀνισότητα τοῦ Sudakov [65].

Θεώρημα 1.2.1 (Sudakov, 1971). *Δοθέντος κυρτοῦ σώματος K στὸν $\mathbb{R}^n$, ἔχουμε, γιὰ κάθε $t>0$, ὅτι*
$$N(K,tB_2^n) \leqslant 2\exp\left(\frac{cnw^2(K)}{t^2}\right),$$
ὅπου $c>0$ εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα ἀπεδείχθη ἀπὸ τοὺς Artstein, V. Milman καὶ Szarek [1], καὶ ἐπιβεβαιώνει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ καλύψεως ἱκανοποιοῦν κάποιου εἴδους δυϊσμὸ στὶς περιπτώσεις ποὺ τὸ ἕνα ἀπ' τὰ δύο σώματα εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα.

Θεώρημα 1.2.2 (Artstein-V. Milman-Szarek, 2004). *Ἔστω K συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ ἔστω D ἐλλειψοειδὲς τοῦ $\mathbb{R}^n$ (δηλαδὴ γραμμικὴ εἰκόνα τῆς Εὐκλείδειας μοναδιαίας μπάλας). Τότε*
$$c_1^{-1}\log N(D^\circ, c_2^{-1}K^\circ) \leqslant \log N(K,D) \leqslant c_1\log N(D^\circ, c_2K^\circ),$$
ὅπου $c_1,c_2>0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

Ἔστω κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ κέντρο βάρους τὸ 0 καὶ ἔστω D ἐλλειψοειδὲς στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $|D| = |K|$. Λέμε ὅτι τὸ D εἶναι ἕνα *M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K μὲ σταθερὰ β* ἂν ἰσχύει

$$\max\{\log N(K,D), \log N(D,K), \log N(K^\circ, D^\circ), \log N(D^\circ, K^\circ)\} \leqslant \beta n.$$

(ἐξαιτίας τοῦ θεωρήματος τῶν Artstein, V. Milman καὶ Szarek καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν καλύψεως, μᾶς ἀρκεῖ βέβαια νὰ ἐλέγξουμε τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς). Λέμε ὅτι τὸ K εἶναι σὲ *M-θέσι μὲ σταθερὰ β* ἂν ἕνα M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα ποὺ ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ τὸ K. Προφανῶς, ἂν K εἶναι ἕνα κυρτὸ σῶμα μὲ κέντρο βάρους τὸ 0 καὶ D εἶναι ἕνα M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K μὲ σταθερὰ β, ὅπου $D = T(B_2^n)$ γιὰ κάποιον $T \in GL(n)$, τότε τὸ $\tilde{K} = T^{-1}(K)$ (ὅπως καὶ κάθε πολλαπλάσιό του) εἶναι μία M-θέσις τοῦ σώματος K μὲ σταθερὰ β. Ὁ V. Milman [42], [43] ἀπέδειξε τὴν ὕπαρξι M-ἐλλειψοειδῶν, καὶ ἄρα τὴν ὕπαρξι M-θέσεως, μὲ μία σταθερὰ $\beta \simeq 1$ γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K μὲ κέντρο βάρους τὸ 0.

Ἕνας ἄλλος τρόπος νὰ ὁρίσουμε τὴν M-θέσι ἢ τὰ M-ἐλλειψοειδῆ εἶναι ὁ ἀκόλουθος. Ἔστω K κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ κέντρο βάρους τὸ 0. Τότε μποροῦμε νὰ λέμε ἕνα ἐλλειψοειδὲς $D \subset \mathbb{R}^n$ *M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K μὲ σταθερὰ β* ἂν ἰσχύει $|D| = |K|$ καὶ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}|D+L|^{1/n} \leqslant |K+L|^{1/n} \leqslant \beta|D+L|^{1/n},\\ \frac{1}{\beta}|D^\circ+L|^{1/n} \leqslant |K^\circ+L|^{1/n} \leqslant \beta|D^\circ+L|^{1/n}\end{aligned}$$

γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα L στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἐπιπλέον, κάθε γραμμικὴ εἰκόνα $\tilde{K}$ τοῦ K ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὰ παραπάνω μὲ D κάποιο πολλαπλάσιο τῆς Εὐκλείδειας μπάλας λέγεται M-θέσις τοῦ K. Οἱ δύο τρόποι ὁρισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμοι ὅπως θὰ ὑπενθυμίσουμε στὸ Κεφάλαιο 4. Θὰ ἐξηγήσουμε ἐπίσης ὅτι, γιὰ κάθε δύο κυρτὰ σώματα K_1, K_2 στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ ὁποιεσδήποτε M-θέσεις τους $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ (μὲ κάποια σταθερὰ β), ἰσχύει

$$|t_1\tilde{K}_1 + t\tilde{K}_2|^{1/n} \leqslant c\beta\big(t_1|\tilde{K}_1|^{1/n} + t_2|\tilde{K}_2|^{1/n}\big)$$

γιὰ ὅλα τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς $t_1, t_2 > 0$, ὅπου $c > 0$ ἀπόλυτη σταθερά. Ἡ ἴδια ἀνισότητα μάλιστα συνεχίζει νὰ ἰσχύει ἂν ἀντικαταστήσουμε τὸ $\tilde{K}_1$ ἢ τὸ $\tilde{K}_2$ (ἢ καὶ τὰ δύο) μὲ τὰ πολικά τους σώματα. Αὐτὴ εἶναι ἡ *ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski*, ποὺ ἦταν ὁ σκοπὸς τοῦ ἄρθρου [42] (καὶ ἡ ὁποία φυσικὰ δὲν ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ κυρτὰ σώματα στὸν $\mathbb{R}^n$, ἀλλὰ ὅταν αὐτὰ βρίσκονται σὲ συγκεκριμένη θέσι).

Ὁ Pisier (βλέπε [55] ἢ [56, Κεφάλαιο 7]) πρότεινε μία διαφορετικὴ προσέγγισι γιὰ τὴν M-θέσι καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski δείχνοντας κάτι ἰσχυρότερο: γιὰ κάθε συμμετρικὸ σῶμα K, ὑπάρχουν M-ἐλλειψοειδῆ $\mathcal{E}_K$ γιὰ τὰ ὁποῖα μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε καὶ τὸ πῶς μειώνονται οἱ ἀριθμοὶ καλύψεως $N(K, t\mathcal{E}_K)$ καὶ $N(\mathcal{E}_K, tK)$ καθῶς τὸ t αὐξάνεται. Συγκεκριμένα, ἀπέδειξε τὸ ἀκόλουθο θεώρημα, τὸ ὁποῖο θὰ χρησιμοποιήσουμε στὸ Κεφάλαιο 2.

Θεώρημα 1.2.3 (Pisier, 1989). *Γιὰ κάθε $0<\alpha<2$ καὶ γιὰ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_K$ τέτοιο ὥστε νὰ ἰσχύει*

$$\max\log\{N(K,t\mathcal{E}_K),N(\mathcal{E}_K,tK),N(K^\circ,t\mathcal{E}_K^\circ),N(\mathcal{E}_K^\circ,tK^\circ)\}\leqslant\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}$$

γιὰ κάθε $t\geqslant 1$, ὅπου $c(\alpha)$ εἶναι μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ α. Ἔχουμε μάλιστα ὅτι $c(\alpha)\lesssim(2-\alpha)^{-\alpha/2}$ καθῶς $\alpha\to 2$.

Ὁρολογία. Ἕνα τέτοιο ἐλλειψοειδὲς λέγεται *α-κανονικὸ M-ἐλλειψοειδὲς* γιὰ τὸ κυρτὸ σῶμα K. Ἐπιπλέον, ἂν μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὡς $\mathcal{E}_K$ ἕνα πολλαπλάσιο τῆς Εὐκλείδειας μπάλας, λέμε τότε ὅτι τὸ K βρίσκεται σὲ *α-κανονικὴ M-θέσι.*

Τὸ θεώρημα τοῦ Dvoretzky [16] μᾶς πληροφορεῖ ὅτι κάθε n-διάστατος χῶρος μὲ νόρμα περιέχει ὑπόχωρο «μεγάλης διαστάσεως» ποὺ εἶναι σχεδὸν Εὐκλείδειος, δηλαδὴ ὑπόχωρο ποὺ ἔχει μικρή, ἀνεξάρτητη τῆς διαστάσεως n τοῦ χώρου, ἀπόστασι Banach-Mazur ἀπὸ Εὐκλείδειο χῶρο.

Θεώρημα 1.2.4 (Dvoretzky, 1960). *Γιὰ κάθε $\varepsilon\in(0,1)$ ὑπάρχει σταθερὰ $c(\varepsilon)>0$ τέτοια ὥστε: ἂν X εἶναι n-διάστατος χῶρος μὲ νόρμα, τότε μποροῦμε νὰ βροῦμε ὑπόχωρο Y τοῦ X μὲ διάστασι $k\geqslant c(\varepsilon)\log n$ ὥστε $d_{BM}(Y,l_2^k)<1+\varepsilon$.*

Στὰ ἑπόμενα μᾶς ἀρκεῖ ἡ ἰσομορφικὴ ἐκδοχὴ τοῦ παραπάνω θεωρήματος. Ἔστω $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ χῶρος μὲ νόρμα καὶ ἂς συμβολίσουμε μὲ C τὴν μοναδιαία μπάλα τοῦ X. Ὁρίζουμε τὸν ἀριθμὸ Dvoretzky $k(C)$ τοῦ κυρτοῦ σώματος C (ἢ τοῦ χώρου X) ὡς τὸ

$$\max\left\{1\leqslant k\leqslant n:\nu_{n,k}\left(\left\{F\in G_{n,k}:\tfrac{1}{2M(C)}B_F\subseteq C\cap F\subseteq\tfrac{2}{M(C)}B_F\right\}\right)\geqslant\frac{n}{n+k}\right\}.$$

Δηλαδὴ $k(C)$ εἶναι ἡ μεγαλύτερη διάστασις k μὲ τὴν ἰδιότητα οἱ περισσότερες, μὲ τὴν ἔννοια τοῦ μέτρου Haar, τομὲς τοῦ συμμετρικοῦ κυρτοῦ σώματος C μὲ k-διαστάτους ὑποχώρους νὰ εἶναι «4-ἰσόμορφες» μὲ τὴν Εὐκλείδεια μπάλα. Ἀντίστοιχα, ὁρίζεται ὁ δυϊκὸς ἀριθμὸς Dvoretzky $k_*(C)$ τοῦ C (ἢ τοῦ χώρου X) ὡς τὸ

$$\max\left\{1\leqslant k\leqslant n:\nu_{n,k}\left(\left\{F\in G_{n,k}:\tfrac{w(C)}{2}B_F\subseteq Proj_F(C)\subseteq 2w(C)B_F\right\}\right)\geqslant\frac{n}{n+k}\right\}.$$

Ὁ χαρακτηρισμὸς «δυϊκὸς» προέρχεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι, γιὰ κάθε ὑπόχωρο F, τὸ συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα $Proj_F(C)$ εἶναι τὸ πολικὸ σῶμα τοῦ $C^\circ\cap F$, ἐνῷ ταυτόχρονα $w(C)=M(C^\circ)$· ἑπομένως $k_*(C)=k(C^\circ)$.

Οἱ V. Milman καὶ Schechtman [48] ἔδειξαν ὅτι ὁ ἀριθμὸς Dvoretzky καὶ ὁ δυϊκὸς ἀριθμὸς Dvoretzky εἶναι δυνατὸν νὰ περιγραφοῦν ἀπὸ κάποιες «καθολικὲς» παραμέτρους τοῦ σώματος C. Πιὸ συγκεκριμένα, ἂν θέσουμε $b(C):=\max\{\|\theta\|_C:\theta\in S^{n-1}\}$, οἱ Milman καὶ Schechtman ἔδειξαν ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1,c_2>0$ ὥστε

$$c_1n\left(\frac{M(C)}{b(C)}\right)^2\leqslant k(C)\leqslant c_2n\left(\frac{M(C)}{b(C)}\right)^2.$$

Ἀντίστοιχα, γιὰ τὸν δυϊκὸ ἀριθμὸ Dvoretzky, καὶ ἀφοῦ ἔχουμε ὅτι $M(C^\circ) = w(C)$ καὶ $b(C^\circ) = \max\{h_C(\theta) : \theta \in S^{n-1}\} = R(C)$, ἰσχύει ὅτι

$$c_1 n \left(\frac{w(C)}{R(C)}\right)^2 \leqslant k_*(C) \leqslant c_2 n \left(\frac{w(C)}{R(C)}\right)^2. \tag{1.2.7}$$

Ἂς σημειώσουμε ὅτι τὰ κάτω φράγματα ἐμφανίζονται ἤδη στὴν ἀπόδειξι ποὺ ἔδωσε ὁ V. Milman [41] γιὰ τὸ θεώρημα τοῦ Dvoretzky.

Ἀργότερα, οἱ Litvak, V. Milman καὶ Schechtman [36] ἀπέδειξαν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $k(C)$ καὶ $k_*(C)$ ἔχουν κι ἄλλη σημασία, καθῶς εἶναι σημεῖα ἀλλαγῆς συμπεριφορᾶς τῶν q-μέσων καὶ τῶν q-μέσων πλατῶν τοῦ σώματος C. Τὸ ἀκριβὲς ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ἀκόλουθο:

Θεώρημα 1.2.5 (Litvak-V. Milman-Schechtman, 1998). *Ἔστω C συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε ἰσχύει ὅτι*

$$M_q(C) \simeq \begin{cases} M(C), & \text{ἂν } 1 \leqslant q \leqslant k(C), \\ \sqrt{q/n}\, b(C), & \text{ἂν } k(C) \leqslant q \leqslant n, \\ b(C), & \text{γιὰ κάθε } q \geqslant n \end{cases} .$$

Εἰδικότερα, βλέπουμε ὅτι τὰ $M_q(C)$ παραμένουν σχεδὸν σταθερὰ καὶ ἴσα μὲ $M(C)$ ὅσο $q \leqslant k(C)$. Ἀντίστοιχα, γιὰ τὰ μέσα πλάτη ἔχουμε ὅτι

$$w_q(C) \simeq \begin{cases} w(C), & \text{ἂν } 1 \leqslant q \leqslant k_*(C), \\ \sqrt{q/n}\, R(C), & \text{ἂν } k_*(C) \leqslant q \leqslant n, \\ R(C), & \text{γιὰ κάθε } q \geqslant n \end{cases} ,$$

ἑπομένως τὰ $w_q(C)$ παραμένουν σχεδὸν σταθερὰ καὶ ἴσα μὲ τὸ $w(C)$ ὅσο $q \leqslant k_*(C)$.

Τὸ ἀνάλογο αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως γιὰ ἀρνητικὲς τιμὲς τοῦ q ἀπεδείχθη ἀπὸ τοὺς Klartag καὶ Vershynin [31] καὶ δείχνει ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ q-μέσοι καὶ τὰ ἀρνητικὰ q-μέσα πλάτη ἔχουν κάτι παραπάνω ἀπὸ συμμετρικὴ συμπεριφορὰ ὅσον ἀφορᾶ στὴν εὐστάθειά τους: οἱ τιμές τους παραμένουν σταθερὲς σὲ διάστημα κατ᾽ οὐσίαν μεγαλύτερο τοῦ $(-k, 0)$ ἢ τοῦ $(-k_*, 0)$ ἀντιστοίχως. Γιὰ νὰ διατυπώσουμε τὸ ἀποτέλεσμα τῶν Klartag καὶ Vershynin, ὁρίζουμε μιὰ καινούρια παράμετρο ὡς ἑξῆς: ἔστω C συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$· ὁ ἀριθμὸς $d(C)$ εἶναι ἡ ποσότητα

$$d(C) := \min\left\{-\log \sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : \|\theta\|_C \leqslant \frac{M(C)}{2}\right\}\right), n\right\}.$$

Ἀντίστοιχα θέτουμε

$$d_*(C) := d(C^\circ) = \min\left\{-\log \sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : h_C(\theta) \leqslant \frac{w(C)}{2}\right\}\right), n\right\}.$$

Ἐπικαλούμενοι τὴν ἰσοπεριμετρικὴ ἀνισότητα στὴν σφαίρα S^{n-1} γιὰ τὶς Lipschitz συναρτήσεις $\|\cdot\|_C : S^{n-1} \to (0, +\infty)$ καὶ $h_C : S^{n-1} \to (0, +\infty)$, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ μέσος Lévy (ποὺ ἐμφανίζεται στὴν διατύπωσι τῆς ἰσοπεριμετρικῆς ἀνισότητος) καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα μίας νόρμας στὴν σφαίρα εἶναι περίπου ἴσα, μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι $d(C) \geqslant c_1 k(C)$ καὶ ὅτι $d_*(C) \geqslant c_1 k_*(C)$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$ (ὑπενθυμίζουμε ὅτι *μέσο Lévy* μίας συναρτήσεως $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ὀνομάζουμε ὁποιονδήποτε ἀριθμὸ $\mathrm{med}(f)$ ἔχει τὴν ἰδιότητα $\min\big\{\sigma\big(\{\theta : f(\theta) \geqslant \mathrm{med}(f)\}\big), \sigma\big(\{\theta : f(\theta) \leqslant \mathrm{med}(f)\}\big)\big\} \geqslant 1/2$). Ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο:

Θεώρημα 1.2.6 (Klartag-Vershynin, 2007). *Ἔστω C συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $q \in (0, c_1 d(C))$ ἰσχύει ὅτι*

$$M(C) \geqslant M_{-q}(C) \geqslant c_2 M(C),$$

ὅπου $c_1, c_2 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Προφανῶς, ἀπὸ τοὺς ὁρισμούς, ἔχουμε ἐπίσης γιὰ κάθε $q \in (0, c_1 d_*(C))$ ὅτι

$$w(C) \geqslant w_{-q}(C) \geqslant c_2 w(C).$$

1.3 Λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα

Γενίκευσις τῶν κυρτῶν σωμάτων εἶναι τὰ *λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα*. Ἕνα Borel μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικὰ-κοῖλο ἄν, γιὰ κάθε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα A, B τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $\lambda \in (0,1)$, ἰσχύει

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^{\lambda}\mu(B)^{1-\lambda}. \tag{1.3.1}$$

Ἀντίστοιχα, μία συνάρτησις $f : C \to [0, +\infty)$ μὲ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα κυρτὸ ὑποσύνολο C τοῦ $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικὰ-κοίλη ἄν, γιὰ κάθε $x, y \in C$ καὶ κάθε $\lambda \in (0,1)$, ἰσχύει

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} f(y)^{1-\lambda}.$$

Ἀπὸ τὴν (1.1.2) βλέπουμε ὅτι τὸ μέτρο Lebesgue εἶναι λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο. Ἀλλὰ καὶ ὁ περιορισμός του πάνω σὲ κάποιο κυρτὸ ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$ εἶναι λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο ἀφοῦ, ἂν $K \subseteq \mathbb{R}^n$ εἶναι κυρτό, τότε, γιὰ κάθε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα $A, B \subset \mathbb{R}^n$ καὶ κάθε $\lambda \in (0,1)$, ἔχουμε ὅτι

$$\big|(\lambda A + (1-\lambda)B) \cap K\big| \geqslant \big|\lambda(A \cap K) + (1-\lambda)(B \cap K)\big| \geqslant |A \cap K|^{\lambda}|B \cap K|^{1-\lambda},$$

πάλι ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Brunn-Minkowski. Ἕπεται ὅτι ἡ *χαρακτηριστικὴ συνάρτησις* $\mathbf{1}_K$ ἑνὸς κυρτοῦ σώματος K εἶναι πυκνότητα (ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue) ἑνὸς πεπερασμένου λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μὲ συμπαγῆ φορέα. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ πεπερασμένα λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ δὲν ἔχουν συμπαγῆ φορέα: γιὰ παράδειγμα, τὰ ἐκθετικὰ μέτρα μὲ πυκνότητα (ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue) τὴν $x \in \mathbb{R}^n \mapsto a_1 \exp(-a_2\|x\|_1) = a_1 \exp\big(-a_2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|\big)$, ὅπου $a_1, a_2 > 0$ θετικὲς παράμετροι, ἢ τὰ μέτρα τοῦ Gauss μὲ πυκνότητα τὴν $x \in \mathbb{R}^n \mapsto b_1 \exp(-b_2\|x\|_2^2)$, ὅπου

$b_1, b_2 > 0$. Καὶ οἱ δύο αὐτὲς οἰκογένειες μέτρων ἔχουν τὸ χαρακτηριστικὸ τὰ μέτρα ποὺ ἀνήκουν σὲ αὐτὲς νὰ εἶναι ἀπολύτως συνεχῆ ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue καὶ μάλιστα ἡ πυκνότητά τους νὰ εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις. Αὐτό, ὅπως δείχνουν τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα, ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ πεπερασμένα λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα.

Θεώρημα 1.3.1 (Ἀνισότητα Prékopa-Leindler). *Ἔστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μετρήσιμες συναρτήσεις, καὶ ἔστω $\lambda \in (0,1)$. Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ f, g εἶναι ὁλοκληρώσιμες καὶ ὅτι γιὰ κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ἰσχύει*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{1.3.2}$$

Παρατήρησις 1.3.2. Συνέπειες τῆς ἀνισότητος Prékopa-Leindler εἶναι τόσο ἡ ἀνισότητα Brunn-Minkowski (στὴν μορφὴ τῆς (1.1.2)), ἀπὸ τὴν ὁποία ὅμως μποροῦμε ἔπειτα νὰ συμπεράνουμε καὶ τὴν (1.1.1)) ὅσο καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι ἕνα πεπερασμένο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ λογαριθμικὰ-κοίλη πυκνότητα ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue εἶναι λογαριθμικὰ-κοῖλο. Πράγματι,

- γιὰ νὰ λάβουμε τὴν (1.1.2), θεωροῦμε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα K, L τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ $\lambda \in (0,1)$, καὶ παρατηροῦμε ὅτι οἱ $f = \mathbf{1}_K$, $g = \mathbf{1}_L$ καὶ $h = \mathbf{1}_{\lambda K + (1-\lambda)L}$ ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 1.3.1. Ὅμως, τὸ συμπέρασμα (1.3.2) γιὰ αὐτὲς τὶς f, g, h εἶναι ἀκριβῶς ἡ (1.1.2).
- ὅταν ἡ πυκνότητα f_μ ἑνὸς πεπερασμένου μέτρου μ στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη, τότε, γιὰ κάθε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα A, B τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $\lambda \in (0,1)$, μποροῦμε νὰ θέσουμε $f = \mathbf{1}_A f_\mu$, $g = \mathbf{1}_B f_\mu$ καὶ $h = \mathbf{1}_{\lambda A + (1-\lambda)B} f_\mu$ καί, ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 1.3.1, νὰ δείξουμε ὅτι ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (1.3.1) γιὰ τὸ μ.

Τὸ ἀντίστροφο, δηλαδὴ ὅτι κάθε πεπερασμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο ἔχει μία λογαριθμικὰ-κοίλη πυκνότητα, ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Borell [7]. Θὰ λέμε ὅτι ἕνα πεπερασμένο Borel μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι *μὴ ἐκφυλισμένο* ἂν γιὰ κάθε ὑπερεπίπεδο H τοῦ $\mathbb{R}^n$ ἰσχύει $\mu(H) < \mu(\mathbb{R}^n)$, ἂν δηλαδὴ ὁ φορέας τοῦ μ δὲν περιέχεται σὲ κάποιο γνήσιο ἀφινικὸ ὑπόχωρο τοῦ $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.3.3 (Borell, 1975). *Ἔστω μ ἕνα μὴ ἐκφυλισμένο, πεπερασμένο, λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε τὸ μ εἶναι ἀπολύτως συνεχὲς ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue καὶ ἔχει μία λογαριθμικὰ-κοίλη πυκνότητα $f_\mu(x) = d\mu/dx$.*

Ἐξαιτίας τῶν Θεωρημάτων 1.3.1 καὶ 1.3.3, στὸ ἑξῆς δὲν θὰ κάνουμε ἐν γένει διάκρισι μεταξὺ λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων καὶ λογαριθμικὰ-κοίλων συναρτήσεων, ἐνῷ, ὅταν θεωροῦμε (πεπερασμένο, μὴ ἐκφυλισμένο) λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$, θὰ συμβολίζουμε μὲ f_μ τὴν πυκνότητά του ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue. Ἡ ἑπομένη πρότασις δείχνει ὅτι κάθε λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα (καὶ ἄρα, ἐξαιτίας τῶν παραπάνω, καὶ κάθε πεπερασμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο) ἔχει ῥοπὲς ὅλων τῶν τάξεων (γιὰ τὴν ἀπόδειξί της βλέπε π.χ. [13, Λῆμμα 2.2.1]).

Πρότασις 1.3.4. *Ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα. Τότε μποροῦμε νὰ βροῦμε θετικὲς σταθερὲς A, B (ποὺ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν f) ὥστε νὰ ἔχουμε $f(x) \leqslant A\exp(-B\|x\|_2)$ γιὰ ὅλα τὰ $x \in \mathbb{R}^n$.*

Λέμε ὅτι ἕνα Borel μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι ἄρτιο ἂν ἰσχύει $\mu(A) = \mu(-A)$ γιὰ κάθε Borel ὑποσύνολο A τοῦ $\mathbb{R}^n$, ἐνῷ λέμε μία συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ἄρτια ἂν ἰσχύει $f(x) = f(-x)$ γιὰ κάθε x. Ἕνα πεπερασμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ θὰ λέμε ὅτι ἔχει κέντρο βάρους (ἢ βαρύκεντρο) τὸ 0 ἂν ἰσχύει $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle d\mu(x) = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$· ἀντίστοιχα γιὰ μία ὁλοκληρώσιμη λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$. Θὰ χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τὶς φράσεις «κεντραρισμένο μέτρο» ἢ «κεντραρισμένη συνάρτησις». Γενικά, ὅπως καὶ γιὰ τὰ κυρτὰ σώματα, τὸ κέντρο βάρους ἑνὸς πεπερασμένου λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ στὸν $\mathbb{R}^n$ (ἢ μίας ὁλοκληρώσιμης λογαριθμικὰ-κοίλης συναρτήσεως $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$) ὁρίζεται ὡς τὸ διάνυσμα

$$\mathrm{bar}(\mu) := \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n} x d\mu(x) = \left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x, e_1\rangle d\mu(x), \dots, \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x, e_n\rangle d\mu(x)\right),$$

(ἢ ἀντίστοιχα τὸ διάνυσμα $\mathrm{bar}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} xf(x)\,d(x)/\int_{\mathbb{R}^n} f$). Τὸ ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα, ποὺ συγκρίνει τὴν τιμὴ στὸ κέντρο βάρους καὶ τὸ supremum μίας λογαριθμικὰ-κοίλης συναρτήσεως, ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Fradelizi [17].

Θεώρημα 1.3.5 (Fradelizi, 1997)**.** *Ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα, καὶ ἔστω $x_0 = \mathrm{bar}(f)$. Τότε*

$$f(x_0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(x_0).$$

Ἐπίσης τὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα ἔχουν καὶ τὴν παρακάτω ἰδιότητα.

Λῆμμα 1.3.6 (Λῆμμα τοῦ Grünbaum, [24])**.** *Ἔστω μ ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ κέντρο βάρους τὸ 0. Τότε,*

$$\frac{1}{e} \leqslant \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle \geqslant 0\}) \leqslant 1 - \frac{1}{e}$$

γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Ἂν ἔχουμε μία ὁλοκληρώσιμη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ καὶ ἕναν ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ γιὰ κάποιο $1 \leqslant k < n$, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὴν *περιθώρια συνάρτησι* $\pi_F f : F \to [0,\infty)$ τῆς f ὡς πρὸς τὸν ὑπόχωρο F θέτοντας

$$\pi_F f(x) := \int_{x+F^\perp} f(y)dy. \tag{1.3.3}$$

Ἐπίσης, ἂν ἔχουμε ἕνα Borel μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$, ὁρίζουμε τὸ *περιθώριο μέτρο* τοῦ μ ὡς πρὸς τὸν ὑπόχωρο F θέτοντας

$$\pi_F\mu(A) := \mu(Proj_F^{-1}(A))$$

γιὰ ὅλα τὰ Borel ὑποσύνολα τοῦ F. Φυσικά, ἂν τὸ μ εἶναι πεπερασμένο καὶ ἀπολύτως συνεχὲς ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue, καὶ ἔχει πυκνότητα f_μ, τότε τὸ περιθώριο μέτρο τοῦ μ ὡς πρὸς κάποιον ὑπόχωρο F ὁρίζεται καὶ μέσῳ τοῦ πρώτου ὁρισμοῦ, ἀφοῦ θὰ εἶναι ἀπολύτως συνεχὲς καὶ θὰ ἔχει πυκνότητα $f_{\pi_F(\mu)} = \pi_F f_\mu$.

Κάποιες βασικὲς ἰδιότητες τῶν περιθωρίων συναρτήσεων καὶ μέτρων συνοψίζονται στὴν παρακάτω πρότασι.

Πρότασις 1.3.7. *Ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μία ὁλοκληρώσιμη συνάρτησις, ἔστω ἀκέραιος $1 \leqslant k < n$ καὶ ἔστω $F \in G_{n,k}$. Τότε:*

1. *Ἂν ἡ f εἶναι ἄρτια, τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν περιθώρια συνάρτησι $\pi_F f$.*

2. *Ἔχουμε ὅτι*
$$\int_F \pi_F f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

3. *Γιὰ ὁποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτησι $g : F \to \mathbb{R}$ ἰσχύει*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(Proj_F(x))f(x)\,dx = \int_F g(x)\,\pi_F f(x)\,dx.$$

4. *Γιὰ κάθε $\theta \in S_F$,*
$$\int_F \langle x,\theta\rangle \pi_F f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle f(x)dx. \tag{1.3.4}$$
Εἰδικότερα, ἂν ἡ f ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν περιθώρια συνάρτησι $\pi_F f$.

5. *Γιὰ ὅλα τὰ $p > 0$ καὶ $\theta \in S_F$,*
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p f(x)dx = \int_F |\langle x,\theta\rangle|^p\,\pi_F f(x)dx.$$

6. *Ἂν ἡ f εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη, τότε καὶ ἡ $\pi_F f$ εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη.*

Ἐπιπλέον, ἀντίστοιχες ἰδιότητες ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ περιθώρια μέτρα ἑνὸς μέτρου μ στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο εἶναι πεπερασμένο καὶ ἀπολύτως συνεχὲς ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue.

Σὲ πολλὰ προβλήματα τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ προβλήματος τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς, εἶναι πολὺ χρήσιμο νὰ γνωρίζουμε τὴν συμπεριφορὰ τῶν L_p-νορμῶν (ὡς πρὸς κάποιο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο) τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν ἢ διαφόρων ἡμινορμῶν, συμπεριφορὰ γιὰ τὴν ὁποία μποροῦμε νὰ ἐξαγάγουμε πληροφορίες ἀπὸ τὸ παρακάτω λῆμμα, τὸ ὁποῖο ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Borell [6].

Λῆμμα 1.3.8 (Λῆμμα τοῦ Borell, 1974). *Ἔστω μ ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ ἔστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ἕνα κυρτὸ καὶ συμμετρικὸ σύνολο. Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει $\mu(A) \geqslant 2/3$ καὶ θέτουμε $a = \mu(A)$. Τότε γιὰ κάθε $t > 1$ ἔχουμε ὅτι*

$$\mu((tA)^c) \leqslant a \left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{t+1}{2}} \leqslant \exp(-ct),$$

ὅπου $(tA)^c$ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ tA καὶ $c = \log 2/2$ (αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ συμπληρώματος τοῦ tA φθίνει ἐκθετικὰ καθῶς τὸ t αὐξάνεται).

Μία πολὺ σημαντικὴ συνέπεια τοῦ λήμματος τοῦ Borell εἶναι οἱ ἀκόλουθες ἀντίστροφες ἀνισότητες Hölder ποὺ ἱκανοποιοῦν οἱ L_p-νόρμες τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν (ὡς πρὸς ὁποιοδήποτε λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ).

Πρότασις 1.3.9. *Ἔστω μ ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία ἡμινόρμα. (π.χ. $f = |\langle \cdot, y\rangle|$ γιὰ κάποιο $y \in \mathbb{R}^n$ ἢ f εἶναι κάποια νόρμα στὸν $\mathbb{R}^n$). Τότε, γιὰ κάθε $q > p \geqslant 1$, ἔχουμε ὅτι*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant \beta_1 \frac{q}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

ὅπου $\beta_1 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Γενικὰ λέμε ὅτι ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι ψ_α μὲ σταθερὰ β_α, ὅπου $\alpha \in [1,2]$, ἂν ἰσχύει

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant \beta_\alpha q^{1/\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2 d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

Ἡ παραπάνω πρότασις δείχνει ἑπομένως ὅτι ὅλα τὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα πιθανότητος, καὶ ἄρα, πιὸ εἰδικά, ὅλα τὰ κυρτὰ σώματα ὄγκου 1, εἶναι ψ_1 μὲ μία ἀπόλυτη σταθερὰ β_1.

1.3.1 Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς

Γενικεύοντας τὸν ὁρισμὸ ἑνὸς ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος, λέμε ὅτι ἕνα πεπερασμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι ἰσοτροπικὸ ἂν τὸ μ εἶναι μέτρο πιθανότητος, δηλαδὴ $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$, ἂν ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0 καὶ ἂν ἱκανοποιεῖ τὴν *ἰσοτροπικὴ συνθήκη*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 \, d\mu(x) = 1 \tag{1.3.5}$$

γιὰ ὅλα τὰ $\theta \in S^{n-1}$ (ὁπότε τότε εἶναι καὶ μὴ ἐκφυλισμένο). Ἀντίστοιχα, μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα θὰ λέγεται ἰσοτροπικὴ ἂν $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$, ἂν τὸ κέντρο βάρους τῆς f εἶναι τὸ 0 καὶ ἂν ἱκανοποιεῖται ἡ ἰσοτροπικὴ συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 f(x) \, d(x) = 1$$

γιὰ ὅλα τὰ $\theta \in S^{n-1}$. Παρατηροῦμε ὅτι ἕνα (πεπερασμένο, μὴ ἐκφυλισμένο) λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι ἰσοτροπικὸ ἂν καὶ μόνον ἂν ἡ λογαριθμικὰ-κοίλη πυκνότητά του f_μ εἶναι ἰσοτροπική. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσι γράφουμε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$. Ἐπίσης, γιὰ κάθε τέτοιο μ ἔχουμε, ἐξαιτίας τῶν ἰδιοτήτων 4. καὶ 5. τῆς Προτάσεως 1.3.7, ὅτι καὶ κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_F\mu$ τοῦ μ εἶναι ἰσοτροπικό.

Ὅπως ἰσχύει καὶ γιὰ τὰ κυρτὰ σώματα, ὅταν ἔχουμε ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$, τὸ ὁποῖο εἶναι πεπερασμένο καὶ μὴ ἐκφυλισμένο, ἢ μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα, μποροῦμε πάντα νὰ τὰ φέρουμε σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι. Δηλαδὴ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕναν μετασχηματισμὸ $T \in GL(n)$, ἕνα σημεῖο $x \in \mathbb{R}^n$ καὶ ἕναν θετικὸ ἀριθμὸ $a > 0$ ὥστε τὸ μέτρο $\nu = a \cdot [\mu \circ (x + T)]$ νὰ εἶναι ἰσοτροπικὴ εἰκόνα τοῦ μ, ἢ ἡ συνάρτησις $g = a \cdot [f \circ (x + T)]$ νὰ εἶναι ἰσοτροπικὴ εἰκόνα τῆς f. Πράγματι, ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ἤδη μετασχηματίσει τὸ μ ὥστε νὰ εἶναι μέτρο πιθανότητος μὲ κέντρο βάρους τὸ 0, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε ἕναν γραμμικὸ μετασχηματισμὸ $T \in GL(n)$ θέτοντας

$$T(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle x d\mu(x).$$

Ἀφοῦ $\langle T(y_1), y_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y_1\rangle \cdot \langle x, y_2\rangle d\mu(x)$, ὁ T εἶναι συμμετρικὸς καὶ θετικὰ ὁρισμένος, ἄρα ὑπάρχει συμμετρικὸς μετασχηματισμὸς $S \in GL(n)$ ὥστε $T = S^2$ καὶ γι᾽ αὐτὸν τὸν S ἔχουμε ὅτι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2 d(\mu \circ S)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, S^{-1}(y)\rangle^2 d\mu(x) = \langle T(S^{-1}(y)), S^{-1}(y)\rangle = \|y\|_2^2,$$

δηλαδὴ τὸ $\mu \circ S$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη (1.3.5).

Παρατήρησις 1.3.10. Ὅπως ἐξηγήσαμε παραπάνω, γιὰ κάθε πεπερασμένο καὶ μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο ὑπάρχει $S \in GL(n)$ ὥστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2 d\mu(x) = \langle S(y), S(y)\rangle = \|y\|^2_{S^{-1}(B_2^n)},$$

καὶ ἄρα ὑπάρχει ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_B(\mu)$ μὲ τὴν ἰδιότητα, γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, νὰ ἰσχύει

$$\|y\|_{\mathcal{E}_B(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2 d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

Τὸ ἐλλειψοειδὲς αὐτὸ λέγεται *ἐλλειψοειδὲς Binet* τοῦ μ. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὁρίζεται τὸ ἐλλειψοειδὲς Binet μίας λογαριθμικὰ-κοίλης συναρτήσεως $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα, ἢ τὸ ἐλλειψοειδὲς Binet ἑνὸς κυρτοῦ σώματος στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἂς σημειώσουμε ὅτι ἰσχύει

$$\mathcal{E}_B(a \cdot (\mu \circ T)) = \sqrt{a^{-1}} \cdot T^*(\mathcal{E}_B(\mu)), \quad \mathcal{E}_B(a \cdot (f \circ T)) = \sqrt{a^{-1}|\mathrm{det}T|} \cdot T^*(\mathcal{E}_B(f)) \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{E}_B(T(K)) = \sqrt{|\mathrm{det}T|} \cdot (T^*)^{-1}(\mathcal{E}_B(K)) \tag{1.3.6}$$

γιὰ κάθε $T \in GL(n)$ καὶ $a > 0$.

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ τὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα μ καὶ τὶς λογαριθμικὰ-κοῖλες συναρτήσεις f ἐπιλέγουμε τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη λίγο διαφορετικὴ ἀπὸ ὅ,τι γιὰ τὰ κυρτὰ σώματα, ἀφοῦ ζητᾶμε οἱ δεύτερες ῥοπὲς τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μοναδιαῖες διευθύνσεις νὰ εἶναι ἴσες μὲ 1 καὶ ὄχι μὲ μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μ ἢ τὴν f. Μάλιστα, σύμφωνα μὲ τοὺς ὁρισμούς μας, ἕνα κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι ἰσοτροπικὸ ἂν καὶ μόνον ἂν ἡ λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις $f_K := L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ εἶναι ἰσοτροπική. Αὐτὴ ἡ μικρὴ διαφορὰ στὸ τί σημαίνει «ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα» καὶ τί «ἰσοτροπικὸ μέτρο» δὲν ἔχει καμμία σημασία γιὰ τὰ ἀποτελέσματα (παρὰ μόνον μᾶς ἀναγκάζει νὰ εἴμαστε κάπως προσεκτικοὶ στὶς διατυπώσεις τους), ἀφοῦ, ὅπως θὰ δοῦμε ἀμέσως τώρα, μὲ τὸν τρόπο ποὺ ὁρίζεται ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερά, παραμένει ἀμετάβλητη ἀπὸ ἀφινικοὺς μετασχηματισμοὺς καὶ ἔτσι μποροῦμε νὰ μιλᾶμε χωρὶς κανέναν κίνδυνο συγχύσεως γιὰ τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἑνὸς μέτρου, μίας συναρτήσεως ἢ ἑνὸς σώματος χωρὶς νὰ ὑποθέτουμε ὅτι αὐτὰ βρίσκονται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι.

Ὁρισμός 1.3.11 (Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς)**.** Ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα. Τότε μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὸν *πίνακα συνδιακυμάνσεων* $\mathrm{Cov}(f)$ τῆς f ὡς τὸν πίνακα μὲ στοιχεῖα

$$[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}.$$

Σημειώνουμε ὅτι ὁ $\mathrm{Cov}(f)$ εἶναι ἕνας συμμετρικός, θετικὰ ὁρισμένος πίνακας καί, ἂν ἡ f εἶναι ἰσοτροπική, τότε ὁ $\mathrm{Cov}(f)$ εἶναι ὁ ταυτοτικὸς πίνακας Id_n.

Δοθείσης μίας λογαριθμικὰ-κοίλης συναρτήσεως f μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα, ὁρίζουμε τὴν *ἰσοτροπικὴ σταθερὰ* τῆς f ὡς

$$L_f := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}. \tag{1.3.7}$$

Στὴν συνέχεια, δοθέντος πεπερασμένου καὶ μὴ ἐκφυλισμένου λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ στὸν $\mathbb{R}^n$, τὸ ὁποῖο ἔχει πυκνότητα f_μ ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue, ὁρίζουμε τὴν ἰσοτροπική του σταθερὰ θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδὴ ὡς ἑξῆς:

$$L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{1.3.8}$$

ὅπου χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τοὺς συμβολισμοὺς

$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$

καὶ $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$.

Κάνοντας σχετικὰ ἁπλοὺς ὑπολογισμοὺς μπορεῖ κάποιος τώρα νὰ ἐλέγξει ὅτι, σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω ὁρισμό, ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ δὲν μεταβάλλεται ἀπὸ ἀφινικοὺς μετασχηματισμούς, δηλαδὴ ἰσχύει ὅτι $L_\mu = L_{a(\mu\circ A)}$ καὶ $L_f = L_{a(f\circ A)}$ γιὰ κάθε ἀντιστρέψιμο ἀφινικὸ μετασχηματισμὸ A τοῦ $\mathbb{R}^n$ καὶ κάθε θετικὸ ἀριθμὸ a. Ἐπιπλέον, ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

- Ὁ ἀρχικὸς ὁρισμὸς ποὺ δώσαμε γιὰ τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ κυρτῶν σωμάτων εἶναι συνεπὴς μὲ τὸν Ὁρισμὸ 1.3.11 μὲ τὴν ἔννοια ὅτι $L_{\mathbf{1}_K} = L_K$ γιὰ ὁποιοδήποτε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$· ἕνας εὔκολος τρόπος νὰ τὸ δοῦμε αὐτὸ εἶναι νὰ θεωρήσουμε ὅτι τὸ K εἶναι σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι καὶ ἔπειτα, κατὰ τετριμμένο τρόπο, νὰ παρατηρήσουμε ὅτι $\|\mathbf{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbf{1}_K(x)\,dx = 1$ καὶ $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_K) = L_K^2\,\mathrm{Id}_n$.

- Ἂν μ εἶναι ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$, τότε $\int f_\mu = 1$ καὶ $\mathrm{Cov}(\mu) = \mathrm{Id}_n$, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἕπεται ὅτι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Ἐπιπροσθέτως, ἐφ᾽ ὅσον ἐξ ὁρισμοῦ τὸ μ εἶναι κεντραρισμένο, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ Θεώρημα 1.3.5 καὶ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἰσχύει $e^{-1}L_\mu \leqslant (f_\mu(0))^{1/n} \leqslant L_\mu$, ἄρα μποροῦμε ἐν γένει στὶς ἐκφράσεις στὶς ὁποῖες ἐμφανίζεται ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ τοῦ μ νὰ γράφουμε ἀντὶ αὐτῆς τὸ $(f_\mu(0))^{1/n}$. Στὴν ἑπομένη παράγραφο καὶ στὸ Κεφάλαιο 3 θὰ ἐκμεταλλευθοῦμε ἀρκετὲς φορὲς αὐτὴν τὴν παρατήρησι.

1.3.2 Σύνδεσις μέτρων καὶ σωμάτων

Ὁ Ball (βλέπε [2]) πρότεινε ἕναν πολὺ χρήσιμο τρόπο νὰ συνδέουμε κάθε μὴ ἀρνητική, ὁλοκληρώσιμη λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησι f μὲ συγκεκριμένα κυρτὰ σώματα ποὺ κληρονομοῦν διάφορες ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῆς f· ὁ σκοπὸς αὐτῆς τῆς συνδέσεως εἶναι ὅτι πολὺ συχνὰ σὲ προβλήματα ποὺ διατυπώνονται γιὰ κυρτὰ σώματα χρειάζεται νὰ χρησιμοποιήσουμε λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα καὶ λογαριθμικὰ-κοῖλες συναρτήσεις ἀλλὰ στὸ τέλος θέλουμε πάλι νὰ διατυπώσουμε τὰ συμπεράσματα καὶ ἀποτελέσματά μας στὴν γλῶσσα τῶν κυρτῶν σωμάτων. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἐρωτήματα ποὺ φαίνονται πιὸ γενικὰ ὅταν διατυπωθοῦν γιὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα ἀπὸ ὅ,τι ὅταν ἀρχικῶς διετυπώθηκαν γιὰ κυρτὰ σώματα ἀποδεικνύεται ὁρισμένες φορές, μέσῳ τῆς κατασκευῆς τοῦ Ball, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὶς ἀρχικές τους μορφές. Μία τέτοια περίπτωσις, ὅπως θὰ ἐξηγήσουμε σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο, εἶναι καὶ τὸ πρόβλημα τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς: τὸ συμπέρασμα ποὺ προκύπτει ἐξαιτίας τῶν Προτάσεων 1.3.19 καὶ 1.3.21, οἱ ὁποῖες κλείνουν αὐτὴν τὴν παράγραφο, εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ βασικὰ στὴν θεωρία τῶν ἰσοτροπικῶν σωμάτων καὶ μέτρων καὶ μᾶς λέει ὅτι

$$
\begin{aligned}
L_n &:= \sup\{L_\mu : \mu \text{ πεπερασμένο, μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν } \mathbb{R}^n\} \\
&\simeq \max\{L_K : K \text{ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\} \\
&\simeq \max\{L_K : K \text{ συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\}.
\end{aligned} \tag{1.3.9}
$$

Αὐτὸ μᾶς ἐπιτρέπει ἀρκετὴ εὐελιξία στὶς ὑπάρχουσες προσεγγίσεις γιὰ τὴν μελέτη τοῦ προβλήματος, ὅπως γιὰ παράδειγμα θὰ δοῦμε καὶ σὲ αὐτὴν τὴν διατριβή, ὅπου στὸ Κεφάλαιο 2 θὰ ἀναφερθοῦμε σὲ κυρτὰ σώματα μὲ μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ γιὰ νὰ χρησιμοποιήσουμε ἀριθμοὺς καλύψεως στὰ ἐπιχειρήματα, ἐνῷ στὸ Κεφάλαιο 3 θὰ ἀναφερόμαστε σὲ μέτρα ἀφοῦ θὰ χρειαστεῖ νὰ μελετήσουμε περιθώριες κατανομές, οἱ ὁποῖες, ἀκόμη καὶ ἂν ἔχουμε ἕνα ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα, δὲν εἶναι ἐν γένει ὁμοιόμορφα μέτρα.

Ὁρισμός 1.3.12. Ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μία μετρήσιμη συνάρτησις μὲ τὴν ἰδιότητα $f(0) > 0$. Γιὰ κάθε $p > 0$ ὁρίζουμε τὸ σύνολο $K_p(f)$ ὡς

$$K_p(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty f(rx) r^{p-1}\, dr \geqslant \frac{f(0)}{p} \right\}.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ἀκτινικὴ συνάρτησις τοῦ $K_p(f)$ δίδεται ἀπὸ τὴν

$$\rho_{K_p(f)}(x) = \left(\frac{1}{f(0)} \int_0^\infty p r^{p-1} f(rx)\, dr \right)^{1/p}. \tag{1.3.10}$$

Ἐπίσης, ἂν μ εἶναι ἕνα μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο εἶναι ἀπολύτως συνεχὲς ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue, καὶ ἂν γράψουμε f_μ γιὰ τὴν πυκνότητα τοῦ μ καὶ ἰσχύει $f_\mu(0) > 0$, τότε μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε

$$K_p(\mu) := K_p(f_\mu) = \left\{ x : \int_0^\infty r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr \geqslant \frac{f_\mu(0)}{p} \right\},$$

Λῆμμα 1.3.13. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο περιέχει τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων 0. Τότε ὁρίζονται τὰ σύνολα $K_p(\mathbf{1}_K)$ καὶ ἔχουμε ὅτι $K_p(\mathbf{1}_K) = K$ γιὰ κάθε $p > 0$.*

Στὴν ἑπομένη πρότασι συγκεντρώνονται κάποιες βασικὲς ἰδιότητες τῶν συνόλων $K_p(f)$.

Πρότασις 1.3.14. *Ἔστω $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ δύο ὁλοκληρώσιμες συναρτήσεις μὲ $f(0) = g(0) > 0$. Θέτουμε*

$$m = \inf\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : g(x) > 0 \right\} \quad \textit{καὶ} \quad M^{-1} = \inf\left\{ \frac{g(x)}{f(x)} : f(x) > 0 \right\}.$$

Ἔστω ἐπίσης ὅτι V εἶναι ἕνα ἀστρόμορφο σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων καὶ ἂς συμβολίζουμε μὲ $\|\cdot\|_V$ τὸ συναρτησοειδὲς Minkowski ποὺ ἐπάγει τὸ V. Τότε, γιὰ κάθε $p > 0$ ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

1. *$0 \in K_p(f)$.*
2. *Τὸ $K_p(f)$ εἶναι ἕνα ἀστρόμορφο σύνολο.*
3. *Τὸ $K_p(f)$ εἶναι συμμετρικὸ ἂν ἡ f εἶναι ἄρτια.*
4. *$m^{1/p} K_p(g) \subseteq K_p(f) \subseteq M^{1/p} K_p(g)$.*
5. *Γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ἔχουμε ὅτι*

$$\int_{K_{n+1}(f)} \langle x, \theta \rangle\, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x)\, dx.$$

Ἑπομένως, ἡ συνάρτησις f ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0 ἂν καὶ μόνον ἂν τὸ σύνολο $K_{n+1}(f)$ ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0.

6. *Γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$ καὶ $p > 0$, ἔχουμε ὅτι*

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p \, f(x) \, dx.$$

7. *Ἂν $p > -n$ τότε*

$$\int_{K_{n+p}(f)} \|x\|_V^p \, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_V^p f(x) \, dx. \tag{1.3.11}$$

Ὅταν ἡ συνάρτησις f εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη, τὰ σύνολα $K_p(f)$, $p \geqslant 1$, εἶναι κυρτά.

Θεώρημα 1.3.15 (Ball, [2])**.** *Ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις μὲ $f(0) > 0$. Γιὰ κάθε $p \geqslant 1$, τὸ $K_p(f)$ εἶναι ἕνα κυρτὸ ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$.*

Χρειάζεται ἐπίσης νὰ ἐλέγξουμε ὅτι, στὶς περιπτώσεις ποὺ ἡ f ἔχει πεπερασμένο θετικὸ ὁλοκλήρωμα, τὰ (κλειστὰ) κυρτὰ σύνολα $K_p(f)$, $p \geqslant 1$, εἶναι καὶ κυρτὰ σώματα, δηλαδὴ εἶναι συμπαγῆ μὲ μὴ κενὸ ἐσωτερικό. Χρησιμοποιῶντας τὴν (1.3.10) καὶ ὁλοκλήρωσι σὲ πολικὲς συντεταγμένες, προκύπτει τὸ ἀκόλουθο

Λῆμμα 1.3.16. *Γιὰ κάθε μετρήσιμη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μὲ τὴν ἰδιότητα $f(0) > 0$, ἰσχύει ὅτι*

$$|K_n(f)| = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Εἰδικότερα, ἂν ἡ f εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη καὶ τέτοια ὥστε $0 < \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$, τότε, χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ Θεώρημα 1.3.15, καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ $K_n(f)$ εἶναι ἕνα κλειστὸ κυρτὸ ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχει πεπερασμένο, μὴ μηδενικὸ ὄγκο, ἄρα εἶναι ἕνα κυρτὸ σῶμα.

Ἔπειτα, μποροῦμε νὰ ἐπικαλεστοῦμε σχέσεις ἐγκλεισμῶν μεταξὺ ὁποιωνδήποτε δύο ἀπὸ τὰ σύνολα $K_p(f)$, γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι, ἂν ἡ f εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα, τότε κάθε $K_p(f)$ ἔχει μὴ κενὸ ἐσωτερικό (γιὰ τὶς ἀποδείξεις τῶν σχέσεων στὴν ἑπομένη πρότασι, βλέπε π.χ. [44] καὶ [53]).

Πρότασις 1.3.17. *Ἔστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις μὲ $f(0) > 0$.*

1. *Ἂν $0 < p \leqslant q$, τότε*

$$\frac{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}} K_q(f) \subseteq K_p(f) \subseteq \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} K_q(f).$$

2. *Ἂν ἐπιπλέον ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη καὶ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε, γιὰ κάθε $0 < p \leqslant q$,*

$$\frac{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}} K_q(f) \subseteq K_p(f) \subseteq e^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} K_q(f). \tag{1.3.12}$$

Χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν $|K_n(f)|\, f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \|f\|_1$ *μαζὶ μὲ τὴν* (1.3.12), *συμπεραίνουμε ἐπίσης τὰ ἑξῆς:*

3. *Γιὰ κάθε* $p > 0$,
$$e^{-1} \leqslant \left(\frac{f(0)}{\|f\|_1}\right)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \leqslant e\frac{n+p}{n}.$$

4. *Ἂν* $-n < p < 0$, *τότε*
$$e^{-1} \leqslant \left(\frac{f(0)}{\|f\|_1}\right)^{\frac{1}{-p}-\frac{1}{n}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{-p}-\frac{1}{n}} \leqslant e.$$

Ὅπως εἴπαμε καὶ παραπάνω, τὰ σώματα $K_p(f)$ μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ περνᾶμε ἀπὸ τὴν μελέτη τῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων στὴν μελέτη τῶν κυρτῶν σωμάτων, ὅπως καὶ νὰ ἀποδεικνύουμε ἰδιότητες τῶν κυρτῶν σωμάτων χρησιμοποιῶντας ἐργαλεῖα τῆς θεωρίας τῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων. Ἕνα πρῶτο παράδειγμα δίδεται ἀπὸ τὶς ἑπόμενες προτάσεις, οἱ ὁποῖες δείχνουν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς στὸν χῶρο τῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἴδιο πρόβλημα περιορισμένο στὸν ὑπόχωρο τῶν κυρτῶν σωμάτων, ἢ ἀκόμη περισσότερο περιορισμένο στὸν ὑπόχωρο τῶν συμμετρικῶν κυρτῶν σωμάτων. Ἐξετάζουμε πρῶτα τὴν περίπτωσι ποὺ ἔχουμε ἕνα ἄρτιο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο.

Πρότασις 1.3.18 (Ball, [2])**.** *Ἔστω* $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *μία ἄρτια λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις ποὺ ἔχει πεπερασμένο, θετικὸ ὁλοκλήρωμα. Τότε τὸ σύνολο* $Q = K_{n+2}(f)$ *εἶναι ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα μὲ τὴν ἰδιότητα*
$$c_1L_f \leqslant L_Q \leqslant c_2L_f$$
γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$. *Ἐπιπλέον, ἂν ἡ* f *εἶναι ἰσοτροπική, τότε τὸ* $\overline{Q}$ *εἶναι ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα.*

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ f εἶναι ἄρτια καὶ λογαριθμικὰ-κοίλη, βλέπουμε ὅτι $f(x) = \sqrt{f(x)f(-x)} \leqslant f(0)$ γιὰ κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, καὶ ἄρα $f(0) > 0$. Ἔχουμε ἑπομένως ὅτι τὸ σύνολο $Q = K_{n+2}(f)$ ὁρίζεται καλὰ καί, ὅπως ἔχουμε δεῖ, εἶναι ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα, ἐφ᾽ ὅσον ἰσχύει $K_{n+2}(\lambda f) = K_{n+2}(f)$ καὶ $L_{\lambda f} = L_f$ γιὰ κάθε $\lambda > 0$, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι $L_Q \simeq L_f$, ἕνας σχετικὰ γρήγορος τρόπος εἶναι νὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς ἰδιότητες τῶν ἐλλειψοειδῶν Binet τοῦ Q καὶ τῆς f. Ἀπὸ τὸ 4. τῆς Προτάσεως 1.3.14 λαμβάνουμε ὅτι
$$\left(\int_{\overline{Q}} \langle x,y\rangle^2\, dx\right)^{1/2} = \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}}\left(\int_Q \langle x,y\rangle^2\, dx\right)^{1/2} = \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle^2 f(x)\, dx\right)^{1/2}$$
γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, καὶ ἄρα ἐξ ὁρισμοῦ
$$\mathcal{E}_B(f) = \left(|Q|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} f(0)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot \mathcal{E}_B(\overline{Q}).$$

Ἐφαρμόζοντας καὶ τὸ 3. τῆς Προτάσεως 1.3.17 γιὰ $p=2$, καὶ ἀφοῦ ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$, βλέπουμε ὅτι $\left(|Q|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} f(0)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \simeq (f(0))^{1/n}$, ἑπομένως

$$\mathcal{E}_B(f) \simeq (f(0))^{1/n} \cdot \mathcal{E}_B(\overline{Q}). \tag{1.3.13}$$

Εἶναι δυνατὸν τώρα νὰ ἐκφράσουμε τὸν ὄγκο τῶν $\mathcal{E}_B(f)$ καὶ $\mathcal{E}_B(\overline{Q})$ συναρτήσει τῶν ἰσοτροπικῶν σταθερῶν L_f καὶ L_Q ὥστε, μέσῳ τῆς (1.3.13), νὰ τὶς συγκρίνουμε. Ἂν ἐπιλέξουμε $S_1 \in SL(n)$ ὥστε τὸ $S_1(\overline{Q})$ νὰ εἶναι σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι, θὰ ἔχουμε ὅτι

$$L_Q^{-1}|B_2^n|^{1/n} = |\mathcal{E}_B(S_1(\overline{Q}))|^{1/n} = |\mathcal{E}_B(\overline{Q})|^{1/n} \simeq (f(0))^{-1/n} \cdot |\mathcal{E}_B(f)|^{1/n}. \tag{1.3.14}$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, καὶ ἀφοῦ ἡ f εἶναι ἄρτια, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕναν γραμμικὸ μετασχηματισμὸ $S_2 \in GL(n)$ καὶ κάποιο $a>0$ ὥστε ἡ $\tilde{f} = a\cdot(f\circ S_2)$ νὰ εἶναι ἰσοτροπική. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσι θὰ ἔχουμε ὅτι

$$L_f = \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\right)^{1/n} = (\tilde{f}(0))^{1/n} = [a\cdot f(S_2(0))]^{1/n} = (a\cdot f(0))^{1/n},$$

καὶ ἐπίσης

$$B_2^n = \mathcal{E}_B(\tilde{f}) = \sqrt{a^{-1}|\mathrm{det} S_2|}\cdot S_2^*(\mathcal{E}_B(f)).$$

Ἐπιπλέον, ἀφοῦ καὶ ἡ f καὶ ἡ $\tilde{f}$ ἔχουν ὁλοκλήρωμα ἴσο μὲ 1, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)dx = a\int_{\mathbb{R}^n} f(S_2(x))dx = a|\det S_2|^{-1}.$$

Συνδυάζοντας τὰ παραπάνω γιὰ τὴν f μὲ τὴν (1.3.14), συμπεραίνουμε ὅτι

$$|B_2^n|^{1/n} = \sqrt{a^{-1}|\mathrm{det} S_2|}\cdot|\det S_2^*|^{1/n}|\mathcal{E}_B(f)|^{1/n} \simeq \frac{(af(0))^{1/n}}{L_Q}|B_2^n|^{1/n} = \frac{L_f}{L_Q}|B_2^n|^{1/n},$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει τὸ ζητούμενο.

Ἂν τώρα ἡ f εἶναι ἐξαρχῆς ἰσοτροπική, δηλαδὴ ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1 \text{ καὶ } \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 f(x)dx = 1 \text{ γιὰ κάθε } \theta\in S^{n-1},$$

τότε

$$\int_{\overline{Q}} \langle x,\theta\rangle^2\,dx = \frac{1}{|Q|^{1+\frac{2}{n}}f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\theta\rangle^2 f(x)\,dx = \frac{1}{|Q|^{1+\frac{2}{n}}f(0)}$$

γιὰ κάθε μοναδιαία διεύθυνσι θ, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ $\overline{Q}$ εἶναι σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι. □

Μὲ τὴν ἑπομένη πρότασι, ἀπὸ τὸ [26], βλέπουμε ὅτι ἀρκεῖ νὰ μελετήσουμε τὸ πρόβλημα τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς ἀναζητῶντας ἄνω φράγματα μόνον γιὰ τὰ συμμετρικὰ κυρτὰ σώματα.

Πρότασις 1.3.19. *Γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα δεύτερο, συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα Q στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὴν ἰδιότητα*

$$L_Q \simeq L_K.$$

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ παραμένει ἀμετάβλητη ἀπὸ ἀφινικοὺς μετασχηματισμούς, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ σῶμα K ἔχει ὄγκο 1 καὶ βαρύκεντρο τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. Ὁρίζουμε μία συνάρτησι f μὲ φορέα τὸ $K-K$ ὡς ἑξῆς:

$$f(x) = (\mathbf{1}_K * \mathbf{1}_{-K})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(y)\mathbf{1}_{-K}(x-y)\,dy = |K \cap (x+K)|.$$

Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Brunn-Minkowski ἡ f εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη, ἐνῷ, ἐφ' ὅσον γιὰ κάθε x

$$|K \cap (x+K)| = |-x + (K \cap (x+K))| = |(-x+K) \cap K|,$$

ἔχουμε ἐπίσης ὅτι ἡ f εἶναι ἄρτια. Ἐπιπλέον, εὔκολα μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$ καὶ ὅτι $f(x) \leqslant f(0) = |K| = 1$ γιὰ κάθε x. Ἑπομένως,

$$L_f = [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι γιὰ κάθε $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,z\rangle^2 f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle y+(x-y),z\rangle^2 \mathbf{1}_K(y)\mathbf{1}_{-K}(x-y)\,dydx \\
&= \int_K \langle y,z\rangle^2 \left(\int_{-K+y} dx\right) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(y) \left(\int_{-K} \langle w,z\rangle^2 dw\right) dy \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^n} \langle y,z\rangle \mathbf{1}_K(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y,z\rangle \mathbf{1}_{-K}(x-y)\,dx\right) dy \\
&= \int_K \langle x,z\rangle^2 dx + \int_{-K} \langle x,z\rangle^2 dx,
\end{aligned}$$

ἀφοῦ τὸ K εἶναι κεντραρισμένο (ἄρα καὶ τὸ $-K$). Ἕπεται ὅτι

$$\mathrm{Cov}(f) = \mathrm{Cov}(K) + \mathrm{Cov}(-K) = 2\,\mathrm{Cov}(K),$$

καὶ ἄρα

$$L_f = [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}\,[\det \mathrm{Cov}(K)]^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}\,L_K.$$

Εὔκολα ἐλέγχουμε πλέον ὅτι τὸ $Q := K_{n+2}(f)$ ἔχει τὶς ἐπιθυμητὲς ἰδιότητες: τὸ Q εἶναι συμμετρικὸ ἀφοῦ ἡ f εἶναι ἄρτια, καὶ $L_Q \simeq L_f = \sqrt{2}\,L_K$. □

Ὅταν ἔχουμε μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ἡ ὁποία δὲν εἶναι συμμετρικὴ ἀλλὰ ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0, δουλεύουμε μὲ τὸ σῶμα $K_{n+1}(f)$ ἀντί τοῦ $K_{n+2}(f)$, δεδομένου ὅτι τὸ $K_{n+1}(f)$ ἔχει καὶ αὐτὸ βαρύκεντρο τὸ 0 ὅταν ἡ f ἔχει αὐτὴν τὴν ἰδιότητα. Ἐπιπλέον, ὅταν ἡ f εἶναι ἰσοτροπική, τότε τὸ $K_{n+1}(f)$ εἶναι καὶ «σχεδὸν ἰσοτροπικό» (βλέπε π.χ. [27] καὶ [53] γιὰ τὶς ἀποδείξεις ἢ [13, Παράγραφος 2.5]).

Ὁρισμός 1.3.20. Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ κέντρο βάρους τὸ 0. Λέμε ὅτι τὸ K εἶναι *σχεδὸν ἰσοτροπικὸ μὲ σταθερὰ* $C>0$ ἐάν, γιὰ κάθε $S \in SL(n)$ μὲ τὴν ἰδιότητα τὸ $S(K)$ νὰ εἶναι ἰσοτροπικό, ἔχουμε ὅτι

$$\frac{1}{C}B_2^n \subseteq S(B_2^n) \subseteq CB_2^n.$$

Πρότασις 1.3.21. *Ἔστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο θετικὸ ὁλοκλήρωμα καὶ βαρύκεντρο τὸ 0. Τότε τὸ $Q=K_{n+1}(f)$ εἶναι ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὴν ἰδιότητα*

$$c_1L_f\leqslant L_Q\leqslant c_2L_f,$$

ὅπου $c_1,c_2>0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Ἐπιπλέον ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $C>0$ ἔτσι ὥστε, ἂν ἡ f εἶναι ἰσοτροπική, τότε τὸ $\overline{K}_{n+1}(f)$ νὰ εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὸ μὲ σταθερὰ C.

Ἀπόδειξις. Ὅπως καὶ στὴν Πρόταση 1.3.18, ἐκμεταλλευόμαστε τὶς ἰδιότητες τῶν ἐλλειψοειδῶν Binet τοῦ Q καὶ τῆς f. Παρατηροῦμε ὅτι, ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Fradelizi (Θεώρημα 1.3.5), ἀφοῦ ἡ f ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0, ἀναγκαστικὰ ἔχουμε ὅτι $f(0)>0$· ἔτσι, τὸ $K_{n+1}(f)$ ὁρίζεται καί, ὅπως εἴδαμε στὴν Πρόταση 1.3.14, εἶναι ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα. Ἐπίσης, μποροῦμε καὶ πάλι νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $\int_{\mathbb{R}^n}f=1$. Ἐφαρμόζοντας τὸ 4. τῆς Προτάσεως 1.3.14 σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρόταση 1.3.9, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned}\left(\int_{\overline{Q}}\langle x,y\rangle^2\,dx\right)^{1/2}&\simeq\int_{\overline{Q}}|\langle x,y\rangle|\,dx=\frac{1}{|Q|^{1+\frac1n}}\int_Q|\langle x,y\rangle|\,dx\\&=\frac{1}{|Q|^{1+\frac1n}f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,y\rangle|f(x)\,dx\simeq\frac{1}{|Q|^{1+\frac1n}f(0)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,y\rangle^2f(x)\,dx\right)^{1/2}\end{aligned}$$

γιὰ κάθε $y\in\mathbb{R}^n$. Συνεπῶς ἔχουμε ὅτι

$$\mathcal{E}_B(\overline{Q})\simeq\left(|Q|^{1+\frac1n}f(0)\right)\cdot\mathcal{E}_B(f).$$

Ἐφαρμόζοντας καὶ τὸ 3. τῆς Προτάσεως 1.3.17 γιὰ $p=1$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\mathcal{E}_B(f)\simeq(f(0))^{1/n}\cdot\mathcal{E}_B(\overline{Q}).\tag{1.3.15}$$

Ἀπὸ ἐκεῖ καὶ ἔπειτα, καὶ δεδομένου ὅτι $(\sup f(T(x)))^{1/n}\simeq(f(T(0)))^{1/n}=(f(0))^{1/n}$ γιὰ κάθε $T\in GL(n)$ ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Fradelizi, χρησιμοποιοῦμε τὸ ἴδιο ἀκριβῶς ἐπιχείρημα ποὺ εἴδαμε καὶ στὴν Πρόταση 1.3.18.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ f εἶναι ἰσοτροπική, πράγμα τὸ ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι $\mathcal{E}_B(f)=B_2^n$ καὶ ὅτι $(f(0))^{1/n}\simeq L_f$. Ἂν $S\in SL(n)$ εἶναι τέτοιος ὥστε τὸ $S(\overline{Q})$ νὰ εἶναι ἰσοτροπικό, μποροῦμε, χρησιμοποιῶντας καὶ τὶς (1.3.6) καὶ (1.3.15), νὰ γράψουμε

$$L_Q^{-1}B_2^n=\mathcal{E}_B(S(\overline{Q}))=(S^*)^{-1}(\mathcal{E}_B(\overline{Q}))\simeq(S^*)^{-1}((f(0))^{-1/n}\cdot\mathcal{E}_B(f)),$$

τὸ ὁποῖο, ἐφ' ὅσον $(f(0))^{-1/n}\cdot\mathcal{E}_B(f)\simeq L_f^{-1}B_2^n\simeq L_Q^{-1}B_2^n$, συνεπάγεται ὅτι

$$c_1B_2^n\subseteq(S^*)^{-1}(B_2^n)\subseteq c_2B_2^n$$

γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1,c_2>0$. Θεωρῶντας τὰ ἀντίστοιχα πολικὰ σώματα, καταλήγουμε στοὺς ζητουμένους ἐγκλεισμοὺς μεταξὺ τῶν B_2^n καὶ $S(B_2^n)$, καὶ τελικῶς στὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ $\overline{Q}=\overline{K}_{n+1}(f)$ εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὸ μὲ μία ἀπόλυτη σταθερὰ C. □

1.4 Βασικὰ ἀποτελέσματα καὶ ἐργαλεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἰσοτροπικῶν σωμάτων καὶ μέτρων

1.4.1 Τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα καὶ οἱ ῥοπὲς τῆς Εὐκλείδειας νόρμας

Ἡ συμπεριφορὰ τῶν L_q-νορμῶν τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν ὡς πρὸς κάποιο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μᾶς ἐνδιαφέρει κατὰ τὴν μελέτη πολλῶν προβλημάτων τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας. Μία πολὺ χρήσιμη ἰδέα τοῦ Παούρη ἦταν τὸ νὰ μελετήσει τὶς ἰδιότητες μίας οἰκογενείας σωμάτων, τὰ ὁποῖα μποροῦμε νὰ συσχετίσουμε μὲ ὁποιοδήποτε κυρτὸ σώμα K ὄγκου 1 ἢ ὁποιοδήποτε λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ, καὶ τῶν ὁποίων οἱ συναρτήσεις στηρίξεως εἶναι ἀκριβῶς αὐτὲς οἱ L_q-νόρμες· τὰ σώματα αὐτὰ λέγονται L_q-*κεντροειδῆ σώματα* τοῦ K ἢ τοῦ μ καὶ ὁρίστηκαν ἀπὸ τοὺς Lutwak, Yang καὶ Zhang [37], ἐνῷ στὰ πλαίσια τῆς θεωρίας τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων χρησιμοποιήθηκαν γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὸν Παούρη (βλέπε [51]). Γιὰ κάθε $q \geqslant 1$ τὸ L_q-κεντροειδὲς σῶμα $Z_q(K)$ τοῦ K, ἢ τὸ L_q-κεντροειδὲς σῶμα $Z_q(\mu)$ τοῦ μ, ὁρίζεται νὰ εἶναι τὸ σῶμα μὲ συνάρτησι στηρίξεως

$$h_{Z_q(K)}(y) := \|\langle\cdot,y\rangle\|_{L_q(K)} = \left(\int_K |\langle x,y\rangle|^q dx\right)^{1/q},$$
$$\text{ἢ}\quad h_{Z_q(\mu)}(y) := \|\langle\cdot,y\rangle\|_{L_q(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,y\rangle|^q f_\mu(x)\,dx\right)^{1/q}$$

ἀντιστοίχως. Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ καὶ τὸν ὁρισμὸ τῆς συναρτήσεως στηρίξεως, βλέπουμε ὅτι τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα εἶναι συμμετρικὰ κυρτὰ σώματα, ἐνῷ ἰσχύει $Z_q(T(K)) = T(Z_q(K))$ γιὰ κάθε $T \in SL(n)$ καὶ $Z_q(\mu\circ T) = T^{-1}(Z_q(\mu))$ γιὰ κάθε ἀντιστρέψιμο γραμμικὸ μετασχηματισμὸ T. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὰ σώματα $Z_2(K)$ καὶ $Z_2(\mu)$ εἶναι τὰ πολικὰ τῶν ἀντιστοίχων ἐλλειψοειδῶν Binet, ἐνῷ τὸ κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1, ἢ τὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ, εἶναι ἰσοτροπικὸ ἂν καὶ μόνον ἂν ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0 καὶ $Z_2(K) = L_K B_2^n$, ἢ $Z_2(\mu) = B_2^n$ ἀντιστοίχως.

Ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.9 ἔχουμε γιὰ κάθε $q > p \geqslant 1$ ὅτι

$$Z_p(\mu) \subseteq Z_q(\mu) \subseteq \beta_1 \frac{q}{p} Z_p(\mu), \tag{1.4.1}$$

ὅπου β_1 μία ἀπόλυτη σταθερά. Ἐπιπλέον, γιὰ τὰ κυρτὰ σώματα K ὄγκου 1 ἔχουμε ὅτι

$$Z_q(K) \subseteq \mathrm{conv}\{K,-K\}, \tag{1.4.2}$$

ὅπου $\mathrm{conv}\{K,-K\}$ εἶναι ἡ κυρτὴ θήκη τῶν K καὶ $-K$, δεδομένου ὅτι $h_{Z_q(K)} \leqslant \max\{h_K, h_{-K}\}$ γιὰ κάθε q. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἐξαιτίας τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski (βλέπε ἑπόμενο λῆμμα), γιὰ κάθε κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$ ἔχουμε ὅτι

$$Z_n(K) \supseteq c\,\mathrm{conv}\{K,-K\}, \tag{1.4.3}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$, καὶ ἑπομένως τὸ $Z_n(K)$, ὅπως καὶ κάθε $Z_q(K)$ γιὰ $q \geqslant n$, εἶναι περίπου ἴσο μὲ τὴν κυρτὴ θήκη τῶν K καὶ $-K$.

Λῆμμα 1.4.1 ([19], [50]). *Ἔστω K ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$ καὶ γιὰ κάθε $q \geqslant 1$,*

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx \geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\}.$$

Εἰδικότερα, γιὰ κάθε $q \geqslant n$,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \simeq \max\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\}.$$

Ὅπως εἴδαμε, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1.2.3) τῶν Rogers καὶ Shephard ἔχουμε, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ ὄγκου 1, ὅτι

$$|\mathrm{conv}\{K,-K\}| \leqslant |K-K| \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.$$

Συνεπῶς, ἂν τὸ K εἶναι καὶ κεντραρισμένο, συμπεραίνουμε ὅτι

$$|Z_n(K)|^{1/n} \simeq |\mathrm{conv}\{K,-K\}|^{1/n} \simeq 1.$$

Τὸ ἀντίστοιχο γιὰ κεντραρισμένα λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα παρέχεται ἀπὸ τὴν ἑπομένη παρατήρησι τοῦ Παούρη [53], ἡ ὁποία συνδέει τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα ἑνὸς μέτρου μ μὲ τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα τοῦ $\overline{K}_{n+1}(\mu)$· τὸ συμπέρασμα ἕπεται ἄμεσα μὲ χρῆσι τοῦ 6. τῆς Προτάσεως 1.3.14 καὶ τῶν 2. καὶ 3. τῆς Προτάσεως 1.3.17.

Πρότασις 1.4.2. *Ἔστω μ ἕνα μὴ ἐκφυλισμένο, κεντραρισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$. Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε $q \in [1,n]$, νὰ ἔχουμε*

$$c_1(f_\mu(0))^{1/n} Z_q(\mu) \subseteq Z_q(\overline{K}_{n+1}(\mu)) \subseteq c_2(f_\mu(0))^{1/n} Z_q(\mu).$$

Εἰδικότερα, γιὰ $q = n$ ἰσχύει

$$(f_\mu(0))^{1/n}|Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq |Z_n(\overline{K}_{n+1}(\mu))|^{1/n} \simeq 1,$$

καὶ ἄρα $|Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq (f_\mu(0))^{-1/n} \simeq \|\mu\|_\infty^{-1/n}$.

Παρατήρησις 1.4.3. Μὲ ἀντίστοιχο τρόπο, χρησιμοποιῶντας τὸ 7. τῆς Προτάσεως 1.3.14 καὶ τὰ 2. καὶ 3. τῆς Προτάσεως 1.3.17, βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε (μὴ ἐκφυλισμένο) κεντραρισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ καὶ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα V στὸν $\mathbb{R}^n$, νὰ ἰσχύει

$$\frac{c_1}{(f_\mu(0))^{1/n}} I_q\big(\overline{K}_{n+1}(\mu), V\big) \leqslant I_q(\mu, V) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_V^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant \frac{c_2}{(f_\mu(0))^{1/n}} I_q\big(\overline{K}_{n+1}(\mu), V\big)$$

γιὰ κάθε $q \in [-n/2, n]$, $q \neq 0$. Εἰδικότερα, ἂν $V = B_2^n$, ἔχουμε ὅτι

$$I_q(\overline{K}_{n+1}(\mu)) \simeq (f_\mu(0))^{1/n} I_q(\mu)$$

γιὰ κάθε $q \in [-n/2, n]$, $q \neq 0$. (Σημειώνουμε ὅτι τὸ $-n/2$ δὲν ἔχει κάποια εἰδικὴ σημασία, καὶ μποροῦμε νὰ ποῦμε κάτι ἀνάλογο καὶ γιὰ $q \in [-cn, n]$, $q \neq 0$, ὅπου c εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε σταθερὸς ἀριθμὸς $\in (0,1)$, ἀρκεῖ νὰ ἀφήσουμε τὶς σταθερὲς c_1, c_2 νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ c.)

Τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα συμπεριφέρονται πολὺ καλὰ ὡς πρὸς τὶς προβολές: ἐξαιτίας τοῦ 5. τῆς Προτάσεως 1.3.7 καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα L, γιὰ κάθε ὑπόχωρο F καὶ γιὰ κάθε $\theta \in S_F$, ἰσχύει ὅτι $h_{\mathrm{Proj}_F(L)}(\theta) = h_L(\theta)$, λαμβάνουμε τὴν ἰσότητα $\mathrm{Proj}_F(Z_q(\mu)) = Z_q(\pi_F\mu)$ γιὰ κάθε q. Ἑπομένως, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρόταση 1.4.2, ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα.

Πρότασις 1.4.4. *Ἔστω μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $q \geqslant 1$ καὶ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$, ὅπου $1 \leqslant k < n$, ἔχουμε ὅτι*

$$\mathrm{Proj}_F(Z_q(\mu)) = Z_q(\pi_F\mu). \tag{1.4.4}$$

Κατὰ συνέπεια, ἂν τὸ μ εἶναι καὶ κεντραρισμένο,

$$\mathrm{Proj}_F(Z_q(\mu)) \simeq (f_{\pi_F\mu}(0))^{1/k} Z_q(\overline{K}_{k+1}(\pi_F\mu)),$$

ἐνῷ, ἂν τὸ μ εἶναι τὸ μέτρο Lebesgue πάνω σὲ ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1, τότε

$$\mathrm{Proj}_F(Z_q(K)) \simeq |K \cap F^{\perp}|^{1/k} Z_q(\overline{K}_{k+1}(\pi_F\mathbf{1}_K)).$$

Ὑπενθυμίζουμε τώρα τὸ κύριο ἀποτέλεσμα τοῦ Παούρη στὰ [52] καὶ [53] γιὰ τὸ ὁποῖο χρησιμοποίησε τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα. Σημειώνουμε ὅτι, ἂν ἔχουμε ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_K \langle x, e_i\rangle^2 dx = nL_K^2,$$

καὶ ἀντίστοιχα, ἂν ἔχουμε ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 d\mu(x) = n$. Ὁ Παούρης ἔδειξε ὅτι οἱ ῥοπὲς τῆς Εὐκλείδειας νόρμας ὡς πρὸς κάποιο ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$, οἱ ὁποῖες γιὰ κάθε $q \in (-n, +\infty)$, $q \neq 0$, ὁρίζονται ὡς

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q},$$

παραμένουν σταθερὲς καὶ (περίπου) ἴσες μὲ $I_2(\mu) = \sqrt{n}$ γιὰ τουλάχιστον ὅλα τὰ $q \geqslant 1$ μέχρι $\sqrt{n}$. Αὐτὸ ἔπειτα, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν ἀνισότητα Markov, ὁδηγεῖ σὲ πολὺ ἰσχυρὲς ἀνισότητες συγκεντρώσεως τοῦ μέτρου σὲ μία μπάλα ἀκτίνος περίπου $\sqrt{n}$:

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant CtI_2(\mu)\}) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant Ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp(-t\sqrt{n})$$

γιὰ κάθε $t \geqslant 1$, ὅπου $C \geqslant 1$ εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Μελέτησε ἐπίσης καὶ τὴν συμπεριφορὰ τῶν ἀρνητικῶν ῥοπῶν τῆς Εὐκλείδειας νόρμας καὶ κατέληξε στὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ οἱ ἀρνητικὲς ῥοπὲς παραμένουν σταθερὲς καὶ (περίπου) ἴσες μὲ $I_2(\mu)$ σὲ ἕνα ἀρχικὸ διάστημα ποὺ περιέχει τὸ $(0, c_1\sqrt{n})$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$. Αὐτὸ μὲ τὴν σειρά του ὁδηγεῖ πάλι σὲ ἀνισότητες συγκεντρώσεως ἑνὸς ἰσοτροπικοῦ λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ στὸν $\mathbb{R}^n$ ἔξω ἀπὸ Εὐκλείδειες μπάλες ποὺ ἔχουν μικρὴ ἀκτίνα: γιὰ κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ἔχουμε ὅτι

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c\sqrt{n}},$$

ὅπου τὰ $c > 0$ καὶ $\varepsilon_0 \in (0,1)$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

Γιὰ τὴν ἀπόδειξι τῶν παραπάνω συνέδεσε τὶς ῥοπὲς μὲ τὰ μέσα πλάτη τῶν κεντροειδῶν σωμάτων.

Λῆμμα 1.4.5. *Ἔστω μ ἕνα μὴ ἐκφυλισμένο, λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $q \geqslant 1$ ἔχουμε ὅτι*

$$w_q(Z_q(\mu)) = a_{n,q}\sqrt{\frac{q}{n}}I_q(\mu)$$

ὅπου $a_{n,q} \simeq 1$.

Ἀπόδειξις. Τὸ ζητούμενο ἕπεται μὲ χρῆσι τοῦ θεωρήματος Fubini σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle|^q d\sigma(\theta)\right)^{1/q} = a'_{n,q}\|x\|_2$$

γιὰ κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, ὅπου

$$a'_{n,q} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{q+n}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+n+2}{2}\right)}\right)^{1/q} \simeq \sqrt{\frac{q}{n}}$$

ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ Stirling. □

Θεώρημα 1.4.6. *Ἔστω μ μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε γιὰ κάθε ἀκέραιο $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ἔχουμε ὅτι*

$$I_{-k}(\mu) = c_{n,k}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F f_\mu(0) d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}, \tag{1.4.5}$$

ὅπου $c_{n,k} = ((n-k)\omega_{n-k}/(n\omega_n))^{1/k} \simeq \sqrt{n}$. Ἐπίσης, γιὰ κάθε ἀκέραιο $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$w_{-k}(Z_k(\mu)) \simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_F(Z_k(\mu))|^{-1} d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}.$$

Ἂν ἐπιπλέον τὸ μ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε, συνδυάζοντας αὐτὰ μὲ τὶς Προτάσεις 1.4.2 καὶ 1.4.4, οἱ ὁποῖες μᾶς δίνουν ὅτι $(\pi_F f_\mu(0))^{1/k} \simeq (f_{\pi_F\mu}(0))^{1/k} \simeq |\mathrm{Proj}_F(Z_k(\mu))|^{-1/k}$ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ καὶ γιὰ ὅλα τὰ κεντραρισμένα περιθώρια μέτρα $\pi_F\mu$ τοῦ μ, καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$I_{-k}(\mu) \simeq \sqrt{\frac{n}{k}}w_{-k}(Z_k(\mu)).$$

Ἡ ἰσοδυναμία μπορεῖ μετά, λόγῳ τῆς (1.4.1), νὰ ἐπεκταθεῖ καὶ σὲ μὴ ἀκέραιες τιμὲς τοῦ $k \leqslant n-1$.

Ἀπόδειξις. Γιὰ νὰ δείξουμε τὴν (1.4.5) χρησιμοποιοῦμε ὁλοκλήρωσι σὲ πολικὲς συντεταγμένες. Ἔστω ἀκέραιος $1 \leqslant k \leqslant n-1$, τότε μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}} \pi_F f_\mu(0)\, d\nu_{n,k}(F) &= \int_{G_{n,n-k}} \pi_{E^\perp} f_\mu(0)\, d\nu_{n,n-k}(E)\\ &= \int_{G_{n,n-k}} \int_E f_\mu(y)\, dy\, d\nu_{n,n-k}(E)\\ &= \int_{G_{n,n-k}} (n-k)\omega_{n-k} \int_{S_E} \int_0^\infty r^{n-k-1} f_\mu(r\theta)\, dr\, d\sigma_E(\theta)\, d\nu_{n,n-k}(E)\\ &= \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-k-1} f_\mu(r\theta)\, dr\, d\sigma(\theta)\\ &= \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^{-k} f_\mu(x)\, dx = c_{n,k} I_{-k}^{-k}(\mu).\end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, γιὰ νὰ δείξουμε τὴν (1.4.6) χρησιμοποιοῦμε τὸ γεγονὸς ὅτι, γιὰ κάθε συμμετρικὸ σῶμα C στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $x \neq 0$, ἰσχύει ὅτι $h_C^{-1}(x) = \rho_{C^\circ}(x)$, ὅπου ρ_{C° ἡ ἀκτινικὴ συνάρτησις τοῦ πολικοῦ σώματος τοῦ C, καὶ ταυτόχρονα ἰσχύει, γιὰ κάθε ὑπόχωρο F καὶ κάθε $x \in F$, ὅτι $\rho_{C^\circ}(x) = \rho_{C^\circ \cap F}(x)$. Ἔπεται ὅτι

$$\begin{aligned}w_{-k}^{-1}(Z_k(\mu)) &= \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h^k_{Z_k(\mu)}(\theta)} d\sigma(\theta)\right)^{1/k}\\ &= \left(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}} \omega_k \int_{S_F} [\rho_{(Z_k(\mu))^\circ \cap F}(\theta)]^k d\sigma_F(\theta) d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}\\ &= \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|(Z_k(\mu))^\circ \cap F|}{|B_2^k|} d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}\end{aligned}$$

Ἔπειτα χρησιμοποιοῦμε τὴν ἀνισότητα Blaschke-Santaló καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló γιὰ τὰ σώματα $(Z_k(\mu))^\circ \cap F$ καὶ $\mathrm{Proj}_F(Z_k(\mu))$, ποὺ εἶναι πολικὰ τὸ ἕνα τοῦ ἄλλου, γιὰ νὰ καταλήξουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$w_{-k}^{-1}(Z_k(\mu)) = \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|(Z_k(\mu))^\circ \cap F|}{|B_2^k|} d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \simeq \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|B_2^k|}{|\mathrm{Proj}_F(Z_k(\mu))|} d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k},$$

ποὺ ἦταν τὸ ζητούμενό μας. □

Ὁρισμός 1.4.7. Ἔστω μ ἕνα μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε

$$q_*(\mu) := \sup\{1 \leqslant q \leqslant n : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q\}.$$

Χρησιμοποιῶντας τὸ Λῆμμα 1.4.5, τὸ Θεώρημα 1.4.6 καὶ τὰ Θεωρήματα 1.2.5 καὶ 1.2.6 γιὰ τὴν συμπεριφορὰ τῶν μέσων πλατῶν, ὁ Παούρης ἔδειξε ὅτι, ὅταν τὸ μ εἶναι ἰσοτροπικό, ἰσχύει $I_q(\mu) \leqslant CI_{-q}(\mu)$ γιὰ κάθε $q \leqslant c_1 q_*(\mu)$, ὅπου $C \geqslant 1, c_1 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Ἔδωσε ἐπίσης ἕνα, ἀκριβὲς γιὰ ὁρισμένα μέτρα μ, κάτω φράγμα γιὰ τὴν παράμετρο $q_*(\mu)$.

Πρότασις 1.4.8. *Γιὰ κάθε κεντραρισμένο, μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$ ἔχουμε ὅτι*

$$q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$. Εἰδικότερα, ἂν τὸ μ εἶναι ἰσοτροπικό, τότε $q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{n}$ ἀφοῦ $k_*(Z_2(\mu)) = k_*(B_2^n) = n$.

Ἀπόδειξις. Συνδυάζοντας τὸ Θεώρημα 1.2.5 μὲ τὸ Λῆμμα 1.4.5 βλέπουμε ὅτι, ἂν q εἶναι τέτοιο ὥστε $k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q$, τότε

$$w(Z_q(\mu)) \simeq w_q(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{\frac{q}{n}} I_q(\mu) \gtrsim \sqrt{\frac{q}{n}} I_2(\mu) \simeq \sqrt{q}\, w(Z_2(\mu)).$$

Ἐπιλέγουμε ἕνα τέτοιο q μὲ τὴν πρόσθετη ἰδιότητα $2q > q_*(\mu)$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι, λόγῳ τῆς (1.4.1), ἰσχύει $w(Z_{2q}(\mu)) \simeq w(Z_q(\mu)) \gtrsim \sqrt{q}\, w(Z_2(\mu))$ καὶ

$$R(Z_{2q}(\mu)) \leqslant \beta_1 q R(Z_2(\mu)).$$

Μποροῦμε ἑπομένως νὰ γράψουμε

$$2q > k_*(Z_{2q}(\mu)) \geqslant c_1 n \left(\frac{w(Z_{2q}(\mu))}{R(Z_{2q}(\mu))}\right)^2 \geqslant c_2 n \frac{q}{(\beta_1 q)^2} \frac{w^2(Z_2(\mu))}{R^2(Z_2(\mu))} = c_3 \frac{1}{q} k_*(Z_2(\mu)),$$

ὅπου χρησιμοποιήσαμε καὶ τὴν (1.2.7) γιὰ τὰ $k_*(Z_{2q}(\mu))$ καὶ $k_*(Z_2(\mu))$. Τελικὰ ἔχουμε $q_*(\mu) \geqslant q \geqslant c_4\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}$ ὅπως θέλαμε. □

Παρατήρησις 1.4.9. Πιὸ γενικά, ὁ Παούρης ἔδειξε ὅτι $q_*(\mu) \geqslant c_1 n^{\alpha/2}/\beta_\alpha^\alpha$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο εἶναι ψ_α μὲ σταθερὰ β_α.

Συνοψίζοντας τὰ παραπάνω, ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο θεμελιῶδες ἀποτέλεσμα περὶ τῆς συμπεριφορᾶς τῶν ῥοπῶν τῆς Εὐκλείδειας νόρμας.

Θεώρημα 1.4.10 (Παούρης, [52], [53])**.** *Ἔστω μ ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ ὥστε γιὰ κάθε $q \in (0, c_1\sqrt{n})$ νὰ ἰσχύει*

$$c_2^{-1} I_q(\mu) \leqslant I_2(\mu) = \sqrt{n} \leqslant c_2 I_{-q}(\mu).$$

Ἐπιπλέον, γιὰ ὅλα αὐτὰ τὰ $q \geqslant 1$ ἔχουμε ὅτι

$$w(Z_q(\mu)) \simeq w_q(Z_q(\mu)) \simeq w_{-q}(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q},$$

καὶ ἐπίσης ὅτι $k_*(Z_q(\mu)) \simeq n[w(Z_q(\mu))/R(Z_q(\mu))]^2 \gtrsim q$.

Παρατήρησις 1.4.11. Ὁ Παούρης παρετήρησε ἐπίσης ὅτι $I_q(\mu) \simeq R(Z_q(\mu))$ γιὰ ὅλα τὰ $q > q_*(\mu)$ καὶ ὅτι μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$I_q(\mu) \simeq \max\{I_2(\mu), R(Z_q(\mu))\}$$

γιὰ ὅλες τὶς θετικὲς ῥοπές. Σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρόταση 1.3.9, αὐτὸ μᾶς δίνει ὅτι

$$I_q(\mu) \lesssim \max\{\sqrt{n}, q\} \quad \text{γιὰ κάθε } q \geqslant 1.$$

1.4.2 Ὁ λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς Laplace

Ἔστω μ πεπερασμένο Borel μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$. Ὁ λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς Laplace $\Lambda_\mu : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ τοῦ μέτρου μ δίδεται ἀπὸ τὴν

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \log\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(\langle y, x\rangle)d\mu(y)\right).$$

Ὁ λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς Laplace χρησιμοποιήθηκε γιὰ πρώτη φορὰ στὰ πλαίσια τῆς θεωρίας τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων καὶ λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων ἀπὸ τὸν Klartag [27], καὶ ἔχει ἀποδειχθεῖ ἕνα πολὺ χρήσιμο ἐργαλεῖο αὐτῆς τῆς θεωρίας. Οἱ ἑπόμενες προτάσεις συνοψίζουν κάποιες ἀπὸ τὶς βασικὲς ἰδιότητές του ὅταν τὸ μέτρο μ εἶναι λογαριθμικὰ-κοῖλο, τὶς ὁποῖες θὰ ἐπικαλεστοῦμε στὰ Κεφάλαια 3 καὶ 4.

Πρότασις 1.4.12 ([28]). *Ἔστω μ ἕνα n-διάστατο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος. Τὸ σύνολο $A(\mu) := \{\Lambda_\mu < \infty\}$ εἶναι ἀνοιχτὸ καὶ ὁ περιορισμὸς τοῦ μετασχηματισμοῦ Λ_μ πάνω στὸ $A(\mu)$ εἶναι C^∞ καὶ γνησίως κυρτὴ συνάρτησις. Γιὰ κάθε $x \in A(\mu)$ συμβολίζουμε μὲ μ'_x τὸ μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότητα $d\mu'_x(y)$ ὡς πρὸς τὸ μέτρο μ εἶναι πολλαπλάσιο τῆς $e^{\langle y,x\rangle}d\mu(y)$. Ἔχουμε τότε ὅτι*

$$bar(\mu'_x) = \nabla\Lambda_\mu(x) \quad \textit{καὶ} \quad \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(x) = \mathrm{Cov}(\mu'_x). \tag{1.4.6}$$

Ἐπιπλέον ἂν τὸ μέτρο μ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Jensen ἔχουμε ὅτι $\Lambda_\mu(x) \geqslant 0$ γιὰ κάθε x. Τέλος, γιὰ κάθε $t \geqslant 0$ καὶ $\alpha \geqslant 1$, ἰσχύει ὅτι

$$\frac{1}{\alpha}\{\Lambda_\mu \leqslant \alpha t\} \subseteq \{\Lambda_\mu \leqslant t\} \subseteq \{\Lambda_\mu \leqslant \alpha t\}. \tag{1.4.7}$$

Ὁρισμός 1.4.13. Ἂν f_μ εἶναι ἡ λογαριθμικὰ-κοίλη πυκνότητα τοῦ μέτρου μ, τότε γιὰ κάθε $x \in A(\mu)$ τὸ μέτρο μ'_x ἔχει πυκνότητα ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue τὴν

$$f_{\mu'_x}(y) := \frac{1}{\int e^{\langle y,x\rangle}d\mu(y)}e^{\langle y,x\rangle}f_\mu(y),$$

ἡ ὁποία εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη ἐπίσης ὡς γινόμενο λογαριθμικὰ-κοίλων συναρτήσεων. Στὴν ἑπομένη παράγραφο καὶ στὸ Κεφάλαιο 3 θὰ ἀναφερόμαστε πολὺ συχνὰ στὶς κεντραρισμένες μεταφορὲς τῶν μέτρων μ'_x, δηλαδὴ τὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα πιθανότητος μ_x τῶν ὁποίων ἡ πυκνότητα δίδεται ἀπὸ τὴν

$$f_{\mu_x}(y) := f_{\mu'_x}(y) = \frac{1}{\int e^{\langle y,x\rangle}d\mu(y)}\exp\big(\langle y + bar(\mu'_x), x\rangle\big)f_\mu(y + bar(\mu'_x)).$$

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι οἱ δευτέρας τάξεως ῥοπὲς τοῦ μ'_x καὶ τοῦ μ_x ταυτίζονται, δηλαδὴ ἰσχύει ὅτι

$$\mathrm{Cov}(\mu_x) = \mathrm{Cov}(\mu'_x) = \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(x).$$

Ἂν τὸ μέτρο μ ἔχει καὶ συμπαγὴ φορέα, τότε τὸ σύνολο $A(\mu) := \{\Lambda_\mu < \infty\}$ εἶναι ὅλο τὸ $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα, στὴν περίπτωσι ποὺ $f_\mu = \mathbf{1}_K$ γιὰ κάποιο κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$, τότε ὁ μετασχηματισμὸς Λ_μ ἔχει καὶ τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες.

Πρότασις 1.4.14 ([27]). *Ἂς συμβολίσουμε μὲ $\mu = \mu_K$ τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\big(\nabla\Lambda_\mu\big)(\mathbb{R}^n) = \mathrm{int}(K). \tag{1.4.8}$$

Ἐπιπλέον, ὁ μετασχηματισμὸς $\nabla\Lambda_\mu$, ὁ ὁποῖος εἶναι $1-1$, μεταφέρει τὸ μέτρο ν ποὺ ἔχει πυκνότητα $\det \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)$ *στὸ μέτρο μ. Αὐτὸ ἐξ ὁρισμοῦ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε συνεχή, μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησι $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ἰσχύει*

$$\int_K \phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla\Lambda_\mu(\xi)) \det \mathrm{Hess}(\Lambda_\mu(\xi))\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla\Lambda_\mu(\xi))d\nu(\xi).$$

1.4.3 Σύνδεσις τῶν δύο μεθόδων

Στὸ [29] οἱ Klartag καὶ E. Milman χρησιμοποιοῦν ἰδιότητες τόσο τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace ὅσο καὶ τῶν L_q-κεντροειδῶν σωμάτων ἑνὸς λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου πιθανότητος, γιὰ νὰ μπορέσουν νὰ προσδιορίσουν τὴν σωστὴ τάξι μεγέθους τῆς ἀκτίνος ὄγκων τῶν κεντροειδῶν σωμάτων. Οἱ ἑπόμενες δύο προτάσεις δίνουν μία ἐξήγησι ὡς πρὸς τὸ γιατί οἱ δύο μέθοδοι συνδυάζονται πολὺ φυσιολογικά.

Ὁρισμός 1.4.15. Γιὰ κάθε $p \geqslant 0$ ὁρίζουμε

$$\Lambda_p(\mu) = \{\Lambda_\mu \leqslant p\} \cap (-\{\Lambda_\mu \leqslant p\}).$$

Γιὰ τὰ σύνολα $\Lambda_p(\mu)$ ἔχουμε τὴν ἀκόλουθη πρότασι, μία δυϊκὴ ἐκδοχὴ τῆς ὁποίας ἐμφανίζεται καὶ στὸ [34].

Πρότασις 1.4.16 ([29]). *Ἔστω ὅτι μ εἶναι ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μὲ κέντρο βάρους* $\mathrm{bar}(\mu) = 0$. *Τότε, γιὰ κάθε $p \geqslant 1$,*

$$\Lambda_p(\mu) \simeq pZ_p(\mu)^\circ.$$

Ἀπόδειξις. Ἀρχικῶς, ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $\xi \in \Lambda_p(\mu)$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(|\langle \xi, x\rangle|)d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\langle \xi, x\rangle)d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\langle -\xi, x\rangle)d\mu(x) \leqslant 2e^p.$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν ἀνισότητα $t^p/p! \leqslant e^t$, ἡ ὁποία ἰσχύει γιὰ κάθε $t \geqslant 0$, βλέπουμε ὅτι

$$h_{Z_p(\mu)}(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (2e^p p!)^{\frac{1}{p}} \leqslant Cp.$$

Ἀφοῦ τὸ $\xi \in \Lambda_p(\mu)$ ἦταν τυχόν, ἔχουμε δείξει ὅτι $\Lambda_p(\mu) \subseteq Cp(Z_p(\mu))^\circ$, δηλαδὴ τὸν πρῶτο ἀπὸ τοὺς ζητουμένους ἐγκλεισμούς.

Γιὰ τὸν ἄλλον ἐγκλεισμό, θεωροῦμε $\xi \in \mathbb{R}^n$ μὲ τὴν ἰδιότητα $h_{Z_p(\mu)}(\xi) \leqslant p$, δηλαδὴ ξ τέτοιο ὥστε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant p. \tag{1.4.9}$$

Γράφουμε ἐπίσης X γιὰ τὸ τυχαῖο διάνυσμα στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο κατανέμεται σύμφωνα μὲ τὸ μέτρο μ, δηλαδὴ τὸ τυχαῖο διάνυσμα ποὺ ἔχει τὴν ἰδιότητα $\mathbb{P}(X \in A) = \mu(A)$ γιὰ κάθε Borel ὑποσύνολο A τοῦ $\mathbb{R}^n$. Τότε ἡ συνάρτησις

$$\phi(t) := \mu\left(\langle X, \xi\rangle \geqslant t\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη σύμφωνα μὲ τὴν ἀνισότητα Prékopa-Leindler. Ἐπιπροσθέτως, ἀφοῦ τὸ βαρύκεντρο τοῦ μ εἶναι τὸ 0, ἀπὸ τὸ λῆμμα τοῦ Grünbaum (βλέπε Λῆμμα 1.3.6) ἔχουμε ὅτι $1/e \leqslant \phi(0) \leqslant 1 - 1/e$. Χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν ἀνισότητα Markov, ὁδηγούμαστε ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1.4.9) στὴν

$$\phi(3ep) \leqslant (3e)^{-p}.$$

Ἐφ᾽ ὅσον ἡ ϕ εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη, ἐχουμε ὅτι

$$\mathbb{P}(\langle X, \xi\rangle \geqslant t) = \phi(t) \leqslant \phi(0)\left(\frac{\phi(3ep)}{\phi(0)}\right)^{\frac{t}{3ep}} \leqslant C\exp(-t/(3e))$$

γιὰ ὅλα τὰ $t \geqslant 3ep$, ἐνῷ μποροῦμε νὰ δείξουμε τὸ ἀκριβῶς ἴδιο φράγμα καὶ γιὰ τὸ ἐνδεχόμενο $\mathbb{P}(\langle X, \xi\rangle \leqslant -t)$. Ἑπομένως, συνδυάζοντας καὶ τὰ δύο φράγματα, καταλήγουμε ὅτι

$$\mathbb{P}(|\langle X, \xi\rangle| \geqslant t) \leqslant C\exp(-t/(3e))$$

γιὰ ὅλα τὰ $t \geqslant 3ep$. Τότε ὅμως

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\left(\frac{|\langle \xi, X\rangle|}{6e}\right) &= \frac{1}{6e}\int_0^\infty \exp\left(\frac{t}{6e}\right)\mathbb{P}(|\langle X, \xi\rangle| \geqslant t)dt \\ &\leqslant \frac{1}{6e}\int_0^{3ep} \exp\left(\frac{t}{6e}\right)dt + C\int_{3ep}^\infty \exp(-t/(6e))dt \\ &\leqslant \exp(\tilde{C}p),\end{aligned}$$

καὶ ἄρα

$$\max\left\{\Lambda_\mu\left(\frac{1}{6e}\xi\right), \Lambda_\mu\left(-\frac{1}{6e}\xi\right)\right\} \leqslant \log\mathbb{E}\exp\left(\frac{|\langle \xi, X\rangle|}{6e}\right) \leqslant Cp$$

γιὰ κάποια σταθερὰ $C \geqslant 1$. Χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν (1.4.7), προκύπτει ὅτι

$$\max\left\{\Lambda_\mu\left(\frac{1}{6eC}\xi\right), \Lambda_\mu\left(-\frac{1}{6eC}\xi\right)\right\} \leqslant p$$

γιὰ κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει $h_{Z_p(\mu)}(\xi) \leqslant p$. Ὅμως αὐτὸς εἶναι ὁ δεύτερος ἐγκλεισμὸς $p(Z_p(\mu))^\circ \subseteq C'\Lambda_p(\mu)$ ποὺ θέλαμε νὰ δείξουμε, ἄρα ἔχουμε ἀποδείξει τὴν πρόταση. $\square$

Ὑπάρχει ἐπίσης μία σύνδεσις τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace Λ_μ ἑνὸς λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ μὲ τὸν ἀντίστοιχο μετασχηματισμὸ τοῦ κεντραρισμένου μέτρου μ_ξ ποὺ ὁρίζεται μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴδαμε στὸν Ὁρισμὸ 1.4.13 γιὰ κάθε $\xi \in A(\mu) = \{\Lambda_\mu < \infty\}$, οὐσιαστικὰ μέσῳ τοῦ Λ_μ. Αὐτὴ δίδεται ἀπὸ τὴν ἑπομένη ταυτότητα:

$$\Lambda_{\mu_\xi}(z) = \Lambda_\mu(z+\xi) - \Lambda_\mu(\xi) - \langle z, \nabla\Lambda_\mu(\xi)\rangle.$$

Γιὰ τὴν ἀπόδειξι αὐτῆς, γράφουμε πρῶτα

$$Z_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} f_\mu(x)dx \quad \text{καὶ} \quad b_\xi = bar(\mu'_\xi),$$

καὶ παρατηροῦμε ἔπειτα ὅτι

$$\log Z_\xi = \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} f_\mu(x)dx = \Lambda_\mu(\xi)$$

καὶ

$$\langle z, b_\xi\rangle = \langle z, \nabla\Lambda_\mu(\xi)\rangle.$$

Συνεπῶς, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mu_\xi}(z) &= \log \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{Z_\xi} e^{\langle z, y\rangle} f_{\mu_\xi}(y)dy \\
&= \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle z, y\rangle} e^{\langle \xi, y+b_\xi\rangle} f_\mu(y+b_\xi)dy - \log Z_\xi \\
&= \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle z, b_\xi\rangle} e^{\langle z, y+b_\xi\rangle} e^{\langle \xi, y+b_\xi\rangle} f_\mu(y+b_\xi)dy - \Lambda_\mu(\xi) \\
&= -\langle z, b_\xi\rangle + \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle z+\xi, y+b_\xi\rangle} f_\mu(y+b_\xi)dy - \Lambda_\mu(\xi) \\
&= -\langle z, b_\xi\rangle + \Lambda_\mu(z+\xi) - \Lambda_\mu(\xi).
\end{aligned}$$

Οἱ Klartag καὶ E. Milman χρησιμοποιοῦν αὐτὴν τὴν ταυτότητα γιὰ νὰ δείξουν τὴν ἀκόλουθη πρότασι.

Πρότασις 1.4.17 ([29]). *Ἔστω μ ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μὲ* $\mathrm{bar}(\mu) = 0$. *Γιὰ κάθε $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, ἔχουμε ὅτι*

$$Z_p(\mu_\xi) \simeq Z_p(\mu). \tag{1.4.10}$$

Γιὰ τὴν ἀπόδειξί της μᾶς χρειάζεται καὶ τὸ παρακάτω

Λῆμμα 1.4.18. *Ἔστω μ ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μὲ* $\mathrm{bar}(\mu) = 0$. *Γιὰ κάθε δύο θετικοὺς ἀριθμοὺς $q, r > 0$, ἰσχύει ὅτι*

$$\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\{\Lambda_\mu \leqslant q\}\right) \subseteq (q+r)\{\Lambda_\mu \leqslant r\}^\circ.$$

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμε $x \in \frac{1}{2}\{\Lambda_\mu \leqslant q\}$. Τότε ἐξ ὁρισμοῦ ἰσχύει ὅτι $\Lambda_\mu(2x) \leqslant q$. Ἐπίσης, γιὰ κάθε $z \in \{\Lambda_\mu \leqslant r\}$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla\Lambda_\mu(x), \frac{z}{2}\right\rangle &\leqslant \Lambda_\mu(x) + \left\langle \nabla\Lambda_\mu(x), \frac{z}{2}\right\rangle \leqslant \Lambda_\mu\left(x + \frac{z}{2}\right)\\ &\leqslant \frac{\Lambda_\mu(2x) + \Lambda_\mu(z)}{2} \leqslant \frac{q+r}{2},\end{aligned}$$

χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $\Lambda_\mu(x) \geqslant 0$, ἀφοῦ $\mathrm{bar}(\mu) = 0$, ὅπως καὶ ὅτι ἡ Λ_μ εἶναι κυρτὴ συνάρτησις. Ἀφοῦ

$$\langle \nabla\Lambda_\mu(x), z\rangle \leqslant q + r$$

γιὰ κάθε $z \in \{\Lambda_\mu \leqslant r\}$, καταλήγουμε ὅτι $x \in (q+r)\{\Lambda_\mu \leqslant r\}^\circ$. □

Ἀπόδειξις τῆς Προτάσεως 1.4.17: Λόγῳ τῆς Προτάσεως 1.4.16, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι, γιὰ κάθε $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$,

$$\Lambda_p(\mu_\xi) \simeq \Lambda_p(\mu).$$

Ἰσχυρισμός. Ἔστω $D, p > 0$. Ἂν ἰσχύει $\Lambda_\mu(2y) \leqslant Dp$ καὶ $z \in \Lambda_p(\mu)$, τότε

$$\Lambda_\mu(z+y) - \Lambda_\mu(y) + \langle z, \nabla\Lambda_\mu(y)\rangle \leqslant (D+1)p.$$

Ἀπόδειξις τοῦ Ἰσχυρισμοῦ. Ἐφαρμόζουμε τὸ Λῆμμα 1.4.18 μὲ $q = Dp$ καὶ $r = p$. Ἔχουμε ὅτι $\Lambda_\mu(2y) \leqslant Dp$ καὶ $\Lambda_\mu(z) \leqslant p$, ἄρα, ἀπὸ τὸ λῆμμα,

$$\langle \nabla\Lambda_\mu(y), z\rangle \leqslant (D+1)p.$$

Ὅμως τότε,

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(z/2+y) - \Lambda_\mu(y) + \langle z/2, \nabla\Lambda_\mu(y)\rangle &\leqslant \Lambda_\mu(z/2+y) + \frac{(D+1)p}{2}\\ &\leqslant \frac{\Lambda_\mu(z) + \Lambda_\mu(2y)}{2} + \frac{(D+1)p}{2}\\ &\leqslant (D+1)p.\end{aligned}$$

Συνέχεια τῆς ἀποδείξεως τῆς Προτάσεως 1.4.17: Δείχνουμε διαδοχικὰ ὅτι $\Lambda_p(\mu) \subseteq 4\Lambda_p(\mu_\xi)$ καὶ ὅτι $\Lambda_p(\mu_\xi) \subseteq 11\Lambda_p(\mu)$.

(α) Θεωροῦμε τυχὸν $z \in \Lambda_p(\mu)$. Ἐφαρμόζοντας τὸν παραπάνω ἰσχυρισμὸ μὲ $D = 1$ καὶ $y = \xi$ βλέπουμε ὅτι

$$\Lambda_{\mu_\xi}(z/2) = \Lambda_\mu(z/2+\xi) - \Lambda_\mu(\xi) + \langle z/2, \nabla\Lambda_\mu(\xi)\rangle \leqslant 2p.$$

Τότε, ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.4.12, ἕπεται ὅτι $\Lambda_{\mu_\xi}(z/4) \leqslant p$, καὶ ἄρα $z \in 4\Lambda_p(\mu_\xi)$. Λόγῳ συμμετρίας, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ ἴδιο ἐπιχείρημα καὶ γιὰ τὸ $-z \in \Lambda_p(\mu)$, καὶ νὰ καταλήξουμε ὅτι

$$\Lambda_p(\mu) \subseteq 4\Lambda_p(\mu_\xi).$$

(β) Τώρα ϑεωροῦμε τυχὸν $z \in \Lambda_p(\mu_\xi)$. Δεδομένου ὅτι $(\mu_\xi)_{-\xi} = \mu$, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ ἐπιχείρημα στὸ (α), ἀρκεῖ νὰ ἐξασφαλίσουμε ὅτι $\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) \leqslant Dp$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταϑερὰ $D > 0$. Γνωρίζουμε ὅτι

$$\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) = \Lambda_\mu(-\xi) - \Lambda_\mu(\xi) + 2\langle \xi, \nabla\Lambda_\mu(\xi)\rangle,$$

ἐνῷ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 1.4.18 ἔχουμε ὅτι

$$\langle \xi, \nabla\Lambda_\mu(\xi)\rangle \leqslant 2p.$$

Ἀφοῦ $\Lambda_\mu(\xi) \geqslant 0$ καὶ

$$\Lambda_\mu(-\xi) \leqslant \frac{\Lambda_\mu(-2\xi) + \Lambda_\mu(0)}{2} \leqslant \frac{p+0}{2} = \frac{p}{2},$$

συμπεραίνουμε ὅτι

$$\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) \leqslant \frac{9p}{2},$$

καὶ ἄρα μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸν ἰσχυρισμὸ μὲ $D = \frac{9}{2}$. Ὅπως καὶ στὸ βῆμα (α), καταλήγουμε ὅτι $\Lambda_\mu(z/11) \leq 11$, ἐνῷ μποροῦμε νὰ δείξουμε τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὸ $-z$. Τελικῶς, βλέπουμε ὅτι

$$\Lambda_p(\mu_\xi) \subseteq 11\Lambda_p(\mu),$$

ποὺ ἦταν τὸ ζητούμενό μας. $\square$

Θὰ ἐξηγήσουμε τὴν συνέχεια τῆς μεθόδου τῶν Klartag καὶ E. Milman στὸ Κεφάλαιο 3.

Κεφαλαιο 2

Μία ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου σὲ ὁλοκληρώματα νορμῶν τῶν κεντροειδῶν σωμάτων

2.1 Ἡ παράμετρος $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ καὶ κάποιες πρῶτες ἐκτιμήσεις

Εἴδαμε στὴν Εἰσαγωγὴ ὅτι ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου, σὲ μία ἰσοδύναμη διατύπωσί της, ῥωτάει ἂν μποροῦμε νὰ φράξουμε τὶς ἰσοτροπικὲς σταθερὲς ὅλων τῶν κυρτῶν σωμάτων, ἄρα καὶ ὅλων τῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων, ἀπὸ μία σταθερὰ ἀνεξάρτητη τῆς διαστάσεως τοῦ χώρου. Τὰ μέχρι τώρα γνωστὰ φράγματα ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν διάστασι: ὁ Bourgain [9] ἔχει δείξει ὅτι $L_n \lesssim \sqrt[4]{n}\log n$, τὸ ὁποῖο ὁ Klartag [27] βελτίωσε σὲ $L_n \lesssim \sqrt[4]{n}$.

Ἡ προσέγγισις τοῦ Bourgain βασιζόταν στὴν ψ_1-συμπεριφορὰ τῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.9. Ὁ Bourgain ἔδειξε ἐπίσης [10] ὅτι μποροῦμε νὰ ποῦμε κάτι καλύτερο γιὰ τὰ μέτρα ποὺ ἐμφανίζουν ψ_2-συμπεριφορά.

Θεώρημα 2.1.1 (Bourgain, 2003). *Ἔστω μ ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο τὸ ὁποῖο εἶναι ψ_2 μὲ κάποια σταθερὰ $b \geqslant 1$. Τότε ἔχουμε ὅτι*

$$L_\mu \leqslant cb\log(b+1),$$

ὅπου c εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Οἱ Klartag καὶ E. Milman γενίκευσαν αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα, δίνοντας ἄνω φράγμα γιὰ τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ κάθε ψ_α-μέτρου, $\alpha \in [1,2)$, μέσῳ τῆς ψ_α-σταθερᾶς του, χρησιμοποιῶντας τὴν μέθοδο ποὺ θὰ δοῦμε στὸ Κεφάλαιο 3 καθῶς καὶ τὸ γεγονὸς ποὺ ἀναφέραμε στὴν Παρατήρησι 1.4.9, ὅτι $q_*(\mu) \gtrsim n^{\alpha/2}/b_\alpha^\alpha$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο εἶναι ψ_a μὲ σταθερὰ b_α.

Θεώρημα 2.1.2 (Klartag-E. Milman, 2012). *Ἔστω μ ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο τὸ ὁποῖο εἶναι ψ_α μὲ κάποια σταθερὰ $b_\alpha \geqslant 1$. Τότε ἔχουμε ὅτι*

$$L_\mu \leqslant C b_\alpha n^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}},$$

ὅπου C εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀφοῦ κάθε λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο εἶναι ψ_1 μὲ μία ἀπόλυτη σταθερὰ β_1, τὸ παραπάνω θεώρημα μᾶς δίνει πάλι τὸ καλύτερο γνωστὸ φράγμα γιὰ τὸ L_n: $L_n \leqslant C' \sqrt[4]{n}$. Δείχνει ταυτόχρονα ὅτι $L_\mu \leqslant C b_2$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ ποὺ ἔχει ψ_2-σταθερὰ b_2. Εἶναι γνωστὸ βέβαια, ὅπως δείχνει τὸ παράδειγμα τοῦ ὁμοιομόρφου μέτρου στὴν μπάλα $B_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i |x_i| \leqslant 1\}$ τοῦ l_1^n, ὅτι ὑπάρχουν οἰκογένειες μέτρων τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ψ_α γιὰ κανένα $\alpha > 1$ μὲ κάποια σταθερὰ ποὺ νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διάστασι. Σκοπὸς αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου εἶναι νὰ παρουσιάσουμε μίαν ἀναγωγὴ [21] τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου στὴν μελέτη τῶν ὁλοκληρωμάτων $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ὅπου $q \geqslant 1$ καὶ K ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Τὰ ὁλοκληρώματα αὐτὰ θὰ μπορούσαμε νὰ ποῦμε ὅτι μᾶς δίνουν πιὸ ἀναλυτικὲς πληροφορίες γιὰ τὸ πῶς καὶ πόσο ἐπηρεάζει τὴν γεωμετρία τοῦ K ἡ ψ_α ($\alpha \in [1, 2]$) συμπεριφορά του. Θυμόμαστε ὅτι, σύμφωνα μὲ τοὺς συμβολισμούς μας,

$$I_1(K, C) = \int_K \|x\|_C dx$$

γιὰ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα C στὸν $\mathbb{R}^n$, καὶ ἄρα, γιὰ κάθε $q \geqslant 1$,

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) = \int_K \|x\|_{Z_q^\circ(K)} dx = \int_K h_{Z_q(K)}(x) dx.$$

Ἂν τὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ εἶναι ψ_α μὲ σταθερὰ $b_\alpha(K)$, ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(K)) &= \int_K h_{Z_q(K)}(x) dx \leqslant b_\alpha(K) q^{1/\alpha} \int_K h_{Z_2(K)}(x) dx \\ &= b_\alpha(K) q^{1/\alpha} \int_K LK \|x\|_2 dx \leqslant b_\alpha(K) q^{1/\alpha} \sqrt{n} L_K^2. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Ὅμως γιὰ παράδειγμα, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω, $I_1(\overline{B}_1^n, Z_q^\circ(\overline{B}_1^n)) \leqslant \sqrt{qn} \log n$ λόγῳ ἑνὸς ἀποτελέσματος τῶν Bobkov καὶ Nazarov (βλέπε [5]), παρότι $b_2(\overline{B}_1^n) \simeq \sqrt{n}$.

Πρὶν ἀναφερθοῦμε πιὸ ἀναλυτικὰ στὴν ἀναγωγὴ καὶ τὶς διάφορες ἐκτιμήσεις ποὺ ἔχουμε γιὰ τὴν παράμετρο $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ὑπενθυμίζουμε δύο ἀκόμη ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν ἰσοτροπικῶν σωμάτων καὶ μέτρων, τὰ ὁποῖα θὰ χρησιμοποιήσουμε καὶ στὴν συνέχεια. Τὸ πρῶτο ἀποτέλεσμα δείχνει ὅτι, γιὰ νὰ βρεῖ κάποιος ἄνω φράγματα γιὰ τὴν L_n, θὰ ἀρκοῦσε νὰ μελετήσει ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα «μικρῆς διαμέτρου», δηλαδὴ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα $K \subset \mathbb{R}^n$ μὲ ἀκτίνα $R(K)$ ὅσο πιὸ μικρὴ γίνεται, $R(K) \lesssim \sqrt{n} L_K$.

Πρότασις 2.1.3 (Bourgain, [9]). *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2, c_3 > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε (συμμετρικὸ) ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, νὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα δεύτερο (συμμετρικὸ) ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε $c_1 L_K \leqslant L_Q \leqslant c_2 L_K$ καὶ $R(Q) \leqslant c_3 \sqrt{n} L_Q$.*

Τὸ δεύτερο ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖο ἀπεδείχθη ἀπὸ τοὺς Bourgain, Klartag καὶ V. Milman [11], δείχνει ὅτι ἡ ἀκολουθία $(L_n)_{n\geqslant 1}$ εἶναι κατ΄ οὐσίαν αὔξουσα.

Θεώρημα 2.1.4 (Bourgain-Klartag-V. Milman, 2005). *Ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ c_0 τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε δύο φυσικοὺς m, n μὲ $m < n$, νὰ ἰσχύει $L_m \leqslant c_0 L_n$.*

Τὸ ἐπιχείρημα τῆς ἀναγωγῆς δίδεται στὴν ἑπομένη παράγραφο. Γιὰ τὴν ἀπόδειξί της, θὰ δοῦμε ὅτι χρειάζεται νὰ θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη κλάση σωμάτων, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα ποὺ εἶναι ταυτόχρονα σὲ κάποιου τύπου 2-κανονικὴ M-θέσι. Πιὸ συγκεκριμένα, ἔχουμε τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός 2.1.5. Ἔστω παράμετροι $\kappa, \tau > 0$. Σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θὰ λέμε ὅτι ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ εἶναι (κ, τ)-κανονικὸ ἂν

$$\log N(K, tD_n) \leqslant \frac{\kappa n \log^4 n}{t^2} \text{ γιὰ κάθε } t \geqslant \tau \log^{3/2} n, \tag{2.1.2}$$

ὅπου D_n εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα στὸν $\mathbb{R}^n$ ὄγκου 1 (καὶ ἀκτίνος $\omega_n^{-1/n} \simeq \sqrt{n}$).

Στὴν Παράγραφο 2.3 ἀποσαφηνίζουμε καὶ μεταφράζουμε στὴν γλώσσα τῶν σωμάτων τὴν ἀπόδειξι τοῦ [14, Θεωρήματος 5.7], τὸ ὁποῖο ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξι, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, (κ, τ)-κανονικῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων K στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ $L_K \geqslant \delta L_n$ γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $\delta > 0$ καὶ $\kappa, \tau \geqslant 1$. Στὴν Παράγραφο 2.4 σκιαγραφοῦμε τὴν ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου ποὺ πρότειναν οἱ Δαφνὴς καὶ Παούρης στὸ [14] καὶ γιὰ τὴν ὁποία χρειάζονταν τὴν ὕπαρξι (κ, τ)-κανονικῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων K μὲ μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερά.

Ἂς δοῦμε τώρα τὴν ἀκριβὴ διατύπωσι τῆς ἀναγωγῆς αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου. Γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $q \in [2, n]$ θέτουμε

$$r_q(K) = \max\left\{1, \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn} L_K^2}\right\},$$

καὶ ἀποδεικνύουμε τὸ ἑξῆς

Θεώρημα 2.1.6. *Ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $\rho \in (0, 1)$ μὲ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα: γιὰ κάθε $\kappa, \tau \geqslant 1$, γιὰ κάθε (κ, τ)-κανονικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $q \in [2, \rho^2 n]$ μὲ τὴν ἰδιότητα*

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant \rho n L_K^2, \tag{2.1.3}$$

ἔχουμε ὅτι

$$L_K \leqslant C \max\{\sqrt{\kappa}, \tau\} \sqrt{r_q(K)} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2 n, \tag{2.1.4}$$

ὅπου C εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀφοῦ, ὅπως εἴπαμε, ὑπάρχουν (κ,τ)-κανονικὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $L_K \geqslant \delta L_n$, γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς κ,τ καὶ δ, χρησιμοποιῶντας τὸ παραπάνω θεώρημα μὲ $q=2$, καὶ δεδομένου ὅτι $I_1(K, Z_2^\circ(K) \leqslant \sqrt{n}L_K^2$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ $K \subset \mathbb{R}^n$, καταλήγουμε σχεδὸν στὸ ἴδιο φράγμα μὲ τὸν Bourgain γιὰ τὴν L_n: $L_n \lesssim \sqrt[4]{n}\log^2 n$. Ἡ συμπεριφορὰ ὅμως τῆς παραμέτρου $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ἄρα καὶ τοῦ $r_q(K)$, θὰ μποροῦσε ἐνδεχομένως νὰ μᾶς ἐπιτρέψει νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Θεώρημα 2.1.6 καὶ μὲ μεγαλύτερα q καὶ νὰ πετύχουμε καλύτερα ἄνω φράγματα. Ἂν αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατόν (πλὴν τοῦ νὰ διώξουμε ἴσως τὸν λογαριθμικὸ ὅρο), τότε παρατηροῦμε ὅτι θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει

$$c_1 q\sqrt{n}L_K^2 \leqslant I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant c_2 q\sqrt{n}L_K^2$$

γιὰ κάθε $q \leqslant n$ καὶ γιὰ κάθε (κ,τ)-κανονικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ μὲ $L_K \simeq L_n$ γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ (τὸ ἄνω φράγμα τὸ ἔχουμε ἤδη ἐξαιτίας τῆς (2.1.1) καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι κὰθε κυρτὸ σῶμα εἶναι ψ_1). Σχετικὰ μὲ τὸ κάτω φράγμα ὅμως ἀξίζει νὰ σημειώσουμε ὅτι ἀκόμη καὶ ἡ ἐκτίμησις $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \gtrsim \sqrt{qn}L_K^2$ γιὰ κάθε $q \in [1,n]$ καὶ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ δὲν εἶναι γνωστὴ αὐτὴν τὴν στιγμή (στὰ κάτω φράγματα γιὰ τὸ $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ ποὺ θὰ δοῦμε παρακάτω λείπει πάντα ἕνας ἀπὸ τοὺς ὅρους τῆς ποσότητος $\sqrt{qn}L_K^2$), καὶ γι΄ αὐτὸ ἀναγκαζόμαστε στὸ Θεώρημα 2.1.6 νὰ εἰσάγουμε τὴν βοηθητικὴ παράμετρο $r_q(K)$.

Στὴν συνέχεια ἀναφέρουμε κάποια ἁπλὰ ἄνω καὶ κάτω φράγματα ποὺ γνωρίζουμε ἤδη γιὰ τὴν παράμετρο $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ἤ, πιὸ γενικά, γιὰ τὴν παράμετρο $I_1(K, Z_q^\circ(M))$ ὅπου M μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνα διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ K κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$. Ὅπως εἴδαμε καὶ πρίν,

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) = \int_K h_{Z_q(M)}(x)dx \leqslant \int_K R(Z_q(M))\|x\|_2 dx \simeq R(Z_q(M))\sqrt{n}L_K,$$

ὁπότε, ἂν τὸ M βρίσκεται καὶ αὐτὸ σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι καὶ εἶναι ψ_α μὲ σταθερὰ $b_\alpha(M)$, ἔχουμε ὅτι $I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leqslant b_\alpha(M)q^{1/\alpha}\sqrt{n}L_K L_M$. Ἂν τώρα τὸ M εἶναι εἰκόνα τοῦ K μέσῳ ἑνὸς ὀρθογωνίου μετασχηματισμοῦ, τότε μποροῦμε ἐν γένει νὰ ποῦμε κάτι καλύτερο.

Λῆμμα 2.1.7. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$\left(\int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K)))\, d\nu(U)\right)^{1/q} \leqslant c\sqrt{q/n}\, I_q^2(K), \tag{2.1.5}$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Χρησιμοποιῶντας τὴν

$$\|x\|_2 \simeq \sqrt{n/q}\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta)\right)^{1/q}$$

ὅπως καὶ στὸ Λῆμμα 1.4.5, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K)))\, d\nu(U) &\leqslant \int_{O(n)} I_q^q(K, Z_q^\circ(U(K)))\, d\nu(U)\\ &= \int_{O(n)}\int_K\int_{U(K)} |\langle x, y\rangle|^q dy\, dx\, d\nu(U)\\ &= \int_K\int_K\int_{O(n)} |\langle x, Uy\rangle|^q d\nu(U)\, dy\, dx\\ &= \int_K\int_K \|y\|_2^q \int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle|^q d\sigma(\theta)\, dy\, dx\\ &= a_{n,q}^q \int_K\int_K \|y\|_2^q \|x\|_2^q dy\, dx\\ &= a_{n,q}^q I_q^{2q}(K),\end{aligned}$$

ὅπου $a_{n,q} \simeq \sqrt{q/n}$. □

Στὴν περίπτωσι ποὺ τὸ K εἶναι ἰσοτροπικὸ ἔχουμε, ὅπως ἐξηγήσαμε στὴν Παρατήρησι 1.4.11, τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Παούρη [52] γιὰ τὰ $I_q(K)$: $I_q(K) \simeq \max\{I_2(K), R(Z_q(K))\} \lesssim \max\{\sqrt{n}L_K, qL_K\}$ γιὰ κάθε $q \geqslant 1$. Ἄρα τὸ παραπάνω λῆμμα μᾶς δίνει ὅτι

$$\left(\int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K)))\, d\nu(U)\right)^{1/q} \leqslant c \max\{\sqrt{qn}, q^2\sqrt{q/n}\}\, L_K^2$$

γιὰ κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$, ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Εἰδικότερα, γιὰ κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα σύνολο $A_q \subseteq O(n)$ μὲ μέτρο Haar $\nu(A_q) \geqslant 1 - e^{-q}$ ὥστε νὰ ἰσχύει $I_1(K, Z_q^\circ(U(K))) \leqslant c_1\sqrt{qn}\, L_K^2$ γιὰ ὅλους τοὺς μετασχηματισμοὺς $U \in A_q$.

Στρεφόμαστε τώρα σὲ κάτω φράγματα παρουσιάζοντας τρία ἁπλὰ ἐπιχειρήματα. Γιὰ τὸ πρῶτο δὲν χρειάζεται νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὰ K καὶ M βρίσκονται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι, μόνον ὅτι ἔχουν ὄγκο 1 καὶ κέντρο βάρους τὸ 0. Λόγῳ τοῦ [44, Πόρισμα 2.2.α] μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) = \int_K h_{Z_q(M)}(x)\, dx \geqslant \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{|Z_q^\circ(M)|^{1/n}}.$$

Ἔπειτα, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Blaschke-Santaló ἔχουμε ὅτι

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geqslant c_1 n |Z_q(M)|^{1/n}. \tag{2.1.6}$$

Ὅμως, ἀπὸ ἕνα ἀποτέλεσμα τῶν Klartag καὶ E. Milman [29] τὸ ὁποῖο θὰ δοῦμε στὸ Κεφάλαιο 3, $|Z_q(M)|^{1/n} \geqslant c_2\sqrt{q/n}\, L_M$ γιὰ κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, καὶ ἄρα τὸ δεξιὸ μέλος στὴν (2.1.6) φράσσεται ἀπὸ κάτω ἀπὸ $c_2'\sqrt{qn}L_M$ γιὰ αὐτὰ τὰ q. Γενικά, γιὰ κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ ἔχουμε μία ἀνισότητα τῶν Lutwak, Yang καὶ Zhang (βλέπε [37]), ἡ ὁποία μᾶς δίνει τὸ ἀσθενέστερο φράγμα $|Z_q(M)|^{1/n} \geqslant c_3\sqrt{q/n}$, ἄρα καὶ τὸ φράγμα $I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geqslant c_3'\sqrt{qn}$.

Γιὰ τὸ δεύτερο ἐπιχείρημα, ἀπαιτοῦμε τὸ K νὰ εἶναι σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι καὶ γράφουμε

$$\begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(M)) &= \int_K h_{Z_q(M)}(x)\,dx = \int_K \max_{z\in Z_q(M)} |\langle x, z\rangle|\,dx \\ &\geqslant \max_{z\in Z_q(M)} \int_K |\langle x, z\rangle|\,dx \simeq \max_{z\in Z_q(M)} \|z\|_2 L_K \\ &= R(Z_q(M))L_K, \end{aligned}$$

ἐπικαλούμενοι καὶ τὴν Πρόταση 1.3.9 στὴν προτελευταία γραμμή.

Τέλος, ἂν καὶ τὸ M εἶναι ἰσοτροπικό, τότε, καὶ πάλι ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.3.9, βλέπουμε ὅτι

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) = \int_K h_{Z_q(M)}(x)\,dx \geqslant \int_K h_{Z_2(M)}(x)\,dx = \int_K \|x\|_2 L_M\,dx \simeq \sqrt{n} L_K L_M.$$

Συνοψίζουμε τὶς παραπάνω ἐκτιμήσεις στὴν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρότασις 2.1.8. *Ἔστω K, M ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ ἔχουμε ὅτι*

$$c_1 \max\left\{\sqrt{n}L_K L_M, \sqrt{qn}, R(Z_q(M))L_K\right\} \leqslant I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leqslant c_2 q\sqrt{n} L_K L_M. \tag{2.1.7}$$

Ἐπίσης, ἂν $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, τότε

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geqslant c_3 \max\left\{\sqrt{n}L_K L_M, \sqrt{qn} L_M\right\}.$$

Οἱ ἐκτιμήσεις μας μποροῦν νὰ γίνουν πολὺ πιὸ ἀκριβεῖς στὴν περίπτωσι ποὺ τὰ K καὶ M εἶναι unconditional σώματα, ὅπου unconditional λέμε ἕνα σῶμα K ἄν, γιὰ κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in K$ καὶ κάθε ἐπιλογὴ προσήμων $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, ἰσχύει $(\epsilon_1 x_1, \ldots, \epsilon_n x_n) \in K$. Γιὰ παράδειγμα, unconditional εἶναι τὰ σώματα $\overline{B}_2^n$, $\overline{B}_1^n$ καὶ $Q_n := [-1, 1]^n$, τὰ ὁποῖα μάλιστα βρίσκονται ταυτόχρονα σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι. Στὴν περίπτωσι ἑνὸς unconditional σώματος K ἔχουμε ὅτι $L_K \simeq 1$ (βλέπε π.χ. [4]), καὶ ἄρα ἡ (2.1.7) γίνεται

$$c_1\sqrt{qn} \leqslant I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leqslant c_2 q\sqrt{n}.$$

Μάλιστα, ἐξαιτίας ἑνὸς ἀποτελέσματος τῶν Bobkov καὶ Nazarov [5], εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουμε γιὰ ὅλα τὰ q ἄνω φράγμα σχεδὸν τῆς ἰδίας τάξεως μὲ τὸ κάτω φράγμα. Πράγματι, οἱ Bobkov καὶ Nazarov ἔχουν δείξει ὅτι, ὅταν τὸ $K \subset \mathbb{R}^n$ εἶναι unconditional καὶ ἰσοτροπικό, τότε, γιὰ κάθε $q \geqslant 1$ καὶ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, ἰσχύει $h_{Z_q(K)}(y) \lesssim \sqrt{qn}\|y\|_\infty$. Ἕπεται ὅτι, γιὰ κάθε δύο unconditional ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K, M στὸν $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(M)) = \int_K h_{Z_q(M)}(x)dx &\lesssim \int_K \sqrt{qn}\|x\|_\infty dx \\ &= \sqrt{qn}\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\langle x, e_i\rangle| dx \lesssim \sqrt{qn}\log n \end{aligned}$$

(βλέπε Παρατήρησι 2.2.2 γιὰ τὴν τελευταία ἀνισότητα, ἢ τὸ Λῆμμα 2.2.1 σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρόταση 1.3.9).

2.2 Ἡ ἀναγωγή

Σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο θὰ περιγράψουμε τὸ ἐπιχείρημα τῆς ἀναγωγῆς. Ξεκινᾶμε μὲ δύο βασικὰ λήμματα, τὸ πρῶτο ἐκ τῶν ὁποίων μᾶς δίνει ἕνα χρήσιμο ἄνω φράγμα γιὰ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ maximum ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου γραμμικῶν συναρτησοειδῶν.

Λῆμμα 2.2.1. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$. Θεωροῦμε σημεῖα $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$. Τότε, ἂν $q \geqslant 1$ καὶ $p \geqslant \max\{\log N, q\}$, ἔχουμε ὅτι*

$$\left(\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle|^q dx\right)^{1/q} \leqslant \overline{\beta}_1 \max_{1\leqslant i\leqslant N} h_{Z_p(K)}(z_i), \tag{2.2.1}$$

ὅπου $\overline{\beta}_1 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $p \geqslant 1$ καὶ $\theta \in S^{n-1}$. Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Markov λαμβάνουμε ὅτι

$$|\{x \in K : |\langle x, \theta\rangle| e^3 h_{Z_p(K)}(\theta)\}| \leqslant e^{-3p}. \tag{2.2.2}$$

Ἀφοῦ ἡ ἀπεικόνισις $x \mapsto |\langle x, \theta\rangle|$ εἶναι ἡμινόρμα, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ Λῆμμα τοῦ Borell (Λῆμμα 1.3.8) τὸ ὁποῖο μᾶς δίνει ὅτι

$$|\{x \in K : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant e^3 t h_{Z_p(K)}(\theta)\}| \leqslant (1 - e^{-3p}) \left(\frac{e^{-3p}}{1 - e^{-3p}}\right)^{\frac{t+1}{2}} \leqslant e^{-pt}$$

γιὰ κάθε $t \geqslant 1$. Θέτουμε $S := e^3 \max_{1\leqslant i\leqslant N} h_{Z_p(K)}(z_i)$. Τότε, γιὰ κάθε $t \geqslant 1$ ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned}|\{x \in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle| \geqslant St\}| &\leqslant \sum_{i=1}^N |\{x \in K : |\langle x, z_i\rangle| \geqslant e^3 t h_{Z_p(K)}(z_i)\}| \\ &\leqslant N e^{-pt}.\end{aligned}$$

Ἔπεται ὅτι

$$\begin{aligned}\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle|^q dx &= q\int_0^\infty s^{q-1} |\{x \in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle| s\}|\, ds \\ &\leqslant S^q + q\int_S^\infty s^{q-1} |\{x \in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle| s\}|\, ds \\ &= S^q \left(1 + q\int_1^\infty t^{q-1} |\{x \in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle| St\}|\, dt\right) \\ &\leqslant S^q \left(1 + qN\int_1^\infty t^{q-1} e^{-pt} dt\right) \\ &= S^q \left(1 + \frac{qN}{p^q}\int_p^\infty t^{q-1} e^{-t} dt\right) \\ &\leqslant S^q \left(1 + \frac{qN}{p^q} e^{-p} p^q\right) \\ &\leqslant (eS)^q,\end{aligned}$$

ὅπου ἔχουμε ἐπίσης χρησιμοποιήσει τὸ ὅτι ἰσχύει

$$\int_p^\infty t^{q-1}e^{-t}dt \leqslant e^{-p}p^q$$

γιὰ κάθε $p \geqslant q \geqslant 1$ (ἡ ἀνισότητα ἀνάγεται στὸ νὰ δείξει κάποιος ὅτι, γιὰ κάθε $q \geqslant 1$, ἰσχύει $\int_1^\infty f_q(t)dt = \int_1^\infty t^{q-1}e^{q(1-t)}dt \leqslant 1$, καὶ αὐτὸ προκύπτει ἀμέσως ἂν παρατηρήσουμε ὅτι $f_q(t) \leqslant f_1(t)$ γιὰ κάθε $t \geqslant 1$). Ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει τὸ ζητούμενο (μὲ τὴν σταθερὰ $\overline{\beta}_1 = e^4$). $\square$

Παρατήρησις 2.2.2. Ἕνα πολὺ χρήσιμο ἀποτέλεσμα, ποὺ ἰσχύει γιὰ ὁποιεσδήποτε μὴ ἀρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις f_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, ποὺ ὁρίζονται πάνω σὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1, εἶναι ὅτι

$$\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} f_i(x)dx \leqslant C(\log N)^{1/\alpha} \max_{1\leqslant i\leqslant N} \|f_i\|_{\psi_\alpha(K)}, \tag{2.2.3}$$

ὅπου $\|\cdot\|_{\psi_\alpha(K)}$ εἶναι ἡ νόρμα Orlicz τάξεως $\alpha > 0$ ὡς πρὸς τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο στὸ K καὶ $C > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά (βλέπε π.χ. [18, Πρότασις 2.5.1], καὶ γενικὰ [18] ἢ [13] γιὰ τὸν ὁρισμὸ καὶ ἰδιότητες τῶν νορμῶν Orlicz). Εἶναι ἐπίσης γνωστὸ ὅτι τὰ γραμμικὰ συναρτησοειδῆ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα

$$\|\langle\cdot, z_i\rangle\|_{\psi_1(K)} \leqslant c\|\langle\cdot, z_i\rangle\|_{L_1(K)} = ch_{Z_1(K)}(z_i) \tag{2.2.4}$$

(αὐτὴ εἶναι ἁπλῶς μία ἐπαναδιατύπωσις τῆς (1.4.1) ὅταν $p = 1$), ἄρα ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν ἐκτίμησι

$$\||\langle\cdot, z_i\rangle|^q\|_{\psi_{1/q}(K)} \leqslant c\||\langle\cdot, z_i\rangle|^q\|_{L_1(K)} = ch^q_{Z_q(K)}(z_i),$$

γιὰ κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$, ἀπὸ τὴν ὁποία, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν (2.2.3), προκύπτει ἡ

$$\left(\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle|^q dx\right)^{1/q} \leqslant C\log N \max_{1\leqslant i\leqslant N} h_{Z_q(K)}(z_i).$$

Τὴν τελευταία ἀνισότητα μποροῦμε νὰ τὴν συμπεράνουμε καὶ ἀπευθείας μέσω τοῦ Λήμματος 2.2.1 καὶ μάλιστα βελτιωμένη ὅταν $q > 1$: γιὰ $q \leqslant \log N$, χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν Πρότασι 1.3.9, βλέπουμε ὅτι

$$\left(\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle|^q dx\right)^{1/q} \leqslant \overline{\beta}_1 \max_{1\leqslant i\leqslant N} h_{Z_{\log N}(K)}(z_i) \leqslant C\frac{\log N}{q} \max_{1\leqslant i\leqslant N} h_{Z_q(K)}(z_i),$$

ἐνῷ, γιὰ $q > \log N$, ἔχουμε

$$\left(\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x, z_i\rangle|^q dx\right)^{1/q} \simeq \max_{1\leqslant i\leqslant N} \left(\int_K |\langle x, z_i\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

Τὸ δεύτερο λῆμμα ἔχει νὰ κάνει μὲ τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα ὑποσυνόλων τοῦ K καὶ πῶς αὐτὰ σχετίζονται μὲ τὰ κεντροειδῆ σώματα τοῦ ἰδίου τοῦ K.

Λῆμμα 2.2.3. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ ἂς θεωρήσουμε $q, r \in [1, n]$. Ὑπάρχει ἀπόλυτη σταθερὰ $\overline{\beta}_2 > 0$ τέτοια ὥστε, ἂν A εἶναι ὁποιοδήποτε (Lebesgue μετρήσιμο) ὑποσύνολο τοῦ K μὲ τὴν ἰδιότητα $|A| \geqslant 1 - e^{-\overline{\beta}_2 q}$, τότε*

$$Z_p(K) \subseteq 2Z_p(\overline{A}) \tag{2.2.5}$$

γιὰ κάθε $1 \leqslant p \leqslant q$. Ἐπιπλέον, γιὰ νὰ ἔχουμε ἐγκλεισμὸ τῆς ἀντίθετης φορᾶς, μᾶς ἀρκεῖ νὰ ἔχουμε $|A| \geqslant 2^{-\frac{r}{2}}$, καὶ τότε ἰσχύει

$$Z_p(\overline{A}) \subseteq 2Z_p(K) \tag{2.2.6}$$

γιὰ κάθε $r \leqslant p \leqslant n$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\theta \in S^{n-1}$. Παρατηροῦμε ὅτι

$$h_{Z_p(\overline{A})}(\theta) = \left(\int_{\overline{A}} |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} = \frac{1}{|A|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}} \left(\int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p}.$$

Δείχνουμε πρῶτα τὴν (2.2.6): δεδομένου ὅτι $A \subseteq K$ καὶ ἐπίσης ὑποθέτοντας ὅτι $|A| \geqslant 2^{-\frac{r}{2}}$, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} h_{Z_p(K)}(\theta) &= \left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \geqslant \left(\int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \\ &\geqslant 2^{-\frac{r}{2p} - \frac{r}{2n}} \left(\int_{\overline{A}} |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \geqslant \frac{1}{2} h_{Z_p(\overline{A})}(\theta) \end{aligned}$$

γιὰ κάθε $r \leqslant p \leqslant n$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ὑποθέτοντας ὅτι $|A| \geqslant 1 - e^{-\overline{\beta}_2 q}$ καὶ χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L^{2p}(K)} \leqslant 2\beta_2 \|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L^p(K)}$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\begin{aligned} \int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx &= \int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx + \int_{K \setminus A} |\langle x, \theta \rangle|^p dx \\ &\leqslant |A|^{1 + \frac{p}{n}} \int_{\overline{A}} |\langle x, \theta \rangle|^p dx + |K \setminus A|^{1/2} \left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^{2p} dx \right)^{1/2} \\ &\leqslant \int_{\overline{A}} |\langle x, \theta \rangle|^p dx + e^{-\overline{\beta}_2 q/2} c^p \int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \\ &\leqslant \int_{\overline{A}} |\langle x, \theta \rangle|^p dx + \frac{1}{2} \int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \end{aligned}$$

γιὰ κάθε $p \in [1, q]$, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἐπιλέξουμε τὴν σταθερὰ $\overline{\beta}_2 > 0$ ἀρκετὰ μεγάλη. Ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει καὶ τὴν (2.2.5). □

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 2.1.6. Ἔστω ὅτι ἔχουμε σταθερὲς $\kappa, \tau \geqslant 1$ καὶ ἕνα (κ, τ)-κανονικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, δηλαδὴ ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν (2.1.2).

Ἔστω ἐπίσης ὅτι γιὰ κάποιο $q \in [2, \rho^2 n]$ ἰσχύει $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant \rho n L_K^2$, ὅπου ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ρ θὰ προσδιοριστεῖ σὲ λίγο. Ὁρίζουμε ἕνα κυρτὸ σῶμα $W \subseteq K$ θέτοντας

$$W := \{x \in K : h_{Z_q(K)}(x) \leqslant C_1 I_1(K, Z_q^\circ(K))\},$$

ὅπου $C_1 = e^{2\overline{\beta}_2}$ καὶ $\overline{\beta}_2 > 0$ εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ ἐμφανίζεται στὸ Λῆμμα 2.2.3. Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Markov βλέπουμε ὅτι $|W| \geqslant 1 - e^{-2\overline{\beta}_2}$, καὶ ἄρα ὅτι $|W| \geqslant 2^{-1} \geqslant 2^{-\frac{-q}{2}}$ ἐπίσης (ἀρκεῖ νὰ ἔχουμε ἐπιλέξει $\overline{\beta}_2 \geqslant 1$). Θέτουμε ἔπειτα

$$K_1 := \overline{W}$$

καὶ ἐφαρμόζουμε τὸ Λῆμμα 2.2.3 τόσο γιὰ $p = 2$ ὅσο καὶ γιὰ $p = q$: βλέπουμε ὅτι

$$\frac{1}{2} Z_2(K_1) \subseteq Z_2(K) \subseteq 2 Z_2(K_1) \tag{2.2.7}$$

καὶ ὅτι

$$Z_q(K_1) \subseteq 2 Z_q(K). \tag{2.2.8}$$

Ἐξαιτίας τῆς (2.2.7) ἔχουμε ὅτι

$$\frac{1}{4} L_K^2 = \frac{1}{4} \int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \leqslant \int_{K_1} \langle x, \theta\rangle^2 dx \leqslant 4 \int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = 4 L_K^2$$

γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$, καὶ ἄρα μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\frac{n L_K^2}{4} \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{K_1} \langle x, e_i\rangle^2 dx = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx \leqslant 4 n L_K^2.$$

Ἔχουμε ἐπίσης

$$K_1 = |W|^{-1/n} W \subseteq 2W \subseteq 2K,$$

ἑπομένως γιὰ κάθε $x \in K_1$ ἰσχύει ὅτι $x/2 \in W$, τὸ ὁποῖο σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν (2.2.8) μᾶς δίνει ὅτι

$$h_{Z_q(K_1)}(x) \leqslant 2 h_{Z_q(K)}(x) = 4 h_{Z_q(K)}(x/2) \leqslant 4 C_1 I_1(K, Z_q^\circ(K)). \tag{2.2.9}$$

Τέλος, ἡ $K_1 \subseteq 2K$ συνεπάγεται ἐπίσης ὅτι

$$\log \overline{N}(K_1, tD_n) \leqslant \log N(K_1, 2^{-1} t D_n) \leqslant \log N(2K, 2^{-1} t D_n) \leqslant \frac{16 \kappa' n \log^4 n}{t^2}$$

γιὰ ὅλα τὰ $t \geqslant 4\tau \log^{3/2} n$, ὅπου $\kappa' := \max\{\kappa, \tau^2\}$. Ἑπομένως, γιὰ κάθε τέτοιο t μποροῦμε νὰ βροῦμε $z_1, \ldots, z_{N_t} \in K_1$ τέτοια ὥστε νὰ ἰσχύει $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_t} (z_i + tD_n)$, ὅπου $|N_t| \leqslant \exp\left(\frac{16\kappa' n \log^4 n}{t^2}\right)$. Γράφουμε τώρα

$$n L_K^2 \leqslant 4 \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx \leqslant 4 \int_{K_1} \max_{z \in K_1} |\langle x, z\rangle|\, dx,$$

καὶ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\max_{z \in K_1} |\langle x, z\rangle| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N_t} |\langle x, z_i\rangle| + \max_{w \in tD_n} |\langle x, w\rangle| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N_t} |\langle x, z_i\rangle| + t\omega_n^{-1/n} \|x\|_2,$$

συνεπῶς

$$nL_K^2 \leqslant 4\int_{K_1} \max_{1\leqslant i\leqslant N_t} |\langle x, z_i\rangle| dx + 4t\omega_n^{-1/n}\int_{K_1} \|x\|_2 dx \leqslant 4\int_{K_1} \max_{1\leqslant i\leqslant N_t} |\langle x, z_i\rangle| dx + ctnL_K. \tag{2.2.10}$$

Ἐπιλέγουμε

$$t_0 = 8\sqrt{C_2\kappa'}\,\sqrt{r_q(K)}\sqrt[4]{\frac{n}{q}}\,\log^2 n, \tag{2.2.11}$$

ὅπου $C_2 = 16C_1\beta_1\overline{\beta}_1$ μὲ τὴν σταθερὰ β_1 νὰ εἶναι αὐτὴ ποὺ μᾶς δίνει ἡ Πρότασις 1.3.9 καὶ $\overline{\beta}_1$ ἡ σταθερὰ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 2.2.1. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ $r_q(K)$ καὶ τοῦ κ', βλέπουμε ὅτι γιὰ αὐτὸ τὸ t_0 ἰσχύει

$$t_0 \geqslant 8\sqrt{C_2\kappa'}\,\sqrt[4]{\frac{n}{q}}\,\log^2 n \geqslant 4\tau\,\log^2 n$$

ἄρα ἡ (2.2.10) ἰσχύει καὶ γιὰ $t = t_0$, ἐνῷ ἐπίσης

$$t_0^2 \geqslant 64C_2\kappa'\,\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{qL_K^2}\,\log^4 n. \tag{2.2.12}$$

Θέτουμε $p_0 := \frac{16\kappa' n\log^4 n}{t_0^2}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι $p_0 \geqslant q$: ἀπὸ τὶς ὑποθέσεις $q \leqslant \rho^2 n$ καὶ $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant \rho n L_K^2$ τοῦ Θεωρήματος 2.1.6, βλέπουμε ὅτι

$$t_0^2 = 64C_2\kappa'\,r_q(K)\,\sqrt{\frac{n}{q}}\,\log^4 n \leqslant 64C_2\kappa'\,\max\left\{\sqrt{\frac{n}{q}}, \rho\frac{n}{q}\right\}\log^4 n = 64C_2\kappa'\,\rho\frac{n}{q}\,\log^4 n,$$

καὶ ἄρα

$$p_0 = \frac{16\kappa' n\log^4 n}{t_0^2} \geqslant q$$

ἂν ἐπιλέξουμε $\rho < 1/(4C_2)$. Ἑπομένως, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ Λῆμμα 2.2.1 μὲ $q' = 1$, καὶ νὰ γράψουμε

$$\int_{K_1} \max_{1\leqslant i\leqslant N_{t_0}} |\langle x, z_i\rangle| dx \leqslant \overline{\beta}_1 \max_{1\leqslant i\leqslant N_{t_0}} h_{Z_{p_0}(K_1)}(z_i) \leqslant \overline{\beta}_1\beta_1\frac{p_0}{q}\max_{1\leqslant i\leqslant N_{t_0}} h_{Z_q(K_1)}(z_i), \tag{2.2.13}$$

ἐπικαλούμενοι καὶ τὴν Πρόταση 1.3.9. Συνδυάζοντας αὐτὸ τὸ τελευταῖο μὲ τὴν (2.2.10), τὴν (2.2.9) καὶ τὸν ὁρισμὸ τῆς σταθερᾶς C_2, βλέπουμε ὅτι

$$nL_K^2 \leqslant C_2\frac{p_0}{q}I_1(K, Z_q^\circ(K)) + ctnL_K. \tag{2.2.14}$$

Ἐπιπλέον, ἀπὸ τὴν (2.2.12) καὶ τὸν ὁρισμὸ τοῦ p_0, προκύπτει ὅτι

$$C_2\frac{p_0}{q}I_1(K, Z_q^\circ(K)) = \frac{16C_2\kappa'\,I_1(K, Z_q^\circ(K))}{qt_0^2}\,n\log^4 n \leqslant \frac{1}{4}\,nL_K^2,$$

καὶ ἄρα ἡ (2.2.14) ὁδηγεῖ στὴν

$$nL_K^2 \leqslant C_3t_0nL_K.$$

Συμπεραίνουμε τελικῶς ὅτι

$$L_K \leqslant C_4t_0 = C\max\{\sqrt{\kappa}, \tau\}\max\left\{1, \sqrt{\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}L_K^2}}\right\}\sqrt[4]{\frac{n}{q}}\log^2 n,$$

τὸ ὁποῖο ἦταν τὸ ζητούμενο φράγμα. $\square$

2.3 2-κανονικὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα μὲ μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερά

Γιὰ νὰ μπορέσουμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ ἐπιχείρημα τῆς προηγουμένης παραγράφου καὶ νὰ φράξουμε τὴν L_n, χρειάζεται νὰ ἐξασφαλίσουμε τὴν ὕπαρξι (κ, τ)-κανονικῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων, δηλαδὴ ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν (2.1.2), τὰ ὁποῖα ἔχουν ταυτόχρονα ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ὅσο πιὸ «κοντὰ» γίνεται στὴν L_n. Τὸ ἀκόλουθο θεώρημα, διατυπωμένο πιὸ γενικὰ γιὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα, ἀπεδείχθη στὸ [14].

Θεώρημα 2.3.1. *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς κ, τ καὶ $\delta > 0$ τέτοιες ὥστε, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, νὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες:*

(α) $L_K \geqslant \delta L_n$.

(β) $\log N(K, tD_n) \leqslant \dfrac{\kappa n \log^4 n}{t^2}$ *γιὰ κάθε* $t \geqslant \tau \log^{3/2} n$, *ὅπου D_n εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$.*

Στὴν πραγματικότητα ἰσχύει κάτι γενικότερο.

Θεώρημα 2.3.2 (Δαφνὴς-Παούρης, 2010)**.** *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς κ, τ καὶ $\delta > 0$ μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: γιὰ κάθε $\alpha \in [1, 2)$ καὶ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, ὑπάρχει ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α στὸν $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε*

(α) $L_{K_\alpha} \geqslant \delta L_n$,

(β) $\log N(K_\alpha, tD_n) \leqslant \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha} t^\alpha}$ *γιὰ κάθε* $t \geqslant \tau (2-\alpha)^{-3/2}$.

Γιὰ λόγους πληρότητας θὰ σκιαγραφήσουμε τὴν ἀπόδειξι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2. Χρειαζόμαστε ἀρχικῶς τὸ ἀκόλουθο πόρισμα τοῦ Θεωρήματος 1.2.3 τοῦ Pisier.

Θεώρημα 2.3.3 (Pisier, 1989)**.** *Ἔστω K ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $\alpha \in [1, 2)$ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_\alpha$ τέτοιο ὥστε:*

- $|\mathcal{E}_\alpha| = |K|$,
- *γιὰ κάθε* $t \geqslant ec(\alpha)^{1/\alpha} \geqslant 1$,

$$\log N(K, t\mathcal{E}_\alpha) \leqslant \frac{\kappa(\alpha) n}{t^\alpha}, \tag{2.3.1}$$

ὅπου $c(\alpha)$ εἶναι ἡ σταθερὰ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 1.2.3 καὶ $1 \leqslant \kappa(\alpha) \leqslant (ec(\alpha))^2 \leqslant \kappa_1 (2-\alpha)^{-\alpha}$ μὲ κ_1 μία ἀπόλυτη σταθερὰ (ποὺ δὲν ἐξαρτᾶται οὔτε ἀπὸ τὴν διάστασι τοῦ χώρου οὔτε ἀπὸ τὸ α).

Χρησιμοποιῶντας ἔπειτα τὴν ἀνισότητα Rogers-Shephard, μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε τὰ παραπάνω γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, ἁπλῶς ἀλλάζοντας λίγο τὴν τιμὴ τῆς σταθερᾶς κ_1 καὶ θεωρῶντας $t \geqslant 4ec(\alpha)^{1/\alpha}$ στὴν (2.3.1).

Ὁρολογία. Καταχρηστικὰ στὴν παράγραφο αὐτὴ θὰ λέμε ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_\alpha$ ποὺ ἔχει τὶς παραπάνω ἰδιότητες *α-κανονικὸ M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K.*

Χρειαζόμαστε ἐπίσης κάποια βασικὰ ἀποτελέσματα γιὰ ἐλλειψοειδῆ στὸν $\mathbb{R}^n$ (ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νὰ βρεῖ τὶς ἀποδείξεις τους στὰ [14], [30] καὶ [68]).

Λῆμμα 2.3.4. *Ἔστω $\mathcal{E}$ ἕνα ἐλλειψοειδὲς στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἐξ ὁρισμοῦ, ὑπάρχει $T \in GL(n)$ ἔτσι ὥστε $\mathcal{E} = T(B_2^n)$. Συμβολίζουμε μὲ $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$ τὶς ἰδιοτιμὲς τοῦ πίνακα $\sqrt{TT^*}$ (ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὁ TT^* εἶναι συμμετρικὸς καὶ θετικὰ ὁρισμένος). Τότε, γιὰ κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$\max_{F \in G_{n,k}} |\mathcal{E} \cap F| = \max_{F \in G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E})| = \omega_k \prod_{i=1}^{k} \lambda_i \tag{2.3.2}$$

καὶ

$$\min_{F \in G_{n,k}} |\mathcal{E} \cap F| = \min_{F \in G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E})| = \omega_k \prod_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i. \tag{2.3.3}$$

Ἐπιπλέον, ἂν $n = 2m$ ἢ $n = 2m-1$, μποροῦμε, γιὰ κάθε $k \leqslant m$, νὰ βροῦμε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ τέτοιον ὥστε $\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}) = \lambda_m B_F$ $(= \lambda_m B_2^n \cap F)$.

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 2.3.2. Ἔστω $n \geqslant 2$. Γράφουμε $n = 2m$ ἢ $n = 2m-1$ γιὰ κάποιο $m \geqslant 1$ καὶ θεωροῦμε ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_0 μὲ τὴν ἰδιότητα $L_{K_0} \geqslant \delta_0 L_n$ γιὰ κάποιο $\delta_0 \in (0,1)$. Τότε ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα ἄνω φράγματα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν τοῦ K_0 μὲ ὑποχώρους τοῦ $\mathbb{R}^n$.

Λῆμμα 2.3.5. *Γιὰ κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ καὶ γιὰ κάθε ὑπόχωρο E τοῦ $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχει συνδιάστασι k, ἰσχύει $|K_0 \cap E|^{1/k} \leqslant c_1(\delta_0)$, ὅπου $c_1(\delta_0) > 0$ εἶναι μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ δ_0.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω E ὑπόχωρος τοῦ $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχει συνδιάστασι k. Γράφουμε μ_0 γιὰ τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο στὸ K_0 καὶ F γιὰ τὸ ὀρθογώνιο συμπλήρωμα τοῦ E. Ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα ποὺ εἴδαμε στὴν Παράγραφο 1.3, γνωρίζουμε ὅτι

$$L_{\pi_F \mu_0} = \left(\sup_{x \in F} f_{\pi_F \mu_0}(x) \right)^{1/k} L_{K_0} \simeq |K_0 \cap E|^{1/k} L_{K_0}$$

Ἔπεται ὅτι

$$|K_0 \cap E|^{1/k} \leqslant c_1 \frac{L_{\pi_F \mu_0}}{L_{K_0}} \leqslant c_1 \frac{L_k}{\delta_0 L_n}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$. Ὅμως ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.1.4 ἔχουμε, γιὰ κάθε $k \leqslant n$, ὅτι $L_k \leqslant c_0 L_n$, ἑπομένως τὸ ζητούμενο ἕπεται μὲ τὴν σταθερὰ $c_1(\delta_0) = c_1 c_0 / \delta_0$. $\square$

Θὰ χρησιμοποιήσουμε τώρα τὸ Θεώρημα 2.3.3 γιὰ νὰ δώσουμε καὶ ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν τοῦ K_0.

Λῆμμα 2.3.6. *Γιὰ κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ καὶ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $E \in G_{n,n-k}$, ἔχουμε ὅτι $|K_0 \cap E|^{1/k} \geqslant (c_2(\delta_0))^{n/k}$, ὅπου $c_2(\delta_0) > 0$ εἶναι μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ δ_0.*

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμε ἕνα α-κανονικὸ M-ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_\alpha$ γιὰ τὸ K_0 (γιὰ αὐτὸ τὸ λῆμμα ϑὰ μπορούσαμε νὰ ἐπιλέξουμε κατευθείαν $\alpha = 1$· παραταῦτα, κάποια βήματα τοῦ πιὸ γενικοῦ ἐπιχειρήματος ϑὰ μᾶς χρειαστοῦν καὶ στὴν συνέχεια). Θέτουμε $t_\alpha = \max\{4e[c(\alpha)]^{1/\alpha}, [\kappa(\alpha)]^{1/\alpha}\}$. Τότε,

$$|\mathrm{Proj}_F(K_0)| \leqslant N(K_0, t_\alpha \mathcal{E}_\alpha)|\mathrm{Proj}_F(t_\alpha \mathcal{E}_\alpha)| \leqslant e^n |\mathrm{Proj}_F(t_\alpha \mathcal{E}_\alpha)| \tag{2.3.4}$$

γιὰ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$. Θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἀνισότητα (1.2.1) τῶν Rogers καὶ Shephard καὶ τὴν ἀνισότητα (1.2.6): ἐφ' ὅσον $|\mathcal{E}_\alpha| = |K_0| = 1$, ἔχουμε ὅτι

$$1 \leqslant |\mathcal{E}_\alpha \cap F|^{\frac{1}{n-k}} |\mathrm{Proj}_{F^\perp}(\mathcal{E}_\alpha)|^{\frac{1}{n-k}} \leqslant \binom{n}{n-k}^{\frac{1}{n-k}} \leqslant e\frac{n}{n-k}, \tag{2.3.5}$$

καὶ οἱ ἴδιες ἐκτιμήσεις ἰσχύουν γιὰ τὶς τομὲς καὶ τὶς προβολὲς τοῦ K_0. Ἡ ἰδέα πίσω ἀπὸ τὸ ἐπιχείρημα εἶναι ἡ ἐξῆς: ἡ ἀνισότητα (2.3.5) μᾶς βοηθᾶ νὰ συγκρίνουμε τὸν ὄγκο τῶν k-διαστάτων τομῶν τοῦ K_0 (ἢ τοῦ $\mathcal{E}_\alpha$) μὲ τὸν ὄγκο τῶν $(n-k)$-διαστάτων προβολῶν τοῦ K_0 (ἢ τοῦ $\mathcal{E}_\alpha$ ἀντιστοίχως)· ἕνα ἄνω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν ὁδηγεῖ σὲ ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν προβολῶν καὶ ἀντιστρόφως. Ἐπίσης ἡ ἀνισότητα (2.3.4) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ συγκρίνουμε τὸν μέγιστο (ἢ τὸν ἐλάχιστο) ὄγκο τῶν $(n-k)$-διαστάτων προβολῶν τοῦ K_0 μὲ τὸν μέγιστο (ἢ τὸν ἐλάχιστο) ὄγκο τῶν $(n-k)$-διαστάτων προβολῶν τοῦ $\mathcal{E}_\alpha$. Ὅμως, ὅπως εἴδαμε στὸ Λῆμμα 2.3.4, ὁ μέγιστος ὄγκος τῶν $(n-k)$-διαστάτων προβολῶν ἑνὸς ἐλλειψοειδοῦς ταυτίζεται μὲ τὸν μέγιστο ὄγκο τῶν $(n-k)$-διαστάτων τομῶν, καὶ ἄρα μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς ἀνισότητες (2.3.4) καὶ (2.3.5) ἄλλη μία φορὰ γιὰ νὰ περάσουμε ἀπὸ τὰ ἄνω φράγματα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν τοῦ K_0, ποὺ μᾶς δίνει τὸ Λῆμμα 2.3.5, σὲ κάτω φράγματα.

Ἃς δοῦμε τώρα τὸ ἀκριβὲς ἐπιχείρημα: συνδυάζοντας τὴν (2.3.5) μὲ τὸ συμπέρασμα τοῦ Λήμματος 2.3.5, βλέπουμε ὅτι $\min_{F \in G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_{F^\perp}(K_0)|^{\frac{1}{n-k}} \geqslant c_3(\delta_0)$. Τότε ὅμως προκύπτει ἀπὸ τὴν (2.3.4) ὅτι $\min_{F \in G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_{F^\perp}(t_\alpha \mathcal{E}_\alpha)|^{\frac{1}{n-k}} \geqslant e^{\frac{-n}{n-k}} c_3(\delta_0)$. Ἔπειτα, χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.5) γιὰ τὸ $\mathcal{E}_\alpha$, λαμβάνουμε ὅτι $|\mathcal{E}_\alpha \cap F|^{\frac{1}{n-k}} \leqslant e^{\frac{2n}{n-k}} c_4(\delta_0) t_\alpha$ γιὰ κάθε $F \in G_{n,k}$. Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν (2.3.2) ἔχουμε ὅτι

$$\max_{F \in G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)| = \max_{F \in G_{n,k}} |\mathcal{E}_\alpha \cap F| \leqslant e^{2n} (c_4(\delta_0))^{n-k} t_\alpha^{n-k}. \tag{2.3.6}$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.4) καὶ πάλι, βλέπουμε ὅτι $|\mathrm{Proj}_F(K_0)|^{\frac{1}{k}} \leqslant e^{\frac{2n}{k}} (c_4(\delta_0))^{\frac{n-k}{k}} t_\alpha^{\frac{n}{k}}$ γιὰ κάθε $F \in G_{n,k}$, καὶ ἄρα, συνδυάζοντας αὐτὴν τὴν ἐκτίμησι μὲ τὴν (2.3.5), συμπεραίνουμε ὅτι $|K_0 \cap E|^{\frac{1}{k}} \geqslant c_5(\delta_0)^{\frac{n}{k}} / t_\alpha^{\frac{n}{k}}$ γιὰ κάθε $E \in G_{n,n-k}$. Μποροῦμε τελικὰ νὰ ἐπιλέξουμε $\alpha = 1$, καὶ νὰ φτάσουμε στὸ ζητούμενο τοῦ λήμματος ἔχοντας $c_2(\delta_0) = c_5(\delta_0)/t_1$. □

Παρατήρησις 2.3.7. Συνδυάζοντας τὰ Λήμματα 2.3.5 καὶ 2.3.6, βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1'(\delta_0)$ καὶ $c_2'(\delta_0)$, οἱ ὁποῖες ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ δ_0, ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε m-διάστατο ἢ $(n-m)$-διάστατο ὑπόχωρο F τοῦ $\mathbb{R}^n$ νὰ ἰσχύει

$$c_2'(\delta_0) \leqslant \frac{L_{\pi_F \mu_0}}{L_{K_0}} \simeq |K_0 \cap F^\perp|^{1/\mathrm{dim} F} \leqslant c_1'(\delta_0) \tag{2.3.7}$$

(ὑπενθυμίζουμε ὅτι $n = 2m$ ἢ $n = 2m-1$, ἄρα $\frac{n}{m} \simeq \frac{n}{n-m} \simeq 1$).

Ἔχουμε τώρα ὅλα τὰ ἐργαλεῖα ποὺ χρειαζόμαστε γιὰ νὰ κατασκευάσουμε, μέσῳ τοῦ ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος $K_0 \subset \mathbb{R}^n$, ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K_α ποὺ ἔχουν τὶς ἰδιότητες (α) καὶ (β) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2. Ἔστω $\alpha \in [1,2)$ καὶ ἔστω ὅτι $\mathcal{E}_\alpha$ εἶναι ἕνα α-κανονικὸ M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K_0. Θυμόμαστε ὅτι $|\mathcal{E}_\alpha| = 1$, ὅπως ἐπίσης καὶ ὅτι, ἂν $\mathcal{E}_\alpha = T(B_2^n)$ καὶ $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ πίνακα $\sqrt{TT^*}$, τότε, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 2.3.4,

$$|B_2^m| \prod_{i=n+1-m}^{n} \lambda_i = \min_{F \in G_{n,m}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)| \leqslant \max_{F \in G_{n,m}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)| = |B_2^m| \prod_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.4) καὶ τὸ συμπέρασμα τοῦ Λήμματος 2.3.6, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} |B_2^m|^{1/m} \lambda_m &\geqslant \min_{F \in G_{n,m}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)|^{1/m} \geqslant \frac{e^{-2}}{t_\alpha} \min_{F \in G_{n,m}} |\mathrm{Proj}_F(K_0)|^{1/m} \\ &\geqslant \frac{e^{-2}}{t_\alpha} \min_{F \in G_{n,m}} |K_0 \cap F|^{1/m} \geqslant \frac{(c_6(\delta_0))^{\frac{n-m}{m}}}{t_\alpha}, \end{aligned}$$

καὶ ἄρα

$$\lambda_m \geqslant \frac{c_7(\delta_0)}{t_\alpha} \sqrt{n}.$$

Μὲ παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.6), μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε ὅτι $|B_2^m|^{1/m} \lambda_m \leqslant \max_{F \in G_{n,m}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)|^{1/m} \leqslant c_8(\delta_0) t_\alpha$, ἀπὸ τὸ ὁποῖο προκύπτει ὅτι $\lambda_m \leqslant c_9(\delta_0) t_\alpha \sqrt{n}$. Ἀλλά, ἀπὸ τὸ τελευταῖο σημεῖο τοῦ Λήμματος 2.3.4, γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχουν ὑπόχωροι $F_1 \in G_{n,m}$ καὶ $F_2 \in G_{n,n-m}$ τέτοιοι ὥστε $\mathrm{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha) = \lambda_m B_{F_i}$, $i = 1, 2$. Κατὰ συνέπεια,

$$\frac{c_7(\delta_0)}{t_\alpha} \sqrt{n} B_{F_i} \subseteq \mathrm{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha) \subseteq c_9(\delta_0) t_\alpha \sqrt{n} B_{F_i}. \tag{2.3.8}$$

Θέτουμε $W_1 := \overline{K}_{m+1}(\pi_{F_1}\mu_0)$, $W_2 := \overline{K}_{n-m+1}(\pi_{F_2}\mu_0)$ καὶ $K_\alpha := W_1 \times U(W_2)$, ὅπου μ_0 εἶναι τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω στὸ K_0 καὶ $U \in O(n)$ εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος μετασχηματισμὸς μὲ τὴν ἰδιότητα $U(F_2) = F_1^\perp$. Παρατηροῦμε ὅτι, ἐξαιτίας τοῦ 5. τῆς Προτάσεως 1.3.7, γιὰ $i = 1$ ἢ 2 τὸ κεντραρισμένο περιθώριο μέτρο πιθανότητος $\pi_{F_i}\mu_0$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη

$$Z_2(\pi_{F_i}\mu_0) = L_{K_0} B_{F_i},$$

ἄρα, ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.21, προκύπτει ὅτι τὰ W_i εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα (μὲ μία ἀπόλυτη σταθερὰ C). Ἕπεται ὅτι καὶ τὸ $K_\alpha = W_1 \times U(W_2)$ εἶναι ἕνα σχεδὸν ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$, καὶ ἐπίσης ὅτι

$$L_{K_\alpha} = L_{W_1}^{m/n} \cdot L_{U(W_2)}^{(n-m)/n} \simeq L_{\pi_{F_1}\mu_0}^{m/n} \cdot L_{\pi_{F_2}\mu_0}^{(n-m)/n} \tag{2.3.9}$$

(γιὰ τὴν πρώτη σχέσι, βλέπε π.χ. [18, Λῆμμα 1.6.6]). Θὰ δείξουμε ὅτι τὸ K_α ἱκανοποιεῖ τὶς ἰδιότητες (α) καὶ (β)· θὰ μποροῦμε ἔπειτα νὰ συμπεράνουμε τὸ ἴδιο (φυσικὰ μὲ κάπως διαφορετικὲς ἀπόλυτες σταθερὲς γιὰ τὴν ἰδιότητα (β)) γιὰ κάθε ἰσοτροπικὴ εἰκόνα $S(K_\alpha)$ τοῦ K_α. Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι, γιὰ κάθε τέτοια εἰκόνα $S(K_\alpha)$ τοῦ K_α, θὰ ἰσχύει

$$\frac{1}{C}B_2^n \subseteq S(B_2^n) \subseteq CB_2^n,$$

καὶ ἑπομένως

$$N\big(S(K_\alpha), tB_2^n\big) \leqslant N\left(S(K_\alpha), \frac{t}{C}S(B_2^n)\right) \cdot N\big(S(B_2^n), CB_2^n\big) = N\left(K_\alpha, \frac{t}{C}B_2^n\right)$$

γιὰ κάθε $t > 0$.

Ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος (a): Ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ ὑπόθεσι ὅτι $L_{K_0} \geqslant \delta_0 L_n$ καὶ τὶς (2.3.7) καὶ (2.3.9), συμπεραίνουμε ὅτι

$$L_{K_\alpha} \gtrsim |K_0 \cap F_1^\perp|^{1/n} \cdot |K_0 \cap F_2^\perp|^{1/n} \cdot L_{K_0} \geqslant c_2'(\delta_0) L_{K_0} \geqslant \delta L_n,$$

ὅπου $\delta \simeq \delta_0 c_2'(\delta_0)$.

Ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος (β): Θυμόμαστε ὅτι ἰσχύει $N(A_1 \times A_2, B_1 \times B_2) \leqslant N(A_1, B_1) \cdot N(A_2, B_2)$ γιὰ ὁποιαδήποτε μὴ κενὰ σύνολα A_i, B_i, $i = 1, 2$, ὅπως ἐπίσης καὶ ὅτι $B_2^m \times B_2^{n-m} \subseteq \sqrt{2}B_2^n$. Ἄρα, γιὰ κάθε $s > 0$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$N\big(K_\alpha, s\sqrt{2n}B_2^n\big) \leqslant N\big(W_1 \times U(W_2), s\sqrt{n}(B_{F_1} \times B_{F_1^\perp})\big) \leqslant \prod_{i=1}^{2} N\big(W_i, s\sqrt{n}B_{F_i}\big).$$

Ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.4.4 γνωρίζουμε ὅτι

$$Z_n(W) \simeq |K_0 \cap F_i^\perp|^{1/\mathrm{dim}F_i} \mathrm{Proj}_{F_i}(Z_n(K_0)).$$

καὶ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 1.4.1 ὅτι $\mathrm{conv}(C, -C) \simeq Z_n(C)$ γιὰ κάθε κενταρισμένο κυρτὸ σῶμα C ὄγκου 1 ποὺ περιέχεται στὸν ὑπόχωρο F_i, $i = 1$ ἢ 2, ἢ στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἑπομένως, ἐξαιτίας καὶ τῶν Λημμάτων 2.3.5 καὶ 2.3.6, ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned}\mathrm{conv}(W_i, -W_i) \simeq Z_n(W_i) &\simeq |K_0 \cap F_i^\perp|^{1/\mathrm{dim}F_i} \mathrm{Proj}_{F_i}(Z_n(K_0)) \\ &\simeq_{\delta_0} \mathrm{Proj}_{F_i}(\mathrm{conv}(K_0, -K_0)).\end{aligned}$$

Ἐπικαλούμενοι τὴν (2.3.8) ἐπίσης, βλέπουμε ὅτι, γιὰ κάθε $r > 0$,

$$\begin{aligned}N(W_i, c_9(\delta_0)t_\alpha r\sqrt{n}B_{F_i}) &\leqslant N\big(\mathrm{conv}(W_i, -W_i), c_9(\delta_0)t_\alpha r\sqrt{n}B_{F_i}\big) \\ &\leqslant N\big(\mathrm{conv}(W_i, -W_i), r\mathrm{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha)\big) \\ &\leqslant N\big(c_{10}(\delta_0)\mathrm{Proj}_{F_i}(\mathrm{conv}(K_0, -K_0)), r\mathrm{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha)\big) \\ &\leqslant N\big(c_{10}(\delta_0)\mathrm{conv}(K_0, -K_0), r\mathcal{E}_\alpha\big) \\ &\leqslant N\big(K_0 - K_0, c_{11}(\delta_0)r(\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\alpha)\big) \\ &\leqslant N(K_0, c_{12}(\delta_0)r\mathcal{E}_\alpha)^2.\end{aligned}$$

Προκύπτει τελικῶς ὅτι

$$N(K_\alpha, t\sqrt{n}\,B_2^n) \leqslant N\left(K_0, \frac{c_{12}(\delta_0)t}{\sqrt{2}c_9(\delta_0)t_\alpha}\,\mathcal{E}_\alpha\right)^4 \tag{2.3.10}$$

γιὰ κάθε $t > 0$. Ἀφοῦ τὸ $\mathcal{E}_\alpha$ εἶναι ἕνα α-κανονικὸ M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K_0, ἀρκεῖ πλέον νὰ θεωρήσουμε ἀρκετὰ μεγάλα $t \geqslant \tau(\delta_0, \alpha)$, ὅπου

$$\tau(\delta_0, \alpha) := \sqrt{32}\,c_9(\delta_0)t_\alpha e[c(\alpha)]^{1/\alpha}/c_{12}(\delta_0),$$

γιὰ νὰ συμπεράνουμε, συνδυάζοντας τὶς (2.3.1) καὶ (2.3.10), ὅτι

$$\log N(K_\alpha, t\sqrt{n}\,B_2^n) \leqslant 4\log N\left(K_0, \frac{c_{13}(\delta_0)t}{t_\alpha}\,\mathcal{E}_\alpha\right) \leqslant \frac{4\kappa(\alpha)t_\alpha^\alpha}{c_{13}^\alpha(\delta_0)}\frac{n}{t^\alpha}.$$

Αὐτὸ ὁλοκληρώνει τὴν ἀπόδειξι τοῦ θεωρήματος. □

Στὴν διατύπωσι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2, ἄρα καὶ τοῦ Θεωρήματος 2.3.1, μποροῦμε νὰ ζητήσουμε τὸ σῶμα K ποὺ ἀναζητοῦμε νὰ ἔχει δύο ἀκόμη ἰδιότητες: μποροῦμε νὰ ἐπιτύχουμε τὸ σῶμα K νὰ εἶναι συμμετρικὸ καὶ νὰ ἔχει ἐπιπλέον τὴν ἰδιότητα $R(K) \leqslant \gamma\sqrt{n}L_K$ γιὰ μία ἀπόλυτη σταθερὰ $\gamma > 0$. Πρὸς τοῦτο, θυμόμαστε τὶς Προτάσεις 1.3.19 [26] καὶ 2.1.3 [9], οἱ ὁποῖες σὲ συνδυασμὸ δείχνουν ὅτι ἀρκεῖ γιὰ τὴν εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου νὰ μελετήσουμε συμμετρικὰ ἰσοτροπικὰ σώματα μὲ μικρὴ διάμετρο, δηλαδὴ συμμετρικὰ ἰσοτροπικὰ σώματα $K \subset \mathbb{R}^n$ μὲ $R(K) \lesssim \sqrt{n}L_K$:

Λῆμμα 2.3.8. *Ὑπάρχει συμμετρικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_0 στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $L_{K_0} \geqslant \delta_0 L_n$ καὶ $R(K_0) \leqslant \gamma_0\sqrt{n}L_{K_0}$, ὅπου $\delta_0, \gamma_0 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.*

Ἔπειτα, ἐπαναλαμβάνουμε τὴν ἀπόδειξι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 ξεκινῶντας μὲ τὸ σῶμα $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ ποὺ δίνεται ἀπὸ τὸ παραπάνω λῆμμα. Μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι τὰ σώματα W_1, W_2 ποὺ προκύπτουν κατὰ τὴν ἀπόδειξι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 εἶναι συμμετρικὰ καὶ ἔχουν τὴν ἰδιότητα $R(W_i) \leqslant c(\delta_0)\gamma_0\sqrt{n}L_{K_0}$, $i = 1, 2$. Πράγματι, γιὰ τὸ δεύτερο ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι

$$\begin{aligned} R(W_i) &= R\big(\overline{K}_{\mathrm{dim}F_i+1}(\pi_{F_i}\mu_0)\big) \leqslant c_1|K_0 \cap F_i^\perp|^{1/\mathrm{dim}F_i} R\big(\mathrm{Proj}_{F_i}\big(Z_n(K_1)\big)\big) \\ &\leqslant c_2(\delta_0)R\big(\mathrm{conv}(K_0, -K_0)\big) = c_2(\delta_0)R(K_0) \leqslant c_2(\delta_0)\gamma_0\sqrt{n}L_{K_0}. \end{aligned}$$

Στὴν συνέχεια εὔκολα ἐλέγχουμε ὅτι $R(K) = R(W_1 \times U(W_2)) \simeq \max\{R(W_1), R(W_2)\}$, καὶ ἄρα $R(K) \leqslant \gamma\sqrt{n}L_K$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $\gamma > 0$. Ἑπομένως, μποροῦμε νὰ ἐπαναδιατυπώσουμε τὸ Θεώρημα 2.3.2 ὡς ἑξῆς:

Θεώρημα 2.3.9. *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς κ, τ, γ καὶ $\delta > 0$ μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: γιὰ κάθε $\alpha \in [1, 2)$ καὶ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, ὑπάρχει συμμετρικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α στὸν $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε $L_{K_\alpha} \geqslant \delta L_n$, $R(K) \leqslant \gamma\sqrt{n}L_K$ καὶ*

$$\log N(K_\alpha, tD_n) \leqslant \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha}t^\alpha} \quad \text{γιὰ κάθε } t \geqslant \tau(2-\alpha)^{-3/2},$$

ὅπου D_n εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρησις 2.3.10. Ἕνας ἄλλος τρόπος νὰ φτάσουμε στὴν παραπάνω ἐπαναδιατύπωσι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 εἶναι νὰ ξεκινήσουμε μὲ ἕνα (συμμετρικὸ) ἰσοτροπικὸ σῶμα K_α, ὅπου $\alpha \in [1,2)$ τυχόν, καὶ νὰ ἐφαρμόσουμε ὕστερα τὴν Πρόταση 2.1.3 τοῦ Bourgain στὸ K_α. Ἂν ἀνατρέξει κάποιος στὴν ἀπόδειξι τοῦ Bourgain, θὰ δεῖ ὅτι τὸ (συμμετρικὸ) ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα Q_α ποὺ ὁρίζεται μέσῳ αὐτῆς τῆς διαδικασίας, καὶ ἔχει τὴν ἴδια περίπου ἰσοτροπικὴ σταθερὰ μὲ τὸ K_α καὶ διάμετρο $\lesssim \sqrt{n}L_{Q_\alpha}$, θὰ ἱκανοποιεῖ καὶ τὴν ἰδιότητα (β) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 (μὲ λίγο διαφορετικὲς ἀπόλυτες σταθερὲς κ καὶ τ). Πράγματι, ὁ Bourgain ὁρίζει τὸ Q_α θεωρῶντας πρῶτα ἕνα κυρτὸ σῶμα

$$W_\alpha := \{x \in K_\alpha : \|x\|_2 \leqslant r\sqrt{n}L_K\}$$

γιὰ κάποιο $r > 0$ (κατάλληλα μεγάλο, ἀλλὰ ἀνεξάρτητο τῆς διαστάσεως ἢ τοῦ σώματος K_α) καὶ δείχνοντας γιὰ τὸ W_α τὰ ἑξῆς:

- ὅτι $Z_2(\overline{W}_\alpha) \simeq Z_2(K_\alpha)$ (γιὰ παράδειγμα, $2^{-1}Z_2(K_\alpha) \subseteq Z_2(\overline{W}_\alpha) \subseteq 2Z_2(K_\alpha)$, ὅπως εἴδαμε στὸ Λῆμμα 2.2.3, ἂν $r = e^{\overline{\beta}_2}$),
- ἄρα ὅτι, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὴ εἰκόνα $Q_\alpha = S(\overline{W}_\alpha)$ $(S \in SL(n))$ τοῦ $\overline{W}_\alpha$, ἰσχύει

  $$L_{Q_\alpha}|B_2^n|^{1/n} = |Z_2(S(\overline{W}_\alpha))|^{1/n} = |Z_2(\overline{W}_\alpha)|^{1/n} \simeq |Z_2(K_\alpha)|^{1/n} = L_{K_\alpha}|B_2^n|^{1/n},$$

  ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι $L_{Q_\alpha} \simeq L_{K_\alpha}$.

(παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἰδέα εἶναι ἡ ἴδια μὲ αὐτὴν τῶν ἐπιχειρημάτων ποὺ εἴδαμε στὶς Προτάσεις 1.3.18 καὶ 1.3.21, ἁπλῶς ἀντὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς Binet ποὺ χρησιμοποιοῦσε ὁ Bourgain στὴν ἀπόδειξί του ἀναφερόμαστε στὸ πολικό του σῶμα $Z_2(K)$). Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ἐπίσης, ὅπως καὶ στὴν Πρόταση 1.3.21, ὅτι

$$L_{Q_\alpha}B_2^n \simeq L_{K_\alpha}B_2^n \simeq Z_2(\overline{W}_\alpha) = S^{-1}\big(Z_2\big(S\big(\overline{W}_\alpha\big)\big)\big) = S^{-1}\big(L_{Q_\alpha}B_2^n\big)$$

γιὰ κάθε ἰσοτροπικὴ εἰκόνα $Q_\alpha = S\big(\overline{W}_\alpha\big)$ τοῦ $\overline{W}_\alpha$, τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι τὸ $\overline{W}_\alpha$ εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὸ κατὰ τὸν Ὁρισμὸ 1.3.20. Ταυτόχρονα, ἔχουμε ὅτι $\overline{W}_\alpha = |\overline{W}_\alpha|^{-1/n} \cdot \overline{W}_\alpha \subset 2K_\alpha$ ἂν τὸ r εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο, ἑπομένως, ὅπως πρίν, μποροῦμε νὰ συγκρίνουμε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὴ εἰκόνα Q_α τοῦ W_α, τοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως $N(Q_\alpha, tD_n)$ μὲ τοὺς $N(\overline{W}_\alpha, tD_n)$, καὶ αὐτοὺς μὲ τοὺς $N(K_\alpha, tD_n)$, καὶ νὰ συμπεράνουμε τελικῶς ὅτι κάθε τέτοια εἰκόνα θὰ ἱκανοποιεῖ τὶς ἀπαιτήσεις τοῦ Θεωρήματος 2.3.9.

Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι καὶ τὸ σχεδὸν ἰσοτροπικὸ (συμμετρικὸ) $\overline{W}_\alpha$ ἱκανοποιεῖ τὶς ἀπαιτήσεις τοῦ Θεωρήματος 2.3.9 πλὴν τοῦ νὰ εἶναι ἰσοτροπικό, μία ἰδιότητα ποὺ μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε μὲ τὴν

$$\frac{1}{2}L_K B_2^n \subseteq Z_2(\overline{W}_\alpha) \subset 2L_K B_2^n.$$

Ἀξίζει νὰ παρατηρήσουμε τώρα ὅτι μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τόσο τὴν ἀναγωγὴ τοῦ Θεωρήματος 2.1.6 ὅσο καὶ μία παραλλαγή της ποὺ θὰ δοῦμε στὴν Παράγραφο 2.5 καὶ γιὰ κυρτὰ σώματα ὅπως τὸ $\overline{W}_{\alpha}$. Μάλιστα, ἂν ἔχουμε ἐπιλέξει τὸ r κατάλληλα μεγάλο, τότε ἰσχύει τὸ ἑξῆς σχετικὰ μὲ τὶς παραμέτρους $I_1(\overline{W}_{\alpha}, Z_q^{\circ}(\overline{W}_{\alpha}))$: ἀφοῦ $|W_{\alpha}| \geqslant 1/2$, βλέπουμε, ἐφαρμόζοντας τὸ Λῆμμα 2.2.3, ὅτι

$$Z_q(\overline{W}_{\alpha}) \subseteq 2Z_q(K_{\alpha})$$

γιὰ κάθε $q \geqslant 2$, καὶ μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} I_1(\overline{W}_{\alpha}, Z_q^{\circ}(\overline{W}_{\alpha})) &= \int_{\overline{W}_{\alpha}} h_{Z_q(\overline{W}_{\alpha})}(x)dx \\ &\leqslant \int_{W_{\alpha}} |\overline{W}_{\alpha}|^{-1} h_{Z_q(\overline{W}_{\alpha})}\big(|\overline{W}_{\alpha}|^{-1/n}x\big) \leqslant |\overline{W}_{\alpha}|^{-1-\frac{1}{n}} \int_{W_{\alpha}} 2h_{Z_q(K_{\alpha})}(x)dx \\ &\leqslant 8\int_{K_{\alpha}} h_{Z_q(K_{\alpha})}(x)dx = 8I_1(K_{\alpha}, Z_q^{\circ}(K_{\alpha})). \end{aligned}$$

Ἡ παραπάνω ἀνισότητα γίνεται ἰσοδυναμία, τουλάχιστον γιὰ τὰ $q \in [2, \sqrt{n}]$, ἂν ἐπικαλεστοῦμε καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Παούρη (Θεώρημα 1.4.10), τὸ ὁποῖο μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι, γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $r > 0$, τὸ $W_{\alpha} = \{x \in K_{\alpha} : \|x\|_2 \leqslant r\sqrt{n}L_K\}$ ἔχει ὄγκο $|W_{\alpha}| \geqslant 1 - e^{\overline{\beta}_2\sqrt{n}}$: γιὰ αὐτὰ τὰ q,

$$Z_q(\overline{W}_{\alpha}) \simeq Z_q(K_{\alpha}), \text{ καὶ ἄρα } I_1(\overline{W}_{\alpha}, Z_q^{\circ}(\overline{W}_{\alpha})) \simeq I_1(K_{\alpha}, Z_q^{\circ}(K_{\alpha})),$$

αὐτὸ ὅμως μπορεῖ νὰ μὴν ἰσχύει γιὰ τὰ μεγαλύτερα q. Συμπεραίνουμε τελικῶς ὅτι τὸ μικρῆς διαμέτρου (σχεδὸν ἰσοτροπικὸ) $\overline{W}_{\alpha}$ παρουσιάζει τὴν ἴδια ἢ καὶ καλύτερη συμπεριφορὰ ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ σῶμα K_{α} ὡς πρὸς τὴν παράμετρο $I_1(K, Z_q^{\circ}(K))$ ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει γιὰ τὴν ἀναγωγὴ τοῦ [21].

2.4 Ἡ μέθοδος τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη

Σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο περιγράφουμε πολὺ σύντομα τὸ γιατί οἱ Δαφνὴς καὶ Παούρης χρειάζονταν ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα μὲ μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ καὶ κανονικοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως: στὸ [14] προτείνουν μία ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου στὴν μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς τῶν ἀρνητικῶν ῥοπῶν τῆς Εὐκλείδειας νόρμας ὡς πρὸς τὰ ἰσοτροπικὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα μ. Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Παούρη (Θεώρημα 1.4.10) δὲν μᾶς δίνει πληροφορίες γιὰ τὸ πόσο γρήγορα μειώνονται τὰ $I_{-q}(\mu)$ ὅταν $q > q_*(\mu)$. Γιὰ αὐτὸν τὸν λόγο, οἱ Δαφνὴς καὶ Παούρης εἰσάγουν μία καινούρια παράμετρο ὡς ἑξῆς: δοθέντων $\zeta \geqslant 1$ καὶ ἰσοτροπικοῦ λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ στὸν $\mathbb{R}^n$, ὁρίζουν

$$q_{-c}(\mu, \zeta) := \max\{1 \leqslant p \leqslant n-1 : I_{-p}(\mu) \geqslant \zeta^{-1} I_2(\mu) = \zeta^{-1}\sqrt{n}\}, \tag{2.4.1}$$

καὶ ἀντίστοιχα, δοθέντος ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος K στὸν $\mathbb{R}^n$,

$$q_{-c}(K, \zeta) := \max\{1 \leqslant p \leqslant n-1 : I_{-p}(K) \geqslant \zeta^{-1} I_2(K) = \zeta^{-1}\sqrt{n}L_K\}. \tag{2.4.2}$$

Τὸ κύριο ἀποτέλεσμά τους στὸ [14] μπορεῖ ἔπειτα νὰ διατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς: ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν πρόταση

«Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $C, \xi > 0$ ἔτσι ὥστε,
γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, $q_{-c}(K, \xi) \geqslant Cn$».

Ἡ μία κατεύθυνσις τῆς ἰσοδυναμίας δίδεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.1 (Δαφνὴς-Παούρης, 2010)**.** *Ὑποθέτουμε ὅτι $q_{-c}(K, \zeta) \geqslant \beta n$ γιὰ κάποιο $\zeta \geqslant 1$, κάποιο $\beta \in (0, 1)$ καὶ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$L_n \leqslant 3e^2 \zeta \max\{\kappa, \tau^2\} \delta^{-1} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \log^2\Big(\frac{e}{\beta}\Big), \tag{2.4.3}$$

ὅπου κ, τ καὶ δ εἶναι οἱ ἀπόλυτες σταθερὲς ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.3.2.

Τὸ πρῶτο βῆμα στὴν ἀπόδειξι τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι τὸ ἀκόλουθο

Λῆμμα 2.4.2 (Δαφνὴς-Παούρης, 2010)**.** *Ἔστω K ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι, γιὰ κάποιο $s > 0$,*

$$r_s := \log N(K, sB_2^n) < n. \tag{2.4.4}$$

Τότε,

$$I_{-r_s}(K) \leqslant 3es.$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω σημεῖο $z_0 \in \mathbb{R}^n$ μὲ τὴν ἰδιότητα $|K \cap (-z_0 + sB_2^n)| \geqslant |K \cap (z + sB_2^n)|$ γιὰ κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Ἕπεται ὅτι

$$|(K + z_0) \cap sB_2^n| \cdot N(K, sB_2^n) \geqslant |K| = 1. \tag{2.4.5}$$

Θέτουμε $q = r_s$. Τότε, κάνοντας χρῆσι τῆς ἀνισότητος τοῦ Markov, τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ῥοπῆς $I_{-q}(K + z_0)$ καὶ τῆς ὑποθέσεως (2.4.4), συμπεραίνουμε ὅτι

$$|(K + z_0) \cap 3^{-1} I_{-q}(K + z_0) B_2^n| \leqslant 3^{-q} < e^{-q} = e^{-r_s} \leqslant \frac{1}{N(K, sB_2^n)}.$$

Λόγῳ τῆς (2.4.5) βλέπουμε ὅτι

$$|(K + z_0) \cap 3^{-1} I_{-q}(K + z_0) B_2^n| < |(K + z_0) \cap sB_2^n|,$$

τὸ ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι

$$3^{-1} I_{-q}(K + z_0) \leqslant s.$$

Ἀφοῦ ὅμως τὸ K ἔχει τὸ κέντρο βάρους του στὸ 0, ἕπεται ὡς ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Fradelizi (Θεώρημα 1.3.5) ὅτι $I_{-k}(K + z) \geqslant \frac{1}{e} I_{-k}(K)$ γιὰ κάθε $1 \leqslant k < n$ καὶ $z \in \mathbb{R}^n$. Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε τὴν λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησι $f = \mathbf{1}_K$, νὰ θέσουμε $f_z(y) := f(y + z)$ καὶ ἔπειτα, χρησιμοποιῶντας τὸν τύπο 1.4.5 τοῦ Παούρη, νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} I_{-k}(K + z) = I_{-k}(f_z) &= c_{n,k} \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f_z)(0) d\mu(F) \right)^{-1/k} \\ &\geqslant \frac{c_{n,k}}{e} \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0) d\mu(F) \right)^{-1/k} = \frac{1}{e} I_{-k}(f) = \frac{1}{e} I_{-k}(K). \end{aligned}$$

Ἔτσι ὁλοκληρώνεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ λήμματος. □

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 2.4.1. Θέτουμε $\alpha := 2 - \log(e/\beta)^{-1}$ καὶ μὲ αὐτὸ τὸ α ἐφαρμόζουμε τὸ Θεώρημα 2.3.2. Βρίσκουμε ἔτσι ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α τὸ ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τὰ ἑξῆς: $L_{K_\alpha} \geqslant \delta L_n$ καὶ

$$\log N(K_\alpha, t\sqrt{n}B_2^n) \leqslant \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha}t^\alpha} \quad \text{γιὰ κάθε } t \geqslant \tau \log^{3/2}\Big(\frac{e}{\beta}\Big),$$

ὅπου $\kappa, \tau \geqslant 1$ καὶ $\delta > 0$ εἶναι οἱ ἀπόλυτες σταθερὲς τοῦ Θεωρήματος 2.3.2. Ἐπιλέγουμε ἔπειτα

$$t_1 = (e\kappa)^{1/\alpha}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\log^2\Big(\frac{e}{\beta}\Big),$$

καὶ παρατηροῦμε ὅτι $t_1^\alpha = e\kappa(2-\alpha)^{-2\alpha}(\sqrt{\beta})^{-\alpha}$. Ἀφοῦ μποροῦμε ἐξαρχῆς νὰ ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι οἱ σταθερὲς κ, τ ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν σχέσι $\tau \leqslant \sqrt{e\kappa} \leqslant (e\kappa)^{1/\alpha}$, βλέπουμε ὅτι μὲ αὐτὴν τὴν ἐπιλογὴ τοῦ t_1 ἰσχύει $t_1 \geqslant \tau(2-\alpha)^{-3/2} = \tau\log^{3/2}(e/\beta)$. Κατὰ συνέπεια,

$$r_1 := \log N(K_\alpha, t_1\sqrt{n}B_2^n) \leqslant \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha}t_1^\alpha} \leqslant \frac{1}{e}(\sqrt{\beta})^\alpha n \leqslant \beta n,$$

καὶ ἄρα μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Λῆμμα 2.4.2 καὶ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$I_{-r_1}(K_\alpha) \leqslant 3et_1\sqrt{n}.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἀφοῦ $r_1 \leqslant \beta n$ καὶ ταυτοχρόνως $q_{-c}(K_\alpha, \zeta) \geqslant \beta n$, βλέπουμε ὅτι

$$\sqrt{n}L_{K_\alpha} = I_2(K_\alpha) \leqslant \zeta I_{-r_1}(K_\alpha).$$

Ἔπεται τελικὰ ὅτι

$$L_{K_\alpha} \leqslant 3e\zeta t_1 = 3e\zeta(e\kappa)^{1/\alpha}\sqrt{\frac{1}{\beta}}\log^2\Big(\frac{e}{\beta}\Big) \leqslant 3e^2\zeta\kappa\sqrt{\frac{1}{\beta}}\log^2\Big(\frac{e}{\beta}\Big),$$

καὶ ἐφ' ὅσον $L_{K_\alpha} \geqslant \delta L_n$, ἔχουμε ἀποδείξει τὸ ζητούμενο. □

Πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνσι, ἂν ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἀληθής, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀπόλυτες σταθερὲς $\sigma, \xi > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, νὰ ἰσχύει $q_{-c}(K, \xi) \geqslant \sigma n$. Πιὸ συγκεκριμένα ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.3 (Δαφνὴς-Παούρης, 2010). *Μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀπόλυτη σταθερὰ $C > 0$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε n καὶ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, νὰ ἰσχύει*

$$q_{-c}(K, CL_n) \geqslant n - 1.$$

Ἀπόδειξις. Ξεκινᾶμε ἀπὸ τὸν τύπο

$$I_{-s}(K) \simeq \sqrt{n}\left(\int_{G_{n,s}} |K \cap F^\perp|\, d\nu_{n,s}(F)\right)^{-1/s},$$

ὁ ὁποῖος ἰσχύει γιὰ κάθε $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Ἔπειτα θυμόμαστε ὅτι, ἂν K εἶναι ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|K \cap F^\perp|^{1/s} \simeq \frac{L_{\overline{K}_{s+1}(\pi_F\mu_K)}}{L_K}$$

γιὰ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,s}$. Ἕπεται ὅτι

$$I_{-s}(K) \geqslant c_1\sqrt{n}\left(\int_{G_{n,s}}\left(\frac{L_{\overline{K}_{s+1}(\pi_F\mu_K)}}{L_K}\right)^s d\nu_{n,s}(F)\right)^{-1/s}$$

καὶ ἄρα, ἀφοῦ κάθε σῶμα $\overline{K}_{s+1}(\pi_F\mu_K)$ περιέχεται σὲ ἕναν s-διάστατο χῶρο,

$$I_{-s}(K) \geqslant c_1\sqrt{n}\left(\int_{G_{n,s}}\left(\frac{L_s}{L_K}\right)^s d\nu_{n,s}(F)\right)^{-1/s} = c_1\sqrt{n}\frac{L_K}{L_s}.$$

Ἐπικαλούμαστε τώρα τὸ Θεώρημα 2.1.4 τῶν Bourgain, Klartag καὶ V. Milman, καὶ καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$q_{-c}(K, c_1^{-1}c_0L_n) := \max\{1 \leqslant p < n : I_{-p}(K) \geqslant c_1(c_0L_n)^{-1}I_2(K)\} \geqslant n-1,$$

δεδομένου ὅτι $I_2(K) = \sqrt{n}L_K$. □

Παρατήρησις 2.4.4. Στὸ ἑπόμενο κεφάλαιο θὰ δοῦμε πῶς, ἀπὸ τὴν μέθοδο τῶν Klartag καὶ E. Milman ἡ ὁποία μᾶς δίνει ἕναν τύπο γιὰ τὸν ὄγκο τῶν L_q-κεντροειδῶν σωμάτων, προκύπτει σχετικὰ ἄμεσα ὅτι $q_{-c}(K, CL_K) \geqslant n-1$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $C > 0$. Αὐτὸ ἰσχυροποιεῖ τὸ παραπάνω θεώρημα. Ἀξίζει νὰ σημειώσουμε ὅτι αὐτὴ ἡ ἰσχυρότερη ἐκδοχὴ προκύπτει ὡς συνέπεια καὶ ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη στὸ [15], ὅπου μὲ διαφορετικὰ ἐργαλεῖα δείχνουν, μεταξὺ ἄλλων, τὴν πολὺ ἰσχυρὴ ἐκτίμησι

$$\nu_{n,s}\big(\{F \in G_{n,s} : L_{\overline{K}_{s+1}(\pi_F\mu_K)} \leqslant CL_K\}\big) \geqslant 1 - e^{-c_1sn},$$

γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ $1 \leqslant s \leqslant n-1$, ὅπου $C \geqslant 1$ καὶ $c_1 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

2.5 Μία παραλλαγὴ τῆς ἀναγωγῆς

Μὲ ἀντίστοιχο τρόπο ὅπως στὴν ἀναγωγὴ τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη, μποροῦμε, χρησιμοποιῶντας τὴν πλήρη ἰσχὺ τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 (ἢ τοῦ Θεωρήματος 2.3.9), νὰ παραλλάξουμε τὸ ἐπιχείρημα στὴν Παράγραφο 2.2 καὶ νὰ πετύχουμε ἡ παράμετρος $q \in [2, n]$ νὰ ἐμφανίζεται καὶ μέσα στὸν λογάριθμο τοῦ ἄνω φράγματος στὴν (2.1.4). Αὐτὸ δὲν ἔχει ἰδιαίτερη σημασία, ἁπλῶς κάνει σαφέστερη μία ἀναλογία τῆς ἀναγωγῆς ἀπὸ τὸ [21] καὶ μὲ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Bourgain (Θεώρημα 2.1.1) ὅτι τὰ ψ_2-σώματα ἔχουν φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερά: ἐνῷ εἶναι γνωστὸ ὅτι πολλὰ κυρτὰ σώματα δὲν εἶναι ψ_2 (μὲ κάποια σταθερὰ ποὺ νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διάστασι), σύμφωνα μὲ τὴν παρακάτω πρότασι ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου θὰ ἕπετο ἂν ὅλα τὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα παρουσίαζαν μία ψ_2-συμπεριφορὰ «κατὰ μέσο ὅρο», ἂν δηλαδὴ ὑπῆρχε μία ἀπόλυτη σταθερὰ $C > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ (ἢ τουλάχιστον γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K «μικρῆς διαμέτρου») καὶ γιὰ κάθε $q \in [2, n]$, νὰ ἰσχύει $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant C\sqrt{qn}L_K^2$. Αὐτὸ δὲν ἀποκλείεται ἀπὸ τὰ μέχρι τώρα γνωστὰ ἀποτελέσματα τῆς θεωρίας.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $q \in [2, n]$, γράφουμε

$$r_q(K) = \max\left\{1, \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}L_K^2}\right\}.$$

Θεώρημα 2.5.1. *Ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $\rho \in (0, 1/e)$ μὲ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα: ἂν $n \geqslant 2$ καὶ $2 \leqslant q \leqslant \rho n$, καὶ ἂν θέσουμε*

$$\alpha = 2 - \frac{1}{\log\left(\frac{n}{q}\right)}, \tag{2.5.1}$$

τότε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰδιότητα (β) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2, καθῶς καὶ τὴν ἰδιότητα

$$I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)) \leqslant \sqrt{\rho}nL_{K_\alpha}^2, \tag{2.5.2}$$

ἰσχύει ὅτι

$$L_{K_\alpha} \leqslant C\sqrt{r_q(K_\alpha)}\sqrt[4]{\frac{n}{q}}\log^2\left(\frac{n}{q}\right), \tag{2.5.3}$$

ὅπου C εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Ἂν θεωρήσουμε ἕνα σῶμα K_α ποὺ ἱκανοποιεῖ ἐπιπλέον καὶ τὴν ἰδιότητα (a) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2, τότε τὸ δεξιὸ μέλος τῆς (2.5.3) φράσσει καὶ τὴν L_n.

Ἀπόδειξις. Προσαρμόζουμε τὸ ἐπιχείρημα τῆς Παραγράφου 2.2. Ἔστω ὅτι ἔχουμε q, α καὶ ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 2.5.1 (μὲ τὴν σταθερὰ ρ νὰ ἔχει μία ἀρκετὰ μικρὴ τιμὴ ποὺ θὰ καθορίσουμε σὲ λίγο). Ὅπως καὶ στὴν Παράγραφο 2.2, ὁρίζουμε ἕνα κυρτὸ σῶμα $W \subseteq K_\alpha$ θέτοντας

$$W := \{x \in K_\alpha : h_{Z_q(K_\alpha)}(x) \leqslant C_1 I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha))\},$$

ὅπου $C_1 = e^{2\overline{\beta}_2}$ καὶ $\overline{\beta}_2$ εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ ἐμφανίζεται στὸ Λῆμμα 2.2.3. Ἔχουμε πάλι τοὺς ἐγκλεισμοὺς

$$\frac{1}{2}Z_2(K_\alpha) \subseteq Z_2(\overline{W}) \subseteq 2Z_2(K_\alpha),$$
$$Z_q(\overline{W}) \subseteq 2Z_q(K_\alpha)$$

καὶ

$$\overline{W} = |W|^{-1/n}W \subseteq 2W \subseteq 2K_\alpha.$$

Ἐξαιτίας αὐτῶν ἔχουμε ὅτι $x/2 \in W$ γιὰ κάθε $x \in \overline{W}$, καὶ ἄρα

$$h_{Z_q(\overline{W})}(x) \leqslant 2h_{Z_q(K_\alpha)}(x) = 4h_{Z_q(K_\alpha)}(x/2) \leqslant 4C_1 I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)), \tag{2.5.4}$$

ἐνῷ ταυτόχρονα

$$\log \overline{N}\big(\overline{W}, tD_n\big) \leqslant \log N\big(\overline{W}, 2^{-1}tD_n\big) \leqslant \log N(2K_\alpha, 2^{-1}tD_n) \leqslant \frac{4^\alpha \kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha}\, t^\alpha} \leqslant \frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4\, t^\alpha},$$

γιὰ ὅλα τὰ $t \geqslant 4\tau(2-\alpha)^{-3/2}$, ὅπου $\kappa' := \max\{\kappa, \tau^2\}$. Γιὰ κάθε τέτοιο t βρίσκουμε $z_1, \ldots, z_{N_t} \in \overline{W}$ μὲ $N_t \leqslant \exp\Big(\frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4\, t^\alpha}\Big)$ ἔτσι ὥστε

$$\overline{W} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_t}(z_i + tD_n),$$

καὶ ἔπειτα γράφουμε

$$\begin{aligned} nL_{K_\alpha}^2 &\leqslant 4\int_{\overline{W}} \|x\|_2^2 dx \leqslant 4\int_{\overline{W}} \max_{z\in\overline{W}} |\langle x, z\rangle|\, dx \\ &\leqslant 4\int_{\overline{W}} \max_{1\leqslant i\leqslant N_t} |\langle x, z_i\rangle| dx + 4\int_{\overline{W}} \max_{u\in tD_n} |\langle x, u\rangle| dx \\ &= 4\int_{\overline{W}} \max_{1\leqslant i\leqslant N_t} |\langle x, z_i\rangle| dx + 4t\omega_n^{1/n}\int_{\overline{W}} \|x\|_2 dx \\ &\leqslant 4\int_{\overline{W}} \max_{1\leqslant i\leqslant N_t} |\langle x, z_i\rangle| dx + c' tnL_{K_\alpha}. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Ἐπιλέγουμε

$$t_0 = 8\sqrt{C_2\kappa'}\sqrt{r_q(K_\alpha)}\,\sqrt[4]{\frac{n}{q}}(2-\alpha)^{-2},$$

ὅπου $C_2 = 16C_1\beta_1\overline{\beta}_1$, β_1 εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ μᾶς δίνει τὸ λῆμμα τοῦ Borell (βλέπε Πρόταση 1.3.9) καὶ $\overline{\beta}_1$ ἡ σταθερὰ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 2.2.1. Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ αὐτὸ τὸ t_0 ἰσχύει ὁ περιορισμὸς $t_0 \geqslant 4\tau(2-\alpha)^{-3/2}$, ἄρα ἡ (2.5.5) εἶναι ἀληθὴς καὶ γιὰ $t = t_0$, ἐνῷ ταυτόχρονα

$$t_0^2 \geqslant t_0^\alpha \geqslant \frac{1}{e}t_0^2. \tag{2.5.6}$$

Πράγματι, γιὰ τὴν δεύτερη ἀνισότητα στὴν (2.5.6) ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι $t_0^\alpha = \frac{t_0^2}{t_0^{1/\log\left(\frac{n}{q}\right)}}$ καὶ ὅτι ἰσχύει

$$e \geqslant t_0^{1/\log\left(\frac{n}{q}\right)} = \exp\left(\frac{\log(8\sqrt{C_2\kappa'}) + \log(\sqrt{r_q(K_\alpha)}) + \log\big(\sqrt[4]{\frac{n}{q}}\big) + \log\log\big(\frac{n}{q}\big)}{\log\big(\frac{n}{q}\big)}\right)$$

ἂν τὸ $\rho \geqslant \big(\frac{n}{q}\big)^{-1}$ ἐπιλεγεῖ κατάλληλα μικρὸ ὥστε νὰ ἰσχύουν καὶ οἱ ἀνισότητες

$$\log(8\sqrt{C_2\kappa'}) \leqslant \frac{1}{4}\log\Big(\frac{1}{\rho}\Big) \leqslant \frac{1}{4}\log\Big(\frac{n}{q}\Big) \quad \text{καὶ} \quad \log\log\big(\frac{n}{q}\big) \leqslant \frac{1}{4}\log\big(\frac{n}{q}\big)$$

Θέτουμε $p_0 := \frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4\, t_0^\alpha}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι $p_0 \geqslant q$ (ἴσως ἀφοῦ μειώσουμε καὶ ἄλλο τὴν τιμὴ τῆς σταθερᾶς ρ ἂν χρειάζεται): πράγματι, ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι (2.5.2) ἔχουμε ὅτι

$$\sqrt{r_q(K_\alpha)} \leqslant \sqrt{\frac{I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha))}{\sqrt{qn}L_{K_\alpha}^2}} \leqslant \sqrt[4]{\frac{\rho n}{q}},$$

καὶ ἄρα

$$t_0^2 \leqslant 64 C_2 \kappa' \sqrt{\rho}\, \frac{n}{q}(2-\alpha)^{-4},$$

συνεπῶς

$$p_0 = \frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4\, t_0^\alpha} \geqslant \frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4\, t_0^2} \geqslant \frac{q}{4C_2\sqrt{\rho}}.$$

Χρησιμοποιῶντας τὸ Λῆμμα 2.2.1 μὲ $q'=1$, λαμβάνουμε ὅτι

$$\int_{\overline{W}} \max_{1\leqslant i\leqslant N_{t_0}} |\langle x, z_i\rangle| dx \leqslant \overline{\beta}_1 \max_{1\leqslant i\leqslant N_{t_0}} h_{Z_{p_0}(\overline{W})}(z_i) \leqslant \overline{\beta}_1 \beta_1 \frac{p_0}{q} \max_{1\leqslant i\leqslant N_{t_0}} h_{Z_q(\overline{W})}(z_i).$$

Συνδυάζοντας αὐτὸ μὲ τὶς (2.5.5), (2.5.4) καὶ τὸν ὁρισμὸ τῆς σταθερᾶς C_2, βλέπουμε ὅτι

$$nL_{K_\alpha}^2 \leqslant C_2 \frac{p_0}{q} I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)) + c' t_0 n L_{K_\alpha}. \tag{2.5.7}$$

Ἐπίσης, ἀπὸ τὴν (2.5.6) καὶ τὸν ὁρισμὸ τῶν t_0 καὶ p_0, ἔπεται ὅτι

$$C_2 \frac{p_0}{q} I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)) \leqslant \frac{16 C_2 \kappa' n I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha))}{q(2-\alpha)^4\, t_0^2/e} \leqslant \frac{e}{4} n L_{K_\alpha}^2,$$

τὸ ὁποῖο σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν (2.5.7) ὁδηγεῖ στὸ ζητούμενο ἄνω φράγμα γιὰ τὴν L_{K_α}. □

2.6 Τελικὲς παρατηρήσεις

Οἱ Βαλέττας, Γιαννόπουλος καὶ Παούρης ἔχουν δείξει [20, Παράγραφος 3] ὅτι, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα δεύτερο ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα C, μὲ ἀπολύτως φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_C, τὸ ὁποῖο ἐμφανίζει τὴν ἴδια κατὰ βάσι συμπεριφορὰ μὲ τὸ K ὡς πρὸς τὶς L_q-νόρμες τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν.

Θεώρημα 2.6.1 (Βαλέττας-Γιαννόπουλος-Παούρης, 2011). *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς c_i, $i=1,\ldots,5$, ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, νὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα C στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες:*

(α) $L_C \leqslant c_1$.

(β) $c_2 Z_q(C) \subseteq \frac{Z_q(K)}{L_K} + \sqrt{q} B_2^n \subseteq c_3 Z_q(C)$ *γιὰ κάθε* $q\in[1,n]$.

(γ) $c_4 I_q(C,W) \leqslant \frac{I_q(K,W)}{L_K} + I_q(D_n, W) \leqslant c_5 I_q(C,W)$ *γιὰ κάθε* $q\in[1,n]$ *καὶ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα* W *στὸν* $\mathbb{R}^n$.

Τὸ σῶμα C ὁρίζεται ὡς «συνέλιξις» τοῦ K μὲ ἕνα κατάλληλο πολλαπλάσιο τῆς B_2^n. Ἂν ἐπιπλέον ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K εἶναι συμμετρικό, τότε καὶ τὸ σῶμα C, μὲ τὸν τρόπο ποὺ κατασκευάζεται στὸ [20], θὰ εἶναι συμμετρικό. Ὅμως τότε, χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $Z_n(C)\simeq \mathrm{conv}\{C,-C\} = C$ καὶ $Z_n(K)\simeq\mathrm{conv}\{K,-K\}=K$, βλέπουμε ὅτι

$$C \simeq \frac{K}{L_K} + D_n. \tag{2.6.1}$$

Ὅπως εἴδαμε, συνδυάζοντας τὸ Θεώρημα 2.3.9 καὶ τὴν Παρατήρησι 2.3.10 ποὺ ἕπεται αὐτοῦ, μᾶς ἀρκεῖ γιὰ τὴν ἀναγωγὴ τοῦ Θεωρήματος 2.1.6 ἢ τοῦ Θεωρήματος 2.5.1 νὰ μελετήσουμε τὴν συμπεριφορὰ τῆς παραμέτρου $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ γιὰ τὰ συμμετρικά, ἰσοτροπικὰ (ἢ σχεδὸν ἰσοτροπικὰ) κυρτὰ σώματα K ποὺ ἔχουν μικρὴ διάμετρο, γιὰ τὰ ὁποῖα δηλαδὴ ἰσχύει $R(K) \leqslant \gamma\sqrt{n}L_K$ γιὰ κάποια σταθερὰ $\gamma \simeq 1$. Ἡ ἑπομένη πρότασις δείχνει ὅτι ἀρκεῖ γιὰ τὸν ἴδιο σκοπὸ νὰ περιοριστοῦμε καὶ σὲ σώματα K τὰ ὁποῖα εἶναι $c(\gamma)$-ἰσομορφικὰ μὲ τὴν Εὐκλείδεια μπάλα ὄγκου 1.

Πρότασις 2.6.2. *Ἔστω K ἕνα συμμετρικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ ἀκτίνα $R(K) \leqslant \gamma\sqrt{n}L_K$. Τότε, ὑπάρχει ἕνα δεύτερο συμμετρικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα C στὸν $\mathbb{R}^n$ ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύει:*

(α) $L_C \leqslant c_6$.

(β) $c_7 D_n \subseteq C \subseteq c_8 \gamma D_n$, *καὶ*

(γ) $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant c_9 I_1(C, Z_q^\circ(C)) L_K^2$ *γιὰ ὅλα τὰ* $1 \leqslant q \leqslant n$,

ὅπου οἱ $c_6, c_7, c_8, c_9 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

Ἀπόδειξις. Θυμόμαστε τὸ Λῆμμα 1.4.5, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο ἔχουμε $w_q(Z_q(K)) \simeq \sqrt{q/n} I_q(K)$ γιὰ κάθε $q \geqslant 1$, καὶ γράφουμε ἑπομένως

$$\begin{aligned} c_1'\sqrt{q}L_K = c_1'\sqrt{\frac{q}{n}} I_2(K) \leqslant c_1'\sqrt{\frac{q}{n}} I_q(K) \leqslant w_q(Z_q(K)) \\ \leqslant c_2'\sqrt{\frac{q}{n}} I_q(K) \leqslant c_2'\sqrt{\frac{q}{n}} R(K) \leqslant c_2'\gamma\sqrt{q}L_K. \end{aligned}$$

γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1', c_2' > 0$. Θεωροῦμε ἔπειτα τὸ κυρτὸ σῶμα C ποὺ μᾶς δίνει τὸ Θεώρημα 2.6.1, καὶ γιὰ τὸ ὁποῖο ἔχουμε ἤδη ὅτι $L_C \simeq 1$. Δεδομένου ὅτι $\frac{1}{L_K} Z_q(K) \subseteq c_3 Z_q(C)$, μποροῦμε νὰ γράψουμε $c_3 L_K Z_q^\circ(K) \supseteq Z_q^\circ(C)$, καὶ ἄρα

$$I_1(C, Z_q^\circ(C)) \geqslant I_1(C, c_3 L_K Z_q^\circ(K)) = \frac{1}{c_3 L_K} I_1(C, Z_q^\circ(K)).$$

Ἐφαρμόζοντας καὶ τὴν ἀνισότητα $c_5 I_1(C, W) \geqslant \frac{I_1(K,W)}{L_K}$ γιὰ $W = Z_q^\circ(K)$, λαμβάνουμε ὅτι

$$I_1(C, Z_q^\circ(C)) \geqslant c_9 \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{L_K^2},$$

ὅπου $c_9 = (c_3 c_5)^{-1}$. Τέλος, ἀπὸ τὴν (2.6.1) καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $\frac{K}{L_K} \subseteq \gamma\sqrt{n}B_2^n$, βλέπουμε ὅτι $c_7 D_n \subseteq C \subseteq c_8 \gamma D_n$. □

Συνοψίζουμε τὰ ἀποτελέσματα αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου ξεκινῶντας μὲ τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός 2.6.3. Γιὰ κάθε $\alpha \in [1,2)$ καὶ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, ἂς συμβολίζουμε μὲ $\mathcal{IK}_\alpha(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ τὴν κλάση τῶν (συμμετρικῶν) ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων K_α στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχουν τὶς ἰδιότητες ποὺ ἀναφέρει τὸ Θεώρημα 2.3.9. Γιὰ εὐκολία, θέτουμε $\alpha_n = 2 - 1/\log n$. Ἔστω ἐπίσης $\rho > 0$ ἡ σταθερὰ ποὺ ἀναφέρεται στὸ Θεώρημα 2.1.6 ἢ στὸ Θεώρημα 2.5.1. Ὁρίζουμε $A(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ νὰ εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν $q \in [2,n]$ γιὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχει κάποιο σῶμα $K \in \mathcal{IK}_{\alpha_n}(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant \rho n L_K^2$. Παρατηροῦμε ὅτι ἤδη, ἀπὸ τὸ ἄνω φράγμα στὴν (2.1.7), μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι τὸ σύνολο $A(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ περιέχει ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[2, c\sqrt{n}]$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$, καὶ ὅτι ὁποιαδήποτε βελτίωσις στὸ ἄνω φράγμα τῆς (2.1.7) θὰ μᾶς ἔδινε αὐτομάτως καὶ ὅτι τὸ $A(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ περιέχει ἕνα ἀκόμη μεγαλύτερο κομμάτι τοῦ $[2,n]$. Γιὰ αὐτὰ τὰ q θέτουμε ἔπειτα

$$B(q) = \inf\left\{\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}L_K^2} : K \in \mathcal{IK}_{\alpha_n}(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)\right\},$$

καὶ θυμόμαστε ὅτι ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.1.6 ἔχουμε ὅτι

$$\delta L_n \leqslant C\sqrt{\kappa}\sqrt[4]{n/q}\log^2 n \max\left\{1, \sqrt{B(q)}\right\}.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ὁρίζουμε $A'(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ νὰ εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν $q \in [2, \rho^2 n]$ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: ὑπάρχει κάποιο σῶμα $K \in \mathcal{IK}_\alpha(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$, ὅπου $\alpha = \alpha(q) = 2 - 1/\log(n/q)$, τὸ ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τὴν $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant \rho n L_K^2$. Καὶ πάλι, ἐξαιτίας τοῦ ἄνω φράγματος στὴν (2.1.7), τὸ σύνολο $A'(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ περιέχει τουλάχιστον ἕνα ὑποδιάστημα τῆς μορφῆς $[2, c\sqrt{n}]$, ἐνῷ γιὰ κάθε $q \in A'(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)$ μποροῦμε νὰ θέσουμε

$$B'(q) = \inf\left\{\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}L_K^2} : K \in \mathcal{IK}_{\alpha(q)}(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta), I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leqslant \rho n L_K^2\right\},$$

καὶ νὰ θυμηθοῦμε ὅτι ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.5.1 ἰσχύει

$$\delta L_n \leqslant C\sqrt{\kappa}\sqrt[4]{n/q}\log^2(n/q) \max\left\{1, \sqrt{B'(q)}\right\}.$$

Ἔχουμε καταλήξει ἑπομένως στὸ ἑξῆς

Θεώρημα 2.6.4. *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς κ, τ, γ καὶ $\delta > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, νὰ ἰσχύει*

$$L_n \leqslant \min\left\{\frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta}\sqrt[4]{n/q}\log^2 n \max\left\{1, \sqrt{B(q)}\right\} : q \in A(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)\right\}$$

καὶ

$$L_n \leqslant \min\left\{\frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta}\sqrt[4]{n/q}\log^2(n/q) \max\left\{1, \sqrt{B'(q)}\right\} : q \in A'(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)\right\},$$

ὅπου C εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Ἐξαιτίας τῆς Προτάσεως 2.6.2, μποροῦμε νὰ δώσουμε καὶ μία ἀκόμη ἐκδοχὴ τῆς ἀναγωγῆς ποὺ περιέχεται στὸ παραπάνω θεώρημα.

Ὁρισμός 2.6.5. Γιὰ κάθε σταθερὰ $\gamma \geqslant 1$, ἂς συμβολίζουμε μὲ $\mathcal{IK}_{\rm sd}(n,\gamma)$ τὴν κλάση τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων C στὸν $\mathbb{R}^n$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει

(α) $L_C \leqslant c_6$ καὶ

(β) $c_7 D_n \subseteq C \subseteq c_8 \gamma D_n$,

ὅπου $c_i > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές (γιὰ παράδειγμα, αὐτὲς ποὺ μᾶς δίνει ἡ Πρότασις 2.6.2). Γιὰ κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$, θέτουμε

$$\Gamma(q) = \sup\left\{\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}} : K \in \mathcal{IK}_{\rm sd}(n,\gamma)\right\}.$$

Τότε, τὸ Θεώρημα 2.3.9 καὶ ἡ Πρότασις 2.6.2 συνεπάγονται τὸ ἀκόλουθο

Θεώρημα 2.6.6. *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς κ, τ, γ καὶ $\delta > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, νὰ ἰσχύει*

$$L_n \leqslant \inf\left\{\frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta}\sqrt[4]{n/q}\log^2 n\sqrt{\Gamma(q)} : q \in A(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)\right\}$$

καὶ

$$L_n \leqslant \inf\left\{\frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta}\sqrt[4]{n/q}\log^2 (n/q)\sqrt{\Gamma(q)} : q \in A'(n,\kappa,\tau,\gamma,\delta)\right\}$$

(ἐδῶ δὲν χρειάζεται νὰ γράψουμε $\max\{1, \Gamma(q)\}$ ἐπειδὴ ἀπὸ τὴν (2.1.7) ἔχουμε ἤδη ὅτι $\Gamma(q) \gtrsim 1$).

Προκύπτει τελικῶς ὅτι, ἂν θέλουμε νὰ κατανοήσουμε τὸ κατὰ πόσον ἡ συμπεριφορὰ τῶν ποσοτήτων $B(q)$ καὶ $B'(q)$ θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ὁδηγήσει σὲ καλύτερα ἄνω φράγματα γιὰ τὴν L_n, μποροῦμε καὶ νὰ περιοριστοῦμε στὴν κλάση $\mathcal{IK}_{\rm sd}(n,\gamma)$ μελετῶντας τὴν παράμετρο $\frac{I_1(K,Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}}$ ἐκεῖ.

Κεφαλαιο 3

Ὁ ὄγκος τῶν κεντροειδῶν σωμάτων καὶ μία δεύτερη ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου

3.1 Συνδυάζοντας τὶς μεθόδους τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη καὶ τῶν Klartag καὶ Milman

Ὅπως εἴπαμε στὴν Παράγραφο 1.4.1, τὰ L_q-κεντροειδῆ σώματα ὁρίστηκαν ἀπὸ τοὺς Lutwak, Yang καὶ Zhang [37], οἱ ὁποῖοι, χρησιμοποιῶντας ἕνα ἐπιχείρημα συμμετρικοποιήσεως, ἔδωσαν ἐπίσης ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τους. Συγκεκριμένα ἔδειξαν ὅτι

$$|Z_q(K)|^{1/n} \geqslant |Z_q(\overline{B}_2^n)|^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{q}{n}} \tag{3.1.1}$$

γιὰ κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ καὶ γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ὁ Παούρης στὸ [52] ἔδωσε ἕνα ἄνω φράγμα γιὰ αὐτὸν τὸν ὄγκο στὶς περιπτώσεις ποὺ τὸ K εἶναι ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 ποὺ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0: ἔδειξε ὅτι, γιὰ κάθε $q \geqslant 1$,

$$|Z_q(K)|^{1/n} \leqslant C\sqrt{\frac{q}{n}}L_K \tag{3.1.2}$$

ὅπου $C > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι δὲν χρειάζεται νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K εἶναι ἰσοτροπικὸ ἢ ἔχει κάποια ἄλλη εἰδικὴ ἰδιότητα, ἀφοῦ γιὰ κάθε $S \in SL(n)$ ἰσχύει $Z_q(S(K)) = S(Z_q(K))$, καὶ ἄρα $|Z_q(K)| = |Z_q(S(K))|$.

Συνδυάζοντας τώρα αὐτὰ τὰ φράγματα μὲ τὶς Προτάσεις 1.3.21 καὶ 1.4.2 καὶ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς ἑνὸς μέτρου, λαμβάνουμε ἄνω καὶ κάτω φράγματα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν κεντροειδῶν σωμάτων ὁποιουδήποτε n-διαστάτου λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου πιθανότητος ποὺ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0.

Πρότασις 3.1.1 (Lutwak-Yang-Zhang, Παούρης). *Έστω μ ένα μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $\mathrm{bar}(\mu)=0$. Τότε, γιὰ κάθε $q\in[1,n]$ ἔχουμε ὅτι*

$$\frac{c_1}{(f_\mu(0))^{1/n}}\sqrt{\frac{q}{n}}\simeq\frac{c_1}{\|\mu\|_\infty^{1/n}}\sqrt{\frac{q}{n}}\leqslant|Z_q(\mu)|^{1/n}\leqslant c_2\sqrt{\frac{q}{n}}\,[\det\mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}},\tag{3.1.3}$$

ὅπου οἱ $c_1,c_2>0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Εἰδικότερα, ἂν τὸ μ εἶναι ἰσοτροπικό, τότε

$$\frac{c_1}{L_\mu}\sqrt{\frac{q}{n}}\leqslant|Z_q(\mu)|^{1/n}\leqslant c_2\sqrt{\frac{q}{n}}.$$

Προφανῶς, ἀφοῦ δὲν γνωρίζουμε τὸ ἂν ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἀληθὴς ἢ ὄχι, δὲν μποροῦμε νὰ γνωρίζουμε ἐν γένει καὶ ποιὰ ἀπὸ τὶς (3.1.1) καὶ (3.1.2) (ἢ ποιὸ μέλος τῆς (3.1.3)) δίνει τὴν σωστὴ τάξι μεγέθους γιὰ τὸ $|Z_q(K)|^{1/n}$ (ἢ τὸ $|Z_q(\mu)|^{1/n}$ ἀντίστοιχα) καὶ σὲ ποιὲς περιπτώσεις. Στὸ [29] οἱ Klartag καὶ E. Milman προτείνουν μία διαφορετικὴ προσέγγισι δίνοντας μία ἐκτίμησι γιὰ τὸν ὄγκο τοῦ $Z_q(\mu)$ μέσῳ τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace τοῦ μέτρου μ, ἐκτίμησι ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβὴς ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν ἰσχύει ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου ἢ ὄχι.

Θυμόμαστε ὅτι, σύμφωνα μὲ τοὺς Ὁρισμοὺς 1.4.13 καὶ 1.4.15,

$$\Lambda_q(\mu):=\{x\in\mathbb{R}^n:\Lambda_\mu(x)\leqslant q\ \text{καὶ}\ \Lambda_\mu(-x)\leqslant q\}$$

γιὰ κάθε q, ἐνῷ γιὰ κάθε $x\in A(\mu):=\{\Lambda_\mu<\infty\}$ συμβολίζουμε μὲ μ_x τὸ κενταρισμένο μέτρο πιθανότητος ποὺ ἔχει πυκνότητα

$$f_{\mu_x}(y):=\frac{1}{\int e^{\langle y,x\rangle}d\mu(y)}\exp\big(\langle y+\nabla\Lambda_\mu(x),x\rangle\big)f_\mu(y+\nabla\Lambda_\mu(x)).$$

Ἐπίσης, γιὰ κάθε τέτοιο μέτρο ἔχουμε ὅτι

$$\mathrm{Cov}(\mu_x)=\mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(x).$$

Θεώρημα 3.1.2 (Klartag-E. Milman, [29]). *Έστω μ ένα μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $\mathrm{bar}(\mu)=0$. Τότε, γιὰ κάθε $q\in[1,n]$ ἔχουμε ὅτι*

$$|Z_q(\mu)|^{1/n}\simeq\sqrt{\frac{q}{n}}\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_q(\mu)}[\det\mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.\tag{3.1.4}$$

Γιὰ τὴν ἀπόδειξί της παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι συνέπεια τοῦ Λήμματος 1.4.18 εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς

Πόρισμα 3.1.3. *Έστω μ ένα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μὲ $\mathrm{bar}(\mu)=0$. Γιὰ κάθε $p>0$, ἰσχύει*

$$\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)\subseteq 2p\,\Lambda_p(\mu)^\circ.$$

Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζοντας τὸ Λῆμμα 1.4.18 μὲ $q=r=p$, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned}\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)&\subseteq\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\{\Lambda_\mu\leqslant p\}\right)\subseteq 2p\,\{\Lambda_\mu\leqslant p\}^\circ\\&\subseteq 2p\,\Lambda_p(\mu)^\circ,\end{aligned}$$

ἀφοῦ ὁ ἐγκλεισμὸς $\{\Lambda_\mu\leqslant p\}\supseteq\Lambda_p(\mu)$ συνεπάγεται τὸν ἐγκλεισμὸ $\{\Lambda_\mu\leqslant p\}^\circ\subseteq\Lambda_p(\mu)^\circ$. □

Ὁρισμός 3.1.4. Γιὰ κάθε $p>0$ θέτουμε

$$\Psi_p := \left(\frac{1}{|\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)|} \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(x)\,dx \right)^{1/n}.$$

Πρότασις 3.1.5. *Γιὰ κάθε $p>0$, ἰσχύει ὅτι*

$$|\Lambda_p(\mu)|^{1/n} \leqslant C\sqrt{\frac{p}{n}}\,\frac{1}{\sqrt{\Psi_p}}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζοντας τὸ Πόρισμα 3.1.3 καὶ τὴν ἀλλαγὴ μεταβλητῶν $x=\nabla\Lambda_\mu(y)$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned}|2p\Lambda_p(\mu)^\circ| &\geqslant \left|\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)\right| = \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(y)\,dy \\ &= \left|\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right|\,\Psi_p^n.\end{aligned}$$

Μὲ ἄλλα λόγια, ἔχουμε ὅτι

$$|\Lambda_p(\mu)^\circ|^{1/n} \geqslant \frac{\Psi_p}{4p}\,|\Lambda_p(\mu)|^{1/n}.$$

Ταυτόχρονα, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Blaschke-Santaló, προκύπτει ὅτι

$$|\Lambda_p(\mu)^\circ|^{1/n} \leqslant \frac{c}{n}\,\frac{1}{|\Lambda_p(\mu)|^{1/n}},$$

καὶ ἄρα

$$|\Lambda_p(\mu)|^{2/n} \leqslant \frac{C^2 p}{n}\,\frac{1}{\Psi_p},$$

ὅπου $C^2=4c$. □

Ἀπόδειξις τοῦ κάτω φράγματος στὴν (3.1.4). Ἀπὸ τὶς Προτάσεις 1.4.16 καὶ 3.1.5, λαμβάνουμε ὅτι

$$|\Lambda_p(\mu)|^{1/n} \leqslant C\sqrt{\frac{p}{n}}\,\frac{1}{\sqrt{\Psi_p}}$$

καὶ ὅτι

$$\Lambda_p(\mu) \simeq pZ_p(\mu)^\circ.$$

Ἑπομένως,

$$\begin{aligned}|Z_p(\mu)|^{1/n} &\geqslant \frac{c_1}{n|Z_p(\mu)^\circ|^{1/n}} \geqslant \frac{c_2 p}{n|\Lambda_p(\mu)|^{1/n}} \geqslant c_3\frac{p}{n}\sqrt{\frac{n}{p}}\sqrt{\Psi_p} = c_3\sqrt{\frac{p}{n}}\sqrt{\Psi_p} \\ &= c_3\sqrt{\frac{p}{n}}\left(\frac{1}{|\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)|}\int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{2n}} \\ &\geqslant c_3\sqrt{\frac{p}{n}}\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)}[\det \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(\xi)]^{\frac{1}{2n}} \\ &= c_3\sqrt{\frac{p}{n}}\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)}[\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}},\end{aligned}$$

ὅπου χρησιμοποιοῦμε καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló. $\square$

Γιὰ νὰ ὁλοκληρώσουν τὴν ἀπόδειξι τοῦ Θεωρήματος 3.1.2, οἱ Klartag καὶ E. Milman χρησιμοποιοῦν καὶ τὸ ἄνω φράγμα τοῦ Παούρη στὴν (3.1.3), καθῶς καὶ τὴν Πρότασι 1.4.17 ποὺ εἴδαμε στὴν Παράγραφο 1.4.3, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία, ἂν $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, τότε

$$Z_q(\mu) \simeq Z_q(\mu_x) \quad \text{γιὰ κάθε } q \geqslant p. \tag{3.1.5}$$

Ἀπόδειξις τοῦ ἄνω φράγματος στὴν (3.1.4). Τὸ ἄνω φράγμα στὴν (3.1.3) συνεπάγεται ὅτι

$$\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} |Z_p(\mu_\xi)|^{1/n} \leqslant C\sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Ἐπιπλέον, ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.4.17 γνωρίζουμε ὅτι $Z_p(\mu_\xi) \simeq Z_p(\mu)$ γιὰ ὅλα τὰ $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, καὶ ἑπομένως

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \leqslant C\sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Αὐτὸ ὁλοκληρώνει τὴν ἀπόδειξι τοῦ Θεωρήματος 3.1.2. $\square$

Μία ἄμεση συνέπεια τοῦ Θεωρήματος 3.1.2 εἶναι τὸ ἀκόλουθο

Θεώρημα 3.1.6. *Ἔστω μ ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $\mathrm{bar}(\mu) = 0$. Γιὰ κάθε $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$,*

$$\frac{|Z_p(\mu)|^{1/n}}{\sqrt{p}} \geqslant c\frac{|Z_q(\mu)|^{1/n}}{\sqrt{q}},$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Δεδομένου ὅτι ἐξ ὁρισμοῦ ἰσχύει $\Lambda_p(\mu) \subseteq \Lambda_q(\mu)$, ἔχουμε ὅτι

$$\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}} \geqslant \inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_q(\mu)} [\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Ἄρα, γιὰ τὸ ζητούμενο, ἀρκεῖ νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὸν τύπο τοῦ Θεωρήματος 3.1.2. $\square$

Ἔχοντας δείξει τὸ Θεώρημα 3.1.2, οἱ Klartag καὶ E. Milman χρησιμοποιοῦν τὸν τύπο γιὰ τὸν ὄγκο τῶν κεντροειδῶν σωμάτων ποὺ μᾶς δίνει ὡς ἑξῆς: ὁρίζουν μία «κληρονομικὴ» παραλλαγὴ τῆς παραμέτρου $q_*(\mu)$ (βλέπε Παράγραφο 1.4.1) θέτοντας

$$q_*^H(\mu) := n \inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{q_*(\pi_E\mu)}{k},$$

ὅπου $\pi_E\mu$ εἶναι τὸ περιθώριο μέτρο τοῦ μ ποὺ φέρεται στὸν ὑπόχωρο E, καὶ ἀποδεικνύουν ὅτι

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geqslant c\sqrt{\frac{p}{n}}\,[\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}} = c\sqrt{\frac{p}{n}}$$

γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $p \leqslant q_*^H(\mu)$. Εἰδικότερα, ἂν θυμηθοῦμε καὶ ὅτι $L_\mu \cdot |Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq 1$ ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.4.2, αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι

$$L_\mu \simeq \frac{1}{|Z_n(\mu)|^{1/n}} \leqslant \frac{1}{|Z_{q_*^H(\mu)}(\mu)|^{1/n}} \leqslant C\sqrt{\frac{n}{q_*^H(\mu)}}. \tag{3.1.6}$$

Ὅμως, ὅπως εἴδαμε στὴν Πρόταση 1.4.8, ὁ Παούρης ἔχει δείξει ὅτι $q_*(\nu) \gtrsim \sqrt{m}$ γιὰ κάθε $\nu \in \mathcal{IL}_{[m]}$, καὶ ἄρα $q_*^H(\mu) \gtrsim \sqrt{n}$ γιὰ τὸ τυχὸν ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$, πράγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ (3.1.6) ὁδηγεῖ σὲ μία δεύτερη ἀπόδειξη τοῦ καλυτέρου γνωστοῦ φράγματος γιὰ τὴν L_n: $L_n \leqslant C\sqrt[4]{n}$. Ἐπίσης, ὅπως ἐξηγήσαμε στὴν Παρατήρηση 1.4.9, ἂν τὸ μ εἶναι ψ_α μὲ σταθερὰ b_α, τότε ἰσχύει ὅτι $q_*(\mu) \gtrsim n^{\alpha/2}/\beta_\alpha^\alpha$. Ἀφοῦ καὶ ὅλα τὰ περιθώρια μέτρα τοῦ μ θὰ εἶναι ἐπίσης ψ_α μὲ σταθερὰ b_α, θὰ ἔχουμε καὶ ὅτι $q_*^H(\mu) \gtrsim n^{\alpha/2}/\beta_\alpha^\alpha$, ἀπὸ ὅπου προκύπτει τελικῶς τὸ γενικὸ φράγμα τοῦ Θεωρήματος 2.1.2 γιὰ τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ τῶν ψ_α μέτρων.

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, στὸ προηγούμενο κεφάλαιο εἴδαμε ὅτι οἱ Δαφνὴς καὶ Παούρης [14] κάνουν τὴν ἑξῆς ἐνδιαφέρουσα παρατήρηση: ἕνας τρόπος νὰ βροῦμε ἄνω φράγματα γιὰ τὴν L_n εἶναι νὰ μελετήσουμε τὴν συμπεριφορὰ τῆς συναρτήσεως $q \mapsto I_q(\mu)$, $q \in (-n, 0)$, ὅπου

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q f_\mu(x)dx\right)^{1/q}$$

γιὰ κάθε $q > -n$, $q \neq 0$. Δοθέντος n-διαστάτου ἰσοτροπικοῦ λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ καὶ κάποιου $\delta \geqslant 1$, ὁρίζουν τὴν παράμετρο

$$q_{-c}(\mu, \delta) := \max\{1 \leqslant p \leqslant n-1 : I_{-p}(\mu) \geqslant \delta^{-1} I_2(\mu) = \delta^{-1}\sqrt{n}\}.$$

καὶ ἔπειτα ἀποδεικνύουν τὸ Θεώρημα 2.4.1: γιὰ κάθε $\delta \geqslant 1$ ἰσχύει ὅτι

$$L_n \leqslant C\delta \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}(\mu,\delta)}}\, \log^2\Big(\frac{en}{q_{-c}(\mu,\delta)}\Big), \tag{3.1.7}$$

ὅπου C εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Ἡ προσέγγισίς τους ἔχει ἄμεση σχέσι μὲ τὰ ἀποτελέσματα στὸ [53], κάποια ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀναφέραμε στὴν Παράγραφο 1.4.1, ὅπως γιὰ παράδειγμα τὸν τύπο

$$I_{-k}(\mu) \simeq \sqrt{n}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F f_\mu(0) d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}$$

τοῦ Θεωρήματος 1.4.6. Βάσει αὐτοῦ προκύπτει, ὅπως εἴδαμε στὸ Θεώρημα 2.4.3, ὅτι $I_{-p}(\mu) \geqslant c_0\sqrt{n}/L_n$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ καὶ κάθε $p \leqslant n-1$, καὶ ἄρα ὅτι

$$\inf_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} q_{-c}\big(\mu, c_0^{-1}L_n\big) = n-1 \tag{3.1.8}$$

(ὅπου $c_0 > 0$ εἶναι μία ἀρκετὰ μικρὴ ἀπόλυτη σταθερά).

Σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θὰ παρουσιάσουμε δύο ἀκόμη κληρονομικὲς παραμέτρους, οἱ ὁποῖες, ὅπως τελικῶς θὰ δείξουμε, εἶναι ἰσοδύναμες, καὶ στὴν συνέχεια θὰ δείξουμε ὅτι τὰ ἀποτελέσματα τῶν

Δαφνῆ καὶ Παούρη ἀπὸ τὸ [14] καὶ τῶν Klartag καὶ Milman ἀπὸ τὸ [29] ἰσχύουν καὶ γιὰ κάθε p μέχρι αὐτὲς τὶς παραμέτρους. Ἡ πρώτη παράμετρος προκύπτει ἀμέσως, κατὰ τὸν τρόπο τῶν Klartag καὶ Milman, ὡς μία «κληρονομικὴ» παραλλαγὴ τῆς παραμέτρου $q_{-c}(\mu,\delta)$ ποὺ ὅρισαν οἱ Δαφνὴς καὶ Παούρης: ϑέτουμε

$$q_{-c}^{H}(\mu,\delta) := n\inf_{k}\inf_{E\in G_{n,k}}\frac{\lfloor q_{-c}(\pi_E\mu,\delta)\rfloor}{k}$$

(σημειώνουμε ὅτι ἡ χρῆσις τῶν ἀκεραίων μερῶν στὸν ὁρισμὸ δὲν ἔχει εἰδικὴ σημασία, ἁπλῶς μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διατυπώσουμε κάποια ἀποτελέσματα πιὸ εὔκολα). Γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὴν δεύτερη κληρονομικὴ παράμετρο, ὁρίζουμε πρῶτα τὴν ἑξῆς παράμετρο

$$r_{\sharp}(\mu,A) := \max\{1\leqslant k\leqslant n-1 : \exists\, E\in G_{n,k} \text{ τέτοιος ὥστε } L_{\pi_E\mu}\leqslant A\} \tag{3.1.9}$$

γιὰ κάθε λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε σταθερὰ $A\geqslant 1$. Στὴν συνέχεια ϑέτουμε, ὅπως καὶ πρίν,

$$r_{\sharp}^{H}(\mu,A) := n\inf_{k}\inf_{E\in G_{n,k}}\frac{r_{\sharp}(\pi_E\mu,A)}{k}$$

(ὅπου συμφωνοῦμε ὅτι $r_{\sharp}(\pi_{\mathbb{R}\theta}\mu,A) = q_{-c}(\pi_{\mathbb{R}\theta}\mu,A) = 1$ γιὰ ὅλα τὰ μονοδιάστατα περιθώρια μέτρα).

Τὸ ἀκόλουθο ϑεώρημα ἰσχύει γιὰ κάθε n-διάστατο ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ.

Θεώρημα 3.1.7. *Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $C_1, C_2 > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ κάθε $A\geqslant 1$, νὰ ἰσχύει*

$$r_{\sharp}^{H}(\mu,A)\leqslant q_{-c}^{H}(\mu,C_1A)\leqslant r_{\sharp}^{H}(\mu,C_2A). \tag{3.1.10}$$

Ἐπιπροσθέτως, γιὰ κάθε $p\leqslant r_{\sharp}^{H}(\mu,A)$ ἔχουμε ὅτι

$$|Z_p(\mu)|^{1/n}\geqslant\frac{c}{A}\sqrt{\frac{p}{n}},$$

ὅπου $c>0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Παρατήρησις. Ἂς παρατηρήσουμε ὅτι, ὅπως στὴν (3.1.6), τὸ Θεώρημα 3.1.7 συνεπάγεται ὅτι

$$L_{\mu}\leqslant CA\sqrt{\frac{n}{r_{\sharp}^{H}(\mu,A)}}\leqslant CA\sqrt{\frac{n}{q_{-c}^{H}\left(\mu,\frac{C_1}{C_2}A\right)}} \tag{3.1.11}$$

(γιὰ τὴν ἀκρίβεια, ἡ δεύτερη ἀνισότητα στὴν (3.1.11) ἔχει νόημα ἐφ᾽ ὅσον ὑποθέσουμε ὅτι τὸ A εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ κάποιο $A_0\simeq 1$).

Ἕνα ἀπὸ τὰ κύρια ἀποτελέσματα τοῦ [53] (βλέπε Θεώρημα 1.4.10) εἶναι ὅτι, ἂν μ εἶναι ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$, τότε

$$q_{-c}(\mu,\delta_0)\gtrsim q_*(\mu)\geqslant c_1\sqrt{n}, \tag{3.1.12}$$

ὅπου $c_1 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερὰ καὶ $\delta_0 \simeq 1$. Ἀφοῦ κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_E\mu$ ἑνὸς ἰσοτροπικοῦ μέτρου μ εἶναι ἐπίσης ἰσοτροπικό, ἡ ἀνισότητα (3.1.12) συνεπάγεται ὅτι $q_{-c}(\pi_E\mu, \delta_0) \gtrsim q_*(\pi_E\mu) \geqslant c_1\sqrt{k}$ γιὰ κάθε $E \in G_{n,k}$, καὶ ἄρα ὅτι

$$q_{-c}^H(\mu, \delta_0) \gtrsim q_*^H(\mu) \geqslant c_1\sqrt{n}. \tag{3.1.13}$$

Ὅμως τότε τὸ Θεώρημα 3.1.7 μᾶς λέει ὅτι ἡ παράμετρος $r_\sharp^H(\mu, A_1)$ εἶναι καὶ αὐτὴ τουλάχιστον τῆς τάξεως τοῦ $\sqrt{n}$ γιὰ κάποιο $A_1 \simeq 1$ καὶ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι, ἀφοῦ ἡ (3.1.11) ἰσχύει γενικά, ἀρκεῖ ἡ σταθερὰ A νὰ εἶναι μεγαλύτερη κάποιου $A_0 \simeq 1$, μποροῦμε ἀντικαθιστῶντας τὸ $q_{-c}(\mu, A)$ μὲ τὸ $q_{-c}^H(\mu, A)$ νὰ διώξουμε τὸν λογαριθμικὸ ὅρο στὴν ἀνισότητα (3.1.7), βελτιώνοντας ἔτσι λίγο τὰ φράγματα γιὰ τὴν L_n ποὺ μᾶς δίνει ἡ μέθοδος τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη (σὲ ἐκεῖνες τὶς περιπτώσεις βεβαίως ποὺ οἱ ἐκτιμήσεις ποὺ ἔχουμε γιὰ τὶς δύο παραμέτρους εἶναι τῆς ἰδίας τάξεως, ὅπως συμβαίνει γιὰ παράδειγμα στὶς (3.1.12) καὶ (3.1.13)).

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, τὸ παράδειγμα (ἑνὸς καταλλήλου πολλαπλασίου) τοῦ ὁμοιομόρφου μέτρου στὴν B_1^n, δηλαδὴ τὴν μοναδιαία μπάλα τοῦ χώρου ℓ_1^n, μᾶς δείχνει ὅτι ὑπάρχουν ἰσοτροπικὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα μ στὸν $\mathbb{R}^n$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ὅτι $q_*(\mu) \simeq \sqrt{n}$, καὶ ἄρα ὅτι $q_*^H(\mu) \simeq \sqrt{n}$. Τίποτε ἀπὸ ὅσα γνωρίζουμε μέχρι τώρα δὲν ἀποκλείει ὅμως, ἀκόμη καὶ γιὰ τέτοια μέτρα, ἡ παράμετρος $q_{-c}^H(\mu, \delta_0)$ νὰ εἶναι πολὺ μεγαλύτερη τοῦ $\sqrt{n}$. Μάλιστα, ἂν ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἀληθής, βλέπουμε ἀπὸ τὴν (3.1.8) ὅτι ἡ παράμετρος $q_{-c}^H(\mu, \delta_1)$ πρέπει νὰ εἶναι τῆς τάξεως τοῦ n γιὰ κάποιο $\delta_1 \simeq c_0^{-1}L_n \simeq 1$. Αὐτὸ δείχνει ὅτι ἡ ἐπιλογὴ τῶν παραμέτρων $r_\sharp^H(\mu, \cdot)$ καὶ $q_{-c}^H(\mu, \cdot)$ εἶναι συμβατὴ μὲ μία προσπάθεια νὰ ἐπεκτείνουμε τὴν μέθοδο τῶν Klartag καὶ Milman καὶ τὸ διάστημα τῶν p γιὰ τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται, καὶ ταυτοχρόνως νὰ δώσουμε μία ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου. Ἐπιπλέον, ἡ παράμετρος $r_\sharp(\mu, A)$, δηλαδὴ ἡ μεγαλύτερη διάστασις $k \leqslant n-1$ στὴν ὁποία μποροῦμε νὰ βροῦμε περιθώριες κατανομὲς τοῦ μέτρου μ ποὺ ἔχουν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ὄχι μεγαλύτερη ἀπὸ A, ἐμφανίζει ἐνδιαφέρον ἀπὸ μόνη της. Στὴν Παράγραφο 3.3 θὰ ἀναφέρουμε κάποια πράγματα ποὺ γνωρίζουμε ἤδη σχετικὰ μὲ τὸ πόσο μεγάλη ἢ μικρὴ μπορεῖ νὰ εἶναι αὐτὴ ἡ διάστασις. Γιὰ παράδειγμα, ἔχουμε τὴν παρακάτω πρόταση.

Πρότασις 3.1.8. *Ὑπάρχουν ἰσοτροπικὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα μ στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $L_\mu \simeq L_n$ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα, γιὰ κάθε $\lambda \in (0,1)$ καὶ κάθε θετικὸ ἀκέραιο $k = \lambda n$, νὰ ἰσχύει*

$$L_{\pi_E\mu} \geqslant C^{-\frac{1}{\lambda}} L_\mu \tag{3.1.14}$$

γιὰ ὁποιονδήποτε ὑπόχωρο $E \in G_{n,k}$, ὅπου $C \geqslant 1$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

3.2 Κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τοῦ $Z_p(\mu)$ γιὰ κάθε $p \leqslant r_\sharp^H(\mu, A)$

Ὅπως εἴδαμε, ὁ βασικὸς τύπος γιὰ τὸν ὄγκο τῶν L_q-κεντροειδῶν σωμάτων στὸν ὁποῖον καταλήγουν οἱ Klartag καὶ Milman ἔχει ὡς ἑξῆς: ἂν μ εἶναι ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ βαρύκεντρο τὸ 0, τότε γιὰ κάθε $p \in [1, n]$ ἔχουμε ὅτι

(3.2.1)

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{p}{n}} \left(\frac{1}{|\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)|} \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \mathrm{Cov}(\mu_x)\, dx \right)^{\frac{1}{2n}} \simeq \sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \mathrm{Cov}(\mu_x)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Ἕνα ἀρχικὸ συμπέρασμα στὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ ὁδηγηθοῦμε χρησιμοποιῶντας αὐτὸν τὸν τύπο εἶναι ὅτι, ἂν $x_0 \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$ εἶναι ἕνα σημεῖο ποὺ ἔχει τὴν ἰδιότητα

$$[\det \mathrm{Cov}(\mu_{x_0})]^{\frac{1}{2n}} \simeq \inf_{x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \mathrm{Cov}(\mu_x)]^{\frac{1}{2n}},$$

τότε, χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν Πρότασι 1.4.17 τῶν Klartag καὶ Milman ποὺ εἴδαμε στὴν Παράγραφο 1.4.3, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία, ἂν $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, τότε

$$Z_q(\mu) \simeq Z_q(\mu_x) \quad \text{γιὰ κάθε } q \geqslant p, \tag{3.2.2}$$

συμπεραίνουμε ὅτι

$$|Z_p(\mu_{x_0})|^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{p}{n}}\, [\det \mathrm{Cov}(\mu_{x_0})]^{\frac{1}{2n}}.$$

Σκοπός μας εἶναι νὰ δείξουμε μία παρόμοια ἰσοδυναμία γιὰ τὸ μέτρο μ ἀντὶ τοῦ μ_{x_0}, καὶ γιὰ νὰ τὸ ἐπιτύχουμε αὐτὸ πρέπει σύμφωνα μὲ τὸν τύπο (3.2.1) νὰ μπορέσουμε νὰ δείξουμε ὅτι

$$[\det \mathrm{Cov}(\mu_{x_0})]^{\frac{1}{2n}} \geqslant \frac{1}{A} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}} \tag{3.2.3}$$

γιὰ κάποια, ὅσο πιὸ μικρὴ γίνεται, σταθερὰ $A \geqslant 1$. Πρὸς τοῦτο, θὰ ἀνατρέξουμε τώρα στὰ τελευταῖα βήματα τοῦ ἐπιχειρήματος τῶν Klartag καὶ Milman καὶ θὰ ἐξηγήσουμε γιατί μποροῦμε νὰ δείξουμε τὴν ἀνισότητα (3.2.3) γιὰ κάθε $p \leqslant r_\sharp^H(\mu, cA)$ (ὅπου $c > 0$ εἶναι μία σταθερὰ ἀνεξάρτητη τοῦ μέτρου μ, τῆς διαστάσεως n τοῦ χώρου ἢ τῆς παραμέτρου A).

Τὸ πρῶτο πράγμα ποὺ ἔχουμε νὰ δείξουμε εἶναι ὅτι, ὅταν μ εἶναι ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ $p \leqslant r_\sharp^H(\mu, A)$, τότε

$$[\det \mathrm{Cov}(\mu_x)]^{\frac{1}{2n}} \geqslant \frac{c'}{A}$$

γιὰ κάθε $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$. Στὸ ὑπόλοιπο τῆς παραγράφου, θὰ συμβολίζουμε τὶς θετικὲς ἰδιοτιμὲς τοῦ πίνακα $\mathrm{Cov}(\mu_x)$ ὡς $\lambda_1^x \leqslant \lambda_2^x \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^x$, καὶ θὰ γράφουμε E_k γιὰ τὸν k-διάστατο ὑπόχωρο ποὺ ἔχει ὡς βάσι του ἰδιοδιανύσματα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς πρῶτες k ἰδιοτιμὲς τοῦ $\mathrm{Cov}(\mu_x)$. Ξεκινοῦμε μὲ τὸ ἀκόλουθο λῆμμα ποὺ εἶναι οὐσιαστικὰ τὸ Λῆμμα 5.2 τοῦ [29].

Λῆμμα 3.2.1. *Γιὰ κάθε δύο ἀκεραίους* $1 \leqslant s \leqslant k \leqslant n$ *ἔχουμε ὅτι*

$$\sqrt{\lambda_k^x} \geqslant c_1 \sup_{F \in G_{E_k,s}} |Z_s(\pi_F \mu_x)|^{1/s}, \tag{3.2.4}$$

ὅπου $c_1 > 0$ *εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.*

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμε ὅτι

$$\lambda_k^x = \max_{\theta \in S_{E_k}} \int_{E_k} \langle z, \theta \rangle^2 \, d\pi_{E_k}\mu_x(z) = \sup_{F \in G_{E_k,s}} \max_{\theta \in S_F} \int_F \langle z, \theta \rangle^2 \, d\pi_F \mu_x(z). \tag{3.2.5}$$

Αὐτὸ ἰσχύει ἐπειδή, γιὰ κάθε ὑπόχωρο F τοῦ E_k καὶ κάθε $\theta \in S_F \subseteq S_{E_k}$, ἔχουμε ὅτι

$$\int_F \langle z, \theta \rangle^2 \, d\pi_F \mu_x(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle z, \theta \rangle^2 \, d\mu_x(z) = \int_{E_k} \langle z, \theta \rangle^2 \, d\pi_{E_k}\mu_x(z),$$

ἐνῷ ἡ λ_k^x εἶναι ἡ μεγαλύτερη ἰδιοτιμὴ τοῦ πίνακα $\mathrm{Cov}(\pi_{E_k}\mu_x)$.

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἐφ' ὅσον τὸ μ_x εἶναι ἕνα κεντραρισμένο, λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος, ἀπ' ὅπου ἕπεται ὅτι τέτοια εἶναι καὶ ὅλα τὰ s-διάστατα περιθώρια μέτρα του $\pi_F \mu_x$, λαμβάνουμε ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.4.2 καὶ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς ὅτι

$$|Z_s(\pi_F \mu_x)|^{1/s} \simeq \frac{1}{\|f_{\pi_F \mu_x}\|_\infty^{1/s}} = \frac{[\det \mathrm{Cov}(\pi_F \mu_x)]^{\frac{1}{2s}}}{L_{\pi_F \mu_x}}. \tag{3.2.6}$$

Ὅμως $L_\nu \geqslant c$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο ν, γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$, καὶ ἑπομένως

$$|Z_s(\pi_F \mu_x)|^{1/s} \leqslant c' [\det \mathrm{Cov}(\pi_F \mu_x)]^{\frac{1}{2s}} \leqslant c' \max_{\theta \in S_F} \sqrt{\int_F \langle z, \theta \rangle^2 \, d\pi_F \mu_x(z)}$$

γιὰ κάθε $F \in G_{E_k,s}$, τὸ ὁποῖο σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν (3.2.5) μᾶς δίνει τὴν (3.2.4). □

Γιὰ νὰ φράξουμε τὴν δεξιὰ πλευρὰ τῆς (3.2.4) ἀπὸ μία ἔκφρασι ποὺ περιέχει τὴν $\det \mathrm{Cov}(\mu)$, πρέπει νὰ συγκρίνουμε τὸν ὄγκο τοῦ $Z_s(\pi_F \mu_x)$ μὲ τὸν ὄγκο τοῦ $Z_s(\pi_F \mu)$· αὐτὸ εἴμαστε σὲ θέσι νὰ τὸ ἐπιτύχουμε ἐξαιτίας τῆς (3.2.2). Ἡ ἐπιλογὴ τοῦ s ποὺ κάνουμε τελικὰ δικαιολογεῖται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο λῆμμα.

Λῆμμα 3.2.2. *Ἔστω ὅτι* μ *εἶναι τὸ* n*-διάστατο ἰσοτροπικό, λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο ποὺ ἔχουμε θεωρήσει. Θυμόμαστε ὅτι, γιὰ ὁποιοδήποτε* $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$ *καὶ γιὰ κάθε φυσικὸ* $k \leqslant n$*, συμβολίζουμε μὲ* E_k *τὸν* k*-διάστατο ὑπόχωρο τοῦ* $\mathbb{R}^n$ *ποὺ ἔχει ὡς βάσι του ἰδιοδιανύσματα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς* k *πρῶτες ἰδιοτιμὲς τοῦ πίνακα* $\mathrm{Cov}(\mu_x)$*. Γιὰ εὐκολία, θέτουμε ἐπίσης* $s_k^x := r_\sharp(\pi_{E_k}\mu, A)$*. Τότε*

$$\sup_{F \in G_{E_k, s_k^x}} |Z_{s_k^x}(\pi_F \mu)|^{1/s_k^x} \geqslant \frac{c_2}{A} \, [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}} = \frac{c_2}{A}, \tag{3.2.7}$$

ὅπου $c_2 > 0$ *εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.*

Ἀπόδειξις. Ὅπως καὶ στὴν (3.2.6), μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$|Z_{s_k^x}(\pi_F\mu)|^{1/s_k^x} \geqslant \frac{c_2}{\|f_{\pi_F\mu}\|_\infty^{1/s_k^x}} = \frac{c_2[\det \mathrm{Cov}(\pi_F\mu)]^{\frac{1}{2s_k^x}}}{L_{\pi_F\mu}}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_2 > 0$ καὶ γιὰ κάθε $F \in G_{E_k,s_k^x}$. Ἀφοῦ τὸ μ εἶναι ἰσοτροπικό, ἰσχύει ὅτι $\det \mathrm{Cov}(\pi_F\mu) = \det \mathrm{Cov}(\mu) = 1$. Ἐπίσης, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ $s_k^x = r_\sharp(\pi_{E_k}\mu, A)$, γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνας ὑπόχωρος τοῦ E_k διαστάσεως s_k^x, ἂς ποῦμε ὁ F_0, μὲ τὴν ἰδιότητα τὸ περιθώριο μέτρο $\pi_{F_0}(\pi_{E_k}\mu) \equiv \pi_{F_0}\mu$ νὰ ἔχει ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ποὺ φράσσεται ἀπὸ A. Συνδυάζοντας ὅλα τὰ παραπάνω, καταλήγουμε στὴν

$$\sup_{F\in G_{E_k,s_k^x}} |Z_{s_k^x}(\pi_F\mu)|^{1/s_k^x} \geqslant |Z_{s_k^x}(\pi_{F_0}\mu)|^{1/s_k^x} \geqslant \frac{c_2}{A},$$

ποὺ εἶναι τὸ ζητούμενο τοῦ λήμματος. □

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, γιὰ νὰ συγκρίνουμε τὰ $Z_{s_k^x}(\pi_F\mu_x)$ καὶ $Z_{s_k^x}(\pi_F\mu)$ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{E_k,s_k^x}$, ἀρκεῖ νὰ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Ἐὰν $p \leqslant s_k^x = r_\sharp(\pi_{E_k}\mu, A)$, τότε ἀπὸ τὴν (3.2.2) ἔχουμε ὅτι $Z_{s_k^x}(\mu_x) \simeq Z_{s_k^x}(\mu)$, ἑπομένως καὶ γιὰ κάθε $F \in G_{E_k,s_k^x}$ ἰσχύει ὅτι
$$Z_{s_k^x}(\pi_F\mu_x) = \mathrm{Proj}_F\big(Z_{s_k^x}(\mu_x)\big) \simeq \mathrm{Proj}_F\big(Z_{s_k^x}(\mu)\big) = Z_{s_k^x}(\pi_F\mu).$$
- Ἐὰν $s_k^x < p$, τότε χρησιμοποιῶντας τὴν (1.4.1) καὶ τὴν (3.2.2) μποροῦμε νὰ γράψουμε
$$Z_{s_k^x}(\pi_F\mu_x) \supseteq c_0\frac{s_k^x}{p}Z_p(\pi_F\mu_x) \supseteq c_0'\frac{s_k^x}{p}Z_p(\pi_F\mu) \supseteq c_0'\frac{s_k^x}{p}Z_{s_k^x}(\pi_F\mu)$$
γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $c_0, c_0' > 0$. Θυμόμαστε ἐπιπλέον ὅτι, ἀφοῦ
$$p \leqslant r_\sharp^H(\mu, A) = n\inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{r_\sharp(\pi_E\mu, A)}{k} \leqslant \frac{n}{k}r_\sharp(\pi_{E_k}\mu, A),$$
θὰ ἰσχύει ὅτι $s_k^x/p = r_\sharp(\pi_{E_k}\mu, A)/p \geqslant k/n$.

Συνοψίζοντας τὰ παραπάνω, βλέπουμε ὅτι σὲ κάθε περίπτωσι καὶ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{E_k,s_k^x}$ ἰσχύει ὅτι

$$Z_{s_k^x}(\pi_F\mu_x) \supseteq c_0''\min\Big\{1, \frac{s_k^x}{p}\Big\}Z_{s_k^x}(\pi_F\mu) \supseteq c_0''\frac{k}{n}Z_{s_k^x}(\pi_F\mu), \tag{3.2.8}$$

ὅπου $c_0'' > 0$ εἶναι μία ἀρκετὰ μικρὴ ἀπόλυτη σταθερά. Ἔχουμε πλέον ὅ,τι μᾶς χρειάζεται γιὰ νὰ φράξουμε τὸ $|Z_p(\mu)|^{1/n}$ ἀπὸ κάτω.

Θεώρημα 3.2.3. *Ἔστω ὅτι μ εἶναι ἕνα n-διάστατο ἰσοτροπικό, λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο καὶ ἔστω $A \geqslant 1$. Τότε, γιὰ κάθε $p \in [1, r_\sharp^H(\mu, A)]$, ἔχουμε ὅτι*

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geqslant \frac{c}{A}\sqrt{\frac{p}{n}},$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Συνδυάζοντας τὰ Λήμματα 3.2.1 καὶ 3.2.2 μὲ τὴν (3.2.8), ἔχουμε ὅτι, γιὰ κάθε $p \in [1, r_\sharp^H(\mu, A)]$ καὶ γιὰ κάθε $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$,

$$[\det \mathrm{Cov}(\mu_x)]^{1/2} = \prod_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k^x} \geqslant \prod_{k=1}^n \frac{c}{A}\frac{k}{n} = \frac{c^n}{A^n}\frac{n!}{n^n}.$$

Θεωρῶντας n-οστὲς ῥίζες, βλέπουμε ὅτι τὸ ζητούμενο ἔπεται ἀπὸ τὴν (3.2.1). □

3.3 Σύγκρισις τῶν βασικῶν παραμέτρων καὶ ἄλλες παρατηρήσεις

Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 3.1.7 μένει νὰ δείξουμε τὴν (3.1.10). Τὸ πρῶτο βῆμα εἶναι ἡ ἀκόλουθη συνέπεια τοῦ Θεωρήματος 3.2.3.

Πόρισμα 3.3.1. *Ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $C_1 > 0$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε n-διάστατο ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ καὶ κάθε $A \geqslant 1$,*

$$r_\sharp^H(\mu, A) \leqslant \lfloor q_{-c}(\mu, C_1 A) \rfloor.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, ἔχουμε ὅτι

$$I_{-p}(\mu) \geqslant \frac{1}{C_1 A} I_2(\mu) = \frac{1}{C_1 A}\sqrt{n}$$

γιὰ κάθε $p \leqslant \lceil r_\sharp^H(\mu, A) \rceil$.

Ἀπόδειξις. Ἂς θέσουμε $p_A := r_\sharp^H(\mu, A)$ καὶ ἂς παρατηρήσουμε ὅτι

$$\left|Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)\right|^{1/n} \geqslant |Z_{p_A}(\mu)|^{1/n} \geqslant \frac{c'}{A}\sqrt{\frac{\lceil p_A \rceil}{n}}.$$

Ἀπὸ τὶς ἀνισότητες Hölder καὶ Santaló, ἔπεται ὅτι

$$w_{-\lceil p_A \rceil}\big(Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)\big) \geqslant w_{-n}\big(Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)\big) \geqslant \frac{\left|Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)\right|^{1/n}}{\omega_n^{1/n}} \geqslant \frac{c''}{A}\sqrt{\lceil p_A \rceil}.$$

Ἐφ᾽ ὅσον $r_\sharp^H(\mu, A) \leqslant r_\sharp(\mu, A) \leqslant n-1$ ἐξ ὁρισμοῦ, ἔχουμε ὅτι $\lceil p_A \rceil \leqslant n-1$, καὶ ἄρα μποροῦμε, ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 1.4.6 ποὺ συνδέει τὶς ἀρνητικὲς ῥοπές τῆς Εὐκλείδειας νόρμας μὲ τὰ ἀρνητικὰ μέσα πλάτη τῶν κεντροειδῶν σωμάτων, νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$I_{-\lceil p_A \rceil}(\mu) \geqslant \frac{1}{C_1 A}\sqrt{n}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $C_1 > 0$. □

Ἀπόδειξις τῆς (3.1.10). Γιὰ τὴν ἀριστερὴ ἀνισότητα χρησιμοποιοῦμε τὸ Πόρισμα 3.3.1 γιὰ κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_E\mu$ τοῦ μ· λαμβάνουμε ὅτι $r_\sharp^H(\pi_E\mu, A) \leqslant \lfloor q_{-c}(\pi_E\mu, C_1A)\rfloor$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι

$$\begin{aligned} r_\sharp^H(\mu, A) &= n \inf_k \inf_{F\in G_{n,k}} \frac{r_\sharp(\pi_F\mu, A)}{k} \\ &\leqslant n \inf_{s\leq \dim E} \inf_{F\in G_{E,s}} \frac{r_\sharp(\pi_F\mu, A)}{s} = \frac{n}{\dim E}\, r_\sharp^H(\pi_E\mu, A), \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι γιὰ κάθε ἀκέραιο k, καὶ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $E \in G_{n,k}$,

$$r_\sharp^H(\mu, A) \leqslant \frac{n}{k}\, r_\sharp^H(\pi_E\mu, A) \leqslant \frac{n}{k}\lfloor q_{-c}(\pi_E\mu, C_1A)\rfloor.$$

Ἰσοδύναμα ἔχουμε ὅτι $r_\sharp^H(\mu, A) \leqslant q_{-c}^H(\mu, C_1A)$.

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, γιὰ τὸ δεξιὸ μέρος τῆς (3.1.10) χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο (1.4.5) τοῦ Παούρη γιὰ τὶς ἀρνητικὲς ῥοπές, ἀπὸ τὸν ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι, ἂν k εἶναι κάποιος ἀκέραιος τέτοιος ὥστε

$$I_{-k}(\mu) \simeq \sqrt{n}\left(\int_{G_{n,k}} f_{\pi_E\mu}(0)\, d\nu_{n,k}(E)\right)^{-1/k} \geqslant \frac{1}{C_1A} I_2(\mu) = \frac{1}{C_1A}\sqrt{n},$$

δηλαδὴ ἂν $k \leqslant \lfloor q_{-c}(\mu, C_1A)\rfloor$, τότε πρέπει νὰ ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνας ὑπόχωρος $E \in G_{n,k}$ ἔτσι ὥστε $f_{\pi_E\mu}(0) \leqslant (C_1'A)^k$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ C_1' (ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν σταθερὰ C_1). Ἀφοῦ ὅμως τὸ περιθώριο μέτρο $\pi_E\mu$ εἶναι ἰσοτροπικό, ἔχουμε ὅτι

$$L_{\pi_E\mu} = \|f_{\pi_E\mu}\|_\infty^{1/k} \leqslant e(f_{\pi_E\mu}(0))^{1/k} \leqslant C_2A.$$

Προκύπτει συνεπῶς ὅτι

$$r_\sharp(\mu, C_2A) \geqslant \lfloor q_{-c}(\mu, C_1A)\rfloor,$$

καὶ ἡ ἴδια ἀνισότητα θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_F\mu$ τοῦ μ. Ἡ δεξιὰ ἀνισότητα τῆς (3.1.10) ἔπεται τώρα ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν $r_\sharp^H(\mu, C_2A)$ καὶ $q_{-c}^H(\mu, C_1A)$. □

Συνοψίζουμε στὴν παρακάτω πρόταση τὶς σχέσεις ποὺ ἰσχύουν μεταξὺ τῶν παραμέτρων ποὺ εἴδαμε σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο.

Πρότασις 3.3.2. *Ἔστω μ ἕνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $A_0, C_1 \geqslant 1$ καὶ $c_1, c_2 > 0$ ὥστε γιὰ κάθε $A \geqslant A_0$ νὰ ἔχουμε*

$$r_\sharp(\mu, C_1A) \geqslant q_{-c}(\mu, A) \geqslant c_1 q_*(\mu) \geqslant c_2\sqrt{n}. \tag{3.3.1}$$

Ἀνάλογες ἀνισότητες ἰσχύουν γιὰ τὶς ἀντίστοιχες κληρονομικὲς παραμέτρους δεδομένου ὅτι κάθε περιθώριο μέτρο τοῦ ἰσοτροπικοῦ, λογαριθμικὰ-κοίλου μ εἶναι ἰσοτροπικὸ καὶ λογαριθμικὰ-κοῖλο:

$$r_\sharp^H(\mu, C_1A) \geqslant q_{-c}^H(\mu, A) \geqslant c_1 q_*^H(\mu) \geqslant c_2\sqrt{n}.$$

Προφανῶς ἐπίσης κάθε κληρονομικὴ παράμετρος εἶναι μικρότερη σὲ τάξι μεγέθους ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη κανονικὴ παράμετρο. Τέλος, ὑπάρχει μία σταθερὰ $C_2 \geqslant 1$ ὥστε γιὰ κάθε $A \geqslant 1$ νὰ ἰσχύει

$$q^H_{-c}(\mu, C_2A) \geqslant r^H_\sharp(\mu, A),$$

τὸ ὁποῖο δείχνει ὅτι οἱ κληρονομικὲς παράμετροι $r^H_\sharp(\cdot, A)$ καὶ $q^H_{-c}(\cdot, A)$ εἶναι κατ᾽ οὐσίαν ἰσοδύναμες.

Τὸ Θεώρημα 3.1.7 μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διώξουμε τὸν λογαριθμικὸ ὅρο ἀπὸ τὸ φράγμα (3.1.7) στὶς περιπτώσεις ἐκεῖνες ποὺ τὰ κάτω φράγματα ποὺ ἔχουμε γιὰ τὶς παραμέτρους $q_{-c}(\mu, \delta)$ καὶ $q^H_{-c}(\mu, \delta)$ εἶναι τῆς ἰδίας τάξεως (αὐτὸ μπορεῖ νὰ συμβαίνει γιὰ παράδειγμα ἂν ἔχουμε κάτω φράγμα τῆς μορφῆς

$$\inf_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} q_{-c}(\mu, \delta) \geq h_\delta(n)$$

γιὰ κάποια συνάρτησι h_δ μὲ τὴν ἰδιότητα ὁ λόγος $h_\delta(n)/n$ νὰ φθίνει ὅταν τὸ n αὐξάνεται). Μία βελτίωσις στὰ κάτω φράγματα ποὺ γνωρίζουμε θὰ μποροῦσε νὰ ἔρθει μέσῳ τῆς μελέτης τῆς παραμέτρου $r_\sharp(\mu, A)$· στὴν πραγματικότητα τὰ ἀποτελέσματα σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο δείχνουν ὅτι ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν φαινομενικὰ ἀσθενέστερη ἀπαίτησι κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ νὰ ἔχει περιθώρια μέτρα διαστάσεως ἀνάλογης τοῦ n ποὺ ἔχουν φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερά. Παρότι φαίνεται ἀκόμη πολὺ δύσκολο νὰ ἐπιβεβαιώσει ἢ νὰ διαψεύσει κάποιος μία τέτοια ἰδιότητα τῶν ἰσοτροπικῶν μέτρων, καὶ παρότι ἡ μόνη ἐκτίμησις ποὺ ἔχουμε τώρα γιὰ τὸ $r_\sharp(\mu, A)$ γιὰ ἕνα τυχὸν μέτρο μ προκύπτει ἀπὸ τὴν (3.3.1), μποροῦμε νὰ ἀναφέρουμε κάποια ἐνδιαφέροντα στοιχεῖα ποὺ γνωρίζουμε ἤδη γιὰ τὴν συμπεριφορὰ τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς περιθωρίων μέτρων.

Πρῶτα, χρησιμοποιῶντας τὶς ἀνισότητες Hölder καὶ Santaló, καθῶς καὶ τὸ Θεώρημα 1.4.6, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} I_{-k}(\mu) &\geqslant c_1\sqrt{\frac{n}{k}}\, w_{-k}\big(Z_k(\mu)\big) \geqslant c_1\sqrt{\frac{n}{k}}\, w_{-n}\big(Z_k(\mu)\big) \\ &\geqslant c_1\sqrt{\frac{n}{k}}\, \frac{|Z_k(\mu)|^{1/n}}{\omega_n^{1/n}} \geqslant c_2\frac{n}{\sqrt{k}}\, |Z_k(\mu)|^{1/n} \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

γιὰ κάθε φυσικὸ $k \leqslant n-1$, γιὰ κάθε κενταρισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν $\mathbb{R}^n$, ὅπου $c_1, c_2 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Ἀπὸ τὴν (1.4.1) ἔχουμε ἐπίσης ὅτι

$$Z_{n-1}(\mu) \subseteq Z_n(\mu) \subseteq cZ_{n-1}(\mu),$$

ἑπομένως, χρησιμοποιῶντας τὴν Πρότασι 1.4.2 καὶ τὸ Θεώρημα 1.3.5 τοῦ Fradelizi, καταλήγουμε στὴν $|Z_{n-1}(\mu)|^{1/n} \simeq \|\mu\|_\infty^{-1/n}$. Ἕπεται ὅτι

$$I_{-p}(\mu) \geqslant I_{-(n-1)}(\mu) \gtrsim \sqrt{n}\, |Z_{n-1}(\mu)|^{1/n} \gtrsim \sqrt{n}/\|\mu\|_\infty^{1/n} \tag{3.3.3}$$

γιὰ κάθε $p \leq n-1$. Τότε ὅμως, ἐφ᾽ ὅσον μιλᾶμε γιὰ ἕνα ἰσοτροπικὸ μέτρο μ, ποὺ συνεπάγεται ὅτι ἰσοτροπικὰ θὰ εἶναι καὶ ὅλα τὰ περιθώρια μέτρα του, βλέπουμε ὅτι ἀπὸ τὸν τύπο (1.4.5) καὶ τὸ

Θεώρημα 1.3.5 προκύπτει ὅτι

$$(3.3.4)\quad I_{-k}(\mu) \simeq \sqrt{n}\left(\int_{G_{n,k}} [(f_{\pi_E\mu}(0))^{1/k}]^k \, d\nu_{n,k}(E)\right)^{-1/k} \simeq \sqrt{n}\left(\int_{G_{n,k}} L_{\pi_E\mu}^k \, d\nu_{n,k}(E)\right)^{-1/k}$$

γιὰ κάθε φυσικὸ $k \leq n-1$. Συνδυάζοντάς το αὐτὸ μὲ τὴν (3.3.3), καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$\left(\int_{G_{n,k}} L_{\pi_E\mu}^k \, d\nu_{n,k}(E)\right)^{1/k} \leqslant C_0\|\mu\|_\infty^{1/n} = C_0 L_\mu$$

καὶ ἄρα ὅτι

$$(3.3.5)\qquad \nu_{n,k}\big(\{E \in G_{n,k} : L_{\pi_E\mu} \leq C_1 L_\mu\}\big) \geqslant 1 - e^{-k}$$

γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς C_0, C_1 (ἀκόμη καλύτερες ἐκτιμήσεις γιὰ τὸ μέτρο τῶν παραπάνω συνόλων ἔχουν βρεθεῖ, ὅπως ἀναφέραμε καὶ στὴν Παρατήρησι 2.4.4, ἀπὸ τοὺς Δαφνὴ καὶ Παούρη [15] στὴν περίπτωσι ποὺ τὸ μέτρο μ εἶναι τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα).

Στὴν συνέχεια, ἔχουμε νὰ ἀναφέρουμε τὴν Πρότασι 3.1.8, ἡ ὁποία μᾶς δίνει ἕνα «κακὸ» κάτω φράγμα γιὰ τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ τῶν περιθωρίων μέτρων κάποιων περιπτώσεων μέτρων ποὺ ἔχουν μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερά. Τὰ μέτρα ποὺ θεωροῦμε εἶναι τὰ ἰσοτροπικὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα ποὺ κατανέμονται ὁμοιόμορφα σὲ κυρτὰ σώματα. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι, σύμφωνα μὲ τοὺς ὁρισμούς μας, κάθε τέτοιο ἰσοτροπικὸ μέτρο μ ἔχει φορέα ἕνα κεντραρισμένο, κυρτὸ σῶμα K ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 \mathbf{1}_K(x)\, dx = |K| \quad \text{γιὰ κάθε } \theta \in S^{n-1},$$

(εἶναι γνωστὸ ὅτι μποροῦμε νὰ φέρουμε κάθε κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ σὲ μία τέτοια θέσι μέσῳ ἑνὸς ἀφινικοῦ μετασχηματισμοῦ), καὶ τότε ἡ πυκνότητα τοῦ $\mu \equiv \mu_K$ δίδεται ἀπὸ τὴν

$$f_\mu(x) := |K|^{-1} \cdot \mathbf{1}_K(x).$$

Προφανῶς, ἕνα τέτοιο μέτρο μ ἀνήκει στὴν κλάση $\mathcal{IL}_{[n]}$ τῶν ἰσοτροπικῶν λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων καὶ $L_\mu = |K|^{-1/n}$. Θὰ συμβολίζουμε αὐτὴν τὴν ὑποκλάση τῆς $\mathcal{IL}_{[n]}$ μὲ $\mathcal{IK}_{[n]}$, καὶ θὰ κάνουμε χρῆσι τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ Ball ποὺ εἴδαμε στὴν Παράγραφο 1.3.2:

$$L_n = \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} L_\mu \leqslant C \sup_{\mu_K \in \mathcal{IK}_{[n]}} L_{\mu_K}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ C. Στὴν ἀπόδειξι ποὺ ἀκολουθεῖ ἐπανερχόμαστε πιὸ λεπτομερῶς στὸ ἐπιχείρημα μὲ τὸ ὁποῖο προκύπτει τὸ Λῆμμα 2.3.6· ἡ κύρια ἰδέα πίσω ἀπὸ αὐτὸ τὸ ἐπιχείρημα εἶναι νὰ δουλέψουμε μὲ κυρτὰ σώματα ποὺ ἔχουν μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ καὶ τὰ M-ἐλλειψοειδῆ τους, καὶ ἐμφανίζεται γιὰ πρώτη φορὰ στὸ [11].

Ἀπόδειξις τῆς Προτάσεως 3.1.8. Ἔστω $\alpha \in (0,1]$ καὶ ἔστω ἰσοτροπικὸ μέτρο $\mu \in \mathcal{IK}_{[n]}$ μὲ τὴν ἰδιότητα $L_\mu \geqslant \alpha L_n$. Θεωροῦμε τὸ σῶμα K ποὺ εἶναι ὁ φορέας τοῦ μ (αὐτὸ σημαίνει ὅτι $f_\mu = |K|^{-1} \cdot \mathbf{1}_K$), καὶ βρίσκουμε ἕνα M-ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_K$ γιὰ τὸ K, δηλαδὴ ἕνα ἐλλειψοειδὲς τέτοιο ὥστε $|\mathcal{E}_K| = |K|$ καὶ $N(K, \mathcal{E}_K) \leqslant e^{b_0 n}$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ b_0. Ὅπως εἴδαμε καὶ στὸ Λῆμμα 2.3.6, χρησιμοποιοῦμε ἐπανειλημμένα τὸ γεγονὸς ὅτι, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1.2.1) τῶν Rogers καὶ Shephard καὶ τὴν ἀνισότητα (1.2.6) τοῦ Spingarn ποὺ εἴδαμε στὴν Εἰσαγωγή,

$$|K| \leqslant |K \cap E^\perp||\mathrm{Proj}_E(K)| \leqslant \binom{n}{k}|K| \tag{3.3.6}$$

γιὰ κάθε ὑπόχωρο $E \in G_{n,k}$ (καὶ τὸ ἀντίστοιχο ἂν βάλουμε $\mathcal{E}_K$ στὴν θέσι τοῦ K). Θὰ ἐπικαλεστοῦμε ἐπίσης τὶς ἰδιότητες ποὺ ἀναφέραμε στὸ Λῆμμα 2.3.4 γιὰ τὸν ὄγκο τῶν προβολῶν καὶ τῶν τομῶν ἑνὸς ἐλλειψοειδοῦς. Ξεκινοῦμε ἐφαρμόζοντας τὸ ἀριστερὸ μέρος τῆς (3.3.6) γιὰ κάποιον τυχόντα ὑπόχωρο $F \in G_{n,n-k}$: βλέπουμε τότε ὅτι ἰσχύει

$$|\mathrm{Proj}_F(K)| \geqslant \frac{1}{|K|^{-1}|K \cap F^\perp|}.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ ὅμως

$$|K|^{-1}|K \cap F^\perp| = |K|^{-1}\int_{F^\perp} \mathbf{1}_K(y)\,dy = \int_{F^\perp} f_\mu(y)\,dy = f_{\pi_F\mu}(0) \leqslant (L_{\pi_F\mu})^{n-k}.$$

Ἐφ᾽ ὅσον $L_{\pi_F\mu} \leqslant L_{(n-k)} \leqslant b_1 L_n$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ b_1 ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.1.4 τῶν Bourgain, Klartag καὶ V. Milman ([11]), προκύπτει ὅτι

$$\min_{F \in G_{n,n-k}} |\mathrm{Proj}_F(K)| \geqslant \frac{1}{(b_1 L_n)^{n-k}} \geqslant \Big(\frac{\alpha}{b_1 L_\mu}\Big)^{n-k}.$$

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι $N\big(\mathrm{Proj}_F(K), \mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_K)\big) \leqslant N(K, \mathcal{E}_K) \leqslant e^{b_0 n}$, καὶ ἑπομένως

$$\min_{F \in G_{n,n-k}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_K)| \geqslant e^{-b_0 n} \min_{F \in G_{n,n-k}} |\mathrm{Proj}_F(K)|.$$

Ἀλλὰ τότε, ἀπὸ τὴν δεξιὰ ἀνισότητα στὴν (3.3.6) βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} \max_{E \in G_{n,k}} |\mathcal{E}_K \cap E| &= \max_{F \in G_{n,n-k}} |\mathcal{E}_K \cap F^\perp| \\ &\leqslant \binom{n}{n-k} e^{b_0 n}\Big(\frac{b_1 L_\mu}{\alpha}\Big)^{n-k}|\mathcal{E}_K| = \binom{n}{k} e^{b_0 n}\Big(\frac{b_1 L_\mu}{\alpha}\Big)^{n-k}|K|. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Θυμόμαστε τώρα ὅτι, ὅπως ἀναφέραμε στὴν Παράγραφο 2.3, κάθε ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}$ ἔχει τὴν ἰδιότητα

$$\max_{H \in G_{n,s}} |\mathrm{Proj}_H(\mathcal{E})| = \max_{H \in G_{n,s}} |\mathcal{E} \cap H|$$

γιὰ κάθε $1 \leqslant s \leqslant n$, καὶ ἄρα ἀπὸ τὴν (3.3.7) λαμβάνουμε τὴν

$$\max_{E \in G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_E(K)| \leqslant e^{b_0 n} \max_{E \in G_{n,k}} |\mathrm{Proj}_E(\mathcal{E}_K)| \leqslant \binom{n}{k} e^{2b_0 n}\big(\alpha^{-1} b_1 L_\mu\big)^{n-k}|K|.$$

Χρειάζεται νὰ ἐφαρμόσουμε μία τελευταία φορὰ τὴν ἀριστερὴ ἀνισότητα στὴν (3.3.6) γιὰ νὰ καταλήξουμε στὴν

$$\min_{E\in G_{n,k}} |K\cap E^{\perp}| \geqslant \binom{n}{k}^{-1} e^{-2b_0 n}\big(\alpha^{-1}b_1 L_\mu\big)^{-(n-k)},$$

ἢ ἰσοδύναμα στὴν

$$\min_{E\in G_{n,k}} \big((L_\mu)^n |K\cap E^{\perp}|\big) \geqslant \binom{n}{k}^{-1} \frac{\big(e^{-2b_0}\alpha b_1^{-1}\big)^n}{\big(\alpha b_1^{-1}\big)^k}(L_\mu)^k. \tag{3.3.8}$$

Ἀλλὰ δεδομένου ὅτι $(L_\mu)^n = |K|^{-1}$ καὶ $|K|^{-1}|K\cap E^{\perp}| = f_{\pi_E\mu}(0) \leqslant (L_{\pi_E\mu})^k$, μποροῦμε νὰ ξαναγράψουμε τὴν (3.3.8) ὡς

$$\min_{E\in G_{n,k}} (L_{\pi_E\mu})^k \geqslant \Big(\frac{en}{k}\Big)^{-k} \frac{\big(e^{-2b_0}\alpha b_1^{-1}\big)^n}{\big(\alpha b_1^{-1}\big)^k}(L_\mu)^k,$$

καὶ μετά, θεωρῶντας k-οστὲς ῥίζες, νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\begin{aligned} \min_{E\in G_{n,k}} L_{\pi_E\mu} &\geqslant \frac{k}{en}\frac{\alpha^{\frac{n}{k}}\big(e^{-2b_0}b_1^{-1}\big)^{\frac{n}{k}}}{\alpha b_1^{-1}} L_\mu \\ &= \lambda\,\alpha^{\frac{1}{\lambda}-1}\frac{e^{-1}b_1}{\big(e^{2b_0}b_1\big)^{1/\lambda}} L_\mu \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

δηλαδὴ τὸ ζητούμενο. Ἀξίζει νὰ σημειώσουμε ὅτι τὰ παραπάνω ἰσχύουν γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ μέτρο $\mu \in \mathcal{IK}_{[n]}$ μὲ τὴν ἰδιότητα $L_\mu \geqslant \alpha L_n$. □

Ἡ Πρότασις 3.1.8 φανερώνει ἐνδεχομένως καὶ κάποιους περιορισμοὺς τῶν δύο μεθόδων ποὺ ἐξετάσαμε σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο. Παρατηροῦμε ὅτι, ἀπὸ τὴν (3.3.9) καὶ τὴν (3.3.4), μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$I_{-k}(\mu) \leqslant \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}}\,\frac{\sqrt{n}}{L_\mu} = \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}}\,\frac{I_2(\mu)}{L_\mu} \tag{3.3.10}$$

γιὰ ὅλους τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους $k = \lambda n \leqslant n-1$ καὶ γιὰ ὅλα τὰ ἰσοτροπικὰ μέτρα $\mu \in \mathcal{IK}_{[n]}$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $L_\mu \geqslant \alpha L_n$, ὅπου C_0 εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Στὴν γλώσσα τῶν σωμάτων, μποροῦμε νὰ γράψουμε ὅτι

$$I_{-k}(K) \leqslant \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}}\sqrt{n} = \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}}\,\frac{I_2(K)}{L_K} \tag{3.3.11}$$

γιὰ ὅλους τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους $k = \lambda n \leqslant n-1$ καὶ γιὰ ὅλα τὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K στὸν $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιῶντας τὴν Παρατήρησι 1.4.3, μποροῦμε νὰ γενικεύσουμε τὴν (3.3.10) γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$.

Πόρισμα 3.3.3. *Ἔστω $\alpha \in (0,1]$ καὶ ἔστω ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $L_\mu \geqslant \alpha L_n$. Τότε γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο $k = \lambda n \leqslant n/2$ ἔχουμε ὅτι*

$$I_{-k}(\mu) \leqslant \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}}\, C_1^{\frac{1}{\lambda}}\,\frac{\sqrt{n}}{L_\mu},$$

ἄρα, χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν ἀνισότητα Hölder, λαμβάνουμε ἕνα ἀνάλογο φράγμα γιὰ ὅλα τὰ $p \in [1, n/2]$ καὶ τὸ φράγμα

$$I_{-p}(\mu) \leqslant \sqrt{\alpha}\, C_2 \frac{\sqrt{n}}{L_\mu}$$

γιὰ τὰ $p \in [n/2, n)$, ὅπου C_1, C_2 εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὴν Παρατήρησι 1.4.3, καὶ ἀφοῦ τὸ μ εἶναι ἰσοτροπικό, ἔχουμε γιὰ κάθε $p \in [-n/2, -1]$, $p \neq 0$, ὅτι

$$I_p(\overline{K}_{n+1}(\mu)) \simeq (f_\mu(0))^{1/n} I_p(\mu) \simeq L_\mu I_p(\mu). \tag{3.3.12}$$

Θέτουμε $Q = \overline{K}_{n+1}(\mu)$ καὶ ὑπενθυμίζουμε ὅτι, ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.21, ἔχουμε $L_Q \simeq L_\mu$, ἄρα $L_Q \geqslant c_1 \alpha L_n$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$, καὶ ὅτι τὸ Q εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὸ μὲ μία ἀπόλυτη σταθερὰ C. Ἐξ ὁρισμοῦ αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἂν $S(Q)$ εἶναι μία ἰσοτροπικὴ εἰκόνα τοῦ Q, ὅπου $S \in SL(n)$, τότε $C^{-1} B_2^n \subseteq S(B_2^n) \subseteq C B_2^n$. Ὅμως τότε, γιὰ κάθε $p \neq 0$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} I_p(S(Q)) &= \left(\int_{S(Q)} \|x\|_2^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_Q \|S(x)\|_{B_2^n}^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_Q \|x\|_{S^{-1}(B_2^n)}^p dx \right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\int_Q \|x\|_{C^{-1}B_2^n}^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_Q C^p \|x\|_{B_2^n}^p dx \right)^{1/p} = C I_p(Q). \end{aligned}$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο, βλέπουμε ὅτι $I_p(S(Q)) \geqslant C^{-1} I_p(Q)$ γιὰ κάθε $p \neq 0$, καὶ ἄρα μποροῦμε νὰ ἐπικαλεστοῦμε τὴν (3.3.11), ἡ ὁποία ἰσχύει γιὰ τὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα $S(Q)$, γιὰ νὰ φράξουμε καὶ τὶς ῥοπὲς $I_{-k}(Q)$ τοῦ σώματος Q, ὅπου $k = \lambda n \leqslant n - 1$ θετικὸς ἀκέραιος. Συμπεραίνουμε ὅτι

$$I_{-k}(Q) \leqslant C (c_1 \alpha)^{1 - \frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}} \sqrt{n} \leqslant \alpha^{1 - \frac{1}{\lambda}} C_1^{\frac{1}{\lambda}} \sqrt{n}.$$

Συνδυάζοντας αὐτὸ μὲ τὴν (3.3.12), παίρνουμε τὸ ζητούμενο. □

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἔχουμε ὅτι ἰσχύει ἡ (3.3.3) γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, καὶ ἐπίσης ἔχουμε τὸ κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν $Z_p(\mu)$ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τῶν Lutwak, Yang καὶ Zhang [37] σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρότασι 1.4.2 ἀπὸ τὸ [53]: $|Z_p(\mu)|^{1/n} \gtrsim \sqrt{p/n}\, L_\mu^{-1}$ γιὰ κάθε $p \geqslant 1$. Καταλήγουμε ἐπομένως στὴν

$$c_1 \frac{\sqrt{n}}{L_\mu} \leqslant \frac{n}{\sqrt{p}} |Z_p(\mu)|^{1/n} \leqslant c_2 I_{-p}(\mu) \leqslant C_3^{\frac{n}{p}} \frac{\sqrt{n}}{L_\mu}, \tag{3.3.13}$$

ἡ ὁποία ἰσχύει γιὰ κάθε $1 \leqslant p \leqslant n-1$ καὶ γιὰ κάθε λογαριθμικὰ-κοῖλο ἰσοτροπικὸ μέτρο μ στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὴν ἰδιότητα $L_\mu \simeq L_n$, ὅπου $c_1, c_2, C_3 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές (ἡ δεύτερη ἀνισότητα εἶναι συνέπεια τῆς (3.3.2)). Προφανῶς, ἡ (3.3.13) εἶναι βέλτιστη (ἐκτὸς ἀπὸ τὴν τιμὴ τῶν σταθερῶν) ὅταν τὸ p εἶναι ἀνάλογο τοῦ n.

Κεφαλαιο 4

Μία γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló

4.1 Ἡ ἱστορία τῆς ἀνισότητος καὶ ἡ σχέσις της μὲ τὴν M-θέσι τοῦ Milman

Ὅπως εἴδαμε στὴν Εἰσαγωγή, ἡ ἀνισότητα Blaschke-Santaló μᾶς λέει ὅτι, μεταξὺ ὅλων τῶν κυρτῶν σωμάτων ποὺ ἔχουν κέντρο βάρους τὸ 0, αὐτὸ ποὺ μεγιστοποιεῖ τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K) := |K| \cdot |K^\circ|$ εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα. Ἡ ἀνισότητα μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ πιὸ ἀναλυτικὰ ὡς ἑξῆς: γιὰ κάθε $z \in \mathrm{int}(K)$ ὁρίζεται τὸ πολικὸ σῶμα τοῦ $K \subset \mathbb{R}^n$ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο z ὡς τὸ σύνολο

$$(K-z)^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y-z\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in K\},$$

καὶ ἔχουμε ὅτι

$$|(K-z)^\circ| = \omega_n \int_{S^{n-1}} \big(h_K(\theta) - \langle \theta, z\rangle\big)^{-n} d\sigma(\theta).$$

Ἄρα παραγωγίζοντας μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι ἡ $z \in \mathrm{int}(K) \mapsto |(K-z)^\circ|$ εἶναι γνησίως κυρτὴ καὶ συνεπῶς ὑπάρχει ἕνα μοναδικὸ σημεῖο $z_0 \in \mathrm{int}(K)$ γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει

$$|(K-z_0)^\circ| = \min_{z \in \mathrm{int}(K)} |(K-z)^\circ|.$$

Τότε ἡ ἀνισότητα Blaschke-Santaló μᾶς λέει ὅτι γιὰ αὐτὸ τὸ σημεῖο, τὸ ὁποῖο ὀνομάζουμε *σημεῖο Santaló* τοῦ σώματος K, ἰσχύει ὅτι $|K| \cdot |(K-z_0)^\circ| \leqslant |B_2^n|^2$ μὲ ἰσότητα ἂν καὶ μόνον ἂν τὸ K εἶναι ἐλλειψοειδές. Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι μία ἀκόμη ἀπὸ τὶς συνέπειες τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski εἶναι ὅτι τὸ σημεῖο Santaló τοῦ K χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ὅτι τὸ $(K-z_0)^\circ$ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τὸ ὁποῖο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διατυπώσουμε τὴν ἀνισότητα καὶ ὅπως κάναμε στὴν ἀρχὴ δεδομένου ὅτι

$$\begin{aligned}&\{s(K) : K \text{ κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\}\\ &\qquad = \{|K| \cdot |(K-z_0)^\circ| : K \text{ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n, z_0 \text{ τὸ σημεῖο Santaló τοῦ } K\}.\end{aligned}$$

Ἡ ἀνισότητα ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Blaschke [3] τὸ 1917 στὸν $\mathbb{R}^2$ καὶ στὸν $\mathbb{R}^3$ καὶ ἀπὸ τὸν Santaló [61] τὸ 1949 σὲ ὅλες τὶς διαστάσεις. Ἐπιπλέον, τὸ γεγονὸς ὅτι μόνον τὰ ἐλλειψοειδῆ μεγιστοποιοῦν τὸ γινόμενο ὄγκων ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Saint Raymond [60] τὸ 1981 στὴν περίπτωσι τῶν συμμετρικῶν σωμάτων καὶ ἀπὸ τὸν Petty [54] τὸ 1985 στὴν γενικὴ περίπτωσι. Μεταγενέστερες καὶ ἁπλούστερες ἀποδείξεις τῆς ἀνισότητος δόθηκαν ἀπὸ τὸν Saint Raymond [60], καὶ τοὺς Meyer καὶ Pajor [40].

Πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνσι, ὁ Mahler [38] διετύπωσε τὴν εἰκασία ὅτι, μεταξὺ τῶν συμμετρικῶν κυρτῶν σωμάτων στὸν $\mathbb{R}^n$, ὁ n-διάστατος κύβος $Q_n := [-1,1]^n$ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ γινόμενο ὄγκων, ἐνῷ, μεταξὺ ὅλων τῶν κυρτῶν σωμάτων στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ κέντρο βάρους τὸ 0, αὐτὸ μὲ τὸ ἐλάχιστο γινόμενο ὄγκων εἶναι τὸ κενταρισμένο n-διάστατο simplex S_n. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$, πρέπει νὰ ἰσχύει $s(K) = |K| \cdot |K^\circ| \geqslant 4^n/n!$, καὶ ἀντίστοιχα, γιὰ κάθε κενταρισμένο σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$, νὰ ἰσχύει $s(K) \geqslant (n+1)^{n+1}/(n!)^2$. Ὁ Mahler ἀπέδειξε τὸ 1949 καὶ τὶς δύο ὑποθέσεις στὸν $\mathbb{R}^2$, σὲ μεγαλύτερες διαστάσεις ὅμως αὐτὲς παραμένουν ἀνοιχτὲς καὶ ἔχουν ἐπιβεβαιωθεῖ μόνον γιὰ εἰδικὲς κλάσεις σωμάτων (βλέπε π.χ. [60], [39], [57], [58], [23]). Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K)$ παραμένει ἀμετάβλητο ἀπὸ ἀντιστρεψίμους γραμμικοὺς μετασχηματισμούς, δηλαδὴ $s(T(K)) = |T(K)| \cdot |(T(K))^\circ| = |T(K)| \cdot |(T^{-1})^*(K^\circ)| = s(K)$ γιὰ κάθε $T \in GL(n)$. Μία ἀπὸ τὶς δυσκολίες ποὺ παρουσιάζει ἡ εἰκασία τοῦ Mahler σὲ σχέσι μὲ τὴν ἀνισότητα Blaschke-Santaló εἶναι ὅτι, τουλάχιστον στὴν συμμετρικὴ περίπτωσι, τὰ σώματα ποὺ ἐλαχιστοποιοῦν τὸ γινόμενο ὄγκων δὲν ἀνήκουν σὲ μία μοναδικὴ ἀφινικὴ κλάση, ὅπως τὰ σώματα ποὺ ἀντίστοιχα μεγιστοποιοῦν τὸ $s(K)$, τὰ ὁποῖα εἶναι μόνον ἐλλειψοειδῆ: γιὰ παράδειγμα στὸν $\mathbb{R}^{2n}$, τὸ ἴδιο γινόμενο ὄγκων μὲ τὸν $2n$-διάστατο κύβο Q_{2n} ἔχει καὶ τὸ σῶμα $Q_n \times B_1^n$, ὅπου $B_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i |x_i| \leqslant 1\}$, ὅπως καὶ ἄλλοι ἀνάλογοι συνδυασμοὶ σωμάτων.

Σὲ πολλὲς ἀπὸ τὶς ἐφαρμογὲς βέβαια τόσο τῆς ἀνισότητος Blaschke-Santaló ὅσο καὶ τῆς εἰκαζομένης ἀντίστροφής της δὲν μᾶς ἐνδιαφέρουν οἱ ἀκριβεῖς μορφὲς τῶν ἀνισοτήτων ἀλλὰ τὸ πῶς συμπεριφέρεται τὸ $(s(K))^{1/n}$. Παρατηροῦμε ὅτι $(s(Q_n))^{1/n} \simeq (s(S_n))^{1/n} \simeq (s(B_2^n))^{1/n}$, ὁπότε γιὰ πολλὰ προβλήματα τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας θὰ μᾶς ἀρκοῦσε νὰ ξέρουμε ὅτι $(s(K))^{1/n} \gtrsim (s(B_2^n))^{1/n}$ γιὰ κάθε κενταρισμένο κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$, καὶ ἄρα καὶ γιὰ κάθε σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ μὲ $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τὸ γεγονὸς ὅτι ὑπάρχει ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$ ὥστε γιὰ κάθε τέτοιο σῶμα K νὰ ἰσχύει

$$s(K) \geqslant c^n s(B_2^n) \tag{4.1.1}$$

ἀπεδείχθη τὸ 1987 ἀπὸ τοὺς Bourgain καὶ V. Milman [12]. Ὁ Milman [43] ἔδωσε μία δεύτερη ἀπόδειξι τὸ 1988 χρησιμοποιῶντας μία τεχνικὴ ἡ ὁποία τοῦ ἐπέτρεπε νὰ ἀποδείξει καὶ τὴν ὕπαρξι M-ἐλλειψοειδῶν γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα μὲ κέντρο βάρους τὸ 0 (βλέπε Παράγραφο 1.2 γιὰ τὴν ὁρολογία). Μάλιστα, ὅπως θὰ ἐξηγήσουμε παρακάτω, κάθε ἀπόδειξις τῆς ὑπάρξεως M-θέσεως γιὰ τὰ συμμετρικὰ ἢ κενταρισμένα κυρτὰ σώματα (βλέπε π.χ. [42], [43], [55]) συνεπάγεται, μέσῳ βασικῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν καλύψεως, καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló. Πιὸ πρόσφατες ἀποδείξεις τῆς ἀνισότητος δόθηκαν ἀπὸ τὸν Kuperberg [33], ὁ ὁποῖος χρησιμοποίησε ἐργαλεῖα διαφορικῆς γεωμετρίας, καὶ ἀπὸ τὸν Nazarov [49], ὁ ὁποῖος στηρίχθηκε σὲ πολυμεταβλητὴ μιγαδικὴ ἀνάλυσι. Αὐτὲς οἱ ἀποδείξεις ὁδηγοῦν καὶ στὰ καλύτερα κάτω φράγματα γιὰ τὴν σταθερὰ c στὴν (4.1.1): ὁ Kuperberg ἔδειξε ὅτι $c \geqslant 1/2$ στὴν συμμετρικὴ περίπτωσι (καὶ ἄρα, ὅπως θὰ ἐξηγήσουμε παρακάτω, $c \geqslant 1/4$ γενικά), ἐνῷ ὁ Nazarov κατέληξε στὸ φράγμα $c \geqslant \pi^2/32$ γιὰ τὰ συμμετρικὰ K.

Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ περιγράψουμε τὴν ἀπόδειξι τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló ποὺ δόθηκε στὸ [22] καὶ ἡ ὁποία στηρίζεται σὲ ἁπλὲς γεωμετρικὲς ἰδιότητες τῆς ἰσοτροπικῆς θέσεως ἑνὸς κυρτοῦ σώματος K. Στὴν Παράγραφο 4.2 θὰ ἀναφερθοῦμε σὲ ἐκτιμήσεις ἀπὸ τὸ [25] γιὰ τοὺς ἀριθμοῦς καλύψεως ἑνὸς ἰσοτροπικοῦ σώματος K στὸν $\mathbb{R}^n$ ἀπὸ τὴν Εὐκλείδεια μπάλα, ἐκτιμήσεις οἱ ὁποῖες μᾶς ἐπιτρέπουν, ὅπως θὰ δοῦμε στὴν Παράγραφο 4.4, νὰ δείξουμε μία ἀσθενέστερη ἐκδοχὴ τῆς (4.1.1) στὴν ὁποία ἐμφανίζεται καὶ ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_K τοῦ K. Γιὰ νὰ ἐπιτύχουμε νὰ μὴν ἐμφανίζεται ἡ L_K, δηλαδὴ νὰ καταλήξουμε στὴν (4.1.1), θὰ συνδυάσουμε αὐτὴν τὴν ἀσθενέστερη ἐκδοχὴ μὲ τὴν μέθοδο τῶν κυρτῶν διαταραχῶν ποὺ εἰσήγαγε ὁ Klartag γιὰ νὰ λύσει τὴν *ἰσομορφικὴ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου*· τὰ ἐπιχειρήματα παρουσιάζονται πλήρως στὴν Παράγραφο 4.4, ἐνῷ πληροφορίες γιὰ τὴν ἰσομορφικὴ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου καὶ τὴν μέθοδο τοῦ Klartag δίδονται στὴν Παράγραφο 4.3. Τέλος, στὴν Παράγραφο 4.5 περιγράφουμε πῶς, ἀπὸ τὶς ἐκτιμήσεις γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως στὴν ἰσοτροπικὴ θέσι, τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló ἔτσι ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὰ ἐπιχειρήματα τῆς Παραγράφου 4.4, καθῶς καὶ τὴν κλασσικὴ ἀνισότητα Blaschke-Santaló, μποροῦμε νὰ δείξουμε τὴν ὕπαρξι M-θέσεως γιὰ κάθε κενταρισμένο κυρτὸ σῶμα K ὅπως καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski (βλέπε πάλι Παράγραφο 1.2 γιὰ τὴν ὁρολογία).

Στὰ ἐπιχειρήματα ποὺ ἀκολουθοῦν θὰ μᾶς χρειαστοῦν καὶ δύο ἀνισότητες ποὺ εἴδαμε στὴν Εἰσαγωγή, ἡ ἀνισότητα (1.2.5) τῶν V. Milman καὶ Pajor καί, κυρίως, ἡ ἀνισότητα (1.2.3) τῶν Rogers καὶ Shephard, οἱ ὁποῖες εἶναι ἁπλὲς συνέπειες τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski. Λόγῳ τῆς ἀνισότητος Rogers-Shephard παρατηροῦμε ὅτι, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ ποὺ περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του, ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

- $|K-K| \leqslant \binom{2n}{n}|K| \leqslant 4^n|K|$, καὶ ταυτόχρονα
- $K \subset K-K$, τὸ ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι $K^\circ \supset (K-K)^\circ$.

Συμπεραίνουμε ὅτι $(s(K))^{1/n} \geqslant 4^{-1}(s(K-K))^{1/n}$, πράγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἀρκεῖ νὰ δείξουμε τὴν (4.1.1) γιὰ τὰ συμμετρικὰ σώματα K καὶ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c>0$, καὶ θὰ ἔχουμε ἔπειτα τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló γιὰ ὅλα τὰ σώματα μὲ σταθερὰ $c/4$. Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι αὐτὸ μπορεῖ νὰ βελτιωθεῖ κι ἄλλο, καὶ νὰ ἔχουμε σταθερὰ $c/2$ στὴν γενικὴ περίπτωσι, εἴτε χρησιμοποιῶντας μία ἀνάλογη ἀνισότητα τῶν Rogers καὶ Shephard [59] γιὰ τὴν κυρτὴ θήκη $\mathrm{conv}\{K,-K\}$ ἑνὸς σώματος K ποὺ περιέχει τὸ 0, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία $|\mathrm{conv}\{K,-K\}| \leqslant 2^n|K|$, εἴτε χρησιμοποιῶντας τὸ ἀκόλουθο ἐπιχείρημα. Θέτουμε $C=(K-K)/2$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι $|C| = 2^{-n}|K-K| \leqslant 2^n|K|$, ἐνῷ ταυτόχρονα $\|\cdot\|_{C^\circ} = h_C = (h_K + h_{-K})/2$, ἄρα, ἐκμεταλλευόμενοι τὴν κυρτότητα τῆς συναρτήσεως $t>0\mapsto t^{-n}$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned}|C^\circ| &= \omega_n\int_{S^{n-1}}\left(\frac{h_K(\theta)+h_{-K}(\theta)}{2}\right)^{-n}d\sigma(\theta)\\ &\leqslant \frac{\omega_n}{2}\int_{S^{n-1}}(h_K(\theta))^{-n}d\sigma(\theta)+\frac{\omega_n}{2}\int_{S^{n-1}}(h_{-K}(\theta))^{-n}d\sigma(\theta)=|K^\circ|.\end{aligned}$$

Ὑπενθυμίζουμε τώρα ξανὰ κάποιες ἀπὸ τὶς βασικὲς ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν καλύψεως ποὺ ἀναφέραμε στὴν Εἰσαγωγή.

Λῆμμα 4.1.1. *Ἔστω K,L κυρτὰ σώματα στὸν $\mathbb{R}^n$. Στὴν περίπτωσι ποὺ τὸ L εἶναι συμμετρικό, ἔχουμε ὅτι*

$$N(K,L)\leqslant\frac{|K+L/2|}{|L/2|}\leqslant 2^n\frac{|K+L|}{|L|}, \tag{4.1.2}$$

ἐνῷ στὴν γενικὴ περίπτωσι

$$N(K,L)\leqslant 4^n\frac{|K+L|}{|L|}. \tag{4.1.3}$$

Ἐπιπλέον,

$$\frac{|K+L|}{|L|}\leqslant 2^nN(K,L). \tag{4.1.4}$$

Ἀπόδειξις. Γιὰ τὴν τρίτη ἀνισότητα ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι, γιὰ κάθε πεπερασμένο ὑποσύνολο Z τέτοιο ὥστε $K\subseteq Z+L$, ἰσχύει ὅτι

$$|K+L|\leqslant|(Z+L)+L|\leqslant\mathrm{card}(Z)|2L|,$$

ὅπου $\mathrm{card}(Z)$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Z. Γιὰ νὰ δείξουμε τὴν (4.1.2), θεωροῦμε ἕνα μεγιστικὸ ὑποσύνολο N τοῦ K ὡς πρὸς τὴν ἰδιότητα

$$x,y\in N \text{ καὶ } x\neq y\Rightarrow\|x-y\|_L\geqslant 1,$$

καὶ παρατηροῦμε ὅτι τότε $K\subseteq\bigcup_{x\in N}(x+L)$, ἄρα $N(K,L)\leqslant\mathrm{card}(N)$. Ἐπιπλέον, τὰ ἐσωτερικὰ οἱωνδήποτε δύο ἀπὸ τὰ σύνολα $x+L/2, y+L/2$ $(x,y\in N)$ δὲν τέμνονται ὅταν $x\neq y$, ἑπομένως

$$\mathrm{card}(N)|L/2|=|N+L/2|\leqslant|K+L/2|.$$

Τέλος, ὅταν τὸ L δὲν εἶναι κατ᾽ ἀνάγκη συμμετρικό, παρατηροῦμε ὅτι $N(K+x,L+y)=N(K,L)$ γιὰ ὁποιαδήποτε $x,y\in\mathbb{R}^n$, ἐνῷ καὶ ὁ λόγος $|K+L|/|L|$ παραμένει ἀμετάβλητος ἂν μεταφέρουμε τὸ K ἢ τὸ L. Μποροῦμε ἑπομένως νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἀνισότητα (1.2.5) τῶν V. Milman καὶ Pajor (ἢ ἕνα ἀποτέλεσμα τοῦ Stein [64], σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα L στὸν $\mathbb{R}^n$, ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο $x\in L$ καὶ ἕνα κυρτὸ σῶμα $C\subseteq L$ τέτοιο ὥστε τὸ $C-x$ νὰ εἶναι συμμετρικὸ καὶ τέτοιο ὥστε $|C|>2^{-n}|L|$): μεταφέρουμε κατάλληλα τὸ L κατὰ ἕνα σημεῖο x καὶ βρίσκουμε ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα $C_0\subseteq L+x$ μὲ

$$|C_0|\geqslant 2^{-n}|L|.$$

Ἀλλὰ τότε, χρησιμοποιῶντας τὴν (4.1.2) γιὰ τὸ K καὶ τὸ συμμετρικὸ C_0, βλέπουμε ὅτι
$$N(K,L) \leqslant N(K,C_0) \leqslant 2^n \frac{|K+C_0|}{|C_0|} \leqslant 4^n \frac{|K+L|}{|L|}.$$
Ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει καὶ τὴν (4.1.3). □

Πόρισμα 4.1.2. *Ἔστω K, L κυρτὰ σώματα στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε,*
$$N(K,L)^{1/n} \simeq \frac{|K+L|^{1/n}}{|L|^{1/n}}.$$
Ἐπίσης, ἂν τὰ K καὶ L ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο, τότε
$$N(K,L)^{1/n} \leqslant 8N(L,K)^{1/n}.$$

Χρησιμοποιῶντας τὸ Λῆμμα 4.1.1 μποροῦμε πλέον νὰ ἐξηγήσουμε πῶς ἡ ἀσυμπτωτικὴ ἐκδοχὴ τῆς ἀνισότητος Santaló καὶ τῆς ἀντίστροφής της προκύπτουν ὡς συνέπειες τῆς ὑπάρξεως M-θέσεως γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα. Ἀκριβέστερα, ἂν γνωρίζουμε ὅτι γιὰ κάθε κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K ὑπάρχει ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_K$ τέτοιο ὥστε
$$\max\big\{\log N(K,\mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K,K), \log N(K^\circ,\mathcal{E}_K^\circ), \log N(\mathcal{E}_K^\circ,K^\circ)\big\} \leqslant cn$$
γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c>0$, τότε μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι
$$e^{-2(c+\log 8)n}\, s(B_2^n) \leqslant s(K) \leqslant e^{2(c+\log 8)n} s(B_2^n)$$
γιὰ ὅλα τὰ σώματα K μὲ βαρύκεντρο τὸ 0. Πράγματι, ἔστω ὅτι $\mathcal{E}_K$ εἶναι ἕνα M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ τυχὸν σῶμα K μὲ τὴν παραπάνω ἔννοια, τότε ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.1.1 θὰ ἔχουμε ὅτι
$$\frac{|\mathcal{E}_K+K|^{1/n}}{|K|^{1/n}} \leqslant 2N(\mathcal{E}_K,K)^{1/n} \leqslant 2e^c \leqslant 2e^c N(K,\mathcal{E}_K)^{1/n} \leqslant 8e^c \frac{|\mathcal{E}_K+K|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K|^{1/n}},$$
καὶ ἄρα θὰ ἰσχύει $|\mathcal{E}_K|^{1/n} \leqslant 8e^c|K|^{1/n}$. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βλέπουμε ὅτι
$$\max\Big\{\frac{|K|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K|^{1/n}}, \frac{|\mathcal{E}_K^\circ|^{1/n}}{|K^\circ|^{1/n}}, \frac{|K^\circ|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K^\circ|^{1/n}}\Big\} \leqslant 8e^c,$$
ἑπομένως καταλήγουμε στὸ ζητούμενο:
$$\frac{1}{64e^{2c}} \leqslant \frac{|K|^{1/n}|K^\circ|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K|^{1/n}|\mathcal{E}_K^\circ|^{1/n}} = \left(\frac{s(K)}{s(B_2^n)}\right)^{1/n} \leqslant 64e^{2c}.$$

Σημειώνουμε τέλος ὅτι ἡ M-θέσις ἔχει κάποια σχέσι καὶ μὲ τὴν ἰσοτροπικὴ θέσι, καὶ μάλιστα μποροῦμε ὑπὸ μίαν ἔννοια νὰ ταυτίσουμε τὶς δύο θέσεις ἂν ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἀληθής. Ὅπως θὰ δοῦμε στὴν ἑπομένη παράγραφο, κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα ποὺ ἔχει φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερὰ εἶναι ταυτόχρονα καὶ σὲ M-θέσι (μὲ μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται γραμμικὰ ἀπὸ τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ τοῦ σώματος). Ἐδῶ πρέπει νὰ προσέξουμε φυσικὰ ὅτι, ἐνῷ ἡ ἰσοτροπικὴ θέσις εἶναι μοναδικὰ ὁρισμένη ἂν ἀγνοήσουμε τοὺς ὀρθογωνίους μετασχηματισμούς, ἡ M-θέσις δὲν εἶναι σὲ καμμία περίπτωσι μοναδική. Πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνσι μποροῦμε νὰ ἀναφέρουμε τὸ ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα τῶν Bourgain, Klartag καὶ V. Milman [11].

Πρότασις 4.1.3. *Ὑποθέτουμε ὅτι γιὰ κάποια σταθερὰ $C \geqslant 1$ ἰσχύει τὸ ἑξῆς: γιὰ κάθε $n \geqslant 1$ καὶ γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο βρίσκεται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα*

$$|K + D_n|^{1/n} \leqslant 2C = C\big(|K|^{1/n} + |D_n|^{1/n}\big),$$

ὅπου μὲ D_n συμβολίζουμε τὴν Εὐκλείδεια μπάλα ὄγκου 1 (δηλαδὴ ἰσχύει μία ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski στὴν ἰσοτροπικὴ θέσι). Τότε ἔχουμε ὅτι $L_n \leqslant c_1 C^4$ γιὰ κάθε n, ὅπου c_1 εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

4.2 Ἀριθμοὶ καλύψεως στὴν ἰσοτροπικὴ θέσι

Ἔστω ὅτι μᾶς δίνονται δύο κυρτὰ σώματα K, B στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ τὸ B συμμετρικό. Μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα, ὄχι τετριμμένο σὲ πολλὲς περιπτώσεις, ἄνω φράγμα γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως $N(K, tB)$, $t > 0$, στὸ ὁποῖο νὰ ἐμφανίζεται ἡ ποσότητα

$$I_1(K, B) = \frac{1}{|K|} \int_K \|x\|_B dx.$$

Λῆμμα 4.2.1. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Γιὰ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα B στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ κάθε $t > 0$, ἔχουμε ὅτι*

$$\log N(K, tB) \leqslant \frac{c_1 n I_1(K, B)}{t} + \log 2,$$

ὅπου c_1 εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ὁρίζουμε ἕνα Borel μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ ὡς ἑξῆς:

$$\mu(A) = \frac{1}{c_K} \int_A e^{-p_K(x)} dx$$

γιὰ κάθε Borel ὑποσύνολο A τοῦ $\mathbb{R}^n$, ὅπου p_K εἶναι τὸ συναρτησοειδὲς Minkowski τοῦ K καὶ $c_K = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-p_K(x)) dx$. Χρησιμοποιῶντας τὸ γεγονὸς ὅτι $\{x \in \mathbb{R}^n : p_K(x) \leqslant t\} = tK$ γιὰ κάθε $t > 0$, καθῶς καὶ τὸ θεώρημα Fubini, μποροῦμε εὔκολα νὰ ὑπολογίσουμε ὅτι $c_K = n!$.

Θεωροῦμε ἕνα ὑποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_N\}$ τοῦ K τὸ ὁποῖο εἶναι μεγιστικὸ ὡς πρὸς τὴν συνθήκη $\|x_i - x_j\|_B \geqslant t$ ἂν $i \neq j$. Παρατηροῦμε τότε ὅτι $K \subseteq \bigcup_{i \leqslant N} (x_i + tB)$, καὶ ἄρα ὅτι $N(K, tB) \leqslant N$. Ἔστω τυχὸν $\alpha > 0$. Ἂν θέσουμε $y_i = (2a/t) x_i$, ἀπὸ τὴν ὑποπροσθετικότητα τοῦ p_K καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $p_K(x_i) \leqslant 1$, προκύπτει ὅτι

$$\mu(y_i + aB) \geqslant \frac{1}{c_K} \int_{aB} e^{-p_K(x)} e^{-p_K(y_i)} dx \geqslant e^{-2a/t} \mu(aB).$$

Ἐπιπλέον, τὰ σώματα $y_i + \alpha B$ ἔχουν ξένα ἐσωτερικά, ἑπομένως $N e^{-2\alpha/t} \mu(\alpha B) \leqslant 1$. Καταλήγουμε στὴν ἀνισότητα

$$N(K, tB) \leqslant 2 e^{2a/t} (\mu(aB))^{-1}.$$

Μένει νὰ ἐπιλέξουμε α τέτοιο ὥστε $\mu(\alpha B) \geqslant 1/2$. Μὲ ἁπλοὺς ὑπολογισμοὺς βλέπουμε ὅτι

$$J := \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\mu(x) = (n+1)I_1(K,B).$$

Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Markov προκύπτει ὅτι $\mu(2JB) \geqslant 1/2$, καὶ ἔτσι, ἂν ἐπιλέξουμε $\alpha = 2J$, ἔχουμε ὅτι

$$N(K,tB) \leqslant 2\exp(4J/t) \leqslant 2\exp\big(4(n+1)I_1(K,B)/t\big)$$

γιὰ κάθε $t > 0$. □

Παρατήρησις 4.2.2. (α) Ἐξαιτίας τῆς (1.0.2), μποροῦμε σχετικὰ εὔκολα νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$ ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύει $K \subseteq cnL_K B_2^n$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι, γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$, ἡ κυρτὴ θήκη $C(\theta)$ τοῦ συνόλου $\{\rho_K(\theta)\cdot\theta\} \cup (K \cap \theta^\perp)$ περιέχεται ὁλόκληρη στὸ K, καὶ ἄρα

$$1 = |K| \geqslant |C(\theta)| = \frac{\rho_K(\theta)\cdot|K\cap\theta^\perp|}{n} \simeq \frac{\rho_K(\theta)}{nL_K}.$$

Ἐφαρμόζοντας ἑπομένως τὸ Λῆμμα 4.2.1 στὴν περίπτωσι ποὺ B εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα B_2^n καὶ K ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα, καὶ λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν μας ὅτι γιὰ $t \gtrsim nL_K$ ἰσχύει $N(K,tB_2^n) = 1$, καταλήγουμε στὶς ἐκτιμήσεις

$$\log N(K,tB_2^n) \leqslant \frac{c_1' n^{3/2}L_K}{t} \quad \text{γιὰ κάθε } t > 0 \tag{4.2.1}$$

(ὅπου χρησιμοποιοῦμε καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $I_1(K,B_2^n) \leqslant \sqrt{n}L_K$). Μὲ αὐτὴν τὴν διατύπωσι τὸ λῆμμα ἐμφανίζεται στὴν διδακτορικὴ διατριβὴ τῆς Χαρτζουλάκη [25], ἡ ἀπόδειξις ὅμως, ποὺ μοιάζει μὲ τὸ ἐπιχείρημα τοῦ Talagrand γιὰ τὴν δυϊκὴ ἀνισότητα Sudakov, παραμένει ἡ ἴδια καὶ στὴν γενικὴ περίπτωσι. Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι ἡ ἰδέα νὰ χρησιμοποιηθεῖ ἡ παράμετρος $I_1(K,B_2^n)$ σὲ ἐκτιμήσεις γιὰ ἀριθμοὺς καλύψεως ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων ἐμφανίζεται γιὰ πρώτη φορὰ στὸ [45].

(β) Γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ προκύπτει, ἀπὸ τὴν (4.2.1) σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ Πόρισμα 4.1.2, ὅτι

$$\log N(D_n,K) \simeq \log N(K,D_n) \simeq \log N(K,\sqrt{n}B_2^n) \lesssim nL_K.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ἰσοτροπικὸ σῶμα K εἶναι καὶ σὲ M-θέσι μὲ σταθερὰ cL_K (γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ c). Ἑπομένως, ἂν ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἀληθής, θὰ ἔχουμε ὅτι ἡ ἰσοτροπικὴ θέσις εἶναι ταυτόχρονα καὶ M-θέσις.

(γ) Δεδομένου ὅτι γιὰ κάθε σύνολο S ἰσχύει

$$N(S-S,2B_2^n) = N(S-S,B_2^n-B_2^n) \leqslant N(S,B_2^n)^2,$$

μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς ἐκτιμήσεις (4.2.1) ποὺ μᾶς δίνει τὸ Λῆμμα 4.2.1 γιὰ νὰ καταλήξουμε σὲ ἕνα ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως τοῦ σώματος διαφορῶν ἑνὸς ἰσοτροπικοῦ σώματος K ἀπὸ Εὐκλείδειες μπάλες:

$$\log N(K-K,tB_2^n)\leqslant \frac{c_1' n^{3/2}L_K}{t}\quad \text{γιὰ κάθε } t>0. \tag{4.2.2}$$

Στὴν συνέχεια θὰ κάνουμε χρῆσι τῶν ἐκτιμήσεων (4.2.1) καὶ (4.2.2) μέσῳ τοῦ ἑπομένου λήμματος, τὸ ὁποῖο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ φράξουμε τοὺς δυϊκοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως $N(B_2^n,tK^\circ)$.

Λῆμμα 4.2.3. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Γιὰ κάθε $t>0$ θέτουμε $A(t):=t\log N(K,tB_2^n)$ καὶ $B(t):=t\log N(B_2^n,tK^\circ)$. Τότε*

$$\sup_{t>0}B(t)\leqslant 16\sup_{t>0}A(t).$$

Παρατήρησις. Σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ Λῆμμα 4.2.1 καὶ τὴν παρατήρησι ποὺ ἕπεται αὐτοῦ, βλέπουμε ὅτι γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ (ἢ ἀκόμη καὶ γιὰ μεταφορὰ ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος, στὸ ἐσωτερικὸ τῆς ὁποίας περιέχεται τὸ 0) ἰσχύει ὅτι

$$\log N(B_2^n,tK^\circ)\leqslant \log N\big(B_2^n,t(K-K)^\circ\big)\leqslant \frac{c_2 n^{3/2}L_K}{t}\quad \text{γιὰ κάθε } t>0, \tag{4.2.3}$$

ὅπου c_2 εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Θὰ χρησιμοποιήσουμε μία πολὺ γνωστὴ ἰδέα ἀπὸ τὸ [66] (δὲς ἐπίσης [35, Παράγραφος 3.3]). Γιὰ κάθε $t>0$ μποροῦμε νὰ γράψουμε $(t^2K^\circ)\cap(4K)\subseteq 2tB_2^n$. Περνῶντας στὰ πολικὰ σώματα, βλέπουμε ὅτι

$$B_2^n\subseteq \mathrm{conv}\left(\frac{t}{2}K^\circ,\frac{2}{t}K\right)\subseteq \frac{t}{2}K^\circ+\frac{2}{t}K.$$

Ἑπομένως, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} N(B_2^n,tK^\circ)&\leqslant N\left(\frac{t}{2}K^\circ+\frac{2}{t}K,tK^\circ\right)\leqslant N\left(\frac{2}{t}K,\frac{t}{2}K^\circ\right)\leqslant N\left(\frac{2}{t}K,\frac{1}{4}B_2^n\right)N\left(\frac{1}{4}B_2^n,\frac{t}{2}K^\circ\right)\\ &=N\left(K,\frac{t}{8}B_2^n\right)N(B_2^n,2tK^\circ).\end{aligned}$$

Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ὅτι

$$B(t)\leqslant 8A(t/8)+\frac{1}{2}B(2t)$$

γιὰ κάθε $t>0$, καὶ ἄρα

$$\sup_{t>0}B(t)\leqslant 16\sup_{t>0}A(t),$$

τὸ ὁποῖο εἶναι αὐτὸ ποὺ ζητούσαμε. □

4.3 Ἡ μέθοδος τῶν κυρτῶν διαταραχῶν τοῦ Klartag

Στὸ [27] ὁ Klartag ἔδωσε καταφατικὴ ἀπάντησι στὴν ἀκόλουθη ἐρώτησι τοῦ V. Milman: δοθέντος κυρτοῦ σώματος K στὸν $\mathbb{R}^n$, μποροῦμε, *ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ ἂν γνωρίζουμε ἂν κάθε κυρτὸ σῶμα ἔχει φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερά*, νὰ βροῦμε κάποιο κυρτὸ σῶμα Q μὲ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ $L_Q \simeq 1$ τὸ ὁποῖο νὰ εἶναι (ὅσο τὸ δυνατὸν πιὸ) «κοντὰ γεωμετρικὰ» στὸ K; Μὲ ἄλλα λόγια, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὰ κυρτὰ σώματα μὲ φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερὰ εἶναι «πυκνὰ» στὸν χῶρο ὅλων τῶν κυρτῶν σωμάτων; Πρέπει φυσικὰ νὰ ὁρίσουμε καὶ τὶ ἐννοοῦμε μὲ τὴν φράσι «γεωμετρικὰ κοντά». Μία ἔννοια ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν συμμετρικῶν κυρτῶν σωμάτων εἶναι, ὅπως ἔχουμε δεῖ, ἡ ἀπόστασις Banach-Mazur. Μάλιστα, ἡ ἀρχικὴ διατύπωσις τῆς *ἰσομορφικῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου*, ὅπως μπορεῖ νὰ ὀνομαστεῖ ἡ παραπάνω ἐρώτησις, εἶχε νὰ κάνει μόνον μὲ συμμετρικὰ σώματα καὶ ἡ ἔννοια ἀποστάσεως ποὺ ἐχρησιμοποιεῖτο ἦταν ἡ ἀπόστασις Banach-Mazur. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσι ὁ Klartag [26] ἔδωσε τὴν ἑξῆς ἀπάντησι: γιὰ κάθε συμμετρικὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα συμμετρικὸ σῶμα Q στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ $L_Q \simeq 1$ καὶ $d_{BM}(K,Q) \leqslant c\log n$, ὅπου c εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Ὅπως εἴδαμε καὶ στὴν εἰσαγωγή, τὸ ὅτι $d_{BM}(K,Q) \leqslant c\log n$ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ὥστε

$$K \subseteq T(Q) \subseteq (c\log n)K.$$

Ἀφοῦ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ θέσις τῶν K καὶ Q, δεδομένου ὅτι ἡ ἴδια ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ ὅλη τὴν ἀφινικὴ κλάσι ἑνὸς κυρτοῦ σώματος, μποροῦμε νὰ ἐπαναδιατυπώσουμε τὰ παραπάνω ὡς ἑξῆς: γιὰ κάθε συμμετρικὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα συμμετρικὸ σῶμα Q' στὸν $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε $L_{Q'} \simeq 1$ καὶ

$$K \subseteq Q' \subseteq (c\log n)K.$$

Ὅπως παρατηρεῖ ὁ Klartag, ἂν θέλαμε καὶ τὰ δύο σώματα K καὶ Q' νὰ εἶναι ταυτόχρονα στὴν ἰσοτροπικὴ θέσι, καὶ θέλαμε νὰ ἀντικαταστήσουμε καὶ τὸ φράγμα $c\log n$ ἀπὸ μία ἀπόλυτη σταθερὰ c', τότε αὐτὴ ἡ ἐκδοχὴ τῆς ἰσομορφικῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου θὰ ἦταν ἰσοδύναμη μὲ τὴν κανονικὴ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου. Πράγματι, τότε ἀπὸ τὴν Παρατήρησι 4.2.2(β) θὰ εἴχαμε ὅτι τὸ Q' εἶναι σὲ M-θέσι, καὶ ἔτσι σὲ M-θέσι θὰ ἦταν καὶ τὸ K (ἐφ' ὅσον θὰ εἴχαμε δείξει ὅτι εἶναι c'-κοντὰ στὸ Q'). Τότε ὅμως θὰ ἀρκοῦσε νὰ θυμηθοῦμε τὴν Πρότασι 4.1.3 ἀπὸ τὸ [11], ἡ ὁποία μᾶς λέει ὅτι κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K ποὺ εἶναι ταυτόχρονα σὲ M-θέσι μὲ σταθερὰ β, δηλαδὴ ἔχει τὴν ἰδιότητα $N(K,\overline{B}_2^n) \leqslant e^{\beta n}$, ἔχει ἰσοτροπικὴ σταθερὰ $L_K \lesssim e^{4\beta}$.

Στὸ [27] ὁ Klartag ἔδωσε πλήρη ἀπάντησι στὴν ἰσομορφικὴ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου χρησιμοποιῶντας μίαν ἄλλη ἔννοια ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν κυρτῶν σωμάτων, ποὺ θὰ μπορούσαμε νὰ ὀνομάσουμε *ἀφινικὴ ἀπόστασι Banach-Mazur*. Γιὰ ὁποιαδήποτε κυρτὰ σώματα K, Q στὸν $\mathbb{R}^n$ αὐτὴ ἡ ἀπόστασις ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$d_{BM}^{aff}(K,Q) := \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \frac{1}{\alpha}(K+x) \subseteq T(Q)+y \subseteq \alpha(K+x) \text{ ὅπου } T \in GL(n), x,y \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Ἡ μέθοδος τοῦ Klartag βασίζεται σὲ δύο σημαντικὲς παρατηρήσεις. Ἡ πρώτη παρατήρησις εἶναι ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε ἕνα σῶμα Q κοντὰ στὸ K μὲ τὴν παραπάνω ἔννοια, ἀρκεῖ πρῶτα νὰ ὁρίσουμε μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησι f μὲ φορέα τὸ K, ἡ ὁποία θὰ ἔχει φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερὰ καὶ τῆς ὁποίας οἱ τιμὲς δὲν θὰ ἔχουν μεγάλο εὖρος (μὲ τὴν ἔννοια τῆς (4.3.1)), καὶ μετὰ νὰ θεωρήσουμε τὸ σῶμα $K_{n+1}(f)$.

Πρότασις 4.3.1 ([27]). *Ἔστω K κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ καὶ ἔστω $f : K \to (0,\infty)$ μία λογαριθμικὰ-κοίλη συνάρτησις τέτοια ὥστε*

$$\sup_{x\in K} f(x) \leqslant m^n \inf_{x\in K} f(x) \tag{4.3.1}$$

γιὰ κάποιο $m > 1$. Γράφουμε x_0 γιὰ τὸ βαρύκεντρο τῆς f, δηλαδὴ $x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} xf(x)\,dx / \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$, καὶ θέτουμε $g(x) = f(x+x_0)$. Τότε, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 1.3.13 καὶ τὶς Προτάσεις 1.3.14(4) καὶ 1.3.21, ἔχουμε γιὰ τὸ κεντραρισμένο σῶμα $Q := K_{n+1}(g)$ τὰ ἑξῆς: $L_f \simeq L_Q$ καὶ

$$\frac{1}{m}Q \subseteq K - x_0 \subseteq mQ.$$

Ἡ δεύτερη βασικὴ παρατήρησις τοῦ Klartag ἦταν ὅτι ὑποψήφιες συναρτήσεις γιὰ τὴν συνάρτησι f ποὺ χρειαζόμαστε θὰ μποροῦσαν νὰ ὁριστοῦν μέσῳ τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace τοῦ σώματος K. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὁ λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς Laplace ἑνὸς πεπερασμένου μέτρου Borel στὸν $\mathbb{R}^n$ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν

$$\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \Lambda_\mu(\xi) := \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} \frac{d\mu(x)}{\mu(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Γιὰ τὴν μέθοδο τῶν κυρτῶν διαταραχῶν τοῦ Klartag χρειάζεται νὰ θυμηθοῦμε τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες τοῦ Λ_μ.

Πρότασις 4.3.2. *Ἄς συμβολίσουμε μὲ $\mu = \mu_K$ τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα K στὸν $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\big(\nabla\Lambda_\mu\big)(\mathbb{R}^n) = \mathrm{int}(K) \tag{4.3.2}$$

(καὶ μάλιστα γιὰ τὰ ἐπιχειρήματα στὸ [27] καὶ γιὰ τὴν ἀπόδειξι τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο, μᾶς ἀρκεῖ νὰ ξέρουμε ὅτι $\big(\nabla\Lambda_\mu\big)(\mathbb{R}^n) \subseteq K$). Ἄν μὲ μ'_ξ συμβολίσουμε τὸ μέτρο πιθανότητος στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχει πυκνότητα ἕνα πολλαπλάσιο τῆς συναρτήσεως $e^{\langle \xi, x\rangle}\mathbf{1}_K(x)$, τότε

$$\mathrm{bar}(\mu'_\xi) = \nabla\Lambda_\mu(\xi) \quad \textit{καὶ} \quad \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)(\xi) = \mathrm{Cov}(\mu'_\xi). \tag{4.3.3}$$

Ἐπιπλέον, ὁ μετασχηματισμὸς $\nabla\Lambda_\mu$, ὁ ὁποῖος εἶναι $1-1$, μεταφέρει τὸ μέτρο ν ποὺ ἔχει πυκνότητα $\det\mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu)$ στὸ μέτρο μ. Αὐτὸ ἐξ ὁρισμοῦ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε συνεχῆ, μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησι $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ἰσχύει

$$\int_K \phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla\Lambda_\mu(\xi)) \det\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu(\xi))\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla\Lambda_\mu(\xi))d\nu(\xi).$$

4.4 Ἀπόδειξις τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló

Σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο ἀποδεικνύουμε τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló χρησιμοποιῶντας τὰ ἀποτελέσματα τῶν προηγουμένων παραγράφων. Ἡ ἀπόδειξις ποὺ παρουσιάζεται ἐδῶ χωρίζεται σὲ τρία ἁπλὰ βήματα τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ περιγραφοῦν ὡς ἑξῆς: (α) βρίσκουμε ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K)$ στὸ ὁποῖο ἐμφανίζεται καὶ ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_K τοῦ K, (β) προσαρμόζοντας τὸ κύριο ἐπιχείρημα τοῦ Klartag ἀπὸ τὸ [27] δείχνουμε ὅτι κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα ἔχει φραγμένη ἀπόστασι (μὲ τὴν ἀφινικὴ ἔννοια ποὺ εἴδαμε παραπάνω) ἀπὸ ἕνα κυρτὸ σῶμα Q τοῦ ὁποίου ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_Q μπορεῖ νὰ φραχθεῖ ἀπὸ μία ποσότητα στὴν ὁποίαν ἐμφανίζεται καὶ τὸ $s(K)$, καὶ τέλος (γ) χρησιμοποιῶντας τὸ κάτω φράγμα γιὰ τὸ $s(Q)$ στὸ ὁποῖο ἐμφανίζεται ἡ L_Q, καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ γινόμενα ὄγκων $s(K)$ καὶ $s(Q)$ εἶναι συγκρίσιμα καθῶς τὰ K, Q εἶναι «γεωμετρικὰ κοντά», καταλήγουμε σὲ ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸ $s(K)$ τῆς ζητουμένης μορφῆς.

Κάτω φράγμα στὸ ὁποῖο ἐμφανίζεται ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερά

Τὸ πρῶτο βῆμα στὴν ἀπόδειξι εἶναι ἡ ἀκόλουθη πρότασις.

Πρότασις 4.4.1. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Τότε*

$$2|K|^{1/n}|nK^\circ|^{1/n} \geqslant |K-K|^{1/n}|n(K-K)^\circ|^{1/n} \geqslant \frac{c_1}{L_K}, \tag{4.4.1}$$

ὅπου $c_1 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ἡ πρώτη ἀνισότητα ἔχει ἤδη ἐξηγηθεῖ, ὁπότε μένει νὰ δείξουμε τὴν δεξιὰ ἀνισότητα στὴν (4.4.1). Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\big|A(K)-A(K)\big|\big|\big(A(K)-A(K)\big)^\circ\big| = |K-K||(K-K)^\circ|$$

γιὰ κάθε ἀντιστρέψιμο ἀφινικὸ μετασχηματισμὸ $A = x+T$, ὅπου $T \in GL(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ἄρα μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K βρίσκεται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι. Χρησιμοποιῶντας τὴν (4.2.3) μὲ $t = \sqrt{n}L_K$, συμπεραίνουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα πεπερασμένο ὑποσύνολο Z τοῦ $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε $\mathrm{card}(Z) \leqslant \exp(cn)$ καὶ

$$B_2^n \subseteq \bigcup_{x\in Z}\big(x+\sqrt{n}L_K(K-K)^\circ\big).$$

Ἑπομένως,

$$|B_2^n| \leqslant \mathrm{card}(Z)|\sqrt{n}L_K(K-K)^\circ| \leqslant \exp(cn)|\sqrt{n}L_K(K-K)^\circ|,$$

ἢ ἀλλιῶς

$$|(K-K)^\circ|^{1/n} \geqslant \frac{e^{-c}}{L_K}\,\frac{|B_2^n|^{1/n}}{\sqrt{n}}.$$

Δεδομένου ὅτι ὑπάρχει ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$ τέτοια ὥστε $|B_2^n|^{1/n}/\sqrt{n} \geqslant c_1/n$, τὸ ζητούμενο τῆς προτάσεως ἕπεται. □

Μία παραλλαγὴ τοῦ ἐπιχειρήματος τοῦ Klartag

Στὸ δεύτερο βῆμα τῆς ἀποδείξεως θέλουμε νὰ δείξουμε ὅτι κάθε κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ ἔχει ἀπολύτως φραγμένη (ἀφινική) γεωμετρικὴ ἀπόστασι ἀπὸ ἕνα κυρτὸ σῶμα Q μὲ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_Q ἡ ὁποία δὲν μπορεῖ νὰ ξεπερνᾶ μία ἔκφρασι-συνάρτησι τοῦ γινομένου ὄγκων $s(K-K)$.

Πρότασις 4.4.2. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ καὶ ἕνα σημεῖο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}Q \subseteq K + x \subseteq (1+\varepsilon)Q \quad \textit{καὶ} \quad L_Q \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}}}, \tag{4.4.2}$$

ὅπου $c_2 > 0$ εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0 καὶ ὅτι $|K| = 1$. Αὐτὸ γιατί, ἂν δείξουμε τὴν πρότασι γιὰ $\tilde{K} := (K - \mathrm{bar}(K))/|K|^{1/n}$ καὶ κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$, καὶ ἂν βροῦμε ἕνα κυρτὸ σῶμα Q ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν (4.4.2) μὲ τὸ $\tilde{K}$ στὴν θέσι τοῦ K, θὰ ἔχουμε ἀμέσως ὅτι καὶ τὸ ζευγάρι $(K, |K|^{1/n}Q)$ ἱκανοποιεῖ τὶς ζητούμενες ἰδιότητες, ἀφοῦ καὶ ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_Q καὶ τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K-K)$ παραμένουν ἀμετάβλητα ἀπὸ ἀφινικοὺς μετασχηματισμούς.

Ἂς θυμηθοῦμε ἀπὸ τὴν Πρότασι 4.3.2 ὅτι, ἂν $\mu = \mu_K$ εἶναι ὁ περιορισμὸς τοῦ μέτρου Lebesgue στὸ K, τότε ὁ 1-1 μετασχηματισμὸς $\nabla\Lambda_\mu$ μεταφέρει τὸ μέτρο ν ποὺ ἔχει πυκνότητα (ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue)

$$\frac{d\nu}{d\xi} = \det \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu(\xi)) \equiv \det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)$$

στὸ μ. Κατὰ συνέπεια

$$\nu(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1} \det \mathrm{Hess}\,(\Lambda_\mu(\xi))\, d\xi = \int_K \mathbf{1}\, dx = |K| = 1,$$

καὶ ἄρα, γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$|\varepsilon n(K-K)^\circ| \min_{\xi \in \varepsilon n(K-K)^\circ} \det \mathrm{Cov}(\mu_\xi) \leqslant \int_{\varepsilon n(K-K)^\circ} \det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)\, d\xi = \nu(\varepsilon n(K-K)^\circ) \leqslant 1.$$

Τὸ τελευταῖο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει $\xi \in \varepsilon n(K-K)^\circ$ τέτοιο ὥστε

$$\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi) = \min_{\xi' \in \varepsilon n(K-K)^\circ} \det \mathrm{Cov}(\mu_{\xi'}) \leqslant |\varepsilon n(K-K)^\circ|^{-1} \leqslant \left(\frac{4}{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}}\right)^n.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν μέτρων μ'_ξ καὶ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς, ἔχουμε ὅτι

$$L_{\mu'_\xi} = \left(\frac{\sup_{x\in K} e^{\langle \xi, x\rangle}}{\int_K e^{\langle \xi, x\rangle} dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu'_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Ἀφοῦ τὸ ξ ποὺ ἔχουμε βρεῖ ἀνήκει στὸ $\varepsilon n(K-K)^\circ$, καὶ ἀφοῦ $K \cup (-K) \subset K-K$, βλέπουμε ἀμέσως ὅτι $|\langle \xi, x\rangle| \leqslant \varepsilon n$ γιὰ ὅλα τὰ $x \in K$, καὶ ἄρα $\sup_{x\in K} e^{\langle \xi, x\rangle} \leqslant \exp(\varepsilon n)$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἀφοῦ τὸ βαρύκεντρο τοῦ K εἶναι τὸ 0 καὶ $|K| = 1$, προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Jensen ὅτι

$$\int_K e^{\langle \xi, x\rangle} dx \geqslant \exp\left(\int_K \langle \xi, x\rangle\, dx\right) = 1.$$

Συνδυάζοντας τὰ παραπάνω, λαμβάνουμε τὸ ἄνω φράγμα

$$L_{\mu'_\xi} \leqslant \frac{2e^{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}}}.$$

Μένει νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ συνάρτησις $f_\xi(x) = e^{\langle \xi, x\rangle}\mathbf{1}_K(x)$ (ἡ ὁποία εἶναι πολλαπλάσιο τῆς πυκνότητος τοῦ μέτρου μ'_ξ) εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη (ὡς γινόμενο τέτοιων) καὶ ἱκανοποιεῖ τὴν

$$\sup_{x\in \mathrm{supp}(f_\xi)} f_\xi(x) \leqslant e^{2\varepsilon n} \inf_{x\in \mathrm{supp}(f_\xi)} f_\xi(x)$$

(ἐξαιτίας τοῦ ὅτι $|\langle \xi, x\rangle| \leqslant \varepsilon n$ γιὰ ὅλα τὰ $x \in K$). Ἑπομένως, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρόταση 4.3.1 καὶ νὰ βροῦμε ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα Q_ξ στὸν $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε

$$L_{Q_\xi} \simeq L_{f_\xi} = L_{\mu'_\xi} \leqslant \frac{2e^{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}}}$$

καὶ

$$\frac{1}{e^{2\varepsilon}} Q_\xi \subseteq K - b_\xi \subseteq e^{2\varepsilon} Q_\xi,$$

ὅπου b_ξ εἶναι τὸ βαρύκεντρο τῆς f_ξ. Ἀφοῦ γιὰ μικρὰ ε ἰσχύει ὅτι $e^{2\varepsilon} \leqslant 1 + c\varepsilon$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ c, τὸ ζητούμενο ἕπεται. □

Διώχνοντας τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἀπὸ τὸ κάτω φράγμα

Συνδυάζοντας τὰ ἀποτελέσματα τῶν δύο προηγουμένων βημάτων, μποροῦμε τώρα νὰ διώξουμε τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_K ἀπὸ τὸ κάτω φράγμα γιὰ τὸ $s(K)^{1/n}$.

Θεώρημα 4.4.3. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ τὸ ὁποῖο περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Τότε*

$$|K|^{1/n}|nK^\circ|^{1/n} \geqslant c_3,$$

ὅπου $c_3 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον $|K|^{1/n}|nK^\circ|^{1/n} \geqslant \frac{1}{2}|K-K|^{1/n}|n(K-K)^\circ|^{1/n}$, μποροῦμε στὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀποδείξεως νὰ ὑποθέτουμε ὅτι τὸ K εἶναι καὶ συμμετρικό. Χρησιμοποιῶντας τὴν Πρόταση 4.4.2 μὲ $\varepsilon = 1/2$, βρίσκουμε ἕνα κυρτὸ σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ καὶ ἕνα σημεῖο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε

$$\frac{2}{3}Q \subseteq K + x \subseteq \frac{3}{2}Q \tag{4.4.3}$$

καὶ $L_Q \leqslant c_0/\sqrt{ns(K-K)^{1/n}} = c_0/\sqrt{ns(K)^{1/n}}$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_0 > 0$. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 4.4.1 βλέπουμε ὅτι

$$|Q-Q|^{1/n}|n(Q-Q)^\circ|^{1/n} \geqslant \frac{c_1}{L_Q},$$

ὅπου $c_1 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι $\frac{2}{3}(Q-Q) \subseteq K-K = 2K \subseteq \frac{3}{2}(Q-Q)$, καὶ ὡς ἐκ τούτου $K^\circ \supseteq \frac{4}{3}(Q-Q)^\circ$. Ἑπομένως, συνδυάζοντας ὅλα τὰ παραπάνω, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\begin{aligned} ns(K)^{1/n} &= |nK^\circ|^{1/n}|K|^{1/n} \geqslant \frac{4}{9}|n(T-T)^\circ|^{1/n}|T-T|^{1/n} \\ &\geqslant \frac{c_1'}{L_T} \geqslant c_2\sqrt{ns(K)^{1/n}}, \end{aligned}$$

ἀπὸ τὸ ὁποῖο προκύπτει ὅτι

$$s(K)^{1/n} \geqslant \frac{c_3}{n}$$

μὲ σταθερὰ $c_3 = c_2^2$, ὅπως ζητούσαμε. □

Ἔχοντας πλέον δείξει τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló, ἐπιστρέφουμε στὴν Πρόταση 4.4.2 καὶ ἀντικαθιστοῦμε τὸ $s(K-K)$ μὲ τὸ κάτω φράγμα ποὺ ἔχουμε γιὰ αὐτό. Αὐτὸ εἶναι τὸ τελευταῖο βῆμα στὴν λύσι ποὺ ἔδωσε ὁ Klartag ὡς πρὸς τὴν ἰσομορφικὴ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου.

Θεώρημα 4.4.4 (Klartag, 2006). *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Γιὰ κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ καὶ ἕνα σημεῖο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}Q \subseteq K + x \subseteq (1+\varepsilon)Q \quad \textit{καὶ} \quad L_Q \leqslant \frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4.4.4}$$

ὅπου $c_4 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

4.5 Ὕπαρξις M-ἐλλειψοειδῶν καὶ ἡ ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski

Μποροῦμε τώρα νὰ ἀποδείξουμε τὴν ὕπαρξι M-ἐλλειψοειδῶν γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα καί, ὡς συνέπεια αὐτοῦ, τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski.

Ὕπαρξις M-ἐλλειψοειδῶν

Ἔστω K ἕνα κεντραρισμένο σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$. Θὰ ἀποδείξουμε παρακάτω, χρησιμοποιῶντας τὰ ἐργαλεῖα τῶν προηγουμένων παραγράφων, ὅτι ὑπάρχει ἕνα M-ἐλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K (μὲ σταθερὰ $\beta \simeq 1$). Ἡ ἑπομένη πρότασις εἶναι τὸ πρῶτο βῆμα.

Πρότασις 4.5.1. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ βαρύκεντρο τὸ 0. Τότε ὑπάρχει ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_K$ τέτοιο ὥστε $|K| = |\mathcal{E}_K|$ καὶ*

$$\max\{\log N(K, t\mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K^\circ, tK^\circ)\} \leqslant \frac{cn}{t}$$

γιὰ κάθε $t > 0$, ὅπου c εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζοντας τὴν Πρόταση 4.4.4, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα Q μὲ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ $L_Q \leqslant C$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ C καὶ μὲ τὴν ἰδιότητα

$$\frac{2}{3}Q \subseteq K + x \subseteq \frac{3}{2}Q$$

γιὰ κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $T(Q)$, $T \in GL(n)$, εἶναι μία ἰσοτροπικὴ εἰκόνα τοῦ Q. Ἀπὸ τὴν Παρατήρησι 4.2.2(γ) καὶ τὸ Λῆμμα 4.2.3 ξέρουμε ὅτι

$$\max\{\log N\big(T(Q) - T(Q), t\sqrt{n}B_2^n\big), \log N\big(B_2^n, t\sqrt{n}(T(Q) - T(Q))^\circ\big)\} \leqslant \frac{cn}{t} \tag{4.5.1}$$

γιὰ κάθε $t > 0$. Δεδομένου ὅτι

$$\frac{2}{3}(T(Q) - T(Q)) \subseteq T(K) - T(K) \subseteq \frac{3}{2}(T(Q) - T(Q)),$$

ὅπως ἐπίσης καὶ ὅτι $T(K) \subseteq T(K) - T(K)$, $(T(K) - T(K))^\circ \subseteq (T(K))^\circ$, ἕπεται ἀπὸ τὴν (4.5.1) ὅτι

$$\max\{\log N\big(T(K), t\sqrt{n}B_2^n\big), \log N\big(B_2^n, t\sqrt{n}(T(K))^\circ\big)\} \leqslant \frac{c'n}{t} \tag{4.5.2}$$

γιὰ κάθε $t > 0$. Θέτουμε $\mathcal{E}_K := T^{-1}(a\sqrt{n}B_2^n)$, ὅπου τὸ a τὸ ἐπιλέγουμε ἔτσι ὥστε $|T(K)| = |a\sqrt{n}B_2^n|$ (ἰσοδύναμα, ἔτσι ὥστε $|\mathcal{E}_K| = |K|$). Ἀπὸ τὴν (4.5.1) βλέπουμε τότε ὅτι

$$\max\{\log N(K, t\mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K^\circ, tK^\circ)\} \leqslant \frac{c'an}{t} \tag{4.5.3}$$

γιὰ κάθε $t > 0$. Γιὰ νὰ ἔχουμε δείξει πλήρως τὸ ζητούμενο, ἀρκεῖ πλέον νὰ παρατηρήσουμε ὅτι

$$|\sqrt{n}B_2^n|^{1/n} \simeq 1 = |T(Q)|^{1/n} \simeq |T(K+x)|^{1/n} = |T(K)|^{1/n},$$

ἀπὸ ὅπου ἕπεται ὅτι $a \simeq 1$ καὶ ὅτι τὸ $c'a$ στὴν (4.5.3) φράσσεται ἀπὸ ἀπόλυτη σταθερά. □

Συνδυάζοντας τὴν Πρόταση 4.5.1 μὲ τὴν κλασσικὴ ἀνισότητα Santaló καὶ τὸ Πόρισμα 4.1.2, δείχνουμε τώρα τὴν ὕπαρξι M-ἐλλειψοειδῶν γιὰ κάθε κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 4.5.2. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ κέντρο βάρους τὸ 0. Μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_K$ τέτοιο ὥστε $|K| = |\mathcal{E}_K|$ καὶ*

$$\max\big\{\log N(K, \mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K, K), \log N(K^\circ, \mathcal{E}_K^\circ), \log N(\mathcal{E}_K^\circ, K^\circ)\big\} \leqslant cn,$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $\mathcal{E}_K$ εἶναι τὸ ἐλλειψοειδὲς ποὺ ὁρίστηκε στὴν Πρόταση 4.5.1. Ἕπεται ἀμέσως ὅτι

$$\max\big\{N(K, \mathcal{E}_K), N(\mathcal{E}_K^\circ, K^\circ)\big\} \leqslant \exp(cn).$$

Γιὰ νὰ δείξουμε τὸ ἴδιο ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τοὺς ἄλλους δύο ἀριθμοὺς καλύψεως, ἐπικαλούμαστε τὸ Λῆμμα 4.1.1: $N(\mathcal{E}_K, K) \leqslant 8^n N(K, \mathcal{E}_K)$, τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι $\log N(\mathcal{E}_K, K) \leqslant (\log 8)n + \log N(K, \mathcal{E}_K)$, καὶ παρομοίως

$$N(K^\circ, \mathcal{E}_K^\circ) \leqslant 2^n \frac{|K^\circ + \mathcal{E}_K^\circ|}{|\mathcal{E}_K^\circ|} \leqslant 2^n \frac{|K^\circ + \mathcal{E}_K^\circ|}{|K^\circ|} \leqslant 4^n N(\mathcal{E}_K^\circ, K^\circ),$$

ὅπου βεβαίως χρησιμοποιήσαμε καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $|K| = |\mathcal{E}_K| \Rightarrow |K^\circ| \leqslant |\mathcal{E}_K^\circ|$ ἐξαιτίας τῆς κλασσικῆς ἀνισότητος Santaló. □

Ἡ ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski

Σὰν συνέπεια τοῦ Θεωρήματος 4.5.2 καὶ τοῦ Πορίσματος 4.1.2, παίρνουμε τὴν «ἀντίστροφη» ἀνισότητα Brunn-Minkowski.

Θεώρημα 4.5.3. *Ἔστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα στὸν $\mathbb{R}^n$ μὲ βαρύκεντρο τὸ 0. Τότε ὑπάρχει ἕνα ἐλλειψοειδὲς $\mathcal{E}_K$ μὲ ὄγκο $|\mathcal{E}_K| = |K|$ καὶ τέτοιο ὥστε, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα L στὸν $\mathbb{R}^n$,*

$$e^{-(c+\log 8)}\, |\mathcal{E}_K + L|^{1/n} \leqslant |K + L|^{1/n} \leqslant e^{c+\log 8}\, |\mathcal{E}_K + L|^{1/n}, \tag{4.5.4}$$

$$e^{-(c+\log 8)}\, |\mathcal{E}_K^\circ + L|^{1/n} \leqslant |K^\circ + L|^{1/n} \leqslant e^{c+\log 8}\, |\mathcal{E}_K^\circ + L|^{1/n}, \tag{4.5.5}$$

ὅπου c εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ βρήκαμε στὸ Θεώρημα 4.5.2.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $\mathcal{E}_K$ εἶναι τὸ ἐλλειψοειδὲς τὴν ὕπαρξι τοῦ ὁποίου μᾶς ἐξασφαλίζει ἡ Πρότασις 4.5.1. Χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ Λῆμμα 4.1.1, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_K + T|^{1/n} &\leqslant 2|T|^{1/n} N(\mathcal{E}_K, T)^{1/n} \leqslant 2|T|^{1/n} N(\mathcal{E}_K, K)^{1/n} N(K, T)^{1/n} \\ &\leqslant 2e^c |T|^{1/n} N(K, T)^{1/n} \leqslant 8e^c |K + T|^{1/n}. \end{aligned}$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο δείχνουμε καὶ τὸ δεύτερο μέρος τῆς (4.5.4), καθὼς καὶ τὴν (4.5.5). □

Παρατήρησις 4.5.4. Ἔχει ἐπικρατήσει νὰ λέμε ὅτι ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K βρίσκεται σὲ M-θέσι ἂν ἕνα ἀπὸ τὰ ἐλλειψοειδῆ $\mathcal{E}_K$ ποὺ ψάχνουμε στὸ Θεώρημα 4.5.2 γίνεται νὰ εἶναι μία Εὐκλείδεια μπάλα (κατάλληλης ἀκτίνος ὥστε ὁ ὄγκος της νὰ εἶναι ἴσος μὲ τοῦ K). Προφανῶς, ἂν θέσουμε $r_K := |K|^{1/n}/|B_2^n|^{1/n}$ καὶ $\mathcal{E}_K = T_K(r_K B_2^n)$ γιὰ κάποιον μετασχηματισμὸ T_K ποὺ δὲν μεταβάλλει τοὺς ὄγκους, τότε ἡ γραμμικὴ εἰκόνα $\tilde{K} := T_K^{-1}(K)$ τοῦ K, ποὺ ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ τὸ K, βρίσκεται σὲ M-θέσι. Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι $\tilde{K}_1$ καὶ $\tilde{K}_2$ εἶναι τέτοιες εἰκόνες δύο κυρτῶν σωμάτων K_1 καὶ K_2 στὸν $\mathbb{R}^n$, καὶ ὅτι γράφοντας K_i' ἐννοοῦμε εἴτε τὸ $\tilde{K}_i$ εἴτε τὸ πολικό του $(\tilde{K}_i)^\circ$. Χρησιμοποιῶντας τὶς (4.5.4) καὶ (4.5.5), βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} |K_1' + K_2'|^{1/n} &\leqslant c|K_1' + r_{K_2'} B_2^n|^{1/n} \leqslant c^2 |r_{K_1'} B_2^n + r_{K_2'} B_2^n|^{1/n} \\ &= c^2 \big(r_{K_1'} + r_{K_2'}\big) |B_2^n|^{1/n} = c^2 \big(|K_1'|^{1/n} + |K_2'|^{1/n}\big). \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἔχουμε ἕνα μερικὸ ἀντίστροφο τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski τὸ ὁποῖο ἰσχύει γιὰ συγκεκριμένες ἀφινικὲς εἰκόνες τῶν τυχαίων κυρτῶν σωμάτων K_1, K_2 στὸν $\mathbb{R}^n$, καθῶς καὶ γιὰ τὰ πολικὰ σώματα αὐτῶν τῶν εἰκόνων. Ἄμεση συνέπεια τῆς (4.5.6) καὶ τοῦ Πορίσματος 4.1.2 εἶναι τὸ ἀκόλουθο

Πόρισμα 4.5.5. *Ἔστω K, L δύο κυρτὰ σώματα στὸν $\mathbb{R}^n$ ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο καὶ βρίσκονται σὲ M-θέσι. Τότε, γιὰ κάθε $t > 0$,*

$$N(K, tL)^{1/n} \simeq N(L, tK)^{1/n}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον τὰ πολλαπλάσια tL καὶ tK εἶναι ἐπίσης σὲ M-θέσι γιὰ κάθε $t > 0$, ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} N(K, tL)^{1/n} &\simeq \frac{|K + tL|^{\frac{1}{n}}}{|tL|^{\frac{1}{n}}} \simeq \frac{|K|^{\frac{1}{n}} + t|L|^{\frac{1}{n}}}{t|L|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{t|K|^{\frac{1}{n}} + |L|^{\frac{1}{n}}}{t|K|^{\frac{1}{n}}} \simeq \frac{|tK + L|^{\frac{1}{n}}}{|tK|^{\frac{1}{n}}} \simeq N(L, tK)^{1/n}. \end{aligned}$$ □

Ἡ πορεία ποὺ περιγράψαμε σὲ αὐτὴν τὴν τελευταία παράγραφο εἶναι ἡ ἀντίστροφη ἀπὸ αὐτὴν ποὺ ἐμφανίζεται στὴν βιβλιογραφία καὶ τὴν ὁποία ἐξηγήσαμε στὴν Παράγραφο 4.1, κατὰ τὴν ὁποία ἡ ὕπαρξις M-ἐλλειψοειδῶν συνεπάγεται τόσο τὴν ἀσυμπτωτικὴ ἐκδοχὴ τῆς κλασσικῆς ἀνισότητος Santaló ὅσο καὶ τὴν ἀντίστροφή της. Μποροῦμε ἑπομένως νὰ ποῦμε ὅτι τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμοι τρόποι νὰ ἀναφερθοῦμε στὴν ἴδια γεωμετρικὴ ἰδιότητα τῶν κυρτῶν σωμάτων ποὺ ἔχουν κέντρο βάρους τὸ 0, νὰ συμπεριφέρονται ὡς πρὸς τὸν ὄγκο σὰν ἐλλειψοειδῆ.

Ἀναφορές

[1] Artstein-Avidan, S., V. Milman and S. J. Szarek. "Duality of metric entropy." *Annals of Mathematics* **159** (2004): 1313-1328.

[2] Ball, K. M. "Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$." *Studia Mathematica* **88** (1988): 69-84.

[3] Blaschke, W. "Über affine Geometrie VII: Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid." *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse* **69** (1917): 306-318.

[4] Bobkov, S. G. and F. L. Nazarov. "On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1807**: 53-69. Springer, 2003.

[5] Bobkov, S. G. and F. L. Nazarov. "Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis." *Stochastic Inequalities and Applications*, Progress in Probability **56**: 3-13. Basel: Birkhäuser, 2003.

[6] Borell, C. "Convex measures on locally convex spaces." *Arkiv för Matematik* **12** (1974): 239-252.

[7] Borell, C. "Convex set functions in d-space." *Periodica Mathematica Hungarica* **6** (1975): 111-136.

[8] Bourgain, J. "On high dimensional maximal functions associated to convex bodies." *American Journal of Mathematics* **108** (1986): 1467-1476.

[9] Bourgain, J. "On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1469**: 127-137. Springer, 1991.

[10] Bourgain, J. "On the isotropy constant problem for ψ_2-bodies." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1807**: 114-121. Springer, 2003.

[11] Bourgain, J., B. Klartag and V. D. Milman. "Symmetrization and isotropic constants of convex bodies." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1850**: 101-116. Springer, 2004.

[12] Bourgain, J. and V. D. Milman. "New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$." *Inventiones mathematicae* **88** (1987): 319-340.

[13] Brazitikos, S., A. Giannopoulos, P. Valettas and B.-H. Vritsiou. *Notes on Isotropic Convex Bodies.* Book in preparation. `http://users.uoa.gr/~apgiannop/`.

[14] Dafnis, N. and G. Paouris. "Small ball probability estimates, ψ_2-behavior and the hyperplane conjecture." *Journal of Functional Analysis* **258** (2010): 1933-1964.

[15] Dafnis, N. and G. Paouris. "Estimates for the affine and dual affine quermassintegrals of convex bodies." *Illinois Journal of Mathematics* (to appear).

[16] Dvoretzky, A. "Some results on convex bodies and Banach spaces." *Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem*: 123-160. Jerusalem Academic Press, 1960.

[17] Fradelizi, M. "Sections of convex bodies through their centroid," *Archiv der Mathematik* **69** (1997): 515-522.

[18] Giannopoulos, A. *Notes on isotropic convex bodies.* Lecture Notes, Warsaw 2003. `http://users.uoa.gr/~apgiannop/`.

[19] Giannopoulos, A. and V. D. Milman. "Concentration property on probability spaces." *Advances in Mathematics* **156** (2000): 77-106.

[20] Giannopoulos, A., G. Paouris and P. Valettas. "On the existence of subgaussian directions for log-concave measures." *Contemporary Mathematics* **545** (2011): 103-122.

[21] Giannopoulos, A., G. Paouris and B.-H. Vritsiou. "A remark on the slicing problem." *Journal of Functional Analysis*, **262** (2012): 1062-1086.

[22] Giannopoulos, A., G. Paouris and B.-H. Vritsiou. "The isotropic position and the reverse Santaló inequality." *Israel Journal of Mathematics*, 2013. Doi:10.1007/s11856-012-0173-2.

[23] Gordon, Y., M. Meyer and S. Reisner. "Zonoids with minimal volume product - a new proof." *Proceedings of the American Mathematical Society* **104** (1988), 273-276.

[24] Grünbaum, B. "Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes." *Pacific Journal of Mathematics* **10** (1960): 1257-1261.

[25] Hartzoulaki, M. *Probabilistic Methods in the Theory of Convex Bodies.* Ph.D. Thesis (March 2003). University of Crete.

[26] Klartag, B. "An isomorphic version of the slicing problem." *Journal of Functional Analysis* **218** (2005): 372-394.

[27] Klartag, B. "On convex perturbations with a bounded isotropic constant." *Geometric and Functional Analysis* **16** (2006): 1274-1290.

[28] Klartag, B. "Uniform almost sub-gaussian estimates for linear functionals on convex sets." *Algebra i Analiz* (St. Petersburg Mathematical Journal) **19** (2007): 109-148.

[29] Klartag, B. and E. Milman. "Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach." *Journal of Functional Analysis* **262** (2012): 10-34.

[30] Klartag B. and V. D. Milman. "Rapid Steiner Symmetrization of most of a convex body and the slicing problem." *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005): 829-843.

[31] Klartag, B. and R. Vershynin. "Small ball probability and Dvoretzky theorem." *Israel Journal of Mathematics* **157** (2007): 193-207.

[32] Kuperberg, G. "A low-technology estimate in convex geometry." *International Mathematics Research Notices* **9** (1992): 181-183.

[33] Kuperberg, G. "From the Mahler conjecture to Gauss linking integrals." *Geometric and Functional Analysis* **18** (2008): 870-892.

[34] Łatala, R. and J. O. Wojtaszczyk. "On the infimum convolution inequality." *Studia Mathematica* **189** (2008): 147-187.

[35] Ledoux, M. and M. Talagrand. "Probability in Banach spaces." Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **23**. Berlin: Springer, 1991.

[36] Litvak, A. E., V. D. Milman and G. Schechtman. "Averages of norms and quasi-norms." *Mathematische Annalen* **312** (1998): 95-124.

[37] Lutwak, E., D. Yang and G. Zhang. "L_p affine isoperimetric inequalities." *Journal of Differential Geometry* **56** (2000): 111-132.

[38] Mahler, K. "Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper." *Časopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky* **68** (1939): 93-102.

[39] Meyer, M. "Une characterisation volumique de certains espaces normés." *Israel Journal of Mathematics* **55** (1986): 317-326.

[40] Meyer, M. and A. Pajor. "On the Blaschke-Santaló inequality." *Archiv der Mathematik* **55** (1990): 82-93.

[41] Milman, V. D. "A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies." *Funkcional. Anal. i Priložen.* (in Russian) **5** no. 4 (1971): 28–37.

[42] Milman, V. D. "Inegalité de Brunn-Minkowski inverse et applications à la théorie locale des espaces normés." *Comptes Rendus de l' Académie des sciences*, Série I, Mathématique **302** no. 1 (1986): 25-28.

[43] Milman, V. D. "Isomorphic symmetrization and geometric inequalities." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988): 107-131.

[44] Milman, V. D. and A. Pajor. "Isotropic positions and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1376**: 64-104. Springer, 1989.

[45] Milman, V. D. and A. Pajor. "Cas limites dans les inégalités du type de Khinchine et applications géometriques." *Comptes Rendus de l' Académie des sciences*, Série I, Mathématique **308** no. 4 (1989), 91-96.

[46] Milman, V. D. and A. Pajor. "Entropy and Asymptotic Geometry of Non-Symmetric Convex Bodies." *Advances in Mathematics* **152** (2000): 314-335.

[47] Milman, V. D. and G. Schechtman. *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces.* Lecture Notes in Mathematics **1200**. Berlin: Springer, 1986.

[48] Milman, V. D. and G. Schechtman. "Global versus local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces." *Duke Mathematical Journal* **90** no. 1 (1997): 73-93.

[49] Nazarov, F. "The Hörmander proof of the Bourgain-Milman theorem." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **2050** (2012): 335-343.

[50] Paouris, G. "ψ_2-estimates for linear functionals on zonoids." *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1807** (2003): 211-222.

[51] Paouris, G. "On the ψ_2-behavior of linear functionals on isotropic convex bodies." *Studia Mathematica* **168** (2005): 285-299.

[52] Paouris, G. "Concentration of mass in convex bodies." *Geometric and Functional Analysis* **16** (2006): 1021-1049.

[53] Paouris, G. "Small ball probability estimates for log-concave measures." *Transactions of the American Mathematical Society* **364** (2012): 287-308.

[54] Petty, C. M. "Affine isoperimetric problems." *Annals of the New York Academy of Sciences* **440** (1985): 113-127.

[55] Pisier, G. "A new approach to several results of V. Milman." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **393** (1989): 115-131.

[56] Pisier, G. *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry.* Cambridge Tracts in Mathematics **94**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[57] Reisner, S. "Random polytopes and the volume-product of symmetric convex bodies." *Mathematica Scandinavica* **57** (1985): 386-392.

[58] Reisner, S. "Zonoids with minimal volume product." *Mathematische Zeitschrift* **192** (1986): 339-346.

[59] Rogers, C. A. and G. C. Shephard. "Convex bodies associated with a given convex body." *Journal of the London Mathematical Society* **33** (1958): 270-281.

[60] Saint Raymond, J. "Sur le volume des corps convexes symétriques." *Séminaire d'Initiation à l'Analyse, 20e Année* (1980-1981), Exposé no. 11. Paris: Université Paris VI, 1981.

[61] Santaló, L. A. "An affine invariant for convex bodies of n-dimensional space." *Portugaliae Mathematica* (Spanish) **8** (1949): 155-161.

[62] Schneider, R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[63] Spingarn, J. "An inequality for sections and projections of a convex set." *Proceedings of the American Mathematical Society* **118** (1993): 1219-1224.

[64] Stein, S. "The symmetry function in a convex body." *Pacific Journal of Mathematics* **6** (1956): 145-148.

[65] Sudakov, V. N. "Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert spaces." *Soviet Mathematics - Doklady* **12** (1971): 412-415.

[66] Tomczak-Jaegermann, N. "Dualité des nombres d' entropie pour des opérateurs a valeurs dans un espace de Hilbert." *Comptes Rendus de l' Académie des sciences*, Série I, Mathématique **305** no. 7 (1987): 299-301.

[67] Vritsiou, B.-H. "Further unifying two approaches to the hyperplane conjecture." *International Mathematics Research Notices*, 2012. Doi:10.1093/imrn/rns263.

[68] Zong, C. *Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry.* Universitext. Springer, 2003.