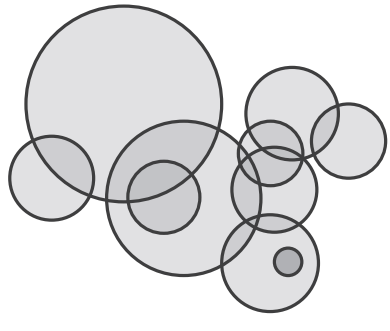
Διδιαστατότητα

Θεωρία και Αλγοριθμικές Εφαρμογές

Αθανάσιος Κουτσώνας



Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων Καθηγητής: Δημήτριος Μ. Θηλυκός
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών — Οκτώβριος 2013

Περίληψη

Πολλά συνδυαστικά υπολογιστικά προβλήματα είναι στη γενική μορφή τους δύσβατα, υπό την έννοια πως ακόμη και για εισόδους μέτριου μεγέθους, η εύρεση μιας ακριβούς και βέλτιστης λύσης είναι μάλλον ανέφικτη, δεδομένου ότι συνήθως απαιτεί την κλήση αλγορίθμων των οποίων η χρονική πολυπλοκότητα είναι εκθετική ως προς το μέγεθος του προβλήματος. Συχνά τα προβλήματα αυτά μπορούν να οριστούν σε γραφήματα. Πρόσθετες δομικές ιδιότητες ενός γραφήματος, όπως η εμβαπτισιμότητα σε κάποια επιφάνεια, παρέχουν μια λαβή για το σχεδιασμό αποδοτικότερων αλγορίθμων.

Η θεωρία της Διδιαστατότητας αναπτύχθηκε στα πλαίσια της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας και βασιζόμενη στα αποτελέσματα της θεωρίας των Ελασσόνων Γραφημάτων, παρέχει ένα μετα-αλγοριθμικό πλαίσιο για την αντιμετώπιση ενός συνόλου προβλημάτων σε πλατύ φάσμα κλάσεων γραφημάτων, πιο συγκεκριμένα σε όλες τις γενικεύσεις γραφημάτων εμβαπτίσιμων σε κάποια επιφάνεια.

Στη διδακτορική διατριβή αυτή θεωρούμε ζητήματα συνδυαστικής φύσης σχετικά με την εφαρμογή της θεωρίας της Διδιαστατότητας και τις δυνατότητες επέκτασης του πεδίου εφαρμογής της.

Abstract

Many combinatorial computational problems are considered in their general form intractable, in the sense that even for modest size problems, providing an exact optimal solution is practically infeasible, as it typically involves the use of algorithms whose running time is exponential in the size of the problem. Often these problems can be modeled by graphs. Then, additional structural properties of a graph, such as surface embeddability, can provide a handle for the design of more efficient algorithms.

The theory of Bidimensionality, defined in the context of Parameterized Complexity, builds on the celebrated results of Graph Minor theory and establishes a meta algorithmic framework for addressing problems in a broad range of graph classes, namely all generalizations of graphs embeddable on some surface.

In this doctoral thesis we explore topics of combinatorial nature related to the implementation of the theory of Bidimensionality and to the possibilities of the extension of its applicability range.

Πρόλογος

Ο Αρχιμήδης φέρεται να είπε 'ΜΗ ΜΟΥ ΤΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥΣ ΤΑΡΑΤΤΕ', προφανώς σε στιγμή, που, για κάποιον παρευρισκόμενο, η σημασία της ενασχόλησής του ήταν λιγότερο αυτονόητη.

Μετά από περισσότερα από δύο χιλιάδες χρόνια σκοταδισμού, διαφωτισμού, προόδου, τεχνολογικής εξέλιξης και αναζήτησης θείας αλήθειας και κοσμικού πλούτου, είναι λυπηρή η παραδοχή, ότι οι συνθήκες σήμερα δεν ευνοούν την ελεύθερη σκέψη καλύτερα.

Αισθάνομαι ιδιαίτερη τιμή και θεωρώ τον εαυτό μου ευτυχή που ολοκλήρωσα την διδακτορική διατριβή μου στο τμήμα μαθηματικών στην Αθήνα. Παράλληλα, αισθάνομαι την επιταγή να αναγνωρίσω το γεγονός, ότι, υπό την τρέχουσα δομή της κοινωνίας και του εκπαιδευτικού συστήματος της, αυτό έγινε δυνατό μόνο από τα προνόμια που συνέβη να τύχω, βάση του τόπου και χρόνου της γέννησής μου.

Όχι τόσο αυτές τις άψυχες σελίδες, όσο όλο τον μόχθο μου κατά την διάρκεια των περιηγήσεών μου στα μαθηματικά, αφιερώνω στον καθένα που θα απολάμβανε μια ζωή εξασκώντας μαθηματικά— είτε του δόθηκε η ευκαιρία να το συνειδητοποιήσει, είτε όχι — αλλά του οποίου το περιβάλλον δεν το επέτρεψε.

Κεντρική Πίνδος,
Αύγουστος 2013

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ξεκινήσω ευχαριστώντας τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Μ. Θηλυκό. Στη διάρκεια των πολυπληθών ωρών που περάσαμε μαζί τα τελευταία χρόνια κάνοντας μαθηματικά, υπήρξαν στιγμές περισσότερο ή λιγότερο δημιουργικές, αγχώδεις, ευχάριστες, απαιτητικές και ανταμείβουσες, ωστόσο η έμφυτη ικανότητά του να διατηρεί σταθερή μεταδοτική θετική ενέργεια για την επιστήμη ήταν αποφασιστική για μένα, ώστε να συνεχίσω την προσπάθεια. Ακόμα, θα ήθελα να αναφέρω πως εκτιμώ ιδιαίτερα το γεγονός, ότι σεβάστηκε την προσωπική μου ζωή και ανέχθηκε τις ιδιοσυγκρασίες μου.

Συνεχίζοντας, ευχαριστώ τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, τον κ. Ευστάθιο Ζάχο και τον κ. Σταύρο Κολλιόπουλο. Είχα την ευκαιρία να συνεργαστώ και με τους δύο στο παρελθόν, και τους είμαι ευγνώμων για την διαρκή υποστήριξή τους.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τον κ. Μιχαήλ Δρακόπουλο, τον κ. Ελευθέριο Κυρούση, τον κ. Αριστείδη Παγουρτζή και τον κ. Ευάγγελο Ράπτη για την τιμή που μου έκαναν με τη συμμετοχή τους στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Ευχαριστώ τον κ. Alexander Grigoriev και τον κ. Koichi Yamazaki για την ερευνητική συνεργασία μας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνω στην Αρχοντία Γιαννοπούλου, τον Δημήτριο Ζώρο, και φυσικά στην οικογένεια και τους φίλους μου για την βοήθεια και στήριξή τους.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την βαθύτατη ευγνωμοσύνη μου στον πρώτο πραγματικό μαθηματικό που γνώρισα και καθηγητή μου, Νικόλαο Μαρτίνη. Είναι αδύνατο να διαχωρίσω τα ίχνη της καθοδήγησής του ακόμα και από τον πιο πρόχειρο μαθηματικό συλλογισμό μου. Του χρωστώ τα πάντα και πάνω από όλα την αγάπη μου για τα μαθηματικά.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Σύντομη περιγραφή 2

1.2 Η δομή του κειμένου 8

1.3 Κατάλογος δημοσιεύσεων 10

1.4 Κατάλογος σχημάτων 11

2 Βασικές έννοιες **13**

2.1 Γραφήματα 14

2.2 Εμβαπτίσεις σε επιφάνειες 18

2.3 Ειδικά γραφήματα 21

2.4 Αποσυνθέσεις 23

2.5 Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα 25

3 Διδιαστατότητα **27**

3.1 Παραμετρική πολυπλοκότητα 27

3.2 Διδιάστατες παράμετροι 31

3.3 Η συνθήκη της διδιαστατότητας 33

3.4 Αλγοριθμικές εφαρμογές 37

3.5 Ανοιχτά προβλήματα 40

4 Δύο προβλήματα σε επίπεδα γραφήματα **43**

4.1 Χρησιμοποιώντας την διδιαστατότητα 44

4.2 Προς ένα βελτιωμένο άνω φράγμα 47

4.3 Αποκαλύπτοντας την δομή 53

4.4 Αλγοριθμικές συνέπειες 60

5 Υποεκθετικότητα για σχεδόν επίπεδα γραφήματα **63**
5.1 Σχεδόν επίπεδα γραφήματα 64
5.2 Υποεκθετικοί αλγόριθμοι 69
5.3 Αλγόριθμοι πυρηνοποίησης 71
5.4 Γραφήματα τομής κυρτών σωμάτων 76
5.5 Επεκτάσεις 78

6 Μια ισοδύναμη κλάση: τα λ-ισόπεδα γραφήματα **81**
6.1 Η απόσταση τοίχο-τοίχο 82
6.2 Η κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων 86
6.3 Δενδροπλάτος και λ-ισόπεδα γραφήματα 93
6.4 Μια εικασία 97

7 Διδιαστατότητα γεωμετρικών γραφημάτων τομής **99**
7.1 Η βασική ιδέα 100
7.2 Μοντελοποίηση γεωμετρικών αντικειμένων 103
7.3 Η ανασκευασμένη σχέση ελασσόνων 106
7.4 Η συνθήκη της διδιαστατότητας 110
7.5 Συμπεράσματα 117

8 Παρεμποδίσεις για το πλάτος μονοπατιού σε μητροειδή **119**
8.1 Μητροειδή: μια σύντομη εισαγωγή 120
8.2 Παρεμποδίσεις κλάσεων μητροειδών 125
8.3 Μια αποσύνθεση μητροειδών 129
8.4 Μητροειδικό πλάτος μονοπατιού και γραμμοπλάτος 131
8.5 Παρεμποδίσεις για εξωεπίπεδα γραφήματα 134

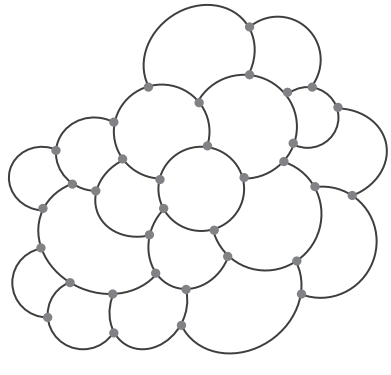
Παράρτημα **141**

Βιβλιογραφία **143**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Εξετάστε το σχέδιο που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1. Σημαδέψτε με ένα μολύβι μερικά από τα σημεία, έτσι ώστε να είναι αδύνατο να αρχίσετε από οποιοδήποτε σημείο του σχεδίου και να επιτρέψετε στο ίδιο σημείο ακολουθώντας τις γραμμές, χωρίς να πέσετε σε ένα σημαδεμένο σημείο ή να περάσετε από το ίδιο μέρος δύο φορές. Φυσικά, μια λύση είναι τετριμμένη: σημαδέψτε όλα τα σημεία — μπορείτε, όμως, να βρείτε μια λύση με τον ελάχιστο αριθμό σημαδεμένων σημείων;



Σχήμα 1.1: Ένα απλό γράφημα.

Αυτό το σχέδιο απεικονίζει ένα γράφημα, δηλαδή ένα σύνολο από κορυφές, όπου δύο κορυφές μπορεί να συνδέονται από μια ακμή. Και το προτεινόμενο παιχνίδι αντιστοιχεί στο ακόλουθο απλό πρόβλημα σε γραφήματα: «Λαμβάνοντας υπόψη ένα γράφημα και έναν αριθμό k, υπάρχει ένα σύνολο από το πολύ k

κορυφές, του οποίου αφαίρεση αφήνει το γράφημα χωρίς κύκλους;»

Στην πραγματικότητα, η απόφανση του προβλήματος αυτού δεν είναι διόλου απλή υπόθεση. Για την ακρίβεια, ήταν ένα από τα πρώτα που δείχθηκε το 1972 ότι συμπεριλαμβάνεται μεταξύ αυτών που θεωρούνται δύσβατα [99], δηλαδή προβλήματα για τα οποία καμία πρακτική λύση δεν μπορεί να υπάρχει, σύμφωνα τουλάχιστον με όσα είμαστε σε θέση να κατανοούμε προς το παρόν. Έκτοτε, το πρόβλημα Σύνολο Κορυφών Αναδρασης, όπως ονομάζεται, είναι ένα από τα πιο εντατικά μελετημένα προβλήματα στα μαθηματικά, βρίσκοντας εφαρμογές στα λειτουργικά συστήματα, τις βάσεις δεδομένων, τη γενετική βιολογία και τη σχεδίαση VLSI.

Η θεωρία γραφημάτων σχετίζεται άρρηκτα με τη μελέτη των δύσβατων προβλημάτων. Πράγματι πολλά προβλήματα σε γραφήματα είναι δύσβατα και τα περισσότερα δύσβατα προβλήματα έχουν μια ουσιώδη αναπαράσταση σε γραφήματα. Κατά συνέπεια, ένα σημαντικό μέρος της έρευνας στη θεωρία γραφημάτων εφάπτεται της περιοχής της σχεδίασης αλγορίθμων.

Πολυάριθμες τεχνικές έχουν αναπτυχθεί με στόχο να επιτεθούν σε δύσβατα προβλήματα. Χαρακτηριστικά, συχνά στρέφεται κανείς στις περιπτώσεις που υπακούουν σε πρόσθετους περιορισμούς. Η θεωρία της διδιαστατότητας είναι ένα ισχυρό πλαίσιο που παράγει αλγόριθμους που λύνουν αποτελεσματικά έναν αριθμό από προβλήματα (συμπεριλαμβανομένου και αυτού που περιγράφηκε νωρίτερα), οριζόμενα σε γραφήματα που είναι εμβαπτίσιμα σε κάποια επιφάνεια.

Σε αυτό το σκηνικό, η παρούσα διατριβή στοχεύει προς δύο κατευθύνσεις: την εφαρμογή των μεθόδων από τη θεωρία της διδιαστατότητας με σκοπό την εξαγωγή βελτιωμένων εξειδικευμένων αλγοριθμικών αποτελεσμάτων και την επέκταση του φάσματος της δυνατότητας εφαρμογής της θεωρίας της διδιαστατότητας. Επιπλέον, εξετάζουμε ένα πρόβλημα σε μητροειδή, μαθηματικά αντικείμενα που γενικεύουν την έννοια των γραφημάτων, βάση ενός πιο αφηρημένου ορισμού περί ανεξαρτησίας.

1.1 Σύντομη περιγραφή

Το πρόβλημα $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$ συγκαταλέγεται αδιαμφισβήτητα ανάμεσα στα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα στα μαθηματικά. Είναι αβέβαιο μέχρι αυτήν την στιγμή, εάν ένας τέτοιος διαχωρισμός είναι υπαρκτός ή απλά ένα προιόν της έλλειψης κατανόησής μας. Μπορεί να είναι αλήθεια πως βρισκόμαστε ακόμα μακριά από την απάντηση αυτού του προβλήματος, εντούτοις θεωρητικές κατασκευές

και αλγοριθμικά αποτελέσματα, κομμάτι - κομμάτι, επεκτείνουν τη γνώση μας σχετικά με το θέμα.

Η θεωρία της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας έχει την προέλευσή της στην εργασία των Downey και Fellows [55, 56] και έχει διευρυνθεί από τότε από ένα πλήθος σημαντικών αποτελεσμάτων (για μια επισκόπηση δες [53, 116, 64]). Σε αντίθεση με την προσέγγιση της κλασσικής θεωρίας πολυπλοκότητας, εξετάζει τον χρόνο τερματισμού ενός προτεινόμενου αλγορίθμου για ένα πρόβλημα σε σχέση όχι μόνο με το μέγεθος της εισόδου n, αλλά επιπρόσθετα με μια παράμετρο k που εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόβλημα. Έτσι πετυχαίνει για να αποσαφηνήσει το τοπίο της θεωρίας της NP-πληρότητας, με την επίδειξη των ενσωματωμένων διαφορών στην υπολογιστική συμπεριφορά διακριτών περιπτώσεων από NP-δύσκολα προβλήματα και τα οποία ταξινομεί ανάλογα. Σε αυτό το πλαίσιο, ορίζεται η έννοια του *παραμετρικά βατού* προβλήματος, ένα που αναγνωρίζεται από έναν αλγόριθμο που τρέχει σε χρόνο

$$f(k) \cdot n^{O(1)},$$

για μια υπολογίσιμη συνάρτηση f. Η αντίστοιχη κλάση πολυπλοκότητας, άρα, χαρακτηρίζει τα προβλήματα για το οποία μπορούμε να περιορίσουμε το κύριο φορτίο της πολυπλοκότητάς τους στο μέρος που εξαρτάται της παραμέτρου, διατηρώντας πολυωνιμική εξάρτηση από το n. Τυπικά, η συνάρτηση f είναι εκθετική όσον αφορά το k. Παραδείγματος χάριν, ο πρώτος παραμετρικός αλγόριθμος για το Σύνολο Κυριαρχιας σε επίπεδα γραφήματα είχε χρόνο τερματισμού $O(8^k \cdot n)$ [5].

Εντούτοις, στην τελευταία δεκαετία διάφοροι ερευνητές έχουν λάβει εκθετική βελτίωση στον χρόνο τρεξίματος παραμετρικών αλγόριθμων για μια σειρά προβλήματα σε διάφορες κλάσεις γραφημάτων, ξεκινώντας με τα επίπεδα γραφήματα. Στην περίπτωση του προβλήματος Σύνολο Κυριαρχιας σε επίπεδα γραφήματα μια ακολουθία από υποεκθετικούς αλγόριθμους έχει προταθεί, πρώτα με χρόνο τερματισμού $O(4^{6\sqrt{34k}} \cdot n)$ [4], μετά $O(2^{27}\sqrt{k} \cdot n)$ [98], και τελικά $O(2^{15.13}\sqrt{k} + n^3 + k^4)$ [74].

Ομοίως, έχει αποδειχθεί επίσης η ύπαρξη υποεκθετικών αλγόριθμων για άλλα προβλήματα σε επίπεδο γραφήματα [4, 6, 26, 102]. Βαθμιαία, αυτά τα αποτελέσματα έχουν γενικευτεί σε ευρύτερες κλάσεις γραφημάτων: $K_{3,3}$-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα και K_5-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα [44], μοναδικής-διασταύρωσης-ελεύθερα-ελάσσονος [43, 44] και H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα για δοσμένο γράφημα H [101, 123].

Πολλά από αυτά τα αποτελέσματα στηρίζονται στην έννοια του δεντροπλάτους, που εισάγεται από τους Robertson και Seymour στο [128], και εκφράζει την τοπολογική συγγένεια ενός γραφήματος με την δομή του δέντρου, επιτρέποντας έτσι την γενικοποίηση των ιδιοτήτων των δέντρων. Επιπλέον, φάνηκε ότι υπάρχει ένα αόριστο σχήμα, σχετιζόμενο με πολλές κλειστές ως προς ελάσσον ή σύνθλιψη παραμέτρους στις τοπολογικές κατηγορίες γραφημάτων.

Η θεωρία της διδιαστατότητας που αναπτύχθηκε από τους Demaine, Fomin, Hajiaghayi και Θηλυκό σε μια σειρά από δημοσιεύσεις [44, 39, 36, 38, 37, 45, 41], ενοποιεί και περαιτέρω επεκτείνει αυτά τα αποτελέσματα σε ένα στέρεο μετααλγοριθμικό πλαίσιο, που εξετάζει έναν αριθμό από προβλήματα για ένα ευρύ φάσμα από κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως προς ελάσσον ή σύνθλιψη, όπως τα γραφήματα φραγμένου γένους και H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα. Το ίδιο πλαίσιο, εκτός από υποεκθετικούς παραμετρικούς αλγόριθμους, παραδίδει επίσης γραμμικούς πυρήνες [73, 15] και EPTAS [71, 40] για τα προβλήματα και τις κλάσεις της δυνατότητας εφαρμογής του.

Παρά τη γενικότητά της, η θεωρία της διδιαστατότητας παράγει ιδιαίτερα αποδοτικούς αλγόριθμους, οι οποίοι σε ορισμένες περιπτώσεις ταιριάζουν με τους γρηγορότερους γνωστούς αλγόριθμους για συγκεκριμένα προβλήματα. Εντούτοις, μέσω μιας πιο λεπτομερούς προσέγγισης, είναι συχνά δυνατή η περαιτέρω βελτιώση στον χρόνο τερματισμού των αλγόριθμων αυτών.

Διερευνούμε μια τέτοια περίπτωση στο Κεφάλαιο 4, όπου εξετάζουμε το διάσημο πρόβλημα Σύνολο Κορυφών Αναδρασης, στο οποίο ήδη αναφερθήκαμε, σε επίπεδα γραφήματα. Ένας υποεκθετικός παραμετρικός αλγόριθμος για αυτό το πρόβλημα δόθηκε από τους Kloks και λοιποί στο [103]. Χρησιμοποιώντας τη δύναμη της διδιαστατότητας, παράγουμε ένα αποτέλεσμα που βελτιώνει ήδη την αλγοριθμική ανάλυση για αυτό το πρόβλημα.

Επιπλέον, με μια κατάλληλη προσέγγιση που υιοθετεί τη δυικότητα και ένα εξειδικευμένο είδος αποσύνθεσης γραφημάτων που σέβεται την επιπεδότητα, πετυχαίνουμε να αποδείξουμε μη τετριμμένα συνδυαστικά αποτελέσματα, που οδηγούν σε μια περαιτέρω βελτίωση του χρόνου επίλυσης για αυτό το πρόβλημα. Κατά συνέπεια, ακολουθεί ότι Επιπεδο Σύνολο Κορυφών Αναδρασης μπορεί να λυθεί σε $O(2^{15.11\cdot\sqrt{k}} + n^{O(1)})$ βήματα. Τα αποτελέσματά μας συνεπάγονται επίσης την ύπαρξη αλγορίθμων $O(2^{10.1\cdot\sqrt{k}} + n^{O(1)})$ και $O(2^{26.347\cdot\sqrt{k}} \cdot n^{O(1)})$ βημάτων για τα προβλήματα Επιπεδο Καλυμμα Οψεων και Επιπεδη Συσκευασια

ΚΥΚΛΩΝ, αντίστοιχα. Όλα αυτά τα αποτελέσματα αντιστοιχούν στους γρηγορότερους αλγόριθμους για τα συγκεκριμένα προβλήματα, από ό,τι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε.

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η θεωρία της διδιαστατότητας καλύπτει τοπολογικά ορισμένες κλάσεις γραφημάτων που γενικεύουν τα επίπεδα γραφήματα. Διαφορετικές γενικεύσεις της έννοιας της επιπεδότητας έχουν εξεταστεί επίσης και έχουν μελετηθεί σε διάφορες απόψεις της σχεδίασης αλγόριθμων. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τα γραφήματα χαρτών [30, 142], τοπικά επίπεδα γραφήματα [118], σχεδόν επίπεδα γραφήματα [76, 3] και γραφήματα φραγμένου πάχους [35, 7].

Στα Κεφάλαια 5 και 6, συμβάλλουμε σε αυτήν την κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 5 επιδεικνύουμε πώς τεχνικές από τη θεωρία της διδιαστατότητας, μπορούν να επεκταθούν μερικώς στην κλάση των *σχεδόν επίπεδων γραφημάτων*, δηλαδή σε γραφήματα εμβαπτίσιμα στη σφαίρα με λίγες διασταυρώσεις ανά ακμή. Μέχρι στιγμής, η μόνη μετα-αλγοριθμική μελέτη των σχεδόν επίπεδων γραφημάτων σχετίζεται με την ύπαρξη EPTAS για συγκεκριμένες γενικές οικογένειες προβλημάτων [85]. Εδώ, αποδεικνύουμε μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα, που έχουν ως συνέπεια την ύπαρξη υποεκθετικών παραμετρικών αλγόριθμων και πολυωνυμικών πυρήνων για μια σειρά προβλημάτων σε σχεδόν επίπεδα γραφήματα, όπως παράδειγμα τα προβλήματα ΣΥΝΟΛΟ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ και ΣΥΝΟΛΟ ΚΟΡΥΦΩΝ.

Στο Κεφάλαιο 6 ορίζουμε μια άλλη οικογένεια γραφημάτων που επεκτείνει τα επίπεδα γραφήματα. Τα *λ-ισόπεδα γραφήματα* ορίζονται ως δυνάμεις επίπεδων γραφημάτων βάση μιας νέας έννοιας της απόστασης που σέβεται την επιπεδότητα, σε αντίθεση με τις κοινές μετρικές σε γραφήματα. Δείχνουμε ότι η κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων είναι παραμετρικά ισοδύναμη με την κλάση των σχεδόν επίπεδων γραφημάτων και δείχνουμε μερικά πρόσθετα χαρακτηριστικά της κλάσης των λ-ισόπεδων γραφημάτων, όπως ότι έχουν φραγμένο τοπικό δενδροπλάτος.

Στον πυρήνα της θεωρίας της διδιαστατότητας βρίσκεται η ύπαρξη ενός φράγματος στο δενδροπλάτος ενός δεδομένου γραφήματος G, σε συνάρτηση της τιμής μιας παραμέτρου για εξεταζόμενο γράφημα G. Η απόδειξη του ενός τέτοιου φράγματος εμπλέκει βαθιά αποτελέσματα που προέρχονται από τη θεωρία ελάσσονων γραφημάτων των Robertson και Seymour. Συγκεκριμένα, ένα κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της θεωρίας δηλώνει ότι υπάρχει μια υπολογίσιμη συνάρτηση

h, έτσι ώστε οποιοδήποτε γράφημα που έχει δενδροπλάτος τουλάχιστον $h(r)$ έχει ελάσσον μια σχάρα μεγέθους $r \times r$ [127]. Όταν περιοριζόμαστε στα επίπεδα γραφήματα, το άνω φράγμα για τη συνάρτηση h γίνεται γραμμικό [131]. Αυτό συνεπάγεται το υπογραμμικό φράγμα δενδροπλάτους-παράμετρου, που αποτελεί βασικό συστατικό για το πλαίσιο της θεωρίας της διδιαστατότητας.

Οποιαδήποτε επέκταση της δυνατότητας εφαρμογής της θεωρίας της διδιαστατότητας απαιτεί την απόδειξη ενός τέτοιου φράγματος για τη συνάρτηση h. Δύο σημαντικά αποτελέσματα αυτού του είδους που διαμόρφωσε την τρέχουσα κατάσταση στην περιοχή, είναι οι αποδείξεις των γραμμικών φραγμάτων για κλειστές ως προς ελάσσονα παράμετρους σε γραφήματα που αποκλείουν κάποιο σταθερό ελάσσον [41] και για κλειστές ως προς σύνθλιψη παράμετρους σε γραφήματα που αποκλείουν κάποιο σταθερό απόγειο ελάσσον [67]. Παρέμεινε ανοιχτή μια σημαντική ερώτηση, εάν η θεωρία διδιαστατότητα μπορεί να επεκταθεί σε γενικές μη τοπολογικά ορισμένες κλάσεις γραφημάτων. Πρόσφατα, ένα πρώτο αποτέλεσμα που προδιαθέτει σε μια ενδεχομένως θετική απάντηση έχει ληφθεί για την ειδική περίπτωση των H-ελεύθερων γραφημάτων τομής μοναδιαίων δίσκων [72].

Στο Κεφάλαιο 7 εξετάζουμε γραφήματα τομών από συλλογές όχι απαραιτήτως κυρτών γεωμετρικών αντικειμένων στο επίπεδο. Κάτω από τους φυσικούς περιορισμούς του μέγιστου βαθμού ή του αποκλεισμού δοσμένου υπογραφήματος, αποδεικνύουμε ότι η σχέση μεταξύ του δενδροπλάτους τους και του μέγιστου μεγέθους ελάσσονος σχάρας είναι γραμμικός. Ένα κεντρικό επιχείρημα της απόδειξής μας συσχετίζει δύο διαφορετικές συνθλίψεις ενός γραφήματος, χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο μη τυπικό ορισμό της σχέσης των ελασσόνων. Αυτά τα συνδυαστικά αποτελέσματα επεκτείνουν ευρέως τη δυνατότητα εφαρμογής του συνόλου των μετα-αλγοριθμικών αποτελεσμάτων της θεωρίας της διδιαστατότητας που αφορούν τις κλειστές ως προς ελάσσονα παράμετρους σε γενικές γεωμετρικά ορισμένες κλάσεις γραφημάτων, απαντώντας το ανοικτό πρόβλημα που αναφέρεται πιο πάνω με καταφατικό τρόπο.

Καθώς η θεωρία της διδιαστατότητας υπηρετεί ως ένα γενικό πλαίσιο για την αλγοριθμική σχεδίαση, στηριχθήκαμε σε κανονικές διατάξεις για την απόδειξη των φραγμάτων για το δεντροπλάτος γραφημάτων γενικών κλάσεων. Στο τελευταίο μέρος της διατριβής, εστιάζουμε σε πιο λεπτομερείς δομές για να εξάγουμε συγκεκριμένα φράγματα για μια παρόμοια παράμετρο, το πλάτος μονοπατιού, σε

μητροειδή που αντιστοιχούν σε πιο περιορισμένες τοπολογικές κλάσεις γραφημάτων.

Τα μητροειδή έχουν προταθεί από τον Whitney το 1935 ([150]) ως εργαλείο για τη μελέτη θεμελιωδών ιδιοτήτων της θεωρίας της ανεξαρτησίας. Μπορούν να οριστούν με πολλούς ισοδύναμους τρόπους, αλλά βασικά ένα μητροειδές είναι ένα σύνολο στοιχείων μαζί με μια συλλογή υποσυνόλων του συνόλου στοιχείων, που συμμορφώνονται με συγκεκριμένους κανόνες ανεξαρτησίας, και επιτρέπουν την περιγραφή της δομής του συγκεκριμένου μητροειδούς.

Μέρος του κινήτρου για τον ορισμό των μητροειδών ήταν η θεώρηση παραδειγμάτων που προκύπτουν από τη θεωρία πινάκων και τη θεωρία γραφημάτων. Από γραφοθεωρητική άποψη, τα μητροειδή μπορούν να ειδωθούν ως επέκταση της έννοιας των γραφημάτων, δεδομένου ότι ένα γράφημα αντιστοιχεί σε ένα μητροειδές όπου τα στοιχεία του είναι οι ακμές του γραφήματος και τα εξαρτημένα σύνολα είναι τα κυκλώματα του γραφήματος.

Κατά συνέπεια, όπως είναι φυσικό, μια σειρά από βασικές πράξεις και σχέσεις στη θεωρία γραφημάτων, επεκτείνονται στον κόσμο των μητροειδών. Ένα παράδειγμα είναι η διαγραφή και η σύνθλιψη ενός στοιχείου και η σχέση των ελασσόνων. Πολλές από τις πολύ θεμελιώδεις κλάσεις μητροειδών είναι κλειστές ως προς τη σχέση των ελασσόνων, κάτι που θέτει την πρόκληση της εύρεσης ενός χαρακτηρισμού αυτών των κλάσεων από την σκοπιά των παρεμποδίσεων, δηλαδή με την κατάρτιση ενός καταλόγου αποκλεισμένων ελασσόνων· μητροειδή που δεν ανήκουν σε μια συγκεκριμένη κλάση, αλλά είναι ελάχιστα με αυτήν την ιδιότητα - οποιοδήποτε σύνθλιψη ή διαγραφή στοιχείου θα οδηγήσει σε μητροειδή που ανήκουν στην εν λόγω κλάση.

Αυτή η προσέγγιση είναι πράγματι κεντρική στο χαρακτηρισμό κλάσεων μητροειδών. Μερικά από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα στη θεωρία μητροειδών είναι οι πλήρεις κατάλογοι παρεμποδίσεων (π.χ. δυαδικά μητροειδή [144], τριαδικά μητροειδή [13, 132], κανονικά μητροειδή [144], γραφικά μητροειδή [145], επίπεδα μητροειδή [144]). Αξίζει να σημειωθεί, ότι σε αντίθεση με την ανάλογη περίπτωση για γραφήματα, όπου το θεώρημα ελασσόνων γραφημάτων των Robertson και Seymour [130] υπαγορεύει ότι οποιοσδήποτε κατάλογος παρεμποδίσεων πρέπει να είναι πεπερασμένος, αυτό δεν μπορεί να είναι υποτεθεί εκ των προτέρων για μια κλάση μητροειδών.

Σε σταθερές τιμές μιας παραμέτρου για μητροειδή που είναι κλειστή ως προς ελάσσονα, αντιστοιχούν μια σειρά στρωμάτων, κάθε ένα από τα οποία ενάγει μια κλειστή κλάση ως προς ελάσσονα στο πεδίο των αναπαραστάσιμων μητροει-

δών. Αφού ο χαρακτηρισμός του πλήρους κατάλογου παρεμποδίσεων για κάθε στρώμα είναι συχνά απαγορευτικής δυσκολίας, αναγκαστικά κανείς περιορίζεται σε κάποιο υποσύνολο των αναπαραστάσιμων μητροειδών, για παράδειγμα τα γραφικά μητροειδή ή τα επίπεδα μητροειδή [134, 151, 124].

Στο Κεφάλαιο 8 συμβάλλουμε σε αυτήν την γραμμή αποτελεσμάτων, μελετώντας την παράμετρο του πλάτους μονοπατιού μητροειδών που ορίζεται από τους Geelen, Gerards και Whittle [81] (δες ακόμα [94, 100, 10]). Περιοριζόμαστε στη κλάση μητροειδών $\mathcal{O}$, δηλαδή μητροειδή κυκλωμάτων από εξωεπίπεδα γραφήματα και τα δυικά τους μητροειδή. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό k, παρέχουμε τον πλήρη κατάλογο παρεμποδίσεων για τα μητροειδή της κλάσης $\mathcal{O}$ με πλάτος μονοπατιού το πολύ k. Η απόδειξή μας συνδυάζει ένα λήμμα αποσύνθεσης για την απόδειξη κάτω φραγμάτων για το πλάτος μονοπατιού των μητροειδών και μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων του πλάτους μονοπατιού μητροειδών και του γραμμοπλάτους σε γραφήματα. Τα αποτελέσματά μας συνεπάγονται την ύπαρξη ενός γραμμικού αλγόριθμου που, δοσμένου ενός εξωεπίπεδου γραφήματος, επιστρέφει την τιμή της παραμέτρου του πλάτους μονοπατιού του μητροειδούς κυκλωμάτων του.

1.2 Η δομή του κειμένου

Στο Κεφάλαιο 2 ορίζουμε τις περισσότερες από τις έννοιες που παρουσιάζονται στο υπόλοιπο κείμενο και δείχνουμε μερικές βασικές ιδιότητες για τα εξεταζόμενα αντικείμενα. Μια εξαίρεση αποτελούν έννοιες από τη θεωρία μητροειδών, ο ορισμός των οποίων αναβάλλεται μέχρι το Κεφάλαιο 8, καθώς η μελέτη τους περιορίζεται σε εκείνο το κεφάλαιο. Ακολούθως, το Κεφάλαιο 3 είναι μια συνοπτική επισκόπηση της θεωρίας της διδιαστατότητας και των αλγοριθμικών εφαρμογών της.

Στο Κεφάλαιο 4 θέτουμε σε κίνηση τις τεχνικές της θεωρίας της διδιαστατότητας και συγκεκριμένα εστιάζουμε σε δύο προβλήματα σε επίπεδα γραφήματα, το Σύνολο Κορυφών Αναδρασης και το Καλυμμα Οψεων, για το οποία αποδεικνύουμε τα κατάλληλα συνδυαστικά αποτελέσματα που οδηγούν στους βελτιωμένους υποεκθετικούς παραμετρικούς αλγόριθμους.

Τα επόμενα τρία κεφάλαια μελετούν τις δυνατότητες επέκτασης του σώματος της θεωρίας της διδιαστατότητας σε κλάσεις γραφημάτων που ορίζονται γεωμετρικά, μια περιοχή όπου λίγα παρόμοια αποτελέσματα είναι γνωστά. Στο Κεφάλαιο 5 εξετάζουμε την κλάση των σχεδόν επίπεδων γραφημάτων και

αποδεικνύουμε την ύπαρξη υποεκθετικών παραμετρικών αλγόριθμων και πολυωνυμικών πυρήνων για μια σειρά προβλημάτων σε γραφήματα της κλάσης αυτής. Στο Κεφάλαιο 6 εισάγουμε μια νέα μετρική για επίπεδα γραφήματα και εξετάζουμε την κλάση των δυνάμεων των επίπεδων γραφημάτων βάση της νέας μετρικής. Δείχνουμε ότι αυτή η κλάση γραφημάτων είναι ισοδύναμη με τα σχεδόν επίπεδα γραφήματα και αποδεικνύουμε μια σειρά συμπληρωματικών αποτελεσμάτων. Στο Κεφάλαιο 7 μελετάμε κλάσεις γραφημάτων τομής γεωμετρικών αντικειμένων και δείχνουμε ότι ένα σημαντικό μέρος της θεωρίας της διδιαστατότητας επεκτείνεται στην κλάση αυτή, το πρώτο γενικό μετα-αλγοριθμικό αποτέλεσμα για μια ευρεία κλάση μη τοπολογικά ορισμένων γραφημάτων.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 8 μελετούμε ένα πρόβλημα εύρεσης παρεμποδίσεων για κλάσεις μητροειδών. Μετά από μια σύντομη εισαγωγή στις βασικές έννοιες της θεωρίας μητροειδών, εξετάζουμε την παράμετρο του πλάτους μονοπατιού μητροειδών και πιο συγκεκριμένα εξετάζουμε την δομή μητροειδών φραγμένου πλάτους μονοπατιού. Για οποιοδήποτε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό k, δίνουμε έναν χαρακτηρισμό του πλήρους καταλόγου των ελάχιστων ως προς ελάσσονα μητροειδών κυκλωμάτων εξωεπίπεδων γραφημάτων (ένα υποσύνολο των επίπεδων γραφημάτων), τα οποία δεν ανήκουν στην κλάση μητροειδών με πλάτος μονοπατιού το πολύ k.

1.3 Κατάλογος δημοσιεύσεων

[104] Athanassios Koutsonas and Dimitrios M. Thilikos. Planar feedback vertex set and face cover: Combinatorial bounds and subexponential algorithms. *Algorithmica*, 60(4):987–1003, 2011.
Αυτή η δημοσίευση βασίζεται στο Κεφάλαιο 4.

[86] Alexander Grigoriev, Athanassios Koutsonas, and Dimitrios M. Thilikos. Subexponentiality and kernels for nearly planar graphs. *unpublished manuscript*.
Αυτή η δημοσίευση βασίζεται σε μέρος του Κεφαλαίου 5.

[87] Alexander Grigoriev, Athanassios Koutsonas, and Dimitrios M. Thilikos. Nearly planar graphs and λ-flat graphs.
CoRR, abs/1311.0137, 2013.
Αυτή η δημοσίευση βασίζεται στο Κεφάλαιο 6.

[88] Alexander Grigoriev, Athanassios Koutsonas, and Dimitrios M. Thilikos. Bidimensionality of geometric intersection graphs. In *SOFSEM*, volume 8327 of Lecture Notes in Computer Science, pages 293–305. Springer, 2014.
Αυτή η δημοσίευση βασίζεται στο Κεφάλαιο 7.

[106] Athanassios Koutsonas, Dimitrios M. Thilikos, and Koichi Yamazaki. Outerplanar obstructions for matroid pathwidth. *Discrete Mathematics*, 315–316:95–101, 2014.
Αυτή η δημοσίευση βασίζεται στο Κεφάλαιο 8.

[105] Athanassios Koutsonas, Dimitrios M. Thilikos, and Koichi Yamazaki. Outerplanar obstructions for matroid pathwidth. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38:541–546, 2011.
Αυτή η δημοσίευση είναι προκαταρκτική εκδοχή του [106].

1.4 Κατάλογος σχημάτων

1.1 Ένα απλό γράφημα. 1

2.1 Ένα δέντρο, ένα αστέρι και μια κάμπια. 21
2.2 Ένα πλήρες και ένα διμερές γράφημα. 22
2.3 Η $k \times k$ σχάρα L_k και η $k \times k$ τριγωνοποιημένη σχάρα Γ_k. 22

3.1 Κλειστές ως προς ελάσσονα κλάσεις γραφημάτων που ικανοποιούν την διδιάστατη ως προς ελάσσονα συνθήκη (διάστικτη περιοχή) και η διδιάστατη ως προς συνθλίψεις συνθήκη (σκούρα περιοχή). 36

4.1 Ένα γράφημα με ένα σύνολο κορυφών ανάδρασης και το δυικό του με το αντίστοιχο κάλυμμα όψεων (η κορυφή αντίστοιχη της εξωτερικής όψης παραλείπεται). 48
4.2 Ένα ενεπίπεδο γράφημα G, το ακτινικό του γράφημα R_G, ένα ενεπίπεδο υπεργράφημα H γεννημένο από το G, και τα ενεπίπεδα υπεργραφήματα H^*, και $\tilde{R}_G$. 50
4.3 Οι μετατροπές της απόδειξης του Λήμματος 4.3.1. 54
4.4 Το πρωταρχικό υπεργράφημα H με κάλυμμα όψεων $S_H = \{f_1, \ldots, f_5\}$, τα ενεπίπεδα γραφήματα $\mathbf{red}(H)$ και $R_{\mathbf{red}(H)}$ και τα ισομορφικά ενεπίπεδα υπεργραφήματα H^* και $\tilde{R}_{\mathbf{red}(G)}$ (στην επίπεδη εμβάπτιση του H^* η κορυφή που αντιστοιχεί στην άπειρη όψη του H παραλείπεται). 57
4.5 Οι αντιστοιχίες στην απόδειξη του Λήμματος 4.3.5. 58

5.1 Ένα 2-σχεδόν επίπεδο γράφημα. 65
5.2 Βήματα της επίπεδης μετατροπής ενός γραφήματος. 66
5.3 Ένα γράφημα G και η αποτύπωση του G^f. 68

6.1 Η κοινή απόσταση και η **wbw**-απόσταση από δύο κορυφές ενός αστεριού 83
6.2 Ένας απλός βρόχος στην περιφέρεια μιας κάμπιας 85
6.3 Τα γραφήματα H και H^2 (οι αχνές ακμές είναι οι ακμές του H^2 που δεν ανήκουν στο H). Παρατήρησε ότι κάθε **wbw**-μονοπάτι ανάμεσα στις δύο άσπρες κορυφές στο H έχει μήκος τουλάχιστον 4 (ένα από αυτά τα μονοπάτια απεικονίζεται από τις τονισμένες ακμές). 86
6.4 Τα γραφήματα H_1 (ένα αστέρι) και H_2 (ένας κύκλος) και τα τετράγωνά τους ως προς την **wbw**-απόσταση και τις κοινές αποστάσεις. 87
6.5 Ακμή που τέμνεται k φορές και **wbw**-μονοπάτι μήκους $2k$. 89

6.6 Ένα παράδειγμα της μετατροπής ενός γραφήματος H στα γραφήματα $\overline{H}$ και H_Δ (στον σχεδιασμό του H_Δ παραλείπουμε την κορυφή που αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη του $\overline{H}$ και τις προσπίπτουσες ακμές). 91

7.1 Μια συλλογή από δίσκους σχεδιασμένους στη σφαίρα και το αντίστοιχο γράφημα τομών. 101
7.2 Μια συλλογή ευθείων γραμμών $\mathcal{B}$, το συσχετιζόμενο γράφημα $C_\mathcal{B}$, και οι συνθλίψεις του: το ενεπίπεδο γράφημα $H_\mathcal{B}$ και το γράφημα τομών $G_\mathcal{B}$. 103
7.3 Ένα παράδειγμα της απόδειξης του Λήμματος 7.4.4 για $c = 5$, $k = 21$, και $k' = 3$. 113

8.1 Τα ομοιόμορφα μητροειδή με 3 στοιχεία σε σειρά αύξουσας τάξης. . . 122
8.2 Η σειριακή και η παράλληλη σύνδεση δύο μητροειδών. 124
8.3 Κλάσεις αναπαραστάσιμων μητροειδών. 128
8.4 Οι γραφικές παρεμποδίσεις για πλάτος μονοπατιού το πολύ 1. 128
8.5 Ένα παράδειγμα εφαρμογής της συνάρτησης ϕ. 133
8.6 Οι κλάσεις $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, και μέρος του $\mathcal{T}_2$. 134
8.7 Η πράξη της u-σύμπτυξης. 135
8.8 Τα σύνολα $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, και μέρος του $\mathcal{H}_2$. 136
8.9 Τα σύνολα $\mathcal{H}_0^*$, $\mathcal{H}_1^*$ και μέρος του $\mathcal{H}_2^*$. 138

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο P. Σημειώνουμε ως $|P|$ τον πληθάριθμο του. Για το υπόλοιπο αυτής της εργασίας, ένα σύνολο θα θεωρείται πάντα πεπερασμένο. Ένα σύνολο ή *συλλογή* $\mathcal{P}$ υποσυνόλων του P λέγεται *διαμέριση*, όταν $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ και P είναι η ένωση των στοιχείων του $\mathcal{P}$, τα οποία είναι όλα μη κενά και ανά δύο ξένα. Έστω A και B δύο σύνολα. Τότε $A \times B = \{(a, b) : a \in A \; kai \; b \in B\}$ και $A^2 = A \times A$. Επιπλέον σημειώνουμε ως $A - B$ το σύνολο $\{x \in A : x \notin B\}$. Στην περίπτωση που ένα σύνολο που περιέχει ένα μοναδικό στοιχείο εμπλέκεται σε πράξεις συνόλων, παραλείπουμε τις παρενθέσεις· για παράδειγμα γράφουμε $A - x$ αντί του $A - \{x\}$. Ένα *πολυσύνολο* από ένα σύνολο B είναι μια επιλογή στοιχείων από το B, όπου κάθε στοιχείο μπορεί να διαλεχτεί οποιοδήποτε αριθμό φορών, ακόμα και καμία.

Έστω $\mathbb{F}$ ένα πεδίο και r ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τότε, σημειώνουμε ως $V(r, F)$ τον r-διάστατο διανυσματικό χώρο στο $\mathbb{F}$. Κάθε πεπερασμένο πεδίο έχει ακριβώς p^k στοιχεία, για έναν πρώτο p και έναν θετικό ακέραιο k. Ονομάζουμε το μοναδικό πεδίο που έχει ακριβώς p^k στοιχεία *πεδίο Galois τάξης* p^k και το σημειώνουμε ως $GF(p^k)$.

Σημειώνουμε το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων ως $\mathbb{N}$. Για κάθε ακέραιο x, γράφουμε $\lfloor x \rfloor$ για τον μεγαλύτερο ακέραιο μικρότερο ή ίσο του x και $\lceil x \rceil$ για τον μικρότερο ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του x. Έστω h_1, h_2 και g συναρτήσεις σε ακέραιους. Σημειώνουμε $h_1(n) = O(g(n))$ και $h_2(n) = \Omega(g(n))$, αν υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0 : h_1(n) \leq c \cdot g(n)$ και $h_2(n) \geq {}^1\!/_c \cdot g(n)$, αντίστοιχα. Προς απλοποίηση των συμβολισμών, γράφουμε συχνά "$O_k(n^c)$" αντί του "$O[f(k) \cdot (n^c)]$ για κάποια αναδρομική

συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$". Επεκτείνουμε επίσης τον συμβολισμό γράφοντας "$O_{k_1,\ldots,k_l}(n^c)$" αντί του "$O_{k_1+\cdots+k_l}(n^c)$".

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες που θα συνταντήσουμε σε όλο το κείμενο. Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται είναι στο μεγαλύτερο μέρος στερεότυποι. Επιπλέον ορολογία θα παρουσιάζεται επίσης, όταν χρειάζεται στα επόμενα κεφάλαια. Για περισσότερα για γραφήματα παραπέμπουμε στο [46], για μητροειδή στα [117, 143], για πολυπλοκότητα και αλγόριθμους στα [120, 64, 84]. Η ελληνική ορολογία

2.1 Γραφήματα

Ένα γράφημα G είναι ένα συντεταγμένο ζεύγος (V, E) όπου V λέγεται το σύνολο κορυφών και E είναι ένα πολυσύνολο ακμών, καθεμία από τις οποίες είναι με τη σειρά της ένα μη συντεταγμένο ζεύγος στο V^2. Δεδομένου ενός γραφήματος G, σημειώνουμε ακόμα ως $V(G)$ το σύνολο κορυφών του και ως $E(G)$ το πολυσύνολο ακμών του. Αν $V(G) = \emptyset$, τότε ονομάζουμε το γράφημα G *κενό* γράφημα. Υποθέτουμε πάντα ότι το $V(G)$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.

Σημειώνουμε $e = \{x, y\}$ ή $e = xy$ για μια ακμή e με *άκρα* τις κορυφές x και y. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι x και y είναι *γειτονικές* ή *γείτονες*, ότι το e είναι μια ακμή *προσπίπτουσα* στα x και y και ότι η ακμή e *συνδέει* τα x και y. Αν μια ακμή συνδέει μια κορυφή με τον ευατό της την ονομάζουμε *θηλιά*. Αν οι κορυφές v και w είναι οι άκρα από δύο ή περισσότερες ακμές, τότε ονομάζουμε αυτές τις ακμές *παράλληλες* και την ακμή vw πολλαπλή ακμή. Ο *βαθμός* $d(v)$ της κορυφής v, είναι ο αριθμός όλων των ακμών που είναι προσπίπτουσες στο v, όπου κάθε θηλιά μετράει διπλά. Αν $d(z) = 0$, για μια κορυφή z, ονομάζουμε αυτή τη κορυφή *απομονωμένη*.

Μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι σύμφωνα με τον ορισμό ενός γραφήματος που περιγράψαμε, ένα γράφημα είναι πάντα μη κατευθυνόμενο και μπορεί πράγματι να έχει θηλιές ή πολλαπλές ακμές. Αν ένα γράφημα δεν έχει πολλαπλές ακμές ή θηλιές, το ονομάζουμε *απλό*. Αλλιώς, αν επιθυμούμε να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι δεν είναι απλό, μπορούμε να το αποκαλούμε *πολυγράφημα*. Παρόμοια, μπορούμε να αποφασίσουμε να καλούμε το βαθμό μιας κορυφής του πολυγραφήματος *πολυβαθμό*.

Αν χαλαρώσουμε τον περιορισμό στον ορισμό ενός γραφήματος παραπάνω, που υπαγορεύει ότι κάθε ακμή είναι ένα ζεύγος, ζητώντας ότι μια ακμή είναι είτε θηλιά ή ένα υποσύνολο του συνόλου κορυφών, τότε ορίζουμε ένα *υπεργράφημα*.

Σημείωσε ότι αυτός ο ορισμός πράγματι επεκτείνει την έννοια ενός γραφήματος, έτσι ώστε κάθε γράφημα είναι επίσης ένα υπεργράφημα. Μια ακμή ενός υπεργραφήματος λέγεται *υπερακμή*.

Έστω G και H γραφήματα, τέτοια ώστε να υπάρχει ένας μονομορφισμός $\tau : V(H) \to V(G)$. Λέμε ότι H είναι *υπογράφημα του G μέσω ενός μονομορφισμού* $\tau : V(H) \to V(G)$, αν επιπρόσθετα για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E(H)$, ισχύει ότι $\{\tau(x), \tau(y)\}$ είναι μια ακμή του G. Σημειώνουμε αυτό το γεγονός ως $H \subseteq_\tau G$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε επίσης ότι το H είναι ένα *υπογράφημα του G*, ή ότι το G *περιέχει* το H και γράφουμε $H \subseteq G$. Τέλος, αν $H \subseteq G$ και ισχύει ότι $V(H) = V(G)$, τότε ονομάζουμε το H *παραγόμενο υπογράφημα του G*.

Για κάθε σύνολο $S \subseteq V(G)$, σημειώνουμε ως $G[S]$ το γράφημα του οποίου το σύνολο κορυφών είναι το S και το σύνολο ακμών αποτελείται από όλες τις ακμές του G που έχουν και τις δύο άκρα στο S. Λέμε ότι $G[S]$ είναι ένα *εναγόμενο υπογράφημα του G* και ότι το $G[S]$ είναι *εναγόμενο από τις κορυφές στο S*. Παρόμοια, για ένα υποσύνολο ακμών $F \subseteq E(G)$, σημειώνουμε ως $G[F]$ το γράφημα, του οποίου το σύνολο ακμών είναι το F και του οποίου το σύνολο κορυφών αποτελείται από όλες τις κορυφές του G που είναι άκρα ακμών στο F. Και πάλι, λέμε ότι το $G[F]$ είναι *εναγόμενο από τις ακμές στο F*.

Έστω G_1 και G_2 δύο γραφήματα. Η *ένωση* τους $G_1 \cup G_2$ ορίζεται ως το γράφημα $G = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$. Αν $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ ονομάζουμε τα G_1 και G_2 *ξένα*. Έστω τώρα G_3 ένα υπογράφημα του G. Κατά περίπτωση γράφουμε $G_3 \cup E'$, για ένα σύνολο ακμών $E' \subseteq E(G)$, αντί του τυπικά πιο σωστού $G_3 \cup G[E']$. Ακόμα, όπως με την ένωση συνόλων, συχνά γράφουμε $G_3 \cup e$, αντί του $G_1 \cup e$, για μια ακμή $e \in E(G)$. Κάθε δύο υπογραφήματα H_1 και H_2 του G λέγονται *ξένα ως προς κορυφές* ή απλά *ξένα*, αν $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$ και *ξένα ως προς ακμές* στην περίπτωση που $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$.

Μια εναλλασόμενη ακολουθία $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ λέγεται *περίπατος* σε ένα δοσμένο γράφημα G, αν $v_0, v_1 \ldots, v_{n-1}, v_n$ είναι κορυφές του $V(G)$ και $e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n$ είναι ακμές του $E(G)$, τέτοιες ώστε v_0 είναι προσπίπτουσα στη e_1 και v_i είναι προσπίπτουσα στη e_i, για $1 \leq i \leq n$. Οι κορυφές v_0 και v_n είναι οι *άκρα* αυτού του περιπάτου. Επιπλέον, ονομάζουμε αυτό τον περίπατο *μονοπάτι* στο G, αν οι κορυφές $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ είναι διαφορετικές ανά δύο. Για μονοπάτια και περίπατους χρησιμοποιούμε γενικά την ίδια ορολογία.

Έστω τώρα P ένα μονοπάτι στο G, με άκρα τις κορυφές x και y. Λέμε ότι το *P συνδέει τις κορυφές x και y* ή είναι *ένα μονοπάτι από το x στο y*. Το

μήκος του μονοπατιού P, που γράφεται ως $|P|$, ισούται με τον αριθμό ακμών που περιέχει, δηλαδή $|P| = |E(P)|$. Τότε η *απόσταση μεταξύ x και y στο G* είναι το μήκος του μικρότερου μονοπατιού που τα συνδέει. Στην περίπτωση που υπάρχει μια ακμή $e = xy$ στο $E(G)$, ονομάζουμε το γράφημα $P \cup e$ *κύκλο*. Σημείωσε, ότι σύμφωνα με αυτό τον ορισμό μια θηλιά ή μια διπλή ακμή είναι επίσης ένας τετριμμένος κύκλος. Το *μέγεθος* ενός κύκλου C ισούται με τον αριθμό των κορυφών του C, ή ισοδύναμα με τον αριθμό ακμών στο C.

Ένα γράφημα G λέγεται *συνεκτικό*, αν για κάθε δύο κορυφές του G υπάρχει ένα μονοπάτι στο G που τις συνδέει. Λέμε ότι ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ είναι *διαχωριστής του G* και επίσης ότι το S *σεπαρατες* G, αν το γράφημα $G[V(G) - S]$ δεν είναι πια συνεκτικό. Τα μεγιστικά συνεκτικά υπογραφήματα ενός γραφήματος είναι οι *συνιστώσες* του. Ένα γράφημα H είναι *k-συνεκτικό*, αν δύο κορυφές του H δεν μπορούν να χωριστούν από λιγότερες από k άλλες κορυφές στο H.

Έστω v μια κορυφή ενός γραφήματος G. Ονομάζουμε *γειτονιά του v στο G* το σύνολο κορυφών του V που είναι γειτονικές του v και τη σημειώνουμε ως $N_G(v)$, ή πιο απλά $N(v)$. Για κάθε ακέραιο r, ορίζουμε τη *r-γειτονιά της κορυφής v στο G* ως το σύνολο $N_G^r(v) \subseteq V(G)$, που αποτελείται από όλες τις κορυφές του G, που βρίσκονται σε απόσταση το πολύ r από το v. Δεδομένου ενός συνόλου $S \subseteq V(G)$, σημειώνουμε ως $N_G(S)$ τη γειτονιά του S στο G, δηλαδή τους γείτονες των κορυφών στο S που δεν ανήκουν στο S. Θέτουμε επίσης $N_G[S] = S \cup N_G(S)$ και $\partial_G(S) = N_G(V(G) - S)$.

Ένα σύνολο κορυφών I σε ένα δοσμένο γράφημα G λέγεται *ανεξάρτητο*, αν οι κορυφές στο I είναι ανά δύο μη γειτονικές. Ένα σύνολο κορυφών C είναι *κάλυμμα κορυφών*, αν κάθε ακμή στο $E(G)$ έχει ένα άκρο στο C. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι C *καλύπτει* τις ακμές του G. Ένα σύνολο κορυφών D είναι *σύνολο κυριαρχίας* στο G, αν κάθε κορυφή του G περιέχεται στο D ή έχει ένα γείτονα στο D. Πιο γενικά, κάθε κορυφή του G, βρίσκεται σε απόσταση το πολύ r από μια κορυφή ενός *r-συνόλου κυριαρχίας* $R \subseteq V(G)$.

Έστω G και H δύο γραφήματα. Αν υπάρχουν αντιστοιχίες $\phi : V(G) \to V(H)$ και $\psi : E(G) \to E(H)$, τέτοιες ώστε η $v \in V(G)$ είναι προσπίπτουσα στη $e \in E(G)$, αν και μόνο αν η $\phi(v)$ είναι προσπίπτουσα στη $\psi(e)$, ονομάζουμε τα G και H *ισομορφικά* και γράφουμε $G \cong H$, ή απλά $G = H$. Μια κλάση γραφημάτων που είναι κλειστή ως προς ισομορφισμό λέγεται *ιδιότητα γραφημάτων*.

Έστω G ένα γράφημα, $S \subseteq V(G)$ ένα σύνολο κορυφών στο G και $F \subseteq$

$E(G)$ ένα σύνολο ακμών. Σημειώνουμε ως $G \setminus S$ το εναγόμενο υπογράφημα $G[V(G) - S]$ και ως $G \setminus F$ το γράφημα στο $V(G)$ με σύνολο ακμών $E(G) - F$ (αν και συχνά θα "ξεχνάμε" απομονωμένες κορυφές). Αναφερόμαστε στις πράξεις που περιγράφηκαν ως *διαγραφή ενός συνόλου κορυφών* και *διαγραφή ενός συνόλου ακμών*, αντίστοιχα. Όπως πάντα, γράφουμε $G \setminus v$ αντί του $G \setminus \{v\}$ όταν *διαγράφουμε μια κορυφή* $v \in V(G)$ και $G \setminus e$ αντί του $G \setminus \{e\}$, όταν *διαγράφουμε μια ακμή* $e \in E(G)$.

Έστω x και y οι άκρα της ακμής e σε ένα δοσμένο γράφημα G. Η *σύνθλιψη* της ακμής $e = \{x, y\}$ στο G είναι η πράξη που έχει ως αποτέλεσμα την αντικατάσταση των κορυφών x και y από μια νέα κορυφή v_e στο γράφημα που προκύπτει G/e. Όταν το G είναι ένα απλό γράφημα και ενδιαφερόμαστε να το διατηρήσουμε απλό, η κορυφή v_e γίνεται γειτονική με όλους τους γείτονες του x και του y στο G που είναι διαφορετικοί από x και y. Όταν αντίθετα πρόκειται για πολυγραφήματα, το γράφημα G/e έχει σύνολο ακμών το $E(G/e) = E(G) - e$, όπου αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση των δυο κορυφών x και y στις αρχικές ακμές του G από τη νέα κορυφή v_e. Αν και φαίνεται ότι αυτό μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση, στην πραγματικότητα σπάνια χρειάζεται να αποσαφηνίσουμε με ποιο τρόπο διαλέγουμε να εφαρμόσουμε την πράξη, αφού είναι εύκολα αντιληπτό από τα συμφραζόμενα. Όταν πάντως δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά, υποθέτουμε ότι υλοποιείται η πρώτη διαδικασία. Αφού η σειρά με την οποία συνθλίβουμε έναν αριθμό ακμών δεν διαφοροποιεί το γράφημα που προκύπτει, γράφουμε G/E_0 για το γράφημα που προκύπτει από το G *συνθλίβοντας ένα σύνολο ακμών* $E_0 \subseteq E(G)$.

Τέλος, ορίζουμε την πράξη της *υποδιαίρεσης μιας ακμής* $e = \{x, y\}$ στο γράφημα G, ως την αντικατάσταση της ακμής e από ένα μονοπάτι μήκους 2, του οποίου οι άκρα είναι τα x και y.

Δεδομένων δύο γραφημάτων H και G, αποκαλούμε το H:

- *υποδιαίρεση του* G, αν το H μπορεί να προκύψει από το G υποδιαιρώντας επαναλαμβανόμενα ακμές,

- *σύνθλιψη του* G και γράφουμε $H \preccurlyeq_c G$, αν το H μπορεί να προκύψει από το G από μια σειρά συνθλίψεων ακμών,

- *τοπολογικό ελάσσον του* G, αν μια υποδιαίρεση του H είναι υπογράφημα του G και

- *ελάσσον του* G και γράφουμε $H \preccurlyeq G$, αν το H μπορεί να προκύψει από ένα υπογράφημα του G από μια σειρά συνθλίψεων ακμών.

Προφανώς, κάθε σύνθλιψη ενός γραφήματος G είναι επίσης και ελάσσον του. Παρόμοια, κάθε τοπολογικό ελάσσον του G είναι επίσης και ελάσσον του. Αναφερόμαστε στη "$\preccurlyeq$" ως τη *σχέση ελάσσονος*, και ανάλογα για τις άλλες ως τη *σχέση σύνθλιψης* "$\preccurlyeq_c$" και τη *σχέση τοπολογικού ελάσσονος* σε γραφήματα. Όπως μπορεί κανείς να επαληθεύσει, αυτές οι σχέσεις είναι ανακλαστικές, μεταβατικές και αντισυμμετρικές.

Λέμε ότι μια ιδιότητα γραφημάτων $\mathcal{P}$ είναι *κλειστή ως προς ελάσσονα*, αν για κάθε γράφημα $G \in \mathcal{P}$ κάθε ελάσσον του G ανήκει επίσης στο $\mathcal{P}$. Έπεται ότι μια ιδιότητα γραφημάτων είναι κλειστή ως προς ελάσσονα αν και μόνο αν μπορεί να εκφραστεί από *απαγορευμένα ελάσσονα*, δηλαδή ελάχιστα ως προς ελάσσονα γραφήματα που δεν έχουν την ιδιότητα. Τέτοια γραφήματα λέγονται επίσης*παρεμποδίσεις* ή *αποκλεισμένα ελάσσονα* για την ιδιότητα αυτή.

2.2 Εμβαπτίσεις σε επιφάνειες

Μια επιφάνεια Σ είναι ένα συμπαγές δίπτυχο μόρφωμα χωρίς σύνορο. Θεωρούμε πάντα συνεκτικές επιφάνειες. Σημειώνουμε ως $\mathbb{S}_0$ τη σφαίρα $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Μια *καμπύλη Jordan* είναι μια συνεχής καμπύλη στη σφαίρα $\mathbb{S}_0$ που δεν τέμνει τον ευατό της, με άλλα λόγια ένα υποσύνολο της σφαίρας ομομορφικό προς το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$. Κάνουμε λόγο για τα *άκρα* της και το *εσωτερικό* της. Μια *κλειστή καμπύλη* Jordan είναι μια καμπύλη Jordan της οποίας τα άκρα συμπέφτουν, δηλαδή ένα υποσύνολο της σφαίρας ομομορφικό προς το μοναδιαίο κύκλο $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Ένα υποσύνολο Δ της σφαίρας $\mathbb{S}_0$ είναι ένας *ανοιχτός δίσκος*, αν είναι ομομορφικό προς το $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Ονομάζουμε *κλειστό δίσκο* και σημειώνουμε ως $\overline{\Delta}$ το *κλείσιμο* του Δ. Τότε το *σύνορο* του Δ είναι $\widehat{\Delta} = \overline{\Delta} \cap \overline{\mathbb{S}_0 - \Delta}$. Έστω J μια κλειστή καμπύλη Jordan στο $\mathbb{S}_0$. Τότε τα σημεία του $\mathbb{S}_0 - J$, δηλαδή τα σημεία της σφαίρας που δεν ανήκουν στη καμπύλη, διαμερίζονται σε δύο *συνεκτικές συνιστώσες* και J είναι το σύνορο ακριβώς των δύο ανοιχτών δίσκων (χωρίς σύγχυση με τις συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος).

Χρησιμοποιούμε τον όρο *εμβάπτιση γραφήματος* για ένα σχεδιασμό ενός γραφήματος G στη σφαίρα, όπου κάθε κορυφή συσχετίζεται με ένα διαφορετικό σημείο της σφαίρας και κάθε ακμή με μια ανοιχτή καμπύλη Jordan, της οποίας το εσωτερικό δεν περιέχει σημεία συσχετιζόμενα με κορυφές και της οποίας τα άκρα είναι τα σημεία της σφαίρας συσχετιζόμενα με τα άκρα της ακμής αυτής.

Προς απλοποίηση της παρουσίασης, δεν κάνουμε διάκριση μεταξύ μιας κο-

ρυφής του G και του σημείου στη σφαίρα που αντιπροσωπεύει την κορυφή· παρόμοια για μια ακμή του G. Μιλώντας γενικά, συχνά δεν κάνουμε διάκριση μεταξύ του G και της εμβάπτισης του.

Έστω e_1 και e_2 δύο ακμές μιας εμβάπτισης ενός γραφήματος G, που μοιράζονται ένα σημείο p της σφαίρας που δεν είναι κορυφή. Τότε, το p είναι μια *διασταύρωση* του G. Έστω επίσης J μια κλειστή καμπύλη Jordan, τέτοια ώστε η ακμή e_1 να βρίσκεται ολόκληρη πάνω στη J. Σημειώνουμε ως D_1 και D_2 τους δύο ανοιχτούς δίσκους της σφαίρας με σύνορο την καμπύλη J. Λέμε ότι το p είναι μια *απλή διασταύρωση* των ακμών e_1 και e_2, αν για κάθε ανοιχτό δίσκο D που περιέχει το p, ισχύει ότι $D \cap D_i \cap e_2 \neq \emptyset$ για $i = 1, 2$. Λέμε επίσης ότι δύο ακμές *διασταυρώνονται*, αν υπάρχει μια διασταύρωση αυτών των ακμών.

Ορισμός 2.2.1. Ονομάζουμε μια εμβάπτιση ενός γραφήματος G στη σφαίρα $\mathbb{S}_0$ μια *καλή εμβάπτιση*, αν όλες οι εξής συνθήκες ισχύουν:

- κάθε δύο ακμές του G μοιράζονται το πολύ ένα σημείο της σφαίρας,
- το πολύ δύο ακμές του G μοιράζονται ένα σημείο που δεν είναι κορυφή και
- αν δύο ακμές του G μοιράζονται ένα σημείο που δεν είναι κορυφή, τότε αυτή είναι μια διασταύρωση.

Εκτός από όπου αναφέρεται συγκεκριμένα το αντίθετο, όλες οι εμβαπτίσεις που θεωρούνται στο υπόλοιπο του κειμένου θα είναι καλές εμβαπτίσεις. Παρομοίως, παραλείπεται η αναφορά πως οι διασταυρώσεις είναι απλές.

Χρησιμοποιούμε τον όρο *ενεπίπεδο γράφημα* για μια εμβάπτιση ενός γραφήματος που δεν έχει διασταυρώσεις. Ένα γράφημα είναι *επίπεδο* αν επιτρέπει μια ενεπίπεδη εμβάπτιση.

Έστω ένα ενεπίπεδο γράφημα G. Οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{S}_0 - G$, λέγονται *όψεις* του γραφήματος G και σημειώνουμε το σύνολο όψεων του G ως $F(G)$. Κάθε όψη $f \in F(G)$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, και σημειώνουμε ως $\widehat{f}$ το σύνορο της και ως $\overline{f}$ το κλειστό σύνολο $f \cup \widehat{f}$. Λέμε για μια ακμή $e \in E(G)$ ότι *είναι προσπίπτουσα στην όψη* f, αν $e \cap \overline{f} \neq \emptyset$ και για μια κορυφή $v \in V(G)$ ότι *είναι προσπίπτουσα στην όψη* f, αν $v \in \widehat{f}$. Προφανώς, κάθε ακμή σε ένα ενεπίπεδο γράφημα είναι προσπίπτουσα το πολύ σε δύο όψεις, ενώ το ίδιο δεν είναι αναγκαστικά αληθές για μια κορυφή.

Έστω G ένα ενεπίπεδο γράφημα. Σημειώνουμε ως G^* και αποκαλούμε *δυικό* γράφημα του G, το γράφημα $(F(G), E^*(G))$, αν υπάρχει μια αντιστοιχία $E(G) \to E^*(G)$, τέτοια ώστε μια ακμή e^* στο G^* συνδέει τις όψεις του G, στις οποίες

η αντίστοιχη ακμή e του G είναι προσπίπτουσα. Έπεται από τον ορισμό ότι το γράφημα G^* είναι επίσης επίπεδο. Ακόμα, παίρνοντας το δυικό ενός δυικού γραφήματος έχει ως αποτέλεσμα το αρχικό γράφημα.

Όταν θεωρούμε τις εμβαπτίσεις των δυικών γραφημάτων G και G^* πάντα υποθέτουμε ότι βρίσκονται στη σφαίρα $\mathbb{S}_0$ κατά τέτοιο τρόπο, που μια κορυφή του G^* βρίσκεται στο εσωτερικό της αντίστοιχης όψης του G και αντίθετα, και που μια ακμή e^* του G^* έχει ένα μοναδικό σημείο κοινό με το G, που είναι η διασταύρωση του e^* με την αντίστοιχη ακμή e του G και αντίθετα.

Ορισμός 2.2.2. Έστω ένα ενεπίπεδο γράφημα G με τουλάχιστον μια ακμή. Ορίζουμε το *ακτινικό γράφημα* R_G του G ως το ενεπίπεδο γράφημα του οποίου το σύνολο κορυφών είναι $V(G) \cup V(G^*)$ και του οποίου οι ακμές ορίζονται ως εξής: Έστω $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{S}_0 - (G \cup G^*)$ και παρατήρησε ότι C_i, για $i = 1, \ldots, r$, είναι ένα ανοιχτό σύνολο του οποίου το σύνορο περιέχει μια κορυφή v_i από το $V(G)$ και μια κορυφή u_i από το $V(G^*)$. Το σύνολο ακμών του R_G είναι το σύνολο $E(R_G) = \{\{v_i, u_i\}, i = 1, \ldots, r\}$ όπου η ακμή $\{v_i, u_i\}$ έχει πολλαπλότητα 1 αν και τα δύο v_i και u_i έχουν βαθμό τουλάχιστον 2 στα G και G^* αντίστοιχα, αλλιώς η πολλαπλότητα της είναι 2 (προφανώς, το $\{v_i, u_i\}$ μπορεί να ειδωθεί ως ένα υποσύνολο του ανοιχτού συνόλου C_i). Ονομάζουμε *μέσο γράφημα* του G και το σημειώνουμε ως M_G, το δυικό του ακτινικού γραφήματος του G, δηλαδή $M_G = R_G^*$.

Ονομάζουμε ένα σύνολο σημείων στη σφαίρα *2-διάστατο γεωμετρικό σώμα*, ή απλά *γεωμετρικό σώμα*, αν είναι ομομορφικό στον κλειστό δίσκο $\{(x, y) | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ένα γεωμετρικό σώμα B είναι κυρτό, αν για κάθε δύο σημεία του B, υπάρχει μια ευθεία γραμμή που βρίσκεται εντελώς μέσα στο B και συνδέει τα δύο δοσμένα σημεία.

Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ μια συλλογή από αντικείμενα στην σφαίρα $\mathbb{S}_0$. Τότε, σημειώνουμε ως $G_{\mathcal{B}}$ και καλούμε *γράφημα τομών* του $\mathcal{B}$, το γράφημα του οποίου το σύνολο κορυφών είναι $\mathcal{B}$ και για το οποίο ισχύει ότι μια ακμή $\{B_i, B_j\}$ (για $i \neq j$) είναι μια ακμή του $G_{\mathcal{B}}$, αν και μόνο αν $B_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Ορισμός 2.2.3. Έστω G ένα επίπεδο γράφημα δραων στη σφαίρα $\mathbb{S}_0$. Μια κλειστή καμπύλη Jordan J λέγεται *βρόχος* της εμβάπτισης του G, αν κάθε σημείο του $\mathbb{S}_0$ που ανήκει και στην καμπύλη J και στην εμβάπτιση του G, είναι μια κορυφή του G.

Έστω N ένας βρόχος που περνά από τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ενός ενεπίπεδου γραφήματος G. Σημειώνουμε $N = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$. Το *μήκος* του N, που

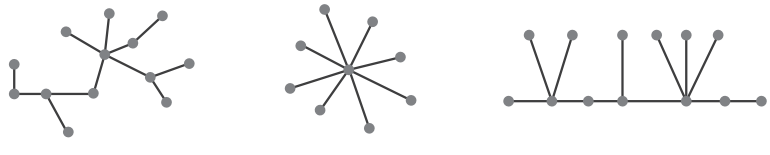
γράφεται ως $|N|$, είναι ο αριθμός των κορυφών που συναντά, δηλαδή $|N| = n$.

Το *γένος Euler* $\mathbf{eg}(\Sigma)$ μιας μη προσανατολισμένης επιφάνειας Σ ισούται με το μη προσανατολισμένο γένος $\mathbf{g}(\Sigma)$. Αν Σ είναι μια προσανατολισμένη επιφάνεια τότε το γένος Euler $\mathbf{eg}(\Sigma)$ είναι δυο φορές το προσανατολισμένο γένος $\mathbf{g}(\Sigma)$ του Σ, δηλαδή δυο φορές ο αριθμός από "λαβές" (δες επίσης [112]). Για τη σφαίρα $\mathbb{S}_0$ ισχύει ότι $\mathbf{eg}(\mathbb{S}_0) = 0$. Τότε $\mathbf{eg}$ έχει τις τιμές του στο $\mathbb{N}$.

Όλοι οι ορισμοί παραπάνω για αντικείμενα στη σφαίρα $\mathbb{S}_0$ επεκτείνονται για μια επιφάνεια οποιουδήποτε γένους Euler. Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός γραφήματος G το γένος Euler του $\mathbf{eg}(G)$ είναι το ελάχιστο $\mathbf{eg}(\Sigma)$, για μια επιφάνεια Σ όπου το G μπορεί να εμβαπτιστεί χωρίς διασταυρώσεις.

2.3 Ειδικά γραφήματα

Ονομάζουμε *δέντρο*, ένα συνεκτικό άκυκλο γράφημα. Τα *φύλλα* ενός δέντρου T είναι οι κορυφές του T βαθμού ίσο με 1. Ονομάζουμε *εσωτερική*, ή *μη φύλλο*, μια κορυφή του T που δεν είναι φύλλο. Ένα δέντρο με μόνο μία εσωτερική κορυφή λέγεται *αστέρι*. Ένα δέντρο με την ιδιότητα ότι όλες οι εσωτερικές κορυφές του βρίσκονται σε ένα μονοπάτι λέγεται *κάμπια*.

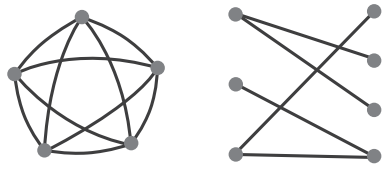


Σχήμα 2.1: Ένα δέντρο, ένα αστέρι και μια κάμπια.

Ένα απλό γράφημα σε n κορυφές, για ένα θετικό ακέραιο n, με όλες τις κορυφές γειτονικές λέγεται *πλήρες* και γράφεται ως K_n. Αποκαλούμε επίσης το K_n μια *κλίκα μεγέθους* n. Ένα γράφημα του οποίου το σύνολο κορυφών επιτρέπει μια διαμέριση σε δύο σύνολα A και B, τέτοια ώστε κάθε ακμή του γραφήματος έχει ένα άκρο στο A και το άλλο στο B, λέγεται *διμερές*. Για παράδειγμα το ακτινικό του κάθε γραφήματος είναι ένα διμερές γράφημα. Ένα πλήρες διμερές γράφημα, που έχει κάθε κορυφή από το σύνολο A γειτονική σε κάθε κορυφή από το B, γράφεται ως $K_{a,b}$, όπου $a = |A|$ και $b = |B|$.

Ονομάζουμε ένα γράφημα G *εξωεπίπεδο*, αν το G έχει μια εμβάπτιση στη σφαίρα, τέτοια ώστε όλες οι κορυφές είναι προσπίπτουσες σε μια μοναδική όψη.

Ονομάζουμε αυτή την όψη ως *εξωτερική όψη* του G.

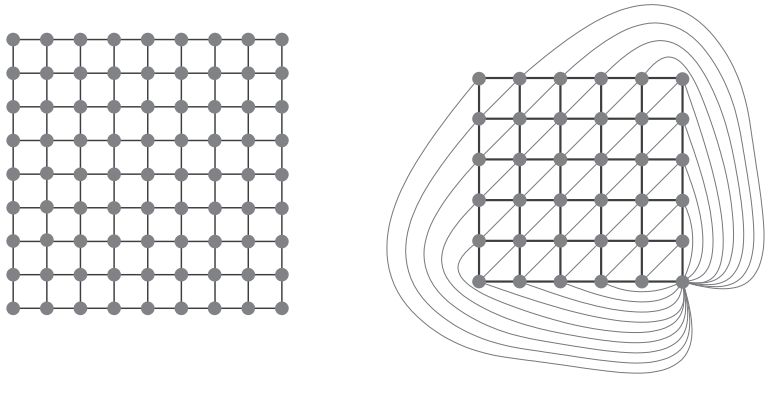


Σχήμα 2.2: Ένα πλήρες και ένα διμερές γράφημα.

Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Η $k \times k$ *σχάρα*, την οποία σημειώνουμε ως L_k, είναι το γράφημα (V, E) με:

$$\begin{cases} V = \{(i,j) : 1 \leq i, j \leq k\} \\ E = \{(i,j)(i',j') : |i - i'| + |j - j'| = 1\}. \end{cases}$$

Οι κορυφές μιας σχάρας με βαθμό το πολύ 3 λέγονται *συνοριακές* κορυφές και οι κορυφές βαθμού 4 *εσωτερικές* κορυφές. Οι κορυφές βαθμού ακριβώς 2 είναι οι *γωνίες* της σχάρας. Προφανώς, η σχάρα είναι ένα επίπεδο γράφημα και οφείλει την ονομασία του στην εμβάπτιση που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Η $k \times k$ σχάρα L_k και η $k \times k$ τριγωνοποιημένη σχάρα Γ_k.

Ονομάζουμε ένα γράφημα H μια *μερική τριγωνοποίηση* ενός ενεπίπεδου γραφήματος G, αν το G είναι παραγόμενο υπογράφημα του H και το H είναι ενεπίπεδο. Ονομάζουμε ένα ενεπίπεδο γράφημα H_Δ *τριγωνοποιημένο* γράφημα,

και λέμε ότι το H_Δ είναι μια *τριγωνοποίηση*, αν όλες οι όψεις του H_Δ είναι τρίγωνα, ι.ε όψεις των οποίων το σύνορο αποτελεί ένα κύκλο μεγέθους 3.

Ας θεωρήσουμε την εξής τριγωνοποίηση. Ξεκινώντας από τη $k \times k$ σχάρα τριγωνοποιούμε τις εσωτερικές όψεις έτσι ώστε όλες οι εσωτερικές κορυφές να έχουν βαθμό 6 στο γράφημα που προκύπτει και συνοριακές κορυφές έχουν βαθμό 4 ή είναι γωνίες. Επιπλέον, μια γωνία βαθμού δύο γίνεται γειτονική σε όλες τις συνοριακές κορυφές. Ονομάζουμε το γράφημα που προκύπτει $k \times k$ *τριγωνοποιημένη σχάρα* και το σημειώνουμε ως Γ_k (δες επίσης το Σχήμα 2.3).

Ένα *απόγειο γράφημα* είναι ένα γράφημα που προκύπτει από ένα επίπεδο γράφημα G, προσθέτοντας μια νέα κορυφή και κάνοντάς την γειτονική σε μερικές από τις κορυφές του G.

Έστω G ένα γράφημα και k ένας θετικός ακέραιος. Ονομάζουμε k-δύναμη του G και σημειώνουμε ως G^k, το γράφημα με σύνολο κορυφών $V(G)$ που έχει μια ακμή xy για κάθε δύο διαφορετικές κορυφές $x, y \in V(G)$, που βρίσκονται σε απόσταση το πολύ k στο G. Συγκεκριμένα ονομάζουμε G^2 το τετράγωνο του G.

2.4 Αποσυνθέσεις

Αφού παρουσιάστηκαν από τους Robertson, Seymour και Thomas στο ([126]) ως ένα εργαλείο σε μια σειρά δημοσιεύσεων που αποτέλεσαν την θεωρία ελασσόνων γραφημάτων, οι δεντροαποσυνθέσεις έχουν μελετηθεί διεξοδικά (π.χ. [14, 19, 1, 18, 122]), και για την γραφοθεωρητική τους σημασία και για την συμμετοχή τους στην διαμόρφωση πλήθους τεχνικών στην περιοχή της αλγοριθμικής σχεδίασης.

Ορισμός 2.4.1 ([126]). Μια *δεντροαποσύνθεση* ενός γραφήματος G, είναι ένα ζεύγος $(T, \mathcal{X})$, όπου T είναι ένα δέντρο και $\mathcal{X} = \{X_t : t \in V(T)\}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του $V(G)$, που λέγονται *τσάντες*, τέτοια ώστε οι εξής τρεις ιδιότητες να ικανοποιούνται:

(1) $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V(G)$,

(2) για κάθε ακμή $e \in E(G)$ υπάρχει $t \in V(T)$ τέτοιο ώστε το X_t περιέχει και τα δύο άκρα του e, και

(3) $\forall v \in V(G)$, το σύνολο $T_v = \{t \in V(T) \mid v \in X_t\}$ ενάγει ένα δέντρο στο T.

Το *πλάτος* μιας δεντροαποσύνθεσης ισούται με το πληθάριθμο μιας τσάντας μέγιστου μεγέθους μείον 1. Το *δεντροπλάτος* ενός γραφήματος G είναι το ελάχιστο πλάτος μιας δεντροαποσύνθεσης του G. Σημειώνουμε το δεντροπλάτος του G ως $\mathbf{tw}(G)$.

Για παράδειγμα, κάθε δέντρο έχει δεντροπλάτος ίσο με 1, η $k \times k$ σχάρα έχει δεντροπλάτος ίσο με k και το πλήρες γράφημα σε n κορυφές δεντροπλάτος ίσο με $n-1$.

Οι κλαδοαποσυνθέσεις, που επίσης παρουσιάστηκαν από τους Robertson και Seymour [128], έχουν αποδειχθεί εξίσου χρήσιμες, ειδικά για γραφήματα σε επιφάνειες (π.χ. [92, 20, 65]).

Ορισμός 2.4.2 ([128])**.** Μια *κλαδοαποσύνθεση* ενός γραφήματος G είναι ένα ζεύγος (T, ϕ) όπου T είναι ένα δέντρο του οποίου οι εσωτερικές κορυφές έχουν βαθμό ίσο με 3 και ϕ είναι μια αντιστοιχία από το σύνολο ακμών του G στο σύνολο των φύλλων του T.

Έστω G ένα γράφημα και (T, ϕ) μια κλαδοαποσύνθεση του G. Η συνάρτηση $\omega : E(T) \to 2^{V(G)}$ απεικονίζει κάθε ακμή e του T σε ένα υποσύνολο κορυφών $\omega(e) \subseteq V(G)$, που περιέχει μια κορυφή $v \in V(G)$ αν είναι προσπίπτουσα σε δύο ακμές $f_1, f_2 \in E(G)$, τέτοιες ώστε τα φύλλα $\phi(f_1), \phi(f_2)$ είναι σε διαφορετικές συνιστώσες του $T \setminus e$. Τότε το πλάτος του (T, ϕ) ισούται με τον αριθμό

$$max_{e \in E(T)}\{\ |\omega(e)|\ \}.$$

Ορίζουμε το *κλαδοπλάτος* του γραφήματος G, $\mathbf{bw}(G)$, ως το ελάχιστο πλάτος ανάμεσα σε όλες τις κλαδοαποσυνθέσεις του G.

Το δεντροπλάτος και το κλαδοπλάτος είναι παραμετρικά ισοδύναμες παράμετροι (δες επίσης [128]). Πιο συγκεκριμένα για κάθε συνεκτικό γράφημα G με τουλάχιστον 3 ακμές ισχύει ότι

$$\mathbf{bw}(G) \leq \mathbf{tw}(G) + 1 \leq \frac{3}{2}\,\mathbf{bw}(G).$$

Προφανώς, διαγράφοντας ή συνθλίβοντας μια ακμή δεν μπορεί να αυξηθεί το δεντροπλάτος ή το κλαδοπλάτος ενός γραφήματος, το οποίο συνεπάγεται ότι η εξής ιδιότητα είναι αληθής:

Παρατήρηση 2.1. Έστω G και H δύο γραφήματα. Αν $H \preccurlyeq G$, τότε:

$$[\alpha] \quad \mathbf{tw}(H) \leq \mathbf{tw}(G) \qquad \text{και} \qquad [\beta] \quad \mathbf{bw}(H) \leq \mathbf{bw}(G).$$

Ονομάζουμε *βέλτιστη* μια δεντροαποσύνθεση ή μια κλαδοαποσύνθεση ενός δοσμένου γραφήματος, αν το πλάτος της ισούται με το δεντροπλάτος ή, αντίστοιχα, το κλαδοπλάτος του γραφήματος για το οποίο γίνεται λόγος.

Τέλος, μια δεντροαποσύνθεση $(T, \mathcal{X})$ όπου το T είναι ένα μονοπάτι, λέγεται *αποσύνθεση μονοπατιού*. Τότε το ελάχιστο πλάτος από όλες τις αποσυνθέσεις μονοπατιού ενός γραφήματος G λέγεται *πλάτος μονοπατιού* και γράφεται ως $\mathbf{pw}(G)$.

2.5 Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

Ένα *αλφάβητο* Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από σύμβολα, π.χ. $\Sigma = \{0, 1\}$. Σημειώνουμε ως Σ^* το σύνολο όλων των ακολουθιών από σύμβολα του Σ, που περιλαμβάνει και την κενή ακολουθία ϵ, π.χ. $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$. Επιπλέον, σημειώνουμε ως $|x|$ το μήκος μιας ακολουθίας x, π.χ. $|101| = 3$. Μια γλώσσα L από το Σ είναι ένα υποσύνολο του Σ^* όπου η κενή γλώσσα συμβολίζεται ως $\emptyset$.

Ένα πρόβλημα απόφασης Π είναι απλά μια γλώσσα σε κάποιο κατάλληλο αλφάβητο. Ένα "ναι"-στιγμιότυπο του προβλήματος Π είναι ένα του οποίου η ακολουθία αναπαράστασης ανήκει στην γλώσσα, ενώ το αντίθετο ισχύει για ένα "όχι"-στιγμιότυπο του Π. Ένας αλγόριθμος που επιλύει ένα πρόβλημα απόφασης είναι μια μηχανή Turing που αποφασίζει την αντίστοιχη γλώσσα, δηλαδή ελέγχει αν η ακολουθία της εισόδου ανήκει στην γλώσσα, στην οποία περίπτωση απαντά "ναι", ή αλλιώς, απαντά "όχι".

Ο χρόνος T_x που απαιτείται για μια μηχανή Turing δεδομένης μιας ακολουθίας x της εισόδου είναι ο αριθμός βημάτων υπολογισμού που χρειάζεται η μηχανή για να αποφανθεί "ναι " ή "όχι". Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια αναδρομική συνάρτηση. Λέμε ότι μια μηχανή Turing αποφασίζει μια γλώσσα – ή ισοδύναμα ένας αλγόριθμος επιλύει το πρόβλημα – σε χρόνο $f(n)$, αν για κάθε δοσμένη ακολουθία x της εισόδου, ο χρόνος T_x που απαιτείται είναι το πολύ $O(f(|x|))$. Ένα σύνολο γλωσσών είναι μια κλάση πολυπλοκότητας $f(n)$-χρόνου, αν για κάθε γλώσσα στο σύνολο υπάρχει μια μηχανή Turing που αποφασίζει τη γλώσσα σε χρόνο το πολύ $f(n)$. Η ένωση από όλες τις κλάσεις πολυπλοκότητας n^k-χρόνου για $k > 0$, δηλαδή τα προβλήματα επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο, γράφεται ως P και αποτελεί το πεδίο των προβλημάτων που θεωρούνται επιλύσιμα. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα απόφασης σε γραφήματα.

Καλυμμα Κορυφων

Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G και ένας μη αρνητικός ακέραιος k.
Ερώτημα: Υπάρχει ένα κάλυμμα κορυφών S του G με $|S| \leq k$;

Παρατήρησε ότι αυτό το πρόβλημα είναι στην πραγματικότητα ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, εκφρασμένο εδώ στη μορφή ενός προβλήματος απόφασης. Αυτή είναι μια κοινή πρακτική για την ενοποίηση της συζήτησης περί προβλήματα απόφασης και βελτιστοποίησης, δηλαδή προβλήματα ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης.

Κανένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου δεν είναι γνωστό να υπάρχει για το πρόβλημα Κάλυμμα Κορυφών. Παρόλα αυτά αν δοθεί ένα τέτοιο σύνολο κορυφών, μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει ότι όλες οι ακμές καλύπτονται και ότι το μέγεθος του δοσμένου συνόλου είναι το πολύ k. Το ίδιο ισχύει για πολλά γραφοθεωρητικά προβλήματα, αφού συχνά ψάχνουμε για υποσύνολα στοιχείων από ένα γράφημα που ικανοποιούν συγκεκριμένες απαιτήσεις.

Η κλάση πολυπλοκότητας που περιέχει τα προβλήματα, για τα οποία δεδομένης μιας λύσης η ορθότητα μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο γράφεται ως NP. Το πρόβλημα Κάλυμμα Κορυφών δεν ανήκει απλά σε αυτή την κλάση, αλλά μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι NP-*δύσκολο*, που σημαίνει όσο δύσκολο όσο και οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα στο NP (για περισσότερα στη θεωρία της NP-πληρότητας δες [99] και για έναν κατάλογο NP-δύσκολων προβλημάτων [77]).

Κεφάλαιο 3

Διδιαστατότητα

Η θεωρία της διδιαστατότητας, που αναπτύχθηκε σε μια σειρά από δημοσιεύσεις των Demaine, Fomin, Hajiaghayi και Θηλυκό [44, 39, 36, 38, 37, 45, 41], παρέχει γενικευμένες τεχνικές για την σχεδίαση αποδοτικών FPT αλγορίθμων και προσεγγιστικών αλγορίθμων για NP-δύσκολα προβλήματα σε γραφήματα και βρίσκει εφαρμογή σε έναν αριθμό από κλάσεις γραφημάτων, συγκεκριμένα όλες τις γενικεύσεις των επίπεδων γραφημάτων. Η θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί σε μια σειρά από γνωστά προβλήματα σε γραφήματα, όπως το κάλυμμα κορυφών, το σύνολο κορυφών ανάδρασης, το κάλυμμα όψεων και το σύνολο κυριαρχίας, ενδεικτικά. Στις επόμενες ενότητες προχωρούμε με μια επισκόπηση των κυρίων πτυχών της θεωρίας της διδιαστατότητας.

3.1 Παραμετρική πολυπλοκότητα

Όπως η μελέτη της κλασικής θεωρίας πολυπλοκότητας επεκτάθηκε, έγινε αντιληπτό ότι πολλά από τα θεωρούμενα προβλήματα που προκύπτουν με φυσικό τρόπο αποδείχτηκαν δύσβατα, ή αλλιώς NP-δύσκολα (δες και το Κεφάλαιο 2.5). Έπεται ότι για αυτά τα προβλήματα κανένας αποδοτικός αλγόριθμος δεν υπάρχει όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε προς το παρόν, όπου εδώ η έννοια αποδοτικός αλγόριθμος ερμηνεύεται ως ένας αλγόριθμος που εγγυάται να απαντήσει για το πρόβλημα μετά από έναν αριθμό βημάτων πολυωνυμικό στο μέγεθος της εισόδου.

Αν και η επιλογή του μεγέθους της εισόδου ως ένα σημείο αναφοράς για την αναμενόμενη ποσότητα των αναγκαίων διαθέσιμων πόρων για να αποφασιστεί

το πρόβλημα είναι χωρίς αμφιβολία λογική, συχνά αποτυγχάνει να αντικατοπτρίσει το ακριβές υπολογιστικό φορτίο που απαιτείται. Πιο σημαντικά, υπάρχουν προεξέχοντα παραδείγματα όπου αυτή η προσέγγιση υπερεκτιμά την δυσκολία του προβλήματος που θεωρείται, αφού προβάλλει το ίδιο βάρος σε ολόκληρο το μέγεθος της εισόδου. Στην πραγματικότητα προκύπτει ότι σε τέτοιες περιπτώσεις, παρά το γεγονός ότι η είσοδος πρέπει να εξεταστεί ολόκληρη, η πηγή της της πολυπλοκότητας εξαρτάται από ένα πολύ πιοπεριορισμένο μέρος της περιγραφής του στιγμιοτύπου της εισόδου.

Η θεωρία της παραμετρικής πολυπλοκότητας, παρουσιάστηκε στην εργασία των Downey και Fellows [55, 56, 54] και είναι μια άμεση απάντηση σε αυτή την επιχειρηματολογία. Μετρά την πολυπλοκότητα ενός δοσμένου προβλήματος σε συνάρτηση με ένα ζεύγος μεταβλητών: το μέγεθος της εισόδου και μια παράμετρο ειδικά επιλεγμένη για κάθε περίπτωση. Είναι η επιλογή αυτής της παραμέτρου ακριβώς που επιτρέπει μια θεώρηση των συγκεκριμένων πτυχών του προβλήματος και παρέχει τα μέσα ώστε αυτές οι πτυχές να περάσουν στην ανάλυση της πολυπλοκότητας ενός προτεινόμενου αλγόριθμου. Για παράδειγμα, μια τυπική επιλογή της παραμέτρου για ένα δοσμένο πρόβλημα είναι το μέγεθος μιας λύσης.

Στις πολυπληθείς κλάσεις πολυπλοκότητας της, η θεωρία της παραμετρικής πολυπλοκότητας κατάφερε να εκλεπτύνει την θεωρία της δυσβατότητας και να παράξει μια ιεραρχία κλάσεων που διαχωρίζουν προβλήματα τα οποία κατηγοροποιούνται παρόμοια από την ματιά της θεωρίας της NP-πληρότητας, αν και διαφέρουν ουσιαστικά ως προς την συμπεριφορά της πολυπλοκότητάς τους. Στο υπόλοιπο του κειμένου θα προσεγγίσουμε μόνο μια άποψη της θεωρίας της παραμετρικής πολυπλοκότητας, δηλαδή το πλαίσιο για την σχεδίαση αλγορίθμων για παραμετροποιημένα προβλήματα· για μια επισκόπηση των αρνητικών αποτελεσμάτων περί της δυσβατότητας προβλημάτων και τις αντίστοιχες κλάσεις της παραμετρικής πολυπλοκότητας δες [64].

Ας θεμελιώσουμε στη συνέχεια με πιο τυπικό τρόπο τις έννοιες της συζήτησης που προηγήθηκε, εστιάζοντας στα προβλήματα για γραφήματα. Ξεκινούμε με τον ορισμό μιας παραμέτρου.

Ορισμός 3.1.1. Έστω Σ ένα αλφάβητο. Τότε μια *παραμετροποίηση του* Σ^* είναι μια συνάρτηση $\mathbf{p}$ από τις ακολουθίες του Σ^* στους μη αρνητικούς ακέραιους.

Συχνά αναφερόμαστε στη συνάρτηση $\mathbf{p}$ ως την *παράμετρο* $\mathbf{p}$. Όταν έχουμε να κάνουμε συγκεκριμένα με γραφήματα, λέμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{p}$ από το σύνολο των γραφημάτων στους μη αρνητικούς ακέραιους είναι μια *σταθερά γραφημάτων*

ή μια *παράμετρος γραφημάτων*.

Ορισμός 3.1.2. Έστω Σ ένα αλφάβητο. Ένα *παραμετροποιημένο πρόβλημα* Π είναι ένα υποσύνολο του $\Sigma^* \times \mathbb{N}$.

Με άλλα λόγια , ένα στιγμιότυπο ενός παραμετροποιημένου προβλήματος είναι ένα ζεύγος (I, k) όπου το $I \in \Sigma^*$ είναι το κύριο μέρος της περιγραφής του στιγμιότυπου και το $k \in \mathbb{N}$ είναι μια, συνήθως μικρή, παράμετρος.

Τυπικά, το παραμετροποιημένο πρόβλημα συσχετιζόμενο με μια παράμετρο $\mathbf{p}$ έχει ως είσοδο ένα ζεύγος (I, k) όπου το I είναι μια ακολουθία και το k είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, και ρωτά αν $\mathbf{p}(I) \leq k$ ή, εναλλακτικά αν $\mathbf{p}(I) \geq k$. Έστω $\mathcal{G}$ το σύνολο όλων των γραφημάτων. Το παραμετροποιημένο πρόβλημα σε γραφήματα αντίστοιχο με την παράμετρο $\mathbf{p}$ γράφεται ως $\Pi_{\mathbf{p}} \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ και ορίζεται ως $\Pi_{\mathbf{p}} = \{(G, k) \mid \mathbf{p}(G) \leq k\}$ ή, εναλλακτικά, ως $\Pi_{\mathbf{p}} = \{(G, k) \mid \mathbf{p}(G) \geq k\}$.

Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι αναφερόμαστε σε ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα μπορούμε να προσθέσουμε ένα πρόθεμα "p−" στον τίτλο του προβλήματος. Για παράδειγμα έχουμε την παραμετροποιημένη εκδοχή του προβλήματος απόφασης που ορίστηκε στην Ενότητα 2.5 συσχετιζόμενη με την παράμετρο γραφημάτων του καλύμματος κορυφών.

p−Κάλυμμα Κορυφών
Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G και ένας μη αρνητικός ακέραιος k.
Παράμετρος: k
Ερώτημα: Υπάρχει ένα κάλυμμα κορυφών S του G με $|S| \leq k$;

Όπως ήδη έχει ειπωθεί, ένας βασικός στόχος της θεωρίας της παραμετρικής πολυπλοκότητας είναι να χαρακτηρίσει για ποια προβλήματα ένας αποδοτικός αλγόριθμος μπορεί να υπάρχει, σε συνάρτηση της τιμής της παραμέτρου. Συγκεκριμένα, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον η περίπτωση όπου μπορούμε να περιορίσουμε την εξάρτηση του εκθετικού φορτίου της πολυπλοκότητας χρόνου αποκλειστικά στην τιμή της παραμέτρου. Σε αυτό το πλαίσιο, και σε αντιστοιχία με την έννοια της κλασικής πολυπλοκότητας όπου ένας αλγόριθμος είναι αποδοτικός αν τερματίζει σε πολυωνυμικό χρόνο, ορίζεται η έννοια του *παραμετρικά βατού* προβλήματος.

Ορισμός 3.1.3. Έστω Σ ένα αλφάβητο και $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια υπολογίσιμη συνάρτηση. Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα $\Pi \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ λέγεται *παραμετρικά*

βατό, αν επιδέχεται έναν αλγόριθμο που αποφασίζει αν $(I, k) \in \Pi$ για μια ακολουθία $I \in \Sigma^*$ και έναν ακέραιο $k \in \mathbb{N}$ το πολύ σε

$$f(k) \cdot n^{O(1)} \text{ βήματα}$$

όπου n είναι το μήκος της ακολουθίας I.

Η κλάση πολυπλοκότητας που αποτελείται από όλα τα παραμετρικά βατά προβλήματα γράφεται ως FPT και ένας αλγόριθμος όπως αυτός που περιγράφηκε στον ορισμό παραπάνω, δηλαδή που τερματίζει σε σε $f(k) \cdot n^{O(1)}$ χρόνο λέγεται FPT *αλγόριθμος*.

Η ύπαρξη ενός απλού αλγόριθμου που βασίζεται στην μέθοδο φραγμένου δέντρου αναζήτησης [54] δείχνει ότι το πρόβλημα p−Καλυμμα Κορυφων είναι επιλύσιμο σε $O(2^k \cdot n)$ βήματα και έτσι το p−Καλυμμα Κορυφων ανήκει στο FPT. Παρόλα αυτά, αυτό δεν είναι συμβαίνει για όλα τα προβλήματα σε γραφήματα. Μια παραμετρική θεωρία πληρότητας ανάλογη της θεωρίας της ΝΠ-πληρότητας υποδεικνύει ότι ένας αριθμός προβλημάτων, όπως το p−Ανεξαρτητο Συνολο και το p−Συνολο Κυριαρχιας, δεν αναμένεται να είναι παραμετρικά βατά.

Γενικά, ένα κεντρικό ζήτημα στην παραμετρική πολυπλοκότητα είναι η εύρεση των παραμετροποιημένων προβλημάτων τα οποία επιδέχονται FPT αλγόριθμους και, όταν αυτό είναι εφικτό, να μειωθεί όσο είναι δυνατό η συμβολή της συνάρτησης $f(\cdot)$, δηλαδή της *παραμετρικής εξάρτησης*. Οι FPT αλγόριθμοι όπου ισχύει ότι $f(k) = 2^{o(k)}$ λέγονται *υποεκθετικοί παραμετρικοί αλγόριθμοι*. Είναι γνωστό ότι ένας τέτοιος αλγόριθμος όπου $f(k) = 2^{o(\sqrt{k})}$ δεν είναι πιθανό να υπάρχει για αρκετά προβλήματα σε γραφήματα, ακόμα και όταν περιοριζόμαστε σε κλάσεις αραιών γραφημάτων όπως τα επίπεδα γραφήματα [25]. Συνεπώς, μια παραμετρική εξάρτηση του τύπου $f(k) = 2^{O(\sqrt{k})}$ είναι το καλύτερο που μπορούμε να αναμένουμε και αυτός είναι και ο στόχος της θεωρίας της διδιαστατότητας, όπως θα δούμε στις ενότητες που ακολουθούν.

Ένας παράλληλος στόχος είναι η απόδειξη της ύπαρξης αλγορίθμων πυρηνοποίησης για προβλήματα στο FPT, δηλαδή αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου για ένα δοσμένο παραμετροποιημένο πρόβλημα, που μπορούν να αντικαθιστούν κάθε στιγμιότυπο με ένα νέο ισοδύναμο, του οποίου το μέγεθος εξαρτάται αποκλειστικά στην τιμή της παραμέτρου. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.1.4. Έστω Σ ένα αλφάβητο και $\Pi \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα και $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια υπολογίσιμη συνάρτηση. Ένας αλγόριθμος

K που δεδομένης μιας ακολουθίας $I \in \Sigma^*$ και ενός ακέραιου $k \in \mathbb{N}$ εξάγει μια ακολουθία $K(I) \in \Sigma^*$ και ένα $k' \in \mathbb{N}$ λέγεται *αλγόριθμος πυρηνοποίησης του* Π, ή απλά *πυρηνοποίηση*, αν ισχύει ότι

- ο αλγόριθμος K τερματίζει σε πολυωνυμικό χρόνο στο μέγεθος του I και του k,
- $(I, k) \in \Pi$ αν και μόνο αν $(K(I), k') \in \Pi$ και
- $|K(I)| + k' \leq h(k)$.

Ακόμα, το $K(I)$ λέγεται *πυρήνας* του I.

Αν ένας τέτοιος αλγόριθμος υπάρχει και το μέγεθος του νέου στιγμιότυπου είναι πολυωνυμικό στο k, τότε λέμε ότι το Π *επιτρέπει έναν πολυωνυμικό πυρήνα*· αν είναι γραμμικό στο k, ο πυρήνας λέγεται *γραμμικός πυρήνας*. Έπεται από την εξής πρόταση από το [115], ότι ένα παραμετρικά βατό πρόβλημα πάντα έχει μια πυρηνοποίηση.

Πρόταση 3.1.5 ([115])**.** *Έστω* Π *ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα. Τότε* $\Pi \in$ FPT *αν και μόνο αν* Π *είναι αποφάνσιμο και έχει μια πυρηνοποίηση.*

Ενώ η ύπαρξη ενός FTP αλγόριθμου συνεπάγεται την ύπαρξη ενός πυρήνα, είναι μια πρόκληση να προσδιοριστεί για ποια προβλήματα ένας τέτοιος πυρήνας μπορεί να είναι πολυωνυμικός ή ακόμα γραμμικός [17]. Το πρόβλημα p−Καλυμμα Κορυφων περιλαμβάνεται σε αυτή την τελευταία περιγραφή, αφού από ένα αποτέλεσμα των Nemhauser και Trotter [113] επιδέχεται έναν $2k$ πυρήνα.

3.2 Διδιάστατες παράμετροι

Μια φυσική προσέγγιση στη σχεδίαση αλγορίθμων για δύσβατα προβλήματα, όπως τα NP-δύσκολα προβλήματα, είναι ο περιορισμός της κλάσεις των αντικειμένων που δίνονται ως είσοδος. Για προβλήματα σε γραφήματα, ένας τυπικός τρόπος για την επίτευξη αυτού αποτελεί η τοποθέτηση κάποιας επιπρόσθετης τοπολογικής απαίτησης για το γράφημα της εισόδου, όπως η εμβαπτισιμότητα σε κάποια επιφάνεια.

Για ένα γράφημα G εμβαπτίσιμο ή σχεδόν εμβαπτίσιμο σε μια επιφάνεια, η έννοια μιας *διδιάστατης* παραμέτρου, που ορίστηκε ως όρος για πρώτη φορά στο [38] αν και ήδη είχε χρησιμοποιηθεί ως έννοια στα [44, 39], αναφέρεται βασικά σε μια παράμετρο γραφημάτων της οποίας το μέγεθος του πιστοποιητικού

μιας λύσης αναπόφευκτα εκτείνεται στο μέρος της επιφάνειας που καλύπτεται από το G. Το κίνητρο είναι να ληφθεί ένα άνω φράγμα στο δεντροπλάτος του γραφήματος G σε συνάρτηση της τιμής αυτής της διδιάστατης παραμέτρου για το G.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του προβλήματος Καλυμμα Κορυφων, θεωρούμε την περίπτωση όπου το γράφημα της εισόδου G είναι επίπεδο. Για κάθε εμβάπτιση του G στη σφαίρα και για κάθε κάλυμμα κορυφών S του G, ένας ανοιχτός δίσκος της σφαίρας που περιέχει ακμές του G πρέπει επίσης να περιέχει και τουλάχιστον μια κορυφή στο S. Τότε σύμφωνα με την συζήτηση παραπάνω, ένας κατάλληλος ορισμός θα πρέπει να χαρακτηρίσει την παράμετρο του καλύμματος κορυφών ως διδιάστατη. Ο Ορισμός 3.2.1 χρησιμοποιεί μια σχάρα ως ελάσσονα, που είναι – όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα – ένα κανονικό πιστοποιητικό μεγάλου δεντροπλάτους για ένα γράφημα εμβαπτισμένο σε μια επιφάνεια.

Λέμε ότι μια παράμετρος $\mathbf{p}$ είναι *κλειστή ως προς ελάσσονα*, αν για κάθε γράφημα H, αν $H \preccurlyeq G$, τότε $\mathbf{p}(H) \leq \mathbf{p}(G)$. Παρόμοια, η $\mathbf{p}$ είναι *κλειστή ως προς συνθλίψεις*, αν για κάθε γράφημα H, αν $H \preccurlyeq_c G$, τότε $\mathbf{p}(H) \leq \mathbf{p}(G)$. Προφανώς, το δεύτερο έπεται από το πρώτο αλλά το αντίθετο δεν είναι γενικά αληθές.

Ορισμός 3.2.1 ([38, 67])**.** Μια παράμετρος $\mathbf{p}$ είναι *διδιάστατη ως προς ελάσσονα* αν:

- η $\mathbf{p}$ είναι κλειστή ως προς ελάσσονα και
- αν το L_k είναι η $k \times k$ σχάρα, τότε $\mathbf{p}(L_k) = \Omega(k^2)$.

Μια παράμετρος $\mathbf{p}$ είναι *διδιάστατη ως προς συνθλίψεις* αν:

- η $\mathbf{p}$ είναι κλειστή ως προς συνθλίψεις και
- αν Γ_k είναι η τριγωνοποιημένη $k \times k$ σχάρα, τότε $\mathbf{p}(\Gamma_k) = \Omega(k^2)$.

Σε οποιαδήποτε περίπτωση, η παράμετρος $\mathbf{p}$ ονομάζεται *διδιάστατη*.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι υπό αυτόν τον ορισμό η παράμετρος του καλύμματος κορυφών είναι διδιάστατη, και πιο συγκεκριμένα διδιάστατη ως προς ελάσσονα, αφού είναι κλειστή ως προς ελάσσονα και ένα κάλυμμα κορυφών μιας σχάρας έχει περίπου μισές από τις κορυφές της σχάρας. Παρόμοια, το σύνολο κορυφών ανάδρασης είναι επίσης διδιάστατο ως προς ελάσσονα. Επιπλέον, δεν

είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η παράμετρος του συνόλου κυριαρχίας είναι διδιάστατη ως προς συνθλίψεις. Σημείωσε ότι το σύνολο κυριαρχίας δεν είναι κλειστό ως προς ελάσσονα· παρόλα αυτά είναι κλειστό ως προς συνθλίψεις ακμών και κάθε κορυφή μιας σχάρας κυριαρχεί το πολύ 8 άλλες κορυφές.

Άλλες διδιάστατοι παράμετροι είναι το ελάχιστο μεγιστικό ταίριασμα, το κάλυμμα όψεων, το σύνολο κυριαρχίας ακμών, το r-σύνολο κυριαρχίας, το συνεκτικό σύνολο κυριαρχίας, το συνεκτικό σύνολο κυριαρχίας ακμών, το συνεκτικό r-σύνολο κυριαρχίας, το TSP χωρίς βάρη και η συμπλήρωση χορδών (για τους ορισμούς αυτών των παράμετρων και επιπρόσθετων διδιάστατων παράμετρων δες [15]).

Τέλος, σημειώνουμε ακόμα ως *διδιάστατο πρόβλημα* το πρόβλημα σε γραφήματα που αντιστοιχεί σε μια διδιάστατη παράμετρο. Για παράδειγμα το πρόβλημα Επιπεδο Καλυμμα Κορυφων περιγράφεται ως διδιάστατο.

3.3 Η συνθήκη της διδιαστατότητας

Ας θυμηθούμε ότι το κίνητρο για τον ορισμό μιας διδιάστατης παραμέτρου είναι η έννοια του φράγματος παραμέτρου-δεντροπλάτους. Από τον Ορισμό 3.2.1, η τιμή μιας διδιάστατης παραμέτρου για ένα γράφημα G σχετίζεται με το μέγεθος μιας σχάρας ως ελάσσον του G. Για την περαιτέρω συσχέτιση της παραμέτρου με το δεντροπλάτος ενός γραφήματος που ανήκει σε μια συγκεκριμένη τοπολογική κλάση, η θεωρία της διδιαστατότητας βασίζεται σε μέρη από την θεωρία ελασσόνων γραφημάτων των Robertson και Seymour και μάλιστα σε περιπτώσεις επεκτείνει αυτή την θεωρία, ενοποιώντας και βελτιώνοντας προηγούμενα αποτελέσματα, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με τα ανάλογα δομικά λήμματα για σχέση της σύνθλιψης [67, 68].

Για να το δούμε αυτό στην πράξη, ας θεωρήσουμε αρχικά την κλάση των επίπεδων γραφημάτων. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα των Robertson, Seymour και Thomas [131] δηλώνει ότι αν ένα επίπεδο γράφημα έχει δεντροπλάτος τουλάχιστον k, τότε περιέχει μια $\Omega(k) \times \Omega(k)$ σχάρα ως ελάσσον. Πιο συγκεκριμένα η εξής πρόταση ισχύει.

Πρόταση 3.3.1 ([131]). *Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Κάθε επίπεδο γράφημα του δεντροπλάτους περισσότερο από $6k - 5$ έχει μια $k \times k$ σχάρα ως ελάσσον.*

Τότε το εξής απλό πόρισμα θεμελιώνει ένα υπογραμμικό διδιάστατο ως προς ελάσσονα φράγμα παραμέτρου-δεντροπλάτους για επίπεδα γραφήματα.

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω* $\mathbf{p}$ *μια διδιάστατη ως προς ελάσσονα παράμετρος. Αν το* G *είναι ένα επίπεδο γράφημα, τότε* $\mathbf{tw}(G) = O(\sqrt{\mathbf{p}(G)})$.

Απόδειξη. Έστω c', c'' κατάλληλες σταθερές. Από την Πρόταση 3.3.1 το γράφημα G έχει μια σχάρα L ως ελάσσον μεγέθους $c' \cdot \mathbf{tw}(G)$. Τότε, ο Ορισμός 3.2.1 συνεπάγεται ότι $\mathbf{p}(L) \leq \mathbf{p}(G)$ και ότι $\mathbf{p}(L) \geq c'' \cdot (\mathbf{tw}(G))^2$. Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες συνεπάγεται ότι $\mathbf{p}(G) \geq \mathbf{p}(L) \geq c'' \cdot (\mathbf{tw}(G))^2$. □

Προφανώς, ακολουθώντας ως πρότυπο την απόδειξη του Πορίσματος 3.3.2, μπορούμε να εξάγουμε ανάλογα φράγματα παραμέτρου-δεντροπλάτους για διδιάστατες ως προς ελάσσονα και ως προς συνθλίψεις παράμετρους και σχετικά με πιο ευρείες κλάσεις γραφημάτων από τα επίπεδα γραφήματα, όσο έχουμε κατάλληλες γενικοποιήσεις της Πρότασης 3.3.1. Σε αυτή την κατεύθυνση, ορίζουμε τις παράμετρους γραφημάτων $\mathbf{bg_m}$ και $\mathbf{bg_c}$, όπου δεδομένου ενός γραφήματος G,

$$\begin{aligned}
\mathbf{bg_m}(G) &= \max\{k \mid G \text{ περιέχει την } k \times k \text{ σχάρα } L_k \text{ ως ελάσσον}\} \\
\mathbf{bg_c}(G) &= \max\{k \mid G \text{ περιέχει την } k \times k \text{ τριγωνοποιημένη σχάρα } \Gamma_k \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ως σύνθλιψη}\}.
\end{aligned}$$

Τότε η απαίτηση για την ύπαρξη ενός φράγματος παραμέτρου-δεντροπλάτους για μια δοσμένη κλάση γραφημάτων είναι ενσωματομένη στην εξής ιδιότητα.

Ορισμός 3.3.3. Έστω $\mathcal{G}$ μια κλάση γραφημάτων. Λέμε ότι η κλάση $\mathcal{G}$ ικανοποιεί την *διδιάστατη ως προς ελάσσονα συνθήκη*, ή αντίστοιχα την *διδιάστατη ως προς συνθλίψεις συνθήκη*, αν οι εξής ιδιότητες ισχύουν αντίστοιχα.

$$\forall_{G \in \mathcal{G}}\ \mathbf{tw}(G) = O(\mathbf{bg_m}(G)) \tag{3.1}$$

$$\forall_{G \in \mathcal{G}}\ \mathbf{tw}(G) = O(\mathbf{bg_c}(G)) \tag{3.2}$$

Σε οποιαδήποτε περίπτωση, λέμε ότι η κλάση $\mathcal{G}$ ικανοποιεί τη *συνθήκη της διδιαστατότητας*.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ορθότητα της διδιάστατης ως προς ελάσσονα συνθήκης (3.1) για την κλάση των επίπεδων γραφημάτων έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.3.1. Αντιγράφοντας την απόδειξη του Πορίσματος 3.3.2 έχουμε την εξής πιο γενική πρόταση.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω* $\mathbf{p}$ *μια διδιάστατη ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα συνθλίψεις) παράμετρος. Αν η κλάση γραφημάτων* $\mathcal{G}$ *ικανοποιεί τη διδιάστατη ως*

προς ελάσσονα (αντίστοιχα συνθλίψεις) συνθήκη, τότε το εξής φράγμα παραμέτρου-δεντροπλάτους ισχύει για κάθε γράφημα G στην κλάση $\mathcal{G}$:

$$\mathbf{tw}(G) = O(\sqrt{\mathbf{p}(G)})$$

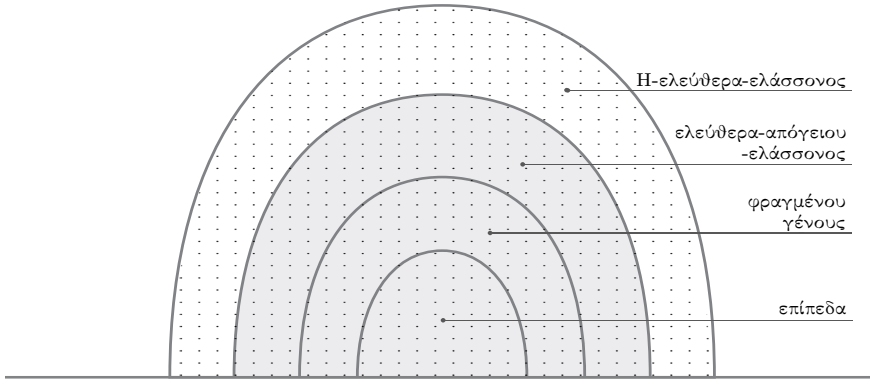
Θεωρούμε τώρα τις εξής κλειστές ως προς ελάσσονα κλάσεις γραφημάτων. Μια κλάση γραφημάτων είναι *φραγμένου γένους*, αν δεδομένου ενός μη αρνητικού ακέραιου g, κάθε γράφημα στην κλάση έχει γένος Euler το πολύ g.

Δεδομένου ενός γραφήματος H, λέμε ότι ένα γράφημα G είναι *H-ελεύθερο-ελάσσονος*, αν δεν περιέχει το H ως ελάσσον. Λέμε επίσης ότι μια κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$ είναι *H-ελεύθερη-ελάσσονος* ή *$\mathcal{G}$ αποκλείει το H ως ελάσσον*, όταν όλα τα μέλη της είναι H-ελεύθερα-ελάσσονος. Παρόμοια, μια κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$ είναι *ελεύθερη-απόγειου-ελάσσονος*, αν αποκλείει ένα δεδομένο απόγειο γράφημα H ως ελάσσον. Οι ελεύθερες-απόγειου-ελάσσονος κλάσεις γραφημάτων είναι μια σημαντική υποοικογένεια των H-ελεύθερων-ελάσσονος κλάσεων γραφημάτων και εξετάστηκε για πρώτη φορά από τον Εππστειν στο [59, 60].

Η δομή των H-ελεύθερων-ελάσσονος γραφημάτων αποκαλύπτεται από το Δομικό Θεώρημα ελασσόνων γραφημάτων των Robertson και Seymour [129], που βρίσκεται στη καρδιά της θεωρίας ελασσόνων γραφημάτων. Περιγράφει κατασκευαστικά τα γραφήματα που δεν περιέχουν ένα δοσμένο γράφημα H ως ελάσσον. Μιλώντας ελεύθερα, ένα H-ελεύθερο-ελάσσονος γράφημα έχει μια δεντροαποσύνθεση σε μέρη, που είναι "σχεδόν" εμβαπτίσιμα σε μια επιφάνεια Σ σετην οποία το H δεν μπορεί να σχεδιαστεί, δηλαδή τα μέρη του μπορούν να σχεδιαστούν στο Σ εκτός από ένα φραγμένο αριθμό κορυφών και ένα φραγμένο αριθμό από "τοπικές περιοχές μη επιπεδότητας", με αυτά τα φράγματα να εξαρτώνται μόνο από το H. Σημείωσε ότι αφού το γράφημα H είναι δεδομένο, η επιφάνεια στην οποία το H δεν μπορεί να εμβαπτιστεί έχει φραγμένο γένος — έτσι, τα μέρη της αποσύνθεσης είναι "σχεδόν" εμβαπτίσιμα σε φραγμένου γένους επιφάνειες.

Έπεται ότι όλες οι κλάσεις γραφημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν ως γραφήματα εμβαπτισμένα σε επιφάνειες, κενικοποιώντας την κλάση των επίπεδων γραφημάτων. Συγκεκριμένα η σειρά από τα επίπεδα γραφήματα προς ολοένα και πιο γενικές κλάσεις γραφημάτων έχει ως εξής: επίπεδα γραφήματα, γραφήματα φραγμένου γένους, ελεύθερα-απόγειου-ελάσσονος γραφήματα και H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα (δες επίσης το Σχήμα 3.1).

Οι εξής δύο προτάσεις διευρύνουν τα σχετικά αποτελέσματα από τη θεωρία ελασσόνων γραφημάτων και ξεκαθαρίζουν την εικόνα στο τοπίο της διδιασ-



Σχήμα 3.1: Κλειστές ως προς ελάσσονα κλάσεις γραφημάτων που ικανοποιούν την διδιάστατη ως προς ελάσσονα συνθήκη (διάστικτη περιοχή) και η διδιάστατη ως προς συνθλίψεις συνθήκη (σκούρα περιοχή).

τατότητας. Η πρώτη είναι από τους Demaine και Hajiaghayi [41] και η δεύτερη από τους Fomin, Golovach και Θηλυκό [67].

Πρόταση 3.3.5 ([41])**.** *Για κάθε δοσμένο γράφημα H, η κλάση από τα H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα ικανοποιεί τη διδιάστατη ως προς ελάσσονα συνθήκη.*

Πρόταση 3.3.6 ([67])**.** *Για κάθε απόγειο γράφημα, η κλάση ελεύθερων-απόγειου-ελάσσονος γραφημάτων ικανοποιεί τη διδιάστατη ως προς συνθλίψεις συνθήκη.*

Οι προτάσεις παραπάνω σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.3.4, συνεπάγονται ότι τα H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα έχουν ένα φράγμα παραμέτρου-δεντροπλάτους για κάθε διδιάστατη ως προς ελάσσονα παράμετρο και τα ελεύθερα-απόγειου-ελάσσονος γραφήματα έχουν ένα φράγμα παραμέτρου-δεντροπλάτους για κάθε διδιάστατη ως προς συνθλίψεις παράμετρο. Συνοψίζουμε αυτό το γεγονός στη μορφή του εξής πορίσματος.

Πόρισμα 3.3.7. *Αν το G_1 είναι ένα H-ελεύθερο-ελάσσονος γράφημα, για ένα δοσμένο γράφημα H και η $\mathbf{p_1}$ μια διδιάστατη ως προς ελάσσονα παράμετρος, τότε $\mathbf{tw}(G_1) = O(\sqrt{\mathbf{p_1}(G_1)})$.*
Αν το G_2 είναι ένα ελεύθερο-απόγειου-ελάσσονος γράφημα και η $\mathbf{p_2}$ μια διδιάστατη ως προς συνθλίψεις παράμετρος, τότε $\mathbf{tw}(G_2) = O(\sqrt{\mathbf{p_2}(G_2)})$.

3.4 Αλγοριθμικές εφαρμογές

Οι κύριες αλγοριθμικές συνέπειες των συνδυαστικών αποτελεσμάτων της θεωρίας της διδιαστατότητας που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα περιλαμβάνουν

(ι) υποεκθετικούς FPT αλγόριθμους,

(ιι) γραμμικούς πυρήνες και

(ιιι) αποδοτικούς προσεγγιστικούς αλγόριθμους

για έναν αριθμό από διδιάστατα προβλήματα σε ευρείες τοπολογικές κλάσεις γραφημάτων. Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας συνοψίζουμε τα πιο σημαντικά αποτελέσματα σε αυτή την κατεύθυνση.

i. Υποεκθετικότητα

Τα φράγματα παραμέτρου-δεντροπλάτους που αναφέραμε στην τελευταία ενότητα μεταφράζονται άμεσα σε υποεκθετικούς FPT αλγόριθμους, αρκεί να υπάρχει ένας αλγόριθμος για το πρόβλημα που εξετάζεται, του οποίου η πολυπλοκότητα χρόνου να είναι μοναδικά εκθετική ως προς το δεντροπλάτος και πολυωνυμική ως προς το μέγεθος του γραφήματος της εισόδου.

Λέμε ότι ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα σε γραφήματα Π είναι *ω-μοναδικά εκθετικά επιλύσιμο σε συνάρτηση του δεντροπλάτους*, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που το επιλύει σε $2^{\omega\cdot\mathbf{tw}(G)}n^{O(1)}$ βήματα, όπου n είναι το μέγεθος του γραφήματος της εισόδου. Η κλάση των παραμετροποιημένων προβλημάτων που επιδέχονται τέτοιους αλγόριθμους είναι πολύ ευρεία και υπάρχει μια πλούσια βιβλιογραφία για τη σχεδίαση τους [147, 110, 122, 33]. Το Πόρισμα 3.3.7 συνεπάγεται την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.4.1. *Έστω Π ένα διδιάστατο ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα συνθλίψεις) πρόβλημα ω-μοναδικά εκθετικά επιλύσιμο σε συνάρτηση του δεντροπλάτους. Έστω επίσης G ένα γράφημα με n κορυφές που αποκλείει ένα δεδομένο γράφημα (αντίστοιχα απόγειο γράφημα) ως ελάσσον και $k \in \mathbb{N}$. Τότε το να αποφασιστεί αν $(G, k) \in \Pi$ μπορεί να γίνει σε $2^{O(\sqrt{k})} \cdot n^{O(1)}$ βήματα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{p}$ η αντίστοιχη παράμετρος για το πρόβλημα Π. Το Πόρισμα 3.3.7 συνεπάγεται ότι $\mathbf{tw}(G) \leq \alpha \cdot \sqrt{\mathbf{p}(G)}$ για κάποια σταθερά α. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Αμιρ από το [8] μπορούμε να ελέγξουμε αν $\mathbf{tw}(G) \geq \alpha \cdot \sqrt{k}$.

Αν αυτό είναι αληθές μπορούμε με ασφάλεια να αποφασίσουμε το πρόβλημα. Αλλιώς, το αποτέλεσμα έπεται από το γεγονός ότι το Π είναι ω-μοναδικά εκθετικά επιλύσιμο σε συνάρτηση δεντροπλάτους. $\square$

ii. Πυρηνοποίηση

Η έννοια ενός προβλήματος με *πεπερασμένο ακέραιο δείκτη* έχει την προέλευση της στο γραφοθεωρητικό ανάλογο του Myhill – Nerode χαρακτηρισμού των κανονικών γλωσσών των Fellows και Langston [61] και πρώτα εμφανίστηκε στα πλαίσια της μελέτης ενός παραμετροποιημένου προβλήματος στο [21] (δες επίσης [1, 73]). Ανάλογα με τον τρόπο παράθεσης ακολουθιών, δύο γραφήματα συμπτύσσονται με τον εξής τρόπο.

Ένα *t-συνοριακό γράφημα* είναι απλά ένα γράφημα μαζί με ένα σύνολο από t διακεκριμένες κορυφές, με μοναδικό τρόπο υποσημειωμένες από το 1 ως το t και για τα t-συνοριακά γραφήματα G και H, το γράφημα $G \oplus H$ προκύπτει συνδέοντας τα G και H σύμφωνα με την υποσημείωση των συνοριακών κορυφών.

Ορισμός 3.4.2 ([21])**.** Δεδομένου ενός παραμετροποιημένου προβλήματος $\Pi \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ σε μια κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$, κανονική σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των t-συνοριακών γραφημάτων $\sim_\Pi$ είναι: $X \sim_\Pi Y$ αν και μόνο αν υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε $\forall Z \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N}$:

$$X \oplus Z \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow Y \oplus Z \in \mathcal{G} \text{ και } (X \oplus Z, k) \in \Pi \Longleftrightarrow (Y \oplus Z, k + c) \in \Pi.$$

Λέμε ότι το Π έχει *πεπερασμένο ακέραιο δείκτη στο $\mathcal{G}$*, αν και μόνο αν για κάθε t η σχέση ισοδυναμίας $\sim_\Pi$ είναι πεπερασμένου δείκτη, δηλαδή έχει έναν πεπερασμένο αριθμό κλάσεων ισοδυναμίας.

Έστω Π ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Σημειώνουμε ως $\textsc{opt}(G)$ μια βέλτιστη λύση του Π για ένα δοσμένο γράφημα G. Διαισθητικά, απαιτούμε για το πρόβλημα Π, ότι για κάθε διαχωριστή του G, η διαφορά μεταξύ της τιμής μιας βέλτιστης λύσης για ένα μέρος G' του G και του μεγέθους του μέρους της βέλτιστη λύσης του G μέσα στο G', να φράζεται από το μέγεθος του διαχωριστή. Αυτή ιδιότητα έχει μελετηθεί στα [40, 73, 71].

Λέμε ότι το διδιάστατο ως προς ελάσσονα πρόβλημα Π ικανοποιεί την *ιδιότητα διαχωρισμού*, αν δεδομένου οποιουδήποτε γραφήματος G και οποιουδήποτε διαχωριστή $S \in V(G)$, για την ένωση G' ενός υποσυνόλου από συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus S$, ισχύει ότι

$$||\textsc{opt}(G')| - |\textsc{opt}(G) \cap G'|| = O(|S|).$$

Για ένα διδιάστατο ως προς συνθλίψεις πρόβλημα ο ορισμός είναι βασικά ο ίδιος, εκτός ότι οι συνεκτικές συνιστώσες θεωρούνται πάντα μαζί με τον διαχωριστή S.

Το εξής αποτέλεσμα αποδείχθηκε από τους Fomin, Lokshtanov, Saurabh και Θηλυκό [73] και απόδειξή του εμπλέκει μια εξειδικευμένη αποσύνθεση σε μέρη φραγμένου συνόρου (δες επίσης [15]).

Πρόταση 3.4.3 ([73]). *Κάθε διδιάστατο ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα συνθλίψεις) πρόβλημα* Π *που ικανοποιεί την ιδιότητα διαχωρισμού και πεπερασμένου ακέραιου δείκτη έχει ένα γραμμικό πυρήνα σε γραφήματα που αποκλείουν κάποιο δεδομένο γράφημα (αντίστοιχα απόγειο γράφημα) ως ελάσσον.*

iii. Σχήματα προσέγγισης

Έστω Π ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στο αλφάβητο Σ. Ένα *σχήμα προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου*, ή PTAS, για το πρόβλημα Π είναι ένας αλγόριθμος που δεδομένου ενός στιγμιότυπου $I \in \Sigma^*$ και μιας σταθεράς $\varepsilon > 0$, υπολογίζει σε πολυωνυμικό χρόνο μια λύση που απέχει το πολύ κατά ένα παράγοντα ε από μια βέλτιστη λύση. Ένα PTAS για το πρόβλημα Π που τερματίζει σε χρόνο $f(1/\varepsilon) \cdot n^{O(1)}$, για μια υπολογίσιμη συνάρτηση f και όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου, λέγεται *αποδοτικό σχήμα προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου*, ή EPTAS.

Έστω Π ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σε γραφήματα. Σημειώνουμε ως $\textsc{opt}(G)$ μια βέλτιστη λύση του Π για ένα δοσμένο γράφημα G. Μιλώντας ελεύθερα, το πρόβλημα Π είναι *αναγώγιμο*, αν για κάθε γράφημα G και διαχωριστή $X \subseteq V(G)$, το σύνολο X μπορεί να διαγραφεί από το γράφημα G, διαταράσσοντας την βέλτιστη λύση το πολύ κατά $O(\varepsilon \cdot \textsc{opt}(G))$, για μια σταθερά ε (δες επίσης [71]).

Οι Fomin, Lokshtanov, Raman και Saurabh αποδεικνύουν στο [71] ότι υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος, που δοσμένου ενός γραφήματος G και μιας σταθεράς ε εξάγει για ένα αναγώγιμο πρόβλημα Π που ικανοποιεί την ιδιότητα διαχωρισμού ένα σύνολο κορυφών X μεγέθους $\varepsilon \cdot \textsc{opt}(G)$, τέτοιο ώστε το δεντροπλάτος του $G \setminus X$ να είναι το πολύ $f(\varepsilon)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτός ο αλγόριθμος δεν απαιτεί έναν προεγγιστικό αλγόριθμο για το Π, αλλά βασίζεται αποκλειστικά σε ένα υπογραμμικό φράγμα παραμέτρου-δεντροπλάτους. Έπεται ότι υπάρχει ένα EPTAS για το πρόβλημα Π (δες επίσης [40]). Συνοψίζουμε στην εξής πρόταση.

Πρόταση 3.4.4 ([71]). *Έστω* Π *ένα διδιάστατο ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα συνθλίψεις) πρόβλημα και* $\mathcal{G}$ *μια κλάση γραφημάτων που αποκλείει κάποιο δεδομένο γράφημα (αντίστοιχα απόγειο γράφημα) ως ελάσσον. Αν το* Π *είναι αναγώγιμο στο* $\mathcal{G}$ *και ικανοποιεί την ιδιότητα διαχωρισμού, τότε υπάρχει ένα* EPTAS *που επιλύει το πρόβλημα* Π *στην κλάση* $\mathcal{G}$.

Κλείνουμε αυτή τη σύντομη επισκόπηση στις αλγοριθμικές εφαρμογές της θεωρίας της διδιαστατότητας με ένα μερικό κατάλογο προβλημάτων για τα οποία εφαρμόζονται και παρέχουν λύση και οι τρεις Προτάσεις 3.4.1, 3.4.3 και 3.4.4.

Πόρισμα 3.4.5. *Τα εξής προβλήματα επιδέχονται υποεκθετικούς* FPT *αλγόριθμους, γραμμικούς πυρήνες και* EPTAS *για τις κλάσεις γραφημάτων, για τις οποίες διευκρινίζεται.*

- Σύνολο Κορυφών Αναδρασης, Καλυμμα Κορυφών, Συνεκτικο Καλυμμα Κορυφών *και* Ελαχιστο Μεγιστικο Ταιριασμα *σε γραφήματα αποκλείοντας ένα δεδομένο ελάσσον.*

- Σύνολο Κυριαρχιας, r-Σύνολο Κυριαρχιας, Εναγομενο Ταιριασμα Σύνολο Κυριαρχιας Ακμων *και* Συνεκτικο Σύνολο Κυριαρχιας *σε γραφήματα αποκλείοντας ένα δεδομένο απόγειο ελάσσον.*

3.5 Ανοιχτά προβλήματα

Όπως αντικατοπτρίζεται στα συνδυαστικά και αλγοριθμικά αποτελέσματα που περιγράφηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, η θεωρία της διδιαστατότητας παρέχει ένα αρκετά σφαιρικό τρόπο αντιμετώπισης των δύσβατων προβλημάτων σε έναν αριθμό κλειστών ως προς ελάσσονα κλάσεων γραφημάτων που γενικοποιούν τα επίπεδα γραφήματα. Παρόλα αυτά, το αν αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να γενικοποιηθούν περισσότερο και σε ποιο βαθμό παραμένει ένα σημαντικό ανοιχτό ερώτημα.

Μπορεί το φάσμα της εφαρμογής της διδιαστατότητας να επεκταθεί κατάλληλα ώστε να περιλαμβάνει γενικά γραφήματα, και όχι μόνο H-ελεύθερες-ελάσσονος κλάσεις γραφημάτων; Προφανώς, κάθε άμεση επέκταση της εφαρμοσιμότητας της θεωρίας της διδιαστατότητας σε κάποια κλάση $\mathcal{G}$ απαιτεί μια απόδειξη ότι η κλάση $\mathcal{G}$ ικανοποιεί τη συνθήκη της διδιαστατότητας (3.1).

Η Πρόταση 3.3.1 είναι στην πραγματικότητα απλά μια ειδική περίπτωση ενός σημαντικού αποτελέσματος, γνωστού ως Θεώρημα Σχάρας, των Robertson και Seymour [127], που δηλώνει ότι αν ένα γράφημα έχει δεντροπλάτος τουλάχιστον w, τότε περιέχει μια $k \times k$ σχάρα ως ελάσσον (επίσης αποδεικνύεται στα [131, 125, 47]). Το άνω φράγμα για το w σε συνάρτηση του k που περιγράφεται στο [131] είναι $20^{2^{k^5}}$, καθιστώντας κάθε αλγοριθμική εφαρμογή μη πρακτική.

Παρόλα αυτά, το αντίστοιχο κάτω φράγμα είναι $\Omega(k^2 \log k)$ [131] και εικασίες έχουν γίνει ότι η ελάχιστη απαίτηση στο δεντροπλάτος ενός γραφήματος, που εγγυάται μια $k \times k$ σχάρα ως ελάσσον είναι στην πραγματικότητα πιο κοντά σε αυτό το κάτω φράγμα από ότι στο υπάρχον εκθετικό άνω φράγμα. Πιο συγκεκριμένα, οι εικασίες περιλαμβάνουν ένα φράγμα της τάξης του $k^2 \log k$ στο [131] και του k^3 στο [42].

Πρόσφατη εργασία των Chekuri και Chuzhoy [28] βελτιώνει πράγματι την εξάρτηση από εκθετική σε πολυωνυμική (πάντως πολύ μεγαλύτερου βαθμού από ότι οι παραπάνω εικασίες). Αξίζει να σημειωθεί, ότι πολυωνυμικά άνω φράγματα έχουν πρόσφατα αποδειχθεί για κάποιες κλάσεις γραφημάτων που δεν αποκλείουν ένα συγκεκριμένο ελάσσον, δηλαδή, γραφήματα χαρτών (μια άλλη γενικοποίηση των επίπεδων γραφημάτων που παρουσιάστηκε στο [30]) και δυνάμεις γραφημάτων [42]. Παρόλα αυτά, για την συνθήκη της διδιαστατότητας απαιτείται γραμμική εξάρτηση.

Μπορούν τα αλγοριθμικά αποτελέσματα που περιγράφονται από τις προτάσεις της Ενότητας 3.4 να γενικοποιηθούν ώστε να περιλαμβάνουν διδιάστατα ως προς συνθλίψεις προβλήματα πέρα από τα ελεύθερα-απόγειου-ελάσσονος γραφήματα; Συγκεκριμένα, έχουν όλες οι "λογικές" διδιάστατες ως προς συνθλίψεις παράμετροι γραμμικούς πυρήνες σε H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα; Είναι αυτό αληθές για το ΣΥΝΟΛΟ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ και το ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ;

Είναι γνωστό ότι η κλασική προσέγγιση για το φράγμα παραμέτρου-δεντροπλάτους δεν επεκτείνεται σε H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα [37] για τη σχέση σύνθλιψης, και υπάρχουν αποτελέσματα που υποδεικνύουν ότι αυτή η προσέγγιση είναι δομικά περιορισμένη σε ελεύθερα-απόγειου-ελάσσονος γραφήματα [67]. Παρόλα αυτά, μια συγκεκριμένη διδιάστατη ως προς συνθλίψεις παράμετρος, συγκεκριμένα το σύνολο κυριαρχίας, επιδέχεται πράγματι έναν υποεκθετικό FPT αλγόριθμο [38] σε H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα.

Μπορούν οι αλγοριθμικές εφαρμογές της θεωρίας της διδιαστατότητας να γενικοποιηθούν σε προβλήματα που δεν αντιστοιχούν άμεσα σε διδιάστατες παράμετρους; Το πλαίσιο που μελετήθηκε στο [71], εκτός από την απόδειξη του αποτελέσματος που αναφέρθηκε στην Πρόταση 3.4.4, εφαρμόζεται σε έναν αριθμό προβλημάτων που δεν είναι κλειστά ούτε ως προς ελάσσονα ούτε ως προς συνθλίψεις.

Θεώρησε για παράδειγμα το πρόβλημα Μεγιστο Παραγομενο Δεντρο Διαθρουμενου Βαθμου, όπου δοσμένου ενός γραφήματος G ο στόχος είναι να βρεθεί ένα παραγόμενο δέντρο τέτοιο ώστε ο αριθμός των κορυφών που έχουν τον ίδιο βαθμό στο δέντρο όπως και στο γράφημα της εισόδου να μεγιστοποιηθεί. Αυτό το πρόβλημα δεν είναι κλειστό ούτε ως προς ελάσσονα ούτε ως προς συνθλίψεις, αλλά ακόμα και έτσι αποδεικνύεται η ύπαρξη ενός EPTAS για αυτό το πρόβλημα.

Μπορούν τα μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα της θεωρίας της διδιαστατότητας να επεκταθούν σε μη τοπολογικά ορισμένες κλάσεις γραφημάτων; Μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση είναι να μελετηθεί το αν η εφαρμοσιμότητα της παραπάνω θεωρίας μπορεί να περιλαμβάνει γεωμετρικά (αντί για τοπολογικά) ορισμένες κλάσεις γραφημάτων.

Πρόσφατα, ένα πρώτο βήμα προς αυτόν τον στόχο έγινε στο [72], όπου η διδιαστατότητα χρησιμοποιείται για την εξαγωγή υποεκθετικών αλγορίθμων για γραφήματα τομής μοναδιαίων κύκλων που αποκλείουν ένα γράφημα H.

Συμβάλλουμε σε αυτή την κατεύθυνση, δείχνοντας στο Κεφάλαιο 7 ότι γενικές κλάσεις γεωμετρικών γραφημάτων τομών ικανοποιούν τη διδιάστατη ως προς ελάσσονα συνθήκη και στο Κεφάλαιο 5 ότι συγκεκριμένα προβλήματα σε σχεδόν επίπεδα γραφήματα επιδέχονται υποεκθετικούς αλγόριθμους και πολυωνυμικούς πυρήνες.

Κεφάλαιο 4

Δύο προβλήματα σε επίπεδα γραφήματα

Το πρόβλημα Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης ρωτά, αν ένα επίπεδο γράφημα n κορυφών περιέχει το πολύ k κορυφές που συναντούν όλους τους κύκλους. Το πρόβλημα Καλυμμα Οψεων ρωτά, αν όλες οι κορυφές ενός ενεπίπεδου γραφήματος G βρίσκονται στο σύνορο από το πολύ k όψεις του G.

Το πρόβλημα Συνολο Κορυφων Αναδρασης, όπως και στην κατευθυνόμενη έκδοσή του, είναι από τα πιο μελετημένα NP-πλήρη προβλήματα, κυρίως λόγω των πολυπληθών εφαρμογών του (δες [63] για μια επισκόπηση). Ένα ευρύ φάσμα αλγοριθμικών αποτελεσμάτων για το Συνολο Κορυφων Αναδρασης έχουν προταθεί, ανάμεσα στο οποία προσεγγιστικοί αλγόριθμοι [31, 83, 82], ακριβείς αλγόριθμοι [66] και αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν ευριστικές μεθόδους [109].

Στη μελέτη μας, εστιάζουμε την προσοχή μας στην παραμετρική πολυπλοκότητα και των δύο προβλημάτων. Πολλοί FPT αλγόριθμοι έχουν προταθεί για την παραμετροποιημένη εκδοχή του προβλήματος Συνολο Κορυφων Αναδρασης. Τα καλύτερα αποτελέσματα σε αυτή την κατεύθυνση είναι ο πιθανοτικός αλγόριθμος $O(4^k kn)$ βημάτων που παρουσιάζεται στο [11] και ο αλγόριθμος $O(5^k kn^2)$ βημάτων στο [29] – για όλο το κεφάλαιο κεφάλαιο, σημειώνουμε ως n τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος της εισόδου.

Όταν περιοριζόμαστε σε επίπεδα γραφήματα, κλασικές τεχνικές από την σχεδίαση παραμετρικών αλγορίθμων υποδεικνύουν ότι και τα δύο προβλήματα Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης και Καλυμμα Οψεων είναι επιλύσιμα από υποεκθετικούς FPT αλγόριθμους, δηλαδή αλγόριθμους που τερματίζουν σε

$O(2^{o(k)} \cdot n^{O(1)})$ βήματα. Τα πρώτα αποτελέσματα αυτού του είδους δόθηκαν από τους Kloks κ.α. στο [103] για τα δύο προβλήματα. Επιπλέον, οι Fernau και Juedes απέδειξαν ότι το Καλυμμα Οψεων μπορεί να επιλυθεί σε $O(2^{24.551\sqrt{k}} \cdot n)$ βήματα [62].

Σε αυτό το κεφάλαιο, εμβαθύνουμε στα ειδικά χαρακτηριστικά αυτών των δύο προβλημάτων σε επίπεδα γραφήματα. Πρώτα, αδράτουμε την ευκαιρία να παρουσιάσουμε πώς μπορούμε να θέσουμε σε κίνηση τις γενικές μέθοδους του μετα-αλγοριθμικού πλαισίου που βασίζεται στη θεωρία της διδιαστατότητας και που συζητήθηκε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, βελτιώνοντας ήδη όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Έπειτα, μελετούμε την δομή των επίπεδων γραφημάτων που υποβάλλεται από ένα σύνολο κορυφών που συναντούν όλους τους κύκλους ή ένα σύνολο όψεων που καλύπτει όλες τις κορυφές. Αυτό μας επιτρέπει να αποδείξουμε μια σειρά συνδυαστικών αποτελεσμάτων, εκφράζοντας φράγματα για το κλαδοπλάτος των δοσμένων γραφημάτων και οδηγεί σε σημαντική βελτίωση της αλγοριθμικής ανάλυσης των δυο προβλημάτων. Ως συνέπεια, έπεται ότι το Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης και το Καλυμμα Οψεων μπορούν να επιλυθούν ιν $O(2^{15.11\cdot\sqrt{k}} + n^{O(1)})$ και $O(2^{10.1\cdot\sqrt{k}} + n^{O(1)})$ βήματα, αντίστοιχα.

4.1 Χρησιμοποιώντας την διδιαστατότητα

Έχουμε συζητήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο την τεχνική που βασίζεται στο υπόβαθρο της θεωρίας της διδιαστατότητας για τη σχεδίαση υποεκθετικών παραμετρικών αλγορίθμων για παράμετρους γραφημάτων σε επίπεδα γραφήματα. Αφού οι αποδείξεις αυτού του κεφαλαίου κάνουν χρήση του κλαδοπλάτους, εκφράζουμε σύντομα τις δύο βασικές συνθήκες αυτής της προσέγγισης σε συνάρτηση του κλαδοπλάτους.

Έστω $\mathbf{p}$ οποιαδήποτε παράμετρος γραφημάτων, για την οποία υπάρχουν δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί α και β, τέτοιοι ώστε:

(α) Για κάθε επίπεδο γράφημα G, $\mathbf{bw}(G) \leq \alpha \cdot \sqrt{\mathbf{p}(G)}$.

(β) Για κάθε επίπεδο γράφημα G και δεδομένης μιας βέλτιστης κλαδοαποσύνθεσης (T, μ) του G, $\mathbf{p}(G)$ μπορεί να υπολογιστεί σε $O(2^{\beta\cdot\mathbf{bw}(G)} \cdot n)$ βήματα.

Παρόμοια, εκφράζουμε πάλι την Πρόταση 3.4.1, στη μορφή της εξής πρότασης.

Πρόταση 4.1.1. *Αν οι συνθήκες παραπάνω ικανοποιούνται για κάποια παράμετρο* $\mathbf{p}$ *και κάποια* α *και* β*, τότε μπορεί κανείς να κατασκευάσει έναν αλγόριθμο που ελέγχει αν* $\mathbf{p}(G) = k$ *σε* $O(2^{\alpha \cdot \beta \cdot \sqrt{k}} n)$ *βήματα.*

Όπως αναφέρεται στα αποτελέσματα των Seymour και Thomas στο [133], υπάρχει ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό μιας βέλτιστης κλαδοαποσύνθεσης για κάθε επίπεδο γράφημα σε $O(n^4)$ βήματα. Εξάλλου, αυτός ο αλγόριθμος έχει βελτιωθεί σε έναν αλγόριθμο $O(n^3)$ βημάτων από τους Gu και Tamaki [90]. (Για έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο, που δεδομένου ενός επίπεδου γραφήματος, υπολογίζει μια κλαδοαποσύνθεση πλάτους $c+1.5$ σε χρόνο $O(n^{1+1/c} \cdot logn)$ δες [91].) Συνεπώς, όποτε εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.1.1 χωρίς να υποθέτουμε την ύπαρξη μιας βέλτιστης κλαδοαποσύνθεσης, πρέπει να προσθέσουμε μία επιπλέον επιβάρυνση από $O(n^3)$ βήματα.

Προτού προχωρήσουμε, ας ορίσουμε πιο συγκεκριμένα το κύριο αντικείμενο της μελέτης μας. Δεδομένου ενός γραφήματος G, ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ είναι ένα *σύνολο κορυφών ανάδρασης* του G, αν το γράφημα $G \setminus S$ είναι άκυκλο. Ο *αριθμός συνόλου κορυφών ανάδρασης* ενός γραφήματος G, που γράφεται ως $\mathbf{fvs}(G)$, ισούται με το ελάχιστο μέγεθος ενός συνόλου κορυφών ανάδρασης του G.

Παρόμοια ονομάζουμε *κάλυμμα όψεων* ενός ενεπίπεδου γραφήματος G ένα υποσύνολο R των όψεων G, τέτοιοι ώστε όλες οι κορυφές του G βρίσκονται στο σύνορο κάποιας όψης στο R. Ορίζουμε τον *αριθμός καλύμματος όψεων* ενός ενεπίπεδου γραφήματος G, ως το ελάχιστο μέγεθος ενός καλύμματος όψεων του G και το σημειώνουμε ως $\mathbf{fc}(G)$. Ορίζουμε επίσης τυπικά τις παραμετροποιημένες εκδοχές των δύο προβλημάτων.

Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης
Στιγμιότυπο: Ένα επίπεδο γράφημα G και ένας μη αρνητικός ακέραιος k
Παράμετρος: k
Ερώτημα: $\mathbf{fvs}(G) \leq k$;

Καλυμμα Οψεων
Στιγμιότυπο: Ένα ενεπίπεδο γράφημα G και ένας μη αρνητικός ακέραιος k
Παράμετρος: k
Ερώτημα: $\mathbf{fc}(G) \leq k$;

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στο [38], οι συνθήκες (α) και (β) ικανοποιούνται και για το **fvs** και το **fc**. Συνεπώς η Πρόταση 4.1.1 μπορεί να εφαρμοστεί

για αυτές τις παράμετρους. Ορίζουμε τα $\alpha_{\mathbf{fvs}}$ (αντίστοιχα $\alpha_{\mathbf{fc}}$) και $\beta_{\mathbf{fvs}}$ (αντίστοιχα $\beta_{\mathbf{fc}}$) ως τις ελάχιστες τιμές για τα α και β, για τα οποία οι συνθήκες (α) και (β), αντίστοιχα, ισχύουν για το **fvs** (αντίστοιχα **fc**). Σε ότι ακολουθεί, παρέχουμε φράγματα για αυτές τις σταθερές που βελτιώνουν την χρονική ανάλυση του αλγόριθμου από την Πρόταση 4.1.1.

Σχετικά με τη συνθήκη (β), και στην περίπτωση του **φς**, είναι γνωστό ότι δεδομένης μιας βέλτιστης κλαδοαποσύνθεσης ενός επίπεδου γραφήματος G με n κορυφές, υπάρχει ένας αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού που υπολογίζει το $\mathbf{fvs}(G)$ σε $O(2^{3.56\mathbf{bw}(G)} \cdot n)$ βήματα [49]. Συμπεραίνουμε, ότι η συνθήκη (β) ισχύει για $\beta_{\mathbf{fvs}} \leq 3.56$.

Για την εκτίμηση του $\beta_{\mathbf{fc}}$, χρησιμοποιούμε μια αναγωγή του προβλήματος Καλυμμα Οψεων στο εξής πρόβλημα:

Επιπεδο Μπλε-Κοκκινο Συνολο Κυριαρχιας
Στιγμιότυπο: Ένα επίπεδο διμερές γράφημα G με μέρη B και R,
..... και ένας μη αρνητικός ακέραιος k.
Παράμετρος: k
Ερώτημα: Υπάρχει ένα σύνολο κορυφών $D \subseteq R$, όπου $|D| \leq k$ και τέτοιο ώστε
..... κάθε κορυφή στο B να έχει ένα γείτονα στο D;

Παρατήρησε ότι το (G, k) είναι ένα ναι-στιγμιότυπο του Καλυμμα Οψεων, αν και μόνο αν (R_G, k) είναι ένα ναι-στιγμιότυπο του Επιπεδο Μπλε-Κοκκινο Συνολο Κυριαρχιας (θέτουμε εδώ $B = V(G)$ και $R = F(G)$) (δες επίσης [62]). Από [50, Θεώρημα 2.3.2], το Επιπεδο Μπλε-Κοκκινο Συνολο Κυριαρχιας μπορεί να επιλυθεί σε $O(2^{1.19\cdot\mathbf{bw}(G)} \cdot |V(G)|)$ βήματα, δεδομένου ότι μια βέλτιστη κλαδοαποσύνθεση είναι δοσμένη. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με το Λήμμα 4.2.7, μπορούμε να εξάγουμε ότι η συνθήκη (β) ικανοποιείται για $\beta_{\mathbf{fc}} \leq 2.38$.

Η συνθήκη (α) έπεται άμεσα από τη θεωρία της διδιαστατότητας που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εφαρμόζοντας το μετα-αλγοριθμικό αποτέλεσμα του [38] (Θεώρημα 4.14) για τις δυο παράμετρους **fvs** και **fc**, συνεπάγεται ότι η συνθήκη (α) ισχύει για $\alpha_{\mathbf{fvs}}, \alpha_{\mathbf{fc}} \leq 8$. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη ενός αλγόριθμου $O(2^{28.48\cdot\sqrt{k}} \cdot n + n^3)$ βημάτων για το Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης (από όσο γνωρίζουμε, κανένα άλλο ακριβές φράγμα για αυτό το πρόβλημα δεν υπήρχε πρότινος) και την ύπαρξη ενός αλγόριθμου $O(2^{19.04\cdot\sqrt{k}} \cdot n + n^3)$ βημάτων για το πρόβλημα Καλυμμα Οψεων (που βελτιώνει τις σταθερές του [62] για το ίδιο πρόβλημα).

Οι παραπάνω αποτιμήσεις για τα $\alpha_{\mathbf{fvs}}$ και $\alpha_{\mathbf{fc}}$ μπορούν εύκολα να βελτιωθούν

χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα. Οι Kloks κ.α. στο [103] απέδειξαν ότι για κάθε επίπεδο γράφημα G, υπάρχει ένα επίπεδο γράφημα H που περιέχει το G ως ένα υπογράφημα τέτοιο ώστε $\mathbf{ds}(H) \leq \mathbf{fvs}(G)$ (εδώ ως $\mathbf{ds}(H)$ σημειώνουμε το ελάχιστο μέγεθος ενός συνόλου κυριαρχίας του H). Ακόμα ισχύει ότι για κάθε επίπεδο γράφημα H, $\mathbf{bw}(H) \leq 6.364\sqrt{\mathbf{ds}(H)}$ [74]. Αφού $\mathbf{bw}(G) \leq \mathbf{bw}(H)$, παίρνουμε ότι $\mathbf{bw}(G) \leq 6.364\sqrt{\mathbf{fvs}(G)}$ και αυτό συνεπάγεται τη συνθήκη (α) για $\alpha_{\mathbf{fvs}} \leq 6.364$. Για το $\alpha_{\mathbf{fc}}$, πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής: Ας υποθέσουμε ότι ένα ενεπίπεδο γράφημα G έχει ένα κάλυμμα όψεων $U \subseteq F(G)$ μεγέθους $\leq k$. Έστω H το γράφημα που προκύπτει από το G, αν για κάθε $f \in U$ σχεδιάσουμε μια κορυφή v_f μέσα στο f και τη συνδέσουμε με τις κορυφές προσπίπτουσες στο f. Παρατήρησε ότι οι νέες κορυφές αποτελούν ένα σύνολο κυριαρχίας του H, μεγέθους το πολύ k. Ξανά, από το αποτέλεσμα του [74], συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{bw}(G) \leq \mathbf{bw}(H) \leq 6.364 \cdot \sqrt{k}$, έτσι $\alpha_{\mathbf{fc}} \leq 6.364$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχει ένας αλγόριθμος $O(2^{22.66\cdot\sqrt{k}} \cdot n + n^3)$ βημάτων για το πρόβλημα Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης και ένας αλγόριθμος $O(2^{15.15\cdot\sqrt{k}} \cdot n + n^3)$ βημάτων για το πρόβλημα Καλυμμα Οψεων. Από όσο γνωρίζουμε, αυτοί είναι οι γρηγορότεροι αλγόριθμοι για αυτά τα προβλήματα μέχρι τώρα.

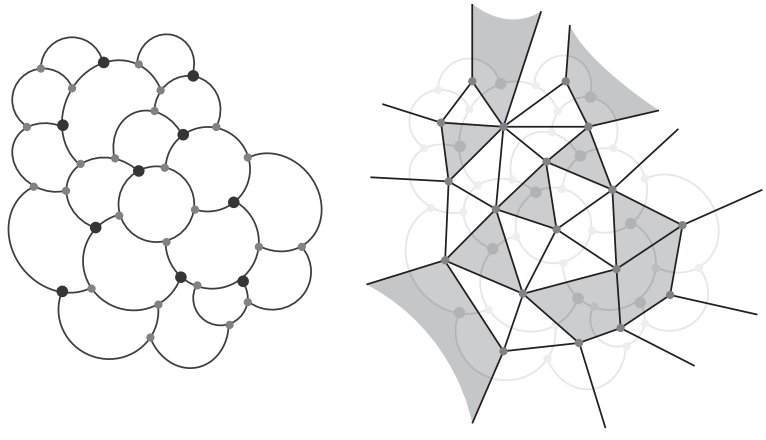
4.2 Προς ένα βελτιωμένο άνω φράγμα

Για να βελτιώσουμε περαιτέρω τα φράγματα για τα $\alpha_{\mathbf{fvs}}$ και $\alpha_{\mathbf{fc}}$, εστιάζουμε στη δομή των αντίστοιχων παράμετρων. Παρατηρούμε ότι ένα σύνολο κορυφών ανάδρασης ενός επίπεδου γραφήματος, σχετίζεται με ένα κάλυμμα όψεων του γραφήματος: το πρώτο είναι ένα σύνολο κορυφών που συναντά κάθε κύκλο και άρα, το σύνορο κάθε όψης, και το δεύτερο ένα σύνολο όψεων στο σύνορο του οποίου βρίσκονται όλες οι κορυφές (δες επίσης Σχήμα 4.1).

Στην πραγματικότητα, το κάλυμμα όψεων και το επίπεδο σύνολο κορυφών ανάδρασης σχετίζονται άμεσα σε δυικά γραφήματα. Μιλώντας ελεύθερα, η "δυική" εκδοχή του αριθμού του καλύμματος όψεων φράζεται άνω από τον αριθμό του συνόλου κορυφών ανάδρασης. Τυπικά, παρατηρούμε το εξής:

Λήμμα 4.2.1. *Έστω G και G^* δυικά ενεπίπεδα γραφήματα που δεν είναι δάση. Τότε,* $\mathbf{fc}(G^*) \leq \mathbf{fvs}(G)$.

Απόδειξη. Έστω $S \subseteq V(G)$ ένα σύνολο κορυφών ανάδρασης στο G, με $|S| \leq k$. Αφού το σύνορο από κάθε όψη $f \in F(G)$ περιέχει έναν κύκλο του G, επίσης



Σχήμα 4.1: Ένα γράφημα με ένα σύνολο κορυφών ανάδρασης και το δυικό του με το αντίστοιχο κάλυμμα όψεων (η κορυφή αντίστοιχη της εξωτερικής όψης παραλείπεται).

περιέχει μια κορυφή $v \in S$. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε κορυφή $f^* \in V(G^*)$ του G^* είναι στο σύνορο από κάποια όψη v^* του S^*, όπου $S^* \subseteq F(G^*)$ είναι το σύνολο των δυικών των κορυφών στο S. Συνεπώς το S^* είναι ένα κάλυμμα όψεων του G^*. □

Το Λήμμα 4.2.1 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα δυικά γραφήματα έχουν ίσο κλαδοπλάτος συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{bw}(G) = \mathbf{bw}(G^*) \leq \alpha_{\mathbf{fc}} \sqrt{\mathbf{fc}(G^*)} \leq \alpha_{\mathbf{fc}} \sqrt{\mathbf{fvs}(G)} \Rightarrow \alpha_{\mathbf{fvs}} \leq \alpha_{\mathbf{fc}}$$

όπου ενδιαφερόμαστε για τη μη τετριμμένη περίπτωση όπου το G δεν είναι ένα δάσος. Συνεπώς, κάθε βελτίωση στην αποτίμηση του $\alpha_{\mathbf{fc}}$ αντικατοπτρίζεται στο $\alpha_{\mathbf{fvs}}$ ομοίως. Η επόμενη ενότητα είναι αφιερωμένη στη βελτίωση του φράγματος του $\alpha_{\mathbf{fc}}$. Αλλά προτού μπορούμε να προχωρήσουμε, πρέπει να παρουσιάσουμε τα ενεπίπεδα υπεργραφήματα και τις αποσυνθέσεις σφαιρικών τομών, δύο σημαντικά συστατικά στις αποδείξεις αυτού του κεφαλαίου.

Το πρώτο βήμα είναι να επεκτείνουμε μερικές βασικές έννοιες για υπεργραφήματα (δες επίσης το Κεφάλαιο 2). Χρησιμοποιούμε τον όρο *πληθυκότητα* για τον αριθμό των κορυφών μιας υπερακμής που δεν είναι θηλιά. Συνεχίζουμε να αποκαλούμε *ακμές*, τις θηλιές και τις υπερακμές πληθυκότητας ίσης με δύο

(δηλαδή αυτές που έχουν μόνο δύο άκρα), ενώ περιορίζουμε τον όρο "υπερακμή" σε υπερακμές με πληθυκότητα τρία ή περισσότερο.

Παρατήρησε ότι ο ορισμός της κλαδοαποσύνθεσης και του κλαδοπλάτους εφαρμόζεται άμεσα για υπεργραφήματα. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{bw}(H)$, επίσης όταν το H είναι ένα υπεργράφημα. Το εξής Λήμμα είναι χρήσιμο για την συγκόλληση κλαδοαποσυνθέσεων από υπεργραφήματα.

Λήμμα 4.2.2 ([74, Λήμμα 3.1])**.** *Έστω H_1 και H_2 υπεργραφήματα με μια υπερακμή κοινή, δηλαδή $V(H_1) \cap V(H_2) = e$ και $\{e\} = E(H_1) \cap E(H_2)$. Τότε, ισχύει ότι:* $\mathbf{bw}(H_1 \cup H_2) \leq \max\{\mathbf{bw}(H_1), \mathbf{bw}(H_2), |e|\}$.

Ονομάζουμε *ενεπίπεδο υπεργράφημα*, κάθε υπεργράφημα H του οποίου οι κορυφές είναι αυτές ενός ενεπίπεδου γραφήματος G, και του οποίου οι υπερακμές είναι κάποιες από τις ακμές του G, συν κάποιες νέες ανά δύο διαφορετικές υπερακμές, η καθεμία από τις οποίες περιέχει κάποιες από τις συνοριακές κορυφές κάποιας όψης του G. Από την κατασκευή, το H έχει μια εμβάπτιση στο $\mathbb{S}_0$ που αντιγράφει αυτή του G και όπου οι υπερακμές σχεδιάζονται μέσα στις αντίστοιχες όψεις του G (δες και Σχήμα 4.2).

Έστω ένα ενεπίπεδο απλό γράφημα G. Θεώρησε το υπεργράφημα

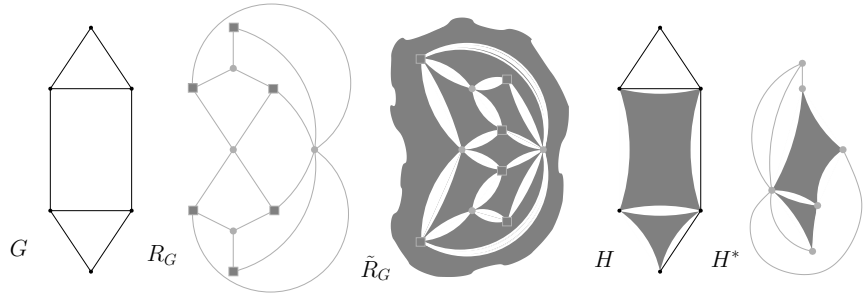
$$G^+ = (V(G), E(G) \cup \{\widehat{f} \cap V(G) \mid f \in F(G)\})$$

και παρατήρησε ότι το G^+ μπορεί να εμβαπτιστεί στο $\mathbb{S}_0$ κατά τρόπο που οι ακμές του εμβαπτίζονται όπως στο G και οι υπόλοιπες είναι υπερακμές που εμβαπτίζονται ως ανοιχτοί δίσκοι μέσα στις αντίστοιχες όψεις. Λέμε ότι ένα υπεργράφημα H είναι *ενεπίπεδο* αν είναι το υπό-υπεργράφημα του G^+ για κάποιο ενεπίπεδο γράφημα G όπου $V(H) = V(G)$.

Λέμε ότι το ενεπίπεδο γράφημα G *γεννά* το ενεπίπεδο υπεργράφημα H αν το H μπορεί να προκύψει από το G^+ αφού πρώτα αφαιρεθούν κάποιες υπερακμές πληθυκότητας ≥ 3 και τότε αφαιρεθούν ακμές που είναι υποσύνολα των υπόλοιπων υπερακμών. Το επόμενο λήμμα έπεται εύκολα από το Λήμμα 4.2.2.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω G ένα ενεπίπεδο γράφημα και έστω H ένα υπεργράφημα γεννημένο από το G. Τότε* $\mathbf{bw}(G) \leq \mathbf{bw}(H)$.

Έστω ένα ενεπίπεδο υπεργράφημα H, ορίζουμε το δυικό του H^* ως το υπεργράφημα του οποίου οι κορυφές είναι όψεις του H και όπου κάθε υπερακμή e του H αντιστοιχεί σε μια υπερακμή e^* του H^* της οποίας τα άκρα είναι οι όψεις του H που είναι προσπίπτουσες στο e. Σχεδιάζοντας κάθε κορυφή του H^* μέσα



Σχήμα 4.2: Ένα ενεπίπεδο γράφημα G, το ακτινικό του γράφημα R_G, ένα ενεπίπεδο υπεργράφημα H γεννημένο από το G, και τα ενεπίπεδα υπεργραφήματα H^*, και $\tilde{R}_G$.

στην αντίστοιχη όψη του H, μπορεί κανείς να δει ότι το H^* είναι επίσης ένα ενεπίπεδο υπεργράφημα (δες το Σχήμα 4.2).

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας, θα θεωρήσουμε μόνο ενεπίπεδα υπεργραφήματα γεννημένα από απλά 3-συνεκτικά επίπεδα γραφήματα.

Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τις υπερακμές ενός ενεπίπεδου υπεργραφήματος και του δυικού του ως κλειστούς δίσκους των οποίων οι συνοριακές κορυφές είναι άκρα. Όπως κάναμε και για γραφήματα, καθώς δουλεύουμε με ενεπίπεδα υπεργραφήματα, δεν θα διακρίνουμε μεταξύ μιας κορυφής του γραφήματος και του σημείου της σφαίρας $\mathbb{S}_0$ που χρησιμοποιείται στον σχεδιασμό για την αναπαράσταση της κορυφής, ή μεταξύ μιας ακμής (υπερακμής) και του κλειστού ευθύγραμμου τμήματος (κλειστού δίσκου) που την αντιπροσωπεύει στην εμβάπτιση. Χρησιμοποιώντας αυτή την σύμβαση, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο όψεων ενός υπεργραφήματος H ως το σύνολο συνεκτικών συνιστωσών του $\mathbb{S}_0 \setminus H$. Είναι τώρα φανερό ότι η έννοια ενός καλύμματος όψεων με φυσικό τρόπο επεκτείνεται για ενεπίπεδα υπεργραφήματα.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια περίπτωση μιας κλαδοαποσύνθεσης για επίπεδα γραφήματα, που λέγεται αποσύνθεση σφαιρικών τομών. Ας θυμηθούμε ότι ένας βρόχος είναι μια κλειστή καμπύλη Jordan που συναντά τον σχεδιασμό ενός ενεπίπεδου γραφήματος μόνο στις κορυφές του και ότι το μήκος του είναι ακριβώς ο αριθμός των κορυφών που συναντά (δες επίσης τον Ορισμό 2.2.3).

Ορισμός 4.2.4. Έστω G ένα ενεπίπεδο γράφημα. Μια κλαδοαποσύνθεση (T, μ) του G λέγεται *αποσύνθεση σφαιρικών τομών* αν για κάθε ακμή e του T υπάρχει ένας βρόχος N_e, τέτοιος ώστε

(α) $G_i \subseteq \Delta_i \cup N_e$ για $i = 1, 2$, όπου G_i το υπογράφημα εναγόμενο από τις ακμές αντίστοιχες στα φύλλα της συνιστώσας $T_i(e)$ του $T \setminus e$ και Δ_1, Δ_2 είναι οι δύο ανοιχτοί δίσκοι που φράζονται από το N_e,

(β) για κάθε όψη f του G, το $N_e \cap f$ είναι είτε κενό ή συνεκτικό (δηλαδή αν ο βρόχος διαπερνά μια όψη τότε τη διαπερνά μόνο μια φορά).

Οι αποσυνθέσεις σφαιρικών τομών εμφανίστηκαν για πρώτη φορά ως έννοια στο [133] και μελετήθηκαν στο [52, 50, 51]. Η εξής πρόταση είναι ένα χρήσιμο εργαλείο όταν δουλεύουμε με κλαδοαποσυνθέσεις επίπεδων γραφημάτων.

Πρόταση 4.2.5 ([133])**.** *Έστω G ένα επίπεδο γράφημα κλαδοπλάτους το πολύ k χωρίς κορυφές βαθμού ένα εμβαπτισμένο στη σφαίρα $\mathbb{S}_0$. Τότε υπάρχει μια αποσύνθεση σφαιρικών τομών του G πλάτους το πολύ k που μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n^3)$.*

Έστω G ένα 2-συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα και έστω R_G το ακτινικό του γράφημα. Παρατήρησε ότι, αφού το G είναι 2-συνεκτικό, όλες οι όψεις του R_G είναι τετράγωνα (δηλαδή τα σύνορα τους είναι κύκλοι μήκους 4). Συμβολίζουμε ως $\tilde{R}_G$ το ενεπίπεδο υπεργράφημα γεννημένο από το R_G, αν πρώτα προσθέσουμε μια υπερακμή για κάθε όψη του R_G και στη συνέχεια αφαιρέσουμε όλες τις ακμές του R_G.

Λήμμα 4.2.6. *Για κάθε 2-συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα G, ισχύει ότι $\mathbf{bw}(\tilde{R}_G) \leq 2 \cdot \mathbf{bw}(G)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{bw}(G) \leq k$ και έστω (T, μ) μια αποσύνθεση σφαιρικών τομών πλάτους το πολύ k όπως στην Πρόταση 4.2.5. Από τον ορισμό, το μέσο σύνολο του e στο (T, μ) είναι $N_e \cap V(G)$ και έτσι $|N_e| \leq k$. Παρατήρησε επίσης ότι ο βρόχος N_e μπορεί να ειδωθεί ως ένας κύκλος C_e του ακτινικού γραφήματος G_R μήκους δύο φορές το μήκος του N_e. Ας θυμηθούμε τώρα ότι οι ορισμοί των R_G και $\tilde{R}_G$ συνεπάγονται την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας $\rho : E(G) \to E(\tilde{R}_G)$ μεταξύ των ακμών του G και των υπερακμών του $\tilde{R}_G$. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την κλαδοαποσύνθεση (T, σ) του $\tilde{R}_G$ όπου $\sigma = \rho \circ \mu$ είναι η σύνθεση από τις αντιστοιχίες μ και ρ. Παρατήρησε ότι για κάθε $e \in E(T)$, το μέσο σύνολο του e στο (T, σ) αποτελείται από το σύνολο κορυφών του κύκλου C_e. Συνεπώς, το (T, σ) του $\tilde{R}_G$ έχει πλάτος το πολύ δύο φορές το πλάτος του (T, μ) και το λήμμα έπεται. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι για να δείξουμε το εξής λήμμα, που ξεκαθαρίζει τη σχέση μεταξύ του κλαδοπλάτους ενός ενεπίπεδου γραφήματος και του κλαδοπλάτους του ακτινικού του.

Λήμμα 4.2.7. *Για κάθε ενεπίπεδο γράφημα G που περιέχει μια κορυφή βαθμού τουλάχιστον 2, ισχύει ότι* $\mathbf{bw}(R_G) \leq 2 \cdot \mathbf{bw}(G)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι τα Λήμματα 4.2.3 και 4.2.6 συνεπάγονται ότι το αποτέλεσμα ισχύει αν G είναι 2-συνεκτικό. Υποθέτουμε ακόμα ότι G δεν είναι δάσος (είναι εύκολο να δει κανείς ότι δάση με τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού ≥ 2 έχουν κλαδοπλάτος 1 ή 2 ενώ τα ακτινικά τους έχουν κλαδοπλάτος το πολύ 2).

Εφαρμόζουμε επαγωγή στον αριθμό των 2-συνεκτικών συνιστωσών του G. Έστω $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ώστε $|S| \leq 1$ και το $G \setminus S$ είναι μη συνεκτικό και έστω C το σύνολο κορυφών από κάποιες από τις συνεκτικές συνιστώσες. Θέτουμε $G_1 = G[C \cup S]$ και $G_2 = G \setminus C$. Έστω $f \in F(G)$ η μοναδική όψη του G της οποίας το σύνορο περιέχει κορυφές από όλες τις συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus S$. Παρατήρησε ότι το $S' = S \cup \{f\} \subseteq V(R_G)$ ενάγει μια κλίκα στο R_G από το πολύ 2 κορυφές και το $R_G \setminus S'$ είναι μη συνεκτικό. Παρατήρησε επίσης ότι μια από τις συνεκτικές συνιστώσες του $R_G \setminus S'$ περιέχει όλες τις κορυφές του C. Σημειώνουμε ως C' το σύνολο κορυφών του. Παρατηρούμε ότι $R_{G_1} = R_G[C' \cup S']$ και $R_{G_2} = R_G \setminus C'$. Αφού $S' = V(R_{G_1} \cap R_{G_2})$ και $R_G = R_{G_1} \cup R_{G_2}$, έπεται, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.2, ότι $\mathbf{bw}(R_G) \leq \max\{\mathbf{bw}(R_{G_1}), \mathbf{bw}(R_{G_2}), |S'|\}$. Παρατήρησε ότι όλα τα γραφήματα που περιέχουν κύκλους έχουν κλαδοπλάτος τουλάχιστον 2 και τα ακτινικά γραφήματα είναι τέτοια γραφήματα. Συνεπώς, αφου $|S'| \leq 2$, παίρνουμε ότι $\mathbf{bw}(R_G) \leq \max\{\mathbf{bw}(R_{G_1}), \mathbf{bw}(R_{G_2})\}$. Αφού G_1 και G_2 είναι και τα δύο υπογραφήματα του G έχουμε ότι $\max\{\mathbf{bw}(G_1), \mathbf{bw}(G_2)\} \leq \mathbf{bw}(G)$.

Αφού το G δεν είναι άκυκλο, ένα τουλάχιστον από τα G_1 και G_2 δεν είναι άκυκλο. Αυτό συνεπάγεται ότι η υπόθεση της επαγωγής εφαρμόζεται για ένα τουλάχιστον από τα G_1 και G_2 που έχει κλαδοπλάτος τουλάχιστον 2. Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{bw}(R_G) &\leq \max\{\mathbf{bw}(R_{G_1}), \mathbf{bw}(R_{G_2})\} \\ &\leq 2 \cdot \max\{\mathbf{bw}(G_1), \mathbf{bw}(G_2)\} \\ &\leq 2 \cdot \mathbf{bw}(G). \end{aligned}$$

και το λήμμα έπεται. □

4.3 Αποκαλύπτοντας την δομή

Έστω ένα ενεπίπεδο γράφημα G, μαζί με ένα κάλυμμα όψεων του S_G. Αναφερόμαστε στις όψεις στο $S_G \subseteq F(G)$ ως *$\mathcal{FC}$-όψεις*. Λέμε ότι δύο $\mathcal{FC}$-όψεις f_1 και f_2 *ακουμπούν* αν $\widehat{f_1} \cap \widehat{f_2} \neq \emptyset$. Δύο κορυφές λέγονται *ζεύγος*, αν είναι γειτονικές και βρίσκονται στην ίδια $\mathcal{FC}$-όψη. Ονομάζουμε μια όψη του G *τρίγωνο* αν το σύνορο της είναι ένας κύκλος μήκους 3. Ονομάζουμε μια ακμή του G *γέφυρα* αν υπάρχουν $\mathcal{FC}$-όψεις f_1 και f_2 τέτοιες ώστε η e είναι η μοναδική ακμή της οποίας τα άκρα ανήκουν στα σύνορα του f_1 και του f_2.

Έστω f_1, f_2 δύο $\mathcal{FC}$-όψεις και έστω x_1, x_2, y_1, y_2 τέσσερις κορυφές, τέτοιες ώστε $x_i, y_i \in \widehat{f_i}$ $(i = 1, 2)$. Ένας βρόχος της μορφής $x_1y_1x_2y_2x_1$, λέγεται *4-βρόχος*. Ως κλειστή καμπύλη Jordan, ένας 4-βρόχος N φράζει δύο κλειστούς δίσκους. Αν ένας από αυτούς περιέχει ακριβώς μια υπερακμή, της οποίας τα άκρα είναι οι κορυφές του N, τότε αναφερόμαστε σε ένα τέτοιο 4-βρόχο ως *τετριμμένο*. Προχωρούμε με το πρώτο λήμμα που περιγράφει τη δομή του γραφήματος.

Λήμμα 4.3.1. *Έστω G ένα απλό 3-συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα, τέτοιο ώστε $\mathbf{fc}(G) \leq k$. Τότε υπάρχει ένα ενεπίπεδο γράφημα G' και ένα κάλυμμα όψεων $S_{G'}$ του G', τέτοια ώστε:*

(α) $\mathbf{bw}(G) \leq \mathbf{bw}(G')$,

(β) $|S_{G'}| \leq k$,

(γ) Το G' είναι απλό και 3-συνεκτικό,

(δ) Δύο διαφορετικές $\mathcal{FC}$-όψεις δεν ακουμπούν,

(ε) Το G' δεν περιέχει καμία γέφυρα, και

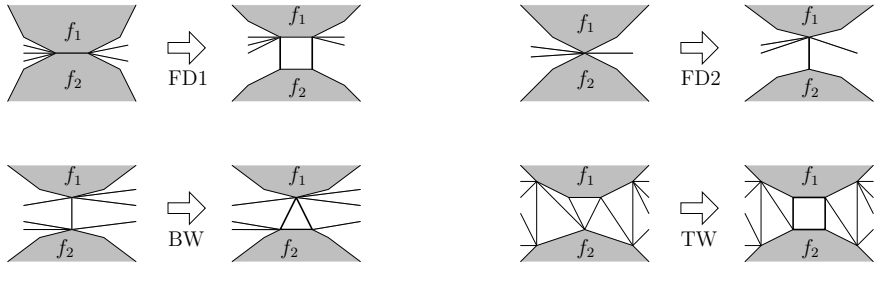
(στ) Μια όψη του G' είναι είτε $\mathcal{FC}$-όψη ή ένα τετράγωνο του οποίου το σύνορο περιέχει δύο ζεύγη από δύο διαφορετικές $\mathcal{FC}$-όψεις ή μια τριγωνική όψη προσπίπτουσα σε τρεις διαφορετικές κορυφές που, με τη σειρά τους, είναι προσπίπτουσες σε τρεις διαφορετικές $\mathcal{FC}$-όψεις.

Απόδειξη. Έστω S_G ένα κάλυμμα όψεων του G. Θα εφαρμόσουμε διαδοχικά έναν αριθμό από μετατροπές στο G που θα έχουν ως αποτέλεσμα το γράφημα G', που έχει τις θεμιτές ιδιότητες. Σε κάθε βήμα το αρχικό κάλυμμα όψεων θα μεταβληθεί σε ένα ίδιου μεγέθους κάλυμμα όψεων του νέου γραφήματος. Οι μετατροπές είναι οι εξής.

Αποκόλληση όψης. Παρατήρησε ότι αν δύο $\mathcal{FC}$-όψεις f_1 και f_2 ακουμπούν, τότε το σύνολο $\widehat{f_1} \cap \widehat{f_2}$ είναι είτε μια ακμή ή μια κορυφή του G (αλλιώς, G δεν μπορεί να είναι 3-συνεκτικό). Σε κάθε περίπτωση εφαρμόζουμε μια αντίστροφη σύνθλιψη όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.3 (μετατροπές FD1 και FD2). Εφαρμόζοντας αυτόν τον κανόνα όσο υπάρχουν $\mathcal{FC}$-όψεις που ακουμπούν, παίρνουμε ένα γράφημα G_1, που περιέχει ένα κάλυμμα όψεων S_{G_1} με το ίδιο μέγεθος με το S_G, ικανοποιεί τις συνθήκες (γ), (δ) και επιπλέον, προφανώς συμμορφώνεται με την απαίτηση, ότι $G \leq G_1$.

Μερική τριγωνοποίηση. Προσθέτουμε μη παράλληλες ακμές στο G_1, όσο αυτό δεν βλάπτει την επιπεδότητα του γραφήματος που προκύπτει και δεν προσθέτουμε ακμές μέσα σε κάποια $\mathcal{FC}$-όψη. Σημειώνουμε το γράφημα που προκύπτει ως G_2. Προφανώς, το G_2 περιέχει ένα κάλυμμα όψεων S_{G_2} με το ίδιο μέγεθος με το S_{G_1}. Ακόμα, αφού το G_1 ήταν 3-συνεκτικό και απλό, το G_2 παραμένει έτσι. Παρατήρησε τότε, ότι το G_2 ικανοποιεί τις συνθήκες (γ), (δ) και $G_1 \leq G_2$.

Διαπλάτυνση γέφυρας. Η τρίτη μετατροπή, εφαρμόζεται με την αντίστροφη σύνθλιψη που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.3 (μετατροπή BΩ) σε κάθε γέφυρα του G_2. Το γράφημα που προκύπτει, σημειώνεται ως G_3 και περιέχει ένα κάλυμμα όψεων S_{G_3} με το ίδιο μέγεθος με το S_{G_2}. Παρατήρησε ότι το G_3 ικανοποιεί τις συνθήκες (γ)–(ε), και επιπλέον ισχύει ότι $G_2 \leq G_3$.



Σχήμα 4.3: Οι μετατροπές της απόδειξης του Λήμματος 4.3.1.

Διαπλάτυνση τριγώνου. Από τη συνθήκη (γ) και την 3-συνεκτικότητα του G_3, οποιοδήποτε από τα τρίγωνα του που δεν είναι μια $\mathcal{FC}$-όψη ακουμπά

τουλάχιστον δύο $\mathcal{FC}$-όψεις. Έστω f ένα τέτοιο τρίγωνο. Αν το f ακουμπά 3 $\mathcal{FC}$-όψεις, τότε ικανοποιεί τη συνθήκη (στ) για τα τρίγωνα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι, f ακουμπά δύο $\mathcal{FC}$-όψεις, συγκεκριμένα τα f_1 και f_2· εφαρμόζουμε την αντίστροφη σύνθλιψη του Σχήματος 4.3 (μετατροπή ΤΩ), και επαναλαμβάνοντας αυτή την διαδικασία παίρνουμε ένα γράφημα G', που περιέχει ένα κάλυμμα όψεων $S_{G'}$ με το ίδιο μέγεθος με το S_{G_3} και ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις της συνθήκης (στ). Ακόμα παρατήρησε, ότι οι συνθήκες (γ)–(ε) επίσης ισχύουν και ότι $G_3 \leq G'$.

Συμπεραίνουμε ότι $G \leq G'$ και $\mathbf{fc}(G') \leq \mathbf{fc}(G)$· άρα, το G' ικανοποιεί όλες τις συνθήκες που απαιτούνται και το λήμμα έπεται. □

Ονομάζουμε μια όψη ενός ενεπίπεδου υπεργραφήματος H *εκφυλισμένη* αν φράζεται από ακριβώς δύο υπεραχμές του H.

Λήμμα 4.3.2. *Έστω G ένα 3-συνεκτικό απλό γράφημα τέτοιο ώστε $\mathbf{fc}(G) \leq k$. Τότε, υπάρχει ένα υπεργράφημα H και ένα κάλυμμα όψεων S_H του H με μέγεθος το πολύ k, τέτοια ώστε:*

(α) $\mathbf{bw}(G) \leq \mathbf{bw}(H)$,

(β) Δύο διαφορετικές $\mathcal{FC}$-όψεις δεν ακουμπούν.

(γ) Το H δεν περιέχει ακμές και κάθε υπερακμή του H έχει πληθυκότητα 4 και περιέχει δύο ξένα ζεύγη ακμών που είναι προσπίπτουσες σε δύο διαφορετικές $\mathcal{FC}$-όψεις.

(δ) Μια όψη του H είναι είτε μια μη εκφυλισμένη $\mathcal{FC}$-όψη ή μια εκφυλισμένη όψη ή μια τριγωνική όψη προσπίπτουσα σε τρεις διαφορετικές κορυφές που με τη σειρά τους είναι προσπίπτουσες σε τρεις διαφορετικές $\mathcal{FC}$-όψεις.

Απόδειξη. Έστω G' ένα επίπεδο υπεργράφημα και $S_{G'}$ ένα κάλυμμα όψεων του G', όπως στο Λήμμα 4.3.1. Έστω επίσης H το ενεπίπεδο υπεργράφημα γεννημένο από το G' αν προσθέσουμε μια υπεραχμή για κάθε τετράγωνο του G' και στη συνέχεια αφαιρέσουμε όλες τις ακμές. Η συνθήκη (α) έπεται άμεσα από το Λήμμα 4.2.3. Η συνθήκη (β) έπεται γιατί ισχύει για το G' και είναι αναλοίωτη ως προς τη γέννηση υπεργραφήματος. Οι συνθήκες (γ) και (δ) είναι συνέπειες της συνθήκης (στ) στο Λήμμα 4.3.1 για το G' και την κατασκευή του H. □

Ένα ενεπίπεδο υπεργράφημα H με ένα κάλυμμα όψεων S_H, που ικανοποιεί τις ιδιότητες (β) - (δ) του Λήμματος 4.3.2, θα χαρακτηρίζεται, από εδώ και πέρα, *κανονικοποιημένο*.

Λήμμα 4.3.3. *Έστω H ένα κανονικοποιημένο υπεργράφημα με κάλυμμα όψεων S_H και έστω N ένας μη τετριμμένος 4-βρόχος που φράζει τους κλειστούς δίσκους Δ_1, Δ_2. Έστω επίσης H_i, $(i = 1, 2)$ το υπογράφημα του H που περιέχει όλες τις κορυφές και ακμές που περιέχονται στο Δ_i, συν την ακμή $\tilde{e}$ με άκρα τις τέσσερις κορυφές του 4-βρόχου που διαπερνά. Τότε, H_i (για $i = 1, 2$) είναι ένα κανονικοποιημένο γράφημα με $\mathbf{fc}(H_i) \leq \mathbf{fc}(H)$ και λιγότερες κορυφές από το H.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε τον βρόχο N ως $x_1y_1y_2x_2x_1$, όπου $x_j, y_j \in f_j$ (για $j = 1, 2$) και f_1, f_2 δύο $\mathcal{FC}$-όψεις. Σημείωσε ότι κανένα από τα x_j, y_j δεν μπορεί να είναι ένα ζεύγος, αφού αλλιώς θα είναι και τα δύο ζεύγη και οι τέσσερις κορυφές θα βρίσκονται σε μια υπερακμή, αντιβαίνοντας στο ότι το N είναι μη τετριμμένο. Έστω λοιπόν w_j, z_j δύο κορυφές του f_j που εμποδίζουν τα x_j και y_j να είναι ένα ζεύγος· βρίσκονται τότε, σε διαφορετικούς ανοιχτούς δίσκους που φράζονται από το N, πράγμα που συνεπάγεται ότι το H_i (για $i = 1, 2$) έχει λιγότερες κορυφές από το H, όπως ζητήθηκε. Παρατήρησε ότι τα $f_j, j = 1, 2$ είναι χωρισμένα από το N σε δύο όψεις $f_j^i := f_j \cap \Delta_i$ (για $i = 1, 2,\ j = 1, 2$). Οι όψεις f_1, f_2 είναι οι μόνες $\mathcal{FC}$-όψεις που ακουμπούνται από το N και άρα μπορούμε να επιλέξουμε

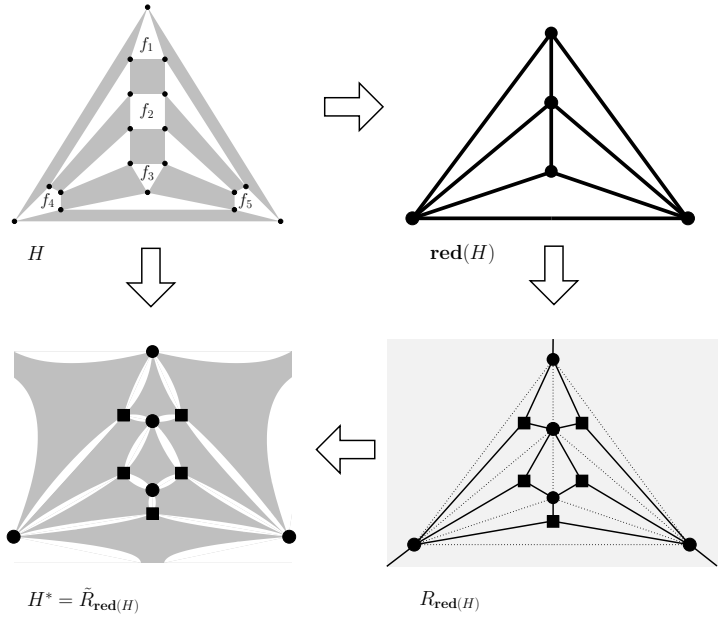
$$S_{H_i} = \{f_1^i, f_2^i\} \cup \{f \in S_H : f \subseteq \Delta_i\}, i = 1, 2.$$

Αυτό εγγυάται, ότι $\mathbf{fc}(H_i) \leq \mathbf{fc}(H)$ για $i = 1, 2$. Απομένει τώρα να επαληθεύσουμε, ότι οι συνθήκες (β)–(δ) του Λήμματος 4.3.2 παραμένουν αναλοίωτες και για τα δύο $H_i, i = 1, 2$ και το λήμμα ισχύει. Η συνθήκη (β) έπεται από το γεγονός ότι όλες οι όψεις του $H_i, i = 1, 2$ είναι υποσύνολα όψεων στο H. Παρατήρησε ότι δεν προσθέτονται ακμές στο $H_i, i = 1, 2$ ενώ η νέα υπερακμή $\tilde{e}$ περιέχει τα ζεύγη ακμών x_1, y_1 και x_2, y_2 που είναι με τη σειρά τους προσπίπτουσες ακμές στις νέες όψεις f_1, f_2 και αυτό συνεπάγεται ότι η συνθήκη (γ) ισχύει. Η συνθήκη (δ) έπεται από το γεγονός ότι όλες οι τριγωνικές όψεις του $H_i, i = 1, 2$ είτε είναι τριγωνικές όψεις του H ή αντιστοιχούν σε τριγωνικές όψεις του H που τέμνονται από το N και τώρα είναι προσπίπτουσες στη νέα υπερακμή $\tilde{e}$. □

Ένα κανονικοποιημένο υπεργράφημα H λέγεται *πρωταρχικό*, αν κάθε 4-βρόχος είναι τετριμμένος. Το τελευταίο βήμα για την αποκάλυψη της δομής ενός γραφήματος που προβάλλει το κάλυμμα όψεών του είναι το μειωμένο γράφημα.

Ορισμός 4.3.4. Έστω H ένα πρωταρχικό υπεργράφημα και S_H ένα κάλυμμα όψεων του H με $|S_H| \geq 3$. Ορίζουμε το *μειωμένο* του γράφημα $\mathbf{red}(H)$ ως το

γράφημα του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στις όψεις του S_H και όπου δύο κορυφές ενώνονται αν και μόνο αν υπάρχει μια υπεραχμή στο H με κορυφές που βρίσκονται στις αντίστοιχες όψεις (δες και το Σχήμα 4.4).



Σχήμα 4.4: Το πρωταρχικό υπεργράφημα H με κάλυμμα όψεων $S_H = \{f_1, \ldots, f_5\}$, τα ενεπίπεδα γραφήματα $\mathbf{red}(H)$ και $R_{\mathbf{red}(H)}$ και τα ισομορφικά ενεπίπεδα υπεργραφήματα H^* και $\tilde{R}_{\mathbf{red}(G)}$ (στην επίπεδη εμβάπτιση του H^* η κορυφή που αντιστοιχεί στην άπειρη όψη του H παραλείπεται).

Λήμμα 4.3.5. *Έστω H ένα πρωταρχικό υπεργράφημα με $\mathbf{fc}(H) \geq 3$. Τότε, τα γραφήματα H^* και $\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}$ είναι ισομορφικά.*

Απόδειξη. Παρατήρησε ότι σε ένα πρωταρχικό υπεργράφημα H, όλες οι όψεις είναι είτε τρίγωνα ή $\mathcal{FC}$-όψεις. Άρα, οι κορυφές του H^* μπορούν να διαμεριστούν σε αυτές που αντιστοιχούν σε $\mathcal{FC}$-όψεις και σε αυτές που αντιστοιχούν σε τρίγωνα του H. Σημειώνουμε αυτά τα δύο σύνολα κορυφών του H^* ως $V_{\mathcal{FC}}(H^*)$ και $V_{\mathcal{TR}}(H^*)$. Από την άλλη μεριά, οι $\mathcal{FC}$-όψεις του H αντιστοιχούν σε κορυφές του $\mathbf{red}(H)$ και τα τρίγωνα του H αντιστοιχούν στις όψεις του $\mathbf{red}(H)$. Ακόμα,

τα σύνολα $V(\mathbf{red}(H))$ και $F(\mathbf{red}(H))$ αντιστοιχούν στα δύο μέρη του συνόλου κορυφών του $R_{\mathbf{red}(H)}$, και έτσι σε μια διαμέριση $V_1(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}), V_2(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)})$ των κορυφών του $\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}$.

Έχουμε τώρα μια αλυσίδα από αντιστοιχίες, που συνθέτουν μια αντιστοιχία σ μεταξύ του $V_{\mathcal{FC}}(H^*) \cup V_{\mathcal{TR}}(H^*)$ και του $V_1(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}) \cup V_2(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)})$. Ισχυριζόμαστε ότι το σ είναι ένας ισομορφισμός από το H^* το στο $\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}$. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, παρατήρησε ότι κάθε υπερακμή e του H^* έχει τέσσερα άκρα που περιέχουν δύο αντιδιαμετρικά ζεύγη: δύο αντίστοιχα σε $\mathcal{FC}$-όψεις και δύο αντίστοιχα σε τρίγωνα του H. Παρατήρησε ότι αυτές οι $\mathcal{FC}$-όψεις και τα τρίγωνα του H αντιστοιχούν σε κορυφές και όψεις του $\mathbf{red}(G)$ και συνεπώς στις κορυφές της υπερακμής $\sigma(e)$ του $\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}$ □

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^* & & H & & \mathbf{red}(H) & & \tilde{R}_{\mathbf{red}(H)} \\
V_{\mathcal{FC}}(H^*) & \longleftrightarrow & S_H & \longleftrightarrow & V(\mathbf{red}(H)) & \longleftrightarrow & V_1(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}) \\
V_{\mathcal{TR}}(H^*) & \longleftrightarrow & F(H) \setminus S_H & \longleftrightarrow & F(\mathbf{red}(H)) & \longleftrightarrow & V_2(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}) \\
E(H^*) & \longleftrightarrow & E(H) & \longleftrightarrow & E(\mathbf{red}(H)) & \longleftrightarrow & E(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)})
\end{array}
$$

Σχήμα 4.5: Οι αντιστοιχίες στην απόδειξη του Λήμματος 4.3.5.

Πόρισμα 4.3.6. *Αν το H είναι ένα πρωταρχικό υπεργράφημα, τότε* $\mathbf{bw}(H) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot \mathbf{fc}(H)}$.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{fc}(H) = 2$, τότε το H είναι το γράφημα από 6 κορυφές - τρεις σε κάθε δίσκο - με 3 υπερακμές πληθυκότητας 4 μεταξύ αυτών των κορυφών. Ισχύει ότι $\mathbf{bw}(H) = 4 \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot 2}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το S_H είναι ένα κάλυμμα όψεων του H όπου $3 \leq |S_H| = \mathbf{fc}(H)$ και παρατήρησε ότι το $\mathbf{red}(H)$ περιέχει $|S_H|$ κορυφές. Από το βασικό αποτέλεσμα στο [75], κάθε ενεπίπεδο γράφημα n κορυφών έχει κλαδοπλάτος που φράζεται από το $\sqrt{4.5 \cdot n}$. Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στο $\mathbf{red}(H)$ έχουμε ότι $\mathbf{bw}(\mathbf{red}(H)) \leq \sqrt{4.5 \cdot \mathbf{fc}(H)}$. Επίσης, εφαρμόζοντας το [133, Θεώρημα (7.2)] στα H και H^* έπεται ότι $\mathbf{bw}(H) = \mathbf{bw}(H^*)$. Από τα Λήμματα 4.2.6 και 4.3.5, προκύπτει ότι $\mathbf{bw}(H) = \mathbf{bw}(H^*) = \mathbf{bw}(\tilde{R}_{\mathbf{red}(H)}) \leq 2 \cdot \mathbf{bw}(\mathbf{red}(H)) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot \mathbf{fc}(H)}$. □

Λήμμα 4.3.7. *Έστω H ένα κανονικοποιημένο γράφημα. Τότε* $\mathbf{bw}(H) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot \mathbf{fc}(H)}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στον αριθμό των κορυφών του H. Στην περίπτωση που $|V(H)| = 6$, το G έχει δύο $\mathcal{FC}$-όψεις, τρεις κορυφές σε καθεμία από αυτές, και τρεις υπερακμές. Έτσι, πράγματι $\mathbf{bw}(H) \leq 4 \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot 2}$. Ψποθέτουμε τώρα ότι για κάθε κανονικοποιημένο υπεργράφημα H όπου $6 \leq |V(H)| < n$ ισχύει ότι $\mathbf{bw}(H) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot \mathbf{fc}(H)}$ και θα δείξουμε ότι το ίδιο άνω φράγμα ισχύει για κάθε κανονικοποιημένο υπεργράφημα H με n κορυφές. Αν το H είναι πρωταρχικό τότε το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Πόρισμα 4.3.6. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το H δεν είναι πρωταρχικό, συνεπώς περιέχει ένα μη τετριμμένο 4-βρόχο N. Αφού το N φράζει δύο δίσκους Δ_1, Δ_2, το Λήμμα 4.3.3 συνεπάγεται ότι το γράφημα H_i (για $i = 1, 2$) είναι ένα κανονικοποιημένο γράφημα με $\mathbf{fc}(H_i) \leq k$ και $|H_i| < n, i = 1, 2$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\mathbf{bw}(H_i) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot k_i}, i = 1, 2$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.2, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{bw}(H) = \max\{\mathbf{bw}(H_1), \mathbf{bw}(H_2)\}$, δηλαδή $\mathbf{bw}(H) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot k}$. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι για να δείξουμε το κύριο συνδυαστικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, συγκεκριμένα το βελτιωμένο άνω φράγμα για το κλαδοπλάτος ενός γραφήματος ως συνάρτηση του αριθμού του καλύμματος όψεων του.

Θεώρημα 4.3.8. *Για κάθε επίπεδο γράφημα G,* $\mathbf{bw}(G) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5} \cdot \sqrt{\mathbf{fc}(G)}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{fc}(G) \geq 2$, αφού αλλιώς το G είναι είτε ένα δάσος ή ένα εξωεπίπεδο γράφημα, που συνεπάγεται ότι $\mathbf{bw}(G) \leq 2$ και τετριμμένα ισχύει το λήμμα. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G είναι απλό αφού η απομάκρυνση από θηλιές ή/και πολλαπλές ακμές μπορεί να μειώσει το κλαδοπλάτος ενός γραφήματος το πολύ κατά 2 και αυτό μόνο στην περίπτωση όπου το γράφημα που προκύπτει είναι ένα δάσος. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $|V(G)|$. Για το μικρότερο γράφημα με $\mathbf{fc}(G)$ τουλάχιστον δύο, δηλαδή το K_4, το άνω φράγμα είναι αληθές. Υποθέτουμε το ίδιο για κάθε γράφημα με λιγότερες από $n > 4$ κορυφές και θα δείξουμε ότι ισχύει επίσης για κάθε γράφημα n κορυφών. Αν το γράφημα G είναι 3-συνεκτικό, τότε από τα Λήμματα 4.3.1 και 4.3.2, υπάρχει ένα υπεργράφημα H όπου $\mathbf{fc}(H) \leq \mathbf{fc}(G)$ και $\mathbf{bw}(G) \leq \mathbf{bw}(H)$ και το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα 4.3.7. Έτσι, ας υποθέσουμε ότι το G δεν είναι 3-συνεκτικό. Τότε, έχει ένα διαχωριστή από το πολύ δύο κορυφές. Θα περιγράψουμε την περίπτωση όπου ο ελάχιστος διαχωριστής έχει

δύο κορυφές x και y, αφού αλλιώς, το αποτέλεσμα έπεται εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.2 στις (2-)συνεκτικές συνιστώσες του G. Έστω C κάποια από τις συνεκτικές συνιστώσες του $G[V(G) - \{x, y\}]$. Θέτουμε $G_1 = G[V(C) \cup \{x, y\}]$ και $G_2 = G[V(G) - V(C)]$ και προσθέτουμε και στα δύο G_1 και G_2 την ακμή $e = \{x, y\}$ (αν δεν υπάρχει ήδη). Παρατήρησε ότι $G_i \leq G$ και συνεπώς $\mathbf{fc}(G_i) \leq \mathbf{fc}(G)$. Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε $\mathbf{bw}(G_i) \leq 2 \cdot \sqrt{4.5 \cdot \mathbf{fc}(G_i)}$ και το αποτέλεσμα έπεται εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.2 για G_1 και G_2. □

4.4 Αλγοριθμικές συνέπειες

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.8, είναι ότι $\alpha_{\mathbf{fvs}} \leq \alpha_{\mathbf{fc}} \leq 4.243$. Το αυτό γεγονός οδηγεί στο κύριο αλγοριθμικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου:

Θεώρημα 4.4.1. *Το* Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης *και το* Καλυμμα Οψεων *μπορούν να επιλυθούν σε* $O(2^{15.11 \cdot \sqrt{k}} \cdot n + n^3)$ *και* $O(2^{10.1 \cdot \sqrt{k}} \cdot n + n^3)$ *βήματα, αντίστοιχα.*

Τονίζουμε, ότι σύμφωνα με τον Thomassé [140] (δες επίσης [16, 23]) υπάρχει ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος που παράγει έναν πυρήνα μεγέθους $O(k^2)$ για το πρόβλημα Συνολο Κορυφων Αναδρασης, όταν παραμετροποιείται κατά k (δηλαδή ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο του προβλήματος όπου το γράφημα της εισόδου έχει το πολύ $O(k^2)$ κορυφές). Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με το Θεώρημα 4.4.1, εξάγουμε την ύπαρξη ενός $O(2^{15.11 \cdot \sqrt{k}}) + n^{O(1)}$ αλγόριθμου για το Επιπεδο Συνολο Κορυφων Αναδρασης. Για το Καλυμμα Οψεων, ένας $O(k^2)$ πυρήνας έχει αναφερθεί στο [103]. Συνεπώς, το Καλυμμα Οψεων μπορεί να επιλυθεί σε $O(2^{10.1 \cdot \sqrt{k}}) + n^{O(1)}$ βήματα.

Επιπλέον, τα συνδυαστικά φράγματα μπορούν να είναι χρήσιμα για τον υπολογισμό άλλων παραμέτρων που φράζονται από το κάλυμμα όψεων ή τον αριθμό συνόλου κορυφών ανάδρασης. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας παραμέτρου είναι ο αριθμός του πακεταρίσματος κύκλων, που γράφεται ως $\mathbf{cp}(G)$, δηλαδή ο μέγιστος αριθμός ξένων κύκλων σε ένα γράφημα G. Το αντίστοιχο παραμετροποιημένο πρόβλημα είναι το εξής:

Επιπεδο Πακεταρισμα Κυκλων
Στιγμιότυπο: Ένα επίπεδο γράφημα G και ένας μη αρνητικός ακέραιος k.
Παράμετρος: k
Ερώτημα: $\mathbf{cp}(G) \geq k$;

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα στο [50, 49], ο υπολογισμός του $\mathbf{cp}(G)$ σε επίπεδα γραφήματα μπορεί να γίνει σε $O(2^{2.78\cdot\mathbf{bw}(G)}\cdot n)$ βήματα. Συνεπώς, η συνθήκη (β) ισχύει για το **cp** με $\beta \leq 2.78$. Είδαμε ότι για την παράμετρο του συνόλου κορυφών ανάδρασης **fvs** ισχύει ότι για κάθε επίπεδο G, $\mathbf{bw}(G) \leq 2\cdot\sqrt{4.5\cdot\mathbf{fvs}(G)}$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στο [103], για κάθε επίπεδο γράφημα G, ισχύει ότι $\mathbf{fvs}(G) \leq 5\cdot\mathbf{cp}(G)$. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε επίπεδο γράφημα G, $\mathbf{bw}(G) \leq 2\cdot\sqrt{4.5\cdot 5\cdot\mathbf{cp}(G)}$ και έτσι η συνθήκη (α) ισχύει για **cπ** για $\alpha \leq 9.49$. Από την Πρόταση 4.1.1, το Επιπεδο Πακεταρισμα Κυκλων μπορεί να επιλυθεί σε $O(2^{26.347\cdot\sqrt{k}}\cdot n)$ βήματα.

Κεφάλαιο 5

Υποεκθετικότητα για σχεδόν επίπεδα γραφήματα

Έχουμε δει στο Κεφάλαιο 3 ότι και η υποεκθετικότητα και η πυρηνοποίηση έχει μελετηθεί εκτεταμμένα στα πλαίσια της παραμετρικής πολυπλοκότητας. Ισχυρές μετα-αλγοριθμικές τεχνικές έχουν αναπτυχθεί για τη σχεδίαση παραμετρικών αλγορίθμων, που καθιστούν δυνατή την αυτοματοποιημένη εξαγωγή υποεκθετικών αλγορίθμων ή πυρήνων (δες [108] για μια επισκόπηση). Ας θυμηθούμε ότι για την ενεργοποίηση ενός τέτοιου σχήματος, συνθήκες δύο ειδών πρέπει να ισχύουν για το πρόβλημα που εξετάζεται: το πρώτο είναι ένας χαρακτηρισμός του προβλήματος (όπως εκφρασιμότητα σε κάποια μοντέλο λογικής, βάση καποιου μοντέλου αυτομάτων [15, 38]), και το δεύτερο είναι ένας συνδυαστικός χαρακτηρισμός των γραφημάτων της εισόδου (όπως κλειστότητα ως προς κάποια σχέση, διδιαστατότητα ή ιδιότητες συμπάγειας [15, 138, 73, 68]).

Το συνδυαστικό μέρος όλων των αυτών των αποτελεσμάτων βασίζεται τυπικά σε ιδιότητες τοπολογικής φύσης: ξεκινώντας από την απαίτηση περί επιπεδότητας, αργότερα εξελίχθηκε σε συνθήκες όπως η εμβαπτισιμότητα του γραφήματος της εισόδου σε κάποια επιφάνεια ή, πιο γενικά, ο αποκλεισμός κάποιου γραφήματος ως ελάσσον ή τοπολογικό ελάσσον.

Εδώ κάνουμε ένα βήμα σε μια ορθογώνια κατεύθυνση. Θεωρούμε μια ευρεία γενικοποίηση των επίπεδων γραφημάτων — γραφήματα εμβαπτίσιμα στην σφαίρα έτσι ώστε κάθε ακμή να τέμνεται ένα φραγμένο αριθμό φορών. Αυτή κλάση γραφημάτων, δηλαδή τα *ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα*, παρέχει ένα πολύ πιο γενικό γραφοθεωρητικό σκηνικό από αυτό στο [72], υπηρετώντας ως μοντέλο

για μια ποικιλία γεωμετρικών γραφημάτων τομών.

Μέχρι τώρα, η μόνη μετα-αλγοριθμική μελέτη των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων είναι ταυτή στο [85] όπου η ύπαρξη του EPTAS έχει αποδειχθεί για γενικές οικογένειες προβλημάτων. Επίσης, είναι γνωστό από το [114] ότι τα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα έχουν φραγμένη εξάπλωση. Αυτό, μαζί με τα μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα στο [57], επιτρέπει την αυτοματοποιημένη εξαγωγή FPT αλγορίθμων για προβλήματα σε ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα που ορίζονται βάση της CMSO λογικής (δες επίσης [34]). Παρόλα αυτά, οι αλγόριθμοι που προκύπτουν από το πλαίσιο του [57] είναι μακρυά από το να είναι υποεκθετικοί.

Σε αυτό το κεφάλαιο, δείχνουμε πώς να επεκτείνουμε διάφορα μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα περί της ύπαρξης υποεκθετικών παραμετρικών αλγορίθμων και πολυωνυμικών πυρήνων για την κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων. Επιπλέον, όλα τα θεωρήματα μπορούν να γενικοποιηθούν άμεσα σε γραφήματα που εμβαπτίζονται με λίγες διασταυρώσεις ανά ακμή σε μια επιφάνεια φραγμένου γένους. Παρόλα αυτά, για την διατήρηση της απλότητας της παρουσίασης, διαλέγουμε να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου η επιφάνεια εμβαπτισιμότητας είναι η σφαίρα.

5.1 Σχεδόν επίπεδα γραφήματα

Κάθε γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί στη σφαίρα· τα επίπεδα γραφήματα είναι απλά εκείνα για τα οποία αυτό μπορεί να γίνει χωρίς την ανάγκη για δύο ακμές να διασταυρωθούν. Με άλλα λόγια κάθε σχεδιασμός ενός μη επίπεδου γραφήματος αναγκαστικά θα έχει τουλάχιστον μια διασταύρωση. Παρόλα αυτά, εξετάζοντας τα μη επίπεδα γραφήματα, υπάρχουν κάποια που πλησιάζουν πιο πολύ από ότι άλλα στην ιδιότητα της επιπεδότητας. Γίνεται εμφανές ότι προκύπτει η ανάγκη για έναν ορισμό ενός "βαθμού" της μη επιπεδότητας. Και αυτό, μαζί με την ελπίδα ότι οι μέθοδοι που εφαρμόστηκαν σε επίπεδα γραφήματα μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να είναι χρήσιμες για γραφήματα των οποίων ο βαθμός της μη επιπεδότητας είναι φραγμένος.

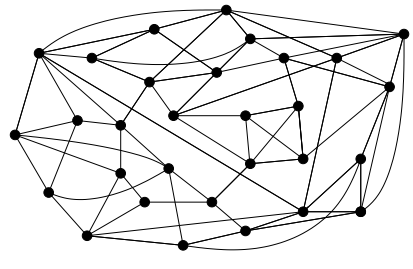
Ένας αριθμός από διαφορετικές προσεγγίσεις έχει προταθεί και μελετηθεί στην προσπάθεια της γενικοποίησης των επίπεδων γραφημάτων. Για να αναφέρουμε μερικές, έχουμε γραφήματα φραγμένου πάχους [35, 7], όπου ένα γράφημα έχει πάχος t αν είναι ένωση από t επίπεδα γραφήματα αλλά όχι λιγότερα. Γραφήματα φραγμένου αριθμού διασταυρώσεων [24, 97, 89], δηλαδή του ελάχιστου αριθμού διασταυρώσεων σε κάθε σχεδιασμό του G. Περίπου επίπεδα γραφή-

ματα [76, 3, 2], με ένα σχεδιασμό στον οποίο δεν τέμνονται περισσότερο από k ακμές ανά δύο. Τα r-τοπικά επίπεδα γραφήματα [118], εκείνα που δεν περιέχουν κανένα μονοπάτι μήκους μικρότερου από r που να τέμνει τον ευατό του και γραφήματα μεγάλου εύρους [141, 12].

Εδώ εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στην κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων, όπου θεωρούμε τους σχεδιασμούς γραφημάτων με λίγες διασταυρώσεις ανά ακμή. Αυτή η οικογένεια γραφημάτων παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Pach και Tóth [119].

Ορισμός 5.1.1. Ένα γράφημα είναι ξ-σχεδόν επίπεδο, αν έχει μια εμβάπτιση στη σφαίρα, με το πολύ ξ διασταυρώσεις ανά ακμή.

Αντίθετα στην περίπτωση των επίπεδων γραφημάτων, ακόμα και η αναγνώριση των 1-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων είναι ένα NP-δύσκολο πρόβλημα [85]. Για αυτόν τον λόγο, για όλο το κεφάλαιο είμαστε πάντα προσεκτικοί να ξεκαθαρίζουμε αν το γράφημα της εισόδου των αλγορίθμων μας είναι ένα ξ-σχεδόν επίπεδο γράφημα ή μια εμβάπτιση ξ-σχεδόν επίπεδου γραφήματος. (Δες το Σχήμα 5.1 για ένα παράδειγμα ενός 2-σχεδόν επίπεδου γραφήματος.)



Σχήμα 5.1: Ένα 2-σχεδόν επίπεδο γράφημα.

Αναφέραμε ήδη ότι η μελέτη των σχεδόν επίπεδων γραφημάτων διαγράφει μια κατεύθυνση που είναι "ορθογώνια" προς αυτή των (τοπολογικά) ελεύθερων-ελάσσονος γραφημάτων. Αυτό γίνεται σαφές από την επόμενη απλή παρατήρηση:

Παρατήρηση 5.1. Κάθε γράφημα είναι ένα τοπολογικό ελάσσον κάποιου 1-σχεδόν επίπεδου γραφήματος.

Για να γίνει αυτό αντιληπτό, παίρνουμε οποιονδήποτε σχεδιασμό ενός γραφήματος G στη σφαίρα και για κάθε ακμή e στο G, εισάγουμε μια νέα κορυφή σε κάθε τμήμα που περιορίζεται από δύο διαδοχικές διασταυρώσεις κατά μήκος της

e. Κάθε ακμή του γραφήματος G^s που προκύπτει, τέμνεται το πολύ μια φορά. Ακόμα, το γράφημα G^s είναι προφανώς μια υποδιαίρεση του G. Αναφερόμαστε σε αυτή την εμβάπτιση του G^s ως την *ακριβή υποδιαίρεση* μιας εμβάπτισης του G.

Σύμφωνα με τους Pach και Tóth [119] τα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα είναι αραιά:

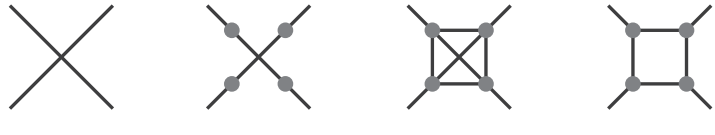
Πρόταση 5.1.2 ([119])**.** *Έστω G ένα ξ-σχεδόν επίπεδο γράφημα σε n κορυφές. Τότε το G έχει το πολύ $4.108 \cdot \sqrt{\xi} \cdot n$ ακμές.*

Η κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων είναι προφανώς κλειστή ως προς υπογραφήματα, αφού διαγράφοντας μια ακμή ή μια κορυφή δεν μπορεί να αυξήσει τον αριθμό διασταυρώσεων μιας ακμής. Παρόλα αυτά, τα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα δεν έχουν τις τυπικές καλές ιδιότητες κλειστότητας των τοπολογικά ορισμένων κλάσεων γραφημάτων. Συγκεκριμένα, δεν είναι κλειστά ως προς τοπολογικά ελάσσονα ούτε προς συνθλίψεις.

Πόρισμα 5.1.3. *Για κάθε $\xi \geq 1$, τα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα δεν είναι κλειστά ούτε ως προς τοπολογικά ελάσσονα ούτε ως προς συνθλίψεις.*

Απόδειξη. Έστω K_n ένα πλήρες γράφημα που δεν είναι ξ-σχεδόν επίπεδο, για κάποιον ακέραιο ξ (μια τέτοια τιμή υπάρχει για κάθε n από την Πρόταση 5.1.2). Έστω επίσης G_n η ακριβής υποδιαίρεση μιας εμβάπτισης του K_n (δες επίσης Παρατήρηση 5.1). Η κλίκα K_n είναι και μια σύνθλιψη και ένα τοπολογικό ελάσσον του G_n, που είναι προφανώς ένα 1-σχεδόν επίπεδο γράφημα. □

Περιγράφουμε δύο διαδικασίες χρήσιμες για την μετατροπή κάθε απλής εμβάπτιση ενός (όχι αναγκαστικά επίπεδου) γραφήματος G στη σφαίρα, σε ένα ενεπίπεδο γράφημα.



Σχήμα 5.2: Βήματα της επίπεδης μετατροπής ενός γραφήματος.

Θεωρούμε την ακριβή υποδιαίρεση της δοσμένης εμβάπτισης του G και για κάθε ζεύγος από τεμνόμενες ακμές $e = \{x, y\}$ και $e' = \{u, v\}$

- προσθέτουμε τον κύκλο $xuyv$ (παρατήρησε ότι αυτός ο κύκλος μπορεί να είναι σχεδιαστεί χωρίς να δημιουργήσει περισσότερες διασταυρώσεις), και
- αφαιρούμε κάθε τέτοιο ζεύγος διασταυρωμένων ακμών e και e'.

Παρατήρησε ακόμα ότι, από κατασκευή, το γράφημα που προκύπτει είναι πράγματι ένα ενεπίπεδο γράφημα. Για μια απεικόνιση αυτής της διαδικασίας, δες το Σχήμα 5.3. Θα αναφερόμαστε σε αυτή την διαδικασία και στο γράφημα που προκύπτει ως την *επίπεδη μετατροπή* του δοσμένου γραφήματος.

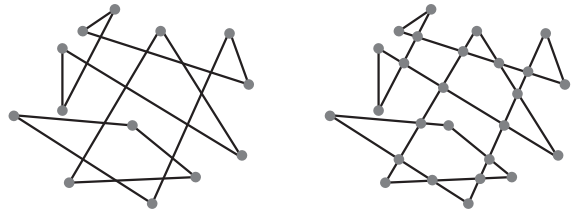
Θεώρησε τώρα ένα σημείο της σφαίρας, όπου δύο ακμές της δοσμένης εμβάπτισης του G διασταυρώνονται. Από τις υποθέσεις (δες επίσης τον Ορισμό 2.2.1), αυτό το το σημείο ανήκει σε ακριβώς δύο ακμές και υπάρχει ένας ανοιχτός δίσκος της σφαίρας που περιέχει τη διασταύρωση, αλλά καμία άλλη ακμή και κανένα άλλο σημείο διασταύρωσης ή άλλες κορυφές.

Άρα, για κάθε διασταύρωση p από δύο ακμές e_1, e_2 του G μπορούμε να θεωρήσουμε όπως παραπάνω έναν ανοιχτό δίσκο D της σφαίρας κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε $D \cap e = \emptyset$ για κάθε ακμή $e \in E(G) \setminus \{e_1, e_2\}$, το μόνο σημείο στο D που να ανήκει και στις δύο ακμές είναι το p, καμία κορυφή του G να μην βρίσκεται στο D και τέλος έτσι ώστε όλοι οι δίσκοι που προκύπτουν από τη διαδικασία αυτή να είναι ανά δύο ξένοι. Τότε, υποδιαιρούμε τα e_1 και e_2 προσθέτοντας δύο νέες κορυφές x, y στο $D \setminus \{p\}$ και συνδέουμε τα x και y με μια νέα ακμή f που βρίσκεται εντελώς στο δίσκο D και συναντά τα e_1 και e_2 μόνο στα άκρα τους.

Σημειώνουμε ως M το σύνολο αυτών των νέων ακμών και ονομάζουμε το γράφημα που προκύπτει *διόροφη εμβάπτιση* του G. Παρατήρησε ότι μπορούμε να συνθλίψουμε την ακμή f μέσα στο δίσκο D έτσι ώστε η κορυφή v_f που θα προκύψει να συμπέσει με το σημείο p, αφήνοντας την εμβάπτιση του γραφήματος έξω από το D ανέπαφη. Αν κάνουμε το ίδιο για κάθε ακμή στο M, παίρνουμε ένα ενεπίπεδο γράφημα, την *αποτύπωση* του G.

Λήμμα 5.1.4. *Έστω G ένα ξ-σχεδόν επίπεδο γράφημα σχεδιασμένο στη σφαίρα και έστω G^f η αποτύπωση του. Τότε $\mathbf{tw}(G) \leq 2 \cdot \mathbf{tw}(G^f)$.*

Απόδειξη. Έστω H η διόροφη εμβάπτιση του G. Αφού το G είναι ελάσσον του H, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{tw}(H) \leq 2 \cdot \mathbf{tw}(G^f)$. Από την άλλη μεριά, το G^f είναι μια σύνθλιψη του H και έστω M το σύνολο ακμών του H, από την σύνθλιψη των οποίων παίρνουμε το G^f, δηλαδή $H/M = G^f$. Τότε, υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στις ακμές στο $M \subseteq E(H)$ και στο σύνολο κορυφών $V_M \subseteq V(G^f)$. Έστω (V_0, V_M) η αντίστοιχη διαμέριση του συνόλου κορυφών του G^f.



Σχήμα 5.3: Ένα γράφημα G και η αποτύπωση του G^f.

Οι ακμές του M είναι ανά δύο μη γειτονικές. Αυτό συνεπάγεται ότι (V_0, V_M^1, V_M^2) είναι μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του H, όπου κάθε κορυφή $v \in V_M$ αντιστοιχεί στις κορυφές $v^1 \in V_M^1$ και $v^2 \in V_M^2$, τα άκρα της ακμής στο M, της οποίας η σύνθλιψη έχει ως αποτέλεσμα το v.

Θεώρησε τώρα μια δεντροαποσύνθεση $(T, \mathcal{X})$ του G^f. Ισχυριζόμαστε ότι το ζεύγος $(T, \mathcal{X}')$, όπου $X'_t := V_0 \cap X_t \cup \{v^1, v^2 | v \in V_M \cap X_t\}$ για $t \in T$ είναι μια δεντροαποσύνθεση του H. Προφανώς όλες οι κορυφές περιέχονται σε κάποια τσάντα. Επιπλέον, κάθε ακμή είναι σε μια τσάντα, αφού όλες οι ακμές του $E(H) \setminus M$ ήδη ήταν, και ήμαστε προσεκτικοί να τοποθετήσουμε τα άκρα κάθε ακμής του M στην ίδια τσάντα. Τέλος, η ιδιότητα της συνέχειας παραμένει ανέπαφη, αφού ένα άκρο μιας ακμής στο M ενάγει το ίδιο υποδέντρο στο T με την αντίστοιχη κορυφή του V_M. □

Το *τοπικό δεντροπλάτος* ενός γραφήματος G είναι η συνάρτηση $\mathbf{ltw}_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που συσχετίζει κάθε μη αρνητικό ακέραιο ρ με το μέγιστο δεντροπλάτος μιας r-γειτονιάς στο G: $\mathbf{ltw}_G(r) = max\{\mathbf{tw}(G[N_G^r(v)]) : v \in V(G)\}$. Λέμε ότι μια κλάση γραφημάτων $\mathcal{L}$ έχει *φραγμένο τοπικό δεντροπλάτος*, αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, τέτοια ώστε για κάθε $G \in \mathcal{L}$ και $r \geq 0$, $\mathbf{ltw}_G(r) \leq f(r)$.

Πόρισμα 5.1.5. *Για κάθε θετικό ακέραιο ξ, η κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων έχει φραγμένο τοπικό δεντροπλάτος.*

Απόδειξη. Έστω G ένα ξ-σχεδόν επίπεδο γράφημα για κάποιον ακέραιο ξ και θεώρησε το σύνολο κορυφών $N_G^r(v) \subseteq V(G)$, δηλαδή τη r-γειτονιά μιας τυχαίας κορυφής v του G, για κάποιον ακέραιο r. Τότε, το $G[N_G^r(v)]$ είναι το υπογράφημα στο G εναγόμενο από τις κορυφές της γειτονιάς και έτσι είναι επίσης ξ-σχεδόν επίπεδο. Έστω $(G[N_G^r(v)])^f$ η αποτύπωση αυτού του υπογραφήματος. Από το Λήμμα 5.1.4, έπεται ότι $\mathbf{tw}(G[N_G^r(v)]) \leq 2 \cdot \mathbf{tw}((G[N_G^r(v)])^f)$.

Θεώρησε τώρα την r'-γειτονιά του v στο G^f, δηλαδή στην αποτύπωση του G, όπου $r' = r \cdot (\xi + 1)$. Αυτές οι κορυφές πάλι ενάγουν ένα υπογράφημα στο G^f – το σημειώνουμε ως $G^f[N^{r'}_{G^f}(v)]$. Παρατήρησε, ότι από την επιλογή του r', ισχύει ότι $(G[N^r_G(v)])^f \subseteq G^f[N^{r'}_{G^f}(v)]$, που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι $\mathbf{tw}((G[N^r_G(v)])^f) \leq \mathbf{tw}(G^f[N^{r'}_{G^f}(v)])$.

Αφού η αποτύπωση G^f είναι ένα επίπεδο γράφημα, υπάρχει μια συνάρτηση h, τέτοια ώστε $\mathbf{tw}(G^f[N^{r'}_{G^f}(v)]) \leq h(r')$. Συνδυάζοντας τις ανισότητες, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{tw}(G[N^r_G(v)]) \leq h'(r)$, για μια συνάρτηση $h' = O_\xi(h)$. □

Μετά από αυτό το πόρισμα μπορεί να θέσει κανείς το ερώτημα αν είναι επιπλέον αληθές, ότι για κάθε κορυφή x ενός σχεδόν επίπεδου γραφήματος G και $r \geq 0$, το σύνολο κορυφών του G σε απόσταση r από το x ενάγει ένα υπογράφημα φραγμένου δεντροπλάτους. Αυτό θα είχε πράγματι ενδιαφέρουσες αλγοριθμικές συνέπειες για την κλάση των σχεδόν επίπεδων γραφημάτων.

Παρόλα αυτά, δεν είναι γενικά αληθές, όπως βεβαιώνεται από το εξής αντιπαράδειγμα. Θεώρησε την τυπική εμβάπτιση μιας σχάρας τυχαίου μεγέθους στη σφαίρα $\mathbb{S}_0$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δέντρο T σταθερού μέγιστου βαθμού, ας πούμε ίσου με 4, έτσι ώστε τα φύλλα του T να είναι ακριβώς οι κορυφές της σχάρας και να είναι όλα στην ίδια απόσταση από μια εσωτερική κορυφή του δέντρου και επιπλέον κατά τέτοιο τρόπο που το T να μπορεί να σχεδιαστεί στο $\mathbb{S}_0$, έτσι ώστε κάθε ακμή του δέντρου ή της σχάρας να έχει το πολύ ένα σταθερό αριθμό διασταυρώσεων.

5.2 Υποεκθετικοί αλγόριθμοι

Δεδομένου ενός γραφήματος G, ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ είναι ένα *r-σύνολο κυριαρχίας* του G αν κάθε κορυφή στο G είναι σε απόσταση το πολύ r από κάποια κορυφή στο S. Ο *αριθμός του r-συνόλου κυριαρχίας* του G, που γράφεται ως $\mathbf{ds}_r(G)$, είναι το ελάχιστο μέγεθος ενός r-συνόλου κυριαρχίας στο G.

Έστω $\Pi \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ και έστω $\overline{\Pi}$ το συμπλήρωμα του Π. Λέμε ότι το Π είναι *r-συμπαγές* (ή, απλά, *συμπαγές*) αν, για κάποιο $\Pi' \in \{\Pi, \overline{\Pi}\}$, ισχύει ότι υπάρχει μια σταθερά r τέτοια ώστε, για κάθε ζεύγος $(G, k) \in \Pi'$, υπάρχει ένα σύνολο S όπου $|S| \leq r \cdot k$ και το S είναι ένα r-σύνολο κυριαρχίας του G. Ας θυμηθούμε ότι ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα $\Pi \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ είναι *ω-μοναδικά εκθετικά επιλύσιμο σε συνάρτηση του δεντροπλάτους*, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που το επιλύει σε $2^{\omega \cdot \mathbf{tw}(G)} n^{O(1)}$ βήματα.

Θα χρειαστούμε πρώτα το εξής λήμμα, η απόδειξη του οποίου βασίζεται στο Λήμμα 5.1.4.

Λήμμα 5.2.1. *Υπάρχει ένας αλγόριθμος που, δεδομένης μιας εμβάπτισης ενός ξ-σχεδόν επίπεδου γραφήματος G σε n κορυφές, εξάγει σε $O_\xi(n)$ χρόνο ένα ενεπίπεδο γράφημα H με $O_\xi(n)$ κορυφές, τέτοιο ώστε $\mathbf{tw}(G) \leq 2 \cdot \mathbf{tw}(H)$. Επιπλέον, αν ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ είναι ένα r-σύνολο κυριαρχίας στο G, τότε το S είναι ένα $O_{r,\xi}(1)$-σύνολο κυριαρχίας στο H.*

Απόδειξη. Έστω H η αποτύπωση του G. Αυτό γράφημα μπορεί να κατασκευαστεί προφανώς σε γραμμικό χρόνο σε συνάρτηση με τον αριθμό των κορυφών του, δηλαδή το πολύ σε $O(\xi \cdot n)$ βήματα, και το Λήμμα 5.1.4 άμεσα συνεπάγεται ότι $\mathbf{tw}(G) \leq 2 \cdot \mathbf{tw}(H)$. Ακόμα, από την κατασκευή του H, έπεται ότι υπάρχει ένας μονομορφισμός $\tau : V(G) \to V(H)$, τέτοιος ώστε κάθε κορυφή του H είναι σε απόσταση το πολύ $\lceil \xi/2 \rceil$ από κάποια κορυφή στο $V(G)$.

Έστω τώρα S ένα r-σύνολο κυριαρχίας του G. Αφού κάθε ακμή του G αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι μήκους το πολύ $\xi + 1$ στο H, κάθε κορυφή του $V(G)$ είναι $(r \cdot (\xi + 1))$-κυριαρχήσιμη από κάποια κορυφή του S. Έτσι, το σύνολο S είναι ένα $(r \cdot (\xi + 1) + \lceil \xi/2 \rceil)$-σύνολο κυριαρχίας στο H. □

Συνδυάζοντας το κύριο συνδυαστικό αποτέλεσμα του [138] με το Λήμμα 5.2.1, μπορούμε να αποδείξουμε το εξής.

Λήμμα 5.2.2. *Για κάθε ξ-σχεδόν επίπεδο γράφημα G και κάθε ακέραιο r, ισχύει ότι $\mathbf{tw}(G) \leq O_{r,\xi}(\sqrt{\mathbf{ds}_r(G)})$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{ds}_r(G) = k$ και έστω H ένα ενεπίπεδο γράφημα όπως αυτό στην έξοδο του αλγόριθμου στο Λήμμα 5.2.1. Τότε, έπεται ότι $\mathbf{tw}(G) \leq 2 \cdot \mathbf{tw}(H)$ και το H έχει ένα $O_{r,\xi}(1)$-σύνολο κυριαρχίας μεγέθους το πολύ k. Ακόμα, αφού το H είναι επίπεδο, από το [138], ισχύει ότι $\mathbf{tw}(H) \leq O_{r,\xi}(\sqrt{\mathbf{ds}_{O_{r,\xi}}(H)})$. Συνδυάζοντας αυτά τα γεγονότα, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{tw}(G) \leq O_{r,\xi}(\sqrt{\mathbf{ds}_r(G)})$. □

Το Λήμμα 5.2.2, μαζί με τον αλγόριθμο του Αμιρ στο [8] συνεπάγεται το Θεώρημα 5.2.3, που είναι το κύριο αλγοριθμικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $\Pi \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα που είναι r-συμπαγές και είναι ω-μοναδικά εκθετικά επιλύσιμο σε συνάρτηση του δεντροπλάτους. Τότε, ο περιορισμός του Π σε εμβαπτίσεις ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων μπορεί να επιλυθεί σε $2^{O_{r,\xi,\omega}(\sqrt{k})} \cdot n^{O(1)}$ βήματα, δηλαδή, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο ξ, ισχύει ότι $\Pi_\xi \in 2^{O_{r,\xi,\omega}(\sqrt{k})}$-FPT.*

Προοφ. Αφού το Π είναι r-συμπαγές, ισχύει ότι $(G,k) \in \Pi \Rightarrow \mathbf{ds}_r(G) \leq rk$ και συνεπώς, το Λήμμα 5.2.2 συνεπάγεται ότι $\mathbf{tw}(G) \leq f(r,\xi) \cdot \sqrt{k}$, για κάποια συνάρτηση f των r και ξ. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Αμιρ από το [8] μπορούμε να ελέγξουμε σε $2^{O(\mathbf{tw}(G))} \cdot n^{O(1)}$ χρόνο αν $\mathbf{tw}(G) \leq f(r,\xi) \cdot \sqrt{k}$ και, σε περίπτωση μιας αρνητικής απάντησης μπορούμε να αποφανθούμε ασφαλώς ότι $(G,k) \notin \Pi$. Αν τώρα, $\mathbf{tw}(G) \leq f(r,\xi) \cdot \sqrt{k}$, τότε το αποτέλεσμα έπεται από το γεγονός ότι το Π είναι *ω-μοναδικά εκθετικά επιλύσιμο σε συνάρτηση δεντροπλάτους.*

5.3 Αλγόριθμοι πυρηνοποίησης

Χρησιμοποιούμε Μετρημένη Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική, ή πιο σύντομα CMSO, μια επέκταση της μοναδικής δευτεροβάθμιας λογικής που εξετάστηκε στο [32], ως βασικό εργαλείο για την έκφραση από ιδιότητες συνόλων κορυφών και ακμών σε γραφήματα.

Η σύνταξη της CMSO για γραφήματα περιέχει τους λογικούς συνδέσμους $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, μεταβλητές για κορυφές, ακμές, σύνολα κορυφών και σύνολα ακμών, τους ποσοδείκτες $\forall$, $\exists$ που μπορούν να εφαρμοστούν σε αυτές τις μεταβλητές και τις εξής πέντε δυαδικές σχέσεις:

1. $u \in U$ όπου u είναι μια μεταβλητή κορυφής και U είναι μια μεταβλητή συνόλου κορυφών·
2. $d \in D$ όπου d είναι μια μεταβλητή ακμής και D είναι μια μεταβλητή συνόλου ακμών·
3. $\mathbf{inc}(d,u)$, όπου d είναι μια μεταβλητή ακμής, u είναι μια μεταβλητή κορυφής, και η μετάφραση είναι είναι ότι η ακμή d είναι προσπίπτουσα στην κορυφή u·
4. $\mathbf{adj}(u,v)$, όπου u και v είναι μεταβλητές κορυφών και η μετάφραση είναι ότι οι u και v είναι γειτονικές·
5. ισότητα από μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν κορυφές, ακμές, σύνολα κορυφών και σύνολα ακμών.

Επιπλέον στα συνήθη χαρακτηριστικά της Μοναδικής Δευτεροβάθμιας Λογικής, αν έχουμε ατομικές φόρμουλες που ελέγχουν αν ο πληθάριθμος ενός συνόλου είναι ίσος με το υπόλοιπο της ακέραιης διαίρεσης του n δια p, όπου n και p είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $0 \leq n < p$ και $p \geq 2$, τότε αυτή η επέκταση της MSO

λέγεται *Μετρημένη Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική*. Έτσι βασικά η CMSO είναι MSO μαζί με την εξής ατομική φόρμουλα: Αν το U συμβολίζει ένα σύνολο X, τότε $\mathbf{card}_{n,p}(U) = \mathbf{true}$ αν και μόνο αν το $|X|$ είναι n $\mathbf{mod}$ p.

Εδώ, δουλεύουμε με παραμετροποιημένα ανάλογα της βελτιστοποίησης προβλημάτων σε γραφήματα όπου ο στόχος είναι να βρεθεί ένα ελάχιστο μέγεθος συνόλου κορυφών/ακμών που να ικανοποιεί μια CMSO-ορισμένη ιδιότητα σε γραφήματα. Έστω ψ μια CMSO φόρμουλα. Λέμε ότι ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα $\Pi \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ *είναι ορισμένο από το* ψ αν

$$\Pi = \{(G,k) \mid G \text{ έχει ένα σύνολο ακμών/κορυφών } S\text{: } |S| \leq k \wedge (G,S) \models \psi\}. \quad (5.1)$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το Π είναι ένα p-MIN-CMSO *παραμετροποιημένο πρόβλημα σε γραφήματα* (ή, απλά, ένα p-MIN-CMSO *πρόβλημα*).

Ένα *υποσημειωμένο γράφημα* είναι ένα ζεύγος (G,Y) όπου Y είναι ένα σύνολο κορυφών/ακμών. Σημειώνουμε ως $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των υποσημειωμένων γραφημάτων. Η *υποσημειωμένη* εκδοχή Π^a ενός παραμετροποιημένου προβλήματος Π ορισμένου από κάποια CMSO φόρμουλα ψ είναι το υποσύνολο Π^a του $\mathcal{A} \times \mathbb{N}$, τέτοιο που

$$\begin{aligned} \Pi^a \;=\; \{((G,Y),k) \mid G \text{ έχει ένα σύνολο κορυφών/ακμών} S\text{:} \\ S \subseteq Y \wedge |S| \leq k \wedge (G,S) \;\models\; \psi\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Πριν προχωρήσουμε, πρέπει να ορίσουμε τις έννοιες των προεξοχών και των προεξοχοαποσυνθέσεων, που παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στο [15]. Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V,E)$, λέμε ότι ένα σύνολο $X \subseteq V$ είναι μια β-*προεξοχή* του G αν $|\partial_G(X)| \leq \beta$ και $\mathbf{tw}(G[X]) \leq \beta$. Ένα γράφημα G έχει μια (α,β)-*προεξοχοαποσύνθεση* αν το $V(G)$ έχει μια διαμέριση $\mathcal{P} = \{R_0, R_1, \ldots, R_\rho\}$ όπου

- $N_G(R_i) \subseteq R_0$, $i \in \{1,\ldots,\rho\}$,
- $\max\{\rho, |R_0|\} \leq \alpha$, και
- για κάθε $i \in \{1,\ldots,\rho\}$, $N_G[R_i]$ είναι μια β-προεξοχή του G.

Η εξής πρόταση έπεται από μια κατάλληλη προσαρμογή των αποτελεσμάτων από το [15].

Πρόταση 5.3.1 ([15]). *Έστω* $\Pi \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ *ένα* p-*μιν*-CMSO *πρόβλημα ορισμένο από κάποια* CMSO-*φόρμουλα* ψ *όπου* $\mu = |\psi|$. *Τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος που, δεδομένου ενός ζεύγους* (G,k) *και μιας* (ck,c)-*προεξοχοαποσύνθεσης του*

G, εξάγει, σε $O_{\mu,c}(n)$ βήματα, ένα υποσημειωμένο γράφημα (G', Y) τέτοιο ώστε $(G, k) \in \Pi$ αν και μόνο αν $((G', Y), k) \in \Pi^a$ και $|V(G')| \leq O_{\mu,c}(k^2)$.

Το εξής λήμμα αποκαλύπτει την κοντινή σχέση μεταξύ δεντροαποσυνθέσεων και προεξοχοαποσυνθέσεων.

Λήμμα 5.3.2. *Έστω α και β μη αρνητικοί ακέραιοι. Αν ένα γράφημα G έχει μια $(\alpha, \frac{1}{2}\beta)$-προεξοχοαποσύνθεση τότε έχει μια δεντροαποσύνθεση $(T, \mathcal{X} = \{X_t : t \in V(T)\})$ όπου T περιέχει μια κορυφή r με βαθμό το πολύ α τέτοια ώστε*

(α) $|X_r| \leq \alpha$ και

(β) $\forall_{t \in V(T) \setminus \{r\}} |X_t| \leq \beta$.

Αντίστροφα, αν το G έχει μια τέτοια δεντροαποσύνθεση, τότε έχει επίσης μια (α, β)-προεξοχοαποσύνθεση.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mathcal{P} = \{R_0, R_1, \ldots, R_\rho\}$ είναι μια $(\alpha, \frac{1}{2}\beta)$-*προεξοχοαποσύνθεση* του G. Τροποποιούμε το $\mathcal{P}$ θέτοντας $R_i \leftarrow R_i \cup (N_G(R_i) \setminus \partial_G(N_G[R_i]))$. Παρατήρησε ότι μετά από αυτή την προσαρμογή το $\mathcal{P}$ παραμένει μια $(\alpha, \frac{1}{2}\beta)$-*προεξοχοαποσύνθεση* και επιπρόσθετα $\partial_G(N_G[R_i]) = N_G(R_i)$, $i \in \{1, \ldots, \rho\}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $|N_G(R_i)| \leq \frac{\beta}{2}$, $i \in \{1, \ldots, \rho\}$.

Έστω $\mathcal{X}_i$ μια δεντροαποσύνθεση του $G_i = G[N_G[R_i]]$, για $i \in \{1, \ldots, \rho\}$ όπου $\rho \leq \alpha$. Αφού κάθε $V(G_i)$ είναι μια $\frac{1}{2}\beta$-προεξοχή του G, έχουμε ότι $|N_G(R_i)| = |\partial_G(N_G[R_i])| \leq \frac{1}{2}\beta$ και υπάρχει μια δεντροαποσύνθεση $(\mathcal{X}_i, T_i)$ του G_i πλάτους το πολύ $\frac{1}{2}\beta$. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, \rho\}$, προσθέτουμε σε όλες τις τσάντες του $\mathcal{X}_i$ τις, το πολύ $\frac{1}{2}\beta$, κορυφές του $N_G(R_i)$ και παίρνουμε μια δεντροαποσύνθεση $(\mathcal{X}'_i, T_i)$ του G_i πλάτους το πολύ β. Συμπτίσουμε τώρα αυτές τις δεντροαποσυνθέσεις σε μια δεντροαποσύνθεση $(\mathcal{X}, T)$ του G ως εξής: Έστω $X_r = W$ και έστω T το δέντρο που προκύπτει κάνοντας γειτονική την κορυφή r με μια τυχαία επιλεγμένη κορυφή του κάθε δέντρου στο $\mathcal{X}'_i$ για $i \in \{1, \ldots, \rho\}$. Παίρνουμε τέλος $\mathcal{X} = \{X_r\} \cup \bigcup_{i \in \{1, \ldots, \rho\}} \mathcal{X}'_i$. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το $(\mathcal{X}, T)$ του G είναι μια δεντροαποσύνθεση του G όπου το r έχει βαθμό $\rho \leq \alpha$ στο T και όπου οι ιδιότητες (a) και (b) ικανοποιούνται.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεώρησε μια δεντροαποσύνθεση $(\mathcal{X}, T)$ του G και μια κορυφή $r \in V(T)$ βαθμού το πολύ α τέτοια ώστε τα (a) και (b) να ικανοποιούνται. Έστω $T_1, \ldots, T_\alpha$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $T \setminus r$. Για $i \in \{1, \ldots, \alpha\}$, ορίζουμε $G_i = G[\bigcup_{t \in V(T_i)} X_t]$ και παρατήρησε ότι $(\mathcal{X}_i = \{X_t \mid t \in T_i\}, T_i)$ είναι μια δεντροαποσύνθεση του G_i με πλάτος το πολύ β.

Έστω $R_0 = X_r$ και, για $i \in \{1, \ldots, \alpha\}$, ορίζουμε $R_i = V(G_i) \setminus R_0$. Απομένει να επαληθεύσει κανείς ότι $\{R_0, R_1, \ldots, R_\alpha\}$ είναι μια (α, β)-προεξοχοαποσύνθεση του G.

Για να αποδείξουμε ότι $N_G[R_i]$ είναι μια β-προεξοχή δείχνουμε πρώτα ότι $N_G(R_i) \subseteq X_{t_i}$ όπου t_i είναι ο γείτονας του t στο T που ανήκει στο T_i. Έστω $x \in N_G(R_i)$ και έστω $y \in R_i$ όπου $e = \{x, y\} \in E(G)$. Από την τρίτη ιδιότητα των δεντροαποσυνθέσεων, το $R_0 = X_r$ διαχωρίζει κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκουν σε διαφορετικά R_i'ς. Συνεπώς $x \in R_0$. Έστω X_q μια τσάντα του $(\mathcal{X}, T)$ που περιέχει και τα δυο άκρα του e (αυτή η τσάντα υπάρχει από τη δεύτερη ιδιότητα των δεντροαποσυνθέσεων). Αν $q \notin V(T_i)$, τότε η τρίτη ιδιότητα των δεντροαποσυνθέσεων συνεπάγεται ότι $y \in R_0$, άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι κάποια από τις τσάντες του T_i περιέχει το x, συνεπώς, πάλι από την τρίτη ιδιότητα, ισχύει ότι $x \in X_{t_i}$. Συμπεραίνουμε ότι $N_G(R_i) \subseteq X_{t_i}$.

Ας θυμηθούμε ότι $X_{t_i} \subseteq V(G_i)$, συνεπώς $N_G(R_i) \subseteq V(G_i)$ και αυτό συνεπάγεται ότι $N_G[R_i] \subseteq V(G_i)$. Αφού $\mathbf{tw}(G_i) \leq \beta$ έχουμε ότι επίσης $\mathbf{tw}(G[N_G[R_i]]) \leq \beta$. Απομένει τώρα να δείξουμε ότι $|\partial_G(N_G[R_i])| \leq \beta$. Αφού $\partial_G(N_G[R_i]) \subseteq N_G(R_i)$ αποδεικνύεται ότι $|N_G(R_i)| \leq \beta$, που άμεσα έπεται από το γεγονός ότι $N_G(R_i) \subseteq X_{t_i}$. □

Επιστρέφοντας στη κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το [85], μαζί με το [15, Λήμμα 8] και τα Λήμματα 5.1.4, 5.2.1, και 5.3.2 μπορούμε να αποδείξουμε το εξής.

Λήμμα 5.3.3. *Υπάρχει ένας αλγόριθμος που, δεδομένης μια ξ-σχεδόν επίπεδης εμβάπτισης ενός γραφήματος G σε n κορυφές και δύο ακέραιων r και k, είτε αναφέρει ότι $\mathbf{ds}_r(G) > k$ ή εξάγει μια $(O_{r,\xi}(k), O_{r,\xi}(1))$-προεξοχοαποσύνθεση του G. Ακόμα, αυτός ο αλγόριθμος τερματίζει σε $O_{r,\xi}(n^2)$ βήματα.*

Απόδειξη. Ως συνέπεια των αποτελεσμάτων από το [85], υπάρχει ένας $O_{r,\xi}(n)$ αλγόριθμος που είτε επιστρέφει ότι το G δεν έχει r-σύνολο κυριαρχίας μεγέθους k ή εξάγει ένα r-σύνολο κυριαρχίας S του G μεγέθους $2k$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Λήμματος 5.2.1, προκύπτει ένα ενεπίπεδο γράφημα H (η αποτύπωση του G) με $O_\xi(n)$ κορυφές, μαζί με ένα $O_{r,\xi}(1)$-σύνολο κυριαρχίας του H μεγέθους $2k$. Από το [15, Λήμμα 8], το H έχει μια $(O_{r,\xi}(k), O_{r,\xi}(1))$-προεξοχοαποσύνθεση που μπορεί να κατασκευαστεί σε $O_{r,\xi}(n^2)$ βήματα.

Από το Λήμμα 5.3.2, το H έχει μια δεντροαποσύνθεση $(T, \mathcal{X} = \{X_t : t \in V(T)\})$ όπου το T περιέχει μια κορυφή r βαθμού $O_{r,\xi}(k)$ τέτοια ώστε $|X_r| = O_{r,\xi}(k)$ και $\forall_{t \in V(T) \setminus \{r\}} |X_t| = O_{r,\xi}(1)$. Αφού το H είναι η αποτύπωση του G,

παρόμοια όπως στην απόδειξη του Λήμματος 5.1.4, το G έχει μια δεντροαποσύνθεση $(T, \mathcal{X}' = \{X'_t : t \in V(T)\})$ όπου $|X_r| = O_{r,\xi}(k)$ και $\forall_{t \in V(T)\setminus\{r\}} |X_t| = O_{r,\xi}(1)$. Εφαρμόζοντας τώρα την αντίστροφη κατεύθυνση του Λήμματος 5.3.2, εξάγουμε ότι το G έχει μια $(O_{r,\xi}(k), O_{r,\xi}(1))$-προεξοχοαποσύνθεση επίσης. Αφού όλα τα Λήμματα που έχουν χρησιμοποιηθεί σε αυτή την απόδειξη εμπλέκουν αλγόριθμους γραμμικού χρόνου, εκτός από τον αλγόριθμο από το [15, Λήμμα 8] που χρειάζεται τετραγωνικό χρόνο στον αριθμό των κορυφών, έχουμε ότι ισχύει το αποτέλεσμα του λήμματος. □

Ένας συνδυασμός από τα Λήμματα 5.3.1 και 5.3.3 άμεσα συνεπάγεται το εξής λήμμα.

Λήμμα 5.3.4. *Έστω $\Pi \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ ένα r-συμπαγές p-μιν-CMSO πρόβλημα ορισμένο σε κάποια CMSO-φόρμουλα ψ όπου $|\psi| = \mu$. Τότε, υπάρχει ένας αλγόριθμος που, δεδομένης μιας ξ-σχεδόν επίπεδης εμβάπτισης ενός γραφήματος G με n κορυφές και ενός ακέραιου k, εξάγει, σε $O_{\mu,r,\xi}(n^2)$ βήματα, ένα στιγμιότυπο $((G', Y), k)$ του Π^a τέτοιο ώστε το (G, k) είναι ένα "ναι"-στιγμιότυπο του Π_ξ αν και μόνο αν το $((G', Y), k)$ είναι ένα "ναι"-στιγμιότυπο του Π^a και $|V(G')| \leq O_{\mu,r,\xi}(k^2)$.*

Ως άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.3.4, μπορούμε να τώρα διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, που είναι η ύπαρξη πυρήνων για προβλήματα σε γραφήματα περιορισμένα στα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα.

Θεώρημα 5.3.5. *Έστω $\Pi \subseteq \mathcal{G} \times \mathbb{N}$ ένα συμπαγές p-μιν-CMSO πρόβλημα τέτοιο ώστε Π_ξ είναι NP-δύσκολο και $\Pi^a \in$ NP. Τότε, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο ξ, το Π_ξ έχει έναν πολυωνυμικό πυρήνα.*

Ως ένα δείγμα των παραμετροποιημένων προβλημάτων για τα οποία το Θεώρημα 5.3.5 μπορεί να εφαρμοστεί αναφέρουμε το εξής υποσύνολο από τον κατάλογο προβλημάτων του [15]:

Σύνολο Κυριαρχιας, r-Σύνολο Κυριαρχιας, Σύνολο Κυριαρχιας q-Κατωφλιου, Καλυμμα Κορυφων, Συνεκτικο r-Σύνολο Κυριαρχιας, Συνεκτικο Καλυμμα Κορυφων, Συνεκτικο Σύνολο Κυριαρχιας, Σύνολο Κυριαρχιας Ακμων, Ἅλιχυε Τρανσερσαλ, Ανεξαρτητο Σύνολο, Τριανγλε Πασκινγ, Ινδεπενδεντ Σύνολο Κυριαρχιας, (Ινδεπενδεντ) Διρεστεδ Σύνολο Κυριαρχιας, Ελαχιστο Φυλλων Out-βρανσηινγ, Μεγιστο Φυλλων-Παραγομενο Δεντρο, Εναγομενου Ματσηινγ, Ακυκλο Σύνολο Κυριαρχιας, Ο&Δ/Εεν Σύνολο Κυριαρχιας, Τοταλ Σύνολο

Κυριαρχιας, Περφεστ Συνολο Κυριαρχιας, Τοταλ Περφεστ Συνολο Κυριαρχιας, r-Σσαττερεδ Σετ, κορυφη Σ-οερινγ, Σ-οερινγ Ακμων, Σ-Πασκινγ Ακμων, κορυφη Σ-Πασκινγ.

5.4 Γραφήματα τομής κυρτών σωμάτων

Τα σχεδόν επίπεδα γραφήματα σχετίζονται άμεσα με διάφορες φυσικές κλάσεις γραφημάτων τομών κυρτών σωμάτων στη σφαίρα. Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ μια συλλογή κυρτών γεωμετρικών σωμάτων στη σφαίρα. Ας θυμηθούμε ότι το *γράφημα τομών* $G_{\mathcal{B}}$ αποτελείται από το σύνολο κορυφών $V(G_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$, και το σύνολο ακμών $E(G_{\mathcal{B}})$ που απαρτίζεται από τις ακμές (B_i, B_j) για κάθε ζεύγος τεμνόμενων σωμάτων $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Ξωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέτουμε ότι κάθε αντικείμενο περιέχει μια μπάλα μικρής ακτίνας, και ότι αν $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, τότε το $B_i \cap B_j$ επίσης περιέχει μια μπάλα μικρής ακτίνας, αλλιώς μπορούμε να αφήσουμε τα σώματα να αυξηθούν οριακά διατηρώντας το ίδιο γράφημα τομών.

Τώρα, δεδομένης της εμβάπτισης των σωμάτων στη σφαίρα, εμβαπτίζουμε το γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$ στην ίδια σφαίρα. Για την κορυφή της εμβάπτισης που αντιπροσωπεύει το αντικείμενο B_i, επιλέγουμε ένα σημείο $v_i \in B_i$ τέτοιο ώστε οποιεσδήποτε τρεις κορυφές της εμβάπτισης να μην βρίσκονται σε μια ευθεία. Αυτό είναι πάντα δυνατό γιατί κάθε αντικείμενο περιέχει μια μπάλα. Αφού τα σώματα είναι κυρτά, για $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, μπορούμε να σχεδιάσουμε την ακμή (v_i, v_j) ως τμήμα μιας τμηματικά ευθύγραμμης καμπύλης με το πολύ μια καμπή σε ένα σημείο $v_{ij} \in B_i \cap B_j$. Ακόμα, αφού κάθε τομή των σωμάτων περιέχει μια μπάλα, μπορούμε να επιλέξουμε ξανά τα σημεία καμπής κατά τρόπο που τρία σημεία, κορυφές του $G_{\mathcal{B}}$ ή σημεία καμπής, να μην βρίσκονται σε μια ευθεία. Έστω $G^*_{\mathcal{B}}$ το γράφημα που προκύπτει από το $G_{\mathcal{B}}$ υποδιαιρώντας τις ακμές καμπής στα σημεία καμπής. Αναφερόμαστε στις υποδιαιρεμένες κορυφές ως κορυφές *καμπής*. Τέλος, σημειώνουμε ως $\widehat{H}$ την 1-υποδιαίρεση ενός δοσμένου γραφήματος H, δηλαδή το γράφημα που προκύπτει υποδιαιρώντας όλες τις ακμές του H μια φορά.

Το εξής λήμμα περιγράφει την σχέση μεταξύ των σχεδόν επίπεδων γραφημάτων και των γραφημάτων τομών κυρτών σωμάτων.

Λήμμα 5.4.1. *Αν $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ είναι μια συλλογή κυρτών σωμάτων στην σφαίρα $\mathbb{S}_0$, τότε το $\widehat{G}_{\mathcal{B}}$ είναι $O_d(1)$-σχεδόν επίπεδο, όπου d είναι ο μέγιστος βαθμός του $G_{\mathcal{B}}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τη συζήτηση παραπάνω, είναι αρκετό να δείξουμε ότι αν d είναι ο μέγιστος βαθμός του $G_{\mathcal{B}}$, τότε το $G^*_{\mathcal{B}}$ είναι $O_d(1)$-σχεδόν επίπεδο και συνεπώς το ίδιο ισχύει επίσης για το $\widehat{G}_{\mathcal{B}}$.

Παρατήρησε πρώτα ότι από την παραπάνω κατασκευή, όλες οι ακμές της εμβάπτισης του $G^*_{\mathcal{B}}$ είναι τα τμήματα ευθείων γραμμών που τέμνει η μια την άλλη το πολύ σε ένα σημείο που δεν είναι κορυφή. Έτσι, ο σχεδιασμός του $G^*_{\mathcal{B}}$ ικανοποιεί τις βασικές απιτήσεις για μια σχεδόν επίπεδη εμβάπτιση. Για να δείξουμε ότι το $G^*_{\mathcal{B}}$ είναι $O_d(1)$-σχεδόν επίπεδο, αποδεικνύουμε ότι κάθε ακμή $(x, y) \in E(G^*_{\mathcal{B}})$ τέμνεται από το πολύ $O(d^2)$ άλλες ακμές.

Θεώρησε ένα ζεύγος από τεμνόμενες ακμές (x, y) και (u, v). Για την απλότητα της παρουσίασης θεωρούμε μόνο την περίπτωση όπου όλες οι τέσσερις κορυφές, x, y, u, v, δεν είναι κορυφές καμπής. Παρόμοια μπορούμε να χειριστούμε τις περιπτώσεις με κορυφές καμπής. Έστω $x \in B_i,\ y \in B_j,\ u \in B_k,\ v \in B_\ell$. Από τον ορισμό, $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ και $B_k \cap B_\ell \neq \emptyset$. Από την κατασκευή, το σημείο διασταύρωσης των ακμών (x, y) και (u, v) είναι στο $(B_i \cup B_j) \cap (B_k \cup B_\ell)$, που σημαίνει ότι τουλάχιστον μια από τις κορυφές v ή u είναι γειτονικές στα x ή y. Αν d είναι ο μέγιστος βαθμός του $G^*_{\mathcal{B}}$, οι κορυφές x και y μαζί έχουν το πολύ $2d-2$ γείτονες. Καθένας από αυτούς τους γείτονες γειτονεύει με το πολύ $d-1$ άλλες κορυφές. Έτσι, ο συνολικός αριθμός ζευγών (v, u) τέτοια ώστε v ή u είναι γειτονικές στα x ή y είναι το πολύ $2(d-1)^2$. Συνεπώς, μια ακμή (x, y) μπορεί να τέμνεται από το πολύ $2(d-1)^2$ άλλες ακμές. □

Ορισμός 5.4.2. Δεδομένου ενός θετικού πραγματικού αριθμού α, ορίζουμε την *κλάση α-παχιών κυρτών γραφημάτων τομών* ως την κλάση που περιέχει ένα γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$ μιας συλλογής $\mathcal{B}$ κυρτών σωμάτων, αν ο λόγος μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης ακτίνας ενός κύκλου όπου όλα τα αντικείμενα στο $\mathcal{B}$ μπορούν να περιγραφούν, και να εγγραφούν αντίστοιχα, φράζεται άνω από το α.

Από το παρακάτω λήμμα, ένα α-παχύ κυρτό γράφημα τομών που αποκλείει ένα γράφημα H έχει φραγμένο μέγιστο βαθμό.

Λήμμα 5.4.3. *Έστω H ένα γράφημα σε h κορυφές. Αν το $G_{\mathcal{B}}$ είναι α-παχύ κυρτό γράφημα τομών μιας συλλογής σωμάτων $\mathcal{B}$ που αποκλείει το γράφημα H, τότε το $G_{\mathcal{B}}$ έχει μέγιστο βαθμό το πολύ $16h\alpha^2$.*

Απόδειξη. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι το $G_{\mathcal{B}}$ έχει μια κορυφή με βαθμό περισσότερο από $16h\alpha^2$. Τότε, για το αντίστοιχο σώμα B της συλλογής $\mathcal{B}$, διαλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $x \in B$. Αφού κάθε αντικείμενο στο $\mathcal{B}$ μπορεί

να εγγραφεί σε ένα κύκλο ακτίνας R, όλα τα σώματα που τέμνουν το B περιέχονται σε έναν κύκλο C ακτίνας $4R$ με κέντρο το x. Αυτός ο κύκλος έχει επιφάνεια $16\pi R^2$. Αφού κάθε αντικείμενο στο $\mathcal{B}$ περιέχει ένα κύκλο ακτίνας r, το άθροισμα των περιοχών των σωμάτων που τέμνουν το B ξεπερνά το $16h\alpha^2 \times \pi r^2 = 16\pi h R^2$. Συνεπώς, υπάρχει ένα σημείο στον κύκλο C που ανήκει τουλάχιστον σε $h+1$ σώματα από το $\mathcal{B}$. Έτσι, το $G_{\mathcal{B}}$ περιέχει μια κλίκα μεγέθους $h+1$ που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι αποκλείει το H. □

Συνδυάζοντας τα Λήμματα 5.4.1 και 5.4.3 συνεπάγεται ότι αν το $G_{\mathcal{B}}$ είναι ένα α-παχύ κυρτό γράφημα τομών που αποκλείει ένα γράφημα H, το υποδιαιρεμένο γράφημα $\widehat{G}_{\mathcal{B}}$ είναι $O_{h,\alpha}(1)$-σχεδόν επίπεδο. Αυτό επιτρέπει την χρήση των σχεδόν επίπεδων γραφημάτων για την αναπαράσταση ενός αριθμού γεωμετρικών κλάσεων γραφημάτων όταν κάποιο γράφημα αποκλείεται ως υπογράφημα, όπως για παράδειγμα τα γραφήματα μοναδιαίων κύκλων που αποκλείουν ένα γράφημα H.

Έπεται ότι και τα δύο κύρια μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο αυτό, οι υποεκθετικοί αλγόριθμοι και οι αλγόριθμοι πυρηνοποίησης, ισχύουν για α-παχιά κυρτά γραφήματα τομών που αποκλείουν ένα γράφημα H. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, παρατήρησε πρώτα ότι αν το $G_{\mathcal{B}}$ είναι ένα τέτοιο γράφημα, τότε $\mathbf{ds}_{2r}(\widehat{G}_{\mathcal{B}}) \leq \mathbf{ds}_r(G_{\mathcal{B}})$ και, σύμφωνα με τα Λήμματα 5.4.1 και 5.4.3, το $\widehat{G}_{\mathcal{B}}$ είναι ένα $O_{h,\alpha}(1)$-σχεδόν επίπεδο γράφημα. Στη συνέχεια, τα Λήμματα 5.2.2 και 5.3.3, εφαρμόζονται και παρέχουν ένα αντίστοιχο δέντρο και προεξοχοαποσυνθέσεις για το $\widehat{G}_{\mathcal{B}}$. Αφού η ύπαρξη αποσυνθέσεων αυτού του είδους δεν τροποποιείται διαγράφοντας κορυφές, οι ίδιες αποσυνθέσεεις μπορούν επίσης να κατασκευαστούν για το $G_{\mathcal{B}}$ και συνεπώς για κάθε α-παχύ κυρτό γράφημα τομών που αποκλείει το γράφημα H. Τώρα, έχουμε ό,τι χρειάζεται για να επεκτείνουμε τα Θεωρήματα 5.2.3 και 5.3.5 αε αυτά τα γραφήματα.

5.5 Επεκτάσεις

Εκτός από τα p-min-CMSO προβλήματα, οι έννοιες των p-eq-CMSO και p-max-CMSO προβλημάτων παρουσιάστηκαν στο [15]. Τέτοια προβλήματα απαιτούν το μέγεθος του υποσυνόλου κορυφών/ακμών S που αποτελεί το πιστοποιητικό της λύσης στις σχέσεις (5.1) και (5.2) να είναι είτε *ίσο με* k *ή τουλάχιστον* k, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τις αποδείξεις της Ενότητας 3 του [15], είναι δυνατό να εξάγει κανείς παραλλαγές του Λήμματος 5.3.1 που δουλεύουν επίσης για αυτά τα προβλήματα. Τότε, τα Λήμματα του υπόλοιπου Κεφαλαίου μπορούν

να χρησιμοποιηθούν για να δειχτεί ότι το Θεώρημα 5.3.5 ισχύει για τα p-eq-CMSO και p-max-CMSO προβλήματα με τον ίδιο τρόπο.

Όλα τα αποτελέσματα που συζητήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο ισχύουν επίσης για ξ-σχεδόν γ-γένους γραφήματα, δηλαδή γραφήματα που μπορούν να εμβαπτιστούν σε μια επιφάνεια γένους γ με το πολύ ξ διασταυρώσεις ανά ακμή. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι όλα τα λήμματα μας όπως και τα αποτελέσματα που χρησιμοποιήθηκαν από τα [15], [138], και [85] είτε ήδη ισχύουν ή μπορούν να επεκταθούν με άμεσο τρόπο σε φραγμένου γένους γραφήματα.

Ένα άλλο σχόλιο που πρέπει να τονιστεί, είναι ότι στις αποδείξεις που υποστηρίζουν τοΘεώρημα 5.2.3 δεν ζητούμε για μια εμβάπτιση του γραφήματος της εισόδου G. Αυτό σημαίνει ότι το Θεώρημα 5.2.3 ισχύει ακόμα και αν το πρόβλημα της εισόδου είναι ένα γράφημα που *ξέρουμε* ότι είναι ξ-σχεδόν επίπεδο χωρίς να έχουμε μια ξ-σχεδόν επίπεδη εμβάπτιση του. Ακόμα, χρησμοποιώντας τα πρόσφατα αποτελέσματα του [70], μπορούμε να αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για το Θεώρημα 5.3.5.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε ένα ανοιχτό πρόβλημα. Παρατήρησε ότι η συνθήκη της συμπάγειας είναι λιγότερο γενική από αυτή της διδιαστατότητας, που μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τη σχεδίαση υποεκθετικών παραμετρικών αλγορίθμων και πολυωνυμικών πυρήνων, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3. Ο στόχος της επέκτασης της θεωρίας της διδιαστατότητας σε σχεδόν επίπεδα γραφήματα φαίνεται να είναι το επόμενο βήμα που απαιτεί τεχνικές που εκτείνονται πέρα από τα όρια των αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε μια διαφορετική προσέγγιση σε αυτό το πρόβλημα που επιχειρεί να ανοίξει τον δρόμο προς αυτή την κατεύθυνση.

Κεφάλαιο 6

Μια ισοδύναμη κλάση: τα λ-ισόπεδα γραφήματα

Έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια ότι πολλά γραφοθεωρητικά προβλήματα επιδέχονται προσεγγιστικά σχήματα πολυωνυμικού χρόνου [9] και αλγόριθμους υποεκθετικού χρόνου [38] όταν περιορίζονται σε επίπεδα γραφήματα. Επίσης, είδαμε πως αυτά τα αποτελέσματα έχουν επεκταθεί σε κλάσεις πολύ πιο γενικές από τα επίπεδα γραφήματα, όπως γραφήματα εμβαπτίσιμα σε επιφάνειες φραγμένου γένους και H-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα [41, 71]. Παρόλα αυτά, όπως ήδη σημειώσαμε, όλες αυτές οι κλάσεις ορίζονται τοπολογικά.

Σε μια προσπάθεια να ακολουθήσουμε μια διαφορετική κατεύθυνση, παρουσιάσαμε στο τελευταίο κεφάλαιο κλάσεις γραφημάτων που δεν ορίζονται τοπολογικά και εστιάσαμε ειδικά στην κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων. Εδώ, εισάγουμε μια νέα κλάση γραφημάτων που επίσης ταιριάζουν σε αυτή τη περιγραφή, την κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων.

Συζητήσαμε την ανάγκη για ένα μέτρο του "βαθμού" της μη επιπεδότητας για ένα δοσμένο γράφημα. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε ήταν του εξής τύπου: αν ένα γράφημα αναγκαστικά θα έχει διασταυρώσεις, ας ψάξουμε για μια εμβάπτιση στη σφαίρα με φραγμένο αριθμό διασταυρώσεων.

Αυτή τη φορά αφήνουν στην άκρη το πώς ένα γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί στη σφαίρα και δουλεύουμε με διαφορετικό τρόπο. Θέλουμε να διατάξουμε όλα τα γραφήματα με κριτήριο το πόσο προσομοιάζουν ένα επίπεδο γράφημα. Προφανώς, στην κατηγοριοποίηση που στοχεύουμε, τα επίπεδα γραφήματα δεν μπορεί παρά να βρίσκονται στην βάση. Τότε, ποιο θα μπορούσε να είναι το

επόμενο στρώμα; Μια δύναμη ενός επίπεδου γραφήματος δεν είναι αναγκαστικά επίπεδη, οπότε ας προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε στο επόμενο στρώμα, κάθε γράφημα που είναι τετράγωνο ενός επίπεδου γραφήματος.

Αυτό ακούγεται ενδιαφέρον: η κλάση των γραφημάτων θα μπορούσε έτσι να τεμαχιστεί κλιμακωτά σε ξεχωριστά, καλά ορισμένα στρώματα. Υπάρχει ένα σοβαρό πρόβλημα όμως. Το τετράγωνο ενός επίπεδου γραφήματος φαίνεται να είναι πολύ μακρυά από την αντίληψή μας ως προς την επιπεδότητα. Και όχι άδικα. Το πλήρες γράφημα σε n κορυφές μπορεί να περιέχεται στο τετράγωνο ενός επίπεδου γραφήματος!

Που απέτυχε η προσέγγισή μας; Η απάντηση βρίσκεται στο ορισμό της απόστασης σε ένα γράφημα. Δύο κορυφές που είναι κοντά, μπορούν να είναι αρκετά "μακρυνές" ως προς την επίπεδη εμβάπτιση του γραφήματος. Γίνεται εμφανές, ότι χρειαζόμαστε κάποιον άλλο ορισμό για την απόσταση – ένα που να σέβεται την επιπεδότητα.

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε μια νέα μετρική για ενεπίπεδα γραφήματα, η οποία λέγεται απόσταση τοίχο-τοίχο και που πετυχαίνει ακριβώς αυτό. Χρησιμοποιώντας αυτή την μετρική, είμαστε σε θέση να ορίσουμε την κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων, ως υπογραφήματα δυνάμεων ενεπίπεδων γραφημάτων. Έπειτα συνεχίζουμε με μια μελέτη της νέας κλάσης γραφημάτων, που αποκαλύπτει ότι είναι παραμετρικά ισοδύναμη με την κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Κλείνουμε το κεφάλαιο παρουσιάζοντας επιπροσθετα χαρακτηριστικά των λ-ισόπεδων γραφημάτων.

6.1 Η απόσταση τοίχο-τοίχο

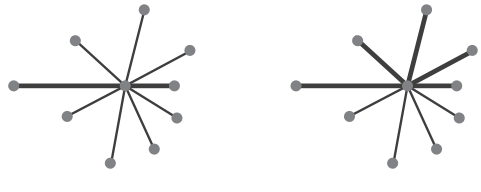
Έστω G ένα ενεπίπεδο γράφημα. Για το υπόλοιπο κεφάλαιο θα θεωρήσουμε γραφήματα χωρίς θηλιές που μπορεί να έχουν πολλαπλές ακμές. Για κάθε κορυφή $v \in V(G)$, οι ακμές προσπίπτουσες στο v εμφανίζονται στον δοσμένο σχεδιασμό του G στην κυκλική τάξη που σημειώνουμε ως σ_v (μια τέτοια κυκλική τάξη είναι καλά ορισμένη αφού το G δεν έχει θηλιές). Δύο ακμές λέγονται *διπλανές* αν μοιράζονται μια κορυφή, ας πούμε την $v \in V(G)$, και εμφανίζονται διαδοχικά στην κυκλική τάξη σ_v ή την αντίστροφή της.

Ορισμός 6.1.1. Έστω $e', e'' \in E(G)$ δύο ακμές στο G. Ένας (e', e'')-*περίπατος τοίχο-τοίχο* είναι μια ακολουθία από διαφορετικές ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$, τέτοιες ώστε $e_1 = e'$ και $e_\ell = e''$ και κάθε δύο διαδοχικές ακμές στο $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ είναι διπλανές.

Διαισθητικά, ένα τέτοιος περίπατος μπορεί να εξηγηθεί με τον εξής τρόπο. Έστω το ενεπίπεδο γράφημα που αναπαριστά ένα χάρτη κτιρίου όπου οι ακμές αναπαριστούν τους τοίχους, και καθέ τοίχος έχει μια πόρτα. Τότε, ένας *περίπατος τοίχο-τοίχο*, που γράφεται επίσης ως **wbw**-περίπατος, είναι ένας περίπατος ξεκινώντας από ένα τοίχο e' και τελειώνοντας σε ένα τοίχο e'', συνεχώς ακουμπώντας τοίχους και πιθανώς περνώντας μέσα από πόρτες.

Τώρα, έστω x και y δύο κορυφές του ενεπίπεδου γραφήματος G. Ο **wbw**-περίπατος μεταξύ x και y, που λέγεται επίσης (x, y)-**wbw** *περίπατος*, είναι ένας (e_x, e_y)-**wbw** περίπατος τέτοιος ώστε οι ακμές e_x και e_y να είναι προσπίπτουσες στις κορυφές x και y, αντίστοιχα. Η *απόσταση τοίχο-τοίχο μεταξύ x και y*, που γράφεται ως $\mathbf{wbw}_G(x, y)$, είναι ο αριθμός ακμών στο συντομότερο (x, y)-**wbw** περίπατο, αν ένας τέτοιος περίπατος υπάρχει, αλλιώς ισούται με το άπειρο (στην περίπτωση που δεν υπάρχει μονοπάτι στο G που συνδέει τα x και y). Μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει ότι αν $\mathbf{wbw}_G(x, y) \leq k$ για κάποιον ακέραιο k, τότε υπάρχει ένα *μονοπάτι τοίχο-τοίχο*, δηλαδή ένας **wbw** περίπατος του οποίου οι ακμές σχηματίζουν ένα άκυκλο υπογράφημα του G. Ξανά, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς **wbw**-*μονοπάτι* και (x, y)-**wbw**-*μονοπάτι*. Παρατήρησε, ότι αφού οι ακμές του **wbw**-μονοπατιού είναι διαφορετικές και διαδοχικές ακμές είναι διπλανές, οι ακμές ενός **wbw**-μονοπατιού σχηματίζουν στην πραγματικότητα μια κάμπια.

Παρατήρησε επίσης ότι η απόσταση τοίχο-τοίχο, ή συντομότερα **wbw**-απόσταση, φράζεται κάτω από την κοινή απόσταση σε γραφήματα. Παρόλα αυτά, η διαφορά μεταξύ της τιμής των δύο μετρικών μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλη. Για να γίνει αυτό αντιληπτό παρατήρησε την απόσταση από δύο μη γειτονικές κορυφές ενός αστεριού (δες επίσης το Σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1: Η κοινή απόσταση και η **wbw**-απόσταση από δύο κορυφές ενός αστεριού

Η παρακάτω παρατήρηση παρέχει ένα εύκολο τρόπο να εκφράσουμε την **wbw**-απόσταση σε συνάρτηση της κοινής απόστασης και εμπλέκει το μέσο γράφημα ενός γραφήματος (για έναν ορισμό του μέσου γραφήματος δες τον

Ορισμό 2.2.2).

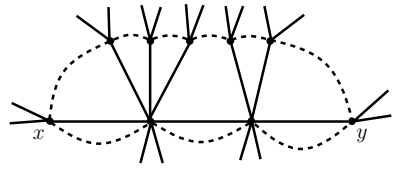
Παρατήρηση 6.1. Έστω G ένα ενεπίπεδο γράφημα και έστω M_G το μέσο του γράφημα. Έστω επίσης x και y δύο κορυφές στο G και έστω f_x και f_y οι όψεις του M_G αντίστοιχες στα x και y αντίστοιχα. Τότε η απόσταση τοίχο-τοίχο μεταξύ των x και y στο G είναι κατά ένα μεγαλύτερη από την ελάχιστη απόσταση στο M_G ανάμεσα σε μια κορυφή στο σύνορο του f_x και μια κορυφή στο σύνορο στο f_y.

Θα αποδείξουμε την πρόταση παρακάτω, που συνεπάγεται άμεσα την ορθότητα της Παρατήρησης 6.1. Παρατήρησε, ότι υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στις κορυφές του μέσου γραφήματος M_G ενός ενεπίπεδου γραφήματος G και στις ακμές του G. Σημειώνουμε αυτή την αντιστοιχία βψ $\phi : V(M_G) \to E(G)$.

Πρόταση 6.1.2. *Έστω ένα 2-συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα G και δύο κορυφές $x, y \in V(G)$. Ισχύει ότι* **wbw**$(x, y) \leq k$ *αν και μόνο αν υπάρχουν δύο κορυφές $x_e, y_e \in V(M_G)$ τέτοιες ώστε να υπάρχει ένα απλό $x_e y_e$-μονοπάτι μήκους το πολύ k και οι ακμές $e_x = \phi(x_e)$ και $e_y = \phi(y_e)$ του G είναι προσπίπτουσες στα x και y, αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι **wbw**$(x, y) = k$. Έστω $P = e_1 e_2 \ldots e_k$ ένα **wbw**-μονοπάτι, όπου οι ακμές e_1 και e_k είναι προσπίπτουσες στα x και y, αντίστοιχα. Αφού κάθε δύο διαδοχικές ακμές e_i, e_{i+1} του P είναι διπλανές, υπάρχει μια ακμή στο μέσο γράφημα M_G που συνδέει τις αντίστοιχες κορυφές $v_i, v_{i+1} \in V(M_G)$ και αντίστροφα. Συνεπώς, στο μέσο γράφημα M_G υπάρχει ένα απλό μονοπάτι μήκους το πολύ k που περνά από τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$, όπου $e_i = \phi(v_i), (1 \leq i \leq k)$. Η άλλη κατεύθυνση του λήμματος έπεται από τα ίδια επιχειρήματα. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μια πρόταση που παρέχει ένα ακόμα εναλλακτικό ορισμό για την **wbw**-απόσταση. Ας θυμηθούμε ότι ένας βρόχος είναι μια κλειστή καμπύλη Jordan που συναντά τον σχεδιασμό ενός ενεπίπεδου γραφήματος μόνο σε κορυφές και ότι το μήκος του είναι ακριβώς ο αριθμός των κορυφών που συναντά (δες επίσης τον Ορισμό 2.2.3). Ονομάζουμε έναν βρόχο *απλό* αν φράζει έναν ανοιχτό δίσκο $\Delta \in \mathbb{S}_0$, που δεν περιέχει κορυφές από το G και το ενεπίπεδο γράφημα $G \cap (\Delta \cup N)$ είναι συνεκτικό. Η εξής πρόταση συσχετίζει την **wbw**-απόσταση δύο κορυφών σε ένα γράφημα, με το μήκος ενός απλού βρόχου που περνά από αυτές τις δύο κορυφές.



Σχήμα 6.2: Ένας απλός βρόχος στην περιφέρεια μιας κάμπιας

Πρόταση 6.1.3. *Έστω ένα 2-συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα G και δύο κορυφές $x, y \in V(G)$. Ισχύει ότι* $\mathbf{wbw}(x, y) \leq k$ *αν και μόνο αν υπάρχει ένας απλός βρόχος N μήκους το πολύ $k+1$ που συναντά τις κορυφές x και y.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{wbw}(x, y) = k$, δηλαδή το συντομότερο (x, y)-**wbw**-μονοπάτι αποτελείται από k ακμές. Όπως σημειώθηκε παραπάνω, κάθε **wbw**-μονοπάτι είναι μια κάμπια. Αφού οι διαδοχικές ακμές στο **wbw**-μονοπάτι είναι διπλανές, κάθε δύο φύλλα της κάμπιας που εμφανίζονται διαδοχικά στο **wbw**-μονοπάτι είναι κορυφές προσπίπτουσες στην ίδια όψη του G. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ένας βρόχος N που περικλείει ακριβώς τις ακμές της κάμπιας στο σχεδιασμό του G. (δες και το Σχήμα 6.2). Παρατήρησε ακόμα ότι ο βρόχος N είναι απλός και ότι $|N| \leq k+1$.

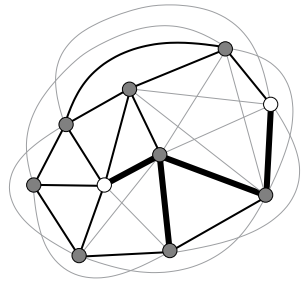
Τώρα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας απλός βρόχος N μήκους $k+1$ που συναντά τις κορυφές x και y. Από τον ορισμό ενός απλού βρόχου, το N φράζει έναν ανοιχτό δίσκο $\Delta \in \mathbb{S}_0$, που δεν περιέχει κορυφές από το G και το ενεπίπεδο γράφημα $G_N = G \cap (\Delta \cup N)$ είναι συνεκτικό. Αφού το G_N είναι συνεκτικό, υπάρχει ένα απλό μονοπάτι P μεταξύ x και y στο G_N. Για κάθε κορυφή $v \in V(P)$ προσθέτουμε τις ακμές σε όλους τους γείτονες στο G_N. Στο γράφημα που προκύπτει μπορεί να εμφανίζονται τρίγωνα, δηλαδή κύκλοι μήκους 3. Παρατήρησε ότι η ύπαρξη πιο μακρυών κύκλων δεν είναι δυνατή. Καθένα από αυτά τσ τρίγωνα περιέχει μια ακμή του μονοπατιού P. Η διαγραφή από αυτές τις ακμές έχει ως αποτέλεσμα μια κάμπια. Αυτή η κάμπια ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του (x, y)-**wbw**-μονοπατιού. Αφού $V(G_N) = k+1$, ο αριθμός ακμών στην κάμπια είναι το πολύ k. □

6.2 Η κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων

Θεωρούμε δυνάμεις ενός ενεπίπεδου γραφήματος σε συνάρτηση με τη νέα μετρική. Έστω H ένα απλό ενεπίπεδο γράφημα και έστω λ ένας θετικός ακέραιος. Για $\lambda \geq 1$, ορίζουμε το γράφημα H^λ ως ένα γράφημα με σύνολο κορυφών $V(H)$ και σύνολο ακμών $E(H) \cup \tilde{E}$, όπου το $\tilde{E}$ περιέχει όλα τα ζεύγη $\{x, y\}$ που δεν ανήκουν στο $E(H)$ και τέτοια ώστε $\mathbf{wbw}_H(x, y) \leq \lambda$. Το γράφημα που προκύπτει είναι πάλι απλό.

Ορισμός 6.2.1. Έστω λ ένας θετικός ακέραιος. Λέμε ότι ένα γράφημα G είναι *λ-ισόπεδο*, αν είναι ένα υπογράφημα του H^λ για κάποιο επίπεδο γράφημα H.

Παρατήρησε ότι, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, τα 1-επίπεδα γραφήματα είναι ακριβώς τα επίπεδα γραφήματα. Για ένα παράδειγμα ενός 2-επίπεδου γραφήματος δες το Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Τα γραφήματα H και H^2 (οι αχνές ακμές είναι οι ακμές του H^2 που δεν ανήκουν στο H). Παρατήρησε ότι κάθε **wbw**-μονοπάτι ανάμεσα στις δύο άσπρες κορυφές στο H έχει μήκος τουλάχιστον 4 (ένα από αυτά τα μονοπάτια απεικονίζεται από τις τονισμένες ακμές).

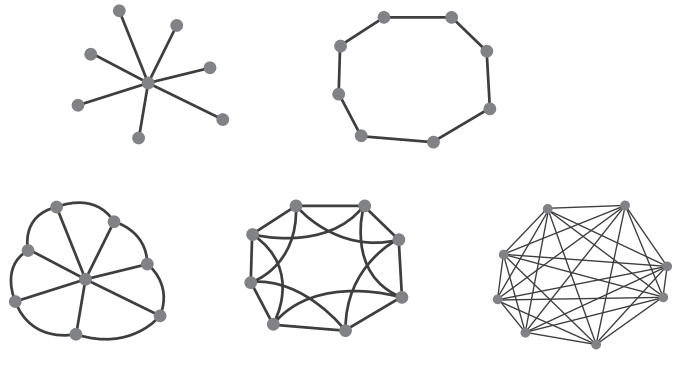
Μέρος του κινήτρου για τον ορισμό της νέας μετρικής και την κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων αποκαλύτεται από τις εξής απλές παρατηρήσεις. Χρησιμοποιώντας κοινές μετρικές γραφημάτων για δυνάμεις γραφημάτων, όπως η απόσταση συντομότερου μονοπατιού ή η απόσταση συντομότερου μονοπατιού στο ακτινικό γράφημα (ακτινική απόσταση), παίρνοντας ακόμα και το τετράγωνο ενός ενεπίπεδου γραφήματος δημιουργεί μεγάλες κλίκες.

Για παράδειγμα, έστω H_1 ένα αστέρι με n κορυφές. Για κάθε δύο κορυφές στο H_1, υπάρχει ένα απλό μονοπάτι μήκους το πολύ 2 που τα συνδέει.

Έτσι, το τετράγωνο του H_1 είναι μια κλίκα K_n, αν η δύναμη του γραφήματος κατασκευάζεται σε συνάρτηση με την μετρική συντομότερου μονοπατιού (την κοινή απόσταση στα γραφήματα). Έστω τώρα H_2 ένας κύκλος σε $n-2$ κορυφές. Σε συνάρτηση με την ακτινική απόσταση, το τετράγωνο του H_2 είναι πάλι η κλίκα K_n. Με τα ίδια γραφήματα ως είσοδο, προκύπτει ότι η **wbw**-απόσταση έχει μια πιο επιλεκτική συμπεριφορά, όταν πρόκειται για την κατασκευή δυνάμεων γραφημάτων (δες επίσης Σχήμα 6.4). Πιο γενικά, έχουμε την εξής ιδιότητα των λ-ισόπεδων γραφημάτων.

Παρατήρηση 6.2. Για κάθε επίπεδο γράφημα H και κάθε θετικό ακέραιο λ, το μέγιστο μέγεθος μιας κλίκας στο H^λ φράζεται από μια συνάρτηση του λ.

Πράγματι, για κάθε κορυφή ενός δοσμένου ενεπίπεδου γραφήματος και για κάθε ακμή προσπίπτουσα σε αυτή την κορυφή, μόνο ένας φραγμένος αριθμός κορυφών (το πολύ εκθετικός σε συνάρτηση του λ) βρίσκονται σε **wbw**-απόσταση το πολύ λ.



Σχήμα 6.4: Τα γραφήματα H_1 (ένα αστέρι) και H_2 (ένας κύκλος) και τα τετράγωνά τους ως προς την **wbw**-απόσταση και τις κοινές αποστάσεις.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένα γράφημα είναι ξ-σχεδόν επίπεδο αν μπορεί να σχεδιαστεί στη σφαίρα με το πολύ ξ διασταυρώσεις ανά ακμή. Το εξής θεώρημα διατυπώνει το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου, που συνδέει αυτές τις δύο κλάσεις γραφημάτων.

Θεώρημα 6.2.2. *Οι κλάσεις των λ-ισόπεδων γραφημάτων και των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων είναι παραμετρικά ισοδύναμες.*

Ας θυμηθούμε ότι από την Πρόταση 5.1.2, τα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα είναι αραιά. Τότε, μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.2.2 είναι ότι τα λ-ισόπεδα γραφήματα έχουν επίσης φραγμένο αριθμό ακμών.

Πόρισμα 6.2.3. *Κάθε λ-ισόπεδο γράφημα σε n κορυφές έχει $O_\lambda(n)$ ακμές.*

Από τον ορισμό, τα λ-ισόπεδα γραφήματα είναι κλειστά ως προς υπογραφήματα (δηλαδή ένα υπογράφημα ενός λ-ισόπεδου γραφήματος είναι επίσης λ-ισόπεδο). Παρόμοια με την περίπτωση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων, αποδεικνύουμε ανεξάρτητα ότι αυτό δεν ισχύει για τοπολογικά ελάσσονα και συνθλίψεις.

Πόρισμα 6.2.4. *Για κάθε $\lambda \geq 2$, τα λ-ισόπεδα γραφήματα δεν είναι κλειστά ούτε ως προς τοπολογικά ελάσσονα ούτε ως προς συνθλίψεις.*

Απόδειξη. Έστω K_n ένα πλήρες γράφημα που δεν είναι λ-ισόπεδο, για κάποιον ακέραιο λ (μια τέτοια τιμή για n υπάρχει από το Πόρισμα 6.2.3). Θα δείξουμε ότι ένα 2-ισόπεδο γράφημα G_n περιέχει την κλίκα K_n ως τοπολογικό ελάσσον/σύνθλιψη.

Για την περίπτωση της σχέσης του τοπολογικού ελάσσονος, κατασκευάζουμε το G_n ως εξής. Έστω H_n η επίπεδη μετατροπή μιας εμβάπτισης του K_n. Έστω επίσης G_n το γράφημα που προκύπτει από το τρίτο βήμα της επίπεδης μετατροπής του K_n στο H_n, δηλαδή προτού διαγράψουμε το ζεύγος από τεμνόμενες ακμές. Από την κατασκευή, το γράφημα G_n περιέχει το K_n ως τοπολογικό ελάσσον. Τώρα ισχυριζόμαστε ότι το G_n είναι 2-ισόπεδο. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, παρατήρησε το ενεπίπεδο γράφημα H_n. Για κάθε ζεύγος από διαγραμένες τεμνόμενες ακμές (x, y) και (u, v), το H_n έχει μια όψη που φράζεται από τον κύκλο $xuyv$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathbf{wbw}_{H_n}(x, y) = 2$ και $\mathbf{wbw}_{H_n}(u, v) = 2$. Έτσι το H_n^2 περιέχει όλες τις διαγραμένες ακμές. Αυτό συνεπάγεται ότι $G_n \subseteq H_n^2$ και συνεπώς το G_n είναι 2-ισόπεδο.

Για την περίπτωση της σχέσης της σύνθλιψης, κατασκευάζουμε το G_n ως εξής. Έστω H_n μια $(2n \times n^2)$-σχάρα και έστω $G_n \subseteq H_n^2$. Σίγουρα, το G_n είναι ένα 2-ισόπεδο γράφημα. Ακόμα, είναι γνωστό ότι το H_n^2 μπορεί να συνθλιβεί σε μια κλίκα n κορυφών και συνεπώς το ίδιο ισχύει για το G_n. □

Από το Πόρισμα 6.2.3, δεν υπάρχει λ τέτοιο ώστε όλα τα γραφήματα να είναι λ-ισόπεδα. Επιπλέον, από το Θεώρημα 6.2.2, για κάθε γράφημα υπάρχει

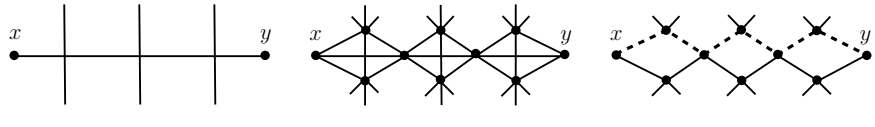
ένα λ, έτσι ώστε αυτό το γράφημα να είναι λ-ισόπεδο. Ορίζουμε τις εξής δύο συναρτήσεις από γραφήματα σε ακέραιους

$$\boldsymbol{\lambda}(G) = \min\{\lambda \mid To\ G \text{ είναι } \lambda\text{-ισόπεδο}\} \text{ και}$$
$$\boldsymbol{\xi}(G) = \min\{\xi \mid \text{Το } G \text{ είναι } \xi\text{-σχεδόν επίπεδο}\}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2.2, οι δύο συναρτήσεις **λ** και **ξ** είναι παραμετρικά ισοδύναμες, δηλαδή η μια φράζεται από μια συνάρτηση της άλλης. Αυτό σημαίνει ότι η μετρική από την απόστασης τοίχο-τοίχο μας επιτρέπει να θεωρούμε τις εμβαπτίσεις ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων ως υπογραφήματα δυνάμεων ενεπίπεδων γραφημάτων. Το υπόλοιπο αυτής της ενότητας αφιερώνεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.2. Το πρώτο λήμμα βεβαιώνει ότι κάθε ξ-σχεδόν επίπεδο γράφημα μπορεί να ειδωθεί ως ένα λ-ισόπεδο γράφημα.

Λήμμα 6.2.5. *Έστω G ένα απλό ξ-σχεδόν επίπεδο γράφημα με n κορυφές, Τότε, υπάρχει ένα γράφημα H σε $O_\xi(n)$ κορυφές τέτοιο ώστε $G \subseteq_\tau H^{2\xi}$ μέσω ενός μονομορφισμού $\tau : V(G) \to V(H)$, όπου κάθε κορυφή στο H είναι σε* **ωβω**-*απόσταση το πολύ ξ από κάποια κορυφή του $\tau(V(G))$.*

Απόδειξη. Έστω H η επίπεδη μετατροπή του G. Θεώρησε μια ακμή $(x, y) \in E(G)$ που τέμνεται $\xi' \leq \xi$ φορές. Παρατήρησε ότι για μια τέτοια ακμή, είναι αρκετό να την υποδιαιρέσουμε με $\xi' - 1$ επιπρόσθετες κορυφές. Τότε, από



a. Crossed edge b. Subdivision and cycles c. **wbw**-path in H

Σχήμα 6.5: Ακμή που τέμνεται k φορές και **wbw**-μονοπάτι μήκους $2k$.

την κατασκευή, στο H υπάρχει ένα (x, y)-**wbw**-μονοπάτι μήκους 2ξ (για μια απεικόνιση δες το Σχήμα 6.5). Έτσι, $G \subseteq H^{2\xi}$. Ακόμα, κάθε κορυφή σε αυτό το μονοπάτι έχει **wbw**-απόσταση το πολύ ξ από είτε το x ή το y. Και αφού όλες οι κορυφές του H που δεν ανήκουν στο $\tau(V(G))$ σχηματίζονται ως υποδιαιρέσεις μιας ακμής του G, κάθε κορυφή στο H είναι σε **ωβω**-απόσταση το πολύ ξ από κάποια κορυφή του $\tau(V(G))$. □

Σημείωσε ότι η απόδειξη του λήμματος συνεπάγεται έναν αλγόριθμο, που δεδομένου ενός τέτοιου γραφήματος G εξάγει ένα γράφημα H με τις ιδιότητες που περιγράφηκαν σε $O_\xi(n)$ βήματα.

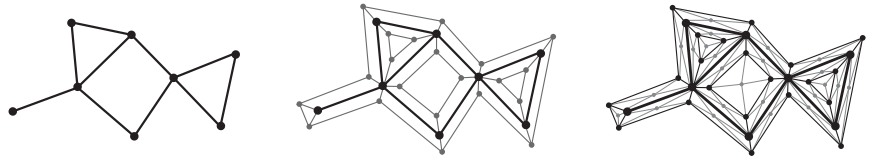
Συνεχίζοντας, θέλουμε να δείξουμε ότι στην αντίθετη κατεύθυνση, κάθε λ-ισόπεδο γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί στη σφαίρα με λίγες διασταυρώσεις ανά ακμή. Αφού αυτό δεν είναι τόσο άμεσο, θα πρέπει να κάνουμε ένα πρώτο βήμα ενισχύοντας τις ιδιότητες ενός δοσμένου ενεπίπεδου γραφήματος. Το επόμενο λήμμα περιγράφει μια διαδικασία που μετατρέπει κάθε ενεπίπεδο γράφημα σε ένα που φέρει τα ζητούμε να χαρακτηριστικά. Για αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το ακτινικό ενός ενεπίπεδου γραφήματος, δηλαδή το γράφημα με κορυφές αντίστοιχες στις όψεις του ενεπίπεδου γραφήματος και ακμές που συνδέουν μια νέα κορυφή στις κορυφές από το σύνορο της αντίστοιχης όψης (για έναν ορισμό του ακτινικού γραφήματος, δες τον Ορισμό 2.2.2).

Λήμμα 6.2.6. *Έστω H ένα απλό και συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα. Τότε, υπάρχει ένα απλό ενεπίπεδο γράφημα H_Δ και ένας μονομορφισμός $\tau : V(H) \to V(H_\Delta)$ τέτοια ώστε*

1. *το H_Δ είναι 3-συνεκτικό και τριγωνοποιημένο,*
2. *$H \subseteq_\tau H_\Delta$,*
3. *για κάθε $x, y \in V(H)$ ισχύει ότι $\mathbf{wbw}_{H_\Delta}(x, y) \leq 4 \cdot \mathbf{wbw}_H(x, y)$,*
4. *κάθε κορυφή στο H_Δ είναι σε $\mathbf{wbw}$-απόσταση το πολύ 4 από κάποια κορυφή του $\tau(V(H))$,*
5. *για κάθε μη αρνητικό ακέραιο λ, $H^\lambda \subseteq H_\Delta^{4\lambda}$ (όπου $H_\Delta^{4\lambda} = (H_\Delta)^{4\lambda}$).*

Απόδειξη. Για κάθε κορυφή v του H, όπου Σ_v συμβολίζει την κυκλική τάξη των ακμών του, ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Αν ο βαθμός $d(v)$ δεν είναι λιγότερο από δύο, προσθέτουμε $|d(v)|$ κορυφές και τις συνδέουμε με το v, έτσι ώστε μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών ακμών στο Σ_v τώρα να βρίσκεται μια νέα ακμή. Αλλιώς , αν $d(v) = 1$, προσθέτουμε δύο κορυφές καιτις συνδέουμε με το v και αν $d(v) = 0$ (δηλαδή το G είναι μόνο μια κορυφή), προσθέτουμε τρεις κορυφές και τις συνδέουμε με το v. Στη συνέχεια, για κάθε όψη f στη δοσμένη εμβάπτιση του H, προσθέτουμε ακμές ανάμεσα στις νέες κορυφές που βρίσκονται τώρα μέσα στο f, οι οποίες σχηματίζουν ένα κύκλο που φράζει ένα κενό ανοιχτό δίσκο στη σφαίρα.

Σημείωσε ότι στην διαδικασία που περιγράψαμε, όλες οι ακμές που προστέθηκαν μπορούν να σχεδιαστούν έτσι ώστε να μην διασταυρώνονται η μια με την άλλη



Σχήμα 6.6: Ένα παράδειγμα της μετατροπής ενός γραφήματος H στα γραφήματα $\overline{H}$ και H_Δ (στον σχεδιασμό του H_Δ παραλείπουμε την κορυφή που αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη του $\overline{H}$ και τις προσπίπτουσες ακμές).

ή με ήδη υπάρχουσες ακμές. Έτσι, το γράφημα $\overline{H}$ που προκύπτει είναι πάλι ενεπίπεδο.

Παρατήρησε ότι έχουμε περιστοιχίσει κάθε ακμή του H με δύο ακόμα ακμές στο $\overline{H}$, κατά τρόπο που κάθε ζεύγος κορυφών στο $\overline{H}$, συνδέεται από τουλάχιστον τρία ξένα μονοπάτια. Άρα, το $\overline{H}$ είναι 3-συνεκτικό.

Θεώρησε τώρα μια συγκεκριμένη τριγωνοποίηση του $\overline{H}$, την οποία σημειώνουμε ως H_Δ, και που είναι η ένωση του $\overline{H}$ και του ακτινικού του $R_{\overline{H}}$, δηλαδή το γράφημα με σύνολο κορυφών $V(R_{\overline{H}})$ και σύνολο ακμών $E(H) \cup E(R_{\overline{H}})$. Αφού το H είναι ένα απλό γράφημα, όλες οι όψεις του $\overline{H}$ είναι ανοιχτοί δίσκοι με τουλάχιστον 3 κορυφές στο σύνορο τους. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα H_Δ είναι επίσης 3-συνεκτικό και συνεπώς ικανοποιεί τις πρώτες δύο ιδιότητες του λήμματος.

Έστω x, y δύο τυχαίες κορυφές στο H. Θεώρησε ένα (x, y)-**wbw**-μονοπάτι P στο H μήκους $\lambda' \leq \lambda$. Κατασκευάζουμε το αντίστοιχο **wbw**-μονοπάτι P_Δ στο H_Δ όπου, για κάθε δύο διαδοχικές ακμές e_i, e_{i+1} του P, ακολουθούμε τα βήματα παρακάτω. Οι ακμές e_i, e_{i+1} είναι διπλανές στο H. Έστω w το κοινό τους άκρο. Από την κατασκευή, μεταξύ τους βρίσκεται μια ακμή του $\overline{H}$, ας πούμε το $\overline{e}$. Προσθέτουμε αυτή την ακμή στο μονοπάτι P_Δ. Αφού το $\overline{H}$ είναι 3-συνεκτικό, οι ακμές $(e_i, \overline{e})$ και $(\overline{e}, e_{i+1})$ είναι προσπίπτουσες σε δύο διαφορετικές όψεις του $\overline{H}$. Προσθέτουμε τις δύο ακμές του $R_{\overline{H}}$ που έχουν για ένα άκρο την κορυφή w και για το άλλο κορυφές του $R_{\overline{H}}$ στις όψεις του $\overline{H}$ προσπίπτουσες στα $(e_i, \overline{e})$ και $(\overline{e}, e_{i+1})$. Παρατήρησε, ότι η ακολουθία ακμών που προκύπτει είναι ένα (x, y)-**wbw**-μονοπάτι στο H_Δ. Αφού προσθέσαμε τρεις ακμές ανάμεσα σε κάθε δύο διαδοχικές ακμές του P και το μήκος του P είναι λ', το μήκος του (x, y)-**wbw**-μονοπατιού P_Δ στο H_Δ είναι $4\lambda' - 3$ και η ιδιότητα 3 ισχύει. Σημείωσε, ότι αυτό επίσης άμεσα συνεπάγεται την ιδιότητα 5.

Για να γίνει αντιληπτό ότι η ιδιότητα 4 ισχύει, ας θυμηθούμε ότι αν μια κορυφή v του $H_\triangle$ δεν είναι στο $\tau(V(H))$, τότε είτε $v \in V(\overline{H}) \setminus \tau(V(H))$ οπότε $\mathbf{wbw}(v,x) = 1$ για μια κορυφή $x \in \tau(V(H))$, ή $v \in V(R_{\overline{H}})$ οπότε $\mathbf{wbw}(v,y) = 1$ για μια κορυφή $y \in V(\overline{H})$. Στη χειρότερη περίπτωση, ένα **wbw**-μονοπάτι μήκους 4 στο $H_\triangle$ συνδέει το v με μια κορυφή στο $\tau(V(H))$. □

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε με το δεύτερο βήμα, δηλαδή να δείξουμε ότι ένα γράφημα όπως αυτό που περιγράφεται στο προηγούμενο λήμμα έχει ένα σχεδιασμό στη σφαίρα με λίγες διασταυρώσεις ανά ακμή.

Λήμμα 6.2.7. *Έστω H ένα n κορυφών 3-συνεκτικό τριγωνοποιημένο επίπεδο γράφημα και λ ένας θετικός ακέραιος. Τότε, υπάρχει μια εμβάπτιση του H^λ με το πολύ 2^λ διασταυρώσεις ανά ακμή.*

Απόδειξη. Έστω ένα ενεπίπεδο γράφημα H και ένας ακέραιος $\lambda \geq 1$. Οι ακμές του $E(H)$ λέγονται *παλιές* ακμές του H^λ ενώ οι ακμές στο $E(H^\lambda) \setminus E(H)$ λέγονται *νέες* ακμές του H^λ.

Θεώρησε δύο τυχαίες κορυφές $x, y \in V(H_\triangle)$ με $\mathbf{wbw}_{H_\triangle}(x,y) \leq \lambda$, δηλαδή τέτοιες που να υπάρχει ένα (x,y)-**wbw**-μονοπάτι $(e_1, e_2, \ldots, e_\ell)$, $\ell \leq \lambda$. Κατά συνέπεια, πρέπει να σχεδιάσουμε μια νέα ακμή e στο $H^\lambda_\triangle$ που να συνδέει τα x και y. Έστω e_1 και e_ℓ προσπίπτουσες στα x και y, αντίστοιχα. Αφού διαδοχικές ακμές στο **wbw**-μονοπάτι είναι προσπίπτουσες σε μια όψη, για κάθε $1 \leq i \leq \ell - 1$, οι ακμές e_i και e_{i+1} χαρακτηρίζουν με μοναδικό τρόπο την κοινή όψη f_i. Σχεδιάζουμε το e στο f_1 διασταυρώνοντας το e_2. Τότε, το e διαπερνά την f_2 διασταυρώνοντας την e_3 και ούτω καθεξής, ώσπου φτάνει στο y μέσω της $f_{\ell-1}$. Έτσι, συνολικά η e περνά από $\ell - 1 < \lambda$ όψεις.

Παρατήρησε ότι, για κάθε νέα ακμή που διασταυρώνει μια παλιά ακμή e και εισέρχεται σε μια όψη f, υπάρχουν τρεις πιθανότητες: είτε διασταυρώνει μια από τις άλλες δύο παλιές ακμές προσπίπτουσες στην f ή τελειώνει στην κορυφή του τρίγωνου που βρίσκεται απέναντι από την e. Αφού σε ένα τριγωνοποιημένο γράφημα όλες οι κορυφές σε **wbw**-απόσταση από το πολύ 2 είναι ήδη συνδεδεμένες, αυτό συνεπάγεται ότι από κάθε κορυφή v του $H^\lambda_\triangle$ μπορούμε να φτάσουμε με νέες ακμές το πολύ $2^{\lambda-2} - 1$ άλλες κορυφές, ανά κάθε όψη προσπίπτουσα στη v. Υπολογίζοντας προσεχτικά, εξάγουμε ότι κάθε παλιά ακμή μπορεί να τέμνεται από το πολύ $(\lambda - 3) \cdot 2^{\lambda-2} + 1$ νέες ακμές.

Τώρα, ας μετρήσουμε πόσες φορές οι νέες ακμές μπορεί να τέμνονται. Πρώτα έχουμε ότι ο συνολικός αριθμός από νέες ακμές που περνούν μια όψη του $H_\triangle$ είναι το πολύ $(3\lambda - 6) \cdot 2^{\lambda-3}$. Κατά υπερβολή, υποθέτουμε ότι κάθε νέα ακμή

τέμνεται μέσα στην όψη από όλες τις ακμές που εισέρχονται, δηλαδή μια νέα ακμή τέμνεται μέσα στην όψη το πολύ $(3\lambda-6)\cdot 2^{\lambda-3}-1$ φορές. Κάθε νέα ακμή περνά από το πολύ $\lambda-1$ όψεις και τέμνει επιπρόσθετα το πολύ $\lambda-2$ παλιές ακμές. Συνεπώς, κάθε νέα ακμή τέμνεται το πολύ $(\lambda-1)\cdot(3\lambda-6)\cdot 2^{\lambda-3}<2^{\lambda}$ φορές. □

Παρόμοια όπως πριν, σημειώνουμε ότι τα Λήμματα 6.2.6 και 6.2.7 είναι κατασκευαστικά. Πράγματι, οι αποδείξεις περιγράφουν στην πραγματικότητα γραμμικού χρόνου αλγόριθμους (ως προς τον αριθμό των κορυφών των δοσμένων γραφημάτων) που εξάγουν το ζητούμενο τριγωνοποιημένο γράφημα και την εμβάπτιση με λίγες διασταυρώσεις ανά ακμή, αντίστοιχα.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα λήμματα αποδεικνύουμε το εξής πόρισμα, που άμεσα συνεπάγεται το Θεώρημα 6.2.2.

Πόρισμα 6.2.8. *Για κάθε γράφημα G, $\boldsymbol{\lambda}(G)/2 \le \boldsymbol{\xi}(G) \le 2^{8\cdot\boldsymbol{\lambda}(G)}$.*

Απόδειξη. Έστω J ένα ενεπίπεδο γράφημα και λ ένας ακέραιος τέτοια ώστε $G \subseteq J^{\lambda}$. Ξωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το J είναι συνεκτικό (αλλιώς, δουλεύουμε με καθεμία από τις συνεκτικές συνιστώσες ξεχωριστά). Έστω H το γράφημα που προκύπτει από το J υποδιαιρώντας μια φορά καθεμία από τις ακμές του. Παρατήρησε ότι το H είναι ένα απλό και συνεκτικό επίπεδο γράφημα όπου $G \subseteq H^{2\cdot\lambda}$. Τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.2.6 απο το οποίο προκύπτει ότι το G είναι ένα υπογράφημα του $H_{\triangle}^{8\lambda}$, για ένα επίπεδο 3-συνεκτικό τριγωνοποιημένο γράφημα $H_{\triangle}$. Από το Λήμμα 6.2.7, μπορούμε να σχεδιάσουμε αυτό το γράφημα στη σφαίρα με το πολύ $2^{8\lambda}$ διασταυρώσεις ανά ακμή. Καταλήγουμε στο ότι $\boldsymbol{\xi}(G) \le 2^{8\cdot\boldsymbol{\lambda}(G)}$. Θεώρησε τώρα μια εμβάπτιση του G με το πολύ $\xi \le \boldsymbol{\xi}(G)$ διασταυρώσεις ανά ακμή. Από το Λήμμα 6.2.5, υπάρχει ένα ενεπίπεδο γράφημα G_0 τέτοιο ώστε $G \subseteq G_0^{2\xi}$, δηλαδή $\boldsymbol{\lambda}(G) \le 2\cdot\boldsymbol{\xi}(G)$. □

6.3 Δενδροπλάτος και λ-ισόπεδα γραφήματα

Λήμμα 6.3.1. *Έστω H ένα 3-συνεκτικό τριγωνοποιημένο γράφημα n κορυφών και έστω λ ένας θετικός ακέραιος. Έστω επίσης $(T,\mathcal{X})$ μια δεντροαποσύνθεση του H. Τότε, υπάρχει μια δεντροαποσύνθεση $(T',\mathcal{X}')$ του H^{λ} όπου $T'=T$, $\mathcal{X}'=\{X'_t \mid t\in V(T')\}$ και τέτοια ώστε για κάθε $t\in V(T)$, $|X'_t|=O_{\lambda}(|X_t|)$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.7, παίρνουμε ένα σχεδιασμό του H^λ στη σφαίρα, τέτοιο ώστε κάθε ακμή να τέμνεται το πολύ 2^λ φορές. Αφού το H είναι επίπεδο, για κάθε κορυφή t στο δέντρο T της αποσύνθεσης του H, ο αριθμός ακμών στην τσάντα X_t είναι $O(|X_t|)$. Τώρα, στη τσάντα X_t προσθέτουμε κάθε νέα ακμή του H^λ που τέμνει στον σχεδιασμό του H^λ κάθε παλιά ακμή του H που περιέχεται στο X_t. Αυτό συνεπάγεται ότι το μέγεθος της τσάντας X'_t που προκύπτει είναι το πολύ $O(2^\lambda)$ φορές το μέγεθος του X_t. Συνεπώς, υπάρχει μια συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $t \in V(T)$, $|X'_t| \leq f(\lambda) \cdot |X_t|$.

Το σύνολο κορυφών στο H και H^λ είναι το ίδιο, που συνεπάγεται ότι η ένωση όλων των συνόλων στο $\mathcal{X}' = \{X'_t \mid t \in V(T)\}$ περιέχει πάλι κάθε κορυφή του H^λ. Για $\lambda > 2$, στον σχεδιασμό του H^λ κάθε νέα ακμή τέμνει τουλάχιστον μια παλιά ακμή, ενώ αν $\lambda \leq 2$ τότε $H \cong H^\lambda$, αφού το H είναι μια τριγωνοποίηση. Συνεπώς, για κάθε νέα ακμή υπάρχει ένα σύνολο στο $\mathcal{X}'$ που περιέχει αυτή την ακμή.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια κορυφή v στο γράφημα H. Το ίχνος της στο δέντρο T της αποσύνθεσης του H, δηλαδή το υπογράφημα εναγόμενο από τις κορυφές του T αντίστοιχες στα σύνολά του $\mathcal{X}$ που περιέχουν το v, είναι ένα υποδέντρο T_v. Σημειώνουμε ως $E_v \subseteq E(H^\lambda)$ το σύνολο των νέων ακμών που είναι προσπίπτουσες στο v. Λόγω αυτών των ακμών, σύμφωνα με τη διαδικασία παραπάνω, η κορυφή v θα προστεθεί σε όλες τις τσάντες που περιέχουν μια παλιά ακμή που τέμνεται από μια ακμή στο E_v.

Έστω e_i μια ακμή στο E_v και έστω $f \in E(H)$ μια παλιά ακμή που τέμνεται από το e_i. Όπως για κάθε άλλη ακμή του H, ισχύει ότι το ίχνος του f στο T είναι ένα υποδέντρο T_f, αφού είναι η τομή δύο υποδέντρων, τα ίχνη των άκρων του. Αφού το H είναι μια τριγωνοποίηση, είτε το f είναι η μόνη παλιά ακμή που τέμνεται από το e_i, ή υπάρχει μια άλλη παλιά ακμή $f' \in E(H)$ που τέμνεται από το e_i, τέτοια ώστε τα f και f' ανήκουν στο ίδιο τρίγωνο του H. Και γιατί ένα τρίγωνο είναι μια κλίκα, υπάρχει μια τσάντα της δεντροαποσύνθεσης του H που περιέχει και τα δύο f και f'. Άρα, η αντίστοιχη κορυφή στο T ανήκει και στα δύο υποδέντρα T_f και $T_{f'}$. Αυό εγγυάται, ότι η ένωση του T_f και του $T_{f'}$ είναι πάλι ένα υποδέντρο. Έπεται ότι το ίχνος της ακμής e_i στο T είναι ένα υποδέντρο. Το σημειώνουμε ως T_i.

Αφού το v είναι ένα άκρο του e_i υπάρχει μια παλιά ακμή f_i που τέμνεται από το e_i, που ανήκει μαζί με το v στο ίδιο τρίγωνο του H. Όπως πριν, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια τσάντα X_i της δεντροαποσύνθεσης του H που περιέχει και τα δύο f_i και v. Ας συμβολίσουμε την αντίστοιχη κορυφή του δέντρου T ως

t_i. Τότε, αυτό συνεπάγεται ότι $t_i \in T_i$, καθώς και $t_i \in T_v$.

Αν το e_i δεν είναι η μόνη ακμή στο E_v, τότε για κάθε άλλη ακμή e_j στο E_v έχουμε παρόμοια ένα υποδέντρο T_j και μια κορυφή t_j στο T, τέτοια ώστε το T_j να είναι το ίχνος του e_j και το t_j να ανήκει και στα δύο T_v και T_j. Άρα, υπάρχει ένα μονοπάτι στο T_v από το t_i στο t_j και η ένωση των T_i, T_j και T_v είναι πάλι ένα υποδέντρο στο T. Έπεται, ότι το υπογράφημα εναγόμενο από τις κορυφές του $T' = T$ αντίστοιχες στα σύνολα του $\mathcal{X}'$ που περιέχουν το v είναι ένα υποδέντρο, που συνεπάγεται ότι το ζεύγος $(T', \mathcal{X}')$ είναι η ζητούμενη δεντροαποσύνθεση του H^λ. □

Λήμμα 6.3.2. *Έστω H ένα απλό ενεπίπεδο γράφημα και λ ένας θετικός ακέραιος. Τότε $\mathbf{tw}(H^\lambda) \leq O_\lambda(\mathbf{tw}(H))$.*

Απόδειξη. Αν το δοσμένο γράφημα είναι ένα 3-συνεκτικό τριγωνοποιημένο γράφημα, από το Λήμμα 6.3.1, δεν υπάρχει τίποτα περισσότερο για να δειχθεί. Στην αντίθετη περίπτωση, καλούμε το Λήμμα 6.2.6 για να κατασκευάσουμε ένα 3-συνεκτικό τριγωνοποιημένο γράφημα H_Δ, όπως περιγράφεται εκεί. Απομένει να δειχτεί ότι $\mathbf{tw}(H_\Delta) \leq O(\mathbf{tw}(H))$.

Σημειώνουμε πάλι ως $\overline{H}$ το 3-συνεκτικό γράφημα, που υπηρετεί ως ένα ενδιάμεσο βήμα στην κατασκευή του H_Δ (δες επίσης το Σχήμα 6.2). Θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε ενεπίπεδο γράφημα H ισχύει ότι $\mathbf{tw}(\overline{H}) \leq O(\mathbf{tw}(H))$.

Μετατρέπουμε μια δεντροαποσύνθεση του H πλάτους k σε μια αποσύνθεση του $\overline{H}$ πλάτους $O(k)$. Έστω xy μια τυχαία ακμή του H. Όπως ήδη έχουμε δείξει, το $\overline{H}$ περιέχει δύο ακμές $x'y'$ και $x''y''$, τέτοιες ώστε οιx', x'' και y', y'' είναι γειτονικές στις x και y, αντίστοιχα. Σε κάθε τσάντα της δεντροαποσύνθεσης του H που περιέχει την ακμή xy προσθέτουμε τις κορυφές x', x'', y' και y''. Αφού το H είναι επίπεδο, ο αριθμός ακμών σε μια τσάντα της δεντροαποσύνθεσης του H είναι $O(k)$. Έτσι, για κάθε τσάντα της δεντροαποσύνθεσης του H, η αντίστοιχη τσάντα στην δεντροαποσύνθεση του $\overline{H}$ αποτελείται από $O(k)$ κορυφές. Προφανώς, για κάθε κορυφή/ακμή του $\overline{H}$ υπάρχει μια τσάντα στην δεντροαποσύνθεση του $\overline{H}$ που περιέχει αυτή την κορυφή/ακμή. Από την κατασκευή, η ιδιότητα της συνέχειας της αποσύνθεσης του H εγγυάται την συνέχεια της επεκταμένης αποσύνθεσης (δηλαδή αν $t, t', t'' \in V(T)$ και τα t' βρίσκεται στο μονοπάτι του T μεταξύ t και t'' τότε $S_t \cap S_{t''} \subseteq S_{t'}$).

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι $\mathbf{tw}(H_\Delta) = O(\mathbf{tw}(\overline{H}))$. Όπως πριν αφήνουμε τις τσάντες της δεντροαποσύνθεσης του $\overline{H}$ να μεγαλώσουν ώστε να περιέχουν όλες τις επιπλέον κορυφές του H_Δ. Έστω f μια τυχαία όψη του $\overline{H}$ και έστω v_f

η κορυφή στο H_Δ αντίστοιχη του f. Σε κάθε τσάντα της δεντροαποσύνθεσης του $\overline{H}$ που περιέχει μια ακμή προσπίπτουσα στο f προσθέτουμε την κορυφή v_f. Ξανά, η επιπεδότητα του $\overline{H}$ βεβαιώνει ότι το πλάτος της αποσύνθεσης που προκύπτει είναι $O(k)$. Κάθε κορυφή και κάθε ακμή περιέχεται σε κάποια τσάντα. Ακόμα, αφού το $\overline{H}$ είναι 2-συνεκτικό, οι ακμές που φράζουν κάθε όψη του $\overline{H}$ σχηματίζουν ένα κύκλο. Αυτό συνεπάγεται την ιδιότητα της συνέχειας της δεντροαποσύνθεσης του H_Δ. Καταλήγοντας, ισχύει ότι $\mathbf{tw}(H_\Delta) \leq O(\mathbf{tw}(H))$. □

Έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι από το Πόρισμα 5.1.5, η κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων έχει φραγμένο τοπικό δεντροπλάτος. Είναι τότε μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.2.2 ότι το ίδιο ισχύει για τα λ-ισόπεδα γραφήματα επίσης. Παρόλα αυτά για την πληρότητα, θα παρουσιάσουμε εδώ μια ανεξάρτητη απόδειξη για αυτό το γεγονός.

Πόρισμα 6.3.3. *Για κάθε θετικό ακέραιο λ, η κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων έχει φραγμένο τοπικό δεντροπλάτος.*

Απόδειξη. Έστω G ένα λ-ισόπεδο γράφημα. Τότε, υπάρχει ένα επίπεδο γράφημα H, τέτοιο ώστε $G \subseteq H^\lambda$. Έπεται, ότι για μια τυχαία κορυφή v του G και έναν ακέραιο r, το εναγόμενο υπογράφημα $G[N_G^r(v)]$ είναι ένα υπογράφημα του $H^\lambda[N_{H^\lambda}^r(v)]$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την r'-γειτονιά του v στο H, δηλαδή το $N_H^{r'}(v)$, όπου $r' = \lambda \cdot (r+1)$. Αφού τα γραφήματα H και H^λ μοιράζονται το ίδιο σύνολο κορυφών, το $N_{H^\lambda}^r(v)$ είναι ένα υποσύνολο της γειτονιάς $N_H^{r'}(v)$ του v στο H. Ακόμα, παρατήρησε ότι το r' είναι αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε κάθε κορυφή στο H σε **wbw**-απόσταση λ από μια κορυφή του $N_{H^\lambda}^r(v)$ να περιέχεται επίσης στο $N_H^{r'}(v)$. Αυτό εγγυάται, ότι όταν πάρουμε την λ δύναμη του υπογραφήματος του H εναγόμενου από τις κορυφές του $N_H^{r'}(v)$, το γράφημα που προκύπτει θα περιέχει όλες τις ακμές του υπογραφήματος του H^λ που ενάγεται από το $N_{H^\lambda}^r(v)$. Καταλήγοντας, το $H^\lambda[N_{H^\lambda}^r(v)]$ είναι ένα υπογράφημα του $(H[N_H^{r'}(v)])^\lambda$.

Το γεγονός ότι το H είναι επίπεδο, συνεπάγεται ότι υπάρχει μια συνάρτηση f, τέτοια ώστε $\mathbf{tw}(H[N_H^{r'}(v)]) \leq f(r')$. Από την άλλη μεριά, από το Λήμμα 6.3.2 παίρνουμε ότι $\mathbf{tw}((H[N_H^{r'}(v)])^\lambda) \leq O_\lambda(\mathbf{tw}(H[N_H^{r'}(v)]))$. Συνδυάζοντας τα τελευταία επιχειρήματα, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{tw}(H^\lambda[N_{H^\lambda}^r(v)]) \leq O_\lambda(f(r))$ και συνεπώς το ίδιο ισχύει για το εναγόμενο υπογράφημα της γειτονιάς του v στο G, συμπληρώνοντας την απόδειξη. □

6.4 Μια εικασία

Είδαμε πως η έννοια των λ-ισόπεδων γραφημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια εναλλακτική για την κλάση των ξ-σχεδόν επίπεδων γραφημάτων. Το πρώτο ερώτημα που προκύπτει είναι αν το εκθετικό φράγμα του Πορίσματος 6.2.3 μπορεί να γίνει πολυωνυμικό.

Εξάλλου, στο τελευταίο κεφάλαιο αποδείξαμε την ύπαρξη ενός υποεκθετικού σχήματος για τα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα· αυτό θα αναβαθμιζόταν σημαντικά στην περίπτωση που η εξής εικασία είναι αληθής.

Εικασία. Έστω G ένα λ-ισόπεδο γράφημα, για κάποιον ακέραιο λ. Τότε, υπάρχει ένα επίπεδο γράφημα H, τέτοιο ώστε $H \subseteq G \subseteq H^{O(\lambda)}$.

Αυτό θα οδηγούσε σε μια απόδειξη, ότι η σχέση μεταξύ του δεντροπλάτους και του μέγιστου μεγέθους μιας σχάρας ως ελάσσον ενός λ-ισόπεδου γραφήματος είναι γραμμική, διευρύνοντας σε μεγάλο βαθμό το φάσμα της εφαρμογής όλων των μετα-αλγοριθμικών αποτελεσμάτων της θεωρίας της διδιαστατότητας σε μη τοπολογικά ορισμένες κλάσεις γραφημάτων, διαγράφοντας ένα σημαντικό βήμα προς αυτή την κατεύθυνση.

Τέλος, πιστεύουμε ότι η κλάση των λ-ισόπεδων γραφημάτων έχει ανεξάρτητο γραφοθεωρητικό ενδιαφέρον. Η φύση της νέας μετρικής της **wbw**-απόστασης προδιαθέτει ότι μπορεί να φανεί χρήσιμη σε έναν αριθμό από περιπτώσεις – για να αναφέρουμε ένα παράδειγμα, είναι η μόνη μετρική (ανάμεσα σε όσες αναφέρθηκαν) που σέβεται την δυικότητα.

Κεφάλαιο 7

Διδιαστατότητα γεωμετρικών γραφημάτων τομής

Έστω $\mathcal{B}$ μια πεπερασμένη συλλογή γεωμετρικών (όχι αναγκαστικά κυρτών) σωμάτων στη σφαίρα. Αυτή η κλάση γεωμετρικών αντικειμένων γενικοποιεί φυσικά τις κλάσεις των δίσκων, των γραμμών, ελλειψοειδών και κυρτών πολύγωνων. Θεωρούμε γεωμετρικά γραφήματα τομών $G_{\mathcal{B}}$, όπου κάθε σώμα της συλλογής $\mathcal{B}$ αντιπροσωπεύεται από μια κορυφή, και δύο κορυφές του $G_{\mathcal{B}}$ είναι γειτονικές αν η τομή των αντίστοιχων σωμάτων είναι μη κενή.

Όπως έχουμε ήδη δει, όταν φυσικοί περιορισμοί ισχύουν, γραφήματα τομών μπορούν να αναπαρασταθούν από γραφήματα που επιδέχονται σχεδιασμό στη σφαίρα με λίγες διασταυρώσεις ανά ακμή. Πιο συγκεκριμένα, αποδείξαμε την ύπαρξη υποεκθετικών αλγορίθμων για μια ποικιλία προβλημάτων που ορίζονται σε αυτή την κλάση γραφημάτων, τα ξ-σχεδόν επίπεδα γραφήματα και δείξαμε πώς αυτά τα αποτελέσματα επεκτείνονται σε γεωμετρικά γραφήματα τομών.

Σε αυτό το κεφάλαιο εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας σε κλάσεις γεωμετρικών γραφημάτων τομών. Για γραφήματα σε αυτές τις κλάσεις και υπό φυσικούς περιορισμούς όπως ο μέγιστος βαθμός τους ή ο αποκλεισμός ενός υπογραφήματος, αποδεικνύουμε ότι η σχέση μεταξύ του δεντροπλάτους και του μέγιστου μεγέθους μιας σχάρας ως ελάσσον είναι γραμμική. Αυτά τα συνδυαστικά αποτελέσματα πετυχαίνουν, για πρώτη φορά, να μεταφέρουν όλα τα μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα της θεωρίας της διδιαστατότητας σε μη τοπολογικά ορισμένες κλάσεις γραφημάτων.

Ας θυμηθούμε ότι σύμφωνα με την διαμόρφωση του τοπίου αυτή τη στιγμή,

χάρη σε ανάλογα συνδυαστικά αποτελέσματα των Demaine και Hajiaghayi [41], το πεδίο, όπου οι μέθοδοι της θεωρίας της διδιαστατότητας μπορούν να εφαρμοστούν, περιλαμβάνει κάθε γράφημα G που αποκλείει κάποιο δεδομένο γράφημα H ως ελάσσον.

Πρόσφατα, ένα πρώτο βήμα για την επέκταση από μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα σε κλάσεις γραφημάτων που δεν είναι τοπολογικά ορισμένες έγινε στο [72], όπου η συνθήκη της διδιαστατότητας χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή από υποεκθετικούς αλγόριθμους για γραφήματα τομών μοναδιαίων δίσκων που αποκλείουν ένα γράφημα H και γραφήματα χαρτών που αποκλείουν ένα γράφημα H, όπου θυμίζουμε μια κλάση γραφημάτων αποκλείει κάποιο δεδομένο γράφημα H αν κανένα από τα γραφήματα της κλάσης δεν περιέχει το H ως υπογράφημα. Παρόλα αυτά, μετα-αλγοριθμικά αποτελέσματα δεν έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα για πιο γενικές κλάσεις γεωμετρικών γραφημάτων τομών, όπως για παράδειγμα γραφήματα τομών πολυγωνικών αντικειμένων στη σφαίρα.

Παρέχουμε έτσι εδώ μια θετική απάντηση στο ανοιχτό, μέχρι τώρα, ερώτημα αν η εφαρμογή της θεωρίας της διδιαστατότητας μπορεί να επεκταθεί για ευρείες, γεωμετρικά (αντί για τοπολογικά) ορισμένες κλάσεις γραφημάτων.

7.1 Η βασική ιδέα

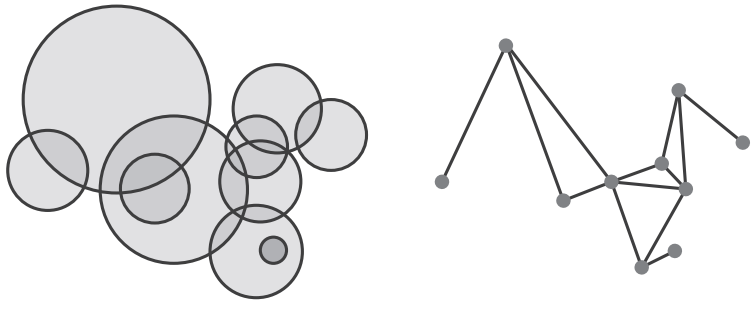
Όπως είχαμε την ευκαιρία να συναντήσουμε αρκετές φορές μέχρι αυτό το σημείο, θεωρώντας ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα σε γραφήματα, για να επωφεληθεί κανείς των καρπών των πολύπλευρων αποτελεσμάτων της θεωρίας της διδιαστατότητας, βρίσκεται κανείς αντιμέτωπος με το ερώτημα κατά πόσο είναι εφικτή η απόδειξη της ύπαρξης της εξής ιδιότητας για μια κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$:

$$\forall_{G\in\mathcal{G}}\ \mathbf{tw}(G) \quad = \quad O(\mathbf{bg_m}(G)) \tag{7.1}$$

Ας θυμηθούμε εδώ ότι η παράμετρος γραφημάτων $\mathbf{bg_m}$ είναι ίση για ένα δοσμένο γράφημα H, με τον μεγαλύτερο ακέραιο k για τον οποίο το H δεν περιέχει την $k \times k$ σχάρα ως ελάσσον και ότι η ιδιότητα 7.1 είναι στην πραγματικότητα η διδιάστατη συνθήκη ως προς ελάσσονα που συζητήθηκε με λεπτομέρεια στην Ενότητα 3.3 (και επαναδιατυπώνεται εδώ για την ευκολία του αναγνώστη). Τότε, αναλόγως τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του προβλήματος που θεωρήθηκε, αυτή η ιδιότητα μπορεί να συνεπάγεται την ύπαρξη υποεκθετικών αλγορίθμων, πολυωνυμικών ή ακόμα και γραμμικών πυρήνων και EPTAS για τον περιορισμό αυτού του προβλήματος στα γραφήματα στην κλάση $\mathcal{G}$ (παρέβαλε επίσης

Ενότητα 3.4).

Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε τη συνθήκη 7.1 για γενικές κλάσεις γεωμετρικών γραφημάτων τομών. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας για παράδειγμα, την περίπτωση που δίνεται μια συλλογή $\mathcal{B}$ δίσκων σχεδιασμένων στη σφαίρα. Εδώ, λέγοντας δίσκους φανταζόμαστε τα γεωμετρικά αντικείμενα, το σύνορο των οποίων είναι ένας κύκλος τυχαίας διαμέτρου, όπως αυτά που απεικονίζονται στο Σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Μια συλλογή από δίσκους σχεδιασμένους στη σφαίρα και το αντίστοιχο γράφημα τομών.

Ας θυμηθούμε τώρα ότι το *γράφημα τομών* $G_{\mathcal{B}}$ του $\mathcal{B}$, είναι ένα γράφημα του οποίου το σύνολο κορυφών είναι το $\mathcal{B}$, και που έχει μια ακμή $\{B_i, B_j\}$ (για $i \neq j$) αν και μόνο αν τα B_i και B_j *ακουμπούν*, δηλαδή $B_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Αρχικά δεν θέτουμε κανένα περιορισμό στον τρόπο που οι δίσκοι τοποθετούνται στη σφαίρα. Θα μπορούσε να βρίσκεται ο ένας πάνω από τον άλλο. Σε αυτή την περίπτωση, το γράφημα τομών θα ήταν μια κλίκα μεγέθους ίσου με τον αριθμό των δίσκων. Γίνεται εμφανές, ότι το ερώτημα αν η συνθήκη 7.1 ισχύει, αποκτά νόημα μόνο κάτω από κάποιο περιορισμό στην τοποθέτηση των δίσκων. Το πρώτο που έρχεται στο μυαλό, είναι πόσους πολλούς άλλους δίσκους κάθε δίσκος μπορεί να ακουμπά, δηλαδή ο μέγιστος βαθμός μιας κορυφής στο γράφημα τομών.

Πιο γενικά πάντως, όχι όλα τα αντικείμενα που θα θέλαμε να θεωρήσουμε δεν είναι αναγκαστικά κυρτά. Στην περίπτωση αυτή, δύο αντικείμενα μπορεί μοιράζονται περισσότερο από μια κοινή περιοχή. Αυτό φαίνεται να είναι μια δεύτερη παράμετρος, που κάποιος πρέπει να εξετάσει. Παρόλα αυτά, μπορούμε συχνά να να ενοποιήσουμε την εξέταση αυτών των δύο πηγών της πολυπλοκότητας

του γραφήματος τομών, ρωτώντας απλά πόσες φορές ένα αντικείμενο τέμνεται με άλλα (και όχι να διαχωρίσουμε αν οι τομές προκαλούνται από το ίδιο ή από διάφορα άλλα αντικείμενα).

Ας παρατηρήσουμε για τη συνέχεια ένα άλλο παράδειγμα, που θα είναι βασικό στην μελέτη μας, όπου τα αντικείμενα που σχηματίζουν τη συλλογή που δίνεται, είναι γραμμές σχεδιασμένες στη σφαίρα. Μια *γραμμή* είναι ένα υποσύνολο της σφαίρας που είναι ομομορφικό στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι αναγκαστικά ευθεία γραμμή, στην πραγματικότητα μπορεί να είναι μια σπείρα ή ένας μαίανδρος, αλλά σε κάθε περίπτωση δεν επιτρέπεται να τέμνει τον εαυτό της. Επιπλέον, στην περίπτωση των εμβαπτίσεων γραφημάτων, υποθέτουμε ότι το πολύ δύο γραμμές μπορούν να τέμνονται στο ίδιο σημείο της σφαίρας (χωρίς ουσιαστική βλάβη της γενικότητας).

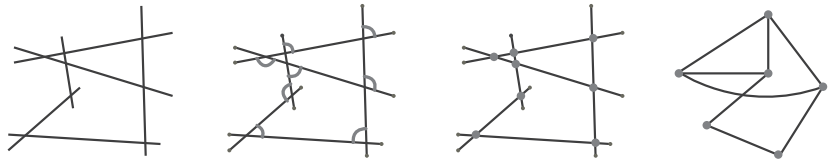
Ενδιαφερόμαστε, φυσικά, για το γράφημα τομών της εν λόγω συλλογής $\mathcal{B}$ γραμμών, αλλά θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική έμμεση προσέγγιση στο ζήτημα. Πρώτα θέλουμε να παρατηρήσουμε τις γραμμές στη σφαίρα, ως μια εμβάπτιση ενός γραφήματος· οι ακμές του θα είναι οι γραμμές και οι κορυφές του τα άκρα των γραμμών. Τότε, με μια διαδικασία παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την αποτύπωση ενός γραφήματος στο Κεφάλαιο 5, για κάθε διασταύρωση από δύο ακμές, προσθέτουμε ένα ζεύγος από νέες κορυφές – κάθε κορυφή υποδιαιρεί μια ακμή – και τις συνδέουμε με μια νέα ακμή. Σημειώνουμε το γράφημα που προκύπτει ως $C_{\mathcal{B}}$.

Το γράφημα $C_{\mathcal{B}}$ έχει δύο είδη ακμών. Τις *παλιές* ακμές, που προέκυψαν υποδιαιρώντας τις αντίστοιχες ακμές στις γραμμές της συλλογής $\mathcal{B}$ και τις *νέες* ακμές, αυτές που προσθέσαμε καθώς συνδέσαμε τις κορυφές των υποδιαιρέσεων.

Τώρα, συνθλίβοντας τις νέες ακμές λαμβάνουμε ένα ενεπίπεδο γράφημα $H_{\mathcal{B}}$, που είναι η αποτύπωση της εμβάπτισης των γραμμών στη σφαίρα. Από την άλλη μεριά, είναι εύκολο να δει κανείς, ότι συνθλίβοντας τις παλιές ακμές, λαμβάνουμε στην πραγματικότητα ένα γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$ της συλλογής $\mathcal{B}$. (Τα γραφήματα $C_{\mathcal{B}}$, $H_{\mathcal{B}}$ και $G_{\mathcal{B}}$ απεικονίζονται στο Σχήμα 7.2.)

Όπως συζητήθηκε παραπάνω, θα είναι αρκετό να θέσουμε ένα περιορισμό στο μέγιστο αριθμό διασταυρώσεων που μια γραμμή της συλλογής μπορεί να έχει, δηλαδή ένα άνω φράγμα που εμπεριέχει κατά κάποιο τρόπο τον παράγοντα πόσες άλλες γραμμές μια γραμμή μπορεί να τέμνει, και πόσες φορές δύο γραμμές μπορούν να τέμνουν η μια την άλλη. Έτσι, ας υποθέτουμε ότι κάθε γραμμή στο $\mathcal{B}$ έχει το πολύ ξ διασταυρώσεις.

Η εικόνα είναι τώρα πλήρης. Έχουμε δύο γραφήματα $H_{\mathcal{B}}$ και $G_{\mathcal{B}}$, που εί-



Σχήμα 7.2: Μια συλλογή ευθείων γραμμών $\mathcal{B}$, το συσχετιζόμενο γράφημα $C_{\mathcal{B}}$, και οι συνθλίψεις του: το ενεπίπεδο γράφημα $H_{\mathcal{B}}$ και το γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$.

ναι και τα δύο συνθλίψεις ενός γραφήματος $C_{\mathcal{B}}$ – για το πρώτο ξέρουμε ότι η συνθήκη της διδιαστατότητας (7.1) ισχύει, αφού το $H_{\mathcal{B}}$ είναι ενεπίπεδο και θέλουμε να συμπεράνουμε ένα αντίστοιχο άνω φράγμα για το δεντροπλάτος του δεύτερου γραφήματος, του γραφήματος τομών $G_{\mathcal{B}}$ ως μια συνάρτηση του ξ. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα πρέπει να δουλέψουμε με ένα μη κοινό ορισμό για τη σχέση ελάσσονος και τη σχέση σύνθλιψης, έναν που ταιριάζει στις συγκεκριμένες ανάγκες της περίπτωσής μας και που επιτρέπει την μεταφορά των ιδιοτήτων για τις οποίες ενδιαφερόμαστε, μεταξύ διαφορετικών συνθλίψεων ενός γραφήματος. Πρώτα όμως, ας δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο της συλλογής γραμμών για να εκφράσουμε συλλογές από πιο γενικά αντικείμενα στη σφαίρα.

7.2 Μοντελοποίηση γεωμετρικών αντικειμένων

Μία *τεθλασμένη γραμμή* C είναι μια γραμμή που είναι ένωση μιας ακολουθίας ευθύγραμμων τμημάτων $\overline{p_1p_2}, \overline{p_2p_3}, \cdots, \overline{p_{k-1}p_k}$ στη σφαίρα, όπου p_1 και p_k είναι τα άκρα του C. Λέμε ότι μία τεθλασμένη γραμμή C *περιέχει* ένα σημείο p_i και *συνδέει* τα άκρα $p_1,\ p_k$, και αναφερόμαστε στα υπόλοιπα σημεία $p_2, p_3, \cdots, p_{k-1}$ ως *σημεία καμπής* του C. Το μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής ορίζεται ως ίσο με τον αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων που περιέχει (δηλαδή ένα περισσότερο από τον αριθμό των σημείων καμπής του). Σε όλο το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι μία τεθλασμένη γραμμή δεν δημιουργεί διασταύρωση με τον ευατό της.

Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ μια συλλογή γεωμετρικών σωμάτων στη σφαίρα. Επίσης υποθέτουμε ότι αν δύο σώματα τέμνουν το ένα το άλλο, τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα της τομής τους έχει μη κενό εσωτερικό. Στόχος μας είναι να συσχετίσουμε κάθε γεωμετρικό σώμα $B_i \in \mathcal{B}$ με μία τεθλασμένη γραμμή C_i τέτοια ώστε το σύνολο $\mathcal{B}'$ τεθλασμένων γραμμών που προκύπτει να μεταφέρει

όλη την απαραίτητη πληροφορία σχετικά με την θέση των σωμάτων πάνω στη σφαίρα και τις τομές τους.

Πρώτα αναθέτουμε σε κάθε σώμα B_i του $\mathcal{B}$ ένα σύνολο σημείων $\mathcal{P}_i$ της σφαίρας με τον εξής τρόπο: Για κάθε σώμα B_i διαλέγουμε ένα σημείο της σφαίρας p_i που βρίσκεται στο B_i και για κάθε σώμα B_j που ακουμπά το B_i $(i \neq j)$ στο $\mathcal{B}$, ένα σημείο p_{ij} που βρίσκεται στο $B_i \cap B_j$. Μπορούμε να υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι αυτά τα σημεία είναι ανά δύο διαφορετικά και ότι οποιαδήποτε τρία από αυτά δεν είναι συγγραμμικά. Τονίζουμε ότι αφού το $\mathcal{B}$ είναι πεπερασμένο αυτή η υπόθεση είναι ασφαλής, γιατί μπορούμε να πάντα θεωρήσουμε έναν ανοιχτό δίσκο D_p μικρής ακτίνας γύρω από οποιοδήποτε δοσμένο σημείο p της σφαίρας, τέτοιο ώστε αν το p βρίσκεται σε ένα σώμα B τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το B με το πιθανώς επεκταμένο σώμα $B' = B \cup D_p$ χωρίς να αλλοιώσουμε το γράφημα τομών του $\mathcal{B}$. Έστω τώρα $\mathcal{P}_i$ το σύνολο όλων των σημείων που περιέχουν το i στον δείκτη που τους ανατέθηκε.

Ορισμός 7.2.1. Ένα γεωμετρικό σώμα B της σφαίρας είναι *ρ-κυρτό*, αν για κάθε δύο σημεία του B υπάρχει μία τεθλασμένη γραμμή μήκους ρ που βρίσκεται εντελώς μέσα στο B και τα άκρα του είναι τα δοσμένα δύο σημεία.

Παρατήρησε, ότι ο ορισμός ενός ρ-κυρτού σώματος με φυσικό τρόπο επεκτείνει τον κοινό ορισμό ενός κυρτού σώματος, που υπό αυτή την νέα οπτική λέγεται επίσης 1-κυρτό.

Λήμμα 7.2.2. *Για κάθε συλλογή ρ-κυρτών σωμάτων $\mathcal{B}$ στη σφαίρα, υπάρχει μια συλλογή τεθλασμένων γραμμών $\mathcal{B}'$ και μια αντιστοιχία $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, τέτοιες ώστε δύο σώματα στο $\mathcal{B}$ ακουμπούν αν και μόνο αν οι αντίστοιχες τεθλασμένες γραμμές στο $\mathcal{B}'$ ακουμπούν. Ακόμα, κάθε τεθλασμένη γραμμή $C \in \mathcal{B}'$ τέμνεται από τις τεθλασμένες γραμμές στο $\mathcal{B}' \setminus C$ το πολύ $\xi = O(\rho^2\Delta^3)$ φορές, όπου Δ είναι ο μέγιστος βαθμός στο γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$ του $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε μια τέτοια συλλογή $\mathcal{B}$ ρ-κυρτών σωμάτων $\{B_1, \ldots, B_k\}$ όπου κάθε σώμα στο $\mathcal{B}$ ακουμπά το πολύ Δ άλλα σώματα, για κάποιους θετικούς ακέραιους ρ και Δ. Προφανώς $|\mathcal{P}_i| \leq \Delta + 1$, για $1 \leq i \leq k$. Παρατήρησε ότι αφού ένα σώμα B_i του $\mathcal{B}$ είναι ρ-κυρτό, για κάθε δύο σημεία στο $\mathcal{P}_i$ υπάρχει μία τεθλασμένη γραμμή μήκους το πολύ ρ που τα συνδέει. Δημιουργούμε τον εξής σχεδιασμό μιας τεθλασμένης γραμμής.

Διαλέγουμε δύο σημεία στο $\mathcal{P}_i$ και τα συνδέουμε με μία τεθλασμένη γραμμή που βρίσκεται στο B_i. Όσο υπάρχουν ακόμα σημεία στο $\mathcal{P}_i$ που δεν συνδέσαμε,

διάλεξε ένα και σύνδεσέ το με ένα $\mathcal{P}_i$ σημείο ή σημείο καμπής του μέχρι τώρα σχεδιασμού, έτσι ώστε η νέα τεθλασμένη γραμμή να μην τέμνει τον μέχρι τώρα σχεδιασμό. Για να γίνει αντιληπτό ότι αυτό είναι δυνατό, θεώρησε ότι αν η τεθλασμένη γραμμή τέμνει ένα ευθύγραμμο τμήμα του σχεδιασμού μέχρι τώρα, μπορούμε απλά να το αντικαταστήσουμε από ένα που συνδέει το νέο σημείο του $\mathcal{P}_i$ σε ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στο σύνορο του ευθύγραμμου τμήματος που αναφέρθηκε.

Στο τέλος παίρνουμε τον σχεδιασμό ενός δέντρου στη σφαίρα που περιέχει όλα τα σημεία στο $\mathcal{P}_i$. Σε κάθε βήμα συνδέσαμε τουλάχιστον ένα νέο σημείο στο $\mathcal{P}_i$, και έτσι εισάγαμε το πολύ $\rho-1$ νέα σημεία καμπής. Έπεται ότι ο σχεδιασμός έχει συνολικά το πολύ $\rho \cdot \Delta + 1$ σημεία καμπής και P_i σημεία.

Τέλος, περιγράφουμε γύρω από τον σχεδιασμό αυτού του δέντρου μία τεθλασμένη γραμμή C_i που περιέχει όλα τα σημεία στο $\mathcal{P}_i$, έτσι ώστε σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα του δέντρου να αντιστοιχούν δύο ευθύγραμμα τμήματα του C_i, και κάθε σημείο καμπής του C_i να βρίσκεται σε έναν ανοιχτό δίσκο μικρής ακτίνας γύρω από το αντίστοιχο σημείο καμπής του σχεδιασμού του δέντρου. Προφανώς η τεθλασμένη γραμμή C_i έχει μήκος το πολύ $2\rho \cdot \Delta$.

Δείξαμε έτσι, ότι για κάθε ρ-κυρτό σώμα $B_i \in \mathcal{B}$, υπάρχει μία τεθλασμένη γραμμή C_i μήκους $O(\rho \cdot \Delta)$, που βρίσκεται εντελώς μέσα στο B_i και περιέχει όλα τα σημεία στο $\mathcal{P}_i$. Η απεικόνιση ενός σώματος B_i σε μία τεθλασμένη γραμμή C_i ορίζει μια αντιστοιχία ϕ μεταξύ των στοιχείων της συλλογής $\mathcal{B}$ και της συλλογής τεθλασμένων γραμμών $\mathcal{B}' = \{C_i : 1 \leq i \leq k\}$. Από την κατασκευή, δύο διαφορετικές τεθλασμένες γραμμές C_i, C_j περιέχουν και οι δύο το σημείο p_{ij} και άρα μοιράζονται όντος ένα σημείο, αν τα αντίστοιχα σώματα B_i, B_j ακουμπούν. Από την άλλη μεριά, αφού οι τεθλασμένες γραμμές βρίσκονται μέσα στα γεωμετρικά σώματα, οι τεθλασμένες γραμμές C_i, C_j μοιράζονται ένα σημείο της σφαίρας μόνο αν τα συσχετιζόμενα σώματα ακουμπούν. Αυτό επίσης συνεπάγεται ότι μία τεθλασμένη γραμμή C_i μοιράζεται το πολύ $O((\rho \cdot \Delta)^2 \cdot \Delta) = O(\rho^2 \cdot \Delta^3)$ σημεία της σφαίρας με άλλες τεθλασμένες γραμμές στο $\mathcal{B}'$, κλείνοντας την απόδειξη. □

Τέλος, εστιάζουμε περισσότερο στα κυρτά σώματα, θεωρώντας ένα α-παχύ κυρτό γράφημα τομών και παρέχοντας μια πιο ακριβή σχέση για το άνω φράγμα σε συνάρτηση της παραμέτρου α και πάλι του μέγιστου βαθμού Δ.

Ας θυμηθούμε ότι από τον Ορισμό 5.4.2, το γράφημα τομών μιας συλλογής $\mathcal{B}$ κυρτών σωμάτων λέγεται α-παχύ αν ο λόγος μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης ακτίνας ενός κύκλου όπου όλα αντικείμενα στο $\mathcal{B}$ μπορούν να περι-

γραφούν, και να εγγραφούν αντίστοιχα, φράζεται άνω από α.

Το εξής λήμμα περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο τα κυρτά σώματα από μια τέτοια συλλογή μοντελοποιούνται από τεθλασμένες γραμμές.

Λήμμα 7.2.3. *Έστω H ένα γράφημα με h κορυφές και έστω $\mathcal{B}$ μια συλλογή κυρτών σωμάτων στη σφαίρα. Αν το γράφημα τομών του $\mathcal{B}$ είναι α-παχύ και δεν περιέχει το γράφημα H ως υπογράφημα, τότε υπάρχει μια συλλογή τεθλασμένων γραμμών $\mathcal{B}'$ και μια αντιστοιχία $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ τέτοιες ώστε δύο σώματα στο $\mathcal{B}$ ακουμπούν αν και μόνο αν οι αντίστοιχες τεθλασμένες γραμμές στο $\mathcal{B}'$ ακουμπούν. Ακόμα, κάθε τεθλασμένη γραμμή $C \in \mathcal{B}'$ τέμνεται από τις τεθλασμένες γραμμές στο $\mathcal{B}' \setminus C$ το πολύ $\xi = O(\alpha^6 \cdot h^3)$ φορές.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε μια τέτοια συλλογή $\mathcal{B}$ κυρτών σωμάτων $\{B_1, \ldots, B_k\}$ όπου το γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$ είναι α-παχύ και έχει μέγιστο βαθμό Δ, για ένα θετικό ακέραιο Δ και ένα θετικό πραγματικό α. Έπεται ότι για ένα σύνολο σημείων $\mathcal{P}_i$ αντίστοιχο σε ένα σώμα B_i του $\mathcal{B}$, ισχύει ότι $|\mathcal{P}_i| \leq \Delta + 1$. Αφού το σώμα B_i είναι κυρτό, υπάρχει μία τεθλασμένη γραμμή C_i μήκους $|\mathcal{P}_i| - 1$ που περιέχει όλα τα σημεία στο $\mathcal{P}_i$, και που βρίσκεται εντελώς στο B_i. Έστω $\mathcal{B}'$ η συλλογή των τεθλασμένων γραμμών $\{C_i : 1 \leq i \leq k\}$. Προφανώς, δύο διαφορετικές τεθλασμένες γραμμές του $\mathcal{B}'$ μοιράζονται ένα σημείο της σφαίρας αν και μόνο αν τα αντίστοιχα σώματα ακουμπούν. Επιπλέον, μία τεθλασμένη γραμμή έχει το πολύ $O(\Delta^3)$ κοινά σημεία με άλλες τεθλασμένες γραμμές στο $\mathcal{B}'$. Από το Λήμμα 5.4.3, ισχύει ότι $\Delta \leq 16\alpha^2 \cdot h$, που συνεπάγεται το φράγμα του λήμματος. □

7.3 Η ανασκευασμένη σχέση ελασσόνων

Έστω G ένα απλό γράφημα. Σημειώνουμε ως G^ℓ το γράφημα που προκύπτει από το G προσθέτοντας μια θηλιά σε καθεμία από τις κορυφές του. Λέμε επίσης ότι ένα υποσύνολο F του $E(G^\ell)$ είναι *σφιχτό*, αν για κάθε $v_1, v_2 \in \bigcup_{e \in F} e$ υπάρχει ένας περίπατος στο G^ℓ από το v_1 στο v_2 που αποτελείται από ακμές στο F και όπου κάθε δεύτερη ακμή είναι μια θηλιά. Ορίζουμε τη σχέση $\preccurlyeq_\phi$ μεταξύ δύο γραφημάτων ως εξής.

Ορισμός 7.3.1. Έστω H και G απλά γραφήματα. Τότε γράφουμε $H \preccurlyeq_\phi G$, αν υπάρχει μια συνάρτηση $\phi : E(G^\ell) \to V(H) \cup E(H) \cup \{\star\}$, τέτοια ώστε

1. για κάθε κορυφή $v \in V(H)$, το $\phi^{-1}(v)$ είναι ένα μη κενό σφιχτό σύνολο,

2. για κάθε δύο διαφορετικές κορυφές $v_1, v_2 \in V(H)$, μια ακμή στο $\phi^{-1}(v_1)$ δεν μοιράζεται ένα κοινό άκρο με μια ακμή στο $\phi^{-1}(v_2)$.

3. για κάθε ακμή $e = \{v_1, v_2\} \in E(H)$ και κάθε ακμή e' στο $\phi^{-1}(e)$, το e' δεν είναι θηλιά και μοιράζεται το ένα άκρο του με μια ακμή στο $\phi^{-1}(v_1)$ και το άλλο με μια ακμή στο $\phi^{-1}(v_2)$.

4. για κάθε $e \in E(H)$, $|\phi^{-1}(e)| = 1$.

Πράγματι, το εξής λήμμα αποκαλύπτει την ισοδυναμία μεταξύ του κλασικού ορισμού για τη σχέση ελάσσονος και αυτού που περιγράφηκε παραπάνω.

Λήμμα 7.3.2. *Αν G και H είναι γραφήματα, τότε $H \preccurlyeq_\phi G$ αν και μόνο αν H είναι ελάσσον του G.*

Απόδειξη. Έστω $H \preccurlyeq_\phi G$. Πρώτα παρατήρησε, ότι από τον ορισμό της συνάρτησης ϕ κάθε θηλιά του G^ℓ είτε απορρίπτεται ή απεικονίζεται σε μια κορυφή του H. Οι συνθήκες (1) και (2) εγγυούνται ότι κάθε δύο κορυφές x, y του H αντιστοιχούν σε ξένα ως προς κορυφές συνεκτικά υπογραφήματα G_x, G_y του G. Ακόμα από την (3), αν $xy \in E(H)$ υπάρχει μια ακμή στο G που συνδέει τα G_x και G_y. Άρα, το H μπορεί να προκύψει από ένα υπογράφημα του G συνθλίβοντας τις ακμές των υπογραφημάτων G_z ($z \in V(H)$) και έτσι είναι ελάσσον του G.

Έστω τώρα ότι το H είναι ελάσσον του G. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα υπογράφημα του G που αποτελείται από ξένα δέντρα $\{T_v \mid v \in V(H)\}$ συν ένα σύνολο ακμών $E = E(H)$, τέτοια ώστε συνθλίβοντας όλες τις ακμές των δέντρων προκύπτει το γράφημα H. Τότε, διαλέγουμε την ϕ ως μια συνάρτηση που απεικονίζει τις ακμές ενός δέντρου T_x καθώς και τις θηλιές στις κορυφές του T_x στο x, τις ακμές του E στο $E(H)$ και όλες τις άλλες ακμές του G^ℓ στο $\star$. □

Δεδομένης της ύπαρξης μιας συνάρτησης ϕ όπως στον Ορισμό 7.3.1, λέμε ότι *το H είναι ένα ϕ-γεννημένο ελάσσον του G*. Προχωρούμε συγκεκριμενοποιώντας τον ορισμό της σχέσης ελάσσονος, για την ειδική περίπτωση που παίρνοντας ένα ελάσσον δεν αυξάνεται η απόσταση μεταξύ δύο ακμών σε ένα γράφημα.

Για αυτόν τον λόγο, και για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε μια πιο γενική εκδοχή του κοινού ορισμού της απόστασης σε γραφήματα, που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε με παρόμοιο τρόπο την απόσταση μεταξύ δύο κορυφών ή δύο ακμών, καθώς και μεταξύ μιας κορυφής και μιας ακμής. Έστω x μια κορυφή ή μια ακμή ενός γραφήματος G και παρόμοια για

το y· η απόστασή τους στο G, που γράφεται ως $\mathbf{dist}_G(x, y)$ είναι το μικρότερο μήκος ενός μονοπατιού στο G που τα περιέχει και τα δύο.

Ορισμός 7.3.3. Λέμε ότι *το H είναι ένα ελάσσον απόστασης του G*, αν το H είναι ένα ϕ-γεννημένο ελάσσον του G και η εξής επιπρόσθετη συνθήκη ισχύει:

5. για κάθε $e_1, e_2 \in E(G) \setminus \phi^{-1}(\star)$, $\mathbf{dist}_H(\phi(e_1), \phi(e_2)) \leq \mathbf{dist}_G(e_1, e_2)$.

Από την άλλη μεριά, αν ο Ορισμός 7.3.1 τροποποιηθεί παραλείποντας την συνθήκη (4) και απαιτώντας ότι $\phi^{-1}(\star) = \emptyset$, τότε προφανώς έχουμε να κάνουμε με τη σχέση σύνθλιψης. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το H *είναι μια ϕ-γεννημένη σύνθλιψη του G*. (Σημείωσε, ότι η συνθήκη (4) δεν είναι μια απαίτηση της ισοδυναμίας με τη σχέση ελάσσονος – παρέβαλε επίσης την απόδειξη του Λήμματος 7.3.2.)

Ορισμός 7.3.4. Έστω c ένας μη αρνητικός ακέραιος. Λέμε ότι το H είναι *c-σύνθλιψη του G* αν το H είναι μια ϕ-γεννημένη σύνθλιψη του G και για κάθε $v \in V(H)$, $G[\phi^{-1}(v)]$ είναι ένα γράφημα από το πολύ c ακμές.

Το επόμενο λήμμα αποκαλύπτει τη σχέση για την παράμετρο του δεντροπλάτους ανάμεσα σε ένα δοσμένο γράφημα G και οποιαδήποτε c-σύνθλιψη του G.

Λήμμα 7.3.5. *Έστω G ένα γράφημα και έστω H μια c-σύνθλιψη του G. Τότε* $\mathbf{tw}(G) \leq (c+1) \cdot (\mathbf{tw}(H) + 1) - 1$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό, αφού το H είναι μια c-σύνθλιψη του G, υπάρχει μια απεικόνιση από κάθε κορυφή του H προς ένα συνεκτικό σύνολο από το πολύ c ακμές στο G, έτσι ώστε συνθλίβοντας αυτά τα σύνολα ακμών να παίρνουμε το H από το G. Τα άκρα από αυτές τις ακμές σχηματίζουν ξένα συνεκτικά σύνολα στο G, που συνεπάγεται μια διαμέριση των κορυφών του G σε συνεκτικά σύνολα $\{V_x \mid x \in V(H)\}$, όπου $|V_x| \leq c + 1$ για κάθε κορυφή $x \in V(H)$.

Θεώρησε τώρα μια δεντροαποσύνθεση $(T, \mathcal{W})$ του H. Ισχυριζόμαστε ότι το ζεύγος $(T, \mathcal{W}')$, όπου $W'_t := \bigcup_{x \in W_t} V_x$ για $t \in T$ είναι μια δεντροαποσύνθεση του G. Προφανώς όλες οι κορυφές του G περιέχονται σε κάποια τσάντα, όπως αντίστοιχα όλες οι κορυφές του H. Κάθε ακμή του G με τα δυο της άκρα στο ίδιο μέρος της διαμέρισης είναι σε μια τσάντα, αφού καθένα από αυτά τα σύνολα κορυφών τοποθετείται ολόκληρο στην ίδια τσάντα. Αν e είναι μια ακμή του G με άκρα σε διαφορετικά μέρη της διαμέρισης, ας πούμε στα V_x και V_y, τότε αυτό συνεπάγεται ότι $xy \in E(H)$. Έτσι, υπάρχει ένας κόμβος t του T για τον οποίο

$x, y \in W_t$ και συνεπώς $e \in W'_t$. Ακόμα, η ιδιότητα της συνέχειας παραμένει ανέπαφη, αφού για κάθε κορυφή $x \in V(H)$ όλες οι κορυφές στο V_x ενάγουν το ίδιο υποδέντρο στο T όπως και το x. □

Το εξής λήμμα είναι το κύριο εργαλείο που παρουσιάζεται σε αυτή την ενότητα και απόδειξή του λειτουργεί και ως παράδειγμα της δύναμης της εφαρμογής του ορισμού που παρουσιάστηκε για τη σχέση ελάσσονος.

Λήμμα 7.3.6. *Έστω A, B, και C γραφήματα τέτοια ώστε το B να είναι μια ψ_1-γεννημένη σύνθλιψη του A και το C να είναι ένα ψ_2-γεννημένο ελάσσον του A για κάποιες συναρτήσεις $\psi_1 : E(A^\ell) \to V(B) \cup E(B)$ και $\psi_2 : E(A^\ell) \to V(C) \cup E(C) \cup \{\star\}$. Αν*

$$\forall_{e \in E(C)} \qquad |\psi_2^{-1}(e) \cap \psi_1^{-1}(E(B))| = 1 \tag{7.2}$$

τότε το C είναι επίσης ελάσσον του B.

Απόδειξη. Ορίζουμε μια συνάρτηση $\phi : E(B^\ell) \to V(C) \cup E(C) \cup \{\star\}$, που με τη σειρά της εγγυάται ότι το C είναι ελάσσον του B. Αρχικά παρατήρησε ότι από την (7.2) υπάρχει ένα υποσύνολο $F_E \subseteq E(B)$ και μια αντιστοιχία η μεταξύ F_E και $E(C)$. Στην πραγματικότητα, για κάθε ακμή e του C ισχύει ότι $\eta^{-1}(e) = \psi_1(\psi_2^{-1}(e))$. Θέτουμε $\phi|_{F_E} = \eta$ και παρατηρούμε ότι το ϕ υποχρεώνεται να απεικονίζει κάθε ακμή από το $F' = E(B^\ell) \setminus F_E$ είτε σε μια κορυφή του C ή στο $\star$.

Έστω τώρα v μια κορυφή του $V(C)$. Ας θυμηθούμε ότι $\psi_2^{-1}(v)$ είναι ένα μη κενό σφιχτό σύνολο ακμών στο A^ℓ, και έτσι ενάγει ένα συνεκτικό υπογράφημα, ας πούμε τοA_v, στο A. Παρατήρησε επίσης ότι κάθε ακμή e_v του C προσπίπτουσα στο v έχει μια μοναδική προεικόνα στο A, που έχει ακριβώς ένα άκρο στο A_v. Επιπλέον, το γράφημα $B_v = B[\psi_1(\psi_2^{-1}(v))]$ είναι ισομορφικό στο γράφημα που προκύπτει αν συνθλίψουμε στο A_v όλες τις ακμές που ανήκουν στο $\psi_1^{-1}(V(B))$. Αφού η σύνθλιψη ακμών δεν βλάπτει την συνεκτικότητα ενός συνόλου ακμών, έπεται ότι το $\psi_1(\psi_2^{-1}(v))$ είναι ένα συνεκτικό σύνολο ακμών στο B και ότι πάλι το B_v είναι συνεκτικό και κάθε ακμή $\psi_1(\psi_2^{-1}(e_v))$ έχει ένα άκρο στο B_v. Θέτουμε $\phi(f) = v$, αν $f \in E(B^\ell)$ είναι μια ακμή του B_v ή μια θηλιά σε μια κορυφή του B_v. Έστω $F_V \subseteq E(B^\ell)$ η ένωση όλων των συνόλων ακμών $\phi^{-1}(v)$, για κάθε $v \in V(C)$ και παρατήρησε ότι $F_E \cap F_V = \emptyset$. Τέλος, θέτουμε $\phi(E(B^\ell) \setminus (F_E \cup F_V)) = \star$. Απομένει να δείξουμε ότι οι τέσσερις συνθήκες του ορισμού ελάσσονος ικανοποιούνται.

Η πρώτη και τέταρτη συνθήκες έπονται άμεσα από τον ορισμό του ϕ. Για τη δεύτερη, υποθέτουμε ότι τα v_1, v_2 είναι δύο διαφορετικές κορυφές του $V(C)$. Θέτουμε $N_A = \psi_2^{-1}(v_1) \cup \psi_2^{-1}(v_2)$ και $N_B = \psi_1(\psi_2^{-1}(v_1)) \cup \psi_1(\psi_2^{-1}(v_2))$. Παρατήρησε ότι το $B[N_B]$ είναι ισομορφικό στο γράφημα που προκύπτει από το $A[N_A]$ αφού συνθλίψουμε όλες τις ακμές του που ανήκουν στο $\psi_1^{-1}(V(B))$. Αφού το $A[N_A]$ είναι ένα μη συνεκτικό γράφημα, το ίδιο ισχύει και για το $B[N_B]$. Συνεπώς το N_B είναι μη συνεκτικό.

Για την τρίτη, έστω $e = (v_1, v_2) \in E(C)$. Προφανώς το $\phi^{-1}(e)$ δεν είναι θηλιά αφού ανήκει στο F_E. Ακόμα, στο A, ένα άκρο του $e' = \psi_2^{-1}(e)$ είναι στο $A[\psi_2^{-1}(v_1)]$ και το άλλο είναι στο $A[\psi_2^{-1}(v_2)]$. Έτσι, το $M_A = \psi_2^{-1}(v_1) \cup \{e'\} \cup \psi_2^{-1}(v_2)$ είναι ένα συνεκτικό σύνολο του A ενώ το $M_A \setminus \{e'\}$ δεν είναι. Θέτουμε $M_B = \psi_1(\psi_2^{-1}(v_1)) \cup \{e''\} \cup \psi_1(\psi_2^{-1}(v_2))$, όπου $e'' = \phi^{-1}(e)$ και παρατηρούμε ότι το $B[M_B]$ είναι ισομορφικό στο γράφημα που προκύπτει από το $A[M_A]$ αφού συνθλίψουμε όλες τις ακμές που ανήκουν στο $\psi_1^{-1}(V(B))$ κατά τρόπο που, σε αυτό τον ισομορφισμό, το e' αντιστοιχεί στην ακμή e''. Αυτό σημαίνει ότι το M_B είναι ένα συνεκτικό σύνολο του B ενώ το $M_B \setminus \{e''\}$ δεν είναι. Συμπεραίνουμε ότι το ένα άκρο του e'' ανήκει στο $\phi^{-1}(v_1)$ και το άλλο ανήκει στο $\phi^{-1}(v_2)$, όπως απαιτείται. □

7.4 Η συνθήκη της διδιαστατότητας

Ας θυμηθούμε ότι ένα γράφημα H είναι μια *μερική τριγωνοποίηση* ενός ενεπίπεδου γραφήματος G, αν το G είναι ένα παραγόμενο υπογράφημα του H και το H είναι ενεπίπεδο. Το εξής αποτέλεσμα έπεται από το [92].

Πρόταση 7.4.1 ([92]). *Έστω r ένας θετικός ακέραιος. Τότε, κάθε επίπεδο γράφημα με δεντροπλάτος τουλάχιστον $4.5 \cdot r$ περιέχει μια μερική τριγωνοποίηση της $r \times r$ σχάρας ως σύνθλιψη.*

Αποδεικνύουμε την ανάλογη εκδοχή του λήμματος, για την περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με τη σχέση ελάσσονος απόστασης.

Λήμμα 7.4.2. *Έστω G ένα επίπεδο γράφημα και k ένας ακέραιος. Αν $\mathbf{tw}(G) \geq 18 \cdot k$ τότε το G περιέχει μια $k \times k$ σχάρα ως ελάσσον απόστασης.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 7.4.1, το γράφημα G περιέχει μια μερική τριγωνοποίηση P μιας $(4k \times 4k)$ σχάρας ως σύνθλιψη. Ισχυριζόμαστε ότι η $k \times k$ σχάρα L_k είναι ένα ϕ-γεννημένο ελάσσον απόστασης του P, όπου η συνάρτηση

$\phi : E(P^\ell) \to V(L_k) \cup E(L_k) \cup \{\star\}$ ορίζεται ως εξής. Για κάθε κορυφή $v_{i,j}$ του L_k, με $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, το σύνολο $\phi^{-1}(v)$ περιέχει τις τρεις θηλιές στις κορυφές του P με συντεταγμένες $(k+2i, k+2j)$, $(k+2i-1, k+2j)$, $(k+2i, k+2j-1)$ και τις δύο ακμές που συνδέουν αυτές τις τρεις κορυφές. Το σύνολο $\phi^{-1}(E(L_k))$ περιέχει όλους τους δυνατούς υποψήφιους από τις ακμές της υποβόσκουσας σχάρας του P, ενώ οτιδήποτε άλλο απεικονίζεται στο $\star$.

Μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει ότι το L_k είναι πράγματι η $k \times k$ σχάρα, και ότι η συνάρτηση ϕ ικανοποιεί τις πρώτες τέσσερις συνθήκες. Απομένει να δείξουμε ότι η συνθήκη (5) επίσης ισχύει. Αρκεί για την ακρίβεια να το δείξουμε αυτό για την περίπτωση της απόστασης κορυφών και το υπόλοιπο έπεται. Θεώρησε, οποιεσδήποτε δύο κορυφές v_1, v_2 στο L_k και έστω η απόσταση τους $\mathbf{dist}_{L_k}(v_1, v_2) = \rho \leq 2k - 2$. Αφού κάθε κορυφή στο P που αντιστοιχεί σε μια κορυφή του L_k έχει απόσταση τουλάχιστον k από μια συνοριακή κορυφή, το συντομότερο μονοπάτι στο P που περιέχει τα $\phi^{-1}(v_1)$ και $\phi^{-1}(v_2)$ έχει μήκος τουλάχιστον το μισό του μήκους του συντομότερου μονοπατιού στην υποβόσκουσα σχάρα, δηλαδή $\frac{1}{2} \cdot 2\rho \geq \rho$. □

Ονομάζουμε *μέρος ενός μονοπατιού* κάθε ακολουθία από γειτονικές ακμές σε ένα δοσμένο μονοπάτι. Η εξής πρόταση διατυπώνει ένα κάπως τεχνικό αλλά απλό συμπέρασμα, που θα μας χρειαστεί στην απόδειξη του επόμενου λήμματος.

Πρόταση 7.4.3. *Έστω G ένα γράφημα και έστω $V_1, \ldots, V_r$ μια διαμέριση των κορυφών του G, τέτοια ώστε για κάθε $i \in \{1, \ldots, r\}$, το $G[V_i]$ είναι ένα συνεκτικό γράφημα, και για κάθε $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ υπάρχει μια ακμή του G με ένα άκρο στο V_i και ένα άκρο στο V_{i+1}. Έστω επίσης $s \in V_1$ και $t \in V_r$. Τότε το G έχει ένα μονοπάτι από s στο t με ένα μέρος P μήκους τουλάχιστον $\beta - \alpha + 2$, όπου $1 \leq \alpha < \beta \leq r$, έτσι ώστε το P δεν περιέχει καμία ακμή στο $G[V_i]$ για $i \in \{1, \ldots, \alpha - 1\} \cup \{\beta + 1, \ldots, r\}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ έστω $e_i = t_i s_{i+1}$ μια ακμή του G με ένα άκρο t_i στο V_i και το άλλο s_{i+1} στο V_{i+1} και θέτουμε $s_1 = s$ και $t_r = t$. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, r\}$, αφού το $G[V_i]$ είναι ένα συνεκτικό γράφημα, υπάρχει ένα μονοπάτι P_i από το s_i στο t_i που βρίσκεται εντελώς στο $G[V_i]$ (πιθανά το τετριμμένο μονοπάτι από καμία ακμή). Τότε το μονοπάτι $P_1 e_1 \ldots P_{r-1} e_{r-1} P_r$ από το s στο t, με το μέρος του $e_a P_{a+1} \ldots e_{\beta-1} P_\beta e_\beta$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις της πρότασης. □

Το εξής λήμμα εγγυάται την ύπαρξη μιας μεγάλης σχάρας ως ελάσσον σε

κάθε c-σύνθλιψη ενός γραφήματος που περιέχει με τη σειρά του μια μεγάλη σχάρα ως ελάσσον απόστασης.

Λήμμα 7.4.4. *Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα και έστω H μια c-σύνθλιψη του G. Αν το G περιέχει μια $(k \times k)$-σχάρα ως ελάσσον απόστασης, τότε το H περιέχει μια (k', k')-σχάρα ως ελάσσον, όπου $k' = \lfloor \frac{k-1}{2(c+1)} \rfloor + 1$.*

Προοφ. Υποθέτουμε ότι το c είναι ένας περιττός αριθμός και ισοδύναμα αποδεικνύουμε το λήμμα για $k' = \lfloor \frac{k-1}{2c} \rfloor + 1$.

Έστω H μια σ-γεννημένη σύνθλιψη του G για κάποιο $\sigma : E(G^\ell) \to V(H) \cup E(H)$ τέτοια ώστε το $G[\sigma^{-1}(v)]$ να είναι ένα γράφημα από το πολύ c ακμές για κάθε $v \in V(H)$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το G περιέχει μια $(k \times k)$-σχάρα L_k ως ελάσσον απόστασης μέσω μιας συνάρτησης $\phi : E(G^\ell) \to V(L_k) \cup E(L_k) \cup \{\star\}$.

Υποθέτουμε ότι $V(L_k) = \{1, \ldots, k\}^2$ όπου κάθε (i, j) αντιστοιχεί στις συντεταγμένες του στη σχάρα. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η $(k' \times k')$ σχάρα $L_{k'}$ είναι ελάσσον του H. Ορίζουμε $\alpha : \{1, \ldots, k'\} \to \{1, \ldots, k\}$ τέτοιο ώστε $\alpha(i) = 2(i-1)c + 1$. Παρατήρησε ότι ο ορισμός έχει νόημα αφού $2(k'-1)c + 1 \leq k$. Για κάθε $(i, j) \in \{1, \ldots, k'\}^2$, ορίζουμε ένα *οριζόντιο* και ένα *κάθετο* σύνολο κορυφών στο $V(L_k)$,

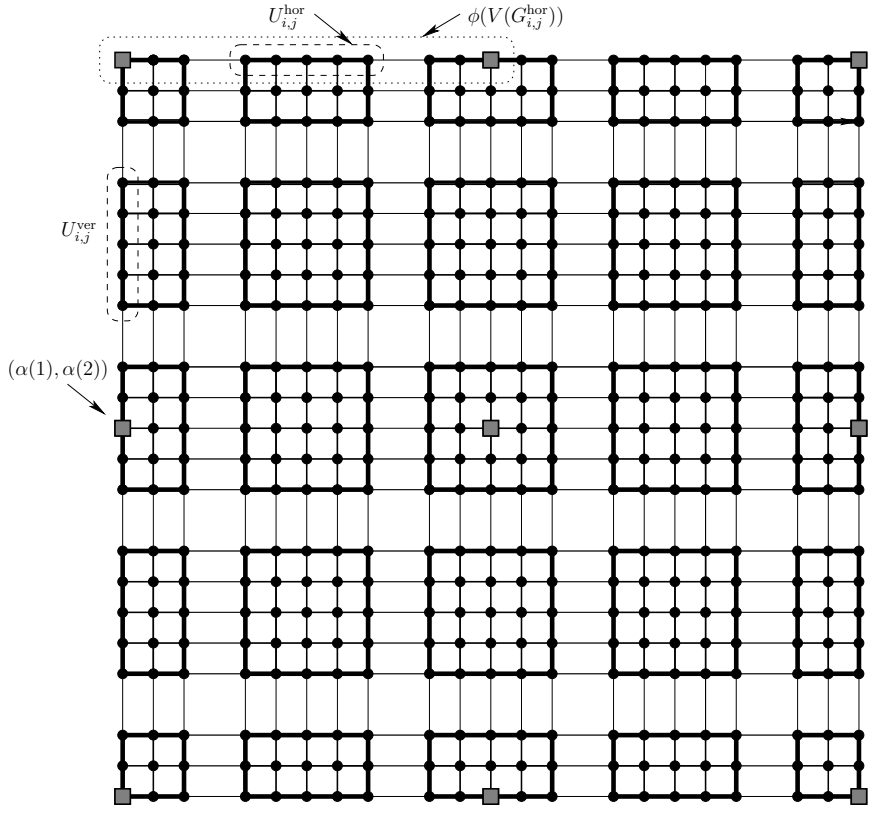
$$U_{i,j}^{\text{hor}} = \bigcup_{r \in \{\alpha(i)+(c+1)/2, \ldots, \alpha(i+1)-(c+1)/2\}} (r, \alpha(j)), \tag{7.3}$$

$$U_{i,j}^{\text{ver}} = \bigcup_{r \in \{\alpha(j)+(c+1)/2, \ldots, \alpha(j+1)-(c+1)/2\}} (\alpha(i), r) \tag{7.4}$$

και έστω $\mathcal{U}$ η συλλογή όλων των συνόλων $U_{i,j}^{\text{hor}}$ ή $U_{i,j}^{\text{ver}}$ που ορίζονται στις (7.3) και (7.4). Για κάθε οριζόντιο (αντίστοιχα κάθετο) $U \in \mathcal{U}$, σημειώνουμε ως $\mathcal{E}(U) \subseteq E(L_k)$ το σύνολο που περιέχει όλες τις οριζόντιες (αντίστοιχα κάθετες) ακμές του L_k με ένα άκρο στο U. Θα αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό:

(∗) *Έστω U_1 και U_2 δύο διαφορετικά σύνολα του $\mathcal{U}$ και έστω e_1, e_2 δύο ακμές του G τέτοιες ώστε $\phi(e_i) \in \mathcal{E}(U_i) \cup U_i$, για $i = \{1, 2\}$. Τότε, δεν υπάρχουν ξένα μονοπάτια μήκους το πολύ c από τα άκρα του e_1 στα άκρα του e_2 στο G.*

Αφού το L_k είναι ένα ελάσσον απόστασης του G, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει κύκλος στο L_k, που να περιέχει τα $\phi(e_1)$ και $\phi(e_2)$ μαζί με δύο μονοπάτια μεταξύ τους μήκους το πολύ c. Ας υποθέσουμε ότι ένας τέτοιος κύκλος υπάρχει.



Σχήμα 7.3: Ένα παράδειγμα της απόδειξης του Λήμματος 7.4.4 για $c = 5$, $k = 21$, και $k' = 3$.

Παρατήρησε ότι από τον ορισμό του $\mathcal{U}$, αν δύο κορυφές x, y του $V(L_k)$ ανήκουν σε δύο διαφορετικά σύνολα του $\mathcal{U}$, τότε $\mathbf{dist}_{L_k}(x, y) \geq c+1$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $\phi(e_i)$ πρέπει να είναι μια ακμή $v_i u_i$ του L_k με μόνο ένα άκρο, ας πούμε το u_i, στο U_i, για $i = \{1, 2\}$, ή αλλιώς έχουμε τελειώσει. Παρόμοια, ισχύει ότι $\mathbf{dist}_{L_k}(u_1, u_2) \geq c+1$ και άρα ένα μονοπάτι μήκους το πολύ c του κύκλου πρέπει να είναι από το v_1 στο u_2, το άλλο από το v_2 στο u_1. Έπεται, ότι οι ακμές $v_1 u_1$ και $v_2 u_2$ δεν μπορούν να είναι και οι δύο ούτε κάθετες ούτε οριζόντιες, και όλες οι κορυφές των δύο ξένων μονοπατιών βρίσκονται μέσα στο τετράγωνο μέρος της σχάρας που αυτές οι δύο ακμές ορίζουν. Αυτό αντιβαίνει στην επιπεδότητα της σχάρας, το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, k'\}^2$ διαλέγουμε τυχαία μια κορυφή $v_{i,j}$ από το γράφημα $G[\phi^{-1}(\alpha(i), \alpha(j))]$. Αυτή η επιλογή δημιουργεί μια συλλογή από $k' \times k'$ κορυφές του G.

Για κάθε ζεύγος $\{(i,j),(i+1,j)\}$ όπου $(i,j) \in \{1,\ldots,k'-1\} \times \{1,\ldots,k'\}$, παρατηρούμε ότι το γράφημα

$$G^{\text{hor}}_{i,j} = G[\bigcup_{i' \in \{\alpha(i),\ldots,\alpha(i+1)\}} \phi^{-1}(i', \alpha(j))]$$

είναι συνεκτικό, και για κάθε $i' \in \{\alpha(i), \ldots, \alpha(i+1)\}$ τα σύνολα $\phi^{-1}(i', \alpha(j))$ σχηματίζουν μια διαμέριση του $V(G^{\text{hor}}_{i,j})$ και υπάρχει μια ακμή του G μεταξύ των $\phi^{-1}(i', \alpha(j))$ και $\phi^{-1}(i'+1, \alpha(j))$. Από την Πρόταση 7.4.3, το $G^{\text{hor}}_{i,j}$ περιέχει ένα μονοπάτι $P^{\text{hor}}_{i,j}$ από το $v_{i,j}$ στο $v_{i+1,j}$ με ένα μέρος μήκους τουλάχιστον $c+1$ στο $\phi^{-1}(\mathcal{E}(U^{\text{hor}}_{i,j})) \cup \phi^{-1}(U^{\text{hor}}_{i,j})$. Προφανώς, μία από τις ακμές σε αυτό το μέρος του μονοπατιού, ας πούμε η $e^{\text{hor}}_{i,j}$, είναι μια ακμή του $\sigma^{-1}(E(H))$. Σημειώνουμε ως $\overrightarrow{P}_{i,j}$ (αντίστοιχα $\overleftarrow{P}_{i+1,y}$) το μέρος του $P^{\text{hor}}_{i,j}$ που ξεκινά από το $v_{i,y}$ (αντίστοιχα το $v_{i+1,y}$) και που περιέχει μόνο ένα άκρο του $e^{\text{hor}}_{i,j}$.

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο όπως πριν αλλά ακολουθώντας την "κάθετη" αντί της "οριζόντιας" κατεύθυνσης, για κάθε ζεύγος $\{(i,j),(i,j+1)\}$ όπου $(i,j) \in \{1,\ldots,k'\} \times \{1,\ldots,k'-1\}$, ορίζουμε το γράφημα

$$G^{\text{ver}}_{i,j} = G[\bigcup_{j' \in \{\alpha(j),\ldots,\alpha(j+1)\}} \phi^{-1}(\alpha(i), j')]$$

και βρίσκουμε το μονοπάτι $P^{\text{ver}}_{i,j}$ σε αυτό, που ξεκινάει από το $v_{i,j}$ και τελειώνει στο $v_{i,j+1}$ και που περιέχει μια ακμή $e^{\text{ver}}_{i,j}$ του $\sigma^{-1}(E(H))$ που ανήκει στο $\phi^{-1}(\mathcal{E}(U^{\text{ver}}_{i,j})) \cup \phi^{-1}(U^{\text{ver}}_{i,j})$. Όπως πριν, το $P^{\text{ver}}_{i,j}$ χωρίζεται σε ένα μονοπάτι $\downarrow P_{i,j}$ (που περιέχει το $v_{i,j}$), την ακμή $e^{\text{ver}}_{i,j}$, και το μονοπάτι $\uparrow P_{i,j+1}$ (που περιέχει το $v_{i,j+1}$). Έστω, τέλος, E^* το σύνολο που περιέχει κάθε $e^{\text{hor}}_{x,y}$ και κάθε $e^{\text{ver}}_{x,y}$.

Από το Λήμμα 7.3.6, για να δειχτεί ότι το $L_{k'}$ είναι ελάσσον του H, είναι αρκετό να ορίσουμε μια συνάρτηση $\tau : E(G^\ell) \to V(L_{k'}) \cup E(L_{k'}) \cup \{\star\}$ που πιστοποιεί ότι το $L_{k'}$ είναι ελάσσον του G κατά τρόπο που $\forall f \in E(L_{k'})\ |\tau^{-1}(f) \cap \sigma^{-1}(E(H)| = 1$. Για αυτό, για κάθε $(x,y) \in \{1,\ldots,k'\}$ ορίζουμε το $E_{x,y}$ ως την ένωση των ακμών και των θηλιών των κορυφών από κάθε μονοπάτι που υπάρχει στο σύνολο $\{\overleftarrow{P}_{x,y}, \overrightarrow{P}_{x,y}, \downarrow P_{x,y}, \uparrow P_{x,y}\}$ και για κάθε $e \in E_{x,y}$ θέτουμε $\tau(e) = (x,y)$. Παρατήρησε ότι για κάθε $(x,y) \in \{1,\ldots,k'\}^2$, το $G[\tau^{-1}(x,y)]$ είναι η ένωση ενός συνόλου μονοπατιών του G που έχει μια κορυφή κοινή, και έτσι ενάγει ένα συνεκτικό υπογράφημα του G. Έστω τώρα e μια ακμή του $L_{k'}$.

Στην περίπτωση που $e = \{(x,y),(x+1,y)\}$ (αντίστοιχα $e = \{(x,y),(x,y+1)\}$), τότε, από τον ορισμό, η ακμή $e^{\text{hor}}_{x,y}$ (αντίστοιχα η $e^{\text{ver}}_{x,y}$) συνδέει ένα άκρο v_1 μιας ακμής στο $\tau^{-1}(x,y)$ (αντίστοιχα στο $\tau^{-1}(x,y)$) με ένα άκρο v_2 μιας ακμής στο $\tau^{-1}(x+1,y)$ (αντίστοιχα στο $\tau^{-1}(x,y+1)$). Σε κάθε περίπτωση, θέτουμε $\tau(v_1v_2) = e$. Έπεται ότι $\tau(E^*) = E(L_{k'})$. Για όλες τις ακμές του G^ℓ των οποίων η εικόνα δεν έχει οριστεί μέχρι τώρα, θέτουμε $\tau(e) = \star$. Μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει ότι η τ είναι μια καλά ορισμένη συνάρτηση και ότι το $L_{k'}$ είναι ένα τ-γεννημένο ελάσσον του G.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι $\forall f \in E(L_{k'})\ |\tau^{-1}(f) \cap \sigma^{-1}(E(H)| = 1$. Για αυτό, παρατήρησε αρχικά ότι, από τον ορισμό του τ, όλες οι ακμές στο $\tau^{-1}(E(L_{k'})) = E^*$ είναι ακμές του $\sigma^{-1}(E(H))$. Συνεπώς,αρκεί να δειχτεί ότι για κάθε $e \in E(H)$, το $\sigma^{-1}(e)$ δεν περιέχει περισσότερο από μια ακμή από το E^*. Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα ότι $e_1, e_2 \in \sigma^{-1}(e) \cap E^*$ και $e_1 \neq e_2$. Αφού $\sigma(e_1) = \sigma(e_2) = e$, έπεται ότι κάθε e_i έχει ένα άκρο w_i στο $\sigma^{-1}(w)$ και ένα άκρο z_i στο $\sigma^{-1}(z)$, όπου $wz = e$. Αφού κάθε υπογράφημα $G[\sigma^{-1}(w)]$ και $G[\sigma^{-1}(z)]$ είναι συνεκτικό, έχει το πολύ c ακμές και είναι μεταξύ τους ξένα, υπάρχουν δύο ξένα μονοπάτια μήκους το πολύ c στο G από το w_1 το w_2 και από το z_1 στο z_2, που αντιβαίνει στο $(*)$ αφού $e_1, e_2 \in E^*$. □

Το τελευταίο λήμμα συνδυάζει τα Λήμματα 7.3.5, 7.4.2 και 7.4.4 στο απόσταγμα των τελευταίων δύο ενοτήτων και την καρδιά της απόδειξης για τη συνθήκη της διδιαστατότητας που ακολουθεί.

Λήμμα 7.4.5. *Έστω H_1 και H_2 δύο γραφήματα. Θεώρησε ένα γράφημα G τέτοιο ώστε το H_1 να είναι μια c_1-σύνθλιψη του G και το H_2 να είναι μια c_2-σύνθλιψη του G. Αν το H_1 είναι επίπεδο τότε $\mathbf{tw}(H_2) = O(c_1 \cdot c_2 \cdot \mathbf{bg_m}(H_2)) = 36 \cdot (c_1+1) \cdot (c_2+1) \cdot [\mathbf{bg_m}(H_2) - 1] + O(c_1)$.*

Απόδειξη. Έστω H_1, H_2 δύο συνθλίψεις του G γεννημένες από κάποιες $\sigma_i : E(G^\ell) \to V(H_i) \cup E(H_i),\ i = 1,2$ αντίστοιχα. Έστω ακόμα ότι $r = \mathbf{tw}(H_2)$. Αφού το G περιέχει το H_2 ως σύνθλιψη, έπεται ότι $\mathbf{tw}(G) \geq r$. Από το Λήμμα 7.3.5, έχουμε ότι $\mathbf{tw}(H_1) \geq (r+1)/(c_1+1) - 1$. Αφού το H_1 είναι επίπεδο, από το Λήμμα 7.4.2, το H_1 περιέχει το $L_{r'}$ ως ελάσσον απόστασης, όπου $r' = \lfloor \frac{1}{18} \cdot (\frac{r+1}{c_1+1} - 1) \rfloor$. Αφού το H_1 είναι μια σύνθλιψη του G, τότε επίσης το G περιέχει το $L_{r'}$ ως ελάσσον απόστασης. Από το Λήμμα 7.4.4, το H_2 περιέχει ως ελάσσον μια (r'', r'')-σχάρα, όπου $r'' = \lfloor \frac{r'-1}{2(c_2+1)} \rfloor + 1$, όπως ζητήθηκε. □

Το εξής θεώρημα είναι βασισμένο στο προηγούμενο λήμμα και διατυπώνει το κύριο τεχνικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου, δηλαδή την επιβεβαίωση της ισχύος της συνθήκης της διδιαστατότητας 7.1 για την κλάση που περιέχει τα γραφήματα τομών συλλογών από γραμμές στη σφαίρα.

Θεώρημα 7.4.6. *Έστω $\mathcal{B}$ ένα σύνολο γραμμών στη σφαίρα τέτοιο ώστε για κάθε $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ με $C_1 \neq C_2$, το σύνολο $C_1 \cap C_2$ να είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων και το πολύ δύο γραμμές να τέμνονται στο ίδιο σημείο. Έστω επίσης $G_{\mathcal{B}}$ το γράφημα τομών του $\mathcal{B}$ και έστω $\xi = \max_{C \in \mathcal{B}} |C \cap \bigcup_{C' \in \mathcal{B} \setminus C} C'|$. Τότε $\mathbf{tw}(G_{\mathcal{B}}) = O(\xi \cdot \mathbf{bg_m}(G_{\mathcal{B}}))$.*

Απόδειξη. Δεδομένου ενός επίπεδου σχεδιασμού των γραμμών του $\mathcal{B}$, θεώρησε οποιαδήποτε διασταύρωση p, που είναι ένα σημείο του επιπέδου και που ανήκει σε περισσότερο από μια γραμμή. Από τις υποθέσεις, το p ανήκει σε ακριβώς δύο γραμμές, ας πούμε τις L_1, L_2 και υπάρχει ένας ανοιχτός δίσκος D του επιπέδου που περιέχει το p, αλλά καμία γραμμή εκτός των L_1 και L_2 και κανένα άλλο σημείο που να ανήκει σε περισσότερο από μια γραμμή. Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι το p δεν είναι άκρο του L_1 ή του L_2· αλλιώς μπορούμε να τεντώσουμε μέσα στο D τη γραμμή που τελειώνει στο p χωρίς να αλλοιώσουμε το υπόλοιπο σκηνικό.

Τότε, έστω G_1 το απλό γράφημα με μια εμβάπτιση στη σφαίρα, στο οποίο όλα τα άκρα γραμμών στο $\mathcal{B}$ είναι κορυφές του G_1 και κάθε γραμμή $L \in \mathcal{B}$ είναι μια ακμή του G_1 που συνδέει τις δύο κορυφές, που είναι άκρα του L. Σημείωσε ότι το γράφημα G_1 δεν είναι αναγκαστικά επίπεδο – στην πραγματικότητα, κάθε διασταύρωση δύο γραμμών στο $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια διασταύρωση των αντίστοιχων ακμών του G_1 σε αυτή την εμβάπτιση.

Για κάθε διασταύρωση p δύο γραμμών L_1, L_2 στο $\mathcal{B}$ και άρα των αντίστοιχων ακμών e_1, e_2 του G_1, μπορούμε να θεωρήσουμε όπως παραπάνω έναν ανοιχτό δίσκο D του επιπέδου κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε $D \cap e = \emptyset$ για κάθε ακμή $e \in E(G_1) \setminus \{e_1, e_2\}$, το μόνο σημείο στο D που ανήκει και στις δυο ακμές είναι το p, καμία κορυφή του G_1 δεν βρίσκεται στο D και όλοι οι δίσκοι που θεωρήσαμε είναι ανά δύο ξένοι. Τότε, υποδιαιρούμε τα e_1 και e_2 προσθέτοντας δύο νέες κορυφές x, y στο $D \setminus \{p\}$ και συνδέουμε τα x και y με μια νέα ακμή f που βρίσκεται εντελώς στο δίσκο D και συναντά τα L_1 και L_2 μόνο στα άκρα τους. Σημειώνουμε ως M το σύνολο από αυτές τις νέες ακμές. Παρατήρησε ότι μπορούμε να συνθλίψουμε την ακμή f μέσα στο δίσκο D έτσι ώστε η κορυφή που προκύπτει να είναι το σημείο p, αφήνοντας την εμβάπτιση του γραφήματος

έξω από το D ανέπαφη. Κάνοντας το ίδιο για κάθε ακμή στο M, παίρνουμε μια επίπεδη εμβάπτιση ενός γραφήματος. Έστω H αυτό το γράφημα και έστω G το γράφημα προτού συνθλίψουμε τις ακμές του M, δηλαδή $G/M = H$. Προφανώς, το H είναι μια 1-σύνθλιψη του G. Ακόμα, αν συνθλίψουμε όλες τις ακμές του G που δεν είναι στο M, παίρνουμε το γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$. Αφού κάθε ακμή του G_1 έχει υποδιαιρεθεί σε το πολύ $\xi + 1$ ακμές του G, το γράφημα $G_{\mathcal{B}}$ είναι μια $(\xi + 1)$-σύνθλιψη του G και το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα 7.4.5. □

7.5 Συμπεράσματα

Εφαρμόζοντας άμεσα το Θεώρημα 7.4.6 στα σύνολα τεθλασμένων γραμμών που κατασκευάστηκαν στο Λήμμα 7.2.2, λαμβάνουμε το εξής θεώρημα για τα ρ-κυρτά γεωμετρικά σώματα.

Θεώρημα 7.5.1. *Έστω $\mathcal{B}$ ένα σύνολο ρ-κυρτών σωμάτων τέτοιο ώστε για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ με $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, το σύνολο $B_1 \cap B_2$ έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω $G_{\mathcal{B}}$ το γράφημα τομών του $\mathcal{B}$ και έστω Δ ο μέγιστος βαθμός του $G_{\mathcal{B}}$. Τότε $\mathbf{tw}(G_{\mathcal{B}}) = O(\rho^2 \Delta^3 \cdot \mathbf{bg_m}(G_{\mathcal{B}}))$.*

Παρόμοια, η άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 7.4.6 στα σύνολα τεθλασμένων γραμμώνπου κατασκευάστηκαν στο Λήμμα 7.2.3 συνεπάγεται το παρακάτω θεώρημα σχετικά με τα α-παχιά κυρτά γραφήματα τομών γεωμετρικών σωμάτων που αποκλείουν ένα γράφημα H.

Θεώρημα 7.5.2. *Έστω H ένα γράφημα σε h κορυφές, και έστω $\mathcal{B}$ μια συλλογή κυρτών σωμάτων στη σφαίρα τέτοια ώστε για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ με $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, το σύνολο $B_1 \cap B_2$ να έχει μη κενό εσωτερικό. Αν το γράφημα τομών $G_{\mathcal{B}}$ του $\mathcal{B}$ είναι α-παχύ και δεν περιέχει το H ως υπογράφημα, τότε $\mathbf{tw}(G_{\mathcal{B}}) = O(\alpha^6 h^3 \cdot \mathbf{bg_m}(G_{\mathcal{B}}))$.*

Παρατήρησε ότι η περίπτωση των γραφημάτων τομών μοναδιαίων δίσκων που αποκλείουν ένα γράφημα H και που εξετάστηκε στο [72] είναι απλώς μια πολύ ειδική περίπτωση του τελευταίου θεωρήματος (τα γραφήματα τομής μοναδιαίων δίσκων είναι 1-κυρτά και 1-παχιά).

Πιστεύουμε ότι το φάσμα της δυνατότητας εφαρμογής των συνδυαστικών αποτελεσμάτων μας είναι ακόμα πιο πλατύ από ότι παρουσιάζεται στην προηγούμενη ενότητα. Η κύρια συνδυαστική μηχανή αυτού του κεφαλαίου είναι το

Λήμμα 7.4.5 που βασικά ενάγει μια έννοια απόστασης μεταξύ γραφημάτων ως προς συνθλιψιμότητα. Αυτό διατυπώνεται από τον εξής ορισμό.

Ορισμός 7.5.3. Έστω G_1 και G_2 γραφήματα. Ορίζουμε την *απόσταση σύνθλιψης μεταξύ* των G_1 και G_2, που γράφεται ως $\mathbf{cdist}(G_1, G_2)$, ως το ελάχιστο c για το οποίο υπάρχει ένα γράφημα H που περιέχει και τα δύο G_1 και G_2 ως c-συνθλίψεις. Δεδομένου ενός γραφήματος G ορίζουμε $\mathcal{B}^c(G) = \{H \mid \mathbf{cdist}(G_1, G_2) \leq c\}$. Τέλος, δεδομένης μια κλάσης γραφημάτων $\mathcal{G}$, ορίζουμε $\mathcal{B}^c(\mathcal{G}) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{B}^c(G)$. Αναφερόμαστε στην κλάση $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ ως την c-επέκταση σύνθλιψης της κλάσης $\mathcal{G}$.

Μια άμεση συνέπεια του Λήμματος 7.4.5 είναι η εξής:

Πόρισμα 7.5.4. *Έστω $\mathcal{P}$ η κλάση των επίπεδων γραφημάτων, τότε για κάθε σταθερά c, η $\mathcal{B}^c(\mathcal{P})$ ικανοποιεί την διδιάστατη ως προς ελάσσονα συνθήκη* (7.1).

Στην πραγματικότητα, το Πόρισμα 7.5.5 μπορεί να επεκταθεί πολύ περισσότερο από τα επίπεδα γραφήματα. Για αυτό, το μόνο που χρειαζόμαστε είναι ανάλογα του Λήμματος 7.4.2 για πιο γενικές κλάσεις γραφημάτων. Χρησιμοποιώντας το κύριο αποτέλεσμα του [68], έπεται ότι το Λήμμα 7.4.2 είναι σωστό για κάθε κλάση γραφημάτων που αποκλείει ένα απόγειο γράφημα ως ελάσσον. Αντικαθιστώντας αυτή την πιο γενική εκδοχή του Λήμματος 7.4.2 στις αποδείξεις της προηγούμενης ενότητας παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 7.5.5. *Έστω H ένα ελεύθερο-απόγειου-ελάσσονος γράφημα και έστω $\mathcal{G}_H$ η κλάση των γραφημάτων που αποκλείουν το H ως ελάσσον. Τότε, για κάθε σταθερά c, η κλάση $\mathcal{B}^c(\mathcal{G}_H)$ ικανοποιεί τη διδιάστατη ως προς ελάσσονα συνθήκη* (7.1).

Όλες οι αλγοριθμικές εφαρμογές αυτού του κεφαλαίου έπονται από το γεγονός ότι όλες οι γεωμετρικές κλάσεις γραφημάτων τομών που θεωρήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο είναι υποσύνολα του $\mathcal{B}^c(\mathcal{P})$ για κάποια επιλογή του c. Προφανώς, το Θεώρημα 7.5.5 παρέχει ένα πολύ πιο ευρύ πλαίσιο για αυτό, που περιλαμβάνει γραφήματα φραγμένου γένους (και γραφήματα τομών γραμμών ή πολυγώνων σε επιφάνειες), γραφήματα που αποκλείουν ένα γράφημα μοναδικής διασταύρωσης, και $K_{3,r}$-ελεύθερα-ελάσσονος γραφήματα. Πιστεύουμε ότι το Θεώρημα 7.5.5, που είναι η πιο γενική συνδυαστική επέκταση των αποτελεσμάτων μας μπορεί να έχει εφαρμογές σε πιο γενικά συνδυαστικά αντικείμενα από τις κλάσεις γραφημάτων τομών. Αφήνουμε αυτό το ερώτημα ανοιχτό για περαιτέρω έρευνα.

Κεφάλαιο 8

Παρεμποδίσεις για το πλάτος μονοπατιού σε μητροειδή

Οι έννοιες πλάτους μονοπατιού και κλαδοπλάτους ορισμένες σε γραφήματα είναι βασικές παράμετροι γραφημάτων που εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές των διακριτών μαθηματικών και της σχεδίασης αλγορίθμων. Η ανάλογη παράμετρος του κλαδοπλάτους σε μητροειδή παρουσιάστηκε από τους Geelen και Whittle στο [80] και μελετήθηκε διεξοδικά στα [78, 80, 95, 96, 107, 111]. Παρόλα αυτά, δεν είναι γνωστά τόσο πολλά για το ανλάλογο της παραμέτρου του πλάτους μονοπατιού σε μητροειδή. Το πλάτος μονοπατιού ενός μητροειδούς ορίστηκε επίσης από τους Geelen, Gerards, και Whittle, αυτή τη φορά στο [81] (δες επίσης [94]) και εξετάστηκε στην εργασία του Kashyap [100] σε συνάρτηση με την πολυπλοκότητα γραμμικών κωδίκων. Επίσης, η δομή συνεκτικών μητροειδών πλάτους μονοπατιού το πολύ 3 εξετάστηκε στο [93, 10].

Δεδομένης μιας κλάσης μητροειδών $\mathcal{K}$, ορίζουμε το *σύνολο παρεμπόδισης* $\mathbf{obs}(\mathcal{K})$ για την κλάση, ως το σύνολο όλων των ελάχιστων ως προς ελάσσονα μητροειδών που δεν ανήκουν στην $\mathcal{K}$. Σημειώνουμε ως $\mathcal{P}_k$ την κλάση όλων των μητροειδών πλάτους μονοπατιού το πολύ k. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετούμε το σύνολο $\mathbf{obs}(\mathcal{P}_k)$ και χαρακτηρίζουμε, για κάθε k, όλα τα μέλη του $\mathbf{obs}(\mathcal{P}_k)$ που είναι μητροειδή κύκλων εξωεπίπεδων γραφημάτων και των δυικών τους.

Ακολουθώντας τον Kashyap [100], ορίζουμε το μητροειδικό πλάτος μονοπατιού, πιο σύντομα *μ-πλάτος μονοπατιού* ενός γραφήματος ως το πλάτος μονοπατιού του μητροειδούς κύκλων του. Όπως παρατηρήθηκε στο [100], το πλάτος μονοπατιού και το μ-πλάτος μονοπατιού ενός γραφήματος είναι διαφορετικές

παράμετροι, ενώ το πλάτος μονοπατιού μπορεί να αναχθεί υπολογιστικά στο μ-πλάτος μονοπατιού.

Δείχνουμε ότι δομικά χαρακτηριστικά του πλάτους μονοπατιού άκυκλων γραφημάτων μεταφέρονται στο μ-πλάτος μονοπατιού εξωεπίπεδων γραφημάτων. Συγκεκριμένα, ορίζουμε μια πράξη, που λέγεται *σύμπτυξη* για "την σύνδεση " τριάδων από μητροειδή και αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα αποσύνθεσης μητροειδών που παρέχει ένα τρόπο κατασκευής μητροειδών πλάτους μονοπατιού τουλάχιστον $k+1$ από μητροειδή πλάτους μονοπατιού τουλάχιστον k. Το αποτέλεσμα μπορεί να ειδωθεί ως το ανάλογο για μητροειδή της πράξης που ορίστηκε στο [136] (δες επίσης [137, 121, 58]) για την περίπτωση του πλάτους μονοπατιού γραφημάτων.

Χρησιμοποιώντας τα συνδυαστικά αποτελέσματά μας, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας μεταξύ άκυκλων παρεμποδίσεων για το γραμμοπλάτος (μια παράμετρο παρόμοια με το πλάτος μονοπατιού για γραφήματα) και τις εξωεπίπεδες παρεμποδίσεις του μ-πλάτους μονοπατιού. Επιτυχαίνουμε έτσι ένα πλήρη χαρακτηρισμό των μελών του $\mathbf{obs}(\mathcal{P}_k)$ που είναι μητροειδή κύκλων εξωεπίπεδων γραφημάτων. Ένα αλγοριθμικό συμπέρασμα των αποτελεσμάτων μας είναι ότι το μ-πλάτος μονοπατιού εξωεπίπεδων γραφημάτων μπορεί να είναι υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο.

8.1 Μητροειδή: μια σύντομη εισαγωγή

Ένα μητροειδές $\mathcal{M}$ είναι ένα συντεταγμένο ζεύγος $(E, \mathcal{I})$, όπου E λέγεται το *σύνολο στοιχείων* και $\mathcal{I}$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων του E, τέτοια ώστε:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$
- αν $I \in \mathcal{I}$ και $I' \subseteq I$, τότε $I' \in \mathcal{I}$
- αν $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ και $|I_1| < |I_1|$, τότε $\exists e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Εδώ υποθέτουμε πάντα ότι το E είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Ονομάζουμε τα υποσύνολα του E στο $\mathcal{I}$ τα *ανεξάρτητα σύνολα* του $\mathcal{M}$ και αυτά εκτός του $\mathcal{I}$ *εξαρτημένα*. Δεδομένου ενός μητροειδούς $\mathcal{M}$, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $E(\mathcal{M})$ και $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ για το σύνολο στοιχείων και τη συλλογή των ανεξάρτητων συνόλων του $\mathcal{M}$, αντίστοιχα. Ονομάζουμε το $E(\mathcal{M})$ επίσης το *σύνολο στήριξης* του $\mathcal{M}$. Αν $E(\mathcal{M}) = \emptyset$, ονομάζουμε το $\mathcal{M}$ το *κενό μητροειδές*.

Ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο του $\mathcal{M}$ λέγεται *βάση* του $\mathcal{M}$ και ένα ελάχιστο εξαρτημένο σύνολο, *κύκλωμα* του $\mathcal{M}$. Σημειώνουμε ως $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ την

συλλογή των βάσεων του $\mathcal{M}$ και ως $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ την συλλογή των κυκλωμάτων του $\mathcal{M}$. Οποιαδήποτε των συλλογών $\mathcal{I}(\mathcal{M})$, $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ ή $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ αρκεί για να περιγράψει ένα μητροειδές $\mathcal{M}$ σε ένα σύνολο στοιχείων $E(\mathcal{M})$ (δες επίσης [117]).

Έστω $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$ δύο μητροειδή. Ονομάζουμε τα $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$ *ισομορφικά* και γράφουμε $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$, αν υπάρχει μια αντιστοιχία $\phi : E(\mathcal{M}_1) \to E(\mathcal{M}_2)$, τέτοια ώστε ένα υποσύνολο $X \in E(\mathcal{M}_1)$ είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}_1$, αν και μόνο αν το $\phi(X)$ είναι ανεξάρτητο στο $\mathcal{M}_2$.

Το *μητροειδές κύκλων* ενός γραφήματος G, που γράφεται ως $\mathcal{M}(G)$, έχει το σύνολο ακμών $E(G)$ ως σύνολο στήριξης, ενώ τα ανεξάρτητα σύνολα είναι τα άκυκλα υπογραφήματα του G. Από την άλλη μεριά, ένα μητροειδές που είναι ισομορφικό με το μητροειδές κύκλων ενός γραφήματος λέγεται *γραφικό*.

Το *μητροειδές διανυσμάτων* ενός $m \times n$ πίνακα $A = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}]$ σε ένα πεδίο $\mathbb{F}$, που γράφεται ως $\mathcal{M}(A)$, είναι το μητροειδές $(E, \mathcal{I})$ όπου:

$$\begin{cases} E = \{1, 2, \ldots, n\} \\ \mathcal{I} = \{X \subseteq E : \{\mathbf{a_i} : i \in X\} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο } V(m, F)\}\} \end{cases}$$

Ονομάζουμε ένα μητροειδές $\mathcal{M}$ *αναπαραστάσιμο στο* $\mathbb{F}$, αν υπάρχει ένας πίνακας A σε ένα πεδίο $\mathbb{F}$, τέτοιος ώστε το $\mathcal{M}$ να είναι ισομορφικό με το μητροειδές διανυσμάτων $\mathcal{M}(A)$. Ένα μητροειδές είναι *αναπαραστάσιμο*, αν είναι αναπαραστάσιμο σε κάποιο πεδίο.

Δεδομένου ενός μητροειδούς $\mathcal{M}$, το μητροειδές του οποίου το σύνολο στήριξης είναι $E(\mathcal{M})$ και του οποίου η συλλογή των βάσεων είναι $\{E(\mathcal{M}) - B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})\}$ λέγεται το *δυικό* του μητροειδούς $\mathcal{M}$ και γράφεται ως $\mathcal{M}^*$.

Έστω $\mathcal{M}$ ένα μητροειδές και $X, Y \subseteq E(\mathcal{M})$ υποσύνολα του συνόλου στήριξής του. Το μητροειδές $\mathcal{M} \backslash X = \{E(\mathcal{M}) - X, I \subseteq (E(\mathcal{M}) - X) : I \in \mathcal{I}(\mathcal{M})\}$ και το μητροειδές $\mathcal{M}/Y = [\mathcal{M}^* \backslash Y]^*$ είναι η *διαγραφή* του X και η *σύνθλιψη* του Ψ από το μητροειδές $\mathcal{M}$, αντίστοιχα. Αν $X = \{e\}$ τότε απλά γράφουμε $\mathcal{M} \backslash e$ αντί του $\mathcal{M} \backslash \{e\}$ – παρόμοια για την σύνθλιψη ενός μοναδικού στοιχείου. Ένα μητροειδές $\mathcal{K}$ είναι *ελάσσον* ενός μητροειδούς $\mathcal{M}$, αν $\mathcal{K} = \mathcal{M} \backslash X/Y$ για κάποια σύνολα $X, Y \subseteq E(\mathcal{M})$.

Έστω $\mathcal{M}$ ένα μητροειδές και X ένα υποσύνολο του συνόλου στήριξής του, δηλαδή $X \subseteq E(\mathcal{M})$. Σημειώνουμε ως $\overline{X}$ το σύνολο $E(\mathcal{M}) - X$ και ως $\mathcal{M}|X$ το μητροειδές $\mathcal{M} \setminus \overline{X}$, που λέγεται ο *περιορισμός του* $\mathcal{M}$ *στο* X. Λέμε ότι το $B \subseteq X$ είναι μια βάση του X, αν το B είναι μια βάση του μητροειδούς $\mathcal{M}|X$.

Ορισμός 8.1.1. Έστω $\mathcal{M}$ ένα μητροειδές. Ονομάζουμε *συνάρτηση τάξης* του $\mathcal{M}$, τη συνάρτηση $r_{\mathcal{M}} : 2^{E(\mathcal{M})} \to \mathbb{N}$, που απεικονίζει ένα σύνολο στοιχείων $X \subseteq E(\mathcal{M})$ στο μέγεθος μιας βάσης του X.

Όταν είναι φανερό από τα συμφραζόμενα ότι αναφερόμαστε σε ένα μητροειδές $\mathcal{M}$, γράφουμε απλά $r(X)$ αντί του $r_{\mathcal{M}}(X)$, για ένα υποσύνολο X του $E(\mathcal{M})$. Γενικά ονομάζουμε τον αριθμό $r(X)$ την *τάξη* του X. Η τάξη του μητροειδούς $\mathcal{M}$ ισούται με την τάξη του συνόλου στήριξής του, δηλαδή $r(\mathcal{M}) = r(E(\mathcal{M}))$.

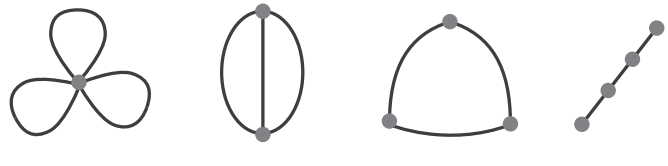
Ας θεωρήσουμε το μητροειδές κύκλων ενός γραφήματος G. Μια βάση ενός υποσυνόλου $\mathbb{F}$ του $E(G)$ είναι το σύνολο ακμών ενός παραγόμενου υπογραφήματος στο $G[F]$. Αυτό συνεπάγεται την εξής απλή παρατήρηση, που είναι πολύ χρήσιμη όταν δουλεύουμε με την τάξη των γραφικών μητροειδών και υποσυνόλων των συνόλων στήριξής τους.

Παρατήρηση 8.1. Έστω $\mathcal{M}$ το μητροειδές κύκλων ενός γραφήματος G και έστω $F \subseteq E(G)$. Αν k είναι ο αριθμός των συνιστωσών του εναγόμενου υπογραφήματος $G[F]$, τότε η τάξη του F ισούται με $|G[F]| - k$.

Ορισμός 8.1.2. Έστω m και n μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $m \leq n$. Το *ομοιόμορφο μητροειδές τάξης m με n στοιχεία*, που γράφεται ως $\mathcal{U}_{m,n}$, είναι το μητροειδές $(E, \mathcal{I})$ όπου:

$$\begin{cases} E = \{1, 2, \ldots, n\} \\ \mathcal{I} = \{X \subseteq E : |X| \leq m\} \end{cases}$$

Όλα τα ομοιόμορφα μητροειδή με το πολύ 3 στοιχεία είναι γραφικά. Μια απεικόνιση των ομοιόμορφων μητροειδών σε 3 στοιχεία παρέχεται στο Σχήμα 8.3. (Όταν απεικονίζουμε ένα γραφικό μητροειδές, συνήθως σχεδιάζουμε ένα γράφημα και αναφερόμαστε στο μητροειδές κύκλων του.)



Σχήμα 8.1: Τα ομοιόμορφα μητροειδή με 3 στοιχεία σε σειρά αύξουσας τάξης.

Ένα μητροειδές λέγεται *συνεκτικό* όταν για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων του συνόλου στήριξής του έχει ένα κύκλωμα που τα περιέχει και τα δύο. Αυτό

συνεπάγεται ότι το μητροειδές κύκλων ενός 2-συνεκτικού γραφήματος είναι συνεκτικό.

Ορισμός 8.1.3. Ακολουθώντας τον ορισμό του Oxley [117] η *συνάρτηση συνεκτικότητας* ενός μητροειδούς $\mathcal{M}$ είναι η συνάρτηση $\lambda : 2^{E(\mathcal{M})} \to \mathbb{N}$, όπου:

$$\lambda_{\mathcal{M}}(X) = r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}(\overline{X}) - r_{\mathcal{M}}(E(\mathcal{M}))\ ,\ \text{ για } X \subseteq E(\mathcal{M}). \tag{8.1}$$

Έστω $\mathcal{M}$ ένα συνεκτικό μητροειδές και έστω $X \subseteq E(\mathcal{M})$. Προφανώς, αν $X = E(\mathcal{M})$ ή $X = \emptyset$, τότε $\lambda_{\mathcal{M}}(X) = 0$. Ας θεωρήσουμε τότε την περίπτωση που συμβαίνει ακριβώς αυτό, δηλαδή που για κάποιο υποσύνολο $F \subseteq E(\mathcal{M})$, ισχύει ότι $\lambda_{\mathcal{M}}(F) = 0$. Από τον Ορισμό 8.1.3 έπεται ότι $r_{\mathcal{M}}(F) + r_{\mathcal{M}}(\overline{F}) = r_{\mathcal{M}}(E(\mathcal{M}))$, που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι για κάθε βάση B του $\mathcal{M}$, τα $B \cap F$ και $B \cap \overline{F}$ είναι βάσεις των F και $\overline{F}$, αντίστοιχα. Τότε κανένα κύκλωμα του $\mathcal{M}$ δεν μπορεί να περιέχει στοιχεία από και τα δύο F και $\overline{F}$. Διατυπώνουμε αυτό το γεγονός στην εξής παρατήρηση.

Παρατήρηση 8.2. Έστω $\mathcal{M}$ ένα συνεκτικό μητροειδές και έστω $F \subseteq E(\mathcal{M})$. Τότε $\lambda_{\mathcal{M}}(F) = 0$, αν και μόνο αν $F = E(\mathcal{M})$ ή $F = \emptyset$.

Μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα ενός συνεκτικού μητροειδούς αναφέρεται στην επόμενη πρόταση που αποδείχθηκε από τον Tutte [146].

Πρόταση 8.1.4 ([146])**.** *Έστω e ένα στοιχείο ενός συνεκτικού μητροειδούς $\mathcal{M}$. Τότε τουλάχιστον ένα από τα $\mathcal{M}/e$ και $\mathcal{M}\backslash e$ είναι συνεκτικό.*

Έστω $\mathcal{M}$ ένα μητροειδές. Μια άμεση συνέπεια των ορισμών είναι, ότι η τάξη ενός υποσυνόλου $X \subseteq E(\mathcal{M})$ στο δυικό μητροειδές $\mathcal{M}^*$ εκφράζεται από τη σχέση $r^*(X) = r(\overline{X}) - r(\mathcal{M}) + |X|$. Συγκεκριμένα, $r^*(\mathcal{M}) + r(\mathcal{M}) = |E(\mathcal{M})|$. Μια αντικατάσταση στην εξίσωση 8.1 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση συνεκτικότητας είναι συμμετρική ως προς δυικότητα, δηλαδή για κάθε μητροειδές $\mathcal{M}$ και $X \subseteq E(\mathcal{M})$:

$$\lambda_{\mathcal{M}}(X) = \lambda^*_{\mathcal{M}}(X) = r(X) + r^*(X) - |X|. \tag{8.2}$$

Εδώ, όπως πριν για την συνάρτηση τάξης, γράφουμε $\lambda^*_{\mathcal{M}}$ αντί του $\lambda_{\mathcal{M}^*}$ και παρόμοια $r^*_{\mathcal{M}}$ αντί του $r_{\mathcal{M}^*}$. Έπεται, ότι ένα μητροειδές $\mathcal{M}$ είναι συνεκτικό, αν και μόνο αν το δυικό $\mathcal{M}^*$ του είναι συνεκτικό.

———

Το προϊόν της τετριμμένης σύνδεσης δύο δοσμένων μητροειδών $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$ με ξένα σύνολα στήριξης, είναι το μητροειδές $(E(\mathcal{M}_1) \cup E(\mathcal{M}_2), \mathcal{I}(\mathcal{M}_1) \cup \mathcal{I}(\mathcal{M}_2))$, που λέγεται το *άμεσο άθροισμα* των $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$ και σημειώνεται ως $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

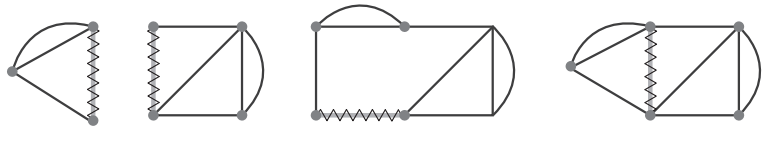
Συνεχίζουμε με τον ορισμό δύο δυικών πράξεων σε μητροειδή που παρέχουν ένα τρόπο να συνδέουμε μητροειδή των οποίων τα σύνολα στήριξης έχουν ένα μοναδικό κοινό στοιχείο. Αν ένα στοιχείο δεν περιέχεται σε καμία βάση ενός μητροειδούς, τότε λέγεται *θηλιά*, ενώ αν περιέχεται σε κάθε βάση λέγεται *συθηλιά*.

Ορισμός 8.1.5. Έστω $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$ δύο μητροειδή με $E(\mathcal{M}_1) \cap E(\mathcal{M}_2) = \{e\}$, όπου το e δεν είναι ούτε θηλιά ούτε συθηλιά σε αυτά τα μητροειδή.

Τότε, η *σειριακή σύνδεση* των $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$, που σημειώνεται ως $S(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, είναι το μητροειδές με σύνολο στοιχείων E και συλλογή κυκλωμάτων $\mathcal{C}_S$, όπου το e' είναι ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο $E(\mathcal{M}_1)$ ή $E(\mathcal{M}_2)$ και:

$$\begin{cases} E = E(\mathcal{M}_1 \backslash e) \cup E(\mathcal{M}_2 \backslash e) \cup e' \\ \mathcal{C}_S = \mathcal{C}(\mathcal{M}_1 \backslash e) \cup \mathcal{C}(\mathcal{M}_2 \backslash e) \cup \\ \qquad \{(C_1 - e) \cup (C_2 - e) \cup e' : e \in C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i) \ \text{ για } i = 1, 2\}. \end{cases}$$

Η *παράλληλη σύνδεση* των $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$ που σημειώνεται ως $P(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ είναι το μητροειδές $[S(\mathcal{M}_1^*, \mathcal{M}_2^*)]^*$. (δες επίσης το Σχήμα 8.2).



Σχήμα 8.2: Η σειριακή και η παράλληλη σύνδεση δύο μητροειδών.

Οι ιδιότητες της σειριακής και της παράλληλης σύνδεσης περιλαμβλανουν πολλά χρήσιμα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα οι κλάσεις των γραφικών μητροειδών και των συνεκτικών μητροειδών είναι κλειστές ως προς αυτές τις πράξεις – για μια αναλυτική μελέτη στις πράξεις αυτές δες [22, 117]. Αναφέρουμε εδώ την εξής απλή ιδιότητα από το [22]:

Πρόταση 8.1.6 ([22]). *Έστω $\mathcal{N}_1$ και $\mathcal{N}_2$ δύο μητροειδή των οποίων τα σύνολα στήριξης έχουν ένα μοναδικό κοινό στοιχείο e. Τότε, $P(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)/e = (\mathcal{N}_1/e) \oplus (\mathcal{N}_2/e)$.*

Τέλος, ορίζουμε μια τελευταία πράξη σύνδεσης δύο μητροειδών που έχουν ένα μοναδικό κοινό στοιχείο. Το 2-*άθροισμα* δύο μητροειδών $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$, τέτοια ώστε $E(\mathcal{M}) \cap E(\mathcal{N}) = p$, όπου p δεν είναι ούτε θηλιά ούτε συθηλιά στα $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$, είναι το μητροειδές

$$\mathcal{M} \oplus_2 \mathcal{N} = P(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \setminus p = S(\mathcal{M}, \mathcal{N})/p.$$

8.2 Παρεμποδίσεις κλάσεων μητροειδών

Όπως έχουμε συζητήσει στην προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν γραφικά μητροειδή, αυτά που είναι μητροειδή κύκλων ενός γραφήματος, και αναπαραστάσιμα μητροειδή, αυτά που είναι μητροειδή διανυσμάτων ενός πίνακα σε κάποιο πεδίο. Το ερώτημα φυσικά γεννάται ποια μητροειδή ακριβώς είναι γραφικά και ποια είναι $\mathbb{F}$-αναπαραστάσιμα, δηλαδή αναπαραστάσιμα σε ένα συγκεκριμένο πεπερασμένο πεδίο $\mathbb{F}$. Πράγματι, η απάντηση σε αυτό το ζήτημα αναδείχθηκε σε μια κεντρική κατεύθυνση της θεωρίας μητροειδών και συχνά σε ένα απροσπέλαστο πρόβλημα.

Αφού οι κλάσεις των γραφικών μητροειδών και των $\mathbb{F}$-αναπαραστάσιμων μητροειδών είναι κλειστές ως προς τη σχέση ελάσσονος, ένας χαρακτηρισμός μιας τέτοιας κλάσης είναι εφικτός καταρτίζοντας έναν κατάλογο από παρεμποδίσεις.

Σημειώνουμε ως $\mathbf{obs}(\mathcal{K})$ το σύνολο όλων των αποκλεισμένων ελάσσονων για μια κλάση μητροειδών $\mathcal{K}$κλειστή ως προς ελάσσονα. Στην ενότητα αυτή συνοψίζουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα αυτού του είδους, πριν εστιάσουμε στην κλάση των μητροειδών φραγμένου πλάτους μονοπατιού, που θα είναι το ενδιαφέρον μας για το υπόλοιπο του κεφαλαίου.

Αφού το δυικό κάθε $\mathbb{F}$-αναπαραστάσιμου μητροειδούς είναι επίσης $\mathbb{F}$-αναπαραστάσιμο, μπορούμε να ξεκινήσουμε με την εξής παρατήρηση.

Παρατήρηση 8.3. Έστω $\mathcal{K}$ μια κλάση $\mathbb{F}$-αναπαραστάσιμων μητροειδή. Τότε, αν το $\mathbf{obs}(\mathcal{K})$ περιλαμβάνει ένα μητροειδές $\mathcal{M}$, περιλαμβάνει επίσης το δυικό του $\mathcal{M}^*$.

Ονομάζουμε *δυαδικά* τα μητροειδή που είναι αναπαραστάσιμα στο $GF(2)$. Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύεται από τον Tutte. Σημείωσε ότι το ομοιόμορφο μητροειδές τάξης 2 με 4 στοιχεία είναι *αυτοδυικό*, δηλαδή έχει ένα ισομορφικό δυικό μητροειδές.

Πρόταση 8.2.1 ([144]). *Ένα μητροειδές είναι δυαδικό, αν και μόνο αν δεν έχει $\mathcal{U}_{2,4}$ ελάσσονα.*

Έστω $\mathcal{F}_7$ το μητροειδές με σύνολο στήριξης $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ τέτοιο ώστε όλα τα υποσύνολα του συνόλου στήριξης που περιέχουν 4 ή περισσότερα στοιχεία, καθώς και τα σύνολα $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,4,6\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,7\}$ και $\{3,6,7\}$ να είναι εξαρτημένα. Ένα μητροειδές είναι *τριαδικό* αν είναι αναπαραστάσιμο στο $GF(3)$. Το επόμενο αποτέλεσμα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Bixby και Seymour.

Πρόταση 8.2.2 ([13, 132]). *Ένα μητροειδές είναι τριαδικό, αν και μόνο αν δεν έχει $\mathcal{U}_{2,5}, \mathcal{U}_{3,5}, \mathcal{F}_7$ ή $\mathcal{F}_7^*$ ελάσσονα.*

Το μόνο άλλο πεδίο, για το οποίο ο πλήρης κατάλογος αποκλεισμένων ελάσσονων για $\mathbb{F}$-αναπαράσταση είναι γνωστός, είναι το $GF(4)$ ([79]). Στην πραγματικότητα, αυτές οι τρεις περιπτώσεις $\mathbb{F}$-αναπαραστασιμότητας είναι οι μόνες, όπου έχουμε απόδειξη ότι το σύνολο των αποκλεισμένων ελάσσονων είναι πεπερασμένο.

Ένας συνδυασμός από ξεχωριστά αποτελέσματα που αποδείχθηκαν με αρκετά χρόνια διαφορά, συνεπάγονται ότι αν ένα μητροειδές είναι και δυαδικό και τριαδικό, τότε είναι αναπαραστάσιμο σε κάθε πεδίο, ή ισοδύναμα είναι *κανονικό* μητροειδές, δηλαδή ένα που έχει μια αναπαράσταση ενός πλήρως αντιστρέψιμου πίνακα (ενός πίνακα πραγματικών, του οποίου κάθε τετράγωνος υποπίνακας έχει διακρίνουσα 0 ή ± 1.) Το σύνολο παρεμποδίσεων των κανονικών μητροειδών προκύπτει από τις τελευταίες δύο προτάσεις.

Πρόταση 8.2.3 ([144]). *Ένα μητροειδές είναι κανονικό, αν και μόνο αν δεν έχει $\mathcal{U}_{2,4}, \mathcal{F}_7$ ή $\mathcal{F}_7^*$ ελάσσονα.*

Η επόμενη πρόταση, πάλι από τον Tutte, και ακολούθως το πόρισμα παρακάτω, είναι κατά τρόπο η γενικοποίηση σε μητροειδή του χαρακτηρισμού Kuratowski των επίπεδων γραφημάτων. Ονομάζουμε ένα μητροειδές $\mathcal{M}$ *συνεπίπεδο*, αν υπάρχει ένα γράφημα G, τέτοιο ώστε το $\mathcal{M}$ είναι ισομορφικό στο δυικό του μητροειδούς κύκλων του G και στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}^*(G)$.

Πρόταση 8.2.4 ([145]). *Τα σύνολα των αποκλεισμένων ελάσσονων για τις κλάσεις από γραφικά και συγγραφικά μητροειδή σχηματίζονται ως εξής:*

- $\mathcal{U}_{2,4}, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_7^*, \mathcal{M}(K_5), \mathcal{M}(K_{3,3})$ *για τα γραφικά μητροειδή και*
- $\mathcal{U}_{2,4}, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_7^*, \mathcal{M}^*(K_5), \mathcal{M}^*(K_{3,3})$ *για τα συγγραφικά μητροειδή.*

Από ένα αποτέλεσμα του Whitney [148, 149], αν ένα γράφημα G είναι επίπεδο, τότε το $\mathcal{M}^*(G)$ είναι γραφικό· ή ισοδύναμα, ένα συγγραφικό μητροειδές είναι επίσης γραφικό, αν και μόνο αν είναι το δυικό ενός μητροειδούς κύκλων ενός επίπεδου γραφήματος. Τότε, η Πρόταση 8.2.4 άμεσα συνεπάγεται το σύνολο παρεμποδίσεων της κλάσης των επίπεδων μητροειδών.

Πόρισμα 8.2.5. *Ένα μητροειδές είναι το μητροειδές κύκλων ενός επίπεδου γραφήματος, αν και μόνο αν δεν έχει $\mathcal{U}_{2,4}, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_7^*, \mathcal{M}(K_5), \mathcal{M}(K_{3,3}), \mathcal{M}^*(K_5)$ και $\mathcal{M}^*(K_{3,3})$ ελάσσονα.*

Σημειώνουμε ως $\mathcal{SP}$ την κλάση των μητροειδών που παράγεται από το $\mathcal{U}_{1,2}$ και επαναλαμβανόμενα συνδέοντας σειριακά ή παράλληλα περισσότερα αντίγραφα των $\mathcal{U}_{1,2}$. Σημειώνουμε ως $\mathcal{OP}$ την κλάση των μητροειδών που είναι μητροειδή κύκλων εξωεπίπεδων γραφημάτων. Τέλος, σημειώνουμε ως $\mathcal{OP}^*$ την κλάση των μητροειδών που έχει ένα δυικό στο $\mathcal{OP}$. Μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει, ότι όλες αυτές οι κλάσεις είναι κλειστές ως προς ελάσσονα, αρκεί να διατηρείται η συνεκτικότητα μητροειδών. Επιπλέον, η κλάση $\mathcal{SP}$ είναι κλειστή ως προς δυικότητα. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, καθώς και ανεξάρτητα αποτελέσματα από τους Dirac (1952) και Chartrand και Harary (1967) έχουμε την εξής πρόταση.

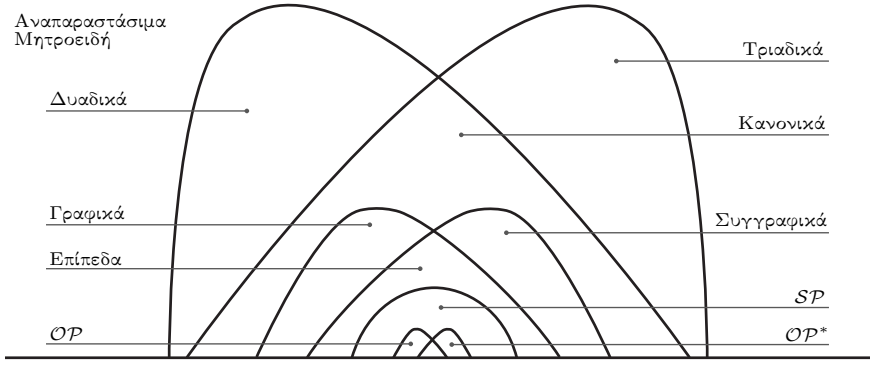
Πρόταση 8.2.6 ([48, 27])**.** *Ένα συνεκτικό μητροειδές με τουλάχιστον δύο στοιχεία ανήκει στην κλάση*

- *$\mathcal{SP}$, αν και μόνο αν δεν έχει $\mathcal{U}_{2,4}$ και $\mathcal{M}(K_4)$ ελάσσονα,*
- *$\mathcal{OP}$, αν και μόνο αν δεν έχει $\mathcal{U}_{2,4}, \mathcal{M}(K_4)$ και $\mathcal{M}(K_{2,3})$ ελάσσονα και*
- *$\mathcal{OP}^*$, αν και μόνο αν δεν έχει $\mathcal{U}_{2,4}, \mathcal{M}(K_4)$ και $\mathcal{M}(K_{2,3}^*)$ ελάσσονα.*

Η παράμετρος του πλάτους μονοπατιού ορίστηκε από τους Geelen, Gerards, και Whittle στο [81] και αποτυπώνει πληροφορία για την δομή και τη συμπεριφορά της συνάρτησης της συνεκτικότητας ενός υποσυνόλου του συνόλου στήριξης ενός μητροειδούς.

Ορισμός 8.2.7. Δεδομένου ενός μητροειδούς $\mathcal{M}$ και μιας διάταξης $L = (e_1, \ldots, e_m)$ των στοιχείων του συνόλου στήριξής του $E(\mathcal{M})$, ορίζουμε

$$\mathbf{pltoc}_{\mathcal{M}}(L) = \max\{\lambda_{\mathcal{M}}(\{e_1, \ldots, e_i\}) \mid 1 \leq i \leq m-1\}.$$

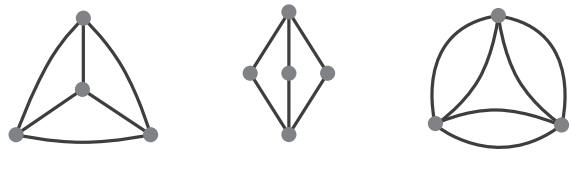


Σχήμα 8.3: Κλάσεις αναπαραστάσιμων μητροειδών.

Το *πλάτος μονοπατιού* του μητροειδούς $\mathcal{M}$, που γράφεται ως $\mathbf{pw}(\mathcal{M})$, είναι ο μικρότερος ακέραιος k για τον οποίο υπάρχει μια διάταξη $L = (e_1, \ldots, e_m)$ των στοιχείων του $\mathcal{M}$, έτσι ώστε $\mathbf{pltoc}_{\mathcal{M}}(L) \leq k$.

Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, σημειώνουμε ως $\mathcal{P}_k$ την κλάση των μητροειδών πλάτους μονοπατιού το πολύ k. Αφού η παράμετρος του πλάτους μονοπατιού μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι είναι μονότονη ως προς τη σχέση ελάσσονος, κάθε στρώμα $\mathcal{P}_k$ για μια τιμή του k είναι μια κλάση κλειστή ως προς ελάσσονα. Ένα αποτέλεσμα από τον Kashyap στο [100] περέχει τον πλήρη κατάλογο αποκλεισμένων ελάσσονων για την κλάση $\mathcal{P}_1$.

Πρόταση 8.2.8 ([100])**.** $\mathbf{obs}(\mathcal{P}_1) = \{\mathcal{U}_{2,4}, \mathcal{M}(K_4), \mathcal{M}(K_{2,3}), \mathcal{M}(K^*_{2,3})\}$



Σχήμα 8.4: Οι γραφικές παρεμποδίσεις για πλάτος μονοπατιού το πολύ 1.

Ένα συμπέρασμα αυτού του αποτελέσματος είναι ότι $\mathcal{P}_1 = \mathcal{OP} \cap \mathcal{OP}^*$. Το σύνολο παρεμποδίσεων του $\mathcal{P}_k$ για $k \geq 2$ είναι άγνωστο. Από την επόμενη απλή παρατήρηση, άμεσα έπεται ότι τα μητροειδή με πλάτος μονοπατιού το πολύ 2 δεν είναι ένα υποσύνολο των δυαδικών μητροειδών.

Παρατήρηση 8.4. Για κάθε θετικό ακέραιο n, το ομοιόμορφο μητροειδές $\mathcal{U}_{n,2n}$ έχει πλάτος μονοπατιού ίσο με n.

Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου αφιερώνεται στο χαρακτηρισμό του πλήρους κατάλογου αποκλεισμένων ελάσσονων του συνόλου $\mathcal{P}_k \cap [\mathcal{OP} \cup \mathcal{OP}^*]$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k. Ακόμα, στο Παράρτημα παρέχουμε έναν αριθμό απαγορευμένων ελάσσονων για το σύνολο $\mathcal{P}_2$.

8.3 Μια αποσύνθεση μητροειδών

Έστω $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ συνεκτικά μητροειδή σε ξένα σύνολα ακμών. Για κάθε ένα από αυτά διάλεξε ένα στοιχείο $e_i \in E(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Για το ομοιόμορφο μητροειδές $\mathcal{U}_{1,3}$ με στοιχεία $\{e_1, e_2, e_3\}$ μπορούμε να συσχετίσουμε ένα κοινό στοιχείο με κάθε ένα από τα τρία παραπάνω μητροειδή, έχουμε δηλαδή $E(\mathcal{U}_{1,3}) \cap E(\mathcal{M}_i) = \{e_i\}$. Ονομάζουμε *σύμπτυξη των* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ *στα στοιχεία* $\{e_1, e_2, e_3\}$ το μητροειδές

$$\mathcal{M} = S(S(S(\mathcal{U}_{1,3}, \mathcal{M}_1), \mathcal{M}_2), \mathcal{M}_3)$$

και το σημειώνουμε ως **σύμπτυξη**$(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, e_1, e_2, e_3)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αυτό το μητροειδές είναι επίσης συνεκτικό. Τα στοιχεία e_1, e_2, e_3 στα οποία πραγματοποιείται η σύμπτυξη θα ονομάζονται στο εξής ως στοιχεία *γέφυρας*.

Οι σειριακές συνδέσεις στον ορισμό του $\mathcal{M}$ εμπλέκουν τα τρία στοιχεία του $\mathcal{U}_{1,3}$ που συνεπάγεται ότι η σειρά με την οποία οι συνδέσεις πραγματοποιούνται είναι αδιάφορη. Θεώρησε τώρα το μητροειδές $S(S(\mathcal{U}_{1,3}, \mathcal{M}_1), \mathcal{M}_2)$ ένα βήμα πριν την σύνθεση του τελικού μητροειδούς $\mathcal{M}$. Έστω $\mathcal{M}^{(1)}$ και $\mathcal{M}^{(2)}$ τα μητροειδή ισομορφικά στο $\mathcal{U}_{1,2}$ όπου $E(\mathcal{M}^{(1)}) = \{e_1, e_3\}$ και $E(\mathcal{M}^{(2)}) = \{e_2, e_3\}$. Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{U}_{1,3}$ είναι ισομορφικό στο $P(\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)})$ και έτσι μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής:

Παρατήρηση 8.5. Το μητροειδές $P(S(\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}_1), S(\mathcal{M}^{(2)}, \mathcal{M}_2))$ είναι ισομορφικό στο μητροειδές $S(S(\mathcal{U}_{1,3}, \mathcal{M}_1), \mathcal{M}_2)$.

Για την εκτίμηση του πλάτους μονοπατιού της σύμπτυξης τριών δοσμένων μητροειδών χρειαζόμαστε το εξής λήμμα σχετικά με την συνάρτηση συνεκτικότητας ενός μητροειδούς που σχηματίζεται από μια σειριακή σύνδεση:

Λήμμα 8.3.1. *Έστω $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ συνεκτικά μητροειδή με $E(\mathcal{M}_1) \cap E(\mathcal{M}_2) = \{e\}$ και $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$. Για κάθε δύο σύνολα F_1, F_2 όπου $F_1 \subseteq E(\mathcal{M}_1)$ και $F_2 \subseteq E(\mathcal{M}_2 \backslash e)$ ισχύει ότι*

$$\lambda_M(F_1 \cup F_2) \geq \lambda_{\mathcal{M}_1}(F_1) + \lambda_{\mathcal{M}_2 \backslash e}(F_2).$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{M}_i^- = \mathcal{M}_i \setminus e,\ i = 1, 2.$ Αφού τα $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ είναι και τα δύο συνεκτικά μητροειδή έπεται ότι η σειριακή σύνδεση τους $\mathcal{M}$ είναι επίσης συνεκτικό μητροειδές. Από την συνεκτικότητα του $\mathcal{M}_i$, παίρνουμε ότι $r(\mathcal{M}_i) = r(\mathcal{M}_i^-), i = 1, 2$. Επίσης, από την συνεκτικότητα του $\mathcal{M}$ έπεται ότι $r(\mathcal{M}) = r(\mathcal{M} \backslash e)$. Παρατήρησε ότι $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ που συνεπάγεται ότι $\mathcal{M} \backslash e = \mathcal{M}_1^- \oplus \mathcal{M}_2^-$, που, με τη σειρά του, συνεπάγεται ότι $r(\mathcal{M}) = r(\mathcal{M}_1) + r(\mathcal{M}_2^-)$. Από τον ορισμό της συνάρτησης συνεκτικότητας λ και την τελευταία ισότητα, είναι αρκετό να δειχτεί ότι για κάθε δύο υποσύνολα $F_1 \subseteq E(\mathcal{M}_1)$ και $F_2 \subseteq E(\mathcal{M}_2^-)$, ισχύει ότι:

$$r_M(F_1 \cup F_2) \quad \geq \quad r_{\mathcal{M}_1}(F_1) + r_{\mathcal{M}_2^-}(F_2) \tag{8.3}$$

$$r_M(\overline{F_1 \cup F_2}) \quad \geq \quad r_{\mathcal{M}_1}(\overline{F_1}) + r_{\mathcal{M}_2^-}(\overline{F_2}) \tag{8.4}$$

Προς άτοπο, ας υποθέσουμε ότι $r_M(F_1 \cup F_2) < r_{\mathcal{M}_1}(F_1) + r_{\mathcal{M}_2^-}(F_2)$ και έστω B_1, B_2 βάσεις των F_1, F_2 αντίστοιχα. Τότε το $B_1 \cup B_2$ πρέπει να περιέχει ένα κύκλωμα C στο $\mathcal{M}$. Ακόμα, αφού $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ το κύκλωμα C έχει στοιχεία και από τα δύο B_1, B_2 – αφού τα τελευταία επιλέχθηκαν ως βάσεις. Η σύνθλιψη των στοιχείων του $\mathcal{M}_2^-$ στο $\mathcal{M}$ υποχρεώνει την ύπαρξη ενός κυκλώματος $C_1 \subseteq C \cap E(\mathcal{M}_1) = B_1$ στο $M/E(\mathcal{M}_2^-) = \mathcal{M}_1$ που αντιβαίνει στο ότι το B_1 είναι μια βάση στο $\mathcal{M}_1$ και συμπληρώνει την απόδειξη της 8.3. Τότε η 8.4 εύκολα έπεται από την 8.3, από την συμμετρία της συνάρτησης συνεκτικότητας λ και το γεγονός ότι $\overline{F}_1 \cup \overline{F}_2 = \overline{F_1 \cup F_2}$ (ας θυμηθούμε ότι $F_1 \cap F_2 = \emptyset$). □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δείξουμε το κύριο δομικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

Λήμμα 8.3.2. *Έστω $\mathcal{M}$ ένα μητροειδές που προκύπτει από τη σύμπτυξη τριών συνεκτικών μητροειδών $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b, \mathcal{M}_c$. Τότε ισχύει ότι*

$$\mathbf{pw}(\mathcal{M}) \geq \min\{\mathbf{pw}(\mathcal{M}_a), \mathbf{pw}(\mathcal{M}_b), \mathbf{pw}(\mathcal{M}_c)\} + 1.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι, για κάθε διάταξη $L = (e_1, \ldots, e_m)$ του συνόλου στοιχείων $E(\mathcal{M})$ του $\mathcal{M}$, υπάρχει ένα $q \in \{1, \ldots, m-1\}$ τέτοιο ώστε $\lambda_{\mathcal{M}}(\{e_1, \ldots, e_q\}) \geq k + 1$ όπου $k = \min\{\mathbf{pw}(\mathcal{M}_a), \mathbf{pw}(\mathcal{M}_b), \mathbf{pw}(\mathcal{M}_c)\}$.

Σημειώνουμε ως $e_a, e_b, e_c \in E(\mathcal{M})$ τα συσχετιζόμενα στοιχεία γέφυρας της σύμπτυξης των μητροειδών $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b, \mathcal{M}_c$ αντίστοιχα και για απλότητα της παρουσίασης, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $E_a = E(\mathcal{M}_a)$, $E_b = E(\mathcal{M}_b)$ και $E_c = E(\mathcal{M}_c)$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $e_1 \in E_a$. Παρόμοια, υποθέτουμε ότι το τελευταίο, στο L, στοιχείο e_ℓ του $E(\mathcal{M}) \setminus E_a$ ανήκει στο E_c. Σημείωσε τότε ότι όλες οι ακμές του E_b εμφανίζονται στο L μετά το $e_1 \in E_a$ και πριν το $e_\ell \in E_c$.

Από τον ορισμό της σύμπτυξης έπεται ότι $\mathcal{M}/(E_a \cup E_c) = \mathcal{M}_b$. Θεώρησε το μητροειδές $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/(E_b \setminus e_b)$ και παρατήρησε ότι $\mathcal{M}' = S(S(\mathcal{U}_{1,3}, \mathcal{M}_a), \mathcal{M}_c)$. Έστω $L_b = (e_{p_1}, \ldots, e_{p_s})$ ο περιορισμός του L στο $E(\mathcal{M}_b)$. Αφού $\mathbf{pw}(\mathcal{M}_b) \geq k$, υπάρχει ένα $h \in \{1, \ldots, s-1\}$ τέτοιο ώστε $\lambda_{\mathcal{M}_b}(F_b) \geq k$, όπου $F_b = \{e_{p_1}, \ldots, e_{p_h}\} \subseteq E_b$. Έστω $F' = \{e_j \in L \mid e_j \notin E_b \text{ και } j < p_h\}$.

Παρατήρησε τώρα ότι $F' \subseteq E_a \cup E_c$ και $\{e_1, \ldots, e_{p_h}\} = F_b \cup F'$. Αφού $E(\mathcal{M}^\wedge\!\backslash e_b) = E_a \cup E_c$, επίσης ισχύει ότι $F' \subseteq E(\mathcal{M}^\wedge\!\backslash e_b)$. Από την Παρατήρηση 8.5, το M' μπορεί να ειδωθεί ως μια παράλληλη σύνδεση δύο μητροειδών στο στοιχείο e_b. Αυτό, μαζί με την Πρόταση 8.1.6 συνεπάγεται ότι το $\mathcal{M}'/e_b$ δεν είναι συνεκτικό. Από την Πρόταση 8.1.4, έπεται ότι το μητροειδές $\mathcal{M}' \setminus e_b$ είναι συνεκτικό.

Από την συνεκτικότητα του $\mathcal{M}' \setminus e_b$ και το γεγονός ότι $e_1 \in F'$ και $e_\ell \notin F'$, η Παρατήρηση 8.2 συνεπάγεται ότι $\lambda_{\mathcal{M}^\wedge\!\backslash e_b}(F') \geq 1$. Παρατήρησε τέλος ότι $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_b = \{e_b\}$ και $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}', \mathcal{M}_b)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 8.3.1 συνεπάγεται ότι $\lambda_M(F_b \cup F') \geq k+1$. Αφού $\{e_1, \ldots, e_{p_h}\} = F_b \cup F'$, μπορούμε να επιλέξουμε $q = p_h$. □

8.4 Μητροειδικό πλάτος μονοπατιού και γραμμοπλάτος

Το *μητροειδικό πλάτος μονοπατιού* ενός γραφήματος G, ή απλά *μ-πλάτος μονοπατιού*, ορίζεται ως το πλάτος μονοπατιού του μητροειδούς κύκλων του και συνμβολίζεται ως μ-$\mathbf{pw}(G)$. Με άλλα λόγια για κάθε γράφημα G:

$$\mu\text{-}\mathbf{pw}(G) = \mathbf{pw}(\mathcal{M}(G)).$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η παράμετρος του μητροειδικού πλάτους μονοπατιού για ένα γράφημα δεν είναι η ίδια με την παράμετρο του πλάτους μονοπατιού του γραφήματος (δες επίσης τον Ορισμό 2.4.1). Προχωρούμε με την απόδειξη του εξής απλού λήμματος:

Λήμμα 8.4.1. *Το μ-πλάτος μονοπατιού ενός γραφήματος του G ισούται με το μέγιστο μ-πλάτος μονοπατιού από όλες τις 2-συνεκτικές συνιστώσες του G.*

Απόδειξη. Έστω $\{C_1, \ldots, C_r\}$ οι 2-συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος G και $E_1, \ldots, E_r$ τα αντίστοιχα σύνολα ακμών. Τότε, για $i = 1, \ldots, r$ ισχύει ότι $r_{\mathcal{M}}(E_i) + r_{\mathcal{M}}(\overline{E_i}) = r(\mathcal{M})$, όπου ως $\mathcal{M}$ σημειώνουμε το μητροειδές κύκλων του G. Αυτό συνεπάγεται ότι η τιμή της συνάρτησης συνεκτικότητας ενός συνόλου ακμών που ανήκουν στην ίδια συνιστώσα, είναι αδιάφορη από τις υπόλοιπες 2-συνεκτικές συνιστώσες. Έπεται, ότι αν $\mathbf{pltoc}_{\mathcal{M}}(L_i) \leq k$ για $i = 1, \ldots, r$, όπου L_i είναι μια διάταξη του E_i, τότε για την παράθεση L όλων αυτών των διατάξεων επίσης ισχύει $\mathbf{pltoc}_{\mathcal{M}}(L) \leq k$. □

Έστω G ένα γράφημα. Για κάθε σύνολο ακμών $F \subseteq E(G)$ σημειώνουμε ως $\partial_G(F)$ το σύνολο κορυφών του γραφήματος που είναι προσπίπτουσες με μια ακμή στο F και επίσης με μια ακμή στο $E(G) \backslash F$. Σημειώνουμε επίσης ως $\sigma_G(F)$ τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του $G[F]$. Η *συνοριακή συνάρτηση* $\delta_G(F)$ του γραφήματος G ορίζεται ως $\delta_G(F) = |\partial_G(F)|$.

Ορίζουμε το *γραμμοπλάτος* ενός γραφήματος G ως τον ελάχιστο ακέραιο k για τον οποίο υπάρχει μια διάταξη $L = (e_1, \ldots, e_m)$ του συνόλου ακμών $E(G)$, τέτοια ώστε $\max\{\delta_G(\{e_1, \ldots, e_i\}) \mid 1 \leq i \leq m-1\} \leq k$ και γράφουμε $\mathbf{lw}(G) \leq k$.

Το γραμμοπλάτος είναι μια παράμετρος που ορίστηκε στο [139] και εξετάστηκε στο [69, 137]. Ενώ διαφέρει το πολύ κατά ένα από την πιο γνωστή παράμετρο του πλάτους μονοπατιού, είναι πιο άμεση η συσχέτισή της με το μ-πλάτος μονοπατιού, λόγω της ομοιότητας του ορισμού των δύο παραμέτρων.

Η συνοριακή συνάρτηση ενός γραφήματος και η συνάρτηση συνεκτικότητας του μητροειδούς κύκλων του σχετίζονται άμεσα. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 8.1 αποδεικνύουμε την εξής πρόταση (δες επίσης [111, 80]).

Πρόταση 8.4.2. *Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα, $\mathcal{M}(G)$ το μητροειδές κύκλων του και $X \subseteq E(G)$. Τότε $\lambda_{\mathcal{M}(G)}(X) = \delta_G(X) - \sigma_G(X) - \sigma_G(\overline{X}) + 1$.*

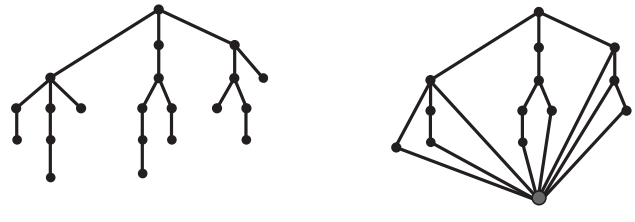
Απόδειξη. Όταν μετρούμε το άθροισμα των κορυφών των εναγόμενων υπογραφημάτων $V(G[X])$ και $V(G[\overline{X}])$, μετρούμε δύο φορές τις κορυφές στο $\partial_G(X)$ και μια φορά το υπόλοιπο των κορυφών στο G. Χρησιμοποιώντας αυτό το επιχείρημα

και την Παρατήρηση 8.1 συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathcal{M}(G)}(X) &= r(X) + r(\overline{X}) - r(\mathcal{M}) \\
&= |V(G[X])| - \sigma_G(X) + |V(G[\overline{X}])| - \sigma_G(\overline{X}) - r(\mathcal{M}) \\
&= |V(G)| + |\partial_G(X)| - \sigma_G(X) - \sigma_G(\overline{X}) - |V(G)| + \sigma_G(E(G)) \\
&= \delta_G(X) - \sigma_G(X) - \sigma_G(\overline{X}) + 1
\end{aligned}$$

□

Έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των δέντρων. Ορίζουμε τη συνάρτηση ϕ που απεικονίζει δέντρα σε γραφήματα τέτοια ώστε για κάθε $T \in \mathcal{T}$, το $\phi(T)$ είναι το γράφημα που προκύπτει αν ταυτοποιήσουμε όλα τα φύλλα του T σε μια μοναδική κορυφή (δες το Σχήμα 8.5 για ένα παράδειγμα). Ονομάζουμε τη νέα κορυφή *κορυφή ένωσης* του $\phi(T)$.



Σχήμα 8.5: Ένα παράδειγμα εφαρμογής της συνάρτησης ϕ.

Παρατήρησε ότι αν το G είναι ένα 2-συνεκτικό εξωεπίπεδο γράφημα, τότε το δυικό του H ανήκει στην κλάση $\phi(\mathcal{T})$, όπου η κορυφή ένωσής του αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη του G. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 8.4.2 μπορούμε να αποδείξουμε την εξής σχέση μεταξύ του γραμμοπλάτους ενός δέντρου T και του μ-πλάτους μονοπατιού του $\phi(T)$.

Λήμμα 8.4.3. *Για κάθε δέντρο T, ισχύει ότι μ-$\mathbf{pw}(\phi(T)) \leq \mathbf{lw}(T)$.*

Απόδειξη. Έστω F ένα σύνολο ακμών στο $E(T)$, όπου $F \neq \emptyset$ και $F \neq E(T)$. Από τον ορισμό της συνάρτησης ϕ, το δέντρο T και το γράφημα $H = \phi(T)$ μοιράζονται ένα κοινό σύνολο ακμών. Σημείωσε ότι μόνο εσωτερικές κορυφές του T συνεισφέρουν στο $\delta_T(F)$ και παρατήρησε ότι οι αντίστοιχες κορυφές του H, ίσως με την προσθήκη της κορυφής v, στην οποία τα φύλλα του T συμπτύχθηκαν, είναι αυτές που συνεισφέρουν στο $\delta_H(F)$, δηλαδή $\delta_H(F) \leq$

$\delta_T(F)+1$. Από την Πρόταση 8.4.2, παίρνουμε ότι $\lambda_{\mathcal{M}(H)}(F) = \delta_H(F) - \sigma_H(F) - \sigma_H(\overline{F}) + 1 \leq \delta_H(F) - 1 \leq \delta_T(F)$. Είναι τώρα άμεσο να συμπεράνουμε ότι δεδομένης κάθε ακολουθίας του $E(T)$ για την οποία ισχύει ότι $\mathbf{lw}(T) \leq \ell$, για την ίδια ακολουθία ισχύει και ότι μ-$\mathbf{pw}(H) \leq \ell$. □

Ορίζουμε αναδρομικά την παραμετροποιημένη οικογένεια δέντρων $\mathcal{T}_k$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, ως εξής:

- Έστω ότι το $\mathcal{T}_0$ περιέχει το δέντρο που προκύπτει από την 1-υποδιαίρεση του K_2.
- Για $k \geq 1$, το $\mathcal{T}_k$ περιέχει κάθε δέντρο που μπορεί να προκύψει από την εξής διαδικασία: Παίρνουμε τρία (όχι αναγκαστικά διαφορετικά) μέλη του $\mathcal{T}_{k-1}$, προσθέτουμε μια νέα κορυφή και τη συνδέουμε με κάποια εσωτερική κορυφή σε καθένα από αυτά τα τρία δέντρα. Όσο ένα φύλλο στο γράφημα που προκύπτει έχει ένα γείτονα βαθμού 3, διέγραψε αυτό το φύλλο.

Σχήμα 8.6: Οι κλάσεις $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, και μέρος του $\mathcal{T}_2$.

Για ένα παράδειγμα της παραπάνω κατασκευής, δες το Σχήμα 8.6 (μόνο δύο από τα τέσσερα μέλη της κλάσης $\mathcal{T}_2$ απεικονίζονται στο Σχήμα 8.6).

Σημειώνουμε ως $\mathcal{L}_k$ την κλάση γραφημάτων με γραμμοπλάτος το πολύ k. Οι άκυκλες παρεμποδίσεις για $\mathcal{L}_k$ προσδιορίζονται από το εξής αποτέλεσμα (δες και το Θεώρημα 29 στο [137]).

Πρόταση 8.4.4 ([137]). *Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, ισχύει ότι* $\mathbf{obs}(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}_k$.

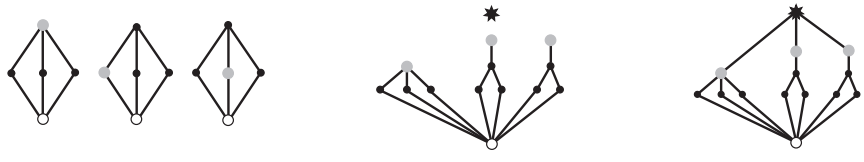
8.5 Παρεμποδίσεις για εξωεπίπεδα γραφήματα

Έστω τώρα G_1, G_2, G_3 τρία ξένα 2-συνεκτικά γραφήματα και $v_i, u_i \in V(G_i)$ ένα ζεύγος από διαφορετικές κορυφές για $i = \{1, 2, 3\}$. Ονομάζουμε *u-σύμπτυξη*

των γραφημάτων G_1, G_2, G_3 στα δοσμένα ζεύγη κορυφών το γράφημα G που κατασκευάζεται ως εξής:

α) Για $i = \{1, 2, 3\}$ αν οι κορυφές v_i, u_i είναι γειτονικές στο G_i, τότε διαγράφουμε την ακμή $\{v_i, u_i\}$ στο G_i.

β) Ταυτοποιούμε τις κορυφές v_1, v_2, v_3 σε μια μοναδική κορυφή v, παίρνουμε μια νέα κορυφή u που δεν ανήκει στα G_1, G_2 ή G_3, και προσθέτουμε τις ακμές $\{u_1, u\}, \{u_2, u\}$ και $\{u_3, u\}$.



Σχήμα 8.7: Η πράξη της u-σύμπτυξης.

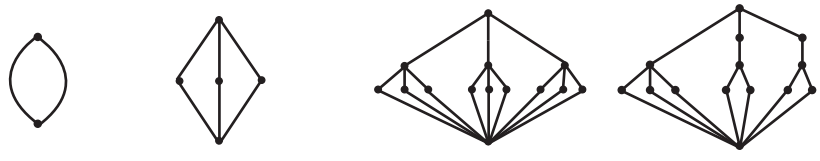
Παρατήρησε ότι το G είναι 2-συνεκτικό από κατασκευή. Ονομάζουμε τις κορυφές v, u *κορυφή βάσης* και *πάνω κορυφή* του γραφήματος που προκύπτει, αντίστοιχα, και τις τρεις ακμές προσπίπτουσες στο u *ακμές γέφυρας* στο G.

Λήμμα 8.5.1. *Έστω G μια u-σύμπτυξη τριών ξένων 2-συνεκτικών γραφημάτων G_1, G_2 και G_3. Τότε μ-$\mathbf{pw}(G) \geq \min\{\mu\text{-}\mathbf{pw}(G_1), \mu\text{-}\mathbf{pw}(G_2), \mu\text{-}\mathbf{pw}(G_3)\} + 1$.*

Απόδειξη. Για $i = 1, 2, 3$ σημειώνουμε ως $v_i, u_i \in V(G_i)$ το ζεύγος κορυφών που εμπλέκεται στην u-σύμπτυξη των τριών γραφημάτων. Θεώρησε για κάθε γράφημα G_i το γράφημα G_i^+ που έχει το ίδιο σύνολο κορυφών όπως το G_i και σύνολο ακμών το $E(G_i^+) = E(G_i)$ αν $e_i = \{v_i, u_i\} \in E(G_i)$ ή αλλιώς το $E(G_i^+) = E(G_i) \cup e_i$. Προφανώς μ-$\mathbf{pw}(G_i^+) \geq \mu$-$\mathbf{pw}(G_i)$ για $i = 1, 2, 3$.

Ας θυμηθούμε ότι, από τον ορισμό του, ένα μητροειδές που προκύπτει ως σύμπτυξη τριών γραφικών μητροειδών είναι και αυτό γραφικό, αφού η κλάση των γραφικών μητροειδών είναι κλειστή ως προς τη σειριακή σύνδεση. Από την κατασκευή, το μητροειδές κύκλων του G είναι ισομορφικό με το μητροειδές που προκύπτει από την σύμπτυξη των μητροειδών κύκλων των γραφημάτων G_1^+, G_2^+, G_3^+ στα στοιχεία e_1, e_2, e_3. Τότε, η εφαρμογή του Λήμματος 8.3.2 συνεπάγεται ότι μ-$\mathbf{pw}(G) \geq \min\{\mu\text{-}\mathbf{pw}(G_1), \mu\text{-}\mathbf{pw}(G_2), \mu\text{-}\mathbf{pw}(G_3)\} + 1$. $\square$

Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, θέτουμε $\mathcal{H}_k = \phi(\mathcal{T}_k)$, δηλαδή ένα γράφημα H ανήκει στην κλάση $\mathcal{H}_k$, αν και μόνο αν ισχύει ότι $H = \phi(T)$ για κάποιο $T \in \mathcal{T}_k$ (δες επίσης το Σχήμα 8.8).



Σχήμα 8.8: Τα σύνολα $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, και μέρος του $\mathcal{H}_2$.

Με μια κοντινή ματιά γίνεται εμφανές, ότι η u-σύμπτυξη μπορεί να παραλληλήσει τον μηχανισμό που γεννά την οικογένεια $\mathcal{T}_k$, κατά τρόπο, που η οικογένεια $\mathcal{H}_k$ μπορεί να είναι παρόμοια γεννημένη από την u-σύμπτυξη, ξεκινώντας με το γράφημα C_2 – το μόνο μέλος της κλάσης $\mathcal{H}_0$. Αυτό το γεγονός διατυπώνεται από το εξής λήμμα. (Τονίζουμε όμως, ότι μια τυχαία εφαρμογή της u-σύμπτυξης σε γραφήματα από την κλάση $\mathcal{H}_{k-1}$ δεν θα έχει ως αποτέλεσμα αναγκαστικά ένα γράφημα στο $\mathcal{H}_k$.)

Λήμμα 8.5.2. *Κάθε γράφημα στο $\mathcal{H}_k$, όπου $k \geq 1$, είναι μια u-σύμπτυξη τριών γραφημάτων της κλάσης $\mathcal{H}_{k-1}$.*

Απόδειξη. Έστω H ένα γράφημα στο $\mathcal{H}_k$. Τότε, υπάρχει ένα δέντρο T στο $\mathcal{T}_k$, τέτοιο ώστε $H = \phi(T)$. Ας θυμηθούμε ότι το T προκύπτει από τρία δέντρα του $\mathcal{T}_{k-1}$, ας πούμε τα T_1, T_2 και T_3, από την αναδρομική διαδικασία που περιγράφηκε στον ορισμό της οικογένειας δέντρων. Σημειώνουμε ως t τη νέα κορυφή που προστέθηκε κατά την κατασκευή του T, ως h την αντίστοιχη κορυφή του H και ως t_i για $i \in \{1, 2, 3\}$ την κορυφή του T_i που συνδέθηκε στο t.

Έστω τώρα $H_i = \phi(T_i)$ και έστω v_i, u_i ένα ζεύγος κορυφών του H_i, όπου το v_i είναι η κορυφή ένωσης του H_i και το u_i αντιστοιχεί στην κορυφή t_i του T_i. Από τον ορισμό, η κορυφή t_i δεν μπορεί να είναι ένα φύλλο στο T_i και έτσι οι κορυφές v_i, u_i είναι διαφορετικές. Τότε, έστω U η u-σύμπτυξη των H_1, H_2 και H_3 στα δοσμένα ζεύγη κορυφών. Σημειώνουμε ως u και v την πάνω κορυφή και την κορυφή βάσης του U, αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι το H είναι ισομορφικό στο γράφημα U. Συσχετίζοντας την κορυφή h με το u και το j, την κορυφή ένωσης του H, με το v, ορίζουμε μια αντιστοιχία μεταξύ των $V(H)$ και $V(U)$, αφού όλες

οι άλλες κορυφές και των δύο γραφημάτων αντιστοιχούν σε εσωτερικές κορυφές των T_1, T_2 και T_3. Η επιλογή των κορυφών u_i, συνεπάγεται ότι οι γείτονες του h στο H και του u στο U ταιριάζουν ως προς αυτή την αντιστοιχία. Θεώρησε τώρα ότι το t_i είναι γειτονικό σε ένα φύλλο του T_i (για κάποιο $i \in \{1, 2, 3\}$). Τότε, το u_i είναι γειτονικό με το v_i στο H_i και άρα, αυτή η ακμή διαγράφεται κατά τη διάρκεια της u-σύμπτυξης, ακριβώς όπως το γειτονικό φύλλο του t_i διαγράφεται κατά τον σχηματισμό του T. Έπεται ότι οι γείτονες του j στο H και του v στο U ταιριάζουν επίσης. □

Χρησιμοποιούμε τα Λήμματα 8.5.1 και 8.5.2 για να δείξουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 8.5.3. *Έστω H ένα γράφημα στο $\mathcal{H}_k$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο k. Τότε το H είναι μια παρεμπόδιση για το μ-πλάτος μονοπατιού λιγότερο ή ίσο με k.*

Απόδειξη. Ακολουθώντας την τυπική πορεία για μια απόδειξη ενός συνόλου παρεμποδίσεων στρεφόμαστε πρώτα στην τιμή του μ-πλάτους μονοπατιού ενός δοσμένου γραφήματος στο $\mathcal{H}_k$. Παρατήρησε ότι μ-$\mathbf{pw}(C_2) = 1$ και ότι, για κάθε $k \geq 1$, κάθε γράφημα στο $\mathcal{H}_k$ είναι 2-συνεκτικό, δηλαδή το μητροειδές κύκλων του είναι συνεκτικό. Επιπλέον, από το Λήμμα 8.5.2, κάθε γράφημα στο $\mathcal{H}_k$ είναι μια u-σύμπτυξη τριών γραφημάτων της κλάσης $\mathcal{H}_{k-1}$. Εφαρμόζοντας επαγωγικά το Λήμμα 8.5.1 συνεπάγεται ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 0$, όλα τα γραφήματα στο $\mathcal{H}_k$ έχουν μ-πλάτος μονοπατιού τουλάχιστον $k + 1$. Από την άλλη μεριά ένα γράφημα στο $\mathcal{H}_k$ έχει προφανώς μ-πλάτος μονοπατιού το πολύ $k+1$, αφού αλλιώς η εικόνα του στο $\mathcal{T}_k$ μέσω της ϕ^{-1} θα είχε επίσης γραμμοπλάτος περισσότερο από $k + 1$ σύμφωνα με το Λήμμα 8.4.3. Συνοψίζοντας, όλα τα γραφήματα στο $\mathcal{H}_k$ για $k \geq 0$ έχουν μ-πλάτος μονοπατιού ίσο με $k + 1$.

Θεώρησε τώρα ένα τέτοιο γράφημα H στο $\mathcal{H}_k$ και επίσης το δέντρο $T = \phi^{-1}(H)$. Για μια ακμή e στο $E(H) = E(T)$, εξετάζουμε το γράφημα H/e και το δέντρο T/e. Αφού το T ανήκει στο $\mathcal{T}_k$ όλα τα φύλλα έχουν γείτονες βαθμού 2 και συνεπώς το T/e είναι πάλι ένα δέντρο με τον ίδιο αριθμό φύλλων. Ακόμα, και το T/e και το μητροειδές κύκλων του H/e είναι συνεκτικά. Έπεται ότι $H/e = \phi(T/e)$ και άρα από το Λήμμα 8.4.3, ισχύει ότι μ-$\mathbf{pw}(H/e) \leq k$, αφού το T είναι μια παρεμπόδιση για γραμμοπλάτος το πολύ k.

Παρόμοια, εξετάζουμε το γράφημα $H \backslash e$ και το δέντρο $T \backslash e$. Αφού το μητροειδές κύκλων $\mathcal{M}(H \backslash e)$ δεν είναι συνεκτικό, δεν ισχύει ότι $H \backslash e = \phi(T \backslash e)$. Παρόλα αυτά, κάθε συνεκτικό μέρος $\mathcal{M}_i$ στο $\mathcal{M}(H \backslash e)$ είναι το μητροειδές κύκλων

του $\phi(T_i)$, όπου T_i είναι ένα ελάσσον του $T\backslash e$. Σε κάθε περίπτωση, πάλι το Λήμμα 8.4.3 άμεσα συνεπάγεται ότι μ-$\mathbf{pw}(H\backslash e) \leq k$. □

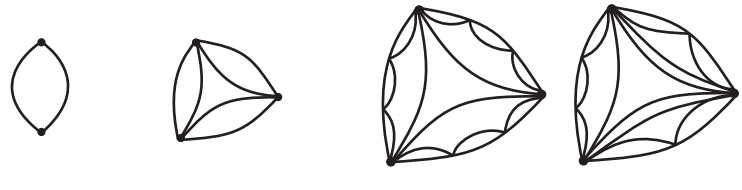
Αντίστροφα, θα αποδείξουμε ότι αν το δυικό ενός 2-συνεκτικού εξωεπίπεδου γραφήματος είναι μια παρεμπόδιση στο μ-πλάτος μονοπατιού τότε ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{H}_k$.

Λήμμα 8.5.4. *Έστω H το δυικό ενός 2-συνεκτικού εξωεπίπεδου γραφήματος που είναι μια παρεμπόδιση για μ-πλάτος μονοπατιού το πολύ k. Τότε $H \in \mathcal{H}_k$.*

Απόδειξη. Προς άτοπο, ας υποθέσουμε ότι το H δεν ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{H}_k$. Αφού το H είναι μια παρεμπόδιση για μ-πλάτος μονοπατιού το πολύ k, σίγουρα ισχύει ότι μ-$\mathbf{pw}(H) \geq k+1$ και το Λήμμα 8.4.3 συνεπάγεται ότι $\mathbf{lw}(T) \geq k+1$, για το αντίστοιχο δέντρο $T = \phi^{-1}(H)$. Έτσι περιέχει ένα ελάσσον $T' \preccurlyeq T$ τέτοιο ώστε $T' \in \mathcal{T}_{k+1}$. Θεώρησε τώρα $H' = \phi(T')$ και παρατήρησε ότι $H' \preccurlyeq H$· άτοπο αφού από τον ορισμό $H' \in \mathcal{H}_{k+1}$. □

Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, ορίζουμε ως $\mathcal{H}_k^*$ την κλάση όλων των δυικών των γραφημάτων στο $\mathcal{H}_k$ (δες το Σχήμα 8.9). Τα προηγούμενα δύο λήμματα, μαζί με το Λήμμα 8.4.1, συνεπάγονται το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 8.5.5. *Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, το σύνολο $\mathcal{H}_k^*$ είναι το σύνολο παρεμποδίσεων για την κλάση εξωεπίπεδων γραφημάτων με μ-πλάτος μονοπατιού το πολύ k.*



Σχήμα 8.9: Τα σύνολα $\mathcal{H}_0^*$, $\mathcal{H}_1^*$ και μέρος του $\mathcal{H}_2^*$.

Πόρισμα 8.5.6. *Για κάθε ακέραιο $k \geq 0$, $\mathbf{obs}(\mathcal{P}_k \cap [\mathcal{OP} \cup \mathcal{OP}^*]) = \mathcal{H}_k \cup \mathcal{H}_k^*$.*

Το θεώρημα αποκαλύπτει μια αντιστοιχία μεταξύ των άκυκλων παρεμποδίσεων για το γραμμοπλάτος και των εξωεπίπεδων παρεμποδίσεων για το μ-πλάτος μονοπατιού. Αυτό επίσης παρέχει ένα κάτω φράγμα για το μέγεθος του $\mathcal{P}_k$.

Αντιγράφοντας το μέτρημα που περιγράφεται στο [136] (δες επίσης [137]), έπεται ότι $|\mathbf{obs}(\mathcal{P}_k)| \geq (k!)^2$.

Μια άλλη συνέπεια των αποτελεσμάτων μας είναι το εξής.

Πόρισμα 8.5.7. *Έστω G ένα 2-συνεκτικό εξωεπίπεδο γράφημα και έστω T ένα δέντρο τέτοιο ώστε $G^* = \phi(T)$. Τότε μ-$\mathbf{pw}(G) = \mathbf{lw}(T)$.*

Το τελευταίο συνεπάγεται την ύπαρξη ενός αλγόριθμου γραμμικού χρόνου για τον υπολογισμό του μ-πλάτους μονοπατιού εξωεπίπεδων γραφημάτων:

Πόρισμα 8.5.8. *Υπάρχει ένας γραμμικός αλγόριθμος που, δεδομένου ενός εξωεπίπεδου γραφήματος, εξάγει το μ-πλάτος μονοπατιού του.*

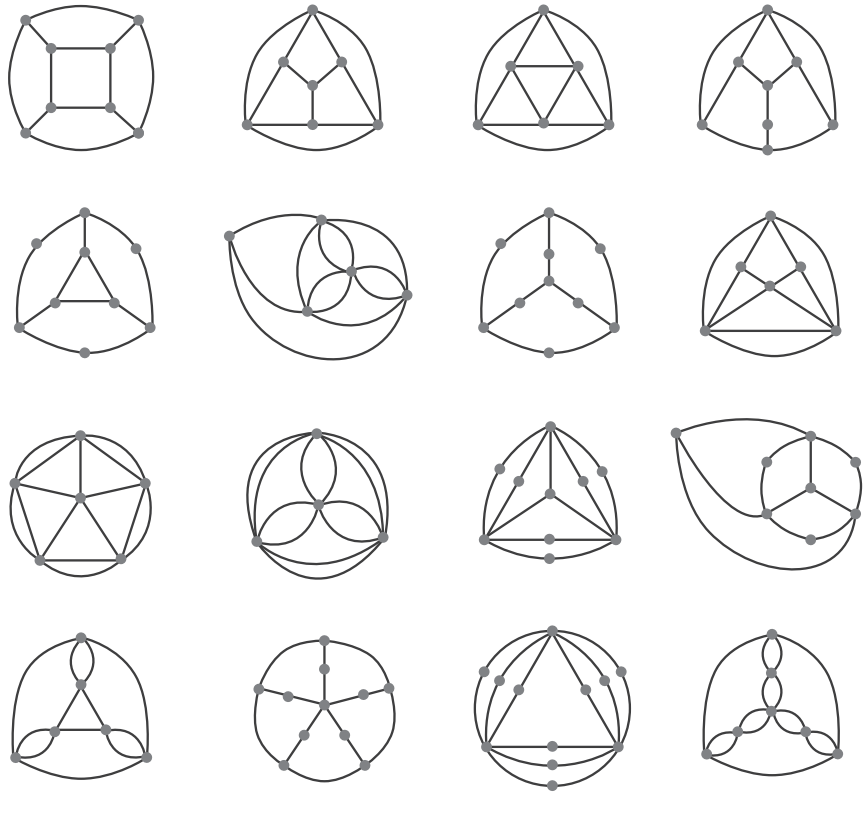
Απόδειξη. Έστω G ένα εξωεπίπεδο γράφημα. Έστω επίσης $G_1, \ldots, G_r$ οι 2-συνεκτικές συνιστώσες του και $H_1, \ldots, H_r$ τα δυικά τους αντίστοιχα. Έστω

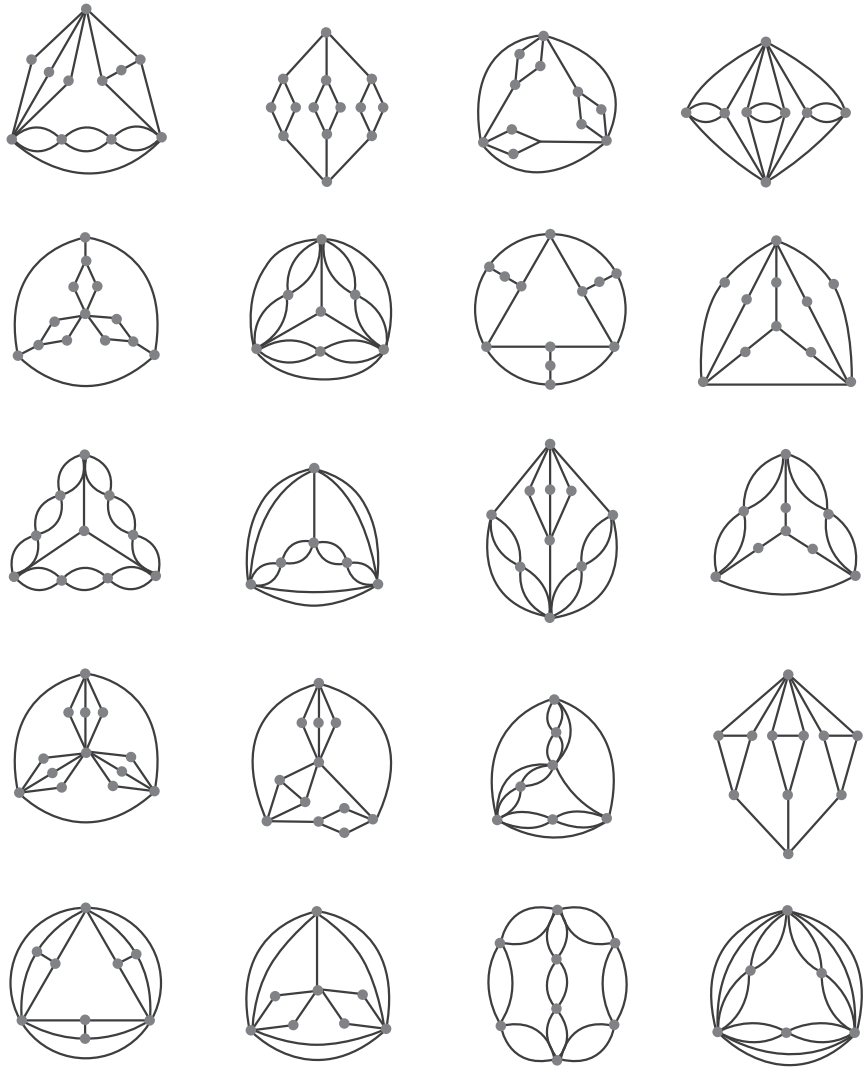
$$k = \max\{\mathbf{lw}(\phi^{-1}(H_i)) \mid i = 1, \ldots r\}.$$

Το γραμμοπλάτος δέντρων μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο, χρησιμοποιώντας μια προσαρμογή του γραμμικού αλγόριθμου από το [135] για τον υπολογισμό του πλάτους μονοπατιού ενός γραφήματος. Συνεπώς, από το Πόρισμα 8.5.7 και το Λήμμα 8.4.1 ισχύει ότι μ-$\mathbf{pw}(G) = k$. □

Παράρτημα

Τα μητροειδή κύκλων των εξής γραφημάτων είναι παρεμποδίσεις για την κλάση $\mathcal{P}_2$, τα μητροειδή πλάτους μονοπατιού το πολύ 2.





Σχήμα: Κάποια γραφικά μητροειδή στο $\mathbf{obs}(\mathcal{P}_2)$.

Βιβλιογραφία

[1] Karl R. Abrahamson and Michael R. Fellows. Finite automata, bounded treewidth and well-quasiordering. In Neil Robertson and Paul D. Seymour, editors, *AMS Summer Workshop on Graph Minors, Graph Structure Theory, Contemporary Mathematics vol. 147*, pages 539–564. American Mathematical Society, 1993.

[2] Eyal Ackerman. On the maximum number of edges in topological graphs with no four pairwise crossing edges. *Discrete & Computational Geometry*, 41(3):365–375, 2009.

[3] Eyal Ackerman and Gábor Tardos. On the maximum number of edges in quasi-planar graphs. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 114(3):563–571, 2007.

[4] J. Alber, H. L. Bodlaender, H. Fernau, T. Kloks, and R. Niedermeier. Fixed parameter algorithms for dominating set and related problems on planar graphs. *Algorithmica*, 33(4):461–493, 2002.

[5] Jochen Alber, Hongbing Fan, Michael R. Fellows, Henning Fernau, Rolf Niedermeier, Frances A. Rosamond, and Ulrike Stege. A refined search tree technique for dominating set on planar graphs. *J. Comput. Syst. Sci.*, 71(4):385–405, 2005.

[6] Jochen Alber, Henning Fernau, and Rolf Niedermeier. Parameterized complexity: exponential speed-up for planar graph problems. *J. Algorithms*, 52(1):26–56, 2004.

[7] Michael O. Albertson, Debra L. Boutin, and Ellen Gethner. The thickness and chromatic number of r-inflated graphs. *Discrete Mathematics*, 310(20):2725–2734, 2010.

[8] Eyal Amir. Approximation algorithms for treewidth. *Algorithmica*, 56:448–479, 2010.

[9] Brenda S. Baker. Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 41(1):153–180, 1994.

[10] Brian Beavers and James Oxley. Constructive characterizations of 3-connected matroids of path width three. *Eur. J. Comb.*, 29(7):1643–1661, 2008.

[11] Ann Becker, Reuven Bar-Yehuda, and Dan Geiger. Randomized algorithms for the loop cutset problem. *J. Artificial Intelligence Res.*, 12:219–234 (electronic), 2000.

[12] Norman Biggs. Constructions for cubic graphs with large girth. *Electronic Journal of Combinatorics*, 5:56–62, 1998.

[13] Robert E. Bixby. On reid's characterization of the ternary matroids. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 26(2):174–204, 1979.

[14] H. L. Bodlaender. A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM Journal on Computing*, 25:1305–1317, 1996.

[15] Hans Bodlaender, Fedor Fomin, Daniel Lokshtanov, Eelko Penninkx, Saket Saurabh, and Dimitrios Thilikos. (Meta) kernelization. In *50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, (FOCS 2009)*. ACM, 2009.

[16] Hans L. Bodlaender. A cubic kernel for feedback vertex set. In *24th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2007)*, volume 4393 of *LNCS*, pages 320–331. Springer, Berlin, 2007.

[17] Hans L. Bodlaender, Rodney G. Downey, Michael R. Fellows, and Danny Hermelin. On problems without polynomial kernels. *J. Comput. Syst. Sci.*, 75:423–434, December 2009.

[18] Hans L. Bodlaender, Fedor V. Fomin, Arie M. C. A. Koster, Dieter Kratsch, and Dimitrios M. Thilikos. On exact algorithms for treewidth. In *Algorithms - ESA 2006, 14th Annual European Symposium*, volume 4168 of *LNCS*, pages 672–683. Springer, Berlin, 2006.

[19] Hans L. Bodlaender, Arie M.C.A. Koster, and Thomas Wolle. Contraction and treewidth lower bounds. In Susanne Albers and Tomasz Radzik, editors, *Algorithms – ESA 2004*, volume 3221 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 628–639. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[20] Hans L. Bodlaender and Dimitrios M. Thilikos. Constructive linear time algorithms for branchwidth. In *Automata, Languages and Programming, 24th International Colloquium, ICALP'97*, volume 1256 of *LNCS*, pages 627–637. Springer, Berlin, 1997.

[21] Hans L. Bodlaender and Babette van Antwerpen-de Fluiter. Reduction algorithms for graphs of small treewidth. *Inf. Comput.*, 167(2):86–119, 2001.

[22] Thomas H. Brylawski. A combinatorial model for series-parallel networks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154:1–22, 1971.

[23] Kevin Burrage, Vladimir Estivill-Castro, Michael Fellows, Michael Langston, Shev Mac, and Frances Rosamond. The undirected feedback vertex set problem has a Poly(k) kernel. In *Parameterized and exact computation*, volume 4169 of *LNCS*, pages 192–202. Springer, Berlin, 2006.

[24] Sergio Cabello and Bojan Mohar. Crossing number and weighted crossing number of near-planar graphs. *Algorithmica*, 60(3):484–504, 2011.

[25] Liming Cai and David Juedes. On the existence of subexponential parameterized algorithms. *J. Comput. System Sci.*, 67(4):789 – 807, 2003.

[26] Maw-Shang Chang, Ton Kloks, and Chuan-Min Lee. Maximum clique transversals. In *27th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science—WG 2001 (Boltenhagen near Rostock, Germany)*, pages 300–310. 2001.

[27] G. Chartrand and F. Harary. Planar permutation graphs. *Annales de l'Institut Henri Poincare Section B*, 3:433–438, 1967.

[28] Chandra Chekuri and Julia Chuzhoy. Polynomial bounds for the grid-minor theorem. *CoRR*, abs/1305.6577, 2013.

[29] Jianer Chen, Fedor V. Fomin, Yang Liu, Songjian Lu, and Yngve Villanger. Improved algorithms for feedback vertex set problems. *J. Comput. System Sci.*, 74(7):1188–1198, 2008.

[30] Zhi-Zhong Chen, Michelangelo Grigni, and Christos H. Papadimitriou. Map graphs. *J. ACM*, 49(2):127–138, March 2002.

[31] Fabián A. Chudak, Michel X. Goemans, Dorit S. Hochbaum, and David P. Williamson. A primal-dual interpretation of two 2-approximation algorithms for the feedback vertex set problem in undirected graphs. *Oper. Res. Lett.*, 22(4-5):111–118, 1998.

[32] Bruno Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 85(1):12–75, 1990.

[33] Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, Johan M. M. van Rooij, and Jakub Onufry Wojtaszczyk. Solving connectivity problems parameterized by treewidth in single exponential time. In *IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, (FOCS 2011)*, pages 150–159. IEEE Computer Society, 2011.

[34] Anuj Dawar and Stephan Kreutzer. Domination problems in nowhere-dense classes. In Ravi Kannan and K. Narayan Kumar, editors, *IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, (FSTTCS 2009)*, volume 4 of *LIPIcs*, pages 157–168. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2009.

[35] Alice M. Dean, Joan P. Hutchinson, and Edward R. Scheinerman. On the thickness and arboricity of a graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 52(1):147–151, 1991.

[36] Erik D. Demaine, Fedor V. Fomin, Mohammad Taghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Fixed-parameter algorithms for (k, r)-center in planar graphs and map graphs. *ACM Transactions on Algorithms*, 1(1):33–47, 2005.

[37] Erik D. Demaine, Fedor V. Fomin, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Bidimensional parameters and local treewidth. *SIAM J. Discrete Math.*, 18(3):501–511 (electronic), 2004/05.

[38] Erik D. Demaine, Fedor V. Fomin, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Subexponential parameterized algorithms on graphs of bounded genus and H-minor-free graphs. *Journal of the ACM*, 52(6):866–893, 2005.

[39] Erik D. Demaine, Mohammad Taghi Hajiaghayi, Naomi Nishimura, Prabhakar Ragde, and Dimitrios M. Thilikos. Approximation algorithms for classes of graphs excluding single-crossing graphs as minors. *J. Comput. System Sci.*, 69(2):166–195, 2004.

[40] Erik D. Demaine and MohammadTaghi Hajiaghayi. Bidimensionality: new connections between fpt algorithms and ptass. In *16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2005)*, pages 590–601. ACM-SIAM, New York, 2005.

[41] Erik D. Demaine and Mohammadtaghi Hajiaghayi. Linearity of grid minors in treewidth with applications through bidimensionality. *Combinatorica*, 28(1):19–36, 2008.

[42] Erik D. Demaine, MohammadTaghi Hajiaghayi, and Ken-ichi Kawarabayashi. Algorithmic graph minor theory: Improved grid minor bounds and Wagner's contraction. In *17th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2006)*, volume 4288 of *LNCS*, pages 3–15. Calcutta, India, December 18–20 2006.

[43] Erik D. Demaine, MohammadTaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. 1.5-approximation for treewidth of graphs excluding a graph with one crossing as a minor. In *Approximation algorithms for combinatorial optimization*, volume 2462 of *LNCS*, pages 67–80. Springer, Berlin, 2002.

[44] Erik D. Demaine, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Exponential speedup of fixed-parameter algorithms for classes of graphs excluding single-crossing graphs as minors. *Algorithmica*, 41(4):245–267, 2005.

[45] Erik D. Demaine, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. The bidimensional theory of bounded-genus graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 20(2):357–371, 2006.

[46] Reinhard Diestel. *Graph Theory.* Springer-Verlag, Electronic Edition, 2005.

[47] Reinhard Diestel, Tommy R. Jensen, Konstantin Yu. Gorbunov, and Carsten Thomassen. Highly connected sets and the excluded grid theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75(1):61–73, 1999.

[48] G. A. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 27:85–92, 1952.

[49] Frederic Dorn. Dynamic programming and fast matrix multiplication. In *14th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2006)*, volume 4168 of *LNCS*, pages 280–291. Springer, Berlin, 2006.

[50] Frederic Dorn. *Designing Subexponential Algorithms : Problems, Techniques & Structures.* PhD thesis, Department of Informatics, University of Bergen, 2007.

[51] Frederic Dorn, Fedor V. Fomin, and Dimitrios M. Thilikos. Catalan structures and dynamic programming in H-minor-free graphs. In *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2008)*, pages 631–640. 2008.

[52] Frederic Dorn, Eelko Penninkx, Hans L. Bodlaender, and Fedor V. Fomin. Efficient exact algorithms on planar graphs: exploiting sphere cut branch decompositions. In *13th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2005)*, volume 3669 of *LNCS*, pages 95–106. Springer, Berlin, 2005.

[53] R. G. Downey and M. R. Fellows. *Parameterized complexity.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[54] Rod G. Downey and Michael R. Fellows. Parameterized computational feasibility. In *Feasible Mathematics II*, pages 219–244. Birkhäuser, 1995.

[55] Rodney G. Downey and Michael R. Fellows. Fixed-parameter tractability and completeness I: Basic results. *SIAM Journal on Computing*, 24(4):873–921, 1995.

[56] Rodney G. Downey and Michael R. Fellows. Fixed-parameter tractability and completeness II: On completeness for W[1]. *Theoretical Computer Science*, 141(1&2):109–131, 1995.

[57] Zdenek Dvorak, Daniel Kral, and Robin Thomas. Deciding first-order properties for sparse graphs. In *2010 IEEE 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS '10, pages 133–142. IEEE, Washington, DC, USA, 2010.

[58] J. A. Ellis, I. H. Sudborough, and J. S. Turner. The vertex separation and search number of a graph. *Information and Computation*, 113(1):50–79, 1994.

[59] D. Eppstein. Diameter and treewidth in minor-closed graph families. *Algorithmica*, 27(3-4):275–291, 2000. Treewidth.

[60] David Eppstein. Subgraph isomorphism in planar graphs and related problems. *J. Graph Algorithms Appl.*, 3:1–27, 1999.

[61] Michael R Fellows and Langston Michael A. An analogue of the myhill-nerode theorem and its use in computing finite-basis characterisations (extended abstract). In *30th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 1989*, pages 520–525. 1989.

[62] Henning Fernau and David Juedes. A geometric approach to parameterized algorithms for domination problems on planar graphs. In *29th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer (MFCS 2004)*, volume 3153 of *LNCS*, pages 488–499. Springer, Berlin, 2004.

[63] Paola Festa, Panos M. Pardalos, and Mauricio G. C. Resende. Feedback set problems. In *Handbook of combinatorial optimization, Supplement Vol. A*, pages 209–258. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[64] Jörg Flum and Martin Grohe. *Parameterized Complexity Theory*. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[65] F. V. Fomin, F. Mazoit, and I. Todinca. Computing branchwidth via efficient triangulations and blocks. In *31st Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2005)*, volume 3787 of *LNCS*, pages 374–384. Springer, Berlin, 2005.

[66] Fedor V. Fomin, Serge Gaspers, Artem V. Pyatkin, and Igor Razgon. On the minimum feedback vertex set problem: exact and enumeration algorithms. *Algorithmica*, 52(2):293–307, 2008.

[67] Fedor V. Fomin, Petr Golovach, and Dimitrios M. Thilikos. Contraction bidimensionality: the accurate picture. In *17th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2009)*, LNCS, pages 706–717. Springer, 2009.

[68] Fedor V. Fomin, Petr A. Golovach, and Dimitrios M. Thilikos. Contraction obstructions for treewidth. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 101(5):302–314, 2011.

[69] Fedor V. Fomin, Pinar Heggernes, and Rodica Mihai. Mixed search number and linear-width of interval and split graphs. *Networks*, 56(3):207–214, 2010.

[70] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Neeldhara Misra, and Saket Saurabh. Planar-$\mathcal{F}$ deletion: Approximation, kernelization and optimal FPT algorithms. Personal communication, 2012.

[71] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Venkatesh Raman, and Saket Saurabh. Bidimensionality and EPTAS. In *22st ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2011)*, pages 748–759. ACM-SIAM, San Francisco, California, 2011.

[72] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, and Saket Saurabh. Bidimensionality and geometric graphs. In *23st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2012)*, pages 1563–1575, 2012.

[73] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Saket Saurabh, and Dimitrios M. Thilikos. Bidimensionality and kernels. In *21st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2010)*, pages 503–510, 2010.

[74] Fedor V. Fomin and Dimitrios M. Thilikos. Dominating sets in planar graphs: branch-width and exponential speed-up. *SIAM J. Comput.*, 36(2):281–309 (electronic), 2006.

[75] Fedor V. Fomin and Dimitrios M. Thilikos. New upper bounds on the decomposability of planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 51(1):53–81, 2006.

[76] Jacob Fox, János Pach, and Andrew Suk. The number of edges in k-quasi-planar graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 27(1):550–561, 2013.

[77] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.

[78] J. F. Geelen, A. M. H. Gerards, N. Robertson, and G. P. Whittle. On the excluded minors for the matroids of branch-width k. *J. Combin. Theory Ser. B*, 88(2):261–265, 2003.

[79] James F. Geelen, A. M. H. Gerards, and Ajai Kapoor. The excluded minors for gf(4)-representable matroids. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 79(2):247–299, 2000.

[80] James F. Geelen, A. M. H. Gerards, and Geoff Whittle. Branch-width and well-quasi-ordering in matroids and graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 84(2):270–290, 2002.

[81] Jim Geelen, Bert Gerards, and Geoff Whittle. On Rota's conjecture and excluded minors containing large projective geometries. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96(3):405–425, 2006.

[82] Michel X. Goemans and David P. Williamson. Primal-dual approximation algorithms for feedback problems in planar graphs. In *Integer programming and combinatorial optimization (Vancouver, BC, 1996)*, volume 1084 of *LNCS*, pages 147–161. Springer, Berlin, 1996.

[83] Michel X. Goemans and David P. Williamson. Primal-dual approximation algorithms for feedback problems in planar graphs. *Combinatorica*, 18(1):37–59, 1998.

[84] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

[85] Alexander Grigoriev and Hans L. Bodlaender. Algorithms for graphs embeddable with few crossings per edge. *Algorithmica*, 49(1):1–11, 2007.

[86] Alexander Grigoriev, Athanassios Koutsonas, and Dimitrios M. Thilikos. Subexponentiality and kernels for nearly planar graphs. *unpublished manuscript.*

[87] Alexander Grigoriev, Athanassios Koutsonas, and Dimitrios M. Thilikos. Nearly planar graphs and λ-flat graphs. *CoRR*, abs/1311.0137, 2013.

[88] Alexander Grigoriev, Athanassios Koutsonas, and Dimitrios M. Thilikos. Bidimensionality of geometric intersection graphs. In *SOFSEM*, volume 8327 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 293–305. Springer, 2014.

[89] Martin Grohe. Computing crossing numbers in quadratic time. *J. Comput. Syst. Sci.*, 68(2):285–302, 2004.

[90] Qian-Ping Gu and Hisao Tamaki. Optimal branch-decomposition of planar graphs in $O(n^3)$ time. *ACM Trans. Algorithms*, 4(3):Art. 30, 13, 2008.

[91] Qian-Ping Gu and Hisao Tamaki. Constant-factor approximations of branch-decomposition and largest grid minor of planar graphs in $o(n^{1+e;})$ time. *Theor. Comput. Sci.*, 412(32):4100–4109, 2011.

[92] Qian-Ping Gu and Hisao Tamaki. Improved bounds on the planar branchwidth with respect to the largest grid minor size. *Algorithmica*, 64(3):416–453, 2012.

[93] Rhiannon Hall, James Oxley, and Charles Semple. The structure of 3-connected matroids of path width three. *European J. Combin.*, 28(3):964–989, 2007.

[94] Rhiannon Hall, James Oxley, Charles Semple, and Geoff Whittle. Fork-decompositions of matroids. *Adv. in Appl. Math.*, 32(3):523–575, 2004.

[95] Illya V. Hicks and Nolan B. McMurray, Jr. The branchwidth of graphs and their cycle matroids. *J. Combin. Theory Ser. B*, 97(5):681–692, 2007.

[96] Petr Hliněný. The Tutte polynomial for matroids of bounded branchwidth. *Combin. Probab. Comput.*, 15(3):397–409, 2006.

[97] Paul C Kainen. A lower bound for crossing numbers of graphs with applications to kn, kp,q, and q(d). *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 12(3):287 – 298, 1972.

[98] Iyad Kanj and Ljubomir Perković. Improved parameterized algorithms for planar dominating set. In *27th International Symposium Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2002)*, volume 2420 of *LNCS*, pages 399–410. Springer, Berlin, 2002.

[99] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In Raymond E. Miller and James W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. 1972.

[100] Navin Kashyap. Matroid pathwidth and code trellis complexity. *SIAM J. Discrete Math.*, 22(1):256–272, 2008.

[101] Philip N. Klein, Serge A. Plotkin, and Satish Rao. Excluded minors, network decomposition, and multicommodity flow. In *STOC*, pages 682–690, 1993.

[102] Ton Kloks, C. M. Lee, and Jiping Liu. New algorithms for k-face cover, k-feedback vertex set, and k-disjoint cycles on plane and planar graphs. In *28th International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2002)*, volume 2573 of *LNCS*, pages 282–295. Springer, Berlin, 2002.

[103] Ton Kloks, C. M. Lee, and Jiping Liu. New algorithms for k-face cover, k-feedback vertex set, and k-disjoint cycles on plane and planar graphs. In *28th International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2002)*, volume 2573 of *LNCS*, pages 282–295. Springer, Berlin, 2002.

[104] Athanassios Koutsonas and Dimitrios M. Thilikos. Planar feedback vertex set and face cover: Combinatorial bounds and subexponential algorithms. *Algorithmica*, 60(4):987–1003, 2011.

[105] Athanassios Koutsonas, Dimitrios M. Thilikos, and Koichi Yamazaki. Outerplanar obstructions for matroid pathwidth. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38:541–546, 2011.

[106] Athanassios Koutsonas, Dimitrios M. Thilikos, and Koichi Yamazaki. Outerplanar obstructions for matroid pathwidth. *Discrete Mathematics*, 315–316:95–101, 2014.

[107] Daniel Král'. Computing representations of matroids of bounded branch-width. In Wolfgang Thomas and Pascal Weil, editors, *STACS 2007*, volume 4393 of *LNCS*, pages 224–235. Springer Berlin / Heidelberg, 2007.

[108] Stephan Kreutzer. Algorithmic meta-theorems. *CoRR*, abs/0902.3616, 2009.

[109] Hen-Ming Lin and Jing-Yang Jou. On computing the minimum feedback vertex set of a directed graph by contraction operations. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 19(3):295–307, Mar 2000.

[110] Daniel Lokshtanov, Daniel Marx, and Saket Saurabh. Known algorithms on graphs of bounded treewidth are probably optimal. In *22st ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2011)*, pages 777–789. ACM-SIAM, San Francisco, California, 2011.

[111] Frédéric Mazoit and Stéphan Thomassé. Branchwidth of graphic matroids. In *Surveys in combinatorics 2007*, volume 346 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 275–286. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[112] B. Mohar and C. Thomassen. *Graphs on surfaces*. J. Hopkins Univ. Press, 2001.

[113] G. L. Nemhauser and L. E. Trotter, Jr. Vertex packings: structural properties and algorithms. *Math. Programming*, 8:232–248, 1975.

[114] Jaroslav Nesetril, Patrice Ossona de Mendez, and David R. Wood. Characterisations and examples of graph classes with bounded expansion. *Eur. J. Comb.*, 33(3):350–373, 2012.

[115] R. Niedermeier. *Invitation to fixed-parameter algorithms*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2002. Habilitation thesis.

[116] Rolf Niedermeier. *Invitation to fixed-parameter algorithms*, volume 31 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2006.

[117] James G. Oxley. *Matroid theory*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1992.

[118] János Pach, Rom Pinchasi, Gábor Tardos, and Géza Tóth. Geometric graphs with no self-intersecting path of length three. *Eur. J. Comb.*, 25(6):793–811, 2004.

[119] János Pach and Géza Tóth. Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica*, 17(3):427–439, 1997.

[120] Christos M. Papadimitriou. *Computational Complexity.* Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[121] T. D. Parsons. Pursuit-evasion in a graph. In *Proceedings Internat. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1976, Theory and applications of graphs*, pages 426–441. Lecture Notes in Math., Vol. 642. Springer, Berlin, 1978.

[122] Michał Pilipczuk. Problems parameterized by treewidth tractable in single exponential time: a logical approach. Technical Report arXiv:1104.3057, Cornell University, April 2011.

[123] Serge A. Plotkin, Satish Rao, and Warren D. Smith. Shallow excluded minors and improved graph decompositions. In *SODA*, pages 462–470, 1994.

[124] Hongxun Qin, Daniel C. Slilaty, and Xiangqian Zhou. The regular excluded minors for signed-graphic matroids. *Combinatorics, Probability & Computing*, 18(6):953–978, 2009.

[125] B. Reed. *Treewidth and tangles, a new measure of connectivity and some applications.* Surveys in Combinatorics, 1997.

[126] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors II. Algorithmic aspects of tree-width. *J. Algorithms*, 7(3):309–322, 1986.

[127] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors V. Excluding a planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 41(1):92–114, 1986.

[128] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. X. Obstructions to Tree-decomposition. *J. Combin. Theory Series B*, 52(2):153–190, 1991.

[129] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph. *J. Combin. Theory Series B*, 77:1–27, 1999.

[130] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors XX. Wagner's conjecture. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.

[131] Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Quickly excluding a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 62(2):323–348, 1994.

[132] Paul D. Seymour. Matroid representation over gf(3). *J. Comb. Theory, Ser. B*, 26(2):159–173, 1979.

[133] Paul D. Seymour and Robin Thomas. Call routing and the ratcatcher. *Combinatorica*, 14(2):217–241, 1994.

[134] M. M. Shikare and B. N. Waphare. Excluded-minors for the class of graphic splitting matroids. *Ars Comb.*, 97, 2010.

[135] Konstantin Skodinis. Construction of linear tree-layouts which are optimal with respect to vertex separation in linear time. *J. Algorithms*, 47(1):40–59, 2003.

[136] Atsushi Takahashi, Shuichi Ueno, and Yoji Kajitani. Minimal acyclic forbidden minors for the family of graphs with bounded path-width. *Discrete Mathematics*, 127(1/3):293–304, 1994.

[137] Dimitrios M. Thilikos. Algorithms and obstructions for linear-width and related search parameters. *Discrete Applied Mathematics*, 105:239–271, 2000.

[138] Dimitrios M. Thilikos. Fast sub-exponential algorithms and compactness in planar graphs. In *19th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2011)*, pages 358–369, 2011.

[139] Robin Thomas. Tree-decompositions of graphs. Lecture notes, School of Mathematics. Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332, USA, 1996.

[140] Stéphan Thomassé. A quadratic kernel for feedback vertex set. In *Nineteenth Annual ACM -SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2009)*, pages 115–119. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2009.

[141] Carsten Thomassen. Girth in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 35(2):129 – 141, 1983.

[142] Mikkel Thorup. Map graphs in polynomial time. In *FOCS*, pages 396–405, 1998.

[143] Klaus Truemper. *Matroid decomposition.* Academic Press, 1992.

[144] W. T. Tutte. A homotopy theorem for matroids I, II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88:144–174, 1958.

[145] W. T. Tutte. Matroids and graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90:527–552, 1959.

[146] W. T. Tutte. Connectivity in matroids. *Canad. J. Math.*, 18:1301–1324, 1966.

[147] Johan M. M. van Rooij, Hans L. Bodlaender, and Peter Rossmanith. Dynamic programming on tree decompositions using generalised fast subset convolution. In *17th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2009)*, volume 5757 of *LNCS*, pages 566–577. Springer, 2009.

[148] H. Whitney. Non-separable and planar graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 34:339–362, 1932.

[149] H. Whitney. Planar graphs. *Fundamenta Mathematicae*, 21:73–84, 1933.

[150] H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, 57:509–533, 1935.

[151] Thomas Zaslavsky. Frame matroids and biased graphs. *Eur. J. Comb.*, 15(3):303–307, 1994.