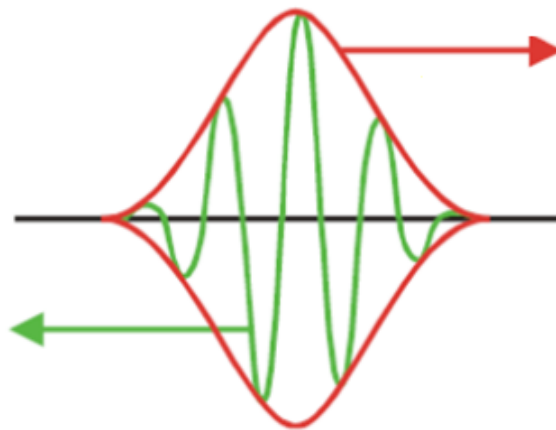




**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

**Εντοπισμένα κύματα
σε μη γραμμικά μεταϋλικά**



Γεώργιος Π. Βελντές

Διδακτορική Διατριβή
Αθήνα, Ιούνιος 2015

*Στη μνήμη του πατέρα μου,
στη μητέρα μου,
στη σύζυγό μου και την κόρη μου.*

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών με κύριο επιβλέποντα τον Καθηγητή Δημήτριο Φραντζεσκάκη έναν εξάίρετο επιστήμονα, τον οποίο εκτιμώ ιδιαίτερα τόσο σαν δάσκαλο όσο και σαν άνθρωπο. Από τη θέση αυτή θέλω να τον ευχαριστήσω για τη μεγάλη εμπιστοσύνη με την οποία περιέβαλε την προσπάθειά μου και την υποστήριξη που μου παρείχε καθόλη τη διάρκεια της διδακτορικής μου διατριβής. Η ευρύτητα των γνώσεων, οι συμβουλές και η συνεχής καθοδήγησή του ήταν οι κινητήριες δυνάμεις μου για να ανταπεξέλθω στις υψηλές απαιτήσεις της ερευνητικής μας προσπάθειας.

Στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή συμμετείχαν επίσης ο Καθηγητής Ν. Στεφάνου και ο Καθηγητής Ι. Τίγκελης τους οποίους ευχαριστώ ιδιαίτερος για την στήριξή τους στην εκπόνηση της διατριβής και τις παρατηρήσεις τους στο τελικό κείμενο. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή Γ. Τόμπρα, τον Καθηγητή Ι. Στρατή, τον Καθηγητή Ν. Καραχάλιο και τον Επίκουρο Καθηγητή Ε. Νισταζάκη για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή της διδακτορικής μου διατριβής.

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διατριβής είχα τη χαρά και την τιμή να γνωρίσω και να συνεργαστώ με τον Καθηγητή Π. Κεβρεκίδη (University of Massachusetts, USA) και την πειραματική ομάδα του Dickinson College (Philadelphia, USA), τον Καθηγητή J. Cuevas-Maraver (University of Sevilla, Spain), τον Επίκουρο Καθηγητή Ι. Κουράκη (Queen's University Belfast, Northern Ireland UK) και τον Επίκουρο Καθηγητή Β. Ρόθο (Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης). Τους ευχαριστώ θερμά για την στενή και ουσιαστική συνεργασία μας και τη βοήθειά τους στην εκπόνηση αυτής της διατριβής.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους συνεργάτες μου στην ερευνητική ομάδα Μη Γραμμικών Συστημάτων, τον Δρ. Β. Αχιλλέως και την Υπ. Δρ. Φ. Τσίτουρα, καθώς και την Υπ. Δρ. Α. Κατσιμίγα, με τους οποίους όχι μόνο μοιραστήκαμε αρμονικά τον ίδιο χώρο όλα αυτά τα χρόνια αλλά η καθημερινή αλληλεπίδραση ήταν σημαντικός αρωγός στη λύση και κατανόηση πολλών προβλημάτων.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα αδέρφια μου, Μαρία και Νίκο, που με στήριξαν στις δύσκολες και δυσάρεστες στιγμές αποδεικνύοντας έμπρακτα την αξία και τη δύναμη της οικογένειας.

Στους γονείς μου, Πέτρο και Παναγιώτα, θα ήθελα να εκφράσω την απεριόριστη ευγνωμοσύνη που νοιώθω για την αγάπη, τα ηθικά και υλικά εφόδια, που μου πρόσφεραν απλόχερα ώστε να έχω τη δυνατότητα να εκπληρώσω τα όνειρα και τους στόχους μου. Μία συγγνώμη και ένα μεγάλο ευχαριστώ στη γυναίκα μου Μαρίτα και την κόρη μου Τίνα για τις ώρες που βρέθηκα μακριά τους, την αγάπη και την αγόγγυστη υποστήριξή τους χωρίς την οποία δε θα μπορούσα να ολοκληρώσω αυτή τη διατριβή. Τους ευχαριστώ και τους αφιερώνω τη διατριβή.

Γιώργος Π. Βελντές

Περιεχόμενα

Πρόλογος	ii
Περιεχόμενα	iii
Περίληψη	v
Abstract	vi
Ακρωνύμια και Συντομογραφίες	vii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Μεταϋλικά	1
1.1.1 Μη γραμμικά μεταϋλικά	3
1.2 Θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μελέτη των μεταϋλικών	3
1.2.1 Μικροσκοπική προσέγγιση	3
1.2.2 Φαινομενολογική προσέγγιση	5
1.2.3 Χρήση των παραμέτρων σκέδασης	5
1.2.4 Το μοντέλο των γραμμών μεταφοράς	6
1.3 Διάδοση σολιτονίων στα μεταϋλικά	7
1.4 Αντικείμενο και δομή της διδακτορικής διατριβής	9
2 Οπισθοδεύοντα κύματα και σολιτόνια σε ηλεκτρικό πλέγμα: θεωρία και πείραμα	13
2.1 Πειραματική διάταξη και ισοδύναμο μοντέλο	13
2.2 Πειραματικά αποτελέσματα	16
2.3 Αναλυτικά και αριθμητικά αποτελέσματα	21
3 Συζευγμένα σολιτόνια σε αριστερόστροφη-δεξιόστροφη γραμμή μεταφοράς	26
3.1 Ανάλυση του μοντέλου	27
3.1.1 Το μοντέλο της μη γραμμικής CRLH γραμμής μεταφοράς	27
3.1.2 Γραμμική ανάλυση	30
3.1.3 Μη γραμμική ανάλυση: Συζευγμένες εξισώσεις NLS και σολιτόνια	34
3.2 Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων σε διαφορετικές περιοχές συχνοτήτων	40
3.2.1 Αριθμητικές προσομοιώσεις	40
3.2.2 Φωτεινά-Φωτεινά (BB) σολιτόνια στις περιοχές συχνοτήτων II και IV	41
3.2.3 Φωτεινά-Σκοτεινά (BD) σολιτόνια στις περιοχές συχνοτήτων I και IV	44

3.2.4	Σκοτεινά-Φωτεινά (DB) σολιτόνια στις περιοχές συχνοτήτων I-III και II-III	47
4	Διακριτά σολιτόνια σε ομοεπίπεδο κυματοδηγό με SRR	52
4.1	Ανάλυση της διάταξης SRR-CPW	53
4.1.1	Η ισοδύναμη μη γραμμική CRLH γραμμή μεταφοράς	53
4.1.2	Η ημιδιακριτή προσέγγιση και η εξίσωση NLS	57
4.1.3	Το διακριτό σολιτόνιο	60
4.2	Αριθμητικά αποτελέσματα	62
4.2.1	Φωτεινά σολιτόνια στη διάταξη SRR-CPW	62
4.2.2	Τροποποιήσεις της διάταξης SRR-CPW	65
5	Οδεύοντα κύματα σε μη γραμμικές συστοιχίες SRR	71
5.1	Ανάλυση της μη γραμμικής συστοιχίας SRR	72
5.2	Οδεύοντα κύματα	73
5.3	Αριθμητικά αποτελέσματα	75
5.3.1	Ύπαρξη και ευστάθεια οδευόντων κυμάτων για μικρές διαταραχές	76
5.3.2	Περιοδικά κύματα που οφείλονται στην εξωτερική διέγερση	79
6	Συμπεράσματα-Προοπτικές	81
Παράρτημα Α		
	Μαγνητισμένο πλάσμα	85
Παράρτημα Β		
	Θεωρία διαταραχών	91
Παράρτημα Γ		
	Η αστάθεια διαμόρφωσης για τις συζευγμένες εξισώσεις NLS	95
Παράρτημα Δ		
	Ηλεκτρικά στοιχεία και φυσικές παράμετροι της δομής SRR-CPW	97
	Βιβλιογραφία	99
	Δημοσιεύσεις	108

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή, μελετώνται η ύπαρξη, η ευστάθεια και τα χαρακτηριστικά διάδοσης εντοπισμένων κυμάτων -στη μορφή σολιτονίων- σε διάφορες δομές μη γραμμικών μεταλλικών. Η ανάλυση βασίζεται στη θεωρία των γραμμών μεταφοράς, μέσω της οποίας εξάγονται ισοδύναμα διακριτά μοντέλα που προσομοιώνουν αντίστοιχες μη γραμμικές διατάξεις μεταλλικών. Αρχικά, μελετάται ένα μη γραμμικό ηλεκτρικό δίκτυο, που προσομοιώνει μια αριστερόστροφη γραμμή μεταφοράς, τόσο πειραματικά όσο και θεωρητικά. Στη συνέχεια αναλύεται η πιο ρεαλιστική περίπτωση γραμμής μεταφοράς, που συνδυάζει την αριστερόστροφη με τη δεξιόστροφη συμπεριφορά. Κατόπιν, μελετώνται ρεαλιστικές διατάξεις μεταλλικών που έχουν υλοποιηθεί σε πειράματα. Οι διατάξεις αυτές περιλαμβάνουν ένα μη γραμμικό ομοεπίπεδο κυματοδηγό με ενσωματωμένους συντονιστές διακοπτόμενου δακτυλίου [split-ring resonators (SRR)] και μια μονοδιάστατη συστοιχία μη γραμμικών SRR. Η αναλυτική προσέγγιση βασίζεται σε μια διαταρακτική μέθοδο που χειρίζεται το φέρον (την περιβάλλουσα) της τάσης ως διακριτή (συνεχή) συνάρτηση του χώρου. Αποδεικνύεται ότι η περιβάλλουσα ικανοποιεί μια μη γραμμική εξίσωση Schrödinger, μέσω της οποίας προβλέπεται ο σχηματισμός οιονεί-διακριτών σολιτονίων, που δείχνει τη δυνατότητα του εντοπισμού της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στα μη γραμμικά μεταλλικά. Τα χαρακτηριστικά διάδοσης και η ευστάθεια των κυμάτων αυτών μελετώνται και με αριθμητικές τεχνικές, με τα σχετικά αποτελέσματα να βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις αναλυτικές προβλέψεις.

Abstract

The present thesis studies the existence, stability and the propagation characteristics of localized waves -in form of the solitons- in various structures of nonlinear metamaterials. This analysis is based on the theory of transmission lines, through which equivalent discrete models that simulate nonlinear metamaterials are derived. Initially, it studies experimentally and analytically a left-handed nonlinear electrical lattice and then analyses the most realistic case of the composite right- and left-handed nonlinear transmission line. Then, it studies realistic structures of metamaterials that have been implemented in experiments such as a nonlinear coplanar waveguide with an array of split ring resonators being etched at the bottom of substrate and an one-dimensional array of nonlinear SRR. The analytical approach is based on a multiscale perturbation method which takes into regard the discreteness of the systems by considering the carrier (envelope) of the wave as a discrete (continuous) object. With this approach it turns out that the voltage envelope function meets a nonlinear Schrödinger equation which predicts the formation of quasi-discrete solitons, namely the localization of electromagnetic power in the nonlinear metamaterials. Numerical simulations about the propagation characteristics and the stability of these waves are also employed and are found to be in a very good agreement with the analytical predictions.

Ακρωνύμια και Συντομογραφίες

HM	ΗλεκτροΜαγνητικό(ς)
BB	Bright Bright
BD	Bright Dark
CPEM	Circularly Polarized ElectroMagnetic
CPM	Cross Phase Modulation
CPW	CoPlanar Waveguide
CRLH	Composite Right Left Handed
CSRR	Complementary Split Ring Resonators
DB	Dark Bright
DD	Dark Dark
EI	ElectroInductive
GVD	Group Velocity Dispersion
HBV	Heterostructure Barrier Varactor
HF	High Frequency
LF	Low Frequency
LH	Left Handed
LHM	Left Handed Material
LCP	Left-handed Circularly Polarized
MI	MagnetoInductive
MM	Magnetic Metamaterials
NLTL	Non Linear Transmission Line
NLS	Non Linear Schrödinger
NRI	Negative Refractive Index
RCP	Right-handed Circularly Polarized
RH	Right Handed
RHM	Right Handed Material

RW	Rogue Waves
SPM	Self Phase Modulation
SRR	Split Ring Resonators
TW	Thin Wires

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Μεταϋλικά

Τα μεταϋλικά (metamaterials) είναι τεχνητές δομές που εμφανίζουν ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να βρεθούν στα φυσικά υλικά. Στις δομές αυτές ιδιότητες του υλικού, όπως η ηλεκτρική επιτρεπτότητα (permittivity) ϵ και η μαγνητική διαπερατότητα (permeability) μ , αφενός εμφανίζουν εξάρτηση από τη συχνότητα της ακτινοβολίας (εγγενής διασπορά) και αφετέρου μπορούν να λάβουν αρνητικές τιμές σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων ¹.

Στην περίπτωση που οι τιμές των ϵ και μ λάβουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές, τότε λαμβάνει αρνητικές τιμές και ο δείκτης διάθλασης n [negative refractive index (NRI)], η δε κατεύθυνση του διανύσματος Poynting καθορίζεται από τον κανόνα του αριστερού χεριού, σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, ονομάζονται και “αριστερόστροφα μεταϋλικά” [left handed material (LHM)]. Στα αριστερόστροφα μεταϋλικά, λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας και της αιτιότητας, η ισχύς διαδίδεται απομακρυνόμενη από την πηγή με την ταχύτητα ομάδας (group velocity), ενώ η ταχύτητα φάσης (phase velocity) πρέπει να έχει αντίθετη κατεύθυνση. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται τα λεγόμενα οπισθοδεύοντα κύματα [backward waves (BW)]. Απόρροια του αρνητικού δείκτη διάθλασης είναι η δημιουργία ασυνήθιστων ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων, όπως η αντιστροφή του νόμου του Snell (κατά την πρόσπτωση ενός ΗΜ κύματος στη διεπιφάνεια μεταξύ ενός συμβατικού υλικού και ενός αριστερόστροφου υλικού), η αντιστροφή του φαινομένου της ακτινοβολίας Vanilov-Cerenkov (που προκαλείται από την κίνηση με μεγάλη ταχύτητα ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ένα αριστερόστροφο υλικό), η αντιστροφή του φαινομένου Doppler (όταν η πηγή ακτινοβολίας και

¹Μία συζήτηση σχετικά με τον ορισμό της λέξης **metamaterial** υπάρχει στις εργασίες Lapine, M., and S. Tretyakov, IET Microwaves, Antennas and Propagation **1**, 3, (2007); A. Sihvola, Metamaterials **1**, 2 (2007).

ο παρατηρητής βρίσκονται μέσα σε ένα μεταϊλικό), καθώς και η εστίαση μιας αποκλίνουσας δέσμης φωτός από μια πλάκα υλικού με αρνητικό δείκτη διάθλασης.

Η θεωρητική μελέτη των προαναφερθέντων φαινομένων ξεκίνησε από μια πρωτοποριακή εργασία που δημοσίευσε στο τέλος της δεκαετίας του 1960 ο Ρώσος φυσικός Victor Veselago [1]. Ωστόσο η πειραματική επαλήθευσή τους ήρθε τρεις δεκαετίες αργότερα από τον D. R. Smith και την πειραματική του ομάδα στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Σαν Ντιέγκο [2–5]. Η ομάδα αυτή στηρίχθηκε στην εργασία του J. Pendry [6], ο οποίος υπέδειξε αφενός την τελειότητα ενός επίπεδου φακού με αρνητικό δείκτη διάθλασης και αφετέρου ισχυρίστηκε ότι είναι δυνατόν να υλοποιηθεί ο φακός αυτός χρησιμοποιώντας μια τεχνητή περιοδική δομή αντί για ένα φυσικό υλικό. Στην εργασία αυτή, ο J. Pendry απέδειξε ότι ένας επίπεδος φακός με $n = -1$ ($\epsilon = -1$, $\mu = -1$) μπορεί να ανακατασκευάζει ταυτόχρονα αντικείμενα από το μακρινό (far field) αλλά και το εγγύς (near field) πεδίο, δηλαδή, το διακριτικό του όριο p μπορεί να είναι μικρότερο από το μήκος κύματος της εισερχόμενης ακτινοβολίας λ (subwavelength resolution, $p < \lambda$). Επίσης, ισχυρίστηκε ότι στη μικροκυματική περιοχή, αυτή η περιοδική δομή θα μπορούσε να ήταν ο συνδυασμός λεπτών αγωγών [thin wires (TW)] και συντονιστών διακοπόμενου δακτυλίου [Split Ring Resonators (SRR)]. Εδώ σημειώνεται ότι είχε ήδη προβλεφθεί ότι οι περιοδικές δομές των λεπτών αγωγών [7] και των SRR [8, 9] μπορούν να εμφανίσουν σε ένα στενό εύρος ζώνης συχνοτήτων αρνητικές τιμές των ενεργών (effective) τιμών των $\epsilon(\omega)$ και $\mu(\omega)$, αντίστοιχα.

Ο επόμενος σημαντικός σταθμός στην έρευνα για τα μεταϊλικά ήταν η εφαρμογή της μεθόδου του *οπτικού μετασχηματισμού* (transformation optics), η οποία οδήγησε στη θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής απόκρυψης αντικειμένων (cloaking) [10, 11]. Μετά και την πειραματική απόδειξη της δυνατότητας για την απόκρυψη αντικειμένων στην περιοχή των μικροκυμάτων [12], το επιστημονικό ενδιαφέρον στις ερευνητικές περιοχές του τέλει φακού [13–17] και της ηλεκτρομαγνητικής απόκρυψης [18–23] αυξήθηκε ραγδαία.

Τα μεταϊλικά και οι ασυνήθιστες ιδιότητές τους έχουν προσελκύσει το ενδιαφέρον σε πλήθος θεωρητικών και πειραματικών ερευνητικών ομάδων σε διάφορα ερευνητικά πεδία της φυσικής, όπως ο ηλεκτρομαγνητισμός [24–26], η οπτική και φωτονική [27–30], η ακουστική [31–33], κλπ.

1.1.1 Μη γραμμικά μεταϋλικά

Το 2003 ξεκίνησε η θεωρητική μελέτη των μη γραμμικών μεταϋλικών [34–36] και μερικά χρόνια αργότερα ακολούθησαν οι εφαρμογές τους. Η εισαγωγή της μη γραμμικότητας στα μεταϋλικά δίνει τη δυνατότητα ελέγχου των ενεργών παραμέτρων τους $\epsilon(\omega)$ και $\mu(\omega)$ από την ένταση του ΗΜ πεδίου, παρουσιάζοντας ηλεκτρική ή/και μαγνητική μη γραμμικότητα. Τα μη γραμμικά μεταϋλικά έχουν προσελκύσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον εξαιτίας της βελτιωμένης απόδοσης που παρουσιάζουν σε σχέση με τα συνήθη μεταϋλικά καθώς και για την εμφάνιση φαινομένων που λαμβάνουν χώρα αποκλειστικά σε αυτά.

Τα μη γραμμικά μεταϋλικά μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμα σε διάφορες εφαρμογές. Αυτές περιλαμβάνουν την υλοποίηση διακοπών (switches) [37] (αφού εκμεταλλεύονται την “αλλαγή” των ιδιοτήτων των υλικών από αριστερόστροφα σε δεξιόστροφα και αντίστροφα), επιλογέων συχνότητας (tunable structures) [38] (μετάδοση ελεγχόμενη από την ένταση της τάσης ή του ρεύματος), φωτονικών κρυστάλλων που παρουσιάζουν αρνητική διάθλαση [39], κλπ. Επιπλέον, είναι δυνατόν να παρατηρηθούν θεμελιώδη φαινόμενα, όπως η δημιουργία αρμονικών [40], η ρύθμιση (tuning) και η μεταγωγή (switching) συχνότητας [41], η παραμετρική ενίσχυση για αντιστάθμιση των απωλειών [42], η δημιουργία σολιτονίων [43], κ.α.

Παρακάτω, θα αναφερθούν συνοπτικά οι κυριότερες προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται για τη θεωρητική μελέτη των μεταϋλικών, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην περίπτωση των μη γραμμικών μεταϋλικών.

1.2 Θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μελέτη των μεταϋλικών

1.2.1 Μικροσκοπική προσέγγιση

Μία από τις θεωρητικές προσεγγίσεις, που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των μεταϋλικών, είναι η μικροσκοπική προσέγγιση. Με αφετηρία τα χαρακτηριστικά των δομικών στοιχείων ενός μεταϋλικού εξάγεται η μακροσκοπική απόκριση της δομής του. Αρχικά, προτάθηκε για τη μελέτη μη γραμμικού μεταϋλικού κατασκευασμένου από μια περιοδική δομή SRR, οπότε το όλο σύστημα αποτελείται από ένα διακριτό πλέγμα, το κάθε στοιχείο του οποίου (δηλ. το ένα SRR) προσομοιώνεται ως ένα κύκλωμα RLC [34]. Επιπλέον, για τη “διέγερση” της μη γραμμικότητας, έχει επίσης προταθεί η προσθήκη μιας διόδου στην σχισμή κάθε SRR, οι συνθήκες λειτουργίας της οποίας επιλέγονται κατάλληλα. Στη συνέχεια, ολόκληρη η δομή του μεταϋλικού μοντελοποιείται στο λεγόμενο ημιστατικό όριο (quasistatic limit) [44], κατά το οποίο

επιτρέπεται ο διαχωρισμός των ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων. Έτσι, γίνεται εφικτός ο υπολογισμός της μη γραμμικής επιδεκτικότητας από τα ισοδύναμα ηλεκτρικά στοιχεία, τα χαρακτηριστικά της διόδου και τα χαρακτηριστικά του πλέγματος.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η (κατά κανόνα ασθενής) μη γραμμικότητα επιτρέπει τη μαθηματική προσέγγιση του μη γραμμικού προβλήματος ως διαταραχή του αντίστοιχου γραμμικού, παρέχοντας τη δυνατότητα προσδιορισμού με αναλυτικές εκφράσεις των μεταβλητών του προβλήματος (όπως η μη γραμμική μαγνητική επιδεκτικότητα στη συγκεκριμένη περίπτωση). Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη και τις φυσικές διαστάσεις των υπό εξέταση δομών, προσδιορίζονται οι χωρικές και χρονικές κλίμακες για την παρατήρηση των μη γραμμικών φαινομένων.

Στα πρώτα πειράματα γινόταν εισαγωγή διόδων varactor στην σχισμή (slit) των SRR [38, 45]. Η μέθοδος αυτή είναι βολική, επειδή τέτοια μεταλλικά μπορούν εύκολα να υλοποιηθούν για μεγαλύτερα μήκη κύματος. Η μη γραμμική απόκριση αυτών των μεταλλικών καθορίζεται από τις ιδιότητες του μη γραμμικού στοιχείου που εισάγεται. Δομές μεταλλικών σε δύο διαστάσεις δημιουργήθηκαν για τη μελέτη μη γραμμικών φαινομένων, όπως η παραγωγή αρμονικών και η δυναμική ρύθμιση συχνοτήτων (tunability) [41, 46, 47]. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται κυρίως στην περιοχή των μικροκυμάτων.

Η προηγούμενη τεχνική όμως δεν είναι κατάλληλη για να εφαρμοστεί στην περιοχή των οπτικών συχνοτήτων. Στην περίπτωση αυτή, το μη γραμμικό μεταλλικό δημιουργείται με την “εμβάπτιση” του γραμμικού μεταλλικού σε ένα μη γραμμικό μέσο (υποδοχέας), π.χ., τύπου Kerr [35]. Θεωρώντας ότι η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του μη γραμμικού μέσου ϵ_D εξαρτάται από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} της εισερχόμενης ακτινοβολίας (δηλ. $\epsilon_D \propto \mathbf{E}^2$), το ηλεκτρικό πεδίο αυξάνεται ραγδαία στην σχισμή των SRR (ιδιαίτερα στην περιοχή του συντονισμού). Έτσι, ο κυρίαρχος όρος είναι η μαγνητική μη γραμμικότητα και η μαγνητική διαπερατότητα μ εκφράζεται ως:

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0^2 \propto \epsilon_D^{-1}(\mathbf{E}_g^2), \quad (1.1)$$

όπου ω_0 είναι η συχνότητα συντονισμού του SRR, \mathbf{E}_g το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου στην σχισμή του SRR, το οποίο εξαρτάται από την ένταση του μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας \mathbf{H} . Με την προσέγγιση αυτή μελετώνται φαινόμενα, όπως η διστάθεια (bistability) και η διακοπτική λειτουργία μεταξύ καταστάσεων θετικού και αρνητικού δείκτη διάθλασης [35].

Σε μια τέτοια διάταξη και οι ηλεκτρικές και οι μαγνητικές ιδιότητες μπορούν να γίνουν μη

γραμμικές. Επιπλέον, με την προσέγγιση αυτή, όχι μόνο επιτυγχάνεται ισχυρότερη μη γραμμικότητα, αλλά επηρεάζονται και οι ηλεκτρικές ιδιότητες του υλικού-υποδοχέα εξαιτίας της αλληλεπίδρασης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας-υλικού [48,49]. Η χρήση μη γραμμικών υλικών ως υποδοχέων είναι κατάλληλη για εφαρμογές στην περιοχή των THz, στις υπέρυθρες και στις οπτικές συχνότητες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι προσφέρουν ισχυρότερη μη γραμμική απόκριση από ότι τα συμβατικά μη γραμμικά οπτικά υλικά εξαιτίας της ενίσχυσης του τοπικού πεδίου κοντά στα μικρά μεταλλικά στοιχεία [9]).

1.2.2 Φαινομενολογική προσέγγιση

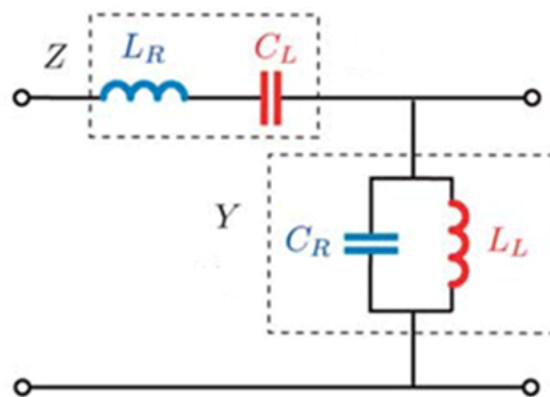
Η φαινομενολογική προσέγγιση, που χρησιμοποιείται για τη μελέτη των μη γραμμικών μεταυλικών, βασίζεται στο γεγονός ότι τα κύρια χαρακτηριστικά του υλικού θεωρούνται *a priori* γνωστά. Σε αυτό το πλαίσιο, η προσέγγιση αυτή αρχικά χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη διάδοσης ΗΜ κυμάτων σε μεταυλικά στην οπτική περιοχή του φάσματος. Προτάθηκε μια ανάλυση η οποία στηρίχθηκε στη διασπορά που εμφανίζει η “γενικευμένη επιτρεπτότητα” $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ ενός μη γραμμικού μεταυλικού (η οποία περιλαμβάνει και μαγνητικά φαινόμενα) [36]. Οι ιδιότητες του δείκτη διάθλασης περιγράφονται με τις αντίστοιχες γραμμικές και μη γραμμικές παραμέτρους του υλικού, χωρίς να γίνεται αναφορά στη χαρακτηριστική μικροσκοπική δομή του. Με αυτή την προσέγγιση μελετώνται μη γραμμικά φαινόμενα, όπως η παραγωγή δεύτερης αρμονικής και η εξαναγκασμένη σκέδαση Raman [36], επιφανειακά μη γραμμικά κύματα [50], σολιτόνια [51], ιδιότητες των ενεργειακών χασμάτων (band gaps) σε μονοδιάστατους φωτονικούς κρυστάλλους [39, 52, 53], κλπ.

1.2.3 Χρήση των παραμέτρων σκέδασης

Όταν δεν είναι δυνατή η μικροσκοπική προσέγγιση, για τον προσδιορισμό των ενεργών παραμέτρων ϵ και μ ενός μεταυλικού, έχει αναπτυχθεί εναλλακτικά μια διαφορετική προσέγγιση, που βασίζεται στην χρήση των παραμέτρων σκέδασης ή τους πίνακες μεταφοράς, που μπορούν να ληφθούν από πειραματικές μετρήσεις ή αριθμητικές προσομοιώσεις [54]. Παρόλα τα προβλήματα ομογενοποίησης που παρουσιάζει αυτή η μέθοδος στη γραμμική περιοχή [55], είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε διάφορες περιπτώσεις. Η χρήση αυτή της προσέγγισης στα μη γραμμικά μεταυλικά δυσχεραίνεται κυρίως λόγω της εξάρτησης από το πεδίο, αλλά και της χωρικής διασποράς [56, 57]. Ωστόσο τα τελευταία χρόνια, σε συνδυασμό με αριθμητικές προσομοιώσεις, έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται σε πρακτικές εφαρμογές [58].

1.2.4 Το μοντέλο των γραμμών μεταφοράς

Το μοντέλο των γραμμών μεταφοράς [transmission lines (TL)] [59], που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή, αποτελεί ένα βολικό πλαίσιο για την ανάλυση των μεταυλικών, ιδιαίτερα στην περιοχή των μικροκυματικών συχνοτήτων [43, 60, 61]. Όπως απεικονίζεται στο Σχ. 1.1, στις συμβατικές ή “δεξιόστροφες” [right handed (RH)] γραμμές μεταφοράς (όπου η ενέργεια και τα μέτωπα του κύματος οδεύουν στην ίδια κατεύθυνση) η μοναδιαία κυψελίδα είναι ένα $L_R C_R$ ηλεκτρικό κύκλωμα, ενώ στις αριστερόστροφες [left handed (LH)] γραμμές μεταφοράς είναι ένα $L_L C_L$ κύκλωμα. Στην πραγματικότητα, είναι αδύνατη η ύπαρξη αμιγώς αριστερόστροφων γραμμών μεταφοράς, επειδή κατά την υλοποίησή τους εμφανίζονται πάντα “παρασιτικά” στοιχεία με δεξιόστροφη συμπεριφορά. Τέτοιου τύπου γραμμές μεταφοράς έχουν



Σχήμα 1.1: Σύνθετη (δεξιόστροφη-αριστερόστροφη) γραμμή μεταφοράς. Τα στοιχεία L_R και C_R (L_L και C_L) αντιστοιχούν στο δεξιόστροφο (αριστερόστροφο) τμήμα της γραμμής.

περιοχές συχνοτήτων με αρνητικές και θετικές ταχύτητες φάσης και για τον λόγο αυτό ονομάζονται σύνθετες γραμμές με δεξιόστροφη-αριστερόστροφη συμπεριφορά [composite right left handed (CRLH)] [24, 25]. Η ανάλυση βασίζεται στη σύνδεση των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων του υλικού μέσου (ϵ και μ) με τα ηλεκτρικά στοιχεία της μοναδιαίας κυψελίδας της γραμμής μεταφοράς (για μέσο χωρίς απώλειες), σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\epsilon(\omega) = C_R - \frac{1}{\omega^2 L_L}, \quad (1.2)$$

$$\mu(\omega) = L_R - \frac{1}{\omega^2 C_L}. \quad (1.3)$$

Οι σύνθετες γραμμές μεταφοράς εμφανίζουν ιδιότητες διασποράς πολύ όμοιες με αυτές των ιδανικών μεταυλικών και επομένως προσφέρουν ένα ιδανικό σύστημα για τη μελέτη και την επαλήθευση φαινομένων που προβλέπονται στα μεταυλικά (π.χ οπισθοδεύουσα διάδοση). Επίσης, χρησιμοποιούνται για την περιγραφή μικροκυματικών διατάξεων και συστημάτων που

βασίζονται σε διατάξεις μεταυλικών, όπως κατευθυντικοί συζεύκτες [62], ολισθητές [63], παραμετρικοί ενισχυτές [64], κεραίες [65], κ.α.

Για την υλοποίηση αυτών των γραμμών χρησιμοποιείται κυρίως η επίπεδη μικροταινιακή τεχνολογία σε δύο παραλλαγές. Στην πρώτη, που ονομάζεται “προσέγγιση με LC στοιχεία”, η δεξιόστροφη γραμμή μεταφοράς (γραμμή-υποδοχέας), φορτώνεται με αριστερόστροφα στοιχεία, δηλ. πυκνωτές στο σειριακό κλάδο και πηνία στον παράλληλο κλάδο. Τα αριστερόστροφα ηλεκτρικά στοιχεία δημιουργούνται στην πράξη με την περιοδική τοποθέτηση σειριακών πυκνωτών μαιανδρικής μορφής (interdigital) που εναλλάσσονται με γειωμένα στελέχη (stubs), τα οποία προσομοιάζουν τα παράλληλα πηνία [66,67]. Στην περίπτωση υλοποίησης με ομοεπίπεδο κυματοδηγό [coplanar waveguide (CPW)], οι πυκνωτές του σειριακού κλάδου δημιουργούνται με σειριακά διάκενα (στον κεντρικό αγωγό) και τα πηνία του παράλληλου κλάδου με αγωγίμες λωρίδες μεταξύ του κεντρικού αγωγού και των επιπέδων γείωσης [68, 69].

Στη δεύτερη τεχνική, που ονομάζεται “προσέγγιση με στοιχεία συντονισμού”, συνήθως η κύρια γραμμή είναι ένας ομοεπίπεδος κυματοδηγός, ενώ τα SRR τοποθετούνται στην οπίσθια πλευρά του υποστρώματος [70–73]. Η σύζευξη μεταξύ των SRR και του ομοεπίπεδου κυματοδηγού παρέχει τις ισοδύναμες σειριακές χωρητικότητες, ενώ οι παράλληλοι επαγωγοί δημιουργούνται με την ίδια τεχνική που αναφέρθηκε στην προσέγγιση με LC στοιχεία.

Η μη γραμμικότητα δημιουργείται με την εισαγωγή μη γραμμικών στοιχείων (π.χ. διόδων) είτε στα δεξιόστροφα είτε/και στα αριστερόστροφα ηλεκτρικά στοιχεία της γραμμής μεταφοράς, με αποτέλεσμα η σειριακή ή/και η παράλληλη σύνθετη αντίσταση να αποκτούν εξάρτηση από τις τάσεις και τα ρεύματα της γραμμής.

1.3 Διάδοση σολιτονίων στα μεταυλικά

Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των μη γραμμικών κυμάτων [74], η μη γραμμικότητα οδηγεί σε αύξηση της κλίσης του μετώπου του κύματος με αποτέλεσμα την καταστροφή του κύματος, που οφείλεται στην εξάρτηση της ταχύτητας του κύματος από το πλάτος τους. Αντίθετα, η διασπορά τείνει να διευρύνει το κύμα, καθώς οι διαφορετικές συνιστώσες Fourier του κύματος οδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες φάσης. Έτσι, η διασπορά διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην εξισορρόπηση της κλίσης λόγω της μη γραμμικότητας. Από μαθηματικής πλευράς, υπάρχει ένας αριθμός εξισώσεων εξέλιξης [π.χ. οι εξισώσεις Korteweg-de Vries (KdV), nonlinear Schrödinger, (NLS), sine-Gordon (sG), κ.α.], στις οποίες η ισορροπία μεταξύ της μη γραμμικότητας και της διασποράς οδηγεί σε λύσεις, οι οποίες ονομάζονται *σολιτόνια*. Τέτοιες εξισώσεις

είναι γενικά μοντέλα, που εμφανίζονται σε ένα ευρύτατο φάσμα περιοχών της φυσικής [74, 75].

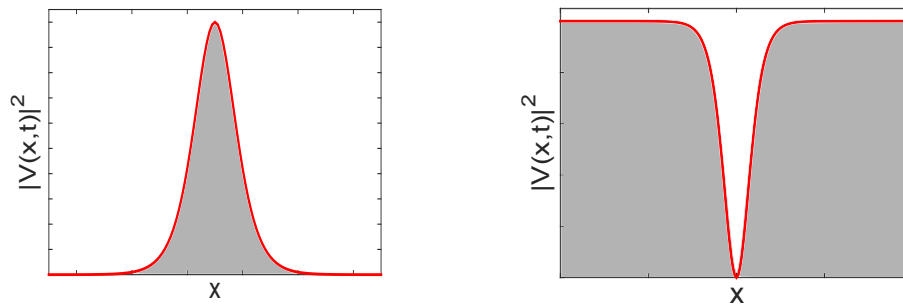
Ο συνδυασμός της μη γραμμικότητας και της (εγγενούς) διασποράς παρέχουν τη δυνατότητα για διάδοση χρονικών σολιτονίων (temporal solitons) [76] σε δομές μη γραμμικών μεταλλικών. Αυτό το γεγονός παρουσιάζει τόσο θεωρητικό όσο και τεχνολογικό ερευνητικό ενδιαφέρον, ιδιαίτερα για την υλοποίηση διατάξεων στη μικροκυματική και οπτική περιοχή (π.χ. γεννήτριες κυματομορφών [77], συζευκτών (couplers) [78], κ.α.), που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε UWB (Ultra Wide Band) συστήματα, σε συστήματα radar, κλπ. Η γένεση σολιτονίων σε μη γραμμικά μεταλλικά έχει προβλεφθεί τόσο με την προσέγγιση του ενεργού μέσου [79–86] όσο και με χρήση μοντέλων γραμμών μεταφοράς [43, 77, 87]. Στη διακριτή προσέγγιση, όπου τα μεταλλικά αντιμετωπίζονται ως συστοιχίες συζευγμένων συντονιστών που αλληλεπιδρούν με τους γείτονες τους, έχουν προβλεφθεί διάφορες σολιτονικές λύσεις, όπως φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια [88], σολιτόνια τύπου kink [89], καθώς και σολιτόνια τύπου πνοών (breathers) [90, 91].

Επίσης, παρόμοια με άλλα μη γραμμικά μέσα [76], τα μη γραμμικά μεταλλικά μπορούν να υποστηρίξουν αυτο-παγίδευση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με τη μορφή χωρικών σολιτονίων (spatial solitons) [51, 92], στις ιδιότητες των οποίων μπορεί να βασιστεί -δυναμική λειτουργία μελλοντικών οπτικοηλεκτρονικών διατάξεων. Σε πειράματα μη γραμμικών γραμμών μεταφοράς έχει παρατηρηθεί διάδοση παλμών και ο σχηματισμός σολιτονίων περιβάλλουσας. [77, 87, 93–95]. Τα σολιτόνια αυτού του τύπου αφορούν την περιβάλλουσα της τάσης $V(x, t)$ που μετράται στη γραμμή και περιγράφονται, γενικά, από μια φαινομενική εξίσωση NLS της μορφής,

$$i\partial_t V + P\partial_x^2 V + Q|V|^2 V = 0, \quad (1.4)$$

όπου P και Q είναι οι συντελεστές της διασποράς και της μη γραμμικότητας. Η παραπάνω εξίσωση επιδέχεται λύσεις φωτεινών (bright) ή σκοτεινών (dark) σολιτονίων περιβάλλουσας, για $PQ > 0$ ή $PQ < 0$, αντίστοιχα [76]. Η μορφή των σολιτονίων αυτών φαίνονται στο Σχ. 2.1.

Τα εν λόγω ευρήματα, δηλαδή η θεωρητική πρόβλεψη αλλά και η πειραματική παρατήρηση διαφόρων μορφών σολιτονίων σε μεταλλικά, αποτελούν ένα από τα βασικά κίνητρα για την παρούσα διατριβή, όπως εξηγείται λεπτομερέστερα παρακάτω.



Σχήμα 1.2: Αριστερή εικόνα: Φωτεινό σολιτόνιο όπου $PQ > 0$. Δεξιά εικόνα: Σκοτεινό σολιτόνιο όπου $PQ < 0$.

1.4 Αντικείμενο και δομή της διδακτορικής διατριβής

Στην παρούσα διατριβή, μελετώνται η ύπαρξη, η ευστάθεια και τα χαρακτηριστικά διάδοσης εντοπισμένων κυμάτων (στη μορφή σολιτονίων) σε διάφορες δομές μη γραμμικών μεταλλικών.

Η μελέτη βασίζεται στη θεωρία των γραμμών μεταφοράς, με τη βοήθεια της οποίας εξάγονται ισοδύναμα διακριτά μοντέλα που προσομοιώνουν αντίστοιχες μη γραμμικές διατάξεις μεταλλικών. Αρχικά, μελετώνται τυπικές μη γραμμικές γραμμές μεταφοράς, που προσομοιώνουν οπισθοδεύουσα (backward) διάδοση ΗΜ κυμάτων, είτε σε αμιγώς αριστερόστροφες διατάξεις, είτε στην πιο ρεαλιστική περίπτωση διατάξεων που συνδυάζουν την αριστερόστροφη με την δεξιόστροφη συμπεριφορά. Στη συνέχεια, μελετώνται ρεαλιστικές διατάξεις μεταλλικών που έχουν υλοποιηθεί σε πειράματα. Οι διατάξεις αυτές είναι: (α) ένας μη γραμμικός ομοεπίπεδος κυματοδηγός με ενσωματωμένα SRR και (β) μια μονοδιάστατη συστοιχία μη γραμμικών SRR.

Σε όλες τις περιπτώσεις, διατυπώνεται μια διακριτή μη γραμμική κυματική εξίσωση, η οποία αναλύεται με αναλυτικές και αριθμητικές τεχνικές. Η αναλυτική προσέγγιση βασίζεται –κυρίως– σε μια διαταρακτική τεχνική που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διατριβής, η οποία χειρίζεται το φέρον σήμα ως διακριτό και την περιβάλλουσα ως συνεχή συνάρτηση (ημιδιακριτή προσέγγιση). Για την τελευταία, εξάγονται –μέσω της θεωρίας διαταραχών– μοντέλα του τύπου της μη γραμμικής εξίσωσης NLS, μέσω των οποίων προβλέπεται ο σχηματισμός οιονείδιακριτών σολιτονίων (φωτεινών και σκοτεινών), δηλαδή ο εντοπισμός της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στα μη γραμμικά μεταλλικά. Τα χαρακτηριστικά διάδοσης και η ευστάθεια των κυμάτων αυτών μελετώνται και με αριθμητικές τεχνικές, με τα σχετικά αποτελέσματα να βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις αναλυτικές προβλέψεις.

Τονίζεται ότι ένα από τα κίνητρα για τη θεωρητική ανάλυση, που έγινε στην παρούσα διατριβή, υπήρξε η συνεργασία με την πειραματική ομάδα του Dickinson College (Philadelphia,

USA), με την οποία μελετήθηκε από κοινού ένα μη γραμμικό ηλεκτρικό δίκτυο -που προσομοιώνει μια αριστερόστροφη γραμμή μεταφοράς- στο εργαστήριο. Έτσι, αποδείχθηκε -και πειραματικά- ότι είναι εφικτή η γένεση οιονεί-διακριτών σολιτονίων σε μη γραμμικά μεταλλικά, γεγονός που υποδεικνύει τη δυνατότητα παρατήρησης αυτών των κυμάτων σε όλες τις διατάξεις που μελετήθηκαν θεωρητικά στη διατριβή.

Η διατριβή περιλαμβάνει μία γενική εισαγωγή (Κεφ. 1), τέσσερα κεφάλαια (Κεφ. 2, 3, 4 και 5) στα οποία αποτυπώνονται τα κύρια αποτελέσματα της διατριβής, τα συμπεράσματα (Κεφ. 6) και τέσσερα παραρτήματα (Παρ. Α, Β, Γ, και Δ).

Η οργάνωση του κυρίου μέρους της διατριβής, δηλ. των Κεφαλαίων 2, 3, 4 και 5, έχει ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 2 μελετάται θεωρητικά (αναλυτικά και αριθμητικά), αλλά και πειραματικά, ένα ηλεκτρικό δίκτυο, που προσομοιώνει μια αμιγώς αριστερόστροφη μη γραμμική γραμμή μεταφοράς. Αρχικά, παρουσιάζεται η πειραματική διάταξη και εξάγεται μια μη γραμμική διακριτή κυματική εξίσωση για την τάση στις εξόδους των στοιχειωδών κυψελίδων που απαρτίζουν τη γραμμή. Παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα, που περιλαμβάνουν την σχέση διασποράς των επίπεδων κυμάτων, την παρατήρηση των οπισθοδευόντων κυμάτων, αλλά και τον σχηματισμό διακριτών φωτεινών (ή σκοτεινών) σολιτονίων πάνω (ή κάτω) από μια τιμή κατωφλίου της φέρουσας συχνότητας. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της θεωρίας διαταραχών και της τεχνικής της ημιδιακριτής προσέγγισης, εξάγεται μια μη γραμμική εξίσωση με την οποία διερευνάται και επιβεβαιώνεται τόσο η τιμή της συχνότητας κατωφλίου, όσο και η ύπαρξη των σολιτονίων περιβάλλουσας της τάσης. Τέλος, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία επιβεβαιώνουν τα πειραματικά και αναλυτικά ευρήματα.

Στο Κεφάλαιο 3, λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση του Κεφαλαίου 2 που δείχνει ότι δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη μια αμιγώς αριστερόστροφη γραμμή μεταφοράς, ερευνάται αναλυτικά και αριθμητικά η συμπεριφορά μιας μη γραμμικής γραμμής μεταφοράς, που παρουσιάζει ταυτόχρονα και αριστερόστροφη (LH) και δεξιόστροφη (RH) συμπεριφορά. Για τη διάταξη αυτή, υπολογίζεται αρχικά η σχέση διασποράς μέσω της οποίας βρίσκεται ότι είναι εφικτή η διάδοση γραμμικών HM κυμάτων με κοινή ταχύτητα ομάδας, είτε στην περιοχή LH είτε στην RH. Από την άλλη πλευρά, μέσω της ημιδιακριτής προσέγγισης και της θεωρίας διαταραχών, βρίσκεται ότι κύματα στις περιοχές LH και RH μπορούν να συζευχθούν μέσω της μη γραμμικότητας. Αποδεικνύεται ότι οι περιβάλλουσες των συζευγμένων αυτών κυμάτων περιγράφονται από ένα σύστημα δύο συζευγμένων εξισώσεων NLS. Μέσω του συστήματος αυτού

προβλέπεται ότι σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων είναι δυνατός ο σχηματισμός τριών τύπων διανυσματικών σολιτονίων: ενός φωτεινού-φωτεινού, ενός φωτεινού-σκοτεινού και ενός σκοτεινού-φωτεινού, στις περιοχές LH και RH, αντίστοιχα. Αριθμητικές προσομοιώσεις δείχνουν ότι τα πλέον ευσταθή σολιτόνια είναι τα φωτεινού-φωτεινού τύπου, ενώ η κύρια αιτία για την παραμόρφωση και την καταστροφή του σκοτεινού-φωτεινού και του φωτεινού-σκοτεινού σολιτονίου είναι η αστάθεια διαμόρφωσης.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται η διάδοση HM κυμάτων σε ένα ομοεπίπεδο κυματοδηγό (CPW) με ενσωματωμένα SRR, μια διάταξη που έχει υλοποιηθεί πειραματικά [96]. Προτείνεται ότι η διάταξη μπορεί να γίνει μη γραμμική με την προσθήκη ενός λεπτού μη γραμμικού υμενίου [strontium barium titanate (SBTO)], οπότε -για την περίπτωση αυτή- εξάγεται μια μη γραμμική διακριτή κυματική εξίσωση, που περιγράφει τη χωροχρονική εξέλιξη της τάσης στο ισοδύναμο μοντέλο γραμμής μεταφοράς. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται και πάλι η ημιδιακριτή προσέγγιση και εξάγεται μια εξίσωση NLS, που προβλέπει τον σχηματισμό φωτεινών σολιτονίων σε συγκεκριμένες ζώνες της LH περιοχής συχνοτήτων. Τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις αναλυτικές προβλέψεις για τα χαρακτηριστικά των σολιτονίων, δείχνουν δε την ευρωστία τους – γεγονός που υποδεικνύει τη δυνατότητα παρατήρησής τους σε πειράματα. Επίσης, διερευνάται η μεταβολή γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διάταξης και βρίσκεται ότι το εύρος της LH ζώνης συχνοτήτων και η περιοχή συχνοτήτων που μπορούν να σχηματιστούν τα σολιτόνια αυξάνονται με την αύξηση του εύρους των σχισμών του κυματοδηγού ή/και της ακτίνας των SRR.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετώνται οδεύοντα κύματα σε μια μονοδιάστατη συστοιχία συζευγμένων μη γραμμικών SRR, όπου η μη γραμμικότητα δημιουργείται με την εισαγωγή διόδων στην σχισμή των SRR (τέτοιες διατάξεις έχουν επίσης υλοποιηθεί στο εργαστήριο [97]). Η ανάλυση του κεφαλαίου αυτού εστιάζεται στο ρεαλιστικό σενάριο, όπου η συστοιχία παρουσιάζει απώλειες και διεγείρεται εξωτερικά από μια πηγή - οπότε οι σχετικοί όροι στην κυματική εξίσωση θεωρούνται ως διαταραχές. Σε αυτή την περίπτωση, και με δεδομένη την ύπαρξη οδευόντων κυμάτων στο αδιατάραχτο πρόβλημα (σύμφωνα με την ανάλυση των προηγούμενων κεφαλαίων), ερευνάται η ύπαρξη και η ευστάθεια οδευόντων (περιοδικών ή εντοπισμένων) κυμάτων παρουσία των απωλειών και της εξωτερικής διέγερσης. Χρησιμοποιώντας μια ανάλυση τύπου Melnikov και αριθμητικές προσομοιώσεις αποδεικνύεται η ύπαρξη των κυμάτων αυτών καθώς και η δυνατότητά τους να είναι ευσταθή με την κατάλληλη ρύθμιση του πλάτους της εξωτερικής διέγερσης.

Όσον αφορά τα Παραρτήματα, σημειώνεται ότι το Παράρτημα Α αφορά στη διεπιστημονικότητα που χαρακτηρίζει τις αναλυτικές τεχνικές που αναπτύχθηκαν: έτσι, με χρήση των τεχνικών αυτών αναλύεται συνοπτικά η πρόβλεψη της δημιουργίας “γιγαντιαίων κυμάτων” (rogue waves) κατά την αλληλεπίδραση ηλεκτρομαγνητικής δέσμης με μαγνητισμένο πλάσμα. Τα Παραρτήματα Β-Δ αφορούν “τεχνικές” πληροφορίες. Συγκεκριμένα, το Παράρτημα Β αφορά τη μέθοδο των διαταραχών, που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των εξισώσεων NLS, και το Παράρτημα Γ παρουσιάζει μια ποιοτική ανάλυση της αστάθειας διαμόρφωσης για τις συζευγμένες εξισώσεις NLS. Τέλος, το Παράρτημα Δ αφορά τον υπολογισμό των ηλεκτρικών στοιχείων της μοναδιαίας κυψελίδας του μοντέλου της γραμμής μεταφοράς από τις φυσικές παραμέτρους της δομής SRR-CPW.

Κεφάλαιο 2

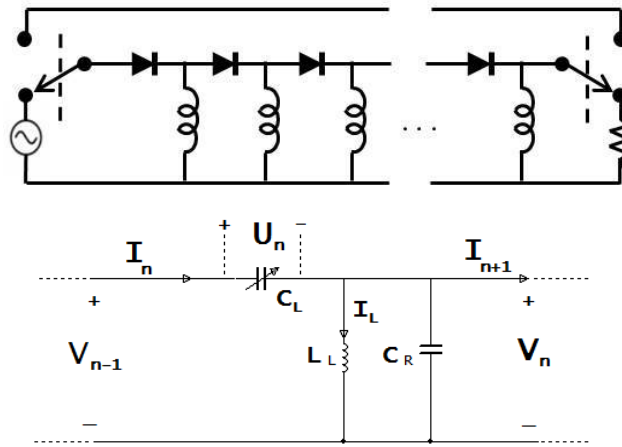
Οπισθοδεύοντα κύματα και σολιτόνια σε ηλεκτρικό πλέγμα: θεωρία και πείραμα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε πειραματικά, αναλυτικά και αριθμητικά τη διάδοση των οπισθοδευόντων κυμάτων και τη δημιουργία των διακριτών σολιτονίων σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο (πλέγμα), που προσομοιώνει μια *αμιγώς αριστερόστροφη* μη γραμμική γραμμή μεταφοράς. Η πειραματική διάταξη (βλ. την πάνω εικόνα του Σχ. 2.1), που υλοποιήθηκε στο Dickinson College, Philadelphia, μιμείται τη συμπεριφορά μιας αριστερόστροφης γραμμής μεταφοράς. Επειδή ο σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τη μη γραμμική δυναμική των κυμάτων που υποστηρίζονται από αυτό το πλέγμα, χρειάζεται να εισάγουμε ένα μη γραμμικό στοιχείο. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε μια δίοδο, η χωρητικότητα της οποίας εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη τάση, όπως εξηγείται λεπτομερώς στα επόμενα.

2.1 Πειραματική διάταξη και ισοδύναμο μοντέλο

Το μονοδιάστατο μη γραμμικό ηλεκτρικό δίκτυο, που απεικονίζεται στο Σχ. 2.1, αποτελείται από 64 κυψελίδες. Κάθε κυψελίδα αποτελείται από μια δίοδο NTE-618 τύπου varactor (που έχει χρησιμοποιηθεί και σε άλλες μελέτες μη γραμμικών ηλεκτρικών πλεγμάτων [98]) και μία αυτεπαγωγή $L_L = 470 \mu\text{H}$ στον παράλληλο κλάδο. Το σήμα εισόδου είναι ένας παλμός τάσης διαμορφωμένος κατά πλάτος από φέρον σήμα ημιτονοειδούς μορφής. Χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές γεωμετρίες της πειραματικής διάταξης, όπως εξηγείται παρακάτω.

Στην πρώτη γεωμετρία, οι κυψελίδες διατάσσονται σε ευθεία διάταξη και στο τέλος της γραμμής μεταφοράς τοποθετείται μια αντίσταση $1 \text{ K}\Omega$ για προσαρμογή. Με τον τρόπο αυτό, το κύμα που διαδίδεται κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς δεν ανακλάται στο τέλος της, αλλά



Σχήμα 2.1: Αριστερόστροφη γραμμής μεταφοράς με διακριτά στοιχεία. Πάνω εικόνα: Η πειραματική διάταξη. Κάτω εικόνα: Το ισοδύναμο μοντέλο της μοναδιαίας κυψελίδας.

απορροφάται εξ' ολοκλήρου, οπότε δεν έχουμε εμφάνιση στάσιμου κύματος κατά μήκος της γραμμής.

Στη δεύτερη γεωμετρία, οι κυψελίδες διατάσσονται σε σχήμα δαχτυλίου χρησιμοποιώντας διακόπτες που αποτρέπουν την ταυτόχρονη μετάδοση του παλμού και στις δύο κατευθύνσεις. Οι αναλογικοί διακόπτες (ADG436) ελέγχου ενός κυκλώματος με δύο επαφές [single pole double throw (SPDT)] χαρακτηρίζονται από μεγάλη ταχύτητα μεταγωγής και χαμηλή αντίσταση επαφής (on-resistance). Σε όλες τις περιπτώσεις, οι τιμές της τάσης καταγράφονται ταυτόχρονα στους 32 κόμβους με έναν ταχύτατο καταγραφέα δεδομένων τάσης 32 καναλιών. Με αυτή την τεχνική τα δεδομένα για τους 64 κόμβους συγκεντρώνονται σε δύο στάδια.

Πειραματικά μπορούν να υλοποιηθούν δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες: Η πρώτη έχει τη μορφή ενός διαμορφωμένου παλμού, οι παράμετροι του οποίου (εύρος, πλάτος και συχνότητα φέροντος) είναι ελεγχόμενοι στο πείραμα, και χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση φωτεινών σολιτονίων. Η δεύτερη γίνεται με κατάλληλη διαμόρφωση του φέροντος κύματος, ώστε να παραχθούν “βυθίσματα” τάσης επάνω στο φέρον (που είναι ένα συνεχές ημιτονοειδές σήμα), και χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση σκοτεινών σολιτονίων. Όπως θα δειχθεί στη συνέχεια, η συχνότητα του φέροντος κύματος παίζει βασικό ρόλο στον σχηματισμό και στις ιδιότητες διάδοσης των φωτεινών και σκοτεινών διακριτών σολιτονίων.

Κάθε κυψελίδα της πειραματικής διάταξης μπορεί να προσομοιωθεί από διακριτά ηλεκτρικά στοιχεία, όπως φαίνεται στην κάτω εικόνα του Σχ. 2.1. Οι δείκτες L και R δείχνουν, αντίστοιχα, τα αριστερόστροφα και τα δεξιόστροφα (με παρασιτικό χαρακτήρα) διακριτά στοιχεία της γραμμής μεταφοράς. Όπως θα δειχθεί στη συνέχεια, τα δεξιόστροφα παρασιτικά στοιχεία είναι απαραίτητα για την ακριβέστερη θεωρητική περιγραφή της διάταξης και τη συμφωνία

με τα πειραματικά δεδομένα. Η επαγωγή έχει την τιμή $L_L = 470 \mu\text{H}$, ενώ C_L είναι η χωρητικότητα της διόδου, η οποία ελέγχεται από την τάση, και C_R είναι η παρασιτική χωρητικότητα που εμφανίζεται στον παράλληλο κλάδο και έχει τιμή $C_R \approx 0.05C_L$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στο παραπάνω μοντέλο δεν εμφανίζεται η παρασιτική αυτεπαγωγή L_R στον σειριακό κλάδο, γιατί η τιμή της είναι εξαιρετικά μικρή ($L_R \approx 0.005 \mu\text{H}$) και δεν παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μας. Η παρουσία όμως της παρασιτικής χωρητικότητας είναι βασική, γιατί παίζει πρωταρχικό ρόλο στην σχέση διασποράς και έχει άμεση σχέση με την εξίσωση για την άγνωστη τάση V_n στα άκρα της n -οστής κυψελίδας. Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στην ανάλυσή μας δεν έχουν ληφθεί υπόψη οι εγγενείς απώλειες του συστήματος. Αυτές θα μπορούσαν να μοντελοποιηθούν με την παρουσία μιας αντίστασης με τιμή περίπου 2Ω , σε σειρά με την αυτεπαγωγή L_L .

Εφαρμόζοντας τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff για τη μοναδιαία κυψελίδα λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$U_n = V_{n-1} - V_n, \quad (2.1)$$

$$I_L = I_n - I_{n-1} - C_R \frac{dV_n}{dt}, \quad (2.2)$$

όπου U_n είναι η τάση στα άκρα της μη γραμμικής χωρητικότητας και I_L είναι το ρεύμα της αριστερόστροφης αυτεπαγωγής. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη ότι $I_n = (d/dt)[C_L(U_n)U_n]$, μπορούμε να εξάγουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$L_L \frac{d^2}{dt^2} [C_L(U_n)U_n - C_L(U_{n+1})U_{n+1}] - L_L C_R \frac{d^2 V_n}{dt^2} - V_n = 0. \quad (2.3)$$

Προκειμένου να εξάγουμε μια εξίσωση εξέλιξης για την τάση V_n από την Εξ. (2.3), χρειάζεται να εξετάσουμε μια συγκεκριμένη μορφή της $C_L(V)$. Εκκινώντας από τη μορφή με τη διπλή εκθετική εξάρτηση της μη γραμμικής χωρητικότητας $C_L(V)$ [99], αναπτύσσουμε κατά Taylor τη $C_L(V)$ γύρω από την τιμή $V = 0$, συμπεριλαμβάνοντας όρους έως δεύτερης τάξης, ώστε να την προσεγγίσουμε με την ακόλουθη έκφραση:

$$C_L(V) \approx C_0 - a_1 V + a_2 V^2, \quad (2.4)$$

όπου οι σταθεροί συντελεστές έχουν τις ακόλουθες τιμές: $C_0 \approx 800 \text{ pF}$, $a_1 \approx 490 \text{ pF/V}$, και $a_2 \approx 156 \text{ pF/V}^2$. Αντικαθιστώντας την Εξ. (2.4) στην Εξ. (2.3) καταλήγουμε στην ακόλουθη

εξίσωση πλέγματος:

$$\begin{aligned}
 & L_L C_0 \frac{d^2}{dt^2} (V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}) - L_L C_R \frac{d^2 V_n}{dt^2} - V_n \\
 & + L_L \frac{d^2}{dt^2} \{ -a_1 [(V_{n-1} - V_n)^2 - (V_n - V_{n+1})^2] \} \\
 & + L_L \frac{d^2}{dt^2} \{ a_2 [(V_{n-1} - V_n)^3 - (V_n - V_{n+1})^3] \} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Μετρώντας τον χρόνο σε μονάδες $\sqrt{L_L C_0}$ και την τάση σε μονάδες C_0/a_1 , εκφράζουμε τελικά την Εξ. (2.5) στην ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dt^2} (V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}) - g \frac{d^2 V_n}{dt^2} - V_n \\
 & - \frac{d^2}{dt^2} \{ [(V_{n-1} - V_n)^2 - (V_n - V_{n+1})^2] \} \\
 & + \gamma \frac{d^2}{dt^2} \{ [(V_{n-1} - V_n)^3 - (V_n - V_{n+1})^3] \} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

όπου οι παράμετροι g και γ δίνονται από τις εκφράσεις:

$$g = C_R/C_0 \approx 0.056, \quad \gamma = a_2 C_0/a_1^2 \approx 0.52.$$

2.2 Πειραματικά αποτελέσματα

Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα της συνύπαρξης της διόδου στον σειριακό κλάδο με την αυτεπαγωγή στον παράλληλο κλάδο της γραμμής μεταφοράς είναι η ριζική αλλαγή της μορφής της καμπύλης της γραμμικής διασποράς για τα οδεύοντα επίπεδα κύματα: με την τοποθέτηση της διόδου στον σειριακό κλάδο στη θέση της αυτεπαγωγής, η καμπύλη της σχέσης διασποράς εμφανίζει αρνητική κλίση για όλες τις τιμές του κυματαριθμού (ως την τιμή Bragg). Αυτό φαίνεται αν αναζητήσουμε λύσεις επίπεδου κύματος μικρού πλάτους για την Εξ. (2.6), της μορφής $V_n = V_0 \exp[i(\omega t - kn)]$, όπου $V_0 \ll 1$, ω και k είναι το πλάτος, η κυκλική συχνότητα και ο κυματαριθμός του επίπεδου κύματος, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας στην Εξ. (2.6), λαμβάνουμε την σχέση διασποράς,

$$4\omega^2 \sin^2 \left(\frac{k}{2} \right) + g\omega^2 - 1 = 0, \tag{2.7}$$

της οποίας η μορφή στο συνεχές όριο ($k \rightarrow 0$) γίνεται

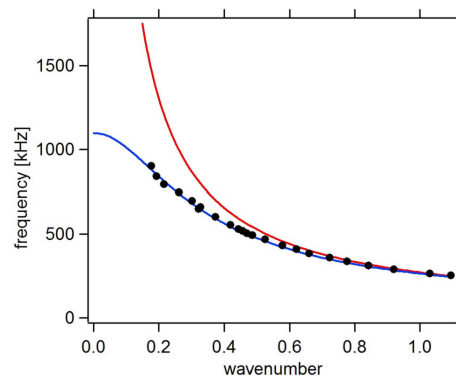
$$\omega^2 k^2 + g\omega^2 - 1 = 0. \tag{2.8}$$

Η σχέση διασποράς [Εξ. (2.7)] υποδηλώνει ότι υπάρχουν δύο συχνότητες αποκοπής: η f_{max} στο άνω όριο (που αντιστοιχεί σε $\sin^2(k/2) = 0$) και η f_{min} στο κάτω όριο (που αντιστοιχεί σε $\sin^2(k/2) = 1$), οι οποίες δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$f_{max} = \left(2\pi\sqrt{gL_L C_0}\right)^{-1} \approx 1100 \text{ kHz}, \quad (2.9)$$

$$f_{min} = \left(2\pi\sqrt{(g+4)L_L C_0}\right)^{-1} \approx 130 \text{ kHz}. \quad (2.10)$$

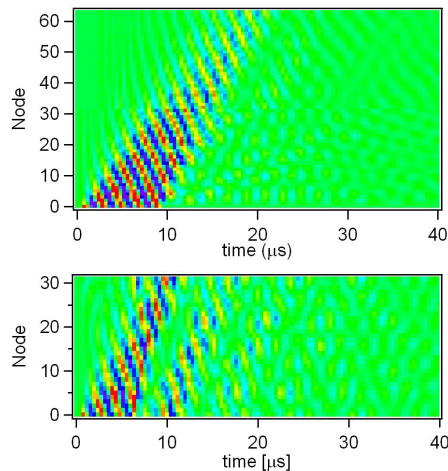
Όπως παρατηρούμε από την Εξ. (2.7), εξαιτίας της διακριτής φύσης της γραμμής μεταφοράς, εμφανίζεται η χαμηλότερη συχνότητα αποκοπής που εξαφανίζεται στο συνεχές όριο. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να σχολιάσουμε το εξής: όπως φαίνεται από την Εξ. (2.8), στην περίπτωση που δεν υπάρχει η παρασιτική χωρητικότητα C_R (δηλαδή για $g = 0$), η σχέση διασποράς παίρνει τη μορφή υπερβολής, οπότε εμφανίζεται ένα ιδιόμορφο σημείο στο $k = 0$, όπως απεικονίζεται από την κόκκινη καμπύλη στο Σχ. 2.2. Αν όμως συμπεριλάβουμε την παρασιτική χωρητικότητα στο μοντέλο μας, η ιδιομορφία εξαφανίζεται και η θεωρητική καμπύλη της σχέσης διασποράς της Εξ. (2.7) (μπλε γραμμή στο Σχ. 2.2) συμπίπτει με τα πειραματικά δεδομένα (μαύρες κουκκίδες στο Σχ. 2.2). Η συμφωνία που παρατηρούμε μεταξύ πειραματικής και αναλυτικής σχέσης διασποράς επιβεβαιώνει την ορθότητα του μοντέλου, που προτείναμε στην προηγούμενη ενότητα.



Σχήμα 2.2: Η καμπύλη της σχέσης διασποράς. Η κόκκινη καμπύλη δείχνει την προσέγγιση για $g = 0$ που αντιστοιχεί στην Εξ. (2.8), η μπλε καμπύλη δείχνει την σχέση διασποράς της Εξ. (2.7), που ταυτίζεται αφενός με την κόκκινη καμπύλη της Εξ. (2.8) για τιμές του κυματικού αριθμού $k > 0.6$ και αφετέρου με τα πειραματικά δεδομένα (μαύρες κουκκίδες).

Στη συνέχεια, διερευνούμε τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιηθεί ως αρχική συνθήκη διαμορφωμένος παλμός στην πρώτη κυψελίδα του μονοδιάστατου πλέγματος. Όπως θα δειχθεί αναλυτικά παρακάτω, για συχνότητες φέροντος άνω των 400 kHz, είναι δυνατόν η αρχική συνθήκη να αυτο-εστιαστεί ώστε να δημιουργηθεί ένα διακριτό φωτεινό σολιτόνιο. Η διαδικασία αυτή

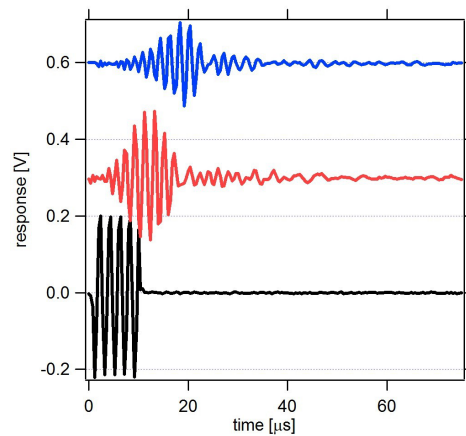
φαίνεται στο Σχ. 2.3, όπου απεικονίζεται η χωρο-χρονική εξέλιξη της τάσης για συχνότητα φέροντος 500 kHz, και αρχικό παλμό πλάτους 0.2 V και εύρους 10 μ s. Από την άλλη πλευρά, στο ίδιο σχήμα (Σχ. 2.3), αποτυπώνεται και πειραματικά ο αριστερόστροφος χαρακτήρας της γραμμής, αφού η περιβάλλουσα και το φέρον ταξιδεύουν σε διαφορετικές διευθύνσεις, με το γινόμενο της ταχύτητας ομάδας και της φασικής ταχύτητας να είναι αρνητικό ($v_g v_p < 0$).



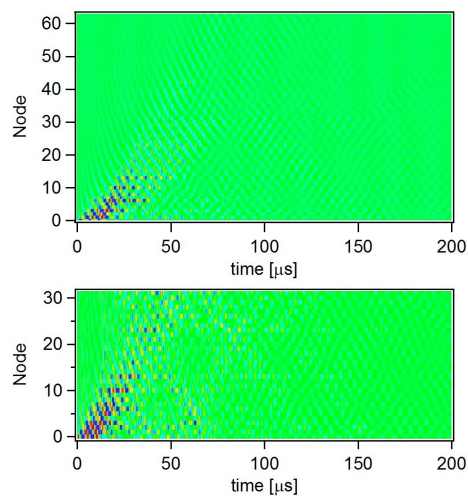
Σχήμα 2.3: Σχηματισμός ενός διακριτού φωτεινού σολιτονίου για συχνότητα φέροντος $f = 500$ kHz. Απεικονίζεται η χωρο-χρονική εξέλιξη της τάσης, που σαφώς αυτοεστιάζεται όπως συμβαίνει στα φωτεινά σολιτόνια. Πάνω εικόνα: το φωτεινό σολιτόνιο για το πλέγμα των 64 κυψελίδων με την αντίσταση προσαρμογής. Κάτω εικόνα: το φωτεινό σολιτόνιο για το πλέγμα των 32 κυψελίδων σε διάταξη δακτυλίου.

Στο Σχ. 2.4 απεικονίζεται η τάση στην έξοδο τριών διαφορετικών κυψελίδων. Στο κάτω στιγμιότυπο δείχνεται η είσοδος του σήματος στην πρώτη κυψελίδα (κυψελίδα 0), ενώ στο μεσαίο και στο πάνω στιγμιότυπο απεικονίζεται η τάση που μετρήθηκε στην έξοδο των κυψελίδων 31 και 63, αντίστοιχα. Παρατηρούμε την εξέλιξη του οδεύοντος κυματοπακέτου, όπως αυτό ανιχνεύεται στη μέση και στο τέλος της γραμμής. Όπως είναι προφανές, το κυματοπακέτο παραμένει εντοπισμένο, μολονότι χάνει μέρος της ενέργειας του εξαιτίας της απόσβεσης (όπως φαίνεται στο μεσαίο και στο πάνω στιγμιότυπο του Σχ. 2.4).

Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, αν η συχνότητα φέροντος είναι μικρότερη από 400 kHz, τότε δεν μπορούν να σχηματιστούν διακριτά φωτεινά σολιτόνια: η περιβάλλουσα του αρχικού κυματοπακέτου διευρύνεται και διασπάται κατά τη διάδοση, έχοντας οδεύσει σε λίγες μόνο κυψελίδες της γραμμής. Αυτή η διαδικασία φαίνεται στο Σχ. 2.5 και για τις δύο πειραματικές γεωμετρίες (ευθείας και δακτυλίου) της γραμμής για φέρουσα συχνότητα 200 kHz. Να σημειωθεί ότι αυτή η συχνότητα είναι πάνω από την κατώτερη συχνότητα αποκοπής $f_{min} = 130$ kHz, σύμφωνα με την Εξ. (2.10). Φαίνεται καθαρά ότι το κυματοπακέτο έχει αποσβεστεί πριν καν ανιχνευθεί στην τελευταία κυψελίδα του πλέγματος. Την ίδια ποιοτική



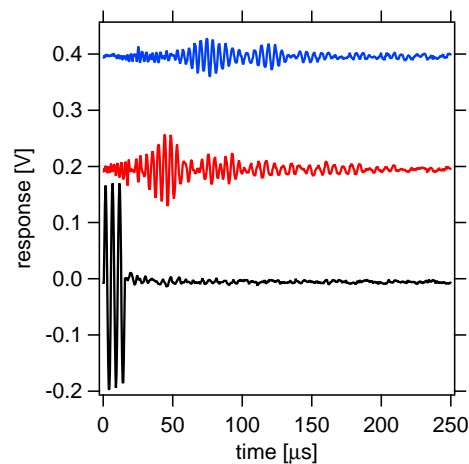
Σχήμα 2.4: Χρονικά στιγμιότυπα της τάσης σύμφωνα με τις τιμές που έχουν ληφθεί από την πάνω εικόνα του Σχ. 2.3. Η τάση έχει ληφθεί στην έξοδο της πρώτης (αρχική συνθήκη), της 31ης (μεσαίας) και της 63ης (τελευταίας) κυψελίδας, όπως φαίνεται στο κάτω, μεσαίο και πάνω στιγμιότυπο, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.5: Ίδια απεικόνιση όπως στο Σχ. 2.3, αλλά για συχνότητα $f = 200$ kHz. Στην περίπτωση αυτή, και γενικά για συχνότητες $f < 400$ kHz, δεν μπορούν να σχηματιστούν φωτεινά σολιτόνια. Εδώ παρατηρείται το αποτέλεσμα της αφεστίασης.

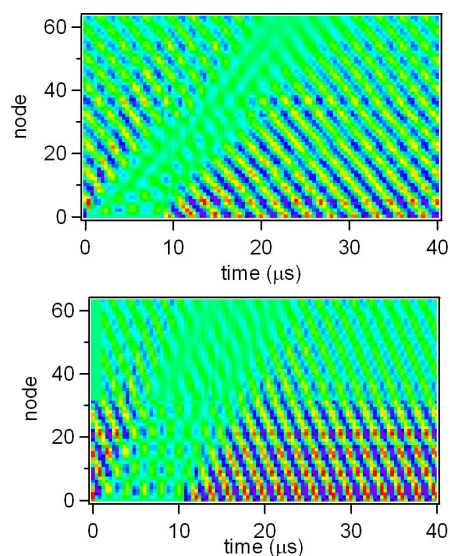
συμπεριφορά παρατηρούμε και στη συχνότητα των 250 kHz για διαφορετικές τιμές του εύρους του αρχικού παλμού. Τα αντίστοιχα χρονικά στιγμιότυπα αποτυπώνονται στο Σχ. 2.6. Είναι προφανές ότι ακόμα και στην 31η κυψελίδα η διασπορά του αρχικού παλμού είναι σημαντική.

Προχωρούμε τώρα με την περίπτωση των σκοτεινών διακριτών σολιτονίων, τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν στην πρώτη κυψελίδα ως βυθίσματα τάσης πάνω στο φέρον σήμα, όπως φαίνεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 2.7 για συχνότητα φέροντος 380 kHz (μικρότερη από την προαναφερθείσα τιμή κατωφλίου των 400 kHz). Σε αυτή τη συχνότητα, το αρχικό βύθισμα φαίνεται να διατηρείται κατά τη διάδοση χωρίς να διασπείρεται σημαντικά, γεγονός που δείχνει τον σχηματισμό ενός σκοτεινού σολιτονίου. Ωστόσο η κατάσταση αυτή αλλάζει, όταν η φέρουσα συχνότητα αυξάνεται, και για συχνότητες μεγαλύτερες από 400 kHz, το εύρος των σκοτεινών



Σχήμα 2.6: Χρονικά στιγμιότυπα της τάσης σύμφωνα με τις τιμές που έχουν ληφθεί από την πάνω εικόνα του Σχ. 2.5. Η τάση έχει ληφθεί στην έξοδο της πρώτης (αρχική συνθήκη), της 31ης (μεσαίας) και της 63ης (τελευταίας) κυψελίδας, όπως φαίνεται στο κάτω, μεσαίο και πάνω χρονικό στιγμιότυπο, αντίστοιχα.

σολιτονίων μεγαλώνει με τον χρόνο. Αυτό γίνεται εμφανές στην κάτω εικόνα του Σχ. 2.7, για $f = 500$ kHz, όπου φαίνεται καθαρά το αποτέλεσμα της αφεστίασης του αρχικού βυθίσματος.



Σχήμα 2.7: Όμοια απεικόνιση όπως στο Σχ. 2.3, αλλά για τη διάδοση διακριτού σκοτεινού σολιτονίου. Η πάνω εικόνα δείχνει τον σχηματισμό ενός σκοτεινού σολιτονίου για $f = 380$ kHz, ενώ η κάτω τη διασπορά που υφίσταται το σκοτεινό σολιτόνιο για $f = 500$ kHz.

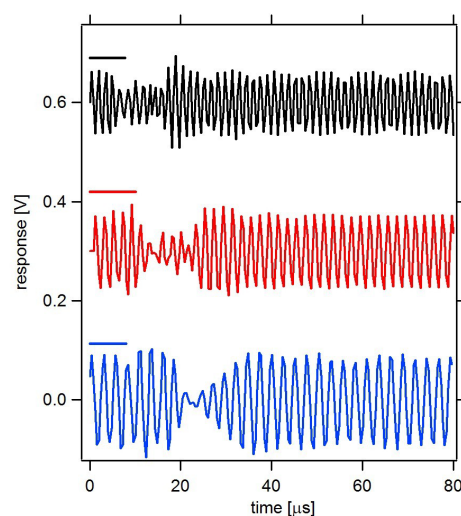
Για να διερευνήσουμε περαιτέρω τη μετάβαση από την εστίαση στην αφεστίαση του παλμού, στο Σχ. 2.8 αποτυπώνονται οι τάσεις ως συναρτήσεις του χρόνου στην τελευταία κυψελίδα για τρεις διαφορετικές συχνότητες. Στο κάτω, το μεσαίο και το πάνω στιγμιότυπο απεικονίζεται η τάση για τη συχνότητα των 380 kHz, 500 kHz και 650 kHz, αντίστοιχα, ενώ η διάρκεια του σκοτεινού παλμού είναι 8.5 μ s, 10 μ s και 7.7 μ s, αντίστοιχα. Η ανερχόμενη ακμή του παλμού λαμβάνεται την χρονική στιγμή $t = 0$ s για κάθε τάση, ενώ για την καλύτερη παρατήρηση

η άφιξη του σκοτεινού παλμού δείχνεται στο Σχ. 2.8 από την οριζόντια γραμμή που φαίνεται πάνω από κάθε κυματομορφή.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι, όπως και στην περίπτωση των φωτεινών σολιτονίων, οι παλμοί με χαμηλότερη συχνότητα φέροντος ταξιδεύουν πιο αργά, όπως φαίνεται από τα βυθίσματα της τάσης στις τρεις κυματομορφές. Για παράδειγμα, ενώ στην κάτω (μπλε γραμμή) υπάρχει μια χρονική υστέρηση 20 μs για να φθάσει το σκοτεινό σολιτόνιο στην τελευταία κυψελίδα της γραμμής, καθώς η συχνότητα αυξάνεται η χρονική διάρκεια αυτής της υστέρησης μειώνεται. Σε αντίθεση με την περίπτωση των φωτεινών σολιτονίων, οι σκοτεινοί παλμοί υψηλότερης συχνότητας φέροντος διευρύνονται, ενώ για τις χαμηλότερες συχνότητες το σκοτεινό σολιτόνιο παραμένει συμπαγές. Η διεύρυνση του παλμού είναι αρκετά έντονη για $f = 650$ kHz, όπως φαίνεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 2.8. Πειραματικά, η μετάβαση από την εστίαση στην αφεστίαση του παλμού εμφανίζεται να συμβαίνει πάλι για συχνότητα περίπου 400 kHz.

2.3 Αναλυτικά και αριθμητικά αποτελέσματα

Για τη θεωρητική ανάλυση των φαινομένων της εστίασης (αφεστίασης) του παλμού και του σχηματισμού των διακριτών φωτεινών (σκοτεινών) σολιτονίων, πάνω (κάτω) από την κρίσιμη συχνότητα των 400 kHz, θα μελετήσουμε αναλυτικά το μη γραμμικό μοντέλο του πλέγματος της Εξ. (2.6) μέσω μιας διαταρακτικής μεθόδου. Συγκεκριμένα, κάνουμε χρήση της ημι-



Σχήμα 2.8: Η απόκριση της τάσης στην τελευταία κυψελίδα για ένα σκοτεινό σολιτόνιο για τρεις διαφορετικές συχνότητες: η κάτω, μεσαία και πάνω εικόνα αντιστοιχούν σε συχνότητες 380 kHz, 500 kHz και 650 kHz. Τα ευθύγραμμα τμήματα πάνω από τις κυματομορφές δείχνουν τον χρονικό εντοπισμό της άφιξης του σκοτεινού παλμού.

διακριτής προσέγγισης [75, 100] και αναζητούμε λύσεις της Εξ. (2.6) της μορφής:

$$V_n = \sum_{\ell=1} \epsilon^\ell V_\ell(X, T) \exp[i\ell(\omega t - kn)] + \text{c.c.}, \quad (2.11)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, $V_\ell = V_\ell(X, T)$ ($\ell = 1, 2, \dots$) είναι οι άγνωστες μιγαδικές συναρτήσεις περιβάλλουσας που εξαρτώνται από τις αργές κλίμακες:

$$X = \epsilon(n - v_g t), \quad T = \epsilon^2 t, \quad (2.12)$$

όπου v_g είναι η ταχύτητα ομάδας (η οποία θα καθοριστεί αυτοσυνεπώς στη συνέχεια), ενώ $0 < \epsilon \ll 1$ είναι μια μικρή χαρακτηριστική παράμετρος που σχετίζεται με το πλάτος του σολιτονίου και ο όρος “c.c.” συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή. Επιπλέον, ο εκθετικός όρος περιγράφει το φέρον σήμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η περιβάλλουσα επιλέγεται να είναι συνεχής στον χώρο, ενώ το φέρον σήμα χαρακτηρίζεται από τη γωνία $\theta_n \equiv \omega t - kn$, η οποία είναι διακριτή στον χώρο (όπου ω και k είναι η κυκλική συχνότητα και ο κυματαριθμός, αντίστοιχα). Αυτό αποτελεί και την ημιδιακριτή φύση της προσέγγισης [75, 100]. Τα αποτελέσματα, που λαμβάνονται με αυτή την υπόθεση, μπορούν άμεσα να “αναγνωστούν” στο συνεχές όριο με $k \rightarrow 0$. Στην περίπτωση αυτή, τόσο η περιβάλλουσα όσο και το φέρον σήμα είναι συνεχείς συναρτήσεις του χώρου (συνεχής προσέγγιση). Στη συνέχεια, για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν και στην ημιδιακριτή και στη συνεχή προσέγγιση. Η μεθοδολογία των αναλυτικών υπολογισμών είναι όμοια με αυτή που παρατίθεται στο Παράρτημα Β.

Αντικαθιστώντας την Εξ. (2.11) στην Εξ. (2.6) λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα. Αρχικά, στην τάξη $O(\epsilon)$ (γραμμικό όριο) εξάγουμε την σχέση διασποράς για τα επίπεδα κύματα [όμοια με την Εξ. (2.7)], ενώ στην επόμενη τάξη [$O(\epsilon^2)$] στο διαταρακτικό ανάπτυγμα, λαμβάνουμε την ταχύτητα ομάδας, η οποία δίνεται από την σχέση:

$$v_g = -\omega^3 \sin(k), \quad (2.13)$$

που στη συνεχή προσέγγιση παίρνει τη μορφή $v_g = -k(k^2 + g)^{-3/2}$. Η μορφή της ταχύτητας ομάδας (όπως αυτή αναμένεται από την σχέση διασποράς της Εξ. (2.7) και το Σχ. 2.2) δείχνει ότι $kv_g < 0$ για όλες τις τιμές της κυκλικής συχνότητας ω , που είναι ένα τυπικό χαρακτηριστικό των αριστερόστροφων μέσων (η ενέργεια και τα μέτωπα των κυμάτων οδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις, όπως παρατηρήθηκε και στα πειραματικά αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου). Τέλος, στην επόμενη τάξη του διαταρακτικού αναπτύματος [δηλαδή

σε $O(\epsilon^3)$], καταλήγουμε σε μια μη γραμμική εξίσωση εξέλιξης για την άγνωστη τάση $V_1(X, T)$, και συγκεκριμένα στην ακόλουθη εξίσωση NLS:

$$i\partial_T V_1 + P\partial_X^2 V_1 + Q|V_1|^2 V_1 = 0, \quad (2.14)$$

όπου οι συντελεστές διασποράς (P) και μη γραμμικότητας (Q), δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$P = \frac{1}{2}\omega^3[\cos(k) - 3\omega^2 \sin^2(k)], \quad (2.15)$$

$$Q = \frac{16\omega^5 \sin^2(k)[\cos(k) - 1]^2}{16\omega^2 \sin^2(k) + 4g\omega^2 - 1} - 2\gamma\omega^3[\cos(k) - 1]^2, \quad (2.16)$$

οι οποίες στο συνεχές όριο γράφονται:

$$P = -\omega^3 + \frac{3}{2}g\omega^5, \quad (2.17)$$

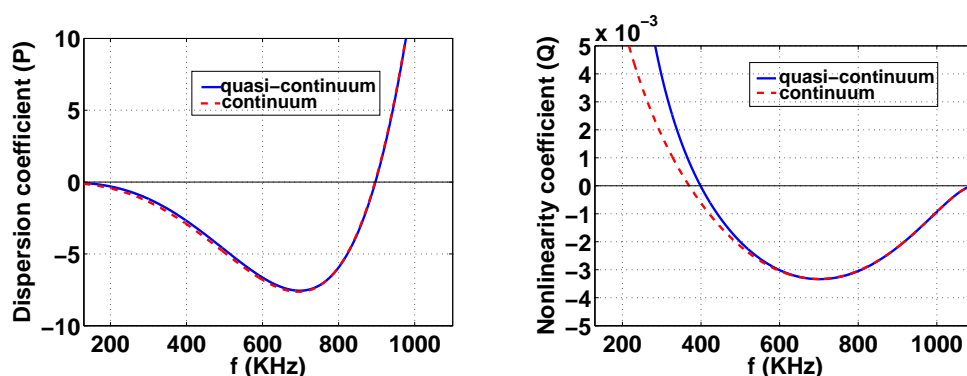
$$Q = \frac{1}{2}\omega^3 \left[\frac{8k^6}{15k^2 + 3g} - \gamma k^4 \right]. \quad (2.18)$$

Γίνεται έτσι σαφές ότι το φαινόμενο της εστίασης και αφεστίασης και ο σχηματισμός φωτεινών ή σκοτεινών σολιτονίων μπορούν να γίνουν κατανοητά στο πλαίσιο της φαινομενικής εξίσωσης NLS (2.14) (βλ. Εισαγωγή). Οι περιοχές συχνοτήτων, στις οποίες σχηματίζονται τα φωτεινά ή τα σκοτεινά σολιτόνια, μπορούν εύκολα να προσδιορισθούν από την εξάρτηση που έχουν οι συντελεστές διασποράς και μη γραμμικότητας από τη φέρουσα συχνότητα. Οι σχετικές γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο Σχ. 2.9.

Όπως μπορεί κάποιος να παρατηρήσει είναι:

- $PQ < 0$ για $130 \text{ kHz} < f < 400 \text{ kHz}$,
- $PQ > 0$ για $400 \text{ kHz} < f < 896 \text{ kHz}$,
- $PQ < 0$ για $896 \text{ kHz} < f < 1100 \text{ kHz}$.

Έτσι, η αναλυτική προσέγγισή μας προβλέπει με ακρίβεια την κρίσιμη τιμή της φέρουσας συχνότητας, $f_c \approx 400 \text{ kHz}$. Για τιμές συχνότητας μεγαλύτερες (μικρότερες) της κρίσιμης συχνότητας έχουμε το φαινόμενο της εστίασης (αφεστίασης) και τον σχηματισμό φωτεινών (σκοτεινών) σολιτονίων. Σημειώνεται ότι εξαιτίας του περιορισμού των δυνατοτήτων των οργάνων μέτρησης (ο καταγραφέας δεδομένων τάσης είχε ανάλυση δειγματοληψίας $0.4 \mu\text{s}$) δεν ήταν

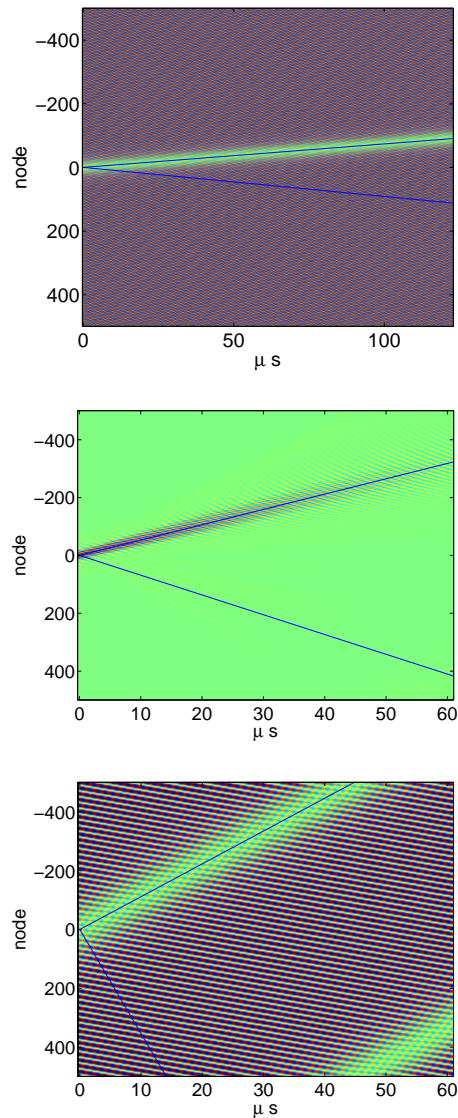


Σχήμα 2.9: Η εξάρτηση του συντελεστή διασποράς P (αριστερό διάγραμμα) και του συντελεστή της μη γραμμικότητας Q (δεξιό διάγραμμα) στην ημιδιακριτή [συνεχής (μπλε) γραμμή] και στη συνεχή [εστιγμένη (κόκκινη) γραμμή] προσέγγιση ως συνάρτηση της συχνότητας f στο εύρος ζώνης συχνοτήτων που ενδιαφέρει, $130 < f < 1100$ (σε kHz).

δυνατό να ελεγχθεί η εμφάνιση του φαινομένου της αφεστίασης πάνω από τη συχνότητα των 896 kHz, η οποία είναι κοντά στην άνω συχνότητα αποκοπής των 1100 kHz.

Επίσης, πραγματοποιήθηκαν αριθμητικές προσομοιώσεις για τρεις διαφορετικές περιοχές συχνοτήτων. Ειδικότερα, στο Σχ. 2.10 απεικονίζονται τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα της χωροχρονικής εξέλιξης της Εξ. (2.6) για τις τρεις διαφορετικές περιοχές συχνοτήτων που προβλέπει η ανάλυσή μας. Στην πάνω εικόνα φαίνεται η εξέλιξη ενός σκοτεινού σολιτονίου για συχνότητα $f = 200$ kHz, όπου μπορούμε να δούμε το σολιτόνιο να διαδίδεται με την ταχύτητα ομάδας. Επιπλέον, φαίνεται το αντίθετο πρόσημο της ταχύτητας φάσης, που είναι συμβατό με την αριστερόστροφη φύση της γραμμής μεταφοράς. Στη μεσαία εικόνα, όπου η αρχική συνθήκη είναι ένα φωτεινό σολιτόνιο με συχνότητα φέροντος $f = 500$ kHz, φαίνεται η χωροχρονική εξέλιξη της τάσης για χρονικές κλίμακες και πλάτη συγκρίσιμα με αυτά του πειράματος. Τέλος, η κάτω εικόνα παρουσιάζει ένα παράδειγμα από την τρίτη περιοχή συχνοτήτων με συχνότητα $f = 900$ kHz. Για τους λόγους που προαναφέρθηκαν, αυτή η επιλογή δεν ήταν δυνατό να ελεγχθεί πειραματικά. Παρόλα αυτά, η αριθμητική μελέτη επιβεβαιώνει τις αναλυτικές προβλέψεις, αφού σκοτεινά σολιτόνια μπορούν να διαδοθούν σε αυτή την περιοχή συχνοτήτων.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι αρχικές συνθήκες για αυτές τις προσομοιώσεις έχουν επιλεγεί σύμφωνα με τους περιορισμούς της εξίσωσης NLS, όπως αυτές αναφέρθηκαν προηγουμένως, μολονότι το εύρος του παλμού έχει επιλεγεί να είναι συγκρίσιμο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα.



Σχήμα 2.10: Χωροχρονική εξέλιξη της τάσης της Εξ. (2.6) για τρεις διαφορετικές συχνότητες και διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Πάνω εικόνα: αρχική συνθήκη είναι ένα σκοτεινό σολιτόνιο, όπως προκύπτει από τη θεωρητική ανάλυση, για $f = 200$ kHz. Μεσαία εικόνα: αρχική συνθήκη είναι ένα φωτεινό σολιτόνιο για την περίπτωση $f = 500$ kHz. Κάτω εικόνα: όμοια με την πάνω εικόνα, αλλά για $f = 900$ kHz. Να σημειωθεί ότι και στις τρεις περιπτώσεις η διάδοση του κέντρου είναι σύμφωνη με την ταχύτητα ομάδας, την οποία τα σολιτόνια φαίνεται να ακολουθούν.

Κεφάλαιο 3

Συζευγμένα σολιτόνια σε αριστερόστροφη-δεξιόστροφη γραμμή μεταφοράς

Η μελέτη του προηγούμενου κεφαλαίου έδειξε ότι είναι αδύνατη η υλοποίηση μιας αμιγούς αριστερόστροφης γραμμής μεταφοράς, γιατί δεν μπορεί να αγνοηθεί η παρουσία των παρασιτικών στοιχείων. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε αναλυτικά και αριθμητικά το γενικότερο μοντέλο μιας μη γραμμικής γραμμής μεταφοράς, που παρουσιάζει ταυτόχρονα αριστερόστροφη και δεξιόστροφη συμπεριφορά [Composite Right-Left Handed (CRLH)]. Το μη γραμμικό στοιχείο στη μοναδιαία κυψελίδα της γραμμής μεταφοράς είναι ο πυκνωτής στον παράλληλο κλάδο, ο οποίος προσομοιώνεται με μια δίοδο τύπου heterostructure barrier varactor (HBV) [101].

Η μεθοδολογία για την ανάλυση αυτού του συστήματος θα είναι παρόμοια με εκείνη του προηγούμενου κεφαλαίου. Έτσι, ξεκινώντας από τη μοναδιαία κυψελίδα της CRLH γραμμής μεταφοράς θα εξαχθεί μια μη γραμμική εξίσωση εξέλιξης για την τάση στα άκρα της κυψελίδας. Αρχικά, θα μελετηθεί το σύστημα στο γραμμικό όριο και θα δειχθεί ότι, για ορισμένες ζώνες συχνότητας, μπορούν να μεταδοθούν είτε αριστερόστροφοι (LH) είτε δεξιόστροφοι (RH) τρόποι (modes) με την ίδια ταχύτητα ομάδας. Είναι σημαντικό ότι αυτοί οι τρόποι μπορούν να συζευχθούν λόγω της μη γραμμικότητας, οπότε το σύστημα υποστηρίζει συζευγμένους παλμούς με οπισθοδεύουσα (LH-τρόπος) και οδεύουσα (RH-τρόπος) περιβάλλουσα. Θα δειχθεί ότι οι περιβάλλουσες αυτές ικανοποιούν ένα *σύστημα* δύο συζευγμένων εξισώσεων NLS, μέσω του οποίου προβλέπονται τρεις διαφορετικοί τύποι σολιτονίων:

- (α) ένα οπισθοδεύον φωτεινό σολιτόνιο συζευγμένο με ένα οδεύον φωτεινό σολιτόνιο,

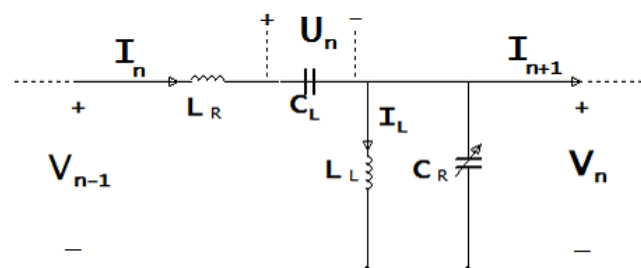
- (β) ένα οπισθοδεύον φωτεινό σολιτόνιο συζευγμένο με ένα οδεύον σκοτεινό σολιτόνιο,
 (γ) ένα οπισθοδεύον σκοτεινό σολιτόνιο συζευγμένο με ένα οδεύον φωτεινό σολιτόνιο.

Η εν λόγω ανάλυση προβλέπει πως τα χαρακτηριστικά (πλάτος, εύρος, κλπ) του ενός σολιτονικού τρόπου μπορούν να ελέγξουν τα χαρακτηριστικά του άλλου. Επιπλέον, οι αναλυτικές προβλέψεις ελέγχονται με αριθμητικές προσομοιώσεις (στο πλαίσιο του αρχικού μη γραμμικού μοντέλου της CRLH γραμμής μεταφοράς), οι οποίες αναδεικνύουν και τις ιδιότητες ευστάθειας των διαφόρων τύπων σολιτονίων.

3.1 Ανάλυση του μοντέλου

3.1.1 Το μοντέλο της μη γραμμικής CRLH γραμμής μεταφοράς

Θεωρούμε μια δεξιόστροφη-αριστερόστροφη (CRLH) γραμμή μεταφοράς, της οποίας το κύκλωμα της μοναδιαίας κυψελίδας φαίνεται στο Σχ. 3.1 [25, 66]. Τα δεξιόστροφα (RH) στοιχεία της γραμμής μεταφοράς είναι η αυτεπαγωγή L_R και η χωρητικότητα C_R , ενώ τα αριστερόστροφα (LH) στοιχεία είναι η αυτεπαγωγή L_L και η χωρητικότητα C_L . Υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα C_R είναι μη γραμμική, η οποία μπορεί να υλοποιηθεί με την κατάλληλη εισαγωγή διόδων στην γραμμή μεταφοράς (βλ., τα σχετικά πειράματα [60, 61, 93, 95, 102, 103] καθώς και τη θεωρητική εργασία [104]). Εφαρμόζοντας τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff



Σχήμα 3.1: Το κύκλωμα της μοναδιαίας κυψελίδας για το μοντέλο της μη γραμμικής CRLH γραμμής μεταφοράς.

για το κύκλωμα της μοναδιαίας κυψελίδας του Σχ. 3.1 παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$V_{n-1} = V_n + L_R \frac{dI_n}{dt} + U_n, \quad (3.1)$$

$$I_n = I_{n+1} + I_L + \frac{d}{dt}(C_R V_n), \quad (3.2)$$

όπου U_n είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή C_L και I_L είναι το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο L_L . Οι παραπάνω εξισώσεις, μαζί με τις βοηθητικές εξισώσεις $V_n = L_L dI_L/dt$ και $I_n = C_L dU_n/dt$,

οδηγούν στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} & L_R L_L C_L \frac{d^4}{dt^4} (C_R V_n) + L_L \frac{d^2}{dt^2} (C_R V_n) + L_R C_L \frac{d^2 V_n}{dt^2} \\ & - L_L C_L \frac{d^2}{dt^2} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) + V_n = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Για να προχωρήσουμε περαιτέρω, θα υποθέσουμε ότι για επαρκώς μικρές τιμές της τάσης V_n , η μη γραμμική χωρητικότητα $C_R(V_n)$ μπορεί να προσεγγιστεί από το ανάπτυγμα Taylor:

$$C_R(V_n) \approx C_{R0} + C'_{R0}(V_n - V_0) + \frac{1}{2}C''_{R0}(V_n - V_0)^2, \quad (3.4)$$

όπου η παράμετρος $C_{R0} \equiv C_R(V_0)$ είναι μια σταθερή χωρητικότητα που αντιστοιχεί στην τάση πόλωσης V_0 , ενώ οι παράμετροι C'_{R0} και C''_{R0} έχουν επίσης σταθερές τιμές που εξαρτώνται από τη μορφή της $C_R(V)$. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε αυτή την προσέγγιση για μία HBV δίοδο, η οποία χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα που περιγράφονται στην αναφορά [102] (παρόμοιου τύπου δίοδοι έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί στα πειράματα της αναφοράς [105]).

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.4) στην Εξ. (3.3) και χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιήσεις $t \rightarrow \omega_{sh} t$ [όπου $\omega_{sh}^2 = (L_L C_{R0})^{-1}$] και $V_n \rightarrow [C'_{R0}(2C_{R0})^{-1}]V_n$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 V_n}{dt^4} - \beta^2 \frac{d^2}{dt^2} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) + (1 + \delta^2) \frac{d^2 V_n}{dt^2} \\ & + \delta^2 V_n + \delta^2 \frac{d^2 V_n^2}{dt^2} + \delta^2 \mu \frac{d^2 V_n^3}{dt^2} + \frac{d^4 V_n^2}{dt^4} + \mu \frac{d^4 V_n^3}{dt^4} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου οι αδιάστατες παράμετροι δ , β και μ ορίζονται ως:

$$\delta = \frac{f_{se}}{f_{sh}}, \quad \beta = \frac{f_{RH}}{f_{sh}}, \quad \mu = \frac{2C''_{R0}}{3C'^2_{R0}} C_{R0}. \quad (3.6)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, οι f_{se} και f_{sh} δηλώνουν τις συχνότητες του σειριακού και παράλληλου κλάδου, ενώ η f_{RH} είναι η συχνότητα που σχετίζεται με το δεξιόστροφο τμήμα του κυκλώματος της μοναδιαίας κυψελίδας. Οι παραπάνω συχνότητες ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} f_{se} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_R C_L}}, \quad f_{sh} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_L C_{R0}}}, \\ f_{RH} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_R C_{R0}}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Σημειώνεται ότι αν $f_{se}/f_{sh} = 1$, δηλαδή $\delta = 1$, τότε η CRLH γραμμή μεταφοράς αναφέρεται ως

ισοσταθμισμένη (*balanced*), με την έννοια ότι οι χαρακτηριστικές σύνθετες αντιστάσεις των αμιγώς LH και RH γραμμών μεταφοράς, που ορίζονται ως $Z_L = \sqrt{L_L/C_L}$ και $Z_R = \sqrt{L_R/C_{R0}}$, είναι ίσες, δηλαδή $Z_L = Z_R$ [25]. Από την άλλη πλευρά, αν $f_{se}/f_{sh} > 1$, δηλαδή $\delta > 1$, η γραμμή μεταφοράς διαθέτει μια πιο έντονη αριστερόστροφη συμπεριφορά (ο σειριακός κλάδος εμφανίζει κυρίως χωρητικό χαρακτήρα, ενώ ο παράλληλος κλάδος επαγωγικό). Στην αντίθετη περίπτωση, $f_{se}/f_{sh} < 1$, δηλαδή $\delta < 1$, η γραμμή μεταφοράς έχει μια πιο έντονη δεξιόστροφη συμπεριφορά (ο σειριακός κλάδος εμφανίζει κυρίως επαγωγικό χαρακτήρα, ενώ ο παράλληλος κλάδος χωρητικό).

Όσον αφορά στις τιμές των παραμέτρων, σημειώνεται ότι για μικροκυματικές εφαρμογές (π.χ., για τις γραμμές μικροταινίας [25]), οι τυπικές τιμές των χωρητικοτήτων και επαγωγών, που εμπλέκονται στην CRLH γραμμή μεταφοράς, είναι της τάξεως των pF και nH, αντίστοιχα. Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές $L_R = 1$ nH, $C_L = 0.1$ pF και $L_L = 0.12$ nH. Έτσι, οι συχνότητες των Εξ. (3.7) λαμβάνουν τις τιμές $f_{se} = 15.92$ GHz, $f_{sh} = 14.53$ GHz και $f_{RH} = 5.03$ GHz. Από την άλλη πλευρά, όσον αφορά τις παραμέτρους που σχετίζονται με τον μη γραμμικό πυκνωτή, υποθέτουμε ότι η σχετική χωρητικότητα αντιστοιχεί σε μία HBV δίοδο, η οποία χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη εξίσωση [101] (βλ. επίσης την αναφορά [105], όπου χρησιμοποιήθηκε η ίδια μορφή της διόδου $C(V)$ αλλά με διαφορετικές τιμές):

$$C(V) = C_{j0} A_{da} \left(1 + \frac{|V|}{V_{br}} \right)^{-m}, \quad (3.8)$$

όπου $C_{j0} = 1.53$ fF/ μm^2 είναι η χωρητικότητα που αντιστοιχεί σε τάση πόλωσης $V_0 = 0.2$ V, $A_{da} = 650$ μm^2 είναι η ενεργός περιοχή, $V_{br} = 12$ V είναι το δυναμικό κατάρρευσης και $m = 2.7$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την Εξ. (3.8), για επαρκώς μικρές τιμές, της τάξης των mV, της τάσης V , λαμβάνουμε την Εξ. (3.4), όπου οι αντίστοιχες παράμετροι παίρνουν τις τιμές $C_{R0} = 1$ pF, $C'_{R0} = -0.24$ pF/V και $C''_{R0} = -0.08$ pF/V². Τέλος, οι τιμές των κανονικοποιημένων παραμέτρων δ , β και μ , που εμφανίζονται στην Εξ. (3.5), λαμβάνουν τις ακόλουθες τιμές:

$$\delta \approx 1.1, \quad \beta \approx 0.35, \quad \mu \approx -0.9. \quad (3.9)$$

Παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές στην αναλυτική και αριθμητική μελέτη (έχουμε ελέγξει ότι άλλες τιμές οδηγούν σε ποιοτικά παρόμοια αποτελέσματα). Η επιλογή αυτή οδηγεί σε $\delta > 1$, δηλαδή μελετάμε την περίπτωση, όπου η CRLH γραμμή μεταφοράς έχει έναν πιο έντονο αριστερόστροφο χαρακτήρα. Ωστόσο, στη μελέτη της γραμμικής περιοχής (βλ. επόμενο εδάφιο), θα επιλέξουμε τιμές στην παράμετρο δ , τόσο για την περίπτωση που κυριαρχεί

η δεξιόστροφη συμπεριφορά όσο και στην περίπτωση της ισοσταθμισμένης CRLH γραμμής μεταφοράς.

3.1.2 Γραμμική ανάλυση

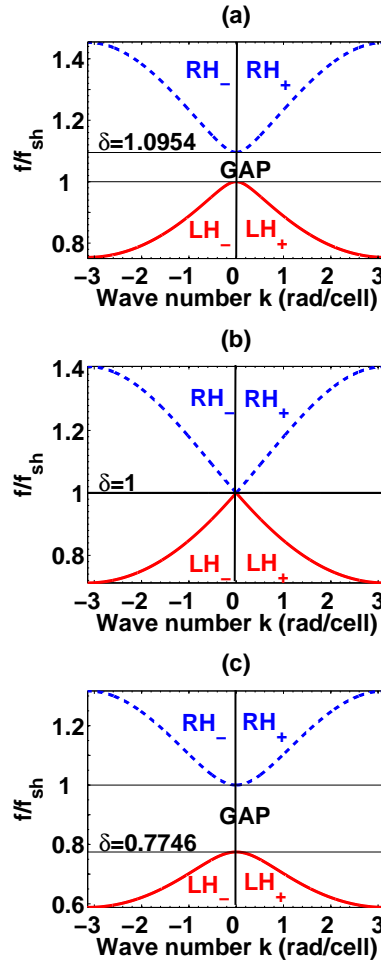
Υποθέτουμε τώρα λύσεις επίπεδου κύματος της μορφής $V_n = V_0 \exp[i(kn - \omega t)]$ για την Εξ. (3.5), όπου τα k και ω δηλώνουν τον κυματαριθμό και τη γωνιακή συχνότητα, αντίστοιχα, ενώ το πλάτος του κύματος είναι $V_0 \ll 1$. Αντικαθιστώντας στην Εξ. (3.5) λαμβάνουμε την ακόλουθη γραμμική σχέση διασποράς:

$$\omega^4 - \left(1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k}{2}\right) \omega^2 + \delta^2 = 0. \quad (3.10)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα απεικονίζεται στο Σχ. 3.2, όπου σχεδιάζεται η κανονικοποιημένη συχνότητα f/f_{sh} ως συνάρτηση του κυματαριθμού k (σε rad/cell) για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου δ (πρώτη ζώνη Brillouin με όρια $-\pi \leq k \leq \pi$). Είναι σαφές ότι για $\delta = 1.0954$ (πάνω εικόνα) υπάρχουν δύο ζώνες συχνοτήτων, όπου η διάδοση HM κυμάτων είναι δυνατή: η RH-περιοχή [ζώνη υψηλών συχνοτήτων που απεικονίζεται με διακεκομμένη (μπλε) γραμμή], για $1.0954 < f < 1.4535$, και η LH-περιοχή [ζώνη χαμηλών συχνοτήτων που απεικονίζεται από τη συνεχή (κόκκινη) γραμμή], για $0.7538 < f < 1$. Για $1 < f/f_{sh} < \delta$ εμφανίζεται ένα χάσμα (gap), όπου η διάδοση του HM κύματος δεν είναι δυνατή.

Στην περίπτωση που $\delta = 1$ (αντιστοιχεί σε τιμή του $C_L = 0.12$ pF) το χάσμα εξαφανίζεται (βλ. μεσαία εικόνα του Σχ. 3.2) και η CRLH γραμμή μεταφοράς είναι ισοσταθμισμένη. Σε αυτή την περίπτωση, η διάδοση του HM κύματος είναι δυνατή σε δύο ζώνες συχνοτήτων, τη RH ζώνη [ζώνη υψηλών συχνοτήτων, διακεκομμένη (μπλε) γραμμή] με $1 < f/f_{sh} < 1.405$ και τη LH ζώνη [ζώνης χαμηλής συχνότητας, συνεχής (κόκκινη) γραμμή] με $0.7117 < f/f_{sh} < 1$. Τέλος, για $\delta = 0.7746$ (αντιστοιχεί σε τιμή του $C_L = 0.2$ pF), εμφανίζεται ένα χάσμα και πάλι για $\delta < f/f_{sh} < 1$ (κάτω εικόνα του Σχ. 3.2). Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει μια RH περιοχή συχνοτήτων και μια ζώνη LH περιοχή συχνοτήτων, για $0.588 < f/f_{sh} < 0.7746$ και $1 < f/f_{sh} < 1.317$, αντίστοιχα. Να σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις οι RH_{\pm} και LH_{\pm} κλάδοι αντιστοιχούν σε θετικό ή αρνητικό k .

Έτσι, στο γραμμικό μοντέλο και για μια δεδομένη συχνότητα, τα HM κύματα μπορούν είτε να διαδίδονται στην RH περιοχή (οδεύουσα διάδοση) ή στην LH περιοχή (οπισθοδεύουσα διάδοση). Ωστόσο, στο μη γραμμικό μοντέλο, η σύζευξη μεταξύ των διαφόρων τρόπων, που διαδίδονται στις LH και RH περιοχές, είναι δυνατή (βλ. τις σχετικές παλαιότερες εργασίες [106–



Σχήμα 3.2: Η σχέση διασποράς δείχνει την κανονικοποιημένη συχνότητα f/f_{sh} ως συνάρτηση του κυματάρθμου k (σε rad/cell) για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου δ , δηλαδή για $\delta = 1.0954$ (πάνω εικόνα), για $\delta = 1$ (μεσαία εικόνα) και για $\delta = 0.7746$ (κάτω εικόνα). Η συνεχής (κόκκινη) και η εστιγμένη (μπλε) γραμμή δείχνουν, αντίστοιχα, την σχέση διασποράς στην LH και RH περιοχή συχνοτήτων. Οι RH_{\pm} και LH_{\pm} περιοχές συχνοτήτων έχουν κλάδους με $k > 0$ ή $k < 0$. Αν $\delta \neq 1$ δημιουργείται ένα χάσμα εύρους $|\delta - 1|$ για $\delta > 1$ (πάνω εικόνα) ή $\delta < 1$ (κάτω εικόνα).

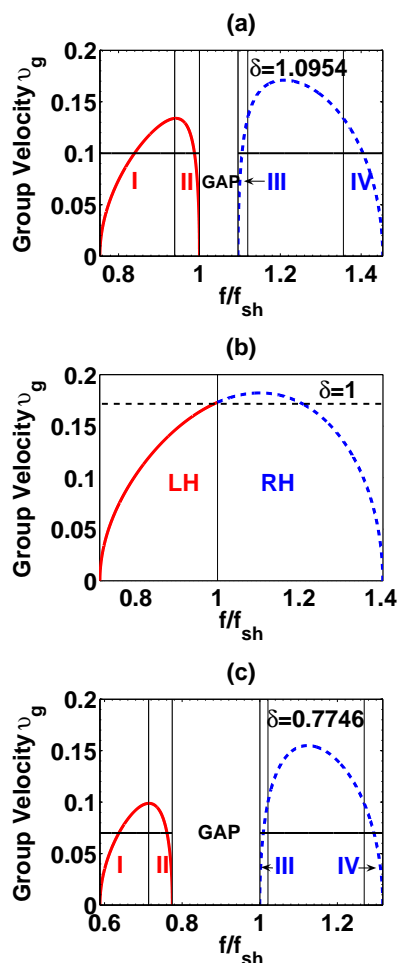
108]). Παρακάτω θα δείξουμε ότι πράγματι είναι επιτρεπτή αυτή η σύζευξη και θα γίνει η μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ των LH και RH τρόπων με ίσες ταχύτητες ομάδας. Δεδομένου ότι οι τελευταίες είναι εφαπτόμενες στις καμπύλες διασποράς, η διερεύνηση του Σχ. 3.2 δείχνει ότι είναι δυνατόν να προσδιοριστούν περιοχές, που ανήκουν στους RH_{\pm} και LH_{\mp} κλάδους, οι οποίες παρουσιάζουν παράλληλες εφαπτόμενες, δηλαδή ίσες ταχύτητες ομάδας.

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.10), υπολογίζουμε την ταχύτητα ομάδας $v_g \equiv \partial\omega/\partial k$:

$$v_g = \frac{\omega^3 \beta^2 \sin k}{\omega^4 - \delta^2}. \quad (3.11)$$

Στο Σχ. 3.3 δείχνουμε την εξάρτηση της ταχύτητας ομάδας v_g από την κανονικοποιημένη συχνότητα f/f_{sh} για τις τιμές της παραμέτρου δ , που χρησιμοποιούνται στο Σχ. 3.2. Το Σχ. 3.3

απεικονίζει μόνο τους κλάδους της ταχύτητας ομάδας με $v_g > 0$ (βλ. συνεχή (κόκκινη) και διακεκομμένη (μπλε) γραμμή), που αντιστοιχούν στους LH_- και RH_+ κλάδους των καμπυλών της σχέσης διασποράς. Οι κλάδοι με $v_g < 0$ (που σχετίζονται με τους LH_+ και RH_- κλάδους της καμπύλης διασποράς) είναι κατοπτρικά συμμετρικοί σε σχέση με αυτούς, που φαίνονται στο σχήμα, λόγω της ισοτιμίας της σχέσης διασποράς.



Σχήμα 3.3: Η ταχύτητα ομάδας v_g ως συνάρτηση της κανονικοποιημένης συχνότητας f/f_{sh} (για $\delta = 1.0954$). Οι συνεχείς (κόκκινες) και οι διακεκομμένες (μπλε) γραμμές υποδεικνύουν κλάδους που αντιστοιχούν στην LH_- και την RH_+ περιοχή, αντίστοιχα. Το σημείο τομής των καμπυλών της ταχύτητας ομάδας με την οριζόντια συνεχή (μαύρη) γραμμή απεικονίζει τις συχνότητες των τρόπων με την ίδια ταχύτητα ομάδας, $v_g = 0.1$. Οι περιοχές συχνοτήτων I, II, III και IV δείχνουν τις πιθανές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των LH_- και RH_+ τρόπων με την ίδια v_g αλλά με διαφορετικά πρόσημα της GVD.

Λαμβάνοντας υπόψη μια οριζόντια τομή των καμπυλών της ταχύτητας ομάδας και θεωρώντας την τιμή $v_g = 0.1$ ή την τιμή $v_g = 0.075$ (βλ. οριζόντιες γραμμές στην πάνω και κάτω εικόνα του Σχ. 3.3), είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι πράγματι ένας LH_- και RH_+ τρόπος μπορούν να έχουν κοινή ταχύτητα ομάδας (και να αλληλεπιδρούν στο μη γραμμικό σύστημα, όπως αναφέρθηκε παραπάνω). Στην πραγματικότητα, η διερεύνηση των καμπυλών της ταχύτητας ομάδας, δηλαδή η πάνω εικόνα του Σχ. 3.3, δείχνει ότι η μέγιστη δυνατή κοινή v_g δίνεται

από $v_{g_{max}} = 0.1339$ και το τοπικό μέγιστο της v_g εμφανίζεται στη συχνότητα $f = 0.9391$, στη (μικρότερη σε ύψος) LH ζώνη συχνοτήτων. Στη συνέχεια, κάθε μία από τις καμπύλες της ταχύτητας ομάδας των LH και RH περιοχών διαιρείται σε δύο υπο-περιοχές συχνοτήτων, όπου η σύζευξη μπορεί να συμβεί με ίσες ταχύτητες ομάδας, ανάλογα με το πρόσημο της διασποράς της ταχύτητας ομάδας [group velocity dispersion (GVD)] $\partial v_g / \partial \omega$. Οι υποπεριοχές αυτές είναι οι εξής:

- (α) οι υποζώνες I ($0.7538 < f/f_{sh} < 0.9391$) και II ($0.9391 < f/f_{sh} < 1$) για την LH περιοχή συχνοτήτων, που χαρακτηρίζεται από θετικές και αρνητικές τιμές της GVD, αντίστοιχα,
- (β) οι υποζώνες III ($1.0954 < f/f_{sh} < 1.1195$) και IV ($1.356 < f/f_{sh} < 1.4535$) για την RH περιοχή συχνοτήτων, που χαρακτηρίζεται πάλι από θετικές και αρνητικές τιμές της GVD.

Έτσι, οι μη γραμμικοί LH και RH τρόποι, ίσης v_g , μπορούν να περιλαμβάνουν τις ακόλουθες τέσσερις διαφορετικές πιθανές αλληλεπιδράσεις:

1. LH-τρόπος στη ζώνη II και RH-τρόπος στη ζώνη IV, όπου και οι δύο τρόποι χαρακτηρίζονται από μια αρνητική τιμή της GVD.
2. LH-τρόπος στη ζώνη I και RH-τρόπος στη ζώνη IV, όπου ο LH-τρόπος χαρακτηρίζεται από θετική τιμή της GVD και ο RH-τρόπος χαρακτηρίζεται από αρνητική τιμή της GVD.
3. LH-τρόπος στη ζώνη I και RH-τρόπος στη ζώνη III, όπου και οι δύο τρόποι χαρακτηρίζονται από μια θετική τιμή της GVD.
4. LH-τρόπος στη ζώνη II και RH-τρόπος στη ζώνη III, όπου ο LH-τρόπος χαρακτηρίζεται από αρνητική τιμή της GVD και ο RH-τρόπος χαρακτηρίζεται από θετική τιμή της GVD.

Είναι σαφές ότι το παραπάνω σύνολο των δυνατών αλληλεπιδράσεων προκύπτει από την ύπαρξη της μη επιτρεπτής ζώνης συχνοτήτων, για την περίπτωση με $\delta = 1.0954$. Μια παρόμοια κατάσταση εμφανίζεται επίσης για $\delta < 1$, π.χ. για $\delta = 0.7746$, όπως φαίνεται στην κάτω εικόνα των Σχ. 3.2 και 3.3. Από την άλλη πλευρά, για $\delta = 1$ η μη επιτρεπτή ζώνη συχνοτήτων δεν υπάρχει πλέον και, ως εκ τούτου, η μόνη δυνατή αλληλεπίδραση είναι μεταξύ ενός LH-τρόπου με θετική τιμή της GVD και ενός RH-τρόπου με αρνητική τιμή της GVD. Αυτή η αλληλεπίδραση μπορεί να προκύψει για ταχύτητες ομάδας $v_g \leq 0.175$, δηλαδή για τιμές της ταχύτητας ομάδας κάτω από τη διακεκομμένη οριζόντια γραμμή της μεσαίας εικόνας του Σχ. 3.3. Ωστόσο,

η δυνατότητα αυτή έχει ήδη ληφθεί υπόψη [βλ. παραπάνω περίπτωση (2)]. Επιπλέον, ο σχηματισμός σολιτονίου στην ισοσταθμισμένη CRLH γραμμή μεταφοράς ($\delta = 1$) έχει ήδη μελετηθεί στη βιβλιογραφία [43]. Για τους λόγους αυτούς, στη συνέχεια θα προχωρήσουμε με την ανάλυση για $\delta = 1.0954$, η οποία παρέχει όλα τα πιθανά σενάρια. Είναι σαφές ότι στην περίπτωση όπου $\delta = 0.7746$ έχουμε παρόμοια ποιοτικά χαρακτηριστικά. Αυτή η ομοιότητα εκτείνεται, πέρα από την γραμμική περίπτωση, και στη μη γραμμική σολιτονική περίπτωση.

Παρά το γεγονός ότι, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, δεν πρόκειται να αναλύσουμε τη δημιουργία σολιτονίων στην ειδική περίπτωση της ισοσταθμισμένης CRLH γραμμής μεταφοράς με $\delta = 1$, αξίζει να αναφέρουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η σχέση διασποράς εμφανίζει ένα σημείο Dirac, δηλαδή είναι περίπου γραμμική στη γειτονιά του $k = 0$, όπου προσεγγίζεται ως

$$\omega \approx \pm[1 + (\beta/2)k], \quad (3.12)$$

όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2. Η εμφάνιση των σημείων Dirac είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα σε δομές δύο διαστάσεων (2D), όπως τριγωνικά και εξαγωνικά πλέγματα τα οποία προκύπτουν στην οπτική [109, 110], στα ατομικά συμπυκνώματα Bose-Einstein [111, 112] και στο αποκαλούμενο φωτονικό γραφένιο [113, 114]. Επίσης εξαιρετικό ενδιαφέρον έχει η εμφάνιση των σημείων Dirac και από αυστηρή μαθηματική σκοπιά [115]. Είναι σημαντικό ότι με τα 2D μοντέλα ισοσταθμισμένων CRLH γραμμών μεταφοράς μπορούν να μελετηθούν διάφορα θεμελιώδη φαινόμενα, όπως η κωνική περίθλαση (conical diffraction), η δημιουργία τοπολογικών ατελειών (topological defects) ακόμη και οι μεταπτώσεις φάσης (phase transitions) [109–114].

3.1.3 Μη γραμμική ανάλυση: Συζευγμένες εξισώσεις NLS και σολιτόνια

Για να περιγράψουμε τη σύζευξη μεταξύ ενός RH και ενός LH μη γραμμικού τρόπου με ίσες ταχύτητες ομάδας, θα χρησιμοποιήσουμε την ημιδιακριτή προσέγγιση, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επειδή όμως εδώ εστιάζουμε στην περιγραφή δύο διαφορετικών τρόπων, αναζητούμε λύσεις της Εξ. (3.5) της μορφής:

$$V_n = \epsilon \sum_{j=1}^2 V_j(X, T) \exp(i\theta_j) + \text{c.c.}, \quad (3.13)$$

όπου “c.c” δηλώνει τον συζυγή μιγαδικό. Στην Εξ. (3.13) οι δείκτες $j = 1, 2$ αντιστοιχούν στους τρόπους LH και RH, $V_j(X, T)$ είναι οι άγνωστες (συνεχείς) αργά μεταβαλλόμενες περιβάλλουσες που εξαρτώνται από τις αργές κλίμακες $X = \epsilon(n - v_g t)$ (όπου v_g είναι η κοινή

ταχύτητα ομάδας) και $T = \epsilon^2 t$, ενώ οι όροι $\exp(i\theta_j)$, με $\theta_j = k_j n - \omega_j t$, περιγράφουν τα φέροντα (διακριτά) σήματα με συχνότητες ω_j και κυματαριθμούς k_j . Τέλος, ϵ είναι μια τυπική μικρή παράμετρος, που ρυθμίζει το πλάτος του πεδίου και τις αργές κλίμακες των συναρτήσεων περιβάλλουσας.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το πεδίο V_n , όπως εκφράζεται στην Εξ. (3.13), είναι στην πραγματικότητα ο κυρίαρχος όρος στη θεωρία διαταραχών πολλαπλών κλιμάκων, που εφαρμόζουμε για την ανάλυση του προβλήματος. Εδώ, παρουσιάζονται τα κυριότερα αποτελέσματα, ενώ μια πληρέστερη ανάλυση παρέχεται στο Παράρτημα Β. Ειδικότερα, από τα πρώτης και δεύτερης τάξης προβλήματα [δηλαδή στις τάξεις $\mathcal{O}(\epsilon)$ (γραμμικό όριο) και $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, αντίστοιχα] εξάγουμε την σχέση διασποράς [Εξ. (3.10)] και την ταχύτητα ομάδας [Εξ. (3.11)]. Τέλος, στην επόμενη τάξη, $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, λαμβάνουμε τις ακόλουθες συζευγμένες εξισώσεις NLS:

$$i\partial_T V_1 + \frac{1}{2} D_1 \partial_X^2 V_1 + (g_{11}|V_1|^2 + g_{12}|V_2|^2) V_1 = 0, \quad (3.14)$$

$$i\partial_T V_2 + \frac{1}{2} D_2 \partial_X^2 V_2 + (g_{21}|V_1|^2 + g_{22}|V_2|^2) V_2 = 0, \quad (3.15)$$

όπου οι κανονικοποιημένοι συντελεστές διασποράς D_j , οι συντελεστές αυτοδιαμόρφωσης φάσης [self-phase modulation (SPM)] g_{jj} και οι συντελεστές ετεροδιαμόρφωσης φάσης [cross-phase modulation (CPM)] $g_{j,3-j}$, με $j = 1, 2$, δίνονται αντίστοιχα ως:

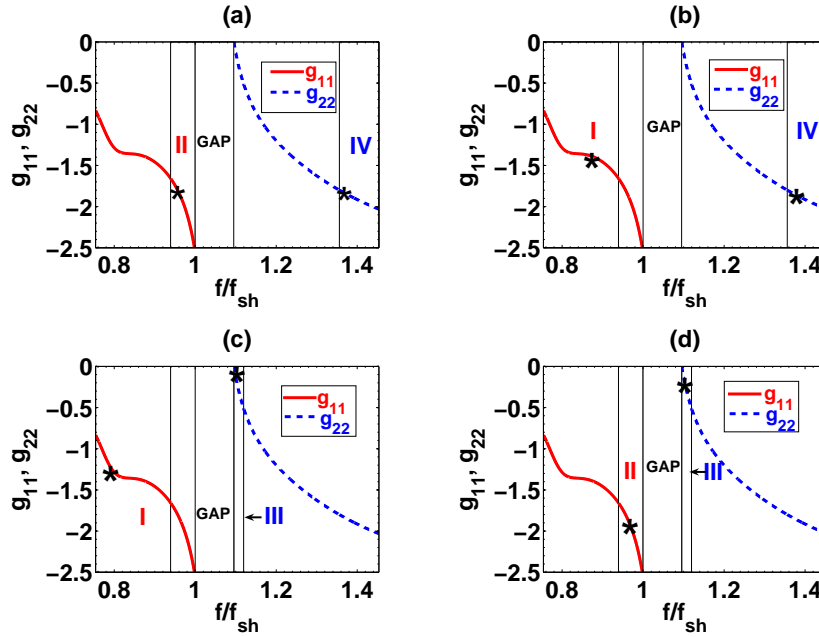
$$D_j \equiv \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_j^2} = v_g \left[\cot k_j - \frac{\omega_j^4 + 3\delta^2}{\omega_j(\omega_j^4 - \delta^2)} v_g \right], \quad (3.16)$$

$$g_{jj} = \frac{\omega_j^3(\omega_j^2 - \delta^2)}{2(\omega_j^4 - \delta^2)} (3\mu - A_j), \quad (3.17)$$

$$g_{j,3-j} = \frac{\omega_j^3(\omega_j^2 - \delta^2)}{2(\omega_j^4 - \delta^2)} (6\mu - B_{3-j}), \quad (3.18)$$

ενώ οι συντελεστές A_j και B_{3-j} ορίζονται στο Παράρτημα Β.

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι για τις τέσσερις πιθανές αλληλεπιδράσεις κύματος, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, οι συντελεστές g_{jj} είναι αρνητικοί, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4. Στη συνέχεια, μετρώντας τον κανονικοποιημένο χρόνο T και τις πυκνότητες



Σχήμα 3.4: Οι μη γραμμικοί συντελεστές g_{11} [συνεχείς (κόκκινες) γραμμές] και g_{22} [εστιγμένες (μπλε) γραμμές] ως συναρτήσεις της f/f_{sh} για αλληλεπιδράσεις στις ζώνες συχνοτήτων II-IV (επάνω αριστερά), I-IV (επάνω δεξιά), I-III (κάτω αριστερά), και II-III (κάτω δεξιά). Η παράμετρος δ παίρνει την τιμή $\delta = 1.0954$. Τα σημεία, που δείχνονται με αστέρια (σε μαύρο) σε κάθε εικόνα, απεικονίζουν τις τιμές των παραμέτρων, που χρησιμοποιήθηκαν στις σχετικές προσομοιώσεις [βλ. παρακάτω τα Σχ. 3.6, 3.7 (αντιστοιχούν στο (a)), τα Σχ. 3.9, 3.10 (αντιστοιχούν στο (b)), τα Σχ. 3.13, 3.14 (αντιστοιχούν στο (c)), καθώς και τα Σχ. 3.15, 3.16 (αντιστοιχούν στο (d))].

$|V_j|^2$ σε μονάδες $|D_1|^{-1}$ και $|D_1/g_{jj}|$, αντίστοιχα, εκφράζουμε τις Εξ. (A.12)-(A.13) στην παρακάτω μορφή:

$$i\partial_T V_1 + \frac{s}{2}\partial_X^2 V_1 + (\lambda_1|V_2|^2 - |V_1|^2) V_1 = 0, \quad (3.19)$$

$$i\partial_T V_2 + \frac{d}{2}\partial_X^2 V_2 + (\lambda_2|V_1|^2 - |V_2|^2) V_2 = 0, \quad (3.20)$$

όπου

$$s = \text{sign}(D_1), \quad d = \frac{D_2}{|D_1|}, \quad \lambda_1 = \frac{g_{12}}{|g_{22}|}, \quad \lambda_2 = \frac{g_{21}}{|g_{11}|}. \quad (3.21)$$

Όπως φαίνεται από τις Εξ. (3.19)-(3.20), απουσία της σύζευξης CPM ($\lambda_j = 0$) η εξέλιξη είτε του LH τρόπου V_1 ή του RH τρόπου V_2 περιγράφεται από μια απλή εξίσωση NLS (βλ. Εισαγωγή). Ωστόσο, οι συνθήκες τροποποιούνται για $\lambda_j \neq 0$ και διάφορα είδη *συζευγμένων* (ή αλλιώς “διανυσματικών”) σολιτονίων μπορούν να βρεθούν στις Εξ. (3.19)-(3.20). Παρακάτω

παρουσιάζονται αυτά τα είδη των συζευγμένων οπισθοδευόντων και οδευόντων σολιτονίων, που ανήκουν στις ζώνες συχνοτήτων LH και RH, αντίστοιχα.

Κατ' αρχήν, τέσσερεις τύποι διανυσματικών σολιτονίων είναι δυνατοί:

- φωτεινά-φωτεινά (BB) σολιτόνια στη μορφή:

$$V_1(X, T) = a_1 \operatorname{sech}(bX) \exp(-i\nu_1 T), \quad (3.22)$$

$$V_2(X, T) = a_2 \operatorname{sech}(bX) \exp(-i\nu_2 T), \quad (3.23)$$

- φωτεινά-σκοτεινά (BD) σολιτόνια στη μορφή:

$$V_1(X, T) = a_1 \operatorname{sech}(bX) \exp(-i\nu_1 T), \quad (3.24)$$

$$V_2(X, T) = a_2 \operatorname{tanh}(bX) \exp(-i\nu_2 T), \quad (3.25)$$

- σκοτεινά-φωτεινά (DB) σολιτόνια στη μορφή:

$$V_1(X, T) = a_1 \operatorname{tanh}(bX) \exp(-i\nu_1 T), \quad (3.26)$$

$$V_2(X, T) = a_2 \operatorname{sech}(bX) \exp(-i\nu_2 T), \quad (3.27)$$

- σκοτεινά-σκοτεινά [dark-dark (DD)] σολιτόνια στη μορφή:

$$V_1(X, T) = a_1 \operatorname{tanh}(bX) \exp(-i\nu_1 T), \quad (3.28)$$

$$V_2(X, T) = a_2 \operatorname{tanh}(bX) \exp(-i\nu_2 T). \quad (3.29)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι παράμετροι $a_{1,2}$ και $\nu_{1,2}$ δηλώνουν τα πλάτη και τις συχνότητες του κάθε σολιτονίου, ενώ η παράμετρος b είναι το (κοινό) αντίστροφο εύρος των σολιτονίων. Αντικαθιστώντας το καθένα από τα παραπάνω συστήματα εξισώσεων, που χαρακτηρίζουν τον τύπο του διανυσματικού σολιτονίου, στις Εξ. (3.19)-(3.20) οδηγούμαστε σε ένα σύνολο εξισώσεων, που συνδέουν τις παραμέτρους του σολιτονίου. Ιδιαίτερα οι εξισώσεις, που συνδέουν τα

πλάτη $a_{1,2}$ με το αντίστροφο εύρος b , είναι της μορφής:

$$(a_j/b)^2 = -\alpha_j, \quad (3.30)$$

$$(a_j/b)^2 = (-1)^j \alpha_j, \quad (3.31)$$

$$(a_j/b)^2 = (-1)^{3-j} \alpha_j, \quad (3.32)$$

$$(a_j/b)^2 = \alpha_j, \quad (3.33)$$

για τα BB, BD, DB και DD σολιτόνια, αντίστοιχα, όπου οι παράμετροι α_j ($j = 1, 2$) είναι:

$$\alpha_1 = \frac{d\lambda_1 + s}{1 - \lambda_1\lambda_2}, \quad \alpha_2 = \frac{s\lambda_2 + d}{1 - \lambda_1\lambda_2}. \quad (3.34)$$

Από την άλλη πλευρά, οι συχνότητες των BB, BD, DB και DD σολιτονίων δίνονται ως:

$$\nu_1 = -\frac{s}{2}b^2, \quad \nu_2 = -\frac{d}{2}b^2, \quad (3.35)$$

$$\nu_1 = -\frac{s}{2}b^2 - \lambda_1 a_1^2, \quad \nu_2 = a_2^2, \quad (3.36)$$

$$\nu_1 = a_1^2, \quad \nu_2 = -\frac{d}{2}b^2 - \lambda_2 a_2^2, \quad (3.37)$$

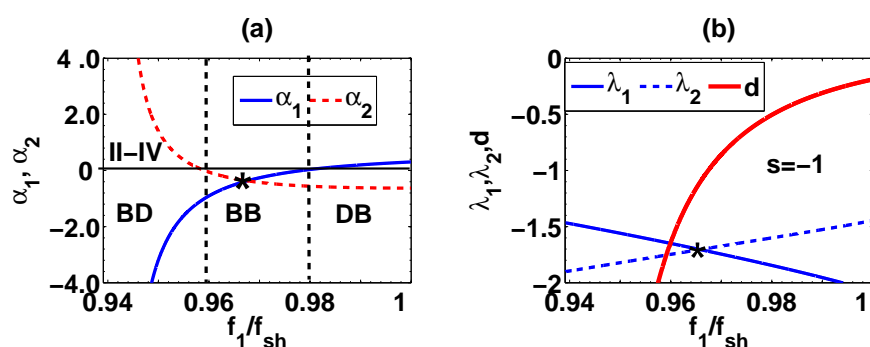
$$\nu_1 = a_1^2 - \lambda_1 a_2^2, \quad \nu_2 = a_2^2 - \lambda_2 a_1^2. \quad (3.38)$$

Είναι σαφές ότι κάθε τύπος διανυσματικού σολιτονίου χαρακτηρίζεται από πέντε ανεξάρτητες παραμέτρους, που συνδέονται με ένα σύνολο τεσσάρων εξισώσεων. Έτσι, κάθε ένα από τα παραπάνω σολιτόνια χαρακτηρίζεται από μία ελεύθερη παράμετρο. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι παράμετροι της κάθε σολιτονικής συνιστώσας εξαρτώνται από τις παραμέτρους της άλλης, αναδεικνύει τη σημαντική δυνατότητα που προκύπτει από τη μη γραμμική σύζευξη των τρόπων των σολιτονίων, δηλαδή ο έλεγχος των χαρακτηριστικών (πλάτος, εύρος, κλπ.) του LH-σολιτονίου μέσω των παραμέτρων του RH σολιτονίου, και αντίστροφα.

Η απαίτηση ότι η δεξιά πλευρά των Εξ. (3.30)-(3.33) είναι θετική, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ύπαρξη κάθε είδους διανυσματικού σολιτονίου καθορίζεται από τα πρόσημα των παραμέτρων α_j . Ειδικότερα, υπάρχουν:

- BB σολιτόνια για $\alpha_1 < 0$ και $\alpha_2 < 0$,
- BD σολιτόνια για $\alpha_1 < 0$ και $\alpha_2 > 0$,
- DB σολιτόνια για $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_2 < 0$,
- DD σολιτόνια για $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_2 > 0$.

Από την άλλη πλευρά, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τα πρόσημα των α_j εξαρτώνται από τη συχνότητα, επειδή οι παράμετροι που υπεισέρχονται στις Εξ. (3.34) μεταβάλλονται με αυτή. Στη συνέχεια, για κάθε διαφορετικό τρόπο σύζευξης [βλ. περιπτώσεις (1)-(4) στην ενότητα 3.1.2], παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το πρόσημο (και το μέγεθος) των α_j στις ζώνες II-IV, I-IV, I-III και II-III, αντίστοιχα, και ως εκ τούτου καθορίζεται ποιος τύπος διανυσματικού σολιτονίου είναι δυνατός. Με αυτό τον τρόπο, προβλέπεται ότι BB, BD και DB σολιτόνια μπορούν να υπάρχουν σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων, ενώ δεν είναι δυνατή η ύπαρξη των DD σολιτονίων. Το τελευταίο οφείλεται στο γεγονός ότι τα α_1 και α_2 είτε έχουν αντίθετα πρόσημα ή είναι και τα δύο αρνητικά, όπως αποδεικνύεται από τα Σχ. 3.5 (αριστερή εικόνα), 3.8, 3.11 και 3.12.



Σχήμα 3.5: Οι παράμετροι για τις αλληλεπιδράσεις των σολιτονίων στις ζώνες II και IV. Αριστερή εικόνα: Η εξάρτηση των συντελεστών α_1 [συνεχής (μπλε) γραμμή] και α_2 [εστιγμένη (κόκκινη) γραμμή] από την κανονικοποιημένη συχνότητα f_1/f_{sh} . Δεξιά εικόνα: Η εξάρτηση των παραμέτρων λ_1 [λεπτή συνεχής (μπλε) γραμμή], λ_2 [εστιγμένη (μπλε) γραμμή] και d [έντονη συνεχής (κόκκινη) γραμμή] από την κανονικοποιημένη συχνότητα f_1/f_{sh} .

Πριν προχωρήσουμε με την παρουσίαση των λύσεων των συζευγμένων σολιτονίων, αξίζει να σημειωθεί ότι τα διανυσματικά σολιτόνια θα βρεθούν σε *στάσιμη* μορφή. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας αυτές τις στάσιμες λύσεις, μπορεί κανείς να βρει επίσης λύσεις *οδοντών* σολιτονίων, με μια επιπλέον ελεύθερη παράμετρο, την ταχύτητα C , με τη βοήθεια του ακόλουθου Γαλιλαϊκού μετασχηματισμού (Galilean boost):

$$V_1(X, T) \rightarrow V_1(X - CT, T) \times \exp \left\{ \frac{i}{s} \left[CX + \left(\frac{C^2}{2} \right) T \right] \right\}, \quad (3.39)$$

$$V_2(X, T) \rightarrow V_2(X - CT, T) \times \exp \left\{ \frac{i}{d} \left[CX + \left(\frac{C^2}{2} \right) T \right] \right\}. \quad (3.40)$$

3.2 Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων σε διαφορετικές περιοχές συχνοτήτων

3.2.1 Αριθμητικές προσομοιώσεις

Στην παρούσα ενότητα μελετάται αριθμητικά η εξέλιξη των συζευγμένων σολιτονίων, που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, στο πλαίσιο του διακριτού μοντέλου της Εξ. (3.5). Προκειμένου να συγκριθούν οι αναλυτικές προσεγγίσεις με τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων γίνεται χρήση δύο διαγνωστικών εργαλείων. Το πρώτο είναι η εξέλιξη του κέντρου μάζας, που ορίζεται ως:

$$X(t) = \frac{\sum_{n=-N}^{n=N} nV_n^2}{\sum_{n=-N}^{n=N} V_n^2}. \quad (3.41)$$

Το δεύτερο εργαλείο είναι η ισχύς, που ορίζεται ως:

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} V_n^2, \quad (3.42)$$

όπου $2N + 1$ είναι το μέγεθος του πλέγματος. Τα παραπάνω εργαλεία μπορούν εύκολα να οριστούν για κάθε τύπο διανυσματικών σολιτονίων, τα οποία προβλέπονται αναλυτικά στο πλαίσιο των συζευγμένων εξισώσεων NLS. Σε όλες τις προσομοιώσεις, οι οποίες έγιναν με μια μέθοδο Runge-Kutta 4ης-τάξης σταθερού βήματος (με βήμα χρόνου ίσο με 0.01, που είναι η μεγαλύτερη τιμή που οδηγεί σε σταθεροποιημένα αποτελέσματα), χρησιμοποιήθηκαν περιοδικές συνοριακές συνθήκες (σημειώνεται επίσης ότι η τιμή της μικρής παραμέτρου που χρησιμοποιήθηκε ήταν $\epsilon = 0.02$ για αρχικές τιμές της τάσης V_0 από 0.1 V έως 0.2 V περίπου). Η χρήση περιοδικών συνοριακών συνθηκών οδηγεί στην απαίτηση ότι ο κυματαριθμός k της συνιστώσας του σκοτεινού σολιτονίου πρέπει να είναι ίσος με $2\pi q/p$ ($q, p \in \mathbb{Z}$), και επιπλέον το q να είναι περιττό.

Σε όλα τα παρακάτω σχήματα (Σχ. 3.6-3.16), εκτός αν σημειώνεται κάτι διαφορετικό, δείχνουμε τη χωροχρονική εξέλιξη της τάσης V_n , τη χωρική κατανομή των τάσεων V_n την χρονική στιγμή $t = 2000$, καθώς και την χρονική εξέλιξη του κέντρου μάζας $X(t)$ και της ισχύος $P(t)$.

Όσον αφορά τον χρόνο εξέλιξης των προσομοιώσεων, σημειώνονται τα ακόλουθα: οι περισσότερες προσομοιώσεις εκτελούνται για σχετικά μεγάλους κανονικοποιημένους χρόνους, μέχρι $t \sim 10^7$ (σε ορισμένες περιπτώσεις). Ωστόσο, ο φυσικός χρόνος (που καθορίζεται από

τη συχνότητα $f_{sh} = 14.529$ GHz) είναι πολύ μικρός, δηλαδή η μονάδα χρόνου είναι $t_0 = (2\pi f_{sh})^{-1} \approx 11$ ps (βλ. ενότητα 3.1.1).

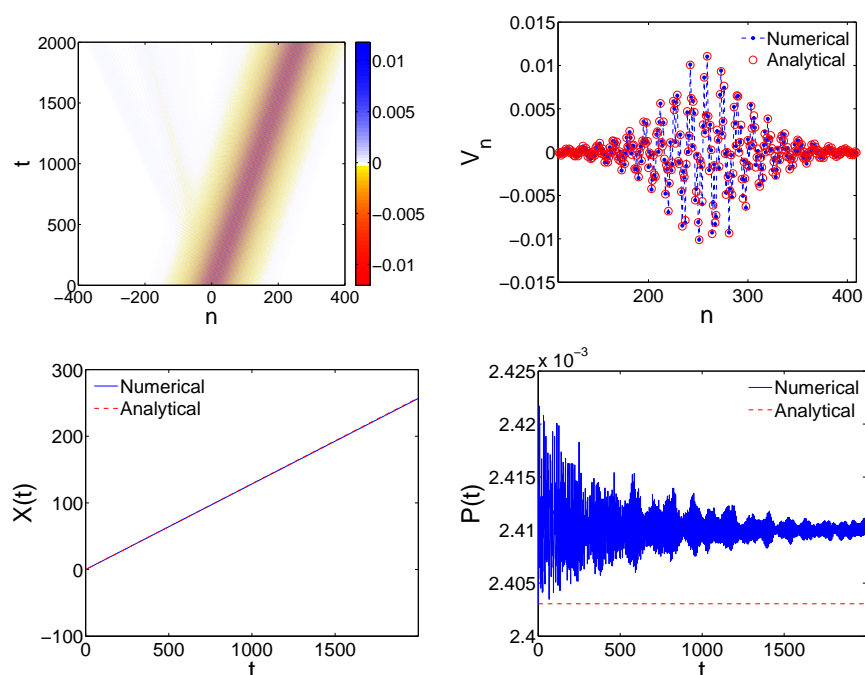
Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι όλες οι συχνότητες του συστήματος βρίσκονται στη μικροκυματική περιοχή, όλοι οι χρόνοι είναι μικρότεροι από 1 ns, με αποτέλεσμα οι προσομοιώσεις να είναι εξαιρετικά χρονοβόρες, ακόμη και για χρόνους της τάξης 10^9 [βλέπε Εξ. (3.7)]. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα για κανονικοποιημένους χρόνους μέχρι $t = 10^7$ (που αντιστοιχούν σε φυσικό χρόνο της τάξης του 0.1 ms), δείχνουν καλή συμφωνία με τις αναλυτικές προβλέψεις (βλ. παρακάτω). Επιπλέον, τα αποτελέσματα αυτών των προσομοιώσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένδειξη της ευρωστίας των σολιτονίων και της δυνατότητας παρατήρησής τους σε πειράματα.

3.2.2 Φωτεινά-Φωτεινά (BB) σολιτόνια στις περιοχές συχνοτήτων II και IV

Αρχικά, θεωρούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ ενός οπισθοδεύοντος σολιτονίου με συχνότητα στη ζώνη II και ενός οδεύοντος σολιτονίου με συχνότητα στη ζώνη IV (για $\delta = 1.0954$). Στην περίπτωση αυτή, $s = -1$ (βλ. Σχ. 3.3) και ακολουθώντας την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας βρίσκουμε τρεις διαφορετικούς τύπους διανυσματικών σολιτονίων:

- Αν $0.94 < f_1/f_{sh} < 0.96$, τότε $\alpha_1 < 0$ και $\alpha_2 > 0$. Έτσι υπάρχουν σολιτόνια τύπου BD, με τη συχνότητα της συνιστώσας του φωτεινού (σκοτεινού) σολιτονίου να είναι στη LH (RH) ζώνη συχνοτήτων.
- Αν $0.96 < f_1/f_{sh} < 0.98$, τότε $\alpha_1 < 0$ και $\alpha_2 < 0$. Έτσι υπάρχουν σολιτόνια τύπου BB, με τις συχνότητες των συνιστωσών σολιτονίων να είναι η μία στη LH και η άλλη στην RH περιοχή συχνοτήτων.
- Αν $0.98 < f_1/f_{sh} < 1$, τότε $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_2 < 0$. Έτσι υπάρχουν σολιτόνια τύπου DB, με τη συχνότητα της συνιστώσας του σκοτεινού (φωτεινού) σολιτονίου να είναι στη LH (RH) ζώνη συχνοτήτων.

Στην ενότητα αυτή, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση των BB σολιτονίων (τα BD και DB σολιτόνια θα μελετηθούν πιο κάτω). Συγκεκριμένα, θα διερευνήσουμε τη δυναμική ενός BB σολιτονίου, που αντιστοιχεί σε συχνότητα φέροντος $f_1/f_{sh} = 0.965$. Για αυτήν την τιμή, ο συντελεστής διασποράς d γίνεται $d \simeq -1 = s$, οι συντελεστές $\lambda_{1,2}$ παίρνουν τις τιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1.7$, ενώ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.487$ (βλ. το σημείο τομής των σχετικών καμπυλών που



Σχήμα 3.6: Φωτεινό-Φωτεινό σολιτόνιο στις περιοχές συχνοτήτων II-IV. Επάνω αριστερά: Η χωροχρονική εξέλιξη της V_n , όπως προκύπτει από την αριθμητική προσομοίωση. Η πάνω δεξιά εικόνα συγκρίνει το αναλυτικό και αριθμητικό αποτέλεσμα για την κατανομή της V_n για $t = 2000$. Οι κάτω εικόνες δείχνουν την χρονική εξέλιξη του κέντρου μάζας (αριστερά) και της ισχύος (δεξιά). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι $f_1/f_{sh} = 0.96545$ και $f_2/f_{sh} = 1.36535$, οι οποίες δίνουν $k_1 = -0.4061$ και $k_2 = 1.8576$, δηλαδή ένα φωτεινό-φωτεινό σολιτόνιο στις ζώνες II και IV (αυτή η συγκεκριμένη επιλογή αντιστοιχεί στα σημεία που απεικονίζονται από τα αστέρια στο Σχ. 3.5). Η διαφορά στην ισχύ μπορεί να αποδοθεί στην προσεγγιστική φύση της αναλυτικής λύσης.

απεικονίζεται με ένα αστέρι στο Σχ. 3.5). Στην περίπτωση αυτή, το BB σολιτόνιο έχει (κοινή για τις δύο συνιστώσες) ταχύτητα ομάδας $v_g = 0.1288$, για φέρουσες συχνότητες των τρόπων V_1 και V_2 , $f_1/f_{sh} = 0.965$ (όπως προαναφέρθηκε) και $f_2/f_{sh} = 1.365$.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι αυτή η επιλογή των τιμών των παραμέτρων οδηγεί σε *συμμετρικές* συζευγμένες εξισώσεις NLS [Εξ. (3.19)-(3.20)] καθώς και σε συμμετρικά BB σολιτόνια, που έχουν ίσα πλάτη [116]. Μια πολύ ενδιαφέρουσα υπο-περίπτωση, που αντιστοιχεί σε $\lambda = -1$ (δηλαδή, ίσους SPM και CPM συντελεστές), θα ανήγαγε τις Εξ. (3.19)-(3.20) στο πλήρως ολοκληρώσιμο σύστημα Manakov [117]. Σε μια τέτοια περίπτωση, όπως φαίνεται στην κάτω εικόνα του Σχ. 3.5, η καμπύλη για την παράμετρο d θα τέμνει τις καμπύλες για $\lambda_{1,2}$, με όλες τις παραμέτρους να λαμβάνουν την τιμή -1 . Ωστόσο, έχουμε ελέγξει ότι άλλες φυσικά αποδεκτές τιμές της παραμέτρου d δεν οδηγούν στο σύστημα Manakov [η επιλεγμένη τιμή $d = 1.0954$ οδηγεί μόνο σε συμμετρικές εξισώσεις NLS (3.19)-(3.20)].

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω λύση του BB σολιτονίου, μπορούμε να εκφράσουμε την τάση $V_n(t)$ στην Εξ. (3.5) στις αρχικές συντεταγμένες n και t ως εξής:

$$V_n(t) \approx V_0[R_1(n, t) \cos(k_1 n - \Omega_1 t) + R_2(n, t) \cos(k_2 n - \Omega_2 t)], \quad (3.43)$$

όπου οι συναρτήσεις R_1 και R_2 έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$R_1 = \operatorname{sech}[\sqrt{2\ell}\epsilon(n - v_g t)], \quad (3.44)$$

$$R_2 = \sqrt{\left| \frac{g_{11}}{g_{22}} \right|} \operatorname{sech}[\sqrt{2\ell}\epsilon(n - v_g t)]. \quad (3.45)$$

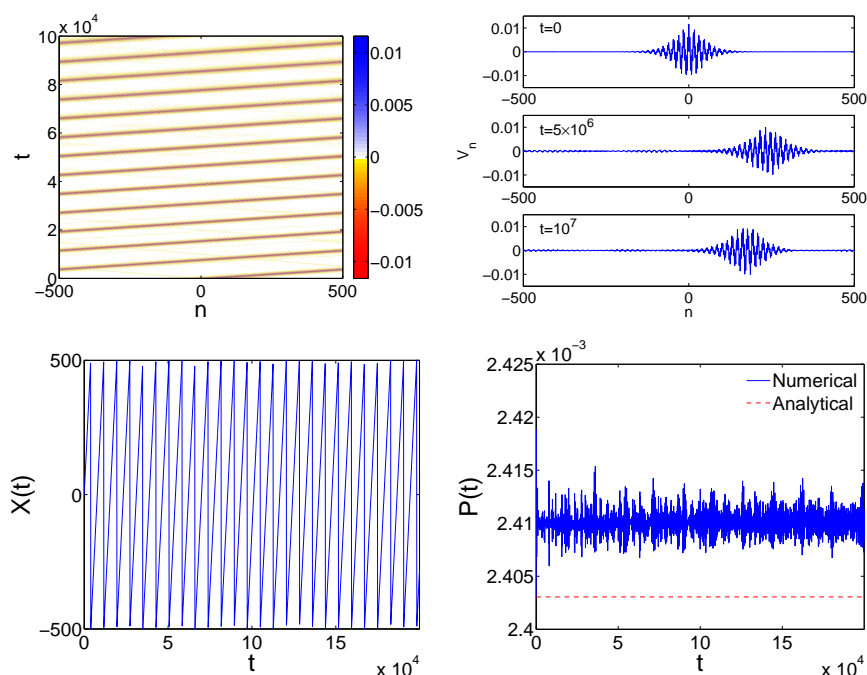
Στις παραπάνω εξισώσεις το ℓ είναι μια αυθαίρετη παράμετρος, ενώ το πλάτος της λύσης V_0 και οι συχνότητες Ω_j ($j = 1, 2$) είναι:

$$V_0 = 2\epsilon \sqrt{\left| \frac{D_1}{g_{11}} \right| \frac{2\ell}{1 - \lambda}}, \quad \Omega_j = \omega_j + \epsilon^2 \ell |D_1|, \quad (3.46)$$

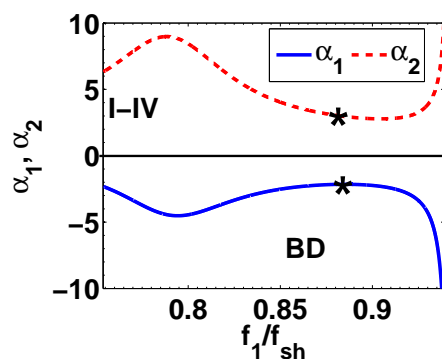
όπου $\omega_j \equiv f_j/f_{\text{sh}}$. Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.43) στις Εξ. (3.41) και (3.42) λαμβάνουμε (για επαρκώς μικρό ϵ) τις ακόλουθες εκφράσεις για τα $X(t)$ και $P(t)$:

$$X(t) = v_g t, \quad P(t) = \frac{V_0^2}{\epsilon \sqrt{2\ell}} \left(1 + \left| \frac{g_{11}}{g_{22}} \right| \right). \quad (3.47)$$

Στα Σχ. 3.6 και 3.7 απεικονίζεται το αποτέλεσμα των προσομοιώσεων για ένα BB σολιτόνιο με $\ell = 1$ και $N = 500$, για μικρούς και μεγάλους χρόνους, αντίστοιχα. Οι τιμές των παραμέτρων είναι $f_1/f_{\text{sh}} = 0.965$ και $f_2/f_{\text{sh}} = 1.365$, οι οποίες δίνουν $k_1 = -0.406$ και $k_2 = 1.857$. Στο Σχ. 3.6, φαίνεται η πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων για την V_n , την εξέλιξη του κέντρου μάζας και την ισχύ. Στην περίπτωση που φαίνεται στο Σχ. 3.7, έχει πραγματοποιηθεί μια πολύ μεγάλη προσομοίωση, μέχρι $t = 10^7$ (κανονικοποιημένος χρόνος). Είναι σαφές ότι ο αρχικός παλμός δεν έχει υποστεί διασπορά, το οποίο δείχνει την ευρωστία του σολιτονίου. Οι πάνω εικόνες του σχήματος και ιδιαίτερα τα στιγμιότυπα του παλμού για $t = 10^7$ δείχνουν σαφώς ότι το σολιτόνιο παραμένει ευσταθές ως το τέλος αυτής της μεγάλης προσομοίωσης.



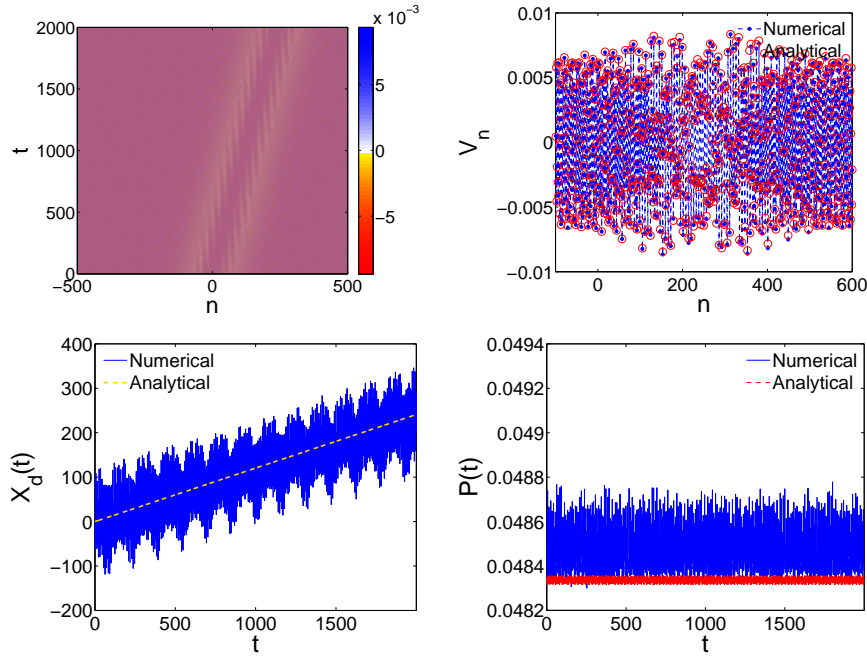
Σχήμα 3.7: Το φωτεινό-φωτεινό σολιτόνιο του Σχ. 3.6 για χρόνο μέχρι $t = 10^5$. Όλες οι εικόνες είναι παρόμοιες με εκείνες του Σχ. 3.6, εκτός από την επάνω δεξιά. Στην τελευταία, στιγμιότυπα του σολιτονίου για $t = 2 \times 10^6$ και $t = 10^7$ συγκρίνονται με την αρχική συνθήκη προκειμένου να εξεταστεί η ευρωστία του για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα εξέλιξης.



Σχήμα 3.8: Οι παράμετροι για σολιτόνια στις ζώνες I και IV: συντελεστές α_1 [συνεχής (μπλε) γραμμή] και α_2 [εστιγμένη (κόκκινη) γραμμή] ως συναρτήσεις της συχνότητας f_1/f_{sh} . Τα αστέρια απεικονίζουν τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για τις προσομοιώσεις που φαίνονται στα Σχ. 3.9 και 3.10.

3.2.3 Φωτεινά-Σκοτεινά (BD) σολιτόνια στις περιοχές συχνοτήτων I και IV

Στη συνέχεια, θεωρούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ ενός οπισθοδεύοντος σολιτονίου με συχνότητα στη ζώνη I και ενός οδεύοντος με συχνότητα στη ζώνη IV. Στην περίπτωση αυτή, $s = +1$ (βλ. Σχ. 3.3). Στο Σχ. 3.8 δείχνουμε την εξάρτηση των παραμέτρων α_1 και α_2 από τη συχνότητα f_1/f_{sh} (για $\delta = 1.0954$). Παρατηρείται ότι $\alpha_1 < 0$ και $\alpha_2 > 0$ και, ως εκ τούτου, υπάρχουν μόνο BD σολιτόνια στις ζώνες I-IV. Χρησιμοποιώντας τις λύσεις (3.24)-(3.25),



Σχήμα 3.9: Φωτεινό-Σκοτεινό σολιτόνιο στις περιοχές συχνοτήτων I-IV. Επάνω αριστερά: χωροχρονική εξέλιξη της τάσης V_n που λαμβάνεται αριθμητικά. Η πάνω δεξιά εικόνα συγκρίνει τα αναλυτικά και αριθμητικά προφίλ του V_n σε $t = 2000$. Οι κάτω εικόνες δείχνουν την χρονική εξέλιξη του κέντρου μάζας (αριστερά) και της ισχύος (δεξιά). Οι τιμές των παραμέτρων είναι $f_1/f_{sh} = 0.8831$ και $k_2 = 5\pi/8 \approx 1.9625$, που δίνουν $k_1 = -1.0404$ και $f_2/f_{sh} = 1.3748$, δηλαδή ένα φωτεινό-σκοτεινό σολιτόνιο στις ζώνες I και IV (βλ. τα αντίστοιχα σημεία που απεικονίζονται με αστέρια στο Σχ. 3.8).

μπορούμε να προσεγγίσουμε και πάλι μια λύση της Εξ. (3.5) για την τάση $V_n(t)$ στις αρχικές συντεταγμένες n και t ως εξής:

$$V_n(t) \approx V_0[\Psi_1(n, t) \cos(k_1 n - \Omega_1 t) + \Psi_2(n, t) \cos(k_2 n - \Omega_2 t)], \quad (3.48)$$

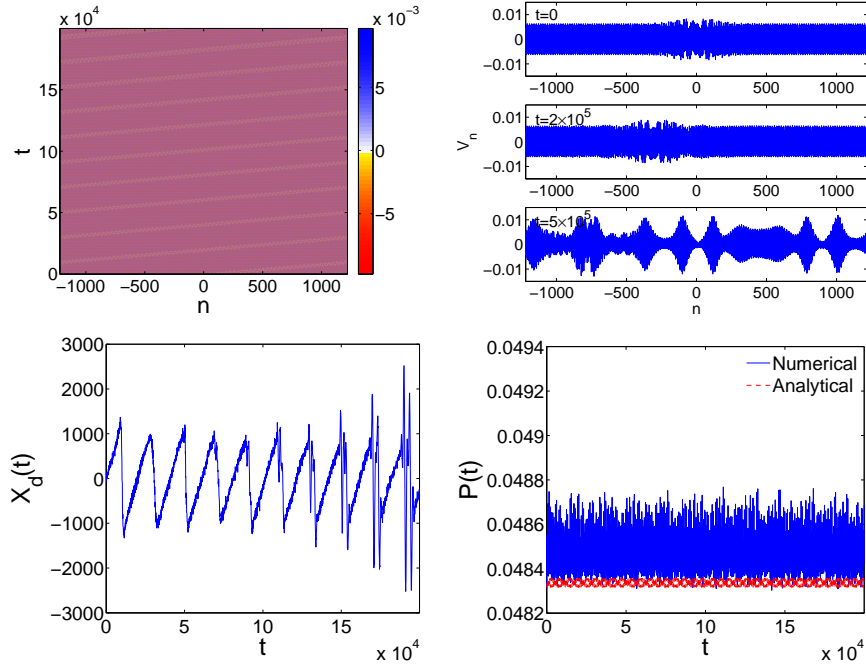
όπου

$$\Psi_1 = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \operatorname{sech}[\epsilon b(n - v_g t)], \quad (3.49)$$

$$\Psi_2 = \sqrt{\left| \frac{g_{11}}{g_{22}} \right|} \tanh[\epsilon b(n - v_g t)]. \quad (3.50)$$

Σε αυτή την περίπτωση, το πλάτος V_0 και οι συχνότητες Ω_j ($j = 1, 2$) της λύσης είναι:

$$V_0 = 2\epsilon \sqrt{\nu_2 \left| \frac{D_1}{g_{11}} \right|}, \quad \Omega_j = \omega_j + \epsilon^2 \nu_j |D_1|. \quad (3.51)$$



Σχήμα 3.10: Το φωτεινό-σκοτεινό σολιτόνιο του Σχ. 3.9 μέχρι τον χρόνο $t = 2 \times 10^5$. Όλες οι εικόνες είναι παρόμοιες με εκείνες του Σχ. 3.9, εκτός από την επάνω δεξιά. Σε αυτή την εικόνα, τα στιγμιότυπα του σολιτονίου σε $t = 2 \times 10^5$ και $t = 5 \times 10^5$ συγκρίνονται με την αρχική συνθήκη της προσομοίωσης. Εδώ, η αστάθεια διαμόρφωσης του υποβάθρου του σκοτεινού σολιτονίου (βλ. Παράρτημα Γ) είναι υπεύθυνη για τη διάλυση του κυματοπακέτου.

Το κέντρο μάζας του BD σολιτονίου ορίζεται ως:

$$X_d(t) = \frac{F(t)X(t)}{\Psi_{1,0}^2 - \Psi_{2,0}^2} - \frac{\epsilon b N}{2} \Psi_{2,0}^2 \cot(k_2) \sin(2\Omega_2 t), \quad (3.52)$$

όπου

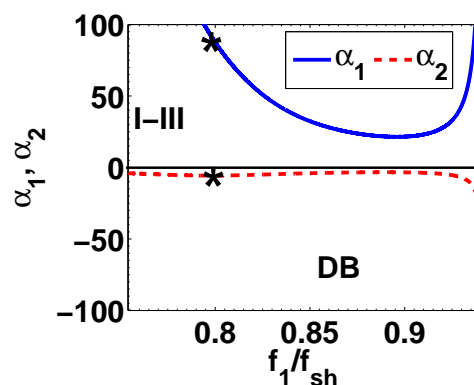
$$F(t) = \Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2(\epsilon b N - 1) + \frac{\epsilon b}{2} \Psi_{2,0}^2 [1 - \cos(2\Omega_2 t)], \quad (3.53)$$

ενώ $X(t)$ δίνεται από την Εξ. (3.47).

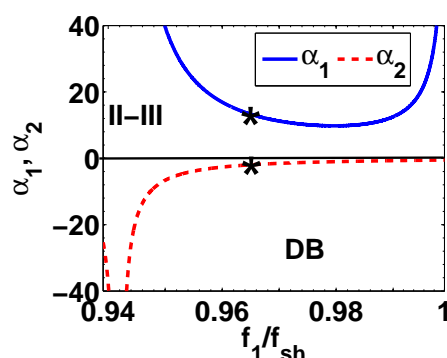
Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.48) στις Εξ. (3.52) και (3.42) παίρνουμε (για μικρό ϵ) το κέντρο της μάζας και την ισχύ:

$$X_d(t) = v_g t, \quad P_d(t) = \frac{V_0^2}{\epsilon b} F(t). \quad (3.54)$$

Τα Σχ. 3.9 και 3.10 δείχνουν την εξέλιξη ενός BD σολιτονίου (και τα χαρακτηριστικά του) στις ζώνες I και IV με $\nu_2 = 1$ και $N = 1220$. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι $f_1/f_{sh} = 0.8831$ και $k_2 = 5\pi/8 \approx 1.9625$, οι οποίες δίνουν $k_1 = -1.0404$ και $f_2/f_{sh} = 1.3748$. Σε αυτή την περίπτωση, είναι σαφές ότι αν και υπάρχουν BD σολιτόνια, η συμφωνία μεταξύ



Σχήμα 3.11: Όμοιο με το Σχ. 3.8, αλλά και για αλληλεπιδράσεις σολιτονίων στις ζώνες I και III. Τα αστέρια απεικονίζουν τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για τις προσομοιώσεις που φαίνονται στα Σχ. 3.13 και 3.14.

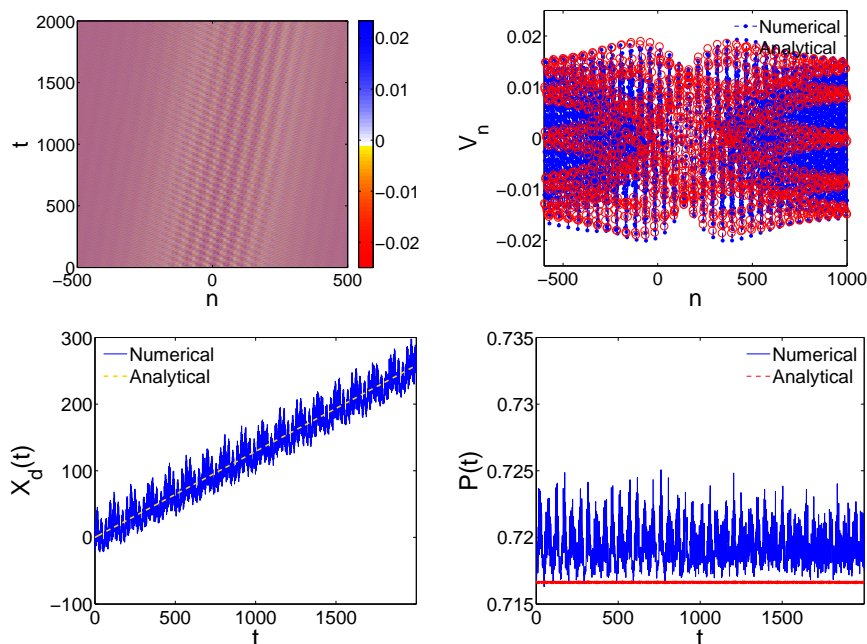


Σχήμα 3.12: Όμοιο με το Σχ. 3.8, αλλά για αλληλεπιδράσεις σολιτονίων στις ζώνες II και III. Τα αστέρια απεικονίζουν τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για τις προσομοιώσεις που φαίνονται στα Σχ. 3.15 και 3.16.

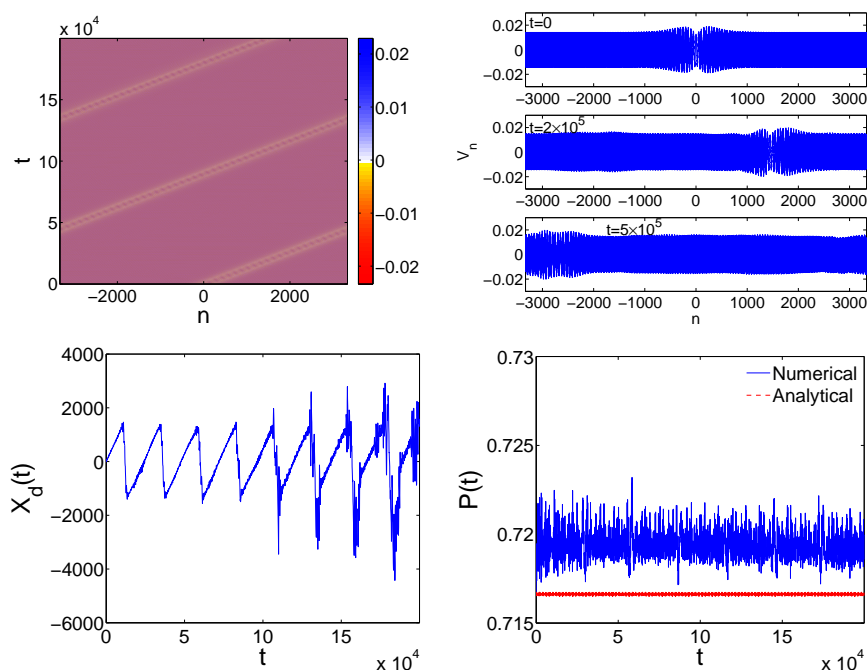
των αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων γίνεται χειρότερη με την πάροδο του χρόνου. Επίσης, όπως φαίνεται στην πάνω δεξιά πλευρά του Σχ. 3.10, το προφίλ του παλμού δηλώνει ότι το σολιτόνιο BD δεν είναι εύρωστο. Η παρατηρούμενη συμπεριφορά του σολιτονίου BD μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι το υπόβαθρο (συνεχές κύμα) της σκοτεινής συνιστώσας, δηλ. του σκοτεινού σολιτονίου, υπόκειται στην αστάθεια διαμόρφωσης [106, 118]. Αυτό το σημείο εξηγείται με περισσότερες λεπτομέρειες στο Παράρτημα Γ.

3.2.4 Σκοτεινά-Φωτεινά (DB) σολιτόνια στις περιοχές συχνοτήτων I-III και II-III

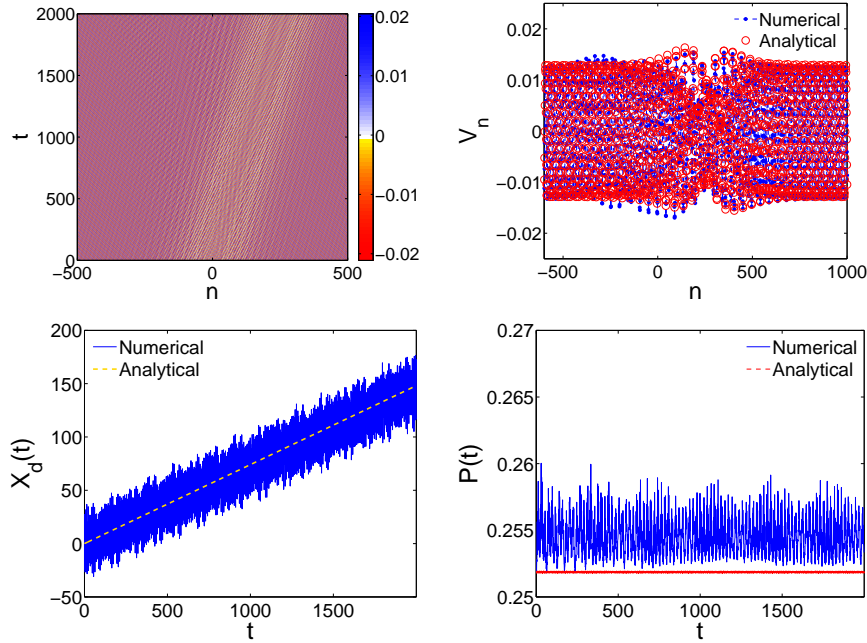
Τέλος, θεωρούμε τις περιπτώσεις των συζευγμένων σολιτονίων στις περιοχές συχνοτήτων I και III καθώς και στις περιοχές II και III. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, όπως φαίνεται στα Σχ. 3.11 (ζώνες I-III) και 3.12 (ζώνες II-III), βρίσκουμε ότι $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_2 < 0$ και, ως εκ τούτου, υπάρχουν μόνο DB σολιτόνια στις ζώνες αυτές. Ακολουθώντας τις προηγούμενες θεωρήσεις,



Σχήμα 3.13: Σκοτεινό-Φωτεινό σολιτόνιο στις περιοχές συχνοτήτων I-III. Επάνω αριστερά: Χωροχρονική εξέλιξη της τάσης V_n που λαμβάνεται αριθμητικά. Η πάνω δεξιά εικόνα συγκρίνει τα αναλυτικά και αριθμητικά προφίλ της τάσης V_n σε $t = 2000$. Οι κάτω εικόνες δείχνουν την χρονική εξέλιξη του κέντρου μάζας (αριστερά) και της ισχύος (δεξιά). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι $k_1 = -6\pi/5 \approx -1.884$ και $f_2/f_{sh} = 1.1002$, οι οποίες δίνουν $f_1/f_{sh} = 0.8003$ και $k_2 = 0.1232$, δηλαδή ένα σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο στις περιοχές συχνοτήτων I και III (βλ. τα αντίστοιχα σημεία που απεικονίζονται με αστέρια στο Σχ. 3.11).



Σχήμα 3.14: Το σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο του Σχ. 3.13 έχει εξελιχθεί μέχρι $t = 2 \times 10^5$. Όλες οι εικόνες είναι παρόμοιες με εκείνες του Σχ. 3.13, εκτός από την επάνω δεξιά. Σε αυτή την εικόνα, τα στιγμιότυπα του σολιτονίου για $t = 2 \times 10^5$ και $t = 5 \times 10^5$ συγκρίνονται με την αρχική συνθήκη.



Σχήμα 3.15: Σκοτεινό-Φωτεινό σολιτόνιο στις περιοχές συχνοτήτων II-III. Επάνω αριστερά: Χωροχρονική εξέλιξη της τάσης V_n που λαμβάνεται αριθμητικά. Η πάνω δεξιά εικόνα συγκρίνει τα αναλυτικά και αριθμητικά προφίλ της τάσης V_n σε $t = 2000$. Οι κάτω εικόνες δείχνουν την χρονική εξέλιξη του κέντρου μάζας (αριστερά) και της ισχύος (δεξιά). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι $k_1 = -3\pi/23 \approx -0.4095$ και $f_2/f_{sh} = 1.1162$, οι οποίες δίνουν $f_1/f_{sh} = 0.965$ και $k_2 = 0.2758$, δηλαδή ένα σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο στις περιοχές συχνοτήτων II και III (βλ. τα αντίστοιχα σημεία που απεικονίζονται με αστέρια στο Σχ. 3.12).

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις λύσεις του DB σολιτονίου των εξισώσεων (3.26)-(3.27) και να προσεγγίσουμε την τάση $V_n(t)$ στην Εξ. (3.5) ως προς τα αρχικά n και t :

$$V_n(t) = V_0[\Phi_1(n, t) \cos(k_1 n - \Omega_1 t) + \Phi_2(n, t) \cos(k_2 n - \Omega_2 t)], \quad (3.55)$$

όπου οι συναρτήσεις Φ_1 και Φ_2 δίνονται ως:

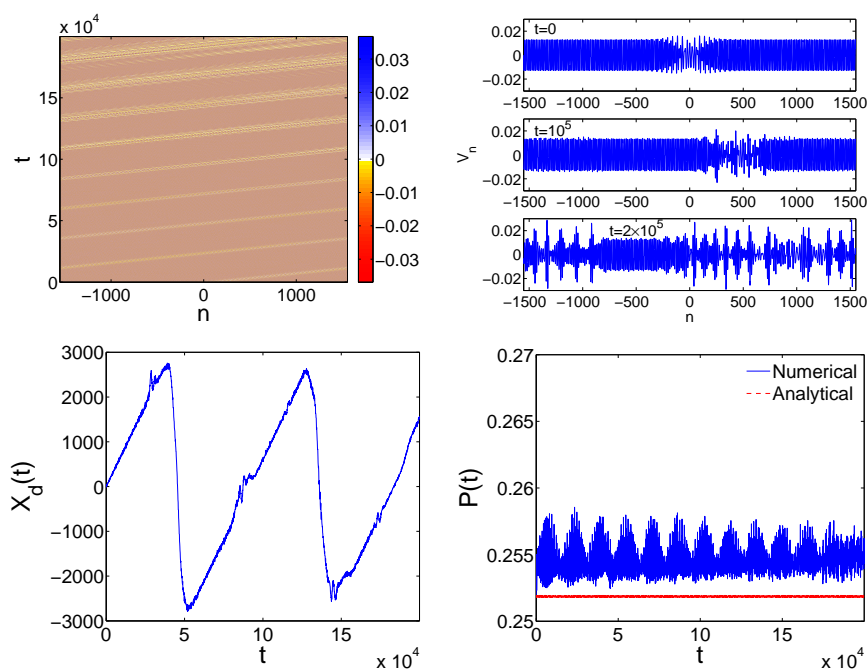
$$\Phi_1 = \tanh[\epsilon B(n - v_g t)], \quad (3.56)$$

$$\Phi_2 = \sqrt{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left| \frac{g_{11}}{g_{22}} \right|} \operatorname{sech}[\epsilon B(n - v_g t)], \quad (3.57)$$

ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι του σολιτονίου είναι:

$$V_0 = 2\epsilon \sqrt{\nu_1 \left| \frac{D_1}{g_{11}} \right|}, \quad \Omega_j = \omega_j + \epsilon^2 \nu_j |D_1|. \quad (3.58)$$

Τα Σχ. 3.13 και 3.14 δείχνουν τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων για το DB σολιτόνιο στις ζώνες I και III (με $\nu_1 = 3$ και $N = 3333$), ενώ τα Σχ. 3.15 και 3.16 αντιστοιχούν σε ένα DB



Σχήμα 3.16: Το σκοτεινό-φωτεινό σολιτόνιο του Σχ. 3.15 μέχρι τον χρόνο $t = 2 \times 10^5$. Όλες οι εικόνες είναι παρόμοιες με εκείνες του Σχ. 3.15 εκτός από την επάνω δεξιά. Σε αυτή την εικόνα, τα στιγμιότυπα του σολιτονίου σε $t = \times 10^5$ και $t = 2 \times 10^5$ συγκρίνονται με την αρχική συνθήκη προκειμένου να εξεταστεί η ευρωστία του για μεγάλο χρονικό διάστημα. Και σε αυτήν την περίπτωση, η αστάθεια διαμόρφωσης του υποβάθρου (βλ. Παράρτημα Γ) είναι υπεύθυνη για τη διάλυση του κυματοπακέτου.

σολιτόνιο στις ζώνες II και III (με $\nu_1 = 3$ και $N = 1553$). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι $k_1 = -6\pi/5 \approx -1.884$ και $f_2/f_{sh} = 1.1002$, οι οποίες δίνουν $f_1/f_{sh} = 0.8003$ και $k_2 = 0.1232$, στις ζώνες I και III, και $k_1 = -3\pi/23 \approx -0.4095$ και $f_2/f_{sh} = 1.1162$, οι οποίες δίνουν $f_1/f_{sh} = 0.965$ και $k_2 = 0.2758$, στις ζώνες II και III, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται σε αυτά τα σχήματα, τα DB σολιτόνια στις ζώνες II-III και I-III υπάρχουν, όπως προβλέπεται στη θεωρία. Επιπλέον, παρατηρείται ότι στην πρώτη είναι λιγότερο εύρωστα από την τελευταία, όπως φαίνεται τόσο από την ενίσχυση της παραμόρφωσής τους όσο και το γεγονός ότι “χάνουν” το σολιτονικό τους χαρακτήρα νωρίτερα. Στην πραγματικότητα, όπως φαίνεται στην πάνω δεξιά πλευρά του Σχ. 3.16 και επεξηγείται στο Παράρτημα Γ, το υπόβαθρο του σκοτεινού σολιτονίου υπόκειται στην αστάθεια διαμόρφωσης, όπως και στην περίπτωση των αλληλεπιδράσεων στις ζώνες I-IV. Αντίθετα, τα DB σολιτόνια στις ζώνες I-III εμφανίζονται να διατηρούν ουσιαστικά τη δομή τους, ακόμη και για μεγάλους χρόνους όπως φαίνεται στο Σχ. 3.14. Στην περίπτωση αυτή, όπως εξηγείται στο Παράρτημα Γ, το υπόβαθρο που μεταφέρει το σκοτεινό σολιτόνιο είναι ευσταθές. Το γεγονός αυτό μπορεί τουλάχιστον ποιοτικά να εξηγήσει τη διαφορετική συμπεριφορά σε μεγάλους χρόνους των DB σολιτονίων, που παρατηρείται στα Σχ. 3.16 και 3.14, όπως και το γεγονός ότι τα DB σολιτόνια στις περιοχές συχνοτήτων I-III είναι πιο εύρωστα από αυτά στις II-III.

Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων επαληθεύουν την ύπαρξη των προαναφερθέντων τύπων διανυσματικών σολιτονίων και προσφέρουν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την ευρωστία τους. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων δείχνουν ότι τα σολιτόνια του τύπου φωτεινό-φωτεινό (BB) είναι τα πιο εύρωστα μεταξύ των μελών της οικογένειας των διανυσματικών σολιτονίων. Πράγματι, τα σολιτόνια των μικτών τύπων, δηλ. το σκοτεινό-φωτεινό (DB) και το φωτεινό-σκοτεινό (BD) έχουν βρεθεί να είναι λιγότερο εύρωστα. Ωστόσο, τα DB σολιτόνια σε συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων, παρά το γεγονός ότι έχουν παραμορφωθεί κατά τη διάρκεια της εξέλιξής τους, βρέθηκαν να είναι πιο εύρωστα από DB σολιτόνια σε άλλες ζώνες (καθώς επίσης και από τα BD σολιτόνια) τα οποία καταστρέφονται για τον ίδιο χρόνο διάδοσης. Η παρατηρούμενη συμπεριφορά του μικτού τύπου σολιτονίων μπορεί να εξηγηθεί ποιοτικά από το γεγονός ότι στη λιγότερο εύρωστη περίπτωση, το υπόβαθρο συνεχούς κύματος πάνω στο οποίο υπάρχει το σκοτεινό σολιτόνιο είναι επιρρεπές στην αστάθεια διαμόρφωσης [106, 118, 119].

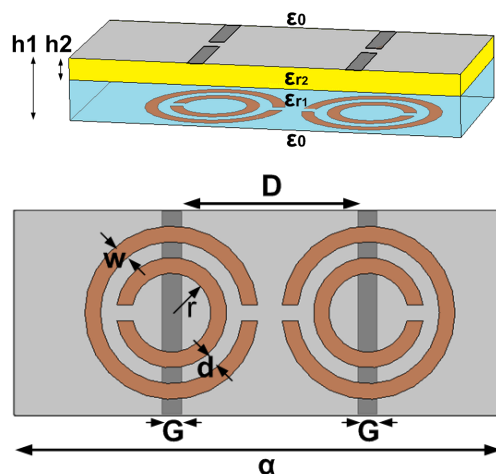
Σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα δείχνουν την ύπαρξη και των τριών τύπων διανυσματικών σολιτονίων, δηλαδή εύρωστα BB σολιτόνια και μερική ή ολική παραμόρφωση των άλλων τύπων (DB και BD). Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα BB σολιτόνια (LH-RH), καθώς και τα DB σολιτόνια (LH-RH), σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων, έχουν μια καλύτερη πιθανότητα να παρατηρηθούν σε πειράματα.

Κεφάλαιο 4

Διακριτά σολιτόνια σε ομοεπίπεδο κυματοδηγό με SRR

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η διάδοση HM κυμάτων σε μια ρεαλιστική μη γραμμική διάταξη, που αποτελείται από έναν ομοεπίπεδο κυματοδηγό [coplanar waveguide (CPW)] με μια συστοιχία split-ring resonators (SRR) να είναι χαραγμένη στο κάτω μέρος του υποστρώματος. Η δομή αυτή θα αποκαλείται στο εξής SRR-CPW. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες διατάξεις που μελετήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, εδώ προτείνεται μια “υλοποίηση” της μη γραμμικότητας όχι με διόδους, αλλά με την ενσωμάτωση στη διάταξη SRR-CPW ενός λεπτού μη γραμμικού υμενίου [120–122]. Η μη γραμμική διάταξη SRR-CPW προσομοιώνεται από μια μη γραμμική CRLH γραμμής μεταφοράς, όπου η μη γραμμικότητα εμφανίζεται στους πυκνωτές του παράλληλου κλάδου.

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, η ανάλυση ξεκινάει από τη μοναδιαία κυψελίδα της CRLH γραμμής μεταφοράς, η μελέτη της οποίας οδηγεί σε μια διακριτή μη γραμμική εξίσωση εξέλιξης για την τάση στα άκρα της. Η ανάλυση προβλέπει την ύπαρξη και την εύρωστη διάδοση διακριτών φωτεινών σολιτονίων στη LH περιοχή συχνοτήτων, και αναδεικνύει τη δυνατότητα αύξησης του εύρους της περιοχής συχνοτήτων όπου σχηματίζονται τα σολιτόνια με τη μεταβολή γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διάταξης. Οι αναλυτικές προβλέψεις επιβεβαιώνονται από τις αριθμητικές προσομοιώσεις, οι οποίες δείχνουν την ευρωστία των διακριτών σολιτονίων.



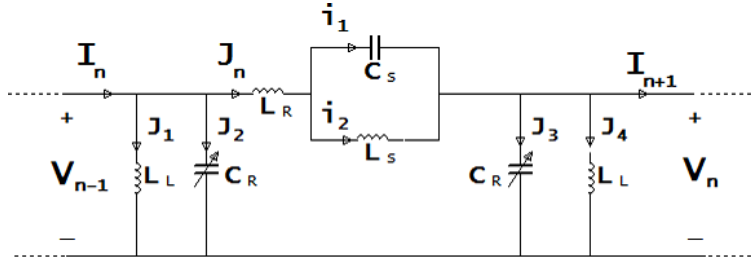
Σχήμα 4.1: Πάνω εικόνα: η διάταξη SRR-CPW. Το διηλεκτρικό υπόστρωμα σχετικής ηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ_{r1} και εύρους $h_1 - h_2$ είναι γραμμικό, ενώ το υμένιο σχετικής ηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ_{r2} και εύρους h_2 είναι μη γραμμικό. Κάτω εικόνα: Απεικόνιση του κάτω επιπέδου της διάταξης, όπου τοποθετούνται τα SRR. Απεικονίζονται οι διαστάσεις που παρουσιάζονται στις εξισώσεις του Παραρτήματος Δ.

4.1 Ανάλυση της διάταξης SRR-CPW

4.1.1 Η ισοδύναμη μη γραμμική CRLH γραμμή μεταφοράς

Η θεωρούμενη διάταξη SRR-CPW απεικονίζεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 4.1. Η διάταξη αυτή είναι ένα ρεαλιστικό σύστημα που έχει υλοποιηθεί στο εργαστήριο [70, 96]. Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, εδώ προτείνεται η μη γραμμική εκδοχή της, που μπορεί να υλοποιηθεί με την προσθήκη ενός μη γραμμικού λεπτού υμενίου σχετικής ηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ_{r2} και πλάτους h_2 (βλ. Σχ. 4.1). Η συστοιχία των SRR (εξωτερικής ακτίνας R), που βρίσκονται στο κατώτερο επίπεδο, είναι ευθυγραμμισμένη με τις σχισμές (εύρους G και απόστασης διαχωρισμού D), που βρίσκονται στο ανώτερο επίπεδο. Η σχεδίαση αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη αριστερόστροφης περιοχής συχνοτήτων για τα HM κύματα, που μπορούν να διαδοθούν στη διάταξη, όπως θα φανεί από την ανάλυση που ακολουθεί.

Το κύκλωμα της μοναδιαίας κυψελίδας του ισοδύναμου μοντέλου της μη γραμμικής γραμμής μεταφοράς για τη θεωρούμενη διάταξη SRR-CPW απεικονίζεται στο Σχ. 4.2. Τα στοιχεία L_R και C_R χαρακτηρίζουν την ισοδύναμη (ανά μονάδα μήκους) αυτεπαγωγή και χωρητικότητα αντίστοιχα του ομοεπίπεδου κυματοδηγού, τα στοιχεία L_s και C_s είναι η ισοδύναμη αυτεπαγωγή και χωρητικότητα του SRR αντίστοιχα, ενώ το στοιχείο L_L χαρακτηρίζει την αυτεπαγωγή των αγωγικών λωρίδων μεταξύ του κεντρικού αγωγού και των επιπέδων γείωσης. Όλα τα παραπάνω ηλεκτρικά στοιχεία υπολογίζονται από τις φυσικές παραμέτρους της διάταξης SRR-CPW (βλ. [123] και Παράρτημα Δ).



Σχήμα 4.2: Το κύκλωμα της μοναδιαίας κυψελίδας του ισοδύναμου μοντέλου της μη γραμμικής CRLH γραμμής μεταφοράς για τη διάταξη SRR-CPW του Σχ. 4.1.

Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα, ο πυκνωτής C_R είναι μη γραμμικός εξαιτίας της προσθήκης του μη γραμμικού λεπτού υμενίου. Ωστόσο στη συνέχεια, για λόγους πληρότητας, λαμβάνεται υπόψη η γενικότερη περίπτωση, όπου και οι πυκνωτές του σειριακού κλάδου παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά, η οποία μπορεί να υλοποιηθεί με την εισαγωγή διόδων στις σχισμές των SRR [34, 45, 124, 125], όπως στα προηγούμενα κεφάλαια. Εφαρμόζοντας τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff για το ισοδύναμο κύκλωμα του SRR (βλ. το συνδυασμό L_s - C_s στο Σχ. 4.2), λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$L_s \frac{di_2}{dt} = V_{n-1} - V_n - L_R \frac{dJ_n}{dt}, \quad (4.1)$$

$$i_1 = C_s \frac{d}{dt} \left(V_{n-1} - V_n - L_R \frac{dJ_n}{dt} \right). \quad (4.2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μαζί με το νόμο του Kirchhoff για το ρεύμα $i_1 + i_2 = J_n$ οδηγούν στο ακόλουθο σύστημα για τις άγνωστες τάσεις V_n και U_n :

$$L_R \frac{d^2}{dt^2} [C_s(U_n)U_n - C_s(U_{n+1})U_{n+1}] + \left(1 + \frac{L_R}{L_s} \right) (U_n - U_{n+1}) + (V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}) = 0, \quad (4.3)$$

$$L_R \frac{d^2}{dt^2} [C(V_n)V_n] - (V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}) + \frac{L_R}{L} V_n - (U_n - U_{n+1}) = 0, \quad (4.4)$$

όπου $C = 2C_R$ και $L = L_L/2$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η μη γραμμική χωρητικότητα C δημιουργείται από το μη γραμμικό διηλεκτρικό, του οποίου η ηλεκτρική επιτρεπτότητα ελέγχεται με την κατάλληλη τάση πόλωσης V_B [120–122]. Από την άλλη πλευρά, η μη γραμμικότητα της C_s οφείλεται στην παρουσία μιας διόδου πολωμένης σε σταθερή τάση U_B . Για να απλοποιήσουμε περαιτέρω το σύστημα των Εξ. (4.3)-(4.4) υποθέτουμε ότι για επαρκώς μικρές τιμές, της τάξης των mV, των τάσεων V_n και U_n , οι μη γραμμικές χωρητικότητες $C(V_n)$ και $C_s(U_n)$ μπορούν να

προσεγγιστούν από το ανάπτυγμα Taylor, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους όρους χαμηλότερης τάξης, ως:

$$C(V_B + V_n) \approx C_0 + C'_0 V_n, \quad (4.5)$$

$$C_s(U_B + U_n) \approx C_{s0} + C'_{s0} U_n, \quad (4.6)$$

όπου οι παράμετροι $C_0 \equiv C(V_B)$ και $C_{s0} \equiv C_s(U_B)$ είναι οι σταθερές χωρητικότητες των τάσεων πόλωσης V_B και U_B αντίστοιχα, ενώ οι παράμετροι $C'_0 \equiv (dC/dV)|_{V_B}$, και $C'_{s0} \equiv (dC_s/dU)|_{U_B}$, έχουν σταθερές τιμές που εξαρτώνται από τη χαρακτηριστική μορφή των $C(V)$ και $C_s(U)$ αντίστοιχα (βλ. παρακάτω). Αντικαθιστώντας τώρα τις Εξ. (4.5)-(4.6) στις Εξ. (4.3)-(4.4), και χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιήσεις $t \rightarrow \omega_{sh} t$ [όπου $\omega_{sh}^2 = (LC_0)^{-1}$] και $\{V_n, U_n\} \rightarrow [C'_0(2C_0)^{-1}]\{V_n, U_n\}$, το σύστημα των Εξ. (4.3)-(4.4) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} - \beta^2(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) + V_n + \frac{d^2 V_n^2}{dt^2} = \beta^2(U_n - U_{n+1}), \quad (4.7)$$

και

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}(U_n - U_{n+1}) + \gamma^2(U_n - U_{n+1}) + \sigma \frac{d^2}{dt^2}(U_n^2 - U_{n+1}^2) \\ & + (\gamma^2 - \mu^2)(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

όπου οι αδιάστατες παράμετροι ορίζονται ως:

$$\sigma = \frac{C_0 C'_{s0}}{C'_0 C_{s0}}, \quad \gamma = \frac{f_{se}}{f_{sh}}, \quad \beta = \frac{f_{RH}}{f_{sh}}, \quad \mu = \frac{f_s}{f_{sh}}. \quad (4.9)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, οι f_{se} και f_{sh} δηλώνουν τις συχνότητες του σειριακού και παράλληλου κλάδου, ενώ οι f_s και f_{RH} σχετίζονται με τα SRR και το δεξιόστροφο τμήμα του κυκλώματος της μοναδιαίας κυψελίδας, αντίστοιχα. Οι συχνότητες αυτές ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} f_{se} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L_s C_s} + \frac{1}{L_R C_s}}, & f_{sh} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{L C_0}}, \\ f_s &= \frac{1}{2\pi \sqrt{L_s C_s}}, & f_{RH} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{L_R C_0}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Το σύστημα των Εξ. (4.7)-(4.8) είναι ένα μοντέλο δύο συζευγμένων μη γραμμικών εξισώσεων για τις τάσεις V_n και U_n , το οποίο περιγράφει τη δυναμική του συστήματος. Στη συνέχεια,

θα εστιάσουμε στην περίπτωση όπου η χωρητικότητα C είναι μη γραμμική, ενώ η χωρητικότητα C_s είναι γραμμική, δηλαδή η μη γραμμικότητα οφείλεται μόνο στην εισαγωγή του μη γραμμικού διηλεκτρικού και όχι στην εισαγωγή διόδων. Σε αυτή την περίπτωση, η παράμετρος σ (που χαρακτηρίζει τη μη γραμμικότητα των SRR) είναι μηδενική ($\sigma = 0$) και το σύστημα των Εξ. (4.7)-(4.8) αποσυνδέονται, οδηγώντας στην ακόλουθη εξίσωση για τη συνάρτηση V_n :

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 V_n}{dt^4} + (1 + \gamma^2) \frac{d^2 V_n}{dt^2} - \beta^2 \frac{d^2}{dt^2} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \\ & - \mu^2 \beta^2 (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) + \gamma^2 V_n + \gamma^2 \frac{d^2 V_n^2}{dt^2} + \frac{d^4 V_n^2}{dt^4} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Οι τιμές των παραμέτρων, που σχετίζονται με τον ομοεπίπεδο κυματοδηγό και τα SRR, θεωρούνται ίδιες με εκείνες του πειράματος [96]). Συγκεκριμένα, ο κυματοδηγός έχει πλάτος $a = 23.7$ mm, πάχος $h_1 = 1.27$ mm, πλάτος κεντρικής ταινιογραμμής $D = 7$ mm, πλάτος σχισμών $G = 1.35$ mm, ενώ το κύριο (γραμμικό) διηλεκτρικό υπόστρωμα (Rogers RO3010) πλάτους $h_1 - h_2 = 1.268$ mm έχει σχετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\epsilon_{r1} = 10.2$. Όσον αφορά τα SRR, αυτά έχουν εσωτερική ακτίνα $r = 2.4$ mm, απόσταση μεταξύ των δακτυλίων $d = 0.2$ mm, ενώ το πλάτος των δακτυλίων είναι $w = 0.6$ mm. Τέλος, υποθέτουμε ότι το λεπτό υμένιο αποτελείται από το παραηλεκτρικό υλικό SBTO με σχετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\epsilon_{r2} = 300$ [122], έχει δε εύρος $h_2 = 2$ μ m.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τιμές, υπολογίζονται (βλ. Παράρτημα Δ) οι τιμές των χωρητικοτήτων και αυτεπαγωγών στο κύκλωμα της μοναδιαίας κυψελίδας: $L_R = 4.11$ nH, $L = 0.9$ nH, $L_s = 1.33$ nH, $C_s = 4.9$ pF, και $C_0 = 2.44$ pF. Η τιμή της χωρητικότητας C_0 λαμβάνεται επίσης αυτοσυνεπώς από την ακόλουθη ενεργή χωρητικότητα [122]:

$$C(V) = C_0 \left[1 + \frac{1}{(b_0 + b_1 V_B) + b_1 V} \right], \quad (4.12)$$

όπου $C_0 = 1.5$ pF, $b_0 = 0.49$, $b_1 = 0.25$ V⁻¹, ενώ η $V_B = 2.19$ V είναι η σταθερή (DC) τάση πόλωσης. Σύμφωνα με την παραπάνω έκφραση, οι τιμές των σταθερών συντελεστών στην Εξ. (4.5) δίνονται από $C_0 = C_0 [1 + (b_0 + 2b_1 V_B)^{-1}] = 2.44$ pF και $C'_0 = C_0 b_1 (b_0 + 2b_1 V_B)^{-2} = 0.147$ pF/V.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι συχνότητες στην Εξ. (4.10) βρίσκονται στη μικροκυματική περιοχή και λαμβάνουν τις τιμές $f_{se} = 2.272$ GHz, $f_{sh} = 3.395$ GHz, $f_s = 1.975$ GHz, και $f_{RH} = 1.592$ GHz. Ανάλογα, οι τιμές των κανονικοποιημένων παραμέτρων γ , μ και β , που

εμφανίζονται στην Εξ. (4.11), παίρνουν τις τιμές:

$$\gamma = 0.66, \quad \mu = 0.58, \quad \beta = 0.47. \quad (4.13)$$

Στις αριθμητικές προσομοιώσεις, που θα παρουσιαστούν παρακάτω (βλ. Ενότητα 4.2.1), θα χρησιμοποιηθούν αρχικά οι παραπάνω τους τιμές για τη διάδοση μικροκυματικών σολιτονίων σε αυτή τη διάταξη, ενώ στη συνέχεια θα συζητηθούν πιθανές τροποποιήσεις τους. Για την παραπάνω επιλογή των φυσικών παραμέτρων, η μονάδα χρόνου, που συνδέεται με την Εξ. (4.11), είναι $t_0 = (2\pi f_{sh})^{-1} \approx 50$ ps, ενώ η μονάδα τάσης είναι $v_0 = 2C_0/C'_0 \approx 33$ V.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί στο σημείο αυτό το εξής: το αρχικό πλάτος της τάσης του παλμού, που χρησιμοποιείται στις προσομοιώσεις, είναι $V_0 = 0.5$ V. Για αυτή την τιμή (παρόμοιες, και ακόμη μικρότερες, τιμές έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί σε σχετικές πειραματικές εργασίες [87, 95, 102, 103, 126]), διαπιστώνεται ότι η τιμή της χωρητικότητας είναι $C(V_0) = C(V_B) + C'_0 V_0 = (2.44 + 0.0735)$ pF = 2.51 pF, δηλαδή περίπου κατά 3% υψηλότερη από την τιμή $C_0 = 2.44$ pF. Αν είχε ληφθεί υπόψη και ο τετραγωνικός όρος στο ανάπτυγμα Taylor (δηλ., $\frac{1}{2}C''_0 V_n^2$ με τιμή 0, 00575 pF), τότε η τιμή της χωρητικότητας $C(V_0)$ θα ήταν μόνο 0.2% υψηλότερη από την τιμή 2, 51 pF, που αντιστοιχεί στη χαμηλότερη τάξη της προσέγγισης. Με βάση το επιχείρημα αυτό και δεδομένου ότι η αρχική τιμή της τάσης V_0 μπορεί επίσης να ελέγχεται και από άλλες πρόσθετες παραμέτρους [βλ. παρακάτω τις παραμέτρους ϵ και η στην Εξ. (4.23)], στην ανάλυση που ακολουθεί θα ληφθεί υπόψη μόνο η προσέγγιση πρώτης τάξης [σύμφωνα με την Εξ.(4.5)].

4.1.2 Η ημιδιακριτή προσέγγιση και η εξίσωση NLS

Όπως στα προηγούμενα κεφάλαια, χρησιμοποιείται η ημιδιακριτή προσέγγιση (βλ. [75, 100] και Παράρτημα Β) για να περιγράψει τα (οιονεί) διακριτά σολιτόνια. Αξίζει να επαναλάβουμε ότι η ημιδιακριτή προσέγγιση λαμβάνει υπόψη τη διακριτή φύση της διάταξης και προβλέπει με μεγαλύτερη ακρίβεια, από ότι η συνεχής προσέγγιση, τις περιοχές ύπαρξης των σολιτονίων (βλ. Κεφ. 2). Επιπλέον, οι αναλυτικές προβλέψεις για τη χωρική κατανομή της τάσης και τα χαρακτηριστικά των σολιτονίων (όπως το κέντρο μάζας και το εύρος), βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τις αριθμητικές προσομοιώσεις που λαμβάνονται στο πλαίσιο της Εξ. (4.11) (βλ. Ενότητα 4.2.1 παρακάτω).

Αναζητούμε λύσεις της Εξ. (4.11) της μορφής:

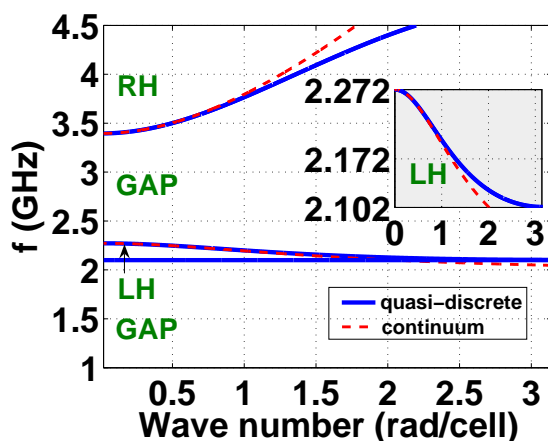
$$V_n = \sum_{\ell=1}^{\infty} \epsilon^{\ell} V_{\ell}(X, T) e^{i\ell\theta_n} + \text{c.c.}, \quad (4.14)$$

όπου V_{ℓ} ($\ell = 1, 2, \dots$) είναι οι άγνωστες (συνεχείς) συναρτήσεις περιβάλλουσας που εξαρτώνται από τις αργές κλίμακες $X = \epsilon(n - v_g t)$ (όπου v_g είναι η ταχύτητα ομάδας) και $T = \epsilon^2 t$, ενώ ο όρος $\exp(i\theta_n)$, με $\theta_n = \omega t - kn$, περιγράφει το φέρον (διακριτό) σήμα με κυκλική συχνότητα ω και κυματαριθμό k . Τέλος, $0 < \epsilon \ll 1$ είναι μια τυπική μικρή παράμετρος, η οποία καθορίζει το πλάτος του σολιτονίου και τις αργές κλίμακες της περιβάλλουσας. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα, που λαμβάνονται στο πλαίσιο της ημιδιακριτής προσέγγισης (βλ. Παράρτημα Β), ανάγονται στο συνεχές όριο για $k \rightarrow 0$.

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.14) στην Εξ. (4.11), στην τάξη $O(\epsilon)$ (γραμμικό όριο), λαμβάνεται η σχέση διασποράς:

$$\omega^4 - (1 + \gamma^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k}{2})\omega^2 + 4\beta^2 \mu^2 \sin^2 \frac{k}{2} + \gamma^2 = 0. \quad (4.15)$$

Στο Σχ. 4.3 απεικονίζεται η σχέση διασποράς, δηλ. η συχνότητα $f \equiv \omega/2\pi f_{sh}$ (σε GHz) ως συνάρτηση του κυματαριθμού k (σε rad/cell). Υπάρχουν δύο διαφορετικές ζώνες συχνοτήτων,



Σχ. 4.3: Σχέση διασποράς: η συχνότητα f (σε GHz) ως συνάρτηση του κυματαριθμού k (σε rad/cell). Οι συνεχείς (μπλε) γραμμές και οι εστιγμένες (κόκκινες) γραμμές αντιστοιχούν στην ημιδιακριτή και τη συνεχή προσέγγιση. Όπως φαίνεται στο σχήμα, υπάρχει μια ζώνη RH στις υψηλές συχνότητες, $3.395 \text{ GHz} < f < 4.734 \text{ GHz}$, και μια ζώνη LH στις χαμηλές συχνότητες, $2.102 \text{ GHz} < f < 2.272 \text{ GHz}$. Η ένθετη εικόνα δείχνει μια μεγέθυνση της σχέσης διασποράς στην LH περιοχή συχνοτήτων.

όπου η διάδοση HM κυμάτων είναι δυνατή:

- μια ζώνη υψηλών συχνοτήτων [high frequency (HF)] με $3.395 \text{ GHz} < f < 4.734 \text{ GHz}$,

- μια ζώνη χαμηλών συχνοτήτων [low frequency (LF)] με $2.102 \text{ GHz} < f < 2.272 \text{ GHz}$.

Σημειώνεται ότι η χαμηλότερη (υψηλότερη) συχνότητα αποκοπής της HF (LF) περιοχής συχνοτήτων είναι ίση με f_{sh} (f_{se}) [βλ. Εξ. (4.10)].

Στην HF (LF) περιοχή συχνοτήτων το γινόμενο του κυματαριθμού k και της ταχύτητας ομάδας $v_g \equiv \partial\omega/\partial k$ είναι θετικό (αρνητικό) και συνεπώς η ενέργεια και τα μέτωπα του κύματος οδεύουν στις ίδιες (αντίθετες) κατευθύνσεις. Έτσι, στην LF περιοχή συχνοτήτων – η οποία είναι μια αριστερόστροφη (LH) περιοχή – η διάταξη SRR-CPW συμπεριφέρεται ως μια LH γραμμή μεταφοράς. Στην ένθετη εικόνα του Σχ. 4.3 φαίνεται η σχέση διασποράς για αυτή τη LH περιοχή συχνοτήτων. Στο συνεχές όριο η LH περιοχή συχνοτήτων διευρύνεται και εκτείνεται στο διάστημα $1.976 \text{ GHz} < f < 2.272 \text{ GHz}$. Αντίστοιχα συμπεράσματα εξάγονται και για τη RH περιοχή συχνοτήτων ($f > 3.395 \text{ GHz}$).

Στην επόμενη τάξη [$O(\epsilon^2)$], λαμβάνουμε την ταχύτητα ομάδας:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\beta^2 \sin k(\omega^2 - \mu^2)}{2\omega^3 - (1 + \gamma^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k}{2})\omega}. \quad (4.16)$$

Τέλος, στην τάξη $O(\epsilon^3)$, λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση NLS:

$$i\partial_T V_1 + P\partial_X^2 V_1 + Q|V_1|^2 V_1 = 0, \quad (4.17)$$

όπου οι συντελεστές διασποράς (P) και μη γραμμικότητας (Q) δίνονται, αντίστοιχα, ως:

$$P = \frac{(1 + \gamma^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k}{2} - 6\omega^2)v_g^2}{-4\omega^3 + 2(1 + \gamma^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k}{2})\omega} + \frac{4\beta^2 v_g \omega \sin k + \beta^2(\omega^2 - \mu^2) \cos k}{-4\omega^3 + 2(1 + \gamma^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k}{2})\omega}, \quad (4.18)$$

και

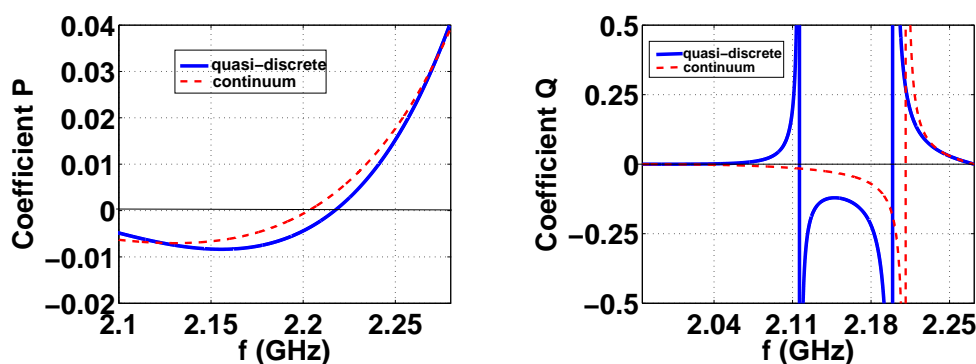
$$Q = \frac{4\omega^4(\gamma^2 - \omega^2)(4\omega^2 - \gamma^2)}{[-2\omega^3 + (1 + \gamma^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k}{2})\omega]\mathcal{G}}, \quad (4.19)$$

ενώ η συνάρτηση $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\omega, k)$ ορίζεται ως:

$$\mathcal{G} = 16\omega^4 - 4(1 + \gamma^2)\omega^2 + \gamma^2 - 4\beta^2(4\omega^2 - \mu^2) \sin^2 k. \quad (4.20)$$

4.1.3 Το διακριτό σολιτόνιο

Η εξίσωση NLS δέχεται λύσεις σολιτονίου, ο τύπος του οποίου καθορίζεται από τα πρόσημα των συντελεστών διασποράς και μη γραμμικότητας (βλ. Εισαγωγή). Στο Σχ. 4.4 απεικονίζονται οι συντελεστές P και Q ως συνάρτηση της συχνότητας, στη LH περιοχή συχνοτήτων. Το Σχ. 4.4 δείχνει τους συντελεστές P και Q στην ημιδιακριτή και στη συνεχή προσέγγιση, με τις συνεχείς (μπλε) και τις εστιγμένες (κόκκινες) γραμμές, αντίστοιχα.



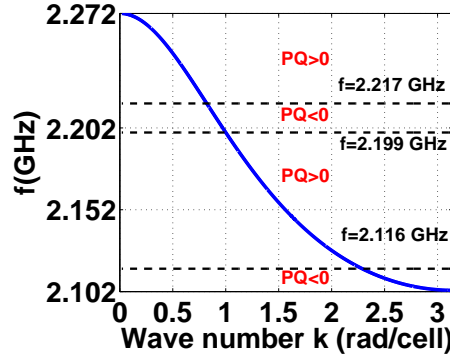
Σχήμα 4.4: Ο συντελεστής της διασποράς P (αριστερή εικόνα) και της μη γραμμικότητας Q (δεξιά εικόνα) σε συνάρτηση με τη συχνότητα f (σε GHz) στην LH περιοχή συχνοτήτων. Οι συνεχείς (μπλε) και οι εστιγμένες (κόκκινες) γραμμές αντιστοιχούν στην ημιδιακριτή και τη συνεχή προσέγγιση, αντίστοιχα. Στην ημιδιακριτή προσέγγιση υπάρχουν τρεις χαρακτηριστικές συχνότητες: μια συχνότητα όπου ο συντελεστής διασποράς P μηδενίζεται και δύο συχνότητες που αντιστοιχούν στους πόλους του συντελεστή μη γραμμικότητας Q . Αντίθετα, στη συνεχή προσέγγιση ο συντελεστής Q έχει έναν μοναδικό πόλο.

Στην ημιδιακριτή προσέγγιση, παρατηρείται ότι ο συντελεστής διασποράς (βλ. αριστερή εικόνα του Σχ. 4.4) είναι $P < 0$ ($P > 0$) για $f < 2.217$ GHz ($f > 2.217$ GHz) στη LH περιοχή συχνοτήτων. Από την άλλη πλευρά, ο μη γραμμικός συντελεστής Q (βλ. δεξιά εικόνα του Σχ. 4.4), ο οποίος έχει δύο πόλους (για $f = 2.116$ GHz και $f = 2.199$ GHz) στη LH περιοχή συχνοτήτων, είναι $Q > 0$ για $f \in [2.102, 2.116) \cup (2.217, 2.272]$ και $Q < 0$ για $f \in (2.116, 2.199)$ (σε GHz). Έτσι, το γινόμενο PQ παίρνει τα ακόλουθα πρόσημα:

- $PQ > 0$ για $f \in (2.116, 2.199) \cup (2.217, 2.272]$, (σε GHz),
- $PQ < 0$ για $f \in [2.102, 2.116) \cup (2.199, 2.217)$, (σε GHz).

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται και απεικονίζονται στο Σχ. 4.5.

Όσον αφορά τη συνεχή προσέγγιση σημειώνεται ότι ο μη γραμμικός συντελεστής Q έχει μόνο έναν πόλο (για $f = 2.21$ GHz). Ως εκ τούτου, η συνεχής προσέγγιση υπολογίζει μια ευρύτερη περιοχή συχνοτήτων, όπου μπορούν να σχηματιστούν φωτεινά σολιτόνια. Όπως φαίνεται στο Σχ. 4.4 (βλ. επίσης Παράρτημα Β), τα φωτεινά σολιτόνια σχηματίζονται στις περιοχές συχνοτήτων $f \in [1.976, 2.203) \cup (2.21, 2.272]$ (σε GHz).



Σχήμα 4.5: Τα πρόσημα του γινομένου των συντελεστών διασποράς P και μη γραμμικότητας Q για τις διάφορες υποπεριοχές της LH περιοχής συχνοτήτων. Η συνεχής (μπλε) καμπύλη αντιστοιχεί στην σχέση διασποράς (βλ. ένθετη εικόνα στο Σχ. 4.3), οι εστιγμένες (μαύρες) γραμμές σε $f = 2.116$ GHz και $f = 2.199$ GHz δείχνουν τη θέση των πόλων του συντελεστή Q (βλ. κάτω εικόνα του Σχ. 4.4), ενώ αυτή σε $f = 2.217$ GHz δείχνει το σημείο μηδενισμού του συντελεστή P (βλ. πάνω εικόνα του Σχ. 4.4). Σημειώνεται ότι για $PQ > 0$ ($PQ < 0$) σχηματίζονται φωτεινά (σκοτεινά) σολιτόνια.

Σε κάθε περίπτωση, η παραπάνω διερεύνηση προβλέπει ότι στη διάταξη SRR-CPW είναι ευκολότερο να παρατηρηθούν τα φωτεινά σολιτόνια. Αυτό συμβαίνει γιατί, σε αντίθεση με τα σκοτεινά σολιτόνια, τα φωτεινά σολιτόνια σχηματίζονται σε μια ευρεία υποπεριοχή συχνοτήτων στο εσωτερικό της LH ζώνης συχνοτήτων. Επίσης, τα φωτεινά σολιτόνια σχηματίζονται για φέρουσες συχνότητες αρκετά μακριά από τις συχνότητες στις οποίες είτε ο συντελεστής διασποράς P μηδενίζεται ή ο συντελεστής γραμμικότητας Q εμφανίζει συντονισμούς (βλέπε Σχ. 4.4).

Έτσι, παρακάτω θα εστιάσουμε στη λύση φωτεινού σολιτονίου της Εξ. (4.17), που εκφράζεται στην ακόλουθη μορφή [76]:

$$V_1(X, T) = \eta \operatorname{sech}[\eta(X - X_0(t))] \exp[i(KX - \Omega T)], \quad (4.21)$$

όπου η είναι το πλάτος (και αντίστροφο εύρος) του σολιτονίου, $X_0(t) \equiv X_0(0) + VT$ είναι το κέντρο του, $X_0(0)$ είναι η αρχική θέση του, V η ταχύτητα του, ενώ $K = V$ και $\Omega = (1/2)(K^2 - \eta^2)$ αντιστοιχούν στον κυματαριθμό και στη συχνότητα του σολιτονίου, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω λύση, εκφράζουμε την τάση $V_n(t)$ στην Εξ. (4.11) στις αρχικές συντεταγμένες n και t ως εξής:

$$V_n(t) \approx V_0 \operatorname{sech}[\epsilon \eta(n - c_0 t - n_0)] \cos(K_0 n - \Omega_0 t), \quad (4.22)$$

όπου n_0 είναι η αρχική θέση του σολιτονίου, ενώ το πλάτος V_0 , η ταχύτητα c_0 , ο κυματαριθμός K_0 και η συχνότητα Ω_0 του σολιτονίου, αντίστοιχα, είναι:

$$V_0 = 2\epsilon\eta\sqrt{2|PQ^{-1}|}, \quad (4.23)$$

$$c_0 = v_g + 2\epsilon KP, \quad (4.24)$$

$$K_0 = k + \epsilon K, \quad (4.25)$$

$$\Omega_0 = \omega + \epsilon(Kv_g + 2\epsilon\Omega P). \quad (4.26)$$

4.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

4.2.1 Φωτεινά σολιτόνια στη διάταξη SRR-CPW

Στην ενότητα αυτή μελετάται αριθμητικά η εξέλιξη των οιονεί διακριτών φωτεινών σολιτονίων, που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, στο πλαίσιο του διακριτού μοντέλου της Εξ. (4.11).

Αρχικά, για τη μελέτη της Εξ. (4.11), λαμβάνονται οι τιμές των παραμέτρων σύμφωνα με την Εξ. (4.13) και στη συνέχεια διερευνάται πως οι σχετικές αλλαγές των φυσικών παραμέτρων της διάταξης SRR-CPW επηρεάζουν τις περιοχές ύπαρξης των σολιτονίων. Για τις παραμέτρους του σολιτονίου θα θεωρηθούν οι τιμές $\eta = 1$ και $\varepsilon = 0.02$, που αντιστοιχούν σε αρχική τιμή της τάσης ίση με $V_0 = 0.5$ V. Επιπλέον, η αρχική θέση του σολιτονίου τίθεται $X_0(0) = 1/2$, η συχνότητα f μεταβάλλεται στο διάστημα $f \in [2.11, 2.18] \cup [2.21, 2.25]$ (σε GHz), ενώ ο κυματαριθμός του σολιτονίου K στο διάστημα $K \in [0, \pi]$ (υπενθυμίζεται ότι ο κυματαριθμός θέτει την αρχική ορμή του σολιτονίου). Οι παραπάνω (φέρουσες) συχνότητες f βρίσκονται στην LH περιοχή, όπου $P < 0$ και $Q < 0$. Τέλος, για τις αριθμητικές προσομοιώσεις χρησιμοποιούνται ένας δακτύλιος με $N = 1001$ κυψελίδες και περιοδικές συνοριακές συνθήκες.

Προκειμένου να συγκριθούν οι αναλυτικές προσεγγίσεις με τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων, γίνεται χρήση δύο διαγνωστικών εργαλείων, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το πρώτο είναι η εξέλιξη του κέντρου μάζας, που ορίζεται ως:

$$X(t) = \frac{\sum_n n V_n^2}{\sum_n V_n^2}, \quad (4.27)$$

και το δεύτερο είναι το εύρος, που ορίζεται ως:

$$W(t) = \sqrt{\frac{\sum_n n^2 V_n^2}{\sum_n V_n^2} - X^2(t)}. \quad (4.28)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.22) στις Εξ. (4.27) και (4.28) λαμβάνουμε (για επαρκώς μικρό ϵ) τις ακόλουθες εκφράσεις για τα $X(t)$ και $W(t)$:

$$X(t) = X_0(0) + c_0 t = \frac{1}{2} + c_0 t, \quad (4.29)$$

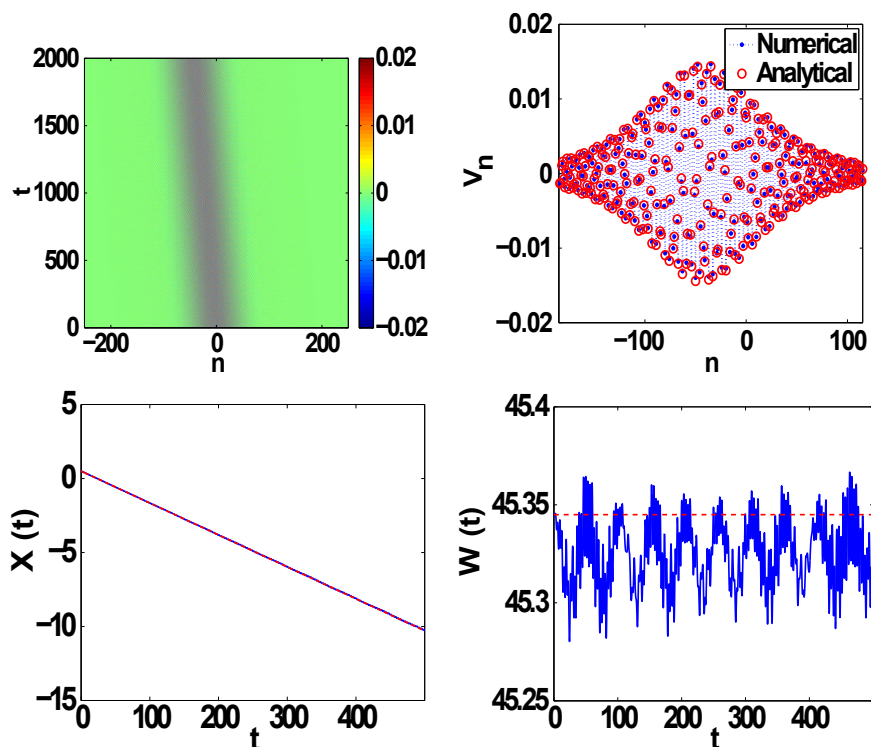
$$W(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{3\epsilon\eta}}. \quad (4.30)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αριθμητικών προσομοιώσεων (βλ. Σχ. 4.6-4.9), που δείχνουν τη χωροχρονική εξέλιξη της τάσης V_n , τη χωρική κατανομή των τάσεων V_n την χρονική στιγμή $t = 2000$, καθώς και την χρονική εξέλιξη του κέντρου μάζας $X(t)$ και του εύρους $W(t)$.

Σε γενικές γραμμές, όπως θα δείξουμε παρακάτω με περισσότερες λεπτομέρειες, η αριθμητική ολοκλήρωση της Εξ. (4.11), με χρήση αρχικών συνθηκών από την αναλυτική έκφραση της Εξ. (4.22) (για $t = 0$), δείχνει την ύπαρξη των φωτεινών σολιτονίων στις προβλεπόμενες περιοχές συχνοτήτων της LH ζώνης συχνοτήτων. Επιπλέον, η μορφή των σολιτονίων, καθώς και η χρονική εξέλιξη του κέντρου και του εύρους τους προσεγγίζονται καλά από τις παραπάνω αναλυτικές εκφράσεις, ειδικά σε περιπτώσεις όπου η φέρουσα συχνότητα επιλέγεται αρκετά διαφορετική από εκείνες τις συχνότητες, για τις οποίες ο συντελεστής διασποράς P μηδενίζεται ή ο συντελεστής μη γραμμικότητας Q εμφανίζει συντονισμό.

Όσον αφορά τον χρόνο εξέλιξης των προσομοιώσεων, σημειώνονται τα ακόλουθα: οι περισσότερες προσομοιώσεις εκτελούνται για σχετικά μεγάλους κανονικοποιημένους χρόνους, μέχρι $t \sim 10^3$ (σε ορισμένες περιπτώσεις). Ωστόσο, ο φυσικός χρόνος (που καθορίζεται από τη συχνότητα $f_{sh} = 3.39$ GHz) είναι πολύ μικρός, δηλαδή η μονάδα χρόνου είναι $t_0 = (2\pi f_{sh})^{-1} \approx 50$ ps (βλ. ενότητα 4.1.1). Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι όλες οι συχνότητες του συστήματος βρίσκονται στη μικροκυματική περιοχή [βλέπε Εξ. (4.10)], όλοι οι χρόνοι είναι μικρότεροι από 1 ns, με αποτέλεσμα οι προσομοιώσεις να είναι εξαιρετικά χρονοβόρες. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα για κανονικοποιημένους χρόνους μέχρι $t = 10^7$ (που αντιστοιχούν σε φυσικό χρόνο της τάξης του 1 ms), δείχνουν καλή συμφωνία με τις αναλυτικές προβλέψεις (βλ. παρακάτω). Επιπλέον, τα αποτελέσματα αυτών των προσομοιώσεων μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως ένδειξη της ευρωστίας των σολιτονίων και της δυνατότητας παρατήρησής τους σε πειράματα.

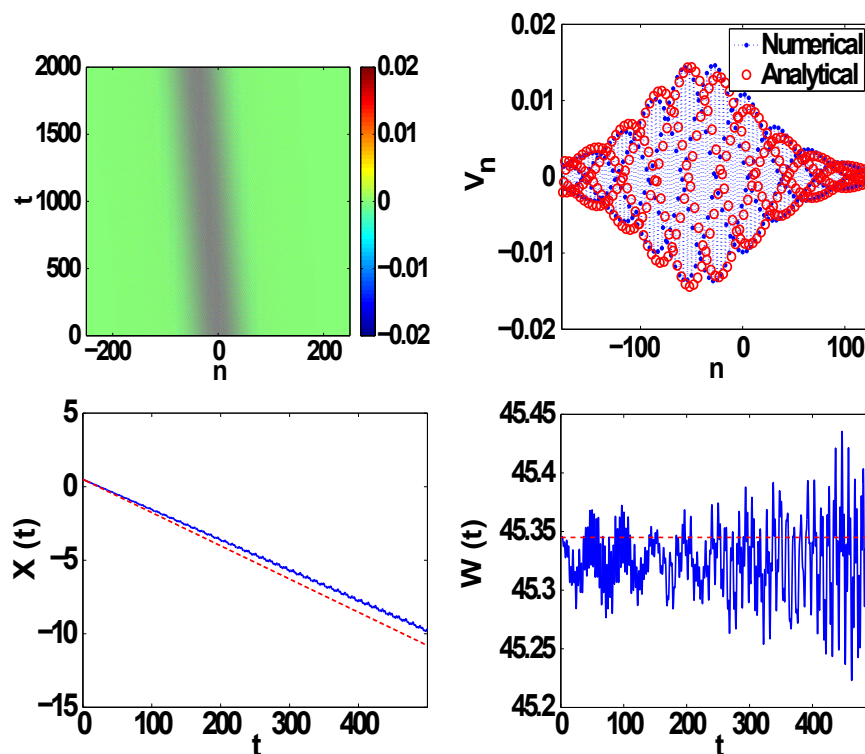
Στο Σχ. 4.6, απεικονίζεται ένα φωτεινό σολιτόνιο με φέρουσα συχνότητα $f = 2.15$ GHz και μηδενική αρχική ορμή, $K = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι προφανές ότι η συμφωνία μεταξύ των αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων για την V_n , την εξέλιξη του κέντρου μάζας και του εύρους, είναι πολύ καλή. Σε παρόμοια συμπεράσματα οδηγούμαστε παρατηρώντας



Σχήμα 4.6: Πάνω αριστερά εικόνα: χωροχρονική εξέλιξη της τάσης V_n που λαμβάνεται αριθμητικά. Πάνω δεξιά εικόνα: σύγκριση των αναλυτικών και αριθμητικών κατανομών της τάσης V_n την χρονική στιγμή $t = 2000$. Οι κάτω εικόνες δείχνουν την χρονική εξέλιξη του κέντρου μάζας (αριστερά) και του εύρους (δεξιά). Και στις δύο περιπτώσεις, η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στις αριθμητικές προσομοιώσεις και η εστιγμένη καμπύλη αντιστοιχεί στην αναλυτική πρόβλεψη. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι $f = 2.15$ GHz και $K = 0$.

το Σχ. 4.7, το οποίο απεικονίζει ένα φωτεινό σολιτόνιο με την ίδια συχνότητα ($f = 2.15$ GHz), αλλά με μη μηδενική ορμή σολιτονίου, $K = \pi$. Από την άλλη πλευρά, το σολιτόνιο του Σχ. 4.8 αντιστοιχεί σε $f = 2.11$ GHz (για $K = 0$), η οποία είναι κοντά στη συχνότητα συντονισμού του συντελεστή μη γραμμικότητας Q . Στην τελευταία περίπτωση, είναι σαφές ότι αν και υπάρχουν διακριτά φωτεινά σολιτόνια, δεν υπάρχει συμφωνία μεταξύ των αναλυτικών και των αριθμητικών αποτελεσμάτων (ιδίως όσον αφορά την εκτίμηση της παραμέτρου του εύρους του σολιτονίου, όπως εμφανίζεται στην κάτω δεξιά εικόνα του Σχ. 4.8). Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι η φέρουσα συχνότητα είναι κοντά στη συχνότητα συντονισμού του συντελεστή Q . Παρόμοια αποτελέσματα έχουν ληφθεί για την πάνω (δεύτερη) επιτρεπόμενη περιοχή της LH ζώνης συχνοτήτων [$f \in (2.217, 2.272]$ (σε GHz)].

Τέλος, χρησιμοποιώντας τιμές για τις παραμέτρους που αντιστοιχούν στην περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχ. 4.6 (δηλαδή για $f = 2.15$ GHz και $K = 0$), πραγματοποιήθηκε μια πολύ μεγάλη προσομοίωση, μέχρι $t = 10^7$ (κανονικοποιημένος χρόνος). Όσον αφορά το εύρος W (κάτω δεξιά εικόνα του σχήματος) είναι σαφές ότι - παρά τις διακυμάνσεις του - ο αρχικός παλμός δεν έχει υποστεί διασπορά, το οποίο δείχνει την ευρωστία του σολιτονίου. Επιπλέον,



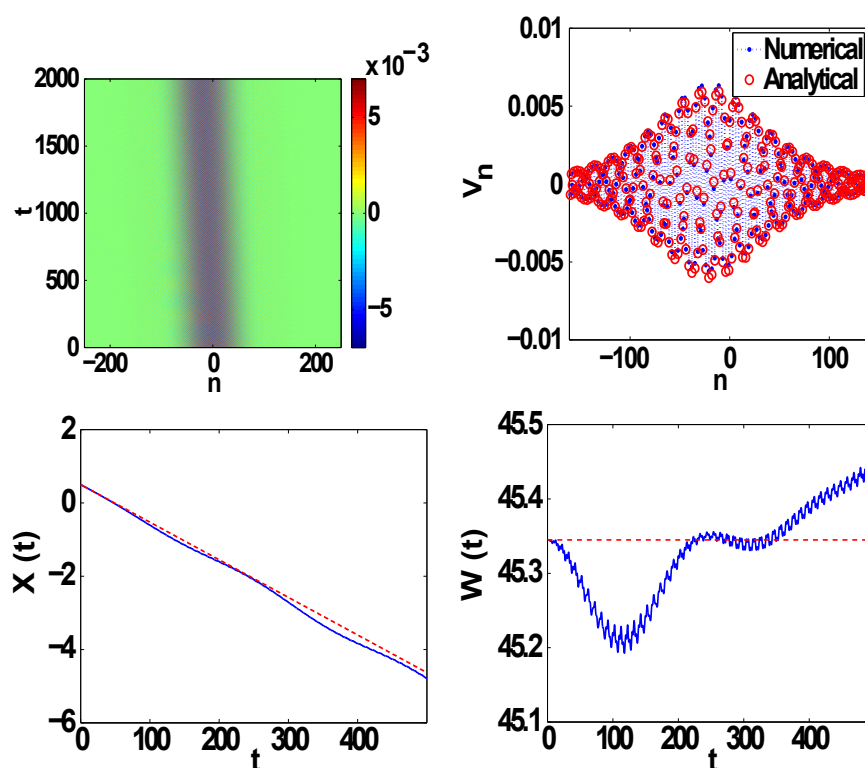
Σχήμα 4.7: Παρόμοιο με το Σχ. 4.6, αλλά για $f = 2.15$ GHz και $K = \pi$.

οι πάνω εικόνες του Σχ. 4.9, και ιδιαίτερα τα στιγμιότυπα του παλμού για $t = 10^7$, δείχνουν σαφώς ότι το σολιτόνιο παραμένει ευσταθές ως το τέλος αυτής της μεγάλης προσομοίωσης.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα φωτεινά σολιτόνια μπορούν να σχηματιστούν σε μη γραμμικές διατάξεις SRR-CPW και μπορούν να διαδοθούν για αρκετά μεγάλους χρόνους ώστε να παρατηρηθούν πειραματικά.

4.2.2 Τροποποιήσεις της διάταξης SRR-CPW

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήθηκαν τα φωτεινά σολιτόνια της Εξ. (4.11), που σχηματίζονται σε μια διάταξη SRR-CPW για τιμές των παραμέτρων γ , μ και β , όπως αυτές ορίζονται στην Εξ. (4.13). Στην ενότητα αυτή εξετάζονται διάφορες περιπτώσεις, που προκύπτουν αν τροποποιηθεί είτε η δομή του CPW ή η γεωμετρία των SRR. Όπως είναι σαφές από το Σχ. 4.1 (βλ. επίσης την Ενότητα 4.1.1 και το Παράρτημα Δ), υπάρχει ένας σημαντικός βαθμός ευελιξίας όσον αφορά την επιλογή των τιμών των φυσικών παραμέτρων, που εμπλέκονται στον προσδιορισμό των παραμέτρων γ , μ και β . Πράγματι, μπορούν να τροποποιηθούν τα εύρη h_1 , h_2 των διηλεκτρικών, οι τιμές των σχετικών διηλεκτρικών σταθερών ϵ_{r1} , ϵ_{r2} αυτών, ή τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δομής του CPW ή των SRR.

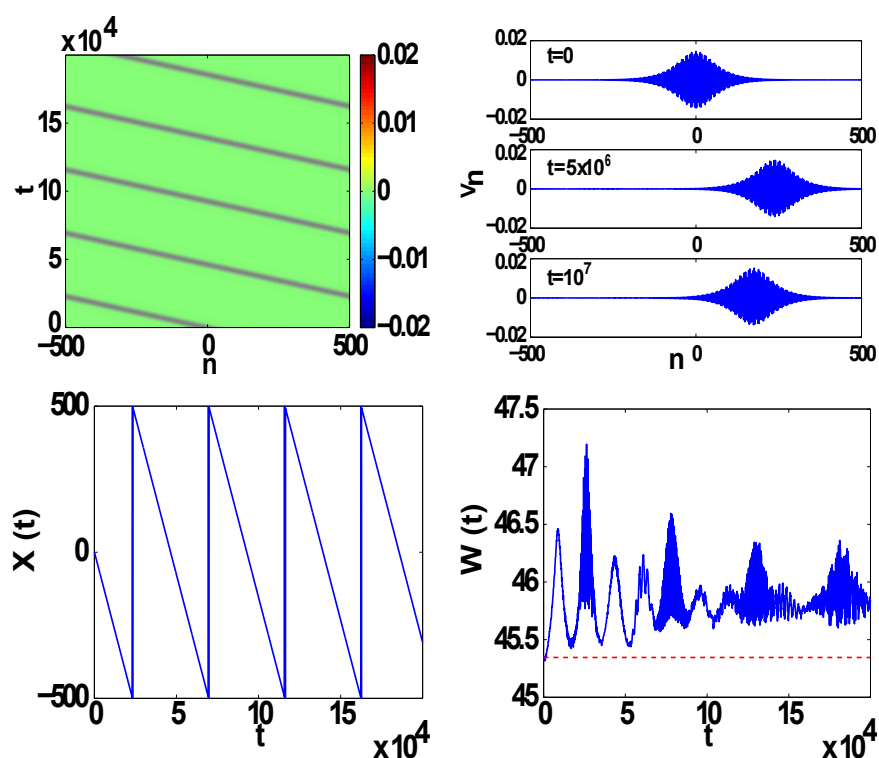


Σχήμα 4.8: Παρόμοιο με το Σχ. 4.6, αλλά για $f = 2.11$ GHz και $K = 0$.

Παρ' όλα αυτά, επειδή η διάταξη SRR-CPW που μελετάται έχει ήδη υλοποιηθεί και βελτιστοποιηθεί στο πείραμα [70, 96], πρέπει κανείς να εξετάσει αλλαγές οι οποίες δεν μεταβάλλουν τα βασικά χαρακτηριστικά της και βρίσκονται όσο το δυνατόν πιο κοντά στην πειραματική υλοποίηση. Έτσι, επιλέγεται η διατήρηση των χαρακτηριστικών του κύριου “διηλεκτρικού υποστρώματος” (που χαρακτηρίζεται από τις παραμέτρους h_1 και ϵ_{r1}), καθώς και το εγκάρσιο εύρος a της δομής CPW. Επιπλέον, διατηρούνται τα χαρακτηριστικά του μη γραμμικού διηλεκτρικού (με παραμέτρους h_2 και ϵ_{r2}), δεδομένου ότι δεν επηρεάζουν σημαντικά τη γραμμική απόκριση του συστήματος.

Από την άλλη πλευρά, μελετώνται αλλαγές στο εύρος G των σχισμών για τη δομή CPW και αλλαγές των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των SRR, δηλαδή της ακτίνα τους r (για σταθερό εύρος w και απόσταση d). Όπως θα δειχθεί παρακάτω, αυτές οι αλλαγές μπορούν να βελτιώσουν τη μη γραμμική διάταξη SRR-CPW, υπό την έννοια ότι οδηγούν σε αύξηση του εύρους της LH ζώνης συχνοτήτων και της ζώνης συχνοτήτων όπου σχηματίζονται τα φωτεινά σολιτόνια (δηλ. στη ζώνη όπου το γινόμενο των συντελεστών της διασποράς και της μη γραμμικότητας στην εξίσωση NLS είναι $PQ > 0$).

Μια ανάλυση με βάση την παραπάνω συζήτηση οδήγησε στα ακόλουθα αποτελέσματα. Αρχικά, για μια σταθερή τιμή της απόστασης μεταξύ των σχισμών, $D = 7$ mm, μεταβάλλουμε την τιμή του πλάτους της σχισμής G στο διάστημα 0.7 mm-1.5mm (αρχική τιμή $G = 1.35$ mm).



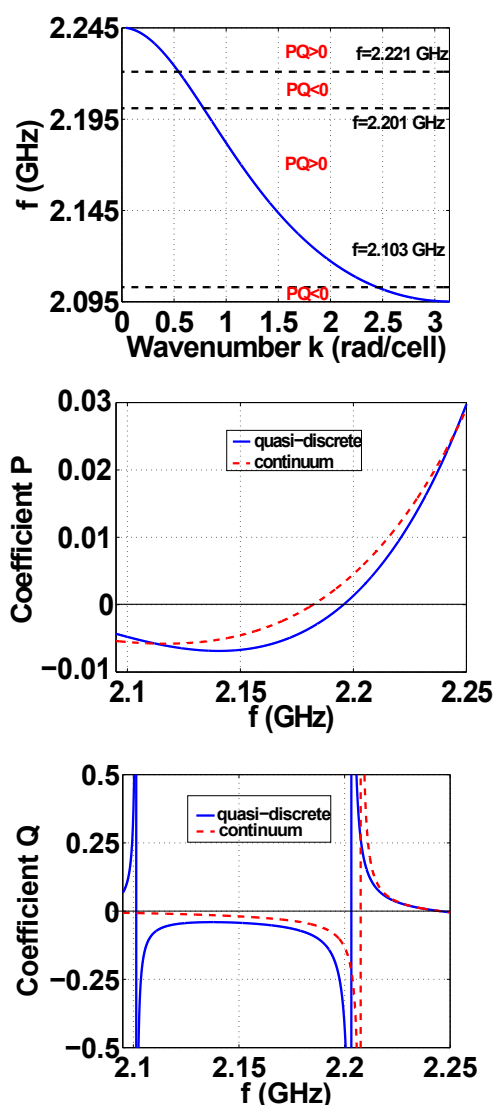
Σχήμα 4.9: Το σολιτόνιο του Σχ. 4.6 έχει εξελιχθεί έως τον χρόνο $t = 2 \times 10^5$. Όλες οι εικόνες είναι όμοιες με αυτές του Σχ.4.6 εκτός από αυτή που βρίσκεται επάνω δεξιά. Σε αυτή την εικόνα, τα στιγμιότυπα του σολιτονίου τις χρονικές στιγμές $t = 5 \times 10^6$ και $t = 10^7$ συγκρίνονται με την αρχική συνθήκη.

Οι αλλαγές αυτές οδηγούν σε διαφορετικές τιμές του κ_j ($j = 0, 1, 2$) στην Εξ. (Δ.4) και ως εκ τούτου σε διαφορετικές τιμές των ενεργών τιμών του κυκλώματος C_R , C_L , L_L , C_s και L_s , οι οποίες με τη σειρά τους παρέχουν διαφορετικές τιμές για τις παραμέτρους γ , μ και β [βλ. Εξ. (4.10)]. Καθώς το G μειώνεται (αυξάνεται) στο προαναφερθέν διάστημα, οι παράμετροι γ και μ επίσης μειώνονται (αυξάνονται), ενώ η παράμετρος β αυξάνεται (μειώνεται). Αυτές οι μεταβολές οδηγούν σε μείωση (αύξηση) του εύρους της LH περιοχής συχνοτήτων, αλλά επίσης οδηγούν σε αύξηση (μείωση) της ζώνης συχνοτήτων όπου μπορούν να σχηματιστούν φωτεινά σολιτόνια.

Ως παράδειγμα, για $G = 1$ mm, στην πάνω εικόνα του Σχ. 4.10 απεικονίζεται η LH ζώνη συχνοτήτων, καθώς και οι περιοχές που υποστηρίζουν σχηματισμό φωτεινών σολιτονίων. Οι χαρακτηριστικές παράμετροι της διάταξης λαμβάνουν τώρα τις τιμές:

$$\gamma = 0.61, \quad \mu = 0.54, \quad \beta = 0.48. \quad (4.31)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, η LH ζώνη συχνοτήτων εκτείνεται από 2.095 GHz έως 2.245 GHz (δηλαδή μειώνεται περίπου κατά 11%), ενώ η περιοχή συχνοτήτων, όπου σχηματίζονται τα φωτεινά σολιτόνια, εκτείνεται από 2.103 GHz έως 2.201 GHz (δηλαδή αυξάνεται περίπου κατά

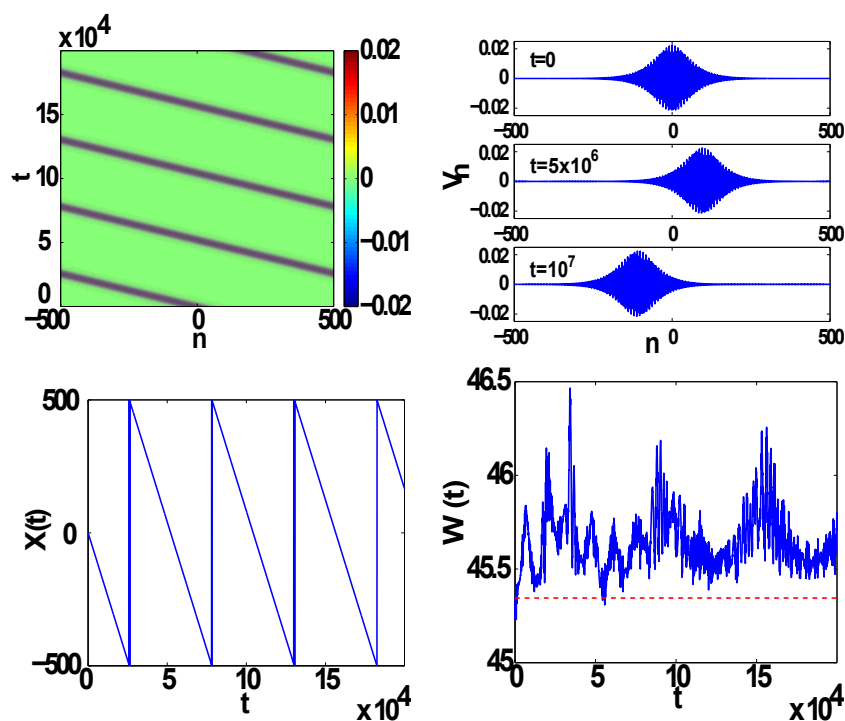


Σχήμα 4.10: Πάνω εικόνα: Όπως το Σχ. 4.5, αλλά για εύρος σχισμής $G = 1$ mm. Μεσαία και κάτω εικόνα: Όπως στο Σχ. 4.4 (για $G = 1$ mm). Σε αυτή την περίπτωση οι τιμές των παραμέτρων γ , μ και β δίνονται από την Εξ. (4.31).

15%). Οι μορφές των συντελεστών P και Q , που εμφανίζονται στη μεσαία και κάτω εικόνα του Σχ. 4.10, είναι παρόμοιες με αυτές του Σχ. 4.4. Εν τούτοις, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η παράμετρος Q είναι περίπου σταθερή στη ζώνη συχνοτήτων με $PQ > 0$.

Οι αριθμητικές προσομοιώσεις που φαίνονται στο Σχ. 4.11, για τη διάδοση του φωτεινού σολιτονίου στη συχνότητα $f = 2.15$ GHz, οδηγούν σε ποιοτικά αποτελέσματα παρόμοια με αυτά που παρουσιάστηκαν προηγουμένως (βλ. Σχ. 4.6 και 4.9). Ειδικότερα, για μια ακόμη φορά, το σολιτόνιο είναι αρκετά εύρωστο για μεγάλους χρόνους (βλ. τα στιγμιότυπα που αντιστοιχούν σε $t = 5 \times 10^6$ και $t = 10^7$ στην πάνω δεξιά εικόνα του Σχ. 4.11), ενώ το εύρος W (κάτω δεξιά εικόνα του Σχ. 4.11) έχει μία σχεδόν σταθερή μέση τιμή (κοντά στην τιμή που αντιστοιχεί στην αναλυτική εκτίμηση) και υποδεικνύει ότι ο αρχικός παλμός δεν θα διευρυνθεί.

Στη συνέχεια, διατηρώντας σταθερές τις τιμές των παραμέτρων της δομής CPW όπως στην



Σχήμα 4.11: Παρόμοιο με το Σχ. 4.9, αλλά για τιμές παραμέτρων που δίνονται από την Εξ. (4.31). Το σολιτόνιο έχει εξελιχθεί μέχρι $t = 2 \times 10^4$ (πάνω αριστερά εικόνα), αλλά διατηρείται για πολύ περισσότερο χρόνο, δηλαδή έως $t = 10^7$ (βλ. στιγμιότυπα στην πάνω δεξιά εικόνα). Το εύρος W (κάτω δεξιά εικόνα) διαθέτει μια σχεδόν σταθερή τιμή, η οποία δείχνει τη σολιτονική φύση του αρχικού παλμού.

Ενότητα 4.1.1, μελετούμε τροποποιήσεις στη γεωμετρία των SRR, δηλαδή μεταβάλλουμε την ακτίνα r για σταθερό εύρος $w = 0.6$ mm και για σταθερή απόσταση $d = 0.2$ mm. Σε αυτή την περίπτωση, η αύξηση (μείωση) της ακτίνας r (στο διάστημα 1.8 mm έως 2.6 mm) οδηγεί σε μια μείωση (αύξηση) των τιμών των παραμέτρων γ και μ , ενώ η παράμετρος β έχει περίπου σταθερή τιμή ίση με 0.48. Κατά συνέπεια, διαπιστώνεται ότι το εύρος της ζώνης συχνοτήτων LH αυξάνεται (μειώνεται), ενώ αυξάνεται (μειώνεται) και η περιοχή σχηματισμού των φωτεινών σολιτονίων. Ως παράδειγμα, για $r = 2.6$ mm, η LH περιοχή συχνοτήτων εκτείνεται από 2.106 GHz μέχρι και 2.343 GHz, δηλαδή, έχει αυξηθεί περίπου κατά 39%. Η περιοχή συχνοτήτων, όπου φωτεινά σολιτόνια μπορούν να σχηματιστούν, αυξάνεται επίσης κατά 29%, ενώ η μεταβολή του συντελεστή Q από τη συχνότητα είναι παρόμοια με εκείνη που φαίνεται στην κάτω εικόνα του Σχ. 4.10. Στην περίπτωση αυτή, οι παράμετροι γ , μ και β παίρνουν τις ακόλουθες τιμές:

$$\gamma = 0.69, \quad \mu = 0.57, \quad \beta = 0.48. \quad (4.32)$$

Οι αριθμητικές προσομοιώσεις για τη διάδοση του φωτεινού σολιτονίου σε αυτή την περιοχή (λ.χ., έχουν πραγματοποιηθεί προσομοιώσεις για μεγάλους χρόνους σε συχνότητα $f = 2.15$ GHz) οδηγούν σε αποτελέσματα ποιοτικά παρόμοια με εκείνα των προηγούμενων περιπτώσεων (βλ.

Σχ. 4.6, 4.9 και 4.11).

Συμπερασματικά, η ανάλυση αυτού του κεφαλαίου προβλέπει ότι η διάταξη SRR-CPW υποστηρίζει φωτεινά σολιτόνια σε ένα σχετικά ευρύ φάσμα συχνοτήτων εντός της LH περιοχής συχνοτήτων, η δε περιοχή συχνοτήτων, όπου τα σολιτόνια μπορούν να σχηματιστούν, μπορεί να ελεγχθεί (αυξηθεί) με κατάλληλο σχεδιασμό της δομής CPW-SRR. Οι αναλυτικές προβλέψεις επιβεβαιώνονται από τις αριθμητικές προσομοιώσεις, οι οποίες καταδεικνύουν (εκτός από τις βασικές ιδιότητες) την ευρωστία των προβλεπόμενων φωτεινών σολιτονίων.

Κεφάλαιο 5

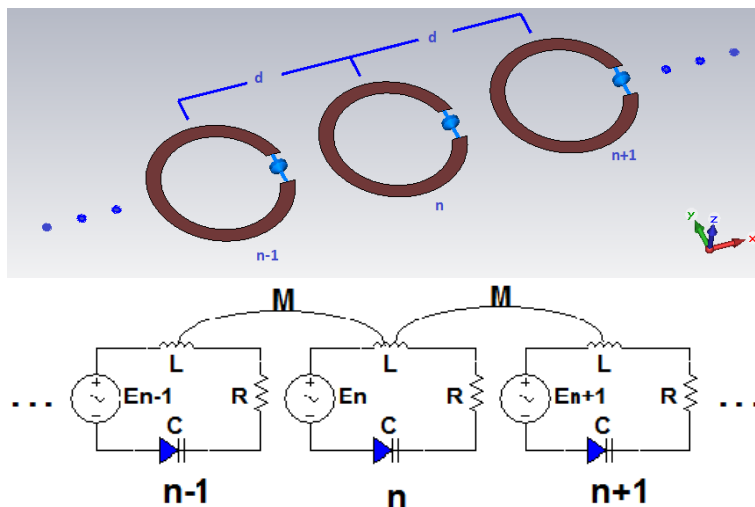
Οδεύοντα κύματα σε μη γραμμικές συστοιχίες SRR

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η διάδοση οδευόντων κυμάτων σε μια μονοδιάστατη συστοιχία συζευγμένων μη γραμμικών SRR, η οποία εμφανίζει απώλειες και διεγείρεται εξωτερικά. Τέτοιες διατάξεις, που αναφέρονται ως “μη γραμμικά μαγνητικά μεταϋλικά”, έχουν υλοποιηθεί στο εργαστήριο [41, 97], εισάγοντας διόδους στην σχισμή των SRR. Σημειώνεται ότι σε μη γραμμικά μαγνητικά μεταϋλικά έχει προβλεφθεί ο σχηματισμός διαφόρων μη γραμμικών κυμάτων, όπως διακριτών πνοών [90], σολιτονίων περιβάλλουσας [88], και σολιτονίων χάσματος (gap solitons) [127].

Η διάταξη που θα μελετηθεί σε αυτό το κεφάλαιο παρέχει τη δυνατότητα να μελετηθεί – για πρώτη φορά – η επίδραση μιας διέγερσης, που η ίδια έχει τη μορφή οδευόντος κύματος (σε προηγούμενες εργασίες θεωρήθηκαν απλούστερες διεγέρσεις, στη μορφή αρμονικών σημάτων). Η ανάλυση που θα παρουσιαστεί βασίζεται στην υπόθεση ότι οι απώλειες και η εξωτερική διέγερση είναι μικρές, οπότε θα θεωρηθούν ως διαταραχές. Το αδιατάραχτο σύστημα, όπως έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια, υποστηρίζει σολιτονικές λύσεις, οπότε το πρόβλημα που τίθεται είναι αν αυτές οι λύσεις είναι “επίμονες” (persistent) παρουσία των διαταραχών. Η ανάλυση που θα παρουσιαστεί βασίζεται σε μια μέθοδο τύπου Melnikov καθώς και σε αριθμητικές προσομοιώσεις, για να ερευνηθεί η ύπαρξη και η ευστάθεια των περιοδικών και εντοπισμένων οδευόντων κυμάτων στη συστοιχία των SRR.

5.1 Ανάλυση της μη γραμμικής συστοιχίας SRR

Θεωρούμε μια μονοδιάστατη συστοιχία συζευγμένων μη γραμμικών SRR, που είναι τοποθετημένα στο ίδιο επίπεδο, όπως απεικονίζεται στην πάνω εικόνα του Σχ. 5.1. Η μη γραμμικότητα δημιουργείται με την εισαγωγή διόδων στην σχισμή των SRR, ενώ η συστοιχία παρουσιάζει απώλειες και διεγείρεται εξωτερικά από μια πηγή. Το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα



Σχήμα 5.1: Η μη γραμμική συστοιχία των SRR (πάνω εικόνα) και το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμά της (κάτω εικόνα).

αυτής της μη γραμμικής συστοιχίας απεικονίζεται στην κάτω εικόνα του Σχ. 5.1. Κάθε SRR προσομοιώνεται ως ένα κύκλωμα με ωμική αντίσταση R , αυτεπαγωγή L και χωρητικότητα C , η οποία είναι συνδυασμός της γραμμικής χωρητικότητας C_{sl} , λόγω της σχισμής του SRR και της ενεργής χωρητικότητας της διόδου που έχει προστεθεί στη δομή του SRR [101]. Επιπλέον, στο ισοδύναμο κύκλωμα του n -στου SRR εμφανίζεται η ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_n(t)$, η οποία δημιουργείται από την παρουσία της εξωτερικής διέγερσης, ενώ τα γειτονικά SRR (πρώτοι “γείτονες”) είναι συζευγμένα μέσω της αμοιβαίας επαγωγής M .

Εφαρμόζοντας το νόμο τάσεων του Kirchhoff για το n -στό SRR (βλ. κάτω εικόνα του Σχ. 5.1), λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$U_n + L \frac{dI_n}{dt} + RI_n - M \frac{dI_{n-1}}{dt} - M \frac{dI_{n+1}}{dt} - E_n(t) = 0, \quad (5.1)$$

όπου

$$I_n = \frac{dQ_n}{dt} = \frac{d}{dt}[C(U_n)U_n], \quad (5.2)$$

είναι το ρεύμα του n -στού SRR και U_n η τάση στα άκρα του μη γραμμικού πυκνωτή C . Στην παραπάνω Εξ. (5.1) έχουμε λάβει υπόψη ότι η αμοιβαία επαγωγή M έχει αρνητική τιμή στην ομοεπίπεδη διάταξη του Σχ. 5.1.

Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι για επαρκώς μικρές τιμές της τάσης U_n , η μη γραμμική χωρητικότητα $C(U_n)$ μπορεί να προσεγγιστεί από το ανάπτυγμα Taylor:

$$C(U_n) \approx C_0 + C'_0 U_n = C_0(1 + \alpha U_n), \quad (5.3)$$

όπου $C_0 \equiv C(U_0) + C_{sl}$ η σταθερή χωρητικότητα που αντιστοιχεί στην τάση πόλωσης U_0 , $C'_0 \equiv (dC/dU)|_{U_0}$, και $\alpha = C'_0/C_0$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το φορτίο Q_n του πυκνωτή του n -οστού SRR δίνεται από την σχέση:

$$Q_n = C(U_n)U_n = C_0(1 + \alpha U_n)U_n, \quad (5.4)$$

λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση για το φορτίο Q_n :

$$L \frac{d^2}{dt^2} (Q_n - \lambda Q_{n-1} - \lambda Q_{n+1}) + R \frac{dQ_n}{dt} + U_n - E_n(t) = 0, \quad (5.5)$$

όπου $\lambda = M/L$ είναι ο συντελεστής σύζευξης. Χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιήσεις $u_n = U_n(U_c)^{-1}$, $q_n = Q_n(C_0 U_c)^{-1}$ (όπου U_c είναι το δυναμικό κατάρρευσης της διόδου), και $t \rightarrow \omega_0 t$ [όπου $\omega_0^2 = (LC_0)^{-1}$] καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{d^2}{dt^2} (q_n - \lambda q_{n-1} - \lambda q_{n+1}) + \gamma \frac{dq_n}{dt} + q_n - \beta q_n^2 - \varepsilon_n(t) = 0, \quad (5.6)$$

όπου $\beta = \alpha U_c$, $\gamma = RC_0 \omega_0$ είναι ο συντελεστής απωλειών και $\varepsilon_n = U_c^{-1} E_n$ είναι η κανονικοποιημένη ηλεκτρεγερτική δύναμη.

5.2 Οδεύοντα κύματα

Η μελέτη εστιάζεται σε μια οδεύουσα διέγερση h της μορφής,

$$\varepsilon_n(t) = h(z), \quad z = \omega t + pn, \quad (5.7)$$

όπου ω και p είναι η κυκλική συχνότητα και ο κυματαριθμός της εξωτερικής διέγερσης, αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι $q_n(t) = U(z)$, από την Εξ. (5.6) προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{aligned} \omega^2 U''(z) + U(z) - \beta U^2(z) \\ - \epsilon \lambda \omega^2 [U''(z-p) + U''(z+p)] + \epsilon \gamma \omega U'(z) - \epsilon h(z) = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι οι τιμές που παίρνουν οι παράμετροι γ , λ και η διέγερση είναι μικρές και ανάλογες μιας χαρακτηριστικής μη μηδενικής μικρής παραμέτρου ϵ .

Στο αδιατάρακτο σύστημα ($\gamma = \lambda = 0$ και μηδενική εξωτερική διέγερση), η Εξ. (5.8) παίρνει τη μορφή:

$$\omega^2 U''(z) - \varphi(U(z)) = 0, \quad (5.9)$$

όπου $\varphi = -U(z) + \beta U^2(z)$.

Η Εξ. (5.9) έχει μια ομοκλιτική λύση

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{2}\right) \right]. \quad (5.10)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Melnikov [128], αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια μοναδική φραγμένη λύση του διαταραγμένου συστήματος [Εξ. (5.8)] της μορφής:

$$U(z) = \Gamma\left(\frac{z - a_0}{\omega}\right) + O(\epsilon), \quad (5.11)$$

όπου a_0 είναι ένα σημείο απλού μηδενισμού της συνάρτησης Melnikov. Η ύπαρξη του σημείου a_0 απαιτεί οι τιμές που λαμβάνει ο συντελεστής απόσβεσης γ να είναι φραγμένες, σύμφωνα με την σχέση:

$$\gamma < 5\beta\pi\omega^2 \operatorname{csch}(\pi\omega). \quad (5.12)$$

Αν η φ έχει μια περιοδική λύση U_0 με περίοδο \bar{T} , τότε η Εξ. (5.8) έχει μια άρτια περιοδική λύση

$$U_\omega(z) := U_0(z/\omega), \quad \omega = 2\pi u/\bar{T}, u \in \mathbb{N}. \quad (5.13)$$

Χρησιμοποιείται η υπο-αρμονική μέθοδος Melnikov [128, 129], προκειμένου να εξεταστεί η συμπεριφορά της περιοδικής λύσης όταν το σύστημα διαταράσσεται. Στην περίπτωση αυτή, το

διαταραγμένο σύστημα έχει μια μοναδική περιοδική λύση της μορφής:

$$U(z) = U_0\left(\frac{z - a_0}{\omega}\right) + O(\varepsilon), \quad (5.14)$$

όπου a_0 είναι ένα σημείο απλού μηδενισμού της συνάρτησης Melnikov. Η ύπαρξη του σημείου a_0 απαιτεί ο συντελεστής απόσβεσης γ να είναι φραγμένος σύμφωνα με την ανίσωση (5.12).

5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Η Εξ. (5.8) μελετάται αριθμητικά χρησιμοποιώντας μια ψευδο-φασματική μέθοδο, δηλαδή η λύση $U(z)$ αναλύεται σε μια σειρά Fourier της μορφής:

$$U(z) = \sum_{j=1}^J \left[A_j \cos\left((j-1)\tilde{k}z\right) + B_j \sin\left(j\tilde{k}z\right) \right], \quad (5.15)$$

όπου $\tilde{k} = 2\pi/L$ και $-L/2 < z < L/2$. Οι συντελεστές Fourier A_j και B_j υπολογίζονται στα σημεία J (χρησιμοποιούνται 50 σημεία) με την απαίτηση η Εξ. (5.15) να ικανοποιεί ακριβώς την Εξ. (5.8), σε αυτά τα σημεία (collocation points). Επίσης, σημειώνεται ότι ο συντελεστής σύζευξης λ λαμβάνει τιμές στην περιοχή $|\lambda| < 1/2$ [129].

Η Εξ. (5.6) γραμμικοποιείται και εκφράζεται ως ένα σύστημα πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &= v_n, \\ \dot{v}_n - \lambda \dot{v}_{n-1} - \lambda \dot{v}_{n+1} &= -\gamma v_n - u_n + 2\beta U_n u_n, \end{aligned} \quad (5.16)$$

όπου $U_n(t) = U(\omega t + np)$ [βλ. Εξ.(5.15)] είναι μια περιοδική λύση της Εξ. (5.6).

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης-τάξης με περιοδικές συνοριακές συνθήκες, το γραμμικό σύστημα ολοκληρώνεται για μια περίοδο $\bar{T} = L/\omega$. Ο μονόδρομος πίνακας \mathcal{M} ορίζεται ως:

$$\begin{pmatrix} \{u_n(\bar{T})\} \\ \{v_n(\bar{T})\} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \{u_n(0)\} \\ \{v_n(0)\} \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα \mathcal{M} του συστήματος (5.16), οι οποίες είναι οι πολλαπλασιαστές Floquet χ της λύσης, καθορίζουν την ευστάθεια μιας λύσης της Εξ. (5.8). Σύμφωνα με τη θεωρία [128], μια περιοδική λύση είναι ασταθής, αν υπάρχει έστω και ένας πολλαπλασιαστής Floquet με $|\chi| > 1$.

Για την περαιτέρω ανάλυση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ορίζεται $\beta = 1$ και μελετάται μία εξωτερική διέγερση της μορφής:

$$h(z) = \Delta \cos(z), \quad (5.17)$$

όπου $\Delta \in R$ είναι το πλάτος της διέγερσης.

5.3.1 Ύπαρξη και ευστάθεια οδευόντων κυμάτων για μικρές διαταραχές

Σε αυτή την ενότητα, μελετάται η ύπαρξη οδευόντων κυμάτων και η ευστάθεια τους για μικρές διαταραχές. Αρχικά, αναλύεται η επίδραση των όρων της διαταραχής της Εξ. (5.6). Στην πάνω εικόνα του Σχ. 5.2 απεικονίζεται η χωρική κατανομή της λύσης $U(z)$ της Εξ. (5.8) για $\Delta = \gamma = \lambda = 0$ και $\bar{T} = 4\pi$. Θέτοντας μόνο μία από τις παραμέτρους (Δ , γ ή λ) μη μηδενική, αναμένεται ότι η λύση $U(z)$ θα διατηρεί τη δομή της. Αυτό πράγματι συμβαίνει εκτός από την περίπτωση όπου $\gamma \neq 0$ και $\Delta = 0$. Αυτό είναι κατανοητό, επειδή οι απώλειες μειώνουν την ενέργεια, οπότε είναι απαραίτητη η εξωτερική διέγερση για την αντιστάθμιση των απωλειών.

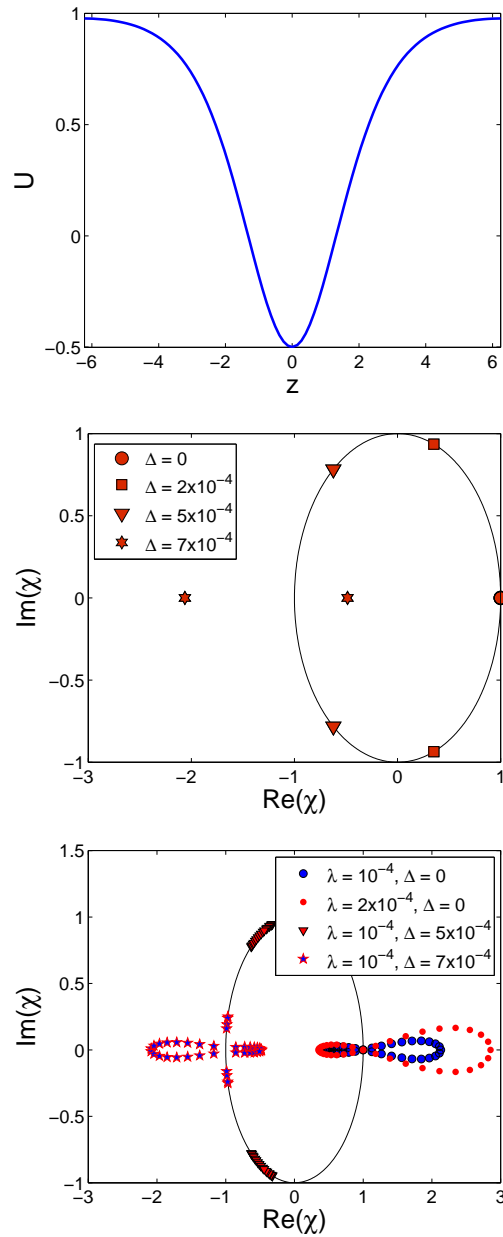
Η επίδραση μόνο της εξωτερικής διέγερσης στην ευστάθεια της λύσης $U(z)$ παρουσιάζεται στη μεσαία εικόνα του Σχ. 5.2, όπου απεικονίζονται οι πολλαπλασιαστές Floquet όταν δεν υπάρχει μαγνητική σύζευξη μεταξύ των SRR ($\lambda = 0$). Όπως παρατηρείται, για διάφορες τιμές του πλάτους της διέγερσης Δ (για $\gamma = 0$), αρχικά η λύση είναι ευσταθής, δηλαδή η εξωτερική διέγερση “τοποθετεί” τους πολλαπλασιαστές Floquet στο μοναδιαίο κύκλο, ενώ στη συνέχεια η λύση γίνεται ασταθής.

Στην κάτω εικόνα του Σχ. 5.2 απεικονίζονται οι πολλαπλασιαστές Floquet της λύσης $U(z)$ για δύο τιμές του λ (για $\gamma = 0$). Όπως παρατηρείται, η σύζευξη δημιουργεί μια περιοχή τιμών των πολλαπλασιαστών Floquet που για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων Δ και λ οι λύσεις γίνονται είτε ευσταθείς είτε ασταθείς (με την ευστάθεια των λύσεων να οφείλεται στην εξωτερική διέγερση). Παρόμοιο αποτέλεσμα έχει εξαχθεί για ασταθή διακριτά σολιτονικά κύματα σε παραμετρικούς ταλαντωτές [130, 131].

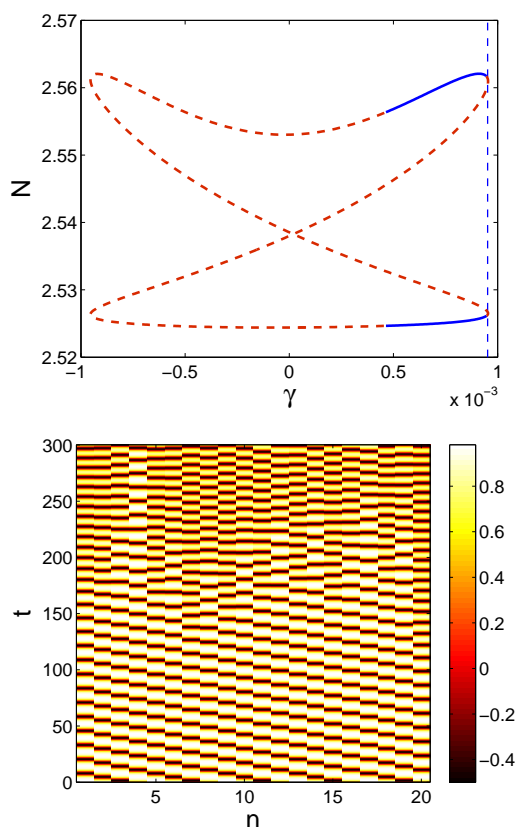
Για την περαιτέρω μελέτη γίνεται χρήση ενός διαγνωστικού εργαλείου της νόρμας N της λύσης $U(z)$, που ορίζεται ως:

$$N = \sqrt{\int_0^{\bar{T}} U^2(z) dz}. \quad (5.18)$$

Στην πάνω εικόνα του Σχ. 5.3 απεικονίζεται το διάγραμμα διακλάδωσης για τη νόρμα N της λύσης $U(z)$ ως συνάρτηση της παραμέτρου απόσβεσης γ για συγκεκριμένες τιμές των Δ και



Σχήμα 5.2: Πάνω εικόνα: χωρική κατανομή της $U(z)$ για $\Delta = \gamma = \lambda = 0$. Μεσαία εικόνα: πολλαπλασιαστές Floquet για $\Delta \neq 0$ και $\lambda = \gamma = 0$. Κάτω εικόνα: πολλαπλασιαστές Floquet για $\Delta \neq 0$, $\lambda \neq 0$ και $\gamma = 0$. Η περίοδος είναι $\bar{T} = 4\pi$ ενώ η ευστάθεια υπολογίζεται για συστοιχία 20 SRR.



Σχήμα 5.3: Πάνω εικόνα: διάγραμμα διακλάδωσης, που δείχνει τη νόρμα N της λύσης $U(z)$ ως συνάρτηση της παραμέτρου γ (για $\Delta = 7 \times 10^{-4}$ και $\lambda = 10^{-4}$). Η συνεχής και η εστιγμένη καμπύλη δείχνουν ευσταθείς και ασταθείς λύσεις αντίστοιχα, ενώ η κάθετη εστιγμένη γραμμή είναι η αναλυτική πρόβλεψη για την παράμετρο γ . Η ευστάθεια υπολογίζεται για συστοιχία 20 SRR. Κάτω εικόνα: χωροχρονική εξέλιξη της $U(z)$, που δείχνει τη δυναμική της αστάθειας. Η αρχική συνθήκη είναι η λύση που λαμβάνεται αμέσως μετά το πρώτο σημείο διακλάδωσης στην πάνω εικόνα.

λ. Καθώς οι τιμές της παραμέτρου γ αυξάνονται από το μηδέν, δημιουργείται ένα σημείο διακλάδωσης. Όπως απεικονίζεται σε αυτή την εικόνα, το διάγραμμα είναι συμμετρικό σε σχέση με τον κάθετο άξονα στο $\gamma = 0$ και υπάρχουν δύο σημεία διακλάδωσης.

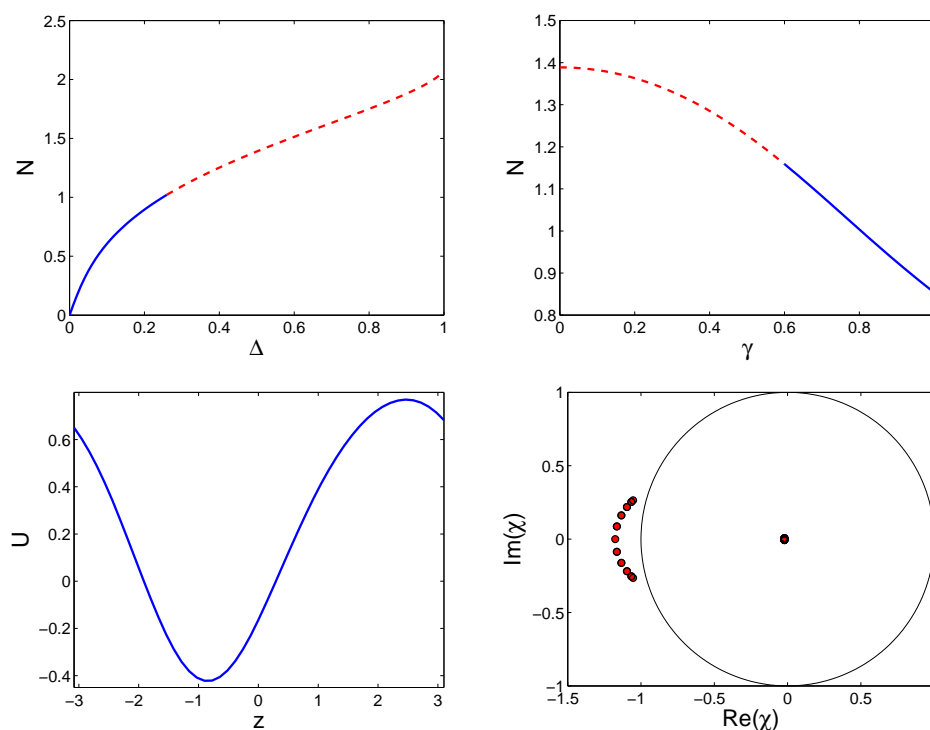
Από την άλλη πλευρά, η ευστάθεια της λύσης εμφανίζει ασυμμετρία. Η ευστάθεια απεικονίζεται από τη συνεχή καμπύλη στην πάνω εικόνα του Σχ. 5.3. Στην περίπτωση αυτή, η απόσβεση μπορεί πράγματι να υποστηρίξει ευσταθείς λύσεις. Ωστόσο, όταν η παράμετρος σύζευξης λ είναι αρκετά μεγάλη, όλες οι αντίστοιχες λύσεις κατά μήκος του διαγράμματος διακλάδωσης μπορούν να είναι ασταθείς. Στην κάτω εικόνα του Σχ. 5.3, απεικονίζεται η χωροχρονική εξέλιξη των ασταθών λύσεων.

Η ύπαρξη και η δυναμική της ευστάθειας των λύσεων, που μελετήθηκαν παραπάνω, είναι ανεξάρτητες από την περίοδο \bar{T} . Ωστόσο, παρατηρείται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος, τόσο πιο ασταθής είναι η λύση $U(z)$. Συμπεραίνεται ότι σε αυτή την περίπτωση η απόσβεση

μπορεί να μην είναι ικανή να κάνει ευσταθείς τις αντίστοιχες λύσεις. Ως εκ τούτου, με βάση τα παραπάνω, αναμένεται ότι τα εντοπισμένα κύματα θα είναι πάντα ασταθή.

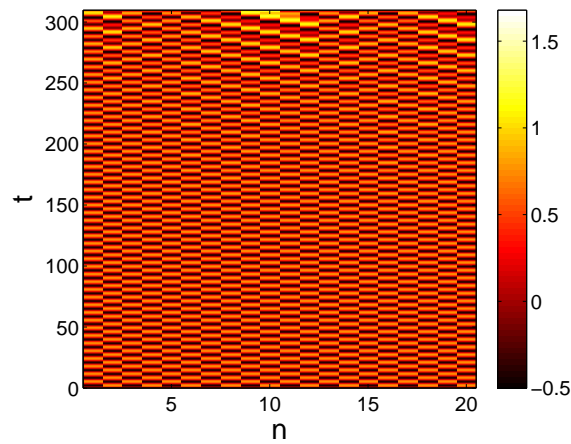
5.3.2 Περιοδικά κύματα που οφείλονται στην εξωτερική διέγερση

Εκτός από τα περιοδικά κύματα που συζητήθηκαν στο προηγούμενο εδάφιο, υπάρχουν επίσης περιοδικές λύσεις λόγω της οδεύουσας διέγερσης. Στο Σχ. 5.4 απεικονίζεται η ύπαρξη και η ευστάθεια των περιοδικών κυμάτων λόγω της οδεύουσας διέγερσης. Στην πάνω αριστερά εικόνα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι για αρκετά μικρού πλάτους διεγέρσεις η λύση είναι ευσταθής. Όταν αυξηθεί περαιτέρω το πλάτος της διέγερσης, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή πάνω από την οποία η λύση γίνεται ασταθής.



Σχήμα 5.4: Πάνω εικόνες: ύπαρξη των περιοδικών κυμάτων που οφείλονται στην οδεύουσα διέγερση. Πάνω αριστερά εικόνα: το διάγραμμα διακλάδωσης για τη νόρμα N ως συνάρτηση της παραμέτρου Δ (για $\gamma = 0$ και $\lambda = 0.1$). Πάνω δεξιά εικόνα: το διάγραμμα διακλάδωσης για τη νόρμα N ως συνάρτηση της παραμέτρου γ (για $\Delta = 0.5$ and $\lambda = 0.1$). Η συνεχής και η εστιγμένη καμπύλη δείχνουν ευσταθείς και ασταθείς λύσεις, αντίστοιχα. Η ευστάθεια υπολογίζεται για συστοιχία 20 SRR. Κάτω αριστερά εικόνα: η χωρική κατανομή της λύσης $U(z)$ για $\Delta = 0.5$, $\lambda = 0.1$, και $\gamma = 0.57$. Κάτω δεξιά εικόνα: οι πολλαπλασιαστές Floquet της $U(z)$ που δείχνουν την αστάθεια της λύσης.

Εισάγοντας την απόσβεση γ μπορεί να γίνουν ευσταθείς οι προηγουμένως ασταθείς λύσεις. Στην πάνω δεξιά εικόνα του Σχ. 5.4 απεικονίζεται το διάγραμμα της ύπαρξης και ευστάθειας των λύσεων, η οποία δείχνει τη νόρμα N ως συνάρτηση της παραμέτρου γ . Στην κάτω



Σχήμα 5.5: Χωροχρονική εξέλιξη της λύσης $U(z)$, η οποία δείχνει τη δυναμική της αστάθειας που οφείλεται στην εξωτερική διέγερση. Η αρχική συνθήκη αντιστοιχεί στη λύση που απεικονίζεται στην κάτω αριστερά εικόνα του Σχ. 5.4.

αριστερή εικόνα του Σχ. 5.4 απεικονίζεται η χωρική κατανομή μιας ασταθούς λύσης για τιμές παραμέτρων $\Delta = 0.5$, $\lambda = 0.1$ και $\gamma = 0.57$. Τέλος, στην κάτω δεξιά εικόνα του ίδιου σχήματος φαίνεται η περιοχή τιμών των πολλαπλασιαστών Floquet στο μιγαδικό επίπεδο.

Στο Σχ. 5.5 απεικονίζεται η χωροχρονική εξέλιξη της λύσης $U(z)$, όπου εμφανίζεται να “εκρήγνυται” σε διάφορα σημεία της μη γραμμικής συστοιχίας των SRR.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα-Προοπτικές

Από τις αρχές του 21ου αιώνα οπότε κατασκευάστηκε το πρώτο μεταϊλικό, η θεωρητική και πειραματική μελέτη των μεταϊλικών έχει γνωρίσει ραγδαία ανάπτυξη. Τα μεταϊλικά προξένησαν τεράστιο ενδιαφέρον στις επιστημονικές κοινότητες του ηλεκτρομαγνητισμού και της οπτικής, της επιστήμης υλικών, της ακουστικής, των μη γραμμικών συστημάτων, κλπ. Η πληθώρα των προκλήσεων που θέτουν τα μεταϊλικά όχι μόνο σε θεωρητικό και πειραματικό επίπεδο αλλά και σε επίπεδο εφαρμογών, τα καθιστά ως ένα από τα πιο ενδιαφέροντα πεδία της σύγχρονης φυσικής.

Η συμβολή της παρούσας διδακτορικής διατριβής εντοπίζεται στη διάδοση κυμάτων σε μη γραμμικά μεταϊλικά. Για τη μελέτη των διαφόρων μη γραμμικών διατάξεων μεταϊλικών που μελετήθηκαν, χρησιμοποιούνται ισοδύναμα διακριτά μοντέλα γραμμών μεταφοράς που εμφανίζουν περιοχές συχνοτήτων με αρνητικές και θετικές τιμές του δείκτη διάθλασης. Με τη βοήθεια αναλυτικών και αριθμητικών τεχνικών εξάγονται συμπεράσματα για την ύπαρξη, την ευστάθεια και τα χαρακτηριστικά διάδοσης εντοπισμένων κυμάτων (στη μορφή σολιτονίων) στα υπό μελέτη μη γραμμικά μοντέλα.

Η παρούσα διατριβή συνεισφέρει στη θεωρητική κατανόηση των ιδιοτήτων των μη γραμμικών μεταϊλικών, με βάση την περιγραφή τους μέσω της θεωρίας γραμμών μεταφοράς. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται θεωρητικά (αναλυτικά και αριθμητικά), αλλά και πειραματικά, η δυνατότητα εντοπισμού της ΗΜ ισχύος λόγω της μη γραμμικότητας σε αριστερόστροφα μεταϊλικά και ο σχηματισμός διαφόρων τύπων ημιδιακριτών σολιτονίων. Ειδικότερα, η διατριβή:

- Προβλέπει αναλυτικά και επιβεβαιώνει πειραματικά την ύπαρξη και τη διάδοση φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων σε μια εκτεταμένη αριστερόστροφη γραμμή μεταφοράς για τιμές της συχνότητας φέροντος πάνω ή κάτω από μια τιμή κατωφλίου, αντίστοιχα. Βρέθηκε ότι αυτή η εκτεταμένη αριστερόστροφη γραμμή μεταφοράς υποστηρίζει όχι

μόνο οπισθοδεύοντα επίπεδα κύματα, αλλά και σολιτόνια περιβάλλουσας φωτεινού και σκοτεινού τύπου. Τα πειραματικά ευρήματα επιβεβαιώνονται από αναλυτικά αποτελέσματα και αριθμητικές προσομοιώσεις. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι αρμονικά διαμορφωμένοι τετραγωνικοί παλμοί εμφανίζουν το φαινόμενο της εστίασης (αφεστίασης) πάνω (κάτω) από μια κρίσιμη συχνότητα και τελικά αυτο-οργανώνονται σε φωτεινά (σκοτεινά) σολιτόνια. Η αναλυτική προσέγγιση και οι αριθμητικές προσομοιώσεις επέτρεψαν τον ακριβή προσδιορισμό των περιοχών όπου εμφανίζεται το φαινόμενο εστίασης (αφεστίασης) και παρατηρούνται πειραματικά τα φωτεινά (σκοτεινά) σολιτόνια.

- Αποδεικνύει τη δυνατότητα σύζευξης μέσω της μη γραμμικότητας εντοπισμένων ΗΜ κυμάτων (στη μορφή διαφόρων τύπων διανυσματικών σολιτονίων) στην αριστερόστροφη και δεξιόστροφη περιοχή συχνοτήτων του φάσματος. Συγκεκριμένα, στο πλαίσιο της διατριβής μελετήθηκε μια γραμμή μεταφοράς με αριστερόστροφη και δεξιόστροφη συμπεριφορά, όπου γραμμικά επίπεδα κύματα μπορούν να διαδίδονται στην αριστερόστροφη και δεξιόστροφη περιοχή συχνοτήτων με την ίδια ταχύτητα ομάδας. Αναπτύχθηκαν αναλυτικές και αριθμητικές τεχνικές για τη μελέτη, την ύπαρξη, την ευστάθεια και τη δυναμική των συζευγμένων οδευόντων και οπισθοδευόντων σολιτονίων. Επίσης, προβλέφθηκε σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων η ύπαρξη διανυσματικών σολιτονίων των εξής τύπων: φωτεινού-φωτεινού, φωτεινού-σκοτεινού και σκοτεινού-φωτεινού, στην αριστερόστροφη και δεξιόστροφη περιοχή συχνοτήτων, αντίστοιχα. Ακόμα, βρέθηκε ότι το πλέον ευσταθές σολιτόνιο είναι το φωτεινό-φωτεινό, αφού η αστάθεια διαμόρφωσης προξενεί την παραμόρφωση και την καταστροφή του φωτεινού-σκοτεινού και σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου.
- Προβλέπει τη δυνατότητα σχηματισμού σολιτονίων και αποδεικνύει την επιμονή (persistence) σε ρεαλιστικές διατάξεις μεταϋλικών (που έχουν υλοποιηθεί σε πειράματα). Τέτοιες διατάξεις είναι: (α) ένας μη γραμμικός ομοεπίπεδος κυματοδηγός με ενσωματωμένους συντονιστές διακοπτόμενου δακτυλίου και (β) μια μονοδιάστατη συστοιχία συντονιστών διακοπτόμενου δακτυλίου. Αρχικά, μελετήθηκε το ισοδύναμο μη γραμμικό μοντέλο γραμμής μεταφοράς για ένα μη γραμμικό ομοεπίπεδο κυματοδηγό, όπου προβλέφθηκε ο σχηματισμός φωτεινών σολιτονίων σε υποπεριοχές της αριστερόστροφης ζώνης συχνοτήτων. Επιβεβαιώθηκε η ευστάθεια των φωτεινών σολιτονίων για μεγάλους χρόνους, αποτέλεσμα που κάνει δυνατή την πειραματική παρατήρηση τους. Επίσης, βρέθηκε ότι η τροποποίηση των φυσικών παραμέτρων της διάταξης, όπως το εύρος των σχισμών (G) του κυματοδηγού και η ακτίνα r των συντονιστών διακοπτόμενου δακτυλίου, μπορεί να

αυξήσει το εύρος της αριστερόστροφης ζώνης συχνοτήτων αλλά και των περιοχών σχηματισμού των φωτεινών σολιτονίων. Συγκεκριμένα, καθώς το G μειώνεται (αυξάνεται), μειώνεται (αυξάνεται) το εύρος της LH περιοχής συχνοτήτων και αυξάνεται (μειώνεται) η περιοχή συχνοτήτων όπου μπορούν να σχηματιστούν τα φωτεινά σολιτόνια. Ανάλογα, η αύξηση (μείωση) της ακτίνας r οδηγεί σε αύξηση (μείωση) τόσο του εύρους της LH ζώνης συχνοτήτων όσο και της περιοχής σχηματισμού των φωτεινών σολιτονίων. Στη συνέχεια, μελετήθηκε μια μονοδιάστατη μη γραμμική συστοιχία συντονιστών διακοπτόμενου δακτυλίου που εμφανίζει απώλειες και η οποία διεγείρεται εξωτερικά. Αποδείχθηκε η ύπαρξη περιοδικών ή εντοπισμένων κυμάτων και προβλέφθηκε ότι αυτά τα κύματα μπορούν να γίνουν ευσταθή ρυθμίζοντας κατάλληλα το πλάτος της εξωτερικής διέγερσης.

Η αναλυτική προσέγγιση, που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διατριβής (συνδυασμός μιας ημιδιακριτής προσέγγισης και θεωρίας διαταραχών πολλαπλών κλιμάκων), έχει εφαρμογές σε πολλές περιοχές της Φυσικής. Πρώτα, αναφέρεται η περίπτωση της Φυσικής Πλάσματος, όπου παραλλαγή της προσέγγισης αυτής χρησιμοποιήθηκε για να δείξει τη δυνατότητα σχηματισμού γιγαντιαίων κυμάτων κατά τη διάδοση κυκλικά πολωμένων κυμάτων σε μαγνητισμένο πλάσμα (Παράρτημα Α). Επίσης, άλλες περιοχές, που η αναλυτική προσέγγιση βρίσκει εφαρμογές, είναι η Μη Γραμμική Οπτική (διάδοση σε συστοιχίες κυματοδηγών), η Ακουστική (ακουστικά μεταϋλικά με αρνητικό μέτρο Young ή/και αρνητική πυκνότητα), στη Φυσική της Συμπύκνωσης Bose-Einstein (δυναμική συστοιχιών ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein σε οπτικά πλέγματα), κ.α.

Υπάρχουν πολλά θέματα που παρουσιάζουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον και τα οποία δεν αντιμετωπίστηκαν στα πλαίσια της διατριβής αυτής και αποτελούν επόμενους και άμεσους ερευνητικούς στόχους.

Τα θεωρητικά και αριθμητικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν στη διατριβή αυτή μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη συστηματική μελέτη της επίδρασης των απωλειών σε μη γραμμικά μεταϋλικά. Ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση, θεωρητικά αλλά και πειραματικά, πιθανών τρόπων για την αντιστάθμιση αυτών των απωλειών, όπως η μελέτη μη γραμμικών μεταϋλικών με συμμετρία ισοτιμίας [parity (P)] - χρόνου [time (T)], όπου η απόσβεση εξισορροπείται από την ενίσχυση [132, 133]. Επίσης, ερευνητικό στόχο αποτελεί η μελέτη του σχηματισμού και της δυναμικής παλμών, που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά με τα σολιτόνια, όπου η απόσβεση εξισορροπείται από τη μη γραμμικότητα (dissipative solitons) [134].

Οι αναλυτικές τεχνικές, που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφ. 3 και στο Παράρτημα Α της παρούσας διατριβής, μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα για τη μελέτη αφενός της σύζευξης μεταξύ σολιτονίων στο μαγνητισμένο πλάσμα και αφετέρου μιας διάταξης πλάσματος-μεταϋλικού (plasma metamaterial) [135]. Η τελευταία είναι μια περιοδική δομή στο χώρο, η οποία αποτελείται από συντονιστές διακοπτόμενου δακτυλίου και κοιλότητες πλάσματος (μικροπλάσμα), με διαστάσεις της τάξης από mm έως μm . Κάτω από ορισμένες συνθήκες, αυτή η δομή εμφανίζει αρνητικές τιμές των ενεργών παραμέτρων ϵ και μ , δηλαδή συμπεριφέρεται ως μεταϋλικό με αρνητικό δείκτη διάθλασης.

Για την επίτευξη των ανωτέρω ερευνητικών στόχων έχει ήδη ξεκινήσει η προσπάθεια πειραματικής υλοποίησης και χαρακτηρισμού δομών μεταϋλικών με SRR, ώστε τα πειραματικά ευρήματα να είναι σημαντικός αρωγός για την ερμηνεία των αναλυτικών υπολογισμών. Ήδη έχουν κατασκευαστεί γραμμικές μαγνητο-επαγωγικές [magneto-inductive (MI)] και ηλεκτρο-επαγωγικές [electro-inductive (EI)] δομές αλλά και μοντέλα γραμμών μεταφοράς με τεχνικές μικροταινιακής τεχνολογίας, έχουν ήδη χαρακτηριστεί στη γραμμική τους λειτουργία, οπότε θα ακολουθήσει η μελέτη τους παρουσία μη γραμμικότητας.

Παράρτημα Α

Μαγνητισμένο πλάσμα

Η αναλυτική προσέγγιση, που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διατριβής (συνδυασμός μιας ημιδιακριτής προσέγγισης και θεωρίας διαταραχών πολλαπλών κλιμάκων), έχει εφαρμογές σε πολλές περιοχές της Φυσικής. Μία παραλλαγή της προσέγγισης αυτής χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση της Φυσικής Πλάσματος.

Θεωρείται ένα μοντέλο πλάσματος, που αποτελείται από ιόντα και ηλεκτρόνια, παρουσία ενός ομογενούς εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = \hat{x}B$. Για την περιγραφή του συστήματος θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι μόνο κυκλικά πολωμένα κύματα μπορούν να διαδοθούν στο μαγνητισμένο πλάσμα. Για έναν κυκλικά πολωμένο ΗΜ παλμό η ορμή των ηλεκτρονίων ορίζεται ως:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_\perp(x, t) + \gamma u(x, t)\hat{x} \quad (\text{A.1})$$

όπου $\mathbf{p}_\perp = p_x\hat{x} + p_y\hat{y}$ είναι η εγκάρσια συνιστώσα της ορμής των ηλεκτρονίων, $u(x, t)$ η διαμήκης συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού των ηλεκτρονίων και γ ο σχετικιστικός παράγοντας.

Θεωρώντας ότι τα μεγάλης μάζας ιόντα είναι ακίνητα, η διάδοση των ΗΜ κυμάτων στο μαγνητισμένο πλάσμα διέπεται από τις εξισώσεις Maxwell σε συνδυασμό με τις (σχετικιστικές) υδροδυναμικές εξισώσεις για τα ηλεκτρόνια. Έτσι, η εξέλιξη των μεταβλητών κατάστασης στο πλάσμα περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα βαθμωτών εξισώσεων της μορφής [137–139]:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = \frac{n}{\gamma} p_y, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = \frac{n}{\gamma} p_z, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_y - A_y) + u \frac{\partial}{\partial x}(p_y - A_y) = -\frac{\Omega p_z}{\gamma}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_z - A_z) + u \frac{\partial}{\partial x}(p_z - A_z) = \frac{\Omega p_y}{\gamma}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial(\gamma u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi - \gamma) + \frac{1}{\gamma} \left[p_y \frac{\partial}{\partial x}(p_y - A_y) + p_z \frac{\partial}{\partial x}(p_z - A_z) \right], \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n - 1, \quad (\text{A.8})$$

όπου n είναι η πυκνότητα του ρευστού των ηλεκτρονίων, ενώ \mathbf{A} και ϕ είναι το διανυσματικό και βαθμωτό δυναμικό, αντίστοιχα.

Οι Εξ. (A.2-A.8) περιγράφουν την εξέλιξη των συνιστωσών του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{S} = (n, u, \phi; A_y, A_z, p_y, p_z)$. Αυτό, εξαρτάται από το εξωτερικά εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο μέσω της παραμέτρου $\Omega = \omega_c/\omega_{pe}$, όπου $\omega_c = eB/m_e c$ είναι η κυκλοτρονική συχνότητα και $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m_e}$ είναι η συχνότητα πλάσματος (n_0 είναι η πυκνότητα των ηλεκτρονίων στην κατάσταση ισορροπίας).

Χρησιμοποιώντας όμοια αναλυτική προσέγγιση με αυτήν που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής (βλ. επίσης Παράρτημα Β), το διάνυσμα κατάστασης \mathbf{S} αναλύεται ως:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon^n \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^{(n\ell)}(x_{m \geq 1}, t_{m \geq 1}) e^{i\ell(kx_0 - \omega t_0)} \quad (\text{A.9})$$

όπου $S^{(0)} = (1, 0, 0; 0, 0, 0, 0)$ είναι η κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, $\epsilon \ll 1$ είναι η (αδιάστατη) μικρή πραγματική παράμετρος και $x_m = \epsilon^m x$, $t_m = \epsilon^m t$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) οι χωρικές και χρονικές μεταβλητές, αντίστοιχα. Οι παράμετροι n και ℓ στους εκθέτες δηλώνουν την τάξη της διαταραχής και τις αρμονικές ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) για μια δεδομένη τάξη της διαταραχής, αντίστοιχα. Έτσι, τα αποτελέσματα που εξάγονται από τη θεωρία διαταραχών έχουν ως ακολούθως.

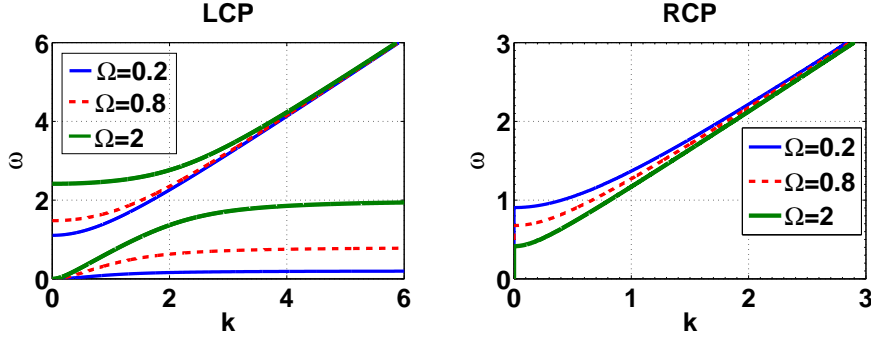
Στην πρώτη τάξη ($n = 1$), εξάγεται η γραμμική σχέση διασποράς:

$$\omega^2 - k^2 = \frac{\omega}{\omega - \alpha\Omega}, \quad (\text{A.10})$$

όπου $\alpha = \pm 1$ αντιστοιχεί σε αριστερόστροφα και δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένα ΗΜ κύματα [left circularly polarized (LCP), right circularly polarized (RCP)], αντίστοιχα.

Η σχέση διασποράς απεικονίζεται στο Σχ. Α.1, όπου σχεδιάζεται η συχνότητα ω ως συνάρτηση του κυματαριθμού k για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου Ω . Είναι σαφές ότι για LCP κύματα ($\alpha = +1$) υπάρχουν δύο ζώνες συχνοτήτων, όπου η διάδοση ΗΜ κυμάτων

είναι δυνατή: η ζώνη υψηλών συχνοτήτων (οπτικός κλάδος) και η ζώνη χαμηλών συχνοτήτων (ακουστικός κλάδος). Επιπλέον, το χάσμα, που εμφανίζεται στην περίπτωση των LCP κυμάτων, αυξάνεται (μειώνεται) καθώς η παράμετρος Ω μειώνεται (αυξάνεται). Για RCP κύματα ($\alpha = -1$) υπάρχει μόνο μία ζώνη συχνοτήτων, όπου αυτά μπορούν να διαδίδονται. Η ύπαρξη των κλάδων υποδεικνύει ότι στη μη γραμμική περίπτωση είναι δυνατή η σύζευξη των κυκλικά πολωμένων κυμάτων που διαδίδονται μαγνητισμένο πλάσμα, όπως ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση μιας δεξιόστροφης-αριστερόστροφης γραμμής μεταφοράς (Κεφ. 3).



Σχήμα Α.1: Η σχέση διασποράς που δείχνει τη συχνότητα ω ως συνάρτηση του κυματαριθμού k για LCP-(αριστερή εικόνα) και RCP-(δεξιά εικόνα) ΗΜ κύμα. Η λεπτή συνεχής (μπλε), η εστιγμένη (κόκκινη) και η έντονη (πράσινη) γραμμή δείχνουν την σχέση διασποράς για $\Omega = 0.1$, $\Omega = 0.8$ και $\Omega = 2$, αντίστοιχα.

Στην τάξη $O(\epsilon^2)$, υπολογίζεται η ταχύτητα ομάδας ως:

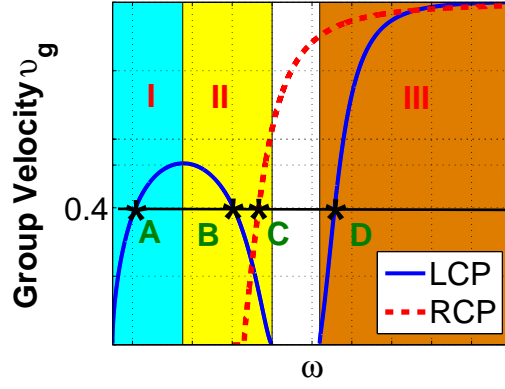
$$v_g = \frac{2k(\omega - \alpha\Omega)^2}{2\omega(\omega - \alpha\Omega)^2 + \alpha\Omega}. \quad (\text{A.11})$$

Στο Σχ. Α.2 απεικονίζεται η ταχύτητα ομάδας v_g ως συνάρτηση της συχνότητας ω . Οι συνεχείς (μπλε) γραμμές και η εστιγμένη (κόκκινη) γραμμή υποδεικνύουν περιοχές συχνοτήτων για τη διάδοση LCP και RCP κυμάτων, αντίστοιχα. Είναι προφανές από το Σχ. Α.2 ότι μπορεί να υπάρξει διάδοση των κυκλικά πολωμένων κυμάτων με την ίδια ταχύτητα ομάδας σε διαφορετικές περιοχές. Υπενθυμίζεται ότι ακριβώς αυτή η παρατήρηση μπορεί να οδηγήσει στη σύζευξη μεταξύ LH και RH τρόπων στην δεξιόστροφη-αριστερόστροφη γραμμής μεταφοράς (Κεφ. 3).

Τέλος, εστιάζοντας στην περίπτωση της σύζευξης μεταξύ κυκλικά πολωμένων κυμάτων με ίσες ταχύτητες ομάδας, στην τάξη $O(\epsilon^3)$ λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις NLS:

$$i\partial_T\Psi_1 + D_1\partial_X^2\Psi_1 + (g_{11}|\Psi_1|^2 + g_{12}|\Psi_2|^2)\Psi_1 = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$i\partial_T\Psi_2 + D_2\partial_X^2\Psi_2 + (g_{21}|\Psi_1|^2 + g_{22}|\Psi_2|^2)\Psi_2 = 0, \quad (\text{A.13})$$



Σχήμα Α.2: Η ταχύτητα ομάδας v_g ως συνάρτηση της συχνότητας ω . Οι συνεχείς (μπλε) και η εστιγμένη (κόκκινη) γραμμές δείχνουν την v_g για περιοχές συχνοτήτων όπου διαδίδονται LCP και RCP κύματα, αντίστοιχα.

όπου το πλάτος Ψ_j , οι συντελεστές διασποράς D_j , οι SPM συντελεστές g_{jj} και οι CPM συντελεστές $g_{j,3-j}$, με $j = 1, 2$, δίνονται αντίστοιχα ως:

$$\Psi_j \equiv A_{jy}^{(11)} \quad (\text{A.14})$$

$$D_j \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_j^2} = \frac{v_g}{2k_j} + \frac{v_g^2}{\omega - \alpha\Omega} - \frac{v_g^3(3\omega - \alpha\Omega)}{2k_j(\omega - \alpha\Omega)} \quad (\text{A.15})$$

$$g_{jj} = \frac{v_g}{k_j} (\omega_j^2 - k_j^2)^4, \quad (\text{A.16})$$

$$g_{j,3-j} = \frac{2v_g}{k_j} (\omega_j^2 - k_j^2)^2 (\omega_{3-j}^2 - k_{3-j}^2)^2. \quad (\text{A.17})$$

Όπως φαίνεται από τις Εξ. (A.12)-(A.13), απουσία της σύζευξης CPM ($g_{j,3-j} = 0$), η εξέλιξη ενός κυκλικά πολωμένου κύματος περιγράφεται από μια απλή εξίσωση NLS:

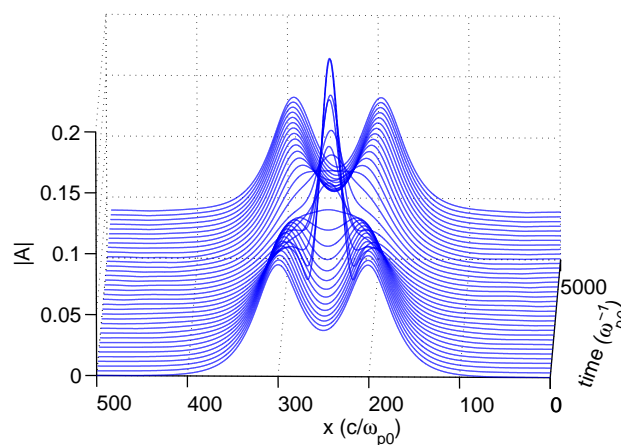
$$i\partial_T \Psi + D\partial_X^2 \Psi + Q|\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (\text{A.18})$$

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό το εξής: ξεκινώντας από το γραμμικό όριο (μορφή της σχέσης διασποράς) και επεκτείνοντας τη θεώρηση και στη μη γραμμική θεωρία (μία ή δύο συζευγμένες εξισώσεις NLS για σολιτόνια σε μία ή σε δύο ζώνες της σχέσης διασποράς), ο μη γραμμικός εντοπισμός της HM ισχύος στα μη γραμμικά μεταυλικά και στο μαγνητισμένο πλάσμα μπορεί να περιγραφεί ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία και χρησιμοποιώντας παρόμοια μοντέλα. Παρατηρείται, συγκεκριμένα, ότι η σχέση διασποράς παρουσιάζει δύο κλάδους για τα κύματα LCP, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της CRLH γραμμής, και ένα κλάδο για τα κύματα RCP. Συνεπώς, όπως στην περίπτωση των μεταυλικών, μπορεί κανείς να εστιάσει σε ένα κλάδο της σχέσης διασποράς για το μαγνητισμένο πλάσμα και να εξάγει μια εξίσωση

NLS, ή να θεωρήσει τη σύζευξη τρόπων σε δύο κλάδους και να εξάγει ένα σύστημα από δύο συζευγμένες NLS.

Μπορεί κανείς να προχωρήσει ένα βήμα παραπάνω και να εκμεταλλευτεί τη φαινομενική περιγραφή που βασίζεται στην αναγωγή του αρχικού συστήματος εξισώσεων στο μοντέλο NLS για να προβλέψει ένα νέο φαινόμενο: τη δημιουργία “γιγαντιαίων” κυμάτων (rogue waves/freak waves) στο μαγνητισμένο πλάσμα. Σημειώνεται ότι τέτοια κύματα έχουν κυρίως μελετηθεί στη φυσική ωκεανογραφία, ως κύματα που “εμφανίζονται από το πουθενά και εξαφανίζονται χωρίς να αφήσουν ίχνος” στον ωκεανό, έχοντας πλάτος τουλάχιστον 3-4 φορές μεγαλύτερο από το μέσο πλάτος των υπολοίπων κυμάτων [140], αλλά και σε άλλες περιοχές, όπως στη μη γραμμική οπτική [141]. Εδώ, θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η εξίσωση NLS έχει τέτοιου είδους ακριβείς λύσεις, της μορφής “πνοών”, που είναι ρητές συναρτήσεις (και επομένως αποσβέννυνται αλγεβρικά στο χώρο, και όχι εκθετικά όπως τα συνήθη σολιτόνια) και περιγράφουν τέτοια γιγαντιαία κύματα. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι λύσεις αυτές είναι τα λεγόμενα “σολιτόνια Peregrine” [142–144].

Πράγματι, η διέγερση και εμφάνιση των γιγαντιαίων κυμάτων στο μαγνητισμένο πλάσμα μπορεί να προβλεφθεί στο πλαίσιο των Εξ. (A.2)-(A.8): η αριθμητική ολοκλήρωση των Εξ. (A.2)-(A.8) με αρχικές συνθήκες δύο σολιτόνια, έδειξε ότι η αλληλεπίδραση αυτών των σολιτονίων οδηγεί - στη φάση της σύγκρουσής τους - στον σχηματισμό ενός “μεταβατικού” φαινομένου, όπου σχηματίζεται ένα γιγαντιαίο κύμα, βλ. Σχ. Α.3. Είναι σημαντικό να ειπωθεί

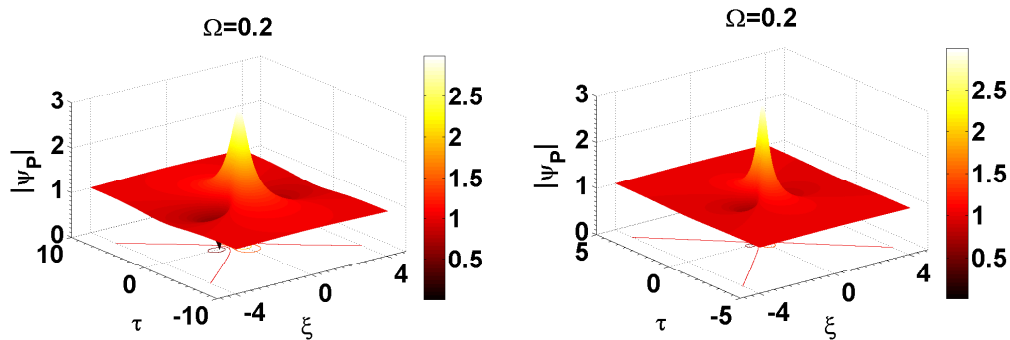


Σχήμα Α.3: Ο σχηματισμός ενός γιγαντιαίου κύματος ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης δύο σολιτονικών παλμών [136].

ότι η χωρο-χρονική κατανομή αυτού του κύματος προσομοιώνεται πολύ καλά από την αντίστοιχη κατανομή του σολιτονίου Peregrine, που έχει τη μορφή

$$\Psi(X, T) = \left[1 - \frac{4(1 + i2QT)}{1 + 2QX^2/D + 4Q^2T^2} \right] \exp(iQT) \quad (\text{A.19})$$

και απεικονίζεται στο Σχ. (A.4), όπου D και Q είναι οι συντελεστές διασποράς και μη γραμμικότητας της Εξ. (A.18).



Σχήμα A.4: Το σολιτόνιο Peregrine με $k = 0.5$, $\Omega = 0.2$: για RCP κύμα (αριστερή εικόνα) και για LCP κύμα στην υψηλή περιοχή συχνοτήτων (δεξιά εικόνα).

Από την παραπάνω συζήτηση, γίνεται φανερό ότι η διεπιστημονικότητα των μεθόδων, που χαρακτηρίζει τη διατριβή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση φαινομένων όχι μόνο στην περιοχή των μεταλλικών, αλλά και σε άλλες περιοχές της Φυσικής - όπως, εν προκειμένω, της Φυσικής Πλάσματος.

Παράρτημα Β

Θεωρία διαταραχών

Σε αυτό το Παράρτημα, θα περιγράψουμε τη θεωρία διαταραχών, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής για τη μελέτη του μη γραμμικού εντοπισμού της ΗΜ ισχύος στα μη γραμμικά μεταυλικά. Προκειμένου να συμπεριληφθούν όλες οι περιπτώσεις που μελετήθηκαν (μία ή δύο συζευγμένες εξισώσεις NLS για σολιτόνια σε μία ή σε δύο ζώνες της σχέσης διασποράς), αναλύουμε τη γενικότερη περίπτωση της μη γραμμικής CRLH γραμμής (βλ. Κεφ.3), της οποίας η σχέση διασποράς δίνεται από την Εξ. (3.10).

Η σχέση διασποράς απεικονίζεται στο Σχ. 3.2 και είναι σαφές ότι υπάρχουν δύο ζώνες συχνοτήτων, όπου η διάδοση των ΗΜ κυμάτων είναι δυνατή: η αριστερόστροφη (LH) ζώνη (περιοχή χαμηλών συχνοτήτων) και η δεξιόστροφη (RH) ζώνη (περιοχή υψηλών συχνοτήτων). Η ύπαρξη των LH και RH κλάδων στην σχέση διασποράς υποδεικνύει ότι στη μη γραμμική περίπτωση είναι δυνατή η σύζευξη μεταξύ LH και RH τρόπων στη CRLH γραμμή με ίσες ταχύτητες ομάδας.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα βασίζονται στην χρήση της ημιδιακριτής προσέγγισης, η οποία είναι μια παραλλαγή της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων [145, 146]. Εισάγουμε τις νέες ανεξάρτητες χρονικές μεταβλητές, $t_m = \epsilon^m t$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) και αναπτύσσουμε τον τελεστή της χρονικής παραγώγου ως $\partial_t = \partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \dots$. Αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης (3.5) της μορφής:

$$V_n = \sum_{m=1} \epsilon^m u_{mn}(t_m) + \text{c.c.} \quad (\text{B.1})$$

όπου ο δείκτης n αναφέρεται στις κυψελίδες του πλέγματος. Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την Εξ.(B.1) στην Εξ.(3.5) και χρησιμοποιούμε τη συνεχή προσέγγιση για τις συναρτήσεις u_{mn} , δηλαδή $u_{mn} \rightarrow u_m(x)$, όπου $x = nh$ και h είναι το μήκος της μοναδιαίας κυψελίδας (η τελευταία παράμετρος δεν εμφανίζεται στα παρακάτω αποτελέσματα καθώς κάναμε αλλαγή κλίμακας στο x ως x/h). Επιπλέον, εισάγουμε τις νέες χωρικές μεταβλητές $x_m = \epsilon^m x$ και αναπτύσσουμε τον

τελεστή της χωρικής παραγώγου ως $\partial_x = \partial_{x_0} + \epsilon \partial_{x_1} + \dots$. Τώρα, αναζητούμε μια λύση της μορφής:

$$u_1 = \sum_{j=1}^2 V_j(x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots) \exp(i\theta_j) + \text{c.c.}, \quad (\text{B.2})$$

όπου οι δείκτες $j = 1$ και $j = 2$ αντιστοιχούν στις LH και RH περιοχές συχνοτήτων, V_j είναι μια άγνωστη μιγαδική συνάρτηση περιβάλλουσας, $\theta_j = k_j x_0 - \omega_j t_0$, ενώ οι κυματαριθμοί k_j και οι κυκλικές συχνότητες ω_j ικανοποιούν την σχέση διασποράς σύμφωνα με την Εξ. (3.10). Αντικαθιστώντας την Εξ. (B.2) στην Εξ. (3.5) και εξισώνοντας τους συντελεστές που βρίσκονται στην ίδια τάξη στη μικρή παράμετρο ϵ , λαμβάνουμε τις ακόλουθες (πρώτες τρεις) διαταρακτικές εξισώσεις:

$$\mathcal{O}(\epsilon) : \hat{L}_0 u_1 = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^2) : \hat{L}_0 u_2 + \hat{L}_1 u_1 + \hat{N}_0 u_1^2 = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^3) : \hat{L}_1 u_2 + \hat{L}_2 u_1 + \hat{N}_0 [u_1 u_2 + \mu u_1^3] = 0, \quad (\text{B.5})$$

όπου οι τελεστές \hat{L}_i και \hat{N}_i ($i = 0, 1, \dots$) είναι:

$$\hat{L}_0 = \frac{\partial^4}{\partial t_0^4} + \left(1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k_j}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + \delta^2, \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{L}_1 = 4 \frac{\partial^4}{\partial t_0^3 \partial t_1} + 2 \left(1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k_j}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} - 2i\beta^2 \sin k_j \frac{\partial^3}{\partial t_0^3 \partial x_1}, \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_2 = & \left(1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k_j}{2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_2}\right) - 6 \frac{\partial^4}{\partial t_0^2 \partial t_1^2} + 4 \frac{\partial^4}{\partial t_0^3 \partial t_2} \beta^2 \cos k_j \frac{\partial^4}{\partial t_0^2 \partial x_1^2} \\ & - 4i\beta^2 \sin k_j \frac{\partial^3}{\partial t_0 \partial t_1 \partial x_1} - 2i\beta^2 \sin k_j \frac{\partial^4}{\partial t_0^2 \partial x_2^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{N}_0 = \left(\frac{\partial^4}{\partial t_0^4} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial t_0^2}\right). \quad (\text{B.9})$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την Εξ. (B.2) στην Εξ. (B.4), λαμβάνουμε τη συνθήκη για το μηδενισμό των αιωνίων όρων:

$$\frac{\partial V_j}{\partial t_1} + \left[\frac{\omega_j \beta^2 \sin k_j}{2\omega_j^2 - (1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2 \frac{k_j}{2})} \right] \frac{\partial V_j}{\partial x_1} = 0, \quad (\text{B.10})$$

που υποδηλώνει ότι $V_j = V_j(X, x_2, \dots, t_2, \dots)$, όπου $X = x_1 - v_{g_j} t_1$. Οι ταχύτητες ομάδας v_{g_j} ορίζονται αυτοσυνεπώς ως $v_{g_j} = \partial \omega_j / \partial k_j$ [βλ. Εξ. (3.11)]. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (B.10)

μπορούμε να ορίσουμε, από την Εξ. (B.4), το άγνωστο πεδίο u_2 :

$$\begin{aligned}
 u_2 = & - \sum_{j=1}^2 \frac{4\omega_j^2(4\omega_j^2 - \delta^2)}{G_j(2\omega_j, 2k_j)} V_j^2 \exp(i2\theta_j) - \frac{2[(\omega_1 + \omega_2)^4 - \delta^2(\omega_1 + \omega_2)^2]}{G_3(\omega_1 + \omega_2, k_1 + k_2)} \\
 & \times V_1 V_2 \exp(i(\theta_1 + \theta_2)) - \frac{2[(\omega_1 - \omega_2)^4 - \delta^2(\omega_1 - \omega_2)^2]}{G_4(\omega_1 - \omega_2, k_1 - k_2)} V_1 V_2^* \exp(i(\theta_1 - \theta_2)) \\
 & - \sum_{j=1}^2 F_j(x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots) + \text{c.c.}, \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $G_j(\omega_j, k_j)$ δίνονται από:

$$G_j = -(1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2 k_j)(2\omega_j)^2 + (2\omega_j)^4 + \delta^2. \tag{B.12}$$

Επίσης,

$$G_3 = - (1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2(\frac{k_1 + k_2}{2}))(\omega_1 + \omega_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^4 + \delta^2, \tag{B.13}$$

$$G_4 = - (1 + \delta^2 + 4\beta^2 \sin^2(\frac{k_1 - k_2}{2}))(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^4 + \delta^2. \tag{B.14}$$

Οι συναρτήσεις $F_j(x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots)$ μπορούν να εξαχθούν στην τάξη $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ με τη βοήθεια της εξίσωσης:

$$\hat{L}_2 u_2 + \hat{N}_2 u_1^2 = 0, \tag{B.15}$$

η οποία οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$F_j = - \frac{2\omega_j^2 \delta^2}{\omega_j^4 + \delta^2}. \tag{B.16}$$

Κατόπιν, εξάγουμε την ακόλουθη έκφραση για το u_2 :

$$\begin{aligned}
 u_2 = & - \sum_{j=1}^2 c_j V_j^2 \exp(i2\theta_j) - c_3 V_1 V_2 \exp(i(\theta_1 + \theta_2)) \\
 & - c_4 V_1 V_2^* \exp(i(\theta_1 - \theta_2)) - \sum_{j=1}^2 c_{0j} |V_j|^2 + \text{c.c.}, \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

όπου

$$c_j = \frac{4\omega_j^2(4\omega_j^2 - \delta^2)}{G_j(2\omega_j, 2k_j)}, \tag{B.18}$$

$$c_{0j} = \frac{2\omega_j^2 \delta^2}{\omega_j^4 + \delta^2}. \tag{B.19}$$

$$c_3 = \frac{2[(\omega_1 + \omega_2)^4 - \delta^2(\omega_1 + \omega_2)^2]}{G_3(\omega_1 + \omega_2, k_1 + k_2)}, \quad (\text{B.20})$$

$$c_4 = \frac{2[(\omega_1 - \omega_2)^4 - \delta^2(\omega_1 - \omega_2)^2]}{G_4(\omega_1 - \omega_2, k_1 - k_2)}, \quad (\text{B.21})$$

Τελικά, ορίζοντας τους συντελεστές:

$$A_j = c_{0j} + c_j, \quad (\text{B.22})$$

$$B_{3-j} = c_{03-j} + c_3 + c_4, \quad (\text{B.23})$$

και χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές $X = x_1 - v_g t_1 \equiv \epsilon(n - v_g t)$ και $T = t_2 \equiv \epsilon^2 t$ εξάγουμε, από τη συνθήκη μηδενισμού των αιωνίων όρων στην τάξη $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, τις συζευγμένες εξισώσεις NLS:

$$i\partial_T V_1 + \frac{1}{2}D_1\partial_X^2 V_1 + (g_{11}|V_1|^2 + g_{12}|V_2|^2) V_1 = 0, \quad (\text{B.24})$$

$$i\partial_T V_2 + \frac{1}{2}D_2\partial_X^2 V_2 + (g_{21}|V_1|^2 + g_{22}|V_2|^2) V_2 = 0, \quad (\text{B.25})$$

όπου οι οι συντελεστές διασποράς D_j , οι SPM συντελεστές g_{jj} και οι CPM συντελεστές $g_{j,3-j}$, με $j = 1, 2$, δίνονται από τις εξισώσεις (3.16)-(3.18).

Όπως φαίνεται από τις Εξ. (B.24)-(B.25), απουσία της σύζευξης CPM ($g_{j,3-j} = 0$), η ανάλυση εστιάζεται μόνο στη LH (RH) περιοχή και η εξέλιξη του V_1 (V_2) περιγράφεται από μια απλή εξίσωση NLS,

$$i\partial_T V_1 + P\partial_X^2 V_1 + Q|V_1|^2 V_1 = 0, \quad (\text{B.26})$$

όπως στην περίπτωση του μη γραμμικού ηλεκτρικού πλέγματος (Κεφ. 2) ή της διάταξης του μη γραμμικού ομοεπίπεδου κυματοδηγού με τα ενσωματωμένα SRR (Κεφ. 4).

Είναι εμφανές ότι η παραπάνω ανάλυση είναι μια γενική μέθοδος, που μπορεί να οδηγήσει σε μία ή δύο συζευγμένες εξισώσεις NLS, κατά τη μελέτη ενός μοντέλου μιας μη γραμμικής γραμμής μεταφοράς που παρουσιάζει αριστερόστροφη ή/και δεξιόστροφη συμπεριφορά. Οι αναλυτικές εκφράσεις των συντελεστών διασποράς και μη γραμμικότητας καθορίζονται κάθε φορά από τη μορφή της μη γραμμικής διακριτής κυματικής εξίσωσης, που περιγράφει τη χωροχρονική εξέλιξη της τάσης στο υπό μελέτη σύστημα.

Παράρτημα Γ

Η αστάθεια διαμόρφωσης για τις συζευγμένες εξισώσεις NLS

Σε αυτό το Παράρτημα παρέχουμε αποτελέσματα για την αστάθεια διαμόρφωσης των λύσεων του επίπεδου κύματος των εξισώσεων (3.19)-(3.20). Οι εξισώσεις αυτές επιδέχονται ακριβείς λύσεις συνεχούς κύματος (CW) σταθερού πλάτους $V_{j(0)}$ της μορφής:

$$V_j = V_{j(0)} \exp(-i\varphi_j), \quad (\Gamma.1)$$

όπου $\varphi_j = \left(V_{j(0)}^2 - \lambda_j V_{3-j,(0)}^2 \right) T$ (με $j = 1, 2$). Η ευστάθεια των παραπάνω λύσεων μελετάται θεωρώντας λύσεις των Εξ. (3.19)-(3.20) της μορφής:

$$V_j = (V_{j(0)} + \psi_j) \exp(i\varphi_j) \quad (\Gamma.2)$$

όπου ψ_j είναι μια μικρή διαταραχή. Γραμμικοποιώντας τις προκύπτουσες εξισώσεις ως προς ψ_j και υποθέτοντας ότι

$$\psi_j = p_j \cos(K_p X - \Omega_m T) + iq_j \sin(K_p X - \Omega_m T), \quad (\Gamma.3)$$

όπου K_p και Ω_p είναι ο κυματαριθμός και η συχνότητα της διαταραχής, αντίστοιχα, προκύπτει ένα ομογενές σύστημα τεσσάρων εξισώσεων για τα πλάτη της διαταραχής p_j και q_j . Η απαίτηση ότι το σύστημα δέχεται μη τετριμμένη λύση οδηγεί στην ακόλουθη σχέση διασποράς για τα Ω_p και K_p :

$$\Omega_p^4 - (\rho_1 + \rho_2)\Omega_p^2 + \rho_1\rho_2 - \gamma = 0, \quad (\Gamma.4)$$

όπου

$$\rho_1 = \frac{sK_p^2}{2} \left(\frac{sK_p^2}{2} + 2V_{1(0)}^2 \right), \quad (\Gamma.5)$$

$$\rho_2 = \frac{dK_p^2}{2} \left(\frac{dK_p^2}{2} + 2V_{2(0)}^2 \right), \quad (\Gamma.6)$$

$$\gamma = sd\lambda_1\lambda_2V_{1(0)}^2V_{2(0)}^2. \quad (\Gamma.7)$$

Για να εξηγήσουμε την παρατηρούμενη συμπεριφορά των BD και DB σολιτονίων στις προσομοιώσεις μεγάλης χρονικής διάρκειας, ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση ενός συνεχούς κύματος (δηλαδή $\gamma = 0$), που μεταφέρει ένα σκοτεινό σολιτόνιο. Τότε, υποθέτοντας ότι $\rho_1\rho_2 < 0$ το συνεχές κύμα παρουσιάζει αστάθεια διαμόρφωσης. Αυτό σημαίνει ότι $\text{Im}\{\Omega_p\} \neq 0$, οπότε το πεδίο ψ_j αυξάνεται εκθετικά.

Με βάση τα παραπάνω, η ευστάθεια/αστάθεια του συνεχούς κύματος για τη συνιστώσα του σκοτεινού σολιτονίου στις περιπτώσεις των σολιτονίων τύπου BD και DB έχει ως εξής:

1. Σολιτόνια BD στις περιοχές συχνοτήτων I-IV. Σε αυτή την περίπτωση, $s = +1$, $d < 0$ και $V_{1(0)} = 0$. Έτσι, $\rho_1\rho_2 < 0$ και το συνεχές κύμα εμφανίζει αστάθεια διαμόρφωσης.
2. Σολιτόνια DB στις περιοχές συχνοτήτων II και III. Σε αυτή την περίπτωση $s = -1$, $d > 0$ και $V_{2(0)} = 0$. Ως εκ τούτου, $\rho_1\rho_2 < 0$ το συνεχές κύμα εμφανίζει αστάθεια διαμόρφωσης.
3. Σολιτόνια DB στις περιοχές συχνοτήτων I και III. Σε αυτή την περίπτωση $s = +1$, $d > 0$ και $V_{2(0)} = 0$. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, τώρα είναι $\rho_1\rho_2 > 0$ και επομένως το συνεχές κύμα εμφανίζει ευστάθεια διαμόρφωσης.

Τα παραπάνω αποτελέσματα εξηγούν ποιοτικά τη διαφορετική συμπεριφορά, των BD και DB σολιτονίων στις περιοχές συχνοτήτων I-IV, II-III και των DB σολιτονίων στις περιοχές I-III. Τα τελευταία είναι πιο εύρωστα και έχουν υποστεί λιγότερη παραμόρφωση για τον ίδιο χρόνο διάδοσης από τα BD και DB στις περιοχές I-IV και II-III, αντίστοιχα.

Παράρτημα Δ

Ηλεκτρικά στοιχεία και φυσικές παράμετροι της δομής SRR-CPW

Τα στοιχεία C_R , L_R και L_L που σχετίζονται με τη δομή του ομοεπίπεδου κυματοδηγού (CPW) συνδέονται με τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος με τις ακόλουθες εξισώσεις (βλ. [123]):

$$C_R = 2\epsilon_0 \frac{K(\kappa_0)}{K'(\kappa_0)} + \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1) \frac{K(\kappa_1)}{K'(\kappa_1)} + \epsilon_0(\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) \frac{K(\kappa_2)}{K'(\kappa_2)}, \quad (\Delta.1)$$

$$L_R = \left(1 + \frac{L_{CPW}}{4L_p}\right) L_{CPW} - L_s, \quad (\Delta.2)$$

$$L_L = \frac{1}{2}L_{CPW} + 2L_p. \quad (\Delta.3)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις ϵ_0 είναι η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του κενού, K και K' είναι το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους και η συμπληρωματική του συνάρτηση, αντίστοιχα [147]. Τα ορίσματα αυτών των συναρτήσεων δίνονται από:

$$\kappa_0 = \frac{D}{D + 2G}, \quad \kappa_j = \frac{\sinh\left(\frac{\pi D}{4h_j}\right)}{\sinh\left[\frac{\pi(D+2G)}{4h_j}\right]} \quad (j = 1, 2). \quad (\Delta.4)$$

Οι παράμετροι L_p και $L_{CPW} = 4\epsilon_0(30\pi)^2 K'(\kappa_0)/K(\kappa_0)$ ορίζουν αντίστοιχα την αυτεπαγωγή της παράλληλης ταινίας και την ενεργή αυτεπαγωγή της δομής του ομοεπίπεδου κυματοδηγού (σημειώνεται ότι $L_p \approx 0.36$ nH [96]). Όσον αφορά τις τιμές των παραμέτρων του SRR, L_s και

C_s , αυτές δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις [96]:

$$L_s = \frac{2F^2 L_{\text{CPW}}^2}{L_{\text{SRR}}} \frac{(1 + L_{\text{CPW}}/4L_p)^2}{1 + F^2 L_{\text{CPW}}^2/2L_p L_{\text{SRR}}}, \quad (\Delta.5)$$

$$C_s = \frac{L_{\text{SRR}}^2 C_{\text{SRR}}}{2F^2 L_{\text{CPW}}^2} \left(\frac{1 + F^2 L_{\text{CPW}}^2/2L_p L_{\text{SRR}}}{1 + L_{\text{CPW}}/4L_p} \right)^2. \quad (\Delta.6)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, η παράμετρος $F \approx 0.54$ ορίζει το ποσοστό της περιοχής των σχισμών που καταλαμβάνονται από τους δακτυλίους [96], ενώ οι παράμετροι L_{SRR} και C_{SRR} (οι οποίες ορίζουν την αυτεπαγωγή και τη χωρητικότητα των SRR αντίστοιχα) υπολογίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\mu_0} L_{\text{SRR}} &= \left(r + \frac{w}{2}\right) \ln \left[\frac{8(2r + w)}{w} - 2 \right] + \left(r + d + \frac{3w}{2}\right) \ln \left[\frac{8(2r + 3w + 2d)}{w} - 2 \right], \\ C_{\text{SRR}} &= 4\epsilon_0 \frac{K(\kappa_3)}{K'(\kappa_3)} + 2\epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1) \frac{K(\kappa_4)}{K'(\kappa_4)}. \end{aligned} \quad (\Delta.7)$$

Εδώ, μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, οι παράμετροι r , d και w αντιστοιχούν στην ακτίνα του εσωτερικού δακτυλίου, στην απόσταση μεταξύ του εσωτερικού και εξωτερικού δακτυλίου, και στο εύρος των δακτυλίων (βλ. Σχ. 4.1), αντίστοιχα. Τέλος, τα ορίσματα των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων K και K' είναι:

$$\kappa_3 = \frac{d}{d + 2w}, \quad \kappa_4 = \frac{\sinh\left(\frac{\pi d}{4h_1}\right)}{\sinh\left[\frac{\pi(d+2w)}{4h_1}\right]}. \quad (\Delta.8)$$

Βιβλιογραφία

- [1] V. G. Veselago, Soviet Physics Uspekhi **10**, 509, (1968); Usp. Fiz. Nauk **92**, 517, (1967).
- [2] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000).
- [3] D. R. Smith and N. Kroll, Phys. Rev. Lett. **85**, 2933 (2000).
- [4] D. R. Smith, D. C. Vier, N. Kroll, and S. Schultz, , Appl. Phys. Lett. **77**, 2246 (2000).
- [5] A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, Science **292**, 77 (2001).
- [6] J. B. Pendry, Phys. Rev. Lett. **85**, 3966 (2000).
- [7] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Young, Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).
- [8] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, J. Phys.: Condens. Matter. **10**, 4785 (1998).
- [9] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **47**, 1075 (1999).
- [10] U. Leonhardt, Science **312**, 1777 (2006).
- [11] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Science **312**, 1780 (2006).
- [12] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr and D. R. Smith, Science **314**, 977 (2006).
- [13] N. Fang, H. Lee, C. Sun, and X. Zhang, Science **308**, 534 (2005).
- [14] Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun, and X. Zhang, Science **315**, 1686 (2007).
- [15] I. Smolyaninov, Y. Hung, and C. Davis, Science **315**, 1699 (2007).
- [16] A. Archambault, M. Besbes, and J.J. Greffet, Phys. Rev. Lett. **109**, 097405 (2012).

- [17] C. Park, J.H. Park, C. Rodriguez, H. Yu, M. Kim, K. Jin, S. Han, J. Shin, S. H. Ko, K.T. Nam, Y.H. Lee, Y.H. Cho, and Y. Park, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 113901 (2014).
- [18] A. Alu and N. Engheta, *Phys. Rev. E* **72**, 016623 (2005).
- [19] A. Alu and N. Engheta, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 113901 (2008).
- [20] B. Edwards, A. Alu, M. G. Silveirinha, and N. Engheta, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 153901 (2009).
- [21] Y. Lai H. Chen, Z.Q. Zhang, and C. T. Chan, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 093901 (2009).
- [22] C. Li, X. Meng, X. Liu, F. Li, G. Fang, H. Chen, and C. T. Chan, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 233906 (2010).
- [23] N.A. Zharova, I.V. Shadrivov, A. Zharov and Yu. S. Kivshar, *Opt. Express* **20**, 14954 (2012).
- [24] G. V. Eleftheriades and K. G. Balmain (eds.), *Negative-Refraction Metamaterials. Fundamental Principles and Applications* (Wiley, New Jersey, 2005).
- [25] C. Caloz and T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications* (Wiley, New Jersey, 2006).
- [26] R. Marqués, F. Martín, and M. Sorolla, *Metamaterials with negative parameters. Theory, Design, and Microwave Applications* (Wiley, New Jersey, 2008).
- [27] S. Linden, C. Enkrich, M. Wegener, J.F. Zhou, T. Koschny and C.M. Soukoulis, *Science* **306**, 1351 (2004).
- [28] V.M. Shalaev, W.S. Cai, U.K. Chettiar, H.K. Yuan, A.K. Sarychev, V.P. Drachev and A.V. Kildishev, *Opt. Lett.* **30**, 3356 (2005).
- [29] G. Dolling, C. Enkrich, M. Wegener, C.M. Soukoulis and S. Linden, *Science* **312**, 892 (2006).
- [30] W. Cai and V. Shalaev, *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications* (Springer, New York, 2010).
- [31] F. Bongard, H. Lisek, and J. R. Mosig, *Phys. Rev. B* **82**, 094306 (2010).
- [32] K. J. B. Lee, M.K. Jung, and S. H. Lee, *Phys. Rev. B* **86**, 184302 (2012).

- [33] R.Fleury and A. Alu, Phys. Rev. Lett. **111**, 055501 (2013).
- [34] M. Lapine, M. Gorkunov, and K. H. Ringhofer, Phys. Rev. E **67**, 065601 (2003).
- [35] A. A. Zharov, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **91**, 037401 (2003).
- [36] V. M. Agranovich, Y. R. Shen, R. H. Baughman, and A. A. Zakhidov, Phys. Rev. B **69**, 165112 (2004).
- [37] D.A. Powell, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, Appl. Phys. Lett. **92**, 264104 (2008).
- [38] I. V. Shadrivov, S. K. Morrison, and Yu. S. Kivshar, Opt. Express **14**, 9344 (2006).
- [39] M. Feise, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, Appl. Phys. Lett. **85**, 1451 (2004).
- [40] A. Rose, D. Huang, and D. Smith, Phys. Rev. Lett. **107**, 063902 (2011).
- [41] D. Huang, E. Poutrina, and D. R. Smith, Appl. Phys. Lett. **96**, 104104 (2010).
- [42] A. Popov and V. Shalaev, Opt. Lett. **31**, 2169 (2006).
- [43] K. Narahara, T. Nakamichi, T. Suemitsu, T. Otsuji, and E. Sano, J. Appl. Phys. **102**, 024501 (2007).
- [44] M. Gorkunov, M. Lapine, E. Shamonina, and K. H. Ringhofer, Eur. Phys. J. B **28**, 263 (2002).
- [45] B. Wang, J. Zhou, T. Koschny, and C. Soukoulis, Opt. Express **16**, 16058 (2008).
- [46] I. V. Shadrivov, A. B. Kozyrev, D. W. van der Weide, and Yu. S. Kivshar, Opt. Express **16**, 20266 (2008).
- [47] I. V. Shadrivov, A. B. Kozyrev, D. W. van der Weide, and Yu. S. Kivshar, Appl. Phys. Lett. **93**, 161903 (2008).
- [48] A. Nikolaenko, F. de Angelis, S. Boden, N. Papasimakis, P. Ashburn, E. di Fabrizio, and N. Zheludev, Phys. Rev. Lett. **104**, 153902 (2010).
- [49] R. D. Chowdhury, R. Singh, J. O'Hara, H.-T. Chen, A. Taylor, and A. Azad, Appl. Phys. Lett. **99**, 231101 (2011).
- [50] I. V. Shadrivov, A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, A. Zharov, A. Boardman, and P. Egan, Phys. Rev. E **69**, 016617 (2004).

- [51] I. V. Shadrivov and Yu. S. Kivshar, *J. Opt. A* **7**, S68 (2005).
- [52] R. Hegde and H. Winful, *Micr. Opt. Technol. Lett.* **46**, 528 (2005).
- [53] N. Mattiucci, G. D' Agnano, M. Bloemer, and M. Scalora, *Phys. Rev. E* **72**, 066612 (2005).
- [54] D.R. Smith, S. Schultz, P. Markoš, and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. B* **65**, 195104 (2002).
- [55] C. R. Simovski, *Opt. Spectrosc.* **107**, 726 (2009).
- [56] A. Rose, S. Larouche, D. Huang, E. Poutrina, and D. Smith, *Phys. Rev. E* **82**, 036608 (2010).
- [57] A. Rose, D. Huang, and D. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 063902 (2011).
- [58] D. Huang, E. Poutrina, H. Zheng, and D. Smith, *J. Opt. Soc. Am. B* **28**, 2925 (2011).
- [59] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves* (Oxford University Press, Oxford, 1991).
- [60] A. B. Kozyrev and D. W. van der Weide, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **53**, 238 (2005).
- [61] D. Yemélé and F. Kenmogné, *Phys. Lett. A* **373**, 3801 (2009).
- [62] C. Caloz, A. Sanada, and T. Itoh, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **52**, 980 (2004).
- [63] I. S. Nefedov and S. A. Tretyakov, *Microwave Opt. Tech. Lett.* **145**, 98 (2005).
- [64] O. Sydoruk, E. Shamonina, and L. Solymar, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **40**, 6879 (2007).
- [65] S. Lim, C. Caloz and T. Itoh, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **53**, 161 (2005).
- [66] C. Caloz and T. Itoh, *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **52**, 1159 (2004).
- [67] A. Lai, C. Caloz, and T. Itoh, *IEEE Microwave Magazine* **5**, 34 (2004).
- [68] A. Grbic and G. V. Eleftheriades, *J. Appl. Phys.* **92**, 5930 (2002).
- [69] G. V. Eleftheriades, O. Siddiqui, and A. K. Iyer, *IEEE Microwave Wirel. Compon. Lett.* **13**, 51 (2003).
- [70] F. Martín, F. Falcone, J. Bonache, R. Marqués, and M. Sorolla, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 4652 (2003).

- [71] F. Falcone, T. Lopetegui, M. A. G. Laso, J. D. Baena, J. Bonache, M. Beruete, R. Marqués, F. Martín, and M. Sorolla, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 197401 (2004).
- [72] F. Falcone, F. Martín, J. Bonache, R. Marqués, and M. Sorolla, *Microwave Opt. Technol. Lett.* **40**, 3 (2004).
- [73] F. Aznar, J. Bonache, A. Valcarcel, and F. Martín, *Microwave Opt. Technol. Lett.* **51**, 926 (2009).
- [74] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981).
- [75] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons*, (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
- [76] Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical solitons: from fibers to photonic crystals* (Academic Press, San Diego, 2003).
- [77] A. B. Kozyrev, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, *Appl. Phys. Lett.* **104**, 084105 (2014).
- [78] N.A. Kudryashov, A.I. Maimistov, D.I. Sinelshchikov, *Phys. Letts. A* **376**, 3658 (2012).
- [79] N. Lazarides and G. P. Tsironis, *Phys. Rev. E* **71**, 036614 (2005).
- [80] I. Kourakis and P. K. Shukla, *Phys. Rev. E* **72**, 016626 (2005).
- [81] M. Marklund, P. K. Shukla, L. Stenflo, and G. Brodin, *Phys. Lett. A* **341**, 231 (2005).
- [82] M. Scalora, M. S. Syrchin, N. Akozbek, E. Y. Poliakov, G. D' Aguanno, N. Mattiucci, M. J. Bloemer, and A. M. Zheltikov, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 013902 (2005).
- [83] S. C. Wen, Y. W. Wang, W. H. Su, Y. J. Xiang, X. Q. Fu, and D. Y. Fan, *Phys. Rev. E* **73**, 036617 (2006).
- [84] S. C. Wen, Y. J. Xiang, X. Y. Dai, Z. X. Tang, W. H. Su, and D. Y. Fan, *Phys. Rev. A* **75**, 033815 (2007).
- [85] N. L. Tsitsas, N. Rompotis, I. Kourakis, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. E* **79**, 037601 (2009).
- [86] N. L. Tsitsas, T. P. Horikis, Y. Shen, P. G. Kevrekidis, N. Whitaker, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Lett. A* **374**, 1384 (2010).

- [87] A. B. Kozyrev and D. W. van der Weide, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 254111 (2007).
- [88] I. Kourakis, N. Lazarides, and G. P. Tsironis, *Phys. Rev. E* **75**, 067601 (2007).
- [89] I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, N. A. Zharova, and Yu. S. Kivshar, *Photonics Nanostruct. Fundam. Appl.* **4**, 69 (2006).
- [90] N. Lazarides, M. Eleftheriou, and G. P. Tsironis, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 157406 (2006).
- [91] N. Lazarides, G. Tsironis, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **77**, 065601 (2008).
- [92] K.L. Tsakmakidis, A.D. Boardman, O. Hess, *Nature* **450**, 397 (2007).
- [93] K. Narahara, *Jpn. J. Appl. Phys.* **46**, 5353 (2007).
- [94] K. Narahara, T. Nakamichi, T. Otsuji, and E. Sano, *Jpn. J. Appl. Phys.* **46**, 3123, (2007).
- [95] Z. Wang, Y. Feng, B. Zhu, J. Zhao, and T. Jiang *J. Appl. Phys.* **107**, 094907 (2010).
- [96] F. Aznar, J. Bonache, and F. Martín, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 043512 (2008).
- [97] Y. Tamayama, T. Nakanishi, and M. Kitano, *Phys. Rev. B* **87**, 195123 (2013).
- [98] R. Stearrett and L. Q. English, *J. Phys. D* **40**, 5394 (2007).
- [99] L. Q. English, F. Palmero, A. J. Sievers, P. G. Kevrekidis, and D. H. Barnak, *Phys. Rev. E* **81**, 046605 (2010).
- [100] P. Marquié, J.M. Bilbault, and M. Remoissenet, *Phys. Rev. E* **49**, 828 (1994).
- [101] J. Carbonell, V. E. Boria and D. Lippens, *Microwave Opt. Tech. Lett.* **50**, 474 (2008).
- [102] A. B. Kozyrev and D. W. van der Weide, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **41**, 173001 (2008).
- [103] J. Ogasawara and K. Narahara, *IEICE Electro. Express* **7**, 608 (2010).
- [104] S. Gupta and C. Caloz, in *Proceedings of the IEEE MTT-S International Microwave Symposium, Honolulu, 2007* (IEEE, Piscataway, NJ, 2007), pp. 979–982.
- [105] A. P. Slobozhanyuk, P. V. Kapitanova, I. V. Shadrivov, P. A. Belov, and Yu. S. Kivshar, *JETP Lett.* **95**, 613 (2012).
- [106] J. M. Bilbault, P. Marquié, and B. Michaux, *Phys. Rev. E* **51**, 817 (1995).
- [107] Y. Inoue, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43**, 243 (1977).

- [108] T. Yosinaga, N. Sugimoto and T. Kakutani, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 2122 (1981).
- [109] M. J. Ablowitz, S. D. Nixon, and Y. Zhu, *Phys. Rev. A* **79**, 053830 (2009).
- [110] O. Bahat-Treidel, O. Peleg, M. Segev, and H. Buljan, *Phys. Rev. A* **82**, 013830 (2010).
- [111] L. H. Haddad and L. D. Carr, *Physica D* **238**, 1413 (2009).
- [112] C. Becker, P. Soltan-Panahi, J. Kronjäger, S. Dörscher, K. Bongs, and K. Sengstock, *New J. Phys.* **12** 065025 (2010).
- [113] M. I. Molina and Yu. S. Kivshar, *Opt. Lett.* **35**, 2895 (2010).
- [114] M. J. Ablowitz and Y. Zhu, *Opt. Lett.* **36**, 3762 (2011).
- [115] C.L. Fefferman and M.I. Weinstein, arXiv:1202.3839. see also arXiv:1212.6072.
- [116] J. Yang, *Physica D* **108**, 92 (1997).
- [117] S. V. Manakov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65**, 505 (1973); S. V. Manakov, *Phys. JETP* **38**, 248 (1973).
- [118] G. P. Agrawal, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 880 (1987).
- [119] P. Marquié, J. M. Bilbault, and M. Remoissenet, *Phys. Rev. E* **51**, 6127 (1995).
- [120] A. T. Findikoglu, Q. X. Jia, I. H. Campbell, X. D. Wu, D. Reagor, C. B. Mombourquette, and D. McMurry, *Appl. Phys. Lett.* **66**, 3674 (1995).
- [121] A. T. Findikoglu, Q. X. Jia, D. W. Reagor, and X. D. Wu, *Microwave Opt. Technol. Lett.* **9**, 306 (1995).
- [122] D. Cai, N. Grønbech-Jensen, A. R. Bishop, A. T. Findikoglu, and D. Reagor, *Physica D*, **123**, 291 (1998).
- [123] R. N. Simons, *Coplanar waveguide circuits, components, and systems* (Wiley, New York, 2001).
- [124] M. Lapine and M. Gorkunov, *Phys. Rev. E* **70**, 066601 (2004).
- [125] D. A. Powell, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, *Appl. Phys. Lett.* **95**, 084102 (2009).
- [126] A. B. Kozyrev, H. Kim, A. Karbassi, and D. W. van der Weide, *Appl. Phys. Lett.* **87**, 121109 (2005).

- [127] W. Cui, Y. Zhu, H. Li, and S. Liu, *Phys. Rev. E* **80**, 036608 (2007).
- [128] D. W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations* (Oxford University Press, New York, 2007).
- [129] J. Diblik, M. Feckan, M. Pospisil, V.M Rothos and H. Susanto, *Travelling waves in nonlinear magnetic metamaterials*, in R. Carretero-Gonzalez et al. (eds.), *Localized Excitations in Nonlinear Complex Systems*, *Nonlinear Systems and Complexity* 7, Springer International Publishing Switzerland (2014).
- [130] M. Syafwan, H. Susanto, and S. M. Cox, *Phys. Rev. E* **81**, 026207 (2010).
- [131] H. Susanto, Q.E. Hoq, and P.G. Kevrekidis, *Phys. Rev. E* **74**, 067601 (2006).
- [132] D.A. Zezyulin and V.V. Konotop, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 213906 (2012).
- [133] N. Lazarides and G.P. Tsironis, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 053901 (2013).
- [134] N. Akhmediev and A. Ankiewicz (eds.), *Dissipative Solitons* (Springer, Berlin, 2005).
- [135] O. Sakai, K. Tachibana, *Plasma Sources Sci Technol.* **21**, 013001 (2012).
- [136] V. Saxena, I. Kourakis , G. Sanchez-Arriaga and E. Siminos, *Phys. Lett. A* **377**, 473 (2013).
- [137] A.I. Akhiezer and R.V. Polovin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30**, 915 (1956).
- [138] W.L. Kruer, *The Physics of Laser Plasma Interactions* (Westview Press, 2003).
- [139] M. Kono and M. Skoric, *Nonlinear Physics of Plasmas* (Springer, Berlin, 2010).
- [140] C. Kharif, E. Pelinovsky and A. Slunyaev, *Waves in the Ocean* (Springer, Berlin, 2009).
- [141] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev and J. M. Dudley, *Nature Physics* **6**, 790 (2010).
- [142] D. H. Peregrine, *J. Austral. Math. Soc. B* **25**, 16 (1983).
- [143] K.B. Dysthe and K. Trulsen, *Phys. Scripta* **T82**, 48 (1999).
- [144] V. I. Shrira and V. V. Geogjaev, *J. Eng. Math.* **67**, 11 (2010).
- [145] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory* (Pitman, Boston, 1982).

[146] T. Taniuti and N. Yajima, *J. Math. Phys.* **10**, 1369 (1969).

[147] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (Dover, New York, 1972).

Δημοσιεύσεις

Δημοσιεύσεις σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά

1. L. Q. English, S. G. Wheeler, Y. Shen, G. P. Veldes, N. Whitaker, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Backward-wave propagation and discrete solitons in a left-handed electrical lattice, *Phys. Lett. A* **375**, 1242-1248 (2011).
2. G. P. Veldes, J. Cuevas, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Quasidiscrete microwave solitons in a split-ring-resonator-based left-handed coplanar waveguide, *Phys. Rev. E* **83**, 046608 (2011) (12 pages).
3. G. P. Veldes, J. Borhanian, M. McKerr, V. Saxena, D.J. Frantzeskakis and I. Kourakis, Electromagnetic Rogue Waves in Beam-Plasma Interactions, *J. Opt.* **15**, 064003 (2013) (10 pages). “Highlights of 2013” collection (Editorial certificate awarded).
4. G. P. Veldes, J. Cuevas, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Coupled backward- and forward-propagating solitons in a composite right- and left-handed transmission line, *Phys. Rev. E* **88**, 013203 (2013) (14 pages).
5. M. Agaoglou, V. M. Rothos, D. J. Frantzeskakis, G. P. Veldes, and H. Susanto, Bifurcation results for travelling waves in nonlinear magnetic metamaterials, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **24**, 1450147 (2014) (12 pages).

Συμμετοχές σε συνέδρια

1. Παρακολούθηση του διεθνούς επιστημονικού συνεδρίου “Dynamics in Samos - Workshop on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications”, 31 August - 3 September 2010, Samos, Greece.
2. I. Kourakis, J. Borhanian, V. Saxena, G. P. Veldes, and D. J. Frantzeskakis, “Rogue Waves Associated with Circularly Polarized Waves in Magnetized Plasmas”, 54th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, American Physical Society, 29 October – 2 November, 2012, Providence, Rhode Island, NY, USA.