

Εφαρμογές στη γενική θεωρία της σχετικότητας:  
ο χώρος γύρω από συμπαγή αστροφυσικά  
αντικείμενα

Διδακτορική διατριβή  
του  
Γεωργίου Παππά



Τμήμα Φυσικής  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Πανεπιστημιούπολη, Ζωγράφου  
Αθήνα, Ιούνιος 2012

© Γεώργιος Παππάς, 2012

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής

Οι κάτωθι υπογεγραμμένοι βεβαιώνουν ότι έλαβαν γνώση και πιστοποιούν την επάρκεια της διατριβής με τίτλο **‘Εφαρμογές στη γενική θεωρία της σχετικότητας: ο χώρος γύρω από συμπαγή αστροφυσικά αντικείμενα’** που συνέγραψε ο **Γεώργιος Παππάς** προκειμένου να του απονεμηθεί το **Διδακτορικό Δίπλωμα Φυσικών Επιστημών**.

Τόπος: Αθήνα

Ημερομηνία: Ιούνιος 2012

Επιβλέπον Καθηγητής: \_\_\_\_\_  
Επίκ. Καθηγητής Θεοχάρης Αποστολάτος

Συμβουλευτική επιτροπή: \_\_\_\_\_  
Αν. Καθηγητής Θεοδόσης Χριστοδουλάκης

\_\_\_\_\_

Αν. Καθηγητής Μιχάλης Τσαμπαρλής

Εξεταστική επιτροπή: \_\_\_\_\_  
Καθηγητής Κώστας Κόκκοτας

\_\_\_\_\_

Καθηγητής Νίκος Τετράδης

\_\_\_\_\_

Αν. Καθηγητής Απόστολος Μαστιχιάδης

\_\_\_\_\_

Επίκ. Καθηγητής Νεκτάριος Βλαχάκης

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τόπος: **Αθήνα**

Ημερομηνία: **Ιούνιος 2012**

Συγγραφέας: **Γεώργιος Παππάς**      Αρ. Μητρ.: **200505**

Θέμα: **Εφαρμογές στη γενική θεωρία της σχετικότητας: ο  
χώρος γύρω από συμπαγή αστροφυσικά  
αντικείμενα**

Λέξεις Κλειδιά: γενική σχετικότητα, αναλυτικές λύσεις, αστέρες  
νετρονίων, πολυπολικές ροπές, συστήματα ακτίνων-Χ.

Key words: general relativity, exact solutions, neutron stars,  
multipole moments, X-ray binaries.

Σχολή: **Θετικών Επιστημών**

Τμήμα: **Φυσικής**

Πτυχίο: **Δ.Δ.Φ.Ε.**      Παρουσίαση: **Ιούνιος**      Έτος: **2012**

---

Υπογραφή συγγραφέα

*Στη Μητέρα μου*

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	v
Κατάλογος Πινάκων	viii
Κατάλογος Σχημάτων	xii
Abstract	xxii
Ευχαριστίες	xxiv
Εισαγωγή	1
<b>1 Σχετικιστικά πολύπολα και μέθοδοι κατασκευής λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν</b>	<b>6</b>
1.1 Εισαγωγή στα σχετικιστικά πολύπολα . . . . .	6
1.1.1 Πολύπολα γενικών χωρόχρονων . . . . .	7
1.1.2 Πολύπολα στάσιμων αξονικά συμμετρικών χωρόχρονων . . . . .	10
1.2 Εισαγωγή στις μεθόδους κατασκευής λύσεων των εξισώσεων πεδίου . .	12
1.2.1 Το δυναμικό του Ernst . . . . .	13
1.2.2 Ο μετασχηματισμός του Geroch . . . . .	14
1.2.3 Μέθοδος Sibgatullin και Manko . . . . .	17
1.2.4 Η αναλυτική λύση Two-Soliton . . . . .	22
1.2.5 Η αναλυτική λύση των Manko et al. . . . .	29
<b>2 Σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικών λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν</b>	<b>33</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	33
2.2 Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της αριθμητικής μετρικής . . . . .	35
2.3 Υπολογισμός των πολυπόλων με τη μέθοδο του Ryan . . . . .	40
2.4 Επιπτώσεις της διόρθωσης των πολυπόλων . . . . .	42

<b>3</b>	<b>Πιστότητα του μετασχηματισμού από τις ημι-ισοτροπικές στις Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες:</b>	
	<b>Προαπαιτούμενο για τη σύγκριση μετρικών</b>	<b>49</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	50
3.2	Μετασχηματισμός συντεταγμένων στο κενό . . . . .	52
3.3	Υπολογισμός των συντεταγμένων Weyl-Παπαπέτρου . . . . .	55
3.4	Εκτίμηση των αριθμητικών σφαλμάτων . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Ένας κατάλληλος αναλυτικός χωροχρόνος για το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων</b>	<b>63</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	63
4.2	Η αναλυτική λύση και οι αστέρες νετρονίων . . . . .	67
4.3	Αντιστοίχιση των αναλυτικών λύσεων με τις αριθμητικές . . . . .	73
4.4	Σύγκριση της αναλυτικής με την αριθμητική μετρική . . . . .	75
	4.4.1 Αποτελέσματα της σύγκρισης . . . . .	79
4.5	Συμπεράσματα . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Εφαρμογή της Two-Soliton σε αστροφυσικά προβλήματα</b>	<b>88</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	88
5.2	Οι συχνότητες ως συναρτήσεις των πολυπόλων . . . . .	92
5.3	Ο χωροχρόνος γύρω από τους αστέρες νετρονίων . . . . .	96
5.4	Παρεμβολή των συχνοτήτων με τις ασυμπτωτικές εκφράσεις . . . . .	99
5.5	Προσαρμογή των συχνοτήτων σε πρότυπα ( «τεφίγραμμα» συχνοτήτων )	102
5.6	Ξεχωρίζοντας τις διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις για τους αστέρες νετρονίων . . . . .	107
5.7	Συμπεράσματα . . . . .	110
<b>A'</b>	<b>Αριθμητικά μοντέλα αστέρων νετρονίων με τον κώδικα RNS</b>	<b>112</b>
A'.1	Κώδικας RNS . . . . .	112
A'.2	Επιλογή των αριθμητικών μοντέλων . . . . .	115
<b>B'</b>	<b>Περαιτέρω ανάλυση των επιπτώσεων της διόρθωσης στα σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικών λύσεων</b>	<b>117</b>
B'.1	Η σχέση των ανώτερων πολυπόλων με την παράμετρο περιστροφής . . .	117
B'.2	Σύγκριση του αριθμητικού χωροχρόνου με αυτόν των Manko et al. . .	120
B'.3	Επιπτώσεις της διόρθωσης στο $R_{ISCO}$ . . . . .	129
<b>Γ'</b>	<b>Η μετρική Schwarzschild σε ημι-ισοτροπικές και Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες</b>	<b>133</b>
<b>Δ'</b>	<b>Η μετρική Kerr σε ημι-ισοτροπικές και Weyl-Παπαπέτρου συντεταγ- μένες</b>	<b>135</b>
<b>Ε'</b>	<b>Η μετρική Hartle-Thorne</b>	<b>138</b>

ϛ' Γενικός μετασχηματισμός σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου	141
Z' Υπολογισμός ποσοτήτων των γεωδαισιακών	144
H' Συμπληρωματικά αποτελέσματα της σύγκρισης της Two-Soliton	148
H'.1 Αντιστοίχιση μιας αναλυτικής γεωμετρίας με μία αριθμητική . . . . .	148
H'.2 Παράμετροι των μοντέλων και σύγκριση στην ISCO . . . . .	150
H'.3 Σύγκριση των μετρικών συναρτήσεων και των παραμέτρων των τροχιών	153
Θ' Πολυώνυμα Legendre και Gegenbauer	158
I' Περαιτέρω ανάλυση στα QPOs	161
I.1 Οι συχνότητες συναρτήσεων των πολυπολικών ροπών . . . . .	161
I.2 Αριθμητικά μοντέλα και αναλυτικές συχνότητες . . . . .	163
I.3 Παρεμβολή των συχνοτήτων με τις ασυμπτωτικές εκφράσεις . . . . .	166
I.4 Προσαρμογή των συχνοτήτων σε πρότυπα . . . . .	169
I.5 Σύγκριση ανάμεσα στις συχνότητες των αστέρων νετρονίων και της με- τρικής Kerr . . . . .	172
Βιβλιογραφία	175

# Κατάλογος Πινάκων

- 1.1 Κατηγοριοποίηση των λύσεων της Two-Soliton ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν οι ποσότητες  $d$ ,  $\kappa_{\pm}$ ,  $\xi_{\pm}$ ,  $R_{\pm}$  και  $r_{\pm}$ . Στον πίνακα εμφανίζονται και οι διάφορες συζυγίες ανάμεσα στις παραμέτρους. Οι τύποι που εμφανίζουν εκφυλισμούς υποδεικνύονται με ένα \*. . . . . 23
- 4.1 Στον πίνακα αυτό δίνονται για όλα τα μοντέλα τα κατασκευασμένα με την καταστατική εξίσωση AU οι τύποι των αντίστοιχων αναλυτικών λύσεων, οι παράμετροι  $k$  και  $b$  των λύσεων και οι σχετικές διαφορές επί τοις εκατό ανάμεσα στις αριθμητικές και τις αναλυτικές τιμές των  $R_{\text{ISCO}}$ ,  $\eta$  (απόδοση του δίσκου),  $\Omega_{\text{ISCO}}$  και  $(\kappa_z)_{\text{ISCO}}$ , όταν η θέση του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του αστέρα. Στον πίνακα Β'.2 μπορεί να βρει κανείς συμπληρωματικές πληροφορίες των πληροφοριών που αναφέρονται εδώ για τα μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης AU, όπως είναι η μάζα και η στροφορμή και τα άλλα πολύπολα των αντίστοιχων μοντέλων. . . 87
- 5.1 Οι διάφορες συχνότητες υπολογισμένες για τα μοντέλα που παράχθηκαν από την καταστατική εξίσωση L. Οι μάζες και οι ακτίνες (circumferential radii) στον ισημερινό του άστρου και στο ISCO δίνονται σε km. Οι συχνότητες δίνονται σε kHz. Οι συχνότητες υπολογίζονται στο ISCO εκτός από όταν το ISCO βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του άστρου, οπότε και υπολογίζονται στην ακτίνα της επιφάνειας. Αυτές οι περιπτώσεις υποδεικνύονται με έναν αστερίσκο. Οι συχνότητες που δίνουμε είναι γωνιακές συχνότητες, είναι δηλαδή συχνότητες  $\Omega = 2\pi\nu$ . . . . . 98



5.2	Αποτελέσματα της παρεμβολής για την καταστατική εξίσωση FPS. Η σχετική διαφορά ανάμεσα στα πολύπολα που προέκυψαν από την παρεμβολή και στα πραγματικά πολύπολα του χωρόχρονου δίνονται ως ποσοστό %.	101
B'.1	Τα ανηγμένα πολύπολα εκφρασμένα ως πολυώνυμα της παραμέτρου περιστροφής $j$ για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις, $M_n/M^{n+1} = a_0 + a_1j + a_2j^2 + a_3j^3$ . Οι παράμετροι $a_0, a_1, a_2, a_3$ προκύπτουν από την αντίστοιχη καμπύλη καλύτερης προσαρμογής στα δεδομένα. Η παράμετρος $b$ έχει προσεγγιστεί και αυτή με ανάλογης μορφής πολυώνυμα του $j$ . Οι τρεις ανώτεροι υπο-πίνακες αντιστοιχούν στις τρεις ακολουθίες μοντέλων, όπου τα ανηγμένα πολύπολα έχουν προσεγγιστεί με πολυώνυμα ενός μόνο βαθμού, 2ου για το $q$ και 3ου για το $s_3$ . Ο κατώτερος υποπίνακας έχει τις παραμέτρους για τις ακολουθίες τύπου (iii) όπου έχει χρησιμοποιηθεί ένας συνδυασμός δυνάμεων του $j$ για το $q$ και το $s_3$ .	118
B'.2	Καταστατική εξίσωση AU. Δίδονται οι τιμές των πολυπολικών ροπών όπως αυτές διαμορφώνονται μετά τη διόρθωση που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2. Επίσης δίνονται οι σχετικές διορθώσεις των $M_2$ και $S_3$ .	122
B'.3	Καταστατική εξίσωση AU. Δίνονται οι σχετικές διορθώσεις στο $S_3$ της αναλυτικής λύσης Manko et al. εξαιτίας της διόρθωσης του τετραπόλου που εισάγεται σε αυτή. Επίσης παρουσιάζονται οι ολικές αποκλίσεις των μετρικών συναρτήσεων και οι βελτιώσεις αυτών εξαιτίας της χρήσης του διορθωμένου τετραπόλου στην αναλυτική λύση.	124
B'.4	Καταστατική εξίσωση FPS. Ομοίως με τον πίνακα B'.2.	125
B'.5	Καταστατική εξίσωση FPS. Ομοίως με τον πίνακα B'.3.	126
B'.6	Καταστατική εξίσωση L. Ομοίως με τον πίνακα B'.2.	127
B'.7	Καταστατική εξίσωση L. Ομοίως με τον πίνακα B'.3.	128
B'.8	$R_{ISCO}$ για την καταστατική AU.	130
B'.9	$R_{ISCO}$ για την καταστατική FPS.	131

B'.10	$R_{\text{ISCO}}$ για την καταστατική L. . . . .	132
H'.1	Στον πίνακα έχουμε για όλα τα μοντέλα κατασκευασμένα με την καταστατική FPS τους τύπους των αντίστοιχων αναλυτικών λύσεων, τις παραμέτρους $k$ και $b$ και τις σχετικές διαφορές επί τις εκατό ανάμεσα στις αριθμητικές και τις αναλυτικές τιμές των $R_{\text{ISCO}}$ , $\eta$ (απόδοση του δίσκου), $\Omega_{\text{ISCO}}$ και $(\kappa_z)_{\text{ISCO}}$ , όπου $\eta$ θέση του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του αστέρα. Στον πίνακα B'.4 μπορεί να βρει κανείς συμπληρωματικές πληροφορίες των πληροφοριών που αναφέρονται εδώ για τα μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης FPS, όπως είναι η μάζα και η στροφορμή και τα άλλα πολύπολα των αντίστοιχων μοντέλων. . . . .	151
H'.2	Ομοίως με τον πίνακα H'.1 για την καταστατική εξίσωση L. Στον πίνακα B'.6 μπορεί να βρει κανείς συμπληρωματικές πληροφορίες των πληροφοριών που αναφέρονται εδώ για τα μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης L, όπως είναι η μάζα και η στροφορμή και τα άλλα πολύπολα των αντίστοιχων μοντέλων. . . . .	152
I'.1	Οι διάφορες συχνότητες υπολογισμένες για τα μοντέλα που παράχθηκαν από την καταστατική εξίσωση FPS. Οι μάζες και οι ακτίνες (circumferential radii) στον ισημερινό του αστρού και στο ISCO δίνονται σε km. Οι συχνότητες δίνονται σε kHz. Οι συχνότητες υπολογίζονται στο ISCO εκτός από όταν το ISCO βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του αστρού, οπότε και υπολογίζονται στην ακτίνα της επιφάνειας. Αυτές οι περιπτώσεις υποδεικνύονται με έναν αστερίσκο. Στα μοντέλα με τους δύο αστερίσκους τα αριθμητικά υπολογισμένα ISCO είναι οριακά πάνω από την επιφάνεια του αστρού ενώ τα αναλυτικά υπολογισμένα ISCO είναι λίγο μέσα από την επιφάνεια (η σχετική διαφορά ανάμεσα στις δύο τιμές είναι λιγότερο από 3% σε κάθε περίπτωση). Για αυτό το λόγο, στα συγκεκριμένα μοντέλα οι τιμές υπολογίζονται στο ISCO. Οι συχνότητες που δίνουμε είναι γωνιακές συχνότητες, είναι δηλαδή συχνότητες $\Omega = 2\pi\nu$ .	164

I.2	Ομοίως με τον πίνακα I'.2 για την καταστατική εξίσωση AU. . . . .	165
I.3	Αποτελέσματα της παρεμβολής για την καταστατική εξίσωση L. Η σχετική διαφορά ανάμεσα στα πολύπολα που προέκυψαν από την παρεμβολή και στα πραγματικά πολύπολα του χωρόχρονου δίνονται ως ποσοστό %. Τα $M$ και $j$ είναι η μάζα και η παράμετρος περιστροφής των αντίστοιχων άστρων. . . . .	167
I.4	Ομοίως με τον πίνακα I'.3 για την καταστατική εξίσωση AU. . . . .	168

# Κατάλογος Σχημάτων

- 1.1 Οι δύο πρώτες γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν τον χώρο των παραμέτρων  $(a/M, b/M, k/M^2)$  της Two-Soliton από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες. Η διδιάστατη επιφάνεια αναπαριστά τον περιορισμό (1.2.39). Η τρίτη γραφική παράσταση απεικονίζει το επίπεδο  $k/M^2 = 0$ , όπου βρίσκονται όλες οι λύσεις Kerr. Η γραμμή  $a/M = 0$  είναι η λύση Schwarzschild. Οι δύο υπερβολές που έχουμε σχεδιάσει στο επίπεδο  $k/M^2 = 0$  είναι τα σημεία επαφής της επιφάνειας (1.2.39) με το επίπεδο της Kerr. Οι υπερβολές αυτές αντιστοιχούν σε  $|a| > M$ . . . . . 26
- 2.1 Ένα τυπικό λογαριθμικό γράφημα της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αριθμητική και την αναλυτική μετρική ( $\Delta g_{ij} = (g_{ij}^n - g_{ij}^a)/g_{ij}^n$ ) για ένα συγκεκριμένο αριθμητικό μοντέλο (μοντέλο #16 της καταστατικής εξίσωσης FPS όπως δίνεται στον σχετικό πίνακα στο παράρτημα), πριν (διακεκομμένη γραμμή) και μετά την διόρθωση για το  $M_2$  (διακεκομμένη-εστιγμένη γραμμή). Η αριστερή γραφική παράσταση είναι για την  $g_{tt}$  και η δεξιά είναι για την  $g_{t\phi}$ . Επισημαίνουμε ότι η ολική απόκλιση για τον συγκεκριμένο αστέρα νετρονίων έχει μειωθεί 6.6 φορές για το  $g_{tt}$  και 15.1 φορές για το  $g_{t\phi}$ . Το συγκεκριμένο μοντέλο, σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα που μελετήθηκαν, παρουσιάζει μια μέση βελτίωση στο  $g_{tt}$ . . . . . 45

- 3.1 Το γράφημα απεικονίζει λογαριθμικά την σχετική διαφορά ανάμεσα στην ακριβής τιμή του  $z$  ( $z^{(0)}$ ) και την τιμή του  $z$  που υπολογίζουμε με την αριθμητική ολοκλήρωση ( $z^{(N)}$ ) σε συγκεκριμένα σημεία του πλέγματος (διακεκομμένη γραμμή). Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση στο σφάλμα της μετρικής είναι η  $g_{tt}$  συνιστώσα της μετρικής Schwarzschild και ως πρότυπο για το πλέγμα θεωρήσαμε τον πιο γρήγορα περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων που παρουσιάζεται στον πίνακα 3 στην εργασία [2] με μάζα  $M = 1.864M_{\odot}$  και ισημερινή ακτίνα  $r_e = 10.755$  km. Η σχετική διαφορά της ακριβούς μετρικής  $g_{tt}^{(0)}$  με αυτήν που προκύπτει από την υπολογισμένη μέσω των συντεταγμένων που έχουν προκύψει από την αριθμητική ολοκλήρωση  $g_{tt}^{(N)}$  απεικονίζεται με την συνεχόμενη καμπύλη. Οι σχετικές διαφορές και στις δυο καμπύλες δεν ξεπερνάνε την τιμή  $\sim 10^{-6}$ . Η κατακόρυφη γραμμή δείχνει τη θέση στο άξονα της επιφάνειας του άστρου που χρησιμοποιήθηκε ως πρότυπο για το πλέγμα. 60
- 3.2 Το σχήμα αναπαράγει τη σύγκριση που παρουσιάζεται στο σχήμα 6 της εργασίας [2] (πάνω διακεκομμένη καμπύλη). Η ίδια σύγκριση ανάμεσα στις ίδιες μετρικές απεικονίζεται (κάτω συνεχόμενη καμπύλη) για την περίπτωση όπου ο μετασχηματισμός συντεταγμένων πραγματοποιείται σύμφωνα με τον αλγόριθμο που προτείνουμε εδώ. Η σύγκριση των δύο μετρικών βελτιώνεται πάρα πολύ στην δεύτερη περίπτωση. . . . . 62

- 4.1 Ενδεικτικές μορφές των επιφανειών που ορίζουν το στατικό όριο και τις περιοχές με κλειστές χρονοειδείς καμπύλες για τους διαφορετικούς τύπους των λύσεων. Αριστερά έχουμε τον τύπο Ia, στη μέση τον τύπο IIa και δεξιά τον τύπο III. Οι κόκκινες καμπύλες αντιστοιχούν στο στατικό όριο και οι μαύρες καμπύλες αντιστοιχούν στο σύνορο των περιοχών που μπορεί να έχουμε κλειστές χρονοειδείς τροχιές. Στον τύπο Ia, η περιοχή των κλειστών χρονοειδών τροχιών είναι σε επαφή με τον άξονα και το ίδιο είναι και το σύνορο του στατικού ορίου. Στο τύπο IIa το στατικό όριο είναι σε επαφή με τον άξονα, αλλά η περιοχή των κλειστών χρονοειδών τροχιών δεν είναι. Τέλος στον τύπο III συμβαίνει το αντίστροφο, δηλαδή η περιοχή των κλειστών χρονοειδών είναι σε επαφή με τον άξονα και το στατικό όριο δεν είναι. Για χαμηλές περιστροφές, οι επιφάνειες έχουν την μορφή των πάνω σχημάτων και καθώς αυξάνει η περιστροφή μετασχηματίζονται στις κάτω. . . . . 72
- 4.2 Γραφικές παραστάσεις που υποδεικνύουν τη βέλτιστη επιλογή για την αντιστοίχιση των μετρικών. Αριστερά έχουμε ένα σχήμα που δίνει την τομή των ισοϋψών της «ολικής απόκλισης» για τα  $g_{tt}$  (περίπου οριζόντιες καμπύλες) και  $g_{t\phi}$  (περίπου κατακόρυφες καμπύλες), στη μέση έχουμε τις ισοϋψείς της σχετικής διαφοράς για το  $R_{ISCO}$  και δεξιά έχουμε το αντίστοιχο σχήμα της «ολικής απόκλισης» για το  $\Omega$ . Οι γραφικές παραστάσεις έχουν κατασκευαστεί για το μοντέλο #15 της καταστατικής εξίσωσης AU (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1). . . 75
- 4.3 Οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν διαδοχικά το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική μετρική για τις μετρικές συναρτήσεις  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $\sqrt{g_{\phi\phi}} = R_{circ}$  και  $g_{zz}$  στο ισημερινό επίπεδο και για το  $g_{tt}$  στο άξονα συμμετρίας. Τα σχήματα είναι ενδεικτικά όλων των μοντέλων. Οι συγκεκριμένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1) της καταστατικής εξίσωσης AU. . . . . 80

4.4	<p>Η σχετική διαφορά ανάμεσα στο αριθμητικό και το αναλυτικό <math>R_{\text{ISCO}}</math> για την πρώτη ακολουθία άστρων της καταστατικής AU, όπου η ακτίνα του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του άστρου. . . . .</p>	81
4.5	<p>Τα γραφήματα απεικονίζουν διαδοχικά, επάνω αριστερά την αριθμητική και την αναλυτική τροχιακή συχνότητα <math>\Omega</math> και δεξιά της το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς τους, στη μεσαία σειρά αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες <math>\Omega_\rho</math>, στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες <math>\kappa_\rho</math> και δεξιά τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς των τελευταίων και τέλος κάτω αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες <math>\Omega_z</math>, στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες <math>\kappa_z</math> και κάτω δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική συχνότητα της κατακόρυφης ταλάντωσης κάθετα στο ισημερινό επίπεδο <math>\kappa_z</math>. Οι συγκεκριμένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1) της καταστατικής εξίσωσης AU. . . . .</p>	83
4.6	<p>Αριστερά έχουμε την απεικόνιση του αναλυτικού και του αριθμητικού <math>\Delta\tilde{E}</math> και δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής τους διαφοράς. Οι συγκεκριμένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1) της καταστατικής εξίσωσης AU. . . .</p>	85
5.1	<p>Σχηματική απεικόνιση των διαφόρων πιθανών μηχανισμών που παράγουν τα QPOs. Το σχήμα προέρχεται από την εργασία [36] . . . . .</p>	90

5.2	Γραφικές παραστάσεις των συχνοτήτων για τις τρεις ακολουθίες μοντέλων που περιγράφονται από την καταστατική L. Τα διαγράμματα (a-d) είναι για την ακολουθία (i), (e-h) είναι για την ακολουθία (ii) και (i-l) είναι για την ακολουθία (iii) (βλέπε το Παράρτημα). Όλες οι καμπύλες τερματίζουν στο ISCO. Τα μαύρα τρίγωνα υποδεικνύουν την θέση της επιφάνειας του άστρου για το κάθε μοντέλο για τις περιπτώσεις που το ISCO είναι μέσα από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στις συχνότητες του χωροχρόνου Kerr με ίδιες μάζες και στροφορμές με αυτές των μοντέλων των αστέρων νετρονίων. Η κατακόρυφη εστιγμένη-διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει την μέγιστη παρατηρηθείσα συχνότητα για τα QPOs. . . . .	104
5.3	Το $\Omega_z/\Omega$ ως συνάρτηση του $\Omega$ για την ακολουθία (i) της καταστατικής FPS. Η παράμετρος περιστροφής $j = J/M^2$ αναγράφεται για κάθε μοντέλο στο διάγραμμα. . . . .	106
5.4	Το ίδιο με το σχήμα Γ.1, αλλά για την καταστατική AU. . . . .	106
5.5	Παρατηρήσεις των QPOs συγκρίνονται με πρότυπα συχνοτήτων για τις καταστατικές εξισώσεις (a) L, (b) FPS, και (c) AU. Τα μαύρα τρίγωνα υποδεικνύουν την επιφάνεια του αστέρα (όπου χρειάζεται). Τα γεμάτα τετράγωνα είναι οι παρατηρήσεις της πηγής Sco X-1 και τα άδεια τετράγωνα είναι οι παρατηρήσεις της πηγής Circ X-1. . . . .	107
5.6	Εικονικές συχνότητες QPOs που σχετίζονται με τις μεταπτώσεις του περίαστρου και του επιπέδου της τροχιάς ( $\nu_\rho$ , $\nu_z$ ) ως συναρτήσεις της τροχιακής συχνότητας ( $\nu_u$ ) για τις καταστατικές εξισώσεις (a) L, (b) FPS, και (c) AU. Επειδή η $\Omega_z$ μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, η συχνότητα $\nu_z$ είναι απλά το $ \Omega_z/2\pi $ . Τα χαρακτηριστικά που συζητήσαμε πιο πριν ότι εμφανίζουν οι συχνότητες μετάπτωσης του επιπέδου της τροχιάς για τους αστέρες νετρονίων, δεν υπάρχουν στις αντίστοιχες συχνότητες της γεωμετρίας Kerr. . . . .	109



A'.1 Το πλέγμα στις συντεταγμένες  $x$  και  $\mu$  (αριστερά) και στις συντεταγμένες  $\varpi$  και  $\zeta$  (δεξιά). Τα σημεία, στη γραφική παράσταση αριστερά, από 1 μέχρι 61 (οριζόντιος άξονας) αντιστοιχούν σε  $x$  από 0 μέχρι 1 και τα σημεία από 1 μέχρι 31 (κατακόρυφος άξονας) αντιστοιχούν σε  $\mu$  από 0 μέχρι 1. Η ακτινική συντεταγμένη ορίζεται ως  $r = \frac{xr_e}{1-x}$  και για να μπορέσουμε να έχουμε κάποια εποπτεία δεν έχει γίνει ο σχετικός μετασχηματισμός στην γραφική παράσταση δεξιά. Ακόμα έχουμε ορίσει τις συντεταγμένες  $\varpi = r \sin \theta$  και  $\zeta = r \cos \theta$ . Η κόκκινη γραμμή υποδεικνύει την επιφάνεια του άστρου. . . . . 114

B'.1 Γραφικές παραστάσεις των ανηγμένων πολυπολικών ροπών συναρτήσεως του  $j$  και των αντίστοιχων πολυωνυμικών καμπυλών που τα προσεγγίζουν για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις. Στην αριστερή στήλη έχουμε τις γραφικές για την καταστατική εξίσωση AU, στη μεσαία στήλη έχουμε τις γραφικές για την FPS και στη δεξιά στήλη για την L. Στις γραφικές των  $q$  και  $s_3$ , που φαίνονται στις δύο πάνω σειρές, οι ακολουθίες τύπου (i) είναι σχεδιασμένες με κόκκινο χρώμα, οι ακολουθίες τύπου (ii) είναι με πράσινο χρώμα και οι ακολουθίες τύπου (iii) είναι με μπλε χρώμα. Η γαλάζια καμπύλη δείχνει τα πολυώνυμα που προσεγγίζουν τα ανηγμένα πολύπολα με συνδυασμό δυνάμεων του  $j$ . Η τελευταία σειρά απεικονίζει την παράμετρο  $b$  και τα αντίστοιχα πολυώνυμα. Τα χρώματα είναι ίδια όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα. . . . . 119

B'.2	Γραφικές παραστάσεις της σύγκρισης ανάμεσα στις αναλυτικές μετρικές συναρτήσεις και τις αντίστοιχες αριθμητικές, με και χωρίς τη διόρθωση στο τετράπολο. Η πάνω σειρά των γραφικών παραστάσεων δείχνει τη σύγκριση στην $g_{tt}$ και η κάτω σειρά δείχνει τη σύγκριση στη $g_{t\phi}$ . Οι γραφικές είναι για την καταστατική εξίσωση AU και τα μοντέλα στα οποία αντιστοιχούν είναι από αριστερά προς τα δεξιά τα #6, #18 και #29. Οι διακεκομμένες καμπύλες αντιστοιχούν στις μετρικές χωρίς τη διόρθωση στο τετράπολο και οι διακεκομμένες - εστιγμένες αντιστοιχούν στις διορθωμένες. Η βελτίωση της αξιοπιστίας της αναλυτικής μετρικής είναι εμφανής. . . . .	123
B'.3	Ομοίως όπως στο σχήμα B'.2 για την καταστατική FPS. Τα μοντέλα που απεικονίζονται είναι από αριστερά προς τα δεξιά τα #6, #16 και #27. .	123
B'.4	Ομοίως όπως στο σχήμα B'.2 για την καταστατική L. Τα μοντέλα που απεικονίζονται είναι από αριστερά προς τα δεξιά τα #6, #16 και #26. .	124
H'.1	Γραφικές παραστάσεις που υποδεικνύουν τη βέλτιστη επιλογή για την αντιστοίχιση των μετρικών. Τα σχήματα που δείχνουν την τομή των ισοϋψών της «ολικής απόκλισης» για τα $g_{tt}$ (περίπου οριζόντιες καμπύλες) και $g_{t\phi}$ (περίπου κατακόρυφες καμπύλες). Το αριστερά σχήμα είναι για το μοντέλο #15 της καταστατικής εξίσωσης AU (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.2 και 4.1) που υπάρχει και στο κεφάλαιο 4. Το μεσαίο σχήμα είναι για το μοντέλο #28 της καταστατικής εξίσωσης AU και τέλος το δεξί σχήμα είναι για το μοντέλο #28 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.6 και H'.2). . . . .	149
H'.2	Η σχετική διαφορά ανάμεσα στο αριθμητικό και το αναλυτικό $R_{ISCO}$ , αριστερά για την πρώτη, στη μέση για τη δεύτερη και δεξιά για την τρίτη ακολουθία άστρων της καταστατικής AU, όπου η ακτίνα του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του άστρου. . . . .	150
H'.3	Ομοίως με το σχήμα H'.2 για την καταστατική FPS. . . . .	150
H'.4	Ομοίως με το σχήμα H'.2 για την καταστατική L. . . . .	153

- H'.5 Οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν διαδοχικά το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική μετρική για τις μετρικές συναρτήσεις  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $\sqrt{g_{\phi\phi}} = R_{circ}$  και  $g_{zz}$  στο ισημερινό επίπεδο και για το  $g_{tt}$  στο άξονα συμμετρίας, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης FPS (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.4 και H'.1). Οι πράσινες καμπύλες αντιστοιχούν στη σχετική διαφορά ανάμεσα στην Two-Soliton και την αριθμητική μετρική. Οι μπλε και οι γαλάζιες καμπύλες αντιστοιχούν στη σχετική διαφορά ανάμεσα στη Manko et al. και την αριθμητική μετρική. Η Manko et al., όταν υπάρχουν παράμετροι που να οδηγούν σε λύση της εξίσωσης  $M_2^N - M_2^M = 0$ , έχει γενικά δύο τέτοιες λύσεις. Οι κόκκινες καμπύλες αντιστοιχούν στη σχετική διαφορά ανάμεσα στην Hartle-Thorne και την αριθμητική μετρική. 154
- H'.6 Οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν διαδοχικά, επάνω αριστερά την αριθμητική και την αναλυτική τροχιακή συχνότητα  $\Omega$  και δεξιά της το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς τους, στη μεσαία σειρά αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες  $\Omega_\rho$ , στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες  $\kappa_\rho$  και δεξιά τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς των τελευταίων και τέλος κάτω αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες  $\Omega_z$ , στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες  $\kappa_z$  και κάτω δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική συχνότητα  $\kappa_z$  της κατακόρυφης ταλάντωσης κάθετα στο ισημερινό επίπεδο, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης FPS (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.4 και H'.1). Στα διαγράμματα που παρουσιάζονται οι αναλυτικές καμπύλες μαζί με τις αριθμητικές, με κόκκινο απεικονίζονται οι αριθμητικές ποσότητες και με πράσινο οι αναλυτικές. . . . . 155

H'.7	Αριστερά έχουμε την απεικόνιση του αναλυτικού (πράσινο) και του αριθμητικού (κόκκινο) $\Delta\tilde{E}$ και δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής τους διαφοράς, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης FPS (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.4 και H'.1). . . . .	156
H'.8	Ομοίως με το σχήμα H'.5, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.6 και H'.2). . . . .	156
H'.9	Ομοίως με το σχήμα H'.6, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.6 και H'.2). . . . .	157
H'.10	Ομοίως με το σχήμα H'.7, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.6 και H'.2). . . . .	157
I.1	Γραφικές παραστάσεις των συχνοτήτων για τις τρεις ακολουθίες μοντέλων που περιγράφονται από την καταστατική FPS. Τα διαγράμματα (a-d) είναι για την ακολουθία (i), (e-h) είναι για την ακολουθία (ii) και (i-l) είναι για την ακολουθία (iii) (βλέπε το Παράρτημα A). Όλες οι καμπύλες τερματίζουν στο ISCO. Τα μαύρα τρίγωνα υποδεικνύουν την θέση της επιφάνειας του άστρου για το κάθε μοντέλο για τις περιπτώσεις που το ISCO είναι μέσα από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων. Η κατακόρυφη εστιγμένη-διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει τη συχνότητα $\Omega = 8.3\text{kHz}$ . . . . .	170
I.2	Ομοίως με το σχήμα I.1 για την καταστατική AU. . . . .	171
I.3	Το $\Omega_z/\Omega$ ως συνάρτηση του $\Omega$ για την ακολουθία (i) της καταστατικής L. Η παράμετρος περιστροφής $j = J/M^2$ αναγράφεται για κάθε μοντέλο στο διάγραμμα. . . . .	172
I.4	Συχνότητες της μετάπτωσης του περίαστρου και του επιπέδου της τροχιακής κίνησης ( $\nu_\rho$ , $\nu_z$ ) συναρτήσει της τροχιακής συχνότητας ( $\nu_u$ ) για τα μοντέλα με καταστατικές εξισώσεις L, FPS, και AU (μαύρες καμπύλες) και η σύγκρισή τους με τις αντίστοιχες συχνότητες της μετρικής Kerr (γαλάζιες καμπύλες), οργανωμένες ανά τύπο ακολουθίας (όπως περιγράφει το κείμενο). . . . .	173

I.5 Συχνότητες της μετάπτωσης του περίαστρου και του επιπέδου της τροχιακής κίνησης ( $\nu_\rho$ ,  $\nu_z$ ) ως συναρτήσεις της συχνότητας της κάθετης ταλάντωσης  $\kappa_z/2\pi$  (δεξί σχήμα) και η σύγκριση με τις αντίστοιχες γραφικές όπου το QPO της μεγαλύτερης συχνότητας υποτίθεται ότι είναι η τροχιακή συχνότητα ( $\nu_u$ ) (σχήμα αριστερά). Οι γραφικές είναι για την καταστατική L. . . . . 174

# Abstract

The study of the astrophysical phenomena that take place in the environment of compact objects offers an unprecedented opportunity to explore the boundaries of known physics. On the one hand the properties of the spacetime itself will provide us with insight to the properties of gravity and may serve as a test of Einstein's theory of relativity in strong gravity regions where it has been poorly tested and on the other hand the same properties will allow the mapping of the internal structure of these compact objects, which in the case of neutron stars would provide information on the properties of matter at densities higher than nuclear.

To perform these tasks one needs the best possible description for the geometry of the spacetime around these compact objects. This requirement motivated the current work on the possibility of describing accurately the exterior of neutron stars by using analytic solutions of Einstein's field equations. In what follows we first took all the necessary steps towards developing the tools needed to reliably compare realistic spacetimes of the exterior of neutron stars, constructed through numerical codes, to appropriate analytic spacetimes. In order to do this we corrected the method used up to now to identify the relativistic multipole moments of numerical spacetimes and developed an appropriate algorithm to transform the coordinates from the coordinate system in which the numerical spacetimes are constructed to the coordinate system that the analytic spacetimes are usually given.

Having developed these basic tools we proceeded to compare the spacetime for realistic neutron star models to an analytic one which was constructed to have the

same multipole moments as the numerical one. This matching condition was demonstrated to be a very good choice. For comparison between the two metrics we have proposed several criteria which are geometrical and physical in nature and include potentially measurable properties of the spacetime, that are associated to astrophysical phenomena. Using such criteria for comparison, we have shown that a four parameter analytic metric, the so called Two-Soliton metric, is a very good approximation for describing the spacetime exterior to neutron stars of arbitrary rotation.

By using the Two-Soliton analytic metric, as a metric capable of accurately describing the spacetimes exterior to neutron stars, we have attempted an exploration of the properties of compact objects through the behavior and the properties of the quasi-periodic oscillations (QPOs) of the X-ray flux that is usually observed from the vicinity of such objects. From this investigation, we have identified some interesting properties that the frequencies of these oscillations might display, that could be used, (i) to demonstrate that the nature of these QPOs is related to the orbital motion of accreting material and, (ii) to distinguish compact objects with different equations of state.

# Ευχαριστίες

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο επιβλέποντά μου, Χάρη Αποστολάτο, για την συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια, από τότε που ήμουν ακόμα προπτυχιακός φοιτητής.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τους φίλους και συναδέλφους Θωμά Σωτηρίου, Χάρη Μαρκάκη και Βασίλη Μοσχοβίτη για την συνεργασία που είχαμε και για όλες τις δημιουργικές συζητήσεις που κάναμε πάνω στα θέματα που καλύπτει η συγκεκριμένη διδακτορική διατριβή αλλά και έξω από αυτά.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν στον Νίκο Στεργιούλα για την συνεργασία που είχαμε πάνω στον αριθμητικό του κώδικα, αλλά και για την φιλοξενία στο Αστεροσκοπείο του ΑΠΘ στις αρχές της εκπόνησης αυτού του διδακτορικού. Η επίσκεψή μου στη Θεσσαλονίκη δεν θα ήταν δυνατό να πραγματοποιηθεί χωρίς τη χρηματοδότηση του προγράμματος ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Ι.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Κώστα Κόκκοτα για την φιλοξενία στο πανεπιστήμιο του Tübingen και την δυνατότητα που μου προσέφερε να ξαναβρώ έναν «ρυθμό» στην έρευνά μου μετά τη διακοπή για τη στρατιωτική θητεία. Η επίσκεψή μου στο Tübingen μου έδωσε την ευκαιρία να έρθω σε επαφή με τον Στράτο Μπουτλούκο και τον Κώστα Γλαμπεδάκη, από τους οποίους, ειδικά από τον Κώστα, πήρα πολύ χρήσιμα ερεθίσματα για την παρούσα διατριβή. Τους ευχαριστώ λοιπόν και τους δύο. Και πάλι όλα αυτά δεν θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν χωρίς την χρηματοδότηση του προγράμματος IKYDA.

Οφείλω να ευχαριστήσω τους δασκάλους μου και ιδιαίτερα τους, Απόστολο Μαστιχιάδη, Νεκτάριο Βλαχάκη και Πέτρο Ιωάννου, που τόσο κατά τη διάρκεια των σπουδών μου όσο και κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτού του διδακτορικού αποτέλεσαν πηγές πνευματικής διέγερσης και επιστημονικού ενδιαφέροντος και περιέργειας.

Ακόμα θέλω να ευχαριστήσω όλους τους φίλους και συνοδοιπόρους στους χώρους του τμήματος Φυσικής οι οποίοι με βοήθησαν να αναπτύξω τους επιστημονικούς μου ορίζοντες και ελπίζω να τους βοήθησα και εγώ λιγάκι να αναπτύξουν τους δικούς τους.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τη μητέρα μου για την υποστήριξή της όλα αυτά τα χρόνια και κάτω από όχι ιδανικές οικονομικές συνθήκες. Και θέλω να ευχαριστήσω όλους τους καλούς μου φίλους που δεν έχω αναφέρει παραπάνω, και τους οποίους δεν θα αναφέρω γιατί ξέρουν ποιοι είναι αυτοί, για την υποστήριξή τους μέχρι τώρα.

Αθήνα  
15 Ιουνίου, 2012

Γιώργος Παππάς



# Εισαγωγή

Το αντικείμενο αυτής της μελέτης είναι η αναζήτηση λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Einstein που να μπορούν να περιγράφουν τον χωροχρόνο στο εξωτερικό ενός συμπαγούς αστέρα καθώς και η διερεύνηση των ιδιοτήτων τους σε σχέση με αστροφυσικές διεργασίες. Διεργασίες όπως η πρόσπτωση ύλης από δίσκους προσαύξησης ή η εκπομπή βαρυτικών κυμάτων, που συμβαίνουν στην γειτονιά των Αστέρων Νετρονίων, θα μπορούσαν να μελετηθούν πιο εύκολα αν μπορούσαμε να έχουμε μία αναλυτική έκφραση για τη στάσιμη μετρική του χωροχρόνου στην περιοχή έξω από τον αστέρα.

Οι παραδοσιακά γνωστές λύσεις που περιγράφουν την γεωμετρία ενός στατικού ή ενός στάσιμου χωροχρόνου, δηλαδή η μετρική Schwarzschild και η μετρική Kerr, αν και συχνά χρησιμοποιούνται ως προσεγγίσεις πρώτης τάξης, δεν είναι ικανοποιητικές για να περιγράψουν με ακρίβεια το συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα. Από την μία μεριά η μετρική Schwarzschild αποτυγχάνει να περιγράψει την περιστροφή, ενώ οι περισσότεροι αστέρες νετρονίων είναι ταχέως περιστρεφόμενα σώματα με αποτέλεσμα η στροφορμή να έχει σημαντική συνεισφορά στη γεωμετρία τους. Από την άλλη η μετρική Kerr δεν καταφέρνει να περιγράψει τη συμπεριφορά της τετραπολικής ροπής, αφού γενικά λόγω της περιστροφής η επιφάνεια του αστέρα θα είναι παραμορφωμένη με τρόπο διαφορετικό από αυτόν που θα αντιστοιχούσε στο τετράπολο της Kerr.

Έτσι γίνεται σαφές ότι θα ήταν πολύ χρήσιμο να έχουμε μία αναλυτική λύση, στην οποία να μπορούμε να ρυθμίσουμε τις σημαντικές παραμέτρους του χωροχρόνου. Και όταν αναφερόμαστε σε σημαντικές παραμέτρους, εννοούμε σημαντικές για τους υπολογισμούς μεγεθών όπως τη θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς (ISCO) ή οτιδήποτε άλλο μπορεί να σχετίζεται με το συγκεκριμένο αστροφυσικό πρόβλημα που μελετάμε.

Αρχικά ξεκινάμε με την επιλογή μιας κατάλληλης αναλυτικής λύσης των εξισώσεων πεδίου του Einstein, η οποία να έχει τόσες παραμέτρους όσες χρειάζονται προκειμένου να μπορούμε να ρυθμίσουμε τις ιδιότητες του χωροχρόνου σύμφωνα με την παραπάνω λογική (οι ιδιότητες της μετρικής ρυθμίζονται από τα πρώτα πολύπολα όπως θα δούμε

παρακάτω). Μια τέτοια επιλογή είναι η προτεινόμενη λύση στην εργασία [68], όπου η επιλογή της μετρικής γίνεται μέσω του δυναμικού του Ernst και η πλήρης γεωμετρία παράγεται με την βοήθεια του φορμαλισμού του Sibgatullin. Η λύση αυτή, με 4 παραμέτρους, είναι γνωστή στη βιβλιογραφία και ως Two-Soliton.

Προκειμένου να ελέγξουμε το κατά πόσο η αναλυτική μετρική μπορεί να περιγράψει το εξωτερικό συμπαγών αντικειμένων όπως είναι οι αστέρες νετρονίων, κατασκευάστηκαν με την βοήθεια του RNS κώδικα του Νίκου Στεργιούλα, 30 μοντέλα αστέρων για κάθε μία από 3 καταστατικές εξισώσεις διαφορετικής σκληρότητας, έτσι ώστε να γίνει σύγκριση της αριθμητικά παραγόμενης μετρικής με την αναλυτική μετρική. Οι καταστατικές εξισώσεις που επιλέγησαν ήταν η μαλακή καταστατική AU, η μέσης σκληρότητας FPS και η σκληρή L, ενώ τα 30 μοντέλα για την κάθε μία, κατασκευάστηκαν ως εξελικτικές ακολουθίες (evolutionary sequences), όπως ορίζονται από τους Cook, Shapiro & Teukolsky [7], έτσι ώστε να καλύπτουν όσο γίνεται καλύτερα τον χώρο των λύσεων.

Όμως, η αναλυτική μετρική, όπως αυτή παράγεται από το δυναμικό του Ernst και τον φορμαλισμό του Sibgatullin, δίνεται στις Weyl-Lewis-Papapetrou συντεταγμένες, ενώ η αριθμητική μετρική που παράγει ο κώδικας RNS δίνεται σε ημί-ισοτροπικές (quasi-isotropic) συντεταγμένες. Έτσι προκειμένου να γίνει η σύγκριση των αναλυτικών με τις αριθμητικές μετρικές θα έπρεπε να κατασκευαστεί ένας αλγόριθμος που να παράγει τον μετασχηματισμό από τις ημί-ισοτροπικές στις Weyl-Lewis-Papapetrou συντεταγμένες. Η επιλογή του τρόπου για να πραγματοποιηθεί ο μετασχηματισμός από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο, είναι ένα σημείο που θέλει ιδιαίτερη προσοχή, γιατί προκειμένου ο μετασχηματισμός να είναι σωστός θα πρέπει (α) να αποφεύγει τις περιοχές του χώρου όπου υπάρχει ύλη και (β) να επιλεγεί έτσι ώστε να έχει τα μικρότερα δυνατά αριθμητικά σφάλματα. Ένας τέτοιος αλγόριθμος για τον μετασχηματισμό παρουσιάζεται στην εργασία [52], όπου και βλέπουμε ότι η αριθμητική ακρίβεια του μετασχηματισμού είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει στη συνέχεια την εξαγωγή συμπερασμάτων από την σύγκριση της αναλυτικής με την αριθμητική μετρική.

Για να γίνει η σύγκριση ανάμεσα σε μια αριθμητική μετρική, η οποία αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο αστέρα νετρονίων, και μία αναλυτική μετρική που καθορίζεται από κάποιες παραμέτρους, όπως είναι η μάζα  $M$ , η στροφορμή  $J$  κλπ., θα πρέπει να αποφασίσουμε με ποιο τρόπο θα επιλέξουμε τις τιμές των παραμέτρων της αναλυτικής μετρικής έτσι ώστε να μπορούμε να πούμε ότι η συγκεκριμένη μετρική με τις ιδιαίτερες παραμέτρους της αντιστοιχεί σε κάποιο συγκεκριμένο αστέρα νετρονίων. Η συζήτηση αυτή έχει γίνει στη βιβλιογραφία από τους Stute & Camenzind [72] και από τους Berti & Stergioulas [2]. Για να θεωρήσουμε ότι δύο χωρόχρονοι είναι «ίδιοι» θα πρέπει να

χρησιμοποιήσουμε καθολικές ιδιότητες των χωροχρόνων στην ταυτοποίησή τους. Τα σχετικιστικά πολύπολα είναι τέτοιες ιδιότητες, αφού όπως προκύπτει από την βιβλιογραφία, ένας στάσιμος αξονικά συμμετρικός χωρόχρονος που είναι ασυμπτωτικά επίπεδος καθορίζεται μονοσήμαντα από το φάσμα των πολυπόλων του. Έτσι, ως κριτήριο για την ταύτιση ανάμεσα σε έναν αριθμητικό και έναν αναλυτικό χωρόχρονο, χρησιμοποιήσαμε την ταύτιση των πρώτων τεσσάρων σχετικιστικών πολυπόλων, δηλαδή την μάζα, την στροφορμή, το τετράπολο της μάζας  $Q$  (ή  $M_2$ ) και το οκτάπολο της στροφορμής  $S_3$  (ή  $J_3$ ), του αριθμητικού και του αναλυτικού χωρόχρονου. Η λύση Two-Soliton δίνει την δυνατότητα της ελεύθερης επιλογής των τεσσάρων πρώτων πολυπόλων και αυτός είναι ένας από τους λόγους που την κάνουν πολύ βολική επιλογή.

Προκειμένου να παράγουμε τις αναλυτικές μετρικές που θα αντιστοιχούν στα άστρα νετρονίων, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα σχετικιστικά πολύπολα των αντίστοιχων αριθμητικών μοντέλων. Ο κώδικας RNS, εφαρμόζοντας έναν αλγόριθμο που έχει χρησιμοποιηθεί γενικότερα στην βιβλιογραφία, παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού των πρώτων τεσσάρων πολυπόλων που χρειαζόμαστε. Στην πορεία της εργασίας πάνω στα μοντέλα, διαπιστώθηκε ότι ο γενικά εφαρμοζόμενος αλγόριθμος δεν δίνει τα πραγματικά σχετικιστικά πολύπολα και άρα οι ποσότητες που υπολόγιζε ο κώδικας χρειάζονταν διόρθωση. Το λάθος στον υπολογισμό, το οποίο εμφανίζεται γενικά στη βιβλιογραφία, φάνηκε ότι είχε να κάνει με την ερμηνεία των συντελεστών των ασυμπτωτικών εκφράσεων των μετρικών συναρτήσεων, όπως ήταν αυτές γραμμένες στις ημί-ισοτροπικές συντεταγμένες. Προκειμένου να υπολογισθούν οι σωστές εκφράσεις για τα σχετικιστικά πολύπολα, εφαρμόσαμε μια μέθοδο συσχέτισης των πολυπόλων με τις διάφορες συχνότητες των κυκλικών τροχιών του χωροχρόνου που είχε αναπτυχθεί από τον Ryan [62] για να εφαρμοστεί στην ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων. Τα αποτελέσματα της διόρθωσης στον υπολογισμό των σχετικιστικών πολυπόλων παρουσιάζονται στην εργασία [53]. Αυτό που παρατηρήσαμε ήταν ότι το τετράπολο  $Q$  είχε διόρθωση μέχρι και  $\sim 20\%$ , ενώ το οκτάπολο της περιστροφής είχε διόρθωση μέχρι και  $\sim 40\%$ . Με βάση τις διορθωμένες αυτές παραμέτρους, επαναλάβουμε την δουλειά των Berti & Stergioulas [2] (χρησιμοποιώντας την αναλυτική μετρική που χρησιμοποίησαν οι Berti & Stergioulas) και είδαμε ότι οι διορθωμένες τιμές των πολυπόλων έδιναν βελτίωση στη σύγκριση των μετρικών συναρτήσεων σχεδόν κατά μία τάξη μεγέθους. Ακόμα διαπιστώσαμε ότι τα συμπεράσματα των Laarakkers & Poisson [35] για την σχέση του τετραπόλου με την παράμετρο περιστροφής ( $j = J/M^2$ ) παραμένει ως έχει, δηλαδή  $Q = a_2 j^2 M^3$  (με διαφορετικό όμως συντελεστή από αυτόν που είχαν υπολογίσει οι Laarakkers & Poisson λόγω της διόρθωσης), ενώ επεκτείνεται και στο επόμενο πολύπολο, δηλαδή το οκτάπολο περιστροφής,

και είναι  $S_3 = a_3 j^3 M^4$ .

Έχοντας όλα τα απαραίτητα εργαλεία, προχωρήσαμε στη σύγκριση της αναλυτικής μετρικής Two-Soliton με τις αριθμητικά κατασκευασμένες μετρικές από τον κώδικα RNS. Για την σύγκριση των μετρικών χρησιμοποιήθηκαν κριτήρια που είχαν ως στόχο να ελέγξουν συνολικές γεωμετρικές ιδιότητες των χωροχρόνων καθώς και ιδιότητες οι οποίες έχουν φυσικό περιεχόμενο και μπορούν να συσχετισθούν με παρατηρήσιμα φυσικά μεγέθη ή διαδικασίες. Έτσι οι ποσότητες που χρησιμοποιήθηκαν για την σύγκριση είναι οι ακόλουθες όπως αυτές μπορούν να χωρισθούν σε δύο κύριες κατηγορίες:

- **Μετρικές συναρτήσεις:** Η μετρική συνάρτηση  $g_{tt}$  στο ισημερινό επίπεδο, η οποία σχετίζεται με την βαρυτική ερυθρομετάθεση, η μετρική συνάρτηση  $g_{t\phi}$  στο ισημερινό επίπεδο, η οποία σχετίζεται με την συμπεριστροφή των αδρανειακών συστημάτων στο επίπεδο αυτό, η τετραγωνική ρίζα της  $\phi\phi$  συνιστώσας της μετρικής στο ισημερινό επίπεδο,  $R_{circ} = \sqrt{g_{\phi\phi}}$  που δίνει την ακτίνα του κύκλου πάνω στο ισημερινό επίπεδο με περιφέρεια ίση με αυτή που ορίζεται από το στοιχείο μήκους της μετρικής για σταθερή ακτίνα και χρόνο, και η συνιστώσα  $g_{tt}$  της μετρικής στον  $z$  άξονα.
- **Στάσιμα χαρακτηριστικά του χωρόχρονου:** Η θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς  $R_{ISCO}$ , που είναι χαρακτηριστικό του χωροχρόνου με άμεσο ενδιαφέρον για τους δίσκους προσαύξεσης, η τροχιακή συχνότητα των κυκλικών τροχιών  $\Omega$ , που χαρακτηρίζει με αναλλοίωτο τρόπο τις κυκλικές τροχιές και έχει και αυτή ενδιαφέρον για τους δίσκους, οι επικυκλικές συχνότητες  $(\Omega_\rho, \Omega_z)$  των μικρών διαταραχών από τις κυκλικές τροχιές, που είναι και αυτές αναλλοίωτα χαρακτηριστικά των κυκλικών τροχιών και έχουν και αυτές ενδιαφέρον για την εφαρμογή τους στους δίσκους προσαύξεσης και στη μελέτη και την ερμηνεία των ημι-περιοδικών ταλαντώσεων που παρατηρούμε στις ακτίνες  $X$  (QPOs) από τα διπλά συστήματα ακτίνων  $X$  και τέλος, η μεταβολή της ενέργειας των κυκλικών τροχιών ανά λογαριθμική μεταβολή της τροχιακής συχνότητας,  $\Delta\tilde{E} = -d\tilde{E}/d\ln\Omega$ , η οποία χαρακτηρίζει και αυτή με αναλλοίωτο τρόπο τις κυκλικές τροχιές και μπορεί να συσχετιστεί με την μορφή του εκπεμπόμενου φάσματος από έναν αστροφυσικό λεπτό δίσκο. Οι ποσότητες  $\Omega, \Omega_\rho, \Omega_z$  καθώς και η ποσότητα  $\Delta\tilde{E}$ , μπορούν ακόμα να συνδεθούν και με τις παρατηρούμενες συχνότητες βαρυτικών κυμάτων, οι πρώτες, καθώς και με την φάση των βαρυτικών κυμάτων, η τελευταία, στην περίπτωση που μιλάμε για την πρόπτωση κάποιου συμπαγούς αντικειμένου σε ένα άλλο συμπαγές αντικείμενο πολύ μεγαλύτερης μάζας.

Οι παραπάνω συγκρίσεις πραγματοποιήθηκαν και έδειξαν ότι η αναλυτική μετρική με τα σωστά σχετικιστικά πολύπολα μπορεί και προσεγγίζει από ικανοποιητικά μέχρι πολύ ικανοποιητικά τις αριθμητικές μετρικές σε όλες τις παραπάνω συγκρίσεις. Τα συμπεράσματα αυτά έχουν παρουσιαστεί ως αρχικά αποτελέσματα στην εργασία [55] και θα παρουσιαστούν συνολικά στην εργασία υπό ετοιμασία [54].

Με δεδομένη την εμπιστοσύνη στην αναλυτική μετρική Two-Soliton, προχωρήσαμε στην εφαρμογή σε προβλήματα αστροφυσικού ενδιαφέροντος και συγκεκριμένα στην χρήση των ημι-περιοδικών ταλαντώσεων (QPOs) που παρατηρούνται σε διπλά συστήματα ακτίνων- $X$  προκειμένου να εξάγουμε πληροφορίες για την γεωμετρία του χωροχρόνου γύρω από το εκάστοτε συμπαγές αντικείμενο και ακόμα περισσότερο να εξάγουμε πληροφορίες για την δομή του και την καταστατική εξίσωση που διέπει τη σύστασή του, στην περίπτωση που είναι αστέρας νετρονίων. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το μοντέλο των Stella & Vietri [69, 75] τα QPOs μπορεί να θεωρηθεί ότι σχετίζονται με τις τροχιακές και τις επικυκλικές συχνότητες κάποιας διαταραχής που κινείται σε έναν λεπτό δίσκο σε σχεδόν γεωδαισιακές τροχιές και αδιαβατικά μετακινείται σε συνεχώς μικρότερες ακτίνες μέχρι να φτάσει στην τελευταία ευσταθή τροχιά. Στην εργασία [56] δείξαμε ότι οι παρατηρούμενες συχνότητες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να «μετρήσει» κανείς τα πολύπολα του χωροχρόνου, ουσιαστικά εφαρμόζοντας μια τεχνική που κατασκευάστηκε για τα βαρυτικά κύματα, στις παρατηρήσεις των ακτίνων  $X$ . Ακόμα δείξαμε ότι με τέτοιες παρατηρήσεις, θα μπορούσε κανείς να επιλέξει ανάμεσα στις πιθανές καταστατικές εξισώσεις που μπορούν να περιγράψουν τις ιδιότητες της ύλης στο εσωτερικό των αστερών νετρονίων. Με λίγα λόγια, προτείναμε μια σειρά από εργαλεία που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με παρατηρήσεις από διπλά συστήματα ακτίνων  $X$  έτσι ώστε να διερευνηθεί τόσο η φύση ενός συμπαγούς αντικειμένου όσο και η δομή του.

Η ανά χείρας διδακτορική εργασία συμπληρώνεται από ένα εισαγωγικό κεφάλαιο, στο οποίο παρουσιάζονται σύντομα η θεωρία των σχετικιστικών πολυπόλων και κάποια στοιχεία πάνω στις μεθόδους παραγωγής λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν, καθώς και οι λύσεις που έχουν παραχθεί με τέτοιες μεθόδους και τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στη διερεύνησή μας. Στο τέλος υπάρχει μια σειρά από Παράρτηματα όπου παρέχονται περισσότερες λεπτομέρειες πάνω σε αποτελέσματα ή κάποια τεχνικά θέματα.

# Κεφάλαιο 1

## Σχετικιστικά πολύπολα και μέθοδοι κατασκευής λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο, θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγική παρουσίαση στην έννοια των σχετικιστικών πολυπολικών ροπών και στον υπολογισμό τους για την περίπτωση των στάσιμων και αξονικά συμμετρικών χωρόχρονων. Στη συνέχεια θα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση των μεθόδων παραγωγής αναλυτικών λύσεων που ξεκίνησαν με τον περίφημο μετασχηματισμό του Gerlach και θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο κατασκευής στάσιμων, αξονικά συμμετρικών και ασυμπτωτικά επίπεδων λύσεων που αναπτύχθηκε από τους Sibgatullin και Manko. Τέλος θα παρουσιάσουμε δύο λύσεις που προκύπτουν με αυτόν τον αλγόριθμο, την λύση που θα ονομάζουμε Two-Soliton και την λύση που θα ονομάζουμε Manko et al., τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε σε διάφορες εφαρμογές στα επόμενα κεφάλαια.

### 1.1 Εισαγωγή στα σχετικιστικά πολύπολα

Οι πολυπολικές ροπές στη νευτώνεια βαρύτητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη των ιδιοτήτων του νευτώνειου βαρυτικού δυναμικού και αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο που μπορεί να συνδέσει τα χαρακτηριστικά της πηγής του πεδίου με τις διάφορες ιδιότητες που έχει το πεδίο. Η πιο συνηθισμένη μορφή στην οποία μπορούμε να δούμε τις πολυπολικές ροπές να εμφανίζονται είναι ως συντελεστές στο ανάπτυγμα του βαρυτικού δυναμικού,

$$\Phi(r) = \frac{Q}{r} + \frac{Q_a x^a}{r^3} + \frac{Q_{ab} x^a x^b}{r^5} + \dots \quad (1.1.1)$$

όπου οι ποσότητες,  $Q$ ,  $Q_a$ ,  $Q_{ab}$ , είναι οι πολυπολικές ροπές του δυναμικού και μπορούν εναλλακτικά να εκφραστούν ως ολοκληρώματα στην πηγή, τα οποία είναι της μορφής

$$Q = \int \rho d^3x, \quad Q_a = \int x_a \rho d^3x, \quad Q_{ab} = \int (3x_a x_b - r^2 \delta_{ab}) \rho d^3x, \quad (1.1.2)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα της ύλης ως συνάρτηση της θέσης στην πηγή. Οι ποσότητες αυτές είναι τανυστικές και έχουν κάποιες ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν ως πολύπολα, όπως για παράδειγμα το ότι είναι συμμετρικοί τανυστές με μηδενικό ίχνος. Ένας εναλλακτικός τρόπος να ορίσουμε τις πολυπολικές ροπές του νευτώνειου δυναμικού  $\Phi(r)$  είναι να το κάνουμε με ασυμπτωτική ανάπτυξη στο άπειρο. Αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων που μας μεταφέρει στις συντεταγμένες γύρω από το άπειρο,  $x^a \rightarrow \tilde{x}^a = r^{-2} x^a$ , όπου  $\tilde{r}^2 = \tilde{x}^a \tilde{x}_a = r^{-2}$ , τότε το παραπάνω ανάπτυγμα του δυναμικού θα πάρει τη μορφή

$$\Phi(r) = \tilde{r} (Q + Q_a \tilde{x}^a + Q_{ab} \tilde{x}^a \tilde{x}^b + \dots), \quad (1.1.3)$$

όπου βλέπουμε ότι αν ορίσουμε το δυναμικό  $\tilde{\Phi} = \tilde{r}^{-1} \Phi$  στο άπειρο, τότε οι πολυπολικές ροπές εκφράζονται ως

$$P_{a_1 \dots a_n} = \tilde{D}_{a_n} P_{a_1 \dots a_{n-1}} \Big|_{\infty} = \tilde{D}_{a_1} \dots \tilde{D}_{a_n} \tilde{\Phi} \Big|_{\infty}, \quad (1.1.4)$$

όπου οι παράγωγοι είναι ως προς τις συντεταγμένες στο άπειρο και το δυναμικό στο άπειρο έχει εκφραστεί ως συνάρτηση αυτών των συντεταγμένων και ενός σύμμορφου παράγοντα  $\Omega = \tilde{r}^2$ , στη μορφή  $\tilde{\Phi} = \Omega^{-1/2} \Phi$ .

### 1.1.1 Πολύπολα γενικών χωρόχρονων

Αν και ο ορισμός των πολυπολικών ροπών στη νευτώνεια βαρύτητα είναι αρκετά ευθύς, στη σχετικότητα τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα. Για τον ορισμό των πολυπολικών ροπών έγιναν διάφορες προσπάθειες. Τελικά κατάφεραν να τις ορίσουν, βασισμένοι στον τανυστικό χαρακτήρα τους και τις ιδιότητές τους που είναι πιο κοντά στην λογική που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο για τα νευτώνεια πολύπολα, οι Geroch και Hansen για τις γενικές περιπτώσεις των στατικών και των στάσιμων [14, 18] χωροχρόνων, οι Fodor et al. [11] για τους αξονικά συμμετρικούς χωρόχρονους μέσω του δυναμικού του

Ernst (που θα δούμε παρακάτω) και οι Simon [67] και Thorne [74], οι οποίοι έδωσαν ορισμούς που βρίσκονται πιο κοντά στην αρχική παρουσίαση των νευτώνειων πολύπολων με βάση τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα. Μια αναλυτική παρουσίαση του τρόπου που ορίζονται οι σχετικιστικές πολυπολικές ροπές ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρουσίας μας εδώ. Θα δώσουμε όμως κάποια βασικά σημεία της λογικής με την οποία ορίζονται και κάποια πρακτικά σημεία για τους αξονικά συμμετρικούς χωρόχρονους που μας ενδιαφέρουν περισσότερο.

Όπως κάναμε και για τα νευτώνεια πολύπολα, έτσι και τα σχετικιστικά πολύπολα θα τα ορίσουμε ως ταχυστάς στο άπειρο. Αν θεωρήσουμε αρχικά έναν στατικό χωρόχρονο, αυτός ο χωρόχρονος χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός πεδίου Killing  $\xi^a$  που εκφράζει τη συμμετρία στις χρονικές μεταθέσεις. Το ανάλογο του νευτώνειου βαρυτικού δυναμικού σε αυτό το χωρόχρονο είναι η ποσότητα  $\Psi = \sqrt{-\lambda} - 1$ , όπου  $\lambda = \xi_a \xi^a = g_{tt}$ . Αν χρησιμοποιήσουμε το πεδίο Killing μπορούμε να χωρίσουμε τον χωρόχρονο σε ένα τρισδιάστατο χωρικό κομμάτι με μετρική  $h_{ab} = \lambda g_{ab} + \xi_a \xi_b$ , και την χρονική του εξέλιξη κατά μήκος του πεδίου  $\xi^a$ . Εκτελώντας αυτό το σπάσιμο, η ποσότητα  $\Psi$ , όπως προκύπτει από τις εξισώσεις πεδίου, ικανοποιεί μια εξίσωση παρόμοια με την Laplace στον τρισδιάστατο χώρο που ορίσαμε, κατ' αναλογία με το νευτώνειο πεδίο που ικανοποιεί την Laplace. Για την ακρίβεια, αν ο τρισδιάστατος χώρος που προκύπτει είναι επίπεδος, τότε ικανοποιεί ακριβώς την Laplace.

Για να ορίσουμε τα πολύπολα στο άπειρο, θα πρέπει ο χώρος να διαθέτει την ιδιότητα της ασυμπτωτικής επιπεδότητας. Για να είναι ένας χώρος  $V$  ασυμπτωτικά επίπεδος, θα πρέπει να μπορούμε να ορίσουμε την επέκταση του  $V$ , τον χώρο  $\tilde{V}$  ο οποίος θα περιέχει και το άπειρο ως σημείο και στον οποίο έχουμε ορίσει την μετρική  $\tilde{h}_{ab} = \Omega^2 h_{ab}$  ως συνάρτηση της μετρικής  $h_{ab}$  του χώρου  $V$ , η οποία είναι ομαλή και θετικά ορισμένη παντού στον  $\tilde{V}$  και ακόμα έχει οριστεί ο σύμμορφος παράγοντας  $\Omega$  για τον οποίο έχουμε την απαίτηση να είναι  $C^2$  παντού στο  $\tilde{V}$  και στο σημείο που έχουμε θεωρήσει ως το άπειρο στον καινούριο αυτό χώρο, να ισχύει  $\Omega = 0$ ,  $\tilde{D}_a \Omega = 0$  και  $\tilde{D}_a \tilde{D}_b \Omega = 2\tilde{h}_{ab}$  (όπου η παράγωγος  $\tilde{D}$  είναι η συναλλοίωτη παράγωγος που ορίζεται από την μετρική  $\tilde{h}_{ab}$ ). Αν ο χώρος  $V$  είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, τότε ο χώρος  $\tilde{V}$  υπάρχει και χαρακτηρίζεται με μοναδικό τρόπο από τις παραπάνω επιλογές.

Σε αυτό το χώρο  $\tilde{V}$  μπορούμε να ορίσουμε τα πολύπολα όπως κάναμε και στην νευτώνεια περίπτωση (όπου ο χώρος αυτός υπήρχε και ήταν επίπεδος) ως παραγώγους του δυναμικού  $\tilde{\Psi} = \Omega^{-1/2} \Psi$ , με την διαφορά ότι τώρα τα ανώτερα πολύπολα δεν θα είναι απλά οι παράγωγοι του  $\tilde{\Psi}$  ως προς την μετρική  $\tilde{h}_{ab}$ , αλλά θα υπάρχουν και επιπλέον δερθώσεις που προκύπτουν από το γεγονός ότι ο χώρος δεν είναι επίπεδος όπως συμβαίνει



στη νευτώνεια περίπτωση.

Ένα σημείο που πρέπει να τονίσουμε εδώ είναι η σημασία του σύμμορφου παράγοντα  $\Omega$ . Ο παράγοντας αυτός αντικατοπτρίζει ουσιαστικά την επιλογή του πως θα υπολογίσουμε τις πολυπολικές ροπές, δηλαδή ως προς πιο κέντρο θα τις εκφράσουμε. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι μεταβολές του σύμμορφου παράγοντα οδηγούν σε «ανακάτεμα» των διαφορετικών πολυπόλων μεταξύ τους, όπως ακριβώς ανακατεύονται τα νευτώνεια πολύπολα όταν αλλάζουμε τη θέση του κέντρου ως προς τα οποία τα εκφράζουμε. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ένα νευτώνειο σφαιρικά συμμετρικό πεδίο και υπολογίσουμε το πολυπολικό του ανάπτυγμα ως προς το κέντρο της σφαιρικής κατανομής της ύλης, τότε θα έχουμε μόνο ένα μονόπολο. Αν όμως το υπολογίσουμε ως προς μια θέση μετατοπισμένη ως προς το κέντρο, τότε θα έχουμε και δίπολο στο πεδίο όπως επίσης και ανώτερα πολύπολα τα οποία θα εξαρτώνται από το μονόπολο, δηλαδή την μάζα και κάποιον παράγοντα που έχει να κάνει με την θέση του σημείου ως προς το κέντρο μάζας. Το φαινόμενο αυτό, η εμφάνιση διπόλου δηλαδή, αποτελεί ουσιαστικά και κριτήριο για να καταλάβουμε αν έχουμε κάνει καλή επιλογή του σύμμορφου παράγοντα, αφού δεδομένου του ότι δεν υπάρχουν αρνητικές μάζες, αν τα πολύπολα είναι εκφρασμένα ως προς το κέντρο μάζας, τότε δεν θα πρέπει να υπάρχει δίπολο μάζας.

Τα παραπάνω γενικεύονται και για την περίπτωση των στάσιμων χωρόχρονων, με τη διαφορά ότι τώρα εκτός από το μέτρο του πεδίου Killing θα χρειαστούμε και την στρέψη  $\psi_a$  του πεδίου, που ορίζεται ως

$$\psi_a \equiv \nabla_a \psi = \epsilon_{abcd} \xi^b \nabla^c \xi^d, \quad (1.1.5)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα ότι στο κενό η στρέψη μπορεί να εκφραστεί ως απόκλιση ενός δυναμικού. Αν τώρα ορίσουμε το μιγαδικό δυναμικό του Ernst,  $\mathcal{E} = -\lambda + i\psi$  (το οποίο θα δούμε πιο αναλυτικά όταν θα μιλήσουμε για τις αναλυτικές λύσεις), και από το δυναμικό  $\mathcal{E}$  ορίσουμε το δυναμικό  $\xi$  ως

$$\xi = \frac{1 - \mathcal{E}}{1 + \mathcal{E}} \quad (1.1.6)$$

τότε μέσω αυτού του δυναμικού μπορούμε να εκφράσουμε τις πολυπολικές ροπές ενός στάσιμου χωρόχρονου όπως τις εκφράσαμε με την βοήθεια του δυναμικού  $\Psi$  στην περίπτωση του στατικού χωρόχρονου. Η διαφορά σε αυτή την περίπτωση είναι ότι ενώ στην προηγούμενη περίπτωση είχαμε μόνο μία ακολουθία πολυπολικών ροπών, τις ροπές μάζας, εδώ θα έχουμε δύο, μια ακολουθία πραγματικών και μία ακολουθία φανταστικών ροπών. Οι πραγματικές ροπές εκφράζουν τις ροπές μάζας, ενώ οι φανταστικές ροπές

εκφράζουν τις ροπές της περιστροφής, για τις οποίες δεν υπάρχει νευτώνειο ανάλογο. Άρα μπορούμε να γράψουμε σχηματικά το δυναμικό  $\xi$  ως τη μιγαδική συνάρτηση

$$\xi = \Psi_M + i\Psi_J \quad (1.1.7)$$

από τις παραγωγίσεις του οποίου (αφού το έχουμε εκφράσει στην κατάλληλη μορφή στο άπειρο) και την πρόσθεση των κατάλληλων διορθωτικών όρων, παίρνουμε τελικά τα πολύπολα.

### 1.1.2 Πολύπολα στάσιμων αξονικά συμμετρικών χωρόχρονων

Όπως είδαμε παραπάνω τα πολύπολα μπορούν να εκφραστούν μέσω του δυναμικού του Ernst, και συγκεκριμένα του δυναμικού  $\xi$  που προκύπτει από το δυναμικό του Ernst, με έναν σχετικά ευθύ αλλά όχι απλό τρόπο. Τα πράγματα απλοποιούνται σημαντικά στην περίπτωση που εκτός από στάσιμος, ο χωρόχρονος διαθέτει και αξονική συμμετρία. Η ύπαρξη της αξονικής συμμετρίας έχει ως αποτέλεσμα όλη η πληροφορία των τανυστικών ροπών να εμπεριέχεται στην προβολή τους στον άξονα συμμετρίας. Έτσι, οι πολυπολικές ροπές χαρακτηρίζονται από ένα σύνολο από βαθμωτές ροπές οι οποίες ορίζονται από την έκφραση

$$P_n = \frac{1}{n!} P_{a_1 \dots a_n} z^{a_1} \dots z^{a_n} \Big|_{\infty} \quad (1.1.8)$$

όπου  $P_{a_1, \dots, a_n}$  είναι η τανυστική ροπή τάξης  $n$  και  $z^{a_1} \dots z^{a_n}$  είναι το συμμετρικό και χωρίς ίχνος τανυστικό γινόμενο των μοναδιαίων διανυσμάτων στην διεύθυνση του άξονα συμμετρίας.

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, στην περίπτωση των αξονικά συμμετρικών και στάσιμων χωροχρόνων, η γεωμετρία προσδιορίζεται πλήρως από το δυναμικό του Ernst και συγκεκριμένα από την μορφή που αυτό έχει στον άξονα συμμετρίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα βαθμωτά πολύπολα να μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των παραμέτρων του δυναμικού του Ernst στον άξονα.

Ένας στάσιμος και αξονικά συμμετρικός χωρόχρονος γενικά μπορεί να δοθεί από το στοιχείο μήκους του Παπαπέτρου [51] το οποίο είναι

$$ds^2 = -f (dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]. \quad (1.1.9)$$

όπου οι μετρικές συναρτήσεις εξαρτώνται από τις συντεταγμένες Weyl  $(\rho, z)$ . Το δυναμικό  $\xi$  όπως είπαμε καθορίζει τον χωρόχρονο. Αν γράψουμε το  $\xi$  στις  $(\tilde{\rho}, \tilde{z})$  συντεταγμένες, οι οποίες ορίζονται ως

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{\rho^2 + z^2}, \quad (1.1.10)$$

που είναι οι συντεταγμένες που μας μεταφέρουν γύρω από το σημείο στο άπειρο που είδαμε και παραπάνω, και μετά πάρουμε το  $\tilde{\xi} = \Omega^{-1/2}\xi$ , που είναι το δυναμικό που θα μας δώσει τα πολύπολα, τότε μπορούμε αυτό το δυναμικό να το εκφράσουμε ως προς τα  $(\tilde{\rho}, \tilde{z})$  ως

$$\tilde{\xi} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \tilde{\rho}^i \tilde{z}^j, \quad (1.1.11)$$

όπου τα  $a_{ij}$  είναι μιγαδικές σταθερές. Αυτό το δυναμικό μπορούμε να το γράψουμε στον άξονα συμμετρίας, δηλαδή στο  $\tilde{\rho} = 0$  στη μορφή  $\tilde{\xi}|_0 = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \tilde{z}^n$ , όπου έχουμε ορίσει τα  $m_n$  να είναι οι ποσότητες  $m_n = a_{0n}$ . Από τις εξισώσεις πεδίου προκύπτει ότι όλες οι ποσότητες  $a_{ij}$  μπορούν να προσδιοριστούν από τις ποσότητες  $a_{0j}$ , δηλαδή τα  $m_n$ . Άρα τα  $m_n$  προσδιορίζουν πλήρως το  $\tilde{\xi}$  και άρα κατ' επέκταση προσδιορίζουν και τα πολύπολα του χωροχρόνου. Είπαμε όμως ότι τα πολύπολα μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση του δυναμικού του Ernst στον άξονα  $z$ , δηλαδή στο  $\rho = 0$ . Αν γράψουμε το  $\xi$  ως συνάρτηση του  $\tilde{\xi}$  και αντικαταστήσουμε τις περισπωμένες συντεταγμένες με τις κανονικές, τότε θα έχουμε

$$\xi = \tilde{r}\tilde{\xi} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{\rho^i z^j}{(\rho^2 + z^2)^{i+j+1/2}} \quad (1.1.12)$$

και αν αυτή την έκφραση την γράψουμε στο  $\rho = 0$  θα γίνει

$$\xi(\rho = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^{-n-1}. \quad (1.1.13)$$

Το  $\xi$  από τον ορισμό του είναι εκφρασμένο συναρτήσει του δυναμικού του Ernst, άρα το  $\xi(\rho = 0)$  θα είναι συναρτήσει του δυναμικού του Ernst στον άξονα,  $\mathcal{E}(\rho = 0, z) = e(z)$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n z^{-n} = z \frac{1 - e(z)}{1 + e(z)}. \quad (1.1.14)$$

Άρα αν πάρουμε το ανάπτυγμα της ποσότητας στο δεξί μέρος ως προς το  $x = 1/z$  γύρω

από το  $x = 0$ , οι συντελεστές του αναπτύγματος θα είναι τα μιγαδικά  $m_n$ . Από εκεί και πέρα, τα πολύπολα εκφράζονται συναρτήσει των  $m_n$ . Ενδεικτικά παραθέτω την μορφή που έχουν τα πρώτα πολύπολα συναρτήσει των  $m_n$

$$\begin{aligned}
P_0 &= m_0 \\
P_1 &= m_1 \\
P_2 &= m_2 \\
P_3 &= m_3 \\
P_4 &= m_4 - \frac{1}{7}M_{20}m_0^* \\
P_5 &= m_5 - \frac{1}{21}M_{20}m_1^* - \frac{1}{3}M_{30}m_0^* \\
P_6 &= m_6 + \frac{1}{33}M_{20}m_0^{*2}m_0 - \frac{5}{231}M_{20}m_2^* \\
&\quad - \frac{4}{33}M_{30}m_1^* - \frac{8}{33}M_{31}m_0^* - \frac{6}{11}M_{40}m_0^*, \dots,
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

όπου έχουμε θεωρήσει την ποσότητα  $M_{ij} = m_i m_j - m_{i-1} m_{j+1}$  και το  $*$  δηλώνει το μιγαδικό συζυγές. Όπως είπαμε, τα πολύπολα  $P_n$  θα είναι μιγαδικές ποσότητες γενικά. Στην ρεαλιστική περίπτωση όπου έχουμε λύσεις με κατοπτρική συμμετρία ως προς το ισημερινό επίπεδο, προκύπτει ότι οι μονές ροπές είναι πραγματικές και είναι τα πολύπολα της μάζας, ενώ οι ζυγές ροπές είναι φανταστικές και είναι τα πολύπολα της περιστροφής. Πρακτικά τον παραπάνω αλγόριθμο θα τον εφαρμόσουμε σε επόμενη ενότητα όπου θα συζητήσουμε κάποιες συγκεκριμένες αναλυτικές λύσεις και τα πολύπολά τους.

## 1.2 Εισαγωγή στις μεθόδους κατασκευής λύσεων των εξισώσεων πεδίου

Προχωράμε τώρα στην σύντομη παρουσίαση κάποιων εισαγωγικών στοιχείων στις μεθόδους κατασκευής λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν. Το πρόβλημα της επίλυσης των εξισώσεων πεδίου της γενικής σχετικότητας είναι ένα δύσκολο πρόβλημα και για πολλά χρόνια οι λύσεις που γνωρίζαμε ήταν πολύ λίγες. Μετά τη δεκαετία του 1950 και με σημαντικές δουλειές πάνω στο πεδίο όπως ήταν οι εργασίες του Παπαπέτρου και του Ehlers και αργότερα του Ernst, του Geroch και άλλων, το ερευνητικό πεδίο της παραγωγής λύσεων γνώρισε άνθηση, με το αποκορύφωμα στα μέσα της δεκαετίας του

1970 και στη δεκαετία του 1980. Σημαντικός παράγοντας στην εύρεση λύσεων ήταν πάντα οι συμμετρίες. Είτε ως συμμετρίες που απαιτούσε κανείς από τις λύσεις προκειμένου να απλουστεύσει τις εξισώσεις και να διευκολύνει τη διαδικασία επίλυσής τους, είτε ως συμμετρίες των ίδιων των εξισώσεων που επέτρεπαν από μία γνωστή λύση να οδηγηθεί κανείς σε μια νέα μη τετριμμένη λύση.

### 1.2.1 Το δυναμικό του Ernst

Ένα από τα σημαντικά βήματα που πραγματοποιήθηκαν στην προσπάθεια ανάπτυξης γενικών μεθόδων για την επίλυση των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν, ήταν η διατύπωση του φορμαλισμού του Ernst [9, 10]. Αν ένας χωρόχρονος είναι στάσιμος και διαθέτει αξονική συμμετρία, δηλαδή δέχεται ένα πεδίο Killing  $\xi^a$  που γεννά τις χρονικές μεταθέσεις και ένα πεδίο Killing  $\eta^a$  που γεννά τις στροφές και αυτά τα δύο πεδία μετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή  $[\xi, \eta]^a = \xi^b \nabla_b \eta^a - \eta^b \nabla_b \xi^a = 0$ , τότε η μετρική (στο κενό) μπορεί να γραφεί στη μορφή που είδαμε και παραπάνω

$$ds^2 = -f (dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]. \quad (1.2.1)$$

και οι εξισώσεις πεδίου μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του δυναμικού του Ernst στη μορφή

$$(Re(\mathcal{E}))\nabla^2 \mathcal{E} = \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E}, \quad (1.2.2)$$

όπου το δυναμικό του Ernst ορίζεται όπως είπαμε και παραπάνω συναρτήσει του μέτρου και της στρέψης του  $\xi^a$  ως

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= f + i\psi, \\ f &= -\xi^a \xi_a, \quad \psi_a \equiv \nabla_a \psi = \epsilon_{abcd} \xi^b \nabla^c \xi^d, \end{aligned}$$

ενώ οι παράγωγοι που εμφανίζονται στην (1.2.2) είναι οι παράγωγοι των επίπεδων κυλινδρικών συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Οι εξισώσεις συμπληρώνονται από τις ολοκληρωτικές συνθήκες για την συνάρτηση  $\omega$ ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\rho}{f^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\rho}{f^2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (1.2.4)$$

και τις ολοκληρωτικές συνθήκες για την συνάρτηση της μετρικής που απομένει, την συνάρτηση  $\gamma$  δηλαδή,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\rho}{f^2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{f^2}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}, \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho}{f^2} \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{f^2}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right], \quad (1.2.6)$$

η οποία όπως φαίνεται εξαρτάται πλήρως από τις άλλες δύο μετρικές συναρτήσεις. Αν αντί του δυναμικού  $\mathcal{E}$  θεωρήσουμε το δυναμικό  $\xi = \frac{1-\xi}{1+\xi}$  που είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα, τότε η εξίσωση (1.2.2) παίρνει τη μορφή

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2 \xi^* \nabla \xi \cdot \nabla \xi. \quad (1.2.7)$$

Οι εξισώσεις πεδίου, όπως είναι γραμμένες στην τελευταία τους μορφή, αναδεικνύουν μια πρώτη δυνατότητα που προσφέρει ο φορμαλισμός του Ernst στην κατασκευή οικογενειών λύσεων. Αυτό που βλέπουμε είναι ότι αν έχουμε μία λύση  $\xi$ , τότε αν την πολλαπλασιάσουμε με μια σταθερή φάση, η νέα  $\xi' = e^{ia} \xi$  θα είναι και αυτή λύση. Ακόμα, αυτό που βλέπουμε είναι ότι αν κάνουμε τον μετασχηματισμό  $\xi = -e^{ia} \coth \Psi$ , τότε η νέα συνάρτηση  $\Psi$  θα ικανοποιεί την εξίσωση Laplace,  $\nabla^2 \Psi = 0$ , της οποίας οι λύσεις μπορούν να κατασκευαστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των γνωστών λύσεων που είναι τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή του Laplace και δεν είναι άλλες από τα γνωστά πολύπολα του ηλεκτρομαγνητισμού. Οι λύσεις που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο όταν η φάση είναι  $a = 0$  είναι οι στατικές λύσεις του Weyl [78], ενώ οι λύσεις που προκύπτουν όταν η φάση είναι  $a = \pi/2$  είναι οι λύσεις Παπαπέτρου [51]. Από τον φορμαλισμό του Ernst μπορεί κανείς εύκολα να κατασκευάσει τη λύση του Schwarzschild και την λύση του Kerr.

## 1.2.2 Ο μετασχηματισμός του Geroch

Ας επιστρέψουμε για λίγο στην περίπτωση όπου ο χωροχρόνος έχει ένα πεδίο Killing. Όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε από αυτό το πεδίο Killing το δυναμικό του Ernst (1.2.3) και να ορίσουμε τη μετρική του τρισδιάστατου χώρου

$$h_{ab} = \lambda g_{ab} + \xi_a \xi_b, \quad (1.2.8)$$

όπου έχουμε ορίσει το  $\lambda = -\xi_a \xi^a$ . Σε αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις πεδίου χωρίζονται σε δυο ομάδες εξισώσεων, ένα ζευγάρι για τα πεδία  $\lambda$  και  $\psi$  που ορίσαμε προηγουμένως:

$$\lambda D^2 \lambda = (D_a \lambda)(D^a \lambda) - (D_a \psi)(D^a \psi), \quad (1.2.9)$$

$$\lambda D^2 \omega = 2(D_a \lambda)(D^a \psi), \quad (1.2.10)$$

και τις εξισώσεις

$$R_{ab}^{(3)} = (2\lambda^2)^{-1} [(D_a \lambda)(D_b \lambda) + (D_a \psi)(D_b \psi)], \quad (1.2.11)$$

όπου οι παράγωγοι  $D_a$  και ο τανυστής του Ricci ορίζονται για τον τρισδιάστατο χώρο με την μετρική  $h_{ab}$ . Αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να τις εκφράσουμε ως προς το δυναμικό του Ernst  $\mathcal{E}$  οπότε και θα πάρουν τη μορφή

$$(\mathcal{E} + \mathcal{E}^*)D^2 \mathcal{E} = 2(D_a \mathcal{E})(D^a \mathcal{E}), \quad (1.2.12)$$

$$R_{ab}^{(3)} = \frac{2}{(\mathcal{E} + \mathcal{E}^*)^2} (D_{(a} \mathcal{E})(D_{b)} \mathcal{E}^*), \quad (1.2.13)$$

όπου η παρένθεση στους δείκτες δηλώνει την συμμετροποίηση. Αυτές οι εξισώσεις μοιάζουν πολύ με τις αντίστοιχες εξισώσεις που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα και ειδικά με την εξίσωση (1.2.2). Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι ίδιες, αφού στην προηγούμενη περίπτωση όπου είχαμε δύο πεδία Killing η εξίσωση για τον τανυστή του Ricci είχε αναχθεί απλά σε συνθήκες ολοκλήρωσης για την συνάρτηση  $\gamma$  και οι παράγωγοι σε εκείνη την περίπτωση ήταν αυτές του επίπεδου τρισδιάστατου χώρου, ενώ εδώ οι παράγωγοι είναι του χώρου  $h_{ab}$  που πρέπει να προσδιορίσουμε. Έτσι λοιπόν, οι εξισώσεις αυτές δεν μπορούν να θεωρηθούν εύκολες στη λύση τους, αλλά από τη μορφή τους προκύπτει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Αν θεωρήσουμε μια λύση των εξισώσεων πεδίου που εκφράζεται από ένα δυναμικό  $\mathcal{E}$  και μια μετρική  $h_{ab}$ , τότε το δυναμικό

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{1 + i a \mathcal{E}},$$

σε συνδυασμό με την μετρική  $\tilde{h}_{ab} = h_{ab}$  είναι και αυτά λύση των εξισώσεων πεδίου. Αυτός είναι ο μετασχηματισμός του Geroch [15] και με αυτόν τον τρόπο μπορεί κανείς να κατασκευάσει από μία δεδομένη λύση με ένα πεδίο Killing μια μονοπαραμετρική

οικογένεια λύσεων των εξισώσεων πεδίου. Η νέα λύση που προκύπτει από τον μετασχηματισμό δέχεται και εκείνη το αρχικό πεδίο Killing ως συμμετρία και άρα μπορεί να εφαρμοστεί ξανά ο μετασχηματισμός για να δώσει μια άλλη λύση. Το πρόβλημα είναι ότι με αυτόν τον τρόπο δεν μπορεί να ξεφύγει κανείς από την αρχική μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων όσες φορές και να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός. Το σημαντικό όμως είναι ότι ο μετασχηματισμός του Geroch υποδεικνύει την συμμετρία που έχουν οι εξισώσεις όταν υπάρχουν πεδία Killing και το πως μπορεί κανείς να εκμεταλλευτεί αυτή τη συμμετρία για να παράγει νέες λύσεις. Αυτή η λογική, της διερεύνησης των συμμετριών που έχουν οι εξισώσεις (1.2.12) αλλά και η εξίσωση (1.2.2), οδήγησε στην ανάπτυξη μιας σειράς από αλγορίθμους ικανούς να παράγουν λύσεις με συγκεκριμένη επιλογή παραμέτρων και ιδιοτήτων.

Τα πράγματα είναι πιο ενδιαφέροντα στην περίπτωση όπου έχουμε δύο πεδία Killing, όπως στην περίπτωση των στάσιμων και αξονικά συμμετρικών χωρόχρονων που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Εκεί ο οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των δύο πεδίων Killing είναι και αυτός ένα πεδίο Killing και άρα έχουμε την ευχέρεια να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό του Geroch κάνοντας αρχικά μια επιλογή του γραμμικού συνδυασμού των δύο πεδίων και μετά εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό με βάση αυτό το πεδίο. Στη νέα λύση που προκύπτει, μπορούμε και πάλι να κάνουμε μια επιλογή του γραμμικού συνδυασμού των δύο πεδίων Killing, διαφορετική αυτή τη φορά, και να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό με βάση το δεύτερο πεδίο. Αυτό που προκύπτει είναι ότι δύο τέτοιοι διαδοχικοί μετασχηματισμοί δεν μετατίθενται και άρα ο χώρος των λύσεων που μπορούμε να εξερευνήσουμε είναι πολύ πλουσιότερος από την περίπτωση του ενός μόνο πεδίου Killing. Η αρχική διατύπωση αυτής της μεθόδου, όπου παράγουμε λύσεις από διαδοχές τέτοιων μετασχηματισμών με διαφορετικούς συνδυασμούς πεδίων Killing κάθε φορά, έγινε και πάλι από τον Geroch [16]. Στα τέλη της δεκαετίας του 70 η μέθοδος απογειώθηκε με μία σειρά από εργασίες των Kinnersley, Chitre, Hoenselaers, Ξανθόπουλου και Dietz [28, 29, 32, 31, 30, 25, 26, 80, 79, 8] όπου αναπτύχθηκε ένας πλήρης αλγόριθμος παραγωγής στάσιμων αξονικά συμμετρικών και ασυμπτωτικά επίπεδων λύσεων με εν δυνάμει άπειρο αριθμό παραμέτρων οι οποίες μπορούσαν να συσχετισθούν με το φάσμα των πολυπολικών ροπών του χωρόχρονου που θέλουμε να κατασκευάσουμε, και οι οποίες λύσεις τελικά προκύπτουν με αλγεβρικό τρόπο. Η ομάδα αυτών των μετασχηματισμών καθιερώθηκε με το όνομα, μετασχηματισμοί H-K-X (Hoenselaers-Kinnersley-Xanthopoulos). Παράλληλα με την ανάπτυξη των μεθόδων αυτών από τους Hoenselaers, Kinnersley και Ξανθόπουλο, υπήρχε και η ανάπτυξη ενός εναλλακτικού μηχανισμού παραγωγής λύσεων με βάση τους μετασχηματισμούς του



Geroch, από τους Hauser και Ernst [20, 21, 22, 23, 24] οι οποίοι και έδειξαν ότι με αυτούς τους μετασχηματισμούς μπορεί κανείς να παράγει όλες τις στάσιμες, αξονικά συμμετρικές και ασυμπτωτικά επίπεδες λύσεις των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν, οι οποίες χαρακτηρίζονται με μοναδικό τρόπο από την επιλογή του δυναμικού του Ernst στον άξονα και άρα από τα σχετικιστικά πολύπολα. Περισσότερα για όλα τα παραπάνω μπορεί να βρει κανείς στο [81] και τις εκεί αναφορές. Πάνω στη μέθοδο των Hauser και Ernst είναι βασισμένος ο αλγόριθμος που ανέπτυξαν οι Sibgatullin και Manko [66, 45, 39, 60, 43] από όπου προέκυψαν και οι λύσεις που θα ονομάζουμε παρακάτω ως Two-Soliton [40] και Manko et al. [41, 44], αντίστοιχα.

### 1.2.3 Μέθοδος Sibgatullin και Manko

Όπως είπαμε, οι Sibgatullin και Manko ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο για να παράγουν λύσεις των εξισώσεων πεδίου, βασισμένοι στον φορμαλισμό που ανέπτυξαν οι Hauser και Ernst για να εφαρμόζουν τον μετασχηματισμό του Geroch. Η μέθοδος του Sibgatullin ανάγει το πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης του Ernst, δηλαδή την εξίσωση (1.2.2), στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\sigma)e(\xi)d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \quad (1.2.14)$$

$$-\omega f = \frac{2}{\pi} \text{Im} \left[ \int_{-1}^1 \frac{\xi\mu(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right], \quad (1.2.15)$$

όπου έχουμε ορίσει την παράμετρο  $\xi = z + i\sigma\rho$ , με το  $\sigma$  να παίρνει τιμές στο διάστημα  $[-1, 1]$ , ενώ το  $e(\xi)$  είναι το δυναμικό του Ernst στον άξονα και η συνάρτηση  $\mu(\sigma)$  είναι μια συνάρτηση που πρέπει να προσδιορίσουμε. Από τη μορφή του δυναμικού του Ernst στον άξονα συμμετρίας και από τη συνάρτηση  $\mu(\sigma)$  παράγονται οι λύσεις, όπου η συνάρτηση  $\mu(\sigma)$  πρέπει να ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$\int_{-1}^1 \frac{\mu(\sigma)(e(\xi) + \tilde{e}(\eta))}{(\sigma - \tau)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{\mu(\sigma)d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \pi. \quad (1.2.16)$$

Στα παραπάνω έχουμε ορίσει ακόμα την ποσότητα  $\eta = z + i\tau\rho$ , όπου η παράμετρος  $\tau$  παίρνει και αυτή τιμές στο διάστημα  $[-1, 1]$ , ενώ ορίζουμε την πράξη  $\tilde{e}(\eta) = (e(\eta^*))^*$  με τον αστερίσκο να δηλώνει το μιγαδικό συζυγές. Η ολοκλήρωση με την οριζόντια γραμμή δηλώνει την κύρια τιμή του ολοκληρώματος. Η διαδικασία του πως προκύπτουν

τα παραπάνω ολοκληρώματα ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρουσιάσής μας. Θα παρουσιάσουμε όμως σύντομα τον αλγόριθμο που εισήγαγε ο Sibgatullin και τον οποίο ακολουθεί κανείς για τον προσδιορισμό της συνάρτησης  $\mu(\sigma)$  από την οποία μετά υπολογίζονται το  $\mathcal{E}$  και οι συναρτήσεις της μετρικής. Η επέκταση αυτού του αλγόριθμου οδηγεί στον φορμαλισμό του Manko με τις ορίζουσες που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Ως γενικό αλγόριθμο για την παραγωγή των λύσεων ξεκινάμε με την επιλογή του δυναμικού του Ernst στον άξονα συμμετρίας στην μορφή ρητών συναρτήσεων, δηλαδή ως λόγο κάποιων πολυωνύμων

$$\mathcal{E}(\rho = 0, z) = e(z) = \frac{P(z)}{R(z)}, \quad (1.2.17)$$

όπου τα  $P(z), R(z)$  είναι πολυώνυμα του  $z$  τάξεως  $n$  με συντελεστές που είναι γενικά μιγαδικοί. Το δυναμικό από αυτή την αρχική μορφή, μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$e(z) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{z - \beta_k},$$

όπου τα  $\beta_k$  είναι οι ρίζες του πολυωνύμου  $R(z)$  και  $e_k$  είναι μιγαδικοί συντελεστές που έχουν επιλεγεί έτσι ώστε η τελευταία μορφή του  $e(z)$  να είναι ισοδύναμη με την αρχική. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις  $2n$  ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$e(z) + e(z)^* = 0, \quad (1.2.18)$$

τις οποίες βαφτίζουμε  $\xi_k$  και ζητάμε η συνάρτηση  $\mu(\sigma)$  να έχει τη μορφή

$$\mu(\sigma) = A_0 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{\xi - \xi_k}, \quad (1.2.19)$$

όπου θυμίζουμε ότι  $\xi = z + i\sigma\rho$ . Αν αντικαταστήσουμε την τελευταία εξίσωση και την εξίσωση για το δυναμικό  $e(z)$  στα ολοκληρώματα (1.2.16), τελικά θα πάρουμε από το πρώτο ολοκλήρωμα ένα πολυώνυμο τάξης  $2n$  ως προς την παράμετρο  $\eta$ , του οποίου οι συντελεστές ανάγονται σε απλά ολοκληρώματα, και από την απαίτηση να είναι ίσοι με μηδέν θα οδηγηθούμε σε  $2n$  εξισώσεις για τις παραμέτρους  $A_0, \dots, A_{2n}$ . Το σύστημα των  $2n + 1$  εξισώσεων που χρειάζονται συμπληρώνεται από μία ακόμα εξίσωση που προκύπτει από το δεύτερο ολοκλήρωμα. Έτσι το σύστημα των εξισώσεων που πρέπει να λύσουμε είναι τελικά το

$$0 = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{(\xi_k - \beta_j^*) R_k}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.2.20)$$

$$0 = A_0 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{\xi_k - \beta_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.2.21)$$

$$1 = A_0 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{R_k}, \quad (1.2.22)$$

όπου  $R_k = \sqrt{\rho^2 + (z - \xi_k)^2}$ . Από τη στιγμή που τα  $A_k$  έχουν προσδιοριστεί, το δυναμικό του Ernst δίνεται ως συνάρτηση των συντεταγμένων του Weyl από το ολοκλήρωμα (1.2.14), το οποίο προκύπτει να είναι τελικά  $\mathcal{E} = 2A_0 - 1$ . Στα παραπάνω δεν ασχοληθήκαμε με το ενδεχόμενο οι ρίζες του πολυωνύμου (1.2.18) να έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 1, αλλά ακόμα και σε αυτή την περίπτωση η γενίκευση της μεθόδου είναι εύκολη.

Τα παραπάνω αποτελέσματα ενσωματώθηκαν σε μια γενική διαδικασία κατασκευής λύσεων, που ανέπτυξε ο Manko με τους συνεργάτες του όπου όλα αυτά τα ενδιάμεσα βήματα έχουν πλέον απαλειφθεί και το αποτέλεσμα για μια δεδομένη επιλογή του  $e(z)$  εκφράζεται απευθείας μέσω των παρακάτω οριζουσών

$$E_{\pm} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \pm 1 & & & \\ \vdots & & & \\ \pm 1 & & & \\ & & \mathbf{C} & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}, \quad (1.2.23)$$

$$G = \left| \begin{array}{cccc} 0 & R_1 + \xi_1 - z & \cdots & R_{2n} + \xi_{2n} - z \\ -1 & & & \\ \vdots & & & \\ -1 & & & \\ & & \mathbf{C} & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right|, \quad (1.2.24)$$

$$H = \left| \begin{array}{cccc} z & 1 & \cdots & 1 \\ -\beta_1 & & & \\ \vdots & & & \\ -\beta_n & & & \\ & & \mathbf{C} & \\ e_1^* & & & \\ \vdots & & & \\ e_n^* & & & \end{array} \right|, \quad (1.2.25)$$

$$K_0 = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\xi_1 - \beta_1} & \cdots & \frac{1}{\xi_{2n} - \beta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\xi_1 - \beta_n} & \cdots & \frac{1}{\xi_{2n} - \beta_n} \\ \frac{e_1^*}{\xi_1 - \beta_1^*} & \cdots & \frac{e_1^*}{\xi_{2n} - \beta_1^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{e_n^*}{\xi_1 - \beta_n^*} & \cdots & \frac{e_n^*}{\xi_{2n} - \beta_n^*} \end{array} \right|, \quad (1.2.26)$$

όπου ο  $\mathbf{C}$  είναι ο  $2n \times 2n$  πίνακας

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{\xi_1 - \beta_1} & \cdots & \frac{R_{2n}}{\xi_{2n} - \beta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{R_1}{\xi_1 - \beta_n} & \cdots & \frac{R_{2n}}{\xi_{2n} - \beta_n} \\ \frac{e_1^*}{\xi_1 - \beta_1^*} & \cdots & \frac{e_1^*}{\xi_{2n} - \beta_1^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{e_n^*}{\xi_1 - \beta_n^*} & \cdots & \frac{e_n^*}{\xi_{2n} - \beta_n^*} \end{pmatrix}, \quad (1.2.27)$$

και με  $*$  δηλώνουμε το μιγαδικό συζυγές. Το δυναμικό του Ernst και οι συναρτήσεις της μετρικής τελικά εκφράζονται συναρτήσει των παραπάνω οριζουσών και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathcal{E}(\rho, z) = \frac{E_+}{E_-}, \quad (1.2.28)$$

$$f(\rho, z) = \frac{E_+ E_-^* + E_+^* E_-}{2E_- E_-^*}, \quad (1.2.29)$$

$$e^{2\gamma(\rho, z)} = \frac{E_+ E_-^* + E_+^* E_-}{2K_0 K_0^* \prod_{k=1}^{2n} R_k}, \quad (1.2.30)$$

$$\omega(\rho, z) = \frac{2Im [E_- H^* - E_-^* G]}{E_+ E_-^* + E_+^* E_-}. \quad (1.2.31)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επισημάνουμε ότι εξαιτίας της μορφής που έχουν οι μετρικές συναρτήσεις όπως ορίζονται μέσω των οριζουσών, οι παράμετροι  $e_k$  και οι μιγαδικές συζυγείς τους εμφανίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να τις απαλείψουμε, αφού ο παράγοντας  $\prod_{k=1}^n e_k e_k^*$  είναι κοινός παράγοντας σε όλες τις ορίζουσες στον αριθμητή και τον παρονομαστή. Ακόμα ένα σημείο που πρέπει να επισημάνουμε είναι ότι στην περίπτωση όπου έχουμε ρίζες  $\xi_k$  οι οποίες έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 1, αυτός ο φορμαλισμός εξακολουθεί να δουλεύει, με την διαφορά ότι επειδή μπορεί να εμφανίζονται μηδενισμοί ποσοτήτων σε αριθμητές ή παρονομαστές που μπορεί να δημιουργούν απειρισμούς, θα πρέπει να εφαρμόσει κανείς κάποια οριακή διαδικασία ή κάποιο κανόνα l'Hospital.

Οι λύσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω, ανάλογα με την τάξη των πολυωνύμων που διαλέγουμε για το  $e(z)$ , λέγονται N-Soliton.

### 1.2.4 Η αναλυτική λύση Two-Soliton

Προχωράμε τώρα στην εφαρμογή των παραπάνω για την περίπτωση της Two-Soliton [40], την οποία είχαμε επιλέξει ως υποψήφια λύση για την περιγραφή του εξωτερικού των αστέρων νετρονίων σύμφωνα με τη λογική που είχαμε παρουσιάσει στην εργασία [68]. Το δυναμικό στον άξονα που αναφέρουμε στην [68], μπορεί να έχει διαφορετική μορφή με την επιλογή των σταθερών που κάναμε εκεί, αλλά τελικά είναι ισοδύναμο με το δυναμικό της Two-Soliton που είναι της μορφής

$$e(z) = \frac{(z - M - ia)(z + ib) - k}{(z + M - ia)(z + ib) - k} \quad (1.2.32)$$

όπου όλες οι παράμετροι  $M, a, k, b$  είναι πραγματικές. Όπως είπαμε στην εισαγωγή για τα πολύπολα, από το (1.2.32) μπορεί κανείς να υπολογίσει τα πολύπολα μάζας και τα πολύπολα στροφορμής της λύσης. Έτσι, για την συγκεκριμένη λύση τα πρώτα μη μηδενικά πολύπολα δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned} M_0 &= M, & M_2 &= -(a^2 - k)M, \\ M_4 &= \left( a^4 - (3a^2 - 2ab + b^2)k + k^2 - \frac{1}{7}kM^2 \right) M \\ J_1 &= aM, & J_3 &= -[a^3 - (2a - b)k] M. \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

Τα μονά πολύπολα μάζας και τα ζυγά πολύπολα της περιστροφής είναι μηδενικά όπως είπαμε και παραπάνω εξαιτίας της συμμετρίας ως προς το ισημερινό επίπεδο. Από τα πολύπολα φαίνεται ότι η παράμετρος  $M$  είναι η μάζα του χωρόχρονου και η παράμετρος  $a$  είναι η στροφορμή ανά μονάδα μάζας ή αλλιώς η ανηγμένη στροφορμή. Η παράμετρος  $k$  εκφράζει την απόκλιση του ανηγμένου τετραπόλου από το αντίστοιχο της Kerr ενώ η παράμετρος  $b$  σχετίζεται κάπως πιο σύνθετα με την απόκλιση του οκταπόλου της περιστροφής από αυτό της Kerr.

Για το δυναμικό (1.2.32), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (1.2.18) οδηγεί στο πολυώνυμο

$$z^4 - (M^2 - a^2 - b^2 + 2k)z^2 + (k - ab)^2 - b^2M^2 = 0, \quad (1.2.34)$$

όπου από την στιγμή που όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί, οι ρίζες του είναι είτε πραγματικές είτε μιγαδικές συζυγείς. Οι τέσσερις ρίζες του (1.2.34) γράφονται ως

Τύπος	$d^2$	$\kappa_+^2$	$\kappa_-^2$	$\xi_+$	$\xi_-$	$R_+$	$R_-$	$r_+$	$r_-$
<i>Ia</i>	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$\Re$	$\Re$	$\Re$	$\Re$	$\Re$	$\Re$
<i>Ib*</i>	$> 0$	$> 0$	$= 0$	$\Re$	$\Re$ $= \xi_+$	$\Re$	$\Re$	$\Re$ $= R_+$	$\Re$ $= R_-$
<i>IIa</i>	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$ $= (\xi_+)^*$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$ $= (R_+)^*$	$\mathbf{C}$ $= (R_-)^*$
<i>IIb*</i>	$> 0$	$= 0$	$< 0$	$\Im$	$\Im$ $= (\xi_+)^*$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$ $= (R_+)^*$	$\mathbf{C}$ $= R_-$	$\mathbf{C}$ $= R_+$
<i>IIc</i>	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$\Im$	$\Im$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$ $= (R_+)^*$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$ $= (r_+)^*$
<i>III</i>	$< 0$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$ $= (\kappa_+^2)^*$	$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Re$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$ $= (r_+)^*$
<i>IVa*</i>	$= 0$	$> 0$	$= \kappa_+^2$	$\Re$ $= \kappa_+$	$= 0$	$\Re$	$\Re$	$\Re$	$\Re$ $= r_+$
<i>IVb*</i>	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$		-	-	-
<i>IVc*</i>	$= 0$	$< 0$	$= \kappa_+^2$	$\Im$ $= \kappa_+$	$= 0$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$	$\Re$	$\Re$ $= r_+$

Πίνακας 1.1: Κατηγοριοποίηση των λύσεων της Two-Soliton ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν οι ποσότητες  $d$ ,  $\kappa_{\pm}$ ,  $\xi_{\pm}$ ,  $R_{\pm}$  και  $r_{\pm}$ . Στον πίνακα εμφανίζονται και οι διάφορες συζυγίες ανάμεσα στις παραμέτρους. Οι τύποι που εμφανίζουν εκφυλισμούς υποδεικνύονται με ένα \*.

$$\xi_1 = -\xi_3 = \xi_+, \quad \xi_2 = -\xi_4 = \xi_-, \quad (1.2.35)$$

όπου

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{2} (\kappa_+ \pm \kappa_-), \quad (1.2.36)$$

με  $\kappa_{\pm} = \sqrt{M^2 - a^2 - b^2 + 2k \pm 2d}$  και  $d = \sqrt{(k - ab)^2 - b^2 M^2}$ . Με βάση αυτές τις παραμέτρους, ορίζουμε τις συναρτήσεις  $R_k$  της προηγούμενης ενότητας ως

$$R_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \xi_+)^2}, \quad r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \xi_-)^2}. \quad (1.2.37)$$

Στη συνέχεια προχωράμε σε μια κατηγοριοποίηση των διαφόρων τύπων λύσεων που μπορούμε να φτιάξουμε με την Two-Soliton ανάλογα με το τι είναι οι τελευταίες παράμετροι, αν είναι δηλαδή πραγματικές, φανταστικές, ή μιγαδικές. Τα αποτελέσματα της κατηγοριοποίησης παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 1.1.

**Τύπος I:** Η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται από δύο πραγματικές ρίζες  $\xi_{\pm}$ . Η λύση

του Kerr, που αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου  $k = 0$  δεν ανήκει σε αυτή την οικογένεια.

**Ia)** Αυτή η υποπερίπτωση του τύπου I είναι η απλούστερη των περιπτώσεων αφού όλες οι συναρτήσεις  $R_{\pm}, r_{\pm}$  είναι πραγματικές.

**Ib)** Σε αυτή την περίπτωση έχουμε διπλή ρίζα  $\xi_{\pm}$ . Ο εκφυλισμός εδώ προκύπτει από το γεγονός ότι το  $\kappa_{-}$  είναι ίσο με μηδέν που είναι ισοδύναμο με τον περιορισμό  $M^2 - a^2 - b^2 + 2k - 2d = 0$  για τις παραμέτρους της λύσης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, εφαρμόζουμε την διαδικασία με κανόνα L'Hospital που είπαμε και παραπάνω. Στον τρισδιάστατο χώρο των ανηγμένων παραμέτρων της λύσης  $(\frac{a}{M}, \frac{b}{M}, \frac{k}{M^2})$ , ο περιορισμός αυτός αντιστοιχεί σε μια διδιάστατη επιφάνεια. Περισσότερα για αυτόν τον χώρο θα πούμε στη συνέχεια.

**Τύπος II:** Σε αυτόν τον τύπο, οι ρίζες  $\xi_{\pm}$  είναι είτε μιγαδικές είτε φανταστικές, αφού έχουμε  $\kappa_{-}^2 < 0$ . Σε αυτές τις περιπτώσεις, υπάρχουν τιμές των  $(\rho, z)$  όπου οι συναρτήσεις  $R_{\pm}, r_{\pm}$  μπορεί να μηδενίζονται και στα σημεία αυτά να εμφανίζονται ανωμαλίες. Αυτά θα τα συζητήσουμε περισσότερο στο 4ο κεφάλαιο όπου θα δούμε την εφαρμογή της Two-Soliton στους αστέρες νετρονίων.

**IIa)** Αυτή η υποπερίπτωση, όπως και στην περίπτωση I δεν δέχεται λύσεις όπου το  $k$  να μηδενίζεται και άρα δεν μπορεί να περιγράψει λύσεις Kerr.

**IIb)** Εδώ έχουμε και πάλι εκφυλισμό όπως και στην περίπτωση **Ib** και για να βρούμε τις λύσεις εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία όπως και πιο πάνω. Οι λύσεις αυτού του τύπου είναι οι πρώτες που δέχονται λύσεις Kerr η οποία όμως υπάγεται στην κατηγορία των hyper-extreme Kerr, δηλαδή αυτών που έχουν  $|a| > M$ . Όπως και με την περίπτωση **Ib**, η λύση μπορεί να παρασταθεί με μια διδιάστατη επιφάνεια στον χώρο των ανηγμένων παραμέτρων.

**IIc)** Αυτή η περίπτωση είναι παρόμοια με την προηγούμενη σε ότι αφορά το ότι τα  $\xi_{\pm}$  είναι φανταστικά, αλλά τώρα δεν έχουμε εκφυλισμό στα  $\xi_{\pm}$ . Και αυτή η κατηγορία λύσεων περιέχει τις hyper-extreme Kerr.

**Τύπος III:** Σε αυτή την περίπτωση, το ένα από τα  $\xi_{\pm}$  είναι πραγματικό και το άλλο είναι φανταστικό. Έτσι και σε αυτή την περίπτωση μπορεί να έχουμε ανώμαλα σημεία σε κάποιες θέσεις στις συντεταγμένες  $(\rho, z)$ . Εδώ συγκεκριμένα τα προβλήματα εμφανίζονται στο επίπεδο  $z = 0$ . Οι κλασικές λύσεις Kerr και Schwarzschild ανήκουν σε αυτή την κατηγορία λύσεων.

**Τύπος IV:** Όλες οι λύσεις αυτού του τύπου είναι εκφυλισμένες και μάλλον δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους ρεαλιστικούς αστέρες νετρονίων που θα μας απασχολήσουν. Οι υποπεριπτώσεις IVa και IVc έχουν μια διπλή ρίζα ( $\xi_{-} = 0$ ), ενώ



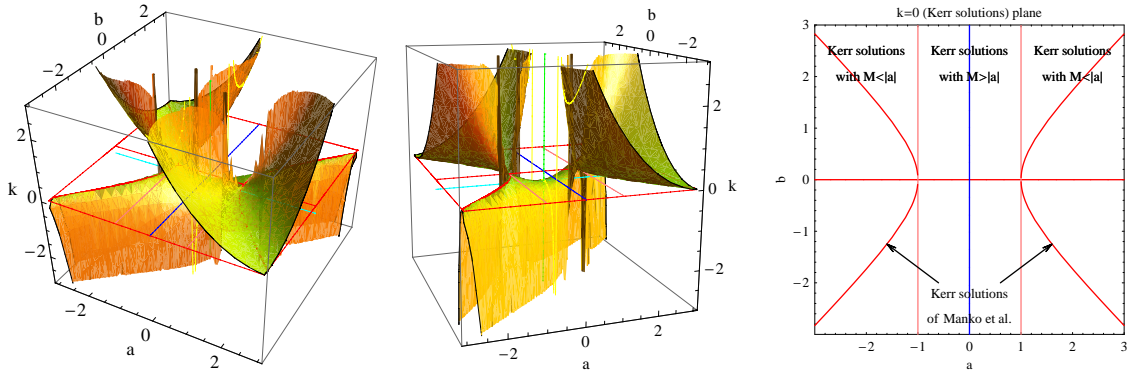
η υποπερίπτωση IVb έχει μία τετραπλή ρίζα ( $\xi_+ = \xi_- = 0$ ) και ο υπολογισμός των μετρικών συναρτήσεων και του δυναμικού του Ernst απαιτεί ειδική μεταχείριση. Αυτό που θα άξιζε να επισημάνουμε είναι ότι οι υποπερίπτώσεις IVb και IVc περιέχουν την extreme Kerr, δηλαδή αυτή για την οποία έχουμε ( $|a| = M$ ).

Αυτή η κατηγοριοποίηση συνιστά μια σύντομη απαρίθμηση κάποιων βασικών χαρακτηριστικών των λύσεων που θα μας φανούν χρήσιμες στους υπολογισμούς των μετρικών για τους αστέρες νετρονίων. Όπως βλέπουμε, η Two-Soliton μπορεί να παράγει μια αρκετά μεγάλη οικογένεια αναλυτικών λύσεων, στις οποίες περιέχονται και οι κλασικές λύσεις των Schwarzschild και Kerr. Μια ακόμα λύση που περιέχεται στην Two-Soliton είναι και η λύση των Manko et al. [41, 44] που θα δούμε παρακάτω και που χρησιμοποιήθηκε από τους Berti και Στεργιούλα [2], Berti et al. [3] και τους Stute και Camenzind [72] για να προσεγγίσει το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων. Εδώ απλά θα αναφέρουμε ότι η λύση των Manko et al. εμπίπτει ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων της ή στην κατηγορία Ib όπου  $\kappa_-^2 = 0$  ή στην κατηγορία IIb όπου  $\kappa_+^2 = 0$ . Περισσότερα για αυτό θα πούμε στην επόμενη ενότητα όπου θα παρουσιάσουμε αναλυτικότερα την λύση αυτή.

Όλες οι παραπάνω λύσεις μπορούν να παρασταθούν ως σημεία στον τρισδιάστατο χώρο των ανηγμένων παραμέτρων  $(\frac{a}{M}, \frac{b}{M}, \frac{k}{M^2})$ , που αναφέραμε και παραπάνω, όπου ουσιαστικά έχουμε ανάγει τον ρόλο της μάζας σε κλίμακα. Οι παράμετροι αυτού του χώρου σχετίζονται με τα πολύπολα του χωροχρόνου μέσω των σχέσεων (1.2.33), οπότε ο άξονας των  $j = \frac{a}{M}$  καθορίζει την περιστροφή μιας λύσης, ενώ όπως είδαμε, η κίνηση στον άξονα  $\frac{k}{M^2}$  περιγράφει το πόσο αποκλίνουμε από την λύση Kerr, όπου το επίπεδο  $\frac{k}{M^2} = 0$  είναι όλες οι λύσεις Kerr. Όσο πιο θετικές είναι οι τιμές του  $\frac{k}{M^2}$ , τόσο λιγότερο πεπλατυσμένες είναι οι λύσεις σε σχέση με την αντίστοιχη Kerr και όσο πιο αρνητικές, τόσο περισσότερο πεπλατυσμένη είναι η λύση. Τα πραγματικά άστρα νετρονίων τα περιμένουμε να είναι περισσότερο πεπλατυσμένα από την Kerr. Το ότι το  $k = 0$  αντιστοιχεί στην Kerr φαίνεται πολύ καθαρά από το δυναμικό (1.2.32), όπου για  $k = 0$  μετατρέπεται στη μορφή

$$e(z) = \frac{z - M - ia}{z + M - ia}, \quad (1.2.38)$$

το οποίο είναι το δυναμικό  $e(z)$  που παράγει την Kerr. Ακόμα, σε αυτή την περίπτωση η παράμετρος  $\frac{b}{M}$  δεν παίζει κανέναν ρόλο και έτσι ολόκληρη η γραμμή της μορφής  $\frac{a}{M} = \text{σταθ.}$ , που είναι παράλληλη στον άξονα  $\frac{b}{M}$  του επιπέδου  $\frac{k}{M^2} = 0$ , αντιστοιχεί σε μία μόνο Kerr.



Σχήμα 1.1: Οι δύο πρώτες γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν τον χώρο των παραμέτρων  $(a/M, b/M, k/M^2)$  της Two-Soliton από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες. Η διδιάστατη επιφάνεια αναπαριστά τον περιορισμό (1.2.39). Η τρίτη γραφική παράσταση απεικονίζει το επίπεδο  $k/M^2 = 0$ , όπου βρίσκονται όλες οι λύσεις Kerr. Η γραμμή  $a/M = 0$  είναι η λύση Schwarzschild. Οι δύο υπερβολές που έχουμε σχεδιάσει στο επίπεδο  $k/M^2 = 0$  είναι τα σημεία επαφής της επιφάνειας (1.2.39) με το επίπεδο της Kerr. Οι υπερβολές αυτές αντιστοιχούν σε  $|a| > M$ .

Ενδεικτικά, για να πάρουμε μια εικόνα για τον χώρο των παραμέτρων, θα σχεδιάσουμε την επιφάνεια που αντιστοιχεί στις εκφυλισμένες λύσεις  $\kappa_-^2 = 0$  (Ib) και  $\kappa_+^2 = 0$  (IIb), οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιοχές στην ίδια επιφάνεια η οποία δίνεται από την εξίσωση

$$k = \frac{(1 - a^2 + b^2)^2}{4[(a - b)^2 - 1]} \quad (1.2.39)$$

Το σχήμα αυτής της επιφάνειας φαίνεται στο σχήμα 1.1.

Κλείνουμε την παρουσίαση της Two-Soliton δίνοντας τον υπολογισμό των μετρικών συναρτήσεων, η σωστή μορφή των οποίων αποτέλεσε πηγή πολλών προβλημάτων αρχικά, αφού οι σχετικές εκφράσεις που υπάρχουν στην εργασία [40] είναι γεμάτες με τυπογραφικά λάθη.

### Μετρικές συναρτήσεις

Παρακάτω δίνουμε τις πλήρεις εκφράσεις μέσω των οποίων μπορούμε να γράψουμε τις μετρικές συναρτήσεις. Οι ορίζουσες που εμφανίζονται στους ορισμούς των μετρικών συναρτήσεων, μπορούν να αντικατασταθούν από τις παρακάτω εκφράσεις ξεκινώντας από τις  $E_{\pm} = A \mp B$ , όπου οι συναρτήσεις  $A, B$  δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}
A &= -16dk(r_-r_+ + R_-R_+)M^2 \\
&\quad - \left[4(a-b)^2(ab-d-k) - 4((a-2b)b-d)M^2\right](R_-r_+ + r_-R_+) \\
&\quad - 4i((a-b)(ab-d-k) - bM^2)(R_-r_+ - r_-R_+)\kappa_-^2 \\
&\quad + \left[4(a-b)^2(ab+d-k) - 4((a-2b)b+d)M^2\right](r_-R_- + r_+R_+) \\
&\quad - 4i((a-b)(ab+d-k) - bM^2)(r_-R_- - r_+R_+)\kappa_+^2, \quad (1.2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= 2\kappa_-\kappa_+M \left[ i(R_+ - R_-)(\kappa_+ - \kappa_-)(2k(a-b) + b(M^2 - a^2 + b^2 - \kappa_-\kappa_+)) \right. \\
&\quad + i(r_- - r_+)(\kappa_- + \kappa_+)(2k(a-b) + b(M^2 - a^2 + b^2) + b\kappa_-\kappa_+) \quad (1.2.41) \\
&\quad \left. + 2d((M^2 - a^2 + b^2)(R_- - r_- - r_+ + R_+) - \kappa_-\kappa_+(r_- + R_- + r_+ + R_+)) \right].
\end{aligned}$$

Η ορίζουσα  $H$  μπορεί να γραφεί ως  $H = -L$ , όπου το  $L$  δίνεται από την έκφραση,

$$\begin{aligned}
L &= (L1)(r_-r_+ + R_-R_+)M^2 + 4dM(L2)(r_- + R_- + r_+ + R_+) \\
&\quad - 4dM(L3)(r_- - R_- + r_+ - R_+) + (L4_+)(r_- - r_+ - R_- + R_+) \\
&\quad + (L4_-)(r_- - r_+ + R_- - R_+) + (L5_+)(r_-R_+ - R_-r_+) \quad (1.2.42) \\
&\quad + (L5_-)(r_-R_- - R_+r_+) + (L6_+)(R_-r_+ + r_-R_+) \\
&\quad + (L6_-)(R_-r_- + r_+R_+),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L1 &= -16dk(ia - ib + M - z), \\
L2 &= i(a + iM) \left[ M^4 - 2(a^2 - b^2 - 2k)M^2 + (a-b)^2((a+b)^2 - 4k) \right], \\
L3 &= (ia^3 - Ma^2 - i(b^2 + M^2 + 2k)a + M^3 + 2ibk + b^2M)\kappa_-\kappa_+, \quad (1.2.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L4_{\pm} &= 4\kappa_{\mp}M \left\{ ibM^5 + abM^4 - i(2ba^2 - ka - b(b^2 \pm d + 2k))M^3 \right. \\
&\quad - (2ba^3 - ka^2 - b(b^2 \pm d + 3k))a + k(2b^2 \mp d + k)M^2 \\
&\quad + i(a-b)(2k^2 - (a^2 + 3ba \mp 2d)k + b(a+b)(a^2 \mp d))M \\
&\quad \left. + (a-b)(ab-k)((a+b)(a^2 \mp d) + (b-3a)k) \right\}, \quad (1.2.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L5_{\pm} = & +4i [b(M-z)a^4 + (b^2 \mp d - k)(M-z)a^3 \\
& + ((z-M)b^3 + iM^2b^2 + (2M^2 \pm d + 5k)(z-M)b \mp idM^2) a^2 \\
& + ((z-M)b^4 + (M^2 \mp d - 5k)(z-M)b^2 - 4ikM^2b \\
& + (k \pm d)(M^2 + 4k)(M-z)) a - ib^4M^2 - ib^2M^2(M^2 \mp d - 2k) \\
& + iM^2(\pm dM^2 + 2k(k \pm d)) + b^3(M^2 \pm d + k)(M-z) \\
& + b(M^4 + (k \pm d)M^2 - 4k(k \pm d))(M-z)] \kappa_{\mp}, \tag{1.2.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L6_{\pm} = & \pm 4 [b(M-z)a^5 + ((k \pm d)(z-M) + ibM^2)a^4 \\
& + (2(z-M)b^3 + 2(M^2 + 2k)(z-M)b - ikM^2) a^3 \\
& + (-2iM^2b^3 + 2(5k \pm d)(M-z)b^2 - i(2M^4 + 3kM^2) b \\
& + ((k \pm 2d)M^2 + 4k(k \pm d))(M-z)) a^2 \\
& + \{(M-z)b^5 - 2(2k - M^2)(M-z)b^3 \\
& + 7ikM^2b^2(M^4 - 4kM^2 - 8k(k \pm d))(M-z)b \\
& + ikM^2(M^2 + 2(k \pm d))\} a + ib^5M^2 - ib^3(3kM^2 - 2M^4) \\
& + ibM^2(M^4 + 3kM^2 - 2k(k \pm d)) + b^4(k \pm d)(z-M) \\
& - M^2(\pm dM^2 + 2k(k \pm d))(M-z) \\
& + b^2(4k(k \pm d) - (3k \pm 2d)M^2)(M-z)]. \tag{1.2.46}
\end{aligned}$$

Η ορίζουσα  $G$  μπορεί να γραφεί ως  $G = -E$ , όπου το  $E$  δίνεται από την έκφραση,

$$\begin{aligned}
E = & (E1)(r_-r_+ + R_-R_+) + (E2)(r_- + R_- + r_+ + R_+) \\
& + (E3)(r_- - R_- + r_+ - R_+) + (E4_+)(r_-R_+ - R_-r_+) \\
& + (E4_-)(r_-R_- - r_+R_+) + (E5_+)(R_-r_+ + r_-R_+) \tag{1.2.47} \\
& + (E5_-)(r_-R_- + r_+R_+) + (E6_+)(r_- - r_+ - R_- + R_+) \\
& + (E6_-)(r_- - r_+ + R_- - R_+),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E1 = & 16dk(-ia + ib + M)M^2, \\
E2 = & 4d\kappa_-^2\kappa_+^2(ia + M - z)M, \tag{1.2.48} \\
E3 = & +4d [2ik(a - b) + (b^2 + M^2 - a^2)(M - z + ia)] \kappa_- \kappa_+ M,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E4_{\pm} &= -4i [bM^4 + i(b^2 \mp d) M^3 - (a+b)(-b^2 + 2ab \mp d - k) M^2 \\
&\quad - i(2k^2 + 2(b^2 - 2ab \pm d)k + (a-b)(a+b)(b^2 \mp d)) M \\
&\quad + (a-b)((a+b)^2 - 4k)(ab \mp d - k)] \kappa_{\mp} M, \tag{1.2.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E5_{\pm} &= \pm 4M [ibM^5 - (ab \mp d)M^4 - i(-2b^3 + 2a^2b - 3kb - ak) M^3 \\
&\quad + (2k^2 - (a^2 + 4ba - 3b^2 \mp 2d)k + 2(a^2 - b^2)(ab \mp d)) M^2 \\
&\quad + i(a-b)((a-b)b(a+b)^2 + 2k^2 - (a^2 + 4ba - 3b^2 \mp 2d)k) M \\
&\quad - (a-b)^2((a+b)^2 - 4k)(ab \mp d - k)], \tag{1.2.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E6_{\pm} &= 4\kappa_{\mp} M \{ba^5 - (k + ib(M-z))a^4 - (b^3 + (2M^2 \pm d + 3k)b \\
&\quad - ik(M-z))a^3 + (i(M-z)b^3 + 5kb^2 + i(\pm d + 2(M^2 + k))(M-z)b \\
&\quad + k(M^2 \pm d + 3k))a^2 + ((M^2 \pm d - k)b^3 - 3ik(M-z)b^2 \\
&\quad + (M^4 + (3k \pm d)M^2 - 4k^2)b - ik(M^2 + 2(k \pm d))(M-z))a \\
&\quad - (k \mp d)kM^2 + b^2k(-2M^2 \mp d + k) - ib^3(M^2 \pm d)(M-z) \\
&\quad + ib(-M^4 - (2k \pm d)M^2 + 2k(k \pm d))(M-z)\}, \tag{1.2.51}
\end{aligned}$$

και τέλος η ορίζουσα  $K_0$  μπορεί να γραφεί ως  $K_0 = -16d\kappa_-^2\kappa_+^2$ . Οι παραπάνω εκφράσεις αν αντικατασταθούν στις σχέσεις (1.2.29-1.2.31) θα μας δώσουν τις μετρικές συναρτήσεις, αλλά οι εκφράσεις όπως τις δίνουμε δεν είναι ίσες με τις αντίστοιχες ορίζουσες, αφού οι ορίζουσες έχουν ακόμα τον κοινό πολλαπλασιαστικό παράγοντα  $\prod_{k=1}^n e_k e_k^*$ , τον οποίο όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω, μπορούμε να απαλείψουμε.

### 1.2.5 Η αναλυτική λύση των Manko et al.

Η λύση των Manko et al. [41, 44] δίνεται από δυναμικό του Ernst που στον άξονα συμμετρίας έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
e(z) &= \frac{(z - M - ia)(z + ib) + d - \delta - ab}{(z + M - ia)(z + ib) + d - \delta - ab}, \tag{1.2.52} \\
\delta &= \frac{-M^2b^2}{M^2 - (a-b)^2}, \quad d = \frac{1}{4}(M^2 - (a-b)^2)
\end{aligned}$$

και όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση της Two-Soliton. Αν ορίσουμε τις επιμήκειες σφαιροειδείς συντεταγμένες

$$x = \frac{r_+ + r_-}{2k}, \quad y = \frac{r_+ - r_-}{2k} \quad (1.2.53)$$

όπου το  $k$  εδώ δεν έχει καμία σχέση με το  $k$  της Two-Soliton και ορίζεται ως  $k = \sqrt{d + \delta}$ , ενώ παράλληλα ορίσαμε τις  $r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm k)^2}$ , τότε η μετρική θα πάρει την μορφή

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + k^2 f^{-1} \left\{ e^{2\gamma} (x^2 - y^2) \left( \frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\phi^2 \right\}, \quad (1.2.54)$$

και οι συναρτήσεις της μετρικής θα δίνονται από τις εκφράσεις

$$f = \frac{E}{D}, \quad e^{2\gamma} = \frac{E}{16k^8(x^2 - y^2)^4}, \quad \omega = \frac{-(1 - y^2)F}{E}, \quad (1.2.55)$$

όπου

$$\begin{aligned} D = & \{4(k^2x^2 - \delta y^2)^2 + 2kMx [2k^2(x^2 - 1) + (2\delta + ab - b^2)(1 - y^2)] \\ & + (a - b) [(a - b)(d - \delta) - M^2b] (y^4 - 1) - 4d^2\}^2 \\ & + 4y^2 \{2k^2(x^2 - 1) [kx(a - b) - Mb] - 2Mb\delta(1 - y) \\ & + [(a - b)(d - \delta) - M^2b] (2kx + M)(1 - y^2)\}^2, \end{aligned} \quad (1.2.56)$$

$$\begin{aligned} E = & \{4 [k^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 \\ & + (a - b) [(a - b)(d - \delta) - M^2b] (1 - y^2)^2\}^2 \\ & - 16k^2(x^2 - 1)(1 - y^2) \{ (a - b) [k^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + M^2by^2 \}^2 \end{aligned} \quad (1.2.57)$$

$$\begin{aligned}
F = & 8k^2(x^2 - 1) \{ (a - b) [k^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + y^2 M^2 b \} \\
& \times \{ kMx [(2kx + M)^2 - 2y^2(2\delta + ab - b^2) - a^2 + b^2] \\
& - 2y^2(4\delta d - M^2 b^2) \} + \left\{ 4 [k^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 \right. \\
& + (a - b) [(a - b)(d - \delta) - M^2 b] (1 - y^2)^2 \} \\
& \times (4(2kMbx + 2M^2 b) [k^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)] \\
& + (1 - y^2) \{ (a - b)(M^2 b^2 - 4\delta d) \\
& - (4kMx + 2M^2) [(a - b)(d - \delta) - M^2 b] \} ). \tag{1.2.58}
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις ορίζουν πλήρως τη μετρική της λύσης των Manko et al. για την οποία μπορούμε να δούμε από την μορφή που έχει το  $e(z)$  που την ορίζει, ότι θα προέκυπτε από την Two-Soliton αν θέταμε το  $k$  της Two-Soliton να είναι ίσο με

$$k = -\frac{1}{4} (M^2 - (a - b)^2) - \frac{M^2 b^2}{M^2 - (a - b)^2} + ab. \tag{1.2.59}$$

Αυτή η επιλογή για το  $k$  με λίγη άλγεβρα, μπορούμε να δούμε ότι μας οδηγεί στην σχέση (1.2.39) και άρα η Manko et al. καλύπτει τους εκφυλισμένους τύπους λύσεων με  $\kappa_-^2 = 0$  (Ib) και  $\kappa_+^2 = 0$  (IIb) και αποτελεί τις λύσεις της Two-Soliton που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του χώρου των παραμέτρων  $(\frac{a}{M}, \frac{b}{M}, \frac{k}{M^2})$  που είδαμε στο σχήμα 1.1.

Από την Two-Soliton μπορεί να καταλήξει κανείς στην Manko et al. αν θέσει την παράμετρο

$$k = -d' + \delta + ab + \varepsilon, \tag{1.2.60}$$

όπου με  $d'$  δηλώνουμε τώρα το  $d$  της Manko et al. για να μην το μπερδέσουμε με το  $d$  της Two-Soliton, ενώ η ποσότητα  $\varepsilon$  είναι απλά μια διαταραχή που εισάγουμε για να αποφύγουμε τον εκφυλισμό, και μετά υπολογίσει όλες τις σχετικές ποσότητες μέχρι πρώτης τάξης ως προς  $\varepsilon$  και πάρει το όριο των συναρτήσεων που θα υπολογίσει όταν το  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Αυτή η διαδικασία χρησιμοποιήθηκε και ως έλεγχος για το αν οι διορθωμένες εκφράσεις της Two-Soliton είναι σωστές, ενώ είναι και ένας πρακτικός οδηγός για το πως μπορεί να αντιμετωπίσει κανείς τις περιπτώσεις του εκφυλισμού.

Τα πρώτα τέσσερα μη μηδενικά πολύπολα της Manko et al. όπως υπολογίζονται από το  $e(z)$  είναι,

$$\begin{aligned}
M_0 &= M, & M_2 &= -M(a^2 - ab + d - \delta), \\
J_1 &= aM, \\
J_3 &= -M(a^3 - 2ba^2 + (b^2 + 2d - 2\delta)a + b(\delta - d)). \quad (1.2.61)
\end{aligned}$$

όπου βλέπουμε ότι στην περίπτωση που πάμε στο όριο της μηδενικής περιστροφής  $a = 0$ , τότε το τετράπολο γίνεται

$$M_2 = -\frac{M(M^2 + b^2)^2}{4(M^2 - b^2)}. \quad (1.2.62)$$

Αυτό σημαίνει ότι το τετράπολο της Manko et al. δεν μηδενίζεται για μη περιστρεφόμενα αντικείμενα και άρα μπορεί να περιγράψει αντικείμενα που έχουν μια εγγενή ανισοτροπικότητα. Τα αντικείμενα αυτά θα είναι πεπλατυσμένα για  $|b| < M$  και επιμήκη κατά μήκος του άξονα για  $|b| > M$ .

Ένα ακόμα σημείο που αξίζει να αναφέρουμε είναι το γεγονός ότι, όπως είδαμε και από το σχήμα 1.1 και όπως συζητάνε οι Manko et al. στο [41], η λύση αυτή μετατρέπεται σε Kerr αν θέσει κανείς  $b^2 = a^2 - M^2$ . Αλλά επειδή όλες οι παράμετροι υποθέτουμε ότι είναι πραγματικές (λόγω συμμετρίας ως προς το ισημερινό επίπεδο), αυτή η επιλογή μας οδηγεί μόνο στις hyperextreme Kerr μετρικές ( $a \geq M$ ). Οι υπερβολές στις οποίες εφάπτεται η επιφάνεια (1.2.39) στο επίπεδο της Kerr ( $k = 0$ ) είναι αυτές οι περιπτώσεις.

Με αυτά τα σχόλια τελειώνουμε την παρουσίασή μας της Manko et al.. Τις λύσεις Manko et al. και Two-Soliton θα τις ξανασυναντήσουμε στο 4ο κεφάλαιο όπου θα συζητήσουμε την προσέγγιση του χωροχρόνου γύρω από άστρα νετρονίων από αναλυτικές λύσεις και θα τις συγκρίνουμε ως προς την πιστότητα περιγραφής τους.



## Κεφάλαιο 2

# Σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικών λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού των σχετικιστικών πολυπόλων των αριθμητικών λύσεων. Αρχικά θα αναλύσουμε τη σύγκριση που υπάρχει αναφορικά με το πως υπολογίζονται σωστά τα σχετικιστικά πολύπολα. Η σύγκριση αυτή προερχόταν από την απευθείας σύγκρισή τους με τα νευτώνεια ανάλογά τους. Επίσης θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο που να δίνει σωστά τα πρώτα αριθμητικά πολύπολα. Τέλος θα συζητήσουμε τις επιπτώσεις της διόρθωσης αυτής σε εφαρμογές αστροφυσικού ενδιαφέροντος.

### 2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο 1ο κεφάλαιο, τα σχετικιστικά πολύπολα ενός ασυμπτωτικά επίπεδου χωρόχρονου ορίστηκαν αρχικά από τους Geroch και Hansen για την περίπτωση που αυτός είναι στατικός και στάσιμος [14, 18]. Στην ειδική περίπτωση όπου ο χωρόχρονος είναι και αξονικά συμμετρικός, ο Fodor [11] έδωσε έναν αλγόριθμο για το πως να υπολογίζει κανείς αυτά τα πολύπολα με την βοήθεια του δυναμικού του Ernst. Εκτός από αυτές τις προσεγγίσεις στον υπολογισμό των σχετικιστικών πολυπόλων, στην βιβλιογραφία υπάρχουν ακόμα οι προσεγγίσεις του Simon [67] και του Thorne [74], που οδηγούν τελικά στα ίδια με τα προηγούμενα πολύπολα, με την διαφορά ότι ο τρόπος ορισμού των πολυπόλων που έδωσε ο Thorne εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων

και άρα πρέπει πρώτα να γίνει μια προσεκτική επιλογή συντεταγμένων ώστε να διαβάσει κανείς τα πραγματικά πολύπολα (μια συγκριτική παρουσίαση των παραπάνω μπορεί να δει κανείς εδώ [58]).

Η έλευση των ανιχνευτών βαρυτικών κυμάτων έδωσε μια επιπλέον ώθηση στην μελέτη των σχετικιστικών πολυπόλων τα τελευταία χρόνια. Επειδή ακριβώς τα σχετικιστικά πολύπολα χαρακτηρίζουν με μοναδικό τρόπο το βαρυτικό πεδίο ενός συμπαγούς αντικείμενου, αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος από τον Ryan [62] ο οποίος συνέδεσε τα πολύπολα του χωρόχρονου με τις παρατηρούμενες συχνότητες των βαρυτικών κυμάτων που εκπέμπονται από ένα αντικείμενο που κινείται σε κυκλικές τροχιές σ' αυτόν τον χωρόχρονο με αδιαβατικά μειούμενη ακτίνα, λόγω απώλειας ενέργειας και στροφορμής. Πέρα από τα βαρυτικά κύματα, τα σχετικιστικά πολύπολα έχουν συνδεθεί και με άλλες ιδιότητες ενός χωροχρόνου με αστροφυσικό ενδιαφέρον όπως είναι η ακτίνα της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς (innermost stable circular orbit - ISCO) από τους Shibata & Sasaki [65] και η σύνδεση των πολυπόλων ενός αστέρα νετρονίων με την καταστατική εξίσωση της ύλης στο εσωτερικό του από τους Laarakkers & Poisson [35].

Κατά τη διερεύνηση της σύνδεσης ενός αναλυτικού με έναν αριθμητικό χωρόχρονο και των σχέσεων που μπορούν να έχουν τα σχετικιστικά πολύπολα με τα διάφορα παρατηρήσιμα μεγέθη, συνειδητοποιήσαμε ότι υπάρχει στη βιβλιογραφία μία συστηματική παρέκκλιση του τρόπου που διαβάζονται τα πολύπολα με την βοήθεια ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων, από τα πραγματικά σχετικιστικά πολύπολα. Το συστηματικό αυτό σφάλμα φαίνεται να προκύπτει από μια σχετική σύγχυση που υπήρχε στη βιβλιογραφία για το πως πρέπει να διαβάζονται τα πολύπολα από ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα μιας μετρικής σε κάποιο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων και τις υποθέσεις που κάνει κανείς για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της μετρικής αυτής (συγκεκριμένα την ομοιότητά της με την μετρική Schwarzschild σε μεγάλες αποστάσεις από το κεντρικό σώμα).

Προκειμένου να μπορέσουμε να διαβάσουμε σωστά τα σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικά παραγόμενων χωρόχρονων, τα οποία τα χρειαζόμαστε προκειμένου να επιλέξουμε την κατάλληλη αναλυτική μετρική, με κατάλληλη ρύθμιση των πολυπόλων αυτής όπως θα δούμε στο 4ο κεφάλαιο, επιχειρήσαμε να διορθώσουμε αυτό το σφάλμα χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Ryan για την ανάγνωση των πολυπόλων από την παρατήρηση βαρυτικών κυμάτων. Συγκεκριμένα, μελετώντας το φάσμα της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας  $\Delta\tilde{E}$  (εκπεμπόμενη ενέργεια ανά μονάδα λογαριθμικής συχνότητας) ενός υποθετικού σωματιδίου που θα κινούνταν σε διαδοχικές κυκλικές τροχιές στον υπό διερεύνηση χωρόχρονο, θα μπορούσε να διαβάσει κανείς τα σχετικιστικά πολύπολα του χωροχρόνου με τρόπο ανεξάρτητο των συντεταγμένων στις οποίες θα

ήταν εκπεφρασμένη η μετρική του τελευταίου.

Για να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα της διόρθωσης στα πολύπολα των αριθμητικών μετρικών, τις οποίες παράγουμε με τον κώδικα RNS του Νίκου Στεργιούλα [71], χρησιμοποιήσαμε μια αναλυτική λύση που έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για να προσεγγίσει το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων [2] έτσι ώστε να έχουμε τη δυνατότητα της σύγκρισης των αποτελεσμάτων με και χωρίς τη διόρθωση. Η λύση αυτή είναι η λύση των Manko et al. [41, 44], η οποία προσδιορίζεται από τρεις παραμέτρους (μάζα, στροφορμή και μια παράμετρο που σχετίζεται με τη τετραπολική ροπή, όπως είδαμε στο 1ο κεφάλαιο).

Στη συνέχεια στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά θα προσπαθήσουμε να καταδείξουμε που ακριβώς βρίσκεται το σφάλμα στον μέχρι τώρα υπολογισμό των σχετικιστικών πολυπόλων των αριθμητικά κατασκευασμένων μετρικών που περιγράφουν τον χωροχρόνο μέσα και έξω από άστρα νετρονίων. Μετά θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του Ryan προκειμένου να υπολογίσουμε τις διορθώσεις στα σχετικιστικά πολύπολα και να δούμε πως σχετίζονται αυτά τα πολύπολα με τους διάφορους όρους του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της μετρικής. Τέλος, θα εξετάσουμε τις επιπτώσεις της διόρθωσης των πολυπόλων στην σύγκριση των αριθμητικών με τους αναλυτικούς χωροχρόνους, καθώς και άλλες πιθανές επιπτώσεις αστροφυσικού ενδιαφέροντος.

## 2.2 Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της αριθμητικής μετρικής

Το 1976 οι Butterworth & Ipser (BI) [5] έγραψαν τις σχετικιστικές εξισώσεις που περιέγραφαν τη δομή και το βαρυτικό πεδίο μιας περιστρεφόμενης κατανομής ρευστού προκειμένου να κατασκευάσουν έναν αλγόριθμο για τον αριθμητικό υπολογισμό της δομής ενός συμπαγούς αστέρα. Αρχικά υπέθεσαν την παρακάτω μορφή για το στοιχείο μήκους της μετρικής:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + r^2 \sin^2 \theta B^2 e^{-2\nu} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2(\zeta - \nu)} (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (2.2.1)$$

όπου  $\nu$ ,  $B$ ,  $\omega$ , και  $\zeta$  είναι οι τέσσερις μετρικές συναρτήσεις, που είναι συναρτήσεις των ημι-ισοτροπικών συντεταγμένων  $r, \theta$ . Οι συναρτήσεις αυτές είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες  $t, \phi$  επειδή έχει θεωρηθεί ότι η γεωμετρία που περιγράφεται με το παραπάνω στοιχείο μήκους είναι στάσιμη και έχει αξονική συμμετρία. Για την παραπάνω

μετρική, οι εξισώσεις πεδίου όπως αυτές προβάλλονται στο σύστημα των παρατηρητών που έχουν μηδενική στροφορμή (zero-angular-momentum observers, ZAMO) είναι

$$\mathbf{D} \cdot (B\mathbf{D}\nu) = \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta B^3 e^{-4\nu} \mathbf{D}\omega \cdot \mathbf{D}\omega + 4\pi B e^{2\zeta - 2\nu} \left[ \frac{(\epsilon + p)(1 + u^2)}{1 - u^2} + 2p \right], \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{D} \cdot (r^2 \sin^2 \theta B^3 e^{-4\nu} \mathbf{D}\omega) = -16\pi r \sin \theta B^2 e^{2\zeta - 4\nu} \frac{(\epsilon + p)u}{1 - u^2}, \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{D} \cdot (r \sin \theta \mathbf{D}B) = 16\pi r \sin \theta B e^{2\zeta - 2\nu} p, \quad (2.2.4)$$

ενώ η ταχύτητα του ρευστού ως προς τους παρατηρητές ZAMO είναι

$$u = (\Omega - \omega)r \sin \theta B e^{-2\nu}, \quad (2.2.5)$$

όπου  $\Omega = u^\phi/u^t$  και  $\mathbf{D}$  είναι η παράγωγος σε σφαιρικές συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις. Από αυτές τις εξισώσεις πεδίου προκύπτει το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των μετρικών συναρτήσεων  $\nu, \omega, B$ , ενώ η συνάρτηση  $\zeta$  μπορεί να υπολογιστεί από τις υπόλοιπες συναρτήσεις μέσω κάποιων συνθηκών ολοκλήρωσης [5]. Τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα για τις  $\nu, \omega, B$  μπορούν να γραφούν γενικά στη μορφή:

$$\nu = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_{2l}(r) P_{2l}(\mu), \quad (2.2.6)$$

$$\omega = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_{2l}(r) P_{2l+1,\mu}(\mu), \quad (2.2.7)$$

$$B = \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l}(r) T_{2l}^{1/2}(\mu), \quad (2.2.8)$$

όπου  $P_l(\mu)$  είναι τα πολυώνυμα Legendre και  $T_l^{1/2}(\mu)$  είναι τα πολυώνυμα Gegenbauer και εκφράζονται ως συναρτήσεις του  $\mu = \cos \theta$ . Τα πολυώνυμα  $P_l(\mu)$ ,  $P_{l,\mu}(\mu)$  και  $T_l^{1/2}(\mu)$  είναι ουσιαστικά οι ιδιοτιμές των γωνιακών συνιστωσών των διαφορικών τελεστών που εμφανίζονται στις αντίστοιχες εξισώσεις πεδίου. Αν εισαχθούν οι παραπάνω

εκφράσεις στις εξισώσεις πεδίου, θα πάρουμε τελικά τα αναπτύγματα:

$$\begin{aligned} \nu = & \left\{ -\frac{M}{r} + \frac{1}{3}\tilde{B}_0\frac{M}{r^3} + \frac{J^2}{r^4} + \left[ -\frac{\tilde{B}_0^2}{5} + \frac{\tilde{B}_2^2}{15} - \frac{12J^2}{5} \right] \frac{M}{r^5} + \dots \right\} \\ & + \left\{ \frac{\tilde{\nu}_2}{r^3} - 2\frac{J^2}{r^4} + [\dots] \frac{1}{r^5} + \dots \right\} P_2(\mu) + \left\{ \frac{\tilde{\nu}_4}{r^5} + \dots \right\} P_4(\mu) + \dots \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} \omega = & \left\{ \frac{2J}{r^3} - \frac{6JM}{r^4} + \frac{6}{5} \left[ 8 - 3\frac{\tilde{B}_0}{M^2} \right] \frac{JM^2}{r^5} + (\dots) \frac{J}{r^6} + \dots \right\} P_{1,\mu}(\mu) \\ & + \left\{ \frac{\tilde{\omega}_2}{r^5} + (\dots) \frac{1}{r^6} - \dots \right\} P_{3,\mu}(\mu) + \dots \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$B = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\tilde{B}_0}{r^2} \right) T_0^{1/2}(\mu) + \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\tilde{B}_2}{r^4} T_2^{1/2}(\mu) + \dots \quad (2.2.11)$$

Οι συντελεστές που βλέπουμε στα αναπτύγματα αυτά σχετίζονται με τα πολύπολα του χωροχρόνου (για παράδειγμα,  $M$  είναι η μάζα και  $J$  είναι η στροφορμή).

Το 1989 οι Komatsu, Eriguchi & Hechisu (KEH) [33] εισήγαγαν μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της ολοκλήρωσης των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν. Αντί να ολοκληρώσουν αριθμητικά τις διαφορικές εξισώσεις των ΒΙ χρησιμοποίησαν τον φορμαλισμό των συναρτήσεων Green και εξέφρασαν τις ζητούμενες μετρικές συναρτήσεις σε ολοκληρωτική μορφή. Αρχικά ξεκίνησαν με το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + r^2 \sin^2 \theta e^{2\beta} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\alpha} (dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

και εξέφρασαν τις εξισώσεις πεδίου για τις συναρτήσεις  $\nu$ ,  $\beta$  και  $\omega$  στην μορφή

$$\Delta [\rho e^{\gamma/2}] = S_\rho(r, \mu), \quad (2.2.12)$$

$$\left( \Delta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \gamma e^{\gamma/2} = S_\gamma(r, \mu), \quad (2.2.13)$$

$$\left( \Delta + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \omega e^{\gamma/2 - \rho} = S_\omega(r, \mu), \quad (2.2.14)$$

όπου

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (2.2.15)$$

και

$$\gamma = \beta + \nu, \quad (2.2.16)$$

$$\rho = \nu - \beta, \quad (2.2.17)$$

ενώ οι συναρτήσεις  $S_\rho$ ,  $S_\gamma$  και  $S_\omega$  είναι συναρτήσεις πηγής που εξαρτώνται από την πυκνότητα ενέργειας, την πίεση και την περιστροφή του ρευστού. Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις, οι μετρικές συναρτήσεις εκφράζονται σε ολοκληρωτική μορφή ως:

$$\rho = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma/2} \int_0^{\infty} dr' \int_0^1 d\mu' r'^2 f_{2n}^2(r, r') P_{2n}(\mu) P_{2n}(\mu') S_\rho(r', \mu'), \quad (2.2.18)$$

$$\begin{aligned} r \sin \theta \gamma = & -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma/2} \int_0^{\infty} dr' \int_0^1 d\mu' \quad r'^2 \frac{f_{2n-1}^1(r, r')}{2n-1} \sin [(2n-1)\theta] \\ & \times \sin [(2n-1)\theta'] S_\gamma(r', \mu'), \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} r \sin \theta \omega = & - \sum_{n=1}^{\infty} e^{\rho-\gamma/2} \int_0^{\infty} dr' \int_0^1 d\mu' \quad r'^3 \sin \theta' \frac{f_{2n-1}^2(r, r')}{2n(2n-1)} \\ & \times P_{2n-1}^1(\mu) P_{2n-1}^1(\mu') S_\omega(r', \mu'), \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

όπου και πάλι  $P_n$  είναι τα πολυώνυμα Legendre,  $P_n^m$  είναι τα συσχετισμένα πολυώνυμα Legendre και

$$f_n^1(r, r') = \begin{cases} (r'/r)^n, & r'/r \leq 1, \\ (r/r')^n, & r'/r > 1, \end{cases} \quad (2.2.21)$$

$$f_n^2(r, r') = \begin{cases} (1/r)(r'/r)^n, & r'/r \leq 1, \\ (1/r')(r/r')^n, & r'/r > 1. \end{cases} \quad (2.2.22)$$

Οι καινούριες αυτές μετρικές συναρτήσεις, συνδέονται με τις μετρικές συναρτήσεις όπως τις έγραψαν οι BI με τις σχέσεις:

$$\nu_{\text{BI}} = \nu_{\text{KEH}} = \nu, \quad B_{\text{BI}} e^{-\nu} = e^{\beta_{\text{KEH}}}, \quad \zeta_{\text{BI}} = \nu + \alpha_{\text{KEH}}. \quad (2.2.23)$$

Οι συνδυασμοί των  $\nu_{\text{KEH}}$  και  $\beta_{\text{KEH}}$

$$\gamma = \nu_{\text{KEH}} + \beta_{\text{KEH}}, \quad \rho = \nu_{\text{KEH}} - \beta_{\text{KEH}}, \quad (2.2.24)$$

καθώς και το  $\omega$  μπορούν να εκφραστούν ως δυναμοσειρές του  $1/r$ , με παρόμοιο τρόπο κατ' αναλογία με τις συναρτήσεις στις εξισώσεις (2.2.9, 2.2.10, 2.2.11):

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -2 \frac{M_{2n}}{r^{2n+1}} + \text{ανώτερες τάξεις} \right) P_{2n}(\mu), \quad (2.2.25)$$

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{2n-1} \frac{S_{2n-1}}{r^{2n+1}} + \text{ανώτερες τάξεις} \right) \frac{P_{2n-1}^1(\mu)}{\sin \theta}, \quad (2.2.26)$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{D_{2n-1}}{r^{2n}} + \text{ανώτερες τάξεις} \right) \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin \theta}. \quad (2.2.27)$$

Το 1997, σε μια εργασία του Ryan για άστρα μποζονίων [63], παρουσιάστηκαν επιχειρήματα για το ότι τα πολύπολα της μάζας και της στροφορμής όπως ορίστηκαν από τους Hansen & Geroch,  $M_{2n}^{GH}$  και  $S_{2n-1}^{GH}$ , θα πρέπει να εμφανίζονται πρώτη φορά στις παραπάνω ασυμπτωτικές εκφράσεις στους όρους τάξης  $1/r^{2n+1}$ . Αν και σωστή η προηγούμενη πρόταση, μπορούσε εύκολα να παρερμηνευθεί και να οδηγήσει λανθασμένα κάποιον στο συμπέρασμα ότι τα πολύπολα των Hansen & Geroch δίνονται από τις εκφράσεις

$$M_2^{GH} = M_2 = -\tilde{\nu}_2, \quad S_3^{GH} = S_3 = \frac{3}{2}\tilde{\omega}_2, \quad (2.2.28)$$

όπου οι τελευταίες ισότητες προκύπτουν από την απευθείας σύγκριση των αντίστοιχων όρων ανάμεσα στις παραπάνω εκφράσεις και τις εκφράσεις των BI.

Τον αλγόριθμο για την ολοκλήρωση των εξισώσεων πεδίου που εισήγαξαν οι KEH, τον εφάρμοσαν οι Cook, Shapiro & Teukolsky (CST) [7] και οι Στεργιούλας και Friedman [71] προκειμένου να αναπτύξουν αριθμητικούς κώδικες οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια ευρύτατα για την κατασκευή ρεαλιστικών μοντέλων αστέρων νετρονίων. Συγκεκριμένα στον κώδικα των Στεργιούλα και Friedman, η ανάγνωση των  $M_{2n}$  και  $S_{2n-1}$  γίνεται από τους συντελεστές των παραπάνω ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων, οι οποίοι θεωρήθηκε λανθασμένα ότι αντιπροσωπεύουν τα αντίστοιχα πολύπολα.

## 2.3 Υπολογισμός των πολυπόλων με τη μέθοδο του Ryan

Το 1995 ο Ryan [62] έδωσε εκφράσεις ανεξάρτητες των συντεταγμένων που συνδέουν, την μεταβολή της ενέργειας ανά μονάδα μάζας ενός υποθέματος που κινείται σε διαδοχικές ισημερινές κυκλικές τροχιές με μειούμενη ακτίνα, με τα πολύπολα του χωρόχρονου όπως αυτά είχαν ορισθεί από τους Hansen & Geroch. Προκειμένου να συνδέσει κανείς τα σχετικιστικά πολύπολα με τους συντελεστές των αναπτυγμάτων στις εκφράσεις (2.2.9, 2.2.10, 2.2.11), μπορεί να γράψει για τις συγκεκριμένες συναρτήσεις τις αντίστοιχες εκφράσεις με αυτές που έδωσε ο Ryan και να συγκρίνει μεταξύ τους τους διαφορούς όρους.

Ακολουθώντας τον αλγόριθμο του Ryan αρχικά υπολογίζουμε την τροχιακή κυκλική συχνότητα  $\Omega$  ενός υποθέματος στον χωρόχρονο ως συνάρτηση των μετρικών συναρτήσεων των BI. Η τροχιακή κυκλική συχνότητα ορίζεται ως

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi,r} + \sqrt{(g_{t\phi,r})^2 - g_{tt,r}g_{\phi\phi,r}}}{g_{\phi\phi,r}}. \quad (2.3.1)$$

Αν την έκφραση για το  $\Omega$  την γράψουμε ως ανάπτυγμα της παραμέτρου  $x = (M/r)^{1/2}$  και μετά αντιστρέψουμε τη σειρά, μπορούμε να εκφράσουμε την παράμετρο  $x$  ως ανάπτυγμα της νέας παραμέτρου  $v = (M\Omega)^{1/3}$  και το ανάπτυγμα αυτό θα έχει τότε τη μορφή:

$$x = v + \frac{v^3}{2} + \frac{jv^4}{3} + \frac{1}{24}(13 + 4b - 6q)v^5 + \frac{v^6}{2} + \frac{(97 + 28b + 56j^2 - 144q)v^7}{144} + \frac{(373j + 292bj - 330jq - 270w_2)v^8}{360} + O(v^9), \quad (2.3.2)$$

όπου έχουμε ορίσει τις ποσότητες  $j = \frac{J}{M^2}$ ,  $q = \frac{\nu_2}{M^3}$ ,  $w_2 = \frac{\omega_2}{M^4}$ ,  $b = \frac{B_0}{M^2}$ .

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να υπολογίσει κανείς την ενέργεια ανά μονάδα μάζας για το υπόθεμα,  $\tilde{E}$ , η οποία ορίζεται ως

$$\tilde{E} = \frac{-g_{tt} - g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (2.3.3)$$

και στη συνέχεια να την αναπτύξει ως προς την παράμετρο  $x$ . Με αντικατάσταση του  $x$  από την παραπάνω έκφραση, έχουμε τελικά το  $\tilde{E}$  ως ανάπτυγμα στο  $v$ . Τέλος, η μεταβολή της ενέργειας ανά λογαριθμική μεταβολή της συχνότητας για τις κυκλικές



τροχιές στο ισημερινό επίπεδο δίνεται από την έκφραση

$$\Delta\tilde{E} = -\frac{d\tilde{E}}{d\log\Omega} = -\frac{v}{3} \frac{d\tilde{E}}{dv} \quad (2.3.4)$$

που μετά από την αντικατάσταση των προηγούμενων αναπτυγμάτων παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{E} = & \frac{v^2}{3} - \frac{v^4}{2} + \frac{20jv^5}{9} - \frac{(89 + 32b + 24q)}{24}v^6 + \frac{28jv^7}{3} \\ & - \frac{5(1439 + 896b - 256j^2 + 672q)v^8}{432} \\ & + \frac{((421 + 64b - 60q)j - 90w_2)v^9}{10} + O(v^{10})., \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Αν συγκρίνουμε τους συντελεστές του παραπάνω αναπτύγματος με τους αντίστοιχους συντελεστές στην έκφραση που δίνει ο Ryan στην Εξ. (17) της εργασίας [62], παίρνουμε απευθείας τις σωστές εκφράσεις ανάμεσα στα σχετικιστικά πολύπολα του χωροχρόνου και τους συντελεστές των αναπτυγμάτων των BI και ΚΕΗ. Συγκεκριμένα από τους όρους τάξης  $v^6$  και  $v^9$  έχουμε για το τετράπολο της μάζας και το οκτάπολο της στροφορμής τις εκφράσεις:

$$M_2^{GH} = -\tilde{v}_2 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4} + b\right)M^3 = M_2 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4} + b\right)M^3, \quad (2.3.6)$$

$$S_3^{GH} = \frac{3}{2}\tilde{\omega}_2 - \frac{12}{5}\left(\frac{1}{4} + b\right)jM^4 = S_3 - \frac{12}{5}\left(\frac{1}{4} + b\right)jM^4, \quad (2.3.7)$$

όπου οι όροι  $M_2$  και  $S_3$  αντιστοιχούν στις ποσότητες που έχουν εσφαλμένα θεωρηθεί σε διάφορες αναφορές στη βιβλιογραφία ως τα σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικά κατασκευασμένων χωροχρόνων. Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω σωστές εκφράσεις για τα πολύπολα στους όρους τάξης  $v^7$  και  $v^8$  της εξίσωσης (17) του Ryan [62], τότε βλέπουμε ότι αυτοί οι όροι αυτόματα συμπίπτουν με τους αντίστοιχους της εξίσωσης (2.3.5), όπως θα περιμέναμε αν το αποτέλεσμα είναι συνεπές. Από αυτό το σημείο και μετά, όταν αναφερόμαστε στα σχετικιστικά πολύπολα των Hansen-Geroch δεν θα χρησιμοποιούμε πλέον τον δείκτη  $^{GH}$ .

Οι τελευταίοι όροι στις εξισώσεις (2.3.6, 2.3.7), απουσίαζαν μέχρι τώρα από τους υπολογισμούς που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία. Και οι δύο παραπάνω έξτρα όροι θα έδιναν μηδενική συνεισφορά αν η παράμετρος  $b$  έπαιρνε την τιμή  $b = -1/4$ . Αυτό είχε διαπιστωθεί ουσιαστικά από τους Laarkkers & Poisson [35], οι οποίοι όμως είχαν

θεωρήσει ότι κατ' αναλογία με τη μετρική Schwarzschild, για την οποία ισχύει ότι  $B = 1 - M^2/4r^2$  και άρα  $b = -1/4$ , όλες οι μετρικές θα έπρεπε να έχουν τέτοια ασυμπτωτική συμπεριφορά για την συνάρτηση  $B$  που να οδηγεί σε  $b = -1/4$ . Δηλαδή είχαν θεωρήσει ότι ο χαμηλότερης τάξης όρος τη συνάρτησης  $B$ , που είναι ο συντελεστής του  $T_0^{1/2}$  στην εξίσωση (2.2.11), για ένα απομονωμένο αντικείμενο θα έπρεπε να είναι ίδιος με το  $B$  της Schwarzschild. Αυτό όμως δεν ισχύει στην περίπτωση των ημι-ισοτροπικών συντεταγμένων, όπου ο χαμηλότερης τάξης όρος που περιμένουμε να συμπίπτει με τον αντίστοιχο της Schwarzschild είναι απλώς το 1, ενώ οι όροι ανώτερης τάξης ως προς το  $1/r$  περιμένουμε εν γένη να είναι διαφορετικοί.

Το πρόβλημα που προκύπτει με την εσφαλμένη υπόθεση για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ημι-ισοτροπικών συντεταγμένων αναφέρεται όπως μάθαμε πρόσφατα και στο βιβλίο των Friedman και Στεργιούλα [13] που θα εκδοθεί σύντομα. Στο ανωτέρω βιβλίο το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό της συντεταγμένης  $r$  και οδηγούνται στην ίδια ακριβώς έκφραση για το διορθωμένο τετράπολο της μάζας  $M_2$  που παρουσιάζεται στην εξίσωση (2.3.6). Η παρούσα όμως προσέγγιση είναι πιο γενική και ανεξάρτητη των συντεταγμένων και μπορεί να δώσει σχετικά εύκολα και τις διορθώσεις των ανωτέρων πολυπόλων.

Σαν επιστέγασμα του ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης  $B$  για έναν γενικό χωρόχρονο, δεν πρέπει απαραίτητα να συμπίπτει αυστηρά με αυτή της Schwarzschild, αναφέρουμε το παράδειγμα της μετρικής Kerr. Η μετρική Kerr γραμμένη σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες [38] έχει για την συνάρτηση  $B$  τη μορφή

$$B = 1 - \frac{M^2 - a^2}{4r^2},$$

που σημαίνει ότι αντίστοιχα για την Kerr η παράμετρος  $b$  έχει την τιμή

$$b^{Kerr} = -\frac{1}{4}(1 - j^2),$$

και όχι την τιμή  $b = -1/4$ .

## 2.4 Επιπτώσεις της διόρθωσης των πολυπόλων

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε κάποιες από τις επιπτώσεις που έχει η διόρθωση στα αριθμητικά υπολογισμένα πολύπολα σε αποτελέσματα που έχουν παρουσιαστεί στο παρελθόν στη βιβλιογραφία. Φυσικά θα σταθούμε λίγο περισσότερο στο θέμα της σύγκρισης των

αριθμητικών μετρικών με αντίστοιχες αναλυτικές, που είναι και το κύριο ενδιαφέρον μας, αλλά θα αναφερθούμε και στις επιπτώσεις που υπάρχουν σε μεγέθη που έχουν σχέση με αστροφυσικά φαινόμενα τα οποία μπορεί να παρατηρήσει κανείς.

(i) Ξεκινάμε επαναλαμβάνοντας τη διερεύνηση έχει γίνει στο παρελθόν πάνω στην προσομοίωση των αριθμητικών λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν για το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων με την βοήθεια αναλυτικών λύσεων κενού. Οι Berti και Stergioulas (BΣ) δοκίμασαν το 2004 [2] να προσεγγίσουν το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων με μια αναλυτική μετρική τριών παραμέτρων, την Manko et al. [41, 44], την οποία και συνέκριναν με ένα πλήθος από αριθμητικά μοντέλα αστέρων νετρονίων με ομογενή περιστροφή. Οι αναλυτικές λύσεις κατασκευάζονταν με την επιλογή των τριών παραμέτρων έτσι ώστε τα τρία πρώτα μη μηδενικά πολύπολα της αναλυτικής λύσης να είναι ίσα με τα τρία πρώτα πολύπολα της αριθμητικής μετρικής, δηλαδή την μάζα, την στροφορμή και το τετράπολο μάζας, όπως αυτά διαβάζονταν από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της αριθμητικής μετρικής. Το συμπέρασμα της σύγκρισης που έκαναν ήταν ότι η συγκεκριμένη αναλυτική λύση ήταν αρκετά καλή προσέγγιση των αριθμητικών μετρικών για τα γρήγορα περιστρεφόμενα άστρα νετρονίων. Από την άλλη, για τα αργά περιστρεφόμενα άστρα, επειδή η συγκεκριμένη λύση [41, 44] έχει εγγενώς περιορισμό στις τιμές του τετραπόλου της μάζας που μπορεί να δεχτεί (δεν μπορεί να πάρει τιμές κάτω από ένα όριο, όπως είδαμε στο 1ο κεφάλαιο και θα δούμε και παρακάτω), δεν προσφέρει την δυνατότητα να προσομοιώνει τέτοια αντικείμενα. Πιο συγκεκριμένα, για τις περιπτώσεις όπου μπορούσε να κατασκευαστεί μια αναλυτική μετρική, οι BΣ βρήκαν ότι η σύγκριση της αριθμητικής με την αναλυτική μετρική ήταν τέτοια που διέφεραν λιγότερο από 6 % στην επιφάνεια των αστέρων και η διαφορά αυτή φυσικά μειωνόταν σε μεγαλύτερες αποστάσεις.

Προκειμένου να δούμε τις επιπτώσεις που έχει η διόρθωση των πολυπόλων, επαναλάβαμε τις συγκρίσεις που πραγματοποίησαν οι BΣ [2], χρησιμοποιώντας την ίδια αναλυτική μετρική [41, 44] και τα ίδια αριθμητικά μοντέλα που κατασκεύασαν οι BΣ από τις καταστατικές εξισώσεις AU, FPS και L, με τη διαφορά ότι το τετράπολο που χρησιμοποιήσαμε είναι διορθωμένο σύμφωνα με την εξίσωση (2.3.6). Η παράμετρος  $b$  που εισάγει την διόρθωση στους όρους των πολυπόλων, υπολογίστηκε με δύο τρόπους. Ο πρώτος ήταν από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης  $B$ , το οποίο έγινε γραμμική παρεμβολή με πολυωνυμική συνάρτηση σε δυνάμεις του  $x = 1/r$  και ο δεύτερος ήταν από το ολοκλήρωμα στην πηγή της συνάρτησης  $B$  όπως προκύπτει από την

εξίσωση (15) που δίνουν οι BI, δηλαδή:

$$B_0 = -16 \int pr^3 \sin^2 \theta B e^{2\zeta - 2\nu} dr d\theta, \quad (2.4.1)$$

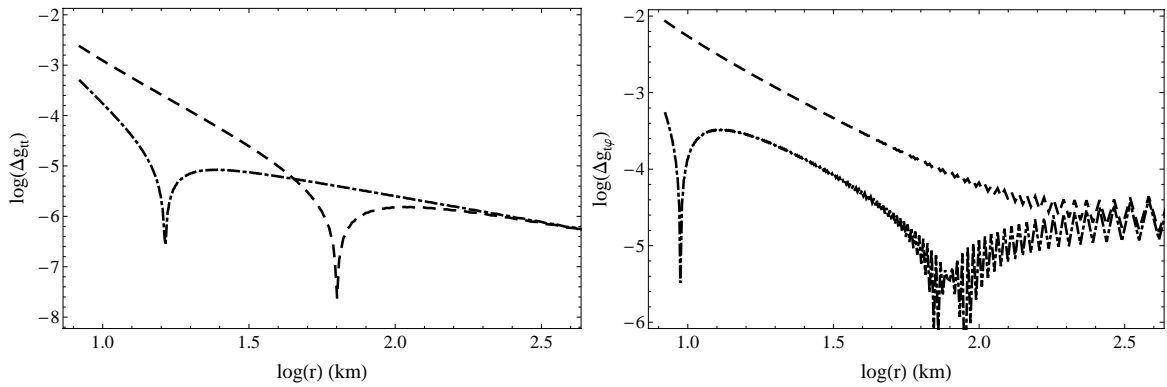
όπου  $p$  είναι η πίεση του ρευστού ενώ οι υπόλοιπες ποσότητες είναι οι διάφορες μετρικές συναρτήσεις και οι συντεταγμένες. Οι δύο τρόποι υπολογισμού έδωσαν πολύ καλή σύμπτωση στα αποτελέσματά τους για το  $b$ , το οποίο δίνεται για τα διάφορα αριθμητικά μοντέλα σε πίνακες στο Παράρτημα.

Από τον υπολογισμό των διορθώσεων βλέπουμε ότι το τετράπολο της μάζας είχε διόρθωση που φτάνει μέχρι και το  $\sim 20\%$  ενώ το οκτάπολο της περιστροφής έχει διόρθωση που φτάνει μέχρι και το  $\sim 40\%$ , ανάλογα με την καταστατική εξίσωση. Για αυτές τις διορθώσεις στα πολύπολα είχαμε βελτίωση στην σύγκριση των μετρικών που έφτανε μέχρι και τη μια τάξη μεγέθους. Για να εκτιμήσουμε το πόσο καλά συγκρίνονται μεταξύ τους οι μετρικές (αναλυτική με αριθμητική) υπολογίσαμε σε κάθε περίπτωση, στην περιοχή εξωτερικά του άστρου, την ποσότητα

$$\sigma_{ij} = \left[ \int_{R_S}^{\infty} (g_{ij}^n - g_{ij}^a)^2 dr \right]^{1/2}, \quad (2.4.2)$$

όπου τα  $n, a$  υποδεικνύουν τις αριθμητικά υπολογισμένες ποσότητες και τις αναλυτικές ποσότητες αντίστοιχα και  $R_S$  είναι η ακτίνα του αστέρα στον ισημερινό. Την ποσότητα αυτή την ονομάζουμε "ολική απόκλιση". Η βελτίωση στην ολική απόκλιση από την διόρθωση του τετραπόλου είναι συνολικά ένας παράγοντας από  $\sim 2$  μέχρι  $\sim 8$  για την  $g_{tt}$  συνιστώσα και από  $\sim 2$  μέχρι  $\sim 15$  (στις περισσότερες περιπτώσεις) για την  $g_{t\phi}$  συνιστώσα της μετρικής. Σε μερικές περιπτώσεις για το  $g_{t\phi}$  (και σε μια περίπτωση για το  $g_{tt}$ ), η βελτίωση είναι οριακή ή ακόμα υπάρχει και μια πολύ μικρή επιδείνωση της σύγκρισης μετά την διόρθωση του  $M_2$ . Αυτό συμβαίνει γιατί ενώ γίνεται διόρθωση στο  $M_2$ , το οκτάπολο  $S_3$  της αναλυτικής μετρικής (Manko et al.) αλλάζει με τέτοιο τρόπο ώστε να αποκλίνει τελικά περισσότερο η μετρική. Πάντως το αρνητικό αυτό αποτέλεσμα συμβαίνει στις περιπτώσεις όπου η ολική απόκλιση της αριθμητικής από την αναλυτική μετρική είναι ήδη πολύ μικρή (λιγότερο από  $4 \times 10^{-3}$ ). Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στο σύνολό τους στο Παράρτημα μαζί με τις διορθώσεις στα πολύπολα  $M_2$  και  $S_3$ . Στο σημείο αυτό μπορούμε να δούμε ενδεικτικά στο σχήμα 2.1 τη βελτίωση στη σύγκριση ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική μετρική πριν και μετά την διόρθωση.

Το συμπέρασμα από αυτή την ανάλυση είναι ότι οποτεδήποτε χρησιμοποιεί κανείς μια



Σχήμα 2.1: Ένα τυπικό λογαριθμικό γράφημα της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αριθμητική και την αναλυτική μετρική ( $\Delta g_{ij} = (g_{ij}^n - g_{ij}^a)/g_{ij}^n$ ) για ένα συγκεκριμένο αριθμητικό μοντέλο (μοντέλο #16 της καταστατικής εξίσωσης FPS όπως δίνεται στον σχετικό πίνακα στο παράρτημα), πριν (διακεκομμένη γραμμή) και μετά την διόρθωση για το  $M_2$  (διακεκομμένη-εστιγμένη γραμμή). Η αριστερή γραφική παράσταση είναι για την  $g_{tt}$  και η δεξιά είναι για την  $g_{t\phi}$ . Επισημαίνουμε ότι η ολική απόκλιση για τον συγκεκριμένο αστέρα νετρονίων έχει μειωθεί 6.6 φορές για το  $g_{tt}$  και 15.1 φορές για το  $g_{t\phi}$ . Το συγκεκριμένο μοντέλο, σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα που μελετήθηκαν, παρουσιάζει μια μέση βελτίωση στο  $g_{tt}$ .

αναλυτική μετρική για να προσομοιώσει τη γεωμετρία έξω από έναν αστέρα νετρονίων, είναι σημαντικό για τα τελικά αποτελέσματα και τις ποσότητες που υπολογίζει, να έχει χρησιμοποιήσει τα σωστά πολύπολα για την παραγωγή της μετρικής, αφού αυτή μπορεί να διαφέρει αρκετά από την ακριβή μετρική.

(ii) Μια περίπτωση όπου είναι προφανής η σημασία της διόρθωσης στις τιμές των πολυπόλων όπως αυτά υπολογίζονται για αριθμητικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, είναι όταν θέλουμε να συνδέσουμε τα πολύπολα με την περιστροφή και την καταστατική εξίσωση ρεαλιστικών αστέρων νετρονίων όπως έκαναν οι Laarakkers & Poisson [35]. Συγκεκριμένα οι Laarakkers & Poisson προσπάθησαν να συνδέσουν το τετράπολο της μάζας  $M_2$  με το τετράγωνο της παραμέτρου περιστροφής  $j^2$ . Επειδή όμως στην ανάλυσή τους έχουν παραλήψει τη συνεισφορά της διόρθωσης από τη διαφορά του  $b$  από την τιμή  $-1/4$ , οι συντελεστές που έχουν υπολογίσει διαφέρουν από τους πραγματικούς. Με τις διορθωμένες πια τιμές για τα πολύπολα προσδιορίσαμε τις σωστές παραμέτρους που συνδέουν τις τιμές του τετραπόλου με την παράμετρο περιστροφής για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις (τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Παράρτημα). Πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι οι σχετικές παράμετροι (για το τετράπολο) που έχουμε υπολογίσει από τις οικογένειες των αριθμητικών μοντέλων που χρησιμοποιήσαμε, δεν μπορούν να

συγκριθούν άμεσα με τις αντίστοιχες των Laarakkers & Poisson, επειδή οι ακολουθείς των μοντέλων που χρησιμοποιήσαμε δεν είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες ακολουθείς που χρησιμοποίησαν εκείνοι. Ακόμα, πρέπει να επισημάνουμε ότι όπως οι Laarakkers & Poisson, έτσι και εμείς βρίσκουμε μια τετραγωνική σχέση ανάμεσα στο  $M_2$  και το  $j$  πράγμα το οποίο δεν ήταν αναμενόμενο εξ' αρχής. Η τετραγωνική σχέση διατηρείται τελικά γιατί όπως προκύπτει ο διορθωτικός παράγοντας  $b$  αποκλίνει από την τιμή  $-1/4$  τετραγωνικά και αυτός ως προς το  $j$ , δηλαδή

$$b = -1/4 + \alpha j^2, \quad (2.4.3)$$

όπως συμβαίνει και στην περίπτωση της Kerr. Και πρέπει να επισημάνουμε ένα ακόμα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Εκτός από το ότι το  $M_2$  φαίνεται να έχει τετραγωνική σχέση με το  $j$ , αυτή η τάση συσχέτισης εμφανίζεται και στο επόμενο πολύπολο, δηλαδή το  $S_3$  φαίνεται να πηγαίνει κυβικά με το  $j$ , σύμφωνα με μια σχέση της μορφής

$$S_3 = a_3 j^3, \quad (2.4.4)$$

όπου η παράμετρος  $a_3$  είναι σταθερά που εξαρτάται από την καταστατική εξίσωση και την μάζα του αστέρα νετρονίων. Στο Παράρτημα όλες οι σχετικές παράμετροι παρουσιάζονται πιο αναλυτικά και δίνονται σε πίνακες.

(iii) Ένα άλλο μέγεθος του οποίου η σχέση με τα σχετικιστικά πολύπολα έχει απασχολήσει τη βιβλιογραφία, είναι η θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς (ISCO). Σ' αυτό το σημείο η διόρθωση στα πολύπολα έρχεται να ξεδιαλύνει ένα φαινομενικό παράδοξο που παρουσιάστηκε στην εργασία των Berti et al. [3]. Στη συγκεκριμένη εργασία γίνεται μια σύγκριση ανάμεσα στα ISCO που υπολογίζονται από διάφορα αριθμητικά μοντέλα αστέρων νετρονίων με τα ISCO που υπολογίζει κανείς αν χρησιμοποιήσει τον αλγόριθμο των Hartle & Thorne (HT) [19] και την αναλυτική μετρική που προκύπτει από αυτόν για αργά περιστρεφόμενα άστρα. Αυτό που βρήκαν από την σύγκριση που έκαναν οι Berti et al. ήταν ότι για τα διάφορα μοντέλα που κατασκεύασαν αριθμητικά και τα αντίστοιχά τους με την μέθοδο των HT, τα τετράπολα είχαν σημαντική διαφορά ακόμα και στις περιπτώσεις των αργά περιστρεφόμενων μοντέλων (όπου δεν θα περίμενε κανείς να δει μεγάλες αποκλίσεις), ενώ αντιθέτως τα ISCO ήταν σε πολύ καλή σύμπτωση όταν η στροφορμή ήταν μικρή. Αυτή η αντιφατική συμπεριφορά ανάμεσα στα τετράπολα και στα ISCO, εξαφανίζεται αν συνυπολογίσει κανείς και την διόρθωση των πολυπόλων των αριθμητικών χωρόχρονων. Έτσι στα αργά περιστρεφόμενα μοντέλα όπου έχουμε καλή σύμπτωση στις θέσεις των ISCO ανάμεσα στα αριθμητικά μοντέλα

και τα μοντέλα HT, έχουμε μετά τη διόρθωση καλή σύμπτωση και στις τιμές των  $M_2$ .

Στο σημείο αυτό μπορεί να αναρωτηθεί κανείς γιατί να υπάρχει εξάρχης αυτή η διαφορά στα τετράπολα ανάμεσα στην αριθμητική μετρική και την μετρική HT; Ή αλλιώς, γιατί η HT να δίνει σωστό τετράπολο; Η απάντηση εδώ έχει να κάνει με τον τρόπο προσδιορισμού της μετρικής HT. Η αναλυτική εξωτερική μετρική HT γενικά δίνεται σε τέτοια μορφή ώστε να εξαρτάται από τρεις παραμέτρους, οι οποίες αντιστοιχούν στην μάζα  $M$ , την παράμετρο περιστροφής  $j$  και το ανηγμένο τετράπολο  $q$ . Αλλά αν υπολογίσει κανείς συνεπώς την μετρική HT, θα πρέπει να την κολλήσει με μια εσωτερική μετρική HT που αντιστοιχεί σε ένα άστρο νετρονίων με συγκεκριμένες παραμέτρους. Οι παράμετροι λοιπόν που καθορίζουν την δομή ενός αργά περιστρεφόμενου άστρου που περιγράφεται από την μετρική HT είναι δύο. Είναι ουσιαστικά η κεντρική πυκνότητα και μια παράμετρος που δίνει την περιστροφή ως ένα κλάσμα μιας οριακής περιστροφής του άστρου. Και από αυτές τις παραμέτρους καθορίζονται ουσιαστικά η μάζα, η στροφορμή και το τετράπολο. Έτσι το τετράπολο δεν είναι ελεύθερη παράμετρος και επειδή οι Berti et al. το υπολόγισαν συνεπώς, προέκυψε να έχει την σωστή τιμή που αντιστοιχούσε στο εκάστοτε αργά περιστρεφόμενο αριθμητικό μοντέλο. Έτσι είχαν καλή σύμπτωση στις γεωμετρικές ποσότητες που έδιναν τις τιμές των ISCO και ο αλγόριθμος των Hartle & Thorne έδινε σωστό τετράπολο.

Και ενώ αυτά ισχύουν για τους υπολογισμούς μέσω της HT μετρικής, τα πράγματα θα ήταν διαφορετικά αν προσπαθούσε να εφαρμόσει κανείς την προσεγγιστική έκφραση των Shibata & Sasaki (SS) [65] που συνδέει την θέση του ISCO με τα διάφορα τετράπολα. Για να δούμε πόσο θα επηρέαζε τους σχετικούς υπολογισμούς, επαναλάβαμε την σύγκριση που έκαναν οι Berti και Στεργιούλας [2] ανάμεσα στα αριθμητικά υπολογισμένα ISCO και σε αυτά που προκύπτουν από τις εκφράσεις των SS. Το αποτέλεσμα της διόρθωσης των πολυπόλων στις τιμές που παίρνει κανείς από τις εκφράσεις των SS δεν είναι δραματικό και αυτό έχει να κάνει με την φύση των προσεγγιστικών αυτών εκφράσεων. Η αιτία πίσω από αυτό το φαινόμενο είναι ότι, στις περιπτώσεις όπου έχουμε αργά περιστρεφόμενο αντικείμενο, και άρα χαμηλό τετράπολο, οι εκφράσεις των SS είναι αρκετά ακριβείς και δεν έχουν ιδιαίτερη ευαισθησία σε μικρές αλλαγές του τετραπόλου. Αντιθέτως, όταν έχουμε γρήγορη περιστροφή, η διόρθωση που επιφέρει η αλλαγή στο τετράπολο μπορεί να είναι σημαντική, αλλά τότε και οι προσεγγιστικές εκφράσεις δεν είναι αρκετά ακριβείς. Έτσι, για παράδειγμα, η σχετική διαφορά στο ISCO πέφτει από το 0.92% στο 0.61% λόγω της διόρθωσης του  $M_2$  για αργή περιστροφή και χαμηλό  $M_2$ , ενώ από την άλλη πέφτει από το 17.3% στο 15.6% για γρήγορη περιστροφή και μεγάλο τετράπολο  $M_2$  (για κάποια μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης FPS). Σχετικοί πίνακες

με αυτά τα αποτελέσματα υπάρχουν στο Παράρτημα.

(iv) Ένα τελευταίο σχόλιο που μπορεί να κάνει κανείς είναι ότι σε μελέτες όπως αυτή των Baubock et al. [1], όπου γίνεται εκτίμηση της φαινόμενης επιφάνειας ενός αστέρα νετρονίων εξαιτίας της παραμόρφωσής που σχετίζεται με το τετράπολο, χρειάζεται να επανεξεταστούν τα αποτελέσματα, αφού το τετράπολο που εισάγουν στους υπολογισμούς τους είναι αυτό που δίνεται από τις εκφράσεις των Laarakkers & Poisson, το οποίο όπως συζητήσαμε και παραπάνω χρειάζεται διόρθωση.



## Κεφάλαιο 3

# Πιστότητα του μετασχηματισμού από τις ημι-ισοτροπικές στις Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες: Προαπαιτούμενο για τη σύγκριση μετρικών

Προκειμένου να πραγματοποιήσει κανείς τη σύγκριση μιας αριθμητικά κατασκευασμένης μετρικής με μια αναλυτική μετρική θα πρέπει πρώτα να φροντίσει να έχουν εκφραστεί και οι δύο μετρικές στις ίδιες συντεταγμένες. Οι αριθμητικά κατασκευασμένοι χωρόχρονοι, όπως προκύπτουν από τον RNS κώδικα, είναι εκφρασμένοι σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες, ενώ από την άλλη η αναλυτική μετρική που παράγεται μέσω του φορμαλισμού του δυναμικού του Ernst, είναι εκφρασμένη σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου. Άρα πρέπει να παραχθεί ένας αλγόριθμος που να κάνει τον μετασχηματισμό από το ένα σύστημα στο άλλο προτού γίνει η σύγκριση. Κατά τη διαδικασία εφαρμογής του μετασχηματισμού, πρέπει να δοθεί προσοχή σε δύο βασικά σημεία, (α) το ζήτημα του σε ποια περιοχή έχει νόημα να ορισθεί ο μετασχηματισμός ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων, και (β) το σφάλμα που ενδεχομένως να εισάγει ο αλγόριθμος του μετασχηματισμού να είναι καταλλήλως μικρό ώστε να επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων από τη σύγκριση των μετρικών. Η διερεύνηση αυτών των σημείων παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο. Προκειμένου να μπορέσει να παρακολουθήσει κανείς πιο εύκολα τις λεπτομέρειες του κεφαλαίου, θα ήταν καλό να ανατρέξει σε κάποια στοιχεία για τον κώδικα RNS που δίνονται στο Παράρτημα.

### 3.1 Εισαγωγή

Το ζήτημα της προσέγγισης της γεωμετρίας στο εξωτερικό συμπαγών αστροφυσικών αντικειμένων, όπως είναι οι περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων, τα άστρα από παράξενη ύλη (strange stars) ή οι μελανές οπές που περιβάλλονται από κάποιο δίσκο προσαύξησης, από κάποια αναλυτική λύση των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν έχει τραβήξει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών [2, 72, 50, 12, 6, 73]. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία ένα πλήθος από τέτοιες λύσεις που έχουν παραχθεί με την βοήθεια διαφόρων τεχνικών παραγωγής λύσεων των εξισώσεων πεδίου στο κενό (όπως αυτές που είδαμε στο 1ο κεφάλαιο). Οι λύσεις αυτές εξαρτώνται από ένα σύνολο παραμέτρων, οι οποίες μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε κάποια συγκεκριμένη λύση να καταφέρνει να προσομοιώσει τα χαρακτηριστικά του κεντρικού αντικειμένου που μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε. Έτσι, αν θέλαμε να προσεγγίσουμε αναλυτικά τον χωρόχρονο γύρω από κάποιο κεντρικό αντικείμενο για το οποίο διαθέτουμε μια αριθμητική περιγραφή, έχουμε δηλαδή κατασκευάσει αριθμητικά μια μετρική η οποία αντιπροσωπεύει τη γεωμετρία γύρω από αυτό το αντικείμενο, τότε θα λέμε ότι μία αναλυτική μετρική που προκύπτει με κάποια κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων αποτελεί καλή προσέγγιση της γεωμετρίας έξω από το κεντρικό αντικείμενο, αν η σύγκριση της αναλυτικής με την αριθμητική μετρική βρίσκεται σε καλή σύμπτωση. Σε αυτή την περίπτωση, η εν λόγω αναλυτική μετρική θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στη θέση της αντίστοιχης αριθμητικής για να μελετήσει κανείς τις τροχιές σωματιδίων γύρω από το συγκεκριμένο κεντρικό αντικείμενο ή να μελετήσει τις ιδιότητες των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων από την κίνηση σε ένα τέτοιο υπόβαθρο. Φυσικά θα μπορούσε κανείς να κάνει και την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή από τη στιγμή που έχει συνδέσει συγκεκριμένες μετρικές με κεντρικά αντικείμενα με συγκεκριμένη δομή και φυσικές ιδιότητες, διαγιγνώσκοντας από τις γεωμετρικές ιδιότητές τους τις προηγούμενες μετρικές να μελετήσει τη δομή αστροφυσικών αντικειμένων.

Στο 1ο κεφάλαιο παρουσιάσαμε κάποιες τεχνικές που μπορούν να μας δώσουν αναλυτικές λύσεις οι οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για όσα αναφέρουμε παραπάνω (για παράδειγμα οι λύσεις που έχουν αναπτυχθεί από τους Manko et al. και Sibgatullin [40, 44, 60, 42, 66, 45]), ενώ υπάρχουν και λύσεις όπως αυτές που έχουν αναπτυχθεί από τον Neugebauer [47, 48, 49, 46] που περιγράφουν την βαρύτητα γύρω από λεπτούς δίσκους.

Από την άλλη έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές και κώδικες που λύνουν αριθμητικά τις εξισώσεις πεδίου για συμπαγή αντικείμενα (στο θέμα αυτό αναφερθήκαμε και

στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά για μια εκτενή παρουσίαση αυτών των μεθόδων μπορεί να κοιτάξει κανείς στην εργασία [70]), οι οποίες δίνουν την μετρική στο εσωτερικό και το εξωτερικό συμπαγών αντικειμένων όπως οι αστέρες νετρονίων για οποιαδήποτε μορφή καταστατικής εξίσωσης επιλεγεί να διέπει την ύλη και για ότι φυσικά χαρακτηριστικά (μάζα, περιστροφή, κλπ.) θέλουμε να έχει το αντικείμενο. Οι κώδικες αυτοί έχουν ως τελικό παραγόμενο αποτέλεσμα τη μετρική σε μορφή πίνακα όπου οι τιμές των μετρικών συναρτήσεων, καθώς και τα άλλα φυσικά χαρακτηριστικά του άστρου, δίνονται σε προεπιλεγμένα σημεία του πλέγματος των συντεταγμένων. Μια μετρική σε τέτοια μορφή μπορεί να είναι δύσχρηστη για αστροφυσικούς υπολογισμούς και αυτός είναι ο κυριότερος λόγος που προσπαθούμε να την προσεγγίσουμε με κάποια αναλυτική μετρική.

Όπως προαναφέραμε, προκειμένου να συγκριθεί μια αναλυτική μετρική με μια αντίστοιχη αριθμητική, θα πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι έχουν εκφραστεί στις ίδιες συντεταγμένες μέσω ενός μετασχηματισμού που να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής. Και επειδή μας ενδιαφέρει να μετασχηματίσουμε μια αριθμητική μετρική από τις ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες (που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) στις Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες της αναλυτικής μετρικής, θα πρέπει να προσέξουμε ένα ιδιαίτερο σημείο που έχει να κάνει με το πως κατασκευάζονται και το που ορίζονται οι τελευταίες. Αν και ο μετασχηματισμός ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι απλός να πραγματοποιηθεί στην περιοχή του κενού, αν εφαρμοστεί ο ίδιος μετασχηματισμός στην περιοχή όπου υπάρχει ύλη, τότε οδηγεί σε λάθος ταύτιση των συντεταγμένων. Ας δούμε όμως που οφείλεται αυτό το πρόβλημα. Μια αξονικά συμμετρική μετρική γραμμένη σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες έχει τέσσερις μετρικές συναρτήσεις (με τις τρεις να είναι γενικά ανεξάρτητες), ενώ αντίστοιχα στις συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου έχει τρεις μετρικές συναρτήσεις (όπου τώρα μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες). Η διαφορά αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση η μετρική όπως δίνεται στις ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες είναι για να εκφράσει κάποια λύση των γενικών εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν τόσο μέσα στην ύλη όσο και έξω από αυτή, ενώ στην άλλη περίπτωση, η μετρική όπως δίνεται στις συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου είναι για να εκφράσει αξονικά συμμετρικές λύσεις του κενού. Φυσικά στην περίπτωση του κενού και στις ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες συμβαίνει να υπάρχουν μόνο δύο ανεξάρτητες μετρικές συναρτήσεις. Αν λοιπόν κάποιος θέλει να χρησιμοποιήσει τις συντεταγμένες  $\rho, z$  του Weyl και μέσα στην περιοχή όπου υπάρχει ύλη, τότε θα πρέπει να

φροντίσει να γράψει το στοιχείο της μετρικής στη μορφή

$$ds_{(\rho,z)}^2 = \Omega^2 (d\rho^2 + \Lambda(\rho, z) dz^2) \quad (3.1.1)$$

όπου έχει εισαχθεί η συνάρτηση  $\Lambda(\rho, z)$  που εκφράζει το γεγονός ότι οι συντεταγμένες  $\rho$  και  $z$  δεν είναι πια αρμονικές συζυγείς συναρτήσεις, όπως ισχύει στην περίπτωση του κενού (στο κενό, η συντεταγμένη  $\rho$  ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και άρα μπορεί να βρεθεί μια  $z$  που να είναι αρμονική συζυγής της  $\rho$  ενώ στην ύλη η  $\rho$  ικανοποιεί την Poisson και άρα δεν υπάρχει μια αντίστοιχη αρμονική  $z$  (αναλυτική συζήτηση πάνω σε αυτό το θέμα υπάρχει στο βιβλίο του Wald [77]).

Για τους παραπάνω λόγους αναπτύσσουμε παρακάτω έναν αλγόριθμο ο οποίος να μετασχηματίζει τις ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες σε Weyl-Παπαπέτρου ακολουθώντας μια διαδρομή ολοκλήρωσης που αποφεύγει την περιοχή της ύλης διατηρώντας παράλληλα τα αριθμητικά σφάλματα τόσο μικρά ώστε να μπορούμε να κάνουμε συγκρίσεις με νόημα ανάμεσα σε αριθμητικές και αναλυτικές μετρικές. Συγκεκριμένα, το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της  $z$  συντεταγμένης σε κάθε σημείο του πλέγματος που έχουμε χρησιμοποιήσει για την αριθμητική μετρική (η  $\rho$  συντεταγμένη προκύπτει απευθείας). Ο υπολογισμός αυτός γίνεται ακολουθώντας μια διαδρομή ολοκλήρωσης του μετασχηματισμού που ξεκινά από τον ισημερινό λίγο έξω από την επιφάνεια του άστρου και ακολουθεί έναν μεσημβρινό με  $r = \text{σταθ.}$  μέχρι όποια γωνία  $\theta$  μας ενδιαφέρει και από εκεί συνεχίζει ακτινικά είτε προς τα μέσα μέχρι την επιφάνεια του άστρου (το άστρο είναι πεπλατυσμένο στο ισημερινό επίπεδο και έτσι ή ακτίνα του στον ισημερινό είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του σε άλλα «γεωγραφικά» πλάτη) είτε προς τα έξω ως το άπειρο.

## 3.2 Μετασχηματισμός συντεταγμένων στο κενό

Το στοιχείο μήκους για έναν στάσιμο και αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί στη μορφή,

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (3.2.1)$$

όπου  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  και  $\mu$  είναι συναρτήσεις του  $r$  και του  $\theta$ . Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της παραπάνω μετρικής προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση  $\psi$  με τη

συνάρτηση  $B$  που ορίζεται από τη σχέση,

$$e^\psi = B e^{-\nu} r \sin \theta \quad (3.2.2)$$

οπότε και το στοιχείο μήκους παίρνει τη μορφή,

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + B^2 e^{-2\nu} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2). \quad (3.2.3)$$

Την μορφή αυτή της μετρικής την έχουμε συνατήσει και στο προηγούμενο κεφάλαιο, όπου μιλήσαμε για τα πολύπολα των αριθμητικών μετρικών, και πρέπει να επισημάνουμε ότι η παραπάνω μορφή μετρικής μπορεί να περιγράψει κάθε στάσιμη και αξονικά συμμετρική λύση των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν που δημιουργείται από κάποια κατανομή ύλης που ικανοποιεί αυτές τις συμμετρίες.

Αντίστοιχα, στις συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου, που είναι κατάλληλες για να περιγράψουν λύσεις του κενού, το στοιχείο μήκους έχει τη μορφή,

$$ds^2 = -f (dt - w d\phi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (3.2.4)$$

όπου σε αυτή την περίπτωση οι συναρτήσεις  $f$ ,  $w$  και  $\gamma$  είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων  $\rho$ ,  $z$ .

Για να μετασχηματίσουμε τις ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες σε Weyl-Παπαπέτρου, ορίζουμε αρχικά τις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\varpi \equiv r \sin \theta, \quad \zeta \equiv r \cos \theta. \quad (3.2.5)$$

Τότε, οι εξισώσεις πεδίου του Αϊνστάιν στο κενό ( $R_t^t + R_\phi^\phi = 0$ ) συνεπάγονται (βλέπε [77]) ότι

$$\frac{\partial^2(\varpi B)}{\partial \varpi^2} + \frac{\partial^2(\varpi B)}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (3.2.6)$$

Έτσι μπορεί κανείς να ορίσει μια νέα συντεταγμένη

$$\rho \equiv \varpi B = e^{(\nu+\psi)} \quad (3.2.7)$$

η οποία θα ικανοποιεί την διδιάστατη εξίσωση Laplace στο χώρο  $(r - \theta)$ . Αφού η  $\rho$

είναι αρμονική, μπορεί κανείς να ορίσει την αρμονική συζυγή της

$$z = z(\varpi, \zeta), \quad (3.2.8)$$

που θα ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial z}{\partial \varpi} = -\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = -\varpi \frac{\partial B}{\partial \zeta}, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} = B + \varpi \frac{\partial B}{\partial \varpi}. \quad (3.2.10)$$

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε πάλι ότι η παραπάνω κατασκευή των συζυγών συντεταγμένων  $\rho$ ,  $z$  είναι εφικτή μόνο στην περιοχή του κενού. Στο εσωτερικό του αστέρα το  $\rho$  μπορεί και πάλι να ορισθεί όπως παραπάνω, αλλά δεν θα ικανοποιεί πλέον την εξίσωση Laplace (3.2.6) και άρα δεν μπορούμε να φτιάξουμε μια  $z$  με τον ίδιο τρόπο ως αρμονική συζυγή της  $\rho$ .

Στην περιοχή του κενού μπορούμε να ολοκληρώσουμε τις συνθήκες Cauchy-Riemann (3.2.9) ξεκινώντας με αρχική τιμή για το  $z$  την  $z(\varpi, \zeta = 0) = 0$ . Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στο ισημερινό επίπεδο του αστέρα και πιο συγκεκριμένα σε κάποιο σημείο του ισημερινού επιπέδου που βρίσκεται έξω από το άστρο. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (3.2.9) μπορεί να μας δώσει τις τιμές της  $z$ —συντεταγμένης σε οποιοδήποτε σημείο του πλέγματος που αντιστοιχεί στο εξωτερικό του άστρου. Όπως έχουμε προαναφέρει, τις εξισώσεις (3.2.9) όμως δεν μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για μέσα στην ύλη.

Εκτός από τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων από τις  $(r, \theta)$  στις  $(\rho, z)$ , για να φέρουμε την αριθμητική μετρική στην μορφή (3.2.4), θα πρέπει να υπολογίσουμε τις νέες μετρικές συναρτήσεις  $(f, w, \gamma)$  από τις προηγούμενες  $(\nu, \omega, \mu, B)$ , τις οποίες γνωρίζουμε και αυτές σε κάθε σημείο του πλέγματος. Απευθείας από τις σχέσεις (3.2.9, 3.2.10) έχουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} d\rho^2 + dz^2 &= \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right)^2 \right] (d\varpi^2 + d\zeta^2) \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right)^2 \right] (dr^2 + r^2 d\theta^2). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Ακόμα, συγκρίνοντας τις μετρικές (3.2.3, 3.2.4) και κρατώντας τις  $(t, \phi)$  κοινές, έχουμε τις εκφράσεις

$$f = e^{2\nu} - \omega^2 \rho^2 e^{-2\nu}, \quad (3.2.12)$$

$$w = -\frac{\omega \rho^2 e^{-2\nu}}{f}, \quad (3.2.13)$$

$$e^{2\gamma} = f \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{-1} e^{2\mu}. \quad (3.2.14)$$

Αυτές οι νέες μετρικές συναρτήσεις μαζί με τις νέες συντεταγμένες  $\rho$  και  $z$ , συνιστούν το μετασχηματισμό της μετρικής από τις ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες στις Weyl-Παπαπέτρου. Πρακτικά ο μόνος δύσκολος υπολογισμός που πρέπει να πραγματοποιηθεί είναι η ολοκλήρωση που θα δώσει την  $z$  συντεταγμένη. Αυτός ο υπολογισμός γενικά δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί αναλυτικά· η ολοκλήρωση των εκφράσεων Cauchy-Riemann πραγματοποιείται αριθμητικά και τον αλγόριθμο για αυτή την ολοκλήρωση θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα.

### 3.3 Υπολογισμός των συντεταγμένων

#### Weyl-Παπαπέτρου

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο με τον οποίο μπορεί να ολοκληρώσει κανείς τις συνθήκες Cauchy-Riemann προκειμένου να υπολογίσει την  $z$  συντεταγμένη των συντεταγμένων Weyl-Παπαπέτρου. Όπως έχουμε αναφέρει, η  $\rho$  συντεταγμένη προκύπτει εξ ορισμού από το γινόμενο της συνάρτησης  $B$  με την συντεταγμένη  $\varpi$  (Εξ. 3.2.7). Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann (3.2.9, 3.2.10) οδηγούν στις εξισώσεις,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta B + \sin \theta \frac{\partial B}{\partial \theta}, \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r^2 \sin \theta \left( \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{B}{r} \right). \quad (3.3.2)$$

Επιπλέον, επειδή το  $\mu \equiv \cos \theta$  (εδώ το  $\mu$  δεν πρέπει να το μπερδεύουμε με την μετρική συνάρτηση που έχουμε αναφέρει πιο πάνω) και το  $x \equiv r/(r + r_e)$ , όπου  $r_e$  είναι η ισημερινή ακτίνα της επιφάνειας του άστρου, είναι οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται σε αριθμητικές διαδικασίες ολοκλήρωσης των εξισώσεων πεδίου που βασίζονται στην μέθοδο ολοκλήρωσης των Cook, Shapiro & Teukolsky (CST) [7] (αυτό ισχύει και για τον κώδικα RNS των Στεργιούλα και Friedman [71]) έτσι ώστε να έχουν ένα πλέγμα με πιο ομοιόμορφη κατανομή σημείων ως προς τις γωνίες και να μπορούν να καλύψουν όλο τον χώρο μέχρι το άπειρο, οι παραπάνω σχέσεις είναι χρήσιμο να εκφραστούν στη μορφή,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{r_e}{(1-x)^2} \left( \mu B + (\mu^2 - 1) \frac{\partial B}{\partial \mu} \right), \quad (3.3.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = r_e \left( x^2 \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{x}{1-x} \right). \quad (3.3.4)$$

Έχοντας διαθέσιμες τις παραπάνω εκφράσεις, μπορούμε να προχωρήσουμε τώρα στην επιλογή της κατάλληλης διαδρομής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του  $z$ . Σε πραγματικά περιστρεφόμενα άστρα νετρονίων, η ισημερινή ακτίνα  $r_e$  αποτελεί τη μέγιστη τιμή ακτίνας της επιφάνειας  $r_s(\theta)$  του άστρου, αφού το άστρο είναι πεπλατυσμένο στους πόλους και διογκωμένο στον ισημερινό. Άρα, μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα σημείο στο ισημερινό επίπεδο με  $\theta = \pi/2$  και  $z = 0$  το οποίο να είναι μόλις έξω από την επιφάνεια και να ακολουθήσουμε έναν μεσημβρινό με σταθερό  $x = x_0$  ( $r = r_0 \cong r_e$ ) μέχρι να φτάσουμε σε οποιαδήποτε γωνία  $\theta$  θέλουμε μέχρι τον άξονα συμμετρίας όπου θα είναι  $\theta = 0$ . Αφού φτάσουμε στην οποιαδήποτε ενδιαμέση γωνία μας ενδιαφέρει, μπορούμε μετά να κινηθούμε ακτινικά (κατά μήκος των  $r$  ή των  $x$  προς τα έξω ή προς τα μέσα μέχρι την επιφάνεια) και να υπολογίσουμε έτσι σε κάθε σημείο του πλέγματος στην περιοχή του κενού χώρου την συντεταγμένη  $z$ . Πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι κατά μήκος ενός μεσημβρινού με σταθερό  $x = x_0$ , η βέλτιστη ολοκλήρωση προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.3.4), ενώ κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης σε σταθερό  $\theta$  ή  $\mu$  η βέλτιστη ολοκλήρωση προκύπτει από την έκφραση (3.3.1) αντί για την έκφραση (3.3.3)· η διαφορά ανάμεσα στην ακρίβεια των δύο τελευταίων εκφράσεων κατά την ολοκλήρωση προκύπτει από την ακτινική συμπεριφορά της ολοκληρωτέας ποσότητας καθώς πάμε στο άπειρο, δηλαδή έχουμε διαφορά στη συμπεριφορά όταν το  $r \rightarrow \infty$  σε σχέση με όταν το  $x \rightarrow 1$ , με την πρώτη περίπτωση να συμπεριφέρεται ομαλά. Έτσι η τιμή



της συντεταγμένης  $z$  σε κάποιο πλεγματοειδές σημείο  $(x, \mu)$  θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$z(r, \mu) = r_e \left( x_0^2 \int_0^\mu \frac{\partial B}{\partial x} d\mu' + \frac{x_0}{1-x_0} \int_0^\mu B d\mu' \right) + \left( \mu \int_{r_0}^r B dr' + (\mu^2 - 1) \int_{r_0}^r \frac{\partial B}{\partial \mu} dr' \right). \quad (3.3.5)$$

Η παραπάνω έκφραση θα μπορούσε να πάρει μια πολύ απλή μορφή, αν ο μεσημβρινός που θα επιλέγαμε να ακολουθήσουμε ήταν αυτός πάνω στην ισημερινή ακτίνα του άστρου που ορίζεται ως  $x_0 = 1/2$  ( $r_0 = r_e$ ) (και είναι το πρώτο σημείο του πλέγματος εκτός επιφάνειας). Επειδή όμως πρακτικά για τον υπολογισμό των παραγώγων  $\partial B/\partial x$  θέλουμε τουλάχιστον δύο σημεία εκτός του άστρου, επιλέγουμε τελικά το επόμενο του  $x_0 = 1/2$ . Τέλος, αν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη συντεταγμένη  $z$  κατά μήκος του άξονα, ο τελευταίος όρος μπορεί να παραληφθεί αφού στον άξονα έχουμε  $\mu = 1$ .

Φυσικά κανείς θα μπορούσε να ακολουθήσει μια οποιοδήποτε άλλη διαδρομή ολοκλήρωσης που να ξεκινά από το ισημερινό επίπεδο όπου  $z = 0$  μέχρι το τελικό πλεγματοειδές σημείο, αλλά επειδή η ολοκλήρωση πραγματοποιείται αριθμητικά είναι καλό να επιλεγεί η διαδρομή που έχει το μικρότερο αριθμητικό σφάλμα. Στην επόμενη ενότητα θα επιχειρηματολογήσουμε υπέρ της παραπάνω προτεινόμενης διαδρομής και θα δώσουμε μια εκτίμηση του αντίστοιχου αριθμητικού σφάλματος. Ένα ποιοτικό επιχείρημα για το γιατί περιμένουμε η παραπάνω διαδρομή να είναι η καλύτερη επιλογή είναι ότι, αν κινηθούμε κατά μήκος ενός άλλου μεσημβρινού που βρίσκεται σε πιο μεγάλη ακτίνα, το σφάλμα στον αριθμητικό υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος στην έκφραση (3.3.4) θα είναι μεγαλύτερο, αφού πολλαπλασιάζεται με τη συνάρτηση  $\frac{x_0}{1-x_0}$  που έχει αποκλίνουσα συμπεριφορά καθώς το  $x_0 \rightarrow 1$ . Άρα το αριθμητικό σφάλμα που θα εισάγει ένας τέτοιος μεσημβρινός θα ενισχύεται και θα ακολουθεί όλες τις υπόλοιπες πράξεις που θα κάνουμε για τον προσδιορισμό του  $z$ .

Κλείνουμε αυτή την ενότητα δείχνοντας πως δουλεύει ο μετασχηματισμός στην απλή περίπτωση της μετρικής Schwarzschild σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες, όπου όλες οι πράξεις μπορούν να γίνουν αναλυτικά. Στο Παράρτημα δίνεται η μορφή της Schwarzschild σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες και σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου. Η συνάρτηση  $B$  για την μετρική Schwarzschild έχει την μορφή,

$$B = 1 - \frac{M^2}{4r^2} = 1 - \frac{M^2}{4r_e^2} \left( \frac{1-x}{x} \right)^2. \quad (3.3.6)$$

Άρα, στην έκφραση (3.3.5) υπάρχουν μόνο οι όροι  $\partial B/\partial x$  και  $B$ . Έτσι, για παράδειγμα κατά μήκος του άξονα ( $\mu = 1$ ), η συντεταγμένη  $z$  είναι

$$z(r, \mu = 1) = r_e \left( \frac{1}{4} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x_0=1/2} + B|_{x_0=1/2} \right) + \int_{r_e}^r B(r') dr'. \quad (3.3.7)$$

Με λίγη άλγεβρα, η παραπάνω έκφραση μας δίνει τελικά

$$z(r, \mu = 1) = r \left( 1 + \frac{M^2}{4r^2} \right). \quad (3.3.8)$$

Αυτή η έκφραση είναι ακριβώς ο μετασχηματισμός ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων, όπως μπορεί να δει κανείς και στο Παράρτημα.

### 3.4 Εκτίμηση των αριθμητικών σφαλμάτων

Η σύγκριση μιας αριθμητικής μετρικής με μια αναλυτική μετρική προϋποθέτει πρώτα τον μετασχηματισμό της μίας από τις δύο στις συντεταγμένες της άλλης και μετά την σύγκριση μεταξύ τους. Για την αριθμητική μετρική έχουμε τις τιμές των μετρικών συναρτήσεων σε δεδομένα σημεία (πλέγμα), άρα η σύγκριση βολεύει να πραγματοποιηθεί έχοντας ως βάση αυτά τα σημεία. Τα βήματα για την σύγκριση είναι δύο, πρώτα αντιστοίχιση σημείο προς σημείο των δύο συστημάτων συντεταγμένων στα οποία έχουμε τις μετρικές και μετά υπολογισμός των μετρικών συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα για κάθε σημείο και τέλος σύγκριση μεταξύ τους. Έτσι από αυτή τη διαδικασία θα έχουμε δύο παράγοντες διαφοροποίησης των μετρικών που θα εμφανίζονται στη σύγκριση. Ο ένας παράγοντας προκύπτει από το πόσο καλά ή κακά μπορεί να έχουμε αντιστοιχίσει τις συντεταγμένες μεταξύ τους στο κάθε σημείο και ο δεύτερος παράγοντας αφορά το πόσο πραγματικά κοντά είναι οι μετρικές. Για να γίνει λοιπόν μια σύγκριση ανάμεσα σε δύο μετρικές που να έχει νόημα, θα πρέπει ο πρώτος παράγοντας να μην υπερτερεί του δεύτερου.

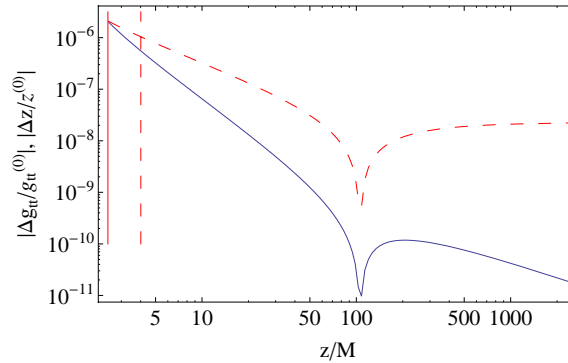
Η αριθμητική ολοκλήρωση του μετασχηματισμού από ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες σε Weyl-Παπαπέτρου που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, δεδομένου του ότι έχουμε την αριθμητική μετρική σε μια συγκεκριμένη φόρμα όπως αυτή προκύπτει από τον κώδικα που χρησιμοποιούμε για την ολοκλήρωση των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν,

περιορίζεται σε ότι αφορά τα εγγενή της σφάλματα που σχετίζονται με την ακρίβεια με την οποία δίνει ο κώδικας τα αποτελέσματά του και το μέγεθος του πλέγματος που χρησιμοποιεί ο κώδικας. Ειδικότερα, το μέγεθος του πλέγματος, δηλαδή το πλήθος των πλεγματοειδών σημείων θα καθορίσει και το μέγεθος του σφάλματος που θα έχουμε κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου για την αριθμητική ολοκλήρωση του μετασχηματισμού των συντεταγμένων, αφού δεδομένου του πλέγματος δεν μπορούμε να κάνουμε για παράδειγμα μικρότερα βήματα στην ολοκλήρωση των εξισώσεων του μετασχηματισμού. Αυτό που θα επιχειρήσουμε παρακάτω είναι να εκτιμήσουμε το μέγεθος αυτού του σφάλματος και να ελέγξουμε αν αυτό θα έχει αρνητικές επιπτώσεις στην προσπάθεια σύγκρισης της αριθμητικής μετρικής με την αναλυτική. Όπως θα δούμε παρακάτω, τελικά η ακρίβεια του μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι μεγαλύτερη από την ακρίβεια με την οποία δίνει τα αποτελέσματά του ο κώδικας που κάνει την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων πεδίου και άρα αυτός ο μετασχηματισμός επιτρέπει την σύγκριση των μετρικών.

Έστω ότι έχουμε τις μετρικές που θέλουμε να συγκρίνουμε, την αριθμητική  $g_{\alpha\beta}^{(N)}(r, \theta)$  και την αναλυτική  $g_{\alpha\beta}^{(A)}(\rho, z)$ . Επιλέγουμε να συγκρίνουμε τις δύο μετρικές κατά μήκος του άξονα συμμετρίας όπου θα έχει συσσωρευτεί περισσότερο αριθμητικό σφάλμα κατά την ολοκλήρωση του μετασχηματισμού των συντεταγμένων (3.3.5) κατά τη μεσημβρινή διεύθυνση.

Για να κάνουμε μια πρώτη εκτίμηση του σφάλματος που μπορεί να έχουμε από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων, θα χρησιμοποιήσουμε μια μετρική της οποίας γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό αναλυτικά. Η μετρική αυτή είναι η μετρική Schwarzschild της οποίας η συνάρτηση  $B$  δίνεται από την εξίσωση (3.3.6) ενώ η τιμή της  $z$  συντεταγμένης κατά μήκος του άξονα δίνεται από τη σχέση (3.3.7). Έτσι, σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε το σφάλμα που οφείλεται καθαρά στον αριθμητικό υπολογισμό των συντεταγμένων.

Στο σχήμα 3.1 απεικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή ο λογάριθμος της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτικά και στην αριθμητικά υπολογισμένη  $z$  συντεταγμένη κατά μήκος του άξονα συμμετρίας για μια μετρική Schwarzschild. Το σχήμα δείχνει ακόμα την διαφορά ανάμεσα στην συνιστώσα  $g_{tt}$  της μετρικής Schwarzschild σε κάθε σημείο και την αντίστοιχη της μετρικής Schwarzschild που υπολογίζει κανείς στο συγκεκριμένο σημείο αν θεωρήσει ότι η συντεταγμένη είναι η αριθμητικά υπολογισμένη τιμή του  $z$  (συνεχής καμπύλη). Η διαφορά αυτή είναι ουσιαστικά το σχετικό σφάλμα που εισάγει στη σύγκριση των μετρικών το σφάλμα στον αριθμητικό προσδιορισμό των συντεταγμένων. Ως πρότυπο για να στήσουμε το πλέγμα των σημείων στα οποία



Σχήμα 3.1: Το γράφημα απεικονίζει λογαριθμικά την σχετική διαφορά ανάμεσα στην ακριβής τιμή του  $z$  ( $z^{(0)}$ ) και την τιμή του  $z$  που υπολογίζουμε με την αριθμητική ολοκλήρωση ( $z^{(N)}$ ) σε συγκεκριμένα σημεία του πλέγματος (διακεκομμένη γραμμή). Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση στο σφάλμα της μετρικής είναι η  $g_{tt}$  συνιστώσα της μετρικής Schwarzschild και ως πρότυπο για το πλέγμα θεωρήσαμε τον πιο γρήγορα περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων που παρουσιάζεται στον πίνακα 3 στην εργασία [2] με μάζα  $M = 1.864M_{\odot}$  και ισημερινή ακτίνα  $r_e = 10.755$  km. Η σχετική διαφορά της ακριβούς μετρικής  $g_{tt}^{(0)}$  με αυτήν που προκύπτει από την υπολογισμένη μέσω των συντεταγμένων που έχουν προκύψει από την αριθμητική ολοκλήρωση  $g_{tt}^{(N)}$  απεικονίζεται με την συνεχόμενη καμπύλη. Οι σχετικές διαφορές και στις δυο καμπύλες δεν ξεπερνάνε την τιμή  $\sim 10^{-6}$ . Η κατακόρυφη γραμμή δείχνει τη θέση στο άξονα της επιφάνειας του άστρου που χρησιμοποιήθηκε ως πρότυπο για το πλέγμα.

κάνουμε τους υπολογισμούς, χρησιμοποιήσαμε ένα μέγιστα περιστρεφόμενο άστρο με μάζα  $M = 1.864M_{\odot}$  (και βαρυονική μάζα  $M_B = 2.105M_{\odot}$ ) του οποίου το πλέγμα στην ακτινική διεύθυνση έχει για κλίμακα την ισημερινή ακτίνα  $r_e = 10.755$  km και διαστάσεις  $600 \times 300$  όπου τα 300 σημεία είναι στην μεσημβρινή διεύθυνση και τα 600 είναι στην ακτινική (από τα 600 της ακτινικής, στο ισημερινό επίπεδο τα 300 είναι στο εσωτερικό του άστρου). Τα αριθμητικά ολοκληρώματα υπολογίζονται με την μέθοδο του τραπεζίου. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι η χρήση της μετρικής Schwarzschild δεν μας δίνει μια πλήρη εικόνα των σφαλμάτων που επηρεάζονται, αφού δεν έχει γωνιακή εξάρτηση, αλλά μπορεί να αποτελέσει μια εκτίμηση της τάξης μεγέθους του σφάλματος.

Όπως βλέπουμε από το σχήμα 3.1 το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του  $z$  είναι της τάξης του  $\sim 10^{-6}$  και βαίνει μικρότερο όσο απομακρυνόμαστε προς τα έξω. Ομοίως το σχετικό σφάλμα στο  $g_{tt}$  ξεκινά από  $\sim 10^{-6}$  και γίνεται ακόμα πιο μικρό και από το αντίστοιχο του  $z$ . Η ακρίβεια με την οποία δίνει τα αποτελέσματά του ο κώδικας που

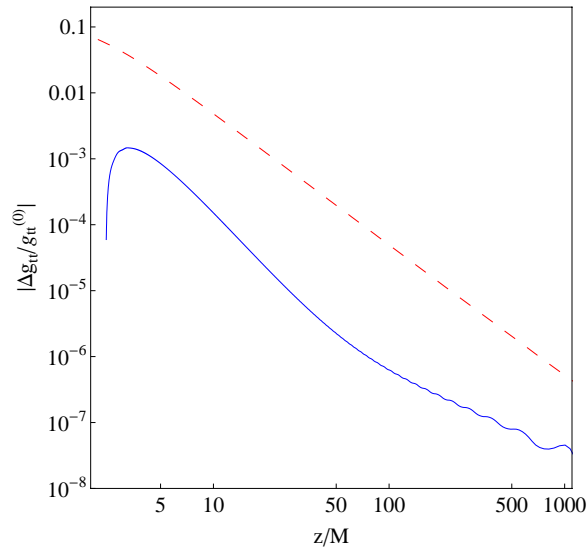
χρησιμοποιούμε για τις αριθμητικές μετρικές είναι της τάξης του  $10^{-5}$ . Άρα το αποτέλεσμα από τους υπολογισμούς με την μετρική Schwarzschild είναι ενθαρρυντικά και εφόσον τα σφάλματα που ίσως εισάγει μια γωνιακή εξάρτηση της μετρικής (εξάρτηση από το  $\mu$  δηλαδή) δεν είναι πολύ μεγάλα, τότε ο αλγόριθμος που έχουμε για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων δεν θα μας δημιουργήσει προβλήματα στη σύγκριση των μετρικών. Την υπόθεση αυτή θα ελέγξουμε παρακάτω.

Για να εκτιμήσουμε τα σφάλματα που μπορεί να εισάγει στον μετασχηματισμό των συντεταγμένων η εξάρτηση των μετρικών συναρτήσεων από το  $\mu$ , ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι ακόμα και για τα πιο γρήγορα περιστρεφόμενα άστρα, όπως το μοντέλο στο οποίο αναφερθήκαμε παραπάνω, οι τιμές κατά μήκος ενός μεσημβρινού των  $B(x_0, \mu)$  και  $(\partial B(x_0, \mu)/\partial x)_N$  (όπου  $x_0$  είναι η συντεταγμένη του μεσημβρινού και το  $N$  δηλώνει την αριθμητικά υπολογισμένη παράγωγο) δεν παρουσιάζουν δραματική εξάρτηση από τη γωνία διατηρώντας σχεδόν σταθερές τιμές. Συγκεκριμένα η μεταβολή που παρατηρούμε για το  $B$  δεν ξεπερνά το 0.1% και αντιστοίχως για το  $(\partial B/\partial x)_N$  το 25%. Έτσι, αν θέλουμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα από την αριθμητική ολοκλήρωση, για την μέθοδο του τραpezίου που χρησιμοποιούμε, θα έχουμε για τα δύο πρώτα ολοκληρώματα του μετασχηματισμού (3.3.5)

$$(\Delta z)_{\mu\text{-integration}} = \frac{1}{h} \frac{h^3}{12} f''(\xi) < \frac{h^2}{10} \times \max_{\mu} f''(\mu), \quad (3.4.1)$$

όπου  $h$  είναι το βήμα της ολοκλήρωσης στο  $\mu$  (που είναι  $1/300$ ) και  $\xi$  είναι κάποια τιμή του  $\mu$  στο διάστημα  $[0, 1]$ . Το θεωρητικό σφάλμα του τραpezίου το έχουμε περιορίσει αντικαθιστώντας το  $1/12$  με  $1/10$  και την τιμή  $f''(\xi)$  με την μέγιστη τιμή του  $f''(\mu)$ . Αυτό που βλέπουμε λοιπόν είναι ότι το σφάλμα από την αριθμητική ολοκλήρωση βγαίνει κάτι που είναι της τάξης του  $\Delta z/M \simeq 10^{-7}$ . Το σφάλμα αυτό βλέπουμε ότι είναι μικρότερο από το σφάλμα που υπολογίσαμε παραπάνω για την περίπτωση της μετρικής Schwarzschild και άρα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τελικά η γωνιακή εξάρτηση δεν διαφοροποιεί δραματικά την εικόνα των σφαλμάτων του μετασχηματισμού των συντεταγμένων.

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι μπορούμε να διαγνώσουμε σχετικές διαφορές ανάμεσα σε αριθμητικές μετρικές που περιγράφουν ρεαλιστικά άστρα νετρονίων και αναλυτικές μετρικές μέχρι την τάξη του  $10^{-6}$ . Έτσι, αν δυο μετρικές διαφέρουν περισσότερο από αυτό, τότε η διαφορά τους οφείλεται σε πραγματική διαφορετικότητα των μετρικών. Ως εφαρμογή όλων των παραπάνω πραγματοποιήσαμε τον παρακάτω έλεγχο. Στο σχήμα



Σχήμα 3.2: Το σχήμα αναπαράγει τη σύγκριση που παρουσιάζεται στο σχήμα 6 της εργασίας [2] (πάνω διακεκομμένη καμπύλη). Η ίδια σύγκριση ανάμεσα στις ίδιες μετρικές απεικονίζεται (κάτω συνεχόμενη καμπύλη) για την περίπτωση όπου ο μετασχηματισμός συντεταγμένων πραγματοποιείται σύμφωνα με τον αλγόριθμο που προτείνουμε εδώ. Η σύγκριση των δύο μετρικών βελτιώνεται πάρα πολύ στην δεύτερη περίπτωση.

3.2 απεικονίζουμε το σχήμα 6 της εργασίας [2], με την διαφορά ότι έχουμε εφαρμόσει τον μετασχηματισμό που παρουσιάσαμε εδώ για τον υπολογισμό της συντεταγμένης  $z$  και των μετρικών συναρτήσεων της αριθμητικής μετρικής, η οποία συγκρίνεται με την μετρική των Manko et al. [41, 44]. Στην εργασία [2], όπως διαπιστώσαμε, δεν είχε γίνει σωστά ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων, αφού η ολοκλήρωση που πραγματοποιούσαν στις συνθήκες Cauchy-Riemann πέραγε μέσα από περιοχή όπου υπήρχε ύλη, με αποτέλεσμα να υπάρχει κακή αντιστοίχιση των συντεταγμένων στον  $z$  άξονα. Αυτή η διαπίστωση ήταν και η αιτία που διερευνήσαμε το πρόβλημα του σωστού μετασχηματισμού. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2, η σύγκριση ανάμεσα στις δύο μετρικές βελτιώνεται κατά σχεδόν 1–2 τάξεις μεγέθους, κάτι που δείχνει πόσο σημαντικός είναι ο σωστός μετασχηματισμός συντεταγμένων για έναν τέτοιο υπολογισμό.

## Κεφάλαιο 4

# Ένας κατάλληλος αναλυτικός χωροχρόνος για το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα προχωρήσουμε στην διερεύνηση της καταλληλότητας μιας αναλυτικής μετρικής, η οποία έχει ικανό πλήθος παραμέτρων, στο να περιγράψει με ικανοποιητική ακρίβεια την γεωμετρία στο εξωτερικό ενός αστερά νετρονίων. Συγκεκριμένα, θα διερευνήσουμε την δυνατότητα που έχει η αναλυτική λύση Two-Soliton, ως μετρική ικανή να περιγράψει την γεωμετρία γύρω από άστρα νετρονίων, στο να αποτυπώνει με ακρίβεια τις διάφορες ιδιότητες του χωροχρόνου που έχουν αστροφυσικό ενδιαφέρον, όπως είναι οι ιδιότητες των τροχιών, η ερυθρομετάθεση του φωτός κ.α.

### 4.1 Εισαγωγή

Το πλήθος και η ακρίβεια των αστροφυσικών παρατηρήσεων στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα έχει αυξηθεί δραματικά στις μέρες μας. Αυτή η πληθώρα από παρατηρήσεις μας προσφέρει τη δυνατότητα να ελέγξουμε και να επεκτείνουμε τις θεωρίες μας για τα διάφορα αστροφυσικά αντικείμενα και τις διάφορες αστροφυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν σε αυτά. Έτσι, η βελτίωση της ακρίβειας των δεδομένων απαιτεί τουλάχιστον αυξημένη ακρίβεια ή πιο σωστά περισσότερο ρεαλισμό στα θεωρητικά μοντέλα που αναπτύσσουμε. Ένα ερευνητικό πεδίο στο οποίο παρουσιάζεται ιδιαίτερη αύξηση στον όγκο των παρατηρήσεων, είναι η μελέτη των φαινομένων που συμβαίνουν στο περιβάλλον των συμπαγών σχετικιστικών αντικειμένων, όπως είναι για παράδειγμα οι ενεργοί

γαλαξιακοί πυρήνες (active galactic nuclei, AGNs) ή τα διπλά συστήματα ακτίνων X (high and low mass x-ray binaries, HMXBs και LMXBs) [75].

Προκειμένου λοιπόν να διερευνήσουμε και να κατανοήσουμε καλύτερα αυτά τα φαινόμενα, είναι απαραίτητο να έχουμε μια αρκετά ακριβή περιγραφή του χωροχρόνου γύρω από τέτοια συμπαγή αντικείμενα. Και θα ήταν ακόμα καλύτερο αν αυτή η περιγραφή ήταν και αναλυτική. Για την περίπτωση που το κεντρικό συμπαγές αντικείμενο είναι μια μαύρη τρύπα, η επιλογή της γεωμετρίας του χωροχρόνου είναι μοναδική στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και αυτή είναι ο χωροχρόνος Kerr. Όταν όμως το αντικείμενο είναι ένας αστέρας νετρονίων, τότε η περιγραφή της γεωμετρίας περιπλέκεται, αφού εξαρτάται από ένα πλήθος από παραμέτρους που έχουν να κάνουν με τη δομή και τη σύσταση του αστέρα.

Η υπόθεση που γίνεται συνήθως στη βιβλιογραφία, ότι δηλαδή η γεωμετρία μπορεί να περιγραφεί από την λύση του Schwarzschild ή τη λύση του Kerr, είναι υπεραπλουστευτική και μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα κατά την μελέτη των αστροφυσικών διαδικασιών που συμβαίνουν στην γειτονιά ενός αστέρα νετρονίων.

Μία εναλλακτική λύση είναι να βασιστεί κανείς σε αριθμητικούς κώδικες που δίνουν την γεωμετρία γύρω από ένα ρεαλιστικό αστέρα νετρονίων στη μορφή ενός πίνακα με τις τιμές των μετρικών συναρτήσεων υπολογισμένες στα σημεία ενός πλέγματος με μεγάλη αριθμητική ακρίβεια. Τέτοιους κώδικες έχουν αναπτύξει διάφορες ομάδες (όπως για παράδειγμα οι [71] και περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να βρει κανείς στην αναφορά [70]), οι οποίοι έχουν την δυνατότητα να υπολογίζουν σχετικιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων επιλέγοντας διάφορες παραμέτρους και φυσικά χαρακτηριστικά για το άστρο. Το τελικό αποτέλεσμα του υπολογισμού είναι η κατασκευή της μετρικής τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του συμπαγούς αντικείμενου, η οποία έχει προκύψει ως λύση των πλήρων εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν.

Αν και είναι εφικτή η μελέτη των διαφόρων αστροφυσικών διεργασιών χρησιμοποιώντας ως υπόβαθρο έναν αριθμητικό χωρόχρονο, υπάρχουν διάφορες πρακτικές δυσκολίες. Μια πρώτη δυσκολία προκύπτει από την ανάγκη υπολογισμού για ένα δεδομένο αντικείμενο των διαφόρων φυσικών παραμέτρων που μπορεί να έχουν σχέση με το πρόβλημα που μελετάμε, όπως είναι η κατασκευή των τροχιών και ο υπολογισμός διαφόρων παραμέτρων που σχετίζονται με αυτές (οι τροχιακές συχνότητες, η τελευταία ευσταθής κυκλική τροχιά κ.α.), οι οποίοι θα πρέπει να πραγματοποιηθούν αριθμητικά σε ένα δεδομένο πλέγμα και με δεδομένη ακρίβεια της αριθμητικής μετρικής και οι οποίοι μπορεί να κρύβουν επιπλέον αριθμητικές δυσκολίες (όπως είναι για παράδειγμα ο υπολογισμός



κάποιων δευτέρων παραγώγων με αριθμητικές μεθόδους που επεισέρχονται στους υπολογισμούς των μεταπτώτικων συχνότητων). Μια δεύτερη δυσκολία προκύπτει όταν ενδιαφέρεται κανείς να λύσει το αντίστροφο πρόβλημα, όταν δηλαδή έχει κάποιο αντικείμενο τα χαρακτηριστικά του οποίου δεν είναι γνωστά και προσπαθεί από τις παρατηρήσεις των φαινομένων που συμβαίνουν στο περιβάλλον του να προσδιορίσει τις ιδιότητες του αντικειμένου, όταν δηλαδή προσπαθεί να συλλέξει πληροφορίες που έχουν σχέση με τη δομή και τη σύσταση του αντικειμένου, δηλαδή τη μάζα του, την καταστατική εξίσωση που διέπει την ύλη από την οποία αποτελείται το αντικείμενο, την περιστροφή του κ.α. Μια τέτοια αντίστροφη διερεύνηση θα ήταν πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθεί με αριθμητικά κατασκευασμένες μετρικές, αφού η διαδικασία αυτή θα ήταν μια σχεδόν τυφλή προσπάθεια δοκιμής και σφάλματος που δεν βασίζεται σε κάποια ιδιαίτερη φυσική διαίσθηση. Για τους παραπάνω λόγους, μια αναλυτική μετρική για την περιγραφή του χωροχρόνου είναι προτιμητέα.

Μέχρι τώρα έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες αναλυτικές μετρικές για την περιγραφή του χωροχρόνου γύρω από αστέρες νετρονίων. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, η μετρική του Schwarzschild δεν μπορεί να αποτυπώσει τις ιδιότητες που προκύπτουν από την περιστροφή, ενώ η μετρική Kerr έχει σημαντικές αποκλίσεις, όπως έχουν δείξει και οι Berti και Stergioulas [2], από τις αντίστοιχες αριθμητικές μετρικές που κατασκευάζονται για περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Μια άλλη επιλογή είναι η μετρική των Hartle & Thorne [19], η οποία έχει κατασκευαστεί ως προσεγγιστική λύση για το εξωτερικό αργά περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων, και έχει χρησιμοποιηθεί από διάφορους ερευνητές [3, 17] στη βιβλιογραφία. Εκτός από αυτές τις μετρικές, υπάρχει και η δυνατότητα επιλογής λύσεων των εξισώσεων πεδίου που να είναι βασισμένες στον φορμαλισμό του Ernst [9]. Όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, με βάση τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε από τους Sibgatullin και Manko, έχει παραχθεί μια πληθώρα από στάσιμες και αξονικά συμμετρικές αναλυτικές λύσεις [40, 44, 60, 42, 66, 45], οι οποίες χαρακτηρίζονται από ένα σύνολο παραμέτρων που σχετίζονται με τις διάφορες φυσικές παραμέτρους του χωροχρόνου. Μια τέτοια αναλυτική λύση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τον χωροχρόνο, αφού πρώτα έχουν επιλεγεί οι παράμετροί της με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να αποτυπώσει τις ιδιότητες του χώρου γύρω από έναν αστέρα νετρονίων, δηλαδή να αποδώσει με μεγάλη ακρίβεια τις ιδιότητες των γεωδαισιακών, όπως είναι η θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς, οι τροχιακές συχνότητες κλπ., χαρακτηριστικά δηλαδή του χωροχρόνου που έχουν εφαρμογή στη μελέτη αστροφυσικών διαδικασιών όπως είναι οι δίσκοι προσαύξησης. Και φυσικά θα μπορούσε να γίνει και η αντίστροφη διαδικασία που αναφέραμε

παραπάνω, δηλαδή έχοντας επιλέξει μια αναλυτική μετρική, από τις παρατηρήσεις των φαινομένων στο περιβάλλον του αστέρα να οδηγηθεί κανείς στις ιδιότητες του κεντρικού αντικειμένου. Μια τέτοια διαδικασία θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Άρα, το ζήτημα με τις αναλυτικές μετρικές, προκειμένου να μπορούν να πραγματοποιηθούν όλα τα παραπάνω, είναι αν μπορεί να έχει κανείς μια αναλυτική λύση που να μπορεί να αποδώσει με ικανοποιητική ακρίβεια τις ιδιότητες κάθε πιθανού περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων, είτε αυτός περιστρέφεται αργά είτε γρήγορα.

Μία αναλυτική λύση που έχει πρόσφατα ελεγχθεί ως υποψήφια για να περιγράψει το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων [72, 2], είναι η λύση των Manko et al. [41, 44] η οποία χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους. Αυτή η λύση, αν και έδειξαν οι [2] ότι μπορεί να περιγράψει καλά τον χωροχρόνο γύρω από ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, αποτύγχανε να περιγράψει σχετικά αργά περιστρεφόμενα άστρα. Ο λόγος που δεν τα καταφέρνει η λύση των Manko et al. είναι ότι στο όριο της μηδενικής περιστροφής, η λύση διατηρεί μη μηδενικό τετράπολο, πράγμα το οποίο δεν συμβαδίζει με το γεγονός ότι ένας μη περιστρεφόμενος αστέρας περιμένουμε να είναι σφαιρικά συμμετρικός. Το πρόβλημα αυτό δεν θεωρήθηκε τόσο σημαντικό, αφού για τα αργά περιστρεφόμενα άστρα, θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει κανείς την λύση των Hartle & Thorne. Παρόλα αυτά θα ήταν προτιμότερο να έχουμε μια πιο ευέλικτη αναλυτική λύση που να μπορεί να προσαρμοστεί σε όλο το φάσμα των δυνατών αστέρων νετρονίων.

Η λύση των Manko et al. είναι μια ειδική περίπτωση της λύσης, γνωστής και ως Two-Soliton, που κατασκευάστηκε από τους Manko, Martin και Ruiz [40]. Αυτή η λύση, που παρουσιάσαμε αναλυτικά στο 1ο κεφάλαιο, είναι μία λύση τεσσάρων παραμέτρων που σε αντίθεση με την προηγούμενη μπορεί να λάβει οποιαδήποτε περιστροφή και περιέχει ως οριακή κατάσταση τόσο την Schwarzschild στο όριο της μηδενικής περιστροφής (όπου δεν παρουσιάζει κάποιο αντίστοιχο πρόβλημα με την Manko et al. στο τετράπολο ή τα άλλα ανώτερα πολύπολα), όσο και την Kerr για κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων. Για την ακρίβεια, όπως έχουμε δείξει, η λύση αυτή έχει τελείως ελεύθερα τα τέσσερα πρώτα πολύπολά της, τα οποία μπορούν να επιλεγούν σύμφωνα με τις επιθυμίες μας.

Παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε την Two-Soliton για να περιγράψουμε τον χωροχρόνο γύρω από αστέρες νετρονίων με ένα ευρύ φάσμα παραμέτρων. Θα χρησιμοποιήσουμε τα σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικών λύσεων για να καθορίσουμε τις παραμέτρους της αναλυτικής μετρικής έτσι ώστε να έχει και αυτή τα ίδια πολύπολα. Θα δείξουμε ότι αυτή η επιλογή ταύτισης της αναλυτικής μετρικής με την αριθμητική είναι δικαιολογημένη και ποσοτικά εκτός από θεωρητικά αναμενόμενη. Μετά θα ελέγξουμε πόσο καλά μπορεί να αποδώσει η αναλυτική μετρική την αριθμητική συγκρίνοντας

αρχικά τις ίδιες τις μετρικές συναρτήσεις μεταξύ τους στο ισημερινό επίπεδο και στον άξονα συμμετρίας. Ακόμα θα ελέγξουμε διάφορες γεωμετρικές ιδιότητες του αναλυτικού χωρόχρονου σε σχέση με τις αντίστοιχες του αριθμητικού. Οι ποσότητες που έχουμε επιλέξει για αυτή τη σύγκριση είναι ποσότητες που έχουν αστροφυσικό ενδιαφέρον όπως για παράδειγμα η θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς, οι τροχιακές συχνότητες και οι μεταπτωτικές συχνότητες του χωρόχρονου και τέλος η μεταβολή της ενέργειας ανά μονάδα μάζας ανά λογαριθμική μεταβολή της τροχιακής συχνότητας στο ισημερινό επίπεδο. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης όλων αυτών των παραμέτρων, μας οδηγούν στο να εμπιστευτούμε την Two-Soliton ως μια μετρική ικανή να περιγράψει αρκετά καλά την γεωμετρία γύρω από κάθε είδους αστέρες νετρονίων με τρόπο που να αποδίδει αξιόπιστα τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των χωροχρόνων.

## 4.2 Η αναλυτική λύση και οι αστέρες νετρονίων

Όπως έχουμε ξαναπεί, το στοιχείο μήκους για έναν στάσιμο και αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο δίνεται από την μετρική του Παπαπέτρου [51]

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (4.2.1)$$

όπου οι συναρτήσεις  $f$ ,  $\omega$ , και  $\gamma$  είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων Weyl-Παπαπέτρου  $(\rho, z)$ . Για να παράγει κανείς έναν τέτοιο χωροχρόνο, αυτό που χρειάζεται, όπως δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, είναι να κάνει μια επιλογή του δυναμικού του Ernst στον άξονα και από εκεί ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τους Sibgatullin και Manko θα κατασκευάσει μια λύση. Για την Two-Soliton που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ, το δυναμικό του Ernst στον άξονα έχει τη μορφή

$$e(z) = \frac{(z - M - ia)(z + ib) - k}{(z + M - ia)(z + ib) - k} \quad (4.2.2)$$

όπου όλες οι παράμετροι  $M$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $b$  είναι πραγματικές. Από αυτή την έκφραση μπορεί κανείς να υπολογίσει απευθείας τα σχετικιστικά πολύπολα, όπως δείξαμε στο 1ο κεφάλαιο, και να πάρει για τα πρώτα μη μηδενικά πολύπολα τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}
M_0 &= M, & M_2 &= -(a^2 - k)M, \\
M_4 &= \left( a^4 - (3a^2 - 2ab + b^2)k + k^2 - \frac{1}{7}kM^2 \right) M \\
J_1 &= aM, & J_3 &= -(a^3 - (2a - b)k) M.
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Τα πολύπολα της μάζας που είναι περιττής τάξης και τα πολύπολα περιστροφής που είναι άρτιας τάξης μηδενίζονται λόγω της κατοπτρικής συμμετρίας που υπάρχει ως προς το ισημερινό επίπεδο ( $z = 0$ ). Από τα πολύπολα φαίνεται ότι η παράμετρος  $M$  είναι η μάζα, η παράμετρος  $a$  είναι η ανηγμένη στροφορμή  $J/M$ , το  $k$  είναι η απόκλιση του ανηγμένου τετραπόλου  $M_2/M$  από το αντίστοιχο της Kerr και η παράμετρος  $b$  σχετίζεται με γραμμικό τρόπο με το οκτάπολο της περιστροφής  $J_3$ . Καθώς το  $k$  αυξάνει, τα αντικείμενα που προκύπτουν είναι λιγότερο πεπλατυσμένα από τις αντίστοιχες Kerr με την ίδια μάζα και παράμετρο περιστροφής.

Όπως αναφέραμε και στο 1ο κεφάλαιο, η λύση των Manko et al. [41, 44], που έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για να προσεγγίσει το εξωτερικό των αστερών νετρονίων, είναι μια υποπερίπτωση της Two-Soliton που δίνεται από το δυναμικό του Ernst στον άξονα

$$\begin{aligned}
e(z) &= \frac{(z - M - ia)(z + ib) + d - \delta - ab}{(z + M - ia)(z + ib) + d - \delta - ab}, \\
\delta &= \frac{-M^2b^2}{M^2 - (a - b)^2}, & d &= \frac{1}{4} (M^2 - (a - b)^2)
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

όπου ουσιαστικά έχουμε επιβάλει στις παραμέτρους της Two-Soliton τον περιορισμό

$$k = -\frac{1}{4} (M^2 - (a - b)^2) - \frac{M^2b^2}{M^2 - (a - b)^2} + ab. \tag{4.2.5}$$

Αυτός ο περιορισμός ορίζει μια διδιάστατη επιφάνεια στον χώρο των παραμέτρων  $(\frac{a}{M}, \frac{b}{M}, \frac{k}{M^2})$ , όπως έχουμε δει στο σχήμα 1.1 και οδηγεί τελικά, όταν πάμε σε μηδενική περιστροφή, στο αφύσικο τετράπολο

$$M_2 = -\frac{M(M^2 + b^2)^2}{4(M^2 - b^2)}. \quad (4.2.6)$$

Αυτό το χαρακτηριστικό της Manko et al. είναι που δεν της επιτρέπει να περιγράψει αργά περιστρεφόμενα άστρα, όπως διαπιστώθηκε από τους Berti και Stergioulas [2]. Όμως, η Two-Soliton είναι σαφές ότι με τις τέσσερις παραμέτρους που διαθέτει προσφέρει περισσότερη ελευθερία στην προσαρμογή της μετρικής και επιπλέον εξαιτίας του τρόπου που επεισέρχονται αυτές οι παράμετροι, δεν υπάρχουν περιορισμοί στην επιλογή των τεσσάρων πρώτων πολυπόλων της λύσης όπως δεν υπάρχουν και περιορισμοί στη δυνατότητα προσαρμογής σε μοντέλα που καλύπτουν όλο το φάσμα των περιστροφών.

Για να δείξουμε την ικανότητα της Two-Soliton να περιγράψει τον χωροχρόνο γύρω από τους αστέρες νετρονίων, κατασκευάσαμε μια σειρά από ρεαλιστικά αριθμητικά μοντέλα χρησιμοποιώντας τον RNS κώδικα του Νίκου Stergioulas. Τα αριθμητικά μοντέλα είναι αυτά που έχουμε χρησιμοποιήσει και στα προηγούμενα κεφάλαια και αποτελούνται από τρεις ακολουθίες μοντέλων για κάθε καταστατική εξίσωση (καταστατικές AU, FPS και L, όπως περιγράφουμε αναλυτικά στο Παραρτημα Α). Τα μοντέλα αυτά εξυπηρετούν δύο σκοπούς. Ο πρώτος είναι να μας δώσουν ένα πλήθος από παραμέτρους που είναι χαρακτηριστικές των ρεαλιστικών αστέρων νετρονίων τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε για να φτιάξουμε τις αναλυτικές μετρικές. Ο δεύτερος είναι ότι θα αποτελέσουν μια βάση έναντι της οποίας θα συγκρίνουμε τις αναλυτικές μετρικές για να δούμε πόσο καλά τα καταφέρνουν. Όπως θα συζητηθεί και πιο αναλυτικά παρακάτω, οι παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν για να προσδιορίσουμε τις αναλυτικές μετρικές και να τις ταυτίσουμε με ένα δεδομένο άστρο είναι τα τέσσερα πρώτα σχετικιστικά πολύπολα της αριθμητικής μετρικής, τα οποία παρουσιάσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που κάναμε στο 1ο κεφάλαιο για την Two-Soliton, από τα αριθμητικά πολύπολα που υπολογίζουμε για τους αστέρες νετρονίων, οι τιμές των παραμέτρων για τις αναλυτικές λύσεις οδηγούν σε χωροχρόνους που ανήκουν σε τρεις από τους τύπους: τον τύπο Ia, τον τύπο IIa και τον τύπο III, όπου υπενθυμίζουμε ότι στην τελευταία περίπτωση ανήκουν και οι λύσεις Schwarzschild και Kerr.

Σε αυτό το σημείο, θα ήταν καλό να ελέγξουμε πρώτα κάποια χαρακτηριστικά της αναλυτικής λύσης για την περιοχή των παραμέτρων που θα χρησιμοποιήσουμε. Τα χαρακτηριστικά που πρέπει να ελεγχθούν είναι η ύπαρξη πιθανών ανωμαλιών (singularities) που μπορεί να έχει η λύση καθώς και η παρουσία διαφόρων περιοχών όπου μπορεί να συμβαίνουν ενδιαφέροντα φαινόμενα όπως είναι η εργόσφαιρα και το όριο των στατικών παρατηρητών ή οι περιοχές όπου μπορεί να υπάρχουν κλειστές χρονοειδείς τροχιές και

τέλος οι ορίζοντες που μπορεί να εμπεριέχουν οι λύσεις.

Οι ορίζοντες ενός χωροχρόνου μπορούν να ορισθούν ως οι επιφάνειες που χωρίζουν τις περιοχές όπου μπορεί να υπάρχουν στάσιμοι παρατηρητές από τις περιοχές όπου δεν μπορεί να υπάρχουν στάσιμοι παρατηρητές. Για έναν αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο, οι στάσιμοι παρατηρητές ορίζονται ως οι παρατηρητές των οποίων η τετραταχύτητα είναι ένας γραμμικός συνδιασμός των δύο πεδίων Killing που δέχεται ο χωρόχρονος, δηλαδή η τετραταχύτητα είναι της μορφής

$$u^a = \gamma(\xi^a + \Omega\eta^a) \quad (4.2.7)$$

όπου  $\xi$ ,  $\eta$  είναι τα πεδία Killing των χρονικών μεταθέσεων και των στροφών αντίστοιχα και  $\Omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Το  $\gamma$  είναι απλά ένας παράγοντας κανονικοποίησης της τετραταχύτητας έτσι ώστε  $g_{ab}u^a u^b = -1$ . Αυτό που προκύπτει λοιπόν για το  $\gamma$  είναι ότι θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\gamma^{-2} = -g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi}. \quad (4.2.8)$$

Για να είναι λοιπόν το  $u^a$  χρονοειδές, θα πρέπει να έχουμε  $\gamma^{-2} > 0$  που ισοδυναμεί με τη συνθήκη ότι το  $\Omega$  θα πρέπει να είναι ανάμεσα στις δύο ρίζες

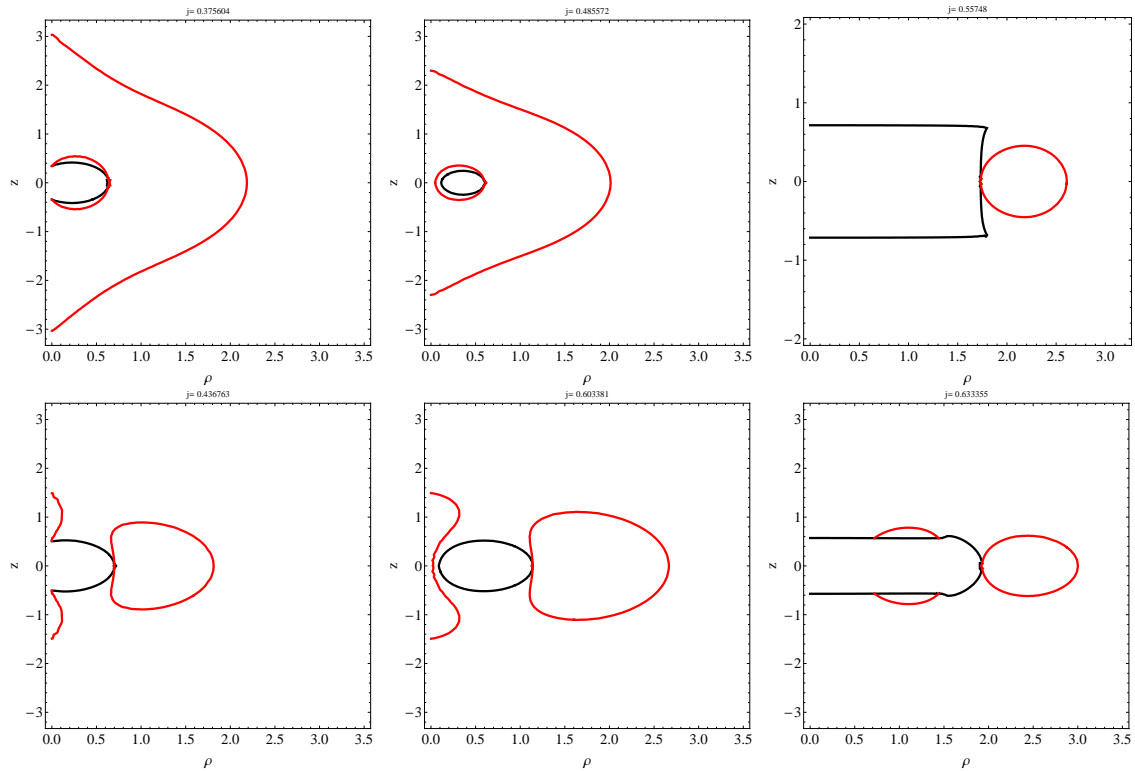
$$\Omega_{\pm} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}}. \quad (4.2.9)$$

Αυτή η συνθήκη δεν μπορεί πια να ικανοποιηθεί όταν  $(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = 0$  και τότε έχουμε ορίζοντα. Στην περίπτωση των μετρικών που προκύπτουν ως λύση βασισμένες στο δυναμικό του Ernst που έχουν εκφραστεί σε Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες, η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με  $\rho = 0$ , αφού ισχύει ότι  $\rho^2 = (g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$ . Επομένως οι ορίζοντες δεν θα μας απασχολήσουν σε αυτές τις συντεταγμένες.

Το δεύτερο θέμα είναι οι πιθανές ανωμαλίες. Ανωμαλίες μπορεί να έχουμε σε σημεία όπου απειρίζονται οι μετρικές συναρτήσεις. Από τον ορισμό των μετρικών συναρτήσεων του πρώτου κεφαλαίου, φαίνεται ότι τέτοια πιθανά σημεία είναι τα σημεία όπου μπορεί να έχουμε μηδενισμούς των ποσοτήτων  $R_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \xi_+)^2}$ ,  $r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \xi_-)^2}$  (εδώ αυτά τα  $\xi$  δεν πρέπει να μπερδεύονται με τα πεδία Killing που αναφέραμε πιο πριν) που υπεισέρχονται στον παρανομαστή του  $e^{2\gamma}$  ή στους μηδενισμούς των ποσοτήτων  $(A + B)$  και  $(\bar{A}A - \bar{B}B)$  (που υπεισέρχονται στους παρανομαστές των συναρτήσεων

$f$  και  $\omega$  σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.2.29-1.2.31) ). Το αν εμφανίζονται τέτοιοι πιθανοί μηδενισμοί εξαρτάται από την κάθε περίπτωση λύσης που έχουμε. Η διεξοδική διερεύνηση αυτών των ιδιοτήτων του χωρόχρονου ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της ανάλυσης. Αυτό που πρέπει να επισημάνουμε όμως είναι ότι για τις παραμέτρους των μοντέλων που έχουμε των αστέρων νετρονίων που έχουμε διερευνήσει, οι αναλυτικές λύσεις δεν παρουσιάζουν καμία τέτοια παθολογία στις περιοχές έξω από την επιφάνεια του αστέρα.

Το τελευταίο που είναι χρήσιμο να ελέγξει κανείς είναι το στατικό όριο (την περιοχή δηλαδή όπου σταματά να ισχύει η συνθήκη  $g_{ab}\xi^a\xi^b = g_{tt} < 0$ ) που ορίζεται από την επιφάνεια στην οποία έχουμε  $g_{tt} = 0$  και την περιοχή όπου υπάρχει η δυνατότητα να εμφανιστούν κλειστές χρονοειδείς τροχιές που ορίζεται από την αλλαγή στο πρόσημο του  $g_{\phi\phi}$  (αφού για να έχουμε κλειστές χρονοειδείς θα πρέπει να ισχύει  $g_{ab}\eta^a\eta^b = g_{\phi\phi} < 0$ ). Και πάλι αυτό που παρατηρούμε είναι ότι τα χαρακτηριστικά των εμφανιζόμενων επιφανειών αλλάζουν ανάλογα με τον τύπο της λύσης στον οποίο ανήκει η αναλυτική λύση και διαμορφώνονται σύμφωνα με κάποιες βασικές τοπολογίες, παραδείγματα των οποίων φαίνονται στο σχήμα 4.1. Πάντως και σε αυτή την περίπτωση, για τα μοντέλα που κατασκευάσαμε, οι επιφάνειες αυτές δεν βγαίνουν έξω από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων.



Σχήμα 4.1: Ενδεικτικές μορφές των επιφανειών που ορίζουν το στατικό όριο και τις περιοχές με κλειστές χρονοειδείς καμπύλες για τους διαφορετικούς τύπους των λύσεων. Αριστερά έχουμε τον τύπο Ia, στη μέση τον τύπο IIa και δεξιά τον τύπο III. Οι κόκκινες καμπύλες αντιστοιχούν στο στατικό όριο και οι μαύρες καμπύλες αντιστοιχούν στο σύνορο των περιοχών που μπορεί να έχουμε κλειστές χρονοειδείς τροχιές. Στον τύπο Ia, η περιοχή των κλειστών χρονοειδών τροχιών είναι σε επαφή με τον άξονα και το ίδιο είναι και το σύνορο του στατικού ορίου. Στο τύπο IIa το στατικό όριο είναι σε επαφή με τον άξονα, αλλά η περιοχή των κλειστών χρονοειδών τροχιών δεν είναι. Τέλος στον τύπο III συμβαίνει το αντίστροφο, δηλαδή η περιοχή των κλειστών χρονοειδών είναι σε επαφή με τον άξονα και το στατικό όριο δεν είναι. Για χαμηλές περιστροφές, οι επιφάνειες έχουν την μορφή των πάνω σχημάτων και καθώς αυξάνει η περιστροφή μετασχηματίζονται στις κάτω.



### 4.3 Αντιστοίχιση των αναλυτικών λύσεων με τις αριθμητικές

Προκειμένου να πετύχουμε μια καλή αντιστοίχιση ανάμεσα σε μία αναλυτική μετρική και μια αριθμητική μετρική, θα πρέπει να βρούμε ένα κριτήριο το οποίο θα μπορεί να συλλάβει το σύνολο των ιδιοτήτων του χωρόχρονου καθολικά και όχι κάποιες ιδιότητες που σχετίζονται με μια μικρή περιοχή του. Δηλαδή, ως κριτήρια θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μεγέθη που αποτελούν καθολικές ιδιότητες του χωρόχρονου και όχι τοπικές. Οι Berti και Stergiούλας [2] έχουν επιχειρηματολογήσει ότι οι κατάλληλες αυτές καθολικές ιδιότητες του χωροχρόνου είναι τα σχετικιστικά πολύπολα. Πράγματι, τα σχετικιστικά πολύπολα ενός στάσιμου και αξονικά συμμετρικού χωρόχρονου σχετίζονται με το δυναμικό του Ernst στον άξονα συμμετρίας, όπως δείξαμε στο 1ο κεφάλαιο, και για την ακρίβεια το πλήρες φάσμα των πολυπόλων καθορίζει απόλυτα τη μορφή του δυναμικού στον άξονα. Από την άλλη, όταν έχει κανείς τη μορφή του δυναμικού του Ernst στον άξονα συμμετρίας, τότε μπορεί με μοναδικό τρόπο να κατασκευάσει έναν χωρόχρονο. Όπως έχουν δείξει λοιπόν ο Ξανθόπουλος [80, 79] και οι Hauser και Ernst [24], το φάσμα των πολυπολικών ροπών καθορίζει πλήρως τον χωρόχρονο. Έτσι δύο χωρόχρονοι που έχουν το ίδιο φάσμα πολυπολικών ροπών ταυτίζονται. Άρα τα πολύπολα είναι η καλύτερη επιλογή ταύτισης δύο χωροχρόνων.

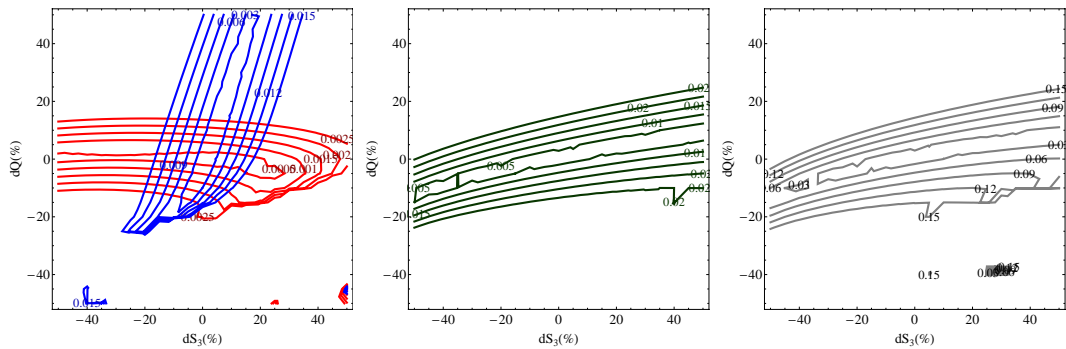
Από την στιγμή που έχουμε τα σχετικιστικά πολύπολα των χωροχρόνων που έχουμε κατασκευάσει αριθμητικά, μπορούμε να επιλέξουμε τις παραμέτρους της αναλυτικής λύσης έτσι ώστε να ταυτίζονται τα αναλυτικά πολύπολα με τα αριθμητικά. Η αναλυτική λύση Two-Soliton έχει τέσσερις ελεύθερες παραμέτρους που επιτρέπουν την ακριβή ταύτιση των τεσσάρων πρώτων πολυπόλων. Τα υπόλοιπα αναλυτικά πολύπολα (τα ανώτερης τάξης δηλαδή) εξαρτώνται από τις ίδιες τέσσερις παραμέτρους και άρα είναι ένας συγκεκριμένος συνδυασμός των τεσσάρων πρώτων πολυπόλων. Ο τρόπος που συνδυάζονται τα πρώτα πολύπολα για να δημιουργηθούν τα ανώτερα γενικά εξαρτάται από την ειδική περίπτωση της λύσης που έχουμε επιλέξει και γενικά δεν περιμένουμε να είναι ο ίδιος για κάθε πιθανή λύση τεσσάρων παραμέτρων.

Το ερώτημα που προκύπτει λοιπόν είναι κατά πόσο τελικά η επιλογή ταύτισης των τεσσάρων πρώτων πολυπόλων της αναλυτικής μετρικής με τα τέσσερα πρώτα της αριθμητικής μετρικής, είναι αυτή που θα δώσει την καλύτερη σύμπτωση ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική μετρική, δεδομένου ότι τα ανώτερα πολύπολα μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους. Δηλαδή τίθεται το ερώτημα του αν θα μπορούσε να γίνει κάποια

καλύτερη επιλογή από αυτή της ακριβούς ταύτισης των πολυπόλων. Για να διερευνήσουμε αυτό το ενδεχόμενο, θεωρήσαμε τα τέσσερα πρώτα πολύπολα που υπολογίσαμε για τους αριθμητικούς χωρόχρονους (τα πολύπολα αυτά υπάρχουν σε πίνακες στο Παράρτημα) και επιβάλαμε στις αναλυτικές λύσεις να έχουν τις ίδιες μάζες  $M$  και στροφορμές  $J$  και διερευνήσαμε τον χώρο των παραμέτρων των διαταραχών από το αριθμητικό τετράπολο μάζας και το αριθμητικό οκτάπολο περιστροφής. Για κάθε αναλυτική λύση που προέκυπτε, συγκρίναμε κάποιες ενδεικτικές ποσότητες με τις αντίστοιχες της αρχικής αριθμητικής. Οι ποσότητες που χρησιμοποιήσαμε για την σύγκριση είναι οι συνειστώσεις της μετρικής  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$  και  $g_{\phi\phi}$  στο ισημερινό επίπεδο, η τροχιακή συχνότητα των κυκλικών τροχιών  $\Omega$  στο ισημερινό επίπεδο και η θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς, στις περιπτώσεις που η αριθμητικά υπολογισμένη είναι έξω από την επιφάνεια του άστρου. Τα κριτήρια αυτά θα παρουσιαστούν πιο αναλυτικά στην επόμενη ενότητα για τη σύγκριση ανάμεσα στους χωροχρόνους. Για να αποτυπώσουμε ποσοτικά τις διαφοροποιήσεις που προκύπτουν από τη σύγκριση των διαφόρων περιπτώσεων όπου έχουμε διαταραγμένα πολύπολα, κατασκευάσαμε για τις ποσότητες που είναι συναρτήσεις της απόστασης, την ποσότητα «ολική απόκλιση» που ορίσαμε στο 2ο κεφάλαιο, δηλαδή την ποσότητα  $\sigma$  που δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\sigma_{ij} = \left( \int_{R_S}^{\infty} (g_{ij}^n - g_{ij}^a)^2 dr \right)^{1/2}, \quad (4.3.1)$$

για τις μετρικές συναρτήσεις και το αντίστοιχο  $\sigma$  για το  $\Omega$ , ενώ για τις ακτίνες  $R_{\text{ISCO}}$  πήραμε απλά τη διαφορά. Με αυτό τον τρόπο, κατασκευάστηκε για κάθε μοντέλο ένα γράφημα που απεικονίζει τις ισοϋψείς της «ολικής απόκλισης» καθώς κινούμαστε στην επιφάνεια των διαταραχών των πολυπόλων  $(\delta S_3, \delta M_2)$ , όπου  $\delta M_2 = (M_2^n - M_2^a)/M_2^n (\%)$  και  $\delta S_3 = (S_3^n - S_3^a)/S_3^n (\%)$ . Αυτό που βλέπουμε είναι ότι οι ισοϋψείς του  $g_{tt}$  έχουν προσανατολισμό σχεδόν παράλληλο με τον άξονα του  $\delta M_2 = 0$  ενώ οι ισοϋψείς του  $g_{t\phi}$  είναι παράλληλες με τον άξονα του  $\delta S_3 = 0$ , είναι δηλαδή περίπου ορθογώνιες οι ευαισθησίες των δύο συναρτήσεων σε μεταβολές του τετραπόλου μάζας και του οκταπόλου περιστροφής αντιστοίχως. Και αυτή η ορθογωνιότητα επιλέγει ως βέλτιστη επιλογή και για τις δύο μετρικές συναρτήσεις την τομή τους που είναι πολύ κοντά στο σημείο  $(0, 0)$ . Η συμπεριφορά της «ολικής απόκλισης» ή απλά της διαφοράς και για τις αντίστοιχες ποσότητες ενισχύει την επιλογή της ταύτισης των αναλυτικών σχετικιστικών πολυπόλων με τα αριθμητικά ως την καλύτερη δυνατή για την αντιστοίχιση ενός αριθμητικού χωροχρόνου με έναν αναλυτικό.



Σχήμα 4.2: Γραφικές παραστάσεις που υποδεικνύουν τη βέλτιστη επιλογή για την αντιστοίχιση των μετρικών. Αριστερά έχουμε ένα σχήμα που δίνει την τομή των ισοϋψών της «ολικής απόκλισης» για τα  $g_{tt}$  (περίπου οριζόντιες καμπύλες) και  $g_{t\phi}$  (περίπου κατακόρυφες καμπύλες), στη μέση έχουμε τις ισοϋψείς της σχετικής διαφοράς για το  $R_{\text{ISCO}}$  και δεξιά έχουμε το αντίστοιχο σχήμα της «ολικής απόκλισης» για το  $\Omega$ . Οι γραφικές παραστάσεις έχουν κατασκευαστεί για το μοντέλο #15 της καταστατικής εξίσωσης AU (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1).

#### 4.4 Σύγκριση της αναλυτικής με την αριθμητική μετρική

Αφού έχουμε κατασκευάσει την αναλυτική μετρική επιλέγοντας να ρυθμίσουμε τις παραμέτρους της έτσι ώστε να έχει τα ίδια πολύπολα με την αριθμητική, αυτό που μένει να κάνουμε είναι να συγκρίνουμε τον αναλυτικό χωρόχρονο με τον αντίστοιχο αριθμητικό. Για να συγκρίνουμε τους δύο χωρόχρονους, θα πρέπει και πάλι να χρησιμοποιήσουμε κριτήρια σύγκρισης που να μπορούν να αποδώσουν τις ιδιότητες της γεωμετρίας με καθαρό τρόπο που να μην εξαρτάται από την πιθανή επιλογή συστήματος συντεταγμένων και να σχετίζονται με ποσότητες πρακτικής αξίας, που θα μπορούσαν ενδεχομένως να μετρηθούν σε αστροφυσικά συστήματα. Έτσι αν οι δύο μετρικές παρουσιάζουν καλή σύμπτωση σε αυτού του τύπου τα κριτήρια, θα μπορούν να θεωρηθούν πρακτικά και παρατηρησιακά ισοδύναμες. Από την άλλη, σε πρακτικό επίπεδο, τέτοια κριτήρια θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ξεχωρίσουν δύο διαφορετικούς χωρόχρονους, και άρα δύο διαφορετικά συμπαγή αντικείμενα, με βάση τις παρατηρήσεις που σχετίζονται με τα αντίστοιχα μεγέθη.

Ξεκινάμε λοιπόν με το πρώτο κριτήριο σύγκρισης, το οποίο είναι ο έλεγχος του πόσο καλά ταιριάζουν οι αντίστοιχες συνιστώσες της αναλυτικής με την αριθμητική μετρική.

Τα στοιχεία της μετρικής, μπορεί να μην είναι ανεξάρτητα της επιλογής των συντεταγμένων, αλλά σχετίζονται με συγκεκριμένες μετρήσιμες ποσότητες από κάποιον παρατηρητή που βρίσκεται μακριά από το συμπαγές αντικείμενο. Έτσι, η  $g_{tt}$  συνιστώσα της μετρικής σχετίζεται με την ερυθρομετάθεση του παρατηρούμενου φωτός που προέρχεται από κάποια θέση κοντά στο συμπαγές αντικείμενο ή με την injection energy ενός σωματιδίου. Από την άλλη η  $g_{t\phi}$  συνιστώσα της μετρικής σχετίζεται με την γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να έχει ένας παρατηρητής με μηδενική στροφορμή και με το φαινόμενο του frame dragging (η γωνιακή ταχύτητα που εισάγει ο χωρόχρονος είναι  $\omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ ), ενώ η  $g_{\phi\phi}$  συνιστώσα μετρά την ισοδύναμη ακτίνα που έχει ένας κύκλος με δεδομένη περιφέρεια ( $R_{circ} = \sqrt{g_{\phi\phi}} = C/2\pi$ ) και είναι ένα γεωμετρικό μέτρο της ακτίνας σε κάποια θέση σταθερής συντεταγμένης απόστασης  $\rho = const.$  ενώ μαζί με το  $g_{rr}$  παίζουν ρόλο στην μέτρηση των επιφανειών. Έτσι, αν η σχετική διαφορά των συνιστωσών της μετρικής,

$$g_{tt} = -f, \quad g_{t\phi} = f\omega, \quad g_{\phi\phi} = f^{-1}\rho^2 - f\omega^2, \quad g_{\rho\rho} = g_{zz} = f^{-1}e^{2\gamma} \quad (4.4.1)$$

από τις αντίστοιχες αριθμητικές, όπως αυτές έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο με το μετασχηματισμό των ημι-ισοτροπικών συντεταγμένων σε Weyl-Παπαπέτρου, είναι σχετικά μικρή, τότε μπορεί να θεωρήσει κανείς ότι η αναλυτική μετρική είναι μια καλή προσέγγιση της αριθμητικής. Αντί της  $g_{\phi\phi}$  συνιστώσας, θα επιλέξουμε να συγκρίνουμε την  $R_{circ}$  όπως ορίστηκε παραπάνω.

Το επόμενο κριτήριο σύγκρισης που μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς είναι η θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς στο ισημερινό επίπεδο (innermost stable circular orbit, ISCO). Τα σωματίδια που κινούνται σε γεωδαισιακές τροχιές στο ισημερινό επίπεδο, κινούνται σύμφωνα με την εξίσωση

$$-g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = 1 - \frac{\tilde{E}^2 g_{\phi\phi} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi} + \tilde{L}^2 g_{tt}}{\rho^2} \equiv V(\rho) \quad (4.4.2)$$

όπου  $\tilde{E}$  και  $\tilde{L}$  είναι οι διατηρούμενες ποσότητες της ενέργειας και της στροφορμής που είναι παράλληλη στην διεύθυνση του  $z$  άξονα ανά μονάδα μάζας. Το  $V(\rho)$  είναι το ενεργό δυναμικό για την ακτινική κίνηση και στην περίπτωση των κυκλικών τροχιών, έχουμε τις συνθήκες  $d\rho/d\tau = 0$  και  $d^2\rho/d\tau^2 = 0$  που είναι ισοδύναμες με τις συνθήκες για τοπικό ελάχιστο στο δυναμικό,  $V(\rho) = 0$ ,  $dV(\rho)/d\rho = 0$ . Η θέση του ISCO προσδιορίζεται αν επιπλέον ζητήσουμε να ισχύει  $d^2V(\rho)/d\rho^2 = 0$ , που ισοδυναμεί με

την απαίτηση η κυκλική τροχιά να είναι και σημείο καμπής του δυναμικού. Η έξτρα αυτή συνθήκη καθορίζει ένα συγκεκριμένο  $\rho_{\text{ISCO}}$  από το οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε το  $R_{\text{ISCO}} = \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho_{\text{ISCO}})}$ , το οποίο μετά συγκρίνουμε με το αντίστοιχο αριθμητικό. Η θέση του ISCO έχει προφανές αστροφυσικό ενδιαφέρον, αφού αποτελεί το εσωτερικό σύνορο ενός δίσκου προσαύξησης και πρόσφατα έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της παραμέτρου περιστροφής των μελανών οπών από την παρατήρηση του συνεχούς φάσματος του δίσκου γύρω από αυτές [64].

Το τρίτο κριτήριο σύγκρισης είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής των κυκλικών τροχιών (κυκλική συχνότητα) στο ισημερινό επίπεδο. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής προσδιορίζεται από το ενεργό δυναμικό και την απαίτηση για κυκλικές τροχιές που αναφέραμε παραπάνω και δίνεται από την εξίσωση

$$\Omega(\rho) = \frac{-g_{t\phi,\rho} + \sqrt{(g_{t\phi,\rho})^2 - g_{tt,\rho}g_{\phi\phi,\rho}}}{g_{\phi\phi,\rho}}. \quad (4.4.3)$$

Εκτός από την κυκλική συχνότητα μπορούμε ακόμα να χρησιμοποιήσουμε τις επικυκλικές συχνότητες των σχεδόν κυκλικών και σχεδόν ισημερινών τροχιών  $\Omega_\rho$ ,  $\Omega_z$ . Αυτές είναι οι συχνότητες μετάπτωσης του περίαστρου και του επιπέδου μιας διαταραγμένης τροχιάς αντίστοιχα. Οι εξισώσεις που δίνουν αυτές τις συχνότητες προκύπτουν αν διαταράζουμε την εξίσωση

$$-g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 - g_{zz} \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 = V(\rho, z) \quad (4.4.4)$$

γύρω από τις κυκλικές ισημερινές τροχιές. Το  $V(\rho, z)$  είναι το ενεργό δυναμικό που ορίσαμε και στην (4.4.2) όπου τώρα πλέον δεν θέτουμε  $z = 0$ . Ο υπολογισμός παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

Από την διαταραχή της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτουν οι συχνότητες

$$\begin{aligned}
\kappa_a^2 = & -\frac{g^{aa}}{2} \left\{ (g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)^2 \left( \frac{g_{\phi\phi}}{\rho^2} \right)_{,aa} \right. \\
& - 2(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)(g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega) \left( \frac{g_{t\phi}}{\rho^2} \right)_{,aa} \\
& \left. + (g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega)^2 \left( \frac{g_{tt}}{\rho^2} \right)_{,aa} \right\},
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

όπου το  $a$  είναι είτε το  $\rho$  είτε το  $z$  και οι εκφράσεις υπολογίζονται στο  $z = 0$ . Αντίστοιχα οι μεταπτωτικές συχνότητες δίνονται από τη διαφορά

$$\Omega_a = \Omega - \kappa_a. \tag{4.4.6}$$

Και αυτές οι ποσότητες (οι συχνότητες δηλαδή) έχουν αστροφυσικό ενδιαφέρον, αφού μπορούν να συσχετισθούν με την κίνηση του υλικού σε έναν δίσκο προσαύξησης και σύμφωνα με κάποια μοντέλα με παρατηρούμενες μεταβολές στη ροή των ακτίνων  $X$  από έναν τέτοιο δίσκο, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο.

Το τελευταίο κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε για την σύγκριση των μετρικών είναι η ποσότητα  $\Delta\tilde{E}$  των κυκλικών τροχιών, που εκφράζει τη μεταβολή της ενέργειας ανά λογαριθμική μεταβολή της τροχιακής συχνότητας από την μία κυκλική τροχιά στην επόμενη και η οποία δίνεται από την έκφραση

$$\Delta\tilde{E} = -\Omega \frac{d\tilde{E}}{d\Omega}, \tag{4.4.7}$$

όπου η ενέργεια ανά μονάδα μάζας,  $\tilde{E}$ , δίνεται από την έκφραση

$$\tilde{E} = \frac{-g_{tt} - g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}. \tag{4.4.8}$$

Η ποσότητα  $\Delta\tilde{E}$  είναι ανεξάρτητη των συντεταγμένων στις οποίες εκφράζουμε τη μετρική και στην ουσία μετρά την ενέργεια που χάνει ένα σωματίδιο καθώς μεταβαίνει σε κυκλικές τροχιές μικρότερης ακτίνας. Η ποσότητα  $\Delta\tilde{E}$  μπορεί να συσχετισθεί με την εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας και χρησιμοποιήθηκε από τον Ryan όπως έχουμε πει και σε προηγούμενα κεφάλαια. Η ποσότητα αυτή όμως μπορεί να βρει εφαρμογή και

στη μελέτη των δίσκων προσαύξησης και συγκεκριμένα των λεπτών (radiatively efficient) δίσκων, όπου σχετίζεται με την ακτινοβολούμενη ενέργεια του δίσκου από κάθε στοιχειώδη δακτύλιο και επομένως και με την κατανομή της ενεργού θερμοκρασίας στο δίσκο καθώς και με την συνολική ακτινοβολούμενη λαμπρότητά του.

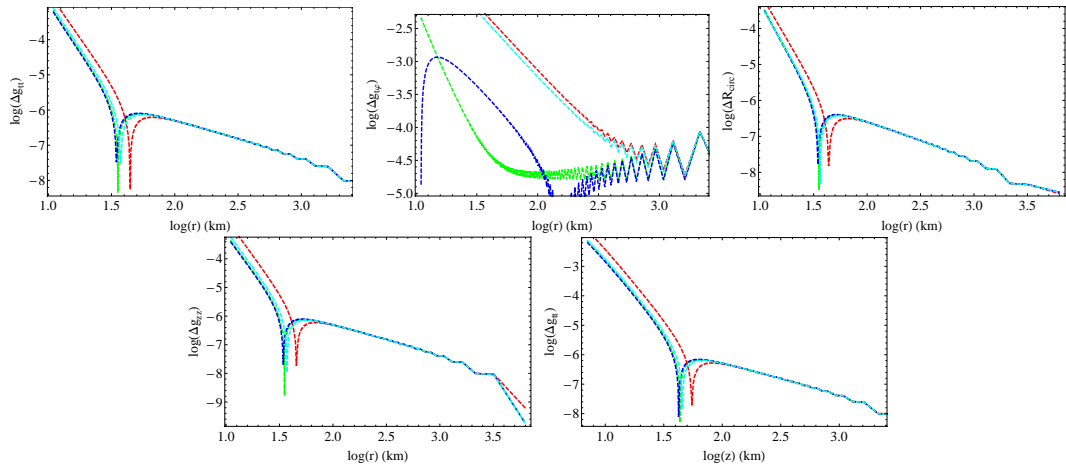
Έτσι βλέπουμε ότι τα τελευταία κριτήρια, δηλαδή οι συχνότητες και το  $\Delta\tilde{E}$ , μπορούν να έχουν και συγκεκριμένες παρατηρησιακές εφαρμογές στον προσδιορισμό των ιδιοτήτων ενός συμπαγούς αντικειμένου γεγονός που τις καθιστά εξαιρετικά πρακτικά κριτήρια σύγκρισης μετρικών.

#### 4.4.1 Αποτελέσματα της σύγκρισης

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης παρουσιάζονται εκτενέστερα στο Παράρτημα. Εδώ θα παρουσιάσουμε κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα που αποτυπώνουν την εικόνα της καταλληλότητας της Two-Soliton για την περιγραφή του εξωτερικού των αστέρων νετρονίων.

Για την σύγκριση των μετρικών συναρτήσεων, εκτός από την σύγκριση ανάμεσα στην Two-Soliton και την αριθμητική λύση, έχουμε χρησιμοποιήσει για λόγους εποπτείας και τις μετρικές της λύσης των Manko et al., που έχουν μελετήσει στο παρελθόν οι Berti και Σπεργιούλας, και την λύση Hartle-Thorne που έχουν χρησιμοποιήσει οι Berti et al. και Pachon et al.. Την Hartle-Thorne την χρησιμοποιήσαμε για να έχουμε μια δεύτερη (ενδεικτική) σύγκριση για την περίπτωση των αργά περιστρεφόμενων αστέρων, για την περιγραφή των οποίων έχει κατασκευαστεί, ενώ την Manko et al. την χρησιμοποιήσαμε ως μέτρο σύγκρισης για την περίπτωση των γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων. Αν και η Hartle-Thorne εκ κατασκευής δεν έχει νόημα για την περιγραφή των γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων και όπως συζητήσαμε και στο δεύτερο κεφάλαιο, αν κάποιος την προσδιορίσει συνεπώς μαζί με μια λύση για το εσωτερικό ενός αργά περιστρεφόμενου άστρου, είναι ουσιαστικά μια λύση δύο παραμέτρων, θα μπορούσε κανείς (κάπως αυθαίρετα) να χρησιμοποιήσει το εξωτερικό κομμάτι της λύσης θεωρώντας ως ελεύθερη παράμετρο και το τετράπολο  $q$  που εμφανίζεται στις εκφράσεις της. Με αυτή τη λογική και για λόγους καθαρά εποπτείας, έχουμε χρησιμοποιήσει την Hartle-Thorne για συγκρίσεις και γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων. Ενδεικτικά παραθέτουμε στο σχήμα 4.3 τις γραφικές παραστάσεις όπου φαίνονται κάποιες τυπικές συγκρίσεις ανάμεσα στις μετρικές συναρτήσεις, στο ισημερινό επίπεδο και στον  $z$  άξονα.

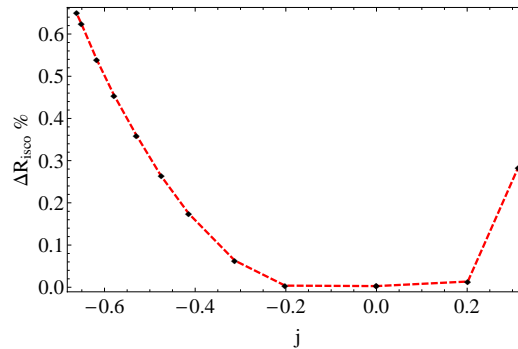
Η συνολική εικόνα που παίρνουμε από τις συγκρίσεις των μετρικών συναρτήσεων είναι ότι η Two-Soliton προσεγγίζει πολύ καλά τις αριθμητικές μετρικές τόσο στα αργά



Σχήμα 4.3: Οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν διαδοχικά το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική μετρική για τις μετρικές συναρτήσεις  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $\sqrt{g_{\phi\phi}} = R_{circ}$  και  $g_{zz}$  στο ισημερινό επίπεδο και για το  $g_{tt}$  στο άξονα συμμετρίας. Τα σχήματα είναι ενδεικτικά όλων των μοντέλων. Οι συγκεκριμένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1) της καταστατικής εξίσωσης AU.

περιστροφόμενα όσο και στα γρήγορα περιστροφόμενα άστρα. Σε σχέση με τις άλλες δύο μετρικές με τις οποίες κάνουμε τη σύγκριση με τα αριθμητικά δεδομένα, για τη μεν Manko et al., βλέπουμε ότι η λύση αυτή καταφέρνει να αποδώσει αρκετά καλά τα γρήγορα περιστροφόμενα μοντέλα, αρκετά καλύτερα από ότι είχαν βρει οι Berti και Stergioulas όπως είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο όπου διορθώσαμε τα αριθμητικά πολύπολα, και τα αποτελέσματα που δίνει είναι πολύ κοντά στα αποτελέσματα της Two-Soliton. Σε κάποια μοντέλα δίνει οριακά καλύτερη σύγκριση η Manko et al. και σε κάποια άλλα δίνει καλύτερη σύγκριση η Two-Soliton, αλλά ήδη βρισκόμαστε σε περιοχές όπου η σχετική διαφορά είναι της τάξης ή και μικρότερη από  $10^{-3}$ . Εκεί που οι δύο λύσεις παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες διαφορές είναι στη συνιστώσα  $g_{t\phi}$  της μετρικής, με την Two-Soliton να είναι συνήθως καλύτερη. Στα γρήγορα περιστροφόμενα άστρα, η Hartle-Thorne βλέπουμε ότι δεν τα καταφέρει τόσο καλά όσο οι άλλες δύο μετρικές. Συγκεκριμένα αποτυγχάνει δραματικά στην προσέγγιση της  $g_{t\phi}$  συνιστώσας της μετρικής, το οποίο τελικά είναι αναμενόμενο, αφού σε αυτή τη συνιστώσα παίζει σημαντικό ρόλο το οκτάπολο της περιστροφής  $S_3$ , το οποίο για την Hartle-Thorne είναι μηδενικό (όπως δείχνουμε στο Παράρτημα). Από την άλλη, για τα αργά περιστροφόμενα μοντέλα,





Σχήμα 4.4: Η σχετική διαφορά ανάμεσα στο αριθμητικό και το αναλυτικό  $R_{\text{ISCO}}$  για την πρώτη ακολουθία άστρων της καταστατικής AU, όπου η ακτίνα του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του άστρου.

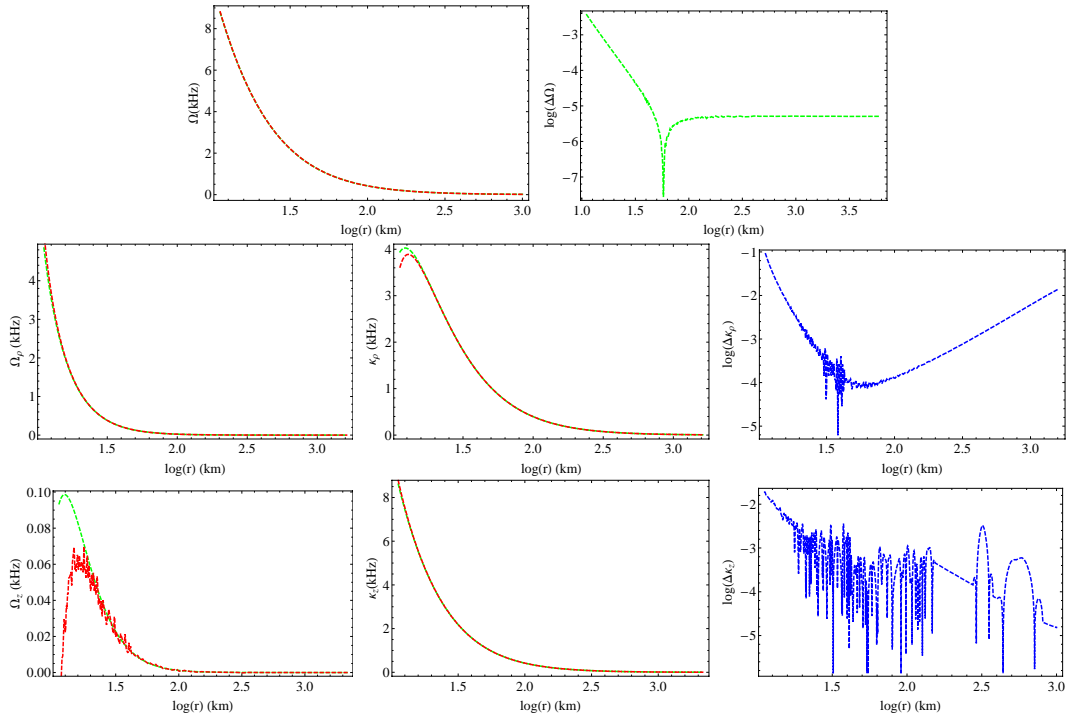
δεν έχουμε λύσεις της Manko et al. με τις οποίες να συγκρίνουμε και άρα οι συγκρίσεις γίνονται μόνο με την Hartle-Thorne. Και πάλι βλέπουμε ότι η Two-Soliton τα καταφέρνει καλύτερα στη σύγκριση, ενώ παραμένει ακόμα και για χαμηλές περιστροφές η δυσκολία της Hartle-Thorne στην απόδοση της  $g_{t\phi}$  συνιστώσας. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η  $g_{t\phi}$  συνιστώσα της Hartle-Thorne συμπεριφέρεται σαν την αντίστοιχη συνιστώσα της μετρικής Kerr, δηλαδή αποκλίνει από την αριθμητική  $g_{t\phi}$  όπως αποκλίνει και η Kerr. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού η Hartle-Thorne έχει τη συμπεριφορά μιας αργά περιστρεφόμενης Kerr. Ακόμα θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τη χειρότερη σύγκριση για την Two-Soliton την έχουμε για το  $g_{tt}$  στον πόλο, όπου όμως η σχετική διαφορά είναι και πάλι μικρότερη από  $10^{-2}$ . Περισσότερα στοιχεία των συγκρίσεων των μετρικών υπάρχουν στο σχετικό Παράρτημα.

Στη συνέχεια των συγκρίσεων που θα παρουσιάσουμε, δεν θα ασχοληθούμε με την σύγκριση των αριθμητικών μετρικών με τις άλλες μετρικές παρά μόνο με την Two-Soliton.

Η επόμενη ποσότητα που συγκρίνουμε είναι η θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς. Στο σχήμα 4.4 παρουσιάζουμε μια τυπική γραφική παράσταση της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στο αριθμητικό και το αναλυτικό ISCO τόσο για τις τροχιές που περιστρέφονται με την ίδια φορά με το κεντρικό αντικείμενο όσο και για αυτές που περιστρέφονται με την αντίθετη φορά (οι οποίες υποδηλώνονται με τις αρνητικές τιμές της παραμέτρου περιστροφής  $j \equiv J/M^2$ ). Αυτό που βλέπουμε από όλα τα μοντέλα είναι ότι γενικά, η Two-Soliton αποδίδει το ISCO με ακρίβεια καλύτερη από  $\sim 4\%$  για την περίπτωση των πιο γρήγορα περιστρεφόμενων αντικειμένων. Η σύγκριση δεν γίνεται για τις περιπτώσεις όπου η επιφάνεια του αστέρα νετρονίων βρίσκεται πιο έξω

από την θέση του ISCO. Σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τη θέση της ασταθούς κυκλικής τροχιάς των φωτονίων για να δοκιμάσουμε μια ακόμα σύγκριση ανάμεσα στους αναλυτικούς και τους αριθμητικούς χωροχρόνους, αλλά οι τροχιές αυτές τις περισσότερες φορές βρίσκονται μέσα από την επιφάνεια του άστρου, τουλάχιστον όταν η φορά είναι η ίδια με την φορά περιστροφής του κεντρικού αντικειμένου. Υπάρχει όμως και η αντίστοιχη τροχιά για τα φωτόνια που κινούνται με την αντίθετη φορά, η οποία βρίσκεται σε μεγαλύτερη ακτίνα. Η σύγκριση αυτή δεν έγινε στην παρούσα μελέτη.

Στη συνέχεια προχωράμε στη σύγκριση των συχνοτήτων  $\Omega$ ,  $\Omega_\rho$ ,  $\kappa_\rho$ ,  $\Omega_z$  και  $\kappa_z$ . Η σύγκριση της αναλυτικής τροχιακής συχνότητας με την αντίστοιχη αριθμητική είναι πολύ καλή σε όλα τα μοντέλα και η σχετική διαφορά είναι σχεδόν πάντα καλύτερη από  $\sim 10^{-3}$ . Αυτό είναι κάτι που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού σε συνδυασμό με το  $R_{\text{ISCO}}$  είναι από τα μεγέθη που θα μπορούσαν να παίζουν ρόλο στις παρατηρήσεις και στη μελέτη των δίσκων προσάυξης. Μια ενδεικτική γραφική παράσταση της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στις αριθμητικές και τις αναλυτικές συχνότητες φαίνεται στο σχήμα 4.5. Σε ό,τι αφορά τη σύγκριση των συχνοτήτων ταλάντωσης στην ακτινική και την κατακόρυφο διεύθυνση και των αντίστοιχών τους μεταπτωτικών συχνοτήτων τα πράγματα είναι λίγο πιο περίπλοκα. Οι ταλαντωτικές/μεταπτωτικές συχνότητες στον υπολογισμό τους εμπεριέχουν και δεύτερες παραγώγους των μετρικών συναρτήσεων. Αυτό δημιουργεί προβλήματα στον αριθμητικό υπολογισμό τους και εισάγει σφάλματα στην εκτίμηση των τιμών τους σημείο προς σημείο. Για την ακρίβεια, αυτό που παρατηρείται είναι το αποτέλεσμα του υπολογισμού να παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις από σημείο σε σημείο. Τα προβλήματα του αριθμητικού υπολογισμού των δεύτερων παραγώγων των μετρικών συναρτήσεων και ειδικότερα των παραγώγων κάθετα στο ισημερινό επίπεδο συζητάνε και οι Berti et al. [3]. Μετά από συζητήσεις με τον Νίκο Στεργιούλα για το πως μπορεί να αντιμετωπισθεί πρακτικά αυτή η δυσκολία, οδηγηθήκαμε στο να εφαρμόσουμε δύο πρακτικές στον υπολογισμό των επικυκλικών συχνοτήτων. Η πρώτη βασική πρακτική είναι ότι υπολογίζουμε τις συχνότητες στις συντεταγμένες στις οποίες δίνει αρχικά τη μετρική ο κώδικας RNS (στα  $(x, \mu)$  δηλαδή), έτσι ώστε να επιτύχουμε την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια αφού δεν θα εμπεριέχονται σφάλματα από μετασχηματισμούς συντεταγμένων που ενδεχομένως χρειάζονται (ειδικά στις δεύτερες παραγώγους του  $z$ ). Το θετικό που έχουν οι συχνότητες είναι ότι το αποτέλεσμα του υπολογισμού τους για μια δεδομένη τροχιά, είναι τελικά ανεξάρτητο των συντεταγμένων και έτσι το μόνο που μένει είναι να αντιστοιχηθούν σωστά οι συντεταγμένες των τροχιών από το ένα σύστημα στο άλλο. Η αντιστοίχιση των συντεταγμένων στο ισημερινό επίπεδο εμπεριέχει μόνο το σφάλμα



Σχήμα 4.5: Τα γραφήματα απεικονίζουν διαδοχικά, επάνω αριστερά την αριθμητική και την αναλυτική τροχιακή συχνότητα  $\Omega$  και δεξιά της το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς τους, στη μεσαία σειρά αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες  $\Omega_\rho$ , στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες  $\kappa_\rho$  και δεξιά τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς των τελευταίων και τέλος κάτω αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες  $\Omega_z$ , στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες  $\kappa_z$  και κάτω δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική συχνότητα της κατακόρυφης ταλάντωσης κάθετα στο ισημερινό επίπεδο  $\kappa_z$ . Οι συγκεκριμένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B.2 και 4.1) της καταστατικής εξίσωσης AU.

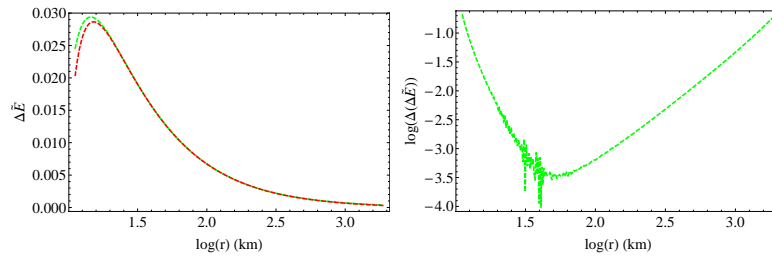
που έχουν οι τιμές των μετρικών συναρτήσεων όπως τις δίνει ο κώδικας, οπότε το μόνο σημαντικό σφάλμα που επηρεάζεται σε αυτή την περίπτωση είναι το σφάλμα του ίδιου του αριθμητικού υπολογισμού της παραγώγου. Η δεύτερη πρακτική είναι ότι προκειμένου να απαλειφθούν αυτές οι τεχνητές ταλαντώσεις, σε κάθε σημείο που κάνουμε τον υπολογισμό παίρνουμε την μέση τιμή τριών σημείων. Από τα αριθμητικά μοντέλα των μη περιστρεφόμενων μοντέλων μας δόθηκε η δυνατότητα να ελέγξουμε την ακρίβεια αυτών των τεχνικών και είδαμε ότι δίνει πολύ καλά αποτελέσματα.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να επισημάνουμε και κάτι ακόμα. Στην περίπτωση της  $\kappa_z$ , οι τιμές που έχουμε για τις συχνότητες της κατακόρυφης ταλάντωσης είναι πολύ κοντά στις τιμές της τροχιακής συχνότητας της κυκλικής κίνησης  $\Omega$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αντίστοιχη επικυκλική συχνότητα  $\Omega_z = \Omega - \kappa_z$  να είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στο τυχών σφάλμα που μπορεί να υπάρχει στον αριθμητικό υπολογισμό τόσο της  $\Omega$  όσο και της  $\kappa_z$ . Για τον λόγο αυτό θεωρούμε ως καταλληλότερη σύγκριση για να μας υποδείξει τον αν προσεγγίζει επιτυχώς η αναλυτική μετρική την αντίστοιχη αριθμητική ως προς τις ταλαντωτικές/μεταπτωτικές συχνότητες, την σύγκριση ανάμεσα στα  $\kappa_\rho$  και  $\kappa_z$ .

Για τους παραπάνω λόγους, στο σχήμα 4.5 μαζί με την σχετική διαφορά στην  $\Omega$  δίνουμε κάποιες τυπικές γραφικές με τις αναλυτικές και τις αριθμητικές μεταπτωτικές συχνότητες  $\Omega_\rho$ ,  $\Omega_z$  και δίνουμε και τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες  $\kappa_\rho$  και  $\kappa_z$  (αναλυτικές και αριθμητικές), ενώ παρουσιάζουμε την σύγκριση (την σχετική διαφορά) των ταλαντωτικών συχνοτήτων,  $\Delta\kappa_\rho$  και  $\Delta\kappa_z$ .

Γενικά, οι σχετικές διαφορές για την  $\kappa_\rho$  είναι μικρές σχεδόν σε όλα τα μοντέλα και σε κάποιες περιπτώσεις πλησιάζουν αλλά είναι μικρότερες από 10% κοντά στο ISCO, κάτι που έχει να κάνει και με το ότι η συχνότητα αυτή μηδενίζεται στο σημείο εκείνο και άρα η σχετική διαφορά της αριθμητικής με την αναλυτική μπορεί να παρουσιάζει τεχνητές αυξήσεις λόγω μηδενισμού του παρανομαστή. Αντίστοιχα, οι σχετικές διαφορές για την  $\kappa_z$  είναι και αυτές μικρές και είναι κοντά και λιγότερο από το 1% στην θέση του ISCO. Αντιστοίχως καλή είναι και η σύγκριση της  $\Omega_\rho$ , όπως είναι αναμενόμενο. Η  $\Omega_z$  από την άλλη έχει μεγαλύτερες αποκλίσεις για τους λόγους που αναφέραμε παραπάνω, ειδικά σε κάποια μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης AU.

Πέρα από αυτά, το σημαντικότερο είναι ότι η αναλυτική λύση αποτυπώνει ένα πολύ βασικό χαρακτηριστικό της αριθμητικής λύσης, που είναι το ότι η συχνότητα  $\kappa_z$  γίνεται σε κάποιες περιπτώσεις μεγαλύτερη από την  $\Omega$  (αυτό το φαινόμενο είναι πιο έντονο στα μοντέλα της καταστατικής L). Αυτό το σημαντικό για την φαινομενολογία των επικυκλικών συχνοτήτων χαρακτηριστικό, θα το συζητήσουμε περισσότερο στο επόμενο κεφάλαιο. Το τελικό συμπέρασμα σε ότι αφορά τις συχνότητες είναι ότι η αναλυτική



Σχήμα 4.6: Αριστερά έχουμε την απεικόνιση του αναλυτικού και του αριθμητικού  $\Delta\tilde{E}$  και δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής τους διαφοράς. Οι συγκεκριμένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων B'.2 και 4.1) της καταστατικής εξίσωσης AU.

λύση αποτυπώνει αρκετά καλά την συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης, ποιοτικά σε όλες τις περιπτώσεις και ποσοτικά στις περισσότερες των περιπτώσεων.

Το τελευταίο κριτήριο σύγκρισης είναι η ποσότητα  $\Delta\tilde{E} = -\Omega \frac{d\tilde{E}}{d\Omega}$ . Και αυτή η ποσότητα παρουσιάζει τις ίδιες δυσκολίες στον αριθμητικό υπολογισμό της, οπότε χρησιμοποιήσαμε και εδώ την ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε και για τις συχνότητες. Στο σχήμα 4.6 παρουσιάζουμε το  $\Delta\tilde{E}$  και την σχετική διαφορά της αναλυτικής με την αριθμητική για μία τυπική περίπτωση περιστρεφόμενου αστέρα. Αυτό που βλέπουμε είναι ότι η αναλυτική μετρική έχει καλή ακρίβεια στην προσέγγιση και αυτής της ποσότητας, η οποία έχει όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω ιδιαίτερο αστροφυσικό ενδιαφέρον, αφού μπορεί να συσχετισθεί με το εκπεμπόμενο συνεχές φάσμα ενός δίσκου προσάυξης γύρω από ένα συμπαγές αντικείμενο και την συνολική απόδοση του δίσκου (το ποσοστό δηλαδή της κινητικής ενέργειας της προσπίπτουσας ύλης που μετατρέπεται σε ακτινοβολία).

## 4.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήσαμε την αναλυτική μετρική Two-Soliton για να προσεγγίσουμε το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων. Για να ταυτοποιήσουμε μια αναλυτική μετρική με μια αριθμητική χρησιμοποιήσαμε τα σχετικιστικά πολύπολα. Προκειμένου να δικαιολογήσουμε την επιλογή μας παρουσιάσαμε εκτός από τη θεωρητική αιτιολόγηση και υπολογισμούς που δείχνουν ότι η επιλογή της ταύτισης των πολύπων του αναλυτικού χωρόχρονου με τα πολύπολα του αριθμητικού είναι τελικά η βέλτιστη. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την ποσότητα που ορίσαμε ως «ολική απόκλιση»  $\sigma$ , δείξαμε ότι η

σύμπτωση τόσο στις μετρικές συναρτήσεις όσο και σε ποσότητες όπως είναι η τροχιακή κυκλική συχνότητα και η θέση του ISCO μεγιστοποιείται για επιλογή των πολυπόλων της αναλυτικής λύσης σε μια περιοχή γύρω από τις τιμές των αριθμητικών πολυπόλων.

Έχοντας επιλέξει τα αριθμητικά πολύπολα ως κριτήριο ταύτισης, προχωρήσαμε σε μια πιο διεξοδική σύγκριση των αριθμητικών χωρόχρονων με του αναλυτικούς. Για να πραγματοποιήσουμε αυτή τη σύγκριση, επιλέξαμε ένα σύνολο από κριτήρια με γεωμετρικό αλλά και φυσικό νόημα και ειδικότερα, επιλέξαμε ποσότητες που έχουν ενδιαφέρον για τις αστροφυσικές διαδικασίες που μπορεί να συμβαίνουν στην γειτονιά ενός αστέρα νετρονίων.

Το αποτέλεσμα από αυτές τις συγκρίσεις μας έδειξε ότι η Two-Soliton μπορεί να αποδώσει αξιόπιστα τον χωροχρόνο γύρω από ρεαλιστικούς αστέρες νετρονίων, καθώς και τις ιδιότητες που αυτός μπορεί να έχει. Το πιο σημαντικό είναι ότι η αναλυτική λύση μπορεί και συλλαμβάνει χαρακτηριστικά του αριθμητικού χωρόχρονου, τα οποία διαφέρουν σημαντικά από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά που θα έδινε μια λύση Kerr, όπως είναι η συμπεριφορά των επικυκλικών συχνοτήτων που θα δούμε πιο αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο. Έτσι η Two-Soliton μας προσφέρει τη δυνατότητα να κάνουμε πιο ακριβείς υπολογισμούς πάνω σε φαινόμενα και διαδικασίες που συμβαίνουν γύρω από τους αστέρες νετρονίων, ενώ παράλληλα αποφεύγουμε τους πρακτικώς προβληματικούς αριθμητικούς υπολογισμούς με αριθμητικές μετρικές. Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με έναν ενδεικτικό πίνακα (πίνακας 4.1) όπου παρουσιάζουμε για μια από τις καταστατικές εξισώσεις (AU) τα στοιχεία της αναλυτικής μετρικής, καθώς και την σύγκριση κάποιων χαρακτηριστικών φυσικών παραμέτρων (με εφαρμογή σε αστροφυσικές διαδικασίες) της αναλυτικής λύσης με αυτές της αντίστοιχης αριθμητικής, δηλαδή την σχετική διαφορά ανάμεσα στα  $R_{\text{ISCO}}$ , τη σχετική διαφορά ανάμεσα στις αποδόσεις του δίσκου αν το συμπαγές αντικείμενο είχε δίσκο,  $\eta = 1 - \tilde{E}_{\text{ISCO}}$  (efficiency), τη σχετική διαφορά ανάμεσα στις τροχιακές συχνότητες στο ISCO,  $\Omega_{\text{ISCO}}$  που είναι οι πιο χαρακτηριστικές συχνότητες της τροχιακής κίνησης και πιθανόν να σχετίζονται με τις παρατηρούμενες ημι-περιοδικές ταλαντώσεις (QPOs) της ροής στις ακτίνες X από συμπαγή αντικείμενα και τέλος τη σχετική διαφορά ανάμεσα στις συχνότητες της κατακόρυφης ταλάντωσης στο ISCO,  $(\kappa_z)_{\text{ISCO}}$ , η οποία θα μπορούσε και αυτή να σχετίζεται με κάποια από τα QPOs.

Πίνακας 4.1: Στον πίνακα αυτό δίνονται για όλα τα μοντέλα τα κατασκευασμένα με την καταστατική εξίσωση AU οι τύποι των αντίστοιχων αναλυτικών λύσεων, οι παράμετροι  $k$  και  $b$  των λύσεων και οι σχετικές διαφορές επί τοις εκατό ανάμεσα στις αριθμητικές και τις αναλυτικές τιμές των  $R_{\text{ISCO}}$ ,  $\eta$  (απόδοση του δίσκου),  $\Omega_{\text{ISCO}}$  και  $(\kappa_z)_{\text{ISCO}}$ , όταν η θέση του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του αστέρα. Στον πίνακα Β'.2 μπορεί να βρει κανείς συμπληρωματικές πληροφορίες των πληροφοριών που αναφέρονται εδώ για τα μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης AU, όπως είναι η μάζα και η στροφορμή και τα άλλα πολύπολα των αντίστοιχων μοντέλων.

μοντέλο	τύπος	$j$	$b$ ( $km$ )	$k$ ( $km^2$ )	$\Delta R_i$ (%)	$\Delta \eta$ (%)	$\Delta \Omega_i$ (%)	$(\Delta \kappa_z)_i$ (%)
1	III	0.	-3.	0	0.003	0.032	0.006	-
2	Ia	0.2015	-0.0784	-0.5271	0.013	0.019	0.003	0.024
3	IIa	0.3126	-0.1305	-1.2503	0.283	0.142	0.027	0.141
4	IIa	0.414	-0.1858	-2.1664	-	-	-	-
5	IIa	0.4749	-0.224	-2.8362	-	-	-	-
6	IIa	0.5297	-0.2626	-3.517	-	-	-	-
7	IIa	0.5789	-0.3014	-4.1972	-	-	-	-
8	IIa	0.617	-0.3351	-4.7738	-	-	-	-
9	IIa	0.651	-0.368	-5.3277	-	-	-	-
10	IIa	0.6618	-0.3793	-5.5114	-	-	-	-
11	III	0.	-3.	0	0.003	-0.021	-0.004	-
12	III	0.194524	-0.0915	-0.1528	-0.021	0.022	0.002	-0.034
13	III	0.309849	-0.1669	-0.4288	-0.018	0.025	0.003	-0.071
14	III	0.406932	-0.2417	-0.8163	0.019	0.03	0.005	0.113
15	III	0.485572	-0.3158	-1.2698	0.148	0.114	0.019	0.04
16	III	0.550214	-0.3897	-1.7658	0.391	0.204	0.035	0.217
17	III	0.603381	-0.4628	-2.279	0.778	0.463	0.077	0.477
18	III	0.645447	-0.5317	-2.7705	1.274	0.83	0.137	0.815
19	III	0.676639	-0.5916	-3.197	1.798	1.205	0.197	1.15
20	III	0.706299	-0.6585	-3.6602	2.453	1.831	0.297	1.638
21	III	0.510282	-0.3726	-0.7958	0.043	0.026	0.005	0.15
22	III	0.510617	-0.3717	-0.8179	0.054	0.046	0.008	0.058
23	III	0.514032	-0.3731	-0.8721	0.063	0.05	0.009	0.031
24	III	0.520506	-0.3789	-0.9409	0.083	0.016	0.004	0.065
25	III	0.547452	-0.4083	-1.1827	0.164	0.072	0.013	0.153
26	III	0.587439	-0.4607	-1.5504	0.346	0.206	0.034	0.164
27	III	0.626593	-0.5214	-1.9574	0.63	0.391	0.064	0.362
28	III	0.659098	-0.5806	-2.3502	0.991	0.645	0.104	0.64
29	III	0.694585	-0.6577	-2.8456	1.551	1.018	0.162	0.948
30	III	0.713165	-0.7054	-3.1406	1.95	1.349	0.214	1.221

## Κεφάλαιο 5

# Εφαρμογή της Two-Soliton σε αστροφυσικά προβλήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που αναπτύξαμε στα προηγούμενα, καθώς και την αναλυτική λύση Two-Soliton για να μελετήσουμε κάποια ενδιαφέροντα αστροφυσικά προβλήματα. Συγκεκριμένα θα εισάγουμε κάποια νέα εργαλεία για την διερεύνηση των ημι-περιοδικών ταλαντώσεων (quasi-periodic oscillations, QPOs) που παρατηρούνται στα φάσματα των ακτίνων-X των συμπαγών διπλών συστημάτων χαμηλής μάζας. Με την βοήθεια αυτών των εργαλείων θα προσπαθήσουμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα τόσο για την φύση των QPOs όσο και για τις φυσικές ιδιότητες των ίδιων των συμπαγών αντικειμένων (δομή των συμπαγών αντικειμένων, ιδιότητες της ύλης και καταστατική εξίσωση σε πυκνότητες μεγαλύτερες των πυρηνικών) και του χωροχρόνου που τα περιβάλλει.

### 5.1 Εισαγωγή

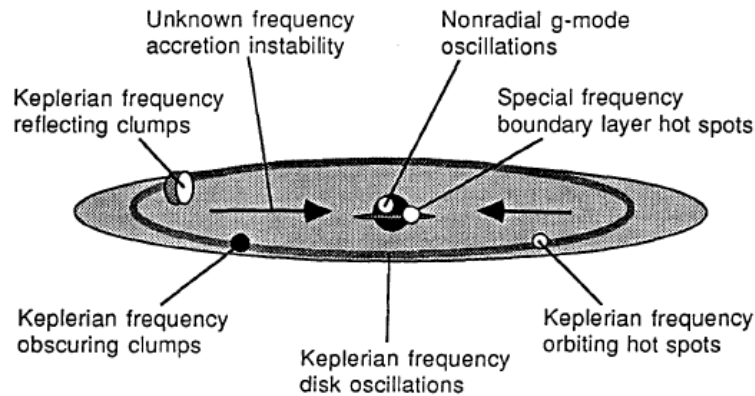
Τα χαμηλής μάζας διπλά συστήματα ακτίνων X (low mass X-ray binaries, LMXBs) μας ανοίγουν ένα παράθυρο στη μελέτη της φυσικής σε ακραίες συνθήκες. Από την μία μεριά έχουμε την πρόσπτωση υλικού και την δημιουργία δίσκων προσαύξησης σε περιοχές τους χώρου γύρω από ένα συμπαγές αντικείμενο όπου έχουμε φαινόμενα που σχετίζονται με ισχυρή βαρύτητα. Από την άλλη μεριά, όταν έχουμε πρόσπτωση υλικού, συγκεκριμένα σε αστέρες νετρονίων, τα χαρακτηριστικά της τροχιακής κίνησης του υλικού σχετίζονται με τη δομή του ίδιου του αστέρα νετρονίων. Έτσι, η μελέτη τέτοιων συστημάτων μας δίνει την δυνατότητα να ερευνήσουμε τόσο τα βαρυτικά φαινόμενα σε



περιοχές όπου η βαρύτητα δεν είναι ακόμα καλά ελεγχόμενη (strong gravity effects), όσο και τις ιδιότητες της ύλης σε ακραίες συνθήκες όπως είναι το εσωτερικό των αστέρων νετρονίων.

Μια από τις ιδιότητες που συχνά επιδεικνύουν τα LMXBs είναι οι ημιπεριοδικές ταλαντώσεις (quasi-periodic oscillations QPOs) στο φάσμα τους στις ακτίνες X. Αυτή η μεταβλητότητα παρουσιάζει εκτεταμένη φαινομενολογία που συνήθως οργανώνεται σε διάφορες ομάδες. Έτσι για παράδειγμα έχουμε, (α) τα φαινόμενα υψηλών συχνοτήτων (high-frequency phenomena), (β) τα QPOs που εμφανίζονται στην περιοχή των hectohertz και (γ) το σύμπλεγμα των χαμηλών συχνοτήτων (low-frequency complex). Τέτοιες κατηγοριοποιήσεις βασίζονται όχι μόνο στην περιοχή των συχνοτήτων που παρατηρούνται τα QPOs, αλλά και χαρακτηριστικά των παρατηρούμενων συχνοτήτων που εξαρτώνται και από τον τύπο της πηγής ή την κατάσταση στην οποία βρίσκεται αυτή (πράγμα που έχει να κάνει με το πόσο ενεργή είναι η πηγή). Για παράδειγμα, μπορεί να δει κανείς κατηγοριοποιήσεις όπου έχουμε (i) το σύμπλεγμα των χαμηλών συχνοτήτων να αποτελείται από QPOs με συχνότητες  $\nu$  στην περιοχή από 0.01 έως 100 Hz ή (ii) τα φαινόμενα υψηλών συχνοτήτων να αποτελούνται από τα επονομαζόμενα neutron star kHz QPOs που συχνά παρατηρούνται σε ζεύγη από QPOs τα οποία τότε ονομάζονται δίδυμα kHz QPOs και τα οποία έχουν παρατηρηθεί να φτάνουν μέχρι  $\nu = 1258$  Hz [27]. Ακόμα υπάρχουν φαινόμενα υψηλών συχνοτήτων που κατηγοριοποιούνται ως black hole high-frequency QPOs και παρουσιάζουν διαφορετικές ιδιότητες από τα αντίστοιχα των αστέρων νετρονίων. Τέλος, τα QPOs εκτός από τα παραπάνω παρουσιάζουν και συσχετίσεις ανάμεσα στις διάφορες ομάδες παρατηρούμενων συχνοτήτων, τόσο στους αστέρες νετρονίων όσο και στις μαύρες τρύπες (αναλυτικές παρουσιάσεις των ιδιοτήτων των QPOs μπορεί να βρει κανείς στις αναφορές [37, 75]).

Για την ερμηνεία των QPOs έχουν προταθεί διάφορων ειδών μηχανισμοί, οι οποίοι συνήθως έχουν σχέση με την παρουσία κάποιου δίσκου γύρω από το αντικείμενο και την πρόσπτωση υλικού σε αυτό. Έτσι έχουμε: (i) τα μοντέλα τύπου Beat-frequency, όπου υποτίθεται ότι κάποια τροχιακή συχνότητα οδηγείται από την συχνότητα περιστροφής του κεντρικού αντικειμένου, (ii) τα μοντέλα σχετικιστικής μετάπτωσης (relativistic precession) όπου τα QPOs συνδέονται με την τροχιακή κίνηση και την μετάπτωση του περίαστρου και του επιπέδου μια συγκεκριμένης τροχιάς (επικυκλικές κινήσεις), (iii) τα μοντέλα τροχιακού συντονισμού, όπου κάποιου είδους συντονισμός ανάμεσα στην τροχιακή και κάποια επικυκλική συχνότητα όποτε αυτές έχουν ρητούς λόγους ενεργοποιεί τα QPOs, και τέλος (iv) τα μοντέλα προτιμητέας ακτίνας, όπου κάποιος μηχανισμός επιλέγει κάποια συγκεκριμένη ακτίνα γύρω από το κεντρικό αντικείμενο, από την οποία



Σχήμα 5.1: Σχηματική απεικόνιση των διαφόρων πιθανών μηχανισμών που παράγουν τα QPOs. Το σχήμα προέρχεται από την εργασία [36]

προέρχονται τα QPOs. Σε αυτά το μοντέλο γίνεται γενικά η υπόθεση ότι οι τροχιές του υλικού του ρευστού στον δίσκο είναι σχεδόν γεωδαισιακές και οι συχνότητες που συνδέονται με αυτές τις τροχιές βρίσκονται πίσω από τις συχνότητες που παρατηρούμε (περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στην αναφορά [75]). Υπάρχουν και άλλα προτεινόμενα μοντέλα για τα QPOs, όπως για παράδειγμα το μοντέλο της ομάδας του Rezzolla [59] όπου οι παρατηρούμενες συχνότητες οφείλονται σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του δίσκου συνολικά. Όπως και να έχει όμως, όλα τα σχετικά μοντέλα στηρίζονται στις ιδιότητες των τροχιών γύρω από το συμπαγές αντικείμενο. Η συζήτησή μας παρακάτω, θα στηριχθεί σε μοντέλα που υποθέτουν ότι τα QPOs σχετίζονται με τις τροχιακές συχνότητες του υλικού που κινείται στον δίσκο προσαύξεσης, όπως είναι τα μοντέλα που παρουσιάζονται από τον Stella [69], αλλά η ανάλυση και τα συμπεράσματα μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλα μοντέλα που βασίζονται στις ιδιότητες των τροχιών του χωροχρόνου. Μια σχηματική απεικόνιση των διαφόρων προτεινόμενων μοντέλων για τα QPOs μπορεί να δει κανείς στο σχήμα 5.1.

Στα μοντέλα σχετικιστικής μετάπτωσης, όπως είπαμε, γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει κάποια δομή ή κάποια ανομοιογένεια στον δίσκο προσαύξεσης (για παράδειγμα μια θερμή κηλίδα) που ακολουθεί μια σχεδόν κεπλεριανή, ή πιο σωστά γεωδαισιακή, τροχιά η οποία είναι σχεδόν κυκλική και βρίσκεται σχεδόν στο ισημερινό επίπεδο. Μια τέτοια τροχιά χαρακτηρίζεται από μια τροχιακή συχνότητα  $\Omega$  και τις συχνότητες της μεταπτωτικής κίνησης,  $\Omega_p$  για διαταραχές της κυκλικής τροχιάς στην ακτινική διεύθυνση και  $\Omega_z$  για διαταραχές κατά την κατακόρυφη στο ισημερινό επίπεδο διεύθυνση. Επισημαίνουμε εδώ ότι η κίνηση αυτή θεωρείται γεωδαισιακή, που σημαίνει ότι η κίνηση γίνεται υπό την

επίδραση της βαρύτητας μόνο. Μια τέτοια προσέγγιση είναι δικαιολογημένη, αφού στην περίπτωση των λεπτών δίσκων (που εκπέμπουν θερμική ακτινοβολία πολύ αποδοτικά) οι τροχιές της προσπίπτουσας ύλης φαίνεται να ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

Για την μελέτη των παραπάνω συχνοτήτων, η πιο συνήθης επιλογή στη βιβλιογραφία είναι αυτή ενός χωροχρόνου τύπου Schwarzschild ή τύπου Kerr ως υπόβαθρο. Μια πιο γενική όμως επιλογή θα ήταν ένας χωρόχρονος που να περιγράφει έναν στάσιμο και αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο, όπως είναι οι χωρόχρονοι που έχουμε συζητήσει και περιγράφονται από το στοιχείο μήκους του Παπαπέτρου [51],

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]. \quad (5.1.1)$$

Ένας τέτοιος χωροχρόνος μπορεί να κατασκευαστεί από ένα κατάλληλο δυναμικό του Ernst [9, 10] όπου οι συναρτήσεις της μετρικής να συνδέονται με τα πολύπολα των Geroch, Hansen και Fodor et al. [14, 18, 11]. Τότε, θα μπορούσε κανείς να εκφράσει τις διάφορες συχνότητες ως συναρτήσεις των πολυπόλων του χωροχρόνου. Αυτή η δουλειά έχει πραγματοποιηθεί από τον Ryan [62], όπου οι ποσότητες  $\Omega_\rho/\Omega$  και  $\Omega_z/\Omega$  εκφράζονται ως αναπύγματα σε σειρά δυνάμεων του  $\Omega$  με τους συντελεστές των αναπυγμάτων να εξαρτώνται με συγκεκριμένο τρόπο από τα πολύπολα του χωροχρόνου. Αν και η δουλειά του Ryan είχε ως στόχο την εφαρμογή στη μελέτη και ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων που εκπέμπονται κατά την περιδίνηση ενός συμπαγούς αντικειμένου που με αδιαβατικό τρόπο χάνει ενέργεια και στροφορμή και πέφτει σε ένα κεντρικό συμπαγές αντικείμενο πολύ μεγαλύτερης μάζας (extreme mass ratio inspirals, EMRIs), η ίδια αρχή μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση των δίσκων προσαύξεσης σε χαμηλής μάζας διπλά συστήματα ακτίνων X, όταν ο δίσκος είναι τέτοιος ώστε οι τροχιές να μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραγμένες γεωδαισιακές.

Οι εκφράσεις που δίνει ο Ryan είναι ασυμπτωτικά αναπύγματα που έχουν καλή ακρίβεια όσο είμαστε σχετικά μακριά από την περιοχή της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς (innermost stable circular orbit, ISCO). Για την περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε περιοχές πιο κοντά στο ISCO, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις πολλές αναλυτικές λύσεις που έχουν προταθεί για να προσεγγίσουν τον χωροχρόνο γύρω από άστρα νετρονίων (όπως είναι οι [72, 2, 50, 55, 73]) και με την βοήθειά τους να κάνουμε υπολογισμούς στην περιοχή όπου τα φαινόμενα της βαρύτητας είναι ισχυρά. Αυτές οι αναλυτικές λύσεις, όπως έχουμε συζητήσει, παραμετροποιούνται με βάση τα πρώτα πολύπολα του χωροχρόνου, τα οποία με τη σειρά τους συνδέονται με τις ιδιότητες και την δομή του κεντρικού συμπαγούς αντικειμένου. Έτσι η χρήση τέτοιων

αναλυτικών λύσεων μπορεί από την μία να συνδέσει τις συχνότητες των QPOs με τα πολύπολα του κεντρικού αντικειμένου και από την άλλη να δώσει μια πιο ρεαλιστική και ακριβής περιγραφή αυτών των συχνοτήτων σε σχέση με κάποιο κεντρικό αντικείμενο, από τις μέχρι τώρα συνήθεις επιλογές των μετρικών Schwarzschild και Kerr. Στα παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε την αναλυτική λύση Two-Soliton που έχουμε συζητήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, η οποία κατασκευάζεται από τα πρώτα τέσσερα πολύπολα του αστέρα νετρονίων, δηλαδή από τη μάζα  $M$ , την στροφορμή  $(J)$ , το τετράπολο της μάζας  $(M_2)$  και το οκτάπολο της περιστροφής  $(S_3)$ .

Έτσι, αντί να βασιζόμαστε στην ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων (που προς το παρόν μας διαφεύγουν) για να πάρουμε πληροφορίες από τα συμπαγή αντικείμενα, όπως ήταν η αρχική πρόθεση του Ryan για την τεχνική που ανέπτυξε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρατηρήσεις στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα που είναι άφθονες και να βγάλουμε συμπεράσματα για την δομή του κεντρικού αντικειμένου, το φάσμα των πολυπόλων του και την φύση του. Δηλαδή, από τις παρατηρήσεις στα διπλά συστήματα ακτίνων X μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την καταστατική εξίσωση των αστέρων νετρονίων ή ακόμα και να ελέγξουμε την ίδια την θεωρία της γενικής σχετικότητας ελέγχοντας το no-hair theorem για τις μαύρες τρύπες. Στο ίδιο πνεύμα κινείται και το πρόγραμμα που έχει αναπτύξει τον τελευταίο καιρό ο Δ. Ψάλτης με τους συνεργάτες του [57].

Αυτό που θα δείξουμε παρακάτω είναι ότι μπορούμε από τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα του Ryan για τις συχνότητες σε συνδυασμό με κατάλληλες παρατηρήσεις των QPOs να εκτιμήσουμε τα πρώτα πολύπολα του χωροχρόνου. Θα δείξουμε ακόμα ότι για την περίπτωση που τα QPOs προέρχονται από περιοχές πολύ κοντά στο κεντρικό αντικείμενο, αντί για τις ασυμπτωτικές εκφράσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι συχνότητες που παράγονται από τα αναλυτικά μοντέλα (σε μορφή τεφιγράματος) ώστε να γίνει επιλογή των καταλληλότερων παραμέτρων που περιγράφουν το κεντρικό άστρο νετρονίων (πολύπολα και καταστατική εξίσωση). Με την τελευταία μέθοδο θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει κανείς τις παρατηρήσεις για να περιορίσει ή να επιλέξει τις καταστατικές εξισώσεις που μπορούν να περιγράψουν πραγματικά άστρα νετρονίων.

## 5.2 Οι συχνότητες ως συναρτήσεις των πολυπόλων

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε σύντομα τις εξισώσεις που περιγράφουν την τροχιακή κίνηση ενός σωματιδίου σε έναν αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο κοντά στο ισημερινό επίπεδο και θα δώσουμε τις εκφράσεις που συσχετίζουν τις μεταπτωτικές

συχνότητες με την τροχιακή συχνότητα και τα πολύπολα, όπως παράχθηκαν από τον Ryan [62].

Όπως έχουμε πει, ένας στάσιμος και αξονικά συμμετρικός χωρόχρονος μπορεί να δοθεί με την μορφή του στοιχείου μήκους του Παπαπέτρου (εξ. 1.1.9), όπου οι  $f$ ,  $\omega$  και  $\gamma$  είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων  $(\rho, z)$ . Για αυτή τη μορφή της μετρικής, τα διάφορα στοιχεία της μετρικής έχουν τη μορφή,

$$g_{tt} = -f, \quad g_{t\phi} = f\omega, \quad g_{\phi\phi} = f^{-1}\rho^2 - f\omega^2,$$

$$g_{\rho\rho} = g_{zz} = f^{-1}e^{2\gamma},$$

όπου βλέπουμε ότι η ακτινική συντεταγμένη ορίζεται και ως  $\rho^2 = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$ . Η τροχιά ενός σωματιδίου μπορεί να προσδιοριστεί από τις διατηρούμενες ποσότητες του προβλήματος, δηλαδή από την διατήρηση της ενέργειας, την διατήρηση της  $z$  συνιστώσας της στροφορμής (δηλαδή της στροφορμής κατά μήκος του άξονα συμμετρίας) και από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας (όπως αναλύουμε στο Παράρτημα). Έτσι, για τις πρώτες δύο αρχές διατήρησης θα έχουμε:

$$\frac{E}{\mu} = -g_{tt} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) - g_{t\phi} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right), \quad (5.2.1)$$

$$\frac{L_z}{\mu} = g_{t\phi} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) + g_{\phi\phi} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right), \quad (5.2.2)$$

ενώ η κανονικοποίηση της τετραταχύτητας θα μας δώσει:

$$\begin{aligned} -1 &= g_{tt} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2g_{t\phi} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right) \\ &\quad + g_{\phi\phi} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + g_{zz} \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Αν η τροχιά του σωματιδίου είναι στο ισημερινό επίπεδο ( $z = 0$ ), τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα ενεργό δυναμικό για την κίνηση από την εξίσωση,

$$-g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = 1 - \frac{\tilde{E}^2 g_{\phi\phi} + 2\tilde{E}\tilde{L}_z g_{t\phi} + \tilde{L}_z^2 g_{tt}}{\rho^2} \equiv V(\rho), \quad (5.2.4)$$

όπου τα  $\tilde{E}$  και  $\tilde{L}_z$  είναι οι διατηρούμενες ποσότητες (ενέργεια και στροφορμή αντίστοιχα) ανά μονάδα μάζας και η ποσότητα  $V(\rho)$  είναι το ενεργό δυναμικό. Από αυτή την εξίσωση βλέπει κανείς ότι οι συνθήκες για την κυκλική κίνηση είναι οι  $d\rho/d\tau = 0$  και  $d^2\rho/d\tau^2 = 0$ , όπως παρουσιάζουμε και στο Παράρτημα, που είναι ισοδύναμες με τις συνθήκες για το ενεργό δυναμικό  $V(\rho) = 0$ ,  $dV(\rho)/d\rho = 0$  που χαρακτηρίζουν ένα τοπικό ακρότατο. Για την κυκλική κίνηση μπορεί κανείς να υπολογίσει και την τροχιακή συχνότητα

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi,\rho} + \sqrt{(g_{t\phi,\rho})^2 - g_{tt,\rho}g_{\phi\phi,\rho}}}{g_{\phi\phi,\rho}}. \quad (5.2.5)$$

Στην περίπτωση που η τροχιά δεν είναι ακριβώς κυκλική (έχει κάποια διαταραχή στην ακτινική διεύθυνση) ή βγαίνει και εκτός του ισημερινού επιπέδου (έχει κάποια κατακόρυφη διαταραχή), από τις εξισώσεις (5.2.1-5.2.3) μπορεί να βγάλει κανείς τις εξισώσεις των διαταραγμένων κυκλικών τροχιών και από αυτές να υπολογίσει τις επικυκλικές συχνότητες  $\Omega_\rho$  και  $\Omega_z$ . Οι συχνότητες αυτές (όπως υπολογίζουμε στο Παράρτημα) δίνονται από τις εκφράσεις,

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha = \Omega - \left[ -\frac{g^{\alpha\alpha}}{2} \left( (g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)^2 \left( \frac{g_{\phi\phi}}{\rho^2} \right)_{,\alpha\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. - 2(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)(g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega) \left( \frac{g_{t\phi}}{\rho^2} \right)_{,\alpha\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. + (g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega)^2 \left( \frac{g_{tt}}{\rho^2} \right)_{,\alpha\alpha} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

όπου αν θέσουμε  $\alpha \rightarrow \rho$ , τότε παίρνουμε την συχνότητα μετάπτωσης του περίαστρου, ενώ αν θέσουμε  $\alpha \rightarrow z$  παίρνουμε τη συχνότητα μετάπτωσης της γραμμής των αφίδων της τροχιάς.

Αυτές οι εκφράσεις βλέπουμε ότι εξαρτώνται από τις συναρτήσεις την μετρικής και τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους τους ως προς τις συντεταγμένες  $\rho$  και  $z$  υπολογισμένες στο ισημερινό επίπεδο. Όπως δείχνει ο Ryan [62], αυτές οι εξισώσεις μπορούν τελικά να αναπτυχθούν σε δυναμοσειρές ως προς τη μεταβλητή  $1/\rho$ . Αν εκφράσουμε λοιπόν την τροχιακή συχνότητα σε ανάπτυγμα ως προς το  $1/\rho$ , θα πάρουμε μια έκφραση της μορφής

$$\Omega = (M/\rho^3)^{1/2} \left( 1 + \sum_k a_k (\rho^{-1/2})^k \right). \quad (5.2.7)$$

Η σειρά αυτή μπορεί να αντιστραφεί και να εκφραστεί ως

$$1/\rho = (\Omega^2/M)^{1/3} \left( 1 + \sum_k \beta_k (\Omega^{1/3})^k \right). \quad (5.2.8)$$

Την τελευταία αυτή έκφραση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε το  $1/\rho$  από τις συχνότητες της μεταπτωτικής κίνησης. Αν το κάνουμε αυτό, μπορούμε να γράψουμε τα αναπτύγματα ως προς το  $v = (M\Omega)^{1/3}$  (όπου στο νευτώνειο όριο,  $v$  είναι η τροχιακή ταχύτητα του σωματιδίου),

$$\frac{\Omega_\rho}{\Omega} = \sum_{n=2}^{\infty} R_n v^n, \quad (5.2.9)$$

$$\frac{\Omega_z}{\Omega} = \sum_{n=3}^{\infty} Z_n v^n. \quad (5.2.10)$$

Οι συντελεστές των σειρών,  $R_n$  και  $Z_n$ , είναι ρητές συναρτήσεις των πολυπόλων των Geroch-Hansen-Fodor. Για παράδειγμα, οι πρώτοι μη μηδενικοί όροι αυτών των αναπτύγματος είναι οι παρακάτω,

$$R_2 = 3, \quad R_3 = -4 \frac{S_1}{M^2}, \quad R_4 = \left( \frac{9}{2} - \frac{3M_2}{2M^3} \right), \dots$$

$$Z_3 = 2 \frac{S_1}{M^2}, \quad Z_4 = \frac{3M_2}{2M^3}, \quad Z_6 = \left( 7 \frac{S_1^2}{M^4} + 3 \frac{M_2}{M^3} \right), \dots$$

όπου  $M$  και  $M_2$  είναι η μάζα και το τετράπολο της μάζας αντιστοίχως, και  $S_1$  είναι η στροφορμή του χωρόχρονου. Οι εκφράσεις αυτές δίνονται στην εργασία του Ryan μέχρι τους όρους τάξης  $O(v^{10})$  [62].

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι στην ανάλυσή μας όταν λέμε συχνότητα, εννοούμε τις ποσότητες  $\Omega$  που είναι στην πραγματικότητα γωνιακές ταχύτητες, ενώ στην βιβλιογραφία των QPOs όταν μιλάνε για συχνότητες, αναφέρονται σε κύκλους/χρόνο που είναι η ποσότητα  $\nu$ . Οι δύο ποσότητες μεταξύ τους συνδέονται με τη σχέση  $\Omega = 2\pi\nu$ ,

οπότε, όπου αναφερόμαστε στην συχνότητες  $\nu$  θα το διευκρινίζουμε. Στην ανάλυση που ακολουθεί όλες οι ποσότητες υπολογίζονται σε γεωμετρικές μονάδες (km) εκτός από τις συχνότητες που συνήθως δίνονται σε kHz. Η μετατροπή από  $\text{km}^{-1}$  σε kHz γίνεται με πολλαπλασιασμό με το 299.79, δηλαδή  $1 \text{ km}^{-1} = 299.79 \text{ kHz}$ . Σε γεωμετρικές μονάδες, η μία ηλιακή μάζα ( $1 M_{\odot}$ ) είναι 1.477 km.

### 5.3 Ο χωροχρόνος γύρω από τους αστέρες νετρονίων

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε σχετικά σύντομα τους χωροχρόνους που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας προκειμένου να μοντελοποιήσουμε το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων. Αρχικά θα παρουσιάσουμε εν συντομία την επιλογή του αναλυτικού χωροχρόνου και μετά θα παρουσιάσουμε και τους αριθμητικούς χωροχρόνους. Τόσο τα αριθμητικά μοντέλα, όσο και η επιλογή του αναλυτικού χωροχρόνου, έχουν παρουσιαστεί και σε προηγούμενα κεφάλαια (ενώ περισσότερες λεπτομέρειες για τα αριθμητικά μοντέλα των αστέρων νετρονίων δίνονται στο Παράρτημα).

Ξεκινώντας με την αναλυτική λύση, η επιλογή που θα κάνουμε είναι αυτή που συζητήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε την λύση Two-Soliton [40]. Όπως έχουμε πει, η λύση αυτή μπορεί να κατασκευαστεί κάνοντας μια επιλογή για το δυναμικό του Ernst στον άξονα συμμετρίας της μορφής:

$$e(z) = \frac{(z - M - ia)(z + ib) - k}{(z + M - ia)(z + ib) - k}, \quad (5.3.1)$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι πραγματικές. Οι παράμετροι  $M$  και  $a$  είναι η μάζα και η ανηγμένη στροφορμή  $J/M$  αντιστοίχως. Τα πρώτα πολύπολα της συγκεκριμένης αναλυτικής λύσης δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} M_0 &= M, & M_1 &= 0, & M_2 &= -(a^2 - k)M, & M_3 &= 0, \\ M_4 &= \left( a^4 - (3a^2 - 2ab + b^2)k + k^2 - \frac{1}{7}kM^2 \right) M \\ S_0 &= 0, & J &= aM, & S_2 &= 0, \end{aligned}$$



$$S_3 = -(a^3 - (2a - b)k)M, \quad S_4 = 0. \quad (5.3.2)$$

που όπως έχουμε αναφέρει και προηγούμενα, τα τέσσερα πρώτα πολύπολα συνδέονται γραμμικά με τις παραμέτρους του δυναμικού του Ernst και άρα μπορούν πάντα να προσδιοριστούν οι τελευταίες από τα πολύπολα έτσι ώστε να κατασκευάσουμε έναν αναλυτικό χωρόχρονο που να διαθέτει αυτά ακριβώς τα πρώτα πολύπολα. Υπενθυμίζουμε ότι η παράμετρος  $k$  καθορίζεται από το τετράπολο  $M_2$  ενώ η παράμετρος  $b$  καθορίζεται από το οκτάπολο της περιστροφής  $S_3$ .

Για να φτιάξουμε τους αναλυτικούς χωροχρόνους, θα βασιστούμε σε κάποια μοντέλα ρεαλιστικών αστέρων νετρονίων από τα οποία θα αντλήσουμε τις παραμέτρους των αναλυτικών λύσεων, δηλαδή τα σχετικιστικά πολύπολα. Τα μοντέλα των ρεαλιστικών αστέρων μας τα δίνει ο αριθμητικός κώδικας RNS του Στεργιούλα [71], ο οποίος παράγει αστέρες νετρονίων με ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις. Τα μοντέλα λοιπόν που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτά που χρησιμοποιήσαμε τόσο στο κεφάλαιο όπου μελετήσαμε τα σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικών χωρόχρονων, όσο και στο προηγούμενο κεφάλαιο όπου μελετήσαμε την Two-Soliton και παρουσιάζονται στο Παράρτημα.

Αυτή η επιλογή μοντέλων (με το εύρος των καταστατικών εξισώσεων που χρησιμοποιεί) έχει την δυνατότητα να περιγράψει όλο το αστροφυσικά ενδιαφέρον φάσμα, από τα άστρα που μπορεί να σχηματίζονται από μια μαλακή καταστατική εξίσωση όπως είναι η AU μέχρι αυτά που προκύπτουν από μία σκληρή καταστατική όπως είναι η L, ενώ παράλληλα τα μοντέλα αυτά καλύπτουν και όλο το φάσμα των περιστροφών.

Ένα ερώτημα για την συγκεκριμένη επιλογή, θα μπορούσε να είναι το γιατί να χρησιμοποιηθούν οι λεγόμενες εξελικτικές ακολουθίες αστέρων νετρονίων; Οι ακολουθίες αυτές (όπως έχουν οριστεί εδώ [7]) περιγράφουν θεωρητικά απομονωμένα άστρα που με κάποιο τρόπο χάνουν στροφορμή χωρίς να χάνουν/κερδίζουν ύλη. Στην περίπτωση όμως όπου έχουμε πρόσπτωση ύλης και κάποιο δίσκο προσαύξησης, τότε ο αριθμός των βαρυονίων του αστέρα δεν παραμένει σταθερός και οι λεπτομέρειες της εξέλιξης του αστέρα δεν μπορούν να προσδιοριστούν εύκολα. Για τα χαμηλής μάζας διπλά συστήματα ακτίνων X όμως, όπου η μάζα του συνοδού είναι συνήθως  $< 1M_{\odot}$ , η συνολική μεταφορά μάζας είναι πιθανότατα ένα μικρό κλάσμα της ηλιακής μάζας και άρα ένα άστρο με μάζα  $\geq 1.4M_{\odot}$  θα εξελισσόταν ακολουθώντας περίπου μια τέτοια εξελικτική ακολουθία.

Άρα, από την στιγμή που έχουμε όλες τις παραμέτρους που χρειαζόμαστε, οι διάφορες συχνότητες μπορούν πολύ εύκολα να παραχθούν από τις αναλυτικές μετρικές. Για παράδειγμα, παρουσιάζουμε εδώ τον πίνακα 5.1 όπου έχουμε υπολογίσει για τα μοντέλα που παράγονται από την καταστατική L, τις ακτίνες της τελευταίας ευσταθούς

Πίνακας 5.1: Οι διάφορες συχνότητες υπολογισμένες για τα μοντέλα που παράχθηκαν από την καταστατική εξίσωση L. Οι μάζες και οι ακτίνες (circumferential radii) στον ισημερινό του άστρου και στο ISCO δίνονται σε km. Οι συχνότητες δίνονται σε kHz. Οι συχνότητες υπολογίζονται στο ISCO εκτός από όταν το ISCO βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του άστρου, οπότε και υπολογίζονται στην ακτίνα της επιφάνειας. Αυτές οι περιπτώσεις υποδεικνύονται με έναν αστερίσκο. Οι συχνότητες που δίνουμε είναι γωνιακές συχνότητες, είναι δηλαδή συχνότητες  $\Omega = 2\pi\nu$ .

$M$ (km)	$j$	$R_s$ (km)	$R_{\text{ISCO}}$ (km)	$\Omega$ (kHz)	$\Omega_\rho$ (kHz)	$\Omega_z$ (kHz)
2.080	0.	14.96	12.48	7.47*	4.42*	0*
2.071	0.194	15.18	11.76	7.26*	3.78*	0.062*
2.075	0.324	15.61	11.98	7.00*	3.47*	0.026*
2.080	0.417	16.06	12.32	6.74*	3.25*	-0.019*
2.083	0.483	16.49	12.63	6.51*	3.06*	-0.054*
2.087	0.543	16.97	12.94	6.26*	2.87*	-0.085*
2.090	0.598	17.51	13.23	5.99*	2.66*	-0.108*
2.095	0.650	18.18	13.53	5.68*	2.42*	-0.122*
2.096	0.690	18.90	13.77	5.37*	2.18*	-0.125*
2.097	0.698	19.09	13.82	5.29*	2.12*	-0.124*
3.995	0.	13.72	23.97	5.10	5.10	0
4.012	0.178	14.23	21.83	5.81	5.81	0.144
4.029	0.280	14.69	20.78	6.24	6.24	0.240
4.051	0.375	15.24	19.98	6.62	6.62	0.327
4.074	0.458	15.87	19.45	6.91	6.91	0.390
4.098	0.528	16.53	19.14	7.11	7.11	0.426
4.120	0.588	17.24	18.99	7.24	7.24	0.438
4.139	0.635	17.95	18.95	7.30	7.30	0.434
4.160	0.682	18.93	18.98	7.34	7.34	0.417
4.167	0.700	19.45	19.01	7.35	7.35	0.407
4.321	0.478	14.90	19.77	6.89	6.89	0.496
4.321	0.479	15.01	19.80	6.88	6.88	0.490
4.324	0.483	15.16	19.80	6.88	6.88	0.489
4.325	0.489	15.29	19.79	6.89	6.89	0.490
4.333	0.505	15.55	19.73	6.93	6.93	0.498
4.355	0.555	16.29	19.53	7.07	7.07	0.525
4.377	0.602	16.99	19.40	7.18	7.18	0.541
4.396	0.641	17.68	19.35	7.25	7.25	0.544
4.418	0.684	18.67	19.35	7.30	7.30	0.535
4.420	0.686	18.74	19.36	7.30	7.30	0.534

κυκλικής τροχιάς (ISCO), τις διάφορες τροχιακές συχνότητες  $\Omega$  και τις επικυκλικές συχνότητες  $\Omega_\rho$  και  $\Omega_z$  στη θέση του ISCO και ακόμα τις μάζες, τις παραμέτρους περιστροφής  $j = J/M^2$  και τις ακτίνες των αστέρων για κάθε μοντέλο. Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι οι ποσότητες  $R_{\text{ISCO}}, \Omega, \Omega_\rho$  και  $\Omega_z$  υπολογίζονται από την αναλυτική μετρική. Σε κάποιες περιπτώσεις, η επιφάνεια του άστρου τυχαίνει να βρίσκεται πιο έξω από τη θέση του ISCO. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι συχνότητες υπολογίζονται στην θέση της επιφάνειας του άστρου. Όπως μπορεί να δει κανείς, η συχνότητα της μετάπτωσης του περίαστρου  $\Omega_\rho$  συμπίπτει με την τροχιακή συχνότητα  $\Omega$  στο ISCO και στα μη περιστρεφόμενα μοντέλα η συχνότητα  $\Omega_z$  είναι μηδέν, όπως είναι αναμενόμενο.

## 5.4 Παρεμβολή των συχνοτήτων με τις ασυμπτωτικές εκφράσεις

Σε αρκετές περιπτώσεις, έχουν παρατηρηθεί δίδυμα kHz QPOs με την υψηλότερη συχνότητα να παίρνει σχετικά χαμηλές τιμές (για παράδειγμα μπορεί να δει κανείς την περίπτωση των παρατηρήσεων από την πηγή Circinus X-1 [4]) και άρα θα μπορούσαν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από μια περιοχή του χωροχρόνου σχετικά μακριά από την θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τις ασυμπτωτικές εκφράσεις του Ryan και να δοκιμάσει να εκτιμήσει με παρεμβολή τις πολυπολικές ροπές που επηρεάζονται στους συντελεστές αυτών των εκφράσεων.

Προκειμένου να γίνει μια πρώτη διερεύνηση για το αν αυτή μέθοδος θα μπορούσε να δώσει χρήσιμα αποτελέσματα, δηλαδή σχετικά ικανοποιητικές εκτιμήσεις των πρώτων πολυπόλων, θα χρησιμοποιήσουμε εικονικά δεδομένα (δηλαδή εικονικά ζευγάρια συχνοτήτων  $(\Omega, \Omega_\rho)$ ) ως «παρατηρήσιμες» συχνότητες των QPOs τα οποία έχουμε κατασκευάσει με την βοήθεια της αναλυτικής λύσης Two-Soliton ως πιστό αναλυτικό αντίγραφο των αριθμητικών μοντέλων. Για κάθε αριθμητικό μοντέλο αστέρα νετρονίων για το οποίο έχουμε τις παραμέτρους  $M, J, M_2, S_3$ , κατασκευάζουμε ένα χωροχρόνο της Two-Soliton στον οποίον υπολογίζονται οι διάφορες συχνότητες ως συναρτήσεις της απόστασης από το κεντρικό αντικείμενο. Από αυτές τις συχνότητες φτιάχνουμε ζευγάρια τιμών  $(\Omega, \Omega_\rho)$  και κατασκευάζουμε γραφήματα της ποσότητας  $\Omega_\rho/\Omega$  ως συνάρτηση του  $\Omega$ . Αυτά είναι τα «δεδομένα» μας, τα οποία μετά παρεμβάλλουμε με την

έκφραση (5.2.9) και από το αποτέλεσμα της παρεμβολής υπολογίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου. Τέλος από τους συντελεστές υπολογίζουμε τα πολύπολα, τα οποία μετά θα τα συγκρίνουμε με τα δεδομένα πολύπολα του κάθε χωρόχρονου (αυτά που χρησιμοποιήθηκαν δηλαδή αρχικά για την κατασκευή του) και έτσι θα έχουμε μια εκτίμηση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου της παρεμβολής.

Ως δεδομένα για την παρεμβολή, θα χρησιμοποιήσουμε σημεία που αντιστοιχούν σε τροχιακές συχνότητες χαμηλότερες από 3 kHz, που ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του κάθε μοντέλου (κατά βάση η μάζα και μετά τα ανώτερα πολύπολα) αντιστοιχούν σε αποστάσεις μεγαλύτερες από 1.4-2.5  $R_{\text{ISCO}}$ . Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε 3 περιοχές συχνοτήτων για τις οποίες θα φτιάξουμε δεδομένα τα οποία θα παρεμβάλουμε, μία από 3 kHz μέχρι 1 kHz (που αντιστοιχούν σε αποστάσεις ανάμεσα σε 1.4-5  $R_{\text{ISCO}}$  ανάλογα με το μοντέλο), μία από 3 kHz μέχρι 0.3 kHz (περίπου 1.4-10  $R_{\text{ISCO}}$ ) και μία από 3 kHz μέχρι 0.1 kHz (περίπου 1.4-20  $R_{\text{ISCO}}$ ). Όπως θα δούμε και παρακάτω, τα αποτελέσματα της παρεμβολής βελτιώνονται καθώς αυξάνουμε την περιοχή των συχνοτήτων που χρησιμοποιούμε προς την περιοχή συχνοτήτων που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες αποστάσεις.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να πούμε κάποια πράγματα για την επιλογή μας στην ομαδοποίηση των δεδομένων. Γενικά τα QPOs παρατηρούνται στο φάσμα των ακτίνων X με φωτόνια που έχουν ενέργεια στην περιοχή των 2-60 keV (όπως μπορεί να δει κανείς στη βιβλιογραφία [75, 37]), δηλαδή σε μια ενεργειακή περιοχή με εύρος περίπου μία με δύο τάξεις μεγέθους. Από την θεωρία των δίσκων προσαύξησης (και από παρατηρήσεις [61]) ξέρουμε ότι η θερμοκρασία του δίσκου ελαττώνεται με την απόσταση σύμφωνα με τον νόμο  $T \propto (r/R_{\text{ISCO}})^{-3/4}$  (για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να δει κανείς εδώ [34]). Αυτό σημαίνει ότι αν θεωρήσουμε ότι κάθε περιοχή του δίσκου έχει τη μεγαλύτερη ροή σε φωτόνια που αντιστοιχούν στην τοπική θερμοκρασία, τότε το παραπάνω ενεργειακό εύρος, και εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι δεν μιλάμε για τις συγκεκριμένες ενέργειες, αλλά για το εύρος των 1-2 τάξεων μεγέθους, αντιστοιχεί σε μια περιοχή στο δίσκο ανάμεσα σε  $\sim (1 - 20) R_{\text{ISCO}}$ . Φυσικά αυτό το εύρος στην απόσταση δεν αποτελεί κανενός είδους πραγματικό περιορισμό για το από ποια περιοχή μπορεί να προέρχονται τα QPOs, αλλά αποτελεί μια πρώτη ένδειξη ώστε να επιλέξουμε μια απώτερη ακτίνα μέχρι την οποία θα κάνουμε την παρεμβολή στα «δεδομένων» μας.

Τα αποτελέσματα της παρεμβολής για τα διάφορα μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης FPS παρουσιάζονται στον πίνακα 5.4 (τα αποτελέσματα για τις άλλες καταστατικές υπάρχουν στο Παράρτημα). Αυτά τα αποτελέσματα είναι τυπικά όλων των καταστατικών εξισώσεων που χρησιμοποιήσαμε. Όπως μπορεί να δει κανείς από τον πίνακα 5.4,

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα της παρεμβολής για την καταστατική εξίσωση FPS. Η σχετική διαφορά ανάμεσα στα πολύπολα που προέκυψαν από την παρεμβολή και στα πραγματικά πολύπολα του χωρόχρονου δίνονται ως ποσοστό %. Τα  $M$  και  $j$  είναι η μάζα και η παράμετρος περιστροφής των αντίστοιχων άστρων.

		$\Omega$ : 1-3 kHz			$\Omega$ : 0.3-3 kHz			$\Omega$ : 0.1-3 kHz		
$M$ (km)	$j$	$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)	$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)	$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)
2.067	0.	0.777	-	-	0.211	-	-	0.1025	-	-
2.071	0.201	0.431	14.63	154.3	0.103	4.228	54.34	0.0564	2.562	36.38
2.077	0.301	0.285	6.650	47.46	0.074	2.058	17.50	0.0390	1.191	11.20
2.083	0.385	0.269	4.914	26.95	0.067	1.434	9.310	0.0339	0.804	5.750
2.087	0.452	0.253	3.923	18.01	0.059	1.070	5.753	0.0289	0.576	3.388
2.093	0.507	0.236	3.278	13.26	0.051	0.830	3.872	0.0242	0.424	2.141
2.098	0.557	0.219	2.777	10.10	0.044	0.641	2.625	0.0196	0.305	1.317
2.102	0.603	0.260	3.020	9.940	0.053	0.707	2.590	0.0241	0.340	1.300
2.106	0.636	0.301	3.275	9.995	0.047	0.585	1.957	0.0201	0.262	0.876
2.109	0.666	0.285	2.968	8.561	0.041	0.479	1.452	0.0163	0.194	0.538
2.658	0.	2.236	-	-	0.587	-	-	0.3116	-	-
2.664	0.163	1.277	48.71	1314.	0.306	14.07	463.3	0.1537	7.982	295.4
2.674	0.260	0.723	17.67	285.5	0.185	5.359	104.2	0.0867	2.853	62.76
2.686	0.349	0.479	8.802	99.28	0.133	2.838	37.66	0.0585	1.415	21.26
2.701	0.436	0.358	5.231	43.28	0.069	1.192	11.70	0.0339	0.639	6.825
2.714	0.500	0.329	4.124	27.50	0.055	0.801	6.068	0.0248	0.384	3.029
2.727	0.562	0.237	2.643	14.56	0.039	0.477	2.593	0.0144	0.171	0.701
2.736	0.602	0.214	2.185	10.47	0.028	0.285	0.977	0.0069	0.044	0.373
2.744	0.633	0.194	1.859	7.961	0.019	0.148	0.005	0.0008	0.047	1.023
2.750	0.654	0.179	1.641	6.454	0.012	0.056	0.590	0.0035	0.108	1.409
2.823	0.427	0.351	5.143	56.62	0.066	1.146	14.91	0.0322	0.606	8.542
2.823	0.428	0.439	6.348	67.69	0.089	1.528	19.39	0.0455	0.849	11.73
2.825	0.432	0.350	5.064	52.94	0.066	1.119	13.80	0.0318	0.589	7.859
2.826	0.439	0.348	4.942	49.69	0.064	1.077	12.73	0.0309	0.561	7.159
2.829	0.450	0.343	4.754	45.45	0.062	1.010	11.28	0.0295	0.518	6.204
2.840	0.492	0.322	4.027	31.97	0.052	0.749	6.659	0.0228	0.346	3.137
2.856	0.552	0.231	2.551	16.16	0.036	0.419	2.439	0.0119	0.127	0.338
2.871	0.609	0.195	1.895	9.463	0.018	0.139	0.140	0.0002	0.059	1.356
2.882	0.647	0.116	0.996	3.692	0.007	0.174	2.234	0.0141	0.247	2.650
2.884	0.658	0.108	0.893	2.977	0.010	0.218	2.478	0.0164	0.276	2.799

στην περιοχή συχνοτήτων από 1 ως 3 kHz (που αντιστοιχεί σε αποστάσεις μέχρι περίπου  $5R_{\text{ISCO}}$ ), η μάζα του κεντρικού αντικειμένου μπορεί να περιοριστεί αρκετά καλά. Το ίδιο ισχύει και για την στροφορμή για τα περισσότερα μοντέλα και ειδικότερα αυτά με την πιο γρήγορη περιστροφή. Το τετράπολο με τα δεδομένα από αυτή την περιοχή δεν μπορεί γενικά να προσδιοριστεί πολύ καλά, αλλά για τα πιο γρήγορα περιστρεφόμενα η ακρίβεια είναι κοντά στο 30%. Καθώς αυξάνουμε το εύρος της περιοχής των σημείων, η ακρίβεια στα αποτελέσματα αυξάνεται και γίνεται τελικά αρκετά καλή και για το τετράπολο. Θα πρέπει εδώ να επισημάνουμε ότι για δεδομένο εύρος συχνοτήτων, η ακρίβεια στα αποτελέσματα χειροτερεύει καθώς αυξάνεται η μάζα. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση της μάζας συνεπάγεται και μετατόπιση της περιοχής συχνοτήτων σε μικρότερες ακτίνες και άρα πιο κοντά στο ISCO όπου οι ασυμπτωτικές εκφράσεις χρειάζονται πολύ περισσότερους όρους για να προσεγγίσουν με ακρίβεια τις συχνότητες.

## 5.5 Προσαρμογή των συχνοτήτων σε πρότυπα ( «τε- φίγραμμα» συχνοτήτων )

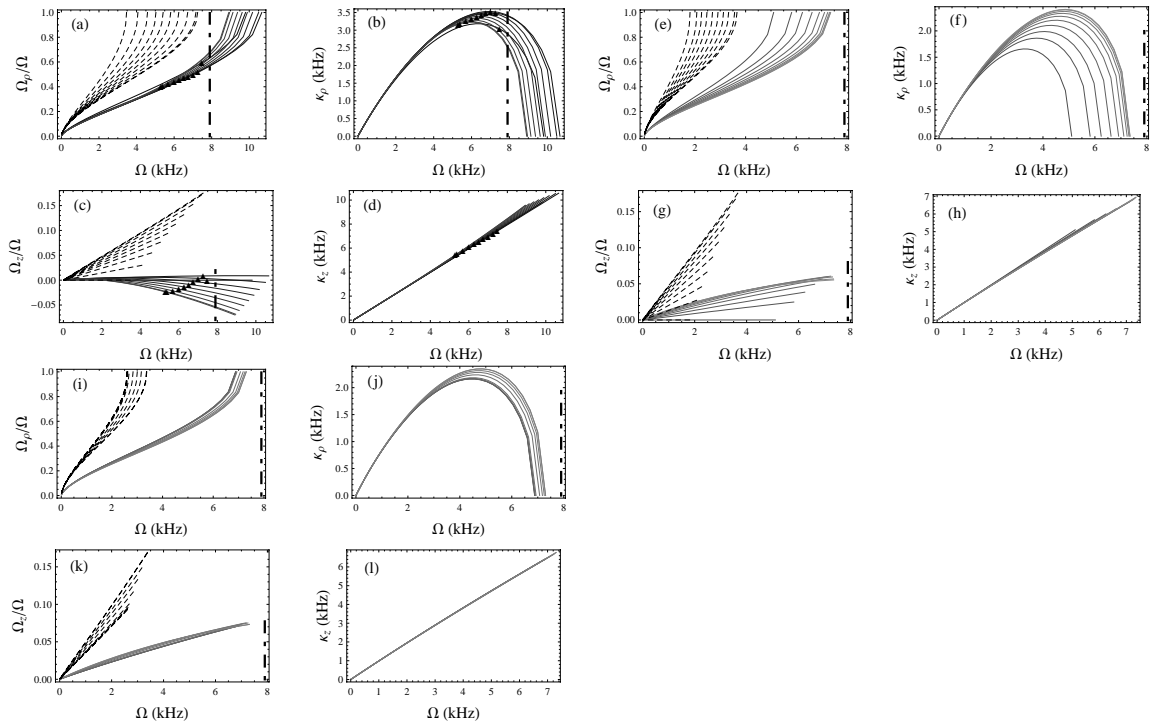
Όπως αναφέραμε και παραπάνω, επειδή οι εκφράσεις του Ryan είναι ασυμπτωτικά αναπτύγματα στο  $v = (M\Omega)^{1/3}$  δεν περιμένουμε να είναι και πολύ ακριβείς στην περιγραφή των συχνοτήτων στην περιοχή του χωροχρόνου που είναι κοντά στην τελευταία ευσταθή κυκλική τροχιά, που πρακτικά αντιστοιχεί σε τροχιακές συχνότητες  $\Omega$  μεγαλύτερες από περίπου 3-4 kHz (ανάλογα βέβαια και με τις παραμέτρους του αστέρα). Για αυτό το λόγο θα ήταν χρήσιμο να υπάρχουν πρότυπα συχνοτήτων για διαφορετικά μοντέλα αστέρων νετρονίων κατασκευασμένα με διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις, πάνω στα οποία να προβάλλουμε τα δεδομένα και να αντλούμε συμπεράσματα. Τέτοια πρότυπα συχνοτήτων, κατασκευασμένα με την βοήθεια της Two-Soliton, θα παρουσιάσουμε σε αυτή την ενότητα.

Για κάθε μία από τις τρεις καταστατικές εξισώσεις με τις οποίες έχουμε δουλέψει και τα διάφορα μοντέλα με διαφορετικές περιστροφές και μάζες, παράγουμε με την βοήθεια της Two-Soliton, τις συχνότητες  $\Omega$ ,  $\Omega_\rho$  και  $\Omega_z$  και ακόμα τις ταλαντωτικές συχνότητες  $\kappa_\rho = \Omega - \Omega_\rho$  για τις ακτινικές ταλαντώσεις και  $\kappa_z = \Omega - \Omega_z$  για τις κατακόρυφες ταλαντώσεις. Οι μεταπτωτικές συχνότητες, δηλαδή πρακτικά οι ποσότητες  $\Omega_\rho/\Omega$ ,  $\Omega_z/\Omega$ , και οι ταλαντωτικές συχνότητες απεικονίζονται ως συναρτήσεις της τροχιακής συχνότητας  $\Omega$  για κάθε μια από τις 3 εξελικτικές ακολουθίες των 10 μοντέλων που έχουμε φτιάξει

για την κάθε καταστατική. Στο σχήμα Γ.3 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από την καταστατική εξίσωση L. Παρόμοια συμπεριφορά έχουν οι συχνότητες και για τις άλλες καταστατικές (όπως μπορεί να δει κανείς στο Παράρτημα).

Όπως βλέπουμε από το σχήμα Γ.3, για την περίπτωση της συχνότητας μετάπτωσης του περίαστρου έναντι της τροχιακής συχνότητας, καθώς η τροχιά πλησιάζει την τελευταία ευσταθή κυκλική τροχιά οι δύο συχνότητες γίνονται ίσες (ο λόγος τους πάει στη μονάδα). Αυτό είναι αναμενόμενο αφού η συχνότητα της μετάπτωσης είναι η διαφορά της τροχιακής συχνότητας με την ταλαντωτική συχνότητα, η οποία μηδενίζεται στο ISCO (η αλλαγή στο πρόσημο του τετραγώνου της ταλαντωτικής συχνότητας σηματοδοτεί την έναρξη της αστάθειας των κυκλικών τροχιών σε ακτινικές διαταραχές). Αυτή η συμπεριφορά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο για να πιστοποιήσει κανείς το αν κάποια παρατηρούμενα QPOs προκύπτουν από τις συχνότητες της μετάπτωσης του περίαστρου. Αν ένα ζεύγος από δίδυμα kHz QPOs προκύπτει όντως από μετάπτωση του περίαστρου, τότε κατά την εξέλιξή τους θα πρέπει να πλησιάζουν μεταξύ τους μέχρι να γίνουν μία συχνότητα όταν θα έχουν φτάσει στο ISCO, η οποία μετά θα εξαφανιστεί.

Ένα ακόμα πολύ σημαντικό σημείο που πρέπει να επισημάνουμε, είναι το ότι οι μεταπτωτικές συχνότητες για τα άστρα νετρονίων παρουσιάζουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά (την οποία μπορεί και αναπαράγει η Two-Soliton) από τις αντίστοιχες συχνότητες της γεωμετρίας Kerr. Συγκεκριμένα, για κάποια μοντέλα αστερών νετρονίων, η συχνότητα της μετάπτωσης του επιπέδου της τροχιάς (κατακόρυφες ταλαντώσεις) στην περιοχή των υψηλών τροχιακών συχνοτήτων (που θα αντιστοιχούσαν στις εσωτερικές περιοχές ενός δίσκου προς την τελευταία ευσταθή κυκλική τροχιά) μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει γιατί η κατακόρυφη ταλαντωτική συχνότητα γίνεται ίση με την τροχιακή, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει ποτέ στην γεωμετρία Kerr (όπως φαίνεται στο σχήμα Γ.3). Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην επίδραση που έχουν τελικά στις συχνότητες οι πολυπολικές ροπές ενός ρεαλιστικού αστερά, οι οποίες είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες της Kerr. Όπως είχαν δείξει οι Laarakkers & Poisson [35] και επιβεβαιώσαμε και εμείς (με τις διορθώσεις που είδαμε στο σχετικό κεφάλαιο), ενώ το τετράπολο της Kerr είναι ίσο με  $q = -j^2$ , όπου  $q = M_2/M^3$ , για ρεαλιστικά άστρα νετρονίων το τετράπολο γίνεται ανάλογο της Kerr με συντελεστή αναλογίας μεγαλύτερο της μονάδας (ο οποίος μεγαλώνει όσο πιο σκληρή είναι η καταστατική και μειώνεται όσο πιο μεγάλη είναι η μάζα της ακολουθίας των μοντέλων). Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει επίσης και το οκτάπολο της περιστροφής, όπως έχουμε δείξει στο 2ο κεφάλαιο. Υπό αυτή την έννοια, οι μαύρες τρύπες τύπου Kerr συμπεριφέρονται ως αντικείμενα με υπερ-μαλακή καταστατική εξίσωση.



Σχήμα 5.2: Γραφικές παραστάσεις των συχνοτήτων για τις τρεις ακολουθίες μοντέλων που περιγράφονται από την καταστατική  $L$ . Τα διαγράμματα (a-d) είναι για την ακολουθία (i), (e-h) είναι για την ακολουθία (ii) και (i-l) είναι για την ακολουθία (iii) (βλέπε το Παράρτημα). Όλες οι καμπύλες τερματίζουν στο ISCO. Τα μαύρα τρίγωνα υποδεικνύουν την θέση της επιφάνειας του άστρου για το κάθε μοντέλο για τις περιπτώσεις που το ISCO είναι μέσα από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στις συχνότητες του χωροχρόνου Kerr με ίδιες μάζες και στροφορές με αυτές των μοντέλων των αστέρων νετρονίων. Η κατακόρυφη εστιγμένη-διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει την μέγιστη παρατηρηθείσα συχνότητα για τα QPOs.

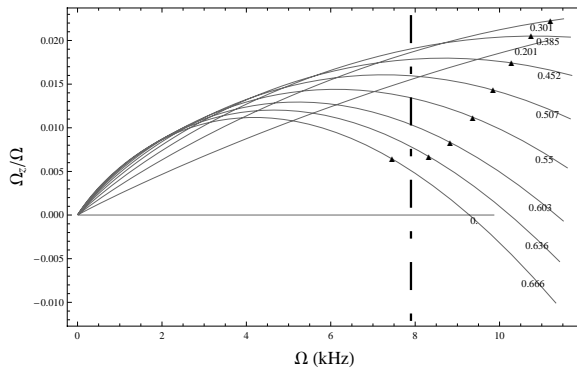


Προχωρώντας ακόμα πιο μέσα από το σημείο μηδενισμού της συχνότητας μετάπτωσης του επιπέδου της τροχιάς, η συχνότητα της κατακόρυφης ταλάντωσης γίνεται μεγαλύτερη από την τροχιακή συχνότητα και αυτό συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στο ISCO. Αυτό φαίνεται πολύ καθαρά στη γραφική παράσταση του  $\Omega_z/\Omega$  ως συνάρτηση του  $\Omega$  ειδικά στην περίπτωση της καταστατικής εξίσωσης L στα μοντέλα της ακολουθίας (i). Αυτό το φαινόμενο, θα είχε ως αποτέλεσμα μια πολύ ξεχωριστή συμπεριφορά για τα QPOs και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να ξεχωρίσει διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις για τα παρατηρούμενα άστρα νετρονίων, αφού το αν θα παρατηρηθεί ή όχι αυτό το φαινόμενο ή ακόμα και η περιοχή των συχνοτήτων που περιμένουμε να το δούμε, είναι διαφορετική για διαφορετικές σκληρότητες της καταστατικής εξίσωσης.

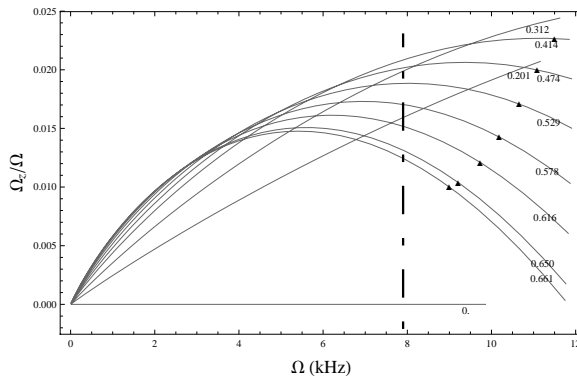
Παρόμοια συμπεριφορά μπορούμε να δούμε στις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις των μοντέλων της ακολουθίας (i) για τις καταστατικές εξισώσεις FPS και AU, με τη διαφορά ότι οι συχνότητες για τις κατακόρυφες ταλαντώσεις δεν προλαβαίνουν πάντα να γίνουν μεγαλύτερες από την τροχιακή συχνότητα πριν φτάσουμε στο ISCO, όπως μπορεί να δει κανείς στα σχήματα Γ.1 και Γ.2.

Στις γραφικές παραστάσεις υποδεικνύουμε και την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων σε κάθε μοντέλο με ένα μαύρο τριγωνάκι, στις περιπτώσεις που αυτή βρίσκεται σε μεγαλύτερη ακτίνα από τη θέση του ISCO. Γενικά το άστρο «καταπίνει» το ISCO στις περιπτώσεις των μοντέλων που βρίσκονται στην πρώτη ακολουθία κάθε καταστατικής εξίσωσης. Για αυτά τα μοντέλα, η μείωση του  $\Omega_z/\Omega$  είναι περισσότερο εμφανής, έτσι ώστε να παρουσιάζεται ακόμα και στα μοντέλα που «καταπίνουν» το ISCO. Όπως βλέπουμε καθαρά στην περίπτωση της καταστατικής L το  $\Omega_z/\Omega$  μπορεί να γίνει ακόμα και αρνητικό πριν φτάσουμε στην επιφάνεια του άστρου.

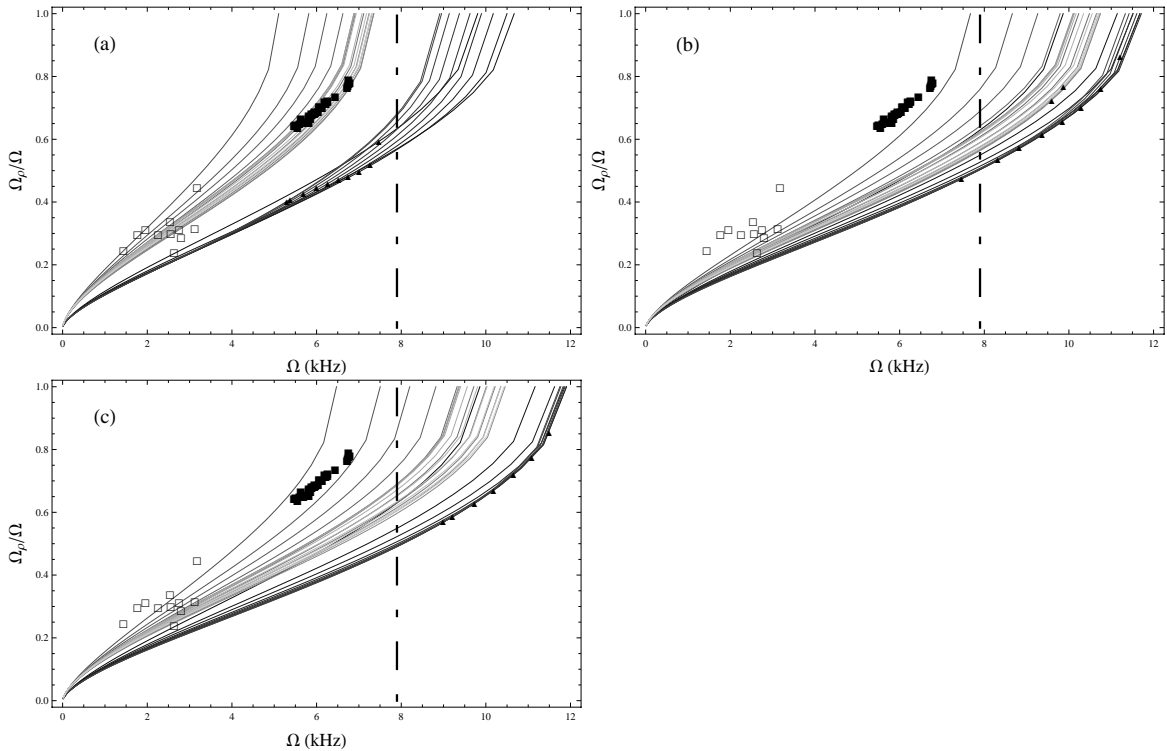
Τέλος, να σημειώσουμε ότι μια διακεκομμένη-εστιγμένη γραμμή που φαίνεται στις γραφικές υποδεικνύει την μέγιστη μετρημένη συχνότητα των QPOs μέχρι τώρα. Η τιμή της είναι  $\nu = 1258$  Hz που αντιστοιχεί σε  $\Omega \sim 7.9$  kHz. Οι γραφικές παραστάσεις στο σχήμα Γ.3 δείχνουν κάτι που έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία και στο παρελθόν, ότι δηλαδή η συγκεκριμένη συχνότητα δεν είναι συμβατή με την σκληρή καταστατική εξίσωση L, αφού δεν υπάρχει μοντέλο που να μπορεί να δώσει τόσο υψηλή συχνότητα, είτε λόγω του ότι η καμπύλη τερματίζει στο ISCO, είτε γιατί τερματίζει στην επιφάνεια του άστρου.



Σχήμα 5.3: Το  $\Omega_z/\Omega$  ως συνάρτηση του  $\Omega$  για την ακολουθία (i) της καταστατική FPS. Η παράμετρος περιστροφής  $j = J/M^2$  αναγράφεται για κάθε μοντέλο στο διάγραμμα.



Σχήμα 5.4: Το ίδιο με το σχήμα Γ.1, αλλά για την καταστατική AU.



Σχήμα 5.5: Παρατηρήσεις των QPOs συγκρίνονται με πρότυπα συχνοτήτων για τις καταστατικές εξισώσεις (a) L, (b) FPS, και (c) AU. Τα μαύρα τρίγωνα υποδεικνύουν την επιφάνεια του αστέρα (όπου χρειάζεται). Τα γεμάτα τετράγωνα είναι οι παρατηρήσεις της πηγής Sco X-1 και τα άδεια τετράγωνα είναι οι παρατηρήσεις της πηγής Circ X-1.

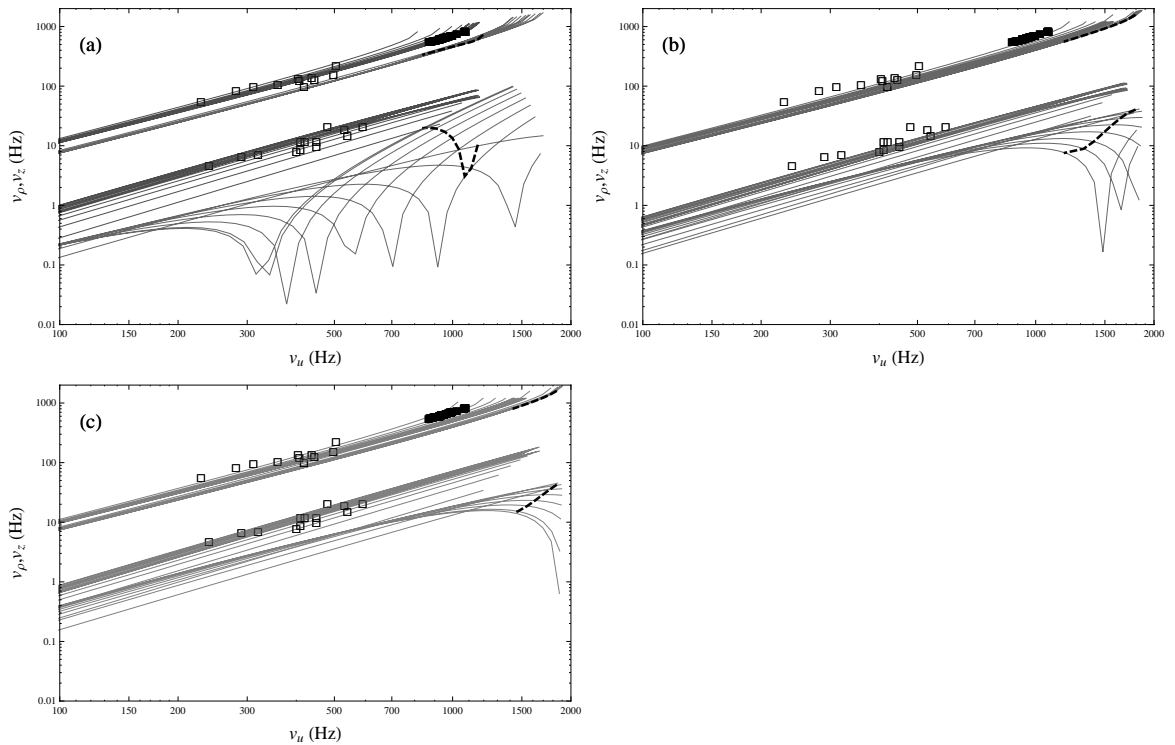
## 5.6 Ξεχωρίζοντας τις διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις για τους αστέρες νετρονίων

Σε αυτή την ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε τα πρότυπα που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα εδάφια και θα επιχειρήσουμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την καταστατική εξίσωση των αστέρων νετρονίων από τις παρατηρήσεις. Για να αποκτήσουμε κάποια εποπτεία σε σχέση με πραγματικά παρατηρησιακά δεδομένα, θα χρησιμοποιήσουμε τις παρατηρήσεις από δύο πηγές, την πηγή Scorpius X-1 (Sco X-1) που θα την απεικονίζουμε με γεμάτα τετράγωνα και την πηγή Circinus X-1 (Circ X-1) που θα την απεικονίζουμε με τα άδεια τετράγωνα, τα δεδομένα των οποίων έχουμε πάρει από τις εργασίες [76] και [4] αντίστοιχα.

Από την στιγμή που έχουμε τα διάφορα πρότυπα συχνοτήτων, που αντιστοιχούν σε

διαφορετικά άστρα που έχουν κατασκευαστεί με διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις, μπορούμε να συγκρίνουμε τις παρατηρήσεις από τα διάφορα QPOs με αυτά τα πρότυπα. Μια τέτοια σύγκριση παρουσιάζεται στο σχήμα 5.5, όπου παρουσιάζουμε τις καμπύλες  $\Omega_p/\Omega$  ως συναρτήσεις του  $\Omega$  για όλα τα μοντέλα που έχουμε φτιάξει με τις τρεις καταστατικές. Στο σχήμα παρουσιάζονται ακόμα οι παρατηρήσεις των πηγών Sco X-1 και Circ X-1. Μια καλή επιλογή παρατηρήσεων από διάφορες πηγές θα μπορούσε με την σύγκριση με τα διάφορα πρότυπα να υποδείξει κάποια καταστατική εξίσωση ως υποψήφια για να περιγράψει τις συνθήκες στο εσωτερικό των αστερών νετρονίων ή ακόμα πιο σίγουρα να αποκλείσει κάποια άλλη. Για παράδειγμα, οι δύο πηγές που φαίνονται στο σχήμα δείχνουν να μην ταιριάζουν πολύ με την καταστατική εξίσωση FPS. Ακόμα, αν κανείς είχε καλές παρατηρήσεις σε μια συγκεκριμένη πηγή, τότε θα μπορούσε ενδεχομένως να τις χρησιμοποιήσει για να επιλέξει ένα συγκεκριμένο μοντέλο από τα πρότυπα και έτσι να εκτιμήσει τις παραμέτρους της πηγής, όπως είναι η μάζα, η στροφορμή και τα ανώτερα πολύπολα του αστερά νετρονίων. Η γνώση αυτής της πληροφορίας θα μας έδινε την δυνατότητα να βγάλουμε συμπεράσματα για τη γενική δομή του κεντρικού αντικειμένου.

Στο σχήμα 5.6 έχουμε σχεδιάσει για τις διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις ποιες θα ήταν οι παρατηρούμενες συχνότητες  $\nu$  για τα διάφορα μοντέλα, αν υποθέσουμε ότι τα ανώτερα kHz QPOs αντιστοιχούν στην τροχιακή συχνότητα, τα κατώτερα kHz QPOs αντιστοιχούν στην μετάπτωση του περίαστρου και τα χαμηλής συχνότητας QPOs (low-frequency QPOs) αντιστοιχούν στην συχνότητα της μετάπτωσης του επιπέδου της τροχιάς. Στο σχήμα δείχνουμε ακόμα με μια διακεκομμένη γραμμή την επιφάνεια των αστερών που έχουν το ISCO τους πιο μέσα από την επιφάνεια. Τέτοιου τύπου γραφικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται συχνά στη βιβλιογραφία για την παρουσίαση των παρατηρήσεων των QPOs από διάφορες πηγές. Ενδεικτικά, απεικονίζουμε στα γραφήματα και τα δεδομένα από τα QPOs για τις πηγές Sco X-1 και Circ X-1. Για την πηγή Sco X-1 έχουμε μόνο δεδομένα από τα δίδυμα kHz QPOs (γεμάτα τετράγωνα), ενώ για την πηγή Circ X-1 (άδεια τετράγωνα) έχουμε και kHz QPOs (η πάνω ομάδα σημείων) και low-frequency QPOs (η κάτω ομάδα σημείων). Αν και αυτού του τύπου οι απεικονίσεις των δεδομένων κρύβουν τις διαφορές ανάμεσα στις πηγές όταν κοιτάμε τα kHz QPOs, κάνουν πιο εμφανή τη συμπεριφορά της συχνότητας της μετάπτωσης του επιπέδου της τροχιάς, που αντιστοιχεί στα low-frequency QPOs, που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Η στροφή της καμπύλης των low-frequency QPOs από αύξουσα σε μηδενική κλίση καθώς αυξάνει η τιμή του ανώτερου kHz QPO και στη συνέχεια σε φθίνουσα και ο σχηματισμός αυτής της ιδιομορφίας, που φαίνεται πολύ καθαρά στην περίπτωση



Σχήμα 5.6: Εικονικές συχνότητες QPOs που σχετίζονται με τις μεταπτώσεις του περιάστρου και του επιπέδου της τροχιάς ( $\nu_\rho$ ,  $\nu_z$ ) ως συναρτήσεις της τροχιακής συχνότητας ( $\nu_u$ ) για τις καταστατικές εξισώσεις (a) L, (b) FPS, και (c) AU. Επειδή η  $\Omega_z$  μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, η συχνότητα  $\nu_z$  είναι απλά το  $|\Omega_z/2\pi|$ . Τα χαρακτηριστικά που συζητήσαμε πιο πριν ότι εμφανίζουν οι συχνότητες μετάπτωσης του επιπέδου της τροχιάς για τους αστέρες νετρονίων, δεν υπάρχουν στις αντίστοιχες συχνότητες της γεωμετρίας Kerr.

της καταστατικής εξίσωσης L, θα ήταν μια σαφής υπογραφή ότι οι παρατηρούμενες συχνότητες σχετίζονται όντως με τις τροχιακές μεταπτωτικές κινήσεις. Η περιοχή των συχνοτήτων όπου θα παρατηρούσαμε αυτή τη συμπεριφορά θα μπορούσε να μας υποδείξει μία συγκεκριμένη καταστατική εξίσωση έναντι των υπολοίπων, όπως φαίνεται από τις διαφοροποιήσεις των αντίστοιχων καμπυλών για τις διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις. Ακόμα, με αρκετά καλές παρατηρήσεις θα μπορούσαμε ενδεχομένως να διαλέξουμε ένα συγκεκριμένο μοντέλο αστέρα νετρονίων από την συχνότητα στην οποία εμφανίζεται αυτό το χαρακτηριστικό ιδιάζον σημείο.

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι οι αντίστοιχες ακολουθίες των τριών διαφορετικών

ακολουθιών αστέρων νετρονίων που παράγονται από τις διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις, παρουσιάζουν παρόμοιες συμπεριφορές ως προς τις συχνότητες. Έτσι βλέπουμε ότι οι πρώτες ακολουθίες οι οποίες βρίσκονται μακριά από τις αντίστοιχες ακολουθίες της μέγιστης μάζας στο όριο της μηδενικής περιστροφής, δηλαδή οι ακολουθίες που ξεκινάνε από μη περιστρεφόμενη μάζα ίση με  $M = 1.4M_{\odot}$ , παρουσιάζουν χαμηλότερα low-frequency QPOs τα οποία εμφανίζουν την ιδιομορφία (το ιδιάζον σημείο) που συζητήσαμε παραπάνω, ενώ οι άλλες ακολουθίες δεν έχουν τέτοια συμπεριφορά και παρουσιάζουν υψηλότερες low-frequency QPOs (θα μπορούσε να πει κανείς ότι αυτές μοιάζουν με τα QPOs της γεωμετρίας Kerr).

## 5.7 Συμπεράσματα

Στην ενότητα αυτή, διερευνήσαμε την εφαρμογή κάποιων τεχνικών στην μελέτη των συμπαγών αντικειμένων μέσω των παρατηρήσεων των QPOs στην ροή των ακτίνων X από συστήματα με δίσκους προσαύξησης.

Αυτό που είδαμε είναι ότι οι ασυμπτωτικές εκφράσεις που παρήγαγε ο Ryan για να τις εφαρμόσει σε συστήματα που εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις παρατηρήσεις στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα και μπορούν θεωρητικά να χρησιμοποιηθούν για να εκτιμηθούν οι πρώτες πολυπολικές ροπές ενός συμπαγούς αντικειμένου. Αυτό μας προσφέρει την δυνατότητα να διερευνήσουμε τη φύση των συμπαγών αντικειμένων από τα οποία έχουμε τέτοιες παρατηρήσεις, δηλαδή να ελέγξουμε αν είναι μαύρες τρύπες ή κάτι άλλο ή να ελέγξουμε αν ισχύει το no-hair theorem για τι μελανές οπές και άρα να ελέγξουμε τη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας, ή αν το συμπαγές αντικείμενο είναι αστέρας νετρονίων, να διερευνήσουμε τη δομή του και τις ιδιότητες της ύλης στο εσωτερικό του, προσδιορίζοντας τη μορφή της καταστατικής εξίσωσης που το διέπει.

Ακόμα δείξαμε ότι οι αναλυτικοί χωρόχρονοι που κατασκευάζονται για να περιγράψουν με ακρίβεια το εξωτερικό των αστέρων νετρονίων, μπορούν να είναι πολύ χρήσιμα εργαλεία για να κάνει κανείς αστροφυσικούς υπολογισμούς γύρω από αυτά τα αντικείμενα. Τα αναλυτικά αυτά μοντέλα του χωροχρόνου μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με τις παρατηρήσεις των QPOs για να δώσουν πληροφορίες για την καταστατική εξίσωση ή να επιλέξουν μοντέλα και παραμέτρους αστέρων νετρονίων. Μπορούν ακόμα να αναδείξουν χαρακτηριστικά των πραγματικών αστέρων νετρονίων που δεν

μπορούν να περιγράψουν οι γεωμετρίες τύπου Schwarzschild και Kerr, όπως η συμπεριφορά των επικυκλικών συχνότητων. Έτσι φαίνεται στην πράξη η χρησιμότητά τους. Ακόμη αυτές οι ιδιαιτερότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως υπογραφές για τον προσδιορισμό της ίδιας της φύσης των QPOs, του αν προκύπτουν δηλαδή από τροχιακές μεταπτώσεις ή από κάποιο άλλο μηχανισμό.

Ένα επόμενο βήμα στην κατεύθυνση αυτής της έρευνας θα ήταν η μελέτη με την βοήθεια αναλυτικών χωρόχρονων των τροχιών που αποκλίνουν σημαντικά από το να είναι κυκλικές και ισημερινές, καθώς και η μελέτη διαφόρων συντονισμών που μπορεί να παρατηρούνται στις τροχιές των χωροχρόνων που διαφέρουν από αυτόν του Kerr και μπορεί να έχουν εφαρμογή στην μελέτη των δίσκων προσαύξησης και των QPOs.

# Παράρτημα Α΄

## Αριθμητικά μοντέλα αστέρων νετρονίων με τον κώδικα RNS

Στο παράρτημα αυτό θα δώσουμε κάποια στοιχεία για τον κώδικα RNS του Νίκου Στεργιούλα, τον οποίο χρησιμοποιήσαμε για να κατασκευάσουμε τα αριθμητικά μοντέλα των αστέρων νετρονίων και αργότερα θα παρουσιάσουμε και κάποια περαιτέρω στοιχεία για τα ίδια τα μοντέλα που επιλέξαμε να κατασκευάσουμε.

### Α΄.1 Κώδικας RNS

Ο κώδικας RNS κατασκευάζει μοντέλα ταχέως περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων νετρονίων, εφαρμόζοντας τη μέθοδο που ανέπτυξαν οι Komatsu, Eriguchi & Hechisu (KEH) [33] και οι Cook, Shapiro & Teukolsky (CST) [7]. Ο κώδικας για τον υπολογισμό των αστέρων χρησιμοποιεί καταστατικές εξισώσεις σε μορφή πίνακα, ενώ μπορεί να δεχτεί και πολυτροπικές καταστατικές εξισώσεις. Προσφέρει ακόμα τη δυνατότητα του να καθορίσει κανείς τον νόμο περιστροφής (ομογενής ή διαφορική) που θα ήθελε να διέπει το άστρο. Τα άστρα που έχουμε κατασκευάσει εμείς είναι ομογενούς περιστροφής.

Στην έξοδό του, ο κώδικας δίνει ένα αρχείο το οποίο στην αρχή περιέχει μία λίστα από χαρακτηριστικά του μοντέλου που κατασκεύασε, όπως είναι η κεντρική πυκνότητα, η μάζα  $M$  του άστρου, η ακτίνα του άστρου στον ισημερινό όπως ορίζεται από την περιφέρεια του ισημερινού διαιρεμένη με  $2\pi$ , τα διάφορα πολύπολα του άστρου, την θέση της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς και πολλά άλλα. Οι μονάδες που χρησιμοποιεί ο κώδικας είναι,  $c = 2.9979 \times 10^{10} \text{ cm/s}^{-1}$ ,  $G = 6.6732 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^2$ ,



$m_B = 1.66 \times 10^{-24}g$ , και  $M_\odot = 1.987 \times 10^{33}g$ .

Η μετρική που χρησιμοποιεί ο κώδικας είναι η

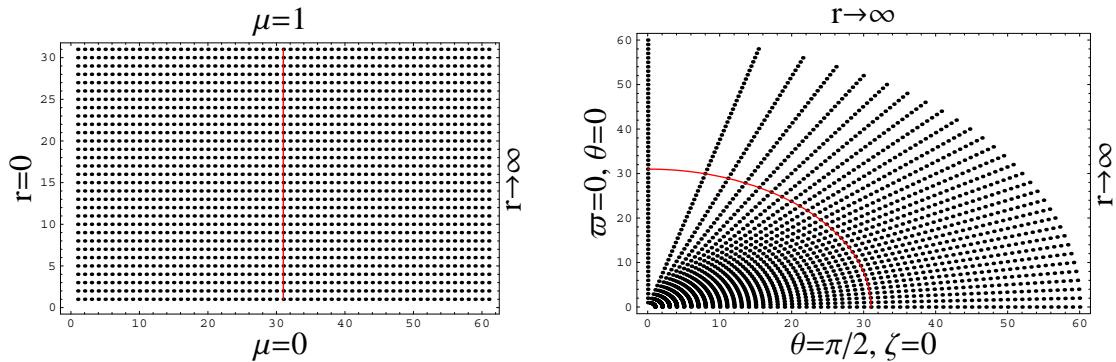
$$ds^2 = -e^{\gamma+\rho} dt^2 + e^{\gamma-\rho} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2a} (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (A'.1.1)$$

όπου οι συναρτήσεις της μετρικής  $\gamma, \rho, \omega, a$  είναι συναρτήσεις των  $(r, \theta)$  (την  $\rho$  δεν θα πρέπει να τη μπερδεύουμε με την ακτινική συντεταγμένη στις συντεταγμένες Weyl). Ο κώδικας, τυπώνει επίσης στην έξοδό του μια λίστα με τις συντεταγμένες σε κάθε σημείο και τις αντίστοιχες τιμές των μετρικών συναρτήσεων, καθώς και τις τιμές της πίεσης και της γωνιακής ταχύτητας (όταν υπάρχει διαφορική περιστροφή). Η λίστα αυτή για την περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι ένας πίνακας της μορφής:

$$x = r/(r + r_e) \quad \mu = \cos \theta \quad \rho \quad \gamma \quad a \quad \omega(10^4 s^{-1}) \quad P(\text{dynes/cm}^2)$$

όπου δίνονται με τη σειρά, η συντεταγμένη  $x$  που χρησιμοποιεί ο κώδικας για να στήσει το πλέγμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης στην ακτινική διεύθυνση, η συντεταγμένη  $\mu$  που εκφράζει τις γωνίες, οι συναρτήσεις  $\rho, \gamma$  και  $a$  που είναι αδιάστατες ποσότητες, η συνάρτηση  $\omega$  που εκφράζεται σε μονάδες συχνότητας και προκειμένου να μετατραπεί και εκείνη σε γεωμετρικές μονάδες (συγκεκριμένα σε  $km^{-1}$ ) θα πρέπει να την διαιρέσουμε με 29.979 και τέλος η πίεση που για να μετατραπεί και εκείνη σε γεωμετρικές μονάδες ( $km^{-2}$ ), θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με  $\times 10^{10} \frac{G}{A}$ , όπου οι σταθερές είναι στο cgs όπως και παραπάνω. Ακόμα πρέπει να πούμε ότι η ποσότητα  $r_e$  που υπάρχει στον ορισμό του  $x$  είναι η συντεταγμένη  $r$  που αντιστοιχεί στον ισημερινό.

Το πλέγμα που χρησιμοποιεί ο RNS για να κάνει την αριθμητική ολοκλήρωση είναι ένα διδιάστατο πλέγμα στα  $(x, \mu)$  όπου το  $x$  παίρνει ομοιόμορφα τιμές από 0 έως 1, με το 0 να αντιστοιχεί στο κέντρο του αστέρα, το 1/2 στην επιφάνεια στον ισημερινό και το 1 στο άπειρο, ενώ η συντεταγμένη  $\mu$  παίρνει και αυτή ομοιόμορφα τιμές στο διάστημα από 0 έως 1, όπου το ισημερινό επίπεδο αντιστοιχεί στο  $\mu = 0$  και ο άξονας συμμετρίας στο  $\mu = 1$ . Έτσι οι τιμές για τα  $(x, \mu)$  σε ένα πλέγμα που διαθέτει SDIV πλήθος σημείων στην ακτινική διεύθυνση και MDIV πλήθος σημείων στη διεύθυνση του  $\mu$ , δίνονται από τις εκφράσεις



Σχήμα Α'.1: Το πλέγμα στις συντεταγμένες  $x$  και  $\mu$  (αριστερά) και στις συντεταγμένες  $\psi$  και  $\zeta$  (δεξιά). Τα σημεία, στη γραφική παράσταση αριστερά, από 1 μέχρι 61 (οριζόντιος άξονας) αντιστοιχούν σε  $x$  από 0 μέχρι 1 και τα σημεία από 1 μέχρι 31 (κατακόρυφος άξονας) αντιστοιχούν σε  $\mu$  από 0 μέχρι 1. Η ακτινική συντεταγμένη ορίζεται ως  $r = \frac{x r_e}{1-x}$  και για να μπορέσουμε να έχουμε κάποια εποπτεία δεν έχει γίνει ο σχετικός μετασχηματισμός στην γραφική παράσταση δεξιά. Ακόμα έχουμε ορίσει τις συντεταγμένες  $\psi = r \sin \theta$  και  $\zeta = r \cos \theta$ . Η κόκκινη γραμμή υποδεικνύει την επιφάνεια του άστρου.

$$x[i] = 0.99999 \left( \frac{i-1}{SDIV-1} \right), \quad (A'.1.2)$$

$$\mu[j] = \left( \frac{j-1}{MDIV-1} \right), \quad (A'.1.3)$$

όπου τα  $(i, j)$  παίρνουν τιμές από 1 έως SDIV και MDIV αντίστοιχα. Το πλέγμα που χρησιμοποιήσαμε εμείς για τους υπολογισμούς μας έχει διαστάσεις  $601 \times 301$ , όπου στον ισημερινό 300 σημεία αντιστοιχούν στο εσωτερικό του άστρου και 300 σημεία στο εξωτερικό του άστρου, ενώ το σημείο  $i = 301$  είναι το σημείο της ισημερινής ακτίνας του άστρου. Πρακτικά όμως, η επιφάνεια του άστρου βρίσκεται κάπου ανάμεσα σε αυτό το σημείο και το προηγούμενο, οπότε το σημείο  $i = 301$  είναι το πρώτο που βρίσκεται έξω από το άστρο. Αν αντιστρέψουμε τον ορισμό του  $x$  παραπάνω, η συντεταγμένη ακτίνα (coordinate radius) θα δίνεται από τη σχέση

$$r = \frac{x r_e}{1-x}, \quad (A'.1.4)$$

όπου βλέπουμε όπως είπαμε και παραπάνω, ότι η θέση  $x = 1/2$  δίνει τη συντεταγμένη  $r = r_e$  που αντιστοιχεί στον ισημερινό.

Ο κώδικας υπολογίζει τα μοντέλα των αστέρων νετρονίων λύνοντας τις εξισώσεις πεδίου του Αϊνστάιν και τις υδροδυναμικές εξισώσεις στο παραπάνω πλέγμα με μια επαναληπτική διαδικασία μέχρι να φτάσει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις με κάποια δοσμένη ακρίβεια, δηλαδή μέχρι σε κάθε επανάληψη να μην αλλάζουν οι ποσότητες περισσότερο από κάποια προκαθορισμένη τιμή σε κάθε βήμα της επανάληψης. Η ακρίβεια του αποτελέσματος εξαρτάται από το μέγεθος του πλέγματος στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση [71].

## A'.2 Επιλογή των αριθμητικών μοντέλων

Για την ανάλυσή μας, κατασκευάσαμε μια σειρά από ακολουθίες μοντέλων αστέρων νετρονίων. Τα μοντέλα στα οποία βασιστήκαμε ήταν τα μοντέλα που παρουσιάζουν στην εργασία τους οι Berti και Στεργιούλας [2], κυρίως γιατί η αρχική μας πρόθεση ήταν να έχουμε τη δυνατότητα να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της χρήσης της αναλυτικής λύσης Two-Soliton με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των Berti και Στεργιούλα. Αυτό εκ των υστέρων αποδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμο.

Για τα μοντέλα που κατασκευάσαμε επιλέξαμε τρεις από τις καταστατικές εξισώσεις που χρησιμοποιήσαν στην [2], την καταστατική AU, την καταστατική FPS και την καταστατική L. Η επιλογή των συγκεκριμένων καταστατικών εξισώσεων έγινε έτσι ώστε να έχουμε μια αντιπροσωπευτική καταστατική εξίσωση από κάθε βασική περιοχή στον χώρο των καταστατικών εξισώσεων, τις οποίες θα μπορούσαμε να τις χωρίσουμε ανάλογα με την σκληρότητά τους σε μαλακές καταστατικές εξισώσεις, σκληρές και ενδιάμεσες σκληρότητας καταστατικές. Η AU είναι μια μαλακή καταστατική, η FPS είναι μια καταστατική μέσης σκληρότητας και τέλος η L είναι μια σκληρή καταστατική. Μια σκληρή καταστατική έχει την τάση να αντιστέκεται περισσότερο στη συμπίεση από την βαρύτητα και έτσι φτιάχνει άστρα μεγαλύτερης ακτίνας.

Για κάθε καταστατική εξίσωση, κατασκευάσαμε τρεις ακολουθίες μοντέλων, όπου κάθε ακολουθία έχει σταθερή βαρυονική μάζα. Οι ακολουθίες αυτές λέγονται «εξελικτικές ακολουθίες» [7], με την έννοια ότι ένα άστρο κατά την εξέλιξή του, αν δεν ανταλλάσσει μάζα με το περιβάλλον του, τότε θα πρέπει να βρίσκεται πάνω σε μια τέτοια ακολουθία και αν με κάποιο μηχανισμό αλλάζει η στροφορμή του, τότε θα κινείται πάνω σε μια τέτοια ακολουθία.

Οι τρεις αυτές ακολουθίες έχουν κοινά χαρακτηριστικά για όλες τις καταστατικές και είναι:

- (i) Η πρώτη ακολουθία αποτελείται από τα μοντέλα που στο όριο της μηδενικής περιστροφής καταλήγουν σε έναν αστέρα νετρονίων με μάζα  $1.4M_{\odot}$ . Η ακολουθία αυτή ξεκινά με έναν μη περιστρεφόμενο αστέρα αυτής της μάζας και με κάποια συγκεκριμένη βαρυονική μάζα (ή πρακτικά με κάποιο συνολικό αριθμό βαρυονίων) και προχωράει σε μοντέλα με όλο και γρηγορότερη περιστροφή μέχρι το όριο περιστροφής Κέπλερ, δηλαδή το όριο όπου ο αστέρας δεν μπορεί να παραμείνει σταθερός εξαιτίας της περιστροφής του, διατηρώντας πάντα τον αριθμό των βαρυονίων σταθερό.
- (ii) Η δεύτερη ακολουθία αποτελείται από τα μοντέλα που στο όριο της μηδενικής περιστροφής καταλήγουν σε έναν αστέρα ο οποίος έχει την μέγιστη μάζα που μπορεί να έχει ένας μη περιστρεφόμενος αστέρας και να είναι δυναμικά ευσταθής. Και αυτή η ακολουθία τερματίζει στα μοντέλα με τη μέγιστη δυνατή περιστροφή στο όριο Κέπλερ.
- (iii) Η τρίτη ακολουθία αποτελείται από μοντέλα για τα οποία δεν υπάρχει ευσταθές όριο με μηδενική περιστροφή. Έτσι από την πλευρά της χαμηλής περιστροφής τερματίζει σε κάποιο περιστρεφόμενο μοντέλο, ενώ και αυτή από την πλευρά της γρήγορης περιστροφής τερματίζει σε άστρα που περιστρέφονται στο όριο Κέπλερ.

Για τα μοντέλα που κατασκευάσαμε το όριο της μέγιστης περιστροφής αντιστοιχεί σε παράμετρο περιστροφής  $j = J/M^2$  κοντά στο 0.7. Κάθε μία από τις παραπάνω ακολουθίες αποτελείται από 10 συνολικά μοντέλα.

## Παράρτημα Β΄

### Περαιτέρω ανάλυση των επιπτώσεων της διόρθωσης στα σχετικιστικά πολύπολα των αριθμητικών λύσεων

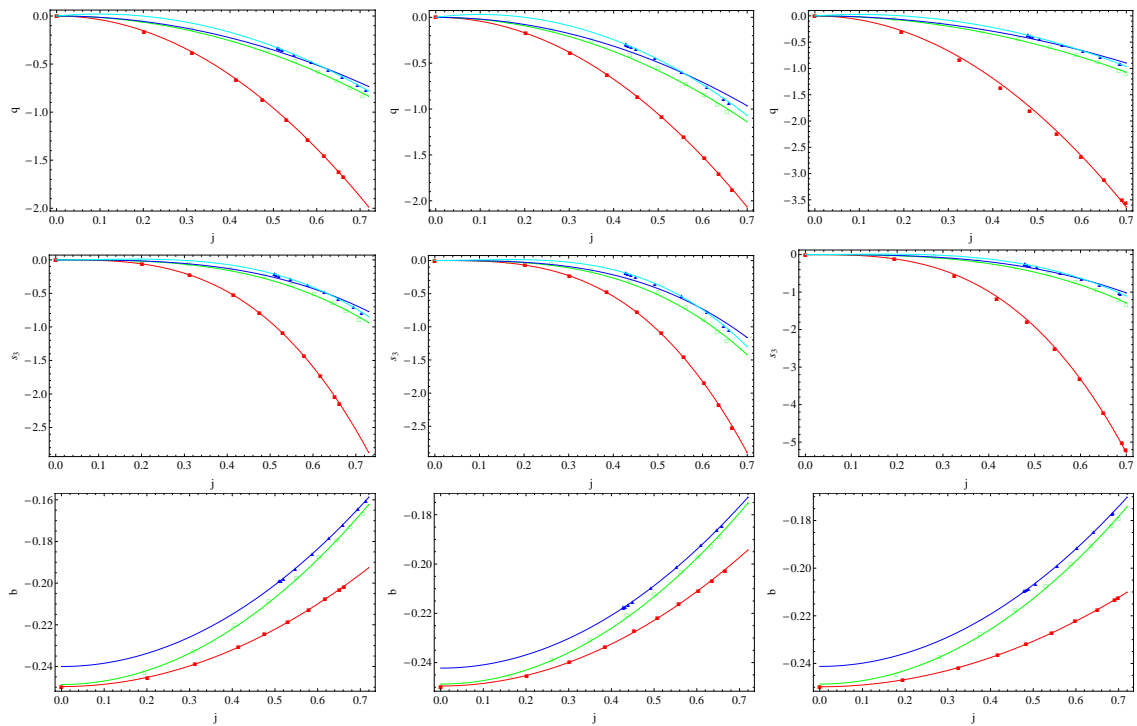
Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε μια πιο λεπτομερή έκθεση των αποτελεσμάτων σχετικά με τη διόρθωση του υπολογισμού των πολυπολικών ροπών των αριθμητικών χωροχρόνων και τις επιπτώσεις που αυτή έχει. Τα αριθμητικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν στη διερεύνησή μας είναι τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν στο Παράρτημα Α.

#### Β΄.1 Η σχέση των ανώτερων πολυπόλων με την παράμετρο περιστροφής

Ακολουθώντας τους Laarakkers & Poisson [35], δοκιμάσαμε να βρούμε μια πολυωνυμική σχέση ανάμεσα στο ανηγμένο τετράπολο της μάζας  $q = M_2/M^3$  και στο ανηγμένο οκτάπολο της περιστροφής  $s_3 = S_3/M^4$  με την παράμετρο της περιστροφής  $j = J/M^2$ , για κάθε μία από τις ακολουθίες αστέρων νετρονίων που κατασκευάσαμε. Η αδιάστατη ποσότητα  $q$  προσεγγίστηκε από ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς το  $j$ , της μορφής  $a_2 j^2$ , για όλες τις ακολουθίες ενώ ειδικά για τις περιπτώσεις των ακολουθιών

Πίνακας Β'.1: Τα ανηγμένα πολύπολα εκφρασμένα ως πολυώνυμα της παραμέτρου περιστροφής  $j$  για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις,  $M_n/M^{n+1} = a_0 + a_1j + a_2j^2 + a_3j^3$ . Οι παράμετροι  $a_0, a_1, a_2, a_3$  προκύπτουν από την αντίστοιχη καμπύλη καλύτερης προσαρμογής στα δεδομένα. Η παράμετρος  $b$  έχει προσεγγιστεί και αυτή με ανάλογης μορφής πολυώνυμα του  $j$ . Οι τρεις ανώτεροι υπο-πίνακες αντιστοιχούν στις τρεις ακολουθίες μοντέλων, όπου τα ανηγμένα πολύπολα έχουν προσεγγιστεί με πολυώνυμα ενός μόνο βαθμού, 2ου για το  $q$  και 3ου για το  $s_3$ . Ο κατώτερος υπο-πίνακας έχει τις παραμέτρους για τις ακολουθίες τύπου (iii) όπου έχει χρησιμοποιηθεί ένας συνδυασμός δυνάμεων του  $j$  για το  $q$  και το  $s_3$ .

$a_i$	AU			FPS			L		
	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$
$a_0$	-	-	-0.25	-	-	-0.25	-	-	-0.25
$a_1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$a_2$	-3.83	-	0.11	-4.22	-	0.11	-7.42	-	0.08
$a_3$	-	-7.38	-	-	-8.45	-	-	-15.38	-
	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$
$a_0$	-	-	-0.25	-	-	-0.25	-	-	-0.25
$a_1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$a_2$	-1.61	-	0.17	-2.33	-	0.14	-2.19	-	0.14
$a_3$	-	-2.41	-	-	-4.14	-	-	-3.75	-
	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$
$a_0$	-	-	-0.24	-	-	-0.24	-	-	-0.24
$a_1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$a_2$	-1.41	-	0.16	-1.97	-	0.13	-1.83	-	0.14
$a_3$	-	-1.98	-	-	-3.39	-	-	-2.98	-
	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$	$q$	$s_3$	$b$
$a_0$	-	-	-0.24	-	-	-0.24	-	-	-0.24
$a_1$	0.40	-	-	0.61	-	-	0.54	-	-
$a_2$	-2.07	0.96	0.16	-3.06	1.5	0.13	-2.74	1.29	0.14
$a_3$	-	-3.50	-	-	-5.93	-	-	-5.06	-



Σχήμα Β'.1: Γραφικές παραστάσεις των ανηγμένων πολυπολικών ροπών συναρτήσει του  $j$  και των αντίστοιχων πολυωνυμικών καμπυλών που τα προσεγγίζουν για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις. Στην αριστερή στήλη έχουμε τις γραφικές για την καταστατική εξίσωση AU, στη μεσαία στήλη έχουμε τις γραφικές για την FPS και στη δεξιά στήλη για την L. Στις γραφικές των  $q$  και  $s_3$ , που φαίνονται στις δύο πάνω σειρές, οι ακολουθίες τύπου (i) είναι σχεδιασμένες με κόκκινο χρώμα, οι ακολουθίες τύπου (ii) είναι με πράσινο χρώμα και οι ακολουθίες τύπου (iii) είναι με μπλε χρώμα. Η γαλάζια καμπύλη δείχνει τα πολύνομα που προσεγγίζουν τα ανηγμένα πολύπολα με συνδυασμό δυνάμεων του  $j$ . Η τελευταία σειρά απεικονίζει την παράμετρο  $b$  και τα αντίστοιχα πολύνομα. Τα χρώματα είναι ίδια όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα.

του τύπου (iii) (όπως δίνονται στο Παράρτημα Α) δοκιμάσαμε επιπλέον και την προσαρμογή του  $q$  με ένα πολυώνυμο της μορφής  $a_1j + a_2j^2$  για καλύτερο αποτέλεσμα. Ομοίως, για το ανηγμένο οκτάπολο περιστροφής  $s_3$  χρησιμοποιήσαμε πολυώνυμο της μορφής  $a_3j^3$  για όλες τις ακολουθίες και για τις ακολουθίες τύπου (iii) δοκιμάσαμε και πολυώνυμο της μορφής  $a_2j^2 + a_3j^3$ . Στο σχήμα Β'.1 παρουσιάζονται τα δεδομένα για τα  $q$  και  $s_3$  καθώς και οι καμπύλες των πολυωνύμων που ταιριάζουν καλύτερα με τα δεδομένα. Οι παράμετροι για αυτές τις καμπύλες δίνονται στον πίνακα Β'.1 για όλες τις καταστατικές εξισώσεις και τις αντίστοιχες ακολουθίες μοντέλων. Ακόμα, διερευνούμε και τη συμπεριφορά της παραμέτρου  $b = \bar{B}_0/M^2$  (όπως αυτή ορίζεται στο κεφάλαιο 2) με το  $j$ . Αυτό που βλέπουμε είναι ότι το  $b$  έχει τετραγωνική εξάρτηση από το  $j$ , που όπως σχολιάσαμε στο κεφάλαιο 2 διατηρεί την τετραγωνική σχέση που βρήκαν για το  $q$  οι Laarakkers & Poisson [35]. Οι γραφικές για το  $b$  φαίνονται και αυτές στο σχήμα Β'.1, ενώ τα αποτελέσματα για τους πολυωνυμικούς συντελεστές δίνονται στον πίνακα Β'.1.

## Β'.2 Σύγκριση του αριθμητικού χωροχρόνου με αυτόν των Manko et al.

Για τα αριθμητικά μοντέλα που κατασκευάσαμε, συγκρίναμε τις μετρικές συναρτήσεις  $g_{tt}$  και  $g_{t\phi}$ , στο ισημερινό επίπεδο με τις αντίστοιχες μετρικές συναρτήσεις της λύσης των Manko et al.. Για κάθε αριθμητικό μοντέλο κατασκευάστηκε μια αντίστοιχη αναλυτική μετρική με την ίδια μάζα  $M$  και την ίδια στροφορμή  $J$ , ενώ η τρίτη παράμετρος της Manko et al. προσδιορίστηκε αρχικά με βάση το αριθμητικό τετράπολο της μάζας όπως υπολογιζόταν μέχρι τώρα και μετά με το αριθμητικό τετράπολο που προκύπτει από την διόρθωση που παρουσιάσαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Για κάθε αριθμητικό μοντέλο έχουμε καταγράψει τα τέσσερα πρώτα μη μηδενικά πολύπολα καθώς και τη σχετική διαφορά στα  $M_2$  και  $S_3$ , εξαιτίας της διόρθωσης. Ακόμα δίνουμε τις τιμές της παραμέτρου  $b$ , όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μετρική. Οι τιμές αυτές δίνονται στους πίνακες Β'.2, Β'.4 και Β'.6 (στους πίνακες, αντί της στροφορμής  $J$ , δίνουμε την παράμετρο περιστροφής  $j$ ).

Στους πίνακες Β'.3, Β'.5 και Β'.7 δίνουμε τα αποτελέσματα της σύγκρισης ανάμεσα στις αριθμητικές μετρικές συναρτήσεις και τις αναλυτικές. Συγκεκριμένα δίνουμε τις «ολικές αποκλίσεις» (όπως αυτές ορίστηκαν στο κεφάλαιο 2)  $\sigma_{tt}$  και  $\sigma_{t\phi}$  με τις σωστές



τιμές για το  $M_2$  και δίνουμε και την βελτίωση στην «ολική απόκλιση»

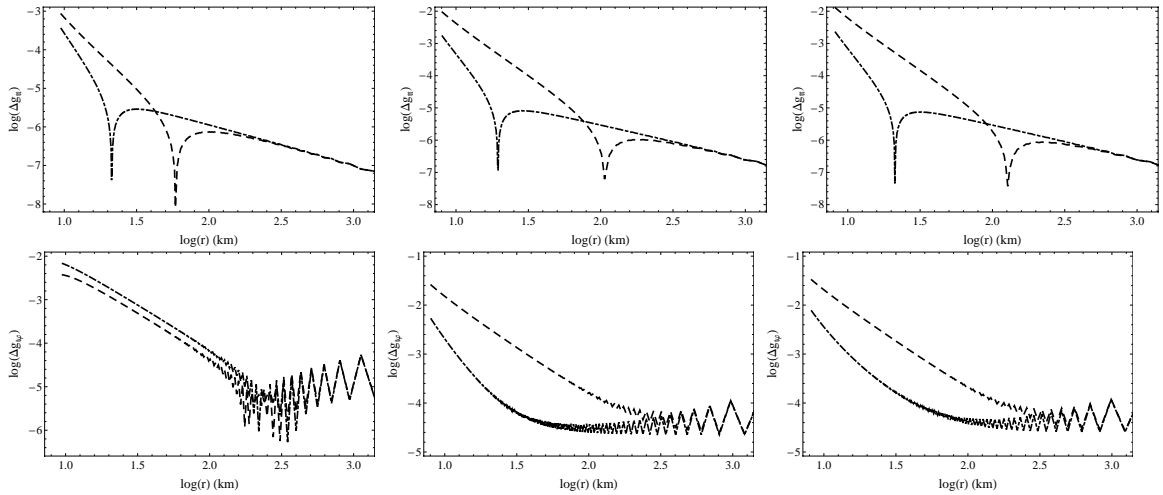
$$\frac{\sigma_{tt}|_{old}}{\sigma_{tt}|_{new}}, \quad \frac{\sigma_{t\phi}|_{old}}{\sigma_{t\phi}|_{new}},$$

εξαιτίας της χρήσης του διορθωμένου τετραπόλου, ενώ δίνουμε ακόμα και τη σχετική διαφορά ανάμεσα στο  $S_3$  της Manko et al., όπως προκύπτει μετά τη διόρθωση στο τετράπολο, και το  $S_3$  της Manko et al. όπως προέκυπτε με το λάθος τετράπολο. Θυμίζουμε εδώ ότι επειδή το τετράπολο της Manko et al. δεν μπορεί να πάρει όσο χαμηλές τιμές θέλουμε, δεν υπάρχει αντίστοιχη αναλυτική λύση Manko et al. για κάθε αριθμητικό μοντέλο αστέρων νετρονίων. Τα μοντέλα, όπως φαίνονται στους πίνακες Β'.2, Β'.4 και Β'.6, ταυτοποιούνται με βάση τον αύξοντα αριθμό που έχουν και μέσω αυτού του αριθμού τα ταυτοποιούμε και στους πίνακες Β'.3, Β'.5 και Β'.7.

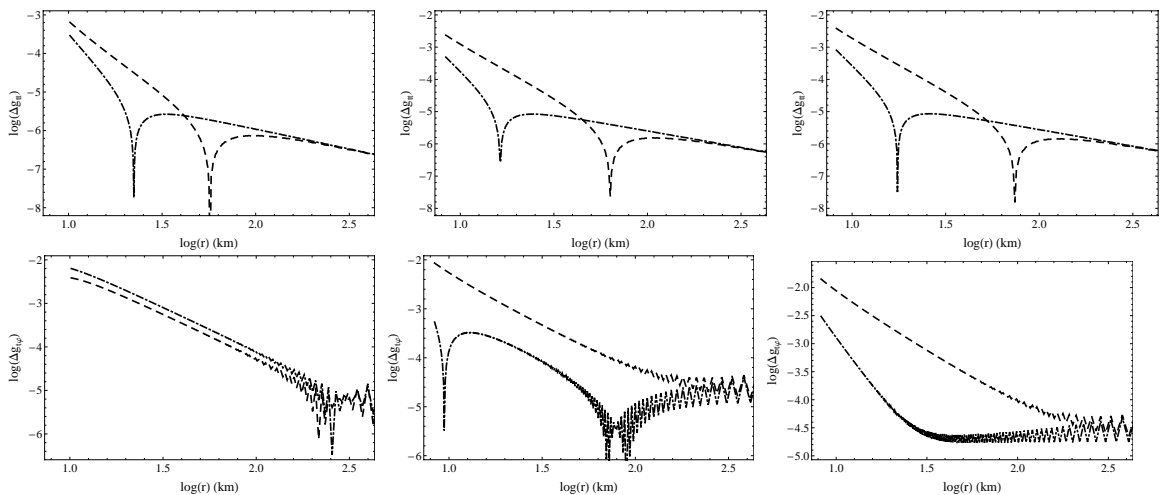
Τέλος, στα σχήματα Β'.2, Β'.3 και Β'.4, σχεδιάζουμε για ένα χαρακτηριστικό μοντέλο από κάθε ακολουθία της κάθε καταστατικής εξίσωσης, την σχετική διαφορά των μετρικών συναρτήσεων της αριθμητικής μετρικής με τις μετρικές συναρτήσεις της αναλυτικής μετρικής ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο του άστρου. Τα σχήματα δείχνουν τις καμπύλες που προκύπτουν χωρίς τη διόρθωση στο τετράπολο (διακεκομμένες καμπύλες) και τις καμπύλες μετά τη διόρθωση στο τετράπολο (διακεκομμένες-εστιγμένες καμπύλες). Οι γραφικές αυτές δίνουν μια εποπτεία του αποτελέσματος που επιφέρει η διόρθωση των πολυπόλων στη σύγκριση των μετρικών συναρτήσεων. Πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι στις περιπτώσεις όπου η διόρθωση στο τετράπολο είναι μικρή (που αντιστοιχούν στις ακολουθίες τύπου (i) για όλες τις καταστατικές), η σύγκριση στη συνιστώσα  $g_{t\phi}$  είναι ελαφρώς χειρότερη μετά τη διόρθωση στο τετράπολο. Αυτό το φαινόμενο το συζητήσαμε στο 2ο κεφάλαιο και οφείλεται στο ότι η  $g_{t\phi}$  είναι πιο ευαίσθητη στη διόρθωση στο  $S_3$  όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 4. Ακόμα και έτσι όμως η σχετική διαφορά στις μετρικές συναρτήσεις (μεταξύ αναλυτικών και αριθμητικών μετρικών) για αυτά τα μοντέλα είναι ούτως ή άλλως πολύ μικρή.

Πίνακας Β'.2: Καταστατική εξίσωση AU. Δίδονται οι τιμές των πολυπολικών ροπών όπως αυτές διαμορφώνονται μετά τη διόρθωση που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2. Επίσης δίνονται οι σχετικές διορθώσεις των  $M_2$  και  $S_3$ .

#	$M$	$j$	$M_2$	$S_3$	$b$	$\Delta M_2(\%)$	$\Delta S_3(\%)$
1	2.069	0.	0.	0.	-0.25	-	-
2	2.072	0.201	-1.45	-1.14	-0.24	3.956	3.756
3	2.078	0.312	-3.47	-4.28	-0.23	3.993	3.779
4	2.087	0.414	-6.08	-10.0	-0.23	4.032	3.805
5	2.092	0.474	-7.99	-15.1	-0.22	4.038	3.799
6	2.097	0.529	-9.96	-21.2	-0.21	4.044	3.792
7	2.103	0.578	-11.9	-27.9	-0.21	4.041	3.775
8	2.108	0.616	-13.6	-34.1	-0.20	4.029	3.751
9	2.111	0.650	-15.2	-40.5	-0.20	4.008	3.716
10	2.112	0.661	-15.7	-42.7	-0.20	4.002	3.706
11	3.151	0.	0.	0.	-0.25	-	-
12	3.164	0.194	-1.68	-1.37	-0.24	21.63	31.69
13	3.183	0.309	-4.46	-5.97	-0.23	20.41	28.99
14	3.207	0.406	-8.08	-14.5	-0.22	19.35	26.72
15	3.231	0.485	-12.0	-26.6	-0.20	18.43	24.82
16	3.253	0.550	-16.1	-41.4	-0.19	17.62	23.18
17	3.273	0.603	-20.2	-58.1	-0.18	16.92	21.80
18	3.291	0.645	-23.9	-75.1	-0.17	16.33	20.67
19	3.304	0.676	-27.0	-90.4	-0.17	15.86	19.77
20	3.318	0.706	-30.3	-107.	-0.16	15.40	18.88
21	3.388	0.510	-12.8	-27.8	-0.19	26.05	42.10
22	3.388	0.510	-12.9	-28.1	-0.19	25.75	41.32
23	3.390	0.514	-13.2	-29.3	-0.19	25.17	39.83
24	3.393	0.520	-13.7	-31.1	-0.19	24.60	38.38
25	3.405	0.547	-15.8	-38.7	-0.19	23.18	34.89
26	3.422	0.587	-19.1	-51.6	-0.18	21.76	31.57
27	3.441	0.626	-22.7	-67.1	-0.17	20.65	29.07
28	3.458	0.659	-26.0	-82.7	-0.17	19.79	27.20
29	3.477	0.694	-30.1	-103.	-0.16	18.91	25.31
30	3.487	0.713	-32.5	-115.	-0.16	18.45	24.34



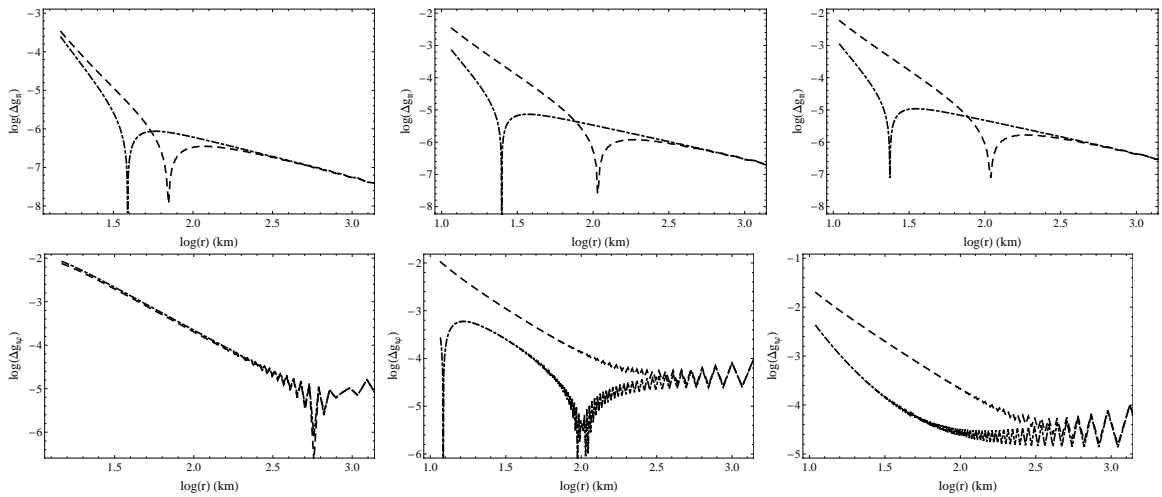
Σχήμα Β'.2: Γραφικές παραστάσεις της σύγκρισης ανάμεσα στις αναλυτικές μετρικές συναρτήσεις και τις αντίστοιχες αριθμητικές, με και χωρίς τη διόρθωση στο τετράπολο. Η πάνω σειρά των γραφικών παραστάσεων δείχνει τη σύγκριση στην  $g_{tt}$  και η κάτω σειρά δείχνει τη σύγκριση στη  $g_{t\phi}$ . Οι γραφικές είναι για την καταστατική εξίσωση AU και τα μοντέλα στα οποία αντιστοιχούν είναι από αριστερά προς τα δεξιά τα #6, #18 και #29. Οι διακεκομμένες καμπύλες αντιστοιχούν στις μετρικές χωρίς τη διόρθωση στο τετράπολο και οι διακεκομμένες - εστιγμένες αντιστοιχούν στις διορθωμένες. Η βελτίωση της αξιοπιστίας της αναλυτικής μετρικής είναι εμφανής.



Σχήμα Β'.3: Ομοίως όπως στο σχήμα Β'.2 για την καταστατική FPS. Τα μοντέλα που απεικονίζονται είναι από αριστερά προς τα δεξιά τα #6, #16 και #27.

Πίνακας Β'.3: Καταστατική εξίσωση AU. Δίνονται οι σχετικές διορθώσεις στο  $S_3$  της αναλυτικής λύσης Manko et al. εξαιτίας της διόρθωσης του τετραπόλου που εισάγεται σε αυτή. Επίσης παρουσιάζονται οι ολικές αποκλίσεις των μετρικών συναρτήσεων και οι βελτιώσεις αυτών εξαιτίας της χρήσης του διορθωμένου τετραπόλου στην αναλυτική λύση.

#	$\Delta S_3^M$ (%)	$\frac{\sigma_{tt old}}{\sigma_{tt new}}$	$\sigma_{tt new}$	$\frac{\sigma_{t\phi old}}{\sigma_{t\phi new}}$	$\sigma_{t\phi new}$
3	7.319	4.760	0.00004	0.42877	0.00115
4	5.474	5.150	0.00007	0.70046	0.00376
5	5.159	3.690	0.00014	0.67202	0.00447
6	4.981	2.928	0.00022	0.59514	0.00437
7	4.857	2.506	0.00032	0.44967	0.00360
8	4.770	2.294	0.00039	0.26800	0.00260
9	4.690	2.169	0.00044	0.73064	0.00149
10	4.668	2.150	0.00044	1.20269	0.00117
18	24.26	7.692	0.00068	6.4051	0.00627
19	22.60	6.834	0.00078	5.61239	0.00728
20	21.32	6.577	0.00073	4.94567	0.00766
29	27.99	7.985	0.00088	5.34521	0.01141
30	26.49	8.058	0.00078	5.16811	0.01051



Σχήμα Β'.4: Ομοίως όπως στο σχήμα Β'.2 για την καταστατική L. Τα μοντέλα που απεικονίζονται είναι από αριστερά προς τα δεξιά τα #6, #16 και #26.

Πίνακας Β'.4: Καταστατική εξίσωση FPS. Ομοίως με τον πίνακα Β'.2.

#	$M$	$j$	$M_2$	$S_3$	$b$	$\Delta M_2(\%)$	$\Delta S_3(\%)$
1	2.067	0.	0	0	-0.25	-	-
2	2.071	0.201	-1.54	-1.25	-0.24	3.691	3.404
3	2.077	0.301	-3.45	-4.22	-0.23	3.685	3.385
4	2.083	0.385	-5.64	-8.88	-0.23	3.667	3.355
5	2.087	0.452	-7.85	-14.6	-0.22	3.634	3.311
6	2.093	0.507	-9.94	-20.9	-0.22	3.610	3.275
7	2.098	0.557	-12.0	-28.0	-0.21	3.575	3.228
8	2.102	0.603	-14.2	-36.1	-0.21	3.532	3.173
9	2.106	0.636	-15.9	-42.9	-0.20	3.504	3.136
10	2.109	0.666	-17.6	-49.9	-0.20	3.469	3.091
11	2.658	0.	0	0	-0.25	-	-
12	2.664	0.163	-0.94	-0.64	-0.24	13.74	16.07
13	2.674	0.260	-2.51	-2.81	-0.23	12.65	14.41
14	2.686	0.349	-4.81	-7.43	-0.23	11.63	12.90
15	2.701	0.436	-8.00	-15.8	-0.22	10.69	11.56
16	2.714	0.500	-11.0	-25.6	-0.21	10.05	10.65
17	2.727	0.562	-14.6	-39.0	-0.20	9.428	9.805
18	2.736	0.602	-17.4	-50.4	-0.19	9.026	9.261
19	2.744	0.633	-19.7	-60.8	-0.19	8.734	8.866
20	2.750	0.654	-21.4	-69.0	-0.18	8.543	8.607
21	2.823	0.427	-6.54	-11.7	-0.21	17.55	22.14
22	2.823	0.428	-6.69	-12.1	-0.21	16.97	21.12
23	2.825	0.432	-6.98	-12.9	-0.21	16.40	20.16
24	2.826	0.439	-7.35	-13.9	-0.21	15.84	19.22
25	2.829	0.450	-7.88	-15.4	-0.21	15.30	18.34
26	2.840	0.492	-10.1	-22.5	-0.20	13.76	15.88
27	2.856	0.552	-13.8	-35.7	-0.20	12.35	13.73
28	2.871	0.609	-17.9	-52.9	-0.19	11.25	12.13
29	2.882	0.647	-21.1	-67.6	-0.18	10.64	11.25
30	2.884	0.658	-22.2	-72.8	-0.18	10.42	10.94

Πίνακας Β'.5: Καταστατική εξίσωση FPS. Ομοίως με τον πίνακα Β'.3.

#	$\Delta S_3^M$ (%)	$\frac{\sigma_{tt old}}{\sigma_{tt new}}$	$\sigma_{tt new}$	$\frac{\sigma_{t\phi old}}{\sigma_{t\phi new}}$	$\sigma_{t\phi new}$
3	6.730	4.062	0.00003	0.46717	0.00096
4	5.056	4.805	0.00005	0.72818	0.00297
5	4.633	3.397	0.00012	0.71192	0.00380
6	4.423	2.699	0.00020	0.64891	0.00377
7	4.266	2.314	0.00028	0.52289	0.00311
8	4.134	2.090	0.00036	0.30332	0.00201
9	4.057	2.003	0.00039	0.84777	0.00108
10	3.980	2.040	0.00033	2.86108	0.00052
16	15.28	6.508	0.00024	15.13	0.00047
17	13.00	4.908	0.00037	9.12807	0.00085
18	11.97	4.140	0.00047	7.78352	0.00116
19	11.31	3.745	0.00053	4.9739	0.00203
20	10.90	3.613	0.00053	3.90644	0.00266
27	18.56	6.396	0.00038	6.08298	0.00238
28	15.49	4.938	0.00052	5.20018	0.00288
29	14.13	4.374	0.00057	3.92533	0.00392
30	13.69	4.374	0.00053	3.71457	0.00392

Πίνακας Β'.6: Καταστατική εξίσωση L. Ομοίως με τον πίνακα Β'.2.

#	$M$	$j$	$M_2$	$S_3$	$b$	$\Delta M_2(\%)$	$\Delta S_3(\%)$
1	2.080	0.	0	0	-0.25	-	-
2	2.071	0.194	-2.76	-2.28	-0.24	1.302	1.136
3	2.075	0.324	-7.55	-10.5	-0.24	1.328	1.156
4	2.080	0.417	-12.2	-22.0	-0.23	1.352	1.175
5	2.083	0.483	-16.2	-33.9	-0.23	1.369	1.188
6	2.087	0.543	-20.3	-47.9	-0.22	1.387	1.201
7	2.090	0.598	-24.4	-63.5	-0.22	1.399	1.210
8	2.095	0.650	-28.6	-81.3	-0.21	1.412	1.218
9	2.096	0.690	-32.1	-97.1	-0.21	1.417	1.220
10	2.097	0.698	-32.9	-100.	-0.21	1.420	1.222
11	3.995	0.	0	0	-0.25	-	-
12	4.012	0.178	-3.80	-4.23	-0.24	13.65	16.18
13	4.029	0.280	-9.84	-17.5	-0.23	12.72	14.74
14	4.051	0.375	-18.5	-45.4	-0.22	11.94	13.57
15	4.074	0.458	-29.0	-88.4	-0.21	11.28	12.59
16	4.098	0.528	-40.3	-144.	-0.20	10.72	11.77
17	4.120	0.588	-51.8	-210.	-0.19	10.25	11.09
18	4.139	0.635	-62.6	-279.	-0.19	9.865	10.54
19	4.160	0.682	-74.9	-365.	-0.18	9.478	9.998
20	4.167	0.700	-79.8	-401.	-0.17	9.335	9.794
21	4.321	0.478	-29.0	-88.0	-0.20	17.68	22.66
22	4.321	0.479	-29.5	-90.2	-0.20	17.19	21.82
23	4.324	0.483	-30.7	-95.7	-0.20	16.66	20.90
24	4.325	0.489	-31.9	-101.	-0.20	16.24	20.20
25	4.333	0.505	-35.0	-116.	-0.20	15.55	19.03
26	4.355	0.555	-45.2	-170.	-0.19	14.17	16.79
27	4.377	0.602	-55.9	-233.	-0.19	13.27	15.36
28	4.396	0.641	-66.0	-299.	-0.18	12.60	14.32
29	4.418	0.684	-78.7	-389.	-0.17	11.92	13.28
30	4.420	0.686	-79.4	-394.	-0.17	11.89	13.24

Πίνακας Β'.7: Καταστατική εξίσωση L. Ομοίως με τον πίνακα Β'.3.

#	$\Delta S_3^M (\%)$	$\frac{\sigma_{tt old}}{\sigma_{tt new}}$	$\sigma_{tt new}$	$\frac{\sigma_{t\phi old}}{\sigma_{t\phi new}}$	$\sigma_{t\phi new}$
2	3.364	0.846	0.00002	0.81731	0.00034
3	1.677	2.888	0.00002	0.94960	0.00328
4	1.579	2.017	0.00007	0.94067	0.00473
5	1.550	1.679	0.00014	0.92563	0.00500
6	1.540	1.519	0.00022	0.90005	0.00459
7	1.534	1.431	0.00030	0.85334	0.00360
8	1.535	1.377	0.00038	0.74334	0.00221
9	1.533	1.355	0.00041	0.61091	0.00102
10	1.534	1.354	0.00041	0.72087	0.00082
16	16.01	6.594	0.00039	11.1166	0.00158
17	14.15	5.081	0.00060	9.2408	0.00221
18	13.08	4.119	0.00083	7.25373	0.00347
19	12.18	3.520	0.00102	3.86123	0.00792
20	11.87	3.397	0.00104	3.31502	0.00960
26	23.13	7.416	0.00054	5.91821	0.00682
27	19.25	6.100	0.00071	6.64409	0.00600
28	17.44	5.094	0.00090	5.33573	0.00802
29	15.89	4.316	0.00108	3.84442	0.01207
30	15.82	4.286	0.00108	3.79143	0.01227



### B'.3 Επιπτώσεις της διόρθωσης στο $R_{\text{ISCO}}$

Για να εκτιμήσουμε όσο γίνεται πληρέστερα τις επιπτώσεις της διόρθωσης των πολυπόλων, υπολογίσαμε ακόμα τις επιπτώσεις που επιφέρει στον υπολογισμό της ακτίνας της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς ( $R_{\text{ISCO}}$ ). Το  $R_{\text{ISCO}}$  των αριθμητικών μετρικών υπολογίζεται απευθείας από τον κώδικα RNS. Για κάθε μοντέλο υπολογίσαμε τα ISCO της αναλυτικής μετρικής των Manko et al. με το λάθος τετράπολο και με το διορθωμένο τετράπολο. Το ίδιο κάναμε χρησιμοποιώντας την φόρμουλα των Shibata & Sasaki (SS) [65] μέχρι τους όρους που περιλαμβάνουν και το οκτάπολο της περιστροφής (όπως έκαναν και οι Berti και Στεργιούλας [2]).

Οι πίνακες B'.8, B'.9 και B'.10 παρουσιάζουν τα αποτελέσματά μας για το  $R_{\text{ISCO}}$ . Συγκεκριμένα οι πίνακες περιέχουν το αριθμητικό  $R_{\text{ISCO}}$ , το  $R_{\text{ISCO}}$  των Manko et al. χωρίς και με τη διόρθωση στο τετράπολο και το  $R_{\text{ISCO}}$  των SS χωρίς και με τη διόρθωση στα πολύπολα. Τα μοντέλα για τα οποία δεν έχουμε αριθμητικό  $R_{\text{ISCO}}$ , αντιστοιχούν σε αστέρες νετρονίων για τους οποίους η επιφάνεια βρίσκεται πιο έξω από την ακτίνα του ISCO. Τα μοντέλα που δεν έχουν αναλυτικό  $R_{\text{ISCO}}$  αντιστοιχούν στις περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να κατασκευαστεί μια αναλυτική λύση τύπου Manko et al. λόγω χαμηλού τετραπόλου.

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι το  $R_{\text{ISCO}}$  που υπολογίζουμε από την Manko et al. είναι μεν κοντά στο αντίστοιχο αριθμητικό πριν τη διόρθωση, αλλά έρχεται ακόμα πιο κοντά μετά τη διόρθωση.

Πίνακας Β'.8:  $R_{\text{ISCO}}$  για την καταστατική AU.

#	$R_{\text{ISCO}}^n$	$R_{\text{ISCO}}^M _{old}$	$R_{\text{ISCO}}^M _{new}$	$R_{\text{ISCO}}^{SS} _{old}$	$R_{\text{ISCO}}^{SS} _{new}$
1	12.41	-	-	12.41	12.41
2	11.36	-	-	11.30	11.32
3	11.11	11.02	11.05	10.89	10.93
4	-	10.84	10.89	10.63	10.69
5	-	10.80	10.87	10.50	10.59
6	-	10.82	10.91	10.41	10.52
7	-	10.88	10.98	10.35	10.48
8	-	10.94	11.06	10.31	10.47
9	-	11.02	11.14	10.28	10.45
10	-	11.05	11.17	10.27	10.45
11	18.91	-	-	18.91	18.91
12	17.00	-	-	16.94	16.97
13	15.97	-	-	15.76	15.83
14	15.21	-	-	14.73	14.86
15	14.68	-	-	13.86	14.03
16	14.35	-	-	13.10	13.31
17	14.16	-	-	12.44	12.68
18	14.08	13.42	13.91	11.88	12.15
19	14.08	13.29	13.83	11.44	11.74
20	14.12	13.20	13.79	11.01	11.32
21	14.80	-	-	13.99	14.19
22	14.81	-	-	13.99	14.19
23	14.80	-	-	13.95	14.16
24	14.77	-	-	13.88	14.09
25	14.64	-	-	13.55	13.77
26	14.45	-	-	13.03	13.28
27	14.31	-	-	12.49	12.76
28	14.24	-	-	12.02	12.31
29	14.23	13.36	14.04	11.48	11.79
30	14.25	13.28	14.01	11.18	11.50

Πίνακας Β'9:  $R_{\text{ISCO}}$  για την καταστατική FPS.

#	$R_{\text{ISCO}}^n$	$R_{\text{ISCO}}^M _{old}$	$R_{\text{ISCO}}^M _{new}$	$R_{\text{ISCO}}^{SS} _{old}$	$R_{\text{ISCO}}^{SS} _{new}$
1	12.40	-	-	12.40	12.40
2	11.38	-	-	11.31	11.33
3	-	11.09	11.12	10.98	11.01
4	-	10.96	11.00	10.78	10.83
5	-	10.93	10.99	10.67	10.75
6	-	10.98	11.06	10.62	10.72
7	-	11.06	11.15	10.60	10.72
8	-	11.18	11.28	10.60	10.74
9	-	11.28	11.39	10.61	10.77
10	-	11.40	11.51	10.63	10.80
11	15.94	-	-	15.94	15.94
12	14.61	-	-	14.58	14.59
13	13.94	-	-	13.81	13.86
14	13.44	-	-	13.13	13.20
15	13.11	-	-	12.47	12.59
16	13.00	12.70	12.87	11.99	12.14
17	13.04	12.55	12.77	11.52	11.71
18	13.14	12.52	12.76	11.21	11.42
19	13.27	12.53	12.78	10.97	11.19
20	-	12.55	12.82	10.80	11.04
21	13.32	-	-	12.83	12.96
22	13.33	-	-	12.84	12.97
23	13.34	-	-	12.81	12.94
24	13.33	-	-	12.77	12.90
25	13.30	-	-	12.69	12.83
26	13.21	-	-	12.34	12.50
27	13.17	12.78	13.02	11.84	12.03
28	13.27	12.68	12.98	11.33	11.56
29	13.43	12.68	13.00	10.99	11.24
30	-	12.69	13.02	10.87	11.13

Πίνακας Β'.10:  $R_{\text{ISCO}}$  για την καταστατική L.

#	$R_{\text{ISCO}}^n$	$R_{\text{ISCO}}^M _{old}$	$R_{\text{ISCO}}^M _{new}$	$R_{\text{ISCO}}^{SS} _{old}$	$R_{\text{ISCO}}^{SS} _{new}$
1	-	-	-	12.48	12.48
2	-	11.73	11.74	11.69	11.70
3	-	11.80	11.82	11.84	11.87
4	-	12.09	12.12	12.20	12.25
5	-	12.38	12.41	12.57	12.63
6	-	12.69	12.74	12.98	13.06
7	-	13.01	13.06	13.40	13.50
8	-	13.34	13.40	13.85	13.97
9	-	13.61	13.67	14.22	14.36
10	-	13.67	13.73	14.30	14.44
11	23.97	-	-	23.97	23.97
12	21.83	-	-	21.74	21.77
13	20.78	-	-	20.45	20.51
14	20.00	-	-	19.17	19.27
15	19.52	-	-	17.96	18.09
16	19.32	18.80	19.1	16.81	16.96
17	19.32	18.56	18.92	15.71	15.89
18	19.46	18.46	18.88	14.73	14.92
19	19.73	18.46	18.94	13.63	13.82
20	19.87	18.49	18.98	13.19	13.39
21	19.81	-	-	18.37	18.52
22	19.84	-	-	18.37	18.52
23	19.85	-	-	18.30	18.45
24	19.85	-	-	18.21	18.37
25	19.80	-	-	17.94	18.10
26	19.68	19.15	19.54	16.99	17.16
27	19.67	18.90	19.39	16.03	16.21
28	19.76	18.78	19.33	15.13	15.31
29	19.98	18.74	19.35	14.02	14.20
30	19.99	18.74	19.35	13.96	14.14

## Παράρτημα Γ'

# Η μετρική Schwarzschild σε ημι-ισοτροπικές και Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες

Εδώ παρουσιάζουμε την μετρική Schwarzschild σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες και σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου.

Η κλασική γραφή της μετρικής Schwarzschild στις κλασικές συντεταγμένες  $(t, \tilde{r}, \theta, \phi)$  δίνεται στη μορφή

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)^{-1} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\Gamma'.0.1)$$

Η ίδια μετρική σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες  $(t, r, \theta, \phi)$  παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\Gamma'.0.2)$$

όπου

$$e^{2\nu} = \frac{\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2}, \quad e^{2\lambda} = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4. \quad (\Gamma'.0.3)$$

Οι δύο διαφορετικές ακτινικές συντεταγμένες  $\tilde{r}, r$  συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$\tilde{r} = r \left( 1 + \frac{M}{2r} \right)^2. \quad (\Gamma'.0.4)$$

Από τη μορφή της μετρικής σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες ( $\Gamma'.0.3$ ) και τη σύγκριση με την κλασική μορφή, η συνάρτηση  $B$  είναι

$$B = 1 - \frac{M^2}{4r^2}. \quad (\Gamma'.0.5)$$

Η μετρική αυτή μπορεί να γραφεί σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου αν κάνει κανείς τον μετασχηματισμό

$$\rho = r \sin \theta \left( 1 - \frac{M^2}{4r^2} \right), \quad (\Gamma'.0.6)$$

$$z = r \cos \theta \left( 1 + \frac{M^2}{4r^2} \right), \quad (\Gamma'.0.7)$$

και μετά κατασκευάσει τις μετρικές συναρτήσεις  $f, w, \gamma$  όπως αυτές δίνονται στις εκφράσεις (3.2.12, 3.2.13, 3.2.14). Ειδικά στον άξονα  $z$  η εξίσωση ( $\Gamma'.0.7$ ) δίνει για το  $r$ ,

$$r = \frac{z + \sqrt{z^2 - M^2}}{2}. \quad (\Gamma'.0.8)$$

Αυτή η συνάρτηση του  $z$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστούν οι μετρικές συναρτήσεις ως προς  $z$  κατά μήκος του άξονα. Για παράδειγμα, η  $g_{tt}$  συνιστώσα της μετρικής γραμμένη σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου έχει στον άξονα τη μορφή,

$$g_{tt} = -e^{2\nu} = \frac{M - z}{M + z}. \quad (\Gamma'.0.9)$$

## Παράρτημα Δ'

# Η μετρική Kerr σε ημι-ισοτροπικές και Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες

Εδώ παρουσιάζουμε την μετρική Kerr σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες και συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου. Μια μετρική σε ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες έχει γενικά την μορφή

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + r^2 \sin^2 \theta B^2 e^{-2\nu} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2(\zeta-\nu)} (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (\Delta'.0.1)$$

Η συνήθης έκφραση της μετρικής Kerr σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist,  $(t, R, \theta', \phi)$ , δίνεται στη μορφή

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta' d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta'}{\Sigma} \left( (R^2 + a^2) d\phi - a dt \right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dR^2 + \Sigma d\theta'^2 \quad (\Delta'.0.2)$$

όπου έχουμε ορίσει τις ποσότητες  $\Delta = R^2 - 2MR + a^2$ ,  $\Sigma = R^2 + a^2 \cos^2 \theta'$ , και  $a = J/M$ . Αν συγκρίνει κανείς τις δύο μετρικές μπορεί να οδηγηθεί τελικά στη σχέση

ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων:

$$R = \frac{(2r + M)^2 - a^2}{4r} \quad (\Delta'.0.3)$$

$$e^{2\nu} = \frac{\Sigma\Delta}{A} \quad (\Delta'.0.4)$$

$$\omega = 2aM\frac{R}{A} \quad (\Delta'.0.5)$$

$$e^{2\zeta} = \frac{\Sigma^2\Delta}{Ar^2} \quad (\Delta'.0.6)$$

$$B^2 = \frac{\Delta}{r^2} \quad (\Delta'.0.7)$$

όπου  $A = (R^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2 \theta'$ . Οι παραπάνω σχέσεις δίνονται στην εργασία του Lanza [38]. Για να τις επαληθεύσει κανείς μπορούμε να πούμε επιγραμματικά ότι το  $\omega$  προκύπτει από την σύγκριση των εκφράσεων για τα  $g_{t\phi}$  και  $g_{\phi\phi}$  αν τις διαιρέσει κανείς μεταξύ τους, το  $e^{2\nu}$  μετά προκύπτει αν αντικατασταθεί το  $\omega$  στη σύγκριση των  $g_{tt}$ , το  $e^{2\zeta}$  μετά προκύπτει από την σύγκριση των  $g_{\theta\theta}$ , το  $B$  προκύπτει από την σύγκριση των  $g_{t\phi}$  όπου έχουμε αντικαταστήσει τώρα όλες τις γνωστές εκφράσεις και τέλος ο μετασχηματισμός του  $R$  προκύπτει από την ολοκλήρωση του  $\sqrt{g_{RR}}dR = \sqrt{g_{rr}}dr$  και αφού έχουμε διαλέξει κατάλληλα την σταθερά ολοκλήρωσης ώστε οι συντεταγμένες να έχουν την ίδια κλίμακα στο άπειρο.

Από τις εκφράσεις αυτές βλέπουμε ότι αν κάνουμε τις σχετικές αντικαταστάσεις η συνάρτηση  $B$  για την περίπτωση της Kerr θα πάρει τελικά τη μορφή

$$B = 1 - \frac{M^2 - a^2}{4r^2}, \quad (\Delta'.0.8)$$

που είναι η έκφραση που είδαμε στο κεφάλαιο για τα πολύπολα των αριθμητικών μετρικών.

Για να εκφράσουμε την μετρική Kerr σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου,

$$ds^2 = -f(dt - wd\phi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (\Delta'.0.9)$$

θα χρησιμοποιήσουμε τις πιο βολικές επιμήχεις σφαιροειδείς συντεταγμένες  $(x, y)$ . Οι



συντεταγμένες του Weyl  $(\rho, z)$  συνδέονται με τις  $(x, y)$  μέσω των σχέσεων

$$\rho = \sqrt{M^2 - a^2} \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{1 - y^2}, \quad (\Delta'.0.10)$$

$$z = \sqrt{M^2 - a^2} xy. \quad (\Delta'.0.11)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να αντιστραφούν και να γραφούν στη μορφή

$$x = \frac{1}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \left( \sqrt{(\sqrt{M^2 - a^2} + z)^2 + \rho^2} + \sqrt{(\sqrt{M^2 - a^2} - z)^2 + \rho^2} \right) \quad (\Delta'.0.12)$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \left( \sqrt{(\sqrt{M^2 - a^2} + z)^2 + \rho^2} - \sqrt{(\sqrt{M^2 - a^2} - z)^2 + \rho^2} \right) \quad (\Delta'.0.13)$$

Οι μετρικές συναρτήσεις αντίστοιχα στις επιμήχεις σφαιροειδείς γράφονται

$$f(x, y) = 1 - \frac{2M(M + x\sqrt{M^2 - a^2})}{a^2 y^2 + (M + x\sqrt{M^2 - a^2})^2}, \quad (\Delta'.0.14)$$

$$\omega(x, y) = \frac{2aM(y^2 - 1)(M + x\sqrt{M^2 - a^2})}{M^2(x^2 - 1) + a^2(y^2 - x^2)}, \quad (\Delta'.0.15)$$

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{M^2(x^2 - 1) + a^2(y^2 - x^2)}{(M^2 - a^2)(x^2 - y^2)} \right). \quad (\Delta'.0.16)$$

Οι εκφράσεις αυτές μπορούν να γραφούν ως προς τις συντεταγμένες  $(\rho, z)$  με την αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων. Παίρνοντας υπόψιν τους παραπάνω μετασχηματισμούς ανάμεσα στα  $(\rho, z)$  και  $(x, y)$  και κάνοντας ακόμα τον μετασχηματισμό  $x = \frac{R-M}{\sqrt{M^2 - a^2}}$ ,  $y = \cos \theta$ , η μετρική μπορεί να μετασχηματιστεί από την μορφή που έχει σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου στην αρχική μορφή σε Boyer-Lindquist.

## Παράρτημα Ε΄

### Η μετρική Hartle-Thorne

Η μετρική των Hartle και Thorne (HT) [19] είναι μια μετρική που περιγράφει το χώρο γύρω από αργά περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων και προκύπτει ως συνέχεια της αντίστοιχης μετρικής που υπολογίζεται για το εσωτερικό αυτών των αργά περιστρεφόμενων αστέρων και εκφράζεται ως ανάπτυγμα μέχρι τάξεως  $O(\varepsilon^3)$ , όπου  $\varepsilon = \Omega/\Omega_*$  είναι η παράμετρος που χαρακτηρίζει την περιστροφή των αστέρων. Στον ορισμό της παραμέτρου  $\varepsilon$ , το  $\Omega_*$  ορίζεται ως  $\Omega_* = \sqrt{M/R^3}$  και είναι η νευτώνεια περιστροφή στο όριο του Κέπλερ. Τα μοντέλα με την μέθοδο των HT παράγονται από την επιλογή της κεντρικής πυκνότητας και την επιλογή του  $\varepsilon$ , το οποίο θα καθορίσει την διόρθωση στη μάζα, την στροφορμή και το τετράπολο. Η διαδικασία κατασκευής ενός αστέρα νετρονίων με την μέθοδο των HT περιγράφεται πολύ αναλυτικά από τους Berti et al. [3].

Τα στοιχεία της μετρικής για το εξωτερικό του αστέρα μπορούν να βρεθούν στη εργασία των Berti et al. [3] και δίνονται από τις εκφράσεις,

$$\begin{aligned}g_{tt} &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (1 + j^2 F_1 - qF_2), \\g_{rr} &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (1 + j^2 G_1 + qF_2), \\g_{\theta\theta} &= r^2 (1 + j^2 H_1 - qH_2), \\g_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta g_{\theta\theta}, \\g_{t\phi} &= \left(\frac{2jM^2}{r}\right) \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
L &= 80M^6 + 8r^2M^4 + 10r^3M^3 + 20r^4M^2 - 45r^5M + 15r^6, \\
p &= \frac{1}{8Mr^4(r-2M)}, \\
W &= (48M^6 - 8rM^5 - 24r^2M^4 - 30r^3M^3 - 60r^4M^2 + 135r^5M - 45r^6)u^2 \\
&\quad + (r-M)(16M^5 + 8rM^4 - 10r^3M^2 - 30r^4M + 15r^5), \\
A_1 &= \frac{15r(r-2M)(1-3u^2)\ln\left(\frac{r}{r-2M}\right)}{16M^2}, \\
A_2 &= \frac{15(r^2-2M^2)(3u^2-1)\ln\left(\frac{r}{r-2M}\right)}{16M^2}, \\
F_1 &= -pW + A_1, \\
F_2 &= 5pr^3(r-M)(2M^2+6rM-3r^2)(3u^2-1) - A_1, \\
G_1 &= p(-72rM^5 - 3(L-56M^5r)u^2 + L) - A_1, \\
H_1 &= A_2 + \frac{(16M^5 + 8rM^4 - 10r^3M^2 + 15r^4M + 15r^5)(1-3u^2)}{8Mr^4}, \\
H_2 &= \frac{5(2M^2 - 3rM - 3r^2)(1-3u^2)}{8Mr} - A_2,
\end{aligned}$$

και  $u = \cos\theta$ . Χρησιμοποιώντας τον ίδιο αλγόριθμο που χρησιμοποιήσαμε και για τις αριθμητικές μετρικές στο κεφάλαιο 2, θα υπολογίσουμε τα πρώτα πέντε πολύπολα της μετρικής HT. Από τις συναρτήσεις της μετρικής, υπολογίζουμε την συχνότητα  $\Omega$ , την οποία αναπτύσσουμε σε σειρά ως προς το  $x = (M/r)^{1/2}$ , την οποία μετά αντιστρέφουμε έτσι ώστε να εκφράσουμε το  $x$  σε σειρά ως προς την παράμετρο  $v = (M\Omega)^{1/3}$ . Με τον ίδιο τρόπο αναπτύσσουμε και την ενέργεια ανά μονάδα μάζας των κυκλικών τροχιών,  $\tilde{E}$ , ως σειρά ως προς το  $x$ , το οποίο αντικαθιστούμε με το ανάπτυγμα ως προς  $v$  που υπολογίσαμε προηγουμένως. Από το ανάπτυγμα του  $\tilde{E}$  ως προς  $v$ , μπορεί να υπολογίσει κανείς την ποσότητα

$$\Delta\tilde{E} = -\Omega\frac{d\tilde{E}}{d\Omega} = -\frac{v}{3}\frac{d\tilde{E}}{dv},$$

από την οποία μπορούμε να διαβάσουμε τα πολύπολα του χωροχρόνου. Το ανάπτυγμα που παίρνουμε αν κάνουμε όλα τα παραπάνω είναι

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{E} = & \frac{v^2}{3} - \frac{v^4}{2} - \frac{20jv^5}{9} + \left(q - \frac{27}{8}\right)v^6 - \frac{28jv^7}{3} + \left(\frac{80j^2}{27} + \frac{70q}{9} - \frac{225}{16}\right)v^8 \\
& + \left(-6qj - \frac{81j}{2}\right)v^9 + \left(\frac{115j^2}{18} + \frac{35q^2}{12} + \frac{935q}{24} - \frac{6615}{128}\right)v^{10} \\
& + \left(-\frac{1408j^3}{243} - \frac{572qj}{27} - 165j\right)v^{11} + O(v^{12}).
\end{aligned}$$

Αν συγκρίνουμε το ανάπτυγμα αυτό με την εξίσωση (17) του Ryan [62], βλέπουμε ότι η μετρική HT όπως δίνεται από τους Berti et al. έχει παράμετρο περιστροφής που ορίζεται ως  $j = -J/M^2$  και ανηγμένο τετράπολο που ορίζεται ως  $q = M_2/M^3$ . Τα επόμενα δύο πολύπολα, δηλαδή τα  $S_3$  και  $M_4$ , είναι μηδενικά. Η παραπάνω έκφραση για το  $\Delta\tilde{E}$  είναι συνεπής με αυτά τα πολύπολα μέχρι όρους τάξης  $O(v^{11})$ .

## Παράρτημα 5'

# Γενικός μετασχηματισμός σε συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου

Το στοιχείο μήκους για ένα στάσιμο και αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο στο κενό μπορεί να γραφεί στη μορφή του στοιχείου μήκους του Παπαπέτρου (1.1.9)

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} (e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2),$$

όπου οι συναρτήσεις της μετρικής είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων  $(\rho, z)$ . Οι συντεταγμένες αυτές, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις πεδίου είναι αρμονικές συζυγείς συναρτήσεις, αφού η συνάρτηση  $\rho$  ορίζεται ως  $\rho^2 = (g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$  και από τις εξισώσεις πεδίου προκύπτει ότι ικανοποιεί την εξίσωση Laplace ενώ η  $z$  είναι η αρμονική συζυγής της. Αυτή η σχέση που έχουν οι συντεταγμένες  $(\rho, z)$  μεταξύ τους μας δίνει τη δυνατότητα να τις υπολογίσουμε όταν από κάποιο άλλο σύστημα συντεταγμένων θέλουμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό στις συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου και την παραπάνω μετρική. Έτσι, το  $\rho$  υπολογίζεται απευθείας από τον προηγούμενο ορισμό και το  $z$  υπολογίζεται από τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Στο 3ο κεφάλαιο είδαμε πως γίνεται αυτός ο υπολογισμός όταν θέλουμε να πάμε από τις ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες στις συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου, όπου στις πρώτες το στοιχείο μήκους έχει τη μορφή

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2). \quad (5'.0.1)$$

Στην περίπτωση αυτή, οι συντεταγμένες  $(r, \theta)$  μπορούν να γραφούν σε καρτεσιανή μορφή χρησιμοποιώντας το ζευγάρι  $(\varpi, \zeta)$  και οι συνθήκες Cauchy-Riemann έχουν την μορφή

$$\frac{\partial z}{\partial \varpi} = -\frac{\partial \rho}{\partial \zeta}, \quad (\varepsilon'.0.2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial \rho}{\partial \varpi}, \quad (\varepsilon'.0.3)$$

όπου οι καρτεσιανές συντεταγμένες ορίζονται ως  $\varpi = r \sin \theta = r\sqrt{1-\mu^2}$ ,  $\zeta = r \cos \theta = r\mu$ . Όταν όμως μια μετρική δίνεται σε κάποια γενική μορφή, όπου οι συντεταγμένες δεν μπορούν να πάρουν μια τέτοια καρτεσιανή μορφή, όπως είναι η περίπτωση της μετρικής Hartle-Thorne που είδαμε στο προηγούμενο Παράρτημα, οι συνθήκες Cauchy-Riemann για τις συντεταγμένες  $(\rho, z)$  δεν έχουν την παραπάνω μορφή. Οι κατάλληλες συνθήκες Cauchy-Riemann μπορούν να υπολογισθούν από τη συνθήκη ορθογωνιότητας που πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις  $\rho(r, \theta)$  και  $z(r, \theta)$ . Έτσι, για μία μετρική της μορφής

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (\varepsilon'.0.4)$$

οι συνθήκες ορθογωνιότητας ανάμεσα στο  $\rho$  και το  $z$  είναι η  $\nabla \rho \cdot \nabla z = 0$ , που μας οδηγεί στην έκφραση για τις συνθήκες Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{\theta\theta}}} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \quad (\varepsilon'.0.5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\sqrt{\frac{g_{\theta\theta}}{g_{rr}}} \frac{\partial \rho}{\partial r}, \quad (\varepsilon'.0.6)$$

όπου έχουμε εκφράσει τις συνθήκες ως προς τις συντεταγμένες  $(r, \theta)$  και η συνάρτηση  $\rho(r, \theta)$  ορίζεται ως

$$\rho(r, \theta) = \sqrt{(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}. \quad (\varepsilon'.0.7)$$

Αυτές οι γενικές συνθήκες Cauchy-Riemann χρησιμοποιούνται με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιήθηκαν οι συνήθεις συνθήκες Cauchy-Riemann στο 3ο κεφάλαιο για να υπολογίσει κανείς τη συντεταγμένη  $z$  για την περίπτωση της μετρικής Hartle-Thorne

και έτσι να συγκρίνει αυτή τη μετρική με την αριθμητική κατά μήκος του άξονα  $z$  όπως κάνουμε στο κεφάλαιο 4. Οι συναρτήσεις της μετρικής Hartle-Thorne συνδέονται απευθείας με τις αντίστοιχες μετρικές συναρτήσεις του στοιχείου μήκους του Παπαπέτρου, συγκρίνοντας τα αντίστοιχα  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$  και  $g_{\phi\phi}$ . Τα μόνα στοιχεία της μετρικής που χρειάζονται να υπολογιστούν είναι τα  $g_{\rho\rho} = g_{zz}$  και δίνονται από την εξίσωση:

$$g_{\rho\rho} = g_{zz} = f^{-1}e^{2\gamma} = \left( \frac{1}{g_{rr}}(\rho,r)^2 + \frac{1}{g_{\theta\theta}}(\rho,\theta)^2 \right)^{-1}. \quad (\text{\textcircled{f}}'.0.8)$$

## Παράρτημα Ζ΄

### Υπολογισμός ποσοτήτων των γεωδαισιακών

Σε αυτό το Παράρτημα θα παρουσιάσουμε σύντομα τις διάφορες ποσότητες που χρησιμοποιούμε στην ανάλυσή μας και προκύπτουν από τη μελέτη των ιδιοτήτων των γεωδαισιακών σε στάσιμους και αξονικά συμμετρικούς χωρόχρονους.

Σε έναν στάσιμο και αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο, οι γεωδαισιακές τροχιές των σωματιδίων έχουν γενικά δύο ολοκληρώματα της κίνησης, δηλαδή δύο διατηρούμενες ποσότητες, που σχετίζονται με τα δύο διανυσματικά πεδία Killing  $\xi^a$ ,  $\eta^a$ , που δέχεται ο χωρόχρονος. Οι ποσότητες αυτές είναι η ενέργεια του σωματιδίου, που προκύπτει από τις χρονικές μεταθέσεις ( $\xi^a$ ), και η συνιστώσα της στροφορμής που είναι στην διεύθυνση που ορίζεται από τον άξονα ως προς τον οποίο έχουμε συμμετρία στις στροφές και προκύπτει από το  $\eta^a$ . Αν γράψουμε ως  $p^a = mu^a$  το τετράνυσμα της τετραορμής του σωματιδίου (όπου  $m$  είναι η μάζα ηρεμίας και  $u^a$  είναι η τετραταχύτητα του σωματιδίου), τότε τα ολοκληρώματα εκφράζονται ως,

$$E = -p_a \xi^a = -p_t = -g_{tt} p^t - g_{t\phi} p^\phi, \quad L = p_a \eta^a = p_\phi = g_{t\phi} p^t + g_{\phi\phi} p^\phi,$$

Αυτές οι εκφράσεις μπορούν να εκφραστούν ανά μονάδα μάζας και να πάρουν τη μορφή

$$\tilde{E} = -g_{tt} \frac{dt}{d\tau} - g_{t\phi} \frac{d\phi}{d\tau}, \quad \tilde{L} = g_{t\phi} \frac{dt}{d\tau} + g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau}.$$

Ακόμα, μπορούμε να ορίσουμε την γωνιακή ταχύτητα της κίνησης του σωματιδίου  $\Omega = d\phi/dt$  και να γράψουμε τις εκφράσεις αυτές στη μορφή,



$$\tilde{E} = \frac{dt}{d\tau} (-g_{tt} - g_{t\phi}\Omega), \quad \tilde{L} = \frac{dt}{d\tau} (g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega). \quad (Z'.0.1)$$

Στο σύνολο των εξισώσεων που έχουμε για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σωματιδίου, εκτός από τις εκφράσεις για τα ολοκληρώματα της κίνησης, έχουμε ακόμα μία σχέση από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας, την απαίτηση δηλαδή το μέτρο της τετραταχύτητας να είναι ίσο με  $-1$ . Η σχέση αυτή εκφράζεται ως

$$-1 = g_{tt} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2g_{t\phi} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right) + g_{\phi\phi} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + g_{zz} \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \quad (Z'.0.2)$$

Από την τελευταία εξίσωση μπορούμε να δούμε ότι θα έχουμε

$$\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = -g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2 - g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 - g_{zz} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (Z'.0.3)$$

Στην περίπτωση όπου η κίνηση που μας ενδιαφέρει περιορίζεται στο ισημερινό επίπεδο και είναι κυκλική, τότε τα πράγματα απλοποιούνται αρκετά, οπότε μπορούμε να γράψουμε την τελευταία έκφραση ως

$$\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = -g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2 \quad (Z'.0.4)$$

και να αντικαταστήσουμε το  $\frac{d\tau}{dt}$  στις εκφράσεις για την ενέργεια και για την στροφορμή και να πάρουμε τελικά τις σχέσεις

$$\tilde{E} = \frac{-g_{tt} - g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad \tilde{L} = \frac{g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}. \quad (Z'.0.5)$$

Από την εξίσωση της τετραταχύτητας, αν την γράψουμε στη μορφή

$$-g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 - g_{zz} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = 1 + g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2, \quad (Z'.0.6)$$

βλέπουμε ότι μπορούμε να την θεωρήσουμε ως μία εξίσωση κίνησης (το αντίστοιχο του ολοκληρώματος της ενέργειας στη νευτώνεια δυναμική) όπου έχει αριστερά τους

κινητικούς όρους και δεξιά τον όρο του δυναμικού. Αν ορίσουμε το δεξί μέρος ως ένα ενεργό δυναμικό, αν η τροχιά περιορίζεται στο ισημερινό επίπεδο, οι συνθήκες για κυκλική τροχιά (που σημαίνει την απαίτηση να έχουμε  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  και  $\frac{d^2\rho}{dt^2} = 0$ , αφού δεν πρέπει να έχουμε ακτινική ταχύτητα αλλά δεν πρέπει να έχουμε και κάποιο ρυθμό μεταβολής του  $\frac{d\rho}{dt}$ ) οδηγούν στις συνθήκες για το ενεργό δυναμικό ότι η τιμή του και η παράγωγός του πρέπει να είναι ίσες με μηδέν, που σημαίνει δηλαδή

$$g_{tt,\rho} + 2g_{t\phi,\rho}\Omega + g_{\phi\phi,\rho}\Omega^2 = 0. \quad (Z'.0.7)$$

Οι παραγωγίσεις ως προς  $z$  δεν μας απασχολούν, αφού λόγω κατοπτρικής συμμετρίας ως προς το ισημερινό επίπεδο, οι  $z$  παράγωγοι των μετρικών συναρτήσεων δίνουν μηδέν. Από την τελευταία έκφραση έχουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα των ισημερινών κυκλικών τροχιών δίνεται από την έκφραση

$$\Omega = \frac{-g_{t\phi,\rho} + \sqrt{(g_{t\phi,\rho})^2 - g_{tt,\rho}g_{\phi\phi,\rho}}}{g_{\phi\phi,\rho}}. \quad (Z'.0.8)$$

Ένας άλλος τρόπος να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης είναι αν τις αρχικές εκφράσεις που είδαμε παραπάνω για την ενέργεια και τη στροφορμή ανά μονάδα μάζας, τις λύσουμε ως προς τις ποσότητες  $dt/d\tau$  και  $d\phi/d\tau$  και τις αντικαταστήσουμε στη συνέχεια στη συνθήκη της τετραταχύτητας. Τότε η εξίσωση που είδαμε πιο πάνω να παίρνει την μορφή ολοκληρώματος της ενέργειας θα γραφεί ως

$$-g_{\rho\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 - g_{zz} \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 = 1 - \frac{\tilde{E}^2 g_{\phi\phi} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi} + \tilde{L}^2}{(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} = V_{eff}, \quad (Z'.0.9)$$

όπου τώρα εκφράζεται το ενεργό δυναμικό στο δεξί μέρος ως συνάρτηση των ολοκληρωμάτων της κίνησης. Αυτή η μορφή του ενεργού δυναμικού είναι πολύ χρήσιμη. Από αυτή την εξίσωση μπορούμε να μελετήσουμε τις διαταραχές από την κυκλική κίνηση και από την κίνηση στο ισημερινό επίπεδο.

Αν θεωρήσουμε τις διαταραχές  $\rho = \rho_c + \delta\rho$ , όπου  $\rho_c$  είναι η κυκλική τροχιά, και  $z = \delta z$  και τις αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση, θα πάρουμε τελικά την έκφραση

$$-g_{\rho\rho} \left( \frac{d(\delta\rho)}{d\tau} \right)^2 - g_{zz} \left( \frac{d(\delta z)}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \rho^2} (\delta\rho)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial z^2} (\delta z)^2, \quad (Z'.0.10)$$

όπου στο δεξί μέρος απλά έχουμε αναπτύξει κατά Taylor και έχουμε διώξει τους όρους τις κυκλικής τροχιάς και τις πρώτες παραγώγους (συνθήκη κυκλικής τροχιάς), ενώ η μικτή παράγωγος του δυναμικού είναι ίση με μηδέν λόγω κατοπτρικής συμμετρίας στο ισημερινό επίπεδο. Αυτή η εξίσωση περιγράφει δύο αρμονικούς ταλαντωτές με συχνότητες

$$\kappa_\rho^2 = \left. \frac{g^{\rho\rho}}{2} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \rho^2} \right|_c, \quad \kappa_z^2 = \left. \frac{g^{zz}}{2} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial z^2} \right|_c, \quad (Z'.0.11)$$

όπου οι ταλαντωτικές αυτές συχνότητες είναι εκφρασμένες ως προς ιδιόχρονο και άρα για να τις εκφράσει κανείς ως προς έναν παρατηρητή στο άπειρο, δηλαδή για να τις μετατρέψει σε μετρούμενες συχνότητες στο άπειρο, θα πρέπει να τις πολλαπλασιάσει με  $d\tau/dt$ . Οι τελικές εκφράσεις, αν αντικαταστήσουμε και τις εκφράσεις για την ενέργεια και την στροφορμή είναι

$$\begin{aligned} \kappa_a = & \left[ -\frac{g^{\alpha\alpha}}{2} \left( (g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)^2 \left( \frac{g_{\phi\phi}}{\rho^2} \right)_{,\alpha\alpha} \right. \right. \\ & - 2(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)(g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega) \left( \frac{g_{t\phi}}{\rho^2} \right)_{,\alpha\alpha} \\ & \left. \left. + (g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega)^2 \left( \frac{g_{tt}}{\rho^2} \right)_{,\alpha\alpha} \right) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (Z'.0.12)$$

όπου το  $a$  συμβολίζει είτε το  $\rho$  είτε το  $z$ , ενώ έχουμε χρησιμοποιήσει και το γεγονός ότι  $(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \rho^2$ . Από αυτές τις συχνότητες μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες μεταπτωτικές συχνότητες

$$\Omega_a = \Omega - \kappa_a. \quad (Z'.0.13)$$

## Παράρτημα Η΄

### Συμπληρωματικά αποτελέσματα της σύγκρισης της Two-Soliton

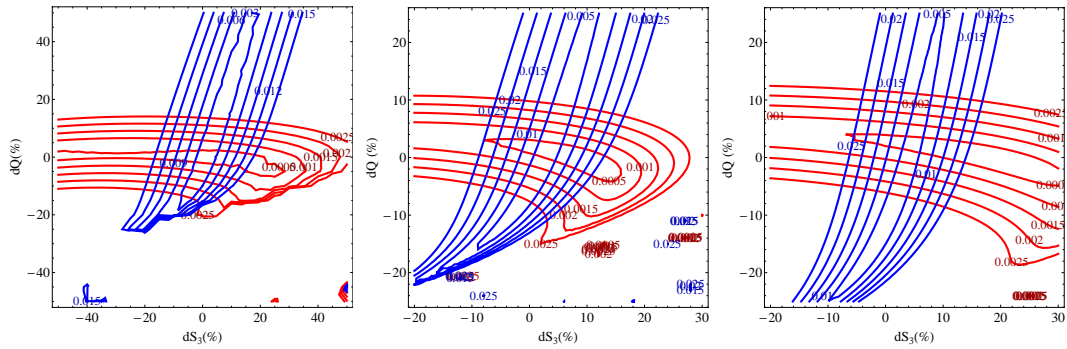
Σε αυτό το Παράρτημα θα παρουσιάσουμε κάποια συμπληρωματικά στοιχεία της ανάλυσης που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 4 σχετικά με την σύγκριση της αναλυτικής μετρικής Two-Soliton με τις αριθμητικές μετρικές που κατασκευάστηκαν με την βοήθεια του κώδικα RNS.

#### Η΄.1 Αντιστοίχιση μιας αναλυτικής γεωμετρίας με μία αριθμητική

Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάσαμε το συμπέρασμα ότι η καλύτερη επιλογή για να αντιστοιχίσει κανείς μια αναλυτική μετρική Two-Soliton με μια αριθμητική μετρική είναι να επιλέξει τις παραμέτρους της αναλυτικής έτσι ώστε τα πρώτα πολύπολα της αναλυτικής να συμπίπτουν με τα πρώτα αντίστοιχα πολύπολα της αριθμητικής. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήξαμε μελετώντας τη συμπεριφορά της ποσότητας «ολική απόκλιση», που ορίσαμε ως

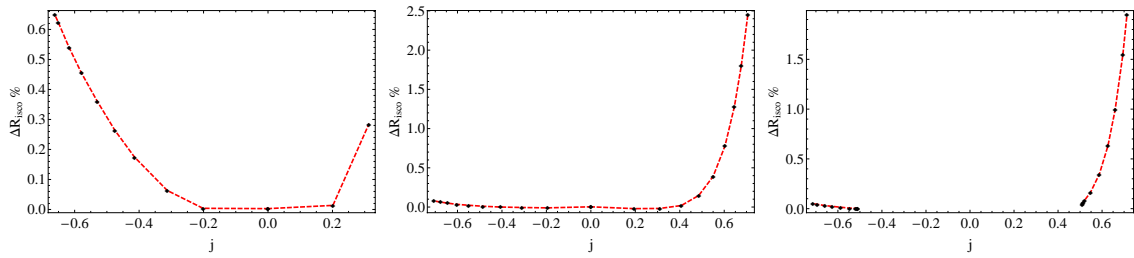
$$\sigma_{ij} = \left( \int_{R_S}^{\infty} (g_{ij}^n - g_{ij}^a)^2 dr \right)^{1/2},$$

όταν αντί να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους της αναλυτικής μετρικής από τη συνθήκη να είναι ίσα τα πολύπολά της με τα πολύπολα της αριθμητικής, τα θεωρούσαμε να είναι ίσα με τα αριθμητικά πολύπολα συν κάποια διαταραχή  $\delta S_3$  και  $\delta M_2$  (όπου η διαταραχή ορίζεται ως ποσοστό επί την τιμή της σωστής πολυπολικής ροπής). Στις περισσότερες

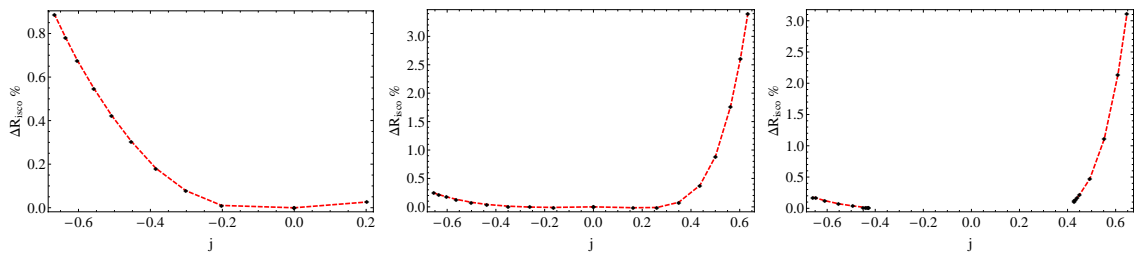


Σχήμα Η'.1: Γραφικές παραστάσεις που υποδεικνύουν τη βέλτιστη επιλογή για την αντιστοίχιση των μετρικών. Τα σχήματα που δείχνουν την τομή των ισοϋψών της «ολικής απόκλισης» για τα  $g_{tt}$  (περίπου οριζόντιες καμπύλες) και  $g_{t\phi}$  (περίπου κατακόρυφες καμπύλες). Το αριστερά σχήμα είναι για το μοντέλο #15 της καταστατικής εξίσωσης AU (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1) που υπάρχει και στο κεφάλαιο 4. Το μεσαίο σχήμα είναι για το μοντέλο #28 της καταστατικής εξίσωσης AU και τέλος το δεξί σχήμα είναι για το μοντέλο #28 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.6 και Η'.2).

περιπτώσεις, η επιλογή που βελτιστοποιεί την ταύτιση ανάμεσα στις μετρικές συναρτήσεις  $g_{tt}$  και  $g_{t\phi}$ , καθώς και τις άλλες ποσότητες που είδαμε στο κεφάλαιο 4, είναι η επιλογή  $\delta S_3 = 0$  και  $\delta M_2 = 0$ . Σε κάποιες περιπτώσεις, φαίνεται ότι το σημείο τομής των ισοϋψών της «ολικής απόκλισης» για τις συναρτήσεις  $g_{tt}$  και  $g_{t\phi}$  είναι λίγο μετατοπισμένο σε σχέση με το  $\delta S_3 = 0$  και  $\delta M_2 = 0$ . Δύο τέτοια παραδείγματα φαίνονται στο σχήμα Η'.1 (τα δύο δεξιότερα σχήματα), όπου έχουμε δύο περιπτώσεις γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων, ο ένας κατασκευασμένος με την καταστατική εξίσωση AU και ο άλλος με την καταστατική εξίσωση L. Το σημείο που φαίνεται να είναι βέλτιστη η τομή των καμπυλών για τις δύο αυτές περιπτώσεις είναι,  $\delta S_3 \simeq 3\%$  και  $\delta M_2 \simeq 2\%$  για την πρώτη περίπτωση και  $\delta S_3 \simeq 4\%$  και  $\delta M_2 \simeq 3\%$  για τη δεύτερη. Γενικά, για όλες τις περιπτώσεις που μελετήσαμε η βέλτιστη επιλογή δεν διαφέρει από το  $(0,0)$  περισσότερο από 4%.



Σχήμα Η'.2: Η σχετική διαφορά ανάμεσα στο αριθμητικό και το αναλυτικό  $R_{\text{ISCO}}$ , αριστερά για την πρώτη, στη μέση για τη δεύτερη και δεξιά για την τρίτη ακολουθία άστρων της καταστατικής AU, όπου η ακτίνα του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του άστρου.



Σχήμα Η'.3: Ομοίως με το σχήμα Η'.2 για την καταστατική FPS.

## Η'.2 Παράμετροι των μοντέλων και σύγκριση στην ISCO

Στο τέλος του κεφαλαίου 4 παρουσιάσαμε τον πίνακα 4.1 στον οποίο δίνουμε τις παραμέτρους της μετρικής Two-Soliton που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από τα αριθμητικά μοντέλα που κατασκευάστηκαν για την καταστατική εξίσωση AU. Παρακάτω δίνουμε τους ίδιους πίνακες και για τις καταστατικές εξισώσεις FPS (πίνακας Η'.1) και L (πίνακας Η'.2). Ακόμα δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις της σχετικής διαφοράς της  $R_{\text{ISCO}}$  ανάμεσα στις αναλυτικές μετρικές και τις αριθμητικές μετρικές για όλες τις ακολουθίες και όλες τις καταστατικές εξισώσεις.

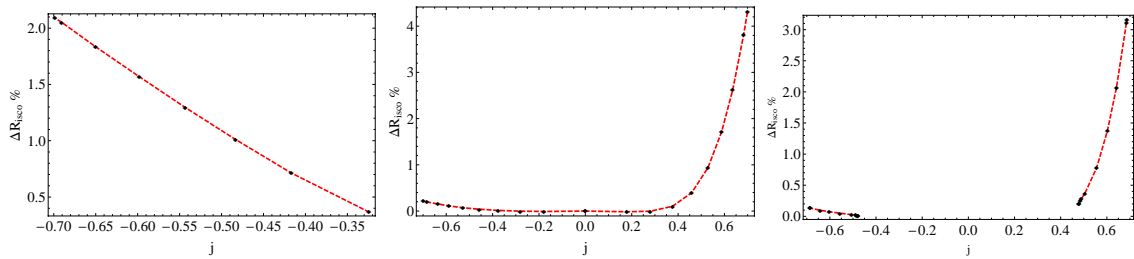
Πίνακας Η'.1: Στον πίνακα έχουμε για όλα τα μοντέλα κατασκευασμένα με την καταστατική FPS τους τύπους των αντίστοιχων αναλυτικών λύσεων, τις παραμέτρους  $k$  και  $b$  και τις σχετικές διαφορές επί τις εκατό ανάμεσα στις αριθμητικές και τις αναλυτικές τιμές των  $R_{\text{ISCO}}$ ,  $\eta$  (απόδοση του δίσκου),  $\Omega_{\text{ISCO}}$  και  $(\kappa_z)_{\text{ISCO}}$ , όπου η θέση του ISCO είναι έξω από την επιφάνεια του αστέρα. Στον πίνακα Β'.4 μπορεί να βρει κανείς συμπληρωματικές πληροφορίες των πληροφοριών που αναφέρονται εδώ για τα μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης FPS, όπως είναι η μάζα και η στροφορμή και τα άλλα πολύπολα των αντίστοιχων μοντέλων.

μοντέλο	τύπος	$j$	$b$ ( $km$ )	$k$ ( $km^2$ )	$\Delta R_i$ (%)	$\Delta \eta$ (%)	$\Delta \Omega_i$ (%)	$(\Delta \kappa_z)_i$ (%)
1	III	0.	-3.	0	0	0.014	0.003	-
2	I $\alpha$	0.201959	-0.0988	-0.5712	0.026	0.041	0.007	0.112
3	II $\alpha$	0.301603	-0.1557	-1.269	-	-	-	-
4	II $\alpha$	0.385005	-0.2089	-2.0672	-	-	-	-
5	II $\alpha$	0.452971	-0.2573	-2.8696	-	-	-	-
6	II $\alpha$	0.507868	-0.3009	-3.6206	-	-	-	-
7	II $\alpha$	0.55748	-0.3443	-4.3871	-	-	-	-
8	II $\alpha$	0.603478	-0.3885	-5.1785	-	-	-	-
9	II $\alpha$	0.636031	-0.4232	-5.787	-	-	-	-
10	II $\alpha$	0.666204	-0.4579	-6.393	-	-	-	-
11	III	0.	-3.	0	0	-0.008	-0.001	-
12	III	0.163741	-0.0915	-0.1631	-0.015	0.023	0.003	0.049
13	III	0.260517	-0.1669	-0.4555	-0.011	0.009	0.001	0.075
14	I $\alpha$	0.349789	-0.2417	-0.9102	0.08	0.017	0.003	0.063
15	I $\alpha$	0.436763	-0.3158	-1.5694	0.379	0.214	0.038	0.224
16	II $\alpha$	0.500758	-0.3897	-2.2214	0.891	0.555	0.098	0.53
17	II $\alpha$	0.562497	-0.4628	-3.017	1.766	1.158	0.205	1.079
18	II $\alpha$	0.602814	-0.5317	-3.6396	2.602	1.869	0.329	1.778
19	II $\alpha$	0.633355	-0.5916	-4.1701	3.399	9.87	1.535	16.036
20	II $\alpha$	0.654451	-0.6585	-4.5674	-	-	-	-
21	III	0.427496	-0.363	-0.8603	0.107	0.079	0.014	0.086
22	III	0.428303	-0.3606	-0.9083	0.115	0.094	0.016	0.069
23	III	0.432891	-0.3631	-0.9754	0.142	0.072	0.013	0.064
24	III	0.439649	-0.3683	-1.0576	0.17	0.082	0.014	0.052
25	III	0.450026	-0.3781	-1.1638	0.217	0.114	0.02	0.116
26	III	0.492941	-0.4249	-1.6155	0.474	0.291	0.051	0.254
27	II $\alpha$	0.552897	-0.5024	-2.3425	1.11	0.683	0.119	0.602
28	II $\alpha$	0.609656	-0.5892	-3.2004	2.138	1.476	0.255	1.426
29	II $\alpha$	0.647231	-0.6574	-3.8662	3.113	6.176	0.984	7.338
30	II $\alpha$	0.658944	-0.68	-4.1036	-	-	-	-

Πίνακας Η'.2: Ομοίως με τον πίνακα Η'.1 για την καταστατική εξίσωση L. Στον πίνακα Β'.6 μπορεί να βρει κανείς συμπληρωματικές πληροφορίες των πληροφοριών που αναφέρονται εδώ για τα μοντέλα της καταστατικής εξίσωσης L, όπως είναι η μάζα και η στροφορμή και τα άλλα πολύπολα των αντίστοιχων μοντέλων.

μοντέλο	τύπος	$j$	$b$ ( $km$ )	$k$ ( $km^2$ )	$\Delta R_i$ (%)	$\Delta \eta$ (%)	$\Delta \Omega_i$ (%)	$(\Delta \kappa_z)_i$ (%)
1	III	0.	-3.	0	-	-	-	-
2	IIα	0.194315	-0.0831	-1.1712	-	-	-	-
3	IIα	0.32459	-0.1456	-3.1855	-	-	-	-
4	IIα	0.417068	-0.1941	-5.147	-	-	-	-
5	IIα	0.483128	-0.2317	-6.7959	-	-	-	-
6	IIα	0.543454	-0.2688	-8.475	-	-	-	-
7	IIα	0.598098	-0.305	-10.1343	-	-	-	-
8	IIα	0.65012	-0.3425	-11.8392	-	-	-	-
9	IIα	0.690556	-0.3737	-13.2463	-	-	-	-
10	IIα	0.698847	-0.3806	-13.5463	-	-	-	-
11	III	0.	-3.	0	0	-0.023	-0.004	-
12	III	0.17846	-0.1461	-0.4356	-0.016	0.031	0.004	0.083
13	III	0.280296	-0.2436	-1.1684	-0.004	-0.032	-0.006	-0.066
14	Iα	0.375604	-0.3455	-2.2687	0.102	0.073	0.013	-0.011
15	Iα	0.458531	-0.4479	-3.6294	0.396	0.206	0.037	0.255
16	IIα	0.528906	-0.5484	-5.1388	0.939	0.574	0.101	0.626
17	IIα	0.588021	-0.6455	-6.7094	1.717	1.126	0.197	1.12
18	IIα	0.635447	-0.7346	-8.204	2.616	1.931	0.334	1.802
19	IIα	0.682981	-0.8376	-9.9452	3.817	3.39	0.577	3.06
20	IIα	0.700038	-0.8788	-10.639	4.325	9.055	1.413	7.012
21	III	0.478671	-0.5662	-2.4507	0.2	0.143	0.025	0.094
22	III	0.479053	-0.5588	-2.5566	0.209	0.119	0.021	0.053
23	III	0.483976	-0.559	-2.7332	0.246	0.157	0.027	0.062
24	III	0.48926	-0.5619	-2.8961	0.278	0.171	0.03	0.067
25	III	0.505312	-0.5803	-3.2893	0.372	0.25	0.043	0.165
26	Iα	0.55598	-0.6561	-4.5325	0.781	0.515	0.088	0.409
27	IIα	0.602358	-0.7401	-5.82	1.373	0.906	0.154	0.844
28	IIα	0.641594	-0.8214	-7.0767	2.069	1.451	0.245	1.362
29	IIα	0.684869	-0.9252	-8.6738	3.109	2.367	0.398	2.248
30	IIα	0.686993	-0.9308	-8.756	3.166	2.45	0.411	2.402

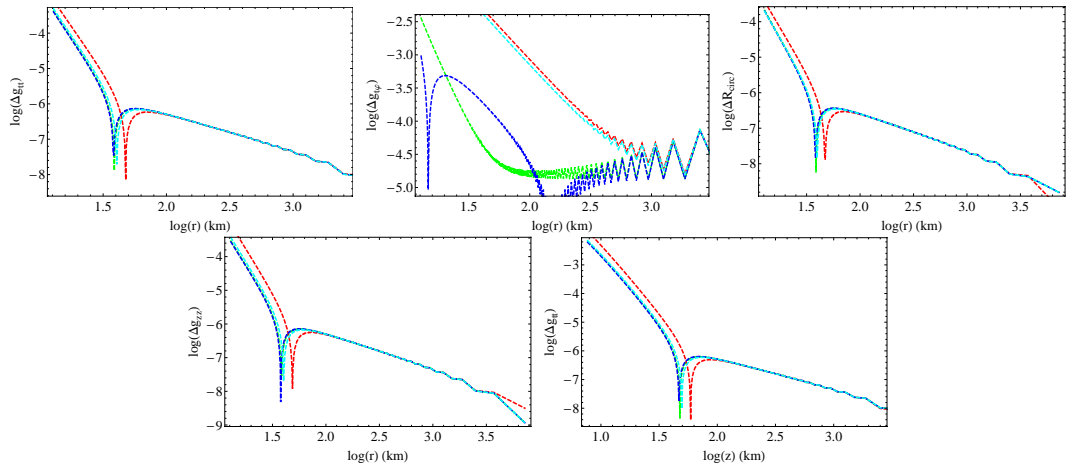




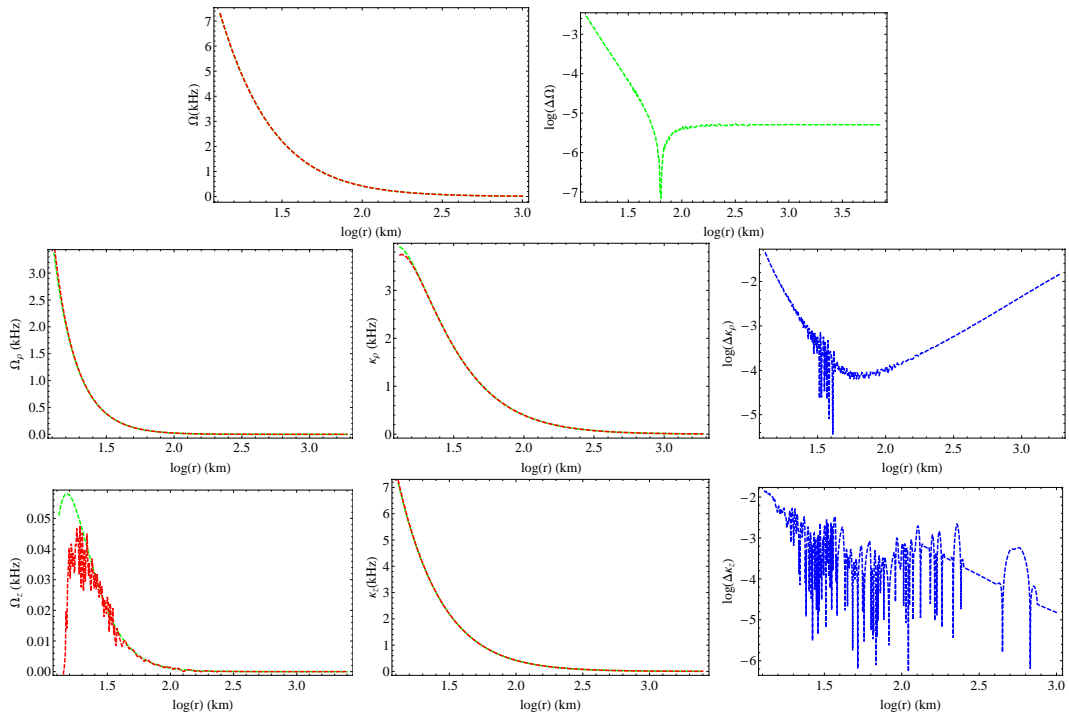
Σχήμα Η'.4: Ομοίως με το σχήμα Η'.2 για την καταστατική L.

### Η'.3 Σύγκριση των μετρικών συναρτήσεων και των παραμέτρων των τροχιών

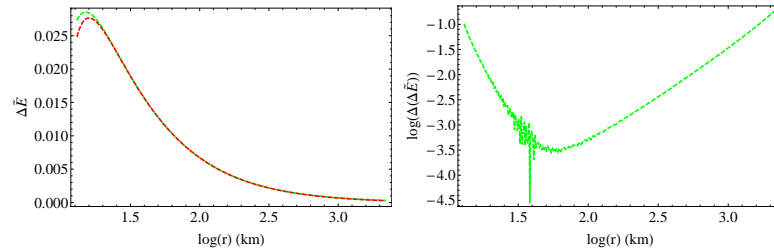
Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάσαμε κάποιες ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις της σύγκρισης των μετρικών συναρτήσεων της αναλυτικής μετρικής με την αριθμητική μετρική. Συγκεκριμένα παρουσιάσαμε τα αποτελέσματα για το μοντέλο #10 (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.2 και 4.1) της καταστατικής εξίσωσης AU. Εδώ θα παρουσιάσουμε και τα μοντέλα #10 για τις καταστατικές FPS και L. Ειδικά στην περίπτωση του μοντέλου #10 της καταστατικής εξίσωσης L βλέπουμε στη σύγκριση των συχνοτήτων την συμπεριφορά που παρουσιάζουν οι συχνότητες των ρεαλιστικών αστέρων νετρονίων και το πως η αναλυτική λύση Two-Soliton καταφέρνει να αποδώσει αυτή τη συμπεριφορά. Οι καμπύλες που παρουσιάζονται παρακάτω είναι ενδεικτικές και για τα υπόλοιπα μοντέλα των δύο καταστατικών εξισώσεων.



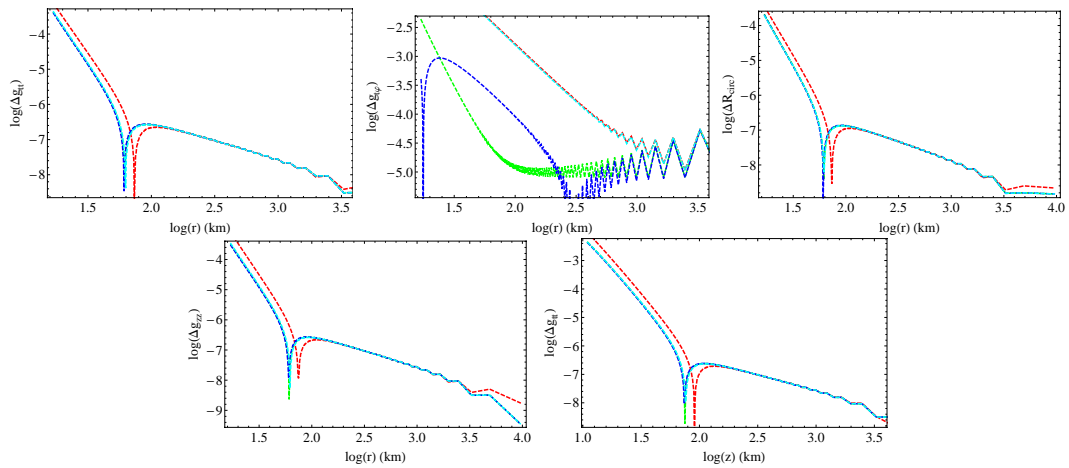
Σχήμα Η'.5: Οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν διαδοχικά το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική μετρική για τις μετρικές συναρτήσεις  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $\sqrt{g_{\phi\phi}} = R_{circ}$  και  $g_{zz}$  στο ισημερινό επίπεδο και για το  $g_{tt}$  στο άξονα συμμετρίας, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης FPS (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.4 και Η'.1). Οι πράσινες καμπύλες αντιστοιχούν στη σχετική διαφορά ανάμεσα στην Two-Soliton και την αριθμητική μετρική. Οι μπλε και οι γαλάζιες καμπύλες αντιστοιχούν στη σχετική διαφορά ανάμεσα στη Manko et al. και την αριθμητική μετρική. Η Manko et al., όταν υπάρχουν παράμετροι που να οδηγούν σε λύση της εξίσωσης  $M_2^N - M_2^M = 0$ , έχει γενικά δύο τέτοιες λύσεις. Οι κόκκινες καμπύλες αντιστοιχούν στη σχετική διαφορά ανάμεσα στην Hartle-Thorne και την αριθμητική μετρική.



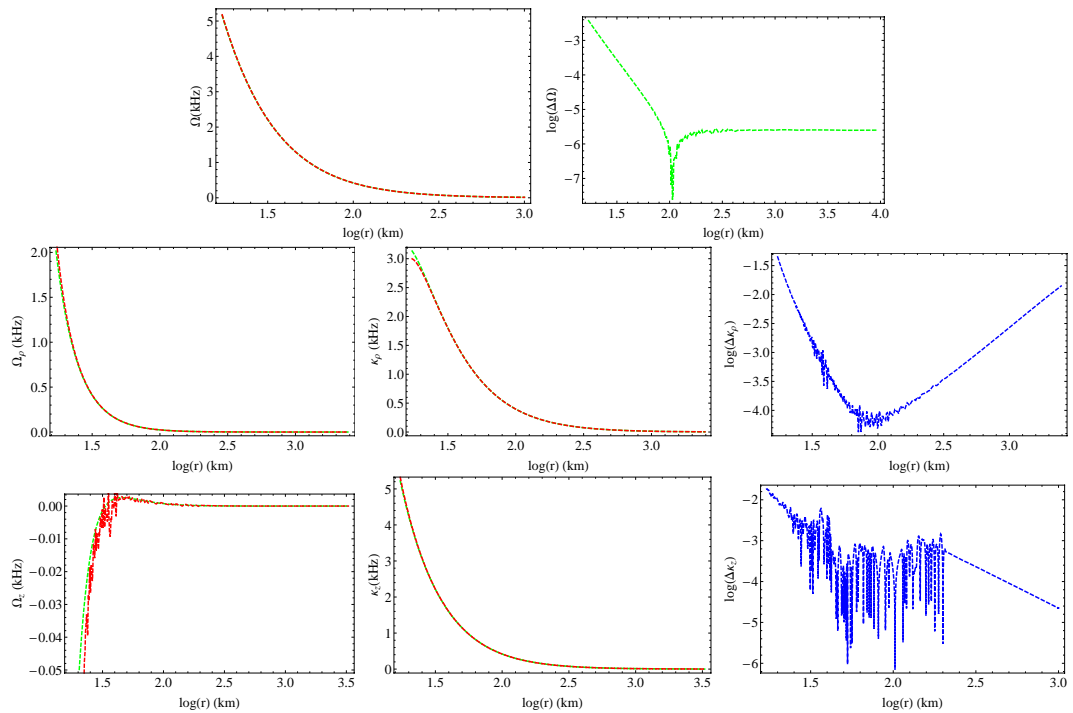
Σχήμα Η'.6: Οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν διαδοχικά, επάνω αριστερά την αριθμητική και την αναλυτική τροχιακή συχνότητα  $\Omega$  και δεξιά της το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς τους, στη μεσαία σειρά αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες  $\Omega_\rho$ , στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες  $k_\rho$  και δεξιά τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς των τελευταίων και τέλος κάτω αριστερά τις αριθμητικές και αναλυτικές συχνότητες  $\Omega_z$ , στη μέση τις αντίστοιχες ταλαντωτικές συχνότητες  $k_z$  και κάτω δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική συχνότητα  $k_z$  της κατακόρυφης ταλάντωσης κάθετα στο ισημερινό επίπεδο, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης FPS (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.4 και Η'.1). Στα διαγράμματα που παρουσιάζονται οι αναλυτικές καμπύλες μαζί με τις αριθμητικές, με κόκκινο απεικονίζονται οι αριθμητικές ποσότητες και με πράσινο οι αναλυτικές.



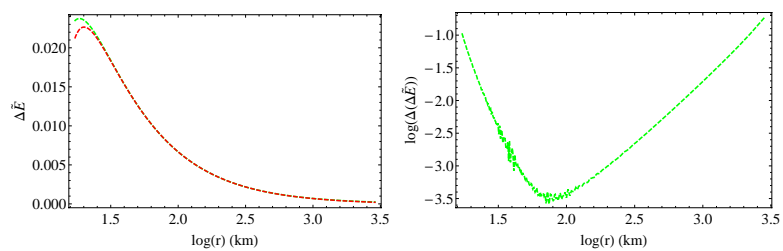
Σχήμα Η'.7: Αριστερά έχουμε την απεικόνιση του αναλυτικού (πράσινο) και του αριθμητικού (κόκκινο)  $\Delta\bar{E}$  και δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής τους διαφοράς, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης FPS (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.4 και Η'.1).



Σχήμα Η'.8: Ομοίως με το σχήμα Η'.5, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.6 και Η'.2).



Σχήμα Η'.9: Ομοίως με το σχήμα Η'.6, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.6 και Η'.2).



Σχήμα Η'.10: Ομοίως με το σχήμα Η'.7, για το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης L (σύμφωνα με την κατάταξη των πινάκων Β'.6 και Η'.2).

## Παράρτημα Θ'

# Πολυώνυμα Legendre και Gegenbauer

Παραθέτουμε παρακάτω συνοπτικά τους ορισμούς των πολυωνύμων Legendre και Gegenbauer και κάποιες χρήσιμες σχέσεις.

### Πολυώνυμα Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre ορίζονται ως οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n-1)P_n(x) = 0, \quad (\Theta'.0.1)$$

και μπορούν να δοθούν από τη σχέση

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \quad (\Theta'.0.2)$$

όπου το  $x$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Τα πολυώνυμα Legendre προκύπτουν ακόμα ως συντελεστές στο ανάπτυγμα Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad (\Theta'.0.3)$$

και εμφανίζονται στη λύση της εξίσωσης Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ , όταν έχουμε αξονική συμμετρία στο πρόβλημα. Τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν ακόμα τη συνθήκη ορθογωνιότητας

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}. \quad (\Theta'.0.4)$$

### Συσχετισμένα πολυώνυμα Legendre

Τα συσχετισμένα πολυώνυμα Legendre, που αναπαριστώνται με το σύμβολο  $P_l^m(x)$ , προκύπτουν από τη διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad (\Theta'.0.5)$$

όπου έχουμε  $-l \leq m \leq l$  και  $x \in [-1, 1]$  και ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x)P_l^m(x)dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{kl} \quad (\Theta'.0.6)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{P_l^m(x)P_l^n(x)}{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \frac{(l+m)!}{m(l-m)!}, & m = n \neq 0, \\ \infty & m = n = 0. \end{cases} \quad (\Theta'.0.7)$$

Τα συσχετισμένα πολυώνυμα Legendre μπορούν να συνδεθούν με τα πολυώνυμα Legendre (για τα θετικά  $m$ ) μέσω της σχέσης

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (\Theta'.0.8)$$

όπου βλέπουμε πως στην περίπτωση που  $m = 1$  έχουμε τη σχέση

$$P_l^1(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{dP_l(x)}{dx} = -\sqrt{1-x^2} P_{l,x}(x). \quad (\Theta'.0.9)$$

### Πολυώνυμα Gegenbauer

Τα πολυώνυμα Gegenbauer δίνονται σύμφωνα με τους Butterworth & Ipsier (BI) [5] από τη σχέση

$$T_l^{1/2}(x) = \frac{(-1)^l \Gamma(l+2)}{2^{l+1/2} l! \Gamma(l+3/2)} (1-x^2)^{-1/2} \frac{d^l}{dx^l} [(1-x^2)^{l+1/2}], \quad (\Theta'.0.10)$$

με συνθήκη ορθογωνιότητας την

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} T_l^{1/2}(x) T_m^{1/2}(x) dx = \delta_{lm}. \quad (\Theta'.0.11)$$

Τα πολυώνυμα Gegenbauer μπορεί να τα βρει κανείς στην βιβλιογραφία ως τους συντελεστές στο ανάπτυγμα

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a(x) t^n \quad (\Theta'.0.12)$$

και προκύπτουν ως γενίκευση των πολυωνύμων Legendre. Ο ορισμός των (BI) αντιστοιχεί στα παραπάνω πολυώνυμα ως

$$C_n^1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} T_n^{1/2}, \quad (\Theta'.0.13)$$

όπου έχουμε θέσει  $a = 1$ .



# Παράρτημα Γ΄

## Περαιτέρω ανάλυση στα QPOs

Σε αυτό το Παράρτημα θα παρουσιάσουμε κάποια συμπληρωματικά στοιχεία της ανάλυσης που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 5 σχετικά με τη διερεύνηση των ιδιοτήτων των συμπαγών αντικειμένων μέσω των QPOs με την χρήση της αναλυτικής μετρικής Two-Soliton. Παρακάτω θα δώσουμε τις πλήρεις εκφράσεις του Ryan [62] για τις συχνότητες και θα παρουσιάσουμε πίνακες και γραφικές παραστάσεις αντίστοιχες αυτών που δώσαμε στο 5ο κεφάλαιο για τις υπόλοιπες καταστατικές εξισώσεις με τις οποίες έχουμε φτιάξει αριθμητικά μοντέλα αστέρων νετρονίων. Στο τέλος παρουσιάζουμε και κάποιες ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις των συχνοτήτων που δείχνουν πόσο διαφορετική είναι η συμπεριφορά της μετρικής Kerr όσον αφορά στις συχνότητες.

### Γ΄.1 Οι συχνότητες συναρτήσει των πολυπολικών ροπών

Οι εκφράσεις που ανέπτυξε ο Ryan [62] για τις συχνότητες δίνονται παρακάτω μέχρι τάξης  $O(v^{10})$ , όπου  $v = (M\Omega)^{1/3}$ , όπως εμφανίζονται στην σχετική εργασία,

$$\frac{\Omega_\rho}{\Omega} = \sum_{n=2}^{\infty} R_n v^n \quad (\text{Γ'.1.1})$$

$$\frac{\Omega_z}{\Omega} = \sum_{n=3}^{\infty} Z_n v^n. \quad (\text{Γ'.1.2})$$

όπου οι πρώτοι μη μηδενικοί συντελεστές στα αναπτύγματα είναι,

$$R_2 = 3, \quad R_3 = -4 \frac{S_1}{M^2}, \quad R_4 = \left( \frac{9}{2} - \frac{3M_2}{2M^3} \right),$$

$$R_5 = -10 \frac{S_1}{M^2}, \quad R_6 = \left( \frac{27}{2} - 2 \frac{S_1^2}{M^4} - \frac{21}{2} \frac{M_2}{M^3} \right),$$

$$R_7 = \left( -48 \frac{S_1}{M^2} - 5 \frac{S_1 M_2}{M^5} + 9 \frac{S_3}{M^4} \right),$$

$$R_8 = \left( \frac{405}{8} + \frac{2243}{84} \frac{S_1^2}{M^4} - \frac{661}{14} \frac{M_2}{M^3} - \frac{21}{8} \frac{M_2^2}{M^6} + \frac{15}{4} \frac{M_4}{M^5} \right),$$

$$R_9 = \left( -243 \frac{S_1}{M^2} - 16 \frac{S_1^3}{M^6} + 4 \frac{S_1 M_2}{M^5} + 45 \frac{S_3}{M^4} \right),$$

$$R_{10} = \left( \frac{1701}{8} + \frac{8443}{28} \frac{S_1^2}{M^4} - \frac{1745}{7} \frac{M_2}{M^3} - \frac{95}{8} \frac{M_2^2}{M^6} \right. \\ \left. - \frac{85}{3} \frac{S_1^2 M_2}{M^7} + 12 \frac{S_1 S_3}{M^6} + 30 \frac{M_4}{M^5} \right),$$

$$Z_3 = 2 \frac{S_1}{M^2}, \quad Z_4 = \frac{3M_2}{2M^3}, \quad Z_6 = \left( 7 \frac{S_1^2}{M^4} + 3 \frac{M_2}{M^3} \right),$$

$$Z_7 = \left( 11 \frac{S_1 M_2}{M^5} - 6 \frac{S_3}{M^4} \right),$$

$$Z_8 = \left( \frac{153}{28} \frac{S_1^2}{M^4} + \frac{153}{28} \frac{M_2}{M^3} + \frac{39}{8} \frac{M_2^2}{M^6} - \frac{15}{4} \frac{M_4}{M^5} \right),$$

$$Z_9 = \left( 26 \frac{S_1^3}{M^6} + 31 \frac{S_1 M_2}{M^5} - 15 \frac{S_3}{M^4} \right),$$

$$Z_{10} = \left( \frac{69}{7} \frac{S_1^2}{M^4} + \frac{69}{7} \frac{M_2}{M^3} + \frac{41}{2} \frac{M_2^2}{M^6} + \frac{389}{6} \frac{S_1^2 M_2}{M^7} \right. \\ \left. - 41 \frac{S_1 S_3}{M^6} - 15 \frac{M_4}{M^5} \right).$$

$M_n$  είναι τα πολύπολα της μάζας και  $S_n$  είναι τα πολύπολα της περιστροφής.

## Γ.2 Αριθμητικά μοντέλα και αναλυτικές συχνότητες

Στο κεφάλαιο 5 δώσαμε έναν πίνακα για την καταστατική εξίσωση  $L$  στον οποίο παρουσιάζαμε για κάθε μοντέλο την ακτίνα της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς  $R_{\text{ISCO}}$ , την τροχιακή συχνότητα και τις μεταπτωτικές συχνότητες στο  $R_{\text{ISCO}}$ , την μάζα, την παράμετρο περιστροφής και την ακτίνα του άστρου στον ισημερινό. Παρακάτω παρουσιάζουμε αντίστοιχους πίνακες και για τις καταστατικές εξισώσεις AU (πίνακας Γ.2) και FPS (πίνακας Γ.2).

Πίνακας Γ.1: Οι διάφορες συχνότητες υπολογισμένες για τα μοντέλα που παράχθηκαν από την καταστατική εξίσωση FPS. Οι μάζες και οι ακτίνες (circumferential radii) στον ισημερινό του άστρου και στο ISCO δίνονται σε km. Οι συχνότητες δίνονται σε kHz. Οι συχνότητες υπολογίζονται στο ISCO εκτός από όταν το ISCO βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του άστρου, οπότε και υπολογίζονται στην ακτίνα της επιφάνειας. Αυτές οι περιπτώσεις υποδεικνύονται με έναν αστερίσκο. Στα μοντέλα με τους δύο αστερίσκους τα αριθμητικά υπολογισμένα ISCO είναι οριακά πάνω από την επιφάνεια του άστρου ενώ τα αναλυτικά υπολογισμένα ISCO είναι λίγο μέσα από την επιφάνεια (η σχετική διαφορά ανάμεσα στις δύο τιμές είναι λιγότερο από 3% σε κάθε περίπτωση). Για αυτό το λόγο, στα συγκεκριμένα μοντέλα οι τιμές υπολογίζονται στο ISCO. Οι συχνότητες που δίνουμε είναι γωνιακές συχνότητες, είναι δηλαδή συχνότητες  $\Omega = 2\pi\nu$ .

$M$ (km)	$j$	$R_s$ (km)	$R_{\text{ISCO}}$ (km)	$\Omega$ (kHz)	$\Omega_\rho$ (kHz)	$\Omega_z$ (kHz)
2.067	0.	10.84	12.40	9.86	9.86	0
2.071	0.201	11.06	11.38	11.1	11.1	0.222
2.077	0.301	11.35	11.15	11.2*	9.67*	0.2495*
2.083	0.385	11.70	11.08	10.7*	8.19*	0.2204*
2.087	0.452	12.08	11.10	10.2*	7.20*	0.1792*
2.093	0.507	12.47	11.17	9.84*	6.45*	0.1410*
2.098	0.557	12.92	11.27	9.36*	5.75*	0.1050*
2.102	0.603	13.47	11.38	8.82*	5.04*	0.0735*
2.106	0.636	14.03	11.47	8.32*	4.45*	0.0559*
2.109	0.666	15.09	11.57	7.45*	3.54*	0.0479*
2.658	0.	9.276	15.94	7.67	7.67	0
2.664	0.163	9.707	14.61	8.66	8.66	0.197
2.674	0.260	10.05	13.94	9.26	9.26	0.330
2.686	0.349	10.48	13.43	9.79	9.79	0.449
2.701	0.436	11.03	13.06	10.2	10.2	0.541
2.714	0.500	11.53	12.89	10.4	10.4	0.580
2.727	0.562	12.16	12.81	10.6	10.6	0.588
2.736	0.602	12.69	12.80	10.7	10.7	0.574
2.744	0.633	13.23	12.82**	10.7**	10.7**	0.553**
2.750	0.654	13.81	12.84	9.59*	6.95*	0.4616*
2.823	0.427	9.976	13.30	10.1	10.1	0.645
2.823	0.428	10.07	13.32	10.0	10.0	0.638
2.825	0.432	10.18	13.32	10.1	10.1	0.638
2.826	0.439	10.30	13.30	10.1	10.1	0.641
2.829	0.450	10.44	13.27	10.1	10.1	0.649
2.840	0.492	10.93	13.15	10.3	10.3	0.683
2.856	0.552	11.63	13.03	10.5	10.5	0.712
2.871	0.609	12.45	12.99	10.6	10.6	0.707
2.882	0.647	13.26	13.01**	10.7**	10.7**	0.687**
2.884	0.658	13.74	13.02	9.86*	7.55*	0.5967*

Πίνακας Γ.2: Ομοίως με τον πίνακα Γ.2 για την καταστατική εξίσωση AU.

$M$ (km)	$j$	$R_s$ (km)	$R_{\text{ISCO}}$ (km)	$\Omega$ (kHz)	$\Omega_\rho$ (kHz)	$\Omega_z$ (kHz)
2.069	0.	10.39	12.41	9.85	9.85	0
2.072	0.201	10.57	11.36	11.1	11.1	0.231
2.078	0.312	10.83	11.08	11.6	11.6	0.283
2.087	0.414	11.20	10.98	11.4*	9.82*	0.2605*
2.092	0.474	11.50	10.98	11.0*	8.60*	0.2216*
2.097	0.529	11.85	11.03	10.6*	7.65*	0.1820*
2.103	0.578	12.24	11.09	10.1*	6.81*	0.1453*
2.108	0.616	12.63	11.16	9.73*	6.11*	0.1178*
2.111	0.650	13.12	11.23	9.20*	5.38*	0.0957*
2.112	0.661	13.33	11.26	8.99*	5.11*	0.0901*
3.151	0.	9.404	18.91	6.47	6.47	0
3.164	0.194	9.740	17.00	7.50	7.50	0.214
3.183	0.309	10.04	15.97	8.20	8.20	0.386
3.207	0.406	10.39	15.20	8.81	8.81	0.553
3.231	0.485	10.77	14.66	9.32	9.32	0.696
3.253	0.550	11.18	14.29	9.71	9.71	0.809
3.273	0.603	11.62	14.05	10.0	10.0	0.890
3.291	0.645	12.07	13.90	10.2	10.2	0.941
3.304	0.676	12.53	13.82	10.3	10.3	0.968
3.318	0.706	13.33	13.78	10.4	10.4	0.984
3.388	0.510	10.15	14.79	9.36	9.36	0.834
3.388	0.510	10.19	14.80	9.35	9.35	0.831
3.390	0.514	10.28	14.79	9.36	9.36	0.833
3.393	0.520	10.37	14.76	9.40	9.40	0.843
3.405	0.547	10.67	14.61	9.56	9.56	0.892
3.422	0.587	11.06	14.40	9.80	9.80	0.967
3.441	0.626	11.48	14.22	10.0	10.0	1.036
3.458	0.659	11.89	14.10	10.1	10.1	1.085
3.477	0.694	12.51	14.01	10.3	10.3	1.126
3.487	0.713	13.15	13.97	10.4	10.4	1.141

### Γ.3 Παρεμβολή των συχνοτήτων με τις ασυμπτωτικές εκφράσεις

Στο κεφάλαιο 5 δώσαμε τα αποτελέσματα της παρεμβολής εικονικών δεδομένων για τις συχνότητες, που παράχθηκαν από την αναλυτική λύση Two-Soliton, με τις ασυμπτωτικές εκφράσεις του Ryan για τις μεταπτωτικές συχνότητες. Ο πίνακας 5.4 δίνει τα αποτελέσματα για τα μοντέλα που κατασκευάστηκαν με την καταστατική εξίσωση FPS. Παρακάτω παρουσιάζουμε τους αντίστοιχους πίνακες για τις άλλες δύο καταστατικές εξισώσεις, την καταστατική L (πίνακας Γ.3) και την καταστατική AU (πίνακας Γ.3).

Πίνακας Γ.3: Αποτελέσματα της παρεμβολής για την καταστατική εξίσωση L. Η σχετική διαφορά ανάμεσα στα πολύπολα που προέκυψαν από την παρεμβολή και στα πραγματικά πολύπολα του χωρόχρονου δίνονται ως ποσοστό %. Τα  $M$  και  $j$  είναι η μάζα και η παράμετρος περιστροφής των αντίστοιχων άστρων.

M (km)	j	$\Omega$ : 1-3 kHz			$\Omega$ : 0.3-3 kHz			$\Omega$ : 0.1-3 kHz		
		$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)	$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)	$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)
2.080	0.	0.777	-	-	0.211	-	-	0.1025	-	-
2.071	0.194	0.535	18.98	109.2	0.161	6.686	45.37	0.0749	3.546	27.26
2.075	0.324	0.523	11.36	40.18	0.153	3.877	16.09	0.0699	2.012	9.443
2.080	0.417	0.730	12.29	33.87	0.183	3.644	11.93	0.0851	1.912	7.037
2.083	0.483	0.710	10.52	25.78	0.175	3.051	8.844	0.0802	1.579	5.130
2.087	0.543	0.994	12.99	28.28	0.213	3.319	8.640	0.1001	1.749	5.080
2.090	0.598	0.967	11.67	23.74	0.204	2.919	7.060	0.0945	1.519	4.088
2.095	0.650	1.155	12.91	24.50	0.301	3.885	8.525	0.1442	2.064	4.993
2.096	0.690	1.327	13.94	25.04	0.291	3.572	7.499	0.1382	1.880	4.342
2.097	0.698	1.321	13.75	24.50	0.289	3.509	7.309	0.1369	1.843	4.220
3.995	0.	18.34	-	-	4.318	-	-	1.9649	-	-
4.012	0.178	7.332	231.1	4935.	1.820	65.80	1661.	0.8886	36.00	1019.
4.029	0.280	5.166	103.2	1307.	1.228	28.57	435.1	0.5816	15.29	263.4
4.051	0.375	3.626	54.18	483.2	0.948	16.34	173.2	0.4324	8.427	101.4
4.074	0.458	2.923	35.65	245.2	0.612	8.786	73.46	0.3129	4.970	46.10
4.098	0.528	1.995	21.35	123.3	0.447	5.551	38.06	0.2168	2.966	22.46
4.120	0.588	1.932	18.51	91.52	0.414	4.562	26.44	0.1942	2.348	14.89
4.139	0.635	1.868	16.52	72.67	0.382	3.858	19.59	0.1733	1.905	10.44
4.160	0.682	1.790	14.70	57.88	0.346	3.209	14.25	0.1498	1.496	6.979
4.167	0.700	1.759	14.09	53.34	0.332	2.987	12.62	0.1407	1.356	5.927
4.321	0.478	2.008	23.30	195.1	0.456	6.147	61.49	0.2225	3.318	36.80
4.321	0.479	2.469	28.45	232.1	0.586	7.828	76.30	0.2950	4.354	47.02
4.324	0.483	2.007	23.07	185.1	0.455	6.074	58.18	0.2218	3.274	34.76
4.325	0.489	2.004	22.78	178.0	0.453	5.977	55.71	0.2204	3.215	33.19
4.333	0.505	1.993	21.89	160.4	0.445	5.670	49.44	0.2152	3.024	29.16
4.355	0.555	1.947	19.31	119.0	0.417	4.767	34.57	0.1960	2.458	19.54
4.377	0.602	1.894	17.24	92.30	0.387	4.024	24.97	0.1755	1.988	13.33
4.396	0.641	1.471	12.58	60.61	0.261	2.512	13.44	0.1052	1.076	5.862
4.418	0.684	1.402	11.17	47.76	0.228	1.997	8.982	0.0833	0.751	3.042
4.420	0.686	1.398	11.11	47.21	0.226	1.972	8.787	0.0821	0.735	2.919

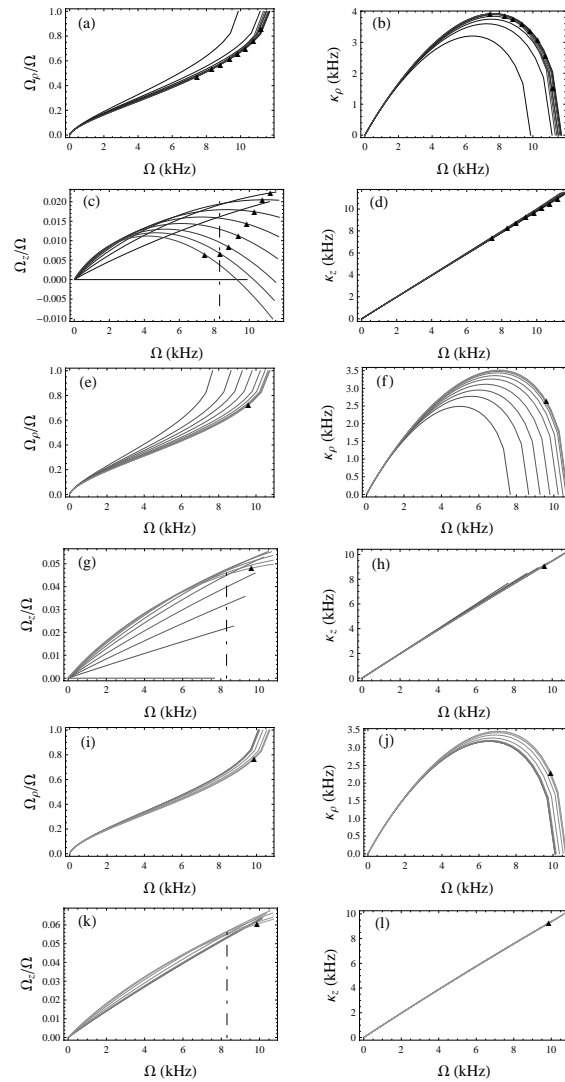
Πίνακας Γ.4: Ομοίως με τον πίνακα Γ.3 για την καταστατική εξίσωση AU.

M (km)	j	Ω: 1-3 kHz			Ω: 0.3-3 kHz			Ω: 0.1-3 kHz		
		$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)	$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)	$\frac{\Delta M}{M}$ (%)	$\frac{\Delta J}{J}$ (%)	$\frac{\Delta M_2}{M_2}$ (%)
2.069	0.	0.777	-	-	0.211	-	-	0.1025	-	-
2.072	0.201	0.431	14.63	163.8	0.103	4.228	57.67	0.0563	2.562	38.60
2.078	0.312	0.283	6.335	46.23	0.073	1.945	16.90	0.0382	1.121	10.77
2.087	0.414	0.262	4.410	23.88	0.063	1.247	7.959	0.0315	0.686	4.813
2.092	0.474	0.245	3.597	16.78	0.055	0.945	5.129	0.0265	0.496	2.930
2.097	0.529	0.227	2.988	12.36	0.047	0.715	3.364	0.0214	0.350	1.757
2.103	0.578	0.209	2.509	9.370	0.039	0.531	2.172	0.0163	0.234	0.965
2.108	0.616	0.193	2.173	7.498	0.032	0.401	1.428	0.0120	0.151	0.473
2.111	0.650	0.178	1.894	6.082	0.026	0.293	0.869	0.0081	0.082	0.103
2.112	0.661	0.173	1.808	5.673	0.024	0.259	0.707	0.0067	0.060	0.003
3.151	0.	5.334	-	-	1.311	-	-	0.6347	-	-
3.164	0.194	2.162	66.26	1856.	0.553	20.02	675.9	0.2893	11.69	439.8
3.183	0.309	1.223	23.69	394.5	0.279	6.467	131.5	0.1363	3.561	81.51
3.207	0.406	0.811	11.94	141.8	0.196	3.371	47.72	0.0890	1.723	27.39
3.231	0.485	0.404	5.002	47.08	0.091	1.280	13.52	0.0335	0.513	5.776
3.253	0.550	0.357	3.774	28.19	0.048	0.548	3.873	0.0174	0.188	0.803
3.273	0.603	0.176	1.622	9.221	0.006	0.021	1.905	0.0078	0.178	3.090
3.291	0.645	0.138	1.090	4.291	0.013	0.270	3.987	0.0213	0.349	4.524
3.304	0.676	0.056	0.280	1.171	0.039	0.551	5.949	0.0359	0.515	5.704
3.318	0.706	0.025	0.036	.23	0.055	0.702	6.781	0.0459	0.618	6.264
3.388	0.510	0.373	4.239	42.47	0.056	0.714	7.489	0.0230	0.298	2.812
3.388	0.510	0.373	4.240	42.24	0.056	0.715	7.460	0.0231	0.299	2.808
3.390	0.514	0.371	4.185	40.83	0.055	0.694	7.019	0.0223	0.284	2.528
3.393	0.520	0.366	4.068	38.43	0.053	0.648	6.189	0.0207	0.253	1.974
3.405	0.547	0.345	3.579	29.90	0.042	0.450	3.099	0.0131	0.117	0.133
3.422	0.587	0.227	2.108	14.06	0.005	0.043	2.517	0.0089	0.196	3.863
3.441	0.626	0.137	1.089	4.748	0.014	0.292	4.888	0.0223	0.369	5.488
3.458	0.659	0.052	0.233	1.884	0.042	0.598	7.274	0.0383	0.552	6.929
3.477	0.694	0.012	0.173	4.794	0.063	0.797	8.460	0.0518	0.690	7.731
3.487	0.713	0.009	0.383	6.093	0.074	0.901	8.980	0.0593	0.762	8.080

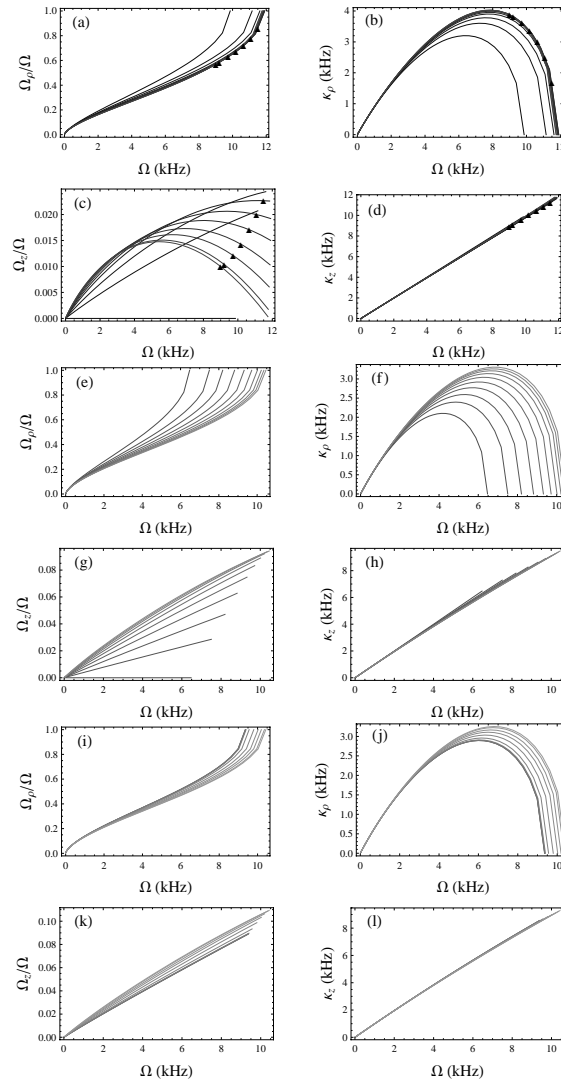


## Γ.4 Προσαρμογή των συχνοτήτων σε πρότυπα

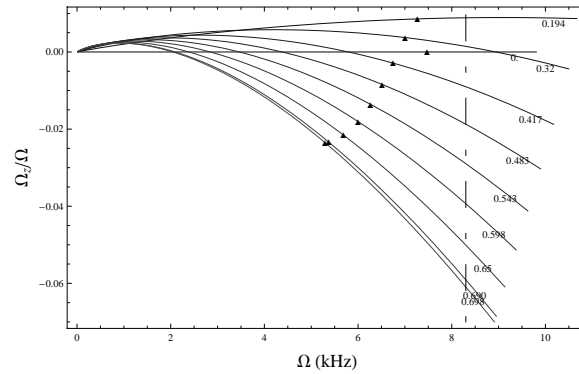
Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάσαμε πρότυπα συχνοτήτων για την καταστατική εξίσωση L. Στο Παράρτημα παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα πρότυπα και για τις υπόλοιπες καταστατικές εξισώσεις. Στο σχήμα Γ.1 παρουσιάζουμε τις συχνότητες για την καταστατική εξίσωση FPS και στο σχήμα Γ.2 παρουσιάζουμε τις συχνότητες για την καταστατική εξίσωση AU. Ακόμα, στο σχήμα Γ.3 δίνουμε τις μεταπτωτικές συχνότητες  $\Omega_z/\Omega$  για τα μοντέλα της ακολουθίας (i) (όπως παρουσιάζεται στο Παράρτημα A) για την καταστατική εξίσωση L.



Σχήμα Ι.1: Γραφικές παραστάσεις των συχνοτήτων για τις τρεις ακολουθίες μοντέλων που περιγράφονται από την καταστατική FPS. Τα διαγράμματα (a-d) είναι για την ακολουθία (i), (e-h) είναι για την ακολουθία (ii) και (i-l) είναι για την ακολουθία (iii) (βλέπε το Παράρτημα Α). Όλες οι καμπύλες τερματίζουν στο ISCO. Τα μαύρα τρίγωνα υποδεικνύουν την θέση της επιφάνειας του άστρου για το κάθε μοντέλο για τις περιπτώσεις που το ISCO είναι μέσα από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων. Η κατακόρυφη εστιγμένη-διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει τη συχνότητα  $\Omega = 8.3\text{kHz}$ .



Σχήμα Ι'.2: Ομοίως με το σχήμα Ι'.1 για την καταστατική AU.

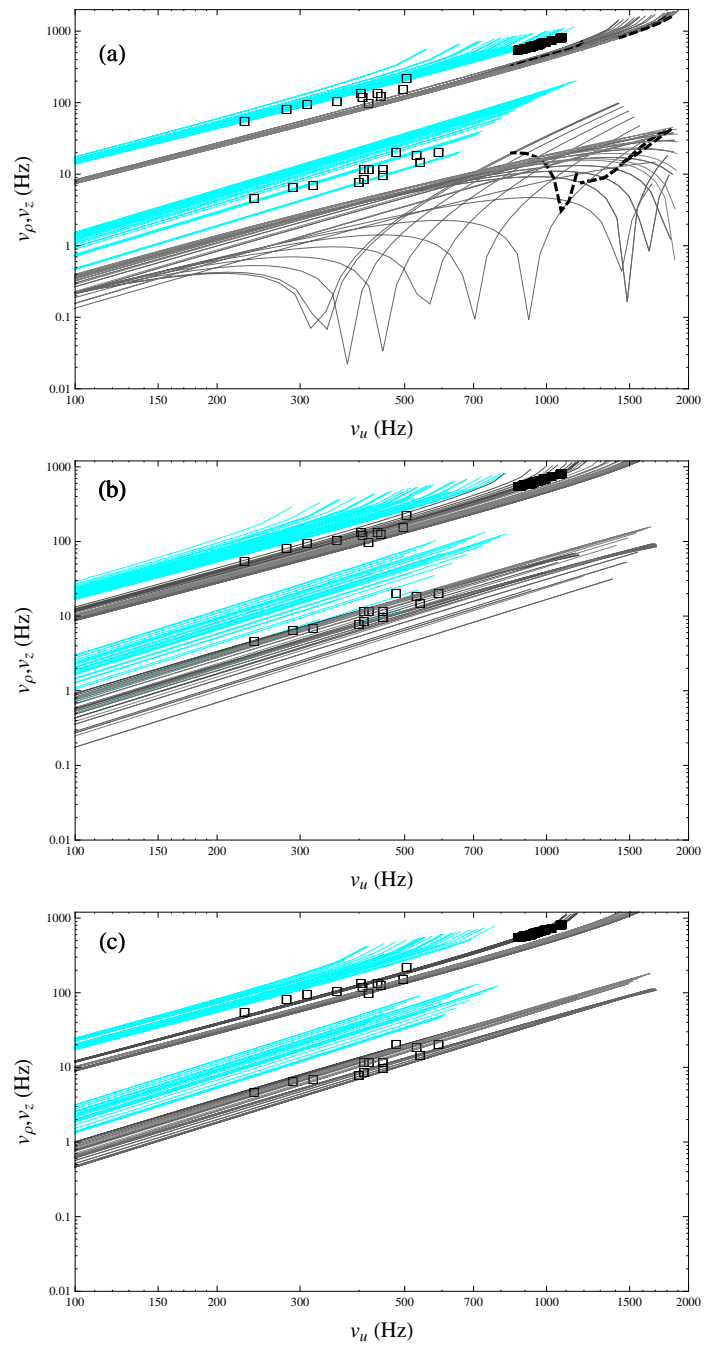


Σχήμα Γ.3: Το  $\Omega_z/\Omega$  ως συνάρτηση του  $\Omega$  για την ακολουθία (i) της καταστατική L. Η παράμετρος περιστροφής  $j = J/M^2$  αναγράφεται για κάθε μοντέλο στο διάγραμμα.

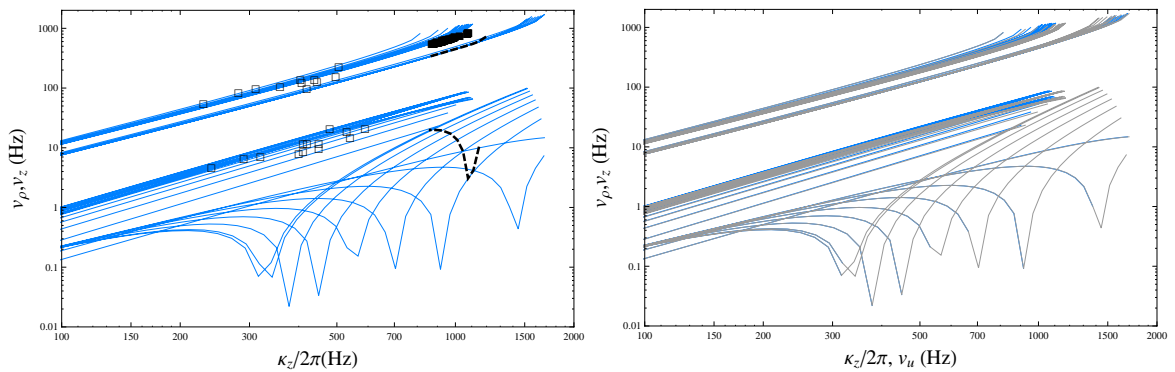
## Γ.5 Σύγκριση ανάμεσα στις συχνότητες των αστέρων νετρονίων και της μετρικής Kerr

Στο κεφάλαιο 5 αναφέραμε ότι οι συχνότητες που προκύπτουν από την μετρική Kerr έχουν διαφορετική συμπεριφορά από τις αντίστοιχες συχνότητες που προκύπτουν για τους αστέρες νετρονίων. Στο σχήμα Γ.4 παρουσιάζουμε αυτήν ακριβώς τη διαφορά. Για κάθε μία από τις καταστατικές εξισώσεις έχουμε σχεδιάσει τις καμπύλες των συχνοτήτων των αστέρων νετρονίων (με γκρίζο χρώμα) και των αντίστοιχων Kerr (με γαλάζιο χρώμα), δηλαδή των Kerr με την ίδια μάζα και την ίδια στροφορμή με τα αντίστοιχα μοντέλα των αστέρων νετρονίων. Τις γραφικές παραστάσεις των συχνοτήτων τις έχουμε οργανώσει σύμφωνα με την ακολουθία στην οποία ανήκουν. Έτσι, το σχήμα (a) δείχνει όλα τα μοντέλα για όλες τις καταστατικές που ανήκουν στην ακολουθία τύπου (i), το σχήμα (b) έχει τις συχνότητες για όλα τα μοντέλα της ακολουθίας τύπου (ii) και το σχήμα (c) όλα τα μοντέλα της ακολουθίας τύπου (iii). Τα σχήματα απεικονίζουν για εποπτεία τα ίδια πραγματικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε και στο κεφάλαιο 5. Όπως φαίνεται, η χρήση μετρικών Kerr για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός αστέρα νετρονίων από τις συχνότητες, θα δώσει παραπλανητικά αποτελέσματα.

Ένα τελευταίο σημείο που πρέπει να σχολιάσουμε αφορά την αντιστοίχιση των συχνοτήτων από τις παρατηρήσεις με την τροχιακή συχνότητα και τις συχνότητες μετάπτωσης. Η συνήθης πρακτική, όπως αναφέρουμε και στο κεφάλαιο 5, είναι να θεωρείται η μεγαλύτερη παρατηρούμενη συχνότητα από τα δίδυμα kHz QPOs ως η τροχιακή συχνότητα και η μικρότερη από τις δύο ως η μετάπτωση του περίαστρου. Όπως είδαμε



Σχήμα Γ.4: Συχνότητες της μετάπτωσης του περίαστρου και του επιπέδου της τροχιακής κίνησης ( $\nu_\rho$ ,  $\nu_z$ ) συναρτήσει της τροχιακής συχνότητας ( $\nu_u$ ) για τα μοντέλα με καταστατικές εξισώσεις L, FPS, και AU (μαύρες καμπύλες) και η σύγκρισή τους με τις αντίστοιχες συχνότητες της μετρικής Kerr (γαλάζιες καμπύλες), οργανωμένες ανά τύπο ακολουθίας (όπως περιγράφει το κείμενο).



Σχήμα Γ.5: Συχνότητες της μετάπτωσης του περίαστρου και του επιπέδου της τροχιακής κίνησης ( $\nu_\rho$ ,  $\nu_z$ ) ως συναρτήσεις της συχνότητας της κάθετης ταλάντωσης  $\kappa_z/2\pi$  (δεξί σχήμα) και η σύγκριση με τις αντίστοιχες γραφικές όπου το QPO της μεγαλύτερης συχνότητας υποτίθεται ότι είναι η τροχιακή συχνότητα ( $\nu_u$ ) (σχήμα αριστερά). Οι γραφικές είναι για την καταστατική L.

όμως, συχνότητα της ταλάντωσης στην κατακόρυφη διεύθυνση (κάθετα δηλαδή στο ισημερινό επίπεδο) είναι συγκρίσιμη με την τροχιακή συχνότητα και μπορεί να είναι και μεγαλύτερη από την τελευταία. Θα μπορούσε κανείς να δοκιμάσει να σχεδιάσει τις ίδιες καμπύλες, θεωρώντας ότι η μέγιστη συχνότητα είναι η  $\kappa_z$ . Αυτό κάνουμε στο σχήμα Γ.5 για την καταστατική εξίσωση L. Το αριστερό σχήμα δείχνει τις μεταπτωτικές συχνότητες συναρτήσει της  $\kappa_z/2\pi$  και το δεξί σχήμα αντιπαραβάλλει τις καμπύλες αυτές με τις καμπύλες του σχήματος 5.6 για την καταστατική εξίσωση L. Τα σχήματα συμπίπτουν σχεδόν απόλυτα. Άρα μια τέτοια «λάθος» αντιστοίχιση των παρατηρούμενων συχνοτήτων με τις τροχιακές συχνότητες δεν θα είχε διαφορά στα συμπεράσματα που θα βγάζαμε.

# Βιβλιογραφία

- [1] M. Baubock, D. Psaltis, F. Ozel, and T. Johannsen, *A Ray-Tracing Algorithm for Spinning Compact Object Spacetimes with Arbitrary Quadrupole Moments. II. Neutron Stars*, ArXiv e-prints (2011).
- [2] E. Berti and N. Stergioulas, *Approximate matching of analytic and numerical solutions for rapidly rotating neutron stars*, MNRAS **350** (2004), 1416–1430.
- [3] E. Berti, F. White, A. Maniopoulou, and M. Bruni, *Rotating neutron stars: an invariant comparison of approximate and numerical space-time models*, MNRAS **358** (2005), 923–938.
- [4] S. Boutloukos, M. van der Klis, D. Altamirano, M. Klein-Wolt, R. Wijnands, P. G. Jonker, and R. P. Fender, *Discovery of Twin kHz QPOs in the Peculiar X-Ray Binary Circinus X-1*, ApJ **653** (2006), 1435–1444.
- [5] E. M. Butterworth and J. R. Ipser, *On the structure and stability of rapidly rotating fluid bodies in general relativity. I - The numerical method for computing structure and its application to uniformly rotating homogeneous bodies*, ApJ **204** (1976), 200–223.
- [6] J. A. Cabezas, J. Martín, A. Molina, and E. Ruiz, *An approximate global solution of Einstein's equations for a rotating finite body*, General Relativity and Gravitation **39** (2007), 707–736.
- [7] G. B. Cook, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, *Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equations of state*, ApJ **424** (1994), 823–845.
- [8] W. Dietz, *A new class of asymptotically flat stationary axisymmetric vacuum gravitational fields*, General Relativity and Gravitation **16** (1984), 249–267.
- [9] F. J. Ernst, *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem*, Physical Review **167** (1968), 1175–1177.

- [10] \_\_\_\_\_, *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II*, Physical Review **168** (1968), 1415–1417.
- [11] G. Fodor, C. Hoenselaers, and Z. Perjés, *Multipole moments of axisymmetric systems in relativity*, Journal of Mathematical Physics **30** (1989), 2252–2257.
- [12] J. Frauendiener and C. Klein, *Exact relativistic treatment of stationary counter-rotating dust disks: Physical properties*, Phys. Rev. D **63** (2001), no. 8, 084025.
- [13] J. L. Friedman and N. Stergioulas, *Rotating Relativistic Stars*, 2012.
- [14] R. Geroch, *Multipole Moments. II. Curved Space*, Journal of Mathematical Physics **11** (1970), 2580–2588.
- [15] \_\_\_\_\_, *A Method for Generating Solutions of Einstein's Equations*, Journal of Mathematical Physics **12** (1971), 918–924.
- [16] \_\_\_\_\_, *A method for generating new solutions of Einstein's equation. II.*, Journal of Mathematical Physics **13** (1972), 394–404.
- [17] K. Glampedakis and S. Babak, *Mapping spacetimes with LISA: inspiral of a test body in a 'quasi-Kerr' field*, Classical and Quantum Gravity, Volume 23, Issue 12, pp. 4167-4188 (2006). **23** (2006), 4167–4188.
- [18] R. O. Hansen, *Multipole moments of stationary space-times*, Journal of Mathematical Physics **15** (1974), 46–52.
- [19] J. B. Hartle and K. S. Thorne, *Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars*, ApJ **153** (1968), 807.
- [20] I. Hauser and F. J. Ernst, *Integral equation method for effecting Kinnersley-Chitre transformations*, Phys. Rev. D **20** (1979), 362–369.
- [21] \_\_\_\_\_, *Integral equation method for effecting Kinnersley-Chitre transformations. II*, Phys. Rev. D **20** (1979), 1783–1790.
- [22] \_\_\_\_\_, *A homogeneous Hilbert problem for the Kinnersley-Chitre transformations*, Journal of Mathematical Physics **21** (1980), 1126–1140.
- [23] \_\_\_\_\_, *A homogeneous Hilbert problem for the Kinnersley-Chitre transformations of electrovac space-times*, Journal of Mathematical Physics **21** (1980), 1418–1422.
- [24] \_\_\_\_\_, *Proof of a Geroch conjecture*, Journal of Mathematical Physics **22** (1981), 1051–1063.



- [25] C. Hoenselaers, W. Kinnersley, and B. C. Xanthopoulos, *Generation of asymptotically flat, stationary space-times with any number of parameters*, Physical Review Letters **42** (1979), 481–482.
- [26] ———, *Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell equations. VI. Transformations which generate asymptotically flat spacetimes with arbitrary multipole moments*, Journal of Mathematical Physics **20** (1979), 2530–2536.
- [27] P. G. Jonker, J. J. M. in't Zand, M. Méndez, and M. van der Klis, *Detection of a 1258-Hz high-amplitude kilohertz quasi-periodic oscillation in the ultracompact X-ray binary 1A 1246-588*, MNRAS **378** (2007), 1187–1190.
- [28] W. Kinnersley, *Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations. I*, Journal of Mathematical Physics **18** (1977), 1529–1537.
- [29] W. Kinnersley and D. M. Chitre, *Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations. II*, Journal of Mathematical Physics **18** (1977), 1538–1542.
- [30] ———, *Group Transformation That Generates the Kerr and Tomimatsu-Sato Metrics*, Physical Review Letters **40** (1978), 1608–1610.
- [31] ———, *Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell equations. IV. Transformations which preserve asymptotic flatness*, Journal of Mathematical Physics **19** (1978), 2037–2042.
- [32] ———, *Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations. III*, Journal of Mathematical Physics **19** (1978), 1926–1931.
- [33] H. Komatsu, Y. Eriguchi, and I. Hachisu, *Rapidly rotating general relativistic stars. I - Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes*, MNRAS **237** (1989), 355–379.
- [34] J. H. Krolik, *Active galactic nuclei : from the central black hole to the galactic environment*, 1999.
- [35] W. G. Laarakkers and E. Poisson, *Quadrupole Moments of Rotating Neutron Stars*, ApJ **512** (1999), 282–287.
- [36] F. K. Lamb, *Models of QPOs in luminous low-mass X-ray binaries*, (COSPAR and IAU, Symposium on the Physics of Compact Objects, Sofia, Bulgaria, July 13-18, 1987) Advances in Space Research (ISSN 0273-1177), vol. 8, no. 2-3, 1988, p. 421-447. Research supported by the John Simon Guggenheim Memorial Foundation. **8** (1988), 421–447.

- [37] ———, *High-frequency QPOs in Neutron Stars and Black Holes: Probing Dense Matter and Strong Gravitational Fields*, Astronomical Society of the Pacific Conference Series (E. P. van den Heuvel, L. Kaper, E. Rol, and R. A. M. J. Wijers, eds.), Astronomical Society of the Pacific Conference Series, vol. 308, 2003, p. 221.
- [38] A. Lanza, *Multigrid in general relativity. II. Kerr spacetime*, Classical and Quantum Gravity **9** (1992), 677–696.
- [39] V. S. Manko, J. Martín, and E. Ruiz, *Extended family of the electrovac two-soliton solutions for the Einstein-Maxwell equations*, Phys. Rev. D **51** (1995), 4187–4191.
- [40] ———, *Six-parameter solution of the Einstein-Maxwell equations possessing equatorial symmetry*, Journal of Mathematical Physics **36** (1995), 3063–3073.
- [41] V. S. Manko, E. W. Mielke, and J. D. Sanabria-Gómez, *Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star*, Phys. Rev. D **61** (2000), no. 8, 081501.
- [42] ———, *Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star*, Phys. Rev. D **61** (2000), no. 8, 081501.
- [43] V. S. Manko and E. Ruiz, *Extended multi-soliton solutions of the Einstein field equations*, Classical and Quantum Gravity **15** (1998), 2007–2016.
- [44] V. S. Manko, J. D. Sanabria-Gómez, and O. V. Manko, *Nine-parameter electrovac metric involving rational functions*, Phys. Rev. D **62** (2000), no. 4, 044048.
- [45] V. S. Manko and N. R. Sibgatullin, *Construction of exact solutions of the Einstein-Maxwell equations corresponding to a given behaviour of the Ernst potentials on the symmetry axis*, Classical and Quantum Gravity **10** (1993), 1383–1404.
- [46] G. Neugebauer, A. Kleinwaechter, and R. Meinel, *Relativistically rotating dust.*, Helvetica Physica Acta **69** (1996), 472–489.
- [47] G. Neugebauer and R. Meinel, *The Einsteinian gravitational field of the rigidly rotating disk of dust*, ApJ **414** (1993), L97–L99.
- [48] ———, *General relativistic gravitational field of a rigidly rotating disk of dust: Axis potential, disk metric, and surface mass density*, Physical Review Letters **73** (1994), 2166–2168.

- [49] ———, *General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions*, Physical Review Letters **75** (1995), 3046–3047.
- [50] L. A. Pachón, J. A. Rueda, and J. D. Sanabria-Gómez, *Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star*, Phys. Rev. D **73** (2006), no. 10, 104038.
- [51] A. Papapetrou, *Eine rotationssymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **447** (1953), 309–315.
- [52] G. Pappas and T. A. Apostolatos, *Faithful transformation of quasi-isotropic to weyl-papapetrou coordinates: a prerequisite to compare metrics (preprint, arxiv:0803.0602)*, Class. Quantum Grav. **25** (2008), 228002.
- [53] ———, *Revising the multipole moments of numerical spacetimes, and its consequences (preprint, arxiv:1201.6067)*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012), 231104.
- [54] ———, *Spacetime exterior to neutron stars of arbitrary rotation: A faithful analytic metric*, in preparation, 2012.
- [55] George Pappas, *Matching of analytical and numerical solutions for neutron stars of arbitrary rotation (preprint, arxiv:1201.6055)*, J. Phys.: Conf. Ser. **189** (2009), 012028.
- [56] ———, *What can QPOs tell us about the structure of the corresponding compact objects? (preprint, arxiv:1201.6071)*, MNRAS **422** (2012), 2581–2589.
- [57] D. Psaltis, *Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum*, Living Reviews in Relativity **11** (2008), 9.
- [58] H. Quevedo, *Multipole Moments in General Relativity: Static and Stationary Vacuum Solutions*, Fortschritte der Physik **38** (1990), 733–840.
- [59] L. Rezzolla, S. Yoshida, T. J. Maccarone, and O. Zanotti, *A new simple model for high-frequency quasi-periodic oscillations in black hole candidates*, MNRAS **344** (2003), L37–L41.
- [60] E. Ruiz, V. S. Manko, and J. Martín, *Extended N-soliton solution of the Einstein-Maxwell equations*, Phys. Rev. D **51** (1995), 4192–4197.
- [61] R. G. M. Rutten, J. van Paradijs, and J. Tinbergen, *Reconstruction of the accretion disk in six cataclysmic variable stars*, A&A **260** (1992), 213–226.

- [62] F. D. Ryan, *Gravitational waves from the inspiral of a compact object into a massive, axisymmetric body with arbitrary multipole moments*, Phys. Rev. D **52** (1995), 5707–5718.
- [63] ———, *Spinning boson stars with large self-interaction*, Phys. Rev. D **55** (1997), 6081–6091.
- [64] R. Shafee, J. E. McClintock, R. Narayan, S. W. Davis, L.-X. Li, and R. A. Remillard, *Estimating the Spin of Stellar-Mass Black Holes by Spectral Fitting of the X-Ray Continuum*, ApJ **636** (2006), L113–L116.
- [65] M. Shibata and M. Sasaki, *Innermost stable circular orbits around relativistic rotating stars*, Phys. Rev. D **58** (1998), no. 10, 104011.
- [66] N. R. Sibgatullin and N. M. Queen, *Oscillations and Waves in Strong Gravitational and Electromagnetic Fields.*, 1991.
- [67] W. Simon and R. Beig, *The multipole structure of stationary space-times*, Journal of Mathematical Physics **24** (1983), 1163–1171.
- [68] T. P. Sotiriou and G. Pappas, *Extending sibgatullin’s ansatz for the ernst potential to generate a richer family of axially symmetric solutions*, J. Phys.: Conf. Ser. **8** (2005), 23.
- [69] L. Stella, *The relativistic precession model for QPOs in low mass X-ray binaries*, X-ray Astronomy: Stellar Endpoints, AGN, and the Diffuse X-ray Background **599** (2001), 365–376.
- [70] N. Stergioulas, *Rotating Stars in Relativity*, Living Reviews in Relativity **6** (2003), 3.
- [71] N. Stergioulas and J. L. Friedman, *Comparing models of rapidly rotating relativistic stars constructed by two numerical methods*, ApJ **444** (1995), 306–311.
- [72] M. Stute and M. Camenzind, *Towards a self-consistent relativistic model of the exterior gravitational field of rapidly rotating neutron stars*, MNRAS **336** (2002), 831–840.
- [73] C. Teichmüller, M. B. Fröb, and F. Maucher, *Analytical approximation of the exterior gravitational field of rotating neutron stars*, Classical and Quantum Gravity **28** (2011), no. 15, 155015.
- [74] K. S. Thorne, *Multipole expansions of gravitational radiation*, Reviews of Modern Physics **52** (1980), 299–340.

- [75] M. van der Klis, *Rapid X-ray Variability*, pp. 39–112, April 2006.
- [76] M. van der Klis, R. A. D. Wijnands, K. Horne, and W. Chen, *Kilohertz Quasi-Periodic Oscillation Peak Separation Is Not Constant in Scorpius X-1*, *ApJ* **481** (1997), L97.
- [77] R. M. Wald, *General relativity*, 1984.
- [78] H. Weyl, *Zur Gravitationstheorie*, *Annalen der Physik* **359** (1917), 117–145.
- [79] B. C. Xanthopoulos, *Multipole moments in general relativity*, *Journal of Physics A Mathematical General* **12** (1979), 1025–1028.
- [80] ———, *Exterior spacetimes for rotating stars.*, *Journal of Mathematical Physics* **22** (1981), 1254–1259.
- [81] ———, *Symmetries and Solutions of the Einstein Equations*, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag (R. Martini, ed.), *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, vol. 239, 1985, p. 77.