



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Η ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΣΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΣΕ
ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΑ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΤΡΙΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ
ΓΑΛΛΕΙΑΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

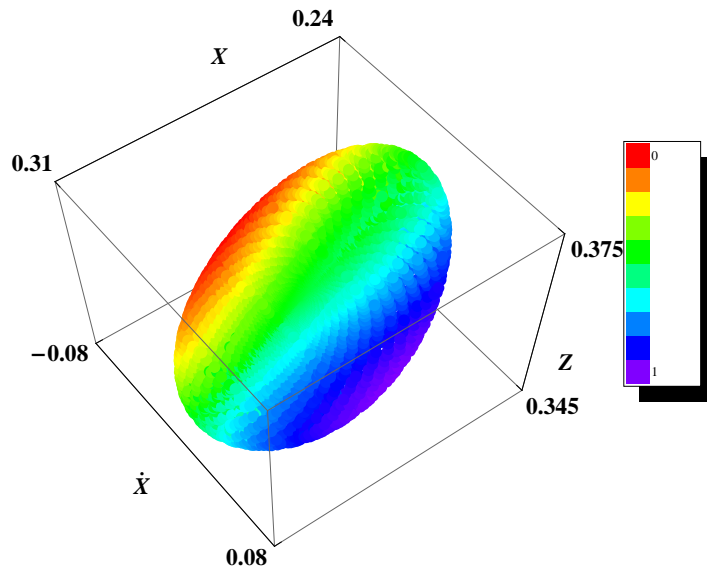
ΜΑΤΘΑΙΟΣ ΚΑΤΣΑΝΙΚΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

M.Sc ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ

ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ



ΑΘΗΝΑ 2012

Η Τριμελής συμβουλευτική επιτροπή της διδακτορικής διατριβής ήταν η ακόλουθη:

1. Αντώνιος Πινότσης (κύριος επιβλέπων), Αναπλ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών.
2. Παναγιώτης Πάτσης, Διευθυντής Ερευνών του Κέντρου Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Ακαδημίας Αθηνών.
3. Δημήτριος Φραντζεσκάκης, Αναπλ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εξετάσθηκε και εγκρίθηκε από την ακόλουθη εξεταστική επιτροπή:

1. Αντώνιος Πινότσης, Αναπλ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών.
2. Παναγιώτης Πάτσης, Διευθυντής Ερευνών του Κέντρου Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Ακαδημίας Αθηνών.
3. Δημήτριος Φραντζεσκάκης, Αναπλ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών.
4. Γεώργιος Κοντόπουλος, Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, Πρόεδρος της Ακαδημίας Αθηνών.
5. Μιχάλης Βραχάτης, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.
6. Ξενοφώντας Μουσάς, Αναπλ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών.
7. Θεοχάρης Αποστολάτος, Επικ. Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών.

*Η Διατριβή αυτή αφιερώνεται στη μνήμη του αγαπημένου μου
Τσάρλι¹.*

¹Ο Τσάρλι (Charlie) ήταν ένα πολύ όμορφο σκυλάκι πομεράνιαν.

Η Δομή του φασικού χώρου σε
περιστρεφόμενα χαμιλτονιανά συστήματα
τριών βαθμών ελευθερίας γαλαξιακού τύπου

Ματθαίος Κατσάνικας
Α.Μ. 2008535

Αθήνα, 2012

Η παρούσα διατριβή στοιχειοθετήθηκε με το πρόγραμμα LATEX. Η συγγραφή έγινε με τη βοήθεια του προγράμματος emacs (στο λειτουργικό σύστημα Suse Linux 11.1). Η τελική ηλεκτρονική μορφή (PDF) δημιουργήθηκε με το πρόγραμμα pdflatex. Οι γραφικές παραστάσεις έγιναν με τη βοήθεια των προγραμμάτων gnuplot και Mathematica. Η επεξεργασία των σχημάτων και ο σχεδιασμός του εξωφύλλου ¹ έγινε με το πρόγραμμα xfig. Όλα τα προγράμματα των προσομοιώσεων έγιναν σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN 77.

¹Στο εξώφυλλο απεικονίζεται η τροχιακή συμπεριφορά κοντά στην περιοχή μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς στην τετραδιάστατη επιφάνεια τομής του εξαδιάστατου φασικού χώρου ενός τρισδιάστατου χαμιλτονιανού συστήματος κοντά σε μία Χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf.

*‘Όταν παρατηρώ τις τροχιές των ουράνιων σωμάτων, δεν ακουμπώ
τα πόδια μου στη γη· στέκομαι δίπλα στον ίδιο τον Δία και τρώω
αμβροσία, την τροφή των θεών.’*

Κλαύδιος Πτολεμαίος (108 - 178 μ.Χ) ²

²από το βιβλίο των Boyer, C.B. & Merzbach, U.C., 1997, Η Ιστορία των Μαθηματικών, εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, κεφ. 10.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	13
1.1	Δυναμικά συστήματα	13
1.1.1	Περί δυναμικών συστημάτων	13
1.1.2	Χαμιλτονιανά συστήματα	15
1.1.3	Θεωρία του Τρίτου Ολοκληρώματος	16
1.1.4	Επιφάνειες Τομής	19
1.1.5	Η Χαμιλτονιανή του συστήματος.	21
1.1.6	Ευστάθεια περιοδικών τροχιών	22
1.1.7	Θεώρημα Krein - Moser. Τρόποι μετάβασης από την ευστάθεια στην αστάθεια.	36
1.2	Γαλαξιακή Δυναμική	44
1.2.1	Συντονισμοί	44
1.2.2	Η ευστάθεια της οικογένειας περιοδικών τροχιών x_1 και των διακλαδώσεών της.	46
1.2.3	Ονοματολογία των 3D διακλαδώσεων της x_1	49
2	Μοντέλο και Τροχιές	51
2.1	Το μοντέλο του συστήματος	51
2.2	Η αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου.	58
2.3	Η πρώτη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου.	63
2.3.1	Οικογένεια x_1	63
2.3.2	3D διακλαδώσεις	69
2.4	Η δεύτερη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου.	78
2.4.1	Οικογένεια x_1	78
2.4.2	3D διακλαδώσεις.	83
3	Η Δομή του φασικού χώρου στην περιοχή απλών περιο- δικών τροχιών	98
3.1	Μέθοδος χρώματος και περιστροφής.	98
3.2	Ευστάθεια	100
3.2.1	Επιφάνειες τομής πριν την $S \rightarrow U$ μετάβαση	102
3.2.2	Επιφάνειες τομής μετά την $S \rightarrow U$ μετάβαση	105
3.2.3	Αριθμοί Περιστροφής	117
3.2.4	Επιφάνειες τομής και μεταβολή της ενέργειας	120
3.2.5	Διαταραχές στην z και \dot{z} κατεύθυνση	131
3.2.6	Η εξέλιξη των σωληνοειδών τόρων με την αύξηση της διαταραχής	140

3.3	Απλή και Διπλή Αστάθεια	147
3.3.1	Η τροχιακή συμπεριφορά κοντά στο σημείο διακλάδωσης - μία αντιπροσωπευτική περίπτωση	148
3.3.2	Η γενική τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή U	158
3.3.3	Ασυμπτωτικές Καμπύλες	160
3.3.4	Φαινόμενο Κολλητικότητας-Stickiness	171
3.3.5	Διπλή αστάθεια $-x^2y^2$	175
3.3.6	Διπλή αστάθεια και τροχιές του z -άξονος	181
3.3.7	Διάχυση στον φασικό χώρο	187
3.4	Μιγαδική Αστάθεια	193
3.4.1	Δομή και εξέλιξη των περιορισμένων τóρων κοντά σε μία χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf	193
4	Η δομή του φασικού χώρου στην περιοχή περιοδικών τρο- χιών πολλαπλής περιόδου	211
4.1	Ο φασικός χώρος κοντά στην s	213
4.2	Ο φασικός χώρος κοντά στην u	217
4.3	Ο φασικός χώρος κοντά στην sl	224
4.4	Ο φασικός χώρος κοντά στην ul	229
5	Χαρακτηριστικοί αριθμοί Lyapunov	238
5.1	$LCN(t)$ των τροχιών στην περιοχή απλών περιοδικών τροχιών .	238
5.2	$LCN(t)$ των τροχιών στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλα- πλής περιόδου	243
6	Συμπεράσματα	245
6.1	Σύνοψη Συμπερασμάτων	246
7	Abstract	254
8	Βιβλιογραφία στην Αγγλική	257
9	Βιβλιογραφία στην Ελληνική	265
10	Παράρτημα	267

Ευχαριστίες

Η παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε εξ ολοκλήρου στο Κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (ΚΕΑΕΜ) της Ακαδημίας Αθηνών. Πρώτα θέλω να ευχαριστήσω θερμά την Ακαδημία Αθηνών και ειδικότερα το κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για τη φιλοξενία, την παροχή γραφείου, την υλικοτεχνική υποστήριξη (από προσωπικό υπολογιστή έως αναλώσιμα) και την εν γένει προσφορά ενός δημιουργικού ερευνητικού περιβάλλοντος.

Η δυνατότητα παρακολούθησης σε εβδομαδιαία βάση των επιστημονικών σεμιναρίων που διοργανώνει το ΚΕΑΕΜ, η έστω μικρή οικονομική υποστήριξη μέσω προγραμμάτων της Επιτροπής Ερευνών της Ακαδημίας Αθηνών καθώς και η ενίσχυση που έλαβα μέσω δωρεών προς το ΚΕΑΕΜ όπως αυτή της ΑΕ 'Ελληνικό Κέντρο Ερεύνης Μετάλλου', δημιούργησαν ένα ερευνητικό περιβάλλον που διευκόλυε την καθημερινή μου ενασχόληση με τη διατριβή μου. Επίσης μου επέτρεψε να λάβω μέρος σε συνέδρια ακόμα και στο εξωτερικό, όπου είχα τη δυνατότητα να παρουσιάσω τη δουλειά μου. Αισθάνομαι μεγάλη ευγνωμοσύνη για όλα αυτά, ιδιαίτερα κάτω από τις παρούσες οικονομικές συνθήκες.

Ευχαριστώ θερμά και από καρδιάς τον Δρ. Πάνο Πάτση, Διευθυντή Ερευνών και Διευθύνοντα του ΚΕΑΕΜ, για την επίβλεψη της διδακτορικής μου διατριβής και τη βοήθεια που μου προσέφερε με κάθε δυνατό τρόπο. Χωρίς την πολύτιμη βοήθεια του και τον άπειρο χρόνο που διέθεσε στο πρόσωπο μου δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί αυτή η διδακτορική διατριβή. Αναγνωρίζω ότι παρά το γεγονός ότι, λόγω κωλυμάτων του νόμου δεν μπορούσε να είναι τυπικά ο κύριος επιβλέπων της διδακτορικής μου διατριβής, ήταν ουσιαστικά αυτός που επέβλεψε όλα τα στάδια αυτής της έρευνας σε καθημερινή βάση.

Ευχαριστώ θερμά επίσης τον καθηγητή και Ακαδημαϊκό κ. Γεώργιο Κοντόπουλο, πρόεδρο της Ακαδημίας Αθηνών, για το χρόνο που αφιέρωσε στο πρόσωπο μου αλλά και την πολύτιμη εμπειρία και γνώση που μου μετέδωσε σε όλη τη διάρκεια της διδακτορικής μου διατριβής. Η βοήθεια του ήταν ανεκτίμητη. Τον ευχαριστώ διότι συντηρεί μία μοναδική στην Ελλάδα ερευνητική ομάδα σε θέματα Δυναμικής Αστρονομίας, η οποία έχει μοναδικό κύρος και τεράστια απήχηση διεθνώς, μέσα στην οποία μπόρεσα να πραγματοποιήσω τη διατριβή μου.

Ευχαριστώ τον κ. Α. Πινότση, Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τη βοήθεια του, τη συνεργασία που είχαμε μαζί, τις ουσιαστικές επιστημονικές συζητήσεις αλλά και για το γεγονός ότι είχε την καλοσύνη να αναλάβει την επίβλεψη της διδακτορικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ τον κ. Δ. Φραντζεσκάκη, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τη βοήθεια του και τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή επίβλεψης

της διδακτορικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ τον Δρ. Χ. Ευθυμιόπουλο, Διευθυντή Ερευνών, για τη βοήθεια του, τις συζητήσεις που είχαμε σε θέματα της διδακτορικής μου διατριβής και τις ουσιαστικές θεωρητικές του γνώσεις που μου μετέδωσε. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για τη βοήθεια που μου προσέφερε σχετικά με το Χειμερινό Σχολείο που πραγματοποιήθηκε στην La Plata, της Αργεντινής, στο οποίο συμμετείχα τον Ιούλιο του 2011 στο πλαίσιο της διδακτορικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Μ. Βραχάτη για τη βοήθεια του και τις συζητήσεις που είχαμε σε αρκετά επιστημονικά θέματα σχετικά με τη διδακτορική μου διατριβή.

Ευχαριστώ επίσης τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Αν. Μπούνη για τις συζητήσεις που είχαμε σε διάφορα θέματα της διδακτορικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ τον Επικ. Καθηγητή του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης κ. Χ. Σκόκο για τη βοήθεια του στα πρώτα χρόνια των μεταπτυχιακών μου σπουδών και τις συζητήσεις που είχαμε.

Ευχαριστώ την Δρ. Μ. Χαρσούλα, Επιστημονική συνεργάτη του ΚΕΑΕΜ για τις συζητήσεις που είχαμε σε θέματα της διδακτορικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ τον Δρ. Κ. Καλαποθαράκο, τον Δρ. Γ. Λούκες-Γερακόπουλο, τον Δρ. Π. Τσούτση και τον Δρ. Ι. Σταυρόπουλο καθώς και τους υποψήφιους διδάκτορες Ν. Δελή, Ε. Τσιγαρίδη και Α. Πούρη για τις πολλές επιστημονικές και τεχνικές συζητήσεις που είχαμε κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της διδακτορικής μου διατριβής, καθώς και τον φίλο, τεχνικό του ΚΕΑΕΜ κ. Μανώλη Ζούλια για τη βοήθεια του σε πολλά σχήματα της παρούσας διατριβής και σε διάφορα άλλα τεχνικά θέματα. Ευχαριστώ επίσης όλους τους συναδέλφους του ΚΕΑΕΜ για την ευχάριστη και φιλική ατμόσφαιρα που δημιούργησαν όλα αυτά τα χρόνια, για τις συζητήσεις που είχαμε στο κυλικείο του ΠΙΒΕΑ και τους αγώνες μπάσκετ στο ανοιχτό γήπεδο του Παπάγου.

Ευχαριστώ θερμά και από καρδιάς τον κ. Π. Λασκαρίδη, Ομότιμο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τη βοήθεια του στα πρώτα χρόνια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, καθώς και για το ότι μου υπέδειξε να πάω στον Δρ. Πάνο Πάτση για να ασχοληθώ με την έρευνα. Τον ευχαριστώ επίσης για το ότι αποτέλεσε αφορμή να αγαπήσω την αστρονομία και να ασχοληθώ μαζί της.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου για την ηθική και υλική συμπαράσταση που μου προσέφεραν σε όλη τη διάρκεια της διδακτορικής μου διατριβής. Χωρίς αυτούς δεν θα τα είχα καταφέρει.

Ματθαίος Κατσάνικας
Αθήνα, Φεβρουάριος 2012

Σκοπός και περίληψη της διατριβής

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι να συσχετίσει τις τετραδιάστατες ($4D$) δομές που βρίσκουμε στην περιοχή των περιοδικών τροχιών στην $4D$ επιφάνεια τομής ενός τρισδιάστατου ($3D$) αυτόνομου χαμιλτονιανού συστήματος γαλαξιακού τύπου με την τροχιακή συμπεριφορά κοντά σε ευσταθείς ή κοντά σε διάφορα είδη αστάθειας απλές περιοδικές τροχιές (απλά ασταθείς, διπλά ασταθείς, μιγαδικά ασταθείς). Επίσης σκοπός της διατριβής είναι η μελέτη της δυναμικής στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου (2 και 7). Σε ένα $3D$ αυτόνομο χαμιλτονιανό σύστημα, ένα βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε αποτελεί η απεικόνιση των τετραδιάστατων ($4D$) επιφανειών τομής του εξαδιάστατου ($6D$) φασικού χώρου. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιούμε τη μέθοδο χρώματος και περιστροφής (Patsis & Zachilas 1994).

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε την μορφολογία και την ευστάθεια των περιοδικών τροχιών των $3D$ διακλαδώσεων της κεντρικής οικογένειας περιοδικών τροχιών που ονομάζεται x_1 σε δύο περιπτώσεις του $3D$ αυτόνομου χαμιλτονιανού συστήματος μας. Το δυναμικό του συστήματος μας στην αξισυμμετρική του περίπτωση αποτελεί καλή προσέγγιση του δυναμικού του γαλαξία μας (Miyamoto & Nagai 1975).

Μελετήσαμε λεπτομερειακά την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή των ευσταθών περιοδικών τροχιών του συστήματος μας. Χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής (Patsis and Zachilas 1994) για να διερευνήσουμε τις ιδιότητες των αναλλοίωτων τόρων στην $4D$ επιφάνεια τομής, συγκρίναμε τα αποτελέσματά μας με προηγούμενες μελέτες και περιγράψαμε την μορφολογία των περιστροφικών τόρων, αλλά και των σωληνοειδών τόρων. Βρήκαμε τροχιές κολλητικότητας στην ενδιάμεση περιοχή μεταξύ των αναλλοίωτων τόρων οι οποίοι περιβάλλουν τις $3D$ ευσταθείς περιοδικές τροχιές. Ιδιαίτερα χρήσιμη για την γαλαξιακή δυναμική είναι η συμπεριφορά των χαοτικών τροχιών οι οποίες παγιδεύονται για μεγάλο χρονικό διάστημα μεταξύ των $4D$ τόρων. Βρήκαμε ότι υποστηρίζουν κατά την διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος την ίδια δομή με αυτήν που υποστηρίζουν οι ημι-περιοδικές τροχιές γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές, παρουσιάζοντας όμως μία μικρή αύξηση στην διασπορά ταχυτήτων. Κατόπιν οι παγιδευμένες χαοτικές τροχιές στους $4D$ τόρους διαχέονται στον φασικό χώρο (Διάχυση Arnold). Τέλος, βρήκαμε ότι οι σωληνοειδείς τόροι δεν εμφανίζονται στις $3D$ προβολές της επιφάνειας τομής στην αξισυμμετρική περίπτωση του χαμιλτονιανού συστήματος που χρησιμοποιήσαμε.

Μελετήσαμε την δυναμική στην περιοχή των απλά και διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών στο $3D$ αυτόνομο χαμιλτονιανό μας σύστημα γαλαξιακού τύπου.

Για να οπτικοποιήσουμε τις 4D επιφάνειες τομής χρησιμοποιήσαμε πάλι την μέθοδο χρώματος και περιστροφής. Διερευνήσαμε την δομή των αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων τις οποίες βρήκαμε στην περιοχή των απλά και διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών στην 4D επιφάνεια τομής. Θεωρήσαμε τροχιές στην περιοχή των οικογενειών x_{1u2} , διακλάδωση της x_1 , και του z -άξονα (άξονα περιστροφής του συστήματος μας). Κοντά στο σημείο μετάβασης από ευστάθεια σε απλή αστάθεια, στην περιοχή των διακλαδιζόμενων απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της x_{1u2} συναντήσαμε το φαινόμενο της κολλητικότητας όπου οι ασυμπτωτικές καμπύλες περιέβαλλαν περιοχές του φασικού χώρου που καταλαμβάνονταν από τους περιστροφικούς τόρους που υπήρχαν στην περιοχή. Για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας, μακριά από το σημείο διακλάδωσης, τα σημεία των χαοτικών τροχιών σχημάτιζαν νέφη σημείων με ανάμειξη χρώματος στην 4D αναπαράστασή τους. Στην περίπτωση της διπλής αστάθειας, κοντά στις περιοδικές τροχιές της x_{1u2} , βρήκαμε νέφη σημείων στην 4D επιφάνεια τομής. Σε μερικές περιπτώσεις διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών που ανήκαν στην οικογένεια του z -άξονα μπορέσαμε να οπτικοποιήσουμε την ασταθή αναλλοίωτη πολλαπλότητα (ασταθή ιδιοεπιφάνεια). Οι χαοτικές τροχιές κοντά στις περιοδικές τροχιές κολλούσανε σε αυτή την επιφάνεια για μεγάλα χρονικά διαστήματα (της τάξης της ηλικίας του σύμπαντος και παραπάνω). Μεταξύ των τροχιών που μελετήσαμε βρήκαμε ότι οι τροχιές που είναι κοντά στις διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της x_{1u2} έχουν την μεγαλύτερη ταχύτητα διάχυσης. Οι τροχιές κολλητικότητας οι οποίες βρίσκονται στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της x_{1u2} που είναι κοντά στο σημείο διακλάδωσης και στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών του z -άξονα, έχουν μεταξύ τους συγκρίσιμες ταχύτητες διάχυσης. Αυτές οι ταχύτητες είναι πολύ μικρότερες από αυτές των τροχιών που είναι κοντά στις απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της x_{1u2} που είναι μακριά από το σημείο διακλάδωσης ή των τροχιών που είναι κοντά στις διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της x_{1u2} οι οποίες έχουν πολύ διαφορετικές ιδιοτιμές.

Κατόπιν μελετήσαμε την τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή των μιγαδικά ασταθών περιοδικών τροχιών του συστήματος μας. Στο σημείο μετάβασης μίας οικογένειας περιοδικών τροχιών από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια (γνωστή ως Χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf) οι τέσσερις ιδιοτιμές των ευσταθών περιοδικών τροχιών μετακινούνται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, παραμένοντας μιγαδικές. Στο σημείο αυτό οι περιοδικές τροχιές γίνονται μιγαδικά ασταθείς. Στην παρούσα διατριβή υπολογίσαμε τροχιές στην περιοχή μιγαδικά ασταθών περιοδικών τροχιών, οι οποίες βρίσκονται κοντά στο σημείο μετάβασης. Μετά, απεικονίσαμε τα σημεία των τροχιών στην 4D επιφάνεια τομής. Για την οπτικοποίηση της 4D επιφάνειας τομής χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο χρώματος και

περιστροφής. Βρήκαμε ότι τα σημεία στην επιφάνεια τομής βρίσκονται σε 2D περιορισμένους τόρους. Κατόπιν, διερευνήσαμε την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή των μιγαδικά ασταθών περιοδικών τροχιών που βρίσκονται μακριά από το σημείο μετάβασης. Στις περιπτώσεις αυτές βρήκαμε νέφη σημείων στην 4D επιφάνεια τομής. Η μετάβαση από τον έναν τύπο τροχιακής συμπεριφοράς στον άλλο γίνεται απότομα.

Μετά μελετήσαμε την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή των περιοδικών τροχιών υψηλής περιόδου του συστήματός μας. Ως παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε μία ευσταθή 2-περιοδική τροχιά και μία ευσταθή 7-περιοδική τροχιά. Διερευνήσαμε την δομή των πολλαπλών τόρων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο χρώματος και περιστροφής, γύρω από τα σημεία των περιοδικών τροχιών στην 4D επιφάνεια τομής και επιπρόσθετα μελετήσαμε την τροχιακή συμπεριφορά στην γειτονιά των συνοδών απλά ασταθών περιοδικών τροχιών. Θεωρώντας λίγα σημεία των τροχιών στην γειτονιά αυτών των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών βρήκαμε ένα σχηματισμό στην 4D επιφάνεια τομής, ο οποίος είναι σε απευθείας αντιστοίχιση με αυτό που παρατηρείται σε μία ζώνη συντονισμού στην 2D επιφάνεια τομής ενός 2D αυτόνομου Χαμιλτονιανού συστήματος. Στην περίπτωση μας αντί για νησίδες ευστάθειας έχουμε περιστροφικούς τόρους, ενώ η χαοτική ζώνη που συνδέει τα σημεία της ασταθούς περιοδικής τροχιάς αντικαταστάθηκε από έναν 4D νηματοειδή σχηματισμό. Για περισσότερες τομές, τα σημεία μίας τροχιάς στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών, διαχέονται στον φασικό χώρο και σχηματίζουν ένα 4D νέφος σημείων το οποίο καταλαμβάνει μεγάλη περιοχή του χώρου των φάσεων περιβάλλοντας την περιοχή με τους περιστροφικούς τόρους και τον νηματοειδή σχηματισμό. Την ίδια δομή παρατηρήσαμε στην περιοχή όλων των m -περιοδικών τροχιών (με $m=2$ και 7) που εξετάσαμε στο σύστημα μας. Αυτό υποδεικνύει μία γενική συμπεριφορά.

Υπολογίσαμε τους Αριθμούς Lyapunov πεπερασμένου χρόνου ($LCN(t)$) τροχιών της παρούσας διατριβής. Για την περίπτωση των οργανωμένων τροχιών στην περιοχή ευσταθών περιοδικών τροχιών (είτε απλές είτε πολλαπλής περιόδου), οι οποίες αναπαριστούνταν από τόρους στην επιφάνεια τομής, ο $LCN(t)$ σύγλινε στο μηδέν (όπως αναμενόταν). Οι χαοτικές τροχιές στην περιοχή των ασταθών περιοδικών τροχιών (είτε απλές, είτε πολλαπλής περιόδου) διακρίνονταν σε δύο είδη: τις τροχιές κολλητικότητας και τις τροχιές που αναπαριστούνταν στην επιφάνεια τομής από νέφη σημείων. Για το πρώτο είδος χαοτικών τροχιών ο $LCN(t)$ στην αρχή μειωνόταν ή παρουσίαζε διάφορες διακυμάνσεις για όσο χρονικό διάστημα οι τροχιές παρέμεναν σε περιορισμένες περιοχές του φασικού χώρου. Ενώ μετά την απομάκρυνση των τροχιών από αυτές τις περιοχές ο $LCN(t)$ αυξάνοταν μέχρι να σταθεροποιηθεί σε μία θετική τιμή. Για το δεύτερο είδος χαοτικών τροχιών ο $LCN(t)$ σύγλινε πολύ

γρήγορα σε μία θετική τιμή.

Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε μία μικρή εισαγωγή στα δυναμικά συστήματα και την γαλαξιακή δυναμική. Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε το δυναμικό του συστήματός και τις τροχιές. Τα κεφάλαια 3 και 4 ασχολούνται με την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή απλών περιοδικών τροχιών και την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε τα αποτελεσματα μας για τους αριθμούς Lyapunov. Στο τέλος της διατριβής έχουμε τα συμπεράσματα (κεφάλαιο 6), το abstract (κεφάλαιο 7), την βιβλιογραφία στην αγγλική και ελληνική γλώσσα (κεφάλαια 8 και 9) και το παράρτημα (κεφάλαιο 10).

Λέξεις-Κλειδιά: Χάος και Δυναμικά Συστήματα, Γαλαξιακή Δυναμική, Δυναμική Αστρονομία, Μη Γραμμική Δυναμική, Χαμιλτονιανά Συστήματα.

1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε μερικές βασικές έννοιες που χρησιμοποιούμε στην παρούσα διατριβή από τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων (υποκεφάλαιο 1.1) και τη γαλαξιακή δυναμική (υποκεφάλαιο 1.2).

1.1 Δυναμικά συστήματα

1.1.1 Περί δυναμικών συστημάτων

Ως δυναμικό σύστημα ορίζουμε οποιοδήποτε φυσικό σύστημα στο οποίο:

1. η κατάσταση του μπορεί να προσδιορισθεί, σε κάποια ορισμένη χρονική στιγμή, από τις τιμές N μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_N .
2. η εξέλιξή του δίνεται από ένα σύστημα N διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &\dots \\ &\dots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \tag{1}$$

όπου οι N μεταβλητές αντιπροσωπεύουν διάφορες φυσικές ποσότητες όπως θέσεις, ταχύτητες, γωνίες, θερμοκρασίες, πιέσεις κ.λ.π.

Ας σημειωθεί πως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός ως προς την τάξη του συστήματος. Επίσης οι συναρτήσεις f_i μπορούν να εξαρτώνται και από τον χρόνο t .

Ένα δυναμικό σύστημα εξελίσσεται στο N -διάστατο χώρο (x_1, x_2, \dots, x_N) που καλείται **χώρος των φάσεων**. Η κατάσταση του συστήματος σε μία δοσμένη χρονική στιγμή μπορεί να παρασταθεί απλά με ένα σημείο στον χώρο αυτό. Το σημείο αυτό εξελίσσεται στο χρόνο και διαγράφει μία πορεία η οποία ονομάζεται **τροχιά** και η οποία προσδιορίζεται πλήρως από N αρχικές συνθήκες.

Είναι δυνατόν σε κάποιο δυναμικό σύστημα να υπάρχει μία συνάρτηση $I(x_1, x_2, \dots, x_N)$ των x_1, x_2, \dots, x_N (ή και του χρόνου t), της οποίας η τιμή να είναι σταθερή για κάθε τροχιά. Τότε μιλάμε για ένα **ολοκληρώμα** του δυναμικού συστήματος. Η χρησιμότητα ενός ολοκληρώματος είναι μεγάλη, διότι

λύνοντας την εξίσωση $I(x_1, x_2, \dots, x_N) = c$ ως προς μία μεταβλητή και αντικαθιστώντας την στις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος (1) μειώνουμε την τάξη του συστήματος σε $N - 1$. Ευνόητο είναι ότι, αν έχουμε \bar{N} -ολοκληρώματα $I_1, \dots, I_{\bar{N}}$ τότε μειώνουμε την τάξη του συστήματος σε $N - \bar{N}$.

Η τροχιά για την οποία ισχύει $\vec{x}(t) = \vec{x}(t + T)$ ονομάζεται **περιοδική τροχιά** με **περίοδο** T . Οι περιοδικές τροχιές διακρίνονται σε ευσταθείς και ασταθείς. Στην πρώτη περίπτωση οι γειτονικές τροχιές παραμένουν κοντά στη περιοδική τροχιά, ενώ στη δεύτερη τείνουν να απομακρυνθούν με την πάροδο του χρόνου.

Γύρω από μία ευσταθή περιοδική τροχιά οι τροχιές, που απομακρύνονται περιοδικά, ονομάζονται **ημιπεριοδικές**. Ονομάζονται έτσι διότι χωρίς να επιστρέφουν ακριβώς στο σημείο που ξεκίνησαν, επανέρχονται κοντά σε αυτό με τρόπο σχεδόν περιοδικό. Το σύστημα κοντά σε μία ευσταθή περιοδική τροχιά συμπεριφέρεται σαν ολοκληρώσιμο. Δηλαδή γύρω από μία ευσταθή περιοδική τροχιά υπάρχει πάντα μία νησίδα οργανωμένης κίνησης.

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό του αναλλοίωτου συνόλου τον οποίο θα χρειαστούμε αργότερα:

Ορισμός (αναλλοίωτο σύνολο): Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο, τότε: 1) (Δυναμικά Συστήματα) Το S θα λέμε ότι είναι αναλλοίωτο σε ένα δυναμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ με $x \in \mathbb{R}^n$, αν για κάθε $x_0 \in S$ έχουμε $x(t, x_0) \in S$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (όπου $x(0, x_0) = x_0$). 2) (Απεικονίσεις) Το S θα λέμε ότι είναι αναλλοίωτο σε μία απεικόνιση $x_{n+1} = g(x_n)$ με $x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ και $x_n \in \mathbb{R}^n$, αν για κάθε $x_0 \in S$ έχουμε $g^n(x_0) = \underbrace{g \circ g \dots \circ g}_{n \text{ φορές}}(x_0) \in S$ για κάθε n .

Αν ένα αναλλοίωτο σύνολο S έχει την δομή διανυσματικού υπόχωρου ή την δομή επιφάνειας ή την δομή πολλαπλότητας (υπερεπιφάνειας) τότε ονομάζεται αναλλοίωτος υπόχωρος ή αναλλοίωτη επιφάνεια ή αναλλοίωτη πολλαπλότητα (υπερεπιφάνεια) αντίστοιχα.

Γύρω από μία ασταθή περιοδική τροχιά έχουμε διαφορετική συμπεριφορά από αυτή που παρατηρούμε στην περιοχή μίας ευσταθούς περιοδικής τροχιάς. Στην περίπτωση αυτή έχουμε την ύπαρξη αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων (invariant manifolds).

Για τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο προσεγγίσεις:

1. Αναλυτική θεωρία: Προσπαθούμε να αποδείξουμε διάφορες ιδιότητες του δυναμικού συστήματος (φυσικά υπό ορισμένες προϋποθέσεις), χρησιμοποιώντας αναλυτικά μαθηματικά.
2. Αριθμητικά πειράματα: Μελετούμε τις ιδιότητες ενός δυναμικού συστή-

ματος με αριθμητικούς υπολογισμούς.

Στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιήσουμε αριθμητικά πειράματα.

1.1.2 Χαμιλτονιανά συστήματα

Τα συστήματα που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα διατριβή είναι τα λεγόμενα χαμιλτονιανά συστήματα. Τα χαμιλτονιανά συστήματα είναι μία ειδική κατηγορία δυναμικών συστημάτων. Ένα χαμιλτονιανό σύστημα χαρακτηρίζεται από ορισμένες επιπλέον ιδιότητες:

- Ο αριθμός διάστασης του χώρου των φάσεων είναι $N = 2n$, όπου $n =$ οι βαθμοί ελευθερίας του χαμιλτονιανού συστήματος. Οι μεταβλητές του, $2n$ το πλήθος, είναι: $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, όπου τα $y_i = \dot{x}_i$ ισούνται με τις παραγώγους των x_i ως προς το χρόνο.
- Είναι πλήρως ορισμένο από τη μοναδική συνάρτηση των $2n$ μεταβλητών $H(x_1, \dots, y_n)$ που καλείται χαμιλτονιανή (η οποία μπορεί να εξαρτάται και από το χρόνο t).

Οι βασικές διαφορικές εξισώσεις των μεταβλητών του είναι:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}\end{aligned}\tag{2}$$

οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **κανονικές εξισώσεις** ή εξισώσεις Hamilton (βλ. π.χ. Scheck 1994 §2.14). Αν σε ένα χαμιλτονιανό σύστημα η χαμιλτονιανή δεν περιέχει το χρόνο πέραν των μεταβλητών (x_1, \dots, y_n) μία συνάρτηση $I(x_1, \dots, y_n)$ θα την ονομάζουμε ολοκλήρωμα αν παραμένει σταθερή κατά μήκος κάθε τροχιάς. Δηλαδή:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \right) = 0\tag{3}$$

η εξίσωση αυτή λόγω των εξισώσεων Hamilton γίνεται:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial I}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0\tag{4}$$

Η ποσότητα:

$$[I, H] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial I}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

ονομάζεται αγκύλη Poisson μεταξύ των συναρτήσεων H και I (βλ. π.χ. Scheck 1994 §2.31). Επομένως το ολοκλήρωμα I ικανοποιεί τη σχέση:

$$[I, H] = 0 \quad (6)$$

Στην προηγούμενη σχέση αν θέσουμε $I = H$ έχουμε $[H, H] = 0$ επομένως η χαμιλτονιανή αποτελεί ένα ολοκλήρωμα (ολοκλήρωμα της ενέργειας). Άρα έχουμε:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (7)$$

επομένως:

$$H(x_1, \dots, y_n) = E_j \quad (8)$$

όπου E_j σταθερά. Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι σε κάθε τροχιά μία από τις $2n$ μεταβλητές του είναι δεσμευμένη από τις υπόλοιπες $2n - 1$ μέσω της προηγούμενης σχέσης. Αυτό συνεπάγεται ότι η διάσταση του χώρου των φάσεων μειώνεται κατά 1. Το γεγονός αυτό, για μικρά n , μπορεί να χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά για την πληρέστερη κατανόηση της δυναμικής του συστήματος.

1.1.3 Θεωρία του Τρίτου Ολοκληρώματος

Όταν ένα σύστημα είναι κοντά στην ολοκληρωσιμότητα³, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους διαταραχών για να βρούμε προσεγγιστικά ολοκληρώματα, τα οποία ισχύουν για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Συνήθως αυτά τα ολοκληρώματα έχουν την μορφή τυπικής δυναμοσειράς. Οι σειρές αυτές συνήθως αποκλίνουν, αλλά μπορούν να δώσουν πολύ καλά αποτελέσματα αν κρατήσουμε όρους μέχρι κάποια συγκεκριμένη τάξη (Poincaré 1893).

³Ένα χαμιλτονιανό σύστημα N βαθμών ελευθερίας ονομάζεται ολοκληρώσιμο αν έχει N ανεξάρτητα ολοκληρώματα (I_i με $i = 1, \dots, N$), τα οποία βρίσκονται σε ενέλιξη ($[I_i, I_j] = 0$, $\forall i, j$).

Τυπικά ολοκληρώματα για πολυωνυμικές χαμιλτονιανές συναρτήσεις δόθηκαν πρώτη φορά από τον Whittaker (Whittaker 1937 Ch. XVI §196-205), ο οποίος τα ονόμασε αδελφικά ολοκληρώματα. Ένα ολοκλήρωμα αυτού του είδους είναι το τρίτο ολοκλήρωμα το οποίο αναπτύχθηκε από τον Contopoulos (1960, 2002 §2.3.1) και το οποίο έχει πολλές χρήσιμες εφαρμογές στην γαλαξιακή δυναμική.

Αν η χαμιλτονιανή συνάρτηση H έχει την μορφή μίας δυναμοσειράς, μπορεί να γίνει κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων έτσι ώστε η H να ξεκινά από όρους δευτέρου βαθμού:

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} + \dots \quad (9)$$

με

$$H^{(2)} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{2} (y_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 x_{\lambda}^2) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{2} \omega_{\lambda} (q_{\lambda}^2 + p_{\lambda}^2) \quad (10)$$

Οι μεταβλητές $(x_{\lambda}, y_{\lambda})$ και $(q_{\lambda}, p_{\lambda})$ είναι κανονικές (ικανοποιούν τις εξισώσεις Hamilton) και συνδέονται από τις σχέσεις:

$$q_{\lambda} = \sqrt{\omega_{\lambda}} x_{\lambda}, p_{\lambda} = \frac{y_{\lambda}}{\sqrt{\omega_{\lambda}}} \quad (11)$$

Οι μεταβλητές $(q_{\lambda}, p_{\lambda})$ μπορεί να είναι μιγαδικές. Στην κατώτερη προσέγγιση η χαμιλτονιανή $H^{(2)}$ αναπαριστά n συζευγμένους ταλαντωτές με συχνότητες ω_{λ} . Σε αυτή την προσέγγιση έχουμε:

$$\Phi^{(2)} = I_{\lambda} = \frac{1}{2} (q_{\lambda}^2 + p_{\lambda}^2) \quad (12)$$

είναι ολοκληρώματα της κίνησης. Έτσι θα θεωρήσουμε τυπικά ολοκληρώματα της μορφής

$$\Phi = \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)} + \dots \quad (13)$$

θεωρώντας ότι οι συχνότητες ω_{λ} είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αν κρατήσουμε στο ολοκλήρωμα Φ μέχρι όρους τάξης r θα έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού r

$$\bar{\Phi}^{(r)} = \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \dots + \Phi^{(r)} \quad (14)$$

Οι συναρτήσεις $\Phi^{(3)}, \Phi^{(4)}, \dots$ υπολογίζονται βήμα-βήμα όπως φαίνεται παρακάτω.

Από τη στιγμή που το Φ είναι ολοκλήρωμα της κίνησης έχουμε ότι η παράγωγος ως προς το χρόνο είναι μηδέν (βλέπε υποκεφάλαιο 1.1.2) $\dot{\Phi} = [\Phi, H] = 0$.

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σειρές (9) και (13) για τα H και Φ μπορούμε να ξεχωρίσουμε τους διάφορους όρους στις αγκύλες Poisson:

$$[H^{(2)}, \Phi^{(2)}] + ([H^{(3)}, \Phi^{(2)}] + [H^{(2)}, \Phi^{(3)}]) + \dots = 0 \quad (15)$$

ο πρώτος όρος είναι δευτέρου βαθμού, ο δεύτερος και ο τρίτος είναι τρίτου βαθμού κ.λ.π. Αν θέσουμε τους όρους ίδιου βαθμού ίσους με το μηδέν θα υπολογίσουμε διαδοχικά τις συναρτήσεις $\Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}, \dots$. Πιο συγκεκριμένα η $\Phi^{(2)}$ είναι ένα ολοκλήρωμα της χαμιλτονιανής $H^{(2)}$ δευτέρου βαθμού και έχει την μορφή της σχέσης (12). Το τυπικό ολοκλήρωμα Φ συγκλίνει μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις.

Είναι γνωστό από το KAM θεώρημα (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962, Arnold 1978 p.399-415), ότι αν ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας είναι σχεδόν ολοκληρώσιμο, τότε για μεγάλο αριθμό αρχικών συνθηκών οι τροχιές βρίσκονται πάνω σε αναλλοίωτες επιφάνειες οι οποίες είναι τοπολογικά ισοδύναμες με n -διάστατους τόρους.

Οι αναλλοίωτοι τόροι μπορούν να αναπαρασταθούν ασυμπτωτικά χρησιμοποιώντας τα τυπικά ολοκληρώματα Φ . Ανάμεσα σε δύο δεδομένους τόρους υπάρχουν ασταθείς περιοδικές τροχιές σε συντονισμό και κοντά σε αυτές υπάρχει χάος. Αν οι συντονισμοί αυτοί είναι μεγάλης τάξης, τότε οι χαοτικές περιοχές είναι πολύ μικρές και τα τυπικά ολοκληρώματα ισχύουν για μεγάλο χρονικό διάστημα (εκθετικά μεγάλα χρονικά διαστήματα-Nekhoroshev 1977) σε μεγάλο μέρος του φασικού χώρου.

Ένα από τα θέματα της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη της δομής των αναλλοίωτων τόρων σε ένα χαμιλτονιανό σύστημα τριών βαθμών ελευθερίας καθώς και η δυναμική συμπεριφορά χαοτικών τροχιών οι οποίες παγιδεύονται στην περιοχή αναλλοίωτων τόρων για μεγάλα χρονικά διαστήματα πριν την διαχυσή τους σε μεγαλύτερη περιοχή του φασικού χώρου.

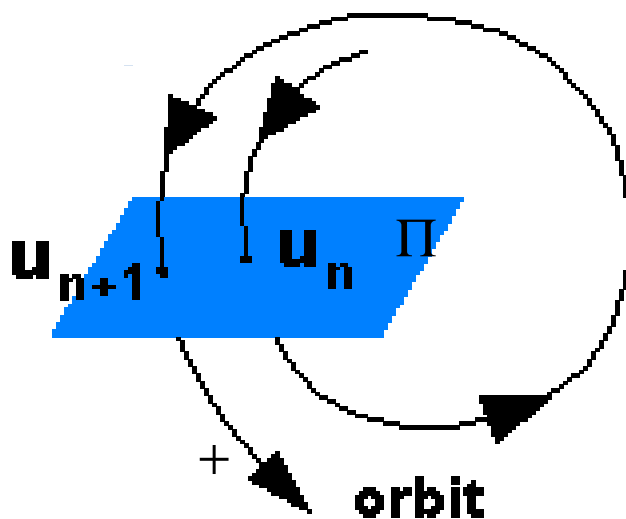
1.1.4 Επιφάνειες Τομής

Το πρωτοποριακό έργο που έβαλε τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας των δυναμικών συστημάτων είναι το τρίτομο έργο του H.Poincaré : “Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste” (1892). Μία από τις πιο αποτελεσματικές και πρακτικές μεθόδους που προτείνει ο Poincaré είναι η μέθοδος της επιφάνειας τομής (surface of section). Περιληπτικά η μέθοδος έχει ως εξής:

Έστω ότι μελετούμε ένα δισδιάστατο ($2D$) πρόβλημα σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Τότε ο χώρος των φάσεων έχει διάσταση 4 ($4D$) έστω (x, y, \dot{x}, \dot{y}) . Με το ολοκλήρωμα της ενέργειας $H(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, μπορούμε να ελαττώσουμε, όπως έχουμε προαναφέρει, τη διάσταση του χώρου κατά μία και έτσι έχουμε ένα χώρο με διάσταση 3 ($3D$) (αν λύσουμε π.χ. ως προς \dot{y} , τότε ο χώρος των φάσεων θα είναι (x, y, \dot{x})). Έστω ότι μπορούμε να ορίσουμε μία δισδιάστατη αναλυτική επιφάνεια, μέσα σε αυτόν τον χώρο, έτσι ώστε κάθε τροχιά του συστήματος να τέμνει την επιφάνεια αυτή τουλάχιστον μία φορά εντός ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος, αρκούντως μεγάλου και πάντοτε με την ίδια φορά (π.χ. έστω το ημιεπίπεδο $(\Pi) y = 0$, με $\dot{y} > 0$ στο Σχ. 1). Τότε η επιφάνεια αυτή (το ημιεπίπεδο (Π)) ονομάζεται επιφάνεια τομής. Αν u_0 είναι το αρχικό σημείο μίας τροχιάς παρατηρούμε τις διαδοχικές τομές $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$, της τροχιάς με αυτό το επίπεδο. Φυσικά μπορούμε να πάμε και προς τα πίσω στον χρόνο με αντίθετη φορά και να βρούμε τις τομές, $u_0, u_{-1}, u_{-2}, \dots$

Αν τώρα έχουμε ένα τρισδιάστατο πρόβλημα σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Τότε ο χώρος των φάσεων έχει διάσταση 6 ($6D$) $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Με το ολοκλήρωμα της ενέργειας $H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, μπορούμε να ελαττώσουμε, όπως έχουμε προαναφέρει, την διάσταση του χώρου κατά μία και έτσι ο χώρος των φάσεων θα έχει διάσταση 5 (π.χ. αν λύσουμε ως προς \dot{y} τότε ο χώρος των φάσεων θα είναι τώρα $(x, y, z, \dot{x}, \dot{z})$). Η τετραδιάστατη επιφάνεια $y = 0$, με $\dot{y} > 0$, εάν τέμνεται από κάθε τροχιά του συστήματος τουλάχιστον μία φορά εντός ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος, αρκούντως μεγάλου και πάντοτε με την ίδια φορά είναι μία επιφάνεια τομής.

Οι περιοδικές τροχιές περιγράφονται στην επιφάνεια τομής από αμετάβλητα σημεία (fixed points). Μία περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 1 στην επιφάνεια τομής θα αντιπροσωπεύεται με ένα σημείο. Με τον όρο πολλαπλότητα εννοούμε τον αριθμό τομών με την επιφάνεια τομής (επιφάνεια $y = 0$ με $\dot{y} > 0$) που χρειάζεται μία περιοδική τροχιά για



Σχήμα 1: Επιφάνεια τομής. Η θετική φορά ορίζεται προς τα κάτω.

να κλείσει. Οι περιοδικές τροχιές πολλαπλότητας 1 (απλές περιοδικές τροχιές) χρειάζονται μία τομή με την επιφάνεια τομής (επιφάνεια $y = 0$ με $\dot{y} > 0$) για να κλείσουν. Γενικά οι περιοδικές τροχιές πολλαπλότητας n χρειάζονται n τομές με την επιφάνεια τομής (επιφάνεια $y = 0$, με $\dot{y} > 0$) για να κλείσουν.

Το κύριο αντικείμενο της διατριβής μου είναι η μελέτη της δομής του χώρου μίας $4D$ επιφάνειας τομής ενός $3D$ χαμιλτονιανού συστήματος που περιγράφει ένα περιστρεφόμενο γαλαξιακό δυναμικό. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε το πρόβλημα στη γειτονιά μίας ευσταθούς, μίας απλά ασταθούς, μίας διπλά ασταθούς και μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς (για τους ορισμούς βλέπε υποκεφάλαιο 1.1.6). Επίσης θα μελετήσουμε τη δυναμική στη γειτονιά περιοδικών τροχιών πολλαπλότητας ≥ 2 .

Μέχρι τώρα για να παρασταθεί η δομή της τετραδιάστατης επιφάνειας της τομής, έχουν χρησιμοποιηθεί 4 μέθοδοι:

1. **Προβολές σε δισδιάστατα επίπεδα.** Στην $4D$ επιφάνεια τομής θεωρούμε μία τρισδιάστατη επιφάνεια π.χ. την (x, z, \dot{x}) . Κατόπιν την προβάλλουμε σε δισδιάστατες επιφάνειες π.χ την (x, \dot{x}) , (z, \dot{x}) και (z, \dot{x}) (Contopoulos & Barbanis 1989, Skokos et al. 1996, 1997, 1999, Contopoulos 2002 §2.11.11, Σκόκος 1997).

2. **Στερεοσκοπικές προβολές σχήματος στην 4D επιφάνεια τομής.** Στην 4D επιφάνεια τομής θεωρούμε μία τρισδιάστατη επιφάνεια π.χ. την (x, z, \dot{x}) . Με αυτή τη μέθοδο παίρνουμε δύο διαφορετικές προβολές, κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί στην οπτική γωνία ενός από τους δύο οφθαλμούς. Απεικονίζουμε τα δύο σχήματα διαδοχικά λαμβάνοντας υπόψη την απόσταση των οφθαλμών και βλέπουμε το σχήμα (Froeschlé 1970, Martinet & Magnenat 1981, Contopoulos et al. 1982).
3. **Η μέθοδος των στιγμιοτύπων.** Στην 4D επιφάνεια τομής θεωρούμε μία τρισδιάστατη επιφάνεια π.χ. την (x, z, \dot{x}) . Στην μέθοδο αυτή παράγουμε δισδιάστατα σχήματα για διάφορες τιμές της τρίτης διάστασης. Από τη μεταβολή των δισδιάστατων σχημάτων σαν συνάρτηση της τρίτης διάστασης αντιλαμβάνομαστε τη δομή της επιφάνειας (Froeschlé 1970, 1972).
4. **Η μέθοδος χρώματος και περιστροφής.** Στην 4D επιφάνεια τομής θεωρούμε μία τρισδιάστατη επιφάνεια π.χ. την (x, z, \dot{x}) . Το τρισδιάστατο αυτό σχήμα το περιστρέφουμε με τη βοήθεια λογισμικών πακέτων στην οθόνη του υπολογιστή βλέποντας το από όλες τις πλευρές. Επιπλέον με τη βοήθεια του χρώματος παριστάνουμε την τέταρτη διάσταση της επιφάνειας της τομής (Patsis & Zachilas 1994). Αυτή τη μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα διατριβή.

1.1.5 Η Χαμιλτονιανή του συστήματος.

Στην παρούσα διατριβή θα μελετήσω ένα σύστημα με δυναμικό $\Phi(x, y, z)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες το οποίο προσεγγίζει το δυναμικό του Γαλαξία μας (βλέπε παράγραφος 2.1). Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από τον z -άξονα με γωνιακή ταχύτητα Ω_b . Το βασικό σύνολο υπολογισμών έχει γίνει με $\Omega_b = 60 \text{ km/s/kpc}$. Σύμφωνα με πρόσφατες μελέτες αυτή είναι η τιμή της περιστροφής της ράβδου του Γαλαξία μας που έχει ακτίνα περίπου 3 kpc (Englmaier & Gerhard 1999). Η χαμιλτονιανή ενός 3D περιστρεφόμενου συστήματος περί τον άξονα z περιγράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από την παρακάτω σχέση:

$$H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Phi(x, y, z) - \frac{1}{2}\Omega_b^2(x^2 + y^2) \quad (16)$$

Στην παρούσα εργασία την αριθμητική τιμή της Χαμιλτονιανής θα τη συμβολίζουμε με E_j (**σταθερά Jacobi**) και θα αναφερόμαστε σε αυτήν ως η 'ενέργεια'.

Το ενεργό δυναμικό Φ_{eff} ορίζεται ως εξής :

$$\Phi_{eff}(x, y, z) = \Phi(x, y, z) - \frac{1}{2}\Omega_b^2(x^2 + y^2) \quad (17)$$

οπότε η Χαμιλτονιανή παίρνει την μορφή:

$$H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_{eff}(x, y, z) \quad (18)$$

Την επιφάνεια $\Phi_{eff}(x, y, z) = E_j$, όπου E_j η ενέργεια ενός αστέρα, την ονομάζουμε **επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας (zero-velocity surface)**. Η ταχύτητα ενός αστέρα μηδενίζεται πάνω στην επιφάνεια αυτή. Αν βρισκόμαστε στο επίπεδο $z = 0$ του γαλαξία τότε η καμπύλη $\Phi_{eff}(x, y, 0) = E_j$ ονομάζεται **καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (zero-velocity curve (CZV))**. Η ταχύτητα ενός αστέρα μηδενίζεται πάνω στην καμπύλη αυτή. Αν θεωρήσουμε $y = 0$, για κάθε $E_j < E_L$ (όπου E_L η σταθερά Jacobi στα σημεία ισορροπίας L_4, L_5) ορίζουμε στο επίπεδο (E_j, x) τέσσερις τιμές του x , συμμετρικές ως προς τον $x = 0$ άξονα, αν η $\Phi(x, y, z)$ είναι συμμετρική ως προς x . Κατά αυτόν τον τρόπο ορίζουμε μία καμπύλη που δίδεται από την (18) για $z = y = 0$ και $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, την οποία ονομάζουμε επίσης καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (CZV). Η καμπύλη αυτή διαχωρίζει τις περιοχές που επιτρέπεται η κίνηση, από αυτές που απαγορεύεται.

1.1.6 Ευστάθεια περιοδικών τροχιών

Επιλύοντας τις εξισώσεις κίνησης του συστήματός μας, μπορούμε να βρούμε περιοδικές και μη περιοδικές λύσεις (τροχιές). Οι περιοδικές τροχιές μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε τη βασική δυναμική συμπεριφορά σε ένα μοντέλο. Από αυτές, οι πιο σημαντικές για την κατανόηση των παρατηρούμενων δομών στους γαλαξιακούς δίσκους (ράβδων και σπειρών) αναμένεται να είναι οι ευσταθείς, διότι παγιδεύουν ένα μεγάλο αριθμό ημιπεριοδικών τροχιών γύρω τους. Ο υπολογισμός της ευστάθειας των περιοδικών τροχιών σε χαμιλτονιανά συστήματα 3 βαθμών ελευθερίας βασίζεται στη μέθοδο του Broucke (Broucke 1969, Hadjidemetriou 1975). Έστω ότι έχουμε μία περιοδική τροχιά σε μία δοσμένη τιμή της ενέργειας:

$$H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = E_j \quad (19)$$

Οι αρχικές συνθήκες: $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ επαληθεύουν την προηγούμενη εξίσωση. Λύνοντας την εξίσωση (19) ως προς \dot{y}_0 και παίρνοντας πάντα $y = 0$ με $\dot{y} > 0$, ορίζουμε μία απεικόνιση (απεικόνιση Poincaré) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ στον $4D$ χώρο (x, z, \dot{x}, \dot{z}) η οποία είναι μοναδική (Abraham & Marsden 1978 p.525). Η απεικόνιση T συνδέει το αρχικό σημείο $P(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0)$ με το επόμενο σημείο $P(x_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{z}_1)$ πάνω στην επιφάνεια τομής. Η απεικόνιση T δίνεται από εξισώσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \\ z_1 &= g_2(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \\ \dot{x}_1 &= g_3(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \\ \dot{z}_1 &= g_4(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \end{aligned} \quad (20)$$

Προφανώς οι παραπάνω σχέσεις για την περιοδική τροχιά που μας ενδιαφέρει γράφονται:

$$\begin{aligned} x_0 &= g_1(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \\ z_0 &= g_2(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \\ \dot{x}_0 &= g_3(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \\ \dot{z}_0 &= g_4(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) \end{aligned} \quad (21)$$

Αν στη συνέχεια διαταράξουμε λίγο την περιοδική τροχιά δηλαδή αν πάρουμε μία γειτονική τροχιά με αρχικές συνθήκες: $x_0 + \Delta x_0, z_0 + \Delta z_0, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_0, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_0 + \Delta x_1 &= g_1(x_0 + \Delta x_0, z_0 + \Delta z_0, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_0, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_0) \\ z_0 + \Delta z_1 &= g_2(x_0 + \Delta x_0, z_0 + \Delta z_0, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_0, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_0) \\ \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_1 &= g_3(x_0 + \Delta x_0, z_0 + \Delta z_0, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_0, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_0) \\ \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_1 &= g_4(x_0 + \Delta x_0, z_0 + \Delta z_0, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_0, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_0) \end{aligned} \quad (22)$$

Αν αναπτύξουμε τις σχέσεις (22) κατά Taylor θα έχουμε με την βοήθεια των σχέσεων (21):

$$\begin{aligned}
 x_0 + \Delta x_1 &= x_0 + \frac{\partial g_1}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial g_1}{\partial z} \Delta z_0 + \frac{\partial g_1}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial g_1}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z}_0 + \dots \\
 z_0 + \Delta z_1 &= z_0 + \frac{\partial g_2}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial g_2}{\partial z} \Delta z_0 + \frac{\partial g_2}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial g_2}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z}_0 + \dots \\
 \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 + \frac{\partial g_3}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial g_3}{\partial z} \Delta z_0 + \frac{\partial g_3}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial g_3}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z}_0 + \dots \\
 \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}_1 &= \dot{z}_0 + \frac{\partial g_4}{\partial x} \Delta x_0 + \frac{\partial g_4}{\partial z} \Delta z_0 + \frac{\partial g_4}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial g_4}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z}_0 + \dots
 \end{aligned} \tag{23}$$

όπου $\partial g_i / \partial x, \partial g_i / \partial z, \partial g_i / \partial \dot{x}, \partial g_i / \partial \dot{z}, i = 1, \dots, 4$ υπολογισμένα στο $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0)$.
Αν κρατήσουμε όρους μέχρι πρώτης τάξης και θέσουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_i}{\partial x} &= a_{i1} \\
 \frac{\partial g_i}{\partial z} &= a_{i2} \\
 \frac{\partial g_i}{\partial \dot{x}} &= a_{i3} \\
 \frac{\partial g_i}{\partial \dot{z}} &= a_{i4} \\
 i &= 1, \dots, 4
 \end{aligned} \tag{24}$$

το σύστημα γράφεται με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta z_1 \\ \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

οπότε έχουμε:

$$\vec{\xi} = A \vec{\xi}_0 \tag{26}$$

όπου $\vec{\xi}_0$ είναι το διάνυσμα στήλη των αρχικών διαταραχών από την περιοδική τροχιά, $\vec{\xi}$ είναι το διάνυσμα των αποκλίσεων της γειτονικής τροχιάς στην πρώτη τομή με την επιφάνεια τομής και A είναι ο μονόδρομος πίνακας 4×4 της απεικόνισης T .

Η προηγούμενη εξίσωση εκφράζει τις αποκλίσεις από την περιοδική τροχιά στην πρώτη τομή με το $y = 0$ με $\dot{y} > 0$, συναρτήσει των αρχικών διαταραχών.

Προφανώς την απεικόνιση T μπορούμε να την εφαρμόσουμε πάλι στο σημείο $P(x_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{z}_1)$, οπότε το επόμενο σημείο $P(x_2, z_2, \dot{x}_2, \dot{z}_2)$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta z_2 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{z}_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Άρα και το n -οστό σημείο θα μπορεί να δοθεί από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta z_n \\ \Delta \dot{x}_n \\ \Delta \dot{z}_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (29)$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας 4×4 . Έχουμε δηλαδή:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = 0 \quad (30)$$

οπότε

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta \quad (31)$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Για τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχουμε:

$$a = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) = -tr(A) \quad (32)$$

$$\beta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (33)$$

$$\gamma = -(A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}) \quad (34)$$

$$\delta = \det(A) \quad (35)$$

και A_{ii} είναι οι ελάχιστονες ορίζουσες 3×3 του πίνακα A .

Ο υπολογισμός των συντελεστών των εξισώσεων (32 - 35) γίνεται, αφού πρώτα υπολογιστούν τα στοιχεία a_{ij} του πίνακα A (Ζαχειλάς 1988) κατά τον ακόλουθο τρόπο.

Προσθέτουμε μία μικρή διαταραχή ϵ ($= 10^{-9}$) στην αρχική τιμή x_0 της περιοδικής τροχιάς και υπολογίζουμε την καινούργια αυτή τροχιά έως ότου τμήσει ξανά το επίπεδο $y = 0$ με $\dot{y} > 0$.

Τότε έχουμε αμέσως τα τέσσερα πρώτα στοιχεία του A , a_{ij} , $i = 1, \dots, 4$ και $j = 1$:

$$a_{1j} = \frac{x_1 - x_0}{\epsilon} \\ a_{2j} = \frac{z_1 - z_0}{\epsilon} \\ a_{3j} = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_0}{\epsilon} \\ a_{4j} = \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_0}{\epsilon} \quad (36)$$

Στην συνέχεια κρατάμε το αρχικό x_0 και προσθέτουμε την ίδια διαταραχή ϵ στο z_0 της περιοδικής τροχιάς. Υπολογίζουμε την νέα αυτή τροχιά έως ότου τμήσει το επίπεδο $y = 0$ με $\dot{y} > 0$.

Από τον υπολογισμό αυτό παίρνουμε άλλα τέσσερα στοιχεία του A , τα a_{ij} με $i = 1, \dots, 4$ και $j = 2$ πάλι μέσω των σχέσεων (36):

Όπως είναι ευνόητο, η ίδια διαδικασία εκτελείται διαταράσσοντας κατά ϵ το \dot{x}_0 έτσι υπολογίζουμε τα: a_{ij} με $i = 1, \dots, 4$ και $j = 3$. Ενώ στη συνέχεια διαταράσσοντας το \dot{z}_0 υπολογίζουμε τα: a_{ij} , $i = 1, \dots, 4$ και $j = 4$.

Ο μονόδρομος πίνακας ικανοποιεί τη συμπλεκτική ιδιότητα (Arnold 1978 p.225, Arnold & Givental 2000):

$$A^T J A = J \quad (37)$$

όπου A^T ο ανάστροφος πίνακας του A και J ο παρακάτω 4×4 πίνακας :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Ο πίνακας J που ορίσθηκε μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$J^{-1} = -J = J^T \quad (39)$$

$$J^2 = -I \quad (40)$$

όπου J^T ο ανάστροφος πίνακας του J .

Στην σχέση (37) αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη αριστερά με J^{-1} θα έχουμε:

$$J^{-1} A^T J A = J^{-1} J \quad (41)$$

δηλαδή:

$$J^{-1} A^T J A = I \quad (42)$$

Ύστερα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη από δεξιά με το A^{-1} και βρίσκουμε ότι:

$$J^{-1} A^T J = A^{-1} \quad (43)$$

Επομένως οι πίνακες A^T και A^{-1} είναι όμοιοι και σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας (Ανδρεαδάκης 1991 κεφ.6) οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του A^T . Είναι επίσης γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T και αντίστροφες με τις ιδιοτιμές του αντιστρόφου πίνακα A^{-1} (Ανδρεαδάκης 1991 κεφ.6). Άρα τελικά από τη σχέση (43) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A ,

$$\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_4\} \quad (44)$$

είναι ίσο με το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A^{-1} , $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_4^{-1}\}$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα A ταξινομούνται κατά αντίστροφα ζεύγη $\{\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}\}$.

Μετά υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A ως προς λ^{-1} και θεωρούμε την αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) + a\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) + \beta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + \gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \delta = 0 \quad (45)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης με λ^4 :

$$1 + a\lambda + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda^3 + \delta\lambda^4 = 0 \quad (46)$$

Οπότε καταλήγουμε σε ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο ως προς λ , $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = 1 + a\lambda + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda^3 + \delta\lambda^4 \quad (47)$$

Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα $p(\lambda)$ και $f(\lambda)$ έχουν βαθμό 4 όσο δηλαδή είναι η διάσταση του πίνακα A . Σύμφωνα με γνωστή πρόταση της γραμμικής άλγεβρας (Ανδρεαδάκης 1991 κεφ.6) το καθένα από αυτά τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα είναι το ελάχιστο πολυώνυμο (δηλαδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που έχει το μικρότερο βαθμό). Όμως είναι γνωστό ότι το ελάχιστο πολυώνυμο για κάθε πίνακα είναι μοναδικό (Ανδρεαδάκης 1991 κεφ.6). Επομένως τα πολυώνυμα $p(\lambda)$ και $f(\lambda)$ είναι ίσα. Εξισωνοντάς τα έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\delta &= 1 \\ \gamma &= a\end{aligned}\tag{48}$$

Δηλαδή η ορίζουσα του μονόδρομου πίνακα A λόγω της (35) είναι ίση με τη μονάδα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + \beta\lambda^2 + a\lambda + 1\tag{49}$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + \beta\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0\tag{50}$$

Προηγουμένως αποδείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\{\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}\}$, οι οποίες αποτελούν λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Άρα το πολυώνυμο τετάρτου βαθμού στο αριστερό μέλος της (50) μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο δύο πολυωνύμων δευτέρου βαθμού όπου το ένα πολυώνυμο θα έχει ρίζες τις λ_1 και λ_1^{-1} και το άλλο πολυώνυμο τις λ_2 και λ_2^{-1} . Δηλαδή το ένα πολυώνυμο θα έχει ως άθροισμα ριζών το $\lambda_1 + 1/\lambda_1$ και ως γινόμενο το 1, ενώ το άλλο θα έχει ως άθροισμα ριζών το $\lambda_2 + 1/\lambda_2$ και ως γινόμενο το 1. Επομένως η (50) γράφεται :

$$\left(\lambda^2 - \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)\lambda + 1\right)\left(\lambda^2 - \left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\lambda + 1\right) = 0\tag{51}$$

Αν θέσουμε:

$$\begin{aligned}b_1 &= -\left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \\ b_2 &= -\left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\end{aligned}\tag{52}$$

τότε έχουμε:

$$(\lambda^2 + b_1\lambda + 1)(\lambda^2 + b_2\lambda + 1) = 0 \quad (53)$$

Μετά από πράξεις η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\lambda^4 + (b_1 + b_2)\lambda^3 + (b_1b_2 + 2)\lambda^2 + (b_1 + b_2)\lambda + 1 = 0 \quad (54)$$

Εξισώνοντας τις (49) και (54) έχουμε:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= a \\ b_1b_2 &= \beta - 2 \end{aligned} \quad (55)$$

Οπότε καταλήγουμε ότι τα b_1 και b_2 είναι λύσεις μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$x^2 - ax + \beta - 2 = 0 \quad (56)$$

άρα:

$$b_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (57)$$

όπου

$$\Delta = a^2 - 4(\beta - 2) \quad (58)$$

Τα b_1 και b_2 ονομάζονται **δείκτες ευστάθειας**.

Από τις σχέσεις (52) έχουμε :

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} = -b_1 \quad (59)$$

ενώ ισχύει:

$$\lambda_1 \frac{1}{\lambda_1} = 1 \quad (60)$$

ομοίως:

$$\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} = -b_2 \quad (61)$$

και ισχύει:

$$\lambda_2 \frac{1}{\lambda_2} = 1 \quad (62)$$

οπότε τα δύο ζευγάρια ιδιοτιμών $(\lambda_1, 1/\lambda_1)$ και $(\lambda_2, 1/\lambda_2)$ είναι λύσεις των εξισώσεων:

$$x^2 + b_1x + 1 = 0 \quad (63)$$

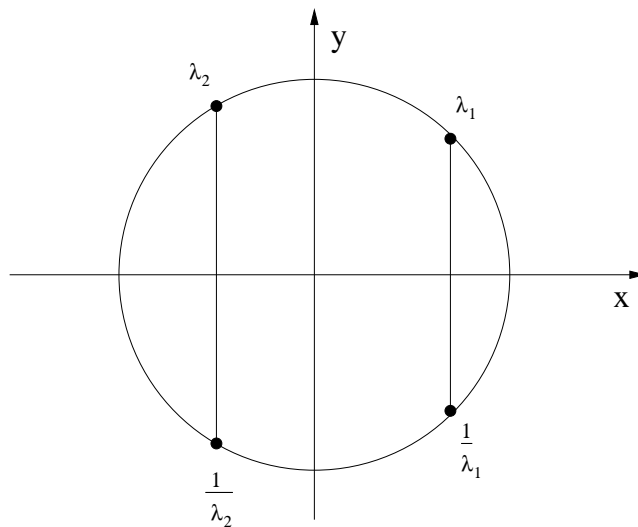
$$x^2 + b_2x + 1 = 0 \quad (64)$$

αντίστοιχα. Τα δύο ζευγάρια λύσεων $(\lambda_1, 1/\lambda_1)$ και $(\lambda_2, 1/\lambda_2)$ των εξισώσεων (63) και (64) αντίστοιχα δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \frac{1}{\lambda_1} &= \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4}}{2} \\ \lambda_2, \frac{1}{\lambda_2} &= \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4}}{2} \end{aligned} \quad (65)$$

Μία τροχιά χαρακτηρίζεται σαν **ευσταθής** (S) όταν όλες οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα της απεικόνισης είναι διακεκριμένες και μιγαδικές και βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου (Arnold 1978 p. 227- Σχ. 2). Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (57), (58), (65) αυτό συμβαίνει όταν: $\Delta > 0$ και $|b_i| < 2$ με $i = 1, 2$.

Η μετάβαση από την ευστάθεια στην αστάθεια συμβαίνει όταν $\Delta = 0$ ή όταν $|b_1| < 2, |b_2| = 2$ ή $|b_2| < 2, |b_1| = 2$. Αστάθεια έχουμε όταν $\Delta < 0$ ή όταν $\Delta > 0$ αλλά $|b_i| > 2$ για τουλάχιστον έναν από τους δείκτες i ή και για τους δύο. Αναλυτικότερα την αστάθεια τη χωρίζουμε σε τρεις κατηγορίες (Contopoulos & Magnenat 1985):



Σχήμα 2: Αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο των ιδιοτιμών για την περίπτωση της **ευστάθειας**.

1. Αν $\Delta > 0$ και $|b_1| > 2$, $|b_2| < 2$ ή $|b_1| < 2$, $|b_2| > 2$, τότε η τροχιά χαρακτηρίζεται **απλά ασταθής (U)**. Στην περίπτωση αυτή οι δύο ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα της απεικόνισης είναι μιγαδικές και βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, ενώ οι άλλες δύο είναι πραγματικές και είναι είτε θετικές, είτε αρνητικές (Σχ. 3).
2. Αν $\Delta > 0$ και $|b_1| > 2$ και $|b_2| > 2$, τότε η τροχιά μας χαρακτηρίζεται **διπλά ασταθής (DU)**. Στην περίπτωση αυτή και οι τέσσερις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα της απεικόνισης είναι πραγματικές. Οι ιδιοτιμές μπορεί να είναι είτε και οι τέσσερις θετικές, είτε και οι τέσσερις αρνητικές, είτε οι δύο θετικές και οι άλλες δύο αρνητικές (Σχ. 4).
3. Αν $\Delta < 0$, τότε η τροχιά μας χαρακτηρίζεται **μιγαδικά ασταθής (Δ)** (Contopoulos & Magnenat 1985, Pfenniger 1985a,b, Ζαχείλας 1988, Zachilas 1993). Στην περίπτωση αυτή και οι τέσσερις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα της απεικόνισης είναι μιγαδικές και βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου (Σχ. 5). Η κατηγορία αυτή της αστάθειας είναι πολύ σημαντική καθώς εμφανίζεται μόνο σε συστήματα τριών (ή περισσότερων) βαθμών ελευθερίας (Contopoulos 1986b, Skokos 2001). Στην περίπτωση της μιγαδικής αστάθειας οι ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 είναι μεταξύ τους μιγαδικά συζυγείς $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

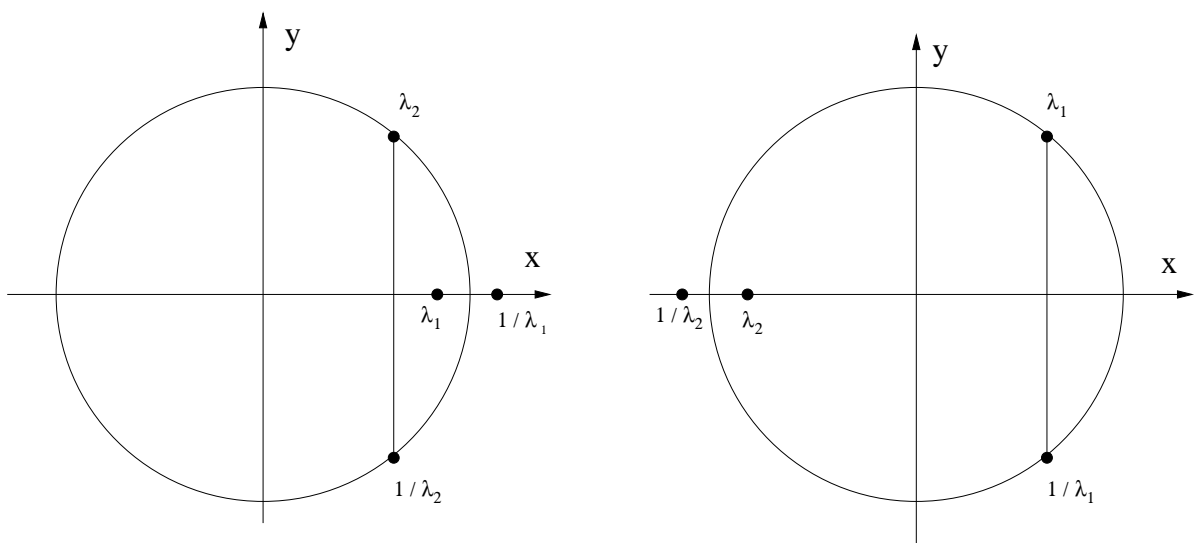
(Σχ. 5). Αλλά και οι ιδιοτιμές $1/\lambda_1$ και $1/\lambda_2$ είναι μεταξύ τους μιγαδικά συζυγείς $\frac{1}{\lambda_1} = \overline{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}$ (Σχ. 5).

Στην περιοχή μίας ασταθούς περιοδικής τροχιάς μπορούμε να ορίσουμε τους εξής αναλλοίωτους υπόχωρους στον φασικό χώρο της 4D απεικόνισης Poincaré που μελετάμε (Wiggins 2003 p.40-41):

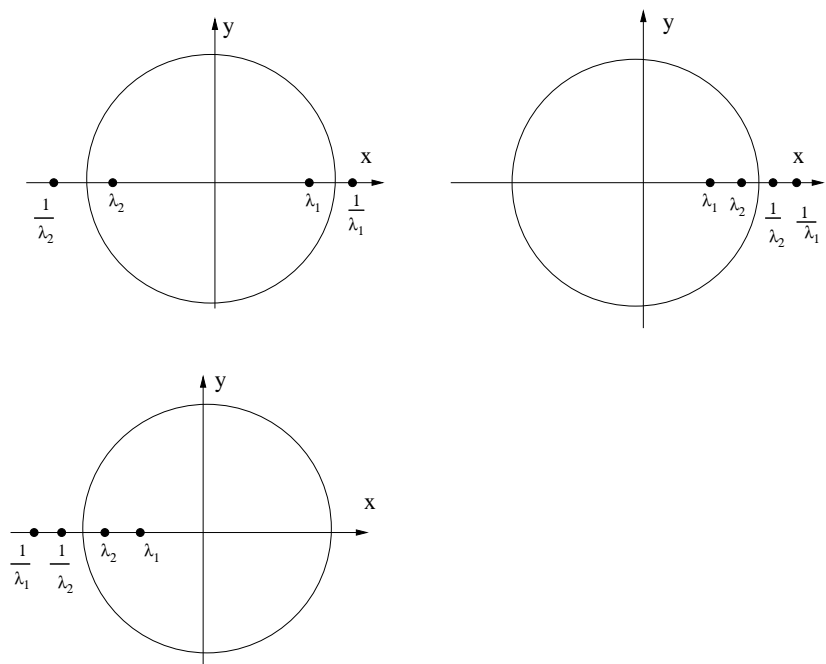
- Ο υπόχωρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα (δύο στην περίπτωση της μιγαδικής και διπλής αστάθειας - ένα στην περίπτωση της απλής αστάθειας) τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα οι οποίες βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Ο υπόχωρος αυτός είναι ο **ευσταθής** αναλλοίωτος υπόχωρος.
- Ο υπόχωρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα (δύο στην περίπτωση της μιγαδικής και διπλής αστάθειας - ένα στην περίπτωση της απλής αστάθειας) τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα οι οποίες βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Ο υπόχωρος αυτός είναι ο **ασταθής** αναλλοίωτος υπόχωρος.
- Ο υπόχωρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα (δύο στην περίπτωση της απλής αστάθειας) τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα οι οποίες βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Ο υπόχωρος αυτός είναι ο **κεντρικός** αναλλοίωτος υπόχωρος.

Οι λύσεις του συστήματός μας συγκλίνουν προς την περιοδική τροχιά πάνω στον ευσταθή υπόχωρο, αποκλίνουν πάνω στον ασταθή και παρουσιάζουν αδιάφορη ευστάθεια (για την οποία χρειάζονται μη γραμμικοί όροι για την περιγραφή της) πάνω στον κεντρικό υπόχωρο.

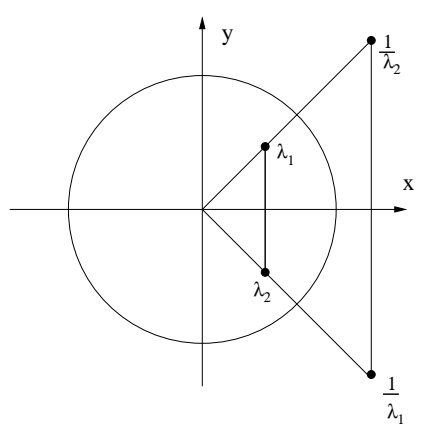
Οι υπόχωροι αυτοί αποτελούν την τοπική (γραμμική) προσέγγιση των αντίστοιχων αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων (υπερεπιφανειών). Την μοναδικότητα και την ύπαρξη της ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας εγγυάται το θεώρημα ευσταθούς (ασταθούς) πολλαπλότητας (Meyer, Hall & Offin 2009 §8.6). Την ύπαρξη (αλλά όχι την μοναδικότητα) της κεντρικής πολλαπλότητας εγγυάται το θεώρημα της κεντρικής πολλαπλότητας (Abraham & Marsden 1978 p. 526).



Σχήμα 3: Αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο των ιδιοτιμών για την περίπτωση της απλής αστάθειας.



Σχήμα 4: Αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο των ιδιοτιμών για την περίπτωση της διπλής αστάθειας.



Σχήμα 5: Αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο των ιδιοτιμών για την περίπτωση της μιγαδικής αστάθειας.

1.1.7 Θεώρημα Krein - Moser. Τρόποι μετάβασης από την ευστάθεια στην αστάθεια.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.1.6 υπάρχουν βασικά τρεις τρόποι μετάβασης από την ευστάθεια στην αστάθεια. Παραστατικά θα γράφουμε:

1. Από $S \rightarrow U$.
2. Από $S \rightarrow DU$ (οριακή περίπτωση).
3. Από $S \rightarrow \Delta$.

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, μία περιοδική τροχιά είναι ευσταθής όταν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο. Αστάθεια θα προκύψει όταν υπό την επίδραση κάποιας διαταραχής οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα μετατοπιστούν εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων w, p ως (Ζαχείλας 1988, Χατζηδημητρίου 1989):

$$\langle w, p \rangle = i(Jw, p) \quad (66)$$

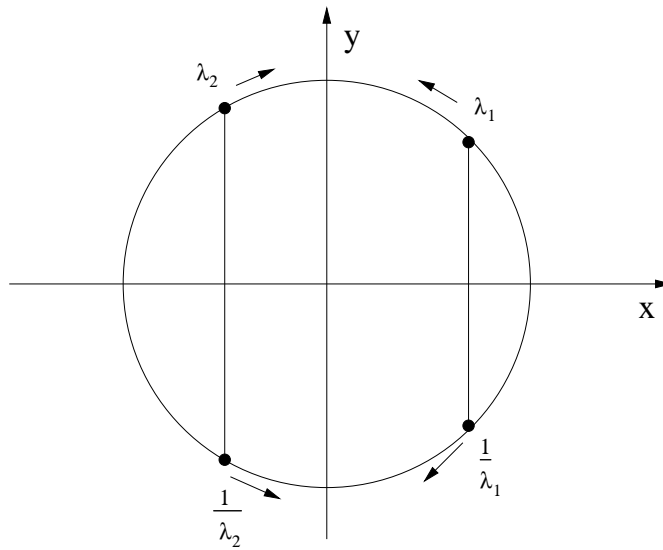
όπου: $i = \sqrt{-1}$ και $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ενώ $(,)$ είναι το συνηθισμένο

εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Έστω λ ($|\lambda| = 1$) μία ιδιοτιμή πολλαπλότητας ρ και έστω V_λ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος.

Ορισμός(Yakubovich and Starzhinskii 1975 vol.1 chapt.III §1.2):

1. Αν $\langle w, w \rangle > 0, \forall w \in V_\lambda$ & $w \neq 0$, τότε η λ ονομάζεται **ιδιοτιμή πρώτου είδους**.
2. Αν $\langle w, w \rangle < 0, \forall w \in V_\lambda$ & $w \neq 0$, τότε η λ ονομάζεται **ιδιοτιμή δευτέρου είδους**.
3. Αν το $\langle w, w \rangle$ δεν είναι σταθερού προσήμου στο V_λ , δηλαδή $\exists w \in V_\lambda, w \neq 0: \langle w, w \rangle = 0$ ή $\langle w, w \rangle > 0$ ή $\langle w, w \rangle < 0$ τότε η ιδιοτιμή λ ονομάζεται **μικτού είδους ή αόριστη ιδιοτιμή**.



Σχήμα 6: Μετατόπιση ιδιοτιμών στον μοναδιαίο κύκλο.

Ιδιοτιμές πρώτου ή δευτέρου είδους ονομάζονται **ορισμένες ιδιοτιμές**.

Θεώρημα Krein - Moser:

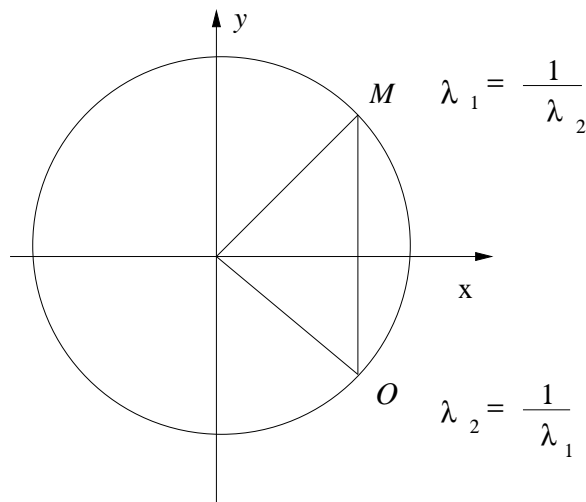
Ένα χαμιλτονιανό σύστημα ορίζεται σαν ισχυρά ευσταθές, εάν και μόνο εάν οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα A βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και είναι ορισμένες (Yakubovich and Starzhinskii 1975 vol.1 chapt.III §3.1-3.2).

Αν διαταράξουμε ελαφρά τη χαμιλτονιανή του συστήματός μας το άμεσο αποτέλεσμα αυτής της ενέργειας είναι η εξίσου ελαφρά μετατόπιση των ιδιοτιμών, αλλά πάντα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (Σχ. 6)

Αν όμως κάποια στιγμή (για κάποια κατάλληλη τιμή της παραμέτρου της διαταραχής), ταυτισθούν σε κάποιο σημείο M του μοναδιαίου κύκλου (προφανώς τότε θα ταυτισθούν και οι αντίστροφες στο συμμετρικό O του M)(Σχ. 7), υπάρχει η δυνατότητα είτε οι ιδιοτιμές να μείνουν πάνω στον κύκλο, είτε να εγκαταλείψουν τον κύκλο. Μετά τη σύγκρουση οι ιδιοτιμές θα κείνται εκατέρωθεν του σημείου M (και τα ίδια συμβαίνουν και στο O).

Το ερώτημα τώρα που τίθεται είναι πότε μπορούμε να πούμε ότι θα συμβεί η πρώτη περίπτωση (οι ιδιοτιμές να μείνουν πάνω στον κύκλο) και να μιλάμε για διατήρηση της ευστάθειας της περιοδικής τροχιάς και πότε η δεύτερη περίπτωση (οι ιδιοτιμές να εγκαταλείψουν τον κύκλο), που μιλάμε για μετάβαση σε αστάθεια.

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα, ακολουθώντας τους ορισμούς που δώσαμε στα είδη των ιδιοτιμών, είναι η εξής (Arnold 1978 p. 228-229, Χατζηδημητρίου



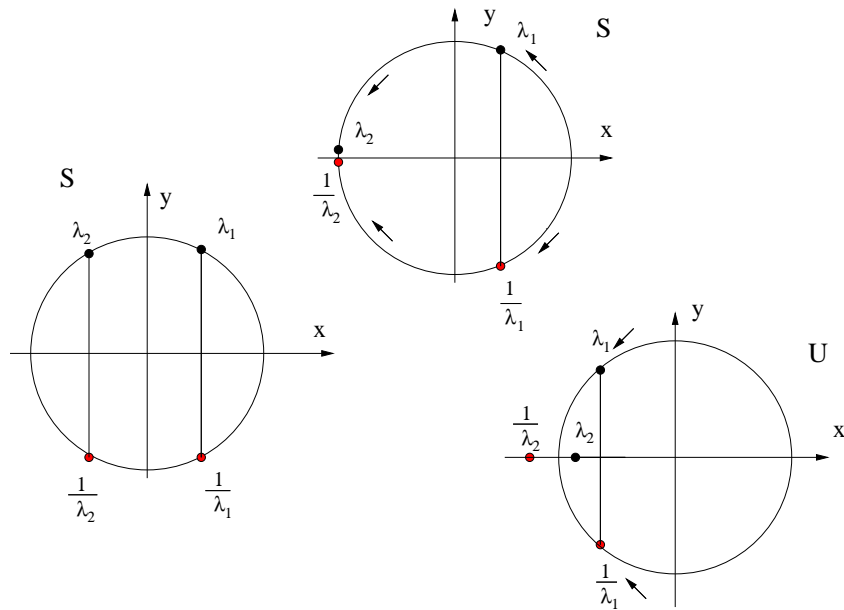
Σχήμα 7: Περιπτώσεις κίνησης στον μοναδιαίο κύκλο.

1989):

1. Αν τα ζεύγη των ιδιοτιμών που πλησιάζουν να συγκρουσθούν είναι του **ίδιου είδους** (π.χ ή και οι δύο πρώτου είδους οπότε οι αντίστροφές τους θα είναι και οι δύο δευτέρου είδους, ή το αντίστροφο), τότε δεν υπάρχει κατάλληλη διαταραχή που να δώσει αστάθεια, ή με άλλα λόγια οι ιδιοτιμές **θα παραμείνουν** μετά τη σύγκρουση πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.
2. Αν τα ζεύγη των ιδιοτιμών που πλησιάζουν να συγκρουσθούν είναι από **διαφορετικό είδος** (π.χ. μία πρώτου είδους, οπότε η αντίστροφή της δευτέρου είδους, να πλησιάζουν αντίστοιχα μία δευτέρου είδους με την αντίστροφή της πρώτου είδους), τότε υπάρχει κατάλληλη διαταραχή που μετατρέπει την ευσταθή τροχιά σε ασταθή, ή με άλλα λόγια οι ιδιοτιμές πρώτου είδους περνούν στο εσωτερικό του κύκλου (στην περιοχή $|\lambda| < 1$), ενώ οι του δευτέρου είδους, στο εξωτερικό του κύκλου (στην περιοχή $|\lambda| > 1$).

Για να γίνεται πιο εύκολη η παρακολούθηση των σχημάτων, υιοθετείται η παρουσίαση των ιδιοτιμών πρώτου είδους με μαύρες τελείες, ενώ του δευτέρου είδους με κόκκινες τελείες. Ας δούμε σχηματικά τις τρεις περιπτώσεις:

1. **Περίπτωση 1.** $S \rightarrow U$. Στην πρώτη αυτή περίπτωση, έχουμε μετάβαση από ευστάθεια σε απλή αστάθεια. Όπως φαίνεται στα σχήματα 8,

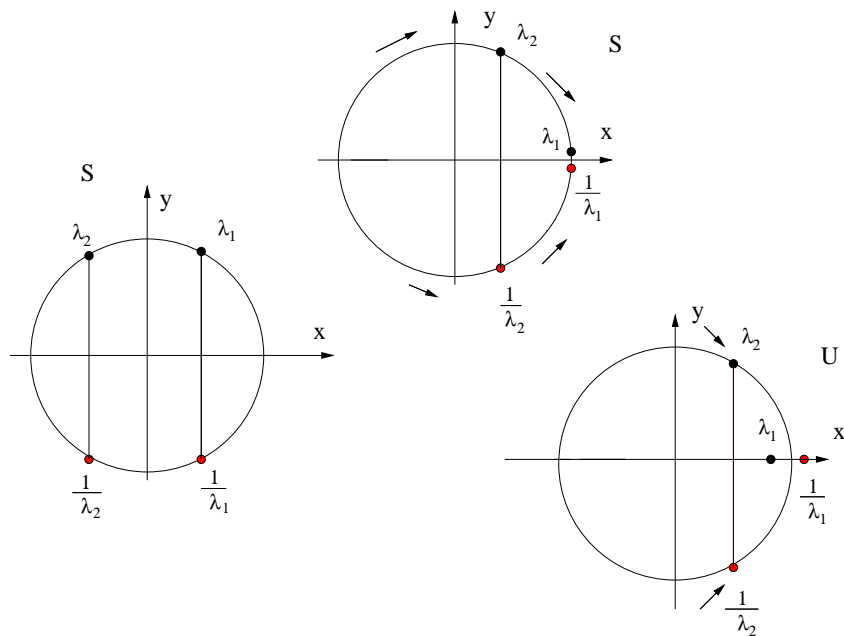


Σχήμα 8: Πρώτη περίπτωση δημιουργίας απλής αστάθειας.

9, έχουμε δύο δυνατότητες παραγωγής απλής αστάθειας. Είτε το ζευγάρι $(\lambda_i, 1/\lambda_i)$ συγκρούεται στο σημείο $\lambda = -1$ (Σχ. 8) είτε στο σημείο $\lambda = +1$ (Σχ. 9). Και στην μία περίπτωση και στην άλλη οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικού είδους, οπότε μετά τη σύγκρουση εγκαταλείπουν τον μοναδιαίο κύκλο, η μεν πρώτου είδους προς το εσωτερικό, η δε δεύτερου είδους προς το εξωτερικό. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι το άλλο ζευγάρι ιδιοτιμών, που στα σχήματα φαίνεται να μην παίζει σπουδαίο ρόλο, μπορεί και αυτό να συγκρουσθεί στα σημεία $\lambda = +1$ ή $\lambda = -1$.

2. **Περίπτωση 2** $S \rightarrow DU$. Όπως βλέπουμε στα τρία σχήματα 10, 11, 12, η δεύτερη περίπτωση αναφέρεται στην μετάβαση από την ευστάθεια στην διπλή αστάθεια. Όπως είπαμε η περίπτωση αυτής της μετάβασης, μπορεί να είναι μόνο οριακή. Έχουμε τρεις τρόπους παραγωγής διπλής αστάθειας (DU).

Στην περίπτωση του σχήματος 10, έχουμε σύγκρουση του ζευγαριού $(\lambda_2, 1/\lambda_2)$ στο σημείο $\lambda = -1$ και τη σύγκρουση του ζευγαριού $(\lambda_1, 1/\lambda_1)$ στο $\lambda = +1$. Στην συνέχεια το ζευγάρι $(\lambda_2, 1/\lambda_2)$ εγκαταλείπει τον κύκλο, λόγω διαφορετικού είδους, ενώ και το ζευγάρι $(\lambda_1, 1/\lambda_1)$ εγκαταλείπει τον κύκλο, δίνοντας τη διπλή αστάθεια (DU).



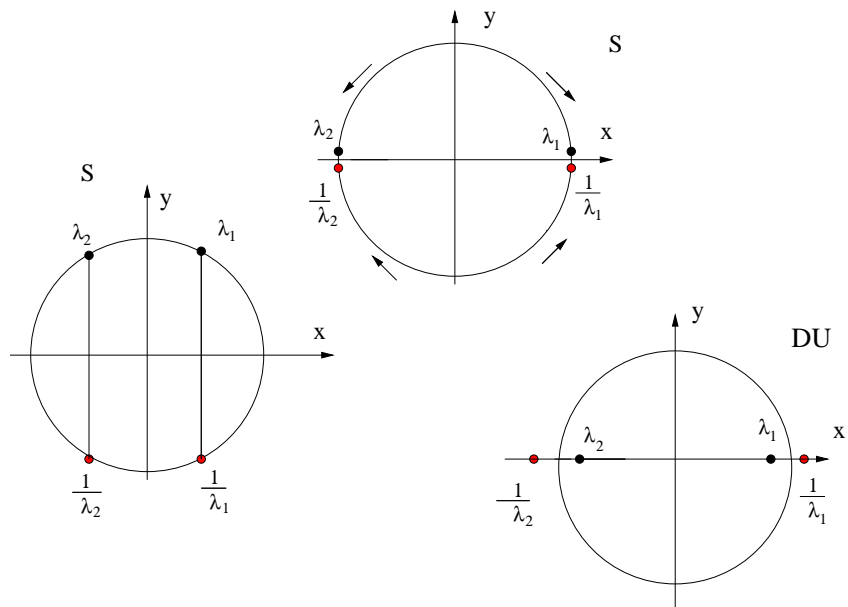
Σχήμα 9: Δεύτερη περίπτωση δημιουργίας απλής αστάθειας.

Στην περίπτωση του σχήματος 11, έχουμε κίνηση και των δύο ζευγαριών προς το $\lambda = +1$. Στο σημείο αυτό έχουμε σύγκρουση ανά δύο των δύο ζευγαριών. Σαν άμεση συνέπεια έχουμε την εγκατάλειψη του κύκλου από όλες τις ιδιοτιμές και την παραγωγή της διπλής αστάθειας (DU).

Στο σχήμα 12 έχουμε κίνηση και των δύο ζευγαριών προς το $\lambda = -1$. Στο σημείο αυτό έχουμε πάλι τη σύγκρουση των ιδιοτιμών των δύο ζευγών. Η σύγκρουση αυτή, λόγω του διαφορετικού είδους των ιδιοτιμών, προκαλεί την εγκατάλειψη του κύκλου από όλες τις ιδιοτιμές και την παραγωγή της διπλής αστάθειας (DU).

3. **Περίπτωση 3** $S \rightarrow \Delta$. Το σχήμα 13 δείχνει μετάβαση από την ευ-στάθεια στην μιγαδική αστάθεια. Η τρίτη αυτή και τελευταία περίπτωση αστάθειας είναι χαρακτηριστική για συστήματα με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Όπως αναφέρουμε και στην παράγραφο 1.1.6, η μιγαδική αστάθεια προκύπτει όταν $\Delta < 0$ οπότε οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές και όχι στον μοναδιαίο κύκλο. Η εγκατάλειψη του κύκλου από τις ιδιοτιμές μετά από σύγκρουση γίνεται μόνο:

- Όταν οι ιδιοτιμές συγκρουσθούν ανά δύο πάνω στον μοναδιαίο κύ-

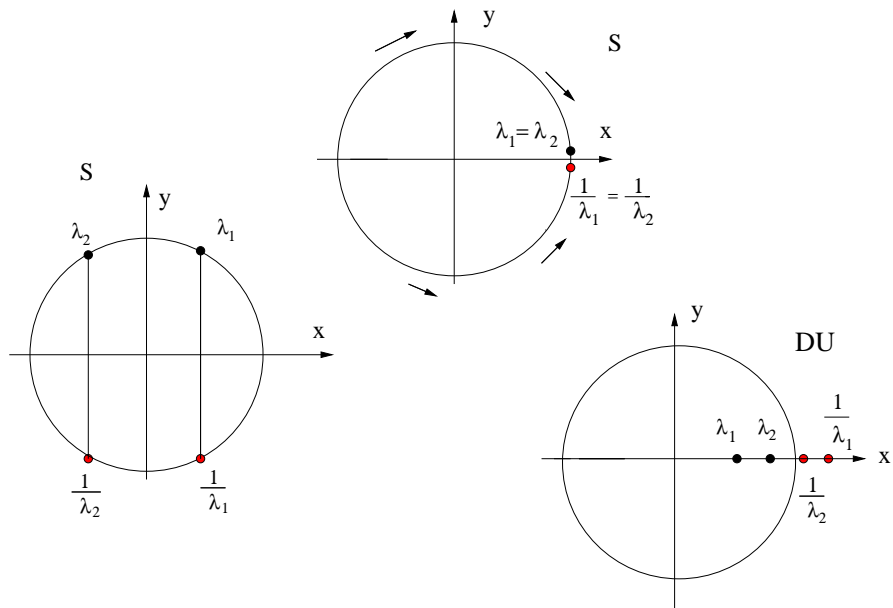


Σχήμα 10: Πρώτη περίπτωση δημιουργίας διπλής αστάθειας.

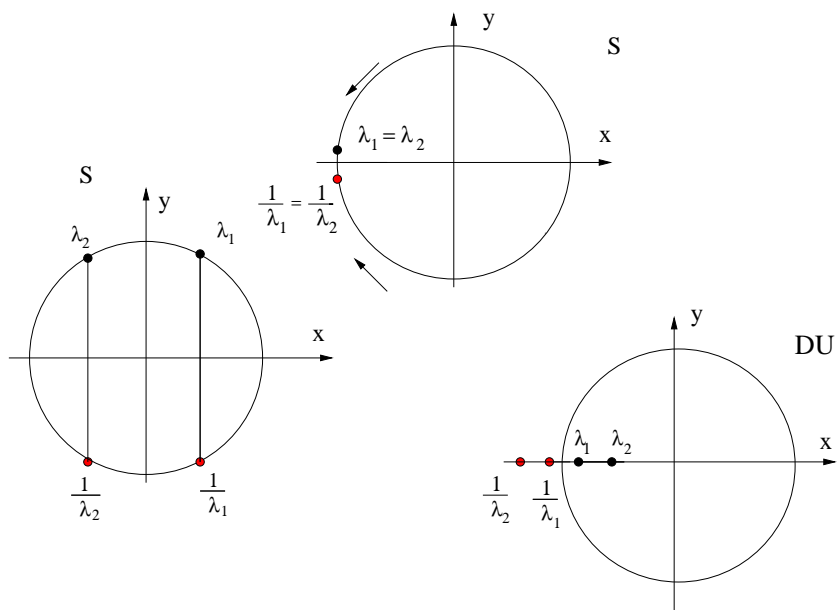
κλο και

- Αν οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικού είδους, όπως φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 13.

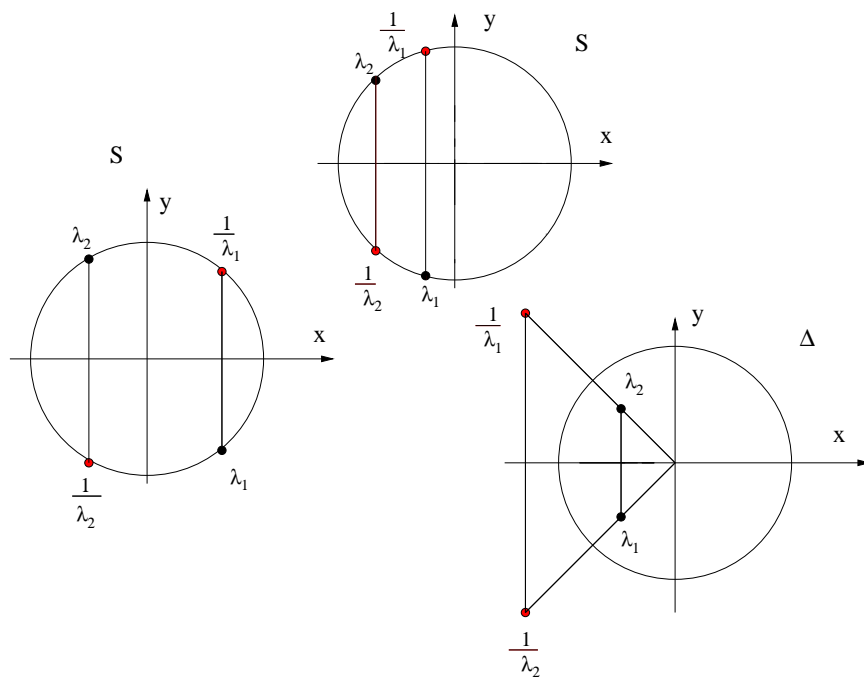
Σε ορισμένα 3D αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα (όπως αυτό που περιγράφεται στον Magnenat (1982)) έχει δείχτεί ότι (Contopoulos 1986b): Όταν έχουμε σύγκρουση ιδιοτιμών πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (όχι πάνω στον πραγματικό άξονα), τότε αμέσως μετά την σύγκρουση αν η ποσότητα $D = a_{13}a_{24}$ (a_{13}, a_{24} στοιχεία του μονόδρομου πίνακα) είναι $D > 0$ τότε έχουμε ευστάθεια (οι ιδιοτιμές μετά την σύγκρουση δεν εγκαταλείπουν τον μοναδιαίο κύκλο), ενώ αν έχουμε $D < 0$ τότε έχουμε μιγαδική αστάθεια (οι ιδιοτιμές παραμένουν μιγαδικές μετά την σύγκρουση αλλά εγκαταλείπουν τον μοναδιαίο κύκλο).



Σχήμα 11: Δεύτερη περίπτωση δημιουργίας διπλής αστάθειας.



Σχήμα 12: Τρίτη περίπτωση δημιουργίας διπλής αστάθειας.



Σχήμα 13: Δημιουργία μιγαδικής αστάθειας.

1.2 Γαλαξιακή Δυναμική

Θα αναφερθούμε σε αυτό το κεφάλαιο σε μερικές βασικές έννοιες της γαλαξιακής δυναμικής που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

1.2.1 Συντονισμοί

Σε έναν γαλαξία οι σπείρες και οι ράβδοι είναι κύματα πυκνότητας που διαδίδονται πάνω στους δίσκους. Η ιδέα αυτή υποστηρίχθηκε αρχικά από τον Bertil Lindblad και αργότερα με τη μορφή της 'θεωρίας των κυμάτων πυκνότητας' από τους C. C. Lin και Frank Shu (βλ. π.χ. Bertin & Lin 1996). Σήμερα η κυματική φύση των σπειρών και των ράβδων είναι γενικά αποδεκτή αφού υποστηρίζεται και από πλήθος παρατηρησιακών μελετών. Οι σπείρες δεν αποτελούνται συνεχώς από τους ίδιους αστέρες, αλλά είναι οι περιοχές των γαλαξιακών δίσκων στις οποίες οι αστέρες παραμένουν για περισσότερο χρόνο καθώς περιστρέφονται γύρω από το κέντρο του γαλαξία. Ο σπειροειδής σχηματισμός και οι αστέρες περιστρέφονται με διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες. Ανοιχτά παραμένουν μέχρι σήμερα τα ερωτήματα σχετικά με το πλάτος των κυμάτων, την ταχύτητα περιστροφής και το χρόνο ζωής τους.

Οι σπείρες περιστρέφονται με μία σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Οι αστέρες περνάνε μέσα από τις σπείρες και εκτελούν ελλειπτικές τροχιές. Για να περιγράψουμε ακριβέστερα την κίνησή τους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εκτελούν ταυτόχρονα μία ακτινική και μία κάθετη στον γαλαξιακό δίσκο ταλάντωση. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε πάνω στους δίσκους θέσεις ακτινικών και κάθετων συντονισμών. Οι ακτινικοί συντονισμοί συμβαίνουν όταν ο λόγος:

$$\frac{\kappa}{\Omega - \Omega_b} = \frac{n}{m} \quad (67)$$

είναι ρητός (Contopoulos 2002 §3.1.1). κ είναι η 'επικυκλική συχνότητα' που σχετίζεται με τις ακτινικές ταλαντώσεις και $\Omega - \Omega_b$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του αστέρα στο συμπεριστρεφόμενο με ταχύτητα περιστροφής (Ω_b) σύστημα αναφοράς. Δύο από τους πιο σημαντικούς ακτινικούς συντονισμούς είναι οι συντονισμοί Lindblad (Contopoulos 2002 §3.1.1):

$$\frac{\kappa}{\Omega - \Omega_b} = \pm \frac{2}{1} \quad (68)$$

(με το '+' να συμβολίζει τον εσωτερικό συντονισμό Lindblad (ILR, Inner Lindblad Resonance) ενώ το '-' τον εξωτερικό συντονισμό Lindblad (OLR, Outer Lindblad Resonance)).

Ένας τρίτος σημαντικός συντονισμός είναι αυτός της συμπεριστροφής (Co-rotation) (Contopoulos 2002 §3.1.1) . Σε αυτόν έχουμε:

$$\Omega = \Omega_b \quad (69)$$

Στην περίπτωση αυτή αστέρες και σπείρα (ή ράβδος) περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, την ταχύτητα περιστροφής του συστήματος. Η γωνιακή ταχύτητα Ω είναι φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης R ($R = \sqrt{x^2 + y^2}$) και για την περίπτωση ενός αξισυμμετρικού δυναμικού Φ δίνεται από την σχέση (Binney & Tremaine 2008 §3.3.3):

$$\Omega^2(R) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{z=0} \quad (70)$$

Η επικυκλική συχνότητα κ είναι φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης R και δίνεται από τη σχέση:

$$\kappa^2(R) = \left(\frac{3}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{z=0} \quad (71)$$

Σε ένα $3D$ σύστημα ορίζεται και η συχνότητα κ_z , η οποία είναι η συχνότητα των κάθετων ταλαντώσεων, από τη σχέση:

$$\kappa_z^2(R) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{z=0} \quad (72)$$

όταν ο λόγος της συχνότητας κ_z ως προς $\Omega - \Omega_b$ είναι ρητός αριθμός, δηλαδή:

$$\frac{\kappa_z}{\Omega - \Omega_b} = \frac{n}{m} \quad (73)$$

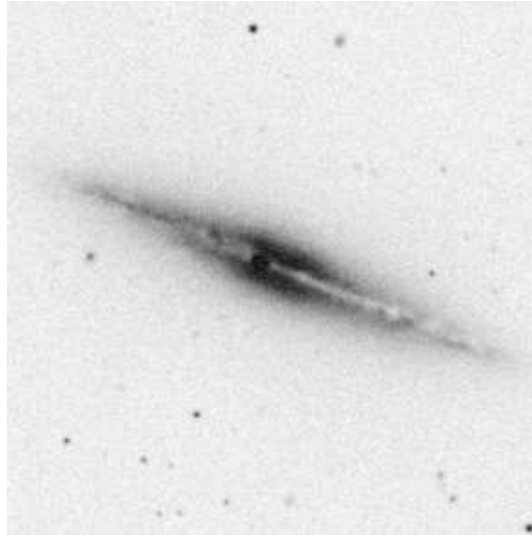
έχουμε κάθετους συντονισμούς στο περιστρεφόμενο σύστημα.

Εν γένει οι ακτινικοί συντονισμοί συνδέονται με τη μορφολογία των δίσκων που βλέπουμε όταν η οπτική μας ακτίνα σχηματίζει μεγάλη γωνία με το γαλαξιακό επίπεδο. Οι κάθετοι συντονισμοί αναμένεται να επηρεάζουν τη μορφολογία των γαλαξιακών δίσκων όταν τους παρατηρούμε από το πλάι. Χαρακτηριστικό παράδειγμα γαλαξιακού δίσκου ο οποίος φαίνεται από την πλάγια πλευρά είναι αυτός του γαλαξία NGC4013 (Σχ. 14).

Οι πιο σημαντικοί κάθετοι συντονισμοί για τη μορφολογία των ραβδωτών γαλαξιών μακριά από το ισημερινό επίπεδο είναι οι $2/1$, $3/1$ και $4/1$ (Pfenniger 1984, Patsis et al. 2002a, Patsis et al. 2003). Οι κάθετοι συντονισμοί Lindblad (Contopoulos 2002 §3.2.1) ορίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\kappa_z}{\Omega - \Omega_b} = \pm \frac{2}{1} \quad (74)$$

(με το ` + ' να συμβολίζει τον εσωτερικό κάθετο συντονισμό Lindblad (IVLR, Inner Vertical Lindblad Resonance) ενώ το ` - ' τον εξωτερικό κάθετο συντονισμό Lindblad (OVLRL, Outer Vertical Lindblad Resonance).



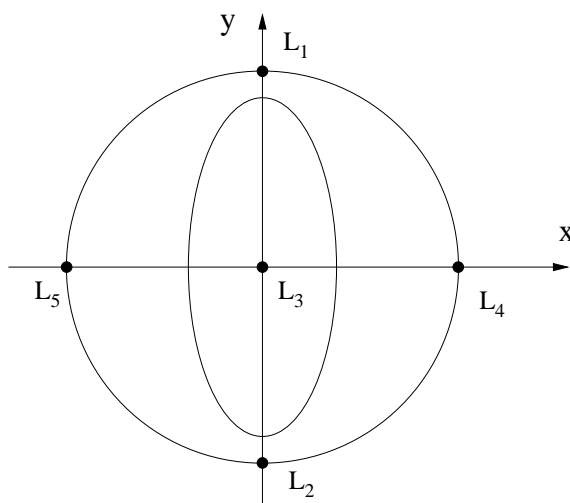
Σχήμα 14: DSS (Digitized Sky Survey) εικόνα του γαλαξία NGC4013, ο οποίος φαίνεται από την πλάγια πλευρά.

1.2.2 Η ευστάθεια της οικογένειας περιοδικών τροχιών x_1 και των διακλαδώσεών της.

Μία βασική μέθοδος αντιμετώπισης δυναμικών συστημάτων είναι η μελέτη των περιοδικών τροχιών του συστήματος δεδομένου ότι οι ευσταθείς περιοδικές τροχιές παγιδεύουν γύρω τους ένα μεγάλο μέρος των μη-περιοδικών τροχιών. Σε ένα γαλαξιακό σύστημα μπορούμε να βρούμε πολλές περιοδικές τροχιές. Έτσι τέθηκε η ανάγκη ταξινόμησής τους σε κατηγορίες, ανάλογα με ορισμένες κοινές ιδιότητες. Τέτοιες ιδιότητες είναι η μορφολογία των τροχιών και η πολλαπλότητά τους (multiplicity). Περιοδικές τροχιές που προκύπτουν από τη μεταβολή μιας τροχιάς με μεταβολή μίας παραμέτρου κατατάσσονται στην ίδια οικογένεια. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για μία **οικογένεια περιοδικών τροχιών**.

Θεωρούμε ένα ραβδωτό γαλαξία, σε περιστρεφόμενο σύστημα με γωνιακή ταχύτητα Ω_b , στον οποίο ο μεγάλος ημιάξονας της ράβδου είναι ο άξονας y (Σχ.

15). Ο κύκλος στο Σχ. 15 παριστάνει την συμπεριστροφή. Τα σημεία L_1, L_2 κατά μήκος της ράβδου, παριστάνουν εν γένει τα ασταθή σημεία Lagrange, ενώ τα L_4, L_5 παριστάνουν εν γένει τα ευσταθή σημεία Lagrange. Το σημείο L_3 βρίσκεται στο κέντρο του γαλαξία. Όταν έχουμε ασθινή ράβδο τα σημεία L_1, L_2, L_4, L_5 είναι σχεδόν πάνω στον κύκλο της συμπεριστροφής. Τα σημεία αυτά είναι σημεία ισορροπίας στο περιστρεφόμενο σύστημα. Σε πολύπλοκα δυναμικά μπορεί να εμφανίζονται περισσότερα σημεία ισορροπίας Lagrange (Patsis et al. 2010).



Σχήμα 15: Τα σημεία ισορροπίας Lagrange L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 σε μία χαρακτηριστική περίπτωση μοντέλου ραβδωτού γαλαξία με απειροστό εύρος. Η έλλειψη παριστάνει σχηματικά τη ράβδο του γαλαξία.

Το σύνολο των κυκλικών περιοδικών τροχιών που διαγράφονται κατά την ορθή φορά σε έναν αξισυμμετρικό γαλαξία (βλέπε υποκεφάλαιο 2.1) αποτελούν μία δισδιάστατη οικογένεια περιοδικών τροχιών η οποία ονομάζεται κεντρική οικογένεια. Στην περίπτωση δυναμικών που παριστούν ραβδωτούς γαλαξίες καθώς το εύρος των ράβδων αυξάνει η κεντρική οικογένεια μετασχηματίζεται μορφολογικά σε μία οικογένεια ελλειπτικών τροχιών και ονομάζεται x_1 (οι τροχιές είναι επιμήχεις στην διεύθυνση της ράβδου) (Contopoulos & Papayanopoulos 1980, Contopoulos 2002 §3.1.4). Οι δισδιάστατες περιοδικές τροχιές που διαγράφονται κατά την ανάδρομη φορά αποτελούν μία άλλη δισδιάστατη οικογένεια την x_4 (Contopoulos 2002 §3.1.4). Οι δισδιάστατες περιοδικές τροχιές οι οποίες είναι επιμήχεις κάθετα στην διεύθυνση της ράβδου του γαλαξία αποτελούν τις οικογένειες x_2 και x_3 . Η επιμήκυνσή τους είναι μικρή για τις τρο-

χιές της x_2 και μεγάλη για τις τροχιές της x_3 (Contopoulos 2002 §3.1.4). Η χαρακτηριστική μίας οικογένειας περιοδικών τροχιών (στην περίπτωση μας της x_1) είναι μία καμπύλη που μας δίνει τη συντεταγμένη x των αρχικών συνθηκών των περιοδικών της τροχιών ως συνάρτηση της σταθεράς Jacobi (Contopoulos and Mertzanides 1977, Contopoulos 2002 §3.1.4). Στην περίπτωση αξιsymμετρικών γαλαξιών (ραβδωτών γαλαξιών απειροστού εύρους) αυτή η καμπύλη διέρχεται από το σημείο Lagrange L_4 . Για κάθε τιμή της E_j μικρότερη από την $E_j(L_4)$ (η τιμή της E_j που έχει το σημείο ισορροπίας Lagrange L_4) υπάρχουν δύο κυκλικές τροχιές, η μία εντός του κύκλου της συμπεριστροφής και η άλλη εκτός του κύκλου της συμπεριστροφής. Η τροχιά μέσα από τον κύκλο της συμπεριστροφής περιστρέφεται με σχετική ταχύτητα κατά την ίδια φορά με το Ω_b , ενώ η τροχιά εκτός του κύκλου της συμπεριστροφής περιστρέφεται με σχετική ταχύτητα αντίθετα από τη φορά του Ω_b .

Το διάγραμμα που περιγράφει την ευστάθεια μίας οικογένειας περιοδικών τροχιών σε ένα γνωστό δυναμικό όταν μία παράμετρος του συστήματος μεταβάλλεται, ενώ οι άλλες παράμετροι του συστήματος παραμένουν σταθερές, ονομάζεται 'διάγραμμα ευστάθειας' (Contopoulos & Barbanis 1985, Pfenniger 1985a, Contopoulos 2002 §2.11.1 -2.11.2). Έτσι μπορούμε να δώσουμε π.χ. το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 ως συνάρτηση της E_j . Σε μία τέτοια περίπτωση με τη βοήθεια του διαγράμματος ευστάθειας μπορούμε να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη των δεικτών ευστάθειας b_1 και b_2 και τις μεταβάσεις από ευστάθεια σε αστάθεια και από το ένα είδος αστάθειας στο άλλο. Θα αναφερόμαστε στις γραμμές $b = 2$ και $b = -2$ στο διάγραμμα ευστάθειας ως οι άξονες $b = 2$ και $b = -2$. Όταν ένας δείκτης ευστάθειας έχει μία τομή με τον άξονα $b = -2$ ή εφάπτεται σε αυτόν, τότε τουλάχιστον μία νέα οικογένεια δημιουργείται σαν διακλάδωση της x_1 . Η διακλάδωση αυτή είναι μία οικογένεια περιοδικών τροχιών της ίδιας περιόδου με την x_1 (Ζαχείλας 1988, Contopoulos 2002 §2.11.2, Contopoulos 1986a). Δηλαδή οι περιοδικές τροχιές της οικογένειας αυτής έχουν την ίδια πολλαπλότητα με τις περιοδικές τροχιές της x_1 . Όταν ένας δείκτης ευστάθειας έχει μία τομή με τον άξονα $b = 2$ ή εφάπτεται σε αυτόν, τότε τουλάχιστον μία νέα οικογένεια δημιουργείται σαν διακλάδωση της x_1 . Η διακλάδωση αυτή είναι μία οικογένεια περιοδικών τροχιών διπλάσιας περιόδου⁴ με την x_1 (Ζαχείλας 1988, Contopoulos 2002 §2.11.2). Δηλαδή οι περιοδικές τροχιές της οικογένειας αυτής έχουν διπλάσια πολλαπλότητα από τις περιοδικές

⁴Έχει βρεθεί (Contopoulos 1983, Contopoulos and Giorgilli 1988, Contopoulos 2002 §2.11.7) ότι σε αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα τριών βαθμών ελευθερίας η ακολουθία των διακλαδώσεων διπλάσιας περιόδου δεν είναι άπειρη λόγω της παρουσίας της μιγαδικής αστάθειας. Στις περιπτώσεις που μία ευσταθής οικογένεια γίνεται μιγαδικά ασταθής δεν υπάρχει διακλάδωση άλλης οικογένειας περιοδικών τροχιών (Contopoulos and Barbanis 1994).

τροχιές της x_1 . Στην παρούσα διατριβή θα ασχοληθούμε κυρίως με οικογένειες απλών περιοδικών τροχιών (πολλαπλότητας 1). Θα συμβολίζουμε με b_1 τον δείκτη ευστάθειας που σχετίζεται με τους κάθετους συντονισμούς, ενώ με b_2 τον δείκτη ευστάθειας που σχετίζεται με τους ακτινικούς συντονισμούς.

1.2.3 Ονοματολογία των 3D διακλαδώσεων της x_1

Θα ακολουθήσουμε την ονοματολογία που χρησιμοποίησαν οι Skokos, Patsis και Athanassoula για τις οικογένειες σε μία 3D περιστρεφόμενη ράβδο Ferrers (Skokos et al 2002a). Θα ονομάζουμε τις 3D διακλαδώσεις, οι οποίες διακλαδίζονται από την x_1 στους κάθετους συντονισμούς, ως $x1v_n$ όπου n δηλώνει τη σειρά εμφάνισης τους στο μοντέλο Skokos et al (2002a) που ονομάζουν μοντέλο A. Στο μοντέλο αυτό η $x1v1$ είναι η πρώτη οικογένεια που διακλαδίζεται από την x_1 μετά την πρώτη μετάβαση της x_1 από ευστάθεια σε αστάθεια ($S \rightarrow U$) η οποία συμβαίνει στην περιοχή του κάθετου συντονισμού 2/1, ενώ η $x1v2$ είναι η δεύτερη οικογένεια που διακλαδίζεται από την x_1 μετά την πρώτη μετάβαση της x_1 από αστάθεια σε ευστάθεια ($U \rightarrow S$) η οποία επίσης συμβαίνει στην περιοχή του κάθετου συντονισμού 2/1. Η $x1v3$ είναι η τρίτη οικογένεια που διακλαδίζεται από την x_1 μετά τη δεύτερη μετάβαση της x_1 από ευστάθεια σε αστάθεια ($S \rightarrow U$) η οποία συμβαίνει στην περιοχή του κάθετου συντονισμού 3/1 κ.ο.κ.

Οι διακλαδώσεις $x1v1$, $x1v3$ και $x1v5$ που εισάγονται στο σύστημα μετά από μεταβάσεις της x_1 από ευστάθεια σε αστάθεια ($S \rightarrow U$), στις περιοχές των κάθετων συντονισμών 2/1, 3/1 και 4/1, είναι (αρχικά) ευσταθείς 3D οικογένειες των οποίων οι τροχιές τους έχουν αρχικές συνθήκες $(x, z, \dot{x}, \dot{z}) = (a, b, 0, 0)$ με a, b πραγματικούς αριθμούς και $a, b \neq 0$. Οι διακλαδώσεις $x1v2$, $x1v4$ και $x1v6$ που εισάγονται στο σύστημα μετά από μεταβάσεις της x_1 από αστάθεια σε ευστάθεια ($U \rightarrow S$) στις περιοχές των κάθετων συντονισμών 2/1, 3/1 και 4/1 είναι (αρχικά) απλά ασταθείς 3D οικογένειες των οποίων οι τροχιές τους έχουν αρχικές συνθήκες $(x, z, \dot{x}, \dot{z}) = (c, 0, 0, d)$ με c, d πραγματικούς αριθμούς και $c, d \neq 0$. Στις περιοχές των κάθετων συντονισμών 2/1, 3/1 και 4/1 η οικογένεια που εισάγεται στο σύστημα ως ευσταθής είναι διακλάδωση ως προς z και η οικογένεια που εισάγεται στο σύστημα ως απλά ασταθής είναι διακλάδωση ως προς \dot{z} .

Στην περιοχή του κάθετου συντονισμού 5/1, η οικογένεια που εισάγεται στο σύστημα ως ευσταθής είναι διακλάδωση ως προς \dot{z} και η οικογένεια που εισάγεται στο σύστημα ως απλά ασταθής είναι διακλάδωση ως προς z . Έτσι λοιπόν η οικογένεια $x1v7$ που εισάγεται στο σύστημα μετά από μία μετάβαση της x_1 από ευστάθεια σε αστάθεια ($S \rightarrow U$) στην περιοχή του κάθετου συν-

τονισμού $5/1$ είναι μία (αρχικά) ευσταθής 3D οικογένεια ως προς z . Ενώ η οικογένεια $x1v8$ που εισάγεται στο σύστημα μετά από μία μετάβαση της x_1 από αστάθεια σε ευστάθεια ($U \rightarrow S$) στην περιοχή του κάθετου συντονισμού $5/1$ είναι μία (αρχικά) απλά ασταθής 3D οικογένεια ως προς z . Στο συγκεκριμένο μοντέλο αυτό συνδέεται με τη θέση των διακλαδώσεων ως προς το τοπικό μέγιστο της χαρακτηριστικής της x_1 στην περιοχή του ακτινικού συντονισμού $4/1$.

Στην περιοχή άρτιων ακτινικών συντονισμών ($2/1, 4/1$ κ.ο.κ.) δημιουργούνται πολλές φορές χάσματα (βλ. Contopoulos & Grosbøl 1989, Contopoulos 2002 p.393-394) κατά μήκος της χαρακτηριστικής της x_1 και διακρίνονται σε δύο είδη. Σε ένα χάσμα πρώτου είδους, το οποίο παράγεται στην περιοχή ενός άρτιου συντονισμού $n/1$, το μέρος της x_1 πριν την διακλάδωση ενώνεται με το πάνω μέρος της διακλαδιζόμενης οικογένειας, ενώ το μέρος της x_1 μετά την διακλάδωση ενώνεται με το κάτω μέρος της διακλαδιζόμενης οικογένειας. Αντίστροφα σε ένα χάσμα δευτέρου είδους, το μέρος της x_1 πριν την διακλάδωση ενώνεται με το κάτω μέρος της διακλαδιζόμενης οικογένειας, ενώ το μέρος της x_1 μετά την διακλάδωση ενώνεται με το πάνω μέρος της διακλαδιζόμενης οικογένειας. Τώρα αν έχουμε έναν διπλό συντονισμό $2/1$ τότε στην περίπτωση αυτή μπορεί να έχουμε άλλα δύο είδη. Στο τρίτο είδος η x_1 συνεχίζει και περνάει μέσω και των δύο συντονισμών $2/1$. Οι χαρακτηριστικές των οικογενειών x_2 και x_3 σχηματίζουν μία κλειστή καμπύλη (bubble). Στο τέταρτο είδος έχουμε την ένωση των χαρακτηριστικών των x_1, x_2 και x_3 (σπάνια περίπτωση).

Υπάρχουν μοντέλα που η πρώτη διακλάδωση δεν είναι η $x1v1$ (Skokos et al 2002b). Δηλαδή η πρώτη 3D διακλάδωση της x_1 δεν σχετίζεται με τον κάθετο συντονισμό $2/1$ αλλά με κάποιον άλλο (π.χ. $1/1$). Επειδή αυτές οι περιπτώσεις παρουσιάζονται σπάνια σε ρεαλιστικά μοντέλα, αντιμετωπίζονται κατά περίπτωση.

2 Μοντέλο και Τροχιές

Στο κεφάλαιο αυτό μπαίνουμε στο κύριο μέρος της διατριβής και παρουσιάζουμε την αριθμητική μελέτη ενός γαλαξιακού δυναμικού και των τροχιών του. Το μοντέλο του συστήματος που θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα μελέτη περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 2.1. Η μελέτη της αξισυμμετρικής περίπτωσης περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 2.2. Κατόπιν μελετούμε μία πρώτη μη αξισυμμετρική περίπτωση στο υποκεφάλαιο 2.3 και μία δεύτερη μη αξισυμμετρική περίπτωση στο υποκεφάλαιο 2.4.

2.1 Το μοντέλο του συστήματος

Χρησιμοποιούμε ένα δυναμικό που στην αξισυμμετρική του μορφή, περιγράφει προσεγγιστικά το δυναμικό του Γαλαξία. Ο Γαλαξίας μας είναι ένας δισκοειδής γαλαξίας που φέρει μία περιστρεφόμενη ράβδο και σπείρες. Αυτό σημαίνει ότι ο Γαλαξίας έχει επίπεδο συμμετρίας (στην περίπτωση μας $z = 0$) και άξονα περιστροφής (στην περίπτωση μας ο z -άξονας). Επομένως θεωρούμε ότι το δυναμικό του Γαλαξία είναι συνάρτηση μόνο του R και z (R, z κυλινδρικές συντεταγμένες) και επιπλέον είναι άρτια συνάρτηση του z δηλαδή:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(R, z) \\ \Phi(R, -z) &= \Phi(R, z)\end{aligned}\tag{75}$$

Επιλέξαμε για τη μελέτη μας το τρισδιάστατο αξισυμμετρικό μοντέλο του Miyamoto (Miyamoto & Nagai 1975). Το δυναμικό Φ του μοντέλου αυτού περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από την παρακάτω συνάρτηση (Miyamoto & Nagai 1975):

$$\Phi(R, z) = -\frac{GM}{(R^2 + [a + (z^2 + b^2)^{1/2}]^2)^{1/2}}\tag{76}$$

όπου a, b μη μηδενικές σταθερές και R, z οι κυλινδρικές συντεταγμένες. Το δυναμικό αυτό τείνει στο δυναμικό, που παράγεται από μία σημειακή μάζα ($\Phi(R, z) = -\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$), όταν τα R και z γίνονται μεγάλα. Από την εξίσωση του Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = 4\pi G \rho(R, z)\tag{77}$$

όπου $\rho(R, z)$, η πυκνότητα, μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα $\rho(R, z)$ του μοντέλου του Miyamoto η οποία θα δίνεται από την συνάρτηση:

$$\rho(R, z) = \frac{b^2 M a R^2 + [a + 3(z^2 + b^2)^{1/2}][a + (z^2 + b^2)^{1/2}]^2}{4\pi (R^2 + [a + (z^2 + b^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}} \quad (78)$$

Μπορεί εύκολα να δεί κανείς ότι το δυναμικό και η πυκνότητα του μοντέλου του Miyamoto τείνει στο δυναμικό και την πυκνότητα του μοντέλου του Plummer όταν $a \rightarrow 0$. Το δυναμικό Φ και η πυκνότητα ρ του μοντέλου του Plummer δίνονται από τις συναρτήσεις (Binney & Tremaine 2008 §2.2.2):

$$\begin{aligned} \Phi(R, z) &= -\frac{GM}{(R^2 + z^2 + b^2)^{1/2}} \\ \rho(R, z) &= \frac{3b^2 M}{4\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2 + b^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (79)$$

Μπορεί επίσης εύκολα να δεί κανείς ότι το δυναμικό και η πυκνότητα του μοντέλου του Miyamoto τείνει στο δυναμικό και την πυκνότητα του μοντέλου του Kuzmin όταν $b \rightarrow 0$. Το δυναμικό Φ και η πυκνότητα ρ του μοντέλου του Kuzmin δίνονται από τις συναρτήσεις (Binney & Tremaine 2008 §2.3.1):

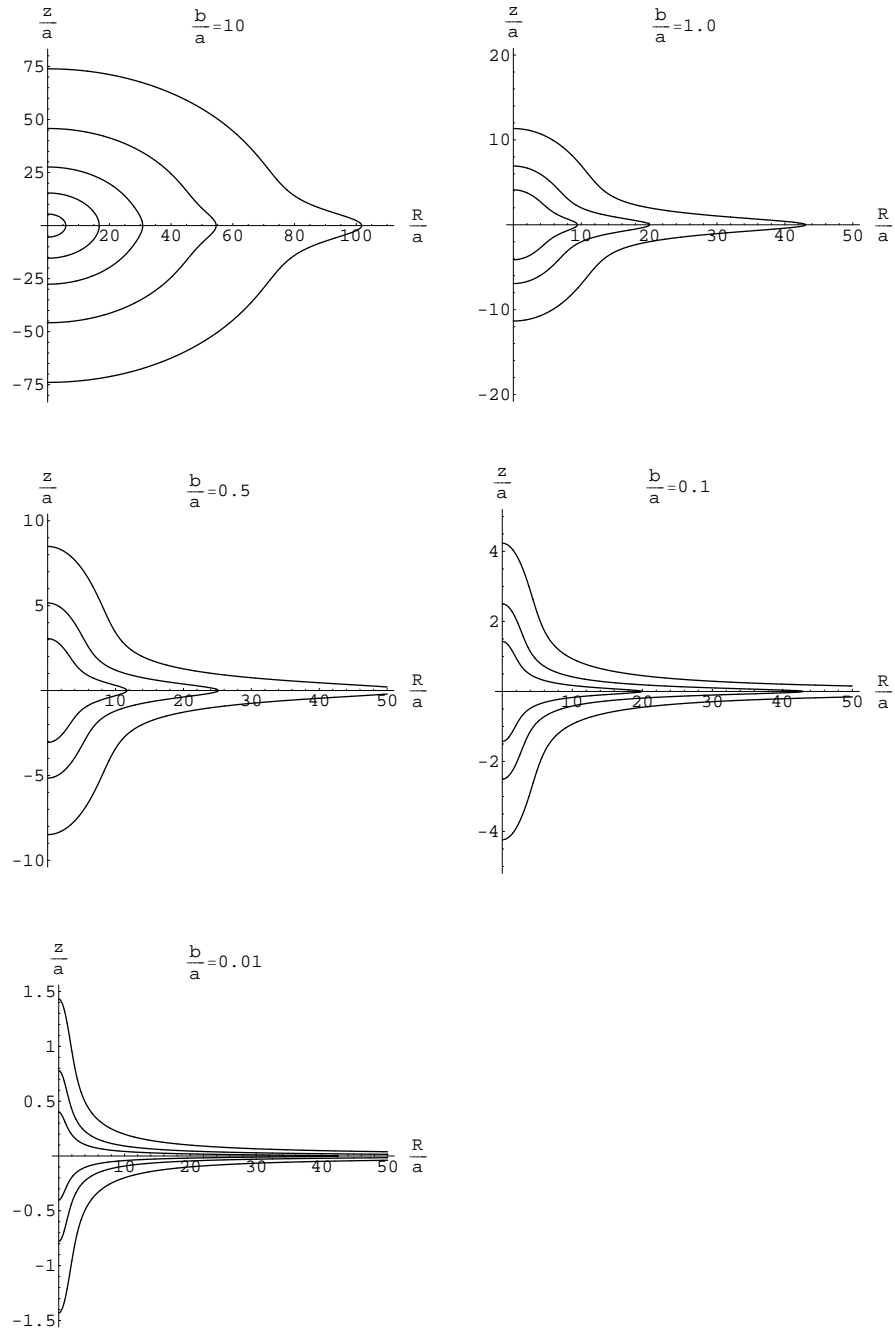
$$\begin{aligned} \Phi(R, z) &= -\frac{GM}{[R^2 + (a + |z|)^2]^{1/2}} \\ \rho(R, z) &= \frac{aM}{2\pi} \frac{1}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \delta(z) \end{aligned} \quad (80)$$

όπου $\delta(z)$ η δ -συνάρτηση του Dirac.

Μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων a, b, M μπορούμε να πάρουμε μοντέλα για διάφορους γαλαξιακούς τύπους.

Το σχήμα 16 δείχνει ισόπυκνες καμπύλες (καμπύλες στάθμης της πυκνότητας) του μοντέλου του Miyamoto για διάφορες τιμές του λόγου b/a . Στο σχήμα αυτό η μονάδα μήκους είναι a και η πυκνότητα κανονικοποιήθηκε ούτως ώστε να έχουμε μονάδα στο κέντρο. Όσο το b/a μειώνεται τόσο οι κατανομές μαζών γίνονται ολοένα και πιο επίπεδες. Ο λόγος b/a αποτελεί μέτρο επιπεδότητας του μοντέλου αυτού.

Οι (76) και (78) περιγράφουν ένα απλό μοντέλο για την κατανομή της ύλης του Γαλαξία. Όπως είναι γνωστό η παρατηρούμενη καμπύλη περιστροφής του Γαλαξία έχει δύο μέγιστα για $R \approx 0.5kpc$ και $R \approx 9kpc$ (βλ. π.χ. Sparke & Gallagher 2000 §2.3.1). Για να περιγράψουμε αυτήν την καμπύλη χρειάζομαστε



Σχήμα 16: Το παραπάνω σχήμα δείχνει ισόπυκνες καμπύλες του μοντέλου του Miyamoto για διάφορες τιμές του λόγου b/a . Η τιμή του b/a σημειώνεται στο πάνω μέρος κάθε σχήματος.

δύο ζευγάρια συναρτήσεων (76) με διαφορετική ομάδα παραμέτρων (a_1, b_1, M_1) και (a_2, b_2, M_2) . Τότε η (76) παίρνει την εξής μορφή:

$$\Phi(R, z) = -\frac{GM_1}{(R^2 + [a_1 + (z^2 + b_1^2)^{1/2}]^2)^{1/2}} - \frac{GM_2}{(R^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{1/2}} \quad (81)$$

Η ταχύτητα ενός αστέρα (με μάζα ίση με τη μονάδα) κινούμενου σε κυκλική τροχιά και σε απόσταση R από το κέντρο του Γαλαξία στο επίπεδο συμμετρίας του $z = 0$, συμβολίζεται με V (κυκλική ταχύτητα) και ισούται λόγω του δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα, με το μέτρο της δύναμης F ($F = (-\frac{\partial\Phi(R,z)}{\partial R})_{z=0}$):

$$V^2/R = |F| \quad (82)$$

όπου $\Phi(R, z)$ το δυναμικό του Miyamoto. Οπότε λόγω της (81) έχουμε:

$$V = R\left(\frac{GM_1}{(R^2 + (a_1 + b_1^2)^2)^{3/2}} + \frac{GM_2}{(R^2 + (a_2 + b_2^2)^2)^{3/2}}\right)^{1/2} \quad (83)$$

Το διάγραμμα της κυκλικής ταχύτητας V συναρτήσει της απόστασης R (καμπύλη περιστροφής) φαίνεται στο σχήμα 17.

Από την εξίσωση Poisson και τη συνάρτηση (81) βρίσκουμε την πυκνότητα:

$$\rho(R, z) = \frac{b_1^2 M_1}{4\pi} \frac{a_1 R^2 + [a_1 + 3(z^2 + b_1^2)^{1/2}][a_1 + (z^2 + b_1^2)^{1/2}]^2}{(R^2 + [a_1 + (z^2 + b_1^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (z^2 + b_1^2)^{3/2}} + \frac{b_2^2 M_2}{4\pi} \frac{a_2 R^2 + [a_2 + 3(z^2 + b_2^2)^{1/2}][a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2}{(R^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (z^2 + b_2^2)^{3/2}} \quad (84)$$

Οι συναρτήσεις (81) και (84) σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφονται:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{GM_1}{(x^2 + y^2 + [a_1 + (z^2 + b_1^2)^{1/2}]^2)^{1/2}} - \frac{GM_2}{(x^2 + y^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{1/2}} \quad (85)$$

$$\rho(x, y, z) = \frac{b_1^2 M_1}{4\pi} \frac{a_1 (x^2 + y^2) + [a_1 + 3(z^2 + b_1^2)^{1/2}][a_1 + (z^2 + b_1^2)^{1/2}]^2}{(x^2 + y^2 + [a_1 + (z^2 + b_1^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (z^2 + b_1^2)^{3/2}} +$$

$$\frac{b_2^2 M_2}{4\pi} \frac{a_2(x^2 + y^2) + [a_2 + 3(z^2 + b_2^2)^{1/2}][a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2}{(x^2 + y^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (z^2 + b_2^2)^{3/2}} \quad (86)$$

Οι παράμετροι που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι παράμετροι που χρησιμοποίησαν οι Miyamoto και Nagai για να προσεγγίσουν το δυναμικό του Γαλαξίας μας (Miyamoto & Nagai 1975):

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.0 \text{ kpc} \\ b_1 &= 0.495 \text{ kpc} \\ M_1 &= 2.05 \times 10^{10} M_\odot \\ a_2 &= 7.258 \text{ kpc} \\ b_2 &= 0.520 \text{ kpc} \\ M_2 &= 25.47 \times 10^{10} M_\odot \end{aligned} \quad (87)$$

Αυτές τις παραμέτρους θα χρησιμοποιήσουμε για την αξισυμμετρική περίπτωση του δυναμικού του μοντέλου μας. Αν τώρα στο δυναμικό του μοντέλου μας (σχέση 85) βάλουμε δύο όρους διαταραχής q_a και q_b και το κάνουμε τριαξονικό, θα έχουμε:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{GM_1}{(x^2 + \frac{y^2}{q_a^2} + [a_1 + (\frac{z^2}{q_b^2} + b_1^2)^{1/2}]^2)^{1/2}} - \frac{GM_2}{(x^2 + \frac{y^2}{q_a^2} + [a_2 + (\frac{z^2}{q_b^2} + b_2^2)^{1/2}]^2)^{1/2}} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \frac{b_1^2 M_1}{4\pi} \frac{a_1(x^2 + \frac{y^2}{q_a^2}) + [a_1 + 3(\frac{z^2}{q_b^2} + b_1^2)^{1/2}][a_1 + (\frac{z^2}{q_b^2} + b_1^2)^{1/2}]^2}{(x^2 + \frac{y^2}{q_a^2} + [a_1 + (\frac{z^2}{q_b^2} + b_1^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (\frac{z^2}{q_b^2} + b_1^2)^{3/2}} + \\ &\frac{b_2^2 M_2}{4\pi} \frac{a_2(x^2 + \frac{y^2}{q_a^2}) + [a_2 + 3(\frac{z^2}{q_b^2} + b_2^2)^{1/2}][a_2 + (\frac{z^2}{q_b^2} + b_2^2)^{1/2}]^2}{(x^2 + \frac{y^2}{q_a^2} + [a_2 + (\frac{z^2}{q_b^2} + b_2^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (\frac{z^2}{q_b^2} + b_2^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (89)$$

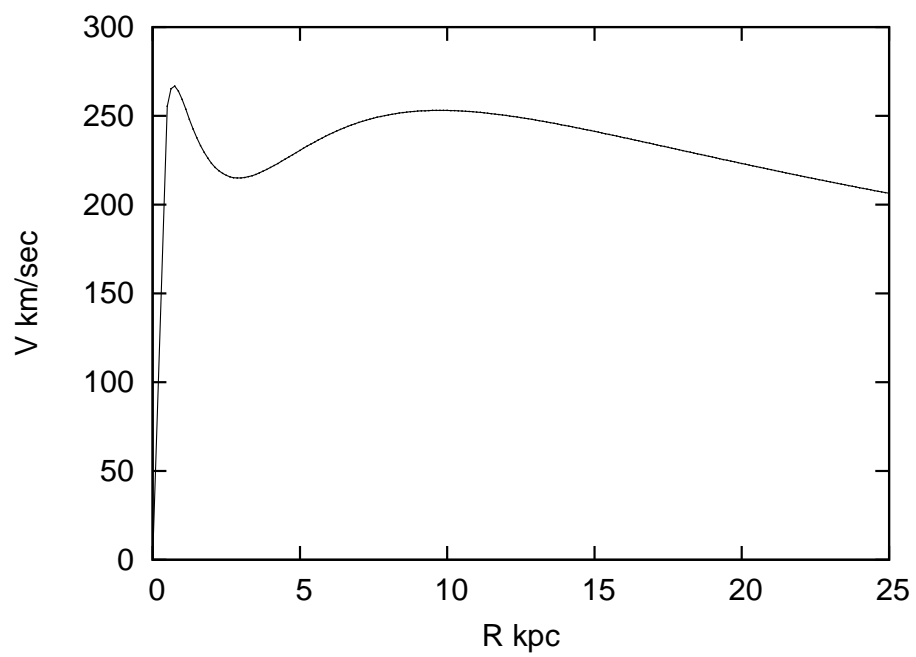
Οι σχέσεις (88) και (89) μας δίνουν το δυναμικό και την πυκνότητα για τη μη αξισυμμετρική περίπτωση του δυναμικού μας. Η πυκνότητα σε όλες τις περιπτώσεις είναι θετική. Οι παράμετροι που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι ίδιες με αυτές της αξισυμμετρικής περίπτωσης του δυναμικού μας. Για τα q_a και q_b θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} q_a &= 1.2 \\ q_b &= 0.9 \end{aligned} \tag{90}$$

Αυτές τις παραμέτρους θα χρησιμοποιήσουμε για την πρώτη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας. Για τη δεύτερη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες παραμέτρους αλλά θα μεταβάλλουμε την τιμή του Ω_b από 60 km/sec/kpc (βλέπε υποκεφάλαιο 1.1.5) σε 9.43 km/sec/kpc . Δηλαδή θεωρούμε ένα γαλαξία ο οποίος περιστρέφεται αργά σε σχέση με τον Γαλαξία μας. Η μεταβολή αυτή γίνεται για να μελετήσουμε διαφορές στην ευστάθεια των τροχιών που οφείλονται στην ταχύτητα περιστροφής του συστήματος.

Οι μονάδες που χρησιμοποιήσαμε για τους υπολογισμούς στην παρούσα μελέτη είναι για την απόσταση $R \text{ 1kpc}$, για τη μάζα $M \text{ } 10^{10} M_\odot$, για τον χρόνο $t \text{ } 14.8 \times 10^{13} \text{ sec}$, την ταχύτητα $V \text{ } 209.64 \text{ km/sec}$, τη σταθερά *Jacobi* $E_j \text{ } 43950 (\text{km/sec})^2$ και τη σταθερά της βαρύτητας $G = 1$. Τις μονάδες αυτές τις χρησιμοποιούμε σε όλα τα σχήματα στην διατριβή όπου δεν δίνουμε μονάδες στους άξονες.

Μελέτη της τροχιακής συμπεριφοράς σε τρισδιάστατα μοντέλα του Γαλαξία έχουν γίνει από τους Patsis & Zachilas (1990) και τους Pichardo et al (2003). Στην παρούσα διατριβή μελετάμε μη γραμμικά φαινόμενα που οφείλονται σε αποκλίσεις της γεωμετρίας του δίσκου από την αξονική συμμετρία.



Σχήμα 17: Η καμπύλη περιστροφής του Γαλαξία όπως περιγράφεται από το μοντέλο μας.

2.2 Η αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου.

Στην αξισυμμετρική περίπτωση η x_1 είναι πάντα ευσταθής. Όπως προαναφέραμε στην παράγραφο 1.2.2 η x_1 σε αυτή την περίπτωση αποτελείται από κυκλικές περιοδικές τροχιές. Στο σχήμα 18 παριστάνεται η χαρακτηριστική της x_1 και η καμπύλη μηδενικής ταχύτητας. Στο διάγραμμα ευστάθειας της x_1 σε ένα αξισυμμετρικό μοντέλο (όπως αυτό που μελετάμε στην παράγραφο αυτή) ο δείκτης b_2 εφάπτεται με τον άξονα $b = -2$ στα σημεία των ακτινικών συντονισμών 2/1, 3/1, 4/1 κ.τ.λ. Ενώ ο δείκτης b_1 εφάπτεται με τον άξονα $b = -2$ στα σημεία των κάθετων συντονισμών 2/1, 3/1, 4/1 κ.τ.λ (Patsis & Grosbøl 1996, Patsis et al. 2002b).

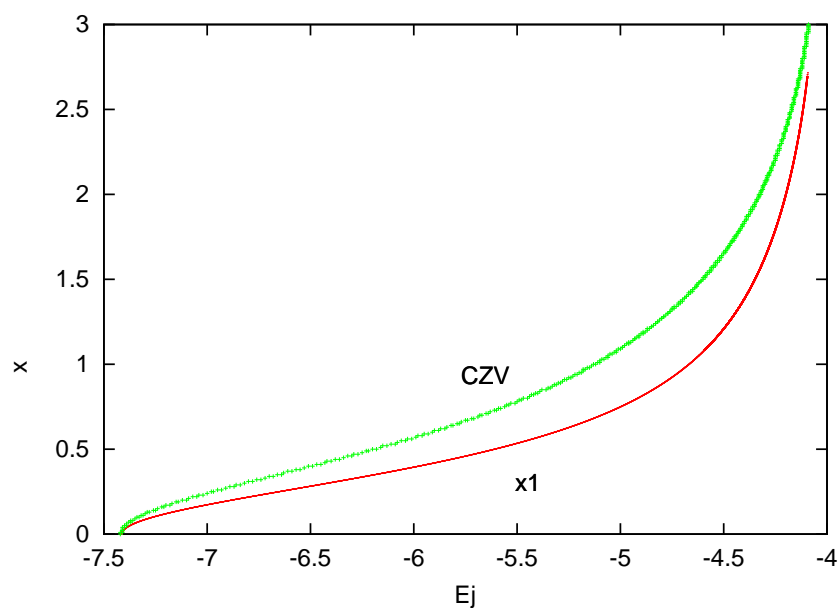
Στο σχήμα 19 παριστάνονται οι καμπύλες $\Omega, \Omega - \kappa/2, \Omega + \kappa/2, \Omega - \kappa/3$ και $\Omega - \kappa/4$. Υπενθυμίζουμε ότι το σύστημα μας περιστρέφεται με $\Omega_b = 60 \text{ km/sec/kpc}$. Το σημείο της συμπεριστροφής (corotation) στο επίπεδο $z = 0$ του Γαλαξία μας βρίσκεται σε απόσταση 4 kpc από το κέντρο του (Σχ. 19). Επίσης υπάρχουν δύο εσωτερικοί ακτινικοί συντονισμοί 2/1 σε αποστάσεις 0.6 kpc και 1.66 kpc από το κέντρο του Γαλαξία μας (Σχ. 19).

Στο σχήμα 20 παριστάνονται οι καμπύλες $\Omega, \Omega - \kappa_z/2, \Omega + \kappa_z/2, \Omega - \kappa_z/3, \Omega - \kappa_z/4$ και $\Omega - \kappa_z/5$. Οι κάθετοι συντονισμοί 2/1, 3/1, 4/1 και 5/1 βρίσκονται σε αποστάσεις 1.6 kpc, 2.3 kpc, 2.6 kpc και 2.7 kpc από το κέντρο του Γαλαξία μας (Σχ. 20).

Στο σχήμα 21 έχουμε το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για τιμές της ενέργειας από ≈ -7.5 ως ≈ -4.5 . Στο σχήμα αυτό βλέπουμε ότι η καμπύλη του b_2 εφάπτεται με τον άξονα $b = -2$ όπου έχουμε τον ακτινικό συντονισμό 2/1 (για τιμή της ενέργειας ≈ -6.6).

Στο σχήμα 22 έχουμε το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για τιμές της ενέργειας από ≈ -4.5 ως ≈ -4.22 . Η καμπύλη του b_2 κατεβαίνει μέχρι που εφάπτεται με τον άξονα $b = -2$ στο δεύτερο σημείο του ακτινικού συντονισμού 2/1 (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.34). Παράλληλα η καμπύλη του b_1 εφάπτεται στον άξονα $b = -2$ στο σημείο του κάθετου συντονισμού 2/1 (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.4472) και στο σημείο του κάθετου συντονισμού 3/1 (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.27).

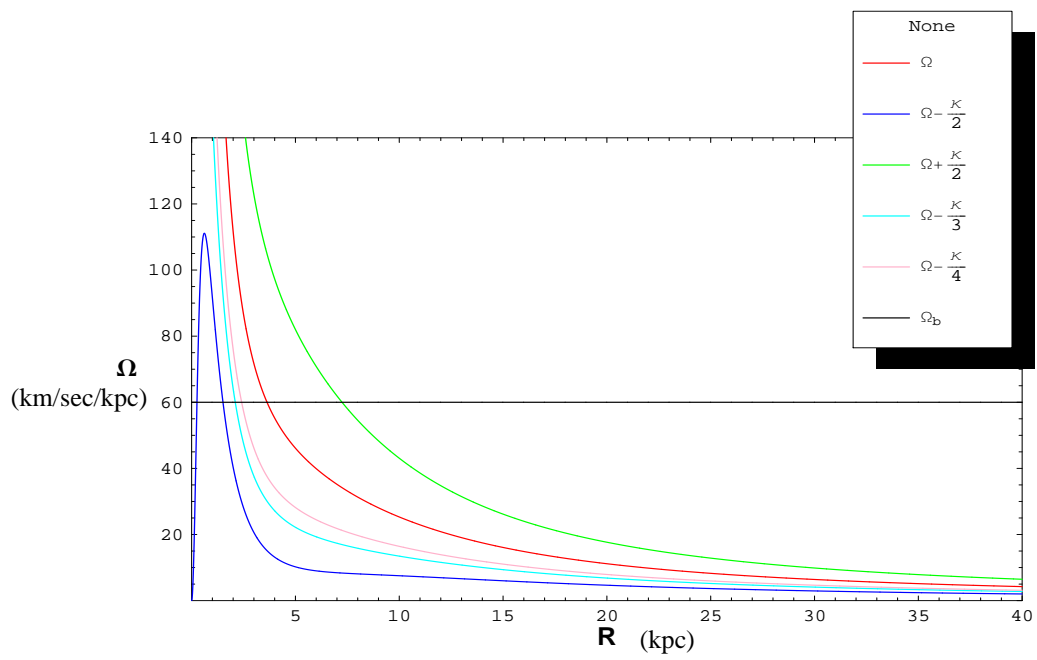
Στο σχήμα 23 έχουμε το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για τιμές της ενέργειας από ≈ -4.22 ως ≈ -4.11 . Η καμπύλη του b_2 εφάπτεται με τον άξονα $b = -2$ στο σημείο του ακτινικού συντονισμού 3/1 (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.17) και στο σημείο του ακτινικού συντονισμού 4/1 (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.126). Ενώ η καμπύλη του b_1 εφάπτεται με τον άξονα $b = -2$ σε τέσσερα σημεία. Τα σημεία αυτά είναι τα σημεία των κάθετων συντονισμών 4/1, 5/1, 6/1 και 7/1 για τιμές της ενέργειας $\approx -4.19, \approx -4.159, \approx -4.134$



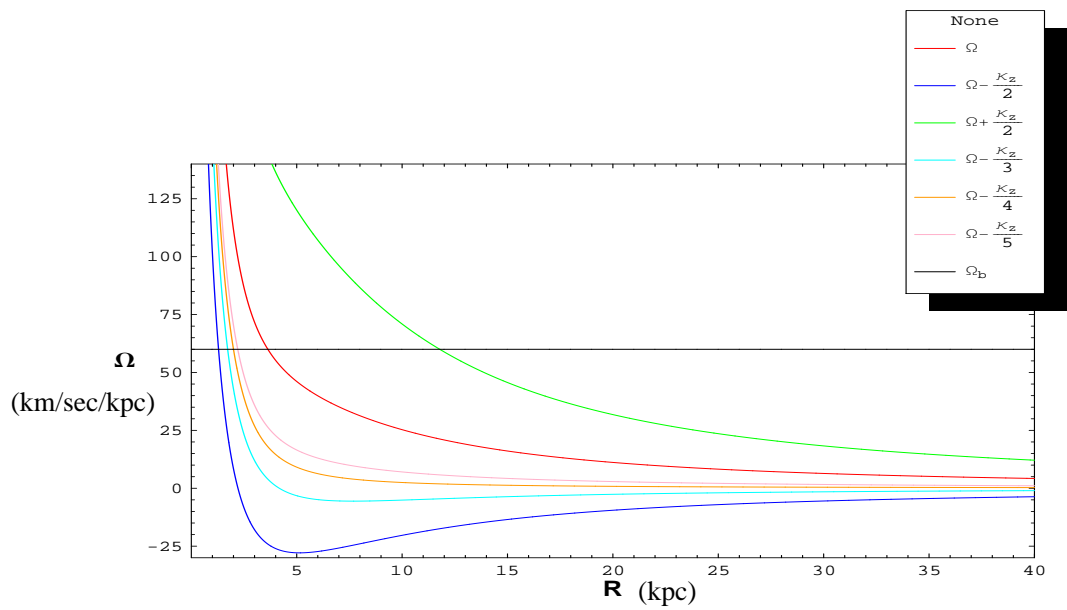
Σχήμα 18: Η χαρακτηριστική της x_1 και η καμπύλη μηδενικής ταχύτητας.

και ≈ -4.118 αντίστοιχα.

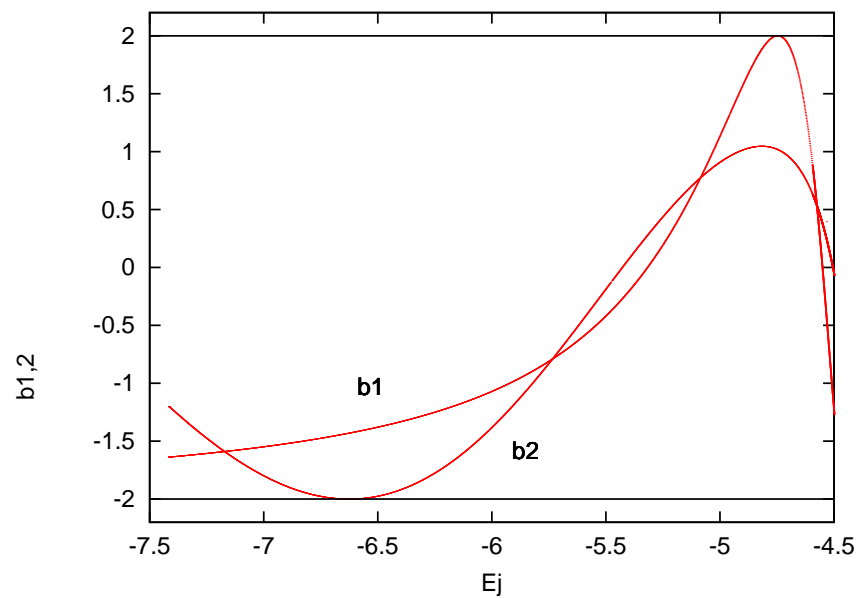
Στα σημεία των επαφών με τον άξονα $b = -2$ έχουμε τις αναμενόμενες διακλαδώσεις σύμφωνα με τους κανόνες που διατυπώσαμε στο υποκεφάλαιο 1.2.3. Οι διακλαδιζόμενες οικογένειες είναι οριακά ασταθείς καθώς ο ένας δείκτης ευστάθειας παραμένει πάντοτε πάνω στον $b = -2$ άξονα. Οι (x, y) προβολές αυτών των διακλαδώσεων είναι κυκλικές ενώ οι (x, z) και (y, z) προβολές είναι όπως στη γενική περίπτωση του μη-αξισυμμετρικού δυναμικού. Γι αυτό το λόγο δε θα παρουσιάσουμε την μορφολογία τους εδώ. Ας δούμε λοιπόν πως αλλάζει η δυναμική του συστήματος όταν το μετατρέπουμε σε μη-αξισυμμετρικό βάζοντας τους όρους διαταραχής q_a και q_b (εξίσωση 88).



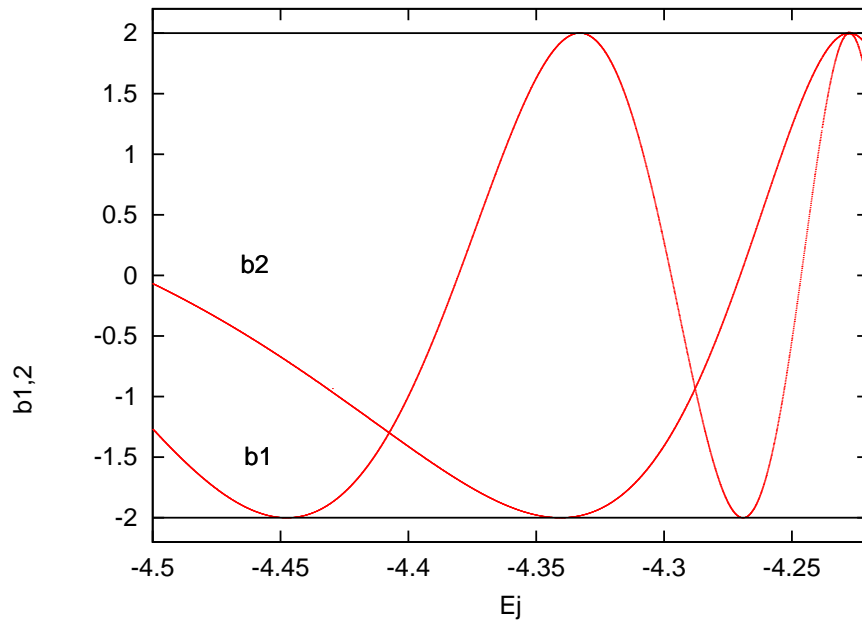
Σχήμα 19: Οι καμπύλες $\Omega, \Omega - \kappa/2, \Omega + \kappa/2, \Omega - \kappa/3$ και $\Omega - \kappa/4$ ($\Omega_b = 60 \text{ km/sec/kpc}$).



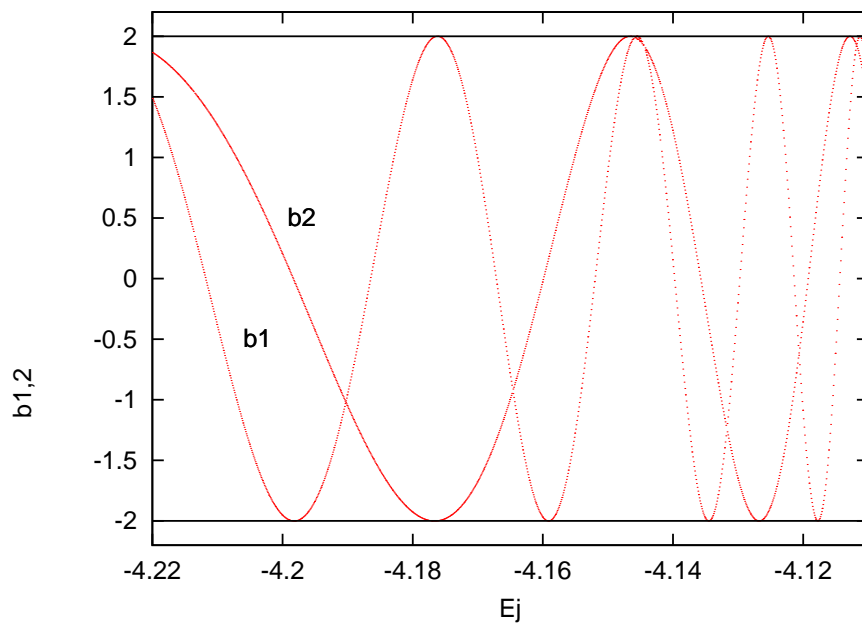
Σχήμα 20: Οι καμπύλες Ω , $\Omega - \kappa_z/2$, $\Omega + \kappa_z/2$, $\Omega - \kappa_z/3$, $\Omega - \kappa_z/4$ και $\Omega - \kappa_z/5$ ($\Omega_b = 60 \text{ km/sec/kpc}$).



Σχήμα 21: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-7.5 < E_j < -4.5$.



Σχήμα 22: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-4.5 < E_j < -4.22$.



Σχήμα 23: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-4.22 < E_j < -4.11$.

2.3 Η πρώτη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την x_1 στην πρώτη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας (υποκεφάλαιο 2.3.1). Κατόπιν θα μελετήσουμε τις 3D διακλαδώσεις της x_1 $x1v1$, $x1v2$, $x1v3$ και $x1v4$ (υποκεφάλαιο 2.3.2). Αυτές οι οικογένειες έχουν ευσταθείς, απλά ασταθείς, διπλά ασταθείς και μιγαδικά ασταθείς περιοδικές τροχιές.

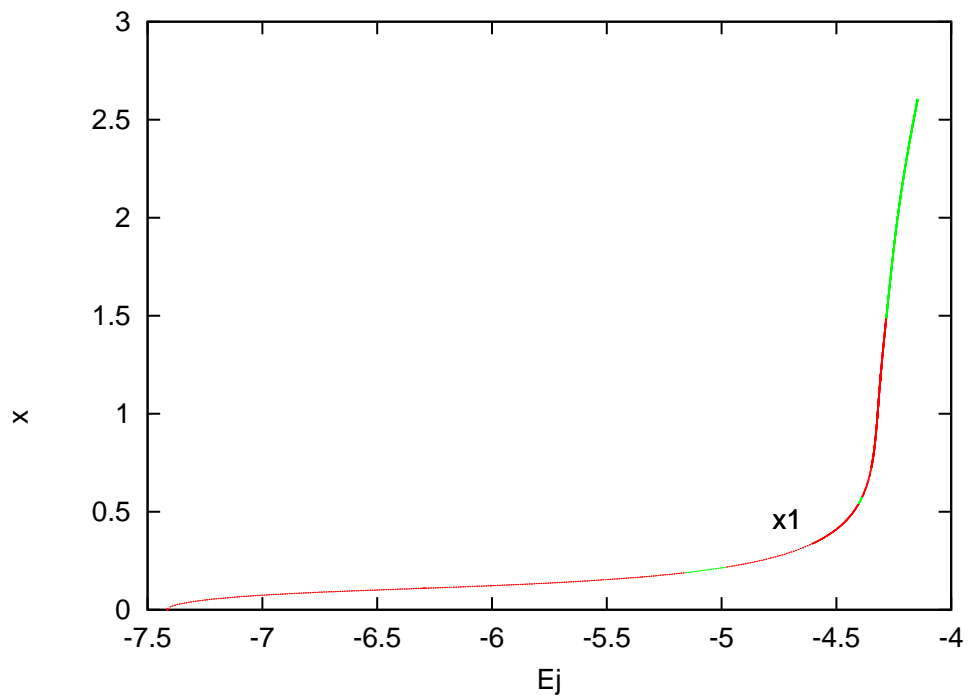
2.3.1 Οικογένεια x_1

Στο σχήμα 24 απεικονίζεται το κύριο τμήμα της χαρακτηριστικής της x_1 . Τα ευσταθή κομμάτια της x_1 παριστάνονται με κόκκινο χρώμα ενώ τα ασταθή με πράσινο χρώμα. Η μορφολογική εξέλιξη των τροχιών της x_1 ως συνάρτηση του E_j φαίνεται στο σχήμα 25. Στα σχήματα a, b, c, d και e δίνουμε ευσταθείς τροχιές της x_1 για τιμές της ενέργειας -7.00, -5.707, -5.00, -4.78 και -4.507 αντίστοιχα. Στο σχήμα f βλέπουμε μία ασταθή τροχιά της x_1 για τιμή της ενέργειας -4.242.

Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 δίνεται στα σχήματα 26, 27 και 28. Στο σχήμα 26 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για τιμές της ενέργειας από -7.5 ως και -4.5. Στο σχήμα αυτό βλέπουμε ότι η καμπύλη b_1 τέμνει τον άξονα $b = -2$ για τιμή της ενέργειας ≈ -5.1644 . Από το σημείο της τομής της καμπύλης b_1 με τον άξονα $b = -2$ και μετά ο b_1 μειώνεται παίρνοντας τιμές μικρότερες του -2 με αποτέλεσμα η x_1 να γίνεται ασταθής. Στο σημείο αυτό εμφανίζεται μία νέα 3D ευσταθής οικογένεια, η οποία είναι διακλάδωση της x_1 , η $x1v1$ (Σχ.26). Η καμπύλη b_1 τέμνει ξανά τον άξονα $b = -2$ (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.98) με αποτέλεσμα η x_1 να γίνεται πάλι ευσταθής. Στο δεύτερο αυτό σημείο τομής της καμπύλης b_1 με τον άξονα $b = -2$ εμφανίζεται μία νέα 3D ασταθής διακλάδωση της x_1 η $x1v2$ (Σχ. 26).

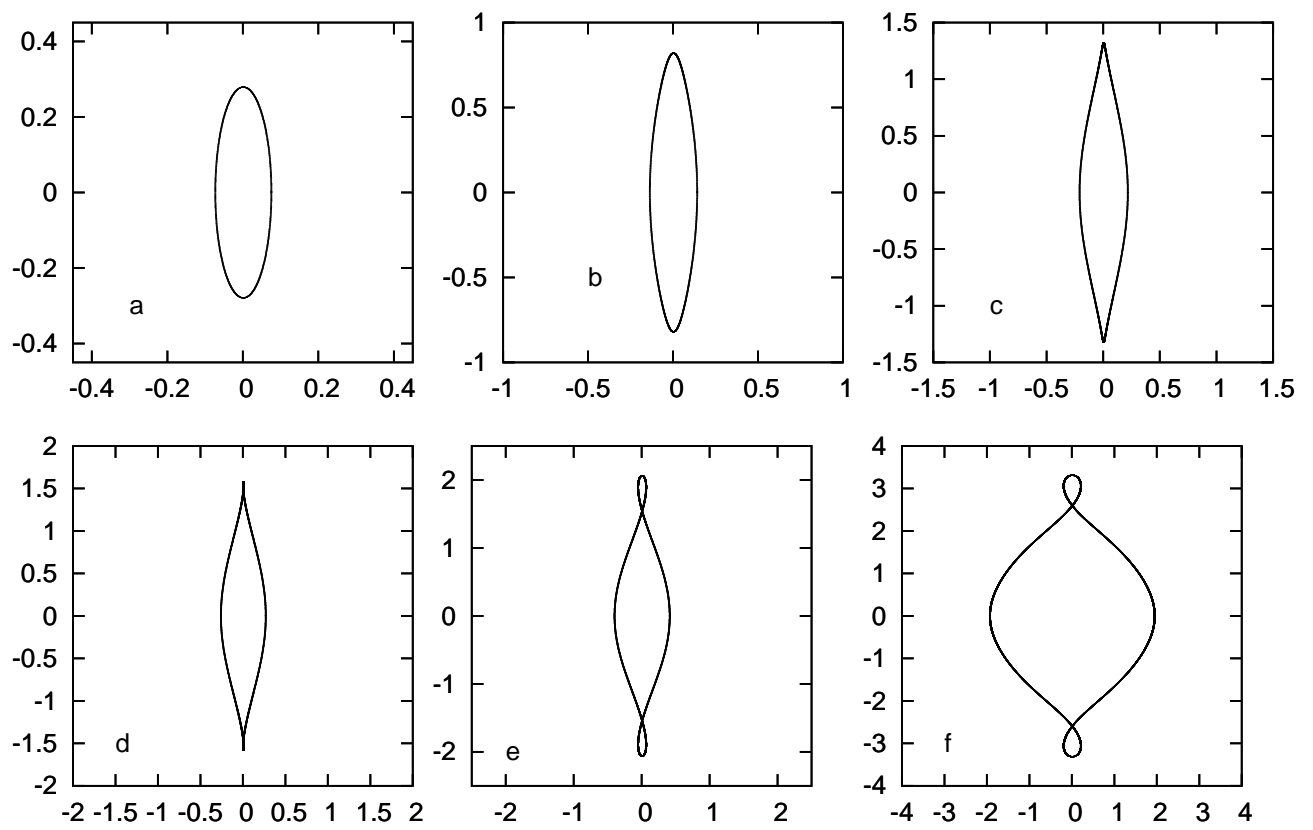
Το σχήμα 27 είναι συνέχεια του σχήματος 26 για τιμές της ενέργειας από -4.5 ως και -4.34. Η καμπύλη b_1 φτάνει σε τομή με τον άξονα $b = -2$ για τιμή της ενέργειας ≈ -4.404 οπότε η x_1 γίνεται ασταθής. Στο τρίτο σημείο τομής της καμπύλης b_1 με τον άξονα $b = -2$ εμφανίζεται μία νέα 3D ευσταθής διακλάδωση της x_1 η $x1v3$ (Σχ. 27). Στη συνέχεια η καμπύλη b_1 τέμνει ξανά τον άξονα $b = -2$ για τιμή της ενέργειας ≈ -4.391 οπότε η x_1 γίνεται πάλι ευσταθής. Στο σημείο αυτό τομής της καμπύλης b_1 με τον άξονα $b = -2$ έχουμε την εμφάνιση μίας νέας 3D ασταθούς διακλάδωσης της $x1v4$ (Σχ.27).

Το σχήμα 28 είναι συνέχεια του σχήματος 27 για τιμές της ενέργειας από -4.34 ως και -4.14. Στο σχήμα 28 βλέπουμε η καμπύλη b_1 να εφάπτεται με τον άξονα $b = -2$ για τιμές της ενέργειας ≈ -4.314 , ≈ -4.2837 και ≈ -4.2515 .

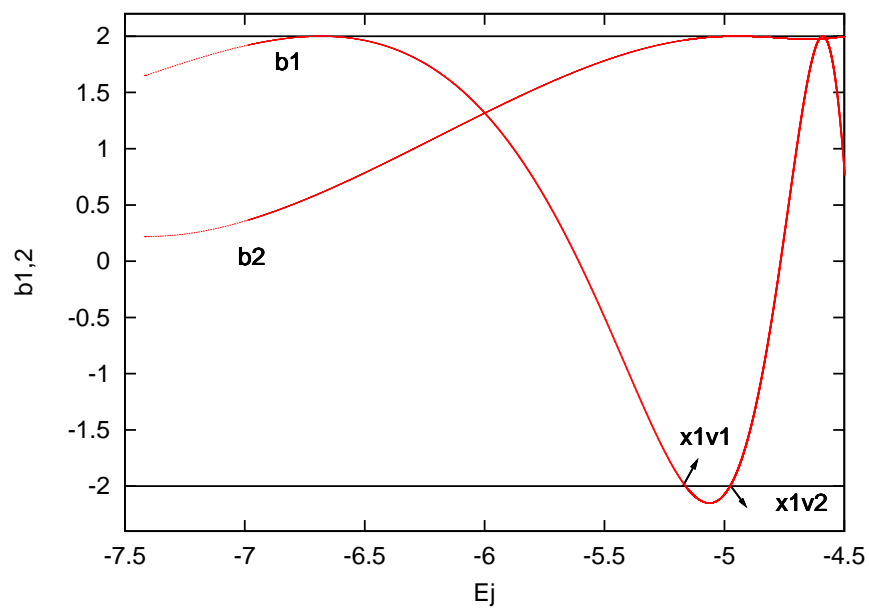


Σχήμα 24: Η χαρακτηριστική της x_1 . Οι ευσταθείς και οι ασταθείς περιοχές της x_1 παριστάνονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντίστοιχα.

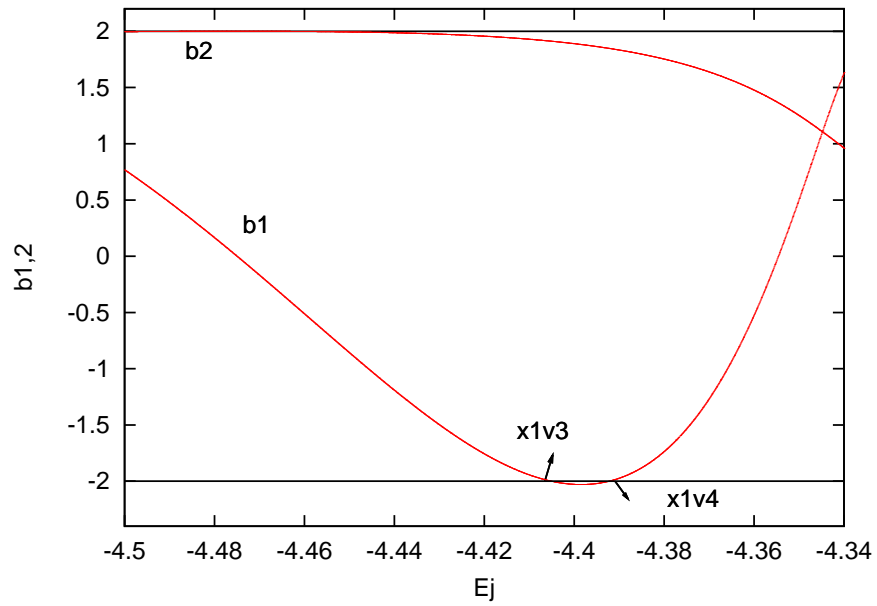
Ενώ η καμπύλη b_2 τέμνει τον άξονα $b = -2$ για τιμή της ενέργειας ≈ -4.285 (για μεγέθυνση βλέπε Σχ. 29). Μετά η καμπύλη b_2 αρχίζει και παίρνει τιμές μικρότερες του -2 με συνέπεια η x_1 να γίνεται ασταθής.



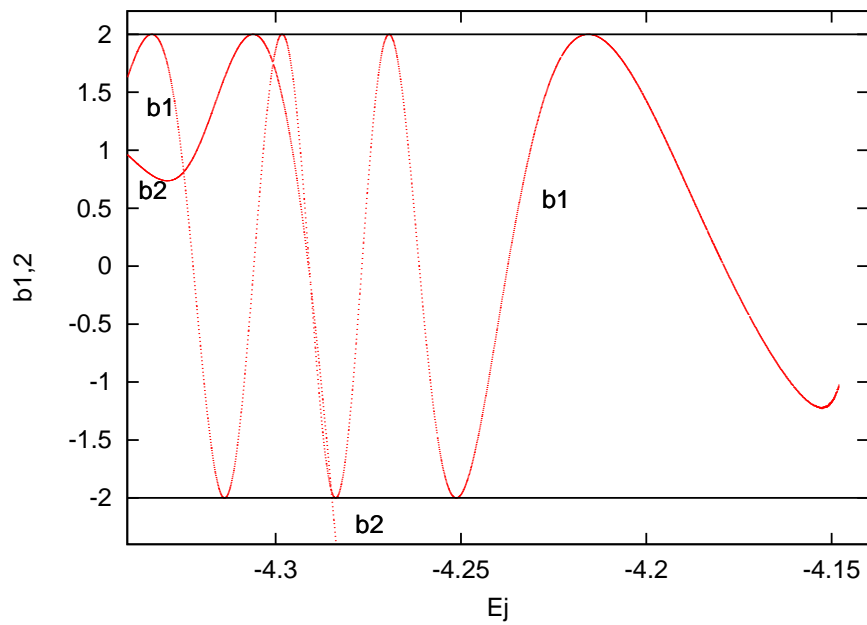
Σχήμα 25: Τα a, b, c, d, e και f παριστάνουν τροχιές της x_1 για τιμές της ενέργειας -7.00 , -5.707 , -5.00 , -4.78 , -4.507 και -4.242 αντίστοιχα.



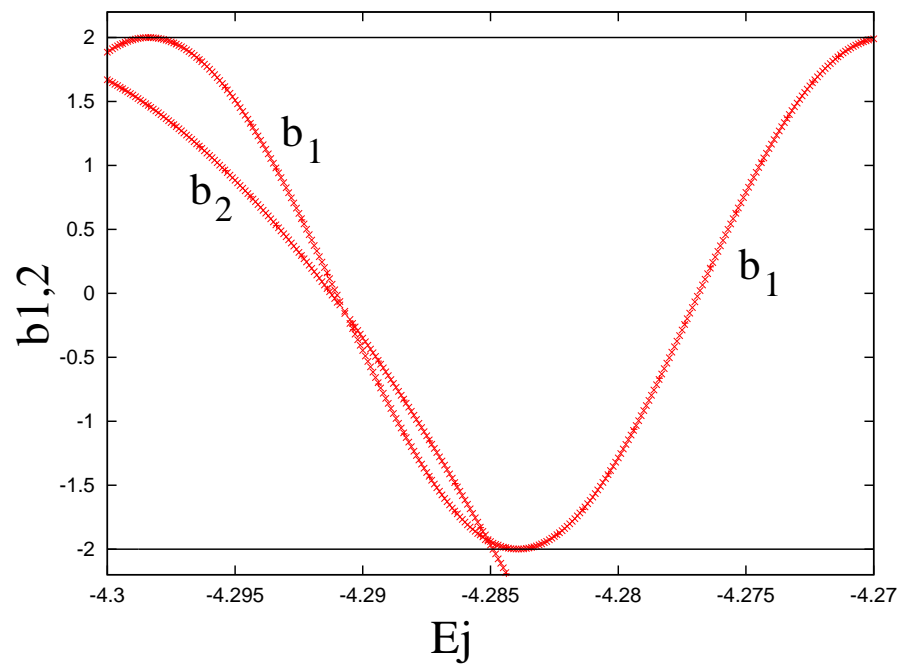
Σχήμα 26: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-7.5 < E_j < -4.5$. Με βέλη σημειώνουμε την φορά των δεικτών b_1 των διακλαδιζόμενων τροχιών.



Σχήμα 27: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-4.5 < E_j < -4.34$. Με βέλη σημειώνουμε την φορά των δεικτών b_1 των διακλαδιζόμενων τροχιών.



Σχήμα 28: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-4.34 < E_j < -4.14$.



Σχήμα 29: Μεγέθυνση του διαγράμματος ευστάθειας της x_1 για $-4.3 < E_j < -4.27$.

2.3.2 3D διακλαδώσεις

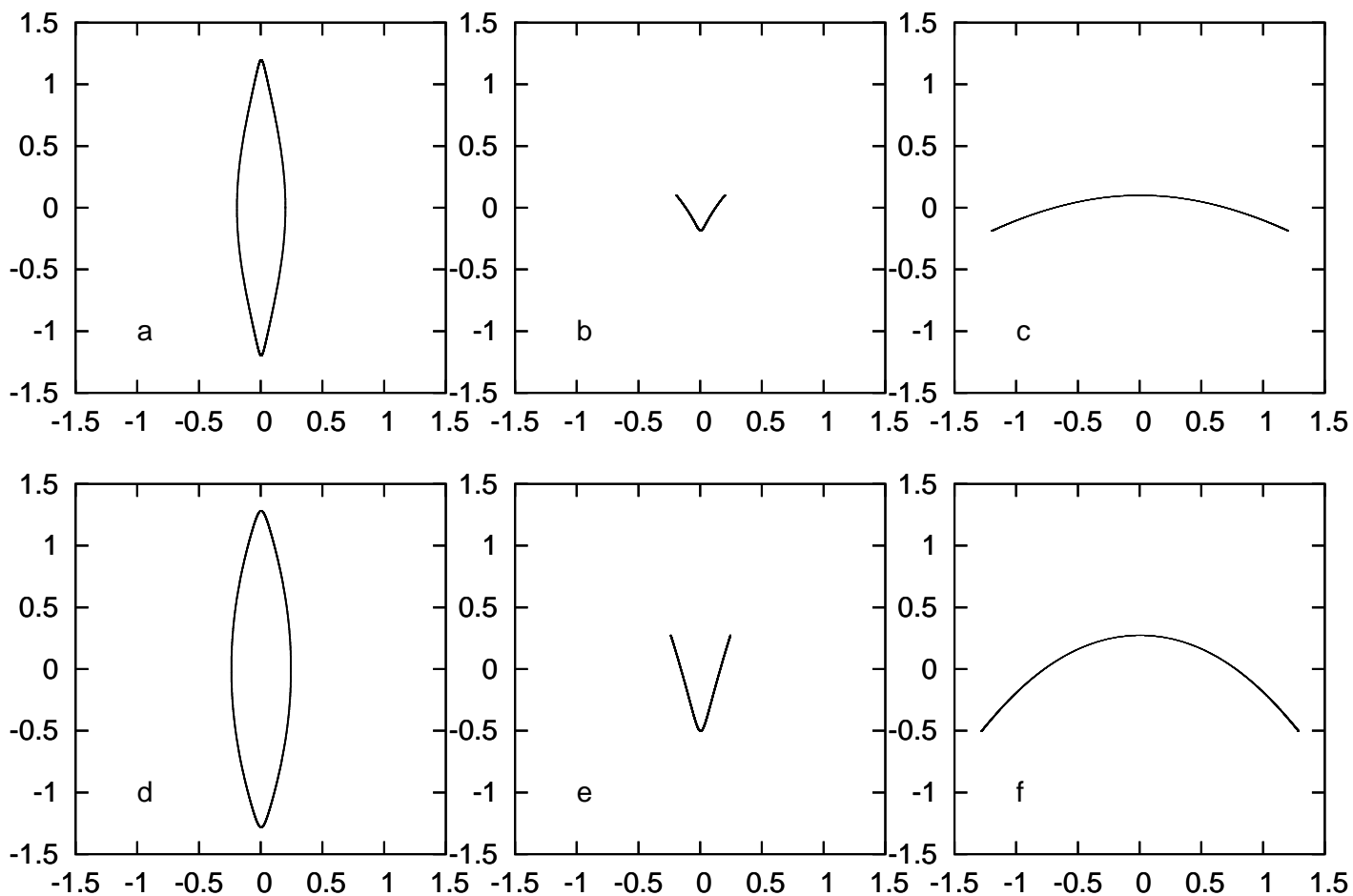
Ας δούμε τώρα λεπτομερώς πως μεταβάλλεται η ευστάθεια των 3D διακλαδώσεων της x_1 καθώς και τη μορφολογία τους. Στο σχήμα 30 παριστάνονται δύο ευσταθείς τροχιές της πρώτης 3D διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $2/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -5.09 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.78 . Αυτές οι τροχιές είναι όμοιες με αυτές της $x1v1$ στο μοντέλο A (Skokos et al. 2002a). Στο σχήμα 32 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v1$, όπου η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v1$ με πράσινο χρώμα. Η $x1v1$ είναι αρχικά ευσταθής αφού και οι δύο δείκτες b_1 και b_2 παραμένουν μεταξύ -2 και 2 . Στην τιμή 1.27 συναντιούνται οι δύο καμπύλες (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.62). Κατόπιν οι δύο δείκτες γίνονται μιγαδικοί ($\Delta < 0$) δηλαδή η $x1v1$ γίνεται μιγαδικά ασταθής μέχρι και για την τιμή της ενέργειας $E_j \approx -2.89$ (εκτός σχήματος). Δηλαδή για την οικογένεια $x1v1$ έχουμε μετάβαση από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια ($S \rightarrow \Delta$).

Στο σχήμα 31 παριστάνονται δύο ασταθείς τροχιές της δεύτερης 3D διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $2/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.883 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.2 . Έχουμε δύο χαρακτηριστικές $x1v2$ τροχιές (Skokos et al 2002a). Στο σχήμα 33 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v2$, όπου η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v2$ με πράσινο χρώμα. Παρατηρούμε ότι η $x1v2$ είναι απλά ασταθής σε όλο το διάστημα.

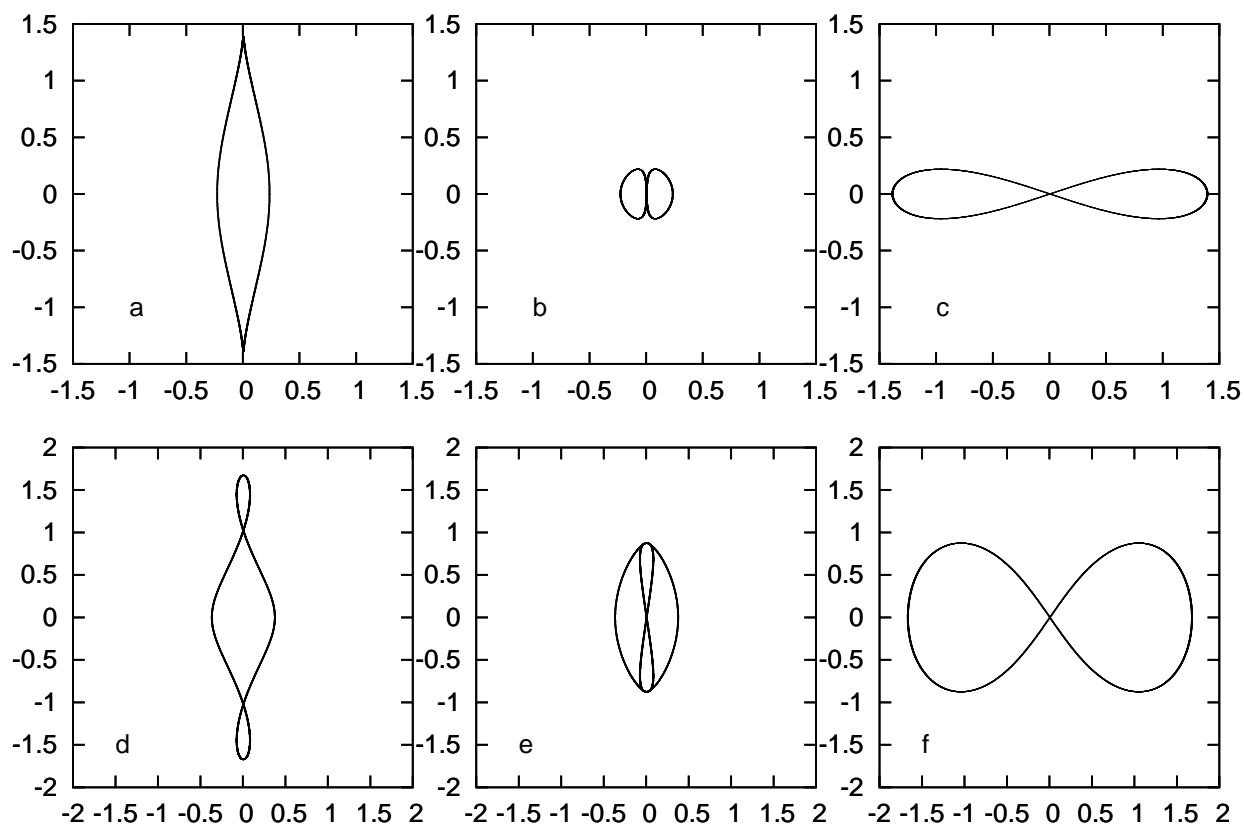
Στο σχήμα 34 παριστάνονται δύο τροχιές (μία ευσταθής και μία ασταθής) της τρίτης 3D διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $3/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.4 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.11 . Αυτές οι τροχιές είναι όμοιες με αυτές της $x1v3$ (Skokos et al 2002a). Στο σχήμα 36 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v3$, όπου η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v3$ με πράσινο χρώμα. Η $x1v3$ είναι αρχικά ευσταθής. Η καμπύλη b_1 φτάνει σε τομή με τον άξονα $b = -2$ σε ένα σημείο το οποίο έχει τιμή για την ενέργεια ≈ -4.2 , οπότε η $x1v3$ γίνεται απλά ασταθής (έχουμε μετάβαση από ευστάθεια σε απλή αστάθεια $S \rightarrow U$). Κατόπιν η καμπύλη b_2 τέμνει τον άξονα $b = -2$ σε ένα σημείο με τιμή για την ενέργεια ≈ -3.91 με αποτέλεσμα η $x1v3$ να γίνει διπλά ασταθής (έχουμε μετάβαση από

απλή αστάθεια σε διπλή αστάθεια $U \rightarrow DU$).

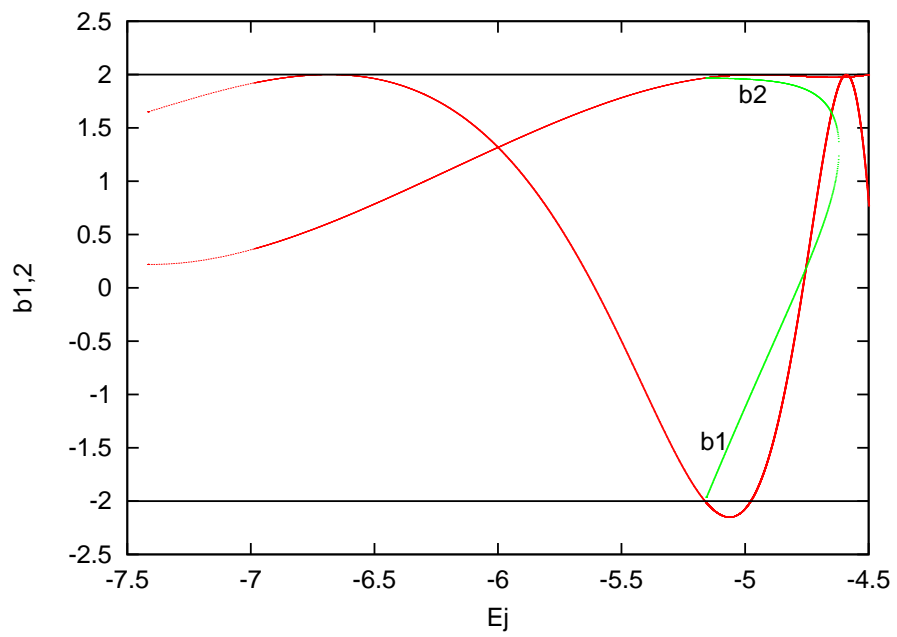
Στο σχήμα 35 παριστάνονται δύο τροχιές (μία ευσταθής και μία ασταθής) της τέταρτης 3D διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $3/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.23 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.07 . Αυτές οι τροχιές ανήκουν στην οικογένεια $x1v4$ (Skokos et al 2002a). Επομένως η διακλάδωση αυτή είναι η $x1v4$. Στο σχήμα 37 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v4$, όπου η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v4$ με πράσινο χρώμα. Η $x1v4$ είναι αρχικά απλά ασταθής. Ο δείκτης b_1 φτάνει σε τομή με τον άξονα $b = -2$ για $E_j \approx -4.2$. Στο σημείο αυτό η $x1v4$ γίνεται ευσταθής (έχουμε μετάβαση από απλή αστάθεια σε ευστάθεια $U \rightarrow S$).



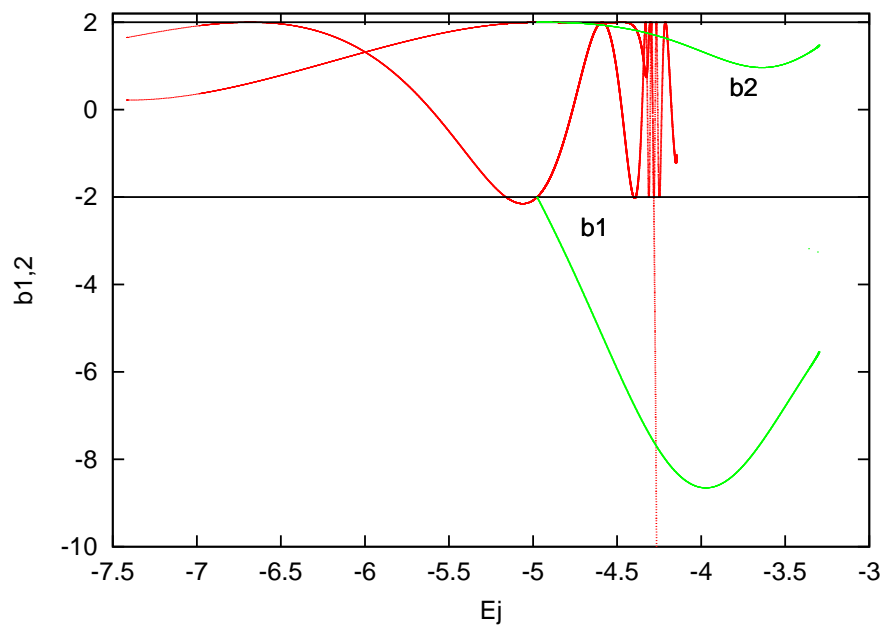
Σχήμα 30: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v1$ για τιμές της ενέργειας -5.09 και -4.78 αντίστοιχα.



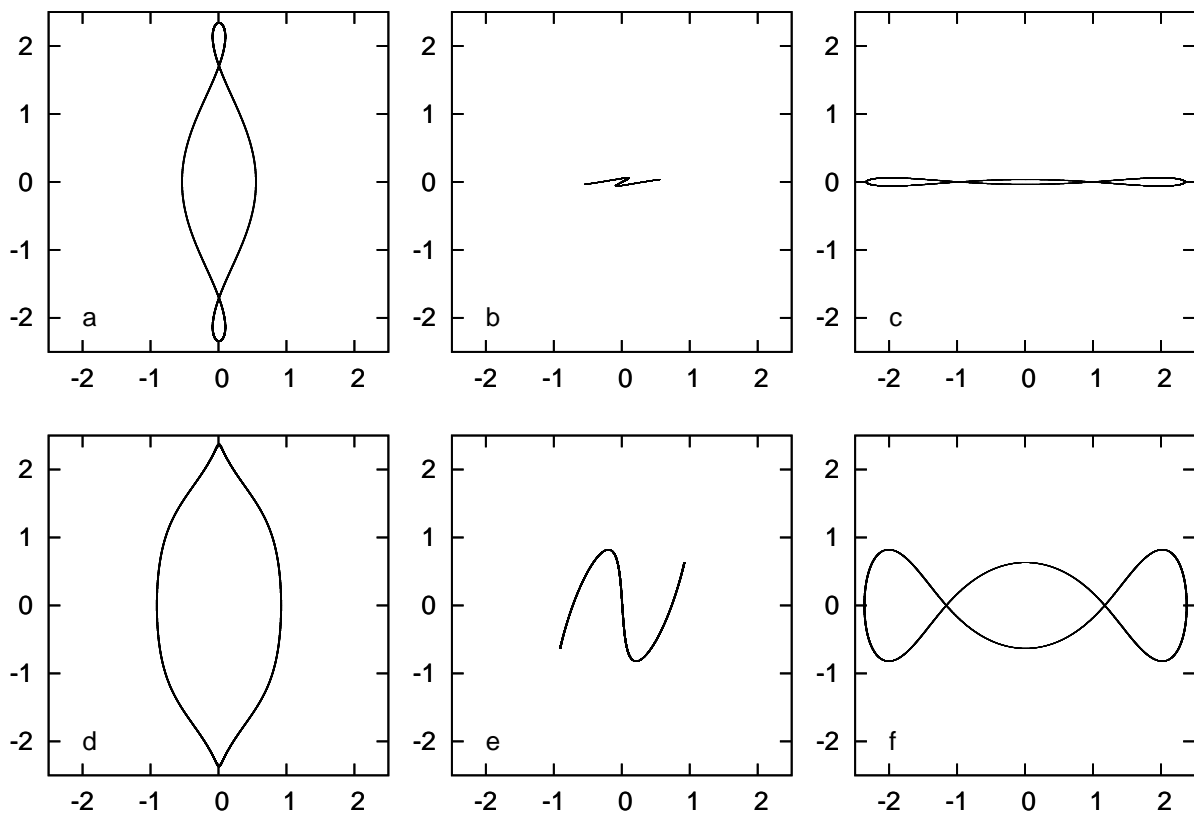
Σχήμα 31: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της x_1v_2 για τιμές της ενέργειας -4.883 και -4.2 αντίστοιχα.



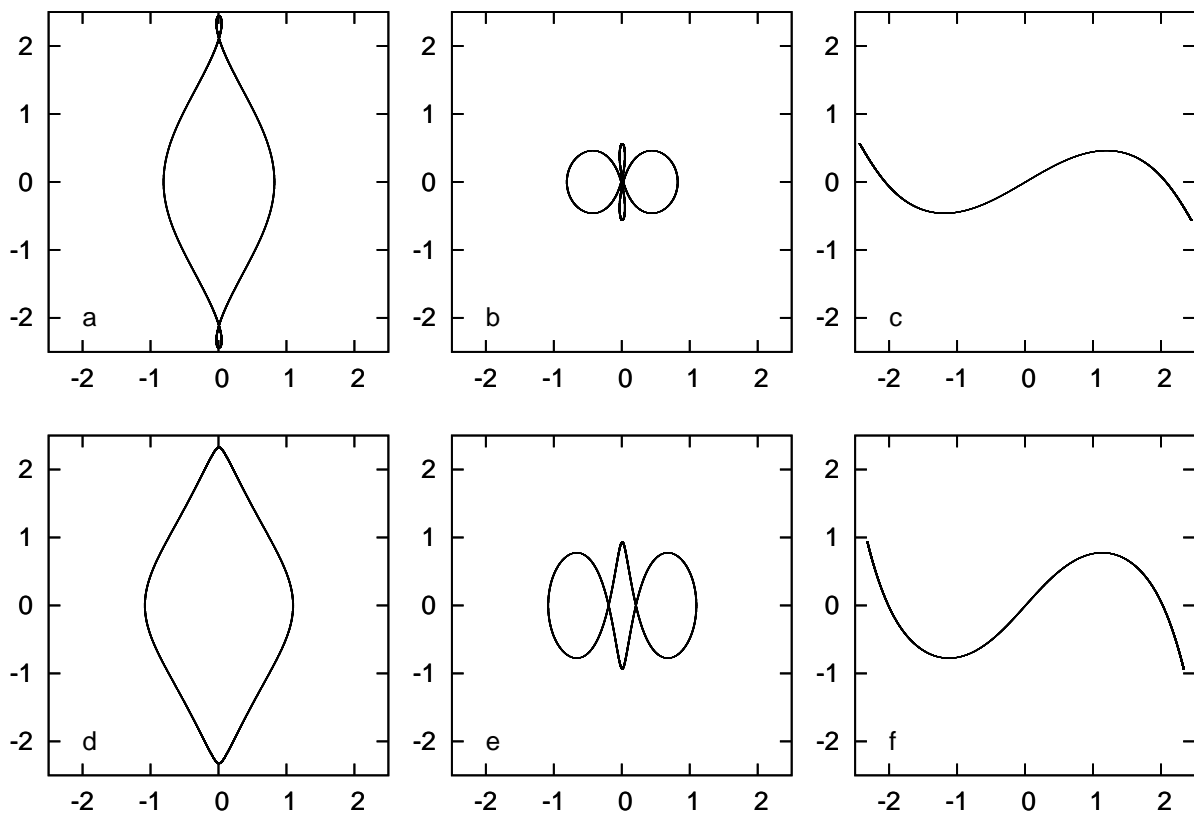
Σχήμα 32: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v1} για $-5.1644 < E_j < -4.5$.



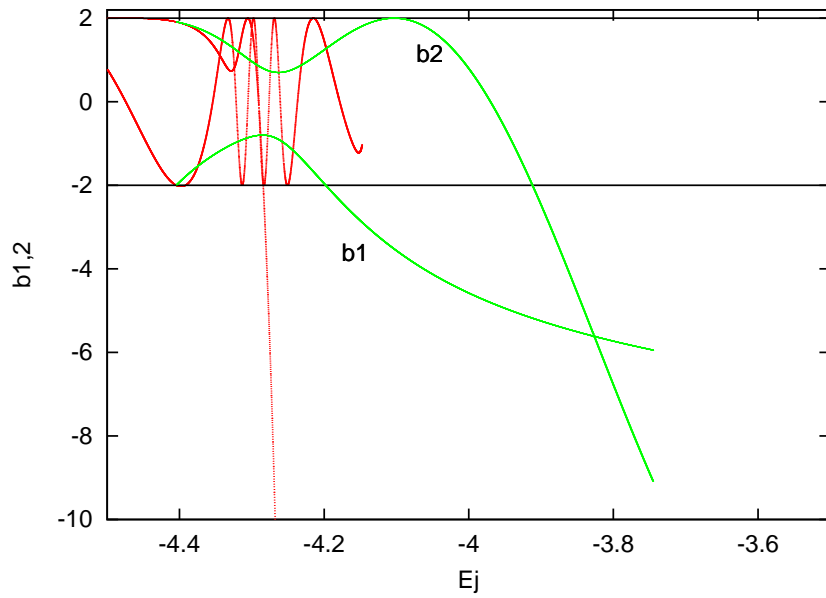
Σχήμα 33: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_2 για $-4.98 < E_j < -3.31$



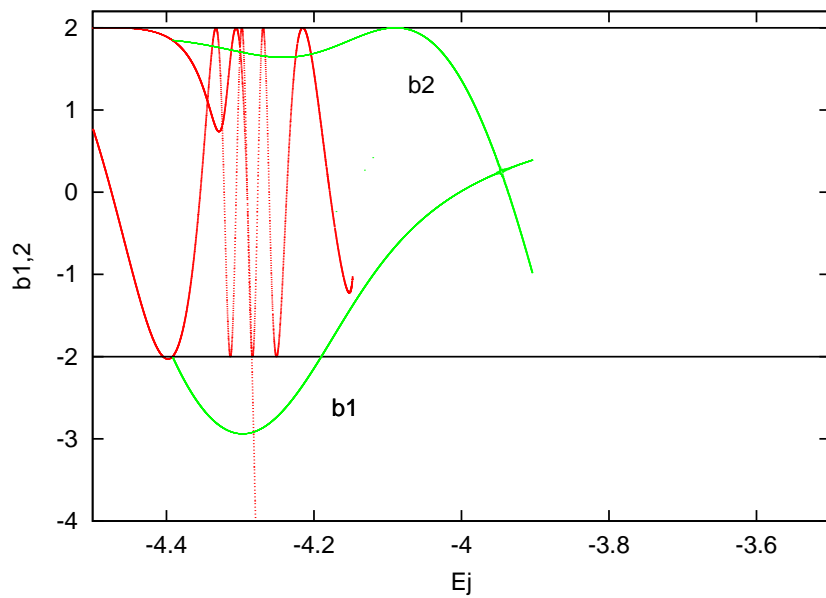
Σχήμα 34: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v3$ για τιμές της ενέργειας -4.4 και -4.11 αντίστοιχα.



Σχήμα 35: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v4$ για τιμές της ενέργειας -4.23 και -4.07 αντίστοιχα.



Σχήμα 36: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v3} για $-4.404 < E_j < -3.74$.



Σχήμα 37: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v4} για $-4.391 < E_j < -3.9$.

2.4 Η δεύτερη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου.

Το δεύτερο μοντέλο που μελετάμε διαφέρει από το αρχικό μόνο κατά την ταχύτητα περιστροφής του συστήματος. Έτσι μπορούμε να μελετήσουμε τις διαφορές που εισάγει η αλλαγή του Ω_b . Ως μέτρο για τις τιμές που επιλέξαμε χρησιμοποιήσαμε την ταχύτητα περιστροφής της ράβδου του Γαλαξία.

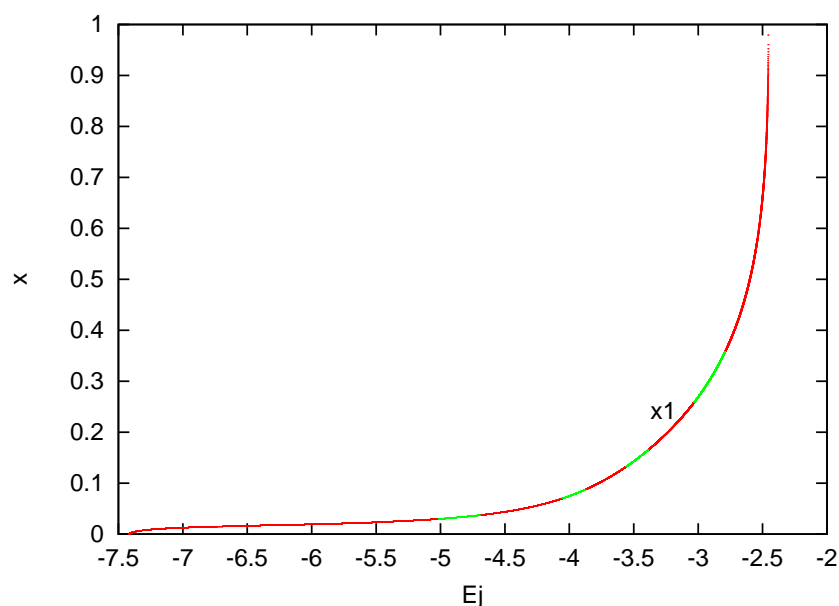
Στο δεύτερο μοντέλο χρησιμοποιούμε μία τιμή του Ω_b που είναι περίπου 6.4 φορές μικρότερη. Αυτό έχει σαν συνέπεια η συμπεριστροφή να μετατοπιστεί σε απόσταση $34kpc$ από το κέντρο του Γαλαξία (Σχ. 20). Μελετάμε δηλαδή τα πολύ βραδέως περιστρεφόμενα συστήματα. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την x_1 σε αυτή τη δεύτερη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας (υποκεφάλαιο 2.4.1). Κατόπιν θα μελετήσουμε τις $3D$ διακλάδωσεις της $x_{1\nu n, n = 1, \dots, 8}$ (υποκεφάλαιο 2.4.2).

2.4.1 Οικογένεια x_1

Στο σχήμα 38 απεικονίζεται μέρος της χαρακτηριστικής της x_1 . Τα ευσταθή κομμάτια της x_1 παριστάνονται με κόκκινο χρώμα ενώ τα ασταθή με πράσινο χρώμα. Πάλι περιοριζόμαστε στο κομμάτι όπου εμφανίζονται οι κυριότεροι κάθετοι συντονισμοί⁵. Η μορφολογική εξέλιξη των τροχιών της x_1 στο μοντέλο που μελετάμε εδώ φαίνεται στο σχήμα 39. Τα a, b, c, d, e και f του σχήματος 39 παριστάνουν ευσταθείς τροχιές της x_1 για τιμές της ενέργειας $-6.6, -6.14, -5.49, -4.55, -3.83$ και -3.08 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η μορφολογία των τροχιών της x_1 άλλαξε σε σχέση με αυτές του πρώτου μοντέλου (Σχ. 25). Οι τροχιές έχουν γίνει πολύ πιο επιμήκεις και θυμίζουν τις τροχιές ράβδων με μεγάλο λόγο μεγάλου ως προς μικρό ημιάξονα, που ονομάζονται “propeller orbits” (Kaufmann & Patsis 2005).

Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 φαίνεται στα σχήματα 40 και 41. Στο σχήμα 40 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για τιμές της ενέργειας από ≈ -7.5 ως και ≈ -3.7 . Η καμπύλη b_1 τέμνει τον άξονα $b = -2$ (για $E_j \approx -5.028$). Από το σημείο τομής της καμπύλης b_1 με τον άξονα $b = -2$ και μετά ο b_1 μειώνεται παίρνοντας τιμές μικρότερες του -2 με αποτέλεσμα η x_1 να γίνεται ασταθής. Στο σημείο αυτό εμφανίζεται μία νέα $3D$ οικογένεια, η οποία είναι διακλάδωση της x_1 , η $x_{1\nu 1}$. Μετά η καμπύλη b_1 φτάνει σε τομή ξανά με τον άξονα $b = -2$ (για $E_j \approx -4.7$) με αποτέλεσμα η x_1 να γίνεται πάλι

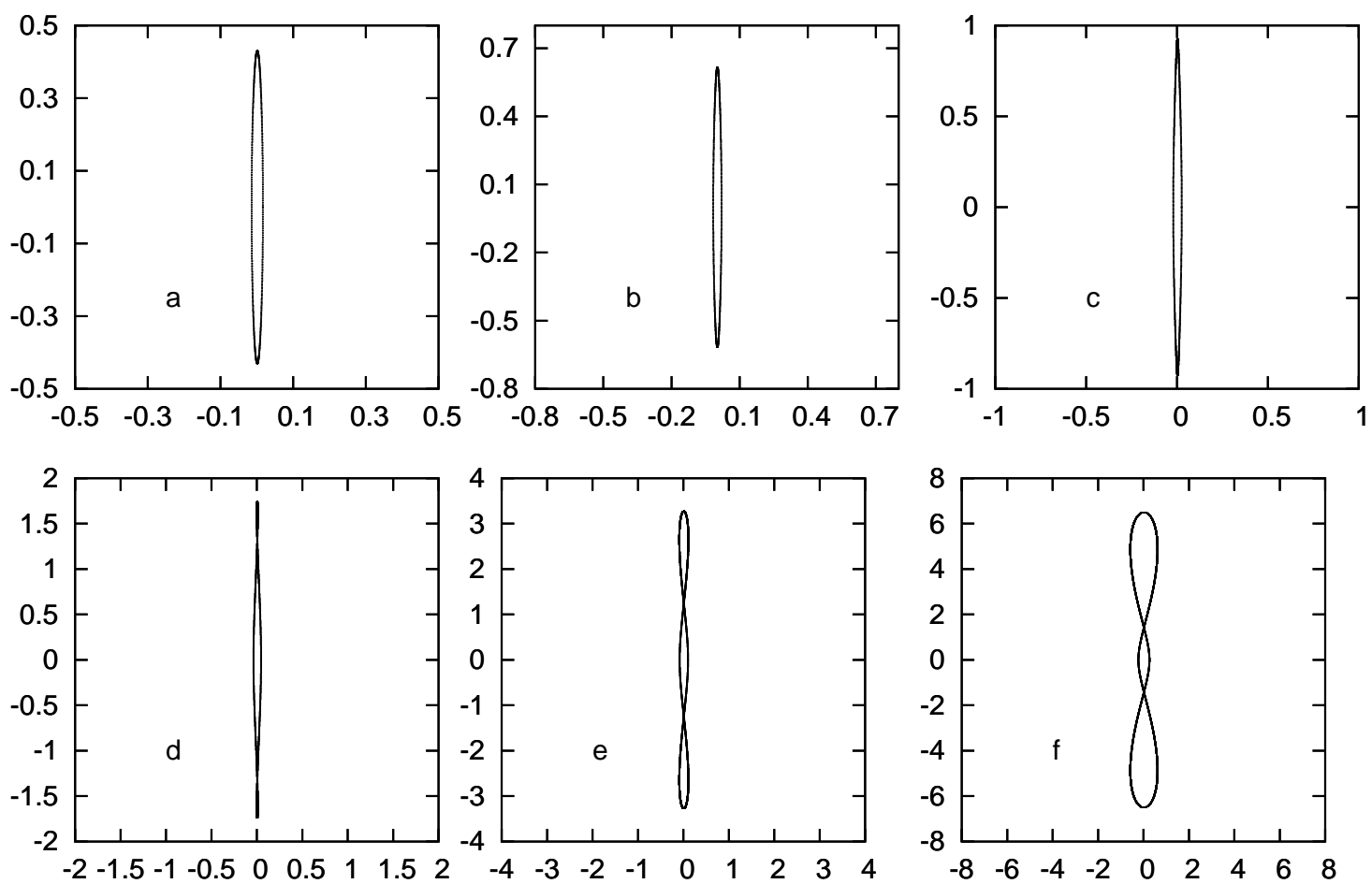
⁵Η χαρακτηριστική και η μεταβολή των δεικτών ευστάθειας της x_1 , είναι εν γένει αρκετά πολύπλοκη ιδιαίτερα σε αργά περιστρεφόμενα συστήματα (βλ. Σχ. 1 - Skokos et al 2002a, Σχ. 1 - Skokos et al 2002b).



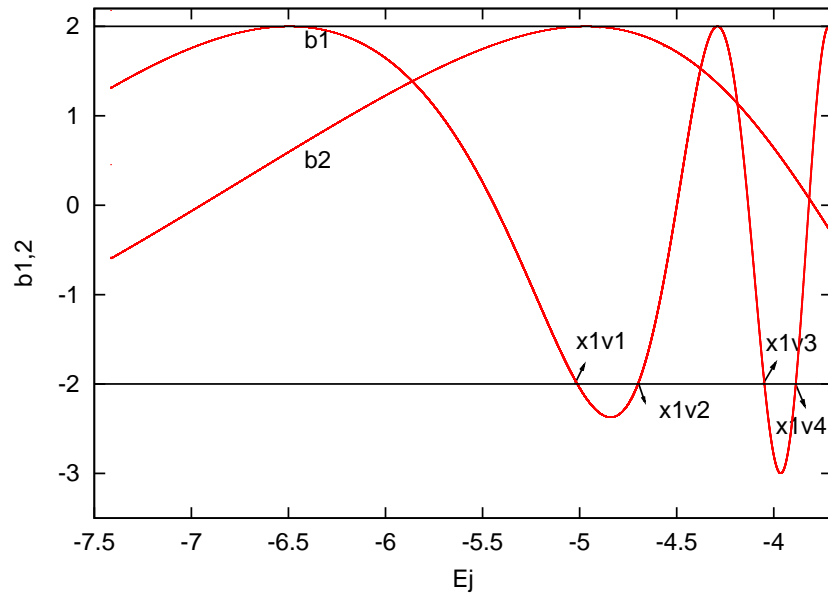
Σχήμα 38: Η χαρακτηριστική της x_1 . Οι ευσταθείς και οι ασταθείς περιοχές της x_1 παριστάνονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντίστοιχα.

ευσταθής. Στο σημείο όπου η καμπύλη b_1 τέμνει τον άξονα $b = -2$ εισάγεται στο σύστημα μία νέα $3D$ διακλάδωση της x_1 , η x_{1v2} . Μετά η καμπύλη b_1 τέμνει για άλλη μία φορά τον άξονα $b = -2$, οπότε έχουμε την εμφάνιση μίας νέας $3D$ οικογένειας της x_{1v3} (για $E_j \approx -4.06$). Στο σημείο αυτό η x_1 γίνεται απλά ασταθής. Μετά η x_1 γίνεται ξανά ευσταθής για τιμή της ενέργειας ≈ -3.89 οπότε έχουμε την εμφάνιση μίας νέας $3D$ οικογένειας της x_{1v4} .

Το σχήμα 41 είναι συνέχεια του σχήματος 40 για τιμές της ενέργειας από -3.7 ως και -2.4 . Στο σχήμα αυτό βλέπουμε την x_1 να έχει 2 μεταβάσεις από ευστάθεια σε απλή αστάθεια ($S \rightarrow U$) για τιμές της ενέργειας ≈ -3.56 και ≈ -3.045 . Στα σημεία αυτά έχουμε την εμφάνιση δύο νέων οικογενειών των x_{1v5} και x_{1v8} . Επίσης η x_1 έχει 2 μεταβάσεις από απλή αστάθεια σε ευστάθεια ($U \rightarrow S$) για τιμές της ενέργειας ≈ -3.398 και ≈ -2.79 . Στα σημεία αυτά έχουμε την εμφάνιση δύο νέων οικογενειών των x_{1v6} και x_{1v7} . Όπως παρατηρούμε η διακλάδωση x_{1v8} παρουσιάζεται πριν τη διακλάδωση x_{1v7} . Αυτό γίνεται διότι η χαρακτηριστική της x_1 είναι συνεχώς αύξουσα (Σχ. 38). Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο της χαρακτηριστικής της x_1 στην περιοχή του ακτινικού συντονισμού $4/1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε εναλλαγή στη σειρά εμφάνισης των διακλαδώσεων x_{1v7} και x_{1v8} (Skokos et al 2002b). Διότι οι Skokos et

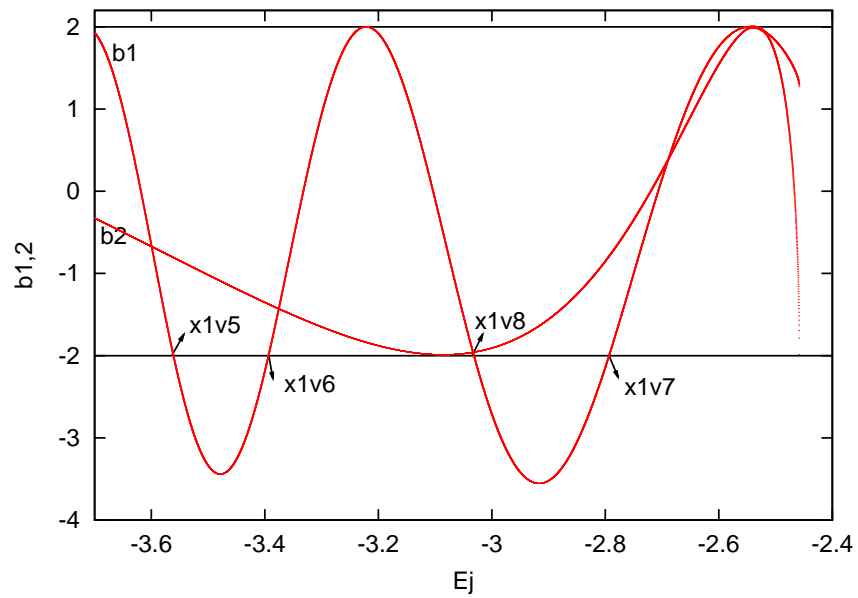


Σχήμα 39: Τα a, b, c, d, e και f παριστάνουν τροχιές της x_1 για τιμές της ενέργειας $-6.6, -6.14, -5.49, -4.55, -3.83$ και -3.08 αντίστοιχα.



Σχήμα 40: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-7.5 < E_j < -3.7$. Με βέλη σημειώνουμε την φορά των δεικτών b_1 των διακλαδιζόμενων τροχιών.

al (2002b) δείξαν: ότι αν σε ένα σύστημα οι διακλαδώσεις x_{1v7} και x_{1v8} εμφανίζονται μετά από το τοπικό μέγιστο της χαρακτηριστικής της x_1 στην περιοχή του ακτινικού συντονισμού $4/1$ ή αν σε ένα σύστημα δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο της χαρακτηριστικής της x_1 στην περιοχή του ακτινικού συντονισμού $4/1$ (όπως στην περίπτωση μας) τότε έχουμε εναλλαγή στη σειρά εμφάνισης των διακλαδώσεων x_{1v7} και x_{1v8} .



Σχήμα 41: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 για $-3.7 < E_j < -2.4$. Με βέλη σημειώνουμε την φορά των δεικτών b_1 των διακλαδιζόμενων τροχιών.

2.4.2 3D διακλαδώσεις.

Θα μελετήσουμε τώρα τις 3D διακλαδώσεις μορφολογικά και θα παρακολουθήσουμε την ευσταθειά τους. Στο σχήμα 42 παριστάνονται δύο ευσταθείς τροχιές της πρώτης 3D διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό 2/1. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.92. Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.58. Αυτές είναι κλασσικές $x1v1$ τροχιές (Skokos et al 2002a). Παρατηρούμε στο Σχ. 42 ότι στις (x, z) προβολές οι τροχιές γίνονται γρήγορα ακιδωτές κατά μήκος του άξονα z και έχουν την τάση να δημιουργήσουν βρόχο. Στο σχήμα 44 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v1$, όπου η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v1$ με πράσινο χρώμα. Η οικογένεια αυτή είναι αρχικά ευσταθής. Στην τιμή 1.99 συναντιούνται οι δύο καμπύλες (υποδεικνύεται με ένα βέλος- για τιμή της ενέργειας ≈ -4.28). Από το σημείο αυτό και μετά οι δύο δείκτες γίνονται μιγαδικοί ($\Delta < 0$) δηλαδή η $x1v1$ γίνεται μιγαδικά ασταθής. Ως εκ τούτου για την οικογένεια $x1v1$ έχουμε μετάβαση από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια ($S \rightarrow \Delta$). Έπειτα από ένα μικρό χάσμα οι δύο καμπύλες b_1 και b_2 ξανασυναντιούνται στην τιμή 1.88 οπότε η $x1v1$ ξαναγίνεται ευσταθής (για τιμή της ενέργειας ≈ -4.055).

Στο σχήμα 43 παριστάνονται δύο ασταθείς τροχιές της δεύτερης 3D διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό 2/1. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.43. Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.06. Αυτές είναι $x1v2$ τροχιές (Skokos et al 2002a). Στο σχήμα 45 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v2$, όπου η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v2$ με πράσινο χρώμα. Στην αρχή η $x1v2$ είναι απλά ασταθής. Ο δείκτης b_2 φτάνει σε τομή με τον άξονα $b = -2$ για τιμή της ενέργειας ≈ -3.41 . Στο σημείο αυτό η $x1v2$ από απλά ασταθής γίνεται διπλά ασταθής (μετάβαση από απλή αστάθεια σε διπλή αστάθεια $U \rightarrow DU$).

Στο σχήμα 46 παριστάνονται δύο ευσταθείς τροχιές της τρίτης 3D διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό 3/1. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -4.02. Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -3.76. Η μορφολογία και αυτών των τροχιών έχει χαρακτηριστικές (x, z) προβολές με οξείες γωνίες (Σχ. 46). Η διακλάδωση αυτή είναι η $x1v3$ όπως αναμενόταν. Στο σχήμα 48 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v3$. Η x_1 παριστάνεται με κόκκινο

χρώμα ενώ η $x1v3$ με πράσινο χρώμα. Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι η $x1v3$ από ευσταθής γίνεται μιγαδικά ασταθής για τιμή της ενέργειας ≈ -3.74 . Έχουμε δηλαδή μετάβαση από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια ($S \rightarrow \Delta$). Η $x1v3$ ξαναγίνεται ευσταθής για $E_j \approx -3.61$ όπου έχουμε $b_1 = b_2 \approx 0.08$. Μετά η καμπύλη b_1 τέμνει τον άξονα $b = -2$ για $E_j \approx -3.56$ (δηλαδή έχουμε μετάβαση από ευστάθεια σε απλή αστάθεια $S \rightarrow U$).

Στο σχήμα 47 απεικονίζονται δύο ασταθείς τροχιές της τέταρτης $3D$ διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $3/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -3.35 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -2.50 . Αυτές είναι κλασσικές $x1v4$ τροχιές (Skokos et al 2002a). Στο σχήμα 49 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v4$, στο οποίο η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v4$ με πράσινο χρώμα. Η καμπύλη b_2 τέμνει τον άξονα $b = -2$ για $E_j \approx -3.22$ με αποτέλεσμα η $x1v4$ από απλά ασταθής να γίνει διπλά ασταθής (μετάβαση από απλή αστάθεια σε διπλή αστάθεια $U \rightarrow DU$). Κατόπιν η $x1v4$ ξαναγίνεται απλά ασταθής για τιμή της ενέργειας ≈ -2.68 (μετάβαση από διπλή αστάθεια σε απλή αστάθεια $DU \rightarrow U$).

Στο σχήμα 50 παριστάνονται δύο ευσταθείς τροχιές της πέμπτης $3D$ διακλάδωσης της x_1 στο κάθετο συντονισμό $4/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -3.37 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -3.30 . Αυτές είναι χαρακτηριστικές $x1v5$ τροχιές (Skokos et al 2002a). Στο σχήμα 52 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v5$. Η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v5$ με πράσινο χρώμα. Στην αρχή η $x1v5$ είναι ευσταθής. Μετά οι δύο δείκτες γίνονται μιγαδικοί ($\Delta < 0$) οπότε η $x1v5$ γίνεται μιγαδικά ασταθής (για $E_j \approx -3.28$). Έπειτα από ένα μικρό χάσμα οι δύο καμπύλες b_1 και b_2 ξανασυναντιούνται στην τιμή -1.48 οπότε η $x1v5$ ξαναγίνεται ευσταθής (για τιμή της ενέργειας ≈ -3.21). Αργότερα ο δείκτης b_1 τέμνει τον άξονα $b = -2$ για τιμή της ενέργειας ≈ -3.20 , δηλαδή η $x1v5$ από ευσταθής γίνεται απλά ασταθής.

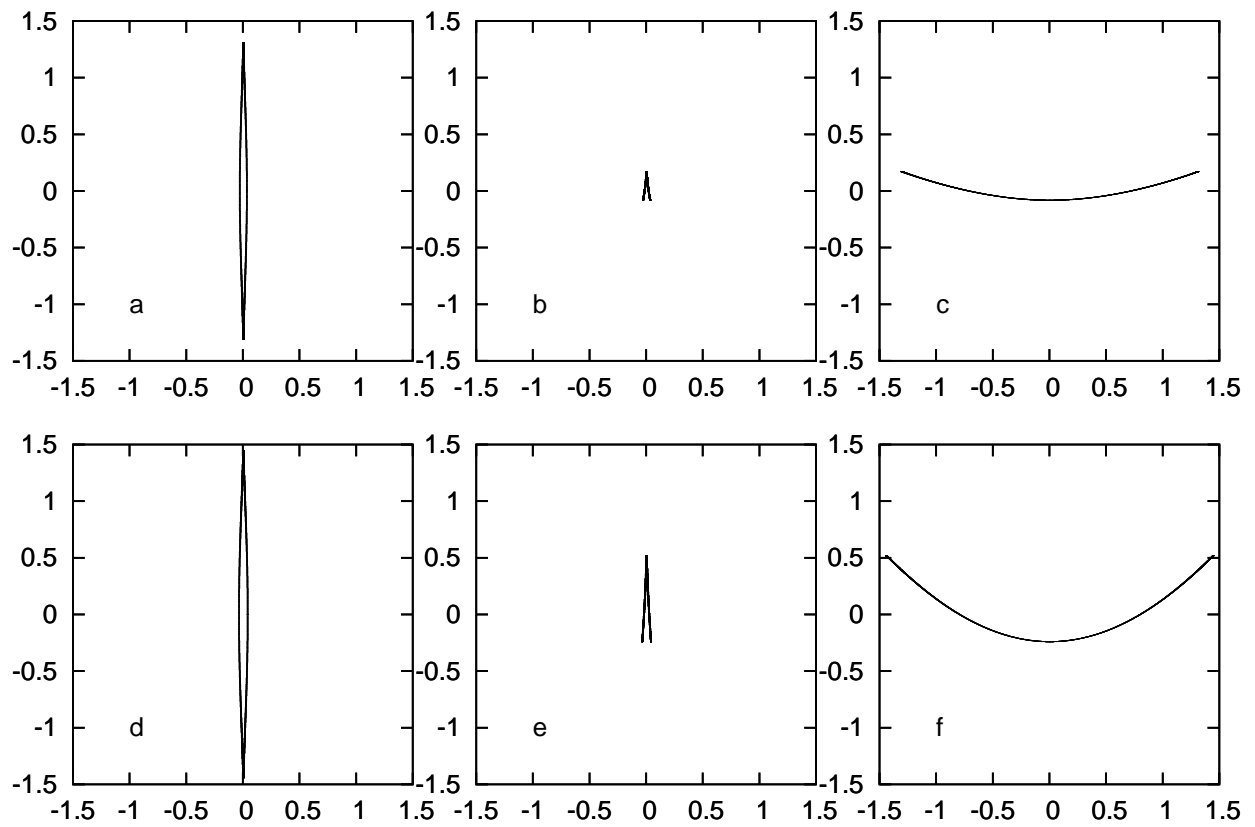
Στο σχήμα 51 παριστάνονται δύο ασταθείς τροχιές της έκτης $3D$ διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $4/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -3.23 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -2.54 . Η διακλάδωση αυτή είναι η $x1v6$ όπως αναμενόταν. Στο σχήμα 53 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της $x1v6$, όπου η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η $x1v6$

με πράσινο χρώμα. Όπως παρατηρούμε η x_{1v6} παραμένει πάντα απλά ασταθής.

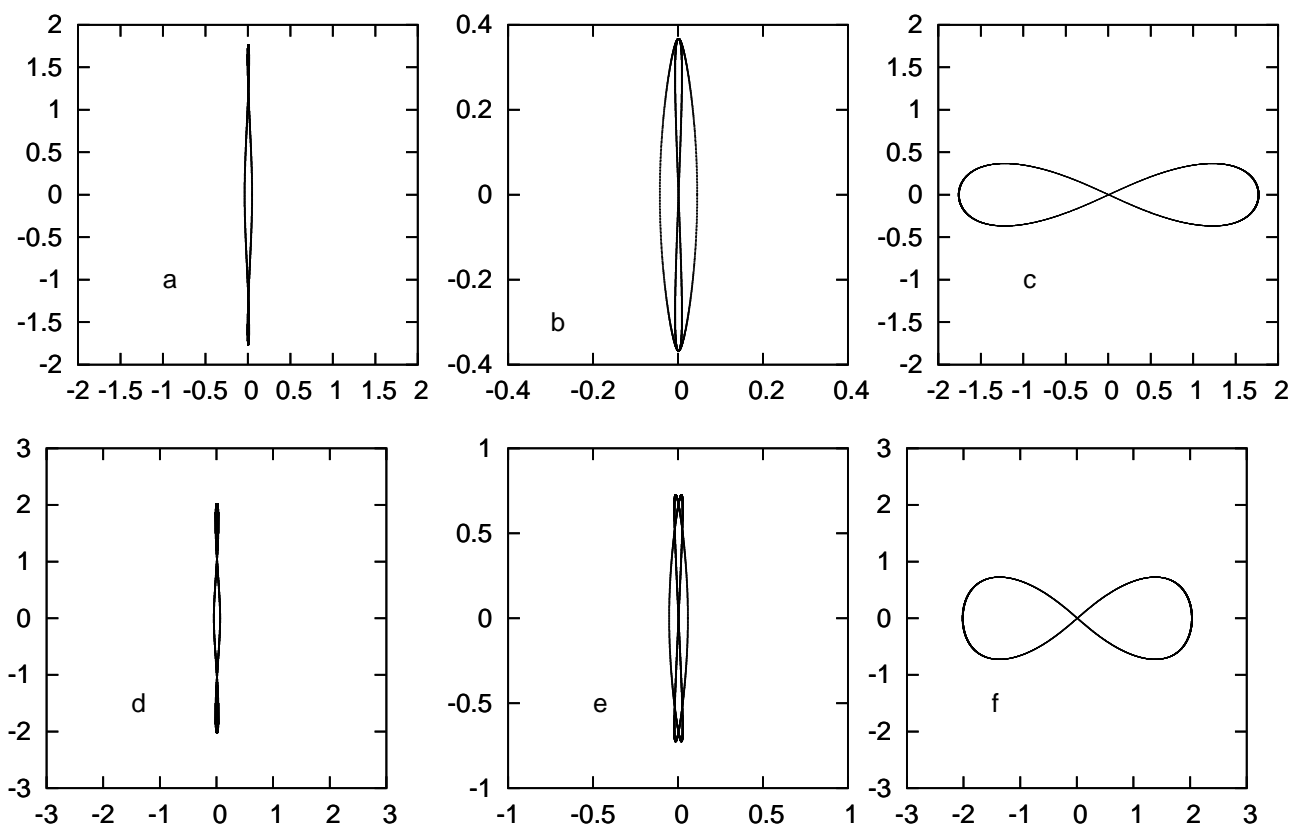
Στο σχήμα 54 παριστάνονται δύο ευσταθείς τροχιές της έβδομης $3D$ διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $5/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -2.86 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ευσταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -2.53 . Αυτές είναι κλασσικές x_{1v8} τροχιές (Skokos et al 2002a,b). Στο σχήμα 56 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της x_{1v8} . Η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η x_{1v8} με πράσινο χρώμα. Η x_{1v8} είναι αρχικά ευσταθής. Κατόπιν η x_{1v8} γίνεται μιγαδικά ασταθής για τιμή της ενέργειας ≈ -2.68 . Η x_{1v8} ξαναγίνεται ευσταθής για $E_j \approx -2.63$ όπου $b_1 = b_2 = 1.27$.

Στο σχήμα 55 παριστάνονται δύο ασταθείς τροχιές της όγδοης $3D$ διακλάδωσης της x_1 στον κάθετο συντονισμό $5/1$. Τα a, b και c απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -2.73 . Τα d, e και f απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) αντίστοιχα μίας ασταθούς τροχιάς για τιμή της ενέργειας -2.47 . Αυτές είναι χαρακτηριστικές x_{1v7} τροχιές (Skokos et al 2002a). Στο σχήμα 57 απεικονίζεται το διάγραμμα ευστάθειας της x_{1v7} , στο οποίο η x_1 παριστάνεται με κόκκινο χρώμα ενώ η x_{1v7} με πράσινο χρώμα. Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό η x_{1v7} είναι απλά ασταθής για όλο το διάστημα.

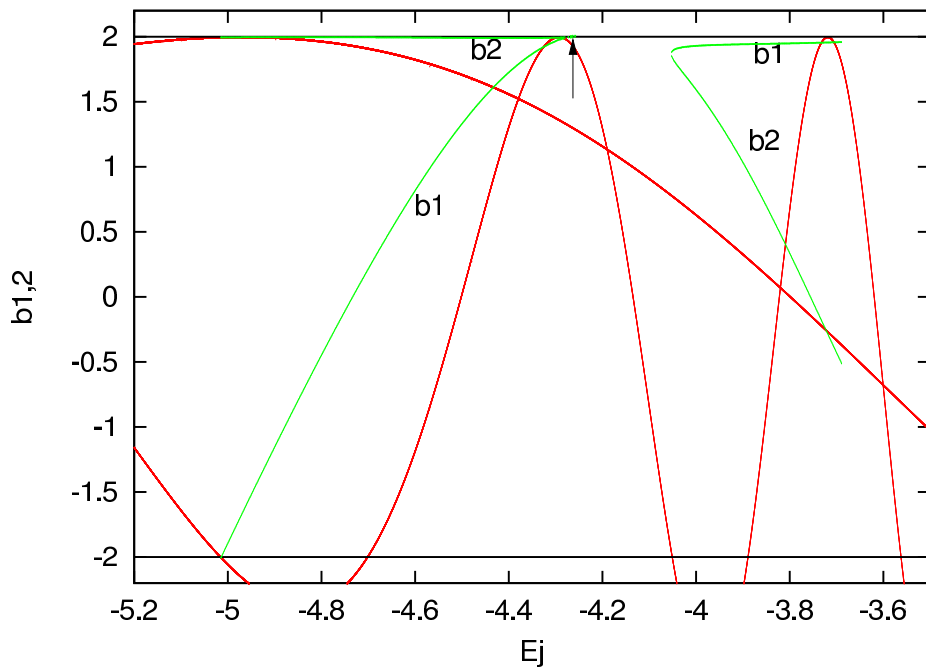
Το βασικό μας συμπέρασμα από τη μελέτη του δεύτερου μοντέλου είναι ότι η μορφολογία των τροχιών αποκτά μία πολυπλοκότητα που εισάγεται από τον επιμήκη χαρακτήρα των (x, y) προβολών, οι οποίες αντικατοπτρίζουν την εξέλιξη της μορφολογίας των τροχιών της x_1 . Επίσης προκύπτουν στα διαγράμματα ευστάθειας των διαφόρων $3D$ οικογενειών μεγαλύτερα διαστήματα αστάθειας και περισσότερα είδη μεταβάσεων από το ένα στο άλλο είδος αστάθειας.



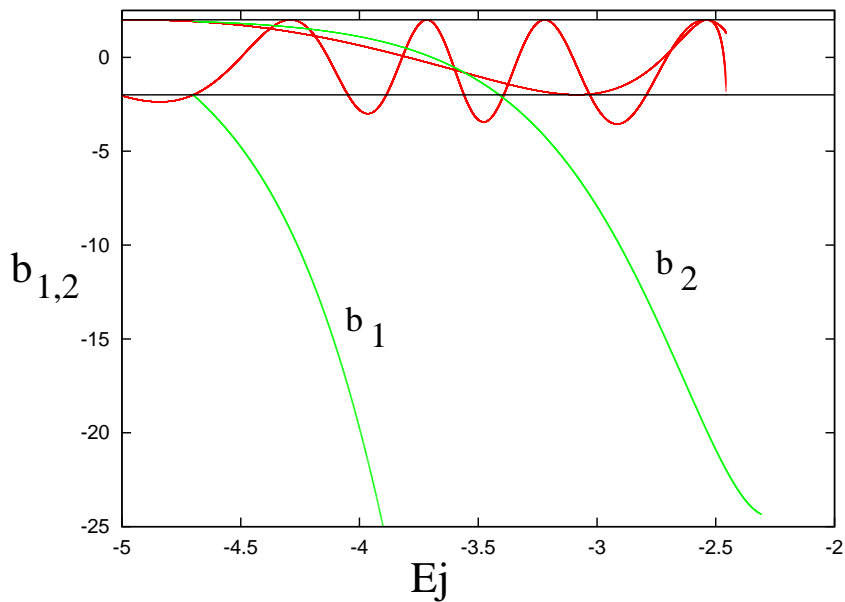
Σχήμα 42: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v1$ για τιμές της ενέργειας -4.92 και -4.58 αντίστοιχα.



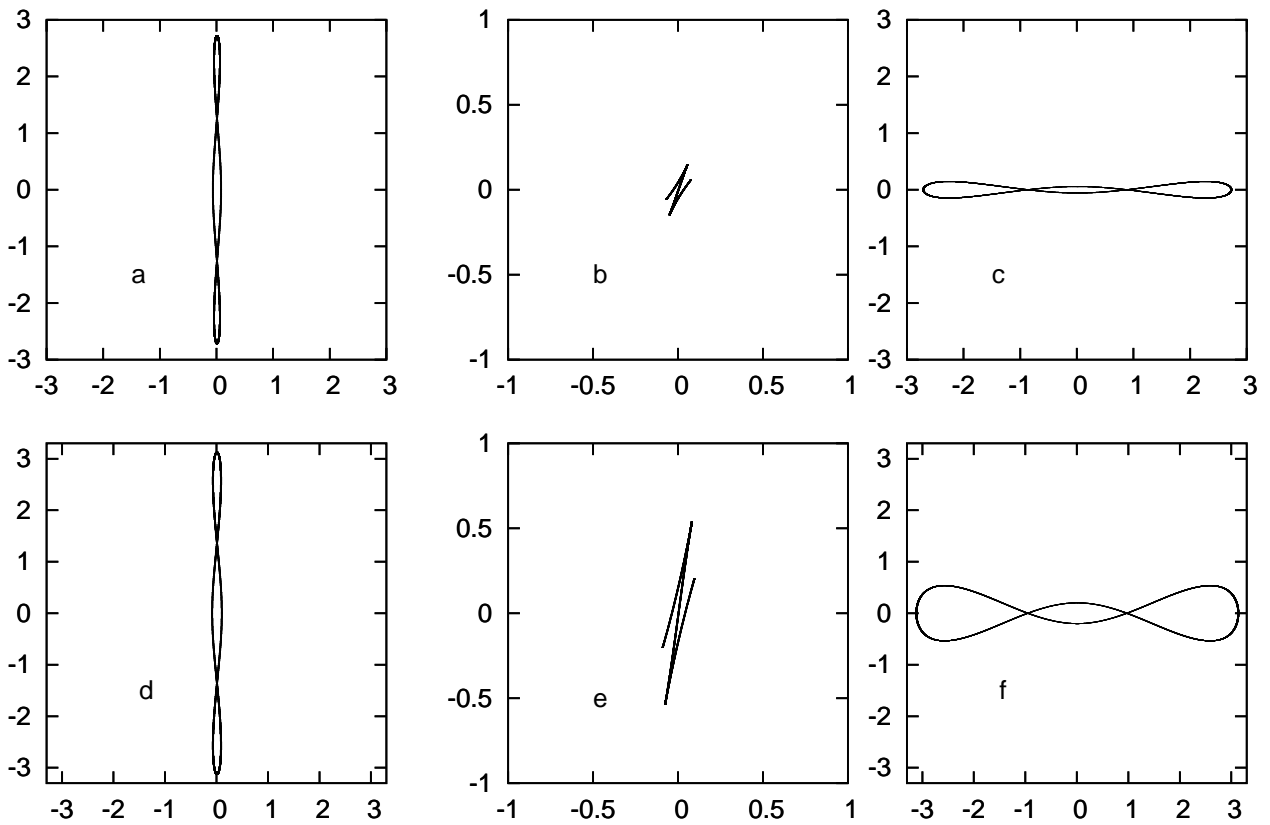
Σχήμα 43: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v2$ για τιμές της ενέργειας -4.43 και -4.06 αντίστοιχα. Οι άξονες είναι διαφορετικοί στις 3 προβολές για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφολογία των τροχιών.



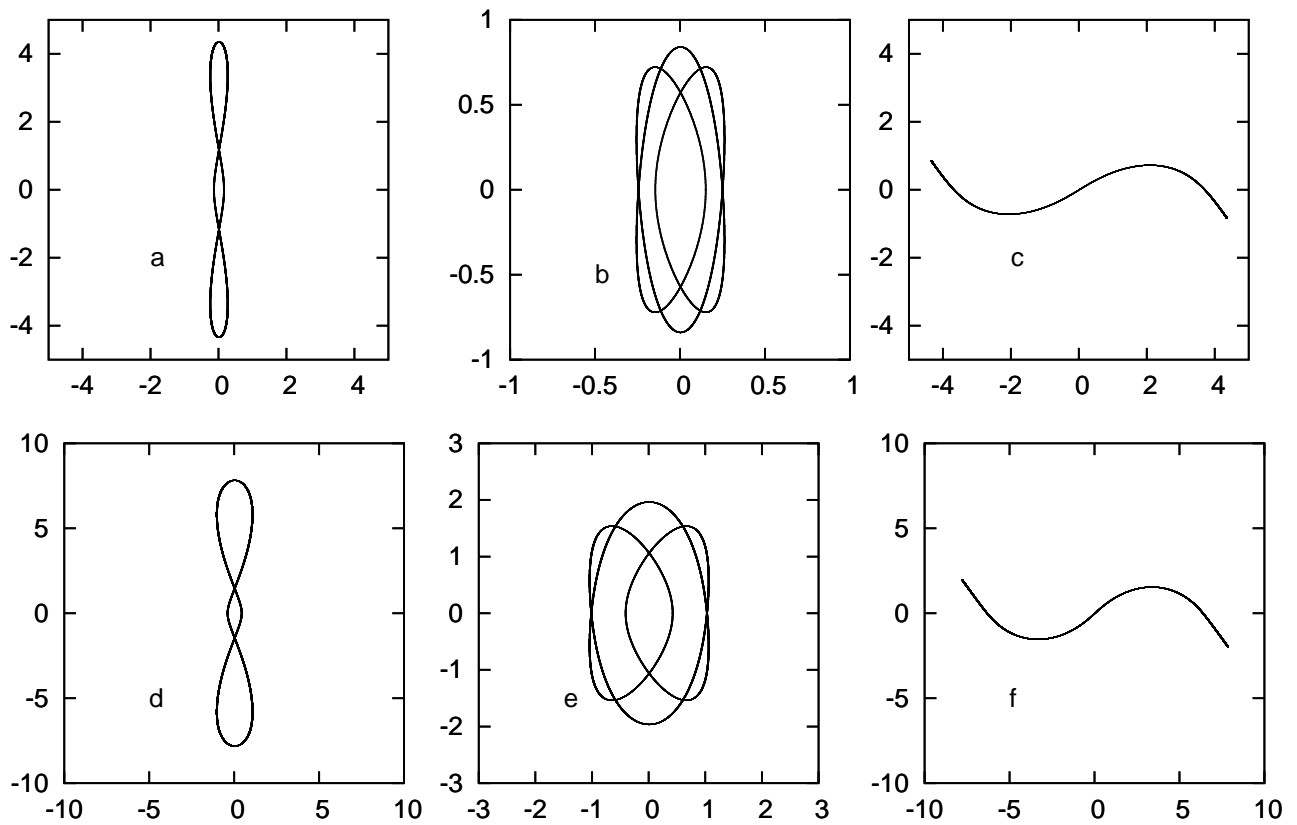
Σχήμα 44: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v1} για $-5.028 < E_j < -3.69$.



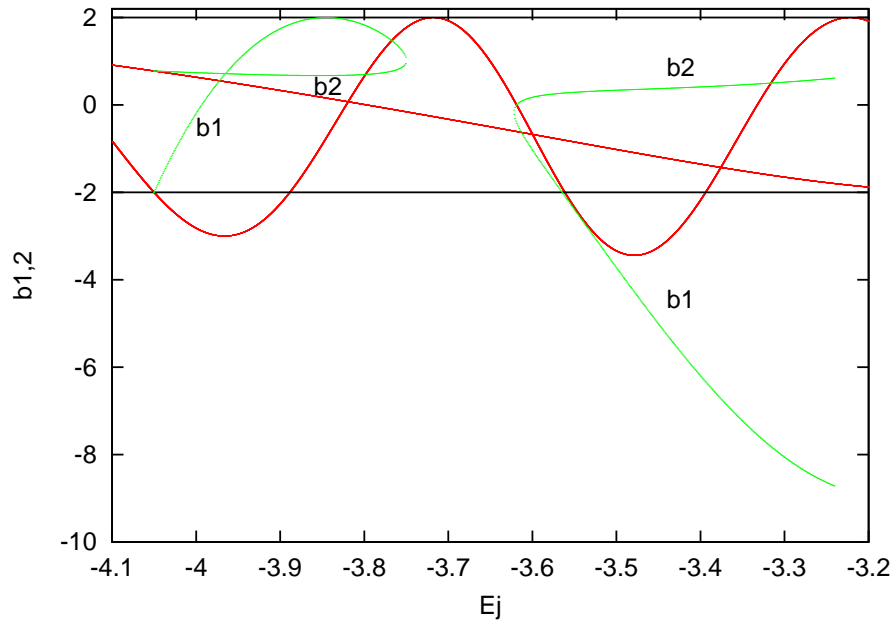
Σχήμα 45: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v2} για $-4.7 < E_j < -2.3$.



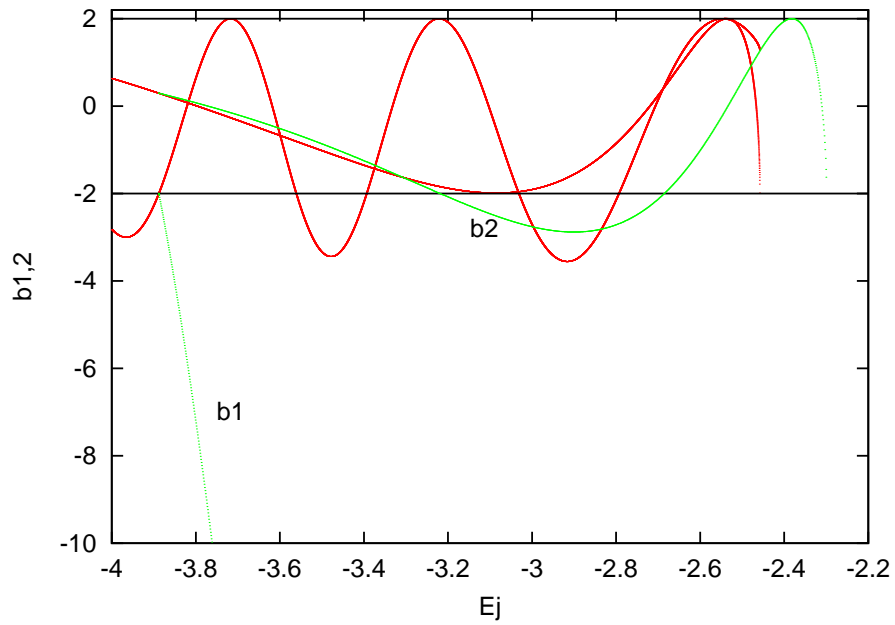
Σχήμα 46: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της x_1v_3 για τιμές της ενέργειας -4.02 και -3.76 αντίστοιχα. Οι άξονες είναι διαφορετικοί στις 3 προβολές για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφολογία των τροχιών.



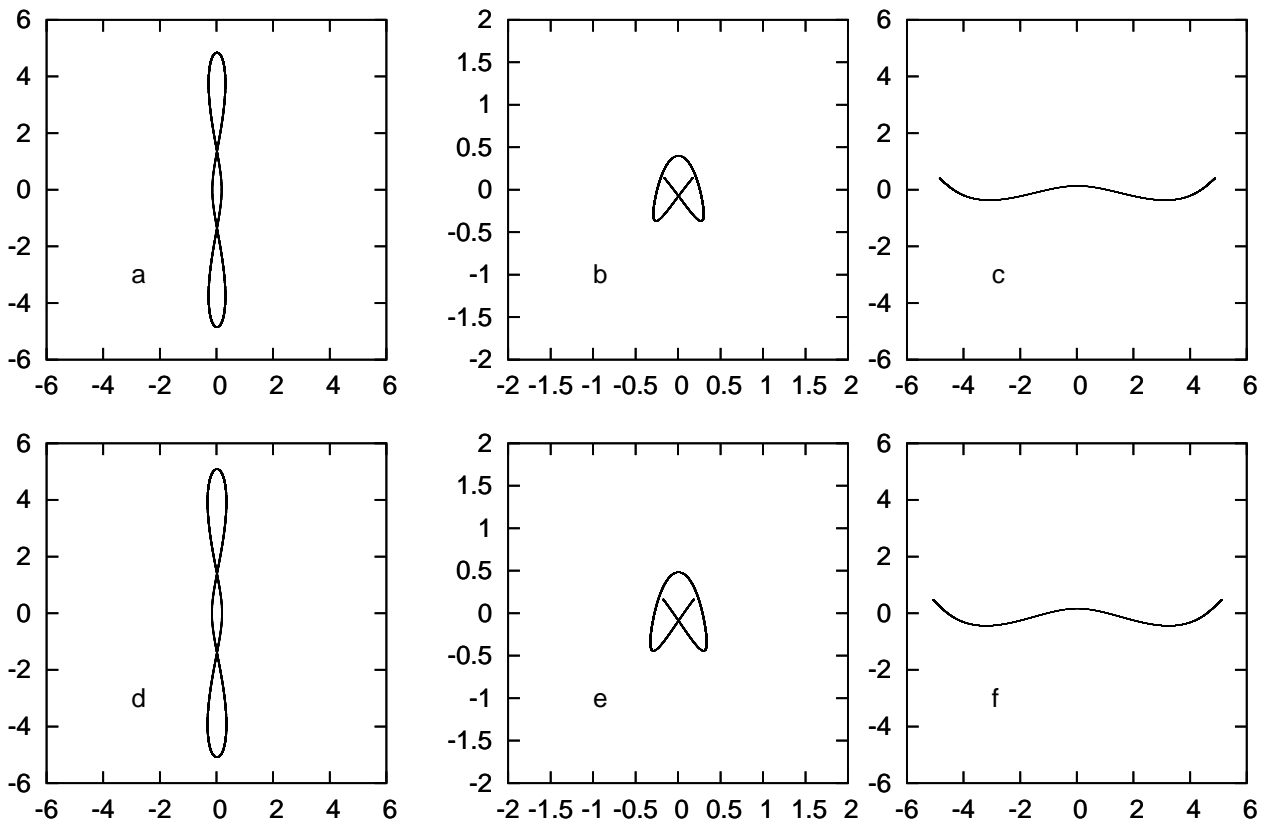
Σχήμα 47: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της x_{1v4} για τιμές της ενέργειας -3.35 και -2.50 αντίστοιχα. Οι άξονες είναι διαφορετικοί στις 3 προβολές για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφολογία των τροχιών.



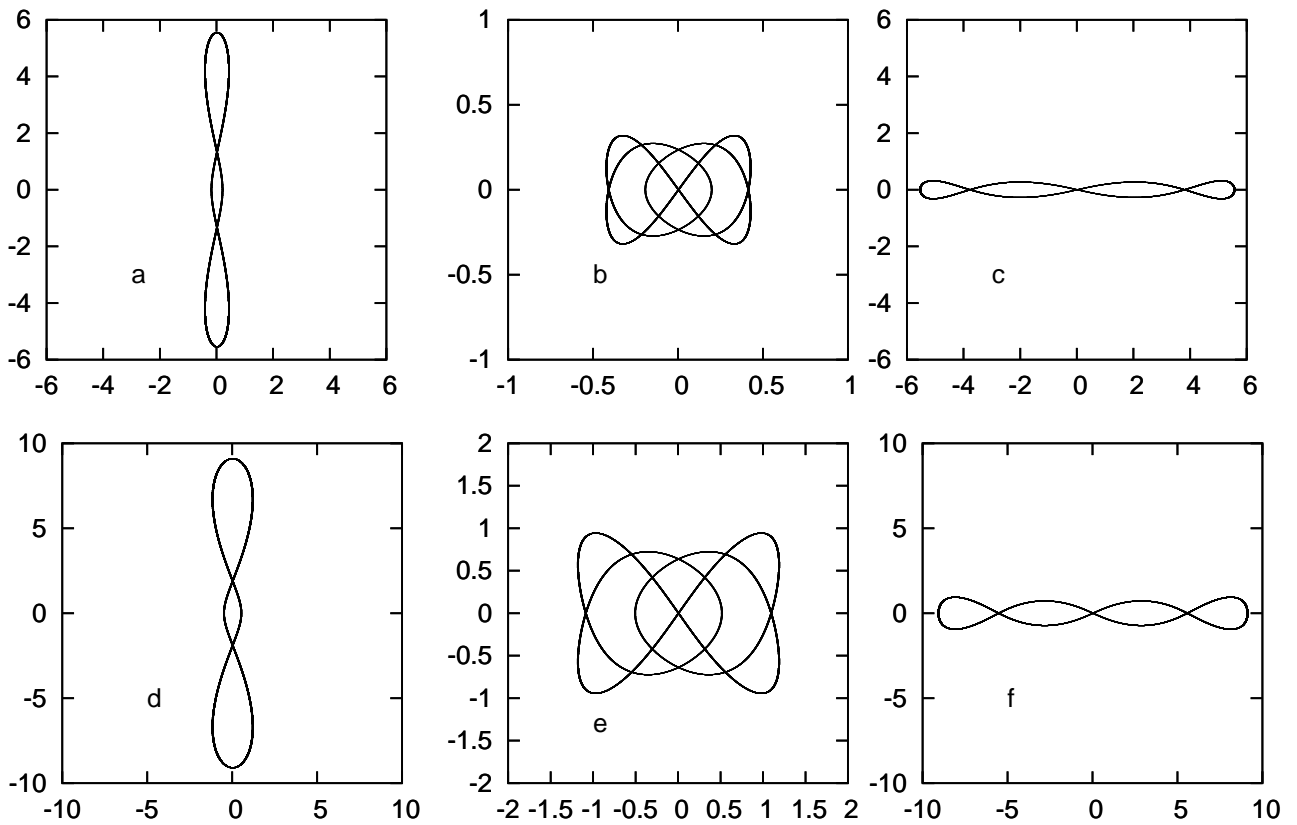
Σχήμα 48: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v3} για $-4.06 < E_j < -3.24$.



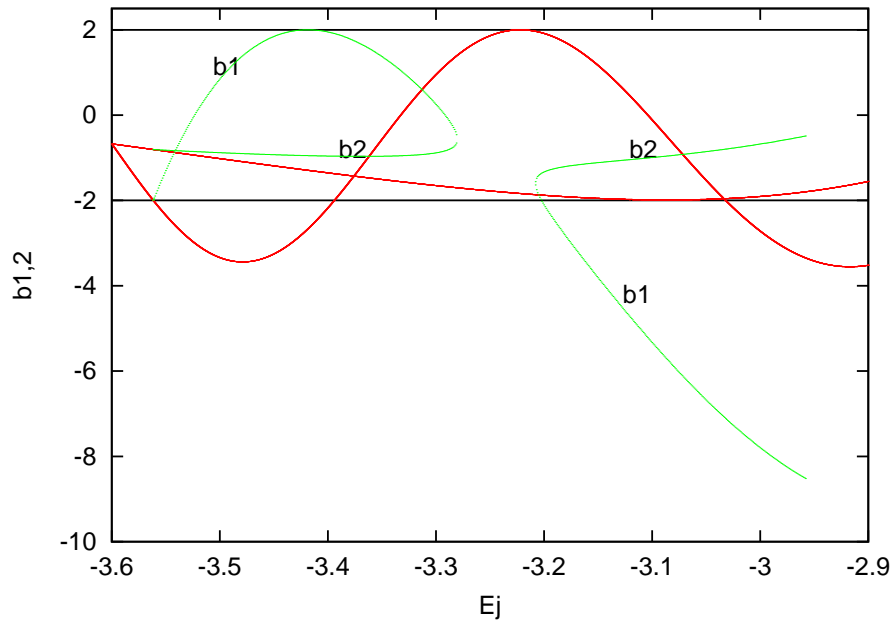
Σχήμα 49: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v4} για $-3.89 < E_j < -2.3$.



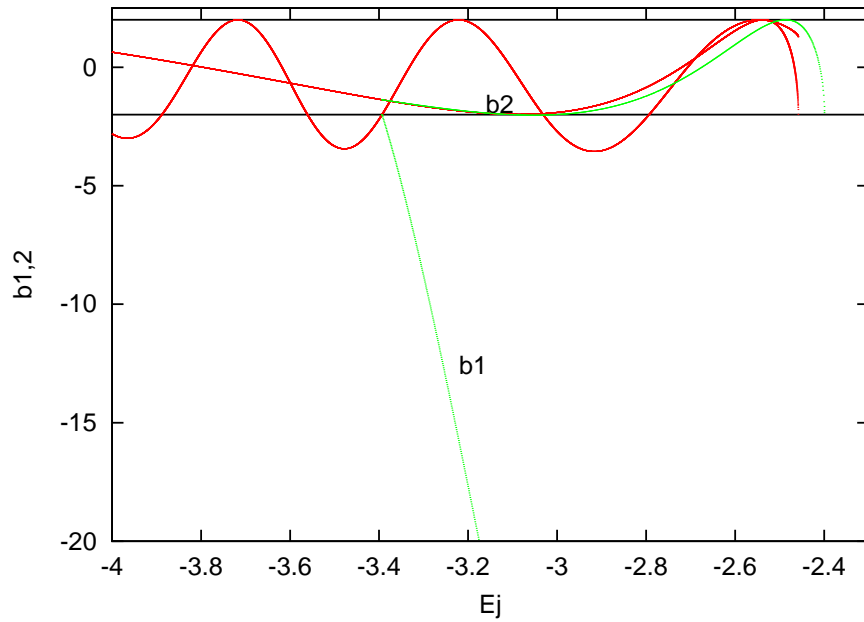
Σχήμα 50: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v5$ για τιμές της ενέργειας -3.37 και -3.30 αντίστοιχα. Οι άξονες είναι διαφορετικοί στις 3 προβολές για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφολογία των τροχιών.



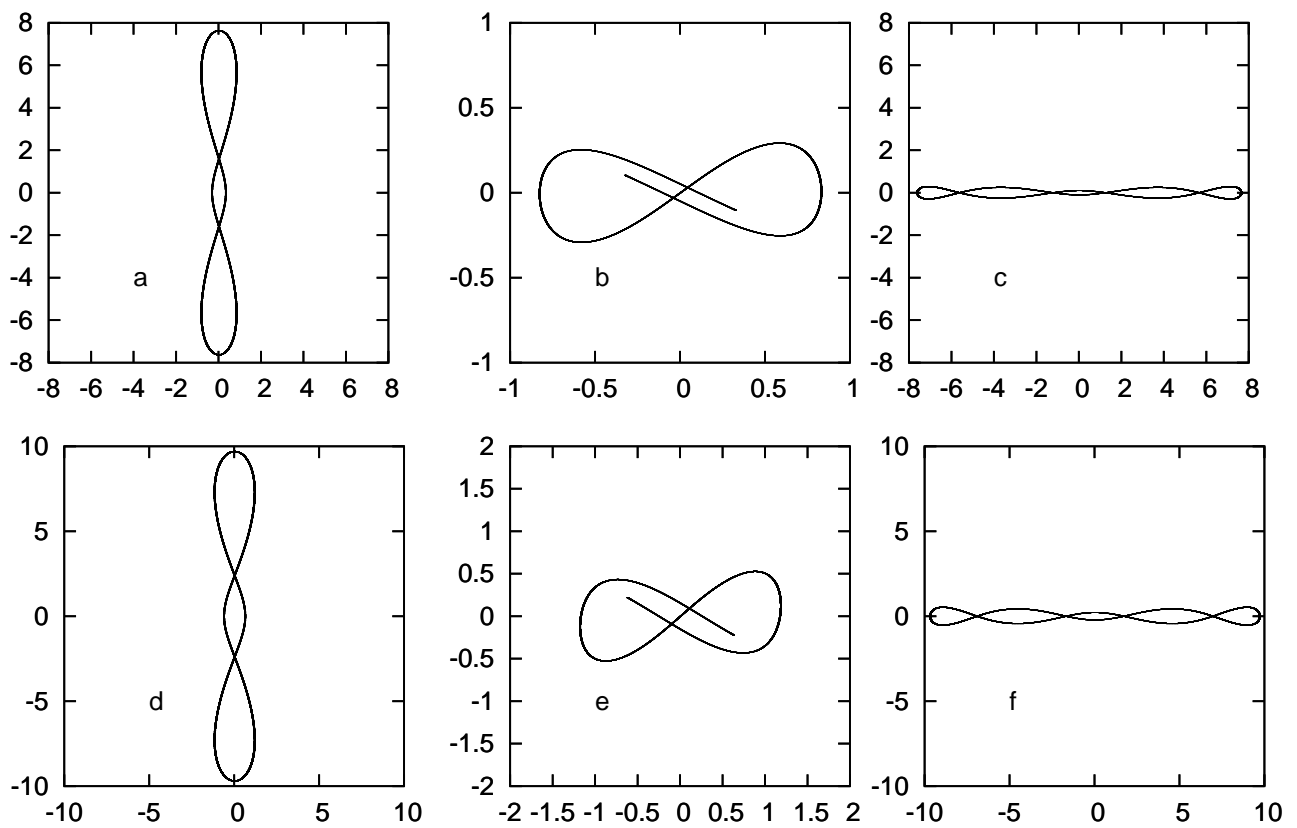
Σχήμα 51: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v6$ για τιμές της ενέργειας -3.23 και -2.54 αντίστοιχα. Οι άξονες είναι διαφορετικοί στις 3 προβολές για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφολογία των τροχιών.



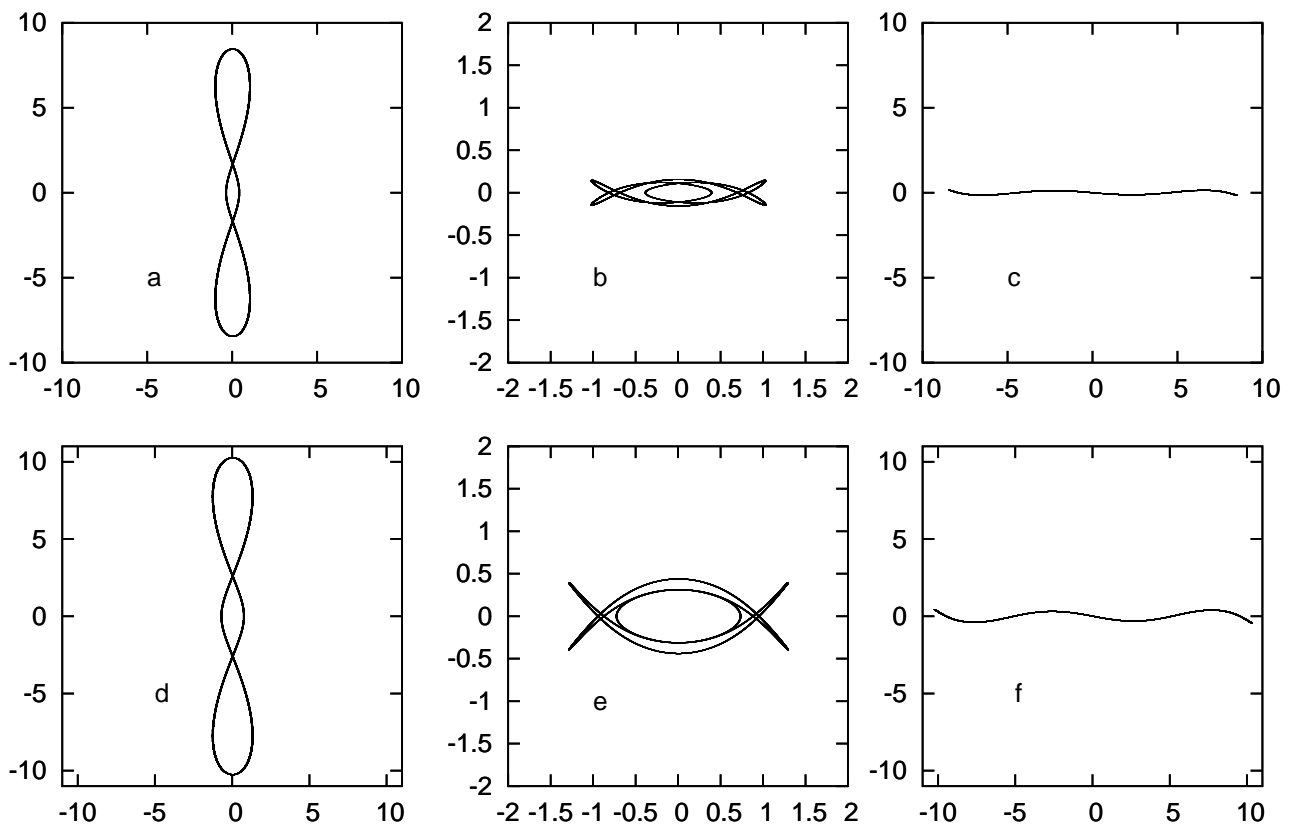
Σχήμα 52: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v5} για $-3.56 < E_j < -2.95$.



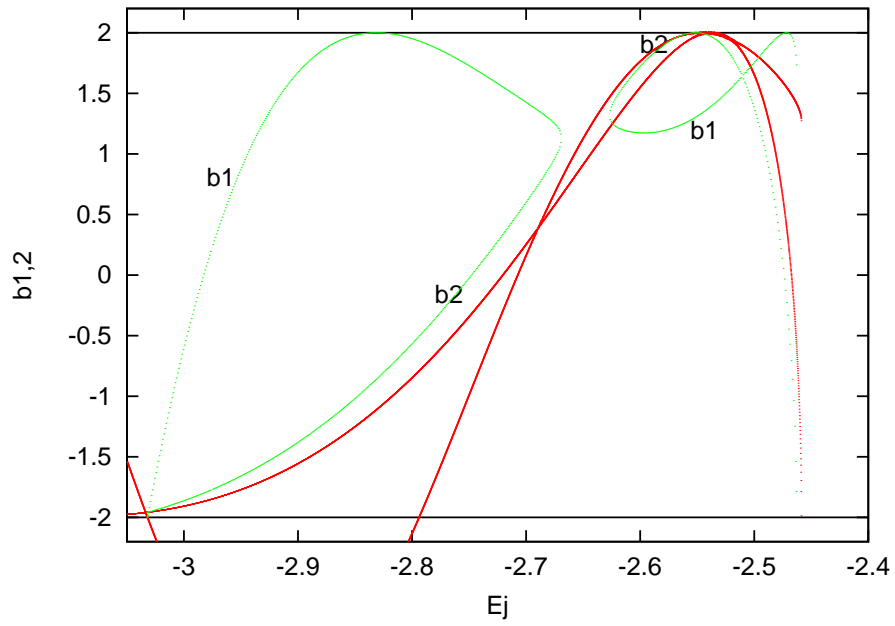
Σχήμα 53: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v6} για $-3.398 < E_j < -2.39$.



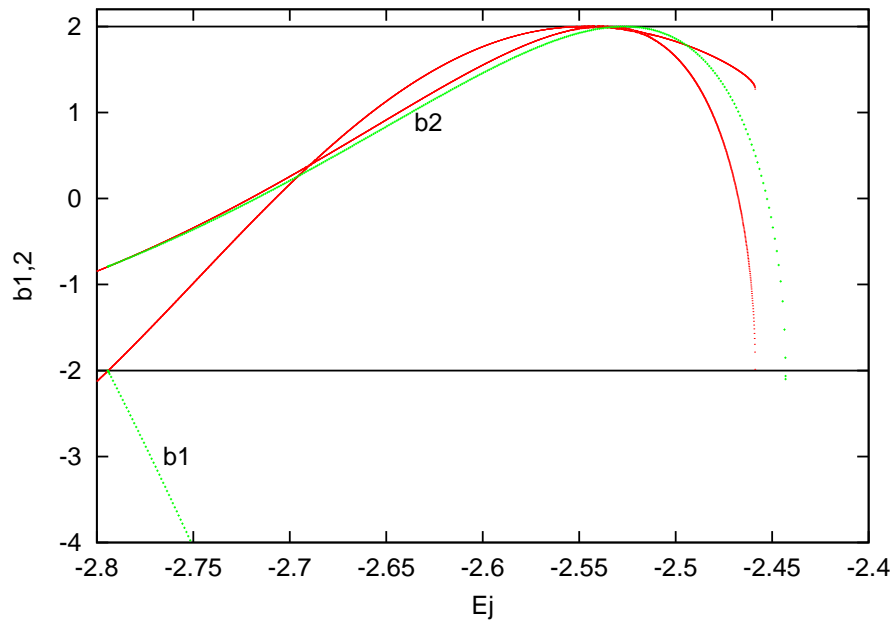
Σχήμα 54: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της x_{1v8} για τιμές της ενέργειας -2.86 και -2.53 αντίστοιχα. Οι άξονες είναι διαφορετικοί στις 3 προβολές για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφολογία των τροχιών.



Σχήμα 55: Οι δύο τριάδες (a, b, c) και (d, e, f) απεικονίζουν τις προβολές (x, y) , (x, z) και (y, z) των τροχιών της $x1v7$ για τιμές της ενέργειας -2.73 και -2.47 αντίστοιχα. Οι άξονες είναι διαφορετικοί στις 3 προβολές για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφολογία των τροχιών.



Σχήμα 56: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v8} για $-3.045 < E_j < -2.44$.



Σχήμα 57: Το διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v7} για $-2.79 < E_j < -2.45$.

3 Η Δομή του φασικού χώρου στην περιοχή απλών περιοδικών τροχιών

Σε χαμιλτονιανά συστήματα 2 διαστάσεων οι επιφάνειες τομής είναι διδιάστατες. Έτσι, κοιτάζοντας απλώς μία τέτοια επιφάνεια μπορούμε να διακρίνουμε οργανωμένες περιοχές που χαρακτηρίζονται από αμετάβλητες καμπύλες οι οποίες περιβάλλουν ευσταθείς περιοχές, καθώς και σκόρπια σημεία που δημιουργούν χαοτικές θάλασσες.

Σε συστήματα περισσότερων διαστάσεων όμως αυτή η άμεση πληροφορία δεν μπορεί να εξαχθεί από απλή παρατήρηση των επιφανειών τομής. Παρόλο που η ευστάθεια των περιοδικών τροχιών μπορεί να μελετηθεί με τη μέθοδο που περιγράψαμε στο υποκεφάλαιο 1.1.6 και η οποία μπορεί να γενικευθεί για N -διάστατα συστήματα με $N > 3$ (Skokos 2001), η τροχιακή συμπεριφορά στη γειτονιά των περιοδικών τροχιών δύσκολα μπορεί να μελετηθεί. Ο βασικός λόγος είναι οι διαστάσεις των επιφανειών τομής. Ήδη σε $3D$ συστήματα όπως αυτά που μελετάμε εδώ, έχουμε $4D$ επιφάνειες τομής. Ένα βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει κανείς είναι η άμεση εποπτεία αυτών των χώρων. Στην εισαγωγή αναφέρουμε μερικές προσπάθειες που έχουν γίνει στο παρελθόν. Εδώ θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο χρώματος και περιστροφής (Patsis & Zachilas 1994). Η περιγραφή της μεθόδου γίνεται στο υποκεφάλαιο 3.1. Κατόπιν με τη βοήθεια της μεθόδου αυτής μελετάμε την τροχιακή συμπεριφορά σε περιοχές κοντά σε ευσταθείς (βλέπε υποκεφάλαιο 3.2), απλά και διπλά ασταθείς (βλέπε υποκεφάλαιο 3.3), μιγαδικά ασταθείς (βλέπε υποκεφάλαιο 3.4) απλές περιοδικές τροχιές.

3.1 Μέθοδος χρώματος και περιστροφής.

Δίνουμε αρχικές συνθήκες πολύ κοντά στις αρχικές συνθήκες μίας περιοδικής τροχιάς και υπολογίζουμε ένα μεγάλο αριθμό τομών των τροχιών που προκύπτουν με την επιφάνεια τομής, έστω $y = 0$, με $\dot{y} > 0$. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται μία εν γένει $4D$ επιφάνεια κοντά στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς στην $4D$ επιφάνεια τομής (x, \dot{x}, z, \dot{z}) . Έπειτα επιλέγουμε έναν υπόχωρο της επιφάνειας τομής, π.χ. τον (x, \dot{x}, z) , και απεικονίζουμε την $3D$ προβολή της $4D$ επιφάνειας, που σχηματίζεται κοντά στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς, στον υπόχωρο αυτό με τη βοήθεια διαφόρων λογισμικών πακέτων. Στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιήσουμε το λογισμικό "Mathematica" (Wolfram 1999). Η υλοποίηση της μεθόδου χρώματος και περιστροφής μέσω της "Mathematica" έγινε πριν μερικά χρόνια (Κατσανίκας 2005). Το πρόγραμμα της "Mathematica" που υλοποιεί αυτή τη μέθοδο βρίσκεται στο παράρτημα της παρούσας διατριβής. Η $3D$ προβολή της $4D$ επιφάνειας, που σχηματίζεται

κοντά στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς, είναι μία 3D επιφάνεια. Για να τη δούμε καλύτερα την περιστρέφουμε γύρω από έναν ή περισσότερους άξονες με τη βοήθεια της Mathematica. Η θέση κάθε φορά της 3D επιφάνειας δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) . Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιήσαμε για όλα τα σχήματα την τιμή $r = 1$. Για αυτό το λόγο σε κάθε σχήμα δίνουμε μόνο τις γωνίες (θ, ϕ) .

Κάθε σημείο της 3D προβολής της 4D επιφάνειας, κοντά στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς στην επιφάνεια τομής, το χρωματίζουμε ανάλογα με την τιμή που έχει η τέταρτη συντεταγμένη του. Αν π.χ. η 3D προβολή της 4D αυτής επιφάνειας είναι στον υπόχωρο (x, \dot{x}, z) τότε κάθε σημείο της 3D αυτής προβολής (3D επιφάνεια) χρωματίζεται ανάλογα της τιμής που έχει η \dot{z} . Αυτό γίνεται με την βοήθεια χρωματικών συναρτήσεων. Οι χρωματικές συναρτήσεις της Mathematica έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$ και κάθε τιμή στο διάστημα αυτό αντιστοιχεί σε μία απόχρωση ενός φάσματος που διαλέγουμε. Μπορούμε να έχουμε μία μονοχρωματική απεικόνιση όπου το 0 να αντιστοιχεί στο λευκό και το 1 στο μαύρο, με όλες τις ενδιάμεσες τιμές να αντιστοιχούν σε τόνους του γκριζου, ή να επιλέξουμε μία παλέτα όπου από το 0 ως το 1 να υπάρχει μία διαδοχή χρωμάτων. Η συντεταγμένη \dot{z} παίρνει τιμές στο διάστημα $[\min(\dot{z}), \max(\dot{z})]$ όπου $\min(\dot{z})$ και $\max(\dot{z})$ υπολογίζονται μέσω της Mathematica. Χρησιμοποιούμε μία συνάρτηση f για να κανονικοποιήσουμε το διάστημα τιμών του \dot{z} , απεικονίζουμε δηλαδή το διάστημα $[\min(\dot{z}), \max(\dot{z})]$ στο $[0,1]$. Το $\min(\dot{z})$ παίρνει την τιμή 0, το $\max(\dot{z})$ την τιμή 1 και οι ενδιάμεσες τιμές της \dot{z} παίρνουν γραμμικά, ανάλογα με την τιμή τους, ενδιάμεσες τιμές μεταξύ του 0 και του 1. Η συνάρτηση f είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} f : [\min(\dot{z}), \max(\dot{z})] &\rightarrow [0, 1] \\ \dot{z} &\rightarrow a\dot{z} + b \end{aligned} \tag{91}$$

Για $\dot{z} = \min(\dot{z})$ ισχύει $f(\min(\dot{z})) = 0$ οπότε έχουμε:

$$a(\min(\dot{z})) + b = 0 \tag{92}$$

για $\dot{z} = \max(\dot{z})$ ισχύει $f(\max(\dot{z})) = 1$ οπότε έχουμε:

$$a(\max(\dot{z})) + b = 1 \tag{93}$$

Αφαιρώντας τη σχέση (93) από τη σχέση (92) έχουμε ότι $a = 1/(\max(\dot{z}) - \min(\dot{z}))$. Αντικαθιστώντας το a στην σχέση (92) έχουμε ότι $b = -\min(\dot{z})/(\max(\dot{z}) - \min(\dot{z}))$.

$(\max(\dot{z}) - \min(\dot{z}))$. Έτσι για να δώσουμε χρωματική τιμή στα σημεία της $3D$ προβολής της $4D$ επιφάνειας που σχηματίζεται κοντά στην περιοχή μίας περιοδικής τροχιάς στην επιφάνεια τομής, υπολογίζουμε τη συνάρτηση της Mathematica που έχουμε επιλέξει για τις τιμές της συνάρτησης f . Σε κάθε σχήμα δίνουμε δίπλα το χρωματικό φάσμα της Mathematica που χρησιμοποιούμε κάθε φορά.

3.2 Ευστάθεια

Ο σκοπός αυτού του υποκεφαλαίου είναι η μελέτη της δομής του φασικού χώρου στην περιοχή των ευσταθών περιοδικών τροχιών. Θέλουμε να κατανοήσουμε πως δομείται ο φασικός χώρος όταν η τροχιά x_1 , για την πρώτη περίπτωση του μοντέλου μας, γίνεται από ευσταθής απλά ασταθής γεννώντας μία νέα τρισδιάστατη οικογένεια περιοδικών τροχιών την x_{1v1} , η οποία είναι ευσταθής. Έτσι λοιπόν βασικός σκοπός αυτού του υποκεφαλαίου είναι η μελέτη της δομής του φασικού χώρου στην περιοχή των περιοδικών τροχιών της x_1 πριν και μετά την μετάβαση της x_1 από ευστάθεια σε απλή αστάθεια, καθώς και η μελέτη της δομής των αναλλοίωτων τόρων στην περιοχή των $3D$ ευσταθών περιοδικών τροχιών της x_{1v1} . Στις παραγράφους 3.2.1 και 3.2.2 μελετάμε την δομή του φασικού χώρου όταν διαταράσσουμε τις αρχικές συνθήκες των περιοδικών τροχιών της x_1 και x_{1v1} κατά την x -διεύθυνση. Μελετάμε διαδοχικά την δυναμική συμπεριφορά κοντά στις περιοδικές τροχιές πριν (υποκεφάλαιο 3.2.1) και μετά (υποκεφάλαιο 3.2.2) την μετάβαση της x_1 από ευστάθεια σε απλή αστάθεια. Κατόπιν μελετάμε τους αριθμούς περιστροφής πάνω σε τόρους (υποκεφάλαιο 3.2.3). Μετά μελετάμε τις αλλαγές στο φασικό χώρο που επιφέρει η αύξηση της ενέργειας (υποκεφάλαιο 3.2.4). Ύστερα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μας όταν διαταράσσουμε τις περιοδικές τροχιές κατά την z -διεύθυνση (υποκεφάλαιο 3.2.5) ή όταν μεταβάλλουμε την διαταραχή του συστήματός μας (υποκεφάλαιο 3.2.6).

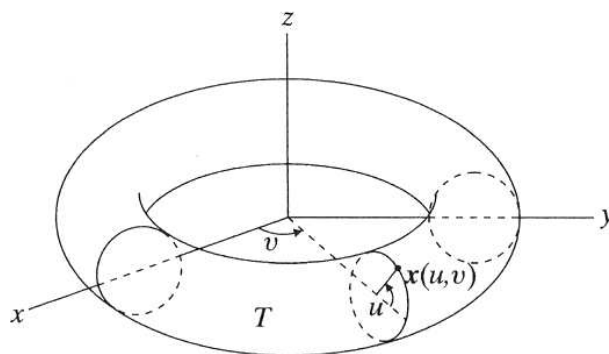
Σύμφωνα με το KAM θεώρημα⁶ (Kolmogorov 1954, Moser 1962, Arnold 1963, Arnold 1978 p.399-415), σε ένα σχεδόν ολοκληρώσιμο σύστημα N βαθμών ελευθερίας έχουμε την ύπαρξη τροχιών οι οποίες βρίσκονται πάνω σε N -διάστατους αναλλοίωτους τόρους. Στην περιοχή των ευσταθών περιοδικών τρο-

⁶Το KAM θεώρημα έχει επεκταθεί σε $2n$ -διάστατες σχεδόν ολοκληρώσιμες συμπλεκτικές απεικονίσεις (Wiggins 2003 p.225, Kuksin and Pöschel 1994). Αυτό σημαίνει ότι σε $2n$ -διάστατες σχεδόν ολοκληρώσιμες συμπλεκτικές απεικονίσεις, υπάρχουν τροχιές οι οποίες βρίσκονται πάνω σε n -διάστατους αναλλοίωτους τόρους. Στην περίπτωση του συστήματός μας ορίζεται μία $4D$ απεικόνιση Poincaré που σε πολλές περιπτώσεις είναι σχεδόν ολοκληρώσιμη.

χιών ένα σύστημα (όπως το δικό μας) συμπεριφέρεται τοπικά σαν ένα σχεδόν ολοκληρώσιμο σύστημα. Οπότε λόγω του KAM θεωρήματος στην περιοχή των ευσταθών περιοδικών τροχιών του συστήματός μας (το οποίο έχει 3 βαθμούς ελευθερίας) υπάρχουν τροχιές οι οποίες βρίσκονται πάνω σε τρισδιάστατους αναλλοίωτους τόρους. Η τομή των τόρων αυτών με την $4D$ επιφάνεια τομής είναι δισδιάστατοι τόροι. Η δομή αυτών των τόρων στην επιφάνεια τομής εξετάζεται στο παρόν κεφάλαιο.

Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε τα σχήματα αυτού του κεφαλαίου θα δώσουμε κάποιους ορισμούς σχετικά με τους τόρους. Σε έναν τρισδιάστατο χώρο ένας τόρος είναι μία επιφάνεια η οποία παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου στο xz ή yz επίπεδο γύρω από τον z -άξονα (Σχ. 58). Ο ορισμός των γωνιών u και v δίνεται στο Σχ. 58. Η εσωτερική επιφάνεια του τόρου ορίζεται ως το σύνολο των σημείων τα οποία έχουν $90^\circ \leq u \leq 270^\circ$. Η εξωτερική επιφάνεια του τόρου ορίζεται ως το σύνολο των σημείων τα οποία έχουν $0^\circ \leq u \leq 90^\circ$ και $270^\circ \leq u \leq 360^\circ$. Θα καλούμε ως τόρους τα αντικείμενα τα οποία μελετάμε στο κεφάλαιο αυτό παρά το γεγονός ότι εν γένει έχουν σαν γεννήτορα μία έλλειψη και όχι έναν κύκλο (είναι ελλειπτικοί τόροι).

Στο υποκεφάλαιο 2.3.1 μελετήσαμε την ευστάθεια της τροχιάς x_1 και είδαμε ότι για $E_j = -5.1644$ από ευσταθής γίνεται απλά ασταθής. Στο σημείο αυτό, το οποίο θα αποκαλούμε σημείο A, έχουμε μία νέα οικογένεια, την x_{1v1} , η οποία είναι ευσταθής. Κατόπιν για $E_j = -4.98$ έχουμε μετάβαση για την x_1 από απλή αστάθεια σε ευστάθεια και τη γέννηση μίας νέας απλά ασταθούς οικογένειας περιοδικών τροχιών. Το σημείο αυτό θα αποκαλούμε σημείο B.

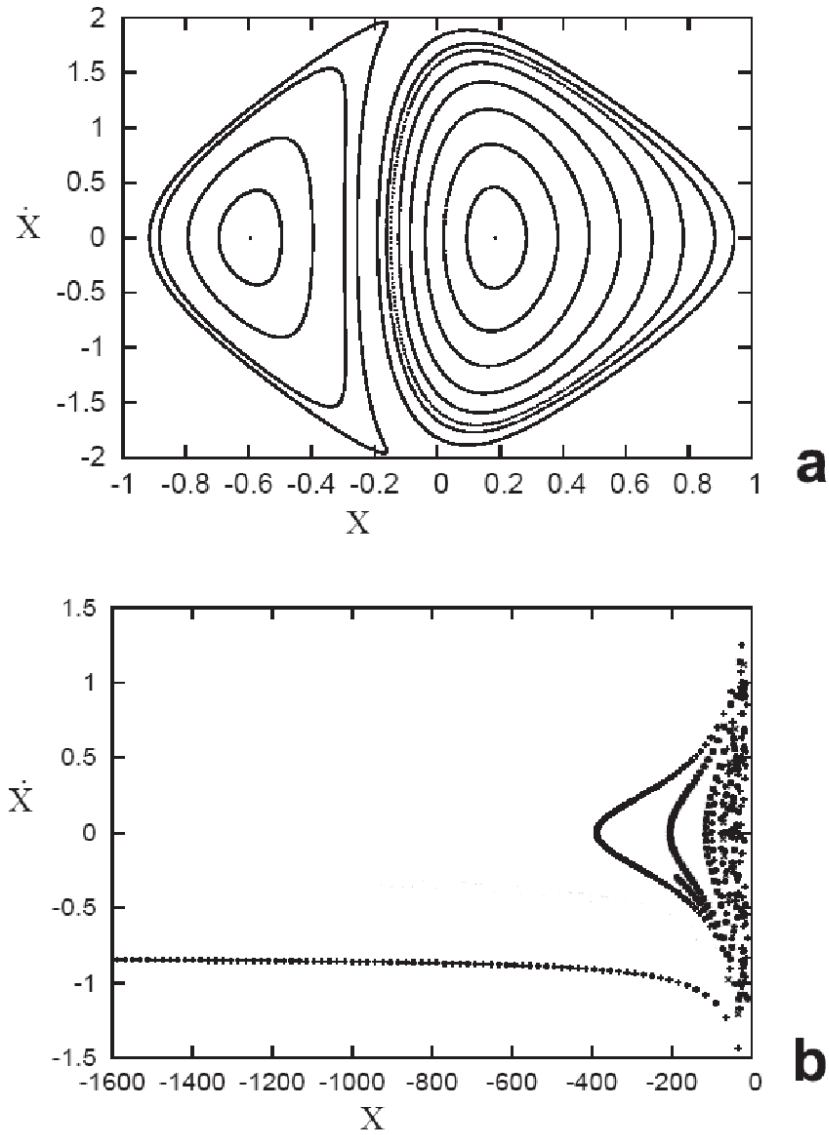


Σχήμα 58: Οι ορισμοί των v και u γωνιών σε έναν τόρο. Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση με την οποία οι γωνίες v και u παίρνουν τιμές από το 0 σε μεγαλύτερες τιμές.

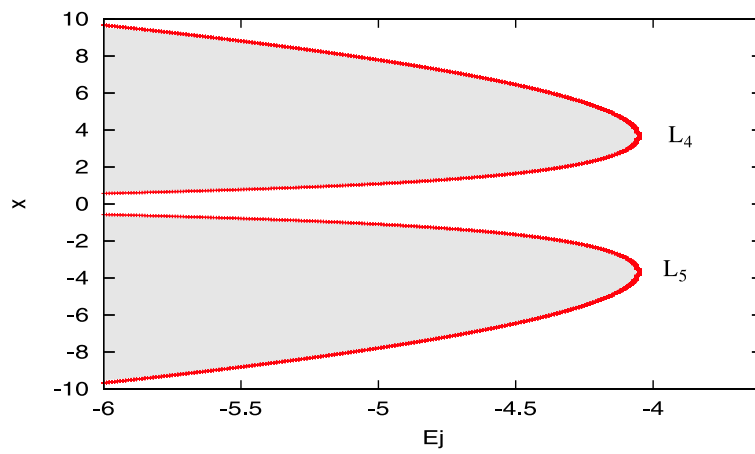
3.2.1 Επιφάνειες τομής πριν την $S \rightarrow U$ μετάβαση

Πρώτα εξετάζουμε τις επιφάνειες τομής του συστήματός μας για ενέργειες πριν το σημείο A. Τα σχήματα 59a και 59b περιγράφουν την επιφάνεια τομής για $E_j = -5.207$ (πριν το A). Παρά το γεγονός ότι μελετάμε ένα γαλαξιακό σύστημα, ο κύριος σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε τη δομή του φασικού χώρου σε ένα 3D αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα. Για τον λόγο αυτό ολοκληρώνουμε τις τροχιές για μεγάλους χρόνους, οι οποίοι είναι αναγκαίοι για να έχουμε μία καθαρή εικόνα των δυναμικών φαινομένων που εξετάζουμε. Οι χρόνοι αυτοί ξεπερνούν πολλές φορές τον χρόνο ηλικίας του σύμπαντος.

Στο Σχ. 59a παρατηρούμε αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από περιοδικές τροχιές δύο διαστάσεων οικογενειών οι οποίες βρίσκονται στο ισημερινό επίπεδο $z = 0$, στο (x, \dot{x}) χώρο με αρχικές συνθήκες $(x_0 + \Delta x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.18312784 + \Delta x_0, 0, 0, 0)$ με $\Delta x_0 = 0.1, \dots, 0.8$ και $(x_0 + \Delta x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (-0.59595941 + \Delta x_0, 0, 0, 0)$ με $\Delta x_0 = 0.1, \dots, 0.4$. Κάθε αναλλοίωτη καμπύλη αποτελείται από 10^3 σημεία. Το σχήμα περιγράφει μία τυπική κατάσταση σε περιστρεφόμενα γαλαξιακά δυναμικά. Η ευσταθής περιοδική τροχιά για $x > 0$ ανήκει στην x_1 και η ευσταθής περιοδική τροχιά για $x < 0$ στην ανάδρομη οικογένεια x_4 (Contopoulos 2002, p.391). Η έκταση των αναλλοίωτων καμπυλών περιορίζεται από την καμπύλη μηδενικής ταχύτητας ZVC (Σχ. 60). Μεταβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες x_0 πάνω από το πάνω όριο ή κάτω από το κάτω όριο της καμπύλης μηδενικής ταχύτητας για την ίδια τιμή της E_j βρίσκουμε τις αναμενόμενες καμπύλες τύπου καμπάνας (για 10^3 σημεία στην επιφάνεια τομής) οι οποίες σχετίζονται με τις τροχιές διαφυγής (Contopoulos & Patsis 2006) (Σχ. 59b).



Σχήμα 59: Η (x, \dot{x}) επιφάνεια τομής για $E_j = -5.207$. (a) Οι αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από τις περιοδικές τροχιές x_1 (θετικές τιμές του x) και x_4 (αρνητικές τιμές του x) (b) Η επιφάνεια τομής θεωρώντας αρχικές συνθήκες με x μικρότερο από το κάτω όριο της καμπύλης μηδενικής ταχύτητας για την ίδια τιμή της ενέργειας. Παρατηρούμε την εμφάνιση των καμπύλων τύπου καμπάνα (Contopoulos & Patsis 2006).



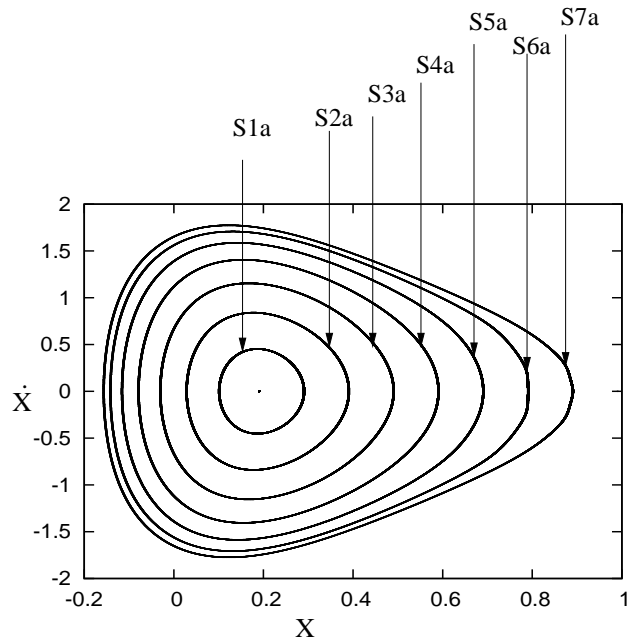
Σχήμα 60: Η (E_j, x) καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (ZVC), για τροχιές στο $z = 0$ επίπεδο στο Χαμιλτονιανό συστήμά μας. Οι απαγορευμένες περιοχές κίνησης παριστάνονται με γκρί χρώμα. Τα L_4 και L_5 είναι τα Λαγκρανζιανά σημεία ισοροπίας του συστήματός μας.

3.2.2 Επιφάνειες τομής μετά την $S \rightarrow U$ μετάβαση

Συνεχίζουμε με τη μελέτη του διαστήματος των ενεργειών μεταξύ του A και B. Για $E_j = -5.1574$ όπου συναντάμε την απλά ασταθή περιοδική τροχιά της x_1 (με αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z, \dot{z}_0) = (0.18958522, 0, 0, 0)$) και την ευσταθή περιοδική τροχιά x_{1v1} (με αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.18939859, 0, 0.030236585, 0)$) η οποία έχει διακλαδιστεί από την x_1 . Μελετάμε την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή αυτών των δυο περιοδικών τροχιών, διαταράσσοντας διαδοχικά τις περιοδικές τροχιές x_1 και x_{1v1} κατά την x -διεύθυνση με $\Delta x = 0.1, 0.2 \dots 0.7$. Στην περίπτωση της διδιάστατης περιοδικής τροχιάς έχουμε πάντα $z = 0$ και αυτό σημαίνει ότι η 3D προβολή της επιφάνειας τομής (x, \dot{x}, z) ταυτίζεται με την διδιάστατη προβολή (x, \dot{x}) . Την προβολή αυτή την παρατηρούμε στο Σχ. 61, όπου έχουμε επτά αναλλοίωτες καμπύλες να περιβάλλουν το σημείο της περιοδικής τροχιάς της x_1 στην επιφάνεια τομής. Κάθε αναλλοίωτη καμπύλη έχει 10^3 σημεία. Ονομάζουμε αυτές τις καμπύλες $S_{1a}, S_{2a}, \dots, S_{7a}$ για διαταραχές $(x_0 + \Delta x_0)$ με $\Delta x_0 = 0.1, 0.2, \dots 0.7$ αντίστοιχα.

Κατόπιν υπολογίσαμε τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov της περιοδικής τροχιάς x_1 και βρήκαμε ότι είναι θετικός και ίσος με 0.025958. Ο χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov μίας περιοδικής τροχιάς ορίζεται ως το maximum σ_i , όπου: $\sigma_i = \frac{1}{\tau} \ln(|\lambda_i|)$, τ είναι η περίοδος της περιοδικής τροχιάς και λ_i οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα της απεικόνισης Poincaré (βλ. π.χ. Lichtenberg and Lieberman 1992 p.302, Skokos 2010). Το σχήμα 61 τονίζει το γεγονός ότι η δυναμική συμπεριφορά κοντά σε μία 2D απλά ασταθή περιοδική τροχιά σε ένα 3D Χαμιλτονιανό σύστημα μπορεί να είναι όμοια με αυτήν στην περιοχή μίας 2D ευσταθούς περιοδικής τροχιάς εάν η διαταραχή περιορίζεται μόνο σε μία διεύθυνση (στην περίπτωση μας η ακτινική).

Εφαρμόζουμε τις ίδιες επτά διαταραχές που εφαρμόσαμε στην περιοδική τροχιά της x_1 και στην περιοδική τροχιά της x_{1v1} και παρατηρούμε επτά τόρους (οι οποίοι αναπαριστάνονται με κόκκινο χρώμα στο Σχ. 62) γύρω από την περιοδική τροχιά της x_{1v1} στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής. Στο Σχήμα 62 ονομάζουμε τους τόρους αυτούς ως $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ και S_7 ξεκινώντας από τον κοντινότερο τόρο στην περιοδική τροχιά. Παράλληλα στο ίδιο σχήμα αναπαριστούμε με πράσινο χρώμα και τις αναλλοίωτες καμπύλες $S_{1a}, S_{2a}, S_{3a}, S_{4a}, S_{5a}, S_{6a}$ και S_{7a} οι οποίες βρίσκονται γύρω από την περιοδική τροχιά της x_1 . Κάθε τόρος αποτελείται από 10^4 σημεία στην επιφάνεια τομής. Επειδή βρισκόμαστε σε τιμή της ενέργειας κοντά στο σημείο διακλάδωσης οι αρχικές συνθήκες x της περιοδικής τροχιάς της x_1 και της περιοδικής τροχιάς της x_{1v1} σχεδόν ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι οι S_i τόροι και οι καμπύλες



Σχήμα 61: Η (x, \dot{x}) προβολή της (x, \dot{x}, z, \dot{z}) επιφάνειας τομής της 2D οικογένειας x_1 για $Ej = -5.1574$. Η περιοδική τροχιά της x_1 με αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.18958522, 0, 0, 0)$ είναι απλά ασταθής. Ονομάζουμε τις αναλλοίωτες καμπύλες $S_{1a}, S_{2a}, S_{3a}, S_{4a}, S_{5a}, S_{6a}, S_{7a}$ ξεκινώντας από την κοντινότερη στην περιοδική τροχιά.

S_{ia} περιβάλλουν την ίδια τιμή x . Για τον λόγο αυτό οι τόροι S_i και οι αναλλοίωτες καμπύλες S_{ia} αλληλοκαλύπτονται στην 2D προβολή (x, \dot{x}) της επιφάνειας τομής.

Οι S_i τόροι είναι τρισδιάστατες προβολές των αναλλοίωτων τόρων της 4D απεικόνισης Poincaré. Η δομή τους, εκτός αυτή του S_4 , είναι όμοια με αυτή των επιφανειών που ονομάστηκαν ως ‘περιστροφικοί τόροι’ (rotational tori) από τους Vrahatis et al. (1996, 1997). Οι συγγραφείς αυτοί βρήκαν το ίδιο είδος τόρων σε μία 4D συμπλεκτική απεικόνιση η οποία σχετίζεται με την δυναμική δεσμών σωματιδίων σε κυκλικούς επιταχυντές. Ακόμα και ο S_2 που μοιάζει να έχει μία δική του μορφολογία (Σχ. 62) μετατρέπεται σε ένα τυπικό περιστροφικό τόρο εάν ολοκληρώσουμε την τροχιά μέχρι να έχουμε 4×10^5 σημεία στην επιφάνεια τομής (Σχ. 63). Εξαιρεση από αυτή την μορφολογία αποτελεί ο τόρος S_4 ο οποίος έχει μία λεπτή και πολύπλοκη δομή που μοιάζει με ένα είδος κορδέλας. Το Σχ. 64 μας βοηθάει να αντιληφθούμε ότι ο τόρος S_4 τέμνει

τον εαυτό του σε πέντε περιοχές A,B,C,D και E. Πρακτικά αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς στην 3D προβολή περιστρέφοντας το σχήμα αυτό στην οθόνη του υπολογιστή και βλέποντάς το από διάφορες οπτικές γωνίες. Η δομή αυτή του S_4 είναι όμοια με αυτή των τόρων που ονομάστηκαν ‘σωληνοειδείς τόροι’ (tube tori) από τους Vrahatis et al. (1997).

Θα μελετήσουμε τώρα την δομή των περιστροφικών τόρων στην 4D επιφάνεια τομής χρησιμοποιώντας την μέθοδο χρώματος και περιστροφής. Οι τόροι καταλαμβάνουν τον υπόχωρο της 4D επιφάνειας τομής $[x_1, x_2] \times [\dot{x}_1, \dot{x}_2] \times [z_1, z_2] \times [\dot{z}_1, \dot{z}_2] = [-0.154927, 0.890256] \times [-1.79387, 1.77590] \times [-0.0302, 0.0302] \times [-0.096, 0.096]$. Ως παράδειγμα της 4D μορφολογίας των περιστροφικών τόρων απεικονίζουμε στο Σχ. 65 τα πρώτα 4×10^5 σημεία του τόρου S_2 . Αυτός ο τόρος έχει ένα μικρό πάχος, όπως όταν ένας ελλειπτικός τόρος δημιουργείται από την περιστροφή μίας έλλειψης γύρω από τον \dot{x} -άξονα. Επιλέγουμε εδώ να απεικονίσουμε τα σημεία του τόρου στην τρισδιάστατη προβολή (\dot{x}, z, \dot{z}) της επιφάνειας τομής και να τα χρωματίσουμε ανάλογα με την τιμή τους στην τέταρτη διάσταση x . Παρατηρούμε ότι το χρώμα ακολουθεί κάποιες κανονικότητες. Αυτό είχε παρατηρηθεί και από τους Patsis & Zachilas (1994). Οι λεπτομέρειες όμως της δομής αυτής παρουσιάζονται για πρώτη φορά εδώ και υποδηλώνουν μία γενική συμπεριφορά για αυτή την κλάση αντικειμένων.

Κινούμενοι κατά μήκος της v -διεύθυνσης για σταθερή τιμή της γωνίας u του τόρου S_2 (Σχ. 65), τα σημεία στην επιφάνεια τομής διατηρούν το χρώμα τους μεταβαίνοντας από την εξωτερική επιφάνεια στην εσωτερική επιφάνεια του τόρου και αντίστροφα. Αυτό γίνεται, κατά μήκος των γραμμών A, B, C και D που ορίζονται από την εναλλαγή των χρωμάτων κόκκινου και μπλε στο Σχ. 65. Κατόπιν μελετούμε τις λεπτομέρειες της διαδοχής χρώματος κοντά σε αυτές τις γραμμές κατά μήκος της v -διεύθυνσης για σταθερή τιμή της γωνίας u (Σχ. 66). Το Σχ. 66 είναι μεγέθυνση του δεξιού μέρους του σχήματος 65. Στο σχήμα αυτό τα σημεία που είναι χρωματισμένα με κόκκινο και τα οποία βρίσκονται πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του τόρου αλλάζουν επιφάνεια και γλιστρούν στην εσωτερική επιφάνεια κατά μήκος της γραμμής A (πάνω αριστερό μέρος του Σχ. 66). Αν συνεχίσουμε να κινούμαστε κατά μήκος της v -διεύθυνσης με την φορά των δεικτών του ρολογιού τα κόκκινα σημεία, τα οποία βρίσκονται τώρα στην εσωτερική επιφάνεια του τόρου, φτάνουν μέχρι την γραμμή D. Στην γραμμή αυτή τα σημεία αλλάζουν επιφάνεια και γυρνάνε ξανά στην εξωτερική επιφάνεια. Το Σχ. 66 μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μετάβαση των σημείων από την μία επιφάνεια στην άλλη. Στο κάτω μέρος της εικόνας του σχήματος 66 μπορούμε να παρατηρήσουμε πως τα κόκκινα σημεία γλιστρούν πίσω από τα μπλέ σημεία δίνοντας την εντύπωση ότι δημιουργούν ένα δίκτυο. Το κόκκινο δίκτυο αποτελείται από λωρίδες οι οποίες γίνονται

πλατύτερες όσο ο χρόνος υπολογισμού αυξάνει. Τελικά μετά από αρκετό χρόνο ολοκλήρωσης της τροχιάς οι λωρίδες ενώνονται σε μία συνεχή κόκκινη επιφάνεια που καλύπτει τις μπλε λωρίδες. Ομοίως το μπλέ δίκτυο στο εσωτερικό μέρος του τόρου γεμίζει με μπλέ ύστερα από αρκετό χρόνο ολοκλήρωσης με αποτέλεσμα τα κόκκινα σημεία να καλυφθούν από τα μπλέ στο κάτω μέρος του σχήματος 66.

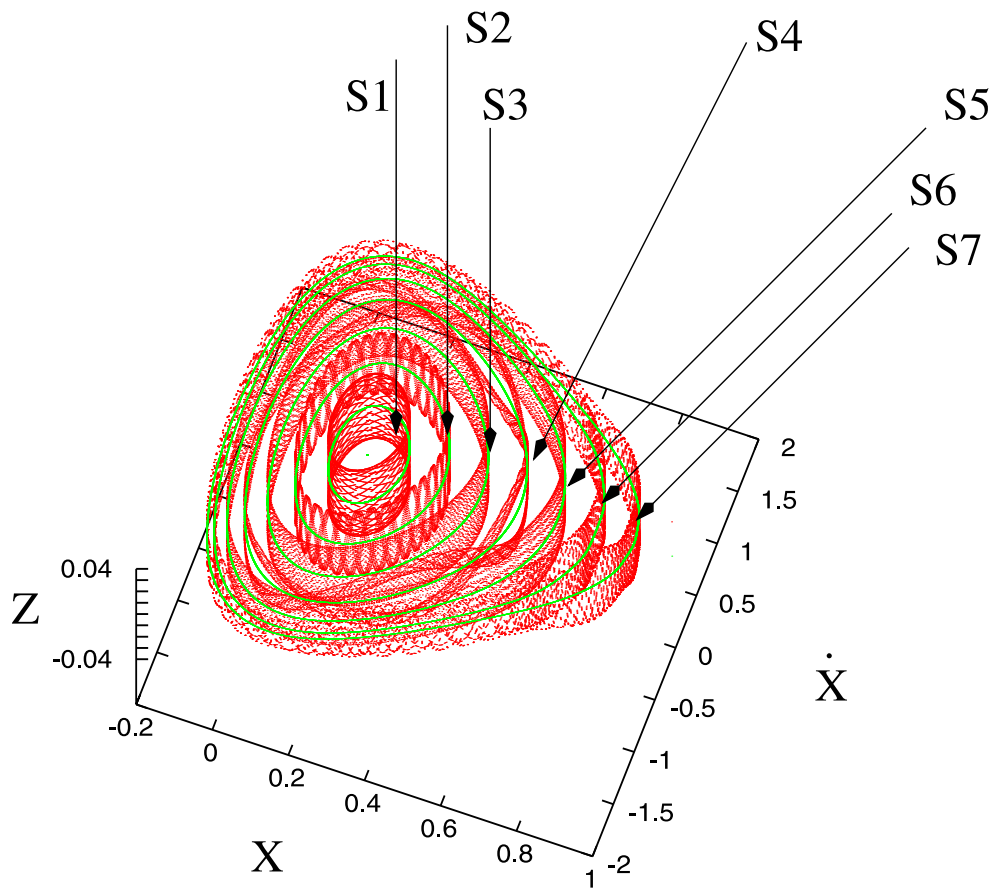
Γενικά η μεταβολή του χρώματος κατά μήκος της u -διεύθυνσης για σταθερή τιμή της γωνίας u μπορεί να κατανοηθεί κοιτώντας την μπάρα χρώματος που παραθέτουμε δεξιά σε κάθε σχήμα. Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι το κόκκινο ή το μώβ-μπλέ (στο πάνω μέρος ή κάτω μέρος του τόρου) μεταβάλλονται σε πορτοκαλί ή μπλέ και αυτά με την σειρά τους σε κίτρινο ή γαλάζιο ώσπου τελικά για $u = 90^\circ$ και $u = 270^\circ$ τα σημεία να έχουν πράσινο χρώμα (το οποίο βρίσκεται στο μέσο της χρωματικής μπάρας).

Εκτός από την μεταβολή χρώματος κατά μήκος της u -διεύθυνσης για σταθερή τιμή της γωνίας u υπάρχει και η μεταβολή του χρώματος κατά μήκος της u -διεύθυνσης (με σταθερό u). Αν μελετήσουμε π.χ. μία κόκκινη περιοχή στον S_2 τόρο στο Σχ. 65, παρατηρούμε ότι έχουμε κόκκινα σημεία στο μέσο του τόρου ($u = 0$). Αρχικά για $u : 0^\circ \rightarrow 90^\circ$ παρατηρούμε μία διαδοχή χρώματος από κόκκινο σε πορτοκαλί, σε κίτρινο και μετά σε πράσινο (Σχ. 65). Δεύτερον για $u : 90^\circ \rightarrow 180^\circ$, στην εσωτερική πλευρά του τόρου, τα χρώματα μεταβάλλονται από πράσινο σε γαλάζιο και μετά σε μπλέ και τέλος σε μώβ. Μετά για $u : 180^\circ \rightarrow 270^\circ$ τα χρώματα μεταβάλλονται ομαλά από μώβ σε πράσινο και τελικά για $u : 270^\circ \rightarrow 360^\circ$, στην εξωτερική επιφάνεια του τόρου, μπορούμε να παρατηρήσουμε μία ομοίμορφη μεταβολή χρώματος από πράσινο σε κίτρινο και μετά σε κόκκινο. Συμπερασματικά, παρατηρούμε μία κυκλική μεταβολή των χρωμάτων (τιμές x) κατά μήκος της u -διεύθυνσης. Η μεταβολή χρώματος είναι παρόμοια για όλους τους περιστροφικούς τόρους S_i .

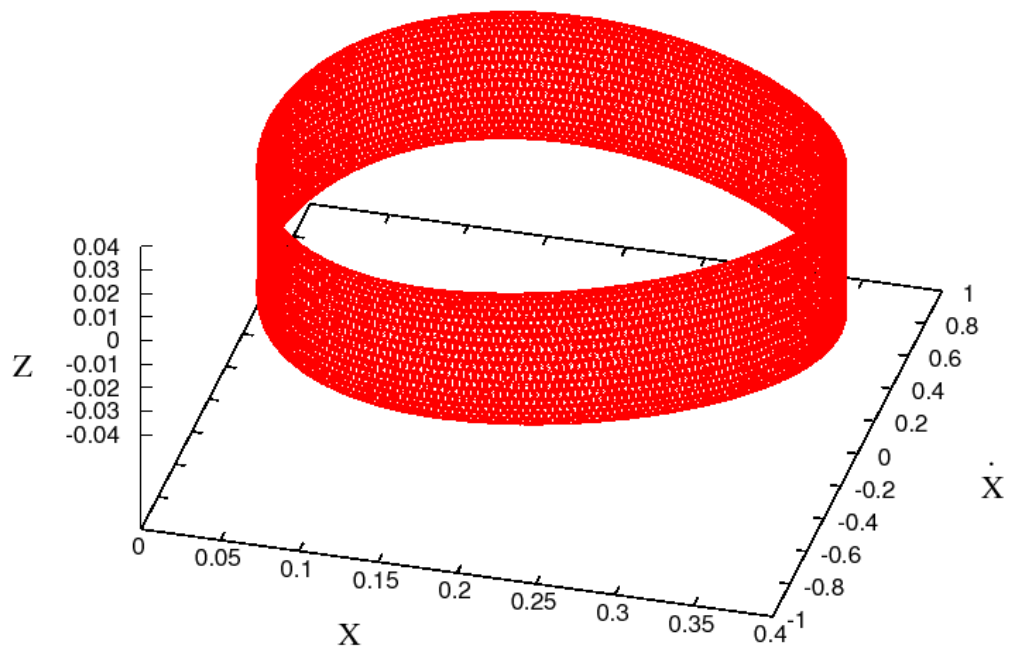
Η ελλειπτικότητα των $3D$ προβολών των τόρων διαφέρει. Σε άλλες περιπτώσεις του συστήματός μας βρίσκουμε ελλειπτικούς τόρους με μικρή ελλειπτικότητα. Ως παράδειγμα παίρνουμε μία ευσταθή περιοδική τροχιά της οικογένειας $x1v3$ για $Ej = -4.3$ (με αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z, \dot{z}_0) = (0.6765982, 0, 0.254816, 0)$) και την διαταράσσουμε κατά $\Delta x = 10^{-5}$. Παρατηρούμε έναν τόρο με μικρή ελλειπτικότητα γύρω από την περιοδική τροχιά τον οποίο ονομάζουμε S_a (Σχ. 67). Στο Σχ. 67 παρατηρούμε ότι στο πάνω μέρος της εξωτερικής επιφάνειας του τόρου S_a κυριαρχεί το μπλέ χρώμα. Κατά μήκος της u -διεύθυνσης βλέπουμε μία ομαλή μεταβολή χρώματος από μπλέ σε γαλάζιο, σε πράσινο και σε κίτρινο. Στην περιοχή η οποία υποδεικνύεται με ένα βέλος 'A', παρατηρούμε ότι το κίτρινο συναντά το μπλέ. Σε αυτή την περιοχή έχουμε την τομή της εξωτερικής επιφάνειας του S_a με την εσωτερική επιφάνειά του. Οι λεπτομέρειες της

τομής αυτής στην 4D επιφάνεια τομής φαίνονται στο Σχ. 68. Το χρώμα των σημείων από κίτρινο στην εξωτερική επιφάνεια του S_a (η οποία συμβολίζεται ως “Ext”) συνεχίζει σε πορτοκαλί και μετά σε κόκκινο στην εσωτερική επιφάνεια του τόρου S_a (η οποία συμβολίζεται ως “Int”). Παρατηρούμε τώρα μία ομαλή μεταβολή χρώματος από κόκκινο σε πορτοκαλί στην εσωτερική επιφάνεια του τόρου S_a (Σχ. 67)μέχρι να φτάσουμε σε μία γραμμή στην οποία το πορτοκαλί συναντά το μπλέ. Σε αυτή την γραμμή, η οποία υποδεικνύεται με ένα βέλος “B”, έχουμε στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής ξανά μία τομή της εξωτερικής επιφάνειας με την εσωτερική επιφάνεια του τόρου S_a .

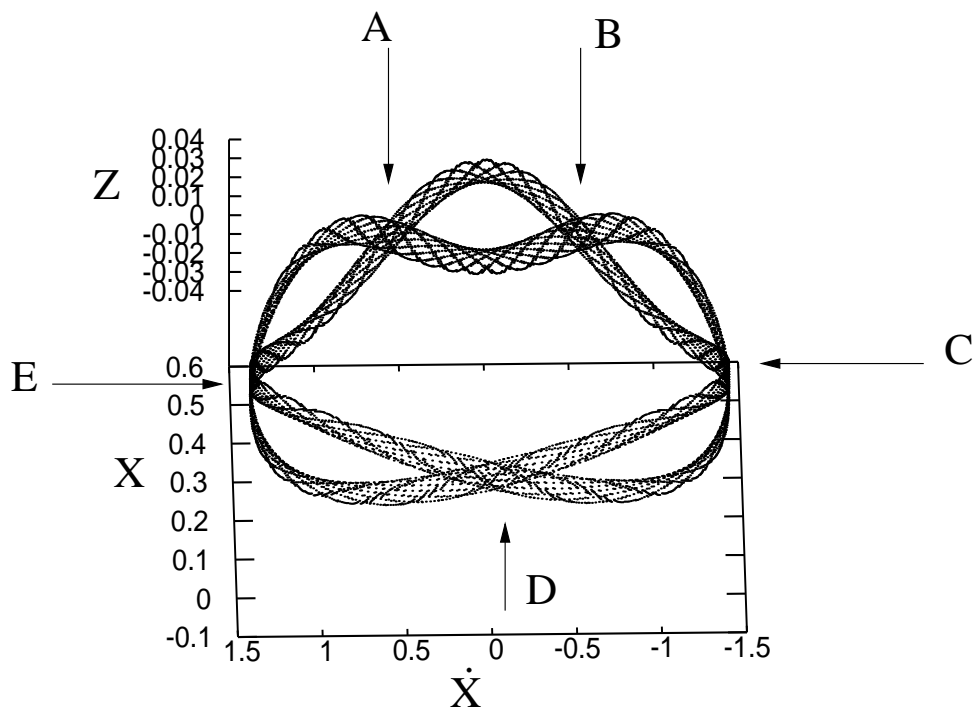
Ερχόμαστε τώρα στην περιοχή του σωληνοειδούς τόρου S_4 που βρήκαμε γύρω από την περιοδική τροχιά της $x1v1$. Στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής είδαμε ότι ο S_4 (Σχ. 64) τέμνει τον εαυτό του σε πέντε περιοχές A, B, C, D και E. Στο Σχ. 69 ο S_4 χρωματίζεται ανάλογα με την τιμή της τέταρτης διάστασης z . Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε μία ομαλή μεταβολή χρώματος στις περιοχές ανάμεσα σε δύο διαδοχικές τομές. Για παράδειγμα, εξετάζουμε την περιοχή ανάμεσα στις τομές A και B στην εσωτερική επιφάνεια του τόρου κατά μήκος του βέλους ‘1’ (Σχ. 69). Κινούμενοι κατά μήκος αυτού του βέλους, για σταθερή τιμή της u , και ξεκινώντας από τα μπλέ σημεία παρατηρούμε μία ομαλή μεταβολή χρώματος από μπλέ σε γαλάζιο, σε πράσινο, σε κίτρινο, σε πορτοκαλί στην τομή B. Τώρα αν κινηθούμε από την τομή A κατά μήκος του βέλους ‘2’ (Σχ. 69) η διαδοχή του χρώματος ξεκινώντας από κόκκινο, για σταθερή τιμή της u , είναι κόκκινο \rightarrow πορτοκαλί \rightarrow κίτρινο \rightarrow πράσινο \rightarrow γαλάζιο \rightarrow μπλέ στην τομή B. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις τομές του S_4 στον υπόχωρο (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής έχουμε την συνάντηση δύο διαφορετικών σωλήνων οι οποίοι έρχονται από διαφορετικές διευθύνσεις και έχουν διαφορετικό χρώμα. Για παράδειγμα στην τομή A έχουμε την συνάντηση του κόκκινου με το μπλέ και στην τομή B την συνάντηση του μπλέ με το πορτοκαλί. Ανάλογα ισχύουν στις τομές C, D και E. Συμπερασματικά έχουμε ομαλή μεταβολή χρώματος στις περιοχές μεταξύ δύο τομών και την συνάντηση διαφορετικών χρωμάτων στις περιοχές των τομών. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία έχουν διαφορετικές τιμές στην τέταρτη διάσταση και ότι οι τομές αυτές δεν υπάρχουν στην 4D επιφάνεια τομής. Παρόμοια αποτελέσματα με αυτά του παρόντος υποκεφαλαίου βρήκαμε διατάρασσοντας τις αρχικές συνθήκες των περιοδικών τροχιών της x_1 και της $x1v1$ κατά την \dot{x} -διεύθυνση.



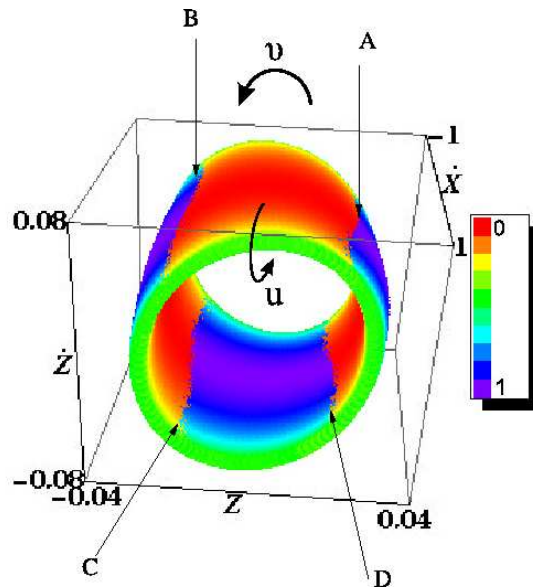
Σχήμα 62: Η (x, \dot{x}, z) 3D προβολή της (x, \dot{x}, z, \dot{z}) 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -5.1574$. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (17^\circ, 20^\circ)$. Οι S_i τόροι γύρω από την $x_1 v_1$ παριστάνονται με κόκκινο χρώμα, ενώ οι αναλλοίωτες καμπύλες S_{ia} γύρω από την x_1 παριστάνονται με πράσινο χρώμα.



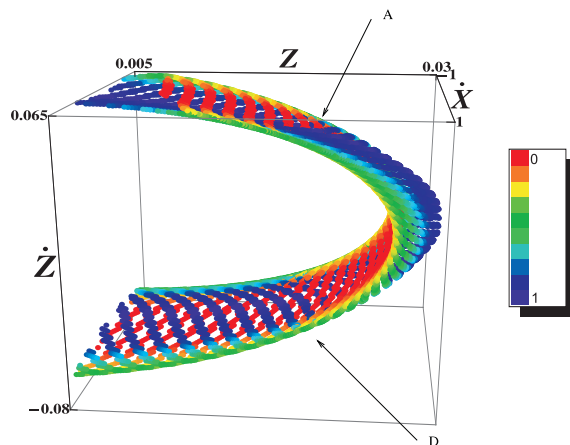
Σχήμα 63: Η (x, \dot{x}, z) προβολή του S_2 στην (x, \dot{x}, z, \dot{z}) επιφάνεια τομής για $E_j = -5.1574$. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (40^\circ, 15^\circ)$. Αυτή είναι μία τυπική μορφολογία ενός περιστροφικού τόρου.



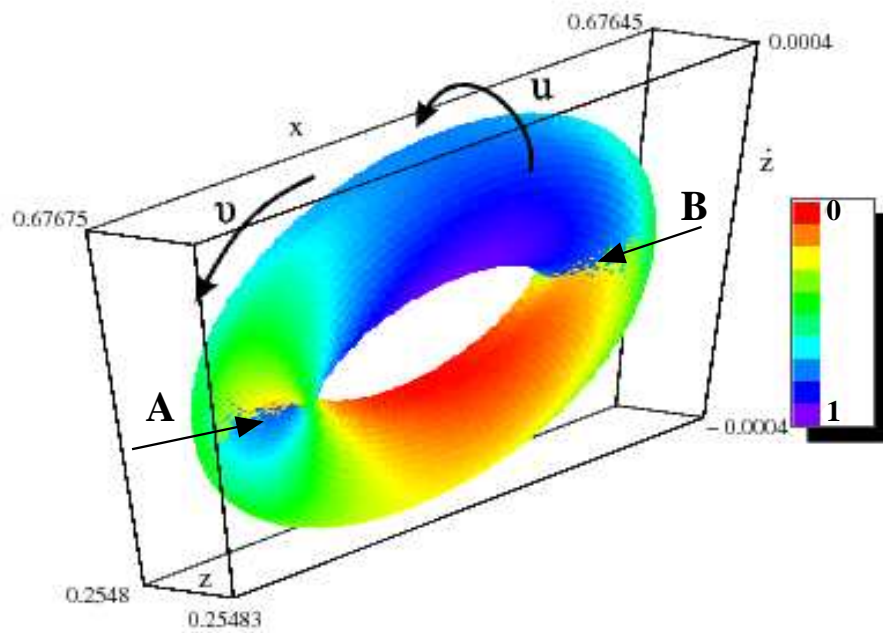
Σχήμα 64: 3D προβολή του τόρου S_4 για $(\theta, \phi) = (40^\circ, 264^\circ)$. A,B,C,D και E είναι οι πέντε τομές του S_4 με τον εαυτό του.



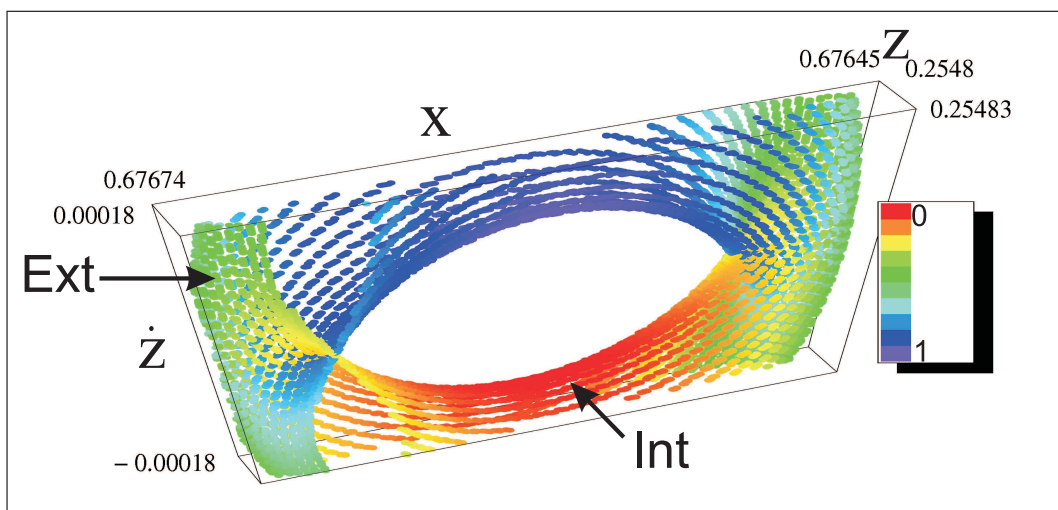
Σχήμα 65: Ο τόρος S_2 στην (x, \dot{x}, z, \dot{z}) επιφάνεια τομής για $E_j = -5.1574$. Η θέση των σημείων στην επιφάνεια τομής βρίσκεται στην (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή και τα χρωματίζουμε ανάλογα με την τιμή τους στην x διάσταση. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (180^\circ, 9^\circ)$.



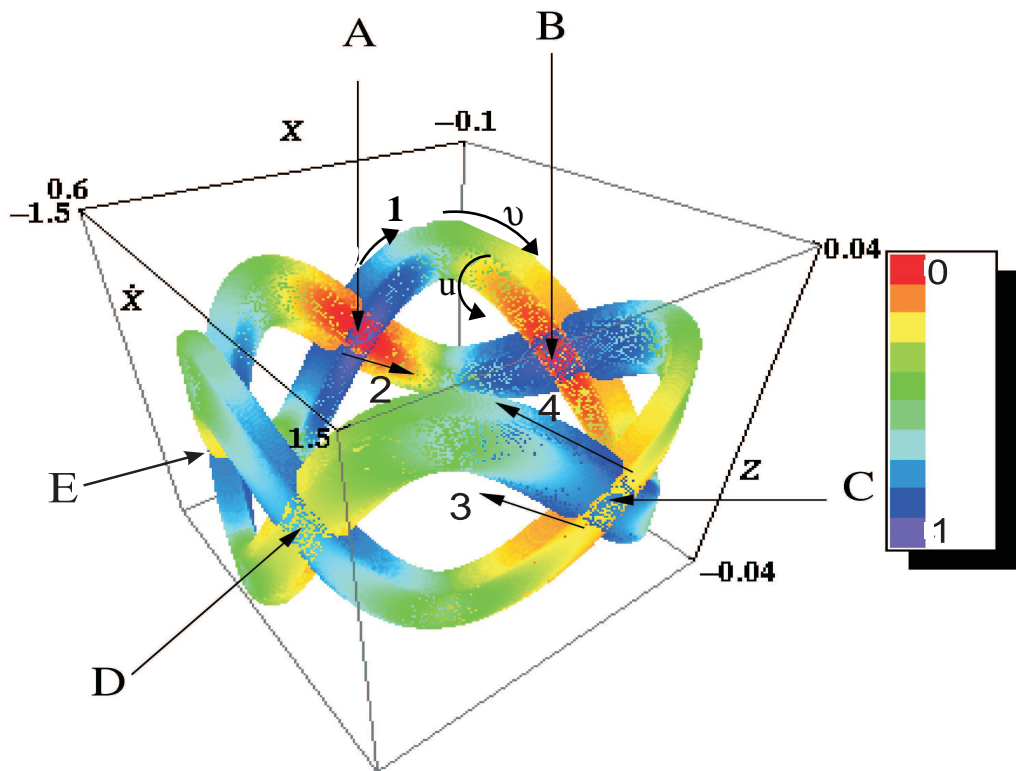
Σχήμα 66: Το δεξιό μέρος του Σχ. 65 σε μεγέθυνση. Παρατηρούμε πως τα σημεία στην επιφάνεια τομής με ένα συγκεκριμένο χρώμα μεταβαίνουν από την μία επιφάνεια του τόρου στην άλλη.



Σχήμα 67: Ο τόρος S_a γύρω από μία ευσταθή περιοδική τροχιά $x1v3$ στην (x, \dot{x}, z, \dot{z}) επιφάνεια τομής για $E_j = -4.3$. Τα σημεία στην επιφάνεια τομής χρωματίζονται ανάλογα με την τιμή του \dot{x} . Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (30^\circ, 30^\circ)$. Παρατηρούμε μία ομοιόμορφη μεταβολή χρώματος. Τα χρώματα αλλάζουν επιφάνεια κατά μήκος των γραμμών οι οποίες υποδεικνύονται με βέλη.



Σχήμα 68: Η περιοχή της διατομής της εξωτερικής επιφάνειας του τόρου με την εσωτερική επιφάνεια του τόρου S_a στην (x, \dot{x}, z, \dot{z}) επιφάνεια τομής για $E_j = -4.3$. Τα σημεία χρωματίζονται ανάλογα με την τιμή του \dot{x} . Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (30^\circ, 30^\circ)$. Τα βέλη Ext και Int υποδεικνύουν την εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια του τόρου αντίστοιχα.



Σχήμα 69: Η (x, \dot{x}, z, \dot{z}) επιφάνεια τομής για τον τόρο S_4 για $E_j = -5.1574$. Τα σημεία χρωματίζονται ανάλογα με την τιμή του \dot{z} . Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (30^\circ, 45^\circ)$.

3.2.3 Αριθμοί Περιστροφής

Θα μελετήσουμε τώρα κάποιες ιδιότητες των περιστροφικών και σωληνοειδών τόρων μέσω ορισμένων ποσοτήτων οι οποίες είναι σε άμεση αντιστοίχιση με τους αριθμούς περιστροφής⁷ στις συνήθεις αναλλοίωτες καμπύλες οι οποίες βρίσκονται γύρω από ευσταθείς περιοδικές τροχιές σε 2D συστήματα. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε τους αριθμούς περιστροφής για τις 2D και 3D προβολές των τετραδιάστατων τόρων. Παρατηρήσαμε ότι διαδοχικά σημεία σαρώνουν με διαφορετικούς τρόπους τους τόρους. Στην 4D επιφάνεια τομής (x, \dot{x}, z, \dot{z}) θεωρούμε την 3D προβολή (x, \dot{x}, z) και την 2D προβολή (x, \dot{x}) των τόρων. Ένας τόρος στην προβολή (x, \dot{x}) παριστάνει μία αναλλοίωτη καμπύλη όπως είδαμε στο Σχ. 61. Ο αριθμός περιστροφής “tot” σε αυτή την περίπτωση ορίζεται όπως στις συνήθεις αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά στις 2D επιφάνειες τομής των 2D συστημάτων. Αυτή η ποσότητα είναι διαφορετική για κάθε αναλλοίωτη καμπύλη και η μεταβολή του αριθμού περιστροφής ως συνάρτηση της απόστασης σε μία διεύθυνση π.χ. x -διεύθυνση, ορίζει μία καμπύλη περιστροφής (Contopoulos 2002 p. 139).

Τώρα για τον υπολογισμό του αριθμού περιστροφής “tot” επί του τόρου στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) ακολουθούμε τα παρακάτω:

1. Υπολογίζουμε την γωνία περιστροφής \hat{r}_i ⁸ μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων πάνω στον τόρο, δηλαδή μεταξύ του i -στού σημείου με συντεταγμένες (x_i, \dot{x}_i, z_i) και του $i+1$ -στού με συντεταγμένες $(x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, z_{i+1})$. Ορίζουμε τα διανύσματα \mathbf{X} και \mathbf{Y} ως: $\mathbf{X} = (x_{i+1} - x_0, \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_0, z_{i+1} - z_0)$ και $\mathbf{Y} = (x_i - x_0, \dot{x}_i - \dot{x}_0, z_i - z_0)$ αντίστοιχα. Βρίσκουμε την γωνία περιστροφής από το εσωτερικό γινόμενο των \mathbf{X} και \mathbf{Y} μέσω του παρακάτω τύπου:

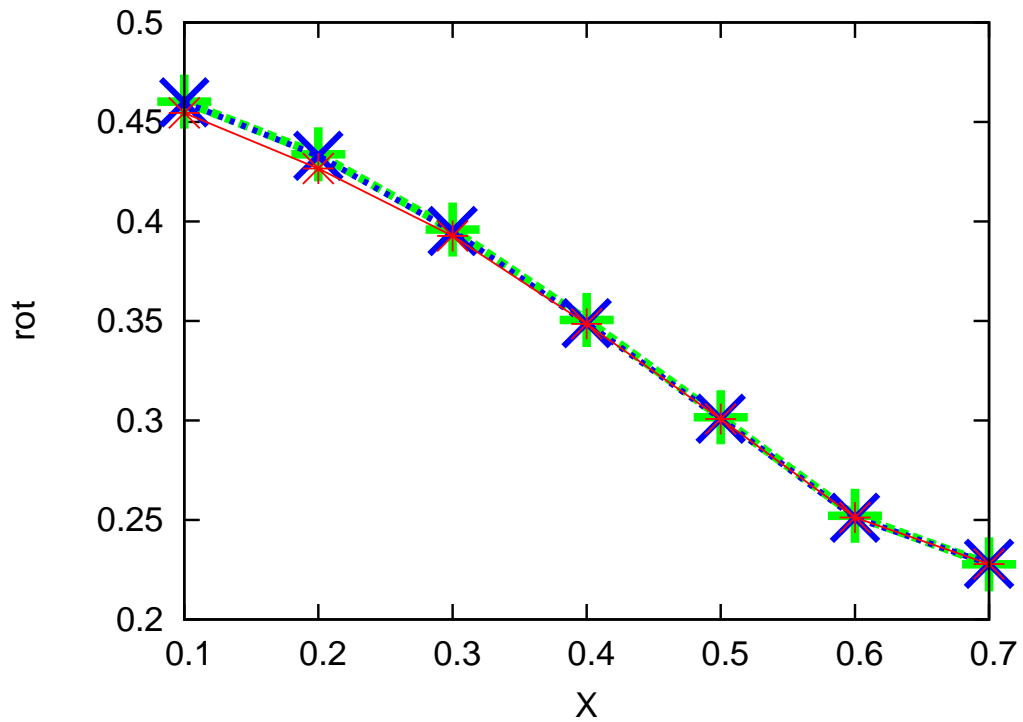
$$\hat{r}_i = \arccos \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}}{|\mathbf{X}| |\mathbf{Y}|} \quad (94)$$

⁷Σε ένα 2D σύστημα, μία ημιπεριοδική τροχιά γύρω από μία ευσταθή περιοδική τροχιά διαγράφει μία αναλλοίωτη καμπύλη στην 2D επιφάνεια τομής (x, \dot{x}) . Αν (x_0, \dot{x}_0) είναι οι αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς και (x_i, \dot{x}_i) το i -στο σημείο της αναλλοίωτης καμπύλης, τότε το $R_i = (x_i - x_0, \dot{x}_i - \dot{x}_0)$ είναι το i -διάνυσμα θέσης. Η γωνία περιστροφής μεταξύ δύο σημείων i και $i + 1$ ορίζεται ως η γωνία των δύο διανυσμάτων θέσεως R_i και R_{i+1} . Ο αριθμός περιστροφής ορίζεται ως η μέση τιμή της γωνίας περιστροφής (με μονάδα τον κύκλο) (Contopoulos 2002 p.139).

⁸Ορίζουμε την αρχική γωνία περιστροφής \hat{r}_0 για το αρχικό σημείο της τροχιάς πάνω στον τόρο (x_1, \dot{x}_1, z_1) ως τη γωνία που δημιουργείται από το διάνυσμα, που ενώνει το σημείο αυτό με το σημείο της περιοδικής τροχιάς (x_0, \dot{x}_0, z_0) , με το επίπεδο (x, \dot{x}) .

2. Τέλος, υπολογίζουμε τον μέσο όρο όλων των \hat{r}_i 's για να βρούμε το “rot” για τον τόρο.

Η καμπύλη περιστροφής κατά μήκος της x -διεύθυνσης, για τις αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από τις απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της x_1 για $E_j = -5.1574$, με αρχικές συνθήκες $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = (0.189585220, 0, 0, 0)$, δίνεται στο Σχ. 70 (πράσινη καμπύλη). Στο Σχ. 70 στον x -άξονα δίνουμε την απόσταση από την περιοδική τροχιά στην x -διεύθυνση. Αντίστοιχες καμπύλες υπολογίστηκαν για τους τόρους γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά της x_{1v1} για την ίδια τιμή της ενέργειας ($E_j = -5.1574$) η οποία έχει αρχικές συνθήκες $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = (0.18939859, 0.030236585, 0, 0)$. Δύο καμπύλες περιστροφής για την x_{1v1} δίνονται στο Σχ. 70 χρησιμοποιώντας τις προβολές (x, \dot{x}) (μπλε γραμμή) και (x, \dot{x}, z) (κόκκινη γραμμή), αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό αυτών των καμπυλών χρησιμοποιήσαμε τους ορισμούς που δώσαμε παραπάνω. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε μία παρόμοια μεταβολή των αριθμών περιστροφής. Η συμπεριφορά των καμπυλών περιστροφής για τους αναλλοίωτους τόρους γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά της x_{1v1} είναι παρόμοια με αυτή των καμπυλών περιστροφής για τις αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την απλά ασταθή περιοδική τροχιά της x_1 . Αντιλαμβανόμαστε ότι οι αριθμοί περιστροφής για τους σωληνοειδείς τόρους, ακολουθούν την καμπύλη περιστροφής χωρίς καμία ένδειξη ειδικής συμπεριφοράς.

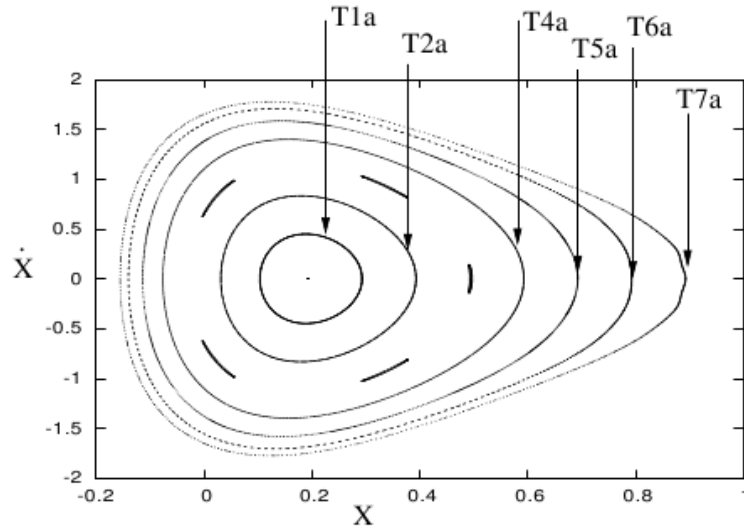


Σχήμα 70: Οι καμπύλες περιστροφής (για $Ej = -5.1574$) για τις αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την περιοδική τροχιά x_1 στον 2D υπόχωρο (x, \dot{x}) (πράσινο χρώμα) και γύρω από την περιοδική τροχιά x_{1v1} στον 2D υπόχωρο (x, \dot{x}) (μπλέ χρώμα) και για τους τόρους γύρω από την περιοδική τροχιά x_{1v1} στον 3D υπόχωρο (x, \dot{x}, z) (κόκκινο χρώμα). Παρατηρούμε ότι οι τρεις καμπύλες έχουν μία όμοια μεταβολή και πρακτικά αλληλοκαλύπτονται.

3.2.4 Επιφάνειες τομής και μεταβολή της ενέργειας

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις αλλαγές που επιφέρει στον χώρο των φάσεων η μεταβολή της ενέργειας. Όπως είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο οι αρχικές συνθήκες των οικογενειών x_1 και x_{1v1} σχεδόν ταυτίζονται κοντά στο σημείο διακλάδωσης. Η x_{1v1} εισέρχεται στο σύστημα με δύο κλάδους (Skokos et al 2002a). Όσο η ενέργεια αυξάνει, ο ένας κλάδος αντιστοιχεί σε περιοδικές τροχιές με αρχικές συνθήκες $z_0 > 0$ και ο άλλος, ο οποίος είναι συμμετρικός προς τον πρώτο κλάδο, σε περιοδικές τροχιές με αρχικές συνθήκες $z_0 < 0$. Κοντά στο σημείο διακλάδωσης η z_0 αρχική συνθήκη των περιοδικών τροχιών της x_{1v1} βρίσκεται κοντά στο επίπεδο $z = 0$. Για τον λόγο αυτό οι αναλλοίωτοι τόροι γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά της x_{1v1} είναι συμμετρικοί ως προς το επίπεδο $z = 0$. Μακριά από το σημείο διακλάδωσης, για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας, η αρχική συνθήκη z_0 των περιοδικών τροχιών της x_{1v1} αυξάνει. Όσο αυξάνει η ενέργεια, στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) , η x_0 αρχική συνθήκη των περιοδικών τροχιών της x_1 απομακρύνεται από τους τόρους γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά της x_{1v1} , μία που οι τόροι περιβάλλουν την ευσταθή περιοδική τροχιά της x_{1v1} μακριά από το επίπεδο $z = 0$. Στο υποκεφάλαιο αυτό μελετάμε την περίπτωση για $E_j = -5.131377$, όπου οι αρχικές συνθήκες της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της x_1 είναι $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.19317510, 0, 0, 0)$, ενώ αυτές της x_{1v1} είναι $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.19221178, 0, 0.06769306, 0)$. Πρώτα εξετάζουμε τον χώρο των φάσεων κοντά στην περιοδική τροχιά της x_1 , η οποία είναι απλά ασταθής. Αυτό πραγματοποιείται αυξάνοντας την x_0 αρχική συνθήκη κατά $\Delta x_0 = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.7$ και θεωρώντας την 2D προβολή (x, \dot{x}) της επιφάνειας τομής (Σχ. 71). Το καινούργιο στοιχείο στο Σχ. 71, σε σχέση με την 2D προβολή (x, \dot{x}) της επιφάνειας τομής για $E_j = -5.1574$ (Σχ. 61), είναι η εμφάνιση πέντε νησίδων ευστάθειας στην θέση της τρίτης αναλλοίωτης καμπύλης. Αυτές οι νησίδες αντιστοιχούν σε μία τροχιά με αρχικές συνθήκες $(x_0 + 0.3, 0, 0, 0)$. Αυτό συμβαίνει λόγω της διάσπασης της τρίτης αναλλοίωτης καμπύλης του Σχ. 61 καθώς η ενέργεια αυξάνει. Τις υπόλοιπες αναλλοίωτες καμπύλες τις ονομάσαμε $T_{1a}, T_{2a}, T_{4a}, T_{5a}, T_{6a}, T_{7a}$, με την T_{1a} να είναι η κοντινότερη στην περιοδική τροχιά της x_1 .

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, διερευνούμε πρώτα τον χώρο των φάσεων στην γειτονιά της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς της x_{1v1} εφαρμόζοντας τις ίδιες διαταραχές στις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς. Αυτό σημαίνει ότι αυξάνουμε την x_0 αρχική συνθήκη κατά $\Delta x_0 = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.7$ και θεωρούμε τα σημεία στην (x, \dot{x}, z) προβολή της 4D επιφάνειας τομής. Υπολογίζουμε 10^4 σημεία στην επιφάνεια τομής. Στο Σχ. 72 παρατηρούμε ότι οι



Σχήμα 71: Οι αναλλοίωτες καμπύλες $T_{1a}, T_{2a}, T_{4a}, T_{5a}, T_{6a}$ και T_{7a} στην (x, \dot{x}) προβολή της επιφάνειας τομής $E_j = -5.131377$.

εφτά κόκκινοι τόροι γύρω από την περιοδική τροχιά της x_{1v1} (που σημειώνεται με έναν κόκκινο σταυρό στο $(0.19221178, 0, 0.06769306)$) αντιστοιχούν στις εφτά διαταρασσύμενες αρχικές συνθήκες για $\Delta x_0 = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.7$. Όπως και στην περίπτωση της x_1 , έτσι και για την x_{1v1} η τρίτη αρχική συνθήκη με $\Delta x_0 = 0.3$, παρουσιάζει μία διαφορετική δυναμική συμπεριφορά. Εκεί εμφανίζονται πέντε μικροί περιστροφικοί τόροι. Ονομάζουμε τους υπόλοιπους τόρους ως $T_1, T_2, T_4, T_5, T_6, T_7$. Ο τόρος που λείπει T_3 έχει αντικατασταθεί από 5 μικρούς τόρους. Στο Σχ. 72 βλέπουμε επίσης και τις αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την περιοδική τροχιά της x_1 (με πράσινο χρώμα), οι οποίες βρίσκονται στο (x, \dot{x}) επίπεδο (για $z = 0$). Παρατηρούμε ότι οι τόροι προβάλλονται στο (x, \dot{x}) επίπεδο σχεδόν στον ίδιο χώρο με αυτόν που καταλαμβάνουν οι πράσινες αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την x_1 . Η προβολή αυτών των τόρων φαίνεται στο Σχ. 73. Η προβολή αυτών των τόρων θυμίζει την μορφολογία των αναλλοίωτων καμπύλων. Ένα άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των T_i αναλλοίωτων τόρων για την τιμή της ενέργειας -5.131377 που μελετούμε είναι ότι οι τόροι T_4, T_5 και T_7 έχουν διαφορετική μορφολογία από τους υπόλοιπους τόρους.

Συγκεκριμένα ο τόρος T_4 (Σχ. 72) έχει μία λεπτή μορφολογία και μία δομή παρόμοια με αυτή μιάς κορδέλας. Στο Σχ. 74 παρατηρούμε τον T_4 από μία

διαφορετική οπτική γωνία $((\theta, \phi) = (41^\circ, 91^\circ))$ στην (x, \dot{x}, z) προβολή της επιφάνειας τομής. Αυτό μας βοηθά να καταλάβουμε ότι ο T_4 τέμνει τον εαυτό του σε πέντε διαφορετικές περιοχές. Η μορφολογία του T_4 είναι παρόμοια με αυτή του S_4 τόρου για την τιμή της ενέργειας $E_j = -5.1574$ (Σχ. 64).

Ο T_5 στο Σχ. 75 μοιάζει επίσης με μία κορδέλα, η οποία έχει μία λεπτή και πολύπλοκη μορφολογία (Σχ. 75). Ο τόρος αυτός έχει μία μόνο τομή με τον εαυτό του στην (x, \dot{x}, z) 3D προβολή όπως μπορούμε να δούμε στο Σχ. 75a και στο Σχ. 75b από διαφορετικές οπτικές γωνίες στην (x, \dot{x}, z) προβολή. Επίσης επτά τομές παρατηρούμε στον T_7 στην (x, \dot{x}, z) προβολή της επιφάνειας τομής. Οι τόροι T_4 , T_5 και T_7 έχουν παρόμοια μορφολογία με αυτή των 'σωληνοειδών' τόρων (Vrahatis et al. 1997).

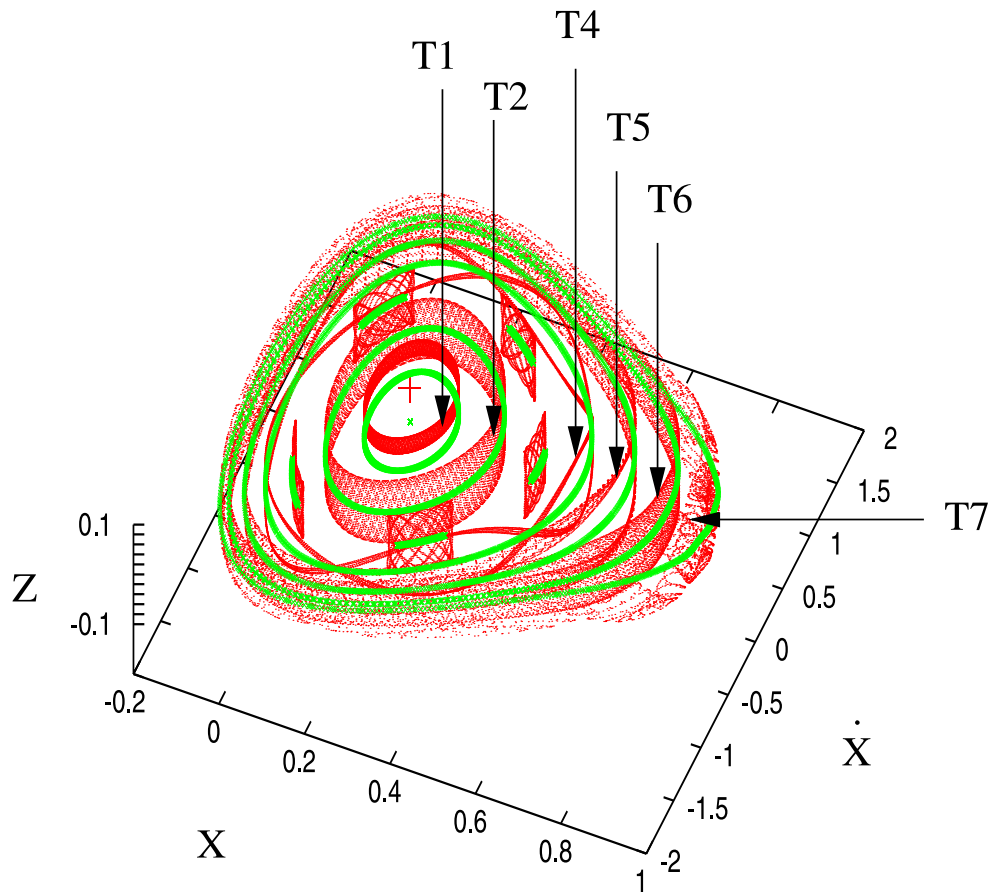
Όπως είπαμε, στην (x, \dot{x}) προβολή της επιφάνειας τομής οι διαφορές στην μορφολογία των T_4 , T_5 και T_7 από τους υπόλοιπους τόρους T_i δεν μπορούν να φανούν (Σχ. 73). Προσπαθώντας να καταλάβουμε αν οι διαφορές που παρατηρούμε στην μορφολογία των 3D προβολών των τόρων αντικατοπτρίζονται σε ορισμένες μορφολογικές διαφορές των τροχιών στον φυσικό χώρο, συγκρίνουμε στο Σχ. 76 τις τροχιές που αντιστοιχούν στον T_2 (περιστροφικός τόρος), με αυτές των τόρων T_4 και T_5 (σωληνοειδείς τόροι). Η μορφολογία τους είναι η αναμενόμενη για ημιπεριοδικές τροχιές που παγιδεύονται γύρω από μία ευσταθή περιοδική τροχιά, στην περιπτώσή μας γύρω από μία περιοδική τροχιά που ανήκει στην $x1v1$. Οι (x, y) προβολές των T_2, T_4 και T_5 είναι πρακτικά ίδιες με αυτές των T_{2a}, T_{4a} και T_{5a} τροχιών γύρω από την x_1 για την ίδια τιμή της ενέργειας. Δεν υπάρχει καμία μορφολογική διαφορά ανάμεσα στις τρεις 3D τροχιές στις (x, z) και (y, z) προβολές. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μορφολογική ομοιότητα στις τρισδιάστατες τροχιές που αντιστοιχούν στους περιστροφικούς τόρους με αυτές που αντιστοιχούν στους σωληνοειδείς τόρους. Παρά όμως την χονδροειδή ομοιότητα των τροχιών η λεπτομερής μελέτη των τόρων δίνει τις διαφορές μεταξύ τους.

Ο T_4 μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε λεπτομερώς την δομή άλλου ενός σωληνοειδούς τόρου στην 4D επιφάνεια τομής και να τη συγκρίνουμε με τη δομή του S_4 (Σχ. 69). Εφαρμόζοντας την μέθοδο χρώματος και περιστροφής στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε, ότι η δομή του T_4 (Σχ. 77) είναι όμοια με αυτή του S_4 (Σχ. 69). Παρατηρούμε στο Σχ. 77, ότι κινούμενοι από το "Α" προς το "Β", ακολουθώντας τις κατευθύνσεις οι οποίες υποδεικνύονται από τα βέλη, παρατηρούμε δύο ομαλές μεταβολές χρώματος. Στις περιοχές τομής A, B, C, D και E, στην (x, \dot{x}, z) προβολή, το κόκκινο ή το πορτοκαλί συναντά το μπλέ. Αυτό σημαίνει ότι αυτές οι περιοχές δεν είναι τομές στον 4D χώρο.

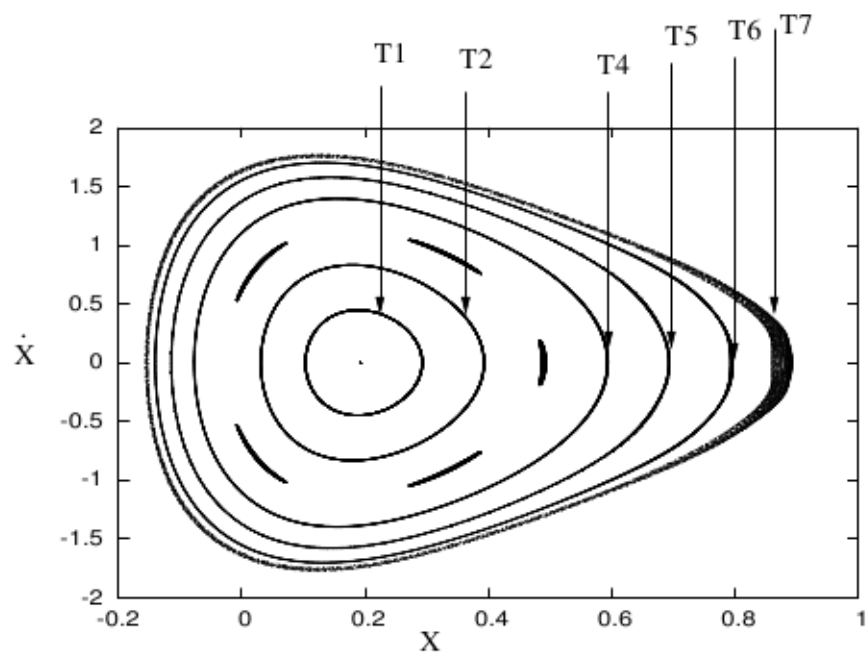
Διαφορετικά χρώματα στις τομές παρατηρήσαμε σε όλους τους σωληνοειδείς τόρους που μελετήσαμε. Ένα τελικό παράδειγμα είναι ο T_5 . Όπως αναφέραμε

πιο πριν, ο T_5 έχει την δομή κορδέλας, με μία τομή με τον εαυτό του (Σχ. 75). Στο Σχ. 78 παρουσιάζουμε μία προβολή του τόρου αυτού στον 3D υπόχωρο (x, \dot{x}, z) και χρωματίζουμε κάθε σημείο του ανάλογα με την τιμή που έχει στην τέταρτη διάσταση z . Κινούμενοι από την περιοχή “A” με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού, παρατηρούμε μία ομοιόμορφη διαδοχή χρωμάτων. Τα χρώματα μεταβάλλονται από πράσινο σε γαλάζιο και μετά σε μπλε μέχρι που φτάνουμε στην περιοχή “C”. Στην περιοχή “C”, ο T_5 τέμνει τον εαυτό του στην προβολή (x, \dot{x}, z) . Στη συνέχεια, κινούμενοι πάντα σε φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού, η ομαλή διαδοχή χρωμάτων συνεχίζει σε μπλε \rightarrow γαλάζιο \rightarrow πράσινο φτάνοντας στην περιοχή “B” και τέλος συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο (πράσινο \rightarrow κίτρινο \rightarrow κόκκινο) φτάνοντας ξανά στην περιοχή “C”. Στην περιοχή “C” παρατηρούμε ότι το μπλέ συναντά το κόκκινο. Από αυτό βγάζουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία έχουν διαφορετικές τιμές στην τέταρτη διάσταση και ότι η περιοχή “C” δεν αποτελεί περιοχή τομής του τόρου στον 4D χώρο. Αν συνεχίσουμε από το “C”, με φορά η οποία είναι ξανά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού, φτάνουμε στην περιοχή “A”, πάντα με ομαλή μεταβολή χρώματος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν και οι αναδιπλώσεις του τόρου T_5 στις περιοχές “A” και “B”. Σε αυτές τις περιοχές, η εσωτερική επιφάνεια του τόρου γίνεται εξωτερική επιφάνεια και αντίστροφα. Αυτή η στρέβλωση παρατηρήθηκε σε πολλές περιπτώσεις τόρων που μελετήσαμε. Εξάλλου ο τόρος T_7 τέμνει τον εαυτό του σε εφτά περιοχές στις 3D προβολές της επιφάνειας τομής. Οι σωλήνες αυτού του τόρου στρεβλώνονται στις περιοχές που βρίσκονται ανάμεσα στις τομές που έχει αυτός ο τόρος με τον εαυτό του.

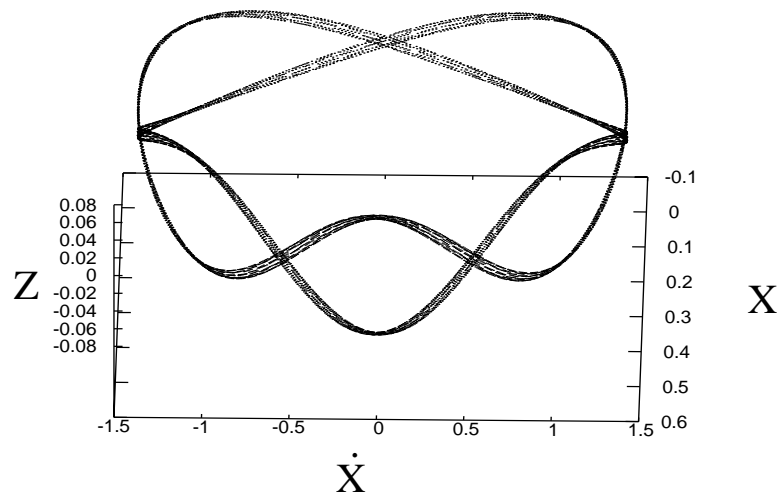
Τέλος, πρέπει να επισημάνουμε το γεγονός ότι αν εφαρμόσουμε τα ίδια που κάναμε στα υποκεφάλαια 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 και 3.2.4 αλλά διαταράξουμε τις περιοδικές τροχιές κατά την \dot{x} κατεύθυνση τότε βρίσκουμε παρόμοια αποτελέσματα.



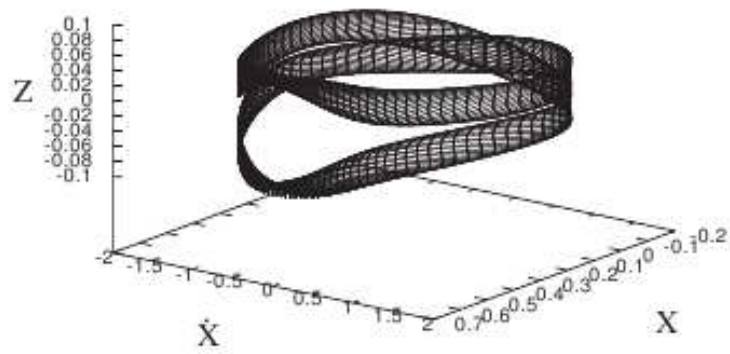
Σχήμα 72: Η 3D (x, z, \dot{x}) προβολή της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -5.131377$. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (18^\circ, 23^\circ)$. Οι αναλλοίωτοι τόροι γύρω από την περιοδική τροχιά της x_{1v1} παριστάνονται με κόκκινο χρώμα και οι αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την περιοδική τροχιά της x_1 στο $z = 0$ επίπεδο παριστάνονται με πράσινο χρώμα. Οι αρχικές συνθήκες της x_1 και x_{1v1} δίνονται με ένα πράσινο σημείο και ένα κόκκινο σταυρό αντίστοιχα.



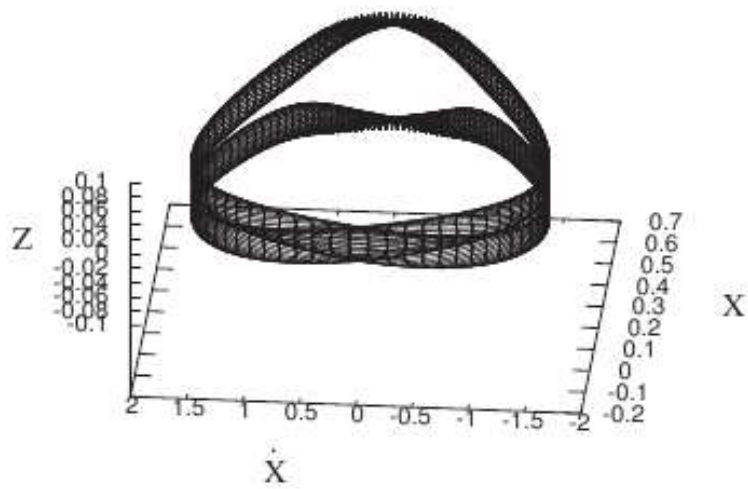
Σχήμα 73: Η (x, \dot{x}) προβολή της επιφάνειας τομής στην γειτονιά της περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας x_{1v1} για $E_j = -5.131377$.



Σχήμα 74: Η (x, \dot{x}, z) 3D προβολή του τόρου T_4 με οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (41^\circ, 91^\circ)$ για 10^5 σημεία.

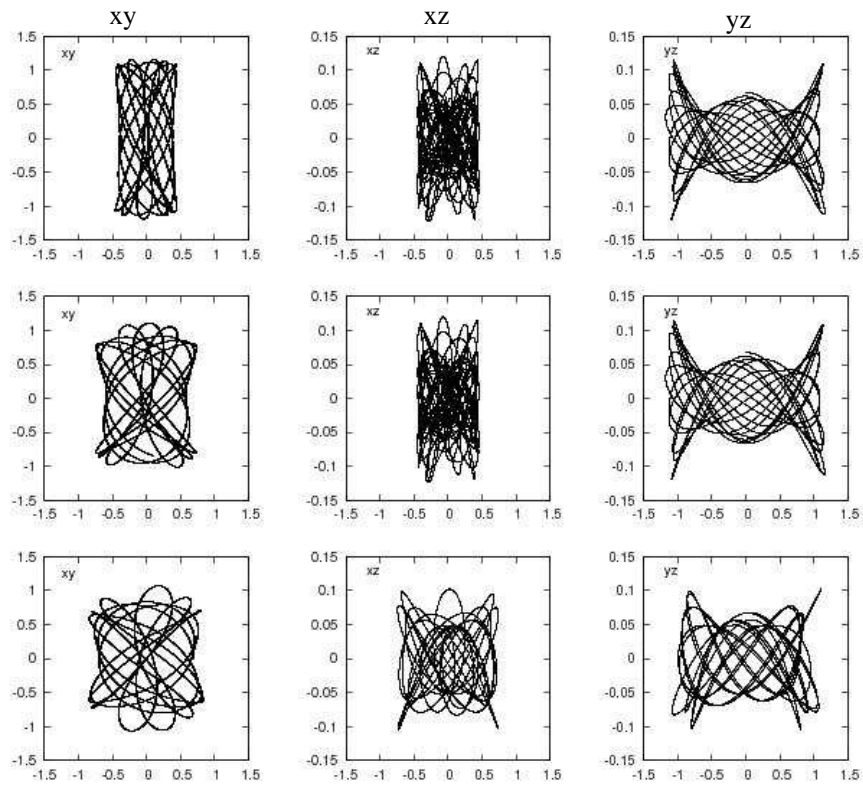


a

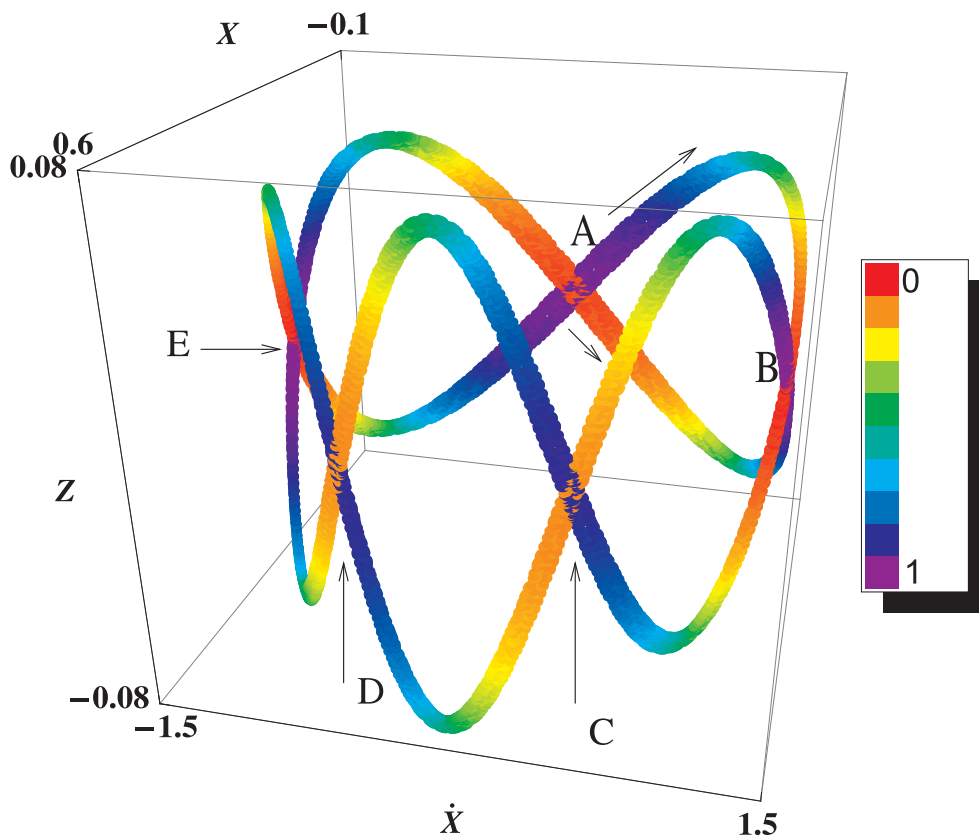


b

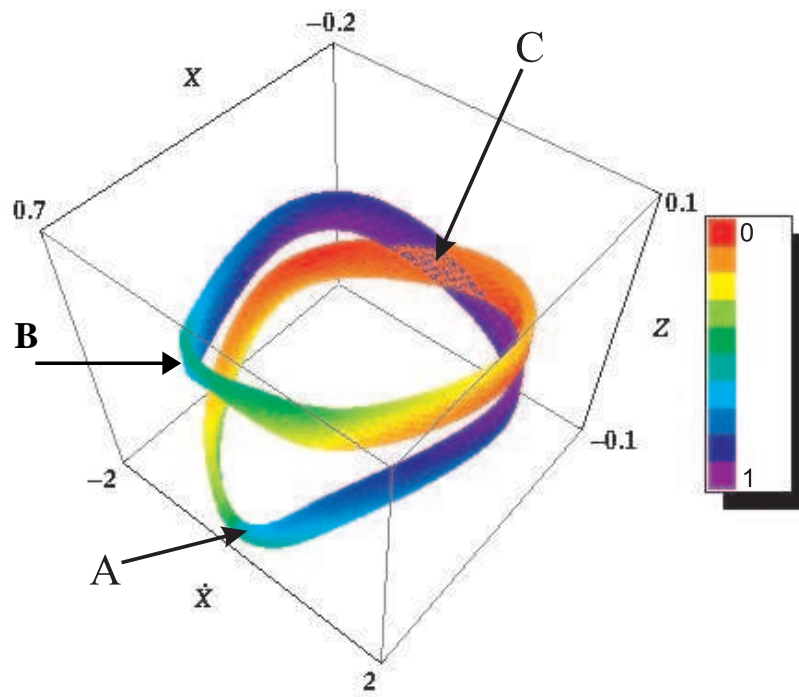
Σχήμα 75: 3D προβολές του τόρου T_5 με οπτικές γωνίες $(\theta, \phi) = (64^\circ, 127^\circ)$ (a) και $(\theta, \phi) = (48^\circ, 271^\circ)$ (b).



Σχήμα 76: Οι τροχιές στον φυσικό χώρο που αντιστοιχούν στους T_2 (πρώτη γραμμή), T_4 (δεύτερη γραμμή) και T_5 (τρίτη γραμμή). Οι προβολές αναγράφονται στο πάνω αριστερό μέρος κάθε σχήματος. Στις (x, z) και (y, z) προβολές οι κλίμακες στους άξονες δεν είναι ίδιες για να παρακολουθήσουμε καλύτερα τις μορφολογικές λεπτομέρειες των τροχιών.



Σχήμα 77: Η (x, \dot{x}, z, \dot{z}) 4D επιφάνεια τομής του τόρου T_4 για $E_j = -5.131377$. Τα σημεία χρωματίζονται ανάλογα με την τιμή της \dot{z} συντεταγμένης. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (30^\circ, 120^\circ)$. Οι πέντε τομές του τόρου T_4 με τον εαυτό του (x, \dot{x}, z) συμβολίζονται με A,B,C,D και E.



Σχήμα 78: Η (x, \dot{x}, z, \dot{z}) 4D επιφάνεια τομής του τόρου T_5 για $E_j = -5.131377$. Τα σημεία χρωματίζονται ανάλογα με την τιμή της \dot{z} συντεταγμένης. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (30^\circ, 72^\circ)$.

3.2.5 Διαταραχές στην z και \dot{z} κατεύθυνση

Οι ακτινικές διαταραχές, τις οποίες μελετήσαμε μέχρι τώρα, μας βοήθησαν να καταλάβουμε την δομή των αναλλοίωτων τώρων στην γειτονιά των ευσταθών περιοδικών τροχιών στο Χαμιλτονιανό μας σύστημα γαλαξιακού τύπου όταν διαταράσσουμε ακτινικά τις αρχικές συνθήκες. Σε αυτό το υποκεφάλαιο μελετάμε την εξέλιξη αυτών των τώρων όταν διαταράσσουμε τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές κατά την κάθετη διεύθυνση. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να γνωρίζουμε με ποιό τρόπο και σε πόση απόσταση παγιδεύονται οι αστέρες μακριά από το ισημερινό επίπεδο του Γαλαξία μας. Αυτή η μελέτη σχετίζεται με την έρευνα των μορφολογικών χαρακτηριστικών όπως τα κεντρικά σφαιροειδή (bulges) σχήματος κουτιού (box bulges) και σχήματος φυστικιού (peanut-shaped bulges) στους δισκοειδείς γαλαξίες (Patsis et al. 2002).

Πρώτα θα μελετήσουμε τον φασικό χώρο στην περιοχή μίας ευσταθούς περιοδικής τροχιάς της x_1 πριν την μετάβαση της από ευστάθεια σε απλή αστάθεια (π.χ. για $E_j = -5.207$). Στην περίπτωση αυτή στην (x, \dot{x}) επιφάνεια τομής η μόνη 2D απλή περιοδική τροχιά με αρχικές συνθήκες $x > 0$ είναι αυτή της x_1 , η οποία είναι ευσταθής. Γύρω από την περιοδική τροχιά βρίσκουμε, όπως αναμενόταν, αναλλοίωτες καμπύλες αν την διαταράξουμε κατά την x -διεύθυνση. Σαν παράδειγμα παίρνουμε την αναλλοίωτη καμπύλη η οποία παράγεται με αρχικές συνθήκες $(x_0 + \Delta x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.18312784 + \Delta x_0, 0, 0, 0)$, με $\Delta x_0 = 0.1$. Αν τώρα διαταράξουμε αυτή την ημιπεριοδική τροχιά και κατά $\Delta z_0 = 0.1, 0.2 \dots$, και ολοκληρώσουμε τις τροχιές αυτές, βρίσκουμε τόρους γύρω από την x_1 . Σε αυτούς τους τόρους υπάρχουν τόσο περιστροφικοί τόροι όσο και σωληνοειδείς τόροι. Οι τόροι για μικρές τιμές του Δz_0 περιβάλλουν την αναλλοίωτη καμπύλη την οποία διαταράξαμε και είναι περίπου κάθετοι προς το επίπεδο $z = 0$. Για $\Delta z_0 \geq 0.3$ οι τόροι είναι παραμορφωμένοι και παρουσιάζουν κάποια κλίση ως προς το επίπεδο $z = 0$. Για $\Delta z_0 = 0.41$ η δυναμική συμπεριφορά στην περιοχή της ημιπεριοδικής τροχιάς αλλάζει. Τα πρώτα 900 σημεία στην επιφάνεια τομής της τροχιάς δημιουργούν ένα σχηματισμό που θυμίζει περιστροφικό τόρο. Με αυτό εννοούμε ότι τα σημεία μένουν αρχικά πάνω σε μία τοροειδή επιφάνεια. Όμως, τα επόμενα σημεία διαχέονται στον φασικό χώρο και καταλαμβάνουν έναν μεγαλύτερο όγκο μέσα σε αυτόν. Στο Σχ. 79a παρατηρούμε την (x, \dot{x}, z) προβολή της 4D επιφάνειας τομής για αυτή τη τροχιά, όπου η τέταρτη διάσταση \dot{z} αναπαριστάται με χρώματα. Ο αριθμός των σημείων στο Σχ. 79a είναι 1100. Αυτά δομούν μία τοροειδή επιφάνεια, με ομαλή μεταβολή χρώματος. Σημειώνουμε, ότι τα 900 σημεία δεν επαρκούν για να γεμίσουν με πυκνό τρόπο την τοροειδή αυτή επιφάνεια. Ξεκινώντας από το πάνω δεξιά άκρο της τοροειδούς επιφάνειας και πηγαινώντας προς τα κάτω παρατηρούμε την ομαλή διαδοχή

χρώματος στην επιφάνεια αυτή από πράσινο \rightarrow κίτρινο \rightarrow πορτοκαλί \rightarrow κόκκινο \rightarrow πορτοκαλί \rightarrow πράσινο \rightarrow μπλε. Στο Σχ. 79a μερικά σημεία έχουν αρχίσει να απομακρύνονται από την τορροειδή επιφάνεια και να καταλαμβάνουν μία μεγαλύτερη περιοχή στην 4D επιφάνεια τομής. Στο Σχ. 79b, το πυκνό σύνολο των κόκκινων σημείων αντιστοιχεί στα πρώτα 900 σημεία. Τα υπόλοιπα κόκκινα σημεία, τα οποία καταλαμβάνουν έναν μεγαλύτερο χώρο δεξιά και αριστερά στον χώρο των φάσεων, ανήκουν στην ίδια τροχιά η οποία έχει ολοκληρωθεί για 1.2×10^4 σημεία στην επιφάνεια τομής. Στο ίδιο σχήμα δίνουμε και την αναλλοίωτη καμπύλη γύρω από την περιοδική τροχιά της x_1 με πράσινο χρώμα. Αυτή η δυναμική συμπεριφορά υποδεικνύει 'φαινόμενο κολλητικότητας' (Contopoulos 1971, Contopoulos & Harsoula 2008, 2010b). Παρόμοια αποτελέσματα βρίσκουμε αν διαταράξουμε την αναλλοίωτη καμπύλη κατά την z -διεύθυνση αντί της z -διεύθυνσης.

Όπως ήδη είδαμε στο υποκεφάλαιο 2.3.1, μετά την μετάβαση της οικογένειας της x_1 από ευστάθεια σε απλή αστάθεια είχαμε μία νέα 3D οικογένεια περιοδικών τροχιών την $x1v1$. Η τιμή της ενέργειας $E_j = -5.131377$ είναι ήδη μετά το σημείο διακλάδωσης (Σχ. 34). Μελετήσαμε την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς της x_1 και της $x1v1$ διαταράσσοντας τις αρχικές τους συνθήκες x_0 (Σχ. 72). Για τιμές της ενέργειας που δεν είναι μακριά από το σημείο διακλάδωσης, όπως για $E_j = -5.131377$, μπορούμε πάντα να βρούμε μία διαταραχή ' $\pm \Delta z_0$ ' των ημιπεριοδικών τροχιών έτσι ώστε για αρχικές συνθήκες $(x_0 + \Delta x_0, 0, \pm \Delta z_0, 0)$ να έχουμε έναν τόρο που να περιβάλλει την αναλλοίωτη καμπύλη $(x_0 + \Delta x_0, 0, 0, 0)$, όπου $(x_0, 0, 0, 0)$ να είναι η αρχική συνθήκη της x_1 .

Για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Μπορούμε να βρούμε αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την x_1 , οι οποίες αποκλίνουν στον φασικό χώρο από τους αναλλοίωτους τόρους γύρω από την $x1v1$ για την ίδια τιμή της ενέργειας. Για παράδειγμα για $E_j = -4.98996$, βρίσκουμε αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την x_1 και αναλλοίωτους τόρους γύρω από την $x1v1$ διαταράσσοντας την αρχική συνθήκη x_0 των περιοδικών τροχιών και για τις δύο οικογένειες. Στο Σχ. 80 παρουσιάζουμε στην 3D (x, z, \dot{x}) προβολή τις αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την x_1 για $x_0 + \Delta x_0 = 0.1, 0.2$ και 0.3 (πράσινες καμπύλες) και τους αντίστοιχους τόρους γύρω από την $x1v1$ για τις ίδιες διαταραχές στις αρχικές της συνθήκες. Οι αναλλοίωτοι τόροι βρίσκονται πάνω από τις αναλλοίωτες καμπύλες. Παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από τις αρχικές συνθήκες της $x1v1$ οι τόροι αποκτούν όλο και μεγαλύτερο πάχος στην z -διεύθυνση. Μετά από κάποια $x_0 + \Delta x_0$ διαταραχή υπάρχουν αναλλοίωτοι τόροι που τέμνουν το (x, \dot{x}) επίπεδο (εκτός του σχήματος 80).

Στην περίπτωση του Σχ. 80, διαταράξαμε διαδοχικά τις αρχικές συνθήκες των ημιπεριοδικών τροχιών οι οποίες αντιστοιχούν στους κόκκινους αναλλοίω-

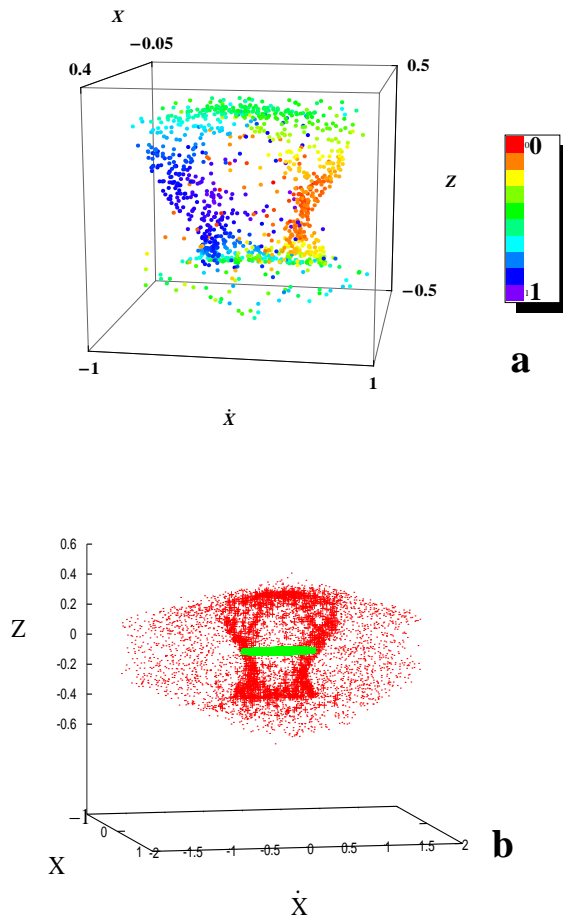
τους τόρους κατά $-\Delta z_0$, προσπαθώντας να βρούμε άλλους αναλλοίωτους τόρους, των οποίων η 3D προβολή να τέμνει το (x, \dot{x}) επίπεδο. Ακολουθώντας αυτή την διαδικασία βρήκαμε έναν τελευταίο τόρο με αρχικές συνθήκες $(x_0 + 0.1, 0, z_0 + \Delta z_0, 0) = (0.3160689, 0, .0863908, 0)$ για $\Delta z_0 = -0.08$. Για $\Delta z_0 = -0.09$ αντί για τόρο βρίσκουμε ένα νέφος σημείων στην περιοχή ανάμεσα στις αναλλοίωτες καμπύλες και τους αναλλοίωτους τόρους. Αυτό το νέφος το παρουσιάζουμε στο Σχ. 81a για 1.2×10^4 μπλε σημεία, μαζί με τρεις αναλλοίωτους τόρους γύρω από την $x1v1$ οι οποίοι δίνονται και στο Σχ. 80 με κόκκινο χρώμα και εφτά αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την x_1 στο (x, \dot{x}) επίπεδο. Για περίπου 3000 σημεία στην επιφάνεια τομής το νέφος έχει στην (x, \dot{x}, z) προβολή μία ασαφή τοροειδή δομή. Στο Σχ. 81b εφαρμόσαμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής στο σύνολο των μπλε σημείων του σχήματος 81a, τα οποία χρωμάτισαμε αυτή τη φορά σύμφωνα με τις τιμές τους στην \dot{z} συντεταγμένη. Φαίνεται καθαρά ότι το νέφος των σημείων δεν έχει ομαλή μεταβολή χρώματος. Πολύ χρήσιμη για την μελέτη μας είναι η (x, \dot{x}) προβολή του Σχ. 81a, την οποία παρουσιάζουμε στο Σχ. 81c. Σε αυτή την προβολή, μπορούμε να δούμε καθαρά ότι τα μπλε σημεία του νέφους μπορεί να είναι τόσο στην εσωτερική όσο και στην εξωτερική περιοχή ενός περιστροφικού κόκκινου τόρου που βρίσκεται κοντά στην περιοδική τροχιά της $x1v1$. Η πλειονότητα των σημείων διαχέονται εκτός της (x, \dot{x}) προβολής αυτού του τόρου μεταξύ 4×10^3 και 5×10^3 σημείων στην επιφάνεια τομής, φτιάχνοντας ένα δεύτερο δαχτυλίδι στο εξωτερικό μέρος του τόρου. Το δαχτυλίδι αυτό έχει μικρότερη πυκνότητα από εκείνο που βρίσκεται στο εσωτερικό του τόρου. Στο Σχ. 81d οι παγιδευμένες ημιπεριοδικές τροχιές γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές της $x1v1$ για την τιμή της ενέργειας που εξετάζουμε ($E_j = -4.98996$) παριστάνονται με κόκκινο χρώμα, ενώ η χαοτική τροχιά που παρουσιάσαμε στο Σχ. 81b δίνεται με μπλε χρώμα στο χώρο (y, z) προβολή. Την χαοτική τροχιά στο Σχ. 81 την ολοκληρώσαμε για ένα χρόνο που αντιστοιχεί σε 0.2 φορές την ηλικία του Σύμπαντος (Hubble times). Εκτιμάται ότι τουλάχιστον για αυτό το χρονικό διάστημα οι μορφολογικές δομές όπως οι ράβδοι των γαλαξιών μπορούν να επιβιώσουν (Debattista et al. 2006).

Ξεχωριστό ενδιαφέρον έχει η μελέτη του ρόλου των χαοτικών τροχιών στην μορφολογία παρατηρούμενων δομών όπως είναι τα μη σφαιροειδή κεντρικά εξογκώματα σχήματος φυστικιού που παρατηρούνται σε πολλούς δισκοειδείς γαλαξίες. Το υπόβαθρο αυτών των δομών αποτελεί η οικογένεια $x1v1$ (Patsis et al. 2002). Για μεγαλύτερους χρόνους, της τάξης των 0.7 της ηλικίας του Σύμπαντος, το σχήμα της μπλε χαοτικής τροχιάς υποστηρίζει την μορφολογία σχήματος φυστικιού (Σχ. 82), έχοντας παράλληλα και τις ημιπεριοδικές τροχιές γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές των δύο κλάδων της $x1v1$ (Patsis et al. 2002)

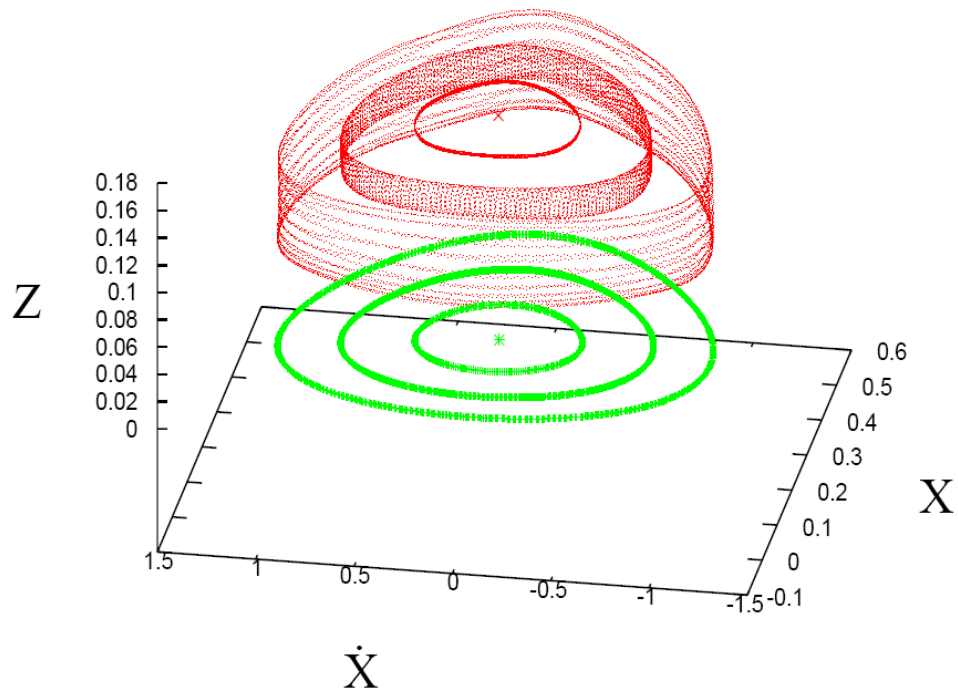
για αυτή την τιμή της ενέργειας. Επιπλέον το φυσικοειδές σχήμα συνεχίζει να διαμορφώνεται παρά το γεγονός ότι η χαοτική τροχιά φτάνει σε τιμές του z 1.5 φορές μεγαλύτερες από αυτές των ημιπεριοδικών τροχιών στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς της $x1v1$. Στο Σχ. 82a, δίνουμε την (y, z) προβολή της χαοτικής τροχιάς στο φυσικό χώρο. Είναι εμφανής μία μορφολογία σχήματος κουτιού. Αυτή η κλάση των τροχιών μπορεί να είναι πολύ σημαντική για την κινηματική των κεντρικών εξογκωμάτων των δισκοειδών γαλαξιών. Παρέχουν στο σύστημα διασπορά ταχυτήτων, χωρίς να καταστρέφουν το μορφολογικό αυτό προφίλ. Αυτές οι τροχιές είναι χαοτικές, αλλά για χρόνους σημαντικούς για την Γαλαξιακή δυναμική παγιδεύονται κοντά στους αναλλοίωτους τόρους της $x1v1$ στον φασικό χώρο. Για πιο μεγάλους χρόνους βέβαια οι τροχιές αυτές διαχέονται μακριά από τους αναλλοίωτους τόρους της $x1v1$ στο φασικό χώρο.

Κανένα από τα μπλέ σημεία που παρουσιάζονται στην (x, \dot{x}) προβολή (Σχ. 81c) μέσα από τον εσωτερικό κόκκινο τόρο δεν βρίσκεται παράλληλα στο εσωτερικό του τόρου στην (z, \dot{z}) προβολή. Όμως, αυτό δεν συμβαίνει για τα σημεία αυτά ως προς τους τόρους που βρίσκονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από την περιοδική τροχιά από ότι οι τρεις περιστροφικοί τόροι που απεικονίζονται στα Σχ.80 και 81. Ένα παράδειγμα είναι ο τόρος που βρίσκουμε αν θεωρήσουμε μία διαταραχή $\Delta x_0=0.4$ στις αρχικές συνθήκες της $x1v1$. Αυτός είναι ένας σωληνοειδής τόρος τον οποίο ονομάσαμε X4. Στο Σχ. 83a,b σημειώνουμε με ένα μπλε σταυρό ένα σημείο της μπλε χαοτικής τροχιάς το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του X4 τόσο στην (x, \dot{x}) προβολή (Σχ. 83a) όσο και στην (z, \dot{z}) προβολή (Σχ. 83b). Είναι ένα από τα μπλε σημεία των σχημάτων 83c και 83d, όπου βλέπουμε ότι έχουμε σημεία της μπλε χαοτικής τροχιάς μέσα και έξω από τον τόρο X4. Αυτό μας λέει ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε το φαινόμενο διάχυσης Arnold (Arnold et al 2010 p.289, Contopoulos 2002 p. 344). Ο χρόνος κλίμακας του φαινομένου αυτού ξεπερνάει την ηλικία του Σύμπαντος και ως εκ τούτου το φαινόμενο αυτό δεν παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική ενός γαλαξία.

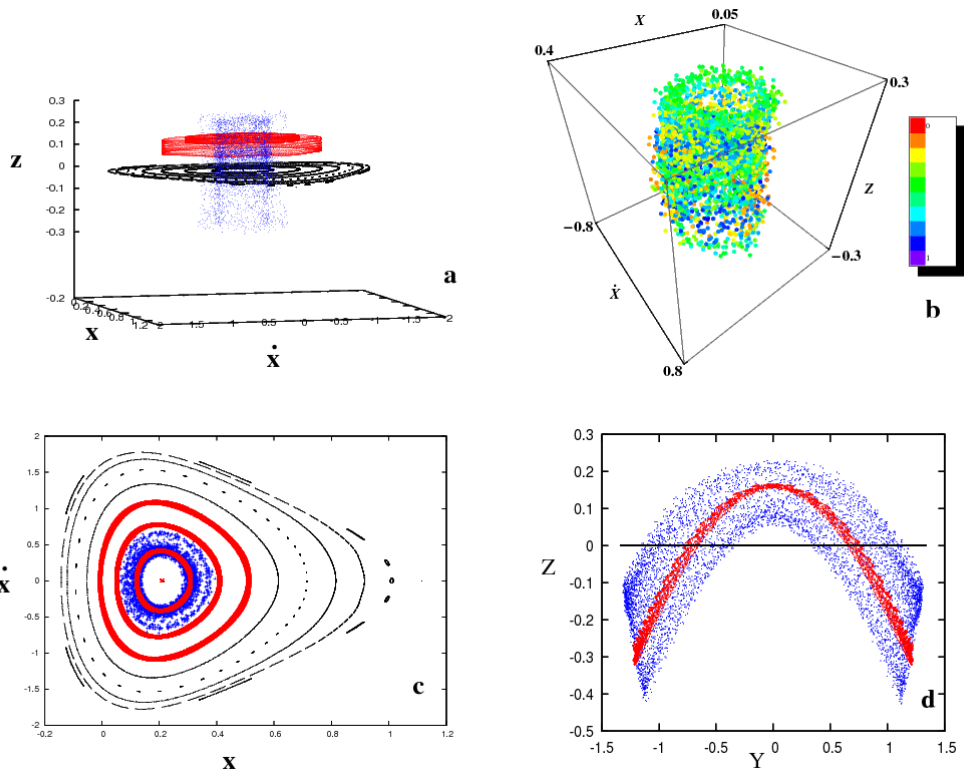
Πριν κλείσουμε το υποκεφάλαιο αυτό τονίζουμε το γεγονός ότι αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία διαταράσσοντας την αρχική συνθήκη \dot{z}_0 των περιοδικών τροχιών, έχουμε παρόμοια αποτελέσματα.



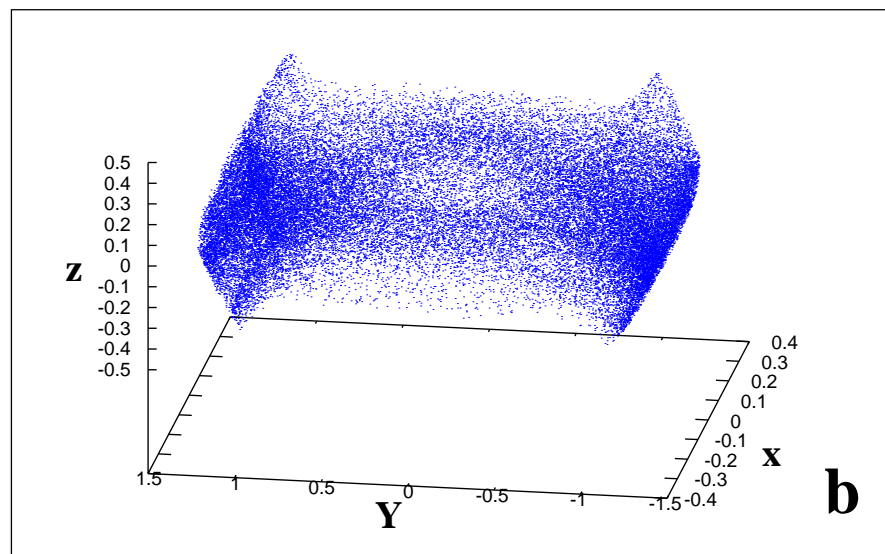
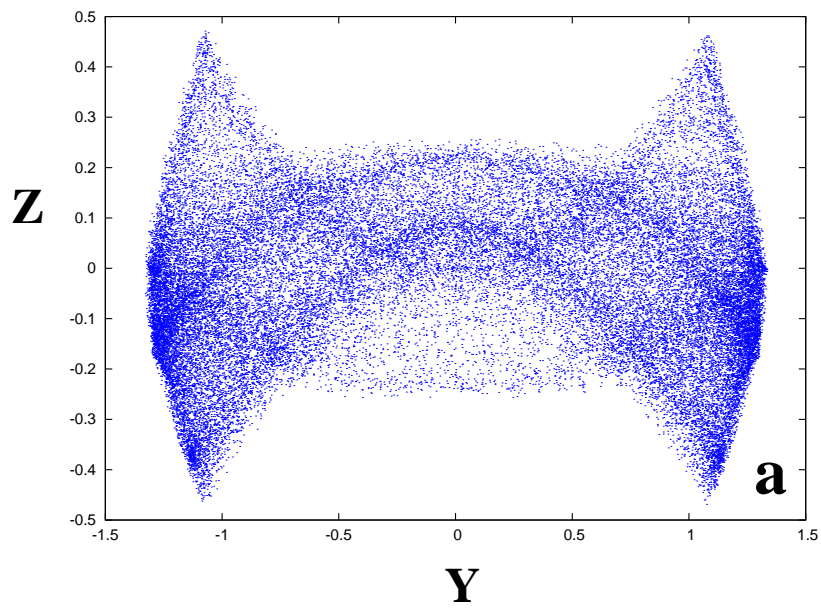
Σχήμα 79: Η 3D (x, z, \dot{x}) προβολή της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -5.207$. Οι αρχικές συνθήκες της τροχιάς είναι $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.28312784, 0, 0.41, 0)$ (βλέπε το κείμενο). (α) Τα πρώτα 1100 σημεία χρωματισμένα ανάλογα με την τιμή τους στην τέταρτη διάσταση \dot{z} . Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (78^\circ, 82^\circ)$. (β) Τα πρώτα 1.2×10^4 σημεία (κόκκινα σημεία). Η πράσινη αναλλοίωτη καμπύλη αντιστοιχεί στην τροχιά με αρχικές συνθήκες $(0.28312784, 0, 0, 0)$, η οποία περιβάλλει την περιοδική τροχιά της x_1 . Τα κόκκινα σημεία διαχέονται στον φασικό χώρο μετά την παραμονή τους στην τοροειδή επιφάνεια για 900 σημεία στην επιφάνεια τομής.



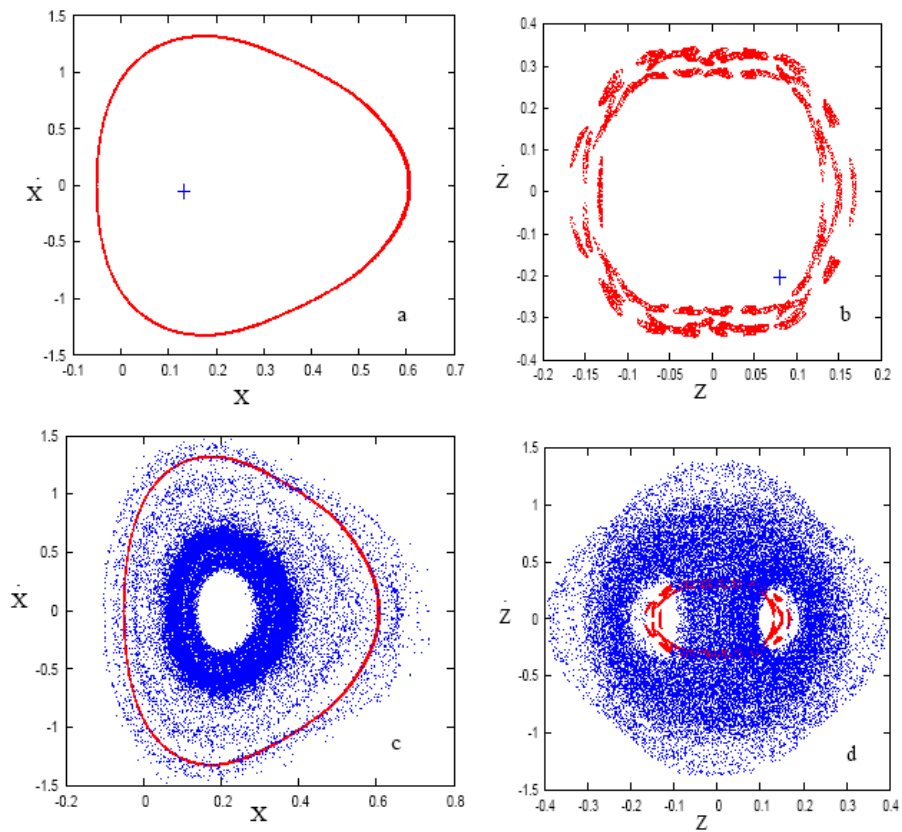
Σχήμα 80: Η 3D (x, z, \dot{x}) προβολή της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.98996$ για τρεις αναλλοίωτους τόρους γύρω από την x_{1v1} και τρεις αναλλοίωτες καμπύλες (πράσινες καμπύλες) γύρω από την x_1 . Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (56^\circ, 280^\circ)$. Οι αρχικές συνθήκες της x_1 σημειώνονται με ένα πράσινο άστρο και οι αρχικές συνθήκες της x_{1v1} με ένα κόκκινο 'x'.



Σχήμα 81: (a) Μία χαοτική τροχιά για $E_j = -4.98996$ στην 3D (x, z, \dot{x}) προβολή (οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (55^\circ, 263^\circ)$) της 4D επιφάνειας τομής (μπλε σημεία). Παρουσιάζουμε επίσης τρεις περιστροφικούς τόρους γύρω από την x_{1v1} (κόκκινο), και εφτά αναλλοίωτες καμπύλες γύρω από την x_1 στο (x, \dot{x}) επίπεδο (μαύρο). (b) Η 4D επιφάνεια τομής του νέφους των μπλε σημείων τα οποία παρουσιάζουμε στο (a) (οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (60^\circ, 45^\circ)$). Χαρακτηρίζεται από την ανάμειξη χρώματος. (c) Η (x, \dot{x}) επιφάνεια τομής για τις τροχιές στο (a). Βλέπουμε ότι τα μπλε σημεία βρίσκονται τόσο μέσα όσο και έξω από τον περιστροφικό τόρο που είναι κοντά στην περιοδική τροχιά. (d) Η χαοτική τροχιά (μπλε σημεία) μαζί με τις ημιπεριοδικές τροχιές της x_{1v1} περιοδικής τροχιάς (κόκκινα σημεία) οι οποίες αντιστοιχούν στους τόρους γύρω από την x_{1v1} στο (a).



Σχήμα 82: (a) Η (y, z) προβολή της τροχιάς που αντιστοιχεί στο νέφος των μπλε σημείων στο Σχ. 81a. (b) Η ίδια τροχιά στον φυσικό χώρο με οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (63^\circ, 280^\circ)$.



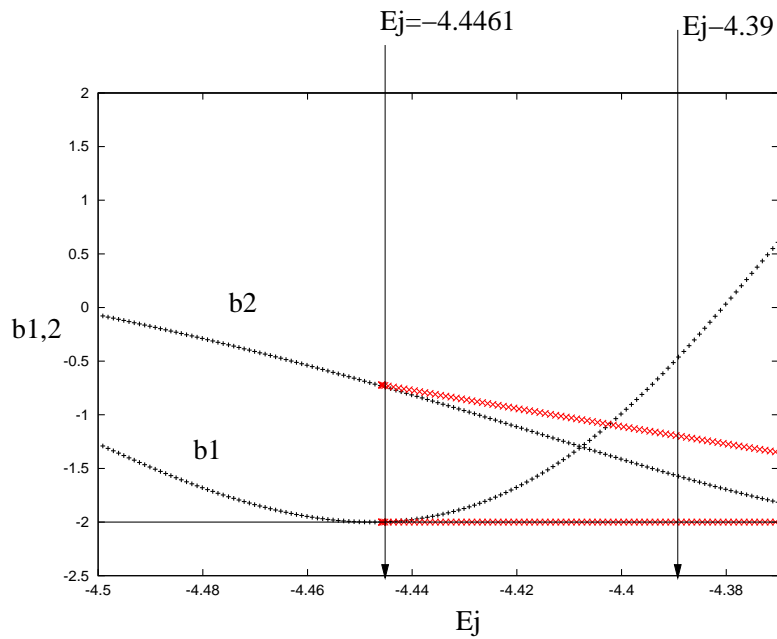
Σχήμα 83: Η σχετική θέση των σημείων της χαοτικής τροχιάς του Σχ. 82 σε σχέση με την θέση του σωληνοειδούς τόρου X4. Στα (a), (b), (c) και (d) τα κόκκινα σημεία παριστάνουν τα σημεία του τόρου “X4” στις αντίστοιχες προβολές. Στις προβολές (a) και (c) ο τόρος X4 παριστάνεται από μία κόκκινη αναλλοίωτη καμπύλη, ενώ στις προβολές (b) και (d) από σπασμένα κόκκινα τμήματα. Στα (a) και (b) παρουσιάζουμε με ένα μπλε σταυρό, την θέση ενός μόνου σημείου το οποίο προβάλεται στο εσωτερικό των (x, \dot{x}) και (z, \dot{z}) προβολών του “X4” αντίστοιχα. Στα (c) και (d) παρουσιάζουμε τα 1.2×10^4 σημεία της τροχιάς, τα οποία φαίνονται καθαρά να βρίσκονται εντός και εκτός του “X4”.

3.2.6 Η εξέλιξη των σωληνοειδών τόρων με την αύξηση της διαταραχής

Στο τελευταίο αυτό υποκεφάλαιο της ευστάθειας μελετάμε τους αναλλοίωτους τόρους όταν η διαταραχή του συστήματός μας αυξάνεται, ξεκινώντας από την αξισυμμετρική περίπτωση ($q_a = 1$ και $q_b = 1$). Στο μοντέλο μας αυξάνουμε την διαταραχή, αυξάνοντας την τριαξονικότητα του συστήματος μέσω των παραμέτρων q_a και q_b . Αρχικά εξετάζουμε την αξισυμμετρική περίπτωση και μετά εισάγουμε μία μικρή διαταραχή ($q_a = 1.01$ και $q_b = 1$), ώστε να μελετήσουμε πιθανές διαφορές στην μορφολογία των αναλλοίωτων τόρων.

Σε ένα 3D αξισυμμετρικό δυναμικό ο δείκτης ευστάθειας της κεντρικής οικογένειας, ο οποίος σχετίζεται με τις διαταραχές οι οποίες είναι κάθετες στο ισημερινό επίπεδο, γίνεται εφαπτόμενος στον άξονα $b=-2$ στα σημεία των κάθετων συντονισμών (Patsis & Grosbøl 1996). Στο Σχ. 84 παρουσιάζουμε την εξέλιξη της ευστάθειας της κεντρικής οικογένειας των περιοδικών τροχιών του συστήματός μας, της x_1 και της κάθετης διακλάδωσης της $x1v1$ στην αξισυμμετρική περίπτωση για $-4.5 < E_j < -4.37$. Παρατηρούμε ότι η x_1 (οι b_1, b_2 δείκτες παριστάνονται με μαύρο χρώμα) είναι αρχικά ευσταθής και για $E_j = -4.4472$ ο b_1 εφάπτεται με τον άξονα $b=-2$. Το σημείο όπου ο b_1 εφάπτεται με τον $b=-2$ άξονα είναι το σημείο του $2/1$ κάθετου συντονισμού. Στο σημείο αυτό διακλαδίζεται μία νέα οικογένεια $x1v1$ (οι δύο δείκτες ευστάθειας της $x1v1$ παριστάνονται με κόκκινο χρώμα). Ο ένας δείκτης ευστάθειας της $x1v1$ μένει πάνω στον άξονα $b=-2$.

Έχουμε πάρει μερικές επιφάνειες τομής και μελετήσαμε την δομή του φασικού χώρου πολύ κοντά στο σημείο διακλάδωσης της $x1v1$. Πρώτα εξετάζουμε την δομή του φασικού χώρου στην γειτονιά της περιοδικής τροχιάς της $x1v1$ για $E_j = -4.4461$, αμέσως μετά την επαφή του δείκτη b_1 της x_1 με τον $b=-2$ άξονα. Ολοκληρώσαμε 21 αρχικές συνθήκες στην περιοχή της $x1v1$ ($x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0$) \approx (1.298965, 0.041883918, -0.0036186582, 0.026639957), διαταράσσοντας την αρχική συνθήκη x_0 της $x1v1$ με $\Delta x_0 = 0.02, 0.04 \dots 0.42$ αντίστοιχα. Στο Σχ. 85 παρουσιάζουμε τις (x, \dot{x}, z) 3D προβολές των τόρων που βρήκαμε γύρω από την $x1v1$. Στο Σχ. 85a παρατηρούμε τους πρώτους οκτώ περιστροφικούς τόρους $V_1, V_2, \dots V_8$ και στο Σχ. 85b τους περιστροφικούς τόρους $V_9 \dots V_{15}$. Τέλος στο Σχ. 85c παρουσιάζουμε τους τελευταίους έξι περιστροφικούς τόρους $V_{16} \dots V_{20}$ και V_{21} . Κάθε τόρος έχει 10^4 σημεία. Για διαταραχή από $\Delta x_0 = 0.02$ έως και $\Delta x_0 = 0.4$ συναντάμε περιστροφικούς τόρους γύρω από την περιοδική τροχιά της $x1v1$. Τώρα, για $\Delta x_0 = 0.42$ συναντάμε τον περιστροφικό τόρο V_{21} , ο οποίος διαφοροποιείται σε σχέση με τους άλλους τόρους. Η διαφοροποίηση του αυτή εντοπίζεται στο ότι αυτός ο τόρος εκτείνεται

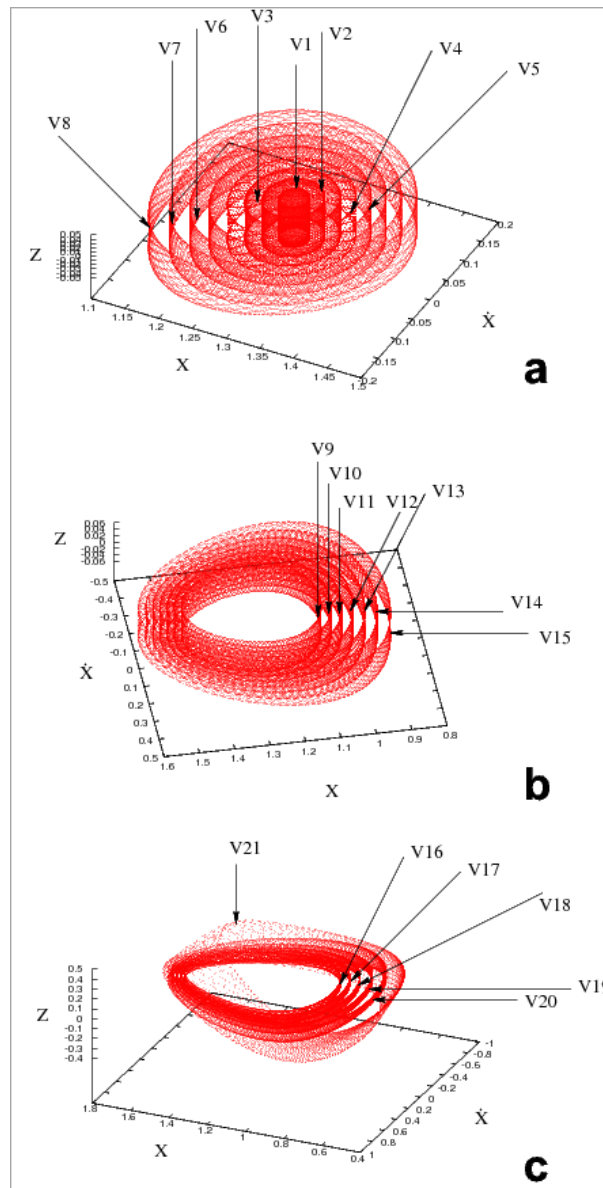


Σχήμα 84: Διάγραμμα ευστάθειας της x_1 (μαύρες γραμμές) και x_1v_1 (κόκκινες γραμμές) για $-4.5 < E_j < -4.37$, στην αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας ($q_a = 1, q_b = 1$).

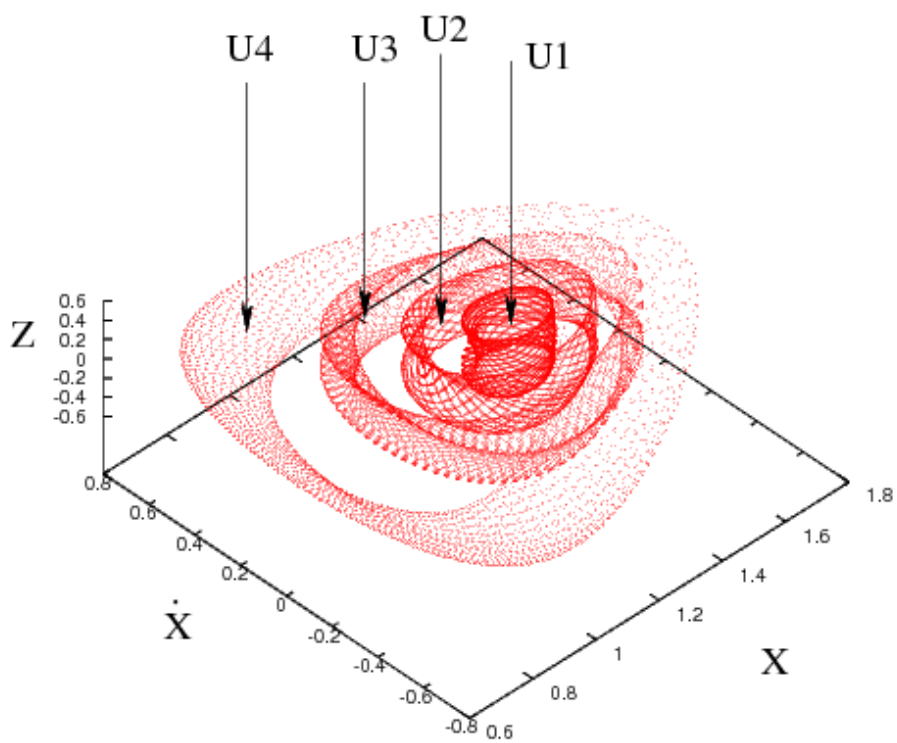
για μεγάλες τιμές του z σε σχέση με τους άλλους τόρους και παρουσιάζει μία κλίση με το επίπεδο $x\dot{x}$.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για μεγαλύτερη τιμή της ενέργειας, $E_j = -4.39$. Αυτή την φορά η x αρχική συνθήκη της x_1v_1 διαταράσσεται αντίστοιχα με $\Delta x = 0.1, 0.2, 0.3$ και 0.4 . Το αποτέλεσμα δίνεται στο Σχ. 86, με οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (27^\circ, 316^\circ)$. Τέσσερις περιστροφικοί τόροι περιβάλλουν την περιοδική τροχιά της x_1v_1 και υποδεικνύονται με βέλη (U_1, U_2, U_3 και U_4). Κάθε τόρος αποτελείται από 10^4 σημεία. Οι τόροι είναι παραμορφωμένοι, με τον τελευταίο τόρο να έχει μία παράμοια μορφολογία με τον V_{21} της προηγούμενης περίπτωσης.

Για να μελετήσουμε τις διαφορές στον φασικό χώρο στην περιοχή των ευσταθών περιοδικών τροχιών από το αξισυμμετρικό μοντέλο όταν προσθέτουμε μία μικρή διαταραχή στο συστήμα μας, αυξάνουμε την παράμετρο q_a από $q_a = 1$ σε $q_a = 1.01$. Το Σχ. 87 μας δίνει την μεταβολή της ευστάθειας της οικογένειας περιοδικών τροχιών της x_1 και των διακλαδώσεων της για $-4.7 < E_j < -4.3$. Παρατηρούμε ότι η x_1 (οι b_1, b_2 δείκτες ευστάθειας είναι σχεδιασμένοι με μαύ-



Σχήμα 85: (x, \dot{x}, z) 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής της αξισυμμετρικής περίπτωσης του μοντέλου μας για $E_j = -4.4461$, στην περιοχή της οριακά ευσταθούς περιοδικής τροχιάς της $x1v1$. (a) Οι πρώτοι οκτώ αναλλοίωτοι τόροι $V1 \dots V8$ (με οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (38^\circ, 211^\circ)$). (b) Οι αναλλοίωτοι τόροι $V9 \dots V15$, (με οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (36^\circ, 244^\circ)$). (c) Οι τελευταίοι έξι τόροι της περιπτώσεώς μας, $V16 \dots V21$, (με οπτική γωνία $(\theta, \phi) = (49^\circ, 195^\circ)$).

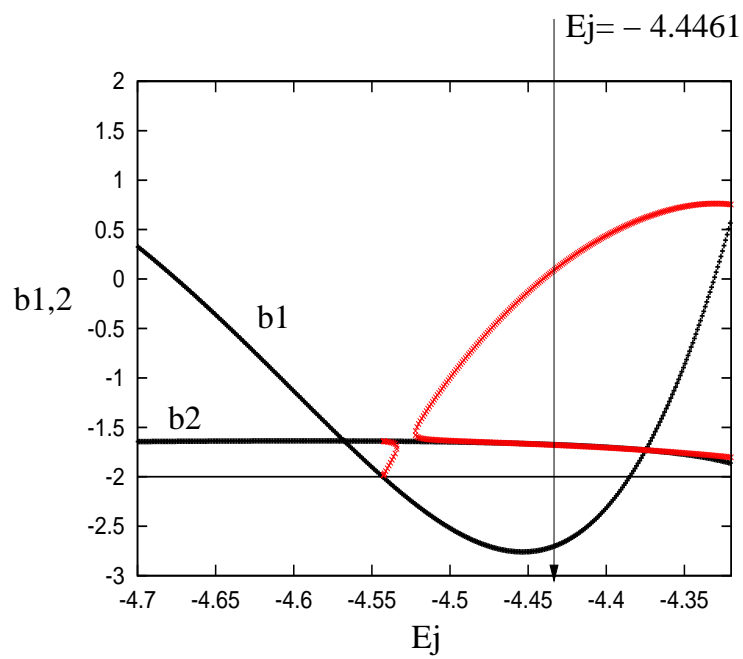


Σχήμα 86: Η (x, \dot{x}, z) 3D προβολή της 4D επιφάνειας τομής της αξισυμμετρικής περίπτωσης του μοντέλου μας ($q_a = 1, q_b = 1$) στην περιοχή της $x1v1$ για $E_j = -4.39$. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (27^\circ, 316^\circ)$.

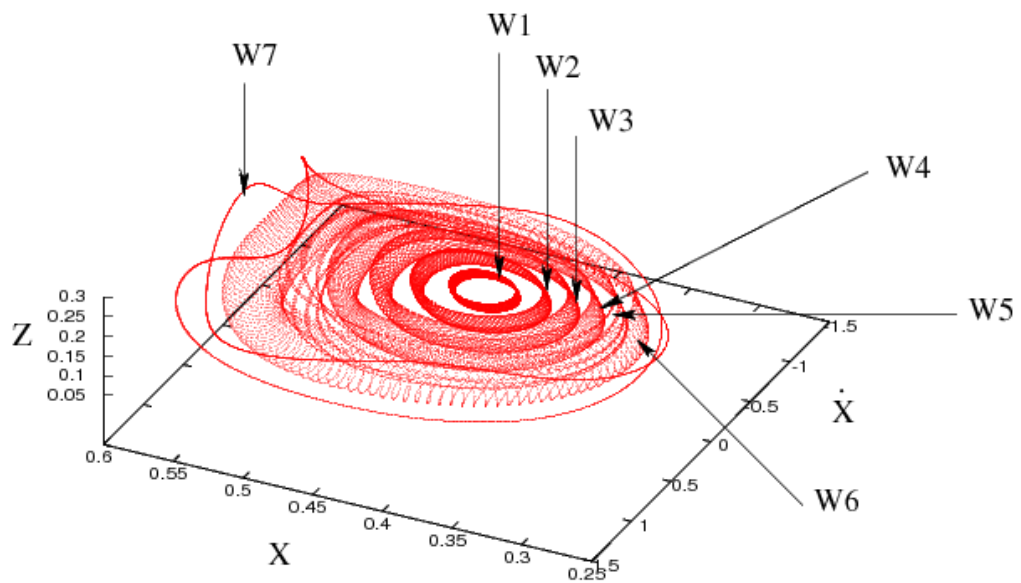
ρο χρώμα) είναι αρχικά ευσταθής και για $E_j = -4.54$ παρουσιάζει μία μετάβαση από ευστάθεια σε απλή αστάθεια. Η x_1 γίνεται ξανά ευσταθής στην τιμή της ενέργειας $E_j = -4.386$. Στο σημείο μετάβασης της x_1 από ευστάθεια σε απλή αστάθεια διακλαδίζεται η x_{1v1} (οι κόκκινες γραμμές παριστάνουν τους δείκτες ευστάθειας της b_1, b_2), η οποία είναι αρχικά ευσταθής. Για μία μεγαλύτερη τιμή της ενέργειας οι κόκκινες καμπύλες b_1, b_2 ενώνονται σε ένα μέγιστο $E_j = -4.525$ και η x_{1v1} γίνεται μιγαδικά ασταθής. Στο σημείο αυτό οι δείκτες ευστάθειας γίνονται μιγαδικοί και για τον λόγο αυτό δεν παρουσιάζονται στο σχήμα. Μετά από ένα μικρό διάστημα μιγαδικής αστάθειας η x_{1v1} γίνεται ξανά ευσταθής (για $E_j > -4.52$).

Διαλέγουμε μία τιμή της ενέργειας για την οποία έχουμε μελετήσει την τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς της x_{1v1} στην αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας, $E_j = -4.4461$, και διαταράσσουμε την x_0 αρχική συνθήκη της περιοδικής τροχιάς της x_{1v1} κατά $\Delta x = 0.02, 0.04 \dots 0.14$ διαδοχικά.

Στο Σχ. 88 παρατηρούμε επτά τόρους στην (x, \dot{x}, z) προβολή, τους οποίους ονομάσαμε W_1, W_2, \dots, W_7 , και οι οποίοι περιβάλλουν την περιοδική τροχιά της x_{1v1} για $E_j = -4.4461$. Κάθε τόρος αποτελείται από 10^4 σημεία. Οι τόροι W_1, W_2, W_3, W_4 και W_6 έχουν την μορφολογία περιστροφικών τόρων, ενώ οι W_5 και W_7 την μορφολογία σωληνοειδών τόρων. Ο W_5 έχει πολλές τομές με τον εαυτό του. Ο W_7 παρά τον κυματικό του χαρακτήρα έχει μία τομή με τον εαυτό του στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής. Είναι φανερό ότι οι σωληνοειδείς τόροι εμφανίστηκαν στις 3D προβολές των επιφανειών τομής όταν διαταράξαμε το συστήμα μας από $q_a = 1$ σε $q_a = 1.01$, παρά το γεγονός ότι η διαταραχή που εφαρμόσαμε ήταν πολύ μικρή.



Σχήμα 87: Διάγραμμα ευστάθειας της x_1 και x_{1v1} για $-4.7 < E_j < -4.3$ για την περίπτωση ($q_a = 1.01, q_b = 1$).



Σχήμα 88: Η (x, \dot{x}, z) 3D προβολή της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.4461$ κοντά στην ευσταθή περιοδική τροχιά της x_{1v1} για την περίπτωση όπου έχουμε $q_a = 1.01$ και $q_b = 1$. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (55^\circ, 194^\circ)$.

3.3 Απλή και Διπλή Ασταθία

Εξετάζουμε τη δομή του φασικού χώρου στη περιοχή των απλά και διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x1v2$ στην δεύτερη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας. Επιπλέον μελετάμε το φαινόμενο της κολλητικότητας κοντά σε ασταθείς περιοδικές τροχιές στο 3D σύστημά μας. Αυτή είναι η πρώτη φορά που μελετάται το φαινόμενο της κολλητικότητας στη περιοχή ασταθών περιοδικών τροχιών σε ένα 3D αυτόνομο χαμιλτονιανό σύστημα.

Μελετάμε πρώτα την τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή μίας απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς κοντά στο σημείο διακλάδωσης της $x1v2$ (υποκεφάλαιο 3.3.1) και την γενική τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x1v2$ (υποκεφάλαιο 3.3.2). Μετά μελετάμε την μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων (υποκεφάλαιο 3.3.3) και το φαινόμενο κολλητικότητας (υποκεφάλαιο 3.3.4) στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x1v2$. Στη συνέχεια μελετάμε την δυναμική στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x1v2$ (υποκεφάλαιο 3.3.5). Για να διερευνήσουμε σε βάθος την δυναμική στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών μελετάμε και μία περίπτωση που αναφέρεται στις περιοδικές τροχιές της οικογένειας του z -άξονα (“ z -axis family”) στο υποκεφάλαιο 3.3.6. Τέλος στο υποκεφάλαιο 3.3.7 μελετάμε την ταχύτητα διάχυσης των τροχιών στην περιοχή των απλά και διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών.

Στο υποκεφάλαιο 2.4.1 είδαμε ότι η $x1v2$ διακλαδίζεται από την x_1 για $E_j = -4.7$. Στο υποκεφάλαιο 2.4.2 είδαμε ότι η $x1v2$ είναι αρχικά απλά ασταθής και μετά γίνεται διπλά ασταθής (για $E_j = -3.41$). Την περιοχή της $x1v2$ που είναι απλά ασταθής ($-4.7 < E_j < -3.41$) και την περιοχή της $x1v2$ που είναι διπλά ασταθής ($-3.41 < E_j < -2.3$) θα τις αποκαλούμε ως U και DU αντίστοιχα.

Στα υποκεφάλαια 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 και 3.3.4 εξετάζουμε την δυναμική στη γειτονιά των περιοδικών τροχιών της U. Για τον λόγο αυτό παρουσιάζουμε παραδείγματα από αριθμητικά πειράματα τροχιών με αρχικές συνθήκες οι οποίες είναι κοντά σε αυτές των περιοδικών τροχιών που βρίσκουμε στην περιοχή U. Για να το επιτύχουμε χρησιμοποιήσαμε τις (x, \dot{x}, z) και (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολές της επιφάνειας τομής. Βρήκαμε παρόμοια αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τις (x, \dot{x}, \dot{z}) και (x, z, \dot{z}) προβολές. Η χρήση των δύο αυτών προβολών μας δίνει όλη την απαιτούμενη πληροφορία που χρειαζόμαστε για να κατανοήσουμε την κατανομή των σημείων στην 4D επιφάνεια τομής μέσω της μεθόδου χρώματος και περιστροφής. Οι αρχικές συνθήκες για τη μελέτη μας επιλέχτηκαν με δύο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτον, μελετήσαμε την δυναμική συμπεριφορά των τροχιών στην γειτονιά της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της $x1v2$ για $E_j = -4.66$ μετα-

βάλλοντας τις τιμές και την κατεύθυνση της διαταραχής κατά Δx , $\Delta \dot{x}$, Δz ή $\Delta \dot{z}$. Δεύτερον, Θεωρήσαμε μία σταθερή διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ και την εφαρμόσαμε στις αρχικές συνθήκες αρκετών περιοδικών τροχιών της $x1v2$ στην περιοχή U για διάφορες τιμές της ενέργειας.

Ξεκινάμε την μελέτη μας διατηρώντας σταθερή την ενέργεια και διερευνούμε την δυναμική συμπεριφορά στην γειτονιά μίας απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς κοντά στο σημείο μετάβασης της $x_1 U \rightarrow S$ και το οποίο αποτελεί σημείο διακλάδωσης της $x1v2$.

3.3.1 Η τροχιακή συμπεριφορά κοντά στο σημείο διακλάδωσης - μία αντιπροσωπευτική περίπτωση

Η πρώτη περίπτωση που παρουσιάζουμε είναι αυτή μίας τροχιάς στην περιοχή μίας απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς στην περιοχή U , κοντά στο σημείο διακλάδωσης της $x1v2$, για $E_j = -4.66$. Η περιοδική τροχιά έχει αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.037941612, 0, 0, 0.42902353)$. Για να μελετήσουμε την τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή της διαταράσσουμε την περιοδική τροχιά στην \dot{z} -κατεύθυνση κατά $\Delta \dot{z} = -6 \times 10^{-6}$. Την τροχιά αυτή την αποκαλούμε τροχιά “u”. Τα πρώτα 2580 σημεία της τροχιάς “u” ορίζουν μία κορδέλα σχήματος διπλού βρόχου στην (x, \dot{x}, z) προβολή (Σχ. 89). Στο κάτω μέρος του σχήματος δίνουμε επίσης από αριστερά προς τα δεξιά τις 2D προβολές (x, \dot{x}) , (x, z) και (\dot{x}, z) ώστε να βοηθήσουν τον αναγνώστη να καταλάβει την τοπολογία αυτής της δομής. Οι δύο λοβοί του διπλού βρόχου βρίσκονται σε κλίση ο ένας με τον άλλο και σχηματίζουν μία γωνία γύρω στις 50° στην (x, z) προβολή (το μεσαίο σχήμα στο κάτω μέρος του Σχ. 89). Η (x, z) δείχνει ευκρινώς ότι το πάχος των λοβών είναι πολύ μικρό (αλλά όχι μηδενικό) και αυτός είναι ο λόγος που τους περιγράφουμε ως ‘κορδέλες’. Ουσιαστικά οι κλάδοι των δύο λοβών είναι πολύ λεπτοί σωληνοειδείς σχηματισμοί. Η 4D αναπαράσταση αυτής της δομής χρωματίζεται αναλόγως των \dot{z} τιμών της και χρησιμοποιώντας την (x, \dot{x}, z) προβολή αυτής της δομής (στο πάνω μέρος του Σχ. 89). Παρατηρούμε ότι αυτή η δομή έχει μία ομαλή μεταβολή χρώματος από κόκκινο σε μωβ, σε συμφωνία με δομές που βρέθηκαν στην περιοχή απλά ασταθών περιοδικών τροχιών από τους Patsis και Zachilas (1994). Η δομή του φασιικού χώρου κοντά σε απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Magnenat (1982). Ο Magnenat (1982) όμως χρησιμοποίησε μόνο 2D προβολές οι οποίες δεν επέτρεπαν την πλήρη κατανόηση της 4D δομής των διπλών βρόχων. Στην παρούσα εργασία η 4D αναπαράσταση μας επιτρέπει να αντιληφθούμε λεπτομέρειες της δομής αυτής.

Παρατηρώντας το Σχ. 89 συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή χρώματος κατά μή-

κος των δύο κλάδων του διπλού βρόχου είναι μεν ομαλή αλλά στο σημείο τομής τους έχουμε την συνάντηση δύο διαφορετικών χρωμάτων. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία σε αυτή την περιοχή έχουν διαφορετικές τιμές στην τέταρτη διάσταση και ότι αυτή η τομή δεν είναι πραγματική τομή στον 4D χώρο. Παρατηρούμε επίσης ότι τα χρώματα στην περιοχή της τομής δεν είναι μόνο διαφορετικά αλλά βρίσκονται στα δύο άκρα της χρωματικής μας συνάρτησης (κόκκινο και μωβ - βλ. δεξιό μέρος του Σχ. 89). Τα χρώματα σε αυτή την περιοχή ομαδοποιούνται γύρω από δυο τιμές ($z = \pm 0.429$) πολύ κοντά στις αρχικές συνθήκες z της περιοδικής τροχιάς της $x1v2$.

Το Σχ. 89 αντανακλά την συμμετρία του γαλαξιακού δυναμικού που μελέταμε. Λόγω αυτής της συμμετρίας, οι οικογένειες των περιοδικών τροχιών οι οποίες διακλαδίζονται στους κάθετους συντονισμούς από την επίπεδη οικογένεια x_1 εισάγονται στο σύστημα σε ζεύγη π.χ. $x1v1$ και $x1v1'$, $x1v2$ και $x1v2'$ κ.λ.π. Οι περιοδικές τροχιές της $x1v2$ και $x1v2'$ για κάθε τιμή της ενέργειας E_j διαφοροποιούνται μόνο στο πρόσημο της αρχικής τους συνθήκης z . Στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) που χρησιμοποιούμε στο Σχ. 89, οι αρχικές συνθήκες των $x1v2$ και $x1v2'$ είναι ίδιες και η περιοδική τροχιά (p.o.) είναι στο κέντρο της τομής των δύο κλάδων του διπλού βρόχου (υποδεικνύεται με ένα βέλος). Η ομαδοποίηση των χρωμάτων γύρω από δύο τιμές ($z_0 \approx \pm 0.429$) στην κεντρική περιοχή (περιοχή τομής) του διπλού βρόχου γίνεται λόγω του ότι οι δύο τροχιές $x1v2$ και $x1v2'$ δίνουν την ίδια προβολή στον υπόχωρο (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής. Τα σημεία απομακρύνονται από την κεντρική περιοχή του διπλού βρόχου αποκλίνοντας από τις δύο αρχικές συνθήκες ($\pm z_0$) με διαφορετικά χρώματα. Τα πρώτα 2580 σημεία βρίσκονται σε αυτόν τον διπλό βρόχο, υποδεικνύοντας ότι έχουμε μία οργανωμένη συμπεριφορά.

Φτάνουμε στο ίδιο συμπέρασμα χρησιμοποιώντας και τις άλλες 3D προβολές. Στο Σχ. 90 τα πρώτα 2580 σημεία της τροχιάς "u" στην 3D προβολή (\dot{x}, z, \dot{z}) σχηματίζουν ξανά μία επιφάνεια με μορφή κορδέλας, που όμως αυτή τη φορά έχει ένα μόνο βρόχο. Η επιφάνεια αυτή χρωματίζεται σύμφωνα με τις τιμές της τέταρτης διάστασης x και έχει ομαλή μεταβολή χρώματος. Σε αυτή την περίπτωση οι δύο περιοδικές τροχιές των οικογενειών $x1v2$ και $x1v2'$ είναι σε δύο διαφορετικές θέσεις στον (\dot{x}, z, \dot{z}) χώρο, αφού έχουν διαφορετικές z_0 αρχικές συνθήκες. Οι θέσεις τους υποδεικνύονται με βέλη στο Σχ. 90. Οι περιοχές κοντά στις περιοδικές αυτές τροχιές έχουν το ίδιο χρώμα (κόκκινο) και όσο απομακρυνόμαστε από αυτές το κόκκινο γίνεται πορτοκαλί, μετά κίτρινο, πράσινο, γαλάζιο, μπλε και τελικά μωβ. Η κορδέλα αυτή είναι ένα 4D αντικείμενο. Από τα σχήματα Σχ. 89 και 90 συμπεραίνουμε ότι τα πρώτα 2580 σημεία σχηματίζουν μία καλά ορισμένη 4D επιφάνεια με την μορφή κορδέλας, η οποία δεν έχει τομές με τον εαυτό της στον 4D χώρο.

Μία όμοια ανάλυση μπορούμε να κάνουμε χρησιμοποιώντας τις άλλες δύο 3D προβολές (x, \dot{x}, \dot{z}) και (x, z, \dot{z}) , οι οποίες δίνουν 4D δομές μορφολογικά όμοιες με αυτές των προβολών (x, \dot{x}, z) και (\dot{x}, z, \dot{z}) αντίστοιχα. Είναι γεγονός ότι η τροχιά “u” στην περιοχή της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς $x1v2$ για 2580 σημεία στην επιφάνεια τομής είναι περιορισμένη σε έναν συγκεκριμένο χώρο της επιφάνειας τομής με διαστάσεις $(\Delta x \times \Delta \dot{x} \times \Delta z \times \Delta \dot{z}) < (0.00035 \times 0.0005 \times 0.04 \times 1)$. Όπως θα δούμε αργότερα, για μεγαλύτερους χρόνους ολοκλήρωσης η τροχιά διαχέεται σε μία μεγαλύτερη περιοχή του φασικού χώρου. Οι παρατηρούμενες δομές υποδεικνύουν μία περιοχή κολλητικότητας. Αυτό θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 3.3.4.

Σημειώνουμε το γεγονός ότι γενικά έχουμε διαφορετικά χρώματα στις τομές των διπλών βρόχων, όπως ο διπλός βρόχος στο Σχ. 89, όμως σε εξαιρετικές περιπτώσεις μπορεί να έχουμε πραγματικές τομές στον 4D χώρο. Μία τέτοια περίπτωση συναντάται στην γειτονιά των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της οικογένειας του z -άξονα στην 4D επιφάνεια τομής η οποία ορίζεται από $z = 0$. Οι περιοδικές τροχιές της οικογένειας του z -άξονα βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής z του συστήματός μας. Αυτές έχουν αρχικές συνθήκες $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (0, 0, 0, 0)$ και αναλύονται στο υποκεφάλαιο 3.3.6 στα πλαίσια της μελέτης της διπλής αστάθειας.

Αν υπολογίσουμε ένα πολύ μεγαλύτερο αριθμό τομών της τροχιάς “u” με την επιφάνεια τομής παρατηρούμε μία δραστική μεταβολή στην τοπολογία της επιφάνειας με μορφή κορδέλας. Τα σημεία αποκλίνουν από την καλά ορισμένη αυτή 4D επιφάνεια. Στην περίπτωση που εξετάζουμε της τροχιάς στα Σχ. 89 και 90, για 3580 σημεία στην επιφάνεια τομής (για 1000 σημεία περισσότερα από αυτά των δομών των Σχ. 89 και 90) στις 3D προβολές που περιέχουν τις z και \dot{z} μεταβλητές διακρίνουμε μία Θ δομή (περιεστραμμένη κατά 90°) η οποία περιβάλεται από ένα δαχτυλίδι. Αυτό μπορούμε να το δούμε στο Σχ. 91, όπου παριστούμε τα σημεία της τροχιάς “u” στη (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή και τα χρωματίζουμε σύμφωνα με την x τιμή τους. Αυτή η νέα δομή διατηρείται στην 3D προβολή της επιφάνειας τομής για αρκετές ακόμα χιλιάδες τομές. Έχουμε πάλι τον περιορισμό των σημείων σε έναν περιορισμένο όγκο του φασικού χώρου, οποίος είναι μεγαλύτερος από ότι προηγουμένως. Μετά από 3580 τομές τα σημεία επεκτείνονται σε έναν χώρο $(\Delta x \times \Delta \dot{x} \times \Delta z \times \Delta \dot{z}) < (0.18 \times 0.7 \times 0.8 \times 2.4)$. Στην καινούρια αυτή κατάσταση έχουμε από την μία μεριά την εμφάνιση δομών οι οποίες υποδηλώνουν τάξη και από την άλλη μεριά ανάμειξη χρώματος η οποία υποδηλώνει χαοτικότητα.

Οι δομές αυτές μπορούν να κατανοηθούν καλύτερα στην δισδιάστατη (z, \dot{z}) προβολή (Σχ. 92). Υπενθυμίζουμε ότι μελετάμε την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή U, η οποία ξεκινάει με την διακλάδωση των οικογένειων $x1v2$ και

$x1v2'$ στην $U \rightarrow S$ μετάβαση της οικογένειας της x_1 στο κάθετο συντονισμό 2:1. Για μικρότερη τιμή της ενέργειας για $E_j = -5.028$ (υποκεφάλαιο 2.4.1) έχουμε την $S \rightarrow U$ μετάβαση της οικογένειας της x_1 και την εισαγωγή στο σύστημα της ευσταθούς οικογένειας $x1v1$ (και της συμμετρικής οικογένειας $x1v1'$). Επιπροσθέτως για $E_j = -4.66$, έχουμε εκτός από τις απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές των $x1v2$ και $x1v2'$ οικογενειών, τις δύο ευσταθείς περιοδικές τροχιές της $x1v1$ και της $x1v1'$ και την επίπεδη ευσταθή περιοδική τροχιά της x_1 . Η παρουσία όλων αυτών περιοδικών τροχιών καθορίζει την τροχιακή συμπεριφορά της “u” με τον ακόλουθο τρόπο:

Στην κεντρική περιοχή του Σχ. 92a παρατηρούμε μία κόκκινη ‘έλλειψη με γωνίες’, η οποία δομείται από τα πρώτα 2580 σημεία της “u” και αποτελεί προβολή της δομής του Σχ. 90 στο (z, \dot{z}) επίπεδο. Οι αρχικές συνθήκες των $x1v2$ και $x1v2'$ βρίσκονται στο πάνω και κάτω μέρος της κόκκινης ελλειπτικής καμπύλης αντίστοιχα. Η μπλε ελλειπτική καμπύλη εσωτερικά της κόκκινης, είναι προβολή ενός περιστροφικού τόρου (υποκεφάλαιο 3.2) ο οποίος ανήκει σε μία ημι-περιοδική τροχιά η οποία βρίσκεται αν διαταράξουμε την x_1 κατά την \dot{z} διεύθυνση. Η τροχιά “u” μένει κολλημένη γύρω από τους εξωτερικούς περιστροφικούς τόρους της x_1 για 2580 σημεία στην επιφάνεια τομής. Οι εξωτερικοί περιστροφικοί τόροι της x_1 είναι μεγαλύτεροι από την κορδέλα της τροχιάς “u”. Στο Σχ. 93 δίνουμε δύο χαρακτηριστικές προβολές υπό γωνία $(\theta, \phi) = (90^\circ, 42^\circ)$. Στο Σχ. 93(a) έχουμε την (x, \dot{x}, z) και στο Σχ. 93(b) την (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή. Και στις δύο περιπτώσεις παριστούμε τα πρώτα 2580 σημεία της “u” με κόκκινο χρώμα και τους εξωτερικούς περιστροφικούς τόρους γύρω από την x_1 με μαύρο χρώμα.

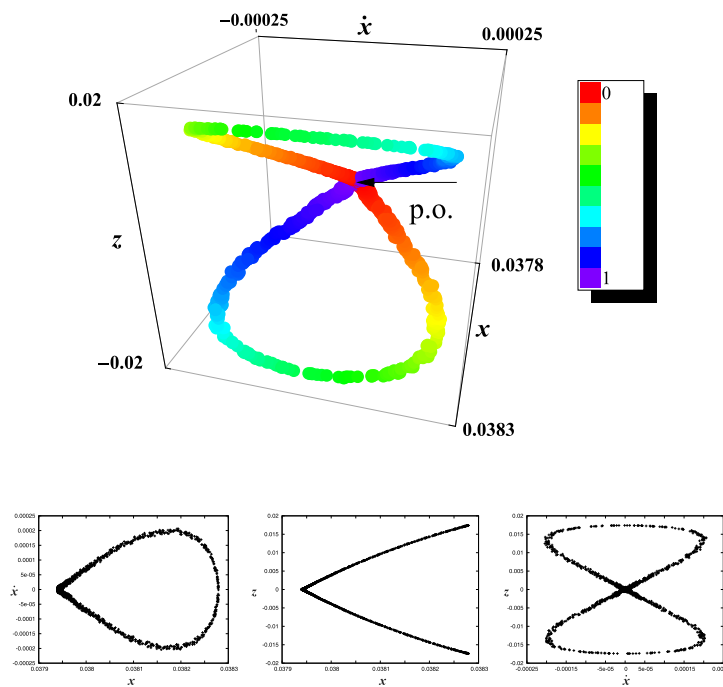
Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση της “u” για περισσότερο από 2580 τομές βλέπουμε ότι οι επόμενες 550 τομές σχηματίζουν μία Θ δομή με δύο λοβούς στις άκρες της κόκκινης ελλειπτικής δομής (Σχ. 92a- υποδεικνύεται με ένα ζεύγος άσπρων βελών). Τα σημεία αυτά περιβάλλουν τους περιστροφικούς τόρους γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές των $x1v1$ και $x1v1'$, οι οποίοι είναι πολύ λεπτοί και παρουσιάζονται σε αυτή την προβολή σαν αναλλοίωτες καμπύλες (πράσινη και ροζ). Οι περιστροφικοί τόροι των δύο αυτών οικογενειών βρίσκονται ακόμα στον φασικό χώρο κοντά στις περιοδικές τροχιές της U της $x1v2$, αφού έχουν διακλαδιστεί σε μία κοντινή τιμή της ενέργειας από την x_1 (υποκεφάλαιο 2.4.1). Οι αρχικές συνθήκες της $x1v1$ και $x1v1'$ είναι στην μέση των περιστροφικών τόρων και υποδεικνύονται με μαύρα σύμβολα.

Θεωρώντας περισσότερα από 3130 σημεία της “u” στην επιφάνεια τομής βρίσκουμε ότι οι επόμενες 1370 τομές παγιδεύονται σε ένα δαχτυλίδι στην (z, \dot{z}) προβολή, οι οποίες περιβάλλουν όλες τις δομές που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα στον φασικό χώρο. Δείχνουμε το δαχτυλίδι αυτό με δύο μάυρα βέλη στο

Σχ. 92a (πάνω δεξιά και κάτω αριστερά). Μεταξύ των δύο λοβών όπου περιλαμβάνονται οι περιστροφικοί τόροι γύρω από τις περιοδικές τροχιές των $x1v1$ και $x1v1'$ και του δαχτυλιδιού, παρατηρούμε μία αλυσίδα οκτώ αναλλοίωτων καμπύλων (με μαύρο χρώμα), οι οποίες είναι (z, \dot{z}) προβολές των αντίστοιχων περιστροφικών τόρων μίας ευσταθούς 8-περιοδικής τροχιάς. Τελικά, μετά από 4500 τομές, τα σημεία αρχίζουν να διαχέονται σε έναν μεγαλύτερο όγκο του φασικού χώρου. Το Σχ. 92a αναπαριστά την επιφάνεια τομής μετά από 5000 τομές. Μετά από 15000 τομές τα σημεία έχουν καταλάβει όλον τον διαθέσιμο φασικό χώρο (Σχ. 92b). Οι πυκνότερες περιοχές στο Σχ. 92b υποδηλώνουν τις περιοχές όπου έχουν παγιδευτεί τα σημεία για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

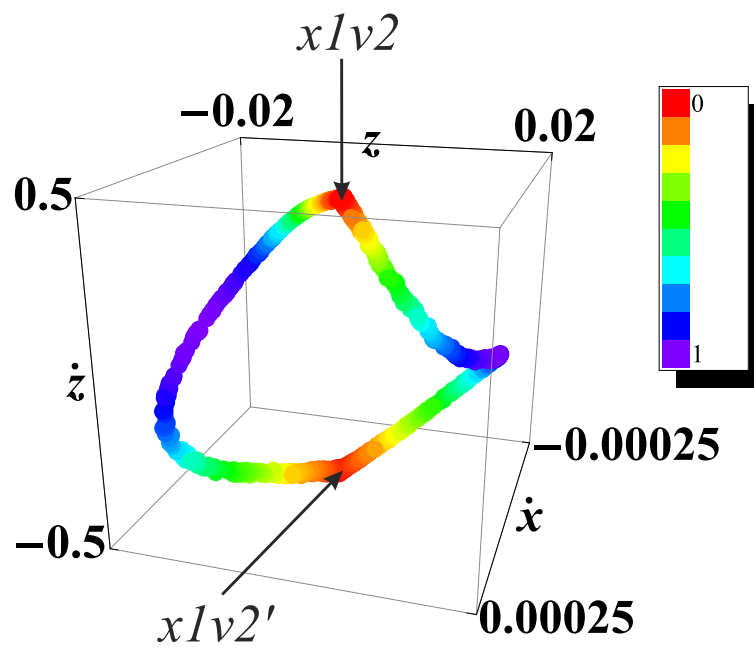
Στο σημείο αυτό συγκρίνουμε τις δομές που βρίσκουμε μέχρι τώρα στην επιφάνεια τομής και τις παρουσιάζουμε στο Σχ. 91. Οι προβολές του Σχ. 92 περιλαμβάνουν το Σχ. 91. Τις παρατηρούμε αν περιστρέψουμε την (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή στην οθόνη του υπολογιστή. Αφού το Σχ. 91 απαρτίζεται από 3580 σημεία, εκτός από την κορδέλα περιλαμβάνει επίσης τα σημεία που δομούν τη δομή Θ γύρω από τους περιστροφικούς τόρους της $x1v1$ και $x1v1'$ καθώς και σημεία που δομούν το δαχτυλίδι στο Σχ. 92. Στο Σχ. 91 δίνουμε έμφαση στην κατανομή των σημείων στην τέταρτη διάσταση. Παρατηρούμε ότι στο Σχ. 91 το χρώμα (το οποίο αντιπροσωπεύει την τέταρτη διάσταση x) κυριαρχείται από πράσινο χρώμα. Αυτό σημαίνει ότι παρά το γεγονός ότι δεν έχουμε ομαλή μεταβολή χρώματος όπως στα σχήματα 89 και 90 τα σημεία είναι περιορισμένα σε έναν ορισμένο όγκο του φασικού χώρου. Αυτό όντως συμβαίνει. Οι x τιμές για τα πρώτα 3130 σημεία βρίσκονται στο διάστημα $-0.008 < x < 0.08$, ενώ τα επόμενα 450 σημεία διπλασιάζουν αυτό το εύρος. Αυτή η αύξηση των x τιμών αντιπροσωπεύεται από την παρουσία πορτοκαλί-κόκκινων και μπλε-μωβ σημείων. Το γεγονός ότι στις 3D προβολές βρίσκουμε δομές και από το ότι η διαδοχή χρώματος παρόλο που δεν είναι ομαλή κυριαρχείται από ένα συγκεκριμένο χρώμα, υποδεικνύει μία ασθενή χαοτική συμπεριφορά της τροχιάς “u”. Αυτή η πληροφορία περιλαμβάνεται στην 4D αναπαράσταση του φασικού χώρου όπως δίνεται στο Σχ. 91. Συνδυάζοντας τα σχήματα 91 και 92 στην οθόνη του υπολογιστή, αποκαλύπτουμε όχι μόνο την ασθενή χαοτική συμπεριφορά της τροχιάς αλλά και τις περιοχές όπου κολλάει κατά την διάρκεια της ολοκλήρωσης. Αυτό δείχνει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου χρώματος και περιστροφής.

Συνοψίζοντας, η μελέτη της τροχιακής συμπεριφοράς της “u” στην περιοχή της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς χαρακτηρίζεται από δύο περιόδους κολλητικότητας. Η μία αναφέρεται στην κίνηση γύρω από τους περιστροφικούς τόρους της x_1 και η δεύτερη αναφέρεται στην περίοδο κολλητικότητας γύρω από τους περιστροφικούς τόρους των $x1v1$ και $x1v1'$. Κατά την διάρκεια της

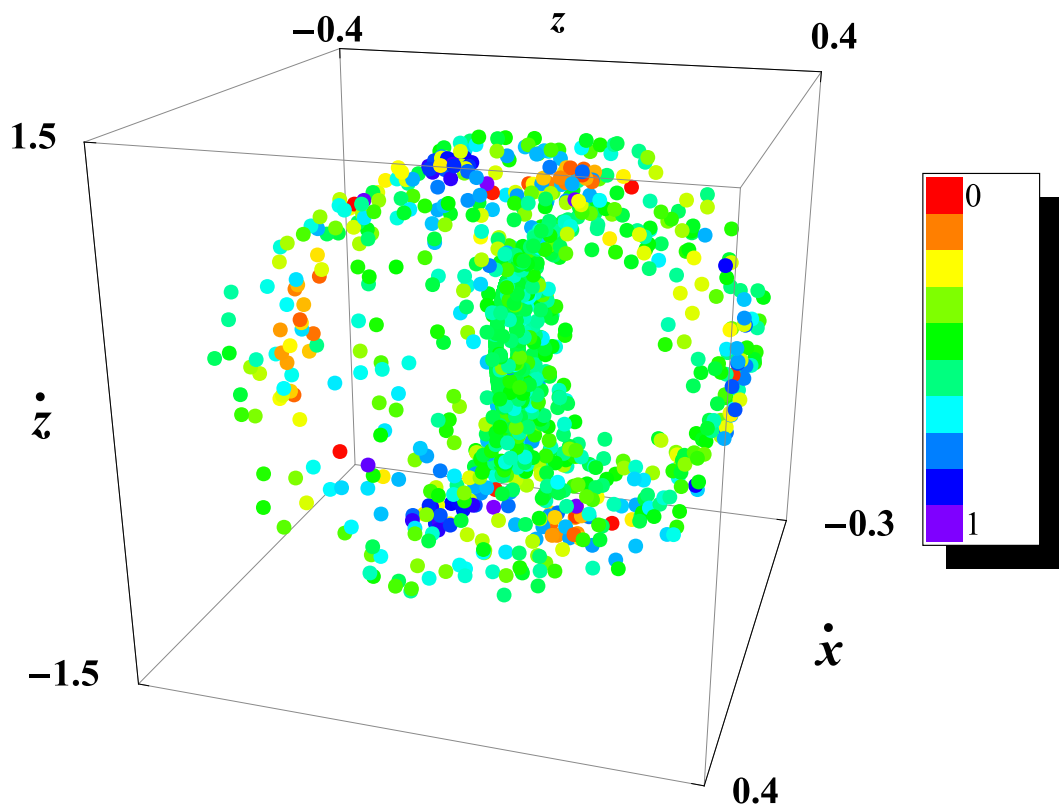


Σχήμα 89: Πάνω μέρος: Μία 4D αναπαράσταση της τροχιάς “u” για 2580 σημεία στην επιφάνεια τομής. Τα σημεία απεικονίζονται στην (x, \dot{x}, z) προβολή, ενώ κάθε σημείο χρωματίζεται ανάλογα με την z τιμή του. Παρατηρούμε έναν διπλό βρόχο ο οποίος έχει ομαλή μεταβολή χρώματος. Η θέση της περιοδικής τροχιάς (p.o.) υποδεικνύεται με ένα βέλος. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (30^\circ, 108^\circ)$. Κάτω μέρος: Οι τρεις 2D προβολές $(x, \dot{x},)$, (x, z) και (\dot{x}, z) . Τα εύρη των αξόνων είναι όπως στο κύριο σχήμα.

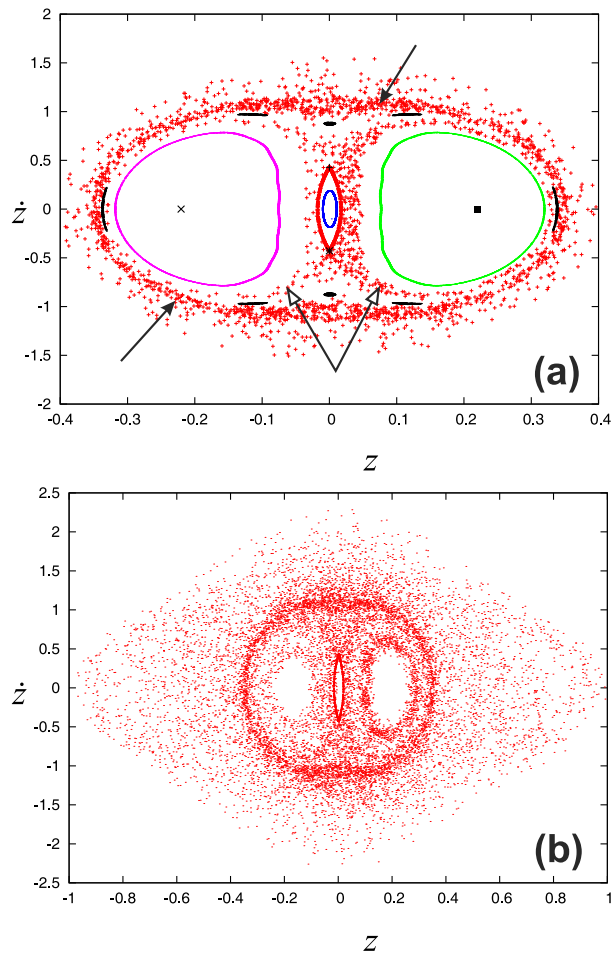
δεύτερης περιόδου κολλητικότητας παρατηρούμε την Θ δομή και το δαχτυλίδι στην (z, \dot{z}) προβολή. Στο επόμενο υποκεφάλαιο εξετάζουμε πόσο γενική είναι αυτή η συμπεριφορά.



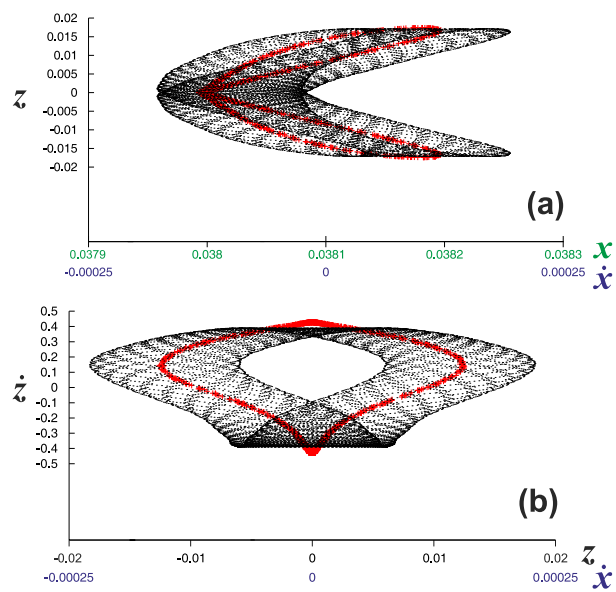
Σχήμα 90: 2580 σημεία της τροχιάς “u” στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) της επιφάνειας τομής. Κάθε σημείο χρωματίζεται ανάλογα της x τιμής του. Τα βέλη υποδεικνύουν τις θέσεις των περιοδικών τροχιών $x1v2$ και $x1v2'$. Η οπτική μας σε σφαιρικές συντεταγμένες γωνία είναι $(\theta, \phi) = (45^\circ, 144^\circ)$.



Σχήμα 91: Ανάμειξη χρώματος των πρώτων 1000 σημείων της τροχιάς “u” μετά τα 2580 πρώτα σημεία δηλαδή μετά την αναχώρησή τους από την καλά ορισμένη 4D επιφάνεια με μορφή κορδέλας στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) της επιφανείας τομής. Το χρώμα αντιπροσωπεύει την τέταρτη διάσταση x των σημείων. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (45^\circ, 144^\circ)$.



Σχήμα 92: (a) 5000 σημεία της τροχιάς της “u” στην 2D (z, \dot{z}) προβολή. Τα πρώτα 2580 σημεία σχηματίζουν την κόκκινη ‘έλλειψη με γωνίες’ στο κεντρικό μέρος του σχήματος. Η θέση των περιοδικών τροχιών των x_{1v2} και x_{1v2}' απεικονίζεται με μαύρα σύμβολα (πάνω και κάτω). Η μπλε έλλειψη η οποία βρίσκεται εσωτερικά της κόκκινης ‘έλλειψης με γωνίες’ είναι η προβολή ενός περιστροφικού τόρου γύρω από την x_1 . Τα υπόλοιπα σημεία, μετά τα πρώτα 2580, διαχέονται στον φασικό χώρο, αλλά παραμένουν στην περιοχή γύρω από τους περιστροφικούς τόρους των x_{1v1} και x_{1v1}' περιοδικών τροχιών. Οι προβολές των δύο τόρων γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές (οι οποίες υποδεικνύονται επίσης με μαύρα σύμβολα στις ‘άδειες’ περιοχές) εμφανίζονται στην περίπτωση αυτή σαν αναλλοίωτες καμπύλες (πράσινη και ροζ). Τα βέλη δείχνουν τους λοβούς και το δαχτυλίδι (βλέπε κείμενο). (b) 15000 σημεία της “u” στην 2D (z, \dot{z}) προβολή. Αυτά επισκέφτονται όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο. Οι περιοχές κολλητικότητας οι οποίες σχηματίζονται κατά την διάρκεια ολοκλήρωσης είναι εμφανείς.



Σχήμα 93: (a) Η (x, \dot{x}, z) και (b) (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολές των πρώτων 2580 σημείων της τροχιάς “u” (κόκκινο) και ενός από τους εξωτερικούς περιστροφικούς τόρους γύρω από την x_1 (μαύρο). Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (90^\circ, 42^\circ)$.

3.3.2 Η γενική τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή U

Δυναμική συμπεριφορά παρόμοια με αυτής της “u” παρατηρείται αν διαταράξουμε την \dot{z}_0 αρχική συνθήκη της x_{1v2} , για την ίδια τιμή της ενέργειας, μέχρι και $\Delta\dot{z} \approx -10^{-2}$ (μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή διαταραχή $|\Delta\dot{z}| = 10^{-2}$). Επίσης βρίσκουμε παρόμοια συμπεριφορά αν διαταράξουμε την \dot{x} αρχική συνθήκη της x_{1v2} το πολύ μέχρι $\Delta\dot{x} \approx 2 \times 10^{-4}$. Αρχικές συνθήκες που έχουν τα ίδια x_0 , \dot{x}_0 και z_0 με την x_{1v2} αλλά $\Delta\dot{z} < -10^{-2}$, δίνουν περιστροφικούς τόρους (υποκεφάλαιο 3.2) γύρω από την x_1 .

Ένας άλλος τύπος τροχιών στην περιοχή της x_{1v2} χαρακτηρίζεται από περιοχές κολλητικότητας γύρω από τους περιστροφικούς τόρους των x_{1v1} και x_{1v1}' , χωρίς να σχηματίζουν αρχικά μία κορδέλα στην επιφάνεια τομής. Τις τροχιές αυτές τις βρίσκουμε διατηρώντας την ενέργεια σταθερή ($E_j = -4.66$) και υπολογίζοντας τροχιές προσθέτοντας τις διαταραχές του πίνακα 1 στις αρχικές συνθήκες της x_{1v2} . Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις δεν παρατηρούμε την καλά ορισμένη επιφάνεια των Σχ. 89 και 90. Οι τροχιές στην επιφάνεια τομής, ξεκινάνε κοντά στην περιοδική τροχιά της x_{1v2} , αποχωρούν κατευθείαν από την κοντινή περιοχή και παραμένουν παγιδευμένες γύρω από τους περιστροφικούς τόρους των x_{1v1} και x_{1v1}' πριν επισκεφτούν μεγαλύτερες περιοχές του φασικού χώρου. Σχηματίζουν μια Θ δομή η οποία περιβάλεται από ένα δαχτυλίδι όπως στο Σχ. 91, χωρίς την κεντρική ελλειπτική δομή που παρατηρούμε στο Σχ. 92. Στον πίνακα 1 δίνουμε τα εύρη των διαταραχών των αρχικών συνθηκών για τις οποίες εκδηλώνεται αυτή η τροχιακή συμπεριφορά. Για αποκλίσεις από την περιοδική τροχιά στην \dot{z} κατεύθυνση στο διάστημα $4.4 \times 10^{-1} < \Delta\dot{z} < 4.7 \times 10^{-1}$ βρίσκουμε τους οκτώ τόρους των οποίων η προβολή τους στον (z, \dot{z}) υπόχωρο της επιφάνειας τομής φαίνεται στο Σχ. 92 σαν αλυσίδα 8 μαύρων αναλλοίωτων καμπύλων.

Για διαταραχές μεγαλύτερες από αυτές των διαστημάτων του πίνακα 1 στη x , \dot{x} ή \dot{z} διεύθυνση, δεν βρίσκουμε περιοχές κολλητικότητας αλλά νέφη σημείων γύρω από τις αρχικές συνθήκες της x_{1v2} τα οποία δεν είναι περιορισμένα αλλά επισκέπτονται ολόκληρο τον διαθέσιμο φασικό χώρο (χαοτική θάλασσα). Για μεγαλύτερες $|\Delta z|$ διαταραχές από αυτές του πίνακα 1 πέφτουμε σε αρχικές συνθήκες περιστροφικών τόρων γύρω από τις x_{1v1} και x_{1v1}' και για ακόμα μεγαλύτερες διαταραχές βρίσκουμε ξανά την χαοτική θάλασσα.

Ο δεύτερος τρόπος που ακολουθήσαμε ήταν να διερευνήσουμε τον φασικό χώρο γύρω από την x_{1v2} , μεταβάλλοντας την E_j , και διατηρώντας την ίδια διαταραχή στις αρχικές συνθήκες των περιοδικών της τροχιών. Αυτό έγινε προσθέτοντας μία $\Delta x = 10^{-4}$ διαταραχή στις αρχικές συνθήκες των περιοδικών τροχιών στην περιοχή U. Για $-4.7 < E_j < -4.4$ η τροχιακή συμπεριφορά ήταν

	θετική κατεύθυνση	αρνητική κατεύθυνση
Δx	$\Delta x \leq 2 \times 10^{-1}$	$\Delta x \geq -2 \times 10^{-1}$
$\Delta \dot{x}$	$2 \times 10^{-4} \leq \Delta \dot{x} \leq 1.2$	$\Delta \dot{x} \geq -2$
Δz	$\Delta z \leq 7 \times 10^{-2}$	$\Delta z \geq -7 \times 10^{-2}$
$\Delta \dot{z}$	$\Delta \dot{z} \leq 1.2$	-

Πίνακας 1: Το εύρος των αποκλίσεων από τις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς της $x1v2$ για $E_j = -4.66$ το οποίο δίνει τροχιές των οποίων τα σημεία κολλάνε στους τόρους των $x1v1$ και $x1v1'$ και μετά διαχέονται στον διαθέσιμο φασικό χώρο.

όμοια με αυτή των τροχιών για $E_j = -4.66$. Όμως, για $E_j > -4.4$ ένα νέφος σημείων περιβάλλει τις αρχικές συνθήκες της $x1v2$ σε όλες τις 3D προβολές της επιφάνειας τομής και το οποίο έχει ανάμειξη χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε ισχυρό χάος (strong chaos). Τα νέφη αυτά θα μελετηθούν με λεπτομέρειες στα επόμενα υποκεφάλαια (3.3.5 και 3.4.1).

3.3.3 Ασυμπτωτικές Καμπύλες

Στο υποκεφάλαιο αυτό μελετάμε την μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων οι οποίες σχετίζονται με τις απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της οικογένειας x_{1u2} . Οι καμπύλες αυτές υπολογίζονται παίρνοντας πολλές αρχικές συνθήκες, οι οποίες είναι πολύ κοντά στην περιοδική τροχιά, στην κατεύθυνση του ασταθούς ή ευσταθούς ιδιοδιανύσματος και τις ολοκληρώνουμε κατά την ορθή (ασταθείς ασυμπτωτικές καμπύλες) ή ανάδρομη φορά (ευσταθείς ασυμπτωτικές καμπύλες) του χρόνου. Η περίπτωση που εξετάζουμε είναι για $E_j = -4.66$. Έχουμε ήδη μελετήσει την δομή του φασικού χώρου στην γειτονιά αυτής της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Οι αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0)$ της περιοδικής τροχιάς έχουν δοθεί στο 3.3.1. Για να υπολογίσουμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες της ασταθούς πολλαπλότητας χρειάζεται να υπολογίσουμε το ασταθές ιδιοδιάνυσμα για την περιοδική τροχιά που εξετάζουμε. Αυτό γίνεται ως εξής: Βρίσκουμε, μέσω των σχέσεων (65) (υποκεφάλαιο 1.1.6), την πραγματική ιδιοτιμή του μονόδρομου πίνακα που είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου $\lambda = 1.63536$ και υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοτιμή $(x_1, \dot{x}_1, z_1, \dot{z}_1) = (-0.0011989, -0.00109617, -0.0459267, 0.998943)$. Οι αρχικές συνθήκες $(x_2, \dot{x}_2, z_2, \dot{z}_2)$ που χρησιμοποιήσαμε είναι της μορφής:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_0 + cx_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_0 + c\dot{x}_1 \\ z_2 &= z_0 + cz_1 \\ \dot{z}_2 &= \dot{z}_0 + c\dot{z}_1\end{aligned}\tag{95}$$

Πρώτα υπολογίζουμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες για $c < 0$. Θα καλούμε το μέρος αυτό της πολλαπλότητας ως μέρος A. Το πλέγμα αρχικών συνθηκών που χρησιμοποιήσαμε αποτελείται από 10^4 σημεία (για $-10^{-3} \leq c \leq -10^{-7}$ με βήμα 10^{-7}). Για κάθε σημείο του πλέγματος υπολογίσαμε 50 σημεία στην επιφάνεια τομής. Το βασικό κριτήριο για την επιλογή του αριθμού των σημείων και των τιμών των αποκλίσεων των αρχικών συνθηκών από αυτές της περιοδικής τροχιάς είναι η παραμονή των σημείων επί των ασυμπτωτικών καμπύλων με καλή ακρίβεια. Ο μονόδρομος πίνακας διατηρεί την συμπλεκτικότητα του (η οριζουσα του ίση με την μονάδα) με ακρίβεια της τάξης του 10^{-6} .

Στο Σχ. 94 παρατηρούμε τα πρώτα 50 σημεία του μέρους A της ασταθούς πολλαπλότητας στον (x, \dot{x}, z) υπόχωρο της 4D επιφάνειας τομής. Τα πρώτα 2

σημεία είναι πολύ κοντά στην περιοδική τροχιά. Μετά, διακρίνουμε το τρίτο σημείο στην επιφάνεια τομής (το οποίο υποδεικνύεται με ένα βέλος). Τα επόμενα 13 σημεία ακολουθούν την κατεύθυνση των μαύρων βελών και σχηματίζουν έναν βρόχο, επιστρέφοντας πίσω στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς. Κατόπιν, το 16ο, όσο και τα επόμενα 7 σημεία, παραμένουν πολύ κοντά στη περιοδική τροχιά. Από το 24ο σημείο και για τα επόμενα 14 σημεία έχουμε άλλο ένα βρόχο, ακολουθώντας την κατεύθυνση η οποία υποδεικνύεται από τα βέλη. Τα τελευταία 12 σημεία είναι πάλι κοντά στην περιοδική τροχιά. Με αυτό τον τρόπο τα σημεία σχηματίζουν μία επιφάνεια σχήματος διπλού βρόχου όπως στο Σχ. 89. Ένας παρόμοιος τρόπος ακολουθείται από τα σημεία για να γεμίσουν μία κυκλική κορδέλα όμοια με αυτή του Σχ. 90 στη 3D προβολή (\dot{x}, z, \dot{z}) . Όπως στα Σχ. 89 και 90 το χρώμα στις ασυμπτωτικές καμπύλες μεταβάλλεται ομαλά. Η 4D μορφολογία είναι όμοια με αυτή της τροχιάς “u”.

Στη συνέχεια υπολογίσαμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες για $c > 0$ στο πλέγμα αρχικών συνθηκών που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό των ασυμπτωτικών καμπύλων. Το μέρος αυτό της ασταθούς πολλαπλότητας το ονομάσαμε μέρος B. Το σύνολο των αρχικών συνθηκών που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του μέρους B αποτελείται από 2×10^4 αρχικές συνθήκες (για $c = 10^{-6} \leq c \leq 2 \times 10^{-2}$ με βήμα 10^{-6}). Για κάθε αρχική συνθήκη υπολογίσαμε 20 σημεία. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας περιελάσσονται γύρω από το σημείο της περιοδικής τροχιάς της $x1u2$ για τα πρώτα 60 σημεία του πλέγματος αρχικών συνθηκών στον (x, \dot{x}, z) υπόχωρο της 4D επιφάνειας τομής (Σχ. 95). Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η ασυμπτωτική καμπύλη έχει ομοιόμορφη μεταβολή χρώματος από γαλάζιο σε κόκκινο, ακολουθώντας την κατεύθυνση των διαδοχικών αριθμημένων βελών (Σχ. 95). Για περισσότερες αρχικές συνθήκες (400) οι ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B ταλαντώνονται στην (x, \dot{x}, z) προβολή (Σχ. 96a). Τελικά (για 2×10^4 αρχικές συνθήκες) οι ασυμπτωτικές καμπύλες γεμίζουν περίπου τον χώρο $(x_1, x_2) \times (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \times (z_1, z_2) = (0.025, 0.05) \times (-0.08, 0.08) \times (-0.4, 0.4)$ (Σχ. 96b) καλύπτοντας μία μεγάλη περιοχή της (x, \dot{x}, z) 3D προβολής. Το σχήμα γίνεται περίπλοκο.

Όπως στην περίπτωση των τροχιών που μελετήσαμε στα υποκεφάλαια 3.3.1 και 3.3.2, μελετάμε και τις ασυμπτωτικές καμπύλες συνδυάζοντας μερικές 3D προβολές στις οποίες τα σημεία χρωματίζονται σύμφωνα με την τιμή τους στην τέταρτη διάσταση. Χρησιμοποιώντας την (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή και χρωματίζοντας τα σημεία σύμφωνα με την x τιμή τους οι ασυμπτωτικές καμπύλες διαγράφονται με τον παρακάτω τρόπο:

Στο Σχ. 97 παρατηρούμε ότι τα πρώτα 400 σημεία του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας (για 20 αρχικές συνθήκες) σχηματίζουν μία ασυμπτωτική

καμπύλη η οποία ταλαντώνεται στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) της 4D επιφάνειας τομής. Κατά μήκος των ασυμπτωτικών καμπύλων η κατανομή του χρώματος είναι ομοιόμορφη (από κόκκινο σε μπλε). Αυτό σημαίνει ότι η ασυμπτωτική καμπύλη είναι μία 4D καμπύλη. Για περισσότερα σημεία οι ταλαντώσεις γίνονται πιο πολύπλοκες αλλά πάλι έχουμε ομαλή μεταβολή χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι οι ταλαντώσεις των ασυμπτωτικών καμπύλων που είχε υπολογίσει ο Magnenat (Magnenat 1982) σε 2D προβολές υπάρχουν στον 4D χώρο.

Οι ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας, για 400 αρχικές συνθήκες απεικονίζονται στο Σχ. 98a. Μετά από μία ταλάντωση στην αριστερή πλευρά του Σχ. 98a παρατηρούμε μερικές ταλαντώσεις στη δεξιά πλευρά. Οι ταλαντώσεις τώρα καταλαμβάνουν μία μεγαλύτερη περιοχή του χώρου από αυτές που είδαμε στην προηγούμενη περίπτωση (για 20 αρχικές συνθήκες) και εκτείνονται σε μεγαλύτερο διάστημα στην \dot{z} κατεύθυνση στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) (Σχ. 98a). Οι ασυμπτωτικές καμπύλες, για 20000 αρχικές συνθήκες, γεμίζουν μία επιφάνεια σχήματος Θ στραμμένου κατά 90° (Σχ. 98b) στην (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή.

Οι ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας, γεμίζουν με πυκνό τρόπο τον διαθέσιμο χώρο στους 2D υπόχωρους της επιφάνειας τομής εκτός από την περίπτωση του 2D υπόχωρου (z, \dot{z}) . Σε αυτή την προβολή (Σχ. 99) βλέπουμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας να ξεκινάνε από το σημείο της περιοδικής τροχιάς κατά μήκος της ασταθούς ιδιοδιεύθυνσης (βέλος 1) και μετά ακολουθούν τα τόξα τα οποία υποδεικνύονται από τα βέλη 2,3,4,5 και 6. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες ταλαντώνονται κατά μήκος μίας κατεύθυνσης κάθετης στην ευσταθή ιδιοδιεύθυνση.

Το μέρος B της ασταθούς πολλαπλότητας καταλαμβάνει έναν όγκο στην 4D επιφάνεια τομής ο οποίος περιέχεται στον χώρο $(x_1, x_2) \times (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \times (z_1, z_2) \times (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = (0.025, 0.05) \times (-0.08, 0.08) \times (-0.4, 0.4) \times (-1, 1)$.

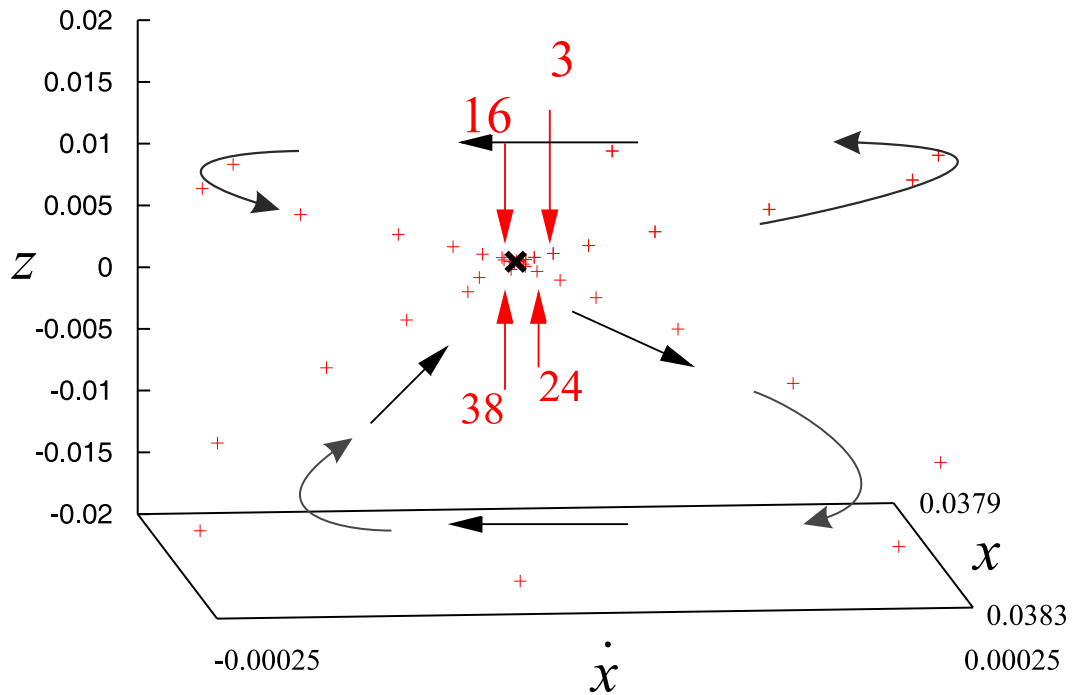
Η μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων που υπολογίσαμε για την περίπτωση της ευσταθούς πολλαπλότητας είναι όμοια με αυτή των ασυμπτωτικών καμπύλων της ασταθούς πολλαπλότητας. Πιο κάτω περιγράφουμε την μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων για τις διάφορες τιμές της ενέργειας στην περιοχή U (απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές).

Πρώτα μελετήσαμε τις αναλλοίωτες πολλαπλότητες στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών για τιμές της ενέργειας E_j από -4.7 ως -4.62 . Στις περιπτώσεις αυτές οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες έχουν πάλι δύο μέρη.

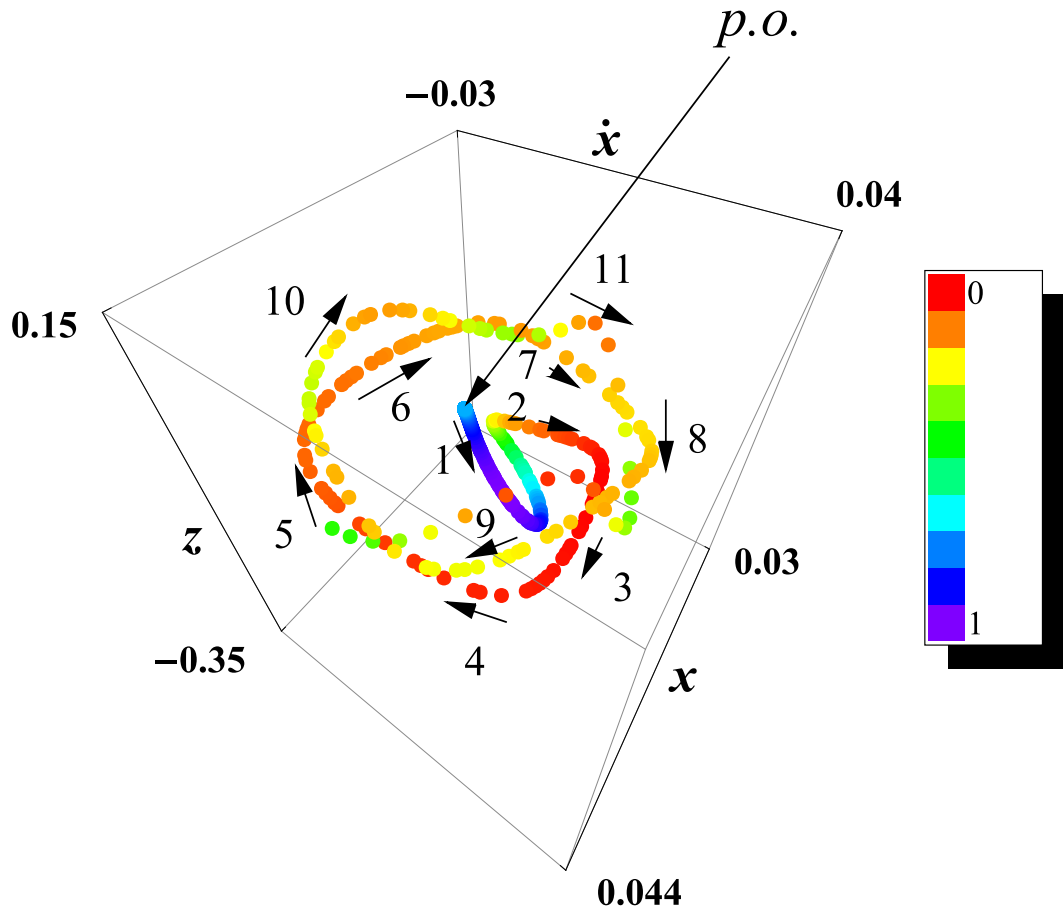
Καθώς η ενέργεια αυξάνεται παρατηρούμε ότι, για τιμές της ενέργειας μεγαλύτερες από $E_j = -4.66$, οι ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους A σχηματίζουν μία κορδέλα, όπως η επιφάνεια σχήματος διπλού βρόχου στον 3D υπόχωρο

(x, \dot{x}, z) του σχήματος 89. Όμως, υπάρχουν δύο διαφορές στην μορφολογία τους. Η πρώτη διαφορά έγκειται στην παραμόρφωση των λοβών των επιφανειών σχήματος διπλού βρόχου (το παράδειγμα στο Σχ. 100 είναι για $E_j = -4.63$), όπου οι βρόχοι έχουν γίνει πολύ μεγάλοι. Μία δεύτερη διαφορά είναι ότι τα σημεία περιελίσσονται γύρω από την περιοδική τροχιά (όπως τα σημεία στο Σχ. 95) όταν την προσεγγίζουν. Το Σχ. 100 δείχνει την εξέλιξη της καμπύλης στην περίπτωση αυτή. Επιπρόσθετα, όσο αυξάνεται η ενέργεια, οι ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους A σχηματίζουν ξανά κυκλικές κορδέλες στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) , όπως στο Σχ. 90. Η αύξηση της ενέργειας προκαλεί ταλαντώσεις των ασυμπτωτικών καμπύλων του μέρους A, στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) .

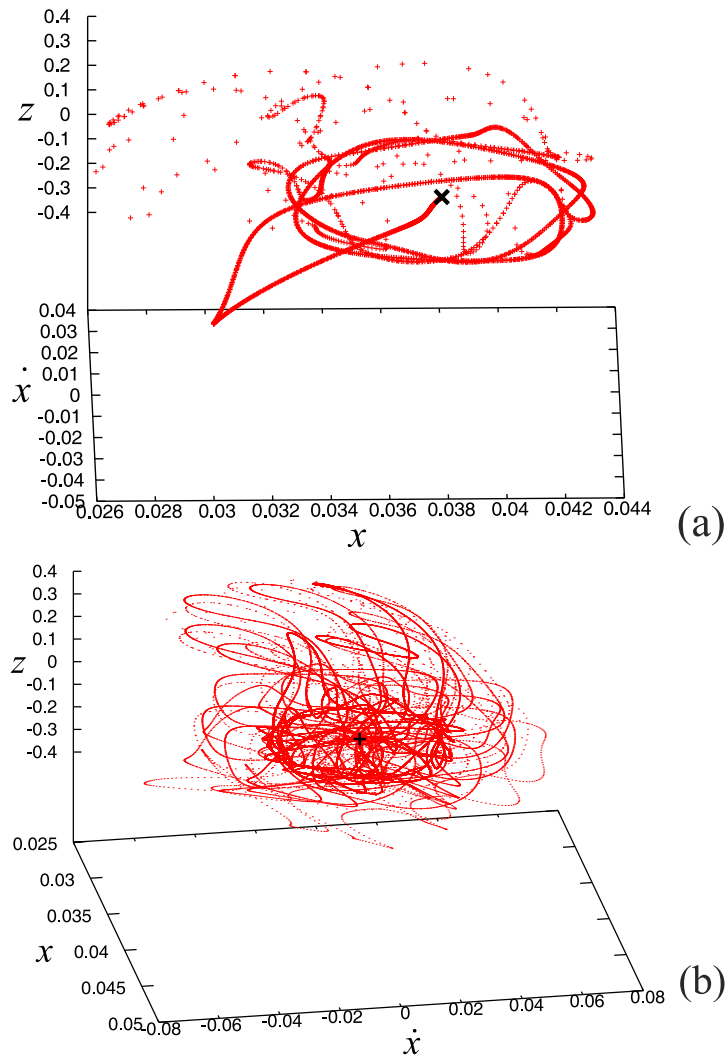
Στο διάστημα $-4.61 \leq E_j \leq -3.41$ οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες δεν έχουν δύο μέρη. Κατά μήκος και των δύο διευθύνσεων ($c > 0$ και $c < 0$) οι ασυμπτωτικές καμπύλες έχουν την ίδια μορφολογία. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες είναι παρόμοιες με τις ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B της ασταθούς αναλλοίωτης πολλαπλότητας που υπολογίσαμε για $E_j = -4.66$ (η περίπτωση που περιγράψαμε προηγουμένως).



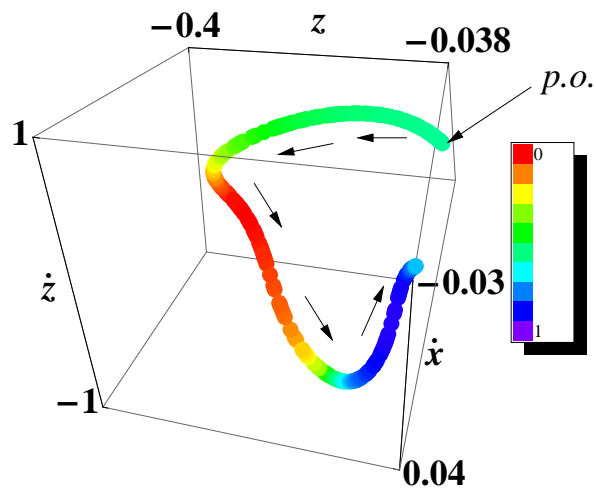
Σχήμα 94: Τα πρώτα 50 σημεία στην επιφάνεια τομής μίας αρχικής συνθήκης με $c = -10^{-3}$ στο μέρος A της ασταθούς πολλαπλότητας στην (x, \dot{x}, z) προβολή. Η περιοδική τροχιά υποδεικνύεται με ένα μαύρο σύμβολο \times . Τα κόκκινα βέλη δείχνουν το 3ο, 16ο, 24ο και το 38ο σημείο. Τα σημεία στην επιφάνεια τομής (με κόκκινους σταυρούς) ακολουθούν τις κατευθύνσεις των μαύρων βελών. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (78^\circ, 84^\circ)$.



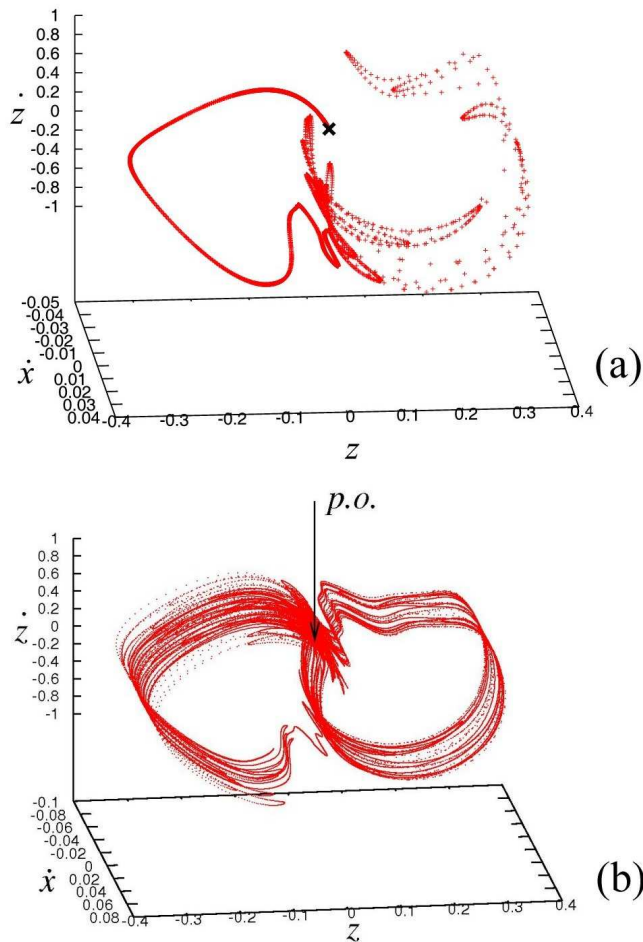
Σχήμα 95: Η 4D επιφάνεια τομής για τις πρώτες 60 αρχικές συνθήκες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας. Τα σημεία απεικονίζονται στον (x, \dot{x}, z) υπόχωρο και χρωματίζονται ανάλογα με την z τιμή τους. Τα αριθμημένα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση των σημείων κατά μήκος της πολλαπλότητας. Η θέση της περιοδικής τροχιάς (p.o.) υποδεικνύεται με ένα βέλος. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (56^\circ, 22^\circ)$.



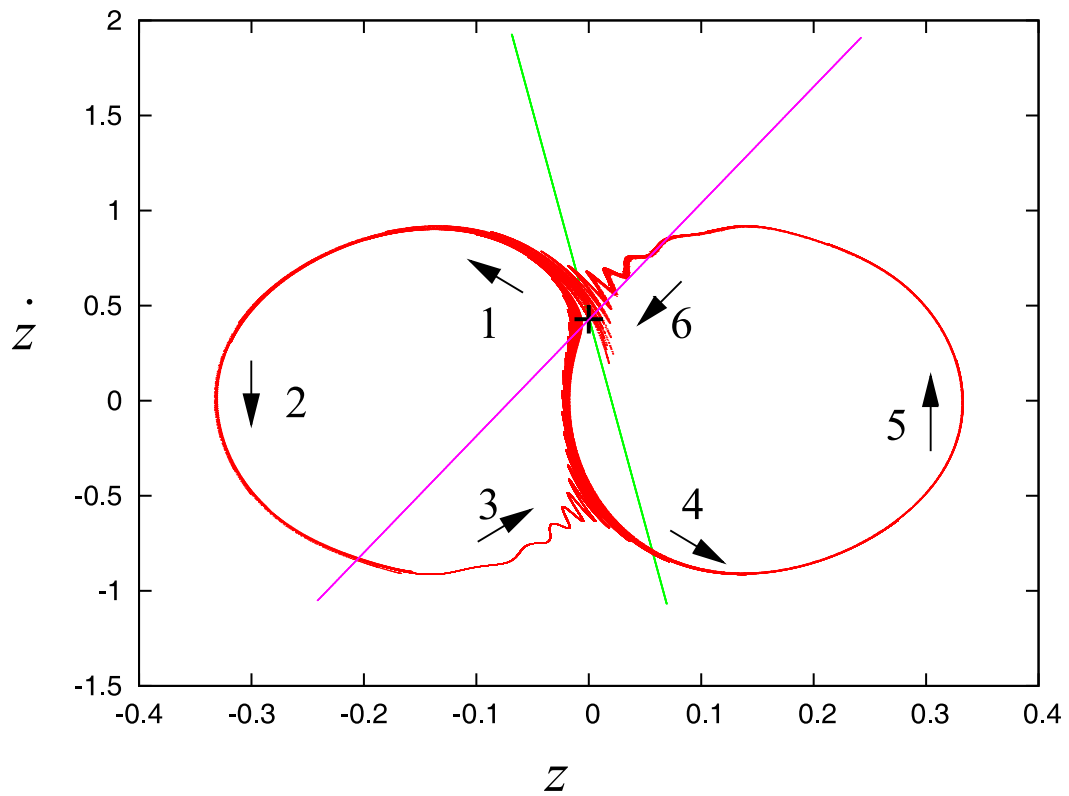
Σχήμα 96: Το μέρος B της ασταθούς πολλαπλότητας στον 3D υπόχωρο (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής. (a) για τις πρώτες 400 αρχικές συνθήκες και 20 σημεία για κάθε μία (σύνολο 8000 σημεία). Η περιοδική τροχιά υποδεικνύεται με ένα μαύρο 'x' σύμβολο. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (57^\circ, 159^\circ)$. (b) για τις πρώτες 2×10^4 αρχικές συνθήκες και 20 σημεία για κάθε μία (σύνολο 4×10^5 σημεία). Η περιοδική τροχιά υποδεικνύεται με ένα μαύρο '+'. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (56^\circ, 80^\circ)$.



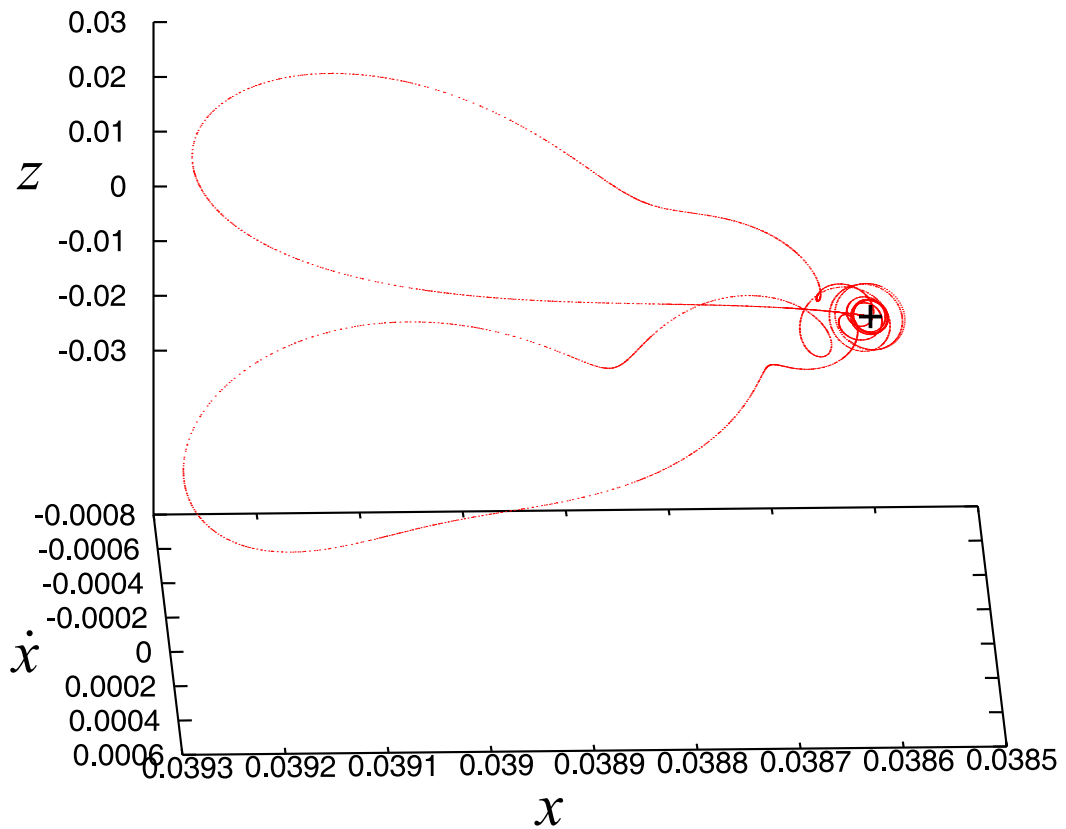
Σχήμα 97: Η 4D επιφάνεια τομής για τις πρώτες 20 αρχικές συνθήκες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας (και 20 σημεία για κάθε μία - σύνολο 400 σημεία). Τα σημεία απεικονίζονται στον (\dot{x}, z, \dot{z}) υπόχωρο και χρωματίζονται ανάλογα με την x τιμή τους. Το βέλος “p.o.” δείχνει την θέση της περιοδικής τροχιάς. Τα σημεία σχηματίζουν ένα βρόχο ακολουθώντας την κατεύθυνση των μαύρων βελών. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (30^\circ, 45^\circ)$.



Σχήμα 98: Οι ασυμπτωτικές καμπύλες στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) . (a) Οι πρώτες 400 αρχικές συνθήκες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας και 20 σημεία για κάθε μία (σύνολο 8000 σημεία). Η περιοδική τροχιά συμβολίζεται με ένα μαύρο \times . Μετά την δημιουργία ενός βρόχου στην αριστερή πλευρά του σχήματος οι ασυμπτωτικές καμπύλες εκτελούν μερικές ταλαντώσεις στο κεντρικό και δεξιό μέρος του σχήματος. Οι \dot{z} τιμές της καμπύλης εκτείνονται περίπου σε ένα εύρος $\Delta\dot{z} = 2$. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (68^\circ, 85^\circ)$. (b) για 2×10^4 αρχικές συνθήκες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας και 20 σημεία για κάθε μία (σύνολο 4×10^5 σημεία). Η θέση της περιοδικής τροχιάς (p.o.) υποδεικνύεται με ένα βέλος. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (66^\circ, 84^\circ)$.



Σχήμα 99: Η 2D προβολή (z, \dot{z}) του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας στην επιφάνεια τομής για 2×10^4 αρχικές συνθήκες και 20 σημεία για κάθε μία (σύνολο 4×10^5 σημεία). Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση που ακολούθησαν τα σημεία. Οι ευσταθής και ασταθής ιδιοδιευθύνσεις απεικονίζονται με μία ροζ και μία πράσινη ευθεία γραμμή αντίστοιχα. Η περιοδική τροχιά υποδεικνύεται με ένα μαύρο '+' σύμβολο.



Σχήμα 100: Η (x, \dot{x}, z) 3D προβολή του μέρους A της ασταθούς πολλαπλότητας για $E_j = -4.63$. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες υπολογίζονται για 450 αρχικές συνθήκες και υπολογίζουμε 10 σημεία στην επιφάνεια τομής για κάθε αρχική συνθήκη (για $-4.5 \times 10^{-4} \leq c \leq -10^{-6}$ με βήμα 10^{-6} - σύνολο 4500 σημεία). Η περιοδική τροχιά υποδεικνύεται με ένα μαύρο '+' σύμβολο. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (64^\circ, 178^\circ)$.

3.3.4 Φαινόμενο Κολλητικότητας-Stickiness

Το φαινόμενο της κολλητικότητας το συναντήσαμε στις χαοτικές περιοχές γύρω από τις απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές (υποκεφάλαια 3.3.1 και 3.3.2). Είναι η πρώτη φορά που μελετάται το φαινόμενο κολλητικότητας στην γειτονιά απλά ασταθών περιοδικών τροχιών ενός 3D αυτόνομου χαμιλτονιανού συστήματος. Όπως ξέρουμε από την τροχιακή συμπεριφορά σε 2D αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα το φαινόμενο της κολλητικότητας αναφέρεται σε τροχιές που ‘κολλάνε’ τόσο σε αναλλοίωτους τόρους όσο και στις ασταθείς αναλλοίωτες πολλαπλότητες για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα (Contopoulos & Harsoula 2008, 2010a). Εμείς μελετάμε το φαινόμενο αυτό στις 4D επιφάνειες τομής του 3D συστήματός μας. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε μια αντιπροσωπευτική περίπτωση μίας περιοδικής τροχιάς στην περιοχή U της οικογένειας $x1u2$ για $E_j = -4.66$.

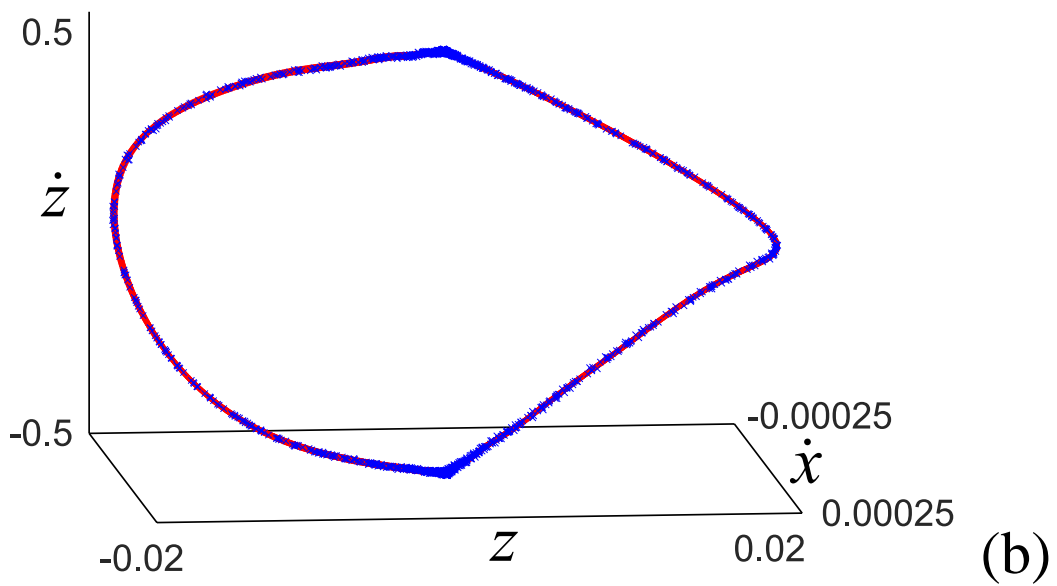
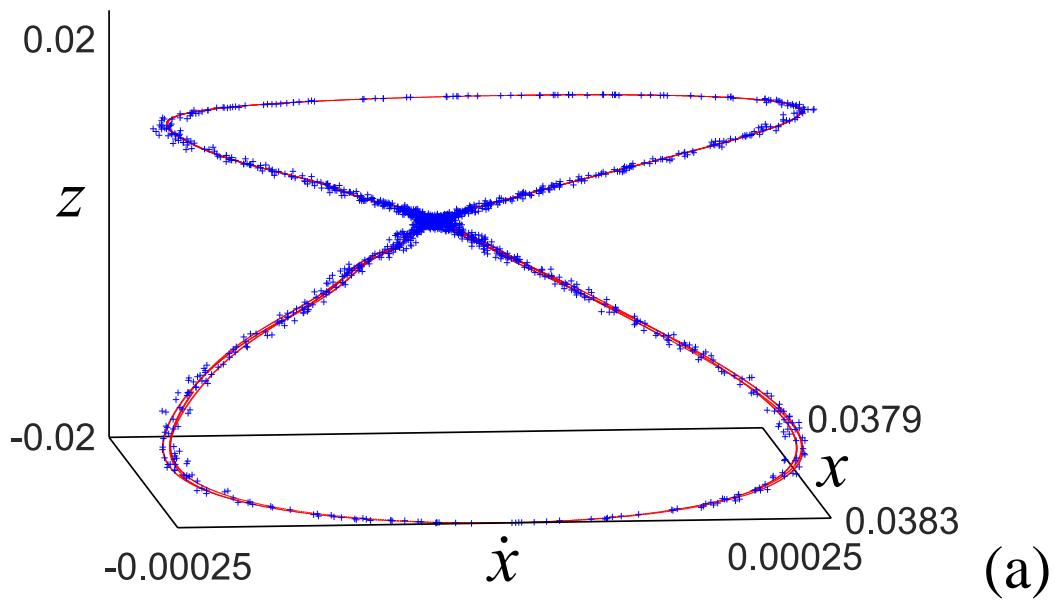
Όπως αναφέραμε στο υποκεφάλαιο 3.3.2 αν προσθέσουμε μία αρνητική διαταραχή στην \dot{z} διεύθυνση ή μία μικρή θετική διαταραχή στην \dot{x} διεύθυνση (για $10^{-6} \leq \Delta\dot{x} < 2 \times 10^{-4}$) στις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς $x1u2$, οι τροχιές έχουν παρόμοια δυναμική συμπεριφορά με την τροχιά “u” (υποκεφάλαιο 3.3.1). Συγκρίνοντας την τροχιακή συμπεριφορά όλων των τροχιών που έχουν μία μορφολογία σαν αυτή της “u”, με την μορφολογία των αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων συμπεραίνουμε ότι οι αρχικές συνθήκες της “u” είναι πολύ κοντά στην ασταθή ιδιοδιεύθυνση της πολλαπλότητας. Τα σημεία της “u” και οι αναλλοίωτες καμπύλες περιελίσσονται γύρω από τους περιστροφικούς τόρους που βρίσκονται γύρω από τη x_1 . Τα σημεία της “u” ακολουθούν τις ασυμπτωτικές καμπύλες και ‘κολλάνε’ στην περιοχή που υπαγορεύονται από τις πολλαπλότητες. Για παράδειγμα βλέπουμε στα σχήματα 101a και 101b ότι τα πρώτα 2580 σημεία της τροχιάς “u” στην επιφάνεια τομής (απεικονίζονται με μπλε χρώμα) κολλάνε στις ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους A της ασταθούς πολλαπλότητας (απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα). Ο αριθμός των σημείων στην επιφάνεια τομής αντιστοιχεί σε ένα χρόνο 124 περιόδων περιστροφής του συστήματός μας, ο οποίος είναι τεράστιος για συστήματα της Γαλαξιακής Δυναμικής (≈ 5.93 φορές την ηλικία του σύμπανος-Hubble time).

Κατόπιν, για ένα μεγαλύτερο αριθμό σημείων στην επιφάνεια τομής, τα σημεία αποχωρούν από το μέρος A της ασταθούς πολλαπλότητας. Η σχέση μεταξύ των σημείων της “u” και της ασταθούς πολλαπλότητας μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα στην (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή. Όπως μπορούμε να δούμε σε αυτή την προβολή στο Σχ. 102 τα πρώτα 1000 σημεία στην επιφάνεια τομής, μετά την αναχώρηση των σημείων από το μέρος A της ασταθούς πολλαπλότητας δηλαδή μετά τα πρώτα 2580 σημεία, κολλάνε πλησίον των ασυμπτωτικών καμπύλων του μέ-

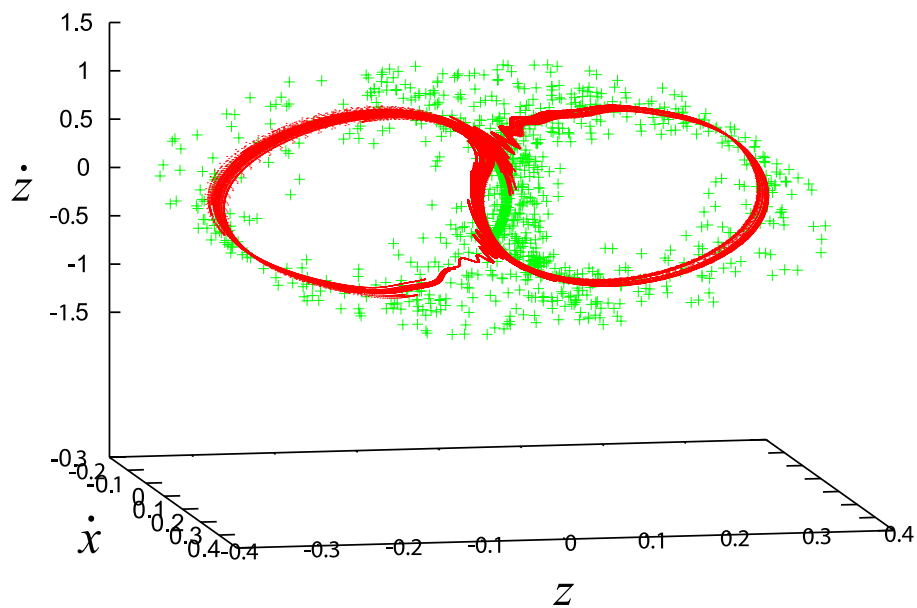
ρους B της ασταθούς πολλαπλότητας (Σχ. 102). Ο αριθμός αυτός των σημείων στην επιφάνεια τομής αντιστοιχεί σε ένα χρόνο 48 περιόδων περιστροφής του συστήματος μας. Αυτός είναι ο μηχανισμός που δημιουργεί στον φασικό χώρο τους λοβούς που δημιουργούν το σχήμα Θ και το δαχτυλίδι που παρατηρούμε στην (z, \dot{z}) προβολή στο Σχ. 92. Οι περιοχές αυτές δημιουργούνται λόγω του φαινομένου κολλητικότητας γύρω από τους περιστροφικούς τόρους των $x1v1$ και $x1v1'$. Όμως αμέσως μετά την αναχώρηση των σημείων από τους λοβούς του Θ τα σημεία συνεχίζουν να μένουν κοντά στους περιστροφικούς τόρους των $x1v1$ και $x1v1'$, επειδή παγιδεύονται στην περιοχή κοντά στην αλυσίδα των οκτώ νησίδων ευστάθειας που εμφανίζονται με μαύρες γραμμές στο Σχ. 92. Η προβολή του σχήματος 92 θυμίζει αυτό που βρίσκουμε σε 2D χαμιλτονιανά συστήματα κοντά στην τελευταία KAM καμπύλη (Contopoulos 2002 p. 213-219). Αυτό που πρέπει να έχουμε κατά νου είναι ότι στις 4D επιφάνειες τομής του 3D χαμιλτονιανού συστήματος τα σημεία μπορούν να βρίσκονται και στις δύο πλευρές των τόρων μέσω των παραπάνω διαστάσεων (4 διαστάσεων και όχι 2 διαστάσεων όπως σε 2D συστήματα).

Στο υποκεφάλαιο 3.3.2 αναφέραμε ότι για τις τιμές της διαταραχής του πίνακα 1, οι τροχιές πάνε κατευθείαν γύρω από τους περιστροφικούς τόρους των $x1v1$ και $x1v1'$. Όλες αυτές οι τροχιές έχουν μία κολλοειδή συμπεροφορά στα άκρα των 4D νησίδων ευστάθειας των $x1v1$ και $x1v1'$, τις οποίες μπορούμε να δούμε καλύτερα στην 3D προβολή (\dot{x}, z, \dot{z}) και την 2D προβολή (z, \dot{z}) . Σε όλες τις άλλες προβολές οι περιοχές κολλητικότητας διακρίνονται ως πυκνές περιοχές εμβαπτισμένες σε νέφη σημείων. Η (\dot{x}, z, \dot{z}) προβολή έχει το πλεονέκτημα ότι για ένα εύρος οπτικών γωνιών μόνο λίγα σημεία από το νέφος προβάλλονται στις περιοχές, οι οποίες φαίνονται 'άδειες' (ουσιαστικά καταλαμβάνονται από περιστροφικούς τόρους γύρω από τις ευσταθείς τροχιές).

Η μελέτη της δυναμικής στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών, μας έδειξε ότι οι χαρακτηριστικές δομές διπλού βρόχου οι οποίες είχαν ήδη βρεθεί από τους Magnenat (1982) και Patsis and Zachilas (1994), όσο και οι Θ δομές και τα δαχτυλίδια στο Σχ. 92, σχετίζονται με το φαινόμενο κολλητικότητας σε περιστροφικούς τόρους των ευσταθών περιοδικών τροχιών των οικογενειών που υπάρχουν στο σύστημα. Τα σημεία ακολουθούν τις πολλαπλότητες οι οποίες περιελίσσονται γύρω από τους τόρους. Επιπλέον θα ήταν πιο ακριβές να πούμε ότι οι δομές αυτές σχετίζονται κυρίως με τις $U \rightarrow S$ μεταβάσεις, καθώς δεν απαντώνται σε τιμές της ενέργειας μακριά από τα σημεία μετάβασης καθώς και μετά από μία $DU \rightarrow U$ μετάβαση.



Σχήμα 101: Τα πρώτα 2580 σημεία της τροχιάς “u” στην επιφάνεια τομής (με μπλε χρώμα) τα οποία κολλάνε στις ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους A της ασταθούς πολλαπλότητας (με κόκκινο χρώμα): (a) στον 3D υπόχωρο (x, \dot{x}, z) . Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (78^\circ, 84^\circ)$. (b) στον 3D υπόχωρο (\dot{x}, z, \dot{z}) . Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (74^\circ, 82^\circ)$.



Σχήμα 102: Τα πρώτα 1000 σημεία της τροχιάς “u” στην επιφάνεια τομής, τα οποία απεικονίζονται με πράσινα ‘+’ σύμβολα, μετά τα 2580 πρώτα σημεία δηλαδή μετά την αποχωρήσή των συμβόλων ‘+’ από το μέρος A της ασταθούς πολλαπλότητας στην 3D προβολή (\dot{x}, z, \dot{z}) . Τα σημεία αυτά κολλάνε κοντά στις ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας (με κόκκινο χρώμα). Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (78^\circ, 79^\circ)$.

3.3.5 Διπλή αστάθεια $x1v2$

Στα υποκεφάλαια 3.3.5 και 3.3.6 μελετάμε την δυναμική στη γειτονιά των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών. Η διπλή αστάθεια σε περιστρεφόμενα γαλαξιακά δυναμικά παρουσιάζεται σε μεγάλες τιμές της ενέργειας. Στο τροχιακό δέντρο της x_1 (Patsis et al. 2002a), η διπλή αστάθεια παρουσιάζεται όταν μία 3D ευσταθής διακλάδωση της x_1 γίνεται απλά ασταθής και μετά διπλά ασταθής ή μία 3D απλά ασταθής διακλάδωση της x_1 γίνεται διπλά ασταθής. Συνήθως βρίσκουμε διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές για τιμές της ενέργειας για τις οποίες οι τροχιές στην γειτονιά τους είναι τροχιές διαφυγής. Για αυτό η επιλογή των περιπτώσεων που μελετήθηκαν έχει ιδιαίτερη σημασία. Πρώτα θεωρούμε την δυναμική της $x1v2$ στην περιοχή των περιοδικών τροχιών της DU (υποκεφάλαιο 3.3.5). Μετά για να εξετάσουμε την εξάρτηση της δυναμικής συμπεριφοράς των τροχιών από την τιμή της ενέργειας τους, μελετήσαμε επίσης την δομή του φασικού χώρου κοντά σε διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της οικογένειας του z -άξονα. Αυτές οι περιοδικές τροχιές βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής z σε περιστρεφόμενα τριαξονικά γαλαξιακά δυναμικά όπως το δικό μας δυναμικό (Heisler, Merritt and Schwarzschild 1982).

Ερχόμαστε τώρα στη μελέτη της δομής του φασικού χώρου στην περιοχή διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x1v2$. Αρχικά επιλέγουμε να μελετήσουμε την περίπτωση για $E_j = -3.38$. Η περιοδική τροχιά στην περίπτωση αυτή έχει αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.088998826, 0, 0, 2.3614474)$. Προσθέτοντας ακόμα και μία πολύ μικρή διαταραχή (π.χ. $\Delta x = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, \dots$) στις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς, σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, βρίσκουμε νέφη σημείων σε όλες τις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής (Σχ. 103). Αυτά είναι 4D νέφη αφού βρίσκουμε διάσπαρτα σημεία σε όλες τις 3D προβολές, τα οποία δείχνουν ανάμειξη χρώματος αν εφαρμόσουμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής. Τα νέφη αυτά καταλαμβάνουν έναν όγκο στην 4D επιφάνεια τομής, ο οποίος περιέχεται στο χώρο $(x_1, x_2) \times (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \times (z_1, z_2) \times (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = (-4, 4) \times (-2.5, 2.5) \times (-2.5, 2.5) \times (-3, 3)$.

Όπως και στην περίπτωση της απλής αστάθειας έτσι και εδώ διερευνούμε την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της περιοχής DU της οικογένειας $x1v2$ από $-3.41 < E_j < -2.3$, για μία σταθερή τιμή της διαταραχής π.χ. $\Delta x = 10^{-4}$. Στις περιπτώσεις αυτές βρίσκουμε πάλι 4D νέφη όπως στην περίπτωση της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_j = -3.38$.

Επίσης μελετήσαμε τη μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων της ασταθούς πολλαπλότητας στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της περιοχής DU της οικογένειας $x1v2$. Παρουσιάζουμε αυτή τη μορφολογία στην

περιοχή της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_j = -3.38$. Ο υπολογισμός των ασυμπτωτικών καμπύλων είναι παρόμοιος με αυτόν των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών (υποκεφάλαιο 3.3.3). Η μόνη διαφορά είναι ότι έχουμε τώρα δύο ασταθή ιδιοδιανύσματα. Υπολογίζουμε μέσω των σχέσεων (65) του υποκεφαλαίου 1.1.6 τις δύο πραγματικές ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα οι οποίες βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου $\lambda_1 = 69.08801$ και $\lambda_2 = 1.74981$ και μετά υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Αυτά είναι $(x_1, \dot{x}_1, z_1, \dot{z}_1) = (0.0216618, 0.163481, -0.737238, 0.655198)$ και $(x_2, \dot{x}_2, z_2, \dot{z}_2) = (-0.831661, 0.523481, 0.0173103, 0.184412)$. Οι αρχικές συνθήκες $(x_3, \dot{x}_3, z_3, \dot{z}_3)$, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό των ασυμπτωτικών καμπύλων, είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned}x_3 &= x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_0 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 \\ z_3 &= z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 \\ \dot{z}_3 &= \dot{z}_0 + c_1 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2\end{aligned}\tag{96}$$

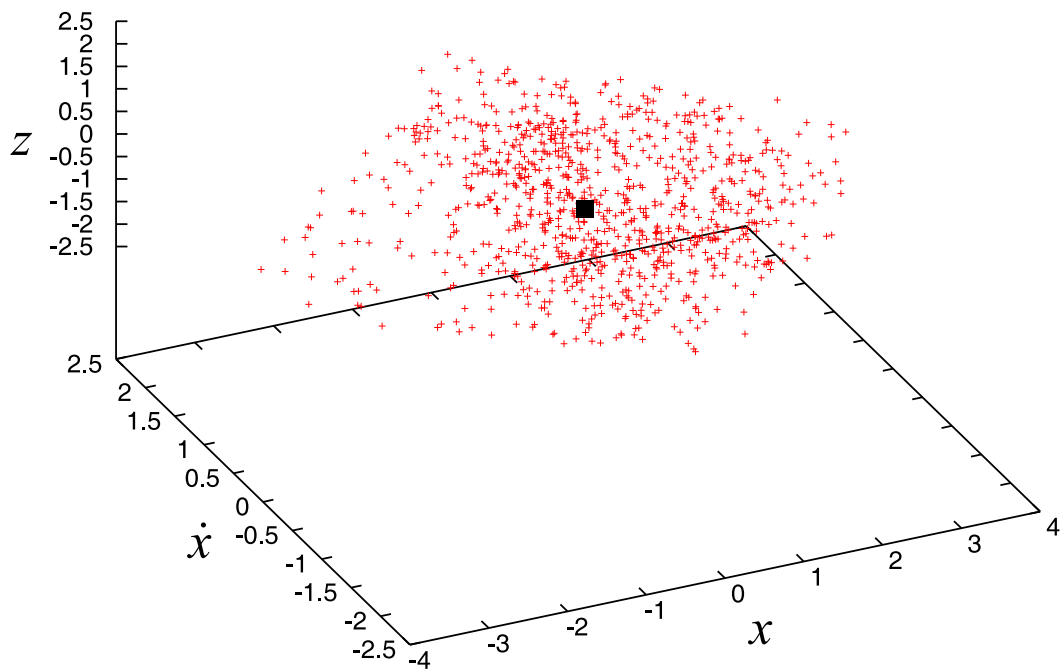
Υπολογίσαμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες, σε δύο περιπτώσεις τις οποίες ονομάσαμε “I” και “II” αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση διατηρήσαμε τη c_2 σταθερή και ίση με μηδέν και χρησιμοποιήσαμε τη c_1 σαν παράμετρο. Στην δεύτερη περίπτωση, διατηρήσαμε την $c_1 = 0$ και μεταβάλλαμε την c_2 . Στην περίπτωση “I” έχουμε πάρε τιμές $c_2 = 0$ και $10^{-7} \leq c_1 \leq 2 \times 10^{-4}$ με βήμα 10^{-7} (2000 αρχικές συνθήκες). Στην περίπτωση “II” πήραμε τιμές $c_1 = 0$ και μεταβάλλαμε την c_2 στο διάστημα $-1.35 \times 10^{-1} \leq c_2 \leq -10^{-5}$ με βήμα 10^{-5} (13500 αρχικές συνθήκες). Και στις δύο περιπτώσεις “I” και “II” υπολογίσαμε 3 σημεία στην επιφάνεια τομής για κάθε αρχική συνθήκη⁹. Για την παρουσίαση της μορφολογίας των ασυμπτωτικών καμπύλων χρησιμοποιούμε μόνο την 3D προβολή (x, \dot{x}, z) . Ο λόγος είναι ότι βρήκαμε από τα αριθμητικά μας πειράματα, ότι η μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων είναι παρόμοια στις άλλες 3D προβολές. Όπως αναμενόταν τα σημεία στην επιφάνεια τομής κατά μήκος των ασυμπτωτικών καμπύλων στην περίπτωση “I” (με την μεγάλη ιδιοτιμή λ_1) απομακρύνονται ταχύτερα από την περιοδική τροχιά από ότι τα τα σημεία στην επιφάνεια τομής κατά μήκος των ασυμπτωτικών καμπύλων στην περίπτωση “II” (με την μικρή ιδιοτιμή λ_2).

⁹Κατά την διάρκεια των υπολογισμών των ασυμπτωτικών καμπύλων, παρατηρήσαμε κενά σε μερικές περιοχές κατά μήκος τους. Για να συνδέσουμε αυτά τα κενά πήραμε περισσότερες αρχικές συνθήκες σε αυτές τις περιοχές.

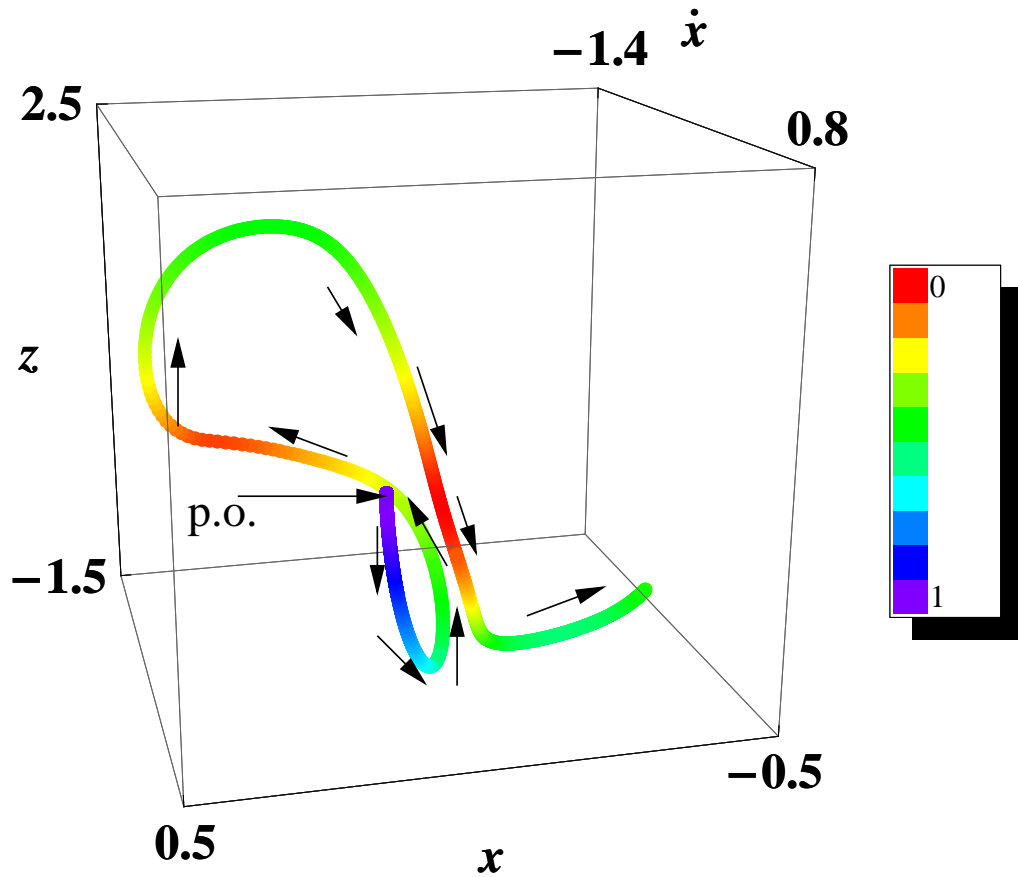
Στο Σχ. 104 παρατηρούμε ότι τα σημεία στην επιφάνεια τομής της ασταθούς πολλαπλότητας στην περίπτωση “I” απομακρύνονται από την περιοδική τροχιά στην κατεύθυνση των μαύρων βελών και σχηματίζουν ένα βρόχο στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής πίσω από την περιοδική τροχιά. Μετά τα σημεία προσεγγίζουν ξανά την περιοδική τροχιά αλλά με διαφορετικό χρώμα (κίτρινο) από ότι το αρχικό μέρος που ήταν μωβ. Στη συνέχεια τα σημεία σχηματίζουν ένα μεγάλο βρόχο πάνω από την περιοδική τροχιά, ενώ μετά γυρίζουν προς τα κάτω και τελικά κινούνται δεξιά, κατευθυνόμενα έξω από τα όρια του σχήματος. Επιπλέον παρατηρούμε μία ομοιόμορφη κατανομή χρώματος από μωβ σε μπλε, σε πράσινο, σε κίτρινο, σε πορτοκαλί, σε κόκκινο (αριστερά) κ.λ.π. Αυτό σημαίνει ότι αυτές οι ασυμπτωτικές καμπύλες είναι τετραδιάστατες καμπύλες. Στο Σχ. 105 συγκρίνουμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες για την περίπτωση “I” (μπλε χρώμα) και την περίπτωση “II” (κόκκινο χρώμα) οι οποίες ξεκινάνε κατά μήκος των ασταθών ιδιοδιευθύνσεων στις περιπτώσεις “I” και “II” αντίστοιχα. Όταν οι καμπύλες εκτρέπονται από τις ιδιοδιευθύνσεις σχηματίζουν βρόχους στον 3D υπόχωρο (x, \dot{x}, z) . Οι τροχιές κοντά σε αυτές τις καμπύλες παραμένουν πλησίον τους για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα (0.4 περιόδους περιστροφής του συστήματος μας) πριν απομακρυνθούν. Έπειτα από ένα σύντομο σχετικά χρονικό διάστημα οι τροχιές γεμίζουν με χαοτικό τρόπο μία μεγάλη περιοχή του χώρου, όπως μπορούμε να δούμε στο Σχ. 103.

Η μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων της ευσταθούς πολλαπλότητας είναι παρόμοια με αυτή των των ασυμπτωτικών καμπύλων της ασταθούς πολλαπλότητας. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της περιοχής DU, βρίσκουμε μία παρόμοια μορφολογία.

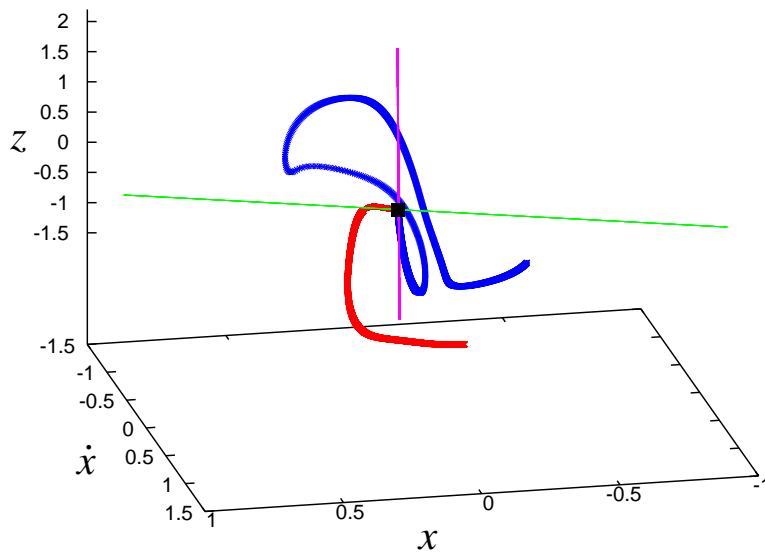
Αυτή η δυναμική συμπεριφορά είναι χαρακτηριστική για τις διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές των διακλαδώσεων της x_1 . Τέτοια συμπεριφορά όμως δεν συναντάται στην περιοχή όλων των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών που μελετήσαμε. Παρακάτω παρουσιάζουμε την δυναμική κοντά σε διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της οικογένειας του z -άξονα (υποκεφάλαιο 3.3.6) η οποία διαφοροποιείται σε σχέση με την δυναμική στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x_1 u_2$ την οποία παρουσιάσαμε στο παρόν υποκεφάλαιο.



Σχήμα 103: Το νέφος σημείων (για 900 σημεία στην επιφάνεια τομής), για $\Delta x = 10^{-4}$ διαταραχή στις αρχικές συνθήκες της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_j = -3.38$, στον 3D υπόχωρο (x, \dot{x}, z) της 4D επιφάνειας τομής. Η περιοδική τροχιά απεικονίζεται με ένα μικρό μαύρο κουτί στο κέντρο του σχήματος. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (47^\circ, 325^\circ)$.



Σχήμα 104: Οι ασυμπτωτικές καμπύλες της ασταθούς αναλλοίωτης πολλαπλότητας για 3 σημεία στην επιφάνεια τομής για 2000 αρχικές συνθήκες της ασταθούς πολλαπλότητας με $c_2 = 0$ (ένα σύνολο 6000 σημείων στην επιφάνεια τομής), στην περιοχή της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_j = -3.38$. Τα σημεία στην επιφάνεια τομής απεικονίζονται στον (x, \dot{x}, z) υπόχωρο και χρωματίζονται ανάλογα με την z τιμή τους. Η θέση της περιοδικής τροχιάς υποδεικνύεται με ένα βέλος με την ονομασία “p.o.”. Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση που έχουν τα σημεία στην επιφάνεια τομής για να σχηματίσουν τις ασυμπτωτικές καμπύλες. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (45^\circ, 180^\circ)$.



Σχήμα 105: Ο 3D υπόχωρος (x, \dot{x}, z) των ασυμπτωτικών καμπύλων της ασταθούς αναλλοίωτης πολλαπλότητας για τις περιπτώσεις “I” (μπλε χρώμα) και “II” (κόκκινο χρώμα), στην περιοχή της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_j = -3.38$ στην 4D επιφάνεια τομής. Οι δύο ασταθείς ιδιοδιεύθυνσεις που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις “I” και “II” απεικονίζονται με μία ροζ και πράσινη γραμμή αντίστοιχα. Η θέση της περιοδικής τροχιάς υποδεικνύεται με ένα μαύρο κουτί. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (63^\circ, 168^\circ)$. Η κίνηση κατά μήκος της μπλε γραμμής γίνεται πολύ ταχύτερα από την κίνηση κατά μήκος της κόκκινης γραμμής γιατί η ιδιοτιμή στην πρώτη περίπτωση είναι πολύ μεγαλύτερη.

3.3.6 Διπλή αστάθεια και τροχιές του z -άξονος

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι τροχιές της οικογένειας του z -άξονα βρίσκονται επί του άξονα z του συστήματος. Ως εκ τούτου, θεωρούμε την $z = 0$ επιφάνεια τομής με $\dot{z} > 0$. Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι αυτή η οικογένεια γίνεται διπλά ασταθής για ένα μεγάλο εύρος ενεργειών σε αργά περιστρεφόμενα τριαξονικά συστήματα (Martinet and de Zeeuw 1988, Patsis and Zachilas 1990). Διερευνήσαμε την ευστάθεια αυτής της οικογένειας του συστήματος μας για μία πολύ μικρή τιμή του $\Omega_b = 5 \times 10^{-6}$ (σε μονάδες του συστήματος μας) για να εκμεταλευτούμε αυτή την ιδιότητα της οικογένειας περιοδικών τροχιών του z -άξονος. Για την τιμή αυτή του Ω_b η οικογένεια του z -άξονα έχει μεγάλες περιοχές διπλής αστάθειας. Σε αυτή την περίπτωση, όσο μεταβάλλουμε την ενέργεια, η οικογένεια του z -άξονα για μεγάλες αρνητικές τιμές της E_j είναι ευσταθής και για $E_j = -6.7$ γίνεται απλά ασταθής. Στην μετάβαση αυτή έχουμε την διακλάδωση μίας νέας ευσταθούς οικογένειας περιοδικών τροχιών των ευσταθών ανώμαλων τροχιών (stable anomalous orbits-sao -Heisler et al 1982), και την συμμετρική της οικογένεια σε σχέση με το yz -επίπεδο. Στη συνέχεια η οικογένεια του z -άξονα, για $E_j = -5.836$, γίνεται διπλά ασταθής και παραμένει διπλά ασταθής για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας.

Στη (x, \dot{x}, y, \dot{y}) 4D επιφάνεια τομής οι αρχικές συνθήκες της οικογένειας του z -άξονα είναι $(0, 0, 0, 0)$. Για $E_j = -4.9$ μελετάμε την τροχιά, η οποία αποκλίνει από την περιοδική τροχιά του z -άξονος κατά $\Delta \dot{x} = 0.62$ στην \dot{x} διεύθυνση. Την τροχιά αυτή την αποκαλούμε “duz1”.

Στην (x, \dot{x}) προβολή παρατηρούμε ότι τα πρώτα 250 σημεία της “duz1” είναι κατανομήματα γύρω από την περιοδική τροχιά (μπλε σημεία στο Σχ. 106a). Τα σημεία αυτά δεν δείχνουν κάποια ιδιαίτερη δομή. Τα επόμενα 3950 σημεία δομούν ένα σχήμα οκταριού. Παρουσιάζουμε 950 από αυτά στο Σχ. 106a (κόκκινα). Στο ίδιο σχήμα οι περιοδικές τροχιές σημειώνονται με μαύρα σύμβολα. Στο κέντρο αυτού του οκταριού το σύμβολο \times υποδεικνύει τη θέση της περιοδικής τροχιάς της οικογένειας του z -άξονα, ενώ στην κεντρική περιοχή των δύο λοβών αυτής της δομής τα μαύρα σημεία (δεξιά και αριστερά) υποδεικνύουν την θέση της sao και της συμμετρικής της. Αυτά περιβάλλονται από τις προβολές των περιστροφικών τόρων γύρω από αυτές. Αν συνεχίσουμε την ολοκλήρωση της τροχιάς, βρίσκουμε ότι μετά από 4200 τομές τα σημεία διαχέονται και καταλαμβάνουν όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο (η (x, \dot{x}) προβολή δίνεται στο Σχ. 106b).

Από την μία έχουμε τη δημιουργία μίας δομής στις προβολές της επιφάνειας τομής. Από την άλλη τα σημεία τα οποία σχηματίζουν τη δομή σχήματος ‘ ∞ ’ του σχήματος 106a δεν βρίσκονται σε μία ομαλή 4D επιφάνεια. Η εφαρμογή

της μεθόδου χρώματος και περιστροφής δείχνει ότι έχουμε ανάμειξη χρώματος. Αυτό είναι ένδειξη χαοτικής συμπεριφοράς.

Το εύρος διαταραχών για το οποίο βρίσκουμε τη δομή σχήματος '∞' παρουσιάζεται στον πίνακα 2. Εκτός του εύρους αυτών των τιμών στην x διεύθυνση βρίσκουμε τροχιές κολλητικότητας στους περιστροφικούς τόρους γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές της sao και της συμμετρικής της. Για μεγαλύτερες διαταραχές κατά απόλυτη τιμή στην \dot{x} , y ή \dot{y} -διεύθυνση βρίσκουμε τρεις τύπους τροχιών. (1) Τροχιές που αναπαριστάνονται από νέφη σημείων, (2) τροχιές κολλητικότητας σε τόρους γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές της $x1v1$ και (3) τροχιές κολλητικότητας σε αλυσίδα περιστροφικών τόρων που ανήκουν σε περιοδικές τροχιές πολλαπλής περιόδου. Αυτή η τροχιακή συμπεριφορά σχετίζεται με τις ασταθείς πολλαπλότητες των περιοδικών τροχιών της οικογένειας του z -άξονα.

Ο υπολογισμός των πολλαπλοτήτων είναι παρόμοιος με αυτόν της περίπτωσης των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x1v2$. Τα ασταθή ιδιοδιανύσματα είναι $(x_1, \dot{x}_1, y_1, \dot{y}_1) = (-0.20427, 0.000957614, 0.978912, -0.00197504)$ και $(x_2, \dot{x}_2, y_2, \dot{y}_2) = (-0.000880093, 0.436429, 0.00422376, -0.899728)$. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 5.93858$ και $\lambda_2 = 5.90405$. Οι αρχικές συνθήκες $(x_3, \dot{x}_3, y_3, \dot{y}_3)$, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό της ασταθούς πολλαπλότητας είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned}x_3 &= x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_0 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 \\ y_3 &= y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ \dot{y}_3 &= \dot{y}_0 + c_1 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2\end{aligned}\tag{97}$$

Υπολογίσαμε την ασταθή πολλαπλότητα χρησιμοποιώντας για c_1 τις τιμές $-10^{-3} \leq c_1 \leq 10^{-3}$ με βήμα 10^{-5} και για κάθε τιμή του c_1 θεωρήσαμε για το c_2 τις τιμές $-10^{-3} \leq c_2 \leq 10^{-3}$ με βήμα πάλι 10^{-5} . Για κάθε αρχική συνθήκη υπολογίσαμε 10 σημεία. Οπότε συνολικά έχουμε 4×10^5 σημεία. Με αυτό τον τρόπο υπολογίσαμε την ασταθή ασυμπτωτική επιφάνεια του Σχ. 107. Παρατηρούμε ότι έχουμε τώρα μία ασυμπτωτική επιφάνεια και όχι μία ασυμπτωτική καμπύλη. Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού έχουμε δύο ιδιοτιμές εκτός του μοναδιαίου κύκλου (βλ. π.χ. Arnold 1988 p. 287). Η ασυμπτωτική επιφάνεια σε αυτή την περίπτωση ήταν πιο εύκολο να οπτικοποιηθεί από ότι στην περίπτωση της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της $x1v2$, επειδή τώρα οι δύο ιδιοτιμές εκτός του μοναδιαίου κύκλου είναι πολύ κοντά. Παρατηρούμε ότι

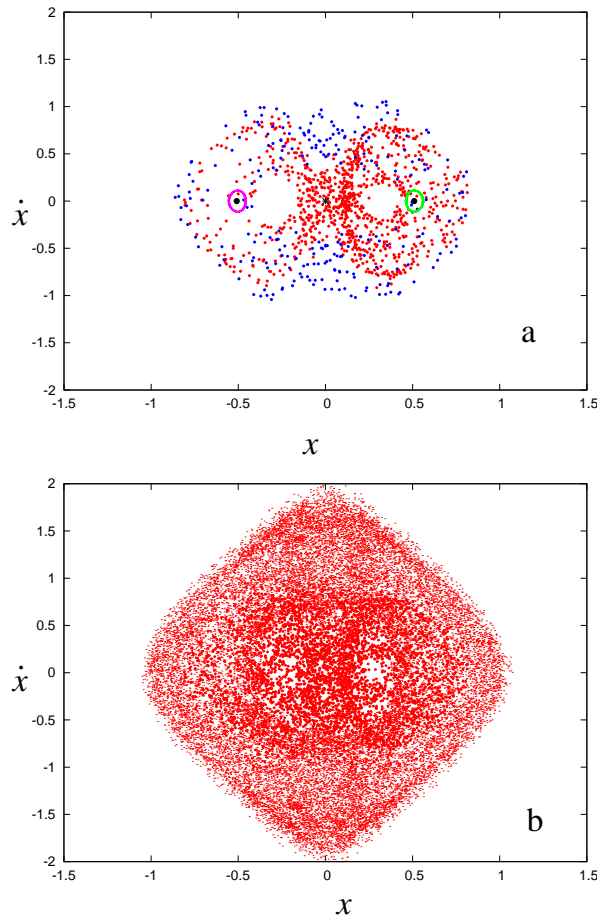
$-0.2 \leq \Delta x \leq 0.2$	$-1.5 \leq \Delta \dot{x} \leq 1.5$
$-0.7 \leq \Delta y \leq 0.7$	$-1 \leq \Delta \dot{y} \leq 1$

Πίνακας 2: Το εύρος διαταραχών το οποίο δίνει τροχιές των οποίων τα σημεία παριστάνονται στο Σχ. 106.

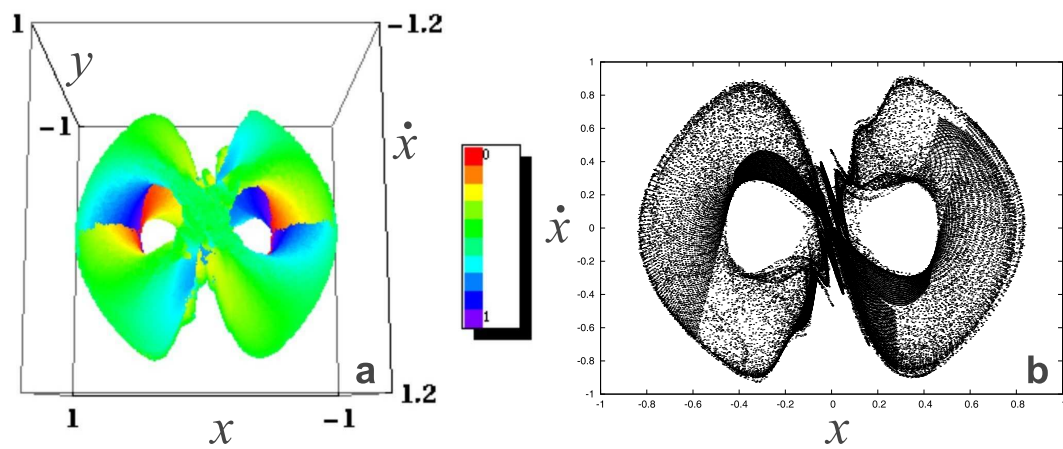
η ασταθής ασυμπτωτική επιφάνεια έχει τη μορφολογία ενός πλάγιου οκταριού στην 3D προβολή (x, \dot{x}, y) της επιφάνειας τομής. Επίσης παρατηρούμε μία πολύπλοκη αλλά ομαλή μεταβολή χρώματος στην επιφάνεια αυτού του οκταριού (Σχ. 107a). Στο Σχ. 107b παρουσιάζουμε την (x, \dot{x}) προβολή του σχήματος 107a η οποία δείχνει ξεκάθαρα τις κεντρικές ταλαντώσεις της επιφάνειας σχήματος οκταριού κοντά στην περιοδική τροχιά η οποία βρίσκεται στο κέντρο της επιφάνειας αυτής. Μία παρόμοια μορφολογία βρήκαμε για την ευσταθή ασυμπτωτική επιφάνεια.

Η δομή που παρουσιάσαμε στο Σχ. 107 είναι μέρος της ασταθούς πολλαπλότητας. Αν θεωρήσουμε ένα μεγαλύτερο αριθμό τομών για $-1 \leq c1, c2 \leq 1$ και βήμα 10^{-3} , η ασυμπτωτική επιφάνεια διαστέλεται τόσο στην y -διεύθυνση όσο και στην (x, \dot{x}) προβολή όπως δείχνουν και τα κόκκινα σημεία στο Σχ. 108a. Αντιλαμβανόμαστε ότι όλα τα σημεία της “duz1” (μαύρο χρώμα) κολλάνε στην ασταθή ασυμπτωτική επιφάνεια.

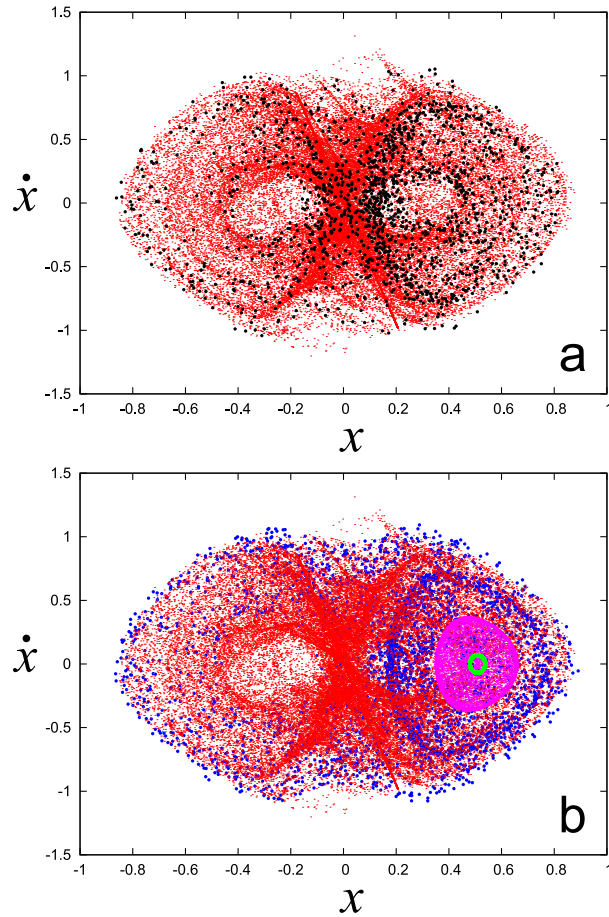
Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι στο εσωτερικό των λοβών της ασταθούς ασυμπτωτικής επιφάνειας σχήματος οκταριού, δίπλα στους περιστροφικούς τόρους της sao (μικρή πράσινη ελλειπτική καμπύλη στο Σχ. 108b) βρίσκουμε τροχιές κολλητικότητας, οι οποίες αρχικά σχηματίζουν τοροειδείς επιφάνειες σε αυτή την περιοχή και μετά διαχέονται στον φασικό χώρο, παραμένοντας πάντα κολλημένες στην ασταθή ασυμπτωτική επιφάνεια. Τα πρώτα 1960 σημεία δύο τέτοιων τροχιών δίνονται με μπλε και ροζ χρώμα στον δεξιό λοβό της πολλαπλότητας στο Σχ. 108b. Κατόπιν τα μπλε σημεία αρχίζουν και καταλαμβάνουν και τον αριστερό λοβό της πολλαπλότητας (Σχ. 108 b). Τα ροζ όμως θέλουν περισσότερο χρόνο. Η ύπαρξη της ασταθούς ασυμπτωτικής επιφάνειας επιβραδύνει την διάχυση αυτών των τροχιών σε μεγαλύτερες περιοχές του φασικού χώρου.



Σχήμα 106: (a) Η 2D (x, \dot{x}) προβολή της τροχιάς που μελετάμε στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της οικογένειας του z -άξονα για $E_j = -4.9$. Θεωρούμε 4200 σημεία στην επιφάνεια τομής. Τα πρώτα 250 συμβολίζονται με μπλε χρώμα. Τα επόμενα 3950 σχηματίζουν την κόκκινη δομή σχήματος '∞'. Μετά αρχίζουν να διαχέονται στον φασικό χώρο. Τα μαύρα σύμβολα υποδεικνύουν την θέση των περιοδικών τροχιών σε αυτή την προβολή. (b) Τα πρώτα 4200 σημεία παριστάνονται τώρα με χοντρά κόκκινα σημεία, ενώ τα επόμενα 26000 (λεπτά κόκκινα σημεία) διαχέονται και καταλαμβάνουν όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο.



Σχήμα 107: (a) Η 4D αναπαράσταση της ασταθούς ασυμπτωτικής επιφάνειας, χρησιμοποιώντας την 3D προβολή (x, \dot{x}, y) για την χωρική απεικόνιση των σημείων. Τα σημεία χρωματίζονται ανάλογα με τις τιμές της y τιμή τους. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (20^\circ, 190^\circ)$. (b) Η (x, \dot{x}) προβολή δείχνει τις ταλαντώσεις της ασταθούς ασυμπτωτικής επιφάνειας κοντά σε μία διπλά ασταθή περιοδική τροχιά της οικογένειας του z -άξονα (η οποία βρίσκεται στο $(0, 0)$).



Σχήμα 108: (a) Η (x, \dot{x}) 2D προβολή της ασταθούς ασυμπτωτικής επιφάνειας και των σημείων της τροχιάς “duz1” η οποία παραμένει για μεγάλα χρονικά διαστήματα κολλημένη στην ασταθή ασυμπτωτική επιφάνεια. (b) Η ίδια προβολή της ασταθούς ασυμπτωτικής επιφάνειας, μαζί με δύο τροχιές (μπλε και ροζ σημεία) τις οποίες βρίσκουμε διαταράσσοντας τροχιές που αντιστοιχούν σε περιστροφικούς τόρους της sao (η προβολή ενός από αυτών απεικονίζεται από μία μικρή πράσινη ελλειπτική καμπύλη κοντά στο κέντρο του δεξιού μέρους της πολλαπλότητας).

3.3.7 Διάχυση στον φασικό χώρο

Η μελέτη των τροχιών στην περιοχή των απλά και διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών μας έδωσε πληροφορίες σχετικά με τον ρυθμό διάχυσης των γειτονικών τροχιών και την παγίδευση των σημείων τους σε κάποιες περιοχές του φασικού χώρου. Αυτό μας επιτρέπει να διακρίνουμε τις τροχιές οι οποίες υποστηρίζουν δομές από εκείνες που δεν το κάνουν. Για τον λόγο αυτό μετράμε την διάχυση των τροχιών και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Οι τροχιές κοντά στις ασταθείς περιοδικές τροχιές της $x1v2$ έχουν τις ακόλουθες τροχιακές συμπεριφορές:

- Ο πρώτος τύπος των τροχιών κοντά στις $x1v2$ περιοδικές τροχιές σχηματίζει διπλούς βρόχους ή απλούς κλειστούς βρόχους στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής. Σαν παράδειγμα έχουμε την τροχιά “u” (υποκεφάλαιο 3.3.1 - Σχ. 89, 90). Οι τροχιές αυτού του τύπου για περισσότερες τομές δημιουργούν άλλες πυκνές περιοχές στον φασικό χώρο για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Αυτές οι δομές είναι διακριτές σε μερικές προβολές σαν Θ δομές ή δαχτυλίδια (Σχ. 92). Ουσιαστικά η τροχιακή της συμπεριφορά καθορίζεται από διαδοχικά φαινόμενα κολλητικότητας που επιβάλλει η συνολική δομή του φασικού χώρου κοντά σε μεταβάσεις $S \rightarrow U \rightarrow S$.
- Ο δεύτερος τύπος τροχιών σχηματίζει νέφη σημείων στην επιφάνεια τομής. Σαν παράδειγμα, θεωρούμε την τροχιά με $\Delta x = 10^{-4}$ από τις αρχικές συνθήκες της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της $x1v2$ για $E_j = -4$ και την αποκαλούμε ως “u1”.
- Ο τρίτος τύπος τροχιών σχηματίζει ξανά νέφη σημείων στην επιφάνεια τομής, αλλά αυτή την φορά στην περιοχή μίας διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι η τροχιά η οποία αποκλίνει από την $x1v2$ για $\Delta x = 10^{-4}$ για $E_j = -3.38$, την οποία ονομάσαμε ως “du1”. Είναι η πιο γενική συμπεριφορά που βρίσκουμε στη γειτονιά διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών.

Επιπρόσθετα περιλαμβάνουμε μία τροχιά στην περιοχή μίας διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της οικογένειας του z -άξονα.

- Η τροχιά η οποία σχηματίζει μία επιφάνεια σχήματος οκταριού πριν διαχυθεί και καταλάβει όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο (Σχ. 106) και την οποία αποκαλούμε ως τροχιά “duz1”. Οι περιπτώσεις αυτές κοντά σε διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές εμφανίζονται στο σύστημα μας μόνο όταν οι 2 ιδιοτιμές δεν διαφέρουν πολύ.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα διάχυσης για τους παραπάνω τύπους τροχιακής συμπεριφοράς ορίζουμε τον χρόνο διάχυσης και την ταχύτητα διάχυσης ως ακολούθως:

Γενικά ο όγκος του φασικού χώρου ο οποίος καταλαμβάνεται από τα σημεία μίας χαοτικής τροχιάς αυξάνεται με τον χρόνο καταλαμβάνοντας τον μέγιστο διαθέσιμο όγκο ο οποίος περιορίζεται από την επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας. Ο χρόνος τον οποίο χρειάζονται οι τροχιές για να καταλάβουν τον μέγιστο όγκο V_{max} , ορίζεται ως 'χρόνος διάχυσης', T_d . Η ταχύτητα διάχυσης ορίζεται ως ο λόγος

$$u_d = \frac{V_{max}}{T_d}.$$

Οι ποσότητες V_{max} και T_d για τις τροχιές στην περιοχή μίας περιοδικής τροχιάς μπορούν εύκολα να υπολογιστούν σε δύο βήματα:

1. Όσο ο χρόνος αυξάνεται υπολογίζουμε την μέση απόσταση s από την περιοδική τροχιά για χρόνο t όλων των σημείων και μετά υπολογίζουμε τον μέσο όγκο $\bar{V}(t)$. Με άλλα λόγια υπολογίζουμε τον όγκο της υπερσφαίρας με κέντρο την περιοδική τροχιά και ακτίνα την μέση απόσταση s : $\bar{V}(t) = \frac{1}{2}\pi^2 s^4$.
2. Μετά από χρόνο T_d τα σημεία καταλαμβάνουν τον μέγιστο όγκο V_{max} . Αυτός δίνεται από το μέγιστο της μεταβολής του $\bar{V}(t)$ και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα διάχυσης.

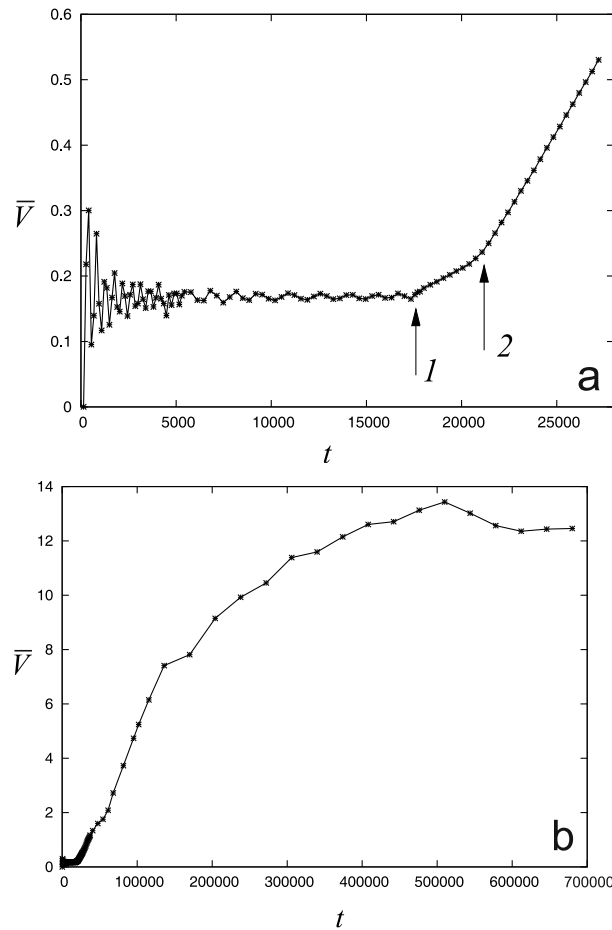
Στο Σχ. 109a παρουσιάζουμε το διάγραμμα του όγκου που καταλαμβάνεται από τα σημεία της "u" (Σχ. 89, 90) συναρτήσεως του χρόνου t για ένα διάστημα $t \leq 28000$, που αντιστοιχεί σε 4200 τομές. Παρατηρούμε για $t \leq 17300$ σε μονάδες του συστήματός μας (υποδεικνύεται από το αριστερό βέλος στο Σχ. 109a το οποίο αντιστοιχεί σε 2580 τομές) ότι ο $\bar{V}(t)$ παραμένει κοντά στην τιμή 0.165 μετά από ορισμένες αρχικές ταλαντώσεις. Το χρονικό αυτό διάστημα αντιστοιχεί στο διάστημα κατά το οποίο τα σημεία κολλάνε στις ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους A της ασταθούς πολλαπλότητας σχηματίζοντας έναν διπλό βρόχο (υποκεφάλαιο 3.3.1). Μετά παρατηρούμε ένα δεύτερο διάστημα μεταξύ των δύο βελών στο Σχ. 109a, που ο $\bar{V}(t)$ αυξάνει αλλά η κλίση της καμπύλης είναι μικρότερη από αυτή που έχει η καμπύλη μετά το δεξιό βέλος. Το δεύτερο βέλος αντιστοιχεί σε χρόνο $t = 21800$ ή 3130 τομές. Η δυναμική συμπεριφορά στο διάστημα μεταξύ των δύο βελών αντιστοιχεί στον χρόνο κατά τον οποίο τα σημεία σχηματίζουν τους λοβούς της Θ δομής και του δαχτυλιδιού στην (z, \dot{z}) προβολή (Σχ. 92) κολλώντας στις ασυμπτωτικές καμπύλες του μέρους B της ασταθούς πολλαπλότητας (βλ. υποκεφάλαιο 3.3.4). Στη συνέχεια, μετά

το δεξιό βέλος στο Σχ. 109a ο $\bar{V}(t)$ αυξάνει συνεχώς με χαρακτηριστική και πιο απότομη κλίση από ότι προηγουμένως. Τα σημεία σε αυτή την φάση απομακρύνονται από όλες τις δομές που παρατηρούνται στην περιοχή της x_{1v2} περιοδικής τροχιάς (υποκεφάλαιο 3.3.1). Το Σχ. 109b αποτελεί τη συνέχεια του σχήματος 109a και δείχνει ότι το μέγιστο του $\bar{V}(t)$ αντιστοιχεί σε $V_{max} = 13.433$ για $T_d = 510000$. Η ταχύτητα διάχυσης είναι $u_d = \frac{V_{max}}{T_d} = 2.63 \times 10^{-5}$. Μετά το μέγιστο του $\bar{V}(t)$ στο Σχ. 109b, τα σημεία φτάνουν σε αποστάσεις από την περιοδική τροχιά οι οποίες είναι μικρότερες ή ίσες με την μέγιστη απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι ο $\bar{V}(t)$ μειώνεται λίγο και τελικά, σταθεροποιείται σε μία μέση σταθερή τιμή. Αυτό συμβαίνει για όλες τις χαοτικές τροχιές.

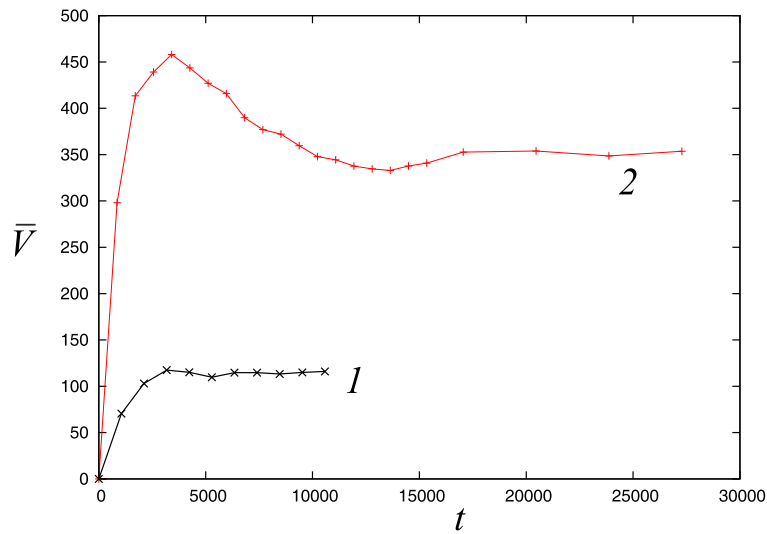
Η εξέλιξη του $\bar{V}(t)$ και η ποσότητα T_d αλλάζουν στην περίπτωση της τροχιάς “u1”. Στο Σχ. 110 βλέπουμε ότι για την καμπύλη ‘1’ η οποία αντιστοιχεί στην τροχιά “u1”, έχουμε $V_{max} = 117.397$ και $T_d = 3180$. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα διάχυσης είναι τώρα $u_d = 0.0369$, δηλαδή 1403 φορές μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάχυσης της τροχιάς “u”.

Η πάνω κόκκινη καμπύλη (2) περιγράφει την χρονική εξέλιξη για την τροχιά “du1” στην περιοχή της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της x_{1v2} για $E_j = -3.38$. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη έχει ένα μέγιστο για $V_{max} = 458$ και $T_d = 3400$. Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα διάχυσης είναι $u_d = 0.135$ η οποία είναι 3.65 φορές και 5133 φορές μεγαλύτερη από αυτή των τροχιών των “u1” και “u” αντίστοιχα. Για τις “u1” και “du1” ο $\bar{V}(t)$ αυξάνει σχετικά γρήγορα μέχρι το μέγιστο του διαγράμματος, υποδεικνύοντας ότι δεν έχουμε κάποια σημαντική κολλητικότητα σε αυτές τις περιπτώσεις.

Τελικά στην περίπτωση που έχουμε βρεί κολλητικότητα στο χάος κοντά σε μία διπλά ασταθή περιοδική τροχιά, π.χ. για την τροχιά “duz1”, η εξέλιξη του $\bar{V}(t)$ δίνεται στο Σχ. 111. Αρχικά ο $\bar{V}(t)$ φθίνει καταλήγοντας σε μία τιμή 1.68 κατά την διάρκεια των πρώτων 1600 τομών. Αυτή η περίοδος υποδεικνύεται με ένα βέλος ‘1’. Αυτό συμβαίνει επειδή η πλειονότητα των σημείων καταλαμβάνει το δεξιό λοβό του οκταριού στην (x, \dot{x}) 2D προβολή, άρα η πλειονότητα των σημείων βρίσκεται σε έναν όγκο μικρότερο από ότι ο όγκος που καταλαμβάνεται από τα σημεία που σχηματίζουν ολόκληρη την δομή σχήματος οκταριού. Ως εκ τούτου ο μέσος όγκος μειώνεται. Στη συνέχεια, τα επόμενα σημεία γεμίζουν την δομή σχήματος οκταριού, οπότε έχουμε ίδιο αριθμών σημείων και στους δύο λοβούς. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο $\bar{V}(t)$ να αυξάνεται μέχρι ο μέσος όγκος να φτάσει σε μία τιμή 3.11969, που αντιστοιχεί σε 3200 τομές (η θέση αυτή υποδεικνύεται με ένα βέλος ‘2’). Μετά, παρατηρούμε ένα μικρό πλατώ μέχρι το σημείο που υποδεικνύεται από το βέλος ‘3’ ($\bar{V}(t) = 3.02259$). Το σημείο αυτό αντιστοιχεί σε 4200 τομές. Αυτός είναι ο αριθμός των σημείων στην επιφάνεια τομής που μένουν στο οκτάρι πριν αποχωρήσουν από αυτό και καταλάβουν



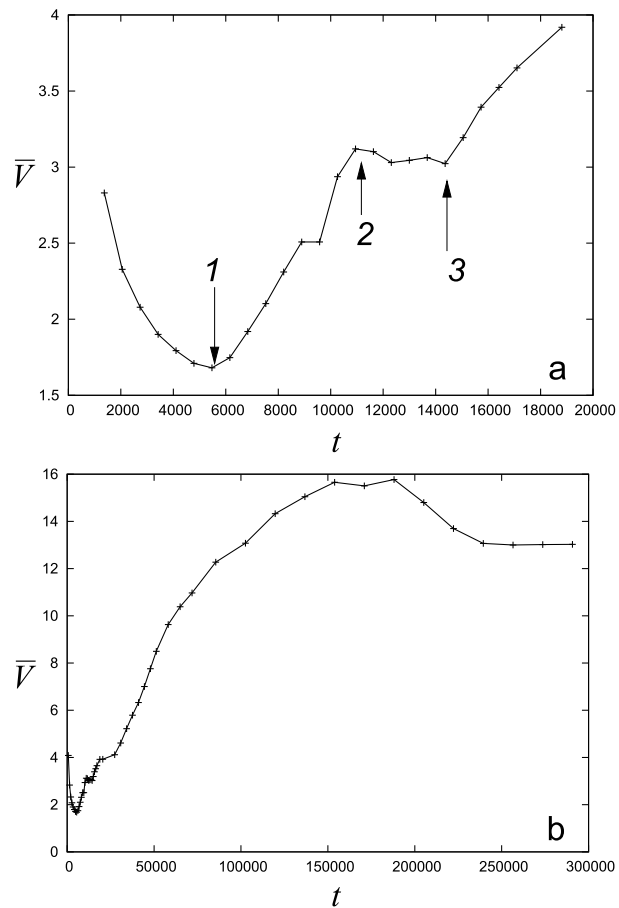
Σχήμα 109: Ο μέσος όγκος $\bar{V}(t)$ ο οποίος καταλαμβάνεται από τα σημεία της τροχιάς “u” στην περιοχή της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_j = -4.66$. (a) $t \leq 28000$, αντιστοιχεί σε 4200 σημεία στην επιφάνεια τομής. Τα βέλη υποδεικνύουν τα χρονικά σημεία που αντιστοιχούν σε 2580 και 3130 τομές. (b) Η εξέλιξη του $\bar{V}(t)$ μέχρι $t = 7 \times 10^5$.



Σχήμα 110: Η εξέλιξη του $\bar{V}(t)$ για την τροχιά “u1” στην περιοχή της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της x_{1v2} για $E_j = -4$ (1) και για την τροχιά “du1” (2), όταν η x_{1v2} είναι διπλά ασταθής για $E_j = -3.38$.

μεγαλύτερους όγκους στον φασικό χώρο. Για μεγαλύτερους χρόνους ο $\bar{V}(t)$ αυξάνει. Στο Σχ. 111b έχουμε μέγιστο για $V_{max} = 15.77$ και $T_d = 1.88 \times 10^5$. Η ταχύτητα διάχυσης είναι $u_d = 8.385 \times 10^{-5}$.

Συγκρίνοντας τα Σχ. 109, 110 και 111 φαίνεται ότι, η διάχυση των χαοτικών τροχιών από την περιοχή των απλά και διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών δεν εξαρτάται από το είδος αστάθειας της περιοδικής τροχιάς. Το φαινόμενο κολλητικότητας, το οποίο επιβραδύνει την διάχυση, εμφανίζεται σε τροχιές τόσο κοντά σε απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές όσο και σε διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές. Όταν αυτό συμβαίνει παρατηρούμε πλατώ στην μεταβολή του $\bar{V}(t)$ ως προς τον χρόνο.



Σχήμα 111: Η εξέλιξη του $\bar{V}(t)$ για την τροχιά “duz1” στην γειτονιά της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της οικογένειας του z -άξονα για $E_j = -4.9$. (a) για $t \leq 2 \times 10^4$ και (b) για $t \leq 3 \times 10^5$.

3.4 Μιγαδική Αστάθεια

Σκοπός του υποκεφαλαίου αυτού είναι η μελέτη της δυναμικής στην περιοχή μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς. Η μελέτη που παρουσιάζουμε αναφέρεται στην πρώτη μη αξισυμμετρική περίπτωση του μοντέλου μας. Όπως είδαμε στο υποκεφάλαιο 2.3.2 η 3D οικογένεια $x1v1$ η οποία ήταν αρχικά ευσταθής γίνεται μιγαδικά ασταθής για $E_j = -4.62$ (ικανοποιεί το Θεώρημα Krein-Moser-βλ. υποκεφάλαιο 1.1.7). Θα μελετήσουμε την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή των μιγαδικά ασταθών περιοδικών τροχιών (υποκεφάλαιο 3.4.1) της 3D οικογένειας $x1v1$ ύστερα από την μετάβασή της από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια (γνωστή ως Χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf¹⁰-Van der Meer 1985).

Η μετάβαση από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια έχει μελετηθεί τόσο σε 3D αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα (Contopoulos and Magnenat 1985, Pfenniger 1985b, Heggie 1985, Contopoulos et al. 1994, Papadaki et al. 1995, Contopoulos et al. 1999, Broer et al 2007, Ollé et al. 2008) όσο και σε 4D συμπλεκτικές απεικονίσεις (Pfenniger 1985a, Bridges et al. 1995, Jorba and Ollé 2004). Και στις δύο περιπτώσεις η αναλυτική προσέγγιση χρησιμοποιεί τις τεχνικές των κανονικών μορφών (normal forms- Ollé et al. 2005a,b) ώστε να απλοποιήσει την χαμιλτονιανή (ή την απεικόνιση) και να περιγράψει τοπικά τον φασικό χώρο στην γειτονιά μίας περιοδικής τροχιάς. Τέτοιες αναλύσεις δείχνανε, ότι η μετάβαση από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια έχει σαν αποτέλεσμα την διακλάδωση αναλλοίωτων 2D τώρων σε ένα 3D αυτόνομο χαμιλτονιανό σύστημα ή αναλλοίωτων καμπύλων στις 4D συμπλεκτικές απεικονίσεις (όπως η 4D απεικόνιση Poincaré του συστήματός μας). Ο αριθμητικός υπολογισμός αυτών των αναλλοίωτων αντικειμένων έχει πραγματοποιηθεί για αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα τριών βαθμών ελευθερίας (Pfenniger 1985b, Ollé and Pfenniger 1998, Ollé et al. 2004) και για 4D συμπλεκτικές απεικονίσεις (Pfenniger 1985a, Jorba and Ollé 2004). Στην εργασία μας μελετάμε την δομή των αναλλοίωτων επιφανειών στην 4D επιφάνεια τομής στην περιοχή μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς μετά από μία Χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf.

3.4.1 Δομή και εξέλιξη των περιορισμένων τώρων κοντά σε μία χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf

Αρχικά διερευνούμε την δομή του φασικού χώρου διαταράσσοντας τις αρχικές συνθήκες μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της $x1v1$ στην 4D επιφάνεια τομής λίγο μετά την μετάβαση της $x1v1$ από ευστάθεια σε μιγαδική

¹⁰Η διακλάδωση αυτή λέγεται κατά 'Hopf', προς τιμή του μεγάλου μαθηματικού που απέδειξε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα για αυτή (Hopf 1942, Marsden and McCracken 1976).

αστάθεια. Για παράδειγμα εφαρμόζουμε μία διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ στις αρχικές συνθήκες της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_J = -4.619$ (με αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.275137727, 0, 0.359838, 0)$). Μετά, η x_0 αρχική συνθήκη γίνεται $x_0 + \Delta x$. Από προηγούμενες εργασίες (Contopoulos et al. 1994, Papadaki et al. 1995, Contopoulos et al. 1999) ξέρουμε ότι, για ένα αριθμό τομών, έχουμε την εμφάνιση μίας σπείρας στην περιοχή μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς στις 2D προβολές της επιφάνειας τομής. Αυτή την δομή την συναντήσαμε και στην περίπτωση που μελετάμε (Σχ. 112). Παρατηρούμε ότι τα σημεία είναι περιορισμένα σε μία περιοχή του χώρου των φάσεων.

Εφαρμόζουμε τώρα τη μέθοδο χρώματος και περιστροφής για να μελετήσουμε την επιφάνεια που σχηματίζεται στην γειτονιά μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς. Στο Σχ. 113 παρουσιάζουμε την τροχιακή συμπεριφορά κοντά σε μία μιγαδικά ασταθή περιοδική τροχιά για 50 σημεία στην επιφάνεια τομής. Χρησιμοποιούμε την 3D προβολή (x, \dot{x}, z) για να απεικονίσουμε τα σημεία και την \dot{z} τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Παρατηρούμε μία σπείρα (με τρεις σπειροειδείς βραχίονες) στην περιοχή της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς. Τα πρώτα 13 σημεία είναι πολύ κοντά στο κέντρο της σπείρας και δεν είναι εμφανή στο σχήμα. Το 14ο σημείο βρίσκεται πάνω σε έναν σπειροειδή βραχίονα, το 15ο βρίσκεται πάνω σε έναν άλλο σπειροειδή βραχίονα και το 16ο σημείο βρίσκεται πάνω στον τρίτο σπειροειδή βραχίονα. Το 17ο σημείο βρίσκεται πάνω στον πρώτο βραχίονα κ.ο.κ. Κατά μήκος κάθε σπειροειδούς βραχίονα παρατηρούμε μία ομοιόμορφη μεταβολή χρώματος (Σχ. 113). Για παράδειγμα παρατηρούμε αν ξεκινήσουμε από το κέντρο της σπείρας κατά μήκος του βραχίονα που βρίσκεται το 15ο σημείο μεταβολή χρώματος από πράσινο σε γαλάζιο, σε μπλε και τελικά σε μωβ. Κατά μήκος των άλλων δύο βραχιόνων παρατηρούμε παρόμοια μεταβολή χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι η σπείρα αυτή είναι ένα 4D αντικείμενο.

Το Σχήμα 114 απεικονίζει την ίδια περίπτωση με το Σχ. 113 για 2000 σημεία στην επιφάνεια τομής. Δεν μπορούμε πλέον να διακρίνουμε την αρχική σπείρα (που βρίσκεται στο κέντρο του σχήματος 113), αλλά παρατηρούμε έναν δισκοειδή σχηματισμό με πολλά σημεία συγκεντρωμένα στην κεντρική του περιοχή. Το αντικείμενο αυτό έχει πολύ μικρό πάχος και παρουσιάζει μία μικρή στρέβλωση. Εμείς θα το αποκαλούμε σαν 'δίσκο' ή 'δισκοειδή σχηματισμό'. Στην ορολογία των Jorba and Ollé (2004) τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται περιορισμένοι τόροι (confined tori). Πάνω σε αυτόν τον δισκοειδή σχηματισμό, παρατηρούμε μία ομαλή διαδοχή χρώματος από αριστερά στα δεξιά από κόκκινο σε πορτοκαλί, σε κίτρινο, σε πράσινο, σε γαλάζιο, σε μπλε και τελικά σε μωβ. Για 10000 σημεία στην επιφάνεια τομής παρατηρούμε ότι τα σημεία γεμίζουν

αυτό τον δισκοειδή σχηματισμό, ο οποίος εμφανίζει ομαλή μεταβολή χρώματος (Σχ. 115). Η μικρότερη απόσταση των σημείων από το κέντρο του δίσκου, όπου βρίσκεται η μιγαδικά ασταθής περιοδική τροχιά, είναι 0.000042 και η μεγαλύτερη απόσταση είναι 0.059764 στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) της 4D επιφάνειας τομής. Τα σημεία φτάνουν σε μία μέγιστη απόσταση από το κέντρο του δίσκου και μετά κινούνται προς το κέντρο του φτάνοντας σε μία ελάχιστη απόσταση από αυτό κ.ο.κ. Μερικές τιμές για αυτές τις ελάχιστες και μέγιστες αποστάσεις δίνονται στους πίνακες 3 και 4. Επισημαίνουμε το γεγονός, ότι ο δίσκος έχει έναν εσωτερικό σπειροειδή σχηματισμό με τρεις βραχίονες. Αυτό σημαίνει ότι αν διαλέξουμε τυχαία ένα σημείο που βρίσκεται στον δίσκο, τα επόμενα σημεία τομής ακολουθούν ένα σπειροειδή τρόπο γεμίσματος του δίσκου σαν αυτό που παρουσιάσαμε στα σχήματα 113, 114 και 115.

Μετά υπολογίσαμε την ασταθή αναλλοίωτη πολλαπλότητα της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς. Ο υπολογισμός των ασυμπτωτικών καμπύλων είναι παρόμοιος με αυτόν των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών (υποκεφάλαιο 3.3.5). Η μόνη διαφορά είναι ότι έχουμε τώρα ότι τα δύο ασταθή ιδιοδιανύσματα είναι μιγαδικά και έχουν την μορφή $u \pm iv$. Η ασταθής πολλαπλότητα παράγεται από τα διανύσματα u και v . Υπολογίζουμε μέσω των σχέσεων (65) του υποκεφαλαίου 1.1.6 τις δύο μιγαδικές ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα οι οποίες βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου $\lambda_{1,2} = -0.700937 \pm 0.812549i$ και μετά υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Το διάνυσμα u έχει συντεταγμένες $(x_1, \dot{x}_1, z_1, \dot{z}_1) = (-0.0225457, -0.00659262, 0.369829, 0.904305)$ και το v έχει συντεταγμένες $(x_2, \dot{x}_2, z_2, \dot{z}_2) = (-0.181374, 0.0761046, -0.0788559, 0)$. Οι αρχικές συνθήκες $(x_3, \dot{x}_3, z_3, \dot{z}_3)$, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό των ασυμπτωτικών καμπύλων, είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned}x_3 &= x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_0 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 \\ z_3 &= z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 \\ \dot{z}_3 &= \dot{z}_0 + c_1 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2\end{aligned}\tag{98}$$

Υπολογίσαμε την ασταθή πολλαπλότητα χρησιμοποιώντας για c_1 τις τιμές $-10^{-5} \leq c_1 \leq 10^{-5}$ με βήμα 4×10^{-7} και για κάθε τιμή του c_1 θεωρήσαμε για το c_2 τις τιμές $-10^{-5} \leq c_2 \leq 10^{-5}$ με βήμα πάλι 4×10^{-7} . Για κάθε αρχική συνθήκη υπολογίσαμε 300 σημεία. Οπότε συνολικά έχουμε 7.5×10^5 σημεία. Τα πρώτα 50 σημεία της πολλαπλότητας συμπίπτουν με τα σημεία στο σχήμα 113, δηλαδή

nth σημείο	221	522	802	2679	8904
max απόσταση	0.056284	0.058844	0.058453	0.059693	0.059764

Πίνακας 3: Μερικά παραδείγματα σημείων του δίσκου για μία διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ από την μιγαδικά ασταθή περιοδική τροχιά για $E_j = -4.619$, τα οποία έχουν μέγιστη απόσταση από την περιοδική τροχιά.

nth σημείο	300	600	912	2780	8990
min απόσταση	0.000338	0.000316	0.000042	0.000050	0.000173

Πίνακας 4: Μερικά παραδείγματα σημείων του δίσκου για μία διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ από την μιγαδικά ασταθή περιοδική τροχιά για $E_j = -4.619$, τα οποία έχουν ελάχιστη απόσταση από την περιοδική τροχιά.

σχηματίζουν μία $4D$ σπείρα. Στο Σχ. 116(a) παρατηρούμε ότι για 60 αρχικές συνθήκες οι ασυμπτωτικές καμπύλες σχηματίζουν ένα δίσκο με ίδιες διαστάσεις με αυτόν του σχήματος 115. Μετά για περισσότερες αρχικές συνθήκες (2500 αρχικές συνθήκες - Σχ. 116(b)) οι καμπύλες γεμίζουν αυτό τον δίσκο. Η μεταβολή χρώματος είναι παρόμοια με αυτή του σχήματος 115. Μία παρόμοια μορφολογία βρήκαμε και για την ευσταθή αναλλοίωτη πολλαπλότητα. Επομένως οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες συμπίπτουν με τον δίσκο του σχήματος 115.

Την ίδια συμπεριφορά (παρόμοιο δισκοειδή σχηματισμό) τη συναντάμε αν διαταράξουμε κατά $\Delta x = 10^{-3}$ τις αρχικές συνθήκες της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $E_j = -4.619$ με τον ίδιο τρόπο που κάναμε προηγουμένως για $\Delta x = 10^{-4}$. Η μόνη διαφορά είναι ότι βρίσκουμε ότι η μικρότερη απόσταση των σημείων από τη μιγαδικά ασταθή περιοδική τροχιά είναι τώρα 0.000999 και η μέγιστη απόσταση είναι 0.0592138. Η μικρότερη απόσταση είναι 24 φορές μεγαλύτερη από την μικρότερη απόσταση για διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ και για αυτόν το λόγο έχουμε μία μικρή τρύπα στο κέντρο του δισκοειδούς σχηματισμού. Τώρα αν η διαταραχή είναι ακόμα μεγαλύτερη, $\Delta x = 10^{-2}$, παρατηρούμε ένα διαφορετικό δισκοειδή σχηματισμό (Σχ. 117). Ο καινούριος δίσκος είναι πιο παχύς από τον προηγούμενο που μελετήσαμε για διαταραχές $\Delta x = 10^{-3}$ ή $\Delta x = 10^{-4}$ των αρχικών συνθηκών της περιοδικής τροχιάς. Τώρα το πάχος στις τρεις συντεταγμένες είναι $(\Delta X, \Delta \dot{X}, \Delta Z) = (0.09, 0.2, 0.04)$ αντί του πάχους $(\Delta X, \Delta \dot{X}, \Delta Z) = (0.07, 0.16, 0.03)$ που είχαμε προηγουμένως. Σε αυτόν τον δισκοειδή σχηματισμό παρατηρούμε μία ομαλή μεταβολή χρώματος από κόκκινο σε μωβ (Σχ. 117). Αυτό σημαίνει ότι η τέταρτη διάσταση ακολουθεί την τοπολογία του σχηματισμού αυτού στην $4D$ επιφάνεια τομής. Η μικρότερη από-

σταση των σημείων στον σχηματισμό αυτόν από την μιγαδικά ασταθή περιοδική τροχιά είναι 0.009999 και η μεγαλύτερη απόσταση είναι 0.078655 στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) της 4D επιφάνειας τομής. Επιπλέον, η μικρότερη απόσταση των σημείων στον σχηματισμό αυτόν για διαταραχή $\Delta x = 10^{-2}$ είναι τώρα 238 φορές μεγαλύτερη από την απόσταση των σημείων για διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$. Όπως αναμενόταν η τρύπα στο κέντρο του δίσκου είναι τώρα μεγαλύτερη (Σχ. 117).

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει αν αυξήσουμε την διαταραχή σε $\Delta x = 10^{-1}$, πάντοτε για $E_j = -4.619$. Τα πρώτα 300 σημεία στην επιφάνεια τομής σχηματίζουν μία τοροειδή επιφάνεια. Στο Σχ. 118 παρατηρούμε τα πρώτα 310 σημεία στην επιφάνεια τομής. Εκτός από τα σημεία που σχηματίζουν την τοροειδή επιφάνεια, έχουμε συμπεριλάβει και τα πρώτα σημεία που φεύγουν από αυτή την επιφάνεια. Αυτά τα σημεία αντιστοιχούν στις ακίδες που μπορούμε να παρατηρήσουμε στο κόκκινο πυκνό δακτυλίδι του Σχ. 119. Στο Σχ. 118 η τέταρτη διάσταση \dot{z} αντιπροσωπεύεται με χρώματα που αντιστοιχούν στις μεταβολές του \dot{z} . Παρατηρούμε ξανά μία ομαλή μεταβολή χρώματος που αυτό σημαίνει ότι έχουμε μία τοροειδή επιφάνεια στην 4D επιφάνεια τομής. Θεωρώντας περισσότερα σημεία στην επιφάνεια τομής (Σχ. 119), παρατηρούμε ότι αποκλίνουν από την τοροειδή επιφάνεια και γρήγορα καταλαμβάνουν έναν μεγάλο όγκο στον χώρο των φάσεων. Αυτή είναι μία χαρακτηριστική συμπεριφορά που συνδέεται με το φαινόμενο της κολλητικότητας (Contopoulos and Harsoula 2008).

Αν τώρα διαταράξουμε την μιγαδικά ασταθή περιοδική τροχιά για $E_j = -4.619$ κατά την \dot{x} , z ή την \dot{z} διεύθυνση τότε βρίσκουμε παρόμοια αποτελέσματα.

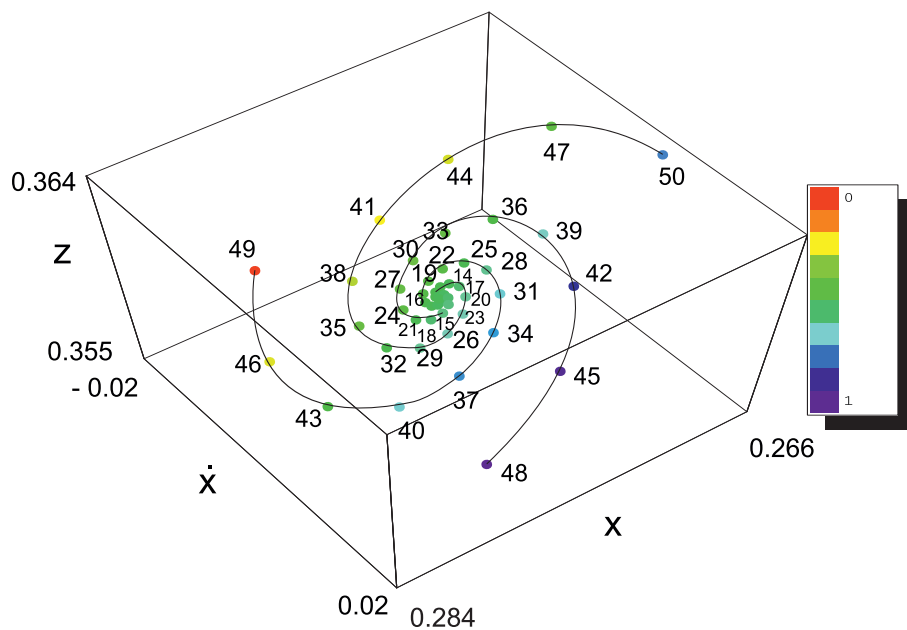
Διαλέγουμε τώρα μία απόκλιση $\Delta x = 10^{-4}$ από τις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς, η οποία δίνει έναν περιορισμένο τόρο για $E_j = -4.619$ και αυξάνουμε την ενέργεια E_j . Στο Σχ. 120 απεικονίζουμε τη μεταβολή του πάχους ΔZ των σημείων στην 4D επιφάνεια τομής σαν συνάρτηση της ενέργειας E_j . Παρατηρούμε ότι για τιμές της ενέργειας E_j μεταξύ -4.62 και -4.59 έχουμε μικρές τιμές του ΔZ (για έναν αριθμό σημείων στην επιφάνεια τομής) και για τιμές της ενέργειας E_j μεταξύ -4.59 και -4.42 έχουμε μεγάλες τιμές του ΔZ . Το πρώτο διάστημα της ενέργειας E_j αντιστοιχεί στους δισκοειδείς σχηματισμούς που περιγράψαμε πιο πριν. Το δεύτερο διάστημα αντιστοιχεί σε νέφη σημείων τα οποία βρίσκουμε για τιμές της ενέργειας μεγαλύτερες από -4.59 . Για παράδειγμα για $E_j = -4.50$ παρατηρούμε ένα νέφος σημείων με τιμές του z από -1.5 ως και 1.5 (Σχ. 121). Η περιοδική τροχιά έχει αρχικές συνθήκες $(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0) = (0.307260, 0, 0.432148, 0)$. Στο Σχ. 122 παρατηρούμε ανάμειξη χρώματος για αυτό το νέφος. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε χαοτική συμπεριφορά στον 4D χώρο.

Ας διερευνήσουμε τώρα τις αλλαγές που παρατηρούνται στη γειτονιά μίας

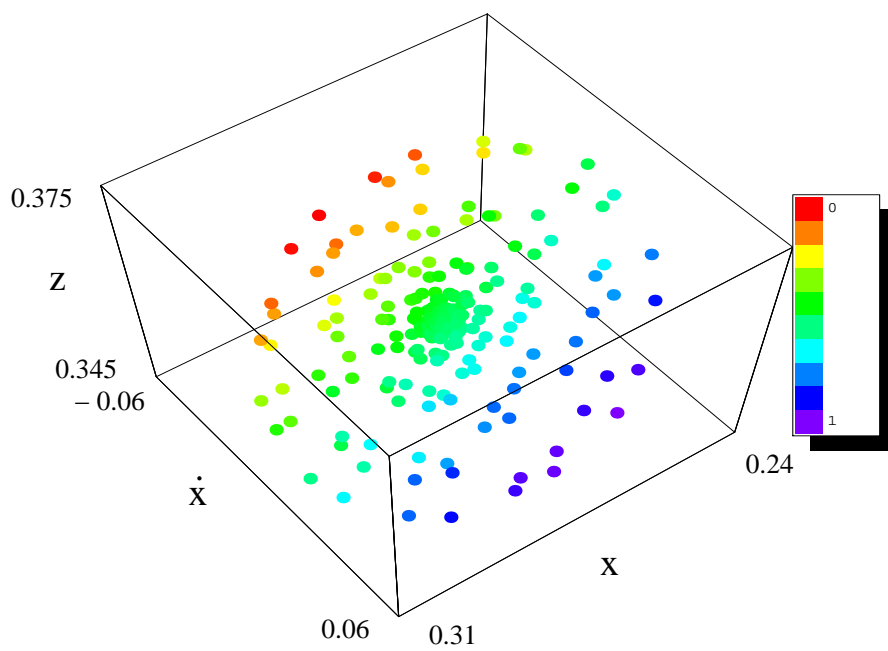


Σχήμα 112: 2D προβολή (x, \dot{z}) της 4D επιφάνειας τομής στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $E_j = -4.619$ (για 70 τομές).

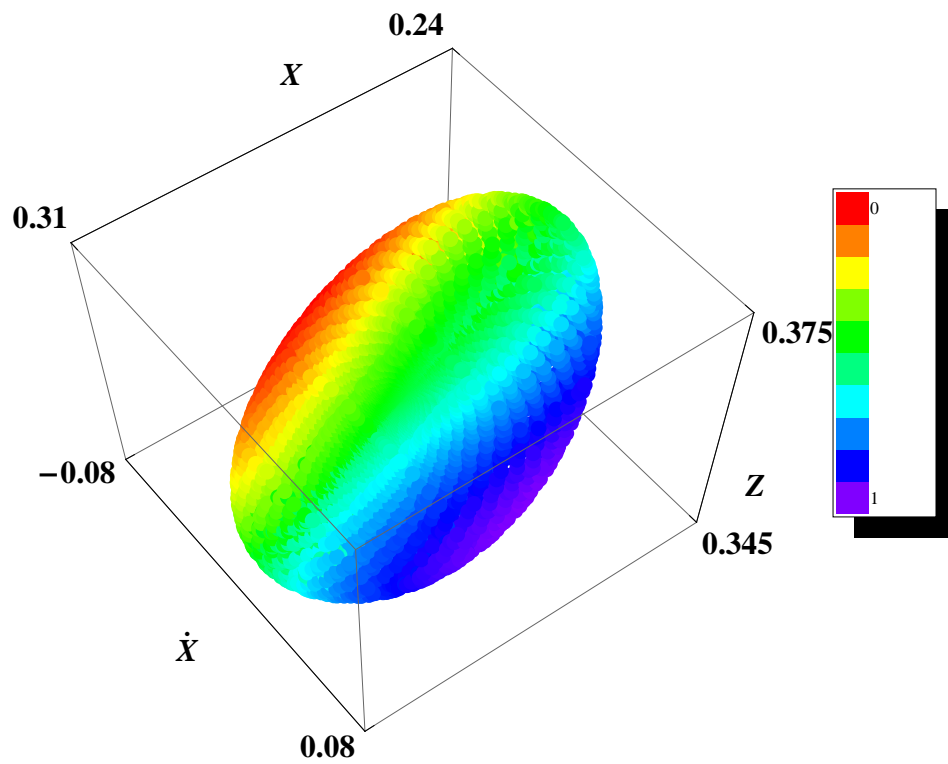
μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς όταν μεταβάλλουμε την ενέργεια. Στο σημείο μετάβασης του σχήματος 120, για $E_j = -4.59$ και για μία διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ στις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς, τα πρώτα 1250 σημεία στην επιφάνεια τομής παραμένουν σε ένα δισκοειδή σχηματισμό όπως μπορούμε να δούμε στο Σχ. 123. Σημειώνουμε το γεγονός ότι τα σημεία δεν επαρκούν να γεμίσουν τον δίσκο. Στο δισκοειδή αυτό σχηματισμό παρατηρούμε μία ομαλή διαδοχή χρώματος από μωβ σε μπλε, σε γαλάζιο, σε πράσινο, σε κίτρινο, σε πορτοκαλί και τέλος σε κόκκινο. Επισημαίνουμε ότι η ομαλή διαδοχή χρώματος σημαίνει ότι η τέταρτη διάσταση \dot{z} βρίσκεται πάνω σε αυτόν τον δισκοειδή σχηματισμό. Στο Σχ. 124 βλέπουμε ότι αν ολοκληρώσουμε την τροχιά για περισσότερο χρόνο, τα σημεία στην επιφάνεια τομής αρχίζουν και φεύγουν από τον δισκοειδή σχηματισμό (ο οποίος απεικονίζεται με μαύρο χρώμα) και σχηματίζουν ένα νέφος σημείων γύρω από αυτόν, αλλάζοντας το ΔZ . Αυτή η συμπεριφορά είναι επίσης χαρακτηριστική μίας τροχιάς κολλητικότητας (sticky orbit).



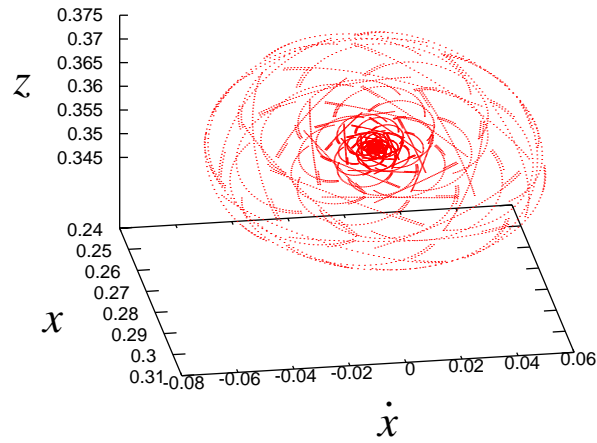
Σχήμα 113: Η τροχιακή συμπεριφορά στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-4}$ και $E_j = -4.619$ (για 50 σημεία στην επιφάνεια τομής). Χρησιμοποιούμε τον χώρο (x, \dot{x}, z) για να απεικονίσουμε τα σημεία και την z τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (32^\circ, 53^\circ)$.



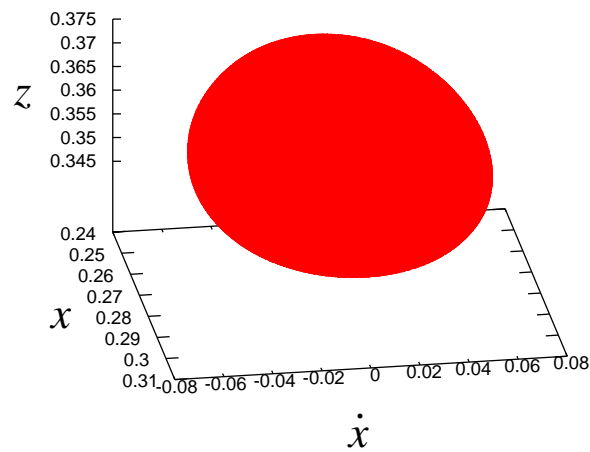
Σχήμα 114: Η ίδια περίπτωση με το Σχ. 113 για 2000 τομές. Η κλίμακα όμως είναι πολύ διαφορετική.



Σχήμα 115: Η ίδια περίπτωση με το Σχ. 113 για 10000 τομές. Η κλίμακα είναι όμοια (όχι όμως η ίδια) με το Σχ.114.

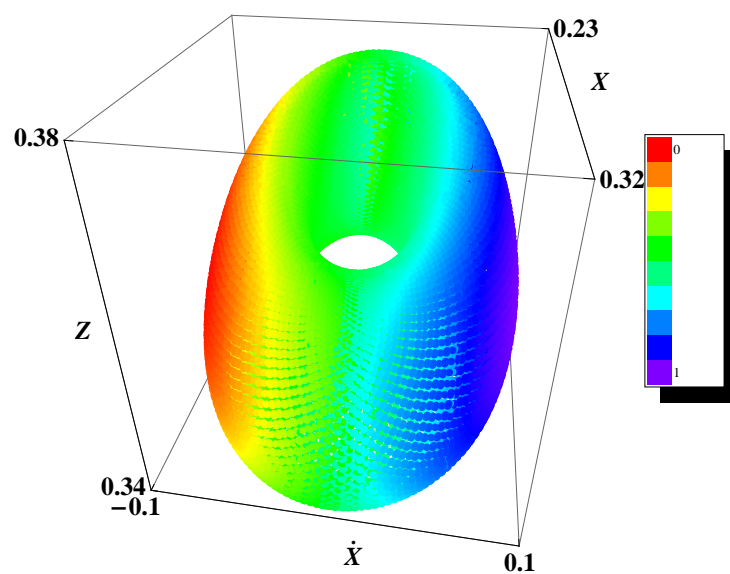


a

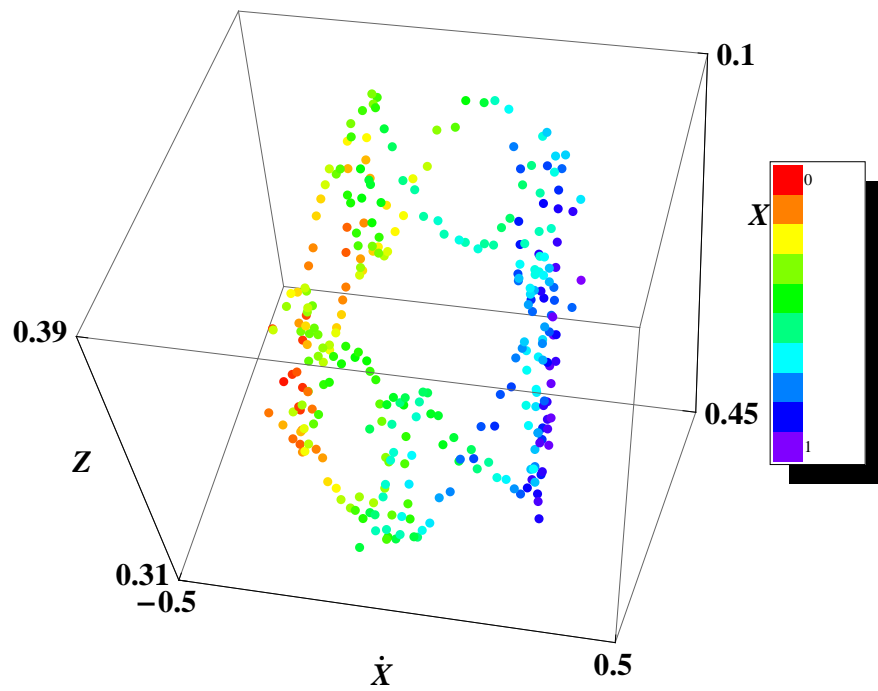


b

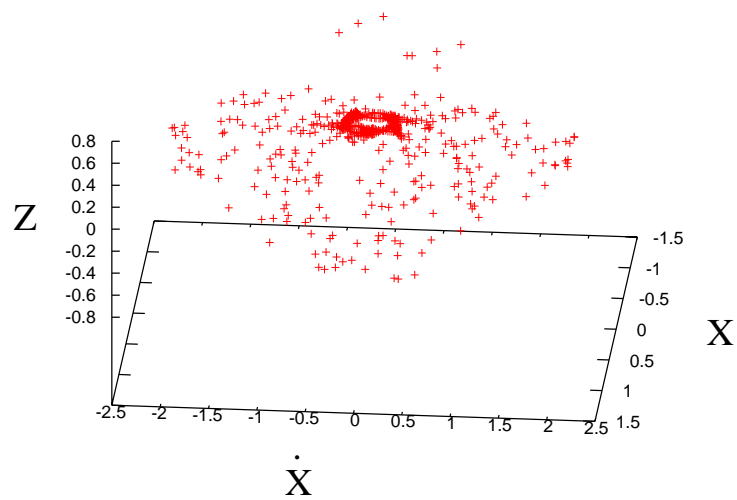
Σχήμα 116: Η 3D προβολή (x, \dot{x}, z) της ασταθούς αναλλοίωτης πολλαπλότητας στην περιοχή της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς για $Ej = -4.619$. Η περιοδική τροχιά είναι στο κέντρο του δίσκου που σχηματίζουν οι ασυμπτωτικές καμπύλες. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (55^\circ, 81^\circ)$. (a) για 60 αρχικές συνθήκες και 300 σημεία για κάθε μία. (b) για 2500 αρχικές συνθήκες και 300 σημεία για κάθε μία.



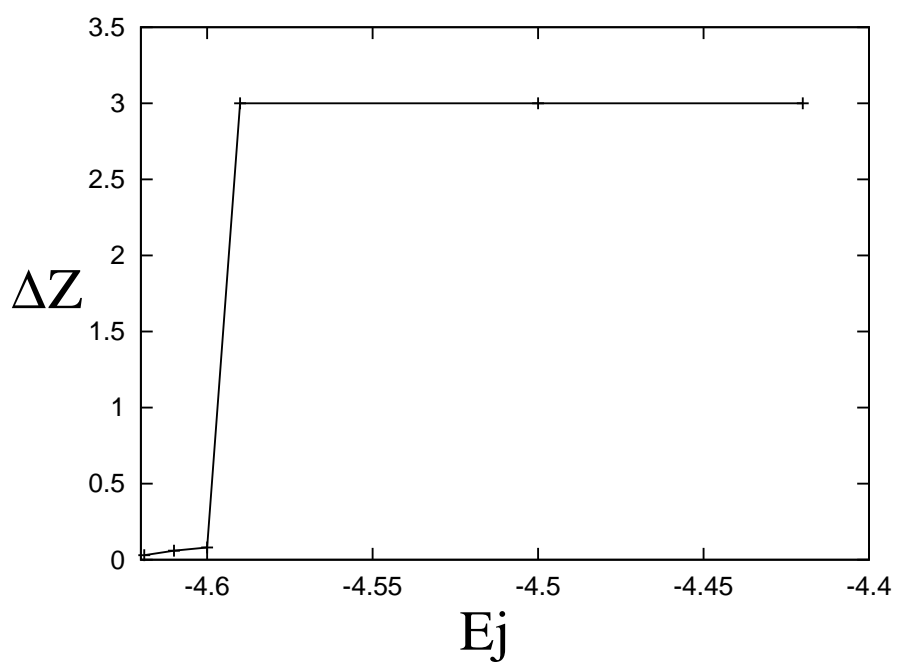
Σχήμα 117: Η τροχιακή συμπεριφορά στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-2}$ και $E_j = -4.619$ (για 10000 σημεία στην επιφάνεια τομής). Η οπτική μας γωνία είναι σε σφαιρικές συντεταγμένες $(\theta, \phi) = (15^\circ, 90^\circ)$.



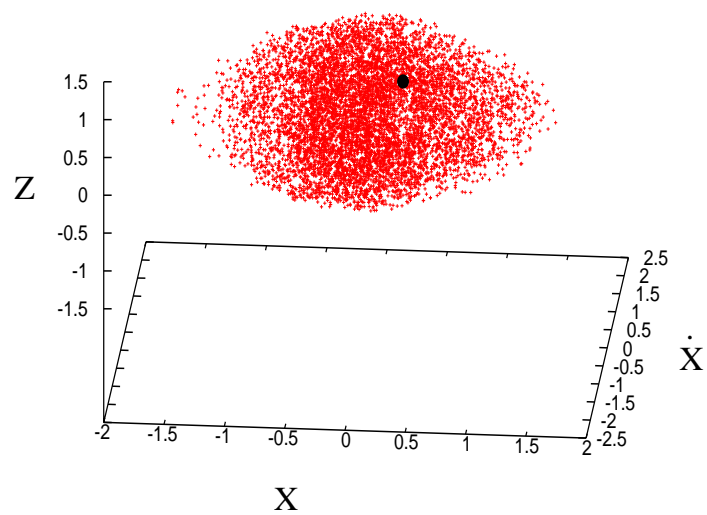
Σχήμα 118: Η τροχιακή συμπεριφορά στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-1}$ και $E_j = -4.619$ (για 310 σημεία στην επιφάνεια τομής). Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (15^\circ, 90^\circ)$.



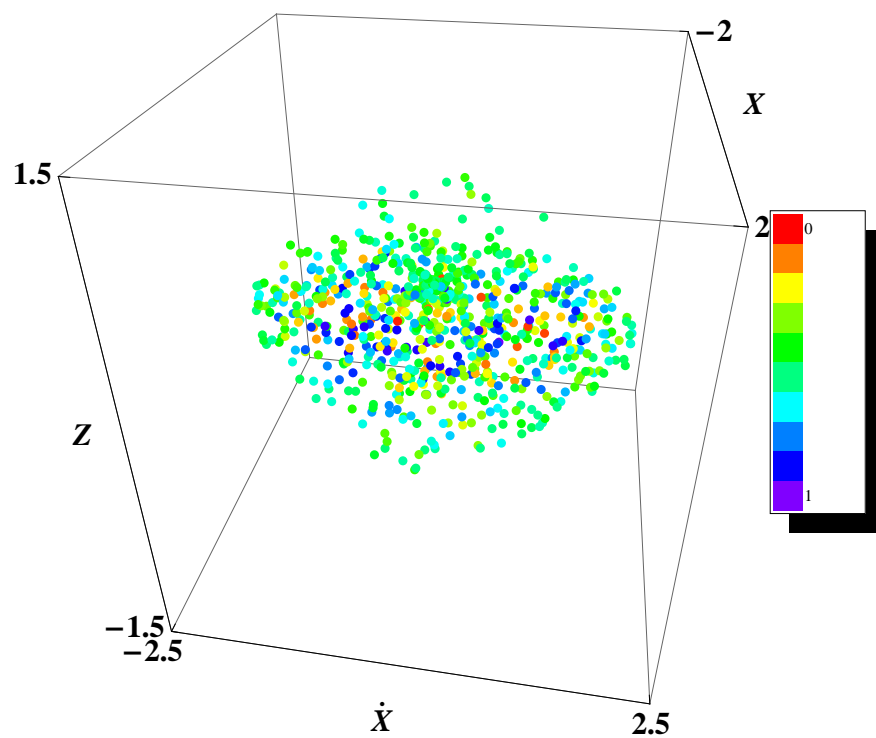
Σχήμα 119: Η 3D προβολή (x, \dot{x}, z) των σημείων στην επιφάνεια τομής στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-1}$ και $E_j = -4.619$ (για 3000 σημεία στην επιφάνεια τομής). Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (55^\circ, 95^\circ)$.



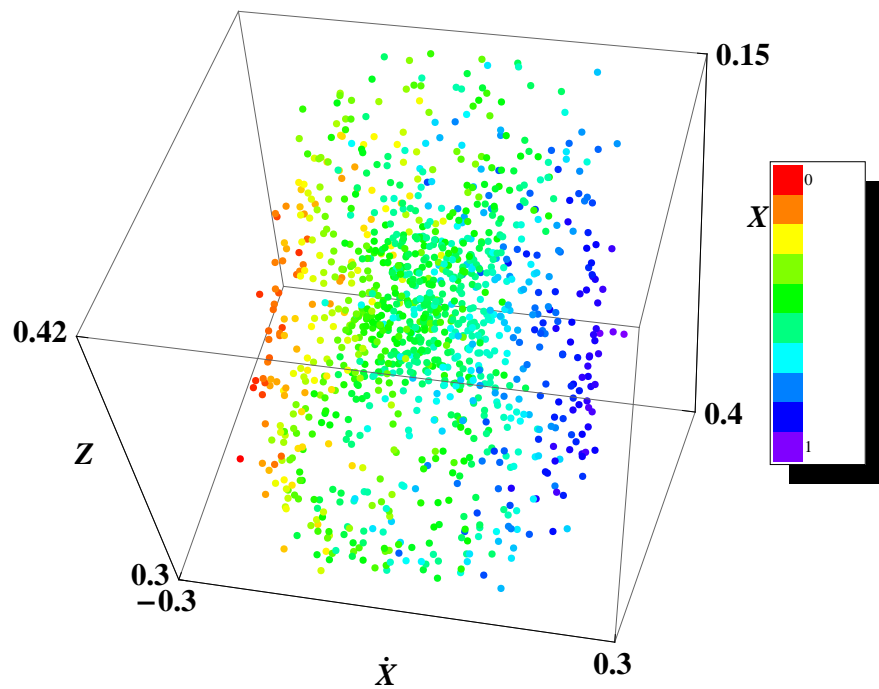
Σχήμα 120: Διάγραμμα του εύρους ΔZ των σημείων στην επιφάνεια τομής στην γειτονία μιάς μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς συναρτήσει της ενέργειας E_j .



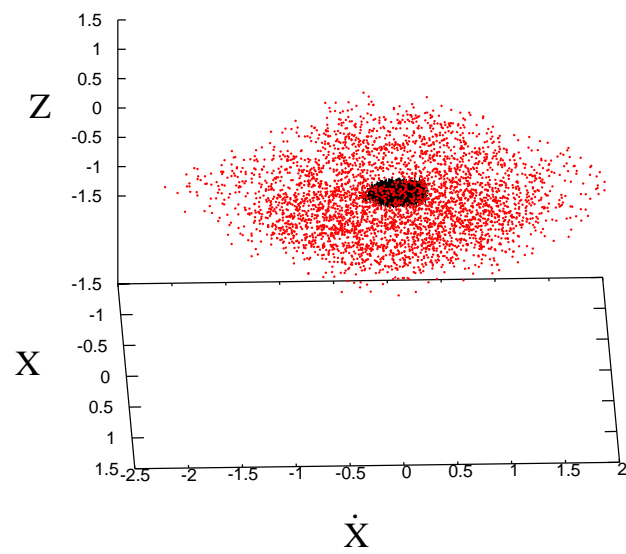
Σχήμα 121: Η 3D προβολή (x, \dot{x}, z) των σημείων στην επιφάνεια τομής στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-4}$ και $E_j = -4.50$ (για 4000 σημεία στην επιφάνεια τομής). Η περιοδική τροχιά απεικονίζεται με ένα μαύρο σημείο. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (62^\circ, 5^\circ)$.



Σχήμα 122: Η τροχιακή συμπεριφορά στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-4}$ και $E_j = -4.50$ (για 2000 σημεία στην επιφάνεια τομής). Η οπτική μας γωνία είναι σε σφαιρικές συντεταγμένες $(\theta, \phi) = (55^\circ, 85^\circ)$.



Σχήμα 123: Η τροχιακή συμπεριφορά στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-4}$ και $E_j = -4.59$ (για 1250 σημεία στην επιφάνεια τομής). Η οπτική μας γωνία είναι σε σφαιρικές συντεταγμένες $(\theta, \phi) = (15^\circ, 90^\circ)$.



Σχήμα 124: Η 3D προβολή (x, \dot{x}, z) των σημείων στην επιφάνεια τομής στην γειτονιά της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της 3D οικογένειας $x1v1$ για $\Delta x = 10^{-4}$ και $E_j = -4.59$ (για 4000 σημεία στην επιφάνεια τομής). Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (55^\circ, 88^\circ)$.

4 Η δομή του φασικού χώρου στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου

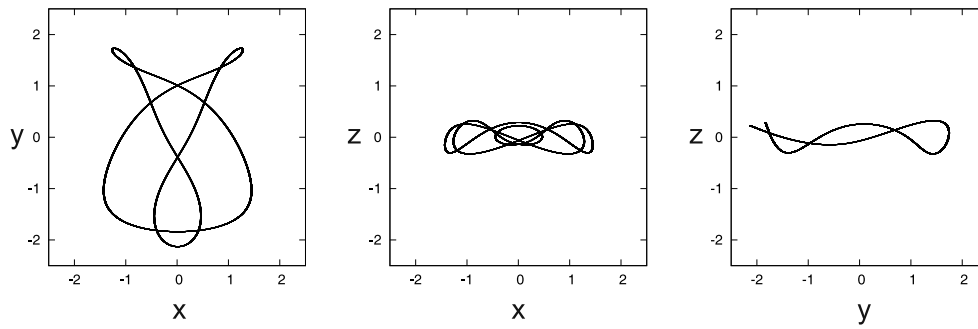
Στο παρόν υποκεφάλαιο διερευνούμε την τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου (για τον ορισμόδες υποκεφάλαιο 1.1.4) για την πρώτη περίπτωση του μοντέλου μας (η ταχύτητα περιστροφής του συστήματος είναι $\Omega_b = 60 \text{ km/sec/kpc}$). Ειδικά, μελετήσαμε την τροχιακή συμπεριφορά στην περιοχή μίας ευσταθούς m -περιοδικής τροχιάς (περιοδική τροχιά περιόδου m) με $m = 2$ και 7 και της συνοδού της απλά ασταθούς m -περιοδικής τροχιάς. Τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια σε όλες τις περιπτώσεις (Katsanikas et al. 2011b). Για το λόγο αυτό παρουσιάζουμε αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για τις περιπτώσεις μίας ευσταθούς 2-περιοδικής τροχιάς (υποκεφάλαιο 4.1) και μίας ευσταθούς 7-περιοδικής τροχιάς (υποκεφάλαιο 4.3) και των συνοδών τους οι οποίες είναι μία απλά ασταθής 2-περιοδική τροχιά (υποκεφάλαιο 4.2) και μία απλά ασταθής 7-περιοδική τροχιά αντίστοιχα (υποκεφάλαιο 4.4).

Η ευσταθής 2-περιοδική τροχιά και η συνοδός της απλά ασταθής περιοδική τροχιά ανήκουν στις 3D οικογένειες περιοδικών τροχιών s (μία αρχικά ευσταθής οικογένεια) και u (μία αρχικά απλά ασταθής οικογένεια) αντίστοιχα. Οι οικογένειες αυτές είναι διακλαδώσεις περιοδικότητας 2 των ακτινικών 3/1 οικογενειών στο ισημερινό επίπεδο του συστήματός μας, τις οποίες για τον υπολογισμό τους τις περιγράφουμε δύο φορές. Η s είναι διακλάδωση της ασύμμετρης¹¹ (βλ. π.χ. το Σχ.8 στην εργασία των Patsis et al. 1997) και η u είναι διακλάδωση της σύμμετρης ακτινικής 3/1 οικογένειας (βλ. π.χ. το Σχ.9 στην εργασία των Patsis et al. 1997). Στα Σχ. 125 και 126 απεικονίζουμε την μορφολογία των περιοδικών τροχιών των οικογενειών s και u αντίστοιχα¹².

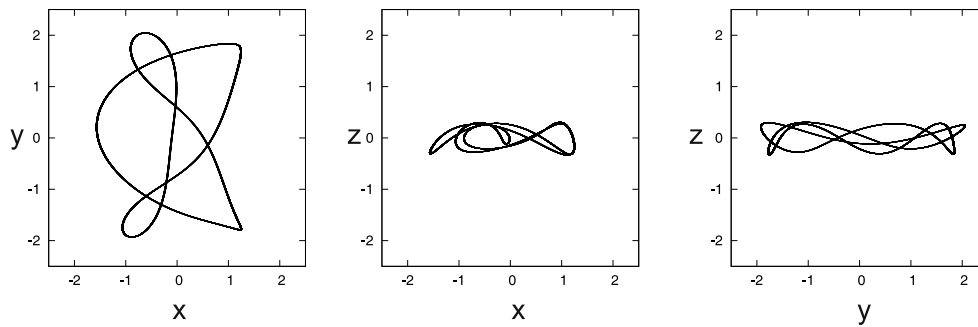
Η ευσταθής 7-περιοδική τροχιά και η συνοδός της απλά ασταθής περιοδική τροχιά ανήκουν στις 3D οικογένειες περιοδικών τροχιών $s1$ (μία αρχικά ευσταθής οικογένεια) και $u1$ (μία αρχικά απλά ασταθής οικογένεια) αντίστοιχα. Οι οικογένειες αυτές είναι διακλαδώσεις της $x1v1$ (υποκεφάλαιο 2.3.2). Στα Σχ. 127 και 128 απεικονίζουμε την μορφολογία των περιοδικών τροχιών των οικογενειών $s1$ και $u1$ αντίστοιχα.

¹¹Η ασύμμετρη ακτινική 3/1 οικογένεια και η συμμετρική ακτινική 3/1 οικογένεια είναι οι διακλαδώσεις της x_1 στην περιοχή του ακτινικού συντονισμού 3/1, όπου οι τροχιές τους είναι ασύμμετρες ή συμμετρικές ως προς τον x -άξονα αντίστοιχα (Contopoulos and Grosbøl 1989).

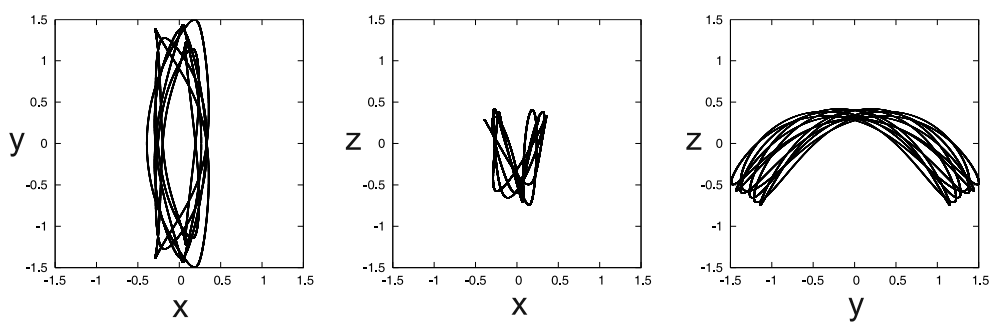
¹²Τις ονομασίες αυτές τις δώσαμε απλώς για να διευκολυνθούμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων μας.



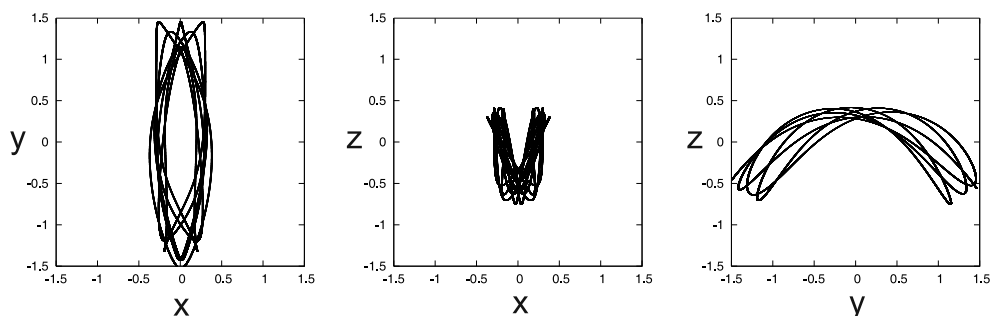
Σχήμα 125: Προβολές μίας ευσταθούς 2-περιδικής τροχιάς της οικογένειας s για $E_j = -4.33035$.



Σχήμα 126: Προβολές μίας απλά ασταθούς 2-περιδικής τροχιάς της οικογένειας u για $E_j = -4.33035$.



Σχήμα 127: Προβολές μίας ευσταθούς 7-περιδικής τροχιάς της οικογένειας s_1 για $E_j = -4.622377$.



Σχήμα 128: Προβολές μίας απλά ασταθούς 7-περιοδικής τροχιάς της οικογένειας u_1 για $E_j = -4.622377$.

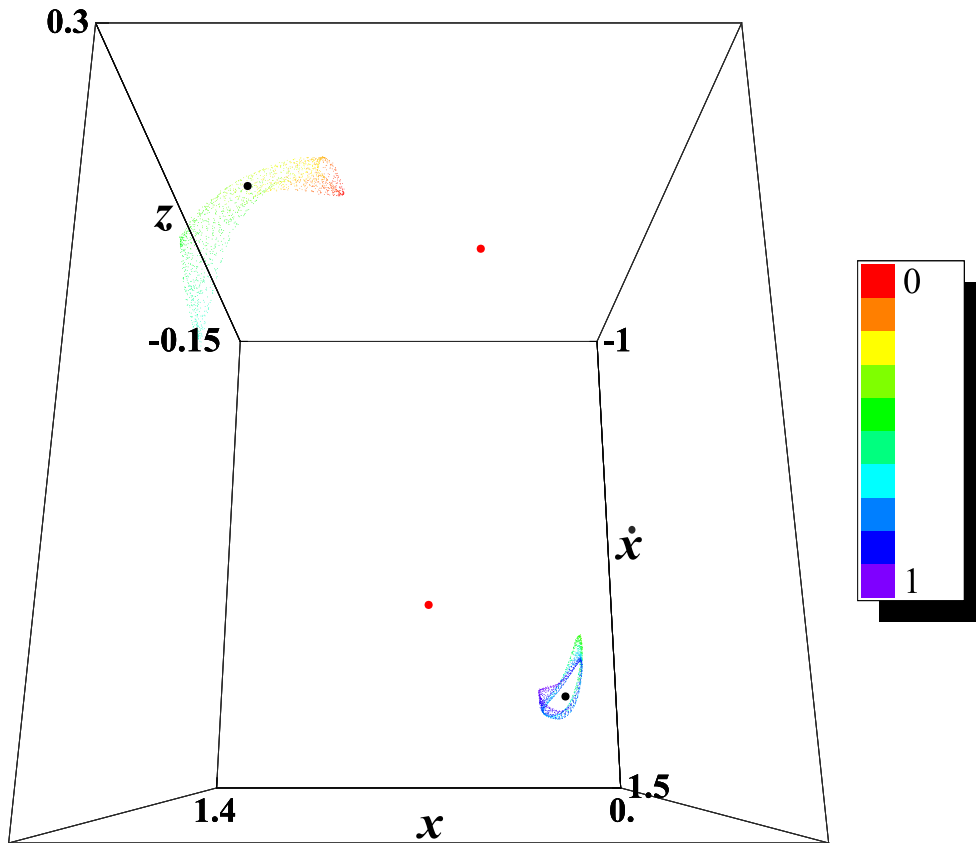
4.1 Ο φασικός χώρος κοντά στην s

Θεωρούμε πρώτα την ευσταθή 2-περιοδική τροχιά s για $E_j = -4.33035$. Αυτή η 2-περιοδική τροχιά έχει αρχικές συνθήκες $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = (1.0867145, 0.2555081, -0.56256937, 0.049693274)$. Στην περιοχή της s τροχιάς βρίσκουμε δύο τόρους, όταν διαταράσσουμε τις αρχικές της συνθήκες κατά ένα Δx το οποίο ανήκει στα διαστήματα $10^{-4} \leq \Delta x \leq 4 \times 10^{-2}$ και $-5 \times 10^{-2} \leq \Delta x \leq -10^{-4}$. Για παράδειγμα, αν πάρουμε $\Delta x = 4 \times 10^{-2}$ παρατηρούμε δύο τόρους στο Σχ. 129 γύρω από δύο σημεία (μαύρα σημεία) της ευσταθούς 2-περιοδικής τροχιάς. Στην επιφάνεια των τόρων αυτών παρατηρούμε ομαλή μεταβολή χρώματος. Τα χρώματα στο πάνω αριστερό τόρο μεταβάλλονται από κόκκινο σε πορτοκαλί, σε κίτρινο και σε πράσινο, ενώ τα χρώματα στον άλλο τόρο μεταβάλλονται από πράσινο σε γαλάζιο και τέλος σε μπλε. Αυτό σημαίνει ότι η τέταρτη συντεταγμένη των σημείων έχει ομαλή κατανομή στην τέταρτη διάσταση. Αν διαταράξουμε τις αρχικές συνθήκες περισσότερο, για παράδειγμα $\Delta x = -6 \times 10^{-2}$, παρατηρούμε ξανά δύο τόρους με ομαλή μεταβολή χρώματος για 1000 σημεία στην επιφάνεια τομής. Όμως αν συνεχίσουμε την ολοκλήρωση των τροχιών, παρατηρούμε ότι τα σημεία στην επιφάνεια τομής αρχίζουν να αποκλίνουν από τους δύο τόρους και σχηματίζουν ένα νέφος στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής γύρω από αυτούς (Σχ. 130). Στο νέφος αυτό τα χρώματα είναι ανάμεικτα και αυτό σημαίνει ότι τα σημεία είναι μακριά στην τέταρτη διάσταση. Η δυναμική συμπεριφορά σύμφωνα με την οποία μία τροχιά μένει κοντά σε έναν αναλλοίωτο τόρο για ένα χρονικό διάστημα και μετά διαχέεται στον φασικό χώρο είναι χαρακτηριστική συμπεριφορά μίας τροχιάς κολλητικότητας (Contopoulos & Harsoula 2008). Στον πίνακα 5 δίνουμε τις τιμές και την διεύθυνση των διαταραχών για τις οποίες παρατηρούμε τόρους.

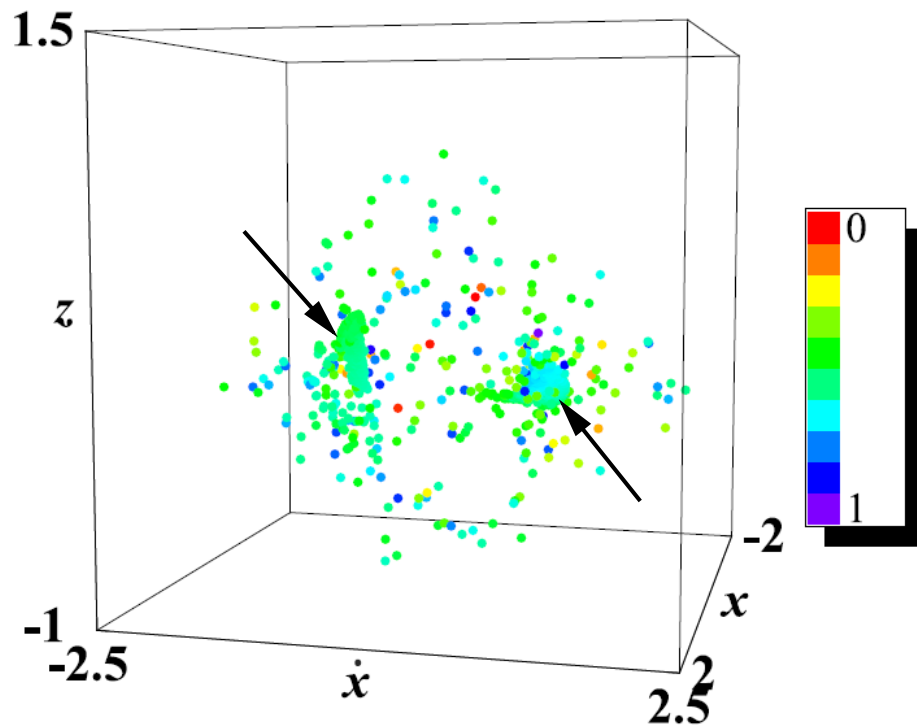
Δx	από 10^{-4} ως και 4×10^{-2}	από -10^{-4} ως και -5×10^{-2}
$\Delta \dot{x}$	από 10^{-4} ως και 3×10^{-2}	από -10^{-4} ως και -3×10^{-2}
Δz	από 10^{-4} ως και 10^{-3}	από -10^{-4} ως και -10^{-3}
$\Delta \dot{z}$	από 10^{-4} ως και 6×10^{-2}	από -10^{-4} ως και -1.1×10^{-2}

Πίνακας 5: Το εύρος των διαταραχών στις αρχικές συνθήκες της s , το οποίο δίνει τόρους στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.33035$.

Για τιμές εκτός του πίνακα συναντάμε τροχιές κολλητικότητας όπως αυτή στο Σχ. 130.



Σχήμα 129: Η 4D επιφάνεια τομής για $E_j = -4.33035$ (3000 σημεία) στην περιοχή της ευσταθούς 2-περιοδικής τροχιάς s . Οι αρχικές συνθήκες της s (μαύρα σημεία) διαταράσσονται κατά $\Delta x = 4 \times 10^{-2}$. Χρησιμοποιούμε την (x, \dot{x}, z) προβολή για να απεικονίσουμε τα σημεία και την \dot{z} τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Δίνουμε επίσης τις αρχικές συνθήκες της συνοδού απλά ασταθούς 2-περιοδικής τροχιάς u με κόκκινα σημεία. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (22.5^\circ, 0^\circ)$.



Σχήμα 130: 1500 σημεία της τροχιάς κολλητικότητας στην 4D επιφάνεια τομής για $E_j = -4.33035$. Τα σημεία χρωματίζονται ανάλογα των τιμών της τέταρτης διάστασης τους \dot{z} . Η τροχιά μένει αρχικά κοντά στην περιοχή των δύο τόρων (οι οποίοι υποδεικνύονται με βέλη) και μετά διαχέεται στον φασικό χώρο. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (22.5^\circ, 22.5^\circ)$.

4.2 Ο φασικός χώρος κοντά στην u

Κοντά στην s για $E_j = -4.33035$ βρίσκουμε την 2-περιοδική τροχιά της u (Σχ. 129) με αρχικές συνθήκες $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = (0.67649546, 0.16719438, 0.78985004, 0.41351876)$. Στην γειτονιά αυτής της περιοδικής τροχιάς έχουμε δύο τύπους δυναμικής συμπεριφοράς. Μπορούμε να δούμε τον πρώτο τύπο αν διαταράξουμε για παράδειγμα τις αρχικές συνθήκες της 2-περιοδικής τροχιάς κατά $\Delta x = 10^{-4}$. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε στο Σχ. 131 μία κορδέλα η οποία συνδέει τα σημεία της απλά ασταθούς 2-περιοδικής τροχιάς. Αν εφαρμόσουμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής, παρατηρούμε στο Σχ. 132 μία ομαλή μεταβολή χρώματος από κόκκινο σε μπλε. Αυτό σημαίνει ότι η 'κορδέλα' είναι μία 4D δομή. Μετά από 5300 τομές παρατηρούμε στο Σχ. 133, ότι τα σημεία αφήνουν την 'κορδέλα' και διασκορπίζονται στον φασικό χώρο. Αυτή η τροχιά είναι επίσης μία τροχιά κολλητικότητας με την έννοια ότι παραμένει κοντά σε μία δομή του φασικού χώρου για κάποιο χρονικό διάστημα και μετά διαχέεται στην 4D επιφάνεια τομής.

Ο δεύτερος τύπος δυναμικής συμπεριφοράς, στην περιοχή της απλά ασταθούς 2-περιοδικής τροχιάς u για $E_j = -4.33035$, συναντάται αν προσθέσουμε για παράδειγμα μία διαταραχή στην z -κατεύθυνση $\Delta z = 2 \times 10^{-3}$ στις αρχικές συνθήκες της 2-περιοδικής τροχιάς u . Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ένα νηματοειδή σχηματισμό στην 3D προβολή της 4D επιφάνειας τομής (Σχ. 134). Ο νηματοειδής αυτός σχηματισμός συνδέει τα σημεία της u και σχηματίζει τέσσερις βρόχους. Οι δύο από αυτούς περιβάλλουν τους δύο τόρους οι οποίοι βρίσκονται γύρω από τα δύο σημεία της s . Στις περιοχές αυτές, κοντά στα σημεία της u έχουμε δύο ιδιο-τομές (τομές του νηματοειδούς σχηματισμού με τον εαυτό της) του νηματοειδούς σχηματισμού. Στο Σχ. 134 παρατηρούμε δύο ακόμα ιδιο-τομές οι οποίες υποδεικνύονται με βέλη και τον σχηματισμό τεσσάρων βρόχων. Οι βρόχοι περιβάλλουν τα σημεία της s και της ευσταθούς 2-περιοδικής τροχιάς η οποία είναι συμμετρική της s ως προς το ισημερινό επίπεδο $z = 0$, ενώ τα βέλη υποδεικνύουν μία απλά ασταθή 2-περιοδική τροχιά συμμετρική της u . Η δυναμική κοντά στο δεύτερο σύνολο περιοδικών τροχιών είναι όμοια με αυτή των s και u (τόρους και νηματοειδείς σχηματισμοί). Τώρα εφαρμόζουμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής για να δούμε την κατανομή των σημείων στην τέταρτη διάσταση (Σχ. 135). Παρατηρούμε, ότι έχουμε ομαλή μεταβολή χρώματος από κόκκινο σε μπλε και αυτό σημαίνει ότι τα σημεία βρίσκονται στον νηματοειδή σχηματισμό στην 4D επιφάνεια τομής. Για περισσότερα από 4700 σημεία στην επιφάνεια τομής, τα σημεία αποκλίνουν από την δομή αυτή και σχηματίζουν ένα νέφος σημείων γύρω από αυτή τη δομή (φαινόμενο κολλητικότητας). Οι πίνακες 6 και 7 δίνουν το εύρος διαταραχών των αρχικών συνθηκών

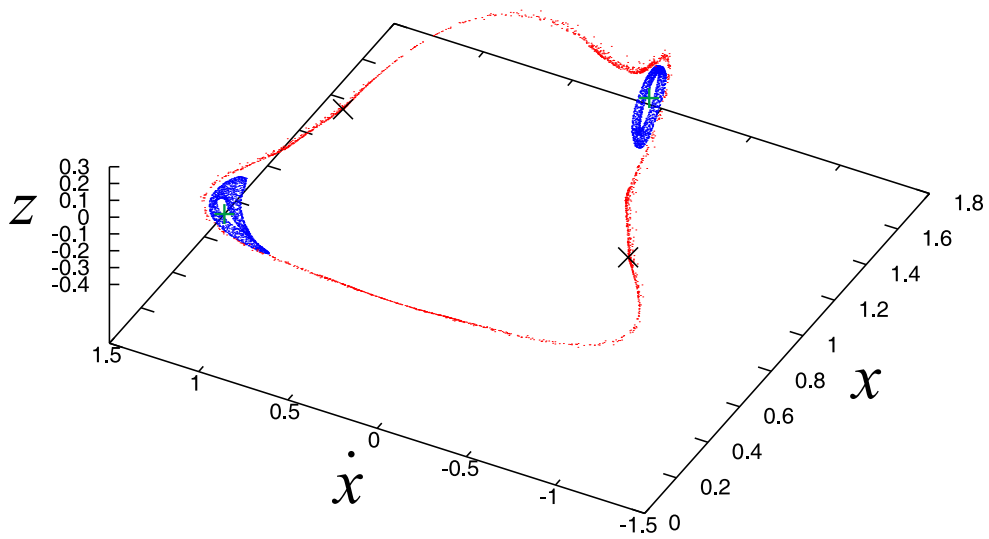
Δx	από 10^{-4} ως και 3×10^{-3}	από -10^{-4} ως και -10^{-3}
$\Delta \dot{x}$	από 10^{-4} ως και 2×10^{-2}	από -10^{-4} ως και -3×10^{-2}
Δz	από 10^{-4} ως και 10^{-3}	από -10^{-4} ως και -4×10^{-3}
$\Delta \dot{z}$	από 10^{-4} ως και 3×10^{-3}	από -10^{-4} ως και -9×10^{-4}

Πίνακας 6: Το εύρος των διαταραχών στις αρχικές συνθήκες της u , το οποίο δίνει κορδέλες στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.33035$.

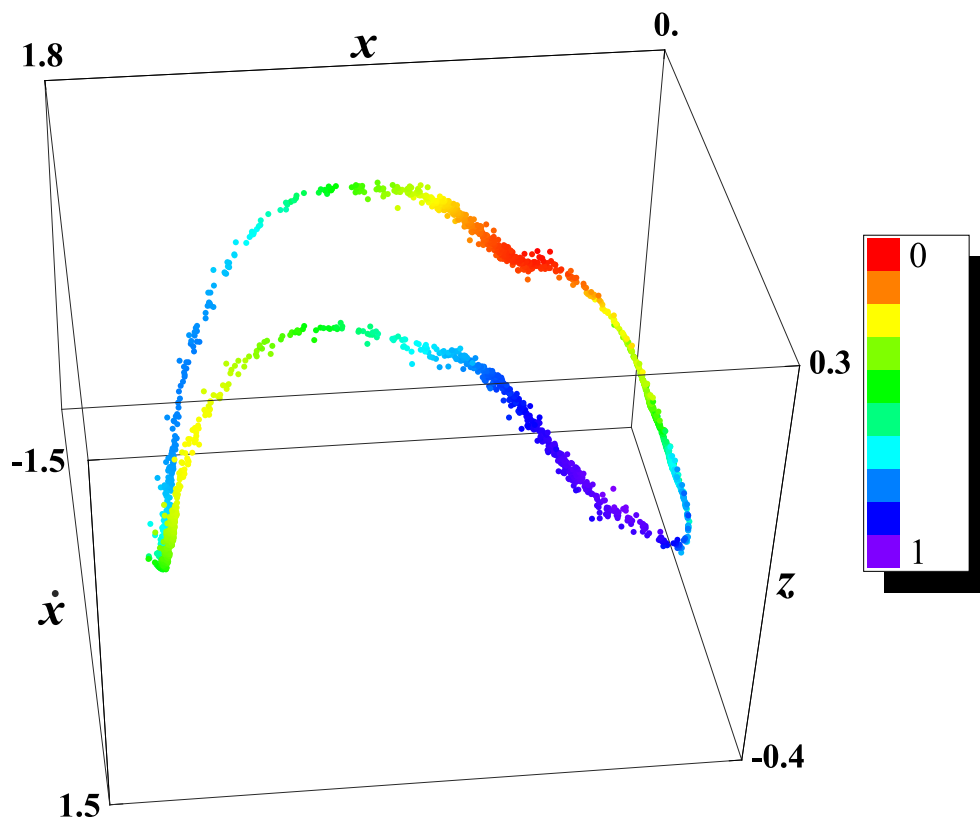
Δx	από 4×10^{-3} ως και 6×10^{-2}	από -2×10^{-3} ως και -5×10^{-2}
$\Delta \dot{x}$	από 3×10^{-2} ως και 6×10^{-2}	-
Δz	από 2×10^{-3} ως και 10^{-2}	από -5×10^{-3} ως και -2×10^{-2}
$\Delta \dot{z}$	από 4×10^{-3} ως και 4×10^{-2}	από -10^{-3} ως και -3×10^{-2}

Πίνακας 7: Το εύρος των διαταραχών στις αρχικές συνθήκες της u , το οποίο δίνει νηματοειδείς σχηματισμούς στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.33035$. Η παύλα υποδεικνύει ότι δεν βρίσκουμε νηματοειδείς σχηματισμούς για αρνητικές τιμές της διαταραχής στην \dot{x} διεύθυνση.

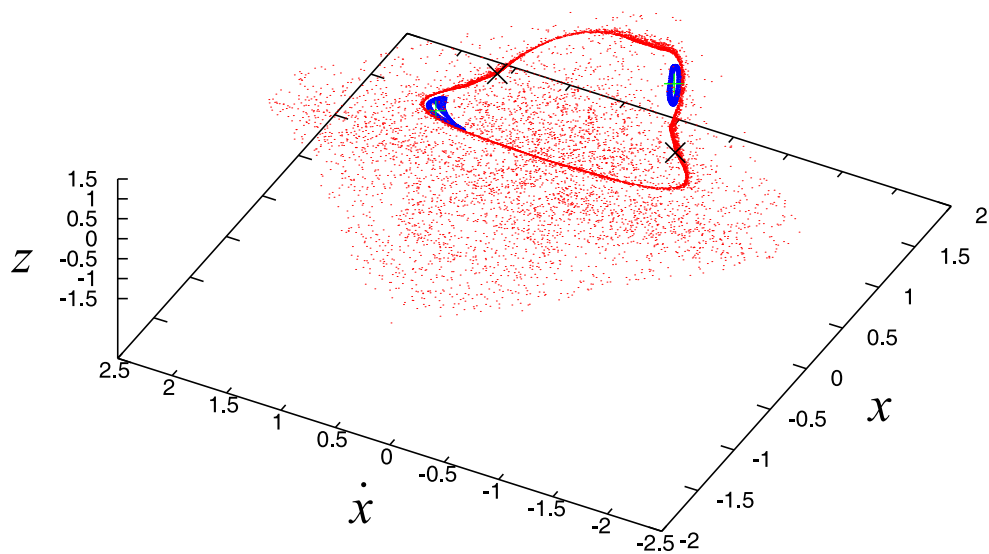
της u ώστε να έχουμε ‘κορδέλες’ και νηματοειδείς σχηματισμούς αντίστοιχα. Για μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές της διαταραχής βρίσκουμε νέφη σημείων σαν αυτό του Σχ. 133.



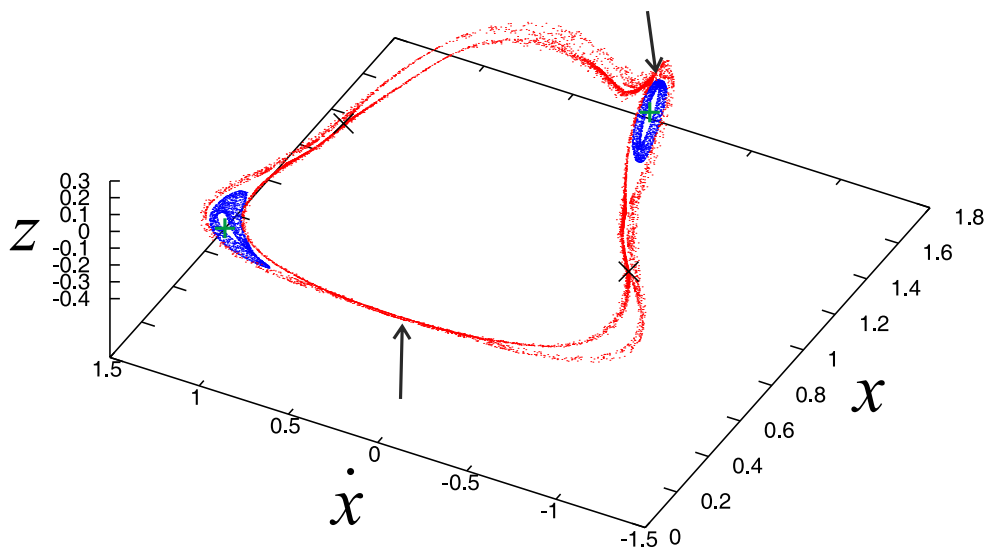
Σχήμα 131: Ο 3D υπόχωρος της επιφάνειας τομής για $E_j = -4.33035$ στην περιοχή της s και u . Εφαρμόζουμε μία διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ στις αρχικές τους συνθήκες και θεωρούμε 5000 τομές. Οι αρχικές συνθήκες της s υποδεικνύονται με '+' και πράσινο χρώμα. Δίνουμε επίσης τις αρχικές συνθήκες της u με \times μαύρα σύμβολα. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (26^\circ, 298^\circ)$.



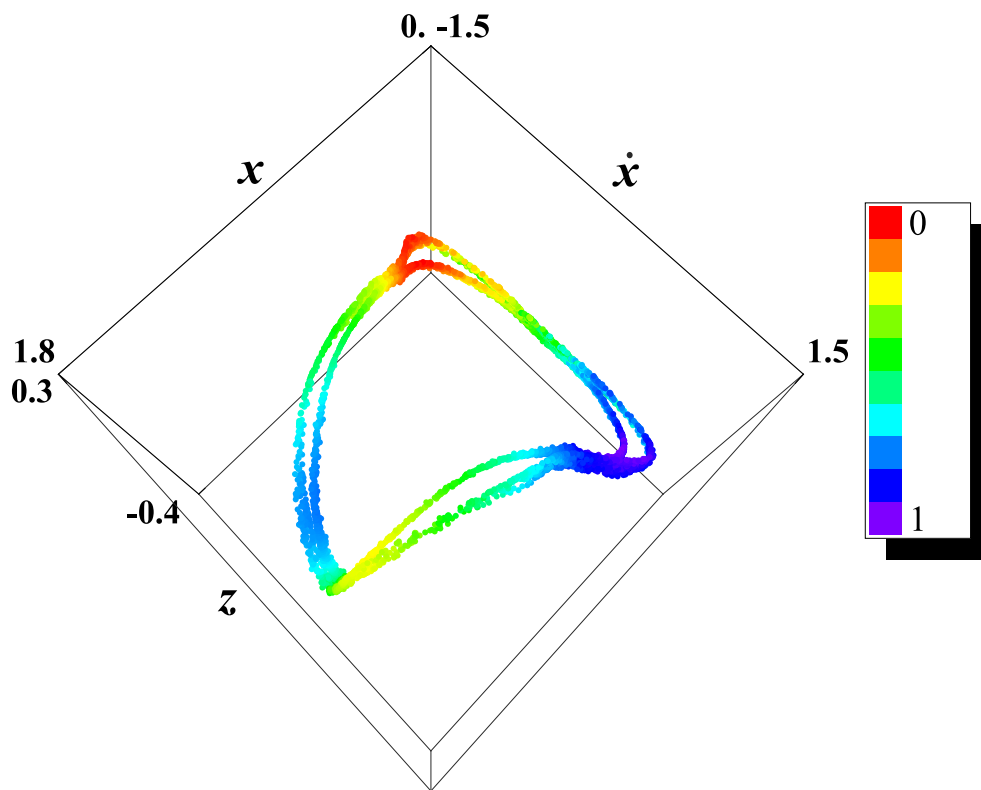
Σχήμα 132: Η τροχιακή συμπεριφορά κοντά στην u για μία απόκλιση $\Delta x = 10^{-4}$ από τις αρχικές της συνθήκες, για $E_j = -4.33035$ (5000 τομές) στην 4D επιφάνεια τομής. Χρησιμοποιούμε τον (x, \dot{x}, z) υπόχωρο για να απεικονίσουμε τα σημεία και την \dot{z} τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (180^\circ, 22.5^\circ)$.



Σχήμα 133: Η 3D προβολή της 4D επιφάνειας τομής κοντά στις περιοδικές τροχιές s και u (\times σύμβολα για την u) για $E_j = -4.33035$. Η ‘κορδέλα’ που παρατηρούμε με κόκκινο είναι αυτή του Σχ. 132, ενώ οι μπλε δομές είναι οι τόροι γύρω από την s . Αυτή την φορά ολοκληρώνουμε την τροχιά του Σχ. 132 ώστε να πάρουμε 7500 (αντί για 5000) τομές. Παρατηρούμε ένα νέφος σημείων, το οποίο περιβάλλει τους τόρους και την ‘κορδέλα’. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (26^\circ, 240^\circ)$.



Σχήμα 134: Η ίδια προβολή όπως στο Σχ. 133, αλλά με μία τροχιά κοντά στην u διαταραγμένη αυτή την φορά στην z -κατεύθυνση με $\Delta z = 2 \times 10^{-3}$ (4500 τομές). Αυτή την φορά αντι για ‘κορδέλα’ βλέπουμε έναν νηματοειδή σχηματισμό ο οποίος έχει τέσσερεις ιδιο-τομές (τομές του νηματοειδούς σχηματισμού με τον εαυτό της) στον 3D υπόχωρο της επιφάνειας τομής. Υποδεικνύουμε την s με πράσινα ‘+’ σύμβολα, την u με μαύρα ‘x’ και δύο ιδιο-τομές στα σημεία ‘x’, ενώ τα βέλη υποδεικνύουν τις δύο παραπάνω ιδιο-τομές του νηματοειδούς σχηματισμού. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (26^\circ, 298^\circ)$.



Σχήμα 135: Η 4D αναπαράσταση του νηματοειδούς σχηματισμού του Σχ. 134, για 4000 τομές. Τα σημεία χρωματίζονται αναλόγως της z τιμής τους. Οι κλάδοι του νηματοειδούς σχηματισμού οι οποίοι τέμνονται μεταξύ τους, έχουν το ίδιο χρώμα στην περιοχή των τομών τους. Αυτό σημαίνει ότι οι τομές αυτές είναι πραγματικές τομές στον 4D χώρο. Η οπτική μας γωνία είναι $(\theta, \phi) = (22.5^\circ, 22.5^\circ)$.

4.3 Ο φασικός χώρος κοντά στην s1

Εφαρμόζουμε μία διαταραχή στη x -διεύθυνση και στη z -διεύθυνση στις αρχικές συνθήκες της ευσταθούς 7-περιοδικής τροχιάς της οικογένειας $s1$, με $\Delta x = 1.6 \times 10^{-2}$ και $\Delta z = -5 \times 10^{-3}$, για $E_j = -4.622377$. Σε αυτή την ενέργεια βρίσκουμε την τροχιά $s1$ με αρχικές συνθήκες $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = (0.25992717, 0.29991487, 0, 0)$. Η διαταραγμένη τροχιά έχει ολοκληρωθεί για 10^4 σημεία στην επιφάνεια τομής. Στην (x, \dot{x}, z) 3D προβολή της επιφάνειας τομής παρατηρούμε επτά τόρους οι οποίοι περιβάλλουν τα σημεία της 7-περιοδικής τροχιάς (Σχ. 136). Σε αυτήν την προβολή παρατηρούμε ότι δύο τόροι τέμνουν ο ένας τον άλλο. Για να ελέγξουμε την θέση τους στην τέταρτη διάσταση, \dot{z} , χρησιμοποιούμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής. Θεωρώντας όλες τις τιμές όλων των τόρων στην τέταρτη διάσταση, \dot{z} , και κανονικοποιώντας ανάλογα τις τιμές του χρώματος στο διάστημα $[0, 1]$ ως συνήθως, βρίσκουμε ότι σε κάθε μικρό τόρο αντιστοιχεί ένα ή δύο χρώματα. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των δύο τόρων που τέμνουν ο ένας τον άλλο στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) έχουμε την συνάντηση διαφορετικών χρωμάτων στην περιοχή της τομής τους. Αυτό σημαίνει ότι η τομή αυτή δεν υπάρχει στην 4D επιφάνεια τομής αλλά μόνο στις 3D προβολές. Μετά εφαρμόζουμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής μόνο σε έναν τόρο, τον οποίο ονομάσαμε T1, και ο οποίος υποδεικνύεται με ένα βέλος στο Σχ. 136. Στο Σχ. 137 παρατηρούμε μία ομαλή μεταβολή χρώματος πάνω στην επιφάνεια του T1, η οποία αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό εύρος τιμών του \dot{z} από ότι εκείνο του Σχ. 136. Βλέπουμε μία διαδοχή χρώματος από κόκκινο, σε πορτοκαλί, σε κίτρινο, σε πράσινο, σε γαλάζιο, σε μπλε και τέλος σε μωβ. Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με τα αποτελέσματα του υποκεφαλαίου 3.2.2 αντιλαμβανόμαστε ότι η μορφολογία αυτή είναι χαρακτηριστική μορφολογία ενός περιστροφικού τόρου. Η μόνη διαφορά είναι ότι δεν παρατηρούμε τώρα την μετάβαση του χρώματος από την εξωτερική στην εσωτερική επιφάνεια του τόρου, όπως στις περιπτώσεις των τόρων στην περιοχή ευσταθών απλών περιοδικών τροχιών (υποκεφάλαιο 3.2.2).

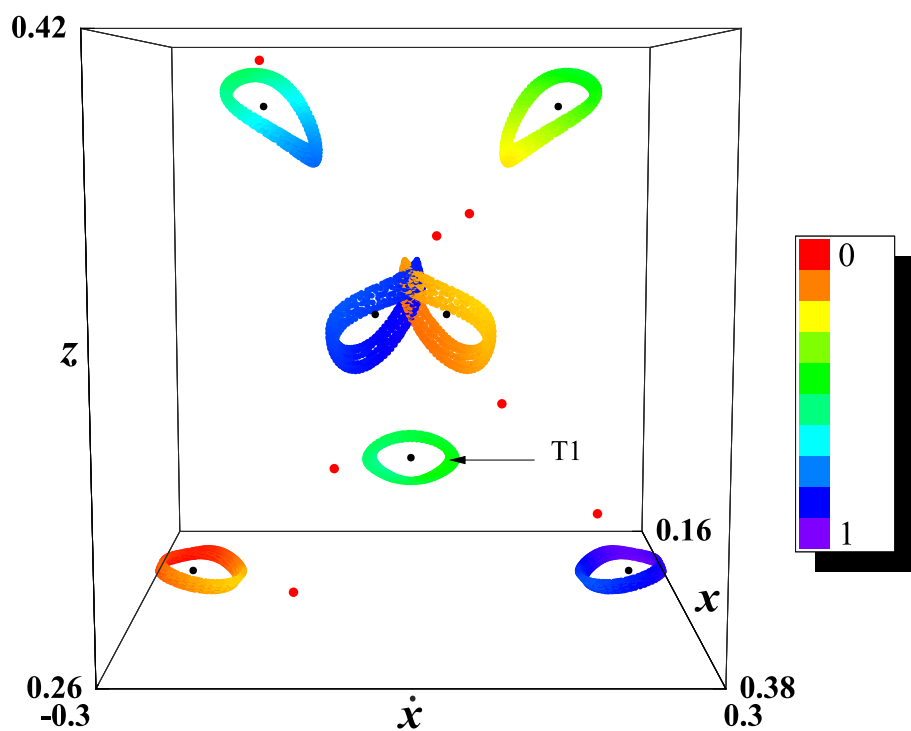
Αν διαταράξουμε τις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς της $s1$, κατά $\Delta x = 10^{-2}$ βλέπουμε στο Σχ. 138 επτά τόρους χωρίς καμία τομή στον 3D υπόχωρο της επιφάνειας τομής. Αυτοί οι τόροι έχουν πάλι ομαλή μεταβολή χρώματος (Σχ. 138). Στους πίνακες 8 και 9 δίνουμε τα εύρη των τιμών της διαταραχής, για τα οποία βρίσκουμε αντίστοιχα τόρους χωρίς τομή και τόρους με τομή στον 3D υπόχωρο της επιφάνειας τομής στην περιοχή των τροχιών της $s1$.

Δx	από 10^{-4} ως και 1.3×10^{-2}	από -10^{-4} ως και -1.1×10^{-2}
$\Delta \dot{x}$	από 10^{-4} ως και 3×10^{-2}	από -10^{-4} ως και -3×10^{-2}
Δz	από 10^{-4} ως και 1.6×10^{-3}	από -10^{-4} ως και -5×10^{-3}
$\Delta \dot{z}$	από 10^{-4} ως και 10^{-1}	από -10^{-4} ως και -10^{-1}

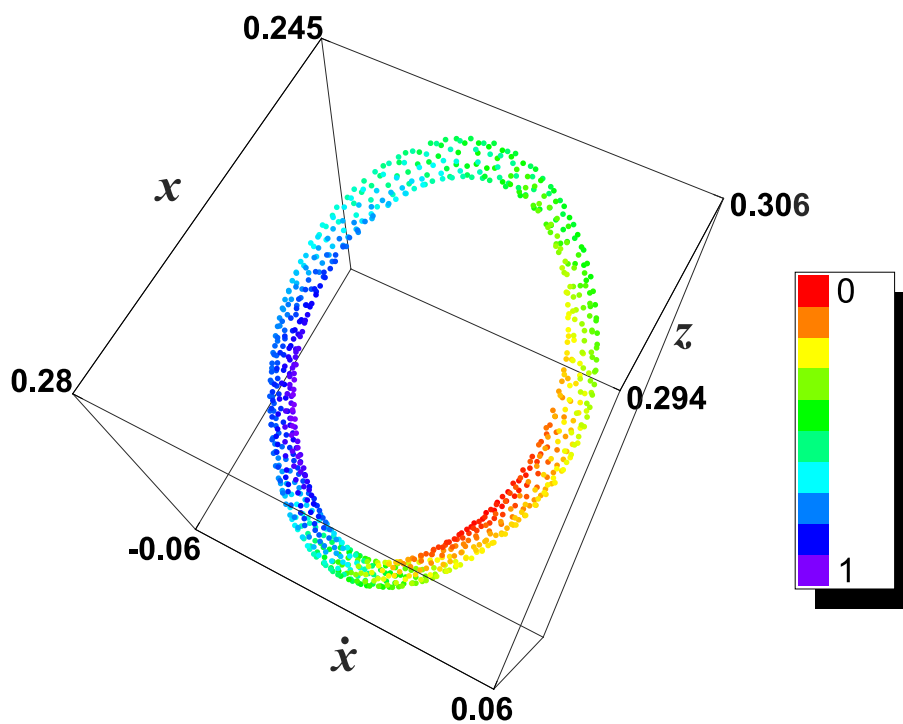
Πίνακας 8: Το εύρος των διαταραχών στις αρχικές συνθήκες της s1, το οποίο δίνει τόρους χωρίς τομή στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.622377$.

Δx	από 1.4×10^{-2} ως και 1.8×10^{-2}	από -1.2×10^{-2} ως και -1.7×10^{-2}
$\Delta \dot{x}$	από 4×10^{-2} ως και 6×10^{-2}	από -4×10^{-2} ως και -6×10^{-2}
Δz	-	-
$\Delta \dot{z}$	-	-

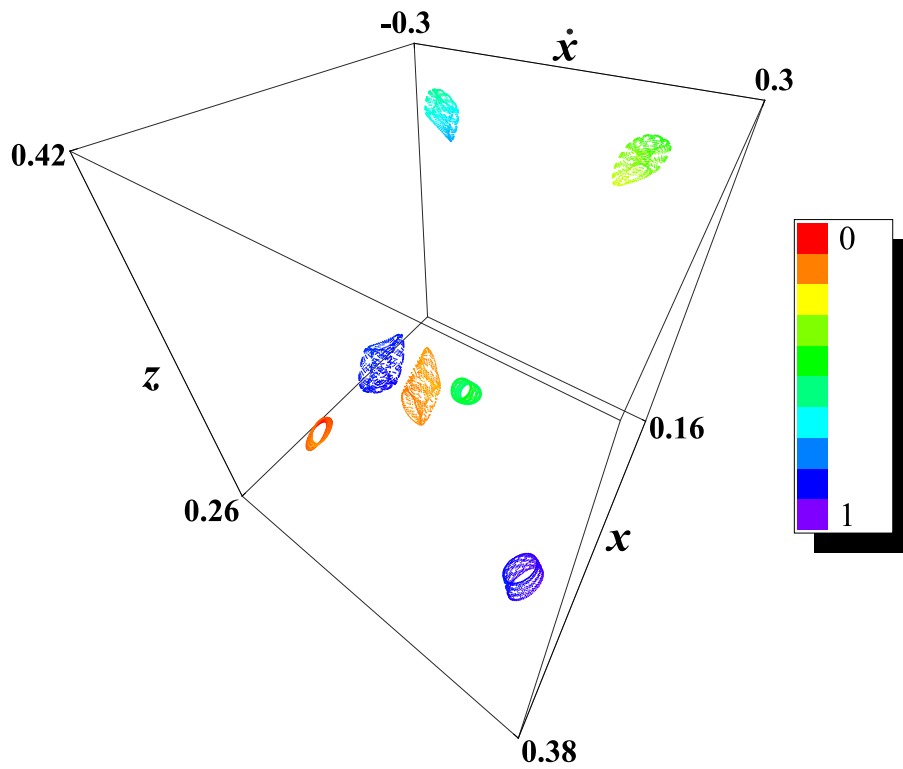
Πίνακας 9: Το εύρος των διαταραχών στις αρχικές συνθήκες της s1, το οποίο δίνει τόρους με τομή στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.622377$. Οι παύλες υποδεικνύουν ότι στις z και \dot{z} διευθύνσεις δεν βρίσκουμε τόρους με τομή στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.622377$.



Σχήμα 136: Η 4D επιφάνεια τομής για $E_j = -4.622377$ (6500 σημεία στην επιφάνεια τομής) στην περιοχή του $s1$. Οι αρχικές συνθήκες του $s1$ δίνονται με μαύρα σημεία. Η τροχιά που αντιστοιχεί στους τόρους βρίσκεται αν διαταράξουμε τις αρχικές συνθήκες της $s1$ κατά $\Delta x = 1.6 \times 10^{-2}$ και $\Delta z = -5 \times 10^{-3}$. Χρησιμοποιούμε την (x, \dot{x}, z) προβολή για να απεικονίσουμε τα σημεία και την z τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Δίνουμε επίσης τις αρχικές συνθήκες της συνοδού απλά ασταθούς 7-περιοδικής τροχιάς της $u1$ με κόκκινα σημεία. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (0^\circ, 180^\circ)$. Υποδεικνύουμε με ένα βέλος τον τόρο T1, ο οποίος περιγράφεται στο κείμενο.



Σχήμα 137: Ο Τόρος T_1 στην 4D επιφάνεια τομής. Το χρώμα αντιπροσωπεύει τις τιμές στην τέταρτη διάσταση z . Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (22.5^\circ, 45^\circ)$.



Σχήμα 138: Τόροι στην 4D επιφάνεια τομής για $E_j = -4.622377$ (10^4 σημεία) στην περιοχή της ευσταθούς 7-περιοδικής τροχιάς της $s1$ για $\Delta x = 10^{-2}$. Χρησιμοποιούμε την (x, \dot{x}, z) προβολή για να απεικονίσουμε τα σημεία και την \dot{z} τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (22.5^\circ, 45^\circ)$.

4.4 Ο φασικός χώρος κοντά στην u_1

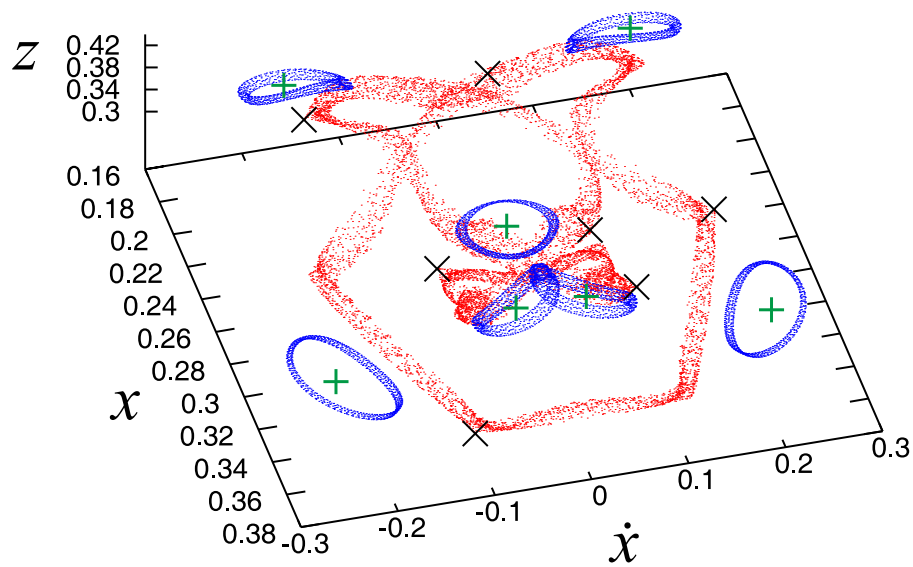
Ερχόμαστε τώρα στην διερεύνηση της δυναμικής στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της u_1 . Η περιοδική τροχιά που μελετάμε είναι για $E_j = -4.622377$ και έχει αρχικές συνθήκες $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = (0.27756296, 0.29935776, -0.084579242, 0.16982513)$. Αρχικά προσθέτουμε μία διαταραχή $\Delta x = 10^{-4}$ στις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς στην x -διεύθυνση. Στο Σχ. 139 βλέπουμε ότι τα σημεία απεικονίζονται με ένα κόκκινο διπλό βρόχο στην 3D προβολή της επιφάνειας τομής κοντά στους εφτά τόρους που βρίσκονται γύρω από τα σημεία της s_1 . Ο διπλός αυτός βρόχος αποτελείται από ένα μικρό βρόχο, στο πάνω μέρος του σχήματος ο οποίος στην κάτω άκρη του έχει δύο φιογκάκια (κοντά στους δύο τόρους που τέμνονται στις τρεις διαστάσεις) τα οποία τέμνονται στην 3D προβολή (x, \dot{x}, z) και από έναν μεγάλο βρόχο που το μεγαλύτερο μέρος του βρίσκεται κάτω από τον μικρό βρόχο, αλλά συναντά τον μικρό βρόχο σε ένα σημείο (στις τρεις διαστάσεις) στο επάνω μέρος του σχήματος. Αν χρωματίσουμε τα σημεία σύμφωνα με την τιμή τους στην τέταρτη διάσταση βλέπουμε στο Σχ. 140 ότι έχουμε ομαλή μεταβολή χρώματος από κόκκινο σε μωβ αλλά στις δύο τομές A και B έχουμε την συνάντηση διαφορετικών χρωμάτων (μπλε με πορτοκαλί). Αυτό σημαίνει ότι έχουμε διαφορετικές τιμές της τέταρτης διάστασης στην περιοχή των δύο τομών και ότι αυτές οι τομές είναι φαινόμενα προβολής και όχι πραγματικές τομές στην 4D επιφάνεια τομής. Τα σημεία φεύγουν από την δομή αυτή στο Σχ. 140, μετά από 25000 σημεία στην επιφάνεια τομής και σχηματίζουν ένα νέφος σημείων.

Αν διαταράξουμε την ίδια τροχιά κατά $\Delta z = -3.6 \times 10^{-4}$ για $E_j = -4.622377$, τότε παρατηρούμε στο Σχ. 141, ότι τα σημεία στην επιφάνεια τομής (έχουν σχεδιασθεί με κόκκινο χρώμα) σχηματίζουν ένα νηματοειδή σχηματισμό ο οποίος συνδέει τα σημεία της απλά ασταθούς 7-περιοδικής τροχιάς και περιβάλλει τους εφτά τόρους της ευσταθούς 7-περιοδικής τροχιάς. Στο Σχ. 141 υποδεικνύουμε τα εφτά σημεία της u_1 με νούμερα από το 1 ως και το 7 στον υπόχωρο (x, \dot{x}, z) της επιφάνειας τομής. Στις περιοχές αυτές τα νήματα, τα οποία έχουν σχηματιστεί, τέμνονται το ένα με το άλλο στην 3D προβολή της επιφάνειας τομής (Σχ. 141). Παρατηρούμε, ότι δίπλα στις τομές οι οποίες βρίσκονται στις αριθμημένες περιοχές (όπου έχουμε τις αρχικές συνθήκες της u_1) έχουμε ακόμα 7 τομές του νηματοειδούς σχηματισμού με τον εαυτό του και την δημιουργία 7 νέων βρόχων, σαν τους βρόχους που περικλείουν τους τόρους γύρω από τα σημεία της s_1 . Οι βρόχοι αυτοί περικλείουν τα σημεία μίας άλλης ευσταθούς 7-περιοδικής τροχιάς η οποία είναι συμμετρική με την s_1 ως προς το ισημερινό επίπεδο $z = 0$. Τώρα οι τομές των νημάτων που δεν είναι αριθμημένες αντιπροσωπεύουν τις θέσεις μίας άλλης απλά ασταθούς 7-περιοδικής τροχιάς η οποία

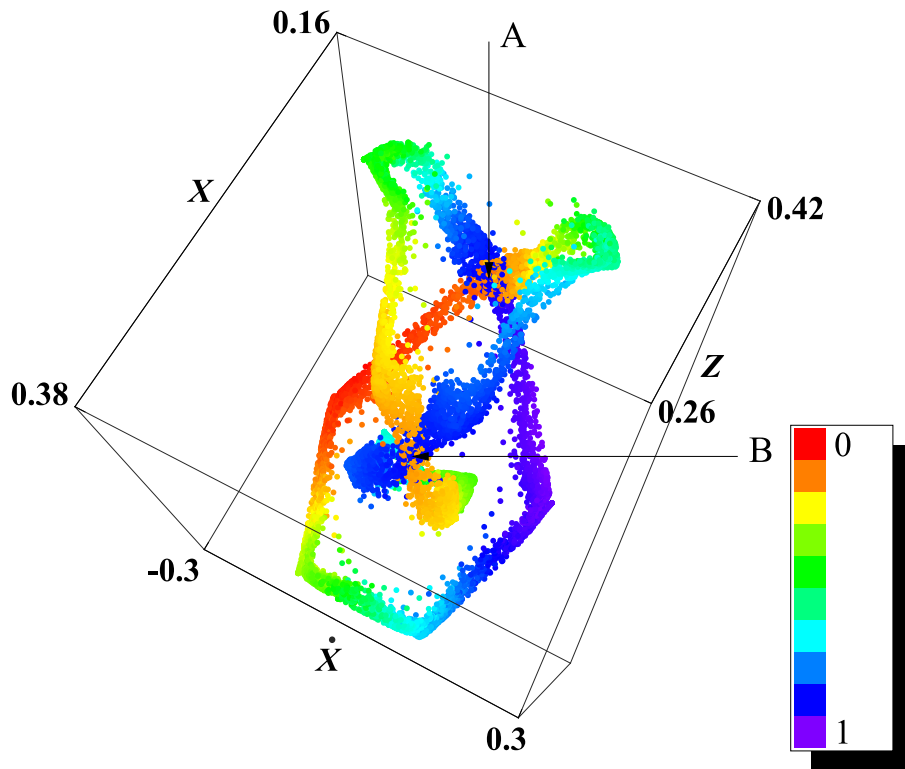
είναι συμμετρική με την u_1 ως προς το ισημερινό επίπεδο $z = 0$. Η δυναμική στη γειτονιά αυτών των περιοδικών τροχιών είναι παρόμοια με αυτή των s_1 και u_1 .

Στο Σχ. 142 παρατηρούμε μία ομοιόμορφη κατανομή χρώματος των σημείων που οικοδομούν αυτό το νηματοειδή σχηματισμό. Αρχίζοντας από το 1 έχουμε μία ομαλή διαδοχή χρώματος από το πράσινο στο γαλάζιο, μετά στο μπλε στο 2, κατόπιν στο γαλάζιο, στο πράσινο στο 3 κ.ο.κ. Στις περιοχές, όπου έχουμε τις τομές των νημάτων, π.χ. κοντά στα σημεία 1, 2, ..., 7, παρατηρούμε ότι χαρακτηρίζονται από ένα μόνο χρώμα. Για παράδειγμα στο 1 έχουμε πράσινο χρώμα, στο 2 μπλε κ.τ.λ. Αυτό σημαίνει ότι η τέταρτη διάσταση z των σημείων σε αυτές τις περιοχές έχει την ίδια τιμή και οι τομές αυτές στις 3D προβολές είναι πραγματικές τομές στον 4D χώρο. Επίσης παρατηρούμε ότι το χρώμα έχει ομαλή μεταβολή κατά μήκος και των δύο κλάδων των νημάτων οι οποίοι απομακρύνονται ή πλησιάζουν στα σημεία της απλά ασταθούς 7-περιοδικής τροχιάς. Και οι δύο κλάδοι έχουν την ίδια κατανομή χρώματος μεταξύ δύο διαδοχικών τομών.

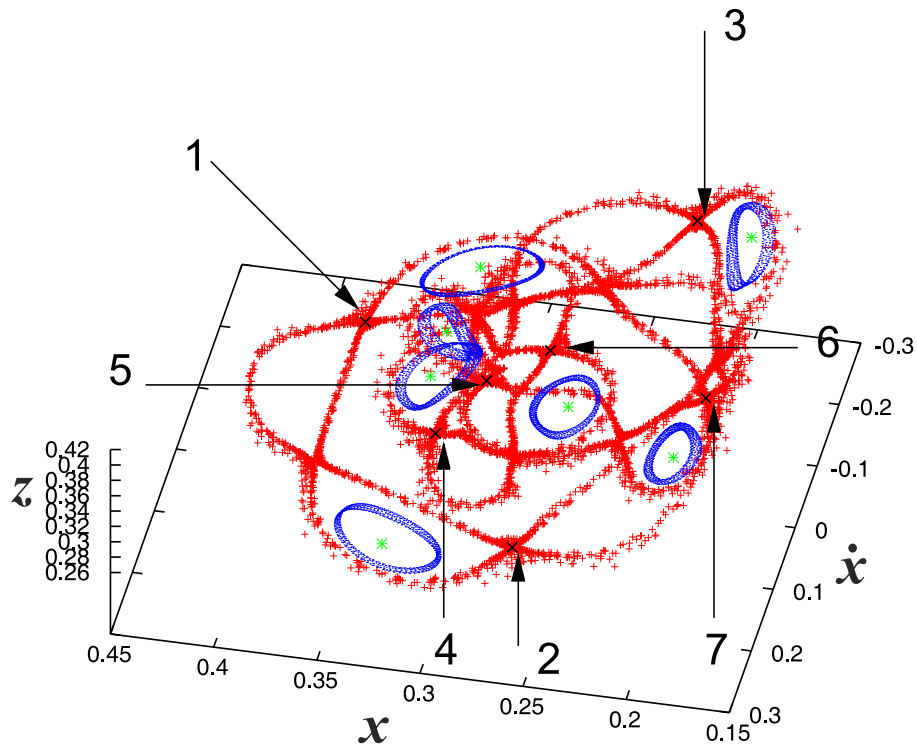
Η ομαλή διαδοχή χρώματος κατά μήκος των νημάτων παρατηρείται όσο τα σημεία συμμετέχουν στον νηματοειδή σχηματισμό. Όμως, αν θεωρήσουμε παραπάνω από 6500 σημεία στην περιοχή της u_1 τροχιάς, τα σημεία διαχέονται, καταλαμβάνοντας έναν μεγαλύτερο όγκο στον χώρο των φάσεων και τελικά σχηματίζουν ένα νέφος σημείων στις 3D προβολές της επιφάνειας τομής. Το νέφος αυτό περιβάλλει τον νηματοειδή σχηματισμό που απεικονίσαμε στο Σχ. 142. Οι διαστάσεις αυτού του νέφους είναι 15 φορές μεγαλύτερες στην x -διεύθυνση από ότι οι διαστάσεις του νηματοειδούς σχηματισμού στα Σχ. 141 και 142. Αυτό είναι άμεση εξάρτηση της έκτασης του χώρου στον οποίο τα σημεία επιτρέπονται να κινηθούν σε αυτή την τιμή της ενέργειας. Το νέφος των σημείων απεικονίζεται στο Σχ. 143. Ο κόκκινος σχηματισμός στο κέντρο του σχήματος είναι ο νηματοειδής σχηματισμός στο Σχ. 142. Στο Σχ. 144 παρατηρούμε ότι το νέφος έχει ανάμειξη χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή των σημείων του νέφους στην τέταρτη διάσταση είναι ακανόνιστη. Στους πίνακες 10 και 11 παρουσιάζουμε τα εύρη των διαταραχών για τα οποία τα σημεία στην επιφάνεια τομής σχηματίζουν το διπλό βρόχο και το νηματοειδή σχηματισμό αντίστοιχα.



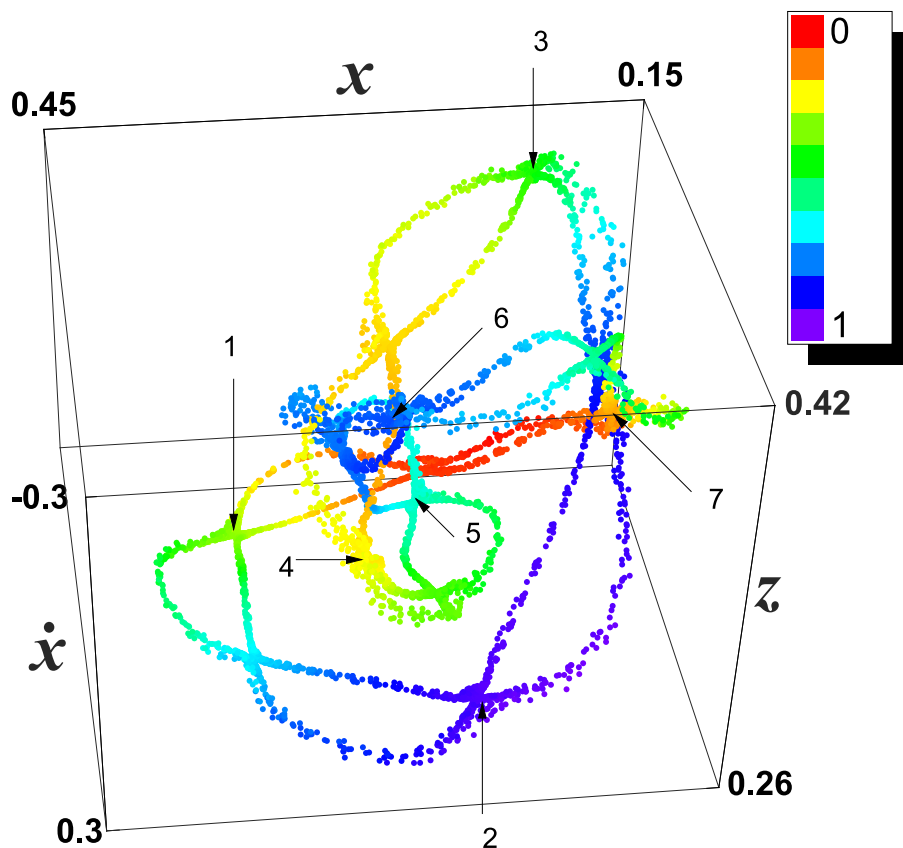
Σχήμα 139: Η 3D (x, \dot{x}, z) προβολή της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.622377$ στην περιοχή των $s1$ και $u1$. Οι αρχικές συνθήκες και των δύο τροχιών $s1$ και $u1$ έχουν διαταραχθεί ώστε να έχουμε επτά τόρους και έναν διπλό βρόχο αντίστοιχα. Τα πράσινα '+' αντιστοιχούν στην $s1$ και τα μαύρα σύμβολα 'x' στην $u1$. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (28^\circ, 48^\circ)$.



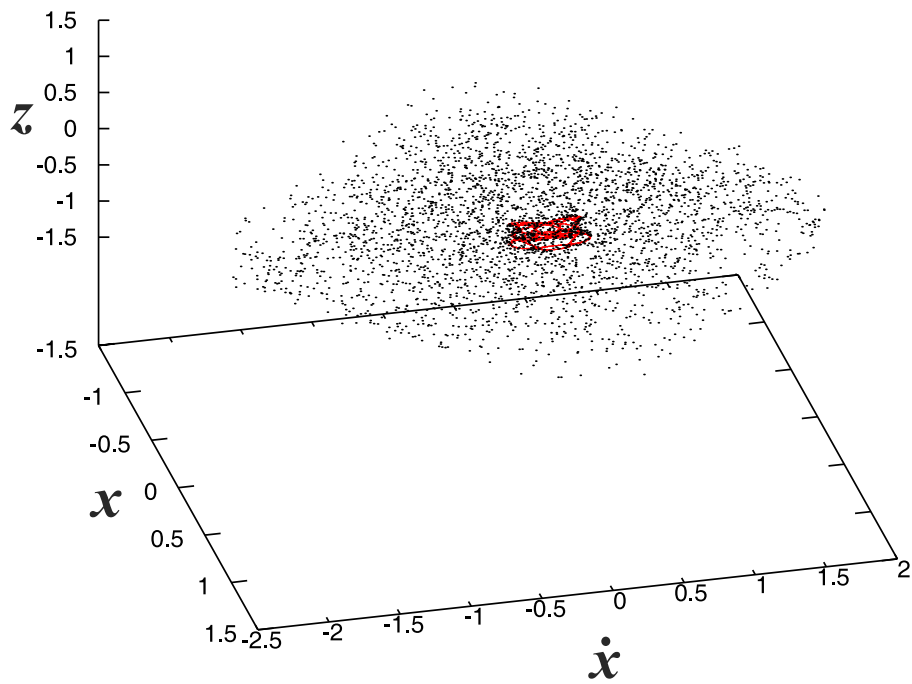
Σχήμα 140: Η 4D επιφάνεια στην περιοχή της u_1 για την ίδια τροχιά που απεικονίζεται στο Σχ. 139. Θεωρούμε 6000 σημεία στην επιφάνεια τομής. Χρησιμοποιήσαμε τον υπόχωρο (x, \dot{x}, z) για να απεικονίσουμε τα σημεία και την \dot{z} τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Τα διαφορετικά χρώματα στις τομές A και B υποδεικνύουν ότι δεν είναι τομές στον 4D χώρο. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (22.5^\circ, 45^\circ)$.



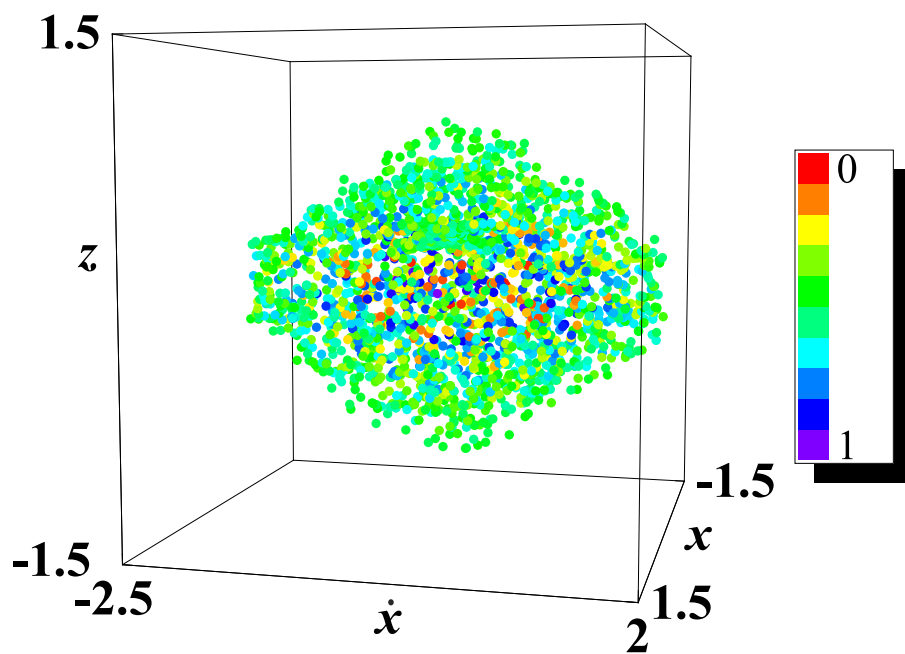
Σχήμα 141: Η 3D (x, \dot{x}, z) προβολή της 4D επιφάνειας τομής για $E_j = -4.622377$ στην περιοχή των $s1$ και $u1$. Οι αρχικές συνθήκες και των δύο τροχιών $s1$ και $u1$ έχουν διαταραχθεί ώστε να έχουμε επτά τόρους και έναν νηματοειδή σχηματισμό αντίστοιχα. Τα πράσινα 'x' αντιστοιχούν στην $s1$ και τα μαύρα σύμβολα 'x' στην $u1$. Τα σημεία της $u1$ είναι αριθμημένα από το 1 ως και το 7. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (26^\circ, 192^\circ)$.



Σχήμα 142: Η 4D αναπαράσταση της τροχιάς κοντά στην u_1 , η οποία απεικονίζεται στο Σχ. 141, για 6500 σημεία στην επιφάνεια τομής. Χρησιμοποιήσαμε τον υπόχωρο (x, \dot{x}, z) για να απεικονίσουμε τα σημεία και την \dot{z} τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Το κοινό χρώμα των κλάδων του νηματοειδούς σχηματισμού οι οποίοι συναντιούνται στα σημεία τομής δείχνει ότι οι τομές αυτές είναι 4D. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (180^\circ, 22.5^\circ)$.



Σχήμα 143: Η 3D προβολή (x, z, \dot{x}) του νέφους των σημείων που περιβάλλει τις τροχιές στην περιοχή των $s1$ και $u1$ οι οποίες απεικονίζονται στα Σχ. 141 και 142. Στην περίπτωση αυτή έχουμε 10000 σημεία στην επιφάνεια τομής. Η κόκκινη δομή στο κέντρο του νέφους περιλαμβάνει όλες τις επιφάνειες στο Σχ. 141. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (37^\circ, 17^\circ)$.



Σχήμα 144: Το νέφος του Σχ. 143 στην επιφάνεια τομής (για 7500 σημεία). Χρησιμοποιήσαμε τον υπόχωρο (x, \dot{x}, z) για να απεικονίσουμε τα σημεία και την z τιμή τους για να τα χρωματίσουμε. Παρατηρούμε ανάμειξη χρώματος. Η οπτική μας γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\theta, \phi) = (180^\circ, 22.5^\circ)$.

Δx	από 10^{-4} ως και 7×10^{-4}	από -10^{-4} ως και -9×10^{-4}
$\Delta \dot{x}$	από 10^{-4} ως και 3×10^{-3}	από -10^{-4} ως και -4×10^{-3}
Δz	από 10^{-4} ως και 2×10^{-4}	από -10^{-4} ως και -2×10^{-4}
$\Delta \dot{z}$	από 10^{-4} ως και 6×10^{-3}	από -10^{-4} ως και -9×10^{-3}

Πίνακας 10: Το εύρος των διαταραχών στις αρχικές συνθήκες της u_1 , για το οποίο έχουμε διπλό βρόχο στην επιφάνεια τομής για $E_j = -4.622377$.

Δx	από 8×10^{-4} ως και 1.6×10^{-2}	από -10^{-3} ως και -10^{-2}
$\Delta \dot{x}$	από 4×10^{-3} ως και 2×10^{-2}	από -5×10^{-3} ως και -8×10^{-2}
Δz	από 3×10^{-4} ως και 4×10^{-3}	από -3×10^{-4} ως και -5×10^{-3}
$\Delta \dot{z}$	από 7×10^{-3} ως και 10^{-1}	από -10^{-2} ως και -10^{-1}

Πίνακας 11: Το εύρος των διαταραχών στις αρχικές συνθήκες της u_1 , για το οποίο έχουμε νηματοειδή σχηματισμό στην επιφάνεια τομής για $E_j = -4.622377$.

5 Χαρακτηριστικοί αριθμοί Lyapunov

Σκοπός της παρούσας διατριβής δεν είναι ο υπολογισμός των αριθμών Lyapunov. Παρενθετικά στο παρόν κεφάλαιο υπολογίσαμε τους αριθμούς Lyapunov διάφορων τύπων τροχιών που συναντήσαμε σε αυτή την διατριβή για να τους συγκρίνουμε με τις πληροφορίες που μας δίνει η μέθοδος χρώματος και περιστροφής για τον φασικό χώρο. Ο χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov ($LCN(t)$) πεπερασμένου χρόνου ορίζεται ως εξής:

$$LCN(t) = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\xi(t)}{\xi(t_0)} \right|,$$

όπου $\xi(t_0)$ και $\xi(t)$ είναι οι αποκλίσεις μεταξύ δύο γειτονικών τροχιών σε χρόνους $t = 0$ και t αντίστοιχα (βλέπε π.χ. Contopoulos 2002 §2.10.1, Skokos 2010).

Στο κεφάλαιο αυτό υπολογίσαμε τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για τις τροχιές στην περιοχή απλών περιοδικών τροχιών (υποκεφάλαιο 5.1) και στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου (υποκεφάλαιο 5.2).

5.1 $LCN(t)$ των τροχιών στην περιοχή απλών περιοδικών τροχιών

Στο παρόν υποκεφάλαιο μελετάμε τις διάφορες περιπτώσεις τροχιών και της αντίστοιχης μεταβολής των χαρακτηριστικών αριθμών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου στην περιοχή απλών περιοδικών τροχιών. Οι περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν στα διαφορετικά είδη ευστάθειας των περιοδικών τροχιών και είναι τέσσερις:

1. Ευστάθεια:

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε δύο τύπους τροχιών. Ο πρώτος τύπος τροχιών στην περιοχή των ευσταθών περιοδικών τροχιών αναπαριστάνεται από τόρους στην επιφάνεια τομής. Στην περίπτωση αυτή των τροχιών ο $LCN(t)$ τείνει στο μηδέν (όπως αναμενόταν).

Στον δεύτερο τύπο τροχιακής συμπεριφοράς, οι τροχιές αναπαριστάνονται για έναν ορισμένο αριθμό σημείων στην επιφάνεια τομής από $4D$ τοροειδείς επιφάνειες. Για περισσότερες τομές των τροχιών αυτών με την επιφάνεια τομής έχουμε την δημιουργία νεφών από σημεία. Ο τύπος αυτός συναντάται και στην περίπτωση της μιγαδικής αστάθειας (δευτέρος τύπος τροχιών) και μελετάται λεπτομερώς εκεί.

2. Απλή Αστάρθεια:

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε χαοτικές τροχιές στην περιοχή απλά ασταθών περιοδικών τροχιών που είναι δύο τύπων. Ο πρώτος τύπος των τροχιών σχηματίζει διπλούς βρόχους ή απλούς κλειστούς βρόχους στις 3D προβολές της 4D επιφάνειας τομής. Σαν παράδειγμα έχουμε την τροχιά “u” (υποκεφάλαιο 3.3.1 - Σχ. 89, 90). Οι τροχιές αυτού του τύπου για περισσότερες τομές δημιουργούν άλλες πυκνές περιοχές στον φασικό χώρο για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Αυτές οι δομές είναι διακριτές σε μερικές προβολές σαν Θ δομές ή δαχτυλίδια (Σχ. 92). Ουσιαστικά η τροχιακή της συμπεριφορά καθορίζεται από διαδοχικά φαινόμενα κολλητικότητας που επιβάλλει η συνολική δομή του φασικού χώρου κοντά σε μεταβάσεις $S \rightarrow U \rightarrow S$. Ο δεύτερος τύπος τροχιών αντιστοιχεί σε τροχιές που αναπαριστάνονται από νέφη σημείων στην επιφάνεια τομής.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του πρώτου τύπου τροχιών είναι αυτό της “u”. Για τον λόγο αυτό υπολογίσαμε τον $LCN(t)$ της “u”. Όπως μπορούμε να δούμε στο Σχ. 145 οι αλλαγές που βρίσκουμε στην τροχιακή συμπεριφορά της “u” αντιστοιχούν σε αντίστοιχες αλλαγές στην κλίση της $LCN(t)$ καμπύλης. Κατά την διάρκεια του χρόνου που αντιστοιχεί στις πρώτες 2580 τομές, ο οποίος υποδεικνύεται με ένα βέλος στο Σχ. 145a, η καμπύλη πέφτει με μεγάλη κλίση. Κατόπιν για τις επόμενες 450 τομές (το σημείο αυτό υποδεικνύεται με το δεξιό βέλος του Σχ. 145a), όταν τα σημεία δομούν την Θ με τους λοβούς γύρω από τους τόρους των $x1v1$ και $x1v1'$, η καμπύλη συνεχίζει να είναι φθίνουσα αλλά με μικρότερη κλίση από πριν. Κατόπιν αρχίζει να αυξάνει και η εξέλιξη της μετά από $t = 3 \times 10^4$ φαίνεται στο Σχ. 145b (προσέξτε τις διαφορετικές κλίμακες στους άξονες). Η καμπύλη $LCN(t)$ αρχικά αυξάνει, μετά σταθεροποιείται και κατόπιν έχει μία φθίνουσα πορεία μέχρι το αριστερό βέλος στο Σχ. 145b, το οποίο αντιστοιχεί σε περίπου 4.180 τομές. Σε αυτό το σημείο έχουμε μία απότομη διαστολή των σημείων στον φασικό χώρο, η οποία μπορεί να κατανοηθεί εύκολα στην (x, \dot{x}) προβολή (δεν φαίνεται σε κάποιο σχήμα).

Μετά από το σημείο που σημειώνεται με το αριστερό βέλος του Σχ. 145b η $LCN(t)$ καμπύλη αυξάνει. Μεταξύ των σχημάτων 145b και 145c η καμπύλη φθίνει και στο Σχ. 145c αυξάνει πάλι. Τέλος, για μεγαλύτερο χρόνο ολοκλήρωσης, όταν η τροχιά έχει σαρώσει όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο, σταθεροποιείται σε μία τιμή $LCN(t) \approx 2.74 \times 10^{-2}$ (Σχ. 145c).

Το δεξιό βέλος στο Σχ. 145b αντιστοιχεί σε 4500 σημεία στην επιφά-

νεια τομής και η περιοχή δεξιά του βέλους αυτού αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα κατά το οποίο τα σημεία της “u” αφήνουν το δαχτυλίδι και πάνε να καταλάβουν τον διαθέσιμο φασικό χώρο όπως βλέπουμε και στο Σχ. 92b. Παρά το γεγονός ότι ο $LCN(t)$ μας δίνει την μεταβολή των όγκων που καταλαμβάνει μια τροχιά στον φασικό χώρο, μέσω της μεθόδου χρώματος και περιστροφής μπορούμε να δούμε πέραν τούτου με λεπτομέρειες τις περιοχές που παγιδεύονται τα σημεία μίας τροχιάς καθώς και την κατεύθυνση κατά την οποία διαχέονται στον φασικό χώρο για να καταλάβουν μεγαλύτερους όγκους μέσα σε αυτόν. Αυτή η πληροφορία είναι πολύ χρήσιμη στην γαλαξιακή δυναμική για την κατασκευή αυτοσυνεπών μοντέλων χρησιμοποιώντας την θεωρία των τροχιών.

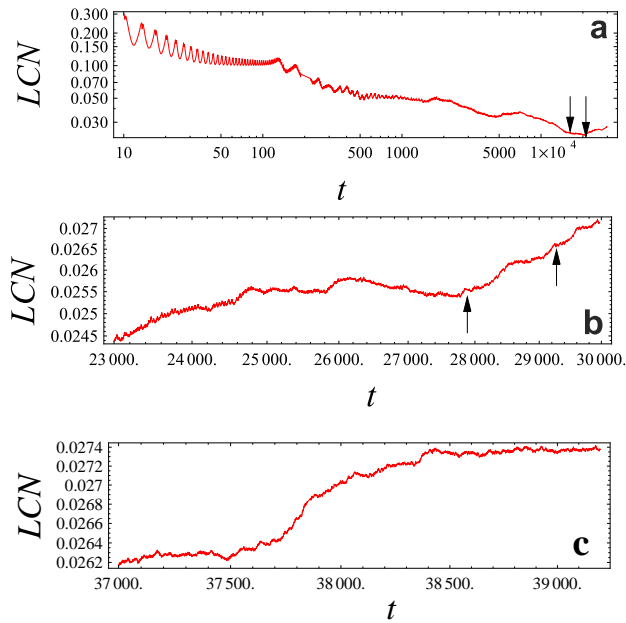
Σαν παράδειγμα του δεύτερου τύπου τροχιών, θεωρούμε την τροχιά με $\Delta x = 10^{-4}$ από τις αρχικές συνθήκες της απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς της $x1v2$ για $E_j = -4$ και την αποκαλούμε ως “u1”. Ο $LCN(t)$ αυτού του τύπου των τροχιών συγκλίνει πολύ γρήγορα σε ένα θετικό αριθμό, συγκεκριμένα για την “u1” συγκλίνει στον θετικό αριθμό 9×10^{-2} (Σχ. 146).

3. Διπλή Αστάθεια:

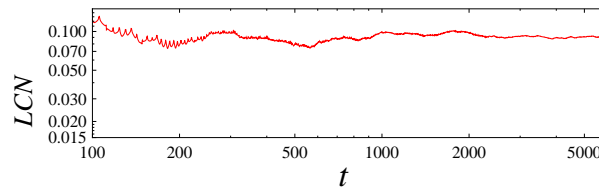
Στην περίπτωση αυτή έχουμε πάλι δύο τύπους τροχιών. Στον πρώτο τύπο οι τροχιές σχηματίζουν μία επιφάνεια σχήματος οκταριού πριν διαχυθούν και καταλάβουν όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο (Σχ. 106). Ένα παράδειγμα είναι η τροχιά “duz1”. Οι περιπτώσεις αυτές κοντά σε διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές εμφανίζονται στο σύστημα μας μόνο όταν οι 2 ιδιοτιμές δεν διαφέρουν πολύ. Στον δεύτερο τύπο οι τροχιές αντιπροσωπεύονται από νέφη σημείων στην επιφάνεια τομής.

Για τον πρώτο τύπο υπολογίζουμε τον $LCN(t)$ ενός χαρακτηριστικού παραδείγματος της τροχιάς “duz1”. Ο LCN πεπερασμένου χρόνου δείχνει αυτή τη χαοτική συμπεριφορά της τροχιάς. Για το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για τον οποίο τα σημεία στην προβολή (x, \dot{x}) (ή στην (x, \dot{x}, y)) βρίσκονται στην δομή σχήματος ‘∞’, ο LCN φτάνει σε μία τιμή 5×10^{-2} και τελικά μειώνεται μέχρι το σημείο που υποδεικνύεται από ένα βέλος στο Σχ. 147a. Αυτός ο χρόνος αντιστοιχεί σε 4200 σημεία στην επιφάνεια τομής. Στο Σχ. 147b βλέπουμε πως ο LCN μεταβάλλεται όταν τα σημεία αρχίζουν να γεμίζουν όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο. Ο LCN αυξάνει ακόμη περισσότερο από το σημείο $t = 28500$ και μετά.

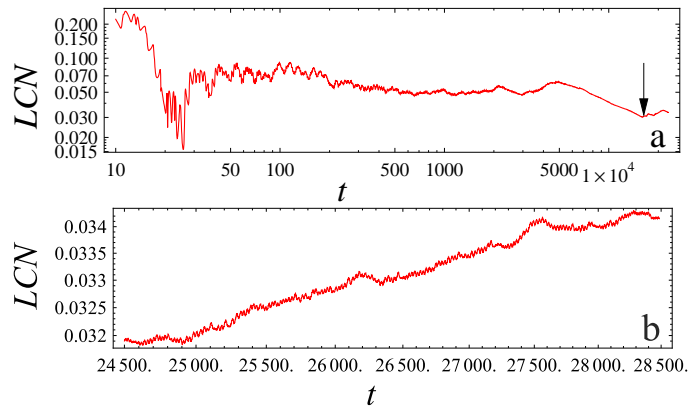
Στον δεύτερο τύπο τροχιακής συμπεριφοράς ο $LCN(t)$ έχει παρόμοια συμπεριφορά με αυτή του δεύτερου τύπου τροχιών στην περίπτωση της απλής αστάθειας.



Σχήμα 145: Η μεταβολή του $LCN(t)$ για την τροχιά “u”. Η κορδέλα συναντάται μέχρι το σημείο που υποδεικνύεται με ένα αριστερό βέλος στο (a). Η λεπτή περιοχή γύρω από τους περιστροφικούς τόρους των $x1u1$ και $x1u1'$ η οποία αντιστοιχεί στους λοβούς (Σχ. 92a) σχηματίζεται στο χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο βέλη στο (a). Το αριστερό βέλος στο (b) υποδεικνύει έναν χρόνο όπου έχουμε την διάχυση των σημείων στην (x, \dot{x}) προβολή, ενώ στα δεξιά του δεξιού βέλους στο (b) τα σημεία αρχίζουν να επισκέφτονται όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο. (c) Τελικά η καμπύλη σταθεροποιείται σε μία τιμή $LCN(t) \approx 2.74 \times 10^{-2}$.



Σχήμα 146: Η μεταβολή του $LCN(t)$ για την τροχιά “u1”.



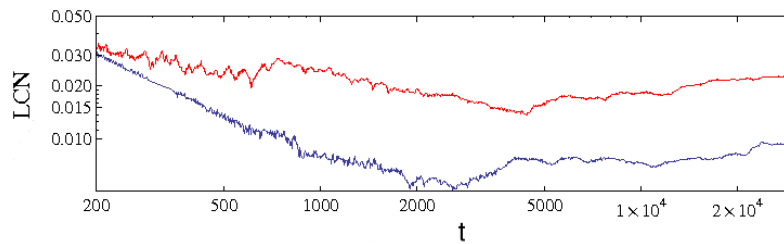
Σχήμα 147: Η χρονική εξέλιξη του LCN πεπερασμένου χρόνου στο Σχ. 106. Το βέλος στο (a) υποδεικνύει τον χρόνο για τον οποίο τα σημεία αποχωρούν από την δομή σχήματος '∞', η οποία σχηματίζεται από τα πρώτα 4200 σημεία στην επιφάνεια τομής. Μετά από αυτό το σημείο ο $LCN(t)$ αυξάνει συνεχώς όπως μπορούμε να δούμε στο (b).

4. Μιγαδική Αστάθεια:

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τρεις τύπους τροχιών. Ο πρώτος τύπος αντιπροσωπεύεται από τους δισκοειδείς σχηματισμούς-περιορισμένους τόρους στην επιφάνεια τομής. Ο δεύτερος από $4D$ τοροειδείς επιφάνειες για λίγα σημεία στην επιφάνεια τομής, οι οποίες μετατρέπονται σε νέφη σημείων για πολλά σημεία στην επιφάνεια τομής. Ενώ ο τρίτος τύπος αντιστοιχεί μόνο σε νέφη σημείων στην επιφάνεια τομής.

Για τον πρώτο τύπο τροχιών υπολογίσαμε τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου $LCN(t)$ για την τροχιά που αντιστοιχεί στον δίσκο του Σχ. 115 και βρήκαμε ότι αρχικά μειώνεται αλλά μετά σταθεροποιείται σε μία τιμή 6×10^{-3} μετά από 4500 τομές (Σχ. 148 -μπλέ καμπύλη).

Για τον δεύτερο τύπο τροχιών υπολογίσαμε τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου $LCN(t)$ για την τροχιά που αντιστοιχεί στα Σχ. 118 και 119. Τα πρώτα 300 σημεία στην επιφάνεια τομής σχηματίζουν μία τοροειδή επιφάνεια (Σχ. 118). Κατά την διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος ο $LCN(t)$ της τροχιάς μειώνεται και φτάνει σε μία τιμή 1.75×10^{-2} σε χρόνο $t = 2100$ (Σχ. 148 - κόκκινη καμπύλη). Μετά από αυτό το σημείο η καμπύλη έχει διάφορες διακυμάνσεις καθώς



Σχήμα 148: Η εξέλιξη των δύο $LCN(t)$. Η μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση του περιορισμένου τόρου των Σχ. 113, 114 και 115 και η κόκκινη στην περίπτωση της τροχιάς που αντιστοιχεί στην τοροειδή επιφάνεια των Σχ. 118 και 119 η οποία για περισσότερες από 300 τομές μετατρέπεται σε νέφος σημείων στην επιφάνεια τομής. Οι άξονες είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

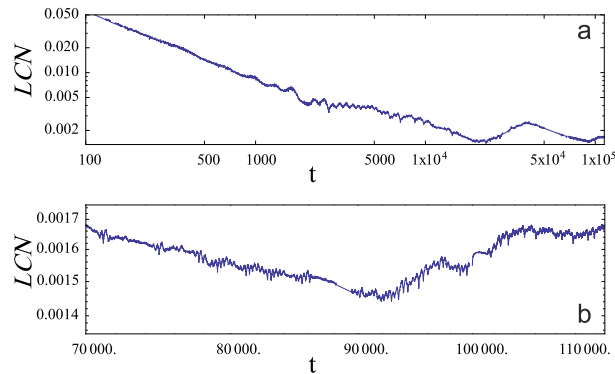
αυξάνεται ο χρόνος και σταθεροποιείται σε μία τιμή $LCN = 2.5 \times 10^{-2}$ μετά από περίπου 4700 τομές. Την ίδια χρονική στιγμή, στην επιφάνεια τομής τα σημεία της τροχιάς σχηματίζουν ένα νέφος γύρω από την αρχική τοροειδή επιφάνεια (Σχ. 119).

Όπως αναφέραμε πιο πριν ο μέγιστος χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov για την περίπτωση της τοροειδούς επιφάνειας-νέφους (Σχ. 119) είναι 2.5×10^{-2} , ενώ ο ίδιος δείκτης για την τροχιά που αντιστοιχεί στον δίσκο (Σχ.115) είναι 6×10^{-3} . Αυτή η διαφορά είναι αναμενόμενη λόγω της διαφορετικής τροχιακής συμπεριφοράς των δύο τροχιών. Στην περίπτωση του νέφους έχουμε διάσπαρτα σημεία στις τέσσερις διαστάσεις ενώ στην περίπτωση του περιορισμένου τόρου, το χάος εμφανίζεται μέσω των διαφορετικών μέγιστων και ελάχιστων αποστάσεων των σημείων από το κέντρο του δίσκου καθώς η τροχιά γεμίζει την δισκοειδή δομή αυτού του τόρου (πίνακες 3 και 4).

Στον τρίτο τύπο τροχιακής συμπεριφοράς ο $LCN(t)$ έχει παρόμοια συμπεριφορά με αυτή του δεύτερου τύπου τροχιών στην περίπτωση της απλής και διπλής αστάθειας.

5.2 $LCN(t)$ των τροχιών στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου

Στα υποκεφάλαια 4.1, 4.2, 4.3 και 4.4 μελετήσαμε δύο είδη τροχιών στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου. Το πρώτο είδος αντιπροσωπευόταν



Σχήμα 149: (a) Η εξέλιξη του $LCN(t)$ για την τροχιά που αναπαριστάται στην επιφάνεια τομής στα Σχ. 142 και Σχ. 143. (b) Το μέρος του Σχ. 149(a) για $70000 \leq t \leq 115000$. Οι άξονες είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

από τόρους στην επιφάνεια τομής στην περιοχή των ευσταθών 2-περιοδικών και 7-περιοδικών τροχιών. Το δεύτερο είδος αντιπροσωπεύεται από περιορισμένες δομές (τόρους, διπλούς βρόχους, κορδέλες και νηματοειδείς σχηματισμούς) για έναν ορισμένο αριθμό σημείων στην επιφάνεια τομής. Για μεγαλύτερους χρόνους ολοκλήρωσης, το δεύτερο είδος τροχιών αντιπροσωπεύεται από νέφη σημείων στην επιφάνεια τομής. Αυτές οι τροχιές βρίσκονται στην περιοχή των 2-περιοδικών και 7-περιοδικών τροχιών. Υπολογίζουμε τώρα τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου $LCN(t)$ για αυτούς τους δύο τύπους τροχιών.

Αρχικά, για το πρώτο είδος τροχιών, η τιμή του $LCN(t)$ φθίνει σύμφωνα με την συνάρτηση $1/t$ και τείνει στο μηδέν. Όπως αναμενόταν.

Μετά υπολογίσαμε τον $LCN(t)$ για το δεύτερο είδος τροχιών, λαμβάνοντας ως παράδειγμα την τροχιά που απεικονίζεται στην επιφάνεια τομής στα Σχ. 142 και Σχ. 143. Στο Σχ. 142 τα πρώτα 6500 σημεία της τροχιάς στην επιφάνεια τομής σχηματίζουν ένα νηματοειδή σχηματισμό. Κατά την διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος ο $LCN(t)$ μειώνεται μέχρι να φτάσει μία τιμή 1.4×10^{-3} για $t = 90000$ (Σχ. 149a). Μετά από αυτό το σημείο η τροχιά σχηματίζει με ένα νέφος σημείων στην επιφάνεια τομής (Σχ. 143). Κατά την διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος ο $LCN(t)$ έχει διάφορες διακυμάνσεις και τελικά αυξάνεται και σταθεροποιείται σε μία τιμή $LCN \approx 1.67 \times 10^{-3}$ (Σχ. 149b).

6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε την δυναμική στην γειτονιά των ευσταθών, απλά ασταθών, διπλά ασταθών και μιγαδικά ασταθών περιοδικών τροχιών και την δυναμική στην περιοχή περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου (πολλαπλότητας $m > 1$) του συστήματος μας. Το σύστημα που επιλέξαμε ήταν ένα 3D αυτόνομο χαμιλτονιανό σύστημα γαλαξιακού τύπου το οποίο περιγράφει προσεγγιστικά την κίνηση ενός αστέρα στον Γαλαξία μας (Miyamoto and Nagai 1975). Μέχρι τώρα οι μελέτες είχαν περιοριστεί στην περιγραφή της δυναμικής κοντά σε περιοδικές τροχιές στις 2D ή 3D προβολές, της επιφάνειας τομής 3D αυτόνομων χαμιλτονιανών συστημάτων ή του φασικού χώρου 4D συμπλεκτικών απεικονίσεων. Οι μελέτες αυτές είχαν πραγματοποιηθεί σε διάφορα δυναμικά συστήματα, όπως:

1. 3D αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα γαλαξιακού τύπου (Martinet and Magnenat 1981, Contopoulos et al 1982, Magnenat 1982, Contopoulos and Magnenat 1985, Pfenniger 1985b, Contopoulos et al 1994, Papadaki et al 1995, Ollé and Pfenniger 1998).
2. το 3D κυκλικό περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων (Froeschlé 1970, Ollé et al 2004).
3. η 4D τυπική απεικόνιση- (4D standard map) (Froeschlé 1972, Pfenniger 1985a, Skokos et al 1997, 1999, Jorba and Ollé 2004).
4. μία 4D συμπλεκτική απεικόνιση που περιγράφει την κίνηση ενός στοιχειώδους σωματιδίου σε έναν επιταχυντή (Vrahatis et al 1996, 1997).

Συγκρίνοντας τα μεμονωμένα αποτελέσματα όλων αυτών των εργασιών μεταξύ τους διαπιστώνουμε την επανάληψη ορισμένων προτύπων δυναμικής συμπεριφοράς η οποία απεικονίζεται στις 2D και 3D προβολές, που αντιστοιχούν στα διάφορα είδη αστάθειας. Δεν υπήρχε όμως έως τώρα μία πλήρης καταγραφή μίας γενικής, χαρακτηριστικής για την κάθε είδος αστάθειας, δυναμικής συμπεριφοράς στη γειτονιά των περιοδικών τροχιών. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο χρώματος και περιστροφής (Patsis and Zachilas 1994) για να δούμε την 4D δυναμική συμπεριφορά στην γειτονιά των περιοδικών τροχιών στον 4D χώρο της επιφάνειας τομής του συστήματός μας. Με αυτό τον τρόπο μελετήσαμε για πρώτη φορά στον 4D χώρο της επιφάνειας τομής ενός 3D χαμιλτονιανού συστήματος τη δομή των αναλλοίωτων τόρων, την μορφολογία των αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων, τη δομή των επιφανειών κοντά σε ασταθείς περιοδικές τροχιές και τέλος την τοπολογία των περιορισμένων τόρων μετά από

μία Χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf. Αυτό μας επέτρεψε να μελετήσουμε για πρώτη φορά διάφορα δυναμικά φαινόμενα όπως η παγίδευση χαοτικών τροχιών για μεγάλα χρονικά διαστήματα, τα δύο είδη του φαινομένου κολλητικότητας (“stickiness”) δηλαδή το φαινόμενο κολλητικότητας σε αναλλοίωτους τόρους και το φαινόμενο κολλητικότητας στο χάος. Τέλος υπολογίσαμε το εύρος της περιορισμένης κίνησης σε αντικείμενα όπως οι περιορισμένοι τόροι-δίσκοι στην περιοχή μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς μετά από μία Χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf (μετάβαση από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια). Στη μελέτη μας συναντήσαμε επίσης και περιπτώσεις του φαινομένου διάχυσης Arnold (Arnold diffusion) στο υποκεφάλαιο 3.2.5.

6.1 Σύνοψη Συμπερασμάτων

Στην διατριβή αυτή μελετήσαμε την ευστάθεια και την μορφολογία των περιοδικών τροχιών σε δύο μη αξισυμμετρικές περιπτώσεις του δυναμικού του 3D αυτόνομου χαμιλτονιανού συστήματος μας. Η αξισυμμετρική περίπτωση του δυναμικού μας αποτελεί καλή προσέγγιση του δυναμικού του γαλαξία μας (Miyamoto and Nagai 1975). Η πρώτη μη αξισυμμετρική περίπτωση του συστήματος μας αντιστοιχεί σε ένα γρήγορα περιστρεφόμενο σύστημα (με ταχύτητα περιστροφής του συστήματος την ταχύτητα περιστροφής του Γαλαξία μας) ενώ η δεύτερη μη αξισυμμετρική περίπτωση αντιστοιχεί σε ένα αργά περιστρεφόμενο σύστημα. Στις δύο αυτές περιπτώσεις βρήκαμε τις τροχιές του ‘δέντρου’ της οικογένειας της x_1 (Skokos et al 2002a,b). Στα πολύ αργά περιστρεφόμενα τριαξονικά συστήματα έχουμε ένα μεγάλο ποσοστό περιοδικών τροχιών που είναι διπλά ασταθείς σε μικρές ενέργειες. Αυτή η ιδιότητα των αργά περιστρεφόμενων δυναμικών, μας επιτρέπει τη συστηματική μελέτη της τροχιακής συμπεριφοράς κοντά σε διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές. Στην δεύτερη περίπτωση οι τροχιές της x_1 είναι πιο επιμήκεις επηρεάζοντας τις (x, z) προβολές των τροχιών των 3D διακλαδώσεων της x_1 .

Με τη βοήθεια της μεθόδου χρώματος και περιστροφής (Patsis and Zachilas 1994) μελετήσαμε την τροχιακή συμπεριφορά κοντά σε ευσταθείς, απλά ασταθείς, διπλά ασταθείς και μιγαδικά ασταθείς περιοδικές τροχιές καθώς και στη γειτονιά περιοδικών τροχιών υψηλής περιόδου στην 4D επιφάνεια τομής του 6D φασιικού χώρου του 3D αυτόνομου χαμιλτονιανού συστήματος μας¹³. Τα συμπεράσματα της παρούσας διατριβής είναι τα ακόλουθα:

- Στην περίπτωση της **ευστάθειας** βρήκαμε ότι:

¹³Παρόμοια αποτελέσματα με αυτά της παρούσας διατριβής βρέθηκαν πρόσφατα και για την περίπτωση του 4D φασιικού χώρου μίας 4D συμπλεκτικής απεικόνισης (Zachilas, Katsanikas and Patsis 2012).

1. Στο ισημερινό επίπεδο ($z = 0$), η δυναμική του συστήματος καθορίζεται από την παρουσία της κεντρικής οικογένειας x_1 . Στα διαστήματα της ενέργειας όπου η x_1 χαρακτηρίζεται σαν απλά ασταθής, βρίσκουμε στην (x, \dot{x}) επιφάνεια τομής αναλλοίωτες καμπύλες οι οποίες περιβάλλουν την περιοδική τροχιά.
 2. Εκτός του ισημερινού επιπέδου βρίσκουμε γύρω από ευσταθείς περιοδικές τροχιές αναλλοίωτους τόρους. Στις 3D προβολές συναντάμε αναλλοίωτους τόρους όπως αυτοί οι οποίοι έχουν βρεθεί σε εργασίες των Froeschlé (1970, 1972), Martinet and Magnenat (1981), Contopoulos et al. (1982), Magnenat (1981), Patsis & Zachilas (1994) και Vrahatis et al. (1997). Τα αντικείμενα αυτά ονομάστηκαν από τους Vrahatis et al. (1997) 'περιστροφικοί τόροι'. Επίσης βρήκαμε ένα άλλο είδος αναλλοίωτων τόρων, οι οποίοι είναι γνωστοί ως 'σωληνοειδείς τόροι' (Vrahatis et al. 1997). Το γεγονός ότι τα δύο αυτά είδη τόρων βρίσκονται στην περιοχή ευσταθών περιοδικών τροχιών σε διαφορετικά φυσικά συστήματα όπως χαμιλτονιανά συστήματα γαλαξιακού τύπου (στην παρούσα διατριβή) και 4D συμπλεκτικές απεικονίσεις σχετιζόμενες με το πρόβλημα δέσμης στοιχειωδών σωματιδίων σε κυκλικούς επιταχυντές στοιχειωδών σωματιδίων (Vrahatis et al. 1997), υποδεικνύει μία γενική συμπεριφορά σε 3D ημι-περιοδικές τροχιές.
 3. Η μέθοδος χρώματος και περιστροφής (Patsis & Zachilas 1994) ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη να καταλάβουμε τις ιδιότητες των δύο ειδών αναλλοίωτων τόρων:
 - Για τους περιστροφικούς τόρους σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήσαμε στο σύστημα μας η συνεχής μεταβολή χρώματος των τόρων, η οποία εγγυάται την ομαλή μεταβολή της τέταρτης διάστασης, αλλάζει επιφάνεια (από την εξωτερική επιφάνεια του τόρου στην εσωτερική και αντίστροφα - Σχ. 65, 66).
 - Για τους σωληνοειδείς τόρους, το βασικό τους χαρακτηριστικό, οι ιδιο-τομές (τομές των τόρων με τον εαυτό τους σε τρισδιάστατες προβολές), ήταν ένα φαινόμενο προβολής σε όλες τις περιπτώσεις, καθώς στις ιδιο-τομές αυτές είχαμε την συνάντηση διαφορετικών χρωμάτων. Επισημαίνουμε το γεγονός ότι σε όλες τις περιπτώσεις του συστήματος μας βρήκαμε περιττό αριθμό ιδιο-τομών στις 3D προβολές των σωληνοειδών τόρων. Στον 4D χώρο δεν βρήκαμε καμία ιδιο-τομή των σωληνοειδών τόρων.
- Βρήκαμε ότι τα δύο είδη τόρων δεν μπορούν να διακριθούν από τον

αριθμό περιστροφής τους και από τα μορφολογικά χαρακτηριστικά των τροχιών στον φυσικό χώρο.

4. Όσο απομακρυνόμαστε από τις αρχικές συνθήκες των ευσταθών περιοδικών τροχιών, οι 3D προβολές των τώρων εμφανίζονται παραμορφωμένες. Πέρα από έναν ορισμένο τόρο βρήκαμε χαοτικές τροχιές κολλητικότητας οι οποίες παραμένουν για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα σε τοροειδείς επιφάνειες των οποίων τα σημεία έχουν ομαλή μεταβολή χρώματος (φαινόμενο κολλητικότητας σε αναλλοίωτους τόρους). Τελικά διαχέονται στον φασικό χώρο, όπου παρατηρούμε ανάμειξη χρώματος.
 5. Βρήκαμε χαοτικές τροχιές, οι οποίες παγιδεύονται από τόρους της $x1v1$ στον 4D χώρο της επιφάνειας τομής για χρόνους μεγαλύτερους από την ηλικία του σύμπαντος (1 Hubble time). Παρουσιάσαμε ένα παράδειγμα, που οι τροχιές υποστηρίζουν μία φυσικοειδή δομή, όμοια αλλά παχύτερη από την μορφολογία που υποστηρίζουν οι αντίστοιχες ημι-περιοδικές τροχιές οι οποίες περιβάλλουν τις $x1v1$ ευσταθείς περιοδικές τροχιές. Κατόπιν οι τροχιές απομακρύνονται από την ευσταθή περιοχή των $x1v1$ περιοδικών τροχιών και διαχέονται στον φασικό χώρο. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρήσαμε το φαινόμενο διάχυσης Arnold.
 6. Οι σωληνοειδείς τόροι έχουν βρεθεί μόνο στις 3D προβολές των ημι-περιοδικών τροχιών στην επιφάνεια τομής σε διαταραγμένα συστήματα. Στην αξιsymμετρική περίπτωση του συστήματος μας, συναντάμε μόνο περιστροφικούς τόρους.
- Για την δυναμική στην περιοχή των **απλά ασταθών** περιοδικών τροχιών έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:
 - Οι τροχιές στην περιοχή μίας απλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς σχηματίζουν (1) διπλούς βρόχους στην 4D επιφάνεια τομής (2) δομές σχήματος Θ οι οποίες είναι διακριτές σε μερικές 3D προβολές μετά από σχετικά μεγάλους χρόνους ολοκλήρωσης (3) νέφη σημείων γύρω από απλά ασταθείς περιοδικές τροχιές με ανάμειξη χρώματος στην 4D αναπαράστασή τους. Τα δύο πρώτα είδη τροχιακής συμπεριφοράς εμφανίζονται κοντά σε μία μετάβαση $U \rightarrow S$ της x_1 στο σημείο διακλάδωσης της $x1v2$ και σχετίζονται με την εμφάνιση του φαινομένου κολλητικότητας στην δυναμική του συστήματος.
 - Οι ασυμπτωτικές καμπύλες των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της $x1v2$ κοντά σε μία $U \rightarrow S$ μετάβαση της κεντρικής οικογένειας

των περιοδικών τροχιών της x_1 απαρτίζονται από δύο μέρη. Το μέρος A (υπολογισμένο για $c < 0$ στην εξίσωση (95)) περιελίσσεται γύρω από περιστροφικούς τόρους που βρίσκονται γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές της x_1 στην $\pm z$ ή $\pm z$ -διεύθυνση. Το μέρος B (υπολογισμένο για $c > 0$ στην (95)) περιελίσσεται γύρω από περιστροφικούς τόρους που βρίσκονται γύρω από τις συμμετρικές ευσταθείς περιοδικές τροχιές της x_{1v1} και x_{1v1}' .

- Και στις δύο περιπτώσεις χαοτικών τροχιών κοντά σε μία μετάβαση $U \rightarrow S$ της x_1 , τα σημεία των τροχιών είναι πλησίον στις πολλαπλότητες κοντά στις περιοχές που καταλαμβάνονται από τους περιστροφικούς τόρους που βρίσκονται γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές που βρίσκονται στην περιοχή. Αυτές οι χαοτικές τροχιές είναι τροχιές κολλητικότητας και παίζουν σημαντικό ρόλο στην γαλαξιακή δυναμική, αφού ο χρόνος κολλητικότητας σε πολλές περιπτώσεις είναι της τάξης της ηλικίας του σύμπαντος ή και μεγαλύτερος.
- Διπλοί βρόχοι και δομές Θ περιβαλλόμενες από δαχτυλίδια βρίσκονται σε αρκετές 2D ή 3D προβολές της επιφάνειας τομής 3D αυτόνομων χαμιλτονιανών συστημάτων. Οι επιφάνειες αυτές δομούνται από τροχιές κοντά σε ασυμπτωτικές καμπύλες απλά ασταθών περιοδικών τροχιών οι οποίες περιβάλλουν τους περιστροφικούς τόρους των γειτονικών ευσταθών περιοδικών τροχιών όπως στο Σχ. 92. Τέτοιες μορφολογίες εμφανίζονται όταν η κεντρική οικογένεια (στην περιπτώσή μας η x_1) έχει μία μετάβαση $S \rightarrow U$ και μία κοντινή $U \rightarrow S$. Στην πρώτη μετάβαση διακλαδίζονται δύο συμμετρικές ευσταθείς τροχιές (όπως οι x_{1v1} και x_{1v1}') και στην δεύτερη μετάβαση έχουμε τη διακλάδωση δύο απλά ασταθών οικογενειών περιοδικών τροχιών (όπως οι x_{1v2} και x_{1v2}'). Κοντά στην μετάβαση $U \rightarrow S$ της κεντρικής οικογένειας, οι ευσταθείς περιοδικές τροχιές που έχουν ήδη διακλαδισθεί δεν είναι μακριά από τις ασταθείς περιοδικές τροχιές. Έτσι οι ασυμπτωτικές καμπύλες των ασταθών περιοδικών τροχιών περιβάλλουν τους περιστροφικούς τόρους που βρίσκονται γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές. Μακριά από τα σημεία μετάβασης η μορφολογία των ασυμπτωτικών καμπύλων γίνεται πολύπλοκη και τα σημεία των γειτονικών τροχιών σχηματίζουν νέφη σημείων στις επιφάνειες τομής.

- Τα συμπεράσματα μας που σχετίζονται με **διπλά ασταθείς** περιοδικές τροχιές είναι τα ακόλουθα:

- Η διπλή αστάθεια σε 3D περιστρεφόμενους γαλαξιακούς δίσκους εμφανίζεται για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας από ότι η απλή αστάθεια στις διακλαδώσεις της x_1 . Η συνήθης περίπτωση είναι μετά από μία μετάβαση $U \rightarrow DU$. Στις ενέργειες αυτές γενικά δεν υπάρχουν περιστροφικοί τόροι σχετιζόμενοι με ευσταθείς οικογένειες στην περιοχή των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών. Τα σημεία των τροχιών σχηματίζουν νέφη σημείων στις 4D επιφάνειες τομής.
 - Στην περίπτωση μίας διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς υπάρχουν δύο ζεύγη ιδιοδιευθύνσεων, τα οποία ξεκινούν από την περιοδική τροχιά. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες κάθε ζεύγους ξεκινούν σε αντίθετες κατευθύνσεις. Μεταξύ των ιδιοδιευθύνσεων έχουμε την δημιουργία μίας ιδιοεπιφάνειας. Όμως το σχήμα αυτής της επιφάνειας είναι πολύπλοκο και είναι δύσκολο να οπτικοποιηθεί όταν οι αντίστοιχες ιδιοτιμές δεν είναι κοντά η μία στην άλλη.
 - Στην περίπτωση των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών του z -άξονα για αργά περιστρεφόμενα μοντέλα, σε χαμηλές ενέργειες, βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα ασταθή ιδιοδιανύσματα διπλής αστάθειας είναι κοντά η μία στην άλλη. Επομένως οι δύο ταχύτητες απόκλισης κατά μήκος αυτών των ιδιοδιευθύνσεων είναι παρόμοιες. Αυτό επιτρέπει την οπτικοποίηση της ασταθούς ιδιοεπιφάνειας της διπλά ασταθούς περιοδικής τροχιάς. Βρήκαμε κολλοειδείς χαοτικές τροχιές των οποίων τα σημεία μένουν κοντά στην ασταθή πολλαπλότητα για μεγάλα χρονικά διαστήματα (της τάξης της ηλικίας του σύμπαντος και παραπάνω). Αυτές τις τροχιές τις βρήκαμε διαταράσσοντας τις αρχικές συνθήκες των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών του z -άξονα ή διαταράσσοντας τροχιές που αντιστοιχούσαν σε περιστροφικούς τόρους γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές των ‘ευσταθών ανώμαλων τροχιών’ (stable anomalous orbits-sao) και της συμμετρικής τους οικογένειας.
- Σχετικά με τις ταχύτητες διάχυσης των σημείων τομής στην 4D επιφάνεια τομής, τροχιών κοντά σε απλά και διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές βρήκαμε ότι:
 - Μεταξύ των τροχιών που μελετήσαμε εκείνες που είναι κοντά στις διπλά ασταθείς περιοδικές τροχιές της x_1u_2 έχουν την μεγαλύτερη ταχύτητα διάχυσης. Οι χαοτικές τροχιές κολλητικότητας στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών κοντά στα σημεία

διακλάδωσης της x_{1v2} και των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών του z -άξονα, έχουν συγκρίσιμες ταχύτητες διάχυσης. Οι ταχύτητες αυτές είναι μικρότερες από τις ταχύτητες διάχυσης των τροχιών στην περιοχή των απλά ασταθών περιοδικών τροχιών της x_{1v2} μακριά από τα σημεία διακλάδωσης της x_{1v2} και των διπλά ασταθών περιοδικών τροχιών της ίδιας οικογένειας οι οποίες έχουν ιδιοτιμές με μεγάλη διαφορά μεταξύ τους.

- Για την δυναμική στην περιοχή των **μιγαδικά ασταθών** περιοδικών τροχιών κοντά σε μία χαμιλτονιανή διακλάδωση Hopf βρήκαμε τα παρακάτω:
 1. Βρήκαμε μία σπειροειδή δομή σχηματιζόμενη από σημεία στην επιφάνεια τομής στην περιοχή μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς στις 2D προβολές της 4D επιφάνειας τομής όπως και σε προηγούμενες εργασίες (Contopoulos et al. 1994, Papadaki et al. 1995). Στην παρούσα διατριβή βρήκαμε ότι έχουμε αυτή την σπειροειδή δομή στις 3D προβολές της επιφάνειας τομής και επιπλέον έχουμε μία ομαλή μεταβολή χρώματος κατά μήκος των βραχιόνων της. Αυτό σημαίνει ότι αυτή η σπειροειδής δομή είναι 4D.
 2. Τα σημεία κοντά σε μία μιγαδικά ασταθή περιοδική τροχιά φτάνουν σε μία μέγιστη απόσταση από την περιοδική τροχιά και μετά κατευθύνονται προς τα μέσα, φθάνουν σε μία ελάχιστη απόσταση και κατόπιν απομακρύνονται πάλι. Η διαδικασία μέγιστου-ελαχίστου επαναλαμβάνεται πολλές φορές και σχηματίζεται ένας δισκοειδής σχηματισμός στις 3D προβολές της επιφάνειας τομής, το οποίο καλείται περιορισμένος τόρος (confined torus) (Pfenniger 1985a,b, Jorba & Ollé 2004, Ollé et al. 2004). Στον δισκοειδή αυτό σχηματισμό παρατηρήσαμε μία ομαλή μεταβολή χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε αυτόν τον δισκοειδή σχηματισμό στον 4D χώρο της επιφάνειας τομής. Βρήκαμε ότι αυτός ο δισκοειδής σχηματισμός ταυτίζεται με τις αναλλοίωτες πολλαπλότητες της μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς (υποκεφάλαιο 3.4.1).
 3. Αν εφαρμόσουμε μεγαλύτερες διαταραχές στις αρχικές συνθήκες παρατηρούμε, ότι οι δισκοειδείς σχηματισμοί μετατρέπονται σε τοροειδείς επιφάνειες με ομαλή μεταβολή χρώματος και τρύπες στο κέντρο. Για μία κρίσιμη τιμή της διαταραχής στις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς παρατηρήσαμε ότι ενώ για λίγα σημεία στην επιφάνεια τομής έχουμε μία τοροειδή επιφάνεια με συνεχή μεταβολή χρώματος,

όμως αργότερα, τα σημεία αφήνουν την τοροειδή αυτή επιφάνεια και απομακρύνονται καταλαμβάνοντας έναν μεγαλύτερο όγκο στον φασικό χώρο. Αυτή είναι μία περίπτωση του φαινομένου κολλητικότητας στην περίπτωση της μιγαδικής αστάθειας και των περιορισμένων τόρων. Για πρώτη φορά οπτικοποιήσαμε το φαινόμενο κολλητικότητας στην περιοχή μίας μιγαδικά ασταθούς περιοδικής τροχιάς.

4. Καθώς αυξάνει η ενέργεια μετά από μία κρίσιμη τιμή δεν βρίσκουμε περιορισμένους τόρους πια, αλλά νέφη σημείων στην περιοχή των μιγαδικά ασταθών περιοδικών τροχιών. Αυτά τα νέφη έχουν ανάμειξη χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκουμε ισχυρό χάος (strong chaos) στην 4D επιφάνεια τομής καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο μετάβασης από ευστάθεια σε μιγαδική αστάθεια.
- Τα συμπεράσματα για την δομή του φασικού χώρου στην περιοχή των **περιοδικών τροχιών πολλαπλής περιόδου** (πολλαπλότητας $m = 2$ και 7) είναι τα ακόλουθα:
 1. Στην περιοχή των m -περιοδικών τροχιών βρήκαμε m τόρους οι οποίοι περιβάλλουν τις αρχικές συνθήκες των περιοδικών τροχιών. Βρήκαμε ομαλή μεταβολή χρώματος στους τόρους αυτούς με δύο τρόπους. Κατά μήκος ενός τόρου και κατά μήκος όλων των m τόρων, θεωρώντας τους σαν ένα αντικείμενο. Ανάλογα κανονικοποιούμε την κλίμακα της τέταρτης διάστασης, η οποία δίνει τα χρώματα των σημείων. Αυτοί οι τόροι είναι περιστροφικοί σύμφωνα με την ορολογία των Vrahatis et al. (1997). Παρόμοιες δομές παρατηρήθηκαν από τους Martinet & Magnenat (1981). Στην παρούσα εργασία δεν παρατηρήσαμε την μετάβαση του χρώματος από την εξωτερική στην εσωτερική επιφάνεια του τόρου όπως σε τόρους γύρω από απλές περιοδικές τροχιές (υποκεφάλαιο 3.2).
 2. Ολοκληρώνοντας μία τροχιά κοντά σε μία απλά ασταθή m -περιοδική τροχιά για λίγες χιλιάδες σημεία στην επιφάνεια τομής, βρήκαμε ότι σχηματίζουν νηματοειδείς σχηματισμούς με ομαλή μεταβολή στην τέταρτη διάσταση. Τα νήματα τα οποία σχηματίζονται με αυτό τον τρόπο συνδέουν τα σημεία των απλά ασταθών m -περιοδικών τροχιών και περιβάλλουν τους m τόρους γύρω από τις ευσταθείς m -περιοδικές τροχιές. Οι νηματοειδείς σχηματισμοί εμφανίζονται και ως κορδέλες ή διπλοί βρόχοι.
 3. Στις περιοχές κοντά στα σημεία των απλά ασταθών m -περιοδικών τροχιών δύο κλάδοι του νηματοειδούς σχηματισμού συναντιούνται

και έχουν το ίδιο χρώμα. Αυτό δείχνει, ότι έχουμε σε αυτά τα σημεία ιδιο-τομές των δομών αυτών στην 4D επιφάνεια τομής.

4. Η παραπάνω περίπτωση εμφανίζεται σε πλήρη αναλογία με την χαρακτηριστική περίπτωση ενός 2D αυτόνομου χαμιλτονιανού συστήματος. Στις επιφάνειες τομής των 2D συστημάτων παρατηρούμε μία αλυσίδα νησίδων ευστάθειας και την χαοτική ζώνη που συνδέει τα σημεία των αντίστοιχων ασταθών περιοδικών τροχιών. Σημειώνουμε το γεγονός ότι σε αυτή την 3D περίπτωση οι ασταθείς περιοδικές τροχιές είναι απλά ασταθείς και έχουμε ομαλή μεταβολή χρώματος κατά μήκος των νημάτων όταν θεωρούμε λίγες χιλιάδες σημεία στην επιφάνεια τομής.
 5. Τα σημεία τα οποία παραμένουν στους νηματοειδείς σχηματισμούς για λίγες χιλιάδες σημεία στην επιφάνεια τομής, διαχέονται αργότερα στον 4D χώρο της επιφάνειας τομής. Η διάχυση στον 4D χώρο, χαρακτηρίζεται από ανάμειξη χρώματος.
- Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις υπολογίσαμε τους αριθμούς Lyapunov των τροχιών και παρατηρήσαμε ότι οι μεταβολές του φασικού χώρου συνοδεύονται και από μεταβολές των αριθμών Lyapunov. Όμως η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε, η μέθοδος χρώματος και περιστροφής, δίνει περισσότερες πληροφορίες για τον φασικό χώρο από αυτές που δίνουν οι αριθμοί Lyapunov.

7 Abstract

In this Ph.D thesis we studied the morphology and the stability of periodic orbits of the 3D bifurcations of the central family of periodic orbits x_1 in two cases of a 3D autonomous hamiltonian system of galactic type. The axisymmetric case of the potential of our system is a good approximation for the potential of the Milky Way (Miyamoto and Nagai 1975). Then we studied the dynamics in the neighborhood of stable, simple unstable, double unstable and complex unstable periodic orbits and the dynamics in the neighborhood of periodic orbits with high order multiplicity.

We studied first in detail the structure of phase space in the neighborhood of stable periodic orbits of our system. We used the color and rotation method (Patsis and Zachilas 1994) to investigate the properties of the invariant tori in the 4D spaces of section. We compared our results with those of previous works and we described the morphology of the rotational, as well as of the tube tori in the 4D space. We found sticky chaotic orbits in the immediate neighborhood of sets of invariant tori surrounding 3D stable periodic orbits. Particularly useful for galactic dynamics was the behavior of chaotic orbits trapped for long time between 4D invariant tori. We found that they support during this time the same structures as the quasi-periodic orbits around the stable periodic orbits, contributing however to a local increase of the dispersion of velocities. Finally we found that the tube tori do not appear in the 3D projections of the spaces of section in the axisymmetric Hamiltonian we examined.

Then, we studied the dynamics in the neighborhood of simple and double unstable periodic orbits in our rotating 3D autonomous Hamiltonian system by means of the same method. We investigated the structure of the invariant manifolds that we found in the neighborhood of simple and double unstable periodic orbits in the 4D spaces of section. We considered orbits in the neighborhood of the families x_1v_2 , belonging to the x_1 tree, and the z-axis (the rotational axis of our system). Close to the transition points from stability to simple instability, in the neighborhood of the bifurcated simple unstable x_1v_2 periodic orbits we encountered the phenomenon of stickiness, as the asymptotic curves of the unstable manifold surrounded regions in the phase space occupied by rotational tori existing in the region. For larger energies, away from the bifurcating point, the consequents of the chaotic orbits formed clouds of points with mixing of color in their 4D representations. In the case of double instability, close to x_1v_2 orbits, in general we found clouds of points in the four dimensional spaces of section. However, in some cases of double

unstable periodic orbits belonging to the z-axis family we could visualize the associated unstable eigensurface. We have seen that chaotic orbits close to the periodic orbit remained sticky to this surface for long times (of the order of a Hubble time or more). Among the orbits we studied we found those close to the double unstable orbits of the $x1v2$ family having the largest diffusion speed. The sticky chaotic orbits close to the bifurcation point of the simple unstable $x1v2$ orbit and close to the double unstable z-axis orbit we have examined, had comparable diffusion speeds. These speeds were much slower than the diffusion speeds of the orbits in the neighborhood of $x1v2$ simple unstable periodic orbits away from the bifurcating point, or of the double unstable periodic orbits of the same family having very different eigenvalues along the corresponding unstable eigendirections.

Finally, we studied the orbital behavior in the neighborhood of complex unstable periodic orbits of our system. At a transition of a family of periodic orbits from stability to complex instability (also known as Hamiltonian Hopf Bifurcation) the four eigenvalues of the stable periodic orbits move out of the unit circle and they become complex unstable. In this Thesis we first integrated initial conditions close to the ones of a complex unstable periodic orbit which is close to the transition point. Then we plotted the consequents of the corresponding orbit in a 4D surface of section. To visualize this surface of section we used the method of color and rotation. We found that the consequents are contained in 2D “confined tori”. Then we investigated the structure of the phase space in the neighborhood of complex unstable periodic orbits which are further away from the transition point. In these cases we observed clouds of points in the 4D surfaces of section. The transition between the two types of orbital behavior is abrupt.

Then we studied the phase space structures encountered in the neighborhood of periodic orbits with high order multiplicity of our system. We considered 4D spaces of section and we used the method of color and rotation in order to visualize them. As examples we used the case of a stable 7-periodic orbit and the case of a stable 2-periodic orbit. We investigated the structure of multiple tori around them in the 4D surface of section and in addition we studied the orbital behavior in the neighborhood of the corresponding simple unstable periodic orbits. By considering initially a few consequents in the neighborhood of the orbits we found a structure in the space of section, which is in direct correspondence with what is observed in a resonance zone of a 2D autonomous Hamiltonian system. However, in our 3D case we have, instead of stability islands, rotational tori, while the chaotic zone connecting the points of the unstable periodic orbit is replaced

by filaments extending in 4D, following a smooth color variation. After more intersections, the consequents of the orbit which started in the neighborhood of the unstable periodic orbit, diffuse in phase space and form a cloud that occupies a large volume surrounding the region containing the rotational tori. In this cloud the colors of the points are mixed. The same structures have been observed in the neighborhood of all m -periodic orbits we have examined in the system. This indicates a generic behavior.

We computed the Lyapunov characteristic number ($LCN(t)$) for all cases of orbits. We found that the changes in the structure of the phase space is followed by changes of the $LCN(t)$. However the method that we used in this thesis, the method of color and rotation, gives more informations for the phase space than the $LCN(t)$.

Keywords: Chaos and Dynamical Systems, Galactic Dynamics, Dynamical Astronomy, Nonlinear Dynamics, Hamiltonian Systems.

8 Βιβλιογραφία στην Αγγλική

1. Abraham R. and Marsden J.E. [1978] *Foundations of Mechanics*, Benjamin-Cummings Publ. Co., Reading, Massachusetts.
2. Arnold V.I. [1963] “Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian” *Russ. Math. Surveys* **18**, 9-36.
3. Arnold V.I. [1978] *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag.
4. Arnold V.I. [1988] *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, 2nd edition, Springer-Verlag New York.
5. Arnold V.I. and Givental A.B. [2000] “Symplectic Geometry” In: *Dynamical Systems IV*, ed by V.I. Arnold, S.P. Novikov, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, p. 1-138.
6. Arnold V.I., Kozlov V.V. and Neishtadt A.I. [2010] *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd edition, Springer Verlag.
7. Bertin G. and Lin C.C. [1996], *Spiral Structure in Galaxies. A Density Wave Theory*, MIT press.
8. Binney J. and Tremaine S. [2008] *Galactic Dynamics*, 2nd edition, Princeton Univ. Press, Princeton.
9. Bridges T.J., Cushman R.H. and Mackay R.S. [1995] “Dynamics near an irrational collision of eigenvalues for symplectic mappings” *Fields Inst. Comm.* **4**, 61-79.
10. Broer H.W., Hanssmann H. and Hoo J. [2007] “The quasi-periodic Hamiltonian Hopf Bifurcation” *Nonlinearity* **20**, 417-460.
11. Broucke R. [1969] “Periodic Orbits in the Elliptic Restricted Three-Body Problem” *NASA Tech. Rep.* 32-1360, 1-125.
12. Contopoulos G. [1960] “A third Integral of Motion in a Galaxy” *Zeitschrift für Astrophysik* **49**, 273-291.
13. Contopoulos G. [1971] “Orbits in Highly Perturbed Dynamical Systems. III. Nonperiodic Orbits” *Astron. J* **76**, 147-156.

14. Contopoulos G. [1983] “Infinite bifurcations, gaps and bubbles in Hamiltonian systems” *Physica D* **8**, 142-156.
15. Contopoulos G. [1986a] “Bifurcations in systems of three degrees of freedom” *Celest. Mech.* **38**, 1-22.
16. Contopoulos G. [1986b] “Qualitative changes in 3-dimensional dynamical systems” *Astron. Astrophys.* **161**, 244-256.
17. Contopoulos G. [2002] *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.
18. Contopoulos G. [2009] “Ordered and Chaotic Orbits in Spiral Galaxies” In: *Chaos in Astronomy*, ed. by G. Contopoulos, P.A. Patsis, Springer, Berlin Heidelberg, 3-22.
19. Contopoulos G. and Barbaniš B. [1985] “Resonant systems with three degrees of freedom” *Astron. Astrophys.* **153**, 44-54.
20. Contopoulos G. and Barbaniš B. [1989] “Lyapunov characteristic numbers and the structure of phase-space” *Astron. Astrophys.* **222**, 329-343.
21. Contopoulos G. and Barbaniš B. [1994] “Periodic orbits and their bifurcations in a 3-D system” *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **59**, 279-300.
22. Contopoulos G. and Giorgilli A. [1988] “Bifurcations and Complex Instability in a 4-Dimensional Symplectic Mapping” *Meccanica* **23**, 19-28.
23. Contopoulos G. and Grosbøl P. [1989] “Orbits in barred galaxies” *Astron. Astrophys. Rev.* **1**, 261-289.
24. Contopoulos G. and Harsoula M. [2008] “Stickiness in Chaos” *Int. J. Bif. Chaos* **18**, 2929-2949.
25. Contopoulos G. and Harsoula M. [2010a] “Stickiness effects in chaos” *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **107**, 77-92.
26. Contopoulos G. and Harsoula M. [2010b] “Stickiness” Proceedings of the 9th International Conference of the Hellenic Astronomical Society, San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, **424**, 355-366.

27. Contopoulos G. and Magnenat P. [1985] “Simple three-dimensional periodic orbits in a galactic-type potential” *Celest. Mech.* **37**, 387-414.
28. Contopoulos G. and Mertzaniades C. [1977] “Inner Lindblad resonance in galaxies: Nonlinear theory. II - Bars” *Astron. Astrophys.* **61**, 477-485.
29. Contopoulos G. and Papayannopoulos Th. [1980] “Orbits in weak and strong bars” *Astron. Astrophys.* **92**, 33-46.
30. Contopoulos G. and Patsis P.A. [2006] “Outer dynamics and escapes in barred galaxies” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **369**, 1039-1054.
31. Contopoulos G. and Patsis P.A. (eds.) [2009] *Chaos in Astronomy* Springer, Berlin Heidelberg.
32. Contopoulos G., Magnenat P. and Martinet L. [1982] “Invariant surfaces and orbital behavior in dynamical systems of 3 degrees of freedom II” *Physica D* **6**, 123-136.
33. Contopoulos G., Voglis N., Efthymiopoulos C. [1999] “Order and Chaos in 3-D systems” In *Hamiltonian Systems with three or more degrees of freedom*, ed. by Simó C., NATO ASI series, series c: Mathematical and Physical sciences, Kluwer Academic Publishers, **533**, 26-38.
34. Contopoulos G., Farantos S.C., Papadaki H. and Polymilis C. [1994] “Complex unstable periodic orbits and their manifestation in classical and quantum dynamics” *Phys. Rev. E* **50**, 4399-4403.
35. Debattista V., Mayer L., Carollo C.M., Moore B., Wadsley J. and Quinn T. [2006] “The secular evolution of disk structural parameters”, *Astrophys. J* **645**, 209-227.
36. Englmaier P. and Gerhard O.E. [1999] “Gas dynamics and large-scale morphology of the Milky Way galaxy” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **304**, 512-534.
37. Froeschlé C. [1970] “Numerical study of dynamical systems with three degrees of freedom” *Astron. Astrophys.* **4**, 115-128.
38. Froeschlé C. [1972] “ Numerical study of a four-dimensional mapping” *Astron. Astrophys.* **16**, 172-189.

39. Hadjidemetriou J. [1975] “The stability of periodic orbits in the three-body problem” *Celest. Mech.* **12**, 255-276.
40. Heisler J., Merritt D. and Schwarzschild M. [1982] “Retrograde closed orbits in a rotating triaxial potential”, *Astrophys. J.*, **258**, 490–498.
41. Heggie D.C. [1985] “Bifurcation at complex instability” *Celest. Mech.* **35**, 357-382.
42. Hopf E. [1942] “Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems” *Ber. Math. Phys. Sächsische Akademie der Wissenschaften Leipzig* **94**, 1-22 (see also the english translation in Marsden and McCracken (1976)).
43. Jorba A. and Ollé M. [2004] “Invariant curves near Hamiltonian Hopf bifurcations of four-dimensional symplectic maps” *Nonlinearity* **17**, 691-710.
44. Katsanikas M. [2012] “ Simple Instability in a 3D autonomous Hamiltonian system of galactic type” in Proceedings of the Third La Plata International school in Astronomy and Geophysics: *Chaos, Diffusion and non-Integrability in Hamiltonian systems- Applications to Astronomy*, Asociación Argentina de Astronomía, (in press).
45. Katsanikas M. and Patsis P.A. [2010] “The Orbital Behavior at the neighborhood of Stable Periodic Orbits in a 3D Galactic Potential” Proceedings of the 9th International Conference of the Hellenic Astronomical Society, San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, **424**, 380-381.
46. Katsanikas M. and Patsis P.A. [2011] “The Structure of Invariant Tori in a 3D Galactic Potential”, *Int. J. Bif. Chaos*, **21**, 467-496.
47. Katsanikas M., Patsis P.A. and Contopoulos G. [2011a] “The structure and evolution of confined tori near a Hamiltonian Hopf Bifurcation”, *Int. J. Bif. Chaos* **21**, 2321-2330.
48. Katsanikas M., Patsis P.A. and Contopoulos G. [2012] “Stickiness and Instabilities in a 3D rotating galactic potential” *Int. J. Bif. Chaos* (in press).

49. Katsanikas M., Patsis P.A. and Pinotsis A.D. [2011b] “Chains of rotational tori and filamentary structures close to high multiplicity periodic orbits in a 3D galactic potential”, *Int. J. Bif. Chaos* **21**, 2331-2342 .
50. Katsanikas M., Patsis P.A. and Zachilas L. [2009] “The Structure of the Phase Space in Galactic Potentials of Three Degrees of Freedom”. In: *Chaos in Astronomy*, ed. by G. Contopoulos, P.A. Patsis, Springer, Berlin Heidelberg, 235-239.
51. Kaufmann D.E. and Patsis P.A. [2005] “Propeller Orbits in Barred Galaxy Models” *Astrophys. J* **624**, 693-700.
52. Kolmogorov A.N. [1954] “On the conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian” *Dokl. Akad. Nauk USSR* **98**, 527-530.
53. Kuksin S. and Pöschel J. [1994] “On the Inclusion of Analytic Symplectic Maps in Analytic Hamiltonian Flows and its applications” In: *Seminars on Dynamical Systems*, ed. by S. Kuksin, V. Lazutkin, J. Pöschel, Birkhäuser: Basel.
54. Lichtenberg A.J. and Lieberman M.A. [1992] *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
55. Magnenat P. [1981] “*Études numériques sur le calcul des orbites stellaires dans des modèles galactiques à 2 ou 3 degrés de liberté*”, PhD Thesis, Observatoire de Geneve.
56. Magnenat P. [1982] “Numerical study of periodic orbit properties in a dynamical system with three degrees of freedom” *Celest. Mech.* **28**, 319-343.
57. Marsden J.E. and McCracken M. [1976] “The Hopf Bifurcation and its applications” Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
58. Martinet L. and Magnenat P. [1981] “Invariant surfaces and orbital behavior in dynamical systems with 3 degrees of freedom.” *Astron. Astrophys.* **96**, 68-77.
59. Martinet L. and de Zeeuw T. [1988] “Orbital stability in rotating triaxial stellar systems”, *Astron. Astrophys.* **206**, 269-278.

60. Miyamoto M. and Nagai R. [1975] “Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies” *Publ. Astron. Soc. Japan* **27**, 533-543.
61. Meyer K., Hall G. and Offin D. [2009] *Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body problem*, Springer Verlag.
62. Moser J. [1962] “On invariant curves of an area preserving mappings of an annulus” *Nachr. Akad. Wiss. Gött, II Math.- Phys Kl.* 1-20.
63. Nekhoroshev N. N. [1977] “ An Exponential Estimate of the Time of Stability of Nearly-Integrable Hamiltonian Systems”, *Russ. Math. Surveys*, **32**, 1-65.
64. Ollé M. and Pfenniger D. [1998] “Vertical orbital structure around the lagrangian points in barred galaxies. Link with the secular evolution of galaxies” *Astron. Astrophys.* **334**, 829-839.
65. Ollé M., Pacha J.R. and Villanueva J. [2004] “Motion close to the Hopf bifurcation of the vertical family of periodic orbits of L_4 ” *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **90**, 89-109.
66. Ollé M., Pacha J.R. and Villanueva J. [2005a] “Quantitative estimates on the normal form around a non-semi-simple 1:-1 resonant periodic orbit” *Nonlinearity* **18**, 1141-1172.
67. Ollé M., Pacha J.R. and Villanueva J. [2005b] “Dynamics close to a non-semi-simple 1:-1 resonant periodic orbit” *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* **5**, 799-816.
68. Ollé M., Pacha J.R. and Villanueva J. [2008] “Kolmogorov-Arnold-Moser aspects of the periodic Hamiltonian Hopf bifurcation” *Nonlinearity* **21**, 1759-1811.
69. Papadaki H., Contopoulos G. and Polymilis C. [1995] “Complex Instability” In: *From Newton to Chaos* ed. by A.E. Roy, B.A. Steves, Plenum Press, New York, 485-494.
70. Patsis P.A. and Grosbøl P. [1996] “Thick spirals: dynamics and orbital behavior” *Astron. Astrophys.* **315**, 371-383.
71. Patsis P.A. and Zachilas L. [1990] “Complex instability of simple periodic orbits in a realistic two-component galactic potential” *Astron. Astrophys.* **227**, 37-48.

72. Patsis P.A. and Zachilas L. [1994] “ Using Color and rotation for visualizing four-dimensional Poincaré cross-sections: with applications to the orbital behavior of a three-dimensional Hamiltonian system” *Int. J. Bif. Chaos* **4**, 1399-1424.
73. Patsis P.A., Athanassoula E. and Quillen A.C. [1997] “Orbits in the Bar of NGC 4314” *Astrophys. J* **483**, 731-744.
74. Patsis P.A., Kalapotharakos C. and Grosbøl P. [2010] “NGC1300 dynamics - III. Orbital analysis” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **408**, 22-39.
75. Patsis P.A., Skokos Ch. and Athanassoula E. [2002a] “Orbital dynamics of three-dimensional bars-III. Boxy/peanut edge-on profiles” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **337**, 578-596.
76. Patsis P.A., Skokos Ch. and Athanassoula E. [2003] “Orbital dynamics of three-dimensional bars - IV. Boxy isophotes in face-on views” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **342**, 69-78.
77. Patsis P.A., Athanassoula E., Grosbøl P. and Skokos Ch. [2002b] “Edge-on boxy profiles in non-barred disc galaxies” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **335**, 1049-1053.
78. Pfenniger D. [1984] “The 3D dynamics of barred galaxies” *Astron. Astrophys.* **134**, 373-386.
79. Pfenniger D. [1985a] “ Numerical study of complex instability:I Mappings” *Astron. Astrophys.* **150**, 97-111.
80. Pfenniger D. [1985b], “Numerical study of complex instability:II Barred galaxy bulges” *Astron. Astrophys.* **150**, 112-128.
81. Pichardo B., Martos M., Moreno E. and Espresate J. [2003] “Nonlinear Effects in Models of the Galaxy. I. Midplane Stellar Orbits in the Presence of Three-dimensional Spiral Arms” *Astrophys. J* **582**, 230-245.
82. Poincaré H. [1892] “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste” Gauthier Villars, Paris I (1892), II (1893), III (1899); Dover (1957).
83. Scheck F. [1994] *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, Springer Verlag.

84. Simó C. (ed.) [1999] *Hamiltonian Systems with three or more degrees of freedom* NATO ASI series, series c: Mathematical and Physical sciences, Kluwer Academic Publishers, **533**.
85. Skokos Ch. [2001] “On the stability of periodic orbits of high dimensional autonomous Hamiltonian systems” *Physica D* **159**, 155-179.
86. Skokos Ch. [2010] “The Lyapunov characteristic exponents and their computation” *Lect. Notes Phys.* **790**, 63-135.
87. Skokos Ch., Contopoulos G. and Polymilis C. [1996] “Non periodic orbits in a four dimensional symplectic map” in Proceedings of 2nd Hellenic Astronomical society, Thessaloniki, Hellenic Astronomical society, 578-582.
88. Skokos Ch., Contopoulos G. and Polymilis C. [1997] “Structures in the phase space of a four dimensional symplectic map” *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **65**, 223-251.
89. Skokos Ch., Contopoulos G. and Polymilis C. [1999] “Numerical study of the phase space of a four dimensional symplectic map” In *Hamiltonian Systems with three or more degrees of freedom*, ed. by Simó C., NATO ASI series, series c: Mathematical and Physical sciences, Kluwer Academic Publishers, **533**, 583-587.
90. Skokos Ch., Patsis P.A. and Athanassoula E. [2002a] “Orbital dynamics of three-dimensional bars-I. The backbone of three-dimensional bars. A fiducial case” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **333**, 847-860.
91. Skokos Ch., Patsis P.A. and Athanassoula E. [2002b] “Orbital dynamics of three-dimensional bars-II. Investigation of the parameter space” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **333**, 861-870.
92. Sparke L.S. and Gallagher J.S. [2000] *Galaxies in the Universe*, Cambridge Univ. Press.
93. Van der Meer J-C. [1985] *The Hamiltonian Hopf Bifurcation* Lecture Notes in Mathematics Vol. 1160, Berlin.
94. Vrahatis M.N., Bountis T.C. and Kollmann M. [1996] “Periodic orbits and invariant surfaces of 4D nonlinear mappings” *Int. J. Bif. Chaos* **6**, 1425-1437.

95. Vrahatis M.N., Isliker H. and Bountis T.C. [1997] “Structure and breakdown of invariant tori in a 4-D mapping model of accelerator dynamics” *Int. J. Bif. Chaos* **7**, 2707-2722.
96. Whittaker E.T. [1937] *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
97. Wiggins S. [2003] *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
98. Wolfram S. [1999] *The Mathematica book*, Wolfram media & Cambridge Univ. Press.
99. Yakubovich V.A. and Starzhinskii V.M. [1975] *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients* (2 volumes), J. Wiley, New York.
100. Zachilas L.G. [1993] “Complex Instability” *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, **97**, 549-558.
101. Zachilas L., Katsanikas M. and Patsis P.A. [2012] “The structure of phase space close to fixed points in a 4D symplectic map” *Int. J. Bif. Chaos*, (in press).

9 Βιβλιογραφία στην Ελληνική

1. Ανδρεαδάκης Σ. [1991] *Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις Συμμετρία.
2. Ζαχείλας Λ. [1988] ‘Αριθμητική και Θεωρητική μελέτη τρισδιάστατων Αστρικών συστημάτων’, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
3. Κατσάνικας Μ. [2005] ‘Μελέτη των Τροχιών και της Δομής του Φασικού χώρου σε Γαλαξιακά δυναμικά τριών Βαθμών ελευθερίας’, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
4. Σκόκος Χ. [1997] ‘Αριθμητική και θεωρητική μελέτη των δομών στον χώρο φάσεων δυναμικών συστημάτων δύο και τριών βαθμών ελευθερίας’, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

5. Χατζηδημητρίου Ι. [1989] 'Συντονισμός και αστάθεια σε δυναμικά συστήματα' στο *Τάξη και Χάος στα Μη Γραμμικά Δυναμικά συστήματα* Μπούντης Τ. και Πνευματικός Στ. (εκδ.), εκδόσεις Πνευματικός **2**, 1-58.

10 Παράρτημα

Παρακάτω παραθέτουμε ένα παράδειγμα μακροεντολών της Mathematica το οποίο ονομάζουμε Example 1. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε ένα αρχείο unstable2a.dat με 4 στήλες όπου κάθε στήλη αντιστοιχεί στις τιμές που παίρνει μία από τις τέσσερις συντεταγμένες (x, \hat{x}, z, \hat{z}) της $4D$ επιφάνειας τομής του $6D$ φασικού χώρου ενός $3D$ χαμιλτονιανού συστήματος. Το αρχείο αυτό έχει 2.500 γραμμές (δηλαδή 10.000 στοιχεία). Στο παράδειγμα αυτό απεικονίζουμε μία $3D$ επιφάνεια χρησιμοποιώντας την πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη του αρχείου και τη χρωματίζουμε χρησιμοποιώντας τη τέταρτη στήλη. Επίσης υπολογίζουμε τη μέγιστη (max) και τη μικρότερη τιμή (min) που παίρνει η τέταρτη στήλη για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις κανονικοποιημένες τιμές της (βλέπε υποκεφάλαιο 3.1). Όπως βλέπουμε και στο παρακάτω παράδειγμα η συνάρτηση χρώματος (Hue) παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ και αντιστοιχεί στο κόκκινο το 0 και στο μώβ το 1. Για να γίνει αυτό τροποποιούμε τη συνάρτηση χρώματος της Mathematica στην οποία 0 και 1 αντιστοιχούν στο ίδιο χρώμα πολλαπλασιάζοντας τις κανονικοποιημένες τιμές της τέταρτης στήλης με 0.75. Έτσι χρωματίζουμε την $3D$ επιφάνεια ανάλογα των τιμών του γινομένου των κανονικοποιημένων τιμών της τέταρτης στήλης με το 0.75. Επίσης, όπως βλέπουμε και στο παρακάτω παράδειγμα, για να αλλάξουμε την οπτική γωνία που βλέπουμε την $3D$ επιφάνεια αλλάζουμε στην τελευταία εντολή τις συντεταγμένες στο Viewpoint. Εάν είμαστε σε λειτουργικό σύστημα Linux (όπως στην παρούσα εργασία) αγνοούμε τις δύο πρώτες εντολές και προσέχουμε όταν καλέσουμε την Mathematica να είμαστε στο Directory που βρίσκεται το αρχείο.

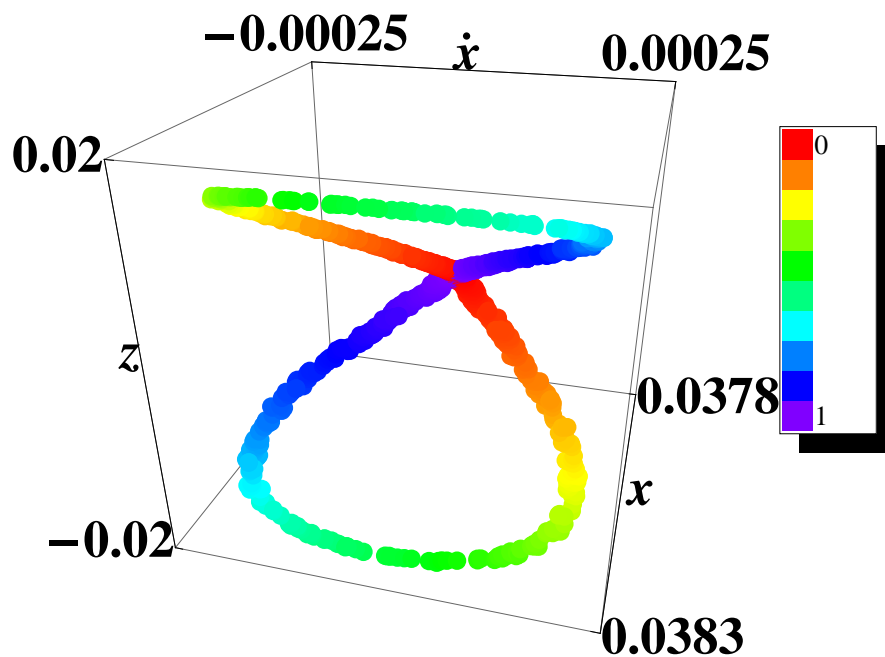
Example 1

```
In[1]:= "C : \ Documents and Settings \ mkatsan \ My Documents"
Out[1]:= C : \ Documents and Settings \ mkatsan \ My Documents
In[2]:= SetDirectory[ch01]
Out[2]:= C : \ Documents and Settings \ mkatsan \ My Documents
In[3]:= Needs["PlotLegends"]
In[4]:= ab=ReadList["unstable2a.dat", Number];
In[5]:= sam = Table[{ ab[[i]], ab[[i+1]], ab[[i+2]], ab[[i+3]] },
{ i,1,10000,4 }];
In[6]:= d4 = N[Table[sam[[i]][[4]], { i, 1, Length[sam] }]];
In[7]:= mn = Min[d4];
In[8]:= mx = Max[d4];
In[9]:= sp3= Table[ { Hue[0.75 * (sam[[i]][[4]]-mn) / (mx-mn)], AbsolutePoin-
```

```

tSize[5], Point[ { sam[[i]][[1]], sam[[i]][[2]], sam[[i]][[3]] } ], { i, 1, Length[sam]
} ];
In[10]:= gh2= ShowLegend[Graphics3D[sp3, AspectRatio → 1, Axes → True,
ViewPoint → {1.8*Pi/3, Pi/6, 1}, AxesStyle → Directive[Black, 17], AxesLa-
bel → {x, ẋ, z}, LabelStyle → Directive[Black, Bold], AxesEdge→ {{1, -1},
{-1, 1}, {1, -1}}, Ticks → {{0.0378, .0383}, {-0.00025, 0.00025}, {-0.02,
0.02}}, PlotRange → {{.0378,.0383}, {-0.00025, 0.00025}, {-0.02, 0.02}},
Boxed → True,BoxRatios → {1,1,1}], { Hue[0.75* #] &, 10, "0", "1", Le-
gendPosition → { 1., -0.4 } } ]
Out[10]:=

```



Στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω δημοσιεύσεις και δραστηριότητες:

- **Εργασίες σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές (Refereed Journals):**

1. Katsanikas M. and Patsis P.A. [2011] “The Structure of Invariant Tori in a 3D Galactic Potential”, *Int. Journal Bif. Chaos*, **21**, 467-496.
2. Katsanikas M., Patsis P.A. and Contopoulos G. [2011] “The structure and evolution of confined tori near a Hamiltonian Hopf Bifurcation”, *Int. Journal Bif. Chaos* **21**, 2321-2330.
3. Katsanikas M., Patsis P.A. and Pinotsis A.D. [2011] “Chains of rotational tori and filamentary structures close to high multiplicity periodic orbits in a 3D galactic potential”, *Int. Journal Bif. Chaos* **21**, 2331-2342 .
4. Katsanikas M., Patsis P.A. and Contopoulos G. [2012] “Stickiness and Instabilities in a 3D rotating galactic potential” *Int. Journal Bif. Chaos* (in press).
5. Zachilas L., Katsanikas M. and Patsis P.A. [2012] “The structure of phase space close to fixed points in a 4D symplectic map” *Int. Journal Bif. Chaos*, (in press).

- **Εργασίες σε πρακτικά διεθνών επιστημονικών συνεδρίων (Conference Proceedings):**

1. Katsanikas M., Patsis P.A. and Zachilas L. [2009] “The Structure of the Phase Space in Galactic Potentials of Three Degrees of Freedom”. In: *Chaos in Astronomy*, ed. by G. Contopoulos, P.A. Patsis, Springer, Berlin Heidelberg, 235-239. (**refereed contribution**)
2. Katsanikas M. and Patsis P.A. [2010] “The Orbital Behavior at the neighborhood of Stable Periodic Orbits in a 3D Galactic Potential” Proceedings of the 9th International Conference of the Hellenic Astronomical Society, San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, **424**, 380-381.
3. Katsanikas M. [2012] “ Simple Instability in a 3D autonomous Hamiltonian system of galactic type” in Proceedings of the Third La

Plata International school in Astronomy and Geophysics: *Chaos, Diffusion and non-Integrability in Hamiltonian systems- Applications to Astronomy*, Asociación Argentina de Astronomía, (in press). (refereed contribution)

- Ομιλίες σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια:

1. Katsanikas M. [16 July 2010] “The structure and evolution of confined tori near a Hamiltonian Hopf Bifurcation”, International Conference *Nonlinear Dynamics and Complexity: Theory, Methods and Applications*, dedicated to the 60th birthday of Tassos Bountis, Thessaloniki 12-16 July 2010, Greece.
2. Katsanikas M. [13 July 2011] “ The structure of the phase space in a 3D autonomous Hamiltonian system of galactic type”, Third La Plata International school in Astronomy and Geophysics: *Chaos, Diffusion and non-Integrability in Hamiltonian systems- Applications to Astronomy*, La Plata 11-15 July 2011, Argentina.

- Αναρτήσεις Εργασιών σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια (Posters):

1. Katsanikas M. and Patsis P.A. [2007] “The Structure of the Phase Space in Galactic Potentials of Three Degrees of Freedom” International conference “Chaos in Astronomy”, Athens, Greece, 17-20 September 2007.
2. Katsanikas M. and Patsis P.A. [2008] “The visualisation of the 4D surfaces of section in galactic potentials of three degrees of freedom” 21st Conference - Summer School in Nonlinear Science and Complexity, Athens, Greece, 21 July -2 August 2008.
3. Katsanikas M. and Patsis P.A. [2009] “The Orbital Behavior at the neighborhood of Stable Periodic Orbits in a 3D Galactic Potential” 9th International Conference of the Hellenic Astronomical Society, Athens, Greece, 20-24 September 2009.
4. Katsanikas M., Patsis P.A. and Pinotsis A.D. [2010] “ The phase space at the neighborhood of periodic orbits with high order multiplicity in 3D Hamiltonian systems” International Conference in Nonlinear Dynamics and Complexity, dedicated to the 60th birthday of Tassos Bountis Thessaloniki, Greece, 12-16 July 2010.

- Συμμετοχή σε διεθνή επιστημονικά Συνέδρια:

1. “Chaos in Astronomy”, Athens, Greece, 17-20 September 2007.
2. “21st Conference - Summer School in Nonlinear Science and Complexity”, Athens, Greece, 21 July -2 August 2008.
3. “9th Conference of the Hellenic Astronomical Society”, Athens, Greece, 20-24 September 2009.”
4. “International Conference in Nonlinear Dynamics and Complexity”, dedicated to the 60th birthday of Tassos Bountis, Thessaloniki, Thessaloniki, Greece, 12-16 July 2010.
5. Third La Plata International school in Astronomy and Geophysics: *Chaos, Diffusion and non-Integrability in Hamiltonian systems-Applications to Astronomy*, 11-15 July 2011.

- Συμμετοχή σε Ερευνητικά Προγράμματα:

1. Επιστημονικός συνεργάτης στο κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Ακαδημίας Αθηνών στα παρακάτω επιστημονικά προγράμματα:
 - ‘Διάχυση Ερευνητικών αποτελεσμάτων’ από την 1/12/2010 έως και την 31/5/2011.
 - ‘Μη γραμμικά φαινόμενα σε γαλαξιακούς δίσκους’ από την 1/1/2010 έως και την 15/6/2010.
 - ‘Ανάπτυξη Κωδίκων για τη μελέτη της συμπεριφοράς του αερίου σε γαλαξιακούς δίσκους’ από την 1/1/2006 έως και την 31/12/2006.
 - ‘Ποιοτική και ποσοτική Ανάλυση των Χαοτικών Περιοχών Τρισδιάστατων Γαλαξιακών Δυναμικών’ από την 1/1/2005 έως και την 31/12/2005.
 - ‘Μελέτη της Δομής του Φασικού Χώρου σε Γαλαξιακά Δυναμικά Τριών Βαθμών Ελευθερίας’ από την 1/1/2004 έως και την 31/12/2004.

- Κριτής σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά:

1. Astrophysics and Space Science (1 εργασία).