ΓΕΩΡΓΙΟΥ Σ. ΤΑΣΣΟΠΟΥΛΟΥ

Η σχέση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με την τελικά περιοδική ανθυφαίρεση στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Διδακτορική Διατριβή

Τμήμα Μαθηματικών

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα 2016

Στη Μαρία

(προτροπή μου και συμπαράσταση)

Πρόλογος

Οι διάλογοι του Πλάτωνα και τα Στοιχεία του Ευκλείδη αποτέλεσαν τις βάσεις της Φιλοσοφικής και της Μαθηματικής σκέψης αντιστοίχως.

Από τη Φιλοσοφία του Πλάτωνα η απόκλιση της σημερινής φιλοσοφικής σκέψης δεν είναι μεγάλη.

Σύμφωνα μάλιστα με το σύγχρονο φιλόσοφο Karl Jaspers: *«Βεβαίως είμαστε πολύ παραπέρα από τον Ιπποκράτη, τον Έλληνα ιατρό. Καθόλου, όμως, δεν μπορούμε να πούμε πως είμαστε παραπέρα από τον Πλάτωνα. Μόνο στο υλικό της επιστημονικής γνώσης που αυτός χρησιμοποίησε, είμαστε προχωρημένοι. Στον καθαυτό φιλοσοφικό στοχασμό ίσως ακόμη να μη τον φθάσαμε».*

Από τα στοιχεία του Ευκλείδη όμως μέχρι σήμερα η Μαθηματική Επιστήμη έχει κάνει τεράστια άλματα. Παρόλα αυτά ξανασκύβοντας πάνω στα Στοιχεία εκπλήσσεται κανείς από την αυστηρότητα και τη λεπτομέρεια στις σκέψεις και στις αποδείξεις, πέραν της αυστηρής αλληλουχίας και επιλογής, με άκρα οικονομία των θεωρημάτων.

Εκείνο που δεν φαίνεται εκ πρώτης όψεως είναι η βαθιά και υπόγεια σχέση ανάμεσα στους Διαλόγους και τα Στοιχεία. Δεν μπορεί να φανταστεί κάποιος ότι η αναζήτηση κοινού μέτρου (αν υπάρχει) δύο ευθυγράμμων τμημάτων a, b με $a > b$ μέσω της Ανθυφαίρεσης του a δια b, διαδικασία ανάλογη της αναζήτησης του Μ.Κ.Δ (μέγιστου κοινού διαιρέτη) δύο ακεραίων στα Στοιχεία του Ευκλείδη, ο γνωστός Ευκλείδειος Αλγόριθμος, θα μπορούσε να θεωρηθεί το εργαλείο ανάγνωσης και ερμηνείας των Διαλόγων του Πλάτωνα. Υπάρχει μάλιστα πλήρης αντιστοιχία στις περισσότερες περιπτώσεις, όπως τεκμηριώνει ο Ομότιμος Καθηγητής κος Στυλιανός Νεγρεπόντης.

Γνωρίζοντας ότι ο Ευκλείδης διακρίνεται για την άκρα οικονομία στην επιλογή των θεωρημάτων, προβληματιζόμαστε, όταν διαπιστώνουμε ότι οι προτάσεις (VI.28) (κατ’ έλλειψη κατασκευή) και (VI.29) (καθ’ υπερβολή κατασκευή) δεν εφαρμόζονται εκ πρώτης όψεως, παρά μόνο η δεύτερη στο πρόβλημα της Χρυσής τομής.

Η πρώτη αναφέρεται εν τέλει (με σημερινούς όρους) στην κατασκευή δύο τμημάτων με γνωστό άθροισμα και γινόμενο και η δεύτερη με γνωστή διαφορά και γινόμενο.

Μία προσεκτικότερη παρατήρηση όμως μας δείχνει ότι έχουν σχέση με την τελικά περιοδική ανθυφαίρεση και άρα με τους διαλόγους του Πλάτωνα.

Τελειώνοντας, θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω θερμά τον Ομότιμο Καθηγητή κο Στυλιανό Νεγρεπόντη για την ουσιαστική και καθοριστικής σημασίας καθοδήγησή του στο δύσκολο πράγματι αυτό εγχείρημα. Θεωρώ ότι η συνεργασία μας υπήρξε για μένα η πιο γόνιμη, πιο μεστή και πιο ώριμη θητεία μου στον Πανεπιστημιακό χώρο.

Ευχαριστώ, επίσης, τη σύζυγό του Καθηγήτρια κα Βάσω Φαρμάκη για την ευγένεια και την υπομονή με την οποία παρακολούθησε με ενδιαφέρον βήμα – βήμα αυτή μας την προσπάθεια, διαθέτοντας ουσιαστικά πάρα πολύ από τον πολύτιμο χρόνο της.

Για τα άλλα δύο μέλη της επιτροπής, τον Ομότιμο Καθηγητή κο Ευστάθιο Γιαννακούλια και τον Καθηγητή κο Θεοδόσιο Ζαχαριάδη αισθάνομαι βαθειά ευγνωμοσύνη για την προθυμία με την οποία συμμετείχαν στην προσπάθειά μου και για την πολύτιμη συμπαράστασή τους.

Στη συνέχεια θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τον εκλεκτό συνάδελφο και αγαπητό φίλο Παναγιώτη Μπρίνο που διέθεσε πάρα πολύ χρόνο και κόπο, για να φτιάξει τα δύσκολα πράγματι, λόγω των λεπτομερειών τους, σχήματα.

Ευχαριστώ συγχρόνως τον επίσης αγαπητό φίλο και εκλεκτό συνάδελφο Γιώργο Χανούμη, που βοήθησε αποφασιστικά στο να πάρει το κείμενο την τελική μορφή του, εντάσσοντας σ’ αυτό όσες διορθώσεις προέκυψαν καθ’ οδόν.

Οφείλω επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στη μαθήτριά μου Ελεάνα Γραββάνη, καθηγήτρια Αγγλικής φιλολογίας, για τη βοήθειά της στην απόδοση πάρα πολλών Αγγλικών κειμένων στα Ελληνικά.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Μαρία Νούλη, καθηγήτρια φιλολογίας, αρχικά διότι ασχολήθηκε με όσες απορίες μου εμφανίστηκαν και σε Αρχαιοελληνικά και σε Νεοελληνικά εδάφια, αλλά κυρίως για την αμέριστη συμπαράστασή της στον μακροχρόνιο αυτόν αγώνα καθώς και για την προτροπή της να προσπαθώ να ξεπερνώ κάθε δύσκολη καμπή του.

Κλείνω με ένα νεύμα στους αγαπημένους μας απόντες.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το φημισμένο χωρίο 147d3-148b4 του Πλατωνικού διαλόγου ***Θεαίτητος*** παρέχει πληροφορίες για την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης μετά τους Πυθαγόρειους, ειδικότερα για την πρόοδο της ανακάλυψης των νέων ασυμμέτρων μεγεθών, μετά τις δύο, κατά βάση, ασυμμετρίες που ανακάλυψαν οι Πυθαγόρειοι, την ασυμμετρία της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου και την ασυμμετρία του μέσου και άκρου λόγου.

Το πρώτο μέρος του χωρίου αναφέρεται στη **συμβολή του Θεόδωρου**. Σύμφωνα με αυτό ο Θεόδωρος, σ' ένα μάθημα γεωμετρίας προς τον Θεαίτητο και νεαρό Σωκράτη, απέδειξε την ασυμμετρία των α, β, όπου β είναι η ποδιαία ευθεία, Ν ένας μη τετράγωνος αριθμός από Ν=3 μέχρι Ν=17, και α ένα ευθύγραμμο τμήμα ώστε $α^2=Νβ^2$.
Έχουν αναπτυχθεί πολλές θεωρίες για την μέθοδο με την οποία ο Θεόδωρος απέδειξε αυτές τις ασυμμετρίες, μεταξύ αυτών από τους H. Zeuthen, O. Becker, Th. Hardy & E.M. Wright, B. L. van der Waerden, W. Knorr, M. Burnyeat, D. Fowler. Σύμφωνα με τους Hardy & Wright (*Introduction to the Theory of Numbers,* Clarendon Press, Oxford, 1938, σελ. 42) 'The question how Theodorus proved his theorems has exercised the ingenuity of every historian' Πρόσφατα ο Σ. Νεγρεπόντης έδωσε μια σειρά από νέα επιχειρήματα με τα οποία ισχυροποιείται η θέση ότι η μέθοδος του Θεόδωρου ήταν ανθυφαιρετική, χρησιμοποιούσε δηλαδή την Πρόταση Χ.2 των *Στοιχείων*, σύμφωνα με την οποία η απειρία της ανθυφαίρεσης α προς β συνεπάγεται την ασυμμετρία των α, β. Η παρουσίαση των παραπάνω θεωριών και επιχειρημάτων βασίζεται στο υπό ετοιμασία σύγγραμμα των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη, στην *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, και εμφανίζεται εδώ (Κεφάλαιο 1) με την άδεια τους.

Στο σημείο αυτό προκύπτει το ερώτημα ποια είναι ακριβώς η ανακατασκευή των αποδείξεων του Θεόδωρου με την ανθυφαιρετική μέθοδο. Ωρισμένοι από τους παλαιότερους μελετητές, όπως οι Zeuthen, Becker, van der Waerden, είχαν προτείνει ως μέθοδο την ανθυφαιρετική, αλλά με επιχειρήματα που απεδείχθησαν στη συνέχεια ανεπαρκή. Όμως και η ανακατασκευή που προτάθηκε από αυτούς ήταν ακατάλληλη, καθώς χρησιμοποιούσε θεωρία λόγων ασυμμέτρων μεγεθών (και το κριτήριο λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης), θεωρία την οποία δεν ήταν δυνατόν να είχε στη διάθεση του ο Θεόδωρος. Αργότερα ο Fowler είχε την ορθή ιδέα να χρησιμοποιήσει γνώμονες (Βιβλίο ΙΙ των *Στοιχείων*) ως βάση για την ανθυφαιρετική ανακατασκευή. Όμως και αυτή η ανακατασκευή παρουσιάζει σοβαρές αδυναμίες. Η κυριότερη αδυναμία είναι ότι στην ανακατασκευή Fowler συνυπάρχουν οι γνώμονες με τη θεωρία λόγων μεγεθών, ενώ στην πραγματικότητα οι γνώμονες είναι το εργαλείο που προϋπήρξε της θεωρίας λόγων και η Πυθαγόρεια αρχή της διατήρησης των γνωμόνων είναι ο πρόδρομος του κριτηρίου λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης.

Στην παρούσα ανακατασκευή οι Γνώμονες εφαρμόζονται με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους, συγκεκριμένα:
(α) ο υπολογισμός του ανθυφαιρετικού πηλίκου σε ισότητα του τύπου
Γνώμων G = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο R
(όπως οι Γνώμονες εμφανίζονται στη **παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή** στην Πρόταση VI.29) γίνεται με χρήση Γνώμονα, όπως στην Πρόταση XIII.3 των Στοιχείων,
(β) μια ισότητα του τύπου
Γνώμων G = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο R
(όπως οι Γνώμονες εμφανίζονται στην **παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή** στην Πρόταση VI.29) μεταμορφώνεται, στα πλαίσια της ανθυφαιρετικής αντικατάστασης στην περίπτωση (α), σε ισότητα του τύπου
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο R "= Γνώμων G"; (όπως οι Γνώμονες εμφανίζονται στην **παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή** στην Πρόταση VI.29) [κατά τις Προτάσεις II.4 και II.1; εμφανή γεωμετρικά βήματα αφαίρεσης ισοδύναμων από ισοδύναμα]·

(γ) η περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης του a δια b προκύπτει από τη **διατήρηση του σχήματος των Γνωμόνων**, τον προάγγελο του Κριτηρίου του Λόγου, ειδικά εάν η σχετική αναλογία, σύμφωνα με τον ορισμό του Θεαίτητου νοείται ως ισοδύναμη ανθυφαίρεση.
(δ) η ασυμμετρία του a προς το b, προκύπτει από το γεγονός ότι, λόγω του (γ), **δεν υπάρχει ελάχιστος Γνώμων, αλλά μία άπειρη αυστηρώς φθίνουσα ακολουθία Γνωμόνων**, ακριβώς όπως περιγράφεται από τον Πρόκλο, *εις Ευκλείδην* 60,9-12, καθώς η άπειρη φθίνουσα ακολουθία των Γνωμόνων συνεπάγεται το άπειρο της ανθυφαίρεσης του a προς το b (σύμφωνα με την Πρόταση Χ .2 *των Στοιχείων*)·

Συμπερασματικά, η ανακατασκευή των αποδείξεων του Θεόδωρου για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες οι οποίες αναφέρονται από τον Πλάτωνα στο έργο του Θεαίτητος 147d στην οποία προβήκαμε έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: -- κάνει χρήση των Γνωμόνων όπως χρησιμοποιούνται στην συμπλήρωση του τετραγώνου (Προτάσεις ΙΙ .6 και ΧΙΙΙ .3) για τον υπολογισμό του πηλίκου σε κάθε βήμα, και, για τη μετάβαση από το ένα ανθυφαιρετικό βήμα στο επόμενο, όπως χρησιμοποιούνται στην (σύμμετρη εκδοχή της) εφαρμογής των χωρίων (Πρόταση VI.29), Κάνει εξολοκλήρου χρήση της Πυθαγόρειας αρχής της διατήρησης των Γνωμόνων για την επίτευξη της περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης και με αυτόν τον τρόπο κατορθώνει όχι μόνο να αποφύγει τη χρήση ασύμμετρων λόγων (σε αντίθεση με τις κλασσικές ανθυφαιρετικές ανακατασκευές, συμπεριλαμβανομένης και του Fowler), αλλά και να προμηνύσει την ανθυφαιρετική θεωρία των λόγων του Θεαίτητου. -- παράγει ασυμμετρία, όχι επαληθεύοντας απλά την άπειρη ανθυφαίρεση κατά την Πρόταση Χ .2, αλλά παράγοντας μία άπειρη φθίνουσα ακολουθία Γνωμόνων όπως διατυπώνεται στο απόσπασμα του Πρόκλου.
Έτσι η ανακατασκευή των αποδείξεων του Θεόδωρου στην οποία προβαίνουμε, βασιζόμενη αποκλειστικά στους Γνώμονες, τα “αρχαϊκά”. Πυθαγόρεια γεωμετρικά εργαλεία, και χωρίς τις αναχρονιστικές μεταγενέστερες εξελίξεις, τους λόγους μεγεθών, εμφανίζεται ως η πλέον ικανοποιητική από όσες έχουν μέχρι σήμερα προταθεί (Κεφάλαιο 2).

Το δεύτερο μέρος του χωρίου αναφέρεται **στη συμβολή του Θεαίτητου** (και του νεαρού Σωκράτη). Από το χωρίο δεν καθίσταται άμεσα σαφές πρώτον ποια είναι η μαθηματική συμβολή του Θεαίτητου, ποια δηλαδή είναι η μαθηματική Πρόταση περί ασυμμετριών την οποία απέδειξε, και δεύτερον με ποια μέθοδο.
Οι κυριότεροι μελετητές συνδέουν την συμβολή του Θεαίτητου, όπως αυτή περιγράφεται στο χωρίο *Θεαίτητος* 147d3-148b4 με την Πρόταση Χ. 9 των *Στοιχείων*, η οποία αναφέρεται στις τετραγωνικές ασυμμετρίες, περιλαμβάνει την ακόλουθη διατύπωση.

Πρόταση Χ.9 *Στοιχείων*. Αν α, β είναι ευθύγραμμα τμήματα και Μ,Ν φυσικοί αριθμοί, ώστε ο λόγος Μ/Ν δεν είναι ίσος με τον λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, και ώστε $Μα^2=Νβ^2$, τότε α, β είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Η Πρόταση αυτή πράγματι αποδίδεται στον Θεαίτητο στο *Ανώνυμο Σχόλιο στα Στοιχεία* Χ.62. Οι σημαντικότεροι μελετητές (Heath, van der Waerden, Knorr) δέχονται ότι η Πρόταση Χ.9 αποτελεί την συμβολή του Θεαίτητου στην θεωρία των ασυμμέτρων. Η απόδειξη της Χ.9 στα *Στοιχεία* χρησιμοποιεί την αριθμητική Πρόταση VII.27 (αν μ, ν είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί, τότε $μ^2,ν^2$ είναι επίσης σχετικώς πρώτοι) και Προτάσεις του Βιβλίου VIII των *Στοιχείων*, οι οποίες οφείλονται στον Αρχύτα.
Οι Heath, Knorr προτείνουν μια μέθοδο για την Θεαιτήτεια απόδειξη της Χ.9 η οποία δεν διαφέρει στα βασικά της σημεία από την μέθοδο που περιγράφεται στα *Στοιχεία*. Ο van der Waerden προτείνει μια ιδιαίτερα απλή απόδειξη της Χ.9 με χρήση της VII.27, η οποία παρακάμπτει τις Προτάσεις Αρχύτα του Βιβλίου VIII για την ύπαρξη γεωμετρικού μέσου, την εξής: Έστω ότι α, β είναι σύμμετρα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι Μ, Ν είναι σχετικώς πρώτοι. Τότε α = μγ, β = νγ, με μ, ν σχετικώς πρώτους. Τότε $Μμ^2=Νν^2$. Τότε, από VII.19, $μ^2/ν^2=Ν/Μ$.

Από την VII.27, και την μοναδικότητα ενός λόγου με σχετικά πρώτους όρους, μ^2=Ν, ν^2=Μ, άτοπο, εφόσον Μ/Ν δεν είναι ίσος με τετράγωνο προς τετράγωνο.
Οι ανακατασκευές αυτές της Πρότασης Χ.9 βασίζονται στην προσέγγιση του Ευκλείδη και δεν προέρχονται από την ανάλυση του χωρίου *Θεαίτητος* 147d3-148b4
Σύμφωνα με το χωρίο αυτό ο Θεαίτητος και ο νεαρός Σωκράτης **συνέλαβαν εις Εν, περιέλαβαν εις Εν** τη απειρία των δυνάμεων με το να μεταβούν από την ασυμμετρία κάθε δύναμης ως προς την ποδιαία ευθεία στην συμμετρία του τετραγώνου της δύναμης ως προς το τετράγωνο της ποδιαίας.
Δεν είναι σαφές ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο του φιλοσοφικών όρων 'συλλαβείν', περιλαβείν' με τους οποίους ο Πλάτων περιγράφει τα μαθηματικά επιτεύγματα του Θεαίτητου. Όμως η φράση κλειδί ('πειρώ μιμούμενος', 148d4) με την οποία ο Πλάτων συνδέει την μαθηματική Πρόταση του Θεαίτητου, όπως αυτή περιγράφεται στον διάλογο *Θεαίτητος*, με την φιλοσοφική μέθοδο της **Διαίρεσης και Συναγωγής** στο δικό του σύστημα, όπως αυτή περιγράφεται στους επόμενους δύο διαλόγους της τριλογίας *Σοφιστής* και *Πολιτικός*, αποτελούν το αρχικό σημείο για την κατανόηση των επιτευγμάτων του Θεαίτητου.
Ο Σ. Νεγρεπόντης έχει παρουσιάσει επιχειρήματα σύμφωνα με τα οποία
(α) Η μέθοδος της Διαίρεσης και Συναγωγής στον διάλογο *Σοφιστής* (για την απόκτηση γνώσης-επιστήμης του Όντος 'Ασπαλιευτής' και του Όντος 'Σοφιστής') είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της **περιοδικής ανθυφαίρεσης** (Κεφάλαιο 4).
(β) Η μέθοδος της Διαίρεσης και Συναγωγής στον διάλογο *Πολιτικός* (για την απόκτηση γνώσης-επιστήμης του Όντος 'Πολιτικός') είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της **παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης** ενός ζεύγους δυνάμει μόνον συμμέτρων ευθειών (Κεφάλαιο 5).
Από αυτή την ανάλυση προκύπτει ότι το μαθηματικό επίτευγμα του Θεαίτητου είναι η απόδειξη της ακόλουθης

Πρόταση (Θεαίτητος). Αν α, β είναι δυνάμει μόνον σύμμετρες ευθείες, δηλαδή αν α, β είναι ευθύγραμμα τμήματα και Μ,Ν φυσικοί αριθμοί, ώστε ο λόγος Μ/Ν δεν είναι ίσος με τον λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, και ώστε $Μ\alpha^2=Ν\beta^2$, τότε η ανθυφαίρεση των α, β είναι παλινδρομικά περιοδική, και άρα α, β είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Βεβαίως η Πρόταση αυτή είναι πολύ ισχυρότερη της Πρότασης Χ.9 και η απόδειξη της ασυμμετρίας πραγματοποιείται με (παλινδρομικά περιοδική) ανθυφαίρεση, και όχι με τις πολύ ασθενέστερες αριθμητικές μεθόδους βασισμένες στην Πρόταση VII.27.

Τέλος ο Σ. Νεγρεπόντης έδειξε ότι η Πρόταση αυτή μπορεί ν' αποδειχθεί με την χρήση των βασικών εννοιών (**ευθεία εκ δύο ονομάτων, αποτομή**) και Προτάσεων (ιδίως των Προτάσεων Χ.112-114 για την **συζυγία** των ευθειών εκ δύο ονομάτων και αποτομής) του Βιβλίου Χ των Στοιχείων, το οποίο, όπως είναι γνωστό οφείλεται στον Θεαίτητο (Κεφάλαια 6,7).

Στη συνέχεια (Κεφάλαιο 8) θα αποδείξουμε ότι τα εργαλεία του βιβλίου Χ. των *Στοιχείων* (αποτομή, εκ δύο ονομάτων και η μεταξύ τους συζυγία) εφαρμόζονται προκειμένου να φέρουν εις πέρας ένα ενδιαφέροντα κύκλο ιδεών που έχει εισαχθεί από τους Christoffer Zeeman και David Fowler.

Ορισμός. Δύο ευθύγραμμα τμήματα a και b είναι σε **Γενικευμένο Μέσο και Άκρο Λόγο (ΓΜΑΛ)**, εάν και μόνο υπάρχουν φυσικοί αριθμοί A, B, C τέτοιοι ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$. Παρατηρούμε βέβαια ότι αν A = B = C =1, τότε τα a και b βρίσκονται σε **Μέσο και Άκρο Λόγο (ΜΑΛ).**

Ένας ορισμός αντίστοιχος με αυτόν έχει δοθεί από τον Fowler στο Appendix 1. Extensions of proposition II του [Fo1], και αποδίδεται εκεί στον Christoffer Zeeman.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν α, β ικανοποιούν τη συνθήκη ΓΜΑΛ τότε τα α, β ικανοποιούν μια ειδικής μορφής παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή.
Οι Fowler, Zeeman εισάγουν την συνθήκη ΓΜΑΛ προκειμένου να εξετάσουν την σύνδεση που έχει η συνθήκη με την καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση, και συγκεκριμένα προκειμένου να σκιαγραφήσουν την απόδειξη της ακόλουθης συνεπαγωγής.

Πρόταση (Fowler, Zeeman). Εάν δύο ευθύγραμμα τμήματα a, b, έχουν καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση, τότε το ζεύγος a, b ικανοποιεί την συνθήκη ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$ για κάποιους αριθμούς A, B, C, με $B^2 + 4AC$ μη τετράγωνο αριθμό και $A + B > C$.

Μια απόδειξη σκιαγραφείται από τον Fowler στο 'Appendix 1. Extensions of proposition II', *Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio*, Archive for History of Exact Sciences 22 (1980), 5-36 (χωρίς να δίνονται λεπτομέρειες) και αποδίδεται εκεί στον Christoffer Zeeman. O Fowler αναφέρει την απόδειξη του Zeeman και στο *The Mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1999, σελίδα 92. O Fowler δεν δίνει μια πλήρη απόδειξη της Πρότασης.

Στο κεφάλαιο 8 αρχικά προτείνουμε μια ανακατασκευή της Πρότασης, αποκλειστικά με αρχαία υλικά,: (α) το κριτήριο του λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης, (β) τη συστηματική χρήση της σύνθεσης των λόγων, και (γ) τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, και στη συνέχεια αποδεικνύουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή με τα εργαλεία του Βιβλίου Χ. των *Στοιχείων*.

Βασική Πρόταση. Έστω a και b δύο ευθύγραμμα τμήματα, $a > b$, τα οποία ικανοποιούν την συνθήκη ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$, με $B^2 + 4AC$ μη τετράγωνο αριθμό, και $A + B > C$. Τότε η ανθυφαίρεση a προς b είναι καθαρά περιοδική.

Από την Βασική Πρόταση προκύπτει χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία η ακόλουθη γενική Πρόταση με την οποία η παραβολή χωρίων είτε κατ' έλειψιν είτε καθ' υπερβολήν συνεπάγεται την τελικά περιοδική ανθυφαίρεση.

Πρόταση. Έστω a,b δύο ευθύγραμμα τμήματα, με $α > β$, και υποθέτουμε ότι
(1) είτε υπάρχουν αριθμοί A,B, C ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$, με $B^2 + 4AC$ μη τετράγωνο αριθμό (**παραβολή χωρίων καθ' υπερβολήν**),
(2) είτε υπάρχουν αριθμοί A,C ώστε $Aa^2 = Cb^2$, με AC μη τετράγωνο αριθμό,
(3) είτε υπάρχουν αριθμοί A,B, C ώστε $Aa^2 + Cb^2 = Bab$, με $B^2 -4AC$ μη τετράγωνο αριθμό (**παραβολή χωρίων κατ' έλλειψιν**).
Τότε η **ανθυφαίρεση** a προς b είναι **τελικά περιοδική**.

Κεφάλαιο 1. Οι ασυμμετρίες του Θεόδωρου

Στο πρώτο ιδιαίτερα σύντομο μέρος του χωρίου, **[1]147d3-6,** το οποίο παραθέτουμε παρακάτω, ο Πλάτων αναφέρεται στις μαθηματικές ανακαλύψεις του Θεόδωρου. Σύμφωνα με το χωρίο αυτό, ο Θεόδωρος παρέδιδε ένα μάθημα γεωμετρίας προς τον νεαρώτατο Θεαίτητο και τον φίλο του Νεαρό Σωκράτη, στο οποίο παρουσίαζε αποδείξεις ασυμμετρίας δύο ευθυγράμμων τμημάτων α, β, όπου β το ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού, Ν ένας μη τετράγωνος αριθμός μεταξύ του 3 και του 17, και α το ευθύγραμμο τμήμα (‘δύναμη’), το οποίο ικανοποιεί την τετραγωνική ισότητα $α^2=Nβ^2$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα α που ικανοποιεί την ισότητα $α^2=Nβ^2$, για κάποιο μη τετράγωνο αριθμό Ν, όπου β το ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού, ονομάζεται στο παρακάτω χωρίο **‘δύναμις’, ώστε** η τρίπους, πεντέπους, ἑπτακαιδεκάπους δύναμις είναι το ευθύγραμμο τμήμα α που ικανοποιεί την ισότητα $α^2=Nβ^2$, για Ν=3, Ν=5, Ν=17 αντίστοιχα.

[1] *Θεαίτητος* 147d3-6[1]

ΘΕΑΙ. **Περὶ δυνάμεὼν**
τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε,
τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος
[ἀποφαίνων] ὅτι
μήκει οὐ σύμμετροι
τῇ ποδιαίᾳ,
καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος
μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος·
ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.

Το βασικό ερώτημα που έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές[2] είναι
με ποια μέθοδο ο Θεόδωρος απέδειξε τις ασυμμετρίες αυτές των δυνάμεων ως προς το ευθύγραμο τμήμα μήκους ενός ποδιού.

---

[1]ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ.
Ο Θεόδωρος εδώ έγραφε διαγράμματα

Theodorus here was drawing diagrams

για να μας δείξει κάτι για τις δυνάμεις,

to show us something about powers

δηλαδή ότι οι δυνάμεις
των τριών ποδιών και των πέντε ποδιών
δεν είναι σύμμετρες

namely that
a square of three square feet and one of five square feet
aren't commensurable,

με την ευθεία ενός ποδιού (ποδιαία),
και ούτω καθεξής,

in respect of length of side, with a square of one square foot;
and so on,

επιλέγοντας κάθε μία δύναμη χωριστά,
μέχρι την δεκάτη εβδόμη δύναμη.

selecting each case individually,
up to seventeen square feet.

Και σε αυτήν κάπως σταμάτησε.

At that point he somehow got tied up.
[[translated Burnyeat ?]]

[2] Κατά τους Hardy & Wright, ??? ‘The question how Theodorus proved his theorems has exercised theingenuity of every historian.’

1.1. Οι Προτάσεις των προηγουμένων μελετητών

Θα αναφερθούμε τώρα στις προτάσεις των μελετητών σχετικά με την μέθοδο του Θεόδωρου στην απόδειξη αυτών των ασυμμετριών. Θα παρουσιάσουμε τις σημαντικότερες προτάσεις με χρονολογική σειρά. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι όλες οι μέχρι σήμερα προτάσεις έχουν ένα σοβαρό μειονέκτημα: βασίζονται καθ' ολοκληρίαν στο προαναφερόμενο χωρίο [1] και δεν λαμβάνουν καθόλου υπ' όψη το δεύτερο μέρος του χωρίου ([2] 147d7-e3), το οποίο είναι κατά βάση αφιερωμένο στις μαθηματικές ανακαλύψεις του Θεαίτητου, που ακολούθησαν το μάθημα του Θεόδωρου. Αργότερα (9.2) όμως θα δούμε ότι η ανάλυση του χωρίου [2] έχει εξαιρετικά σοβαρές επιπτώσεις στο θέμα της μεθόδου που χρησιμοποίησε ο Θεόδωρος.

Σύμφωνα με το χωρίο [1], ο Θεόδωρος απεδείκνυε την ασυμμετρία της 3ποδος, 5ποδος,…,15ποδος, 17ποδος δυνάμεως **' κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρoύμενος'**

9.1.1. [1910, H. G. Zeuthen] (Ανθυφαιρετική μέθοδος)

Ο **H. G. Zeuthen**[3] **το** 1910 διετύπωσε την εξαιρετικά πρωτότυπη άποψη, ότι, εφόσον ο Θεόδωρος προχωρούσε στις αποδείξεις ασυμμετρίας των δυνάμεων (ευθύγραμμο τμήμα α ώστε $α^2$=Ν$β^2$, Ν μη τετράγωνος αριθμός) ως προς το ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού β **κατά περίπτωση** ('κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρoύμενος'), η μέθοδος του Θεόδωρου δεν θα μπορούσε να είναι κάποια παραλλαγή της **παραδοσιακής** απόδειξης[4] της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου (Ν=2), διότι, πολύ πριν φθάσει στην απόδειξη ασυμμετρίας για τη δύναμη που αντιστοιχεί στο Ν=17, ο Θεόδωρος θα αντιλαμβάνονταν ότι η παραδοσιακή απόδειξη θα μπορούσε να τροποποιηθεί εύκολα[5] σε μια γενική απόδειξη ασυμμετρίας για συλλήβδην όλους τους μη τετράγωνους αριθμούς Ν, δηλαδή για όλες τις δυνάμεις..

Κατά τον Zeuthen[6] η μέθοδος του Θεόδωρου θα πρέπει να ήταν **ανθυφαιρετική**, να βασίζονταν δηλαδή στην Πρόταση Χ.2 των *Στοιχείων*, σύμφωνα με την οποία αν η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, τότε τα α, β είναι ασύμμετρα.[7] Το πώς ακριβώς θα μπορούσε να αποδείξει ο Θεόδωρος ότι η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, θα μας απασχολήσει αργότερα.[8]

---

[3] H. G. Zeuthen, *Sur la constitution des livres arithmétioues des Elèments d'Euclide et leur rapport á la question de l'irrationalitè,* Oversigt over det K. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger for 1910 (1910–1911), 422–426.

[4] Πρβλ. σχολια στο Κεφαλαιο 6, ???.΄

[5] Χρησιμοποιόντας την **Πρόταση VII.30** των ***Στοιχείων***:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα,

τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις **πρῶτος** ἀριθμός,

καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

[6] **H. G. Zeuthen,**

"*Sur la constitution des livres arithmetiques des E1ements d 'Euclide et leur rapport a la question de l'irrationalite,*" Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Fordhandlinger, 1910, 395-435;

"Sur les connaissances geometriques des grecs avant la reforme platonicienne de la geometrie," ibid., 1913, 431-474;

"Sur l'origine historique de la connaissance des quantit's irrationelles," ibid. 1915, 333-362.

[7] Τα μαθηματικά της "ανθυφαίρεσης", αναπτύχθηκαν από τους Πυθαγορείους, και παρουσιάστηκαν, αν και με ατελή τρόπο, στα Βιβλία VII και Χ των *Στοιχείων* του Ευκλείδη[7].

Ορισμός της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης (*Στοιχεία* Ευκλείδη Χ.2)

Έστω *a*, *b* δύο μεγέθη (ευθύγραμμα τμήματα, επιφάνειες, στερεά), με *a*>*b*·

η ανθυφαίρεση του *a* προς το *b*

είναι η ακόλουθη, άπειρη ή πεπερασμένη, ακολουθία των αμοιβαίων διαιρέσεων:

$\mathbf{a} = \mathbf{I_0 b} + \mathbf{e_1}$, **με** $\mathbf{b} > \mathbf{e_1}$,

$\mathbf{b} = \mathbf{I_1 e_1} + \mathbf{e_2}$, **με** $\mathbf{e_1} > \mathbf{e_2}$,

…

Η πρόταση αυτή του Zeuthen υποστηρίχθηκε και από άλλους σημαντικούς ερευνητές, μεταξύ των οποίων και οι **O. Toeplitz**[9], **O. Becker** (1932)[10], **B. L. van der Waerden** (1954)[11] (αργότερα και ο D. Fowler[12]).

Από μερικούς ερευνητές, όπως για παράδειγμα. τον Knorr (1975), έχει τεθεί το ερώτημα αν θα μπορούσε ο Θεόδωρος να κάνει χρήση της Πρότασης Χ.2, δεδομένου ότι η απόδειξη της στα *Στοιχεία* χρησιμοποιεί την μεταγενέστερη αρχή του Ευδόξου. Το ανάλογο ερώτημα μας απασχόλησε σχετικά με τους Πυθαγόρειους, και το συμπέρασμα ήταν ότι δεν υπήρχε κάποιο εμπόδιο της χρήσης της Πρότασης Χ.2 από τους Πυθαγόρειους.[13] Επομένως, κατά μείζονα λόγο, η Πρόταση Χ.2 θα μπορούσε χωρίς πρόβλημα να είχε χρησιμοποιηθεί και από τον Θεόδωρο.

Ένα πρόβλημα σχετικά με τις ανθυφαιρετικές ανακατασκευές που έχουν προταθεί για την μέθοδο του Θεόδωρου είναι η χρήση σε αυτές τις ανακατασκευές λόγων μεγεθών, προϋποθέτοντας μια αυστηρή θεωρία λόγων μεγεθών, κάτι που δεν θα μπορούσε να υπάρχει τη χρονική περίοδο που ο Θεόδωρος πραγματοποίησε αυτές τις αποδείξεις. Να συμπληρωθεί…

Οι **G. H. Hardy και E.M. Wright**[14] θεώρησαν ότι ενδεχομένως ο Θεόδωρος δεν είχε στην διάθεσή του την **Πρόταση VII.30** των *Στοιχείων*. Στην περίπτωση αυτή δεν θα ήταν δυνατόν η παραδοσιακή απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου (Ν=2), να τροποποιηθεί σε μια γενική απόδειξη ασυμμετρίας για συλλήβδην όλους τους μη τετράγωνους αριθμούς Ν, αντίθετα ενδεχομένως ο Θεόδωρος θα ήταν υποχρεωμένος να προχωρήσει κατά περίπτωση, σύμφωνα με την περιγραφή στον *Θεαίτητο* (‘κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος΄), χωρίς την χρήση γενικών ιδιοτήτων των πρώτων αριθμών.
Π.χ για την περίπτωση Ν=5, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος
Ισχυρισμός. Αν ο 5 διαιρεί τον $μ^2$, τότε ο 5 διαιρεί τον μ
Απόδειξη. Κάθε φυσικός αριθμός μ έχει μία από τις παρακάτω μορφές
5κ, 5κ + 1, 5κ + 2, 5κ + 3,5κ + 4.

$\mathbf{e_{n-1} = I_n e_n + e_{n+1}}$, **με** $\mathbf{e_n > e_{n+1}}$,
$\mathbf{e_n = I_{n+1} e_{n+1} + e_{n+2}}$, **με** $\mathbf{e_{n+1} > e_{n+2}}$,
…

Συμβολίζουμε με
Ανθ(a, b) = $\mathbf{[\, I_0, I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots]}$
την ακολουθία των διαδοχικών πηλίκων της ανθυφαίρεσης του *a* προς το *b*.
Η σύγχρονη αντίστοιχη της αρχαίας ανθυφαίρεσης μεγεθών είναι το συνεχές κλάσμα ενός πραγματικού αριθμού. [7]

Ορισμοί Χ.1, 2 των *Στοιχείων*.
Έστω *a, b* δύο μεγέθη, με *a > b* λέμε ότι
τα *a, b* είναι σύμμετρα
αν υπάρχει ένα μέγεθος *c* και αριθμοί *n, m*, τέτοιοι ώστε *a = mc, b = nc*,
διαφορετικά
τα *a, b* είναι ασύμμετρα.

Η θεμελιώδης διχοτομία για την ανθυφαίρεση περιέχεται στην ακόλουθη
Πρόταση Χ.2 *των Στοιχείων.*
Έστω *a, b* δύο μεγέθη, με *a > b*.
Τα *a, b* είναι ασύμμετρα αν και μόνον αν η ανθυφαίρεση του *a* προς το *b* είναι άπειρη.
8

9 In a seminar contribution, published in Kantstudien, 33 28–29
10 Eudoxos-Studien I, *Quellen und Studien* B II (1932), 311ft.
11 *Science Awakening* (1954), p. 144–146; "Die Arithmetik," pp. 249-254; contra, von Fritz, "Theodoros," pp. 1817-1825; the comprehensive review of Zeuthen's solution and its successors in Heller, "Ein Beitrag."
12
13 Βλ.Κεφάλαιο 5. ???.
14 **G. H. Hardy και E.M. Wright**, ***An Introduction to the Theory of Numbers***, Clarendon Press, Oxford, 1938, p.42-46

Αν μ=5κ+1, τότε $μ^2=(5κ+1)^2=25κ^2+10κ+1$ δεν είναι διαιρετός δια του 5.
Αν μ=5κ+2, τότε $μ^2=(5κ+2)^2=25κ^2+20κ+4$ δεν είναι διαιρετός δια του 5.
Αν μ=5κ+3, τότε $μ^2=(5κ+3)^2=25κ^2+30κ+5+4$ δεν είναι διαιρετός δια του 5.
Αν μ=5κ+4, τότε $μ2=(5κ+4)^2=25κ^2+40κ+15+1$ δεν είναι διαιρετός δια του 5.
Άρα μ=5κ, κα ο μ είναι διαιρετός δια του 5.
Με τον *ισχυρισμό* αυτό, η παραδοσιακή απόδειξη ασυμμετρίας για Ν=2 μπορεί να εφαρμοσθεί ανάλογα χωρίς δυσκολία στην απόδειξη ασυμμετρίας για Ν=5.

Επομένως, αποδυναμώνεται το επιχείρημα του Zeuthen υπέρ της ανθυφαιρετικής μεθόδου απόδειξης ασυμμετρίας του Θεόδωρου, διότι χωρίς την Πρόταση VII.30 των *Στοιχείων* και η γενίκευση της παραδοσιακής απόδειξης ασυμμετρίας γίνεται κατά περίπτωση.

Το συμπέρασμα είναι ότι η πρόταση 'καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος' δεν είναι δυνατόν να αποφασίσει για την μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Θεόδωρος στις αποδείξεις του.

1.1.2. [1957, R. Hackforth] ('**πως ἐνέσχετο**')

Το 1957 ο **R. Hackforth**[15] εστίασε την προσοχή του στην πρόταση
'ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο',
και παρατήρησε ότι ενώ η συνήθης μετάφραση του 'ἐνέσχετο' (Cornford[16], Dies[17] and Fowler[18]) είναι 'stopped'[19] (σταμάτησε), και **το λεξικό LSJ** [20]το αποδίδει ομοίως ως
'came to a standstill', εν τούτοις η ορθή απόδοση, όπως προκύπτει από μια σύγκριση με άλλες χρήσεις της λέξης, θα έπρεπε να είναι 'was entangled in difficulties'[21] (σταμάτησε γιατί συνάντησε δυσκολίες).

Σημειώνουμε πάντως ότι η ερμηνεία του Hackforth **δεν** τεκμηριώνεται από τις υπάρχουσες αρχαίες πηγές.

Ο *Ανώνυμος Σχολιαστής εις Πλάτωνος Θεαίτητον* (ΑΣΕΠΘ) 34,32-35 και 35,13-21 αντικαθιστά τρείς φορές την λέξη **'ἐνέσχετο΄**, με την λέξη **΄έστη΄ ή 'στήναι',** η οποία

---

[15] R. **Hackforth, *Notes on Plato's Theaetetus***, Mnemosyne, Fourth Series, Vol. 10, Fasc. 2 (1957), 128-140.
[16] 'there, for some reason, he stopped'
[17] 'il s'ètait, je ne sais pourquoi, arrêtè lá'
[18] 'at that he stopped'
[19] Ακόμη 'There he stopped' (B. Jowett), 'here he somehow came to a pause' (B. J. Kennedy).
[20] **A Greek-English Lexicon**, **H. G. Liddell and R. Scott**, eds., 9th ed. by **H. Stuart Jones** (Oxford, 1940), βλ. ἐνέχω II , 565, ιδίως II.2 και II.4.
[21] Το σημείωμα του **Hackforth** είναι το ακόλουθο:
'147 D 6.
Cornford, Dies and Fowler all take ἐνέσχετο to mean stopped.
LSJ s.v. II 4 quote this passage alone for the meaning
'came to a standstill'.
But surely it is exactly like Hdt. I 190, quoted under II 2,
Κῦρος δὲ ἀπορίῃσι ἐνείχετο
'was entangled in difficulties'.
It is as easy to say 'entangled by X' as to say 'entangled by the difficulty of X'.
The editors confuse ἐνέχεσθαι with ἐπέχειν.
Cf. the similar use of the simple verb ἔχεσθαι at 190 C[21] ἐν τοιούτῳ
ἐχόμεθα, ἐν ᾧ κτλ'
Η ερμηνεία Hackforth υιοθετήθηκε από τους
McDowell
S. Benardette, *The Being and the Beautiful. Plato's Theaetetus, Sophist, and Statesman. Translated and with Commentary*, The University of Chicago Press, Chicago and London, **1984**. ('where for some reason or other he got stuck' (p.I.9)).

σημαίνει απλώς **'σταμάτησε'**, χωρίς την παραμικρή ένδειξη ότι σταμάτησε γιατί συνάντησε δυσκολία. Παραθέτουμε τα αντιστοιχα χωρία.

34,32-35 **ζητοῦσιν διὰ τί** **μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος [17] προελθὼν** **ἔστη. [34,35]**

γ

35,13-21 ῎Ε[νιοι δ]ὴ ἀρέσκοντ[αι τῶ]ι ἐξαριθμούμ[ενο]ν **τὰς δυνάμεις** ὡς [ἔ]τυχεν **στῆναί π[ως**,[**35,16**] ἀ]λλὰ κεινεῖ λεγόμ[ε]νον τὸ **Πως ἐνέσχετο**, ὥστε αἰτίαν [ἐπ]ιζητεῖν τοῦ **[σ]τῆ[ναι]**. [**35,21**]

Μια παρόμοια στάση τηρείται και από τον Ιάμβλιχο, ο οποίος σε σχετικό του σχόλιο αντικαθιστά το 'ενέσχετο' με το απολύτως ουδέτερο 'παύεσθαι':

Ιάμβλιχος, *Τα Θεολογούμενα της Αριθμητικής*, 11,13-16

'διὰ τοῦτο φαίνεται καὶ Πλάτων ἐν τῷ Θεαιτήτῳ **μέχρι αὐτοῦ** προελθὼν **παύεσθαί πως** **ἐν τῇ ἑπτακαιδεκάποδι** πρὸς ἔμφασιν τοῦ κατὰ **τὸν ἑπτακαίδεκα** ἰδιώματος καὶ ἰσότητός τινος μεθεκτοῦ.'

Ώστε και στις δύο πηγές δεν υπάρχει η ένδειξη ότι
ο Θεόδωρος συνάντησε κάποια δυσκολία στην 17ποδη δύναμη.

1.1.3. [1969, M. Brown] (Ανθυφαιρετική μέθοδος)

Η ερμηνεία της λέξης 'ενέσχετο' ως 'was entangled in difficulties' (σταμάτησε γιατί συνάντησε δυσκολίες) του Hackforth χρησιμοποιήθηκε από τον **M. S. Brown[22],** ως επιχείρημα **υπέρ της ανθυφαιρετικής ερμηνείας** του Zeuthen, με το σκεπτικό ότι ο Θεόδωρος, αφού πραγματοποίησε την απόδειξη ασυμμετρίας της δύναμης (ευθύγραμμο τμήμα α ώστε $\alpha^2=N\beta^2$, N μη τετράγωνος αριθμός) ως προς το ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού β για N=17 και αφού ανήγαγε την ασυμμετρία της περίπτωσης για N=18 στην γνωστή Πυθαγόρεια ασυμμετρία για N=2, σταμάτησε, διότι συνάντησε κάποια δυσκολία στην όντως πολύπλοκη, εν σχέσει με όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, απόδειξη ασυμμετρίας για N=19. Παραθέτουμε το σχετικό απόσπασμα:

'Toeplitz and van der Waerden, on the other hand, have a full explanation which is strengthened by Hackforth's independently arrived at reading of **ἐνέσχετο**, and which at the same time makes excellent sense mathematically. On their view, which agrees with that of Becket, it is a special fact about the process of *antanairesis*[23] which determines the stopping point. For it is a fact that after 17 the proof by

[22] ***Theaetetus: Knowledge as Continued Learning***, Journal of the History of Philosophy 7 (1969) 359-379.,

[23] Όπως είδαμε και παραπάνω (π.χ, στο Κεφάλαιο 1, ανταναίρεσις-ανθυφαίρεσις

the method of *antanairesis* becomes distinctly more complicated than it had been for every case up to 17 inclusive. Van der Waerden shows (p. 145) that for cases from 3 to 17 no more than 3 elementary proportions are needed to carry through the irrationality proofs, whereas following 17, 6 are needed. But there is good reason for thinking, as Becker has shown, that *antanairesis* is a conception which Theaetetus laid at the foundations of his work on problems of irrationality in general. It is altogether natural to think, with Toeplitz and van der Waerden, that the less general work of his teacher was based on the same conception, which, however, was applied only to particular cases taken separately and which "got into difficulties"--the very difficulties which van der Waerden explains--after the case of 17. The foregoing reasons, then, weigh in favor of rejecting Wasserstein's thesis[24], and of adhering to at least the general outlines of the Continental view which he challenged (σ.367)'.

1.1.4. [1975, W. R. Knorr] (μη ανθυφαιρετική μέθοδος)

Ο Knorr[25] το 1975 ανέπτυξε μία πρόταση για την μέθοδο του Θεόδωρου στην απόδειξη των ασυμμετριών, βασιζόμενος σε μια νέα ανάγνωση της πρότασης
'**μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος·ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο**',
η οποία, σε αντίθεση με εκείνη του Brown, οδηγεί σε μη ανθυφαιρετική μέθοδο απόδειξης. Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την πρόταση του Knorr παρακάτω.

1.1.4 .1. Το βασικό επιχείρημα του Knorr ('ἐν δὲ ταύτῃ')

Ο Knorr επιχειρηματολόγησε ότι, από την επίμαχη πρόταση του Πλατωνικού κειμένου
'**μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος·ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο**'
προκύπτει ότι ο Θεόδωρος έφθασε μεν στην 17ποδη δύναμη, αλλά ακριβώς σε αυτή την περίπτωση συνάντησε δυσκολία και σταμάτησε, διότι δεν ήταν σε θέση να συμπληρώσει την απόδειξη ασυμμετρίας της 17ης δύναμης.
Επομένως, ο Knorr αποδέχεται την ερμηνεία της λέξης 'ενέσχετο' ως 'was entangled in difficulties' (σταμάτησε γιατί συνάντησε δυσκολίες) του Hackforth και θεωρεί ότι η έκφραση 'εν δε ταύτη' αναφέρεται στην 17ποδη δύναμη., ερμηνεύοντας το Πλατωνικό κείμενο ως 'ιn this (i.e., the power of seventeen feet), for some reason, he encountered difficulty.'
Τα σχετικά επιχειρήματα του Knorr αναφέρονται στο σύγγραμμά του *The Evolution of the Euclidean Elements* (Dordrecht-Boston, 1975), pp. 62 – 97. Παραθέτουμε το σχετικό απόσπασμα:

'Hackforth's argument forces us to take the verb not merely as 'come to a standstill', but as 'come to a standstill because of difficulty'. Now, the writers under discussion here really require this: '*after* this one (17), for some reason, he encountered difficulty.' For their interpretation finds 17 a particularly easy case and runs into difficulty only at 19. But to obtain this they must translate ἐν δὲ ταύτῃ not '*in* this one', but rather '*after* this one', which is inadmissible. If their view were correct, Plato should have specified 19 as the troublesome case, not 17. He could have done this easily, either by writing: 'he chose each power in its turn up to *19*' instead of 'up to 17;' or by writing: 'he encountered difficulty in the 19-foot power' instead of 'in *this* power (i.e., the 17-foot power).' Thus, the strict reading must be: 'In this (i.e., the power of seventeen feet), for some reason, he encountered difficulty.' The important difference we see between this new reading and the usual version of it is that in the new one the stopping occurs *within* the study of the power of 17; that is, Theodorus did not establish his theorem for that case.'(σ. 82-83).

[24] **A. Wasserstein**, ***Theaetetus and the history of the theory of numbers***, *Classical Quarterly* 8 (1958), 165-179, κατά της ερμηνείας Zeuthen και υπέρ της παραδοσιακής αποδειξης
[25] **W. R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements***, Dordrecht-Boston, 1975.

1.1.4.2. Η ερμηνεία Knorr του 'εν δε ταύτη΄ δεν τεκμηριώνεται από τις υπάρχουσες αρχαίες πηγές.

(α) Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τόν
Ανώνυμο Σχολιαστή Εις Πλάτωνος Θεαίτητον (ΑΣΕΠΘ) **34,15-32,**
ο Θεόδωρος, όπως για την τρίποδα και πεντέποδα δύναμιν, έτσι παρουσιάζοντας και τις άλλες δυνάμεις, απέδεικνυε ('ἐδείκνυεν') την ασυμμετρία της εξάποδος, επτάποδος, και των υπόλοίπων που ακολουθούν μέχρι της 17πόδος δυνάμεως ('μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος'), **εξαιρουμένων ('ὑπεξῃρημένων')** της 9ποδος και της 16ποδος.

Έτσι ο σχολιαστής ρητά **εξαιρεί** την 16ποδα δύναμη **και ΔΕΝ εξαιρεί** την 17ποδα δύναμη. Είναι σαφές λοιπόν, ότι στις δυνάμεις των οποίων την ασυμμετρία απέδειξε ο Θεόδωρος, ο σχολιαστής περιλαμβάνει την 17ποδα δύναμη.

34,15-32 Ὡς περὶ **τὴν τρίποδα [3] καὶ πεντάποδα[5] δύναμιν**, οὕτως καὶ **τὰς ἄλλας δυνάμεις τὰς ὁμοίας** ἐκτιθέμενος **ἐδείκνυεν,** ὅτι τοῖς μὲν ἐπιπέδοις εἰσὶν **σύμμετροι,** **οὐχὶ** δὲ καὶ κατὰ τὰς πλευράς, οἷον **τὴν ἑξάποδα [6] , ἑπτάποδα [7],** **τὰς ἄλλας τὰς ἑξῆς** **τὰς** **μέχρι** **τῆς ἑπτακαιδεκάποδος [17]** **ὑπεξῃρημένων** **τῆς ἐννεάποδος [9]** **καὶ ἑκκαιδεκάποδος.[16]**

(β) Σημειώνουμε επίσης ότι ο όρος **'μέχρι'** κατά κανόνα, αν και όχι αποκλειστιά, στον Πλάτωνα τουλάχιστον, σημαίνει **΄μέχρι και'**.[26]
Μερικές χαρακτηριστικές εμφανίσεις:

[26] Στην πέμπτη έκδοση (1978) του συγγράμματος **G. H. Hardy** και **E.M. Wright**, ***An Introduction to the Theory of Numbers***, ο **E.M. Wright** σημειώνει (σ. 49-50):
'There are, however, two other hypotheses as to Theodorus' method of proof. These methods become notably more complicated, one at √17 and the other at √19. Which of these is to be preferred depends on the exact meaning of the Greek word translated as **`up to'** by Heath;
does it mean
`up to but not including'
or **`up to and including'** (the American usage of `through')?
Classical scholars tell me that the former is the more probable'.
Όμως, αντίθετα από αυτό τον ισχυρισμό στον οποίο βασίζεται ο Wright, το 'μεχρι', στον Πλάτωνα τουλάχιστον, σχεδόν ΄παντοτε σημαίναι 'μέχρι και'.

[1] *Κρατύλος* 412c7-d2:
'**μέχρι** μέν του ὁμολογεῖσθαι παρὰ πολλῶν,

ἔπειτα δὲ ἀμφισβητεῖσθαι.'

[2] *Συμπόσιον* 217e1-2:
'**μέχρι** μὲν οὖν δὴ δεῦρο τοῦ λόγου καλῶς ἂν ἔχοι καὶ πρὸς ὁντινοῦν λέγειν·

τὸ δ' ἐντεῦθεν οὐκ ἄν μου ἠκούσατε'

[3] *Φαίδων* 112e1-2: 'δυνατὸν δέ ἐστιν ἑκατέρωσε
μέχρι τοῦ μέσου καθιέναι,

πέρα δ' οὔ'

[4] *Πολιτεία* 393a3-b2:
'**μέχρι** μὲν τούτων τῶν ἐπῶν— …

τὰ δὲ μετὰ ταῦτα'

[5] *Πολιτεία* 423b9-10:·
'**μέχρι** οὗ ἂν ἐθέλῃ αὐξομένη εἶναι μία,
μέχρι τούτου αὔξειν,

πέρα δὲ μή'

[6] *Πολιτεία* 559a1-c1:
'η τοῦ φαγεῖν **μέχρι** ὑγιείας τε καὶ εὐεξίας…

ἢ πέρα τούτων'

[7] *Θεαίτητος* 169c4-d1:

'οὐ μέντοι περαιτέρω…

'Αλλ' ἀρκεῖ καὶ **μέχρι** τούτων'
[8] *Σοφιστής* 222a2-11:
'**Μέχρι** μὲν τοίνυν ἐνταῦθα ὁ σοφιστὴς καὶ [ὁ] ἀσπαλιευτὴς ἅμα
ἀπὸ τῆς κτητικῆς τέχνης πορεύεσθον…

'Εκτρέπεσθον δέ γε ἀπὸ τῆς ζῳοθηρικῆς,'

9.1.4.3. Αν ο Θεόδωρος πράγματι συνάντησε δυσκολία στη 17ποδη δύναμη, τότε η μέθοδος του δεν είναι ανθυφαιρετική.

Αν τα επιχειρήματα του Knorr είναι ισχυρά, και πράγματι **ο** Θεόδωρος σταμάτησε γιατί συνάντησε δυσκολίες στην απόδειξη της ασυμμετρίας της δύναμης (ευθύγραμμο τμήμα α ώστε $\alpha^2=N\beta^2$, N μη τετράγωνος αριθμός, β ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού) ως προς το β για N=17 (17ποδη δύναμη), τότε πράγματι απομακρυνόμαστε σημαντικά από την ανθυφαιρετική υπόθεση της απόδειξης, διότι η απόδειξη της απειρίας της ανθυφαίρεσης των α, β, για $\alpha^2=17\beta^2$, είναι πολύ ευκολότερη της αντίστοιχης απόδειξης για προηγούμενες περιπτώσεις, όπως N=7, 13,14. Άρα δεν θα ήταν δυνατόν ο Θεόδωρος, έχοντας επιτυχώς υπολογίσει αυτές τις προηγούμενες περιπτώσεις, να συναντήσει δυσκολία στην περίπτωση N=17. Πράγματι, ακόμη και η γενική περίπτωση, όπου $N= \nu^2+1$, δεν παρουσιάζει ουσιώδη δυσκολία :

Πρόταση. Αν $\alpha^2=(\nu^2+1)\beta^2$, τότε **Ανθ(α,β)=[ν,2ν,2ν,2ν, …]**.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι
$\boldsymbol{\alpha = \nu\beta + \gamma}$.
Τότε έχουμε, με αντικατάσταση, $(\nu\beta+\gamma)^2=(\nu^2+1)\beta^2$, και από την Πρόταση II.4 των *Στοιχείων* έχουμε,
$\nu^2\beta^2+\gamma^2+2\nu\beta\gamma=\nu^2\beta^2+\beta^2$, άρα $\boldsymbol{\gamma^2+2\nu\beta\gamma=\beta^2}$**.** Επομένως $\beta^2>2\nu\beta\gamma$ και άρα $\beta>2\nu\gamma>\gamma$. Συμπερασματικά, $\boldsymbol{\alpha = \nu\beta + \gamma}$**, με** $\boldsymbol{\beta > \gamma}$**.**
Είναι σαφές ότι
$\boldsymbol{\beta=2\nu\gamma+\delta}$**.**
Έχουμε $\beta^2=\gamma2+2\nu\beta\gamma$. Τότε έχουμε, με αντικατάσταση,

$(2\nu\gamma+\delta)^2 = \gamma2+2\nu(2\nu\gamma+\delta)\gamma$, και από τις Προτάσεις ΙΙ.1, ΙΙ.4, των Στοιχείων έχουμε,
$\gamma^2 + 4\nu^2\gamma^2 + 2\nu\gamma\delta = 4\nu^2\gamma^2 + \delta^2 + 4\nu\gamma\delta$, άρα $\boldsymbol{\gamma^2 = 2\nu\gamma\delta + \delta^2}$. Επομένως $\gamma2 > 2\nu\gamma\delta$ και $\gamma > 2\nu\delta > \delta$.
Συμπερασματικά, **$\beta = 2\nu\gamma + \delta$, με $\gamma > \delta$.**
Είναι σαφές ότι
$\gamma = 2\nu\delta + \varepsilon$.
Έχουμε $\gamma^2 = 2\nu\gamma\delta + \delta^2$. Επομένως,

Ανθ(α, β)=[ν, Ανθ(β, γ)]=[ν, 2ν, Ανθ(γ, δ)].

Έχουμε δύο εφαρμογές χωρίων καθ' υπερβολήν με τους αυτούς συντελεστές, ακριβώς όπως και στην περίπτωση της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, συμπεραίνουμε ότι:
Ανθ(β, γ)= Ανθ(γ, δ), και άρα **Ανθ(β, γ)=[2ν, Ανθ(β,γ)].**
Επομένως **Ανθ(β, γ)=[2ν,2ν,2ν,…].**
Άρα τελικά **Ανθ(α, β)=[ν,2ν,2ν,2ν, …].**

Βλέπουμε ότι η ανθυφαίρεση όταν $\alpha^2=17\beta^2$ είναι [4,8,8,8,…]. Ο βαθμός δυσκολίας αυτού του υπολογισμού είναι ο ίδιος με τον βαθμό δυσκολίας του υπολογισμού της ανθυφαίρεσης διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου.

1.1.4.4. Ασυμμετρίες Θεοδώρου κατά Knorr με Πυθαγόρειες τριάδες

Προκειμένου η πρόταση του Knorr (9.1.4) να έχει κάποια πειστικότητα, είναι αναγκαίο ο Knorr να κατασκευάσει μια μέθοδο απόδειξης των ασυμμετριών των δυνάμεων που απέδειξε ο Θεόδωρος, η οποία να συμφωνεί με την ερμηνεία που έδωσε στο προαναφερόμενο επίμαχο χωρίο, δηλαδή να έχει τα εξής χαρακτηριστικά:
-- να είναι κατά περίπτωση (ή τουλάχιστον κατά κατηγορίες), και
-- να παρουσιάζει δυσκολία στην περίπτωση Ν=17.

Τα σχετικά επιχειρήματα του Knorr για την ανακατασκευή της απόδειξης Θεόδωρου αναφέρονται στο σύγγραμμά του *The Evolution of the Euclidean Elements* (Dordrecht-Boston, 1975), pp. 170-193.

(1) Από τετραγωνικές συμμετρίες σε Πυθαγόρειες τριάδες

Η μέθοδος απόδειξης των ασυμμετριών των δυνάμεων που απέδειξε ο Θεόδωρος που προτείνει ο Knorr έχει ένα πρόσθετο χαρακτηριστικό: ότι η απόδειξη για κάθε δύναμη πραγματοποιείται επί του σχήματος με το οποίο η δύναμη κατασκευάζεται, βάσει της Πρότασης ΙΙ.14 των Στοιχείων.

Πρόταση 1 (Knorr). Έστω β ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού, Ν ένας (φυσικός) αριθμός και α ευθύγραμμο τμήμα ώστε $\alpha^2=N\beta^2$. Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι σύμμετρα και έστω φυσικοί αριθμοί μ,ν πρώτοι μεταξύ τους και ευθύγραμμο τμήμα γ ώστε α=μγ και β=νγ. Τότε

για **Ν περιττό,**

((N-1)/2)ν,	**μ,**	**((N+1)/2)ν,**

και για **Ν άρτιο,**

(N-1)ν,	**2μ,**	**(N+1)ν,**

είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα.

Απόδειξη. Δεδομένου του ευθυγράμμου τμήματος β και του αριθμού Ν, το ευθύγραμμο τμήμα α, ώστε $\alpha^2=N\beta^2$, κατασκευάζεται, με βάση την **Πρόταση ΙΙ.14 των *Στοιχείων*,** ως ο γεωμετρικός μέσος των ευθυγράμμων τμημάτων Νβ και β. Άρα, τα ευθύγραμμα τμήματα

((N-1)/2)β,	**α,**	**((N+1)/2)β**

είναι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Υποθέσαμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι σύμμετρα, άρα υπάρχουν αριθμοί μ,ν πρώτοι μεταξύ τους και ευθύγραμμο τμήμα γ ώστε:

$$α=μγ \text{ και } β=νγ.$$

Τότε

για **Ν περιττό,**

((N-1)/2)ν,	**μ,**	**((N+1)/2)ν,**

και για **Ν άρτιο,**

(N-1)ν,	**2μ,**	**(N+1)ν,**

είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα.

(2) Ασυμμετρία των δυνάμεων με $α^2=Nβ^2$, N=3,7,11,15 [γενικά για N=4κ+3].

Στην ανακατασκευή της απόδειξης Θεόδωρου για την ασυμμετρία μιας δύναμης α ως προς το ευθύγραμμο τμήμα β μήκους ενός ποδιού , όπου $α^2=Nβ^2$ και N=3,7,11,15 (γενικότερα N=4κ+3) χρησιμοποιείται η Πρόταση 1 και μια ιδιότητα των Πυθαγορείων τριάδων που αναφέρουμε παρακάτω (Κριτήριο 2.(Α Π)).

Σημειώνουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός N=4κ+3, για κ φυσικό αριθμό, δεν είναι τετράγωνος αριθμός.

[Ας υποθέσουμε ότι $4κ+3=ρ^2$. Σαφώς ο ρ είναι περιττός και έστω ρ=2σ+1. Τότε $4κ+3=4σ^2+1+4σ$. Άρα, $4κ+2=4σ^2+4σ$ και άρα 2κ+1= 2σ(σ+1), άτοπο.]

Κριτήριο (Α Π) για Πυθαγόρειες τριάδες.

Οι φυσικοί αριθμοί διαχωρίζονται στην κλάση Α των αρτίων αριθμών και στην κλάση Π των περιττών αριθμών. Άρα οι διατεταγμένες τριάδες φυσικών αριθμών (δηλαδή, (ν, μ, κ) με $ν \leq μ \leq κ$) διαχωρίζονται σε **οκτώ** κλάσεις, όσοι οι δυνατοί συνδυασμοί τριάδων κλάσεων Α και Π, οι ακόλουθοι:

ΠΠΠ, ΠΑΑ, ΑΠΑ, ΑΑΠ, ΠΠΑ, ΠΑΠ, ΑΠΠ, ΑΑΑ.

(α) Οι διατεταγμένες τριάδες φυσικών αριθμών που βρίσκονται στις κλάσεις

Π Π Π, ΠΑΑ, ΑΠΑ, ΑΑΠ

σαφώς **δεν είναι Πυθαγόρειες τριάδες.**

(β) Η τριάδα **ΠΠΑ δεν είναι Πυθαγόρεια τριάδα.**

(Πράγματι, έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (2ν+1, 2μ+1, 2κ) που ανήκει στην κλάση ΠΠΑ. Τότε,

$(2ν+1)^2+(2μ+1)^2=4κ^2$ και άρα $(4ν^2+1+4ν) +(4μ^2+1+4μ)=4κ^2$,

Επομένως $2(ν(+1)+μ(μ+1))\mathbf{+1}=2κ^2$, άτοπο.)

(γ) Κριτήριο 1. (ΑΠ) Οι Πυθαγόρειες τριάδες ανήκουν στις παρακάτω κλάσεις:

ΠΑΠ, ΑΠΠ, ΑΑΑ.

Απόδειξη. Από (α) και (β).

Με την χρήση της Προτασης 1 και του Κριτήριο 21(Α Π) αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2 (Knorr). Έστω β ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού και α ευθύγραμμο τμήμα ώστε $α^2=Nβ^{2.}$, όπου N=3,7,11,15 (γενικότερα N=4κ+3, κ φυσικός αριθμός). Τότε το α είναι ασύμμετρο με το β.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι σύμμετρα, και έστω φυσικοί αριθμοί μ,ν πρώτοι μεταξύ τους και ευθύγραμμο τμήμα γ ώστε α=μγ και β=νγ. Σύμφωνα με την Πρόταση 1, έχουμε:

Για N=3, την Πυθαγόρεια τριάδα (ν, μ, 2ν).
Για N=7, την Πυθαγόρεια τριάδα (3ν, μ, 4ν).
Για N=11, την Πυθαγόρεια τριάδα (5ν, μ, 6ν).
Για N=15, την Πυθαγόρεια τριάδα (7ν , μ, 8ν).
Γενικά, για N=4k+3, την Πυθαγόρεια τριάδα ((2κ+1)ν, μ, (2κ+2)ν).

Παρατηρούμε ότι ο υποτείνων αριθμός (2κ+2)ν είναι άρτιος. Άρα, σύμφωνα με το Κριτήριο 2.(ΑΠ), οι διατεταγμένες τριαδες (μ, (2κ+1)ν, (2κ+2)ν), όπου κ οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, θα ανήκουν στην κλάση **ΑΑΑ**. Επομένως, οι αριθμοί μ και (2κ+1)ν είναι άρτιοι.
Άρα, οι αριθμοί μ,ν είναι άρτιοι, άτοπο. Επομένως, το α είναι ασύμμετρο με το β.

(3) Ασυμμετρία των δυνάμεων με $\alpha^2=N\beta^2$, N=5, 13 [γενικά για N=8κ+5].

Στην ανακατασκευή της απόδειξης Θεόδωρου για την ασυμμετρία μιας δύναμης α ως προς το ευθύγραμμο τμήμα β μήκους ενός ποδιού , όπου $\alpha^2=N\beta^2$ και N=5, 13 (γενικότερα N=8κ+5) χρησιμοποιείται η Πρόταση 1 και μια ιδιότητα των Πυθαγορείων τριάδων ισχυρότερη του Κριτηρίου 2.(ΑΠ), που αναφέρουμε παρακάτω (Κριτήριο 3.(ΑΠΔ)).

Σημειώνουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός N=8κ+5, για κ φυσικό αριθμό, δεν είναι τετράγωνος αριθμός.
[Ας υποθέσουμε ότι $8\kappa+5=\rho^2$. Σαφώς ο ρ είναι περιττός, και έστω ρ=2σ+1. Τότε
$8\kappa+1=(2\sigma-1)(2\sigma+3)=4\sigma^2+4\sigma-3$. Άρα $8\kappa=4\sigma^2+4\sigma-4=4(\sigma(\sigma+1)-1)$ και ακολούθως
2κ=(σ(σ+1)-1), άτοπο (2κ άρτιος = (σ(σ+1)-1) περιττός)]

Κριτήριο 2 (ΑΠΔ) για Πυθαγόρειες τριάδες.

Οι φυσικοί αριθμοί διαχωρίστηκαν στην κλάση Α των αρτίων αριθμών και στην κλάση Π των περιττών αριθμών. Στην κλάση Α των αρτίων αριθμών περιέχεται η μικρότερη κλάση Δ όλων των φυσικών αριθμών που είναι διαιρετοί με το 4.
Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η κλάση ΠΔΠ διατεταγμένων τριάδων φυσικών αριθμών η οποία περιέχεται στην κλάση ΠΑΠ, που ορίστηκε προηγουμένως, όπως και η κλάση ΔΠΠ η οποία περιέχεται στην κλάση ΑΠΠ .

(α) Κάθε Πυθαγόρεια τριάδα που ανήκει στην κλάση ΠΑΠ ανήκει στην κλάση ΠΔΠ.
(Πράγματι, έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (2ν+1, 2μ, 2κ+1) που ανήκει στην κλάση ΠΑΠ. Τότε ο $\mu^2 = \kappa(\kappa+1) - \nu(\nu+1)$ είναι άρτιος, ως διαφορά αρτίων αριθμών. Άρα ο μ είναι άρτιος και η τριάδα (2ν+1, 2μ, 2κ+1) ανήκει στην κλάση ΠΔΠ.)

(β) Κάθε Πυθαγόρεια τριάδα που ανήκει στην κλάση ΑΠΠ ανήκει στην κλάση ΔΠΠ.
(Αποδεικνύεται παρόμοια με το (α).)

(γ) **Κριτήριο 3. (ΑΠΔ)** Οι Πυθαγόρειες τριάδες ανήκουν στις παρακάτω κλάσεις:
ΠΔΠ, ΔΠΠ, ΑΑΑ.
Απόδειξη. Σύμφωνα με το Κριτήριο 2. (ΑΠ), **οι** Πυθαγόρειες τριάδες ανήκουν στις κλάσεις ΠΑΠ, ΑΠΠ, ΑΑΑ. Άρα, από (α) και (β), **οι** Πυθαγόρειες τριάδες ανήκουν στις κλάσεις ΠΔΠ, ΔΠΠ, ΑΑΑ.

Με την χρήση της Προτασης 1 και του Κριτήριο 2.(ΑΠΔ) αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση.

.

Πρόταση 3 (Knorr). Έστω β ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού και α ευθύγραμμο τμήμα ώστε $\alpha^2=N\beta^{2\cdot}$, όπου N=5, 13 (γενικότερα N=8κ+5, κ φυσικός αριθμός). Τότε το α είναι ασύμμετρο με το β.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι σύμμετρα, και έστω φυσικοί αριθμοί μ,ν πρώτοι μεταξύ τους και ευθύγραμμο τμήμα γ ώστε α=μγ και β=νγ. Σύμφωνα με την Πρόταση 1, έχουμε:
Για Ν=5, την Πυθαγόρεια τριάδα (2ν, μ, 3ν).
Για Ν=13, την Πυθαγόρεια τριάδα (, 6ν, μ, 7ν).
Γενικά, για Ν=8k+5**,** την Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+2)ν, μ, (4κ+3)ν).

Σύμφωνα με το Κριτήριο 3.(ΑΠΔ), μια Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+2)ν, μ, (4κ+3)ν) ανήκει (1) στην κλάση ΑΑΑ ή (2) στη κλάση ΔΠΠ ή (3) στη κλάση ΠΔΠ.

(1) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+2)ν, μ, (4κ+3)ν) ανήκει στην κλάση ΑΑΑ.
Τότε ο μ είναι άρτιος. Αφού και ο (4κ+3)ν είναι άρτιος, έχουμε ότι και ο ν είναι άρτιος. Άτοπο, διότι οι φυσικοί αριθμοί μ,ν είναι πρώτοι μεταξύ τους.
(2) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+2)ν, μ, (4κ+3)ν) ανήκει στην κλάση ΔΠΠ.
Τότε ο (4κ+2)ν είναι αριθμός διαιρετός με το 4, άρα ο ν είναι άρτιος. Επομένως, και ο αριθμός (4κ+3)ν είναι άρτιος. Άτοπο, διότι, από την υπόθεση, ο (4κ+3)ν είναι περιττός.
(3) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+2)ν, μ, (4κ+3)ν) ανήκει στην κλάση ΠΔΠ.
Τότε ο αριθμός (4κ+2)ν είναι περιττός. Άτοπο.
Άρα, έχουμε αντίφαση. Επομένως, το α είναι ασύμμετρο με το β.

(4) Ασυμμετρία των δυνάμεων με $\alpha^2=N\beta^2$, Ν=(2), 6, 10, 14 [Γενικά Ν=2(2κ+1)].

Στην ανακατασκευή της απόδειξης Θεόδωρου για την ασυμμετρία μιας δύναμης α ως προς το ευθύγραμμο τμήμα β μήκους ενός ποδιού, όπου $\alpha^2=N\beta^2$ και Ν=(2), 6, 10, 14 (γενικότερα Ν=4κ+2) χρησιμοποιείται η Πρόταση 1 και μια ιδιότητα των Πυθαγορείων τριάδων που αναφέρουμε παρακάτω (Κριτήριο 3.(ΔΜ)).

Σημειώνουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός Ν=2(2κ+1), για κ φυσικό αριθμό, δεν είναι τετράγωνος αριθμός.
[Ας υποθέσουμε ότι $4\kappa+2=\rho^2$. Τότε $4\kappa+2= \rho^2-1=(\rho+1)(\rho-1)$. Σαφώς ο ρ-1 είναι περιττός, και έστω ρ-1=2σ+1. Τότε ρ=2σ+2 και ακολούθως $4\kappa+2=(2\sigma+1)(2\sigma+3)= 4\sigma^2+8\sigma +3$. Άρα $4\kappa= 4\sigma^2+8\sigma+1$, άτοπο.]

Κριτήριο 3 (ΔΜ) για Πυθαγόρειες τριάδες.

Η κλάση Α των αρτίων φυσικών αριθμών διαχωρίζεται στην κλάση Δ όλων των φυσικών αριθμών που είναι διαιρετοί με το 4 και στην κλάση Μ όλων των φυσικών αριθμών που δεν είναι διαιρετοί με το 4. Ακολούθως η κλάση Μ διαχωρίζεται στην κλάση Π των περιττών αριθμών και στην κλάση 2Π των διπλασίων περιττών αριθμών (δηλαδή αριθμών διαιρετών με το 2 και όχι με το 4).

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι κλάσεις διατεταγμένων τριάδων φυσικών αριθμών
(2Π)Δ(2Π), Δ (2Π)(2Π), ΜΔΜ, ΔΜΜ, ΜΜΜ.

(α) Κάθε Πυθαγόρεια τριάδα που ανήκει στην κλάση ΑΑΑ ανήκει σε μία από τις παρακάτω κλάσεις:
(2Π)Δ(2Π), Δ (2Π)(2Π), ΔΔΔ.
(Πράγματι, έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (2ν, 2μ, 2κ) με ν<μ<κ.
Προφανώς και η τριάδα (ν, μ, κ) είναι Πυθαγόρεια.
Άρα, σύμφωνα με το Κριτήριο 3.(ΑΠΔ),
η Πυθαγόρεια τριάδα (ν, μ, κ) ανήκει σε μία από τις κλάσεις: ΠΔΠ, ΔΠΠ, ΑΑΑ. Επομένως η Πυθαγόρεια τριάδα (2ν, 2μ, κ) θα ανήκει αντίστοιχα σε μία από τις παρακάτω κλάσεις:
(2Π) Δ (2Π), Δ(2Π)(2Π), Δ ΔΔ.)

(β) Μία Πυθαγόρεια τριάδα θα ανήκει σε μία από τις παρακάτω κλάσεις:
ΠΔΠ, ΔΠΠ, (2Π)Δ(2Π), Δ (2Π)(2Π), ΔΔΔ.
(Επεται από το Κριτήριο 3.(ΑΠΔ) και την προηγούμενη παρατήρηση (α).)

(γ) Κριτήριο 3. (ΔΜ) Οι Πυθαγόρειες τριάδες ανήκουν σε μία από τις κλάσεις:
ΜΔΜ, ΔΜΜ, ΔΔΔ.
Απόδειξη. Η κλάση ΜΔΜ διαχωρίζεται στην κλάση ΠΔΠ και την κλάση (2Π) Δ(2Π). Ανάλογα, η κλάση ΔΜΜ διαχωρίζεται στην κλάση ΔΠΠ και την κλάση Δ(2Π)(2Π).
Από την προηγούμενη παρατήρηση (β), έχουμε το συμπέρασμα..

Πρόταση 3. (Knorr). Έστω β ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού και α ευθύγραμμο τμήμα ώστε $α^2=Nβ^2$, όπου N= 2, 6, 10, 14 (γενικότερα N=2(2κ+1), κ φυσικός αριθμός). Τότε το α είναι ασύμμετρο με το β.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι σύμμετρα, και έστω φυσικοί αριθμοί μ,ν πρώτοι μεταξύ τους και ευθύγραμμο τμήμα γ ώστε α=μγ και β=νγ. Σύμφωνα με την Πρόταση 1, έχουμε:
Για N=2, την Πυθαγόρεια τριάδα (ν, 2μ, 3ν).
Για N=6, την Πυθαγόρεια τριάδα (5ν, 2μ, 7ν).
Για N=10, την Πυθαγόρεια τριάδα (9ν, 2μ, 11ν).
Για N=14, την Πυθαγόρεια τριάδα (13ν, 2μ, 15ν).
Γενικά, για N=4κ+2**,** την Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+1)ν, 2μ, (4κ+3)ν).

Σύμφωνα με το Κριτήριο 3.(ΔΜ), μια Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+2)ν, 2μ, (4κ+3)ν) ανήκει (1) στην κλάση ΔΔΔ ή (2) στη κλάση ΔΜΜ ή (3) στη κλάση ΜΔΜ.

(1) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+1)ν, 2μ, (4κ+3)ν) ανήκει στην κλάση ΔΔΔ. Τότε ο μ είναι άρτιος. Αφού και ο (4κ+3)ν είναι άρτιος, έχουμε ότι και ο ν είναι άρτιος. Άτοπο, διότι οι φυσικοί αριθμοί μ,ν είναι πρώτοι μεταξύ τους.
(2) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα τριάδα ((4κ+1)ν, 2μ, (4κ+3)ν) ανήκει στην κλάση ΔΜΜ. Τότε ο (4κ+1)ν είναι αριθμός διαιρετός με το 4, άρα ο ν είναι αριθμός διαιρετός με το 4. Επομένως, και ο αριθμός (4κ+3)ν είναι διαιρετός με το 4. Άτοπο, διότι, από την υπόθεση, ο (4κ+3)ν δεν είναι διαιρετός με το 4.
(3) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα ((4κ+1)ν, 2μ, (4κ+3)ν) ανήκει στην κλάση ΜΔΜ. Τότε ο αριθμός μ είναι άρτιος. Έστω μ=2θ. Επομένως, $16θ^2 = (16κ +8)\, ν^2$ και ακολούθως $2θ^2 = (2κ +1)\, ν^2$. Συνεπώς, ο ν είναι άρτιος. Άτοπο, διότι οι φυσικοί αριθμοί μ,ν είναι πρώτοι μεταξύ τους.
Άρα, έχουμε αντίφαση. Επομένως, το α είναι ασύμμετρο με το β.

(5) Ασυμμετρία των δυνάμεων με $α^2=Nβ^2$, N=8, 12.

Έστω $α^2=8β^2 = 2(2β)^2$. Τότε το α είναι ασύμμετρο με το 2β. Άρα το α είναι ασύμμετρο με το β.
Έστω $α^2=12β^2 = 3(2β)^2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, το α είναι ασύμμετρο με το 2β. Άρα το α είναι ασύμμετρο με το β.
Σημειώνουμε ότι στη γενική περίπτωση N=4κ, περιλαμβάνονται **και** τετραγωνικοί αριθμοί (όπως για κ=1).

(6) Η δύναμη με $α^2=17β^2$.

(α) Δεν είναι δυνατή μια ανάλογη απόδειξη της ασυμμετρίας της δύναμης με $a^2=17b^2$, με τη χρήση των Κριτηρίων 3.(ΑΠΔ) και 4.(ΔΜ).

Πράγματι, έστω β ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού και α ευθύγραμμο τμήμα ώστε $α^2=17β^2$. Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι σύμμετρα, και έστω φυσικοί αριθμοί μ,ν πρώτοι μεταξύ τους και ευθύγραμμο τμήμα γ ώστε α=μγ και β=νγ. Σύμφωνα με την Πρόταση 1, έχουμε την Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν).

Σύμφωνα με το Κριτήριο 3.(ΑΠΔ), η Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει (1) στην κλάση ΑΑΑ ή (2) στη κλάση ΠΔΠ ή (3) στη κλάση ΔΠΠ.
(1) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει στην κλάση ΑΑΑ. Τότε ο μ είναι άρτιος. Αφού και ο 9ν είναι άρτιος, έχουμε ότι και ο ν είναι άρτιος. Άτοπο, διότι οι φυσικοί αριθμοί μ,ν είναι πρώτοι μεταξύ τους.
(2) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει στην κλάση ΠΔΠ. Τότε ο αριθμός 8ν είναι περιττός. Άτοπο.
(3) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει στην κλάση ΔΠΠ. Τότε για μ,ν περιττούς δεν υπάρχει αντίφαση.

Σύμφωνα με το Κριτήριο 4.(ΔΜ), η Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει (1) στην κλάση ΔΔΔ ή (2) στη κλάση ΜΔΜ ή (3) στη κλάση ΔΜΜ.

(1) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει στην κλάση ΔΔΔ. Τότε ο μ είναι άρτιος. Αφού και ο 9ν είναι άρτιος, έχουμε ότι και ο ν είναι άρτιος. Άτοπο, διότι οι φυσικοί αριθμοί μ,ν είναι πρώτοι μεταξύ τους.
(2) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει στην κλάση ΜΔΜ. Τότε
ο αριθμός 8ν δεν είναι διαιρετός με το 4. Άτοπο.
(3) Έστω η Πυθαγόρεια τριάδα τριάδα (8ν, μ, 9ν) ανήκει στην κλάση ΔΜΜ. Τότε για αριθμούς μ,ν μη διαιρετούς με το 4 δεν υπάρχει αντίφαση.

(β) Σημειώνουμε ότι στη γενική περίπτωση για Ν=8κ+1, περιλαμβάνονται **και** τετραγωνικοί αριθμοί (όπως για κ=1).

(7) Σύνοψη

Ν περττός			Ν άρτιος		
((Ν-1)/2)ν	**μ**	**((Ν+1)/2)ν**	**(Ν-1)ν**	**2μ**	**(Ν+1)ν**

Ν=4κ+3 (Ν=3,7,11,15)	Ν=8κ+5 (Ν=5,13)	Ν=8κ+1 (Ν=17)	Ν=4κ+2 (Ν=(2),6,10,14)	Ν=4κ (Ν=8,12)
Άτοπο με Κριτήριο 1.(ΑΠ)	Άτοπο με Κριτήριο 2 (ΑΠΔ)	**Κριτήρια** 1.(ΑΠ), 2.(ΑΠΔ), 3.(ΔΜ), **αποτυγχανουν**	Άτοπο με Κριτήριο 3.(ΔΜ)	Άτοπο με αναγωγή σε μικρότερο Ν

1.1.5. Απάλειψη Πυθαγόρειων τριάδων, συρρίκνωση περιπτώσεων στην μέθοδο Knorr.

1.1.5.1. η μέθοδος του Knorr χωρίς Πυθαγόρειες τριάδες [R. L. McCabe, 1976[27]]

[27] **R. L. McCabe, *Theodorus' Irrationality Proofs***, Math. Magazine 49 (4) (1976), 201-203.

Ο McCabe προτείνει μια μέθοδο απόδειξης των ασυμμετριών των δυνάμεων που απέδειξε ο Θεόδωρος, ανάλογη της μεθόδου του Knorr, ως προς τις περιπτώσεις (διακρίνοντας 4 περιπτώσεις), αλλά χωρίς την χρήση Πυθαγορείων τριάδων και με στοιχειώδη μέθοδο σύγκρισης αρτίων περιττών.
Σημειώνουμε ότι η διάκριση αυτή είχε κεντρικό ρόλο στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά.

Πρόταση (McCabe). Έστω β ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού, Ν ένας φυσικός μη τετράγωνος αριθμός, και α ευθύγραμμο τμήμα ώστε $α^2=Νβ^2$.
(ι) Αν ο Ν είναι διάφορος του 8κ+1, ειδικά αν Ν< 17,
τότε, με την στοιχειώδη μέθοδο σύγκρισης αρτίων-περιττών,
μπορούμε να αποδείξουμε την ασυμμετρία του α με το β.
(ιι) Αν Ν=8κ+1, όπου κ φυσικός αριθμός, ειδικά αν Ν=17,
τότε, με την στοιχειώδη μέθοδο σύγκρισης αρτίων-περιττών,
δεν μπορούμε να αποδείξουμε την ασυμμετρία του α με το β.

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι σύμμετρα, και
έστω φυσικοί αριθμοί μ,ν πρώτοι μεταξύ τους και ευθύγραμμο τμήμα γ
ώστε α=μγ και β=νγ.

(ι)
Περίπτωση 1. Ν περιττός (και διάφορος του 8κ+1).
Τότε και οι δύο αριθμοί μ,ν πρέπει να είναι περιττοί. Έστω μ=2ρ+1 και ν=2σ+1. Έχουμε $Ν(2σ+1)^2 = (2ρ+1)^2$.
Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:
Ν=4κ + 3 (η οποία περιλαμβάνει Ν=8κ+3=4(2κ)+3 και Ν=8κ+7=4(2κ+1)+3), και
Ν=8κ + 5
(1.α) Ν=4κ+3, ειδικά Ν=3,7,11,15.
Έχουμε $(4κ+3)\ (2σ+1)^2 = (2ρ+1)^2$. Εκτελόντας τις πράξεις και διαιρώντας δια 2, έχουμε την ισότητα 8κσ(σ+1)+6σ(σ+1)+2κ+1=2ρ(ρ+1).
Άτοπο, διότι
το πρώτο σκέλος της ισότητας είναι περιττός αριθμός και
το δεύτερο είναι άρτιος αριθμός.
(1.β) Ν=8κ+5, ειδικά Ν=5,13.
Έχουμε $(8κ+5)\ (2σ+1)^2 = (2ρ+1)^2$. Άρα, 8κσ(σ+1)+5σ(σ+1)+2κ+1=ρ(ρ+1),
Άτοπο, διότι
το πρώτο σκέλος της ισότητας είναι περιττός αριθμός και
το δεύτερο είναι άρτιος αριθμός,
δεδομένου ότι οι αριθμοί σ(σ+1) και ρ(ρ+1) είναι και οι δύο άρτιοι.
Άρα, έχουμε αντίφαση. Επομένως, το α είναι ασύμμετρο με το β.

Περίπτωση 2. Ν άρτιος.
Έστω ότι ο Ν είναι άρτιος.
Ο Ν μπορεί να γραφεί με ένα από τους ακόλουθους τρόπους:
4κ + 2, 4κ, όπου κ φυσικός αριθμός.
(2.α) Ν=4κ, ειδικά Ν=8,12.
Τότε $α^2=4κβ^2 = κ(2β)^2$. Αφού το κ είναι μικρότερο του Ν, η περίπτωση αυτή ανάγεται σε προηγούμενη.
Έστω φυσικοί αριθμοί ρ, Μ ώστε $Ν=2^ρΜ$ και Μ μη διαιρετός με το 4 και έστω σ φυσικός αριθμός ώστε $μ=2^ρσ$. Τότε $σ^2=Μν$, όπου σ,ν πρώτοι μεταξύ τους.
Ειδικά η περίπτωση Ν=8 ανάγεται στην Ν=2 και η περίπτωση Ν=12 ανάγεται στην Ν=3.
(2.β) Ν=4κ+2, ειδικά Ν==(2),6,10,14.

Η παραδοσιακή απόδειξη της περίπτωσης Ν=2, επεκτείνεται εύκολα στη γενική περίπτωση. Ο μ^2 είναι άρτιος και άρα και ο μ είναι άρτιος. Επομένως ο $\mu^2/2$ είναι άρτιος και άρα ο $(N/2)\ \nu^2$ είναι επίσης άρτιος. Από την υπόθεση ο Ν/2 είναι περιττός, άρα ο ν^2 είναι άρτιος και συνεπώς ο ν είναι άρτιος. Άτοπο.

(ιι)
Αν **Ν=8κ+1,** όπου κ φυσικός αριθμός,
τότε, ανάλογα με την απόδειξη της Περίπτωσης 1 της (ι), καταλήγουμε στην ισότητα
$(8\kappa+1)\ (2\sigma+1)^2 = (2\rho+1)^2$,
και ακολούθως στην ισότητα
$(8\kappa+1)\ \sigma(\sigma+1) + 8\kappa = \rho(\rho+1)$.
Παρατηρούμε ότι
και το πρώτο σκέλος της ισότητας και το δεύτερο είναι άρτιοι αριθμοί,
άρα δεν υπάρχει αντίφαση.

1.1.5.2. Υιοθέτηση της μεθόδου McCabe από τον E. M. Wright, 1978

Ο Wright, στην 5η έκδοση (1978) του συγγράμματος *An Introduction to the Theory of Numbers* των G. H. Hardy και E. M. Wright, αναφέρει (στον πρόλογο της έκδοσης) ότι άλλαξε γνώμη για την μέθοδο του Θεόδωρου ('my changed opinion about Theodorus'method in irrationals'), και πράγματι αντικατέστησε το αρχικό σημείωμα (το οποίο περιγράψαμα στην 9.1.1 παραπάνω, και το οποίο είχε ουδέτερη θέση στο ερώτημα αν η μέθοδος ήταν ανθυφαιρετική ή μη)) και υιοθέτησε την πρόταση του McCabe (η οποία είναι σαφώς μη ανθυφαιρετική).

1.1.5.3. Συρρίκνωση περιπτώσεων στην μέθοδο McCabe.

Οι I. G. Bashmakova, A. I. Lapin, 1986[28] απλοποίησαν την απόδειξη της Πρότασης McCabe, με το να συρρικνώσουν την απόδειξη των δύο υποπεριπτώσεων της περίπτωσης Ν περιττός.

Περίπτωση 1. Ν περιττός (και διάφορος του 8κ+1).
Τότε και οι δύο αριθμοί μ,ν είναι περιττοί. Έστω $\mu=2\rho+1$ και $\nu=2\sigma+1$.
Έχουμε $(2\rho+1)^2 = N(2\sigma+1)^2$.
Εκτελόντας τις πράξεις, έχουμε ότι $4\sigma(\sigma+1) - 4N\rho(\rho+1) = N-1$.
Το πρώτο μέρος τις ισότητας είναι διαιρετό με το 8, άρα το Ν-1 είναι διαιρετό με το 8, δηλαδή, Ν=8κ+1 όπου κ φυσικός αριθμός. Άτοπο.

1.1.5.4. Σημείωση.

Η απάλειψη κάθε χρήσης των Πυθαγόρειων τριάδων στο ορθογώνιο τρίγωνο κατασκευής της α, με πλευρές α, (Ν-1)β/2, (Ν+1)β/2,
η συρρίκνωση των περιπτώσεων σε τρείς, από τους McCabe, Bashmakova-Lapin, και το γεγονός ότι η μέθοδος Knorr δεν αφορά μόνο στις πρώτες περιπτώσεις μέχρι την περίπτωση Ν=17, αλλά είναι μια γενική στοιχειώδης για όλες τις περιπτώσεις Ν,όπου Ν φυσικός αριθμός, όχι τετράγωνος και Ν όχι της μορφής 8κ+1 (ώστε τελικά δεν είναι μία μέθοδος με αποδείξεις χωριστά για κάθε περίπτωση)
αποδυναμώνουν την μέθοδο Knorr ως ανακατασκευή των ασυμμετριών του Θεόδωρου μέχρι Ν=17, με απόδειξη χωριστή για κάθε περίπτωση..

[28] **I. G. Bashmakova, A. I. Lapin,** Pifagor, Kvant, no 1, 1986, p. 10 (in Russian)

1.1.6. [1951, H. Cherniss, 1978, M. F. Burnyeat] (Ουδέτερη θέση)

1.1.6.1. Cherniss, *Plato as Mathematician*, The Review of Metaphysics Vol. IV, No 3, March 1951, 1-27.

'**Mugler**[29] (pp. 191-203) takes as an established certainty **Zeuthen**'s conjecture that the demonstration alluded to in Plato's *Theaetetus* 147 D 3-6 was not an extension of the traditional apagogic proof of the irrationality of √2 but a new geometrical demonstration discovered by Theodorus himself; it would have depended on the form of the periodic continued fraction,

and the construction itself according to **Mugler** must have corresponded at least in spirit to that suggested by Heath (*A History of Greek Mathematics,* I, pp. 207-8) which turns upon the recurrence of similar figures of infinitely decreasing magnitude.

The sole evidence for Theodorus' demonstration is the passage of the *Theaetetus,* and that reveals only that he began with √3 and selecting one surd after another up to √17 there somehow stopped. **This tells nothing of the method that he used**; but **Mugler** adopts **Zeuthen**'s reasons for denying that it could have been an extension of the traditional apagogic proof: 1) this would not have been original enough to warrant Plato's notice of it as a new discovery; and 2) it would not have had to be applied separately to each surd up to √17, since its general applicability would become clear before that point is reached, while at the same time it involves no good reason for stopping at √17. The second argument was adequately answered by **von Fritz** in 1934 (*R.E.,* Zweite Reihe V, 2 cols. 1819-1824)[30], and in 1938 quite independently **G. H. Hardy and E. M. Wright** (*An Introduction to the Theory of Numbers.* pp. 41-3) proved that the application of the apagogic method to the surds √3 ⋯ √17 without assumption of a general theorem would in fact satisfy all of **Zeuthen**'s criteria for the nature of Theodorus' procedure. There is then good reason to believe that Theodorus did not use the "geometrical method" which **Mugler a**scribes to him'

Η κριτική του Cherniss είναι κατ΄ουσίαν κατά της θέσης του Zeuthen, την οποία έχει υιοθετήσει ο Mugler. Ο Cherniss υποθέτει και δέχεται ότι οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν την ασυμμετρία πλευράς προς διαμέρον τετραγώνου με την παραδοσιακή μέθοδο, σε αντίθεση με τα στοιχεία και επιχειρήματα υπέρ της ανθυφαιρετικής μεθόδου.

1.1.6.2. M. F. Burnyeat, *The Philosophical Sense of Theaetetus' Mathematics,* Isis, 1978, pp. 489-513

From the classic papers of H. G. Zeuthen onward, much ingenuity has gone into the search for a method of proof which would result in special difficulties at or after \7.5 There is no need to discuss the various suggestions in detail here. The point to be made is that there was no clear textual warrant for preferring a proof of this character **until**

In the face of this impasse the question that needs to be asked is whether Plato has any reason to leave a hint, let alone so indeterminate and ambiguous a hint, as to the mathematical methods used in Theodorus' lesson. As every reader of the dialogue knows, the mathematical scene illustrates a point about definition and examples. When Theaetetus is first asked what

---

[29] **Ch. Mugler,** ***Platon et la recherche mathematique de son epoque***, P. H. Hertz, Strasbourg and Zurich, 1948 (σελ. 28+427).

[30] **K. von Fritz,** ***Theodoros 31***, in Pauly-Wissowa, RealEncyclopädie der classischen Altertumswissenschaft, 2nd ser., V (Stuttgart, 1934), cols. 1811–1825.

knowledge is, he replies by giving examples of knowledge: geometry and the other mathematical sciences he is learning with Theodorus, cobblery and other crafts-each and all of these are knowledge (146cd). Socrates puts him right with an analogy: his answer is like that of someone who, on being asked what clay is, replies, "There is potters' clay, brickmakers' clay, and so on, each and all of which are clay," giving a list of clays instead of the simple, straightfor-ward answer, "It is earth mixed with liquid" (146d-147c). It is at this point that Theaetetus says, "It looks easy now, Socrates, when you put it like that" (147c), and proceeds to tell his story. **Theodorus' part in the story does not depend on whether or not he could continue past 17**; his role is to provide examples of incommensurabil-ity. **His case-by-case proof of their incommensurability** is mentioned57 because, if one is not going by a general definition or rule of the kind the boys devised, it is only via construction and proof that examples of incommensurability are forthcoming: con-struction to obtain a length such as f3, which is not marked on any ruler, and proof to show that, divide how you will, you can find no unit to measure without remainder both it and a 1-foot line. **Beyond that, Plato has no motive to indicate to the reader whether he has in mind any definite method of proof or any particular cause for Theodorus to stop at 17**. This is not to deny, of course, the legitimacy of speculating about what methods would be available to Theodorus or other fifth-century mathematicians for proving various cases of incommensurability. But this must be an independent inquiry; **there is no good reason to expect that the answer is to be squeezed out of one ambiguous sentence in Plato's dialogue.**

1.1.7. Σύνοψη των προηγουμένων προτάσεων

Ανθυφαιρετική μέθοδος	Ουδέτερη θέση	Παραδοσιακή μέθοδος
H. G. Zeuthen 1910		
O. Toeplitz		
O. Becker 1932		
	G. H.Hardy & E. M.Wright 1938	
Ch. Mugler 1948		
	H. Cherniss 1951	
B. L. van der Waerden 1954		
	R. Hackforth 1957	
		A. Wasserstein 1958
M. Brown 1969		
		W. R. Knorr 1975
		R. L. McCabe 1976
		E. M. Wright 1978
	M. F. Burnyeat 1978	
		I. G. Bashmakova, A. I. Lapin 1986
D. Fowler 1987		

1.2. Τα επιχειρήματα Σ. Νεγρεπόντη για την μέθοδο του Θεόδωρου

1.2.1. Η σημασία του χωρίου [2] *Θεαίτητος* 147d7-e3 στην αναζήτηση της μεθόδου του Θεόδωρου

[2] *Θεαίτητος* 147d7-e3

συλλαβείν, περιλαβείν εις Εν

ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον,
ἐπειδὴ
ἄπειροι τὸ πλῆθος
αἱ δυνάμεις
ἐφαίνοντο, [147d8-9]
πειραθῆναι
συλλαβεῖν εἰς ἕν,
ὅτῳ
πάσας ταύτας
προσαγορεύσομεν
τὰς δυνάμεις.
ΣΩ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;
ΘΕΑΙ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.[31]

In the *Theaetetus* 147d3-148b4, Plato relates a lesson, on the proof of some quadratic incommensurabilities, taught by Theodorus to Theaetetus and his friend (the younger Socrates) the circumstances and the reason why Theaetetus introduced the notion of 'dunamis'.
Στο πρώτο και ιδιαίτερα σύντομο μέρος, **[1]147d3-6,** του παραπάνω χωρίου, ο Πλάτων αναφέρεται στις μαθηματικές ανακαλύψεις του Θεόδωρου. Ο Θεόδωρος παρέδιδε, σε ένα μάθημα προς τον νεαρώτατο Θεαίτητο και τον φίλο του νεαρό Σωκράτη (ΝΣ) τις αποδείξεις ασυμμετρίας των ευθυγράμμων τμημάτων α,β, όπου $α^2=Νβ^2$, β το ποδιαίο ευθύγραμο τμήμα, και Ν οι μη τετράγωνοι αριθμοί 3, 5,6,7,…, μέχρι τον 17.
Είδαμε στο πρώτο μέρος ότι οι σημαντιές προσπάθειες των μελετητών να βρούν την μέθοδο του Θεόδωρου κατέληξαν σε γενικές γραμμές στο άγονο και απογοητευτικό συμπέρασμα ότι το χωρίο [1], το χωρίο το οποίο ακριβώς ασχολείται με την μέθοδο του Θεόδωρου, δεν μπορεί να μας διαφωτίσει για την μέθοδο του Θεόδωρου.
Όπως θα δούμε όμως αυτό το συμπέρασμα δεν είναι και το τελικό. Θα συνεχίσουμε την προσπάθεια της αναζήτησης της μεθόδου του Θεόδωρου, εξετάζοντας το επόμενο χωρίο [2] ***Θεαίτητος*** **147d7-e3.** Εκεί υπάρχουν δύο προτάσεις:

Πρόταση (2α). Η κρίσιμη παρατήρηση του Θεαίτητου και ΝΣ ότι
'αι δυνάμεις εφαίνοντο άπειροι το πλήθος', και

Πρόταση (2β). Η ιδέα και η επιτυχία των Θεαίτητου και ΝΣ
να 'συλλαβούν εις εν' αυτό το άπειρο πλήθος των δυνάμεων.

[31] Well, since the powers seemed to be unlimited **in number**,
it occurred to us to do something on these lines: to try to **collect the powers under one term**
by which we could refer to them all.
SOCRATES. And did you find something like that?
THEAETETUS. I think so; but you must look into it too.

Εκ πρώτης όψεως οι Προτάσεις (2α) και (2β) αφορούν στη συμβολή του Θεαίτητου και ΝΣ και δεν αφορούν στην σύμβολή του Θεόδωρου, για την οποία ακόμη ενδιαφερόμαστε. Όμως στην πραγματικότητα μπορούμε να εντοπίσουμε κάποια στοιχεία σχέσης αυτών των δύο Προτάσεων με το μάθημα του Θεόδωρου.

Η παρατήρηση (2α) δεν δημιουργήθηκε στο κενό αλλά **προκλήθηκε** από το μάθημα του Θεόδωρου ('prompted by…Theodorus' lesson') και από την οργάνωση των σκέψεων του Θεαίτητου και ΝΣ κατά τη διάρκεια του μαθήματος του Θεόδωρου ('Theaetetus … recounting the thoughts suggested to himself and his companion by and during Theodorus' lesson [Burnyeat,?]).
Προκειμένου να ανακαλύψουμε το νόημα αυτής της παρατήρησης του Θεαίτητου και ΝΣ είναι σημαντικό να έχουμε κατά νού ότι αυτή η παρατήρηση ήταν αποτέλεσμα του μαθήματος του Θεόδωρου, και δεν θα προκαλούνταν στη σκέψη τους χωρίς αυτό.

Η Πρόταση (2β) επίσης έχει κάποια σχέση με το μάθημα του Θεόδωρου, Διότι η επιτυχής 'σύλληψη εις εν' του άπειρου πλήθους των δυνάμεων από τον Θεαίτητο και ΝΣ εμπεριέχει την πληροφορία ότι το άπειρο πλήθος των δυνάμεων το οποίο προκλήθηκε από την μέθοδο του Θεόδωρου είναι μια κατά κάποιο τρόπο καλοήθης απειρία, μια απειρία περιλήψιμη, «συλλήψιμη εις Εν».

1.2.2. Η απόρριψη των δύο φαινομενικά εύλογων ερμηνείων της Πρότασης (2α)

1.2.2.1. Η πρώτη φαινομενικά εύλογη ερμηνεία της Πρότασης (2α)

'Το πλήθος των δυνάμεων α, δηλαδή των ευθυγράμμων τμημάτων α ώστε $α^2=Nβ^2$ για κάποιον μη τετράγωνο αριθμό N, είναι 'απειρο'.

Η ερμηνεία όμως αυτή απορρίπτεται γιατί, όπως γράφει ο Burnyeat, δεν είναι εύλογο να φαντασθούμε ότι αυτή ήταν η κρίσιμη παρατήρηση που προκλήθηκε από μια διαδικασία τόσο παρατεταμένη όση το μάθημα του Θεόδωρου. (the idea that there is an endless series of whole number squares (or sides of such squares)
would hardly need to be prompted by a process as protracted as Theodorus' lesson, Burnyeat?).
Δηλαδή η παρατήρηση ότι το πλήθος των μη τετράγωνων αριθμών είναι άπειρο είναι μια τετριμμένη παρατήρηση που ασφαλώς δεν προκλήθηγκε από κάτι τόσο παρατεταμένο, κοπιώδες, και ουσιαστικό, όπως το μάθημα του Θεόδωρου.

1.2.2.2.Η δεύτερη φαινομενικά εύλογη ερμηνεία της Πρότασης (2α) είναι:

'Το πλήθος των δυνάμεων α, δηλαδή των ευθυγράμμων τμημάτων α ώστε $α^2=Nβ^2$ και α ασύμμετρο προς το β για κάποιον μη τετράγωνο αριθμό N, είναι 'απειρο'.

Αυτή είναι η ερμηνεία που υιοθετείται από τον Burnyeat:
'That there are an indefinite, perhaps infinite, number of squares with incommensurable sides, on the other hand, is precisely the hypothesis that would suggest itself as Theodorus proceeded from case to case proving more and yet more examples of incommensurability, perhaps by a method which could be endlessly reapplied. Therefore, it is likely that, in context, "all these dunameis refers to squares with incommensurable sides rather than to squares generally.'

Όμως και η ερμηνεία που υιοθετεί ο Burnyeat για το 147d7-8, ότι δηλαδή υπάρχουν άπειρες το πλήθος ασύμμετρες δυνάμεις, υπόκειται στην ίδια ακριβώς αντίρρηση, και
'would hardly need to be prompted by a process as protracted as Theodorus' lesson',

εφόσον η ασυμμετρία της δύναμης για N=2, γνωστή στους Πυθαγόρειους και θεωρούμενη γνωστή από υον Θεόδωρο, συνεπάγεται άμεσα
τη ασυμμετρία απείρων το πλήθος δυνάμεων,
δηλαδή όλων των δυνάμεων που αντιστοιχούν σε $N=2.n^2$ για n=1,2,….

1.2.3. Η ερμηνεία της Πρότασης (2α) με διανεμητικό πληθυντικό: <u>Κάθε</u> δύναμη έχει διαίρεση και συναγωγή, <u>όχι</u> όλες οι δυνάμεις συλλογικά.

Στο σημείο αυτό υπαρχει ερμηνευτικό αδιέξοδο, καθώς δεν φαίνεται να υπάρχει κάτι εύλογο στο μάθημα του Θεόδωρου, το οποίο να προκάλεσε την κρίσιμη παρατήρηση του Θεαίτητου και ΝΣ ‘αι δυνάμεις εφαίνοντο άπειροι το πλήθος’.

Προσπαθώντας να αποσαφηνίσουμε την διαπίστωση του Θεαίτητου
‘αι δυνάμεις εφαίνοντο άπειροι το πλήθος’(147d7-8)
οδηγούμαστε σε ένα ερώτημα γλωσσικό:
Τι από τα δύο θέλει να πεί ο Πλάτων:
ότι αι δυνάμεις, **ως ολότητα, ως σύνολο**, εφαίνοντο να είναι άπειροι το πλήθος (οπότε ο πληθυντικός ‘αι δυνάμεις’ είναι ‘συλλογικός’), ή
ότι **κάθε μια δύναμη χωριστά** εφαίνετο να είναι άπειρη το πλήθος (οπότε ο πληθυντικός ‘αι δυνάμεις’ είναι ‘διανεμητικός’);
Η Πρόταση (2α) ερμηνεύθηκε συλογικά ουσιαστικά άπό όλους τους μελετητές, συμπεριλαμβανομένων και των Knorr, Burnyeat.[32]
Οι περισσότεροι περιστασιακοί αναγνώστες θα αντιδρούσαν αρνητικά με μια διανεμητική ανάγνωση.
Θα επιχειρηματολογήσουμε ότι, σε αντίθεση με την παρούσα ερμηνεία, ο Πλάτων εννοεί μια ανάγνωση με διανεμητικό πληθυντικό.

Support for this distributive interpretation is based on the following three[33] arguments:

1.2.4. Το γλωσσικό επιχείρημα στο χωρίο του *Θεαίτητου* υπερ της διανεμητικής ερμηνείας της Πρότασης (2α).

[32] Η κρίσιμη Πρόταση (2α) έχει ερμηνευθεί χωρίς εξαίρεση συλλογικά και όχι διανεμητικά. Έτσι ο Cornford [Co,1935], p.23, μεταφράζει: ‘seeing that these square roots were evidently infinite in number’.
Αμφότεροι οι Knorr και Burnyeat μεταφράζουν την κρίσιμη Πρόταση 147d7-8 κατά τρόπο συλλογικό και μη διανεμητικό:
Knorr [Kn, 1975] (p.63): ‘Now this is what occurred to us: that, since we recognized the power to be unlimited in number, we might to collect them under a single name’;
Burnyeat [Bu, 1978]: ‘Well, since the powers seemed to be unlimited in number, it occurred to us to do something on these lines: to try to collect the powers under one term by which we could refer to them all.’
Αμφότεροι όμως είναι κάπως αβεβαιοι σχετικά με το νόημα της Πρότασης και καταλήγουν σε μια παρεμφερή ερμηνεία. Θα δούμε την προσέγγιση του Burnyeat:
‘The key sentence is 147d 7-e 1, which I render as follows:
Since the dunameis were turning out to be unlimited in number, it occurred to us to attempt to collect them up into a single way of speaking [i.e., a formula or definition] of all these dunameis together.]
Theaetetus is recounting the thoughts suggested to himself and his companion by and during Theodorus' lesson, and the idea that there is an endless series of whole number squares (or sides of such squares)
would hardly need to be prompted by a process as protracted as Theodorus' lesson.
That there are an indefinite, perhaps infinite, number of squares with incommensurable sides, on the other hand, is precisely the hypothesis that would suggest itself as Theodorus proceeded from case to case proving more and yet more examples of incommensurability, perhaps by a method which could be endlessly reapplied. Therefore, it is likely that, in context, "all these dunameis refers to squares with incommensurable sides rather than to squares generally.’[emphasis added]
[33] Πρόσθετα επιχειρήματα αναπτύσσονται στο σύγγραμμα Νεγρεπόντη-Φαρμάκη..

147d4-5	**147d7-8**	**148b1-2**
Ο πληθυντικός ‘αι δυνάμεις’ στην πρώτη εμφάνιση (‘[δυνάμεις μήκει ου σύμμετροι τηι ποδιαίαι’, **147d4-5**) είναι προφανώς **διανεμητικός,** εφόσον **κάθε δύναμη χωριστά** είναι ασύμμετρη προς την ποδιαία.		
		Και η τρίτη (διπλή) εμφάνιση του πληθυντικού ‘αι δυνάμεις’ {‘[δυνάμεις] μήκει μεν ου σύμμετρους εκείναις, τοις δ’ επιπέδοις ά δύνανται [συμμέτρους]’, **148b1-2**), είναι προφανώς **διανεμητικός,** εφόσον **κάθε δύναμη χωριστά** είναι μήκει μεν ασύμμετρη, δυνάμει δε σύμμετρη.
	Εγκλωβισμένη μεταξύ	
της πρώτης		
		και της (διπλής) τρίτης
	εμφάνισης διανεμητικού πληθυντικού ‘αι δυνάμεις’ τοποθετείται η δεύτερη κρίσιμη εμφάνιση του πληυθντικού ‘αι δυνάμεις’ (‘αι δυνάμεις άπειροι το πλήθος’, **147d7-8**). Είναι λογικό να δεχθούμε ότι και ο μετξύ αυτός πληθυντικός είναι διανεμητικός, και ότι κάθε δύναμη χωριστά είναι άπειρη το πλήθος.	

147d4-5 **[αἱ δυνάμεις]** **μήκει οὐ σύμμετροι**		

τῇ ποδιαίᾳ,		
	147d7-8 **[αἱ δυνάμεις]** **ἄπειροι τὸ πλῆθος** **?**	
		148b1-2 **δυνάμεις…** **μήκει μὲν οὐ** **συμμέτρους ἐκείναις,** tois d' epipedois ha dunantai [summetrous]'

Με την τρέχουσα κυρίαρχη 'συλλογική' ερμηνεία του πληυθντικού στο 147d7-8,
θα πρέπει να δεχθούμε ότι
ο Πλάτων αρχίζει με ένα διανεμητικό πληθυντικό για τις δυνάμεις (**147d4-5)**,
στη συνέχεια γυρίζει στον συλλογικό πληθυντικό (**147d7-8)**,
και τέλος επανέρχεται πάλι στον (διπλό) διανεμητικό πληθυντικό (**148b1-2)**.
Είναι πιο φυσικό να δεχθούμε ότι
ο ενδιάμεσος πληθυντικός (**147d7-8)** είναι επίσης διανεμητικός.

1.2.5. ***Στήριξη από Scholia in Platonem [Theaetetus 162e6-7]*** **(SIP) για την πρόταση (2α).**

Θεαίτητος 162e4-163a3
'[ΣΩΚΡΑΤΗΣ] ἀπόδειξιν δὲ καὶ ἀνάγκην **οὐδ'** ἡντινοῦν λέγετε
ἀλλὰ τῷ εἰκότι χρῆσθε, ᾧ
εἰ ἐθέλοι Θεόδωρος ἢ ἄλλος τις τῶν γεωμετρῶν χρώμενος γεωμετρεῖν,
ἄξιος οὐδ' ἑνὸς μόνου ἂν εἴη.
σκοπεῖτε οὖν σύ τε καὶ Θεόδωρος εἰ ἀποδέξεσθε
πιθανολογίᾳ τε καὶ εἰκόσι περὶ τηλικούτων λεγομένους λόγους."
ΘΕΑΙ. Ἀλλ' οὐ δίκαιον, ὦ Σώκρατες, οὔτε σὺ οὔτε ἂν ἡμεῖς φαῖμεν.'

Σε παράφραση:
'Φαντάσου ποσο απολύτως ανάξιος ('ἄξιος οὐδ' ἑνὸς μόνου') θα ήταν ο Θεόδωρος ή όποιος άλλος γεωμέτρης αν είχε την πρόθεση να βασισθεί στο 'πιθανόν' και στο 'μάλλον' ('πιθανολογίᾳ τε καὶ εἰκόσι') και όχι στην απόδειξη και την ανάγκη ('ἀπόδειξιν δὲ καὶ ἀνάγκην') προκειμένου να παράξει γεωμετρία'

Ακριβώς σε αυτό το χωρίο δίδεται το εξής σχόλιο στα
Scholia in Platonem [Theaetetus 162e6-7] **(SIP)**
'εἰ ἐθέλοι κτλ.
καὶ γὰρ εἰ τὴν τῶν πολλῶν κρίσιν λάβοιμεν ἐπὶ γεωμετρίας κυρίαν,
γελοῖοι ἂν ὦμεν,
ἀσύμμετρα λέγοντες **ἀλλήλοις μεγέθη**,
καὶ **τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν διαιρετὴν εἶναι εἰς ἄπειρον**,
καὶ τὰ τοιαῦτα.'

Δηλαδή:
'Αν δεχθούμε την κρίση των πολλών [δηλ. το πιθανόν και το μάλλον] ως την κύρια μέθοδο στην γεωμετρία, τότε θα είμασταν γελοίοι να ισχυρισθούμε
ότι τα μεγέθη είναι μεταξύ τους ασύμμετρα,

και ότι η πεπερασμένη ευθεία είναι διαιρετή επ’ άπειρον,
και τα συναφή.’

Είναι σαφές ότι το σχόλιο στο SIP συνδέει το χωρίο 162e6-7 με το προηγούμενο χωρίο 147d3-e1 του Θεαίτητου, και βεβαιώνει στο χωρίο 162e6-7 ότι ο Θεόδωρος χρησιμοποίησε αυστηρές αποδεικτικές μεθόδους για να ισχυρισθεί ότι απέδειξε τις Προτάσεις που αναφέρονται στο χωρίο 147d3-e1. Και οι Προτάσεις αυτές περιλαμβάνουν (1) ότι τα μεγέθη είναι μεταξύ τους ασύμμετρα (αναφερόμενος
στην Πρόταση ότι
κάθε δύναμη α είναι ασύμμετρη προς την ποδιαία ευθεία β, και
στην Πρόταση ότι
κάθε δύναμη α ήταν διαιρετή επ’ άπειρον και άπειρος πλήθει
this passage (162e6-7).

The reading leads again to a distributive interpretation of ‘hai dunameis’ in 147d7-8: each power, being incommensurable to the one foot line, is divided into an infinite multitude.

1.2.6. Υποστήριξη από τα σχόλια στο *Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum* (ΑΣΕΠΘ) για την Πρόταση (2α),

Ο Ανώνυμος Σχολιαστής, πιθανώς ο Εύδωρος, ένας συγγραφέας του πρώτου αιώνα π.Χ.[34], παρέχει ισχυρή στήριξη για την διανεμητική ερμηνεία. Πράγματι, σχοιάζοντας την απειρία η οποία προκύπτει από την Πρόταση (α) ‘[αι δυνάμεις] εφαίνοντο άπειροι πλήθει’ (147d7-8), πραγματοποιεί το ακόλουθο σχόλιο

[**ΑΣΕΠΘ 36,45-48**]
‘᾿Επεὶ
αἱ γραμμαὶ ἐπιδέχονται **τὸ ἀόριστον**,
εἴ τις **αὐτὰς ἢ αὔξοι ἢ διαιροῖ’**

Σύμφωνα με το ΑΣΕΠΘ 36,45-48, οι ευθείες γραμμές, όπως είναι οι δυνάμεις, δέχονται το άπειρον με δύο και μόνο τρόπους,
ή με (επ’ άπειρον) διαίρεση, ή με (επ’ άπειρον) αύξηση.[35]
Εφόσον το ΑΣΕΠΘ 36,45-48 αποτελεί σχόλιο στην Πρόταση (2α) 147d7-8,

---

[34] πρβλ. **Tarrant** [Tar, 1985]
[35] Το σχόλιο ΑΣΕΠΘ 36,45-48 συμπίπτει με σχόλια αρκετών αρχαίων συγγραφέων:
Αριστοτέλης, *Φυσικά* 233 a24-26
‘διχῶς γὰρ λέγεται καὶ τὸ μῆκος καὶ ὁ χρόνος ἄπειρον, καὶ ὅλως πᾶν τὸ συνεχές,
ἤτοι κατὰ διαίρεσιν ἢ τοῖς ἐσχάτοις.’
Ήρων, *Ορισμοί* 119,1,2-3 (=*Scholia in Eucliden* 5, 4,1-2)
‘Μέγεθός ἐστι τὸ αὐξανόμενον καὶ τεμνόμενον εἰς ἄπειρον·’
Θεμίστιος, *Σχόλια εις Φυσικά Αριστοτέλους* 5,2,187,5-7
‘διχῶς λέγεται ἄπειρον καὶ μῆκος καὶ πᾶν ὅλως τὸ συνεχὲς
ἢ τῷ διαιρεῖσθαι ἐπ' ἄπειρον ἢ τῷ μηδὲν ἔσχατον ἔχειν μηδὲ πέρας τι τοῦ μεγέθους.’
Πρόκλος, *Σχόλια εις Ευκλείδην*184, 17-29
‘…τὸ πᾶν μέγεθος ἐπ' ἄπειρον εἶναι διαιρετὸν ἀξιώματα γεωμετρικά ἐστιν, *(184, 17-18)* …
τὸ δὲ πᾶσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν τῆς γεωμετρίας, τὸ δὲ εἰς ἄπειρον αὔξειν τὸ ποσὸν κοινὸν ἀμφοτέρων.
καὶ γὰρ ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος τοῦτο *(184, 27-29)’*
Πρόκλος, *Σχόλια εις Ευκλείδην* 198,14-15
‘πᾶν γὰρ συνεχὲς ἐπ' ἄπειρον διαιρετόν ἐστι καὶ αὐξητόν.’
Σιμπλίκιος, *Σχόλια εις Φυσικά Αριστοτέλους* 467,10-11
‘καὶ τὰ μαθηματικὰ μεγέθη ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖσθαι καὶ αὔξεσθαι’

είναι σαφές ότι
αν ‘αι δυνάμεις φαίνονται άπειροι το πλήθος’,
τότε ‘αι δυνάμεις επιδέχονται το αόριστον’.
Άρα αν αι δυνάμεις φαίνονται άπειροι το πλήθος,
τότε, σύμφωνα με το ΑΣΕΠΘ 36,45-48,
αι δυνάμεις είναι ευθείες οι οποίες
ή διαιρούνται επ’ άπειρον ή αύξανονται επ’ άπειρον.
Όμως η φράση
‘οι ευθείες διαιρούνται επ’ άπειρον η αυξάνονται επ’ άπειρον’
έχει νόημα μόνο με τον πληθυντικό ‘οι ευθείες’ να είναι διανεμητικός,
δηλαδή
‘κάθε ευθεία χωριστά διαιρείται επ’ άπειρον ή αυξάνεται επ’ άπειρον’.
Επομένως το σχόλιο στο ΑΣΕΠΘ 36,45-48 υποστηρίζει κατά τρόπο αποκλειστικό τον διανεμητικό πληθυντικό για τον πληθυντικό ‘αι δυνάμεις’ στην Πρόταση (α) (147d7-8).

Από το χωρίο [2] απομένει η Πρόταση 2α, σύμφωνα με τηνοποία ο Θεαίτητος και ΝΣ είχαν τη ιδέα να συλλάβουν εις Εν τις άπειρες δυνάμεις. Εδώ προκύπτουν τα ερωτήματα
--αν ο πληθυντικός στην Πρόταση 2α είναι διανεμητικός ή συλλογικός, και
--τι ακριβώς σημαίνει η σύλληψη των δυνάμεων εις Εν.
Την Πρόταση 2α θα την εξετάσουμε μαζί με το χωρίο [3] 147e4-148b4.

[3] ***Θεαίτητος*** 147e4-148b4
Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η περίληψη, η σύλληψη εις Έν

ΣΩ. Λέγε.

[3.1]147e5-148a5[36]

ΘΕΑΙ. **Τὸν ἀριθμὸν πάντα** δίχα διελάβομεν·
τὸν μὲν δυνάμενον
ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι
τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες
τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον
προσείπομεν.
ΣΩ. Καὶ εὖ γε.
ΘΕΑΙ. **Τὸν τοίνυν μεταξὺ**
τούτου,
ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε
καὶ πᾶς ὃς
ἀδύνατος

[36] **Σωκράτης**. Πές μου γι’ αυτό
Θεαίτητος. Διαιρέσαμε όλους τους αριθμούς σε δύο κλάσεις.
Αν ενας αριθμός είναι δυνατόν να δημιουργηθεί με το να πολλάπλασιάσουμε κάποιο άριθμό με τον εαυτό του
τον παρομοιάσαμε με το τετράγωνο σχήμα και τον καλέσαμε τετράγωνο και ισόπλευρο
Σωκράτης. Πολύ καλά.
Θεαίτητος. Αλλά αν ένας αριθμός είναι μεταξύ αυτών, όπως τα τρία και τα πέντε,
και ο κάθε αριθμός ο οποίος
δεν μπορεί να δημιουργηθεί πολλαπλασιάζοντας ένα αριθό με τον εαυτό του
αλλά δημιουργείται πολλαπλασιάζοντας
ένα μεγαλύτερο αριθμό με ένα μικρότερο ή ένα μικρότερο με ένα μεγαλύτερο
ώστε οι πλευρές που τον περιέχει είναι πάντοτε μεγαλύτερες και μικρότερες
τον παρομοιάσαμε με ένα προμήκες σχήμα
και τον καλέσαμε προμήκη αριθμό.
Σωκράτης. Εξαιρετικά.

Ἴσος ἰσάκις γενέσθαι,
ἀλλ'
ἢ πλείων ἐλαττονάκις
ἢ ἐλάττων πλεονάκις
γίγνεται,
μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ
αὐτὸν περιλαμβάνει,
τῷ **προμήκει** αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες
προμήκη ἀριθμὸν
ἐκαλέσαμεν.
ΣΩ. Κάλλιστα.

[3.2]148a5-b4[37]
ἀλλὰ τί
τὸ μετὰ τοῦτο;
ΘΕΑΙ. **Ὅσαι μὲν**
γραμμαὶ
τὸν ἰσόπλευρον
καὶ ἐπίπεδον
ἀριθμὸν
τετραγωνίζουσι,
μῆκος
ὡρισάμεθα,
ὅσαι δὲ
τὸν ἑτερομήκη,[38]
δυνάμεις,
ὡς
(3.2.α) μήκει μὲν
οὐ
συμμέτρους ἐκείναις,
(3.2.β) τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται
[[συμμέτρους ἐκείναις]].
καὶ περὶ **τὰ στερεὰ** ἄλλο τοιοῦτον
ΣΩ. Ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες
ὥστε μοι δοκεῖ ὁ Θεόδωρος οὐκ ἔνοχος τοῖς ψευδομαρτυρίοις ἔσεσθαι.

Πρώτα (**[3.1]147e5-148a5)** το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών **διαιρείται** σε τετράγωνους και ετερομήκεις-μη τετράγωνους αριθμούς, και

[37] Αλλά τι πράξατε μετά απ' αυτό;
Θεαίτητος. Ορίσαμε μήκος
να είναι όλες οι γραμμές οι οποίες τετραγωνίζουν τον ισόπλευρο και επίπεδο αριθμό,
και δυνάμεις όλες οι γραμμές οι οποίες τετραγωνίζουν τον ετερομήκη αριθμό,
καθώς προς τα μήκη δεν είναι σύμμετρες κατά το μήκος
είναι όμως σύμμετρες κατά τα επίπεδα που άχουν τη δύναμη να σχηματίζουν
Και υπάρχει μια ανάλογη κατάσταση για τα στερεά..
Σωκράτης. Αυτά είναι άριστα, παιδιά,
ώστε νομίζω ότι ο Θεόδωρος δεν θα είναι ένοχος ψευδομαρτυρίας.
[38] =προμήκη

μετά (**[3.2]148a5-b4)** ένα ευθύγραμμό τμήμα α **ορίζεται** ως **δύναμη**[39]
αν $α^2=Νβ^2$ για κάποιον ετερομήκη-μη τετράγωνο αριθμό Ν.
Ο Θεαίτητος και ΝΣ αποδεικνύουν ότι
η αιτία τ της συμπερίληψης εις Εν είναι το γεγονός ότι
κάθε δύναμη α είναι
(Πρόταση 3.2.α) κατά μεν το μήκος ασύμμετρη προς την β
(δηλαδή α,β ασύμμετρα),
(**Πρόταση 3.2.β) κατά δε την δύναμη σύμμετρη** προς την β
(δηλαδή $α^2$, $β^2$ είναι σύμμετρα).

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η προσέγγιση των Θεαίτητου και ΝΑ θα εξετασθούν τώρα τα σχόλια στο ΑΣΕΠΘ, τα οποία αναφέρονται στις Προτάσεις **2β, 3.2.α** και **3.2.β.**

Κατ' αρχήν πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο αρχικός όρος 'συλλαβείν' λαμβάνει, τόσο στον Πλάτωνα όσο και στον σχολιαστή στο ΑΣΕΠΘ διάφορες ισοδύναμες μορφές:
'**συλλαβείν**' (*Θεαίτητος* 147d8),
'περιλαμβάνειν' (*Θεαίτητος* 148d6) (**ΑΣΕΠΘ** 26,11/ 37,5/ 37,10/ 37,29/ 37,43/ 37,46/ 45,48/ 46,39),
'**περιορίζειν'** (**ΑΣΕΠΘ** 42,32),
'**ορίζειν**' (**ΑΣΕΠΘ** 37,1; 37,11).
[Πράγματι, 'συλλαβείν' και 'περιλαβείν' είναι ισοδύναμα από την σύγκριση των 147d8 και 148d6, 'περιλαμβάνειν' και 'ορίζειν' από το ΑΣΕΠΘ 37,3-12].
Το μαθηματικό περιεχόμενο του 'συλλαβείν' (ή 'περιλαβείν' ή 'περιορίζειν' δεν είναι ακόμη καθόλου σαφές. Θα καταστεί σαφές μετά προσεκτιή ανάλυση, παρακάτω. Το μόνο που μπορούμε να παρατηρήσουμε επί του παρόντος είναι ότι οι όροι 'περιλαβείν' και 'περιορίζειν' ενέχουν κάποια συμπείληψη κυκλικής μορφής.

Το χωρίο ΑΣΕΠΘ 37, 3-12 παρέχει ένα γενικό σκεπτικό, ένα πλαίσιο για την ιδέα του Θεαίτητου και ΝΣ.
Οποτεδήποτε εμφανίζεται το αόριστον και άπειρον πρέπει να γίνεται προσπάθεια αυτό να περιληφθεί εις Εν.

[**ΑΣΕΠΘ 37, 3-12**]
'ἐπεὶ **τὸ ἄπειρον**
ἀπερίληπτόν ἐστιν,
καὶ ἀ[όριστ[ος] ἐν τῶι τοιούτωι
ἡ διάνο[ι]α,
δεῖ καθ' ὅσον ἐνδ[έ]χεται
καθολικῶ[ι] τινι
περιλαμβάνειν καὶ ὁ[ρίζ]ειν
α[ὐ]τό'.

Ακριβώς αυτό έπραξαν οι Θεαίτητος και ΝΣ με το άπειρο πλήθος της κάθε δύναμης, σύμφωνα με την Πρόταση 2β.
Όμως το χωρίο [3] του Θεαίτητου δεν μας διαφωτίζει πώς επέτυχαν να συμπεριλάβουν το άπειρο πλήθοε της δύναμης εις Έν.

Το σχόλιο [**ΑΣΕΠΘ 37,1-3**]
'[επεί] ὁρίζονται δ'

[39] Άτυπα ο ορισμός αυτός της δύναμης, ο οποίος σαφώς εισάγεται εδώ από τον Θεαίτητο και ΝΣ, έχει χρησιμοποιηθεί και στις παραγράφους [1] και [2] του χωρίου, παραπάνω.

[αἱ γραμμαὶ]

ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν,
μετέβ[η]σαν ἐπ' αὐτούς'

από μόνο του δεν φαίνεται να νας διαφωτίζει ιδιαίτερα, ούτε και να είναι σαφές πώς σχετίζεται με το χωρίο [3] του Θεαίτητος.
Όμως το χωρίο

ΑΣΕΠΘ 26,13-18

''ἦλ]θ[ον] οὖν
ἐπὶ τὸ[ν ἀριθμ]ὸν
διὰ τὸ [.]κ[......]ον **τῶι**
πάντα[ς] τοὺς ἀρι[θμ]ο[ὺ]ς συμμ[έτ]ρους [εἶ]να[ι] πρ[ὸς] ἀλλή[λους]',

αν και δυσανάγνωστο[40], είναι αρκετά διαφωτιστικό.
Σύμφωνα με το [ΑΣΕΠΘ 26,13-18]
η μετάβαση σε αριθμούς επιτυγχάνει την σύλληψη, συναγωγή εις Εν
διότι οι αριθμοί είναι μεταξύ τους σύμμετροι. Από αυτό το σχόλιο γίνεται σαφές ότι η μετάβαση γίνεται όχι απλώς και γενικώς σε αριθμούς αλλά **σε λόγους αριθμών**..

Στα δύο παραπάνω σχόλια στο ΑΣΕΠΘ προστίθενται και τα ακόλουθα δύο:

ΑΣΕΠΘ 32,1-4:

'ὥσπερ δὲ οἱ περὶ Θεαίτητον **μετέβησαν**
ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς
ὡς σαφεστέρους';

ΑΣΕΠΘ 44,50-45,3:

'πρῶτον μὲν οὖν
ἀπὸ τῶν ἀσαφεστέρων
ἐπὶ τὰ σαφέστερα
δεῖ **μεταβαίνειν** ὡς
ἀπὸ τῶν μεγεθῶν
μετέβησαν
ἐπὶ τοὺς ἀριθμούς'

Από τα ΑΣΕΠΘ **32,1-4 και 44,50-45,3** προκύπτει ότι
η μετάβαση γίνεται
από τα **ασαφέστερα** μεγέθη στους σαφέστερους αριθμούς,
ή καλύτερα, στους **σαφέστερους** λόγους αριθμών,
ή ακόμη καλύτερα
από τους **ασαφέστερους** λόγους μεγεθών στους **σαφέστερους** λόγους αριθμών.
.Σ' αυτό το σημείο το εξής ***Ανώνυμο Σχόλιο Χ.39 στα Στοιχεία*** είναι διαφωτιστικό:

40 Σημειώνεται ότι '[.]κ[......]ον **τῶι' αποδίδεται ως 'ακόλουθον τῶι' ?**
Αυτή η απόδοση στηρίζεται στην συχνή χρήση του 'ακόλουθον'+δοτική στο ΑΣΕΠΘ, όπως:
47,46-47: 'τοῦτο **ἀκόλο[υ]θον τῶι δόγμα[τι]'**,
63,48-64,1: '**᾿Ακολουθεῖ τῶι πάντα ῥεῖν** τὸ μηδὲν εἶ ναι π[άγι]ον',
64,21-22: '[....... **᾿Επακολουθή[σωμεν οὖν αὐτῶι.]'**,
64,28-33:' Διὰ τοῦ εἰρηκέν[αι
'᾿Ε-]πακολουθήσω[μεν οὖν] αὐτῶι'
δηλοῖ, ὅτ[ι
'ἐπακο]λουθ[εῖ] τῆι τοια[ύ-] τηι ὑποθέσει'.

***Ανώνυμον Σχόλιον* X.39** στα *Στοιχεία*:

‘ἔστι γάρ τινα μεγέθη, ὧν
μόνη γινώσκεται ἡ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχή,
οἷον ὅτι ὑπερέχει τόδε τὸ μέγεθος τοῦδε τοῦ μεγέθους,
ἡ δὲ ποσότης τῆς ὑπεροχῆς **ἀγνοεῖται,**
ὡς ἔχει **ἡ πλευρὰ** τοῦ κ πρὸς **τὴν πλευρὰν** τοῦ ζ.
ὅτι μὲν γὰρ ὑπερέχει, **ἴσμεν,**
ἄγνωστος δὲ ἡ ποσότης τῆς ὑπεροχῆς.
καὶ ἐπὶ μὲν **τῶν πλευρῶν** τοῦ κ καὶ ζ οὕτως·
ἐπ' αὐτοῦ δὲ τοῦ κ καὶ ζ
ἡ ὑπεροχὴ τοῦ κ πρὸς τὸν ζ **οὐκ ἄδηλος**’

Σύμφωνα με το σχόλιο X.39,
ο λόγος ευθυγράμμων τμημάτων α/β, ‘ώστε $α^2/β^2$=20/7, είναι ‘**άγνωστος’**,
ενώ ο λόγος $α^2/β^2$=20/7 είναι ‘**ουκ άδηλος**’.
Τόσο τα ΑΣΕΠΘ **32,1-4 και 44,50-45,3** όσο και το ***Ανώνυμον Σχόλιον* X.39** στα *Στοιχεία* αναφέρεται στον λόγο ευθυγράμμων τμημάτων α/β, ‘ώστε α’β ασύμμετρος και $α^2/β^2$ σύμμετρος.
Η σύγκριση των σχολίων στο ΑΣΕΠΘ με το σχόλιο X.39 στα *Στοιχεία*, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι
σύμφωνα με τα σχόλια του ΑΣΕΠΘ, η ιδέα των Θεαίτητου και ΝΣ συνίστατο στο ότι η σύλληψη της δύναμη α εις Εν επιτυγχάνεται με την μετάβαση
από τον ‘ασαφέστερο’ και ‘άγνωστο’ λόγο μεγεθών α/β
στον ‘σαφέστερο’ και ‘ουκ αδηλον’ λόγο αριθμών $α^2/β^2$.
Αυτό το συμπέρασμα επιβεβαιώνεται πλήρως από το

ΑΣΕΠΘ 41,40-42,18

‘[**ὡς τ]οίνυν τῶν τετρ[αγώ]νων σχημάτων**
ἃ μὲν
ἦν σύμμετ[ρ]α τῆι ποδιείαι δυνάμει καὶ μήκει καὶ [πλ]άτει,
καὶ ταῦτα **μή[κη]** ὠνόμασαν,
ἃ δὲ
πλάτει μὲν
οὐκέτι δὲ καὶ [τ]ῆ πλευρᾶι,
καὶ ταῦ[τα] **δυνάμεις** [ἐ]κάλεσαν
τῶι κοινῶι προσχρησάμενοι ὀνόματι,
οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν
ἦλθον
ἐπὶ τὰ κυβικὰ σχήματα
καὶ
ἐτίθεσαν κύβον,
οὗ αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑκάστη ποδός, καὶ γενόμεναι ἐπ' ἀλλήλας ποιοῦσι ἕνα στερεὸν πόδα.
καὶ προαιροῦντες
κύβον δύο ποδῶν καὶ ἄλλον τριῶν εἶτα τεσσάρων
εὕρισκον
αὐτὸ μὲν τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεὸν
σύμμετρον·
ἔχει γὰρ **λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν**·
τὰς δὲ πλευρὰς
ἀσυμμέτρο[υς,]’.

Η σύλληψη της απειρίας σε κάθε δύναμη επιτυγχάνεται
με τη μετάβαση σε άριθμούς, με την έννοια ότι γίνεται μετάβαση σε σύμμετρα μεγέθη, τα οποία είναι ως αριθμός προς αριθμόν.
Η δε μετάβαση στους αριθμούς κατ στην δυνάμει συμμετρία (Πρόταση 3.2.β) γίνεται από την μήκει ασυμμετρία (Πρόταση 3.2.α).

Από την ανάλυση των χωρίων [2] και [3] του *Θεαίτητου* και των σχετικών σχολίων στο ΑΣΕΠΘ προκύπτει ότι

--η σύλληψη, περίληψη της απειρίας, στην Πρόταση 2β, γίνεται για κάθε δύναμη χωριστά κατά διανεμητικό τρόπο,
--η μετάβαση από την απειρία στους αριθμούς, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η σύλληψη, γίνετα για κλάθε δύναμη χωριστά κατά διανεμητικό τρόπο, και
--η απειρία της δύναμης συνδέεται με την ασυμμετρία και άρα είναι ανθυφαιρετική, μέσω της Πρότασης Χ.2 των *Στοιχείων*.

Έπεται από την παραπάνω ανάλυση ότι το χωρίο *Θεαίτητος* 147d3-148b3 θα πρέπει να ερμηνευθεί ως εξής:

[1] (147d3-6) Ο Θεόδωρος στο μάθημά του είχει καταστήσει σαφές (‘αποφαίνων’) ότι αν α είναι μια ευθεία ώστε $α^2=Nβ^2$, όπου Ν είναι ένας από τους μη τετράγωνους αριθμούς από Ν=3 μέχρι Ν=17 και β είναι μια ευθεία μήκους ενός ποδιού, τότε
η α είναι ‘μήκει **ου σύμμετρος’** προς την β.

[2] (147d7-e3)
Εξ αιτίας, ως αποτέλεσμα του μαθήματος του Θεόδωρου, έγινε σαφές (‘εφαίνοντο’) ότι
(2α) κάθε δύναμη διαιρείται σε ένα άπειρο πλήθος μερών (‘άπειροι το πλήθος’) (147d7-8), και γιαυτό το λόγο
(2β) ο Θεαίτητος και ο ΝΣ είχαν την ιδέα και επέτυχαν στο να ‘συλλάβουν σε έν’ (‘συλλαβείν εις έν’) κάθε δύναμη (147d8-e3)

[3] (147e3-148b3)
Ο Θεαίτητος και ο ΝΑ επέτυχαν στο να συλλάβουν κάθε δύναμη σε Εν, αποκλειστικά και μόνο διότι αντελήφθησαν ότι
κάθε δύναμη είναι
όχι μόνο **(3.2.α)** μήκει ασύμμετρη,
αλλά και **(3.2.β)** δυνάμει σύμμετρη.
Δηλαδή μια δύναμη
επιδέχεται μεν της ανθυφαιρετικής απειρίας, λόγω της μήκει ασυμμετρίας,
επιδέχεται δε και του ανθυφαιρετικού πέρατος, λόγω της δυνάμει συμμετρίας, η οποία μετατρέπει τον λόγο $α^2/β^2$ ως αριθμόν προς αριθμόν. Ακριβώς αυτή η δυνατότητα ‘μετάβασης στους αριθμούς’, κατά την έκφραση στο ΑΣΕΠΘ, ‘μαλακώνει’, ‘μετριάζει’ την αρχική απειρία, και επιτρέπει την ‘σύλληψη’ (‘περίληψη’, ‘περιορισμό’) του άπειρου πλήθους της δύναμης εις Εν.

Η μαθηματική Πρόταση του Θεαίτητου σε φιλοσοφική διατύπωση (συλλαβείν, περιλαβείν εις Εν)

Η βέλτιστη διατύπωση της μαθηματικής Πρότασης που απέδειξε ο Θεαίτητος (και ο ΝΑ), την οποία μπορούμε να συνάγουμε από τα χωρία [2] και [3] του *Θεαίτητου* και τα συναφή σχόλια του *ΑΣΕΠΘ*, είναι η ακόλουθη:

Φιλοσοφική διατύπωση της Πρόταση Θεαίτητου.
Αν $α^2=Nβ^2$ για κάποια ευθύγραμμα τμήματα α,β και κάποιο μη τετράγωγο αριθμό Ν,
τότε
(ι) [**Πρόταση Χ.9 των *Στοιχείων***] α, β είναι ασύμμετρα αυθύγραμμα τμήματα,
(ιι) η ανθυφαίρεση του α ως προς β είναι άπειρη, και
(ιιι) το ανθυφαιρετικό άπειρο του α ως προς β ‘συλλαμβάνεται’ (‘περιλαμβάνεται’, ‘περιορίζεται’) εις Εν.

Η ιδέα των Θεαίτητου και ΝΣ έγκειται στο ότι κατανόησαν ότι
η σύλληψη της ανθυφαιρετικής απειρίας του α ως προς β οφείλεται στο ότι η α είναι μεν ασύμμετρη στη β, αλλά αυτή η απειρία μετριάζεται από το γεγονός ότι τα τετράγωνα $α^2$, $β^2$ είναι σύμμετρα.

Παρατηρούμε ότι τα μέρη (ι) και (ιι) της Πρότασης είναι αμιγώς μαθηματικής φύσεως (και σχετίζονται στενά με την Πρόταση Χ.9 των *Στοιχείων*, η οποία, σύμφωνα με το *Ανώνυμον Σχόλιον Χ*.62 στα *Στοιχεία*, οφείλεται όντως στον Θεαίτητο, όμως το μέρος (ιιι) δεν είναι επι του παρόντος κατανοητό, ακριβώς διότι η σύλληψη εις Εν δεν έχει σαφές μαθηματικό περιεχόμενο.

Ερώτημα. Ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο της σύλληψης κλπ. εις Εν?
Πως η μετάβαση από την ασυμμετρία-ανθυφαιρετική απειρία στην συμμετρία-ανθυφαιρετικό πέρας οδηγεί στη σύλληψη-περίληψη-περιορισμό είς Εν?

Το μόνο που μπορούμε να παρατηρήσουμε επί του παρόντος είναι,όπως αναφέραμε και παραπάνω, ότι οι όροι 'περιλαβείν' και 'περιορίζειν' ενέχουν κάποια **συμπερίληψη κυκλικής μορφής**.

Το δεύτερο μέρος του χωρίου αναφέρεται **στη συμβολή του Θεαίτητου** (και του νεαρού Σωκράτη). Από το χωρίο δεν καθίσταται άμεσα σαφές πρώτον ποια είναι η μαθηματική συμβολή του Θεαίτητου, ποια δηλαδή είναι η μαθηματική Πρόταση περί ασυμμετριών την οποία απέδειξε, και δεύτερον με ποια μέθοδο.
Οι κυριώτεροι μελετητές συνδέουν την συμβολή του Θεαίτητου, όπως αυτή περιγράφεται στο χωρίο Θεαίτητος 147-148 με την Πρόταση Χ. 9 των *Στοιχείων*, η οποία αναφέρεται στις τετραγωνικές ασυμμετρίες, περιλαμβάνει την ακόλουθη διατύπωση.

Πρόταση Χ.9 *Στοιχείων*. Αν α, β είναι ευθύγραμμα τμήματα και Μ,Ν φυσικοί αριθμοί, ώστε ο λόγος Μ/Ν δεν είναι ίσος με τον λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, και ώστε $Μα^2=Νβ^2$, τότε α,β είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Η Πρόταση αυτή πράγματι αποδίδεται στον Θεαίτητο στο Ανώνυμο Σχόλιο στα Στοιχεία Χ.?. Οι σημαντικότεροι μελετητές (Heath, van der Waerden, Knorr) δέχονται ότι η Πρόταση Χ.9 αποτελεί την συμβολή του Θεαίτητου στην θεωρία των ασυμμέτρων. Η απόδειξη της Χ.9 στα *Στοιχεία* χρησιμοποιεί την αριθμητική Πρόταση VII.27 (αν μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί, τότε $μ^2$,$ν^2$ είναι επίσης σχετικώς πρώτοι) και Προτάσεις του Βιβλίου VIII των *Στοιχείων*, οι οποίες οφείλονται στον Αρχύτα.
Οι Heath, Knorr προτείνουν μια μέθοδο για την Θεαιτήτεια απόδειξη της Χ.9 η οποία δεν δεν διαφέρει στα βασικά της σημεία από την μέθοδο που περιγράφεται στα *Στοιχεία*. Ο van der Waerden προτείνει μια ιδιαίτερα απλή απόδειξη της Χ.9 με χρήση της VII.27, η οποία παρακάμπτει τις Προτάσεις Αρχύτα του Βιβλίου VIIIγια την ΄υπαρξη γεωμετρικού μέσου, την εξής: Έστω ότι α,β είναι σύμμετρα.Μπορούμε να υποθέσουμε ότι Μ,Ν είναι σχετικώς πρώτοι. Τότε α=μγ,β=νγ, με μ,ν σχετικώς πρώτους. Τότε $Μμ^2=Νν^2$. Τότε, από 7.19, $μ^2/ν^2=Ν/Μ$. Από την 7.27, και τηνμοναδικότητα ενός λόγου με σχετικά πρώτους όρους, $μ^2=Ν$, $ν^2=Μ$, άτοπο, εφόσον Μ/Ν δεν είναι ίσος με τεράγωνο προς τετράγωνο.
Οι ανακατασκευές αυτές της Προτάσεις Χ.9 βασίζονται στην προσέγγιση του Ευκλείδη, και δεν λαμβάνουν αυτές δεν προέρχονται από την ανάλυση του χωρίου Θεαίτητος.

Τώρα ερχόμαστε στο τέταρτο και τελευταίο χωρίο του Θεαίτητου που θα μελετήσουμε. Σε αυτό ο Πλάτων αποκαλύπτει τον λόγο για το ενδιαφέρον που έχει για τις αποδείξεις ασυμμετριών του Θεόδωρου και του Θεαίτητου. Ο λόγος του ενδιαφέροντος του είναι η πεποίθησή του ότι η μέθοδος του Θεαίτητου θα είναι θεμελιώδους σημασίας για το φιλοσοφικό του σύστημα, και συγκεκριμένα για την μέθοδο με την οποία θα μπορέσει να αποκτήσει την γνώση (‘επιστήμη’) των πλατωνικών Ιδεών.

[4] *Θεαίτητος* 148b5-d7[41]

148b5-8
ΘΕΑΙ. Καὶ μήν, ὦ Σώκρατες, ὅ γε ἐρωτᾷς
περὶ
ἐπιστήμης
οὐκ ἂν δυναίμην ἀποκρίνασθαι
ὥσπερ
περὶ
τοῦ μήκους τε
καὶ τῆς δυνάμεως.
καίτοι σύ γέ μοι δοκεῖς τοιοῦτόν τι ζητεῖν·
…
148c6-8
ΣΩ. ᾿Αλλὰ
τὴν ἐπιστήμην,
ὥσπερ νυνδὴ ἐγὼ ἔλεγον,
σμικρόν τι
οἴει εἶναι ἐξευρεῖν
καὶ οὐ
τῶν πάντῃ ἄκρων;
ΘΕΑΙ. Νὴ τὸν Δί' ἔγωγε
καὶ **μάλα γε τῶν ἀκροτάτων**.

148c9-d2
ΣΩ. **Θάρρει**
τοίνυν περὶ σαυτῷ καὶ τὶ οἴου Θεόδωρον λέγειν,
προθυμήθητι δὲ παντὶ τρόπῳ

[41] **Θεαίτητος** Αλλά αλήθεια, Σωκράτη, δεν είμαι σε θέση να απαντήσω στην ερώτηση σου σχετικά με την επιστήμη, όπως απαντήσαμε στην ερώτηση για το μήκος και την δύναμη.Αν και νομίζω ότι μου ζητείς κάτι τέτοιο**…**
Σωκράτης. Και νομίζεις ότι η ανακάλυψη της επιστήμης είναι κάτι μικρό, όπως είχα πεί παραπάνω, ή ένα των μεγίστων;
Θεαίτητος. Μα τον Δία, πιστεύω ότι είναι ένα των μεγίστων.
Σωκράτης. Τότε πρέπει να έχεις θάρρος και να πιστεύεις ότι ο Θεόδωρος έχει δίκαιο, και να προθυμοποιηθείς με κάθε τρόπο **να λάβεις τον λόγο της επιστήμης** και των άλλων.
Θεαίτητος. Αν είναι θέμα προθυμίας, τότε η επιστήμη θα γίνει φανερή.
Σωκράτης Έλα λοιπόν-διότι ορθά έδειξες πρόσφατα-**προσπάθησε να μιμηθείς** την απάντησή σου για τις δυνάμεις και όπως περιέλαβες αυτές τις δυνάμεις σε ένα είδος, αν και ήταν πολλές, έτσι και τις πολλές επιστήμες με ένα λόγο.

τῶν τε ἄλλων **πέρι** **καὶ ἐπιστήμης** **λαβεῖν λόγον** **τί ποτε τυγχάνει ὄν.** ΘΕΑΙ. Προθυμίας μὲν ἕνεκα, ὦ Σώκρατες, φανεῖται. **148d4-7** ΣΩ. Ἴθι δή—καλῶς γὰρ ἄρτι ὑφηγήσω— **πειρῶ μιμούμενος** τὴν περὶ **τῶν δυνάμεων** ἀπόκρισιν, **ὥσπερ** **ταύτας** **πολλὰς** **οὔσας** **ἑνὶ εἴδει** **περιέλαβες,** **οὕτω** **καὶ τὰς** **πολλὰς** **ἐπιστήμας** **ἑνὶ λόγῳ** **προσειπεῖν.**

Σύμφωνα με το χωρίο 147-8? του *Θεαίτητου* ο Θεαίτητος και ο νεαρός Σωκράτης **συνέλαβαν εις Εν, περιέλαβαν εις Εν** τη απειρία των δυνάμεων με το να μεταβούν από την ασυμμετρία κάθε δύναμης ως προς την ποδιαία ευθεία στην συμμετρία του τετραγώνου της δύναμης ως προς το τετράγωνο της ποδιαίας.
Δεν είναι σαφές ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο του φιλοσοφικών όρων ‘συλλαβείν’, περιλαβείν’ με τους οποίους ο Πλάτων περιγράφει τα μαθηματικά επιτεύγματα του Θεαίτητου. Όμως η φράση κλειδί (‘πειρώ μιμούμενος’, 148?) με την οποία ο Πλάτων συνδέει την μαθηματική Πρόταση του Θεαίτητου, όπως αυτή περιγράφεται στον διάλογο *Θεαίτητος*, με την φιλοσοφική μέθοδο της **Διαίρεσης και Συναγωγής** στο δικό του σύστημα, όπως αυτή περιγράφεται στους επόμενους δύο διαλόγους της τριλογίας *Σοφιστής* και *Πολιτικός*, αποτελούν το αρχικό σημείο για την κατανόηση των επιτευγμάτων του Θεαίτητου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.

Η ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ ΤΟΥ ΘΕΟΔΩΡΟΥ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΜΕ ΓΝΩΜΟΝΕΣ

Ο D. Fowler προέβη σε ανακατασκευή των αποδείξεων του Θεόδωρου για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες των δυνάμενων $a^2 = Nb^2$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της Πρότασης X.2 των *Στοιχείων*, σύμφωνα με την οποία αρκεί να επαληθεύσει κανείς ότι η **ανθυφαίρεση** του a στο b είναι άπειρη.

Ανθυφαιρετικές είναι εκείνες οι ανακατασκευές που βασίζονται στην Πρόταση X.2 των Στοιχείων: "εάν η ανθυφαίρεση του a προς b είναι άπειρη, τότε τα a, b είναι ασύμμετρα".[42]
Αυτό που χαρακτηρίζει την ανακατασκευή του Fowler είναι η χρήση Γνωμόνων.[43] Ένας (ορθογώνιος) **Γνώμων** ορίζεται στον Ορισμό II.2 των *Στοιχείων* ως το άθροισμα ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου "περί την διάμετρον" και των δύο (ίσων μεταξύ τους σε εμβαδόν) παραπληρωμάτων. Οι Γνώμονες παίζουν βασικό ρόλο στα Βιβλία II (Προτάσεις 5-8), VI (Προτάσεις 27-29), X (Προτάσεις 91-96), και XIII (Προτάσεις 1-4)) των *Στοιχείων*. Συνδέονται άμεσα με την Πυθαγόρεια μέθοδο
εφαρμογής χωρίων, μέθοδος μελέτης των τετραγωνικών εξισώσεων (στα βιβλία II (Προτάσεις 5-8), και VI (Προτάσεις 27-29)).[44] Στην πραγματικότητα, η θεμελιώδης Πρόταση VI.29 για την παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή μπορεί να παραφραστεί ως εξής:

"Δίδεται ευθύγραμμη επιφάνεια R, τμήμα γραμμής a, και λόγος s/t, για την κατασκευή Γνώμονα G του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν R, του οποίου το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο περί τη διάμετρο έχει

[42] Η απόδειξη της Πρότασης X.2 των *Στοιχείων* κάνει χρήση της συνθήκης του Εύδοξου ορισμός.4, Βιβλίο V, των *Στοιχείων*. Για τον λόγο αυτό, ο Knorr ([K], Κεφάλαιο VIII, Ενότητα III) θεωρεί ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιήθηκε από τον Θεόδωρο. Ωστόσο μια στοιχειώδης απόδειξη που δεν εμπλέκει προ-Ευδόξεια στοιχεία, της X.2 έχει ως εξής: έστω ότι a,b είναι σύμμετροι. Τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί n,m και τμήμα γραμμής c, τέτοια ώστε a=mc, b=nc. Είναι ακολούθως προφανές ουσιαστικά (όπως και ό ίδιος ο Αριστοτέλης επισημαίνει) ότι Ανθ(a,b)=Ανθ(m,n). Δεδομένου ότι, βάσει των Προτάσεων VII.1 & 2, η Ανθ(m,n) είναι πεπερασμένη, καταλήγουμε σε αντίφαση.
[43] [F], 3.4, σελ. 74-83; 10.3, σελ. 374-378
[44] Υπάρχει συνεχής αντιπαράθεση για το αν το Βιβλίο II και οι Προτάσεις 27-29στο Βιβλίο VI των *Στοιχείων* μπορούν να θεωρηθούν προάγγελοι των σύγχρονων δευτεροβάθμιων εξισώσεων, μεταξύ των van der Waerden [vDW1] (ο οποίος επινόησε τον όρο γεωμετρική άλγεβρα για τις Προτάσεις του Βιβλίου II), H. Freudenthal [Fr], και Andre Weil [W] τους διακεκριμένους υποστηρικτές αυτής της άποψης (με τους οποίους συστρατευόμαστε), και του Sabetai Unguru [U], του βασικού υποστηρικτή της αντίθετης άποψης.

πλευρές c, b στον λόγο s/t, και κάθε ένα από τα συμπληρωματικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα (παραπληρώματα) έχει πλευρές a/2, b."

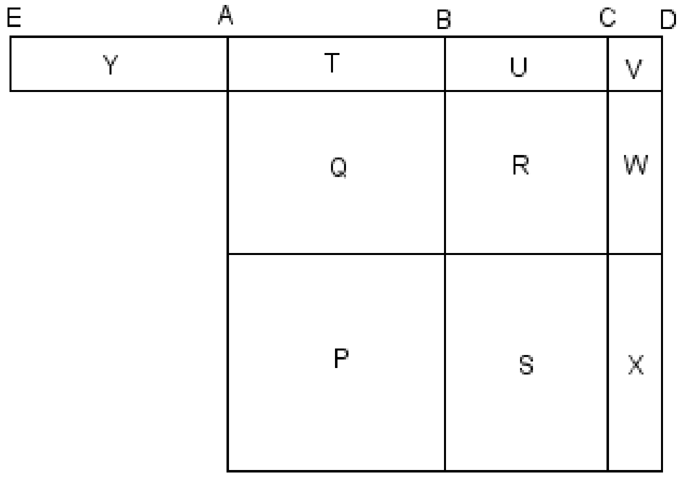
Η ιδέα του Fowler να ανακατασκευάσει τις πρώτες αποδείξεις της ασυμμετρίας με τη βοήθεια των Γνωμόνων φαίνεται σωστή βάσει του συσχετισμού του Πρόκλου, στον *Ευκλείδη* 60, 7-12, της ασυμμετρίας με την ύπαρξη **μιας άπειρης φθίνουσας ακολουθίας Γνωμόνων**:

«Η δήλωση ότι κάθε λόγος είναι "ρητός" ανήκει στην αριθμητική μόνο και καθόλου στη γεωμετρία, καθώς η γεωμετρία περιλαμβάνει "άρρητους" λόγους. Ομοίως, η αρχή ότι οι γνώμονες στους οποίους μπορεί να διαιρεθεί ένα τετράγωνο έχουν ελάχιστο όριο σε μέγεθος είναι ιδιάζουσα για την αριθμητική. Στη γεωμετρία το ελάχιστο μέγεθος [για τους γνώμονες] δεν υφίσταται.» [45].

Επιπλέον, ο Fowler ορθώς παρατηρεί ότι ένα από τα πλεονεκτήματα της εφαρμογής Γνωμόνων είναι ότι τέμνουν και αναδιατάσσουν ορθογώνια χωρία, και δεν κάνουν άλγεβρα, με την σύγχρονη σημασία του όρου, και έτσι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί είναι προφανείς από την εξέταση των διαγραμμάτων.

Οι ανακατασκευές του Fowler από την άλλη, κάνουν χρήση του κριτηρίου του Λόγου για την περιοδικότητα, εξ ου και το άπειρον, της ανθυφαίρεσης. Η ανθυφαίρεση του a προς b είναι (τελικά) **περιοδική** εάν η ακολουθία των πηλίκων της ανθυφαίρεσης είναι (τελικά) περιοδική. Το κριτήριο του λόγου για την περιοδικότητα είναι η συνθήκη: υπάρχουν δείκτες $n > m$ τέτοιοι ώστε
$c_{n+1} / c_n = c_{m+1} / c_m$.

Παράδειγμα της προσέγγισης του Fowler είναι η περίπτωση $a^2 = 3b^2$ (δείτε το σχήμα που ακολουθεί) [46]:
Ξεκινήστε με το τετράγωνο P, με πλευρά ίση με AB = b,
Προσθέστε Γνώμονα Q + R + S με μέγεθος 2P,
έτσι ώστε τετράγωνο P + Q + R + S (με πλευρά ίση με AC = a) ισούται με 3P,
προσθέστε ακόμη έναν γνώμονα T + U + V + W + X μεγέθους P, έτσι ώστε BD =AB, και
προσθέστε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Y με πλευρές ίσες με EA=AB και CD.
Έπειτα επαληθεύστε ότι
EC(= a + b) = 2.AB+BC, BC < AB
BD = BC + CD, CD < BC, και
BC / CD=EC / AB, και καταλήγουμε σε Ανθ(a, b) = [1,1,2, 1,2,1,2,…].



[45] Πρβλ. [M]
[46] [F], σελ. 76-77

Υπάρχουν κάποια μειονεκτήματα στο τρόπο με τον οποίο ο Fowler αντιλαμβάνεται την εφαρμογή Γνωμόνων σε τετραγωνικές ασυμμετρίες.

Κατά πρώτον, η χρήση του Κριτηρίου του Λόγου δεν δικαιολογείται, καθώς προϋποθέτει την θεωρία λόγων για ασύμμετρα μεγέθη. Δεν υπάρχει όμως περίπτωση ο Θεόδωρος να είχε στη διάθεσή θεωρία για την αναλογία των μεγεθών εκτός από την σύμμετρη[47]. Οι Πυθαγόρειοι δεν είχαν αναπτύξει κάποια θεωρία για τους ασύμμετρους λόγους, και η πρώτη τέτοια θεωρία, όπως αναφέρεται στα *Τοπικά* [48] του Αριστοτέλη, κατά πάσα πιθανότητα οφείλεται στον Θεαίτητο.

Όμως, δεδομένου ότι ο Θεόδωρος δεν είχε στη διάθεσή του καμία θεωρία αναλογιών και κανένα κριτήριο Λόγου, πρέπει να υπήρξε κάποιος προάγγελος των παραπάνω για να ολοκληρωθεί ή απόδειξη. Υποψιαζόμαστε ότι προάγγελος των παραπάνω εντοπίζεται στην **"διατήρηση του σχήματος των Γνωμόνων"**, αρχή που πάει πίσω στους Πυθαγόρειους οι οποίοι, όπως αναφέρεται στα *Φυσικά*[49] του Αριστοτέλη την συνδέουν με την αρχή του πεπερασμένου. Έτσι οι Γνώμονες μάλλον έχουν τον ρόλο του Κριτηρίου του Λόγου, παρά συνυπάρχουν με αυτό, όπως συμβαίνει στις ανακατασκευές του Fowler.

Κατά δεύτερον, το καθοριστικό βήμα του υπολογισμού του ανθυφαιρετικού πηλίκου σε κάθε βήμα στις ανακατασκευές του Fowler, φαίνεται να είναι επισφαλές, ιδιαίτερα εάν το πηλίκο αυτό είναι φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από τη μονάδα, βασιζόμενο σε μία ευφυή παρόλα αυτά *αυτοσχέδια* τεχνική "αναδίπλωσης"[50]. Έτσι για να αποφύγει το πηλίκο 6, στο πέμπτο βήμα του υπολογισμού για $\sqrt{14}$, ο Fowler θεωρεί με τεχνητό μάλλον τρόπο, $\sqrt{14}+3=[\overline{6,1,2,1}]$[51]; όμως ακόμη και έτσι, το πηλίκο 2 στο τρίτο βήμα παρουσιάζει δυσκολίες για τη μέθοδό του καθώς ο πρώτος "αναδιπλωμένος" γνώμων πρέπει να αφαιρεθεί δύο φορές, και γενικά όροι μεγαλύτεροι του ενός στην ανθυφαίρεση προκαλούν επιπλοκές στο επιχείρημα. Όπως επισημαίνει ο Fowler,

"anything that involves a longer period, or larger numbers within the period, becomes unfeasible. For example the conjecture: HYPOTHESIS $\sqrt{19}:1=[4,\ \overline{2,1,3,1,2,8}]$ *generates a figure that seems to defy analysis by this method"* [52].

Καθώς οι Γνώμονες εμπλέκονται και στις ασυμμετρίες (σχόλιο του Πρόκλου για την μη ύπαρξη ελάχιστου γνώμονα, πιθανόν περιγραφή της Πυθαγόρειας αρχής της Διατήρησης των Γνωμόνων από τον Αριστοτέλη) καθώς και στην εφαρμογή των χωρίων, θα περίμενε κανείς ότι οι πρώτες αποδείξεις για την τετραγωνική ασυμμετρία (Πυθαγόρειοι, Θεόδωρος) θα συνδέονταν στενά με τη μέθοδο παραβολής χωρίων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Έτσι το πρόβλημα στην χρήση από τον Fowler των Γνωμόνων σε αποδείξεις της ασυμμετρίας ίσως έγκειται ακριβώς στο γεγονός ότι η μέθοδός του σε καμία περίπτωση δεν περιλαμβάνει παραβολή χωρίων.

[47] Το εν λόγω μειονέκτημα ισχύει και για τις ανθυφαιρετικές ανακατασκευές στις οποίες εφαρμόζεται η θεωρία των λόγων συμπεριλαμβανομένων εκείνων των Zeuthen [Z], Becker [B], von Fritz [vF], van der Waerden [vdW], Kahane [Ka]. Μη ανθυφαιρετικές ανακατασκευές των ασυμμετροτήτων του Θεόδωρου, συμπεριλαμβάνουν εκείνες των Hardy & Wright [HW] και Knorr [K], Bashmakova [BL], Conway και Shipman {CS].

[48] 158 b 29-34

[49] 203 a 1-16

[50] [F],σελ..376

[51] Εδώ όπως και αλλού η γραμμή πάνω από την ακολουθία των αριθμών σημαίνει την περιοδική της επανάληψη.

[52] [F], p.83

Στην πραγματικότητα όμως μπορεί κανείς να επικαλεστεί τους Γνώμονες για να μετατρέψει το ζήτημα του υπολογισμού του πηλίκου σε κάθε βήμα ουσιαστικά ασήμαντο. Η ιδέα της ανακατασκευής με τη χρήση **γνωμόνων**, που περιλαμβάνεται στη Πρόταση XIII.3 (και Πρόταση II.6) των *Στοιχείων*, αξιοποιείται στο Λήμμα που ακολουθεί, και μετά εφαρμόζεται, σε Πρόταση, μετατρέποντας τον υπολογισμό των τετραγωνικών ασυμμετριών σε κάτι εφικτό.
Η δική μας ανακατασκευή των ασυμμετριών του Θεόδωρου με Γνώμονες έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

-ένας **Γνώμονας,** μέσω του επιχειρήματος που χρησιμοποιείται στην **Πρόταση XIII.3** των *Στοιχείων* είναι χρήσιμος στον περιορισμό του υπολογισμού του ανθυφαιρετικού πηλίκου, στο Λήμμα που ακολουθεί, δύο τμημάτων γραμμών a και b, που συνδέονται με ισότητα του τύπου Γνώμων = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο,
στον υπολογισμό ενός ανθυφαιρετικού πηλίκου στην απλή περίπτωση του τύπου $w^2 = Dr^2$ (όπου D είναι ένας **μη** τετραγωνικός αριθμός και w, r είναι τμήματα γραμμής).

-Γνώμονες χρησιμοποιούνται, σε κάθε βήμα της Πρότασης που ακολουθεί, κατά τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούνται Γνώμονες στην **σύμμετρη εκδοχή της εφαρμογής των χωρίων** (**Πρόταση VI.29** των *Στοιχείων*), δηλαδή ο Γνώμων (του τύπου ba/2+bc+ba/2, με c, b σύμμετρα) εξισώνεται με ένα Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο R (με R, a^2 σύμμετρα).

-καμία θεωρία για τους λόγους των μεγεθών δεν εφαρμόζεται, πέρα από τη σύμμετρη, καθώς στην πραγματικότητα, **η διατήρηση του σχήματος των Γνωμόνων** (στο τελικό τμήμα της απόδειξης της Πρότασης, που ακολουθεί) είναι πρόδρομος του Κριτηρίου του Λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης. Και η δική μας ανακατασκευή των αποδείξεων του Θεόδωρου είναι τέτοια που υποδηλώνει ότι οι μελετητές του Θεόδωρου είχαν πράγματι προαναγγείλει τη θεωρία των αναλογιών του Θεαίτητου (a:b = c:d) που χαρακτηρίζεται από της ισότητα της ανθυφαίρεσης (Ανθ(a, b)=Ανθ(c, d) [53].

-Στην μέθοδο που εμείς εφαρμόζουμε, γνώμονες και ασυμμετρία συνδέονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που ο Πρόκλος συνδέει τους Γνώμονες με την ασυμμετρία.**:** στην ασυμμετρία υπάρχει **μία άπειρη φθίνουσα ακολουθία Γνωμόνων**[54]; και,

-όσον αφορά τους Γνώμονες, οι δικές μας ανακατασκευές και στο Λήμμα και στην Πρόταση συνεπάγονται 'τμήση και αναδιάταξη ορθογώνιων παραλληλόγραμμων περιοχών και όχι άλγεβρα με την σύγχρονη έννοια του όρου', όπως υπαινίσσεται ο Fowler, όχι διαφορετικά από τη μέθοδο του *Meno*[55].

Θα παρουσιάσουμε την ανακατασκευή που προτείνουμε με τον υπολογισμό της ανθυφαίρεσης, καθώς και μία απόδειξη της ασυμμετρίας που προκύπτει, των a, b, για $a^2 = 19b^2$, η πρώτη σημαντική περίπτωση την οποία ο Θεόδωρος απέφυγε να κάνει στο μάθημά του[56]. Όπως επεσήμαναν παλαιότεροι συγγραφείς (λ.χ. ο van der Waerden), αυτός ο υπολογισμός είναι ουσιαστικά πιο περίπλοκος από όλες τις περιπτώσεις για μικρότερο N, και για αυτόν τον λόγο το

[53] Πρβλ Knorr [K], σελ. 126, ο οποίος δηλώνει 'it would certainly be neat if Theodorus' researches had foreshadowed Theaetetus Ανθyphairetic theory', αλλά δεν πιστεύει ότι συνέβη.
[54] Πρβλ καταληκτικά σχόλια, παρακάτω.
[55] *Meno* 84d3-85b7
[56] *Θεαίτητος* 147 d 'πως ἐνέσχετο'. O Knorr ([K] Κεφάλαιο III) διαβάζει αυτές τις λέξεις θεωρώντας ότι σημαίνουν πως ο Θεόδωρος σταμάτησε επειδή αντιμετώπισε δυσκολία στην περίπτωση N=17. Το γεγονός ότι πρόκειται για μία εξαιρετικά απλή ανθυφαίρεση, στην πραγματικότητα παρέχει επιχείρημα κατά της ανθυφαιρετικής ανακατασκευής. Ανάλογα, η μη ανθυφαιρετική του ανακατασκευή συναντά κάποια δυσκολία στο N=17 ([K], Κεφάλαιο VI). Αλλά υπάρχουν ενστάσεις στην ανάγνωση του Knorr καθώς 'μέχρι το X' σχεδόν πάντοτε σημαίνει 'μέχρι του X συμπεριλαμβανομένου'. O ανώνυμος σχολιαστής στον *Θεαίτητο* κατ επανάληψη αντικαθιστά το 'ἐνέσχετο' με το 'heste' (απλώς 'σταμάτησε') στο N=17.

N=17 αποτελεί ένα βολικό σημείο στο οποίο και σταματά ο Θεόδωρος, χωρίς να σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι η μέθοδός του δεν μπορούσε να προχωρήσει παραπέρα..

Πρόταση: Έστω a, b τμήματα γραμμών, τέτοια ώστε $a^2 = 19b^2$.
Τότε Ανθ(a, b) = $[4, \overline{2,1,3,1,2,8}]$ και τα a, b είναι ασύμμετρα.

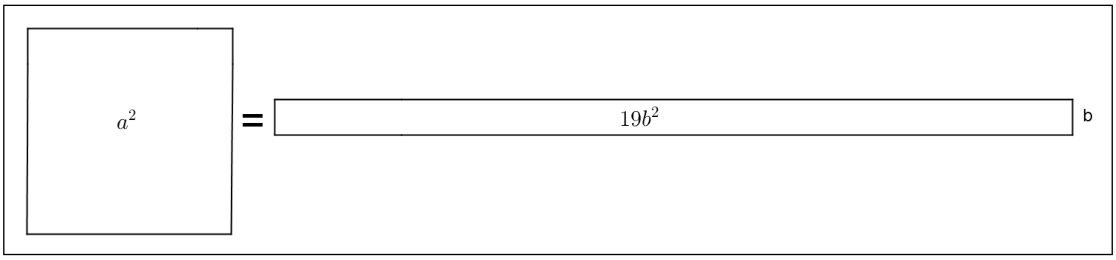
1. Πρώτο μέρος της απόδειξης της Πρότασης.

Βήμα 1

[1a]

Η αρχική εξίσωση είναι η εξίσωση ενός τετραγώνου με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Τετράγωνο a^2=	
	Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο $19b^2$



Σχήμα 1a

[1d]

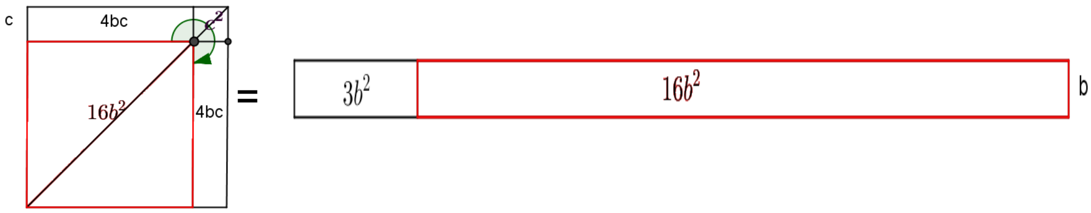
Διαιρούμε το a με το b, χρησιμοποιώντας $4^2 < 19 < (4+1)^2$, επομένως k = 4.
Το αποτέλεσμα είναι:

$$\mathbf{a = 4b + c, \quad c < b.}$$

Βήμα 2

[2a]

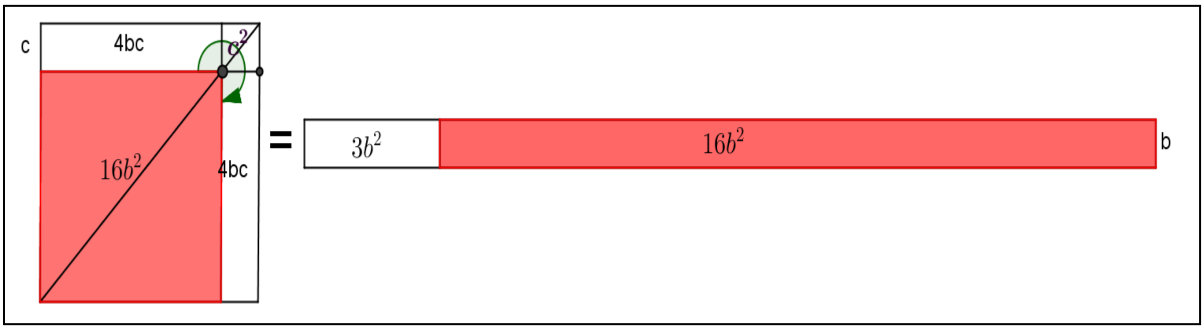
Η διαίρεση του a στο 4b + c προκαλεί, βάσει της Πρότασης ΙΙ. 4,
διαίρεση του τετραγώνου με πλευρά a
σε τετράγωνο $16b^2$ με πλευρά 4b συν τον Γνώμονα $4bc + c^2 + 4bc$.



Σχήμα 2a

[2b]

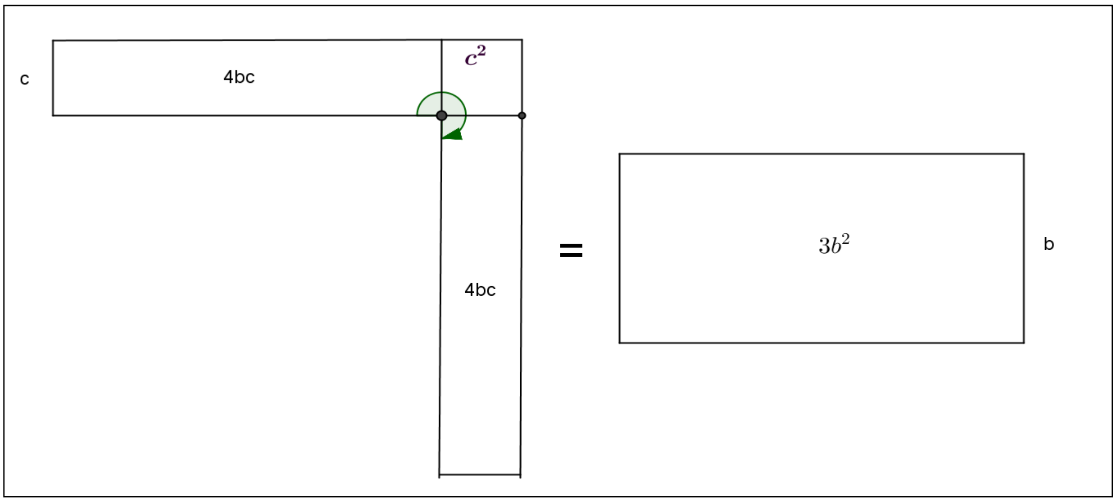
Αφαιρούμε και από τις δύο πλευρές του [2a] δεκαέξι τετράγωνα b^2.



Σχήμα 2b

[2c]

Το αποτέλεσμα του [2b] είναι:



Σχήμα 2c

Τώρα έχουμε αντικαταστήσει την αρχική ισότητα $a^2 = 19b^2$ με μία (σύμμετρη) παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή:

(Γνώμων 2) $4bc+c^2+4bc=$	
	(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 2) $3b^2$

[2d]

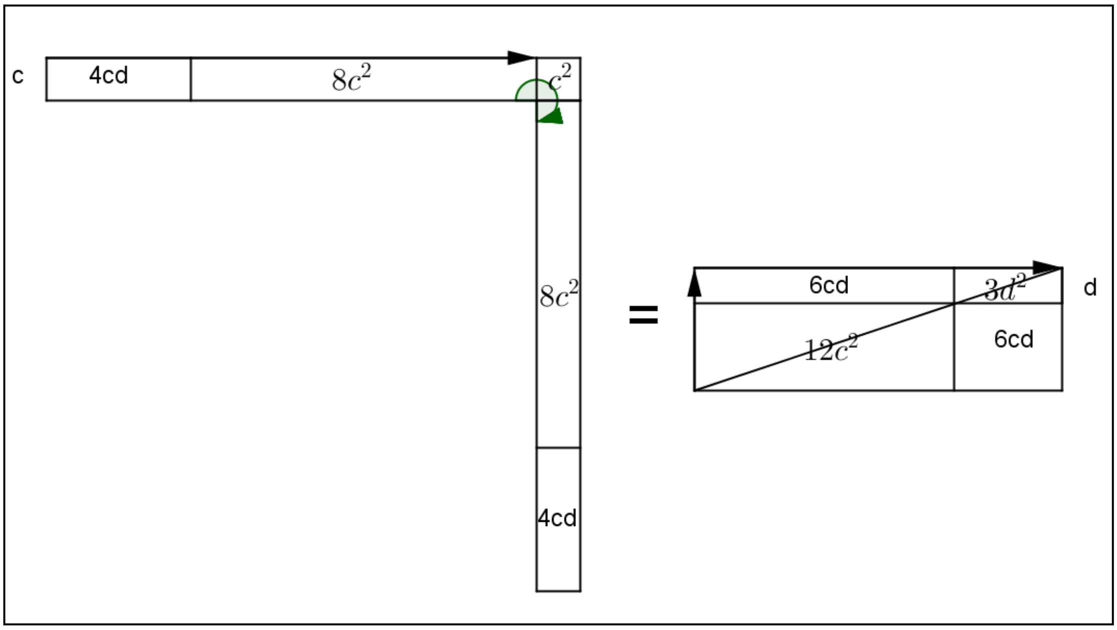
Ωστόσο, από την ισότητα
(Γνώμων 2) = (Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 2)
δεν είναι σαφές πως θα βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης του b δια c.
Σκοπός είναι να φέρουμε την ισότητα
(Γνώμων 2) = (Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 2),
$8bc + c^2 = 3b^2$,
σε μία ισοδύναμη εύχρηστη ισότητα του τύπου
$W^2 = Dr^2$.
Προς αυτήν την κατεύθυνση,
(α) πολλαπλασιάζοντας με 3 και τα δύο μέλη, έχουμε:
$3^2b^2 = 3b8c + \cdot 3c^2$,οπότε
$3b\cdot(3b - 8c) = 12\cdot(c/2)^2$.
(β) έχουμε δώσει στην ισότητα

(Γνώμων 2) = (Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 2)
τέτοια μορφή στην οποία να είναι δυνατή η εφαρμογή της πρότασης ΙΙ.6, ή μιας παραλλαγής της Πρότασης XIII.3 των *Στοιχείων*.
Μεγάλο τετράγωνο $(3b\text{-}8c/2)^2$ = Μικρό τετράγωνο $(8c/2)^2$ + Γνώμων, όπου ο Γνώμων ισούται με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $3b\cdot(3b\text{-}8c)$.
Έτσι τελικά, από τα (α) και (β) προκύπτει
(γ) $(3b\text{-}8c/2)^2 = (8c/2)^2 + 12\cdot(c/2)^2$, δηλαδή $(3b\text{-}4c)^2 = 76(c/2)^2$
Με αυτόν τον τρόπο έχουμε αναγάγει την ισότητα
(Γνώμων 2) = (Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 2)
στη τετραγωνική μορφή (γ), του τύπου
$W^2 = Dr^2$,
στην οποία το ανθυφαιρετικό πηλίκο είναι προφανές:
$8c/2 < 3b – 4c < 9c/2$, επομένως $16\cdot c < 6\cdot b < 17\cdot c$.
Γίνεται τελικά σαφές ότι:
(δ) $b = 2c + d$, με $d < c$.

Βήμα 3

[3a]

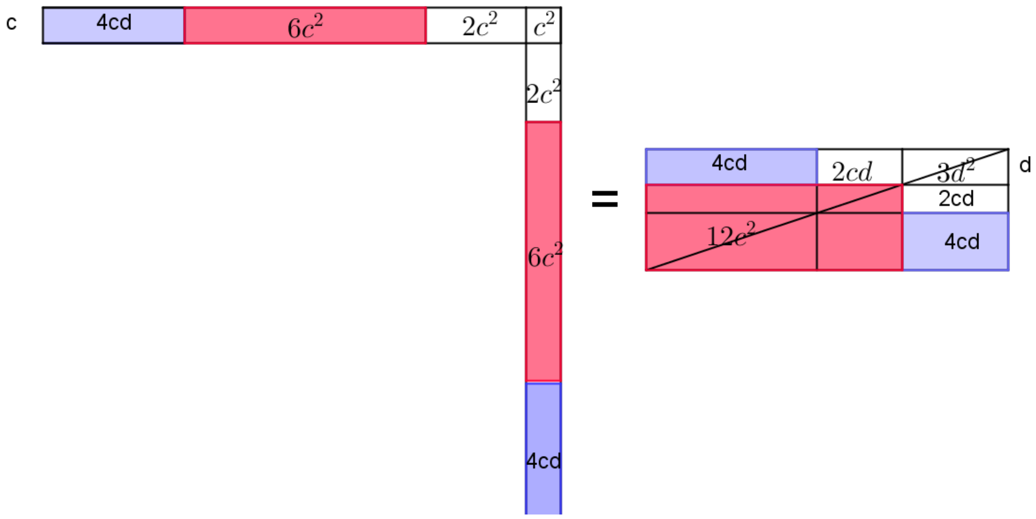
Η διαίρεση του b σε d + 2c στο γνώμονα και σε 2c + d στο ορθογώνιο όπως προκύπτει στο [2d], συνεπάγεται, βάσει των Προτάσεων II.4 και II.1,
μια διαίρεση του (Γνώμονα 2) και του (Ορθογώνιου Παραλληλόγραμμου 2).
Το αποτέλεσμα είναι:



Σχήμα 3a

	12 τετράγωνα c^2 + Γνώμων $6cd+3d^2+6cd$ =
$4cd+(8c^2+c^2+8c^2)+4cd$	

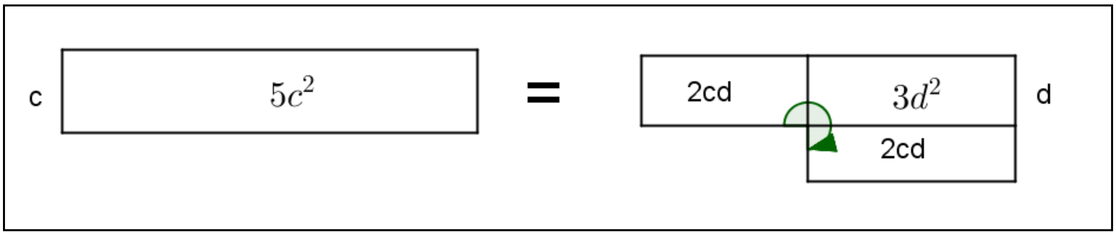
Αφαιρούμε και από τις δύο πλευρές του [3a]
δώδεκα τετράγωνα c^2 και τα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα 4cd·



Σχήμα 3b

[3c]

Το αποτέλεσμα αυτής της αφαίρεσης [3b] είναι:



Σχήμα 3c

	(Γνώμων 3) 2cd + 3d^2 + 2cd=
(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 3) 5c^2	

[3d]

Σκοπός της παραπάνω διαδικασίας είναι να μετατρέψουμε την ισότητα
(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο3) = (Γνώμων3),
$5c^2 = 4cd+3d^2$,
σε ισοδύναμη εύχρηστη ισότητα του τύπου $W^2 = Dr^2$.
Προς αυτήν την κατεύθυνση,
(α) πολλαπλασιάζοντας με 5 και τα δύο μέλη, έχουμε:
$5^2c^2 = 5c4d + 15d^2$, δηλαδή $5c(5c – 4d) = 60(d/2)^2$.

(β) Τώρα έχουμε τροποποιήσει την ισότητα
(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο3) = (Γνώμων3)
έτσι ώστε να είναι εφικτή η εφαρμογή της πρότασης II.6,
ή μιας παραλλαγής της Πρότασης XIII.3 των *Στοιχείων*.
Μεγάλο τετράγωνο $(5c – 4d/2)^2$ = Μικρό τετράγωνο $(4d/2)^2$ + Γνώμων,
όπου ο Γνώμων ισούται με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $5c(5c – 4d)$.
Τέλος, κατά αυτόν τον τρόπο, από τα (α) και (β) προκύπτει,

(γ) $(5c – 2d)^2 = 76·(d/2)^2$.

Έχουμε έτσι αναγάγει την ισότητα
(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 3) = (Γνώμων 3)
στην τετραγωνική μορφή (γ), του τύπου
$W^2 = Dr^2$,
όπου το ανθυφαιρετικό πηλίκο είναι εμφανές:

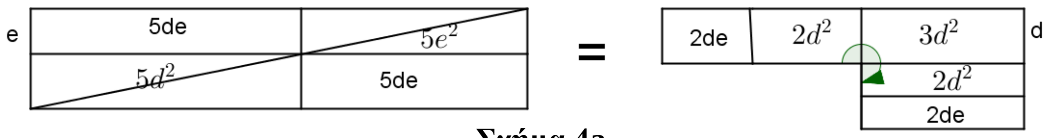
$8d/2 < 5c – 2d <·9d/2$, επομένως $12d <10c <13d$.
Τέλος, είναι σαφές ότι

(δ) $c = d + e$, με $e < d$·

Βήμα 4

[4a]

Αντικαθιστούμε το c στο [3c], με το [3d], και υπολογίζουμε κατά ΙΙ·4 και ΙΙ·1.
Το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης είναι το εξής:

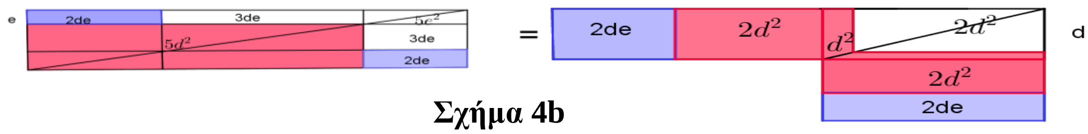


Σχήμα 4a

(5 τετράγωνο d^2) + Γνώμων $5de+5e^2+5de$ =	
	$2de+(2d^2+3d^2+2d^2)+2de$

[4b]

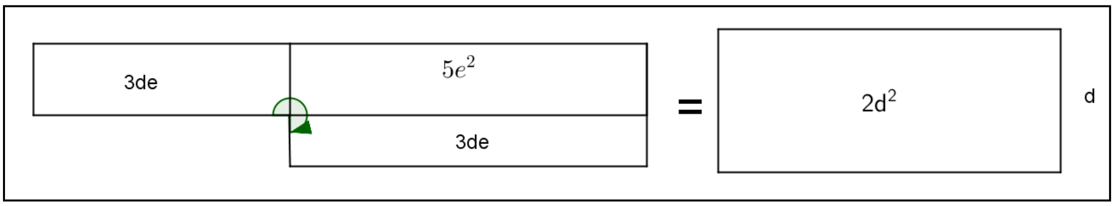
Αφαιρούμε και από τις δύο πλευρές του [4a]
πέντε τετράγωνα d^2 και δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα 2de



Σχήμα 4b

[4c]

Το αποτέλεσμα αυτής της ενέργειας [4b] είναι:



Σχήμα 4c

(Γνώμων 4) $3de+5e^2+3de$=	
	(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 4) $2d^2$

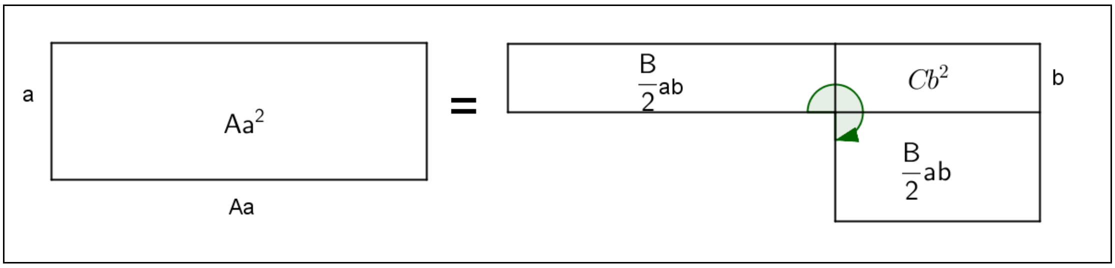
2. Υπολογισμός του ανθυφαιρετικού πηλίκου για σύμμετρες εφαρμογές χωρίων καθ' υπερβολή.

Το Λήμμα που ακολουθεί τυποποιεί τη μέθοδο η οποία εφαρμόστηκε στις δύο παραπάνω περιπτώσεις για τον υπολογισμό του ανθυφαιρετικού πηλίκου των δύο τμημάτων γραμμών ικανοποιώντας την ισότητα
$h = g$,
μία σύμμετρη ισότητα του τύπου
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο = Γνώμων.

Ξεκινάμε με μία εφαρμογή χωρίων καθ' υπερβολή, υπό τη μορφή
ισότητας ενός Ορθογώνιου Παραλληλόγραμμου με ένα Γνώμονα,
όπου όλοι οι συσχετισμοί είναι σύμμετροι.
Η εν λόγω ισότητα μεταμορφώνεται με εφαρμογή γνώμονα, μιμούμενη το επιχείρημα της Πρότασης XIII.3 (και II.6) των *Στοιχείων*, σε μία ισότητα του τύπου
$w^2 = Dr^2$,
στην οποία η ανθυφαιρετική σχέση μεταξύ των w και r είναι **εύκολα** υπολογίσιμη:
$w = Jr + z$, $z < r$ (αντίστοιχα, $J \cdot r \leq w < (J+1) \cdot r$) αν και μόνο αν $J^2 \leq D < (J+1)^2$.
Απαιτούνται απλά βήματα για την μετατροπή της στην απαιτούμενη ισότητα.
Εκτός από την εφαρμογή της χρήσης των Γνωμόνων στα *Στοιχεία*, οι σχετικοί υπολογισμοί είναι εμφανείς και από τα γεωμετρικά διαγράμματα.
Το Λήμμα διατυπώνεται σε γενικευμένη μορφή.
Δεν υποθέτουμε απαραίτητα ότι ο Θεόδωρος κατείχε απόδειξη της γενικής αυτής περίπτωσης.
Αντ' αυτού, ίσως να επιτύγχανε χωριστά κάθε μία εκ των ειδικών περιπτώσεων του λήμματος, που χρειάζονταν.

Λήμμα.
Έστω A, B, C αριθμοί και a, b ευθύγραμμα τμήματα, με a > b, ώστε

Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο Aa^2 =	
	Γνώμων $Bab/2+Cb^2+Bab/2$,

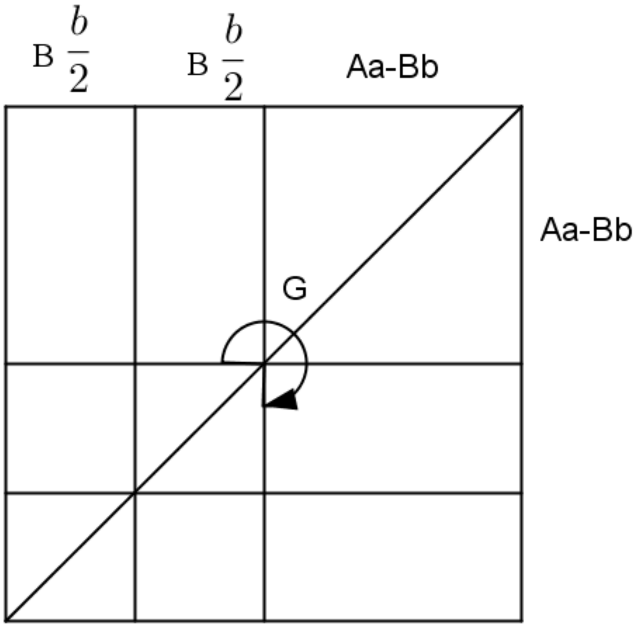


Σχήμα 1

ορίζουμε
το **J** ως το μοναδικό φυσικό αριθμό, ώστε
$\mathbf{J^2 \leq B^2 + 4AC < (J+1)^2}$,
και το **k** ως το μοναδικό φυσικό αριθμό, ώστε
$\mathbf{2Ak \leq J+B < 2A(k+1)}$.
Τότε
$\mathbf{a = kb + c}$, με $\mathbf{c < b}$·

Απόδειξη.
Όπως και στις δύο ειδικές περιπτώσεις που πραγματευόμαστε, θέλουμε να μετατρέψουμε την ισότητα ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου R με ένα Γνώμονα G,
σε τετραγωνική ισότητα του τύπου $W^2 = Dr^2$, για την οποία το ανθυφαιρετικό πηλίκο να είναι εμφανές.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με A οπότε έχουμε:
$A^2a^2 = AaBb + ACb^2$, δηλαδή
(α) $Aa(Aa - Bb) = 4AC\cdot(b/2)^2$.
Είμαστε σε θέση πλέον, να εφαρμόσουμε την πρόταση II.6,
ή μια ανάλογη της Πρότασης XIII.3 των *Στοιχείων*, στο τετράγωνο με πλευρά (Aa – Bb/2).



Σχήμα 2

Έχουμε

(β) Μεγάλο τετράγωνο $(Aa - Bb/2)^2$ = Μικρό τετράγωνο $(Bb/2)^2$ + Γνώμων

(γ) Γνώμων G = ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Aa(Aa – Bb).

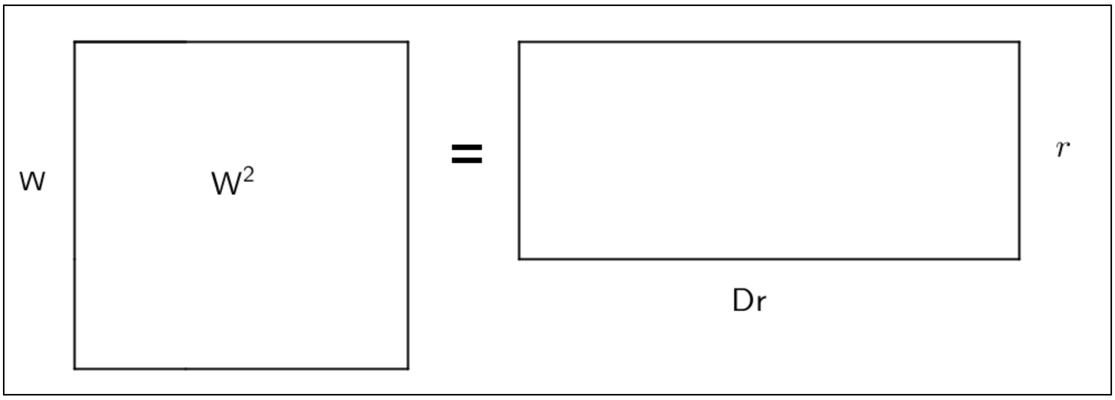
Εκ των (α), (β) και (γ), προκύπτει (δ) $(Aa - Bb/2)^2 = (B^2+4AC)\cdot(b/2)^2$.

Σημείωση. Παρατηρείται ότι η διαδικασία που εφαρμόστηκε
στο μέσο και άκρο λόγο $a^2 = ab + b^2$
(η περίπτωση A = B = C = 1, από την οποία προκύπτει $B^2 + 4AC=5$) δίνει
$(a-b/2)^2 = 5(b/2)^2$, ισοδύναμα $(2a-b)^2 = 5b^2$.
Δεδομένου ότι στο ζεύγος a + b, το a επίσης βρίσκεται σε άκρο και μέσο λόγο, η Πρόταση XIII .3 των *Στοιχείων* είναι η ειδική περίπτωση του παραπάνω επιχειρήματος για τον μέσο και άκρο λόγο.
Ορίζουμε

w = Aa – Bb/2	
	r = b/2 και $D = B^2 + 4AC$

και η αρχική ισότητα
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο = Γνώμων
ανάγεται σε τετραγωνική ισότητα

$w^2=$	
	$Dr^2\cdot$



Σχήμα 3

Το μεγάλο πλεονέκτημα της τετραγωνικής ισότητας (δ) έναντι της αρχικής ισότητας
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο = Γνώμων
συνίσταται στο ότι το ανθυφαιρετικό πηλίκο J μεταξύ των w και r

$w=Jr+z$, $z<r$ (ισοδύναμα, **$Jr \leq w < (J+1)r$**)

είναι **εύκολα και άμεσα εμφανές**:
$J^2 \leq D < (J+1)^2$·
Οι ανισότητες οι οποίες προκύπτουν από το (δ) επιτρέπουν
τον απλό υπολογισμό του πηλίκου k του a δια του b.
Από τα παραπάνω, με αντικατάσταση των w και r, έχουμε:
$Jb/2 \leq Aa - Bb/2 < (J+1)b/2$,
δηλαδή, $(J+B)\cdot b \leq 2A\cdot a < (J+B+1)\cdot b$.
Έτσι, $(J+B)/2A \leq a/b < (J+B+1)/2A$.

Ωστόσο είναι σαφές, με απαγωγή σε άτοπο, ότι
δεν υπάρχει κανένας φυσικός αριθμός μεταξύ των $(J+B)/2A$ και $(J+B+1)/2A$, έτσι
$k/1 \leq (J+B)/2A \leq a/b < (J+B+1)/2A \leq (k+1)/1$.
Έπεται ότι: **$kb \leq a < (k+1)b$**.
Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος.

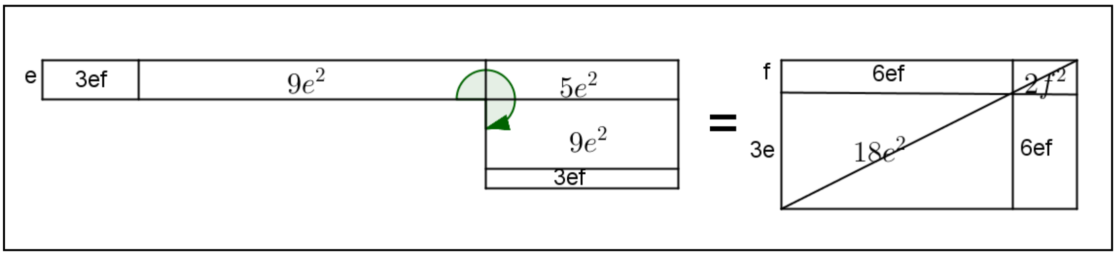
3. Ολοκλήρωση της απόδειξης της Πρότασης.

Οι Γνώμονες χρησιμοποιούνται
(α) για τον υπολογισμό του πηλίκου σε κάθε βήμα από το Λήμμα
(με εφαρμογή του επιχειρήματος με **γνώμονα** της Πρότασης II.6 ή XIII .3),
(β) για την αναδιάταξη χωρίων (με εφαρμογή των Προτάσεων II .1 & 4),
ώστε στα πλαίσια της ανθυφαιρετικής αντικατάστασης από μία ανισότητα του τύπου
Γνώμων=Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο,
να μεταβαίνουμε σε μια ισότητα του τύπου
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο = Γνώμων;
(γ) για τον ισχυρισμό ότι
η διατήρηση του σχήματος των Γνωμόνων
συνεπάγεται περιοδικότητα, και
(δ) για τον τελικό ισχυρισμό ότι η περιοδικότητα συνεπάγεται την ύπαρξη μιας
άπειρης φθίνουσας ακολουθίας Γνωμόνων,
όπου σύμφωνα με την Πρόταση X.2 συνεπάγεται **ασυμμετρία**.

[4d] d = 3e +f, f<e
(χρησιμοποιώντας το [4c] και το Λήμμα)**.**

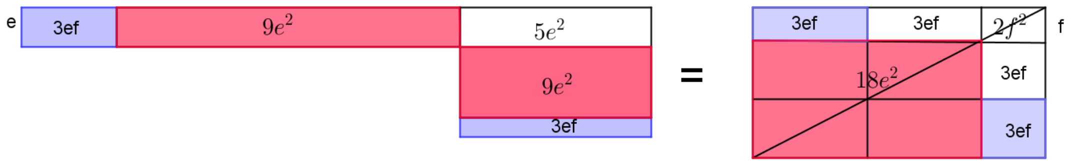
Βήμα 5
[5a]
Έχουμε αντικαταστήσει d σε [4c], από [4d], και υπολογίζουμε από II.4 και II.1.
Το αποτέλεσμα είναι

	18 τετράγωνα e^2 + Γνώμων $6ef+2f^2+6ef=$
$(3ef+9e^2)+5e^2+(9e^2+3ef)=$ $3ef+(9e^2+5e^2+9e^2)+3ef$	



Σχήμα 5a

[5b]
Θα αφαιρέσουμε και από τις δύο πλευρές του [5α]
18 τετράγωνα e^2 και δύο ορθογώνια 3ef.

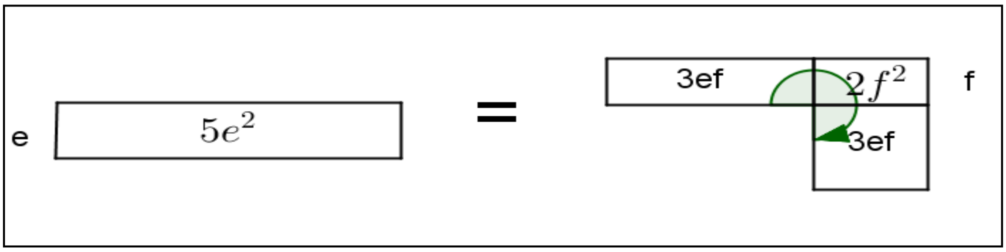


Σχήμα 5b

[5c]

Το αποτέλεσμα της [5b] είναι:

	(Γνώμων 5) 3ef+2f^2+3ef=
(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 5) 5e^2	



Σχήμα 5c

[5d]

Έχουμε διαιρέσει το e με f, χρησιμοποιώντας το Λήμμα για την υπόθεση [5c]
A = 5, B = 6, C = 2.
Ο αριθμός D, έτσι ώστε $D = B^2 + 4AC = 36 + 4.5.2$ είναι D = 76,
ο αριθμός J, έτσι ώστε $J^2 \leq 76 < (J + 1)^2$, είναι J = 8, και
ο αριθμός k, έτσι ώστε $2.5k \leq 8 + 6 < 2.5\ (k + 1)$, δηλαδή $10k \leq 14 < 10\ (k + 1)$, είναι
k = 1.
Το αποτέλεσμα είναι

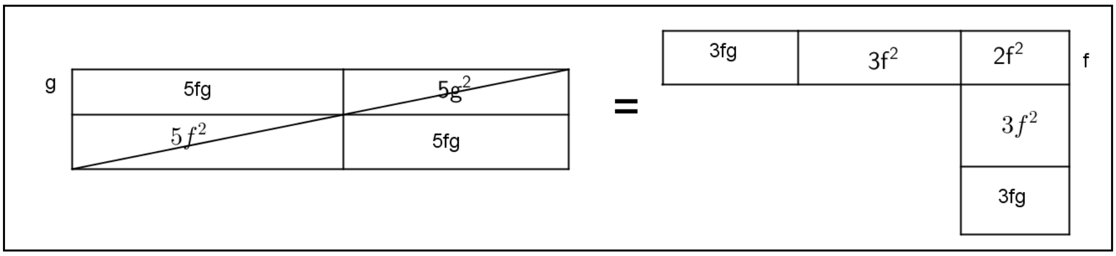
e=f+g, g<f.

Βήμα 6

[6a]

Έχουμε αντικαταστήσει το e στο [5c], από [5d], και υπολογίζουμε από ΙΙ.4 και ΙΙ.1.
Το αποτέλεσμα είναι:

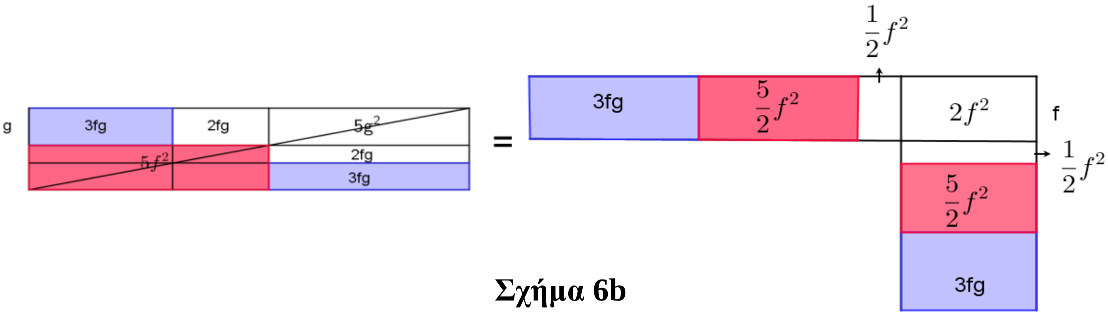
	(3fg+3f^2)+2f^2+(3f^2+3fg)= 3fg+(3f^2+2f^2+3f^2)+3fg
5f^2+ Γνώμων 5fg+5g^2+5fg	



Σχήμα 6a

[6b]

Θα αφαιρέσουμε και από τις δύο πλευρές του [6α]
5 τετράγωνα f^2 και δύο ορθογώνια 3fg

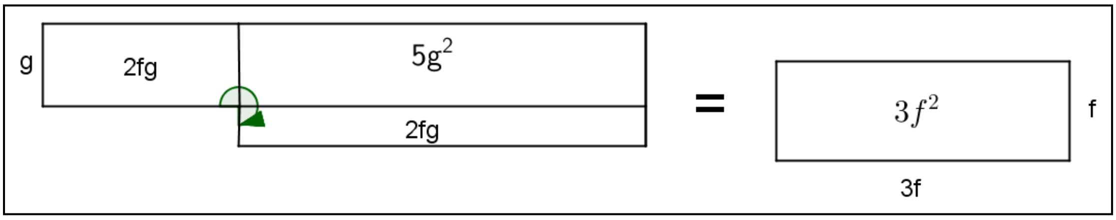


Σχήμα 6b

[6c]

Το αποτέλεσμα της [6b] είναι:

	(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 6) $3f^2$
(Γνώμων 6) $2fg+5g^2+2fg$	



Σχήμα 6c

[6d]

Διαιρούμε το f με g, χρησιμοποιώντας το Λήμμα για την υπόθεση [6c]
A = 3, B = 4, C = 5.
Ο αριθμός D, έτσι ώστε $D = B^2 + 4AC = 16 + 4.3.5$ είναι $D = 76$,
ο αριθμός J, έτσι ώστε $J^2 \leq 76 < (J + 1)^2$, είναι J = 8, και
ο αριθμός k, έτσι ώστε $2.3k \leq 8 + 4 < 2.3\,(k + 1)$, δηλαδή $6k \leq 12 < 6\,(k + 1)$,
είναι k = 2.
Το αποτέλεσμα είναι:

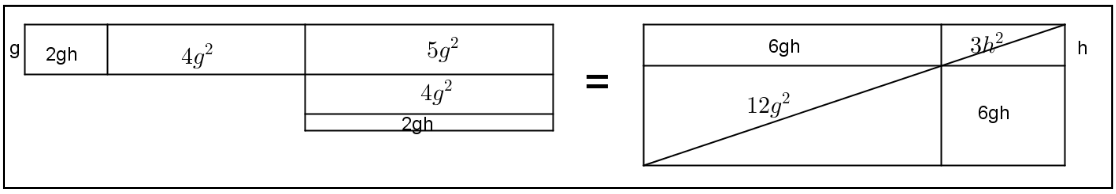
f=2g+h,   h<g.

Βήμα 7

[7a]

Έχουμε αντικαταστήσει το f στο [6c], από [6d], και υπολογίζουμε από ΙΙ.4 και ΙΙ.1.
Το αποτέλεσμα είναι:

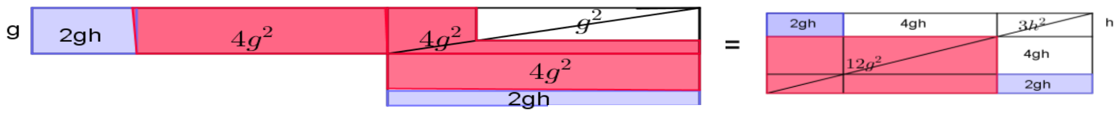
	3(τετράγωνα $4g^2$)+ $6gh+3h^2+6gh$
$2(h+2g)g+5g^2+2(2g+h)g=$ $(2hg+4g^2)+5g^2+(4g^2+2hg)=$ $2hg+(4g^2+5g^2+4g^2)+2hg$	



Σχήμα 7a

[7b]

Θα αφαιρέσουμε και από τις δύο πλευρές του [7a]
12 τετράγωνα g^2 και δύο ορθογώνια 2fg.

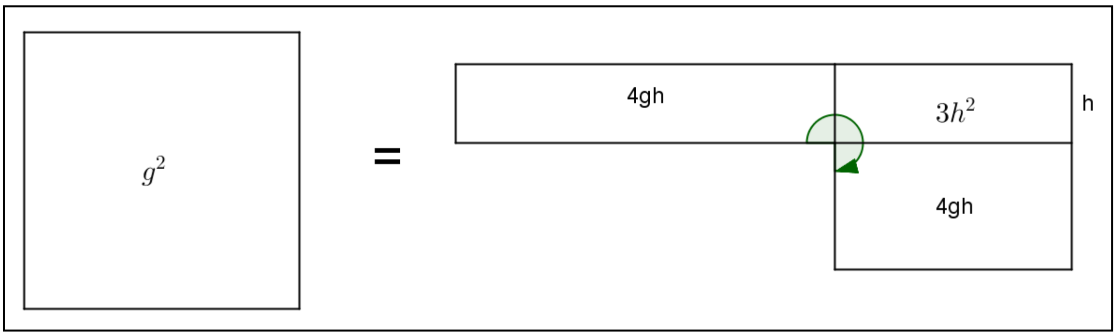


Σχήμα 7b

[7c]

Το αποτέλεσμα της [7b] είναι:

	(Γνώμων 7) $4gh+3h^2+4gh$
(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 7) g^2	



Σχήμα 7c

[7d]

Διαιρούμε το g με h, χρησιμοποιώντας το Λήμμα για την υπόθεση [7c]
A = 1, B = 8, C = 3.
Ο αριθμός D, έτσι ώστε $D = B^2 + 4AC = 64 + 4.1.3$ είναι D = 76,
ο αριθμός J, έτσι ώστε $J^2 \leq 76 < (J + 1)^2$, είναι J = 8, και
ο αριθμός k, έτσι ώστε $2.1k \leq 8 + 8 < 2.1\ (k + 1)$, δηλαδή $2k \leq 16 < 2\ (k + 1)$, είναι k = 8.
Το αποτέλεσμα είναι:

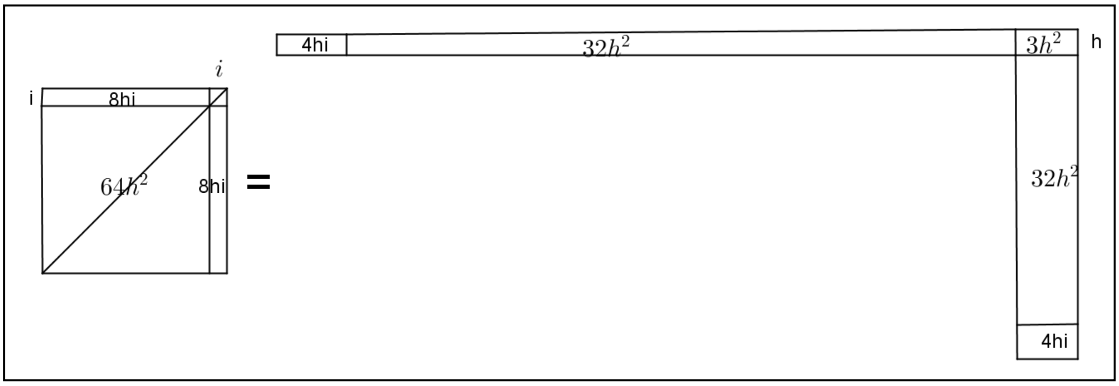
$g=8h+i$, $i<h$.

Βήμα 8

[8a]

Έχουμε αντικαταστήσει το g στο [7c], από [7d], και υπολογίζουμε από II·4 και II·1.
Το αποτέλεσμα είναι:

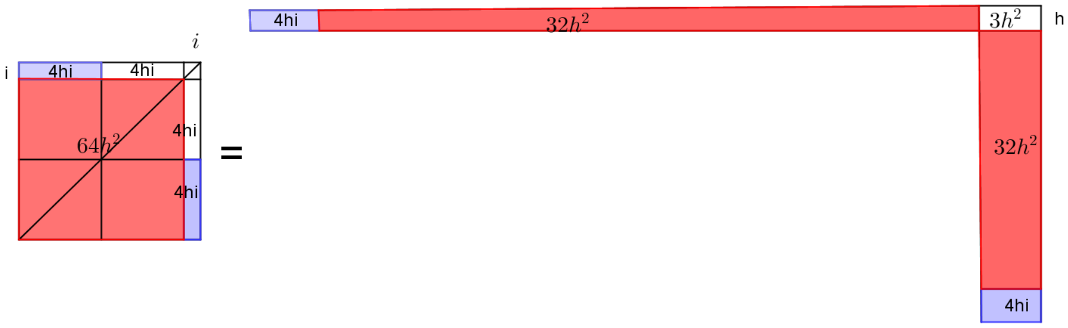
	$4(i+8h)h+3h^2+4(8h+i)h=$ $(4ih+32h^2)+3h^2+(32h^2+4ih)=$ $4ih+(32h^2+3h^2+32h^2)+4ih$
$64h^2+$ Γνώμων $8hi+i^2+8hi$	



Σχήμα 8a

[8b]

Θα αφαιρέσουμε και από τις δύο πλευρές του [8a]
64 τετράγωνα h^2 και δύο ορθογώνια 4hi.

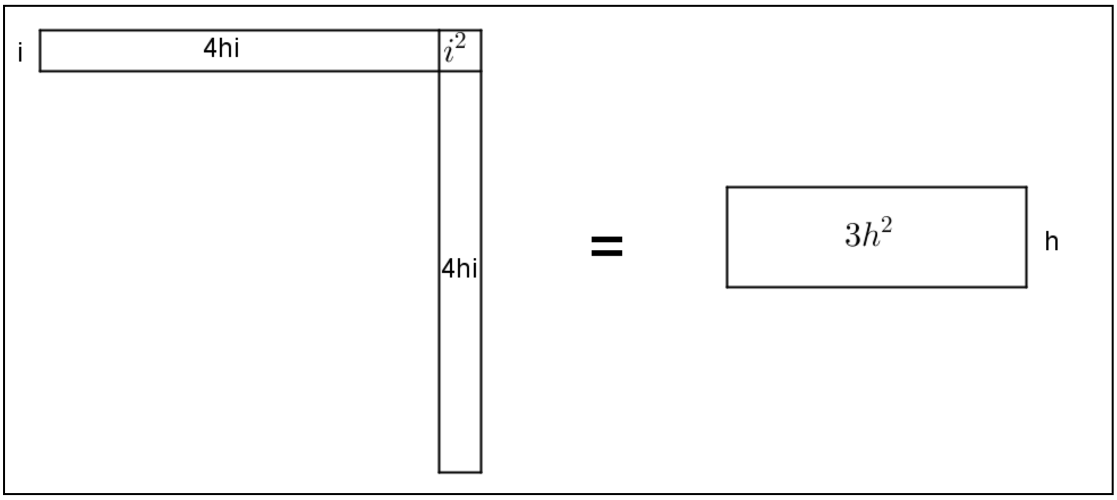


Σχήμα 8b

[8c]

Το αποτέλεσμα είναι:

	$3h^2$
Γνώμων $4hi+i^2+4hi$	



Σχήμα 8c

Βήμα 9 (Διατήρηση του σχήματος των Γνωμόνων)

Βάσει του [8c] το ζεύγος το γραμμών h > i ικανοποιεί την ισότητα

Γνώμων (με σταθερές B = 8, C = 1) = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο (με σταθερά A=3).

Αλλά κατά το [2c], το ζεύγος γραμμών b > c ικανοποιεί την ίδια ισότητα

Γνώμων (με σταθερές B = 8, C = 1) = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο (με σταθερά A = 3).

Το σχήμα του Γνώμονα στο βήμα 8
είναι το ίδιο με
το σχήμα του Γνώμονα στο βήμα 2,
και έχουμε κατά αυτόν τον τρόπο
διατήρηση των Γνωμόνων.
Είναι συνεπώς σαφές, τόσο από την απόδειξη της Πρότασης όσο και από τα βήματα 2-8 της Πρότασης, ότι
Ανθ(h, i) = Ανθ(b, c).

Έχουμε επομένως δείξει ότι εάν $a^2 = 19b^2$, τότε
a = **4**b +c (βήμα 1d),
το ζεύγος γραμμών b > c ικανοποιεί την ισότητα

Γνώμων (με σταθερές B = 8, C = 1) = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο (με σταθερά A = 3)
(βήμα 2c),

b = **2**c + d (βήμα 2d),
c = **1**d + e (βήμα 3d),
d = **3**e + f (βήμα 4d),
e = **1**f + g (βήμα 5d),
f = **2**g + h (βήμα 6d),
g = **8**h +i (βήμα 7d),

το ζεύγος των γραμμών h > i ικανοποιεί την ισότητα
Γνώμων (με σταθερές B = 8, C = 1) = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο (με σταθερά A = 3)
(βήματα 8c),

Ανθ(h, i) = Ανθ(b, c) (βήμα 9).

Επομένως η ανθυφαίρεση του a δια του b είναι τελικώς περιοδική, και μάλιστα

Ανθ(a, b) = [4, $\overline{2,1,3,1,2,8}$**].**

Η απόδειξη της ασυμμετρίας των a, b προκύπτει άμεσα από την τελική περιοδικότητα, εξ ου και το άπειρο, της ανθυφαίρεσης του a δια του b και την Πρόταση X.2 των *Στοιχείων*: εάν η ανθυφαίρεση του a δια b είναι άπειρη, τότε τα a, b είναι ασύμμετρα.

4. Τελικά Σχόλια.

Στην απόδειξη της Πρότασης **οι Γνώμονες εφαρμόζονται με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους,** συγκεκριμένα:

(α) ο υπολογισμός του ανθυφαιρετικού πηλίκου σε ισότητα του τύπου
Γνώμων G = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο R
(όπως οι Γνώμονες εμφανίζονται στη εφαρμογή χωρίων καθ’ υπερβολή στην Πρόταση VI.29)
γίνεται με χρήση του Λήμματος, και επομένως με χρήση **Γνώμονα**, όπως στην **Πρόταση XIII.3** των *Στοιχείων*
[βήματα 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d, 8d];

(β) μια ισότητα του τύπου
Γνώμων G = Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο R
(όπως οι Γνώμονες εμφανίζονται στην εφαρμογή χωρίων καθ’ υπερβολή στην **Πρόταση VI.29**)
μεταμορφώνεται, στα πλαίσια της ανθυφαιρετικής αντικατάστασης στην περίπτωση (α), σε ισότητα του τύπου
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο R “= Γνώμων G”;
(όπως οι Γνώμονες εμφανίζονται στην εφαρμογή χωρίων καθ’ υπερβολή στην **Πρόταση VI.29**)
[βήματα 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a κατά τις Προτάσεις II.4 και II.1;
2b, c, 3b, c, 4b, c, 5b, c, 6b, c, 7b, c, 8b, c εμφανή γεωμετρικά βήματα αφαίρεσης ισοδύναμων από ισοδύναμα]·

(γ) η περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης του a δια b προκύπτει από **τη διατήρηση του σχήματος των Γνωμόνων,** τον προάγγελο του Κριτηρίου του Λόγου, ειδικά εάν η σχετική αναλογία, σύμφωνα με τον ορισμό του Θεαίτητου νοείται ως ισοδύναμη ανθυφαίρεση [βήμα 9].

(δ) η ασυμμετρία του a προς το b, προκύπτει από το γεγονός ότι, λόγω του (γ),
δεν υπάρχει ελάχιστος Γνώμων, αλλά **μία άπειρη αυστηρώς φθίνουσα ακολουθία Γνωμόνων**
(έστω Γνώμων 2 > Γνώμων 4 > Γνώμων 6 >⋯),
ακριβώς όπως περιγράφεται από τον Πρόκλο στον *Ευκλείδη,*
καθώς η άπειρη φθίνουσα ακολουθία των Γνωμόνων συνεπάγεται το άπειρο της ανθυφαίρεσης του a προς το b (σύμφωνα με την **Πρόταση X .2** των *Στοιχείων*)·

Συμπερασματικά, η ανακατασκευή των αποδείξεων του Θεόδωρου για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες οι οποίες αναφέρονται από τον Πλάτωνα στο έργο του *Θεαίτητος* 147d στην οποία προβήκαμε έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:
-- κάνει χρήση των Γνωμόνων όπως χρησιμοποιούνται στην συμπλήρωση του τετραγώνου (Προτάσεις II .6 και XIII .3) για τον υπολογισμό του πηλίκου σε κάθε βήμα, και, για τη μετάβαση από το ένα ανθυφαιρετικό βήμα στο επόμενο, όπως χρησιμοποιούνται στην (σύμμετρη εκδοχή της) εφαρμογής των χωρίων (Πρόταση VI.29),
Κάνει εξολοκλήρου χρήση της Πυθαγόρειας αρχής της διατήρησης των Γνωμόνων για την επίτευξη της περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης και με αυτόν τον τρόπο κατορθώνει όχι μόνο να αποφύγει τη χρήση ασύμμετρων λόγων (σε αντίθεση με τις κλασσικές ανθυφαιρετικές ανακατασκευές, συμπεριλαμβανομένης και του Fowler), αλλά και να προμηνύσει την ανθυφαιρετική θεωρία των λόγων του Θεαίτητου.
-- παράγει ασυμμετρία, όχι επαληθεύοντας απλά την άπειρη ανθυφαίρεση κατά την Πρόταση X .2, αλλά παράγοντας μία άπειρη φθίνουσα ακολουθία Γνωμόνων όπως διατυπώνεται στο απόσπασμα του Πρόκλου.

Έτσι η ανακατασκευή στην οποία προβαίνουμε των αποδείξεων του Θεόδωρου, βασιζόμενη αποκλειστικά στους Γνώμονες, τα “αρχαϊκά”. Πυθαγόρεια γεωμετρικά εργαλεία, και χωρίς αναχρονιστικές μεταγενέστερες εξελίξεις εμφανίζεται ως η προτιμότερη ανακατασκευή, μεταξύ εκείνων που βασίζονται στην άπειρη ανθυφαίρεση, και ακόμη υποδηλώνεται, χωρίς να παγιώνεται, ότι η μέθοδος του Θεόδωρου είναι ανθυφαιρετική.

Βιβλιογραφία

[B] O· Becker, *Eudoxos-Studien I· Eine voreudoxische Proportionlehre und ihre Spuren bei Aristotles und Euklid*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung: Studien 2 (1933) 311-333·
[BL] I· G Bashmakova and A· I· Lapin, Pifagor, Kvant, no 1, 1986, p· 10 (in Russian)·
[CS] J· H· Conway and J· Shipman, *Extreme Proofs I: The Irrationality of* $\sqrt{2}$, Math· Intelligencer 35 (2013), 2-7·
[F] D· Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*, Second edition, Clarendon Press, Oxford, 1999·
[Fr] H· Freudenthal, *What is Algebra and What Has it Been in History,* Archive for History of Exact Sciences 16 (1977), pp· 189-200·
[vF] K· von Fritz, *Theodorus,* in Pauly Wissowa *Realencyclopaedie der Classischen Altertumwissenschaft* 10 (2), cols· 1811-1825, 1934·
[HW] G· H· Hardy and E·M·Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Clarendon Press, 1938·
[H] T· L· Heath, *The Thirteen Books of Euclid΄s Elements*, Second edition, Three volumes, Cambridge University Press, Cambridge, 1926·
[Ka] J·-P· Kahane, *La Theorie de Theodore des corps quadratiques reels*, L' Enseignement Mathematique 31 (1985) 85-92·
[K] W· R· Knorr, *The Evolution of Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*, Reidel, Dordrecht, 1975·
[M] G· R· Morrow, *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid΄s Elements, Translated, Introduction, Notes*, Princeton University Press, Princeton, 1970·
[U] S· Unguru, *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics,* Archive for History of Exact Sciences, 15 (1975), pp· 67-114·
[vdW] B· L· van der Waerden, *Science Awakening*, translation by A· Dresden of *Ontwakende Wetenschap* (1950), Noordhoff, Groningen, 1954·
[vdW1] B· L· van der Waerden, *Defense of a `Shocking' Point of View,* Archive for History of Exact Sciences 15 (1976), pp· 199-210·
[W] A· Weil, *Who Betrayed Euclid ?*, Archive for History of Exact Sciences, 19 (1978), pp· 91-93·
[Z] H· G· Zeuthen, *Sur la constitution des livres arithmetiques des Elements d΄ Euclide et leur rapport a la question de l' irrationalite*, Oversigt over det Kgl· Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 5 (1910) 395-435·

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

Κριτήριο λόγου για την περιοδική ανθυφαίρεση

Ανθυφαιρετικός ορισμός της αναλογίας μεγεθών[57]

Ο Αριστοτέλης, στο *Τοπικά* 158b-159a, ένα δικαίως ονομαστό και εξαιρετικά σπουδαίο για την ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών χωρίο, αναφέρεται σε μια περίοδο όπου δεν υπήρχε καμία αυστηρή θεωρία αναλογιών, ενώ στα *Μεταφυσικά* 987b25-988a1, δηλώνει κατηγορηματικά ότι οι Πυθαγόρειοι δεν ήταν εξοικειωμένοι με τη διαλεκτική και τους 'λόγους' (πρβλ. Becker [Be]). Στο ίδιο χωρίο των *Τοπικά*, ο Αριστοτέλης μας λέει ότι μια εξαιρετική για το μαθηματικό περιεχόμενό της (προ-Ευδόξια, πριν το Βιβλίο V των *Στοιχείων*) θεωρία λόγων μεγεθών ανακαλύφθηκε, που βασίζεται στον ακόλουθο

Ορισμός

Έστω a, b, c, d τέσσερα μεγέθη, με $a > b$, $c > d$·
η αναλογία $a / b = c / d$
ορίζεται από τη συνθήκη
Ανθ(a, b)= Ανθ(c, d).
Ο Αριστοτέλης στο χωρίο των *Τοπικά* δίνει μια σπουδαία συνέπεια αυτού του ανθυφαιρετικού ορισμού της αναλογίας: την ακόλουθη πρόταση, που ο Fowler [Fo] ονομάζει:

Η πρόταση Τοπικά

Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρείται σε λόγο a προς b, και A, B είναι δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με βάσεις a, b, αντίστοιχα, και κοινό ύψος ένα ευθύγραμμο τμήμα c κάθετο στα τμήματα a και b, τότε $A/B = a/b$.
Απόδειξη. Ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται, και είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο ισχυρισμός του είναι αληθής, ότι προφανώς
Ανθ(A,B)=Ανθ(a,b).

Μια εφαρμογή της Πρότασης των *Τοπικών* αποτελεί η Πρόταση VI.1[58] στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, και είναι καίριας σημασίας για την εφαρμογή της θεωρίας αναλογιών του Ευδόξου, που αναπτύσσεται στο Βιβλίο V των *Στοιχείων*, στη γεωμετρική θεωρία της ομοιότητας. Η απόδειξη της Πρότασης των *Στοιχείων* βασίζεται στην Ευδόξεια θεωρία αναλογιών, αλλά η προτεινόμενη από τον Αριστοτέλη απόδειξη επιτρέπει σε μεγαλύτερη έκταση την ανάπτυξη του μεγαλύτερου μέρους του Βιβλίου VI των *Στοιχείων*, με βάση τον ανθυφαιρετικό ορισμό της αναλογίας.
Όπως θα δούμε παρακάτω ο Πλάτων χρησιμοποιεί έμμεσα ένα φιλοσοφικό ανάλογο της Πρότασης των *Τοπικά*- Πρόταση 4(γ1)- για να θεμελιώσει τη Συναγωγή του Σοφιστή.

Η Περιοδική Ανθυφαίρεση και το Κριτήριον του Λόγου

Μια άμεση συνέπεια του ανθυφαιρετικού ορισμού της αναλογίας είναι η ακόλουθη:
Πρόταση ('κριτήριο του λόγου' για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης). Η ανθυφαίρεση δύο ευθυγράμμων τμημάτων a, b, με $a > b$, με συμβολισμό όπως στον παραπάνω ορισμό και θέτοντας όπου $a=e_{-1}$, $b=e_0$, είναι τελικά περιοδική, με περίοδο από το βήμα $n+1$ στο βήμα m, αν υπάρχουν δείκτες n, m, με $n < m$, τέτοιοι ώστε $e_n / e_{n+1} = e_m / e_{m+1}$.

Πίνακας 2. Κριτήριο του Λόγου και Περιοδικότητα στη Γεωμετρική Ανθυφαίρεση

[57] Τα χωρία της παραγράφου είναι τα 5. και 6.
[58] Χωρίο 7.

Έστω a, b δύο μεγέθη (ευθύγραμμα τμήματα, επιφάνειες, στερεά), με a>b, με ανθυφαίρεση:

$a = I_0 b + e_1,$ με $b > e_1,$

$b = I_1 e_1 + e_2,$ με $e_1 > e_2,$

…

$e_{n-1} = I_n e_n + e_{n+1},$ με $e_n > e_{n+1},$

$\boxed{e_n = I_{n+1} e_{n+1} + e_{n+2},}$ με $e_{n+1} > e_{n+2},$

…

$e_{m-1} = I_m e_m + e_{m+1},$ με $e_m > e_{m+1},$

$\boxed{e_m = I_{m+1} e_{m+1} + e_{m+2},}$ με $e_{m+1} > e_{m+2},$

…

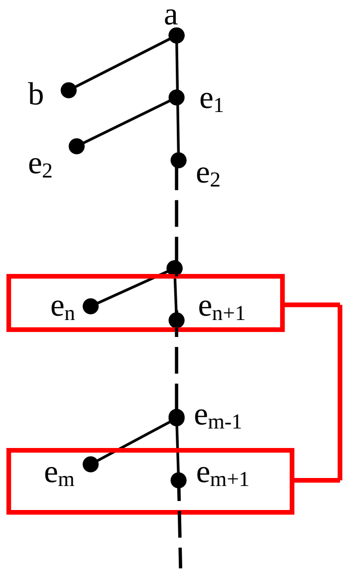
…….

έτσι ώστε για κάποιους δείκτες $n<m$ έχουμε

$\boxed{e_n/e_{n+1} = e_m/e_{m+1}}$ (Κριτήριον του Λόγου).

Τότε η ανθυφαίρεση του a προς το b είναι τελικά περιοδική, και, στην πραγματικότητα,
Ανθ(a, b)= $[I_0, I_1, \ldots, I_n, \overline{I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_m}]$

Πίνακας 3. Συντετμημένη Αναπαράσταση
του Κριτηρίου του Λόγου της Ανθυφαίρεσης του *a* προς *b*

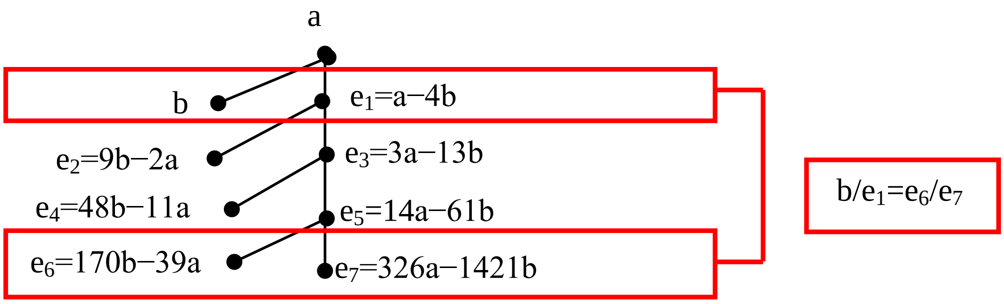


(η) Ανακατασκευή της απόδειξης των τετραγωνικών ασύμμετρων μέσω του Λόγου

Υπάρχουν ισχυρά επιχειρήματα, που δίνονται με λεπτομέρειες αλλού, τα οποία έπονται από:
(1) την προτροπή του Σωκράτη, στο *Θεαίτητος* 145c7-148e5, ότι η Διαίρεση και Συναγωγή μιμείται τη μαθηματική ανακάλυψη του Θεαίτητου σχετικά με τις ασυμμετρίες (πρβλ. (θ) παρακάτω),
(2) την ερμηνεία, της Διαίρεσης και Συναγωγής με όρους περιοδικής ανθυφαίρεσης, στην παρούσα εργασία (Ενότητες 3 και 4, παρακάτω), και
(3) την περιγραφή, στο *Θεαίτητος* 147d3-148b2[59], των μαθηματικών ανακαλύψεων από τους Θεόδωρο-Θεαίτητο με όρους Διαίρεσης και Συναγωγής, σύμφωνα με την οποία οι αποδείξεις των ασυμμετριών τετραγωνικών ριζών των 3,5,…, έως και 17, που δίνονται από τον Θεόδωρο και ανακοινώνονται στο 147d3-148b2 είναι πράγματι ανθυφαιρετικές και χρησιμοποιούν το Κριτήριον του Λόγου (ζ). Ανθυφαιρετικές ανακατασκευές που χρησιμοποιούν το Κριτήριον του Λόγου, χωρίς όμως την οποιαδήποτε επίκληση των παραπάνω ισχυρά συσχετιζόμενων με την ανθυφαίρεση επιχειρημάτων, έχουν προταθεί από τους Zeuthen [Z], van der Waerden [VdW], von Fritz [VF], Fowler [Fo], Kahane [Ka], καθώς και μια μη-ανθυφαιρετική από τους Hardy και Wright [HW] και Knorr [Kn].
Στον Πίνακα 4 παρακάτω, σκιαγραφούμε μια ανακατασκευή της απόδειξης της ασυμμετρίας των ευθυγράμμων τμημάτων *a*, *b*, με $a^2=19b^2$, την πρώτη που ο Θεόδωρος αποφεύγει να δώσει (η ανακατασκευή παρουσιάζεται συντετμημένη υπό την έννοια ότι
τα διαιρετικά-βήματα με άρτιους δείκτες συγχωνεύονται στην ακολουθία των διαιρετικών-βημάτων με περιττούς δείκτες):

[59] Χωρίο 8.

Πίνακας 4. Συντετμημένη Ανθυφαιρετική Διαίρεση και
Κριτήριον του Λόγου για $a^2=19b^2$



Ο Πίνακας 4 κατανοείται ως ακολούθως: αρχικά προχωρούμε με τα βήματα της ανθυφαιρετικής Διαίρεσης του a προς το b, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις υπολογισμούς και εκφράζοντας ταυτόχρονα τα παραγόμενα υπόλοιπα με όρους των αρχικών ευθύγραμμων τμημάτων a και b:

$a=4b+e_1$, με $a_1<b$ (οπότε $e_1=a-4b$),

(και $b=2e_1+e_2$, $e_2<e_1$ (οπότε $e_2=9b-2a$)),

$e_1=e_2+e_3$, $e_3<e_2$ (οπότε $e_3=3a-13b$),

(και $e_2=3e_3+e_4$, $e_4<e_3$ (οπότε $e_4=48b-11a$)),

$e_3=e_4+e_5$, $e_5<e_4$ (οπότε $e_5=14a-61b$),

(και $e_4=2e_5+e_6$, $e_6<e_5$ (οπότε $e_6=170b-39a$)),

$e_5=8e_6+e_7$, $e_7<e_6$ (οπότε $e_7=326a-1421b$)·και

ακολούθως επαληθεύουμε, με άμεσο υπολογισμό, το Κριτήριον του Λόγου (που υποδεικνύεται στον Πίνακα με τη σύνδεση των δύο εκφράσεων στα πλαίσια), χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις που βρέθηκαν για τα υπόλοιπα:

$$b/e_1=e_6/e_7.$$

Έπεται ότι, μετά τον αρχικό λόγο a/b, η ακολουθία των διαδοχικών Λόγων

$$b/e_1,\ e_1/e_2,\ e_2/e_3,\ e_3/e_4,\ e_4/e_5,\ e_5/e_6,\ e_6/e_7=b/e_1$$

σχηματίζει μια πλήρη περίοδο από Λόγους, επ' άπειρον επαναλαμβανόμενη, και παράγει την πλήρη γνώση του αρχικού λόγου a/b, δηλαδή, του τετραγωνικού άρρητου τετραγωνική ρίζα του 19, αποδεικνύοντας παρεπιπτόντως την ασυμμετρία του λόγου a/b.

(θ) Η περιοδική ανθυφαίρεση ως το Αυτό-όμοιο Εν

Ας θεωρήσουμε κάποιο μέρος, έστω e_n, της περιοδικής ανθυφαίρεσης a προς b. Τότε αυτό το μέρος e_n μετέχει στο λόγο e_n/e_{n+1} (ή στο λόγο e_{n-1}/e_n), και η ανθυφαίρεση του e_n προς e_{n+1}, όντας (λόγω της περιοδικότητας) μια κυκλική μετάθεση της ανθυφαίρεσης του a προς b, ουσιαστικά συμπίπτει με αυτήν. Με αυτήν την έννοια, κάθε παραγόμενο μέρος στην ανθυφαιρετική διαδικασία είναι ίδιο με το όλο. Κατά συνέπεια, ένα ζεύγος μεγεθών που διαθέτει περιοδική ανθυφαίρεση αποτελεί ένα παράδειγμα μιας αυτό-όμοιας οντότητας. Στα σύγχρονα μαθηματικά, τέτοιες οντότητες υπάρχουν σε αφθονία, π.χ. το σύνολο του Cantor του αποκλειομένου ενδιαμέσου τρίτου, ή το Sierpinski's gasket (φλάντζα-τσιμούχα-πλέγμα του Sierpinski), αλλά στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά το παραπάνω ζεύγος μεγεθών αποτελούσε το μόνο παράδειγμα με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας. Μια αυτό-όμοια οντότητα σαφώς δικαιούται το όνομα 'Ενα', αφού είναι παντού η ίδια. Θα γίνει φανερό στις Ενότητες 3, 4, 5, παρακάτω, ότι ο Πλάτων θεώρησε αυτές τις περιοδικές ανθυφαιρετικές αυτό-όμοιες οντότητες ως το μοντέλο του για τις νοητές του Ιδέες και τα Όντα. Αυτό ακριβώς είναι το νόημα της προτροπής του Σωκράτη στο *Θεαίτητος* 145c7-148e5[60] να προσπαθήσουμε να βρούμε έναν αληθή ορισμό της γνώσης (ενός Πλατωνικού Όντος) μιμούμενοι την ενοποιητική ανακάλυψη του Θεαίτητου και του νεαρού Σωκράτη των τετραγωνικών ασυμμετριών (περιγραφόμενες εκεί με τον όρο 'δυνάμεις').

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΣΗ

Έστω a, b δύο μεγέθη (ευθύγραμμα τμήματα, χωρία, στερεά) με a > b. Ορίσαμε ως ανθυφαίρεση του a προς b την ακόλουθη πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία αμοιβαίων διαιρέσεων:
$a = I_0 b + e_1$, με $b > e_1$,
$b = I_1 e_1 + e_2$ με $e_1 > e_2$,
………………………..
$e_{n-1} = I_n e_n + e_{n+1}$ με $e_n > e_{n+1}$,
$e_n = I_{n+1} e_{n+1} + e_{n+2}$ με $e_{n+1} > e_{n+2}$,
………………………………….

και συμβολίσαμε με Ανθ(a, b) = $[I_0, I_1, \dots, I_n, I_{n+1}, \dots]$ την ακολουθία των διαδοχικών πηλίκων της ανθυφαίρεσης του a δια b.

3.1. Ορισμός (X.1 των *Στοιχείων*)
Δύο μεγέθη a και b είναι **σύμμετρα** εάν υπάρχουν ένα μέγεθος c και φυσικοί αριθμοί m, n τέτοιοι ώστε a = mc, b = nc και **ασύμμετρα** εάν δεν είναι σύμμετρα.

3.2. Πρόταση (X.2 των *Στοιχείων*)
Έστω a και b δύο μεγέθη (ευθύγραμμα τμήματα, χωρία, στερεά) με a > b και τέτοια ώστε η ανθυφαίρεση του a δια b να είναι άπειρη. Τότε τα a και b είναι ασύμμετρα.

Απόδειξη. Έστω ότι η ανθυφαίρεση δύο ευθυγράμμων τμημάτων a δια b είναι άπειρη και ότι a και b είναι σύμμετρα, ότι δηλαδή υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα c και φυσικοί αριθμοί, με a = mc, b = nc. Αλλά τότε είναι εμφανές ότι η ακολουθία Ανθ(a, b) των διαδοχικών πηλίκων στην ανθυφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων a προς b, είναι ίση με την αντίστοιχη ακολουθία Ανθ(m, n) για τους αριθμούς m, n και αυτή η τελευταία ακολουθία, σύμφωνα με τις προτάσεις VII. 1&2, είναι πάντα πεπερασμένη.

3.3. Ο Ανθυφαιρετικός ορισμός της αναλογίας των μεγεθών στα *Τοπικά* του Αριστοτέλη 158b – 159a.
Ο Αριστοτέλης στο δικαίως διάσημο και εξαιρετικά σημαντικό για την ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών (όπως ομολογεί ο Beckert [B], έργο του *Τοπικά*, απόσπασμα 158b – 159a, αναφέρεται σε μια περίοδο όπου δεν υπήρχε ακριβής θεωρία αναλογιών. Στο ίδιο απόσπασμα ο Αριστοτέλης μας λέει ότι αναπτύχθηκε μια εκπληκτική για το μαθηματικό της περιεχόμενο (πριν τον Εύδοξο και πριν το Βιβλίο V *των Στοιχείων*) θεωρία των αναλογιών, βασισμένη στα ακόλουθα:

3.4. Ορισμός. Έστω a, b, c, d τέσσερα μεγέθη με a > b, c > d. Η αναλογία a / b = c / d καθορίζεται από την συνθήκη Ανθ(a, b) = Ανθ(c, d).

[60] Χωρίο 8.

Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με την αναδόμηση της θεωρίας των αναλογιών των μεγεθών βάσει του ορισμού 3.4. Ο Knorr [Kn1] (σελίδες 332 – 344), έχει προτείνει μία τέτοια αναδόμηση. Μία άμεση συνέπεια του ανθυφαιρετικού ορισμού είναι η ακόλουθη πρόταση 3.5.

3.5. Πρόταση (το κριτήριο του λόγου για την περιοδικότητα της Ανθυφαίρεσης). Η Ανθυφαίρεση δύο τμημάτων γραμμών a, b με a > b, με συμβολισμό όπως στον ορισμό 1.1.1 και διάταξη

$a = e_{-1}$, $b = e_0$ είναι **τελικώς περιοδική**, με περίοδο από το βήμα n+1 στο βήμα m, αν υπάρχουν δείκτες n, m με n < m, τέτοιοι ώστε $e_n / e_{n+1} = e_m / e_{m+1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

Τα αποτελέσματα των Κεφαλαίων 4, 5, 6,7 οφείλονται στον Σ. Νεγρεπόντη
και περιέχονται στην παρούσα διατριβή με την άδεια του.

Η ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ ΣΤΟ ΣΟΦΙΣΤΗ

(α) Η Διαίρεση και Συναγωγή είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης

Θα δείξουμε ότι η περιοδική ανθυφαίρεση και το Κριτήριον του Λόγου αποτελούν τον πυρήνα της Πλατωνικής διαλεκτικής. Ο απλούστερος τρόπος να το διαπιστώσουμε είναι να συσχετίσουμε την περιοδική ανθυφαίρεση με τη Διαίρεση και Συναγωγή, μία μέθοδο μέσω της οποίας τα Πλατωνικά Όντα γίνονται γνωστά στην ανθρώπινη ψυχή που περιγράφεται στους Πλατωνικούς διαλόγους *Παρμενίδης, Σοφιστής, Πολιτικός, Φαίδρος* και *Φίληβος* (πρβλ. [N1], [N2] [N3] [N4])· επιπλέον, ο απλούστερος τρόπος να συλλάβουμε τη στενή σχέση μεταξύ Διαίρεσης και Συναγωγής από τη μια, και της περιοδικής ανθυφαίρεσης από την άλλη, είναι να εξετάσουμε τα παραδείγματα αυτής της μεθόδου που ο Πλάτων παρέχει στο *Σοφιστής*. Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε σχεδόν αποκλειστικά στη μέθοδο της Διαίρεσης και Συναγωγής όπως αυτή διασαφηνίζεται στο διάλογο *Σοφιστής*, και θα δείξουμε παρακάτω (στις Ενότητες 3 και 4) ότι είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της γεωμετρικής μεθόδου της θεμελιωμένης περιοδικής ανθυφαίρεσης μέσω του Κριτηρίου του Λόγου, όπως σκιαγραφήθηκε στην Ενότητα 1.

Έπεται ότι μια Πλατωνική Ιδέα είναι Ένα και Πολλά, όχι υπό την αισθητή αθροιστική έννοια του Ενός ανθρώπου με τα πολλά μέλη (ειδικά αυτό απορρίφθηκε από τον Πλάτωνα στο *Παρμενίδης* 128e-130a και στο *Φίληβος* 14d-e)[61], αλλά υπό τη νοητή έννοια ότι το Πλατωνικό Ον είναι Πολλά, και στην πραγματικότητα απείρως Πολλά, υπό την αυτό-όμοια έννοια ότι έχει απείρως πολλά μέρη, παρά ταύτα όμως είναι ουσιαστικά ένα αμερές Ένα, υπό την έννοια ότι κάθε μέρος-είδος είναι το ίδιο με το όλο. Η αυτό-ομοιότητα των Πλατωνικών Όντων εξετάζεται στην Ενότητα 5.

Η εξομοίωση των μερών-ειδών που υλοποιήθηκε μέσω της περιοδικότητας και αυτό-ομοιότητα ανοίγει το δρόμο για την κατανόηση των Πλατωνικών (ειδητικών) αριθμών, δεδομένου ότι παράγει ένα πεπερασμένο αριθμό (στην πραγματικότητα, έναν αριθμό ίσο με το μήκος της περιόδου συν ένα) εξομοιωμένων μονάδων, οι οποίες είναι ακριβώς τα μέρη-είδη μέσα στην περίοδο. Οι Πλατωνικοί αριθμοί εξετάζονται στην Ενότητα 6.

Η ανθυφαιρετική ερμηνεία της Διαίρεσης και Συναγωγής ανοίγει το δρόμο για την κατανόηση της Αληθούς Δόξας, αφού το Πλατωνικό Ον είναι επίσης γνωστό ως Αληθής Δόξα μετά Λόγου. Η Αληθής Δόξα, όπως εξετάζεται στην Ενότητα 7, καταλήγει να είναι το φιλοσοφικό ανάλογο κάθε πεπερασμένης ανθυφαιρετικής προσέγγισης του Πλατωνικού Όντος.

(β) Προγενέστερες προσπάθειες σύνδεσης της φιλοσοφίας του Πλάτωνος με την ανθυφαίρεση

[61] Χωρία 9 και 10.

Μερικοί μελετητές του Πλάτωνος έχουν εντοπίσει ότι μερικά χωρία των γραπτών του Πλάτωνος σχετίζονται με την αριθμητική/γεωμετρική έννοια της ανθυφαίρεσης. Απ' όσο γνωρίζω, αυτοί είναι οι ακόλουθοι:

(i) οι Alfred E. Taylor [Ta1], και (ii), D'Arcy W. Thompson [Th],

παρατήρησαν μια σύνδεση μεταξύ των (ανθυφαιρετικών) πλευρικών και διαμετρικών αριθμών και της Υπερβολής και Έλλειψης που περιγράφεται στο *Επινομίς*· χωρίς, ωστόσο, να προκύψουν περαιτέρω συμπεράσματα·

(iii) ο Charles Mugler [Mu],

αντιλήφθηκε τη σύνδεση μεταξύ της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης μέσω του μαθηματικού χωρίου *Θεαίτητος* 147-8[62], και της Διαίρεσης και Συναγωγής στο *Σοφιστής*, αλλά κατά τρόπο εσφαλμένο· Ο Cherniss [Ch3], στη βιβλιοκριτική του το 1951 'κατέρριψε' την προσέγγιση του Mugler, χρησιμοποιώντας όμως λανθασμένα επιχειρήματα· και,

(iv) Jules Vuillemin [Vu],

ο οποίος ορθά αντιλήφθηκε ότι η Πλατωνική Διαίρεση και Συναγωγή σχετίζεται με την περιοδική ανθυφαίρεση, αλλά η σύνδεση που περιέγραψε δεν ήταν η ορθή. Επιπροσθέτως,

(v) David Fowler [Fo],

ο οποίος αναφέρει ότι η ανθυφαίρεση ήταν σημαντική στην Πλατωνική Ακαδημία, χωρίς να εξηγεί με ποιο τρόπο.

Αλλά αυτές οι θέσεις παραμένουν σαφώς περιθωριακές· ερευνητές σαν τους Mugler και Vuillemin δεν κατάφεραν να πείσουν τους Πλατωνιστές για τη σπουδαιότητα της ανθυφαίρεσης στο έργο του Πλάτωνος, ενώ, αντίστροφα, οι Πλατωνιστές δεν ήταν- και ακόμα δεν είναι ικανοί- να συλλάβουν ότι η Πλατωνική μέθοδος της Διαίρεσης και Συναγωγής περιγράφει το Πλατωνικό Ον. Κατά τη γνώμη μου, αυτή η διπλή αποτυχία οφείλεται στην αδυναμία να κατανοηθεί ο τρόπος με τον οποίο η Συναγωγή μετατρέπει τα απείρως πολλά μέρη της ανθυφαιρετικής Διαίρεσης σε μια οντότητα που δικαιούται να καλείται Ένα, και έτσι να νοείται ως ένα Πλατωνικό Ον. Ακριβώς, αυτό θα είναι το κύριο έργο της παρούσας εργασίας, που υλοποιείται στις Ενότητες 3, 4, και 5, παρακάτω.

[62] Χωρίο 8.

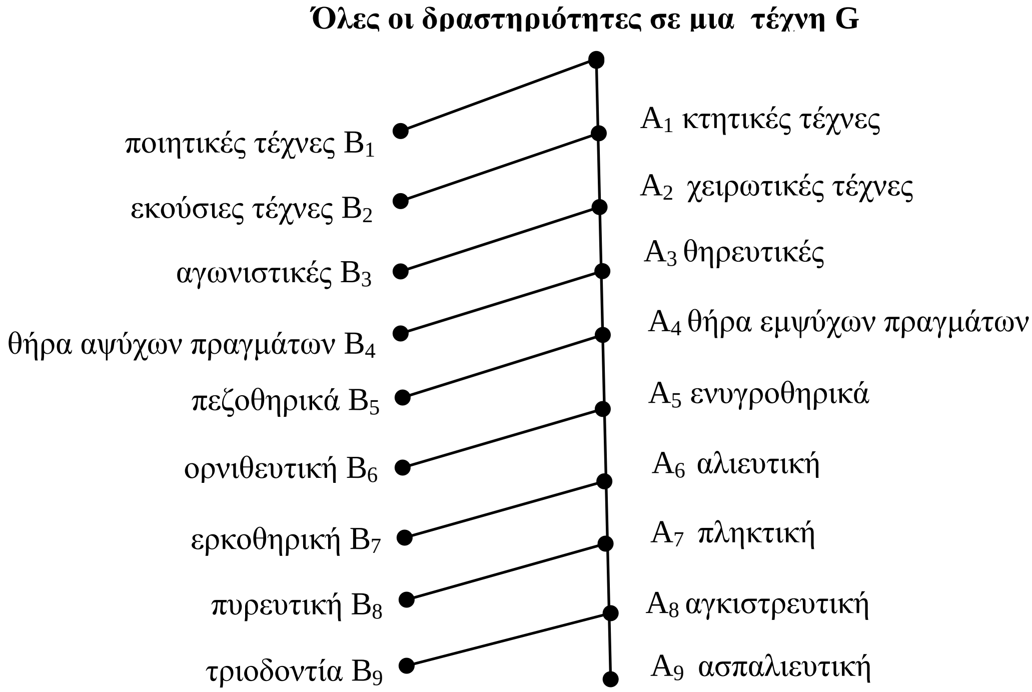
ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΓΩΓΗ

ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ ΟΝΤΟΣ “ΑΣΠΑΛΙΕΥΤΗΣ” ΣΤΟ *ΣΟΦΙΣΤΗΣ* 218b-221c

(α) Η διαίρεση του ‘Ασπαλιευτή’

Η μέθοδος της Διαίρεσης και Συναγωγής, που επίσης ονομάζεται ‘Όνομα και Λόγος’ (πρβλ. *Θεαίτητος* 201e2-202b5, *Σοφιστής* 218c1-5, 221a7-b2, 268c5-d5)[63], γίνεται φανερή στην αρχή του *Σοφιστής* 218b-221c[64] μέσω του ορισμού του Ασπαλιευτή. Στο παρακάτω σχήμα, αναπαράγουμε τη διαδικασία της δυαδικής διαίρεσης που οδηγεί στον Ασπαλιευτή.

Πίνακας 5. Η Διαίρεση του Ασπαλιευτή (*Σοφιστής* 218b-221c)



(β) Συναγωγή-Λόγος του Ασπαλιευτή

Η περιγραφή του Λόγου-Συναγωγής του Ασπαλιευτή περιέχεται στο χωρίο του *Σοφιστής* 220e2-221c3 (το οποίο για χάρη ευκολίας διαιρούμε σε δύο μέρη [Α] και [Β]):

[Α] ΞΕ. Τοῦ τοίνυν ἀγκιστρευτικοῦ τῆς πληκτικῆς τὸ μὲν
ἄνωθεν εἰς τὸ κάτω γιγνόμενον διὰ τὸ τοῖς τριόδουσιν οὕτω
μάλιστα χρῆσθαι τριοδοντία τις οἶμαι κέκληται.
ΘΕΑΙ. Φασὶ γοῦν τινές.
ΞΕ. Τὸ δέ γε λοιπόν ἐστιν ἓν ἔτι μόνον ὡς εἰπεῖν εἶδος.
ΘΕΑΙ. Τὸ ποῖον;
ΞΕ. Τὸ τῆς ἐναντίας ταύτῃ πληγῆς, ἀγκίστρῳ τε γιγνό-

[63] Χωρίο 11, 12, 13, και 14.
[64] Χωρίο 15, (επειδή το *Σοφιστής* 220e2-221c3 παρατίθεται στην παράγραφο (β), το χωρίο14 είναι το *Σοφιστής* 218e2-220e1).

μενον καὶ τῶν ἰχθύων οὐχ ᾗ τις ἂν τύχῃ τοῦ σώματος, ὥσπερ
τοῖς τριόδουσιν, ἀλλὰ περὶ τὴν κεφαλὴν καὶ τὸ στόμα τοῦ
θηρευθέντος ἑκάστοτε, καὶ κάτωθεν εἰς τοὐναντίον ἄνω
ῥάβδοις καὶ καλάμοις ἀνασπώμενον· οὗ τί φήσομεν, ὦ
Θεαίτητε, δεῖν τοὔνομα λέγεσθαι;
ΘΕΑΙ. Δοκῶ μέν, ὅπερ ἄρτι προυθέμεθα δεῖν ἐξευρεῖν,
τοῦτ' αὐτὸ νῦν ἀποτετελέσθαι.
ΞΕ. Νῦν ἄρα τῆς ἀσπαλιευτικῆς πέρι σύ τε κἀγὼ
συνωμολογήκαμεν οὐ μόνον τοὔνομα, (220e2-221b1)

[Β] ἀλλὰ καὶ τὸν λόγον περὶ αὐτὸ τοὖργον εἰλήφαμεν ἱκανῶς.
συμπάσης γὰρ τέχνης τὸ μὲν ἥμισυ μέρος κτητικὸν ἦν,
κτητικοῦ δὲ χειρωτικόν,
χειρωτικοῦ δὲ θηρευτικόν,
τοῦ δὲ θηρευτικοῦ ζῳοθηρικόν,
ζῳοθηρικοῦ δὲ ἐνυγροθηρικόν,
ἐνυγροθηρικοῦ δὲ τὸ κάτωθεν τμῆμα ὅλον ἁλιευτικόν,
ἁλιευτικῆς δὲ πληκτικόν,
πληκτικῆς δὲ ἀγκιστρευτικόν·
τούτου δὲ τὸ περὶ τὴν κάτωθεν ἄνω πληγὴν ἀνασπωμένην,
ἀπ' αὐτῆς τῆς πράξεως ἀφομοιωθὲν τοὔνομα,
ἡ νῦν ἀσπαλιευτικὴ ζητηθεῖσα ἐπίκλην γέγονεν. (221b1-c3).

Στο [Α], η αντιθετική σχέση της τριοδοντίας προς την ασπαλιευτική εξηγείται προσεκτικά: όλο το Αγκιστρευτικόν γένος διαιρείται σε
Τριοδοντία (=ψάρεμα με το τρίδοντο), που περιγράφεται ως το ψάρεμα με άγκιστρο με την τέχνη που προχωρά ‘ἄνωθεν εἰς τὸ κάτω’,
και
Ασπαλιευτική (=ψάρεμα με καλάμι), που περιγράφεται ως το ψάρεμα με άγκιστρο με την τέχνη που προχωρά ‘κάτωθεν εἰς τοὐναντίον ἄνω’.

Έχουμε ολοκληρώσει τη Διαίρεση της Ασπαλιευτικής· συνεπώς, έχουμε σίγουρα βρει ‘τοὔνομα’ της Ασπαλιευτικής. Αλλά τώρα, στο [Β], υπάρχει ο ισχυρισμός ότι έχει επίσης βρεθεί ‘ο Λόγος’ της Ασπαλιευτικής.

Η αιτιολόγηση- η απόδειξη- ότι πράγματι έχουμε βρει το Λόγο, περιέχεται στο υπόλοιπο του [Β], αφού αυτό το εναπομείναν μέρος του [Β] αρχίζει με το ‘γὰρ’, και αυτή η αιτιολόγηση μπορεί να διαπιστωθεί ότι αποτελείται από:

(α) μια ακριβή νέα καταμέτρηση όλων των διαιρετικών-βημάτων, συντετμημένη υπό την έννοια ότι από τα δύο είδη στα οποία κάθε γένος διαιρείται, αναφέρεται μόνο εκείνο το οποίο περιέχει τον Ασπαλιευτή, ενώ το αντίθετο προς αυτό είδος παραλείπεται·
(β) την υπενθύμιση ότι το τελευταίο είδος, η ασπαλιευτική, χαρακτηρίζεται ως το μέρος του γένους της που προχωρά ‘κάτωθεν ἄνω’ και,
(γ) τη ΜΟΝΗ νέα πληροφορία που εμφανίζεται τρία βήματα πριν την ασπαλιευτική (αφού τα (α) και (β) είναι επαναλήψεις όσων ήδη περιέχονται στη Διαίρεση και στο [Α]), η οποία αφορά στο είδος της αλιευτικής και μας πληροφορεί για πρώτη φορά ότι αυτό το είδος είναι ‘τὸ κάτωθεν τμῆμα ὅλον’ του γένους της.

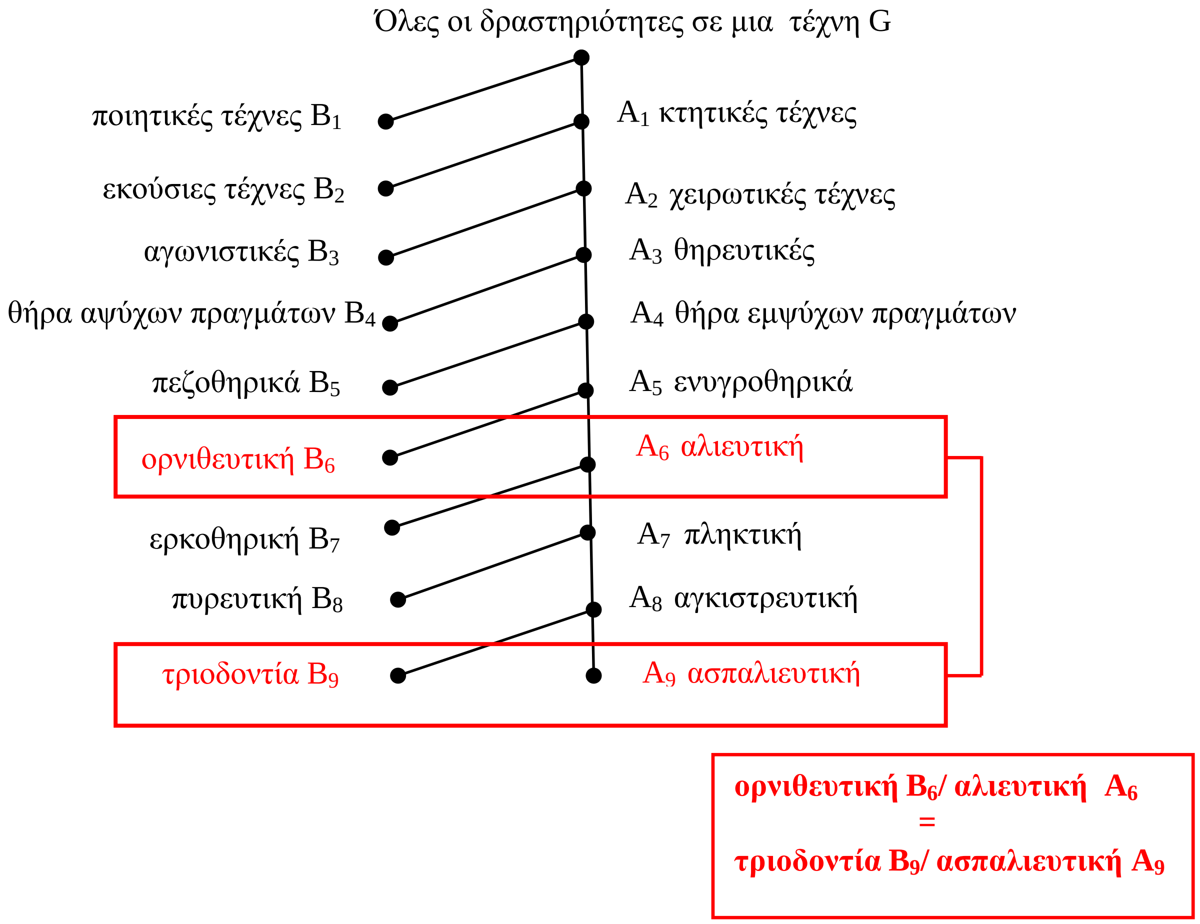
Αφού αυτή είναι μια συντετμημένη περιγραφή, δεν υπάρχει ρητή πληροφόρηση για το αντίθετο είδος της ‘αλιευτικής’- δηλαδή την ‘ορνιθευτική’, αλλά εφόσον η ‘αλιευτική’ περιγράφεται, όχι απλά ως ‘το από κάτω μέρος’ του γένους της, αλλά με έμφαση ως ‘τὸ κάτωθεν τμῆμα ὅλον’, έπεται ότι το αντίθετο είδος- ‘ορνιθευτική’-πρέπει να χαρακτηριστεί ως ‘τὸ ἄνωθεν τμῆμα (ὅλον)’ του ιδίου γένους. Πράγματι, στοχεύοντας στο να επιχειρηματολογήσει υπέρ της απόκτησης του ‘Λόγου’, δε μπορεί να υπάρχει άλλη αιτιολογία για την παρουσία του όρου ‘ὅλον’ στην περιγραφή της ‘αλιευτικής’, παρά μόνο για να υποδείξει και να οδηγήσει αυτήν την περιγραφή στο αντίθετο είδος της, την ‘ορνιθευτική’.

Επαναλαμβάνουμε ότι το μέρος του [B] που έπεται της λέξης ‘γὰρ’ είναι ρητά μια αιτιολόγηση του ισχυρισμού ότι έχουμε πετύχει στην εύρεση του ‘Λόγου’ της Ασπαλιευτικής. Μπορούμε τότε να ρωτήσουμε: τι είναι ο ‘Λόγος’ του Ασπαλιευτή ο οποίος εύλογα προκύπτει από μια τέτοια αιτιολόγηση; Μόνο μια απάντηση είναι δυνατόν να υπάρχει πραγματικά: ο ‘Λόγος’ τον οποίο ψάχνουμε είναι η ισότητα του ‘φιλοσοφικού λόγου’ της Τριδοντίας προς την Ασπαλιευτική, δηλαδή η ισότητα του λόγου ‘ἄνωθεν εἰς τὸ κάτω προς κάτωθεν εἰς τοὐναντίον ἄνω’, προς το λόγο ‘της Ορνιθευτικής προς Αλιευτική’.

Εφόσον τα είδη Τριδοντία και Ασπλιευτική σχηματίζουν ένα ζεύγος αντιθέτων ειδών, και τα είδη Ορνιθευτική και Αλιευτική σχηματίζουν ένα άλλο ζεύγος αντιθέτων ειδών στο Διαιρετικό Σχήμα του Ασπαλιευτή, ο καταληκτικός ‘Λόγος’ φέρει την πιο απρόβλεπτη ομοιότητα προς το Κριτήριον του Λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης γεωμετρικών μεγεθών, και ειδικότερα των γεωμετρικών δυνάμεων.

(γ) Η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή

Οπότε η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή παίρνει την ακόλουθη μορφή:
Πίνακας 6. Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή (*Σοφιστής* 218b-221c)



Συνεπώς η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή αποτελείται από τη Διαίρεση, που περιγράφηκε στο (α), η οποία είναι ανάλογη προς το συντετμημένο ανθυφαιρετικό μοντέλο, και από το Λόγο, που περιγράφηκε στο (β), που είναι ανάλογος προς το Κριτήριο του Λόγου για την περιοδικότητα της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης που εξετάστηκε στις 1(ζ), (η).

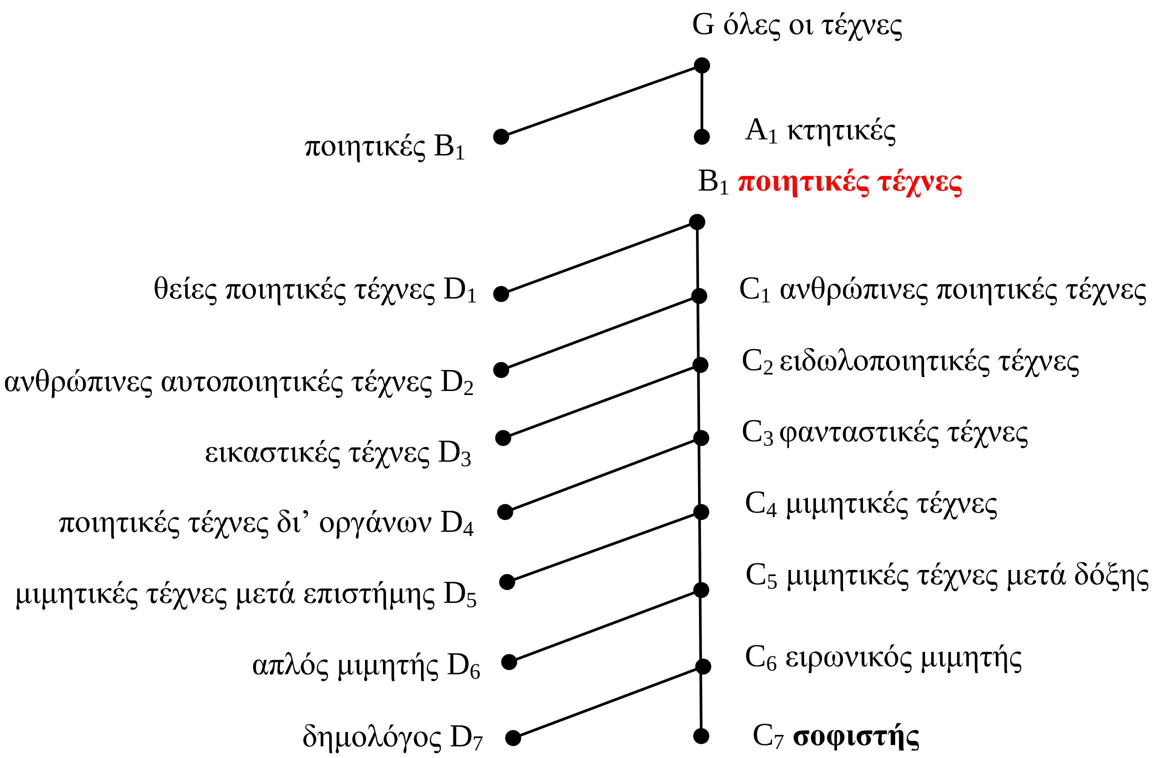
ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ ΟΝΤΟΣ “ΣΟΦΙΣΤΗΣ” ΣΤΟ *ΣΟΦΙΣΤΗΣ* 234e-236d & 264b-268d

Είναι τώρα εμφανές ότι η Διαίρεση και Συναγωγή ενός Πλατωνικού Όντος- και ο Ασπαλιευτής είναι βέβαια ένα κατώτερου επίπεδου παράδειγμα Πλατωνικού Όντος- μοιάζει σε μεγάλο βαθμό προς την ανθυφαιρετική Διαίρεση και το Κριτήριον του Λόγου μιας γεωμετρικής ‘δύναμης’. Όταν ο Σωκράτης εξέφρασε, στο *Θεαίτητος* 145c7-148e5[65], την προτροπή του για μίμηση της γεωμετρικής κατάστασης, φαίνεται ότι εννοούσε μια τόσο πολύ στενή μίμηση που κανένας δεν είχε υποψιαστεί μέχρι τώρα! Όμως πριν οδηγηθούμε σε συμπεράσματα ευρύτερης έκτασης, θα ήταν φρόνιμο να εξετάσουμε αν η Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή, στο *Σοφιστής* 264b-268d[66], έχει το ίδιο είδος δομής, ειδικότερα, αν υπάρχει όμοιος τύπος ‘Λόγου’. Έτσι θα εξετάσουμε τη Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή.

(α) Η Διαίρεση του Σοφιστή

Η Διαίρεση του Σοφιστή ακολουθεί το ίδιο σχέδιο όπως η Διαίρεση του Ασπαλιευτή, αρχίζοντας με ένα Γένος, στην προκειμένη περίπτωση ‘όλες οι ποιητικές τέχνες’, προχωρώντας μέσω δυαδικής διαίρεσης κάθε Γένους σε δύο είδη, όπου το επόμενο Γένος είναι εκείνο το είδος του προηγούμενου βήματος στη Διαίρεση που περιέχει την προς ορισμό οντότητα, στην συγκεκριμένη περίπτωση το Σοφιστή, και καταλήγοντας με το διαιρετικό βήμα που παράγει το Σοφιστή ως ένα είδος. Ολόκληρο το διαιρετικό σχήμα είναι ως ακολούθως:

Πίνακας 7. Διαίρεση του Σοφιστή (*Σοφιστής* 264b-268d)



[65] Χωρίο 8.
[66] Χωρίο 16, όπου έχουν εξαιρεθεί τα χωρία που παρατίθενται στην Ενότητα 4.

(β) Η θεμελιώδης αναλογία της Τετμημένης Γραμμής στον Πολιτεία 509d-510b

Θα προετοιμάσουμε τώρα το έδαφος για το Λόγο-Συναγωγή του Σοφιστή. Η θεμελιώδης αναλογία της Τετμημένης Γραμμής στο *Πολιτεία* 509d-510b παίζει κεντρικό ρόλο στο Κριτήριον του Λόγου του Σοφιστή. Παραθέτουμε το χωρίο:

<table>
<tr><td colspan="3">Νόησον τοίνυν, ἦν δ' ἐγώ, ὥσπερ λέγομεν, δύο αὐτὼ εἶναι, καὶ</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>βασιλεύειν
τὸ μὲν νοητοῦ γένους τε καὶ τόπου,</td></tr>
<tr><td colspan="2">τὸ δ' αὖ ὁρατοῦ,</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">… ἀλλ' οὖν ἔχεις ταῦτα διττὰ εἴδη,</td></tr>
<tr><td colspan="2">ὁρατόν,</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>νοητόν;</td></tr>
<tr><td colspan="3">… Ὥσπερ τοίνυν γραμμὴν δίχα τετμημένην λαβὼν ἄνισα τμήματα,
πάλιν τέμνε ἑκάτερον τὸ τμῆμα ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον,</td></tr>
<tr><td colspan="2">τό τε τοῦ ὁρωμένου γένους</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>καὶ τὸ τοῦ νοουμένου,</td></tr>
<tr><td colspan="3">καί σοι ἔσται</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>σαφηνείᾳ</td></tr>
<tr><td colspan="2">καὶ ἀσαφείᾳ</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">πρὸς ἄλληλα</td></tr>
<tr><td>ἐν μὲν τῷ ὁρωμένῳ τὸ μὲν ἕτερον τμῆμα εἰκόνες— λέγω δὲ τὰς εἰκόνας πρῶτον μὲν τὰς σκιάς, ἔπειτα τὰ ἐν τοῖς ὕδασι φαντάσματα καὶ ἐν τοῖς ὅσα πυκνά τε καὶ λεῖα καὶ φανὰ συνέστηκεν, καὶ πᾶν τὸ τοιοῦτον,….</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Τὸ τοίνυν ἕτερον τίθει ᾧ τοῦτο ἔοικεν, τά τε περὶ ἡμᾶς ζῷς καὶ πᾶν τὸ φυτευτὸν καὶ τὸ σκευαστὸν ὅλον γένος….</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Ἦ καὶ ἐθέλοις ἂν αὐτὸ φάναι, ἦν δ' ἐγώ, διῃρῆσθαι</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>ἀληθείᾳ τε</td></tr>
</table>

καὶ μή,		
ὡς		
τὸ δοξαστὸν		
		πρὸς τὸ γνωστόν,
οὕτω		
τὸ ὁμοιωθὲν		
	πρὸς τὸ ᾧ ὡμοιώθη;	
Ἔγωγ', ἔφη, καὶ μάλα.		

Αυτή η αναλογία στην Τετμημένη Γραμμή του *Πολιτεία* αποδίδεται ως ακολούθως:

Θεωρούμε μία γραμμή (ευθύγραμμο τμήμα)L, και διαιρούμε τη γραμμή L σε δύο άνισα τμήματα, έστω	
	A
και B,	

με

	A να αναπαριστά την νοητή περιοχή,
και B την ορατή, ή μάλλον την αισθητή, περιοχή.	

(Συμπτωματικά, η κατασκευή της διαίρεσης ενός ευθυγράμμου τμήματος σε δεδομένο λόγο περιέχεται στην Πρόταση VI.10 των *Στοιχείων*).

		Κατόπιν διαιρούμε το τμήμα A σε δύο τμήματα, έστω	
			C
		και D,	
και διαιρούμε το τμήμα B σε δύο τμήματα, έστω			
	E		
και F,			
με τρόπο ώστε B/A=D/C=F/E. Περαιτέρω,			
F αναπαριστά τις εικόνες			
της αισθητής περιοχής B,			
	και E τις οντότητες		

της αισθητής περιοχής Β στην οποία		
αυτές είναι εικόνες,		
	π. χ. των πραγματικών οντοτήτων	
της αισθητής περιοχής Β.		
		Επίσης η νοητή περιοχή Α ταυτίζεται με την περιοχή της επιστήμης,
και η αισθητή περιοχή Β ταυτίζεται με την περιοχή της δόξας.		
Συνεπώς προκύπτει η ακόλουθη αναλογία: Ο λόγος των δοξαστών Β προς τα επιστητά Α είναι ίσος προς το λόγο των εικόνων F προς τις πραγματικές οντότητες Ε.		

Άρα, αυτή είναι η θεμελιώδης αναλογία της Τετμημένης Γραμμής στο *Πολιτεία* 509d-510b:

τα δοξαστά/τα επιστητά = ομοιωθέν/εκείνο προς το οποίο ομοιώθη.

Ισοδύναμα: πραγματικά πράγματα/εικόνες = επιστητά/δοξαστά.

(γ) Απόδοση της θεμελιώδους αναλογίας της Τετμημένης Γραμμής όπως χρησιμοποιείται για τη Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή (Σοφιστής 265e8-266d7)

Περισσότερο από το ένα πέμπτο (το μέρος 265e8-266d7) του συνόλου της περιγραφής της Διαίρεσης και Συναγωγής του Σοφιστή (264b-268d) είναι αφιερωμένο σε κάποιες θεωρήσεις που από πρώτη ματιά μοιάζουν μη αναγκαίες και περιττές.

Πράγματι, η διαίρεση για τον Σοφιστή αρχίζει με το Γένος όλων των ποιητικών τεχνών, όλων των τεχνών που παράγουν κάτι· αυτό το γένος διαιρείται σε δύο είδη, τις θείες ποιητικές τέχνες και τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες. Αφού η Σοφιστεία είναι μία από τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες, το επόμενο Γένος που θα διαιρεθεί θα είναι οι ανθρώπινες ποιητικές τέχνες. Το βήμα αυτό νομιμοποιείται θεωρούμενο εντελώς λογικό, και τελικά γίνεται αποδεκτό στο 265e7.

Το δεύτερο διαιρετικό-βήμα διαιρεί τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες σε ανθρώπινες αυτοποιητικές τέχνες και σε ανθρώπινες ειδωλοποιητικές τέχνες. Η πλήρης αιτιολόγηση που παρέχεται για αυτό το βήμα περιλαμβάνεται στο χωρίο 266c7-d4, όπου ως παράδειγμα ανθρώπινων αυτοποιητικών τεχνών δίνεται η κατασκευή μιας οικίας, και ως παράδειγμα ανθρώπινων ειδωλοποιητικών τεχνών δίνεται το βάψιμο της οικίας, και η διαίρεση στα δύο είδη επισφραγίζεται.

Όμως ο Πλάτων συμπεριλαμβάνει ένα επιπρόσθετο επιχείρημα, που κατά κανένα τρόπο δε χρειάζεται στη Διαίρεση, και το οποίο περιλαμβάνεται στο ακόλουθο χωρίο 265e8-266b1 (για λόγους συνέχειας συμπεριλαμβάνουμε και τις δύο προηγούμενες προτάσεις (265e3-7)):

‘ἀλλὰ θήσω τὰ μὲν φύσει λεγόμενα ποιεῖσθαι θείᾳ τέχνῃ,
τὰ δ' ἐκ τούτων ὑπ' ἀνθρώπων συνιστάμενα ἀνθρωπίνῃ,
καὶ κατὰ τοῦτον δὴ τὸν λόγον δύο ποιητικῆς γένη, τὸ μὲν
ἀνθρώπινον εἶναι, τὸ δὲ θεῖον.
ΘΕΑΙ. Ὀρθῶς.’ (265e3-7).

‘ΞΕ. Τέμνε δὴ δυοῖν οὔσαιν δίχα ἑκατέραν αὖθις.
ΘΕΑΙ. Πῶς;
ΞΕ. Οἷον τότε μὲν κατὰ πλάτος τέμνων τὴν ποιητικὴν
πᾶσαν, νῦν δὲ αὖ κατὰ μῆκος.
ΘΕΑΙ. Τετμήσθω.
ΞΕ. Τέτταρα μὴν αὐτῆς οὕτω τὰ πάντα μέρη γίγνεται,
δύο μὲν τὰ πρὸς ἡμῶν, ἀνθρώπεια, δύο δ' αὖ τὰ πρὸς θεῶν,
θεῖα.
ΘΕΑΙ. Ναί.
ΞΕ. Τὰ δέ γ' ὡς ἑτέρως αὖ διῃρημένα, μέρος μὲν ἓν
ἀφ' ἑκατέρας τῆς μερίδος αὐτοποιητικόν, τὼ δ' ὑπολοίπω
σχεδὸν μάλιστ' ἂν λεγοίσθην εἰδωλοποιικώ· καὶ κατὰ ταῦτα
δὴ πάλιν ἡ ποιητικὴ διχῇ διαιρεῖται.
ΘΕΑΙ. Λέγε ὅπῃ ἑκατέρα αὖθις. ’ (265e8-266b1).

Μια ακριβής περιγραφή της γεωμετρικής κατασκευής αυτού του χωρίου είναι η ακόλουθη:

Αναπαριστούμε όλες τις ποιητικές τέχνες μ’ ένα τετράγωνο, έστω *P*, πλευράς *p*, με κορυφές *K,L,M,N*. (Έτσι κάθε μια από τις πλευρές *KL, LM, MN, NK* είναι ίση με *p*) (δες Πίνακα 8 παρακάτω).

Διαιρούμε το *P* κατά πλάτος, φέροντας την οριζόντια ευθεία *RS*, παράλληλη στη βάση *KL*, έτσι όλες οι ποιητικές τέχνες διαιρούνται σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, πρώτον το *KLSR* που αντιπροσωπεύει τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες-έστω *H*, και το άλλο *RSMN* που αντιπροσωπεύει τις θείες ποιητικές τέχνες-έστω *D*.

Διαιρούμε το *P* κατά μήκος φέροντας την κατακόρυφη ευθεία *TU* παράλληλη στην πλευρά *KN*, έτσι ώστε όλες οι ποιητικές τέχνες διαιρούνται σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, πρώτον *KTUN* που αντιπροσωπεύει όλες τις ποιητικές τέχνες που παράγουν πραγματικά αντικείμενα-έστω *R*, και το άλλο *TLMU* που αντιπροσωπεύει όλες τις ειδωλοποιητικές τέχνες-έστω *I*.

Το αρχικό γένος όλων των ποιητικών τεχνών αναπαρίσταται όχι ως ευθύγραμμο τμήμα (όπως θα ήταν φυσικό), αλλά μοναδικά και απρόσμενα ως τετράγωνο· είναι σαφές ότι αναπαρίσταται έτσι ώστε να είναι διαιρετό ταυτόχρονα με δύο ανεξάρτητους τρόπους, οριζόντια και κατακόρυφα: οριζόντια με όρους της πρώτης διαίρεσης (θεία/ ανθρώπινα), κατακόρυφα με όρους της δεύτερης διαίρεσης (πραγματικά πράγματα/εικόνες).

Αυτή η αναπαράσταση δεν εξυπηρετεί στο παραμικρό τη Διαίρεση του Σοφιστή, όπου τα αντίθετα είδη των ειδών στα οποία ανήκει ο Σοφιστής παραμένουν αδιαίρετα, και πράγματι δεν επηρεάζουν στο ελάχιστο τα επόμενα διαιρετικά βήματα.

Αφού λοιπόν η Διαίρεση δεν εξυπηρετεί κανένα πιθανό σκοπό, συμπεραίνουμε ότι όλο αυτό το επιχείρημα πρέπει να παίζει κάποιο ρόλο στη Συναγωγή-Λόγο. Από τη στιγμή που σκεφτόμαστε με όρους Συναγωγής-Λόγου, όλο αυτό το επιχείρημα, το οποίο διαφορετικά θα φαινόταν άτοπο, αμέσως γίνεται ένα εκ προοιμίου λογικό επιχείρημα:

πράγματι ο λόγος του δευτέρου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή είναι:
ο λόγος των ανθρωπίνων ποιητικών τεχνών που παράγουν πραγματικές οντότητες προς τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες·

πως μπορεί αυτός ο λόγος να αξιοποιηθεί για τη Συναγωγή-Κριτήριον του Λόγου; Στο σημείο αυτό, είναι αναπόφευκτη η επίκληση του εντελώς όμοιου λόγου που εμφανίστηκε στην αναλογία της Τετμημένης Γραμμής και εξετάσαμε λεπτομερειακά στην β:

‘Ο λόγος των δοξαστών προς τα γνωστά ισούται με το λόγο των εικόνων προς τις πραγματικές οντότητες’.
Αντιστρέφοντας τους λόγους, έχουμε ότι:
ο λόγος των γνωστών προς τα δοξαστά ισούται με το λόγο των πραγματικών οντοτήτων προς τις εικόνες.

Αυτός ο διαλεκτικός Λόγος θα μπορούσε ασφαλώς να χρησιμεύσει θαυμάσια ως Λόγος στη Διαίρεση και Συναγωγή, καθόσον ο δεύτερος λόγος στη Διαίρεση του Σοφιστή είναι προκλητικά κοντά στο λόγο της Τετμημένης Γραμμής, αν και έχει μια μάλλον εκλεπτυσμένη διαφορά: ο δεύτερος λόγος στον ορισμό του Σοφιστή είναι ένας λόγος που αφορά σε ανθρώπινες μόνο ποιητικές τέχνες, ενώ ο λόγος της Τετμημένης Γραμμής είναι ένας λόγος που αφορά σε όλες τις ποιητικές τέχνες, και τις θείες και τις ανθρώπινες. Αυτό ίσως να μην τύχαινε της δέουσας προσοχής, αλλά αφού ο Πλάτων σκοπεύει να μείνει πιστός στα υψηλότερα πρότυπα ακρίβειας, πρέπει να αποδεικνύει κάτι αν πρόκειται να βασιστεί σ’ αυτό. Επομένως, το χωρίο 265e8-266b1, που μοιάζει περιττό και άτοπο, είναι ό,τι ακριβώς χρειάζεται για να αποδειχθεί το ακόλουθο:

(γ1) Πρόταση. Ο λόγος του δευτέρου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή, δηλαδή ο λόγος των ανθρωπίνων ποιητικών τεχνών που παράγουν πραγματικά αντικείμενα προς τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες ισούται με το λόγο όλων των ποιητικών τεχνών που παράγουν πραγματικά αντικείμενα προς όλες τις ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες στην Τετμημένη Γραμμή του *Πολιτεία*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον ακριβώς παραπάνω συμβολισμό (δες επίσης Πίνακα 8).
Φυσικά, η οριζόντια ευθεία RS κόβει την πλευρά KN σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, $KR=h$ και $RN=d$, και η κατακόρυφη ευθεία TU κόβει την πλευρά KL σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, $KT=r$ και $TL=i$.
Αν V είναι το σημείο όπου η οριζόντια ευθεία RS τέμνει την κατακόρυφη ευθεία TU,
τότε
όλες οι ποιητικές τέχνες που παράγουν πραγματικά αντικείμενα=R= =ορθογώνιο $KTUN$ με πλευρές r και p= rp, και
όλες οι ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες=I=ορθογώνιο $TLMU$ με πλευρές i και p= ip· και
οι ανθρώπινες ποιητικές τέχνες που παράγουν πραγματικά αντικείμενα= =ορθογώνιο $TVRK$ με πλευρές r και h= hr, και
οι ανθρώπινες ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες=ορθογώνιο $TLSV$ με πλευρές i και h= hi.
Τότε
ο λόγος (1) των ανθρωπίνων ποιητικών τεχνών που παράγουν πραγματικά αντικείμενα προς τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες
= ορθογώνιο $TVRK$/ορθογώνιο $TLSV$
= hr/hi,
και
ο λόγος (2) όλων των ποιητικών τεχνών που παράγουν πραγματικά αντικείμενα προς όλες τις ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες

= ορθογώνιο *KTUN*/ορθογώνιο *TLMU*
= *R/I*= *rp/ip*.

Τώρα χρησιμοποιούμε τη θεμελιώδη Πρόταση *Τοπικά* 1(στ), ουσιαστικά την Πρόταση VI.1 των *Στοιχείων*, σύμφωνα με την οποία
ο λόγος (1)= *hr/hi*= *r/i*= *rp/ip*= *R/I*=λόγο (2),
έτσι η Πρόταση αποδείχθηκε.

Πίνακας 8.
r/i=τέχνες που παράγουν πραγματικά αντικείμενα/τέχνες που παράγουν εικόνες=
ανθρώπινες τέχνες που παράγουν πραγματικά αντικείμενα/
ανθρώπινες τέχνες που παράγουν εικόνες=***hr/hi***

N **d** **θείες τέχνες που παράγουν πραγματικά αντικείμενα** **dr**	U M **θείες τέχνες που παράγουν εικόνες** **di**
R **h ανθρώπινες τέχνες που παράγουν πραγματικά αντικείμενα** **hr** K **r**	V S **ανθρώπινες τέχνες που παράγουν εικόνες** **hi** T **i** L

(δ) Η Συναγωγή-Λόγος του Σοφιστή

Το Κριτήριον του Λόγου του Σοφιστή δεν φαίνεται προφανές ή εύκολο να το αντιληφθείς, όπως με τον Ασπαλιευτή. Όμως ο Ασπαλιευτής, εντέλει, επιλέχθηκε ως ένα παράδειγμα όχι επειδή είχαμε κάποιο σοβαρό φιλοσοφικό ενδιαφέρον για την τέχνη της Ασπαλιευτικής, αλλά ακριβώς επειδή υπήρχε μια απλότητα, έως και αφέλεια, κατά την εκτέλεση της Διαίρεσης, αλλά και ακόμη περισσότερο στη μορφή του Λόγου. Για την περίπτωση του Σοφιστή, αναμένουμε κάτι λιγότερο προφανές.

Από τη στιγμή που παρατηρούμε τη συγγένεια του λόγου στο δεύτερο διαιρετικό-βήμα προς τον ένα από τους λόγους (εικόνες προς πραγματικά αντικείμενα) στην αναλογία της Τετμημένης Γραμμής, και ότι το επιχείρημα που εξετάστηκε στην (γ) μοιάζει να εισάγεται από τον Πλάτωνα όχι μόνο για λόγους ακρίβειας αλλά επίσης- και ακόμα περισσότερο- για να μας επιστήσει την προσοχή στο λόγο αυτό, δε μπορούμε να μην παρατηρήσουμε ότι ο λόγος του πέμπτου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή έχει τον ίδιο τύπο συγγένειας προς τον άλλο λόγο (δοξαστά προς γνωστά) στην αναλογία της Τετμημένης Γραμμής. Η πέμπτη διαίρεση του Γένους, μίμησις/μιμητική τέχνη, σε δύο είδη τη μιμητική τέχνη μετά γνώσης και τη μιμητική τέχνη μετά δόξας περιλαμβάνεται στο παρακάτω χωρίο *Σοφιστής* 267a10-e3 (που επίσης καταλαμβάνει περισσότερο από το ένα πέμπτο της όλης περιγραφής της Διαίρεσης και Συναγωγής του Σοφιστή):

'ΞΕ. Καὶ μὴν καὶ τοῦτο ἔτι διπλοῦν, ὦ Θεαίτητε, ἄξιον

ἡγεῖσθαι· δι' ἃ δέ, σκόπει.

….

ΞΕ. Τῶν μιμουμένων οἱ μὲν εἰδότες ὃ μιμοῦνται τοῦτο

πράττουσιν, οἱ δ' οὐκ εἰδότες. καίτοι τίνα μείζω διαίρεσιν

ἀγνωσίας τε καὶ γνώσεως θήσομεν;

ΘΕΑΙ. Οὐδεμίαν.

…..

ΞΕ. …. ἆρ' οὐκ ἀγνοοῦντες μέν, δοξάζοντες δέ πῃ, σφόδρα

ἐπιχειροῦσιν πολλοὶ τὸ δοκοῦν …..

ΘΕΑΙ. Καὶ πάνυ γε πολλοί.

……

ΞΕ. Μιμητὴν δὴ τοῦτόν γε ἕτερον ἐκείνου λεκτέον οἶμαι,

τὸν ἀγνοοῦντα τοῦ γιγνώσκοντος.

ΘΕΑΙ. Ναί.

ΞΕ. …. ὅμως δέ, κἂν εἰ τολμηρότερον εἰρῆσθαι, διαγνώσεως ἕνεκα τὴν

μὲν μετὰ δόξης μίμησιν δοξομιμητικὴν προσείπωμεν,

τὴν δὲ μετ' ἐπιστήμης ἱστορικήν τινα μίμησιν.'

Είναι φανερό ότι η ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για το λόγο του δεύτερου διαιρετικού-βήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί η ακόλουθη Πρόταση:

(δ1) Πρόταση. Ο λόγος του πέμπτου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή- δηλαδή, ο λόγος των μιμητικών τεχνών μετά γνώσης προς τις μιμητικές τέχνες μετά δόξας- είναι ίσος με το λόγο της γνώσης προς τη δόξα στην Τετμημένη Γραμμή του *Πολιτεία*.

Ο Πλάτων δεν κάνει κάποια ρητή αναφορά στη διαδικασία, αλλά μοιάζει έμμεσα να διαπιστώνει την ισότητα αυτών των δύο λόγων στο 267b7-9, όπου η σχέση της μίμησης μετά γνώσης και μίμησης μετά άγνοιας εξισούται προς τη σχέση της γνώσης αυτής καθ' αυτής και άγνοιας αυτής καθ' αυτής.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να περιγράψουμε το Κριτήριον του Λόγου για το Σοφιστή:

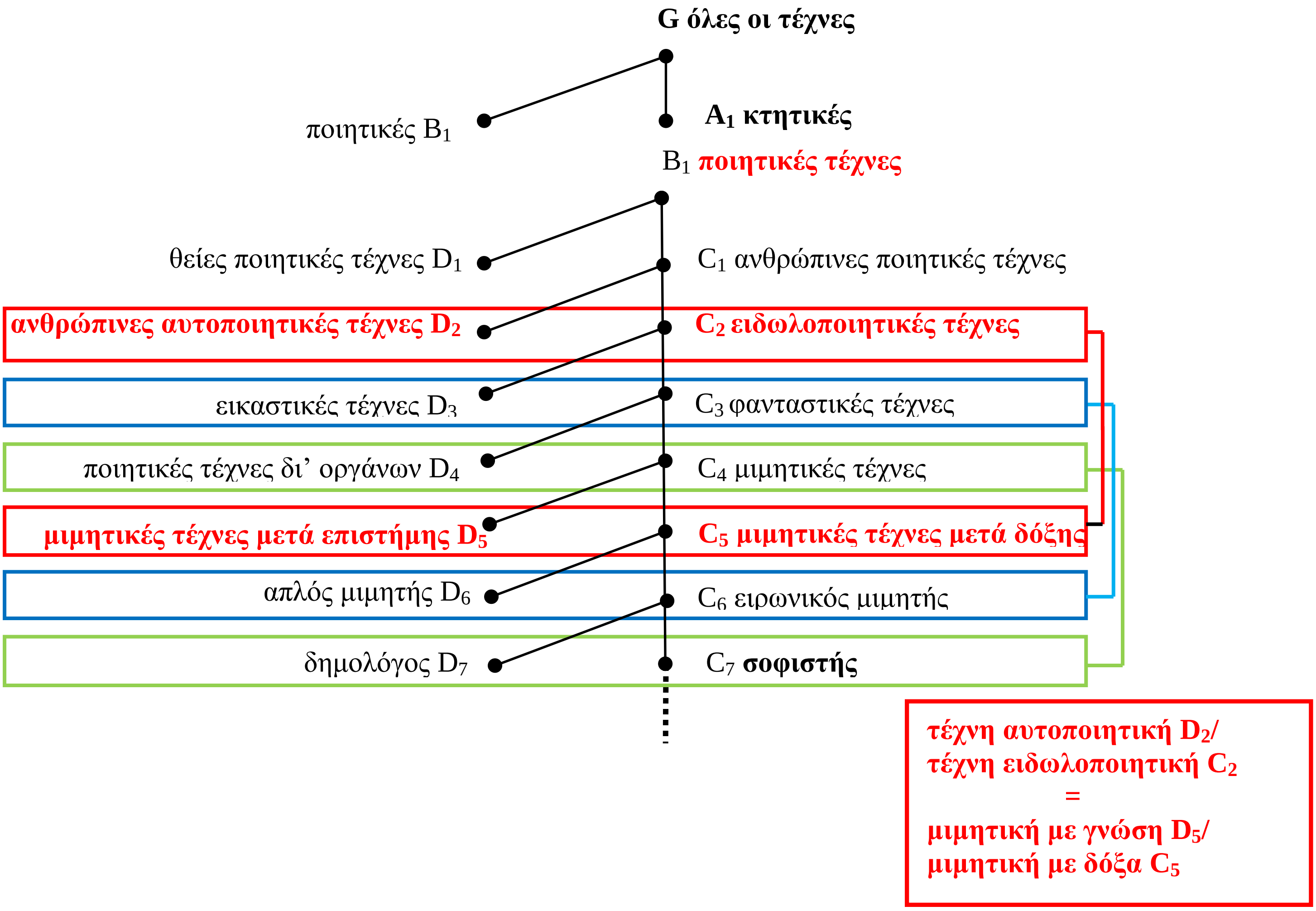
(δ2) Πρόταση (ο Λόγος του Σοφιστή). Ο λόγος του δευτέρου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή, δηλαδή ο λόγος των ανθρώπινων ποιητικών τεχνών που παράγουν πραγματικά αντικείμενα προς τις ανθρώπινες ποιητικές τέχνες που παράγουν εικόνες, ισούται προς το λόγο του πέμπτου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή, δηλαδή το λόγο των μιμητικών τεχνών μετά γνώσης προς τις μιμητικές τέχνες μετά δόξας.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την αναλογία της Τετμημένης Γραμμής, που εξηγήσαμε στην (β), και τις Προτάσεις (γ1) και (δ1).

(ε) Η Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή

Η πλήρης Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή μπορεί έτσι να συνοψιστεί στον ακόλουθο Πίνακα 9 (στον οποίο οι άλλες δύο συνδέσεις που σημειώνονται, θα αγνοηθούν προς στιγμή και θα εξηγηθούν στην (στ), παρακάτω):

Πίνακας 9. Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή (*Σοφιστής* 264b-268d)



Κατ’ αυτόν τον τρόπο, έχουμε πλήρη επιβεβαίωση της ανθυφαιρετικής σημασίας του Λόγου την οποία προτείναμε στη Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή. Αυτή τη φορά, ο Λόγος δεν έχει την εύκολα αντιληπτή, προφανή μορφή που εμφανίστηκε στον ορισμό του Ασπαλιευτή (‘ἄνωθεν εἰς τὸ κάτω προς κάτωθεν εἰς τοὐναντίον ἄνω’), αλλά έχει μία περισσότερο εκλεπτυσμένη και φιλοσοφική υφή, που παίζει κεντρικό ρόλο στη διαλεκτική του *Πολιτεία*[67].

(στ) Φιλοσοφικές συνέπειες των δύο επομένων Λόγων της Διαίρεσης και Συναγωγής του Σοφιστή κατ’ αναλογία των γεωμετρικών συνεπειών της περιοδικής ανθυφαίρεσης

Ο ορισμός του Σοφιστή παρουσιάζει ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που τον συνδέει ακόμη πιο στενά με το μαθηματικό μοντέλο: υπάρχουν δύο Λόγοι μετά το Κριτήριον του Λόγου, και αν πράγματι ακολουθείται το μαθηματικό ανθυφαιρετικό μοντέλο, θα πρέπει να περιμένουμε να έχουμε δύο επιπλέον ισότητες Λόγων: δηλαδή ο λόγος του τρίτου βήματος θα πρέπει να είναι ίσος με το λόγο του έκτου διαιρετικού-βήματος, και ο λόγος του τέταρτου διαιρετικού-βήματος να είναι ίσος με το λόγο του έβδομου και τελικού διαιρετικού-βήματος.

(στ1) Η ισότητα του τρίτου και έκτου λόγου της Διαίρεσης του Σοφιστή. Στο τρίτο διαιρετικό-βήμα, το Γένος ‘ειδωλοποιητική-ανθρώπινα παραγόμενες εικόνες’ διαιρείται σε δύο είδη,

‘ΞΕ. Μίαν μὲν τὴν εἰκαστικὴν ὁρῶν ἐν αὐτῇ τέχνην.

[67] Ο συσχετισμός του λόγου της Τετμημένης Γραμμή του Πολιτεία με τη Διαίρεση και Συναγωγή του Σοφιστή στο *Σοφιστής* επισημαίνεται από τον Πρόκλο στο *εις Πολιτείαν* 1,290,7-10 (χωρίο 17).

ἔστι δ' αὕτη μάλιστα ὁπόταν κατὰ τὰς τοῦ παραδείγματος
συμμετρίας τις ἐν μήκει καὶ πλάτει καὶ βάθει, καὶ πρὸς
τούτοις ἔτι χρώματα ἀποδιδοὺς τὰ προσήκοντα ἑκάστοις, τὴν
τοῦ μιμήματος γένεσιν ἀπεργάζηται.' (235d6-e2)[68]

'ΞΕ. Τί δέ; τὸ φαινόμενον μὲν διὰ τὴν οὐκ ἐκ καλοῦ
θέαν ἐοικέναι τῷ καλῷ, δύναμιν δὲ εἴ τις λάβοι τὰ τηλικαῦτα
ἱκανῶς ὁρᾶν, μηδ' εἰκὸς ᾧ φησιν ἐοικέναι, τί καλοῦμεν; ἆρ'
οὐκ, ἐπείπερ φαίνεται μέν, ἔοικε δὲ οὔ, φάντασμα;
ΘΕΑΙ. Τί μήν;' (236b4-8)

'ΞΕ. Τὴν δὴ φάντασμα ἀλλ' οὐκ εἰκόνα ἀπεργαζομένην
τέχνην ἆρ' οὐ φανταστικὴν ὀρθότατ' ἂν προσαγορεύοιμεν;
ΘΕΑΙ. Πολύ γε.
ΞΕ. Τούτω τοίνυν τὼ δύο ἔλεγον εἴδη τῆς εἰδωλοποιικῆς,
εἰκαστικὴν καὶ φανταστικήν.' (236c3-7)
'ΞΕ. Τῆς τοίνυν εἰδωλουργικῆς ἀναμνησθῶμεν ὅτι τὸ μὲν
εἰκαστικόν, τὸ δὲ φανταστικὸν ἔμελλεν εἶναι γένος' (266d8-9)

Στο έκτο διαιρετικό βήμα, που περιγράφεται στο 267e7-268a8, το Γένος του με δόξα-μιμητή διαιρείται στα δύο είδη, 'απλούν' και 'ειρωνικόν' με δόξα-μιμητή, όπου οι απλοί μιμητές είναι εκείνοι που

'οἰόμενος εἰδέναι ταῦτα ἃ δοξάζει',
ενώ οι ειρωνικοί μιμητές είναι εκείνοι που
'διὰ τὴν ἐν τοῖς λόγοις κυλίνδησιν ἔχει
πολλὴν ὑποψίαν καὶ φόβον ὡς ἀγνοεῖ ταῦτα ἃ πρὸς τοὺς
ἄλλους ὡς εἰδὼς ἐσχημάτισται.'

Κατά συνέπεια οι απλοί μιμητές δεν παραμορφώνουν τη γνώμη τους, αλλά εκφράζουν ένα αντίγραφο της γνώμης τους, ενώ οι ειρωνικοί παραμορφώνουν και καλύπτουν τη γνώμη τους πίσω από ένα ψευδές φαίνεσθαι. Επομένως έχουμε

(στ2) Πρόταση. Ο λόγος του τρίτου διαιρετικού βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή, δηλαδή ο λόγος των εικαστικών τεχνών προς των φανταστικών τεχνών, ισούται με το λόγο του έκτου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή, δηλαδή ο λόγος του απλού μιμητή προς τον ειρωνικό μιμητή.

(στ3) Η ισότητα του τέταρτου και έβδομου λόγου. Στο τέταρτο διαιρετικό-βήμα, που περιγράφεται στο 267a1-b3, το Γένος, φανταστικές τέχνες, διαιρείται σε δύο είδη, ως ακολούθως:

---

[68] Χωρίο 18 (περιέχει το *Σοφιστής* 234e-236d, εκτός εκείνων που αναφέρονται στο (στ1)).

‘ΞΕ. Τὸ τοίνυν φανταστικὸν αὖθις διορίζωμεν δίχα.

ΘΕΑΙ. Πῇ;

ΞΕ. Τὸ μὲν δι' ὀργάνων γιγνόμενον, τὸ δὲ αὐτοῦ

παρέχοντος ἑαυτὸν ὄργανον τοῦ ποιοῦντος τὸ φάντασμα.

ΘΕΑΙ. Πῶς φῄς;

ΞΕ. Ὅταν οἶμαι τὸ σὸν σχῆμά τις τῷ ἑαυτοῦ χρώμενος

σώματι προσόμοιον ἢ φωνὴν φωνῇ φαίνεσθαι ποιῇ, μίμησις

τοῦτο τῆς φανταστικῆς μάλιστα κέκληταί που.’

Συνεπώς, το όργανο της μίμησης στη μιμητική τέχνη είναι ο ίδιος ο μιμητής, ενώ στην χωρίς όνομα αντίθετη τέχνη το όργανο της μίμησης είναι άλλο από το μιμητή.

Στο έβδομο διαιρετικό-βήμα, που περιγράφεται στο 268a9-c4, ο ειρωνικός διαιρείται στο δημαγωγό και το σοφιστή, με το δημαγωγό να είναι

‘τὸν μὲν δημοσίᾳ τε καὶ μακροῖς λόγοις πρὸς πλήθη δυνατὸν

εἰρωνεύεσθαι καθορῶ’

ενώ ο σοφιστής να είναι

‘τὸν δὲ ἰδίᾳ τε καὶ βραχέσι λόγοις

ἀναγκάζοντα τὸν προσδιαλεγόμενον ἐναντιολογεῖν αὐτὸν

αὑτῷ.’

Οπότε, ο ακροατής του ειρωνικού, αν αυτός ο ειρωνικός είναι ένας δημολόγος, εξαπατάται και έρχεται σε αντίφαση όχι από τον εαυτό του αλλά από άλλο όργανο απάτης (δηλαδή από τον ίδιο το δημολόγο), ενώ αν ο ειρωνικός είναι ένας σοφιστής, τότε ο ακροατής εξαναγκάζεται από το σοφιστή να γίνει ο ίδιος ο εαυτός του όργανο απάτης.

Κατά συνέπεια έχουμε:

(στ4) Πρόταση. Ο λόγος του τετάρτου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή, δηλαδή ο λόγος του δι’ οργάνων μιμητή προς το μιμητή που ο ίδιος είναι το όργανο της μίμησης

ισούται προς το λόγο του εβδόμου βήματος στη Διαίρεση του Σοφιστή, δηλαδή ο λόγος του δημολόγου, του οποίου ο ακροατής έρχεται σε αντίφαση και εξαπατάται όχι από τον εαυτό του αλλά από άλλον, προς το σοφιστή, του οποίου ο ακροατής αναγκάζεται να έρθει σε αντίφαση και να εξαπατηθεί από τον εαυτό του.

Οι Προτάσεις (στ2) και (στ4) παρέχουν επιπλέον ισχυρά αποδεικτικά στοιχεία υπέρ της ανθυφαιρετικής ερμηνείας της Διαίρεσης και Συναγωγής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.

Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ Η ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΠΛΑΤΩΝΙΚΗΣ ΙΔΕΑΣ "Ο ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ"

Ο τρίτος και τελευταίος διάλογος της τριλογίας σχετικά με τη θεωρία της γνώσης του Πλάτωνα είναι ο *Πολιτικός*. Θα περιγράψουμε τα περιεχόμενα αυτού του διαλόγου, προχωρώντας, όχι με τη σειρά που παρουσιάζονται από τον Πλάτωνα, αλλά, με λογική σειρά.
Η τέχνη της πολιτικής ικανότητας ορίζεται από τη μέθοδο «όνομα και λόγος» αντίστοιχη της «διαίρεσης και συναγωγής », προϋποθέτοντας βήματα με δυαδική διαίρεση και το κριτήριο του λόγου, σύμφωνα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται στους *Σοφιστές*.
Έχουμε δει στις ενότητες 9 και 10 ότι, στους *Σοφιστέ,ς* μια πλατωνική ιδέα όπως ο Ψαράς ή ο Σοφιστής, γίνεται γνωστή σε εμάς τους ανθρώπους μέσα από τον ορισμό μιας Τέχνης, της τέχνης του Ψαρέματος ή της Σοφιστικής Τέχνης αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διαίρεσης και της συναγωγής, αντίστοιχα του «ονόματος και του λόγου», που ερμηνεύσαμε ως φιλοσοφική ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης. Κατά συνέπεια, από την 11α που ακολουθεί, η Ιδέα του Πολιτικού στο ομώνυμο διάλογο γίνεται γνωστή σε μας από τον ορισμό της τέχνης της πολιτικής ικανότητας, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διαίρεσης και της συναγωγής, αντίστοιχα «του ονόματος και του λόγου", μια μέθοδος που έχει ήδη ερμηνευθεί ως φιλοσοφική ανάλογος της τελικά περιοδικής ανθυφαίρεσης.

11.1. Τα δέκα πρώτα βήματα της Διαίρεσης και της Συναγωγής (258b-267c)

Ο στόχος του *Πολιτικού* είναι η απόκτηση της γνώσης (επιστήμη) της Πλατωνικής ιδέας του Πολιτικού, με τη μέθοδο της διαίρεσης και της συναγωγής, μέθοδος που χρησιμοποιείται στους *Σοφιστές*. Στο πρώτο μέρος του διαλόγου,258b-267c, τίθενται τα πρώτα δέκα βήματα της διαίρεσης. Το αρχικό γένος G όλων των τεχνών διαδοχικά χωρίζεται με τον δυαδικό τρόπο που γνωρίζουμε από τους *Σοφιστές*. Έτσι

το G διαιρείται σε (K1, L1),
το L1 διαιρείται σε (K2, L2),
...,

το L9 διαιρείται σε (K10, L10).

Ακολουθεί το σχήμα που συνοψίζει αυτά τα δέκα αρχικά βήματα της Διαίρεσης.

[G] όλες οι τέχνες (258b-259d)	
[K1] πρακτικές	**[L1]** επιστημονικές («γνωστικές»)

[L 1] επιστημονικές (259d-260C)	
[K2] αξιολογεί, καθορίζει,(«κρίνειν»)	**[L2]** εντολή,

[L 2] εντολή (260c-261b)	
[K3] εντολή κάποιου άλλου	**[L3]** ιδίες εντολές

[L3] ιδίες εντολές (261b-d)	
[K4] άψυχη αγέλη	**[L4]** αγέλη έμβιων όντων (= ζώων)

[L4] αγέλη ζώων (261d-e)	
[K5] αγέλη αποτελούμενη από ένα μόνο ζώο («Μονοτροφία»)	**[L5]** αγέλη αποτελούμενη από πολλά ζώα

[L5] αγέλη αποτελούμενη από πολλά ζώα (264b-d)	
[K6] αγέλη υδρόβιων ζώων	**[L6]** αγέλη χερσαίων ζώων

[L6] αγέλη από πολλά χερσαία ζώα (264e-265b)	
[K7] αγέλη πτηνών	**[L7]** αγέλη ζώων με πόδια

[L7] αγέλη από πολλά χερσαία ζώα με πόδια (265b-d)	
[K8] αγέλη κερασφόρων ζώων	**[L8]** αγέλη μη κερασφόρων ζώων

[L8] αγέλη από πολλά χερσαία μη κερασφόρα ζώα με πόδια (265d-e)	
[K9] αγέλη με διάφορα ζώα	**[L9]** αγέλη με μη ανάμικτα ζώα

[L9] αγέλη από πολλά χερσαία ζώα μη ανάμικτα, μη κερασφόρα με πόδια (265E-266d)	
[K10] αγέλη με τετράποδα (Διάμετρος διαμέτρου) χοίροι	**[L10]** αγέλη με δίποδα (Διάμετρος) (άνθρωπος)

Σημειώστε ότι μετά το L4 έχουμε να κάνουμε με
τις **τέχνες της σίτισης μιας αγέλης ζώων («αγελαιοτροφική»,** 261b-d).
Αυτό που πραγματικά διαιρείται είναι η φύση της αγέλης, περιορίζοντάς την, με διαδοχική δυαδική διαίρεση και αποκλεισμό, μέχρι να καταλήξουμε **στις τέχνες της διοίκησης μιας ανθρώπινης αγέλης** (L10, 265e-266d).

11.2. Το επιχείρημα για την ανάγκη συνέχισης της Διαίρεσης (267c-268d και 274e-277c)
Τα βήματα διαίρεσης που περιγράφονται στο 11α δεν είναι το τέλος της αναζήτησης του ορισμού του Πολιτικού, όπως θα πίστευε κανείς. Αυτό συμβαίνει επειδή το L10 αποτελείται από
τις τέχνες διοίκησης μιας ανθρώπινης αγέλης
αλλά μας ενδιαφέρει να ορίσουμε την πολιτική ικανότητα,
η οποία είναι
η βέλτιστη τέχνη διοίκησης μιας ανθρώπινης αγέλης.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακόμη μπροστά μας μια δεύτερη διαδικασία διαδοχικών δυαδικών διαιρέσεων, στην οποία η αγέλη καθορίζεται ως ανθρώπινη αγέλη, και αυτό που περιορίζεται τώρα, μέσω της δυαδικής διαίρεσης και του αποκλεισμού, είναι η
φύση της διοίκησης αυτής της ανθρώπινης αγέλης («αγελαιοκομική», 275e),
μέχρι να φτάσουμε **στη βέλτιστη διοίκηση**.

11.3. Ο μύθος της παλινδρομικής περιοδικότητας με τον εποχή του Κρόνου και την εποχή του Δία (268d-274e)

Σύμφωνα με τον μύθο 268d-274e, υπάρχουν δύο εποχές στον κόσμο, η εποχή του Κρόνου και η εποχή του Δία.
Ο κόσμος, για να θεωρηθεί ως σφαιρική ολότητα, περιστρέφεται προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της εποχής του Κρόνου. Μετά από πολύ καιρό, όταν έχουν εξαντληθεί όλα τα πιθανά στάδια της εποχής του Κρόνου («να geinon Hede pan aneloto genos " pasas tas geneseis apodedokuias»), είναι απαραίτητο να αντιστραφεί η κατεύθυνση («palin anestrephen») και να περάσουμε από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία (272d6-ε6)[69].
Όταν η εποχή του Δία κινδυνεύει να χάσει την κατεύθυνσή της και ο Θεός αντιλαμβάνεται ότι επίκειται πρόβλημα, και ότι «θα μπορούσε να βουλιάξει στην τρικυμία της σύγχυσης και να βυθιστεί στην άπειρη θάλασσα της ανομοιότητας (« kedomenos Hina με heimastheis Hupo taraches dialetheis eis ton tes anomoiotetos Apeiron onta ponton »),... αντέστρεψε (« strepsas») ό, τι είχε γίνει επισφαλές και άστατο κατά την προηγούμενη περίοδο, όταν ο κόσμος αφέθηκε μόνος του, τον επανέφερε σε τάξη, τον αποκατέστησε, και τον έκανε

(«αθάνατον») και αγέραστο («αγερον»), (273c4-e4). Με τον τρόπο αυτό, είμαστε πάλι πίσω στην εποχή του Κρόνου ολοκληρώνοντας μια πλήρη περίοδο[70].

Ο κόσμος κινείται επαναλαμβάνοντας αέναα αυτήν την περίοδο, εναλλάσσοντας την εποχή του Κρόνου με την εποχή του Δία. Η σχέση των δύο εποχών είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Περιγράφεται θεματικά ως εξής: Στην εποχή του Δία (την οποία διανύουμε σήμερα) οι άνθρωποι προέρχονται από τη μη-ύπαρξη α στην ύπαρξη β, έπειτα μεγαλώνουν σε γ, έπειτα αποκτούν μια γενειάδα δ, στη συνέχεια τα γένια τους γίνονται λευκά ε, κατόπιν γερνούν και ετοιμάζονται να πεθάνουν στ. Αν εκείνη τη στιγμή ο κόσμος τύχει να μεταβεί στην εποχή του Κρόνου, τότε ο

[69] Σε μια ανακατασκευή της απόδειξης του θεωρήματος που κάθε κατά τον Θεαίτητο μείγμα έχει παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση, και η οποία παρουσιάζεται στην Ενότητα 13, υπάρχει ένα επιχείρημα του περιστερεώνα ακριβώς στο τέλος της ημιπεριόδου, δηλαδή στην ορολογία του Πλάτωνα στο σημείο της αλλαγής από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία. Ο λόγος που δίνεται παραπάνω για την αλλαγή (aneloto, apodedokuias) φαίνεται να εναρμονίζεται με το επιχείρημα του περιστερεώνα.

[70] Συνεχίζοντας την προηγούμενη υποσημείωση ο λόγος που προβάλλεται από τον Πλάτωνα για την αλλαγή από την εποχή του Δία στην εποχή του Κρόνου είναι η ανάγκη να αποφευχθεί το κακό, μη περιοδικό άπειρο, κάτι που επιτυγχάνεται με το κριτήριο του Λόγου. Πάλι η φιλοσοφική περιγραφή του Πλάτωνα ταιριάζει με την μαθηματική απόδειξη.

άνθρωπος θα πάει από το στάδιο στ στο ε έπειτα στο δ στην συνέχεια στο γ και μετά στο β και στην συνέχεια θα περάσει στην ανυπαρξία α (270d-271 a).
Συνοψίζοντας, σύμφωνα με το μύθο, ο κόσμος είναι περιοδικός, και η περίοδος αποτελείται από δύο ημιπεριόδους, την εποχή του Κρόνου που ακολουθείται από την εποχή του Δία, με άλλα λόγια, είναι παλινδρομικά περιοδική.

11.4. Κάθε Διαίρεση και Συναγωγή έχει παλινδρομικά περιοδική μορφή, και είναι έτσι μια άπειρη διαίρεση. Ειδικότερα, τα δέκα πρώτα βήματα της Διαίρεσης και της Συναγωγής του Πολιτικού αντιστοιχούν στην εποχή του Κρόνου και πρέπει να ολοκληρωθούν με τις διαιρέσεις της εποχής του Δία, παλινδρομικά με την εποχή του Κρόνου, ώστε να συνυπάρξουν και οι δύο στην Συναγωγή μέσω του Λόγου (276a)

Το απόσπασμα 276a1-7 είναι ζωτικής σημασίας για τη δική μας ερμηνεία του *Πολιτικού,* διότι σε αυτό το απόσπασμα ο Πλάτωνας καθιστά απολύτως σαφές ότι η παλινδρομική περιοδικότητα του μύθου πρέπει να εφαρμόζεται για την Διαίρεση και τη Συναγωγή του πολιτικού, και δεδομένου ότι ο πολιτικός είναι απλώς παράδειγμα μιας Τέχνης, και η Διαίρεση και η Συναγωγή του έχει ως στόχο να δείξει τη γενική μέθοδο, σίγουρα προκύπτει ότι
κάθε Διαίρεση και η Συναγωγή (συμπεριλαμβανομένης εκείνης του Ψαρά [Ενότητα 9], εκείνης των Σοφιστών [Ενότητα 10], και εκείνης του Πολιτικού, προς το παρόν υπό κατασκευή) έχει (παλινδρομικά) περιοδική μορφή.
Σε αυτό το σημείο πρέπει να θυμίσουμε ότι **όλες οι περιγραφές** της μεθόδου της (Διαίρεσης και της) Συναγωγής των Πλατωνικών διαλόγων παρουσιάζουν **την κυκλική, περιοδική φύση** της μεθόδου.

Ειδικότερα, η Πλατωνική Διαίρεση και η Συναγωγή δεν μοιάζει με την Αριστοτελική διαίρεση σε γένος και differentia, σαφώς μια αυστηρά πεπερασμένη διαίρεση, αλλά, έχοντας περιοδική μορφή, είναι μία άπειρη διαίρεση. Ακολουθεί το απόσπασμα 276a1-7:

[ΝΕ. ΣΩ.] ... Ἀ λλ '**ἡ μετ ὰ το ῦ το δια ί ρεσις**
α ὖ **τ ί να τρ ό πον** ἐ γ ί γνετ »ἄ ν?
ΞΕ. **Κατ ὰ τα ὐ τ ὰ**
καθ 'ἅ περ ἔ μπροσθεν
δι ῃ ρο ύ μεθα
τ ὴ ν ἀ γελαιοτροφικ ὴ ν
πεζο ῖ ς τε
κα ὶ ἀ πτ ῆ σι,

κα ὶ ἀ με ί κτοις τε
κα ὶ ἀ κερ ά τοις,
το ῖ ς α ὐ το ῖ ς ἄ ν που
το ύ τοις
διαιρο ύ μενοι
κα ὶ τ ὴ ν ἀ γελαιοκομικ **ὴ ν**
τ ή ν τε ν ῦ ν
κα ὶ τ ὴ ν ἐ π ὶ Κρ ό νου βασιλε ί αν
περιειληφ ό τες ἂ ν ἦ μεν **ὁ μο ί ως**
ἐ ν τ ῷ λ ό γ ῳ.

Μεταφράζεται ως εξής:

		Οι νεότερος Σωκράτης: ... αλλά πώς θα γίνει η επόμενη διαίρεση; Ξένος: **Στα ίδια είδη** («κατά ταυτα»)
όπως («kathaper») **διαιρέσαμε** την τέχνη της σίτισης αγελών πριν σε		
	εκείνα που περπατούν [L7]	
και τα πτηνά, [K 7]		
	και τις αμιγείς φυλές [L9]	
	και τα μη κερασφόρα, [L 8]	
		θα πρέπει να **διαιρέσουμε** την τέχνη της φροντίδας των αγελών σε **τέχνες παρόμοιες με** **(«τοις αυτοις»)**
εκείνες («τούτοις »),		
συνδυάζοντας («perieilephotes») στον λόγο («εν τοι λόγοι») και		
		την **τρέχουσα [του Δία]** εποχή
με την εποχή **του Κρόνου**.		

	Το δεύτερο ήμισυ της διαδικασίας (**αγελαιοκομική)**, όπου η διοικούμενη αγέλη είναι η ανθρώπινη αγέλη, και παραμένει σταθερή, και *η φύση του προστάζοντος βοσκού* η μεταβλητή) αντιστοιχεί στην εποχή **του Δία**,
ενώ το πρώτο ήμισυ (**αγελαιοτροφική)**, *όπου η φύση της διοικούμενης αγέλης* είναι η μεταβλητή) αντιστοιχεί στην η εποχή **του Κρόνου**,	
στο μύθο της ανέλιξης (11.3). Έτσι το (276a) είναι ακριβώς το σημείο στον *Πολιτικό*, όπου η μέθοδος της διαίρεσης και της συναγωγής, δηλαδή η μέθοδος της φιλοσοφικής περιοδικής ανθυφαιρεσης, ρητά συνδέεται με την παλινδρομικότητα, δεδομένου ότι	
η εποχή του Κρόνου	

<table>
<tr><td></td><td>και η εποχή του Δία</td></tr>
<tr><td colspan="2">είναι σε παλινδρομική σχέση στο μύθο της «ανέλιξης» του κόσμου.</td></tr>
<tr><td>Σε αυτό το απόσπασμα
το πρώτο ήμισυ της διαδικασίας,
με δέκα πρώτα βήματα διαίρεσης
το G διαιρείται σε K1, L1,
το L1 διαιρείται σε K2, L2,
...,
Το L9 διαιρείται σε K10, L10,
συνδέεται σαφώς με
την εποχή του Κρόνου,</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>και, επίσης, ρητά, αναφέρεται ότι
ο ορισμός του πολιτικού
πρέπει να συμπληρωθεί,
όπως και στο μύθο της ανέλιξης,
με το δεύτερο μισό του,
με τελευταία βήματα διαίρεσης, έστω
το W11 διαιρείται σε Z10, W10,
το W10 διαιρείται σε Z9, W9,
...,
το W2 διαιρείται σε Z1, W1,
σε αντιστοιχία με την εποχή του Δία,
παλινδρομικά ως προς</td></tr>
<tr><td>την εποχή του Κρόνου,</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">περιλαμβάνοντας συνολικά μια πλήρη περίοδο, έναν κύκλο.</td></tr>
</table>

(Υπάρχουν επίσης τα πολλά βήματα L11, L12, ..., W12, W11 τα οποία δεν εξετάζονται λεπτομερώς, αλλά δίνονται σε ομάδες, ως «**ενδεχόμενες αιτίες**» (287b-289α). Δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το μέρος του ορισμού του πολιτικού, το οποίο κατά πάσα πιθανότητα έχει επίσης κάποια παλινδρομικά χαρακτηριστικά (όπως διαφαίνεται στο παρακάτω σχήμα), δεδομένου ότι κάτι τέτοιο δεν έχει καμία σημασία για την ανακατασκευή μας).

Σύμφωνα με τις Διαιρέσεις και τις Συναγωγές στους *Σοφιστές*, αυτός ο κύκλος θα πρέπει να πραγματοποιηθεί μέσω του κριτηρίου του Λόγου. Αυτό παίρνει την ακόλουθη μορφή: Το τελευταίο γένος της εποχής του Δία, που συμβολίζεται ως W1, θα διαιρεθεί στην τέχνη της στρατηγικής K'1 και την πολιτικής ικανότητας L'1, και ως εκ τούτου, το κριτήριο του λόγου συνεπάγεται K'1 / L'1 = K1 / L1

Έτσι, το νέο στοιχείο στην Διαίρεση και την Συναγωγή του *Πολιτικού*, που εισάγεται στα 11,3 και 11,4, σε σχέση με τους *Σοφιστές*, δεν είναι μόνο η περιοδικότητα, όπως στους *Σοφιστές*, αλλά επιπλέον η παρουσία παλινδρομικότητας εντός της περιόδου. Με άλλα λόγια, αναμένουμε ότι η ανθυφαίρεση θα έχει μια περίοδο, αλλά τέτοια ώστε να παρουσιάζει μια ορισμένη συμμετρία σε σχέση με το μέσον της περιόδου. Στη γλώσσα που προτείνεται στον μύθο 11.3, τα βήματα διαίρεσης εντός της περιόδου θα διαιρούνται σε δύο μέρη, το πρώτο ήμισυ θα είναι η εποχή του Κρόνου, και το δεύτερο ήμισυ η εποχή του Δία (πρβλ 276a που πραγματεύονται τα σημεία (iii) και (iv) στο 11ε, παρακάτω).

Στη συνέχεια, αναμένουμε ότι ο ορισμός του Πολιτικού πρέπει να επιδεικνύει την παλινδρομικότητα αυτών των δύο εποχών. Τώρα θα δείξουμε ότι αυτό ακριβώς είναι το σχέδιο που προτείνεται και υλοποιείται από τον Πλάτωνα για τον ορισμό του Πολιτικού.

11.5. Τα τελευταία δέκα βήματα διαίρεσης (267c-268d και 274e-277c, 289E-305e)

Τα τελευταία δέκα βήματα Z10, ..., Z1 στην εποχή του Δία και το Κριτήριο του Λόγου στον ορισμό του Πολιτικού, περιγράφονται στην 289ε-305ε.

(i) Το παιχνίδι (277e).

Ο Πλάτων δεν έχει καμία πρόθεση να δώσει τα βήματα του Δία ρητά και σε διαδοχή, έτσι αυτά τα βήματα δεν δίνονται στη σωστή σειρά, με την οποία εμφανίζονται στον ορισμό του πολιτικού, αλλά με τη μορφή ενός **παιχνιδιού**, θυμίζοντάς παιχνίδι της γραμματικής για παιδιά, όπως αναφέρεται ρητά στην 277e. Σκοπός μας είναι να βρεθεί η σωστή σειρά και το κριτήριο του λόγου και έτσι να ολοκληρωθεί ο ορισμός του πολιτικού.

(ii) Οι κανόνες του παιχνιδιού.

Ωστόσο ο Πλάτων θέτει σαφείς κανόνες που θα μας επιτρέψουν να ολοκληρώσουμε τον ορισμό αυτό.

Κανόνας 1. Μία προς μία παλινδρομική αντιστοιχία μεταξύ των KjJ και Zj (276a, 277e-279a).

Σε κάθε βήμα διαίρεσης (Kj, Lj) της εποχής του Κρόνου, δηλαδή της αγελαιοκομικής, όπου κάποιο είδος αγέλης Kξ που διοικείται και άγεται **απορρίπτεται** , υπάρχει ένα μοναδικό βήμα διαίρεσης (Z j, W j) της εποχής του Δία, δηλαδή της αγελαιοτροφικής,, όπου απορρίπτεται κάποιο «παρόμοιο» είδος διακυβέρνησης και ηγεσίας Zj του ανθρώπινου κοπαδιού, για j = 1, .., 10. Τα «θετικά» γένη Wj **δεν δίδονται** (αλλά η μέθοδος ΔΣ συνεπάγεται ότι στην θεωρία ορίζονται μοναδικά, ως σχετικό συμπλήρωμα του Z j στο W j + 1).

Κανόνας 2. Διάταξη των συστημάτων διακυβέρνησης (291c-303b).

Υπάρχουν έξι τύποι συμβατικής διακυβέρνησης, δηλαδή
διακυβέρνησης (I) από έναν ή λίγους, ή πολλούς, και
διακυβέρνηση (II), με νόμους, ή χωρίς νόμους,
σε κάθε δυνατό συνδυασμό σε κάθε ένα από τα δύο κριτήρια (I) και (II).
Έτσι
Τ Η τυραννία είναι η διακυβέρνηση από έναν, χωρίς νόμους,
Ο Η Ολιγαρχία από λίγους χωρίς νόμους,

Αν Η Αναρχία από πολλούς χωρίς νόμους,
Δ Η δημοκρατία από πολλούς με νόμους,
Αρ Η Αριστοκρατία, από λίγους με νόμους, και
Μ Η Μοναρχία από έναν με νόμους.
(Ο Πλάτων δεν χρησιμοποιεί τον όρο Αναρχία για την διακυβέρνηση από πολλούς χωρίς νόμους στο *Πολιτικό,* αλλά χρησιμοποιεί τον όρο αλλού, π.χ. στους *Νόμους* 942a-d).

Υπάρχει μια αρκετά εκτενής συζήτηση σχετικά με αυτούς τους τύπους της διακυβέρνησης στο *Πολιτικό* 291c-303b με τα ακόλουθα συμπεράσματα:
(2α) Υπάρχει μια διάταξη σε αυτούς τους έξι τύπους διακυβέρνησης η οποία έχει ως εξής:
Τ> Ο> Αν> Δ> Αρ> Μ
υπό την έννοια ότι η Τ είναι η χειρότερη και η Μ η σχετικά καλύτερη μορφή διακυβέρνησης. Αυτή η διάταξη έχει ως εξής, επειδή

(i) σε περίπτωση απουσίας διακυβέρνησης με γνώση, είναι καλύτερα να έχουμε νόμους, παρά διακυβέρνηση χωρίς νόμους, και
(ii) χωρίς νόμους οι πολλοί κυβερνούν καλύτερα από τους λίγους και από τον έναν, ενώ με την παρουσία των νόμων, η κατάσταση είναι ακριβώς η αντίθετη.
(2β) Όλα αυτά τα συμβατικά είδη διακυβέρνησης πρέπει να απορρίπτονται, διότι δεν βασίζονται σε αληθινή γνώση. Ως εκ τούτου, το καθένα από αυτά (ενδεχομένως περισσότερα από ένα κάθε φορά) θα απορριφθεί σε κάποιο Zj.
(2γ) Όλοι οι τύποι διακυβέρνησης με νόμους πρέπει να απορρίπτονται διότι οι νόμοι, και στην πραγματικότητα οτιδήποτε γραμμένο, είναι άψυχο, σε αντίθεση με την αληθινή γνώση, η οποία έχει ζωή και ψυχή. Αυτό υποστηρίζεται σθεναρά από ανάλογη απόρριψη του Πλάτωνα, στο τελευταίο μέρος του 274c5-277a5 *Φαίδρου,* του γραπτού λόγου, γενικά, ως εικόνα και όχι ως κάτι πραγματικά ζωντανό.

Κανόνας 3. Διάταξη απόρριψης (303d-e).

Από όλους τους τύπους διακυβέρνησης που πρόκειται να απορριφθούν, ένας σχετικά καλύτερος τύπος διακυβέρνησης x, που απορρίπτεται στο στάδιο Zj της εποχής του Δία, δεν θα **απορριφθεί πριν** από ένα σχετικά χειρότερο είδος διακυβέρνησης y, που απορρίφθηκε στο στάδιο Zi της εποχής του Δία. Έτσι, αν y> x, με την έννοια ότι το y είναι ένα σχετικά χειρότερο και το x είναι ένα σχετικά καλύτερο είδος διακυβέρνησης, τότε το i είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το j.

Κανόνας 4. Οι τρεις τελευταίες τέχνες πρέπει να απορριφθούν (303e-305e)

Οι τέχνες του Δικαστικού Αξιώματος, της Ρητορική και της Στρατηγικής, είναι οι σχετικά ανώτερες τέχνες, και έτσι είναι οι τρεις τελευταίες που θα απορριφθούν.

(iii) Η εύρεση των παλινδρομικών αντιστοιχιών

Τώρα εφαρμόζουμε αυτούς τους κανόνες, που τίθενται από τον Πλάτωνα για τον σκοπό αυτό, προκειμένου να καθορίσουμε το δεύτερο ήμισυ της διαίρεσης για το πολιτικό.

[Z4] Είναι σαφές από τους Κανόνες 1 και 2c, θεωρώντας ότι
στο K4 άψυχες αγέλες απορρίπτονται, ότι στο Z4 η διακυβέρνηση με νόμους (συμπεριλαμβανομένης της Δημοκρατίας Δ, της Αριστοκρατίας Αρ, της Μοναρχίας Μ) πρέπει να απορρίπτεται.

[Z3, Z6, Z7] Είναι αρκετά σαφές από το Κανόνα 1, ότι
στο Z7 οι αγγελιοφόροι (των οποίων ο προστάτης, ο θεός Ερμής, ο αγγελιοφόρος των Θεών, πετά) (290a- γ), στο Z6 οι έμποροι και οι πλοίαρχοι (289Ε-290α), και στο Z3 οι ιερείς και οι μάντεις (290γ-291α), πρέπει να απορριφθούν ως κυβερνήτες.

[Z10] Κάποιο επιχείρημα είναι απαραίτητο για να πειστούμε ότι η απόρριψη των σοφιστών, ως κυβερνητών στο 291b-c, και πάλι στο 303b-c (των σοφιστών των σοφιστών, αυτή τη δεύτερη φορά για να είμαστε ακριβείς), σχετίζεται παλινδρομικά με την απόρριψη των χοίρων ως αγέλη, στο K10 (265e-266c). Εδώ ο Πλάτωνας είναι πολλαπλώς παιχνιδιάρης: καταρχήν, η διαφορά του χοίρου από τον άνθρωπο είναι ότι είναι τετράποδο. Αυτό περιγράφεται με παιχνιδιάρικο τρόπο, σε γεωμετρική γλώσσα, ως «η διάμετρος της διαμέτρου». Παρατηρούμε ότι η παράξενη έκφραση «**διάμετρος της διαμέτρου**» έχει κάποια ομοιότητα ως προς την μορφή με την εξίσου παράξενη έκφραση «**σοφιστές των σοφιστών**»', αλλά μάλλον δεν θα μπορούσε να βρει κάποιο πιο σημαντικό συσχετισμό. Αν δεν επισημανθεί ότι, ενώ ένας πραγματικός διαλεκτικός φιλόσοφος ασχολείται με «την ίδια την διάμετρο» (*Πολιτεία* 510d5-511a1), ένα Ον χωρίς μέρη, είναι οι σοφιστές εκείνοι οι οποίοι, σύμφωνα με τον *Μένωνα* 85b4, αποκαλούν« **διάμετρο** »την ευθεία γραμμή που ενώνει το ένα άκρο ενός τετράγωνου με το απέναντι άκρο του, ένα διαιρετό μέγεθος. Το νόημα αυτής της διάκρισης είναι ενδεχομένως το εξής: οι σοφιστές ασχολούνται με μεγέθη και σε γενικές γραμμές με το αισθητό, ενώ ο διαλεκτικός φιλόσοφος ασχολείται με την ιδέα της διαμέτρου, κάτι που είναι μάλλον ο λόγος της διαμέτρου στην πλευρά του τετραγώνου. Σε κάθε περίπτωση, στον *Μένωνα* φαίνεται ότι υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ της διαμέτρου και των σοφιστών. Ως εκ τούτου, επίσης υπάρχει πράγματι μια σχέση μεταξύ «της διαμέτρου της διαμέτρου», του τετράποδου χοίρου και των σοφιστών των σοφιστών υπονοώντας, βέβαια, ότι οι χειρότεροι σοφιστές είναι σαν τους χοίρους. Είμαστε σαφώς έτοιμοι, δεδομένης και του παιχνιδιάρικου ύφους, να δεχτούμε ότι, βάσει του Κανόνα1, το βήμα Κ10, όπου η αγέλη των χοίρων απορρίπτεται, είναι σχετίζεται παλινδρομικά με το βήμα Ζ10, όπου οι σοφιστές απορρίπτονται ως κυβερνήτες.

[Ζ8, Ζ9] Επομένως, τώρα αναγκαστικά, προκύπτει από τους κανόνες 2 και 3, ότι τα τρία είδη συμβατικής διακυβέρνησης χωρίς νόμους Τ> Ο>Αν πρέπει να συνδέονται με τις υπόλοιπες τρεις ελεύθερες θέσεις στην εποχή του Δία, δηλαδή τις Ζ9, Ζ8, Ζ5, αντίστοιχα. Δηλαδή, η Τυραννία πρέπει να απορριφθεί στο Ζ9 (ενώ το Κ9 απορρίπτει αγέλες ζώων μικτής φυλής),
η Ολιγαρχία στο Ζ8 (ενώ το Κ8 απορρίπτει αγέλες κερασφόρων ζώων), και
η Αναρχία στο Ζ5 (ενώ το Κ5 απορρίπτει αγέλες που αποτελούνται από ένα μόνο ζώο).
Μένει να δούμε, ωστόσο, αν αυτοί οι αναγκαίοι συσχετισμοί έχουν πράγματι ως αποτέλεσμα την παλινδρομικότητα, κάτι που είναι απαραίτητο ώστε η ερμηνεία μας να έχει ισχύ. Για τους δύο πρώτους αυτούς συσχετισμούς, (Κ9, Ζ9) και (Κ8, Ζ8), η παλινδρομικότητα προκύπτει από παρομοίωση του Πλάτωνα δύο φορές των δύο χειρότερων τάξεων των συμβατικών πολιτικών με τους Κενταύρους και τους Σάτυρους (291α-β, 303γ-d). Έτσι
στο Ζ9 οι Κένταυροι πρέπει να απορριφθούν, αντιπροσωπεύοντας στην ορολογία του Πλάτωνα τους τυράννους, σε τέλεια παλινδρομικότητα με το Κ9, και
στο Ζ8 οι Σάτυροι πρέπει να απορριφθούν, αντιπροσωπεύοντας στην ορολογία του Πλάτωνα τους ολιγαρχικούς, σε τέλεια παλινδρομικότητα με το Κ8.

[Ζ5] Για τον τελευταίο από αυτούς τους συσχετισμούς, (Κ5, Ζ5), δεν είναι άμεσα εμφανές από τον *Πολιτικό* γιατί κάτι θα πρέπει να ισχύει, δηλαδή γιατί η Αναρχία θα πρέπει να είναι παλινδρομική προς την αγέλη που απορρίφθηκε στο Κ4, και έτσι να βρίσκεται στη θέση του απορριφθέντος μέρους στο Ζ4. Ωστόσο, αυτό εξηγείται επαρκώς από τη σύγκριση της περιγραφής της Αναρχίας στους *Νόμους* 942a5-d2, ως «κατά μονας δραν», δηλαδή ως μια διακυβέρνηση όπου κάθε άτομο δρα μεμονωμένα, με την περιγραφή της απορριφθείσας αγέλης στην Κ4, ως «μονοτροφία», δηλαδή μία αγέλη αποτελούμενη από ένα μόνο ζώο. Έτσι η Αναρχία (= Δημοκρατία χωρίς νόμους) ταιριάζει με το απορριφθέν μέρος του Ζ4.

[Ζ2] Έχουν απομείνει οι τέχνες της Κρίσης, της Ρητορικής και της Στρατηγικής, για τις οποίες ο Πλάτων θέτει τον Κανόνα 4, ότι δηλαδή θα απορριφθούν τελευταία (303Ε-305Ε). Από αυτές η Κρίση σχετίζεται με το «Κρίνειν» (305b-c), και ως εκ τούτου το Ζ2 συνδέεται, βάσει του Κανόνα 1, με τους Δικαστές (λόγω παλινδρομικότητας), επειδή το Κ2 απορρίπτει το «κρίνειν», και το Ζ2 έχει οριστεί για να απορρίψει τους Δικαστές ως κυβερνήτες και το Ζ2 με τους Δικαστές (το «κρίνειν» είναι η κρίσιμη λέξη, Ζ2 (305b), και Κ2 (260a-c).

[Ζ1] Η τέχνη της Ρητορικής είναι η επόμενη τέχνη που απορρίπτεται, δεδομένου ότι είναι μια πρακτική επιστήμη (304c-e), και ως εκ τούτου το Ζ1 συνδέεται με τους Κανόνες 1 και 4, με τη ρητορική, αφού το Κ1 απορρίπτει τις πρακτικές επιστήμες, και το Ζ1 έχει οριστεί για να απορρίψει την Ρητορική.

Αυτό ολοκληρώνει την αναζήτηση για τις παλινδρομικές αντιστοιχίες μεταξύ των δέκα πρώτων βημάτων της εποχής του Κρόνου με τα δέκα τελευταία βήματα της εποχής του Δία.

(iv) Περίληψη της παλινδρομικής αντιστοιχίας μεταξύ των δέκα πρώτων βημάτων της εποχής του Κρόνου με τα δέκα τελευταία βήματα της εποχής του Δία.

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K10]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη της διακυβέρνησης μιας αγέλης τετράποδων ζώων μη κερασφόρων, χωρίς μίξεις (που παρομοιάζεται με την **διάμετρο της διαμέτρου**) , δηλαδή τους χοίρους, σχετίζεται παλινδρομικά με
το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z10]** στην εποχή του Δία, δηλαδή την τέχνη της διακυβέρνησης από τους σοφιστές (της οποίας οι εφαρμοστές παρομοιάζονται με τους **σοφιστές του σοφιστή**).
Για να δείτε αυτήν την σχέση σημειώστε ότι η «**διάμετρος**» ως διαιρετό μέγεθος, είναι σε αντίθεση με «την διάμετρο την ίδια» (βλ Πολιτεία 510d5-511a1, ένα Ον χωρίς μέρη), και σχετίζεται με τους **σοφιστές** (όπως στον Μένωνα 85b4).

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K9]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη της **διοίκησης αγελών που αναμειγνύονται με άλλες φυλές**, σχετίζεται παλινδρομικά με το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z9]** στην εποχή του Δία, δηλαδή με την τέχνη της διακυβέρνησης, σύμφωνα με την τυραννία χωρίς νόμους, με **κυβερνήτες που παρομοιάζονται με τους «κένταυρους», που ενεργούν και κυβερνούν ως ζώα που αναμειγνύονται με άλλες φυλές**.

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K8]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη της διοίκησης **αγέλης κερασφόρων ζώων**, σχετίζεται παλινδρομικά με το απορριφθέν μέρος **[Z8]** στην εποχή του Δία, δηλαδή την τέχνη της διοίκησης σύμφωνα με την **ολιγαρχία** χωρίς νόμους, **με κυβερνήτες που παρομοιάζονται με «σάτυρους», που ενεργούν και κυβερνούν ως κερασφόρα ζώα**.

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K7]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη της διοίκησης **αγέλης πτηνών** σχετίζεται παλινδρομικά με το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης
[Z7] στην εποχή του Δία, δηλαδή την τέχνη της αναγγελίας, δηλαδή **της διακυβέρνησης και της δράσης σύμφωνα με τον προστάτη τους Ερμή, να το πούμε έτσι, με ένα ιπτάμενο τρόπο.**

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K6]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη του να διοικείς μία αγέλη υδρόβιων ζώων, σχετίζεται παλινδρομικά με
το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z6]** της εποχή του Δία, δηλαδή την τέχνη του να είσαι έμπορος, δηλαδή του να κυβερνάς και να ενεργείς, να το πούμε έτσι, με υδάτινο τρόπο.

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K5]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη του να διοικείς **μία αγέλη που απαρτίζεται από ένα ζώο («μονοτροφία»)**, σχετίζεται παλινδρομικά με
το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z5]** της εποχής του Δία, δηλαδή την τέχνη της διακυβέρνησης, σύμφωνα με τη δημοκρατία χωρίς νόμους, δηλαδή με αναρχία, που περιγράφεται στους Νόμους 942a-d, ως **διακυβέρνηση από ένα πρόσωπο («κατά μόνας δραν») .**

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K4]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη του να δίνει κανείς τις δικές του εντολές **σε μία άψυχη αγέλη**, σχετίζεται παλινδρομικά με
το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z4]** στην εποχή του Δία, δηλαδή την τέχνη της διακυβέρνησης **με γραπτούς νόμους** (δηλαδή του να ενεργεί ο ίδιος **με άψυχο τρόπο**, σύμφωνα με τον *Φαίδρο* 274c5-277a5).

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K3]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη **του να δίνεις εντολές κάποιου άλλου**, σχετίζεται παλινδρομικά με
το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z3]** στην εποχή του Δία, δηλαδή την τέχνη της ιεροσύνης (αφιερωμένη στο να **δίνεις τις εντολές κάποιου εντολές άλλου).**

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K2]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή η τέχνη του προσδιορισμού, της εκτίμησης (**κρίνειν**), σχετίζεται παλινδρομικά με
το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z2]** στην εποχή του Δία, δηλαδή την τέχνη της κρίσης (η οποία είναι μια τέχνη καθορισμού, εκτίμησης **(κρίνειν)**, όπως πράγματι εξηγείται στο *Πολιτικό* 305b).

-το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[K1]** στην εποχή του Κρόνου, δηλαδή οι πρακτικές τέχνες, σχετίζεται παλινδρομικά με
το απορριφθέν μέρος της δυαδικής διαίρεσης **[Z1]** στην εποχή του Δία, δηλαδή την πρακτική τέχνη της Ρητορικής (ή πιο συγκεκριμένα το μέρος της Ρητορικής που διαχωρίζεται από τη σοφιστεία, βλ 304α) (304c-e).

(V) Λόγος στη Διαίρεση και την Συναγωγή της τέχνης της πολιτικής ικανότητας

Τελευταία είναι η διαίρεση του W1 στην πρακτική τέχνη της στρατηγικής K'1 και την γνωστική τέχνη του πολιτικού L'1 (304e-305a).
Το **κριτήριο του Λόγου** συνίσταται στην **εξίσωση του αρχικού λόγου**: πρακτικές τέχνες **K1** / επιστημονικές τέχνες L1
με
τον τελικό λόγο: πρακτική στρατηγική τέχνη K'1 / επιστημονική τέχνη της πολιτικής ικανότητας L'1.

11.6. Ο ορισμός του Πολιτικού ως φιλοσοφική παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση (*Πολιτικός* 258c-267c, 289e-305e)

Είμαστε τώρα έτοιμοι να συλλέξουμε όλα τα κομμάτια της Διαίρεσης και Συναγωγής του Πολιτικού. Το σχήμα που ακολουθεί περιλαμβάνει τις περισσότερες από τις πληροφορίες που απαιτούνται για τον ορισμό του Πολιτικού ως φιλοσοφική παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση στον διάλογο *Πολιτικός*.

Εποχή του Κρόνου «Αγελαιοτροφική»	Εποχή του Δία, «Αγελαιοκομική»

[G] όλες οι τέχνες (258b-259d)			
[K1] πρακτικές	**[L1] επιστημονικές (γνωστικές)**	[W1]	[Z1] ρητορικές (304c-e),
		[W2]	

[W1]			
[K'1] *στρατηγική<πρακτική>* *(304e-305a)*	**[L'1] πολιτικός *<επιστημονική (γιγνώσκουσα)>***		
Κριτήριο Λόγου K'1 / L'1 = K1 / L1 περιοδικότητα και πλήρη γνώση του Πολιτικού			

[L 1] επιστημονικές (259d-260C)		

[K2] εκτίμηση, προσδιορισμός «**κρίνειν**»	[L2] εντολή	[W2]	[Z2] δικαστικό αξίωμα *(Οι ηγέτες που ενεργούν βάσει του «κρίνειν»*) (305b-c)
		[W3] (304e-305c)	

[L 2] εντολή (260C-261b)			
[K3] εντολές κάποιου άλλου	[L3] εντολές του ιδίου	[W3]	[Z3] ιερείς **οι ηγέτες ενεργούν βάσει εντολών κάποιου άλλου**)
		[W4] (290γ-291α)	

[L3] εντολές του ιδίου (261b-d)			
[K4] άψυχη αγέλη	[L4] σε έμβια όντα (= ζώα)	[W4]	[Z4] με γραπτούς νόμους, άψυχους *ηγέτες ενεργούν με **άψυχο** τρόπο*
		[W5] (291d-303b)	

[L4] (261d-e) σε ζώα			
[K5] ένα **μόνο** ζώο («Μονοτροφία»)	[L5] αγέλη από πολλά ζώα	[W5]	[Z5] Δημοκρατία χωρίς νόμους, αναρχία («κατά μόνας δραν») *Ηγέτες που ενεργούν **μεμονωμένα***
			[Z W6] (291d-303b)

[L5] (264b-d) σε πολλά ζώα			
[K6] αγέλη υδρόβιων ζώων	[L6] τα οποία είναι χερσαία ζώα	[W6]	[Z6] εμπόροι (σε πλοία) *Ηγέτες ενεργούν με **υδάτινο** τρόπο*
		[W7] (289E-290α)	

[L6] (264E-265b) Σε πολλά χερσαία ζώα			
[K7] αγέλη υδρόβιων ζώων	[L7] τα οποία περπατούν	[W7]	[Z7] κήρυκες (ο ιπτάμενος Ερμής) *Ηγέτες που*

			ενεργούν με ***ιπτάμενο*** *τρόπο*
		[W8] (290α-γ)	

[L7] (265b-d) Σε πολλά χερσαία ζώα με πόδια			
[K8] αγέλη κερασφόρων ζώων	[L8] χωρίς κέρατα	[W8]	[Z8] σάτυροι- (ολιγαρχία- λίγοι χωρίς νόμους) *ηγέτες ενεργούν ως* ***κερασφόρα*** *ζώα*
		[W9] (291b, 303b-d)	

[L8] (265d-e) Σε πολλές χερσαία ζώα χωρίς κέρατα με τα πόδια			
[K9] αγέλη διαφορετικών ζώων	[L9] που δεν είναι διαφορετικά	[W9]	[Z9] κένταυροι- τύραννοι (ένας, χωρίς νόμους) *ηγέτες ενεργούν ως* ***διαφορετικά*** *ζώα*
		[W10] (291α, 303b-d)	

[L9] (265E-266d) Σε πολλές μη-διαφορετικά μη κερασφόρα χερσαία ζώα με πόδια			
[K10] διάμετρος της διαμέτρου **αγέλη** τετράποδων **χοίρων**	[L10], τα οποία είναι δίποδα (άνθρωποι) διάμετρος	[W10]	[Z10] σοφιστής σοφιστή *ηγέτες που ενεργούν ως* ***χοίροι***
		[W11] (291b-c, 303b-d)	

	[L10> L11> ...> W11] (287b-289α) Ενδεχόμενες αιτίες		
	πρωταρχική	τροφή	
	όργανο	παιχνίδι	
	δοχείο	άμυνα	
	μέσο		

Το σχήμα αυτό πρέπει να διαβάζεται ως εξής

ξεκινήστε τη διαίρεση από την αριστερή στήλη,
διαβάστε από το G κάθετα προς το L10,
αποτελούμενο από τα πρώτα δέκα βήματα δυαδικής διαίρεσης της **εποχής του Κρόνου**
το αρχικό γένος G διαιρείται σε K1 και L1,
το L1 διαιρείται σε K2 και L2,
...,
το L9 διαιρείται σε K10 και L10.

συνεχίστε με τις **ενδεχόμενες αιτίες**
L10 σε L11 σε ... σε W11,
Συλλογικά βήματα στα βήματα διαίρεσης.

ολοκληρώστε τη διαίρεση με τη δεξιά στήλη,
διαβάστε από κάτω από το W11 ανοδικά προς το W1,
αποτελούμενο από τα τελευταία δέκα βήματα δυαδικής διαίρεσης της **εποχής του Δία**
το W11 διαιρείται σε Z10 και W10,
το W10 διαιρείται σε Z9 και W9,
...,
το W2 διαιρείται σε Z1 και W1, και
το W1 διαιρείται σε K'1 και L'1?

τελειώστε με το **κριτήριο του Λόγου** K1 / L1 = K'1 / L'1,
καταλήγοντας **στην περιοδικότητα** και **την πλήρη γνώση** του Πολιτικού.

12. Η διπλή μέτρηση στο *Πολιτικό* 283A-287b είναι

--η φιλοσοφική απομίμηση της κατά τον Θεαίτητο μίξης
--η αιτία της Διαίρεσης και της Συναγωγής, και
--η κατά Φίληβο Ιδέα ως μίξη του άπειρου και του πεπερασμένου

12.1. Η διπλή μέτρηση στο *Πολιτικό* 283A-287b είναι η φιλοσοφική ανάλογος, η μίμηση της «συμμετρότητας σε δύναμη μόνο»

Θεωρούμε αντίθετες οντότητες, του τύπου των αριθμών, μεγεθών (γραμμές, εμβαδά, όγκοι), ιδιοτήτων (ταχύτητες) x, y.

Υπάρχει μια διπλή «μέτρηση»:
(A) του x έναντι του y, και
(B) του x έναντι «της μέσου (x, y)" (Ελληνικός όρος: «μέσος») (284e).

Προϋπόθεση για τη μέτρηση (α): δεν πρέπει η μέτρηση όλων των αντίθετων ζευγών x, y να γίνεται με αυτόν τον τρόπο. Στην πραγματικότητα, εάν η μέτρηση του x έναντι του y παράγει «απόλαυση» (Ελληνικός όρος: «ηδονή»), τότε αυτό το ζεύγος πρέπει να αποκλειστεί (286d).

Προϋπόθεση για την μέτρηση (β): αν x, y είναι ένα ζεύγος, τέτοιο ώστε αν το x μετράται έναντι του y, η ευχαρίστηση δεν είναι το προϊόν, τότε η δεύτερη μέτρηση, του x έναντι του μέσου (x, y), είναι μια «παραγωγή » (Ελληνικός όρος: «γένεσις») (283d, 284b-c, de).

Τώρα θα αποκρυπτογραφήσουμε αυτούς τους όρους και τις προϋποθέσεις:

[μέτρηση των αντιθέτων] Η μέτρηση αφορά στο μήκος και τη βραχύτητα, ή την υπερβολή και την έλλειψη, ή το μεγαλείο και τη μικρότητα, ή το μεγαλύτερο και το μικρότερο, ή το μεγάλο και το μικρό (283c-e), συλλογικά ενός μεγέθους ή αριθμού ή ιδιότητας έναντι του αντιθέτου τους. (284e).

[μέσος] Ερμηνεύουμε το «μέσο (x, y)» ως τη φιλοσοφική ανάλογο του γεωμετρικού μέσου δύο αριθμών ή μεγεθών. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι στα *Στοιχεία* υπάρχουν 738 εμφανίσεις του όρου «μέσον» (και των μεταβλητών του), και αυτές αποκλειστικά και χωρίς εξαίρεση αναφέρονται στο«γεωμετρικό μέσο» (δύο αριθμών ή των δύο μεγεθών), ενώ ΚΑΝΕΝΑΣ από αυτούς δεν

αναφέρεται στο αριθμητικό ή οποιοδήποτε άλλο μέσο, ή οποιαδήποτε άλλη έννοια. Εξ αυτών, η μεγάλη πλειοψηφία των 624 περιπτώσεων, παρουσιάζονται στο Βιβλίο X του Θεαίτητου[71].
Ο όρος «μέτριος» που χρησιμοποιείται εναλλακτικά (283E, 284a, γ, δ, ε) έχει σημασία που να ισοδυναμεί με τον όρο «μέσος».

[ηδονή] ότι «η δυάδα x, y παράγει **ηδονή**» είναι ισοδύναμη, όπως αναφέρεται ρητά στον *Φίληβο* 27ε, 31α, 41δ τον πλατωνικό διάλογο για τις ηδονές , με το «η δυάδα x, y να είναι ένα Άπειρο», το οποίο σύμφωνα με τη δική μας ερμηνεία που περιγράφεται στην Ενότητα 3a παραπάνω, είναι ισοδύναμο με το« η δυάδα x, y παράγει ένα άπειρο». Έτσι, η συνθήκη για την μέτρηση (a) είναι ότι το ζεύγος x, y δεν παράγει ένα άπειρο, ως εκ τούτου, ένα πεπερασμένο. Έτσι η μέτρηση του x έναντι του y είναι ένα (κατά τον Φίληβο) πεπερασμένο.

[γένεση] Στον Πλάτωνα υπάρχει «γένεση μόνο», όπως στον *Φαίδωνα* 70b-72e, τον *Θεαίτητο* 156a-157b, τους *Σοφιστές* 247D-248α, ή τον *Τίμαιο* 27d5-29d3, 57d7-58c4, και «παραγωγή στην ουσία», όπως στον *Φίληβο* 27γ , ή τον *Παρμενίδη* 142c-143a ή τον *Πολιτικό* 283d, 284c, d (βλ ενδιαφέρον σχόλιο του Πρόκλου στην *Πλατωνική Θεολογία* 3,91,9-24: η συχνή χρήση λέξεων που σχετίζονται με την γενιά, όπως «γίγνεσθαι» (142d5), «γίγνεται» (142e4), «γένεται (142e6), «γιγνόμενον» (143a1), αναφέρεται στην «πρόοδο του νοητού πλήθους» («περί της προόδου του νοητού πλήθους»). Έτσι οι όροι «γένεσις» και «παραγωγή» δεν αναφέρονται μόνο στα αισθητά, αλλά και στα νοητά[72]. Το ότι η δυάδα x, z είναι μια **γένεση** υποδηλώνει ότι « η δυάδα x, z δημιουργεί έναν άπειρο πλήθος μερών», είτε ως άπειρη δυάδα μόνο ή εντός ενός Όντος, δηλαδή ότι «η δυάδα x, z είναι είτε ένα άπειρο ή ένα μίγμα του άπειρου και του πεπερασμένου », ως εκ τούτου, σύμφωνα με τη δική μας ερμηνεία που παρατίθεται στην Ενότητα 3, προκύπτει ότι «η δυάδα x, z παράγει μια άπειρη ανθυφαίρεση ». Έτσι,
η προϋπόθεση για την μέτρηση (β) είναι ότι το ζεύγος x, μέσο (x, y) παράγει ένα (κατά τον Φίληβο) άπειρο.

[Η διπλή μέτρηση στο *Πολιτικό* 283A-287b είναι η φιλοσοφική ανάλογος μιας δυάδας γραμμών ασύμμετρων σε μήκος μόνο]
Τέλος, προκειμένου να θέσουμε τα δύο συνθήκες μέτρησης (α) και (β) με πιο γνωστούς όρους που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο X των *Στοιχείων*,
επιλέγουμε ένα υποτιθέμενο τμήμα γραμμής r (όπως με την «προτεθείσα γραμμή» στο βιβλίο X, ορισμός 3, και τη γραμμή μήκους ενός ποδιού στον Θεαίτητο 147-8), και,
εφαρμόζοντας την Πρόταση II.14 των *Στοιχείων,* κατασκευάζουμε γραμμές a, b, τέτοιες ώστε
$xr = a^2$, $yr = b^2$,
έτσι ώστε
σημαίνει $(x, y)\cdot r = ab$.
Η αναλογία x / y = η αναλογία $xr / yr = \alpha^2 / b^2$
ως εκ τούτου, (χρησιμοποιώντας τον ορισμό στα *Τοπικά,* που αναφέρονται στην ενότητα 6a παραπάνω),
ο λόγος x / μέσο(x, y) = $xr / (x, y)\, r = a^2 / ab = a / b$.

Είμαστε τώρα σε θέση να ισχυριστούμε ότι
η διπλή μέτρηση που περιγράφεται αποκαλύπτεται ότι είναι η φιλοσοφική ανάλογος του μαθηματικού όρου «συμμετρία σε δύναμη μόνο»,
καθώς
η συνθήκη (α) είναι ισοδύναμη με την συμμετρία των a^2, b^2, και
η συνθήκη (β) είναι ισοδύναμη με την ασυμμετρία των a, b,

[71] Οφείλω αυτή την παρατήρηση στην Αλίκη Μπασσιάκου [BA].
[72] Είναι αυτή ακριβώς η έλλειψη συνειδητοποίησης από τον Cheniss και άλλους ότι υπάρχει και νοητή «γένεσις», που λανθασμένα τους οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι μίξεις Άπειρου και του Πεπερασμένου στον *Φίληβο* δεν είναι πραγματικά Όντα και Ιδέες.

έτσι ώστε σε συνδυασμό να είναι ισοδύναμα με
την συνθήκη συμμετρίας σε δύναμη μόνο,
η κατά τον Θεαίτητο μίξη.

12.2. Η διπλή μέτρηση ως αιτία όλων των Διαιρέσεων και των Συναγωγών, *Πολιτικός* 283a-287b

Παραμένουμε στο ίδιο απόσπασμα του *Πολιτικού*. Ο Πλάτωνας στην συνέχεια κάνει μια σημαντική δήλωση σχετικά με τη θεμελιώδη σημασία της συνθήκης της διπλής μέτρησης που μόλις αποκρυπτογραφήσαμε:
(α) όλες οι τέχνες ανεξαιρέτως, συμπεριλαμβανομένης της πολιτικής ικανότητας και της υφαντικής τέχνης (283E-284e),
(β) η μέθοδος της διαίρεσης και της συναγωγής (284e-285c), που αντίστοιχα περιγράφεται ως «διαίρεση σύμφωνα με τα είδη» (286d-287a), ή ως «όνομα και λόγος», μερικές φορές πιο σύντομα ως «λόγος» (285c-286b), με την οποία, όπως είδαμε στους *Σοφιστές* γνωρίσαμε τα Πλατωνικά Όντα, και
(γ) η νέα ιδιότητα της «ανέλιξης» (286b), η οποία εξηγείται στο *Πολιτικό* για πρώτη φορά στην τριλογία για τη γνώση,
όλα προκαλούνται από μια διπλή μέτρηση όπως περιγράφεται στο (12.1).
Η τέχνη είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται χαλαρά και στους *Σοφιστές*, και ποτέ πραγματικά δεν ορίζεται επίσημα από τον Πλάτωνα. Μπορούμε ωστόσο να προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε αυτόν τον όρο με ασφάλεια, λόγω της αρκετά συχνής χρήσης του από τον Πλάτωνα, ως εξής:

[τέχνη] Μια Μορφή είναι αναγνωρίσιμη από τον άνθρωπο ως Τέχνη. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, αν και ο σοφιστής είναι Πλατωνικό Ον, και ο Πολιτικός μια Ιδέα και μια Μορφή, παρ 'όλα αυτά το καθένα γίνεται γνωστό σε εμάς στην οντολογική κατάσταση μιας Τέχνης, μια κατώτερη οντότητα, στο ότι οι διαιρέσεις είναι ευρύτερες και η Ενότητα είναι λιγότερο έκδηλη από ότι στην ίδια τη Μορφή.
Ο όρος «ανέλιξις» παρουσιάζεται στο *Πολιτικό* μόνο δύο φορές, στα σημεία 270d και 286b. Η δεύτερη αναφορά (286b) γίνεται για να μας πει ότι το φαινόμενο της «ανέλιξης» προκαλείται σε όλες τις τέχνες, από τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διπλής μέτρησης. Η πρώτη αναφορά (270d), δεν μπορεί να έχει άλλο σκοπό από το να ΚΑΘΟΡΙΣΕΙ, να εξηγήσει τι σημαίνει ο όρος«ανέλιξις».

12.3 Το μίγμα του Απείρου και του Πεπερασμένου που συνιστά μια Πλατωνική Ιδέα στο Φίληβο 16c είναι η φιλοσοφική ανάλογος του κατά τον Θεαίτητο μείγματος της ασυμμετρίας και της συμμετρίας και, σύμφωνα με το διάλογο *Θεαίτητος* 147d-148d ο Θεαίτητος και ο νεότερος Σωκράτης είχαν απόδειξη της Πρότασης: κάθε κατά τον Θεαίτητο μείγμα ασυμμετρίας και συμμετρίας έχει μια παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση.

Οι δύο Διαιρέσεις και Συναγωγές στους *Σοφιστές* ερμηνεύτηκαν, στις Ενότητες 9 και 10, ως φιλοσοφικές ανάλογοι της περιοδικής ανθυφαίρεσης.
Η Διαίρεση και η Συναγωγή του Πολιτικού στο διάλογο *Πολιτικός* ερμηνεύτηκε, στην Ενότητα 11, ως η φιλοσοφική ανάλογος της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης. Η αιτία κάθε Διαίρεσης και Συναγωγής δηλώνεται στον *Πολιτικό*, ότι είναι η διπλή μέτρηση (Ενότητα 12.2), και η Διπλή μέτρηση ερμηνεύτηκε (Ενότητα 12.1) ως φιλοσοφική ανάλογος του κατά τον Θεαίτητο μίγματος, δηλαδή της δυάδας γραμμών ασύμμετρων σε μήκος μόνο.
Έτσι, μια αξιοσημείωτη συνέπεια της ερμηνείας μας (Ενότητες 9, 10, 11 και 12) είναι ότι το συνολικό περιεχόμενο του Πλατωνικού διαλόγου *Πολιτικός* είναι η ακόλουθη δήλωση:

«Κάθε τέχνη, δηλαδή κάθε Πλατωνική ιδέα σε μορφή προσιτή στους ανθρώπους, ιδίως η τέχνη της πολιτικής ικανότητας και η τέχνη της σοφιστείας, διαθέτει μια δυάδα στοιχείων x, y, τέτοια ώστε η μέτρηση του x έναντι του y σχηματίζει ένα φιλοσοφικό πεπερασμένο (όχι μιαν απόλαυση), ενώ η μέτρηση του x έναντι του (γεωμετρικού) μέσου m(x, y), σχηματίζει ένα φιλοσοφικό άπειρο (την παραγωγή του μέσου), και ακριβώς για αυτόν τον λόγο κάθε τέχνη είναι αναγνωρίσιμη με τη μέθοδο της Διαίρεσης και της Συναγωγής, η οποία είναι η φιλοσοφική ανάλογος μιας παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης. »

Τώρα αυτή η φιλοσοφική δήλωση συμπληρώνει την μίμηση «απειρομιμούμενος» που ο Σωκράτης είχε προτρέψει τον Θεαίτητο να επιχειρήσει, στο απόσπασμα 147d-148d για την Διαίρεση και την Συναγωγή στο έργο *Θεαίτητος* που καθιερώθηκε με επιτυχία από τον Θεαίτητο σε ένα μίγμα του Θεαίτητου, όπως συζητήθηκε στην Ενότητα 8.
Τώρα όμως, δεν μπορούμε να μην λάβουμε υπόψη μας πως αυτό που έχει τέλεια και πολύ προσεχτικά μιμηθεί ο Πλάτωνας στους δύο διαλόγους του *Σοφιστής* και *Πολιτικός* είναι το σύγχρονο θεώρημα, που περιγράφεται στην Ενότητα 7, σύμφωνα με το οποίο «Κάθε κατά τον Θεαίτητο μείγμα έχει μία παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση ».

Τα συμπεράσματα τώρα είναι τα εξής:
--Το μαθηματικό αποτέλεσμα του Θεαίτητου που περιγράφεται στο απόσπασμα *Θεαίτητος* 147d-148d ως Διαίρεση και Συναγωγή ισχύος (ή κάπως πιο γενικά, ενός κατά τον Θεαίτητο μείγματος) είναι ακριβώς το σύγχρονο Θεώρημα (απαντώντας στο ερώτημα που τέθηκε στην Ενότητα 5[73].
--Μια Πλατωνική Ιδέα, είναι η φιλοσοφική ανάλογος ενός κατά τον Θεαίτητο μίγματος, δηλαδή (μιας μικρής γενίκευσης της) μιας ισχύος και η «επιστήμη» μιας Πλατωνικής Ιδέας, που αποκτάται με την μέθοδο της Διαίρεσης και της Συναγωγής είναι ακριβώς η φιλοσοφική ανάλογος μιας παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης.
-- Έτσι το κατά τον Φίληβο μίγμα του άπειρου με το πεπερασμένο είναι η φιλοσοφική ανάλογος του κατά τον Θεαίτητο μείγματος.
Οι δύο τελευταίες δηλώσεις απαντούν στα ερωτήματα που τίθενται στις Ενότητες 2 και 3

12.4. Σημείωση που συγκρίνει το κατά Φίληβον Πεπερασμένο με το Πυθαγόρειο Πεπερασμένο. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι, σύμφωνα και με τους Πυθαγορείους, οι δύο αρχές των Όντων είναι το Άπειρο και το Πεπερασμένο (βλ Φιλόλαος, *Αποσπάσματα* 1, 2, 6, και Αριστοτέλης *Μεταφυσικά,* 987a13-28). Όμως, ενώ το Άπειρο, τόσο στον Πλάτωνα όσο και στους Πυθαγόρειους, είναι ανθυφαιρετικό στο περιεχόμενο, το Πεπερασμένο για τους Πυθαγόρειους είναι ο Γνώμων. Η αντίστοιχη Πλατωνική έννοια που αναπτύχθηκε είναι ο Λόγος, όπως ίσως προκύπτει από την σύγκριση του (πιθανώς μη γνήσιου) *Αποσπάσματος* 11 από τον Φιλόλαο (η γνώση επιτυγχάνεται με τον Γνώμονα) με το απόσπασμα 546b-c της Πολιτείας σε γεωμετρικό αριθμό (όπου ο Γνώμων αντικαταστάθηκε στην πράξη από τον Λόγο). Ο Πλάτων, όμως στον Φίληβο, μη ικανοποιημένος με την αντικατάσταση αυτή, επιμένει ότι η αρχή του Πεπερασμένου έχει επίσης ανθυφαιρετικό περιεχόμενο. Ο Πλάτωνας είναι σε θέση να τροποποιήσει το αρχικό Πυθαγόρειο σχήμα **μόνο επειδή** έχει πλέον στην κατοχή του το κατά τον Θεαίτητο θεώρημα της παλινδρομικής περιοδικότητας.

12.5. Μια σημείωση για με τις υπάρχουσες ερμηνείες της Συναγωγής και της Διαίρεσης

Η ερμηνεία της Διαίρεσης και της Συναγωγής που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία (Ενότητες 9, 10, 11,12) είναι πρωτότυπη και αντιτίθεται σε όλες τις υπάρχουσες ερμηνείες.

[73] Έτσι η άποψη που διατυπώθηκε από τον Knorr [Kn, 1975] ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από τους Θεόδωρο και Θεαίτητο για τις αποδείξεις της ασυμμετρότητας δεν είναι ανθυφαιρετική, και η άποψη που διατυπώθηκε από τους Cherniss [Ch, 1951] και Burnyeat [Bu, 1978] ότι το Πλατωνικό κείμενο δεν αποκαλύπτει την μέθοδο των αποδείξεων τους περί ασυμμετρότητάς είναι και οι δύο λανθασμένες. Η μέθοδος και των δύο φαίνεται να είναι ανθυφαιρετική. Ανθυφαιρετικές ανακατασκευές για αυτές τις αποδείξεις της ασυμμετρότητας, μαθηματικά άψογες αλλά χωρίς επιχειρήματα ως προς ιστορική τους ακρίβεια, έχουν προταθεί από τους Zeuthen [Z,1910], van Waerden [vdW, 1950], Fowler [Fow, 1986], Kahane [Ka,1985] (μεταξύ άλλων).

Ο Heidegger στο [He, 1992] πραγματεύεται την Διαίρεση και την Συναγωγή του Ψαρά στις σελ.181-197, και σύντομα του Σοφιστή στις σελ. 420-422.
Ο Heidegger πιστεύει ότι μια πλατωνική διαίρεση
- είναι πεπερασμένου μήκους, που καταλήγει σε ένα αδιαίρετο είδος,
--είναι ουσιαστικά ίδια με τους Αριστοτελικούς ορισμούς με τη διαίρεση του γένους και differentia,
και ότι ο «λόγος» σε μια πλατωνική διαίρεση ταυτίζεται με τη διαίρεση.

Ο Cornford ([Co, 1932], [Co, 1935], [Co 1939]) θεωρούσε ότι «η Διαίρεση είναι μια καθοδική διαδικασία στην οποία αδιαίρετα είδη ορίζονται από τη διαίρεση ενός γένους με συγκεκριμένες διαφορές. Αντιπαραβάλλοντας αυτή την προσέγγιση στον χαρακτηρισμό των Μορφών με τις προγενέστερες Πλατωνικές προσεγγίσεις ο Cornford γράφει: «Με μια λέξη, η Σωκρατική μέθοδος προσεγγίζει την Μορφή που καθορίζεται από κάτω, η νέα μέθοδος κατεβαίνει σε αυτήν από πάνω». ([Mor, 1973], σελ.168) . Η Συναγωγή είναι το αντίστροφο της Διαίρεσης: ο ίδιος πίστευε ότι θα μπορούσε να αποκτήσει το αρχικό Γένος αθροίζοντας όλα τα κομμάτια της Διαίρεσης μαζί. Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή, ένα Πλατωνικό Όν είναι Ένα, με την έννοια ότι είναι το άθροισμα των μερών του. Οι Cornford και Skemp [Sk, 1952], φαίνεται να έχουν σκεφτεί ότι αυτό το είδος συναγωγής λαμβάνει χώρα μόνο κατά την έναρξη των διαιρέσεων. Ο Hackforth [Ha, 1945], ωστόσο, αναγνωρίζει ότι οι συναγωγές λαμβάνουν χώρα σε διάφορα σημεία ([Mor, 1973], σελ.167).

Ο Cherniss ([Ch, 1936], [Ch, 1945], [Ch, 1951]) αξιολογώντας αρνητικά τη μέθοδο της Διαίρεσης και της Συναγωγής πίστευε ότι
«η υπόθεση των Πλατωνικών Ιδεών είναι ασύμβατη με το σύσταση του είδους από το γένος και differentiae».
«Ο *Σοφιστής* και Ο *Πολιτικός*, τα οποία πλέον θεωρούνται εγχειρίδια της *διαίρεσης*, δείχνουν ότι την θεωρούσε περισσότερο ευρετική μέθοδο, ένα μέσο για να διευκολύνει την αναζήτηση μιας συγκεκριμένης ιδέας, τη διάκριση αυτής της ιδέας από άλλες ιδέες, και τις επιπτώσεις της και την ταυτοποίησή της, και ότι ο ίδιος δεν φανταζόταν ότι θα συνιστούσε περιγραφή της «κατασκευής» της ιδέας, της προέλευσή της , ή των συστατικών της στοιχείων ».
Η «διαίρεσις» φαίνεται να είναι μόνο ένα βοήθημα για την ανάμνηση των ιδεών, ... μια διαδικασία της οποίας τα στάδια είναι σημαντικά μάλλον ως εγγύηση που να διασφαλίζει τη σωστή κατεύθυνση της αναζήτησης "" παρά ως εκπρόσωπος των απαραίτητων συστατικών της ιδέας » ([Ch, 1945], σελ. 53-55).

Ο Ryle ([Ry, 1965], [Ry, 1966]), έχει εξαιρετικά χαμηλή γνώμη για την μέθοδο της Διαίρεσης και της Συναγωγής, τις Διαιρέσεις στους *Σοφιστές,* και το σύνολο του *Πολιτικού,* «ένας κουρασμένος διάλογος» .. Γράφει ([Ry, 1966)]:
«Αλλά μέχρι να φτάσουμε στον *Σοφιστή* δεν έχουμε τίποτα που να μας θυμίζει τη συνεισφορά του Λινναίου στην φυτολογία. ούτε θα ήμασταν ευγνώμονες ή φιλοσοφικά διαφωτισμένοι εάν είχαμε »*(σελ 136-7.).*
«Οι εμφανίσεις της διαίρεσης στον Σοφιστή και τον Πολιτικό προορίζονταν για διδακτικό όφελος των αρχαρίων στην Ακαδημία»,
«Ενώ ο *Πολιτικός* φαίνεται να είναι σχεδιασμένος μόνο για αρχάριους, ο *Σοφιστής* είναι μια αδέξια παρασκευή ενός σάντουιτς του οποίου το ψωμί θα μπορούσε να έχει εκπαιδευτική αξία μόνο για αρχάριους και το κρέας θα μπορούσε να έχει αξία μόνο για τους υψηλά καλλιεργημένους νεαρούς διαλεκτικούς».
«Έτσι, ο Πλάτων μπορεί να συνέθεσε τον *Πολιτικό* προς όφελος ειδικά των φιλοσοφικά αθώων αρχαρίων που τότε ξεκινούσαν την εκπαίδευσή τους στο αλφάβητο της σκέψης» (σελ.285).

Σύμφωνα με μια πιο πρόσφατη εκτίμηση, από τον Fossheim [Fos, 2010] «Ωστόσο, είναι δύσκολο να υπερασπιστούμε την κριτική του Ryle παρά τα αποδεικτικά στοιχεία που υπάρχουν στα κείμενα.

Στον *Φίληβο* (16c), η διαίρεση χαιρετίζεται ως ένα θεϊκό δώρο, ως κάτι που παραδόθηκε στους ανθρώπους από τους θεούς. Επιπλέον, μιλώντας γενικότερα, η Συναγωγή και η Διαίρεση κατέχει εξέχουσα θέση στους λεγόμενους μεταγενέστερους διαλόγους. Εν ολίγοις, φαίνεται ότι λαμβάνεται πολύ σοβαρά υπόψη, και ανένδοτα εφαρμόζεται σε θέματα που είναι και σημαντικά και δύσκολα.»
Μπορούμε να προσθέσουμε επίσης τις εκτενείς εκφράσεις θαυμασμού του Πλάτωνα για την μέθοδο της Διαίρεσης και της Συναγωγή στον *Πολιτικό*. Όπως και ό,τι έχει ειπωθεί για τις απόψεις Ryle σχετικά με τη Διαίρεση και την Συναγωγή μπορεί επίσης να ειπωθεί για την αντίστοιχη άποψη του Cherniss».

Ο Ackrill ([Ac, 1955], [Ac, 1957]), σε απάντηση στον Ryle, προσφέρει κάποιου είδους υποστήριξη στην Διαίρεση και Συναγωγή του Πλάτωνα. Αλλά στην καλύτερη περίπτωση για τον Ackrill η μέθοδος του Πλάτωνα είναι μια πρωτόγονη εκδοχή των διαιρέσεων του Αριστοτέλη.
Γράφει: «Ο Αριστοτέλης όντως έχει, όπως ο Πλάτων δεν έχει, μια μάλλον στενά επεξεργασμένη περιγραφή για τις αυστηρές γένος-είδος είδους σκάλες . Αλλά συνεχώς μιλά για διαιρέσεις και για είδη και γένη, σε πλαίσια που κανείς δεν υποθέτει ότι βρίσκεται, ή νομίζει ότι βρίσκεται, κάνοντας την δουλεία ενός Λινναίου. » (σελ.107)
«Για τον Ackrill, το κύρος της ως μεταγενέστερης εξελιγμένης μεθόδου επιβεβαιώνεται
από τη συνέχεια μεταξύ της διαίρεσης και της πλήρως αναπτυγμένης γένους- είδους σκάλας που ανέπτυξε ο Αριστοτέλης». είναι η εκτίμηση του Fossheim [Fos, 2010].

Ο Moravczik [Mo, 1973], σελ.175, προκειμένου να αιτιολογήσει τη ΔΣ (το μοντέλο της Εντασιακής Μερεολογίας) εισάγει δύο είδη μερών, το μέρος' και το μέρος''.
«(i) το x είναι ένα μέρος' της A = το χ έχει το A ως ιδιότητα, + και τα δύο x και A είναι Μορφές. Επιπλέον, η A δεν έχει το χ ως μία από τις ιδιότητές του. (Π.χ. μια τέχνη είναι μέρος' μιας Μορφής της Τέχνης, και ακόμη πιο αποκαλυπτικά - όπως πιστοποιείται στον *Σοφιστή* 257c7ff -τα μέρη' της Μορφής της Επιστήμης είναι οι διάφορες επιστήμες).
(ii) το x είναι μέρος "της A και ένα είδος της A = η A είναι μια μορφή και το x είναι ένα είδος της A (Π.χ. η κτητική τέχνη είναι ένα είδος τέχνης, όπως και η παραγωγική τέχνη ή κατασκευής εικόνων. Αυτές δεν είναι οι ίδιες τέχνες όπως το ψάρεμα, η σοφιστεία, κ.λπ., αλλά είδη των τεχνών και έτσι μέρη'' της Μορφής της Τέχνης.)»
«Η σχέση του τμήματος'' είναι μεταβατική, ενώ η σχέση του τμήματος' δεν είναι.»
Στη συνέχεια περιγράφει τη διαίρεση και την συναγωγή σε σχέση με αυτούς τους δύο τύπους μερών.
«Μία διαίρεση συνίσταται στην λήψη μιας γενικής Μορφής και τη διαίρεση ή την τεμαχισμό της σε μια σειρά από μέρη'', και στο τέλος αυτής της διαδικασίας φτάνουμε σε κάποιο συγκεκριμένο μέρος'. Αυτό το μέρος' της γενικής Μορφής είναι επίσης μέρος' των διάφορων μερών'' της γενικής Μορφής. Το γεγονός αυτό εκφράζεται από την τελική οριστική περιγραφή που παράγεται της εν λόγω τέχνης, π.χ. της σοφιστείας ».
«Μια συναγωγή συνίσταται στο να πάρουμε ορισμένα μέρη' της A και να δείξουμε ότι είναι επίσης μέρη' ενός μέρους'' της A. Δηλαδή, σε μια συναγωγή δείχνουμε ότι αρκετές περιπτώσεις της Μορφής της τέχνης έχουν κάποιο σημαντικό κοινό χαρακτηριστικό και επομένως ανήκουν σε ένα *είδος* τέχνης. »
Έτσι κάθε βήμα διαίρεσης, εκτός από το τελευταίο, είναι διαίρεση ενός μέρους' σε δύο μέρη''. στο τελευταίο βήμα διαίρεσης, ένα μέρος''διαιρείται σε ένα μέρος'' και το τελικό μέρος' .και η συναγωγή είναι μια (συνολοθεωρητική) συναγωγή των μερών' σε ένα μέρος ".

Οι τυποποιημένες ερμηνείες, όπως των S, Kutcharski [Ku, 1960], Miller [Mi, 1980], Scodel [Sc, 1987], Dorter [Do, 1994], Rosen [Ros, 1995], Rowe [Row, 1995], Lane [Lan, 198]ο Καστοριάδη [Ca, 1999], για να αναφέρουμε μερικές από τα πιο εξέχουσες, έχουν πολύ λίγα κοινά με την μαθηματική μας ανάλυση, ειδικότερα δεν υπάρχει καμία ένδειξη ή υποψία, στις ερμηνείες τους, ότι η περιοδική ανθυφαίρεση παίζει κάποιο ρόλο.

Αντίθετα όλες οι υπάρχουσες ερμηνείες αντιλαμβάνονται την Διαίρεση και ως είδος διαίρεσης τύπου Λινναίου με αυστηρά πεπερασμένο μήκος, ουσιαστικά όπως οι διαιρέσεις του Αριστοτέλη σε γένος και diferentia, και δεν παρέχουν ικανοποιητική εξήγηση για τη Συναγωγή και τον Λόγο.

Οι περισσότεροι μελετητές του Πλάτωνα, ίσως λόγω της δυσκολίας τους να κατανοήσουν τη μέθοδο της Διαίρεσης και της Συναγωγής, έχουν υποστηρίξει ότι οι θεωρίες της γνώσης που περιγράφει ο Πλάτωνας στην προηγούμενη διαλόγους (Μένων, Φαίδων, Πολιτεία), δηλαδή η υποθετική μέθοδος και η μέθοδος μέσω ανάμνησης, είναι διαφορετικές από τη μέθοδο της Διαίρεσης και της Συναγωγής. Ωστόσο, αυτό δεν είναι σωστό. Η μέθοδος της ανάμνησης συνυπάρχει με την Διαίρεση και τη Συναγωγής στον *Φαίδρο* 249 B-c. οι υποθέσεις διαιρούνται στον *Φαίδωνα* 107b, και η μέθοδος στην *Πολιτεία* είναι «αναιρούσα» (533c-d), πιθανόν «διαιρώντας»τις υποθέσεις και καθιστά όποιον τις εφαρμόζει , τον διαλεκτικό, «συνοπτικό» (537c7), εφαρμόζοντας ουσιαστικά την Συναγωγή. Η μέθοδος της Ανάμνησης εξηγείται φυσικά και απλά σε σχέση με το του Κριτήριο του Λόγου για την περιοδικότητα της Συναγωγής: το κριτήριο του Λόγου μπορεί να θεωρηθεί ως ανάμνηση του πρότερου Λόγου. Η ανθυφαιρετική ερμηνεία ανοίγει το δρόμο για μια ικανοποιητική ενιαία ερμηνεία όλων των Πλατωνικών διαλόγων. Η χαμηλή εκτίμηση του Ryle για την Διαίρεση και την Συναγωγή έρχεται σε αντίθεση με την υψηλή εκτίμηση του με την «κρέας» στο «αδέξιο σάντουιτς» των Σοφιστών και την δεύτερη υπόθεση του *Παρμενίδη*. Ωστόσο, το σύνολο των *Σοφιστών* βασίζεται στην Διαίρεση και την Συναγωγή και το Ένα στη δεύτερη υπόθεση του *Παρμενίδη* έχει και «όνομα» και «λόγο» (155d-e), ένας άλλος τρόπος περιγραφής της Διαίρεσης και της Συναγωγής, και στην πραγματικότητα βασίζεται εξ ολοκλήρου στη Διαίρεση και την Συναγωγή καθώς και την περιοδική ανθυφαίρεση.

Από την άλλη, μερικοί μαθητές του Πλάτωνα έχουν εντοπίσει σε ορισμένα σημεία στα γραπτά του Πλάτωνα κάποια άμεση ή έμμεση σχέση με την αριθμητική / γεωμετρική έννοια της ανθυφαίρεσης. Εξ όσων γνωρίζω, είναι οι ακόλουθοι:

-- Ο Toeplitz [Toe, 1925]
δήλωσε ότι η ασυμμετρία πρέπει να έπαιξε σημαντικό ρόλο στη φιλοσοφία του Πλάτωνα, αλλά από όσο γνωρίζω δεν επεξεργάστηκε περαιτέρω αυτήν του την αίσθηση
-- Οι Taylor [Tay, 1926] και D'Arcy W. Thompson [Tho, 1929],
είδαν μια σύνδεση μεταξύ της (ανθυφαιρετικής) πλευράς και των αριθμών της διαμέτρου και της Υπερβολής και της Έλλειψης που περιγράφονται στην *Επινομίδα*. Δεν προχώρησαν όμως σε περαιτέρω συνειδητοποιήσεις
-- Ο Mugler [Mug, 1948]
αισθάνθηκε τη σχέση μεταξύ γεωμετρικής ανθυφαίρεσης μέσω του μαθηματικού αποσπάσματος 147 - 8 του *Θεαίτητου* , και της Διαίρεσης και της Συναγωγής των *Σοφιστών*», αλλά με προβληματικό τρόπο. Ο Cherniss [Ch, 1951], στην κριτική του «γκρέμισε» την προσέγγιση του Mugler, αλλά για λάθος λόγους,
--Ο Vuillemin [Vu, 2001]
αισθάνθηκε σωστά ότι πλατωνική Διαίρεση και Συναγωγή σχετίζεται με την περιοδική ανθυφαίρεση, αν και η σύνδεση που οραματίστηκε δεν ήταν η σωστή. Επιπλέον, και ο
--Fowler [Fow, 1986],
Άφησε να εννοηθεί ότι η ανθυφαίρεση ήταν σημαντική στην Ακαδημία του Πλάτωνα, αλλά δεν εξήγησε με ποιον τρόπο.

Αυτές οι απόψεις όμως παρέμειναν αναμφισβήτητα στο περιθώριο. Ερευνητές όπως οι Mugler και Vuillemin δεν ήταν σε θέση να πείσουν τους Πλατωνιστές για τη σημασία της ανθυφαίρεσης στο έργο του Πλάτωνα , ενώ, αντίθετα, οι Πλατωνιστές αδυνατούσαν - και ακόμη αδυνατούν- να κατανοήσουν ότι η Πλατωνική μέθοδος της Διαίρεσης και της Συναγωγής περιγράφει το Πλατωνικό Ον. Κατά τη γνώμη μου, αυτή η διπλή αποτυχία οφείλεται στην αδυναμία κατανόησης του τρόπου με τον οποίο η Συναγωγή μετατρέπει τα απείρως πολλά μέρη της ανθυφαιρετικής

Διαίρεσης σε μια οντότητα που αξίζει να ονομάζεται Ένα, και έτσι να είναι μια πειστική Πλατωνική Ιδέα (βλέπε Ενότητα 14, παρακάτω).

Μια πρώτη συνοπτική περιγραφή ορισμένων εκ των βασικών ιδεών στην ερμηνεία μου δόθηκε στο [N, 2000]. Ο Penrose έχει συμπεριλάβει κάποιες πληροφορίες σχετικά με την ερμηνεία Σ.Ν. στο [Pe, 2004], σελ. 54-59, 69.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.

ΟΙ ΑΠΟΤΟΜΕΣ, ΟΙ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΚ ΔΥΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ, ΚΑΙ Η ΣΥΖΥΓΙΑ ΤΟΥΣ ΣΤΟ ΘΕΑΙΤΗΤΕΙΟ ΒΙΒΛΙΟ Χ *ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*

Στο κεφάλαιο αυτό απομονώνουμε τις βασικές έννοιες και εργαλεία που περιέχονται στο Βιβλίο Χ *των Στοιχείων*, απαραίτητα για την ανακατασκευή της απόδειξης του θεωρήματος τη καθαρής περιοδικότητας.
Αρχίζουμε με τους ορισμούς. Οι πρώτες δύο παράγραφοι του Βιβλίου Χ δίνουν τους ορισμούς του σύμμετρου (και του ασύμμετρου) (δίνονται στις παραγράφους 1, 2), και του σύμμετρου (και ασύμμετρου) σε δύναμη.

Ορισμός (Ορισμός Χ.2 και στον Θεαίτητο 147d5 – 148b2). Δύο τμήματα γραμμών a και b είναι σύμμετρα σε δύναμη αν τα τετράγωνά τους a^2, b^2 είναι σύμμετρα.

Αυτοί είναι “απόλυτοι” ορισμοί.
Στην επόμενη παράγραφο (Ορισμός Χ.3) ο δεύτερος από αυτούς τους απόλυτους ορισμούς είναι **σχετικοποιημένος σε σχέση με μία “υποθετική γραμμή” (“προτεθείσα ευθεία”)**, ας την ονομάσουμε r, και δίνει τον ορισμό μίας **“έλογης γραμμής”** (“ρητή ευθεία”), ας την ονομάσουμε a, εάν η a είναι σύμμετρη σε δύναμη με την προτεθείσα ευθεία r, και **“άλογη γραμμή”** (“άλογος ευθεία”), αν δεν είναι. Τελικά, στην τέταρτη παράγραφο (Ορισμός Χ.4) οι σχετικοποιημένοι ορισμοί επεκτείνονται σε χωρία, ώστε ένα ευθύγραμμο χωρίο είναι έλογο (ρητό) εάν είναι ίσο με ένα τετράγωνο με ρητή πλευρά, διαφορετικά είναι **άλογο**.
Οι βασικοί ορισμοί και οι βασικές ιδιότητες μιας **αποτομής** και μιας **διώνυμης γραμμής** (εκ δύο ονομάτων) ανακεφαλαιώνονται στις παραγράφους 6.1 και 6.2 παρακάτω. Σημειώστε ότι αυτοί οι ορισμοί δίνονται σε σχέση με ρητά χωρία, επομένως είναι **σχετικοποιημένες** έννοιες.

6.1. Ορισμός και ιδιότητες της αποτομής στο Βιβλίο Χ.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω ορισμό και τις προτάσεις από το Βιβλίο Χ.

Ορισμός (στην Πρόταση Χ.73)
Έστω r μία προτεθείσα γραμμή. Αποτομή είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα $x = a – b$, με $a > b$, a, b ασύμμετρα τμήματα, και a^2, b^2 ρητά χωρία (σε σχέση με την r). Τα τμήματα a, b είναι τα ονόματα της x.

Πρόταση Χ.79 (Μοναδικότητα της αναπαράστασης μιας αποτομής γραμμής).
Εάν x είναι μια αποτομή γραμμή, και $x = a_1 – b_1 = a_2 – b_2$, με $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2$, a_1, b_1 ασύμμετρα, a_1^2, b_1^2 ρητά και a_2, b_2 ασύμμετρα, a_2^2, b_2^2 ρητά, τότε $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Πρόταση Χ.103. Κάθε γραμμή, ανάλογη μιας αποτομής, είναι μία αποτομή.

Εάν x είναι μία αποτομή, και y είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα ανάλογο με την x, τότε το y είναι μία αποτομή.

6 .2 Ορισμός και ιδιότητες των γραμμών εκ δύο ονομάτων (δυώνυμων) στο Βιβλίο Χ.

Ορισμός (στην **Πρόταση Χ.36**). Έστω r μία προτεθείσα γραμμή. Γραμμή εκ δύο ονομάτων (δυώνυμη) είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα $x = a + b$, με $a > b$, a, b ασύμμετρα τμήματα και a^2, b^2 ρητά χωρία. Τα τμήματα a, b είναι τα *ονόματα* της x.

Πρόταση Χ.42 (Μοναδικότητα της αναπαράστασης μιας γραμμής εκ δύο ονομάτων).

Εάν η x είναι γραμμή εκ δύο ονομάτων και $x = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ με $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2$, a_1, b_1 ασύμμετρα, a_1^2, b_1^2 ρητά και a_2, b_2 ασύμμετρα, a_2^2, b_2^2 ρητά, τότε $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Πρόταση X.66 Κάθε γραμμή ανάλογη μιας γραμμής εκ δύο ονομάτων, είναι μια γραμμή εκ δύο ονομάτων.

Εάν x είναι μια γραμμή εκ δύο ονομάτων και y είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα ανάλογο με την x, τότε η y είναι γραμμή εκ δύο ονομάτων.

Το κύριο εργαλείο για την απόδειξη της Πρότασης 8.7.2, (αντίστροφη της Πρότασης 8.2.5), περιέχεται στις Προτάσεις X. 112 – 4, τις τελευταίες του Βιβλίου X. Σύμφωνα με αυτές το γινόμενο χωρίων μιας **διώνυμης** γραμμής με την **αποτομή** γραμμή **συζυγή αυτής** είναι ένα ρητό χωρίο. Έτσι η Θεαιτήτεια συζυγία είναι παρόμοια με την συζυγία των μιγαδικών αριθμών, όπου το αποτέλεσμα είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Η σπουδαιότητα της μιγαδικής συζυγίας προκύπτει από το γεγονός ότι παρέχει τα μέσα για άμεσο υπολογισμό του αντιστρόφου ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού. Κατά παρόμοιο τρόπο, η Θεαιτήτεια συζυγία παρέχει τα μέσα για την εύρεση της "αντιστρόφου" μιας αποτομής (και στην πραγματικότητα ρητής σε σχέση με μια προτεθείσα γραμμή r).

6.3 Η Θεαιτήτεια συζυγία των αποτομών γραμμών και των γραμμών δύο ονομάτων στο Βιβλίο X.

Πρόταση X.112
Εάν r είναι μία προτεθείσα γραμμή,

x είναι μία γραμμή	$y = a_2 + b_2$ είναι μία γραμμή εκ δύο ονομάτων (με ονόματα a_2, b_2)

και z είναι μία ρητή γραμμή, τέτοια ώστε $xy = z^2$, τότε:

η $x = a_1 - b_1$ είναι μία αποτομή με ονόματα a_1, b_1 ανάλογα με	
	τα ονόματα της y

και $a_1 / a_2 = b_1 / b_2$.

Πρόταση X.113
Εάν r είναι μία υποτιθέμενη (προτεθείσα) γραμμή,

η $x = a_1 - b_1$ είναι μία αποτομή (με ονόματα a_1, b_1)	η y είναι μια γραμμή,

και η z είναι μια ρητή γραμμή, τέτοια ώστε $xy = z^2$, τότε:

	η $y = a_2 + b_2$ είναι μια γραμμή εκ δύο ονομάτων, με ονόματα a_2, b_2 ανάλογα με
τα ονόματα της x	

και $a_1 / a_2 = b_1 / b_2$.

Πρόταση X.114
Εάν r είναι μία υποτιθέμενη (προτεθείσα) γραμμή,

η $x = a_1 – b_1$ είναι μία αποτομή γραμμή (με ονόματα a_1, b_1),	η $y = a_2 + b_2$ είναι μια γραμμή εκ δύο ονομάτων (με ονόματα a_2, b_2), με ονόματα a_2, b_2 ανάλογα / σύμμετρα με
τα ονόματα της x	

και $a_1 / a_2 = b_1 / b_2$,
και η z μια γραμμή με $xy = z^2$,
τότε
η z είναι μία ρητή γραμμή.

6.4. Τα μαθηματικά εργαλεία από το Βιβλίο Θεαίτητος X των *Στοιχείων* (και η Θεωρία της αναλογίας του Θεαίτητου που αναφέρεται στα *Τοπικά*), που χρησιμοποιούνται για την ανακατασκευή του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας

Προχωρούμε στην δημιουργία μιας πλήρους λίστας των εργαλείων που θα χρησιμοποιηθούν για την ανακατασκευή της απόδειξης του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας. Τα συγκεκριμένα εργαλεία, με εξαίρεση τον ορισμό της αναλογίας στα *Τοπικά* σε σχέση με την ισότητα της ανθυφαίρεσης (και η οποία εν μέρει πρέπει να αποδοθεί στο Θεόδωρο ο οποίος χρησιμοποίησε το Πόρισμά του, το Κριτήριο του Λόγου στην ανακατασκευή στην Ενότητα V και κατά μείζονα λόγο στον Θεαίτητο), εμπεριέχονται όλα στο Βιβλίο Θεαίτητος X.
Οι ορισμοί της συμμετρίας και της ασυμμετρίας εμφανίζονται στον ορισμό 1, ενώ ο θεμελιώδης ορισμός της συμμετρίας σε δύναμη μόνο εμφανίζεται στο ορισμό 2 του Βιβλίου X των *Στοιχείων*. Φυσικά η συμμετρία σε δύναμη μόνο εμφανίζεται ρητά στην αρχή της τριλογίας του Πλάτωνα, στον απόσπασμα Θεαίτητος 147d-148d, εξετάζεται στις Ενότητες 4,5, 8, και αποδίδεται στον Θεαίτητο (και τον νεώτερο Σωκράτη), και έμμεσα με φιλοσοφική μορφή (όπως είδαμε στην Ενότητα 12) στον *Πολιτικό*.
Η αρχαία έννοια αντίστοιχη της σύγχρονης έννοιας της συνεχούς επέκτασης κλάσματος (θετικών πραγματικών αριθμών) είναι η ανθυφαίρεση δύο ομοιογενών μεγεθών. Η έννοια αυτή προσδιορίζεται εμμέσως στα *Στοιχεία*, στις Προτάσεις X.2 και X.3 (με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο εμμέσως προσδιορίζεται και ο Ευκλείδειος αλγόριθμος για φυσικούς αριθμούς στις Προτάσεις VII.1,2).

Για να θεμελιώσουμε την σημειογραφία θα θεωρήσουμε την ανθυφαίρεση δύο γραμμών $α>β$:
$α = μ_1β + γ_1$, με $β>γ_1$,
$β = I_1γ_1 +γ_2$, με $γ_1>γ_2$,
$γ_1 = I_2γ_2 +γ_3$, με $γ_2>γ_3$,
…
$γ_n = I_{n+1} γ_{n+1}+ γ_{n+2}$, με $γ_{n+1} >γ_{n+2}$,
…

Ορισμός (παράγοντες αύξησης των ανθυφαιρετικών υπολοίπων).
Έστω $α>β$ είναι δύο γραμμές, με
$α>β>γ_1>γ_2>γ_3>…>γ_n>γ_{n+1}>…$

η ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων. Ορίζουμε την ακολουθία ($φ_n$) **παραγόντων αύξησης** από τις σχέσεις:

$φ_1=γ_1$, και $γ_{n-1}.φ_n = β.γ_n$ για $n> 1$.

Επομένως η $φ_n$ είναι η τέταρτη ανάλογος των τριών γραμμών $γ_{n-1}$, $γ_n$, και β.

Πρόταση 1 (Ιδιότητες των παραγόντων αύξησης).
Έστω $\alpha > \beta$ δύο γραμμές, με
$A > \beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \ldots > \gamma_n > \gamma_{n+1} > \ldots$
η ακολουθία διαδοχικών υπολοίπων,
$\mu_1, I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots.$
η ακολουθία διαδοχικών πηλίκων, και
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$
η ακολουθία παραγόντων αύξησης
της ανθυφαίρεσης των α, β. Τότε
(α) $\varphi_n < \beta$ για κάθε n,
(β) $\varphi_n (I_n \beta + \varphi_{n+1}) = \beta^2$ για κάθε n,
(γ) η ανθυφαίρεση του β, φ_n είναι ίση με $Ανθ(\beta, \varphi_n) = [I_n, I_{n+1}, \ldots]$ για κάθε n, και
(δ) [αυξητικό Κριτήριο Λόγου] εάν υπάρχουν n, m με n<m, τέτοια ώστε $\varphi_n = \varphi_m$, τότε η ανθυφαίρεση του α προς β είναι τελικά περιοδική, και στην πραγματικότητα ίση με
$\left[\ \mu_1, I_1, \ldots I_{n-1}, \overline{I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{m-1}}\ \right]$

Απόδειξη. (α), (β) στερεότυπη μετάφραση του ορισμού της ανθυφαίρεσης των μεγεθών, έμμεση στην Πρόταση X.2 των *Στοιχείων,*
(γ) από τον ορισμό της αναλογίας στα *Τοπικά* ,
(δ) στερεότυπη μετάφραση του Κριτηρίου του Λόγου (όπως καθιερώθηκε στην Ενότητα 3.5).

Ορισμοί. έστω β μία γραμμή, ζ, η γραμμές με ζ > η, ασύμμετρες, και τέτοιες ώστε ζ^2, η^2 είναι σύμμετρες ως προς β^2. Τότε

(α) (όπως αναφέρεται στην Πρόταση X.73 των Στοιχείων) η γραμμή ζ – η καλείται **αποτομή**,
(β) (όπως αναφέρεται στην Πρόταση X.36 των Στοιχείων) η γραμμή ζ + η καλείται **γραμμή δύο ονομάτων** (εκ δύο ονομάτων), και
(γ) (όπως έμμεσα αναφέρεται στις **Προτάσεις X.112-114** των *Στοιχείων*) η αποτομή ζ – η και η γραμμή εκ δύο ονομάτων ζ + η καλούνται συζυγείς μεταξύ τους.
Οι γραμμές ζ, η λέγονται **ονόματα** των γραμμών ζ – η και ζ + η.
Γράφουμε ζ + η = (ζ – η)* και ζ – η = (ζ + η)*.

Η ακόλουθη άμεσα επαληθεύσιμη διατύπωση, αποτελεί τον βασικό σύνδεσμο μεταξύ της ανθυφαίρεσης και της θεωρίας των άρρητων γραμμών στο Βιβλίο X, που εισήγαγε ο Θεαίτητος.

Πρόταση 2. Η γραμμή $\varphi_1 = \alpha - \mu_1 \rho$ είναι μια αποτομή.

Η συζυγία μεταξύ των γραμμών δύο ονομάτων και της αποτομής περιγράφεται στις θεμελιώδεις Προτάσεις X.112-114των *Στοιχείων*.

Πρόταση X.112. Εάν β είναι μια ρητή γραμμή, η ζ είναι γραμμή δύο ονομάτων, με ονόματα $\zeta_1 > \zeta_2$, και η η είναι γραμμή τέτοια ώστε $\zeta \cdot \eta = \beta^2$, τότε η η είναι αποτομή με ονόματα $\eta_1 > \eta_2$, και $\zeta_1/\eta_1 = \zeta_2/\eta_2$ είναι ένας σύμμετρος λόγος.

Πρόταση X.113 Εάν β είναι ρητή γραμμή, ζ είναι μια αποτομή με ονόματα $\zeta_1 > \zeta_2$, και η η είναι μια γραμμή τέτοια ώστε $\zeta \cdot \eta = \beta^2$, τότε η η είναι γραμμή δύο ονομάτων με ονόματα $\eta_1 > \eta_2$, και $\zeta_1/\eta_1 = \zeta_2/\eta_2$ είναι ένας σύμμετρος λόγος.

Πρόταση X.114. Εάν η ζ είναι μια γραμμή δύο ονομάτων, με ονόματα $\zeta_1 > \zeta_2$, η η είναι μία αποτομή με ονόματα $\eta_1 > \eta_2$, $\zeta_1/\eta_1 = \zeta_2/\eta_2$ είναι σύμμετρος λόγος, και $\zeta \cdot \eta = \beta^2$, τότε η β είναι μια ρητή γραμμή.

Σε αυτές τις τρεις Προτάσεις ο Θεαίτητος αναπτύσσει την συζυγία των δύο ειδών γραμμών (αποτομή, γραμμή εκ δύο ονομάτων) την οποία και εισήγαγε. Η εν λόγω συζυγία στην πραγματικότητα παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει και η συζυγία σε μιγαδικούς αριθμούς: είναι χρήσιμη στον υπολογισμό αντιστροφών, κάτι εξαιρετικά ουσιώδες για τις επεκτάσεις των συνεχών κλασμάτων. Η ανακατασκευή της απόδειξης του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας χρησιμοποιεί εξολοκλήρου τις έννοιες των γραμμών, της αποτομής και της γραμμής των δύο ονομάτων, καθώς και την συζυγία τους όπως αναφέρονται στις Προτάσεις 112-14 του Βιβλίου X των *Στοιχείων*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7.

Ανακατασκευή της απόδειξης της παλινδρομικής περιοδικότητος της ανθυφαίρεσης γραμμών δυνάμει μόνον συμμέτρων με τα εργαλεία του Βιβλίου Χ. των *Στοιχείων*

Το συνολικό περιεχόμενο του *Πολιτικού* αποκαλύπτεται ότι δεν είναι παρά μία ακριβής φιλοσοφική μίμηση ενός εξαιρετικά σημαντικού θεωρήματος και δηλώνει, όπως αναφέρεται στην Ενότητα 6, ότι 'η ανθυφαίρεση δύο γραμμών ασύμμετρων σε δύναμη μόνο είναι παλινδρομικά περιοδική',
αντίστοιχα, με σύγχρονους όρους,
'η συνεχής επέκταση κλάσματος ενός τετραγωνικού άρρητου είναι παλινδρομικά περιοδική',
θεώρημα που θεωρήθηκε ότι καθιερώθηκε την σύγχρονη εποχή με την σημαντική συνεισφορά μερικών από τους πιο σημαντικούς μαθηματικούς του $17^{ου}$ και $18^{ου}$ αιώνα, μεταξύ των οποίων ο Euler (ο οποίος συγκέντρωσε σημαντικά στοιχεία για την περιοδικότητα των συνεχών κλασμάτων συγκεκριμένων τετραγωνικών άρρητων), ο Lagrange (ο οποίος απέδειξε την τελική περιοδικότητα), οι Legendre και Galois (οι οποίοι χαρακτήρισαν τα καθαρά περιοδικά συνεχή κλάσματα, συμπέρασμα που εύκολα οδηγεί στο συμπέρασμα της παλινδρομικής περιοδικότητας). Σύγχρονες αποδείξεις του εν λόγω συμπεράσματος βρίσκονται στους [HW, 1938], [W, 1984] [Ka, 1985], [Fow, 1986].

Αλάνθαστη και αναπόφευκτη συνέπεια της ανάλυσής μας είναι ότι, παρά την έλλειψη σαφών αρχαίων μαθηματικών αποδείξεων, το θεώρημα ήταν στην κατοχή της Ακαδημίας. Το επόμενο ερώτημα μας είναι αναπόφευκτα μαθηματικής φύσεως: αν θα μπορούσαν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, και ειδικότερα ο Θεαίτητος να έχουν απόδειξη του

Θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας. Έστω ότι α>β δύο γραμμές, Ν ένας μη τετραγωνικός αριθμός με $\alpha^2=N\ \beta^2$. Τότε υπάρχουν αριθμοί μ_1, I_1, $I_2,\ldots,I_k$, τέτοιοι ώστε η ανθυφαίρεση των α, β είναι παλινδρομικά περιοδική, και στην πραγματικότητα ίση με
$\left[\ \mu_1, \overline{I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}, (I_k), I_{k-1} \ldots, I_2, I_1, 2\mu_1}\ \right]$ ή $\left[\ \mu_1, \overline{I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}, I_k, I_k, I_{k-1} \ldots, I_2, I_1, 2\mu_1}\ \right]$
Γενικότερα το ίδιο συμπέρασμα ισχύει για την περίπτωση όπου οι α, β είναι γραμμές σύμμετρες σε δύναμη μόνο.

Σημειώστε ότι και οι δύο Περιπτώσεις πραγματικά υπάρχουν. Πράγματι
η ανθυφαίρεση των α,β, με $\alpha^2=46\ \beta^2$, είναι $\left[\ 6, \overline{1,3,1,1,2,\boxed{6},2,1,1,3,1,12}\ \right]$, και
η ανθυφαίρεση των α,β, με $\alpha^2=13\ \beta^2$, είναι $\left[\ 3, \overline{1,1,1,1,6}\ \right]$.

Παρακινούμενοι από την ξεκάθαρη αν και κρυμμένη πίσω από φιλοσοφικά νοήματα, διατύπωση του Θεωρήματος στον *Πολιτικό*, όπως είδαμε στις Ενότητες 11-12, και παρότι δεν υπάρχει σωζόμενη αρχαία μαθηματική απόδειξη του θεωρήματος αυτού, συνειδητοποιούμε ότι, παρόλα αυτά, όλα τα εργαλεία για να αποδειχτεί βρίσκονται στο Βιβλίο Θεαίτητος Χ των *Στοιχείων*.

Επισημαίνουμε ότι η δική μας ανακατασκευή βασίζεται εξολοκλήρου σε εργαλεία από το Βιβλίο Χ. των *Στοιχείων*, αλλά αποκτά ιστορική συνάφεια μόνο σε σχέση με τον γεγονός ότι ανακαλύψαμε το συγκεκριμένο θεώρημα κρυμμένο στην φιλοσοφική γλώσσα του *Πολιτικού.*

4.3. Η απόδειξη του Θεωρήματος της Περιοδικότητας με εργαλεία από το Βιβλίο Χ των *Στοιχείων*

Στρεφόμαστε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος και παρουσιάζουμε πρώτα την πιο αδύναμη .

Το θεώρημα της περιοδικότητας (ΘΠ).
Εάν N είναι μη-τετραγωνικός φυσικός αριθμός, και α και β ευθείες γραμμές, τέτοιες ώστε $α^2=Nβ^2$, υποδηλώνοντας με
$μ_1, I_1, I_2,\dots, I_n,\dots$
την ακολουθία διαδοχικών πηλίκων, με
$φ_1, φ_2,\dots, φ_n,\dots$
την ακολουθία διαδοχικών παραγόντων αύξησης
της ανθυφαίρεσης του α σε σχέση με το β,
τότε υπάρχουν δύο ακολουθίες
$λ_1, λ_2,\dots, λ_k,\dots$ και $μ_1, μ_2,\dots, μ_k,\dots$
φυσικών αριθμών, τέτοιες ώστε για κάθε φυσικό αριθμό k>1
(a_k) $λ_kλ_{k-1}=N- μ_{k-1}^2$,
(b_k) $λ_k (I_{k-1} β +φ_k)= λ_{k-1} (φ_{k-1})^*$,
(c_k) $μ_k+μ_{k-1}=I_{k-1}λ_k$,
ως εκ τούτου ο $λ_k$ είναι φυσικός αριθμός μικρότερος του N, και ο $μ_k$ είναι φυσικός αριθμός με τετράγωνο μικρότερο του N, και
(d_k) η γραμμή $φ_k$ είναι μία **αποτομή** και μάλιστα $λ_k\ φ_k=α-μ_k\ β$, και η ανθυφαίρεση των α και β είναι τελικά περιοδική.

Απόδειξη του θεωρήματος της περιοδικότητας.
Συνεχίζουμε με μαθηματική επαγωγή.
Αποδεικνύουμε τα (a_2), (b_2),(c_2), (d_2) και
παίρνοντας (a_k), (b_k),(c_k), (d_k) αποδεικνύουμε (a_{k+1}), (b_{k+1}),(c_{k+1}), (d_{k+1}).

Η απόδειξη του (a_{k+1}) συνίσταται στην στοιχειώδη επαλήθευση χρησιμοποιώντας ((d_k), (a_k), (c_k)), ότι ο αριθμός $λ_{k+1}$ που καθορίζεται από $λ_{k-1}+I_{k-1}(μ_{k-1}- μ_k)$ είναι πράγματι ένας φυσικός αριθμός.

Απόδειξη του (b_{k+1}): η ισότητα (d_k) $λ_k\ φ_k=α-μ_k\ β$ σημαίνει ότι η $φ_k$ είναι μία αποτομή. Θεωρούμε την γραμμή των δύο ονομάτων $λ_k\ (φ_k)^*=α+μ_k\ β$ συζυγή προς αυτήν. Με
(a_{k+1}) και την **Πρόταση X.114**, έχουμε

$$λ_k^{\,2}\ φ_k\ (φ_k)^* =(α-μ_k\ β)\ (α+μ_k\ β) = α^2-μ_k^{\,2}\ β^2 = λ_{k+1}λ_k\ β^2,$$

ως εκ τούτου, διαιρώντας και τα δύο μέλη με $λ_k$, ότι

$$λ_k\ φ_k\ (φ_k)^* = λ_{k+1}\ β^2. \qquad \text{(A)}$$

Από την άλλη, από την ανθυφαιρετική σχέση (Πρόταση 1b) έχουμε
$φ_k\ (I_k\ β+φ_{k+1})=β^2$, ως εκ τούτου

$$λ_{k+1}φ_k\ (I_k\ β+φ_{k+1}) = λ_{k+1}β^2 . \qquad \text{(B)}$$

Συγκρίνοντας τα (A) και (B), έχουμε $λ_{k+1}φ_k\ (I_k\ β+φ_{k+1})=λ_k\ φ_k\ (φ_k)^*$, και επομένως

$$λ_{k+1}(I_k\ β+φ_{k+1})=λ_k\ (φ_k)^*.$$

Θεωρώντας ότι (b_{k+1}) έχει αποδεχθεί:
η απόδειξη του (c_{k+1}) συνίσταται στην στοιχειώδη επαλήθευση, χρησιμοποιώντας ((b_{k+1}) και την Απόδειξη 1a), ότι ο αριθμός $μ_{k+1}$ που ορίζεται με $I_k\ λ_{k+1}- μ_k$ είναι πράγματι φυσικός αριθμός, και,
η απόδειξη του (d_{k+1}) συνίσταται σε μια στοιχειώδη επαλήθευση χρησιμοποιώντας (b_{k+1}) και (c_{k+1}).

Αφήνουμε για τον αναγνώστη την παρόμοια και πιο απλή απόδειξη του (b_2), η οποία βασίζεται στην συζυγία του Βιβλίου X. (**Πρόταση X.114**).

Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη των (a_k), (b_k),(c_k), (d_k).

Από τα (a_k), (b_k),(c_k), (d_k) που μόλις αποδείχθηκαν, καθώς και από το γεγονός ότι το σύνολο των ζευγών (λ, μ) φυσικών αριθμών, με το λ να φράσσεται άνω από το N και το μ από το $μ_1$ είναι πεπερασμένο, συνεπάγεται, εφαρμόζοντας την **αρχή του περιστερεώνα** ότι υπάρχουν δείκτες k και s, με $k<s$, τέτοιοι ώστε $\varphi_k=\varphi_s$. Η τελική περιοδικότητα τώρα συνεπάγεται από το αυξητικό Κριτήριο του Λόγου (Πρόταση 1d).

4.4. Η απόδειξη του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας με εργαλεία από το Βιβλίο X των *Στοιχείων*

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του πλήρους θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας, όπως περιγράφεται στον *Πολιτικό*.

Ορισμός (Αντίστροφος της συζυγίας (φ_n)*). Ορίστε την γραμμή ω_n από την ισότητα
$(\varphi_n)^* \omega_n = \beta^2$.
Εφόσον (φ_n)* είναι γραμμή δύο ονομάτων, συνεπάγεται από την συζυγία στο Βιβλίο X.(**Πρόταση X.112)** ότι η ω_n είναι μια αποτομή. Στην πραγματικότητα μπορούμε να αντλήσουμε περισσότερο λεπτομερείς πληροφορίες.

Πρόταση 3 (Ιδιότητες της ω_n).
(α) Η γραμμή ω_n είναι μια αποτομή, και μάλιστα
$\lambda_{n+1}\omega_n=\alpha-\mu_n\beta$,
(β) $\omega_n<\beta$,
(γ) $\omega_1(\varphi_1+2\mu_1\beta)=\beta^2$, και,
(δ) $\omega_{n+1}(I_n\beta+\omega_n)=\beta^2$.

Απόδειξη. (α) από τον ορισμό της ω_n και το ΘΠ (Θεώρημα της Περιοδικότητας) (a_n), (d_n),

(b) από τον ορισμό της ω_n και του ΘΠ (c_n),
(c) από τον ορισμό των ω_1 και φ_1, και,
(d) από τον ορισμό των ω_n και του ΘΠ (d_{n+2}).

Αφήνουμε τις λεπτομέρειες για τον αναγνώστη.

Απόδειξη του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας.

Διατάξτε τα στοιχεία των δύο ακολουθιών (φ_n) και (ω_n) σε μία ως εξής:
$\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_n, \omega_n,\ldots$.
Σύμφωνα με **την αρχή του περιστερεώνα**, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Περιοδικότητας και την Πρόταση 3a, υπάρχει ένα πρώτο στοιχείο στην ακολουθία αυτής της διάταξης, τέτοιο ώστε
(i) όλα τα προηγούμενα στοιχεία της ακολουθίας είναι κατά ζεύγη διαφορετικά, και
(ii) το εν λόγω στοιχείο συμπίπτει με ένα προηγούμενο στοιχείο.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις προς εξέταση:
Περίπτωση I: Τα στοιχεία $\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_{k-1}, \omega_{k-1}$ είναι κατά ζεύγη διαφορετικά και το στοιχείο φ_k συμπίπτει με ένα προηγούμενο στοιχείο. Τότε ισχυριζόμαστε ότι $\omega_{k-1}=\varphi_k$.
Περίπτωση II: Τα στοιχεία $\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2,\ldots, \varphi_{k-1}, \omega_{k-1}, \varphi_k$ είναι κατά ζεύγη διαφορετικά και το στοιχείο ω_k συμπίπτει με ένα προηγούμενο στοιχείο. Τότε ισχυριζόμαστε ότι $\varphi_k=\omega_k$.

Απόδειξη για την Περίπτωση I. Υπάρχουν τρεις υποπεριπτώσεις:

(α) εάν η αποτομή φ_k συμπίπτει με την αποτομή φ_1, τότε έχουμε αντίφαση [Απόδειξη παρόμοια με την (β) που ακολουθεί]

(β) εάν η αποτομή φ_k συμπίπτει με την αποτομή φ_j για κάποιο j με $1<j<k$, τότε έχουμε αντίφαση.

[θα προκύψει αντίφαση από το (β).
Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι οι δύο συζυγείς γραμμές δύο ονομάτων είναι ίσες, ότι δηλαδή $(\varphi_k)^*=(\varphi_l)^*$, και εφόσον $(\varphi_k)^*\ \omega_k=(\varphi_j)^*\ \omega_j=\beta^2$ (από τον ορισμό της $(\varphi_k)^*$), προκύπτει ότι $\omega_k=\omega_j$. Αλλά έχουμε $\omega_j\,(I_{j-1}\,\beta+\omega_{j-1})=\beta^2$ και $\omega_k\,(I_{k-1}\,\beta+\omega_{k-1})=\beta^2$ (και τα δύο από την Πρόταση 3d). Ως εκ τούτου $I_{k-1}\,\beta+\omega_{k-1}= I_{j-1}\,\beta+\omega_{j-1}$. Εφόσον (λόγω της Πρότασης 3b) και οι δύο πλευρές της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας ολόκληρης γραμμής σε σχέση με την ίδια γραμμή β, συνεπάγεται ότι τα υπόλοιπα είναι ίσα, δηλαδή $\omega_{k-1}=\omega_{j-1}$, το οποίο συνιστά αντίφαση, δεδομένου ότι τα στοιχεία φ_1, ω_1, φ_2, $\omega_2,\ldots,\varphi_{k-1}$, ω_{k-1} θεωρούνται κατά ζεύγη διαφορετικά. Ως εκ τούτου, η φ_k δεν είναι ίση με φ_j για κάποιο j με $1<j<k$.]

(γ) εάν η αποτομή φ_k συμπίπτει με την αποτομή ω_j, για κάποιο j με $j<k-1$, τότε έχουμε αντίφαση.[Απόδειξη παρόμοια με την (β) παραπάνω].
Επομένως, εφόσον η φ_k είναι ίση με ένα από τα στοιχεία φ_1, ω_1, φ_2, $\omega_2,\ldots,\varphi_{k-1}$, ω_{k-1}, η μόνη πιθανότητα που απομένει, βάσει των (α), (β), και (γ),είναι να έχουμε $\omega_{k-1}=\varphi_k$.

Η Περίπτωση ΙΙ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο και έχουμε $\varphi_k=\omega_k$.

Τώρα θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρουσιάζοντας την παλινδρομικότητα στην **Περίπτωση Ι**.

Από το γεγονός, που έχει ήδη αποδειχθεί, ότι $\omega_{k-1}= \varphi_k$, και τις σχέσεις $\varphi_k\,(I_k\beta+\varphi_{k+1})=\beta^2$ (Πρόταση 1b) και $\omega_{k-1}\,(I_{k-2}\,\beta+\omega_{k-2})=\beta^2$ (Πρόταση 3d), συνάγουμε ότι $I_k\,\beta+\varphi_{k+1}= I_{k-2}\,\beta+\omega_{k-2}$, εφόσον (λόγω των Προτάσεων 1a και 3b) και οι δύο πλευρές της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας ολόκληρης γραμμής σε σχέση με την ίδια γραμμή β, συνεπάγεται ότι τα δύο υπόλοιπα και τα δύο πηλίκα είναι ίσα, δηλαδή. $I_k=I_{k-2}$ και
$\varphi_{k+1}= \omega_{k-2}$.
Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε $I_{k+1}=I_{k-3}$ και $\varphi_{k+2}= \omega_{k-3}$. Εξακολουθώντας με τον ίδιο τρόπο έχουμε $I_1=I_{2k-3}$ και $\varphi_{2k+2}= \omega_1$. Όμως έχουμε ότι
$\varphi_{2k-2}(I_{2k-2}\,\beta+\varphi_{2k-1})=\beta^2$ (Πρόταση 1b) και $\omega_1(2\mu_1\beta+\varphi_1)=\beta^2$ (Πρόταση 3d), ως εκ τούτου
$I_{2k-2}\,\beta+\varphi_{2k-1} =2\mu_1\beta+\varphi_1$. Δεδομένου ότι (λόγω της Πρότασης 1a) και οι δύο πλευρές της εξίσωσης αυτής αντιπροσωπεύουν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας ολόκληρης γραμμής σε σχέση με την ίδια γραμμή β, συνεπάγεται ότι τα δύο υπόλοιπα και τα δύο πηλίκα είναι ίσα, δηλαδή $I_{2k-2}=2\mu_1$ και $\varphi_{2k-1}= \varphi_1$.
Από την ισότητα $\varphi_{2k-1}= \varphi_1$ (το αυξητικό Κριτήριο του Λόγου (Πρόταση 1d)), συνάγουμε την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης, και από τις ισότητες
$I_{2k-2}=2\mu_1$, και $I_1=I_{2k-3}$, $I_2=I_{2k-4},\ldots, I_k=I_{k-2}$, και $I_{k+1}=I_{k-3}$,
συνάγουμε το ζητούμενο δηλ την παλινδρομικότητα στην περίοδο της ανθυφαίρεσης.

Η Περίπτωση ΙΙ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Η γενική περίπτωση της συμμετρίας σε δύναμη μόνο απαιτεί ελάχιστες μόνο τροποποιήσεις που αφήνουμε για τον αναγνώστη. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.

4.5. Το επιχείρημα του Πλάτωνος για την μετάβαση από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία (*Πολιτικός* 272d-e) φαίνεται να σχετίζεται με το επιχείρημα του περιστερεώνα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη.

Διαπιστώνει κανείς ότι στην ανακατασκευή της απόδειξης του θεωρήματος της παλινδρομικής ανθυφαίρεσης, γίνεται καίρια εφαρμογή της αρχής του περιστερεώνα ακριβώς στο σημείο της μετάβασης από την πρώτη ημιπερίοδο στην δεύτερη και παλινδρομικά σύμμετρη ως προς την πρώτη. Αυτό φυσικά αντιστοιχεί επακριβώς στο σημείο της μετάβασης από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία. Όπως επισημάνθηκε στην Ενότητα 11.3, και την υποσημείωση 22, ο Πλάτωνας, εξηγώντας γιατί έρχεται η στιγμή όπου απαραίτητα γίνεται αλλαγή από την εποχή του Κρόνου στην εποχή του Δία (στον *Πολιτικό* 272d-e), προβάλει ένα επιχείρημα που φαίνεται πως θυμίζει το επιχείρημα του περιστερεώνα:

‘Όταν πραγματικά **συμπληρώθηκε** (ετελεώθη) ο χρόνος, ο ορισμένος σε όλα αυτά τα πράγματα, και ήρθε πια η ώρα να γίνει η μεταβολή, και όταν ακριβώς **το γένος, το φυόμενο από τη γη εξαφανίστηκε πια (ανήλωτο) ολόκληρο, αφού κάθε ψυχή είχε αποδώσει όλα όσα ήταν να γεννήσει (αποδεδωκυίας) και έπεσαν στη γη τόοα σπέρματα, όσα σε κάθε μια της είχαν καθοριστεί**, τότε πια ο κυβερνήτης του σύμπαντος, αφήνοντας το πηδάλιο, ξαναγύρισε στο παρατήριό του, και στον κόσμο ξαναέδωσε παλινδρομική στροφή το πεπρωμένο και η έμφυτη κλίση.’[74]
Έτσι η αλλαγή για μια ψυχή από την εποχή του Κρόνου οπού το γένος γεννήθηκε από τη γη στην εποχή του Δία γίνεται απαραίτητη όταν ο (αναμφίβολα πεπερασμένος) αριθμός παραγωγής της ψυχής σε αυτήν την εποχή έχει ολοκληρωθεί και τα σπέρματα που αποδίδονται στην ψυχή κατά την διάρκεια αυτής της εποχής έχουν καθοριστεί …. Αυτό ακριβώς είναι το επιχείρημα του περιστερεώνα.

4.6. Ο σκοπός του Βιβλίου Χ των *Στοιχείων*

Αποκαλύπτεται έτσι ότι το Βιβλίο Χ. έχει έναν πιο συναρπαστικό σκοπό: να προσφέρει τα εργαλεία για την διατύπωση και την απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών άρρητων. Αυτός ο σκοπός δεν είχε, μέχρι τώρα, γίνει αντιληπτός όπως μπορεί να καταλάβει κανείς βλέποντας τις απόψεις που έχουν διατυπώσει συγγραφείς οι οποίοι έχουν μελετήσει το Βιβλίο, όπως:
ο Taisbak ([Tai, 1982], σ.58), στον οποίον αποδίδουμε την επεξήγηση της μαθηματικής δομής του Βιβλίου Χ, γράφει: “Είμαστε έτοιμοι να αντιμετωπίσουμε το ενδεχόμενο να μην υπήρξε άλλος σκοπός από το να μας ψυχαγωγήσει με την χρήση καλής λογικής ”,
ο Knorr ([Kn, 1983], σ. 60), ο οποίος γράφει: “ Η πραγματική αξία του Βιβλίου Χ, και δεν την θεωρώ καθόλου ασήμαντη, βρίσκεται στο ότι είναι ένα μοναδικό δείγμα ενός πλήρως αναπτυγμένου παραγωγικού συστήματος από εκείνα που οι αρχαίες φιλοσοφίες σταθερά εκτιμούσαν”,
ο Mueller ([Mu, 1981], σ. 270-271), ο οποίος γράφει: “Κανείς θα προτιμούσε φυσικά μια ερμηνεία που θα επικαλείτο έναν σαφή μαθηματικό σκοπό κατανοητό από εμάς σε σχέση με τις δικές μας μαθηματικές έννοιες και ο οποίος, κατόπιν αναλύσεως, θα οδηγούσε ομόφωνα στην συλλογιστική του βιβλίου Χ. Δυστυχώς, το βιβλίο Χ δεν έχει ερμηνευθεί επιτυχώς με αυτόν τον τρόπο και φαίνεται πως δεν υπόκειται σε μια τέτοια ερμηνεία. Φαίνεται μάλλον ότι το βιβλίο Χ είναι πρόσφορο για την διαχείριση ενός συγκεκριμένου προβλήματος και την ίδια στιγμή αποτελεί ένα μαθηματικό αδιέξοδο ”,
ο van dr Waerden ([vdW, 1950], σ. 172), ο οποίος γράφει: “ Το Βιβλίο Χ δεν είναι εύκολο ανάγνωσμα …Ο συγγραφέας του επιτυχώς κατάφερε να κρύψει τη συλλογιστική του ”.

Από την άλλη μεριά, η ‘όμορφη δομή’ του Βιβλίου Χ., με την λεπτομερή μελέτη των έξι γραμμών των δύο ονομάτων και των έξι αποτομών δεν παίζει κανένα ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας, και ο σκοπός του παραμένει αναπάντητο ερώτημα. Θα αποτελέσει αντικείμενο ανάλυσης στο προσεχές έργο των Νεγρεπόντη και Μπρόκου [ΝΒ, ?].

[74] ἐπειδὴ γὰρ πάντων τούτων χρόνος ἐτελεώθη καὶ μεταβολὴν ἔδει γίγνεσθαι καὶ δὴ καὶ τὸ γήινον ἤδη πᾶν ἀνήλωτο γένος, πάσας ἑκάστης τῆς ψυχῆς τὰς γενέσεις ἀποδεδωκυίας, ὅσα ἦν ἑκάστῃ προσταχθὲν τοσαῦτα εἰς γῆν σπέρματα πεσoύσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8.
ΚΑΘΑΡΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΜΕΣΟΣ ΚΑΙ ΑΚΡΟΣ ΛΟΓΟΣ ΜΕ ΤΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΤΟΥ ΘΕΑΙΤΗΤΕΙΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ Χ ΤΩΝ *ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*

Η έννοια του Γενικευμένου Μέσου και Άκρου Λόγου (ΓΜΑΛ), που εισήγαγε ουσιαστικά ο Christoffer Zeeman και ο David Fowler, συνδέεται στενά με την παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή (Πρόταση VI.29 *των Στοιχείων* του Ευκλείδη).
Ο Fowler στην εργασία του
[Fo2] *Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio*, Archive for History of Exact Sciences 22 (1980), 5-36. (1980),
σκιαγράφησε, χωρίς να υπεισέρχεται σε λεπτομέρειες, την ανακατασκευή της Πρότασης σύμφωνα με την οποία

"Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα a > b έχουν καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση, τότε ικανοποιούν μία συνθήκη ΓΜΑΛ της μορφής $Aa^2 = Bab + Cb^2$ με A + B > C".

Χάριν πληρότητας, παρουσιάζουμε (στην Πρόταση 8.2.5) τις λεπτομέρειες μιας τέτοιας ανακατασκευής.
Τα μέσα που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη περιλαμβάνουν την επαναλαμβανόμενη χρήση της ιδιότητας σύνθεσης των αναλογιών και τους "γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς", τις σύγχρονες "συγκλίνουσες" των συνεχών κλασμάτων, τα οποία γνώριζαν οι Έλληνες γεωμέτρες.
Ο βασικός σκοπός στο παρόν Κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι
μια ανακατασκευή της απόδειξης της πιο δύσκολης αντίστροφης Πρότασης
(Πρόταση 8.7.2):

"Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα a > b ικανοποιούν μία συνθήκη ΓΜΑΛ της μορφής $Aa^2 = Bab + Cb^2$ με A + B > C, και $B^2 + 4AC$ μη τετράγωνο αριθμό**,**
τότε έχουν καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση",

είναι δυνατή έχοντας ως βασικό εργαλείο **την συσυγία μεταξύ της αποτομής και της γραμμής εκ δύο ονομάτων**, που αναπτύχθηκε στο βιβλίο Χ *των Στοιχείων* του Θεαίτητου. Η ανακατασκευή χρησιμοποιεί επίσης την επαναλαμβανόμενη ανθυφαιρετική αντικατάσταση (Πρόταση 8.3.5) μία τεχνική η οποία, στην απλούστερη μορφή της, θα μπορούσε να ήταν η μέθοδος με την οποία οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν την ασυμμετρία της διαμέτρου προς την πλευρά ενός τετραγώνου [N;],αλλά βασικά και η μέθοδος Θεόδωρου, όπως αναπτύξαμε στο Καφάλαιο 2. Αυτή η ανακατασκευή υποδεικνύει ότι **ο λόγος ύπαρξης του βιβλίου Χ**, που αναζήτησαν πολλοί διακεκριμένοι ερευνητές (συμπεριλαμβανομένων των Stevin, Heath, Mueller, van der Waerden, Taisbak, Fowler και Knorr), ίσως ήταν η ανάπτυξη των εργαλείων της απόδειξης των τετραγωνικών ασυμμετριών. Ίσως επίσης υποδεικνύει ότι η μέθοδος της παραβολής χωρίων καθ' υπερβολή στο Βιβλίο VI (Πρόταση VI.29) *των Στοιχείων*, μια φυσική γενίκευση των Πυθαγόρειων Γνωμόνων του βιβλίου ΙΙ, έχει ανθυφαιρετικό περιεχόμενο. Το κίνητρο για αυτήν την εργασία είναι η συνειδητοποίηση ότι η Πλατωνική Διαίρεση και Σύνθεση στον Σοφιστή και στον Πολιτικό, που μιμείται, σε φιλοσοφικό επίπεδο, σύμφωνα με την Σωκρατική παρότρυνση, την ανακάλυψη του Θεαίτητου και του νεαρού Σωκράτη (Θεαίτητος 148 d),
αποκαλύπτουν, στην δομή τους, γνώση του εντυπωσιακού θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο "αν a > b είναι ευθύγραμμα τμήματα σύμμετρα σε δύναμη μόνο, τότε η ανθυφαίρεση του a προς b είναι παλινδρομικά περιοδική (δες Νεγρεπόντης [N;].

8.1. ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΧΩΡΙΩΝ ΚΑΘ’ ΥΠΕΡΒΟΛΗ (ΠΡΟΤΑΣΗ VI 29) ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΜΕΣΟΣ ΚΑΙ ΑΚΡΟΣ ΛΟΓΟΣ (ΓΜΑΛ)

8. 1.1. Ορισμός. Δύο ευθύγραμμα τμήματα a και b είναι σε **Γενικευμένο Μέσο και Άκρο Λόγο (ΓΜΑΛ)**, εάν και μόνο υπάρχουν φυσικοί αριθμοί A, B, C τέτοιοι ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$.
Στην ειδική περίπτωση $A = B = C$ ($\neq 0$), τα a και b είναι σε **Μέσο και Άκρο Λόγο (ΜΑΛ)**
Ορισμός αντίστοιχος με τον παραπάνω έχει δοθεί από τον Fowler στο Appendix 1. Extensions of proposition II του [Fo1], και που αποδίδεται εκεί στον Christoffer Zeeman. Θα επανέλθουμε στην συμβολή των Fowler και Christoffer Zeeman στο Κεφάλαιο 3.
Σε αρκετά γενικές συνθήκες, μια παραβολή εμβαδών σε υπερβολή, όπως περιγράφεται στη Πρόταση VI. 29 των Στοιχείων ανάγεται σε ΓΜΑΛ.

8.1.2. Πρόταση.
Έστω a, b, c δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα, M δοθέν χωρίο και ℓ / m δοθείς λόγος, ούτως ώστε $c / b = \ell / m$ και **η εφαρμογή χωρίου καθ’ υπερβολή** $M = b(a + c)$ να πληρούται. Επιπλέον θεωρούμε:
(α) ότι το εμβαδόν M είναι σύμμετρο με το τετράγωνο a^2, έστω $M / a^2 = p / q$ για κάποιους φυσικούς αριθμούς p, q και
(β) ότι ο δοθείς λόγος ℓ / m είναι λόγος αριθμών.
Τότε, ορίζοντας $A = mp$, $B = mq$, $C = \ell q$ διαπιστόνουμε ότι το ζεύγος a, b των ευθυγράμμων τμημάτων ικανοποιεί την εξίσωση $Aa^2 = Bab + Cb^2$.

8.1.3. Πόρισμα (Εφαρμογή χωρίου καθ’ υπερβολή του ΓΜΑΛ).
Δοθέντων των φυσικών αριθμών A, B, C και ενός ευθυγράμμου τμήματος a, να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα b τέτοιο ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$.

Απόδειξη.
Το ευθύγραμμο τμήμα b κατασκευάζεται με την εφαρμογή της Πρότασης VI. 29 των Στοιχείων (Πρόταση 8.1.2, παραπάνω) με στοιχεία $M = Aa^2$, $a_1 = Ba$, $\ell = C$, $m = 1$.

8.1.4. Σχόλιο.
Σε ένα ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$, η συνθήκη $a > b$ είναι ισοδύναμη της συνθήκης $B + C > A$.
Πράγματι: αν $a > b$, τότε $Ba^2 + Ca^2 > Bab + Cb^2 = Aa^2$, επομένως $B + C > A$ και αν $B + C > A$, τότε $Ba^2 + Ca^2 > Aa^2 = Bab + Cb^2$ και συνεπώς με απαγωγή σε άτοπο $a > b$.

8.2. ΚΑΘΑΡΑ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ ΓΜΑΛ ΜΕ A + B > C

Σε αυτή την ενότητα προτείνουμε μια ανακατασκευή, αποκλειστικά με αρχαία υλικά, της Πρότασης: εάν δύο ευθύγραμμα τμήματα a, b, έχουν καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση, τότε το ζεύγος a, b ικανοποιεί την συνθήκη ΓΜΑΛ όπως ορίζεται στο 8.1.1 (όπως επισημάνθηκε, μία ιδιαίτερη περίπτωση της εφαρμογής χωρίων καθ' υπερβολή). Τα εργαλεία για την απόδειξη περιλαμβάνουν:
(α) το κριτήριο του λόγου για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης (Πρόταση 3.5),
(β) τη συστηματική χρήση της σύνθεσης των λόγων (όπως περιγράφεται στην Πρόταση 8.2.1), και
(γ) τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς (όπως ορίζονται στην παράγραφο 8.2.3 που ακολουθεί).

Μια απόδειξη αυτού του τύπου περιγράφεται από τον Fowler στο Παράρτημα 1. Προεκτάσεις της Πρότασης 11 [Fo1] (χωρίς να δίνονται λεπτομέρειες) και που αποδίδεται εκεί στον Christoffer Zeeman. Ο Fowler αναφέρει την απόδειξη του Zeeman και στο [Fo2], σελίδα 92.

8.2.1. Πρόταση

(i) ("ανάπαλιν λόγος", όπως ορίζεται στον Ορισμό V. 14 στα *Στοιχεία*).
Εάν a, b, c, d είναι ευθύγραμμα τμήματα με a / b = c / d, τότε b / a = d / c.
(ii) ("σύνθεσις λόγου", όπως ορίζεται στον Ορισμό V. 15 και αποδεικνύεται ως η Πρόταση V. 24 στα *Στοιχεία*).
Εάν a, b, c, d είναι τμήματα γραμμών με a / b = c / d, τότε(a + b) / b = (c + d) / d.
(iii) Μία άμεση επέκταση της "σύνθεσης λόγου", που αποδεικνύεται επαγωγικά, είναι η ακόλουθη διατύπωση:
Εάν a, b, c, d είναι τμήματα γραμμών με a / b = c / d και I ένας φυσικός αριθμός, τότε
(a + Ib) / b = (c + Id) / d.
Η απόδειξη της ακόλουθης πρότασης επιστρατεύει το "κριτήριο λόγου" (Πρόταση 3.5), επαναλαμβανόμενη χρήση της σύνθεσης λόγου και ένα γραμμικού τύπου επιχείρημα, παρόμοιο με εκείνο που παρουσιάζεται στην παράγραφο 8.5 παρακάτω. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.

8.2.2. Πρόταση

Έστω $I_1, I_2, \ldots, I_n$ φυσικοί αριθμοί και a, b ευθύγραμμα τμήματα με a > b. Τότε η συνθήκη:
Ανθ(a, b) = $[\overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}]$
είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη συνθήκη
(*): Υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, τέτοια ώστε
$a / b = (I_1a + b_1) / a$,
$a / b_1 = (I_2a + b_2) / a$,
…,
$a / b_{n-2} = (I_{n-1}a + b_{n-1}) / a$,
$a / b_{n-1} = (I_na + b) / a$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου, (Πρόταση 3.5), η συνθήκη Ανθ(a, b) = $[\overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}]$
είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη συνθήκη (I) στην οποία καταλήγουμε:
Υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ τέτοια ώστε
$a = I_1b + e_1$,
$b = I_2e_1 + e_2$,
$e_1 = I_3e_2 + e_3$,
…,
$e_{n-2} = I_ne_{n-1} + e_n$, με $a > b > e_1 > e_2 > \ldots > e_n$ και $e_{n-1} / e_n = a / b$.

Σύμφωνα με την Πρόταση VI. 12 (ύπαρξη της τέταρτης αναλόγου),
υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα b_i, τέτοια ώστε:
$e_{i-1} / e_i = a / b_i$, $i = 1, 2, \dots, (n – 1)$
με τη σύμβαση: $a = e_{-1}$, $b = e_0$,
οπότε:
$e_1 / b = b_1 / a$,
$e_2 / e_1 = b_2 / a$,
…,
$e_{n-1} / e_{n-2} = b_{n-1} / a$ και
$e_n / e_{n-1} = b / a$.

[Αυτό το βήμα που μας οδηγεί από τα ευθύγραμμα τμήματα $e_1, e_2, \dots, e_n$ στα ευθύγραμμα τμήματα $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ είναι παρόμοιο με τη διαδικασία της “γραμμικοποίησης”, όπως περιγράφεται στην Παράγραφο 8.5. παρακάτω].

Σύμφωνα με την σύνθεση λόγων (Πρόταση 8.2.1(ii), (iii)),
$(I_1b + e_1) / b = (I_1a + b_1) / a$,
$(I_2e_1 + e_2) / e_1 = (I_2a + b_2) / a$,
…,
$(I_ne_{n-1} + e_n) / e_{n-1} = (I_na + b) / a$,
εύκολα διαπιστώνεται ότι η συνθήκη (I) είναι ισοδύναμη με την συνθήκη (*).

Η απόδειξη της Πρότασης 8.2.5 χρησιμοποιεί τους γενικευμένους αριθμούς της πλευράς και της διαμέτρου μιας ανθυφαίρεσης, που καθορίζονται ως ακολούθως:

8.2.3. Ορισμός
Έστω a, b δύο φυσικοί αριθμοί, ή δύο μεγέθη, με $a > b$, με ακολουθία των διαδοχικών τους πηλίκων την πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $I_0, I_1, \dots, I_n, \dots$.
Οι **γενικευμένοι πλευρικοί P_n και διαμετρικοί Q_n αριθμοί**
ορίζονται αναδρομικά, ως εξής:

$Q_0 = 1$,	$[P_0 = 0]$,
$Q_1 = I_0$,	$P_1 = 1$,
$Q_2 = I_0I_1 + 1 = I_1Q_1 + Q_0$	$P_2 = I_1 = I_1P_1 + P_0$
$Q_3 = I_2Q_2 + Q_1$,	$P_3 = I_2P_2 + P_1$,
…,	…,
$Q_{n-1} = I_{n-2}Q_{n-2} + Q_{n-3}$,	$P_{n-1} = I_{n-2}P_{n-2} + P_{n-3}$ και
$Q_n = I_{n-1}Q_{n-1} + Q_{n-2}$,	$P_n = I_{n-1}P_{n-1} + P_{n-2}$,
…	…

8.2.4. Σχόλιο. Οι γενικευμένοι πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί μιας ανθυφαίρεσης αντιστοιχούν στις **συγκλίνουσες** Q_n / P_n στην σύγχρονη θεωρία των συνεχών κλασμάτων.
Όπως είναι ευρέως γνωστό, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ήξεραν τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς.
(i) για την πλευρά και την διάμετρο ενός τετραγώνου (Πλάτωνος *Πολιτεία* 546b–c, Θέων, Ιάμβλιχος, Πρόκλος *Σχόλια στην Πολιτεία* 2.24, 16–25, 13 και 2, 27, 1–29, 4), περίπτωση κατά την οποία συμπίπτουν με τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, Πυθαγόρειας προέλευσης.
(ii) για τον Άκρο και Μέσο Λόγο (*Ανώνυμον Σχόλιον στα Στοιχεία του Ευκλείδη*, II. 73), και
(iii) για a, b με $a^2 = 3b^2$ (*Μέτρηση του Κύκλου του Αρχιμήδη*, Πρόταση 3).
Επιπλέον, όλες οι γνωστές προσεγγίσεις των ασύμμετρων ή ακόμη και των σύμμετρων αναλογιών με απλούστερες σύμμετρες, πραγματοποιούνται στα Ελληνικά αριθμούς μαθηματικά, χωρίς

εξαίρεση, με τη βοήθεια των γενικευμένων πλευρικών και διαμετρικών αριθμών ([Fo3] και [N6]).

Μία ισοδύναμη περιγραφή της ανθυφαίρεσης του a προς b σε σχέση μόνο με το a και b είναι δυνατή μόνο με τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, όπου η περιγραφή που προκύπτει από την ανθυφαίρεση του a προς b γίνεται μέσω της ακολουθίας των ανισοτήτων
$M_n b < N_n a < M_{n+1} b$
για την ανθυφαιρετική σχέση της περιττής τάξεως όρων 2n – 1 και της ακολουθίας ανισοτήτων
$\Sigma_n a < T_n b < \Sigma_{n+1} a$
για την ανθυφαιρετική σχέση της άρτιας τάξεως όρων 2n, με συντελεστές M_n, N_n και Σ_n, T_n, αντιστοίχως, που καθορίζονται απολύτως από τους γενικευμένους αριθμούς της πλευράς και της διαμέτρου τετραγώνου μέχρι nd που περιλαμβάνει το n της Ανθυφαίρεσης του a διαb.

Ένδειξη του ότι οι Έλληνες μαθηματικοί είχαν πλήρη γνώση των γενικευμένων αριθμών της πλευράς και της διαμέτρου είναι το ίδιο το γεγονός της μετάβασης από την ανθυφαιρετική θεωρία των αναλογιών στην ισοδύναμη Ευδόξεια θεωρία των αναλογιών. Για την αιτιολόγηση της Ευδόξειας θεωρίας και για την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο θεωριών, της ανθυφαιρετικής και της Ευδόξειας, η γνώση της δυνατότητας της αναγωγής των ανθυφαιρετικών σχέσεων ενός ζεύγους μεγεθών a > b σε μια ακολουθία διπλών ανισοτήτων, όπως αναφέρονται πιο πάνω, είναι πρακτικά απαραίτητη. Έτσι, οι ανισότητες που προκύπτουν, παρέχουν μια ανθυφαιρετική περιγραφή της αναλογίας a / b, αλλά συγχρόνως είναι κοντά στον Ευδόξειο ορισμό της αναλογίας a / b. Είναι λοιπόν αρκετά πιθανό ο Εύδοξος να έφτασε στη θεωρία των αναλογιών μεγέθους (Βιβλίο V), μέσω της γνώσης των γενικευμένων αριθμών της πλευράς και της διαμέτρου. Αυτό ενισχύεται από την ισοδυναμία των αναλογιών, της ανθυφαιρετικής και της Ευδόξειας, στο έργο του σχολιαστή Άραβα μαθηματικού του 9ου αιώνα Al – Mahani, που χρησιμοποίησε σε πλήρη γενικότητα ακριβώς τους γενικευμένους αριθμούς της πλευράς και της διαμέτρου (B. Vahabzadeh [Va]).

Συμπεραίνουμε πως οι εκτενείς αποδείξεις της γνώσης των γενικευμένων αριθμών της πλευράς και της διαμέτρου από τους αρχαίους Έλληνες, καθιστά λογική την αποδοχή της Πρότασης 4.6 ως μιας ρεαλιστικής ανακατασκευής των Ελληνικών μαθηματικών.

8.2.5. Πρόταση (Καθαρή Περιοδικότητα συνεπάγεται ΓΜΑΛ με A + B > C).
Έστω $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I_n$ μια πεπερασμένη ακολουθία φυσικών αριθμών. Για τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς P_k, Q_k της ανθυφαίρεσης$[I_n, I_{n-1}, \ldots, I_2, I_1]$ (με ανεστραμμένη σειρά), διαπιστώνουμε αρχικά ότι: $Q_k > P_k$ και $P_{k+1} > P_k$, $Q_{k+1} > Q_k$ για k = 2, 3, … ,n.
Στη συνέχεια θεωρούμε τους φυσικούς αριθμούς $A = Q_{n-1}$, $B = Q_n – P_{n-1}$ και $C = P_n$.
Τότε:
(i) εάν ένα ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων a και b ικανοποιεί την Ανθ(a, b) = $[\overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}]$, τότε τα a, b ικανοποιούν την ισότητα ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$.
(ii) με δεδομένο ένα τμήμα γραμμής a υπάρχει ένα μοναδικό τμήμα γραμμής b με b < a, τέτοιο ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$ και
(iii) A + B > C.

Απόδειξη
(i) Προκύπτει, από την Πρόταση 8.2.2, ότι υπάρχουν τμήματα γραμμών $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, τέτοια ώστε
$a / b = (I_1 a + b_1) / a$,
$a / b_1 = (I_2 a + b_2) / a$,
…,
$a / b_{n-2} = (I_{n-1} a + b_{n-1}) / a$,

$a / b_{n-1} = (I_n a + b) / a$.
Ορίζουμε P_i, Q_i για τους γενικευμένους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς (Ορισμός 8.2.3) της πεπερασμένης ανθυφαίρεσης $[I_n, I_{n-1}, \dots , I_2, I_1] = [I_1', I_2', \dots ,I_n']$ (παρατηρήστε την **ανεστραμμένη** σειρά) για $i = 0, 1, \dots ,n$:

$Q_0 = 1$,	$[P_0 = 0]$,
$Q_1 = I_1' = I_n$,	$P_1 = 1$,
$Q_2 = I_1'I_2' + 1 = I_2'Q_1 + Q_0 = I_{n-1}Q_1 + Q_0$,	$P_2 = I_2' = I_2'P_1 + P_0 = I_{n-1}P_1 + P_0$
$Q_3 = I_3'Q_2 + Q_1 = I_{n-2}Q_2 + Q_1$,	$P_3 = I_3'P_2 + P_1 = I_{n-2}P_2 + P_1$,
…,	…,
$Q_{n-1} = I'_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n-3} = I_2Q_{n-2} + Q_{n-3}$,	$P_{n-1} = I'_{n-1}P_{n-2} + P_{n-3} = I_2P_{n-2} + P_{n-3}$ και
$Q_n = I'_n Q_{n-1} + Q_{n-2} = I_1Q_{n-1} + Q_{n-2}$	$P_n = I_n'P_{n-1} + P_{n-2} = I_1P_{n-1} + P_{n-2}$.

Γενικά $Q_k = I'_kQ_{k-1} + Q_{k-2}$ και $P_k = I_k'P_{k-1} + P_{k-2}$ με $I'_k = I_{n-k+1}$ για $k = 2, 3, \dots, n$.
Προφανώς $Q_2 > P_2$, $Q_3 > P_3$ και επαγωγικά από τις σχέσεις $Q_{i-1} > P_{i-1}$, $Q_i > P_i$ εύκολα προκύπτει η σχέση $Q_{i+1} > P_{i+1}$. Άρα $Q_k > P_k$ για κάθε $k = 2, 3, \dots, n$.
Εξάλλου $P_k = I_k'P_{k-1} + P_{k-2} \geq I'_kP_{k-1} \geq P_{k-1}$. Ομοίως $Q_k > Q_{k-1}$.
Ισχυρισμός.
Θέτοντας $b = b_0$ ($= e_0$) έχουμε $a / b_i = (Q_{n-i}\, a + P_{n-i}b) / (Q_{n-i-1}\, a + P_{n-i-1}b)$ για $i = 0, 1, \dots ,n – 1$.

[Απόδειξη ισχυρισμού.
Προχωράμε επαγωγικά από κάτω προς τα επάνω.
Σύμφωνα με την τελευταία αναλογία έχουμε:
$a / b_{n-1} = (I_n a + b)/a = (Q_1a + P_1b) / (Q_0a + P_0b)$.
Από την τελευταία αναλογία προχωρούμε στην αμέσως προηγούμενη της τελευταίας, ως εξής:
(α) αντιστρέφουμε την τελευταία αναλογία (Πρόταση 8.2.1,(i)) και έχουμε:
$b_{n-1} / a = (Q_0a + P_0b) / (Q_1a + P_1b)$
(β) εφαρμόζουμε κατάλληλη σύνθεση λόγου (Πρόταση 8.2.1, (ii), (iii)) σε αυτήν την ανεστραμμένη αναλογία και έχουμε: $(I_{n-1}a + b_{n-1}) / a = (I_{n-1}(Q_1a + P_1b) + Q_0a + P_0b) / (Q_1a + P_1b)$.
(γ) συγκρίνουμε αυτή την αναλογία με την αμέσως προηγούμενη της τελευταίας αναλογίας
$a / b_{n-2} = (I_{n-1}a + b_{n-1}) / a$ και έχουμε
$a / b_{n-2} = ((I_{n-1}Q_1 + Q_0)a + (I_{n-1}P_1 + P_0)b) / (Q_1a + P_1b) = (Q_2a + P_2b) / (Q_1a + P_1b)$.
Συνεχίζουμε τώρα επαγωγικά χρησιμοποιώντας σε κάθε βήμα
(α) αντιστροφή της αναλογίας,
(β) κατάλληλη σύνθεση λόγου, και
(γ) τους αναδρομικούς ορισμούς των Q και P.
Αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη.

Η τελική αναλογία είναι η ακόλουθη:
$a / b = (Q_na + P_nb) / (Q_{n-1}a + P_{n-1}b)$.
Ορίζουμε
$A = Q_{n-1}$, $B = Q_n – P_{n-1}$, $C = P_n$
και μετά από στοιχειώδεις υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι
τα a, b πρέπει να ικανοποιούν την ισότητα
$Aa^2 = Bab + Cb^2$.
(ii) Αυτό συνεπάγεται από το Πόρισμα 8.1.3.
(iii) Είναι σαφές ότι
$A + B = Q_{n-1} + (Q_n – P_{n-1}) = Q_n + (Q_{n-1} – P_{n-1}) > Q_n > P_n = C$
εφόσον $Q_k > P_k$ για $k = 2,3 \dots ,n$ και $Q_0 > P_0$, $Q_1 \geq P_1 >P_0$.

8.3. Η ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΓΜΑΛ

Η υπόλοιπη εργασία, από το Κεφάλαιο 8 και έπειτα, είναι αφιερωμένη στην ανακατασκευή, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά αρχαία εργαλεία, της κατά πολύ δυσκολότερης πρότασης, που είναι αντίστροφη της Πρότασης 8.2.5, ότι δηλαδή κάθε ΓΜΑΛ με $A + B > C$, έχει μια καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση, συμπέρασμα που σχετίζεται στενά, αλλά και πάλι είναι απλούστερο, από μαθηματικής άποψης, από το θεώρημα της παλινδρομικότητας.
Ξεκινάμε με απλούς και συνήθεις υπολογισμούς, που προκύπτουν από την φυσική γενίκευση της επαναλαμβανόμενης ανθυφαιρετικής αντικατάστασης, η οποία στην πιο απλή της μορφή ίσως είναι Πυθαγόρειας προελεύσεως (δες [N;]). Αυτοί μας παρέχουν, με φυσικό και σχεδόν αυτόματο τρόπο, τους βασικούς επαναλαμβανόμενους τύπους που δίνονται στην Πρόταση 8.3.5 παρακάτω, ειδικότερα στα (iv) και (v), και την απόδειξη της τελικής περιοδικότητας κάθε ΓΜΑΛ, μέσω ενός pigeonhole επιχειρήματος.

(Pigeonhole επιχείρημα: Dirichlet, 1840: “αν περισσότερα από k περιστέρια πάνε σε k αριθμό κουτιών, τότε τουλάχιστον ένα κουτί περιέχει τουλάχιστον δύο περιστέρια (πεπερασμένη εκδοχή). Αν άπειρα περιστέρια πάνε σε k αριθμό κουτιών τότε τουλάχιστον ένα κουτί περιέχει άπειρα περιστέρια (άπειρη εκδοχή)”).

8.3.1. Πρόταση (Η ανθυφαιρετική αντικατάσταση στο ΓΜΑΛ)
Έστω A, B, C φυσικοί αριθμοί, a, b ευθύγραμμα τμήματα με $a > b$, τέτοια ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$.
Ορίζουμε $a = Ib + e_1$ με $b > e_1$, την ανθυφαιρετική αντικατάσταση.
Τότε:
(i) $AI^2 < BI + C$ και
(ii) $B < 2AI$.
(iii) Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί A_1, B_1, C_1 τέτοιοι ώστε $A_1b^2 = B_1be_1 + C_1e_1^2$ και $A_1 + B_1 > C_1$,
(iv) $B_1^2 + 4A_1C_1 = B^2 + 4AC$.

Απόδειξη
(i) Συνεπάγεται ότι $a > Ib$ και επομένως $AI^2a^2 = BI^2ab + CI^2b^2 < BIa^2 + Ca^2$. Άρα $AI^2 < BI + C$.
(ii) Έχουμε $a < (I + 1)b \leq 2Ib$, και εμφανώς $Aa > Bb$. Έτσι $Bb < Aa < 2AIb$, απ’ όπου $B < 2AI$.
(iii) Οι (i) και (ii) εξασφαλίζουν την ύπαρξη των φυσικών αριθμών $A_1 = BI + C – AI^2$, $B_1 = 2AI – B$, $C_1 = A$.
Αντικαθιστώντας το a με $Ib + e_1$ στην ισότητα $Aa^2 = Bab + Cb^2$ και με στοιχειώδεις χειρισμούς, εφαρμόζοντας την Πρόταση II. 4 *των Στοιχείων*, έχουμε $A_1b^2 = B_1be_1 + C_1e_1^2$. Επισημαίνουμε ότι $a > Ib > (I – 1)b$, επομένως από την εξίσωση $Aa^2 = Bab + Cb^2$ προκύπτει ότι:
$A(I – 1)^2a^2 = B(I – 1)^2ab + C(I – 1)^2b^2 < B(I – 1)a^2 + Ca^2$ και επομένως $A(I – 1)^2 < B(I – 1) + C$.
Τώρα είναι απλό να συμπεράνουμε ότι $A_1 + B_1 > C_1$. Βάσει του (iii) και της Πρότασης II.7 *των Στοιχείων*.
(iv) $B_1^2 + 4A_1C_1 = (2AI – B)^2 + 4(BI + C – AI^2)A = B^2 + 4AC$.

8.3.2. Σχόλιο. Πρέπει να τονιστεί ότι στην Πρόταση 8.3.1 **δεν** θεωρείται απαραιτήτως ότι $A + B > C$. Έτσι, ξεκινώντας με μία εξίσωση της μορφής $Aa^2 = Bab + Cb^2$, με $a > b$, η ανθυφαιρετική αντικατάσταση $a = Ib + a_1$ με $b > a_1$, συνεπάγεται μια εξίσωση της μορφής $A_1b^2 = B_1ba_1 + C_1a_1^2$ και τέτοια ώστε η ανισότητα $A_1 + B_1 > C_1$ να ισχύει **απαραίτητα**, αν και οι συντελεστές της αρχικής εξίσωσης **ίσως να μην** ικανοποιούν την αντίστοιχη ανισότητα $A + B > C$.

8.3.3. Ορισμός. Αν $Aa^2 = Bab + Cb^2$ είναι μία ΓΜΑΛ, ορίζουμε $B^2 + 4AC = D$ την **διακρίνουσα** αυτής της ΓΜΑΛ.

Βάσει της Πρότασης 8.3.1, η διακρίνουσα μιας ΓΜΑΛ είναι **αμετάβλητη** στην ανθυφαιρετική αντικατάσταση. Η διακρίνουσα της ΜΑΛ, ίση με 5 παρουσιάζεται στις Προτάσεις XIII. 1 – 3 και στην απόδειξη της σημαντικής Πρότασης XIII.6 (δες 8.4.1, παρακάτω).

8.3.4. Παρατήρηση. Για μία ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$, η διακρίνουσα $B^2 + 4AC$ δεν είναι τετραγωνικός αριθμός εάν και μόνο εάν τα τμήματα γραμμών a και b είναι ασύμμετρα. Αυτό σημαίνει την συμπλήρωση του τετραγώνου $(2Aa – Bb)^2 = (B^2 + 4AC)b^2$, από το οποίο γίνεται εμφανές, εφαρμόζοντας την Πρόταση X.9 *των Στοιχείων* ότι: τα a και b είναι ασύμμετρα τμήματα γραμμών αν και μόνο αν $2Aa – Bb$ και b είναι ασύμμετροι, δηλαδή αν και μόνο αν ο $B^2 + 4AC$ είναι μη τετραγωνικός αριθμός.

Καθώς η διακρίνουσα της ΜΑΛ είναι ο μη τετραγωνικός αριθμός 5, το ασύμμετρο της ΜΑΛ συνεπάγεται. Στην πραγματικότητα, στο *Ανώνυμον Σχόλιον στα Στοιχεία* II.71 παρουσιάζεται ακριβώς μία απόδειξη.

8.3.5. Πρόταση. (Η επαναλαμβανόμενη ανθυφαιρετική αντικατάσταση στη ΓΜΑΛ)

Έστω A, B, C φυσικοί αριθμοί, a, b ευθύγραμμα τμήματα με $a > b$ τέτοια ώστε ο $B^2 + 4AC$ να μην είναι τετραγωνικός αριθμός, $Aa^2 = Bab + Cb^2$. Αν $a > b > e_1 > e_2 > \ldots > e_n > e_{n+1} \ldots$ είναι η ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων και $I_0, I_1, I_2, \ldots ,I_n, \ldots$ η ακολουθία των διαδοχικών πηλίκων της ανθυφαίρεσης του a δια b.

Τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί A_n, B_n, C_n για $n = 0, 1, 2, \ldots$ τέτοιοι ώστε:

(i) $A_0 = A$, $B_0 = B$, $C_0 = C$,

(ii) $A_{n+1} = I_nB_n + C_n – I_n^2A_n$, $B_{n+1} = 2I_nA_n – B_n$ και $C_{n+1} = A_n$,

(iii) [Ορίζοντας $e_{-1} = a$, $e_0 = b$] $A_{n+1}e_n^2 = B_{n+1}e_ne_{n+1} + C_{n+1}e_n^2$ για $n = –1, 0, 1, 2, \ldots$,

(iv) $A_n + B_n > C_n$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(v) $B_n + B_{n+1} = 2I_nA_n$,

(vi) **[το αμετάβλητο της διακρίνουσας]** $B^2 + 4AC = B_n^2 + 4A_nC_n = B_n^2 + 4A_nA_{n-1}$,

(vii) **[Τελική περιοδικότητα με pigeonhole επιχείρημα]** υπάρχουν n, m με $n < m$, τέτοια ώστε, $A_n = A_m$, $B_n = B_m$, $C_n = C_m$.

Απόδειξη. Με βάσει την Παρατήρηση 8.3.4 η ανθυφαίρεση του a δια b είναι άπειρη.

Οι περιπτώσεις (ii), (iii), (iv) προκύπτουν από την περίπτωση (iii) της πρότασης 8.3.1, η περίπτωση (iv) προκύπτει από την (iv) της πρότασης 8.3.1 και η περίπτωση (v) προκύπτει από την (ii), της Πρότασης 8.3.1, με μαθηματική επαγωγή.

(vi) Όπως στην περίπτωση (iv) της Πρότασης 8.3.1, έχουμε

$B_{n+1}^2 + 4A_{n+1}C_{n+1} = B_n^2 + 4A_nC_n$ για $n = 1, 2, \ldots$ και το αποτέλεσμα προκύπτει με μαθηματική επαγωγή.

(vii) άμεσα από (vi) με pigeonhole επιχείρημα και το ότι προφανώς $A_n, B_n, C_n < D$.

8.4. ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΘΕΙΣΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ, ΟΠΩΣ ΠΡΟΤΕΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝΠΡΟΤΑΣΗ XIII.6 *ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*

Καθώς τα μέσα του Βιβλίου X, που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 6 παραπάνω, δηλαδή οι αποτομές, οι γραμμές εκ δύο ονομάτων, και η μεταξύ τους συζυγία, θα χρησιμοποιηθούν για την ανακατασκευή της απόδειξης της Πρότασης 8.6.1 (η οποία θεωρεί δύο ευθύγραμμα τμήματα a και b, με $a > b$, που ικανοποιούν τη συνθήκη $Aa^2 = Bab + Cb^2$), και επειδή, όπως είδαμε, αυτές οι γραμμές προσδιορίζονται σε σχέση με μία προτεθείσα γραμμή, θα είναι απαραίτητο να επιλέξουμε μια προτεθείσα γραμμή. Η επιλογή της σωστής προτεθείσας γραμμής υπαγορεύεται από την Πρόταση XIII.6, σύμφωνα με την οποία εάν a, b είναι ευθύγραμμα τμήματα στην ΜΑΛ, η b είναι ρητή και $e_1 = a – b$, τότε η e_1 είναι μία αποτομή γραμμή (με μη εμφανές τρόπο, δηλαδή όχι ως η διαφορά των a, b, καθώς η a δε γνωρίζουμε αν είναι ρητή). Στην πραγματικότητα ο Θεαίτητος απέδειξε τα ακόλουθα:

8.4.1. Πρόταση.
Το πρώτο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο μίας ΜΑΛ, είναι μία αποτομή.

Έστω a, b μέσα σε μια ΜΑΛ, και έστω το μικρότερο τμήμα b ότι είναι μία προτεθείσα γραμμή (έτσι ώστε η b να είναι ρητή).
Ορίζουμε: $g = 2a – b$ και $x_1 = e_1 = a – b$. Τότε:

(i) **[Προτάσεις XIII.1,3 των *Στοιχείων*]** $g^2 = 5b^2$.
(ii) $g > b$, η g είναι ασύμμετρη προς την b, και η g είναι ρητή.
(iii) **[Πρόταση XIII.6 των *Στοιχείων*]** η $x_1 = e_1$ είναι μία αποτομή, και μάλιστα $2x_1 = g – b$.

Απόδειξη.
(i) Σύμφωνα με την Πρόταση II.7 των *Στοιχείων* έχουμε $g^2 = (2a – b)^2 = 4(a^2 – ab) + b^2 = 5b^2$.
(ii) Σύμφωνα με το (i) και την Πρόταση X.9 των *Στοιχείων*.
(iii) Σύμφωνα με τα (i), (ii) και τον ορισμό της αποτομής.

8.4.2. Σχόλια. Παρατηρείται ότι η x_1 δεν αναπαρίσταται **ως** αποτομή με τον εμφανή τρόπο $x_1 = a – b$ καθώς η a και η b **δε γνωρίζουμε** αν είναι σύμμετρες σε δύναμη μόνο, αλλά με τον μη εμφανή τρόπο $x_1 = (a – b/2) – b/2 = g/2 – b/2$.
Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 5 που υπάρχει στην παράγραφο 8.4.1(i) μπορεί να οριστεί ως $B^2 + 4AC = 5$ και η γραμμή g είναι η μόνη που μαζί με την b εκφράζει την x_1 ως αποτομή, λόγω της μοναδικότητας στην Πρόταση X.79 (αναφέρεται στην παράγραφο 6.1).
Τώρα θα αναπαραστήσουμε πιστά το επιχείρημα του Θεαίτητου για την ΜΑΛ, όπως δίνεται στην παράγραφο 8.4.1, για να αποδείξουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την ΓΜΑΛ. Έτσι σε περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε την ανθυφαίρεση μιας ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$ με $a > b$, η κατάλληλη επιλογή μιας προτεθείσας γραμμής είναι το μικρότερο τμήμα b.

8.4.3. Πρόταση.
Το πρώτο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο μίας ΓΜΑΛ, είναι μία αποτομή.

Έστω A, B, C φυσικοί αριθμοί με $A^2 + 4BC$ **μη** τετραγωνικός αριθμός a, b ευθύγραμμα τμήματα με $a > b$ τέτοια ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$ και **έστω ότι το μικρότερο τμήμα** b είναι μια προτεθείσα γραμμή (ώστε η b να είναι ρητή).

Ορίζουμε: $g = 2Aa – Bb$ και $x_1 = e_1$ το πρώτο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο της ανθυφαίρεσης του a προς b. Τότε:
(i) $g^2 = (B^2 + 4AC)b^2$.

(ii) $g > b$, με g ασύμμετρη στη b και g ρητή.
(iii) Οι a, b είναι ασύμμετρες.
(iv) $x_1 = e_1$ είναι μία αποτομή, στην πραγματικότητα $2Ax_1 = g - B_1b$, όπου $B_1 = 2I_0A - B$ ορίζεται όπως στην Πρόταση 8.3.5(ii).

Απόδειξη.
(i) Αφού $Aa > Bb$, είναι σίγουρα αληθές ότι $2Aa > Bb$. Βάσει της Πρότασης II.7 των *Στοιχείων* έχουμε: $g^2 = (2Aa - Bb)^2 = B^2b^2 + 4A^2a^2 - 4ABab = B^2b^2 + 4A(Bab + Cb^2) - 4ABab =$
$= (B^2 + 4AC)b^2$.
(ii) Η ασυμμετρία του g με το b προκύπτει από την Πρόταση X.9 των Ευκλείδειων *Στοιχείων* (της οποίας η απόδειξη όπως σημειώθηκε από τον Barry Mazur [Ma] είναι ελαττωματική / ανεπαρκής) (δες Παρατήρηση 8.3.4).
(iii) Ότι οι a και b είναι ασύμμετρες προκύπτει άμεσα από την ασυμμετρία των g και b, όπως στο (ii).
(ii) Ότι η ανθυφαίρεση της a προς b είναι άπειρη, προκύπτει από την Πρόταση X.3 των *Στοιχείων*.
(iv) Σύμφωνα με τους σχετικούς ορισμούς, $x_1 = a - I_0b$, επομένως $2Ax_1 = 2Aa - 2I_0Ab =$
$= (2Aa - Bb) - (2I_0A - B)b = g - B_1b$.

8.5. ΣΧΕΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΤΕΘΕΙΣΑ ΓΡΑΜΜΗ

Εφόσον έχουμε επιλέξει την κατάλληλη προτεθείσα γραμμή b, είμαστε βέβαιοι, σύμφωνα με την Πρόταση 6.3, ότι το πρώτο υπόλοιπο $x_1 = e_1$ στην ανθυφαίρεση του a στο b, είναι μία αποτομή $2Ax_1 = g - B_1b$ (σε σχέση με την προτεθείσα γραμμή b). Αυτό υποδηλώνει ότι όλα τα υπόλοιπα e_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ είναι αποτομές γραμμών επίσης. Ωστόσο το κλειδί που θα ανοίξει το δρόμο για να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε την Θεαιτήτεια συζυγία μεταξύ των αποτομών και διώνυμων γραμμών, που περιγράφονται στην Παράγραφο 6.3, είναι, όπως μπορεί κανείς άμεσα να επαληθεύσει με την ΜΑΛ, η **σχετικοποίηση** των αναλογιών. Αυτή είναι μια εντελώς στοιχειώδης / απλή λειτουργία, που επιστρατεύει μόνο **την ύπαρξη της τετάρτης αναλόγου** (Πρόταση VI.12 των *Στοιχείων*).

8.5.1. Ορισμός (σχετικοποιημένα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα). Έστω $a > b$ δύο γραμμές, με $a > b > e_1 > e_2 > \ldots > e_n > e_{n+1} \ldots$ η ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων. Για τα διαδοχικά υπόλοιπα e_{n-1}, e_n ορίζουμε ως σχετικοποιημένο υπόλοιπο x_n την τετάρτη ανάλογο των e_{n-1}, e_n, b, δηλαδή $e_{n-1} / e_n = b / x_n$ για κάθε $n = 2, 3, \ldots$
Συμβατικά θέτουμε $a = e_{-1}$, $b = e_0$, $e_1 = x_1$.

8.5.2. Πρόταση (ιδιότητες των σχετικοποιημένων υπολοίπων). Έστω $a > b$ δύο γραμμές.
Αν $a > b > e_1 > e_2 > \ldots > e_n > e_{n+1} \ldots$ η ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων,
$I_0, I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots$ η ακολουθία των διαδοχικών πηλίκων και $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ η ακολουθία των σχετικοποιημένων υπολοίπων της ανθυφαίρεσης a / b. Τότε:
(i) $x_n < b$ για κάθε n.
(ii) **(σχετικοποιημένες ανθυφαιρετικές σχέσεις)** $x_n(I_nb + x_{n+1}) = b^2$ για κάθε n.
(iii) $Ανθ(b, x_n) = [\, I_n, I_{n+1}, \ldots \,]$ για κάθε n.
(iv) **(σχετικοποιημένο κριτήριο λόγου)** αν υπάρχουν n, m με $n < m$, τέτοια ώστε $x_n = x_m$, τότε η ανθυφαίρεση των a, b είναι τελικά περιοδική, και στην πραγματικότητα ίση με:
$[\, I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}, \overline{I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{m-1}} \,]$
(v) **(σχετικοποιημένη επαναλαμβανόμενη ανθυφαιρετική αντικατάσταση)** εάν $Aa^2 = Bab + Cb^2$ είναι ΓΜΑΛ και A_n, B_n, C_n είναι οι αριθμοί που προσδιορίζονται στην Πρόταση 8.3.5, τότε:
$A_nb^2 = B_nbx_n + C_nx_n^2$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$
Απόδειξη.
(i) Από τη σχέση $e_{n-1} / e_n = b / x_n$ με $e_{n-1} > e_n$ έχουμε $b > x_n$ για κάθε $n =1, 2, 3, \ldots$

Προφανώς $b / x_0 = a / b$, οπότε $b > x_0$, αφού $a > b$.

(ii) Έχουμε $b / x_{n+1} = e_n / e_{n+1}$ (1), $b / x_{n+2} = e_{n+1} / e_{n+2}$ (2) και $e_n = I_{n+1}e_{n+1} + e_{n+2}$ (3).
Από τις (1), (3) έχουμε $b / x_{n+1} = (I_{n+1}e_{n+1} + e_{n+2}) / e_{n+1} = (I_{n+1}e_{n+1}b + e_{n+2}b) / e_{n+1}b$ και λόγω της (2) έχουμε $b / x_{n+1} = (I_{n+1}e_{n+1}b + x_{n+2}e_{n+1}) / e_{n+1}b = (I_{n+1}b + x_{n+2}) / b$.
Άρα: $b^2 = x_{n+1}(I_{n+1}b + x_{n+2})$.
(iii) Προκύπτει από τον ορισμό των αναλογιών στα Τοπικά του Αριστοτέλη, αφού $b / x_n = e_{n-1} / e_n$ σημαίνει Ανθ(b, x_n) = Ανθ(e_{n-1}, e_n)

(iv) Από $x_m = x_n$, με $m > n$ προκύπτει $b / x_m = b / x_n$, δηλαδή $e_{m-1} / e_m = e_{n-1} / e_n$.
Άρα Ανθ$(a, b) = [\, I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}, \overline{I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{m-1}}\,]$

(v) Πράγματι: Από την 8.3.5 (iii) διαδοχικά παίρνουμε:
$A_{n+1}e^2_nx^2_{n+1} = B_{n+1}e_ne_{n+1}x^2_{n+1} + C_{n+1}e^2_{n+1}x^2_{n+1}$,
$A_{n+1}e_n^2x^2_{n+1} = B_{n+1}e_nx_{n+1}e_{n+1}x_{n+1} + C_{n+1}e^2_{n+1}x^2_{n+1}$, $A_{n+1}b^2e^2_{n+1} = B_{n+1}be_{n+1}e_{n+1}x_{n+1} + C_{n+1}e^2_{n+1}x^2_{n+1}$,
$A_{n+1}b^2 = B_{n+1}bx_{n+1} + C_{n+1}x^2_{n+1}$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$
Γενικότερα αποδεικνύεται ομοίως η παρακάτω πρόταση:
Πρόταση
Αν Ανθ(a_1, b_1) = Ανθ(a_2, b_2) και $Aa_1^2 = Ba_1b_1 + Cb_1^2$ (1), τότε $Aa_2^2 = Ba_2b_2 + Cb_2^2$.

Απόδειξη
Ανάγεται στο προηγούμενο ερώτημα (v), αφού Ανθ(a_1, b_1) = Ανθ(a_2, b_2) σημαίνει $a_1 / b_1 = a_2 / b_2$.

8.6. ΘΕΑΙΤΗΤΕΙΑ ΣΥΖΥΓΙΑ α':
Κάθε υπόλοιπο της ανθυφαίρεσης κάθε ζεύγους ΓΜΑΛ αναπαρίσταται ως αποτομή

Φτάνουμε τώρα στον πυρήνα της βασικής νέας ιδέας που είχε ο Θεαίτητος για να χειριστεί την καθαρή περιοδικότητα της ανθυφαιρετικής ανάπτυξης των γενικών τετραγωνικών ασυμμετριών. Η ιδέα είναι να αναπαραστήσει κάθε σχετικοποιημένο υπόλοιπο της ανθυφαίρεσης ως **αποτομή** γραμμής, με παραμέτρους φυσικούς αριθμούς, οι οποίοι, χάρη στις βασικές επαναλαμβανόμενες σχέσεις που παρέχονται από την ανθυφαιρετική αντικατάσταση (στην Πρόταση 8.3.5), φράσσονται άνω και συνεπώς είναι πεπερασμένου πλήθους. Ένα pigeonhole επιχείρημα, τότε, παρέχει αμέσως μία δεύτερη και πιο ξεκάθαρη απόδειξη τελικής περιοδικότητας, αλλά χρειάζεται ένα πιο προσεκτικό επιχείρημα για την καθαρή περιοδικότητα. Ο Θεαίτητος, για να επιτύχει αυτήν την ανακατασκευή, εισάγει, στο Βιβλίο X των *Στοιχείων*,
όχι μόνο την έννοια της αποτομής γραμμής,
αλλά επίσης της γραμμής των δύο ονομάτων,
και αναπτύσσει τις ιδιότητές τους στην αρχή χωριστά για καθέναν από τους δύο τύπους γραμμών και μετά από κοινού την καθοριστικής σημασίας **συζυγία** τους, με τα εργαλεία που περιγράφονται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 6, παραπάνω.

8.6.1. Πρόταση.
Έστω A, B, C φυσικοί αριθμοί, όπου $B^2 + 4AC$ μη τετραγωνικός αριθμός, και a, b ευθύγραμμα τμήματα με $a > b$, τέτοια ώστε $Aa^2 = Bab + Cb^2$. Τότε:
(i) $g > B_nb$,
(ii) **[Θεαιτήτεια συζυγία]** Η γραμμή $(g – B_nb)$ είναι μία αποτομή γραμμή, η γραμμή $(g + B_nb)$ είναι η γραμμή των δύο ονομάτων συζυγής αυτής, και η μεταξύ τους συζυγία εκφράζεται με την ισότητα $(g + B_nb)\,(g – B_nb) = g^2 – B_n^2b^2 = 4A_nA_{n-1}b^2$,
(iii) **[αποτομή αναπαράσταση όλων των σχετικοποιημένων υπολοίπων]** η x_n είναι μία αποτομή, και στην πραγματικότητα $2A_{n-1}x_n = g – B_nb$,

(iv) **[δεύτερη απόδειξη της τελικής περιοδικότητας με pigeonhole επιχείρημα]** η ανθυφαίρεση του a στο b είναι τελικά περιοδική.

Απόδειξη.

Αφού $B^2 + 4AC$ δεν είναι τετραγωνικός αριθμός, συνεπάγεται από την παρατήρηση 8.3.4, ότι τα a, b είναι ασύμμετρα τμήματα γραμμών, και επομένως η ανθυφαίρεση του a προς b είναι άπειρη.

(i) Βάσει της Πρότασης 8.4.3(i) $g^2 = (B^2 + 4AC)b^2 = (B^2{}_n + 4A_nC_n)b^2 > B^2{}_nb^2$, επομένως $g > B_nb$.

(ii) η $g + B_nb$ είναι μία γραμμή εκ δύο ονομάτων (όπως ορίζεται στο 6.2, Πρόταση X.36 των *Στοιχείων*), η $g – B_nb$ είναι η **συζυγής της** αποτομή (όπως ορίζεται στο 6.1, Πρόταση X.73 των *Στοιχείων*), και από το 6.3, Πρόταση X.114 των *Στοιχείων*)

$(g + B_nb)(g – B_nb) = g^2 – B_n{}^2b^2 = (B^2{}_n + 4A_nC_n)b^2 – B^2{}_nb^2 = 4A_nC_nb^2 = 4A_nA_{n-1}b^2$.

(iii) Η απόδειξη γίνεται με μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιώντας το (ii). Ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n = 1$, καθώς η x_1 είναι αποτομή και στην πραγματικότητα $2Ax_1 = g – B_1b$ σύμφωνα με την Πρόταση 8.4.3. Θεωρούμε ότι η πρόταση είναι αληθής για n και θα την αποδείξουμε για $n + 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε την σχετικοποιημένη ανθυφαιρετική σχέση $x_n(I_nb + x_{n+1}) = b^2$, που θεμελιώθηκε στην Πρόταση 8.5.2. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη αυτής της σχέσης με τον φυσικό αριθμό $4A_nA_{n-1}$, για να έχουμε $4A_nA_{n-1}x_n(I_nb + x_{n+1}) = 4A_nA_{n-1}b^2$. Με την επαγωγική παραδοχή $2A_{n-1}x_n = g – B_nb$ και το (ii) παραπάνω $(g + B_nb)(g – B_nb) = 4A_nA_{n-1}b^2$. Αντικαθιστώντας αυτά στην προηγούμενη εξίσωση, έχουμε $2A_n(g – B_nb)(I_nb + x_{n+1}) =$
$= (g + B_nb)(g – B_nb)$ και επομένως $2A_n(I_nb + x_{n+1}) = g + B_nb$, απ’ όπου σύμφωνα με την πρόταση 8.3.5 (v) προκύπτει $B_{n+1}b + 2A_nx_{n+1} = g$, δηλαδή $2A_nx_{n+1} = g – B_{n+1}b$.

(iv) Από τη σχέση $B_n{}^2 + 4A_nC_n = B^2 +4AC = D$, εμφανώς προκύπτει ότι: $A_n, B_n, C_n < D$.

Ως εκ τούτου το σύνολο των ζευγών (A_n, B_n) για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι πεπερασμένο. Συνεπάγεται από το (iii), ότι υπάρχουν δείκτες $n < m$ τέτοιοι ώστε $x_n = x_m$. Βάσει της Πρότασης 3.5 (το σχετικοποιημένο κριτήριο λόγου), η ανθυφαίρεση του a προς b είναι τελικώς περιοδική.

8.7.ΘΕΑΙΤΗΤΕΙΑ ΣΥΖΥΓΙΑ β’:

ΓΜΑΛ με A + B > C συνεπάγεται ΚΑΘΑΡΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

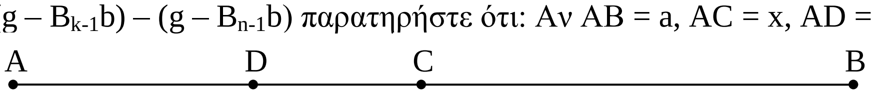
Τώρα είμαστε έτοιμοι να χρησιμοποιήσουμε ένα αντίστροφο επαγωγικό επιχείρημα, στηριζόμενοι στα εργαλεία του Βιβλίου X των *Στοιχείων*, του Θεαίτητου (και ειδικότερα της μοναδικότητας των ονομάτων των αποτομών γραμμών και της γραμμής των δύο ονομάτων, και, κυρίως, της Θεαιτήτειας συζυγίας), για την απόδειξη της καθαρής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης κάθε ΓΜΑΛ με τον όροA + B > C και με μη τετραγωνική διακρίνουσα $B^2 + 4AC$ (Πρόταση 8.7.2)

8.7.1. Πρόταση.
Έστω a και b δύο ευθύγραμμα τμήματα που ικανοποιούν την συνθήκη ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$, $a > b$ με $B^2 + 4AC$ μη τετραγωνικό αριθμό, και $A + B > C$. Τότε $g < (2A_n + B_n)b$ για $n = 0, 1, 2, \dots$

Απόδειξη.
Από την υπόθεση της παρούσας Πρότασης και της Πρότασης 8.3.5(iv), έχουμε $A_n + B_n > C_n$ για $n = 0, 1, 2, \dots$ Επομένως $4A_nC_n < 4A_n^2 + 4A_nB_n$, συνεπώς $g^2 = (B_n^2 + 4A_nC_n)b^2 < (B_n^2 + 4A_n^2 +$ $+ 4A_nB_n)b^2 = (2A_n + B_n)^2b^2$ και επομένως $g < (2A_n + B_n)b$.

8.7.2. Πρόταση (κάθε ΓΜΑΛ με A + B > C είναι καθαρά περιοδική)
Έστω a και b δύο ευθύγραμμα τμήματα, $a > b$, που ικανοποιούν την συνθήκη ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$, με $B^2 + 4AC$ μη τετράγωνο αριθμό, και $A + B > C$.
Τότε η ανθυφαίρεση a προς b είναι καθαρά περιοδική.

Απόδειξη.
Σύμφωνα με την Πρόταση 8.6.1(iv) η ανθυφαίρεση του a στο b είναι τελικά περιοδική.
Επομένως, σύμφωνα με το “κριτήριο λόγου”,(Πρόταση 3.5), υπάρχει φυσικός αριθμός $k > 0$ τέτοιος ώστε τα υπόλοιπα γραμμικής μορφής $x_0, x_1, \dots ,x_{k-1}$ είναι διαφορετικά ανά δύο και το x_k ισούται με ένα από αυτά, δηλαδή υπάρχει $n < k$ με $x_n = x_k$. **Θα έχουμε καθαρή περιοδικότητα ακριβώς όταν n = 0**.
Ας υποθέσουμε, αντιθέτως, ότι $x_n = x_k$ για κάποιο n με $0 < n < k$. Αφού $2A_{n-1}x_n = g – B_nb$ και $2A_{k-1}x_k = g – B_kb$, το θεώρημα της μοναδικότητας για τα ονόματα των αποτομών γραμμών (6.1, Πρόταση X.79 των *Στοιχείων*) συνεπάγεται ότι $A_{n-1} = A_{k-1}$, $B_n = B_k$.
Έστω y_m η γραμμή που ορίζεται από την συνθήκη $2A_my_m = g + B_mb$ για $m = 1, 2, \dots$ Η γραμμή y_m είναι γραμμή εκ δύο ονομάτων, και σύμφωνα με την Θεαιτήτεια συζυγία (Πρόταση 8.6.1.(ii)), $x_my_m = b^2$. Συνεπάγεται ότι $y_n = y_k$, και το θεώρημα της μοναδικότητας για τα ονόματα των δυωνύμων (6.2, Πρόταση X.42 των *Στοιχείων*) συνεπάγεται ότι $A_n = A_k$.
Ορίζουμε $D = A_{n-1} = A_{k-1}$, $E = B_n = B_k$.
Ισχυρισμός: $I_{n-1} = I_{k-1}$.
[Εστω ότι $I_{n-1} > I_{k-1}$. Τότε, αφού $E = B_n = B_k$, $B_n = 2I_{n-1}D – B_{n-1}$, $B_k = 2I_{k-1}D – B_{k-1}$, θα έχουμε: $2D(I_{n-1} – I_{k-1})b = B_{n-1}b – B_{k-1}b = (g – B_{k-1}b) – (g – B_{n-1}b) < g – B_{k-1}b < 2A_{k-1}b = 2Db$, εφαρμόζοντας τις προτάσεις 8.6.1(iii) και 8.7.1(i) για την τελευταία ανισότητα. Εξάλλου για την ισότητα $B_{n-1}b – B_{k-1}b = (g – B_{k-1}b) – (g – B_{n-1}b)$ παρατηρήστε ότι: Αν AB = a, AC = x, AD = y με $a > x > y$,



τότε: $x – y = AC – AD = CD = BD – BC = (a – y) – (a – x)$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι $I_{n-1} – I_{k-1} < 1$, άτοπο. [Η παραδοχή $I_{k-1} > I_{n-1}$ οδηγεί επίσης σε άτοπο]. Άρα $I_{k-1} = I_{n-1}$, οπότε $B_{n-1}= B_{k-1}$ και επομένως $y_{n-1} = y_{k-1}$.
Βάσει της Θεαιτήτειας **συζυγίας** (Πρόταση 8.6.1(ii)), έχουμε $x_{n-1} = x_{k-1}$.
Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει την πρόταση.

8.7.3. Πόρισμα (κάθε ΓΜΑΛ είναι περιοδική μετά από το πρώτο βήμα).
Έστω a και b δύο τμήματα γραμμών, που ικανοποιούν την συνθήκη ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$, $a > b$, με $B^2 + 4AC$ μη τετραγωνικό αριθμό. Τότε η ανθυφαίρεση a προς b είναι περιοδική μετά το πρώτο βήμα.

Απόδειξη. Άμεση από την Πρόταση 8.7.2 και την Πρόταση 8.3.5(vi).

8.8 ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΕΣ ΣΕ ΔΥΝΑΜΗ ΜΟΝΟ
Η περιοδικότητα και η παλινδρομικότητα της ανθυφαίρεσής τους

8.8.1. Πρόταση: Έστω a, b ασύμμετρα τμήματα και A, C φυσικοί αριθμοί με C > A.
Αν $Aa^2 = Cb^2$, τότε η Ανθ(a, b) είναι τελικά περιοδική.

Απόδειξη
Η περίπτωση A = 1, B = N αναφέρεται στο κεφάλαιο 7.
Από την ανθυφαιρετική σχέση $a = I_0b + e_1$, $b > e_1$ διαδοχικά παίρνουμε:
$(I_0 - 1)b < I_0b < a < (I_0 + 1)b$, $(I_0 - 1)^2b^2 < I_0^2b^2 < a^2 < (I_0 + 1)^2b^2$,
$A(I_0 - 1)^2b^2 < AI_0^2b^2 < Aa^2 < A(I_0 + 1)^2b^2$, $A(I_0 - 1)^2b^2 < AI_0^2b^2 < Cb^2 < A(I_0 + 1)^2b^2$,
$A(I_0 - 1)^2 < AI_0^2 < C < A(I_0 + 1)^2$.
Εξάλλου από τη σχέση $Aa^2 = Cb^2$ προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:
$A(I_0b + e_1)^2 = Cb^2$, $A(I_0^2b^2 + e_1^2 + 2I_0be_1)^2 = Cb^2$, $(C - AI_0^2)b^2 = 2AI_0be_1 + Ae_1^2$,
$A_1b^2 = B_1be_1 + C_1e_1^2$, όπου $A_1 = C - AI_0^2$, $B_1 = 2AI_0$, $C_1 = A$ φυσικοί αριθμοί.[75]
Επίσης από τη σχέση $C > A(I_0 - 1)^2$ προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:
$C > A(I_0^2 + 1 - 2I_0)$, $(C - AI_0^2) + 2AI_0 > A$, $A_1 + B_1 > C_1$ δηλαδή Ανθ(b, e_1) = [$\overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}$], απ' όπου τελικά παίρνουμε Ανθ(a, b) = [$I_0, \overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}$].

8.8.2. Πρόταση
Έστω a, b ασύμμετρα τμήματα και A, C φυσικοί αριθμοί, ώστε $Aa^2 = Cb^2$ με C > A.
Αν $a = I_0b + e_1$, $b > e_1$, η πρώτη ανθυφαιρετική σχέση, τότε η ανθυφαίρεση $a + I_0b$ προς b είναι καθαρά περιοδική.

Απόδειξη
Έστω $a + I_0b = \omega$. Τότε από τη σχέση $Aa^2 = Cb^2$ διαδοχικά προκύπτουν οι σχέσεις
$A(\omega - I_0b)^2 = Cb^2$, $A(\omega^2 + I_0^2b^2 - 2I_0\omega b = Cb^2$, $A\omega^2 = 2AI_0b + (C - AI_0^2)b^2$,
$A_1 \omega^2 = B_1 \omega b + C_1 b^2$, όπου $A_1 = A$, $B_1 = 2AI_0$, $C_1 = C - AI_0^2$ φυσικοί αριθμοί.
Εξάλλου , από τη σχέση $C < A(I_0 + 1)^2$ παίρνουμε $C < AI_0^2 + A + 2 AI_0$, ή $C - AI_0^2 < A + 2AI_0$, δηλαδή $C_1 < A_1 + B_1$. Άρα η Ανθ(ω, b) είναι καθαρά περιοδική.
Δείξαμε όμως, πρόταση 8.8.1 ότι:
Ανθ(a, b) = [$I_0, \overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}$], οπότε: Ανθ(a + I_0b, b) = [$2I_0, \overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}$] και αφού είναι καθαρά περιοδική θα είναι Ανθ(a + I_0b, b) = [$2I_0$, I_1, I_2, … ,I_n, $2I_0$, I_1, I_2, … ,I_n, $2I_0$, …].
Επομένως Ανθ(a, b) = [I_0, I_1, I_2, … , $2I_0$, I_1, I_2, … , $2I_0$, …] = [$I_0, \overline{I_1, I_2, \ldots, 2I_0}$].

8.8.3. Πρόταση Λήμμα για την παλινδρομικότητα της Ανθ(a, b), όπου $Aa^2 = Cb^2$, C > A, a, b ασύμμετρα τμήματα και A, C φυσικοί αριθμοί.
Ορίσαμε: $g = 2Aa - Bb$ και βρήκαμε $g^2 = Db^2$ (εδώ φυσικά B = 0).

Επίσης από τον ορισμό του x_n βρήκαμε $2A_{n-1}x_n = g - B_nb$ (1).
Αν ορίσουμε $2A_ny_n = g + B_nb$ (2), $2A_{n-1}\overline{x}_n = g + B_nb$ (3) και $2A_n\overline{y}_n = g - B_nb$ (4),
τότε: $x_ny_n = b^2$ (i), $\overline{x}_n\overline{y}_n = b^2$ (ii), $A_{n-1}x_n \cdot \overline{x}_n = A_nb^2$ (iii), $A_ny_n \cdot \overline{y}_n = A_{n-1}b^2$ (iv) και
$\overline{y}_{n+1}(I_nb + \overline{y}_n) = b^2$ (v).

Απόδειξη
Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) βρίσκουμε: $4A_{n-1}A_nx_ny_n = g^2 - B_n^2b^2 = 4A_{n-1}A_nb^2$, οπότε:
$x_ny_n = b^2$ (i). Όμοια από τις (3), (4) βρίσκουμε: $\overline{x}_n\overline{y}_n = b^2$ (ii). Επίσης από τις (1), (3) βρίσκουμε:
$4A^2_{n-1}x_n \cdot \overline{x}_n = 4A_{n-1}A_nb^2$, δηλαδή $A_{n-1}x_n \cdot \overline{x}_n = A_nb^2$ (iii) και από τις (2), (4) βρίσκουμε: $4A_n^2y_n \cdot \overline{y}_n = 4A_{n-1}A_nb^2$, δηλαδή: $A_ny_n \cdot \overline{y}_n = A_{n-1}b^2$ (iv)

[75] Κανονικά: $A_1 = C + BI_0 - AI_0^2$, $B_1 = 2AI_0 - B$, αφού B = 0 και $C_1 = A$.

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται $2A_{n-1}x_n(g + B_nb) = g^2 – B_n^2b^2$, ή $2A_{n-1}x_n(g + B_nb) = 4A_{n-1}A_nb^2$ και τελικά $x_n = 2A_nb^2 / (g + B_nb)$ (1΄).
Όμοια η (3) ισοδυναμεί με την $\overline{x}_n = 2A_nb^2 / (g – B_nb)$ (3΄), ενώ η (2) ισοδυναμεί με την $y_n = 2A_{n-1}b^2 / (g – B_nb)$ (2΄) και η (4) με την $\overline{y}_n = 2A_{n-1}b^2 / (g + B_nb)$ (4΄).
Προφανώς η σχέση (v) είναι αντίστοιχη της $x_n(I_{n+1}b + x_{n+1}) = b^2$.
Για την απόδειξή της από τη σχέση $\overline{y}_n / 1 = (g – B_nb) / 2A_n$ με διαδικασία ανάλογη της σύνθεσης λόγων παίρνουμε:
$(1{\cdot}I_nb + \overline{y}_n) / 1 = (2A_n{\cdot}I_nb + g – B_nb) / 2A_n = [(2A_nI_n – B_n)b + g] / 2A_n = (B_{n+1}b + g) / 2A_n =$
$= (B_{n+1}b + g)x_{n+1} / 2A_nx_{n+1} =$ (λόγω της (1΄)) $= 2A_{n+1}b^2 / 2A_nx_{n+1} = A_{n+1}b^2 / A_nx_{n+1} =$
$=$ (λόγω της (iii)) $= A_nx_{n+1}\overline{x}_{n+1} / A_nx_{n+1} = \overline{x}_{n+1}$.
Άρα $\overline{y}_{n+1}(I_nb + \overline{y}_n) = \overline{y}_{n+1}\cdot\overline{x}_{n+1} = b^2$.

8.8.4. Πρόταση παλινδρομικότητας
Έστω a, b ασύμμετρα τμήματα και A, C φυσικοί αριθμοί με C > A.
Αν $Aa^2 = Cb^2$, τότε η Ανθ(a, b) είναι τελικά περιοδική με παλινδρομική περίοδο παραλειπομένου του τελευτέου όρου της.

Απόδειξη
Έχουμε αποδείξει (Προτάσεις 8.8.1 και 8.8.2) ότι: Ανθ(a, b) = $[\, I_0, \overline{I_1, I_2, \ldots, I_n}\,]$, με $I_n = 2I_0$.
Αρκεί να αποδείξουμε λοπόν ότι: $I_1 = I_{n-1}$, $I_2 = I_{n-2}$, $I_3 = I_{n-3}$, … .
1η Περίπτωση.
Θεωρούμε την ακολουθία x_1, $\overline{y}_1$, x_2, $\overline{y}_2$, … και υποθέτουμε ότι τα στοιχεία x_1, $\overline{y}_1$, x_2, $\overline{y}_2$, …, $x_{k-1}\overline{y}_{k-1}$ αυτής, είναι διαφορετικά ανά δύο, ενώ το x_k, k > 1, είναι το πρώτο επαναλαμβανόμενο στοιχείο. Θα δείξουμε ότι: $x_k = \overline{y}_{k-1}$.
Αν δεχθούμε δηλαδή ότι το x_k είναι ένα από τα: x_1, $\overline{y}_1$, x_2, $\overline{y}_2$, …, x_{k-2}, $\overline{y}_{k-2}$, x_{k-1}, θα καταλήξουμε σε άτοπο.
α) Έστω $x_k = x_\ell$ με $1 \le \ell < k$. Τότε $\overline{x}_k = \overline{x}_\ell$. Αλλά: $\overline{x}_k\cdot\overline{y}_k = \overline{x}_\ell\cdot\overline{y}_\ell = b^2$ οπότε $\overline{y}_k = \overline{y}_\ell$
Όμως: $\overline{y}_k(I_{k-1}b + \overline{y}_{k-1}) = b^2$ και $\overline{y}_\ell(I_{\ell-1}b + \overline{y}_{\ell-1}) = b^2$, τότε $I_{k-1}b + \overline{y}_{k-1} = I_{\ell-1}b + \overline{y}_{\ell-1}$.Άρα $I_{k-1} = I_{\ell-1}$ και $\overline{y}_{k-1} = \overline{y}_{\ell-1}$, πράγμα άτοπο, αφού τα $\overline{y}_{k-1}$, $\overline{y}_{\ell-1}$ ανήκουν στα διαφορετικά ανά δύο στοιχεία που αναφέραμε στην αρχή.
β) Έστω $x_k = \overline{y}_\ell$ με $1 \le \ell < k-1$. Τότε από τις σχέσεις $\overline{x}_k = y_\ell$ και ($\overline{x}_k\cdot\overline{y}_k = b^2$, $x_\ell\cdot y_\ell = b^2$) προκύπτει $x_\ell\cdot y_\ell = \overline{x}_k\overline{y}_k$ οπότε $x_\ell = \overline{y}_k$.
Αλλά: $x_\ell(x_{\ell+1} + I_{\ell+1}b) = \overline{y}_k(\overline{y}_{k-1} + I_{k-1}b) = b^2$, οπότε από τις σχέσεις $x_{\ell+1} + I_{\ell+1}b = \overline{y}_{k-1} + I_{k-1}b$ παίρνουμε $I_{\ell+1} = I_{k-1}$ και $x_{\ell+1} = \overline{y}_{k-1}$ πράγμα άτοπο, αφού $1 \le \ell < k-1$ σημαίνει $\ell + 1 < k$, ή $\ell + 1 \le k – 1$, δηλαδή τα $x_{\ell+1}$, $\overline{y}_{k-1}$ ανήκουν στα διαφορετικά ανά δύο στοιχεία που αναφέραμε στην αρχή. Άρα: $x_k = \overline{y}_{k-1}$.
Από τις σχέσεις: $x_k(x_{k+1} + I_kb) = b^2$ και $\overline{y}_{k-1}(\overline{y}_{k-2} + I_{k-2}b) = b^2$ προκύπτει τώρα $x_{k+1} + I_kb = \overline{y}_{k-2} + I_{k-2}b$ δηλαδή $I_k = I_{k-2}$, $x_{k+1} = \overline{y}_{k-2}$.
Ομοίως από τις σχέσεις: $x_{k+1}(x_{k+2} + I_{k+1}b) = b^2$ και $\overline{y}_{k-2}(\overline{y}_{k-3} + I_{k-3}b) = b^2$ προκύπτει $I_{k+1} = I_{k-3}$, $x_{k+2} = \overline{y}_{k-3}$. Εντελώς όμοια βρίσκουμε: $I_{k+2} = I_{k-4}$ και γενικά $I_{k-m} = I_{k+(m-2)}$, οπότε για k = (n / 2) + 1 m = n / 2 παίρνουμε: $I_{k-m} = I_1$ και $I_{k+(m-2)} = I_{n-1}$.

Προφανώς n άρτιος αφού τα στοιχεία $I_1, I_2, \ldots, I_{k-2}, I_k, \ldots, I_{n-2}, I_{n-1}$ (παραλειπομένου του κεντρικού όρου I_{k-1}) χωρίστηκαν σε ζεύγη, δηλαδή (n-2) άρτιος.

2η Περίπτωση

Έστω ότι τα στοιχεία $x_1, \overline{y}_1, \ldots, x_{k-1}, \overline{y}_{k-1}, x_k$ είναι διαφορετικά ανά δύο και $\overline{y}_k$, $k > 1$ είναι το πρώτο επαναλαμβανόμενο στοιχείο.

Θα δείξουμε τότε ότι: $\overline{y}_k = x_k$.

Πράγματι αν δεχτούμε ότι το $\overline{y}_k$ είναι ένα από τα $x_1, \overline{y}_1, \ldots, x_{k-1} \overline{y}_{k-1}$ καταλήγουμε με τον ίδιο τρόπο σε άτοπο. Άρα: $\overline{y}_k = x_k$.

Από τις σχέσεις τώρα: $x_k(x_{k+1} + I_k b) = \overline{y}_k(\overline{y}_{k-1} + I_{k-1} b)$ προκύπτει: $I_k = I_{k-1}$ και $x_{k+1} = \overline{y}_{k-1}$.

Ομοίως από την $x_{k+1} = \overline{y}_{k-1}$ προκύπτει: $I_{k+1} = I_{k-2}$, $x_{k+2} = \overline{y}_{k-2}$ και γενικά: $I_{k+m} = I_{k-(m+1)}$.

Για $k = (n + 1) / 2$ και $m = (n – 3) / 2$ παίρνουμε: $I_{k-(m+1)} = I_1$ και $I_{k+m} = I_{n-1}$. Προφανώς n περιττός, αφού τα στοιχεία $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}, I_k, I_{k+1}, \ldots, I_{n-2}, I_{n-1}$ χωρίστηκαν σε ζεύγη, δηλαδή (n – 1) άρτιος.

8.9 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΧΩΡΙΩΝ
Η κατ' έλειψη κατασκευή

Θεωρημα
Κάθε δευτεροβάθμια σχέση μεταξύ δύο ασύμμετρων τμημάτων a, b όπου a > b με συντελεστές φυσικούς αριθμούς συνεπάγεται ότι η ανθυφαίρεση του a δια b είναι τελικά περιοδική.

Μένουν πλέον προς διερεύνηση οι ανθυφαιρέσεις του a προς b όταν τα a, b είναι ασύμμετρα και ικανοποιούν μία εξίσωση της μορφής $Aa^2 + Bab = Cb^2$ ή της μορφής $Aa^2 + Cb^2 = Bab$, όπου A, B, C φυσικοί αριθμοί.

8.9.1. Πρόταση
Αν για τα ασύμμετρα τμήματα a, b έχουμε: $Aa^2 + Bab = Cb^2$ (1), όπου A, B, C φυσικοί αριθμοί και ισχύει η ανθυφαιρετική σχέση $a = Ib + e_1$, όπου I φυσικός αριθμός και $b > e_1$, τότε η Ανθ(b, e_1) είναι καθαρά περιοδική.

Απόδειξη
Με την αντικατάσταση $a = Ib + e_1$ η (1) γίνεται $A(Ib + e_1)^2 + B(Ib + e_1)b = Cb^2$, δηλαδή
$AI^2b^2 + 2AIbe_1 + Ae_1^2 + BIb^2 + Bbe_1 = Cb^2$ (2).
Αλλά: $Ib < a$ οπότε $AI^2b^2 + BIb\cdot b < Aa^2 + Bab = Cb^2$ λόγω της (1). Άρα $AI^2 + BI < C$. Επομένως η (2) γίνεται $(2AI + B)be_1 + Ae_1^2 = (C – AI^2 – BI)b^2$, δηλαδή $A_1b^2 = BIb^2 + C_1e_1^2$ (3),
όπου $A_1 = C – AI^2 – BI$, $B_1 = 2AI + B$, $C_1 = A$ φυσικοί αριθμοί. Η εξίσωση (3) είναι καθ' υπερβολήν και μάλιστα με την ιδιότητα $A_1 + B_1 > C_1$.
Πράγματι: $(I – 1)b < Ib < a$, οπότε ομοίως προκύπτει: $A(I – 1)^2 + B(I – 1) < C$ (4).
Αλλά η (4) γράφεται $A < C – AI^2 – BI + (2AI + B)$, δηλαδή $C_1 < A_1 + B_1$. Άρα η Ανθ(b, e_1) είναι καθαρά περιοδική, οπότε η Ανθ(a, b) είναι τελικά περιοδική.

Σημείωση: *Τη σχέση (1) θα την αποκαλούμε εξίσωση μεταβατικής μορφής ή καθ' υπερβολή εξίσωση 2ης μορφής, αφού με δεδομένο το b τώρα, μπορεί να βρεθεί τμήμα a που να ικανοποιεί τη σχέση (1). Υπάρχουν δηλαδή τμήματα a, a′ τέτοια ώστε: $M = a(b+a')$, όπου M δοσμένο επίπεδο χωρίο με $M / b^2 = C / B$ και $a' / a = A / B$.*
Η περίπτωση χωρίς το Bab (τετραγωνική μορφή) δεν υπάρχει πλέον λόγος να εξεταστεί ιδιαιτέρως.

8.9.2. Πρόταση
Αν για τα ασύμμετρα τμήματα a, b ισχύει: $Aa^2 + Cb^2 = Bab$ (1), όπου A, B, C φυσικοί αριθμοί (κατ' έλλειψη εξίσωση), τότε η Ανθ(a, b) είναι τελικά περιοδική.

Απόδειξη
Αν θεωρήσουμε την ανθυφαιρετική σχέση $a = Ib + e_1$, τότε όπως και προηγουμένως από την (1) παίρνουμε $A(Ib + e_1)^2 + Cb^2 = B(Ib + e_1)b$, ή $AI^2b^2 + 2AIbe_1 + Ae_1^2 + Cb^2 = BIb^2 + Bbe_1$ (2).
1) Αν $2AI > B$ τότε η (2) γράφεται $BIb^2 = AI^2b^2 + Cb^2 + Ae_1^2 + (2AI – B)be_1$ απ' όπου προκύπτει $BIb^2 > AI^2b^2 + Cb^2$, δηλαδή $BI > AI^2 + C$.
Έτσι η (2) γίνεται $(BI – AI^2 – C) b^2 = (2AI – B)be_1 + Ae_1^2$, έχει επομένως τη μορφή:
$A_1b^2 = B_1be_1 + C_1e_1^2$, όπου $A_1 = BI – AI^2 – C$, $B_1 = 2AI – B$, $C_1 = A$, φυσικοί αριθμοί.
Η τελευταία εξίσωση είναι καθ' υπερβολήν, οπότε η Ανθ(a, b) θα είναι τελικά περιοδική.

2) Αν $2AI \leq B$ τότε η (2) γίνεται $AI^2b^2 + Cb^2 + Ae_1^2 = BIb^2 + (B – 2AI)be_1$.

$2_α$) Αν $BI > AI^2 + C$ τότε η (2) γράφεται $Ae_1^2 = (BI – AI^2 – C)b^2 + (B – 2AI)be_1$, ή
$A_1b^2 + B_1be_1 = C_1e_1^2$, όπου $A_1 = BI – AI^2 – C$, $B_1 = B – 2AI$, $C_1 = A$ φυσικοί αριθμοί.
Η τελευταία εξίσωση είναι μεταβατικής μορφής, οπότε η Ανθ(a, b) είναι τελικά περιοδική.

$2_β$) Αν $BI < AI^2 + C$ τότε η (2) γίνεται $(AI^2 + C – BI)b^2 + Ae_1^2 = (B – 2AI)be_1$, δηλαδή

$A_1b^2 + C_1e_1^2 = B_1be_1$, όπου $A_1 = AI^2 + C - BI$, $B_1 = B - 2AI$, $C_1 = A$ φυσικοί αριθμοί.
Καταλήξαμε λοιπόν και πάλι σε κατ' έλλειψη εξίσωση.
Όμως $B_1 = B - 2AI < B$.
Αν λοιπόν στο επόμενο ανθυφαιρετικό βήμα έχουμε: $b = I_1e_1 + e_2$ και η εξίσωση που θα επαληθεύουν τα e_1, e_2 είναι καθ' υπερβολή ή μεταβατικής μορφής τότε η Ανθ(a, b) θα είναι τελικά περιοδική.
Υπάρχει όμως περίπτωση, να επαληθεύουν και πάλι κατ' έλλειψη εξίσωση της μορφής
$A_2e_1^2 + C_2e_2^2 = B_2e_1e_2$με $B_2 = B_1 - 2A_1I_1 < B_1$.

Αποκλείεται όμως σε κάθε επόμενο ανθυφαιρετικό βήμα να προκύπτει κατ' έλλειψη εξίσωση, διότι για τους φυσικούς αριθμούς $B, B_1, B_2, \ldots$ ισχύει $B > B_1 > B_2 > \cdots$, οπότε είναι πεπερασμένου πλήθους.

Σε κάποιο λοιπόν ανθυφαιρετικό βήμα θα προκύψει καθ' υπερβολή εξίσωση ή εξίσωση μεταβατικής μορφής οπότε η Ανθ(a, b) είναι τελικά περιοδική.

Σημείωση: *Η περίπτωση $BI = AI^2 + C$ αποκλείεται να ισχύει διότι τότε από τη (2) προκύπτει $Ae_1^2 = (B - 2AI)be_1$, δηλαδή $Ae_1 = (B - 2AI)b$, οπότε τα e_1, b θα είναι σύμμετρα τμήματα, επομένως και τα a, b θα είναι σύμμετρα τμήματα (πράγμα άτοπο).*

Σχόλιο
Από τη σχέση (1) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $B^2 > 4AC$, ανεξαρτήτως προφανώς του αν είναι $a > b$ ή $a < b$.
Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με 4A παίρνουμε $4A^2a^2 + 4ACb^2 = 4AaBb$ (2).
Αν ήταν $B^2 \leq 4AC$, τότε από τη σχέση (2) θα βρίσκαμε $4A^2a^2 + B^2b^2 \leq 4AaBb$ (3).
Το γεγονός ότι τα a, b είναι ασύμμετρα εξασφαλίζει τη σχέση $2Aa \neq Bb$, διαφορετικά θα είχαμε $a / b = B / 2A$, δηλαδή a, b σύμμετρα, πράγμα άτοπο.
● Αν $2Aa > Bb$, τότε: $(2Aa - Bb)^2 + 4AaBb > 4AaBb$, οπότε σύμφωνα με την πρόταση II.7 έχουμε: $4A^2a^2 + B^2b^2 > 4AaBb$, πράγμα άτοπο λόγω της (3).
● Αν $Bb > 2Aa$, τότε η σχέση $(Bb - 2Aa)^2 + 4AaBb > 4AaBb$ μας οδηγεί ομοίως σε άτοπο.
Άρα $B^2 > 4AC$.
Εξάλλου από τη διερεύνηση της Πρότασης VI.28 (κατ' έλλειψη κατασκευή) βρίσκουμε ότι η σχέση $B^2 > 4AC$ είναι και ικανή συνθήκη, προκειμένου, δοθέντος του τμήματος a και των φυσικών αριθμών A, B, C να υπάρχει τμήμα b που να ικανοποιεί την (1). Εξασφαλίζει, επομένως, την ύπαρξη τμημάτων b, b΄ τέτοιων ώστε: $M = b(a - b')$, όπου M δοσμένο επίπεδο χωρίο με $M / a^2 = A / B$ και $b' / b = C / B$.

8.10. Ο ΡΟΛΟΣ
ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΧΩΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ Χ
ΤΩΝ *ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*

Ο σκοπός της παρούσης εργασίας περιορίζεται στην παρουσίαση της ανακατασκευής της περιοδικής ανθυφαίρεσης, χρησιμοποιώντας μόνο αρχαία εργαλεία, ειδικά εκείνα στο Βιβλίο Χ των *Στοιχείων* του Θεαίτητου. Το γεγονός ότι μια τέτοια ανακατασκευή είναι δυνατή δείχνει ότι ο Θεαίτητος πράγματι ανέπτυξε εργαλεία επαρκή και αρκετά ισχυρά για να αποδείξει τα θεωρήματα της περιοδικότητας 8.7.2 και 8.8.1. Τώρα θα συζητήσουμε σύντομα ποια εξωτερικά στοιχεία υπάρχουν υπέρ ενός τέτοιου ισχυρισμού.

Σύμφωνα με την διατριβή ενός μεγάλου αριθμού διακεκριμένων ιστορικών των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένων των P. Tannery, G. H. Zeuthen, Jeath, van der Waerden, η παραβολή χωρίων στα Βιβλία ΙΙ και VI είναι ένας γεωμετρικός τρόπος μελέτης των τετραγωνικών εξισώσεων, και έτσι είναι άλγεβρα σε γεωμετρική μορφή, "γεωμετρική άλγεβρα".
Αυτή η θέση έχει αμφισβητηθεί από τον Unguru [U1], [U2], και τους Unguru και Rowe [UR]. Στην προσπάθειά τους να απομακρύνουν τις Εφαρμογές χωρίων καθ' υπερβολή από τις σύγχρονες τετραγωνικές εξισώσεις, οι Unguru και Rowe έγραψαν (σελίδες 27 – 28): "αν η VI.29 αφορούσε την «συμπλήρωση του τετραγώνου» θα περίμενε κανείς να βρει την ΙΙ. 14 (την φερόμενη ως «ισοδύναμη της τετραγωνικής ρίζας» να χρησιμοποιείται στο επιχείρημα, αλλά, φυσικά, τίποτα που να θυμίζει ούτε στο ελάχιστο την ΙΙ.14 δεν χρησιμοποιείται", αλλά αυτός ο ισχυρισμός δεν είναι σωστός. Στην πραγματικότητα η Πρόταση VI.29 στηρίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στην Πρόταση VI.25 και η Πρόταση VI.25 είναι μία l / m – ανάλογη της Πρότασης ΙΙ.14, που η απόδειξή της εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την Πρόταση VI.25. Έτσι η Πρόταση VI.29 στην πραγματικότητα βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην Πρόταση ΙΙ.14.
Η διατριβή του Unguru δέχτηκε ισχυρές και πειστικές ενστάσεις από μερικούς αρκετά διακεκριμένους μαθηματικούς, συμπεριλαμβανομένων των van der Waerden [vdW2], Freudenthal [Fr] και Weil [W2].
Όμως, όπως ήδη αναφέρθηκε, ο Fowler [Fo ?] πρότεινε έναν πιο εξειδικευμένο και βαθύτερο ρόλο για την εφαρμογή χωρίων, έναν που συνδέεται με την περιοδική ανθυφαίρεση. Η πρόταση του Fowler δεν έτυχε ευρύτερης αποδοχής καθώς αντιτίθεται στις υπάρχουσες αποδείξεις: αρχικά ένα γενικό θεώρημα που συνδέει την εφαρμογή χωρίων (τετραγωνικές εξισώσεις) με την περιοδική ανθυφαίρεση δεν αναφέρεται σε καμία αρχαία μαθηματική πηγή, και δεύτερον, το πλήθος των λεπτομερών υπολογισμών που χρειάζονται για να αποδείξουν αυτή τη σύνδεση είναι φαινομενικά απαγορευτικό για τους Έλληνες μαθηματικούς. Ο Fowler [Fo3], δίνει την εκτίμηση ότι (η απόδειξη μιας Πρότασης όπως η 8.3.5) "απαιτεί τόσο λεπτομερή συμβολικό χειρισμό που είναι ασύλληπτη ως ανακατασκευή μιας αρχαίας διαδικασίας".
Εντούτοις, φυσικά παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον να αποφασίζεις αν αυτά τα συμπεράσματα θα μπορούσαν στην πραγματικότητα να είναι γνωστά και αποδεδειγμένα από τους Έλληνες μαθηματικούς, ιδιαίτερα τον Θεαίτητο. Αυτό αποτελεί μια ξεχωριστή συζήτηση, με την ανακατασκευή μας να παρέχει μερικώς θετικές, αλλά όχι αποφασιστικής σημασίας αποδείξεις.

8.10.1 Αναγκασμένοι να δεχτούμε περιοδικώς ότι η Πλατωνική Διαίρεση και Συνεπαγωγή είναι μια φιλοσοφική εκδοχή της ανθυφαίρεσης γραμμών σε δύναμη μόνο.

Εντούτοις υπάρχει μια ισχυρή ανεξάρτητη απόδειξη ότι τα σημαντικά θεωρήματα (8.7.2, 8.8.1), που συνήθως θεωρούνταν επιτεύγματα μαθηματικών του $18^{ου}$ και $19^{ου}$ αιώνα, όπως των Euler [E], Lagrange [L1], [L2], Galois [G], (δες Weil [W], Fowler [Fo3] για λεπτομέρειες), θεμελιώθηκαν στην πραγματικότητα από τον Θεαίτητο. Μια τέτοια απόδειξη πρέπει να είναι εξαιρετικά ισχυρή, για να υπάρχουν πιθανότητες να θεωρηθεί πειστική.

Εντούτοις η ανθυφαιρετική ερμηνεία της διαλεκτικής του Πλάτωνα, και ειδικότερα της Πλατωνικής μεθόδου της Διαίρεσης και της Σύνθεσης, στην τριλογία *Θεαίτητος – Σοφιστές – Πολιτικές*, όπως αναπτύχθηκε από τον καθηγητή Νεγρεπόντη, δείχνει ότι ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί, για την δημιουργία του φιλοσοφικού του συστήματος, ένα εντυπωσιακό μαθηματικό αποτέλεσμα ισχυρότερο από το θεώρημα 8.8.1, ότι δηλαδή η ανθυφαίρεση δύο ευθυγράμμων τμημάτων, σύμμετρων σε δύναμη μόνο, όχι μόνο είναι περιοδική, αλλά στην πραγματικότητα και παλινδρομική. Πράγματι, το *Κριτήριον Λόγου* για τις φιλοσοφικές Διαιρέσεις δίνεται ως παράδειγμα στο Διαίρεση – και – Συνθέση στους *Σοφιστές*, και το περιεχόμενο του *Πολιτικού* ίσως απλά να είναι η διατύπωση του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας. (Μία ανακατασκευή του θεωρήματος της παλινδρομικής περιοδικότητας παρουσιάστηκε νωρίτερα από τον καθηγητή Νεγρεπόντη χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του Βιβλίου X των *Στοιχείων*). Κάποιες πρώιμες προσπάθειες σύνδεσης του Πλάτωνα με την περιοδική ανθυφαίρεση γίνονται στα έργα των A. E. Taylor [Tay], D' Arcy W. Thomson [Thom], C. Mugler [Mug], και J. Vuillard [Vu], αλλά δεν έτυχαν ευρύτερης αποδοχής, κυρίως λόγω της αδυναμίας τους να εξηγήσουν τη συμβατότητα μιας απείρως διαιρούμενης ολότητας με την Ολότητα του Πλατωνικού Όντος που επιτυγχάνονταν με την Σύνθεση. Έτσι ο Cherniss [C] ανελέητα κατέρριψε την προσέγγιση του Mugler, η οποία, αν και πράγματι σημαντικά ανεπαρκής, περιείχε μια σημαντική συνειδητοποίηση.

8.10.2. Ο ρόλος του Βιβλίου X των *Στοιχείων*. Μόλις γίνει εμφανές ότι η διαλεκτική του Πλάτωνα βασίζεται στην γνώση του θεωρήματος της μαθηματικής παλινδρομικής περιοδικότητας για την ανθυφαίρεση γραμμών σύμμετρων σε δύναμη μόνο, δεν μπορούμε παρά να δεχτούμε ότι αυτό το εντυπωσιακό μαθηματικό θεώρημα ήταν πράγματι ένα θεώρημα που απέδειξε ο Θεαίτητος. Την ίδια στιγμή είναι λογικό να πιστεύουμε ότι η εφαρμογή εμβαδών (καθ' υπερβολή) έχει ανθυφαιρετικό περιεχόμενο, κατά την ίδια έννοια με το Θεώρημα 8.7.2. Όπως έχουμε δείξει στα Κεφάλαια 6 – 7 προηγουμένως, τα εργαλεία, του Βιβλίου X των *Στοιχείων* είναι τα πιο κατάλληλα να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη αυτών των θεωρημάτων.
Το βιβλίο X των *Στοιχείων* είναι γνωστό από αρχαίες πηγές (*Σχολιασμός του Βιβλίου X των Ευκλείδειων Στοιχείων* του Πάππου) ως έργο του Θεαίτητου.
Από τότε που ο Stevin αποκάλεσε αυτό το βιβλίο Σταυρό (Σύμβολο) των μαθηματικών, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για να βρεθεί ο "λόγος ύπαρξης" αυτού του έργου. Ο Taisbak [Tai], αποκάλυψε την υποκείμενη μαθηματική δομή του Βιβλίου X, αλλά άφησε αναπάντητο το ερώτημα ως προς τον σκοπό του. Οι Ιστορικοί το είδαν είτε ως ένα έργο που άλλο σκοπό δεν εξυπηρετούσε "παρά να μας διασκεδάσει με καλή λογική" (Taisbak [Tai], σελ. 58) ή ως "ένα μοναδικό δείγμα ενός πλήρως αναπτυγμένου συστήματος" (Knorr [Kn2], σελ. 60), ή ως "μαθηματικό αδιέξοδο" (Mueller [Mue], σελίδες 270 – 271). Ο van der Waerden [vdW] σελ. 172 παραδέχεται ότι κανείς δεν βλέπει πολύ καλά ποιον από όλους αυτούς τους σκοπούς εξυπηρετεί. Ο συγγραφέας κατάφερε με θαυμαστό τρόπο να κρύψει τον συλλογισμό του.
Ο Fowler,
(α) εικάζοντας, στο [Fo1] (σελ. 835), ότι ο πιθανός σκοπός του Βιβλίου X ήταν "να διακρίνει τα μήκη που είναι σύμμετρα σε δύναμη μόνο από εκείνα που είναι ασύμμετρα (σε δύναμη)"με ανθυφαίρεση, καθώς τα μεν είναι εκείνα που παρουσιάζουν το εντυπωσιακό, σχεδόν παλινδρομικό, τύπο" και
(β) επιβεβαιώνοντας στο [Fo3] (σελίδες 189 – 191), ότι "το αντικείμενο του Βιβλίου X δεν είναι ο χειρισμός ή η ταξινόμηση των τετραγωνικών άρρητων αριθμών ούτε των ριζών των τετραγωνικών ή διτετραγωνικών εξισώσεων με ακέραιους ή κλασματικούς συντελεστές" και ότι "η ιδέα της αναλογίας που υπόκειται στο Βιβλίο X είναι … ανθυφαιρετική", αλλά επίσης παραδεχόμενος ότι "[οι άλογες γραμμές διάμεσες, αποτομές και διώνυμες] δημιουργούν σύγχυση από ανθυφαιρετικής άποψης", καταλαβαίνει κατά κάποιο τρόπο ότι όλο το Βιβλίο X σχετίζεται με την περιοδική ανθυφαίρεση.

8.10.3. Η αλγεβρική αντιπαράθεση. Η ανακατασκευή, οδηγώντας στον συσχετισμό της εφαρμογής χωρίων καθ' υπερβολή και ΓΜΑΛ με καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση μέσω της

Θεαιτήτειας συζυγίας του Βιβλίου X των *Στοιχείων* προτείνει ότι το περιεχόμενο του Βιβλίου X είναι ανθυφαιρετικό. Ενώ είναι αλήθεια ότι οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν αλγεβρική αντίληψη της άγνωστης μεταβλητής, είναι ωστόσο πέρα από κάθε αμφιβολία ότι οι αρχαίες γεωμετρικές μέθοδοι (στα Βιβλία II και VI) είναι μαθηματικά ισοδύναμες με τις αλγεβρικές διαδικασίες που ακολουθούνται στις μέρες μας για την επίλυση των τετραγωνικών εξισώσεων.

8.10.4. Σχόλιο πάνω στο πιθανό ανθυφαιρετικό περιεχόμενο της διαμέρισης της εφαρμογής χωρίων μεταξύ εκείνων καθ' υπερβολή και εκείνων κατ' έλλειψη. Θυμηθείτε ότι, σύμφωνα πε την Πρόταση 8.1.2, κάθε εφαρμογή χωρίων καθ' υπερβολή $M = b(a + c)$, με δεδομένα τμήματα γραμμής a, b, c με εμβαδόν M και λόγο ℓ / m, τέτοια ώστε $c / b = \ell / m$, και τέτοια ώστε, επιπλέον, το M να είναι σύμμετρο με a^2 και ο λόγος ℓ / m να είναι σύμμετρος καταλήγει σε μία ΓΜΑΛ $Aa^2 = Bab + Cb^2$.

Σημειώστε εντούτοις ότι, όπως συνεπάγεται από το Θεώρημα 8.9.1, σε γενικές συνθήκες, η παραβολή των χωρίων καθ' υπερβολή (η οποία περιγράφεται στην Πρόταση VI.29 των *Στοιχείων*) συνεπάγεται ανθυφαίρεση που είναι σχεδόν καθαρά περιοδική. Στην παράγραφο 8.9.2 ασχοληθήκαμε με την παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη, (η οποία περιγράφεται στην Πρόταση VI.28 των *Στοιχείων*), όπου δείξαμε ότι, υπό εξίσου γενικές συνθήκες, η παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη, συνεπάγεται ανθυφαίρεση τελικά περιοδική, αλλά ποτέ καθαρά περιοδική. Έτσι,

η διαμέριση της εφαρμογής χωρίων μεταξύ

	εκείνων καθ' υπερβολή
έναντι εκείνων κατ' έλλειψη	

είναι σχεδόν μια διαμέριση μεταξύ

	εκείνης με καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση
και εκείνης με τελικά αλλά μη καθαρά περιοδική ανθυφαίρεση	

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι υπάρχουν λόγοι να πιστεύουμε ότι το Θεώρημα 8.7.2, πάνω στη καθαρή περιοδικότητα, ήταν συμπέρασμα μέσα στις δυνατότητες του Θεαίτητου (όπως αφήνεται να εννοηθεί στο 8.10.5, παρακάτω), σημαίνει ότι η διαμέριση της εφαρμογής χωρίων στα Ευκλείδεια *Στοιχεία*, μία διαμέριση χωρίς σύγχρονη αντίστοιχη, είναι ανθυφαιρετικής εμπνεύσεως.

8.10.5. Ο λόγος ύπαρξης του Βιβλίου X είναι να παράσχει τα εργαλεία για την ανακατασκευή των θεωρημάτων περιοδικότητας συμπεριλαμβανομένου του Θεωρήματος της καθαρής περιοδικότητας.
Το βιβλίο X των *Στοιχείων* είναι γνωστό από αρχαίες πηγές (*Σχολιασμός του Βιβλίου X των Ευκλείδειων Στοιχείων* του Πάππου) ως έργο του Θεαίτητου.
Από τότε που ο Stevin αποκάλεσε αυτό το βιβλίο Σταυρό (Σύμβολο) των μαθηματικών, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για να βρεθεί ο "λόγος ύπαρξης" αυτού του έργου. Ο Taisbak [Tai], αποκάλυψε την υποκείμενη μαθηματική δομή του Βιβλίου X, αλλά άφησε αναπάντητο το ερώτημα ως προς τον σκοπό του. Οι Ιστορικοί το είδαν είτε ως ένα έργο που άλλο σκοπό δεν εξυπηρετούσε "παρά να μας δια σκεδάσει με καλή λογική" (Taisbak [Tai], σελ. 58) ή ως "ένα μοναδικό δείγμα ενός πλήρως αναπτυγμένου συστήματος" (Knorr [Kn2], σελ. 60), ή ως "μαθηματικό αδιέξοδο" (Mueller [Mue], σελίδες 270 – 271). Ο van der Waerden [vdW] σελ. 172 παραδέχεται ότι κανείς δεν βλέπει πολύ καλά ποιον από όλους αυτούς τους σκοπούς εξυπηρετεί. Ο συγγραφέας κατάφερε με θαυμαστό τρόπο να κρύψει τον συλλογισμό του.
Ο Fowler,

(α) εικάζοντας, στο [Fo1] (σελ. 835), ότι ο πιθανός σκοπός του Βιβλίου X ήταν “να διακρίνει τα μήκη που είναι σύμμετρα σε δύναμη μόνο από εκείνα που είναι ασύμμετρα (σε δύναμη)”με ανθυφαίρεση, καθώς τα μεν είναι εκείνα που παρουσιάζουν τον εντυπωσιακό, σχεδόν παλινδρομικό, τύπο” και
(β) επιβεβαιώνοντας στο [Fo3] (σελίδες 189 – 191), ότι “το αντικείμενο του Βιβλίου X δεν είναι ο χειρισμός ή η ταξινόμηση των τετραγωνικών άρρητων αριθμών ούτε των ριζών των τετραγωνικών ή διτετραγωνικών εξισώσεων με ακέραιους ή κλασματικούς συντελεστές” και ότι “η ιδέα της αναλογίας που υπόκειντai στο Βιβλίο X είναι … ανθυφαιρετική”, αλλά επίσης παραδεχόμενος ότι “[οι άλογες γραμμές διάμεσες, αποτομές και διώνυμες] δημιουργούν σύγχυση από ανθυφαιρετικής άποψης”, καταλαβαίνει κατά κάποιο τρόπο ότι όλο το Βιβλίο X σχετίζεται με την περιοδική ανθυφαίρεση.
[Μη μπορώντας να εκμεταλλευτεί την σχέση της διαλεκτικής του Πλάτωνα με την ανθυφαίρεση, δεν είναι σε θέση να συνειδητοποιήσει και να τεκμηριώσει αυτήν του την συνειδητοποίηση. Έτσι είναι δίκαιο να πούμε ότι οι πρώτες προσπάθειες να βρεθεί λόγος ύπαρξης του Βιβλίου X ουσιαστικά απέτυχαν. Θα ισχυριστούμε ότι μια πειστική αναδόμηση της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης ενός ζεύγους σε δύναμη μόνο σύμμετρων γραμμών χρησιμοποιεί ακριβώς τις “άλογες γραμμές, ενδιάμεσες, αποτομές και διώνυμες” που αναπτύχθηκαν στο Βιβλίο X των *Στοιχείων*. Η ανακατασκευή του Θεωρήματος 8.3.1 βασίζεται σημαντικά, και στην πραγματικότητα αποκλειστικά στις άλογες γραμμές, που παράγονται από ένα ζεύγος σύμμετρων σε δύναμη μόνο γραμμών, και οι ιδιότητές τους (μοναδικότητα, διατήρηση υπό σύμμετρη αναδιάταξη, και κυρίως διττότητα, όπως δηλώνεται λεπτομερώς στις παραγράφους 6.1 – 6.3), καθιστούν το βασικό περιεχόμενο του Βιβλίου X. Καθώς το Βιβλίο X φαίνεται να περιέχει τα εργαλεία που είναι απαραίτητα για να γίνει η ανακατασκευή της απόδειξης για την παλινδρομική περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης του σύμμετρου σε δύναμη μόνο ζεύγους, είναι λογικό να συμπεραίνουμε ότι η απόδειξη αυτού του θεωρήματος αποτελεί έναν καινούριο πειστικό λόγο για αυτήν ακριβώς την ύπαρξη του Βιβλίου X. Οι λεπτομέρειες αυτής της αναδόμησης βρίσκονται στο έργο του Νεγρεπόντη [N3], [N5] Κεφάλαιο IX. Μια σύντομη περιγραφή της ανακατασκευής του Νεγρεπόντη εμφανίζεται στο [P]. Καθώς το Βιβλίο X αποδίδεται, όπως είδαμε στον Θεαίτητο, δικαιολογείται στη βάση αυτής της αναδόμησης να ονομάσουμε το Θεώρημα 8.3.1 “Θεαιτήτειο Θεώρημα”].

Βιβλιογραφία

[A] B. Artmann, *A proof for Theodorus' Theorem by Drawing Diagrams*, Journal of Geometry 49 (1994) 3-35.
[B] O. Becker, *Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionlehre und ihre Spuren bei Aristotles und Euklid*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung: Studien 2(1933) 311-333.
[Burk] W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, translated by E. I. Minar of *Weissheit und Wissenschaft Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon* (1962), Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1972.
[Burn] M. F. Burnyeat, *The Philosophical Sense in Theaetetus' Mathematics*, Isis 69 (1978), 489-513.
[C] H. Cherniss, *Plato as Mathematician*, The Review of Metaphysics 4 (1951) 395-425.
[E] L. Euler, *De usu novi algorithmiin problemate Pelliano solvendo*, Novi commentarii academiae scientarum Petropolitanae 11 (1765) 28-66.
[Fo1] D. Fowler, *Ratio in Early Greek Mathematics*, Bulletin AMAΛican Mathematical Society (new Series) 1 (1979), 807-846.
[Fo2] D. Fowler, *Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio*, Archive for History of Exact Sciences 22 (1980), 5-36.
[Fo3] D. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1999.

[Fr] H. Freudenthal, *What is Algebra and What has it been in History*, Archive for History of Exact Sciences 16 (1977), 189-200.
[vF] K. von Fritz, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Annals of Mathematics 46 (1945) 242-264.
[G] E. Galois, *Demonstration d'un theoreme sur les functions continues periodiques*, Annales de Mathematiques 19 (1828-1829).
[HW] G. H. Hardy and E. M. Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Clarendon Press, 1938.
[H] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Second edition, Three volumes, Cambridge University Press, Cambridge, 1926.
[Ka] J.-P. Kahane, *La Theorie de Theodore des corps quadratiques reels*, L' Enseignement Mathematique 31 (1985) 85-92.
[Kl] V. Kleftaki, *Analysis of Book X of Euclid's Elements*, M.Sc., Didactics of Mathematics, Mathematics Department, Athens University, Athens, Greece, 2004, 125 pages [In Greek].
[Kn1] W. R. Knorr, *The Evolution of Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*, Reidel, Dordrecht, 1975.
[Kn2] W. R. Knorr, *"La Croix des Mathematiciens": The Euclidean theory of irrational lines*, Bulletin AMAΛican Mathematical Society 9 (1983) 41-69.
[L1] J. L. Lagrange, *Solution d'un probleme d' arithmetique*, Miscellanea Taurinensia 4 (1766-1769).
[L2] J. L. Lagrange, *Additions au memoire sur la resolution des equations nuMAΛiques*, Memoires de l" Academie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1770 & 1771.
[Ma] B. Mazur, *How did Theaetetus prove his Theorem ?*, manuscript (2005).
[Mu] C. Mugler, *Platon et la Recherche Mathematique de son Epoque*, Editions P. H. Heitz, Strasbourg-Zurich, 1948.
[N1] S. Negrepontis, *Plato's dialectics under the Ανθyphairetic scrutiny*, in Lectures, academic year 1996-97, Philosophy Group of the University of Cyprus, edited by V. Syros, A. Kouris, E. Kalokairinou, Nicosia, 1999, pp. 15-58 [in Greek].
[N2] S. Negrepontis, *The Ανθyphairetic nature of Plato's dialectics*, in Topics in Didactics of Mathematics, vol. V, edited by F. Kalavasis-M. Meimaris, Gutenberg, Athens, 2000, pp. 15□77 [in Greek].
[N3] S. Negrepontis, *A Reconstruction of the Proof of the Palindromic Periodicity of the Ανθyphairesis of Lines Commensurable in Power Only, Employing Only Tools from Book X. of Euclid's Elements*, manuscript.
[N4] S. Negrepontis, *The Ανθyphairetic Nature of the Platonic Principles of Infinite and Finite*, in Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, 28-30 January 2005, Palermo, Italy, 3-26.
[N5] S. Negrepontis, *Plato's theory of Ideas is the philosophic equivalent of the theory of continued fraction expansions of lines commensurable in power only*, manuscript, dated June 20, 2006.
[N6] S. Negrepontis, *The foundation of Pythagorean Philosophy ('everything is number') on Pythagorean Geometry ('incommensurability of diameter of square'*), to appear [in Greek].
[N7] S. Negrepontis, *The Periodic Ανθyphairetic Nature of the One in the Second Hypothesis of the Parmenides 142b1-159b1*, manuscript.
[P] R. Penrose, *The Road to Reality*, Jonathan Cape, London, 2004.
[R] K. Reidemeister, *Das Exakte Denken der Griechen*, Claasen & Goverts, Hamburg, 1949.
[Sz] A. Szabo, *Anfange der griechieschen Mathematik*, Budapest, 1969.
[T] A. E. Taylor, *Forms and Numbers*, Mind, 1926-7.
[Ta] M. Taisbak, *Coloured Quadrangles, A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements*, Opuscula Graecolatina 24, Museum Tusculanum Press, Copenhagen, 1982.

[Th] W. Thomson, *The Commentary of Pappus on Book X. of Euclid's Elements. Arabic Text and Translation. With Introductory Remarks, Notes, and a Glossary of Technical Terms by Gustav Junge and William Thomson*, Harvard University Press, Cambridge, 1930.

[Va] B. Vahabzadeh, *Al-Mahani's Commentary on the Concept of Ratio*, Arabic Sciences and Philosophy, Cambridge University Press, vol. 12 (2002), 9-52.

[Vo] H. Vogt, *Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4.Jhrhunderts*, Bibliotheca Mathematica 10 (1909-1910), 97-155.

[Vu] J. Vuillemin, *Mathematiques Pythagoriciennes et Platoniciennes*, Albert Blanchard, Paris, 2001.

[vdW1] B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, translation by A. Dresden of *Ontwakende Wetenschap* (1950), Noordhoff, Groningen, 1954.

[vdW2] B. L. van der Waerden, *Defence of a 'Shocking' Point of View*, Archive for History of Exact Sciences 15 (1975), 199-200.

[W1] A. Weil, *Who betrayed Euclid?*, Archive for History of Exact Sciences 19 (1978), 91-93.

[W2] A. Weil, *Number Theory, An approach through History from Hammurapi to Legendre*, Boston, Birkhauser, 1984.

[U1] S. Unguru, *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics*, Archive for History of Exact Sciences 15 (1975), 67-114.

[U2] S. Unguru, *History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art*, 70 (1979), 555-565.

[UR] S. Unguru, D. E. Rowe, *Does the Quadratic Equation have Greek Roots, A Study of "Geometric Algebra", "Application of Areas", and Related Problems*, Libertas Mathematica 1 (1981) 1-49 and 2 (1982) 1-62.

[Z] H. G. Zeuthen, *Sur la constitution des livres arithmetiques des Elements d' Euclide et leur rapport a la question de l' irrationalite*, Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 5 (1910) 395-435.

Author. Mr. Georgios Tassopoulos

Title. *The relation of second degree equation with the eventuallyperiodic anthyphairesis in ancient Greek Mathematics.*

Abstract Following arguments developed by S. Negrepontis that the method employed by Theodorus, in his lesson to Theaetetus, to prove the incommensurabilities reported in the Platonic dialogue *Theaetetus* 147d-148b, was anthyphairetic, a proof is reconstructed using only tools available to the Pythagoreans, namely the calculus of Gnomons in Book II of Euclid's *Elements.* Following arguments developed by S. Negrepontis that the result proved by Theaetetus, following the lesson by Theodorus, as reported in the same passage, was the palindromic periodicity of all quadratic irrationals, using the methods of Book X of the *Elements*, and in particular the concepts of an 'apotome' line, a line of two names, and their conjugacy (Propositions X.112-114 of the *Elements*), a proof is given of the characterization of purely periodic anthyphaireses. An outline of this Proposition was given by Zeeman and Fowler, in one direction; the proof given in the thesis uses tools only from Book X. of the *Elements*.