Κλασικές θέσεις κυρτών σωμάτων

Διδακτορική Διατριβή

Ελευθέριος Μαρκεσίνης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2015

Εισηγητής:

Απόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Πρόλογος **vii**

1 Βασικές έννοιες **1**

1.1 Κυρτά σώματα . . . 2

1.1α′ Βασικές ανισότητες . . . 3

1.1β′ Μεικτοί όγκοι . . . 4

1.1γ′ Αριθμοί κάλυψης . . . 6

1.2 Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα . . . 8

1.2α′ Η ℓ-θέση και η ανισότητα του Pisier . . . 9

1.2β′ M-θέση . . . 12

1.3 Ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος . . . 13

2 Αποτελέσματα της διατριβής **17**

2.1 Κλασικές θέσεις κυρτών σωμάτων . . . 17

2.1α′ Η θέση John και η θέση Löwner . . . 18

2.1β′ Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους . . . 22

2.1γ′ Θέση ελάχιστης επιφάνειας . . . 25

2.1δ′ Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα . . . 27

2.2 Αποτελέσματα της διατριβής . . . 29

3 Σύγκριση της M-θέσης με τις κλασικές θέσεις **43**

3.1 Ισοτροπική θέση και η βασική ιδέα . . . 43

3.2 Θέση ελάχιστης επιφάνειας . . . 46

3.3 Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους . . . 53

3.4 Θέσεις John και Löwner . . . 56

4 Θέση ελάχιστης επιφάνειας **59**
4.1 Προβολές σε υπερεπίπεδα 59
4.2 Μέσο πλάτος στη θέση ελάχιστης επιφάνειας 61

5 Απόσταση Schatten **67**
5.1 Φράγματα για την απόσταση Schatten 67
5.1α′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(i)})$ 69
5.1β′ $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(s)})$ και $d_{\mathrm{tr}}(K_{(s)}, K)$ 70
5.1γ′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(w)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(w)})$ 72
5.1δ′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(j)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(j)})$ 73
5.1ε′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(\ell)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(\ell)})$ 74
5.2 Άνω φράγματα για την $d_{\mathrm{tr}}(K_{(x)}, K_{(y)})$ 75
5.3 Παραδείγματα και ερωτήματα 78
5.3α′ Φράγματα για το $I_2(K_{(x)})$ 79
5.3β′ Κάτω φράγματα για την $D_{\mathrm{tr}}(K_{(x)}, K_{(i)})$ 82
5.3γ′ Παρατηρήσεις για τις $r(K_{(x)})$ και $R(K_{(x)})$ 82

6 Η ανισότητα των Rogers και Shephard **85**
6.1 Το πρόβλημα 85
6.2 Ελλειψοειδή 88
6.3 Γενικά φράγματα 90
6.4 Η ισοτροπική περίπτωση 94

7 Ακτίνα του σώματος προβολών **97**
7.1 Βέλτιστες θέσεις 98
7.2 Άνω φράγματα συναρτήσει της επιφάνειας 100
7.2α′ Επιφάνεια και εσωτερική ακτίνα 100
7.2β′ Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους 102
7.2γ′ Ένα παράδειγμα 102
7.2δ′ Τυχαία πολύτοπα 103
7.3 Προβολές σε υπόχωρους συντεταγμένων και η unconditional περίπτωση . . 105
7.4 Προβολές σε τυχαίο υπερεπίπεδο 108

8 Γενικευμένος λόγος όγκων **111**
8.1 Άνω φράγμα για τον k-οστό λόγο όγκων 111
8.2 Quermassintegrals του ελλειψοειδούς John και Löwner 115

Πρόλογος

Συμβολίζουμε με $\mathcal{SK}_n$ την κλάση όλων των συμμετρικών κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και με $\mathcal{CK}_n$ την κλάση όλων των κυρτών σωμάτων όγου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία έχουν κέντρο βάρους το 0 (από εδώ και πέρα θα τα ονομάζουμε για απλότητα *συμμετρικά* ή *κενтραρισμένα* αντίστοιχα). Αν $K \in \mathcal{SK}_n$ ή $K \in \mathcal{CK}_n$ τότε η οικογένεια των *θέσεων* του K είναι το σύνολο $\{T(K) : T \in SL(n)\}$. Στόχος μας σε αυτήν την διατριβή είναι να μελετήσουμε και να συγκρίνουμε μερικές από τις κλασικές θέσεις των συμμετρικών κυρτών σωμάτων, οι οποίες χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στη μελέτη των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα. Ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των θέσεων είναι ότι εμφανίζονται σαν λύσεις προβλημάτων της ακόλουθης μορφής: Δοθέντος ενός συναρτησοειδούς f πάνω στην κλάση των κυρτών σωμάτων, ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο της $T \mapsto f(T(K))$ πάνω από όλους τους $T \in SL(n)$. Οι θέσεις που περιγράφουμε παρακάτω εμφανίζονται σαν λύσεις προβλημάτων αυτού του τύπου:

(i) Η *ισοτροπική θέση* $K_{(i)}$ του K ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές

$$T \mapsto I_2(T(K)) = \left(\int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \right)^{1/2}.$$

(ii) Η *θέση ελάχιστης επιφάνειας* $K_{(s)}$ του K ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές $T \mapsto \partial(T(K))$, όπου $\partial(A)$ είναι η επιφάνεια του A.

(iii) Η *θέση ελάχιστου μέσου πλάτους* $K_{(w)}$ του K ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές $T \mapsto w(T(K))$, όπου $w(A)$ είναι το μέσο πλάτος του A.

(iv) Η *θέση John* $K_{(j)}$ του K μεγιστοποιεί το συναρτησοειδές $T \mapsto r(T(K))$, όπου $r(A)$ είναι η εσωτερική (ή εγγεγραμμένη) ακτίνα του A.

(v) Η *θέση Löwner* $K_{(\ell)}$ του K ελαχιστοποεί το συναρτησοειδές $T \mapsto R(T(K))$, όπου $R(A)$ είναι η εξωτερική (ή περιγεγραμμένη) ακτίνα του A.

Όλες αυτές οι θέσεις προσδιορίζονται «μονοσήμαντα»: αν $K_{(x)}$ είναι μία από αυτές τις κλασικές θέσεις τότε το $K'_{(x)}$ βρίσκεται στην ίδια θέση αν και μόνο αν υπάρχει $U \in O(n)$ τέτοιος ώστε $K'_{(x)} = U(K_{(x)})$. Ένα άλλο κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των θέσεων είναι ότι περιγράφονται από ισοτροπικές συνθήκες: γενικά, λέμε ότι ένα μέτρο Borel μ στην S^{n-1} λέγεται *ισοτροπικό* αν

$$\int_{S^{n-1}} \langle x, \theta \rangle^2 d\mu(x) = \frac{\mu(S^{n-1})}{n}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Με βάση αυτήν την ορολογία, έχουμε τα εξής:

(i) Από το θεώρημα του John, αν το συμμετρικό κυρτό σώμα K βρίσκεται στη θέση John τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ του $r(K)^{-1}K$ και της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο μ στην S^{n-1} που δίνει βάρος c_j στο $\{u_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, είναι ισοτροπικό. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι, αντίστροφα, αν υπάρχει ένα ισοτροπικό μέτρο μ με φορέα τα σημεία επαφής του $r(K)^{-1}K$ και της B_2^n τότε το K βρίσκεται στη θέση John. Τελείως αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν για τη θέση Löwner.

(ii) Από ένα θεώρημα των Γιαννόπουλου και V. Milman, ένα λείο κυρτό σώμα K βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους αν και μόνο αν

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u) \langle u, \theta \rangle^2 d\sigma(u) = \frac{w(K)}{n}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν το μέτρο ν_K που έχει πυκνότητα h_K ως προς το σ είναι ισοτροπικό.

(iii) Από ένα θεώρημα του Petty, ένα κυρτό σώμα K βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας αν και μόνο αν το επιφανειακό του μέτρο σ_K στην S^{n-1} είναι ισοτροπικό.

Μελετάμε προβλήματα που αφορούν τις κλασικές θέσεις ενός κυρτού σώματος, χρησιμοποιώντας την ισοτροπική περιγραφή τους. Μια αναλυτική περιγραφή των αποτελεσμάτων της διατριβής δίνεται στην Παράγραφο 2.2. Δίνουμε εδώ μια συνοπτική εικόνα:

(i) Η M-θέση ενός κυρτού σώματος ορίστηκε ισομορφικά από τον V. Milman και παίζει βασικό ρόλο στην ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία. Μια βασική ιδιότητα της M-θέσης περιγράφεται από την ακόλουθη πρόταση: υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ τέτοια ώστε, κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ όγκου $|\tilde{K}| = 1$ που ικανοποιεί την

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant \beta,$$

όπου $\overline{B}_2^n$ είναι το πολλαπλάσιο όγκου 1 της B_2^n. Το ερώτημα αν η θέση ελάχιστης επιφάνειας του K ικανοποιεί αυτήν την ανισότητα για κάποια απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ τέθηκε από τους Γιαννόπουλο και V. Milman και απαντήθηκε με αρνητικό τρόπο από τον Σαρόγλου. Δίνουμε μια διαφορετική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος: υπάρχει unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας και ικανοποιεί την

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{n}.$$

Αποδεικνύουμε επίσης ότι «modulo» την τιμή της ισοτροπικής σταθεράς L_K του K, ο εκθέτης $1/8$ είναι βέλτιστος: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας,

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant C\sqrt[8]{n}L_K.$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο δείχνουμε ότι υπάρχει unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι σε θέση ελάχιστου μέσου πλάτους και ικανοποιεί την

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{\log n}.$$

Δείχνουμε επίσης ότι υπάρχει unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, που είναι στη θέση John, τέτοιο ώστε $|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{n}$.

(ii) Δίνουμε αρνητική απάντηση σε ένα ερώτημα των Γιαννόπουλου και Παπαδημητράκη σχετικά με τη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Στο [37] αποδεικνύεται ότι αν το K είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας και έχει όγκο 1 τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2^{-n}$, η τυχαία $(n-1)$-διάστατη προβολή $P_{\theta^\perp}(K)$ του K έχει όγκο μεγαλύτερο από c, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και τίθεται το ερώτημα αν η $|P_{\theta^\perp}(K)| \geqslant c$ ισχύει *για κάθε* $\theta \in S^{n-1}$. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας, τέτοιο ώστε

$$\min_{\theta \in S^{n-1}} |P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Δίνουμε επίσης άνω φράγμα για το μέσο πλάτος ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ που είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας:

$$w(K) \leqslant C\frac{n^{3/2}}{\partial(K)},$$

όπου $\partial(K) \geqslant c\sqrt{n}$ είναι η (ελάχιστη) επιφάνεια του K και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

(iii) Ορίζουμε την *απόσταση Schatten* δύο κλασικών θέσεων $K_{(x)}$ και $K_{(y)}$ του K ως εξής:

$$d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)}) := \frac{{\rm tr}(\sqrt{T^*T})}{n},$$

όπου $T \in SL(n)$ είναι ένας γραμμικός τελεστής για τον οποίο $T(K_{(x)}) = K_{(y)}$. Αφού όλες οι κλασικές θέσεις του K ορίζονται μονοσήμαντα modulo ορθογώνιους μετασχηματισμούς, η $d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)})$ είναι καλά ορισμένη. Δίνουμε διάφορα επιχειρήματα τα οποία οδηγούν σε άνω φράγματα για την απόσταση $d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)})$. Σε όλα αυτά τα επιχειρήματα, βασικό ρόλο παίζουν οι ισοτροπικοί χαρακτηρισμοί των διαφόρων θέσεων. Αποτέλεσμα των εκτιμήσεων που προκύπτουν είναι οι ανισότητες στον επόμενο πίνακα:

	$K_{(i)}$	$K_{(s)}$	$K_{(w)}$	$K_{(j)}$	$K_{(\ell)}$
$K_{(i)}$	1	$\frac{\sqrt{n}}{L_K}$	$\frac{\sqrt{n}\log n}{L_K}$	$\frac{\sqrt{n}}{L_K}$	$\frac{\sqrt{n}}{L_K}$
$K_{(s)}$	$\sqrt{n}L_K$	1	$\frac{\sqrt{n}\log n}{r_s(n)}$	$\frac{\sqrt{n}}{r_s(n)}$	$\frac{n}{r_s(n)}$
$K_{(w)}$	$(\log n)^2 L_K$	$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$
$K_{(j)}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}\log n$	1	$\sqrt{n}$
$K_{(\ell)}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}\log n$	$\sqrt{n}$	1

όπου $r_s(n) = \min\{r(K_{(s)}) : K \in \mathcal{SK}_n\}$ και L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K.

(iv) Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in {\rm int}(K)$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $F \in G_{n,k}$ ορίζουμε

$$g(K,k;F) := \big(|P_F(K)|\,|K\cap F^{\perp}|\big)^{1/k},$$

όπου με $F^{\perp}$ συμβολίζουμε τον ορθογώνιο υπόχωρο του F στον $\mathbb{R}^n$. Μια κλασική ανισότητα των Rogers και Shephard μας λέει ότι αν το K είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων τότε

$$1 \leqslant g(K,k;F) \leqslant \binom{n}{k}^{1/k} \leqslant \frac{c_0 n}{k},$$

όπου $c_0 > 0$ είναι απόλυτη σταθερά. Αποδεικνύουμε ότι αν το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση τότε η «τυπική συμπεριφορά» της $g(K,k;F)$ βρίσκεται «στη μέση»: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την

$$c_1 L_K^{-1}\sqrt{n/k} \leqslant g(K,k;F) \leqslant c_2\sqrt{n/k}(\log n)^2 L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-k}$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Η προσέγγισή μας οδηγεί σε μερικά κάτω και άνω φράγματα που μπορεί να φανούν χρήσιμα και για άλλες θέσεις του K, όπως η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους ή η θέση ελάχιστης επιφάνειας ή η θέση John.

(v) Μελετάμε το ερώτημα να δοθούν γενικά άνω φράγματα για την ποσότητα

$$\max\{|P_{\theta^\perp}(K)| : \theta \in S^{n-1}\}$$

όταν το K βρίσκεται σε κάποια από τις κλασικές θέσεις. Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με το να δοθεί άνω φράγμα για την εξωτερική ακτίνα του σώματος προβολών ΠK του K. Ειδικότερα, μας ενδιαφέρει η ισοτροπική περίπτωση, όπου αναζητούμε άνω φράγμα της τάξης της $\sqrt{n}/L_K$ (το ερώτημα αυτό έχει τεθεί από τον Vempala). Αποδεικνύουμε ότι για κάθε unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει $R(\Pi K) \leqslant C\sqrt{n}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επίσης, δείχνουμε ότι ο όγκος της τυχαίας $(n-1)$-διάστατης προβολής ενός κυρτού σώματος το οποίο βρίσκεται στην ισοτροπική θέση ή στη θέση John ή είναι συμμετρικό και βρίσκεται στη θέση Löwner φράσσεται από $C\sqrt{n}$.

(vi) Η έννοια του λόγου όγκων ορίζεται για τυχόν ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και C στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$\mathrm{vr}(C,K) := \inf\left(\frac{|T(C)|}{|K|}\right)^{1/n},$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλους τους $T \in GL(n)$ για τους οποίους $K \subseteq T(C)$. Οι Γιαννόπουλος και Χαρτζουλάκη έχουν δείξει ότι αν K και C είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathrm{vr}(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log n,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εισάγουμε μια γενίκευση της έννοιας του λόγου όγκων: για κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, C στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ορίζουμε τον *k-οστό λόγο όγκων* των C και K θέτοντας

$$\mathrm{vr}_k(C,K) = \inf\left\{\left(\frac{W_{n-k}(TC)}{W_{n-k}(K)}\right)^{1/k} : T \in GL(n),\ K \subseteq T(C)\right\},$$

όπου $W_j(C) := V(C; n-j, B_2^n; j)$ είναι το j-οστό quermassintegral ενός κυρτού σώματος C. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{vr}_n(C,K) = \mathrm{vr}(C,K)$. Δίνουμε μια εκτίμηση για τον $\mathrm{vr}_k(C,K)$ υποθέτοντας ότι το K βρίσκεται στην ℓ-θέση (η οποία είναι «ισοδύναμη» με τη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους): αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στην ℓ-θέση, τότε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε:

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log(1+d_C)\log(1+d_K),$$

όπου $d_K := d(K, B_2^n)$ είναι η απόσταση Banach-Mazur του K από την B_2^n και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant c\sqrt{n}(\log n)^2.$$

(vii) Ορίζουμε την k-οστή ελαχιστική θέση ενός ζεύγους συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και C στον $\mathbb{R}^n$: αν $0 \leqslant k \leqslant n-1$ τότε λέμε ότι το C βρίσκεται στην *k-οστή ελαχιστική θέση* ως προς το K αν $K \subseteq C$ και $W_k(C) \leqslant W_k(T(C))$ για κάθε $T \in GL(n)$ με $K \subseteq T(C)$. Αφού $W_0(C) = |C|$, η 0-οστή ελαχιστική θέση του C ως προς το K συμπίπτει με τη θέση ελάχιστου όγκου. Δείχνουμε ότι αν K είναι ένα λείο συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν η B_2^n βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους ως προς το K τότε η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K, δηλαδή το K βρίσκεται στη θέση Löwner. Στην πραγματικότητα μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω: η B_2^n βρίσκεται στην k-οστή ελαχιστική θέση ως προς το K για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Αντίστοιχο αποτέλεσμα μπορούμε να δείξουμε στην δυϊκή περίπτωση όπου η B_2^n έχει μέγιστο μέσο πλάτος ανάμεσα σε όλα τα ελλειψοειδή που περιέχονται σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι το K βρίσκεται στη θέση John.

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n και σ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Για κάθε $k\leqslant n$ και $F\in G_{n,k}$ συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον F. Επίσης, ορίζουμε $B_F=B_2^n\cap F$ και $S_F=S^{n-1}\cap F$. Για κάθε $1\leqslant p\leqslant\infty$ συμβολίζουμε τη μοναδιαία μπάλα του ℓ_p^n με B_p^n. Ειδικότερα, γράφουμε Q_n για τον κύβο $B_\infty^n=[-1,1]^n$ και $C_n=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ για τον κύβο όγκου 1.

Τα γράμματα $c,c',c_1,c_2,\dots$ συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, η τιμή των οποίων μπορεί να αλλάζει από γραμμή σε γραμμή. Γράφοντας $a\simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$ τέτοιες ώστε $c_1a\leqslant b\leqslant c_2a$. Επίσης, αν $K,L\subseteq\mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K\simeq L$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$ τέτοιες ώστε $c_1K\subseteq L\subseteq c_2K$.

Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου δίνουμε βασικούς ορισμούς και αναφέρουμε κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων και της ασυμπτωτικής γεωμετρικής ανάλυσης, τα οποία θα χρησιμοποιούμε συχνά σε αυτήν την διατριβή. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των Gardner [28] και Schneider [65] για την κλασική θεωρία Brunn-Minkowski και στο βιβλίο των Artstein, Γιαννόπουλου και V. Milman [1] για τα βασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας. Το άρθρο [54] των V. Milman και Pajor και το βιβλίο [21] περιέχουν όλα όσα θα χρειαστούμε από τη θεωρία των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

1.1 Κυρτά σώματα

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το C είναι συμμετρικό αν «$x \in C$ αν και μόνον αν $-x \in C$». Λέμε ότι το C είναι *κεντραρισμένο* αν έχει *κέντρο βάρους* το 0 (την αρχή των αξόνων), δηλαδή αν

$$\int_C \langle x, \theta \rangle \, dx = 0 \tag{1.1.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_C : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ του κυρτού σώματος C με $0 \in \mathrm{int}(C)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_C(x) = \max\{t > 0 : tx \in C\}. \tag{1.1.2}$$

Η *συνάρτηση στήριξης* του C ορίζεται για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$h_C(y) = \max\{\langle x, y \rangle : x \in C\}. \tag{1.1.3}$$

Λέμε ότι το C είναι *λείο* αν η h_C είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Παρατηρήστε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_C(\theta) \leqslant h_C(\theta)$. Το *μέσο πλάτος* του C είναι η ποσότητα

$$w(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(\theta) \, d\sigma(\theta). \tag{1.1.4}$$

Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* (ή *εξωτερική ακτίνα*) του C είναι η

$$R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}. \tag{1.1.5}$$

Πολλές φορές, για σώματα C με $0 \in \mathrm{int}(C)$ λέμε την παραπάνω ποσότητα *διάμετρο* του σώματος. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι δυο ποσότητες είναι ισοδύναμες:

$$R(C) \leqslant \mathrm{diam}(C) \leqslant 2R(C), \tag{1.1.6}$$

όπου $\mathrm{diam}(C) = \sup\{\|x - y\|_2 : x, y \in C\}$. Αν το 0 είναι εσωτερικό σημείο του C, γράφουμε $r(C)$ για την εγγεγραμμένη ακτίνα του C (τον μεγαλύτερο $r > 0$ για τον οποίο $rB_2^n \subseteq C$). Η *ακτίνα όγκου* του C είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vrad}(C) = \left(\frac{|C|}{|B_2^n|} \right)^{1/n}. \tag{1.1.7}$$

Το *πολικό σώμα* C° του C ορίζεται να είναι το

$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } y \in C\}. \tag{1.1.8}$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

(α) $0 \in C^\circ$.

(β) Αν $0 \in \mathrm{int}(C)$, τότε $(C^\circ)^\circ = C$.

(γ) Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{C^\circ}(\theta) = 1/h_C(\theta)$.

(δ) Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

Γράφουμε $\overline{C}$ για την *ομοιοθετική εικόνα* όγκου 1 του κυρτού σώματος $C \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\overline{C} := \frac{C}{|C|^{1/n}}$.

1.1α΄ Βασικές ανισότητες

Κάποιες βασικές ανισότητες για όγκους κυρτών σωμάτων οι οποίες θα φανούν χρήσιμες είναι οι ακόλουθες:

(α) Η ανισότητα Brunn-Minkowski. Αν K και T είναι δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|K+T|^{1/n} \geqslant |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1.1.9}$$

Η (1.1.9) εκφράζει το γεγονός ότι ο όγκος είναι «κοίλη συνάρτηση» ως προς το άθροισμα Minkowski. Για το λόγο αυτό, συχνά την γράφουμε στην ακόλουθη μορφή: Αν K και T είναι δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geqslant \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{1.1.10}$$

Από την (1.1.10) και από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έπεται ότι

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geqslant |K|^{\lambda} |T|^{1-\lambda}. \tag{1.1.11}$$

(β) Η ανισότητα του Urysohn. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(C) \geqslant \left(\frac{|C|}{|B_2^n|} \right)^{1/n}. \tag{1.1.12}$$

(γ) Η ανισότητα Blaschke–Santaló. Αν C είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα αν το C έχει κέντρο βάρους το 0, τότε

$$|C|\,|C^\circ| \leqslant |B_2^n|^2. \tag{1.1.13}$$

(δ) Η ανισότητα των Bourgain–Milman. Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(C)$ ισχύει

$$|C|\,|C^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|. \tag{1.1.14}$$

Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως αντίστροφη ανισότητα Santaló.

(ε) Η ανισότητα των Rogers-Shephard. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|C-C| \leqslant \binom{2n}{n}|C|, \tag{1.1.15}$$

όπου $C-C := \{x-y : x, y \in C\}$ είναι το *σώμα διαφορών* του C.

1.1β′ Μεικτοί όγκοι

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_n$ τον κυρτό κώνο (με την πρόσθεση κατά Minkowski και τον πολλαπλασιασμό με μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς) των μη κενών, συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και με $\mathcal{SK}_n$ την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε επίσης $\mathcal{CK}_n$ για την κλάση των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Από το θεμελιώδες θεώρημα του Minkowski, αν $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}_n$, $m \in \mathbb{N}$, τότε ο όγκος του $t_1K_1 + \cdots + t_mK_m$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς τους $t_i > 0$. Δηλαδή,

$$|t_1K_1 + \cdots + t_mK_m| = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant m} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}) t_{i_1} \ldots t_{i_n}, \tag{1.1.16}$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ επιλέγονται ώστε να είναι ανεξάρτητοι από τις μεταθέσεις των K_{i_j} (δηλαδή, για κάθε μετάθεση $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ να ισχύει $V(K_{i_{\sigma(1)}}, \ldots K_{i_{\sigma(n)}}) = V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$). Ο συντελεστής $V(K_1, \ldots, K_n)$ είναι ο *μεικτός* όγκος των $K_1, \ldots, K_n$.

Ειδικότερα, αν K και C είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε η συνάρτηση $|K+tC|$ είναι πολυώνυμο του $t \in [0, \infty)$:

$$|K+tC| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_j(K, C)\, t^j, \tag{1.1.17}$$

όπου $V_j(K, C) = V(K; n-j, C; j)$ είναι ο j-οστός μεικτός όγκος των K και C (χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $C; j$ για την j-άδα $C, \ldots, C$). Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$V_1(K, C) = \frac{1}{n} \lim_{t \to 0^+} \frac{|K+tC| - |K|}{t}, \tag{1.1.18}$$

και από την ανισότητα Brunn-Minkowski βλέπουμε ότι

$$V_1(K, C) \geqslant |K|^{\frac{n-1}{n}} |C|^{\frac{1}{n}} \tag{1.1.19}$$

για όλα τα K και C (αυτή είναι η *πρώτη ανισότητα του Minkowski*).

Ο τύπος του Steiner είναι ειδική περίπτωση της (1.1.17): ο όγκος του $K + tB_2^n$, $t > 0$, μπορεί να εκφραστεί σαν πολυώνυμο του t:

$$|K + tB_2^n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_{n-k}(K) t^{n-k}, \tag{1.1.20}$$

όπου $W_{n-k}(K) := V(K; k, B_2^n; n-k)$ είναι το $(n-k)$-οστό quermassintegral του K. Τα quermassintegrals είναι μονότονα, συνεχή ως προς την Hausdorff μετρική και ομογενή βαθμού $n-k$.

Η *επιφάνεια* $\partial(K)$ ενός κυρτού σώματος K ορίζεται ως εξής:

$$\partial(K) = \lim_{t \to 0^+} \frac{|K + tB_2^n| - |K|}{t}. \tag{1.1.21}$$

Η *ισοπεριμετρική ανισότητα* ισχυρίζεται ότι ανάμεσα σε όλα τα κυρτά σώματα που έχουν τον ίδιο όγκο, η μπάλα έχει τη μικρότερη επιφάνεια. Ο ισχυρισμός αυτός είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν γράψουμε $|K| = |rB_2^n|$ για κάποιον $r > 0$, τότε για κάθε $t > 0$

$$|K + tB_2^n|^{1/n} \geqslant |K|^{1/n} + t|B_2^n|^{1/n} = (r + t)|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.1.22}$$

Συνεπώς, η επιφάνεια $\partial(K)$ του K ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \partial(K) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{|K + tB_2^n| - |K|}{t} \geqslant \lim_{t \to 0^+} \frac{(r + t)^n - r^n}{t} |B_2^n| \\ &= nr^{n-1} |B_2^n|, \end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει ότι

$$\partial(K) \geqslant n|B_2^n|^{\frac{1}{n}} |K|^{\frac{n-1}{n}} \tag{1.1.23}$$

με ισότητα αν $K = rB_2^n$. Ειδικότερα, αν $|K| = 1$ τότε έχουμε

$$\partial(K) \geqslant n|B_2^n|^{\frac{1}{n}} \geqslant c\sqrt{n}. \tag{1.1.24}$$

Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ θεωρούμε την κανονικοποιημένη εκδοχή του $W_{n-k}(K)$

$$Q_k(K) = \left(\frac{W_{n-k}(K)}{\omega_n} \right)^{1/k} = \left(\frac{1}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k}, \tag{1.1.25}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι ο τύπος του Kubota, μια πολύ χρήσιμη ταυτότητα η οποία εκφράζει το $W_{n-k}(K)$ ως τη μέση τιμή των όγκων των k-διάστατων προβολών του K. Παρατηρήστε ότι $Q_1(K) = w(K)$.

Η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel μας λέει ότι αν μας δοθούν μη κενά συμπαγή και κυρτά σύνολα K, C και $K_3, \ldots, K_n \in \mathcal{K}_n$, τότε

$$V(K, C, K_3, \ldots, K_n)^2 \geqslant V(K, K, K_3, \ldots, K_n) V(C, C, K_3, \ldots, K_n). \tag{1.1.26}$$

Από την (1.1.26) έπεται ότι η ακολουθία $(W_0(K), \ldots, W_n(K))$ είναι λογαριθμικά κοίλη: έχουμε $W_j^{k-i} \geqslant W_i^{k-j} W_k^{j-i}$ για κάθε $0 \leqslant i < j < k \leqslant n$. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός και τον ορισμό των $Q_k(K)$ ελέγχουμε ότι η $Q_k(K)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του k.

Τα μεικτά επιφανειακά μέτρα ορίστηκαν από τον Aleksandrov και είναι, κατά κάποιον τρόπο, μια τοπική γενίκευση των μεικτών όγκων. Για κάθε $(n-1)$-άδα $\mathcal{L} = (K_1, \ldots, K_{n-1})$ στοιχείων του $\mathcal{K}_n$, το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός μέτρου Borel $S(\mathcal{L}, \cdot)$ στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} με την ιδιότητα

$$V(C, K_1, \ldots, K_{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_C(u) dS(\mathcal{L}, u) \tag{1.1.27}$$

για κάθε $C \in \mathcal{K}_n$. Το k-οστό επιφανειακό μέτρο του K ορίζεται να είναι το $S_k(K, \cdot) = S(K; k, B_2^n; n-k-1, \cdot)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Άμεση συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι τα quermassintegrals του K μπορούν να αναπαρασταθούν στην μορφή

$$W_k(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_K(u) dS_{n-k-1}(K, u), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.1.28}$$

Το μέτρο $\sigma_K := S(K, \ldots, K)$, το οποίο αντιστοιχεί στην περίπτωση $k = n-1$, είναι το επιφανειακό μέτρο του K. Ο μεικτός όγκος $V_1(K, C)$ εκφράζεται ως

$$V_1(K, C) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_C(u) d\sigma_K(u). \tag{1.1.29}$$

Παρατηρήστε ότι η επιφάνεια του K ικανοποιεί την

$$\partial(K) = n V_1(K, B_2^n). \tag{1.1.30}$$

1.1γ΄ Αριθμοί κάλυψης

Έστω A, B δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Ο *αριθμός κάλυψης του A από το B* είναι ο ελάχιστος φυσικός N για τον οποίο υπάρχουν N μεταφορές του B των οποίων η ένωση καλύπτει το A:

$$N(A, B) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B) \right\}. \tag{1.1.31}$$

Μια παραλλαγή του παραπάνω αριθμού κάλυψης είναι ο ακόλουθος αριθμός:

$$\overline{N}(A,B) = \min\left\{N\in\mathbb{N}:\ \exists x_1,\dots,x_N\in A \text{ ώστε } A\subseteq\bigcup_{j=1}^{N}(x_j+B)\right\}. \tag{1.1.32}$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $N(A,B)\leqslant\overline{N}(A,B)$. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\overline{N}(A,B-B)\leqslant N(A,B)$. Ειδικότερα, αν το B είναι συμμετρικό και κυρτό, τότε $\overline{N}(A,2B)\leqslant N(A,B)$. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αριθμών κάλυψης: αν A,B,C είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε:

(i) $N(A,B)\leqslant N(A,B)\cdot N(B,C)$.

(ii) Αν το B είναι συμμετρικό, τότε

$$2^{-n}\frac{|A+B|}{|B|}\leqslant N(A,B)\leqslant 2^n\frac{|A+B|}{|B|}. \tag{1.1.33}$$

(iii) Αν τα A,B,C είναι συμμετρικά κυρτά σώματα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|A+B|^{1/n}\leqslant c_1|A+C|^{1/n}|B+C|^{1/n}, \tag{1.1.34}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Έστω A,B κυρτά σώματα με το B συμμετρικό. Για κάθε $t>0$ ορίζουμε

$$S_t(A,B) = \max\{m\in\mathbb{N}:\ \exists x_1,\dots,x_m\in A \text{ ώστε } \|x_i-x_j\|_B>t \text{ για } i\neq j\}. \tag{1.1.35}$$

Από τον ορισμό ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(A,tB)\leqslant S_t(A,B)\leqslant\overline{N}(A,\tfrac{t}{2}B). \tag{1.1.36}$$

Τέλος, θα χρειαστούμε δύο βασικά θεωρήματα για αριθμούς κάλυψης. Το πρώτο είναι η ανισότητα του Sudakov:

Θεώρημα 1.1.1 (Sudakov). *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$N(K,tB_2^n)\leqslant 2\exp\left(cn\left(\frac{w(K)}{t}\right)^2\right), \tag{1.1.37}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε από τους Artstein-Milman-Szarek και εκφράζει τον δυϊσμό των αριθμών κάλυψης, όταν ένα από τα δυο σώματα είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα.

Θεώρημα 1.1.2 (Artstein-Milman-Szarek). *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\log N(K, B_2^n) \leqslant c_1 \log N(B_2^n, c_2 K^\circ), \tag{1.1.38}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

1.2 Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0 : x \in tK\} \tag{1.2.1}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα· αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του X είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Έστω X, Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Η *απόσταση Banach–Mazur* του X από τον Y ορίζεται ως

$$d(X, T) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\}. \tag{1.2.2}$$

Σε γεωμετρική γλώσσα η απόσταση Banach–Mazur περιγράφεται ως εξής: Αν $X = X_K$ και $Y = X_L$ (δηλαδή οι μοναδιαίες μπάλες των X, Y είναι τα κυρτά σώματα K, L αντίστοιχα) τότε ο $d(X, Y)$ είναι ο μικρότερος $d > 0$ ώστε

$$L \subseteq T(K) \subseteq dL \tag{1.2.3}$$

για κάποιον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T. Είναι προφανές ότι $d(X, Y) \geqslant 1$ για κάθε δύο n-διάστατους χώρους, με ισότητα αν και μόνον αν οι χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Έτσι, η απόσταση Banach-Mazur μετράει πόσο διαφέρουν δύο χώροι από το να είναι ισομετρικοί.

Θα χρησιμοποιούμε συχνά το κλασικό θεώρημα του John (το οποίο θα συζητηθεί εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο).

Θεώρημα 1.2.1. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νορμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ισχύει*

$$d(X, \ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}. \tag{1.2.4}$$

Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^n$ με $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Θα λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι unconditional αν η $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι 1-unconditional βάση για τη νόρμα $\|\cdot\|_K$ που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$ έχουμε

$$\big\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\big\|_K = \big\|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\big\|_K. \tag{1.2.5}$$

Σε μια πιο γεωμετρική γλώσσα, το K είναι unconditional αν και μόνο αν είναι συμμετρικό ως προς όλους τους υποχώρους συντεταγμένων $e_j^{\perp}$, $j = 1, \ldots, n$.

Θα λέμε ότι το K είναι 1-συμμετρικό αν για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$, και για κάθε μετάθεση σ του $\{1, \ldots, n\}$ και κάθε επιλογη προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$ έχουμε

$$\left\|\varepsilon_1 t_{\sigma(1)} e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_{\sigma(n)} e_n\right\|_K = \left\|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\right\|_K. \tag{1.2.6}$$

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των V. Milman-Schechtman [55], Pisier [61] και Artstein, Γιαννόπουλου και V. Milman [1] για τη θεωρία των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα.

1.2α′ Η ℓ-θέση και η ανισότητα του Pisier

Η ℓ-θέση

Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω α μια νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$. Η *δυϊκή ως προς το ίχνος νόρμα* ορίζεται στον $L(X, \ell_2^n)$ ως εξής:

$$\alpha^*(v) = \sup\{\mathrm{tr}(vu) : \alpha(u) \leqslant 1\}. \tag{1.2.7}$$

Το λήμμα του Lewis [46] ισχύει για κάθε ζευγάρι δυϊκών ως προς το ίχνος νορμών:

Θεώρημα 1.2.2. *Για κάθε νόρμα α στον $L(\ell_2^n, X)$, υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε $\alpha(u) = 1$ και $\alpha^*(u^{-1}) = n$.*

Η *ℓ-νόρμα* στον $L(\ell_2^n, X)$ ορίστηκε από τους Figiel και Tomczak-Jaegermann στο [27]. Έστω $\{g_1, \ldots, g_n\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $u : \ell_2^n \to X$ ορίζουμε την ℓ-νόρμα του u ως εξής:

$$\ell(u) = \left(\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{i=1}^n g_i u(e_i)\Big\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.2.8}$$

Ένας απλός υπολογισμός μας δίνει ότι

$$\ell(u) \simeq \sqrt{n}\, w((u^{-1})^*(K^\circ)), \tag{1.2.9}$$

όπου K είναι η μοναδιαία μπάλα του X. Αυτή η σχέση συνδέει την ℓ-νόρμα με το μέσο πλάτος. Ένα απλούστερο μοντέλο προκύπτει αν στη θέση των κανονικών τυχαίων μεταβλητών θεωρήσουμε τις Rademacher συναρτήσεις $r_i : E_2^n \to \{-1, 1\}$ που ορίζονται μέσω των

$r_i(\varepsilon) = \varepsilon_i$, όπου βλέπουμε τον $E_2^n = \{-1,1\}^n$ σαν χώρο πιθανότητας με το ομοιόμορφο μέτρο. Από μια ανισότητα των Maurey και Pisier έπεται ότι

$$\ell(u) \simeq \left(\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \Big\|^2 d\varepsilon \right)^{1/2}. \tag{1.2.10}$$

Το σύμβολο $\simeq$ σημαίνει εδώ ότι οι δύο ποσότητες διαφέρουν κατά έναν όρο τάξης το πολύ ίσης με $\sqrt{\log n}$.

Θεωρούμε τις Walsh συναρτήσεις $w_A(\varepsilon) = \prod_{i\in A} r_i(\varepsilon)$, όπου $A \subseteq \{1,\dots,n\}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι κάθε συνάρτηση $f : E_2^n \to X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon) x_A, \tag{1.2.11}$$

για κάποια διανύσματα $x_A \in X$. Ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_2(X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|^2 d\epsilon \right)^{1/2} \tag{1.2.12}$$

Η *Rademacher προβολή* $R_n : L_2(X) \to L_2(X)$ είναι ο τελεστής που απεικονίζει την $f = \sum w_A x_A$ στη συνάρτηση $R_n f := \sum_{i=1}^n r_i x_{\{i\}}$. Γράφουμε $\mathrm{Rad}(X)$ για την νόρμα του τελεστή R_n. Οι Figiel και Tomczak-Jaegermann [27] απέδειξαν το εξής:

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε*

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leqslant n\mathrm{Rad}(X). \tag{1.2.13}$$

Θα περιγράψουμε τις βασικές ιδέες της απόδειξης τους. Από το Θεώρημα 1.2.2 μπορούμε να βρούμε έναν ισομορφισμό $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιον ώστε $\ell(u)\ell^*(u^{-1}) = n$. Από την άλλη πλευρά,

$$\ell\left((u^{-1})^*\right) = \left(\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)(u^{-1})^*(e_i) \Big\|_*^2 d\epsilon \right)^{1/2}. \tag{1.2.14}$$

Υπάρχει συνάρτηση $\phi : E_2^n \to X$, που μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή $\phi = \sum_A w_A x_A$ και έχει νόρμα $\|\phi\|_{L_2(X)} = 1$, τέτοια ώστε

$$\ell((u^{-1})^*) = \Big\langle \sum_{i=1}^n r_i (u^{-1})^*(e_i), \phi \Big\rangle = \sum_{i=1}^n \langle (u^{-1})^*(e_i), x_{\{i\}} \rangle. \tag{1.2.15}$$

Αν ορίσουμε $v : \ell_2^n \to X$ όπου $v(e_i) = x_{\{i\}}$, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\ell((u^{-1})^*) = \mathrm{tr}(u^{-1}v) \leqslant \ell^*(u^{-1})\ell(v). \tag{1.2.16}$$

Τελικά παρατηρούμε ότι

$$\ell(v) = \|R_n(\phi)\|_{L_2(X)} \leqslant \mathrm{Rad}(X)\|\phi\|_{L_2(X)} = \mathrm{Rad}(X), \tag{1.2.17}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leqslant \ell(u)\ell^*(u^{-1})\mathrm{Rad}(X) = n\mathrm{Rad}(X). \tag{1.2.18}$$

Η ανισότητα του Pisier και η MM^*-ανισότητα

Ο Pisier έδωσε στο [59] μια ακριβή εκτίμηση για την $\mathrm{Rad}(X)$ συναρτήσει της απόστασης Banach-Mazur $d(X, \ell_2^n)$.

Θεώρημα 1.2.4. *Εστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Τότε,*

$$\mathrm{Rad}(X) \leqslant c\log[d(X, \ell_2^n) + 1] \leqslant c\log(n+1), \tag{1.2.19}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το θεώρημα του John.

Σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Lewis, Figiel και Tomczak-Jaegermann, το Θεώρημα 1.2.4 οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.2.5 (MM^*-ανισότητα)**.** *Εστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μια θέση $\tilde{K}$ του K για την οποία*

$$w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) \leqslant c\log[d(X_K, \ell_2^n) + 1] \leqslant c\log(n+1), \tag{1.2.20}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Υπολογίζοντας τον όγκο του $\tilde{K}$ σε πολικές συντεταγμένες και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι $w(\tilde{K}^\circ)^{-1} \leqslant c_2\sqrt{n}|\tilde{K}|^{1/n}$. Έπεται ότι

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n|\tilde{K}|^{1/n}. \tag{1.2.21}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο παίρνουμε την εξής *αντίστροφη ανισότητα Urysohn*.

Θεώρημα 1.2.6. *Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει μια γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο $|\tilde{K}| = 1$ και μέσο πλάτος*

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n, \tag{1.2.22}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Επιπλέον, με ένα απλό επιχείρημα που βασίζεται στην ανισότητα Rogers-Shephard μπορούμε να δούμε ότι η υπόθεση της συμμετρίας στο προηγούμενο θεώρημα δεν είναι απαραίτητη.

1.2β′ M-θέση

Το παρακάτω θεώρημα του Milman ([52], βλέπε επίσης [53]) εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός «M-ελλειψοειδούς» για κάθε κυρτό σώμα.

Θεώρημα 1.2.7. *Υπάρχει μια σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 υπάρχει ένα 0-συμμετρικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}_K$ τέτοιο ώστε $|K|=|\mathcal{E}_K|$ και*

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}|\mathcal{E}_K+T|^{1/n} &\leqslant |K+T|^{1/n} \leqslant c|\mathcal{E}_K+T|^{1/n}, \\ \frac{1}{c}|\mathcal{E}_K^\circ+T|^{1/n} &\leqslant |K^\circ+T|^{1/n} \leqslant c|\mathcal{E}_K^\circ+T|^{1/n} \end{aligned} \tag{1.2.23}$$

για κάθε κυρτό σώμα T στον $\mathbb{R}^n$, όπου K° είναι το πολικό του K.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|K|=1$ και ότι ισχύει $\mathcal{E}_K=\overline{B}_2^n$, όπου $\overline{B}_2^n$ είναι η ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό είναι πάντα εφικτό αν εφαρμόσουμε κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό στο K. Στη συνέχεια, θέτοντας $T=\overline{B}_2^n$, από τις (1.2.23) παίρνουμε

$$|K+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant C_1 \quad \text{και} \quad |\overline{K^\circ}+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant C_2. \tag{1.2.24}$$

όπου $C_1,C_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Με άλλα λόγια, υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $\beta>0$ ώστε: κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ με $|\tilde{K}|=1$ που ικανοποιεί τις

$$|\tilde{K}+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant \beta \quad \text{και} \quad |\overline{\tilde{K}^\circ}+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant \beta. \tag{1.2.25}$$

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0, που ικανοποιεί τις (1.2.25) είναι σε *M-θέση με σταθερά β*. Αν K_1 και K_2 είναι δύο τέτοια κυρτά σώματα, τότε χρησιμοποιώντας την (1.1.34), την ανισότητα Blaschke-Santaló και την αντίστροφή της, εύκολα ελέγχουμε ότι $|K_1+K_2|^{1/n}\leqslant C(\beta)\left(|K_1|^{1/n}+|K_2|^{1/n}\right)$ και $|K_1^\circ+K_2^\circ|^{1/n}\leqslant C(\beta)\left(|K_1^\circ|^{1/n}+|K_2^\circ|^{1/n}\right)$, όπου $C(\beta)$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το β. Αυτή η σχέση μας δίνει την αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski.

Υπενθυμίζουμε τον αριθμό κάλυψης $N(A,B)$ δύο κυρτών σωμάτων A και B: είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός N για τον οποίον υπάρχουν N μεταφορές του B των οποίων η ένωση καλύπτει το A. Εύκολα ελέγχουμε ότι $|A+B|\leqslant N(A,B)|2B|$ και, αν το B είναι συμμετρικό, $|A+B/2|\geqslant N(A,B)|B/2|$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις απλές ανισότητες βλέπουμε ότι κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε M-θέση με σταθερά β ικανοποιεί τις

$$\max\left\{N(K_1,B_2^n),N(B_2^n,K_1),N(K_1^\circ,B_2^n),N(B_2^n,K_1^\circ)\right\}\leqslant \exp(c\beta n), \tag{1.2.26}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και K_1 είναι το πολλαπλάσιο του K που έχει τον ίδιο όγκο με την B_2^n..

Αργότερα, ο Pisier [60] έδωσε μια διαφορετική προσσέγγιση σε αυτό το αποτέλεσμα, που δίνει περισσότερες πληροφορίες για την συμπεριφορά των αριθμών κάλυψης. Η ακριβής διατύπωση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 1.2.8 (Pisier). *Για κάθε $0 < \alpha < 2$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει μια γραμμική εικόνα K_1 του K τέτοια ώστε*

$$\max\{N(K_1, tB_2^n), N(B_2^n, tK_1), N(K_1^\circ, tB_2^n), N(B_2^n, tK_1^\circ)\} \leqslant \exp\left(\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}\right) \tag{1.2.27}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c(\alpha)$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α, και $c(\alpha) = O\big((2-\alpha)^{-\alpha/2}\big)$ καθώς το $\alpha \to 2$.

1.3 Ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος

Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $|K| = 1$, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή έχει κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων), και υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2 \tag{1.3.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι αν το K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (1.3.1) τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int \langle x, e_i\rangle^2 dx = n\alpha^2, \tag{1.3.2}$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $U \in O(n)$ το $U(K)$ είναι επίσης ισοτροπικό.

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η *ισοτροπική συνθήκη* (1.3.1) είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij}. \tag{1.3.3}$$

(ii) Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2 (\mathrm{tr}T). \tag{1.3.4}$$

Κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια *θέση* $\tilde{K}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του K. Αποδεικνύεται ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης. Αν ορίσουμε

$$B(K) = \inf\left\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx : T \in SL(n)\right\} \tag{1.3.5}$$

τότε μια θέση K_1 του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = B(K). \tag{1.3.6}$$

Αν K_1 και K_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $K_2 = U(K_1)$.

Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{ \frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \;\; \Big| \;\; T \in GL(n)\right\} \tag{1.3.7}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από την γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2. \tag{1.3.8}$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται **ισοτροπική σταθερά** του K.

Ένα βασικό ανοικτό πρόβλημα είναι αν υπάρχει ομοιόμορφο άνω φράγμα, ανεξάρτητο από την διάσταση, για τις ισοτροπικές σταθερές όλων των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων.

Εικασία 1.3.1 (εικασία της ισοτροπικής σταθεράς)**.** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$L_K \leqslant C \tag{1.3.9}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \leqslant C^2 \tag{1.3.10}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Αφετηρία της Εικασίας 1.3.1 είναι η λεγόμενη *εικασία του υπερεπιπέδου*, η οποία ρωτάει αν κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 έχει τουλάχιστον μία τομή με $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο η οποία να έχει όγκο μεγαλύτερο από μια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Η σύνδεση γίνεται φανερή από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant |K \cap \theta^{\perp}| \leqslant \frac{c_2}{L_K}, \tag{1.3.11}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Από το Θεώρημα 1.3.2 γίνεται φανερή η σχέση της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς με την ακόλουθη:

Εικασία 1.3.3 (εικασία του υπερεπιπέδου)**.** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ ώστε

$$|K \cap \theta^{\perp}| \geqslant c. \tag{1.3.12}$$

Υποθέτουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου ισχύει. Αν το K είναι ισοτροπικό, το Θεώρημα 1.3.2 δείχνει ότι *όλες* οι τομές $K \cap \theta^{\perp}$ έχουν όγκο φραγμένο από c_2/L_K. Αφού η (1.3.12) πρέπει να ισχύει για τουλάχιστον ένα $\theta \in S^{n-1}$, συμπεραίνουμε ότι $L_K \leqslant c_2/c$. Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει απόλυτο άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά τότε ισχύει η εικασία του υπερεπιπέδου.

Έτσι, η εικασία του υπερεπιπέδου ρωτάει, ισοδύναμα, αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C \tag{1.3.13}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Ο Bourgain απέδειξε στο [14] ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$, και ο Klartag [43] έδωσε το φράγμα $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$. Μια δεύτερη απόδειξη του φράγματος του Klartag δίνεται στο [44].

Κεφάλαιο 2

Αποτελέσματα της διατριβής

2.1 Κλασικές θέσεις κυρτών σωμάτων

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο *θέση* του K εννοούμε κάθε αφινική εικόνα $y + TK$ του K, όπου $y \in \mathbb{R}^n$ και $T \in GL(n)$. Θα ασχοληθούμε κυρίως με την συμμετρική περίπτωση και τις θέσεις $T(K)$, $T \in GL(n)$ ενός συμμετρικού κυρτού σώματος. Στο πλαίσιο της Συναρτησιακής Ανάλυσης δουλεύουμε με μια νόρμα, που έχει το K σαν μοναδιαία μπάλα, και η επιλογή μιας θέσης του K αντιστοιχεί στην επιλογή κατάλληλης Ευκλείδειας δομής στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, η επιλογή μιας θέσης είναι ισοδύναμη με την επιλογη κατάλληλου ελλειψοειδούς. Ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} \leqslant 1 \right\}, \tag{2.1.1}$$

όπου $\{v_i\}_{i\leqslant n}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και οι $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του $\mathcal{E}$, αντίστοιχα). Εύκολα ελέγχουμε ότι $\mathcal{E} = T(B_2^n)$, όπου T είναι ο θετικά ορισμένος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται μέσω των $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Συνεπώς, ο όγκος του $\mathcal{E}$ ισούται με

$$|\mathcal{E}| = \omega_n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{2.1.2}$$

Αντίστροφα, κάθε σύνολο της μορφής $A(B_2^n)$ με $A \in GL(n)$ είναι ελλειψοειδές και έχει όγκο $\omega_n |\det(A)|$.

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε τις πιο βασικές κλασικές θέσεις ενός κυρτού σώματος. Μεταξύ αυτών είναι η θέση John, η θέση Löwner, η θέση ελάχιστης επιφάνειας και η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Όλες αυτές οι θέσεις προκύπτουν από προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου, και χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι κάποιο μέτρο στη σφαίρα S^{n-1}, το οποίο σχετίζεται με το αντίστοιχο κάθε φορά πρόβλημα, είναι ισοτροπικό.

Ορισμός 2.1.1. Ένα μέτρο Borel μ στην S^{n-1} λέγεται *ισοτροπικό* αν

$$\int_{S^{n-1}} \langle x, \theta\rangle^2 d\mu(x) = \frac{\mu(S^{n-1})}{n} \tag{2.1.3}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.1.2. *Έστω μ ένα μέτρο Borel στην S^{n-1}. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το μ είναι ισοτροπικό.*

(β) *Για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$,*

$$\int_{S^{n-1}} \phi_i \phi_j d\mu(\phi) = \frac{\mu(S^{n-1})}{n} \delta_{i,j}. \tag{2.1.4}$$

(γ) *Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{S^{n-1}} \langle \phi, T\phi\rangle d\mu(\phi) = \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \mu(S^{n-1}). \tag{2.1.5}$$

Απόδειξη. Θέτοντας $\theta = e_i$ και $\theta = \frac{e_i + e_j}{\sqrt{2}}$ στην (2.1.3) παίρνουμε την (2.1.4). Στη συνέχεια, παρατηρώντας ότι αν $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ τότε $\langle \phi, T\phi\rangle = \sum_{i,j=1}^n t_{ij}\phi_i\phi_j$, ελέγχουμε ότι η (2.1.4) συνεπάγεται την (2.1.5). Τέλος, εφαρμόζοντας την (2.1.5) για την $T(\phi) = \langle \phi, \theta\rangle\theta$ παίρνουμε την (2.1.3). □

2.1α΄ Η θέση John και η θέση Löwner

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(K)$ την οικογένεια των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι το *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K.

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Θα λέμε ότι το $u \in \mathbb{R}^n$ είναι *σημείο επαφής* του K και της B_2^n αν $\|u\|_2 = \|u\|_K = 1$, δηλαδή αν το u είναι κοινό σημείο των συνόρων τους. Το θεώρημα του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \dots, u_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \dots, c_m$ τέτοιοι ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{2.1.6}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις 2.1.4. Το Θεώρημα 2.1.3 μας εξασφαλίζει ότι ο ταυτοτικός τελεστής I του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί στην μορφή

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j, \tag{2.1.7}$$

όπου $u_j \otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j \otimes u_j)(x) = \langle x, u_j \rangle u_j$. Σημειώστε ότι από την (2.1.6) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle^2. \tag{2.1.8}$$

Επίσης, αν επιλέξουμε $x = e_i$, $i = 1, \dots, n$, όπου $\{e_i\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$n = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_j \langle e_i, u_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \|u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j.$$

Από το θεώρημα 2.1.3 έπεται ότι

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, \theta \rangle^2 = 1 \tag{2.1.9}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Με την ορολογία των ισοτροπικών μέτρων, το μέτρο μ στην S^{n-1} που δίνει βάρος c_j στο $\{u_j\}$, $i = j, \dots, m$, είναι ισοτροπικό. Με αυτή την έννοια, η θέση John είναι μια ισοτροπική θέση. Αντίστροφα (βλέπε [5]) έχουμε:

Πρόταση 2.1.5. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ισοτροπικό μέτρο Borel μ στην S^{n-1} που έχει φορέα τα σημεία επαφής του K και της B_2^n. Τότε, η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.*

Το Θεώρημα 2.1.3 και η Πρόταση 2.1.5 μας δίνουν τον επόμενο χαρακτηρισμό για τη θέση John:

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Τότε, η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K αν και μόνο αν υπάρχει ένα ισοτροπικό μέτρο μ με φορέα τα σημεία επαφής του K και της B_2^n.*

Μια πολύ γνωστή συνέπεια του θεωρήματος 2.1.3 (που συνήθως αποκαλείται το *θεώρημα του John*) λέει ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}\,\mathcal{E}$. Ο ισχυρισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.1.7. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subset \sqrt{n}B_2^n$.*

Απόδειξη. Από την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j\rangle u_j \tag{2.1.10}$$

του Θεωρήματος 2.1.3 και αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j\rangle \leqslant \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad , \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.1.11}$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j, το K και η B_2^n έχουν το ίδιο υπερεπίπεδο στήριξης με κάθετο διάνυσμα το u_j. Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j\rangle \leqslant 1$, και από την συμμετρία του K, $|\langle x, u_j\rangle| \leqslant 1$. Έπεται ότι $\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_2 = 1$, $j = 1, \ldots, m$.

Έστω $x \in K$. Τότε,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j\rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} c_j = n.$$

Αυτό δείχνει ότι $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}$. Επομένως, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$. □

Ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού της θέσης John είναι ο εξής: λέμε ότι το K βρίσκεται στην κανονικοποιημένη θέση John αν $|K| = 1$ και $r(K) \geqslant r(T(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$. Αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο K είναι ένα πολλαπλάσιο rB_2^n της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^n. Το θεώρημα του John (Θεώρημα 2.1.6, [41]) παίρνει τώρα την εξής μορφή: το K βρίσκεται στην κανονικοποιημένη θέση John θέση αν και μόνο αν $B_2^n \subseteq r^{-1}K$ και υπάρχουν

$u_1, \ldots, u_m \in \mathrm{bd}(r^{-1}K) \cap S^{n-1}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε ο ταυτοτικός τελεστής να αναπαρίσταται στη μορφή

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j. \tag{2.1.12}$$

Έχουμε τότε, όπως πριν, την

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, \theta\rangle^2 = 1 \tag{2.1.13}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Ο *λόγος όγκων* ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vr}(K) = \min_{\mathcal{E}}\{(|K|/|\mathcal{E}|)^{1/n}\}, \tag{2.1.14}$$

όπου το minimum παίρνεται πάνω από όλα τα 0-συμμετρικά ελλειψοειδή που περιέχονται στο K. Παρατηρήστε ότι αν το K βρίσκεται στην κανονικοποιημένη θέση John τότε

$$\mathrm{vr}(K) = \left(\frac{|K|}{|r(K)B_2^n|}\right)^{1/n} \simeq \frac{\sqrt{n}}{r(K)}. \tag{2.1.15}$$

Ο Ball απέδειξε στο [6] ότι αν το K βρίσκεται στην (κανονικοποιημένη) θέση John τότε $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(C_n) \simeq \sqrt{n}$ στην συμμετρική περίπτωση και $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\Delta_n) \simeq \sqrt{n}$ στη γενική περίπτωση, όπου C_n είναι ο κύβος όγκου 1 και Δ_n είναι το κανονικό simplex όγκου 1. Στο τέλος αυτής της παραγράφου θα δούμε μια απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, από το οποίο προκύπτει η αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα.

Λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K βρίσκεται στη θέση Löwner αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Ισοδύναμα, αν το πολικό σώμα K° του K βρίσκεται στη θέση John. Επίσης, θα λέμε ότι το K βρίσκεται στην κανονικοποιημένη θέση Löwner αν $|K| = 1$ και υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιος ώστε το λK να βρίσκεται στη θέση Löwner. Από το θεώρημα του John, το K βρίσκεται στην κανονικοποιημένη θέση Löwner αν και μόνο αν $|K| = 1$, $K \subseteq RB_2^n$, και υπάρχουν $u_1, \ldots, u_m \in \mathrm{bd}(R^{-1}K) \cap S^{n-1}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε το μέτρο μ στη S^{n-1} που έχει φορέα το $\{u_1, \ldots, u_m\}$ και δίνει μάζα c_j στο $\{u_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, είναι ισοτροπικό. Ένας άλλος τρόπος περιγραφής των παραπάνω είναι να απαιτήσουμε ότι το K έχει όγκο 1 και ικανοποιεί την $R(K) \leqslant R(T(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$.

Ο *εξωτερικός λόγος όγκων* ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K είναι η ποσότητα

$$\mathrm{ovr}(K) = \min_{\mathcal{E}}\{(|\mathcal{E}|/|K|)^{1/n}\}, \tag{2.1.16}$$

όπου το minimum παίρνεται πάνω από όλα τα 0-συμμετρικά ελλειψοειδή τα οποία περιέχουν το K. Παρατηρήστε ότι αν το K βρίσκεται στην κανονικοποιημένη θέση Löwner τότε

$$\mathrm{ovr}(K) = \left(\frac{|R(K)B_2^n|}{|K|}\right)^{1/n} \simeq \frac{R(K)}{\sqrt{n}}. \tag{2.1.17}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν το K βρίσκεται στην (κανονικοποιημένη) θέση Löwner τότε $\mathrm{ovr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\overline{B}_1^n) \simeq \sqrt{n}$ στη συμμετρική περίπτωση και $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\Delta_n) \simeq \sqrt{n}$ στη γενική περίπτωση.

2.1β′ Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ (χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(K)$). Υπενθυμίζουμε ότι το *μέσο πλάτος* $w(K)$ του K είναι η ποσότητα

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(u)\, d\sigma(u). \tag{2.1.18}$$

Θα λέμε ότι το K έχει *ελάχιστο μέσο πλάτος* αν $w(K) \leqslant w(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$. Το Θεώρημα 2.1.10 (βλέπε [32]) δίνει αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ένα σώμα K να έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Υποθέτουμε για απλότητα ότι h_K είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη (τότε λέμε ότι το K είναι *λείο*). Το πρώτο βήμα για την απόδειξη είναι το εξής.

Θεώρημα 2.1.8. *Ένα λείο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν*

$$\int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu\rangle d\sigma(u) = \frac{\mathrm{tr}T}{n} w(K) \tag{2.1.19}$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, αυτή η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους είναι μονοσήμαντα ορισμένη modulo ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Τότε, ο $(I+\varepsilon T)^*/[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους, και αυτό σημαίνει ότι

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u+\varepsilon Tu)d\sigma(u) \geqslant [\det(I+\varepsilon T)]^{1/n} \int_{S^{n-1}} h_K(u)d\sigma(u). \tag{2.1.20}$$

Αφού $h_K(u+\varepsilon Tu) = h_K(u) + \varepsilon\langle \nabla h_K(u), Tu\rangle + O(\varepsilon^2)$ και $[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n} = 1 + \varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O(\varepsilon^2)$, αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu\rangle d\sigma(u) \geqslant \frac{\mathrm{tr}T}{n} w(K). \tag{2.1.21}$$

Αντικαθιστώντας τον T με τον $-T$ στην (2.1.21) βλέπουμε ότι πρέπει να έχουμε ισότητα στην (2.1.19) για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (2.1.19) ικανοποιείται και θεωρούμε τυχόντα $T \in SL(n)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο T^* είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τότε,

$$w(TK) = \int_{S^{n-1}} h_{TK}(u)d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} h_K(T^*u)d\sigma(u). \tag{2.1.22}$$

Είναι γνωστό ότι το $\nabla h_K(u)$ είναι το μοναδικό σημείο στο σύνορο του K που το έχει το u σαν εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Ειδικότερα έχουμε $\nabla h_K(u) \in K$, άρα

$$\langle \nabla h_K(u), z\rangle \leqslant h_K(z) \tag{2.1.23}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Επομένως, από τις (2.1.21),(2.1.22) και (2.1.23) έχουμε

$$w(TK) \geqslant \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), T^*u\rangle d\sigma(u) = \frac{\mathrm{tr}T^*}{n} w(K) \geqslant w(K). \tag{2.1.24}$$

Αυτό δείχνει ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Ακόμη, έχουμε ισότητα στην (2.1.24) αν και μόνο αν ο T είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Αυτό αποδεικνύει τη μοναδικότητα της θέσης ελάχιστου μέσου πλάτους modulo $U \in O(n)$. □

Θεωρούμε το μέτρο ν_K στην S^{n-1} με πυκνότητα h_K ως προς το σ. Θα δείξουμε ότι ένα λείο κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν το ν_K είναι ισοτροπικό. Εισάγουμε πρώτα κάποιον συμβολισμό: Αν f είναι μια πραγματική ή διανυσματική συνάρτηση, ορισμένη στο $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, τότε γράφουμε $\widehat{f}$ για τον περιορισμό της f στην S^{n-1}. Αντίστροφα, αν η F ορίζεται στην S^{n-1}, τότε η ακτινική επέκταση f της F στο $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ορίζεται μέσω της $f(x) = F(x/\|x\|_2)$. Αν η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στην S^{n-1}, ορίζουμε

$$\Delta_\circ F = \widehat{(\Delta f)} \quad \text{και} \quad \nabla_\circ F = \widehat{(\nabla f)}, \tag{2.1.25}$$

όπου f είναι η ακτινική επέκταση της F. Ο τελεστής $\Delta_\circ$ ονομάζεται *τελεστής Laplace-Beltrami*, ενώ το $\nabla_\circ$ ονομάζεται *κλίση*. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green βλέπουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} F \cdot \Delta_\circ G \, d\sigma = \int_{S^{n-1}} G \cdot \Delta_\circ F \, d\sigma = -\int_{S^{n-1}} \langle \nabla_\circ F, \nabla_\circ G\rangle \, d\sigma. \tag{2.1.26}$$

Λήμμα 2.1.9. *Έστω K ένα λείο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$I_K(\theta) = \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), \theta\rangle \langle u, \theta\rangle d\sigma(u), \qquad \theta \in S^{n-1}. \tag{2.1.27}$$

Τότε,

$$w(K) + I_K(\theta) = (n+1)\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u,\theta\rangle^2 d\sigma(u) \tag{2.1.28}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Απόδειξη. Έστω $\theta \in S^{n-1}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \langle x,\theta\rangle^2/2$. Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$(\nabla_\circ \hat{f})(u) = \langle u,\theta\rangle\theta - \langle u,\theta\rangle^2 u \tag{2.1.29}$$

και

$$(\Delta_\circ \hat{f})(u) = 1 - n\langle u,\theta\rangle^2. \tag{2.1.30}$$

Αφού η h_K είναι θετικά ομογενής βαθμού 1, έχουμε $(\nabla_\circ \widehat{h_K})(u) = \nabla h_K(u) - h_K(u)u$ και $h_K(u) = \langle \nabla h_K(u), u\rangle$, $u \in S^{n-1}$. Από την (2.1.29) έχουμε

$$\langle (\nabla_\circ \hat{f})(u), (\nabla_\circ \hat{h_K})(u)\rangle = \langle \nabla h_K(u),\theta\rangle\langle u,\theta\rangle - h_K(u)\langle u,\theta\rangle^2. \tag{2.1.31}$$

Ολοκληρώνοντας στη σφαίρα και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green έχουμε

$$I_K(\theta) - \int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u,\theta\rangle^2 d\sigma(u) = -\int_{S^{n-1}} h_K(u)(\Delta_\circ \hat{f})(u)d\sigma(u), \tag{2.1.32}$$

που είναι ίσο με

$$-\, w(K) + n\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u,\theta\rangle^2 d\sigma(u) \tag{2.1.33}$$

από την (2.1.30). Αυτό αποδεικνύει την (2.1.28). □

Θεώρημα 2.1.10. *Ένα λείο κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν*

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u,\theta\rangle^2 d\sigma(u) = \frac{w(K)}{n} \tag{2.1.34}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ *(ισοδύναμα, αν το* ν_K *είναι ισοτροπικό).*

Απόδειξη. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η (2.1.19) ισχύει για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$ αν και μόνο αν

$$I_K(\theta) = \frac{w(K)}{n} \tag{2.1.35}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 2.1.8 και το Λήμμα 2.1.9. □

Από τα αποτελέσματα των Figiel-Tomczak, Lewis και Pisier (τα οποία περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) έπεται ότι αν ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελάχιστο μέσο πλάτος, τότε

$$w(K^\circ)w(K) \leqslant c_1 \log(d(X_K, \ell_2^n) + 1) \tag{2.1.36}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν υποθέσουμε ότι $|K| = 1$ τότε, γράφοντας τον όγκο του K σε πολικές συντεταγμένες και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder, παίρνουμε

$$w(K^\circ) \geqslant \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_K^{-n} d\sigma(x) \right)^{-1/n} = \left(\frac{|B_2^n|}{|K|} \right)^{1/n} \geqslant c_2\sqrt{n}, \tag{2.1.37}$$

άρα $w(K) \leqslant c_3\sqrt{n}\,\log(d(X_K, \ell_2^n) + 1)$.

2.1γ′ Θέση ελάχιστης επιφάνειας

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Το επόμενο πρόβλημα ελαχιστοποίησης που συζητάμε είναι να βρεθεί το $\min \partial(T(K))$ πάνω από όλους τους αφινικούς μετασχηματισμούς T του $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν τον όγκο. Το ελάχιστο «πιάνεται» για κάποιον T_0 και θα συμβολίζεται με ∂_K (η *σταθερά ελάχιστης επιφάνειας* της αφινικής κλάσης του K). Λέμε ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν

$$\partial(K) = \partial_K |K|^{\frac{n-1}{n}}. \tag{2.1.38}$$

Το επιφανειακό μέτρο σ_K του K ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εναλλακτικά, μπορούμε να το ορίσουμε στην S^{n-1} αντιστοιχίζοντάς το στό σύνηθες μέτρο Lebesgue του συνόρου του K μέσω της απεικόνισης του Gauss: για κάθε Borel $A \subseteq S^{n-1}$, έχουμε

$$\sigma_K(A) = \nu\left(\{x \in \mathrm{bd}(K) : \text{ το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του } K \text{ στο } x \text{ ανήκει στο } A\}\right),$$

όπου ν είναι το $(n-1)$-διάστατο μέτρο Lebesgue στο σύνορο του K. Προφανώς έχουμε $\partial(K) = \sigma_K(S^{n-1})$.

Ένας χαρακτηρισμός της θέσης ελάχιστης επιφάνειας δόθηκε από τον Petty.

Θεώρημα 2.1.11. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$. Τότε, $\partial(K) = \partial_K$ αν και μόνο αν το σ_K είναι ισοτροπικό. Επιπλέον, αυτή η θέση ελάχιστης επιφάνειας είναι μοναδική modulo ορθογώνιους μετασχηματισμούς.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και $\partial(K) = \partial_K$, τότε το σ_K είναι ισοτροπικό. Πράγματι, έστω R ένας μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$\partial((R^{-1})^*K) = \int_{S^{n-1}} \|R(u)\|_2 d\sigma_K(u). \tag{2.1.39}$$

Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n)$ και έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Τότε, ο $(I+\varepsilon T)/[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους, οπότε η υπόθεση «του ελαχίστου» για το K και η (2.1.39) δίνουν

$$\int_{S^{n-1}} \|(I+\varepsilon T)(u)\|_2 d\sigma_K(u) \geqslant [\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{1}{n}} \partial_K. \tag{2.1.40}$$

Παρατηρούμε ότι $\|u+\varepsilon Tu\| = 1+\varepsilon\langle u, Tu\rangle + O(\varepsilon^2)$ και $[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n} = 1+\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n}+O(\varepsilon^2)$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \langle u, Tu\rangle d\sigma_K(u) \geqslant \frac{\mathrm{tr}T}{n}\partial_K, \tag{2.1.41}$$

και λόγω συμμετρίας συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \langle u, Tu\rangle d\sigma_K(u) = \frac{\mathrm{tr}T}{n}\partial_K \tag{2.1.42}$$

για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T. Από αυτό έπεται ότι

$$\int_{S^{n-1}} u_k u_l, d\sigma_K(u) = \frac{\partial_K}{n}\delta_{k,l}, \qquad k,l = 1,\dots,n, \tag{2.1.43}$$

και αυτό δείχνει ότι το σ_K είναι ισοτροπικό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ για το οποίο το σ_K είναι ισοτροπικό. Αν T είναι οποιοσδήποτε μετασχηματισμός που διατηρεί τους όγκους, τότε

$$\begin{aligned}\partial(TK) &= \int_{S^{n-1}} \|(T^{-1})^* u\|_2 d\sigma_K(u) \geqslant \int_{S^{n-1}} \langle u, T^{-1}u\rangle d\sigma_K(u) \\ &= \frac{\mathrm{tr}(T^{-1})}{n}\partial(K) \geqslant \partial(K)\end{aligned}$$

γιατί $\mathrm{tr}(T^{-1})/n \geqslant [\det(T^{-1})]^{1/n} = 1$. Αυτό δείχνει ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια.

Τέλος, δείχνουμε ότι η θέση ελάχιστης επιφάνειας είναι μοναδική «modulo» ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Υποθέτουμε ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια και ότι $\partial(RK) = \partial(K)$, όπου R μετασχηματισμός που διατηρεί τους όγκους. Μπορούμε να γράψουμε $R = UT$, όπου ο T^{-1} είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και ο U είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός. Επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό του προηγούμενου βήματος, έχουμε

$$\partial(K) = \partial(UT(K)) = \partial(TK) \geqslant \frac{\mathrm{tr}(T^{-1})}{n}\partial(K). \tag{2.1.44}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\mathrm{tr}(T^{-1}) = n$, και αφού ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, πρέπει να έχουμε $T = I$. $\square$

2.1δ′ Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα

Η ανισότητα Brascamp-Lieb [19] εκτιμάει τη νόρμα του τελεστή $I : L^{p_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$I(f_1, \ldots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(\langle u_j, x\rangle)\, dx, \tag{2.1.45}$$

όπου $m \geqslant n$, $p_1, \ldots, p_m \geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = n$, και $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Οι Brascamp και Lieb απέδειξαν ότι η νόρμα του I είναι το supremum D του λόγου

$$\frac{I(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^{m} \|g_j\|_{p_j}} \tag{2.1.46}$$

πάνω από όλες τις Gaussian συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_m$, δηλαδή πάνω από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}$, $\lambda_j > 0$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύει την ανισότητα συνέλιξης του Young $\|f * g\|_r \leqslant C_{p,q}\|f\|_p\|g\|_q$ η οποία ισχύει για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ και $g \in L^q(\mathbb{R})$, όπου $p, q, r \geqslant 1$ και $1/p + 1/q = 1 + 1/r$.

Η αρχική απόδειξη της ανισότητας Brascamp-Lieb βασίστηκε σε μια γενική ανισότητα αναδιάταξης των Brascamp, Lieb και Luttinger που ισχυρίζεται ότι αν f^* είναι η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη μιας Borel μετρήσιμης συνάρτησης f με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου, τότε

$$I(f_1, \ldots, f_m) \leqslant I(f_1^*, \ldots, f_m^*). \tag{2.1.47}$$

Οι Brascamp και Lieb χρησιμοποίησαν μια γενικευμένη μορφή αυτής της ανισότητας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και το γεγονός ότι οι ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις στις μεγάλες διαστάσεις συμπεριφέρονται σαν Gaussian συναρτήσεις.

Αν θέσουμε $c_j = 1/p_j$ και αντικαταστήσουμε την f_j με την $f_j^{c_j}$ τότε μπορούμε να διατυπώσουμε την ανισότητα Brascamp-Lieb ως εξής.

Θεώρημα 2.1.12. *Έστω $m \geqslant n$ και έστω $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ και $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j^{c_j}(\langle x, u_j\rangle) dx \leqslant D \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j\right)^{c_j} \tag{2.1.48}$$

για οποιεσδήποτε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_j : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

Απευθείας υπολογισμός του λόγου $I(g_1, \ldots, g_m)/\prod_{j=1}^{m} \|g_j\|_{p_j}$ για τις Gaussian συναρτήσεις $g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}$ δείχνει ότι $D = 1/\sqrt{F}$, όπου

$$F = \inf \left\{ \frac{\det\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right)}{\prod_{j=1}^{m} \lambda_j^{c_j}} \mid \lambda_j > 0 \right\}. \tag{2.1.49}$$

Ο υπολογισμός της σταθεράς $F = F(\{u_j\}, \{c_j\})$ στο Θεώρημα 2.1.12 δεν είναι εύκολος. Μια σημαντική παρατήρηση του Ball (δείτε, για παράδειγμα, [3]) είναι ότι η τιμή της είναι ακριβώς ίση με 1 αν τα διανύσματα u_j ικανοποιούν αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης όπως αυτή που μας δίνει το θεώρημα του John, δηλαδή αν συμπεριφέρονται σαν «ορθοκανονική βάση με βάρη c_j».

Θεώρημα 2.1.13. *Έστω $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \ldots, c_m > 0$ τέτοια ώστε*

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j. \tag{2.1.50}$$

Τότε, η σταθερά $F = F(\{u_j\}, \{c_j\})$ στο Θεώρημα 2.1.12 είναι ίση με 1.

Μια γνωστή εφαρμογή της ανισότητας Brascamp-Lieb, σε συνδυασμό με αυτήν την παρατήρηση, είναι η αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του Ball. Το ερώτημα είναι να βρεθεί η καλύτερη σταθερά $\partial(n)$ για την οποία κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει θέση $\tilde{K}$ που ικανοποιεί την

$$\partial(\tilde{K}) \leqslant \partial(n) |\tilde{K}|^{(n-1)/n}. \tag{2.1.51}$$

Η φυσιολογική θέση του K είναι η θέση ελάχιστης επιφάνειας. Όμως, στη λύση του προβλήματος από τον Ball χρησιμοποιείται η θέση John. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Τότε,

$$\partial(K) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|K + tB_2^n| - |K|}{t} \leqslant \lim_{t\to 0^+} \frac{|K + tK| - |K|}{t} = n|K|. \tag{2.1.52}$$

Ο Ball απέδειξε ότι, ανάμεσα σε όλα τα συμμετρικά κυρτά σώματα που βρίσκονται σε θέση John, ο κύβος έχει τον μέγιστο όγκο.

Θεώρημα 2.1.14. *Έστω $Q_n = [-1, 1]^n$ ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$. Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και αν το K είναι σε θέση John, τότε $|K| \leqslant 2^n = |Q_n|$.*

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης του John, όπου τα u_j είναι σημεία επαφής του K και της B_2^n. Παρατηρούμε ότι

$$K \subseteq M := \{x : |\langle x, u_j\rangle| \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, m\}. \tag{2.1.53}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} |K| \leqslant |M| &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} \chi_{[-1,1]}^{c_j}(\langle x, u_j\rangle) dx \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t) dt \right)^{c_j} = 2^{\sum_{j=1}^m c_j} = 2^n, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Brascamp-Lieb, το Θεώρημα 2.1.13 και το γεγονός ότι $\sum_{j=1}^{m} c_j = n$. □

Το Θεώρημα 2.1.14 δείχνει ότι $\partial(K) \leqslant n|K| \leqslant 2n|K|^{(n-1)/n}$. Το παράδειγμα του κύβου δείχνει ότι αυτή η ανισότητα είναι ακριβής.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει στην περίπτωση που το K δεν είναι απαραίτητα συμμετρικό. Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και αν το K είναι σε θέση John, τότε $|K| \leqslant |S_n|$, όπου S_n το κανονικό simplex σε θέση John. Συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ότι κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει θέση $\tilde{K}$ που ικανοποιεί την

$$\partial(\tilde{K}) \leqslant Cn|\tilde{K}|^{(n-1)/n}, \tag{2.1.54}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Δηλαδή,

$$\partial(n) \leqslant Cn. \tag{2.1.55}$$

2.2 Αποτελέσματα της διατριβής

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε μια σύντομη περιγραφή των αποτελεσμάτων που περιέχονται στην διατριβή. Κάποια από αυτά έχουν ήδη δημοσιευτεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 προέρχονται από την εργασία

> E. Markessinis, G. Paouris and Ch. Saroglou, *Comparing the M-position with some classical positions of convex bodies*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **152** (2012), 131-152.

(β) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 προέρχονται κι αυτά από την εργασία

> E. Markessinis, G. Paouris and Ch. Saroglou, *Comparing the M-position with some classical positions of convex bodies*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **152** (2012), 131-152.

(γ) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 προέρχονται από την εργασία

> E. Markessinis and P. Valettas, *Distances between classical positions of centrally symmetric convex bodies*, Houston Journal of Mathematics **41** (2015), 187-211.

(δ) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6 προέρχονται από την εργασία

> A. Giannopoulos, E. Markessinis and A. Tsolomitis, *Remarks on an inequality of Rogers and Shephard*

η οποία έχει γίνει δεκτή και έχει προδημοσιευτεί στο Proceedings of the American Mathematical Society.

(ε) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 7 προέρχονται από την εργασία

> E. Markessinis, *On the radius of the projection body of a symmetric convex body*

η οποία είναι υπό προετοιμασία.

(στ) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 8 προέρχονται από την εργασία

> E. Markessinis, *On the k-th quermassintegral ratio of a pair of symmetric convex bodies*

η οποία είναι υπό προετοιμασία.

Κεφάλαιο 3: Κλασικές θέσεις και M-θέση

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι το θεώρημα του V. Milman ([52], βλέπε και [53]) το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη «M-ελλειψοειδούς» για κάθε κυρτό σώμα. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει η ακόλουθη ιδιότητα της M-θέσης:

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ όγκου $|\tilde{K}| = 1$ που ικανοποιεί την

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant \beta. \tag{2.2.1}$$

Σκοπός μας είναι να δούμε αν οι κλασικές θέσεις του K που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο ικανοποιούν την (2.2.1) για κάποια απόλυτη σταθερά $\beta > 0$. Ένα πρώτο παράδειγμα είναι η θέση ελάχιστης επιφάνειας. Υπενθυμίζουμε ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν η επιφάνειά του (που συμβολίζεται με $\partial(K)$) είναι μικρότερη ή ίση από την επιφάνεια οποιασδήποτε αφινικής εικόνας του K που έχει τον ίδιο όγκο. Υπενθυμίζουμε τον χαρακτηρισμό του Petty [58] (βλέπε επίσης [37]) για τη θέση ελάχιστης επιφάνειας: το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν και μόνο αν το επιφανειακό μέτρο σ_K του K είναι ισοτροπικό. Στην εργασία [32] δίνονται παρόμοιοι χαρακτηρισμοί για τις θέσεις ακροτάτου που αντιστοιχούν στα υπόλοιπα quermassintegrals. Για παράδειγμα, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ένα λείο κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν το μέτρο ν_K με πυκνότητα h_K (όπου h_K είναι η συνάρτηση στήριξης του K) ως προς το μέτρο πιθανότητας σ στην σφαίρα S^{n-1} είναι ισοτροπικό.

Το ερώτημα αν η θέση ελάχιστης επιφάνειας ικανοποιεί την (2.2.1) τέθηκε από τους Γιαννόπουλο και V. Milman στο [32] και απαντήθηκε με αρνητικό τρόπο από τον Σαρόγλου στο άρθρο [64]. Δίνουμε μια διαφορετική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος.

Θεώρημα 2.2.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας και ικανοποιεί την*

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{n}. \tag{2.2.2}$$

Αποδεικνύουμε επίσης ότι «modulo» την τιμή της ισοτροπικής σταθεράς L_K του K, ο εκθέτης $1/8$ στο Θεώρημα 2.2.1 είναι βέλτιστος στη συμμετρική περίπτωση.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant C\sqrt[8]{n}L_K, \tag{2.2.3}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε έχει το πλεονέκτημα ότι δείχνει το βασικό λόγο για τον οποίο η θέση ελάχιστης επιφάνειας δεν ικανοποιεί την (2.2.1). Το παράδειγμά μας είναι ένα σώμα που βρίσκεται σε θέση ελάχιστης επιφάνειας και είναι το γινόμενο δύο σωμάτων όγκου 1 τα οποία είναι το καθένα σε θέση ελάχιστης επιφάνειας αλλά έχουν «μικρή» και «μεγάλη» (ως προς την διάσταση) επιφάνεια αντίστοιχα. Αυτή η ιδέα προέρχεται από μια εργασία των Bourgain, Klartag και V. Milman [15] που αφορούσε την κλασική ισοτροπική θέση. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο δείχνουμε ότι και η θέση έλάχιστου μέσου πλάτους δεν είναι πάντα M-θέση.

Θεώρημα 2.2.3. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που ειναι σε θέση ελάχιστου μέσου πλάτους και ικανοποιεί την*

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{\log n}. \tag{2.2.4}$$

Δείχνουμε επίσης ότι ένα σώμα που είναι σε θέση John δεν ικανοποιεί απαραίτητα την (2.2.1). Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, που είναι στην «κανονικοποιημένη θέση John», τέτοιο ώστε $|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Κεφάλαιο 4: Σώματα ελάχιστης επιφάνειας

Ασχολούμαστε με δύο ερωτήματα σχετικά με τη γεωμετρία των κυρτών σωμάτων που βρίσκονται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Το πρώτο αφορά τις προβολές τους σε υπερεπίπεδα. Ο K. Ball [4] απέδειξε ότι κάθε κυρτό σώμα K έχει μια αφινική εικόνα $\tilde{K}$ όγκου 1 τέτοια ώστε, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα θ,

$$|P_{\theta^\perp}(\tilde{K})| \geqslant 1. \tag{2.2.5}$$

Σε αυτό το αποτέλεσμα, η $\tilde{K}$ επιλέγεται έτσι ώστε το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το πολικό σώμα $\Pi^*(\tilde{K})$ του σώματος προβολών του $\tilde{K}$ να είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα. Στο [37] αποδεικνύεται ότι αν το K είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας και έχει όγκο 1 τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2^{-n}$, η τυχαία $(n-1)$-διάστατη προβολή $P_{\theta^\perp}(K)$ του K έχει όγκο μεγαλύτερο από c, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Για την ακρίβεια αποδεικνύεται κάτι ισχυρότερο, καθώς το κάτω φράγμα εξαρτάται από την παράμετρο ∂_K ελάχιστης επιφάνειας του K. Στο ίδιο άρθρο (βλέπε [37]) τέθηκε το ερώτημα αν η $|P_{\theta^\perp}(K)|\geqslant c$ ισχύει *για κάθε* $\theta\in S^{n-1}$ όταν το K βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Δίνουμε αρνητική απάντηση σε αυτό το ερώτημα:

Θεώρημα 2.2.4. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας, τέτοιο ώστε*

$$\min_{\theta\in S^{n-1}}|P_{\theta^\perp}(K)|\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}},\tag{2.2.6}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Δίνουμε επίσης άνω φράγμα για το μέσο πλάτος ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ που είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας.

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$w(K)\leqslant C\frac{n^{3/2}}{\partial_K},\tag{2.2.7}$$

όπου ∂_K είναι η (ελάχιστη) επιφάνεια του K και $C>0$ ειναι μια απόλυτη σταθερά.

Αφού $\partial_K\geqslant\partial_{\overline{B_2^n}}\geqslant c\sqrt{n}$, μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.5 είναι το γενικό άνω φράγμα $w(K)\leqslant Cn$. Δεν γνωρίζουμε αν αυτό το άνω φράγμα είναι βέλτιστο για τη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Δείχνουμε όμως ότι υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που ειναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας και έχει μέσο πλάτος $w(K)\geqslant cn/\log n$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Με άλλα λόγια, το Θεώρημα 2.2.5 είναι σχεδόν βέλτιστο.

Κεφάλαιο 5: Απόσταση Schatten

Με $\mathcal{SK}_n$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των συμμετρικών κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να ορίσουμε κατάλληλη απόσταση και να συγκρίνουμε μέσω αυτής τις διάφορες κλασικές θέσεις ενός σώματος $K\in\mathcal{SK}_n$. Οι θέσεις του K συμβολίζονται εδώ ως εξής:

(α) $K_{(i)}$ είναι η ισοτροπική θέση του K, η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές

$$T \mapsto I_2(T(K)) = \left(\int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \right)^{1/2}. \tag{2.2.8}$$

(β) $K_{(s)}$ είναι η θέση ελάχιστης επιφάνειας του K, η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές ελάχιστης επιφάνειας $T \mapsto \partial(T(K))$ πάνω στην $SL(n)$.

(γ) $K_{(w)}$ είναι η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους του K, η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές μέσου πλάτους $T \mapsto w(T(K))$ πάνω στην $SL(n)$.

(δ) $K_{(j)}$ είναι η θέση John του K, η οποία μεγιστοποιεί το συναρτησοειδές εσωτερικής ακτίνας $T \mapsto r(T(K))$ πάνω στην $SL(n)$.

(ε) $K_{(\ell)}$ είναι η θέση Löwner του K, η οποία ελαχιστοποεί το συναρτησοειδές εξωτερικής ακτίνας $T \mapsto R(T(K))$ πάνω στην $SL(n)$.

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε την απόσταση Schatten μεταξύ των θέσεων ενός σώματος $K \in \mathcal{SK}_n$ και να δώσουμε άνω φράγματα γι' αυτήν, για όλα τα πιθανά ζευγάρια κλασικών θέσεων του K.

Ορισμός 2.2.6 (απόσταση Schatten)**.** Έστω $K \in \mathcal{SK}_n$ και έστω $K_{(x)}$, $K_{(y)}$ δύο από τις παραπάνω κλασικές θέσεις του K. Υπάρχει $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε $T(K_{(x)}) = K_{(y)}$. Τότε, ορίζουμε την *απόσταση Schatten* των $K_{(x)}$ και $K_{(y)}$ ως εξής:

$$d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)}) := \frac{{\rm tr}(\sqrt{T^*T})}{n}. \tag{2.2.9}$$

Αφού όλες οι κλασικές θέσεις του K διατηρούνται από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, για κάθε $U, V \in O(n)$ έχουμε ότι ο UTV απεικονίζει τη θέση $K_{(x)}$ στη θέση $K_{(y)}$. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα $\sqrt{T^*T} = T$. Ακόμη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο T είναι διαγώνιος με θετικά διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία λ_i είναι σε αύξουσα διάταξη. Αυτός ο διαγώνιος πίνακας προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις θέσεις που μελετάμε.

Τέλος, ορίζουμε την συμμετρική απόσταση

$$D_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)}) := \max\{d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)}), d_{\rm tr}(K_{(y)}, K_{(x)})\}. \tag{2.2.10}$$

Στο πρώτο μέρος του Κεφαλαίου 5 δίνουμε διάφορα επιχειρήματα τα οποία οδηγούν σε άνω φράγματα για την απόσταση $d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)})$. Σε όλα αυτά τα επιχειρήματα, βασικό ρόλο παίζουν οι ισοτροπικοί χαρακτηρισμοί των διαφόρων θέσεων. Συγκεντρώνουμε τις εκτιμήσεις μας στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.7. *Έστω $K \in \mathcal{SK}_n$. Τότε,*

$$
\begin{aligned}
d_{\rm tr}(K_{(i)}, K_{(x)}) &\leqslant \frac{c_1 I_2(K_{(x)})}{I_2(K_{(i)})} &\quad \text{και} \quad d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(i)}) &\leqslant \frac{c_2\sqrt{n}}{r(K_{(x)})}\\
d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(s)}) &\leqslant \frac{\partial(K_{(x)})}{\partial(K_{(s)})} &\quad \text{και} \quad d_{\rm tr}(K_{(s)}, K_{(x)}) &\leqslant \frac{c_3\partial(K_{(s)})I_2(K_{(x)})}{n}\\
d_{\rm tr}(K_{(w)}, K_{(x)}) &\leqslant \frac{w(K_{(x)})}{w(K_{(w)})} &\quad \text{και} \quad d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(w)}) &\leqslant \frac{c_4 w(K_{(w)})}{r(K_{(x)})}\\
d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(j)}) &\leqslant \frac{r(K_{(j)})}{r(K_{(x)})} &\quad \text{και} \quad d_{\rm tr}(K_{(j)}, K_{(x)}) &\leqslant \frac{R(K_{(x)})}{r(K_{(j)})}\\
d_{\rm tr}(K_{(\ell)}, K_{(x)}) &\leqslant \frac{R(K_{(x)})}{R(K_{(\ell)})} &\quad \text{και} \quad d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(\ell)}) &\leqslant \frac{R(K_{(\ell)})}{r(K_{(x)})},
\end{aligned}
$$

όπου $c_i > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στη συνέχεια, συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις του Θεωρήματος 2.2.7 με τις πρόσθετες πληροφορίες που έχουμε για τις βασικές γεωμετρικές παραμέτρους των κλασικών θέσεων, αποδεικνύουμε άνω φράγματα για την απόσταση Schatten. Τα αποτελέσματά μας συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα.

Θεώρημα 2.2.8. *Για κάθε $K \in \mathcal{SK}_n$ έχουμε τα επόμενα άνω φράγματα για την απόσταση $d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)})$:*

	$K_{(i)}$	$K_{(s)}$	$K_{(w)}$	$K_{(j)}$	$K_{(\ell)}$
$K_{(i)}$	1	$\frac{\sqrt{n}}{L_K}$	$\frac{\sqrt{n}\log n}{L_K}$	$\frac{\sqrt{n}}{L_K}$	$\frac{\sqrt{n}}{L_K}$
$K_{(s)}$	$\sqrt{n}L_K$	1	$\frac{\sqrt{n}\log n}{r_s(n)}$	$\frac{\sqrt{n}}{r_s(n)}$	$\frac{n}{r_s(n)}$
$K_{(w)}$	$(\log n)^2 L_K$	$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$
$K_{(j)}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}\log n$	1	$\sqrt{n}$
$K_{(\ell)}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}\log n$	$\sqrt{n}$	1

όπου $r_s(n) = \min\{r(K_{(s)}) : K \in \mathcal{SK}_n\}$ και L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K.

Είναι συχνά χρήσιμο να μπορούμε να συνδυάσουμε δύο διαφορετικές θέσεις ενός σώματος K ή να συγκρίνουμε τη συμπεριφορά τους ως προς τα βασικά συναρτησοειδή τους. Για παράδειγμα είναι φυσιολογικό να ρωτήσουμε, για την ακριβή εξάρτηση από το n της ποσότητας

$$I_2^{(x)}(n) = \max\left\{I_2(K_{(x)}) : K \in \mathcal{SK}_n\right\}, \tag{2.2.11}$$

όπου $x \in \{j, \ell, w, s\}$. Με άλλα λόγια, να δούμε πώς συμπεριφέρονται οι άλλες θέσεις ως προς το «I_2-συναρτησοειδές». Ασχολούμαστε με αυτό το ερώτημα στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου.

Θεώρημα 2.2.9. *Έστω $K \in \mathcal{SK}_n$. Τότε, έχουμε τις εκτιμήσεις*

(α) $\frac{c_1 n}{\sqrt{\log n}} \leqslant I_2^{(j)}(n) \leqslant c_2 n$,

(β) $I_2^{(s)}(n) \geqslant \frac{c_3 n}{\sqrt{\log n}}$,

(γ) $c_4 n^{1-\epsilon} \leqslant I_2^{(\ell)}(n) \leqslant c_5 n$,

όπου η ανισότητα στο αριστερό μέλος της (γ) ικανοποιείται για όλα τα αρκετά μικρά $\epsilon > 0$ με την προϋπόθεση ότι $n \geqslant n_0(\epsilon)$, και οι $c_1, \ldots, c_5 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το ίδιο ερώτημα προκύπτει και για τα υπόλοιπα συναρτησοειδή που μελετάμε: την επιφάνεια, το μέσο πλάτος, την εσωτερική και την εξωτερική ακτίνα. Ασχολούμαστε και με αυτά, και δίνουμε παραδείγματα σχετικά με την ακρίβεια των εκτιμήσεων στο Θεώρημα 2.2.9.

Κεφάλαιο 6: Ανισότητα Rogers-Shephard

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $F \in G_{n,k}$ ορίζουμε

$$g(K,k;F) := \big(|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|\big)^{1/k}, \tag{2.2.12}$$

όπου με $F^{\perp}$ συμβολίζουμε τον ορθογώνιο υπόχωρο του F στον $\mathbb{R}^n$. Μια κλασική ανισότητα των Rogers και Shephard [62] (βλέπε επίσης Chakerian [23]) μας λέει ότι αν το K είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων τότε

$$1 \leqslant g(K,k;F) \leqslant \binom{n}{k}^{1/k} \leqslant \frac{c_0 n}{k}, \tag{2.2.13}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι απόλυτη σταθερά. Το δεξιό μέλος στην ανισότητα ισχύει ακόμα και αν υποθέσουμε απλώς ότι $0 \in \mathrm{int}(K)$. Επιπλέον, ο Spingarn [66] έδειξε οτι το κάτω φράγμα παραμένει το ίδιο αν υποθέσουμε ότι το K είναι κεντραρισμένο. Απλά παραδείγματα δείχνουν ότι και οι δύο εκτιμήσεις είναι ακριβείς.

Αφετηρία μας για τη μελέτη σε αυτό το κεφάλαιο είναι η παρατήρηση ότι η συμπεριφορά της $g(\mathcal{E},k;F)$ βρίσκεται «στην μέση» όταν το $\mathcal{E}$ είναι ελλειψοειδές.

Πρόταση 2.2.10. *Για κάθε ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$ το γινόμενο $|P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E} \cap F^{\perp}|$ είναι ανεξάρτητο από τον υπόχωρο F. Ακριβέστερα, έχουμε*

$$|P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E} \cap F^{\perp}| = \frac{|B_2^k|\,|B_2^{n-k}|}{|B_2^n|}\,|\mathcal{E}|. \tag{2.2.14}$$

Συνεπώς,

$$\left(\frac{c_1 n}{k}\right)^{k/2}|\mathcal{E}| \leqslant |P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E}\cap F^{\perp}| \leqslant \left(\frac{c_2 n}{k}\right)^{k/2}|\mathcal{E}|, \tag{2.2.15}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Υποθέτοντας ότι $|\mathcal{E}| = 1$, από την Πρόταση 2.2.10 βλέπουμε ότι

$$g(\mathcal{E}, k; F) \simeq \sqrt{n/k} \tag{2.2.16}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$. Το ερώτημα που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι αν αυτή είναι η αναμενόμενη (ως προς $F \in G_{n,k}$) συμπεριφορά της $g(K, k; F)$ για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Το βασικό μας αποτέλεσμα δίνει μια σχεδόν ακριβή καταφατική απάντηση αν υποθέσουμε ότι το K είναι συμμετρικό και βρίσκεται στην ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 2.2.11. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$c_1 L_K^{-1}\sqrt{n/k} \leqslant g(K, k; F) \leqslant c_2\sqrt{n/k}(\log n)^2 L_K \tag{2.2.17}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η προσέγγισή μας οδηγεί σε μερικά κάτω και άνω φράγματα που μπορεί να φανούν χρήσιμα και για άλλες θέσεις του K, όπως η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους ή η θέση ελάχιστης επιφάνειας ή η θέση John.

Κεφάλαιο 7: Ακτίνα του σώματος προβολών

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\theta \in S^{n-1}$, ο όγκος της προβολής $P_{\theta^{\perp}}(K)$ του K στον $\theta^{\perp}$ δίνεται από την

$$|P_{\theta^{\perp}}(K)| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle| d\sigma_K(x), \tag{2.2.18}$$

όπου σ_K είναι το επιφανειακό μέτρο του K. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι δοθούν γενικά άνω φράγματα για την ποσότητα

$$\max\{|P_{\theta^{\perp}}(K)| : \theta \in S^{n-1}\}. \tag{2.2.19}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι το K είναι κεντραρισμένο. Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με το να δοθεί άνω φράγμα για την εξωτερική ακτίνα του σώματος προβολών ΠK του K. Το ΠK είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα του οποίου η συνάρτηση στήριξης ορίζεται από την σχέση $h_{\Pi K}(\theta) = |P_{\theta^\perp}(K)|$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αν γράψουμε, ως συνήθως, $R(C)$ για την εξωτερική ακτίνα του κυρτού σώματος C, τότε είναι φανερό ότι

$$\max\{|P_{\theta^\perp}(K)| : \theta \in S^{n-1}\} = \max\{h_{\Pi K}(\theta) : \theta \in S^{n-1}\} = R(\Pi K). \tag{2.2.20}$$

Γράφουμε επίσης $\Pi^\circ K$ για το πολικό σώμα προβολών (το πολικό σώμα του ΠK). Εύκολα ελέγχουμε ότι $\Pi(TK) = (T^{-1})^*(\Pi K)$ για κάθε $T \in SL(n)$, άρα $\Pi^\circ(TK) = T(\Pi^\circ K)$.

Ένα κάτω φράγμα για την $R(\Pi K)$ μπορεί να δοθεί αν συνδυάσουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα με το γεγονός ότι η επιφάνεια $\partial(K)$ του K εκφράζεται στη μορφή

$$\partial(K) = \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} |P_{\theta^\perp}(K)|\, d\sigma(\theta). \tag{2.2.21}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $|K| = 1$ τότε $\partial(K) \geqslant \partial(\omega_n^{-1/n} B_2^n) = n\omega_n^{1/n}$, άρα

$$R(\Pi K) \geqslant \omega_{n-1}/\omega_n^{\frac{n-1}{n}}, \tag{2.2.22}$$

με ισότητα αν το $K = \overline{B}_2^n = \omega_n^{-1/n} B_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1. Παρατηρήστε ότι $R(\Pi \overline{B}_2^n) \simeq 1$.

Σκοπός μας είναι να δώσουμε γενικά άνω φράγματα για την $R(\Pi \tilde{K})$, για διάφορες κλασικές θέσεις $\tilde{K}$ του K, όπως η θέση John, η θέση ελάχιστης επιφάνειας, η ισοτροπική θέση κλπ. Για την ακρίβεια, αφετηρία γι' αυτή τη μελέτη ήταν ένα ερώτημα του S. Vempala σχετικά με την ισοτροπική περίπτωση:

Είναι σωστό ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ να ισχύει $|P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant C\sqrt{n}|K \cap \theta^\perp|$;

Μια πολύ γνωστή ιδιότητα που έχει ένα σώμα K που βρίσκεται στην ισοτροπική θέση είναι ότι όλες οι $(n-1)$-διάστατες κεντρικές τομές του έχουν περίπου τον ίδιο όγκο: έχουμε $|K \cap \theta^\perp| \simeq L_K^{-1}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K. Συνεπώς, το ερώτημα του Vempala είναι αν σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $\max_\theta |P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant C_1\sqrt{n}/L_K$.

Αρχικά, δείχνουμε ότι η ποσότητα

$$R_n := \max_{K \in \mathcal{CK}_n} \min_{T \in SL(n)} R(\Pi T(K)) \tag{2.2.23}$$

(όπου $\mathcal{CK}_n$ είναι η κλάση όλων των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$) ικανοποιεί την $R_n \leqslant C\sqrt{n}$. Για την απόδειξη, μπορούμε να επιλέξουμε το TK στη θέση ελάχιστης επιφάειας και να χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα. Το φράγμα αυτό είναι βέλτιστο, όπως φαίνεται από το παράδειγμα του κύβου.

Θεώρημα 2.2.12. *Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{CK}_n$ των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max_{K\in\mathcal{CK}_n}\min_{T\in SL(n)} R(\Pi T(K))\simeq\sqrt{n}. \tag{2.2.24}$$

Στη συνέχεια, δίνουμε άνω φράγματα για την $R(\Pi K)$ συναρτήσει της επιφάνειας του K. Από την (2.2.18) είναι φανερό ότι $|P_{\theta^\perp}(K)|\leqslant \partial(K)/2$ για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Μπορούμε επίσης να δώσουμε το απλό άνω φράγμα $\partial(K)\leqslant n|K|/r(K)$ για την επιφάνεια $\partial(K)$ συναρτήσει της εσωτερικής ακτίνας $r(K)$ του K. Συνεπώς, έχουμε την

$$R(\Pi\tilde{K})\leqslant\frac{\partial(\tilde{K})}{2}\leqslant\frac{n|\tilde{K}|}{2r(\tilde{K})}=\frac{n}{2r(\tilde{K})} \tag{2.2.25}$$

σαν άνω φράγμα για κάθε θέση $\tilde{K}$ του K. Έτσι, παίρνουμε μια πρώτη εκτίμηση για τις περισσότερες κλασικές θέσεις του K:

Πρόταση 2.2.13. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν το K είναι ισοτροπικό τότε $\partial(K)\leqslant cn/L_K$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(β) *Αν το K βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας ή στη θέση John τότε $\partial(K)\leqslant Cn$, όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(γ) *Αν το K είναι συμμετρικό και βρίσκεται στη θέση Löwner τότε $\partial(K)\leqslant Cn$, όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Τα ίδια άνω φράγματα ισχύουν για την $R(\Pi K)$.

Συζητάμε επίσης την ακρίβεια της ανισότητας $\partial(K)\leqslant n|K|/r(K)$ για ισοτροπικά κυρτά σώματα και δίνουμε φράγματα για την (κανονικοποιημένη) επιφάνεια τυχαίων πολυτόπων που οι κορυφές τους είναι ανεξάρτητα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου περιγράφουμε έναν εναλλακτικό τρόπο για να δώσουμε άνω φράγμα για την $R(\Pi K)$. Αν $\{u_1,\ldots,u_m\}$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1,\ldots,c_m>0$ τέτοια ώστε $I=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j$, τότε για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$R(\Pi K)\leqslant\sqrt{n}\max_{1\leqslant j\leqslant m}|P_{u_j}(K)|. \tag{2.2.26}$$

Σαν εφαρμογή δίνουμε άνω φράγμα για την $R(\Pi K)$ μέσω της εξωτερικής ακτίνας, στην περίπτωση που το K βρίσκεται στη θέση Löwner.

Πρόταση 2.2.14. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο βρίσκεται στη θέση Löwner. Τότε,*

$$R(\Pi K) \leqslant \frac{n^{3/2}}{2R(K)}. \tag{2.2.27}$$

Η ίδια ιδέα οδηγεί σε μια καταφατική απάντηση για το ερώτημα του Vempala αν υποθέσουμε ότι το K είναι unconditional.

Πρόταση 2.2.15. *Έστω K ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $R(\Pi K) \leqslant C\sqrt{n}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Τέλος, δείχνουμε ότι ο όγκος της τυχαίας $(n-1)$-διάστατης προβολής ενός κυρτού σώματος το οποίο βρίσκεται στην ισοτροπική θέση ή στη θέση John ή είναι συμμετρικό και βρίσκεται στη θέση Löwner φράσσεται από $C\sqrt{n}$.

Θεώρημα 2.2.16. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $t \geqslant 1$ έχουμε $|P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant Ct\sqrt{n}/L_K$ για όλα τα θ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} μέτρου $\sigma(A) \geqslant 1 - e^{-t^2}$.*

(β) *Αν το K βρίσκεται στη θέση John ή είναι συμμετρικό και βρίσκεται στη θέση Löwner τότε για κάθε $t \geqslant 1$ έχουμε $|P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant Ct\sqrt{n}$ για όλα τα θ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} μέτρου $\sigma(A) \geqslant 1 - e^{-t^2}$.*

Κεφάλαιο 8: Γενικευμένος λόγος όγκων

Έστω K και C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Στο Κεφάλαιο 8, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n-1$ περιγράφουμε τη θέση $T_0(C)$ του C η οποία ελαχιστοποιεί το k-οστό quermassintegral W_k υπό τον περιορισμό $K \subseteq T(C)$. Λέμε ότι το $T_0(C)$ είναι η *k-οστή ελαχιστική θέση του C ως προς το K.*

Υπενθυμίζουμε πρώτα εν συντομία την περίπτωση $k = 0$ η οποία έχει μελετηθεί διεξοδικά και αντιστοιχεί στον όγκο. Λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ βρίσκεται στη θέση John αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο C, δηλαδή αν $B_2^n \subseteq C$ και για κάθε $T \in GL(n)$ με $T(B_2^n) \subseteq C$ έχουμε $|T(B_2^n)| \leqslant |B_2^n|$. Ο λόγος όγκων του C είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vr}(C) = \mathrm{vr}(C, B_2^n) = \inf\Big\{ \Big(\frac{|C|}{|\mathcal{E}|}\Big)^{1/n} : \mathcal{E} \subseteq C \Big\}, \tag{2.2.28}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα ελλειψοειδή $\mathcal{E} \subseteq C$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο λόγος όγκων είναι αναλλοίωτος ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$. Αν υποθέσουμε ότι το $C_1 = T(C)$ βρίσκεται σε θέση John (για κάποιον

$T \in GL(n)$) έχουμε $\mathrm{vr}(C, B_2^n) = \left(\frac{|C_1|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}$. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση (2.1.6) της ταυτοτικής απεικόνισης και την ανισότητα Brascamp-Lieb, ο Ball απέδειξε ότι

$$\mathrm{vr}(C, B_2^n) \leqslant \mathrm{vr}(Q_n, B_2^n) \leqslant c\sqrt{n}, \tag{2.2.29}$$

όπου $Q_n = [-1, 1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Γενικεύοντας τη θέση John μπορούμε να θεωρήσουμε τυχόν ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, C στον $\mathbb{R}^n$ και να πούμε ότι το C βρίσκεται στην *θέση που ελαχιστοποιεί τον όγκο ως προς το* K αν $K \subseteq C$ και για κάθε $T \in GL(n)$ που ικανοποιεί την $K \subseteq T(C)$ ισχύει $|C| \leqslant |T(C)|$. Ο V. Milman παρατήρησε (βλέπε [67, Θεώρημα 14.5] και [38] για την μη συμμετρική περίπτωση) ότι μια αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης, ανάλογη με την (2.1.6), ισχύει και σε αυτό το γενικότερο πλαίσιο: *Αν το C βρίσκεται στη θέση που ελαχιστοποιεί τον όγκο ως προς το K τότε μπορούμε να βρούμε ζεύγη σημείων επαφής (u_j, v_j) των K και C, δηλαδή κοινά σημεία $v_1, \ldots, v_m$ των K και C, σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των πολικών σωμάτων K° και C°, και θετικούς πραγματικούς αριθμούς $c_1, \ldots, c_m$, ώστε $\langle u_j, v_j\rangle = 1$, και*

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes v_j. \tag{2.2.30}$$

Η έννοια του λόγου όγκων μπορεί επίσης να οριστεί για τυχόν ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και C στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$\mathrm{vr}(C, K) := \inf \left(\frac{|T(C)|}{|K|}\right)^{1/n}, \tag{2.2.31}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλους τους $T \in GL(n)$ για τους οποίους $K \subseteq T(C)$. Μια ανισότητα ανάλογη με την (2.2.29) αποδείχτηκε στο [30]: *Αν K και C είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\mathrm{vr}(C, K) \leqslant c\sqrt{n}\log n, \tag{2.2.32}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στο Κεφάλαιο 8 εισάγουμε μια γενίκευση της έννοιας του λόγου όγκων. Για κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, C στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ορίζουμε τον *k-οστό λόγο όγκων* των C και K θέτοντας

$$\mathrm{vr}_k(C, K) = \inf \left\{ \left(\frac{W_{n-k}(TC)}{W_{n-k}(K)}\right)^{1/k} : T \in GL(n),\ K \subseteq T(C) \right\}, \tag{2.2.33}$$

όπου $W_j(C) := V(C; n-j, B_2^n; j)$ είναι το j-οστό quermassintegral ενός κυρτού σώματος C. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{vr}_n(C, K) = \mathrm{vr}(C, K)$. Δίνουμε μια εκτίμηση για τον $\mathrm{vr}_k(C, K)$ υποθέτοντας ότι το K βρίσκεται στην ℓ-θέση.

Θεώρημα 2.2.17. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στην ℓ-θέση. Τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε:*

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log(1+d_C)\log(1+d_K), \tag{2.2.34}$$

όπου $d_K := d(K, B_2^n)$ είναι η απόσταση Banach-Mazur του K από την B_2^n και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant c\sqrt{n}(\log n)^2. \tag{2.2.35}$$

Η περίπτωση $k = 1$ αντιστοιχεί στο μέσο πλάτος: θυμηθείτε ότι το μέσο πλάτος του C ορίζεται από την

$$w(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(u)\, d\sigma(u) \tag{2.2.36}$$

όπου h_C είναι η συνάρτηση στήριξης του C, και ότι $W_{n-1}(C) = c_n w(C)$ για κάποια σταθερά c_n η οποία εξαρτάται μόνο από την διάσταση n. Δίνουμε μια εκτίμηση για την ποσότητα $\mathrm{vr}_1(C,K)$ χωρίς κάποια πρόσθετη υπόθεση για τη θέση του K.

Θεώρημα 2.2.18. *Έστω K και C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, έχουμε*

$$\mathrm{wr}(C,K) := \inf\left\{\frac{w(TC)}{w(K)} : T \in GL(n),\ K \subseteq T(C)\right\} \leqslant c\sqrt{n}\log(1+d_C), \tag{2.2.37}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, παίρνουμε

$$\mathrm{wr}(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log n. \tag{2.2.38}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την k-οστή ελαχιστική θέση ενός ζεύγους σωμάτων: Έστω K και C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Λέμε ότι το C βρίσκεται στην *k-οστή ελαχιστική θέση* ως προς το K αν $K \subseteq C$ και $W_k(C) \leqslant W_k(T(C))$ για κάθε $T \in GL(n)$ με $K \subseteq T(C)$.

Αφού $W_0(C) = |C|$, η 0-οστή ελαχιστική θέση του C ως προς το K συμπίπτει με τη θέση ελάχιστου όγκου. Βλέπουμε ότι αν K είναι ένα λείο συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν η B_2^n βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους ως προς το K τότε η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K, δηλαδή το K βρίσκεται στη θέση Löwner. Στην πραγματικότητα μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω: η B_2^n βρίσκεται στην k-οστή ελαχιστική θέση ως προς το K για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Θεώρημα 2.2.19. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $C \subseteq B_2^n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε* $0 \leqslant k \leqslant n-1$ *και για κάθε ελλειψοειδές* $\mathcal{E}$ *με* $\mathcal{E} \supseteq C$ *έχουμε*

$$W_k(\mathcal{E}) \geqslant W_k(B_2^n) = 1.$$

(β) *Η* B_2^n *είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου μέσου πλάτους που περιέχει το* C.

(γ) *Η* B_2^n *είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το* C.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα μπορούμε να δείξουμε στην δυϊκή περίπτωση όπου η B_2^n έχει μέγιστο μέσο πλάτος ανάμεσα σε όλα τα ελλειψοειδή που περιέχονται σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι το K βρίσκεται στη θέση John (βλέπε Πρόταση 8.2.2).

Κεφάλαιο 3

Σύγκριση της M-θέσης με τις κλασικές θέσεις

3.1 Ισοτροπική θέση και η βασική ιδέα

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η θέση ελάχιστης επιφάνειας και η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους δεν είναι M-θέσεις. Η βασική ιδέα στην οποία στηρίζονται οι κατασκευές των παραδειγμάτων μας προέρχεται από μια εργασία [15] των Bourgain, Klartag και V. Milman σχετικά με την ισοτροπική θέση. Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει ένα ελλειψοειδές $\mathcal{E}_L(K)$ που ικανοποιεί την

$$\int_{\mathcal{E}_L(K)} \langle x,y\rangle^2 dx = \int_K \langle x,y\rangle^2 dx \tag{3.1.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, το $\mathcal{E}_L(K)$ έχει τις ίδιες ροπές αδρανείας με το K (το $\mathcal{E}_L(K)$ ονομάζεται *ελλειψοειδές Legendre* του K). Λέμε ότι το K είναι σε ισοτροπική θέση αν $|K| = 1$ και το $\mathcal{E}_L(K)$ είναι πολλαπλάσιο της B_2^n. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια σταθερά $L_K > 0$ με την ιδιότητα

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{3.1.2}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 έχει μια ισοτροπική θέση που προσδιορίζεται μονοσήμαντα «modulo» ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Έτσι, η ισοτροπική σταθερά L_K του K είναι καλά ορισμένη για την κλάση $\{T(K) : T \in GL(n)\}$. Η ισοτροπική θέση του K χαρακτηρίζεται ως θέση ακροτάτου με την εξής έννοια: το K

είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \tag{3.1.3}$$

για κάθε $T \in SL(n)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $L_K \geqslant L_{\overline{B}_2^n} \geqslant c > 0$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το ερώτημα αν υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leqslant C$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K είναι ανοικτό. Ο Bourgain [14] έδειξε ότι $L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Η καλύτερη ως τώρα γνωστή εκτίμηση είναι $L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}$: αυτό αποδείχθηκε από τον Klartag στο [43] – μια δεύτερη απόδειξη δίνεται στο [44].

Αν ορίσουμε $\overline{L}(n) = \max_K L_K$ και $\underline{L}(n) = \min_K L_K = L_{\overline{B}_2^n}$, τότε το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα στην εξής μορφή: υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\overline{L}(n) \leqslant C\underline{L}(n) \tag{3.1.4}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Μια ισοδύναμη ερώτηση είναι αν η ποσότητα

$$I(n) = \max_{|K|=1} \min_{T\in SL(n)} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \tag{3.1.5}$$

είναι φραγμένη από Cn, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αφετηρία μας είναι η ακόλουθη παρατήρηση για την ισοτροπική θέση (βλέπε [15], επίσης [29]).

Λήμμα 3.1.1. *Έστω K και T δύο ισοτροπικά κυρτά σώματα στους $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Τότε, το*

$$W := (L_T/L_K)^{\frac{m}{n+m}} K \times (L_K/L_T)^{\frac{n}{n+m}} T \tag{3.1.6}$$

είναι ένα ισοτροπικό σώμα στον $\mathbb{R}^{n+m}$, και

$$L_{K\times T} = L_K^{\frac{n}{n+m}} L_T^{\frac{m}{n+m}}. \tag{3.1.7}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με E τον υπόχωρο που παράγεται από τα πρώτα n διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{R}^{n+m}$. Ορίζουμε $W = aK \times bT$ για κάποιους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b οι οποίοι πρόκειται να επιλεγούν κατάλληλα, και απαιτούμε αρχικά να ισχύει $a^n b^m = 1$ έτσι ώστε $|W| = 1$. Αν γράψουμε M για τον τελεστή $M_W \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ που ορίζεται μέσω της

$$M(z) = \int_W \langle w, z\rangle w\, dw, \tag{3.1.8}$$

τότε είναι σαφές ότι για κάθε $z \in E$ ισχύει $M(z) \in E$. Επίσης,

$$\langle M(z), z\rangle = \int_W \langle w, z\rangle^2 dw = b^m \int_{aK} \langle x, z\rangle^2 dx = b^m a^{n+2} L_K^2 \|z\|_2^2 = a^2 L_K^2 \|z\|_2^2. \tag{3.1.9}$$

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι αν $z \in E^\perp$ τότε $M(z) \in E^\perp$ και

$$\langle M(z), z\rangle = b^2 L_T^2 \|z\|_2^2. \tag{3.1.10}$$

Αφού ο M δρά ως πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή τόσο στον E όσο και στον $E^\perp$, βλέπουμε ότι το W θα είναι στην ισοτροπική θέση αν ικανοποιείται η

$$aL_K = bL_T. \tag{3.1.11}$$

Αφού $a^n b^m = 1$, από την συνθήκη αυτή προκύπτει ότι

$$a = \left(\frac{L_T}{L_K}\right)^{\frac{m}{n+m}} \quad \text{και} \quad b = \left(\frac{L_K}{L_T}\right)^{\frac{n}{n+m}}. \tag{3.1.12}$$

Μένει να παρατηρήσουμε ότι τα $K \times T$ και W ανήκουν στην ίδια γραμμική κλάση, άρα $L_{K\times T} = L_W = aL_K$ για την τιμή του a που προσδιορίστηκε παραπάνω. □

Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, μπορούμε να πάρουμε κάποιες πληροφορίες σχετικά με το ερώτημα αν η ισοτροπική θέση είναι M-θέση. Το επόμενο λήμμα περιέχει την βασική παρατήρηση που θα χρησιμοποιήσουμε και για τις άλλες κλασικές θέσεις.

Λήμμα 3.1.2. *Έστω W ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^{2n}$. Για κάθε n-διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^{2n}$ έχουμε*

$$|W + \overline{B}_2^{2n}|^{\frac{1}{2n}} \geqslant c|P_F(W)|^{\frac{1}{2n}}, \tag{3.1.13}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$N(W, \overline{B}_2^n) \leqslant 2^{2n}|W + \overline{B}_2^n| \quad \text{και} \quad N(P_F(W), P_F(\overline{B}_2^{2n})) \leqslant N(W, \overline{B}_2^{2n}). \tag{3.1.14}$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |W + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{2n}} &\geqslant \frac{1}{2}[N(W, \overline{B}_2^n]^{\frac{1}{2n}} \geqslant \frac{1}{2}[N(P_F(W), P_F(\overline{B}_2^n))]^{\frac{1}{2n}} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{|P_F(W)|}{|P_F(\overline{B}_2^n)|}\right)^{\frac{1}{2n}} \geqslant c|P_F(W)|^{\frac{1}{2n}}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την $|P_F(\overline{B}_2^n)|^{\frac{1}{2n}} \simeq 1$. □

Πρόταση 3.1.3. *Έστω K και T ισοτροπικά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με $L_K = \overline{L}(n)$ και $L_T = \underline{L}(n)$. Θεωρούμε το ισοτροπικό κυρτό σώμα $W = aK \times bT$ στον $\mathbb{R}^{2n}$, όπου $a = \sqrt{\frac{L_T}{L_K}}$ και $b = \sqrt{\frac{L_K}{L_T}}$. Τότε,*

$$|W + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{2n}} \geqslant c\left(\frac{\overline{L}(n)}{\underline{L}(n)}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.1.15}$$

Απόδειξη. Έστω E ο υπόχωρος που παράγεται από τα πρώτα n διανύσματα της συνήθους βάσης στον $\mathbb{R}^{2n}$ και έστω $F = E^{\perp}$. Τότε, $P_F(W) = bT$ και το Λήμμα 3.1.2 δείχνει ότι

$$|W + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{2n}} \geqslant c\sqrt{b} = c\left(\frac{L_K}{L_T}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.1.16}$$

Αφού $L_K = \overline{L}(n)$ και $L_T = \underline{L}(n)$, έπεται το συμπέρασμα. □

Η Πρόταση 3.1.3 δείχνει ότι αν υπάρχει μια σταθερά $\beta_n > 0$ ώστε κάθε ισοτροπικό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να ικανοποιεί την

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant \beta_n, \tag{3.1.17}$$

τότε

$$\overline{L}(n)/\underline{L}(n) \leqslant C\beta_n^4. \tag{3.1.18}$$

Συνεπώς, αν ο λόγος $\overline{L}(n)/\underline{L}(n)$ δεν είναι φραγμένος τότε η β_n δεν μπορεί να είναι φραγμένη (και έτσι, η ισοτροπική θέση δεν είναι M-θέση). Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την κατασκευή για να δείξουμε ότι η θέση ελάχιστης επιφάνειας και η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους δεν είναι M-θέσεις με σταθερά ανεξάρτητη από την διάσταση.

3.2 Θέση ελάχιστης επιφάνειας

Υπενθυμίζουμε ότι η παράμετρος ελάχιστης επιφάνειας ∂_K ενός κυρτού σώματος K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται μέσω της

$$\partial_K = \min \partial(A(K)), \tag{3.2.1}$$

όπου το minimum παίρνεται πάνω από όλους τους αφινικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν τον όγκο. Γνωρίζουμε ότι $\overline{\partial}(n) = \max_{|K|=1} \partial_K \simeq n$ και $\underline{\partial}(n) = \min_{|K|=1} \partial_K \simeq \sqrt{n}$. Με άλλα λόγια ,

$$\overline{\partial}(n) \geqslant c\sqrt{n}\underline{\partial}(n), \tag{3.2.2}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το επόμενο λήμμα μας επιτρέπει να περιγράψουμε τη θέση ελάχιστης επιφάνειας του γινομένου δύο σωμάτων που βρίσκονται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας, με τρόπο που θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε το παράδειγμα που θέλουμε.

Λήμμα 3.2.1. *Έστω P ένα πολύτοπο όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $F_1, \ldots, F_N$ οι έδρες του P και έστω $u_1, \ldots, u_N$ κάθετα διανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές. Έστω $a, b > 0$ που* *ικανοποιούν την* $a^nb^m = 1$. *Ορίζουμε* $Q := aP \times bC_m$, *όπου* $C_m = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^m$ *είναι ο μοναδιαίος κύβος στον* $\mathbb{R}^m$. *Τότε,*

(α) *Το* Q *έχει* $N+2m$ *έδρες, τις* $G_1, \dots, G_{N+2m}$, *με κάθετα διανύσματα τα:* $v_i = u_i$ *αν* $1 \leqslant i \leqslant N$, $v_{N+i} = e_{n+i}$ *και* $v_{N+m+i} = -e_{n+i}$ *αν* $1 \leqslant i \leqslant m$.

(β) $|G_i| = \frac{|F_i|}{a}$ *αν* $1 \leqslant i \leqslant N$ *και* $|G_i| = \frac{1}{b}$ *αν* $N+1 \leqslant i \leqslant N+2m$.

(γ) *Η επιφάνεια του* Q *ισούται με*

$$\partial(Q) = \frac{\partial(P)}{a} + \frac{2m}{b}. \tag{3.2.3}$$

Απόδειξη. Για κάθε $k = 1, \dots, m$ ορίζουμε $Q^{(k)} = aP \times bC_k$. Παρατηρήστε ότι αν

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant N\}, \tag{3.2.4}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε

$$Q^{(1)} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, u_i \rangle \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant N \text{ και } |t| \leqslant b/2\}. \tag{3.2.5}$$

Έπεται ότι αν $v_i := u_i$ για $1 \leqslant i \leqslant N$ και $v_{N+1} = e_{n+1}$, $v_{N+2} = -e_{n+1}$, τότε τα v_j, $1 \leqslant j \leqslant N+2$, είναι τα κάθετα διανύσματα που αντιστοιχούν στις $Q^{(1)}$. Επιπλέον, εύκολα υπολογίζουμε τον όγκο των εδρών $G_i^{(1)}$ που αντιστοιχούν στα v_i: Αν $1 \leqslant i \leqslant N$, έχουμε

$$|G_i^{(1)}| = a^{n-1}b|F_i|, \tag{3.2.6}$$

ενώ για $i = N+1, N+2$ έχουμε ότι

$$|G_i^{(1)}| = a^n|P|. \tag{3.2.7}$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή βλέπουμε ότι το $Q^{(k)}$ έχει N έδρες όγκου $a^{n-1}b^k|F_i|$, $1 \leqslant i \leqslant N$, και $2k$ έδρες όγκου $a^nb^{k-1}|P|$. Ο όγκος του $Q^{(k)}$ είναι ίσος με $a^nb^k|P|$.

Θέτοντας $k = m$ συμπεραίνουμε ότι οι πρώτες N έδρες του $Q = Q^{(m)}$ έχουν όγκο

$$|G_i| = |G_i^{(m)}| = a^{n-1}b^m|F_i| = \frac{|F_i|}{a}, \tag{3.2.8}$$

επειδή $a^nb^m = 1$, ενώ το Q έχει $2m$ επιπλέον έδρες, με μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\pm e_i$, $n+1 \leqslant i \leqslant n+m$ και όγκο

$$|G_i| = a^nb^{m-1}|P| = \frac{1}{b}, \qquad N+1 \leqslant i \leqslant N+2m. \tag{3.2.9}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\partial(Q) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{N}|F_i| + \frac{2m}{b} = \frac{\partial(P)}{a} + \frac{2m}{b}. \tag{3.2.10}$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Λήμμα 3.2.2. *Έστω P και Q όπως στο Λήμμα 3.2.1. Αν το P είναι στην θέση ελάχιστης επιφάνειας, τότε το Q είναι στη θέση ελάχιστης επιφάνειας αν και μόνο αν*

$$a = \left(\frac{\partial_P}{2n}\right)^{\frac{m}{n+m}} \qquad \textit{και} \qquad b = \left(\frac{2n}{\partial_P}\right)^{\frac{n}{n+m}}. \tag{3.2.11}$$

Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\partial_Q = \frac{n+m}{n}\partial_P^{\frac{n}{n+m}}(2n)^{\frac{m}{n+m}}. \tag{3.2.12}$$

Απόδειξη. Αφού το P είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας, για κάθε $j,k=1,\dots,n$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{N}\langle u_i,e_j\rangle\langle u_i,e_k\rangle|F_i| = \frac{\partial_P}{n}\delta_{j,k} \tag{3.2.13}$$

από το Θεώρημα 2.1.11 και το Λήμμα 2.1.2. Τότε, για κάθε $j,k=1,\dots,n$,

$$\sum_{i=1}^{N+2m}\langle v_i,e_j\rangle\langle v_i,e_k\rangle|G_i| = \sum_{i=1}^{N}\langle u_i,e_j\rangle\langle u_i,e_k\rangle\frac{|F_i|}{a} = \frac{\partial_P}{an}\delta_{j,k}. \tag{3.2.14}$$

Αν $n+1\leqslant j,k\leqslant n+m$, τότε

$$\sum_{i=1}^{N+2m}\langle v_i,e_j\rangle\langle v_i,e_k\rangle|G_i| = \frac{2}{b}\sum_{s=n+1}^{n+m}\langle e_s,e_j\rangle\langle e_s,e_k\rangle = \frac{2}{b}\delta_{j,k}. \tag{3.2.15}$$

Τέλος, αν $1\leqslant j\leqslant n<k\leqslant n+m$, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{N+2m}\langle v_i,e_j\rangle\langle v_i,e_k\rangle|G_i| = 0. \tag{3.2.16}$$

Από το Λήμμα 2.1.2 συμπεραίνουμε ότι το Q θα είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας αν ικανοποιείται η

$$\frac{\partial_P}{an} = \frac{2}{b}. \tag{3.2.17}$$

Αφού $a^nb^m=1$, αυτό δίνει $a=\left(\frac{\partial_P}{2n}\right)^{\frac{m}{n+m}}$. Τότε, λύνοντας την εξίσωση $a^nb^m=1$ ως προς b και αντικαθιστώντας στην (3.2.10) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Θα χρειαστούμε ένα ακόμα, απλό αλλά πολύ χρήσιμο, λήμμα.

Λήμμα 3.2.3. *Έστω C ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(C)$. Τότε,*

$$\partial(C) \leqslant n|C|/r(C). \tag{3.2.18}$$

Ειδικότερα, αν K είναι ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\partial_K \leqslant \partial(K) \leqslant n/L_K. \tag{3.2.19}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία των μεικτών όγκων (βλέπε [65]) έχουμε

$$\partial(C) = nV(C, \dots, C, B_2^n) \leqslant nV\left(C, \dots, C, \frac{1}{r(C)}C\right) = \frac{n|C|}{r(C)}. \tag{3.2.20}$$

Τότε, η (3.2.19) έπεται από την (3.2.18) και από το γεγονός ότι, αν το K είναι συμμετρικό και βρίσκεται στην ισοτροπική θέση, τότε

$$h_K^2(\theta) = \max_{x \in K} |\langle x, \theta \rangle|^2 \geqslant \int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2, \tag{3.2.21}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $K \supseteq L_K B_2^n$, άρα $r(K) \geqslant L_K$. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να κατασκευάσουμε το παράδειγμά μας. Επιλέγουμε $P = \overline{B}_1^n$, τη μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n, κανονικοποιημένη ώστε να έχει όγκο 1 (υπενθυμίζουμε ότι, γενικά, θέτουμε $\overline{A} = |A|^{-1/n} A$ για ένα συμπαγές σύνολο με θετικό μέτρο Lebesgue).

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε το $K = a\overline{B}_1^n \times bC_n$ να είναι στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$|K + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{2n}} \geqslant c\sqrt[8]{n} \tag{3.2.22}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού το $\overline{B}_1^n$ είναι 1-συμμετρικό, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.2 ελέγχουμε εύκολα ότι βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Ξέρουμε ότι $B_1^n \supseteq \frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n$ γιατί $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι $\overline{B}_1^n \simeq nB_1^n$, και έτσι,

$$\overline{B}_1^n \supseteq c_1 \sqrt{n} B_2^n. \tag{3.2.23}$$

Τότε, το Λήμμα 3.2.3 δείχνει ότι

$$\partial(\overline{B}_1^n) \leqslant n/r(\overline{B}_1^n) \leqslant c_2\sqrt{n}, \tag{3.2.24}$$

όπου $c_2 = c_1^{-1}$. Από την ισοπεριμετρική ανισότητα έχουμε $\partial(\overline{B}_1^n) \geqslant \partial(\overline{B}_2^n) \geqslant c_3\sqrt{n}$, άρα

$$\partial(\overline{B}_1^n) \simeq \sqrt{n}. \tag{3.2.25}$$

Από το Λήμμα 3.2.2 παίρνουμε $a = \sqrt{\frac{\partial(\overline{B}_1^n)}{2n}}$, $b = \sqrt{\frac{2n}{\partial(\overline{B}_1^n)}}$ και

$$\partial_K = 2\sqrt{2n\partial(\overline{B}_1^n)} \simeq n^{\frac{3}{4}}. \tag{3.2.26}$$

Εφαρμόζουμε το επιχείρημα του Λήμματος 3.1.2: Αν E είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα n πρώτα ορθοκανονικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^{2n}$ και αν θέσουμε $F = E^{\perp}$, έχουμε

$$|K + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{2n}} \geqslant c\sqrt{b} \geqslant c\left(\frac{2n}{\partial(\overline{B}_1^n)}\right)^{\frac{1}{4}} \simeq \sqrt[8]{n}, \tag{3.2.27}$$

λόγω της (3.2.25). □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι, τουλάχιστον στη συμμετρική περίπτωση, η εκτίμηση του Θεωρήματος 3.2.4 είναι βέλτιστη «modulo» την τιμή της ισοτροπικής σταθεράς του σώματος.

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant C\sqrt[8]{n}L_K, \tag{3.2.28}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε την ακόλουθη παρατήρηση σχετικά με την επιφάνεια ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος.

Πρόταση 3.2.6. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Για κάθε $T \in SL(n)$,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n}\partial_K \leqslant \partial(T^{-*}(K)) \leqslant \frac{\|T\|_{\mathrm{HS}}}{\sqrt{n}}\partial_K, \tag{3.2.29}$$

όπου $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \mathrm{tr}(T^*T)$ είναι η Hilbert-Schmidt νόρμα του T.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.1.2 για το ισοτροπικό μέτρο σ_K, έχουμε ότι

$$\partial_K\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} = \int_{S^{n-1}} \langle\theta, T\theta\rangle\, d\sigma_K(\theta) \leqslant \int_{S^{n-1}} \|T\theta\|_2 d\sigma_K(\theta). \tag{3.2.30}$$

Αφού $\|T\theta\|_2 = h_{T^*(B_2^n)}(\theta)$, από την ολοκληρωτική αναπαράσταση των μεικτών όγκων και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για κάθε αφινικό μετασχηματισμό A του $\mathbb{R}^n$ και κάθε n-αδα $K_1, \ldots, K_n$ κυρτών σωμάτων έχουμε

$$V(A(K_1), \ldots, A(K_n)) = |\det A|V(K_1, \ldots, K_n), \tag{3.2.31}$$

(βλέπε [65]) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\partial_K \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} &\leqslant \int_{S^{n-1}} h_{T^*(B_2^n)}(\theta) d\sigma_K(\theta) = nV(K, \ldots, K, T^*(B_2^n)) \\ &= nV(T^*(T^{-*}(K)), \ldots, T^*(T^{-*}(K)), T^*(B_2^n)) \\ &= n\,|\det T^*| V(T^{-*}(K), \ldots, T^{-*}(K), B_2^n) \\ &= \partial(T^{-*}(K)).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το αριστερό μέλος της ανισότητας. Για το δεξιό μέλος, αν θέσουμε $S := T^*T$ τότε, εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.1.2 και την ανισότητα Hölder, έχουμε

$$\begin{aligned}\partial_K \frac{\|T\|_{\mathrm{HS}}^2}{n} &= \partial_K \frac{\mathrm{tr}(S)}{n} = \int_{S^{n-1}} \langle \theta, S\theta \rangle d\sigma_K(\theta) = \int_{S^{n-1}} \|T\theta\|_2^2 d\sigma_K(\theta) \\ &\geqslant \frac{1}{\partial_K} \left(\int_{S^{n-1}} \|T\theta\|_2 d\sigma_K(\theta) \right)^2,\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$\partial_K \frac{\|T\|_{\mathrm{HS}}}{\sqrt{n}} \geqslant \int_{S^{n-1}} \|T\theta\|_2 d\sigma_K(\theta) . \partial(T^{-*}(K)) \tag{3.2.32}$$

Τέλος, παρατηρούμε (βλέπε [37]) ότι, για κάθε $T \in SL(n)$,

$$\partial(T^{-*}(K)) = \int_{S^{n-1}} \|T\theta\|_2 \, d\sigma_K(\theta), \tag{3.2.33}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.2.7. Τα παραδείγματα της μπάλας και του κύβου δείχνουν ότι (αν αγνοήσουμε απόλυτες σταθερές) οι εκτιμήσεις της προηγούμενης πρότασης είναι ακριβείς.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2.5.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.5. Η θέση ελάχιστης επιφάνειας και η ισοτροπική θέση διατηρούνται από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας διαγώνιος θετικός τελεστής $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ στην $SL(n)$ τέτοιος ώστε $K = T(\tilde{K})$ και το $\tilde{K}$ είναι σε ισοτροπική θέση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 1$ και $0 < \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n < 1$ για κάποιο $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Παρατηρήστε ότι

$$|C_n + T(C_n)| = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1+\lambda_i}{2} \right) \leqslant \prod_{i=1}^{m} \lambda_i. \tag{3.2.34}$$

Αφού $T \in SL(n)$ και το $\tilde{K}$ είναι ισοτροπικό, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε (βλέπε [54])

$$L_K \simeq \int_{\tilde{K}} |\langle x, e_i \rangle| \, dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_K |\langle x, e_i \rangle| \, dx \simeq \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{|K \cap e_i^{\perp}|}. \tag{3.2.35}$$

Αφού το K είναι στη θέση ελάχιστης επιφάνειας, έχουμε

$$|P_{e_i^\perp}(K)| \leqslant \frac{\partial(K)}{2\sqrt{n}} = \frac{\partial_K}{2\sqrt{n}}. \tag{3.2.36}$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{\lambda_i} \simeq L_K |K \cap e_i^\perp| \leqslant |P_{e_i^\perp}(K)| L_K \leqslant \frac{\partial_K L_K}{2\sqrt{n}} \tag{3.2.37}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επιπροσθέτως, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.6 βλέπουμε ότι $\partial(\tilde{K}) = \partial(T^{-1}(K)) \geqslant \frac{\mathrm{tr}(T)}{n}\partial_K$. Από το Λήμμα 3.2.3 έπεται ότι

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{\partial(\tilde{K})}{\partial_K} \leqslant \frac{n}{\partial_K L_K}. \tag{3.2.38}$$

Ισχυρισμός. Έχουμε

$$\left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{1/n} \leqslant \sqrt[8]{n}. \tag{3.2.39}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Γράφουμε $\partial_K L_K = n^{\frac{1}{2}+\kappa}$ για κάποιο $0 \leqslant \kappa \leqslant 1/2$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτα υποθέτουμε ότι $8\big(\frac{1}{2} - \kappa\big)m \leqslant n$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{m}\right)^{\frac{m}{n}} \leqslant \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{\mathrm{tr}(T)}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \\ &\leqslant c_1 \left(\frac{n}{\partial_K L_K}\right)^{\frac{m}{n}} = c_1 (n^{\frac{1}{2}-\kappa})^{\frac{m}{n}} \leqslant c_1 \sqrt[8]{n}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $8\big(\frac{1}{2} - \kappa\big)m > n$. Από αυτήν έπεται ότι $n - m < \frac{3-8\kappa}{4-8\kappa}n$. Τότε, η (3.2.37) δείχνει ότι

$$\prod_{i=1}^m \lambda_i = \prod_{i=m+1}^n \frac{1}{\lambda_i} \leqslant \left(\frac{c_3 \partial_K L_K}{\sqrt{n}}\right)^{n-m} = (c_3 n^\kappa)^{n-m} = c_3^{n-m} n^{\kappa(n-m)}, \tag{3.2.40}$$

και έτσι,

$$\left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{1/n} \leqslant c_4 n^{\frac{\kappa(n-m)}{n}} \leqslant c_4 n^{g(\kappa)}, \tag{3.2.41}$$

όπου $g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την $g(\kappa) = \frac{3\kappa - 8\kappa^2}{4-8\kappa}$. Αφού η g παίρνει την μέγιστη τιμή της για $\kappa = 1/4$, έπεται ο ισχυρισμός. □

Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός (βλέπε, για παράδειγμα, [64]) ότι αν A, B, C είναι συμμετρικά κυρτά σώματα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|A+B|^{1/n} \leqslant c_5 |A+C|^{1/n} |B+C|^{1/n}. \tag{3.2.42}$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |K+\overline{B}_2^n|^{1/n} &\leqslant c_5 |T(\tilde{K})+C_n|^{1/n} |C_n+\overline{B}_2^n|^{1/n} \\ &\leqslant c_5^2 |T(\tilde{K})+T(C_n)|^{1/n} |T(C_n)+C_n|^{1/n} |C_n+\overline{B}_2^n|^{1/n}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$|T(\tilde{K})+T(C_n)|^{1/n} = |\tilde{K}+C_n|^{1/n} \leqslant c_6 L_K, \tag{3.2.43}$$

διότι $|\tilde{K}+C_n|^{1/n} \leqslant c_5 [N(\tilde{K}, L_K\overline{B}_2^n)]^{1/n} |L_K\overline{B}_2^n + C_n|^{1/n}$ και $N(\tilde{K}, L_K\overline{B}_2^n) \leqslant \exp(cn)$ (βλέπε [29, Θεώρημα 1.6.4]), ενώ $|C_n+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant c_7$, και έτσι, $|L_K\overline{B}_2^n + C_n|^{1/n} \leqslant c_8 L_K$. Έπεται ότι

$$|K+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant c_9 L_K |T(C_n)+C_n|^{1/n} \leqslant c_9 L_K \left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{1/n}, \tag{3.2.44}$$

από την (3.2.34). Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Παρατήρηση 3.2.8. Μπορούμε να γενικεύσουμε το Θεώρημα 3.2.5 και στη μη συμμετρική περίπτωση ως εξής: Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Θεωρούμε το άθροισμα Blaschke ∇K των K και $-K$: αυτό είναι το (συμμετρικό) κυρτό σώμα που έχει ως επιφανειακό μέτρο το $\sigma_K + \sigma_{-K}$. Τότε, το ∇K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα και από το Λήμμα 2.1.2 βλέπουμε ότι το επιφανειακό του μέτρο είναι ισοτροπικό, άρα έχει ελάχιστη επιφάνεια. Επιπλέον, μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$|\nabla K| \simeq 1 \ \text{ και } \ |K+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant c_1 |\overline{\nabla K} + \overline{B}_2^n|^{1/n}. \tag{3.2.45}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.5 στο $\overline{\nabla K}$ συμπεραίνουμε ότι

$$|K+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant c_2 \sqrt[8]{n} L_{\nabla K}. \tag{3.2.46}$$

3.3 Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους

Υπενθυμίζουμε ότι η παράμετρος ελάχιστου μέσου πλάτους w_K ενός κυρτού σώματος K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται μέσω της

$$w_K = \min w(A(K)), \tag{3.3.1}$$

όπου το minimum παίρνεται πάνω από όλους τους αφινικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν τον όγκο. Γνωρίζουμε ότι $\overline{w}(n) = \max_{|K|=1} w_K \geqslant c_1\sqrt{n\log n}$ και $\underline{w}(n) = \min_{|K|=1} w_K \simeq \sqrt{n}$. Δηλαδή,

$$\overline{w}(n) \geqslant c\sqrt{\log n}\,\underline{w}(n), \tag{3.3.2}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το επόμενο λήμμα μας επιτρέπει να περιγράψουμε την θέση ελάχιστου πλάτους του γινομένου δύο κυρτών σωμάτων που έχουν ελάχιστο μέσο πλάτος.

Λήμμα 3.3.1. *Έστω K και P δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και στον $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Θεωρούμε $a, b > 0$ και ορίζουμε $Q := aK \times bP$. Τότε,*

$$\sqrt{n+m}\,w(Q) \simeq a\sqrt{n}\,w(K) + b\sqrt{m}\,w(P). \tag{3.3.3}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, για κάθε κυρτό σώμα V στον $\mathbb{R}^k$,

$$\sqrt{k}\,w(V) = c_k \int_{\mathbb{R}^k} h_V(z)\,d\gamma_k(z), \tag{3.3.4}$$

όπου $c_k \simeq 1$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από την διάσταση και γ_k είναι το k-διάστατο μέτρο του Gauss. Η ταυτότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. Παρατηρήστε ότι αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ τότε

$$\begin{aligned} h_Q(z) &= h_{aK\times bP}(x,y) = \sup\{\langle (au, bv), (x,y)\rangle : u \in K, v \in P\} \\ &= a\sup_{u\in K}\langle u, x\rangle + b\sup_{v\in P}\langle v, y\rangle = ah_K(x) + bh_P(y). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sqrt{n+m}\,w(Q) &= c_{n+m}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n}\big(ah_K(x) + bh_P(y)\big)\,d\gamma_n(x)\,d\gamma_m(y) \\ &= c_{n+m}a\int_{\mathbb{R}^n} h_K(x)\,d\gamma_n(x) + c_{n+m}b\int_{\mathbb{R}^m} h_P(y)\,d\gamma_m(y) \\ &= \frac{c_{n+m}}{c_n}a\sqrt{n}\,w(K) + \frac{c_{n+m}}{c_m}b\sqrt{m}\,w(P) \\ &\simeq a\sqrt{n}\,w(K) + b\sqrt{m}\,w(P), \end{aligned}$$

όπου, στο τέλος, χρησιμοποιήσαμε την $c_{n+m} \simeq c_n \simeq c_m \simeq 1$. □

Λήμμα 3.3.2. *Έστω K και P δύο 1-συμμετρικά κυρτά σώματα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και στον $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα K και P έχουν ελάχιστο μέσο πλάτος. Αν επιλέξουμε $a, b > 0$ με $a^nb^m = 1$ έτσι ώστε το $Q = aK \times bP$ να έχει ελάχιστο μέσο πλάτος, τότε*

$$a \simeq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2(n+m)}}\left(\frac{w_P}{w_K}\right)^{\frac{m}{n+m}} \quad \text{και} \quad b \simeq \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{2(n+m)}}\left(\frac{w_K}{w_P}\right)^{\frac{n}{n+m}}. \tag{3.3.5}$$

Επιπλέον,

$$w_Q \simeq \frac{(n+m)^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{m}{2(n+m)}} n^{\frac{n}{2(n+m)}}} w_K^{\frac{n}{n+m}} w_P^{\frac{m}{n+m}}. \tag{3.3.6}$$

Απόδειξη. Έστω E ο υπόχωρος που παράγεται από τα πρώτα n ορθοκανονικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^{n+m}$. Αφού τα K και P είναι 1-συμμετρικά, υπάρχει ένας διαγώνιος μετασχηματισμός της μορφής $aI_E \times bI_{E^\perp}$ που διατηρεί τον όγκο και φέρνει το $K \times T$ στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Θεωρούμε το $Q = aK \times bP$. Τότε, έχουμε

$$c_{n+m} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} h_Q(z)\langle z, e_i\rangle^2 d\gamma_{n+m}(z) = \sqrt{n+m}\frac{w(Q)}{n+m} = \frac{w(Q)}{\sqrt{n+m}} \tag{3.3.7}$$

για κάθε $i = 1, \dots, 2n$. Δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.2 παρατηρούμε ότι

$$\frac{aw(K)}{\sqrt{n}} \simeq \frac{bw(P)}{\sqrt{m}} \simeq \frac{w(Q)}{\sqrt{n+m}}. \tag{3.3.8}$$

Από την συνθήκη $a^n b^m = 1$ και την (3.3.8) έχουμε

$$a \simeq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2(n+m)}} \left(\frac{w_P}{w_K}\right)^{\frac{m}{n+m}}. \tag{3.3.9}$$

Λύνοντας την εξίσωση $a^n b^m = 1$ βρίσκουμε το b και αντικαθιστώντας στην (3.3.3) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε το παράδειγμά μας. Επιλέγουμε $K = \overline{B}_1^n$ και $P = C_n$. Παρατηρήστε ότι

$$w_{C_n} \simeq \sqrt{n} \qquad \text{και} \qquad w_{\overline{B}_1^n} \simeq \sqrt{n \log n}. \tag{3.3.10}$$

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω $a, b > 0$ τέτοια ώστε το $Q = a\overline{B}_1^n \times bC_n$ να είναι σε θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Τότε,*

$$|K + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{2n}} \geqslant c\sqrt[8]{\log n}, \tag{3.3.11}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.3.2 έχουμε $a \simeq \sqrt{\frac{w_{C_n}}{w_{\overline{B}_1^n}}} \simeq \frac{1}{\sqrt[4]{\log n}}$, $b \simeq \sqrt{\frac{w_{\overline{B}_1^n}}{w_{C_n}}} \simeq \sqrt[4]{\log n}$ και

$$w_Q \simeq \sqrt{w_{\overline{B}_1^n} w_{C_n}} \simeq \sqrt{n}\sqrt[4]{\log n}. \tag{3.3.12}$$

Εφαρμόζουμε το επιχείρημα του Λήμματος 3.1.2: Αν E είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα πρώτα n οθοκανονικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^{2n}$ και $F = E^\perp$ τότε,

$$|K + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{2n}} \geqslant c\sqrt{b} \simeq \sqrt[8]{\log n}, \tag{3.3.13}$$

γιατί $b \simeq \sqrt[4]{\log n}$. □

Παρατήρηση 3.3.4. Από την ανισότητα του Urysohn έχουμε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που έχει ελάχιστο μέσο πλάτος, τότε

$$|K+\overline{B}_2^n|^{1/n} \leqslant c_1\frac{w(K+\overline{B}_2^n)}{\sqrt{n}} = c_1\frac{w(K)+w(\overline{B}_2^n)}{\sqrt{n}} \leqslant c_2\log n, \tag{3.3.14}$$

διότι $w(\overline{B}_2^n) \leqslant w(K) \leqslant \overline{w}(n) \leqslant c\sqrt{n}\log n$.

3.4 Θέσεις John και Löwner

Υπενθυμίζουμε ότι ένα συμμετρικό σώμα K είναι στη θέση John αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που περιέχεται στο K. Το θεώρημα του John [41] μας λέει ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $B_2^n \subseteq K$ και υπάρχουν $u_1,\ldots,u_N \in \mathrm{bd}(K)\cap S^{n-1}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1,\ldots,c_N$ τέτοιοι ώστε ο ταυτοτικός τελεστής να αναπαρίσταται στη μορφή

$$I=\sum_{j=1}^{N} c_j u_j\otimes u_j. \tag{3.4.1}$$

όπου $(u_j\otimes u_j)(y)=\langle u_j,y\rangle u_j$. Από αυτήν την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης βλέπουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{N} c_j\langle u_j,\theta\rangle^2 = 1 \tag{3.4.2}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Επομένως, το διακριτό μέτρο μ στην S^{n-1} που έχει φορέα το $\{u_1,\ldots,u_N\}$ και δίνει μάζα c_j στο $\{u_j\}$, $j=1,\ldots,N$, είναι ισοτροπικό.

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα ζωνοιδούς που είναι unconditional και ενώ είναι στη θέση John δεν είναι σε M-θέση. Στο [67] μπορεί κανείς να βρεί αντίστοιχες πληροφορίες για την σύγκριση της θέσης John με την ℓ-θέση.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$ που είναι στη θέση John. Έστω $Q_k=[-1,1]^k$ ο κύβος στον $\mathbb{R}^k$ που είναι επίσης στη θέση John. Τότε, το $K\times Q_k$ είναι στη θέση John.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς k. Αρκεί να δείξουμε ότι το $K_1 := K\times[-1,1]$ είναι στη θέση John. Αρχικά παρατηρούμε ότι $B_2^{m+1}\subseteq B_2^m\times[-1,1]\subseteq K_1$. Ακόμη, για κάθε $x=(y,t)\in\mathbb{R}^{m+1}$ έχουμε ότι

$$x=y+te_{m+1}=\sum_{j=1}^{N} c_j\langle x,u_j\rangle u_j+\langle x,e_{m+1}\rangle e_{m+1}, \tag{3.4.3}$$

χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση (3.4.1) της ταυτοτικής απεικόνισης για το K. Το e_{m+1} είναι κι αυτό σημείο επαφής για το K_1. Έτσι, η απόδειξη ολοκληρώνεται από το θεώρημα του John. □

Θα λέμε ότι το K είναι στην κανονικοποιημένη θέση John αν $|K| = 1$ και υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιος ώστε το λK να είναι στη θέση John.

Πρόταση 3.4.2. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που είναι στην κανονικοποιημένη θέση John, και ικανοποιεί την*

$$|K + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{n}, \tag{3.4.4}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $K := |B_2^m \times Q_k|^{-\frac{1}{n}}\,(B_2^m \times Q_k)$, όπου $m + k = n$. Το Λήμμα 3.4.1 δείχνει ότι το K είναι σε κανονικοποιημένη θέση John και είναι προφανές ότι το K είναι unconditional. Παρατηρήστε ότι

$$\alpha := |B_2^m \times Q_k|^{1/n} = \left(2^k\omega_m\right)^{1/n} \leqslant 2^{\frac{k}{n}}(cm)^{-\frac{m}{2n}}. \tag{3.4.5}$$

Έστω $F := \mathbb{R}^k$. Τότε,

$$\begin{aligned} N(K, \overline{B}_2^n) &\geqslant N\left(P_F(K), P_F(\overline{B}_2^n)\right) = N\left(\frac{1}{\alpha}Q_k, c_1\sqrt{n}B_2^k\right) \\ &= N\left(Q_k, \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{k}}(c_1\sqrt{k}B_2^k)\right) \geqslant \left(\frac{c_2\sqrt{k}}{\alpha\sqrt{n}}\right)^k. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|K + \overline{B}_2^n|^{\frac{1}{n}} \geqslant N(K, \overline{B}_2^n)^{1/n} \geqslant \left(\frac{c_2\sqrt{k}}{\alpha\sqrt{n}}\right)^{\frac{k}{n}} \geqslant c_3\left(\sqrt{m}\right)^{\frac{mk}{n^2}} \geqslant c_4\sqrt[8]{n} \tag{3.4.6}$$

αν επιλέξουμε $m = k = n/2$. □

Λέμε ότι ένα συμμετρικό σώμα K είναι στη θέση Löwner αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Επίσης, λέμε ότι το K είναι στην κανονικοποιημένη θέση Löwner αν $|K| = 1$ και υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιος ώστε το λK να είναι στη θέση Löwner.

Πόρισμα 3.4.3. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι στην κανονικοποιημένη θέση Löwner, και ικανοποιεί την*

$$|W + \overline{B}_2^n|^{1/n} \geqslant c\sqrt[8]{n}, \tag{3.4.7}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω K το unconditional σώμα της Πρότασης 3.4.2. Επιλέγουμε $W := |K^\circ|^{-1/n}K^\circ$. Τότε, το K είναι στη θέση Löwner. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$|W+\overline{B}_2^n|^{1/n}|W\cap \overline{B}_2^n|^{1/n}\simeq 1, \tag{3.4.8}$$

το οποίο είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.6 (2) από το [35]. Αφού $K^\circ = |K^\circ|^{1/n}W \simeq \frac{1}{n}W$, από την ανισότητα Blaschke-Santaló και την αντίστροφή της, σε συνδυασμό με κάποιες στοιχειώδεις εκτιμήσεις για αριθμούς κάλυψης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|W+\overline{B}_2^n|^{1/n} &\simeq \frac{1}{|W\cap \overline{B}_2^n|^{1/n}} \simeq \frac{1}{|[\mathrm{conv}(W^\circ,(\overline{B}_2^n)^\circ)]^\circ|^{1/n}}\\
&\simeq n|\mathrm{conv}(W^\circ,(\overline{B}_2^n)^\circ)|^{1/n} \simeq n\left|\mathrm{conv}\big(\frac{1}{n}K,\frac{1}{n}\overline{B}_2^n\big)\right|^{1/n}\\
&\simeq |\mathrm{conv}(K,\overline{B}_2^n)|^{1/n}\simeq |K+\overline{B}_2^n|^{1/n}\\
&\geqslant c\sqrt[8]{n},
\end{aligned}$$

από την (3.4.4). □

Κεφάλαιο 4

Θέση ελάχιστης επιφάνειας

4.1 Προβολές σε υπερεπίπεδα

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το σώμα προβολών ΠK του K είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα του οποίου η συνάρτηση στήριξης ορίζεται ως εξής: $h_{\Pi K}(\theta) = |P_{\theta^\perp}(K)|$, $\theta \in S^{n-1}$. Γράφουμε $\Pi^* K$ για το πολικό σώμα του σώματος προβολών του K. Στο [37] αποδεικνύεται ότι οι όγκοι των ΠK και $\Pi^* K$ καθορίζονται από την παράμετρο ελάχιστης επιφάνειας ∂_K: Αν $|K| = 1$, τότε

$$|\Pi^* K|^{1/n} \simeq \frac{1}{\partial_K} \quad \text{και} \quad |\Pi K|^{1/n} \simeq \frac{\partial_K}{n} \tag{4.1.1}$$

Τα άνω και κάτω φράγματα που δίνονται στο [37] είναι μάλιστα ακριβή: γίνονται ισότητες όταν το K είναι ο κύβος ή Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε ότι, από τον τύπο του Cauchy, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ο όγκος της $(n-1)$-διάστατης προβολής $P_{\theta^\perp}(K)$ οποιουδήποτε κυρτού σώματος K μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$|P_{\theta^\perp}(K)| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta\rangle| d\sigma_K(u). \tag{4.1.2}$$

Υποθέτουμε ότι το K είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας. Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} |P_{\theta^\perp}(K)| &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta\rangle|\, d\sigma_K(u) \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta\rangle|^2 d\sigma_K(u)\right)^{1/2} \sqrt{\partial_K} \\ &= \frac{\partial_K}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Από την άλλη πλευρά έχουμε

$$|P_{\theta^\perp}(K)| \geqslant \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \langle u,\theta\rangle^2 d\sigma_K(u) = \frac{\partial_K}{2n}. \tag{4.1.3}$$

Γράφοντας τον όγκο του $\Pi^*(K)$ σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιώντας την (4.1.1) έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{|P_{\theta^\perp}(K)|^n} d\sigma(\theta) = \frac{|\Pi^* K|}{\omega_n} \leqslant \left(\frac{C\sqrt{n}}{\partial_K}\right)^n, \tag{4.1.4}$$

και από την ανισότητα του Markov παίρνουμε

$$\frac{c\partial_K}{\sqrt{n}} \leqslant |P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant \frac{\partial_K}{2\sqrt{n}} \tag{4.1.5}$$

για κάθε θ σε ένα υποσύνολο της S^{n-1} που έχει μέτρο μεγαλύτερο από $1-2^{-n}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αφού $\partial_K \geqslant c_1\sqrt{n}$ (από την ισοπεριμετρική ανισότητα), βλέπουμε ότι με μεγάλη πιθανότητα οι $(n-1)$-διάστατες προβολές ενός σώματος που βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας ικανοποιούν τη σχέση

$$|P_{\theta^\perp}(K)| \geqslant c. \tag{4.1.6}$$

Στο [37] τέθηκε το ερώτημα αν η (4.1.6) ισχύει *για κάθε* $\theta \in S^{n-1}$. Θα δείξουμε ότι η απάντηση σε αυτήν την ερώτηση είναι ισχυρά αρνητική.

Θεώρημα 4.1.1. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας και ικανοποιεί την*

$$\min_{\theta\in S^{n-1}} |P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}, \tag{4.1.7}$$

όπου $C>0$ μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Επιλέγουμε $k,m\in\mathbb{N}$ με $k+m=n$ και $a,b>0$, και ορίζουμε $K = a\overline{B}_1^k \times bC_m$. Από το Λήμμα 3.2.2 γνωρίζουμε ότι το K εχει ελάχιστη επιφάνεια αν

$$a = \left(\frac{\partial_{\overline{B}_1^k}}{2k}\right)^{\frac{m}{k+m}} \quad \text{και} \quad b = \left(\frac{2k}{\partial_{\overline{B}_1^k}}\right)^{\frac{k}{k+m}}. \tag{4.1.8}$$

Επιπλέον,

$$\partial_K := \frac{k+m}{k}\partial_{\overline{B}_1^k}^{\frac{k}{k+m}} (2k)^{\frac{m}{k+m}}. \tag{4.1.9}$$

Επιλέγουμε $m \simeq \frac{k}{\log k}$. Παρατηρήστε ότι $k \leqslant n \leqslant 2k$. Τότε, αφού $\partial_{\overline{B}_1^k} \simeq \sqrt{k}$, ελέγχουμε ότι

$$a \simeq 1, \quad b \simeq \sqrt{k} \simeq \sqrt{n} \quad \text{και} \quad \partial_K \simeq \sqrt{k} \simeq \sqrt{n}. \tag{4.1.10}$$

Γράφουμε $z = (x, y)$ για ένα σημείο στον $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\int_K \langle z, e_i \rangle^2 dz = \int_{a\overline{B}_1^k} \int_{bC_m} y_i^2 dy\, dx = a^k \int_{bC_m} y_i^2 dy = a^k b^{m+2} \int_{C_m} u_i^2 du \simeq b^2 \tag{4.1.11}$$

για κάθε $i = k+1, \ldots, n$, και ομοίως,

$$\int_K \langle z, e_i \rangle^2 dx \simeq a^2 \tag{4.1.12}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι

$$\int_K \langle z, e_i \rangle^2 dz \simeq \frac{1}{|K \cap e_i^\perp|^2} = \frac{1}{|P_{e_i^\perp}(K)|^2}. \tag{4.1.13}$$

Για την πρώτη σχέση, βλέπε [54]. Η δεξιά ισότητα προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι το K είναι unconditional. Συνδυάζοντας τις (4.1.11) και (4.1.13) βλέπουμε ότι

$$|P_{e_i^\perp}(K)| \simeq \frac{1}{b} \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{4.1.14}$$

για όλα τα $i = k+1, \ldots, n$. Δηλαδή,

$$\beta := \min\{|P_{\theta^\perp}(K)| : \theta \in S^{n-1}\} \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} \tag{4.1.15}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. □

Παρατήρηση 4.1.2. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι εκτιμήσεις που μας δίνει το Θεώρημα 4.1.1 είναι ακριβείς. Από την (4.1.3) γνωρίζουμε ότι αν το K έχει όγκο 1 και βρίσκεται στην θέση ελάχιστης επιφάνειας τότε, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$|P_{\theta^\perp}(K)| \geqslant \frac{\partial_K}{2n} \geqslant \frac{\partial_{\overline{B}_2^n}}{2n} = \frac{\omega_n^{1/n}}{2} \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}. \tag{4.1.16}$$

4.2 Μέσο πλάτος στη θέση ελάχιστης επιφάνειας

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε άνω φράγμα για το μέσο πλάτος ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Το φράγμα μας είναι «κοντά στην ελάχιστη δυνατή τάξη μεγέθους» $\sqrt{n}$ όταν η παράμετρος ελάχιστης επιφάνειας ∂_K του K είναι «μεγάλη» (δηλαδή, της τάξης του n).

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$w(K) \leqslant C\frac{n^{3/2}}{\partial_K}, \tag{4.2.1}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Στο [37] αποδεικνύεται ότι κάθε κυρτό σώμα με ελάχιστη επιφάνεια είναι το όριο μιας ακολουθίας πολυτόπων ελάχιστης επιφάνειας ως προς την Hausdorff μετρική. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ένα πολύτοπο με έδρες F_j και αντίστοιχα μοναδιαία κάθετα διανύσματα τα u_j, $j = 1, \ldots, m$, το οποίο έχει ισοτροπικό μέτρο επιφάνειας. Τότε, η ισοτροπική συνθήκη για το μέτρο σ_K είναι ισοδύναμη με την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$I = \sum_{j=1}^{m} \frac{n|F_j|}{\partial_K} u_j \otimes u_j. \tag{4.2.2}$$

Το γεγονός ότι $|K| = 1$ μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{m} h_K(u_j)|F_j| = n. \tag{4.2.3}$$

Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\theta = \frac{n}{\partial_K} \sum_{j=1}^{m} |F_j| \langle \theta, u_j \rangle u_j, \tag{4.2.4}$$

και έτσι,

$$h_K(\theta) \leqslant \frac{n}{\partial_K} \sum_{j=1}^{m} |F_j| \, |\langle \theta, u_j \rangle| \, h_K(u_j). \tag{4.2.5}$$

Ολοκληρώνοντας την (4.2.5) πάνω στην σφαίρα, και παίρνοντας υπ' όψιν την (4.2.3) και το γεγονός ότι

$$\int_{S^{n-1}} |\langle \theta, u \rangle| \, d\sigma(\theta) = \frac{c_n}{\sqrt{n}} \tag{4.2.6}$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$ και για κάποια σταθερά $c_n \simeq 1$, γράφουμε

$$\begin{aligned} w(K) &= \int_{S^{n-1}} h_K(\theta) \, d\sigma(\theta) \leqslant \frac{n}{\partial_K} \sum_{j=1}^{m} |F_j| \, h_K(u_j) \int_{S^{n-1}} |\langle \theta, u_j \rangle| \, d\sigma(\theta) \\ &= \frac{c_n\sqrt{n}}{\partial_K} \sum_{j=1}^{m} |F_j| \, h_K(u_j) = c_n\sqrt{n}\frac{n}{\partial_K}. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. □

Πόρισμα 4.2.2. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$w(K) \leqslant Cn, \tag{4.2.7}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια της ισοπεριμετρικής ανισότητας και του Θεωρήματος 4.2.1: γνωρίζουμε ότι $\partial_K \geqslant \partial_{\overline{B_2^n}} \geqslant c\sqrt{n}$. □

Παρατήρηση 4.2.3. Είναι γνωστό ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|K \cap \theta^{\perp}|\, h_K(\theta) \leqslant \frac{n}{2} \tag{4.2.8}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Χρησιμοποιώντας την ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.2.1, μπορούμε να δούμε ότι η μέση τιμή του $|P_{\theta^{\perp}}(K)|\, h_K(\theta)$ ικανοποιεί το ίδιο φράγμα όταν το K βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Παρατηρήστε ότι $|K \cap \theta^{\perp}| \leqslant |P_{\theta^{\perp}}(K)|$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Πρόταση 4.2.4. *Έστω K ένα συμμετρικό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$\int_{S^{n-1}} |P_{\theta^{\perp}}(K)|\, h_K(\theta)\, d\sigma(\theta) \leqslant \frac{n}{2}. \tag{4.2.9}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} |P_{\theta^{\perp}}(K)|\, h_K(\theta)\, d\sigma(\theta) &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} h_K(\theta)|\langle \theta, x\rangle|\, d\sigma_K(x)\, d\sigma(\theta)\\ &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\left(\int_{S^{n-1}} h_K(\theta)|\langle \theta, x\rangle|\, d\sigma(\theta)\right) d\sigma_K(x),\end{aligned}$$

και λόγω της (4.2.5) έχουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} h_K(\theta)|\langle \theta, x\rangle|\, d\sigma(\theta) \leqslant \frac{n}{\partial_K}\sum_{j=1}^{m} |F_j| h_K(u_j)\int_{S^{n-1}} |\langle \theta, x\rangle|\, |\langle \theta, u_j\rangle|\, d\sigma(\theta). \tag{4.2.10}$$

Με απλή εφαρμογή της ανισότητας Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} |\langle \theta, x\rangle|\, |\langle \theta, u_j\rangle|\, d\sigma(\theta) \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \langle \theta, x\rangle^2 d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S^{n-1}} \langle \theta, u_j\rangle^2 d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}. \tag{4.2.11}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας και την (4.2.3) μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{S^{n-1}} h_K(\theta)|\langle\theta,x\rangle|\,d\sigma(\theta) \leqslant \frac{n}{\partial_K}\sum_{j=1}^m \frac{|F_j|h_K(u_j)}{n} = \frac{n}{\partial_K}. \tag{4.2.12}$$

Αντικαθιστώντας, βλέπουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} |P_{\theta^\perp}(K)|\,h_K(\theta)\,d\sigma(\theta) \leqslant \frac{n}{2\partial_K}\int_{S^{n-1}} d\sigma_K(x) = \frac{n}{2}, \tag{4.2.13}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα unconditional κυρτού σώματος K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο έχει ελάχιστη επιφάνεια και μέσο πλάτος τάξης τουλάχιστον ίσης με $n/\log n$. Με άλλα λόγια, η εκτίμηση του Πορίσματος 4.2.2 είναι σχεδόν βέλτιστη.

Θεώρημα 4.2.5. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα Q όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας και ικανοποιεί την*

$$w(Q) \geqslant \frac{cn}{\log n}, \tag{4.2.14}$$

όπου $c>0$ μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το παράδειγμα του Θεωρήματος 4.1.1. Θεωρούμε $k,m\in\mathbb{N}$ με $k+m=n$ και $a,b>0$, και ορίζουμε $Q := a\overline{B}_1^k \times bC_m$. Δουλεύοντας όπως στο Λήμμα 3.1.1 και το Λήμμα 3.1.2 ελέγχουμε ότι το Q έχει ελάχιστη επιφάνεια αν

$$a = \left(\frac{\partial_{\overline{B}_1^k}}{2k}\right)^{\frac{m}{k+m}} \quad \text{και} \quad b = \left(\frac{2k}{\partial_{\overline{B}_1^k}}\right)^{\frac{k}{k+m}}. \tag{4.2.15}$$

Επίσης,

$$\partial_Q := \frac{k+m}{k}\partial_{\overline{B}_1^k}^{\frac{k}{k+m}}(2k)^{\frac{m}{k+m}}. \tag{4.2.16}$$

Επιλέγουμε $m \simeq \frac{k}{\log k}$. Παρατηρούμε ότι $k\leqslant n\leqslant 2k$. Έτσι, αφού $\partial_{\overline{B}_1^k}\simeq\sqrt{k}$, βλέπουμε ότι

$$a\simeq 1,\ b\simeq\sqrt{k}\simeq\sqrt{n} \quad \text{και} \quad \partial_Q\simeq\sqrt{k}\simeq\sqrt{n}. \tag{4.2.17}$$

Είναι γνωστό (βλέπε, για παράδειγμα, [55]) ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα V στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $F\in G_{n,m}$,

$$w(V) \geqslant c\sqrt{m/n}\,w(P_F(V)). \tag{4.2.18}$$

Έτσι, επιλέγοντας $F := \mathbb{R}^m$ συμπεραίνουμε ότι

$$w(Q) \geqslant c\sqrt{m/n}\, w(P_F(Q)) \geqslant \frac{c}{\sqrt{\log n}} w(bC_m) \geqslant \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}} w(C_m). \tag{4.2.19}$$

Αφού $w(C_m) \geqslant c\sqrt{m}$, καταλήγουμε στην $w(Q) \geqslant \frac{cn}{\log n}$. □

Κεφάλαιο 5

Απόσταση Schatten

5.1 Φράγματα για την απόσταση Schatten

Με $\mathcal{SK}_n$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των συμμετρικών κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ (θα τα ονομάζουμε απλώς *συμμετρικά* για απλότητα). Οι θέσεις του K που συζητάμε είναι οι εξής:

(α) Η *ισοτροπική θέση* $K_{(i)}$ του K ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές

$$T \mapsto I_2(T(K)) = \left(\int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \right)^{1/2}$$

πάνω από όλους τους $T \in SL(n)$.

(β) Η *θέση ελάχιστης επιφάνειας* $K_{(s)}$ του K που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές επιφάνειας $T \mapsto \partial(T(K))$ πάνω από όλους τους $T \in SL(n)$.

(γ) Η *θέση ελάχιστου μέσου πλάτους* $K_{(w)}$ του K που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές μέσου πλάτους $T \mapsto w(T(K))$ πάνω από όλους τους $T \in SL(n)$.

(δ) Η *θέση John* $K_{(j)}$ του K που μεγιστοποιεί το συναρτησοειδές εσωτερικής ακτίνας $T \mapsto r(T(K))$ πάνω από όλους τους $T \in SL(n)$.

(ε) Η *θέση Löwner* $K_{(\ell)}$ του K που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές εξωτερικής ακτίνας $T \mapsto R(T(K))$ πάνω από όλους τους $T \in SL(n)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $K_{(x)}$, $K_{(y)}$ είναι δύο από τις παραπάνω θέσεις του $K \in \mathcal{SK}_n$ τότε υπάρχει $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε $T(K_{(x)}) = K_{(y)}$, και ορίζουμε την απόσταση Schatten των $K_{(x)}$ και $K_{(y)}$ μέσω της

$$d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)}) := \frac{{\rm tr}(\sqrt{T^*T})}{n}. \tag{5.1.1}$$

Αφού όλες οι κλασικές θέσεις του K διατηρούνται από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, για κάθε $U, V \in O(n)$ έχουμε ότι ο UTV απεικονίζει τη θέση $K_{(x)}$ στη θέση $K_{(y)}$. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα $\sqrt{T^*T} = T$. Ακόμη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο T είναι διαγώνιος με θετικά διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία λ_i είναι σε αύξουσα διάταξη. Αυτός ο διαγώνιος πίνακας προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις θέσεις που μελετάμε.

Τέλος, ορίζουμε την συμμετρική απόσταση

$$D_{\mathrm{tr}}(K_{(x)}, K_{(y)}) := \max\{d_{\mathrm{tr}}(K_{(x)}, K_{(y)}), d_{\mathrm{tr}}(K_{(y)}, K_{(x)})\}. \tag{5.1.2}$$

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε μερικά γενικά επιχειρήματα που οδηγούν σε άνω φράγματα για την απόσταση Schatten $d_{\mathrm{tr}}(K_{(x)}, K)$ ή $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(x)})$, όπου $K_{(x)}$ είναι μία από τις παραπάνω πέντε κλασικές θέσεις του K. Τα επιχειρήματά μας βασίζονται στις ισοτροπικές συνθήκες που ικανοποιούν οι θέσεις $K_{(x)}$.

Αρχικά, αποδεικνύουμε ένα λήμμα που δίνει απλά αλλά χρήσιμα φράγματα για την εσωτερική και την εξωτερική ακτίνα των $K_{(i)}$, $K_{(j)}$ και $K_{(\ell)}$.

Λήμμα 5.1.1. *Έστω $K \in \mathcal{SK}_n$. Τότε:*

(α) $R(K_{(i)}) \leqslant c_1 n L_K$ *και* $r(K_{(i)}) \geqslant L_K$.

(β) $c_2\sqrt{n} \leqslant R(K_{(j)}) \leqslant c_3 n$, $c_4 \leqslant r(K_{(j)}) \leqslant c_5\sqrt{n}$ *και* $R(K_{(j)}) \leqslant \sqrt{n}\, r(K_{(j)})$.

(γ) $c_6\sqrt{n} \leqslant R(K_{(\ell)}) \leqslant c_7 n$, $c_8 \leqslant r(K_{(\ell)}) \leqslant c_9\sqrt{n}$ *και* $R(K_{(\ell)}) \leqslant \sqrt{n}\, r(K_{(\ell)})$.

Απόδειξη. (α) Στο [42] αποδεικνύεται ότι κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K_{(i)}$ στον $\mathbb{R}^n$ περιέχεται στην μπάλα $(n+1)L_K B_2^n$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $u \in S^{n-1}$ έχουμε

$$h_{K_{(i)}}(u) = \|\langle \cdot, u\rangle\|_{L^\infty(K)} \geqslant \|\langle \cdot, u\rangle\|_{L^2(K)} = L_K. \tag{5.1.3}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $r(K_{(i)}) \geqslant L_K$. Τα δύο αυτά φράγματα είναι ακριβή, όπως φαίνεται από το παράδειγμα της $\overline{B}_1^n$ (το πολλαπλάσιο της B_1^n όγκου 1) και του κύβου C_n αντίστοιχα.
(β) Το γεγονός ότι $R(K_{(j)}) \leqslant \sqrt{n}\, r(K_{(j)})$ είναι συνέπεια του Θεωρήματος του John. Αφού $K_{(j)} \subseteq R(K_{(j)})B_2^n$ και $|K_{(j)}| = 1$ ενώ $|B_2^n|^{1/n} \simeq 1/\sqrt{n}$, απλή σύγκριση των όγκων δείχνει ότι $R(K_{(j)}) \geqslant c_2\sqrt{n}$, και έτσι $r(K_{(j)}) \geqslant c_4 = c_2$. Ομοίως, από το γεγονός ότι $r(K_{(j)})B_2^n \subseteq K_{(j)}$ βλέπουμε ότι $r(K_{(j)}) \leqslant c_5\sqrt{n}$, και έτσι $R(K_{(j)}) \leqslant c_3 n$, όπου $c_3 = c_5$. Όλα τα φράγματα είναι ακριβή όπως φαίνεται από το παράδειγμα της $\overline{B}_1^n$ και του κύβου C_n αντίστοιχα.
(γ) Εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα όπως στο (β). □

Παρατήρηση 5.1.2. Εύκολα ελέγχουμε ότι $R(K) \leqslant c_1\sqrt{n}\, w(K)$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$R(K_{(w)}) \leqslant c_1\sqrt{n}\, w(K_{(w)}) \leqslant c_2 n \log n. \tag{5.1.4}$$

Θα ασχοληθούμε με φράγματα για τις $r(K_{(w)})$, $r(K_{(s)})$ και $R(K_{(s)})$ στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

5.1α′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(i)})$

Για κάθε $C \in \mathcal{SK}_n$ θέτουμε

$$J(C) := \int_C \|x\|_1 dx. \tag{5.1.5}$$

Πρόταση 5.1.3. *Έστω $K_{(i)}$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = T(K_{(i)})$ για κάποιον διαγώνιο τελεστή $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ στην $SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{c_1 J(K)}{J(K_{(i)})}, \tag{5.1.6}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός (βλέπε [54] ή [29]) ότι

$$\int_{K_{(i)}} |\langle x, u\rangle|\, dx \simeq L_K \tag{5.1.7}$$

για όλα τα $u \in S^{n-1}$. Για κάθε $j = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\lambda_j L_K \simeq \lambda_j \int_{K_{(i)}} |\langle x, e_j\rangle|\, dx = \int_K |\langle x, e_j\rangle|\, dx. \tag{5.1.8}$$

Έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \simeq \frac{1}{nL_K} \int_K \|x\|_1 dx. \tag{5.1.9}$$

Αφού $nL_K \simeq J(K_{(i)})$, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 5.1.4. Παρατηρήστε ότι $J(K) \leqslant \sqrt{n} I_2(K)$ και $J(K_{(i)}) \simeq \sqrt{n} I_2(K_{(i)}) \simeq nL_K$. Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{c_2 I_2(K)}{I_2(K_{(i)})}. \tag{5.1.10}$$

Πρόταση 5.1.5. *Έστω $K_{(i)}$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $K_{(i)} = T(K)$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{c_3\sqrt{n}}{r(K)}, \tag{5.1.11}$$

όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού το $K_{(i)}$ είναι ισοτροπικό, από το Λήμμα 2.1.2 έχουμε

$$[\mathrm{tr}(T)]L_K^2 = \int_{K_{(i)}} \langle x, Tx\rangle \, dx. \tag{5.1.12}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|_C h_C(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $C \in \mathcal{SK}_n$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν το άνω φράγμα $O(nL_K)$ για την $R(K_{(i)})$, από το Λήμμα 5.1.1 (α) έχουμε

$$\langle x, Tx\rangle \leqslant \|x\|_K h_K(Tx) \leqslant \frac{h_{K_{(i)}}(x)\|x\|_2}{r(K)} \leqslant \frac{R(K_{(i)})\|x\|_2}{r(K)} \leqslant \frac{c_4 nL_K\|x\|_2}{r(K)}. \tag{5.1.13}$$

Τότε, η (5.1.12) μας δίνει

$$[\mathrm{tr}(T)]L_K^2 \leqslant \frac{c_4 nL_K}{r(K)} \int_{K_{(i)}} \|x\|_2 dx \leqslant \frac{c_4 nL_K \cdot \sqrt{n}L_K}{r(K)}, \tag{5.1.14}$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

5.1β′ $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(s)})$ και $d_{\mathrm{tr}}(K_{(s)}, K)$

Πρόταση 5.1.6. *Έστω $K_{(s)}$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Υποθέτουμε ότι $K_{(s)} = T(K)$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{\partial(K)}{\partial(K_{(s)})}. \tag{5.1.15}$$

Απόδειξη. Αφού το μέτρο $\sigma_{K_{(s)}}$ είναι ισοτροπικό, έχουμε

$$\partial(K_{(s)})\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} = \int_{S^{n-1}} \langle u, Tu\rangle \, d\sigma_{K_{(s)}}(u) \leqslant \int_{S^{n-1}} \|Tu\|_2 d\sigma_{K_{(s)}}(u). \tag{5.1.16}$$

Αφού ο T είναι συμμετρικός, έχουμε $\|Tu\|_2 = h_{T(B_2^n)}(u)$. Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$V(K, \ldots, K, C) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_C(u) d\sigma_K(u) \tag{5.1.17}$$

του μεικτού όγκου $V(K, \ldots, K, C)$, η οποία ισχύει για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων K και C, και το γεγονός ότι για κάθε αφινικό μετασχηματισμό A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε n-άδα $K_1, \ldots, K_n$ κυρτών σωμάτων ισχύει

$$V(A(K_1), \ldots, A(K_n)) = |\det A| V(K_1, \ldots, K_n) \tag{5.1.18}$$

(βλέπε [65, Κεφάλαιο 5] για τους παραπάνω δύο ισχυρισμούς) παίρνουμε

$$\begin{aligned}(5.1.19)\qquad \partial(K_{(s)})\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} &\leqslant \int_{S^{n-1}} h_{T(B_2^n)}(u)d\sigma_{K_{(s)}}(u) = nV(K_{(s)},\dots,K_{(s)},T(B_2^n)) \\ &= n\,|\det T|V(K,\dots,K,B_2^n) = \partial(K).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την πρόταση. □

Πρόταση 5.1.7. *Έστω $K_{(s)}$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Υποθέτουμε ότι $K = T(K_{(s)})$ για κάποιον διαγώνιο τελεστή $T = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ στην $SL(n)$ με $\lambda_i > 0$. Τότε,*

$$(5.1.20)\qquad \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{c_1\partial(K_{(s)})}{\sqrt{n}}\,\frac{J(K)}{n},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός (βλέπε Παράγραφο §4.1) ότι

$$(5.1.21)\qquad \frac{\partial(K_{(s)})}{2n} \leqslant |P_{u^\perp}(K_{(s)})| \leqslant \frac{\partial(K_{(s)})}{2\sqrt{n}}$$

για κάθε $u\in S^{n-1}$. Με αλλαγή μεταβλητής ελέγχουμε ότι, για κάθε $i=1,\dots,n$,

$$(5.1.22)\qquad \lambda_i\int_{K_{(s)}} |\langle x,e_i\rangle|\,dx = \int_K |\langle x,e_i\rangle|\,dx.$$

Από την (1.3.11) βλέπουμε ότι

$$(5.1.23)\qquad \int_{K_{(s)}} |\langle x,\theta\rangle|\,dx \simeq \frac{1}{|K_{(s)}\cap\theta^\perp|}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Έτσι, τελικά παίρνουμε

$$(5.1.24)\qquad \left(\int_{K_{(s)}} |\langle x,e_i\rangle|\,dx\right)^{-1} \simeq |K_{(s)}\cap e_i^\perp| \leqslant |P_{e_i^\perp}(K_{(s)})| \leqslant \frac{\partial(K_{(s)})}{2\sqrt{n}},$$

χρησιμοποιώντας και την (5.1.21). Αντικαθιστώντας αυτήν την ανισότητα στην (5.1.22) και αθροίζοντας πάνω από όλα τα $i=1,\dots,n$, παίρνουμε

$$(5.1.25)\qquad \mathrm{tr}(T) \leqslant \frac{\partial(K_{(s)})}{2\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\int_K |\langle x,e_i\rangle|\,dx,$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

5.1γ′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(w)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(w)})$

Πρόταση 5.1.8. *Έστω $K_{(w)}$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Υποθέτουμε ότι $K = T(K_{(w)})$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{w(K)}{w(K_{(w)})}. \tag{5.1.26}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι λείο. Αφού το $h_{K_{(w)}} d\sigma$ είναι ισοτροπικό μέτρο, από το [32, Θεώρημα 3.1] έχουμε ότι

$$\begin{aligned} w(K_{(w)}) \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} &= \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_{K_{(w)}}(u), Tu \rangle \, d\sigma(u) \\ &\leqslant \int_{S^{n-1}} h_{K_{(w)}}(Tu) d\sigma(u), \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $\nabla h_C(u) \in C$ (για την ακρίβεια, είναι το μοναδικό σημείο στο σύνορο του C στο οποίο το u είναι εξωτερικό κάθετο διάνυσμα για το C). Αφού $h_{K_{(w)}}(Tu) = h_K(u)$, παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{1}{w(K_{(w)})} \int_{S^{n-1}} h_K(u) d\sigma(u), \tag{5.1.28}$$

και η (5.1.26) έπεται. □

Πρόταση 5.1.9. *Έστω $K_{(w)}$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Υποθέτουμε ότι $K_{(w)} = T(K)$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{c_1 w(K_{(w)})}{r(K)}, \tag{5.1.29}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού το $h_{K_{(w)}}(u) d\sigma(u)$ είναι ισοτροπικό, έχουμε

$$w(K_{(w)}) \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} = \int_{S^{n-1}} \langle u, Tu \rangle h_{K_{(w)}}(u) \, d\sigma(u). \tag{5.1.30}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\langle u, Tu \rangle \leqslant h_{K_{(w)}}(u) \|Tu\|_{K_{(w)}}. \tag{5.1.31}$$

Έχουμε $K \supseteq r(K)B_2^n$, και έτσι,

$$\|Tu\|_{K_{(w)}} = \|u\|_{T^{-1}(K_{(w)})} = \|u\|_K \leqslant \frac{1}{r(K)}. \tag{5.1.32}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\|h_{K_{(w)}}\|^2_{L^2(S^{n-1})} \leqslant c_2 \|h_{K_{(w)}}\|^2_{L^1(S^{n-1})} \tag{5.1.33}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$ (θυμηθείτε ότι $h_{K_{(w)}}$ είναι είναι νόρμα και ότι οι $L^1(S^{n-1})$ και $L^2(S^{n-1})$ νόρμες του περιορισμού μιας νόρμας στην S^{n-1} είναι ισοδύναμες - για λεπτομέρειες, δείτε [55]), έχουμε

$$\begin{aligned} w(K_{(w)})\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} &\leqslant \frac{1}{r(K)} \int_{S^{n-1}} h^2_{K_{(w)}}(u)d\sigma(u) \\ &\leqslant \frac{c_2}{r(K)} \left(\int_{S^{n-1}} h_{K_{(w)}}(u)d\sigma(u) \right)^2 \\ &= \frac{c_2 w^2(K_{(w)})}{r(K)}, \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

που μας δίνει την (5.1.29). □

5.1δ′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(j)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(j)})$

Πρόταση 5.1.10. *Έστω $K_{(j)}$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση John. Υποθέτουμε ότι $K_{(j)} = T(K)$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{r(K_{(j)})}{r(K)}. \tag{5.1.35}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του John έχουμε ότι υπάρχουν $c_i > 0$ και $u_i \in S^{n-1}$ τέτοια ώστε $\|r(K_{(j)})u_i\|_{K_{(j)}} = 1$, $h_{K_{(j)}}(u_i) = r(K_{(j)})$ και $I = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i$. Από την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης έπεται ότι

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^m c_i \langle u_i, Tu_i \rangle. \tag{5.1.36}$$

Για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$ γράφουμε

$$\langle u_i, Tu_i \rangle \leqslant \|u_i\|_K h_K(Tu_i) \leqslant \frac{h_{K_{(j)}}(u_i)}{r(K)} = \frac{r(K_{(j)})}{r(K)}. \tag{5.1.37}$$

Τέλος χρησιμοποιούμε την $\sum_{i=1}^m c_i = n$, η οποία έπεται από την (5.1.36) αν επιλέξουμε $T = I$. □

Πρόταση 5.1.11. *Έστω $K_{(j)}$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση John. Υποθέτουμε ότι $K = T(K_{(j)})$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{R(K)}{r(K_{(j)})} \leqslant \frac{R(K)}{r(K)}. \tag{5.1.38}$$

Απόδειξη. Όπως πριν, υπάρχουν $c_i > 0$ και $u_i \in S^{n-1}$ τέτοια ώστε $\|r(K_{(j)})u_i\|_{K_{(j)}} = 1$ και $I = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i$. Έχουμε

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^m c_i \langle u_i, Tu_i\rangle \tag{5.1.39}$$

και, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$, γράφουμε

$$\langle u_i, Tu_i\rangle \leqslant \|u_i\|_{K_{(j)}} h_{K_{(j)}}(Tu_i) = \frac{h_K(u_i)}{r(K_{(j)})} \leqslant \frac{R(K)}{r(K_{(j)})}. \tag{5.1.40}$$

Τώρα, επειδή η θέση John μεγιστοποεί την εσωτερική ακτίνα, έχουμε $r(K_{(j)}) \geqslant r(K)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\langle u_i, Tu_i\rangle \leqslant \frac{R(K)}{r(K)}, \tag{5.1.41}$$

και το αποτέλεσμα έπεται από την $\sum_{i=1}^m c_i = n$. □

5.1ε′ $d_{\mathrm{tr}}(K_{(\ell)}, K)$ και $d_{\mathrm{tr}}(K, K_{(\ell)})$

Πρόταση 5.1.12. *Έστω $K_{(\ell)}$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση Löwner. Υποθέτουμε ότι $K = T(K_{(\ell)})$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{R(K)}{R(K_{(\ell)})}. \tag{5.1.42}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το C είναι στη θέση John αν και μόνο αν το $\overline{C^\circ}$ είναι στη θέση Löwner. Παίρνοντας πολικά σωματα και χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι το γινόμενο των όγκων $|C| \cdot |C^\circ|$ είναι αφινικά ανεξάρτητο, έχουμε $\overline{K^\circ}_{(j)} = T(\overline{K^\circ})$. Τότε, εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.10 για το $\overline{K^\circ}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \leqslant \frac{r(K^\circ_{(j)})}{r(K^\circ)} = \frac{R(K)}{R(K_\ell)}. \tag{5.1.43}$$

□

Πρόταση 5.1.13. *Έστω $K_{(\ell)}$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση Löwner. Υποθέτουμε ότι $K_{(\ell)}=T(K)$ για κάποιον συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T\in SL(n)$. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n}\leqslant\frac{R(K_{(\ell)})}{r(K)}\leqslant\frac{R(K)}{r(K)}. \tag{5.1.44}$$

Απόδειξη. Παίρνοντας πολικά σώματα, έχουμε $\overline{K^\circ}=T(\overline{K^\circ}_{(j)})$. Τότε, εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.11 για το $\overline{K^\circ}$, βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n}\leqslant\frac{R(K^\circ)}{r(K^\circ_{(j)})}=\frac{R(K_{(\ell)})}{r(K)}. \tag{5.1.45}$$

Αφού η θέση Löwner ελαχιστοποιεί την εξωτερική ακτίνα, η απόδειξη είναι πλήρης. □

5.2 Άνω φράγματα για την $d_{\mathrm{tr}}(K_{(x)},K_{(y)})$

Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης Παραγράφου μπορούμε να δώσουμε τα εξής άνω φράγματα για την $d_{\mathrm{tr}}(K_{(x)},K_{(y)})$, όπου $x,y\in\{i,j,\ell,s,w\}$:

• **$\mathbf{K_{(i)}}$ και $\mathbf{K_{(s)}}$**: Έχουμε $d_{\mathrm{tr}}(K_{(i)},K_{(s)})\leqslant\partial(K_{(i)})/\partial(K_{(s)})$ από την Πρόταση 5.1.6. Μπορούμε να δώσουμε άνω φράγμα για την $\partial(K_{(i)})$, χρησιμοποιώντας τη μονοτονία των μεικτών όγκων: για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(C)$, έχουμε

$$\partial(C)=nV(C,\dots,C,B_2^n)\leqslant nV\left(C,\dots,C,\tfrac{1}{r(C)}C\right)=\frac{n|C|}{r(C)}. \tag{5.2.1}$$

Αφού το $K_{(i)}$ είναι ισοτροπικό, από το Λήμμα 5.1.1 (α) έχουμε $r(K_{(i)})\geqslant L_K$, άρα $\partial(K_{(i)})\leqslant n/L_K$. Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με το κάτω φράγμα $\partial(K_{(s)})\geqslant c_1\sqrt{n}$, παίρνουμε

$$d_{\mathrm{tr}}(K_{(i)},K_{(s)})\leqslant\frac{\partial(K_{(i)})}{\partial(K_{(s)})}\leqslant\frac{n}{L_K\partial(K_{(s)})}\leqslant\frac{c_2\sqrt{n}}{L_K}. \tag{5.2.2}$$

Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 5.1.7 έχουμε

$$d_{\mathrm{tr}}(K_{(s)},K_{(i)})\leqslant\frac{\partial(K_{(s)})}{\sqrt{n}}\frac{J(K_{(i)})}{n}\leqslant\frac{L_K\partial(K_{(s)})}{\sqrt{n}}\leqslant 2L_K\sqrt{n}, \tag{5.2.3}$$

διότι

$$J(K_{(i)})=\int_{K_{(i)}}\|x\|_1dx=\sum_{j=1}^n\int_{K_{(i)}}|\langle x,e_j\rangle|\,dx\leqslant nL_K \tag{5.2.4}$$

και $\partial(K_{(s)})\leqslant 2n$ από την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του Ball.

• $\mathbf{K_{(i)}}$ **και** $\mathbf{K_{(w)}}$: Από την Πρόταση 5.1.9 και από το γεγονός ότι $r(K_{(i)}) \geqslant L_K$, παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(i)},K_{(w)}) \leqslant \frac{c_1 w(K_{(w)})}{r(K_{(i)})} \leqslant \frac{c_2\sqrt{n}\log n}{L_K}. \tag{5.2.5}$$

Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 5.1.8 έχουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(w)},K_{(i)}) \leqslant \frac{w(K_{(i)})}{w(K_{(w)})} \leqslant c_3(\log n)^2 L_K, \tag{5.2.6}$$

αν χρησιμοποιήσουμε το γνωστό άνω φράγμα $w(K) \leqslant c_4\sqrt{n}(\log n)^2 L_K$ για το μέσο πλάτος ενός ισοτροπικού συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ (βλέπε [51]) και το γεγονός ότι $w(K_{(w)}) \geqslant c_5\sqrt{n}$ από την ανισότητα του Urysohn.

• $\mathbf{K_{(i)}}$ **και** $\mathbf{K_{(j)}}$: Από την Πρόταση 5.1.3 και το γεγονός ότι

$$J(K_{(j)}) \leqslant \sqrt{n} I_2(K_{(j)}) \leqslant \sqrt{n} R(K_{(j)}) \leqslant c_1 n\sqrt{n}, \tag{5.2.7}$$

παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(i)},K_{(j)}) \leqslant \frac{c_2 J(K_{(j)})}{nL_K} \leqslant \frac{c_3\sqrt{n}}{L_K}. \tag{5.2.8}$$

Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 5.1.5 έχουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(j)},K_{(i)}) \leqslant \frac{c_4\sqrt{n}}{r(K_{(j)}))} \leqslant c_5\sqrt{n}, \tag{5.2.9}$$

διότι $r(K_{(j)}) \geqslant c_6$ από το Λήμμα 5.1.1 (β).

• $\mathbf{K_{(i)}}$ **και** $\mathbf{K_{(\ell)}}$: Από την Πρόταση 5.1.3 και από το γεγονός ότι

$$J(K_{(\ell)}) \leqslant \sqrt{n} I_2(K_{(\ell)}) \leqslant \sqrt{n} R(K_{(\ell)}) \leqslant c_1 n\sqrt{n}, \tag{5.2.10}$$

παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(i)},K_{(\ell)}) \leqslant \frac{c_2 J(K_{(\ell)})}{nL_K} \leqslant \frac{c_3\sqrt{n}}{L_K}. \tag{5.2.11}$$

Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 5.1.5 έχουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(\ell)},K_{(i)}) \leqslant \frac{c_4\sqrt{n}}{r(K_{(\ell)}))} \leqslant c_5\sqrt{n}, \tag{5.2.12}$$

διότι $r(K_{(\ell)}) \geqslant c_6$ από το Λήμμα 5.1.1 (γ).

• $\mathbf{K_{(w)}}$ **και** $\mathbf{K_{(j)}}$: Από την Πρόταση 5.1.9 και από το γεγονός ότι $r(K_{(j)})\geqslant c_1$, παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(j)},K_{(w)})\leqslant \frac{c_2w(K_{(w)})}{r(K_{(j)})}\leqslant c_3\sqrt{n}\log n. \tag{5.2.13}$$

Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 5.1.8 έχουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(w)},K_{(\ell)})\leqslant \frac{w(K_{(j)})}{w(K_{(w)})}\leqslant \frac{R(K_{(j)})}{w(K_{(w)})}\leqslant c_4\sqrt{n}, \tag{5.2.14}$$

αν θυμηθούμε τις $R(K_{(j)})\leqslant c_5n$ και $w(K_{(w)})\geqslant c_6\sqrt{n}$.

• $\mathbf{K_{(w)}}$ **και** $\mathbf{K_{(\ell)}}$: Από την Πρόταση 5.1.9 και από το γεγονός ότι $r(K_{(\ell)})\geqslant c_1$, παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(\ell)},K_{(w)})\leqslant \frac{c_2w(K_{(w)})}{r(K_{(\ell)})}\leqslant c_3\sqrt{n}\log n. \tag{5.2.15}$$

Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 5.1.8 έχουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(w)},K_{(\ell)})\leqslant \frac{w(K_{(\ell)})}{w(K_{(w)})}\leqslant \frac{R(K_{(\ell)})}{w(K_{(w)})}\leqslant c_4\sqrt{n}, \tag{5.2.16}$$

αν θυμηθούμε τις $R(K_{(\ell)})\leqslant c_5n$ και $w(K_{(w)})\geqslant c_6\sqrt{n}$.

• $\mathbf{K_{(j)}}$ **και** $\mathbf{K_{(\ell)}}$: Από την Πρόταση 5.1.11 και από το γεγονός ότι $R(K_{(\ell)})\leqslant R(K_{(j)})$, παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(j)},K_{(\ell)})\leqslant \frac{R(K_{(\ell)})}{r(K_{(j)})}\leqslant \frac{R(K_{(j)})}{r(K_{(j)})}\leqslant \sqrt{n} \tag{5.2.17}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του John στο τέλος. Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 5.1.12 έχουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(\ell)},K_{(j)})\leqslant \frac{R(K_{(j)})}{R(K_{(\ell)})}\leqslant c_1\sqrt{n}, \tag{5.2.18}$$

διότι $R(K_{(j)})\leqslant c_2n$ και $R(K_{(\ell)})\geqslant c_3\sqrt{n}$ από το Λήμμα 5.1.1.

• $\mathbf{K_{(s)}}$ **και** $\mathbf{K_{(w)}}$: Στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλέπε και [47, Θεώρημα 7.1]) είδαμε ότι $w(K_{(s)})\leqslant c_1n$. Αφού $w(K_{(w)})\geqslant c_2\sqrt{n}$, από την Πρόταση 5.1.8 παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(w)},K_{(s)})\leqslant \frac{w(K_{(s)})}{w(K_{(w)})}\leqslant c_3\sqrt{n}. \tag{5.2.19}$$

Από την Πρόταση 5.1.7 έχουμε το φράγμα $d_{\rm tr}(K_{(s)},K_{(w)})\leqslant c_4I_2(K_{(w)})$ και από την Πρόταση 5.1.9 βλέπουμε ότι $d_{\rm tr}(K_{(s)},K_{(w)})\leqslant \frac{c_5\sqrt{n}\log n}{r(K_{(s)})}$. Όμως, δεν έχουμε άνω φράγμα για το $I_2(K_{(w)})$ το οποίο να είναι κοντά στην $\sqrt{n}$, και δεν έχουμε κάτω φράγμα για την $r(K_{(s)})$ το οποίο να είναι της τάξης του 1.

• $\mathbf{K_{(s)}}$ **και** $\mathbf{K_{(j)}}$: Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\partial(K_{(j)}) \leqslant \frac{n}{r(K_{(j)})} \leqslant c_1 n, \tag{5.2.20}$$

διότι $r(K_{(j)}) \geqslant c_2$. Τότε, από την Πρόταση 5.1.6 παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(j)}, K_{(s)}) \leqslant \frac{\partial(K_{(j)})}{\partial(K_{(s)})} \leqslant c_3\sqrt{n}. \tag{5.2.21}$$

Από την Πρόταση 5.1.10 βλέπουμε ότι $d_{\rm tr}(K_{(s)}, K_{(j)}) \leqslant \frac{r(K_{(j)})}{r(K_{(s)})} \leqslant \frac{c_4\sqrt{n}}{r(K_{(s)})}$. Όμως, δεν έχουμε κάτω φράγμα για την $r(K_{(s)})$ το οποίο να είναι της τάξης του 1.

• $\mathbf{K_{(s)}}$ **και** $\mathbf{K}_{(\ell)}$: Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\partial(K_{(\ell)}) \leqslant \frac{n}{r(K_{(\ell)})} \leqslant c_1 n, \tag{5.2.22}$$

διότι $r(K_{(\ell)}) \geqslant c_2$. Τότε, από την Πρόταση 5.1.6 παίρνουμε

$$d_{\rm tr}(K_{(\ell)}, K_{(s)}) \leqslant \frac{\partial(K_{(\ell)})}{\partial(K_{(s)})} \leqslant c_3\sqrt{n}. \tag{5.2.23}$$

Από την Πρόταση 5.1.13 βλέπουμε ότι $d_{\rm tr}(K_{(s)}, K_{(\ell)}) \leqslant \frac{R(K_{(\ell)})}{r(K_{(s)})} \leqslant \frac{R(K_{(s)})}{r(K_{(s)})}$. Όμως, δεν είναι σαφές ότι μπορούμε να έχουμε άνω φράγμα κοντά στην $\sqrt{n}$ για την τελευταία ποσότητα.

5.3 Παραδείγματα και ερωτήματα

Τα περισσότερα άνω φράγματα που είδαμε για την απόσταση $d_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(y)})$ εκφράζονται μέσω των ποσοτήτων $f(K_{(x)})$, όπου f είναι κάποιο από τα συναρτησοειδή I_2, ∂, w, R ή r, και το $K_{(x)}$ είναι κάποια από τις κλασσικές θέσεις του K. Φυσιολογικά οδηγούμαστε σε δύο τύπους προβλημάτων: να ελέγξουμε αν αυτά τα άνω φράγματα είναι ακριβή και να εκτιμήσουμε την τάξη μεγέθους (ως προς την διάσταση) της

$$f^{(x)}(n) = \max\{f(K_{(x)}) : K \in \mathcal{SK}_n\} \tag{5.3.1}$$

για κάθε συναρτησοειδές f και για όλες αυτές τις θέσεις (παρατηρήστε ότι το maximum αντικαθίσταται από minimum στην περίπτωση του συναρτησοειδούς r της εγγεγραμμένης ακτίνας). Η ισοτροπική θέση παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Γι' αυτόν τον λόγο, δίνουμε παρακάτω ορισμένα παραδείγματα για τις ποσότητες $I_2^{(x)}(n)$ και $D_{\rm tr}(K_{(x)}, K_{(i)})$. Στα περισσότερα από αυτά χρησιμοποιούμε γινόμενα κλασικών unconditional κυρτών σωμάτων (όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια). Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με κάποια σχόλια και σχετικά ανοικτά ερωτήματα.

5.3α′ Φράγματα για το $I_2(K_{(x)})$

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$I_2(K) \geqslant I_2(K_{(i)}) = \sqrt{n}L_K \tag{5.3.2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το $K = K_{(i)}$ βρίσκεται στην ισοτροπική θέση. Σε αυτήν την υποπαράγραφο δίνουμε φράγματα για την ποσότητα $I_2^{(x)}(n) := \max\{I_2(K_{(x)}) : K \in \mathcal{SK}_n\}$, όπου με $K_{(x)}$ συμβολίζουμε κάποια από τις άλλες κλασικές θέσεις $K_{(s)}, K_{(w)}, K_{(j)}$ ή $K_{(\ell)}$. Εξετάζουμε πρώτα την θέση ελάχιστης επιφάνειας.

Πρόταση 5.3.1. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα $K_{(s)}$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο έχει ελάχιστη επιφάνεια και ικανοποιεί την*

$$I_2(K_{(s)}) \geqslant \frac{cn}{\sqrt{\log n}}, \tag{5.3.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε $k, m \in \mathbb{N}$ με $k + m = n$ και $a, b > 0$ με $a^k b^m = 1$, και ορίζουμε $K_{(s)} := a\overline{B}_1^k \times bC_m$. Στο Λήμμα 3.2.1 αποδεικνύεται ότι το $K_{(s)}$ έχει ελάχιστη επιφάνεια αν

$$a = \left(\partial_{\overline{B}_1^k}/(2k)\right)^{\frac{m}{k+m}} \quad \text{και} \quad b = \left(2k/\partial_{\overline{B}_1^k}\right)^{\frac{k}{k+m}}. \tag{5.3.4}$$

Επιλέγουμε $m \simeq \frac{k}{\log k}$. Παρατηρήστε ότι $k \leqslant n \leqslant 2k$. Τότε, αφού $\partial_{\overline{B}_1^k} \simeq \sqrt{k}$, παίρνουμε

$$a \simeq 1, \ b \simeq \sqrt{k} \simeq \sqrt{n}. \tag{5.3.5}$$

Χρησιμοποιώντας την $a^k b^m = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} I_2^2(K_{(s)}) &= |a\overline{B}_1^k| \int_{bC_m} \|x\|_2^2 dx + |bC_m| \int_{a\overline{B}_1^k} \|y\|_2^2 dy \\ &= a^k b^{m+2} I_2^2(C_m) + b^m a^{k+2} I_2^2(\overline{B}_1^k) \\ &\simeq b^2 m + a^2 k \simeq km \simeq \frac{n^2}{\log n}. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. □

Ερώτημα 5.3.2. *Να δοθεί ακριβές άνω φράγμα για την $I_2^{(s)}(n)$. Είναι σωστό ότι $I_2(K_{(s)}) \leqslant Cn$ για κάθε $K \in \mathcal{SK}_n$;*

Αν το $K_{(j)}$ βρίσκεται στη θέση John τότε $R(K_{(j)}) \leqslant Cn$, άρα $I_2(K_{(j)}) \leqslant Cn$ για κάθε $K \in \mathcal{SK}_n$. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι $I_2^{(j)}(n) \geqslant \frac{cn}{\sqrt{\log n}}$.

Πρόταση 5.3.3. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα $K_{(j)}$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση John και ικανοποιεί την*

$$I_2(K_{(j)}) \geqslant \frac{cn}{\sqrt{\log n}}, \tag{5.3.7}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.4.1: αν V είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$ το οποίο βρίσκεται στην θέση John και αν $Q_k = [-1,1]^k$, τότε το $V \times Q_k$ βρίσκεται κι αυτό σε θέση John στον $\mathbb{R}^{m+k}$.

Συνεπώς, αν $m+k = n$ τότε το $B_2^m \times Q_k$ βρίσκεται στη θέση John στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το σώμα $K_{(j)} = \overline{B_2^m \times Q_k} = a^{-1}(B_2^m \times Q_k)$, όπου

$$a = |B_2^m \times Q_k|^{1/n} = |B_2^m|^{1/n}|Q_k|^{1/n} \simeq m^{-\frac{m}{2n}}. \tag{5.3.8}$$

Τότε, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} I_2^2(K_{(j)}) &= |a^{-1}B_2^m| \int_{a^{-1}Q_k} \|x\|_2^2\, dx + |a^{-1}Q_k| \int_{a^{-1}B_2^m} \|x\|_2^2\, dx \\ &= \left(\frac{|Q_k|^{1/k}}{a}\right)^2 \int_{C_k} \|y\|_2^2\, dy + \left(\frac{|B_2^m|^{1/m}}{a}\right)^2 \int_{B_2^m} \|y\|_2^2\, dy \\ &\simeq |Q_k|^{2/k} a^{-2} k + |B_2^m|^{2/m} a^{-2} m \\ &\simeq a^{-2} k \simeq m^{\frac{m}{n}} k. \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Επιλέγοντας $k \simeq \frac{n}{\log n}$ βλέπουμε ότι $I_2(K_{(j)}) \simeq \frac{n}{\sqrt{\log n}}$. □

Όμοια, γνωρίζουμε ότι αν το $K_{(\ell)}$ βρίσκεται στη θέση Löwner τότε $R(K_{(\ell)}) \leqslant Cn$, άρα $I_2(K_{(\ell)}) \leqslant Cn$. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η παράμετρος $I_2^{(\ell)}(n)$ είναι σχεδόν της τάξης του n.

Πρόταση 5.3.4. *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $n \geqslant n_0(\epsilon)$ υπάρχει unconditional κυρτό σώμα $K_{(\ell)}$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στην θέση Löwner και ικανοποιεί την*

$$I_2(K_{(\ell)}) \geqslant cn^{1-\epsilon}, \tag{5.3.10}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $k + m = n$. Υπάρχουν $\delta, b > 0$ με $\delta^m b^k = 1$ ώστε το $K = \delta B_2^m \times bB_1^k$ να βρίσκεται στη θέση Löwner. Αφού $R(B_2^m \times B_1^k) = \sqrt{2}$, έχουμε $\delta^2 + b^2 = R^2(K) \leqslant 2$. Αυτό δείχνει ότι $\max\{\delta, b\} \leqslant \sqrt{2}$ και, παίρνοντας υπ' όψιν μας την συνθήκη $\delta^m b^k = 1$, έχουμε επίσης $\delta^{\frac{2m}{k}} \geqslant 1/2$ και $b^{\frac{2k}{m}} \geqslant 1/2$.

Θεωρούμε το σώμα $K_{(\ell)} = \overline{\delta B_2^m \times bB_1^k} = a^{-1}(\delta B_2^m \times bB_1^k)$, όπου

$$a = |\delta B_2^m \times bB_1^k|^{1/n} \simeq \delta^{\frac{m}{n}} b^{\frac{k}{n}} |B_2^m|^{1/n} |B_1^k|^{1/n} \simeq \delta^{\frac{m}{n}} b^{\frac{k}{n}} m^{-\frac{m}{2n}} k^{-\frac{k}{n}}. \tag{5.3.11}$$

Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} I_2^2(K_{(\ell)}) &= |a^{-1}\delta B_2^m| \int_{a^{-1}bB_1^k} \|x\|_2^2\, dx + |a^{-1}bB_1^k| \int_{a^{-1}\delta B_2^m} \|x\|_2^2\, dx \\ &= \left(\frac{b|B_1^k|^{1/k}}{a}\right)^2 \int_{\overline{B_1^k}} \|y\|_2^2\, dy + \left(\frac{\delta|B_2^m|^{1/m}}{a}\right)^2 \int_{\overline{B_2^m}} \|y\|_2^2\, dy \\ &\simeq |B_1^k|^{2/k} b^2 a^{-2} k + |B_2^m|^{2/m} \delta^2 a^{-2} m \\ &\simeq \frac{b^2 a^{-2}}{k} + \delta^2 a^{-2} \geqslant \delta^2 a^{-2} \\ &\simeq \delta^{2\left(1-\frac{m}{n}\right)} b^{-\frac{2k}{n}} m^{\frac{m}{n}} k^{\frac{2k}{n}} \\ &\geqslant \frac{c m^{\frac{m}{n}} k^{\frac{2k}{n}}}{2^{k/m}}. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $m = \eta k$ για κάποιο $\eta \simeq \frac{1}{\log\log n}$. Αν $n \geqslant n_0(\epsilon)$, αυτή η επιλογή μας δίνει το κάτω φράγμα

$$I_2^2(K_{(\ell)}) \geqslant c n^{2-\epsilon}, \tag{5.3.13}$$

και έχουμε το συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 5.3.5. Αν το $K_{(w)}$ έχει ελάχιστο μέσο πλάτος τότε $R(K_{(w)}) \leqslant Cn\log n$, άρα

$$I_2(K_{(w)}) \leqslant Cn\log n. \tag{5.3.14}$$

Η ανισότητα $d_{\rm tr}(K_{(w)}, K_{(i)}) \leqslant C\sqrt[4]{n}L_K$ υποδεικνύει ότι η ποσότητα $I_2^{(w)}(n)$ θα μπορούσε να είναι κοντά στο $\sqrt{n}L_K$. Όμως, έχουμε ένα παράδειγμα το οποίο αποδεικνύει ότι

$$I_2^{(w)}(n) \geqslant c\sqrt{n\log n}. \tag{5.3.15}$$

Το σώμα $Q = a\overline{B_1^k} \times bC_m$ βρίσκεται σε θέση ελάχιστου μέσου πλάτους αν

$$a \simeq (\log k)^{-\frac{k}{2(k+m)}} \quad \text{και} \quad b \simeq (\log k)^{\frac{m}{2(k+m)}} \tag{5.3.16}$$

(βλέπε τα προηγούμενα κεφάλαια για παρόμοιους υπολογισμούς). Επιλέγοντας $k \simeq \frac{m}{\log m}$ έχουμε $m \leqslant n \leqslant 2m$. Τότε, $a^2 \simeq 1$ και $b^2 \simeq \log m \simeq \log n$. Έπεται ότι

$$I_2^2(Q) \simeq b^2 m + a^2 k \simeq n\log n. \tag{5.3.17}$$

Ερώτημα 5.3.6. *Να προσδιοριστεί η ακριβής τάξη της* $I_2^{(w)}(n)$.

5.3β′ Κάτω φράγματα για την $D_{\mathrm{tr}}(K_{(x)}, K_{(i)})$

Τα επόμενα παραδείγματα δείχνουν ότι η απόσταση Schatten ανάμεσα στο $K_{(i)}$ και στο $K_{(s)}$, το $K_{(j)}$ ή το $K_{(\ell)}$ μπορεί να είναι της τάξης της $\sqrt{n}$.

(α) Είδαμε ότι $d_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K_{(s)}) \leqslant c\sqrt{n}/L_K$ και $d_{\mathrm{tr}}(K_{(s)}, K_{(i)}) \leqslant c\sqrt{n}L_K$. Συνεπώς,

$$D_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K_{(s)}) \leqslant C\sqrt{n}L_K. \tag{5.3.18}$$

Έστω $K_{(s)} = a\overline{B_1^k} \times bC_m$ με $m \simeq \frac{k}{\log k}$. Τότε, $a \simeq 1$ και $b \simeq \sqrt{n}$. Από την άλλη πλευρά, $K_{(i)} \simeq \overline{B_1^k} \times C_m$. Άρα, αν $K_{(s)} = T(K_{(i)})$, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \simeq \frac{ka + mb}{n} \simeq \frac{\sqrt{n}}{\log n}. \tag{5.3.19}$$

Έπεται ότι $\max\{D_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K_{(s)}) : K \in \mathcal{SK}_n\} \geqslant c\sqrt{n}/\log n$.

(β) Είδαμε ότι $d_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K_{(j)}) \leqslant c\sqrt{n}/L_K$ και $d_{\mathrm{tr}}(K_{(j)}, K_{(i)}) \leqslant c\sqrt{n}$. Άρα,

$$D_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K_{(s)}) \leqslant C\sqrt{n}. \tag{5.3.20}$$

Θεωρούμε το σώμα $K_{(j)} = \overline{B_2^m \times Q_k} = a^{-1}(B_2^m \times Q_k)$, όπου

$$a = |B_2^m \times Q_k|^{1/n} = |B_2^m|^{1/n}|Q_k|^{1/n} \simeq m^{-\frac{m}{2n}}. \tag{5.3.21}$$

Επιλέγοντας $k \simeq \frac{n}{\log n}$, έχουμε $a^{-1} \simeq \sqrt{n}$. Αφού $K_{(i)} \simeq \overline{B_2^m} \times Q_k$, εύκολα ελέγχουμε ότι αν $T(K_{(i)}) = K_{(j)}$ τότε

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n} \simeq \frac{m + ka^{-1}}{n} \simeq \frac{\sqrt{n}}{\log n}. \tag{5.3.22}$$

Έπεται ότι $\max\{D_{\mathrm{tr}}(K_{(i)}, K_{(j)}) : K \in \mathcal{SK}_n\} \geqslant c\sqrt{n}/\log n$.

5.3γ′ Παρατηρήσεις για τις $r(K_{(x)})$ και $R(K_{(x)})$

Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Ξεκινάμε με κάποιες παρατηρήσεις για την εγγεγραμμένη και την περιγεγραμμένη ακτίνα ενός σώματος $K_{(w)}$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Πολύ γνωστά αποτελέσματα των Figiel-Tomczak [27], Lewis [46] και Pisier [59] δείχνουν ότι αν $K = K_{(w)}$ τότε $w(K)w(K^\circ) \leqslant c\log[d(X_K, \ell_2^n) + 1]$, απ' όπου προκύπτει το γενικό άνω φράγμα

$$w(K)w(K^\circ) \leqslant c_1 \log n \tag{5.3.23}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την ανισότητα του Urysohn έχουμε $w(K) \geqslant c_2\sqrt{n}$, άρα $w(K^\circ) \leqslant c_3 \log n/\sqrt{n}$. Έπεται ότι

$$R(K^\circ) \leqslant c_4\sqrt{n}w(K^\circ) \leqslant c_5 \log n. \tag{5.3.24}$$

Τότε,

$$r(K) = \frac{1}{R(K^\circ)} \geqslant \frac{c_6}{\log n}. \tag{5.3.25}$$

Παρατηρήστε ότι, λόγω της (5.2.1), αυτό έχει σαν συνέπεια την

$$\partial(K_{(w)}) \leqslant Cn\log n. \tag{5.3.26}$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $R(K) \leqslant c_4\sqrt{n}w(K) \leqslant c_5 n\log n$. Συνεπώς,

$$\frac{R(K)}{r(K)} = R(K)R(K^\circ) \leqslant c_7 n w(K)w(K^\circ) \leqslant c_8 n\log n. \tag{5.3.27}$$

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι όλες αυτές οι εκτιμήσεις είναι βέλτιστες αν αγνοήσουμε τους λογαριθμικούς παράγοντες.

Λήμμα 5.3.7. *Υπάρχει ένα unconditional κυρτό σώμα $K_{(w)}$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους και ικανοποιεί την*

$$\frac{R(K_{(w)})}{r(K_{(w)})} \geqslant \frac{cn}{\sqrt{\log n}}, \tag{5.3.28}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σώμα $Q = a\overline{B_1^k} \times bC_m$ με $k \sim m \sim n/2$, $a \simeq (\log n)^{-1/4}$ και $b \simeq (\log n)^{1/4}$, το οποίο βρίσκεται σε θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Τότε, $R(K_{(w)}) \simeq \frac{n}{\sqrt[4]{\log n}}$ και $r(K_{(w)}) \simeq \sqrt[4]{\log n}$ απ' όπου προκύπτει το συμπέρασμα. □

Ισοτροπική θέση. Τα γνωστά φράγματα για την εγγεγραμμένη και την περιγεγραμμένη ακτίνα ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος $K_{(i)}$ στον $\mathbb{R}^n$ δίνονται στο Λήμμα 5.1.1: έχουμε $r(K_{(i)}) \geqslant L_K$ και $R(K_{(i)}) \leqslant cnL_K$. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι υπάρχουν ισοτροπικά σώματα για τα οποία και οι δύο εκτιμήσεις είναι ακριβείς.

Λήμμα 5.3.8. *Υπάρχει ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ για το οποίο $R(K) \geqslant cnr(K)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σώμα $K = a\overline{B}_1^k \times bC_m$ με $k+m=n$, $k \sim m \sim n/2$ και $a \simeq b \simeq 1$.
□

Θέση ελάχιστης επιφάνειας. Σε αυτήν την περίπτωση η εικόνα δεν είναι πλήρης. Έχουμε κάποια απλά φράγματα τα οποία βασίζονται στις εξής παρατηρήσεις: αν το $K = K_{(s)}$ έχει ελάχιστη επιφάνεια τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\frac{\partial(K)}{2n} \leqslant |P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant \frac{\partial(K)}{2\sqrt{n}}. \tag{5.3.29}$$

Από την άλλη πλευρά, μια κλασική ανισότητα των Rogers και Shephard (βλέπε [62]) ισχυρίζεται ότι

$$1 \leqslant 2h_K(\theta)|K \cap \theta^{\perp}| \leqslant 2h_K(\theta)|P_{\theta^{\perp}}(K)| \tag{5.3.30}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$h_K(\theta) \leqslant c_1\sqrt{n}w(K) \leqslant \frac{c_2n^2}{\partial(K)} \tag{5.3.31}$$

από το Θεώρημα 4.2.1. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{n}}{\partial(K)} \leqslant h_K(\theta) \leqslant \frac{c_2n^2}{\partial(K)} \tag{5.3.32}$$

Αφού $c_3\sqrt{n} \leqslant \partial(K) \leqslant 2n$, έπεται ότι

$$R(K_{(s)}) \leqslant c_4n^{3/2}r(K_{(s)}), \quad r(K_{(s)}) \geqslant \frac{c_5}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad R(K_{(s)}) \leqslant Cn^{3/2}. \tag{5.3.33}$$

Κατά πάσα πιθανότητα, όλα αυτά τα φράγματα δεν είναι βέλτιστα:

Ερώτημα 5.3.9. *Να προσδιοριστεί η τάξη μεγέθους των* $r^{(s)}(n) = \min\{r(K_{(s)}) : K \in \mathcal{SK}_n\}$ *και* $R^{(s)}(n) = \max\{R(K_{(s)}) : K \in \mathcal{SK}_n\}$.

Κεφάλαιο 6

Η ανισότητα των Rogers και Shephard

6.1 Το πρόβλημα

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ ορίζουμε

$$g(K,k;F) := \big(|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|\big)^{1/k}, \tag{6.1.1}$$

όπου $F^{\perp}$ είναι ο ορθογώνιος υπόχωρος του F στον $\mathbb{R}^n$. Μια κλασική ανισότητα των Rogers και Shephard [62] (βλέπε επίσης Chakerian [23]) μας λέει ότι αν το K είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων τότε

$$1 \leqslant g(K,k;F) \leqslant \binom{n}{k}^{1/k} \leqslant \frac{c_0 n}{k}, \tag{6.1.2}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η δεξιά ανισότητα ισχύει ακόμα και αν υποθέσουμε ότι, απλώς, $0 \in \mathrm{int}(K)$. Επιπλέον, ο Spingarn [66] έδειξε ότι η αριστερή ανισότητα εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι το K είναι κεντραρισμένο, δηλαδή ότι το κέντρο βάρους του K είναι στην αρχή των αξόνων.

Οι παραπάνω δύο ανισότητες είναι ακριβείς: θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_j\}_{j\leqslant n}$ του $\mathbb{R}^n$ και θέτουμε $F = \mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_k\}$. Έστω $A \subset F$ και $B \subset F^{\perp}$ δύο κυρτά σώματα με $0 \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Εύκολα βλέπουμε οτι αν $K = A \times B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ τότε $P_F(K) = A$, $K \cap F^{\perp} = B$ και $|K| = |A|\,|B|$. Από την άλλη πλευρά, αν θεωρήσουμε το κυρτό σώμα $K' = \mathrm{conv}(A \cup B) = \{(1-t)a + tb : a \in A, b \in B, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ τότε $P_F(K') = A$, $K' \cap F^{\perp} = B$ και $|K'| = \binom{n}{k}|A|\,|B|$.

Το έναυσμα για το πρόβλημα που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι η παρατήρηση οτι η συμπεριφορά της $g(\mathcal{E},k;F)$ βρίσκεται «στη μέση» όταν το $\mathcal{E}$ είναι ελλειψοειδές.

Πρόταση 6.1.1. *Για κάθε ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$ το γινόμενο $|P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E}\cap F^{\perp}|$ είναι ανεξάρτητο από τον υπόχωρο F. Ακριβέστερα, έχουμε*

$$|P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E}\cap F^{\perp}| = \frac{|B_2^k|\,|B_2^{n-k}|}{|B_2^n|}\,|\mathcal{E}|. \tag{6.1.3}$$

Συνεπώς,

$$\Big(\frac{c_1 n}{k}\Big)^{k/2}|\mathcal{E}| \leqslant |P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E}\cap F^{\perp}| \leqslant \Big(\frac{c_2 n}{k}\Big)^{k/2}|\mathcal{E}|, \tag{6.1.4}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Για λόγους πληρότητας δίνουμε μια απόδειξη αυτής της παρατήρησης στην επόμενη παράγραφο. Υποθέτοντας ότι $|\mathcal{E}| = 1$, από την Πρόταση 6.1.1 έχουμε ότι

$$g(\mathcal{E},k;F) \simeq \sqrt{n/k} \tag{6.1.5}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$. Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι αν αυτή είναι η αναμενόμενη (ως προς τον $F \in G_{n,k}$) συμπεριφορά της ποσότητας $g(K,k;F)$ για κάθε συμμετρικό (ή, πιο γενικά, κεντραρισμένο) κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Το βασικό μας αποτέλεσμα δίνει μια σχεδόν ακριβή θετική απάντηση αν υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$c_1 L_K^{-1}\sqrt{n/k} \leqslant g(K,k;F) \leqslant c_2\sqrt{n/k}(\log n)^2 L_K \tag{6.1.6}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-k}$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η προσέγγισή μας οδηγεί σε μερικά κάτω και άνω φράγματα που θα μπορούσαν να είναι χρήσιμα και για άλλες θέσεις του K, όπως η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους, η θέση ελάχιστης επιφάνειας ή η θέση John. Χρησιμοποιώντας τις πρόσθετες ιδιότητες που έχει ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα, παίρνουμε από αυτά τα φράγματα το Θεώρημα 6.1.2.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με κάποια εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε. Μεταξύ αυτών, το γεγονός ότι

$$c^n|B_2^n|^2 \leqslant |K|\,|K^{\circ}| \leqslant |B_2^n|^2 \tag{6.1.7}$$

για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Η δεξιά ανισότητα είναι η ανισότητα Blaschke-Santaló, ενώ η αριστερή ανισότητα οφείλεται στους Bourgain και V. Milman [17] και ισχύει αν, απλώς, υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(K)$.

Για κάθε $p > -n$, $p \neq 0$, θέτουμε

$$I_p(K) := \left(\int_K \|x\|_2^p dx \right)^{1/p} \tag{6.1.8}$$

και για κάθε $-\infty < p < \infty$, $p \neq 0$, ορίζουμε το p-μέσο πλάτος του K ως εξής:

$$w_p(K) := \left(\int_{S^{n-1}} h_K^p(\theta) d\sigma(\theta) \right)^{1/p}. \tag{6.1.9}$$

Από την ανισότητα Hölder, οι $I_p(K)$ και $w_p(K)$ είναι αύξουσες συναρτήσεις του p. Το μέσο πλάτος του K είναι η ποσότητα $w(K) = w_1(K)$. Παρατηρήστε ότι

$$w_{-n}(K) = \left(\frac{|B_2^n|}{|K^\circ|} \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{6.1.10}$$

Αυτό είναι άμεσο αν εκφράσουμε τον όγκο $|K^\circ|$ σε πολικές συντεταγμένες. Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|\cdot\|_K$ είναι η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K, θέτουμε

$$M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x) \tag{6.1.11}$$

και γράφουμε $b(K)$ για τη μικρότερη θετικη σταθερά b με την ιδιότητα $\|x\|_K \leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από την απόδειξη του V. Milman για το θεώρημα του Dvoretzky (βλέπε [55]) γνωρίζουμε ότι αν $k \leqslant cn(M(K)/b(K))^2$ τότε για τους περισσότερους $F \in G_{n,k}$ έχουμε $K \cap F \simeq \frac{1}{M(K)} B_F$.

Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ορίζουμε το κανονικοποιημένο k-quermassintegral του K θέτοντας

$$Q_k(K) = \left(\frac{1}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k}. \tag{6.1.12}$$

Παρατηρήστε ότι $Q_1(K) = w(K)$. Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel (δείτε [65]) έπεται ότι η $Q_k(K)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του k. Ειδικότερα,

$$\left(\int_{G_{n,k}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k} \leqslant \frac{c_1 w(K)}{\sqrt{k}}. \tag{6.1.13}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Τα επόμενα συναρτησοειδή θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη.

(α) *p-μέση συνάρτηση προβολών.* Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $p \neq 0$ ορίζουμε τη μέση συνάρτηση προβολών

$$W_{[k,p]}(K) := \left(\int_{G_{n,k}} |P_F(K)|^p d\nu_{n,k}(F) \right)^{\frac{1}{kp}}. \tag{6.1.14}$$

Επίσης, θέτουμε $W_{[n]}(K) := |K|^{1/n}$.

(β) *p-μέση συνάρτηση τομών.* Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $p \neq 0$ ορίζουμε τη μέση συνάρτηση τομών

$$\tilde{W}_{[k,p]}(K) = \left(\int_{G_{n,k}} |K \cap F^{\perp}|^p d\nu_{n,k}(F) \right)^{\frac{1}{kp}}. \tag{6.1.15}$$

Το κανονικοποιημένο δυϊκό k-quermassintegral του K είναι η ποσότητα

$$\tilde{W}_{[k]}(K) := \tilde{W}_{[k,1]}(K). \tag{6.1.16}$$

6.2 Ελλειψοειδή

Δίνουμε πρώτα την απόδειξη της Πρότασης 6.1.1. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η συμμετρικοποίηση Steiner μετασχηματίζει ελλειψοειδή σε ελλειψοειδή (βλέπε [16]). Διατυπώνουμε αυτόν τον ισχυρισμό σαν λήμμα και συμπεριλαμβάνουμε την απόδειξη για λόγους πληρότητας .

Λήμμα 6.2.1. *Για κάθε $u \in S^{n-1}$ και για κάθε ελλειψοειδές $\mathcal{E}$, η συμμετρικοποίηση Steiner $S_u(\mathcal{E})$ του $\mathcal{E}$ στη διεύθυνση του u είναι ελλειψοειδές.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ έχει κέντρο την αρχή των αξόνων. Θεωρούμε τον θετικά ορισμένο τελεστή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ για τον οποίο

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Tx, x \rangle \leqslant 1\}. \tag{6.2.1}$$

Από τον ορισμό της συμμετρικοποίησης Steiner, ένα σημείο $y \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο $S_u(\mathcal{E})$ αν η ευθεία $L = \{y + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ τέμνει το $\mathcal{E}$ και

$$|\langle y, u \rangle| \leqslant \frac{1}{2}\text{length}(\mathcal{E} \cap L). \tag{6.2.2}$$

Η υπόθεση ότι η L τέμνει τον $\mathcal{E}$ σημαίνει ότι υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\langle T(y+\lambda u),(y+\lambda u)\rangle \leqslant 1$. Το αριστερό μέλος είναι τετραγωνική συνάρτηση του λ, επομένως η διακρίνουσά του είναι μη αρνητική, και έχουμε

$$\langle Ty,u\rangle^2 + \langle Tu,u\rangle - \langle Tu,u\rangle\langle Ty,y\rangle \geqslant 0. \tag{6.2.3}$$

Σε αυτήν τη περίπτωση το μήκος στην (6.2.2) είναι ίσο με

$$\frac{2\sqrt{\langle Ty,u\rangle^2 - \langle Tu,u\rangle\big(\langle Ty,y\rangle - 1\big)}}{\langle Tu,u\rangle}. \tag{6.2.4}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.2.2) παίρνουμε

$$S_u(\mathcal{E}) = \Big\{y \in \mathbb{R}^n : \langle Tu,u\rangle^2\langle y,u\rangle^2 \leqslant \langle Ty,u\rangle^2 - \langle Tu,u\rangle\big(\langle Ty,y\rangle - 1\big)\Big\}. \tag{6.2.5}$$

Είναι τώρα σαφές ότι αυτό το σύνολο είναι ελλειψοειδές (αφού ορίζεται από τετραγωνική μορφή). □

Παρατήρηση 6.2.2. Για την ακρίβεια είναι γνωστό ότι το Λήμμα 6.2.1 χαρακτηρίζει τα ελλειψοειδή με την ακόλουθη έννοια: αν K είναι ένα κυρτό σώμα με την ιδιότητα ότι όλες οι συμμετρικοποιήσεις Steiner $S_u(K)$ είναι αφινικές εικόνες του K, τότε το K είναι ένα ελλειψοειδές (βλέπε [40]).

Απόδειξη της Πρότασης 6.1.1. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το $\mathcal{E}$ έχει κέντρο βάρους το 0. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Ο F παράγεται από τα μοναδιαία διανύσματα k ημιαξόνων του $\mathcal{E}$. Σε αυτήν την περίπτωση, αν $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι τα μήκη των ημιαξόνων του ελλειψοειδούς τότε, προφανώς,

$$|P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E}\cap F^{\perp}| = \left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right)|B_2^k|\,|B_2^{n-k}| = \frac{|B_2^k|\,|B_2^{n-k}|}{|B_2^n|}|\mathcal{E}|. \tag{6.2.6}$$

Δεύτερη περίπτωση: Ο F είναι τυχών υπόχωρος στην $G_{n,k}$. Έστω $u_1,\dots,u_k$ μια ορθοκανονική βάση του F. Γράφουμε $\mathcal{E}' = S_{u_1}(\dots(S_{u_k}(\mathcal{E})\dots)$ για το ελλειψοειδές που παίρνουμε μετά από διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις Steiner του $\mathcal{E}$ στις διευθύνσεις $u_1,\dots,u_k$. Από τις ιδιότητες της συμμετρικοποίησης Steiner έχουμε οτι

$$|P_F(\mathcal{E})| = |P_F(\mathcal{E}')| \quad \text{και} \quad |\mathcal{E}\cap F^{\perp}| = |\mathcal{E}'\cap F^{\perp}|. \tag{6.2.7}$$

Από το Λήμμα 6.2.1 έπεται ότι το $\mathcal{E}'$ είναι ένα ελλειψοειδές το οποίο, επιπλέον, έχει τον ίδιο όγκο με το $\mathcal{E}$. Επίσης, παρατηρήστε ότι η πρώτη περίπτωση εφαρμόζεται τώρα για το ελλειψοειδές $\mathcal{E}'$ και τον υπόχωρο F. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}|P_F(\mathcal{E})|\,|\mathcal{E}\cap F^{\perp}| &= |P_F(\mathcal{E}')|\,|\mathcal{E}'\cap F^{\perp}|\\ &= \frac{|B_2^k|\,|B_2^{n-k}|}{|B_2^n|}\,|\mathcal{E}'| = \frac{|B_2^k|\,|B_2^{n-k}|}{|B_2^n|}\,|\mathcal{E}|,\end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (6.1.3).

Αφού $|B_2^n| = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$, με στοιχειώδεις υπολογισμούς ελέγχουμε ότι η (6.1.4) ισχύει κι αυτή. □

6.3 Γενικά φράγματα

Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Μια απλή ιδέα για να πάρουμε κάτω φράγμα για την $g(K,k;F)$ είναι να υπολογίσουμε τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}_{\nu_{n,k}}\left[\big(g(K,k;F)\big)^{-a}\right] \tag{6.3.1}$$

για κάποιον $a>0$. Για κάθε ζεύγος (p,q) συζυγών εκθετών, εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}&\int_{G_{n,k}} \frac{1}{|P_F(K)|\,|K\cap F^{\perp}|}d\nu_{n,k}(F)\\ &\leqslant \left(\int_{G_{n,k}} \frac{1}{|P_F(K)|^p}d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/p}\left(\int_{G_{n,k}} \frac{1}{|K\cap F^{\perp}|^q}d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/q}.\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Για το πρωτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (6.3.2) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο επιχείρημα (από το [24]) το οποίο συσχετίζει τα μεικτά πλάτη του K: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder, την ανισότητα Blaschke-Santaló και την αντίστροφη ανισότητα Santaló, για κάθε $p \geqslant 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_{G_{n,k}} |P_F(K)|^{-p} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kp}} &\simeq \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|(P_F(K))^\circ|)^p}{\omega_k^{2p}} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kp}} \\ &\simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}}\left(\int_{S_F}\frac{1}{h^k_{P_F(K)}(\theta)}d\sigma_F(\theta)\right)^p d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kp}} \\ &\simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}}\left(\int_{S_F}\frac{1}{h^k_K(\theta)}d\sigma_F(\theta)\right)^p d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kp}} \\ &\leqslant c\sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}}\int_{S_F}\frac{1}{h^{kp}_K(\theta)}d\sigma_F(\theta)\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kp}} \\ &= c\sqrt{k}\left(\int_{S^{n-1}}\frac{1}{h^{kp}_K(\theta)}d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{kp}} \\ &= c\sqrt{k}w^{-1}_{-kp}(K).\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 6.3.1. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $p \geqslant 1$,*

$$W_{[k,-p]}(K) = \left(\int_{G_{n,k}} |P_F(K)|^{-p} d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kp}} \geqslant c_1 \frac{w_{-kp}(K)}{\sqrt{k}}, \tag{6.3.3}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Θέτουμε $p := n/k > 1$. Τότε, από το Λήμμα 6.3.1, την (6.1.10) και την (6.1.7) έχουμε

$$W_{[k,-n/k]}(K) \geqslant \frac{w_{-n}(K)}{c_1\sqrt{k}} \simeq \frac{1}{c_1\sqrt{k}}\left(\frac{|B_2^n|}{|K^\circ|}\right)^{1/n} \simeq \sqrt{n/k}. \tag{6.3.4}$$

Αυτό μας δίνει το εξής:

Λήμμα 6.3.2. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$W^{-1}_{[k,-n/k]}(K) = \left(\int_{G_{n,k}} |P_F(K)|^{-n/k} d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{k/n} \tag{6.3.5}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (6.3.2) παίρνουμε την επόμενη εκτίμηση.

Πρόταση 6.3.3. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$\begin{aligned}(6.3.6)\qquad & \int_{G_{n,k}} \frac{1}{|P_F(K)|\,|K\cap F^{\perp}|}d\nu_{n,k}(F) \\ & \leqslant \left(c_1\sqrt{k/n}\right)^k \left(\int_{G_{n,k}} \frac{1}{|K\cap F^{\perp}|^{\frac{n}{n-k}}}d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}},\end{aligned}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στόχος μας είναι τώρα να δώσουμε άνω φράγμα. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι τα κανονικοποιημένα δυϊκά quermassintegrals $\tilde{W}_{[k]}(K)$ έχουν άμεση σχέση με τις ποσότητες $I_p(K)$.

Λήμμα 6.3.4. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Τότε,*

$$(6.3.7)\qquad \tilde{W}_{[k]}(K)I_{-k}(K) = \left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\right)^{1/k} = \tilde{W}_{[k]}(\overline{B}_2^n)I_{-k}(\overline{B}_2^n).$$

Με απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι $\left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\right)^{1/k} \simeq \sqrt{n}$.

Απόδειξη. Ολοκληρώνουμε σε πολικές συντεταγμένες :

$$\begin{aligned} I_{-k}^{-k}(K) &= \frac{n\omega_n}{n-k}\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|x\|_K^{n-k}}d\sigma(x) \\ &= \frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}}\int_{G_{n,n-k}} \omega_{n-k}\int_{S_F}\frac{1}{\|\theta\|_{K\cap F}^{n-k}}d\sigma(\theta)d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= \frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}}\int_{G_{n,n-k}} |K\cap F|d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= \frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}}\int_{G_{n,k}} |K\cap F^{\perp}|d\nu_{n,k}(F),\end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό του $\tilde{W}_{[k]}(K)$. □

Στο [57] έχει αποδειχθεί ότι αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $p>-n$ έχουμε

$$(6.3.8)\qquad I_p(K) \geqslant I_p(\overline{B}_2^n).$$

Εύκολα ελέγχεται ότι $\tilde{W}_{[k]}(\overline{B}_2^n) \simeq 1$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Επομένως, το Λήμμα 6.3.4 μας δίνει αμέσως το εξής:

Λήμμα 6.3.5. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$\tilde{W}_{[k]}(K) \leqslant \tilde{W}_{[k]}(\overline{B}_2^n) \simeq 1. \tag{6.3.9}$$

□

Έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_{G_{n,k}} \left(|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|\right)^{1/2} d\nu_{n,k}(F) \\ &\leqslant \left(\int_{G_{n,k}} |P_F(K)| d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/2} \left(\int_{G_{n,k}} |K \cap F^{\perp}| d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν το Λήμμα 6.3.5 παίρνουμε την ακόλουθη γενική εκτίμηση.

Πρόταση 6.3.6. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$\begin{aligned} &\int_{G_{n,k}} \left(|P_F(K))\,|K \cap F^{\perp}|\right)^{1/2} d\nu_{n,k}(F) \\ &\qquad\leqslant c_2^k \left(\int_{G_{n,k}} |P_F(K)| d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Από την (6.1.13) βλέπουμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} \left(|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|\right)^{1/2} d\nu_{n,k}(F) \leqslant \left(\frac{c_3 w(K)}{\sqrt{k}}\right)^{k/2}. \tag{6.3.12}$$

όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.3.7. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$g(K,k;F) = \left(|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|\right)^{1/k} \leqslant \frac{c_4 w(K)}{\sqrt{k}} \tag{6.3.13}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$, όπου $c_4 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

6.4 Η ισοτροπική περίπτωση

Υπενθυμίζουμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο 1, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή, το κέντρο βάρους του είναι στην αρχή των αξόνων) και ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα: υπάρχει μια σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \tag{6.4.1}$$

για κάθε θ στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Γενικότερα, ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν το κέντρο βάρους του είναι στην αρχή των αξόνων και ο πίνακας αδρανείας του είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Σε αυτήν την περίπτωση, η ισοτροπική σταθερά του μ ορίζεται ως εξής:

$$L_\mu := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(f_\mu(x)\big)^{1/n}, \tag{6.4.2}$$

όπου f_μ είναι η πυκνότητα του μ ως προς το μέτρο Lebesgue. Παρατηρήστε ότι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ_K με πυκνότητα $x \mapsto L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}(x)$ είναι ισοτροπικό. Για μια αναλυτική και ενημερωμένη παρουσίαση της θεωρίας των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων παραπέμπουμε στο βιβλίο [21].

Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $E \in G_{n,k}$, το περιθώριο μέτρο του μ ως προς τον E είναι το μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα

$$f_{\pi_E \mu}(x) = \int_{x+E^\perp} f_\mu(y) dy. \tag{6.4.3}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το μ είναι κεντραρισμένο, ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο, τότε το $\pi_E \mu$ είναι επίσης κεντραρισμένο, ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο μέτρο αντίστοιχα. Για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $p > 0$ ορίζουμε ένα σώμα $K_p(\mu)$ ως εξής:

$$K_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty f_\mu(rx) r^{p-1}\, dr \geqslant \frac{f_\mu(0)}{p} \right\}. \tag{6.4.4}$$

Τα σώματα $K_p(\mu)$ ορίστηκαν αρχικά από τον K. Ball (στο [2]) ο οποίος έδειξε ότι είναι κυρτά. Η επόμενη πρόταση, είναι γενίκευση ενός αποτελέσματος του K. Ball από την ίδια εργασία (βλέπε επίσης [54], και [21] για την ακριβή διατύπωση που ακολουθεί) και δίνει μια χρήσιμη έκφραση για τον όγκο των κεντρικών τομών ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος.

Πρόταση 6.4.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με μ_K το ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο που έχει πυκνότητα την $L_K^n \mathbf{1}_{L_K^{-1}K}$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$, το σώμα $\overline{K_{k+1}}(\pi_F(\mu_K))$ ικανοποιεί την*

$$|K \cap F^{\perp}|^{1/k} \simeq \frac{L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_F(\mu_K))}}{L_K}. \tag{6.4.5}$$

□

Ας υποθέσουμε ότι K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Από την Πρόταση 6.4.1 γνωρίζουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$,

$$|K \cap F^{\perp}|^{-1/k} \simeq \frac{L_K}{L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_F(\mu_K))}} \leqslant c_2 L_K, \tag{6.4.6}$$

διότι $L_C \geqslant c$ για κάθε κυρτό σώμα C, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (δείτε για παράδειγμα την Πρόταση 2.3.12 στο [21]). Επιπλέον, η Πρόταση 6.3.3 μας δίνει

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}} \frac{1}{|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|} d\nu_{n,k}(F) &\leqslant \left(c_1\sqrt{k/n}\right)^k (c_2 L_K)^k \\ &\leqslant (c_3\sqrt{k/n}L_K)^k.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Markov έπεται το εξής:

Πρόταση 6.4.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$g(K,k;F) := \left(|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{c_4\sqrt{n/k}}{L_K} \tag{6.4.7}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$, όπου $c_4 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για το άνω φράγμα χρησιμοποιούμε ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του E. Milman [51]: Αν το K είναι ισοτροπικό κυρτό, και αν κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι είναι και συμμετρικό, τότε

$$w(K) \leqslant c_5\sqrt{n}(\log n)^2 L_K. \tag{6.4.8}$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.3.7 παίρνουμε:

Πρόταση 6.4.3. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$g(K,k;F) := \left(|P_F(K)|\,|K \cap F^{\perp}|\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant c_6\sqrt{n/k}(\log n)^2 L_K \tag{6.4.9}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$.

Συνδυάζοντας την Πρόταση 6.4.2 και την Πρόταση 6.4.3 καταλήγουμε στο Θεώρημα 6.1.2.

Παρατηρήσεις 6.4.4. (α) Είναι γνωστό ότι για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να βρούμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα T με την ιδιότητα $L_T \simeq L_K$ (βλέπε [21, Πρόταση 2.5.10]): αν ορίσουμε μια συνάρτηση f στο $K-K$ με

$$f(x) = (\mathbf{1}_K * \mathbf{1}_{-K})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(y)\mathbf{1}_{-K}(x-y)\,dy = |K \cap (x+K)| \tag{6.4.10}$$

τότε η f είναι μια άρτια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα και μπορούμε να ελέγξουμε ότι $L_f = \sqrt{2}\,L_K$. Έπεται ότι το κυρτό σώμα $T = \overline{K_{n+2}(f)}$ έχει τις ιδιότητες που ζητάμε. Από την Πρόταση 6.3.6 βλέπουμε ότι το άνω φράγμα στο Θεώρημα 6.1.2 εξακολουθεί να ισχύει για ένα (όχι απαραίτητα συμμετρικό) ισοτροπικό κυρτό σώμα K και κάποιον $1 \leqslant k \leqslant n-1$, αν εξασφαλίσουμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} |P_F(K)|\,d\nu_{n,k}(F) \leqslant C^k \int_{G_{n,k}} |P_F(T)|\,d\nu_{n,k}(F). \tag{6.4.11}$$

(β) Ο λογαριθμικός παράγοντας στην (6.4.9) δεν μπορεί να φύγει από την ανισότητα, τουλάχιστον όσο η απόδειξη χρησιμοποιεί την εκτίμηση για το μέσο πλάτος του K. Αυτό φαίνεται αν θεωρήσουμε το $K = \overline{B}_1^n$, διότι $w(\overline{B}_1^n) \simeq \sqrt{n\log(1+n)}$. Όμως, θα μπορούσε η δύναμη του λογαρίθμου να είναι μικρότερη. Για παράδειγμα, αν το σώμα είναι στην ℓ-θέση τότε από την αντίστροφη ανισότητα Urysohn $w(K) \leqslant c\sqrt{n}(\log n)$ και την Πρόταση 6.3.7 έπεται ότι $g(K,k;F) \leqslant c_6\sqrt{n/k}\,\log n$ για τον τυχαίο $F \in G_{n,k}$.

Κεφάλαιο 7

Ακτίνα του σώματος προβολών

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα θ, ο όγκος της ορθογώνιας προβολής $P_{\theta^\perp}(K)$ του K στον $\theta^\perp$ δίνεται από την

$$|P_{\theta^\perp}(K)| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle| d\sigma_K(x),$$

όπου σ_K είναι το μέτρο επιφάνειας του K. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι δοθούν γενικά άνω φράγματα για την ποσότητα

$$\max\{|P_{\theta^\perp}(K)| : \theta \in S^{n-1}\}.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι το K είναι κεντραρισμένο, δηλαδή ότι το κέντρο βάρους του $\int_K x\, dx$ είναι στην αρχή των αξόνων. Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με το να βρει κανείς άνω φράγμα για την εξωτερική ακτίνα του σώματος προβολών ΠK του K. Αν συμβολίσουμε με $R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}$ την εξωτερική ακτίνα ενός κυρτού σώματος C τότε είναι φανερό ότι

$$\max\{|P_{\theta^\perp}(K)| : \theta \in S^{n-1}\} = \max\{h_{\Pi K}(\theta) : \theta \in S^{n-1}\} = R(\Pi K).$$

Στόχος μας είναι να δώσουμε γενικά άνω φράγματα για την $R(\Pi\tilde{K})$ για διάφορες κλασικές θέσεις $\tilde{K}$ του K, όπως η θέση John, η θέση ελάχιστης επιφάνειας, η ισοτροπική θέση κλπ. Μάλιστα, αφετηρία γι' αυτό το κεφάλαιο ήταν μια ερώτηση του S. Vempala σχετικά με την ισοτροπική περίπτωση:

Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ να ισχύει $|P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant C\sqrt{n}|K \cap \theta^\perp|$;

Μια πολύ γνωστή ιδιότητα που έχει κάθε σώμα K που βρίσκεται στην ισοτροπική θέση είναι ότι όλες οι $(n-1)$-διάστατες κεντρικές τομές του έχουν περίπου τον ίδιο όγκο: έχουμε $|K \cap \theta^\perp| \simeq L_K^{-1}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K. Συνεπώς, το ερώτημα του Vempala είναι αν σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι $\max_\theta |P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant C_1\sqrt{n}/L_K$.

7.1 Βέλτιστες θέσεις

Συμβολίζουμε με $\mathcal{CK}_n$ την κλάση όλων των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε ότι η ποσότητα

$$R_n := \max_{K \in \mathcal{CK}_n} \min_{T \in SL(n)} R(\Pi(T(K))) \tag{7.1.1}$$

ικανοποιεί την $R_n \leqslant C\sqrt{n}$. Για την απόδειξη μπορούμε να επιλέξουμε το $T(K)$ στη θέση ελάχιστης επιφάνειας και να χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του Ball. Αυτό το φράγμα είναι βέλτιστο όπως μπορεί να δεί κανείς από το παράδειγμα του κύβου.

Θεώρημα 7.1.1. *Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{CK}_n$ των συμμετρικών κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max_{K \in \mathcal{CK}_n} \min_{T \in SL(n)} R(\Pi(T(K))) \simeq \sqrt{n}. \tag{7.1.2}$$

Το Θεώρημα 7.1.1 προκύπτει από τα επόμενα δύο αποτελέσματα. Το πρώτο είναι ένας απλός υπολογισμός για τον κύβο, ενώ το δεύτερο παρατηρήθηκε στο [37].

Λήμμα 7.1.2. *Έστω $C_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ ο κύβος όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $T \in SL(n)$ ισχύει*

$$R(\Pi(T(C_n))) \geqslant c\sqrt{n} \tag{7.1.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο $\tilde{C}_n = T(C_n)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $S = (T^{-1})^*$ τότε το $\tilde{C}_n$ έχει κάθετα διανύσματα τα $\pm u_j = S(e_j)/\|S(u_j)\|_2$ και αντίστοιχες έδρες τις $\pm F_j$, με εμβαδά $|\pm F_j| = \|S(e_j)\|_2/|\det S| = \|S(e_j)\|_2$, $j = 1, \ldots, n$. Συνεπώς,

$$|P_{\theta^\perp}(\tilde{C}_n)| = \sum_{j=1}^n |\langle Se_j, \theta\rangle| = \|S^*(\theta)\|_1. \tag{7.1.4}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$R(\Pi(\tilde{C}_n)) = \max_{\theta\in S^{n-1}} \|S^*(\theta)\|_1 = \|S^* : \ell_2^n \to \ell_1^n\| \geqslant \left(\frac{|S^*(B_2^n)|}{|B_1^n|}\right)^{1/n}$$
$$= \left(\frac{|B_2^n|}{|B_1^n|}\right)^{1/n} \geqslant c\sqrt{n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να βρούμε διάφορες φυσιολογικές θέσεις $\tilde{K}$, οποιουδήποτε συμμετρικού κυρτού σώματος K, που έχουν όγκο 1 και ικανοποιούν την $R(\Pi(\tilde{K})) \leqslant \sqrt{n}$.

Λήμμα 7.1.3. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε το $K_0 = T(K)$ να βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,*

$$R(\Pi(K_0)) \leqslant \sqrt{n}. \tag{7.1.5}$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι το επιφανειακό μέτρο σ_K του K ικανοποιεί την (4.1.2). Απλή εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz δείχνει ότι

$$|P_{\theta^\perp}(K)| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle\theta, u\rangle| d\sigma_K(u) \leqslant \frac{\partial(K)}{2\sqrt{n}} \tag{7.1.6}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Από την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του K. Ball (βλέπε [6]) γνωρίζουμε επίσης ότι $\partial(K) \leqslant \partial(C_n) = 2n$. Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Σημείωση. Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7.1.1 εξακολουθεί να ισχύει αν στη θέση της $\mathcal{SK}_n$ θεωρήσουμε την κλάση $\mathcal{CK}_n$ όλων των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν επιλέξουμε το τυχόν $K \in \mathcal{CK}_n$ στη θέση ελάχιστης επιφάνειας, έχουμε πάλι

$$|P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant \frac{\partial(K)}{2\sqrt{n}} \tag{7.1.7}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Από την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του K. Ball για την $\mathcal{CK}_n$ (βλέπε [6]) γνωρίζουμε ότι $\partial(K) \leqslant \partial(\Delta_n) \leqslant Cn$, όπου Δ_n είναι το κανονικό κεντραρισμένο simplex όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$R_n := \max_{K\in\mathcal{CK}_n} \min_{T\in SL(n)} R(\Pi(T(K))) \leqslant \frac{C}{2}\sqrt{n}. \tag{7.1.8}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.1. □

7.2 Άνω φράγματα συναρτήσει της επιφάνειας

Ένας τρόπος για να δώσουμε άνω φράγμα για την $R(\Pi K)$ είναι μέσω του επόμενου εγκλεισμού, ο οποίος ισχύει για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K και C στον $\mathbb{R}^n$.

Λήμμα 7.2.1. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(C)$,*

$$\Pi K \subseteq \frac{nV_1(K,C)}{2} C^{\circ}. \tag{7.2.1}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|\langle x,\theta\rangle| \leqslant \|\theta\|_C h_C(x)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, γράφουμε

$$\begin{aligned} h_{\Pi K}(\theta) &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle| d\sigma_K(x) \leqslant \frac{\|\theta\|_C}{2}\int_{S^{n-1}} h_C(x) d\sigma_K(x) \\ &= \frac{nV_1(K,C)}{2}\|\theta\|_C = \frac{nV_1(K,C)}{2} h_{C^{\circ}}(\theta), \end{aligned}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Αφού $nV_1(K,B_2^n) = \partial(K)$ και $(B_2^n)^{\circ} = B_2^n$, έχουμε αμέσως το εξής:

Πρόταση 7.2.2. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$R(\Pi K) \leqslant \frac{1}{2}\partial(K). \tag{7.2.2}$$

Έχοντας αυτό το φράγμα, θα δούμε στη συνέχεια κάποια άνω φράγματα για την *κανονικοποιημένη επιφάνεια* $\partial(K)/|K|^{\frac{n-1}{n}}$ ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Η παράμετρος αυτή ορίζεται ισοδύναμα ως $\partial(\overline{K})$, όπου $\overline{K} = |K|^{-1/n}K$.

7.2α΄ Επιφάνεια και εσωτερική ακτίνα

Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι η εσωτερική ακτίνα $r(K)$ του K είναι ο μεγαλύτερος $r > 0$ για τον οποίο $rB_2^n \subseteq K$. Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία των μεικτών όγκων μπορούμε να γράψουμε

$$\partial(K) = nV_1(K,B_2^n) \leqslant nV_1\Big(K, \frac{1}{r(K)}K\Big). \tag{7.2.3}$$

Αφού οι μεικτοί όγκοι είναι ομογενείς ως προς κάθε όρισμά τους και $V(K,\dots,K) = |K|$, έχουμε την ακόλουθη γενική εκτίμηση για την επιφάνεια $\partial(K)$ του K: αν $0 \in \mathrm{int}(K)$ τότε

$$\partial(K) \leqslant \frac{n|K|}{r(K)}. \tag{7.2.4}$$

Χρησιμοποιώντας την (7.2.4) παίρνουμε άνω φράγματα για την επιφάνεια ενός σώματος που βρίσκεται στην ισοτροπική θέση ή στη θέση John ή στη θέση Löwner.

Πρόταση 7.2.3. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν το K είναι ισοτροπικό τότε $\partial(K) \leqslant cn/L_K$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(β) *Αν το K βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας ή στη θέση John τότε $\partial(K) \leqslant Cn$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(γ) *Αν το K είναι συμμετρικό και βρίσκεται στη θέση Löwner τότε $\partial(K) \leqslant Cn$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Τα ίδια άνω φράγματα ισχύουν για την $R(\Pi K)$.

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $L_K B_2^n \subseteq K$ για ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι φανερός, αφού

$$h_K(u) = \|\langle \cdot, u\rangle\|_{L^\infty(K)} \geqslant \|\langle \cdot, u\rangle\|_{L^2(K)} = L_K \tag{7.2.5}$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $r(K) \geqslant L_K$ σε αυτήν την περίπτωση. Αν το K είναι κεντραρισμένο αλλά όχι αναγκαστικά συμμετρικό, τότε εξακολουθούμε να έχουμε την $h_K(u) \geqslant cL_K$: για να το δούμε αυτό, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\max\{|K\cap(t\theta+\theta^\perp)| : t \in \mathbb{R}\} \leqslant e|K \cap \theta^\perp|$ (βλέπε [21, Κεφάλαιο 2]) και μετά γράφουμε

$$\begin{aligned} L_K^{-1} h_K(u) &\geqslant c_1 h_K(u)|K \cap \theta^\perp| \geqslant c_2 \int_0^\infty |K \cap (t\theta + \theta^\perp)|\, dt \\ &= c_2 |\{x \in K : \langle x, \theta\rangle \geqslant 0\}| \geqslant c_3, \end{aligned}$$

όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το λήμμα του Grünbaum, βλέπε [21, Κεφάλαιο 2]).

Υποθέτουμε ότι το K βρίσκεται στη θέση John. Τότε, χρησιμοποιώντας την γενική εκτίμηση για τον λόγο όγκων $\mathrm{vr}(K)$ βλέπουμε ότι

$$\frac{\sqrt{n}}{r(K)} \simeq \mathrm{vr}(K) \leqslant c\sqrt{n}, \tag{7.2.6}$$

και αυτό δείχνει ότι $r(K) \geqslant c$, απ' όπου παίρνουμε την $\partial(K) \leqslant c^{-1}n$. Έπεται ότι αν το K βρίσκεται στη θέση ελάχιστης επιφάνειας εξακολουθούμε να έχουμε την $\partial(K) \leqslant c^{-1}n$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι το K είναι συμμετρικό και βρίσκεται στη θέση Löwner. Αυτή τη φορά χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $R(K) \leqslant \sqrt{n} r(K)$ από το Θεώρημα του John, και τότε $1 = |K|^{1/n} \leqslant |R(K)B_2^n|^{1/n} \leqslant cR(K)/\sqrt{n} = cr(K)$. □

Παρατηρήσεις 7.2.4. (α) Το παράδειγμα του κύβου C_n δείχνει ότι όλα τα φράγματα της Πρότασης 7.2.3 είναι ακριβή αν αγνοήσουμε απόλυτες σταθερές.

(β) Στην Πρόταση 7.2.3, στην περίπτωση που το K βρίσκεται στη θέση Löwner κάναμε την πρόσθετη υπόθεση ότι το K είναι συμμετρικό. Στην επόμενη παράγραφο (βλέπε Πρόταση 7.3.4) θα δούμε με διαφορετικό τρόπο ότι αν το K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στη θέση Löwner τότε η $R(\Pi K) \leqslant Cn$ εξακολουθεί να ισχύει.

7.2β′ Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους

Η περίπτωση της θέσης ελάχιστου μέσου πλάτους είναι λιγότερο καθαρή. Ξεκινάμε από κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την εσωτερική και την εξωτερική ακτίνα. Από την συζήτηση που ακολουθεί την (2.1.36) βλέπουμε ότι

$$R(K^\circ) \leqslant c_1\sqrt{n}M(K) \leqslant c_2 \log(d_K+1). \tag{7.2.7}$$

Συνεπώς,

$$r(K) = \frac{1}{R(K^\circ)} \geqslant \frac{c_6}{\log(d_K+1)}. \tag{7.2.8}$$

Τότε, η (7.2.4) μας δίνει το εξής:

Πρόταση 7.2.5. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Τότε,*

$$\partial(K) \leqslant C_1 n \log(d_K+1) \leqslant C_2 n\log n. \tag{7.2.9}$$

7.2γ′ Ένα παράδειγμα

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η ανισότητα $\partial(K) \leqslant n|K|/r(K)$ δεν είναι πάντα ακριβής, ακόμα και στην ισοτροπική περίπτωση.

Πρόταση 7.2.6. *Υπάρχει ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$\partial(A)r(A) \simeq \sqrt{n}. \tag{7.2.10}$$

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε το A σαν γινόμενο της μορφής $a\overline{B}_1^k \times bC_m$, για κατάλληλα $a,b>0$ και $k,m \leqslant n$ με $k+m=n$. Παρατηρήστε πρώτα ότι $\partial(\overline{B}_1^k) \simeq \sqrt{k}$ και $r(\overline{B}_1^k) \geqslant c_1\sqrt{k}$. Για να το δείτε, θυμηθείτε πρώτα ότι $\sqrt{k}B_1^k \supseteq B_2^k$ και $\overline{B}_1^k \simeq kB_1^k$, άρα $r(\overline{B}_1^k) \geqslant c_2\sqrt{k}$. Τότε, έχουμε $\partial(\overline{B}_1^k) \leqslant k/r(\overline{B}_1^k) \leqslant c_3\sqrt{k}$, ενώ η ισοπεριμετρική ανισότητα δείχνει ότι $\partial(\overline{B}_1^k) \geqslant c_4\sqrt{k}$.

Χρησιμοποιούμε πρώτα το Λήμμα 3.1.1: αν K και T είναι δύο ισοτροπικά κυρτά σώματα στους $\mathbb{R}^k$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, τότε το $(L_T/L_K)^{\frac{m}{k+m}}K\times(L_K/L_T)^{\frac{k}{k+m}}T$ είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^{k+m}$. Αφού οι ισοτροπικές σταθερές των $\overline{B}_1^k$ και C_m είναι της τάξης του 1, είναι φανερό ότι το

$$A = a_1\overline{B}_1^k \times b_1 C_m \tag{7.2.11}$$

θα είναι ισοτροπικό αν επιλέξουμε $a_1 = (L_{\overline{B}_1^k}/L_{C_m})^{\frac{m}{k+m}} \simeq 1$ και $b_1 = (L_{C_m}/L_{\overline{B}_1^k})^{\frac{m}{k+m}} \simeq 1$ (οι τιμές των k και m δεν παίζουν κάποιο ρόλο σε αυτό το σημείο).

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.2.1: αν P είναι ένα πολύτοπο όγκου 1 στον $\mathbb{R}^k$ και αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a^kb^m = 1$, τότε το πολύτοπο $Q := aP \times bC_m$ έχει επιφάνεια

$$\partial(Q) = \frac{\partial(P)}{a} + \frac{2m}{b}. \tag{7.2.12}$$

Εφαρμόζουμε αυτό το αποτέλεσμα για το $P = \overline{B}_1^k$ (παρατηρήστε ότι $a_1^kb_1^m = 1$) και παίρνουμε

$$\partial(A) = \frac{\partial(\overline{B}_2^k)}{a_1} + \frac{2m}{b_1} \simeq \max\{\sqrt{k}, m\} \simeq \sqrt{n} \tag{7.2.13}$$

αν επιλέξουμε $m \leqslant \sqrt{n}$ και $k = n - m$. Από την άλλη πλευρά,

$$r(A) = \min\{r(a_1\overline{B}_1^k), r(b_1C_m)\} = \min\{a_1 r(\overline{B}_1^k), b_1 r(C_m)\} \simeq \min\{\sqrt{k}, 1\} \simeq 1. \tag{7.2.14}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\partial(A)r(A) \simeq \sqrt{n}$. □

7.2δ′ Τυχαία πολύτοπα

Στη συνέχεια συζητάμε την κανονικοποιημένη επιφάνεια τυχαίων πολυτόπων που οι κορυφές τους έχουν κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο. Υπενθυμίζουμε ότι ένα μέτρο Borel μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$ για κάθε ζεύγος μη κενών συμπαγών υποσυνόλων A και B του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν ο φορέας της $\{f > 0\}$ είναι κυρτό σύνολο και ο περιορισμός της $\log f$ σε αυτό το σύνολο είναι κοίλη συνάρτηση. Ο Borell απέδειξε στο [13] ότι αν ένα μέτρο πιθανότητας μ είναι λογαριθμικά κοίλο και $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H, τότε το μ έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f_μ. Παρατηρήστε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε από την ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται ότι η $\mathbf{1}_K$ είναι η πυκνότητα ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου.

Λέμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν είναι κεντραρισμένο (δηλαδή, $\int x f_\mu(x)dx = 0$) και ο πίνακας συνδιακυμάνσεων $\mathrm{Cov}(\mu)$ του μ με συντεταγμένες

$$\mathrm{Cov}(\mu)_{ij} := \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f_\mu(x)\, dx \tag{7.2.15}$$

είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Τότε, ορίζουμε την ισοτροπική σταθερά του μ μέσω της

$$L_\mu := \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{7.2.16}$$

Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $N \geqslant n$ θεωρούμε N ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που έχουν κατανομή το μ και ορίζουμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$.

Πρόταση 7.2.7. *Με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$ το τυχαίο K_N ικανοποιεί την*

$$\partial(\overline{K}_N) \leqslant c\frac{\sqrt{n\log(2N/n)}}{r(Z_{\log(2N/n)}(\mu))}, \tag{7.2.17}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\partial(\overline{K}_N) \leqslant c\sqrt{n\log(2N/n)}. \tag{7.2.18}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με το ασυμπτωτικό σχήμα του K_N, τα οποία προέρχονται από τα [25] και [26]. Η βασική ιδέα είναι να γίνει σύγκριση του τυχαίου K_N με το L_q-κεντροειδές σώμα του μ για κατάλληλη τιμή του q. Υπενθυμίζουμε ότι, αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και αν $q \geqslant 1$ τότε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του μ είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}. \tag{7.2.19}$$

Παρατηρήστε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν είναι κεντραρισμένο και $Z_2(\mu) = B_2^n$. Τα αποτελέσματα του [25] δείχνουν ότι, με λίγα λόγια, το K_N μοιάζει με το σώμα $Z_{\log(N/n)}(\mu)$: για κάθε $cn \leqslant N \leqslant e^n$, το τυχαίο πολύτοπο K_N ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1\sqrt{n})$, τον εγκλεισμό

$$K_N \supseteq c_2 Z_{\log(2N/n)}(\mu). \tag{7.2.20}$$

Ταυτόχρονα, ισχύει

$$|K_N|^{1/n} \leqslant c_3\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \tag{7.2.21}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θέτουμε $\overline{K}_N = |K_N|^{-1/n} K_N$. Τότε, γνωρίζουμε ότι

$$\partial(\overline{K}_N) \leqslant \frac{n}{r(\overline{K}_N)}. \tag{7.2.22}$$

Αφού

$$\begin{aligned} r(\overline{K}_N) = |K_N|^{-1/n} r(K_N) &\geqslant c_1 |K_N|^{-1/n} r(Z_{\log(2N/n)}(\mu)) \\ &\geqslant c_2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)}} r(Z_{\log(2N/n)}(\mu)), \end{aligned}$$

παίρνουμε τον πρώτο ισχυρισμό της πρότασης. Παρατηρήστε ότι $Z_{\log(2N/n)}(\mu) \supseteq Z_2(\mu) = B_2^n$, άρα $r(Z_{\log(2N/n)}(\mu)) \geqslant 1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 7.2.8. Το απλό φράγμα $r(Z_{\log(2N/n)}(\mu)) \geqslant 1$ δεν βελτιώνεται. Αυτό φαίνεται από το παράδειγμα του ομοιόμορφου μέτρου στον κύβο $C_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$. Όμως, έχοντας κατά νού την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα, είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η κανονικοποιημένη επιφάνεια $\partial(\overline{K}_N)$ του τυχαίου K_N παραμένει φραγμένη από n για ολόκληρο το εύρος τιμών $n \leqslant N \leqslant e^n$ και ανεξάρτητα από το ποιά είναι η ισοτροπική λοαριθμικά κοίλη κατανομή των κορυφών του.

Στο κλασικό παράδειγμα των Gaussian τυχαίων πολυτόπων έχουμε $Z_q(\gamma_n) \supseteq c\sqrt{q} B_2^n$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$, και αυτό οδηγεί στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.2.9. *Έστω $K_N = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$, όπου τα x_j είναι ανεξάρτητα τυπικά Gaussian τυχαία διανύσματα. Με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$ το τυχαίο K_N ικανοποιεί την*

$$\partial(\overline{K}_N) \leqslant c_1 \sqrt{n} \leqslant c_2 \partial(\overline{B}_2^n). \tag{7.2.23}$$

Με άλλα λόγια, για κάθε N, το τυχαίο K_N έχει κανονικοποιημένη επιφάνεια της ελάχιστης δυνατής τάξης.

7.3 Προβολές σε υπόχωρους συντεταγμένων και η unconditional περίπτωση

Ένας δεύτερος τρόπος για να εκτιμήσουμε την $R(\Pi K)$ βασίζεται στην εξής απλή παρατήρηση, η οποία ισχύει για κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Λήμμα 7.3.1. *Έστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$R^2(\Pi K) \leqslant \sum_{i=1}^n |P_{v_i^\perp}(K)|^2. \tag{7.3.1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \Pi K$ και για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε $|\langle x, v_i\rangle| \leqslant h_{\Pi K}(v_i) = |P_{v_i^\perp}(K)|$. Συνεπώς,

$$\Pi K \subseteq C := \prod_{i=1}^{n} [-\alpha_i v_i, \alpha_i v_i], \tag{7.3.2}$$

όπου $\alpha_i := |P_{v_i^\perp}(K)|$. Αφού $R^2(C) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$ έπεται το συμπέρασμα. □

Υποθέτουμε τώρα ότι το K είναι ένα unconditional κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$: δηλαδή, το K είναι συμμετρικό ως προς τον $e_i^\perp$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, αυτό δείχνει ότι $P_{e_i^\perp}(K) = K \cap e_i^\perp$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

Υποθέτοντας ότι το K είναι επίσης ισοτροπικό, έχουμε ότι $|K \cap e_i^\perp| \simeq L_K^{-1} \simeq 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.1 παίρνουμε:

Πρόταση 7.3.2. *Έστω K ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $R(\Pi K) \leqslant C\sqrt{n}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.* □

Το συμπέρασμα της Πρότασης 7.3.2 εκφράζεται ισοδύναμα στη μορφή του εγκλεισμού $\Pi K \subseteq C\sqrt{n} Z_2^\circ(K)$, αφού $Z_2(K) \simeq B_2^n$ στην unconditional ισοτροπική περίπτωση. Είναι γνωστό ότι για κάθε $T \in SL(n)$ έχουμε $\Pi(TK) = T^{-*}(\Pi K)$ και $Z_q(TK) = T(Z_q(K))$, το οποίο αποδεικνύει ότι $Z_q^\circ(TK) = T^{-*}(Z_q^\circ(K))$. Άρα,

$$\Pi K \subseteq C\sqrt{n} Z_2^\circ(K) \tag{7.3.3}$$

για κάθε unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Μπορούμε επίσης να δείξουμε την ακόλουθη γενίκευση του Λήμματος 7.3.1.

Λήμμα 7.3.3. *Έστω $\{u_1, \ldots, u_m\}$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \ldots, c_m > 0$ τέτοια ώστε $I = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι*

$$R(\Pi K) \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |P_{u_j^\perp}(K)|. \tag{7.3.4}$$

και

$$\partial(K) \leqslant Cn \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |P_{u_j^\perp}(K)|. \tag{7.3.5}$$

Απόδειξη. Κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται στη μορφή $x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j\rangle u_j$. Τότε, για κάθε

$\theta \in S^{n-1}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
|P_{\theta^\perp}(K)| &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|\, d\sigma_K(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \left|\sum_{j=1}^m c_j \langle x,u_j\rangle \langle u_j,\theta\rangle\right| d\sigma_K(x)\\
&\leqslant \sum_{j=1}^m c_j |\langle u_j,\theta\rangle| \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x,u_j\rangle|\, d\sigma_K(x)\\
&= \sum_{j=1}^m c_j |\langle u_j,\theta\rangle|\, |P_{u_j^\perp}(K)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^m c_j \langle u_j,\theta\rangle^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m c_j |P_{u_j^\perp}(K)|^2\right)^{1/2}\\
&= \left(\sum_{j=1}^m c_j |P_{u_j^\perp}(K)|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{j=1}^m c_j\right)^{1/2} \max_{1\leqslant j\leqslant m} |P_{u_j^\perp}(K)|\\
&= \sqrt{n} \max_{1\leqslant j\leqslant m} |P_{u_j^\perp}(K)|
\end{aligned}$$

αν συνυπολογίσουμε το γεγονός ότι $\sum_{j=1}^m c_j = n$. Αυτό αποδεικνύει την (7.3.4).

Από την ταυτότητα

$$\partial(K) = \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} |P_{\theta^\perp}(K)|\, d\sigma(\theta) \simeq \sqrt{n}\int_{S^{n-1}} |P_{\theta^\perp}(K)|\, d\sigma(\theta) \tag{7.3.6}$$

έπεται η (7.3.5). □

Σαν εφαρμογή παίρνουμε το εξής:

Πρόταση 7.3.4. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο βρίσκεται στη θέση Löwner. Τότε,*

$$R(\Pi K) \leqslant \frac{n^{3/2}}{2R(K)}. \tag{7.3.7}$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα των Rogers και Shephard γνωρίζουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant k < n$ και $F \in G_{n,k}$ έχουμε $|P_F(K)|\,|K\cap F^\perp| \leqslant \binom{n}{k}|K|$. Χρησιμοποιούμε αυτήν την ανισότητα για $k = n-1$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\rho_K(\theta)\, |P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant n|K|. \tag{7.3.8}$$

Υποθέτουμε ότι το K έχει όγκο 1 και βρίσκεται στη θέση Löwner. Υπάρχουν σημεία επαφής u_j των K και $R(K)B_2^n$ τέτοια ώστε $I = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ για κάποιους $c_j > 0$. Τότε, $\rho_K(u_j) = R(K)$ για κάθε j, άρα

$$R(K)\, |P_{u_j^\perp}(K)| \leqslant n|K| = n. \tag{7.3.9}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει τώρα από το Λήμμα 7.3.3. □

Σημείωση. Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο βρίσκεται στη θέση Löwner, έχουμε $R(K) \geqslant c\sqrt{n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, η Πρόταση 7.3.4 μας δίνει

$$R(\Pi K) \leqslant Cn, \tag{7.3.10}$$

συμπληρώνοντας έτσι ένα κενό που είχαμε αφήσει στην Πρόταση 7.2.3 (γ).

7.4 Προβολές σε τυχαίο υπερεπίπεδο

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει περισσότερες πληροφορίες για την κατανομή της $\theta \mapsto |P_{\theta^\perp}(K)|$.

Πρόταση 7.4.1. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$,*

$$w_q(\Pi K) \leqslant C\sqrt{\frac{q}{n+q}}\partial(K), \tag{7.4.1}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού $|P_\theta(K)| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle| d\sigma_K(x)$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned} w_q(\Pi K) &= \frac{1}{2}\left(\int_{S^{n-1}}\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle| d\sigma_K(x)\right)^q d\sigma(\theta)\right)^{1/q} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_{S^{n-1}} (\partial(K))^{\frac{q}{p}} \int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma_K(x) d\sigma(\theta)\right)^{1/q} \\ &= \frac{\partial(K)^{\frac{1}{p}}}{2}\left(\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta) d\sigma_K(x)\right)^{1/q} \\ &\leqslant C\sqrt{\frac{q}{n+q}}\partial(K) \end{aligned}$$

διότι

$$\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta) \leqslant c^q \left(\frac{q}{n+q}\right)^{q/2} \|x\|_2^q = c^q\left(\frac{q}{n+q}\right)^{q/2} \tag{7.4.2}$$

για κάθε $x \in S^{n-1}$. □

Πόρισμα 7.4.2. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $t \geqslant 1$ έχουμε $|P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant Ct\sqrt{n}/L_K$ για όλα τα θ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} μέτρου $\sigma(A) \geqslant 1 - e^{-t^2}$.*

(β) *Αν το K είναι στη θέση John ή είναι συμμετρικό και βρίσκεται στη θέση Löwner τότε για κάθε $t \geqslant 1$ έχουμε $|P_{\theta^\perp}(K)| \leqslant Ct\sqrt{n}$ για όλα τα θ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} μέτρου $\sigma(A) \geqslant 1 - e^{-t^2}$.*

Απόδειξη. Δίνουμε μόνο την απόδειξη του ισχυρισμού (α). Θεωρούμε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$ και εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.4.1 με $q = t^2$ παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \big(h_{\Pi K}(\theta)\big)^{t^2} d\sigma(\theta) \leqslant \Big(C\sqrt{t^2/n}\,\partial(K)\Big)^{t^2}. \tag{7.4.3}$$

Από την ανισότητα Markov έπεται ότι

$$|P_{\theta^\perp}(K)| = h_{\Pi K}(\theta) \leqslant \frac{eCt\partial(K)}{\sqrt{n}} \tag{7.4.4}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-t^2}$. Αφού $\partial(K) \leqslant n/L_K$, έχουμε το συμπέρασμα.

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $t \geqslant \sqrt{n}$ ο ισχυρισμός αληθεύει για όλα τα θ, διότι $R(\Pi K) \leqslant n/(2L_K) \leqslant Ct\sqrt{n}/L_K$. □

Παρατήρηση 7.4.3. Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αφού $|K \cap \theta^\perp| \simeq L_K^{-1}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, το Πόρισμα 7.4.2 δείχνει ότι

$$\sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : \frac{|P_{\theta^\perp}(K)|}{|K \cap \theta^\perp|} \leqslant Ct\sqrt{n}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-t^2} \tag{7.4.5}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιπλέον, δεν μπορούμε να περιμένουμε καλύτερο φράγμα, αφού στην περίπτωση του κύβου Q_n όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : \frac{|P_\theta(Q_n)|}{|Q_n \cap \theta^\perp|} \leqslant c\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{2^n} \tag{7.4.6}$$

για μια (κατάλληλα μικρή) σταθερά $c > 0$.

Κεφάλαιο 8

Γενικευμένος λόγος όγκων

8.1 Άνω φράγμα για τον k-οστό λόγο όγκων

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του k-οστού λόγου όγκων δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων C και K στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ θέτουμε

$$\mathrm{vr}_k(C,K) = \inf\left\{ \left(\frac{W_{n-k}(TC)}{W_{n-k}(K)}\right)^{1/k} : T \in GL(n),\ K \subseteq T(C) \right\}. \tag{8.1.1}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathrm{vr}_n(C,K) = \mathrm{vr}(C,K)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant d(C,K),$$

όπου $d(C,K)$ είναι η απόσταση Banach-Mazur των C και K. Επίσης, θέτουμε $d_C := d(C, B_2^n)$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων, στο πνεύμα των Benyamini και Gordon [12] (βλέπε επίσης [30] και [63]) μπορούμε να εξασφαλίσουμε μια καλύτερη εκτίμηση στην περίπτωση που το K βρίσκεται στην ℓ-θέση. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι η εξής γενικευση του φράγματος για τον συνήθη λόγο όγκων από το [30].

Θεώρημα 8.1.1. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται σε ℓ-θέση. Τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε:*

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log(1+d_C)\log(1+d_K),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant c\sqrt{n}(\log n)^2.$$

Το βασικό τεχνικό εργαλείο της μεθόδου των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων είναι μια ανισότητα της Chevet:

Λήμμα 8.1.2. *Έστω C και K δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{O(n)} \|U : X_K \to X_C\| \, d\nu(U) \leqslant c(R(K)w(C^\circ) + R(C^\circ)w(K)),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα συνδυάσουμε την ανισότητα της Chevet με την εξής απλή παρατήρηση: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$R(K) \leqslant c_1\sqrt{n}w(K), \tag{8.1.2}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, θεωρούμε $x_0 \in K$ με $\|x_0\|_2 = R(K)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} w(K) &= \int_{S^{n-1}} \max_{x\in K} |\langle x, \theta\rangle| \, d\sigma(\theta) \geqslant \int_{S^{n-1}} |\langle x_0, \theta\rangle| \, d\sigma(\theta) \\ &= \|x_0\|_2 \int_{S^{n-1}} |\langle e_1, \theta\rangle| \, d\sigma(\theta). \end{aligned}$$

Τότε, η (8.1.2) προκύπτει από το γεγονός ότι $\int |\langle e_1, \theta\rangle| \, d\sigma(\theta) \simeq n^{-1/2}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το C βρίσκεται κι αυτό στην ℓ-θέση και ότι τα $C_1 = T(C)$ και K ικανοποιούν τις

$$w(C_1^\circ) \leqslant 1, \quad w(C_1) \leqslant c_1 \log(1 + d_C)$$

και όμοια,

$$w(K) \leqslant 1, \quad w(K^\circ) \leqslant c_1 \log(1 + d_K).$$

Τώρα εφαρμόζουμε το Λήμμα 8.1.2 για τα K και $C_1 = T(C)$. Μπορούμε να βρούμε $U \in O(n)$ ώστε

$$U(K) \subseteq c_2(R(K)w(C^\circ) + R(C^\circ)w(K))C_1 \subseteq \beta T(C),$$

όπου $\beta := c_3\sqrt{n}w(K)w(C^\circ) \leqslant c_3\sqrt{n}$. Θεωρώντας το $C_2 = \beta U^{-1}T(C)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{vr}_k(C, K) \leqslant c_3\sqrt{n}w(K)w(C^\circ)\frac{Q_k(C_1)}{Q_k(K)}. \tag{8.1.3}$$

Από τη μονοτονία των κανονικοποιημένων quermassintegrals και την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$Q_k(K) \geqslant Q_0(K) = \left(\frac{|K|}{\omega_n}\right)^{1/n} \geqslant \frac{1}{w(K^\circ)} \geqslant \frac{1}{c_4 \log(1 + d_K)}.$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας πάλι τη μονοτονία των quermassintegrals, βλέπουμε ότι

$$Q_k(C_1) \leqslant w(C_1) \leqslant c_5 \log(1+d_C).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την (8.1.3) παίρνουμε

$$\mathrm{vr}_k(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log(1+d_C)\log(1+d_K)$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Η περίπτωση $k=1$

Στην περίπτωση $k=1$ (η οποία αντιστοιχεί στο μέσο πλάτος) μπορούμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι το K βρίσκεται στην ℓ-θέση. Θέτουμε

$$\mathrm{wr}(C,K) := \mathrm{vr}_1(C,K) = \inf\left\{\frac{w(TC)}{w(K)} : T \in GL(n),\ K \subseteq T(C)\right\}. \tag{8.1.4}$$

Πρόταση 8.1.3. *Έστω C και K δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, έχουμε*

$$\mathrm{wr}(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log(1+d_C),$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, παίρνουμε

$$\mathrm{wr}(C,K) \leqslant c\sqrt{n}\log n.$$

Απόδειξη. Έστω $T \in GL(n)$ με την ιδιότητα

$$w(TC)w((TC)^\circ) \leqslant c_1 \log(1+d_C). \tag{8.1.5}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 8.1.2 με το $C_1 = TC$ στη θέση του C παίρνουμε

$$\int_{O(n)} \|U : X_K \to X_{TC}\|\, d\nu(U) \leqslant c_2\sqrt{n}w(C_1^\circ)w(K).$$

Συνεπώς, υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $U(K) \subseteq \alpha T(C)$, όπου

$$\alpha = c_2\sqrt{n}w(C_1^\circ)w(K).$$

Θεωρούμε τον τελεστή $S := \alpha U^{-1}T \in GL(n)$. Τότε, έχουμε $K \subseteq S(C)$ και, επιπλέον,

$$\begin{aligned}\mathrm{wr}(C,K) &\leqslant \frac{w(SC)}{w(K)} = \alpha\frac{w(TC)}{w(K)}\\ &= c_2\sqrt{n}w(C_1^\circ)w(C_1) \leqslant c_3\sqrt{n}\log(1+d_C),\end{aligned}$$

από την (8.1.5). Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από το θεώρημα του John. □

Παρατήρηση 8.1.4. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι το άνω φράγμα είναι βέλτιστο αν εξαιρέσουμε τον λογαριθμικό όρο. Για παράδειγμα, έχουμε $\mathrm{wr}(B_\infty^n, B_2^n) \simeq \sqrt{n}$. Άμεσος υπολογισμός δείχνει ότι $\mathrm{wr}(B_\infty^n, B_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. Για το κάτω φράγμα παρατηρούμε ότι αν ο $T \in GL(n)$ ικανοποιεί την $T(B_\infty^n) \supseteq B_2^n$, τότε από την ανισότητα του Urysohn έχουμε

$$\frac{w(TB_\infty^n)}{w(B_2^n)} \geqslant \left(\frac{|TB_\infty^n|}{|B_2^n|}\right)^{1/n} \geqslant \mathrm{vr}(B_\infty^n).$$

Το αποτέλεσμα έπεται από την $\mathrm{vr}(B_\infty^n) \simeq \sqrt{n}$.

Σημείωση. Γενικότερα, για κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων C και K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$w(K)\mathrm{wr}(C,K) \geqslant c\sqrt{n}|K|^{1/n}\mathrm{vr}(C,K).$$

Παρατήρηση 8.1.5. Ο λόγος $\mathrm{wr}(C,K)$, όπως ορίστηκε στην (8.1.4), δεν είναι αναλλοίωτος ως προς $T \in GL(n)$. Εξαρτάται από τη θέση του K. Ένας εναλλακτικός ορισμός θα ήταν να θέσουμε

$$\mathrm{wr}'(C,K) = \inf\left\{\frac{w(TC)}{w(SK)} : T, S \in GL(n),\ S(K) \subseteq T(C)\right\}.$$

Μπορούμε όμως εύκολα να διαπιστώσουμε ότι αυτός ο ορισμός δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον. Αν $Q_n = [-1,1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος και B_2^n είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathrm{wr}'(Q_n, B_2^n) \simeq 1. \tag{8.1.6}$$

Για να το δούμε αυτό, ελέγχουμε πρώτα ότι για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει

$$w(TB_2^n) \simeq \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \|T(e_j)\|_2^2\right)^{1/2}, \tag{8.1.7}$$

ενώ

$$w(TQ_n) \simeq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n \|T(e_j)\|_2. \tag{8.1.8}$$

Ορίζουμε έναν διαγώνιο τελεστή $T = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in SL(n)$ θέτοντας $a_i = 1/n$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ και $a_n = n^{n-1}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \|T(e_j)\|_2 &= \frac{1+n^{n-1}}{\big((n-1)/n^2 + n^{2(n-1)}\big)^{1/2}}\left(\sum_{j=1}^n \|T(e_j)\|_2^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{n^{n-1}}\right)\left(\sum_{j=1}^n \|T(e_j)\|_2^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\mathrm{wr}'(Q_n, B_2^n) \leqslant C$ για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$.

8.2 Quermassintegrals του ελλειψοειδούς John και Löwner

Έστω $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Σε αυτήν την τελευταία παράγραφο ορίζουμε την k-οστή ελαχιστική θέση ενός κυρτού σώματος C ως προς το K: υπενθυμίζουμε ότι αυτό σημαίνει ότι $K \subseteq C$ και $W_k(C) \leqslant W_k(T(C))$ για κάθε $T \in GL(n)$ με $K \subseteq T(C)$.

Δείχνουμε πρώτα ότι η k-οστή ελαχιστική θέση του C ως προς το K είναι καλά ορισμένη, με την εξής έννοια: Για κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και C στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $C_1 = T(C)$ να βρίσκεται στην k-οστή ελαχιστική θέση ως προς το K.

Λήμμα 8.2.1. *Έστω K και C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n-1$ υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $C_1 = T(C)$ να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $K \subseteq C_1$.

(ii) *Για κάθε $S \in GL(n)$ με $K \subseteq S(C)$ ισχύει $W_k(C_1) \leqslant W_k(S(C))$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το εξής σύνολο:

$$\mathcal{W} = \{W_k(T(C)) : T \in GL(n),\ K \subseteq T(C)\}. \tag{8.2.1}$$

Είναι φανερό ότι το $\mathcal{W}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, με $\inf \mathcal{W} \geqslant W_k(K) > 0$. Έστω $\beta = \inf \mathcal{W}$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ στην $GL(n)$ με $T_m(C) \supseteq K$ και $W_k(T_m(C)) \to \beta$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $W_k(T_m(C)) \leqslant 2\beta$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι $\|T_m^{-1} : X_K \to X_C\| \leqslant 1$, άρα μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{T_{m_j}\}$ και $S \in L(\mathbb{R}^n)$ ώστε $T_{m_j}^{-1} \to S$.

Ισχυρισμός. $S \in GL(n)$.

Πράγματι, αφού $W_k(T_m(C)) \leqslant 2\beta$ για κάθε m, χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η $Q_k(T_m(C))$ είναι φθίνουσα ως προς k, έχουμε

$$\left(\frac{|T_m(C)|}{\omega_n}\right)^{1/n} = Q_n(T_m(C)) \leqslant Q_{n-k}(T_m(C)) = \left(\frac{|W_k(T_m(C))|}{\omega_n}\right)^{1/n-k},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$|T_m(C)| \leqslant (2\beta)^{n/(n-k)}/(\omega_n)^{k/(n-k)}.$$

Έπεται ότι

$$|\det(T_m^{-1})| \geqslant c(\beta,k,n)|C|,$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου $c(\beta, k, n) > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα β, k και n. Τελικά, παίρνουμε

$$|\det(S)| = \lim_{j\to\infty} |\det(T_{m_j}^{-1})| \geqslant c(\beta, k, n)|C| > 0,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $S \in GL(n)$. Θέτοντας $T = S^{-1}$, προφανώς έχουμε

$$\|T^{-1} : X_K \to X_C\| = \lim_{j\to\infty} \|T_{m_j}^{-1} : X_K \to X_C\| \leqslant 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι $C_1 = T(C) \supseteq K$ και

$$\begin{aligned} W_k(C_1) &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_{C_1}(u) dS_{n-k-1}(C_1, u) \\ &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_C(T_{m_j}^* u)\, dS_{n-k-1}(C, u) = \beta, \end{aligned}$$

από το λήμμα του Fatou και από το γεγονός ότι η $T_{m_j} \to T$ συνεπάγεται την $h_C(T_{m_j}^* u) \to h_C(T^* u) = h_{C_1}(u)$ στην S^{n-1}. $\square$

Το Λήμμα 8.2.1 μας επιτέπει να ορίσουμε την k-οστή ελαχιστική θέση του C ως προς το K, λύνοντας ως προς $T \in GL(n)$ το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$W_k(TC) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_{TC}(u)\, dS_{n-k-1}(TC, u) \longrightarrow \min$$

υπό τον περιορισμό $T(C) \supseteq K$. Λέμε λοιπόν ότι το C βρίσκεται στην k-οστή ελαχιστική θέση ως προς το K αν αυτό το ελάχιστο πιάνεται για τον $T = I$.

Το δυϊκό πρόβλημα

$$W_k(TK) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_{TK}(u)\, dS_{n-k-1}(TK, u) \longrightarrow \max$$

υπό τον περιορισμό $T(K) \subseteq C$ παρουσιάζει ουσιαστικές διαφορές (βλέπε την τελική παρατήρηση στο [34]).

Η επόμενη πρόταση ισχυρίζεται ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου μέσου πλάτους το οποίο περιέχεται σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα C αν και μόνο αν το C βρίσκεται σε θέση John. Μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση, το C βρίσκεται στην k-οστή ελαχιστική θέση (ως προς την B_2^n) για κάθε $k \leqslant n-1$.

Πρόταση 8.2.2. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω ότι $B_2^n \subseteq C$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου μέσου πλάτους που περιέχεται στο C.*

(β) *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και για κάθε ελλειψοειδές* $\mathcal{E}$ *με* $\mathcal{E} \subseteq C$ *ισχύει*

$$Q_k(\mathcal{E}) \leqslant Q_k(B_2^n) = 1.$$

(γ) *Η* B_2^n *είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του* C.

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β). Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$ και έστω $\mathcal{E} \subseteq C$. Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel παίρνουμε

$$Q_k(\mathcal{E}) \leqslant Q_1(\mathcal{E}) = w(\mathcal{E}) \leqslant w(B_2^n) = 1.$$

(β) $\Longrightarrow$ (γ). Άμεση συνέπεια της περίπτωσης $k = n$.

(γ) $\Longrightarrow$ (α). Από το θεώρημα του John υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των C και B_2^n και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ ώστε $I = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Έστω $\mathcal{E}$ ένα ελλειψοειδές που περιέχεται στο C. Μπορούμε να το γράψουμε στην μορφή

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, v_j \rangle^2}{\alpha_j^2} \leqslant 1 \right\},$$

όπου $(v_j)_{j=1}^n$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $(\alpha_j)_{j=1}^n$ είναι μια n-άδα θετικών πραγματικών αριθμών. Θα αποδείξουμε ότι $w(\mathcal{E}) \leqslant 1 = w(B_2^n)$. Μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα ότι

$$h_{\mathcal{E}}(x) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle x, v_j \rangle^2 \right)^{1/2},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης μας δίνει

$$\sum_{i=1}^m c_i \langle \theta, u_i \rangle^2 = 1 \tag{8.2.2}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Επιλέγοντας $\theta = v_j$, $j = 1, 2 \ldots, n$ σε αυτήν την σχέση, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \sum_{i=1}^m c_i \langle v_j, u_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle u_i, v_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^m c_i h_{\mathcal{E}}^2(u_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^m c_i h_C^2(u_i) = \sum_{i=1}^m c_i = n, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\mathcal{E} \subseteq C$ και τα u_i είναι σημεία επαφής των B_2^n και C, δηλαδή $\|u_i\|_{C^\circ} = \|u_i\|_C = \|u_i\|_2 = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του $\sigma(\cdot)$ ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς και την ανισότητα Cauchy-Schwarz μπορούμε να γράψουμε

$$w(\mathcal{E}) = \int_{S^{n-1}} \sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\theta_j^2}\, d\sigma(\theta) \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \int_{S^{n-1}} \theta_j^2\, d\sigma(\theta)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\right)^{1/2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Παρατήρηση 8.2.3. Μπορούμε να δείξουμε ότι το δυϊκό αποτέλεσμα ισχύει κι αυτό.

Πρόταση 8.2.4. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω ότι $C \subseteq B_2^n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και για κάθε ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ με $\mathcal{E} \supseteq C$ έχουμε*

$$Q_k(\mathcal{E}) \geqslant Q_k(B_2^n) = 1.$$

(β) *Η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου μέσου πλάτους που περιέχει το C.*

(γ) *Η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του C.*

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β). Άμεσο, λόγω της $w(\mathcal{E}) = Q_1(\mathcal{E})$.

(β) $\Longrightarrow$ (γ). Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των C και B_2^n και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ ώστε $I = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Αφού $B_2^n \subseteq C$, αυτό αποδεικνύει ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του C.

(γ) $\Longrightarrow$ (α). Από τις ανισότητες του Aleksandrov έχουμε ότι $Q_k(\mathcal{E})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του k. Έτσι, γνωρίζουμε ότι

$$Q_k(\mathcal{E}) \geqslant Q_n(\mathcal{E}) = \mathrm{vrad}(\mathcal{E}) \tag{8.2.3}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$. Αφού η B_2^n είναι το ελλιψοειδές ελάχιστου όγκου του C, έχουμε επίσης $|\mathcal{E}| \geqslant |B_2^n|$, άρα $\mathrm{vrad}(\mathcal{E}) \geqslant 1$. Τώρα, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα. □

Βιβλιογραφία

[1] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Mathematical Surveys and Monographs **202**, Amer. Math. Society (2015).

[2] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **88** (1988), 69-84.

[3] K. M. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 251-260.

[4] K. M. Ball, *Shadows of convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), no. 2, 891-901.

[5] K. M. Ball, *Ellipsoids of maximal volume in convex bodies*, Geom. Dedicata **41** (1992), 241-250.

[6] K. M. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), 351-359.

[7] K. M. Ball, *Convex geometry and functional analysis*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, (2001), 161-194.

[8] W. Banaszczyk, A. Litvak, A. Pajor and S.J. Szarek, *The flatness theorem for non-symmetric convex bodies via the local theory of Banach spaces*, Math. Oper. Res. **24** (1999), 728-750.

[9] F. Barthe, *Inégalités fonctionelles et géomètriques obtenues par transport des mesures*, Thèse de Doctorat de Mathématiques, Université de Marne-la-Vallée (1997).

[10] F. Barthe, *Inégalités de Brascamp-Lieb et convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **324** (1997), no. 8, 885-888.

[11] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), 335-361.

[12] Y. Benyamini and Y. Gordon, *Random factorization of operators between Banach spaces*, J. d' Analyse Math. **39** (1981), 45-74.

[13] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239-252.

[14] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[15] J. Bourgain, B. Klartag and V. D. Milman, *Symmetrization and isotropic constants of convex bodies*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics **1850** (2004), 101-116.

[16] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, V. Milman, *Estimates related to Steiner symmetrizations*, Springer Lecture Notes in Math., v. 1376. (1989), 264-273.

[17] J. Bourgain and V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in* $\mathbb{R}^n$, Invent. Math. **88** (1987), 319-340.

[18] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse and its generalization to more than three functions*, Adv. in Math. **20** (1976), 151-173.

[19] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Funct. Anal. **22** (1976), 366-389.

[20] H.J. Brascamp, E.H. Lieb and J.M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 227-237.

[21] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Mathematical Surveys and Monographs **196**, Amer. Math. Society (2014).

[22] B. Carl and A. Pajor, *Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space*, Invent. Math. **94** (1988), 479-504.

[23] G. D. Chakerian, *Inequalities for the difference body of a convex body*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 879-884.

[24] N. Dafnis and G. Paouris, *Estimates for the affine and dual affine quermassintegrals of convex bodies*, Illinois J. Math. **56** (2012), 1005-1021.

[25] N. Dafnis, A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, *Asymptotic shape of a random polytope in a convex body*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 2820-2839.

[26] N. Dafnis, A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, *Quermaßintegrals and asymptotic shape of random polytopes in an isotropic convex body*, Michigan Mathematical Journal **62** (2013), 59-79.

[27] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[28] R. Gardner, *Geometric Tomography*, *Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, 2006.

[29] A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Lecture Notes, Warsaw 2003, available at `http://users.uoa.gr/~apgiannop/`.

[30] A. Giannopoulos and M. Hartzoulaki, *On the volume ratio of two convex bodies*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 703-707.

[31] A. Giannopoulos, E. Markessinis and A. Tsolomitis, *Remarks on an inequality of Rogers and Shephard*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[32] A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Extremal problems and isotropic positions of convex bodies*, Israel J. Math. **117** (2000), 29-60.

[33] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Euclidean structure in finite-dimensional normed spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces (Johnson-Lindenstrauss eds.), Vol. 1 (2001), 707-779.

[34] A. Giannopoulos, V.D. Milman and M. Rudelson, *Convex bodies with minimal mean width*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics **1745** (2000), 81-93.

[35] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the existence of subgaussian directions for log-concave measures*, Contemporary Mathematics **545** (2011), 103-122.

[36] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the distribution of the ψ_2-norm of linear functionals on isotropic convex bodies*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2050** (2012), 227-253.

[37] A. Giannopoulos and M. Papadimitrakis, *Isotropic surface area measures*, Mathematika **46** (1999), 1-13.

[38] A. Giannopoulos, I. Perissinaki and A. Tsolomitis, *John's theorem for an arbitrary pair of convex bodies*, Geometriae Dedicata **84** (2001), 63-79.

[39] E. D. Gluskin, *Extremal properties of ortogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*, Mat. Sb. (N.S.) **136** (1988), 85-96.

[40] H. Groemer, *On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set*, Pacific J. Math. **45** (1973), 525-533.

[41] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[42] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[43] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. and Funct. Anal. **16** (2006), 1274-1290.

[44] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10-34.

[45] B. Klartag and E. Milman, *Inner regularization of log-concave measures and small-ball estimates*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **2050**, 267-278.

[46] D. R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[47] E. Markessinis, G. Paouris and Ch. Saroglou, *Comparing the M-position with some classical positions of convex bodies*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **152** (2012), 131-152.

[48] E. Markessinis and P. Valettas, *Distances between classical positions of centrally symmetric convex bodies*, Houston Journal of Mathematics **41** (2015), 187-211.

[49] E. Markessinis, *On the radius of the projection body of a symmetric convex body*, Preprint.

[50] E. Markessinis, *On the k-th quermassintegral ratio of a pair of symmetric convex bodies*, Preprint.

[51] E. Milman, *On the mean width of isotropic convex bodies and their associated L_p-centroid bodies*, Int. Math. Research Notices (to appear).

[52] V. D. Milman, *Inegalité de Brunn-Minkowski inverse et applications à la théorie locale des espaces normés*, C.R. Acad. Sci. Paris **302** (1986), 25-28.

[53] V. D. Milman, *Isomorphic symmetrization and geometric inequalities*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindnstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1317** (1988), 107-131.

[54] V. D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics **1376** (1989), 64-104.

[55] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[56] G. Paouris, *Concentration of mass on convex bodies*, Geometric and Functional Analysis **16** (2006), 1021-1049.

[57] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287-308.

[58] C. M. Petty, *Surface area of a convex body under affine transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 824-828.

[59] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375-392.

[60] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*, J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 115-131.

[61] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[62] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *Convex bodies associated with a given convex body*, J. London Soc. **33** (1958), 270-281.

[63] M. Rudelson, *Distances between non-symmetric convex bodies and the MM^*-estimate*, Positivity **4** (2000), 161-178.

[64] Ch. Saroglou, *Minimal surface area position of a convex body is not always an M-position*, Israel. J. Math. **195** (2013), 631-645.

[65] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[66] J. Spingarn, *An inequality for sections and projections of a convex set*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 1219-1224.

[67] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs **38** (1989), Pitman, London.

[68] S. Webb, *Central Slices of the Regular Simplex*, Geom. Dedicata **61** (1996), 19-28.